کنکور سراسری ۹۵ و ۹۶

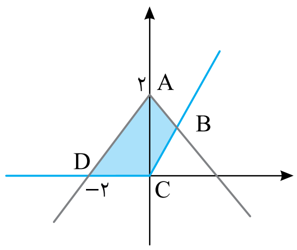
پاسخ تشریحی آزمون ۱۱۵

۱- گزینه‌ی ۴ با استفاده از رابطه‌ی بازگشتی $a_n=۲a_{n-۱}+۱$ و جمله‌ی اول $a_۱=۱$، جمله‌ی هشتم را محاسبه می‌کنیم:

$$a_۲=۲\times۱+۱=۳\ ,\ a_۳=۲\times۳+۱=۷\ ,\ a_۴=۲\times۷+۱=۱۵\ ,\ a_۵=۲\times۱۵+۱=۳۱\ ,\ a_۶=۲\times۳۱+۱=۶۳$$

$$a_۷=۲\times۶۳+۱=۱۲۷\ ,\ a_۸=۲\times۱۲۷+۱=۲۵۵$$

۲- گزینه‌ی ۳ با تعیین ضابطه، دو تابع مورد نظر را رسم می‌کنیم:



$$y=۲-|x|=\begin{cases}۲-x & x\geq ۰\\ ۲+x & x<۰\end{cases}\ ,\ y=x+|x|=\begin{cases}۲x & x\geq ۰\\ ۰ & x<۰\end{cases}$$

ابتدا مختصات نقطه‌ی B را محاسبه می‌کنیم:

$$۲-x_B=۲x_B\Rightarrow ۳x_B=۲\Rightarrow x_B=\frac{۲}{۳}$$

$$S_{ABCD}=S_{\underset{ABC}{\triangle}}+S_{\underset{ACD}{\triangle}}=\frac{\frac{۲}{۳}\times۲}{۲}+\frac{۲\times۲}{۲}=\frac{۲}{۳}+۲=\frac{۸}{۳}$$

۳- گزینه‌ی ۴ با توجه به محدوده‌ی تعریف معادله $(x>-۲)$، آن را حل می‌کنیم:

$$\log_۳(۲x^۲+۱)-\log_۳(x+۲)=۱\Rightarrow\log_۳\frac{۲x^۲+۱}{x+۲}=۱\Rightarrow\frac{۲x^۲+۱}{x+۲}=۳\Rightarrow ۲x^۲+۱=۳x+۶\Rightarrow ۲x^۲-۳x-۵=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\\ x=\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

حال به محاسبه‌ی $\log_۸(۲x-۱)$ می‌پردازیم. با توجه به محدوده‌ی تعریف این لگاریتم $(x>\frac{۱}{۲})$، تنها $x=\frac{۵}{۲}$ قابل قبول است.

$$\log_۸(۲x-۱)=\log_۸(۲\times\frac{۵}{۲}-۱)=\log_۸ ۴=\log_{۲^۳} ۲^۲=\frac{۲}{۳}$$

۴- گزینه‌ی ۱ ابتدا $A\times B$ را محاسبه کرده، سپس آن را وارون می‌کنیم.

$$A\times B=\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ -۳ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴-۱۲ & ۰+۴\\ ۲-۹ & ۰+۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۸ & ۴\\ -۷ & ۳\end{bmatrix}$$

$$(A\times B)^{-۱}=\frac{۱}{(-۸\times۳)+(۴\times۷)}\begin{bmatrix}۳ & -۴\\ ۷ & -۸\end{bmatrix}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}۳ & -۴\\ ۷ & -۸\end{bmatrix}$$

۵- گزینه‌ی ۲ با توجه به نمودار، زاویه‌ی مربوط به گروه خونی نامعلوم برابر است با:

$$۳۶۰^\circ-(۷۰^\circ+۷۵^\circ+۱۰۰^\circ+۳۵^\circ)=۳۶۰^\circ-۲۸۰^\circ=۸۰^\circ$$

این زاویه، مربوط به ۳۲ نفر است. اگر تعداد کل افراد را n بنامیم، داریم:

$$\frac{۸۰^\circ}{۳۶۰^\circ}=\frac{۳۲}{n}\Rightarrow\frac{۳۲}{n}=\frac{۲}{۹}\Rightarrow n=۹\times۱۶\Rightarrow n=۱۴۴$$

اگر تعداد افراد با گروه خونی B را x بنامیم، می‌توان نوشت:

$$\frac{x}{۱۴۴}=\frac{۷۵}{۳۶۰}\Rightarrow x=\frac{۱۴۴\times۷۵}{۳۶۰}=\frac{۳۰۰}{۱۰}=۳۰$$

۶- گزینه‌ی ۳ اگر اضلاع مربع را با x_i نمایش دهیم، می‌دانیم:

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}\Rightarrow ۰/۲=\frac{\sigma}{۱۵}\Rightarrow\sigma=۱۵\times۰/۲=۳$$

با توجه به فرمول $\sigma^۲=\frac{\sum x_i^۲}{n}-\bar{x}^۲$ برای محاسبه‌ی واریانس، داریم:

$$۳^۲=\frac{\sum x_i^۲}{n}-۱۵^۲\Rightarrow\frac{\sum x_i^۲}{n}=۲۲۵+۹\Rightarrow\frac{\sum x_i^۲}{n}=۲۳۴$$

با توجه به این که مساحت هر مربع با طول ضلع x_i برابر $x_i^۲$ است، میانگین مساحت مربع‌ها همان $\frac{\sum x_i^۲}{n}$ یعنی ۲۳۴ می‌باشد.

۷- گزینه‌ی ۲ تعداد اعداد ۳ رقمی که می‌توان با این ۵ کارت ساخت، برابر $۶۰=۳\times۴\times۵$ است. ضمناً با ارقام $\{۱,۲,۳\}$، $\{۱,۳,۵\}$، $\{۲,۳,۴\}$ و $\{۳,۴,۵\}$ می‌توان اعداد مضرب ۳ ساخت. (مجموع این اعداد مضربی از ۳ می‌باشد.) بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A)=\frac{۴\times۳!}{۶۰}=\frac{۴\times۶}{۶۰}=۰/۴$$

۸- گزینه‌ی ؟ **روش اول:** معادله‌ی داده شده به ازای $x=\frac{۳}{۲}$ تعریف نشده است.

$$\left|\frac{۲-x}{۲x-۳}\right|>۱\Rightarrow\frac{|۲-x|}{|۲x-۳|}>۱\Rightarrow|۲-x|>|۲x-۳|\Rightarrow(۲-x)^۲>(۲x-۳)^۲\Rightarrow(۲x-۳)^۲-(۲-x)^۲<۰$$

$$\Rightarrow(۲x-۳+۲-x)(۲x-۳-۲+x)<۰\Rightarrow(x-۱)(۳x-۵)<۰\Rightarrow۱<x<\frac{۵}{۳}\ ,\ x\neq\frac{۳}{۲}\Rightarrow x\in(۱,\frac{۳}{۲})\cup(\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۳})$$

روش دوم:

$$\left|\frac{۲-x}{۲x-۳}\right|>۱\Rightarrow\begin{cases}\frac{۲-x}{۲x-۳}>۱\Rightarrow\frac{۲-x-۲x+۳}{۲x-۳}>۰\Rightarrow\frac{-۳x+۵}{۲x-۳}>۰\Rightarrow\frac{۳}{۲}<x<\frac{۵}{۳}\\ \frac{۲-x}{۲x-۳}<-۱\Rightarrow\frac{۲-x+۲x-۳}{۲x-۳}<۰\Rightarrow\frac{x-۱}{۲x-۳}<۰\Rightarrow۱<x<\frac{۳}{۲}\end{cases}\xrightarrow{\ \cup\ }x\in(۱,\frac{۳}{۲})\cup(\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۳})$$

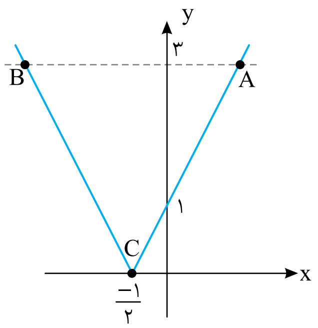
۹- گزینه‌ی ۱ دو طرف عبارت داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲=(\frac{۱}{۲})^۲\Rightarrow\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۴}\Rightarrow۱-\sin۲\alpha=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin۲\alpha=\frac{۳}{۴}$$

با توجه به این که $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)=-\sin۲\alpha$، بنابراین $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)=-\frac{۳}{۴}$.

۱۰- گزینه‌ی ۳ ضابطه‌ی تابع gof را محاسبه می‌کنیم:

$$gof(x)=\sqrt{۴(x^۲+x)+۱}=\sqrt{۴x^۲+۴x+۱}=\sqrt{(۲x+۱)^۲}=|۲x+۱|$$



با توجه به شکل روبه‌رو، طول نقاط A و B از حل معادله‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$|۲x+۱|=۳\Rightarrow۲x+۱=\pm۳\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\x=-۲\end{cases}$$

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{ABC}=\frac{۳\times(۲+۱)}{۲}=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ با توجه به این که $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{۵}{۲}$ داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+|۲x|}{۲x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+۲)x}{۲x}=\frac{a+۲}{۲}\Rightarrow\frac{a+۲}{۲}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow a=۳$$

حال به محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to-۱}f(x)$ می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to-۱}f(x)=\lim_{x\to-۱}\frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}\times\frac{۳x-\sqrt{۴x^۲+۵}}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۵}}=\lim_{x\to-۱}\frac{۹x^۲-۴x^۲-۵}{(۲x+۲)(۳x-\sqrt{۴x^۲+۵})}$$

$$=\lim_{x\to-۱}\frac{۵(x-۱)(x+۱)}{۲(x+۱)(۳x-\sqrt{۴x^۲+۵})}=\frac{۵(-۱-۱)}{۲(-۳-۳)}=\frac{۵}{۶}$$

۱۲- گزینه‌ی ۱ برای آن که تابع f در $x=۰$ پیوسته باشد، می‌بایست $\lim\limits_{x\to۰}f(x)=f(۰)=a$. حال به محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to۰}f(x)$ می‌پردازیم:

روش اول:

$$a=\lim_{x\to۰}\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^۲x}=\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x}-۱)}{۱-\cos^۲x}=\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x}-۱)}{(۱+\cos x)(۱+\sqrt{\cos x})(۱-\sqrt{\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to۰}\frac{-\sqrt{\cos x}}{(۱+\cos x)(۱+\sqrt{\cos x})}=\frac{-۱}{۲\times۲}=-\frac{۱}{۴}$$

روش دوم: با توجه به هم‌ارزی‌های $\sin x\sim x$، $\cos x\sim ۱-\frac{x^{۲}}{۲}$ و $\sqrt{۱+u}\sim ۱+\frac{u}{۲}$ می‌توان نوشت:

$$a=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^{۲} x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\frac{x^{۲}}{۲}-\sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{۲}}}{x^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\frac{x^{۲}}{۲}-(۱-\frac{x^{۲}}{۴})}{x^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{-\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۲}}{۴}}{x^{۲}}=-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}=-\frac{۱}{۴}$$

روش سوم: از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$a=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^{۲} x}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۰}\frac{-\sin x-\frac{-\sin x}{۲\sqrt{\cos x}}}{۲\sin x\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{-۱+\frac{۱}{۲\sqrt{\cos x}}}{۲\cos x}=\frac{-۱+\frac{۱}{۲}}{۲}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{۲}=-\frac{۱}{۴}$$

۱۳- گزینه‌ی ۱ مقدار حد خواسته شده، همان $f'(۲)$ می‌باشد:

$$f(x)=(\frac{x+۲}{۲x-۳})^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۳}{۲}(\frac{x+۲}{۲x-۳})^{\frac{۱}{۲}}\times\frac{-۳-۴}{(۲x-۳)^{۲}}\xrightarrow{x=۲}f'(۲)=\frac{۳}{۲}\times\sqrt{۴}\times(-\frac{۷}{۱^{۲}})=-۲۱$$

۱۴- گزینه‌ی ۴ دو پیشامد موفقیت عمل جراحی اشخاص A و B مستقل هستند، یعنی $P(A\cap B)=P(A)P(B)$. پیشامد موفقیت حداقل یکی از دو عمل جراحی، همان $A\cup B$ می‌باشد و داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=۰/۹+۰/۸-(۰/۹)(۰/۸)=۱/۷-۰/۷۲=۰/۹۸$$

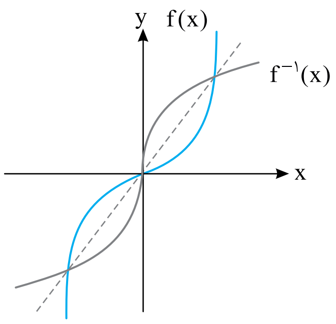
۱۵- گزینه‌ی ۴ احتمال k بار پیروزی در n بار آزمایش برابر است با:

$$\binom{n}{k}p^{k}\times(۱-p)^{n-k}$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\binom{۶}{۴}(\frac{۳}{۴})^{۴}(\frac{۱}{۴})^{۲}}{\binom{۶}{۳}(\frac{۳}{۴})^{۳}(\frac{۱}{۴})^{۳}}=\frac{\frac{۶\times۵}{۲}\times\frac{۳^{۴}}{۴^{۶}}}{\frac{۶\times۵\times۴}{۶}\times\frac{۳^{۳}}{۴^{۶}}}=\frac{۶\times۳}{۸}=\frac{۹}{۴}$$

۱۶- گزینه‌ی ۳ تابع داده شده را به صورت دو ضابطه‌ای نوشته و رسم می‌کنیم:



$$f(x)=x|x|=\begin{cases}x^{۲} & x\geq ۰\\ -x^{۲} & x<۰\end{cases}$$

سپس برای رسم نمودار $f^{-۱}$، نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم.

۱۷- گزینه‌ی ۳ جمله‌ی اول این دنباله برابر نصف مجموع جملات دوم به بعد است، پس:

$$a_{۱}=\frac{۱}{۲}(a_{۲}+a_{۳}+...)\Rightarrow a_{۱}=\frac{۱}{۲}\times\frac{a_{۲}}{۱-q}\Rightarrow a_{۱}=\frac{۱}{۲}\times\frac{a_{۱}q}{۱-q}\Rightarrow ۱=\frac{۱}{۲}\times\frac{q}{۱-q}\Rightarrow ۲-۲q=q\Rightarrow ۳q=۲\Rightarrow q=\frac{۲}{۳}$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ معادله‌ی داده شده را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، بازنویسی کرده و آن را حل می‌کنیم.

$$۲\sin^{۲} x+۳\cos x=۰\Rightarrow ۲(۱-\cos^{۲} x)+۳\cos x=۰\Rightarrow -۲\cos^{۲} x+۳\cos x+۲=۰$$

$$\Rightarrow \cos x=\frac{-۳\pm\sqrt{۹+۱۶}}{-۴}\Rightarrow\begin{cases}\cos x=-\frac{۱}{۲}\\ \cos x=۲ \text{ غ ق ق}\end{cases}\Rightarrow \cos x=\cos\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$$

۱۹- گزینه‌ی ۲ طول پای عمود بر منحنی $f(x)=x^{۲}$ از نقطه‌ی $A(۰,۴/۵)$ را α می‌نامیم. بنابراین مختصات پای عمود $B(\alpha,\alpha^{۲})$ است. خط AB بر منحنی $y=x^{۲}$ در نقطه‌ی B عمود است؛ پس شیب این خط برابر قرینه و معکوس مشتق تابع است.

$$m_{AB}=-\frac{۱}{f'(\alpha)}\Rightarrow\frac{\alpha^{۲}-۴/۵}{\alpha-۰}=-\frac{۱}{۲\alpha}\Rightarrow\alpha^{۲}-۴/۵=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\alpha^{۲}=۴\xrightarrow{\alpha>۰}\alpha=۲$$

۲۰- گزینه‌ی ۳ شیب خط عمود بر نیمساز ربع اول برابر -1 است؛ پس مشتق تابع ضمنی داده شده، برابر -1 می‌باشد.

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{1+\frac{y}{2\sqrt{xy}}}{1+\frac{x}{2\sqrt{xy}}}\xrightarrow{y'=-1}1+\frac{y}{2\sqrt{xy}}=1+\frac{x}{2\sqrt{xy}}\Rightarrow y=x$$

با قرار دادن $y=x$ در معادله‌ی تابع، داریم:

$$x+\sqrt{xy}+y=12\Rightarrow x+\sqrt{x^2}+x=12\Rightarrow\begin{cases}x\geq 0: 3x=12\Rightarrow x=4\\ x<0: x=12 \ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۲۱- گزینه‌ی ۲ نقاط بحرانی تابع در بازه‌ی $[-4,3]$ را پیدا می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-15x\Rightarrow f'(x)=x^2-2x-15\xrightarrow{f'=0}(x-5)(x+3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=-3\\x=5\end{cases}$$

$x=5$ در بازه‌ی مورد نظر نیست. برای محاسبه‌ی مقادیر ماکزیمم و مینیمم، مقدار تابع را در نقاط ابتدا و انتهای بازه و نقاط بحرانی با هم مقایسه می‌کنیم:

$$f(-4)=-\frac{64}{3}-16+60=-\frac{64}{3}+44=\frac{68}{3}=22/\overline{6}$$

$f(-3)=-\frac{27}{3}-9+45=-18+45=27$: ماکزیمم مطلق ، $f(3)=\frac{27}{3}-9-45=-45$: مینیمم مطلق

۲۲- گزینه‌ی ۳ نمودار تابع f در مبدأ مختصات بر محور xها مماس است؛ پس $f'(0)=0$.

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+b\xrightarrow{f'(0)=0}b=0$$

ضمناً -4 یک ریشه‌ی تابع است. پس:

$$f(x)=x^4+ax^3=x^3(x+a)\xrightarrow{f(-4)=0}(-4)^3(-4+a)=0\Rightarrow a=4$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x)=x^4+4x^3$ می‌باشد. برای محاسبه‌ی مینیمم، داریم:

$$f'(x)=0\Rightarrow 4x^3+12x^2=0\Rightarrow x^2(4x+12)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=-3\end{cases}$$

مشخص است که $x=-3$ طول مینیمم تابع است. مقدار مینیمم، برابر است با:

$$f(-3)=(-3)^4+4(-3)^3=81-4\times 27=-27$$

۲۳- گزینه‌ی ۱ فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس، برابر شعاع دایره است. فاصله‌ی نقطه‌ی $(2,-1)$ از خط $x-y-1=0$ برابر است با:

$$R=\frac{|2+1-1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

بنابراین معادله‌ی دایره به صورت مقابل است:

$$(x-2)^2+(y+1)^2=(\sqrt{2})^2\Rightarrow(x-2)^2+(y+1)^2=2$$

اکنون محل تقاطع این دایره را با محور xها (خط $y=0$) به‌دست می‌آوریم:

$$(x-2)^2+(0+1)^2=2\Rightarrow(x-2)^2=1\Rightarrow x-2=\pm 1\Rightarrow\begin{cases}x=3\\x=1\end{cases}$$

۲۴- گزینه‌ی ۴ معادله‌ی هذلولی را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$kx^2-2y^2+4y=4\Rightarrow kx^2-2(y^2-2y)=4\Rightarrow kx^2-2(y-1)^2=4-2\Rightarrow\frac{x^2}{\frac{2}{k}}-(y-1)^2=1\Rightarrow a^2=\frac{2}{k},b^2=1\xrightarrow{c=\sqrt{a^2+b^2}}c=\sqrt{\frac{2}{k}+1}$$

خروج از مرکز هذلولی از فرمول $e=\frac{c}{a}$ به‌دست می‌آید، پس:

$$e=\frac{c}{a}\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{\sqrt{\frac{2}{k}+1}}{\sqrt{\frac{2}{k}}}\Rightarrow 3=\frac{\frac{2}{k}+1}{\frac{2}{k}}\Rightarrow\frac{6}{k}=\frac{2}{k}+1\Rightarrow\frac{4}{k}=1\Rightarrow k=4$$

۲۵- گزینه‌ی ۴ برای محاسبه‌ی انتگرال داریم:

$$\int_{-1}^{1}(|3x|-[x])dx=\int_{-1}^{1}|3x|dx-\int_{-1}^{1}[x]dx=\int_{-1}^{0}(-3x)dx+\int_{0}^{1}3xdx-\int_{-1}^{0}(-1)dx-\int_{0}^{1}0\times dx$$

$$=-\frac{3x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+\frac{3x^2}{2}\Big|_{0}^{1}+x\Big|_{-1}^{0}=(0+\frac{3}{2})+(\frac{3}{2}-0)+(0+1)=3+1=4$$

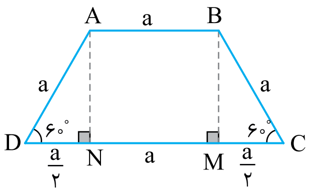
۲۶- گزینه‌ی ۱ انتگرال نامعین داده شده برابر است با:

$$\int\frac{(\sqrt{x}-۱)(x+\sqrt{x})}{x^۲}dx=\int\frac{(\sqrt{x}-۱)\sqrt{x}(\sqrt{x}+۱)}{x^۲}dx=\int\frac{\sqrt{x}(x-۱)}{x^۲}dx=\int\frac{x^{\frac{۳}{۲}}-x^{\frac{۱}{۲}}}{x^۲}dx=\int(x^{-\frac{۱}{۲}}-x^{-\frac{۳}{۲}})dx$$

$$=\frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}}-\frac{x^{-\frac{۱}{۲}}}{-\frac{۱}{۲}}+c=۲\sqrt{x}+\frac{۲}{\sqrt{x}}+c=\frac{۱}{\sqrt{x}}(۲x+۲)+c$$

بنابراین $f(x)=۲x+۲$.

۲۷- گزینه‌ی ۲ در شکل روبه‌رو با توجه به این که $\hat{C}=\hat{D}=۶۰^\circ$، بنابراین $CM=DN=\frac{a}{۲}$. محیط ذوزنقه برابر ۳۰ است، پس:



$$۳a+a+۲\times\frac{a}{۲}=۳۰\Rightarrow ۵a=۳۰\Rightarrow a=۶$$

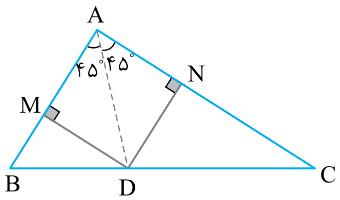
ارتفاع این ذوزنقه برابر است با:

$$AN=a\sin ۶۰^\circ=۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}$$

بنابراین مساحت ذوزنقه برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\times ۳\sqrt{۳}(۶+۱۲)=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\times ۱۸=۲۷\sqrt{۳}$$

۲۸- گزینه‌ی ۴ مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC برابر مجموع مساحت دو مثلث ABD و ADC است. پس:



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=S_{\overset{\Delta}{ADC}}+S_{\overset{\Delta}{ABD}}\Rightarrow\frac{AB\times AC}{۲}=\frac{DN\times AC}{۲}+\frac{DM\times AB}{۲}$$

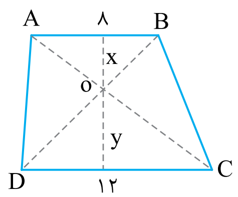
هر نقطه روی نیمساز، از دو ضلع زاویه، به یک فاصله است، پس $DM=DN=x$:

$$۳\times ۷=x\times ۷+x\times ۳\Rightarrow ۱۰x=۲۱\Rightarrow x=۲/۱$$

$\hat{A}_۱=۴۵^\circ$، پس مثلث ADN قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است و داریم:

$$AD=x\sqrt{۲}\Rightarrow AD=۲/۱\sqrt{۲}$$

۲۹- گزینه‌ی ۳ دو مثلث OAB و OCD متشابه هستند، پس:



$$\begin{cases}\overset{\Delta}{OAB}\sim\overset{\Delta}{OCD}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{۸}{۱۲}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۳x=۲y\\ x+y=۱۰\Rightarrow ۳x+۳y=۳۰\end{cases}\Rightarrow ۵y=۳۰\Rightarrow y=۶, x=۴$$

بنابراین مساحت مثلث OCD برابر است با:

$$S_{\overset{\Delta}{OCD}}=\frac{y\times ۱۲}{۲}=۳۶$$

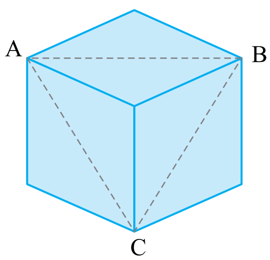
از آن‌جا که ارتفاع مثلث ADC نیز برابر ۱۰ است، داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{ADC}}=\frac{۱۰\times ۱۲}{۲}=۶۰$$

بنابراین:

$$S_{\overset{\Delta}{ADO}}=S_{\overset{\Delta}{ADC}}-S_{\overset{\Delta}{OCD}}=۶۰-۳۶=۲۴$$

۳۰- گزینه‌ی ۴ طول ۳ ضلع این مثلث برابر هم و $\sqrt{۲}$ برابر طول یال است.



$$AB=BC=AC=\sqrt{۲}\times ۴$$

مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a از فرمول $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ به‌دست می‌آید:

$$S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\sqrt{۲}\times ۴)^۲=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times ۲\times ۱۶=۸\sqrt{۳}$$

پاسخ تشریحی آزمون ۱۱۶

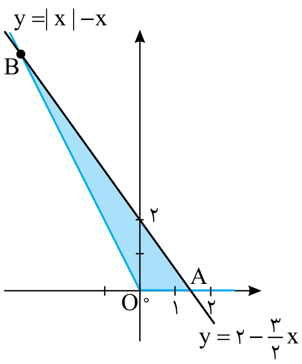
۱- گزینه‌ی ۴ در این دنباله، هر جمله از دو برابر جمله‌ی قبل، دو واحد کم تر است، پس ۸ جمله‌ی اول برابر است با:

$a_{۱}=۳\quad,\quad a_{۲}=۲\times۳-۲=۴\quad,\quad a_{۳}=۲\times۴-۲=۶\quad,\quad a_{۴}=۲\times۶-۲=۱۰\quad,\quad a_{۵}=۲\times۱۰-۲=۱۸$

$a_{۶}=۲\times۱۸-۲=۳۴\quad,\quad a_{۷}=۲\times۳۴-۲=۶۶\quad,\quad a_{۸}=۲\times۶۶-۲=۱۳۰$

بنابراین $a_{۸}-a_{۷}=۱۳۰-۶۶=۶۴$

۲- گزینه‌ی ۳ نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



$$y=|x|-x=\begin{cases}۰ & x\geq۰\\ -۲x & x<۰\end{cases}$$

مختصات محل تلاقی دو تابع یعنی نقاط A و B به این صورت به‌دست می‌آید:

$$A:\ ۲-\frac{۳}{۲}x=۰\Rightarrow x=\frac{۴}{۳}\Rightarrow A(\frac{۴}{۳},۰)\quad,\quad B:۲-\frac{۳}{۲}x=-۲x\Rightarrow x=-۴\Rightarrow B(-۴,۸)$$

$$S_{ABO}=\frac{y_B\times x_A}{۲}=\frac{۸\times\frac{۴}{۳}}{۲}=\frac{۱۶}{۳}$$

۳- گزینه‌ی ۲ با توجه به محدوده‌ی تعریف معادله $(x>۳)$ به حل معادله می‌پردازیم:

$$\log(x^{۲}-x-۶)-\log(x-۳)=\log(۲x-۵)\Rightarrow\log(\frac{x^{۲}-x-۶}{x-۳})=\log(۲x-۵)\Rightarrow\frac{(x-۳)(x+۲)}{x-۳}=۲x-۵\xrightarrow{x\neq۳}x+۲=۲x-۵\Rightarrow x=۷$$

$$\log_{۴}\sqrt[۳]{x+۱}=\log_{۴}\sqrt[۳]{۸}=\log_{۲^{۲}}۲=\frac{۱}{۲}$$

۴- گزینه‌ی ۱ اگر ماتریسی وارون‌پذیر نباشد، دترمینان آن ماتریس برابر صفر است.

$$A+۲B=\begin{bmatrix}a & -۳\\ ۵ & a+۲\end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-۲ & ۳\\ ۹ & a+۴\end{bmatrix}$$

$$|A+۲B|=۰\Rightarrow(a-۲)(a+۴)-۳\times۹=۰\Rightarrow a^{۲}+۲a-۳۵=۰\Rightarrow(a+۷)(a-۵)=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۵\\ a=-۷\end{cases}$$

۵- گزینه‌ی ۲ در ۲۳ داده‌ی آماری، یازده داده کمتر از میانه و یازده داده بیش‌تر از میانه است. بنابراین ۵ داده کمتر از چارک اول و ۵ داده بیش‌تر از چارک سوم است.

بنابراین ۵ داده در سمت چپ، ۵ داده در سمت راست و ۱۳ داده داخل و روی جعبه است. بنابراین میانگین کل داده‌ها برابر است با:

$$\bar{x}=\frac{۵\times۲۱/۶+۱۳\times۲۵+۵\times۳۳}{۲۳}=\frac{۱۰۸+۳۲۵+۱۶۵}{۲۳}=\frac{۵۹۸}{۲۳}=۲۶$$

۶- گزینه‌ی ۴ واریانس داده‌ها از فرمول $\frac{\sum x_i^{۲}}{n}-\bar{x}^{۲}$ به‌دست می‌آید:

$$\sigma^{۲}=\frac{\sum x_i^{۲}}{n}-(\frac{\sum x_i}{n})^{۲}=\frac{۲۱۹۰}{۳۰}-(\frac{۲۴۰}{۳۰})^{۲}=۷۳-۸^{۲}=۹\Rightarrow\sigma^{۲}=۳$$

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۳}{۸}=۰/۳۷۵$$

۷- گزینه‌ی ۲ حالات مطلوب به صورت زیر است:

$(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵),(۵,۶)$

$(۲,۱),(۳,۲),(۴,۳),(۵,۴),(۶,۵)$

بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲\times۵}{۶^{۲}}=\frac{۵}{۱۸}$$

۸- گزینه‌ی ۴ عبارت $x^{۲}+۱$ همواره نامنفی است، پس $|x^{۲}+۱|=x^{۲}+۱$.

$$۲x+۱-|x-۲|>x^{۲}+۱\Rightarrow -x^{۲}+۲x>|x-۲|\Rightarrow -x(x-۲)>|x-۲|$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x\ge ۲ & -x(x-۲)>(x-۲)\Rightarrow -x>۱\Rightarrow x<-۱ \quad \text{غ ق ق} \\ x<۲ & -x(x-۲)>-(x-۲)\Rightarrow -x<-۱\Rightarrow x>۱ \end{cases}\Rightarrow ۱<x<۲$$

۹- گزینه‌ی ۱ می‌دانیم $\tan(\frac{\pi}{۲}+\frac{\alpha}{۲})=-\cot\frac{\alpha}{۲}$. اکنون با توجه به تساوی داده شده، داریم:

$$\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{۲\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{\sin\frac{\alpha}{۲}}{\cos\frac{\alpha}{۲}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\tan\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cot\frac{\alpha}{۲}=۲\Rightarrow -\cot\frac{\alpha}{۲}=-۲\Rightarrow\tan(\frac{\pi}{۲}+\frac{\alpha}{۲})=-۲$$

۱۰- گزینه‌ی ۳ با توجه به این‌که $f(۲x+۱)=۸x^{۲}+۶x+۵$، با تغییر متغیر $۲x+۱=t$ داریم:

$$۲x+۱=t\Rightarrow x=\frac{t-۱}{۲}\Rightarrow f(t)=۸(\frac{t-۱}{۲})^{۲}+۶(\frac{t-۱}{۲})+۵\Rightarrow f(t)=۸(\frac{t^{۲}-۲t+۱}{۴})+۳(t-۱)+۵\Rightarrow f(t)=۲t^{۲}-۴t+۲+۳t-۳+۵$$

$$\Rightarrow f(t)=۲t^{۲}-t+۴\Rightarrow f(x)=۲x^{۲}-x+۴$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ حاصل حد کسر برابر عددی غیرصفر است، با توجه به این‌که حد صورت کسر برابر صفر بوده، بنابراین حد مخرج کسر نیز برابر صفر است، زیرا در غیر این صورت باید حد کسر بی‌نهایت شود. پس: $\lim\limits_{x\to ۲}ax+b=۰\Rightarrow ۲a+b=۰\Rightarrow b=-۲a$

پس از جایگذاری $b=-۲a$ مقدار حد به شکل زیر محاسبه می‌شود:

روش اول: با ضرب و تقسیم حد موردنظر در مزدوج صورت، داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{ax-۲a}\times\frac{x+\sqrt{۳x-۲}}{x+\sqrt{۳x-۲}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۳x+۲}{a(x-۲)(x+\sqrt{۳x-۲})}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x-۱)}{a(x-۲)(x+\sqrt{۳x-۲})}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{a(۲+۲)}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=-۱$$

روش دوم: از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{ax+b}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۲}\frac{۱-\frac{۳}{۲\sqrt{۳x-۲}}}{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۱-\frac{۳}{۴}}{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=-۱$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ برای آن‌که تابع f در $x=۰$ پیوسته باشد، می‌بایست $\lim\limits_{x\to ۰}f(x)$ برابر عدد حقیقی a باشد.

روش اول: با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، حد موردنظر را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}f(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x-\sin x}{x^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin x\cos x-\sin x}{x^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x(۲\cos x-۱)}{x\times x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\cos x-۱}{x}$$

با توجه به این‌که حد کسر آخر، موجود نیست، (بی‌نهایت است) هیچ مقداری برای a موجود نیست.

روش دوم: از هم‌ارزی $\sin x\sim x$ و $\sin ۲x\sim ۲x$ وقتی $x\to ۰$ استفاده می‌کنیم. $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x-\sin x}{x^{۲}}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۲x-x}{x^{۲}}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x}$

حد موردنظر نامتناهی است و مقداری برای a به‌دست نمی‌آید.

روش سوم: از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x-\sin x}{x^{۲}}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۰}\frac{۲\cos ۲x-\cos x}{۲x}$$

مابقی راه‌حل مانند دو روش قبل است.

۱۳- گزینه‌ی ۱ حد $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ همان تعریف مشتق تابع f در نقطه‌ای با طول یک است.

$$f(x)=\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}}\times\frac{۴\times ۳-۵\times ۱}{(x+۳)^{۲}}\Rightarrow f'(۱)=\frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۹}{۴}}}\times\frac{۷}{۱۶}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۷}{۱۶}=\frac{۷}{۴۸}$$

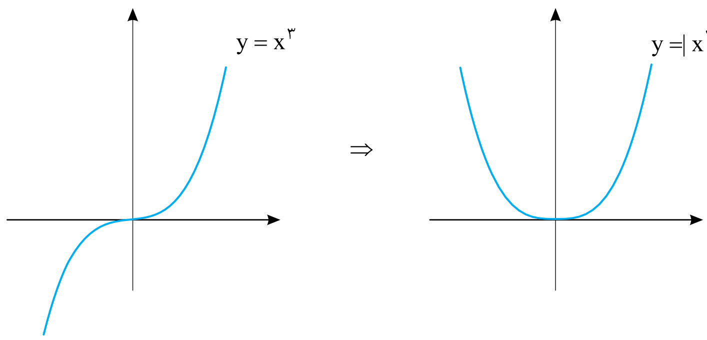
۱۴- گزینه‌ی ۳ باید یک مهره از ۴ مهره‌ی سفید و دو مهره از ۵ مهره‌ی غیرسفید انتخاب شود:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(B)}=\frac{\binom{4}{1}\binom{5}{2}}{\binom{9}{3}}=\frac{4\times 10}{\frac{9\times 8\times 7}{6}}=\frac{40}{84}=\frac{10}{21}$$

۱۵- گزینه‌ی ۴ احتمال جوانه زدن ۳ دانه و احتمال جوانه زدن ۴ دانه را با استفاده از احتمال دوجمله‌ای محاسبه کرده و با هم جمع می‌کنیم:

$$P=\binom{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)+\binom{4}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4=4\times\frac{8}{81}+\frac{16}{81}=\frac{48}{81}=\frac{16}{27}$$

۱۶- گزینه‌ی ۳ **روش اول**: با توجه به نمودار $y=|x^3|$، این تابع یک به یک نیست بنابراین وارون‌ناپذیر است.



روش دوم: سه نقطه‌ی $(1,1)$ و $(-1,1)$ و $(0,0)$ روی این تابع است، پس این تابع صعودی، نزولی، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست.

۱۷- گزینه‌ی ۱ مجذورات جملات یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_1 و قدرنسبت q، یک دنباله‌ی هندسی دیگر با جمله‌ی اول a_1^2 و قدرنسبت q^2 است، پس:

$$S'=\frac{2}{3}S^2\Rightarrow\frac{a_1^2}{1-q^2}=\frac{2}{3}\left(\frac{a_1}{1-q}\right)^2\Rightarrow\frac{a_1^2}{(1-q)(1+q)}=\frac{2}{3}\frac{a_1^2}{(1-q)^2}\Rightarrow\frac{1}{1+q}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{1-q}\Rightarrow 3-3q=2+2q\Rightarrow 5q=1\Rightarrow q=0/2$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ با استفاده از بسط معادله‌ی داده شده داریم:

$$\cos(x+\frac{\pi}{4})\cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{4}\Rightarrow(\cos x\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2})(\cos x\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(\cos^2 x-\sin^2 x)=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{4}\Rightarrow\cos 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos 2x=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

۱۹- گزینه‌ی ۴ از هر دو ضابطه مشتق می‌گیریم و با جایگذاری $x=0$ در آن‌ها، مشتق چپ و راست را محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x>0:\quad f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{\cos x(1+\cos x)+\sin x(\sin x)}{(1+\cos x)^2}\Rightarrow f'_+(0)=\dfrac{1\times 2+0}{(1+1)^2}=\dfrac{1}{2}\\ x\le 0:\quad f(x)=\sin 2x\Rightarrow f'(x)=2\cos 2x\Rightarrow f'_-(0)=2\end{array}\right\}\Rightarrow f'_-(0)-f'_+(0)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

۲۰- گزینه‌ی ۲ برای آن‌که خط مماس موازی محور x ها باشد، می‌بایست مشتق تابع برابر صفر شود. با استفاده از دستور مشتق ضمنی داریم:

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{2x-4y}{-4x+6y}\xrightarrow{y'=0}2x-4y=0\Rightarrow x=2y\Rightarrow y=\frac{x}{2}$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی به‌دست آمده در ضابطه‌ی تابع، داریم:

$$x^2-4x\left(\frac{x}{2}\right)+3\left(\frac{x}{2}\right)^2+1=0\Rightarrow x^2-2x^2+\frac{3}{4}x^2=-1\Rightarrow\frac{-1}{4}x^2=-1\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$$

۲۱- گزینه‌ی ۳ تابع در هر نقطه مشتق دوم دارد، پس مشتق دوم در نقطه‌ی عطف برابر صفر است، پس:

$$f(x)=x^3+ax^2+bx\Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b\Rightarrow f''(x)=6x+2a\xrightarrow{f''(1)=0}6+2a=0\Rightarrow a=-3$$

در ضمن، تابع از نقطه‌ی $A(1,-11)$ می‌گذرد، پس:

$$f(1)=-11\Rightarrow 1+a+b=-11\Rightarrow -3+b=-12\Rightarrow b=-9$$

بنابراین ضابطه‌ی f به صورت مقابل است:

$$f(x)=x^3-3x^2-9x\Rightarrow f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2-9(-1)=-1-3+9=5$$

۲۲- گزینه‌ی ۱ خط $x=۰$ مجانب قائم این منحنی است، پس «صفر»، ریشه‌ی مخرج است: $۰^۲+b=۰\Rightarrow b=۰$

ضمناً تابع از نقطه‌ی $(۲,۰)$ می‌گذرد، پس:

$$f(۲)=۰\Rightarrow a\times ۲+۲=۰\Rightarrow a=-۱$$

$$f(x)=\frac{-x+۲}{x^۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{-x^۲-۲x(-x+۲)}{x^۴}\xrightarrow{f'=۰}-x^۲+۲x^۲-۴x=۰\Rightarrow x^۲-۴x=۰\Rightarrow x=۰ \text{ یا } x=۴$$

$x=۰$ در دامنه‌ی تابع قرار ندارد، پس $x=۴$ طول می‌نیمم تابع است، مقدار این می‌نیمم برابر است با:

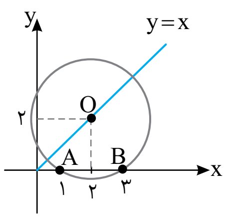
$$f(۴)=\frac{-۴+۲}{۴^۲}=\frac{-۲}{۱۶}=\frac{-۱}{۸}$$

۲۳- گزینه‌ی ۳ **روش اول**: مرکز دایره روی نیمساز ربع اول است، پس مختصات آن به صورت $O(\alpha,\alpha)$ می‌باشد. فاصله‌ی مرکز دایره از دو نقطه‌ی $A(۱,۰)$ و $B(۳,۰)$، برابر هم و برابر شعاع دایره است، پس:

$$OA=OB=\sqrt{(\alpha-۳)^۲+(\alpha-۰)^۲}=\sqrt{(\alpha-۱)^۲+(\alpha-۰)^۲}\Rightarrow ۲\alpha^۲-۶\alpha+۹=۲\alpha^۲-۲\alpha+۱\Rightarrow ۴\alpha=۸\Rightarrow \alpha=۲$$

$$R=OA=\sqrt{(۲-۱)^۲+۲^۲}=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$$

روش دوم: مرکز دایره حتماً روی عمود منصف وترهای دایره است، پس طول مرکز دایره برابر $\frac{۱+۳}{۲}=۲$ و در نتیجه عرض آن نیز برابر ۲ است و شعاع دایره برابر $OA=\sqrt{۱^۲+۲^۲}=\sqrt{۵}$ است.



۲۴- گزینه‌ی ۴ شیب مجانب‌های مایل در یک هذلولی افقی، از رابطه‌ی $\pm\frac{b}{a}$ به‌دست می‌آید، پس $\frac{b}{a}=۲$. برای یافتن خروج از مرکز، می‌توان نوشت:

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^۲}{a^۲}}=\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{a^۲}}=\sqrt{۱+(\frac{b}{a})^۲}=\sqrt{۱+۲^۲}=\sqrt{۵}$$

۲۵- گزینه‌ی ۲ ضابطه‌ی تابع $y=[x]|x|$ در اعداد صحیح تغییر می‌کند. پس:

$$\int_{-۱}^{۲}[x]|x|dx=\int_{-۱}^{۰}(-۱)(-x)dx+\int_{۰}^{۱}۰\times x\,dx+\int_{۱}^{۲}۱\times x\,dx=\int_{-۱}^{۰}x\,dx+\int_{۱}^{۲}x\,dx$$

$$=\frac{x^۲}{۲}\Big|_{-۱}^{۰}+\frac{x^۲}{۲}\Big|_{۱}^{۲}=(۰-\frac{۱}{۲})+(\frac{۴}{۲}-\frac{۱}{۲})=\frac{-۱}{۲}+\frac{۳}{۲}=۱$$

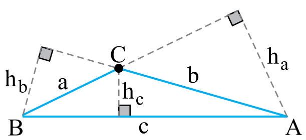
۲۶- گزینه‌ی ۳ با تفکیک کسر، انتگرال موردنظر را محاسبه می‌کنیم:

$$\int\frac{۵x^۲+۳x}{\sqrt{x}}dx=\int(\frac{۵x^۲}{x^{\frac{۱}{۲}}}+\frac{۳x}{x^{\frac{۱}{۲}}})dx=\int(۵x^{\frac{۳}{۲}}+۳x^{\frac{۱}{۲}})dx=۵\times\frac{۲}{۵}x^{\frac{۵}{۲}}+۳\times\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}+c=۲x^{\frac{۵}{۲}}+۲x^{\frac{۳}{۲}}+c=۲x^۲\sqrt{x}+۲x\sqrt{x}+c$$

$$=x\sqrt{x}(۲x+۲)+c$$

بنابراین $f(x)=۲x+۲$ می‌باشد.

۲۷- گزینه‌ی ۱ ارتفاع‌های وارد بر ضلع‌های a، b و c را به‌ترتیب با h_a، h_b و h_c نمایش می‌دهیم.



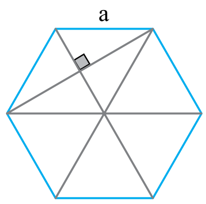
با توجه به فرمول مساحت مثلث ABC می‌دانیم:

$$bh_b=ch_c\Rightarrow ۱۰h_b=۱۵h_c\Rightarrow h_b=\frac{۳}{۲}h_c$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$ah_a=ch_c\Rightarrow a(h_b+h_c)=۱۵h_c\Rightarrow a(\frac{۳}{۲}h_c+h_c)=۱۵h_c$$

$$a(\frac{۳}{۲}+۱)=۱۵\Rightarrow a\times\frac{۵}{۲}=۱۵\Rightarrow a=۶$$

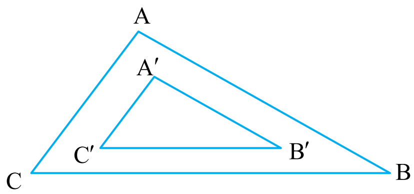


۲۸- گزینه‌ی ۲ مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a ، ۶ برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a می‌باشد، پس:

$$S=۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}\Rightarrow ۹\sqrt{۳}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^{۲}\Rightarrow a^{۲}=۶\Rightarrow a=\sqrt{۶}$$

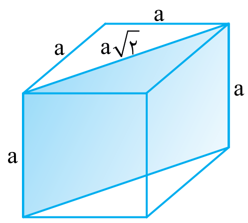
در ضمن، اندازه‌ی قطر کوچک، ۲ برابر طول ارتفاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a می‌باشد.

$$\text{طول قطر کوچک}=۲h=۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\sqrt{۳}\times\sqrt{۶}=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$$



۲۹- گزینه‌ی ۳ این دو مثلث که اضلاعی موازی دارند، متشابه هستند. نسبت تشابه آن‌ها، برابر نسبت دو ضلع بزرگ‌تر یعنی $\frac{۹}{۶}$ یا $\frac{۳}{۲}$ است. اگر مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ را به ترتیب S و S' بنامیم، داریم:

$$\frac{S}{S'}=(\frac{۳}{۲})^{۲}\Rightarrow\frac{S}{S'}=\frac{۹}{۴}\Rightarrow\frac{S-S'}{S'}=\frac{۹-۴}{۴}=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$



۳۰- گزینه‌ی ۴ مطابق شـکل، مقطع مکعب با صفحه‌ی قطری، یک مستطیل است که عرض آن برابر یال و طول آن برابر قطر وجه است. اگر طول یال را a بنامیم، مساحت این مقطع برابر است با:

$$S=a\times a\sqrt{۲}\Rightarrow a^{۲}\sqrt{۲}=۹\sqrt{۲}\Rightarrow a^{۲}=۹\Rightarrow a=۳$$

طول قطر مکعب، برابر $a\sqrt{۳}$ یعنی $۳\sqrt{۳}$ است.

پاسخ تشریحی آزمون ۱۱۷

۱- گزینه‌ی ۲

می‌دانیم اگر $f^{-۱}(a)=b$ باشد، آن‌گاه $f(b)=a$، پس

$$\left.\begin{array}{l}f^{-۱}(g(۲a))=۶\Rightarrow f(۶)=g(۲a)\\(۶,۳)\in f\Rightarrow f(۶)=۳\end{array}\right\}\Rightarrow g(۲a)=۳\Rightarrow\frac{۲a}{۲a-۱}=۳\Rightarrow ۲a=۶a-۳\Rightarrow ۴a=۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

۲- گزینه‌ی ۳ ابتدا هر یک از معادله‌ها را ساده کرده، سپس دستگاه دو معادله دو مجهول را حل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}۲^{x-۷}\times۴^{x+y}=۱\Rightarrow ۲^{x-۷}\times۲^{۲x+۲y}=۱\Rightarrow ۲^{۳x+۲y-۷}=۲^{۰}\Rightarrow ۳x+۲y-۷=۰\\\log y=۲\log ۳+\log x\Rightarrow\log y=\log(۳^{۲}\times x)\Rightarrow y=۹x\end{array}\right\}\Rightarrow ۳x+۲(۹x)-۷=۰\Rightarrow ۲۱x=۷\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow y=۳$$

۳- گزینه‌ی ۱ فرض می‌کنیم $\hat{A}=۶۰^{\circ}$ و $a=۳\sqrt{۷}$ و $b=۹$، با توجه به قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bc\cos\hat{A}\Rightarrow ۹\times۷=۹^{۲}+c^{۲}-۲\times۹\times c\times\cos۶۰^{\circ}$$

$$\Rightarrow ۶۳=۸۱+c^{۲}-۹c\Rightarrow c^{۲}-۹c+۱۸=۰\Rightarrow(c-۶)(c-۳)=۰\Rightarrow c=۳,۶$$

۴- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ آن‌گاه $A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$.

$$A=\begin{bmatrix}۳&۲\\۵&۴\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۳\times۴-۲\times۵}\begin{bmatrix}۴&-۲\\-۵&۳\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۴&-۲\\-۵&۳\end{bmatrix}$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$A^{-۱}\times(۲B)=(۲A^{-۱})\times B=\begin{bmatrix}۴&-۲\\-۵&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴&-۶\\۳&-۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۶-۶&-۲۴+۱۰\\-۲۰+۹&۳۰-۱۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۰&-۱۴\\-۱۱&۱۵\end{bmatrix}$$

۵- گزینه‌ی ۲ اگر f_i فراوانی مطلق دسته‌ی iام باشد، زاویه‌ی مربوط به آن در نمودار دایره‌ای برابر $\frac{f_i}{n}\times۳۶۰^{\circ}$ است.

$$n=\sum f_i=۱۰۰+۷۴+۳۰+۸۷+۴۲=۳۳۳\Rightarrow\theta=\frac{۷۴}{۳۳۳}\times۳۶۰^{\circ}=\frac{۲\times۳۷}{۹\times۳۷}\times۳۶۰^{\circ}=۲\times۴۰^{\circ}=۸۰^{\circ}$$

۶- گزینه‌ی ۳ ابتدا فراوانی مطلق هر دسته را به‌دست می‌آوریم:

مرکز دسته	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
فراوانی مطلق	۷	۹	۱۷	۱۱	۶

روش اول: میانگین این داده‌ها برابر است با:

$$\overline{x}=\frac{7\times6+9\times8+17\times10+11\times12+6\times14}{50}=\frac{42+72+170+132+84}{50}=\frac{500}{50}=10$$

واریانس این داده‌ها نیز برابر است با:

$$\sigma^2=\frac{7\times(6-10)^2+9\times(8-10)^2+17\times(10-10)^2+11\times(12-10)^2+6\times(14-10)^2}{50}$$
$$=\frac{7\times16+9\times4+0+11\times4+6\times16}{50}=\frac{288}{50}=5/76$$

ضریب تغییرات برابر است با:

$$C.V=\frac{\sigma}{\overline{x}}=\frac{\sqrt{5/76}}{10}=\frac{2/4}{10}=0/24$$

روش دوم: حدس می‌زنیم میانگین این داده‌ها برابر ۱۰ باشد از تمامی داده‌ها ۱۰ واحد کم می‌کنیم. می‌دانیم میانگین نیز ۱۰ واحد کم‌تر به‌دست می‌آید اما انحراف معیار تغییر نمی‌کند:

$x-10$	-4	-2	0	2	4
f_i	۷	۹	۱۷	۱۱	۶

$$\overline{x}=10+\frac{7\times(-4)+9\times(-2)+0+11\times2+6\times4}{50}=10+0=10$$

$$\sigma^2=\frac{7\times(-4)^2+9\times(-2)^2+17\times0^2+11\times2^2+6\times4^2}{50}=\frac{288}{50}=5/76$$

$$C.V=\frac{\sigma}{\overline{x}}=\frac{\sqrt{5/76}}{10}=\frac{2/4}{10}=0/24$$

۷- گزینه‌ی ۲ برای آن‌که رنگ مهره‌ها متفاوت باشد، می‌بایست یکی سفید، یکی سیاه و یکی آبی باشد، پس

$$P(A)=\frac{\binom{5}{1}\times\binom{4}{1}\times\binom{3}{1}}{\binom{12}{3}}=\frac{5\times4\times3}{\frac{12\times11\times10}{6}}=\frac{60}{220}=\frac{3}{11}$$

۸- گزینه‌ی ۱ **روش اول**: دو نامعادله را جداگانه حل می‌کنیم؛ سپس جواب‌ها را با هم اشتراک می‌گیریم:

$$\frac{3x+1}{x-3}<3\Rightarrow\frac{3x+1-3x+9}{x-3}<0\Rightarrow\frac{10}{x-3}<0\Rightarrow x<3$$

$$\frac{3x+1}{x-3}>-1\Rightarrow\frac{3x+1+x-3}{x-3}>0\Rightarrow\frac{4x-2}{x-3}>0\Rightarrow x>3 \text{ یا } x<\frac{1}{2}$$

x		$\frac{1}{2}$		3	
$\frac{4x-2}{x-3}$	$+$		$-$		$+$

اشتراک دو محدوده‌ی به‌دست آمده $x<\frac{1}{2}$ است.

روش دوم: می‌توان نامعادله‌ی زیر را به جای نامعادله‌ی اصلی حل کرد:

$$\left(\frac{3x+1}{x-3}+1\right)\left(\frac{3x+1}{x-3}-3\right)<0\Rightarrow\left(\frac{4x-2}{x-3}\right)\left(\frac{10}{x-3}\right)<0\Rightarrow\frac{20(2x-1)}{(x-3)^2}<0\Rightarrow 2x-1<0\Rightarrow x<\frac{1}{2}$$

روش سوم: با امتحان کردن عدد $x=1$ می‌توان به نادرست بودن گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ پی برد.

$$\frac{3\times1+1}{1-3}=\frac{4}{-2}=-2<-1$$

۹- گزینه‌ی ۲ **روش اول:**

$$\tan\frac{x}{۲}-\cot\frac{x}{۲}=\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}}-\frac{\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}=\frac{\sin^{۲}\frac{x}{۲}-\cos^{۲}\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}\sin\frac{x}{۲}}=\frac{-(\cos^{۲}\frac{x}{۲}-\sin^{۲}\frac{x}{۲})}{\frac{۱}{۲}\times ۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}=\frac{-\cos ۲\times\frac{x}{۲}}{\frac{۱}{۲}\sin ۲\times\frac{x}{۲}}=-۲\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{-۲}{\tan x}$$

با توجه به این‌که $\tan x=\frac{۴}{۳}$، پس

$$\tan\frac{x}{۲}-\cot\frac{x}{۲}=\frac{-۲}{\frac{۴}{۳}}=\frac{-۳}{۲}$$

روش دوم: اتحاد مثلثاتی $\cot\alpha-\tan\alpha=۲\cot ۲\alpha$ برقرار است پس:

$$\left.\begin{array}{l}\tan\frac{x}{۲}-\cot\frac{x}{۲}=-۲\cot x\\ \tan x=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\cot x=\frac{۳}{۴}\end{array}\right\}\Rightarrow\tan\frac{x}{۲}-\cot\frac{x}{۲}=-\frac{۳}{۲}$$

۱۰- گزینه‌ی ۴ **روش اول:** برای تشکیل ضابطه‌ی $g(f(x))$ به جای x در $g(x)$، $f(x)$ را قرار می‌دهیم:

$$g(f(x))=\frac{۲f(x)+۲}{۲-f(x)}=\frac{۲(\frac{۲x-۱}{x+۱})+۲}{۲-(\frac{۲x-۱}{x+۱})}=\frac{\frac{۴x-۲+۲x+۲}{x+۱}}{\frac{۲x+۲-۲x+۱}{x+۱}}=\frac{۶x}{۳}=۲x$$

روش دوم: با قرار دادن یک عدد مانند $x=۲$ در $g(f(x))$ و درگزینه‌ها، گزینه‌ی صحیح خود را نشان می‌دهد.

$$f(۲)=\frac{۲\times ۲-۱}{۲+۱}=\frac{۳}{۳}=۱\Rightarrow g(f(۲))=g(۱)=\frac{۲\times ۱+۲}{۲-۱}=\frac{۴}{۱}=۴$$

فقط گزینه‌ی (۴) به ازای $x=۲$ برابر ۴ می‌شود.

۱۱- گزینه‌ی ۱

روش اول: با حذف عامل صفرکننده حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲}(\frac{۶}{x^{۲}-۲x}-\frac{x+۱}{x-۲})=\lim_{x\to ۲}\frac{۶-(x+۱)x}{x(x-۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{-x^{۲}-x+۶}{x(x-۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{-(x+۳)(x-۲)}{x(x-۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{-(x+۳)}{x}=-\frac{۵}{۲}$$

روش دوم: پس از مخرج مشترک گرفتن از قضیه‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲}(\frac{۶}{x^{۲}-۲x}-\frac{x+۱}{x-۲})=\lim_{x\to ۲}\frac{-x^{۲}-x+۶}{x^{۲}-۲x}\overset{H}{=}\lim_{x\to ۲}\frac{-۲x-۱}{۲x-۲}=-\frac{۵}{۲}$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ برای آن‌که تابع f در $x=۰$ پیوسته باشد، می‌بایست $f(۰)$ با حد تابع f در $x=۰$ برابر باشد:

$$\lim_{x\to ۰}f(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{x}{۱-\sqrt{۱-x}}\times\frac{۱+\sqrt{۱-x}}{۱+\sqrt{۱-x}}=\lim_{x\to ۰}\frac{x(۱+\sqrt{۱-x})}{۱-(۱-x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{x(۱+\sqrt{۱-x})}{x}=\lim_{x\to ۰}(۱+\sqrt{۱-x})=۱+۱=۲\Rightarrow a=f(۰)=۲$$

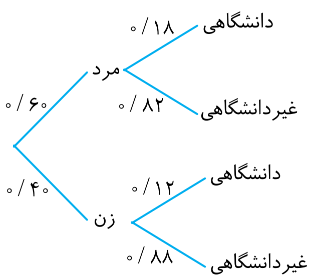
۱۳- گزینه‌ی ۳ مطابق قواعد مشتق‌گیری، مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$y=۲\cos^{۲}(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})\Rightarrow y'=۲\times ۲\cos(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})\times(-\sin(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴}))\times(-\frac{۱}{۴})$$

$$\Rightarrow y'=\cos(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})\sin(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})=\frac{۱}{۲}\sin(۲(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴}))=\frac{۱}{۲}\sin(\frac{\pi}{۳}-\frac{x}{۲})$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{۶}}y'=\frac{۱}{۲}\sin(\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۱۲})=\frac{۱}{۲}\sin\frac{۳\pi}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ پیشامد مرد بودن را با A و پیشامد تحصیلات دانشگاهی داشتن را با B نمایش می‌دهیم.



$$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A')$$
$$\Rightarrow P(B)=۰/۶\times ۰/۱۸+۰/۴\times ۰/۱۲$$
$$\Rightarrow P(B)=۰/۱۰۸+۰/۰۴۸=۰/۱۵۶=۱۵/۶\%$$

۱۵- گزینه‌ی ۱ احتمال پاسخ درست به هر سؤال ۴ گزینه‌ای برابر $\frac{۱}{۴}$ است، پس احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P=\binom{۶}{۳}(\frac{۱}{۴})^{۳}(\frac{۳}{۴})^{۳}=\frac{۶\times۵\times۴}{۳\times۲\times۱}\times\frac{۳^{۳}}{۴^{۶}}=\frac{۵\times۳^{۳}}{۴^{۵}}=\frac{۵\times۲۷}{۲^{۱۰}}=\frac{۱۳۵}{۱۰۲۴}$$

۱۶- گزینه‌ی ۳ **روش اول**: با توجه به ضابطه‌ی تابع $y=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge۰\\ -\sqrt{-x} & x<۰\end{cases}$ اگر $x\ge۰$ آن‌گاه $y\ge۰$ و اگر $x<۰$ آن‌گاه $y<۰$ است. ضابطه‌ی معکوس تابع را در هر یک از دو حالت محاسبه می‌کنیم.

$$x\ge۰\Rightarrow y=\sqrt{x}\Rightarrow x=y^{۲}(y\ge۰)\Rightarrow f^{-۱}(x)=x^{۲}(x\ge۰)$$

$$x<۰\Rightarrow y=-\sqrt{-x}\Rightarrow x=-y^{۲}(y<۰)\Rightarrow f^{-۱}(x)=-x^{۲}(x<۰)$$

بنابراین ضابطه‌ی معکوس تابع برابر است با:

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases}x^{۲} & x\ge۰\\ -x^{۲} & x<۰\end{cases}=\begin{cases}x\times x & x\ge۰\\ x\times(-x) & x<۰\end{cases}=x|x|$$

روش دوم: با توجه به ضابطه‌ی تابع مشخص است که $f(۴)=۲$ و $f(-۴)=-۲$ پس $f^{-۱}(۲)=۴$ و $f^{-۱}(-۲)=-۴$ در بین گزینه‌ها، تنها تابع گزینه‌ی (۳) به ازای ۲ برابر ۴ و به ازای -۲ برابر -۴ است.

۱۷- گزینه‌ی ۴ این دنباله به عدد $\frac{۳}{۲}$ همگراست. با نوشتن چند جمله‌ی ابتدایی دنباله، داریم:

$$a_n:\frac{۴}{۳},\frac{۱۳}{۱۰},\frac{۴}{۳},\frac{۴۹}{۳۶},\ldots\to\frac{۳}{۲}$$

این دنباله، همان طور که مشاهده می‌شود، از جمله‌ی دوم به بعد صعودی است و کوچک‌ترین کران بالای این دنباله برابر $\frac{۳}{۲}$ است. اثبات این که تمام جمله‌های این دنباله کم‌تر از $\frac{۳}{۲}$ است، به راحتی قابل انجام است:

$$a_n<\frac{۳}{۲}\Leftrightarrow\frac{۳n^{۲}+۱}{۲n^{۲}+n}<\frac{۳}{۲}\Leftrightarrow۶n^{۲}+۲<۶n^{۲}+۳n\Leftrightarrow۳n>۲\Leftrightarrow n>\frac{۲}{۳}$$

۱۸- گزینه‌ی ۴ با استفاده از قوانین لگاریتم، معادله‌های داده شده را ساده می‌کنیم.

$$\ln(۲x+۱)+\ln(y-۲)-\ln y=\ln ۳\Rightarrow\ln(\frac{(۲x+۱)(y-۲)}{y})=\ln ۳$$

$$\Rightarrow\frac{(۲x+۱)(y-۲)}{y}=۳\Rightarrow۲xy-۴x+y-۲=۳y\Rightarrow۲xy-۴x-۲y-۲=۰\qquad(I)$$

$$\ln(۲y-۳x)+\ln ۲=۰\Rightarrow\ln ۲(۲y-۳x)=۰\Rightarrow۴y-۶x=۱\Rightarrow y=\frac{۱+۶x}{۴}\qquad(II)$$

با جایگذاری معادله‌ی II در I داریم:

$$۲x(\frac{۱+۶x}{۴})-۴x-۲\times\frac{۱+۶x}{۴}-۲=۰\Rightarrow\frac{x}{۲}+۳x^{۲}-۴x-\frac{۱}{۲}-۳x-۲=۰$$

$$\Rightarrow۳x^{۲}-\frac{۱۳}{۲}x-\frac{۵}{۲}=۰\Rightarrow۶x^{۲}-۱۳x-۵=۰\Rightarrow x=\frac{۱۳\pm\sqrt{۱۶۹+۱۲۰}}{۱۲}\Rightarrow x=\frac{۱۳\pm۱۷}{۱۲}\Rightarrow x=\frac{۵}{۲}\text{ یا }-\frac{۱}{۳}$$

با توجه به معادله‌ی II برای y مقادیر زیر به‌دست می‌آید.

$$x=\frac{۵}{۲}\Rightarrow y=۴\text{ یا }x=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow y=-\frac{۱}{۴}$$

با توجه به محدوده‌ی تعریف لگاریتم $(\ln y)$ در معادله‌ی اصلی جواب $y=-\frac{۱}{۴}$ غیرقابل قبول است. پس،

$$x=\frac{۵}{۲},y=۴\Rightarrow xy=۱۰$$

۱۹- گزینه‌ی ۳ **روش اول**: با توجه به این که می‌دانیم $۲\cos^۲ x=\cos ۲x+۱$ داریم:

$$\cos ۲x+۲\cos^۲ x=۰ \Rightarrow \cos ۲x+\cos ۲x+۱=۰ \Rightarrow \cos ۲x=-\frac{۱}{۲}$$

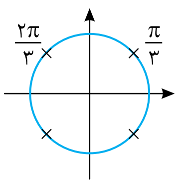
$$\Rightarrow \cos ۲x=\cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

روش دوم: با توجه به اتحاد مثلثاتی $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$ داریم:

$$\cos ۲x+۲\cos^۲ x=۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x-۱+۲\cos^۲ x=۰ \Rightarrow ۴\cos^۲ x=۱$$

$$\Rightarrow \cos x=\pm\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \cos x=\cos\frac{\pi}{۳} \\ \cos x=\cos\frac{۲\pi}{۳} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳} \\ x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

با توجه به دایره‌ی مثلثاتی این جواب‌ها همان $k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ هستند.



۲۰- گزینه‌ی ۱ شیب خط مماس در این نقطه را که همان مشتق تابع است، با استفاده از دستور مشتق ضمنی به‌دست می‌آوریم.

$$\sqrt[۳]{y}+x\sqrt{x}-۹=۰ \Rightarrow y^{\frac{۱}{۳}}+x^{\frac{۳}{۲}}-۹=۰$$

$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۳}y^{\frac{-۲}{۳}}} \xrightarrow{(۴,۱)} y'=-\frac{\frac{۳}{۲}\sqrt{۴}}{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۱^۲}}}=-\frac{۳}{\frac{۱}{۳}}=-۹$$

معادله‌ی خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی $(۴,۱)$ با شیب $m=-۹$ برابر است با:

$$y-۱=-۹(x-۴) \Rightarrow y=-۹x+۳۷ \Rightarrow y+۹x=۳۷$$

۲۱- گزینه‌ی ۳ **نکته**: طول نقطه‌ی عطف تابع درجه سوم $y=ax^۳+bx^۲+cx+d$ برابر $x=-\frac{b}{۳a}$ است.

بنابراین با توجه به این‌که طول نقطه‌ی عطف برابر ۱ است، داریم:

$$\frac{-(-۱)}{۳a}=۱ \Rightarrow ۳a=۱ \Rightarrow a=\frac{۱}{۳}$$

در ضمن، نقطه‌ی عطف در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کند، پس،

$$y=\frac{۱}{۳}x^۳-x^۲-۳x+b \xrightarrow{(۱,-۳)} -۳=\frac{۱}{۳}-۱-۳+b \Rightarrow b=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع به صورت $y=\frac{۱}{۳}x^۳-x^۲-۳x+\frac{۲}{۳}$ است. برای یافتن ماکزیمم نسبی تابع، مشتق تابع را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$y'=x^۲-۲x-۳ \xrightarrow{y'=۰} (x-۳)(x+۱)=۰ \Rightarrow x=-۱,۳$$

x		-۱		۳	
y'	+	۰	−	۰	+
y	↗		↘		↗

بنابراین نقطه‌ای به طول -۱ ماکزیمم نسبی تابع است. مقدار تابع در این نقطه برابر است با:

$$f(-۱)=\frac{۱}{۳}(-۱)^۳-(-۱)^۲-۳(-۱)+\frac{۲}{۳}=\frac{-۱}{۳}-۱+۳+\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳}+۲=\frac{۷}{۳}$$

۲۲- گزینه‌ی ۲ با توجه به نمودار تابع، این تابع تنها یک مجانب قائم $(x=0)$ دارد، پس صفر تنها ریشه‌ی مخرج کسر است، یعنی $b=0$.
ضمناً نقطه‌ی $(2,0)$ محل تقاطع تابع با محور طول‌ها است. پس نقطه‌ی $(2,0)$ در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کند.

$$y=\frac{ax^2-1}{x}\xrightarrow{(2,0)}0=\frac{4a-1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{4}$$
$$a=\frac{1}{4},\ b=0\Rightarrow a+b=\frac{1}{4}$$

۲۳- گزینه‌ی ۲ محور تقارن سهمی موازی محور طول‌ها است، پس سهمی افقی است و ضابطه‌ی آن با رأس $(-1,3)$ به صورت زیر است:

$$(y-3)^2=4p(x+1)\xrightarrow{(5,9)}(9-3)^2=4p(5+1)\Rightarrow 4p=6\Rightarrow p=\frac{3}{2}$$

فاصله‌ی کانون تا خط هادی در هر سهمی برابر $2p$ می‌باشد:
$$2p=2\times\frac{3}{2}=3$$

۲۴- گزینه‌ی ۲ ابتدا ضابطه‌ی بیضی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$16y^2+5x^2-10x=75\Rightarrow 5(x-1)^2+16y^2=75+5$$
$$\Rightarrow\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1\Rightarrow a^2=16,\ b^2=5\Rightarrow a=4,\ b=\sqrt{5}$$

وتری از بیضی که در کانون بر محور کانونی بیضی عمود است، وتر کانونی نام دارد و طول آن برابر $\frac{2b^2}{a}$ می‌باشد.

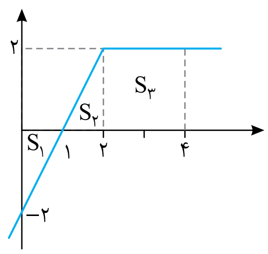
$$\text{طول وتر کانونی}=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times5}{4}=2/5$$

۲۵- گزینه‌ی ۳ **روش اول**: $x=2$ نقطه‌ی تغییر ضابطه‌ی $y=f(x)$ است.

$$f(x)=x-|x-2|=\begin{cases}x-(x-2) & x\geq2\\ x-(2-x) & x<2\end{cases}=\begin{cases}2 & x\geq2\\ 2x-2 & x<2\end{cases}$$

بنابراین انتگرال خواسته شده برابر است با:

$$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx=\int_0^2(2x-2)dx+\int_2^4 2dx=(x^2-2x)\Big|_0^2+2x\Big|_2^4=(0-0)+(8-4)=4$$



روش دوم: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}2 & x\geq2\\ 2x-2 & x<2\end{cases}$ را رسم می‌کنیم.

انتگرال خواسته شده برابر جمع جبری ۳ مساحت S_1، S_2 و S_3 است. مشخص است که جمع جبری S_1 و S_2 برابر صفر بوده و حاصل انتگرال برابر مساحت S_3 است، یعنی

$$\int_0^4 f(x)dx=S_3=2\times2=4$$

۲۶- گزینه‌ی ۴ ابتدا عبارت داخل انتگرال را با استفاده از اتحاد بازنویسی کرده، سپس انتگرال نامعین را محاسبه می‌کنیم:

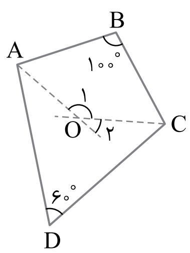
$$\int(3x+\frac{1}{x})^2dx=\int(9x^2+6x\times\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})dx=\int(9x^2+6+x^{-2})dx=\frac{9x^3}{3}+6x+\frac{x^{-1}}{-1}+C=3x^3+6x-\frac{1}{x}+C=\frac{1}{x}(3x^4+6x^2-1)+C$$

بنابراین $f(x)=3x^4+6x^2-1$ می‌باشد.

۲۷- گزینه‌ی ۱ می‌دانیم مجموع زاویه‌های داخلی یک چهارضلعی برابر 360° است، پس،

$$\frac{\hat{A}}{3}=\frac{\hat{B}}{4}=\frac{\hat{C}}{5}=\frac{5\hat{D}}{12}=\alpha\Rightarrow\hat{A}=3\alpha,\ \hat{B}=4\alpha,\ \hat{C}=5\alpha,\ \hat{D}=\frac{12\alpha}{5}$$

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ\Rightarrow3\alpha+4\alpha+5\alpha+\frac{12\alpha}{5}=360^\circ\Rightarrow14/4\alpha=360^\circ\Rightarrow\alpha=\frac{360}{14/4}=\frac{3600}{144}=\frac{4\times9\times100}{16\times9}=\frac{100}{4}=25^\circ$$



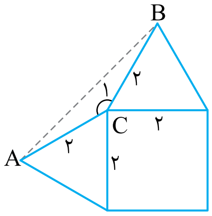
بنابراین زاویه‌های این چهارضلعی به صورت مقابل است:

$$\hat{A}=3\alpha=75^\circ,\ \hat{B}=4\alpha=100^\circ,\ \hat{C}=5\alpha=125^\circ,\ D=\frac{12\alpha}{5}=60^\circ$$

در چهارضلعی OABC مجموع زاویه‌های داخلی 360° است، پس،

$$\frac{75^\circ}{2}+100^\circ+\frac{125^\circ}{2}+\hat{O}_1=360^\circ\Rightarrow\hat{O}_1=160^\circ\Rightarrow\hat{O}_2=180^\circ-160^\circ=20^\circ$$

۲۸- گزینه‌ی ۴ **روش اول**: زاویه‌ی $\hat{C}_۱$ از معادله‌ی زیر به‌دست می‌آید:



$$\hat{C}_۱+۶۰^\circ+۶۰^\circ+۹۰^\circ=۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{C}_۱=۱۵۰^\circ$$

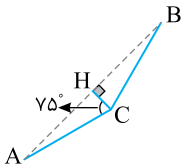
با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$AB^۲=BC^۲+AC^۲-۲BC\times AC\times \cos\hat{C}_۱ \Rightarrow AB^۲=۴+۴-۲\times۲\times۲\times\cos۱۵۰^\circ$$

$$\Rightarrow AB^۲=۸+۸\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow AB^۲=۸+۴\sqrt{۳}$$

با توجه به گزینه‌ها، مجذور گزینه‌ی ۴ یعنی $\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$ برابر $۸+۴\sqrt{۳}$ است.

روش دوم: در مثلث متساوی‌الساقین ABC با زاویه‌ی رأس $\hat{C}=۱۵۰^\circ$، ارتفاع و نیمساز CH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AHC داریم:



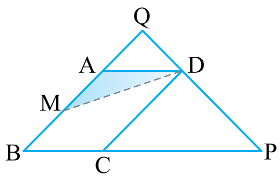
$$\sin\hat{C}=\frac{AH}{AC}\Rightarrow \sin\frac{۱۵۰^\circ}{۲}=\frac{AH}{۲}\Rightarrow AH=۲\sin۷۵^\circ$$

$$\Rightarrow AH=۲\sin(۴۵^\circ+۳۰^\circ)=۲\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲}\right)=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow AB=۲AH=\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$$

۲۹- گزینه‌ی ۲ $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است، پس $BQ||CD$. با استفاده از قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{CD}{BQ}=\frac{PC}{PB}\Rightarrow\frac{CD}{BQ}=\frac{۲}{۳}$$



نسبت مساحت متوازی‌الاضلاع به مساحت مثلث بزرگ برابر است با:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\overset{\Delta}{BPQ}}}=\frac{BA\times BC\times\sin\hat{B}}{\frac{۱}{۲}BQ\times BP\times\sin\hat{B}}=۲\times\frac{BA}{BQ}\times\frac{BC}{BP}=۲\times\frac{CD}{BQ}\times\left(۱-\frac{PC}{BP}\right)=۲\times\frac{۲}{۳}\times\left(۱-\frac{۲}{۳}\right)=\frac{۴}{۹}$$

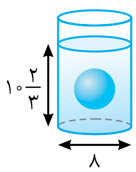
ضمناً با توجه به این‌که M وسط ضلع AB است، مساحت مثلث AMD، $\frac{۱}{۴}$ مساحت متوازی‌الاضلاع است:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMD}}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times AM\times AD\times\sin\hat{A}}{AB\times AD\times\sin\hat{A}}=\frac{۱}{۲}\frac{AM}{AB}=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMD}}}{S_{\overset{\Delta}{BPQ}}}=\frac{۱}{۴}\times\frac{۴}{۹}=\frac{۱}{۹}$$

۳۰- گزینه‌ی ۴ حجم کره برابر اختلاف حجم دو استوانه، یکی با ارتفاع ۱۰ و دیگری با ارتفاع $۱۰\frac{۲}{۳}$ است.



$$V=\pi r^۲h'-\pi r^۲h=\pi r^۲(h'-h)=\pi\times۴^۲\times\frac{۲}{۳}\Rightarrow V=\frac{۳۲\pi}{۳}$$

اگر شعاع گوی کروی را برابر R در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{۴}{۳}\pi R^۳=\frac{۳۲}{۳}\pi\Rightarrow۴R^۳=۳۲\Rightarrow R^۳=۸\Rightarrow R=۲$$

سطح این گوی برابر است با:

$$S=۴\pi R^۲=۴\pi\times۲^۲=۱۶\pi$$

پاسخ تشریحی آزمون ۱۱۸

۱- گزینه‌ی ۲ **روش اول**: با توجه به تعریف تابع معکوس داریم:

$$g^{-۱}(f^{-۱}(a))=۸ \Rightarrow g(۸)=f^{-۱}(a)\Rightarrow f^{-۱}(a)=\sqrt{۵\times۸+۹}\Rightarrow f^{-۱}(a)=۷\Rightarrow a=f(۷)\Rightarrow a=۳$$

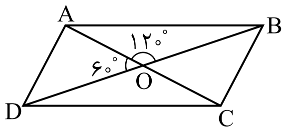
روش دوم: بنابر یک قضیه‌ی کلی برای دو تابع وارون‌پذیر f و g می‌دانیم $(fog)^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱}$، پس

$$(g^{-۱}of^{-۱})(a)=۸\Rightarrow(fog)^{-۱}(a)=۸\Rightarrow a=(fog)(۸)\Rightarrow a=f\,(g(۸))=f(\sqrt{۴۹})=f(۷)=۳$$

۲- گزینه‌ی ۴ دستگاه دو معادله دو مجهول نمایی - لگاریتمی را حل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} ۳^{۲x+y}=۹\times۳^{x-y}\Rightarrow ۳^{۲x+y}=۳^{x-y+۲}\Rightarrow ۲x+y=x-y+۲\Rightarrow x+۲y=۲ \\ \log(x+۲y)=۱+\log y\Rightarrow\log(x+۲y)=\log(۱۰y)\Rightarrow x+۲y=۱۰y\Rightarrow x=۸y \end{array}\right\}\Rightarrow ۸y+۲y=۲\Rightarrow y=\frac{۱}{۵}\Rightarrow x=\frac{۸}{۵}=۱/۶$$

۳- گزینه‌ی ۴ **روش اول**: در هر متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند، پس $OA=OC=۶$ و $OB=OD=۴\sqrt{۳}$. مساحت متوازی‌الاضلاع برابر مجموع مساحت‌های چهار مثلث است.



$$S_{ABCD}=۲\times S_{\underset{AOB}{\triangle}}+۲\times S_{\underset{AOD}{\triangle}}=۲\times\frac{۱}{۲}\times OA\times OB\times\sin ۱۲۰^\circ+۲\times\frac{۱}{۲}\times OA\times OD\times\sin ۶۰^\circ$$

$$=۶\times۴\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۶\times۴\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲\times۳۶=۷۲$$

روش دوم: مطابق یک قضیه‌ی کلی، مساحت هر چهارضلعی برابر نصف حاصل‌ضرب طول قطرها در سینوس زاویه‌ی بین دو قطر است:

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}\times AC\times BD\times\sin\hat{O}=\frac{۱}{۲}\times۱۲\times۸\sqrt{۳}\times\sin ۶۰^\circ=۷۲$$

۴- گزینه‌ی ۱ ابتدا وارون ماتریس A را پیدا می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}۷ & ۳\\ -۴ & -۲\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۷(-۲)-۳(-۴)}\begin{bmatrix}-۲ & -۳\\ ۴ & ۷\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۴ & -۷\end{bmatrix}$$

حاصل‌ضرب خواسته شده برابر است با:

$$B.(۲A^{-۱})=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۴ & -۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴-۱۲ & ۶-۲۱\\ ۲-۱۶ & ۳-۲۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۸ & -۱۵\\ -۱۴ & -۲۵\end{bmatrix}$$

۵- گزینه‌ی ؟ (پاسخ صحیح در گزینه‌ها موجود نیست) کوچک‌ترین داده ۱۱ و بزرگ‌ترین داده ۳۸ می‌باشد، بنابراین دامنه‌ی تغییرات برابر $۳۸-۱۱=۲۷$ است. برای آن که داده‌ها در ۵ طبقه دسته‌بندی شوند، طول هر دسته برابر $\frac{۲۷}{۵}=۵/۴$ است. پس دسته‌ها به صورت زیر می‌باشند:

$$[۱۱,۱۶/۴),[۱۶/۴,۲۱/۸),[۲۱/۸,۲۷/۲),[۲۷/۲,۳۲/۶),[۳۲/۶,۳۸]$$

با مراجعه به نمودار ساقه و برگ، تعداد ۳ داده از کل ۲۳ داده در دسته‌ی وسط یعنی بازه‌ی $[۲۱/۸,۲۷/۲)$ قرار دارند، پس درصد فراوانی نسبی دسته‌ی وسط برابر است با:

$$\frac{۳}{۲۳}\times۱۰۰\simeq \%۱۳$$

۶- گزینه‌ی ۲ (در صورت سؤال به اشتباه به جای فراوانی مطلق، فراوانی تجمعی نوشته شده است.)

ابتدا از تمامی داده‌ها ۱۶ واحد کم می‌کنیم تا محاسبات ساده‌تر باشد. جدول فراوانی مطلق داده‌های جدید به صورت زیر است:

مرکز دسته	۴-	۲-	۰	۲	۴
فراوانی مطلق	۷	۹	۱۷	۱۱	۶

$$\bar{x}=\frac{۷\times(-۴)+۹\times(-۲)+۱۷\times۰+۱۱\times۲+۶\times۴}{۷+۹+۱۷+۱۱+۶}+۱۶=۰+۱۶=۱۶$$

$$\sigma^۲=\frac{۷\times(-۴)^۲+۹\times(-۲)^۲+۱۷\times۰^۲+۱۱\times۲^۲+۶\times۴^۲}{۵۰}=\frac{۱۳\times۱۶+۲۰\times۴}{۵۰}=\frac{۲۸۸}{۵۰}=۵/۷۶$$

$$C.V=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{۵/۷۶}}{۱۶}=\frac{۲/۴}{۱۶}=\frac{۳}{۲۰}=۰/۱۵$$

۷- گزینه‌ی ۳ **روش اول**: برای آن که فقط دو مهره هم‌رنگ باشند، ۳ حالت ممکن است اتفاق بیفتد. ۲ مهره‌ی قرمز و یک مهره‌ی غیر قرمز یا ۲ مهره‌ی سیاه و یک مهره‌ی غیر سیاه یا ۲ مهره‌ی سفید و یک مهره‌ی غیر سفید:

$$P(A)=\frac{\binom{۲}{۲}\binom{۳+۵}{۱}+\binom{۳}{۲}\binom{۲+۵}{۱}+\binom{۵}{۲}\binom{۲+۳}{۱}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۸+۲۱+۵۰}{\frac{۱۰\times۹\times۸}{۶}}=\frac{۷۹}{۱۲۰}$$

روش دوم: متمم پیشامد خواسته شده این است که هر ۳ مهره هم‌رنگ باشند یا ۳ مهره رنگ‌های متفاوت داشته باشند:

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}+\binom{۳}{۳}+\binom{۵}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}=۱-\frac{۳۰+۱+۱۰}{۱۲۰}=\frac{۷۹}{۱۲۰}$$

۸- گزینه‌ی ۴ برای آن که عبارت داده شده عددی حقیقی و در نتیجه تعریف شده باشد، می‌بایست عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج، نامنفی باشد، یعنی:

$$\frac{۲}{x^۲}-\frac{۹}{۲}\geq ۰\Rightarrow\frac{۴-۹x^۲}{۲x^۲}\geq ۰\xrightarrow{x\neq ۰}۴-۹x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq\frac{۴}{۹}\Rightarrow\frac{-۲}{۳}\leq x\leq\frac{۲}{۳}$$

با توجه به این که $x\neq ۰$ ، محدوده‌ی قابل قبول برای x ، $[\frac{-۲}{۳},\frac{۲}{۳}]-\{۰\}$ یا $[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,\frac{۲}{۳}]$ است.

۹- گزینه‌ی ۱ **روش اول**: با استفاده از فرمول $\cos(\alpha\pm\beta)$ عبارت موردنظر را بسط می‌دهیم:

$$A=\cos(\frac{\pi}{۴}-\alpha)-\cos(\frac{\pi}{۴}+\alpha)=(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos\alpha+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\alpha)-(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos\alpha-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\alpha)=۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\alpha=\sqrt{۲}\sin\alpha$$

با توجه به این که $\cos\alpha=\frac{\sqrt{۷}}{۳}$ و این که α زاویه‌ای در ربع چهارم با سینوس منفی است، داریم:

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱\Rightarrow\sin^۲\alpha=۱-\frac{۷}{۹}\Rightarrow\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۳}\Rightarrow\sin\alpha=-\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

$$A=\sqrt{۲}\sin\alpha=-\frac{\sqrt{۲}}{۳}\times\sqrt{۲}=-\frac{۲}{۳}$$

روش دوم: دو زاویه‌ی $\frac{\pi}{۴}+\alpha$ و $\frac{\pi}{۴}-\alpha$ متمم یکدیگر هستند (مجموع آن‌ها $\frac{\pi}{۲}$ است) پس،

$$A=\cos(\frac{\pi}{۴}-\alpha)-\cos(\frac{\pi}{۴}+\alpha)=\sin(\frac{\pi}{۴}+\alpha)-\cos(\frac{\pi}{۴}+\alpha)$$

با توجه به اتحاد مثلثاتی $\sin x-\cos x=\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})$ داریم:

$$A=\sqrt{۲}\sin(\frac{\pi}{۴}+\alpha-\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۲}\sin\alpha=\sqrt{۲}\times(\frac{-\sqrt{۲}}{۳})=-\frac{۲}{۳}$$

۱۰- گزینه‌ی ۳ **روش اول**: کافی است به جای x در ضابطه‌ی $g(x)$ عبارت $f(x)$ را قرار دهیم:

$$g(f(x))=\frac{۱-۳f(x)}{f(x)+۲}=\frac{۱-۳\times\frac{۲x+۳}{۲-x}}{\frac{۲x+۳}{۲-x}+۲}=\frac{\frac{۲-x-۶x-۹}{۲-x}}{\frac{۲x+۳+۴-۲x}{۲-x}}=\frac{-۷x-۷}{۷}=-x-۱$$

روش دوم: با جایگذاری $x=۱$ در تابع $g(f(x))$ و در گزینه‌ها، گزینه‌ی صحیح به دست می‌آید:

$$g(f(۱))=g(\frac{۲+۳}{۲-۱})=g(۵)=\frac{۱-۳\times۵}{۵+۲}=\frac{-۱۴}{۷}=-۲$$

تنها تابع گزینه‌ی ۳ به ازای $x=۱$ برابر ۲- می‌شود.

۱۱- گزینه‌ی ۲ روش اول: حاصل حد را با حذف عامل صفرکننده می‌یابیم:

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{x}{x+1}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{2-x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{-x^2+x+2}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{-(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{2-x}{x-1}=\frac{-3}{2}$$

روش دوم: پس از مخرج مشترک گرفتن می‌توان از قضیه‌ی هوپیتال نیز استفاده کرد.

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{x}{x+1}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{-x^2+x+2}{x^2-1}\overset{H}{=}\lim_{x\to -1}\frac{-2x+1}{2x}=\frac{-3}{2}$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ برای آن که تابع در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته باشد، می‌بایست حد راست و حد چپ تابع در این نقطه برابر باشند:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1^-}(ax-a+2)\Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}=\lim_{x\to 1^-}(ax-a+2)\Rightarrow 2=a-a+2\Rightarrow 2=2$$

تساوی به دست آمده به ازای هر مقدار a درست است، پس این تابع به ازای هر مقدار a پیوسته است.

۱۳- گزینه‌ی ۱ روش اول: عبارت $\cos x-\sin x$ به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ برابر صفر است. پس کافی است فقط از عامل صفرکننده مشتق بگیریم:

$$y=\underbrace{(\cos x-\sin x)}_{f(x)}\times\underbrace{\frac{1}{\cos x+\sin x}}_{g(x)}\Rightarrow f'(x)=(-\sin x-\cos x)$$

$$\Rightarrow y'(\frac{\pi}{4})=f'(\frac{\pi}{4})g(\frac{\pi}{4})=(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)=-1$$

روش دوم: با استفاده از اتحادهای مثلثاتی ابتدا تابع را ساده کرده، سپس مشتق می‌گیریم:

$$y=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\frac{\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}=\cot(x+\frac{\pi}{4})\Rightarrow y'=-(1+\cot^2(x+\frac{\pi}{4}))\Rightarrow y'(\frac{\pi}{4})=-(1+\cot^2\frac{\pi}{2})=-1$$

۱۴- گزینه‌ی ۳ روش اول: احتمال قبولی فرد A و فرد B در آزمون مستقل از هم هستند، پس:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0/84\times 0/75=0/63$$

پیشامد این که لااقل یکی از آنان قبول شود، همان اجتماع دو پیشامد است:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0/84+0/75-0/63=0/96$$

روش دوم: متمم پیشامد خواسته شده آن است که هیچ کدام در این آزمون قبول نشوند، این دو پیشامد نیز مستقل از هم هستند، پس:

$$P(A\cup B)=1-P(A'\cap B')=1-P(A')P(B')=1-(1-0/84)(1-0/75)=1-0/16\times 0/25=1-0/04=0/96$$

۱۵- گزینه‌ی ۱ با استفاده از فرمول احتمال دو جمله‌ای برای احتمال موفقیت $p=\frac{1}{4}$ داریم:

$$P=\binom{4}{3}\times(\frac{1}{4})^3\times(\frac{3}{4})^1=4\times\frac{1}{4^3}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$$

۱۶- گزینه‌ی ۲ روش اول: ابتدا ضابطه‌ی تابع وارون را پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{x+4}{x-2}\Rightarrow xy-2y=x+4\Rightarrow xy-x=2y+4\Rightarrow x=\frac{2y+4}{y-1}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2x+4}{x-1}$$

محل تلاقی این تابع و تابع اصلی از حل معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{2x+4}{x-1}=\frac{x+4}{x-2}\Rightarrow 2x^2-4x+4x-8=x^2+3x-4\Rightarrow x^2-3x-4=0\Rightarrow(x-4)(x+1)=0\Rightarrow x=4,-1$$

روش دوم: اگر یک تابع، نیمساز ربع اول و سوم را در نقطه یا نقاطی قطع کند، وارون آن تابع نیز نیمساز را در همان نقاط قطع می‌کند، پس نقاط تقاطع تابع وارون و اصلی حتماً شامل ریشه‌های معادله‌ی زیر می‌باشد:

$$f(x)=x\Rightarrow\frac{x+4}{x-2}=x\Rightarrow x+4=x^2-2x\Rightarrow x^2-3x-4=0\Rightarrow x=4,-1$$

با توجه به گزینه‌ها، فقط همین دو نقطه، نقاط تقاطع تابع اصلی و وارون است و نقطه‌ی تقاطع دیگری وجود ندارد.

۱۷- گزینه‌ی ۳ چند جمله‌ی ابتدایی و حد هر دنباله را می‌نویسیم:

$$c_n=\frac{(-1)^n}{n}: -1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \to 0$$

$$d_n=\frac{n^2}{2^n}: \frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \cdots \to 0$$

$$a_n=\frac{2n^2+1}{n^2+3}: \frac{3}{4}, \frac{9}{7}, \frac{19}{12}, \cdots \to 2$$

$$b_n=\frac{3n^2+1}{5n+9}: \frac{4}{14}, \frac{13}{19}, \frac{28}{24}, \cdots \to \text{واگرا}$$

دنباله‌های c_n و d_n غیریکنوا و دنباله‌ی b_n واگرای صعودی و در نتیجه بیکران اســت. تنها دنباله‌ی a_n همگرا به ۲ و در نتیجه کراندار اســت. در ضمن صعودی نیز می‌باشد. $(ad-bc=2\times3-1>0)$

۱۸- گزینه‌ی ۲ دستگاه دو معادله دو مجهول لگاریتمی را حل می‌کنیم:

$$\ln(x+y-1)+\ln(2y+3)=0 \Rightarrow \ln((x+y-1)(2y+3))=\ln 1 \Rightarrow (x+y-1)(2y+3)=1$$

$$\Rightarrow 2xy+2y^2-2y+3x+3y-3=1 \Rightarrow 2xy+2y^2+y+3x-4=0 \qquad (I)$$

$$\ln(x-4y)=2\ln 2 \Rightarrow \ln(x-4y)=\ln(2^2) \Rightarrow x-4y=4 \Rightarrow x=4(y+1) \qquad (II)$$

با جایگذاری (II) در (I) داریم:

$$8(y+1)y+2y^2+y+12(y+1)-4=0 \Rightarrow 10y^2+21y+8=0 \Rightarrow y=\frac{-21\pm\sqrt{441-320}}{20}=\frac{-21\pm11}{20}=\frac{-1}{2}, -\frac{8}{5}$$

با جایگذاری در معادله‌ی II داریم:

$$y=\frac{-1}{2} \Rightarrow x=2 \quad , \quad y=-\frac{8}{5} \Rightarrow x=-\frac{12}{5}$$

مشخص است که به ازای $x=\frac{-12}{5}$ و $y=-\frac{8}{5}$ عبارت $x+y-1$ منفی است و لگاریتم تعریف نشده است. پس این جواب غیرقابل قبول است، پس:

$$x=2, y=\frac{-1}{2} \Rightarrow xy=-1$$

۱۹- گزینه‌ی ۴ زاویه‌ی $\frac{\pi}{2}-x$، متمم زاویه‌ی x است، پس:

$$\sin 2x+\cos(\frac{\pi}{2}-x)=0 \Rightarrow \sin 2x+\sin x=0 \Rightarrow \sin 2x=-\sin x$$

$$\Rightarrow \sin 2x=\sin(-x) \Rightarrow \begin{cases} 2x=2k\pi-x \\ 2x=2k\pi+\pi+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2k\pi}{3} \\ x=(2k+1)\pi \end{cases}$$

به ازای مقادیر مختلف صحیح k جواب‌های زیر در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ به‌دست می‌آید:

$$0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi, \pi$$

مجموع این جواب‌ها برابر 5π می‌باشد.

۲۰- گزینه‌ی ۴ با استفاده از دستور محاسبه‌ی مشتق ضمنی، مشتق این تابع را در نقطه‌ی $(2,4)$ محاسبه می‌کنیم:

$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{2xy-2\sqrt{y}}{x^2-\frac{x}{\sqrt{y}}} \xrightarrow{(2,4)} y'=-\frac{16-4}{4-\frac{2}{2}}=-4$$

معادله‌ی خطی با شیب -4 که از نقطه‌ی $(2,4)$ می‌گذرد به این صورت است:

$$y-4=-4(x-2) \Rightarrow y=-4x+12 \Rightarrow y+4x=12$$

۲۱- گزینه‌ی ۴ می‌دانیم در تابع درجه سوم $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ نقطه‌ی عطف به‌صورت $(\frac{-b}{3a}, f(\frac{-b}{3a}))$ می‌باشد، پس:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{-b}{3a}=1 \Rightarrow b=-3a \\ -2=f(1) \Rightarrow a+b-3-1=-2 \Rightarrow a+b=2 \end{array}\right\} \Rightarrow a=-1, b=3$$

و بنابراین تابع به‌صورت $y=-x^۳+۳x^۲-۳x-۱$ است؛ برای یافتن نقطه‌ی ماکزیمم نسبی این تابع ابتدا مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y'=-۳x^۲+۶x-۳=-۳(x^۲-۲x+۱)=-۳(x-۱)^۲$$

مشخص است که همواره $y'\leq ۰$ پس تابع $y=f(x)$ اکیداً نزولی است و فاقد اکسترمم نسبی می‌باشد.

۲۲- گزینه‌ی ۲ باتوجه به نمودار تابع $x=۰$ تنها مجانب قائم این تابع اســت پس $x=۰$، ریشــه‌ی مخرج این تابع کسری است، یعنی $b=۰$. در ضمن تابع در نقطه‌ای به طول ۲ محور طول‌ها را قطع کرده است، یعنی:

$$f(۲)=۰\Rightarrow\frac{۲+a\times۲^۲}{۰+۲}=۰\Rightarrow۴a+۲=۰\Rightarrow a=\frac{-۱}{۲}$$

بنابراین

$$a-b=\frac{-۱}{۲}-۰=\frac{-۱}{۲}$$

۲۳- گزینه‌ی ۲ خط هادی سهمی، یک خط عمودی است، بنابراین سهمی افقی می‌باشد.
در ضمن می‌دانیم فاصله‌ی خط هادی از کانون برابر $۲p$ می‌باشد، یعنی:

$$۲-(-۴)=۲p\Rightarrow۲p=۶\Rightarrow p=۳$$

بنابراین مختصات رأس این سهمی افقی به‌صورت $S(۲-p\,,۳)$ یعنی $S(-۱,۳)$ است و ضابطه‌ی این سهمی برابر است با:

$$(y-\beta)^۲=۴p(x-\alpha)\Rightarrow(y-۳)^۲=۴\times۳(x+۱)\Rightarrow(y-۳)^۲=۱۲x+۱۲$$

برای یافتن محل تلاقی این سهمی با محور طول‌ها، y را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$y=۰\Rightarrow۹=۱۲x+۱۲\Rightarrow x=\frac{-۳}{۱۲}=\frac{-۱}{۴}$$

۲۴- گزینه‌ی ۱ دو کانون بیضی دارای طول برابر هســتند پس بیضی، قائم اســت. مختصات وســط دو کانون همان مرکز بیضی اســت، پس مرکز بیضی نقطه‌ی $O(۱,۰)$ است. همچنین فاصله‌ی دو کانون برابر $۲c$ است، یعنی

$$۲c=۱-(-۱)\Rightarrow c=۱$$

با توجه به مقدار خروج از مرکز داده شده داریم:

$$e=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=۲$$

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow۴=b^۲+۱\Rightarrow b=\sqrt{۳}$$

معادله‌ی این بیضی به‌صورت زیر است:

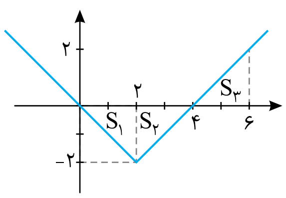
$$\frac{(x-\alpha)^۲}{b^۲}+\frac{(y-\beta)^۲}{a^۲}=۱\Rightarrow\frac{(x-۱)^۲}{۳}+\frac{y^۲}{۴}=۱$$

محل تلاقی این بیضی با خط $y=۲x$ از حل معادله‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{(x-۱)^۲}{۳}+\frac{(۲x)^۲}{۴}=۱\Rightarrow\frac{(x-۱)^۲}{۳}+x^۲=۱\Rightarrow x^۲-۲x+۱+۳x^۲=۳$$

$$\Rightarrow۴x^۲-۲x-۲=۰\Rightarrow۲x^۲-x-۱=۰\Rightarrow(۲x+۱)(x-۱)=۰\Rightarrow x=۱\,,\frac{-۱}{۲}$$

۲۵- گزینه‌ی ۲ **روش اول:** نمودار تابع $f(x)=|x-۲|-۲$، با توجه به نمودار تابع $y=|x|$ به راحتی قابل رسم است.



مقدار $\int_۰^۶ f(x)dx$ برابر جمع جبری مساحت‌های $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ است. مشخص است که $S_۲=-S_۳$ پس:

$$\int_۰^۶ f(x)dx=S_۱+S_۲+S_۳=S_۱=-\frac{۲\times۲}{۲}=-۲$$

روش دوم: ضابطه‌ی تابع $f(x)$ به‌صورت $f(x)=\begin{cases}x-۴ & x\geq۲\\ -x & x<۲\end{cases}$ است، پس:

$$\int_۰^۶ f(x)dx=\int_۰^۲(-x)dx+\int_۲^۶(x-۴)dx=(-\frac{x^۲}{۲})\Big|_۰^۲+(\frac{x^۲}{۲}-۴x)\Big|_۲^۶$$

$$=(-۲-۰)+((۱۸-۲۴)-(۲-۸))=-۲+(-۶+۶)=-۲$$

۲۶- گزینه‌ی ۱ حاصل انتگرال داده شده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\int \frac{x-1}{x^3}dx=\int (\frac{x}{x^3}-\frac{1}{x^3})dx=\int (x^{-2}-x^{-3})dx=\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{x^{-2}}{-2}+C=\frac{-1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C=\frac{-2x+1}{2x^2}+C=\frac{1}{2x^2}(-2x+1)+C$$

بنابراین $f(x)=-2x+1$.

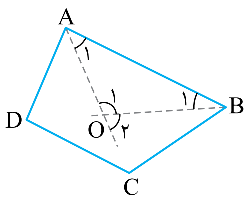
۲۷- گزینه‌ی ۳ مجموع زاویه‌های داخلی در هر چهارضلعی برابر 360° است. بنابراین اگر نسبت‌های داده شده را α بنامیم، داریم:

$$\frac{\hat{A}}{4}=\frac{\hat{B}}{3}=\frac{\hat{C}+\hat{D}}{11}=\alpha \Rightarrow \hat{A}=4\alpha \quad , \quad \hat{B}=3\alpha \quad , \quad \hat{C}+\hat{D}=11\alpha$$

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ \Rightarrow 4\alpha+3\alpha+11\alpha=360^\circ \Rightarrow 18\alpha=360^\circ \Rightarrow \alpha=20^\circ$$

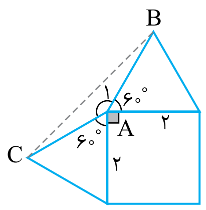
بنابراین زاویه‌های این چهارضلعی به‌صورت زیر است:

$$\hat{A}=80^\circ \quad , \quad \hat{B}=60^\circ \quad , \quad \hat{C}+\hat{D}=220^\circ$$



مطابق شکل در مثلث ABO مجموع زاویه‌های داخلی، 180° است. پس:

$$\hat{A}_1+\hat{B}_1+\hat{O}_1=180^\circ \Rightarrow \frac{80^\circ}{2}+\frac{60^\circ}{2}+\hat{O}_1=180^\circ \Rightarrow \hat{O}_1=110^\circ \Rightarrow \hat{O}_2=180^\circ-110^\circ=70^\circ$$



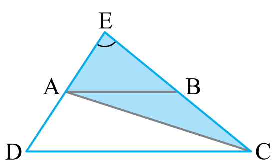
۲۸- گزینه‌ی ۳ ابتدا زاویه‌ی $\hat{A}_1$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\hat{A}_1+60^\circ+90^\circ+60^\circ=360^\circ \Rightarrow \hat{A}_1=150^\circ$$

مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}AB\times AC\times \sin \hat{A}_1=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times \sin 150^\circ=1$$

۲۹- گزینه‌ی ۴ مطابق شکل دو ضلع AB و DC موازی هستند، پس بنابر قضیه‌ی تالس داریم:



$$\frac{EA}{ED}=\frac{EB}{EC}=\frac{AB}{CD}=\frac{3}{5}$$

حال به محاسبه‌ی نسبت مساحت‌ها می‌پردازیم:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\overset{\Delta}{AEC}}}=\frac{S_{\overset{\Delta}{EDC}}-S_{\overset{\Delta}{AEB}}}{S_{\overset{\Delta}{AEC}}}=\frac{\frac{1}{2}ED\times EC\times \sin \hat{E}-\frac{1}{2}EA\times EB\times \sin \hat{E}}{\frac{1}{2}EA\times EC\times \sin \hat{E}}$$

$$=\frac{ED}{EA}-\frac{EB}{EC}=\frac{5}{3}-\frac{3}{5}=\frac{25-9}{15}=\frac{16}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{AEC}}}{S_{ABCD}}=\frac{15}{16}$$

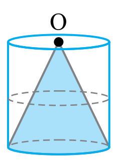
۳۰- گزینه‌ی ۴ بزرگ‌ترین مخروط، مطابق شکل (۱) در حالتی است که رأس مخروط روی مرکز یک قاعده‌ی استوانه بوده و قاعده‌ی دیگر استوانه با قاعده‌ی مخروط یکسان باشد.

اگر این شکل را با صفحه‌ای موازی قاعده قطع دهیم، نمای شکل از روبه‌رو به صورت شکل (۲) است:

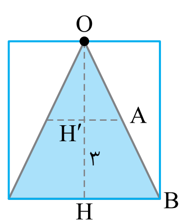
$$H'A \| HB \Rightarrow \frac{AH'}{BH}=\frac{OH'}{OH} \Rightarrow \frac{AH'}{4}=\frac{5-3}{5} \Rightarrow AH'=4\times \frac{2}{5}=\frac{8}{5}=1/6$$

از طرفی سطح مقطع حاصل شده از نمای بالا به صورت شکل (۳) است. مساحت خواسته شده برابر است با:

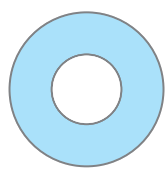
$$S=\pi\times 4^2-\pi(1/6)^2=\pi(16-2/56)=13/44\pi$$



شکل (۱)



شکل (۲)


شکل (۳)