فصل پنجم
«مشتق توابع»

۵-۴: مشتق توابع مرکب و تابع وارون

با استفاده از قضیه‌هایی که در بخش قبل خوانده‌ایم، می‌توانیم مشتق برخی از توابع پیچیده را به‌دست آوریم. ولی آن قضایا برای محاسبه‌ی مشتق تابعی چون $y=\sqrt{1+x^2}$ کمکی نمی‌کنند. چون این تابع را می‌توانیم به‌صورت ترکیبی از توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=1+x^2$ بیان کنیم، پس باید قاعده‌ای برای مشتق توابع مرکب پیدا کنیم.

قضیه:

> **قاعده‌ی زنجیره‌ای**
> **فرض کنید f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند و $F=fog$ ترکیب آن دو باشد. در این صورت داریم:**
> $F'(x)=f'(g(x))\times g'(x)$

◄ **مثال:** فرض کنید $f(x)=\frac{1}{x}$، $g(x)=x^2-4$ و $h(x)=(fog)(x)$. مشتق‌های دو تابع f و g عبارت اند از: $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$ و $g'(x)=2x$. بنابراین:

$$h'(x)=f'(g(x))\times g'(x)=\frac{-1}{(g(x))^2}\times 2x=\frac{-2x}{(x^2-4)^2}$$

حال با استفاده از قضیه‌ی تقسیم مشتق‌ها، مشتق تابع $h(x)=\frac{1}{x^2-4}$ را بیابید و با رابطه‌ی بالا آن را مقایسه کنید.

➢ **تذکّر:** قاعده‌ی زنجیره‌ای را با نماد دیگر مشتق، می‌توان به این شکل جالب نیز بیان کرد:

$$\frac{dF}{dx}=\frac{dF}{dg}\times\frac{dg}{dx}$$

قاعده‌ی زنجیره‌ای، مهم‌ترین بحث محاسبه‌ی مشتق توابع است، که با حل مثال‌های متنوع می‌توانید بر آن تسلط پیدا کنید. در مثال‌های اولیه سعی کنید توابع را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید و با جای‌گذاری در قاعده، مشتق تابع را حساب کنید. در این صورت مهارت‌تان افزایش می‌یابد و می‌توانید در مثال‌های بعدی مستقیماً عمل کنید.

مسأله‌ی (۱): مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=(7x-3)^{10}$ **ب)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$ **پ)** $f(x)=\sin x^2$

ت) $f(x)=\cos(\sin x)$ **ث)** $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$

حل: الف) اگر $g(x)=x^{10}$ و $h(x)=7x-3$، داریم: $(goh)(x)=(7x-3)^{10}$، حال با توجه به این‌که $h'(x)=7$ و $g'(x)=10x^9$ داریم:

$$(g(h(x))'=g'(h(x))h'(x)=10(7x-3)^9\times 7=70(7x-3)^9$$

ب) اگر $g(x)=x^{\frac{-1}{3}}$ و $h(x)=x^2+x+1$، داریم: $(goh)(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$، حال با توجه به این‌که $h'(x)=2x+1$ و $g'(x)=-\frac{1}{3}x^{\frac{-4}{3}}$ داریم:

$$(g(h(x)))'=g'(h(x))h'(x)=-\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{-4}{3}}\times(2x+1)$$

پ) اگر $g(x)=\sin x$ و $h(x)=x^2$، داریم: $(goh)(x)=\sin x^2$، حال با توجه به این‌که $h'(x)=2x$ و $g'(x)=\cos x$ داریم:

$$(g(h(x)))'=g'(h(x))h'(x)=\cos x^2\times 2x=2x\cos x^2$$

ت) اگر $g(x)=\cos x$ و $h(x)=\sin x$، داریم: $(goh)(x)=\cos(\sin x)$، حال با توجه به این‌که $h'(x)=\cos x$ و $g'(x)=-\sin x$ داریم:

$$(g(h(x)))'=g'(h(x))h'(x)=-\sin(\sin x)\cos x$$

ث) اگر $g(x)=\sqrt{x}$ و $h(x)=\sin x^{۲}$، داریم: $(goh)(x)=\sqrt{\sin x^{۲}}$ و می‌توانیم بنویسیم:

$$(g(h(x)))'=g'(h(x))h'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{\sin x^{۲}}}\times h'(x)$$

اما تابع $h(x)$ خود یک تابع مرکب است و مشتق آن طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای مانند قسمت (پ) به‌دست می‌آید:

$$h'(x)=۲x\cos x^{۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x\cos x^{۲}}{۲\sqrt{\sin x^{۲}}}=\frac{x\cos x^{۲}}{\sqrt{\sin x^{۲}}}$$

تذکّر مهم: با توجه به مسأله‌ی قبل نتیجه می‌گیریم که در زنجیره‌ای از توابع، از بیرونی‌ترین تابع شروع می‌کنیم و با مشتق‌گیری مرحله به مرحله به درونی‌ترین تابع می‌رسیم. در مسأله‌ی بعد چند نمونه‌ی پیچیده‌تر را بررسی می‌کنیم.

مسأله‌ی (۲): مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sin(\cos(\tan x))$ **ب)** $f(x)=\sin(x\cos x)$ **پ)** $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$

ت) $f(x)=\sin^{۷}(x^{۲}+۱)^{۳}$ **ث)** $f(x)=\frac{۱}{x-\sqrt{x^{۲}-۱}}$ **ج)** $f(x)=\frac{x}{(۱-x)^{۲}(۱+x)^{۲}}$

حل: الف) از بیرونی‌ترین تابع (یعنی تابع $\sin$) شروع کرده و با مشتق‌گیری مرحله به مرحله (از چپ به راست) به درونی‌ترین تابع (یعنی $\tan$) می‌رسیم بنابراین:

$$f'(x)=\sin'(\cos(\tan x)).\cos'(\tan x).(\tan x)'=\cos(\cos(\tan x))\times(-\sin(\tan x))\times(۱+\tan^{۲}x)$$

ب) طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای با مشتق‌گیری توابع از چپ به راست، می‌توان نوشت:

$$f'(x)=\sin'(x\cos x)\times(x\cos x)'=\cos(x\cos x)\times(\cos x+x(-\sin x))=(\cos x-x\sin x)\cos(x\cos x)$$

پ) ابتدا، تابع مورد نظر را به‌صورت $f(x)=(x+\sqrt{x})^{\frac{۱}{۲}}$ می‌نویسیم، حال طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای با حرکت از چپ به راست، می‌توان نوشت:

$$f'(x)=\frac{۱}{۲}(x+\sqrt{x})^{\frac{۱}{۲}-۱}\times(۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})=\frac{۱}{۲}(x+\sqrt{x})^{\frac{-۱}{۲}}(۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})=(۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})\frac{۱}{۲\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

ت) ابتدا تابع را به‌صورت $(\sin(x^{۲}+۱)^{۳})^{۷}$ نوشته، سپس با حرکت از چپ به راست در این تابع و مشتق‌گیری از توابع، می‌توان نوشت:

$$f'(x)=۷\sin^{۶}(x^{۲}+۱)^{۳}(\sin(x^{۲}+۱)^{۳})'=۷\sin^{۶}(x^{۲}+۱)^{۳}\cos(x^{۲}+۱)^{۳}\times((x^{۲}+۱)^{۳})'$$
$$=۷\sin^{۶}(x^{۲}+۱)^{۳}\times\cos(x^{۲}+۱)^{۳}\times۳(x^{۲}+۱)^{۲}\times۲x=۴۲\sin^{۶}(x^{۲}+۱)^{۳}\times\cos(x^{۲}+۱)^{۳}\times x(x^{۲}+۱)^{۲}$$

ث) اگر کسر ضابطه‌ی تابع را گویا کنید، راه کوتاه‌تر می‌شود:

$$f(x)=\frac{۱}{x-\sqrt{x^{۲}-۱}}\times\frac{x+\sqrt{x^{۲}-۱}}{x+\sqrt{x^{۲}-۱}}=x+\sqrt{x^{۲}-۱}\Rightarrow f'(x)=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x^{۲}-۱}}\times۲x=۱+\frac{x}{\sqrt{x^{۲}-۱}}$$

ج) با توجه به آن‌که $۴x=(۱+x)^{۲}-(۱-x)^{۲}$، داریم:

$$f(x)=\frac{۱}{۴}(\frac{(x+۱)^{۲}-(x-۱)^{۲}}{(x+۱)^{۲}(x-۱)^{۲}})=\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{(x-۱)^{۲}}-\frac{۱}{(x+۱)^{۲}})$$

با توجه به این که مشتق $g(x)=x^{-۲}$، برابر است با $g'(x)=-۲x^{-۳}$، نتیجه می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{۱}{۴}(\frac{-۲}{(x-۱)^{۳}}-\frac{-۲}{(x+۱)^{۳}})=-\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{(x-۱)^{۳}}-\frac{۱}{(x+۱)^{۳}})=-\frac{۱}{۲}\times\frac{۲(۳x^{۲}+۱)}{(x-۱)^{۳}(x+۱)^{۳}}=\frac{-۳x^{۲}-۱}{(x-۱)^{۳}(x+۱)^{۳}}$$

همان‌طور که در دو مسأله‌ی قبل ملاحظه کردید، قاعده‌ی زنجیره‌ای قاعده‌ای نکته‌دار و پیچیده نیست. نامی هم که بر آن گذاشته‌اند، کاملاً برازنده‌ی مفهوم آن است. همواره در امتحانات نهایی و سؤال‌هایی کنکور، سؤال‌هایی از قاعده‌ی زنجیره‌ای وجود دارد. مهارت در استفاده این قاعده نیز فقط با تمرین به‌دست می‌آید.

تست (۱): مقدار مشتق $f(x)=\sin^{۳}\sqrt{x}$ **در نقطه‌ی** $x=\frac{\pi^{۲}}{۹}$ **چقدر است؟ (سراسری – ۸۳)**

۱) $\frac{۹}{۱۶\pi}$ ۲) $\frac{۹}{۸\pi}$ ۳) $\frac{۲۷}{۱۶\pi}$ ۴) $\frac{۲۷}{۸\pi}$

حل: با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$f'(x)=۳\sin^{۲}(\sqrt{x})\cos(\sqrt{x})\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow f'(\frac{\pi^{۲}}{۹})=۳\times\sin^{۲}(\frac{\pi}{۳})\cos(\frac{\pi}{۳})\times\frac{۱}{۲\times\frac{\pi}{۳}}=\frac{۲۷}{۱۶\pi}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تست (۲): اگر $f(x)=\sin x$**، مقدار مشتق** $\frac{fof}{f^{۲}}$ **در** $x=\frac{\pi}{۲}$ **کدام است؟ (سراسری – ۸۲)**

۱) صفر ۲) $\sin ۱$ ۳) $\cos ۱$ ۴) ۱

حل: ابتدا طبق قاعده‌ی مشتق حاصل تقسیم می‌توان نوشت:

$$(\frac{fof}{f^{۲}})'=\frac{(fof)'.f^{۲}-(f^{۲})'.fof}{f^{۴}}$$

حال طبق قاعده‌ی مشتق تابع مرکب تساوی فوق را ساده‌تر می‌کنیم یعنی:

$$(\frac{fof}{f^{۲}})'=\frac{f'(f(x))\times f'(x)\times f^{۲}(x)-۲f(x)\times f'(x)\times f(f(x))}{f^{۴}(x)}\Rightarrow(\frac{fof}{f^{۲}})'(\frac{\pi}{۲})=۰$$

توجه کنید که $f'(x)=\cos x$، در نتیجه $f'(\frac{\pi}{۲})=۰$، بنابراین صورت کسر فوق برابر صفر است. پس گزینه‌ی (۱) درست است.

مسأله‌ی (۳): فرض کنید f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد. مشتق هریک از توابع زیر را بر حسب f' بیان کنید.

الف) $y=f(۴x)$ **ب)** $y=f(۲-۳f(۴-۵x))$

حل: الف) اگر $y=f(۴x)$، داریم:

$$y'=f'(۴x)\times(۴x)'=f'(۴x)\times۴=۴f'(۴x)$$

ب) اگر $g(x)=۲-۳f(۴-۵x)$، داریم:

$$g'(x)=-۳f'(۴-۵x)\times(۴-۵x)'=-۳f'(۴-۵x)(-۵)=۱۵f'(۴-۵x)$$
$$y=(fog)(x)\Rightarrow y'=f'(g(x))g'(x)=۱۵f'(۲-۳f(۴-۵x))f'(۴-۵x)$$

تست (۳): اگر $f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$ **و** $g(x)=f(\frac{۱}{x})$**، آن‌گاه مقدار** $g'(\frac{۳}{۴})$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۱۶}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱۵}{۱۶}$ ۳) $-\frac{۱۵}{۱۶}$ ۴) $-\frac{۱۶}{۱۵}$

حل: چون $g(x)=f(\frac{۱}{x})$، با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$g'(x)=f'(\frac{۱}{x})\times(\frac{۱}{x})'=f'(\frac{۱}{x})\times\frac{-۱}{x^{۲}}\Rightarrow g'(\frac{۳}{۴})=f'(\frac{۴}{۳})\times(-(\frac{۴}{۳})^{۲})$$

از طرفی از $f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$ داریم $f'(\frac{۴}{۳})=\frac{۳}{۵}$، بنابراین: $g'(\frac{۳}{۴})=\frac{۳}{۵}\times\frac{-۱۶}{۹}=\frac{-۱۶}{۱۵}$، پس گزینه‌ی (۴) درست است.

مسأله‌ی (۴): اگر مشتق $f(\sin x)$ **برابر** $\frac{\sin ۲x}{۱+\sin^{۲}x}$ **باشد، مشتق** $f(\tan x)$ **را به‌دست آورید.**

حل: می‌دانیم مشتق تابع $f(\sin x)$ برابر است با: $f'(\sin x)\times\cos x$، بنابراین طبق فرض مسأله می‌توان نوشت:

$$\left(f(\sin x)\right)'=f'(\sin x)\times\cos x=\frac{\sin ۲x}{۱+\sin^{۲}x}=\frac{۲\sin x\cos x}{۱+\sin^{۲}x}\xrightarrow{\div\cos x}f'(\sin x)=\frac{۲\sin x}{۱+\sin^{۲}x}$$

اگر قرار دهیم $t=\sin x$، ضابطه‌ی تابع f' را به‌دست می‌آوریم:

$$t=\sin x\Rightarrow f'(t)=\frac{۲t}{۱+t^{۲}}\Rightarrow f'(\tan x)=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲}x}$$

حالا برای محاسبه‌ی مشتق تابع $f(\tan x)$، داریم:

$$(f(\tan x))'=f'(\tan x)(۱+\tan^{۲}x)=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲}x}(۱+\tan^{۲}x)=۲\tan x$$

مسأله‌ی (۵): اگر توابع f و g مشتق‌پذیر باشند و $x+f(2x+2)+f(3x+3)=2g(x^3)+g(x^7)$ و $g'(-1)=2$، مقدار $f'(0)$ را بیابید.

حل: با مشتق‌گیری از طرفین رابطه‌ی داده شده می‌توان نوشت:

$$1+2f'(2x+2)+3f'(3x+3)=2\times 3x^2g'(x^3)+7x^6g'(x^7)$$

حال در رابطه‌ی فوق به جای x، عدد -1 را قرار می‌دهیم، در این‌صورت خواهیم داشت:

$$1+2f'(0)+3f'(0)=6g'(-1)+7g'(-1)\Rightarrow 1+5f'(0)=13g'(-1)\xrightarrow{g'(-1)=2}f'(0)=5$$

تست (۴): اگر f تابعی چندجمله‌ای باشد بطوری‌که $(fof')(x)=x^{12}-3x^7+x-1$، در این‌صورت تابع f درجه‌ی چند است؟

۱) ۶   ۲) ۴   ۳) ۳   ۴) ۱۱

حل: چون تابع f چندجمله‌ای است، درجه‌ی آن را برابر n می‌گیریم. در این‌صورت درجه‌ی f' برابر $n-1$ است، در نتیجه درجه‌ی تابع fof' برابر $n(n-1)$ است. با توجه به آن‌که عبارت $x^{12}-3x^7+x-1$ درجه‌ی ۱۲ است، باید طرفین تساوی هم‌درجه باشند، بنابراین:

$$n(n-1)=12\Rightarrow n=4\ ,\ n=-3 \text{ غ ق ق}$$

پس گزینه‌ی (۲) درست است.

مسأله‌ی (۶): مشتق تابع $f(x)=\dfrac{2\sin x+3}{3\sin x+2}$ را به‌دست آورید.

حل: اگر $g(x)=\dfrac{2x+3}{3x+2}$، $g(x)$ یک تابع هموگرافیک است و داریم:

$$g'(x)=\frac{2\times 2-3\times 3}{(3x+2)^2}=-\frac{5}{(3x+2)^2}\xrightarrow{f(x)=g(\sin x)}f'(x)=g'(\sin x)\cos x=\frac{-5\cos x}{(3\sin x+2)^2}$$

برای مطالعه‌ی بیش‌تر

چگونه می‌توان قضیه‌ی مشتق‌پذیری ترکیب دو تابع را اثبات کرد؟ شاید توضیح زیر اثباتی برای آن باشد:

ابتدا فرمول $(gof)'(a)$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(gof)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

حال به این دقت کنید که وقتی $x\to a$، چون f در a پیوسته است، داریم: $f(x)\to f(a)$. پس اگر قرار دهیم $b=f(a)$ و $f(x)=t$ می‌توانیم حد بالا را به صورت زیر بنویسیم:

$$(gof)'(a)=\lim_{t\to b}\frac{g(t)-g(b)}{t-b}\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=g'(b)\times f'(a)$$

پس حد بالا وجود دارد، بنابراین gof در $x=a$ مشتق‌پذیر است.

این روش اثبات با آن که ظاهراً درست به نظر می‌آید، نادرست است. زیرا وقتی $f(x)-f(a)$ را در مخرج کسر وارد می‌کنیم، خود به خود فرض کرده‌ایم که یک همسایگی $f(a)$ وجود دارد که در آن همسایگی، مقدار این تفاضل همواره غیرصفر است. حال آن که چنین فرضی در صورت قضیه وجود ندارد. به هر حال اثبات بالا هرچند در حالت کلی نادرست است، اما آن را می‌توان برای بسیاری از توابع به کار برد و تا حدی قلب خود را از درست بودن قضیه مطمئن ساخت! اثبات دقیق این قضیه در هر یک از کتب مرجع ریاضیات دوره‌ی دانشگاهی وجود دارد و می‌توانید برای مطالعه به آن‌ها مراجعه کنید.

عامل صفرکننده

عامل صفرکننده، یکی از نکات مهم در محاسبه‌ی مشتق توابع در نقاطی خاص است که مخصوصاً در کنکورهای سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. به مسأله‌ی بعد توجه کنید:

مسأله‌ی (۷): الف) اگر $f(x)=\dfrac{(x-2)\sqrt[5]{21x-10}}{(x+1)^3}$، مقدار $f'(2)$ را بیابید.

ب) اگر $f(x)=\sin x\cos x$، مقدار $f'(\pi)$ را بیابید.

حل: الف) محاسبه‌ی مشتق $f(x)$ در نقطه‌ی $x=2$ از راه تعریف آن، بسیار ساده‌تر از محاسبه‌ی تابع مشتق f است. داریم:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{(x-2)\sqrt[5]{21x-10}}{(x+1)^3}-0}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[5]{21x-10}}{(x+1)^3}=\frac{2}{27}$$

ب) چون $\sin\pi = 0$، پس $f(\pi) = 0$. اگر بخواهیم از تعریف مشتق $f(x)$ استفاده کنیم، می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$f'(\pi) = \lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x\cos x - 0}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}\times\lim_{x\to\pi}\cos x$$

چون $\sin\pi = 0$، مقدار حد اول همان مشتق $\sin x$ در نقطه‌ی $x=\pi$ است، زیرا:

$$\frac{d}{dx}(\sin x)|_{x=\pi} = \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x - \sin\pi}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi} \Rightarrow \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi} = \cos\pi = -1$$

بنابراین: $f'(\pi) = (-1)\times\lim_{x\to\pi}\cos x = (-1)\times(-1) = 1$

در مسأله‌ی قبل، در هر دو قسمت مشتق تابع را در نقطه‌ای می‌خواستیم به‌دست آوریم که آن نقطه ریشه‌ی یکی از اجزای تابع بود، یعنی تابع از ضرب چند تابع دیگر تشکیل می‌شد که یکی از آن‌ها به ازای آن نقطه صفر می‌شد. به چنین عاملی اصطلاحاً «عامل صفرکننده» می‌گویند.

نکته:

عامل صفرکننده
فرض کنید می‌خواهیم مشتق $f(x) = g(x)h(x)$ را در نقطه‌ی $x=a$ بیابیم و می‌دانیم $x=a$ ریشه‌ی $g(x)$ است. در این صورت اگر g در $x=a$ مشتق‌پذیر و h در این نقطه پیوسته باشد، داریم: $f'(a) = g'(a)h(a)$
به بیان دیگر: برای محاسبه‌ی مشتق تابع در نقطه‌ای که ریشه‌ی عامل صفرکننده‌ی آن است، کافی است تنها از همان عامل صفرکننده مشتق بگیریم.

اثبات: با توجه به این که $x=a$ ریشه‌ی g است، داریم: $g(a) = 0 \Rightarrow f(a) = g(a)h(a) = 0$

حال با استفاده از تعریف مشتق، مقدار $f'(a)$ را می‌یابیم:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-0}{x-a} \xrightarrow{f(x)=g(x)h(x)} f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{g(x)h(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}\times\lim_{x\to a}h(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} g(a)=0 \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a) \\ x=a \text{ در } h \text{ پیوسته} \Rightarrow \lim_{x\to a}h(x) = h(a)\end{array}\right\} \Rightarrow f'(a) = g'(a)h(a)$$

مسأله‌ی (۸): مشتق هر یک از توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده بیابید.

الف) $x=1 \ ,\ f(x) = \sin(\pi x)\cos^{10}(\frac{\pi}{4}x)$ **ب)** $x=10 \ ,\ f(x) = \sin(\pi x)|x-10|$

پ) $x=0 \ ,\ f(x) = x[x]$

حل: الف) $x=1$ مقدار $\sin(\pi x)$ را صفر می‌کند. پس تنها کافی است از $\sin(\pi x)$ مشتق بگیریم:

$$(\sin\pi x)' = \cos(\pi x)\times\pi \Rightarrow f'(1) = \pi\times\cos(\pi)\times\cos^{10}(\frac{\pi}{4}) = \pi\times(-1)\times(\frac{1}{\sqrt{2}})^{10} = -\frac{\pi}{32}$$

ب) $x=10$ هر دو تابع $\sin(\pi x)$ و $|x-10|$ را صفر می‌کند. ولی $|x-10|$ در $x=10$ مشتق‌پذیر نیست (چرا؟)، و عامل صفرکننده همان $\sin\pi x$ است. پس: $f'(10) = \pi\times\cos(10\pi)\times|10-10| = 0$

پ) عامل صفرکننده x است، ولی چون $y=[x]$ در $x=0$ پیوسته نیست، نمی‌توانیم از نکته‌ی ذکرشده استفاده کنیم. درواقع این تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. زیرا:

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{x[x]-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}[x] = -1 \quad , \quad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x[x]-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}[x] = 0$$

تست (۵): مشتق تابع $y = \sin 2x\tan x + \frac{3x}{x^2-1}$ در $x=0$ کدام است؟ **(آزاد – ۸۳)**

۱) صفر **۲)** 3 **۳)** -1 **۴)** -3

حل: در هر دو عبارت $\sin 2x\tan x$ و $\frac{3x}{x^2-1}$ می‌توانیم از عامل صفرکننده استفاده کنیم:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) = \tan x\sin 2x \Rightarrow f'(0) = (1+\tan^2 0)\sin 0 = 0 \\ g(x) = x\times\frac{3}{x^2-1} \Rightarrow g'(0) = \frac{3}{0-1} = -3\end{array}\right. \Rightarrow y'|_{x=0} = f'(0) + g'(0) = -3$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

مشتق در توابع چند ضابطه‌ای

در بخش (۵-۲) مثال‌هایی مقدماتی از توابع چندضابطه‌ای حل کردیم و مشتق‌پذیری آن‌ها به ویژه در نقاط مرزی را بررسی کردیم. اکنون با توجه به مطالبی که آموخته‌ایم، می‌توانیم چنین مسائلی را بهتر بررسی کنیم.

◄ **مثال:** فرض کنید مشتق تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\geq ۱ \\ ۲x-۱ & x<۱ \end{cases}$ را می‌خواهیم به‌دست آوریم. به جز نقطه‌ی احتمالی $x=۱$ تابع در بقیه‌ی نقاط مشتق‌پذیر است، پس می‌توانیم بنویسیم: $f'(x)=\begin{cases} ۲x & x>۱ \\ ۲ & x<۱ \end{cases}$

می‌بینید که شرط ضابطه‌ی اول، یعنی $x\geq ۱$، به $x>۱$ تغییر کرده است. برای یافتن دقیق‌تر مشتق باید نقطه‌ی $x=۱$ را نیز بررسی کنیم. می‌توانیم از تعریف مشتق، دو حد $f'_{+}(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^{+}}\dfrac{x^{۲}-۱}{x-۱}$ و $f'_{-}(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^{-}}\dfrac{۲x-۱-۱}{x-۱}$ را تشکیل دهیم. ولی راه بهتر استفاده از همان ضابطه‌ی $f'(x)$ است. در واقع چون تابع f در $x=۱$ پیوسته است (چرا؟)، می‌توانیم مقادیر $f'_{+}(۱)$ و $f'_{-}(۱)$ را از همان دو ضابطه‌ی f' به‌دست آوریم، یعنی: $f'_{+}(۱)=۲\times ۱=۲$ و $f'_{-}(۱)=۲$، پس $f'(۱)$ وجود دارد و می‌توانیم ضابطه‌ی $f'(x)$ را به شکل دقیق‌تر $f'(x)=\begin{cases} ۲x & x\geq ۱ \\ ۲ & x\leq ۱ \end{cases}$ بنویسیم.

نکته: **اگر یک تابع چندضابطه‌ای در نقطه‌ی مرزی $x=a$ (نقطه‌ی مرزی بین دو ضابطه) پیوسته باشد، برای محاسبه‌ی مقدار مشتق چپ و راست آن در نقطه‌ی $x=a$ می‌توانیم از مشتق‌های دو ضابطه استفاده کنیم.**

مسأله‌ی (۹): مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} ax+b & x<۰ \\ ۲\sin x+۳\cos x & x\geq ۰ \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد.

حل: ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم. هر دو ضابطه به تنهایی در $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند، پس تنها باید نقطه‌ی مرزی $x=۰$ را بررسی کنیم:

$$\lim_{x\to ۰^{-}} f(x)=\lim_{x\to ۰^{+}} f(x)=f(۰)\Rightarrow a\times ۰+b=۲\sin ۰+۳\cos ۰\Rightarrow b=۳$$

حال مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم. به جز نقطه‌ی احتمالی $x=۰$، در نقاط دیگر تابع مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f'(x)=\begin{cases} a & x<۰ \\ ۲\cos x-۳\sin x & x>۰ \end{cases}$$

برای مشتق‌پذیری تابع در $\mathbb{R}$، باید $f'_{+}(۰)=f'_{-}(۰)$. چون f در $x=۰$ پیوسته است، پس می‌توانیم طبق نکته‌ی قبل از ضابطه‌ها استفاده کنیم:

$$f'_{+}(۰)=۲\cos ۰-۳\sin ۰=۲\quad ,\quad f'_{-}(۰)=a\xrightarrow{f'_{+}(۰)=f'_{-}(۰)}a=۲$$

مسأله‌ی (۱۰): آیا تابع $f(x)=\begin{cases} ۲\sin x-۱ & x>۰ \\ ۲x-۳ & x\leq ۰ \end{cases}$ در $x=۰$ مشتق‌پذیر است؟

حل: خیر! بعضی از دانش‌آموزان به اشتباه به این صورت مسأله را حل می‌کنند. ابتدا از دو ضابطه مشتق می‌گیرند: $f'(x)=\begin{cases} ۲\cos x & x>۰ \\ ۲ & x<۰ \end{cases}$

سپس با استفاده از ضابطه‌ها نتیجه می‌گیرند که $f'_{+}(۰)=۲$، $f'_{-}(۰)=۲$ و می‌گویند f در $x=۰$ مشتق‌پذیر است. در حالی که این تابع در $x=۰$ اصلاً پیوسته نیست که مشتق‌پذیر باشد! علّت اشتباه این دانش‌آموزان این است که به شرط پیوستگی در نکته‌ی قبل دقت نکرده‌اند.

* **مسأله‌ی (۱۱): اگر $f(x)=\begin{cases} x^{۲}\sin\dfrac{۱}{x} & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$، مقادیر $f'(۰)$ و $\lim\limits_{x\to ۰} f'(x)$ را به‌دست آورید.**

حل: با توجه به این که ضابطه‌ی اول در تمام نقاط $\mathbb{R}-\{۰\}$ مشتق‌پذیر است، از آن مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=۲x\sin\frac{۱}{x}+x^{۲}\cos(\frac{۱}{x})\times(-\frac{۱}{x^{۲}})=۲x\sin\frac{۱}{x}-\cos\frac{۱}{x}\Rightarrow \lim_{x\to ۰} f'(x)=\lim_{x\to ۰} ۲x\sin\frac{۱}{x}-\lim_{x\to ۰}\cos\frac{۱}{x}$$

حد اول برابر صفر است (طبق قضیه‌ی فشردگی)، ولی حد دوم وجود ندارد. پس $\lim\limits_{x\to ۰} f'(x)$ وجود ندارد. اما نتیجه‌ی جالب این است که $f'(۰)$ وجود دارد:

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}\sin\frac{۱}{x}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰} x\sin\frac{۱}{x}=۰$$

یادداشت: این تابع نمونه‌ای از توابعی است که در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیرند، ولی مشتق آن‌ها در $\mathbb{R}$ پیوسته نیست.

تست (۶): تابع f با ضابطه‌ی مقابل به‌ترتیب در چند نقطه ناپیوسته و در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟ (سراسری – ۸۲)

$$f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ x+1 & 0\le x<1\\ 2x+2 & 1\le x<2\\ x^2+2 & x\ge 2\end{cases}$$

۱) ۱، ۲
۲) ۲، ۲
۳) ۱، ۳
۴) ۲، ۳

حل: برای بررسی پیوستگی باید نقاط مرزی را بررسی کنیم.

$$\lim_{x\to 0^-}1=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1\ ,\quad \lim_{x\to 1^-}(x+1)=2\neq\lim_{x\to 1^+}(2x+2)=4\ ,\quad \lim_{x\to 2^-}(2x+2)=6=\lim_{x\to 2^+}(x^2+2)$$

پس تابع تنها در نقطه‌ی $x=1$ ناپیوسته است. برای بررسی مشتق‌ناپذیری، می‌دانیم تابع در $x=1$ مشتق‌ناپذیر است و علاوه بر آن:

$$f'(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & 0<x<1\\ 2 & 1<x<2\\ 2x & x>2\end{cases}$$

باید تنها نقاط $x=0$ و $x=2$ را بررسی کنیم که با توجه به پیوستگی تابع در این دو نقطه، طبق نکته می‌توانیم از ضابطه‌ها استفاده کنیم:

$$f'_+(0)=1,\qquad f'_-(0)=0,\qquad f'_+(2)=4\quad ,\quad f'_-(2)=2$$

پس تابع در هر سه نقطه‌ی $x\in\{1,2,3\}$ مشتق‌ناپذیر است. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

مشتق در توابع شامل قدرمطلق

معمولاً در توابعی که قدرمطلق دارند، بهتر است ابتدا با تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق و تعیین محدوده، قدرمطلق را حذف کنیم، با این کار تابع شامل قدرمطلق را به یک تابع چندضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم، سپس از تابع مشتق می‌گیریم.

مسأله‌ی (۱۲): مشتق تابع $f(x)=(x^2-1)^2|x+1|$ را به‌دست آورید.

حل: تابع f را می‌توان به صورت دو ضابطه‌ای بیان کرد:

$$f(x)=(x^2-1)^2|x+1|=\begin{cases}(x^2-1)^2(x+1) & x\ge -1\\ -(x^2-1)^2(x+1) & x<-1\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1 & x\ge -1\\ -(x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1) & x<-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}5x^4+4x^3-6x^2-4x+1 & x>-1\\ -5x^4-4x^3+6x^2+4x-1 & x<-1\end{cases}$$

تنها باید در نقطه‌ی $x=-1$ جداگانه مشتق را بررسی کنیم که: $f'_+(-1)=f'_-(-1)=0$

تست (۷): مشتق تابع $f(x)=|x|+|x+1|+\dots+|x+99|$ در نقطه‌ی $x=-\frac{9}{2}$ چقدر است؟ (آزاد – ۸۴)

۱) ۹۰ ۲) -90 ۳) ۱۰۰ ۴) -100

حل: در همسایگی $x=-\frac{9}{2}$، علامت عبارت‌های x، $x+1$، $x+2$، $x+3$ و $x+4$ منفی است، ولی علامت عبارات $x+5$، $x+6$، ... و $x+99$ مثبت است. پس:

$$f(x)=-x-(x+1)-(x+2)-(x+3)-(x+4)+(x+5)+(x+6)+\dots+(x+99)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\underbrace{-1-1-1-1-1}_{\text{۵ بار}}+\underbrace{1+1+\dots+1}_{\text{۹۵ بار}}=-5+95=90\Rightarrow f'(-\frac{9}{2})=90$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

تست (۸): اندازه‌ی مشتق تابع $y=|x|+|x^2-2x|$ در نقطه‌ی $x=-1$ چقدر است؟

۱) ۵ ۲) -5 ۳) -3 ۴) ۳

حل: نقطه‌ی $x=-1$ ریشه‌ی x^2-2x نیست و مقدار عبارت به ازای آن مثبت می‌شود. پس x^2-2x در همسایگی $x=-1$ مثبت است و می‌توانیم علامت قدرمطلق آن را حذف کنیم. همچنین در همسایگی $x=-1$ به وضوح داریم: $|x|=-x$. پس:

$$y=-x+x^2-2x=x^2-3x\Rightarrow y'=2x-3\xrightarrow{x=-1}y'=-2-3=-5$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

مشتق در توابع شامل جزءصحیح

مشتق در توابع شامل جزءصحیح نیز مانند مشتق در توابع شامل قدرمطلق است. یعنی در محدوده‌ی مناسب، بهتر است جزءصحیح را حذف کنیم، سپس مشتق بگیریم.

مسأله‌ی (۱۳): مشتق تابع $f(x)=[x]\sin^2 \pi x$ را به‌دست آورید.

حل: با فرض $n\in\mathbb{Z}$ و $n<x<n+1$ داریم: $[x]=n$، بنابراین $f(x)=n\sin^2 \pi x$. یعنی $[x]$ به صورت یک ضریب عددی ثابت در تابع ظاهر می‌شود که عیناً در مشتق آن تکرار می‌شود. داریم:

$$f'(x)=n\times 2\sin \pi x\cos \pi x\times(\pi)=n\pi\sin 2\pi x\xrightarrow{n=[x]}f'(x)=\pi[x]\sin 2\pi x$$

در نقاط $x=n\in\mathbb{Z}$، مقدار $\sin \pi x$ برابر صفر می‌شود، پس تابع پیوسته است (چرا؟)، هم‌چنین برای محاسبه‌ی مشتق راست تابع f در $x=n$، باید از $n\sin^2 \pi x$ مشتق بگیریم و برای مشتق چپ آن از $(n-1)\sin^2 \pi x$. که هر دو مشتق برابر صفر می‌شوند، در نتیجه:

$$f'(n)=0 \qquad (n\in\mathbb{Z})$$

که می‌توان آن را با نتیجه‌ی اول به صورت $f'(x)=\pi[x]\sin 2\pi x$ (برای هر $x\in\mathbb{R}$) ترکیب کرد.

تست (۹): مقدار مشتق تابع $y=x^3+x[\frac{3}{2}-x]$ در نقطه‌ی $x=2$ چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۰

حل: در نقطه‌ی $x=2$، داریم $[\frac{3}{2}-x]=[-\frac{1}{2}]=-1$، چون به ازای $x=2$ عبارت داخل جزءصحیح عددی صحیح نیست، در یک همسایگی $x=2$، مقدار جزءصحیح برابر -1 است، در نتیجه:

$$y=x^3-x\Rightarrow y'=3x^2-1\xrightarrow{x=2}y'=3\times 4-1=11$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

مشتق تابع وارون

یکی از نتایجی که از قاعده‌ی زنجیره‌ای می‌توان به‌دست آورد، درباره‌ی مشتق تابع وارون است. فرض کنید f تابعی وارون‌پذیر باشد و $f(a)=b$ طبق ویژگی تابع وارون، از $f(a)=b$ نتیجه می‌گیریم $f^{-1}(b)=a$. حال برای مشتق‌گیری از f^{-1}، از رابطه‌ی $f^{-1}(f(x))=x$ استفاده می‌کنیم. طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$(f^{-1}(f(x))'=1\Rightarrow(f^{-1})'(f(x))\times f'(x)=1\xrightarrow[f(a)=b]{x=a}(f^{-1})'(b)\times f'(a)=1\Rightarrow(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$$

قضیه: **مشتق تابع وارون**

اگر تابع f در همسایگی نقطه‌ی $x=a$ وارون‌پذیر و مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=b$، آن‌گاه با فرض $f'(a)\neq 0$ داریم:

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$$

مسأله‌ی (۱۴): در هر حالت، مقدار خواسته شده را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=x^3+2\sqrt{x}$، $(f^{-1})'(3)=?$

ب) $f(x)=\begin{cases}3x-2 & x\geq 1\\ 2x-4 & x<1\end{cases}$، $(f^{-1})'(7)=?$

حل: الف) باید نقطه‌ای را بیابیم که $f(x)=3$. با دقت در معادله‌ی $x^3+2\sqrt{x}=3$ به این نتیجه می‌رسیم که $x=1$، پس $f(1)=3$، بنابراین طبق قضیه‌ی قبل داریم: $(f^{-1})'(3)=\frac{1}{f'(1)}$. از طرفی چون $f'(x)=3x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}$، پس $f'(1)=4$، بنابراین: $(f^{-1})'(3)=\frac{1}{4}$

ب) باید نقطه‌ای را بیابیم که $f(x)=7$. داریم:

$$3x-2=7\Rightarrow x=3 \quad \text{و} \quad 2x-4=7\Rightarrow x=\frac{11}{2} \text{ غ ق ق}$$

پس $f(3)=7$، درنتیجه $(f^{-1})'(7)=\frac{1}{f'(3)}$. از طرفی به وضوح $f'(3)=3$، بنابراین $(f^{-1})'(7)=\frac{1}{3}$.

مشتق توابع وارون مثلثاتی

با استفاده از قضیه‌ی مشتق تابع وارون می‌توانیم مشتق توابع وارون مثلثاتی را پیدا کنیم. فرض کنید می‌خواهیم $(\sin^{-1})'(a)$ را بیابیم. $x_\circ \in [-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ را درنظر می‌گیریم که $\sin x_\circ = a$. طبق قضیه داریم:

$$(\sin^{-1})'(a) = \frac{۱}{\sin'(x_\circ)} = \frac{۱}{\cos x_\circ}$$

از طرفی چون $x_\circ \in [-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ و $\sin x_\circ = a$، نتیجه می‌گیریم: $\cos x_\circ = \sqrt{۱-a^۲}$، بنابراین: $(\sin^{-1})'(a) = \frac{۱}{\sqrt{۱-a^۲}}$

قضیه: **مشتق توابع وارون مثلثاتی**

۱- مشتق تابع $y = \sin^{-1} x$ **برابر است با:** $y' = \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$ $\quad x \in (-۱, ۱)$

۲- مشتق تابع $y = \cos^{-1} x$ **برابر است با:** $y' = \frac{-۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$ $\quad x \in (-۱, ۱)$

۳- مشتق تابع $y = \tan^{-1} x$ **برابر است با:** $y' = \frac{۱}{۱+x^۲}$

۴- مشتق تابع $y = \cot^{-1} x$ **برابر است با:** $y' = \frac{-۱}{۱+x^۲}$

رابطه‌ی اول را ثابت کرده‌ایم. اثبات رابطه‌های دیگر را به خودتان واگذار می‌کنیم.

مسأله‌ی (۱۵): **مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.**

الف) $f(x) = \tan^{-1}(\frac{۲x}{۱-x^۲})$ $\qquad$ **ب)** $f(x) = \sin(\tan^{-1}(\tan x))$

حل: الف) با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$f'(x) = \frac{۱}{۱+(\frac{۲x}{۱-x^۲})^۲} \times (\frac{۲x}{۱-x^۲})' = \frac{(۱-x^۲)^۲}{(۱-x^۲)^۲+۴x^۲} \times \frac{۲(۱-x^۲)-۲x(-۲x)}{(۱-x^۲)^۲} = \frac{۲+۲x^۲}{۱+۲x^۲+x^۴} = \frac{۲(۱+x^۲)}{(۱+x^۲)^۲} = \frac{۲}{۱+x^۲}$$

ب) با استفاده‌ی متوالی از قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$f'(x) = \cos(\tan^{-1}(\tan x)) \times \frac{۱}{۱+\tan^۲ x} \times (۱+\tan^۲ x) = \cos(\tan^{-1}(\tan x))$$

مسأله‌ی (۱۶): **با استفاده از مشتق، اتحاد** $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{۲}$ **را ثابت کنید.**

حل: تابع $f(x) = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ را درنظر می‌گیریم. این تابع در فاصله‌ی $[-۱, ۱]$ پیوسته است. از طرفی در فاصله‌ی $(-۱, ۱)$، با مشتق‌گیری از f داریم:

$$f'(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}} - \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}} = \circ$$

می‌دانیم فقط مشتق تابع ثابت برابر صفر است، بنابراین از تساوی بالا نتیجه می‌گیریم f تابعی ثابت است. حال با توجه به آن که $f(\circ) = \sin^{-1}(\circ) + \cos^{-1}(\circ) = \circ + \frac{\pi}{۲} = \frac{\pi}{۲}$، پس مقدار ثابت تابع برابر $\frac{\pi}{۲}$ است. به این ترتیب برای هر $-۱ < x < ۱$ داریم: $f(x) = \frac{\pi}{۲}$
برای دو نقطه‌ی مرزی $x = \pm ۱$ نیز به راحتی درستی اتحاد اثبات می‌شود.

خواص متقابل f و f′

درباره‌ی ویژگی‌های متقابل f و f′ احکامی را می‌توان ثابت کرد که در این جا ما به ذکر دو نکته‌ی نسبتاً مهم از آن‌ها بسنده می‌کنیم.

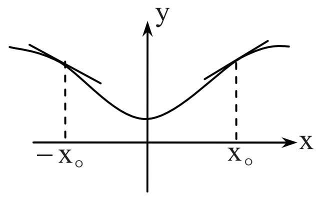
۱- زوج و فرد بودن

نکته: **اگر تابع f مشتق‌پذیر و زوج باشد، آن‌گاه f′ فرد است و اگر f مشتق‌پذیر و فرد باشد، آن‌گاه f′ زوج است.**

اثبات: اگر f زوج باشد، داریم: $f(-x)=f(x)$. از دو طرف نسبت به x مشتق می‌گیریم. طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم: $f'(-x)\times(-1)=f'(x)$، پس $f'(-x)=-f'(x)$، یعنی تابع f' ویژگی توابع فرد را دارد.

تنها باید ثابت کنیم دامنه‌ی f' نسبت به صفر متقارن است. با توجه به این که نمودار f نسبت به محور عرض‌ها متقارن است (چرا؟)، اگر نقطه‌ای سمت راست محور عرض‌ها قرار داشته باشد و مماسی قابل رسم بر نمودار تابع در آن نقطه موجود باشد، در قرینه‌ی آن نیز چنین مماسی قابل رسم است. پس اگر f در $x=x_0$ مشتق‌پذیر باشد، در $x=-x_0$ نیز مشتق‌پذیر است. بنابراین دامنه‌ی f' نسبت به صفر متقارن است.

برای درک بهتر به شکل روبه‌رو نگاه کنید که نمونه‌ای از یک تابع زوج با نمودار متقارن نسبت به محور y ها است. دو خط که در نقاط x_0 و $-x_0$ بر نمودار مماس شده‌اند، به وضوح شیبی قرینه دارند.



به همین ترتیب اگر f فرد باشد، می‌توان ثابت کرد f' زوج است. زیرا:

$$f(-x)=-f(x)\Rightarrow -f'(x)=-f'(-x)\Rightarrow f'(-x)=f'(x)\Rightarrow$$ که تابعی زوج است

مسأله‌ی (۱۷): اگر $f(x)=\dfrac{x^8+\cos x-1386}{x^4-2}$، مقدار $f'(0)$ را بیابید.

حل: تابع f زوج است و در $x=0$ مشتق‌پذیر است (چرا؟)، پس مشتق آن، یعنی تابع f'، فرد است. می‌دانیم اگر تابع فردی در نقطه‌ی $x=0$ مقدار داشته باشد، حتماً مقدار آن صفر است، پس: $f'(0)=0$

پرسش: آیا عکس نکته‌ی اخیر نیز، گزاره‌ای درست است؟ یعنی اگر f' فرد باشد، آن‌گاه f زوج است؟ یا اگر f' زوج باشد، لزوماً f فرد است؟

پاسخ: اگر f' زوج باشد، درباره‌ی f نمی‌توان حکمی صادر کرد. مثلاً تابع $f(x)=x^3+x+1$ نه زوج است و نه فرد، ولی $f'(x)=3x^2+1$ و در نتیجه f' تابعی زوج است.

اما اگر f' فرد باشد و f در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، قطعاً f زوج است. اثبات این مطلب را در سال‌های آینده خواهید آموخت.

تست (۱۰): اگر $f(x)=\dfrac{x\cos x+x^4\sin x+\sin 2x}{x^8+2x^6+3x^4+9}$، حاصل $\dfrac{f'(-1)}{f'(1)}+\dfrac{2f'(-2)}{f'(2)}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) ۱

حل: تابع f تابعی فرد با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ است، لذا مشتق این تابع زوج است (توجه کنید که این تابع در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است)، پس $f'(-1)=f'(1)$ و $f'(-2)=f'(2)$، پس $\dfrac{f'(-1)}{f'(1)}+\dfrac{2f'(-2)}{f'(2)}=1+2=3$. بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

۲- تناوب

نکته: **اگر تابع f متناوب باشد، آن‌گاه f' نیز متناوب است.**

درک شهودی نکته‌ی فوق بسیار واضح است. چون تابع f متناوب است، رفتار آن در فاصله‌های دوره‌ی تناوب آن عیناً تکرار می‌شود، پس از نظر خطوط مماس بر منحنی نیز عیناً رفتاری مشابه خواهد داشت و f' نیز متناوب می‌شود. برای اثبات دقیق‌تر فرض کنید T دوره‌ی تناوب f باشد، آن‌گاه: $f(x+T)=f(x)$ و از دو طرف نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$f'(x+T)\times(x+T)'=f'(x)\Rightarrow f'(x+T)\times 1=f'(x)\Rightarrow f'(x+T)=f'(x)$$

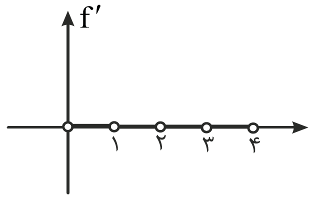
پس f' نیز متناوب است.

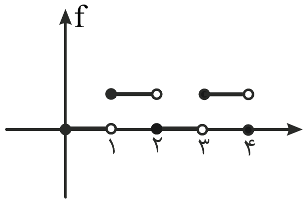
پرسش: آیا عکس این نکته نیز برقرار است؟ یعنی اگر f' متناوب باشد، f نیز متناوب است؟

پاسخ: خیر. مثلاً تابع $f(x)=x+\cos x$ تابعی متناوب نیست، ولی مشتق آن $f'(x)=1-\sin x$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب 2π است.

پرسش: اگر تابع f متناوب باشد، آیا دوره‌ی تناوب دو تابع f و f' یکسان است؟

پاسخ: خیر. در شکل زیر نمودار دو تابع $f(x)=[x]-۲[\frac{x}{۲}]$ و مشتق آن رسم شده است. ملاحظه می‌کنید که دوره‌ی تناوب f برابر ۲ و دوره‌ی تناوب تابع f' برابر ۱ است.





(توجه کنید که $D_{f'}=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ و برای رسم تابع f' با توجه به آن‌که در هر فاصله‌ی $n<x<n+۱$، $(n\in\mathbb{Z})$، تابع f تابعی ثابت است، لذا $f'=۰$.)

کاربردهایی از مشتق

بحث تابع مشتق و خواص آن به پایان رسیده است. در انتهای این بخش چند مسأله‌ی نمونه حل می‌کنیم که شاید مانند مثال‌های قبل در کنکور و آزمون‌های مشابه آن، اهمیت نداشته باشند، ولی درک شما را از مفهوم مشتق کامل‌تر می‌کنند و علاوه بر آن مسائلی جالب و زیبا هستند!

مسأله‌ی (۱۸): با استفاده از اتحاد $\sin(x+a)=\sin x\cos a+\cos x\sin a$، اتحاد مشابه برای $\cos(x+a)$ را ثابت کنید.

حل: از دو طرف اتحاد فوق نسبت به x مشتق می‌گیریم. دقت کنید که a پارامتر است و با آن مثل یک عدد ثابت برخورد می‌کنیم.

$$\cos(x+a)\times ۱=\cos x\cos a+(-\sin x)\sin a\Rightarrow\cos(x+a)=\cos x\cos a-\sin x\sin a$$

مسأله‌ی (۱۹): ابتدا ثابت کنید: $\frac{x^{n+۱}-۱}{x-۱}=۱+x+x^۲+\ldots+x^n$ و با استفاده از آن حاصل $۱+۲x+۳x^۲+\ldots+nx^{n-۱}$ را به‌دست آورید.

حل: با ضرب طرفین اتحاد اول به اتحاد چاق و لاغر می‌رسیم (پس رابطه اثبات می‌شود). برای به‌دست آوردن حاصل عبارت دوم از دو طرف تساوی اول نسبت به x مشتق بگیرید.

$$\frac{x^{n+۱}-۱}{x-۱}=۱+x+x^۲+\ldots+x^n\Rightarrow(\frac{x^{n+۱}-۱}{x-۱})'=۰+۱+۲x+۳x^۲+\ldots+nx^{n-۱}$$

$$\Rightarrow ۱+۲x+۳x^۲+\cdots nx^{n-۱}=\frac{(n+۱)x^n(x-۱)-(x^{n+۱}-۱)}{(x-۱)^۲}=\frac{nx^{n+۱}-(n+۱)x^n+۱}{(x-۱)^۲}$$