

## فصل چهارم: شکل‌های فضایی

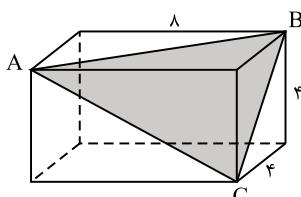
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

### خط و صفحه در فضا

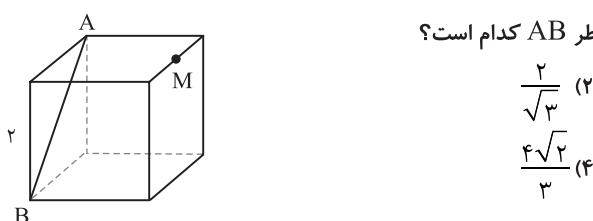
- ۱ وضعیت یک خط و یک صفحه نسبت به یکدیگر، در صورتی که فقط یک نقطه‌ی اشتراک داشته باشند، الزاماً کدام یک از موارد زیر است؟
- (۱) موازی (۲) متعامد (۳) منطبق (۴) متقاطع
- ۲ در چه صورت دو صفحه بر یکدیگر عمود می‌شوند؟
- (۱) یک خط از یکی از دو صفحه بر خط مشترک دو صفحه (فصل مشترک) عمود باشد.
  - (۲) از هر صفحه حداقل یک خط بر خط مشترک دو صفحه (فصل مشترک) عمود باشد.
  - (۳) خطی در یکی از دو صفحه وجود داشته باشد که بر صفحه‌ی دیگر عمود باشد.
  - (۴) خطی از صفحه‌ی اول و خطی از صفحه‌ی دوم وجود داشته باشند که بر یکدیگر عمود باشند.

### مکعب و مکعب مستطیل

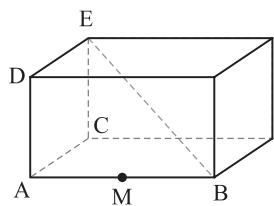
- ۳ تعداد رئوس، یال‌ها و قطرهای مکعب مستطیل به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟
- (۱) ۶، ۱۲، ۸ (۲) ۴، ۱۲، ۶ (۳) ۸، ۶، ۴ (۴) ۴، ۱۲، ۸
- ۴ طول قطر مکعب مستطیلی که طول یال‌های آن متناسب با اعداد ۱، ۲ و ۳ است، برابر با  $\sqrt{56}$  می‌باشد. طول بزرگ‌ترین یال این مکعب مستطیل چقدر است؟
- (۱) ۱۲ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۴
- ۵ طول یال‌های مکعب مستطیلی با اعداد ۲، ۳ و ۳ متناسب است. اگر حجم مکعب مستطیل ۴۸۶ باشد، طول قطر مکعب مستطیل کدام است؟
- (۱)  $2\sqrt{22}$  (۲)  $3\sqrt{22}$  (۳)  $4\sqrt{22}$  (۴)  $22\sqrt{2}$
- ۶ حجم یک مکعب مستطیل که مساحت سه وجه متمایز آن ۱۲، ۸ و ۶ سانتی‌متر مربع می‌باشد، بر حسب سانتی‌متر مکعب چقدر است؟
- (۱) ۵۷۶ (۲) ۲۴ (۳) ۹ (۴) ۱۰۴
- ۷ اگر مجموع طول، عرض و ارتفاع یک مکعب مستطیل  $2\sqrt{6}$  و مساحت وجه جانی آن ۴، ۶ و ۱۲ باشد، قطر این مکعب مستطیل چه اندازه‌ای دارد؟
- (۱)  $2\sqrt{2}$  (۲)  $2\sqrt{5}$  (۳)  $3\sqrt{2}$  (۴)  $2\sqrt{6}$
- ۸ طول یال‌های مکعب مستطیلی به ترتیب ۱،  $\sqrt{3}$  و ۲ واحد است. زاویه‌ی قطر مکعب مستطیل با یال بزرگ‌تر چند درجه است؟
- (۱)  $90^\circ$  (۲)  $45^\circ$  (۳)  $60^\circ$  (۴)  $30^\circ$
- ۹ اندازه‌ی یال‌های متمایز مکعب مستطیل زیر برابر با ۴، ۴ و ۸ واحد است. مساحت مثلث ABC چقدر است؟
- (۱) ۱۲ (۲)  $12\sqrt{2}$  (۳)  $24\sqrt{2}$  (۴)  $24$
- ۱۰ اگر اندازه‌های قطرهای وجههای یک مکعب مستطیل برابر  $\sqrt{73}$ ،  $\sqrt{75}$  و  $4\sqrt{5}$  باشد، حجم آن کدام است؟
- (۱) ۱۰۶ (۲) ۹۶ (۳) ۸۴ (۴) ۷۲



- ۱۱ در مکعب شکل مقابل نقطه‌ی M وسط یال قرار دارد. فاصله‌ی M از قطر AB کدام است؟

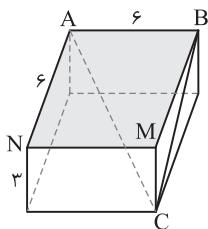


- (۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  (۳)  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$  (۴)  $\frac{3}{\sqrt{2}}$



- ۱۲ در مکعب مستطیل شکل مقابل M وسط یال AB است. اگر  $AD=4$ ,  $AB=5$  و  $AC=3$  باشد، آن گاه فاصله‌ی M از قطر BE کدام است؟

$\frac{2\sqrt{5}}{4}$ (۲)	$\frac{5\sqrt{2}}{4}$ (۱)
$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۴)	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۳)



- ۱۳ در مکعب مستطیل مقابل قاعده‌ی ABMN مریب به ضلع ۶ و ارتفاع MC برابر ۳ می‌باشد. فاصله‌ی B از قطر AC چقدر است؟

$\sqrt{5}$ (۱)
۴ (۲)
$3\sqrt{5}$ (۳)
$2\sqrt{5}$ (۴)

- ۱۴ بیشترین فاصله بین رأس‌های یک مکعب مستطیل ۳ واحد و یکی از وجه‌های این مکعب مستطیل، مربعی به ضلع ۲ واحد است. سطح کل این مکعب مستطیل چند واحد مرربع است؟

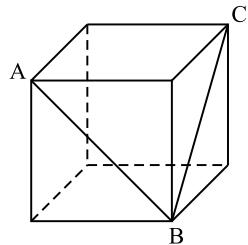
۲۲ (۴)	۲۰ (۳)	۱۸ (۲)	۱۶ (۱)
--------	--------	--------	--------

- ۱۵ اگر طول یال مکعبی را  $k$  برابر کنیم، طول قطرش ..... .

۱) $k^3$ برابر می‌شود.	۲) $k^2$ برابر می‌شود.
۳) تغییر نمی‌کند.	۴) برابر نمی‌شود.

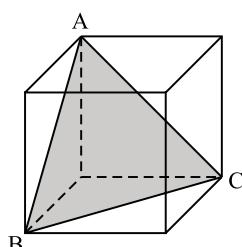
- ۱۶ قطر مکعبی برابر با  $\sqrt{12}$  است. حجم آن چقدر است؟

۸ (۴)	$4\sqrt{2}$ (۳)	۴ (۲)	۲ (۱)
-------	-----------------	-------	-------



- ۱۷ شکل مقابل یک مکعب است. زاویه‌ی ABC چند درجه است؟

۳۰ (۱)
۴۵ (۲)
۶۰ (۳)
۹۰ (۴)

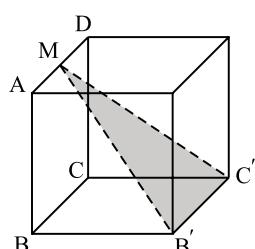


- ۱۸ در مکعب مقابل، اگر مساحت مثلث ABC برابر با  $2\sqrt{3}$  باشد، آن گاه مساحت کل مکعب کدام است؟

۱۸ (۱)
۹ (۲)
۲۴ (۳)
۱۲ (۴)

- ۱۹ در یک مکعب فاصله‌ی دو یال موازی غیر واقع بر یک وجه برابر با ۸ واحد است. حجم این مکعب کدام می‌باشد؟

$64\sqrt{2}$ (۴)	۶۴ (۳)	$128\sqrt{2}$ (۲)	۱۲۸ (۱)
------------------	--------	-------------------	---------



- ۲۰ شکل رویه‌رو یک مکعب به یال  $2\sqrt{2}$  است و نقطه‌ی M وسط یال AD است. مساحت مثلث MB'C' کدام است؟

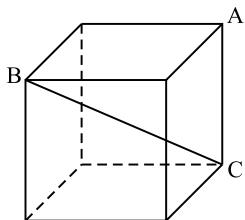
$4\sqrt{2}$ (۱)
۴ (۲)
$8\sqrt{2}$ (۳)
۸ (۴)

-۲۱ طول یال مکعبی برابر با  $\sqrt{3}$  است. طول تصویر این یال روی قطر مکعب چقدر است؟

۱) ۴

 $\sqrt{3}$  ۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$  ۲)

۲) ۱



-۲۲ در مکعب شکل زیر، فاصله‌ی رأس A از قطر BC برابر با  $\sqrt{6}$  است. مساحت کل این مکعب چقدر است؟

۲۷) ۱

۳۶) ۲

۵۴) ۳

۸۱) ۴

-۲۳ سطح کل مکعبی به طول یال  $k$  با سطح کل مکعب مستطیلی با یال‌هایی به طول  $a$ ,  $2a$  و  $2a$  برابر است. قطر مکعب چند برابر قطر مکعب مستطیل است؟

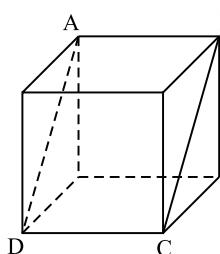
 $\frac{\sqrt{3}}{6}$  ۴) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$  ۱)

-۲۴ سطح مقطع یک مکعب به طول یال ۶ واحد با صفحه‌ی گذرنده بر انتهای سه یال آن که در یک رأس مشترک باشند، چند واحد مربع است؟

۲۴) ۴

۱۸ $\sqrt{3}$  ۲)۱۲ $\sqrt{3}$  ۳)

۱۸) ۱



-۲۵ در مکعب شکل مقابل، مساحت چهارضلعی ABCD برابر با  $3\sqrt{2}$  سانتی‌متر مربع است. سطح کل مکعب چند سانتی‌متر مربع است؟

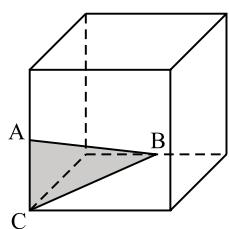
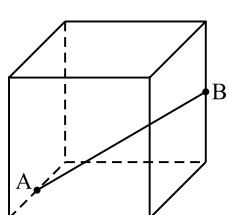
۱۲) ۱

۱۶) ۲

۱۸) ۳

۳۴) ۴

-۲۶ در شکل زیر، نقاط A و B اوساط دو یال مکعب هستند. اگر مساحت مثلث ABC برابر با  $\sqrt{5}$  باشد، طول قطر مکعب کدام است؟

۲۷ $\sqrt{2}$  ۱)۲۷ $\sqrt{3}$  ۲)۲۷ $\sqrt{6}$  ۳)۴ $\sqrt{3}$  ۴)

-۲۷ در مکعب شکل زیر، نقاط A و B اوساط یال‌های مکعب هستند. اگر طول AB برابر با  $2\sqrt{6}$  باشد، حجم مکعب چقدر است؟

۸) ۱

۱۶) ۲

۳۲) ۳

۶۴) ۴

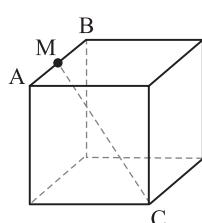
-۲۸ مکعبی با سطح کل ۲۴ مفروض است. اگر O مرکز مکعب باشد، چند نقطه روی مکعب وجود دارد که از O به فاصله‌ی  $\sqrt{3}$  باشد؟

۱) ۱۶

۸) ۳

۶) ۲

۴) ۱



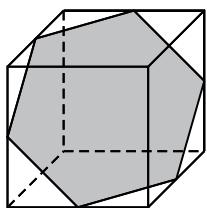
-۲۹ در مکعب شکل مقابل به ضلع واحد، M وسط یال AB است. طول پاره‌خط MC کدام است؟

۱/۷۵) ۱)

۱/۲۵) ۲)

۱/۵) ۳)

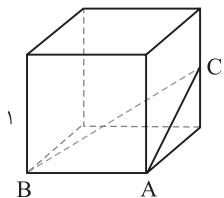
۱/۶) ۴)



- ۳۰ طول یال های مکعب رو به رو ۱ واحد است. نقاط مشخص شده در شکل، وسط یال ها می باشند. مساحت شش ضلعی منتظم حاصل چقدر است؟

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (2) \quad \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (1)$$

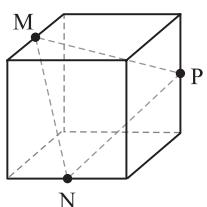
$$\frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (4) \quad \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad (3)$$



- ۳۱ در مکعب شکل مقابل C وسط یال قرار دارد فاصله ای از BC کدام است؟

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \quad (2) \quad \frac{3}{4} \quad (1)$$

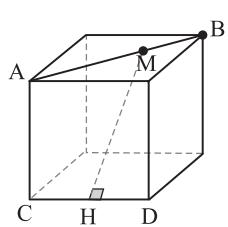
$$\frac{\sqrt{5}}{4} \quad (4) \quad \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (3)$$



- ۳۲ در مکعب شکل مقابل نقاط M، N و P وسطهای سه یال دو به دو متناظر هستند. اگر مساحت مثلث MNP برابر  $3\sqrt{3}$  باشد، آن گاه اندازهی قطر مکعب کدام است؟

$$\frac{2\sqrt{3}}{2} \quad (2) \quad 6 \quad (1)$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{4} \quad (4) \quad 2\sqrt{6} \quad (3)$$



- ۳۳ در شکل مقابل طول یال مکعب برابر ۳ و  $\frac{AM}{MB}=2$  می باشد. اندازهی عمود MH برابر کدام است؟

$$\sqrt{11} \quad (2) \quad \sqrt{10} \quad (1)$$

$$\sqrt{13} \quad (4) \quad 2\sqrt{3} \quad (3)$$

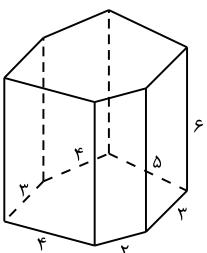
### منشور و استوانه

- ۳۴ سطح کل منشوری که قاعده اش لوزی به اقطار ۶ و ۸ واحد و ارتفاعش مساوی محیط قاعدهی آن باشد، کدام است؟

$$448 \quad (4) \quad 228 \quad (3) \quad 224 \quad (2) \quad 428 \quad (1)$$

- ۳۵ مساحت جانبی منشور منتظمی که قاعده ای آن شش ضلعی منتظم بوده و بزرگ ترین قطر قاعده ای آن ۱۸ و یال جانبی منشور ۱۰ باشد، برابر با کدام گزینه است؟

$$560 \quad (4) \quad 520 \quad (3) \quad 500 \quad (2) \quad 540 \quad (1)$$



- ۳۶ مساحت جانبی منشور قائم رو به رو چقدر است؟

$$72 \quad (1)$$

$$96 \quad (2)$$

$$126 \quad (3)$$

$$154 \quad (4)$$

- ۳۷ حجم یک منشور قائم که قاعده ای آن مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع ۲ و ارتفاع آن ۵ می باشد، چقدر است؟

$$5\sqrt{2} \quad (4) \quad 10\sqrt{2} \quad (3) \quad 5\sqrt{3} \quad (2) \quad 10\sqrt{3} \quad (1)$$

- ۳۸ قاعده ای یک منشور قائم، شش ضلعی منتظمی به ضلع  $2\sqrt{2}$  و ارتفاع آن برابر با ربع محیط قاعده است. حجم این منشور چقدر است؟

$$48\sqrt{6} \quad (4) \quad 36\sqrt{6} \quad (3) \quad 36\sqrt{2} \quad (2) \quad 24\sqrt{3} \quad (1)$$

## فصل چهارم: شکل‌های فضایی

پاسخ‌های تشریحی

۱- گزینه‌ی ۴ (A) یک خط و یک صفحه را که فقط یک نقطه‌ی اشتراک داشته باشند، متقاطع گوییم.

۲- گزینه‌ی ۳ (A) دو صفحه هنگامی بر یکدیگر عمود می‌شوند که خطی در یکی از دو صفحه وجود داشته باشد که بر صفحه‌ی دیگر عمود باشد.

۳- گزینه‌ی ۴ (A) یک مکعب مستطیل ۸ رأس، ۱۲ یال و ۶ قطر دارد.

۴- گزینه‌ی ۲ (B) یال‌های مکعب مستطیل را  $x$ ,  $2x$  و  $3x$  در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که طول قطر یک مکعب مستطیل برابر با جذر مجموع مربعات طول یال‌های آن است، بنابراین داریم:

$$\sqrt{x^2 + (2x)^2 + (3x)^2} = \sqrt{x^2 + 4x^2 + 9x^2} = x\sqrt{14} \Rightarrow \sqrt{56} = x\sqrt{14} \Rightarrow 2\sqrt{14} = x\sqrt{14} \Rightarrow x = 2$$

$$3x = 3(2) = 6 = \text{طول بزرگ‌ترین یال}$$

۵- گزینه‌ی ۲ (B) طول یال‌های مکعب مستطیل را  $2a$ ,  $3a$  و  $3a$  فرض می‌کنیم. با توجه به رابطه‌ی حجم مکعب مستطیل داریم:

$$V = 2a \times 3a \times 3a = 18a^3 \Rightarrow 18a^3 = 486 \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow 2a = 6, 3a = 9, 3a = 9$$

می‌دانیم که طول قطر یک مکعب مستطیل برابر با جذر مجموع مربعات طول یال‌های آن است، لذا خواهیم داشت:

۶- گزینه‌ی ۲ (C) طول یال‌های مکعب مستطیل را  $x$ ,  $y$  و  $z$  در نظر می‌گیریم. طبق فرض مسأله داریم:

$$xy = 12, yz = 8, zx = 6$$

حال اگر سه رابطه‌ی فوق را در هم ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$x^2 y^2 z^2 = 12 \times 8 \times 6 = 576 \Rightarrow xyz = 24 \Rightarrow V = xyz = 24$$

۷- گزینه‌ی ۱ (B) فرض کنیم طول، عرض و ارتفاع مکعب مستطیل  $a$ ,  $b$  و  $c$  باشند، داریم:

$$ab = 12$$

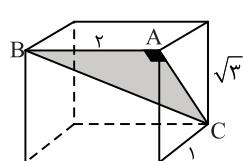
$$ac = 6, a+b+c = 6\sqrt{2}$$

$$bc = 4$$

حال این تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (6\sqrt{2})^2 \Rightarrow (6\sqrt{2})^2 = (قطر)^2 = 28 \Rightarrow 2\sqrt{7}$$

۸- گزینه‌ی ۲ (B) در شکل زیر مثلث  $ABC$  قائم‌الزاویه است، زیرا یال  $AB$  بر وجه شامل  $AC$  عمود می‌باشد. این مثلث متساوی‌الساقین نیز هست، زیرا:



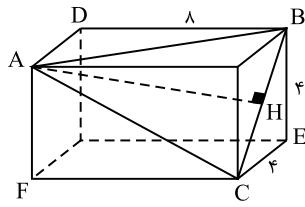
$$\begin{cases} AC = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \\ AB = 2 \end{cases} \Rightarrow AB = AC$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\hat{A}BC = \frac{180^\circ - \hat{B}AC}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$$

©

**۹- گزینه‌ی ۳** ارتفاع  $AH$  وارد بر قاعده‌ی  $BC$  را رسم می‌کنیم. کافی است طول  $AH$  و  $BC$  را محاسبه کنیم تا مساحت مثلث  $ABC$  به دست آید. طبق قضیه‌ی فیثاغورس داریم:



$$\Delta ABD: AB^2 = AD^2 + BD^2 \Rightarrow AB^2 = 4^2 + 8^2 = 80 \Rightarrow AB = \sqrt{80}$$

$$\Delta ACF: AC^2 = AF^2 + FC^2 \Rightarrow AC^2 = 4^2 + 8^2 = 80 \Rightarrow AC = \sqrt{80}$$

$$\Delta BCE: BC^2 = BE^2 + CE^2 \Rightarrow BC^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \Rightarrow BC = 4\sqrt{2}$$

با توجه به این که مثلث  $ABC$  متساوی‌الساقین است، طول  $BH$  نصف طول  $BC$  می‌باشد (ارتفاع و میانه بر هم منطبق‌اند):

$$BH = \frac{BC}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

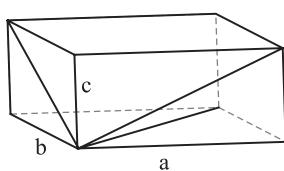
حال با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث  $AHB$  خواهیم داشت:

$$\Delta AHB: AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow 80 = AH^2 + 80 \Rightarrow AH^2 = 72 \Rightarrow AH = 6\sqrt{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AH \cdot BC}{2} = \frac{6\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}}{2} = 24$$

©

**۱۰- گزینه‌ی ۳** اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  ابعاد این مکعب مستطیل باشند، آن‌گاه داریم:



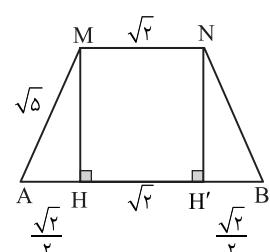
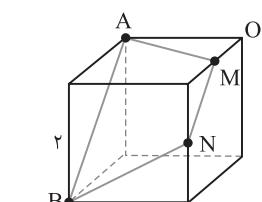
$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + c^2} &= \sqrt{73} \\ \sqrt{b^2 + c^2} &= 5 \quad \Rightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 73 \\ b^2 + c^2 = 25 \end{cases} \xrightarrow{+} 2(a^2 + b^2 + c^2) = 178 \\ \sqrt{a^2 + b^2} &= 4\sqrt{5} \quad \begin{cases} a^2 + c^2 = 73 \\ b^2 + c^2 = 25 \\ a^2 + b^2 = 80 \end{cases} \\ \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 &= 89 \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

**۱۱- گزینه‌ی ۳** اگر مطابق شکل  $N$  وسط یال دیگر باشد، آن‌گاه قطر وجه  $MN$  موازی قطر وجه  $AB$  و نصف

آن خواهد بود زیرا  $MN$  وسط دو ضلع مربع را به هم وصل کرده است.  $AB = 2\sqrt{2}$  و  $MN = \sqrt{2}$

در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین  $ABNM$  باید ارتفاع ذوزنقه را به دست آوریم.

$$\Delta AMO: AM^2 = OA^2 + OM^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \Rightarrow AM = \sqrt{5}$$



$$\Delta AMH: MH^2 = AM^2 - AH^2 = (\sqrt{5})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow MH = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

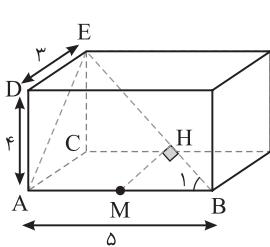
©

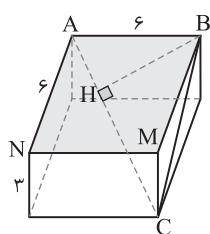
©

**۱۲- گزینه‌ی ۱** اگر قطر  $AE$  را رسم کنیم، آن‌گاه طبق رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی  $AED$ ،  $AE = 5$ ،  $AED$  خواهد بود. بنابراین مثلث  $ABE$  قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است، پس  $\hat{B}_1 = 45^\circ$

و می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه‌ی  $BMH$  ضلع مقابل به زاویه‌ی  $45^\circ$  وتر است پس:

$$\Delta MBH: \hat{B}_1 = 45 \Rightarrow MH = \frac{\sqrt{2}}{2} MB = \frac{\sqrt{2}}{2} (\frac{5}{2}) = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$



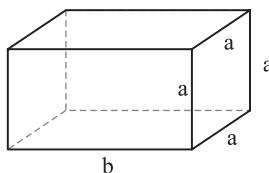


**۱۳- گزینه‌ی ۴** عمود BH فاصله‌ی B از قطر AC است. قطر BC را رسم می‌کنیم. در این صورت مثلث ABC قائم‌الزاویه است. داریم:

$$AC = \sqrt{6^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 36 + 9} = 9$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه ABC طبق روابط طولی داریم:

$$\begin{aligned} BH \times AC &= AB \times BC \\ BC = \sqrt{6^2 + 3^2} &= \sqrt{45} \Rightarrow BH \times 9 = 6 \times \sqrt{45} \Rightarrow BH = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$



**۱۴- گزینه‌ی ۱** بیشترین فاصله بین رأس‌ها برابر قطر مکعب مستطیل است.

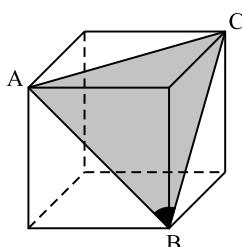
$$\sqrt{a^2 + a^2 + b^2} = 3 \Rightarrow \sqrt{2a^2 + b^2} = 3 \Rightarrow 2a^2 + b^2 = 9 \xrightarrow{a=2} b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$$

مساحت کل  $= 4ab + 2a^2 = 4(1)(2) + 8 = 16$

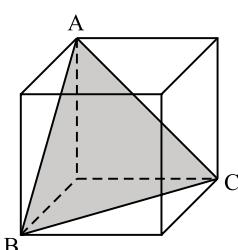
**۱۵- گزینه‌ی ۳** می‌دانیم که طول قطر مکعبی با طول یال  $a$  برابر با  $a\sqrt{3}$  است. لذا طول قطر مکعبی با طول یال  $ka$  برابر با  $ka\sqrt{3}$  خواهد بود. یعنی طول قطر مکعب،  $k$  برابر می‌شود.

**۱۶- گزینه‌ی ۴** می‌دانیم که طول قطر مکعبی با طول یال  $a$  برابر با  $a\sqrt{3}$  است. بنابراین داریم:

$$a\sqrt{3} = \sqrt{12} \Rightarrow a\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 2 \xrightarrow[V_{\text{مکعب}} = a^3]{V_{\text{مکعب}} = 2^3 = 8} V = 8$$



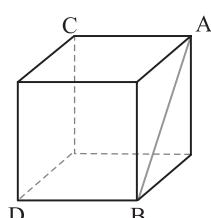
**۱۷- گزینه‌ی ۳** ضلع AC از مثلث ABC را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که در هر مکعب، طول قطر هر یک از وجوده  $\sqrt{2}$  برابر طول یال مکعب است، لذا طول پاره‌خط‌های AB، AC و BC با یکدیگر برابر و همگی  $\sqrt{2}$  برابر طول یال مکعب هستند، بنابراین مثلث ABC متساوی‌الاضلاع بوده و در نتیجه هر یک از زاویه‌ها از جمله  $A\hat{B}C$  برابر با  $60^\circ$  است.



**۱۸- گزینه‌ی ۳** اضلاع AB، AC و BC قطرهای وجوده مکعب هستند، لذا اگر یال مکعب برابر با a باشد، طول اضلاع مثلث ABC برابر با  $a\sqrt{2}$  است، بنابراین مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و می‌دانیم که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع x برابر با  $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$  است، بنابراین داریم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (a\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2a^2 \Rightarrow a^2 = 4$$

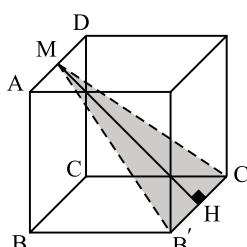
$$S_{\text{مکعب}} = 6a^2 = 6 \times 4 = 24$$



**۱۹- گزینه‌ی ۲** در شکل مقابل AB فاصله‌ی دو یال موازی AC و BD است که در یک وجه قرار ندارند. اگر طول یال این مکعب را a فرض کنیم، داریم:

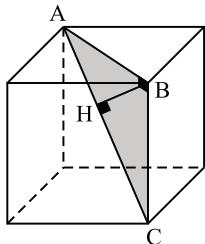
$$AB = a\sqrt{2} = a\sqrt{2}$$

$$a^3 = (a\sqrt{2})^3 = 128\sqrt{2}$$



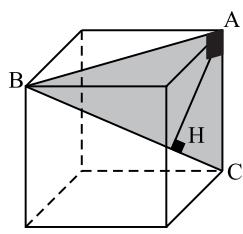
**۲۰- گزینه‌ی ۱** ارتفاع MH را رسم می‌کنیم. با توجه به این که M وسط AD است، H نیز وسط B'C' خواهد بود و در واقع مثلث MB'C' متساوی‌الساقین می‌باشد. از طرف دیگر واضح است که طول MH با طول AB' برابر است، زیرا چهارضلعی AMHB' مستطیل می‌باشد، بنابراین داریم:

$$S_{\triangle MB'C'} = \frac{MH \cdot B'C'}{2} \xrightarrow{MH = \sqrt{1} \times AB' = 4} S_{\triangle MB'C'} = \frac{4 \times 2\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$



**۲۱ - گزینه‌ی ۴** تصویر ضلع BC روی قطر AC، پاره خط CH می‌باشد و باید طول این پاره خط را به دست آوریم. به همین منظور از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC استفاده می‌کنیم: (یال BC بر وجه بالای خود عمود است و در نتیجه مثلث ABC قائم‌الزاویه می‌باشد.)

$$\Delta \quad \text{ABC}:BC^2 = CH \cdot AC \quad \frac{AC = \sqrt{3} \times BC = 3}{(\sqrt{3})^2 = CH \times 3} \Rightarrow CH = 1$$



**۲۲ - گزینه‌ی ۳** با توجه به این که یال AC بر صفحه‌ی بالای خود عمود است، می‌توان دریافت که مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه می‌باشد. لذا برای یافتن طول یال مکعب کافی است مساحت مثلث ABC را به دو طریق مختلف محاسبه نموده و مساوی هم قرار دهیم:

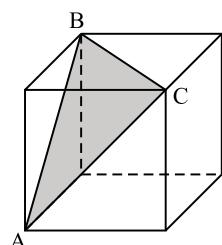
$$\begin{aligned} S_{\Delta} &= \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{AH \cdot BC}{2} \quad \frac{AB = a\sqrt{2}}{BC = a\sqrt{3}} \quad \frac{a\sqrt{2} \times a}{2} = \frac{\sqrt{6} \times a\sqrt{3}}{2} \\ &\Rightarrow a^2\sqrt{2} = 3a\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 3a \Rightarrow a = 3 \Rightarrow S_{\text{مکعب}} = 6a^2 = 6(9) = 54 \end{aligned}$$

**۲۳ - گزینه‌ی ۳** می‌دانیم که سطح مکعبی با طول یال k برابر با  $6k^2$  است، همچنین می‌دانیم که سطح کل مکعب مستطیلی با طول یال‌های a، b و c برابر با  $(ab+ac+bc)^2$  است. بنابراین داریم:

$$S_{\text{مکعب}} = S_{\text{کل مکعب}} \Rightarrow 6k^2 = 2(2a^2 + 2a^2 + 4a^2) \Rightarrow 3k^2 = 8a^2 \Rightarrow a = \frac{k\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

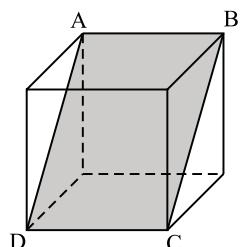
حال با توجه به این که طول قطر مکعب به طول یال k برابر  $k\sqrt{3}$  و طول قطر مکعب مستطیل با طول یال‌های a، b و c برابر است. می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{aligned} \text{طول قطر مکعب} &= k\sqrt{3} \\ \text{طول قطر مکعب مستطیل} &= \sqrt{a^2 + (2a)^2 + (2a)^2} = 3a = \frac{3k\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\text{طول قطر مکعب}}{\text{طول قطر مکعب مستطیل}} = \frac{k\sqrt{3}}{\frac{3k\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



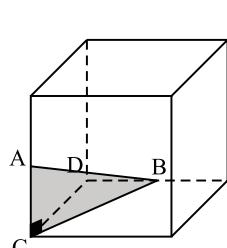
**۲۴ - گزینه‌ی ۳** باید مساحت مثلث ABC را به دست آوریم، با توجه به این که هر سه قطر وجه مکعب هستند می‌توان نتیجه گرفت که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. بنابراین اگر طول یال مکعب را برابر با a فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} BC &= AB = AC = a\sqrt{2} \\ S_{\Delta} &= \frac{\sqrt{3}}{4} (a\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 18\sqrt{3} \end{aligned}$$



**۲۵ - گزینه‌ی ۳** چهارضلعی ABCD، مستطیلی است که عرض آن برابر با یال مکعب و طول آن برابر با قطر وجه مکعب می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= AB \cdot BC \quad \frac{BC = \sqrt{2}AB}{S_{ABCD} = \sqrt{2}AB^2 = 3\sqrt{2}} \Rightarrow AB^2 = 3 \\ S_{\text{کل مکعب}} &= 6AB^2 = 6 \times 3 = 18 \end{aligned}$$

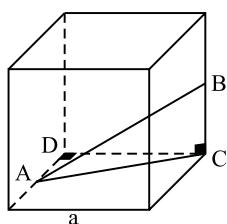


**۲۶ - گزینه‌ی ۳** با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه BCD داریم (طول یال مکعب = a):

$$\Delta \quad BCD:BC^2 = BD^2 + CD^2 \Rightarrow BC^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow BC = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

با توجه به این که AC بر صفحه‌ی پایینی خود عمود است، می‌توان دریافت که مثلث ABC نیز قائم‌الزاویه است، لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} S_{\Delta} &= \frac{AC \cdot BC}{2} \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{\frac{a}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2}a}{2} \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{8}a^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{2} \\ S_{\text{کل مکعب}} &= a\sqrt{3} = 2\sqrt{2}(\sqrt{3}) = 2\sqrt{6} \end{aligned}$$



۴-گزینه‌ی ۲۷ با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث‌های  $ABC$  و  $ACD$  داریم (طول یال مکعب  $a$ ):

$$\triangle ACD: AC^2 = AD^2 + CD^2 \Rightarrow AC^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$\triangle ABC: AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

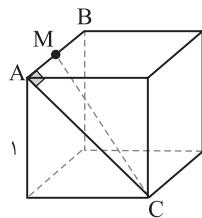
$$AB = 2\sqrt{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{2}a = 2\sqrt{6} \Rightarrow a = 4 \Rightarrow V_{\text{مکعب}} = a^3 = 64$$

۵-گزینه‌ی ۲۸ اگر  $a$  طول یال مکعب باشد، آن‌گاه  $6a^2$  برابر سطح کل آن خواهد بود.

$$6a^2 = 24 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$\text{قطر مکعب} = a\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

بنابراین رئوس مکعب از مرکز  $O$  به فاصله‌ی  $\sqrt{3}$  هستند و مکعب دارای هشت رأس می‌باشد و پس هشت نقطه مکعب از مرکز  $O$  به فاصله‌ی  $\sqrt{3}$  هستند.

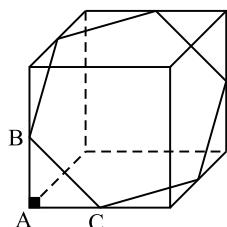


۶-گزینه‌ی ۲۹ قطر  $AC$  را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه  $AMC$  داریم:

$$AC = \sqrt{2}a = \sqrt{2}, \quad AM = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\triangle AMC: MC^2 = AC^2 + AM^2 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow MC = \frac{3}{2} = 1.5$$

۷-گزینه‌ی ۳۰ کافی است طول ضلع شش ضلعی منتظم را بیابیم تا مساحت آن به دست آید. طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث  $ABC$  داریم:



$$\triangle ABC: AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = BC^2 \Rightarrow BC = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

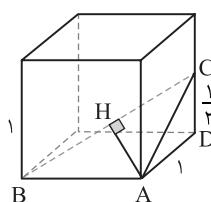
می‌دانیم که مساحت شش ضلعی منتظمی با طول ضلع  $a$  برابر با  $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$  است، بنابراین داریم:

$$S_{\text{شش ضلعی}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

۸-گزینه‌ی ۳۱ از  $A$  عمود  $BC$  را بر  $BC$  وارد می‌کنیم، داریم:

$$\triangle ADC: AC^2 = AD^2 + DC^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\triangle ABC: BC^2 = AC^2 + AB^2 = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4} \Rightarrow BC = \frac{3}{2}$$



چون مثلث  $ABC$  در رأس  $A$  قائم‌الزاویه است داریم:

$$\triangle ABC: AC^2 = CH \times BC \Rightarrow \frac{5}{4} = CH \times \frac{3}{2} \Rightarrow CH = \frac{5}{6}$$

حال با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث  $ACH$  داریم:

$$\triangle ACH: AH^2 = AC^2 - CH^2 = \frac{5}{4} - \frac{25}{36} = \frac{45-25}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{5}}{3}$$