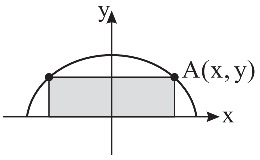
(B) **۱۳۷۲- گزینه‌ی ۴** نقطه‌ی $B(x,y)$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. پس $y=\sqrt{۲x+۹}$. می‌خواهیم $d=\overline{AB}^۲$ می‌نیمم شود:

$$d=(x-۴)^۲+(y-۰)^۲\xrightarrow{y=\sqrt{۲x+۹}}d=(x-۴)^۲+۲x+۹\Rightarrow d=x^۲-۶x+۲۵$$

می‌نیمم عبارت درجه دو بالا به ازای $x=۳$ رخ می‌دهد، در این صورت $d=۱۶$، پس کم‌ترین فاصله برابر $\sqrt{۱۶}=۴$ می‌شود.

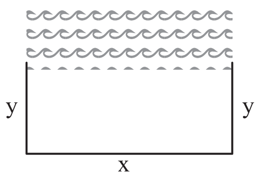
(B) **۱۳۷۳- گزینه‌ی ۴** مطابق شـکل، نقطه‌ی $A(x,y)$ را رأس مستطیل در نظر می‌گیریم. پس طول مستطیل $۲x$ و عرض آن $y$ می‌شود. بنابراین $y=\frac{۳}{۲}\sqrt{۸-x^۲}$ و می‌خواهیم $S=۲xy$ ماکسیمم شود.




$$S=۲x\times\frac{۳}{۲}\sqrt{۸-x^۲}\Rightarrow\frac{dS}{dx}=۳(\sqrt{۸-x^۲}+x\times\frac{-۲x}{۲\sqrt{۸-x^۲}})\xrightarrow{S'=۰}۸-x^۲=x^۲$$
$$\Rightarrow x=۲\Rightarrow y=۳\Rightarrow S_{max}=۱۲$$

(B) **۱۳۷۴- گزینه‌ی ۲** مطابق شکل داریم:

$$x+۲y=۸۸\Rightarrow x=۸۸-۲y$$




می‌خواهیم مساحت مستطیل یعنی $S=xy$ را ماکسیمم کنیم:

$$S(y)=(۸۸-۲y)y=-۲y^۲+۸۸y$$
$$S'=-۴y+۸۸=۰\Rightarrow y=۲۲\Rightarrow S_{max}=۹۶۸$$

(A) **۱۳۷۵- گزینه‌ی ۴** **راه‌حل اول:** کافی است $A=xy$ ماکسیمم شود. داریم: $y=۵-۴x\Rightarrow A=x(۵-۴x)=-۴x^۲+۵x$

ماکسیمم عبارت درجه دو $A$ به ازای $x=\frac{۵}{۸}$ رخ می‌دهد. در نتیجه: $y=۵-۴x=\frac{۵}{۲}$ و $max(x^۲y^۲)=(\frac{۵}{۸}\times\frac{۵}{۲})^۲=(\frac{۵}{۴})^۴$

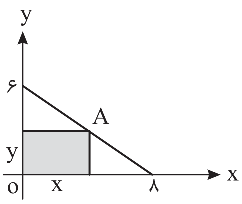
**راه‌حل دوم:** با توجه به آن‌که مجموع $a=۴x$ و $b=y$ مقداری ثابت است و می‌خواهیم $ab$ ماکسیمم باشد، باید: $۴x=y=\frac{۵}{۲}$

(A) **۱۳۷۶- گزینه‌ی ۲** **راه‌حـل اول:** حاصـل جمع چهار متغیر $a=\frac{x}{۳}$، $b=\frac{x}{۳}$، $c=\frac{x}{۳}$ و $d=y$ مقدار ثابت ۶ اسـت، پـس وقتی حاصل ضرب $abcd$ ماکسیمم می‌شود که $a=b=c=d=\frac{۳}{۲}$. ماکسیمم شدن $abcd$ معادل ماکسیمم شدن $x^۳y$ است، پس $y=\frac{۳}{۲}$ و $x=\frac{۹}{۲}$، در نتیجه:

$$x^۳y=(\frac{۹}{۲})^۳\times\frac{۳}{۲}=\frac{۲۱۸۷}{۱۶}$$

**راه‌حل دوم:** می‌توانید با جای‌گذاری $y=۶-x$ در عبارت $A=x^۳y$ به تابعی بر حسب $x$ برسید و از آن مشتق بگیرید.

(B) **۱۳۷۷- گزینه‌ی ۱** مطابق شکل مساحت بزرگ‌ترین مستطیل سایه زده شده را می‌خواهیم. پس اگر مختصات $A$ را $(x,y)$ در نظـر بگیریم، بیش‌ترین مقدار $S=xy$ را می‌خواهیـم. معادله‌ی خط منطبق بر وتر مثلث به‌صورت $\frac{x}{۸}+\frac{y}{۶}=۱$ قابل نوشــتن است، بنابراین مختصات $A$ در این رابطه صدق می‌کند. چون مجموع $\frac{x}{۸}$ و $\frac{y}{۶}$ مقدار ثابت ۱ است، وقتی حاصل‌ضرب آن‌ها ماکسیمم می‌شود که $\frac{x}{۸}=\frac{y}{۶}=\frac{۱}{۲}$، در این‌صورت:




$$S_{max}=\frac{۸}{۲}\times\frac{۶}{۲}=۱۲$$

## ۴-۵ : تقعر و نقطه‌ی عطف

(A) **۱۳۷۸- گزینه‌ی ۳** از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم $f'(x)$ اکیداً صعودی است، بنابراین تابع $f$ تقعری رو به بالا دارد. (در واقع در این تست با تعریف تقعر مواجهیم!)

(A) **۱۳۷۹- گزینه‌ی ۳** مشتق دوم تابع را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=۱-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}\Rightarrow f''(x)=\frac{۲}{۹\sqrt[۳]{x^۵}}$$

برای $x<۰$ داریم $f''(x)<۰$ و برای $x>۰$: $f''(x)>۰$. پس نمودار $f$ ابتدا تقعر رو به پایین دارد، سپس رو به بالا.

B **۱۳۸۰- گزینه‌ی ۱** مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f''(x)=2-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}=\frac{8\sqrt{x^3}-1}{4\sqrt{x^3}}\xrightarrow{f''(x)=0}8\sqrt{x^3}=1\Rightarrow x^3=(\frac{1}{8})^2\Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

با توجه به آن‌که مخرج کسر $f''(x)$ در بازه‌ی مورد نظر مثبت است، علامت $f''(x)$ و صورت کسر یکسان است. بنابراین در بازه‌ی $(0,\frac{1}{4})$ داریم: $f''(x)<0$ و در بازه‌ی $(\frac{1}{4},+\infty)$ داریم: $f''(x)>0$.

B **۱۳۸۱- گزینه‌ی ۳** باید محدوده‌ای را تعیین کنیم که $y''<0$ . داریم:

$$y'=\ln(x-1)+\frac{x}{x-1}\Rightarrow y''=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x-2}{(x-1)^2}\xrightarrow{y''<0}x-2<0\Rightarrow x<2$$

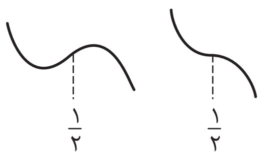
با توجه به آن‌که دامنه‌ی تابع محدوده‌ای است که $x-1>0$ ، پس $1<x<2$ .

B **۱۳۸۲- گزینه‌ی ۲** باید محدوده‌ای را تعیین کنیم که $f''(x)<0$ . داریم:

$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=(2x-x^2)e^{-x}\Rightarrow f''(x)=(2-2x)e^{-x}-(2x-x^2)e^{-x}\Rightarrow f''(x)=(x^2-4x+2)e^{-x}$$

با توجه به آن‌که همواره $e^{-x}>0$ ، برای آن‌که $f''(x)<0$، باید $x^2-4x+2<0$ ، بنابراین $2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$ ، در نتیجه بیش‌ترین مقدار $b-a$ برابر است با: $2+\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

B **۱۳۸۳- گزینه‌ی ۴** **راه‌حل اول**: چون با یک تابع درجه‌ی ۳ مواجهیم، باید $\frac{1}{2}$ نقطه‌ی عطف تابع باشد و نمودار تابع مانند یکی از شکل‌های مقابل باشد. طول نقطه‌ی عطف تابع عبارت است از $x=-\frac{1-a^2}{3a}$، بنابراین:



$$-\frac{1-a^2}{3a}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2a^2-3a-2=0\Rightarrow(2a+1)(a-2)=0\Rightarrow a_1=-\frac{1}{2}\ ,\ \ a_2=2$$

به ازای $a=2$ داریم $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و نمودار تابع مانند شکل‌های بالا نمی‌شود، پس $a=-\frac{1}{2}$.

**راه‌حل دوم**: با مشتق‌گیری از تابع داریم:

$$f'(x)=3ax^2+2(1-a^2)x+3\Rightarrow f''(x)=6ax+2(1-a^2)=2(3ax+(1-a^2))$$

اگر قرار دهیم $x_0=\frac{a^2-1}{3a}$، جدول تعیین علامت $f''$ به شکل زیر خواهد شد. برای آن‌که این جدول مطابق شرایط مسأله باشد، باید: $x_0=\frac{1}{2}$ و $a>0$. حل این معادله به پاسخ $a=-\frac{1}{2}$ می‌انجامد.

| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $f''$ | مخالف علامت $a$ | $0$ | موافق علامت $a$ |

B **۱۳۸۴- گزینه‌ی ۱** با توجه به نمودار $y=f(x)$، در بازه‌ی $(0,+\infty)$ تابع تقعری رو به بالا و در بازه‌ی $(-\infty,0)$ تقعری رو به پایین دارد. بنابراین باید $y=f''(x)$ در بازه‌ی $(0,+\infty)$ علامتی مثبت و در بازه‌ی $(-\infty,0)$ علامتی منفی داشته باشد.

A **۱۳۸۵- گزینه‌ی ۲** در گزینه‌ی (۲) نمودار تابع همواره صعودی اکید و با تقعری رو به پایین است. پس همواره $f'(x)>0$ و $f''(x)<0$ که در شرایط تست صدق می‌کند.

B **۱۳۸۶- گزینه‌ی ۴** با توجه به فرض تست داریم: $f'(x_0)+f''(x_0)=-\frac{5}{2}$ و $f'(x_0)f''(x_0)=\frac{1}{2}$. از تساوی دوم نتیجه می‌گیریم $f'(x_0)$ و $f''(x_0)$ هم‌علامت‌اند، پس با توجه به تساوی اول هر دو منفی هستند. بنابراین باید نمودار تابع در همسایگی $x=x_0$ اکیداً نزولی و با تقعری رو به پایین باشد که این شرایط در گزینه‌ی (۴) وجود دارد.

A **۱۳۸۷- گزینه‌ی ۱** در بازه‌ای که $f'(x)$ صعودی اکید است (یعنی $(-\infty,0)$)، تابع $f$ تقعر رو به بالا دارد. به همین ترتیب در بازه‌ی $(0,+\infty)$، $f'(x)$ نزولی اکید است، پس $f$ تقعر رو به پایین دارد.

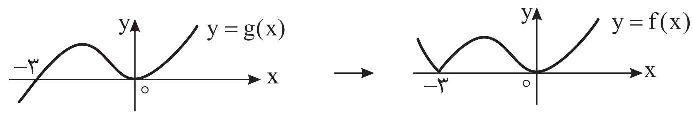
B **۱۳۸۸- گزینه‌ی ۲** برای آن که $f$ صعودی باشد، باید $f'>۰$، یعنی بازه‌ی $(x_۱,x_۳)$ یا $(x_۵,x_۷)$ یا $(x_۷,+\infty)$ مدنظر است. همچنین برای آن‌که نمودار $f$ تقعر رو به پایین داشته باشد، باید $f''<۰$، یا به بیان دیگر تابع $f'$ نزولی اکید باشد. در بازه‌های $(x_۲,x_۴)$ و $(x_۶,x_۷)$ با این شرایط مواجهیم. بنابراین در بازه‌های $(x_۲,x_۳)$ و $(x_۶,x_۷)$ هر دو شرط هم‌زمان برقرار است.

B **۱۳۸۹- گزینه‌ی ۲** **راه‌حل اول:** بازه‌ای را تعیین می‌کنیم که $f''(x)<۰$. داریم:

$$f(x)=\begin{cases}x^۳+۳x^۲ & x\geq -۳\\ -x^۳-۳x^۲ & x<-۳\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۳x^۲+۶x & x>-۳\\ -۳x^۲-۶x & x<-۳\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}۶x+۶ & x>-۳\\ -۶x-۶ & x<-۳\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}۶x+۶<۰\Rightarrow ۶x<-۶\Rightarrow x<-۱\xrightarrow{x>-۳}-۳<x<-۱\\ -۶x-۶<۰\Rightarrow ۶x>-۶\Rightarrow x>-۱\xrightarrow{x<-۳}\text{جواب ندارد}\end{array}\right\}\Rightarrow -۳<x<-۱\Rightarrow \max(b-a)=-۱-(-۳)=۲$$

**راه‌حل دوم:** نمودار تابع $g(x)=x^۲(x+۳)$ را رسم می‌کنیم و در محدوده‌ی $x<-۳$ آن را نسبت به محور $x$ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $f$ به‌دست آید. با توجه به آن‌که نقطه‌ی عطف تابع $g$، $x=-\frac{۳}{۳\times۱}=-۱$ است، در بازه‌ی $(-\infty,-۱)$ نمودار $g$ تقعر رو به پایین دارد. بنابراین نمودار $f$ در بازه‌ی $(-۳,-۱)$ تقعر رو به پایین خواهد داشت.




C **۱۳۹۰- گزینه‌ی ۱** **راه‌حل اول:** باید برای $x>-۱$ داشته باشیم: $f''(x)>۰$. داریم:

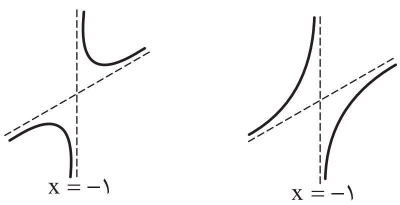
$$f(x)=\frac{(x^۲-۱)+mx-۲}{x+۱}=x-۱+\frac{mx-۲}{x+۱}\Rightarrow f'(x)=۱+\frac{m+۲}{(x+۱)^۲}\Rightarrow f''(x)=\frac{-۲(m+۲)}{(x+۱)^۳}$$

به ازای $x>-۱$ مخرج کسر $f''$ همواره مثبت است. پس برای برقراری شرط $f''(x)>۰$ باید داشته باشیم:

$$m+۲<۰\Rightarrow m<-۲$$

**راه‌حل دوم:** با یک تابع کسری درجه‌ی ۲ به درجه‌ی ۱ مواجهیم که یک مجانب قائم $x=-۱$ و یک مجانب مایل با شیب ۱ دارد. پس نمودار این تابع به یکی از دو شکل مقابل خواهد بود. برای برقراری فرض تست باید $\lim\limits_{x\to(-۱)^+}f(x)=+\infty$ (تا نمودار به صورت شکل سمت چپ باشد). به همین دلیل باید مقدار صورت کسر به ازای $x=-۱$ عددی مثبت شود:

$$۱-m-۳>۰\Rightarrow m<-۲$$




**تذکر:** به ازای $m=-۲$ داریم: $x^۲-۲x-۳=(x+۱)(x-۳)$، بنابراین $f(x)=x-۳$ (که $D_f=\mathbb{R}-\{-۱\}$)، که تقعری برای آن تعریف نشده است.

A **۱۳۹۱- گزینه‌ی ۱** مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۵x^۴-۶x\Rightarrow f''(x)=۲۰x^۳-۶=۲(۱۰x^۳-۳)$$

معادله‌ی $f''(x)=۰$ فقط یک ریشه دارد که در همسایگی آن علامت $f''$ عوض می‌شود. پس تابع یک نقطه‌ی عطف دارد.

B **۱۳۹۲- گزینه‌ی ۱** از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{۱}{۴}x^۴-\frac{۱}{۲}x^۲+m\Rightarrow f''(x)=x^۳-x=x(x^۲-۱)\xrightarrow{f''(x)=۰}x_۱=۰\ ,\ x_۲=۱\ ,\ x_۳=-۱$$

تابع سه نقطه‌ی عطف دارد و باید حاصل $f(۰)+f(۱)+f(-۱)$ را پیدا کنیم. داریم: $f(۰)=۱$ و در مجموع $f(۱)+f(-۱)$ جملات شامل توان‌های فرد $x$ با هم ساده می‌شوند. بنابراین: $f(۱)+f(-۱)=۲$، در نتیجه: $f(۰)+f(۱)+f(-۱)=۳$.

B **۱۳۹۳- گزینه‌ی ۲** باید شیب خط مماس در نقطه‌ی عطف، یعنی مقدار مشتق در این نقطه برابر $\frac{۴}{۳}$ باشد. داریم: $f'(x)=-۳x^{۲}+۲ax$ و می‌دانیم طول نقطه‌ی عطف تابع $x=-\frac{a}{۳\times(-۱)}=\frac{a}{۳}$ است، بنابراین:

$$f'(\frac{a}{۳})=\frac{۴}{۳}\Rightarrow -۳(\frac{a}{۳})^{۲}+۲a(\frac{a}{۳})=\frac{۴}{۳}\Rightarrow a^{۲}=۴\Rightarrow a=\pm۲$$

B **۱۳۹۴- گزینه‌ی ۲** چون نقاط $B$ و $C$ نسبت به نقطه‌ی $A$ قرینه‌اند، نتیجه می‌گیریم $A$ مرکز تقارن منحنی یا همان نقطه‌ی عطف آن است. داریم:

$x=-\frac{۱}{-۱}=۱\Rightarrow$ : طول نقطه‌ی عطف $f(۱)=۲ \xrightarrow{\text{روی خط } y=m} m=۲$ : عرض نقطه‌ی عطف

B **۱۳۹۵- گزینه‌ی ۱** نقطه‌ی عطف و مرکز تقارن نمودار تابع در $x=-\frac{-۶}{۳\times۱}=۲$ رخ می‌دهد. دو نقطه‌ی $x_{۱}=۲+\lambda$ و $x_{۲}=۲-\lambda$ نسبت به $x=۲$ قرینه‌اند، پس نقاط متناظر آن‌ها روی نمودار نسبت به نقطه‌ی عطف قرینه‌اند. بنابراین:

$$f(۲+\lambda)+f(۲-\lambda)=۲f(۲)\Rightarrow f(۲+\lambda)+f(۲-\lambda)=۲(۸-۲۴+۲۰+۱)=۱۰$$

B **۱۳۹۶- گزینه‌ی ۱** با توجه به ضابطه $D_f=(۰,+\infty)$. از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{۱}{\sqrt{x}}=x^{\frac{۱}{۲}}+x^{\frac{-۱}{۲}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲}x^{\frac{-۱}{۲}}-\frac{۱}{۲}x^{\frac{-۳}{۲}}\Rightarrow f''(x)=-\frac{۱}{۴}x^{\frac{-۳}{۲}}+\frac{۳}{۴}x^{\frac{-۵}{۲}}$$

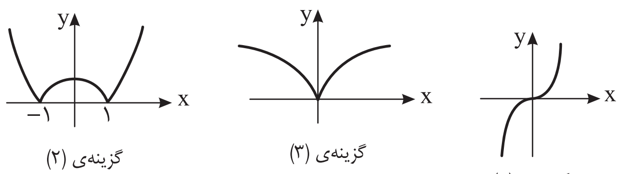
$$\Rightarrow f''(x)=\frac{-۱}{۴\sqrt{x^{۳}}}+\frac{۳}{۴\sqrt{x^{۵}}}=\frac{-x+۳}{۴\sqrt{x^{۵}}}\xrightarrow{f''(x)=۰} x=۳\Rightarrow f(۳)=\frac{۴}{\sqrt{۳}}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

C **۱۳۹۷- گزینه‌ی ۱** از تابع مشتق می گیریم:

$$f'(x)=\frac{-۲x}{(x^{۲}+۱)^{۲}}\Rightarrow f''(x)=-۲\times\frac{(x^{۲}+۱)^{۲}-۲(x^{۲}+۱)\times۲x\times x}{(x^{۲}+۱)^{۴}}=-۲\times\frac{۱-۳x^{۲}}{(x^{۲}+۱)^{۳}}\xrightarrow{f''(x)=۰} x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

دو نقطه به طول‌های $x_{۱}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و $x_{۲}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ نقاط عطف تابع‌اند. چون با یک تابع زوج مواجهیم، عرض این نقاط یکسان است و فاصله‌ی نقاط متناظر روی نمودار، همان فاصله‌ی بین طول‌های دو نقطه است، یعنی: $\left|\frac{\sqrt{۳}}{۳}-(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})\right|=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$.

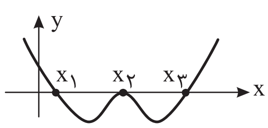
B **۱۳۹۸- گزینه‌ی ۴** تابع گزینه‌ی (۱) یک تابع هموگرافیک است و به وضوح نقطه‌ی عطف ندارد. نمودار توابع دیگر را رسم می‌کنیم:



گزینه‌ی (۲) گزینه‌ی (۳) گزینه‌ی (۴)

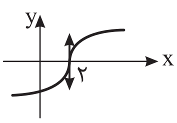
تابع گزینه‌ی (۴) در $x=۰$ خط مماس افقی دارد که از نمودار تابع عبور می‌کند.

A **۱۳۹۹- گزینه‌ی ۲** از سه ریشه‌ی تابع $f''$، در همسایگی $x_{۱}$ و $x_{۳}$ علامت $f''$ تغییر می‌کند، پس با دو نقطه‌ی عطف مواجهیم.




B **۱۴۰۰- گزینه‌ی ۳** گزینه‌ی (۳) بیانگر یک قضیه است. مثال نقض گزینه‌های (۲) و (۴) نقطه‌ی عطف با خط مماس عمودی است. در این نقطه‌ی عطف، $f'(x)$ وجود ندارد، بنابراین در دامنه‌ی $f'$ نیز حضور ندارد و نمی‌تواند نقطه‌ی بحرانی $f'$ باشد. گزینه‌ی (۱) نیز نادرست است و مثال نقض آن یک نقطه‌ی عطف با خط مماس مایل است. در این نقطه $f'(x)$ وجود دارد و مقداری غیر صفر دارد، پس نقطه‌ی بحرانی $f$ نیست.

B **۱۴۰۱- گزینه‌ی ۱** با توجه به نمودار تابع (یا به‌دست آوردن مشتق آن!)، در نقطه‌ی $x=۲$ با یک نقطه‌ی عطف با خط مماس عمودی مواجهیم. یعنی معادله‌ی خط مماس $x=۲$ می‌شود.



**۱۴۰۲- گزینه‌ی ۳** **راه‌حل اول:** ضابطه‌ی تابع را با $y=f(x)$ نشان می‌دهیم. داریم: $۲a+\sqrt[۳]{۲+b}=-۲$، همچنین با مشتق‌گیری داریم:

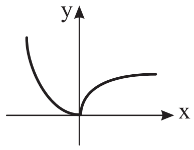
$$f'(x)=a+\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+b)^{۲}}}\Rightarrow f''(x)=-\frac{۲}{۹\sqrt[۳]{(x+b)^{۵}}}$$

$f''(x)$ در $x=-b$ تغییر علامت می‌دهد، بنابراین $-b=۲$، یعنی $b=-۲$ و از رابطه‌ی اول داریم: $a=-۱$، پس $a+b=-۳$.

**راه‌حل دوم:** چون جمله‌ی $ax$ در دوبار مشتق‌گیری حذف می‌شود، وضعیت تقعر و نقاط عطف این تابع و تابع $y=\sqrt[۳]{x+b}$ یکسان است.

می‌دانیم تابع جدید در نقطه‌ی برخورد آن با محور $x$ها (یعنی $x=-b$) نقطه‌ی عطف دارد، پس $b=-۲$ و با جای‌گذاری $a$ نیز به‌دست می‌آید.

**۱۴۰۳- گزینه‌ی ۴** طبق فرض $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x>۰\\ x^{۲} & x\le ۰\end{cases}$ (دقت کنید که $\sqrt{x^{۲}}=|x|$)، بنابراین نمودار تابع




شبیه شکل مقابل می‌شود که در نقطه‌ی $x=۰$ جهت تقعر عوض می‌شود، ولی نقطه‌ی عطف نیست.

**۱۴۰۴- گزینه‌ی ۱** چون سهمی‌های $y=x^{۲}+a$ و $y=-x^{۲}+bx$ نقطه‌ی عطف ندارند، نقطه‌ی عطف تابع همان نقطه‌ی مرزی $x=۱$ است.

بنابراین باید تابع در $x=۱$ پیوسته باشد، مشتق‌پذیر باشد و تقعر آن عوض شود. داریم:

$$f(x)=\begin{cases}x^{۲}+a & x\le ۱\\ -x^{۲}+bx & x>۱\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲x & x<۱\\ -۲x+b & x>۱\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}۲ & x<۱\\ -۲ & x>۱\end{cases}$$

$x=۱$ شرط مشتق‌پذیری در: $۲=-۲+b\Rightarrow b=۴$

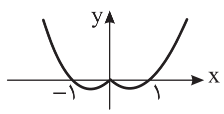
$x=۱$ شرط پیوستگی در: $۱+a=-۱+b\xrightarrow{b=۴}a=۲$

**۱۴۰۵- گزینه‌ی ۴** **راه‌حل اول:** مشتق اول و دوم تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=\begin{cases}x^{۲}-x & x\ge ۰\\ x^{۲}+x & x<۰\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x>۰\\ ۲x+۱ & x<۰\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}۲ & x>۰\\ ۲ & x<۰\end{cases}$$

تقعر تابع در هیچ نقطه‌ای عوض نمی‌شود و نقطه‌ی عطف نداریم.

**راه‌حل دوم:** با توجه به آن‌که $f(x)=\begin{cases}x(x-۱) & x\ge ۰\\ x(x+۱) & x<۰\end{cases}$ نمودار تابع مانند شکل مقابل می‌شود که به وضوح




نقطه‌ی عطفی ندارد.

**۱۴۰۶- گزینه‌ی ۳** **راه‌حل اول:** ضابطه‌ی تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و مشتق می‌گیریم:

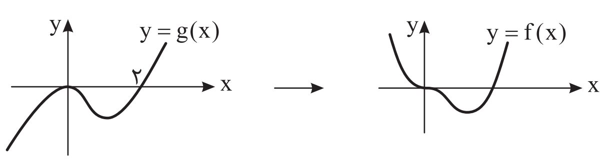
$$f(x)=\begin{cases}x^{۳}-۲x^{۲} & x\ge ۰\\ -x^{۳}+۲x^{۲} & x<۰\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۳x^{۲}-۴x & x\ge ۰\\ -۳x^{۲}+۴x & x<۰\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}۶x-۴ & x>۰\\ -۶x+۴ & x<۰\end{cases}$$

در محدوده‌ی $x>۰$ در $x=\frac{۲}{۳}$، $f''(x)$ صفر می‌شود و علامت آن در همسایگی $x=\frac{۲}{۳}$ تغییر می‌کند. همچنین در همسایگی $x=۰$ علامت

$f''$ تغییر می‌کند. در تمام $\mathbb{R}$ نیز $f'(x)$ وجود دارد، پس دو نقطه‌ی $x=۰$ و $x=\frac{۲}{۳}$ نقاط عطف تابع‌اند.

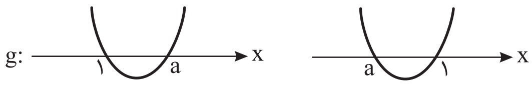
**راه‌حل دوم:** تابع $g(x)=x(x^{۲}-۲x)=x^{۳}-۲x^{۲}$ دارای نقطه‌ی عطفی به طول $x=\frac{۲}{۳}$ است.

به این ترتیب نمودار $y=g(x)$ و $y=f(x)$ مانند شکل‌های مقابل می‌شود. نقطه‌ی $x=\frac{۲}{۳}$ کماکان برای $y=f(x)$ نقطه‌ی عطف است و

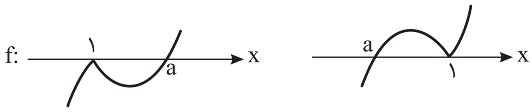



در $x=۰$ تابع $f$ خط مماس افقی دارد که از نمودار آن عبور می‌کند.

B **۱۴۰۷- گزینه‌ی ۲** اگر $a\neq ۱$، تابع $g(x)=(x-a)(x-۱)$ یک سهمی با تقعر روبه بالاست که نمودار آن به یکی از دو صورت زیر می‌شود:




برای تشکیل نمودار $f$ باید نمودار $g$ در محدوده‌ی $x\leq ۱$ نسبت به محور $x$ قرینه شود که باتوجه به شکل نقطه‌ی عطف نخواهد داشت.




ولی در حالت $a=۱$، با رسم نمودار $f(x)=\begin{cases}(x-۱)^۲ & x\geq ۱\\ -(x-۱)^۲ & x<۱\end{cases}$ مشخص می‌شود که تابع در $x=۱$ نقطه‌ی عطفی روی محور $x$ها دارد.

C **۱۴۰۸- گزینه‌ی ۳** اولاً باید $f(۱)=۳$ و ثانیاً $f''(۱)=۰$. داریم:

$$f'(x)=\frac{a(x^۲+۱)-۲x(ax+b)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{-ax^۲-۲bx+a}{(x^۲+۱)^۲}\Rightarrow f''(x)=\frac{(-۲ax-۲b)(x^۲+۱)^۲-۲(x^۲+۱)\times ۲x(-ax^۲-۲bx+a)}{(x^۲+۱)^۴}$$

$$=\frac{(-۲ax-۲b)(x^۲+۱)-۴x(-ax^۲-۲bx+a)}{(x^۲+۱)^۳}\xrightarrow{f''(۱)=۰}(-۲a-۲b)\times ۲=۴(-a-۲b+a)\Rightarrow a=b$$

از شرط $f(۱)=۳$ نیز نتیجه می‌گیریم: $a+b=۶$، بنابراین: $a=b=۳$.

A **۱۴۰۹- گزینه‌ی ۱** نمودار توابع اصلی مثلثاتی در نقاط برخورد با محور $x$ها، نقطه‌ی عطف دارند. پس در نقاطی که $\cot x=۰$ با نقطه‌ی عطف تابع $f$ مواجهیم. حال داریم:

$f'(x)=-(۱+\cot^۲ x)\xrightarrow{\cot x=۰} f'(x)=-۱$ شیب خط مماس در نقطه‌ی عطف

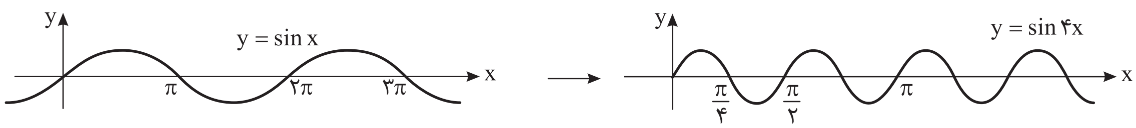
B **۱۴۱۰- گزینه‌ی ۲** تابع $g(x)=\cot^{-۱} x$ در $x=۰$ نقطه‌ی عطف دارد. نمودار تابع $f$ از انتقال افقی نمودار $g$ به اندازه‌ی ۱ واحد به راست، دو برابر کردن عرض‌ها و سپس انتقال عمودی حاصل می‌شود. پس نقطه‌ی عطف تابع $f$ نیز در $x=۱$ است.

$f(۱)=۲\cot^{-۱}(۰)+\frac{\pi}{۳}=۲\times\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳}=\frac{۴\pi}{۳}\Rightarrow$ مختصات نقطه‌ی عطف $=(۱,\frac{۴\pi}{۳})$

C **۱۴۱۱- گزینه‌ی ۲** ضابطه‌ی تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=\sin x\cos x(\cos^۲ x-\sin^۲ x)=\frac{۱}{۲}\sin ۲x\times\cos ۲x=\frac{۱}{۴}\sin ۴x$$

تابع بالا در نقاط برخورد نمودار با محور $x$ها نقطه‌ی عطف دارد که فاصله‌ی هر دوتای متوالی آن‌ها برابر است با: $\frac{\pi}{۴}$




C **۱۴۱۲- گزینه‌ی ۳** از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=۱+\sin x\Rightarrow f''(x)=\cos x\xrightarrow{f''(x)=۰}x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\xrightarrow{x\in(۰,۶\pi)}x\in\{\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲},\dots,\frac{۱۱\pi}{۲}\}$$

در همسایگی هر یک از نقاط بالا، علامت $f''(x)$ تغییر می‌کند، پس با ۶ نقطه‌ی عطف مواجه‌ایم.

B **۱۴۱۳- گزینه‌ی ۴** مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

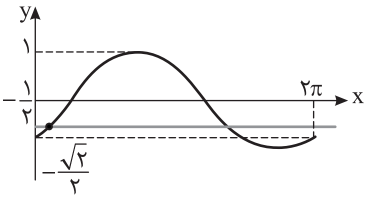
$$f'(x)=x+\cos x\Rightarrow f''(x)=۱-\sin x$$

با توجه به آن‌که همواره $\sin x\leq ۱$، داریم $f''(x)\geq ۰$. پس هیچ‌گاه $f''(x)$ تغییر علامت نمی‌دهد و نقطه‌ی عطف نداریم.

C **۱۴۱۴- گزینه‌ی ۳** ضابطه‌ی تابع را ساده‌تر می‌کنیم و از آن مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=x^{2}-2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=x^{2}-4\sin(x-\frac{\pi}{4})\Rightarrow f'(x)=2x-4\cos(x-\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow f''(x)=2+4\sin(x-\frac{\pi}{4})\xrightarrow{f''(x)=0}\sin(x-\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$$




با توجه به شکل روبه‌رو، خط $y=-\frac{1}{2}$ در بازه‌ی $[0,2\pi]$ در دو نقطه نمودار $y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$ را قطع می‌کند و در همسایگی هر دو نقطه مقدار $f''(x)$ تغییر علامت می‌دهد. پس با دو نقطه‌ی عطف مواجهیم.

C **۱۴۱۵- گزینه‌ی ۴** ضابطه‌ی مشتق دوم را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=x^{3}+x-\tan^{-1}x\Rightarrow f''(x)=3x^{2}+1-\frac{1}{1+x^{2}}\Rightarrow f''(x)=\frac{(3x^{2}+1)(x^{2}+1)-1}{1+x^{2}}=\frac{x^{2}(3x^{2}+4)}{1+x^{2}}$$

همواره $f''(x)\geq 0$، پس نقطه‌ی عطف نداریم.

B **۱۴۱۶- گزینه‌ی ۲** باید مشتق دوم تابع را تعیین علامت کنیم:

$$f(x)=\frac{x^{2}+9}{x^{2}+12}\ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{12-9}{(x^{2}+12)^{2}}\times 2x=\frac{6x}{(x^{2}+12)^{2}}\ \Rightarrow\ f''(x)=\frac{6(x^{2}+12)^{2}-2(x^{2}+12)2x\times 6x}{(x^{2}+12)^{4}}=\frac{18(4-x^{2})}{(x^{2}+12)^{3}}$$

برای آن‌که $f''(x)>0$، باید $4-x^{2}>0$، یعنی $-2<x<2$. بنابراین بیش‌ترین مقدار $b-a$ برابر است با: $2-(-2)=4$

B **۱۴۱۷- گزینه‌ی ۳** از تابع دو بار مشتق می‌گیریم.

$$f(x)=\begin{cases}x^{3}-3x^{2} & x\geq -1\\ -13-\frac{9}{x} & x\leq -1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}3x^{2}-6x & x\geq -1\\ \frac{9}{x^{2}} & x\leq -1\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}6x-6 & x>-1\\ -\frac{18}{x^{3}} & x<-1\end{cases}$$

توابع f و $f'$ در $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند. تابع $f''$ در دو نقطه تغییر علامت می‌دهد: $x=1$ و $x=-1$ (در اولی ضابطه‌ی اول تابع $f''$ صفر می‌شود و در همسایگی راست نقطه‌ی دوم علامت $f''$ منفی و در همسایگی چپ، علامت آن مثبت است). چون در هر دو نقطه $f'$ وجود دارد، پس دو نقطه‌ی عطف داریم.

B **۱۴۱۸- گزینه‌ی ۴** باید نقاطی را بیابیم که $f''(x)<0$ . داریم:

$$f'(x)=(2x+2)e^{-x}-(x^{2}+2x+2)e^{-x}=-x^{2}e^{-x}\Rightarrow f''(x)=-2xe^{-x}+x^{2}e^{-x}=x(x-2)e^{-x}$$

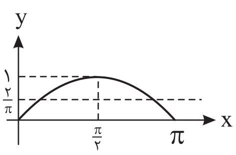
با توجه به آن‌که همواره $e^{-x}>0$ ، برای آن‌که $f''(x)<0$ ، باید $x(x-2)<0$ ، در نتیجه $0<x<2$ .

B **۱۴۱۹- گزینه‌ی ۱** مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم.

$$f(x)=-\frac{2}{x^{2}+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{4x}{(x^{2}+3)^{2}}\Rightarrow f''(x)=\frac{4(x^{2}+3)^{2}-2(x^{2}+3)\times 2x\times 4x}{(x^{2}+3)^{4}}=\frac{12(1-x^{2})}{(x^{2}+3)^{3}}$$

به ازای $-1<x<1$ داریم $f''(x)>0$، پس تقعر منحنی رو به بالا است.

B **۱۴۲۰- گزینه‌ی ۴** باید علامت $y''$ را تعیین کنیم:




$$y'=\cos x+\frac{2x}{\pi}\Rightarrow y''=-\sin x+\frac{2}{\pi}$$

با توجه به نمودار $y=\sin x$، در بازه‌ی $(0,\frac{\pi}{2})$ ابتدا $\sin x<\frac{2}{\pi}$ (پس $y''>0$) و سپس $\sin x>\frac{2}{\pi}$ (پس $y''<0$)، بنابراین تقعر تابع ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین است.

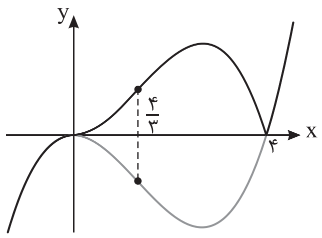
(B) **۱۴۲۱- گزینه‌ی ۴** به ازای تمام مقادیر x، باید مشتق دوم تابع، مثبت باشد:

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+3x \Rightarrow f''(x)=12x^2+6ax+3$$

برای این‌که این عبارت درجه‌ی دو، همواره مثبت باشد، داریم:

$$\Delta=36a^2-144=36(a^2-4)<0 \Rightarrow -2<a<2$$

(B) **۱۴۲۲- گزینه‌ی ۴** بهتر است به کمک نمودار تابع $f(x)=x(x^2-4x)$، نمودار تابع $y=x|x^2-4x|$ را رسم کنیم:




$$f(x)=x(x^2-4x)=x^2(x-4)=x^3-4x^2$$

دقت شود نقطه‌ی عطف تابع f، نقطه‌ای به طول $x=\frac{4}{3}$ است. برای رسم نمودار باید نمودار f را در فاصله‌ی $[0,4]$ نسبت به محور xها قرینه کنیم.

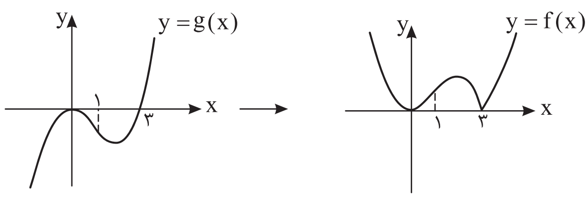
این نمودار در $x=0$ و $x=\frac{4}{3}$ دارای نقطه‌ی عطف است. در $x=4$ اگرچه تقعر نمودار عوض می‌شود ولی این نقطه به دلیل عدم وجود خط مماس بر نمودار، جزء نقاط عطف محسوب نمی‌شود.

(B) **۱۴۲۳- گزینه‌ی ۳** **راه‌حل اول**: مشتق دوم تابع را تشکیل می‌دهیم و محدوده‌ای را تعیین می‌کنیم که علامت آن منفی است.

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2 & x\geq 3 \\ -x^3+3x^2 & x\leq 3\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 3x^2-6x & x>3 \\ -3x^2+6x & x<3\end{cases} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases} 6x-6 & x>3 \\ -6x+6 & x<3\end{cases}$$

$$f''(x)<0 \Rightarrow \begin{cases} 6x-6<0 \Rightarrow x<1 \xrightarrow{x>3} \text{غیرممکن} \\ -6x+6<0 \Rightarrow x>1 \xrightarrow{x<3} 1<x<3 \end{cases} \Rightarrow \max(b-a)=3-1=2$$

**راه‌حل دوم**: اگر $g(x)=x^3-3x^2$، برای رسم نمودار تابع مورد نظر کافی است نمودار g را در محدوده‌ی $x<3$ نسبت به محور xها قرینه کنیم.




با توجه به آن‌که نقطه‌ی عطف تابع g نقطه‌ای $x=1$ است، پس در بازه‌ی $(1,+\infty)$ تقعر نمودار تابع g رو به بالا است. به این ترتیب در بازه‌ی $(1,3)$ تقعر نمودار تابع f رو به پایین می‌شود.

(B) **۱۴۲۴- گزینه‌ی ۱** مشتق اول و دوم تابع را تشکیل می‌دهیم. باید محدوده‌ای را تعیین کنیم که $f'(x)>0$ و $f''(x)<0$.

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2} \xrightarrow[x^2>0]{f'(x)>0} x^2-1>0 \Rightarrow x>1 \ \text{یا}\ x<-1$$

$$f'(x)=1-x^{-2} \Rightarrow f''(x)=\frac{2}{x^3} \xrightarrow{f''(x)<0} x<0$$

اشتراک دو محدوده‌ی به‌دست آمده $x<-1$ می‌شود.

(A) **۱۴۲۵- گزینه‌ی ۳** مشتق دوم تابع را تشکیل می‌دهیم.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}-\frac{1}{2}x^2 & x<1 \\ \frac{1}{x} & x\geq 1\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -x & x<1 \\ -\frac{1}{x^2} & x>1\end{cases} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases} -1 & x<1 \\ \frac{2}{x^3} & x>1\end{cases}$$

علامت $f''(x)$ در همسایگی $x=1$ تغییر می‌کند و داریم $f'_+(1)=f'_-(1)=-1$، پس نمودار تابع در این نقطه مماس دارد. پس $x=1$ طول نقطه‌ی عطف تابع است.

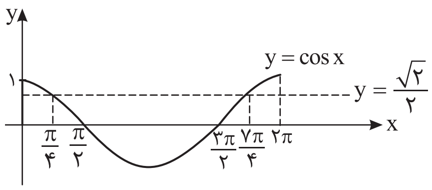
(B) **۱۴۲۶- گزینه‌ی ۳** باید نقاطی را بیابیم که $y''>0$ . داریم:

$$y'=\ln x+(x-1)\times\frac{1}{x}=\ln x+1-\frac{1}{x}\Rightarrow y''=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x+1}{x^2}$$

با توجه به همواره مثبت بودن $x^2$، برای آن‌که $y''>0$، باید $x+1>0$ ، در نتیجه $x>-1$ . ولی دقت کنید که دامنه‌ی تابع $x>0$ است، بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

(B) **۱۴۲۷- گزینه‌ی ۳** باید نقاطی را بیابیم که $f''(x)>0$ . داریم:

$$f'(x)=2x-2\sqrt{2}\sin x\Rightarrow f''(x)=2-2\sqrt{2}\cos x\xrightarrow{f''(x)>0}2\sqrt{2}\cos x<2\Rightarrow\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$$



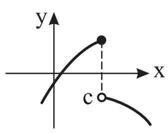

با توجه به نمودار $y=\cos x$ در بازه‌ی $(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$ این شرط برقرار است. (البته در بازه‌های گزینه‌های (۲) و (۴) نیز شرط مورد نظر برقرار است، ولی بزرگ‌ترین بازه‌ی موجود در گزینه‌ها همان بازه‌ی گزینه‌ی (۳) است.)

(B) **۱۴۲۸- گزینه‌ی ۴** $y''$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{3x^2}{2x^2+1}\Rightarrow y'=\frac{6x(2x^2+1)-4x(3x^2)}{(2x^2+1)^2}=\frac{6x}{(2x^2+1)^2}\Rightarrow y''=\frac{6(2x^2+1)^2-2(2x^2+1)\times 24x^2}{(2x^2+1)^4}=\frac{6(-6x^2+1)}{(2x^2+1)^3}$$

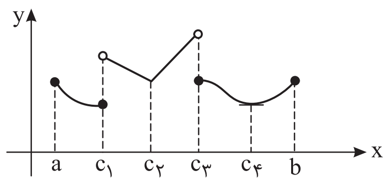
$y''$ دو ریشه دارد که در همسایگی هر دو، علامت آن تغییر می‌کند، بنابراین دو نقطه‌ی عطف داریم.

## ۴-۶ : اکسترمم‌های موضعی (نسبی) و آنالیز نقطه‌ای



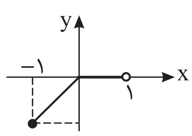

(A) **۱۴۲۹- گزینه‌ی ۴** برای آن‌که $x=c$ نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع f باشد، لزومی به پیوستگی و مشـتق‌پذیری در این نقطه نیسـت. مثلاً در شکل مقابل تابع در $x=c$ ماکسیمم نسبی دارد، ولی پیوسته و مشتق‌پذیر نیست. پس هیچ‌کدام از شرایط (الف)، (ب) و (پ) لزوماً برقرار نیستند.

(A) **۱۴۳۰- گزینه‌ی ۲** گزینه‌ی (۲) بیان نکات درس اسـت. اما گزینه‌های دیگر: نقاط بحرانی، نقاطی از دامنه هسـتند که در آن‌ها مقدار مشتق یا صفر اسـت، یا وجود ندارد، بنابراین گزینه‌ی (۳) نادرسـت است. هر نقطه‌ی بحرانی، نقطه‌ی اکسترمم نسبی نیست، مانند $x=0$ در $f(x)=x^3$، بنابراین گزینه‌ی (۱) نادرست است. در هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی، به شرط مشتق‌پذیری تابع داریم: $f'(x)=0$، ولی اگر تابع مشتق‌پذیر نباشد گزینه‌ی (۴) درست نیست.




(A) **۱۴۳۱- گزینه‌ی ۱** در شـکل مقابل نقاط بحرانی را با $c_1$ تا $c_4$ نشـان داده‌ایم. در نقاط $c_1$، $c_2$ و $c_4$ با می‌نیمم نسبی مواجهیم. نقطه‌ی $c_3$ اکسترمم نسبی نیست. در ضمن نقاط a و b نیز ماکسیمم نسبی هستند.

(A) **۱۴۳۲- گزینه‌ی ۳** در محدوده‌ی $0<x<1$ داریـم: $f(x)=2^0=1$، یعنی در این محدوده با یک تابع ثابت مواجهیم. بنابراین هر نقطه‌ای هم بحرانی اسـت (زیرا $f'(x)=0$)، هم ماکسیمم نسبی است و هم می‌نیمم نسبی.




(A) **۱۴۳۳- گزینه‌ی ۲** نمودار تابع را در همسـایگی $x=0$ رسم می‌کنیم. برای $0\le x<1$ داریم: $y=0$ و برای $-1\le x<0$ داریم $y=-|x|$ . طبق نمودار $x=0$ نقطه‌ی ماکسـیمم نسبی تابع است. از طرفی چون تابع برای $x\ge 1$ مقادیر مثبت اختیار می‌کند، نقطه‌ی ماکسیمم مطلق نیست.