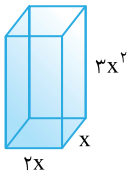




عبارت‌های جبری و مفهوم اتحاد

- ۱- کدام یک از عبارت‌های زیر، یک جمله‌ای است؟
 الف) $3\sqrt{x}$ ب) $\sqrt{3x}$ پ) $-5x^2yz^5$ ت) 2^x
- ۲- کدام یک از «یک جمله‌ای» های زیر با بقیه «متشابه» نیست؟
 الف) $5x^2y$ ب) $-5xy^2$ پ) $\frac{\sqrt{2}}{3}x^2y$
- ۳- جدول زیر را کامل کنید.
- | یک جمله‌ای | متغیرها | درجه نسبت به X | درجه نسبت به Z | درجه نسبت به همه‌ی متغیرها |
|--------------------|---------|----------------|----------------|----------------------------|
| $-\sqrt{3}x^2az^5$ | | | | |
| $12x^5t^2$ | | | | |
| $(2x^2)(5xz)$ | | | | |
- ۴- اگر یک جمله‌ای‌های $3x^2y^{m-1}z^{p-2}$ و $-9x^{n+2}y^4z^{p-2}$ متشابه باشند، مقادیر m ، n و p را بیابید.
- ۵- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.
 الف) در یک جمله‌ای $3xy^2z^5$ ، ضریب عددی برابر ۳ است.
 ب) در یک جمله‌ای $-2x^3y$ ، درجه نسبت به متغیر x برابر ۴ است.
 پ) در یک جمله‌ای $\sqrt{3}z^4yt^7$ ، درجه نسبت به متغیرهای Z و Y برابر ۵ است.
 ت) یک جمله‌ای‌های $17xt^2z$ و $-7t^2xz$ متشابه هستند.
 ث) یک جمله‌ای‌های $(-3t^4)(2xy^2)$ و xy^2t^4 متشابه نیستند.
 ج) ضریب عددی یک جمله‌ای $(-5t)(-3x^3)(xy^2)$ ، برابر ۵ است.
- ۶- اگر در یک جمله‌ای $(a+2)x^{b+3}y^7z^4$ ، ضریب عددی ۸ و درجه نسبت به x ، ۵ باشد، مقادیر a و b را بیابید.
- ۷- در یک جمله‌ای $3ax^2y^{a+2}z^{a-5}$ درجه نسبت به متغیرهای x ، y و Z برابر ۷ است. ضریب عددی این یک جمله‌ای را بیابید.
- ۸- اگر در یک جمله‌ای $15x^a y^{2-a} z^{3a+1}$ ، درجه نسبت به متغیرهای X و Y یکسان باشد، درجه‌ی این یک جمله‌ای نسبت به متغیر Z چیست؟
- ۹- حجم مکعب مستطیل روبه‌رو را به صورت یک جمله‌ای بنویسید و ضریب عددی آن را تعیین کنید.



۱۰- مانند نمونه، حاصل عبارات‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases} 2 \times (-4x \times 7x^2) = 2 \times (-28x^3) = -56x^3 \\ \left(\frac{2}{3}x^2y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times (x^2)^3 \times y^3 = \frac{8}{27}x^6y^3 \end{cases}$$

الف) $(-3x^3)^2 \left(\frac{1}{3}x^2\right)^3 =$

ب) $\left(\frac{1}{4}a^2b\right)(ab)\left(-\frac{2}{5}a^2c^5\right) =$

پ) $(2x^2y)(3x^2y^3) + xy^3(-5x^3y) =$

۱۱- کدام یک از عبارات‌های زیر چندجمله‌ای است؟

الف) $x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ ب) $\sqrt{x} + \frac{y}{x^2} + 2$ پ) $2x^2 + zx + t$

۱۲- با توجه به سه جمله‌ای $5x^2y^5z - 7x^4y^3z^4 + z^{15}$ ، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

الف) درجه نسبت به متغیر x چقدر است؟ ب) درجه نسبت به متغیرهای x ، y و z چقدر است؟

۱۳- چندجمله‌ای $8x^5 - 3x^2 - x^3 + 7x + 5x^4 - 19$ را نسبت به توان‌های نزولی (از بزرگ به کوچک) متغیر x مرتب کنید.

۱۴- چندجمله‌ای $x^3y + 2x^2y^3 - 3y + x^5$ را نسبت به توان‌های نزولی (از بزرگ به کوچک) متغیر y مرتب کنید.

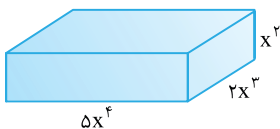
۱۵- عبارات‌های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $-5a^2 - 3ax + x^2 - [4a^2 + 5ax - (3a^2 - 8ax)]$

ب) $(5x^4 - 4x)(x^3 - 1)$

پ) $(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$

۱۶- مساحت کل مکعب مستطیل مقابل را به صورت چندجمله‌ای بنویسید.



۱۷- مقدار عددی چندجمله‌ای $x^2 - x^{19} + x^{18} - x^{17} + \dots + x^2 - x$ را به ازای $x = -1$ و $x = 1$ بیابید.

۱۸- مقدار عددی چندجمله‌ای $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$ را به ازای $x = -4$ ، $y = 3$ و $z = 1$ بیابید.

۱۹- چندجمله‌ای $(x^3 + 5)(3x^2 - 2)(2x + 1)$ را در نظر گرفته، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:

الف) درجه‌ی این چندجمله‌ای نسبت به متغیر x را بیابید.

ب) مجموع ضرایب این چندجمله‌ای را بیابید.

۲۰- در چندجمله‌ای $(x^4 - 4)(x^3 + 3)(x^2 + 2)(x + 1) + 4$ جمله‌ی ثابت (جمله‌ی فاقد x) را بیابید.

۲۱- درجه‌ی چندجمله‌ای $(2x^4 - 1)(3x + 1)(x^3 - x^2 - 1)(6x^2 + x + 1)$ نسبت به متغیر x چیست؟

۲۲- چندجمله‌ای‌های زیر را به شکل استاندارد (از درجه‌ی بزرگ به کوچک) بنویسید.

الف) $(2x + 1)(4x^2 + 2x + 1) - (2x - 1)(4x^2 - 2x - 1)$

ب) $(x^2 - x - 2)(x^2 + 3x + 1) - x^2(x^2 + 1) - x(x^3 + x + 4)$

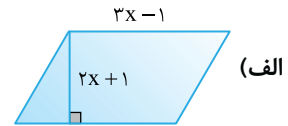
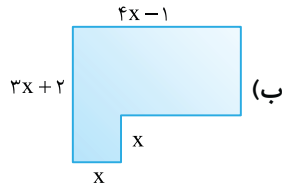


۲۳- چندجمله‌ای $(x+5)(x+4)(x+3)(x+2)$ را در نظر گرفته و بدون انجام عمل ضرب به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:

(الف) ضریب x^3 چقدر است؟ (ب) ضریب x چقدر است؟

۲۴- با توجه به تساوی $x^5 + x^3(x-1) + A = 3x(x^2 - x + 2) + A$ چندجمله‌ای A را بیابید.

۲۵- مساحت شکل‌های زیر را به صورت چندجمله‌ای استاندارد بر حسب متغیر x بنویسید.



۲۶- کدام یک از تساوی زیر یک «اتحاد» است؟

(الف) $x^2(x-3) = x^3 - 3x$ (ب) $x^3 + 4x^3 = 5x^6$ (پ) $(x+5) + x = 2x + 5$

۲۷- اگر تساوی $(2x+1)(3x-1) = 6x^2 + ax + b$ یک اتحاد باشد، مقدارهای a و b را بیابید.

۲۸- اگر تساوی $(x+1)(x+2)(x+a) = x^3 + bx^2 + cx + 6$ یک اتحاد باشد، مقدارهای a ، b و c را بیابید.

اتحاد مربع دوجمله‌ای

۲۹- در هر یک از موارد زیر جاهای خالی را پر کنید.

(الف) $(a+4)^2 = \dots + \dots + \dots$

(ب) $(5x-2)^2 = \dots - \dots + \dots$

(پ) $(3m - \dots)^2 = \dots - \dots + 25n^2$

(ت) $(\dots + 3b^2)^2 = 4a^2 + \dots + \dots$

۳۰- حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای ساده کنید.

(الف) $(2x+1)^2$

(ب) $(4a+3b)^2$

(پ) $(x^2 - \frac{1}{4})^2$

(ت) $(2xy - \frac{1}{4}x^3)^2$

۳۱- حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

(الف) $(a+b)^2 + (a-b)^2 - a^2$

(ب) $(2a-b^2)^2 - (2a+b^2)^2$

۳۲- حاصل عبارت $A = (a+b+c)^2 + (a-b-c)^2 + 2(a+b+c)(a-b-c)$ را بیابید.

۳۳- حاصل هر یک از محاسبات زیر را به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای محاسبه کنید.

(الف) 101^2

(ب) 199^2

(پ) $1015^2 - 1000^2 - 15^2$

۳۴- مقدار عددی عبارت $A = \frac{734^2 + 34^2 - 68 \times 734}{321^2 + 29^2 + 58 \times 321}$ را بیابید.

۳۵- مقدار عددی عبارت $B = 78^2 + 22^2 + 123^2 + 23^2 + 44 \times 78 - 46 \times 123$ را بیابید.

۳۶- اگر عبارت $x^2 + kx + 36$ مربع دوجمله‌ای باشد، مقدار k را بیابید. چند مقدار برای k وجود دارد؟

۳۷- اگر عبارت $4x^2 - 11x + k^2$ مربع دوجمله‌ای باشد، مقدار k را بیابید.

۳۸- با فرض $a + \frac{1}{a} = 3$ ، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

(الف) $a^2 + \frac{1}{a^2}$

(ب) $a^4 + \frac{1}{a^4}$

(پ) $a^2 - 3a$

۳۹- با فرض $a + \frac{1}{a} = 2$ ، حاصل عبارات‌های زیر را بیابید.

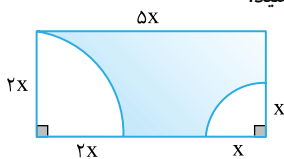
الف) $a + \frac{3}{a}$ ب) $2a^6 + \frac{3}{a^5}$

۴۰- با فرض $x + \frac{1}{x} = 4$ ، حاصل $|x - \frac{1}{x}|$ را بیابید.

۴۱- چندجمله‌ای‌های زیر را به کمک فاکتورگیری تجزیه کنید.
پ) $a^2(a+2b) + 2b^2(a+2b)$

الف) $x^3 - 2x^2$ ب) $4y^4x + 6x^3y$

۴۲- با توجه به شکل روبه‌رو مساحت قسمت سایه‌زده شده را به صورت یک عبارت جبری تجزیه شده بنویسید.



۴۳- عبارات‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $ab + ay + xb + xy$ ب) $a^5x - yb^5 - a^5y + b^5x$

۴۴- عبارات‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^3 + 4x^2 + 4x$ ب) $9y^5 + 6y^4 + y^3$
پ) $(a+b)^2 + (b+c)^2 + 2(a+b)(b+c)$ ت) $(a+b-c)^2 + b^2 - 2b(a+b-c)$

۴۵- درباره‌ی عددهای حقیقی a و b می‌دانیم $(a-3)^2 + (b+5)^2 = 0$ ، مقادیر a و b را بیابید.

۴۶- درباره‌ی عددهای حقیقی a و b می‌دانیم $a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2 = 0$ ، مقادیر a و b را بیابید.

۴۷- درباره‌ی عددهای حقیقی a ، b و c می‌دانیم $a^2 + b^2 + c^2 + 2a + 4b + 6c + 14 = 0$ ، مقادیر a ، b و c را بیابید.

۴۸- حاصل عبارات‌های زیر را بیابید.

الف) $(a+b-3c)^2$ ب) $(a+b^2+c^3)^2$

اتحاد مزدوج

۴۹- حاصل عبارات‌های زیر را به کمک اتحاد مزدوج ساده کنید.

الف) $(x+3)(x-3)$ ب) $(2x+y^5)(2x-y^5)$
پ) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$ ت) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$
ث) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ ج) $(x^3+x+1)(x^3+x-1)+1$

۵۰- در هر یک از موارد زیر، جاهای خالی را پر کنید.

الف) $(2x + \dots)(\dots - 3y) = 4x^2 - 9y^2$
ب) $(3x^2y^3 + \dots)(3x^2y^3 - \dots) = \dots - 36z^6$
پ) $(\dots + \dots)(\dots - 5ab^3) = \frac{11}{4}x^2 - \dots$
ت) $10^3 \times 9^7 = (100 + \dots)(100 - \dots) = 10000 - \dots = \dots$



فصل پنجم عبارت‌های جبری

یاسخ کار در مدرسه

عبارت‌های (ب) و (پ) یک جمله‌ای هستند.
عبارت (ب) با بقیه متشابه نیست.

• پاسخ ۱

• پاسخ ۲

• پاسخ ۳

یک جمله‌ای	متغیرها	درجه نسبت به X	درجه نسبت به Z	درجه نسبت به همه‌ی متغیرها
$-\sqrt{3}x^2az^5$	x, a, z	۲	۵	۸
$12x^5t^2$	x, t	۵	۰	۷
$(2x^2)(5xz)$	x, z	۳	۱	۴

• پاسخ ۴

• پاسخ ۵

• پاسخ ۶

• پاسخ ۷

• پاسخ ۸

• پاسخ ۹

• پاسخ ۱۰

• پاسخ ۱۱

• پاسخ ۱۲

• پاسخ ۱۳

• پاسخ ۱۴

• پاسخ ۱۵

برای متشابه بودن یک جمله‌ای‌ها باید عبارت‌های حرفی و توان آن‌ها یکسان باشد، پس می‌توان نوشت:
 $n+2=2 \Rightarrow n=0$, $m-1=4 \Rightarrow m=5$, $p-2=0 \Rightarrow p=2$

موارد (الف)، (پ) و (ت) درست و سایر موارد نادرست هستند.

ضریب این یک جمله‌ای برابر ۸ است، پس $a+2=8$ ، در نتیجه $a=6$. از طرفی درجه نسبت به متغیر X برابر ۵ است، پس $b+3=5$ ، در نتیجه $b=2$.

می‌دانیم درجه‌ی یک جمله‌ای نسبت به متغیرهای X، Y، Z برابر است با مجموع توان‌های X، Y، Z، پس می‌توان نوشت:

$$2+a+2+a-5=7 \Rightarrow 2a-1=7 \Rightarrow a=4$$

اکنون با جای گذاری $a=4$ ، ضریب یک جمله‌ای برابر ۱۲ خواهد بود.

با توجه به این که در این عبارت درجه نسبت به متغیرهای X، Y یکسان است، می‌توان نوشت:

$$a=2-a \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1$$

اکنون با جای گذاری $a=1$ ، درجه‌ی این یک جمله‌ای نسبت به متغیر Z برابر ۴ خواهد بود.

حجم مکعب مستطیل داده شده برابر است با:

$$(2x)(x)(3x^2)=6x^4$$

الف) $(9x^6)\left(\frac{1}{27}x^6\right)=\frac{1}{3}x^{12}$

ب) $-\frac{1}{7}a^5b^2c^5$

پ) $6x^4y^4-5x^4y^4=x^4y^4$

عبارت (پ) چند جمله‌ای است و سایر موارد چند جمله‌ای نیستند.

الف) ۴

ب) ۱۵

$$8x^5+5x^4-x^3-3x^2+7x-19$$

$$2x^2y^3+(x^3-3)y+x^5$$

الف) $-5a^2-3ax+x^2-4a^2-5ax+3a^2-8ax=-6a^2-16ax+x^2$

ب) $(5x^4-4x)(x^3-1)=5x^7-5x^4-4x^4+4x=5x^7-9x^4+4x$

پ) $(x^2-1)(x^4+x^2+1)=x^6+x^4+x^2-x^2-x^2-1=x^6-1$



مساحت کل این مکعب مستطیل را به صورت زیر می توان نوشت:

$$2[(\Delta x^4)(2x^3) + (2x^3)(x^2) + (\Delta x^4)(x^2)] = 2(1 \cdot x^7 + 2x^5 + \Delta x^6) = 2 \cdot x^7 + 4x^5 + 1 \cdot x^6$$

$$\underbrace{1+1+1+\dots+1}_{2^0} = 2^0$$

مقدار عددی این عبارت به ازای $x = -1$ برابر است با:

$$(1-1) + (1-1) + \dots + (1-1) = 0$$

مقدار عددی این عبارت به ازای $x = 1$ برابر است با:

با جای گذاری مقادیر $z = 1 \gg y = 3, x = -4$ حاصل این عبارت برابر است با:

$$(-4)^3 + (3)^3 + (1)^3 + 3(-4)(3)(1) = -64 + 27 + 1 - 36 = -72$$

الف) $(x)(x^2)(x^3) = x^6$ پاسخ ۱۹

$$x = 1 \Rightarrow (2+1)(3-2)(1+5) = 3 \times 1 \times 6 = 18$$

ب) با قرار دادن $x = 1$ ، مجموع ضرایب چندجمله‌ای محاسبه می‌شود:

$$x = 0 \Rightarrow 4 + (1)(2)(3)(-4) = 4 - 24 = -20$$

با قرار دادن $x = 0$ ، جمله‌ی فاقد x محاسبه می‌شود:

ابتدا هر یک از عبارت‌ها را اندکی ساده کنیم:

$$(6x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 - 1) = 6x^5 - 5x^4 + \dots, \quad (3x + 1)(2x^4 - 1) = 6x^5 + 2x^4 + \dots$$

$$(6x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 - 1) - (3x + 1)(2x^4 - 1) = -7x^4 + \dots$$

اکنون می‌توان نتیجه گرفت:

پس درجه این عبارت برابر ۴ است.

پاسخ ۲۲

الف) $(2x+1)(4x^2+2x+1) - (2x-1)(4x^2-2x-1) = (8x^3+4x^2+2x+4x^2+2x+1) - (8x^3-4x^2-2x-4x^2+2x+1)$

$$= (8x^3+8x^2+4x+1) - (8x^3-8x^2+1) = 8x^3+8x^2+4x+1-8x^3+8x^2-1 = 16x^2+4x$$

ب) $(x^2-x-2)(x^2+3x+1) - x^2(x^2+1) - x(x^3+x+4) = (x^4+2x^3-4x^2-7x-2) - x^4 - x^2 - x^4 - x^2 - 4x$

$$= -x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 11x - 2$$

الف) ابتدا چندجمله‌ای را به صورت $(x^2+9x+20)(x^2+5x+6)$ تبدیل می‌کنیم. اکنون برای محاسبه‌ی ضریب

$$x^3 \text{ شامل } x^2(9x) + 5x(x^2) = 9x^3 + 5x^3 = 14x^3$$

می‌توان نوشت:

پس ضریب x^3 برابر ۱۴ است.

ب) مانند قسمت قبل ضریب x را محاسبه می‌کنیم:

$$x \text{ شامل } 5x(20) + 6(9x) = 100x + 54x = 154x$$

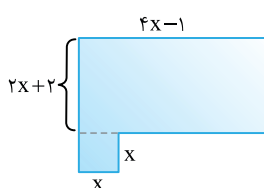
پس ضریب x برابر ۱۵۴ است.

می‌توان نوشت: پاسخ ۲۴

$$A = x^3(x-1) + x^5 - 3x(x^2-x+2) = x^4 - x^3 + x^5 - 3x^3 + 3x^2 - 9x = x^5 + x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 9x$$

الف) مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با:

$$(3x-1)(2x+1) = 6x^2 + 3x - 2x - 1 = 6x^2 + x - 1$$



ب) ابتدا شکل مورد نظر را به صورت مقابل، به یک مربع و یک مستطیل تبدیل می‌کنیم. اکنون می‌توان نوشت:

$$\text{مساحت شکل} = (x)(x) + (2x+2)(4x-1) = x^2 + 8x^2 + 8x - 2x - 2 = 9x^2 + 6x - 2$$

تساوی (پ) به ازای هر x برقرار است، پس یک اتحاد است. سایر موارد اتحاد نیستند.

پاسخ ۲۶

● پاسخ ۲۷ راه‌حل اول: با توجه به این که تساوی داده شده یک اتحاد است، می‌توان در طرفین تساوی به جای x ، هر عددی قرار داد. اکنون با قرار دادن $x=1$ « $x=0$ داریم:

$$x=0 \Rightarrow (1)(-1)=b \Rightarrow b=-1$$

$$x=1 \Rightarrow (3)(2)=6+a+b \xrightarrow{b=-1} 6=6+a-1 \Rightarrow a=1$$

راه‌حل دوم: ابتدا طرف چپ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$(2x+1)(3x-1)=6x^2-2x+3x-1=6x^2+x-1$$

اکنون از تساوی $6x^2+x-1=6x^2+ax-b$ می‌توان نتیجه گرفت $a=1$ « $b=-1$.

● پاسخ ۲۸ با توجه به این که تساوی داده شده یک اتحاد است، باید به‌ازای هر عدد x حقیقی برقرار باشد. اکنون می‌توان نوشت:

$$x=0 \Rightarrow (1)(2)(a)=6 \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3$$

$$x=-1 \Rightarrow 0=-1+b-c+6 \Rightarrow b-c=-5$$

$$x=-2 \Rightarrow 0=-8+4b-2c+6 \Rightarrow 2b-c=1$$

حال از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول $\begin{cases} b-c=-5 \\ 2b-c=1 \end{cases}$ خواهیم داشت $b=6$ « $c=11$.

● پاسخ ۲۹

الف) $(a+4)^2 = a^2 + 8a + 16$

ب) $(5x-2)^2 = 25x^2 - 20x + 4$

پ) $(3m-5n)^2 = 9m^2 - 30mn + 25n^2$

ت) $(2a+3b^2)^2 = 4a^2 + 12ab^2 + 9b^4$

● پاسخ ۳۰

الف) $(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

ب) $(4a+3b)^2 = 16a^2 + 24ab + 9b^2$

پ) $(x^2 - \frac{1}{2})^2 = x^4 - x^2 + \frac{1}{4}$

ت) $(2xy - \frac{1}{2}x^3)^2 = 4x^2y^2 - 2x^4y + \frac{1}{4}x^6$

● پاسخ ۳۱

الف) $(a+b)^2 + (a-b)^2 - a^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2) - a^2 = a^2 + 2b^2$

ب) $(2a-b^2)^2 - (2a+b^2)^2 = (4a^2 - 4ab^2 + b^4) - (4a^2 + 4ab^2 + b^4) = -8ab^2$

با فرض $a+b+c=M$ « $a-b-c=N$ ، عبارت A را ساده کنیم:

$$A = M^2 + N^2 + 2MN = (M+N)^2 = (a+b+c+a-b-c)^2 = (2a)^2 = 4a^2$$

● پاسخ ۳۲

● پاسخ ۳۳

الف) $101^2 = (100+1)^2 = 100^2 + 2(100) + 1^2 = 10000 + 200 + 1 = 10201$

ب) $199^2 = (200-1)^2 = 200^2 - 2(200) + 1^2 = 40000 - 400 + 1 = 39601$

پ) $1015^2 - 1000^2 - 15^2 = (1000+15)^2 - 1000^2 - 15^2 = 1000^2 + 2(1000)(15) + 15^2 - 1000^2 - 15^2 = 30000$

$$A = \frac{(734-34)^2}{(321+29)^2} = \frac{700^2}{350^2} = (\frac{700}{350})^2 = 2^2 = 4$$

می‌توان نوشت:

● پاسخ ۳۴

می‌توان نوشت:

● پاسخ ۳۵

$$B = (78^2 + 22^2 + 2 \times 22 \times 78) + (123^2 + 23^2 - 2 \times 23 \times 123) = (78+22)^2 + (123-23)^2 = 100^2 + 100^2 = 20000$$

می‌دانیم هر عبارت مربع دوجمله‌ای به صورت $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ است. از مقایسه‌ی عبارت سمت چپ

● پاسخ ۳۶

تساوی با عبارت $x^2 + kx + 36$ می‌توان نتیجه گرفت $a=x$ و $b=6$. حال برای kx دو حالت وجود دارد:

$$kx = 2ab \xrightarrow{a=x, b=6} kx = 12x \Rightarrow k = 12$$

$$kx = -2ab \xrightarrow{a=x, b=6} kx = -12x \Rightarrow k = -12$$

بنابراین دو مقدار برای k وجود دارد.



می‌دانیم هر عبارت مربع دو جمله‌ای به صورت $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ است. از مقایسه‌ی عبارت سمت چپ

تساوی با $4x^2 - 11x + k^2$ می‌توان نتیجه گرفت $a = 2x$ ، $b = k$ و $-2ab = -11x$ ، بنابراین:

$$-2ab = -11x \xrightarrow{a=2x, b=k} -2(2x)(k) = -11x \Rightarrow k = \frac{11}{4}$$

الف) ابتدا طرفین تساوی $a + \frac{1}{a} = 3$ را به توان ۲ می‌رسانیم: **پاسخ ۳۸**

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 3^2 \Rightarrow a^2 + 2(a)\left(\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{a^2} = 9 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = 9 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$$

ب) از قسمت قبل می‌دانیم $a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$. اکنون طرفین این تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 = 7^2 \Rightarrow a^4 + 2(a^2)\left(\frac{1}{a^2}\right) + \frac{1}{a^4} = 49 \Rightarrow a^4 + \frac{1}{a^4} + 2 = 49 \Rightarrow a^4 + \frac{1}{a^4} = 47$$

پ) طرفین تساوی $a + \frac{1}{a} = 3$ را در a ضرب می‌کنیم:

$$a^2 + 1 = 3a \Rightarrow a^2 - 3a = -1$$

می‌دانیم از تساوی $a + \frac{1}{a} = 2$ ، نتیجه می‌شود $a = 1$ (اثبات این مطالب در درسنامه‌ی ابتدای فصل آمده است). اکنون

با جای‌گذاری $a = 1$ داریم:

الف) $a + \frac{3}{a} = 1 + \frac{3}{1} = 4$

ب) $2a^4 + \frac{3}{a^5} = 2 + \frac{3}{1} = 5$

ابتدا اتحاد کمکی $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ را ثابت کنید! اکنون به کمک این اتحاد کمکی می‌توان نوشت: **پاسخ ۴۰**

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x\right)\left(\frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4$$

حال با جای‌گذاری مقدار $x + \frac{1}{x} = 4$ در تساوی بالا خواهیم داشت:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4^2 - 4 = 12 \Rightarrow \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} = \sqrt{12} \rightarrow \left|x - \frac{1}{x}\right| = \sqrt{12}$$

پاسخ ۴۱

الف) $x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2)$

ب) $4y^4x + 6x^3y = 2yx(2y^3 + 3x^2)$

پ) $a^2(a+2b) + 2b^2(a+2b) = (a+2b)(a^2+2b^2)$

مساحت قسمت هاشورخورده را به صورت زیر می‌توان محاسبه کرد: **پاسخ ۴۲**

$$(\Delta x)(2x) - \frac{1}{4}\pi(2x)^2 - \frac{1}{4}\pi(x)^2 = 1 \cdot x^2 - \pi x^2 - \frac{\pi x^2}{4} = 1 \cdot x^2 - \frac{5\pi}{4}x^2 = \Delta x^2 \left(2 - \frac{\pi}{4}\right)$$

به کمک دسته‌بندی عبارت‌های داده شده می‌توان نوشت: **پاسخ ۴۳**

الف) $(ab+ay)+(xb+xy) = a(b+y) + x(b+y) = (b+y)(a+x)$

ب) $(a^5x+b^5x)-(yb^5+a^5y) = x(a^5+b^5)-y(a^5+b^5) = (a^5+b^5)(x-y)$

پاسخ ۴۴

الف) $x^3 + 4x^2 + 4x = x(x^2 + 4x + 4) = x(x+2)^2$

ب) $9y^5 + 6y^4 + y^3 = y^3(9y^2 + 6y + 1) = y^3(3y+1)^2$

پ) $(a+b)^2 + (b+c)^2 + 2(a+b)(b+c) = [(a+b)+(b+c)]^2 = (a+2b+c)^2$

ت) $(a+b-c)^2 + b^2 - 2b(a+b-c) = [(a+b-c)-b]^2 = (a-c)^2$