فصل اول: دنباله‌ها

۱–۳ : روش‌های محاسبه‌ی حد دنباله‌ها

قانون پرتوان و نرخ رشد دنباله‌ها

وقتی $n\to\infty$، مقدار n مرتباً بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود، بنابراین جملاتی مانند $n^۳$ و $n^۴$ از جملاتی مانند n و $n^۲$ بسیار بزرگ‌تر می‌شوند. طوری که می‌توانیم از جملات با درجات کم‌تر در مقابل جمله‌ای که بزرگ‌ترین درجه را دارد صرف‌نظر کنیم. به این صرف‌نظر کردن اصطلاحاً «قانون پرتوان» می‌گوییم. معمولاً از قانون پرتوان در کسرهایی استفاده می‌کنیم که حالت $\frac{\infty}{\infty}$ در آن‌ها ایجاد می‌شود.

مثـال: طبق قانون پرتوان در محاسبه‌ی حد هر عبارت می‌توانیم از بزرگ‌ترین درجه‌ی n در صورت و مخرج کسر استفاده کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^۲-۳}{۲n-۴n^۲}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^۲}{-۴n^۲}=-\frac{۱}{۴}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۵n+۴}{n^۲-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۵n}{n^۲}=\lim_{n\to\infty}\frac{۵}{n}=۰$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^۳-۲n^۲}{n^۲+۱}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^۳}{n^۲}=\lim_{n\to\infty}n=+\infty \Rightarrow$$ دنباله واگرا است.

تذکـر: همان‌طور که در محاسبه‌ی حد دوم می‌بینید، با توان‌های کسری مانند $\frac{۱}{۲}$ در $\sqrt{n}$ نیز می‌توانیم مانند توان‌های طبیعی رفتار کنیم.

تست ۱: دنباله‌ی $a_n=\frac{(n^۲+۲n-۱)^۳-(n^۲-n-۱)^۳}{(۲n+۱)(n+۱)^۴}$ **به کدام عدد همگرا است؟** (آزاد – ۸۷)

۱) صفر
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۹}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: اگر در هر پرانتز صورت و مخرج بزرگ‌ترین توان n را درنظر بگیرید، به دست می‌آورید:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^۲)^۳-(n^۲)^۳}{۲n\times n^۴}=۰$$

که پاسخی نادرست است. زیرا جملات $n^۶$ در صورت کسر ساده می‌شوند و در واقع بزرگ‌ترین درجه‌ی n در صورت، ۵ است.

برای حل درست از اتحاد $a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲)$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^۲+۲n-۱-n^۲+n+۱)((n^۲+۲n-۱)^۲+(n^۲+۲n-۱)(n^۲-n-۱)+(n^۲-n-۱)^۲)}{(۲n+۱)(n+۱)^۴}$$

$$\xrightarrow{\text{پرتوان}}\lim_{n\to\infty}\frac{۳n\times(n^۴+n^۴+n^۴)}{۲n\times n^۴}=\lim_{n\to\infty}\frac{۳\times۳n^۵}{۲n^۵}=\frac{۹}{۲}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

نکته‌ی دیگری که هم‌چون قانون پرتوان در محاسبه‌ی حد دنباله‌ها می‌تواند به ما کمک کند، مقایسه‌ی نرخ رشد دنباله‌ها است. مثلاً دو دنباله با جمله‌های عمومی $a_n=۲^n$ و $b_n=n^۳$ را در نظر بگیرید. اگر جمله‌های این دو دنباله را یادداشت کنیم متوجه می‌شویم که برای $۲\le n\le ۹$ داریم: $a_n<b_n$، ولی برای $n\ge ۱۰$ داریم: $b_n<a_n$ و هرچقدر n بزرگ‌تر می‌شود جملات a_n بسیار سریع‌تر از جملات b_n بزرگ

می‌شوند. در این حالت اصطلاحاً می‌گوییم نرخ رشد a_n از b_n بیش‌تر است. در فهرست زیر نرخ رشد چند دنباله را مشاهده می‌کنید:

$$\log n < \cdots < \sqrt[3]{n} < \sqrt{n} < n < n^2 < n^3 < \cdots < 2^n < 3^n < \cdots < n! < n^n$$

طبق این فهرست، نرخ رشد $\{\log n\}$ از نرخ رشد دنباله‌هایی مانند $\{n^k\}$ که $k>0$ عددی ثابت است کم‌تر می‌باشد. همچنین نرخ رشد دنباله‌های نمایی مانند $\{a^n\}$ (با شرط $a>1$) از دو دنباله‌ی قبل بیش‌تر است. دقت کنید که معنی نامساوی در فهرست بالا، همان معنی معمول نامساوی نیست، مثلاً معنی $n^2 < n!$ این نیست که برای هر $n\in\mathbb{N}$، این نامساوی برقرار است. بلکه به این معنی است که از جایی به بعد، $n!$ از n^2 بزرگ‌تر است.

نکته: در محاسبه‌ی حدود دنباله‌ها، همانند قانون پرتوان، می‌توانیم از جملات با نرخ رشد کم‌تر در مقابل جملات با نرخ رشد بیش‌تر صرف‌نظر کنیم.

تست ۲: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1}+3^{n-1}}{4^{n-1}+3n+1}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: در مخرج کسر از $3n+1$ در مقابل 4^{n-1} می‌توانیم صرف‌نظر کنیم. ولی دقت کنید که در صورت کسر به اشتباه از 2^{2n+1} در مقابل 3^{n-1} صرف‌نظر نکنید. زیرا: $2^{2n+1}=4^n\times 2$ و باید از 3^{n-1} در مقابل 4^n صرف‌نظر کنیم. پس داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1}+3^{n-1}}{4^{n-1}+3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1}}{4^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n\times 2}{4^n\times 4^{-1}} = 2\times 4 = 8$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

استفاده از هم‌ارزی در دنباله‌های مثلثاتی

بعضی از هم‌ارزی‌های مثلثاتی را که در محاسبه‌ی حد دنباله‌ها مفیدند، مرور می‌کنیم:

$$\sin u \sim u \quad , \quad \cos u \sim 1-\frac{u^2}{2} \quad , \quad \tan u \sim u \quad , \quad \sin^{-1} u \sim u \quad , \quad \tan^{-1} u \sim u$$

همه‌ی موارد فوق در حالتی برقرارند که $u\to 0$.

تذکر برای استفاده از هم‌ارزی‌های بالا باید عبارتی مانند u بیابیم که وقتی $n\to\infty$، داشته باشیم $u\to 0$.

مثال: برای محاسبه‌ی حد دنباله‌ی $\{5n\sin^{-1}(\frac{3}{n})\}$، به این دقت کنید که وقتی $n\to\infty$ داریم $\frac{3}{n}\to 0$. بنابراین $\sin^{-1}(\frac{3}{n})\sim\frac{3}{n}$، در نتیجه:

$$\lim_{n\to\infty} 5n\sin^{-1}(\frac{3}{n}) = \lim_{n\to\infty} 5n\times\frac{3}{n} = 15$$

تست ۳: حد دنباله‌ی $\{n^2(\cos\frac{1}{n}-\cos\frac{3}{n})\}$ وقتی $n\to\infty$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) $\frac{9}{2}$

پاسخ: وقتی $n\to\infty$ داریم $\frac{1}{n}\to 0$. حال از هم‌ارزی $\cos u\sim 1-\frac{u^2}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty} n^2(\cos\frac{1}{n}-\cos\frac{3}{n}) = \lim_{n\to\infty} n^2(1-\frac{1}{2}(\frac{1}{n})^2-1+\frac{1}{2}(\frac{3}{n})^2) = \lim_{n\to\infty} n^2(\frac{1}{2}\times\frac{9-1}{n^2}) = 4$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

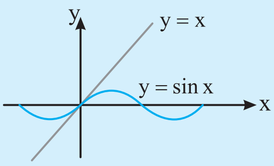
تست ۴: **کدام گزینه درباره‌ی دنباله‌ی** $\{[4n\sin(\frac{2}{n})]\}$ **درست است؟**

۱) همگرا به ۷ **۲)** همگرا به ۸ **۳)** همگرا به ۴ **۴)** واگرا

پاسخ: بـا اسـتفاده از هم‌ارزی داریم $\lim\limits_{n\to\infty} 4n\sin\frac{2}{n}=8$. ولی با توجه به وجود جـزء صحیح باید تعیین کنیم که $4n\sin\frac{2}{n}\to 8^+$ یا $4n\sin\frac{2}{n}\to 8^-$. می‌دانیم وقتی $n\to\infty$، مقدار $\frac{2}{n}$ از سمت مقادیر مثبت به صفر نزدیک می‌شود، پس: $\frac{2}{n}\to 0^+$

با توجه به نمودارهای $y=x$ و $y=\sin x$ به ازای $x>0$ داریم: $\sin x<x$، بنابراین وقتی $\frac{2}{n}\to 0^+$ داریم:

$$\sin\frac{2}{n}<\frac{2}{n}\Rightarrow 4n\sin\frac{2}{n}<4n\times\frac{2}{n}\Rightarrow 4n\sin\frac{2}{n}<8$$



پس عبارت $4n\sin\frac{2}{n}$ از سمت مقادیر کوچک‌تر از ۸ به آن نزدیک می‌شود، بنابراین:

$$4n\sin\frac{2}{n}\to 8^-\Rightarrow \lim_{n\to\infty}[4n\sin\frac{2}{n}]=[8^-]=7$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

محاسبه‌ی حد در دنباله‌های رادیکالی

در محاســبه‌ی حد دنباله‌های رادیکالی، معمولاً اســتفاده از اتحاد مزدوج یا اتحاد چاق و لاغر مفید اسـت.

مثـال: برای محاسبه‌ی حد دنباله‌ی $\{\sqrt[3]{n^2+2n+4}-\sqrt[3]{n^2+1}\}$ از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}(\underbrace{\sqrt[3]{n^2+2n+4}}_{A}-\underbrace{\sqrt[3]{n^2+1}}_{B})=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^2+2n+4}-\sqrt[3]{n^2+1})\frac{A^2+AB+B^2}{A^2+AB+B^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+4)-(n^2+1)}{A^2+AB+B^2}$$

حـال دقـت کنید که طبق قانون پرتـوان در عبارات A^2، AB و B^2 با بزرگ‌ترین درجه‌ی n، یعنـی $\sqrt[3]{n^4}$ کار داریم، بنابراین محاسبه‌ی حد بالا به محاسبه‌ی حد زیر منجر می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt[3]{n^4}+\sqrt[3]{n^4}+\sqrt[3]{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n\sqrt[3]{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3\sqrt[3]{n}}=0$$

نکتــه: در دنباله‌هایی که جمله‌ی عمومی آن‌ها شامل عبارت رادیکالی است، استفاده از هم‌ارزی زیر معمولاً مفید است:

$$\sqrt[m]{an^m+bn^{m-1}+\dots}\sim\sqrt[m]{a}(n+\frac{b}{ma})$$

مثـال: برای محاسبه‌ی حد دنباله‌ی $\{\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-2})\}$ می‌توانیم به‌صورت زیر عمل کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-2})=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-2n})$$

حال با استفاده از هم‌ارزی گفته شده برای دو عبارت زیر رادیکال، حد بالا برابر است با:

$$\lim_{n\to\infty}((n+\frac{3}{2})-(n-1))=\frac{5}{2}$$

تست ۵: **دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی** $a_n=\sqrt{n^۲+kn+۱}-\sqrt[۳]{n^۳-۶n+۱}$ **همگرا به ۴ است. مقدار k کدام است؟**

۱) ۴   ۲) ۸   ۳) ۸-   ۴) ۴-

پاسخ: با استفاده از هم‌ارزی بیان شده می‌توان نوشت:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(n+\frac{k}{۲}\right)-\left(n-\frac{۰}{۳}\right)\right)=\frac{k}{۲}=۴\Rightarrow k=۸$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تذکـــر دقت کنید که گاهی استفاده از هم‌ارزی فایده‌ای ندارد و باید مثل روش اول از اتحادها استفاده کنیم.

تست ۶: **حد دنباله‌ی** $\{n(\sqrt{n^۲+۲n-۱}-\sqrt{n^۲+۲n-۴})\}$ **کدام است؟**

۱) صفر   ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۵}{۲}$

پاسخ: اگر از هم‌ارزی استفاده کنید به پاسخ اشتباه صفر می‌رسید. برای حل درست از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n((n^۲+۲n-۱)-(n^۲+۲n-۴))}{\sqrt{n^۲+۲n-۱}+\sqrt{n^۲+۲n-۴}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۳n}{\sqrt{n^۲+۲n-۱}+\sqrt{n^۲+۲n-۴}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۳n}{n+n}=\frac{۳}{۲}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

استفاده از قضیه‌ی فشردگی

قضیـه اگر برای هر عدد طبیعی $n\geq n_۰$ داشــته باشــیم $c_n\leq a_n\leq b_n$ و دنباله‌های $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ هر دو همگرا به L باشند، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} a_n=L$.

این ویژگی را قضیه‌ی فشردگی در مورد دنباله‌ها می‌نامیم.

تست ۷: **هرگاه دنباله‌ی** $\{a_n\}$ **در شرایط** $۳+a_n\leq\frac{a_n+۴+۵n}{n+۱}$ **و** $a_n>\frac{۲n}{n+۵}$ **صدق کند، حاصل** $\lim_{n\to\infty} a_n$ **چقدر است؟**

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) واگراست.

پاسخ: نامساوی اول را به‌صورت زیر می‌توانیم ساده کنیم:

$$(۳+a_n)(n+۱)\leq a_n+۴+۵n\Rightarrow ۳n+۳+na_n+a_n\leq a_n+۴+۵n\Rightarrow na_n\leq ۲n+۱\Rightarrow a_n\leq\frac{۲n+۱}{n}$$

به این ترتیب $\frac{۲n}{n+۵}<a_n\leq\frac{۲n+۱}{n}$. با توجه به آن‌که $\lim_{n\to\infty}\frac{۲n+۱}{n}=۲$ و $\lim_{n\to\infty}\frac{۲n}{n+۵}=۲$، پس طبق قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=۲$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تست ۸: اگر x عددی حقیقی و گنگ باشد، حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[x]+[2x]+\cdots+[nx]}{n^2}$ کدام است؟

۱) x ۲) $\dfrac{x}{2}$ ۳) $\dfrac{x-1}{2}$ ۴) وجود ندارد.

پاسخ: می‌دانیم برای هر $m, x\in\mathbb{R}$ داریم: $mx-1<[mx]\le mx$، به این ترتیب با جای‌گذاری مقادیر ۱، ۲، ... و n به جای m داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x-1<[x]\le x \\ 2x-1<[2x]\le 2x \\ \vdots \\ nx-1<[nx]\le nx \end{array}\right\}\Rightarrow \underbrace{\frac{x(1+2+\cdots+n)}{n^2}-\frac{n}{n^2}}_{b_n}<\underbrace{\frac{[x]+[2x]+\cdots+[nx]}{n^2}}_{a_n}\le\underbrace{\frac{x(1+2+\cdots+n)}{n^2}}_{c_n}$$

می‌دانیم $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$، پس $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\dfrac{x}{2}$، در نتیجه طبق قضیه‌ی فشردگی $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\dfrac{x}{2}$.
بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

حالت خاصی از قضیه‌ی فشردگی به صورت نکته‌ی زیر قابل بیان است.

نکته: اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ کران‌دار باشد و دنباله‌ی $\{b_n\}$ همگرا به صفر باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $\{a_nb_n\}$ نیز همگرا به صفر خواهد بود.

تست ۹: دنباله‌ی $\left\{\dfrac{3}{\sqrt{n^2-4n+1}}\sin\dfrac{n\pi}{3}\right\}$ به کدام عدد همگرا است؟

۱) π ۲) $\dfrac{\pi}{3}$ ۳) $\dfrac{\pi}{6}$ ۴) صفر

پاسخ: با استفاده از هم‌ارزی در محاسبه‌ی حد، به جای $\sqrt{n^2-4n+1}$ می‌توانیم $n-2$ قرار دهیم. بنابراین باید حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n-2}\sin\dfrac{n\pi}{3}$ را به‌دست آوریم. حال دقت کنید که چون $\left\{\dfrac{3}{n-2}\right\}$ همگرا به صفر و $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{3}\right\}$ کران‌دار است، پس طبق نکته‌ی قبل حاصل‌ضرب آن‌ها همگرا به صفر است. بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

مثال: می‌خواهیم $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[\frac{n}{2}]}{n}$ را به کمک قضیه‌ی فشردگی به دست آوریم:

$$\frac{n}{2}-1<\left[\frac{n}{2}\right]\le\frac{n}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}-\frac{1}{n}<\frac{[\frac{n}{2}]}{n}\le\frac{1}{2}$$

دنباله‌های $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ و $\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}\right\}$ هر دو به $L=\dfrac{1}{2}$ همگرا هستند، پس $\left\{\dfrac{[\frac{n}{2}]}{n}\right\}$ نیز به $L=\dfrac{1}{2}$ همگراست. در واقع می‌توان گفت که اگر به جای $[\frac{n}{2}]$، خود $\dfrac{n}{2}$ را قرار دهیم و حد را محاسبه کنیم، مجدداً به همین $L=\dfrac{1}{2}$ خواهیم رسید.

نکته: هرگاه دنباله‌ی $\{a_n\}$ واگرا به $+\infty$ یا $-\infty$ باشد، دنباله‌های $[a_n]$ و a_n هم ارز یک‌دیگر هستند، یعنی: $[a_n]\sim a_n$

تست ۱۰: دنباله‌های $a_n=\frac{[\pi n]+1}{n+1}$ و $b_n=[\frac{\pi n+1}{n+1}]$ به ترتیب به چه اعدادی همگرا هستند؟

۱) ۳ , ۳ ۲) π , ۳ ۳) ۳ , π ۴) π , π

پاسخ: به کمک هم ارزی گفته شده می‌توان گفت:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{[\pi n]+1}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi n+1}{n+1}=\pi$$

در مورد دنباله $\{b_n\}$ نیز داریم:

$$\lim_{n\to+\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}[\frac{\pi n+1}{n+1}]=[\pi]=3$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تذکر گاهی اوقات نکته‌ی فوق قابل استفاده نمی‌باشد. مثلاً در دنباله‌ی $a_n=\frac{2^n}{2^{2[\frac{n}{2}]}}$ داریم:

$$a_n=2^{n-2[\frac{n}{2}]}=2^{2(\frac{n}{2}-[\frac{n}{2}])}\Rightarrow a_n=\begin{cases}2^0 & \text{زوج } n\\ 2^1 & \text{فرد } n\end{cases}\Rightarrow$$ حد دنباله‌ی a_n وجود ندارد.

در صورتی که اگر به اشتباه از نکته‌ی قبل استفاده می‌کردیم دنباله را همگرا به یک در نظر می‌گرفتیم زیرا:

$$a_n=\frac{2^n}{2^{2\times\frac{n}{2}}}=\frac{2^n}{2^n}=1$$

که این روش نادرست است.

همگرایی دنباله‌های خاص

نکته: دنباله‌ی $\{k^n\}$ که در آن k یک عدد ثابت حقیقی است به شرطی همگرا است که $-1<k\leq 1$. به بیان دقیق‌تر:

الف) اگر $-1<k<1$، آن‌گاه: $\lim_{n\to\infty} k^n=0$

ب) اگر $k=1$، دنباله یک دنباله‌ی ثابت است و داریم: $\lim_{n\to\infty} k^n=1$

پ) اگر $k=-1$، دنباله از دو زیردنباله با مقادیر ۱ و ۱− تشکیل شده است که یک دنباله‌ی واگرا است.

ت) اگر $k>1$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$ ، بنابراین $\{a_n\}$ واگرا است.

ث) اگر $k<-1$، آن‌گاه دنباله از دو زیردنباله تشکیل شده است که یکی به $+\infty$ و دیگری به $-\infty$ واگراست.

تست ۱۱: اگر a عددی حقیقی و دنباله‌ی $a_n=(\frac{a-1}{a+3})^{2n-1}$ یک دنباله‌ی همگرا باشد، کم‌ترین مقدار a کدام است؟

۱) ۳− ۲) ۱− ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

پاسخ: برای آن‌که دنباله‌ی فوق همگرا باشد، باید $-1\leq\frac{a-1}{a+3}\leq 1$، (در این‌جا چون توان $\frac{a-1}{a+3}$ عددی فرد است، حالت $\frac{a-1}{a+3}=-1$ نیز جزء حالت‌های همگرایی است). حال داریم:

$$-1\leq\frac{a-1}{a+3}\leq 1\Rightarrow|\frac{a-1}{a+3}|\leq 1\Rightarrow|a-1|\leq|a+3|\Rightarrow a^2-2a+1\leq a^2+6a+9\Rightarrow 8a\geq -8\Rightarrow a\geq -1$$

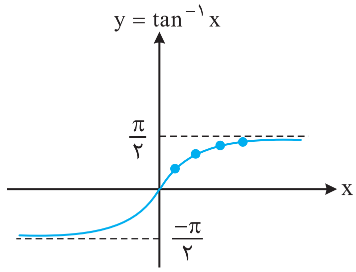
بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

نکته: هر دنباله به شکل $\{\sqrt[n]{a}\}$ که در آن a عددی ثابت است، به عدد ۱ همگراست. همچنین برای دنباله‌ی $\{\sqrt[n]{n}\}$ نیز داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=۱$$

مثال: $\{\sqrt[n]{۱}\}$ ، $\{\sqrt[n]{۲}\}$ و $\{\sqrt[n]{۲/۵}\}$ هر سه به ۱ همگرا هستند.

تذکر در بعضی از دنباله‌های خاص، از روی نمودار تابع متناظر آن‌ها می‌توانید حد دنباله را پیدا کنید. مثلاً نمودار تابع $y=\tan^{-۱}x$ را در نظر بگیرید. با توجه به این نمودار وقتی دنباله‌ی $\{\tan^{-۱}n\}$ را بررسی می‌کنیم، با نقاطی روی این نمودار کار داریم. مطابق شکل با زیاد شدن n، این نقاط به خط $y=\frac{\pi}{۲}$ نزدیک می‌شوند، پس:



$$\lim_{n\to\infty}\tan^{-۱}n=\frac{\pi}{۲}$$

نکته: از روی نمودار توابع متناظر، می‌توانیم حدهای زیر را به دست آوریم:

$$\lim_{n\to\infty}\tan^{-۱}n=\frac{\pi}{۲} \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\cot^{-۱}n=۰$$

$$\lim_{n\to\infty}\log n=+\infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\log(\frac{۱}{n})=-\infty$$

تست ۱۲: دنباله‌ی $\{[\frac{۴}{\pi}\tan^{-۱}n]\}$ **چه وضعیتی دارد؟**

۱) همگرا به ۱ **۲)** همگرا به ۲ **۳)** همگرا به $\frac{۳}{۲}$ **۴)** واگرا

پاسخ: با توجه به نکته‌ی بالا و توضیح قبل از آن، می‌توان نوشت:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۴}{\pi}\tan^{-۱}n=\frac{۴}{\pi}\times\frac{\pi}{۲}=۲$$

ولی با توجه به نمودار $\tan^{-۱}x$، همواره $\tan^{-۱}n<\frac{\pi}{۲}$. در نتیجه $\frac{۴}{\pi}\tan^{-۱}n<۲$ پس مقادیر $\frac{۴}{n}\tan^{-۱}n$ از سمت مقادیر کم‌تر از ۲ به آن نزدیک می‌شوند. در نتیجه $\lim_{n\to\infty}[\frac{۴}{\pi}\tan^{-۱}n]=[۲^-]=۱$. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

مطالعه آزاد

از این هم‌ارزی خاص می‌توانیم وقتی $n\to\infty$ استفاده کنیم:

$$۱^k+۲^k+۳^k+...+n^k\sim\frac{۱}{k+۱}n^{k+۱}+\frac{۱}{۲}n^k$$

مثلاً برای محاسبه‌ی $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{۱}+\sqrt{۲}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n+۳}}$ ، با توجه به این هم‌ارزی داریم:

$$۱^{\frac{۱}{۲}}+۲^{\frac{۱}{۲}}+.....+n^{\frac{۱}{۲}}\sim\frac{۱}{\frac{۳}{۲}}n^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{۱}+\sqrt{۲}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n+۳}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{۲}{۳}n\sqrt{n}}{n\sqrt{n+۱}}=\frac{۲}{۳}$$

البته نیازی به جمله‌ی دوم هم‌ارزی در این مثال نمی‌باشد.