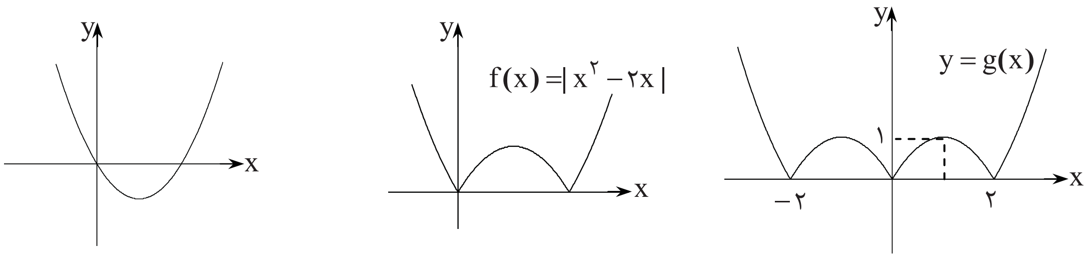
۲۳- گزینه‌ی (۴) اگر $f(x)=|x^۲-۲x|$، داریم $g(x)=\left|x^۲-۲|x|\right|=f(|x|)$. نمودار g را رسم می‌کنیم:



همان‌طور که از نمودار g واضح است، تابع در سه نقطه‌ی $x=\pm ۲$ و $x=۰$ مشتق‌ناپذیر است.

۲۴- گزینه‌ی (۱) ابتدا نشان می‌دهیم f در $x=a$ پیوسته است:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)=f(a)\Rightarrow$$ f در $x=a$ پیوسته است.

اما f لزوماً در $x=a$ مشتق‌پذیر نیست، و ممکن است مشتق‌های چپ یا راست آن وجود نداشته باشند. مثلاً $g(x)=x^۲[x]$ یا $g(x)=x^{\frac{۵}{۳}}$ و نقطه‌ی $x=۰$ را در نظر بگیرید.

۲۵- گزینه‌ی (۳) با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}}{x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}\times\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}{x\times\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{x^۲}}{x}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times\lim_{x\to ۰^-}\frac{|x|}{x}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۲۶- گزینه‌ی (۲) واضح است که شرط پیوستگی در $x=۱$ برقرار است! شرط برابری مشتق‌های یک‌طرفه را می‌نویسیم:

$$f'_-(۱)=a \quad , \quad f'_+(۱)=(۲\times ۱-۱)=۱\Rightarrow a=۱$$

۲۷- گزینه‌ی (۴) برای پیوستگی تابع f در $x=۱$ باید داشته باشیم: $a+۵=۱-a\Rightarrow a=-۲$

$$f'(x)=\begin{cases}-۲ & x>۱\\ ۲x & x<۱\end{cases}\Rightarrow f'_+(۱)=-۲\ ,\ f'_-(۱)=۲\Rightarrow$$ f در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست

۲۸- گزینه‌ی (۳) چون تابع در $x=۱$ پیوسته است، برای مشتق‌های یک‌طرفه‌ی آن در $x=۱$ می‌توانیم از ضابطه‌ها مشتق بگیریم:

$$\lim_{\Delta x\to ۰^-}\frac{f(۱+\Delta x)-۱}{\Delta x}=f'_-(۱)=(۴x)\big|_{x=۱}=۴$$

۲۹- گزینه‌ی (۳) حد را با اضافه و کم کردن $f(۱)$ به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\lim_{\Delta x\to ۰^-}\frac{f(۱+\Delta x)-f(۱)}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to ۰^-}\frac{f(۱-\Delta x)-f(۱)}{\Delta x}=f'_-(۱)-\lim_{\Delta x\to ۰^-}\frac{f(۱-\Delta x)-f(۱)}{\Delta x}$$

$$\xrightarrow{t=-\Delta x}f'_-(۱)-\lim_{t\to ۰^+}\frac{f(۱+t)-f(۱)}{-t}=f'_-(۱)+f'_+(۱)$$

$$f'(x)=\begin{cases}۴x & x>۱\\ ۵ & x<۱\end{cases}\xrightarrow{\text{پیوسته } f}f'_+(۱)=۴\ ,\ f'_-(۱)=۵\Rightarrow$$ جواب سوال $=۴+۵=۹$

۳۰- گزینه‌ی (۳) اگر کسر را A بنامیم، داریم:

$$t=-h^۲\Rightarrow t\to ۰^-\Rightarrow A=\lim_{t\to ۰^-}\frac{f(-۲)-f(-۲+t)}{-t}=\lim_{t\to ۰^-}\frac{f(-۲+t)-f(-۲)}{t}=f'_-(-۲)$$

تابع $f(x)=|x|$ برای $x<۰$، به صورت $f(x)=-x$ است و $f'(x)=-۱$.

۳۱- گزینه‌ی (۴) می‌دانیم مقدار حد مورد نظر همان مقدار مشتق تابع $h(x)=f(x)g(x)$ در $x=۲$ است:

$$f'(x)=۲x-۱\ ,\ g'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{۲x}}\times ۲=\frac{۱}{\sqrt{۲x}}\Rightarrow h'(x)=(۲x-۱)\sqrt{۲x}+\frac{x^۲-x}{\sqrt{۲x}}\Rightarrow h'(۲)=۷$$

۳۲- گزینه‌ی (۳) اگر فرض کنیم $f(x)=۲x^۲+kx$، به وضوح حد مورد نظر همان $f'(۲)$ است.

$$f'(x)=۴x+k\ ,\ f'(۲)=۱۲\Rightarrow ۸+k=۱۲\Rightarrow k=۴$$

۳۳- گزینه‌ی (۳) مقدار حد مورد نظر همان $-f'(3)$ است. برای به دست آوردن $f'(3)$ کافی است در رابطه‌ی اول قرار دهید $x=2$.

۳۴- گزینه‌ی (۱) طبق نکته‌ی $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{h}=(m-n)f'(a)$، اگر حد مورد نظر را A بنامیم، داریم:

$$A=3f'(\frac{\pi}{3})\ ,\ f'(x)=2\tan x(1+\tan^2 x)\Rightarrow A=2\sqrt{3}(1+3)=8\sqrt{3}$$

۳۵- گزینه‌ی (۳)

$$A=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{1+3h}=(1-(-2))f'(1)\times\frac{1}{1+0}=3f'(1)$$

$$f(x)=x^2+x\Rightarrow f'(x)=2x+1\Rightarrow A=3f'(1)=9$$

۳۶- گزینه‌ی (۳)

$$f(x)=\sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}=\sqrt{g(x)}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{g(x)}}g'(x)$$

$$g'(x)=\frac{3\times 1-(-1)\times 2}{(2x+1)^2}\Rightarrow g'(2)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}\ ,\ g(2)=1\Rightarrow f'(2)=\frac{1}{10}$$

۳۷- گزینه‌ی (۲) می‌توان نوشت:

$$f(x)=\frac{1}{2}(\frac{2x-1}{x})^2=\frac{1}{2}(2-\frac{1}{x})^2\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\times 2(2-\frac{1}{x})\times(\frac{1}{x^2})=\frac{2x-1}{x^3}$$

۳۸- گزینه‌ی (۴) می‌توان نوشت:

$$f'(x)=101(x^{15}+2x^{10}+x^5+2x+1)^{100}\times(15x^{14}+20x^9+5x^4+2)\Rightarrow f'(0)=101\times 1\times 2=202$$

۳۹- گزینه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$y=x^{\frac{1386}{2007}}\Rightarrow y'=\frac{1386}{2007}x^{\frac{1386}{2007}-1}\Rightarrow xy'=\frac{1386}{2007}x^{\frac{1386}{2007}}=\frac{1386}{2007}y$$

۴۰- گزینه‌ی (۱) کسر ضابطه‌ی تابع را تفکیک می‌کنیم:

$$y=\frac{x^4+a}{x^2}=x^2+ax^{-2}\Rightarrow y'=2x-2ax^{-3}=2x-\frac{2a}{x^3}=\frac{2x^4-2a}{x^3}\Rightarrow b=2\ ,\ a=1$$

۴۱- گزینه‌ی (۴) با فاکتورگیری از $\sqrt{x(x+5)}$ در صورت کسر می‌توان نوشت:

$$y=\frac{\sqrt{x(x+5)}(\sqrt{x}+\sqrt{x+5})}{\sqrt{x(x+5)}}=\sqrt{x}+\sqrt{x+5}\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+5}}\Rightarrow y'|_{x=4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$$

۴۲- گزینه‌ی (۳) تابع از عامل صفرکننده‌ی x^2-9 برخوردار است. پس تنها از همان مشتق می‌گیریم.

$$f(x)=(x^2-9)g(x)\Rightarrow f'(3)=2x|_{x=3}\times g(3)=6g(3)$$

$$g(x)=(x^2-1)(x^2-2)\ldots(x^2-8)(x^2-10)\Rightarrow g(3)=8\times 7\times\ldots\times 1\times(-1)=-8!\Rightarrow f'(3)=-6\times 8!$$

۴۳- گزینه‌ی (۴) $x=-2$ ریشه‌ی صورت کسر است، پس می‌توانیم آن را به صورت زیر تجزیه کنیم:

$$y=f(x)=\frac{(x+2)(x^2+x+1)}{x+2}\Rightarrow f'(x)=2x+1\Rightarrow f'(-1)=-1$$

۴۴- گزینه‌ی (۳) با فاکتورگیری از $\sqrt[3]{x}$ در صورت کسر می‌توان نوشت:

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2}-1)}{1-\sqrt[3]{x^2}}=-\sqrt[3]{x}=-x^{\frac{1}{3}}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\Rightarrow f'(64)=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{64^2}}=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{2^{12}}}=-\frac{1}{48}$$

۴۵- گزینه‌ی (۱) **راه اول:** ضابطه‌ی تابع را به‌صورت $f(x)=(x^3-1)g(x)$ می‌نویسیم، بنابراین:

$$f'(1)=3x^2|_{x=1}\times g(1)=3(1+1-2)(1+\sqrt{1})=0$$

راه دوم: هم x^2+x-2 و هم x^3-1 عامل $x-1$ دارند. پس $f(x)=(x-1)^2h(x)$ که در نتیجه $f'(1)=0$.

۱۴۶- گزینه‌ی (۲) راه اول:

$$(x-1)f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$$

$$=(x^4-1)(x^4+1)(x^8+1)=(x^8-1)(x^8+1)=x^{16}-1\Rightarrow f(x)=\frac{x^{16}-1}{x-1}$$

$$f'(x)=\frac{16x^{15}(x-1)-1\times(x^{16}-1)}{(x-1)^2}=\frac{15x^{16}-16x^{15}+1}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(0)=1$$

راه دوم: اگر بسط $f(x)$ را بنویسیم، $f(x)$ به صورت یک چندجمله‌ای با درجه‌ی $15=8+4+2+1$ درمی‌آید. یعنی:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{15}x^{15}\Rightarrow f'(x)=a_1+2a_2x+\dots+15a_{15}x^{14}$$

پس $f'(0)=a_1$ و کافی است ضریب x را در حاصل‌ضرب بسط‌ها پیدا کنیم. جمله‌ی شامل x تنها از ضرب جمله‌ی x از پرانتز اول در جمله‌های ثابت ۱ از پرانتزهای بعدی حاصل می‌شود، پس $a_1=1$.

راه سوم: می‌توان تابع f را به‌صورت $f(x)=\underset{\text{عامل صفر کننده}}{\underset{\downarrow}{x}}(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)+1\underbrace{(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}_{g(x)=\text{تابع زوج}}$ نوشت که واضح است: (توجه کنید که g' تابعی فرد است)

$$f'(0)=1(0+1)(0+1)(0+1)+g'(0)=1+0=1$$

۱۴۷- گزینه‌ی (۴) از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم:

$$(x-1)f(x)=(x-1)(x^{64}+\dots+x^2+x+1)=x^{65}-1\Rightarrow f(x)=\frac{x^{65}-1}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{65x^{64}(x-1)-(x^{65}-1)}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(2)=65\times2^{64}-2^{65}+1=(1+2^6)2^{64}-2\times2^{64}+1=2^{70}-2^{64}+1\Rightarrow f'(2)-1=2^{70}-2^{64}$$

۱۴۸- گزینه‌ی (۳) با جایگذاری $\sqrt{x}=a$ و $\sqrt{1-x^2}=b$ داریم:

$$y=\frac{a^2+ab}{a+b}=\frac{a(a+b)}{a+b}=a=\sqrt{x}\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۱۴۹- گزینه‌ی (۳) با توجه به ضابطه‌ها $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ و $g'(x)=3x^2+1$، بنابراین:

$$(gof)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)=(3(1+x)+1)\times\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\Rightarrow(gof)'(0)=2$$

۱۵۰- گزینه‌ی (۲) طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$g'(x)=f'(-10x)\times(-10)\xrightarrow{x=0}a=g'(0)=-10f'(0)\Rightarrow f'(0)=-\frac{a}{10}$$

۱۵۱- گزینه‌ی (۳) می‌توان نوشت:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=-f'(2)\Rightarrow f'(2)=\frac{2}{3}$$

$$(f(\sqrt{x-1}))'=f'(\sqrt{x-1})\times\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\xrightarrow{x=5}\text{جواب}=f'(2)\times\frac{1}{4}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$$

۱۵۲- گزینه‌ی (۲) قرار می‌دهیم $g(x)=f(\tan x)$، بنابراین:

$$g'(x)=f'(\tan x)\times(1+\tan^2x)=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2x}}\times(1+\tan^2x)=\sqrt{1+\tan^2x}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2x}}=\frac{1}{|\cos x|}$$

$$|x|<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos x>0\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{\cos x}$$

۱۵۳- گزینه‌ی (۴) با توجه به قاعده‌ی زنجیره‌ای می‌توان نوشت:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{g(x)}}\times g'(x)=\frac{g'(x)}{2f(x)}\xrightarrow{x=2}f'(2)=\frac{g'(2)}{2f(2)}\Rightarrow g'(2)=2\times\frac{5}{4}\times3=\frac{15}{2}=7/5$$

۱۵۴- گزینه‌ی (۲) با توجه به قاعده‌ی زنجیره‌ای می‌توان نوشت:

$$g'(x)=f'(\sqrt{x})\times\frac{1}{2\sqrt{x}}+2f(\sqrt{x})\times f'(\sqrt{x})\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}+2f(\sqrt{x})\times\frac{1}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1+2f(\sqrt{x})}{2x}$$

۵۵- گزینه‌ی (۲) با توجه به قاعده‌ی زنجیره‌ای می‌توان نوشت:

$$g'(x)=f'(\sin^2 x)\times 2\sin x\times\cos x-f'(\cos^2 x)\times 2\cos x\times(-\sin x)=\sin 2x(f'(\sin^2 x)+f'(\cos^2 x))$$

$$\Rightarrow g'(\frac{\pi}{4})=\sin(\frac{\pi}{2})(2f'(\frac{1}{2}))=1\times 2\times 2=4$$

۵۶- گزینه‌ی (۳) اگر قرار دهیم $g(x)=f(3\sqrt{x}+4)$، داریم:

$$g'(x)=f'(3\sqrt{x}+4)\times\frac{3}{2\sqrt{x}}\xrightarrow{x=4}g'(4)=\frac{3}{4}f'(10)$$

$$f'(x^3+x)=x^2+1\xrightarrow{x=2}f'(10)=5\Rightarrow g'(4)=\frac{3}{4}\times 5=\frac{15}{4}$$

۵۷- گزینه‌ی (۴) f زوج است، پس f' فرد است، بنابراین $f'(0)=0$. اکنون داریم:

$$g(x)=(x^3+2x-1)f(x)\Rightarrow g'(x)=(3x^2+2)f(x)+(x^3+2x-1)f'(x)\xrightarrow{x=0}g'(0)=2f(0)-f'(0)=6$$

۵۸- گزینه‌ی (۲) با توجه به رابطه‌ی خواسته شده واضح است که باید از مشتق تابع $h=\frac{f}{g}$ استفاده کنیم. داریم:

$$(\frac{g}{f})(x)=(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})=x^2-x^2-1=-1\Rightarrow h(x)=(\frac{f}{g})(x)=-1\Rightarrow h'(x)=0$$

$$h=\frac{f}{g}\Rightarrow h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}\xrightarrow{h'(x)=0}f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=0$$

۵۹- گزینه‌ی (۲) می‌توان نوشت:

$$f(x)+g(x)=\frac{x^2+3}{x^2+3}=1\Rightarrow f'(x)+g'(x)=0\Rightarrow f'(x)=-g'(x)$$

۶۰- گزینه‌ی (۲) می‌توان نوشت:

$$f(x)=\frac{(x^4+1)+(4x^2)}{x^4+1}=1+4\frac{x^2}{x^4+1}=1+4g(x)\Rightarrow f'(x)=4g'(x)\Rightarrow\frac{f'(x)}{g'(x)}=4$$

۶۱- گزینه‌ی (۴) می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{2(x-1)+\sqrt{x-1}}{x-1}=2+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\\ g(x)=\dfrac{2\sqrt{x-1}+1}{3\sqrt{x-1}}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3\sqrt{x-1}}\end{cases}\Rightarrow g(x)=\frac{1}{3}f(x)\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{3}f'(x)\Rightarrow\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{3}f'(x)}{\frac{1}{3}f(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

۶۲- گزینه‌ی (۱) اگر قرار دهیم $f(x)=u^2$ و $g(x)=1+x$، آن‌گاه $f'=2uu'$ و $g'(x)=1$. پس عبارت مورد نظر سؤال را می‌توان به‌صورت مقابل نوشت: $A=u^2+2uu'(1+x)=fg'+f'g=(fg)'$

$$(fg)(x)=u^2(1+x)=\frac{x^2}{1+x}\times(1+x)=x^2\Rightarrow A=(fg)'(x)=2x$$

۶۳- گزینه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$f(x)=(\sin x+\cos x)^4-2\sin 2x=(1+\sin 2x)^2-2\sin 2x=1+\sin^2 2x\Rightarrow f'(x)=2\sin 2x\times\cos 2x\times 2=2\sin 4x$$

$$\Rightarrow f'(\frac{3\pi}{16})=2\sin(\frac{3\pi}{4})=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

۶۴- گزینه‌ی (۲) با توجه به اتحاد مربوط به $\sin(\alpha+\beta)$ داریم:

$$f(x)=\sin(x+\frac{3\pi}{4}+x-\frac{\pi}{4})=\sin(2x+\frac{\pi}{2})=\cos 2x\Rightarrow f'(x)=(-\sin 2x)\times 2\Rightarrow f'(\frac{\pi}{12})=-2\sin\frac{\pi}{6}=-1$$

۶۵- گزینه‌ی (۴) می‌توان نوشت:

$$y=\sin(\pi\sqrt{x})\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\cos(\pi\sqrt{x})\times\frac{\pi}{2\sqrt{x}}\xrightarrow{x=4}A=\frac{\pi}{4}\cos 2\pi=\frac{\pi}{4}$$

۶۶- گزینه‌ی (۳) با استفاده از اتحاد $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ می‌توان نوشت:

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{4}\sin 4x\Rightarrow f'(x)=\cos 4x\Rightarrow f'(\frac{\pi}{24})=\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$$