فصل سوم: تشابه

درسنامه

نسبت و تناسب

نسبت

تعریف: نسبت بین دو عدد a به b عبارت است از کسر $\frac{a}{b}$ که b نباید صفر باشد، چون تقسیم کردن یک عدد بر صفر، معنی ندارد. مثلاً نسبت عدد ۴ به ۱۰ برابر $\frac{۴}{۱۰}=۰/۴$ است.

تذکر حاصل نسبت $\frac{a}{b}$ نشان می‌دهد که a چند برابر b است. به عبارتی نسبت برای مقایسه‌ی دو کمیت به کار می‌رود. برای مثال اگر در مسأله‌ای بخواهیم بدانیم مساحت یک مثلث چند برابر مساحت یک مربع است، کافی است مساحت مثلث را تقسیم بر مساحت مربع کنیم.

نکته: اگر نسبت برای مقایسه‌ی دو کمیت به کار رود، به سه نکته‌ی زیر باید دقت کنیم:

۱- برای نسبت کمیت‌های یکسان a و b باید a و b برحسب یک واحد باشند یعنی اگر واحدهای آن‌ها یکسان نباشند، باید آن‌ها را یکسان کرد.

مثلاً اگر طول درختی ۲ متر و طول سایه‌ی آن ۱۱۰ سانتی‌متر باشد و نسبت طول سایه به طول درخت را بخواهیم، باید آن‌ها را هم‌واحد کنیم (فرق نمی‌کند طول درخت به سانتی‌متر یا طول سایه به متر تبدیل شود)، پس:

$$\frac{\text{طول سایه}}{\text{طول درخت}}=\frac{۱۱۰}{۲۰۰}=\frac{۱۱}{۲۰}$$

۲- اگر a و b از دو کمیت متفاوت باشند، دیگر واحد مهم نیست. در واقع در این حالت نسبت دو کمیت را تنها از جهت عدد به‌دست می‌آوریم.

مثلاً اگر مساحت یک مستطیل $۸cm^۲$ و محیط آن $۱۲cm$ باشد، نسبت اندازه‌ی مساحت به اندازه‌ی محیط برابر است با:

$$\frac{\text{مساحت مستطیل}}{\text{محیط مستطیل}}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}$$

این حالت از نظر علمی معمولاً به کار نمی‌رود و تنها ممکن است در بعضی از تست‌ها با آن مواجه شوید.

۳- در حالتی که a و b از یک کمیت باشند نسبت $\frac{a}{b}$ واحد ندارد.

تناسب

تعریف: تساوی بین دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ (که در آن‌ها b و d صفر نیستند)، یک تناسب نامیده می‌شود.

یک تناسب است $\leftarrow$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

تذکر در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ به a و d دو جمله‌ی کناری (طرفین) و به b و c دو جمله‌ی میانی (وسطین) می‌گویند، یعنی:

وسطین

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

طرفین

ویژگی‌های تناسب

۱- در هر تناسب، حاصل‌ضرب دو جمله‌ی کناری (طرفین)، برابر حاصل‌ضرب دو جمله‌ی میانی (وسطین) است.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$$

۲- در هر تناسب می‌توان، جای دو جمله‌ی میانی (یا جای دو جمله‌ی کناری) را عوض کرد.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$

۳- در هر تناسب می‌توان کسرها را معکوس کرد. (معکوس یک کسر، یعنی کسری که از جابه‌جایی صورت و مخرج به‌دست می‌آید.)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

۴- در هر تناسب می‌توان مخرج هر کسر را به صورت اضافه یا از صورت کم کرد.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} & \text{(ترکیب در صورت)}\\[2mm] \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} & \text{(تفضیل در صورت)}\end{cases}$$

تذکر مطلب فوق را می‌توان برای مخرج کسرها نیز به کار برد.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c} & \text{(ترکیب در مخرج)}\\[2mm] \frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c} & \text{(تفضیل در مخرج)}\end{cases}$$

تذکر ترکیب این روابط نیز درست است. یعنی:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

۵- اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$، آن‌گاه $\frac{a}{b}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$. به عبارتی اگر در یک تناسب، صورت‌ها را با هم و مخرج‌ها را با هم جمع کنیم، کسر حاصل با تناسب اولیه برابر است.

این مطلب قابل تعمیم است، یعنی:

$$\frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=...=\frac{a_n}{b_n}=k\Rightarrow k=\frac{a_۱+a_۲+...+a_n}{b_۱+b_۲+...+b_n}$$

نکته: در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ **نمی‌توان** نتیجه گرفت که $a=c$ و $b=d$. امّا می‌توان گفت که $a=kc$ و $b=kd$ که k عددی غیرمشخص و مخالف صفر است.

مثال: اگر $\frac{x}{y}=\frac{۲}{۳}$ باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که $x=۲$ و $y=۳$ بلکه می‌توان گفت $x=۲k$ و $y=۳k$.

مسأله ۱ **اگر $\frac{a}{b}=\frac{۲}{۳}$، آن‌گاه حاصل $\frac{(a+b)^۲}{a^۲-b^۲}$ را به‌دست آورید.**

راه‌حل اول: ابتدا کسر داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{(a+b)^۲}{a^۲-b^۲}=\frac{(a+b)^۲}{(a+b)(a-b)}=\frac{a+b}{a-b}\qquad(۱)$$

$$\frac{a}{b}=\frac{۲}{۳}\begin{cases}\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}}\frac{a+b}{b}=\frac{۵}{۳}\\[2mm] \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{a}{a-b}=\frac{۲}{-۱}\end{cases}\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}\times\frac{a}{b}=\frac{۵}{۳}\times\frac{۲}{-۱}\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۵}{۳}\times\frac{۲}{-۱}\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}=-۵$$

بنابراین:

$$\frac{(a+b)^۲}{a^۲-b^۲}=-۵$$

راه‌حل دوم: از آن‌جا که $\frac{a}{b}=\frac{۲}{۳}$ می‌توان گفت $a=۲k$ و $b=۳k$، پس:

$$\frac{(a+b)^۲}{a^۲-b^۲}=\frac{a+b}{a-b}=\frac{۲k+۳k}{۲k-۳k}=-۵$$

واسطه‌ی هندسی، میانگین هندسی

تعریف: در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ با توجه به ضرب طرفین و ضرب وسطین، می‌توان نتیجه گرفت که $b^۲=ac$. در این حالت b را واسطه‌ی هندسی (یا میانگین هندسی) بین a و c می‌گوییم.

تست ۱: دو عدد طبیعی a و b مفروض‌اند. اگر x واسطه‌ی هندسی بین دو عدد a و b بوده و $\frac{a}{x-۱}=\frac{x+۲}{b}$، آن‌گاه x برابر کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۳

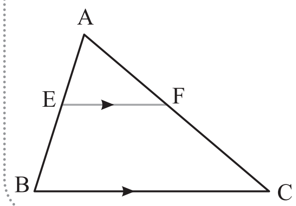
پاسخ: x واسطه‌ی هندسی بین دو عدد a و b است، پس: $x^۲=ab$

$$\frac{a}{x-۱}=\frac{x+۲}{b}\Rightarrow x^۲+x-۲=ab\xrightarrow{x^۲=ab}ab+x-۲=ab\Rightarrow x=۲$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

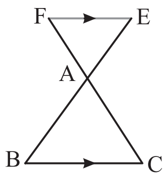
قضیه‌ی تالس در مثلث

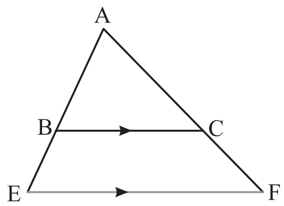
تعریف: اگر خطی، با یک ضلع مثلث موازی باشد و دو ضلع دیگر را قطع کند، نسبت پاره‌خط‌هایی که روی یک ضلع پدید می‌آورد، برابر است با نسبت پاره‌خط‌هایی که روی ضلع دیگر ایجاد می‌کند.



$$EF||BC\Rightarrow\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$$

توجه: اگر خط موازی یک ضلع در مثلث، امتداد دو ضلع دیگر را نیز قطع کند باز هم این رابطه برقرار است.
به شکل‌های زیر نگاه کنید:

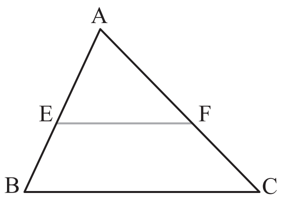




$$EF||BC\Rightarrow\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$$

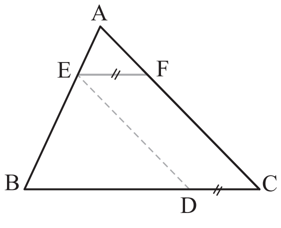
نتایج قضیه‌ی تالس در مثلث

۱- با ترکیب در مخرج در تناسب قضیه‌ی تالس ثابت می‌شود که:



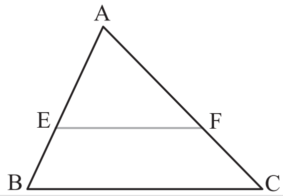
$$EF||BC\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$$

۲- در مثلث ABC داریم EF||BC. حال اگر از E، پاره‌خط ED را موازی AC رسم کنیم، متوازی‌الاضلاع EDCF به دست می‌آید. اکنون با دو بار استفاده از قضیه‌ی تالس در مثلث ABC نتیجه‌ی بسیار مهم زیر به‌دست می‌آید:



$$EF||BC\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$$

عکس قضیه‌ی تالس

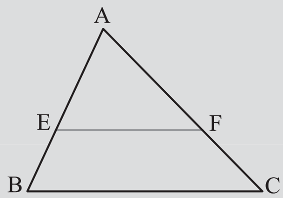


اگر در مثلث ABC، نقطه‌های E و F طوری روی ضلع‌های AB و AC انتخاب شـوند که $\frac{AE}{EB}=\frac{AE}{FC}$، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت که پاره‌خط EF موازی ضلع BC است، یعنی:

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\Rightarrow EF||BC$$

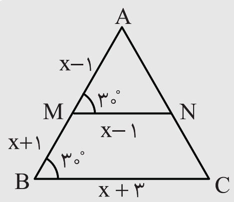
نکته: جمع‌بندی نتایج قضیه‌ی تالس و عکس آن:

با توجه به مطالب فوق می‌توان گفت:



$$EF||BC\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\\ \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}\\ \frac{EB}{AB}=\frac{FC}{AC}\end{cases}$$

تست ۲: در شکل مقابل x برابر با کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

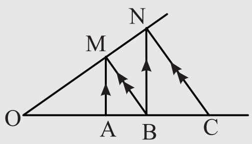
۴) ۴

پاسخ: از تساوی زوایای ۳۰ درجه در شکل نتیجه می‌گیریم MN||BC، بنابراین داریم:

$$MN||BC\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow\frac{x-۱}{۲x}=\frac{x-۱}{x+۳}\Rightarrow ۲x=x+۳\Rightarrow x=۳$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تست ۳: در شکل مقابل OA=۳ و AC=۹. اندازه‌ی OB کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۶

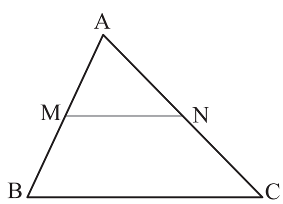
۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: دو بار از قضیه‌ی تالس استفاده می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}AM||BN\Rightarrow\frac{OA}{OB}=\frac{OM}{ON}\\ MB||NC\Rightarrow\frac{OB}{OC}=\frac{OM}{ON}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{OA}{OB}=\frac{OB}{OC}\Rightarrow OB^۲=OA.OC\Rightarrow OB^۲=۳\times۱۲\Rightarrow OB=۶$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

قضیه‌ی میان خط در مثلث



خطی که وسط دو ضلع مثلث را به هم وصل می‌کند، میان‌خط (یا خط وسط به وسط) آن مثلث نامیده می‌شود.

با توجه، به قضیه‌ی تالس و عکس آن می‌توان گفت:

الف) میان‌خط با ضلع سوم موازی است. با توجه به شکل داریم:

$$\left.\begin{array}{l}M\ \text{وسط}\ AB\\ N\ \text{وسط}\ AC\end{array}\right\}\Rightarrow MN||BC$$

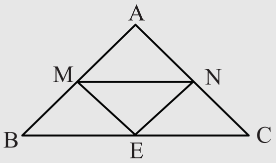
ب) طول پاره‌خط MN (اصطلاحاً می‌گوییم طول میان‌خط) برابر نصف طول ضلع سوم است.

با توجه به شکل داریم:

$$\left.\begin{array}{l}M\ \text{وسط}\ AB\\ N\ \text{وسط}\ AC\end{array}\right\}\Rightarrow MN=\frac{۱}{۲}BC$$

تست ۴: **یک مثلث را به چهار مثلث همنهشت تقسیم کرده‌ایم. محیط مثلث اولیه چند برابر محیط یکی از مثلث‌های همنهشت است؟**

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

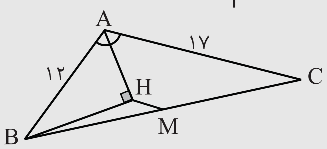


پاسخ: اگر وسط‌های اضلاع مثلث را به هم وصل کنیم، آن‌گاه مثلث به چهار مثلث همنهشت تقسیم می‌شود. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} MN=\frac{۱}{۲}BC \\ NE=\frac{۱}{۲}AB \\ ME=\frac{۱}{۲}AC \end{array}\right\} \Rightarrow \text{محیط } \overset{\Delta}{MNE}=\frac{۱}{۲}(\text{محیط } \overset{\Delta}{ABC})$$

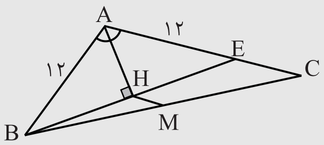
بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تست ۵: **در مثلث ABC نقطه‌ی M وسط ضلع BC و AH نیمساز $\hat{A}$ و $BH \perp AH$ است. طول MH کدام است؟**



۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

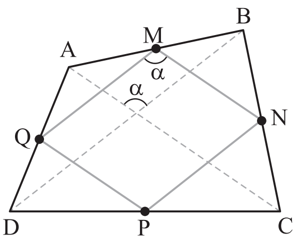


پاسخ: ضلع BH را امتداد می‌دهیم تا AC را در E قطع کند. در این صورت در مثلث ABE پاره‌خط AH هم نیمساز و هم ارتفاع است، بنابراین مثلث ABE متساوی‌الساقین است، در نتیجه $AE=AB=۱۲$ و $EC=۵$. از طرفی در مثلث ABE ارتفاع AH میانه نیز می‌باشد، یعنی H وسط BE قرار دارد.

$$\left.\begin{array}{l} M \text{ وسط } BC \\ H \text{ وسط } BE \end{array}\right\} \Rightarrow MH=\frac{CE}{۲} \Rightarrow MH=\frac{۵}{۲}$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

کاربرد قضیه‌ی تالس در شکل حاصل از برخورد اوساط اضلاع چهارضلعی‌ها



اگر اوساط اضلاع یک چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، چهارضلعی دیگری به دست می‌آید که دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد:

۱- این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است، یعنی:

$$\left.\begin{array}{l} ABCD \text{ چهارضلعی دلخواه} \\ M\text{ ، }N\text{ ، }P \text{ و } Q \text{ وسط اضلاع } ABCD \end{array}\right\} \Rightarrow MNPQ \text{ متوازی‌الاضلاع است.}$$

چون هر یک از اضلاع $MNPQ$ یکی از میان‌خط‌های مثلث‌های حاصل از رسم قطرهای چهارضلعی $ABCD$ است، پس دو به دو با هم موازی و مساوی‌اند.

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABC} \text{ میان‌خط } MN \Rightarrow MN \| \frac{AC}{۲}, MN=\frac{AC}{۲} \\ \overset{\Delta}{ACD} \text{ میان‌خط } PQ \Rightarrow PQ \| \frac{AC}{۲}, PQ=\frac{AC}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow MN \| PQ\ ,\ MN=PQ$$

به همین صورت ثابت می‌شود $MQ \| NP$ و $MQ=NP$ لذا $MNPQ$ متوازی‌الاضلاع است.

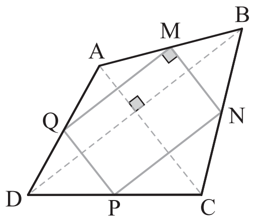
۲- محیط این چهارضلعی برابر، مجموع دو قطر چهارضلعی اولیه است، یعنی:

$$\text{محیط } MNPQ = AC+BD$$

۳- مساحت این چهارضلعی برابر نصف مساحت چهارضلعی اولیه است چون با توجه به مساحت متوازی‌الاضلاع داریم:

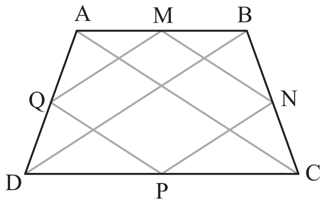
$$\left.\begin{array}{l} S_{MNPQ}=MN\times MQ\times \sin\alpha \\ MN=\frac{۱}{۲}AC \\ MQ=\frac{۱}{۲}BD \end{array}\right\} \Rightarrow S_{MNPQ}=(\frac{۱}{۲}AC)(\frac{۱}{۲}BD)\sin\alpha \Rightarrow S_{MNPQ}=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}AC\times BD\times \sin\alpha) \Rightarrow S_{MNPQ}=\frac{۱}{۲}S_{ABCD}$$

حالت‌های خاص



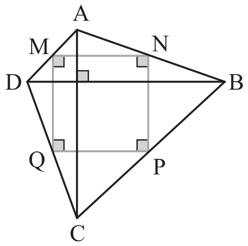
۱- در حالت کلی اگر قطرهای ABCD بر هم عمود باشند $(AC \perp BD)$، آن‌گاه MNPQ متوازی‌الاضلاعی است با زاویه‌ی قائمه $(\alpha = 90^\circ)$ پس MNPQ مستطیل است و برعکس.

نتیجه | **از وصل کردن اوساط اضلاع یک لوزی، یک مستطیل به دست می‌آید.**



۲- اگر قطرهای ABCD با هم برابر باشند $(AC = BD)$، آن‌گاه MNPQ متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع مجاور آن با هم برابرند $(MN = MQ)$. پس MNPQ لوزی است و برعکس.

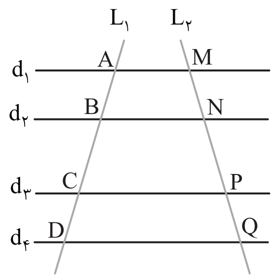
نتیجه | **از وصل کردن اوساط اضلاع یک مستطیل، یک لوزی به دست می‌آید.**



۳- اگر قطرهای ABCD با هم برابر و بر هم عمود باشند $(AC \perp BD \ , \ AC = BD)$، آن‌گاه MNPQ متوازی‌الاضلاعی است که اضلاع مجاور آن با هم برابر و بر هم عمودند $(MN = MQ \ , \ MN \perp MQ)$، پس MNPQ مربع می‌باشد و برعکس.

نتیجه | **از وصل کردن اوساط اضلاع یک مربع، مربع دیگری به وجود می‌آید.**

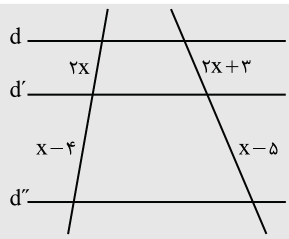
کاربردهای قضیه‌ی تالس در خطوط موازی



قضیه **اگر چند خط موازی، دو خط مورب را قطع کنند، روی این دو خط مورب پاره‌خط‌های متناظر متناسب ایجاد می‌کنند.**

با توجه شکل می‌توان گفت:

$$d_1 \| d_2 \| d_3 \| d_4 \Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CD}{PQ}$$



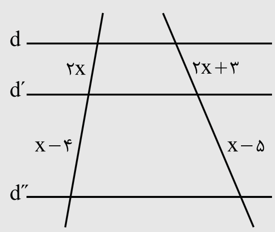
تست ۶: در شکل مقابل سه خط d، d' و d'' موازی‌اند. مقدار x چقدر است؟

۱) ۲/۳

۲) ۲/۴

۳) ۲/۵

۴) ۲/۶

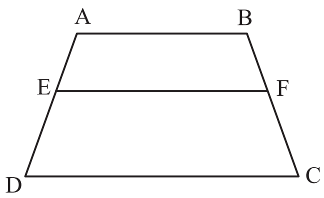


پاسخ: می‌دانیم اگر دو خط مورب سه خط موازی d، d' و d'' را قطع کنند پاره‌خط‌های ایجاد شده روی خطوط مورب نسبت‌های مساوی دارند. بنابراین:

$$\frac{2x}{x-4} = \frac{2x+3}{x-5} \Rightarrow 2x^2 - 10x = 2x^2 - 5x - 12 \Rightarrow 5x = 12 \Rightarrow x = 2/4$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

کاربردهای قضیه‌ی تالس در ذوزنقه



قضــیه اگر خطی، موازی قاعده‌های ذوزنقه رســم شــود، روی ســاق‌ها، پاره‌خط‌های متناســب ایجاد می‌کند. یعنی:

$$EF \parallel CD \Rightarrow \frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$$

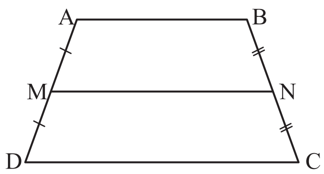
مشابه نتایج تالس می‌توان این مطالب را نیز بیان کرد:

$$EF \parallel CD \Rightarrow \begin{cases} \frac{AE}{AD}=\frac{BF}{BC} \\ \frac{ED}{AD}=\frac{FC}{BC} \end{cases}$$

توجه: عکس مطلب فوق نیز برقرار است، یعنی اگر در ذوزنقه‌ی $ABCD$ پاره‌خط EF مطابق شکل رسم شده باشد، می‌توان نوشت:

$$\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC} \Rightarrow EF \parallel AB \parallel CD$$

قضیه‌ی میان‌خط در ذوزنقه



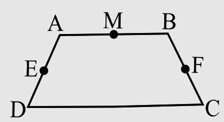
پاره‌خطی که وسط دو ساق از ذوزنقه را به هم وصل می‌کند (میان‌خط) موازی دو قاعده است.

$$\left.\begin{matrix} AM=MD \\ BN=NC \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN \parallel AB \parallel CD$$

و با توجه به قضیه‌ی تالس می‌توان ثابت کرد که طول میان‌خط برابر با نصف مجموع دو قاعده می‌باشد.

به بیان دیگر:

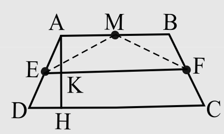
$$\left.\begin{matrix} AM=MD \\ BN=NC \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN=\frac{AB+CD}{۲}$$



تست ۷: در ذوزنقه‌ی $ABCD$، نقطه‌ی M وسط AB، F وسط BC و E وسط AD است. مساحت ذوزنقه چند برابر مساحت مثلث MEF است؟

۱) ۴ ۲) ۲

۳) ۸ ۴) ۶



پاسخ: خطی که اوساط ساق‌های یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، موازی با دو قاعده بوده و اندازه‌ی آن برابر با نصف مجموع قاعده‌های ذوزنقه است، بنابراین:

$$EF=\frac{۱}{۲}(AB+CD) \qquad (۱)$$

$$AK=\frac{AH}{۲} \qquad (۲)$$

حال به محاسبه‌ی مساحت مثلث MEF می‌پردازیم:

$$S_{MEF}=\frac{۱}{۲}EF\times AK \xrightarrow{(۱),(۲)} S_{MEF}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}(AB+CD)\times\frac{AH}{۲}$$

$$\Rightarrow S_{MEF}=\frac{۱}{۴}\underbrace{(\frac{۱}{۲}(AB+CD)\times AH)}_{S_{ABCD}} \Rightarrow S_{MEF}=\frac{۱}{۴}S_{ABCD} \Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{MEF}}=۴$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.