

بخش پنجم: معادله‌ی درجه‌ی دوم

درسنامه

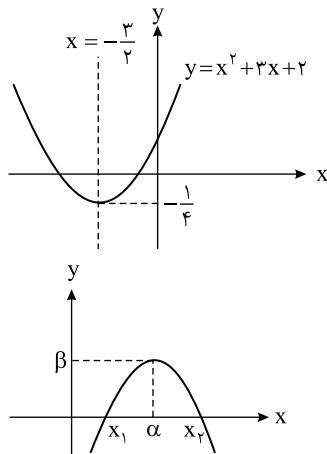
در سال‌های قبل با مفهوم معادله و حل معادله‌ی درجه‌ی اول و درجه‌ی دوم آشنا شدیم. در این بخش با برخی نکات جدید درباره‌ی حل معادلات آشنا خواهیم شد.

نمودار چندجمله‌ای درجه‌ی دوم (سهمی)

چندجمله‌ای $P(x) = ax^2 + bx + c$ به شرط $a \neq 0$ یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۲ است. در این چندجمله‌ای مقدار $\Delta = b^2 - 4ac$ را «مبین عبارت» می‌گویند. نمودار این چندجمله‌ای در صفحه‌ی مختصات شکلی است که به آن «سهمی» می‌گویند.

نکته: ویژگی‌های اصلی سهمی $P(x) = ax^2 + bx + c$:

- ۱- با توجه به علامت a جهت سهمی تعیین می‌شود. اگر $a > 0$ ، سهمی رو به بالا و اگر $a < 0$ ، سهمی رو به پایین است.
- ۲- خط عمودی $x = -\frac{b}{2a}$ ، محور تقارن سهمی است.
- ۳- رأس سهمی محل برخورد محور تقارن سهمی و نمودار آن است. بنابراین طول رأس $x = -\frac{b}{2a}$ و عرض آن $y = P(-\frac{b}{2a})$ است. به راحتی ثابت می‌شود که $P(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$ پس مختصات رأس سهمی $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ است.



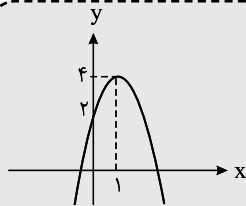
مثال: نمودار تابع $P(x) = x^2 + 3x + 2$ یک سهمی رو به بالاست چون $a = 1 > 0$. همچنین خط

عمودی $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$ محور تقارن آن است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت طول رأس

سهمی $x = -\frac{3}{2}$ و عرض آن $y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a} = -\frac{1}{4}$ است. با این توضیحات نمودار سهمی به صورت مقابل است.

تذکر: اگر رأس یک سهمی $S(\alpha, \beta)$ باشد، معادله‌ی آن به صورت $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ قابل نوشتن است. همچنین اگر نقطه‌های تلاقی سهمی با محور طول‌ها x_1 و x_2 باشد ضابطه‌ی سهمی به صورت $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ قابل نوشتن است. در این حالت α وسط x_1 و x_2 که همان صفرها یا ریشه‌های سهمی هستند قرار می‌گیرد.

تست ۱: نمودار $y = ax^2 + bx + c$ به شکل مقابل است. مقدار ab کدام است؟



- ۸ (۱)
- ۴ (۲)
- ۴ (۳)
- ۸ (۴)

پاسخ: با توجه به شکل داده شده چون رأس سهمی $S(1, 4)$ است پس معادله‌ی آن را می‌توان به صورت $y = a(x - 1)^2 + 4$ نوشت. از طرفی نمودار تابع از $A(0, 2)$ می‌گذرد بنابراین این نقطه باید در معادله‌ی سهمی صدق کند. داریم: $2 = a(0 - 1)^2 + 4 \Rightarrow 2 = a + 4 \Rightarrow a = -2$. در نتیجه $ab = (-2)(4) = -8$. بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

برای تعیین ریشه‌های چندجمله‌ای درجه‌ی دو $P(x) = ax^2 + bx + c$ داریم:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

۱- اگر $\Delta > 0$ ، چندجمله‌ای دارای دو ریشه است که عبارتند از:

در این حالت چندجمله‌ای به صورت $(x - x_1)(x - x_2)$, $a(x - x_1)(x - x_2)$ قابل نوشتن است.

۲- اگر $\Delta = 0$ ، چندجمله‌ای یک ریشه‌ی مضاعف یا مکرر دارد که برابر است با: $x = -\frac{b}{2a}$

در این حالت چندجمله‌ای به صورت $P(x) = a(x - (-\frac{b}{2a}))^2$ قابل نوشتن است.

۳- اگر $\Delta < 0$ ، چندجمله‌ای ریشه‌ی حقیقی ندارد و قابل تجزیه نیست.

مثال: معادله‌ی $x^2 - (m+1)x + m = 0$ به ازای $m=1$ ریشه‌ی مضاعف دارد. زیرا:

$$\Delta = (m+1)^2 - 4m = m^2 + 2m + 1 - 4m = (m-1)^2 \xrightarrow{m=1} \Delta = 0$$

نتیجه ۱- اگر در معادله‌ی تلاقی یک سهمی و یک خط $\Delta > 0$ ، آن‌گاه این معادله دارای دو ریشه است. از این مطلب می‌توان نتیجه گرفت خط، سهمی را در دو نقطه قطع می‌کند.

۲- اگر در معادله‌ی تلاقی یک سهمی و یک خط $\Delta < 0$ ، خط سهمی را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند.

۳- اگر در معادله‌ی تلاقی سهمی و خط $\Delta = 0$ آن‌گاه خط بر سهمی مماس است.

تست ۲: سهمی $y = (m-1)x^2 - 3x + m$ خط $y = 1 - 2mx$ را قطع نمی‌کند. حدود m کدام است؟

$$m < \frac{5}{4} \quad (۴)$$

$$m > \frac{5}{4} \quad (۳)$$

$$m < \frac{4}{5} \quad (۲)$$

$$m > \frac{4}{5} \quad (۱)$$

پاسخ: برای آن که سهمی خط را قطع نکند باید معادله‌ی حاصل از تلاقی آن‌ها ریشه نداشته باشد. داریم:

$$(m-1)x^2 - 3x + m = 1 - 2mx \Rightarrow \underbrace{(m-1)x^2 + (2m-3)x + m - 1}_{\text{معادله‌ی تلاقی}} = 0$$

برای آن که معادله‌ی تلاقی ریشه نداشته باشد باید Δ آن کمتر از صفر باشد. داریم:

$$(2m-3)^2 - 4(m-1)(m-1) < 0 \Rightarrow 4m^2 - 12m + 9 - 4m^2 + 8m - 4 < 0 \Rightarrow -4m + 5 < 0 \Rightarrow m > \frac{5}{4}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تست ۳: خطوط گذرنده از نقطه‌ی A در شکل مقابل با سهمی رسم شده نقطه‌ی مشترک دارند. اگر شیب این خطوط

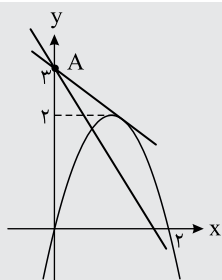
برابر m باشد، حدود m کدام گزینه است؟

$$4 \leq m \leq 9 \quad (۲)$$

$$m \leq 4 \text{ یا } m \geq 9 \quad (۱)$$

$$m \geq 2\sqrt{6} + 4 \text{ یا } m \leq 4 - 2\sqrt{6} \quad (۴)$$

$$4 - 2\sqrt{6} \leq m \leq 4 + 2\sqrt{6} \quad (۳)$$



پاسخ: برای آن که خط و سهمی دارای نقطه‌ای مشترک باشند باید معادله‌ی حاصل از تلاقی آن‌ها دارای ریشه باشد یعنی در معادله‌ی حاصل از تلاقی سهمی و خط باید داشته باشیم $\Delta \geq 0$. ابتدا معادلات خط و سهمی را می‌نویسیم:

$$y = mx + 3 \quad \text{خطوط گذرنده از } A(0, 3) \text{ دارای شیب } m$$

$$y = a(x)(x-2) \quad \text{معادله‌ی سهمی } \Rightarrow x=0, x=2 \text{ : ریشه‌های سهمی}$$

$$y = -2x(x-2) \quad \text{معادله‌ی سهمی } \Rightarrow a = -2 \Rightarrow 2 = a(1)(1-2) \xrightarrow{S(1,2) \text{ در معادله صدق می‌کند.}} S(1, 2) \text{ : رأس سهمی}$$

حال معادله‌ی حاصل از تلاقی سهمی و خط را می‌نویسیم:

$$-2x(x-2) = mx + 3 \Rightarrow -2x^2 + 4x = mx + 3 \Rightarrow -2x^2 + (4-m)x - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta \geq 0} (4-m)^2 - 24 \geq 0 \Rightarrow (4-m)^2 \geq 24 \Rightarrow \begin{cases} 4-m \geq 2\sqrt{6} \Rightarrow m \leq 4-2\sqrt{6} \\ m-4 \geq 2\sqrt{6} \Rightarrow m \geq 4+2\sqrt{6} \end{cases}$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

روابط بین ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$

فرض کنید α و β دو ریشه‌ی متمایز معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$, $(a \neq 0)$ باشند. در این صورت داریم:

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \beta = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a} \\ P = \alpha\beta = \frac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+\Delta}{4a^2} = \frac{c}{a} \\ |\alpha - \beta| = \left| \frac{-b+\sqrt{\Delta}+b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \end{cases}$$

به کمک روابط ذکر شده می‌توانیم حاصل عبارات متقارن^۱ بین ریشه‌های یک معادله‌ی درجه‌ی دو را به دست آوریم. برای مثال داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3PS$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P}$$

تست ۴: در معادله‌ی $3x^2 - 17x + \frac{m}{3} = 0$ یک ریشه از ۳ برابر ریشه‌ی دیگر ۳ واحد بیش‌تر است. m کدام است؟

(۱) ۳۰ (۲) ۲۵ (۳) ۲۰ (۴) ۱۵

پاسخ: فرض می‌کنیم α و β دو ریشه‌ی این معادله باشند داریم:

از طرفی از معادله‌ی داده شده داریم $\alpha\beta = \frac{m}{9}$ و $\alpha + \beta = \frac{17}{3}$. حال با توجه به رابطه‌ی (۱) داریم:

$$\beta + 3\beta + 3 = \frac{17}{3} \Rightarrow 4\beta = \frac{17}{3} - 3 = \frac{8}{3} \Rightarrow \beta = \frac{2}{3} \xrightarrow{(1)} \alpha = 5 \xrightarrow{\alpha\beta = \frac{m}{9}} 5 \times \frac{2}{3} = \frac{m}{9} \Rightarrow m = 30$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

نکته: معادله‌ی درجه‌ی دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصل‌ضرب ریشه‌هایش P باشد، عبارت است از: $x^2 - Sx + P = 0$

تست ۵: اگر a و b به ترتیب طول و عرض مستطیلی به محیط ۲۶ سانتی‌متر و مساحت ۴۰ سانتی‌متر مربع باشند، آن‌گاه $a+2b$ کدام است؟

(۱) ۲۳ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) $69 - \sqrt{129}$

پاسخ: با توجه به این که $2(a+b) = 26$ و $ab = 40$ ، با قرار دادن $S = 13$ و $P = 40$ در $x^2 - Sx + P = 0$ معادله‌ی درجه‌ی دومی به دست

می‌آید که مجموع ریشه‌هایش $a+b = 13$ و حاصل‌ضرب ریشه‌هایش $ab = 40$ است. بنابراین ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 13x + 40 = 0$

$$x^2 - 13x + 40 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a = 8 \\ x_2 = b = 5 \end{cases} \quad \text{همان } a \text{ و } b \text{ می‌باشند } (a \geq b):$$

بنابراین گزینه (۲) درست است.

تست ۶: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $4x^2 - 6x + 1 = 0$ باشند، معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن $\sqrt{\alpha}$ و $\sqrt{\beta}$ باشد کدام است؟

(۱) $x^2 - \sqrt{10}x + 2 = 0$ (۲) $2x^2 - \sqrt{10}x + 1 = 0$ (۳) $x^2 - \frac{\sqrt{10}}{2}x + 1 = 0$ (۴) $x^2 - \sqrt{10}x + \frac{1}{2} = 0$

پاسخ: می‌دانیم اگر $S = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ و $P = \sqrt{\alpha\beta}$ آن‌گاه معادله‌ی موردنظر $x^2 - Sx + P = 0$ است. پس کافی است S و P را به دست

آوریم. داریم:

$$S = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \Rightarrow S^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} \xrightarrow[\alpha\beta = \frac{1}{4}]{\alpha + \beta = \frac{6}{4}} S^2 = \frac{6}{4} + 1 = \frac{10}{4} \Rightarrow S = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$P = \sqrt{\alpha\beta} = \frac{1}{2}$$

در نتیجه معادله‌ی موردنظر $x^2 - \frac{\sqrt{10}}{2}x + \frac{1}{2} = 0$ است. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

۱- عبارات متقارن بین α و β به عباراتی می‌گویند که اگر در آن‌ها جای α و β تغییر کند حاصل عبارت تغییر نکند.

تست ۷: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x(\Delta x + 3) = 2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله‌ی $4x^2 - kx + 25 = 0$ به صورت

(سراسری ریاضی - ۹۰) $\left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2} \right\}$ است؟

۳۱ (۴)

۲۹ (۳)

۲۸ (۲)

۲۷ (۱)

پاسخ: از معادله‌ی $x(\Delta x + 3) = 2$ می‌توان به معادله‌ی $\Delta x^2 + 3x - 2 = 0$ رسید. بنابراین $S = \alpha + \beta = -\frac{3}{\Delta}$ و $P = \alpha\beta = -\frac{2}{\Delta}$. از طرفی داریم:

$$S' = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2} = \frac{\left(-\frac{3}{\Delta}\right)^2 - 2\left(-\frac{2}{\Delta}\right)}{\left(-\frac{2}{\Delta}\right)^2} = \frac{29}{4}$$

حال از آنجا که در معادله‌ی $4x^2 - kx + 25 = 0$ داریم $S' = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{k}{4}$ نتیجه می‌گیریم $k = 29$. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تست ۸: اگر $x = 2$ یکی از ریشه‌های معادله‌ی $2x^3 - ax^2 - 3x + a - 1 = 0$ باشد، مجموع مکعب ریشه‌های آن کدام است؟

 $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

پاسخ: $x = 2$ در معادله صدق می‌کند داریم:

$$2x^3 - ax^2 - 3x + a - 1 = 0 \xrightarrow{x=2} 16 - 4a - 6 + a - 1 = 0 \Rightarrow 9 = 3a \Rightarrow a = 3$$

بنابراین معادله به صورت $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$ است. حال می‌توان نوشت:

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 2(x^3 + 1) - 3(x^2 + x) = 2(x+1)(x^2 - x + 1) - 3x(x+1)$$

$$\Rightarrow P(x) = (x+1)(2x^2 - 2x + 2 - 3x) = (x+1)(2x^2 - 5x + 2)$$

چون در معادله‌ی $2x^2 - 5x + 2 = 0$ داریم $\Delta > 0$ ، این معادله دارای دو ریشه‌ی متمایز است، که جمع آن‌ها برابر است با $\frac{5}{2}$. پس

$$\text{مجموع ریشه‌های معادله‌ی اصلی برابر } \frac{3}{2} = -1 + \frac{5}{2} \text{ است.}$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

تذکر می‌دانیم اگر α یکی از ریشه‌های معادله‌ی $P(x) = 0$ باشد آن‌گاه $P(\alpha) = 0$. ولی ممکن است $P(x) = 0$ ریشه‌های دیگری هم داشته باشد.

مثال: می‌خواهیم معادله‌ای با ضرایب صحیح بنویسیم که یکی از ریشه‌هایش $x = 1 + \sqrt{3}$ باشد. داریم:

$$x = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow x - 1 = \sqrt{3} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$$

البته این معادله ریشه‌ی دیگری هم دارد که برابر $x = 1 - \sqrt{3}$ می‌باشد.

تست ۹: یکی از ریشه‌های $x^4 + ax^2 + b = 0$ عدد $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ است. ab کدام گزینه است؟

۱۰ (۴)

۵ (۳)

-۱۰ (۲)

-۵ (۱)

پاسخ: فرض می‌کنیم $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ، داریم:

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow x^2 = 5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow x^2 - 5 = 2\sqrt{6} \Rightarrow x^4 - 10x^2 + 25 = 24 \Rightarrow x^4 - 10x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = 1 \end{cases}$$

پس $ab = -10$. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تست ۱۰: اگر x_1, x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 - 4x - 1 = 0$ باشند به طوری که $x_1 > x_2$ ، حاصل $2x_1^2 - 2x_1 + x_2^2$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{11}{2}$ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ: چون x_1 در معادله صدق می‌کند می‌توان نتیجه گرفت:

$$2x_1^2 - 4x_1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1^2 - 2x_1 = \frac{1}{2} \quad (1)$$

از طرفی عبارت $2x_1^2 - 2x_1 + x_2^2$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$A = x_1^2 - 2x_1 + x_1^2 + x_2^2 \xrightarrow{(1)} A = \frac{1}{2} + x_1^2 + x_2^2$$

می‌دانیم $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2)^2 - 2(-\frac{1}{2}) = 5$ پس از معادله‌ی داده شده نتیجه می‌شود $x_1^2 + x_2^2 = (2)^2 - 2(-\frac{1}{2}) = 5$ بنابراین

$$A = \frac{1}{2} + 5 = \frac{11}{2}$$

در نتیجه گزینه‌ی (۴) درست است.

تذکر در واقع در تست بالا مقدار عبارتی نامتقارن برحسب ریشه‌ها به کمک عبارات متقارن برحسب ریشه‌ها به دست آمد.

معادلات وارونه

به ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + 6 = 0$ ($x_1 = 2, x_2 = 3$) و معادله‌ی $6x^2 - 5x + 1 = 0$ ($x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{2}$) توجه کنید، این ریشه‌ها وارون یک‌دیگر هستند. همان‌طور که مشاهده می‌کنید در این دو چندجمله‌ای ضرایب برعکس یک‌دیگرند. به این چندجمله‌ای‌ها، «چندجمله‌ای‌های وارونه‌ی یک‌دیگر» می‌گویند.

تعریف: دو چندجمله‌ای $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ و $Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ (با شرط $a_0 \neq 0$ و $a_n \neq 0$) «چندجمله‌ای‌های وارونه‌ی یک‌دیگر» خوانده می‌شوند.

قضیه اگر $\alpha \neq 0$ ریشه‌ی معادله‌ی $P(x)$ باشد و $Q(x)$ چندجمله‌ای وارونه‌ی $P(x)$ باشد آن‌گاه $\frac{1}{\alpha}$ ریشه‌ی $Q(x)$ است.

تست ۱۱: اعداد ۱ و $\frac{1}{3}$ ریشه‌های چندجمله‌ای $P(x) = ax^3 + bx^2 + bx + a$ هستند. مجموع ریشه‌های حقیقی $P(x)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{7}{3}$ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: چندجمله‌ای وارونه‌ی $P(x)$ خود $P(x)$ است پس اگر r ریشه‌ی $P(x)$ باشد $\frac{1}{r}$ هم ریشه‌ی آن است. بنابراین ۱ و $\frac{1}{3}$ و ۳ ریشه‌های

این معادله هستند که مجموع آن‌ها $\frac{7}{3}$ می‌شود. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

معادلات قابل تبدیل به معادله‌ی درجه‌ی دوم

برخی از معادلات، معادله‌ی درجه‌ی دو نیستند، ولی با تغییر متغیری مناسب به معادله‌ی درجه‌ی دو تبدیل می‌شوند.

مثال: $-3x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ یک معادله‌ی درجه‌ی دو نیست ولی می‌توان آن را با تغییر متغیر $t = x^2$ به معادله‌ی درجه‌ی دوم $-3t^2 + 2t + 1 = 0$ تبدیل کرد که در آن $\Delta = 16$. بنابراین $t_1 = 1$ و $t_2 = -\frac{1}{3}$ جواب‌های این معادله‌ی درجه دو هستند. حالا از

آنجا که $t = x^2$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$t = x^2 = -\frac{1}{3} \quad \text{جواب ندارد} \quad , \quad t = x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی $-3x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ دارای دو ریشه‌ی $x_1 = 1$ و $x_2 = -1$ است.

تست ۱۲: به ازای کدام مقدار m از معادله‌ی $mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0$ فقط یک جواب برای x به دست می‌آید؟

- (۱) $(0, 2) \cup \{1 + \frac{\sqrt{13}}{2}\}$ (۲) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$
 (۳) $(-\frac{2}{3}, 2) \cup \{1 + \frac{\sqrt{13}}{2}\}$ (۴) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) \cup \{1 + \frac{\sqrt{13}}{2}\}$

پاسخ: قرار می‌دهیم $\sqrt{x} = t$ در این صورت به معادله‌ی $mt^2 - 3t + m - 2 = 0$ می‌رسیم. اگر این معادله دارای یک ریشه‌ی مثبت α و یک ریشه‌ی منفی β باشد آن‌گاه $x = \sqrt{\alpha}$ جواب معادله‌ی اولیه خواهد بود. همچنین اگر α ریشه‌ی مضاعف و مثبت معادله‌ی بر حسب t باشد آن‌گاه معادله‌ی اولیه فقط یک جواب $x = \sqrt{\alpha}$ را برای x خواهد داشت:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 9 - 4(m)(m - 2) > 0 \Rightarrow 9 - 4m^2 + 8m > 0 \Rightarrow 4m^2 - 8m - 9 < 0 \Rightarrow 1 - \frac{\sqrt{13}}{2} < m < 1 + \frac{\sqrt{13}}{2} \quad (1)$$

می‌دانیم برای این که در معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ در حالتی که $\Delta > 0$ یک ریشه مثبت و ریشه دیگر منفی باشد باید داشته باشیم $\frac{c}{a} < 0$. پس می‌توان نوشت:

$$\frac{m-2}{m} < 0 \Rightarrow 0 < m < 2 \xrightarrow{\cap (1)} 0 < m < 2$$

حال اگر بخواهیم α ریشه‌ی مضاعف و مثبت باشد باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \Delta = 0 \Rightarrow m = 1 \pm \frac{\sqrt{13}}{2} \\ \frac{-b}{a} = \frac{3}{m} > 0 \Rightarrow m > 0 \end{cases} \xrightarrow{\cap} m = 1 + \frac{\sqrt{13}}{2}$$

از اجتماع جواب‌های به دست آمده داریم:

$$m \in (0, 2) \cup \{1 + \frac{\sqrt{13}}{2}\}$$

بنابراین گزینه (۱) درست است.

بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار چندجمله‌ای درجه‌ی دو

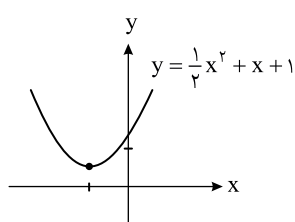
نکته:

۱- کم‌ترین مقدار چندجمله‌ای $P(x) = ax^2 + bx + c$ (در حالت $a > 0$) همان عرض رأس سهمی است. بنابراین:

$$y_{\min} = y_S = P(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$$

۲- بیش‌ترین مقدار چندجمله‌ای $P(x) = ax^2 + bx + c$ (در حالت $a < 0$) همان عرض رأس سهمی است. بنابراین:

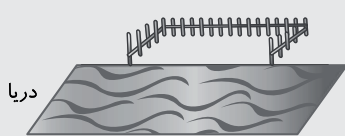
$$y_{\max} = y_S = P(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$$



مثال: کم‌ترین مقدار تابع $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$ با توجه به نکته‌ی بالا $y_S = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{1}{2}$ است که در

$x_S = -\frac{b}{2a} = -1$ رخ می‌دهد. به نمودار این سهمی که به شکل مقابل است توجه کنید.

تست ۱۳: بیشترین مساحت قطعه زمینی مستطیل شکل کنار دریا که می‌توان آن را با ۲۰۰ متر نرده محصور کرد، چند متر مربع است؟



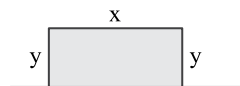
(۱) ۵۰۰۰

(۲) ۲۵۰۰

(۳) $\frac{40000}{9}$

(۴) ۱۰۰۰۰

پاسخ: مطابق شکل مقابل داریم $x + 2y = 200$. حال می‌خواهیم مساحت مستطیل یعنی xy بیشترین مقدار را داشته باشد. برای این منظور داریم:



$$x + 2y = 200 \Rightarrow y = 100 - \frac{x}{2} \xrightarrow{\times x} xy = x\left(100 - \frac{x}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} + 100x$$

حال بیشترین مقدار عبارت بالا یعنی $P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 100x$ را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{0 - 100 \times 100}{4(-\frac{1}{2})} = 5000 \text{ متر مربع}$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

نکته: اگر مجموع دو متغیر مثبت x و y ، مقداری ثابت باشد، آن‌گاه حاصل ضرب آن‌ها زمانی بیشترین است که $x = y$.

تذکره: اگر در حل تست قبل از نکته‌ی بالا استفاده کنیم می‌توان گفت چون $x + 2y = 200$ مقداری ثابت است پس $(2y) \times x$ زمانی

ماکسیمم می‌شود که داشته باشیم $x = 2y = \frac{200}{3}$. در این حالت $x = 100$ و $y = 50$. از طرفی حاصل ضرب xy زمانی ماکسیمم است که $2xy$

ماکسیمم شود. پس:

$$\text{Max}(xy) = 100 \times 50 = 5000$$

تست ۱۴: ماکسیمم تابع $A = 9 \sin^2 x \cos^2 x$ کدام گزینه است؟

(۴) $\frac{9}{8}$

(۳) $\frac{9}{4}$

(۲) $\frac{9}{2}$

(۱) ۹

پاسخ: از آن جا که $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ می‌توان گفت $\sin^2 x \cos^2 x$ زمانی بیشترین مقدار را دارد که $\sin^2 x = \cos^2 x = \frac{1}{2}$.

بنابراین بیشترین مقدار A برابر است با $9 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

نکته: اگر حاصل ضرب دو متغیر مثبت x و y مقداری ثابت باشد آن‌گاه حاصل جمع آن‌ها وقتی کمترین است که $x = y$.

تست ۱۵: کمترین مقدار $f(x) = \tan x + 3 \cot x$ کدام است؟ $(x \in (0, \frac{\pi}{2}))$

(۴) $4\sqrt{3}$

(۳) $3\sqrt{3}$

(۲) $2\sqrt{3}$

(۱) $\sqrt{3}$

پاسخ: چون $\tan x$ و $3 \cot x$ در بازه‌ی $(0, \frac{\pi}{2})$ مثبت هستند و $\tan x \cdot 3 \cot x = 3$ نتیجه می‌گیریم حاصل جمع $\tan x + 3 \cot x$ زمانی

کمترین است که $\tan x = 3 \cot x = \sqrt{3}$. بنابراین داریم:

$$f(x) \text{ کمترین مقدار} = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

بخش پنجم: معادله‌ی درجه‌ی دوم

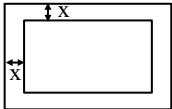
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۳۲- مجموع مربعات دو عدد طبیعی متوالی، ۶۱ است. مجموع این دو عدد کدام است؟

- ۱۳ (۱) ۱۱ (۲) ۹ (۳) ۱۵ (۴)

۱۳۳- اطراف یک استخر، پیاده‌روی به عرض x متر ساخته شده است. طول استخر ۴۰ متر و عرض آن ۳۰ متر است. کل سطح با احتساب پیاده‌رو، ۲۰۰۰ متر مربع است. در این صورت مقدار x چند متر است؟

- ۵ (۱) ۱۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)



۱۳۴- معادله‌ی درجه‌ی دومی با ضرایب گویا که یکی از ریشه‌هایش $3-\sqrt{5}$ باشد، کدام است؟

- $x^2-6x-4=0$ (۱) $x^2-6x+4=0$ (۲) $x^2-6x+5=0$ (۳) $x^2-3x+1=0$ (۴)

۱۳۵- به ازای کدام مقدار m ، معادله‌ی $(m+2)x^2+4x+m-1=0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟

- $-3 < m < 2$ (۱) $-2 < m < 3$ (۲) $-1 < m < 2$ (۳) $-1 < m < 2$ (۴)

۱۳۶- به ازای کدام مقدار m ، چندجمله‌ای $P(x)=mx^2-2x+m-2$ فقط یک ریشه دارد؟ ($m \neq 0$)

- $\frac{1}{4}$ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $1 \pm \sqrt{2}$ (۳) $2 \pm \sqrt{2}$ (۴)

۱۳۷- به ازای کدام مقادیر m ، معادله‌ی $(x+2)(x^2-2x+4+m)=0$ سه ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد؟

- $m < -4$ (۱) $m < -3$ (۲) $m > -4$ (۳) $m < -3$ و $m \neq -12$ (۴)

۱۳۸- اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ با « Δ » معادله برابر باشد، آن‌گاه بیش‌ترین مقدار ab کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴)

۱۳۹- نمودار سهمی $y=x^2-x$ از کدام ناحیه‌ی صفحه‌ی مختصات نمی‌گذرد؟

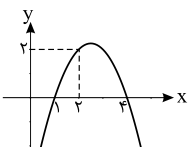
- اول (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴)

۱۴۰- به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $y=(m-1)x^2+\sqrt{3}x+m$ همواره زیر محور x ها است؟

- $m < -\frac{1}{2}$ (۱) $-\frac{1}{2} < m < 1$ (۲) $1 < m < \frac{3}{2}$ (۳) $m > \frac{3}{2}$ (۴)

۱۴۱- در شکل روبه‌رو نمودار سهمی $y=ax^2+bx-4$ رسم شده است. دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

- (۱, -۵) (۱) (-۱, -۵) (۲) (۱, ۵) (۳) (-۱, ۵) (۴)

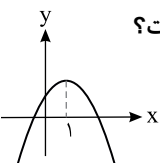


۱۴۲- اگر خط $x=-\frac{1}{2}$ محور تقارن سهمی $y=x^2+ax+1$ باشد، آن‌گاه مقدار a کدام است؟

- ۲ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

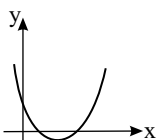
۱۴۳- در شکل روبه‌رو بخشی از نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ رسم شده است. کدام یک از عبارات زیر برابر با صفر است؟

- ac (۱) $2a+b$ (۲) $a-b+c$ (۴) $2a-b$ (۳)

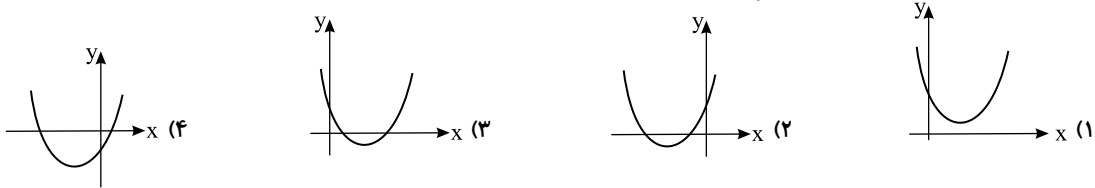


۱۴۴- نمودار تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ به‌صورت روبه‌رو است. علامت a ، b و c به‌ترتیب کدام‌اند؟

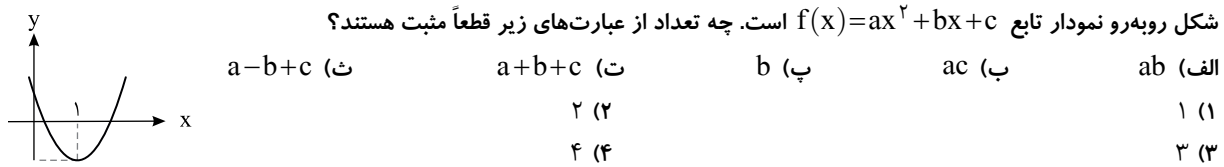
- (۱) منفی، منفی، مثبت (۲) مثبت، مثبت، مثبت (۳) مثبت، منفی، مثبت (۴) مثبت، مثبت، منفی



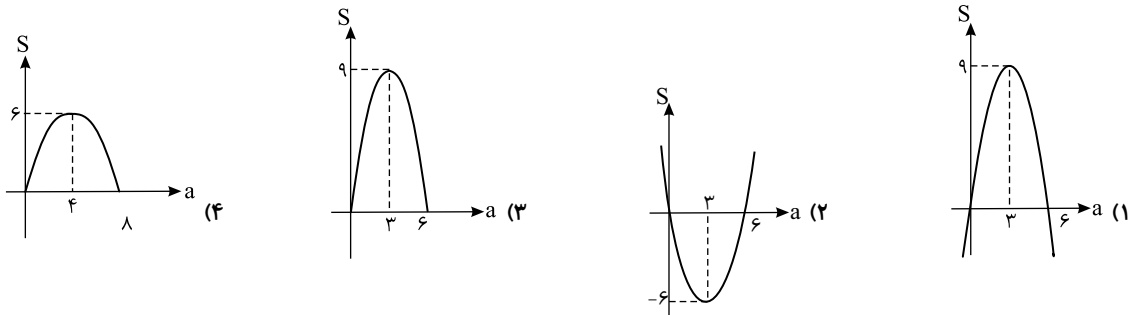
۱۴۵- در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ می‌دانیم ضرایب a ، b و c هر سه مثبت‌اند. کدام گزینه می‌تواند نمودار این سهمی باشد؟



۱۴۶- شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. چه تعداد از عبارات‌های زیر قطعاً مثبت هستند؟



۱۴۷- یک ورق کاغذ مستطیل شکل به محیط ۱۲ سانتی‌متر مفروض است. اگر یک ضلع مستطیل را با a و مساحت آن را با S نشان دهیم، کدام گزینه نمودار S بر حسب a را نشان می‌دهد؟



۱۴۸- نقطه‌ی $S(1, 8)$ رأس یک سهمی است. اگر بدانیم سهمی از نقطه‌ی $(0, 17)$ می‌گذرد، آن‌گاه کدام گزینه می‌تواند معادله‌ی این سهمی باشد؟

(۱) $y = 9x^2 - 18x + 9$ (۲) $y = 9x^2 - 18x + 17$ (۳) $y = x^2 - 18x + 17$ (۴) $y = 9x^2 - 10x + 17$

۱۴۹- معادله‌ی $x^2 - 2ax + b + 3 = 0$ ریشه‌ی مضاعف دارد. کدام معادله قطعاً دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد؟

(۱) $x^2 - 2ax + b + 5 = 0$ (۲) $x^2 - 2ax + b + 1 = 0$ (۳) $x^2 + 2ax + b + 3 = 0$ (۴) $x^2 + ax + b + 3 = 0$

۱۵۰- نمودار سهمی $y = mx^2 + 2mx + m - 1$ از چهار ناحیه‌ی محورهای مختصات می‌گذرد. مقادیر m کدام است؟

(۱) $m > 0$ (۲) $0 < m < 1$ (۳) $m > 1$ (۴) $m \in \mathbb{R} - \{0\}$

۱۵۱- به ازای چند مقدار صحیح a ، نمودار سهمی $y = -x^2 + ax + a^2 - 4$ از ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

(۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

۱۵۲- اگر معادله‌ی $ax^2 - 3ax + 1 = 0$ دو ریشه‌ی x_1 و x_2 با شرط $x_1 < 1 < x_2$ داشته باشد، آن‌گاه حدود a کدام است؟

(۱) $a > \frac{1}{2}$ (۲) $a < 0$ (۳) $0 < a < \frac{1}{2}$ (۴) $a < 0$ یا $a > \frac{1}{2}$

۱۵۳- برای کدام مقادیر m ، معادله‌ی $(2m+3)x^2 - 6x + (2m+3) = 0$ دو ریشه در فاصله‌ی $(0, 3)$ دارد؟

(۱) $-\frac{3}{5} < m < 0$ (۲) $-3 < m < 0$ (۳) $-\frac{3}{2} < m < 0$ (۴) $-\frac{3}{2} < m < -\frac{3}{5}$

۱۵۴- نقاط A و B روی سهمی $y = 2x^2 + 4x - 2$ قرار دارند. اگر بدانیم مبدأ مختصات وسط پاره‌خط AB است، آن‌گاه طول پاره‌خط AB کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۸ (۳) $2\sqrt{17}$ (۴) $4\sqrt{17}$

۱۵۵- فرض کنید $f(x) = x^2 - 2ax + 1$ و $g(x) = 2b(a-x)$. مجموعه‌ی نقاط دارای مختصات (a, b) را که به ازای آن‌ها نمودارهای f و g با هم نقطه‌ی مشترکی ندارند، S می‌نامیم. مساحت S کدام است؟

(۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

روابط بین ریشه‌ها در معادله‌ی درجه دوم و تشکیل معادله

۱۵۶- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشند، مقدار $x_1^2 + x_2^2$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱۲ (۳) ۴ (۴) ۱۸

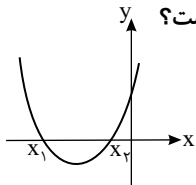
۱۵۷- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 7x - 1 = 0$ باشند، آن‌گاه مقدار عبارت $2x_1(1-x_2) + 2x_2$ کدام است؟

- ۱۸ (۱) ۱۶ (۲) ۱۴ (۳) ۱۲ (۴)

۱۵۸- اگر $2k^2 + 4k - a = 0$ و $2k'^2 + 4k' - a = 0$ ، آن‌گاه حاصل $k + k'$ کدام است؟

- صفر (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $-\frac{a}{2}$ (۴)

۱۵۹- نمودار سهمی $y = x^2 + 6x + m$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. اگر بدانیم $2x_2 = x_1$ ، آن‌گاه مقدار m کدام است؟



- ۸ (۱)
۴ (۲)
۱۲ (۳)
۲ (۴)

۱۶۰- در معادله‌ی $3x^2 - 15x + m = 0$ یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه‌ی دیگر بیش‌تر است. مقدار m کدام است؟

- $\frac{59}{5}$ (۱) $\frac{63}{5}$ (۲) $\frac{59}{4}$ (۳) $\frac{63}{4}$ (۴)

۱۶۱- به ازای کدام مقدار m ، معادله‌ی $x^2 + (m^2 - m)x + 3m + 1 = 0$ دو ریشه‌ی حقیقی قرینه‌ی هم دارد؟

- ۱ (۱) ۰, ۱ (۲) ۰, ± 1 (۳) صفر (۴)

۱۶۲- اگر معادله‌ی $mx^2 - 2(m^2 + m - 2)x + m - 2 = 0$ دو ریشه‌ی حقیقی با علامت‌های مختلف داشته باشد، آن‌گاه حدود m کدام است؟

- $m < 0$ (۱) $m > 2$ (۲) $0 < m < 2$ (۳) $m > 2$ یا $m < 0$ (۴)

۱۶۳- معادله‌ی $mx^2 + 2x + 2m - 1 = 0$ دو ریشه‌ی مثبت متمایز دارد. حدود مقادیر m کدام است؟

- $-1 < m < \frac{1}{2}$ (۱) $m < 0$ (۲) $-\frac{1}{2} < m < 0$ (۳) $m < 0$ یا $m > \frac{1}{2}$ (۴)

۱۶۴- در معادله‌ی $x^2 - 6x + 1 = 0$ دو ریشه را x' و x'' می‌نامیم. اگر $\sqrt{x'} + \sqrt{x''} = 2m$ ، آن‌گاه مقدار m کدام است؟

- ۱ (۱) $-\sqrt{2}$ (۲) $\pm\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴)

۱۶۵- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + x - 3 = 0$ باشند، آن‌گاه حاصل عبارت $\alpha^3(1+\alpha^3) + \beta^3(1+\beta^3)$ کدام است؟

- ۸۳ (۱) ۶۳ (۲) ۱۶۴ (۳) ۱۴۴ (۴)

۱۶۶- در معادله‌ی $x^2 + x - 1 = 0$ ، اگر ریشه‌ها x_1 و x_2 باشند، آن‌گاه حاصل عبارت $2x_1^2 + 2x_2 + (x_1 + x_2)^2$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) -۴ (۳) -۱ (۴)

۱۶۷- در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - 2x - 4 = 0$ ، اگر ریشه‌ها α و β باشند، حاصل $(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2$ چقدر است؟

- ۴۸ (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۲۴ (۴)

۱۶۸- اگر $a > 0$ و دو معادله‌ی $x^2 + 2x + a = 0$ و $x^2 - x - 2a = 0$ دارای یک ریشه‌ی مشترک باشند، آن‌گاه این ریشه‌ی مشترک کدام است؟

- ۲ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

۱۶۹- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + x - 3 = 0$ باشند، آن‌گاه مقدار عبارت $\alpha^3 - 4\beta^2 + 2$ کدام است؟

- ۱۹ (۱) -۱۹ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴)

۱۷۰- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $(x-2)(x-3) + (x-3)(x+1) + (x+1)(x-2) = 0$ باشند، آن‌گاه حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)} + \frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)} + \frac{1}{(\alpha-3)(\beta-3)}$$

- صفر (۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴)

۱۷۱- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ باشند و داشته باشیم $\frac{2x_1^3}{1+x_1^2} = x_1^2$ و $\frac{2x_2^3}{1+x_2^2} = x_2^2$ ، آن‌گاه مقدار عبارت $\frac{fa+b+fc}{a}$ کدام است؟

- صفر (۱) ۶ (۲) -۶ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴)

- ۱۷۲- معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌هایش $3-\sqrt{5}$ و $3+\sqrt{5}$ باشند، کدام است؟
 (۱) $x^2+6x+4=0$ (۲) $x^2+14x+6=0$ (۳) $x^2-6x+4=0$ (۴) $x^2-14x+6=0$
- ۱۷۳- طول و عرض زمین مستطیل شکلی به محیط ۳۰ متر و مساحت ۴۴ مترمربع را به ترتیب a و b می‌نامیم. $3a+2b$ کدام است؟
 (۱) ۳۶ (۲) ۴۱ (۳) ۸۹ (۴) ۴۲
- ۱۷۴- اگر مساحت یک لوزی ۲۴ واحد مربع و محیط آن ۲۰ واحد باشد، طول قطر بزرگ آن کدام است؟
 (۱) ۷ (۲) ۱۴ (۳) ۵ (۴) ۸
- ۱۷۵- معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3\sqrt{2}x+4=0$ باشند، کدام است؟
 (۱) $x^2+10x-16=0$ (۲) $x^2-10x+16=0$ (۳) $x^2-10x-16=0$ (۴) $x^2+10x+16=0$
- ۱۷۶- به ازای کدام مقدار k ، ریشه‌های معادله‌ی $2x^2+3x-k=0$ دو واحد از ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-5x+1=0$ کم‌تر خواهند بود؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲
- ۱۷۷- اگر ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ ، α و β باشند، آن‌گاه ریشه‌های کدام یک از معادله‌های زیر $-\frac{1}{\alpha}$ و $-\frac{1}{\beta}$ خواهند بود؟
 (۱) $cx^2-bx+a=0$ (۲) $ax^2-bx+c=0$ (۳) $ax^2-cx+b=0$ (۴) $cx^2-bx+a^2=0$
- ۱۷۸- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2+px+q=0$ باشند، آن‌گاه معادله‌ای که ریشه‌های آن $\alpha^2+\alpha\beta$ و $\beta^2+\alpha\beta$ باشد، کدام است؟
 (۱) $x^2+p^2x+p^2q=0$ (۲) $x^2-p^2x-p^2q=0$ (۳) $x^2+p^2x-p^2q=0$ (۴) $x^2-p^2x+p^2q=0$
- ۱۷۹- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $4x^2-x-6=0$ باشند، معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌های آن $4\alpha^2-6$ و $4\beta^2-6$ شود، کدام است؟
 (۱) $4x^2-x-6=0$ (۲) $4x^2+x-6=0$ (۳) $6x^2+x-4=0$ (۴) $6x^2-x-4=0$

ماکسیمم یا می‌نیمم تابع درجه‌ی دوم

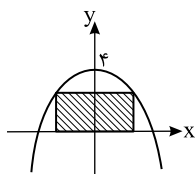
- ۱۸۰- x و y دو متغیرند و a عدد ثابتی است به طوری که $2x+y=a$. بیش‌ترین مقدار xy کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{8}a^2$ (۲) $\frac{1}{16}a^2$ (۳) $2a^2$ (۴) $4a^2$
- ۱۸۱- عدد ۳۶ را به صورت مجموع دو عدد نشان داده‌ایم که حاصل ضرب آن دو بیش‌ترین مقدار ممکن را دارد. اختلاف این دو عدد کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر
- ۱۸۲- بین تمام مثلث‌های قائم‌الزاویه که مجموع طول‌های دو ضلع قائم آن‌ها ۸ می‌باشد، بیش‌ترین مقدار مساحت ممکن چقدر است؟
 (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲
- ۱۸۳- مجموع قطر قاعده و ارتفاع یک استوانه‌ی قائم ۳۰ است. ارتفاع استوانه کدام مقدار باشد تا مساحت جانبی آن بیش‌ترین مقدار ممکن را اختیار کند؟
 (۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۱۵ (۴) $12\frac{1}{2}$
- ۱۸۴- بیش‌ترین مساحت مستطیلی که به وسیله‌ی یک طناب به طول ۴۸ متر در حاشیه‌ی یک رودخانه می‌توان محصور کرد، چند متر مربع است؟ (به ضلع چهارم مستطیل دسترسی نیست.)
 (۱) ۲۴۴ (۲) ۲۸۸ (۳) ۲۹۶ (۴) ۳۱۶
- ۱۸۵- بین تمام مستطیل‌هایی که در دایره‌ای به شعاع ۲ محاط می‌شوند، بیش‌ترین مساحت ممکن چقدر است؟
 (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲
- ۱۸۶- بین مستطیل‌هایی با محیط ۲۴ واحد، طول کوتاه‌ترین قطر کدام است؟
 (۱) $4\sqrt{2}$ (۲) $4\sqrt{3}$ (۳) $6\sqrt{2}$ (۴) $6\sqrt{3}$
- ۱۸۷- اگر $xy=8$ و $x, y > 0$ ، آن‌گاه کم‌ترین مقدار $x+y$ کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) ۸
- ۱۸۸- اگر $4x+y=5$ و $x, y > 0$ ، آن‌گاه بیش‌ترین مقدار $A=x^2y^2$ کدام است؟
 (۱) $\frac{5}{16}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $(\frac{5}{4})^2$ (۴) $(\frac{5}{4})^4$

۱۸۹- کم‌ترین مقدار عبارت $A(x) = \frac{x^2+16}{3x}$ کدام است؟ ($x > 0$)

- (۱) $\frac{8}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۱

۱۹۰- بیش‌ترین مقدار تابع $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x^2-4x+3}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (۲) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (۳) ۲ (۴) $2\sqrt{2}$

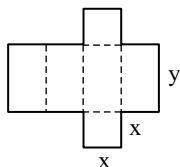


۱۹۱- یک ضلع مستطیلی روی محور x ها و دو رأس دیگر آن روی سهمی $y = -x^2 + 4$ است. بین چنین مستطیل‌هایی، بیش‌ترین محیط ممکن چقدر است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) $6\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$

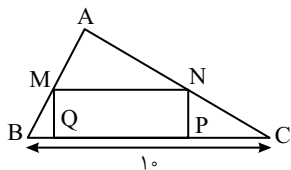
۱۹۲- کوتاه‌ترین فاصله‌ی مبدأ مختصات از نقاط روی منحنی $y^2 = -2x + 4$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{3}$



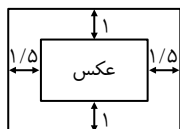
۱۹۳- تمام ورق‌های فلزی شبیه شکل روبه‌رو را در نظر می‌گیریم که محیطی برابر 440 سانتی‌متر دارند. اگر با هر کدام از این ورق‌ها یک مکعب مستطیل بسازیم، بیش‌ترین مساحت ممکن برای مکعب مستطیل چند سانتی‌متر مربع است؟

- (۱) ۸۸۰ (۲) ۸۸۰۰ (۳) ۴۴۰ (۴) ۴۴۰۰



۱۹۴- در مثلث ABC با مساحت 30 و ضلع $BC = 10$ ، مستطیل $MNPQ$ را مطابق شکل محاط می‌کنیم. بین چنین مستطیل‌هایی بیش‌ترین مساحت ممکن چقدر است؟

- (۱) ۲۰ (۲) $10\sqrt{2}$ (۳) ۱۵ (۴) ۲۴



۱۹۵- یک عکس به مساحت 48 سانتی‌متر مربع، مطابق شکل با حاشیه‌هایی درون یک قاب قرار گرفته است. اگر ابعاد عکس متغیر و مساحت آن ثابت باشد، کم‌ترین مساحت ممکن برای قاب چند سانتی‌متر مربع است؟

- (۱) $54 + 12\sqrt{2}$ (۲) $54 + 6\sqrt{2}$ (۳) $54 + 24\sqrt{2}$ (۴) $54 + 2\sqrt{2}$

۱۹۶- معادله‌ی $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ چند ریشه دارد و مجموع مجذورات ریشه‌ها چقدر است؟

- (۱) دو ریشه - سه (۲) دو ریشه - شش (۳) چهار ریشه - سه (۴) چهار ریشه - شش

معادلات درجه‌ی بالاتر و معادلات وارونه

۱۹۷- معادله‌ی $(x^2-4)^4 - 4(x^2-4)^2 + 3 = 0$ چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۸

۱۹۸- معادله‌ی $x^4 - 6x^2 + 9 = (x+1)^2$ چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۹۹- اگر $f(x) = x^2 + x + a$ ، $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid f(x^2) = f(x)\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۰۰- معادله‌ی $(x+2)(x^2+1)(x-2) = 1$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) صفر

۲۰۱- برای کدام مقادیر b ، معادله‌ی $bx^3 - bx^2 - 2 = 0$ فقط ۲ ریشه‌ی حقیقی دارد؟

- (۱) $-4 < b < 4$ (۲) $b \geq 4$ (۳) $b \leq -4$ (۴) $-4 \leq b \leq 4$

۲۰۲- معادله $(x^2+3x)^2+8=6x^2+18x$ چند جواب حقیقی دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲۰۳- چند نقطه از منحنی به معادله $y=\frac{x^4+4}{5x}$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲۰۴- اگر معادله $x^4-(m+2)x^2+m+5=0$ دارای ۴ ریشه حقیقی متمایز باشد، آن گاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

- ۱ (۱) $m < -4$ ۲ (۲) $m > 4$ ۳ (۳) $-4 < m < 4$ ۴ (۴) $4 < m < 9$

۲۰۵- معادله $(x-5)(x-4)(x+3)(x+2)=144$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲۰۶- معادله‌ای با ضرایب صحیح که یکی از ریشه‌های آن $\sqrt{3}+2\sqrt{2}$ باشد، کدام است؟

- ۱ (۱) $x^4+22x^2+35=0$ ۲ (۲) $x^4+35x^2-22=0$ ۳ (۳) $x^4-35x^2-22=0$ ۴ (۴) $x^4-22x^2+35=0$

۲۰۷- اگر ریشه‌های معادله $2x^3+ax^2+bx+c=0$ ، وارون ریشه‌های معادله $x^3+5x^2-20x+12=0$ باشند، مقدار a کدام است؟

- ۱ (۱) -20 ۲ (۲) $-\frac{10}{3}$ ۳ (۳) 5 ۴ (۴) $\frac{5}{6}$

۲۰۸- معادله $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ با چه تغییر متغیری به یک معادله درجه دوم بر حسب t تبدیل می‌شود؟ ($a \neq 0$)

- ۱ (۱) $t=\frac{1}{x}$ ۲ (۲) $t=x+a$ ۳ (۳) $t=\frac{1}{x+a}$ ۴ (۴) $t=x+\frac{1}{x}$

۲۰۹- معادله $(x-\sqrt{x})^2-\frac{11}{10}(x-\sqrt{x})+\frac{1}{10}=0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

سؤالات آزمون‌های سراسری سال ۸۶ به بعد

۲۱۰- اگر هر یک از ریشه‌های معادله $3x^2+ax+b=0$ ، دو برابر معکوس هر ریشه از معادله $4x^2-7x+3=0$ باشند، آن گاه مقدار a کدام است؟ (سراسری-۸۶)

- ۱ (۱) -14 ۲ (۲) -12 ۳ (۳) -8 ۴ (۴) -6

۲۱۱- خط به معادله $y=mx+4$ با منحنی به معادله $y=-x^2+2x$ هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارد. مجموعه‌ی مقادیر m کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۶)

- ۱ (۱) $m < 0$ ۲ (۲) $m > 4$ ۳ (۳) $-1 < m < 4$ ۴ (۴) $-2 < m < 6$

۲۱۲- ریشه‌های معادله $3x^2+ax+b=0$ از ریشه‌های معادله $3x^2-4x-1=0$ یک واحد بیش‌تر است. b کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۶)

- ۱ (۱) -5 ۲ (۲) -2 ۳ (۳) 4 ۴ (۴) 6

۲۱۳- در معادله $3x^2-17x+m=0$ ، یک ریشه از سه برابر ریشه‌ی دیگر ۳ واحد بیش‌تر است. مقدار m کدام است؟ (سراسری-۸۷)

- ۱ (۱) 9 ۲ (۲) 10 ۳ (۳) 12 ۴ (۴) 15

۲۱۴- اگر منحنی به معادله $y=2x^2-4x+m-3$ ، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع کند، آن گاه مجموعه‌ی مقادیر m به کدام صورت است؟ (سراسری-۸۷)

- ۱ (۱) $m > 3$ ۲ (۲) $3 < m < 4$ ۳ (۳) $3 < m < 5$ ۴ (۴) $4 < m < 5$

۲۱۵- با کدام مقادیر m ، منحنی به معادله $y=(m+2)x^2-2x+1$ از هر چهار ناحیه‌ی مختصات می‌گذرد؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۷)

- ۱ (۱) $m < -2$ ۲ (۲) $m < -1$ ۳ (۳) $-2 < m < -1$ ۴ (۴) $-4 < m < -3$

۲۱۶- اگر یکی از ریشه‌های معادله $x(ax^2-x-5)=2$ برابر ۲ باشد، مجموع سایر ریشه‌ها کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۷)

- ۱ (۱) -2 ۲ (۲) $-\frac{3}{2}$ ۳ (۳) $\frac{1}{2}$ ۴ (۴) $\frac{3}{2}$

- ۲۱۷- منحنی به معادله‌ی $y = (x+8)(x+1)$ با خطوط $y = mx$ نقطه‌ی مشترک ندارد. مجموعه‌ی مقادیر m چگونه است؟ (سراسری - ۸۸)
- (۱) $5 < m < 13$ (۲) $15 < m < 23$ (۳) $7 < m < 15$ (۴) $9 < m < 25$
- ۲۱۸- خط گذرنده از مبدأ مختصات، بر منحنی به معادله‌ی $y = (x+1)(x+4)$ در ناحیه‌ی اول مماس است. شیب این خط کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۸)
- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۹
- ۲۱۹- به ازای کدام مقادیر a ، منحنی به معادله‌ی $y = ax^2 - (a+2)x$ از ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (سراسری - ۸۹)
- (۱) $a \leq -2$ (۲) $a > 0$ (۳) $a > -2$ (۴) $-2 \leq a < 0$
- ۲۲۰- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، هر نقطه از نمودار تابع $f(x) = (a-1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$ بالای محور x ‌ها است؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۹)
- (۱) $a < -1$ (۲) $a > 1$ (۳) $a > 2$ (۴) $1 < a < 2$
- ۲۲۱- اگر نمودار تابع $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + m$ ، محور x ‌ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، طول‌های دو نقطه‌ی تلاقی دیگر آن با محور x ‌ها کدام‌اند؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۹)
- (۱) $-1, \frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}, 1$ (۳) $-1, \frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}, 3$
- ۲۲۲- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x = 1$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله‌ی $8x^2 + kx - 1 = 0$ به صورت $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$ است؟ (سراسری خارج از کشور - ۹۰)
- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹
- ۲۲۳- به ازای کدام مقادیر m ، عبارت $(m-1)x^2 + 6x + 2m+1$ برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟ (سراسری خارج از کشور - ۹۰)
- (۱) $m < -2$ (۲) $m > 2/5$ (۳) $1 < m < 2$ (۴) $1 < m < 2/5$
- ۲۲۴- به ازای کدام مقادیر m ، خط به معادله‌ی $y = 2x - 4$ بر منحنی به معادله‌ی $y = (m+3)x^2 + mx$ مماس است؟ (سراسری - ۹۱)
- (۱) $-2, 18$ (۲) $-2, 22$ (۳) $2, 22$ (۴) $4, 11$
- ۲۲۵- در معادله‌ی $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیش‌تر است. m کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۹۱)
- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵
- ۲۲۶- بیش‌ترین مساحت از زمینی را می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، چند مترمربع است؟ (سراسری خارج از کشور - ۹۱)
- (۱) ۹۵۸ (۲) ۹۶۸ (۳) ۹۷۸ (۴) ۹۸۸
- ۲۲۷- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به صورت $\{\frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1\}$ است؟ (سراسری - ۹۲)
- (۱) $4x^2 - 5x + 1 = 0$ (۲) $4x^2 - 3x + 1 = 0$ (۳) $4x^2 - 5x - 1 = 0$ (۴) $4x^2 - 3x - 1 = 0$
- ۲۲۸- به ازای کدام مقدار m مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ است؟ (سراسری - ۹۳)
- (۱) $-\frac{9}{5}$ (۲) ۱ (۳) $-\frac{9}{5}$ و ۱ (۴) $-\frac{9}{5}$ و -۱
- ۲۲۹- به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه‌ی اول محورهای مختصات، مماس است؟ (سراسری خارج از کشور - ۹۳)
- (۱) -۴ (۲) ۴ و -۱۲ (۳) -۴ و ۱۲ (۴) ۱۲
- ۲۳۰- ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمتر است؟ (سراسری - ۹۴)
- (۱) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (۲) $x^2 + 3x + 1 = 0$ (۳) $x^2 - 5x + 2 = 0$ (۴) $x^2 + 5x + 2 = 0$
- ۲۳۱- به ازای کدام مقادیر a ، معادله‌ی $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$ دارای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت است؟ (سراسری خارج از کشور - ۹۴)
- (۱) $a < -4$ (۲) $a > -4$ (۳) $a < 4$ (۴) $a > 4$