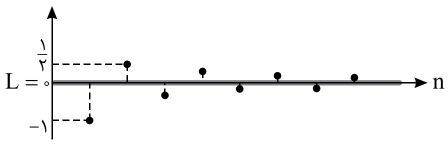
فصل اول: دنباله‌ها

۱–۲: دنباله‌های همگرا و واگرا

به جملات دنباله‌ی $a_n=\frac{(-۱)^n}{n}$ و نمودار آن توجه کنید:



$$\{a_n\}=\{\frac{(-۱)^n}{n}\}=-۱\,,\,\frac{۱}{۲}\,,\,\frac{-۱}{۳}\,,\,\frac{-۱}{۴}\,,\,\frac{-۱}{۵}\,,\,...$$

هـــر چـــه در جملات این دنباله پیش می‌رویم و n را افزایش می‌دهیم، فاصله‌ی جملات از $L=۰$ کم‌تر می‌شـــود و مقادیر جملات به $L=۰$ نزدیک می‌شوند. می‌گوییم دنباله‌ی $a_n=\frac{(-۱)^n}{n}$، همگرا به $L=۰$ است و این مفهوم را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{(-۱)^n}{n}=۰$$

دنباله‌ی همگرا و دنباله‌ی واگرا

دنباله‌ی $\{a_n\}$ به L همگراست در صورتی که با افزایش n، بتوان مقادیر جملات a_n را به هر اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک کرد.

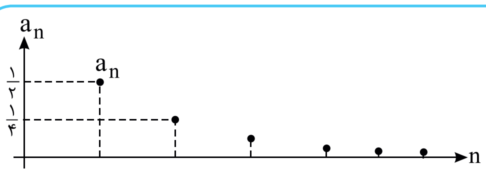
این مفهوم را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=L$$

و می‌گوییم حد دنباله‌ی $\{a_n\}$ برابر L است.

اگر $\{a_n\}$ همگرا به عدد مشخصی مانند L نباشد، به آن دنباله‌ی واگرا گفته می‌شود.

مثال: دنباله‌های $a_n=۲^{-n}$ و $b_n=\frac{n}{n+۱}$ همگرا هستند. در دنباله‌ی $\{a_n\}$ جملات دنباله به صفر همگرا هستند:



$$a_n=۲^{-n}=(\frac{۱}{۲})^n\Rightarrow\{a_n\}=\frac{۱}{۲}\,,\,\frac{۱}{۴}\,,\,\frac{۱}{۸}\,,\,...$$

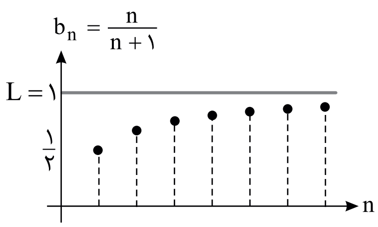
دقت کنید که جملات این دنباله با افزایش n از بالا به $L=۰$ نزدیک می‌شوند یعنی دارای مقادیر بزرگ‌تر از صفر هستند و حد دنباله برابر با صفر است: $\lim\limits_{n\to+\infty}۲^{-n}=۰$

در دنباله‌ی $b_n=\frac{n}{n+۱}$ داریم:

$$b_n=\frac{n}{n+۱}=\frac{(n+۱)-۱}{n+۱}=\frac{n+۱}{n+۱}-\frac{۱}{n+۱}\Rightarrow b_n=۱-\frac{۱}{n+۱}$$

با افزایش مقادیر n، عبارت $\frac{۱}{n+۱}$ به صفر میل می‌کند. به‌خاطر همین می‌توان حدس زد که $\{b_n\}$ به $L=۱$ همگراست:

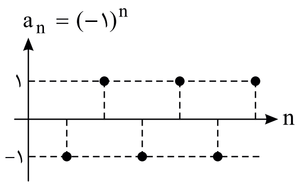
$$\{b_n\}=۱-\frac{۱}{۲}\,,\,۱-\frac{۱}{۳}\,,\,۱-\frac{۱}{۴}\,,\,۱-\frac{۱}{۵}\,,\,...$$



دقت کنید که جملات این دنباله با افزایش n از پایین به $L=۱$ نزدیک می‌شوند یعنی دارای مقادیر کم‌تر از ۱ هستند و حد دنباله برابر با ۱ است:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+۱}=۱$$

مثال: دنباله‌های $a_n=(-۱)^n$ و $b_n=\sqrt{n}$ واگرا هستند و مقادیر جملات آن‌ها به عدد مشخصی مانند L نزدیک نمی‌شوند. دنباله‌ی $\{a_n\}$ بین دو مقدار ۱ و ۱− نوسان می‌کند، بنابراین دارای حد نیست:



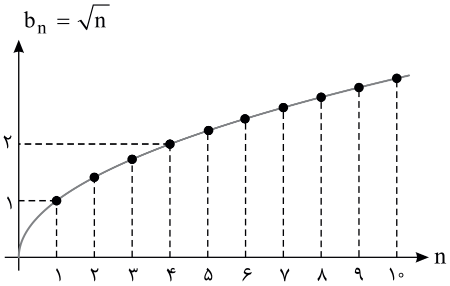
$$\{a_n\}=\{(-۱)^n\}=-۱\,,\,۱\,,\,-۱\,,\,۱\,,\,...$$

مقادیر جملات دنباله‌ی $\{b_n\}$ با افزایش n به عدد مشخصی نزدیک نمی‌شوند، بلکه از هر عدد بزرگی که تصور کنید، می‌تواند بزرگ‌تر گردد:

$$\{b_n\}=\{\sqrt{n}\}=\{۱ , \sqrt{۲} , \sqrt{۳} , ۲ , \sqrt{۵} , ...\}$$

با توجه به نمودار $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}$ وجود ندارد.

اگر چه هر دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ واگرا هستند، ولی $\{b_n\}$ رفتار بهتری دارد. دنباله‌ی $\{b_n\}$، با افزایش n می‌تواند از هر عدد مثبتِ بزرگی، بزرگ‌تر شود. واگرایی دنباله‌هایی مانند $b_n=\sqrt{n}$ را به این‌صورت نیز نمایش می‌دهند: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$



تعریف دقیق همگرایی دنباله

به جملات دنباله‌ی $a_n=۱+\frac{(-۱)^n}{۲n+۱}$ توجه کنید:

$$\{a_n\}=۱-\frac{۱}{۳} , ۱+\frac{۱}{۵} , ۱-\frac{۱}{۷} , ۱+\frac{۱}{۹} , ...$$

مقادیر دنباله به هر اندازه‌ی دلخواه می‌توانند به $L=۱$ نزدیک شوند. مثلاً اگر بخواهیم فاصله‌ی a_n از $L=۱$ کم‌تر از $\frac{۱}{۱۰}$ باشد، داریم:

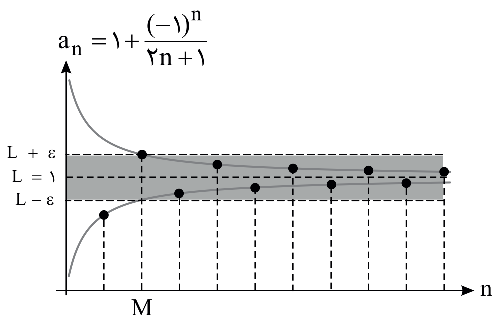
$$|a_n-۱|<\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow|۱+\frac{(-۱)^n}{۲n+۱}-۱|<\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow\frac{۱}{۲n+۱}<\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow۲n+۱>۱۰\Rightarrow n>\frac{۹}{۲}\Rightarrow n\geq[\frac{۹}{۲}]+۱\Rightarrow n\geq۵$$

در واقع اگر از جمله‌ی پنجم به بعد را در نظر بگیریم، فاصله‌ی a_n از $L=۱$ کم‌تر از $\frac{۱}{۱۰}$ است: $n\geq۵\Rightarrow |a_n-۱|<\frac{۱}{۱۰}$

حال اگر بخواهیم، فاصله‌ی a_n از $L=۱$ کم‌تر از $\frac{۱}{۵۰۰}$ باشد، چطور؟ اگر به طریق مشابه، محاسبات را تکرار کنیم، خواهیم داشت:

$$n\geq۲۵۰\Rightarrow|a_n-۱|<\frac{۱}{۵۰۰}$$

برای این‌که ثابت کنیم به هر مقدار دلخواه می‌توان مقادیر دنباله‌ی $\{a_n\}$ را به L نزدیک کرد، باید از یک متغیر مانند ε استفاده کنیم که نماینده‌ی تمامی اعداد حقیقی مثبت مانند $\varepsilon=\frac{۱}{۱۰}$ و $\varepsilon=\frac{۱}{۵۰۰}$ باشد. در واقع برای اثبات همگرایی دنباله به L، باید به ازای هر ε یک مقدار طبیعی مانند M یافت، به‌طوری‌که نامساوی $n\geq M$ تضمین کند که فاصله‌ی a_n از L کوچک‌تر از ε است.



شبیه‌سازی
کد ۱۰۳

تعریف **دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا به L است، اگر و فقط اگر برای هر مقدار حقیقی و مثبت ε، عددی طبیعی مانند M یافت شود، به طوری‌که:**

$$n\geq M \Rightarrow |a_n-L|<\varepsilon$$

یعنی از جمله‌ی Mام دنباله به بعد، فاصله‌ی جملات دنباله از عدد L کم‌تر از مقدار ε می‌شود.

مثال: می‌خواهیم ثابت کنیم: $\lim\limits_{n\to+\infty} ۱+\frac{(-۱)^n}{۲n+۱}=۱$

برای هر عدد حقیقی $\varepsilon>۰$، باید عددی طبیعی مانند M بیابیم، به‌طوری‌که:

$$n\geq M \Rightarrow |a_n-۱|<\varepsilon$$

عبارت $|a_n-۱|$ را کمی ساده می‌کنیم:

$$|a_n-۱|=|۱+\frac{(-۱)^n}{۲n+۱}-۱|=|\frac{(-۱)^n}{۲n+۱}|=\frac{۱}{۲n+۱}$$

پس M را باید به گونه‌ای بیابیم که نتیجه‌گیری زیر درست باشد:

$$n\geq M \Rightarrow \frac{۱}{۲n+۱}<\varepsilon$$

نابرابری $\frac{۱}{۲n+۱}<\varepsilon$ با $۲n+۱>\frac{۱}{\varepsilon}$ و در نتیجه با نابرابری $n>\frac{۱}{۲\varepsilon}-\frac{۱}{۲}$ معادل است. پس:

$$n\geq M \Rightarrow n>\frac{۱}{۲\varepsilon}-\frac{۱}{۲}$$

از آنجا که n عددی طبیعی است، رابطه‌ی $n>\frac{1}{2\varepsilon}-\frac{1}{2}$ را به $n\geq[\frac{1}{2\varepsilon}-\frac{1}{2}]+1$ تبدیل می‌کنیم که در آن به کمک جزء صحیح، عددی طبیعی خواهیم داشت. حال باید M را طوری پیدا کنیم که نتیجه‌گیری زیر صحیح باشد:

$$n\geq M \Rightarrow n\geq[\frac{1}{2\varepsilon}-\frac{1}{2}]+1$$

با توجه به رابطه‌ی اخیر، بدیهی است که $M=[\frac{1}{2\varepsilon}-\frac{1}{2}]+1$ یک جواب است. حال می‌توانیم ادعا کنیم که اگر $n\geq M$ انتخاب شود، $|a_n-1|<\varepsilon$ خواهد بود:

$$n\geq M \Rightarrow n\geq[\frac{1}{2\varepsilon}-\frac{1}{2}]+1 \Rightarrow n>\frac{1}{2\varepsilon}-\frac{1}{2} \Rightarrow 2n+1>\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n+1}<\varepsilon \Rightarrow |\frac{(-1)^n}{2n+1}|<\varepsilon \Rightarrow |1+\frac{(-1)^n}{2n+1}-1|<\varepsilon \Rightarrow |a_n-1|<\varepsilon$$

پس وجود $M=[\frac{1}{2\varepsilon}-\frac{1}{2}]+1$ ثابت می‌کند: $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{(-1)^n}{2n+1})=1$

توجه: به دو مطلب مهم دقت کنید:

۱- همان‌گونه که در مثال قبل مشاهده کردید، اکثراً مقدار M بر حسب ε است و نسبت عکس با آن دارد. یعنی با کاهش ε باید مقدار بزرگ‌تری برای M انتخاب گردد.

۲- در مثال قبل مقداری که برای M به‌دست آمد، کوچک‌ترین مقدار برای M است. مسلماً اگر مقادیر بزرگ‌تری مانند $M=[\frac{1}{2\varepsilon}-\frac{1}{2}]+100$ نیز انتخاب گردد، مجدداً نابرابری $|a_n-1|<\varepsilon$ برآورده می‌شود. یعنی می‌توان گفت: $M\geq[\frac{1}{2\varepsilon}-\frac{1}{2}]+1$

مسأله‌ی ۱: حد دنباله‌ی $a_n=\frac{5n}{n+1}$ را حدس زده و سپس آن را اثبات کنید.

راه‌حل: با تفکیک عبارت $\frac{5n}{n+1}$ به سادگی می‌توان حد دنباله را حدس زد:

$$\frac{5n}{n+1}=\frac{(5n+5)-5}{n+1}=\frac{5n+5}{n+1}-\frac{5}{n+1}=5-\frac{5}{n+1}$$

$$\Rightarrow \{a_n\}=5-\frac{5}{2}, 5-\frac{5}{3}, 5-\frac{5}{4}, \cdots, 5-\frac{5}{100}, 5-\frac{5}{101}, \cdots$$

با توجه به نزدیک شدن $\frac{5}{n+1}$ به صفر، حدس می‌زنیم که $\{a_n\}$ به $L=5$ همگرا باشد. برای اثبات $\lim_{n\to+\infty}\frac{5n}{n+1}=5$ باید برای هر $\varepsilon>0$، عددی طبیعی مانند M یافت، به‌طوری که:

$$n\geq M \Rightarrow |\frac{5n}{n+1}-5|<\varepsilon$$

نابرابری $|\frac{5n}{n+1}-5|<\varepsilon$ معادل است با:

$$|\frac{5n}{n+1}-5|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{n+1}<\varepsilon \Leftrightarrow n+1>\frac{5}{\varepsilon} \Leftrightarrow n>\frac{5}{\varepsilon}-1$$

در واقع اگر $n>\frac{5}{\varepsilon}-1$، نابرابری $|\frac{5n}{n+1}-5|<\varepsilon$ نیز برآورده خواهد شد:

$$n\geq M \Rightarrow n>\frac{5}{\varepsilon}-1$$

اگر $n\geq[\frac{5}{\varepsilon}-1]+1$ باشد، نیز نابرابری $n>\frac{5}{\varepsilon}-1$ برآورده می‌شود. پس باید M را به‌گونه‌ای بیابیم که: $n\geq M \Rightarrow n\geq[\frac{5}{\varepsilon}-1]+1$

با توجه به رابطه‌ی اخیر، وجود $M=[\frac{5}{\varepsilon}-1]+1$ یا همان $M=[\frac{5}{\varepsilon}]$ اثبات می‌کند که حد دنباله برابر ۵ است.

مسأله‌ی ۲: ثابت کنید که دنباله‌ی $a_n=(\frac{1}{3})^n$ به صفر همگرا است.

راه‌حل: برای هر عدد حقیقی $\varepsilon>0$، عددی طبیعی مانند M خواهیم یافت، به‌طوری که نتیجه‌گیری زیر صحیح باشد:

$$n\geq M \Rightarrow |(\frac{1}{3})^n-0|<\varepsilon$$

نامساوی $\frac{1}{3^n}<\varepsilon$ با نامساوی $3^n>\frac{1}{\varepsilon}$ و در نتیجه با نامساوی $n>\log_3(\frac{1}{\varepsilon})$ معادل است. پس باید M را طوری پیدا کنیم که داشته باشیم:

$$n\geq M \Rightarrow n>\log_3(\frac{1}{\varepsilon})$$

از طرفی $n\geq[\log_3(\frac{1}{\varepsilon})]+1$ نیز، نابرابری $n\geq\log_3(\frac{1}{\varepsilon})$ را برآورده می‌کند. پس باید M را به‌گونه‌ای بیابیم که:

$$n\geq M \Rightarrow n\geq[\log_3(\frac{1}{\varepsilon})]+1$$

بنابراین اگر $M=[\log_3\frac{1}{\varepsilon}]+1$ می‌توان ثابت کرد که حد دنباله‌ی $a_n=(\frac{1}{3})^n$ برابر صفر است.

تست ۱: در مورد دنباله‌ی $a_n=\frac{5^{n+1}}{5^n-1}$ به ازای هر عدد حقیقی و مثبت ε، از $n\geq M$ می‌توان نابرابری $|a_n-5|<\varepsilon$ را نتیجه گرفت. کوچک‌ترین مقدار طبیعی M بر حسب ε کدام است؟

۱) $[\log_5(\frac{5}{\varepsilon})]$ ۲) $[\log_5(\frac{5}{\varepsilon}+1)]$ ۳) $[\log_5(\frac{5}{\varepsilon})]+1$ ۴) $[\log_5(\frac{5}{\varepsilon}+1)]+1$

پاسخ: کافی است به جای $|a_n-5|<\varepsilon$، معادل آن را در نظر بگیریم:

$$|a_n-5|<\varepsilon \Leftrightarrow |\frac{5^{n+1}}{5^n-1}-5|<\varepsilon \Leftrightarrow |\frac{5^{n+1}-5^{n+1}+5}{5^n-1}|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{5^n-1}<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 5^n-1>\frac{5}{\varepsilon} \Leftrightarrow 5^n>\frac{5}{\varepsilon}+1 \Leftrightarrow n>\log_5(\frac{5}{\varepsilon}+1) \Leftrightarrow n\geq[\log_5(\frac{5}{\varepsilon}+1)]+1$$

بنابراین M باید به‌گونه‌ای انتخاب شود که رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$n\geq M \Leftrightarrow n\geq[\log_5(\frac{5}{\varepsilon}+1)]+1 \Rightarrow M=[\log_5(\frac{5}{\varepsilon}+1)]+1$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

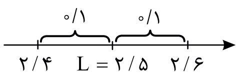
تست ۲: برای اعداد طبیعی $n\geq M$ جملات دنباله‌ی $a_n=\frac{5n}{2n+4}$ در بازه‌ی $(2/4\ ,\ 2/6)$ قرار می‌گیرند. کوچک‌ترین عدد طبیعی M کدام است؟

۱) ۴۹ ۲) ۳۷ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

پاسخ: با کمی دقت به جملات دنباله‌ی $a_n=\frac{5n}{2n+4}$ می‌توان فهمید که با افزایش n، در مخرج کسر، عدد ۴ در مقابل $2n$ بسیار ناچیز خواهد شد و کل کسر به $\frac{5n}{2n}$ یعنی $\frac{5}{2}$ نزدیک می‌شود:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5n}{2n+4}=\frac{5}{2}=2/5 \Rightarrow L=2/5$$

برای این‌که جملات دنباله در فاصله‌ی $(2/4,2/6)$ قرار بگیرند، باید فاصله‌ی جملات از $L=2/5$ کم‌تر از ۰/۱ باشد:



$$|a_n-2/5|<0/1 \Rightarrow |\frac{5n}{2n+4}-\frac{5}{2}|<\frac{1}{10} \Rightarrow |\frac{10n-10n-20}{2(2n+4)}|<\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{20}{2(2n+4)}<\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow 2n+4>100 \Rightarrow 2n>96 \Rightarrow n>\frac{96}{2} \Rightarrow n\geq[\frac{96}{2}]+1 \Rightarrow n\geq 49$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

تست ۳: برای اعداد طبیعی $n\geq M$ دنباله‌ی $a_n=\frac{2^{n+3}+3}{2^{n+1}+1}$ در فاصله‌ی $(3/99,4)$ قرار می‌گیرد. کوچک‌ترین عدد طبیعی M کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: دنباله‌ی $\{a_n\}$ به $L=4$ همگراست، زیرا با تفکیک ضابطه‌ی دنباله، خواهیم داشت:

$$a_n=\frac{8\times2^n+3}{2\times2^n+1}=\frac{(8\times2^n+4)-1}{2\times2^n+1}\xrightarrow{\text{تفکیک}}a_n=4-\frac{1}{2\times2^n+1}$$

با افزایش n، مقدار کسر $\frac{1}{2\times2^n+1}$ به صفر نزدیک شده و جملات دنباله به ۴ نزدیک می‌شوند.

جملات دنباله‌ی $a_n=4-\frac{1}{2\times2^n+1}$ طوری است که با افزایش n، از پایین به $L=4$ نزدیک می‌شوند و تمامی جملات آن از $L=4$ کوچک‌ترند. به همین دلیل، در صورت سؤال به جای استفاده از بازه‌ی $(3/99,4/01)$، جملات دنباله در بازه‌ی $(3/99,4)$ قرار گرفته‌اند.

$$|a_n-4|<\frac{1}{100} \Rightarrow |4-\frac{1}{2\times2^n+1}-4|<\frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{2\times2^n+1}<\frac{1}{100} \Rightarrow 2\times2^n>99 \Rightarrow 2^n>49/5 \Rightarrow n\geq6$$

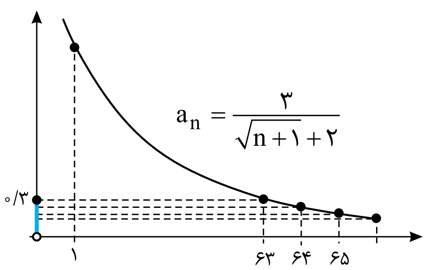
بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تست ۴: کوچک‌ترین بازه‌ای که جملات دنباله‌ی $a_n=\frac{۳}{\sqrt{n+۱}+۲}$ به ازای $n\geq ۶۳$ در آن قرار دارد، کدام است؟

۱) $(۰,۰/۳)$ ۲) $(۰,۰/۳]$ ۳) $(۰,۰/۶)$ ۴) $(۰,۰/۶]$

پاسخ: روش اول: جملات دنباله‌ی $a_n=\frac{۳}{\sqrt{n+۱}+۲}$ با افزایش n، کاهش یافته و به صفر همگراست. پس به ازای $n\geq ۶۳$، بزرگ‌ترین مقدار دنباله همان $a_{۶۳}$ است و داریم:

$$n\geq ۶۳\Rightarrow ۰<a_n\leq a_{۶۳}\Rightarrow ۰<a_n\leq ۰/۳$$



روش دوم: با نوشتن چند نامساوی نیز می‌توان به نتیجه رسید:

$$n\geq ۶۳\Rightarrow \sqrt{n+۱}\geq ۸\Rightarrow \sqrt{n+۱}+۲\geq ۱۰\Rightarrow ۰<\frac{۱}{\sqrt{n+۱}+۲}\leq \frac{۱}{۱۰}\xrightarrow{\times ۳} ۰<a_n\leq \frac{۳}{۱۰}$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

مسأله‌ی ۳: کوچک‌ترین مقدار طبیعی M را طوری بیابید که دنباله‌ی $a_n=[\frac{۲n+۱۰}{n+۱}]$ برای $n\geq M$ در بازه‌ای متقارن به مرکز حد دنباله و به شعاع ۰/۰۳ قرار داشته باشد. ([ ] علامت جزء صحیح است.)

راه‌حل: چند جمله‌ی ابتدایی این دنباله را می‌نویسیم:

$$\{a_n\}=\{[\frac{۲n+۱۰}{n+۱}]\}=۶\,,۴\,,۴\,,۳\,,۳\,,۳\,,۳\,,۲\,,۲\,,۲\,,۲\,,\cdots$$

این‌طور که مشخص است از جمله‌ی هشتم به بعد مقادیر دنباله برابر ۲ است، یعنی: $\lim\limits_{n\to +\infty} a_n=۲$

به این مطلب دقت کنید که برای $n\geq ۸$ فاصله‌ی مقادیر جملات دنباله از حد آن برابر صفر است و کوچک‌ترین مقدار طبیعی M، برابر ۸ است. به عبارت دیگر در این سؤال مقدار M مستقل از $\varepsilon=۰/۰۳$ است و به آن ارتباطی ندارد. در واقع از جمله‌ی هشتم به بعد، نه تنها جملات دنباله در بازه‌ای متقارن به مرکز حد آن و به شعاع ۰/۰۳ قرار دارند، بلکه دقیقاً برابر با حد دنباله هستند.

تست ۵: چند جمله از دنباله‌ی $a_n=\frac{۹n+۲}{۳n-۱}$ در بازه‌ای متقارن به مرکز حد آن و به شعاع $\frac{۱}{۱۱}$ قرار نمی‌گیرند؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

پاسخ: با تفکیک ضابطه‌ی دنباله خواهیم داشت:

$$a_n=\frac{۳(۳n-۱)+۵}{۳n-۱}=۳+\frac{۵}{۳n-۱}$$

با افزایش مقادیر n، حد دنباله برابر با $L=۳$ خواهد شد. برای این‌که مقادیر جملات دنباله در بازه‌ای متقارن به مرکز ۳ و شعاع $\frac{۱}{۱۱}$ قرار نگیرند، خواهیم داشت:

$$|a_n-۳|\geq \frac{۱}{۱۱}\Rightarrow |۳+\frac{۵}{۳n-۱}-۳|\geq \frac{۱}{۱۱}\Rightarrow \frac{۵}{۳n-۱}\geq \frac{۱}{۱۱}\Rightarrow ۳n\leq ۵۶\Rightarrow n\leq ۱۸/\overline{۶}\Rightarrow n\leq ۱۸$$

پس از جمله‌ی اوّل تا جمله‌ی هجدهم در این بازه قرار ندارند. بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

نکته

ارتباط بین علامت حد و علامت جملات دنباله:

اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ به L همگرا باشد، می‌توان گفت:

الف) اگر تمام جملات a_n مثبت باشند، آن‌گاه: $L\geq ۰$

ب) اگر $L>۰$، آن‌گاه مقدار طبیعی M یافت می‌شود، به‌طوری که: $n\geq M\Rightarrow a_n>۰$

به عبارت دیگر اگر $L>۰$، آن‌گاه از جمله‌ای به بعد، جملات دنباله مثبت خواهند بود.

پ) اگر $L<۰$، آن‌گاه مقدار طبیعی M یافت می‌شود، به‌طوری که: $n\geq M\Rightarrow a_n<۰$

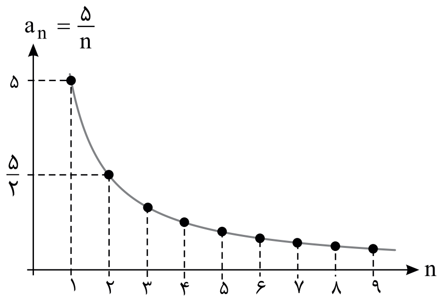
به عبارت دیگر اگر $L<۰$، آن‌گاه از جمله‌ای به بعد، جملات دنباله منفی خواهند بود.

ت) در صورتی که L برابر با صفر باشد، نمی‌توان حکمی صادر کرد و امکان دارد که جملات دنباله حول صفر تغییر علامت دهند.

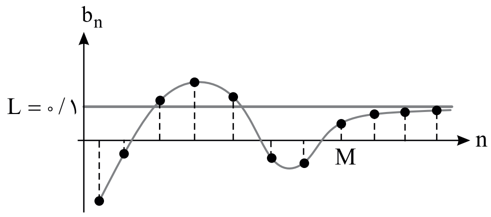
مثال: دنباله‌ی $a_n=\frac{۵}{n}$ را در نظر بگیرید که تمامی جملات آن مثبت است.

طبق بند الف نکته‌ی قبل، در صورتی که دنباله همگرا باشد، حد آن بزرگ‌تر مساوی صفر است و حتی صفر نیز می‌تواند باشد که در مورد $a_n=\frac{۵}{n}$ همین‌طور است.

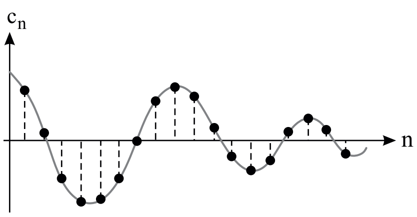
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{۵}{n}=۰$$



حال به نمودار دنباله‌ی $\{b_n\}$ توجه کنید که به $L=۰/۱$ همگرا اســت. طبق بنــد ب نکته‌ی قبل، از جمله‌ای به بعد تمامی جملات مثبت هســتند که این جمله در نمودار مشخص شده است:



در آخر به نمودار دنباله‌ی $\{c_n\}$ توجه کنید که به $L=۰$ همگرا است. هر چه مقادیــر n را افزایش دهیم، علامت جمــلات دنباله تغییر می‌کند و مثبت و منفی می‌شود:



نکته حذف تعداد متناهی از جملات ابتدایی یک دنباله یا اضافه کردن تعداد متناهی جمله به ابتدای یک دنباله، هیچ تأثیری بر وضعیت همگرایی دنباله نخواهد گذاشت. اگر $\{a_n\}$ به L همگرا باشد، با حذف یا اضافه کردن چند جمله از آن، تغییری در وضعیت همگرایی آن ایجاد نمی‌شود و دنباله‌ی جدید نیز به همان L همگرا خواهد بود.

مثال: دنباله‌ی $a_n=(\frac{۲}{۵})^n$ را در نظر بگیرید که به صفر همگرا است. دو دنباله‌ی زیر که یکی با حذف دو جمله و دیگری با اضافه کردن دو جمله به $\{a_n\}$ ساخته شده‌اند، مجدداً به همان صفر همگرا هستند:

$$\{a_n\}=\frac{۲}{۵},\frac{۴}{۲۵},\frac{۸}{۱۲۵},\frac{۱۶}{۶۲۵},\cdots$$

$$\{b_n\}=۱,۱۷,\frac{۲}{۵},\frac{۴}{۲۵},\frac{۸}{۱۲۵},\frac{۱۶}{۶۲۵},\cdots$$ (b_n همگرا به صفر)

$$\{c_n\}=\frac{۸}{۱۲۵},\frac{۱۶}{۶۲۵},\cdots$$ (c_n همگرا به صفر)

تعریف **زیر دنباله: اگر تعداد نامتناهی از جملات یک دنباله مانند $\{a_n\}$ را در نظر بگیریم، به این جملات نامتناهی یک زیردنباله از $\{a_n\}$ گویند که خود دنباله‌ای جدید است.**

مثال: به دنباله‌ی $a_n=\cos\frac{n\pi}{۳}$ توجه کنید:

$$\{a_n\}=\{\cos\frac{n\pi}{۳}\}=\frac{۱}{۲},\frac{-۱}{۲},-۱,\frac{-۱}{۲},\frac{۱}{۲},۱,\frac{۱}{۲},\frac{-۱}{۲},\cdots$$

از روی این دنباله، دو زیردنباله مانند $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ ایجاد می‌کنیم:

$$\{b_n\}_{n=۱}=\{a_{۲n}\}_{n=۱}=a_۲,a_۴,a_۶,a_۸,\cdots$$

$$\Rightarrow b_n=a_{۲n}=\cos\frac{۲n\pi}{۳}\Rightarrow\{b_n\}=\frac{-۱}{۲},\frac{-۱}{۲},۱,\frac{-۱}{۲},\frac{-۱}{۲},۱,\cdots$$

$$\{c_n\}_{n=۱}=\{a_{۶n}\}_{n=۱}=a_۶,a_{۱۲},a_{۱۸},\cdots$$

$$\Rightarrow c_n=a_{۶n}=\cos\frac{۶n\pi}{۳}=\cos۲n\pi\Rightarrow\{c_n\}=۱,۱,۱,\cdots$$

در مثال فوق، از روی دنباله‌ی واگرای $\{a_n\}$ یک زیردنباله‌ی واگرا مانند $\{b_n\}$ و یک زیردنباله‌ی همگرا مانند $\{c_n\}$ به‌دست آمد.

نکته اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ به L همگرا باشد، هر زیردنباله‌ی دلخواه از آن نظیر $\{a_{n+1}\}$ ، $\{a_{n+2}\}$ ، $\{a_{2n}\}$ ، $\{a_{n^2}\}$ و ... نیز به L همگرا خواهد بود.

مثال: دنباله‌ی $a_n=\frac{1}{n}$ به صفر همگراست. بنابراین دنباله‌هایی نظیر $a_{2n}=\frac{1}{2n}$ و یا $a_{n^3}=\frac{1}{n^3}$ نیز به صفر همگرایند.

نتیجه: اگر دو زیردنباله از $\{a_n\}$ به دو مقدار متمایز L_1 و L_2 همگرا باشند، دنباله‌ی $\{a_n\}$ واگرا خواهد بود.

مثال: به دنباله‌ی $a_n=(-1)^n$ توجه کنید: $\{a_n\}=-1,1,-1,1,\cdots$

دو زیردنباله‌ی b_n و c_n به دو مقدار مختلف همگرا هستند:

$\{b_n\}=\{a_{2n}\}_{n=1}=a_2\ ,\ a_4\ ,\cdots=1,1,1,\cdots$ (همگرا به ۱)

$\{c_n\}=\{a_{2n-1}\}_{n=1}=a_1\ ,\ a_3\ ,\cdots=-1,-1,-1,\cdots$ (همگرا به ۱−)

دنباله‌ی $\{a_n\}$ واگراست، زیرا در صورت همگرایی، لازم بود زیردنباله‌هایی مانند $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ نیز به یک مقدار همگرا شوند.

مسأله‌ی ۴: نشان دهید دنباله‌های زیر واگرا هستند:

الف) $a_n=\begin{cases}5-\frac{2}{n} & \text{فرد } n\\ 3+\frac{1}{n} & \text{زوج } n\end{cases}$ **ب)** $u_n=[\frac{(-1)^n}{n+1}]$

راه‌حل: این دنباله‌ها به ازای مقادیر زوج و فرد n به دو مقدار همگرا می‌شوند. به عبارت بهتر دو زیر دنباله از آن‌ها به دو مقدار متمایز همگرا می‌شوند. پس خود دنباله‌ها واگرا هستند.

الف) $a_n=\begin{cases}5-\frac{2}{n} & \text{فرد } n\\ 3+\frac{1}{n} & \text{زوج } n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b_n=5-\frac{2}{n} & \text{فرد } n\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} b_n=5\\ c_n=3+\frac{1}{n} & \text{زوج } n\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} c_n=3\end{cases}$

ب) $u_n=[\frac{(-1)^n}{n+1}]=\begin{cases}[\frac{-1}{n+1}] & \text{فرد } n\\ [\frac{1}{n+1}] & \text{زوج } n\end{cases}\Rightarrow \{u_n\}=-1,0,-1,0,-1,0,\cdots$

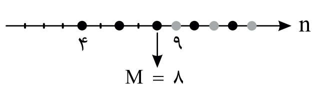
زیردنباله‌ای که با جملات فرد $\{u_n\}$ ساخته می‌شود، به ۱− همگراست و زیردنباله‌ای که با جملات زوج ساخته می‌شود، به صفر همگراست. پس $\{u_n\}$ واگراست.

مسأله‌ی ۵: دنباله‌ی $a_n=\begin{cases}\frac{2^{n+1}+5}{2^{n-1}+6} & \text{فرد } n\\ \frac{4n^3+5}{n^3+1} & \text{زوج } n\end{cases}$ **به ۴ همگراست. اگر برای $n\geq M$ مقادیر جملات دنباله در بازه‌ی متقارن به مرکز ۴ و شعاع $\frac{1}{10}$ قرار داشته باشند، کوچک‌ترین عدد طبیعی M را بیابید.**

راه‌حل: جملات با شماره‌ی زوج و فرد را جداگانه بررسی می‌کنیم و سپس کوچک‌ترین مقدار M را تعیین می‌کنیم:

فرد n: $|a_n-4|<\frac{1}{10}\Rightarrow|\frac{2^{n+1}+5}{2^{n-1}+6}-4|<\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{19}{2^{n-1}+6}<\frac{1}{10}\Rightarrow 2^{n-1}>184\Rightarrow n-1\geq 8\Rightarrow n\geq 9\Rightarrow n=9,11,13,\cdots$

زوج n: $|a_n-4|<\frac{1}{10}\Rightarrow|\frac{4n^3+5}{n^3+1}-4|<\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{1}{n^3+1}<\frac{1}{10}\Rightarrow n^3>9\Rightarrow n\geq 3\Rightarrow n=4,6,8,\cdots$



حـال باید کوچک‌ترین عدد طبیعی M را بیابیـم، به‌طوری‌که از آن جمله به بعد، هم جملات فرد و هم جملات زوج در محدوده‌ی مورد نظر قرار بگیرند:

با توجه به نمودار فوق مشـخص اسـت که از $M=8$ به بعد، هم جملات زوج و هم جملات فرد، مورد قبول هستند و در بازه‌ی متقارن به مرکز ۴ و شعاع $\frac{1}{10}$ قرار دارند.

تست ۶: **برای** $n\geq M$ **جملات دنباله‌ی** $a_n=\begin{cases} ۶-\frac{۱}{n} & \text{فرد} n \\ \frac{۶n+۱۰}{n+۲} & \text{زوج} n \end{cases}$ **در بازه‌ی متقارن به مرکز ۶ و شعاع** $\frac{۱}{۱۰۰}$ **قرار دارند. کوچک‌ترین عدد طبیعی** M **کدام است؟**

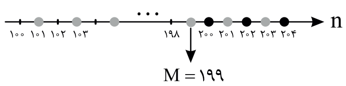
۱) ۲۰۰ ۲) ۱۹۹ ۳) ۱۰۱ ۴) ۱۰۰

پاسخ: جملات دارای شماره‌ی فرد و جملات دارای شماره‌ی زوج را جداگانه بررسی می‌کنیم:

$$\text{فرد} n: |a_n-۶|<\frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow |۶-\frac{۱}{n}-۶|<\frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۱}{n}<\frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow n>۱۰۰ \Rightarrow n\geq ۱۰۱ \Rightarrow n=۱۰۱\,,۱۰۳\,,۱۰۵\,,\cdots$$

$$\text{زوج} n: |a_n-۶|<\frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow |\frac{۶n+۱۰}{n+۲}-۶|<\frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۲}{n+۲}<\frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow n>۱۹۸ \Rightarrow n\geq ۱۹۹ \Rightarrow n=۲۰۰\,,۲۰۲\,,۲۰۴,\cdots$$

حال مقادیر قابل قبول n را در نمودار مشـخص می‌کنیم تا کوچک‌ترین عدد طبیعی M را بیابیم:



پس برای $n\geq ۱۹۹$ نتیجه‌گیری درست بوده و دنباله در بازه‌ی مورد نظر قرار می‌گیرد.

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تست ۷: **چند جمله از دنباله‌ی** $a_n=\begin{cases} ۵-\frac{۳}{n} & \text{فرد} n \\ \frac{۵n^۲}{n^۲+۶} & \text{زوج} n \end{cases}$ **در بازه‌ی متقارن به مرکز حد آن و شعاع ۰/۱ قرار ندارد؟**

۱) ۴۵ ۲) ۴۲ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

پاسخ: این دنباله دارای حد ۵ است. برای این‌که جملات آن در بازه‌ی مورد نظر قرار بگیرند، باید $|a_n-۵|$ کوچک‌تر از ۰/۱ باشد. پس برای این‌که در این بازه قرار نگیرند، باید $|a_n-۵|$ بزرگ‌تر یا مساوی ۰/۱ باشد:

$$\text{فرد } n: |a_n-۵|\geq ۰/۱ \Rightarrow |۵-\frac{۳}{n}-۵|\geq\frac{۱}{۱۰} \Rightarrow \frac{۳}{n}\geq\frac{۱}{۱۰} \Rightarrow n\leq ۳۰ \Rightarrow n=۱\,,۳\,,۵\,,\cdots\,,۲۷\,,۲۹$$

$$\text{زوج } n: |a_n-۵|\geq ۰/۱ \Rightarrow |\frac{۵n^۲}{n^۲+۶}-۵|\geq\frac{۱}{۱۰} \Rightarrow \frac{۳۰}{n^۲+۶}\geq\frac{۱}{۱۰} \Rightarrow n^۲\leq ۲۹۴ \Rightarrow n\leq ۱۷ \Rightarrow n=۲\,,۴\,,\cdots\,,۱۶$$

تعداد جملات فرد که خارج از بازه هستند برابر است با: $[\frac{۳۰}{۲}]=۱۵$ و تعداد جملات زوج که خارج از بازه هستند برابر است با: $[\frac{۱۶}{۲}]=۸$ و تعداد کل جملاتی که خارج از بازه هستند، برابر است با: $۱۵+۸=۲۳$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

اعمال اصلی روی دنباله‌ها

می‌توان با استفاده از دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ و چهار عمل اصلی دنباله‌های جدیدی ساخت که عبارتند از:

$\{a_n+b_n\}\,,\{a_n-b_n\}\,,\{a_nb_n\}$

همچنین $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ که در آن $b_n\neq ۰$ اسـت. جمله‌ی nاُم هر یک از این دنباله‌ها به کمک اعمال جبری روی جمله‌ی nاُم دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ ایجاد می‌شود. حد این دنباله‌ها را به کمک قضیه‌ی زیر محاسبه می‌کنیم.

قضیه **اگر** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=L_۱$ **و** $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=L_۲$ **، آن‌گاه:**

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to+\infty}a_n\pm\lim_{n\to+\infty}b_n=L_۱\pm L_۲$$

$$\lim_{n\to+\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to+\infty}a_n\times\lim_{n\to+\infty}b_n=L_۱L_۲$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty}b_n}=\frac{L_۱}{L_۲}\qquad(L_۲\neq ۰)$$

مسأله‌ی ۶: دنباله‌ی $\{a_n\}$ به L همگراست. اگر دنباله‌ی $b_n=\frac{۳a_n}{a_n+۵}$ به ۴ همگرا باشد، L را تعیین کنید.

راه‌حل:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} ۳a_n=۳\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=۳L \\ \lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+۵)=\lim\limits_{n\to+\infty} a_n+۵=L+۵ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} b_n=\frac{۳L}{L+۵} \Rightarrow \frac{۳L}{L+۵}=۴ \Rightarrow L=-۲۰$$

تذکر قضیه‌ی فوق را علاوه بر چهار عمل اصلی، می‌توان برای عمل‌های دیگری مانند توان رسانی و فرجه گیری عمومیت داد. مثلاً:

$$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=L \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} {a_n}^۳=(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n)^۳=L^۳ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[۳]{a_n}=\sqrt[۳]{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}=\sqrt[۳]{L} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{a_n}=\sqrt{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}=\sqrt{L} \qquad (\text{با شرط } L\geq ۰) \end{cases}$$

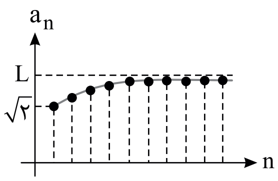
در حالت کلی‌تر با شرط این‌که ${a_n}^{b_n}$ تعریف شده باشد، می‌توان گفت:

$$\lim\limits_{n\to+\infty} {a_n}^{b_n}=(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n}$$

مسأله‌ی ۷: دنباله‌ی بازگشتی $\begin{cases} a_{n+۱}=\sqrt{۲+a_n} \\ a_۱=\sqrt{۲} \end{cases}$ به عدد L همگراست. L را تعیین کنید.

راه‌حل: برای درک بهتر رفتار این دنباله‌ی، چند جمله‌ی ابتدایی آن را می‌نویسیم:

$$\{a_n\}=\sqrt{۲}\ ,\ \sqrt{۲+\sqrt{۲}}\ ,\ \sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}\ ,\ \cdots$$



با دقت به $\sqrt{۲}$ در جملات این دنباله، می‌توان گفت که هر جمله ازجمله‌ی قبلی بزرگ‌تر است و این دنباله اکیداً صعودی است. با فرض این‌که دنباله به L همگراست، دارای نموداری به‌صورت روبه‌رو خواهد بود و داریم:

$$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=L \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+۱}=L\ ,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{۲+a_n}=\sqrt{۲+L}$$

با توجه به رابطه‌ی $a_{n+۱}=\sqrt{۲+a_n}$، حد دنباله‌های $\sqrt{۲+a_n}$ و $a_{n+۱}$ با هم برابر است: $L=\sqrt{۲+L}$

طرفین معادله‌ی فوق را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$L^۲=۲+L \Rightarrow L^۲-L-۲=(L+۱)(L-۲)=۰ \Rightarrow L=-۱\ ,\ L=۲$$

جواب $L=-۱$ غیرقابل قبول است و در معادله صدق نمی‌کند. پس این دنباله‌ی بازگشتی به $L=۲$ همگراست.

تست ۸: دنباله‌ی $\begin{cases} a_{n+۱}=\frac{۳+۲a_n}{۵} \\ a_۱=۶ \end{cases}$ به چه عددی همگراست؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: با فرض این‌که $\{a_n\}$ به L همگراست، داریم:

$$\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+۱}=L\ ,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{۳+۲a_n}{۵}=\frac{۳+۲L}{۵} \Rightarrow L=\frac{۳+۲L}{۵} \Rightarrow ۳L=۳ \Rightarrow L=۱$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

مسألهٔ ۸: دنبالهٔ فیبوناچی به‌صورت $\begin{cases} a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \\ a_1=a_2=1 \end{cases}$ **تعریف می‌شود. با فرض این‌که** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$ **مقدار** L **را بیابید.**

راه‌حل: چند جملهٔ نخست دنبالهٔ $\{b_n\}$ را می‌نویسیم:

$$\{a_n\}=1,1,2,3,5,8,13,\cdots$$

$$\{b_n\}=\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}=1,2,\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\cdots$$

برای یافتن حد $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ طرفین رابطهٔ $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ را بر a_{n+1} تقسیم می‌کنیم: $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=1+\frac{a_n}{a_{n+1}}$

از طرفی $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ به L همگراست. پس:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{a_n}{a_{n+1}})=1+\frac{1}{L} \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}b_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=L \end{cases} \Rightarrow L=1+\frac{1}{L} \Rightarrow L^2-L-1=0 \Rightarrow L=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

مقدار $L=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ که عددی منفی است، غیرقابل قبول است، زیرا جملات دنبالهٔ $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ همگی مثبت هستند و این دنباله نمی‌تواند به عددی منفی همگرا شود. بنابراین: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

این عدد مهم یعنی $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ به عدد طلایی یا نسبت طلایی مشهور است.

مفهوم حد بی‌نهایت در دنباله‌ها

دستهٔ مهمی از دنباله‌های واگرا، دنباله‌هایی نظیر $a_n=n^2$ هستند که با افزایش n مقدار آن‌ها به عدد مشخصی نزدیک نمی‌شود، بلکه از هر مقدار مشخص و دلخواهی، می‌توانند بزرگ‌تر گردند:

$$\{a_n\}=\{n^2\}=1,4,9,16,25,36,\cdots$$

اگر بخواهیم مقدار جملات $a_n=n^2$ از $N=100$ بزرگ‌تر گردد، کافی است جملات بعد از $n=10$ را در نظر بگیریم. اگر خواسته باشیم از $N=10000$ بزرگ‌تر شوند، کافی است جملات بعد از $n=100$ را در نظر بگیریم. در واقع در این دنباله‌ها مقدار a_n از هر عدد مثبتی مانند N، می‌تواند بزرگ‌تر باشد. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}n^2=+\infty$$

دنباله‌هایی نظیر $b_n=-n^3$ نیز همین گونه‌اند. با این تفاوت که با افزایش n، از هر مقدار دلخواه و منفی، کوچک‌تر می‌گردند:

$$\{b_n\}=\{-n^3\}=-1,-8,-27,-64,\cdots$$

$$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(-n^3)=-\infty$$

تعریف **حد بی‌نهایت در دنباله‌ها**

۱- دنبالهٔ واگرای $\{a_n\}$ دارای حد $+\infty$ است، هرگاه برای هر عدد حقیقی و مثبت دلخواهی مانند N، عدد طبیعی M یافت شود، طوری‌که:

$$n\geq M \Rightarrow a_n>N$$

در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$$

۲- دنبالهٔ واگرای $\{a_n\}$ دارای حد $-\infty$ است، هرگاه برای هر عدد حقیقی و مثبتِ دلخواهی مانند N عدد طبیعی یافت شود، طوری که:

$$n\geq M \Rightarrow a_n<-N$$

در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=-\infty$$

می‌توان در تعریف دوم به جای $-N$ از یک عدد حقیقی و منفی مانند K نیز استفاده کرد:

$$n\geq M \Rightarrow a_n<K$$

مثال: می‌خواهیم ثابت کنیم که $a_n=n^2$ دارای حد $+\infty$ است. برای این کار به ازای هر عدد حقیقی مثبت و بزرگی مانند N باید مقدار طبیعی M را طوری پیدا کنیم که:

$$n\geq M \Rightarrow a_n>N$$
$$n\geq M \Rightarrow n^2>N$$
$$n\geq M \Rightarrow n>\sqrt{N}$$

حال می‌توان گفت که نتیجه‌گیری فوق به ازای $M=[\sqrt{N}]+1$ صحیح است. پس وجود $M=[\sqrt{N}]+1$ اثبات می‌کند که:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2=+\infty$$

مسأله‌ی ۹: ثابت کنید: $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{5-n}=-\infty$

راه‌حل: برای هر عدد حقیقی مثبت و بزرگی مانند N، باید مقدار طبیعی M را بیابیم، به‌طوری که:

$$n\geq M \Rightarrow a_n<-N$$
$$n\geq M \Rightarrow \sqrt[3]{5-n}<-N$$

نابرابری $\sqrt[3]{5-n}<-N$ با نابرابری‌های زیر معادل است:

$$\sqrt[3]{5-n}<-N \Leftrightarrow 5-n<-N^3 \Leftrightarrow n>5+N^3$$

پس باید M را طوری یافت که نتیجه‌گیری زیر درست باشد:

$$n\geq M \Rightarrow n>5+N^3$$

با شرط $M=[5+N^3]+1$، نتیجه‌گیری فوق درست است. پس $M=[N^3]+6$ اثبات می‌کند که دنباله‌ی $\{a_n\}$ به $-\infty$ واگراست.

مسأله‌ی ۱۰: ثابت کنید: $\lim_{n\to+\infty}(n^2+8n)=+\infty$

راه‌حل: برای هر عدد حقیقی و مثبت مانند N، مقدار طبیعی M را طوری می‌یابیم که:

$$n\geq M \Rightarrow n^2+8n>N$$

نابرابری $n^2+8n>N$ معادل است با:

$$n^2+8n>N \Leftrightarrow (n+4)^2-16>N \Leftrightarrow (n+4)^2>N+16 \Leftrightarrow n+4>\sqrt{N+16} \Leftrightarrow n>\sqrt{N+16}-4$$

حال باید M را به گونه‌ای بیابیم که نتیجه‌گیری زیر درست باشد:

$$n\geq M \Rightarrow n>\sqrt{N+16}-4$$

وجود $M=[\sqrt{N+16}-4]+1$ یا همان $M=[\sqrt{N+16}]-3$ ثابت می‌کند که:

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2+8n)=+\infty$$

نکته اگر $\lim_{n\to+\infty} a_n=\infty$ آن‌گاه داریم: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n}=0$

مسأله‌ی ۱۱: نشان دهید که $a_n=\sqrt{n+4}-\sqrt{n}$ به صفر همگراست.

راه‌حل: این دنباله را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$a_n=(\sqrt{n+4}-\sqrt{n})\times\frac{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}=\frac{4}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}$$

با توجه به این‌که $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+4}+\sqrt{n})=+\infty$ ، داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}=\frac{1}{+\infty}=0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n=0$$

تمرین‌های تشریحی[۱]

۱- به کمک تعریف همگرایی دنباله، ثابت کنید:

الف) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{۴n-۱}{۲n+۱}=۲$ ب) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{۳^{n+۲}+۵}{۳^n-۱}=۹$

پ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{۳\sqrt{n}}{\sqrt{n+۱}}=۳$ ت) $\lim\limits_{n\to+\infty}\log_{n+۱}۲=۰$

ث) $\lim\limits_{n\to+\infty}۲^{-۵\sqrt{n}}=۰$ ج) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{۱}{n^۲+۲n}=۰$

۲- به کمک تعریف همگرایی دنباله، ثابت کنید، دنباله‌های زیر به مقدار داده شده همگرا هستند:

الف) $\{\frac{۲^n+(-۱)^n}{۲^{n+۱}}\}\ ,\ L=\frac{۱}{۲}$ ب) $\{\log(\frac{۱۰n}{n+۱})\}\ ,\ L=۱$

پ) $\{\frac{\cos(n)}{n}\}\ ,\ L=۰$ ت) $\{\frac{\sqrt{n}\sin(n)}{n+۱}\}\ ,\ L=۰$

۳- ثابت کنید دنباله‌ی $\{\frac{۹n+۲}{۳n-۱}\}$ به ۲ همگرا نیست.

۴- نشان دهید اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا باشد، دنباله‌ی $\{[a_n]\}$ می‌تواند همگرا یا واگرا باشد.

۵- با یک مثال نشان دهید اگر دنباله‌ی $\{[a_n]\}$ همگرا باشد، دنباله‌ی $\{a_n\}$ می‌تواند همگرا یا واگرا باشد.

۶- ثابت کنید دنباله‌های زیر واگرا به بی‌نهایت هستند:

الف) $\{۲\sqrt{n}-n\}$ ب) $\{\log\frac{۱}{n}\}$ پ) $\{\frac{۳^n}{۲^n}\}$

۷- به کمک تعریف ثابت کنید: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^۲+۱}{n+۱}=+\infty$

۸- به کمک تعریف حد دنباله‌ها ثابت کنید: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{[۵n]}{۳n}=\frac{۵}{۳}$

۹- در هر مورد، زیردنباله‌هایی از دنباله‌ی $\{a_n\}$ بنویسید که همگرا باشد:

الف) $a_n=۲\sin(\frac{n\pi}{۱۲})$ ب) $a_n=\frac{(-۱)^n n}{n+۱}$

پ) $a_n=n-۷[\frac{n}{۷}]$ ت) $a_n=n^{(-۱)^n}$

۱۰- در هر مورد کوچک‌ترین عدد طبیعی M را طوری تعیین کنید که اگر $n\geq M$ آن‌گاه جملات دنباله در بازه‌ی داده شده قرار گیرند:

الف) $(۲\ ,\ ۲/۰۰۱)$ $a_n=\frac{۴n+۳}{۲n+۱}$

ب) $(۲۶/۹\ ,\ ۲۷)$ $a_n=\frac{۳^{n+۳}+۲}{۳^n+۱}$

پ) $(۰/۹۹\ ,\ ۱/۰۱)$ $a_n=\begin{cases}\frac{۵n+۱}{۵n+۲} & n \text{ فرد}\\ \frac{n+۲}{n+۱} & n \text{ زوج}\end{cases}$

۱- پاسخ تشریحی تمرین‌ها را می‌توانید از سایت انتشارات دریافت کنید.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

تعداد سؤالات: ۴۲

۱۲۸- برای $n\geq M$ فاصله‌ی جملات $a_n=2+\frac{1}{(n+1)^3}$ از ۲ کم‌تر از ۰/۰۰۱ است. کوچک‌ترین مقدار طبیعی M کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۲۹- اگر برای هر $n\geq M$ فاصله‌ی جملات دنباله‌ی $a_n=\frac{5n}{n+3}$ از ۵ کم‌تر از $\frac{1}{8}$ باشد، حداقل مقدار طبیعی M کدام است؟

۱) ۱۱۵ ۲) ۱۱۶ ۳) ۱۱۷ ۴) ۱۱۸

۱۳۰- اگر برای هر $n\geq M$ فاصله‌ی جملات دنباله‌ی $a_n=1+\frac{(-1)^n}{2n+1}$ از ۱، کم‌تر از ۰/۰۱ باشد، حداقل مقدار طبیعی M کدام است؟

۱) ۴۹ ۲) ۵۰ ۳) ۹۹ ۴) ۱۰۰

۱۳۱- جملات دنباله‌ی $a_n=2^{3-n}$ به ازای $n\geq M$ در بازه‌ی $(0\,,\,0/01)$ قرار می‌گیرند. کوچک‌ترین مقدار طبیعی M کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۳۲- اگر برای دنباله‌ی $a_n=\frac{5^{n+1}}{5^n-1}$ از نامساوی $n\geq M$، نامساوی $|a_n-5|<0/005$ نتیجه شود، حداقل مقدار طبیعی M کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۳۳- چند جمله از دنباله‌ی $\{\frac{10n+1}{2n-1}\}$ در بازه‌ای متقارن به مرکز حد دنباله و به شعاع ۰/۱ قرار ندارند؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۱ ۳) ۳۲ ۴) ۳۳

۱۳۴- جملات دنباله‌ی $\{\frac{4n+5}{2n+2}\}$ برای مقادیر $n>24$ در کدام بازه‌ی متقارن به مرکز حد دنباله قرار دارند؟

۱) $(0/97, 1/03)$ ۲) $(0/997, 1/003)$ ۳) $(1/98, 2/02)$ ۴) $(1/998, 2/002)$

۱۳۵- اگر $n>10$، جملات دنباله‌ی $\{\frac{2n^2-60}{n^2-40}\}$ در کدام بازه قرار می‌گیرند؟

۱) $(2,\frac{7}{3})$ ۲) $(2,\frac{13}{6})$ ۳) $(\frac{5}{3},2)$ ۴) $(\frac{11}{6},2)$

۱۳۶- اگر $n>10$، کوچک‌ترین بازه‌ای که مقادیر جملات دنباله‌ی $\{\frac{4n-5}{2n-3}\}$ در آن قرار می‌گیرند، کدام است؟

۱) $(2,2+\frac{1}{17})$ ۲) $(2,2+\frac{1}{15})$ ۳) $(2,2+\frac{1}{19}]$ ۴) $(2,2+\frac{1}{21}]$

۱۳۷- در تعریف $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}-4}{2^n-1}=2$ حداقل مقدار M به ازای $\varepsilon=0/004$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۳۸- در دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n=\frac{2n^2+68}{n^2-41}$ اگر $n>71$، مقدار عبارت $[100a_n]$ چند عدد متفاوت می‌تواند باشد؟ ([]، نماد جزءصحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۹- چند جمله از دنباله‌ی $\{\frac{4^n}{5^n}\}$ خارج از بازه‌ی $(0,0/01)$ قرار دارند؟ $(\log 5=0/7)$

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۴۰ ۴) ۴۱

۱۴۰- اگر به ازای هر عدد حقیقی و مثبت ε از نامساوی $n>\frac{5}{\varepsilon}$، بتوان نامساوی $|a_n-2|<\varepsilon$ را نتیجه گرفت، دنباله‌ی $\{a_n\}$ به چه عددی همگراست؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۴۱- اگر جملات دنباله‌ی $\{\frac{3}{2^n}\}$ برای مقادیر $n\geq M$ در بازه‌ی $(0, 0/1875)$ قرار گیرند، کوچک‌ترین مقدار طبیعی M کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۱۴۲- در تعریف همگرایی دنباله‌ی $\{\frac{n^2}{3n^2-1}\}$ به $\frac{1}{3}$، حداقل مقدار طبیعی M برای هر ε کدام است؟

۱) $[\frac{1}{9\varepsilon}]$ ۲) $[\sqrt{\frac{1}{9\varepsilon}+\frac{1}{3}}]+1$ ۳) $[\sqrt{\frac{1}{9\varepsilon}+\frac{1}{3}}]$ ۴) $[\frac{1}{9\varepsilon}]+1$

۱۴۳- در تعریف $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n}{n+2}=4$، کم‌ترین مقدار طبیعی M برای هر ε کدام است؟

۱) $[\frac{8}{\varepsilon}]$ ۲) $[\frac{8}{\varepsilon}]-2$ ۳) $[\frac{8}{\varepsilon}]-1$ ۴) $[\frac{8}{\varepsilon}]+1$

۱۴۴- در تعریف همگرایی کدام دنباله، مقدار M به ε بستگی ندارد؟

۱) $\{\frac{n-1}{n}\}$ ۲) $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$ ۳) $\{\frac{1}{n^2+1}\}$ ۴) $\{[\frac{2n-2}{2n+3}]\}$

۱۴۵- به ازای هر عدد حقیقی و مثبت ε نتیجه‌گیری «$n\geq[\frac{12}{\varepsilon}]\Rightarrow 4\leq 2a_n<4+3\varepsilon$» صحیح است. دنباله‌ی $\{a_n^2-3\}$ به چه عددی همگراست؟

۱) ۱۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) دنباله واگراست.

۱۴۶- در تعریف $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n})=1$، حدود M کدام است؟

۱) $M\geq[-\log_2\varepsilon]$ ۲) $M\geq[-\log_2\varepsilon]+1$ ۳) $M\geq[-\log_2\varepsilon]-1$ ۴) $M\geq[-\log_2\varepsilon]-2$

۱۴۷- برای هر $n\geq M$ جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی $a_n=\begin{cases}\frac{4n-1}{n} & \text{فرد } n\\ \frac{8n+1}{2n-1} & \text{زوج } n\end{cases}$ در بازه‌ای متقارن به مرکز ۴ و شعاع $0/01$ قرار می‌گیرند. حداقل مقدار طبیعی M کدام است؟

۱) ۱۰۱ ۲) ۲۵۰ ۳) ۲۵۱ ۴) ۲۵۲

۱۴۸- اگر $a_n=(-1)^{n+3}$ و $b_n=\cos(n\pi)$، آن‌گاه کدام دنباله واگراست؟

۱) $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ ۲) $\{a_n+b_n\}$ ۳) $\{a_n-b_n\}$ ۴) $\{a_nb_n\}$

۱۴۹- چند جمله از جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی $a_n=\begin{cases}3-\frac{4}{n} & \text{فرد } n\\ 3+\frac{5}{n+1} & \text{زوج } n\end{cases}$ در بازه‌ای متقارن به مرکز حد دنباله و به شعاع $0/1$ قرار ندارند؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۳ ۳) ۴۴ ۴) ۴۵

۱۵۰- در تعریف حد دنباله‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی $a_n=\begin{cases}\frac{4}{n^4} & \text{فرد } n\\ \frac{1}{2^n} & \text{زوج } n\end{cases}$ اگر $\varepsilon=0/001$ فرض شود، حداقل مقدار طبیعی M چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۵۱- اگر $n>25$، جملات دنباله‌ی $\{\frac{2n-(-1)^n}{n}\}$ در کدام بازه قرار می‌گیرند؟

۱) $(2, 2/04)$ ۲) $(1/96, 2)$ ۳) $(1/98, 2/02)$ ۴) $(1/96, 2/04)$

۱۵۲- چند جمله از دنباله‌ی $\{(-1)^n \sin(\frac{\pi}{n})\}$ خارج از بازه‌ی $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ قرار دارند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۵۳- دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا به $\frac{\pi}{2}$ است. چه تعداد از جملات زیر الزاماً صحیح است؟

الف) این دنباله بی‌نهایت جمله‌ی کوچک‌تر از $\frac{\pi}{2}$ دارد.

ب) این دنباله بی‌نهایت جمله‌ی بزرگ‌تر از $\frac{\pi}{2}$ دارد.

پ) این دنباله بی‌نهایت جمله‌ی بزرگ‌تر از ۱ دارد.

ت) این دنباله بی‌نهایت جمله‌ی کوچک‌تر از ۲ دارد.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۵۴- اگر دنباله‌های $\{3a_n+4b_n\}$ و $\{a_n-2b_n\}$ به ترتیب به مقدارهای -4 و ۷ همگرا باشند، دنباله‌ی $\{a_n\}$ به کدام مقدار همگراست؟

۱) ۲ ۲) $-0/2$ ۳) -1 ۴) $0/1$

۱۵۵- دنباله‌ی $\{a_n\}$ دارای جملات مثبت و همگراست. اگر $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1}=3k-k^2$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+2}=4-2k$ آن‌گاه مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+3}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۵۶- دنباله‌ی $\begin{cases} a_1=4 \\ a_{n+1}=\frac{1+3a_n}{6} \end{cases}$ به کدام مقدار همگراست؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۵۷- دنباله‌ی $\begin{cases} a_1=\sqrt{3} \\ a_{n+1}=\sqrt{3+2a_n} \end{cases}$ به کدام مقدار همگراست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۸- اگر برای هر عدد طبیعی n، $a_n>4$ و دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا به ۴ باشد، دنباله‌ی $\{\frac{{a_n}^2-16}{\sqrt{a_n}-2}\}$ به کدام عدد همگراست؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۱۵۹- کدام‌یک از دنباله‌های زیر همگراست؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $[\frac{(-1)^n+1}{n+1}]$ ۲) $a_n=[\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}]$ ۳) $a_n=[\frac{\sin(n)}{2n+1}]$ ۴) $[\frac{2\sin(n)+1}{2n+1}]$

۱۶۰- اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ به ۲ همگرا باشد و دنباله‌ی $b_n=3[\frac{2}{a_n}]-[\frac{a_n}{2}]$ به L همگرا باشد، مقدار L چند مقدار حقیقی می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶۱- اگر دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ در شرایط ${a_n}^2<4$ و ${b_n}^2>4$ صدق کنند و دنباله‌ی $\{c_n\}$ با ضابطه‌ی $c_n=\begin{cases} a_n & \text{فرد } n \\ b_n & \text{زوج } n \end{cases}$ به L همگرا باشد، L چند مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۱۶۲- به ازای $n\geq M$ مقدار جملات دنباله‌ی $\{\frac{n^4}{2n^2+800}\}$ از ۱۰۰ بزرگ‌تر می‌شوند. حداقل مقدار طبیعی M کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۴۰ ۴) ۴۱

۱۶۳- به ازای $n \geq M$ مقدار جملات دنباله‌ی $\{۴n-n^۲\}$ از -۸۹۶ کوچک‌تر می‌شوند. حداقل مقدار طبیعی M کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۱ ۳) ۳۲ ۴) ۳۳

۱۶۴- اگر برای $n \geq M$ نامساوی $a_n > N$ برای دنباله‌ی $a_n = ۲\sqrt{n+۱}$ برقرار باشد، حداقل مقدار طبیعی M کدام است؟

۱) $[\frac{N^۲}{۴}]$ ۲) $[\frac{N^۲}{۴}]-۱$ ۳) $[\frac{N^۲}{۴}]+۱$ ۴) $[\frac{N^۲}{۴}]+۲$

۱۶۵- اگر برای $n \geq M$ نامساوی $a_n > N$ برای دنباله‌ی $a_n = n^۲ + ۴n$ برقرار باشد، حداقل مقدار طبیعی M کدام است؟

۱) $[\sqrt{N+۴}]+۱$ ۲) $[\sqrt{N+۴}]$ ۳) $[\sqrt{N+۴}]-۱$ ۴) $[\sqrt{N+۴}]-۲$

۱۶۶- به ازای مقادیر $n \geq n_۰$، اگر فاصله‌ی نقاط نظیر دنباله‌ی $\{\frac{۴n+۱}{۳n-۲}\}$ از نقطه‌ی همگرایی خود، کم‌تر از ۰/۰۲ باشد. کوچک‌ترین مقدار $n_۰$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۳)

۱) ۶۱ ۲) ۶۲ ۳) ۶۳ ۴) ۶۴

۱۶۷- کوچک‌ترین بازه‌ای که برای $n > ۳۱$ جملات دنباله‌ی $\{\frac{n-۲}{۴n}\}$ در آن قرار دارد، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۶)

۱) $[\frac{۱}{۴}, \frac{۱۷}{۶۴}]$ ۲) $[\frac{۱۵}{۶۴}, \frac{۱۷}{۶۴}]$ ۳) $[\frac{۱۵}{۶۴}, \frac{۱}{۴})$ ۴) $(\frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۴})$

۱۶۸- به ازای $n \geq n_۰$ فاصله‌ی اعداد دنباله‌ی $\{\frac{۲^n-۱}{۳+۲^{n-۱}}\}$ از عدد همگرایی خود، یعنی ۲، کوچک‌تر از $\frac{۱}{۴۰}$ است. کوچک‌ترین مقدار $n_۰$ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۸۸)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۶۹- به ازای مقادیر $n \geq n_۰$، اگر فاصله‌ی نقاط نظیر دنباله‌ی $\{\frac{۲n-۵}{۳n+۲}\}$ از نقطه‌ی همگرایی خود کم‌تر از ۰/۰۱ باشد، کوچک‌ترین مقدار $n_۰$ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۹۳)

۱) ۲۰۹ ۲) ۲۱۰ ۳) ۲۱۱ ۴) ۲۱۲