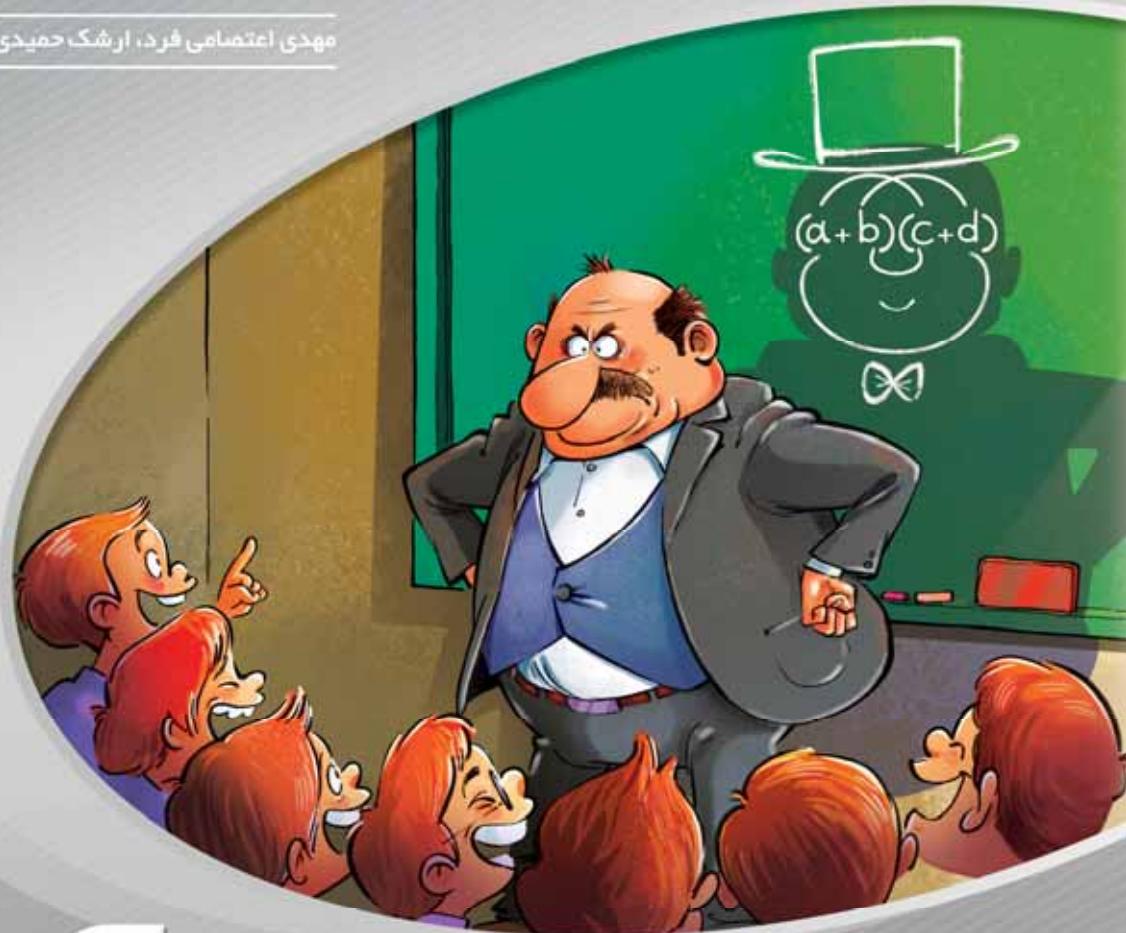


کتاب‌های  
سنه‌بعدی

آموزش کامل + تمرین + پرسش‌های چهارگزینه‌ای

# ریاضی نهم

مهدی اعتمادی فرد، ارشک حمیدی



کتاب  
نئرالگو

## پیشگفتار

### به نام خدا

این کتاب را بر اساس محتوای ریاضیات سال نهم و با هدف آموزش عمیق‌تر مفاهیم درسی نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است. به همین دلیل، تقریباً همه‌جا چارچوب‌های کتاب درسی را رعایت کرده‌ایم، هر چند که مواردی هم هست که برای بیان دقیق‌تر مفاهیم و درک بهتر آن‌ها پا را کمی فراتر گذاشته‌ایم. هر فصل کتاب به جند درس تقسیم شده است. در هر درس مفاهیم اصلی را با بیانی روشن و با آوردن مثال‌هایی متنوع معرفی کرده‌ایم و با حل کردن مسئله‌ها و تست‌هایی که به دقت انتخاب شده‌اند، روش‌های استفاده از آن‌ها را در حل مسئله، آموزش داده‌ایم. آموختن ریاضیات بدون تمرین و تکرار، نشدنی است. بنابراین، در انتهای هر درس در دو بخش «تمرین» و «پرسش‌های چهارگزینه‌ای» تعداد زیادی مسئله و تست آورده‌ایم. همچنین، در انتهای هر فصل برگزیده‌های از مسئله‌های امتحانات نهایی چند سال اخیر را آورده‌ایم، تا با مسئله‌های امتحانات نهایی مربوط به هر فصل آشنا شوید.

راه حل همه تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای را در انتهای کتاب در دو فصل جداگانه آورده‌ایم. بهتر است پیش از حل کردن تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای، مسئله‌ها و تست‌های حل شده در متن درس را کامل بخوانید.

از دوست عزیzman آقای کاظم اجلالی برای پیشنهادات و نظرات ارزشمندشان درباره ساختار کتاب تشکر می‌کنیم.

همین‌طور، وظیفه خود می‌دانیم که از همکاران عزیzman در نشر الگو، واحد حروف‌چینی خانم نسیم نوریان و واحد ویراستاری خانم‌ها هاله ایمانی، عاطفه ربیعی، فهیمه گودرزی و مهدیه جمشیدی به سرپرستی خانم سکینه مختار که خدمات زیادی برای آماده‌سازی و تولید کتاب کشیده‌اند، تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از آقای آریس آقانیانس و خانم پونه میرزازاده برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

### مؤلفان

# فهرست

۸۲	درس سوم: همنهشتی مثلث‌ها
۸۶	تمرین
۸۸	درس چهارم: حل مسئله در هندسه
۹۲	تمرین
۹۷	درس پنجم: شکل‌های متشابه
۹۸	تمرین
۹۹	امتحانات نهایی

## ● فصل چهارم: توان و ریشه

۱۰۶	درس‌های اول و دوم: توان صحیح و نماد علمی
۱۱۵	تمرین
۱۱۹	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۲۱	درس سوم: ریشه‌گیری
۱۲۶	تمرین
۱۲۸	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۳۰	درس چهارم: جمع و تفریق رادیکال‌ها
۱۳۴	تمرین
۱۳۶	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۳۸	امتحانات نهایی

## ● فصل پنجم: عبارت‌های جبری

۱۴۴	درس اول: عبارت‌های جبری و مفهوم اتحاد
۱۵۳	تمرین
۱۵۸	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۶۰	درس دوم: چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها
۱۶۷	تمرین
۱۷۰	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۷۲	درس سوم: نابرابری‌ها و نامعادلهای
۱۷۵	تمرین
۱۷۸	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۷۹	امتحانات نهایی

## ● فصل اول: مجموعه‌ها

۲	درس اول: معرفی مجموعه
۵	تمرین
۶	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۷	درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها
۱۴	تمرین
۱۶	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۷	درس سوم: اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها
۲۵	تمرین
۲۸	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۳۰	درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال
۳۳	تمرین
۳۵	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۳۶	امتحانات نهایی

## ● فصل دوم: عدددهای حقیقی

۴۰	درس اول: عدددهای گویا
۵۰	تمرین
۵۲	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۵۵	درس دوم: عدددهای حقیقی
۵۸	تمرین
۵۹	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۶۰	درس سوم: قدرمطلق و محاسبه تقریبی
۶۶	تمرین
۶۹	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۷۱	امتحانات نهایی

## ● فصل سوم: استدلال و اثبات در هندسه

۷۶	درس‌های اول و دوم: استدلال و آشنازی با اثبات در هندسه
۸۱	تمرین

## ● فصل نهم: پاسخ تمرین‌ها

۲۶۰	فصل اول
۲۶۷	فصل دوم
۲۷۶	فصل سوم
۲۸۶	فصل چهارم
۲۹۶	فصل پنجم
۳۰۸	فصل ششم
۳۱۶	فصل هفتم
۳۲۴	فصل هشتم

## ● فصل دهم: پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۳۳۰	فصل اول
۳۳۴	فصل دوم
۳۳۸	فصل چهارم
۳۴۱	فصل پنجم
۳۴۵	فصل ششم
۳۴۸	فصل هفتم
۳۵۱	فصل هشتم

## ● فصل یازدهم

۳۵۴	پاسخنامه کلیدی
-----	----------------

## ● فصل ششم: خط و معادله‌های خطی

۱۸۴	درس اول: معادله خط
۱۸۶	تمرین
۱۸۷	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۸۸	درس دوم: شب خط و عرض از مبدأ
۱۹۴	تمرین
۱۹۷	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۹۹	درس سوم: دستگاه معادله‌های خطی
۲۰۲	تمرین
۲۰۵	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۰۷	امتحانات نهایی

## ● فصل هفتم: عبارت‌های گویا

۲۱۴	درس اول: معرفی و ساده کردن عبارت‌های گویا
۲۱۷	تمرین
۲۱۹	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۲۱	درس دوم: محاسبات عبارت‌های گویا
۲۲۵	تمرین
۲۲۸	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۳۰	درس سوم: تقسیم چندجمله‌ای‌ها
۲۳۲	تمرین
۲۳۳	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۳۴	امتحانات نهایی

## ● فصل هشتم: حجم و مساحت

۲۴۰	درس‌های اول و دوم: حجم و مساحت کره- حجم هرم و مخروط
۲۴۴	تمرین
۲۴۷	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۴۹	درس سوم: سطح و حجم
۲۵۱	تمرین
۲۵۳	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۵۵	امتحانات نهایی

## فصل اول

### درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

فرض کنید  $A$  مجموعه عددهای اول زوج باشد. در این صورت  $\{2\} = A$ . همچنین، فرض کنید  $B$  مجموعه جواب‌های معادله  $x - 2 = 0$  باشد. در این صورت  $\{2\} = B$ . توجه کنید با اینکه توصیف مجموعه‌های  $A$  و  $B$  با هم فرق می‌کند، اما عضوهای آن‌ها یکسان‌اند.

اگر هر عضو مجموعه  $A$  عضوی از مجموعه  $B$  باشد و هر عضو مجموعه  $B$  نیز عضوی از مجموعه  $A$  باشد، می‌گوییم مجموعه‌های  $A$  و  $B$  برابرند و می‌نویسیم  $A = B$ .

**مثال** فرض کنید  $A$  مجموعه شمارندهای اول ۱۵ باشد. در این صورت  $\{3, 5\} = A$ . همچنین، فرض کنید  $B$  مجموعه شمارندهای اول ۴۵ باشد. در این صورت  $\{3, 5\} = B$ . بنابراین  $A = B$ .

**مثال** مجموعه حروف کلمه «مادر» با مجموعه حروف کلمه «مراد» برابر است، زیرا هر دو  $\{r, d, a, m\}$  هستند.

**تعريف** اگر یکی از دو مجموعه  $A$  یا  $B$  عضوی داشته باشد که در دیگری نباشد، می‌گوییم مجموعه‌های  $A$  و  $B$  برابر نیستند و می‌نویسیم  $A \neq B$ .

**مثال** فرض کنید  $A$  مجموعه شمارندهای اول ۳ باشد. در این صورت  $\{2, 3, 5\} = A$ . همچنین فرض کنید  $B$  مجموعه شمارندهای اول ۴۲ باشد. در این صورت  $\{2, 3, 7\} = B$ . توجه کنید که  $5 \in A$  اما  $5 \notin B$  اما  $7 \in B$  اما  $7 \notin A$ ، پس  $A \neq B$ .

$$\text{تسیت ۱} \quad \text{اگر } \left\{ 1, -1, \frac{5}{2}, a \right\} = \left\{ b, \frac{5}{2}, -1, 3 \right\}, \text{ مقدار } ab \text{ چقدر است؟}$$

$$-3 \quad 3 \quad -1 \quad 1$$

چون مجموعه‌های دو طرف تساوی برابرند، پس هر عضو هر کدام از آن‌ها باید عضو دیگری هم باشد. چون ۱ عضو مجموعه سمت چپ است، پس باید عضو مجموعه سمت راست هم باشد، در نتیجه  $b = 1$ . از طرف دیگر، چون ۳ عضو مجموعه سمت راست است، پس  $a = 3$ . بنابراین  $ab = 3$ .

**راه حل**

$$\text{مسئله ۱} \quad \text{اگر } \{1, 5x+1, -4\} = \{y-1, 3x+7, -4\}, \text{ مقدار } x \text{ و } y \text{ چقدر است؟}$$

چون دو مجموعه برابرند، پس هر عضو مجموعه سمت چپ، عضوی از مجموعه سمت راست است که دو حالت زیر پیش می‌آید.

**حالت دوم**

$$\begin{cases} 3x+7 = y-1 \\ -4 = 5x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+7 = 5x+1 \\ -4 = y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$$

**حالت اول**

دققت کنید که یک حالت دیگر هم ممکن بود رخ دهد، یعنی وقتی که دو مجموعه برابر، یک عضو داشته باشند. به عبارت دیگر،  $y-1 = 5x+1$  که البته در اینجا این حالت پیش نمی‌آید.

**راه حل**

$$\text{مسئله ۲} \quad \text{اگر مجموعه‌های } \{x^3, 4x^3, 4x^9\} \text{ و } \{9, y\} \text{ با یکدیگر برابر باشند، مقدار } xy \text{ چقدر است؟}$$

چون مجموعه‌ای سه عضوی با مجموعه‌ای دو عضوی برابر است، پس دو عضو از مجموعه سه عضوی با یکدیگر برابرند.

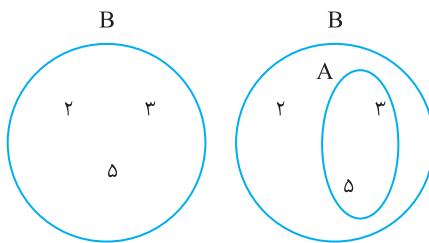
عدد ۹ نیز با یکی از سه عضو مجموعه دیگر برابر است که با بررسی آن‌ها به دست می‌آید

$$9 = x^3 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین  $x = 2$  و  $y = 8$ . پس مجموعه‌های موردنظر برابرند با  $\{8, 9\}$ . در نتیجه  $x = 2$  و  $y = 8$ .

**راه حل**

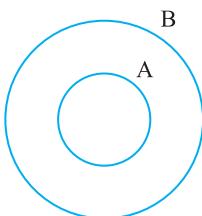
## زیرمجموعه



فرض کنید  $A$  مجموعه شمارندهای اول  $45$  باشد. در این صورت  $A = \{3, 5\}$ . همچنین، فرض کنید  $B$  مجموعه شمارندهای اول  $30$  باشد. در این صورت  $B = \{2, 3, 5\}$ . معلوم است که هر عضو مجموعه  $A$  عضوی از مجموعه  $B$  است. نمودارِ زیرمجموعه  $B$  را در شکل سمت چپ نشان داده‌ایم. اگر بخواهیم نمودارِ زیرمجموعه  $A$  را هم روی این شکل رسم کنیم، باید مانند شکل سمت راست دور عددهای  $3$  و  $5$  یک منحنی بسته بکشیم.

**تعریف:** اگر هر عضو مجموعه  $A$  عضوی از مجموعه  $B$  باشد، می‌گوییم مجموعه  $A$  **زیرمجموعه** مجموعه  $B$  است و می‌نویسیم  $A \subseteq B$ .

**مثال:** فرض کنید  $A$  مجموعه مثلث‌های متساوی‌الاضلاع و  $B$  مجموعه مثلث‌های متساوی‌الساقین باشد. چون هر مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلثی متساوی‌الساقین نیز هست، پس  $A \subseteq B$ .



اگر مجموعه  $A$  زیرمجموعه  $B$  باشد (و مجموعه‌های  $A$  و  $B$  ناتهی باشند)، نمودارِ آن‌ها به صورت مقابل است:

**تعریف:** اگر مجموعه  $A$  عضوی داشته باشد که عضوی از مجموعه  $B$  نباشد، می‌گوییم مجموعه  $A$  **زیرمجموعه** مجموعه  $B$  نیست و می‌نویسیم  $A \not\subseteq B$ .

**مثال:** فرض کنید  $A$  مجموعه مثلث‌های متساوی‌الساقین و  $B$  مجموعه مثلث‌های متساوی‌الاضلاع باشد. چون مثلثی متساوی‌الساقین وجود دارد که متساوی‌الاضلاع نیست (مثلًاً مثلث با طول ضلع‌های  $1, 5$  و  $5$ ، پس  $A \not\subseteq B$ ).

**مسئله ۲:** اگر  $\{1, 2, 3, 4\} = A$ ، کدام گزینه زیرمجموعه مجموعه  $A$  نیست؟

(۱)  $\{1, 2, 3, 4\}$

(۲)  $\{\{1\}\}$

(۳)  $\{2, 4\}$

(۴)  $\{1, 2, 3\}$

**راه حل:** چون  $\{1\}$  عضو مجموعه  $A$  نیست، پس  $\{\{1\}\}$  زیرمجموعه مجموعه  $A$  نیست. بقیه گزینه‌ها زیرمجموعه مجموعه  $A$  هستند.

**مسئله ۳:** فرض کنید  $\{a, b, c, d, e\} = A$ . درست یا غلط بودن حکم‌های زیر را مشخص کنید.

(۱)  $\{\{c\}\} \subseteq A$

(۲)  $\{d, e\} \subseteq A$

(۳)  $\{a, b\} \subseteq A$

**راه حل:** (الف) چون  $a$  و  $b$  عضو مجموعه  $A$  هستند، پس  $\{a, b\} \subseteq A$  است، یعنی  $\{a, b\} \subseteq A$ .

(ب) چون  $d$  و  $e$  عضو مجموعه  $A$  نیستند، پس  $\{d, e\}$  زیرمجموعه مجموعه  $A$  نیست، یعنی  $\{d, e\} \not\subseteq A$  (توجه کنید که  $\{d, e\} \in A$ ).

(پ) چون  $c$  عضو مجموعه  $A$  است، پس  $\{c\}$  زیرمجموعه مجموعه  $A$  است، یعنی  $\{c\} \subseteq A$ .

**مسئله ۴:** اگر  $\{0, 2, 3, 1\} = A$ ، کدام گزینه هم عضو مجموعه  $A$  است هم زیرمجموعه آن؟

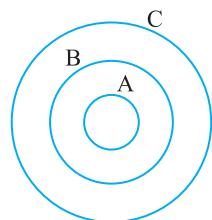
(۱)  $\{\}$

(۲)  $\{2, 3\}$

(۳)  $\{2, 3\}$

(۴)  $\{1\}$

**راه حل:** توجه کنید که  $2$  و  $3$  عضو مجموعه  $A$  هستند. پس  $\{2, 3\}$  زیرمجموعه مجموعه  $A$  است. از طرف دیگر،  $\{2, 3\}$  عضو مجموعه  $A$  است. پس  $\{2, 3\}$  هم عضو مجموعه  $A$  است هم زیرمجموعه آن. توجه کنید که گزینه (۱) زیرمجموعه مجموعه  $A$  نیست و گزینه‌های (۳) و (۴) عضو مجموعه  $A$  نیستند.

**مسئله ۴**


بله، ثابت می‌کنیم  $C \subseteq A$ . باید ثابت کنیم هر عضو مجموعه  $A$  عضوی از مجموعه  $C$  است. فرض کنید عضو دلخواهی از  $A$  باشد. در این صورت، چون  $A \subseteq B$ ، پس  $a \in B$ . از طرف دیگر، چون  $B \subseteq C$  پس  $a \in C$ . چون هر عضو دلخواه از  $A$  عضو  $C$  است، پس تمام اعضای  $A$  عضو  $C$  هستند و در نتیجه  $A \subseteq C$ . توجه کنید که از روی نمودار و مقابله می‌شود  $A \subseteq C$

**راه حل**
**نوشتن زیرمجموعه‌های یک مجموعه و تعداد آنها**

فرض کنید  $A$  مجموعه‌ای ناتهی باشد. چون هر عضو مجموعه  $A$  عضوی از مجموعه  $A$  است، پس  $A \subseteq A$ . همچنین، مجموعه‌تهی زیرمجموعه‌های مجموعه دلخواه است. در حقیقت، اگر  $\emptyset \not\subseteq A$ ، آن‌گاه  $\emptyset$  عضوی دارد که در مجموعه  $A$  نیست که درست نیست، زیرا  $\emptyset$  اصلاً عضوی ندارد!

**نتیجه**

اگر  $A$  مجموعه‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه  $A \subseteq A$  و  $\emptyset \subseteq A$ .

هر زیرمجموعه ناتهی یک مجموعه، از چند عضو این مجموعه تشکیل شده است. برای نوشتن همه زیرمجموعه‌های یک مجموعه، بهتر است ابتدا زیرمجموعه صفر عضوی آن را (که مجموعه‌تهی است) بنویسیم، سپس زیرمجموعه‌های یک عضوی آن را بنویسیم، بعد زیرمجموعه‌های دو عضوی آن را بنویسیم و همین طور ادامه دهیم تا در نهایت خود مجموعه را بنویسیم.

**مثال**

همه زیرمجموعه‌های مجموعه  $\{1, 2, 3, 4\}$  را در زیر نوشه‌ایم:

- $\emptyset$ : صفر عضوی
- $\{\}$ : یک عضوی
- $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ : دو عضوی
- $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$ : سه عضوی
- $\{1, 2, 3, 4\}$ : چهار عضوی

**مسئله ۵**

زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعه  $\{1, 2, 3\}$  را بنویسید.

**راه حل**

زیرمجموعه‌های دو عضوی آن‌هایی هستند که از دو عضو مجموعه  $\{1, 2, 3\}$  تشکیل شده‌اند و عبارت‌اند از  $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$

**مسئله ۶**

فرض کنید  $\{1, 2, 3, 4, 5\} = A$ . تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی مجموعه  $A$  بیشتر است یا تعداد زیرمجموعه‌های چهار عضوی آن؟

**راه حل اول**

زیرمجموعه‌های یک عضوی عبارت‌اند از

$$\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$$

**راه حل**

که تعداد آن‌ها پنج تاست. زیرمجموعه‌های چهار عضوی عبارت‌اند از

$$\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}$$

که تعداد این‌ها نیز پنج تاست.

**راه حل دوم**

برای نوشتن زیرمجموعه‌های یک عضوی، باید یک عضو از مجموعه  $A$  انتخاب کنیم و با آن یک مجموعه درست کنیم. برای نوشتن زیرمجموعه‌های چهار عضوی، باید یک عضو از مجموعه  $A$  انتخاب، آن را حذف کنیم و با بقیه مجموعه‌ای چهار عضوی درست کنیم. یعنی با انتخاب یک عضو، هم به زیرمجموعه‌ای یک عضوی می‌رسیم هم به زیرمجموعه‌ای چهار عضوی. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های چهار عضوی برابر است.

به موارد زیر توجه کنید:

- مجموعهٔ صفر عضوی (مجموعهٔ تهی) یک زیرمجموعه دارد که خود مجموعهٔ تهی است.
- مجموعهٔ یک عضوی  $\{a\}$  دو زیرمجموعه دارد:

$$\emptyset, \{a\}$$

- مجموعهٔ دو عضوی  $\{a, b\}$  چهار زیرمجموعه دارد:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$$

- مجموعهٔ سه عضوی  $\{a, b, c\}$  هشت زیرمجموعه دارد:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

اکنون توجه کنید که هر زیرمجموعهٔ مجموعهٔ سه عضوی  $\{a, b, c\}$  زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ چهار عضوی  $\{a, b, c, d\}$  است. اگر به هر یک از این زیرمجموعه‌ها عضو  $d$  را اضافه کنیم، هشت زیرمجموعهٔ دیگر به دست می‌آید که عبارت‌اند از  $\{d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}$

بنابراین، مجموعهٔ چهار عضوی دو برابر مجموعهٔ سه عضوی زیرمجموعه‌های مجموعهٔ پنج عضوی  $\{a, b, c, d, e\}$  است که می‌شود شانزده زیرمجموعهٔ مجموعهٔ چهار عضوی  $\{a, b, c, d\}$  است که می‌شود سی و دو زیرمجموعهٔ ای.

اگر این روش استدلال را تکرار کنیم، نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

**نتیجه** اگر مجموعه‌ای  $n$  عضو داشته باشد، تعداد زیرمجموعه‌هایش برابر با  $2^n$  است.

مسئله ۴

۱۶ (۴)

مجموعه  $A = \{a, b, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$  چند زیرمجموعه دارد؟

۸ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

راه حل

مجموعه  $A$  چهار عضو دارد. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌هایش برابر است با  $2^4 = 16$ .

مسئله ۷

راه حل اول همهٔ زیرمجموعه‌هایی را که ۲ عضو آن‌هاست، می‌نویسیم:

$$\{\varnothing\}, \{\{2, 1\}\}, \{\{2, 3\}\}, \{\{2, 4\}\}, \{\{2, 1, 3\}\}, \{\{2, 1, 4\}\}, \{\{2, 3, 4\}\}, \{\{2, 1, 2, 4\}\}$$

راه حل

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های موردنظر هشت‌تاست.

**راه حل دوم** اگر عدد ۲ عضو زیرمجموعه‌ای از  $A$  باشد، با حذف کردن آن، زیرمجموعه‌ای از مجموعه  $\{1, 3, 4\}$  به دست می‌آید. مثلاً زیرمجموعه  $\{2, 1, 4\}$  به زیرمجموعه  $\{1, 3, 4\}$  از مجموعه  $\{1, 2, 3, 4\}$  تبدیل می‌شود. همین‌طور، با اضافه کردن عدد ۲ به زیرمجموعه‌های مجموعه  $\{1, 3, 4\}$ ، زیرمجموعه‌ای از مجموعه  $\{1, 2, 3, 4\}$  به دست می‌آید. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌هایی از مجموعه  $A$  که ۲ عضو آن‌هاست برابر با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه  $\{1, 3, 4\}$  است، که می‌شود  $8 = 2^3$ .

مسئله ۸

مجموعه  $A = \{a, b, c, d\}$  چند زیرمجموعه دارد که  $a$  و  $b$  هر دو عضو آن‌ها هستند؟

راه حل اول این زیرمجموعه‌ها را می‌نویسیم:

$$\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}$$

راه حل

پس تعداد زیرمجموعه‌های موردنظر چهارتاست.

**راه حل دوم** اگر به هر زیرمجموعهٔ مجموعه  $\{c, d\}$  عضوهای  $a$  و  $b$  را اضافه کنیم، دقیقاً یکی از زیرمجموعه‌های موردنظر به دست می‌آید.

$$\{c, d\} : \emptyset \quad \{c\} \quad \{d\} \quad \{c, d\}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\{a, b\} \quad \{a, b, c\} \quad \{a, b, d\} \quad \{a, b, c, d\}$

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های موردنظر برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه  $\{c, d\}$  که می‌شود  $2^2 = 4$ .

تیست  
۵

مجموعه  $\{a, b, c, d\}$  چند زیرمجموعه دارد که  $a$  عضو آنها نیست؟

۱۲) ۴

۸) ۳

۶) ۲

۴) ۱

**راه حل** هر زیرمجموعه‌ای که  $a$  عضو آن نیست، زیرمجموعه‌ای از مجموعه  $\{b, c, d\}$  است که تعداد آنها برابر است با  $2^3 = 8$ .

تیست  
۶

مجموعه  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  چند زیرمجموعه دارد که  $a$  عضو آنها هست، اما  $f$  عضو آنها نیست؟

۴) ۴

۸) ۳

۱۶) ۲

۳۲) ۱

**راه حل** چون  $f$  عضو زیرمجموعه‌های موردنظر نیست، پس همه آنها زیرمجموعه‌ای از مجموعه  $\{a, b, c, d, e\}$  هستند. چون  $a$  باید عضوی از این زیرمجموعه‌ها باشد، پس همه آنها با اضافه کردن  $a$  به زیرمجموعه‌ای از مجموعه  $\{b, c, d, e\}$  بهدست می‌آیند. در نتیجه، تعداد زیرمجموعه‌های موردنظر برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه  $\{b, c, d, e\}$  که می‌شود  $= 2^4 = 16$ .

مسئله ۹

فرض کنید  $\{A, B, C\}$  مجموعه  $B$  چند زیرمجموعه مانند  $C$  دارد که  $A \subseteq C$ .

راه حل

**راه حل اول** توجه کنید که اگر  $A \subseteq C$ ، آن‌گاه هر عضو مجموعه  $A$  عضوی از مجموعه  $C$  است، یعنی ۱ و ۲ عضو  $C$  هستند. بنابراین باید تعداد زیرمجموعه‌هایی از مجموعه  $B$  را پیدا کنیم که ۱ و ۲ عضو آنها هستند. این زیرمجموعه‌ها را می‌نویسیم:

$$\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$$

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های موردنظر چهارتاست.

**راه حل دوم** توجه کنید که اگر  $C \subseteq A$ ، آن‌گاه هر عضو مجموعه  $A$  عضوی از مجموعه  $C$  است، یعنی ۱ و ۲ عضو  $C$  هستند. بنابراین باید تعداد زیرمجموعه‌هایی از مجموعه  $B$  را پیدا کنیم که ۱ و ۲ عضو آنها هستند. این زیرمجموعه‌ها از اضافه کردن ۱ و ۲ به زیرمجموعه‌های مجموعه  $\{3, 4\}$  بهدست می‌آیند. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های موردنظر برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه  $\{3, 4\}$  که می‌شود  $= 4$ .

مسئله ۱۰

فرض کنید مجموعه  $A$  چهار عضو بیشتر از مجموعه  $B$  داشته باشد و تعداد زیرمجموعه‌های آن نیز  $480$  عدد بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه  $B$  باشد.

الف) مجموعه  $B$  چند عضو دارد؟

ب) مجموعه  $A$  چند عضو دارد؟

راه حل

فرض کنید تعداد عضوهای مجموعه‌های  $A$  و  $B$  به ترتیب برابر  $a$  و  $b$  باشد. در این صورت، طبق فرض‌های مسئله،  $a = 4 + b$  و  $2^a = 480 + 2^b$ .

الف) توجه کنید که

$$2^{a+b} = 480 + 2^b \Rightarrow 2^a \times 2^b = 480 + 2^b \Rightarrow 16 \times 2^b = 480 + 2^b \Rightarrow 15 \times 2^b = 480 \Rightarrow 2^b = 32 \Rightarrow b = 5$$

ب) می‌توان نوشت  $a = 4 + b = 9$

## نمایش مجموعه‌های اعداد

همان‌طور که دیدیم، مجموعه عدهای طبیعی کوچک‌تر از ۵ را می‌توانیم به صورت  $\{1, 2, 3, 4\}$  نشان دهیم. اگر نتوانیم همه عضوهای

یک مجموعه را بنویسیم باید چه کنیم؟

برای چند مجموعه معروف از عدها نمادهای خاصی وجود دارد که در اینجا آنها را معرفی می‌کنیم.

• مجموعه عدهای طبیعی را با  $\mathbb{N}$  نشان می‌دهیم و می‌نویسیم

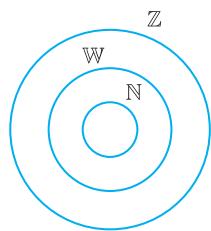
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

• مجموعه عدهای حسابی را با  $\mathbb{W}$  نشان می‌دهیم و می‌نویسیم

$$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

• مجموعه عدهای صحیح را با  $\mathbb{Z}$  نشان می‌دهیم و می‌نویسیم

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$



چون هر عدد طبیعی، عددی حسابی است و هر عدد حسابی، عددی صحیح است، پس  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}$ .



**مثال** اگر  $E$  مجموعه عددهای طبیعی زوج باشد، می‌توانیم بنویسیم  
 $E = \{2, 4, 6, \dots\}$

و اگر  $O$  مجموعه عددهای طبیعی فرد باشد، می‌توانیم بنویسیم  
 $O = \{1, 3, 5, \dots\}$

توجه کنید که مجموعه  $E$  از همه عددهای به صورت  $2k$  تشکیل شده است که در آنها  $k$  عددی طبیعی است. می‌توانیم مجموعه  $E$  را به صورت زیر بنویسیم

$$E = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

که در آن نماد «|» را می‌خوانیم «به طوری که». بنابراین تساوی بالا را می‌خوانیم «مجموعه  $E$  برابر است با مجموعه عددهایی مانند  $2k$  به طوری که  $k$  عضو مجموعه  $\mathbb{N}$  است.».

به همین ترتیب می‌توانیم بنویسیم  
 $O = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$

**مثال** توجه کنید که

$$\{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\} = \{3, 5, 7, \dots\}$$

همین‌طور،

$$\left\{ \frac{x}{2} \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x \leq 2 \right\} = \left\{ -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

**مثال** اگر بخواهیم مجموعه‌ای را به صورت  $\{ \dots | \dots \}$  نشان دهیم، در سمت چپ نماد «|» صورت کلی عضوهای مجموعه و در سمت راست نماد «|» شرط‌هایی را که این عضو را به طور کامل توصیف می‌کنند، می‌نویسیم.

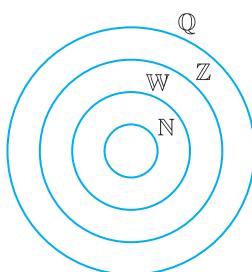
**مثال** اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، می‌توانیم بنویسیم  
 $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}$

همچنین، می‌توانیم این مجموعه را به صورت  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$  نمایش دهیم. همین‌طور، اگر  $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  نمایش دهیم. می‌توانیم بنویسیم

$$B = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x \leq 3\}$$

**مثال** مجموعه عددهای گویا را با  $\mathbb{Q}$  نشان می‌دهیم. می‌توان نوشت

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$



چون هر عدد صحیح، عددی گویاست (زیرا اگر  $a$  عددی صحیح باشد، برابر  $\frac{a}{1}$  است)، پس  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ .



**مسئله ۱۱**

در هر مورد، مجموعه داده شده را با نمادهای ریاضی بنویسید.

ب)  $B = \{1, 6, 11, \dots, 26, 31\}$

الف)  $A = \{0, 4, 8, 12, \dots, 24, 28\}$

الف) عضوهای مجموعه  $A$  مضربهای غیرمنفی عدد ۴ هستند که از ۲۸ کوچکتر یا با آن برابرند. بنابراین، می‌توان نوشت

$$A = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 7\} = \{4k \mid k \in \mathbb{W}, k \leq 7\}$$

ب) هر عضو مجموعه  $B$  یک واحد از مضربی از عدد ۵ بیشتر است. می‌توان نوشت

$$B = \{5k+1 \mid k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 6\}$$

راههای دیگری هم برای نوشتند مجموعه  $B$  وجود دارد. مثلاً

$$B = \{5k-4 \mid k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 7\}, \quad B = \{5k+6 \mid k \in \mathbb{Z}, -1 \leq k \leq 5\}$$

**مسئله ۱۲**

در هر مورد مجموعه داده شده را با نمادهای ریاضی بنویسید.

الف)  $C = \{0\}$       ب)  $B = \{-3, -4, -5, \dots\}$       A)  $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

ب) می‌توان نوشت  $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \leq -3\}$

الف) می‌توان نوشت  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 \leq x \leq 6\}$

ب) می‌توان نوشت  $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 < x < 1\}$

اگر مجموعه‌ای با عضوهایش مشخص شده باشد، نمایش آن با نمادهای ریاضی منحصر به فرد نیست. مثلاً، مجموعه  $\{0\}$  را می‌توانیم به صورت‌های زیر بنویسیم

$$\left\{ x \mid x \in \mathbb{Z}, -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \right\}, \quad \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z}, -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3} \right\}$$

**مسئله ۱۳**

$A$  را با نمادهای ریاضی بنویسید.

می‌توان مجموعه  $A$  را به یکی از صورت‌های  $A = \left\{ \frac{x}{x+1} \mid x \in \mathbb{N} \right\}$  یا  $A = \left\{ x \mid x = \frac{a}{a+1}, a \in \mathbb{N} \right\}$  نمایش داد.

**مسئله ۱۴**

در هر مورد، مجموعه داده شده را با نوشتند عضوهایش بنویسید.

الف)  $B = \{2x \mid x \in \mathbb{N}, 3 < x < 7\}$       A)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 3\}$

الف) توجه کنید که اگر  $x$  عددی صحیح باشد و  $-2 \leq x < 3$ ، آن‌گاه  $x$  یکی از عدددهای  $-2, -1, 0, 1$  و  $2$  است. بنابراین،

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

ب) توجه کنید که اگر  $x$  عددی طبیعی باشد و  $3 < x < 7$ ، آن‌گاه  $x$  یکی از عدددهای  $4, 5$  و  $6$  است. بنابراین،

$$B = \{2 \times 4, 2 \times 5, 2 \times 6\} = \{8, 10, 12\}$$

**مسئله ۱۵**

مجموعه  $A = \left\{ x \mid x = \frac{ra}{a-1}, a \in \mathbb{N}, 2 \leq a \leq 6 \right\}$  را با نوشتند عضوهایش بنویسید.

به جای  $a$  به ترتیب عدددهای  $2, 3, 4, 5$  و  $6$  را قرار می‌دهیم:

$$A = \left\{ \frac{4}{1}, \frac{6}{2}, \frac{8}{3}, \frac{10}{4}, \frac{12}{5} \right\} = \left\{ 4, 3, \frac{8}{3}, \frac{5}{2}, \frac{12}{5} \right\}$$

**مسئله ۱۶**

مجموعه  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 < 36\}$  چند عضو دارد؟

۱۳) ۴

۱۲) ۳

۱۱) ۲

۱۰) ۱

توجه کنید که  $A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  پس مجموعه  $A$  یازده عضو دارد.

**مسئله ۱۷**

مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عددهای صحیح عضو مجموعه  $\{x \mid x \in \mathbb{Q}, -6 \leq x < -1\}$  چقدر است؟

۱) -۸ (۴)

۲) -۷ (۳)

۳) -۶ (۲)

۴) -۵ (۱)

چون هر عدد صحیح، عددی گویا نیز هست، پس عددهای صحیح عضو مجموعه  $A$ ، عددهای صحیح مانند  $x$  هستند که  $-1 < x \leq -6$ . پس عددهای صحیح عضو مجموعه  $A$  عبارت‌اند از  $-6, -5, -4, -3$  و  $-2$ . کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این عددها به ترتیب  $-6$  و  $-2$  هستند که مجموعشان می‌شود  $-8$ .

تئیت  
۸

راه حل

## ۱۱ تمرین

فرض کنید  $A$  مجموعه لاکپشت‌هایی باشد که می‌توانند از روی کوه دماوند پرنند و  $B$  مجموعه جواب‌های معادله  $x^3 + 1 = 0$  باشد. آیا  $B \subseteq A$  باشد؟

۱۳

اگر  $x = -1$ ، مقدار  $x$  و  $y$  چقدر است؟

۱۴

$x$  و  $y$  چه عددهایی باشند که مجموعه‌های  $\{y, 7, -\frac{1}{5}\}$  و  $\{x, -2, 2y - 3, 5\} = \{2x + 3, -1\}$  برابر باشند؟

۱۵

اگر  $\left\{ b - \frac{a}{3} - 1, \frac{a^2}{9}, 2b + a \right\}$  اعضای مجموعه  $\{-3\} = \left\{ \frac{a}{2}, a + b \right\}$  را بنویسید.

۱۶

اگر دو مجموعه  $\{x - 5, 5 - x\}$  و  $\{2y + 2\}$  برابر باشند، مقدار  $x - y$  چقدر است؟

۱۷

اگر دو مجموعه  $\{x, x^2 - 1, \frac{x}{2}\}$  و  $\{1, 2, 3\}$  با یکدیگر برابر باشند، مقدار  $x$  چقدر است؟

۱۸

اگر سه مجموعه  $C = \{\sqrt{w}, -3\}$ ،  $B = \{2, 3z\}$  و  $A = \{1 - x^2, \frac{y}{5}\}$  با یکدیگر برابر باشند، مقدار  $x + y + z + w$  چقدر است؟

۱۹

دو مجموعه  $\{-2, 3, 15\}$  و  $\{x^2 + y^2, 15, x - 3\}$  باهم مساوی‌اند. مقادیر  $x$  و  $y$  را به دست آورید.

۲۰

اگر  $A \neq C$  و  $B \neq C$  و  $A \neq B$ ، آیا لزوماً  $A$  و  $B$  سه مجموعه‌اند.

۲۱

اگر  $A = \{a, \{a\}, \{a, b\}, c\}$  در هر مورد مشخص کنید که حکم داده شده درست است یا خیر.

۲۲

(الف)  $\{c\} \subseteq A$  (ب)  $\{a\} \subseteq A$  (ج)  $a \subseteq A$

(ت)  $\{\{a\}\} \subseteq A$  (ث)  $\{a, c\} \subseteq A$  (ز)  $\{a, b\} \subseteq A$

فرض کنید  $\{A, B, \{C, \{D, E\}\}, \{D, E\}\}$ . در هر عبارت نماد  $\subseteq$  یا  $\subset$  را طوری قرار دهید که حکم داده شده درست باشد.

۲۳

(الف)  $\{\{d, e\}\} \subseteq A$  (ب)  $\{c\} \subseteq A$  (ج)  $\{a, \{b\}\} \subseteq A$  (د)  $\{a\} \subseteq A$

فرض کنید  $A$  مجموعه همه مضرب‌های طبیعی عدد ۲ و  $B$  مجموعه همه مضرب‌های طبیعی عدد ۴ باشد. آیا  $B \subseteq A$  باشد؟

۲۴

اگر  $A$  مجموعه‌ای مانند  $A$  و  $B$  مثال بزنید که مجموعه همه مضرب‌های طبیعی عدد ۴ باشد.

۲۵

اگر  $A \in C$  و  $A \subseteq B$  و  $B \in C$ ، آیا لزوماً  $A$  و  $B$  سه مجموعه‌اند.

۲۶

اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ،  $A \subseteq B$  و  $B = \{1, 2, 3, k\}$ ، تمام مقادیر ممکن برای  $k$  را به دست آورید.

۲۷

همه زیرمجموعه‌های مجموعه  $\{1, 2, 3\}$  را بنویسید.

۲۸

فرض کنید  $A = \{a, b, c, d\}$ . زیرمجموعه‌های دو عضوی و سه عضوی مجموعه  $A$  را بنویسید.

۲۹

زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 6\}$  را بنویسید.

۳۰

عددهایی طبیعی مانند  $a$ ،  $b$  و  $c$  مثال بزنید که مجموعه‌های  $\{2a + 1, b + c\}$  و  $\{2b + 1, a + c\}$  باشند.

۳۱

زیرمجموعه مجموعه  $M = \{1, 3, 4, 5\}$  باشند.

فرض کنید  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعه  $A$  بیشتر است یا تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی آن؟

۳۲

مجموعه  $\{1, 2, 3, 4\}$  چند زیرمجموعه ناتهی دارد؟ ۳۳  
 مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  چند زیرمجموعه دست کم یک عضوی دارد؟ ۳۴  
 اگر به مجموعه‌ای سه عضوی دو عضو جدید و متمایز اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه جدید چقدر از زیرمجموعه‌های مجموعه اصلی بیشتر است؟ ۳۵

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $n$  عضوی  $2^n$  برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه چهار عضوی است. مقدار  $n$  چقدر است؟ ۳۶  
 تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $3k - 5$  عضوی،  $16$  برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $k+3$  عضوی است. مقدار  $k$  چقدر است؟ ۳۷

مجموعه  $S$ ،  $24$  زیرمجموعه بیشتر از مجموعه  $T$  دارد. مجموعه  $S$  چند عضو دارد؟ ۳۸  
 مجموعه  $A = \{a, b, c, d, e\}$  چند زیرمجموعه دارد که  $a$  یا  $b$  عضو آن‌ها هستند؟ ۳۹

مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  چند زیرمجموعه دارد که هیچ عدد زوجی عضو آن نیست؟ ۴۰  
 مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  چند زیرمجموعه دارد که ۱ و ۲ عضو آن‌ها نیستند? ۴۱

مجموعه  $A = \{a, b, c, d, e\}$  چند زیرمجموعه دارد که  $a$  عضو آن‌ها هست؟ ۴۲  
 مجموعه  $A = \{a, b, c, d, e\}$  چند زیرمجموعه سه عضوی دارد که  $a$  عضو آن‌ها نیست؟ ۴۳

مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  چند زیرمجموعه سه عضوی دارد که ۴ عضو آن‌ها هست. اما ۵ عضو آن‌ها نیست? ۴۴  
 فرض کنید  $A = \{1, 2, 3\}$  و  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . مجموعه  $B$  چند زیرمجموعه مانند  $C$  دارد که  $A \subseteq C$ ? ۴۵

فرض کنید  $A = \{1, 2, 3\}$  و  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . چند مجموعه مانند  $C$  وجود دارد که  $A \subseteq C \subseteq B$ ? ۴۶  
 فرض کنید  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  و  $B = \{1, 2, 3, 6, 7\}$ . مجموعه‌های  $A$  و  $B$  چند زیرمجموعه مشترک دارند؟ ۴۷

در هر مورد، مجموعه داده شده را با نمادهای ریاضی بنویسید. ۴۸

$$B = \{0, 7, 26, 63, \dots\} \quad \text{(ب)}$$

$$A = \{2, 4, 8, 16, 32\} \quad \text{(الف)}$$

$$D = \{3, 6, 9, \dots\} \quad \text{(ت)}$$

$$C = \left\{ \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{4}{\sqrt{7}}, \dots, \frac{10}{\sqrt{13}} \right\} \quad \text{(پ)}$$

$$F = \left\{ -1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{25} \right\} \quad \text{(ج)}$$

$$E = \{-1, 3, 7, 11, 15, 19\} \quad \text{(ث)}$$

$$H = \{1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots\} \quad \text{(ح)}$$

$$G = \left\{ 2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \dots \right\} \quad \text{(چ)}$$

اعضای مجموعه‌های زیر را بنویسید. ۴۹

$$B = \left\{ 2x - 7 \mid x \in \mathbb{N}, \frac{12}{x} \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{(ب)}$$

$$A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}, 0 < x \leq 2\} \quad \text{(الف)}$$

$$D = \{mn \mid m, n \in \{1, 2, 3\}\} \quad \text{(ت)}$$

$$C = \left\{ \frac{4k}{7} \mid k \in \mathbb{Z}, k \leq 3 \right\} \quad \text{(پ)}$$

$$F = \{x \mid x \in \mathbb{N}, (x+10)(x+9)\dots(x-9)(x-10) = 0\} \quad \text{(ج)}$$

$$E = \{(-1)^y y^2 \mid y \in \mathbb{N}\} \quad \text{(ث)}$$

$$H = \{3n\sqrt{2} \mid n \in \mathbb{W}\} \quad \text{(ح)}$$

$$G = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, -2 \leq x < 2 \right\} \quad \text{(چ)}$$

اگر  $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ، اعضای مجموعه‌های زیر را بنویسید: ۵۰

$$B = \left\{ x \in A \mid \frac{x+5}{2} \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{(ب)}$$

$$A = \{-x \mid x \in M, x^2 < 20\} \quad \text{(الف)}$$

$$C = \left\{ \frac{x}{y} \mid x \in M, y \in B \right\} \quad \text{(پ)}$$

مجموعه  $\left\{ x \mid x \in \mathbb{Q}, x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, ab = 15 \right\}$  را با عضوهایش بنویسید. ۵۱

مجموعه  $\{\sqrt{x} \mid x \in \mathbb{N}, 10 \leq x \leq 100\}$  چند عضو طبیعی دارد؟ ۵۲

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

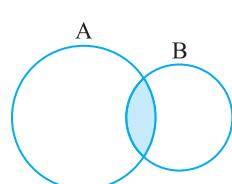
فصل  
۱

## درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

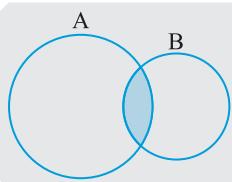
- ۱۱ فرض کنید  $\{a, b, c\} = \{A, B, C\}$ . اگر  $A = \{1, 2, 3\}$ ،  $B = \{4, 5, 6, 7\}$ ،  $C = \{a, b, c\}$  باشد، مقدار  $a + b + c$  چقدر است؟  
۳۷ (۴)                  ۴۱ (۳)                  ۴۶ (۲)                  ۴۷ (۱)
- ۱۲ اگر  $x - y = 5$  باشد، مقدار  $x + y$  چقدر است؟  
۱۴ (۴)                  ۱۳ (۳)                  ۱۲ (۲)                  ۱۱ (۱)
- ۱۳ اگر  $A = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, c\}$  باشد، کدام مجموعه زیرمجموعه  $A$  است؟  
 $\{\{b\}, \{c\}\}$  (۴)                   $\{\{a, b\}\}$  (۳)                   $\{a, b\}$  (۲)                   $\{a\}$  (۱)
- ۱۴ اگر  $\{1, 2\} \subseteq A$  باشد، کدام گزینه درست نیست؟  
 $\{1, 2, 3\} \subseteq A$  (۴)                   $\{1\} \subseteq A$  (۲)                   $\{\{1, 2\}\} \subseteq A$  (۱)
- ۱۵ اگر  $A = \{a, b, \{a, b\}, \{c\}\}$  باشد، کدام مجموعه زیرمجموعه  $A$  نیست؟  
 $\{a, b\}$  (۴)                   $\{c\}$  (۳)                   $\{b\}$  (۲)                   $\{a\}$  (۱)
- ۱۶ اگر  $\{1, 2, \{3, 4\}, 5, \{6\}\} = A$  باشد، کدام گزینه درست نیست؟  
 $\{5, \{6\}\} \subseteq A$  (۴)                   $\{3, 4\} \subseteq A$  (۳)                   $\{\{6\}\} \subseteq A$  (۲)                   $\{6\} \in A$  (۱)
- ۱۷ اگر  $A = \{a, b, c, \{b\}, \{a, c\}\}$  باشد، کدام گزینه هم عضو  $A$  است هم زیرمجموعه آن؟  
 $\{b\}$  (۴)                   $\{a\}$  (۳)                   $b$  (۲)                   $a$  (۱)
- ۱۸ مجموعه  $\{a, b, c\}$  چند زیرمجموعه دو عضوی دارد؟  
۸ (۴)                  ۳ (۳)                  ۲ (۲)                  ۱ (۱)
- ۱۹ اگر  $B \subseteq C$  باشد، مجموعه  $A$  چند زیرمجموعه مانند  $C$  دارد که از  $A$  بگذرد؟  
۲۷ (۴)                  ۲۵ (۳)                  ۲۴ (۲)                  ۲۳ (۱)
- ۲۰ اعضای مجموعه  $B$  همه زیرمجموعه‌های مجموعه  $A$  هستند. مجموعه  $B$ ، ۲۵۶ زیرمجموعه دارد. تعداد اعضای مجموعه  $A$  چقدر است؟  
۳ (۴)                  ۴ (۳)                  ۶ (۲)                  ۸ (۱)
- ۲۱ در چند زیرمجموعه مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  دست کم یک عدد فرد وجود دارد؟  
۲۹ (۴)                  ۲۸ (۳)                  ۴ (۲)                  ۳ (۱)
- ۲۲ اگر  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 4 < x^2 \leq 25\}$  باشد، مجموعه  $A$  چند عضو دارد؟  
۸ (۴)                  ۶ (۳)                  ۴ (۲)                  ۳ (۱)
- ۲۳ بزرگترین عضو مجموعه  $A = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{x}{2} < -3 \right\}$  کدام است؟  
-۵ (۳)                  -۶ (۲)                  -۷ (۱)
- ۲۴ مجموعه  $A = \{x \mid 20 \leq x \leq 48, x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$  چند عضو دارد؟  
۲۸ (۴)                  ۹ (۳)                  ۱۰ (۲)                  ۱۱ (۱)
- ۲۵ اگر  $A = \{x \mid x^2 \leq 4, x \in \mathbb{Z}\}$  باشد، مجموعه  $A$  چند زیرمجموعه غیر تهی دارد؟  
۶۳ (۴)                  ۳۱ (۳)                  ۱۵ (۲)                  ۷ (۱)

## درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

### فصل اول



مدیر مدرسه می‌خواهد از کسانی که در المپیاد هندسه و المپیاد ورزشی مدال کسب کرده‌اند، تقدیر کند. فرض کنید A مجموعه کسانی باشد که در المپیاد هندسه و B مجموعه کسانی باشد که در المپیاد ورزشی مدال کسب کرده‌اند. در این صورت مدیر باید نام کسانی را بیابد که هم عضو مجموعه A هستند هم عضو مجموعه B. یعنی کسانی که بین مجموعه‌های A و B مشترک‌اند. از روی نمودارِ ون شکل مقابل معلوم می‌شود که مدیر باید نام کسانی را که در ناحیه سایه‌دار نوشته شده‌اند، بیابد.



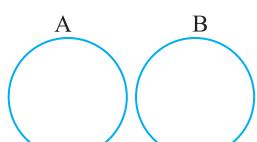
**اشتراک** دو مجموعه A و B مجموعه همه عضوهایی است که بین مجموعه‌های A و B مشترک‌اند.

اشتراک دو مجموعه A و B را با  $A \cap B$  نشان می‌دهیم. می‌توان نوشت:

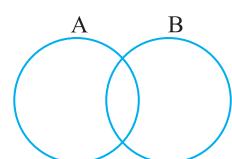
$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$



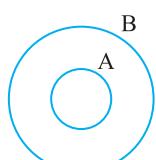
مجموعه  $A \cap B$  از همه عضوهایی تشکیل شده است که هم عضو مجموعه A هستند و هم عضو مجموعه B. همچنین از روی نمودارِ ون معلوم است که  $A \cap B \subseteq B$ ، یعنی  $A \cap B \subseteq A$  هم زیرمجموعه مجموعه A است و هم زیرمجموعه مجموعه B.



معلوم است که اگر مجموعه‌های A و B هیچ عضو مشترکی نداشته باشند، یعنی  $A \cap B = \emptyset$ ، نمودارِ ون مجموعه‌های A و B به صورت مقابل است.

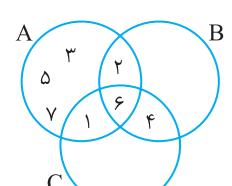


با این حال، اگر درباره وضعیت مجموعه‌های A و B نسبت به هم چیزی ندانیم، نمودارِ ون آن‌ها را به صورت مقابل می‌کشیم.



$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$$

اگر  $A \cap B = A$ ، آن‌گاه  $A \subseteq B$



فرض کنید  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  مجموعه  $C$ ،  $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$  مجموعه  $B$  و  $\{2, 4, 6\}$  مجموعه  $A$  را مشخص کنید.

ابتدا توجه کنید که

$$B \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3, 5, 6, 7\} = \{2, 4, 6\}$$

پس

$$A \cap (B \cap C) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\} \cap \{2, 4, 6\} = \{2, 4, 6\}$$

مسئله ۱

راه حل

اگر  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  مجموعه  $C$ ،  $\{1, 2, 3, 4\}$  مجموعه  $B$  و  $\{3, 5\}$  مجموعه  $A$  کدام است؟

$\{5\} \quad (4)$

$\{4\} \quad (3)$

$\{3\} \quad (2)$

$\emptyset \quad (1)$

ابتدا توجه کنید که

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 5\} = \{3\}$$

پس

$$(A \cap B) \cap C = \{3\} \cap \{3, 5\} = \emptyset$$

مسئله ۱

راه حل

اگر  $A \cap B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 < 20\}$  و  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x < 3\}$ ، مجموعه  $B$  را مشخص کنید.

$$A = \{-2, -1, 0, \dots\}, \quad B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$A \cap B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

بنابراین

مسئله ۲

راه حل

ابتدا توجه کنید که

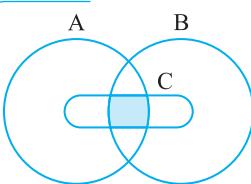
اگر  $A \cap B = A$ ، مجموعه‌های  $A$  و  $B$  چه رابطه‌ای با هم دارند؟

$A \subseteq B$ ،  $A \cap B \subseteq B$ ، پس توجه کنید که همواره

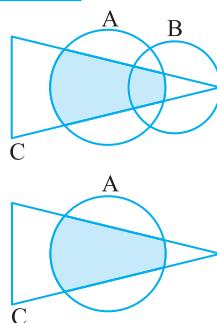
مسئله ۳

راه حل

ناحیه سایه‌دار در نمودار ون مقابل کدام مجموعه را مشخص می‌کند؟



توجه کنید که ناحیه سایه‌دار، اشتراک مجموعه‌های  $A \cap B$  و  $C$  است، یعنی مجموعه موردنظر می‌شود  $(A \cap B) \cap C$ .



ناحیه سایه‌دار در نمودار ون مقابل کدام مجموعه را مشخص می‌کند؟

مسئله ۵

راه حل

اگر به طور موقت مجموعه  $B$  را از این نمودار ون حذف کنیم، نمودار ون مقابل به دست می‌آید. ناحیه سایه‌دار در این نمودار ون مجموعه  $A \cap C$  است. اکنون توجه کنید که اگر مجموعه  $B$  را به این نمودار ون اضافه کنیم، مجموعه موردنظر تغییری نمی‌کند. بنابراین ناحیه سایه‌دار در نمودار ون اصلی هم مجموعه  $A \cap C$  را مشخص می‌کند.

مسئله ۲

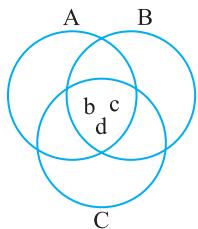
اگر  $B \cap C = \{b, c, d, f\}$  و  $A \cap B = \{a, b, c, d\}$ ، مجموعه  $B \cap C$  کدامیک از مجموعه‌های زیر می‌تواند باشد؟

$$\{t, b, c, k, d\} \quad (4)$$

$$\{b, a, d, k\} \quad (3)$$

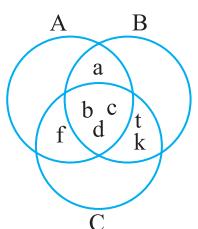
$$\{a, b, d, f\} \quad (2)$$

$$\{a, b, c\} \quad (1)$$



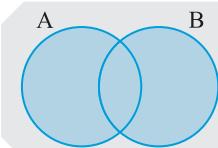
ابتدا توجه کنید که از فرض‌های مسئله نتیجه می‌شود که  $b$ ,  $c$  و  $d$  در هر سه مجموعه  $A$ ,  $B$  و  $C$  هستند (نمودار ون مقابل را ببینید).

راه حل



بنابراین، مجموعه  $B \cap C$  حداقل  $b$ ,  $c$  و  $d$  را دارد. اکنون توجه کنید که در بین گزینه‌ها فقط گزینه (4) این ویژگی را دارد. از طرف دیگر، اگر شرایط مانند نمودار ون مقابل باشد، همه شرط‌های مسئله برقرارند.

فرض کنید  $A$  مجموعه همه دانش‌آموزان کلاس شما باشد که به ریاضیات و  $B$  مجموعه همه دانش‌آموزان کلاس شما باشد که به علوم علاقه‌مند هستند. اگر بخواهیم نام دانش‌آموزان کلاس شما را که به ریاضیات یا علوم علاقه‌مند هستند در یک مجموعه بنویسیم، باید نام همه عضوهای مجموعه  $A$  و همه عضوهای مجموعه  $B$  را بنویسیم و البته نام‌های تکراری را یک‌بار بنویسیم.



اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$  مجموعه همه عضوهایی است که عضو مجموعه  $A$  یا عضو مجموعه  $B$  هستند.

اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$  را با  $A \cup B$  نشان می‌دهیم. می‌توان نوشت

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$



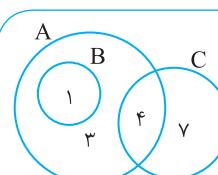
اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند، آن‌گاه  $A \subseteq A \cup B$  و  $B \subseteq A \cup B$ .



### مسئله ۶

مجموعه  $A \cup B$  از همه عضوهایی تشکیل شده که عضو مجموعه  $A$  یا عضو مجموعه  $B$  هستند (عضوهای مشترک را یکبار حساب می‌کنیم). بنابراین

$$A \cup B = \{a, b, c, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$



نمودارِن مجموعه‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  در شکل زیر رسم شده است. مجموع عضوهای مجموعه  $A \cap (B \cup C)$

چقدر است؟

۴ (۲)

۸ (۴)

۳ (۱)

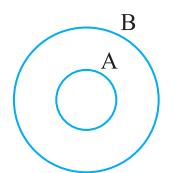
۵ (۳)



ابتدا توجه کنید که

$$A = \{1, 3, 4\}, \quad B = \{1\}, \quad C = \{4, 7\}$$

بنابراین  $\{7\}$  و  $\{1, 4\}$ . در نتیجه، مجموع عضوهای مجموعه  $A \cap (B \cup C) = \{1, 4\}$  برابر است با ۵.



$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$$

اگر  $A \cup B = B$ ، آن‌گاه  $A \subseteq B$ .



۴) هیچ کدام

$A \subseteq B \subseteq C$  و  $C \subseteq B$  مجموعه‌اند و  $(A \cap B) \cup (B \cap C)$  کدام است؟

C (۳)

B (۲)

A (۱)

ابتدا توجه کنید که

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A, \quad B \subseteq C \Rightarrow B \cap C = B$$

بنابراین

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) = A \cup B$$

چون  $A \subseteq B$ ، پس  $A \cup B = B$ .



$$A = B \quad (۴)$$

$$A \cap B = \emptyset \quad (۳)$$

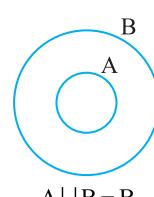
$$A \subseteq B \quad (۲)$$

$$B \subseteq A \quad (۱)$$



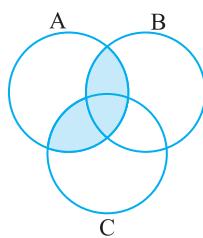
توجه کنید که همواره  $A \subseteq A \cup B$ ، پس از تساوی  $A \cup B = B$  نتیجه می‌شود  $A \subseteq B$ . نمودارِن

مقابل نشان می‌دهد که گزینه‌های دیگر ممکن است درست نباشند.



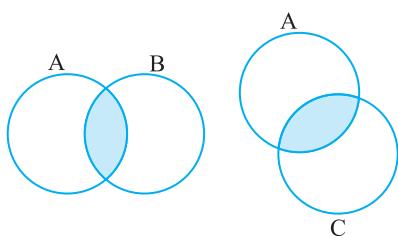
$$A \cup B = B$$





ناحیه سایه‌دار در نمودار ون مقابل کدام مجموعه را مشخص می‌کند؟

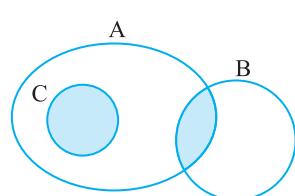
مسئله ۷



توجه کنید که ناحیه سایه‌دار، اجتماع دو ناحیه سایه‌دار در نمودارهای ون مقابل است. بنابراین ناحیه موردنظر مجموعه  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$  را مشخص می‌کند. البته این ناحیه در حقیقت اشتراک مجموعه A با مجموعه  $B \cup C$  نیز هست که می‌شود  $A \cap (B \cup C)$ . توجه کنید که تساوی زیر همیشه درست است.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

راه حل

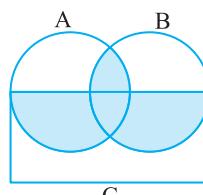


ناحیه سایه‌دار در نمودار ون مقابل، کدام مجموعه را مشخص می‌کند؟

مسئله ۶

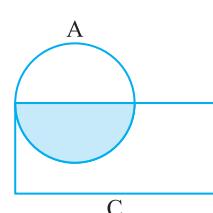
- ۱)  $A \cap (B \cap C)$
- ۲)  $A \cap (B \cup C)$
- ۳)  $B \cap (A \cup C)$
- ۴)  $B \cup (A \cap C)$

راه حل مجموعه موردنظر  $A \cap (B \cup C)$  است. خودتان نمودار ون بقیه گزینه‌ها را رسم کنید تا ببینید که نمودار ون هیچ کدام به شکل موردنظر نیست.



ناحیه سایه‌دار در نمودار ون مقابل کدام مجموعه را مشخص می‌کند؟

مسئله ۸



ناحیه سایه‌دار موردنظر اجتماع سه ناحیه سایه‌دار در نمودارهای ون زیر است:

راه حل

بنابراین، ناحیه موردنظر مجموعه  $(A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap B)$  را مشخص می‌کند.

- |  |      |      |      |
|--|------|------|------|
| ۴) ۴   | ۳) ۳ | ۲) ۲ | ۱) ۱ |
| $A \cup B = \{1, 2\}$ ، چند مجموعه مانند B می‌توان پیدا کرد که |      |      |      |

راه حل چون  $\{1, 2, 3\} \subseteq A \cup B$ ، پس مجموعه B عضوی به جز ۱، ۲ و ۳ ندارد. چون ۳ عضو A نیست ولی عضو  $A \cup B$  است، پس ۳ عضو B است. عده‌های ۱ و ۲ هم می‌توانند عضو مجموعه B باشند یا نباشند. بنابراین B یکی از مجموعه‌های  $\{\{1, 3\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$  است. بنابراین چهار مجموعه مانند B می‌توان پیدا کرد.

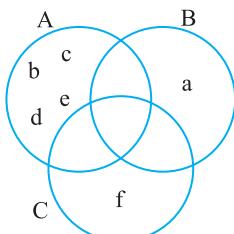
مسئله ۷

اگر  $A = \{1, 2, 3\}$ ،  $B = \{3, 4, 5, 6\}$  و  $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  باشند، حداکثر تعداد اعضای مجموعه  $C$  چقدر است؟

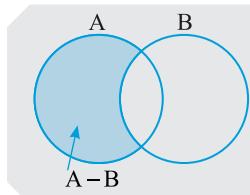
**مسئله ۹**
**راه حل**

ابتدا توجه کنید که  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = A \cup B = B \cup C = \{3, 4, 5, 6\} \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . بنابراین مجموعه  $C$  دست کم باید شامل عضوهای ۱ و ۲ باشد. معلوم است که اگر  $C = \{1, 2\}$ ، شرطهای مسئله برقرارند. پس حداکثر تعداد اعضای مجموعه  $C$  برابر ۶ است. از طرف دیگر، اگر مجموعه  $C$  عضوی به جز عدهای ۱، ۳، ۴، ۵ و ۶ داشته باشد، مجموعه  $B \cup C$  نیز چنین عضوی خواهد داشت، که درست نیست. معلوم است که اگر  $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، شرطهای مسئله برقرارند. بنابراین حداکثر تعداد اعضای مجموعه  $C$  برابر ۶ است.

اگر  $A = \{b, c, d, e, f\}$  و  $A \cup C = \{a, b, c, d, e\}$  باشند، مجموعه  $A$  حداکثر چند عضو دارد؟

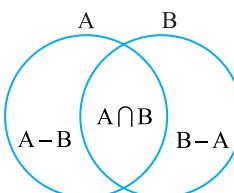
**مسئله ۱۰**
**راه حل**


ابتدا توجه کنید که  $A \subseteq A \cup B$  و چون مجموعه  $A \cup B$  پنج عضو دارد، پس مجموعه  $A$  حداکثر پنج عضو دارد. اگر توجه کنید که اگر مجموعه  $A$  پنج عضو داشته باشد، آن‌گاه  $a, b, c, d, e$  عضو مجموعه  $A$  هستند. اما در این صورت  $a \in A \cup C$  که درست نیست. بنابراین  $A$  حداکثر چهار عضو ممکن است داشته باشد. نمودار و مقابل نشان می‌دهد که این شرایط ممکن است پیش بیاید.



فرض کنید  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند مجموعه  $A - B$  (بخوانید  $A$  منهای  $B$ ) مجموعه همه عضوهای از مجموعه  $A$  است که عضو مجموعه  $B$  نیستند. در حقیقت،

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$



در حالت کلی، ناحیه‌های نمودار و مجموعه  $A$  و  $B$  به صورت مقابل هستند.



اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند، آن‌گاه  $A - B \subseteq A$ .



در هر مورد مجموعه  $A - B$  را مشخص کنید.

ب)  $B = \{1, 2, 3, 5\}$  و  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

الف)  $B = \{5, 6, 7\}$  و  $A = \{1, 2, 3, 4\}$

الف) مجموعه  $A - B$  از آن عضوهایی از مجموعه  $A$  تشکیل شده است که عضو مجموعه  $B$  نیستند. بنابراین  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

ب) عضوهای مجموعه  $A - B$  آن عضوهایی از مجموعه  $A$  هستند که عضو مجموعه  $B$  نیستند. بنابراین  $\{3, 4\}$ .

**مثال:** اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند، آن‌گاه  $A - B \neq B - A$ . اما ممکن است  $A \cup B = B \cup A$  و  $A \cap B = B \cap A$ . مثلاً، اگر  $A = \emptyset$  و  $B = \{1\}$ ، آن‌گاه  $A - B = \emptyset$  و  $B - A = \{1\}$ .

مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضاًیشان مشخص کنید.

الف)  $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N}$       ن)  $\mathbb{N} \cap \mathbb{W}$       ج)  $\mathbb{W} - \mathbb{Z}$       ث)  $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$       ت)  $\mathbb{W} - \mathbb{N}$       پ)  $\mathbb{N} - \mathbb{W}$       ز)  $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$



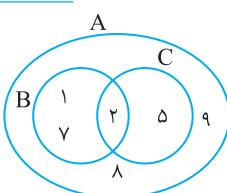
الف)  $\mathbb{N} - \mathbb{Z} = \{\}$       ز)  $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$

ب)  $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{\circ\}$       ن)  $\mathbb{N} - \mathbb{W} = \{\}$

ج)  $\mathbb{W} - \mathbb{Z} = \{\}$       ث)  $\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{\dots, -3, -2, -1\}$

ح)  $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N} = \{\dots, -1, \circ, 1, \dots\} \cup \{1, 2, \dots\} = \mathbb{Z}$       ن)  $\mathbb{N} \cap \mathbb{W} = \{1, 2, 3, \dots\} \cap \{\circ, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$

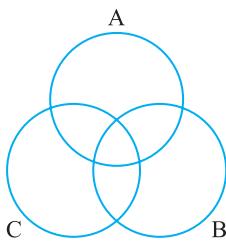




**مسئله ۱۳** با توجه به نمودار ون مقابل، مجموعه  $A \cap (B - C)$  را مشخص کنید.

**راه حل**

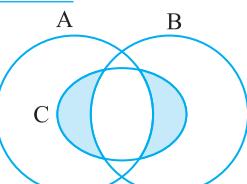
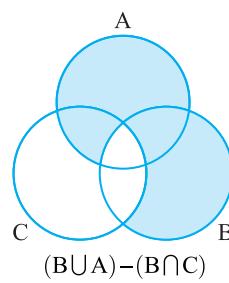
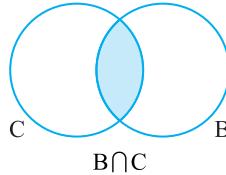
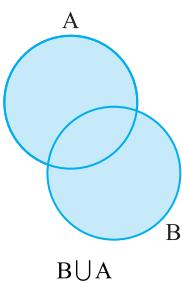
.  $A \cap (B - C) = \{1, 7\}$  و  $B - C = \{1, 7\}$ . پس  $A = \{1, 2, 5, 7, 8, 9\}$ .



**مسئله ۱۴** مجموعه  $(B \cup A) - (B \cap C)$  را روی نمودار ون مقابل هاشور بزنید.

**راه حل**

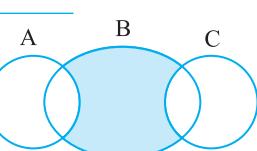
ابتدا مجموعه‌های  $B \cap C$  و  $B \cup A$  و سپس مجموعه موردنظر را مشخص می‌کنیم:



**مسئله ۱۵** ناحیه سایه‌دار در نمودار ون مقابل کدام مجموعه را مشخص می‌کند؟

**راه حل**

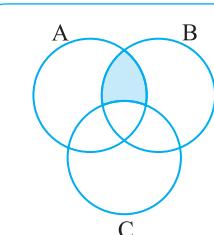
توجه کنید که اگر از مجموعه  $C$  عضوهای مجموعه  $A \cap B$  را حذف کنیم، ناحیه سایه‌دار موردنظر به دست می‌آید. بنابراین مجموعه موردنظر  $C - (A \cap B)$  است.



**مسئله ۱۶** ناحیه سایه‌دار در شکل مقابل کدام مجموعه است؟

**راه حل**

توجه کنید که اگر از مجموعه  $B$  عضوهای مجموعه‌های  $A$  و  $C$  را حذف کنیم، ناحیه موردنظر به دست می‌آید. بنابراین ناحیه سایه‌دار موردنظر مجموعه  $B - (A \cup C)$  است.



**مسئله ۱۷** ناحیه سایه‌دار در نمودار ون مقابل کدام مجموعه را مشخص می‌کند؟

(۱)  $A - (B \cup C)$

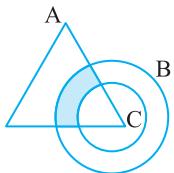
(۲)  $C - (A \cap B)$

(۳)  $(A \cup B) - C$

(۴)  $(A \cap B) - C$

توجه کنید که اگر از مجموعه  $C$  عضوهای مجموعه  $A \cap B$  را حذف کنیم، ناحیه موردنظر به دست می‌آید. بنابراین ناحیه سایه‌دار موردنظر مجموعه  $(A \cap B) - C$  است.

**راه حل**



ناحیه سایه‌دار در نمودار ون مقابل کدام مجموعه را مشخص می‌کند؟

$$A - (B - C) \quad (2)$$

$$A - (B \cap C) \quad (4)$$

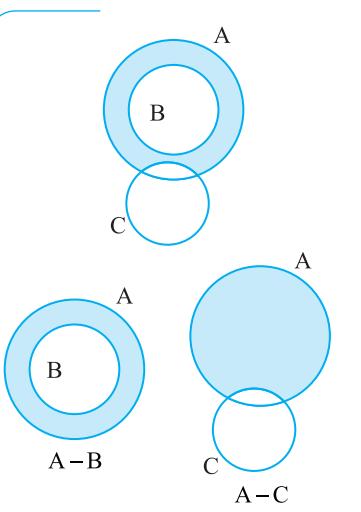
تیبیت  
۹

$$(A - B) \cap C \quad (1)$$

$$A \cap (B - C) \quad (3)$$

توجه کنید که ناحیه موردنظر اشتراک مجموعه A و مجموعه B - C، یعنی  $A \cap (B - C)$  است.

راه حل

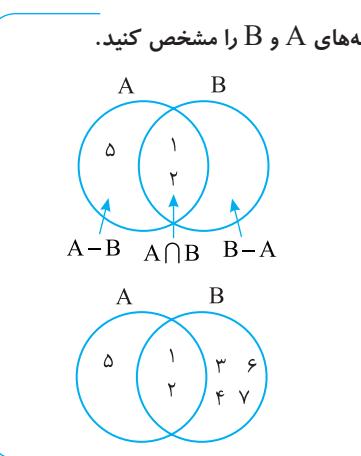


ناحیه سایه‌دار در نمودار ون مقابل کدام مجموعه را مشخص می‌کند؟

مسئله ۱۷

توجه کنید که ناحیه سایه‌دار، اشتراک ناحیه‌های سایه‌دار در نمودارهای ون رو به رو است.  
بنابراین ناحیه موردنظر مجموعه  $(A - B) \cap (A - C)$  را مشخص می‌کند. توجه کنید  
ناحیه سایه‌دار را به صورت  $(A - C) - B$  و  $(A - B) - C$  نیز می‌توان نوشت.

راه حل



مسئله ۱۸

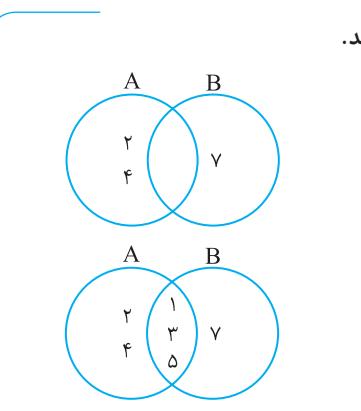
از فرض‌های  $\{5\}$  و  $\{5\}$  نمودار ون مقابل به دست می‌آید. چون

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

باید مشخص کنیم که عده‌های  $3, 4, 6, 7$  عضو کدام مجموعه‌اند. توجه کنید که این عده‌ها عضو مجموعه‌های  $A \cap B$  و  $A - B$  نیستند. پس عضو مجموعه  $B - A$  هستند.

بنابراین به نمودار ون مقابل می‌رسیم. در نتیجه  
 $A = \{1, 2, 5\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$

راه حل



مسئله ۱۹

اگر  $B - A = \{7\}$  و  $A - B = \{2, 4\}$ ،  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . مجموعه B را مشخص کنید.

راه حل

برای حل این مسئله بهتر است از نمودار ون استفاده کنیم. ابتدا توجه کنید که از  $A - B = \{2, 4\}$  معلوم می‌شود که عده‌های  $2$  و  $4$  عضو مجموعه A هستند، اما عضو مجموعه B نیستند. همین‌طور، از  $B - A = \{7\}$  معلوم می‌شود که عدد  $7$  عضو مجموعه B است، اما عضو مجموعه A نیست. بنابراین، فعلًاً به نمودار ون مقابل می‌رسیم.

از طرف دیگر، از اینکه  $\{1, 2, 3, 4, 5\} = A - B = \{2, 4\}$  و  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  معلوم می‌شود که عده‌های  $1, 3$  و  $5$  عضو هر دو مجموعه A و B هستند. بنابراین به نمودار ون مقابل می‌رسیم، پس  $B = \{1, 3, 5, 7\}$

قرارداد

تعداد عضوهای مجموعه A را با  $n(A)$  نشان می‌دهیم.

مثال

$$n(\{1\}) = 1 \quad n(\emptyset) = 0$$

- تیست ۱۰
- اگر  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^3 < 100\}$ ، مقدار  $n(A)$  چقدر است؟
- ۵ (۴)      ۴ (۳)      ۳ (۲)      ۲ (۱)

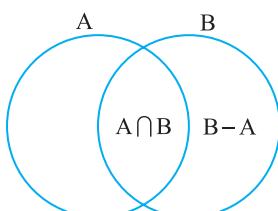
$$1^3 = 1, \quad 2^3 = 8, \quad 3^3 = 27, \quad 4^3 = 64, \quad 5^3 = 125, \quad \dots$$

$$\text{بنابراین } n(A) = 4 \text{ و } A = \{1, 2, 3, 4\}$$

توجه کنید که

راه حل

- تیست ۱۱
- اگر  $B - A = \{y \mid 6 < y < 90, y = 6p, p \in \mathbb{N}\}$  و  $A = \{x \mid 10 < x < 120, x = 4k, k \in \mathbb{N}\}$  چقدر است؟



از روی نمودار ون شکل مقابل معلوم می‌شود که  $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$ . از طرف دیگر،

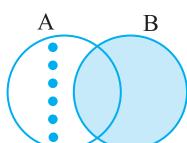
$$n(B) = \frac{84 - 12}{6} + 1 = 13 \text{ است. بنابراین } 12 \text{ تا } 84 \text{ از } B \text{ مجموعه مضرب های طبیعی عدد } 6 \text{ است.}$$

همین‌طور،  $A - B = \{x \mid 10 < x < 120, x = 4k, k \in \mathbb{N}\}$  چند عددی از  $10 < x < 120$  است. بنابراین  $n(A - B) = 12 \text{ تا } 116$  از  $A$  مجموعه مضرب های عدد  $4$  است. بنابراین  $n(A \cap B) = 12 \text{ تا } 116 - 12 = 104$  عددی از  $A$  و  $B$  مشترک است.

$$n(A - B) = 13 - 7 = 6 \text{ است. به این ترتیب، } n(B - A) = \frac{84 - 12}{12} + 1 = 7 \text{ است.}$$

راه حل

- تیست ۱۲
- اگر  $n(A - B) = 6$  و  $n(A \cup B) = 18$ ، مقدار  $n(B)$  چقدر است؟



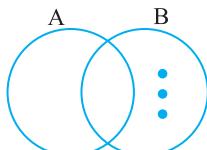
چون  $n(A - B) = 6$ ، پس به نمودار ون مقابل می‌رسیم. اکنون توجه کنید که چون

$n(A \cup B) = 18$ ، پس باید در ناحیه رنگی این نمودار ون  $18 - 6 = 12$  عضو، یعنی  $12$  عضو وجود

$$\text{داشته باشد. بنابراین } n(B) = 12 \text{ است.}$$

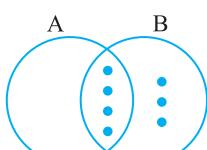
راه حل

- تیست ۱۳
- اگر  $n(A - B) = 3$  و  $n(B) = 7$ ، مقدار  $n(B - A)$  چقدر است؟

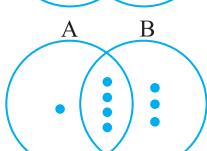


برای حل این مسئله بهتر است از نمودار ون استفاده کنیم. چون  $n(B - A) = 3$ ، پس مجموعه

$$B - A \text{ سه عضو دارد.}$$



چون  $n(B) = 7$ ، پس مجموعه  $B$  هفت عضو دارد که با توجه به نمودار ون قبل، چهار عضو آن، عضو مجموعه  $A \cap B$  هستند.

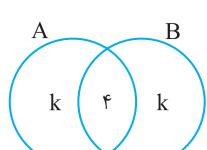


اکنون توجه کنید که چون  $n(A) = 5$ ، پس مجموعه  $A$  پنج عضو دارد که با توجه به نمودار ون قبل، یک عضو آن، عضو مجموعه  $A - B$  است، یعنی  $n(A - B) = 1$ .

راه حل

- تیست ۱۴
- اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه‌اند.  $n(A \cup B) = 16$  و  $n(A \cap B) = 4$ ، مقدار  $n(A - B)$  چقدر است؟

$$10 (۴) \qquad 8 (۳) \qquad 6 (۲) \qquad 4 (۱)$$



فرض می‌کنیم  $n(A \cap B) = 4$ . بنابراین  $n(A - B) = n(B - A) = k$ . به نمودار ون

مقابل می‌رسیم که در آن تعداد عضوهای هر ناحیه را درون آن نوشته‌ایم. اکنون توجه کنید که چون

$$n(A \cup B) = 16$$

$$k + 4 + k = 16 \Rightarrow 2k = 12 \Rightarrow k = 6$$

$$n(A) = 6 + 4 = 10$$

راه حل

**تست  
۱۲**

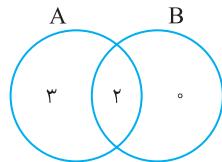
اگر  $n(A \cup B) = 2$  و  $n(A \cap B) = 3$ ، کمترین مقدار  $n(A - B)$  چقدر است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)



از روی نمودار ون مقابله معلوم است که برای اینکه  $n(A \cup B)$  کمترین مقدار ممکن باشد، باید  $n(B - A) = 0$ . بنابراین  $n(A \cup B) \geq 3 + 2 = 5$

**تست  
۱۳**

اگر  $n(A) = 4$  و  $n(B) = 13$ ، بیشترین مقدار ممکن  $n(A \cup B)$  چقدر است؟

۱۳ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

توجه کنید که  $B \subseteq A \cup B$ ، پس  $n(B) \leq n(A \cup B) = 13$ . بنابراین بیشترین مقدار  $n(A \cup B)$  وقتی اتفاق می‌افتد که تمام اعضای  $A \cup B$  عضو  $B$  هم باشند. یعنی  $B = A \cup B$ .

## تمرین

اگر  $A = \{x \mid -3 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{Z}\}$  و  $B = \{x \mid -2 < x < 3, x \in \mathbb{N}\}$ ، مجموعه  $A \cap B$  را پیدا کنید.

۵۳

اگر  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}$  و  $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 < 20\}$ ، مجموعه  $A \cap B$  را مشخص کنید.

۵۴

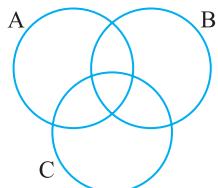
اگر  $A = \{a, b, c, d, e\}$  و  $B = \{b, c, d\}$ ، مجموعه  $B \cap C$  دست کم چند عضو دارد؟

۵۵

فرض کنید  $C = \{4, 5, 7, 9\}$  و  $B = \{2, 4, 7, 8\}$ ،  $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 9\}$ . مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

۵۶

(الف)  $A \cap B$       (ب)  $B \cup C$       (پ)  $A \cup (B \cap C)$       (ت)  $(A \cap B) \cup C$



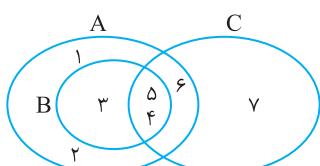
$A$  مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۲۴،  $B$  مجموعه اعداد اول یک رقمی و  $C$  مجموعه مضارب طبیعی ۳ و کوچک‌تر از ۲۰ هستند.

۵۷

(الف) اعضای این مجموعه‌ها را در نمودار ون رو به رو بنویسید.

۵۸

(ب) مجموعه  $(A \cap B) \cap C$  را به دست آورید.

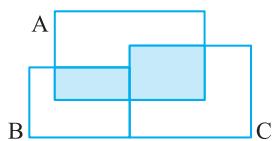


با توجه به نمودار ون مقابله، مجموعه  $(A \cup B) \cap (A \cap C)$  را مشخص کنید.

۵۹

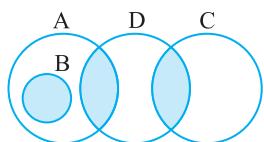
اگر  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < 17\}$  و  $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -6 \leq x < 13\}$ ، مجموعه‌های  $A \cap B$  و  $A \cup B$  را با استفاده از نمادهای ریاضی بنویسید.

۶۰



ناحیه سایه‌دار در شکل مقابله کدام مجموعه را مشخص می‌کند؟

۶۱



ناحیه سایه‌دار در شکل مقابله کدام مجموعه را مشخص می‌کند؟

۶۲

$A \cap \{6, 7\} = \emptyset$  و  $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ،  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  مجموعه‌ای مانند  $A$  و  $B$  مثال بزنید که

۶۳

اگر  $A = \{1, 2, 3\}$  ،  $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$  ،  $A \cup X = B$  و  $B = \{1, 2, 3\}$  ، تمام مجموعه‌های ممکن  $X$  را بنویسید.

۶۳

اگر  $A = \{1, 2, 3\}$  ، چند مجموعه مانند  $B$  می‌توان پیدا کرد که  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

۶۴

اگر  $A \cap B \subseteq K \subseteq A \cup B$  و  $B = \{a, b, c, d\}$  ،  $A = \{a, b, e\}$  ، چند مجموعه مانند  $K$  می‌توان پیدا کرد که

۶۵

مقادیر  $x$  و  $y$  را در هر یک از تساوی‌های زیر به دست آورید.

۶۶

$$\{11, x, 5\} \cup \{-5, 13, 11, 2\} = \{5, 2, 11, -5, y\}$$

$$\{1, x\} = \left\{ y, -6, 4, \frac{y}{2} \right\} \cap \{4, y+1, 0, x-3\}$$

۶۷

فرض کنید  $\{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$  .  $C = \{3, 4, 5, 6\}$  و  $B = \{1, 2, 3, 6\}$  ،  $A = \{2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$  . مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

(الف)  $A - B$ (ب)  $B - A$ (پ)  $A - C$ (ت)  $C - A$ 

۶۸

فرض کنید  $\{1, 3, 6, 9\}$  و  $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  ،  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  . مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

(الف)  $A - (B \cap C)$ (ب)  $A - (B \cup C)$ 

۶۹

فرض کنید  $\{3, 4, 7, 8\}$  و  $B = \{1, 2, 7\}$  ،  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  .

(الف) تحقیق کنید که  $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(ب) تحقیق کنید که  $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

۷۰

فرض کنید  $\{x^2 + 1 \mid x \in A\}$  و  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$  . مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

۷۱

فرض کنید  $\{y^2 \mid y \in B\}$  و  $B = \{x - 2 \mid x \in A, x \neq 2\}$  ،  $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 4\}$  . مجموعه‌های  $(A \cup B) \cap C$  و  $A - (B \cup C)$  را مشخص کنید.

۷۲

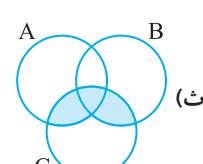
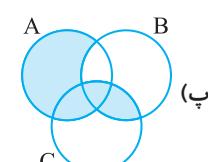
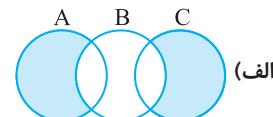
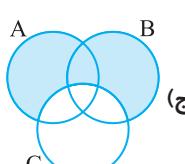
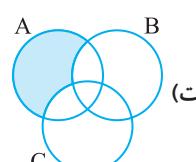
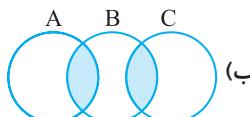
فرض کنید  $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  و  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  . هر یک از مجموعه‌های زیر را با استفاده از عملهای اشتراک، اجتماع و

تفاضل برحسب مجموعه‌های  $A$  و  $B$  بنویسید.

(الف)  $C = \{5, 6, 7\}$ (ب)  $D = \{1, 2, 3, 4\}$ (پ)  $E = \{1, 2, \dots, 10\}$ (ت)  $F = \{8, 9, 10\}$ 

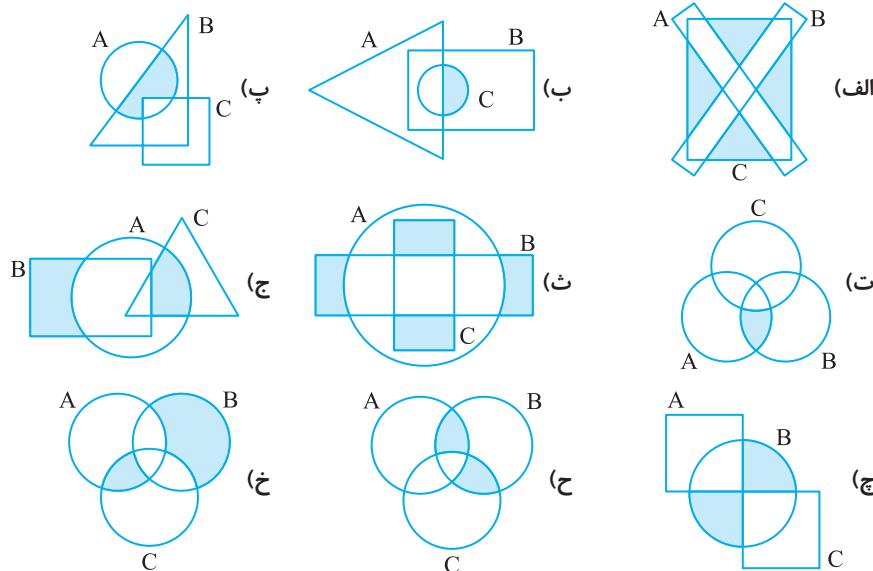
۷۳

در هر مورد تعیین کنید ناحیهٔ سایه‌دار کدام مجموعه را مشخص می‌کند.



در هر مورد تعیین کنید ناحیه سایه دار چه مجموعه‌ای را مشخص می‌کند.

۷۴



اگر  $\{5, 6, 7\}$  و  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  ، مجموعه  $A \cup B$ ،  $B - A = \{5, 6, 7\}$  را مشخص کنید.

۷۵

اگر  $\{2, 4\}$  و  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ، مجموعه  $B$  چند عضو دارد؟

۷۶

اگر  $\{2, \{1, 3\}\}$  و  $B - A = \{3\}$  ،  $A = \{1, 2, \{2\}, \{1, 3\}\}$  ، مجموعه  $B$  را مشخص کنید.

۷۷

مجموعه‌های  $A$  و  $B$  را طوری مشخص کنید که  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  و  $A - (A \cap B) = \{7, 8\}$  و  $A - (A \cap B) = \{1, 2\}$  ،  $A - B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$  و  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .

۷۸

اگر  $\{3, 4, 5\}$  و  $A - B = \{3, 4\}$  ،  $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$  ، مجموعه  $B$  را مشخص کنید.

۷۹

اگر  $\{5, 6, 7\}$  و  $A - B = \{5, 6, 7\}$  و  $A \cap B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$  ،  $A \cup B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 8\}$  ، مجموعه  $B$  را مشخص کنید.

۸۰

.  $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 4\} \subseteq A$  و  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$  ، مجموعه‌های  $A$  و  $B$  را طوری مشخص کنید که

۸۱

در هر مورد تعداد اعضای مجموعه را مشخص کنید.

۸۲

الف)  $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$  و  $B = \{x \mid x \in \mathbb{W}, x < 7\}$

ب)  $C = \{\emptyset\}$  و  $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 1\}$

اگر  $n(A \cup B) = n(A \cap B)$  . مقدار  $n(A \cup B)$  چقدر است؟

۸۳

اگر  $n((A \cap C) \cup B) = n(C)$  ، مقدار  $n(A \cap C)$  چقدر است؟

۸۴

اگر  $n(A \cup B) + n(A \cap B) = n(B - A)$  . مقدار  $n(A \cup B)$  چقدر است؟

۸۵

دو مجموعه‌اند،  $A$  و  $B$  . مقدار  $n(A \cup B) = 8$  و  $n(A - B) = 5$  و  $n(B - A) = 8$  . مقدار  $n(A \cap B)$  چقدر است؟

۸۶

اگر  $n(B - A) = 8$  و  $n(A \cup B) = 25$  و  $n(A \cap B) = 8$  ، مقدار  $n(A - B)$  چقدر است؟

۸۷

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل  
۱

## درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

A (۴)	A ∪ B (۳)	مجموعه (A ∩ B) ∪ (A ∩ ∅) کدام است؟	-۲۶
		A ∩ B (۲)      ∅ (۱)	
. C ∩ A = C	B = C	کدامیک از سه گزاره زیر درست است؟	-۲۷
ب) از A ∩ B = C نتیجه می‌شود	الف) از A ∩ B = A ∩ C نتیجه می‌شود		
(۴) (ب) و (پ)	(۳) (الف) و (ب)	پ) از A ⊆ C A ∩ B = B نتیجه می‌شود	-۲۸
		(۲) (ب)      (۱) (الف)	
۱۲ (۴)	۶ (۳)	اگر x زوج است x ∈ N, B = {x   x ∈ N} و A = {x   x ∈ N} مضرب ۳ است. کوچکترین عضو مجموعه A ∩ B کدام است؟	-۲۸
		۳ (۲)      ۲ (۱)	
{b, d, h} (۴)	{b, d, x, y, z} (۳)	اگر A ∩ C = {b, d, g} و A ∩ B = {a, b, c, d, e, f} مجموعه B ∩ C کدام نمی‌تواند باشد؟	-۲۹
		{b, c, d, g} (۲)      {b, d} (۱)	
۵ (۴)	۴ (۳)	اگر A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5} و A = {1, 2, 3} مجموعه B حداکثر چند عضو دارد؟	-۳۰
		۳ (۲)      ۲ (۱)	
۴ (۴)	۳ (۳)	اگر B ∪ C = {5, 6, 7, 8, 9} و A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} مجموعه C دست کم چند عضو دارد؟	-۳۱
		۲ (۲)      ۱ (۱)	
C ∩ A = B (۴)	B - C = ∅ (۳)	مجموعه‌های ناتهی و نامساوی A و B در رابطه (A - B) ∪ B = A صدق می‌کنند. کدام گزینه درست است؟	-۳۲
A ∪ B = B (۴)	A ∩ B = ∅ (۳)	A ⊆ B (۲)      B ⊆ A (۱)	
		اگر A ⊆ B ⊆ C. کدام گزینه درست است؟	-۳۳
		A ∩ C = C (۲)      A - B = A (۱)	
۶ (۴)	۵ (۳)	اگر M - N = {a, 1, 2, {Δ}} و M = {a, b, {1, 2}, Δ} مجموعه N چند زیر مجموعه دو عضوی دارد؟	-۳۴
		۴ (۲)      ۳ (۱)	
۶ (۴)	۵ (۳)	اگر A - (A ∩ B) = {1, 2, 3, 4, 5, 6} و B = {1, 3, 5, 7, 9} مجموعه A - (A ∩ B) چند عضو دارد؟	-۳۵
		۴ (۲)      ۳ (۱)	
(A ∪ B) - (A ∩ B) (۴)	(A ∪ B) - A (۳)	مجموعه (A - B) ∪ (B - A) کدام است؟	-۳۶
		A ∩ B (۲)      A ∪ B (۱)	
۸ (۴)	۷ (۳)	اگر n(A ∪ B) = {∅, ∇}, A = {∇, ∅, {∅}}, B = {∅, ∇, {∇}} مقدار n(A ∩ B) چقدر است؟	-۳۷
		۶ (۲)      ۵ (۱)	
۷ (۴)	۶ (۳)	اگر n(A ∩ B) = {y   ۱۵ < y ≤ ۷۵, y = ۳k, k ∈ N} و A = {x   ۱۵ ≤ x ≤ ۶۷, x = ۴n, n ∈ N} مقدار n(A ∩ B) چقدر است؟	-۳۸
		۴ (۲)      ۴ (۱)	
۱۵ (۴)	۱۴ (۳)	مجموعه A = {a, b, c, d} چند زیرمجموعه مانند K دارد که n(K) < ۴	-۳۹
		۸ (۲)      ۷ (۱)	
۴ (۴)	۳ (۳)	k عددی طبیعی است. n(A) = k و A = {k, ۲k, k², ۳k}. به ازای چند مقدار k این روابط درست است؟	-۴۰
		۲ (۲)      ۱ (۱)	
۱۱ (۴)	۸ (۳)	اگر n(B - A) = ۳ و n(A) = ۸ مقدار n(A ∪ B) چقدر است؟	-۴۱
		۵ (۲)      ۳ (۱)	
۱۲۰ (۴)	۲ (۳)	A و B دو مجموعه‌اند و مجموعه‌های A - B, A ∩ B, A ∪ B به ترتیب ۱۲۸, ۸ و ۴ زیرمجموعه دارند. مجموعه B - A چند عضو دارد؟	-۴۲
		۱۱۶ (۲)      ۱ (۱)	

اگر  $n(A \cup B) = 3x$  و  $n(A \cap B) = x$  ، مقدار  $n(A - B)$  چقدر است؟ -۴۳

۴) نمی‌توان مشخص کرد.

۲۱ (۳)

۱۹ (۲)

۵ (۱)

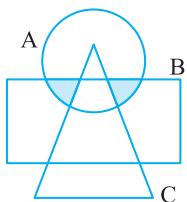
اگر مجموعه  $A \cap B$  زیرمجموعه داشته باشد، مقدار  $n(B - A)$  چقدر است؟ -۴۴

۸ (۴)

۱۶ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)



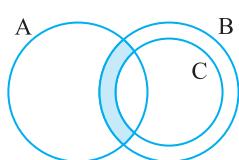
نمودار ون مقابله کدام مجموعه را نشان می‌دهد؟ -۴۵

$(A \cap B) \cap C$  (۱)

$(A - C) - B$  (۲)

$(A \cap B) - C$  (۳)

$(B - C) - A$  (۴)



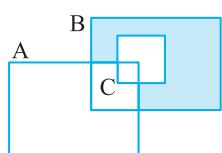
$(B - C) \cap (A \cap C)$  (۲)

$(A \cap B) - C$  (۴)

نمودار ون مقابله کدام مجموعه را نشان می‌دهد؟ -۴۶

$A \cap (B \cap C)$  (۱)

$(B - C) - A$  (۳)



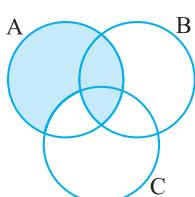
$B - (A \cup C)$  (۲)

$(B - C) \cap ((A \cup C) \cap B)$  (۴)

نمودار ون مقابله کدام مجموعه را نشان می‌دهد؟ -۴۷

$(B - C) \cap A$  (۱)

$B - (A \cap B)$  (۳)



ناحیه سایه‌دار در شکل مقابله کدام مجموعه است؟ -۴۸

$(A \cap B \cap C) \cup A$  (۱)

$(A \cap B) \cup C$  (۲)

$A - (A \cap B)$  (۳)

$(A \cap B) \cup (A - (B \cup C))$  (۴)



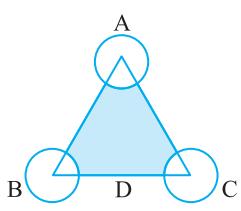
$(A \cup B) \cap C$  (۲)

$(C \cap B) \cup A$  (۴)

ناحیه سایه‌دار در شکل مقابله کدام مجموعه است؟ -۴۹

$(A \cap B) - C$  (۱)

$(A - B) \cap C$  (۳)



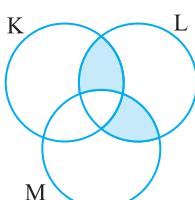
ناحیه سایه‌دار برابر کدام گزینه است؟ -۵۰

$(A \cup B \cup C) \cap D$  (۱)

$(A \cup B \cup C) - D$  (۲)

$(A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)$  (۳)

$D - (A \cup B \cup C)$  (۴)



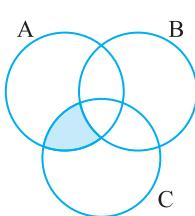
ناحیه سایه‌دار برابر با کدام گزینه است؟ -۵۱

$(K \cap L) - M$  (۱)

$(M \cap L) - K$  (۲)

$(K \cap M) - (K \cap L \cap M)$  (۳)

$(L \cap (K \cup M)) - (K \cap L \cap M)$  (۴)



با توجه به نمودار ون مقابله، ناحیه سایه‌دار برابر با کدام گزینه نیست؟ -۵۲

$(A \cap C) - B$  (۱)

$C \cap (A - B)$  (۲)

$A \cap (C - B)$  (۳)

$(A \cap B) - (B \cap C)$  (۴)

## امتحانات نهایی

## فصل ۱

۱

عبارت‌های درست را با علامت  و عبارت‌های نادرست را با علامت  مشخص کنید.

همدانبزدشهرستان‌های تهرانتهرانخارج از کشوراصفهانآذربایجان غربیهرمزگانتهراناستان تهرانسیستان و بلوچستانخراسان رضوی

(الف) مجموعه «اعداد اول بین ۱۵ و ۱۸» یک مجموعه تک عضوی است.

(ب) مجموعه تهی را به صورت  $\{\}$  نشان می‌دهیم.

(پ) هر مجموعه زیرمجموعه خودش است.

(ت) در پرتاپ یک تاس، احتمال اینکه عدد رو آمده اول باشد برابر  $\frac{1}{3}$  است.

(ث) یک مجموعه سه عضوی  $\emptyset$  زیرمجموعه دارد.

(ج) اگر  $A \subseteq B$ , آن‌گاه  $A \cap B = A$ .

(چ) در مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن عضوها مهم است.

(ح)  $N \cap \mathbb{Z} = N$

(خ) مجموعه  $A \cup B$  زیرمجموعه  $A$  است.

(د) اگر  $n(A) = n(B)$ , آن‌گاه  $A$  و  $B$  دو مجموعه برابرند.

(ذ) مجموعه تهی زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است.

(ر) عبارت «دو عدد اول یک رقمی» یک مجموعه را مشخص می‌کند.

۲

در جای خالی عدد، کلمه یا عبارت مناسب بنویسید.

(الف) اگر  $\{1, 2, 1, 4, 5\}$ , آن‌گاه .....  
 $n(A) = \dots$ .

(ب) احتمال ظاهر شدن عددی زوج و کوچک‌تر از ۵ در پرتاپ یک تاس ..... است.

(پ) اگر  $A \subseteq B$ , آن‌گاه .....  
 $A \cup B = \dots$ .

(ت) مجموعه  $A = \{3, 0, \emptyset\}$  دارای ..... زیرمجموعه است.

(ث) مجموعه شامل همه عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعه  $A$  و  $B$  باشند، ..... دو مجموعه  $A$  و  $B$  نام دارد.

گزینه درست را با علامت  مشخص کنید.

قارس

$\frac{^0}{_4}$

$\frac{^3}{_4}$

$\frac{^2}{_4}$

$\frac{^1}{_4}$

اصفهان

(ب) در پرتاپ همزمان دو تاس، چقدر احتمال دارد که اعداد رو آمده مثل هم نباشند؟

$\frac{^1}{_4}$

$\frac{^1}{_3}$

$\frac{^5}{_6}$

$\frac{^1}{_6}$

آذربایجان شرقی

(پ) کدام یک از مجموعه‌های زیر با مجموعه  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x \leq 1\}$  برابر است؟

$\{-2, -1, 0\}$

$\{-1, 0\}$

$\{-1, 0, 1\}$

$\{-2, -1, 0, 1\}$

هرمزگان

(ت) کدام عبارت یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

اعداد بزرگ

چهار شهر ایران

سه عدد متواالی

۱۰

خوزستان

(ث) مجموعه  $\{x \mid x \in A, x \in B\}$  با کدام نام نمایش داده می‌شود؟

$B \subseteq A$

$A \cup B$

$A \cap B$

$A \subseteq B$

ابلام

(ج) مجموعه  $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$  برابر است با

$\{\dots, -3, -2, -1, 0\}$

$\emptyset$

$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N}$

کهگیلویه و بویراحمد

(ج) کدام یک از مجموعه‌های زیر با مجموعه  $\{\dots, -4, -1, 2, 5, \dots\}$  برابر است؟

$\{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\{k+3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

گیلان

(ح) در پرتاپ هم‌زمان دو تاس سبز و زرد، احتمال اینکه مجموع دو عدد رو شده مساوی ۹ باشد چیست؟

$\frac{^1}{_4}$

$\frac{^1}{_9}$

$\frac{^2}{_9}$

$\frac{^1}{_18}$

خوزستان - ۹۸

با توجه به مجموعه  $A = \left\{ 8, -2, 3, \frac{1}{2} \right\}$  در جای خالی نماد مناسب ( $\in, \notin, \subseteq, \not\subseteq$ ) بگذارید.

$$-2 \quad \square \quad A$$

$$\{1, 3\} \quad \square \quad A$$

کرمان - ۹۷

مجموعه  $\left\{ y, \frac{1}{2}, 5^2 + 1 \right\}$  با مجموعه  $\{x, 5, \sqrt{3}\}$  برابر است. مقادیر  $x$  و  $y$  را بدست آورید.

البرز - ۹۸

جاهای خالی را در مجموعه های زیر طوری پر کنید که مجموعه ها برابر باشند.

$$\left\{ -\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{25}{9}}, 5, \square \right\} = \left\{ \frac{5}{3}, \square, -1/5, 3^2 \right\}$$

گیلان - ۹۸

الف) مجموعه  $A = \left\{ \frac{x+1}{2} \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 2 \right\}$  را با عضوهایش مشخص کنید.

ب) مقدار  $m$  را جانان پیدا کنید که مجموعه  $B = \{-4, m-1\}$  یک عضوی باشد.

تهران - ۹۸

الف) اگر  $B = \{a, c, f\}$  و  $A = \{a, b, c, d\}$  مجموعه زیر را با اعضاش بنویسید.

$$A - B =$$

ب) مجموعه  $D = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}, -1 < k \leq 1\}$  را با عضوها مشخص کنید.

تیزهوشان میبد - ۹۷

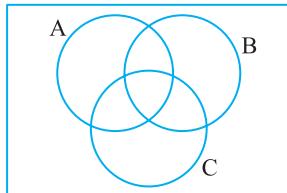
اعضای مجموعه  $\left\{ \frac{12}{x} \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{12}{x} \in \mathbb{Z} \right\}$  را بنویسید.

بوشهر - ۹۸

با توجه به مجموعه های ...  $O = \{1, 3, 5, \dots\}$  و  $E = \{2, 4, 6, \dots\}$  مجموعه های زیر را با نوشتن اعضاشان مشخص کنید.

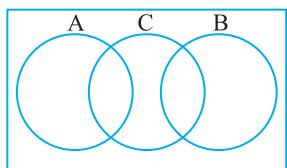
$$E \cap O =$$

$$E \cup O =$$



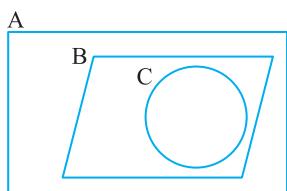
خوزستان - ۹۸

مجموعه  $(A - C) \cup (B - C)$  را در شکل مقابل هاشور بزنید.



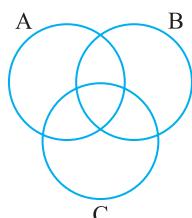
زنجان - ۹۸

در نمودار مقابل، مجموعه  $(A \cup B) - C$  را هاشور بزنید.



کرمان - ۹۷

با توجه به نمودار و نمودار مقابل، مجموعه  $A - (B \cup C)$  را هاشور بزنید.



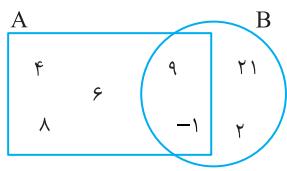
گیلان - ۹۷

الف) مجموعه  $(C \cup B) - A$  را در نمودار و نمودار مقابل مشخص کنید.

ب) اگر  $A = \{3, -2, 5\}$  و  $B = \{4, 6, 9, 21\}$  مجموعه «اعداد طبیعی کوچکتر از ۶» باشد، مجموعه های زیر را نوشتن اعضاشان مشخص کنید.

$$A \cap B =$$

$$A - B =$$



همدان - ۹۷

الف) زیرمجموعه های از  $A$  را بنویسید که عضوهایش بر ۳ بخش پذیر باشند (مجموعه  $C$ ).

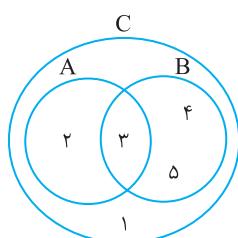
ب) کدام رابطه درست و کدام نادرست است؟

$$A \subseteq B \quad \square$$

$$-9 \notin B \quad \square$$

$$B - (A \cap B) =$$

پ) با توجه به نمودار، مجموعه مقابل را با عضوهایش بنویسید.



۹۷-

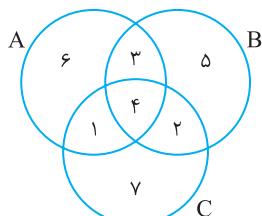
=

$C - (A \cup B) =$

$C \cap A =$

با توجه به نمودار ون مقابله،

الف) مجموعه‌های زیر را با اعضا‌یشان مشخص کنید.



۹۸-

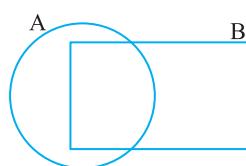
- نادرست  درست   
نادرست  درست   
نادرست  درست

با توجه به نمودار زیر، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف)  $A - B = \{5, 2\}$

ب)  $C \cap (A \cup B) = \{1, 4, 2\}$

پ)  $n(A \cup C) = n(A) + n(C)$



۹۹-

اگر بدانیم  $\{3, 4\} = A \cup B$ ,  $\{2\} = A \cap B$ ، اعضای A و B را

داخل نمودار قرار دهید.

C = {x + 1 | x ∈ N, x ≤ 3}

ب) مجموعه مقابله را با عضوهایش مشخص کنید.

اگر تاسی را بیندازیم، چقدر احتمال دارد:

الف) عدد رو شده مضرب ۳ باشد؟

ب) عدد رو شده فرد و بزرگ‌تر از ۳ باشد؟

آذربایجان شرقی - ۹۸

خوزستان - ۹۷

در اکتشافات تاریخی، مشخص شده است که مصریان از تاس‌های بیست وجهی منتظم استفاده می‌کردند که اعداد ۱ تا ۲۰ بر آن حک شده بود. در پرتاب یک تاس بیست وجهی منتظم، احتمال اینکه عدد رو شده اول باشد چقدر است؟

$\frac{1}{2}$

$\frac{9}{20}$

$\frac{2}{5}$

$\frac{7}{20}$

اگر تاسی را دو بار بیندازیم، چقدر احتمال دارد:

الف) مجموع دو عدد رو شده ۵ باشد؟

ب) دو عدد رو شده مثل هم باشند؟

تهران - ۹۸

استان تهران - ۹۸

تیزهوشان میبد - ۹۸

ب) حداقل یکی از اعداد رو شده اول باشد.

دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. احتمال‌های زیر را حساب کنید.

الف) اختلاف دو عدد رو شده ۳ باشد.

اگر دو سکه را با هم بیندازیم،

الف) احتمال اینکه حداقل یکی از آن‌ها رو بیاید چقدر است؟

ب) احتمال اینکه هر دو سکه مثل هم بیاند چیست؟

استان تهران - ۹۸

کرمان - ۹۷

آذربایجان شرقی - ۹۷

بزد - ۹۷

مازندران - ۹۷

در پرتاب هم‌زمان یک سکه و یک تاس، احتمال رخ دادن کدامیک از پیشامدهای زیر با بقیه متفاوت است؟

سکه پشت و تاس عددی اول بیاید.

سکه پشت و تاس عددی مرکب بیاید.

سکه رو و تاس عددی زوج بیاید.

سکه رو و تاس عددی فرد بیاید.

در کارت یکسان با شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داخل جعبه‌ای قرار می‌دهیم و تصادفی یک کارت را بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد شماره این

کارت عددی اول باشد؟

در جعبه‌ای ۲ مهره قرمز، ۳ مهره آبی و ۵ مهره زرد وجود دارد. مهره‌ای را تصادفی از این جعبه خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد این مهره زرد نباشد؟

چهارمحال و بختیاری - ۹۸

در جعبه‌ای ۲ مهره قرمز، ۳ مهره آبی و ۴ مهره سبز موجود است. یک مهره به تصادف انتخاب کرده‌ایم. احتمال اینکه مهره انتخابی، سبز یا آبی باشد چقدر است؟

مازندران - ۹۸

خانواده‌ای سه فرزند دارد. احتمال اینکه هر سه فرزند هم جنس باشند، چقدر است؟

$\frac{1}{8}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$

۱۶

۱۷

۱۸

۱۹

۲۰

۲۱

۲۲

۲۴

۲۵

۲۶

۲۷

۲۸

۲۹

فصل نهم

پاسخ تمرین‌ها

# پاسخ تمرین‌ها

## فصل اول

۱۲

• مجموعه اسبهای بالدار.

• مجموعه اعداد اول زوج و رقمی.

• مجموعه جواب‌های صحیح معادله  $3x - 5 = -7$ .

بله، چون هر دو مجموعه A و B برابر با مجموعه‌های هستند.

۱۳

چون عدد ۵ عضو مجموعه سمت چپ است، پس عضو مجموعه سمت راست نیز هست. بنابراین  $x + 3 = 2x + 5$ ، یعنی  $x = 1$ . در نتیجه، تساوی داده شده در صورت مسئله می‌شود  $\{5, -1, 2y - 3, 5\} = \{5, -1, 2y - 3, 5\}$ . پس برای  $2y - 3$  دو حالت پیش می‌آید:

$$2y - 3 = -1 \Rightarrow y = 1, \quad 2y - 3 = 5 \Rightarrow y = 4$$

۱۴

واضح است که  $\frac{1}{5} = -\frac{1}{5}$  عضو هر دو مجموعه است. چون اعضای دو مجموعه برابرند، پس  $x = 7$  و  $y = 3$ .

۱۵

چون اعضای دو مجموعه برابر با یکدیگر مساوی هستند، پس  $\frac{a}{2} = 3$

$$\begin{cases} \frac{a}{2} = -3 \\ a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow a = -6, \quad b = 3$$

بنابراین

$$b - \frac{a}{3} - 1 = 3 - \frac{-6}{3} - 1 = 4, \quad \frac{a^2}{9} = \frac{36}{9} = 4, \quad 2b + a = 6 - 6 = 0.$$

پس مجموعه موردنظر  $\{0, 4\}$  است.

۱۶

چون یک مجموعه دو عضوی با یک مجموعه یک عضوی برابر است، پس عضوهای مجموعه دو عضوی با یکدیگر برابرند:  $x = 5 - 5 - x$ . یعنی  $x = 5$ .

$$2y + 2 = x - 5 \Rightarrow y = -1$$

در نتیجه  $y - x = -1 - 5 = -6$ .

۱۷

چون یک مجموعه دو عضوی با یک مجموعه یک عضوی دارد که دو برابر دیگری است، پس مجموعه دیگر نیز باید عضوی داشته باشد که دو برابر دیگری است. چون  $x$  دو برابر  $\frac{x}{2}$  است، پس  $x = 2$ .

۱۸

چون مجموعه  $\{1, 2, 3\}$  عضوی دارد که دو برابر دیگری است، پس هر سه مجموعه با مجموعه  $\{2, -3\}$  برابرند. در نتیجه،

$$\sqrt{w} = 2 \Rightarrow w = 4, \quad 3z = -3 \Rightarrow z = -1$$

اما در مجموعه A مقدار  $x^2 - 1$  برابر ۲ نمی‌تواند باشد، چون اگر  $x^2 = 2$ ، آن‌گاه  $x = -1$  که درست نیست. پس

$$\begin{cases} 1 - x^2 = -3 \\ \frac{y}{5} = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2, -2, \quad y = 10.$$

این مسئله دو جواب برای X دارد، در نتیجه  $x + y + z + w$  برابر است با  $-2 + 10 - 1 + 4 = 11$  یا  $2 + 10 - 1 + 4 = 15$ .

۱

(الف) بله.  $\{7, 8, 9\}$

(پ) خیر.

(ث) خیر.

(ج) بله.  $\left\{\frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \frac{6}{1}\right\}$

(ح) بله.  $\{5, 10, 15, \dots\}$

(خیر).

۲

(الف)  $\{6, 7\}$  که ۱۲ عضو دارد.

(ب)  $\{11, 13, 17, 19\}$  که ۴ عضو دارد.

۳

(الف)  $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$

۴

(ب)  $\{..., -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$

۵

(الف) مجموعه اعداد طبیعی زوج یک رقمی.

(ب) مجموعه اعداد مضرب ۳ بین ۷ و ۱۰.

(پ) مجموعه اعداد طبیعی مریع کامل.

(ت) مجموعه مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد ۱۲.

۶

(الف) مجموعه اعداد اول فرد یک رقمی.

(ب) مجموعه اعداد فرد بین ۲ و ۸.

۷

(الف) درست

(ت) غلط

۸

(الف)  $\{1\} \notin A$

(ت)  $4 \notin A$

(ج)  $\{3, \{4\}\} \notin A$

(ث)  $\{1, 2, 3\} \notin A$

۹

خیر. مثلاً اگر  $A = \{\emptyset\}$ ،  $B = \{\emptyset\}$  و  $C = \{\{\emptyset\}\}$ ، آن‌گاه

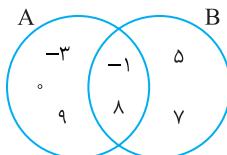
$A \notin C$ ،  $B \in C$ ،  $A \in B$

۱۰

(الف)  $A = \{-4, -2, -1, 3, 14, 15\}$ ،  $B = \{-12, -4, -1, 7, 15, 16\}$

(ت)  $-4 \in B$

۱۱



(ب)  $\{-1, 8\}$

(پ)  $\{5, 7\}$

## فصل دهم

پاسخ پرسش‌های  
چهارگزینه‌ای

## پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

### فصل اول

۱۶- گزینه ۳ توجه کنید که  $\{3, 4\} \in A$ .

۱۷- گزینه ۴ توجه کنید که  $\{b\} \in A$  و  $b \in A \Rightarrow \{b\} \subseteq A$

۱۸- گزینه ۳ زیرمجموعه‌های دعوهای  $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$  است.

۱۹- گزینه ۲ زیرمجموعه‌های مانند  $C$ ، شامل اعداد ۱، ۳، ۵ هستند

ولی اعداد ۰، ۲، ۴، ۶ می‌توانند در  $C$  باشند یا نباشند. در نتیجه زیرمجموعه‌های  $C$  همان زیرمجموعه‌های مجموعه  $\{0, 2, 4, 6\}$  هستند که

اعداد ۰، ۲ و ۵ به آنها اضافه شده‌اند. پس جواب مسئله برابر است با ۲۴.

۲۰- گزینه ۴ اگر تعداد اعضای مجموعه  $A$  برابر  $n$  باشد، تعداد

زیرمجموعه‌های آن که همان اعضای مجموعه  $B$  هستند برابر است با  $2^n$ . در

نتیجه تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه  $B$  برابر است با  $(2^n)^n = 2^{n^2}$ . پس

$n=3$  در نتیجه  $2^{3^2} = 256$ .

۲۱- گزینه ۳ اگر از تعداد کل زیرمجموعه‌های مجموعه  $A$ ، تعداد

زیرمجموعه‌هایی را که حتی یک عدد فرد هم ندارند، کم کنیم، جواب مسئله

به دست می‌آید. زیرمجموعه‌هایی که حتی یک عدد فرد هم ندارند، همان

زیرمجموعه‌های مجموعه  $\{2, 4\}$  هستند که تعداد آنها برابر است با  $2^2 = 4$ .

در نتیجه جواب مسئله برابر است با  $2^5 - 4 = 28$ .

۲۲- گزینه ۳ چون  $n(A) = 6$ ، پس  $A = \{-5, -4, -3, 3, 4, 5\}$

۲۳- گزینه ۱ چون  $A = \{-7, -8, -9, \dots\}$ ، پس ۷ بزرگ‌ترین

عضو  $A$  است.

۲۴- گزینه ۲ چون

$A = \{21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48\}$

پس تعداد اعضای  $A$  برابر ۱۰ است.

۲۵- گزینه ۳ چون  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ، پس تعداد

زیرمجموعه‌های غیرتهی  $A$  برابر است با  $3^5 = 243$ .

۲۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اشتراک هر مجموعه‌ای با مجموعه

تهی برابر است با مجموعه‌تهی و اجتماع هر مجموعه‌ای با مجموعه‌تهی برابر

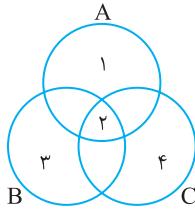
است با خود آن مجموعه. به عبارت دیگر،

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \emptyset = A$$

بنابراین  $(A \cap B) \cup (A \cap \emptyset) = (A \cap B) \cup \emptyset = A \cap B$

۲۷- گزینه ۲ سه گزاره را کمک نمودار ون بررسی می‌کنیم.

الف) در نمودار ون زیر شرط  $A \cap B = A \cap C$  برقرار است ولی  $B \neq C$ .



۱- گزینه ۳ چون عدهای اول بین ۱۰ و ۲۰ برابر ۱۱، ۱۳، ۱۵ هستند، پس عبارت «مجموعه سه عدد اول بین ۱۰ و ۲۰» مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کند.

۲- گزینه ۳ توجه کنید که  $\sqrt{13} = \frac{3}{6} = \frac{9}{9} = 9/9$  و  $\sqrt{98} = \sqrt{14} = 4, 5, 6, 7, 8, 9$  است، که شش عضو دارد.

۳- گزینه ۱ معلوم است که ۱ عضو مجموعه موردنظر است ولی ۲، ۳ و ۴ عضو مجموعه موردنظر نیستند.

۴- گزینه ۳ معلوم است که ۳ عضو مجموعه موردنظر نیست.

۵- گزینه ۴ چون  $\{2, 6\} \notin A$  است، پس درست نیست.

۶- گزینه ۳ توجه کنید که  $\{1, 2\} \in A$  همان  $\{2, 1\}$  است. بنابراین مجموعه موردنظر  $\{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{\{1, 2\}\}$  است که چهار عضو دارد.

۷- گزینه ۲ توجه کنید که مجموعه  $\{1, 2\}$  همان مجموعه  $\{2, 1\}$  است و مجموعه  $\emptyset$  همان مجموعه  $\{\}$  است. بنابراین عضوهای  $\{1, \emptyset\}$  از مجموعه اول، عضو مجموعه دوم نیستند.

۸- گزینه ۱ معلوم است که باید  $x=1$  یا  $x=2$ ، مجموعه موردنظر می‌شود  $\{1, 2, 5\}$  که سه عضو دارد. بنابراین  $x=1$ .

۹- گزینه ۳ چون مجموع زاویه‌های مثلث برابر  $180^\circ$  است، پس هر مثلث حداقل یک زاویه باز می‌تواند داشته باشد. بنابراین مجموعه مثلث‌هایی که دو زاویه باز دارند، تهی است.

۱۰- گزینه ۲ ۱۱ عددی اول و دو رقمی است. بنابراین مجموعه عدهای اول دو رقمی تهی نیست. بقیه گزینه‌ها مجموعه‌هایی تهی‌اند.

۱۱- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که چون  $A=C$ ، عدهای  $a$  و  $b$  به ترتیبی عدهای ۶ و ۷ هستند. بنابراین در هر صورت  $ab=42$ . همین‌طور از  $ab+c=47$ . بنابراین  $c=5$ .  $A=B$  نتیجه می‌شود.

۱۲- گزینه ۱ توجه کنید که چون  $X$  عضو مجموعه سمت چپ است، پس باید عضو مجموعه سمت راست نیز باشد. بنابراین دو حالت پیش می‌آید.

$$\begin{cases} x=2x-5 \\ y-1=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$$

حالات دو

$$\begin{cases} x=5 \\ y-1=2x-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$$

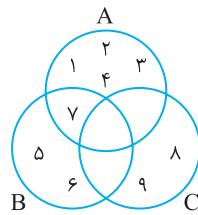
در هر دو حالت  $x+y=11$ .

۱۳- گزینه ۳ توجه کنید که  $\{a, b\} \in A \Rightarrow \{\{a, b\}\} \subseteq A$

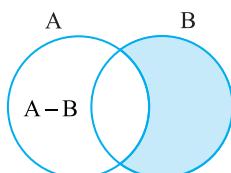
۱۴- گزینه ۳

۱۵- گزینه ۳ توجه کنید که  $\{c\} \not\subseteq A$  و  $\{c\} \in A$ .

بنابراین مجموعه  $C$  دست کم ۲ عضو دارد. ( $C = \{8, 9\}$ )

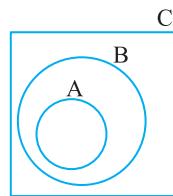


**راه حل اول** با کمک نمودار ون به دست می‌آید که هیچ عضوی در ناحیه سایه‌دار وجود ندارد. بنابراین  $B \subseteq A$ . ضمناً  $A \cup B = A$  و  $A \cap B = B \neq \emptyset$ .



**راه حل دوم** از رابطه  $X \cup Y = Z$  به دست می‌آید که  $Y \subseteq Z$  و  $X \subseteq Z$  طبق فرض سؤال، از رابطه  $A - B = A$  به دست می‌آید  $B \subseteq A$ .

**گزینه ۳** برای حل این مسئله از نمودار ون کمک می‌گیریم. با توجه به فرض مسئله  $C \cap A = A$ ,  $A \cap C = A$ ,  $A - B = \emptyset$ ,  $A \cup C = C$  و  $B - C = \emptyset$ .



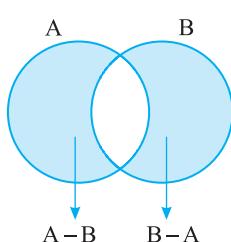
**گزینه ۱** با توجه کنید که  $M - N = \{b, \{1, 2\}, \Delta\}$

زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعه  $M - N$  عبارت‌اند از  $\{b, \{1, 2\}\}, \{b, \Delta\}, \{\{1, 2\}, \Delta\}$

پس مجموعه  $M - N$ , سه زیرمجموعه دو عضوی دارد.

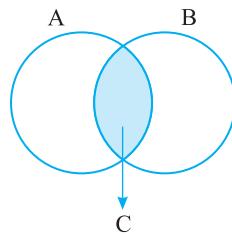
**گزینه ۱** با کمک نمودار ون کنید که  $A \cap B = \{1, 3, 5\}$ ,  $A \cup B = \{2, 4, 6\}$ ,  $A - (A \cap B) = \{2, 4, 6\}$

**گزینه ۴** با کمک نمودار ون به دست می‌آید که ناحیه رنگی، مجموعه موردنظر است. ناحیه رنگی شامل عضوهای هر دو مجموعه  $A$  و  $B$  است به جز اعضای مشترک هر دو مجموعه  $A$  و  $B$  ( $A \cap B$ ) که برابر است با  $(A \cup B) - (A \cap B)$ .

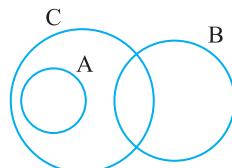


**گزینه ۳** با توجه کنید که  $A \cup B = \{\nabla, \emptyset, \{\emptyset\}, \Delta, ?, \{\emptyset, \nabla\}, \{?\}\}$  بنابراین  $n(A \cup B) = 7$ .

ب) در این حالت، همواره رابطه  $C \cap A = C$  برقرار است.



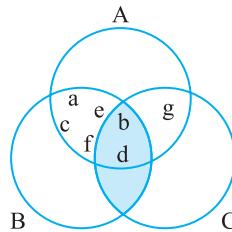
پ) از فرض  $A \subseteq C$  نمی‌توان نتیجه گرفت  $A \cap B = B$  (مطابق نمودار ون زیر).



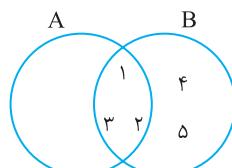
**گزینه ۲** ابتدا توجه کنید که  $A = \{2, 4, 6, \dots\}$ ,  $B = \{3, 6, 9, \dots\}$

بنابراین مجموعه  $A \cap B$  شامل اعداد طبیعی زوج و مضرب ۳ است که همان اعداد طبیعی مضرب ۶ می‌شود، یعنی  $A \cap B = \{6, 12, \dots\}$ . پس کوچکترین عضو مجموعه  $A \cap B$  برابر است با ۶.

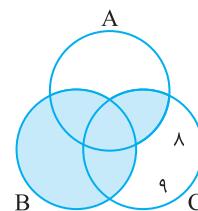
**گزینه ۲** با توجه به فرض مسئله، نمودار ون زیر به دست می‌آید. پس  $b$  و  $d$  حتماً عضو مجموعه  $B \cap C$  هستند و  $c$ ,  $e$ ,  $a$ ,  $f$ ,  $g$  حتماً عضو این مجموعه نیستند. بنابراین گزینه (۲) رد می‌شود.



**گزینه ۴** چون  $B \subseteq A \cup B$ , پس مجموعه  $B$  حداکثر ۵ عضو می‌تواند داشته باشد. در نمودار ون زیر، شرایط مسئله برقرار است.



**گزینه ۲** با کمک نمودار ون مسئله را حل می‌کنیم. با توجه به فرض مسئله، ابتدا به دست می‌آید که اعداد ۸ و ۹ عضو مجموعه‌های  $A$  و  $B$  نیستند، چون در غیر این صورت عضو مجموعه  $A \cup B$  می‌شند.



از طرف دیگر ناحیه رنگی در نمودار ون برابر با اشتراک دو مجموعه  $A \cup B$  و  $C \cup B$  است که برابر است با مجموعه  $\{5, 6, 7, 8\}$ . برای اینکه مجموعه  $C$  کمترین تعداد عضو را داشته باشد، این اعداد را عضو مجموعه  $C$  قرار نمی‌دهیم.