

## بخش هشتم: توابع زوج و فرد و نزولی

### درسنامه

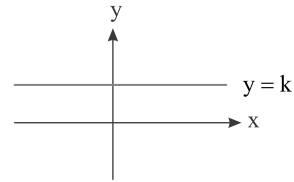
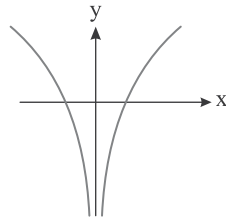
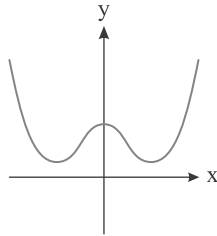
#### توابع زوج

**تعریف:** تابع حقیقی  $f$  زوج است هرگاه:

۱- دامنه‌ی آن نسبت به مبدأ متقارن باشد یعنی برای هر  $x \in D_f$ ، داشته باشیم:  $-x \in D_f$

۲- برای هر  $x \in D_f$ ، داشته باشیم:  $f(-x) = f(x)$

**مثال:** توابع زیر زوج هستند.



**نتیجه** ۱- نمودار تابع زوج نسبت به محور عرض‌ها متقارن است

۲- تابع ثابت  $f(x) = k$  با دامنه‌ی متقارن زوج است.

**تست ۱:** اگر  $f = \{(3, m), (0, 5), (-3, n+1), (4, m-2), (-4, 1)\}$  یک تابع زوج باشد، آن‌گاه  $m+n$  برابر کدام گزینه است؟

۷ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

$$m-2=1 \Rightarrow m=3$$

**پاسخ:** چون  $f(4) = m-2$ ،  $f(-4) = 1$  و  $f$  تابعی زوج است، می‌توان نوشت:

از طرفی  $f(3) = m = 3$  و  $f(-3) = n+1$ . بنابراین  $n+1 = 3$  در نتیجه  $n = 2$ . پس:  $n+m = 5$ . بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

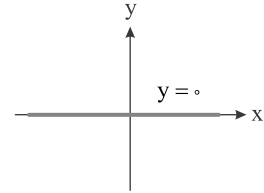
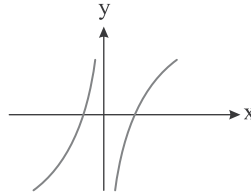
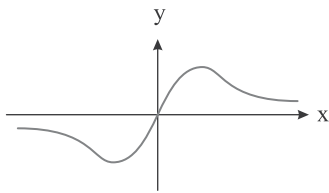
#### توابع فرد

**تعریف:** تابع حقیقی  $f$  فرد است هرگاه:

۱- دامنه‌ی آن نسبت به مبدأ متقارن باشد یعنی برای هر  $x \in D_f$ ، داشته باشیم:  $-x \in D_f$

۲- برای هر  $x \in D_f$ ، داشته باشیم:  $f(-x) = -f(x)$

**مثال:** توابع زیر فرد هستند:



**نتیجه** ۱- نمودار تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

۲- اگر تابعی فرد به ازای  $x = 0$  تعریف شده باشد آن‌گاه  $f(0) = 0$ .

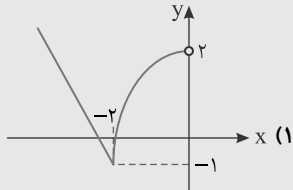
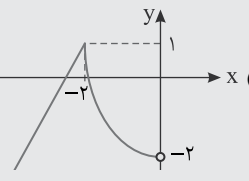
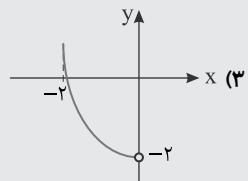
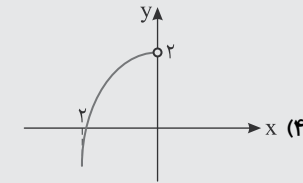
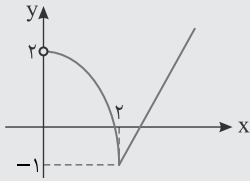
۳- تابع ثابت  $f(x) = 0$  با دامنه‌ی متقارن هم زوج و هم فرد است.

تست ۲: تابع  $f = \{(0, a^3 - 1), (1, b), (-1, 2)\}$  فرد است، مقدار  $ab$  کدام است؟

۱ (۴)      ۲ (۲)      ۳ (صفر)      ۴ (۱)

پاسخ: با توجه به این که  $f$  به ازای  $x=0$  تعریف شده است باید داشته باشیم  $f(0) = a^3 - 1 = 0$  پس  $a=1$ . از طرفی  $f(1) = b$  و  $f(-1) = 2$ . پس چون  $f$  فرد است باید داشته باشیم  $b = -2$  در نتیجه  $ab = -2$ . بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

تست ۳: در شکل روبه‌رو بخشی از نمودار تابع فرد  $f$  رسم شده است. کدام گزینه بقیه‌ی نمودار  $f$  را نشان می‌دهد؟



پاسخ: نمودار هر تابع فرد باید نسبت به مبدأ مختصات متقارن باشد. پس قرینه‌ی نمودار داده شده را نسبت به مبدأ باید به آن اضافه کنیم. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

**نکته:** اگر  $P(x)$  یک چندجمله‌ای فرد باشد تنها جملات با درجه‌ی فرد  $x$  در آن حضور دارند و اگر  $P(x)$  یک چندجمله‌ای زوج باشد تنها جملات با درجه‌ی زوج  $x$  در آن حضور دارند.

**تذکر:** برای تشخیص زوج یا فرد بودن یک تابع به دامنه‌ی تعریف آن توجه کنید. در یک تابع زوج یا فرد باید دامنه‌ی تعریف نسبت به مبدأ متقارن باشد.

**مثال:** در بین توابع زیر، توابع زوج و فرد را مشخص می‌کنیم:

الف)  $f(x) = (2x-1)^2 - (2x+1)^2$

$f$  یک چندجمله‌ای است پس  $D_f = \mathbb{R}$  که نسبت به مبدأ متقارن است. حال  $f$  را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = 4x^2 - 4x + 1 - 4x^2 - 4x - 1 = -8x \Rightarrow f \text{ فرد است.}$$

ب)  $g(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - x}$

دامنه‌ی  $g$  برابر  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$  است که نسبت به مبدأ متقارن نیست. پس  $g$  نه زوج و نه فرد است.

تست ۴: اگر  $f(x) = a(x-1)^3 + bx^3 + x^2 + x$  زوج باشد، آن‌گاه  $3a - 6b$  کدام است؟

۱ (۲)      ۳ (۱)      ۳ (۳)      ۴ ( $-\frac{2}{3}$ )

پاسخ: چندجمله‌ای  $f(x)$  را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = a(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + bx^3 + x^2 + x = (a+b)x^3 + (1-3a)x^2 + (1+3a)x - a$$

با توجه به نکته‌ی قبل باید ضرایب  $x^3$  و  $x$  هر دو صفر باشند، تا فقط توان‌های زوج  $x$  در  $f(x)$  باقی بماند. بنابراین:

$$\begin{cases} 3a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \\ a + b = 0 \Rightarrow b = -a = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 3a - 6b = -1 - 2 = -3$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تست ۵: اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + x & x < -1 \\ cx & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 + (b+1)x & x > 1 \end{cases}$  زوج باشد،  $a+b+c$  کدام است؟

(۱) -۱      (۲) ۱      (۳) صفر      (۴) -۲

پاسخ:  $D_f = \mathbb{R}$  که نسبت به مبدأ متقارن است. در حالت  $x < -1$  که  $f(x) = ax^2 + x$ ،  $f(-x)$  را به دست می‌آوریم. داریم:

$$x < -1 \Rightarrow -x > 1 \Rightarrow f(-x) = (-x)^2 + (b+1)(-x) = x^2 - (b+1)x$$

با توجه به این که برای هر  $x$  رابطه‌ی  $f(-x) = f(x)$  برقرار است داریم:

$$ax^2 + x = x^2 - (b+1)x \Rightarrow -(b+1) = 1, a = 1 \Rightarrow b = -2, a = 1$$

حال برای  $-1 \leq x \leq 1$  می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{aligned} -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 1 \Rightarrow \\ \left. \begin{aligned} f(-x) &= -cx \\ f(x) &= cx \end{aligned} \right\} \Rightarrow cx = -cx \Rightarrow 2cx = 0 \Rightarrow c = 0 \end{aligned} \right\}$$

پس بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

تست ۶:  $f$  و  $g$  با دامنه‌ی  $\mathbb{R}$  مفروضند. اگر  $f$  تابعی فرد و  $g$  تابعی زوج باشد، به طوری که  $f(x-1) - 2g(x+1) = x^2 + 3x$  مقدار  $f(4)$  کدام است؟

(۱) -۴      (۲) ۴      (۳) صفر      (۴) -۲

پاسخ:  $f$  فرد است و حقیقی لذا  $f(0) = 0$ . از طرفی چون به ازای هر  $x$  رابطه‌ی  $f(x-1) - 2g(x+1) = x^2 + 3x$  برقرار است داریم:

$$x = 1 : f(0) - 2g(2) = 4 \Rightarrow g(2) = -2 \Rightarrow g(-2) = -2$$

$$x = -3 : f(-4) - 2g(-2) = 0 \Rightarrow f(-4) = 2g(-2) = -4 \xrightarrow{\text{فرد } f} f(4) = 4$$

بنابراین گزینه (۳) درست است.

نکته: اگر  $y = f(x)$  تابعی با دامنه‌ی متقارن نسبت به مبدأ مختصات باشد آن گاه می‌توانیم به صورت زیر آن را مساوی مجموع

یک تابع زوج و یک تابع فرد بنویسیم:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{تابع زوج}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{تابع فرد}}$$

تست ۷: اگر  $f(x) = 2^x$  را به صورت جمع تابع زوج  $h(x)$  با تابع فرد  $g(x)$  بنویسیم حاصل  $h(1) - g(-1)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}$       (۲) ۲      (۳)  $-\frac{1}{2}$       (۴) -۲

پاسخ: با استفاده از نکته‌ی قبل می‌توان نوشت:

$$2^x = \frac{2^x + 2^{-x}}{2} + \frac{2^x - 2^{-x}}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} h(x) &= \frac{2^x + 2^{-x}}{2} \Rightarrow h(1) = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4} \\ g(x) &= \frac{2^x - 2^{-x}}{2} \Rightarrow g(-1) = \frac{\frac{1}{2} - 2}{2} = -\frac{3}{4} \end{aligned} \right. \Rightarrow h(1) - g(-1) = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

نکته: فرض کنید  $f$  و  $g$  دو تابع با دامنه‌ی متقارن نسبت به مبدأ مختصات باشند. در این صورت برای توابع تعریف شده‌ی  $f+g$ ،

$f-g$ ،  $f.g$ ،  $\frac{f}{g}$  و  $f \circ g$  داریم:

	$f+g$	$f-g$	$f.g$	$\frac{f}{g}$	$f \circ g$
$f$ و $g$ زوج باشند.	زوج	زوج	زوج	زوج	زوج
$f$ و $g$ فرد باشند	فرد	فرد	زوج	زوج	فرد
$f$ زوج، $g$ فرد باشد.	-	-	فرد	فرد	زوج

**تذکر:** اگر  $g$  زوج و  $f$  تابعی دلخواه باشد آن گاه  $fog$  الزاماً زوج است.

**تست ۸:** اگر  $f+g$  و  $f-g$  دو تابع فرد باشند، توابع تعریف شده  $fog$  و  $f \times g$ ، به ترتیب کدام است؟

- (۱) فرد - فرد      (۲) فرد - زوج      (۳) زوج - فرد      (۴) زوج - زوج

**پاسخ:** از آنجا که  $f+g$  و  $f-g$  فرد هستند جمع و تفریق آنها نیز فرد است پس می توان نوشت:

$$\left. \begin{aligned} f \text{ فرد} &\Rightarrow f+g+f-g=2f \\ g \text{ فرد} &\Rightarrow f+g-(f-g)=2g \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &fog \text{ فرد} \\ &f \times g \text{ زوج} \end{aligned}$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

### توابع صعودی و نزولی

**تعریف:** تابع  $f(x)$  را صعودی نامیم هر گاه برای هر  $x_1, x_2$  از دامنه‌ی  $f$  که  $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم:  $f(x_1) \leq f(x_2)$

تابع  $f(x)$  را نزولی نامیم هر گاه برای هر  $x_1, x_2$  از دامنه‌ی  $f$  که  $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم:  $f(x_2) \leq f(x_1)$

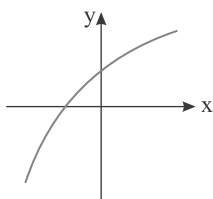
تابع  $f(x)$  را صعودی اکید نامیم هر گاه برای هر  $x_1, x_2$  از دامنه‌ی  $f$  که  $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم:  $f(x_1) < f(x_2)$

تابع  $f(x)$  را نزولی اکید نامیم هر گاه برای هر  $x_1, x_2$  از دامنه‌ی  $f$  که  $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم:  $f(x_2) < f(x_1)$

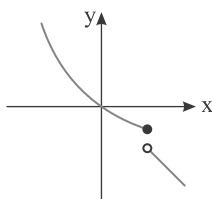
تابع  $f(x)$  را ثابت نامیم هر گاه برای هر دو عضو  $x_1, x_2$  از دامنه‌ی  $f$ ، داشته باشیم:  $f(x_1) = f(x_2)$ .

**تذکر:** توابع صعودی یا نزولی را توابع یکنوا و توابع صعودی یا نزولی اکید را توابع یکنوای اکید می نامیم.

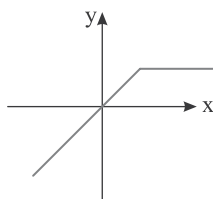
**مثال:** به توابع یکنوا یا یکنوای اکید زیر توجه کنید:



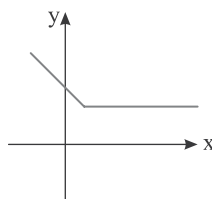
صعودی اکید



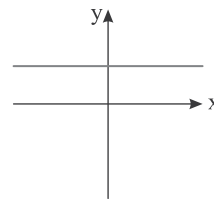
نزولی اکید



صعودی



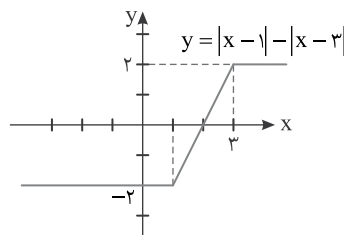
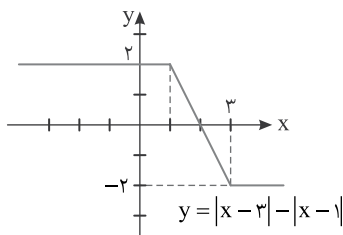
نزولی



تابع ثابت

**تذکر:** تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است.

**مثال:** تابع  $f(x) = |x-1| - |x-3|$  صعودی و تابع  $g(x) = |x-3| - |x-1|$  نزولی است. نمودار این دو تابع را در شکل‌های زیر می بینید.



**تست ۹:** اگر تابع حقیقی  $f = \{(a^2+1, c), (-a^2-2, 2c+2)\}$  نزولی اکید باشد محدوده‌ی  $c$  کدام است؟

- (۱)  $c > 2$       (۲)  $c > -2$       (۳)  $c < 2$       (۴)  $c < -2$

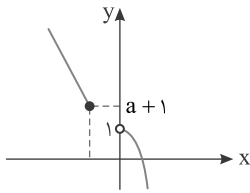
**پاسخ:**  $-a^2 - 2 < a^2 + 1$  بنابراین باید  $f(-a^2 - 2) > f(a^2 + 1)$ . در نتیجه داریم:

$$2c + 2 > c \Rightarrow c > -2$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تست ۱۰: حدود  $a$  برای آن که تابع  $f(x) = \begin{cases} -x+a & x \leq -1 \\ -x^2+1 & x > 0 \end{cases}$  نزولی اکید باشد، کدام است؟

- (۱)  $a > 0$       (۲)  $a \geq -1$       (۳)  $a \geq 0$       (۴)  $a > -1$



پاسخ: اگر  $a$  را مقداری مثبت در نظر بگیریم نمودار تابع به طور تقریبی شبیه شکل مقابل است. برای آن که تابع  $f$  نزولی اکید باشد کمترین مقداری که  $a+1$  می‌تواند داشته باشد ۱ است. یعنی  $a+1 \geq 1$ . بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

نکته: اگر توابع  $f$  و  $g$  اکیداً یکنوا باشند آن‌گاه می‌توانیم وضعیت یکنوایی برخی از توابع  $f+g$ ،  $f-g$ ،  $f \times g$ ،  $\frac{f}{g}$  و  $f \circ g$  را معلوم کنیم.

مثلاً جمع دو تابع صعودی اکید، صعودی اکید است و جمع دو تابع نزولی اکید، نزولی اکید است. اما برخی از حالات به راحتی قابل تشخیص نیست. مثلاً ضرب یا تقسیم دو تابع صعودی اکید یا نزولی اکید حکم کلی ندارد. اگر  $f$  و  $g$  هر دو صعودی اکید یا هر دو نزولی اکید باشند  $f \circ g$  و  $g \circ f$  صعودی اکید خواهند بود، در حالی که اگر یکی صعودی اکید و دیگری نزولی اکید باشند  $f \circ g$  نزولی اکید خواهد شد.

تست ۱۱: تابعی فرد و صعودی اکید است. اگر  $D_f = \mathbb{R}$  دامنه‌ی تعریف  $g(x) = \sqrt{(x+2)f(1-x)}$  کدام است؟

- (۱)  $[1, +\infty)$       (۲)  $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$       (۳)  $[-2, 1]$       (۴)  $(-\infty, -2]$

پاسخ: چون  $f$  فرد و  $D_f = \mathbb{R}$  پس  $f(0) = 0$  و چون  $f$  صعودی اکید است  $f$  ریشه‌ی دیگری ندارد. می‌توانیم جدول زیر را برای تعیین علامت  $(x+2)f(1-x)$  داشته باشیم:

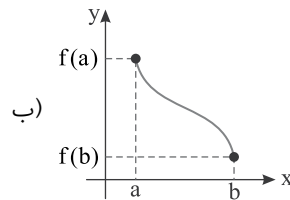
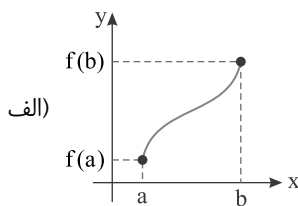
$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$
$f(1-x)$	+	+	0	-
$x+2$	-	0	+	+
$(x+2)f(1-x)$	-	+	-	-

دقت کنید چون  $f$  صعودی اکید و  $1-x$  نزولی اکید است پس  $f(1-x)$  نزولی اکید است و  $f(1) = 0$ .

پس داریم  $D_g = [-2, 1]$ . بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

### یافتن برد در توابع یکنوا

در بعضی از توابع، از مفهوم یکنوایی می‌توانیم برای محاسبه‌ی برد استفاده کنیم. به عنوان مثال، در شکل (الف) با تابعی اکیداً صعودی در بازه‌ی بسته‌ی  $[a, b]$  مواجهیم. همان‌طور که مشاهده می‌کنید برد این تابع  $[f(a), f(b)]$  است. همچنین در شکل (ب) تابع رسم شده اکیداً نزولی است، بنابراین برد آن  $[f(b), f(a)]$  است.



تست ۱۲: برد تابع  $y = x^3 + 3x^2 + 3x$  در بازه‌ی  $[2, 4]$  کدام گزینه است؟

- (۱)  $[24, 124]$       (۲)  $[26, 124]$       (۳)  $[26, 126]$       (۴)  $\mathbb{R}$

پاسخ: تابع  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$  را به صورت  $f(x) = (x+1)^3 - 1$  که تابعی صعودی اکید است می‌توان نوشت. بنابراین داریم:

$$2 \leq x \leq 4 \Rightarrow f(2) \leq f(x) \leq f(4) \Rightarrow 26 \leq f(x) \leq 124$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

بخش ششم: توابع زوج، فرد و توابع صعودی و نزولی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

توابع زوج و توابع فرد

۵۵۰- اگر  $f = \{(-1, a+1), (0, 3), (-2, 1), (1, b), (2, b+5)\}$  یک تابع زوج باشد، مقدار  $ab$  کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) -۲۰ (۳) -۱۲ (۴) ۱۲

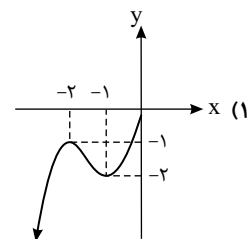
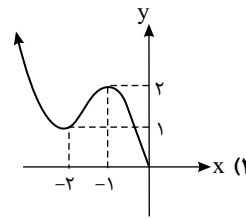
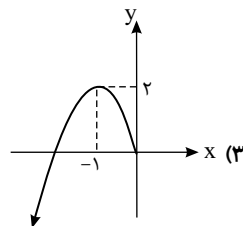
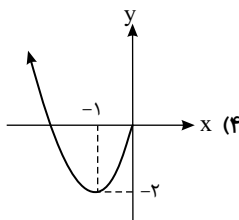
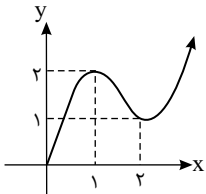
۵۵۱- اگر تابع  $f = \{(-1, 2), (0, a), (2, b+c), (c-b, -2), (-2, 7)\}$  یک تابع فرد باشد، حاصل  $2a+b-2c$  کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) قابل تعیین نیست.

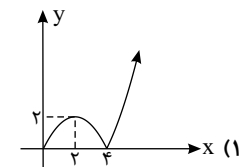
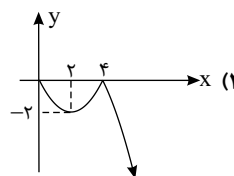
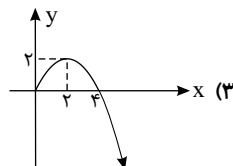
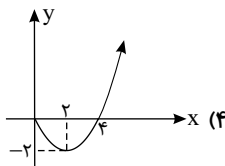
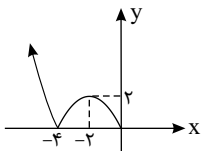
۵۵۲- کدام تابع، فرد است؟

- (۱)  $f(x) = x + |x|$  (۲)  $f(x) = \frac{1}{x-x^2}$  (۳)  $f(x) = x - |x|$  (۴)  $f(x) = x\sqrt{|x|}$

۵۵۳- در شکل روبه‌رو بخشی از نمودار تابع زوج  $f$  رسم شده است. کدام گزینه بقیه نمودار تابع  $f$  را نشان می‌دهد؟



۵۵۴- در شکل روبه‌رو بخشی از نمودار تابع فرد  $f$  رسم شده است. کدام گزینه بقیه نمودار تابع  $f$  را نشان می‌دهد؟



۵۵۵- کدام تابع فرد است؟

- (۱)  $f(x) = x^3 + x^2 + x$  (۲)  $f(x) = x^{15} + x^{13} + \dots + x + 1$  (۳)  $f(x) = x|x|$  (۴)  $f(x) = |x-1| + |x+1|$

۵۵۶- چند تا از توابع زیر زوج و چند تا فرد هستند؟

- (الف)  $f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  (ب)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (پ)  $f: (-3, 3) \rightarrow \mathbb{R}$  (ت)  $f: (-2, -1) \cup (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f(x) = x^2$  (الف)  $f(x) = x$  (ب)  $f(x) = |x|$  (پ)  $f(x) = 0$  (ت)

- (۱) ۳ تا زوج - ۲ تا فرد (۲) ۲ تا زوج - ۱ تا فرد (۳) ۱ زوج - ۱ فرد (۴) ۲ تا فرد - ۲ تا زوج

۵۵۷- اگر تابع  $y = x^3 + (m+n-4)x^2 + nx + m - n$  تابعی فرد باشد، آن گاه حاصل  $mn$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۴ (۳) ۹ (۴)  $\frac{1}{4}$

۵۵۸- اگر تابع  $y = x^4 + 2x^3 + A(x+1)^3 + Bx$  زوج باشد، آن گاه حاصل  $A+B$  چقدر است؟

- (۱) -۶ (۲) -۳ (۳) صفر (۴) ۶

۵۵۹- نمودار چند تا از توابع زیر نسبت به محور  $y$  ها متقارن است؟

(الف)  $f(x) = x \cos x$  (ب)  $f(x) = x \sin x + \cos 2x$

(پ)  $f(x) = (x+1)^4$  (ت)  $f(x) = |x-1| + |x+1| + |x|$

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۶۰- چند تا از توابع زیر فرد هستند؟

(الف)  $f(x) = 2x + \sin 2x$  (ب)  $f(x) = x^3 + \cos 2x$

(پ)  $f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}$  (ت)  $f(x) = x\sqrt{x}$

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۶۱- اگر  $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ ، آن گاه تابع  $f \circ f$  با کدام دامنه، فرد است؟

- (۱)  $\mathbb{R}$  (۲)  $\mathbb{R} - \{2\}$  (۳)  $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$  (۴)  $[-2, 2]$

۵۶۲- تابع  $f(x) = \cos(\sin x) + \sin(\cos x)$  با ضابطه‌ی  $f(x) = \cos(\sin x) + \sin(\cos x)$  از نظر زوج و فرد بودن چگونه است؟

- (۱) فرد است. (۲) زوج است. (۳) نه زوج و نه فرد است. (۴) اگر  $x > 0$  باشد، فرد است.

۵۶۳- اگر  $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$ ، مقدار  $f\left(\frac{1}{101}\right) + f\left(\frac{-1}{101}\right)$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $\frac{1}{\sqrt{101}}$  (۳)  $2 - \frac{1}{\sqrt{101}}$  (۴) صفر

۵۶۴- تابع  $f(x) = \frac{x}{2-2^x} - \frac{x}{2}$ ، از نظر زوج و فرد بودن چگونه است؟

- (۱) فقط زوج (۲) فقط فرد (۳) هم زوج، هم فرد (۴) نه زوج، نه فرد

۵۶۵- به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع  $f(x) = |x+2| + a|x-2|$  با ضابطه‌ی  $f(x) = |x+2| + a|x-2|$  زوج است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۵۶۶- اگر تابع  $f(x) = |x+a| - |x+2| + b|x+5|$  تابعی فرد باشد، آن گاه حاصل  $a+b$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) -۶ (۴) -۲

۵۶۷- اگر تابع  $f(x) = |x+b| + a|x-2|$  زوج باشد، برای  $a$  چند مقدار متمایز وجود دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۶۸- تابع  $f(x) = \log\left(\frac{5-x}{5+x}\right)$  از نظر زوج یا فرد بودن چگونه است؟

- (۱) زوج (۲) فرد (۳) نه زوج، نه فرد (۴) هم زوج، هم فرد

۵۶۹- تابع غیر تهی  $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{ax+2}{x-2}\right)$  تابعی فرد است. مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳)  $\pm 1$  (۴) وجود ندارد.

۵۷۰- اگر مبدأ مختصات مرکز تقارن نمودار تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = \log(ax + \sqrt{16x^2 + 1})$  باشد، آن گاه مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۴, ۱ (۳) ۴, -۴ (۴) ۴, ۱

۵۷۱- اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+x+1} & x > 0 \\ a\sqrt{x^2+bx+c} & x < 0 \end{cases}$  فرد باشد، آن گاه حاصل  $a+b+c$  کدام است؟

- (۱) -۳      (۲) ۱      (۳) ۳      (۴) -۱

۵۷۲- اگر تابع  $f(x) = \frac{2^x+a-2}{4^x-1}$  فرد باشد،  $a$  کدام است؟

- (۱) صفر      (۲) ۲      (۳) ۱      (۴) -۱

۵۷۳- اگر  $D_f = [0, b]$  و بدانیم:  $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$ ، در این صورت تابع  $g$  از نظر زوج و فرد بودن چگونه است؟

- (۱) زوج      (۲) فرد      (۳) ممکن است فرد باشد، ولی لزوماً فرد نیست.      (۴) ممکن است زوج باشد، ولی لزوماً زوج نیست.

۵۷۴- اگر تابع  $f$  دامنه‌ای متقارن نسبت به مبدأ داشته باشد، آن گاه چندتا از گزاره‌های زیر لزوماً درست است؟

- (الف) اگر  $g$  زوج باشد،  $f \circ g$  نیز زوج است.      (ب) اگر  $g$  زوج باشد،  $g \circ f$  نیز زوج است.  
(پ) اگر  $g$  فرد باشد،  $f \circ g$  نیز فرد است.

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) صفر

۵۷۵- اگر  $f$  تابعی زوج و  $g$  تابعی فرد باشد، چه تعداد از توابع زیر لزوماً فرد هستند؟

(الف)  $h_1(x) = f(x)g(x)$       (ب)  $h_2(x) = f(g(2x))$       (پ)  $h_3(x) = g(f(x))$

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) صفر

۵۷۶- اگر توابع  $f+g$  و  $f-g$  فرد باشند و به ازای هر  $x$ ،  $f(x) \neq 0$  و  $g(x) \neq 0$ ، آن گاه  $f$  و  $g$  چگونه‌اند؟

- (۱)  $f$  و  $g$  هر دو زوج‌اند.      (۲)  $f$  زوج و  $g$  فرد است.      (۳)  $f$  فرد و  $g$  زوج است.      (۴)  $f$  و  $g$  هر دو فردند.

۵۷۷- تابع  $f(x) = (x^3 + \frac{1}{x^3})^9$  را به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشته‌ایم. اگر تابع زوج را  $g$  بنامیم، آن گاه مقدار  $g(100)$  کدام است؟

- (۱) ۱۰۰۰۰      (۲)  $100^3 + \frac{1}{100^3}$       (۳) صفر      (۴)  $(100^3 + 100^{-3})$

۵۷۸- تابع  $f(x) = \frac{\sin 2x - 3}{\cos 2x + 1}$  را به صورت مجموع دو تابع  $g(x)$  و  $h(x)$  نوشته‌ایم که  $g$  زوج و  $h$  فرد است. مقدار  $h(\frac{3\pi}{4})$  چقدر است؟

- (۱) ۱      (۲) -۱      (۳) ۲      (۴) -۲

۵۷۹- اگر  $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، آن گاه تابع  $g(x) = f(\frac{1-x^2}{1+x^2})$  از نظر زوج و فرد بودن چگونه است؟

- (۱) زوج      (۲) فرد      (۳) هم زوج، هم فرد      (۴) نه زوج، نه فرد

۵۸۰- اگر برای هر  $x, y \in \mathbb{R}$  داشته باشیم  $f(xy) = f(x) + f(y)$ ، تابع  $f$  از نظر زوج و فرد بودن چه وضعیتی دارد؟

- (۱) حتماً زوج است.      (۲) حتماً فرد است.      (۳) نه زوج است و نه فرد.      (۴) می‌تواند زوج یا فرد باشد.

### توابع صعودی و توابع نزولی

۵۸۱- کدام تابع، نزولی است؟

- (۱)  $y = x + 2$       (۲)  $y = x^3 - 3$       (۳)  $y = 3 - x^3$       (۴)  $y = x$

۵۸۲- کدام گزینه درباره‌ی تابع حقیقی  $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x \leq -1 \\ (x+1)^2 + 1 & x > -1 \end{cases}$  درست است؟

- (۱) صعودی اکید است.      (۲) صعودی است، ولی صعودی اکید نیست.      (۳) نزولی است، ولی نزولی اکید نیست.      (۴) نزولی اکید است.



۵۸۳- کدام گزینه درباره‌ی تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2|x| & x \leq 0 \\ x-x^2 & x \geq 1 \end{cases}$  درست است؟

- (۱) اکیداً صعودی است. (۲) اکیداً نزولی است. (۳) صعودی است. (۴) نزولی است.

۵۸۴- تابع  $f(x) = ax + |3 - 2x|$  روی  $\mathbb{R}$  صعودی اکید است. حدود  $a$  کدام است؟

- (۱)  $a > -2$  (۲)  $-2 < a < 2$  (۳)  $a > 2$  (۴)  $a \in \mathbb{R}$

۵۸۵- تابع  $f(x) = |x + m^2 - m| - |x + 6|$  نزولی است. حدود مقادیر  $m$  کدام است؟

- (۱)  $m \geq 3$  یا  $m \leq -2$  (۲)  $m > 2$  یا  $m < -3$  (۳)  $-2 \leq m \leq 3$  (۴)  $-3 < m < 2$

۵۸۶- برای کدام مقادیر  $m$ ، تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 1 \\ x - 2m & x \leq 0 \end{cases}$  صعودی است؟

- (۱)  $m \geq \frac{1}{2}$  (۲)  $m > \frac{1}{2}$  (۳)  $m < \frac{1}{2}$  (۴)  $m \leq \frac{1}{2}$

۵۸۷- اگر  $f = \{(0, 1), (1, 2), (3, 5), (5, m)\}$  و  $\frac{1}{f}$  نزولی اکید باشد، آن گاه مقدار  $m$  کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۷

۵۸۸- اگر تابع  $f$  اکیداً نزولی باشد و تابع  $g$  بر  $R_f$  اکیداً صعودی باشد، کدام گزینه درباره‌ی  $g \circ f$  درست است؟

- (۱) اکیداً صعودی است. (۲) اکیداً نزولی است. (۳) تابع ثابت است. (۴) نه صعودی است و نه نزولی.

۵۸۹- تابع  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - 3)$  در کدام بازه اکیداً صعودی است؟

- (۱)  $(-\infty, -1)$  (۲)  $(-\infty, 1)$  (۳)  $(1, +\infty)$  (۴)  $(3, +\infty)$

۵۹۰- اگر  $f$  تابعی اکیداً نزولی با دامنه‌ی  $(0, +\infty)$  باشد و بدانیم  $f(3a^2 - 4a + 1) < f(2a^2 + a + 1)$ ، در این صورت برای  $a$  چند مقدار

صحیح می‌توان یافت؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

۵۹۱- تابع  $f$  با دامنه‌ی  $\mathbb{R}$ ، اکیداً صعودی است و از مبدأ مختصات می‌گذرد. دامنه‌ی تابع  $g(x) = \sqrt{xf(1-x)}$  کدام است؟

- (۱)  $[1, +\infty)$  (۲)  $(-\infty, 1]$  (۳)  $[0, 1]$  (۴)  $\mathbb{R} - (0, 1)$

### سوالات کنکور سراسری سال ۸۶ به بعد

۵۹۲- به ازای کدام مقدار  $a$ ، ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{ax} & x < 0 \end{cases}$  یک تابع فرد است؟ (سراسری - ۹۰)

- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳)  $\pm 4$  (۴) هیچ مقدار  $a$

۵۹۳- تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  با دامنه‌ی  $\{x : |x-1| < 2\}$  همواره چگونه است؟ (سراسری - ۹۱)

- (۱) منفی (۲) مثبت (۳) صعودی (۴) نزولی