فصل ۱

استدلال ریاضی

استقرای ریاضی

استقرای ریاضی یکی از مهم‌ترین روش‌های اثبات در ریاضیات است. در این بخش به آموزش این روش می‌پردازیم.

فرض کنید $P(n)$ حکمی در مورد عدد طبیعی n باشد. اگر این حکم به ازای عدد طبیعی k درست باشد، می‌گوییم $P(k)$ درست و در غیر این صورت می‌گوییم $P(k)$ غلط است. مثلاً نابرابری $n^۲ < ۲^n$ به ازای $n = ۳$ غلط و به ازای $n = ۵$ درست است، پس اگر $P(n)$ نابرابری $n^۲ < ۲^n$ باشد، آن‌گاه $P(۳)$ غلط و $P(۵)$ درست است.

گاهی به احکامی برخورد می‌کنیم که می‌خواهیم درستی آن‌ها را به ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنیم. استقرای ریاضی یکی از کارآمدترین روش‌ها در اثبات این‌گونه احکام است.

قضیه‌ی ۱: **(اصل استقرا): فرض کنید $P(n)$ حکمی در مورد عدد طبیعی n باشد. اگر**
۱) $P(۱)$ درست باشد و
۲) از درستی $P(k)$، درستی $P(k+۱)$ نتیجه شود،
آن‌گاه $P(n)$ به ازای هر عدد طبیعی n درست است.

درک درستی قضیه‌ی فوق بسیار ساده است. از شرط اول قضیه درستی $P(۱)$ نتیجه می‌شود. از شرط دوم قضیه و درستی $P(۱)$، درستی $P(۲)$ نتیجه می‌شود، مجدداً از شرط دوم و درستی $P(۲)$ درستی $P(۳)$ نتیجه می‌شود و به همین صورت نتیجه می‌گیریم $P(n)$ به ازای هر عدد طبیعی n درست است. حال ببینیم چگونه می‌توان از اصل استقرا در حل مسائل استفاده کرد.

❍ **مسأله‌ی ۱: به ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:**

$$۱+۲+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

راه حل: فرض کنید $P(n)$ حکم مورد نظر باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم $P(n)$ به ازای هر عدد طبیعی n درست است. برای این منظور نشان می‌دهیم $P(n)$ در شرایط ۱ و ۲ از قضیه‌ی فوق صدق می‌کند.

۱) به ازای $n=۱$ تساوی فوق به صورت $\frac{۱\times(۱+۱)}{۲}=۱$ درمی‌آید که درست است، پس $P(۱)$ درست است.

۲) فرض کنید به ازای عددی طبیعی مانند k، $P(k)$ درست باشد، در این صورت:

$$۱+۲+\cdots+k=\frac{k(k+۱)}{۲} \qquad (*)$$

می‌خواهیم درستی $P(k+۱)$ را ثابت کنیم، یعنی نشان دهیم:

$$۱+۲+\cdots+(k+۱)=\frac{(k+۱)(k+۲)}{۲} \qquad (**)$$

در تساوی $(*)$ فرمولی برای مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا k داده شده و می‌خواهیم از روی آن، فرمولی برای مجموع اعداد از ۱ تا $k+۱$ بیابیم. برای این منظور کافی است به طرفین رابطه‌ی $(*)$، عدد $k+۱$ را اضافه کنیم. لذا از رابطه‌ی $(*)$ نتیجه می‌گیریم:

$$۱+۲+\cdots+k+(k+۱)=\frac{k(k+۱)}{۲}+(k+۱)$$

اما

$$\frac{k(k+۱)}{۲}+(k+۱)=(k+۱)(\frac{k}{۲}+۱)=\frac{(k+۱)(k+۲)}{۲}$$

پس

$$۱+۲+\cdots+k+(k+۱)=\frac{(k+۱)(k+۲)}{۲}$$

و این همان رابطه‌ی $(**)$ است. پس از رابطه‌ی $(*)$ رابطه‌ی $(**)$ را نتیجه گرفتیم، یعنی از درستی $P(k)$، درستی $P(k+۱)$ را نتیجه گرفتیم.

حال از اصل استقرا نتیجه می‌گیریم $P(n)$ به ازای هر عدد طبیعی n درست است.

تمرین ۱: به ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

الف) $۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

ب) $۱^۳+۲^۳+\cdots+n^۳=\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$

ج) $۱\times۱!+۲\times۲!+\cdots+n\times n!=(n+۱)!-۱$

د) $\frac{۱^۲}{۴\times۱^۲-۱}+\frac{۲^۲}{۴\times۲^۲-۱}+\cdots+\frac{n^۲}{۴n^۲-۱}=\frac{n(n+۱)}{۲(۲n+۱)}$

هـ) $۱\times۲^۱+۲\times۲^۲+۳\times۲^۳+\cdots+n\times۲^n=(n-۱)۲^{n+۱}+۲$

و) $(۱-\frac{۱}{۲^۲})(۱-\frac{۱}{۳^۲})\cdots(۱-\frac{۱}{(n+۱)^۲})=\frac{n+۲}{۲n+۲}$

ز) $۱^۲-۲^۲+۳^۲-\cdots+(-۱)^{n-۱}n^۲=(-۱)^{n}\frac{n(n+۱)}{۲}$

ح) $۱^۲+۳^۲+۵^۲+\cdots+(۲n-۱)^۲=\frac{۱}{۳}(۴n^۳-n)$

مسأله‌ی ۲: به ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{n^۲}\le ۲-\frac{۱}{n}$$

راه حل: حکم را به روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم:

۱) چون $\frac{۱}{۱^۲}\le ۲-\frac{۱}{۱}$، لذا حکم به ازای $n=۱$ درست است.

۲) فرض کنید حکم به ازای عددی طبیعی مانند k درست باشد، در این‌صورت:

$$\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{k^۲}\le ۲-\frac{۱}{k} \qquad (*)$$

می‌خواهیم درستی حکم را به ازای $k+۱$ ثابت کنیم، یعنی نشان دهیم:

$$\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{(k+۱)^۲}\le ۲-\frac{۱}{k+۱} \qquad (**)$$

برای اثبات درستی رابطه‌ی $(**)$ به طرفین رابطه‌ی $(*)$ عدد $\frac{۱}{(k+۱)^۲}$ را اضافه می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{k^۲}+\frac{۱}{(k+۱)^۲}\le ۲-\frac{۱}{k}+\frac{۱}{(k+۱)^۲} \qquad (***)$$

از این نابرابری در صورتی می‌توان نابرابری (**) را نتیجه بگیریم که $۲-\frac{۱}{k+۱} \le ۲-\frac{۱}{k}+\frac{۱}{(k+۱)^۲}$. برای اثبات این نابرابری می‌توان نوشت:

$$(۲-\frac{۱}{k}+\frac{۱}{(k+۱)^۲})-(۲-\frac{۱}{k+۱})=\frac{۱}{(k+۱)^۲}+\frac{۱}{k+۱}-\frac{۱}{k}=\frac{k+k(k+۱)-(k+۱)^۲}{k(k+۱)^۲}$$

$$=\frac{(k+k^۲+k)-(k^۲+۲k+۱)}{k(k+۱)^۲}=\frac{-۱}{k(k+۱)^۲}\le ۰$$

پس $۲-\frac{۱}{k+۱} \le ۲-\frac{۱}{k}+\frac{۱}{(k+۱)^۲}$. حال از این نابرابری و نابرابری (***)، نابرابری (**) نتیجه می‌شود. پس نشان دادیم درستی حکم به ازای k، درستی حکم را به ازای $k+۱$ نتیجه می‌دهد. حال از اصل استقرا نتیجه می‌گیریم حکم به ازای هر عدد طبیعی n درست است.

تمرین ۲: **به ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:**

الف) $\frac{۱}{\sqrt{۱}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n}}<۲\sqrt{n}$

ب) $\frac{۱}{\sqrt{۱}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n}}>۲(\sqrt{n+۱}-۱)$

ج) $\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{n^۲}\ge\frac{۳n}{۲n+۱}$

د) $\frac{۱\times۳\times۵\times\cdots\times(۲n-۱)}{۲\times۴\times۶\times\cdots\times۲n}\le\frac{۱}{\sqrt{۲n+۱}}$

❍ **مسأله‌ی ۳:** **حاصل مجموع زیر را حدس بزنید وادعای خود را به استقرا ثابت کنید:**

$$\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\frac{۱}{۳\times۴}+\cdots+\frac{۱}{n(n+۱)}$$

راه حل: مجموع داده شده را با S_n نشان می‌دهیم. در این صورت:

$$S_۱=\frac{۱}{۱\times۲}=\frac{۱}{۲}\ ,\quad S_۲=\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}=\frac{۲}{۳}\ ,\quad S_۳=\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\frac{۱}{۳\times۴}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۳}{۴}$$

با مشاهده‌ی مقادیر $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ حدس می‌زنیم به ازای هر عدد طبیعی n، $S_n=\frac{n}{n+۱}$. حال این حکم را به استقرا ثابت می‌کنیم.

۱) چون $S_۱=\frac{۱}{۲}$، لذا حکم به ازای $n=۱$ درست است.

۲) فرض کنید حکم به ازای عددی طبیعی مانند k درست باشد، در این صورت:

$$\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\cdots+\frac{۱}{k(k+۱)}=\frac{k}{k+۱}\qquad(*)$$

می‌خواهیم درستی حکم را به ازای $k+۱$ ثابت کنیم، یعنی نشان دهیم:

$$\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\cdots+\frac{۱}{(k+۱)(k+۲)}=\frac{k+۱}{k+۲}\qquad(**)$$

برای اثبات درستی رابطه‌ی (**)، به طرفین رابطه‌ی (*) عدد $\frac{۱}{(k+۱)(k+۲)}$ را اضافه می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\cdots+\frac{۱}{k(k+۱)}+\frac{۱}{(k+۱)(k+۲)}=\frac{k}{k+۱}+\frac{۱}{(k+۱)(k+۲)}$$

برای محاسبه‌ی مجموع دو کسر سمت راست این عبارت می‌توان نوشت:

$$\frac{k}{k+۱}+\frac{۱}{(k+۱)(k+۲)}=\frac{k(k+۲)+۱}{(k+۱)(k+۲)}=\frac{k^۲+۲k+۱}{(k+۱)(k+۲)}=\frac{(k+۱)^۲}{(k+۱)(k+۲)}=\frac{k+۱}{k+۲}$$

حال از دو رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\cdots+\frac{۱}{k(k+۱)}+\frac{۱}{(k+۱)(k+۲)}=\frac{k+۱}{k+۲}$$

و این همان رابطه‌ی $(**)$ است. پس از رابطه‌ی $(*)$ رابطه‌ی $(**)$ را نتیجه گرفتیم، یعنی از درستی حکم به ازای k، درستی حکم را بـه ازای $k+۱$ نتیجه گرفتیم.

حال از اصل استقرا نتیجه می‌گیریم حکم به ازای هر عدد طبیعی n، درست است، یعنی به ازای هر عدد طبیعی n:

$$\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\cdots+\frac{۱}{n(n+۱)}=\frac{n}{n+۱}$$

تمرین ۳: در هر مورد حاصل مجموع داده شده را حدس بزنید و ادعای خود را به استقرا ثابت کنید.

الف) $۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)$

ب) $\frac{۱}{۱\times۳}+\frac{۱}{۳\times۵}+\frac{۱}{۵\times۷}+\cdots+\frac{۱}{(۲n-۱)(۲n+۱)}$

مسأله‌ی ۴: ثابت کنید مجموع مکعبات هر سه عدد طبیعی متوالی بر ۹ بخش‌پذیر است.

راه حل: باید ثابت کنیم به ازای هر عدد طبیعی n، $n^۳+(n+۱)^۳+(n+۲)^۲$ بر ۹ بخش‌پذیر است. این حکم را $P(n)$ می‌نامیم.

۱) چون $۳۶=۳^۳+۲^۳+۱^۳$، پس $۳^۳+۲^۳+۱^۳$ بر ۹ بخش‌پذیر است، لذا $P(۱)$ درست است.

۲) فرض کنید به ازای عددی طبیعی مانند k، $P(k)$ درست باشد، در این صورت عدد صحیح t وجود دارد که:

$$k^۳+(k+۱)^۳+(k+۲)^۳=۹t \qquad (*)$$

می‌خواهیم درستی $P(k+۱)$ را ثابت کنیم، یعنی عددی صحیح مانند s بیابیم به‌گونه‌ای که:

$$(k+۱)^۳+(k+۲)^۳+(k+۳)^۳=۹s \qquad (**)$$

برای رسیدن به رابطه‌ی $(**)$ از روی رابطه‌ی $(*)$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}(k+۱)^۳+(k+۲)^۳+(k+۳)^۳&=(k+۱)^۳+(k+۲)^۳+(k^۳+۹k^۲+۲۷k+۲۷)\\&=(k^۳+(k+۱)^۳+(k+۲)^۳)+(۹k^۲+۲۷k+۲۷)\\&=۹t+۹(k^۲+۳k+۳)=۹(\underbrace{t+k^۲+۳k+۳}_{s})=۹s\end{aligned}$$

توجه کنید که چون t عددی صحیح است، پس s نیز عددی صحیح است. پس از درستی $P(k)$، درستی $P(k+۱)$ را نتیجه گرفتیم.

حال از اصل استقرا نتیجه می‌گیریم حکم به ازای هر عدد طبیعی n درست است.

تمرین ۴: به ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $n^۵+۴n$ بر ۵ بخش‌پذیر است.

(راهنمایی: $(x+۱)^۵=x^۵+۵x^۴+۱۰x^۳+۱۰x^۲+۵x+۱$ **)**

مسأله‌ی ۵: به ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $۶^{۲n+۱} + ۲^{۳n}$ بر ۷ بخش‌پذیر است.

راه حل: حکم را به روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم.

۱) چون $۶^{۲×۱+۱} + ۲^{۳×۱} = ۲۲۴ = ۷ × ۳۲$، لذا $۶^{۲×۱+۱} + ۲^{۳×۱}$ بر ۷ بخش‌پذیر است، پس حکم به ازای $n = ۱$ درست است.

۲) فرض کنید حکم به ازای عددی طبیعی مانند k درست باشد، در این صورت عدد صحیح t وجود دارد که:

$$۶^{۲k+۱} + ۲^{۳k} = ۷t \qquad (*)$$

می‌خواهیم حکم را به ازای $k+۱$ ثابت کنیم، یعنی عددی صحیح مانند s بیابیم به‌گونه‌ای که:

$$۶^{۲(k+۱)+۱} + ۲^{۳(k+۱)} = ۷s \qquad (**)$$

برای رسیدن به رابطه‌ی $(**)$ از روی رابطه‌ی $(*)$ ابتدا توجه می‌کنیم که:

$$۶^{۲(k+۱)+۱} + ۲^{۳(k+۱)} = ۶^{۲k+۲+۱} + ۲^{۳k+۳} = ۳۶ × ۶^{۲k+۱} + ۸ × ۲^{۳k}$$

اما طبق رابطه‌ی $(*)$، $۶^{۲k+۱} = ۷t - ۲^{۳k}$. در نتیجه:

$$\begin{aligned}۶^{۲(k+۱)+۱} + ۲^{۳(k+۱)} &= ۳۶(۷t - ۲^{۳k}) + ۸ × ۲^{۳k}\\ &= ۳۶ × ۷t - ۳۶ × ۲^{۳k} + ۸ × ۲^{۳k} = ۷ × ۳۶t - ۲۸ × ۲^{۳k} = ۷ × ۳۶t - ۷ × ۴ × ۲^{۳k} = ۷(\underbrace{۳۶t - ۴ × ۲^{۳k}}_{s}) = ۷s\end{aligned}$$

توجه کنید که چون t عددی صحیح است، پس s نیز عددی صحیح است. نشان دادیم درستی حکم به ازای k، درستی حکم به ازای $k+۱$ را نتیجه می‌دهد.

حال از اصل استقرا نتیجه می‌گیریم حکم به ازای هر عدد طبیعی n درست است.

تمرین ۵: به ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید

الف) $۶^n + ۴$ **بر ۵ بخش‌پذیر است.**

ب) $۴^{n+۱} + ۵^{۲n-۱}$ **بر ۲۱ بخش‌پذیر است.**

ج) $۶^n + ۲۰n + ۴۹$ **بر ۲۵ بخش‌پذیر است.**

د) $۲^{۳^n} + ۱$ **بر** $۳^{n+۱}$ **بخش‌پذیر است.**

مسأله‌ی ۶: فرض کنید $a \ge -۱$ عددی حقیقی باشد. به ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $(a+۱)^n \ge ۱ + na$.

راه حل: حکم را به روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم.

۱) چون $(a+۱)^۱ \ge ۱ + ۱ × a$، لذا حکم به ازای $n = ۱$ دست است.

۲) فرض کنید حکم به ازای عددی طبیعی مانند k درست باشد، در این صورت:

$$(a+۱)^k \ge ۱ + ka \qquad (*)$$

می‌خواهیم حکم را به ازای $k+۱$ ثابت کنیم، یعنی نشان دهیم:

$$(a+۱)^{k+۱} \ge ۱ + (k+۱)a \qquad (**)$$

برای رسیدن به رابطه‌ی $(**)$ ابتدا طرفین رابطه‌ی $(*)$ را در $a+۱$ ضرب می‌کنیم. توجه کنید که چون $a \ge -۱$، لذا $a+۱ \ge ۰$، پس با ضرب $a+۱$ در طرفین رابطه‌ی $(*)$ جهت نابرابری عوض نمی‌شود.

$$(a+۱)^k \ge ۱ + ka \Rightarrow (a+۱)^{k+۱} \ge (a+۱)(۱+ka) = a + ka^۲ + ۱ + ka = ۱ + (k+۱)a + ka^۲ \ge ۱ + (k+۱)a$$

پس $(a+۱)^{k+۱} \ge ۱ + (k+۱)a$. لذا از درستی حکم به ازای k، درستی حکم به ازای $k+۱$ نتیجه می‌شود.

حال از اصل استقرا نتیجه می‌گیریم حکم به ازای هر عدد طبیعی n درست است.

تمرین ۶: فرض کنید a_1، a_2، ... و a_n عددهایی حقیقی و نامنفی باشند. ثابت کنید:

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) \geq 1+a_1+a_2+\cdots+a_n$$

تمرین ۷: به ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $(2n)! < 2^n(n!)^2$.

تمرین ۸: به ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $2^{n-1}(3^n+4^n) \geq 7^n$.

مسألهٔ ۷: می‌دانیم به ازای هر دو عدد حقیقی a و b، $|a+b| \leq |a|+|b|$ (به این نابرابری، نابرابری مثلث گفته می‌شود). به ازای هر n عدد حقیقی x_1، x_2، ... و x_n ثابت کنید:

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n| \leq |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$$

راه حل: حکم را به روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم.

۱) چون به ازای هر عدد حقیقی x_1، $|x_1| \leq |x_1|$، پس حکم به ازای $n=1$ درست است.

۲) فرض کنید حکم به ازای عددی طبیعی مانند k درست باشد، در این صورت به ازای هر k عدد حقیقی x_1، x_2، ... و x_k:

$$|x_1+x_2+\cdots+x_k| \leq |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k| \qquad (*)$$

می‌خواهیم حکم را به ازای $k+1$ ثابت کنیم، یعنی نشان دهیم به ازای هر $k+1$ عدد حقیقی x_1، x_2، ... و x_{k+1}:

$$|x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}| \leq |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_{k+1}| \qquad (**)$$

برای اثبات نابرابری $(**)$ ابتدا فرض می کنیم $a=x_1+x_2+\cdots+x_k$ و $b=x_{k+1}$. در این صورت از نابرابری مثلث نتیجه می‌گیریم:

$$|x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}| = |(x_1+x_2+\cdots+x_k)+x_{k+1}| = |a+b| \leq |a|+|b|$$

حال از رابطهٔ $(*)$ نتیجه می‌گیریم:

$$|a| = |x_1+x_2+\cdots+x_k| \leq |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|$$

از دو رابطهٔ اخیر نتیجه می‌گیریم:

$$|x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}| \leq |a|+|b| \leq (|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|)+|x_{k+1}| = |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_{k+1}|$$

و این همان رابطهٔ $(**)$ است. پس از درستی حکم به ازای k، درستی حکم به ازای $k+1$ را نتیجه گرفتیم.

حال از اصل استقرا نتیجه می‌گیریم حکم به ازای هر عدد طبیعی n درست است.

تمرین ۹: می‌دانیم به ازای هر دو عدد حقیقی a و b، $[a+b] \leq [a]+[b]$. به ازای هر n عدد حقیقی x_1، x_2، ... و x_n ثابت کنید:

$$[x_1+x_2+\cdots+x_n] \leq [x_1]+[x_2]+\cdots+[x_n]$$

تمرین ۱۰: می‌دانیم به ازای هر چهار عدد حقیقی مثبت p، q، r و s:

$$\frac{pq}{p+q}+\frac{rs}{r+s} \leq \frac{(p+q)(r+s)}{p+q+r+s}$$

به ازای هر $2n$ عدد حقیقی مثبت a_1، a_2، ...، a_n، b_1، b_2، ... و b_n ثابت کنید:

$$\frac{a_1b_1}{a_1+b_1}+\frac{a_2b_2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_nb_n}{a_n+b_n} \leq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)}$$

مسأله‌ی ۸: به ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} n+۱ & -n \\ n & -n+۱ \end{bmatrix}$.

راه حل: حکم را به روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم.

۱) به وضوح حکم به ازای $n = ۱$ درست است.

۲) فرض کنید حکم به ازای عددی طبیعی مانند k درست باشد، در این صورت $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} k+۱ & -k \\ k & -k+۱ \end{bmatrix}$. با ظرب طرفین این رابطه در ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}^{k+۱} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k+۱ & -k \\ k & -k+۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲(k+۱)-k & -۲k-(-k+۱) \\ k+۱ & -k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k+۱)+۱ & -(k+۱) \\ k+۱ & -(k+۱)+۱ \end{bmatrix}$$

و این دقیقاً همان درستی حکم به ازای $k+۱$ است. لذا از درستی حکم به ازای k، درستی حکم را به ازای $k+۱$ نتیجه گرفتیم.

حال از اصل استقرا نتیجه می‌گیریم حکم به ازای هر عدد طبیعی n درست است.

تمرین ۱۱: به ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

الف) $\begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}^n = ۷^{n-۱}\begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

تا کنون با احکامی مواجه بودیم که به ازای همه‌ی اعدد طبیعی درست بودند. گاهی به احکامی برخورد می‌کنیم که فقط برای چند عدد طبیعی اولیه درست نیستند. برای اثبات این گونه احکام نیز روش استقرا راهگشا است.

مثلاً فرض کنید می‌خواهیم مقادیر $n!$ و ۲^n را با یک‌دیگر مقایسه کنیم. جدول زیر مقادیر این دو تابع را به ازای $۱ \le n \le ۷$ نشان می‌دهد.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$n!$	۱	۲	۶	۲۴	۱۲۰	۷۲۰	۵۰۴۰
۲^n	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸

به ازای $۱ \le n \le ۳$، $n! < ۲^n$ و به ازای $۴ \le n \le ۷$، $n! > ۲^n$. به نظر شما به ازای بقیه‌ی مقادیر n کدام‌یک بزرگ‌تر است: $n!$ یا ۲^n؟ با یک نگاه ساده به جدول فوق متوجه می‌شویم که از $n = ۴$ به بعد هر چه جلوتر می‌رویم اختلاف ۲^n و $n!$ بیش‌تر و بیش‌تر می‌شود و در واقع رشد تابع $n!$ از رشد ۲^n سریع‌تر است. معقول‌ترین حدسی که از مشاهدات فوق می‌توانیم ارائه دهیم این است که به ازای هر عدد طبیعی $n \ge ۴$، $n! > ۲^n$، یعنی این نابرابری فقط به ازای $n = ۱,۲,۳$ درست نیست.

برای اثبات این حدس نیز از اصل استقرا استفاده می‌کنیم، اما استقرا از نوع جدید!

قضیه‌ی ۲: (اصل استقرای تعمیم یافته): فرض کنید n یک عدد طبیعی و $P(n)$ حکمی در مورد عدد طبیعی n باشد. اگر:

۱) $P(m)$ درست باشد و

۲) از درستی $P(k)$، $k \ge m$، درستی $P(k+۱)$ نتیجه شود،

آن‌گاه $P(n)$ به ازای هر عدد طبیعی n، $n \ge m$، درست است.

تفاوت این قضیه با اصل استقرا این است که شروع استقرا را به جای عدد ۱ از عدد m در نظر گرفتیم.

مسأله‌ی ۹: به ازای هر $n \geq ۴$ ثابت کنید $n! > ۲^n$.

راه حل: حکم را به روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم.

۱) چون $۲۴ = ۴!$ و $۱۶ = ۲^۴$، پس $۲^۴ < ۴!$، لذا حکم به ازای $n = ۴$ درست است.

۲) فرض کنید حکم به ازای عددی طبیعی مانند k، $k \geq ۴$، درست باشد، در این صورت:

$$k! > ۲^k \qquad (*)$$

می‌خواهیم حکم را به ازای $k + ۱$ ثابت کنیم، یعنی نشان دهیم:

$$(k+۱)! > ۲^{k+۱} \qquad (**)$$

برای رسیدن به نابرابری $(**)$ از روی نابرابری $(*)$ به این نکته توجه می‌کنیم که $(k+۱)! = (k+۱)k!$ و $۲^{k+۱} = ۲ \times ۲^k$. اکنون به سادگی می‌توانیم از $(*)$، $(**)$ را نتیجه بگیریم. به صورت زیر:

$$\left.\begin{array}{l} k \geq ۴ \Rightarrow k+۱ > ۲ \\ k! > ۲^k \ \text{نابرابری}(*) \end{array}\right\} \Rightarrow (k+۱)k! > ۲ \times ۲^k \Rightarrow (k+۱)! > ۲^{k+۱}$$

لذا از درستی حکم به ازای k، $k \geq ۴$، درستی حکم به ازای $k + ۱$ نتیجه می‌شود.

حال از اصل استقرای تعمیم یافته نتیجه می‌گیریم حکم به ازای هر عدد طبیعی $n \geq ۴$ درست است.

مسأله‌ی ۱۰: یک عدد طبیعی مناسب مانند m بیابید و سپس به ازای هر عدد طبیعی n، $n \geq m$، ثابت کنید $۲^n > n^۲$.

راه حل: ابتدا جدول مقادیر ۲^n و $n^۲$ را به ازای مقادیر کوچک n در نظر می‌گیریم.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۲^n	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶
$n^۲$	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹	۶۴

با مشاهده‌ی این جدول نتیجه می‌گیریم به ازای $n = ۱$، $۲^n > n^۲$، ولی به ازای $n = ۲,۳,۴$ این نابرابری درست نیست. اما مجدداً به ازای $n = ۵,۶,۷,۸$، $۲^n > n^۲$. حدس می‌زنیم حکم به ازای هر عدد طبیعی n، $n \geq ۵$، درست باشد.

۱) چون $۲^۵ > ۵^۲$، لذا حکم به ازای $n = ۵$ درست است.

۲) فرض کنید حکم به ازای عددی طبیعی مانند k، $k \geq ۵$، درست باشد، در این صورت:

$$۲^k > k^۲ \qquad (*)$$

می‌خواهیم درستی حکم را به ازای $k + ۱$ ثابت کنیم، یعنی نشان دهیم:

$$۲^{k+۱} > (k+۱)^۲ \qquad (**)$$

برای رسیدن به نابرابری $(**)$ از روی نابرابری $(*)$ ابتدا طرفین $(*)$ را در ۲ ضرب می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم $۲^{k+۱} > ۲k^۲$. به کمک این نابرابری در صورتی می‌توانیم نابرابری $(**)$ را نتیجه بگیریم که $۲k^۲ > (k+۱)^۲$. برای اثبات این نابرابری به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$۲k^۲ - (k+۱)^۲ = ۲k^۲ - (k^۲ + ۲k + ۱) = k^۲ - ۲k - ۱ = (k^۲ - ۲k + ۱) - ۲ = (k-۱)^۲ - ۲ > ۰ \qquad (\text{زیرا } k \geq ۵)$$

پس به ازای $k \geq ۵$، $۲k^۲ > (k+۱)^۲$. خلاصه‌ی فرآیند فوق به صورت زیر است:

$$\left.\begin{array}{r} (*)\text{نابرابری} \ ۲^k > k^۲ \Rightarrow ۲^{k+۱} > ۲k^۲ \\ k \geq ۵ \Rightarrow ۲k^۲ > (k+۱)^۲ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲^{k+۱} > (k+۱)^۲$$

لذا از درستی حکم به ازای k، $k \geq ۵$، درستی حکم به ازای $k + ۱$ نتیجه می‌شود.

حال از اصل استقرای تعمیم یافته نتیجه می‌گیریم حکم به ازای هر عدد طبیعی n، $n \geq ۵$، درست است.

تمرین ۱۲: در هر مورد با یافتن عدد طبیعی مناسبی مانند m، حکم را به ازای هر عدد طبیعی n، $n \geq m$، ثابت کنید.

الف) $n! > ۳^n$

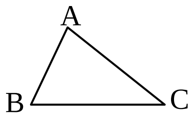
ب) $۳^{n-۳} > n^۲$

ج) $۲^n > ۹n + ۷$

د) $n^۳ > ۳n^۲ + ۷n + ۴$

هـ) $۳^n > ۲^n + ۵n^۲$

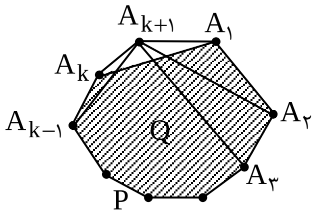
مسأله‌ی ۱۱: ثابت کنید تعداد قطرهای هر n ضلعی محدب $(n \geq ۳)$ برابر $\frac{n(n-۳)}{۲}$ است.



راه حل: حکم را به روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم.

۱) چون مثلث (۳ ضلعی) هیچ قطری ندارد و $\frac{۳\times(۳-۳)}{۲} = ۰$، لذا حکم به ازای $n = ۳$ درست است.

۲) فرض کنید حکم به ازای عددی طبیعی مانند k، $k \geq ۳$، درست باشد، در این صورت تعداد قطرهای هر k ضلعی محدب برابر $\frac{k(k-۳)}{۲}$ است. می‌خواهیم حکم را به ازای $k+۱$ ثابت کنیم، یعنی نشان دهیم تعداد قطرهای هر $k+۱$ ضلعی محدب برابر $\frac{(k+۱)(k+۱-۳)}{۲}$ است. برای این منظور یک $k+۱$ ضلعی محدب مانند $A_۱A_۲...A_{k+۱}$ را در نظر می‌گیریم. این $k+۱$ ضلعی را P و k ضلعی $A_۱A_۲...A_k$ را Q می‌نامیم. هر قطر از Q یک قطر از P نیز می‌باشد. از درستی حکم به ازای k، نتیجه می‌گیریم تعداد قطرهای Q بر ابر $\frac{k(k-۳)}{۲}$ است. با توجه به شکل مقابل علاوه بر قطرهای Q، پاره‌خط‌های $A_۱A_k$، $A_{k+۱}A_۲$، $A_{k+۱}A_۳$، ... و $A_{k+۱}A_{k-۱}$ که تعداد آن‌ها برابر $k-۱$ است نیز قطرهای P هستند.



نتیجه می‌گیریم:

$$\text{تعداد قطرهای } P = \text{تعداد قطرهای } Q + (k-۱) = \frac{k(k-۳)}{۲} + (k-۱)$$

$$= \frac{(k^۲-۳k)+(۲k-۲)}{۲} = \frac{k^۲-k-۲}{۲} = \frac{(k+۱)(k-۲)}{۲} = \frac{(k+۱)(k+۱-۳)}{۲}$$

و این همان درستی حکم به ازای $k+۱$ است.

حال از اصل استقرا نتیجه می‌گیریم حکم به ازای هر عدد طبیعی n، $n \geq ۳$، درست است.

تمرین ۱۳: ثابت کنید مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب، $n \geq ۳$، برابر $۹۰(۲n-۴)$ درجه است.

تمرین ۱۴: ثابت کنید تعداد وترهای بین n نقطه روی یک دایره برابر $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است.

مسأله‌ی ۱۲: به ازای هر عدد طبیعی n، $n \geq ۲۲$، ثابت کنید اعداد طبیعی x و y وجود دارند به‌طوری که $۳x + ۷y = n$.

راه حل: حکم را به روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم:

۱) چون $۲۲ = ۱\times۷ + ۳\times۵$، لذا حکم به ازای $n = ۲۲$ درست است.

۲) فرض کنید حکم به ازای عددی طبیعی مانند k، $k \geq ۲۲$، درست باشد، در این صورت اعداد طبیعی $x_۰$ و $y_۰$ وجود دارند به‌طوری که:

$$۳x_۰ + ۷y_۰ = k \qquad (*)$$

می‌خواهیم حکم را به ازای $k+۱$ ثابت کنیم، یعنی اعداد طبیعی $x_۱$ و $y_۱$ را بیابیم به‌گونه‌ای که $۳x_۱ + ۷y_۱ = k+۱$. از رابطه‌ی $(*)$ دو رابطه‌ی زیر را می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$۳(x_۰-۲) + ۷(y_۰+۱) = k+۱ \qquad (**), \qquad ۳(x_۰+۵) + ۷(y_۰-۲) = k+۱ \qquad (***)$$

اگر $x_{\circ} \geq ۳$، آن‌گاه $x_{\circ} - ۲$ عددی طبیعی است و با توجه به این‌که $y_{\circ} + ۱$ نیز عددی طبیعی است، لذا رابطه‌ی (**) درستی حکم را به ازای $k+۱$ نتیجه می‌دهد. اگر $x_{\circ} \leq ۲$، آن‌گاه از رابطه‌ی (*) نتیجه می‌گیریم:

$$۷y_{\circ} = k - ۳x_{\circ} \geq ۲۲ - ۳ \times ۲ = ۱۶ \Rightarrow y_{\circ} \geq \frac{۱۶}{۷} \xrightarrow{y_{\circ} \in N} y_{\circ} \geq ۳$$

پس $y_{\circ} - ۲$ عددی طبیعی است و چون $x_{\circ} + ۵$ نیز عددی طبیعی است، لذا از رابطه‌ی (***) درستی حکم را به ازای $k+۱$ نتیجه می‌گیریم.
پس در هر صورت (در هر دو حالت $x_{\circ} \geq ۳$ و $x_{\circ} \leq ۲$) حکم به ازای $k+۱$ درست است. لذا از درستی حکم به ازای k، $k \geq ۲۲$، درستی حکم به ازای $k+۱$ نتیجه می‌شود.
حال از اصل استقرای تعمیم یافته نتیجه می‌گیریم حکم به ازای هر n، $n \geq ۲۲$، درست است.

تمرین ۱۵: به ازای هر عدد طبیعی n، $n \geq ۶$، ثابت کنید اعداد صحیح x و y وجود دارند به‌طوری که $x \geq \circ$، $y \geq \circ$ و $۳x + ۴y = n$.

یادآوری: سال گذشته در درس آنالیز ترکیبی آموختید که اگر تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی را با $\binom{n}{k}$ نشان دهیم، آن‌گاه $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. یکی از مهم‌ترین اتحادهای آنالیز ترکیبی به **اتحاد پاسکال** معروف است که به‌صورت زیر می‌باشد.

قضیه‌ی ۳: **(اتحاد پاسکال):** $\binom{n}{k} = \binom{n-۱}{k} + \binom{n-۱}{k-۱}$

برهان: می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\binom{n-۱}{k} + \binom{n-۱}{k-۱} &= \frac{(n-۱)!}{k!((n-۱)-k)!} + \frac{(n-۱)!}{(k-۱)!((n-۱)-(k-۱))!}\\ &= \frac{(n-۱)!}{k!(n-k-۱)!} + \frac{(n-۱)!}{(k-۱)!(n-k)!} = \frac{(n-k)(n-۱)!}{k!((n-k)(n-k-۱)!)} + \frac{k(n-۱)!}{(k(k-۱)!)(n-k)!}\\ &= \frac{(n-k)(n-۱)!}{k!(n-k)!} + \frac{k(n-۱)!}{k!(n-k)!} = \frac{((n-k)+k)(n-۱)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-۱)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}\end{aligned}$$

مسأله‌ی ۱۳: به ازای هر عدد طبیعی n، $n \geq ۲$، ثابت کنید:

$$\binom{۲}{۲} + \binom{۳}{۲} + \cdots + \binom{n}{۲} = \binom{n+۱}{۳}$$

راه حل: حکم را به روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم.

۱) چون $\binom{۲}{۲} = ۱$ و $\binom{۳}{۳} = ۱$، پس $\binom{۲}{۲} = \binom{۳}{۲}$، لذا حکم به ازای $n = ۲$ درست است.

۲) فرض کنید حکم به ازای عددی طبیعی مانند k، $k \geq ۲$، درست باشد، در این صورت:

$$\binom{۲}{۲} + \binom{۳}{۲} + \cdots + \binom{k}{۲} = \binom{k+۱}{۳} \qquad (*)$$

می‌خواهیم حکم را به ازای $k+۱$ ثابت کنیم، یعنی نشان دهیم:

$$\binom{۲}{۲} + \binom{۳}{۲} + \cdots + \binom{k+۱}{۲} = \binom{k+۲}{۳} \qquad (**)$$

برای اثبات رابطه‌ی (**) به طرفین رابطه‌ی (*) عدد $\binom{k+۱}{۲}$ را اضافه می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم:

$$\binom{۲}{۲} + \binom{۳}{۲} + \cdots + \binom{k}{۲} + \binom{k+۱}{۲} = \binom{k+۱}{۳} + \binom{k+۱}{۲}$$

اما بنا بر اتحاد پاسکال، $\binom{k+۲}{۳}=\binom{k+۱}{۲}+\binom{k+۱}{۳}$، در نتیجه:

$$\binom{۲}{۲}+\binom{۳}{۲}+\cdots+\binom{k}{۲}+\binom{k+۱}{۲}=\binom{k+۲}{۳}$$

و این همان رابطه‌ی $(**)$ است. پس از درستی حکم به ازای k، $k\ge ۲$، درستی حکم را به ازای $k+۱$ نتیجه گرفتیم.

حال از اصل استقرای تعمیم یافته نتیجه می‌گیریم حکم به ازای هر عدد طبیعی n، $n\ge ۲$، درست است.

تمرین ۱۶: به ازای هر عدد طبیعی n، $n\ge ۳$، ثابت کنید:

$$\binom{۳}{۳}+\binom{۴}{۳}+\cdots+\binom{n}{۳}=\binom{n+۱}{۴}$$

به‌طور کلی به ازای هر دو عدد طبیعی n و k، $n\ge k$، ثابت کنید:

$$\binom{k}{k}+\binom{k+۱}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+۱}{k+۱}$$

مسأله‌ی ۱۴: به ازای هر عدد طبیعی n و هر عدد حقیقی θ $(\theta\ne k\pi)$ ثابت کنید

$$\cos\theta+\cos ۳\theta+\cdots+\cos(۲n-۱)\theta=\frac{\sin ۲n\theta}{۲\sin\theta}$$

راه حل: حکم را به روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم.

۱) چون $\sin ۲\theta=۲\sin\theta\cos\theta$، پس $\cos\theta=\frac{\sin ۲\theta}{۲\sin\theta}$، لذا حکم به ازای $n=۱$ درست است.

۲) فرض کنید حکم به ازای عددی طبیعی مانند k درست باشد، در این صورت:

$$\cos\theta+\cos ۳\theta+\cdots+\cos(۲k-۱)\theta=\frac{\sin ۲k\theta}{۲\sin\theta}\qquad(*)$$

می‌خواهیم حکم را به ازای $k+۱$ ثابت کنیم، یعنی نشان دهیم:

$$\cos\theta+\cos ۳\theta+\cdots+\cos(۲k+۱)\theta=\frac{\sin ۲(k+۱)\theta}{۲\sin\theta}\qquad(**)$$

برای اثبات رابطه‌ی $(**)$ به طرفین رابطه‌ی $(*)$، $\cos(۲k+۱)\theta$ را اضافه می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم:

$$\cos\theta+\cos ۳\theta+\cdots+\cos(۲k-۱)\theta+\cos(۲k+۱)\theta=\frac{\sin ۲k\theta}{۲\sin\theta}+\cos(۲k+۱)\theta=\frac{\sin ۲k\theta+۲\sin\theta\cos(۲k+۱)\theta}{۲\sin\theta}$$

(یادآوری: $۲\sin x\cos y=\sin(x+y)+\sin(x-y)$)

$$=\frac{\sin ۲k\theta+(\sin(\theta+(۲k+۱)\theta)+\sin(\theta-(۲k+۱)\theta)}{۲\sin\theta}$$

(یادآوری: $\sin(-x)=-\sin x$)

$$=\frac{\sin ۲k\theta+(\sin(۲k+۲)\theta+\sin(-۲k)\theta)}{۲\sin\theta}=\frac{\sin ۲k\theta+\sin ۲(k+۱)\theta-\sin ۲k\theta}{۲\sin\theta}=\frac{\sin ۲(k+۱)\theta}{۲\sin\theta}$$

و این همان رابطه‌ی $(**)$ است. پس از درستی حکم به ازای k، درستی حکم را به ازای $k+۱$ نتیجه گرفتیم.

حال از اصل استقرا نتیجه می‌گیریم حکم به ازای هر عدد طبیعی n درست است.

تمرین ۱۷: به ازای هر عدد طبیعی n و هر عدد حقیقی θ $(\theta\ne k\pi)$ ثابت کنید:

الف) $\cos\theta\cos ۲\theta\cos ۲^۲\theta...\cos ۲^{n-۱}\theta=\frac{\sin ۲^n\theta}{۲^n\sin\theta}$

ب) $\sin\theta+\sin ۳\theta+\cdots+\sin(۲n-۱)\theta=\frac{۱-\cos ۲n\theta}{۲\sin\theta}$

تمرین ۱۸: به ازای هر عدد طبیعی n و هر عدد حقیقی θ ثابت کنید $|\sin n\theta|\le n|\sin\theta|$.

استدلال استنتاجی

به روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم **استدلال استنتاجی** گفته می‌شود.
مثال‌های بسیاری در دنیای اطراف ما وجود دارند که نشان دهنده‌ی استفاده از استدلال استنتاجی در زندگی روزمره هستند.

مثال ۱: می‌دانیم در هر متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یک‌دیگرند و هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.
نتیجه: در هر مستطیل قطرها منصف یک‌دیگرند.

مثال ۲: اگر پلیس قاتل را دستگیر کند، قاتل اعدام خواهد شد. اگر قاتل اثری از خود بر جای گذاشته باشد، پلیس او را دستگیر می‌کند. می‌دانیم قاتل اعدام نشده است.
نتیجه: قاتل اثری از خود بر جای نگذاشته است.

مثال ۳: اگر علی سخت کار نکند، خوابش می‌برد و اگر او نگران باشد، خوابش نمی‌برد. می‌دانیم علی سخت کار نمی‌کند.
نتیجه: علی نگران نیست.

تمرین ۱۹: معدل تمام دانش‌آموزان مدرسه‌ی بوعلی بالاتر از ۱۷ است. می‌دانیم حسین در این مدرسه تحصیل می‌کند. چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

مسأله‌ی ۱۵: ثابت کنید مجموع ۵ عدد صحیح متوالی بر ۵ بخش‌پذیر است.

راه حل: پنج عدد صحیح متوالی را با a، $a+۱$، $a+۲$، $a+۳$ و $a+۴$ نشان می‌دهیم. مجموع این ۵ عدد برابر است با:

$$a+(a+۱)+(a+۲)+(a+۳)+(a+۴)=۵a+۱۰=۵(a+۲)$$

که عددی بخش‌پذیر بر ۵ است.

تمرین ۲۰: الف) ثابت کنید مجموع سه عدد صحیح متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.
ب) ثابت کنید مجموع چهار عدد صحیح متوالی بر ۴ بخش‌پذیر نیست.

مسأله‌ی ۱۶: ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد صحیح به فرم $۷k+۳$ عددی به فرم $۷k+۲$ است.

راه حل: فرض کنید a و b دو عدد صحیح به فرم $۷k+۳$ باشند، در این صورت اعداد صحیح $k_۱$ و $k_۲$ وجود دارند به‌گونه‌ای که $a=۷k_۱+۳$ و $b=۷k_۲+۳$. در نتیجه:

$$\begin{aligned} ab=(۷k_۱+۳)(۷k_۲+۳)&=۴۹k_۱k_۲+۲۱k_۱+۲۱k_۲+۹\\ &=۷\times۷k_۱k_۲+۷\times۳k_۱+۷\times۳k_۲+۷\times۱+۲\\ &=۷(\underbrace{۷k_۱k_۲+۳k_۱+۳k_۲+۱}_{k_۳})+۲=۷k_۳+۲\end{aligned}$$

توجه کنید که $k_۳$ عددی صحیح است. نتیجه می‌گیریم ab عددی به فرم $۷k+۲$ است.

تمرین ۲۱: ثابت کنید مجموع هر دو عدد به فرم $۴k+۳$ عددی به فرم $۴k+۲$ و حاصل ضرب هر دو عدد به فرم $۴k+۳$ عددی به فرم $۴k+۱$ است.

تمرین ۲۲: الف) ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد صحیح متوالی عددی زوج است.
ب) ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد زوج متوالی بر ۸ بخش‌پذیر است.

مسأله‌ی ۱۷: ثابت کنید مربع هر عدد فرد عددی به فرم $۸k+۱$ است.

راه حل: فرض کنید a عددی فرد باشد، در این صورت عددی صحیح مانند q وجود دارد به‌گونه‌ای که $a=۲q+۱$. در نتیجه:

$$a^۲=(۲q+۱)^۲=۴q^۲+۴q+۱=۴q(q+۱)+۱$$

اما $q(q+۱)$ برابر حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی است. بنا بر قسمت (الف) تمرین قبل این عدد، عددی زوج است، لذا به ازای عددی صحیح مانند t، $q(q+۱)=۲t$. در نتیجه $a^۲=۴q(q+۱)+۱=۸t+۱$، پس $a^۲$ به فرم $۸k+۱$ است.

تمرین ۲۳: ثابت کنید مربع هر عدد به فرم $6k-1$ عددی به فرم $24k+1$ است.

مسألهٔ ۱۸: ثابت کنید مجموع هر دو عدد گویا عددی گویا است.

راه حل: یادآوری می‌کنیم که اعداد گویا اعداد به فرم $\frac{a}{b}$ هستند که $a,b \in Z$ و $b \neq 0$. فرض کنید x و y دو عدد گویا باشند، در این صورت اعداد صحیح a، b، c و d وجود دارند به‌طوری که $x=\frac{a}{b}$ و $y=\frac{c}{d}$ $(b,d \neq 0)$. در نتیجه:

$$x+y=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

چون $ad+bc$ و bd عددهایی صحیح هستند و $bd \neq 0$، نتیجه می‌گیریم $x+y$ عددی گویا است.

تمرین ۲۴: الف) ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد گویا عددی گویا است.

ب) اگر x یک عدد گویای ناصفر باشد، ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز عددی گویا است.

ج) فرض کنید a یک عدد حقیقی ناصفر باشد به‌گونه‌ای که a^5 و a^7 عددهایی گویا باشند. ثابت کنید a نیز عددی گویا است.

مسألهٔ ۱۹: فرض کنید عدد طبیعی a برابر مجموع مربع‌های دو عدد صحیح باشد. ثابت کنید $2a$ نیز برابر مجموع مربع‌های دو عدد صحیح است.

راه حل: بنا به فرض، اعداد صحیح x و y وجود دارند به‌گونه‌ای که $a=x^2+y^2$. در نتیجه:

$$2a=2x^2+2y^2=(x^2+2xy+y^2)+(x^2-2xy+y^2)=(x+y)^2+(x-y)^2$$

پس $2a$ نیز برابر مجموع مربع‌های دو عدد صحیح است.

تمرین ۲۵: فرض کنید هر یک از a و b برابر مجموع مربع‌های دو عدد صحیح باشند. ثابت کنید ab نیز برابر مجموع مربع‌های دو عدد صحیح است.

تمرین ۲۶: ثابت کنید حاصل ضرب چهار عدد صحیح متوالی به علاوه‌ی یک برابر مربع عددی صحیح است.

مسألهٔ ۲۰: ثابت کنید حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی به علاوه‌ی یک برابر مربع عددی صحیح است.

راه حل: دو عدد زوج متوالی را می‌توانیم به فرم $2a$ و $2a+2$ در نظر بگیریم. می‌توان نوشت.

$$2a(2a+2)+1=4a^2+4a+1=(2a+1)^2$$

لذا حکم ثابت می‌شود.

مسألهٔ ۲۱: ثابت کنید هر عدد فرد برابر تفاضل مربع‌های دو عدد صحیح است.

راه حل: فرض کنید a عددی فرد باشد، در این صورت به ازای عددی صحیح مانند q، $a=2q+1$.

می‌توان نوشت:

$$a=2q+1=(q^2+2q+1)-q^2=(q+1)^2-q^2$$

پس a برابر تفاضل مربع‌های دو عدد صحیح است.

تمرین ۲۷: ثابت کنید هر عدد صحیح که بر ۴ بخش‌پذیر باشد برابر تفاضل مربع‌های دو عدد صحیح است.

مثال نقض

گاهی اوقات با مشاهده‌ی چند ویژگی یا چند رابطه ممکن است که حدس بزنیم یک نتیجه در حالت کلی برقرار باشد. مثلاً عبارت $n^۲ - n + ۱۷$ را در نظر بگیرید. مقادیر این عبارت به ازای $n = ۱,۲,۳,۴,۵$ در زیر محاسبه شده است.

$$۱^۲ - ۱ + ۱۷ = ۱۷ \quad , \quad ۲^۲ - ۲ + ۱۷ = ۱۹ \quad , \quad ۳^۲ - ۳ + ۱۷ = ۲۳ \quad , \quad ۴^۲ - ۴ + ۱۷ = ۲۹ \quad , \quad ۵^۲ - ۵ + ۱۷ = ۳۷$$

مشاهده می‌کنیم که همگی این مقادیر عددهایی اول‌اند. ممکن است حدس بزنیم که $n^۲ - n + ۱۷$ به ازای هر عدد طبیعی n اول باشد. مشخص است که بر اساس پاره‌ای از مشاهدات نمی توان درستی یک حکم را در حالت کلی نتیجه گرفت. چه بسا ممکن است که این حکم در حالت کلی درست نباشد. چنان‌چه بخواهیم ثابت کنیم یک حکم در حالت کلی درست نیست چه باید بکنیم؟ مثلاً در مورد حکم فوق چنان‌چه عددی طبیعی مانند n بیابیم که به ازای آن $n^۲ - n + ۱۷$ عددی اول نباشد نتیجه می‌گیریم این حکم در حالت کلی درست نیست. مثلاً $n = ۱۷$ یکی از این اعداد است، زیرا $۱۷^۲ = ۱۷ + ۱۷ - ۱۷^۲$ که عددی مرکب است. آیا اعداد دیگری می‌توانید بیابید که کلیت حکم فوق را نقض کنند؟ (البته توجه کنید که همین یک مثال، یعنی $n = ۱۷$، برای نقض کلیت حکم فوق کافی است).

تعریف ۱: به مثالی که نشان دهد یک حکم در حالت کلی درست نیست مثال نقض گوییم.

پس برای اثبات نادرست بودن یک حکم در حالت کلی کافی است یک مثال نقض برای آن بیابیم.

مسأله‌ی ۲۲: به تساوی‌های زیر توجه کنید.

$$۱ = ۱^۲ - ۰^۲ \quad , \quad ۳ = ۲^۲ - ۱^۲ \quad , \quad ۱۲ = ۴^۲ - ۲^۲ \quad , \quad ۷۵ = ۱۰^۲ - ۵^۲$$

ممکن است از این تساوی‌ها نتیجه بگیرید که هر عدد طبیعی برابر تفاضل مربع‌های دو عدد صحیح است. آیا این حکم درست است؟

راه حل: خیر، مثلاً عدد ۲ ویژگی مورد نظر را ندارد. زیرا اگر a و b دو عدد صحیح باشند، آن‌گاه $a^۲ - b^۲$ برابر ۲ نمی‌تواند باشد. زیرا اگر یکی از a و b فرد و دیگری زوج باشد، آن‌گاه $a^۲ - b^۲$ عددی فرد است و اگر a و b، هر دو فرد یا هر دو زوج باشند، آن‌گاه $a - b$ و $a + b$، هر دو زوج‌اند، لذا $a^۲ - b^۲ = (a - b)(a + b)$ مضرب ۴ است، پس $a^۲ - b^۲$ یا عددی فرد یا عددی بخش‌پذیر بر ۴ است، لذا برابر ۲ نمی‌تواند باشد.

تمرین ۲۸: آیا هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع مربع‌های دو عدد صحیح نمایش داد؟

تمرین ۲۹: آیا هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت مجموع مربع‌های سه عدد صحیح نمایش داد؟

مسأله‌ی ۲۳: فرض کنید x و y دو عدد حقیقی باشند به‌گونه‌ای که $\sin x = \sin y$. آیا درست است که $\tan x = \tan y$؟

راه حل: خیر، مثلاً فرض کنید $x = \frac{\pi}{۶}$ و $y = \frac{۵\pi}{۶}$، در این‌صورت $\sin x = \sin y = \frac{۱}{۲}$، ولی $\tan x = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و $\tan y = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$، پس $\tan x \neq \tan y$.

تمرین ۳۰: فرض کنید x و y دو عدد حقیقی باشند به‌گونه‌ای که $[x] = [y]$. آیا درست است که $[x^۲] = [y^۲]$؟

مسأله‌ی ۲۴: آیا $۲^n - ۱$ به ازای هر عدد فرد n، $n \geq ۳$، عددی اول است؟

راه حل: خیر. علی‌رغم این‌که $۷ = ۱ - ۲^۳$، $۳۱ = ۱ - ۲^۵$ و $۱۲۷ = ۱ - ۲^۷$ همگی عددهایی اول‌اند، ولی $۲^۹ - ۱ = ۵۱۱ = ۷ \times ۷۳$ عددی مرکب است.

تمرین ۳۱: آیا $۲^n + ۱$ به ازای هر عدد زوج n عددی اول است؟

❍ **مسأله‌ی ۲۵: آیا به ازای هر دو عدد حقیقی x و y، $[x-y]=[x]-[y]$؟**

راه حل: خیر، مثلاً فرض کنید $x=۰$ و $y=\frac{۱}{۲}$، در این صورت $[x-y]=\left[-\frac{۱}{۲}\right]=-۱$ و $[x]-[y]=۰-۰=۰$، لذا $[x-y]\neq[x]-[y]$.

تمرین ۳۲: آیا به ازای هر دو عدد حقیقی x و y، $[x+y]=[x]+[y]$؟

❍ **مسأله‌ی ۲۶: آیا مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است؟**

راه حل: خیر، مثلاً $\sqrt{۲}-۲$ و $\sqrt{۲}+۲$ عددهایی گنگ هستند ولی مجموع آن‌ها، یعنی $۴=(\sqrt{۲}+۲)+(۲-\sqrt{۲})$، عددی گنگ نیست.

تمرین ۳۳: آیا حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است؟

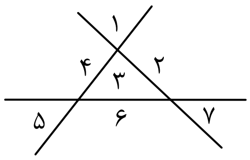
❍ **مسأله‌ی ۲۷: آیا به ازای هر عدد فرد n، $۲^n-۲$ بر n بخش‌پذیر است؟**

راه حل: خیر، مثلاً ۹ عددی فرد است ولی $۲^۹-۲=۵۱۰$ بر ۹ بخش‌پذیر نیست.

تمرین ۳۴: آیا درست است که به ازای هر عدد فرد n، $n\geq ۵$، $۲^n+۱$ بر n بخش‌پذیر نیست؟

❍ **مسأله‌ی ۲۸: آیا تعداد نواحی ایجاد شده در صفحه پس از رسم n خط دو به دو متقاطع که هیچ سه تا همرس نیستند برابر ۲^n است؟**

راه حل: خیر، علی‌رغم این‌که حکم فوق به ازای $n=۱,۲$ درست است ولی این حکم به ازای $n=۳$ درست نیست، زیرا تعداد نواحی ایجاد شده در صفحه توسط سه خط با شرایط گفته شده برابر ۷ است.



تمرین ۳۵: آیا تعداد نواحی ایجاد شده در صفحه پس از رسم n دایره‌ی دو به دو متقاطع که هیچ سه تا همرس نیستند برابر ۲^n است؟

❍ **مسأله‌ی ۲۹: آیا هر عدد طبیعی به فرم $۸k+۱$ مربع کامل است؟**

راه حل: خیر، مثلاً به ازای $k=۲$، $۸k+۱=۱۷$ که مربع کامل نیست.

تمرین ۳۶: آیا هر عدد طبیعی به فرم $۵k-۱$ مربع کامل است؟

تمرین ۳۷: آیا درست است که هیچ مربع کاملی به فرم $۲۵k-۴$ وجود ندارد؟

❍ **مسأله‌ی ۳۰: آیا درست است که هر عدد طبیعی به فرم $۶k-۱$ عددی اول است؟**

راه حل: خیر، مثلاً به ازای $k=۶$، $۶k-۱=۳۵$ که عددی مرکب است.

تمرین ۳۸: آیا درست است که هر عدد طبیعی به فرم $۲۴k-۱$ عددی اول است؟

تمرین ۳۹: آیا درست است که به ازای هر عدد طبیعی k، $۲۴k+۱$ عددی مرکب است؟

❍ **مسأله‌ی ۳۱: فرض کنید a، b، c و d عددهایی حقیقی باشند به‌گونه‌ای که $a\leq b$ و $c\leq d$. آیا درست است که $ac\leq bd$؟**

راه حل: خیر، مثلاً به ازای $a=-۱$، $b=۰$، $c=-۲$ و $d=۵$، نابرابری‌های $a\leq b$ و $c\leq d$ برقرارند ولی نابرابری $ac\leq bd$ برقرار نیست.

تمرین ۴۰: فرض کنید a، b، c و d عددهایی حقیقی باشند به‌گونه‌ای که $a\leq b$ و $c\leq d$. آیا درست است که $a-c\leq b-d$؟

مسأله‌ی ۳۲: **فرض کنید n عددی صحیح و $n^۲$ بر ۶۰ بخش‌پذیر باشد. آیا درست است که n نیز بر ۶۰ بخش‌پذیر است؟**

راه حل: خیر، مثلاً به ازای $n = ۳۰$، $n^۲$ بر ۶۰ بخش‌پذیر است ولی n بر ۶۰ بخش‌پذیر نیست.

تمرین ۴۱: **فرض کنید n عددی صحیح و $n^۲$ بر ۵۰ بخش‌پذیر باشد. آیا n نیز بر ۵۰ بخش‌پذیر است؟**

مسأله‌ی ۳۳: **فرض کنید n عددی صحیح و $n^۲$ عددی به فرم $۷k+۱$ باشد. آیا n نیز به فرم $۷k+۱$ است؟**

راه حل: خیر، مثلاً به ازای $n = ۶$، $n^۲ = ۳۶ = ۷\times۵+۱$، لذا $n^۲$ به فرم $۷k+۱$ است ولی n به فرم $۷k+۱$ نیست.

تمرین ۴۲: **فرض کنید n عددی صحیح و $n^۲$ عددی به فرم $۷k+۲$ باشد. آیا می‌توان نتیجه گرفت که n به فرم $۷k+۳$ است؟**

مسأله‌ی ۳۴: **فرض کنید a و b عددهایی طبیعی باشند به‌طوری که a^a بر b^b بخش‌پذیر باشد. آیا درست است که a نیز بر b بخش‌پذیر است؟**

راه حل: خیر، مثلاً به ازای $a = ۱۰$ و $b = ۴$، a^a بر b^b بخش‌پذیر است، زیرا:

$$a^a = ۱۰^{۱۰} = (۲\times۵)^{۱۰} = ۲^{۱۰}\times۵^{۱۰} = ۲^۸\times(\underbrace{۲^۲\times۵^{۱۰}}_{t}) = ۴^۴\times t = b^b\times t$$

ولی a بر b بخش‌پذیر نیست.

تمرین ۴۳: **فرض کنید a و b عددهایی طبیعی باشند به‌طوری که $a^۳$ بر $b^۲$ بخش‌پذیر باشد. آیا درست است که a نیز بر b بخش‌پذیر است؟**

مسأله‌ی ۳۵: **آیا درست است که برای هر زیر مجموعه‌ی ۱۰ عضوی از مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۲۰\}$ مانند A، اعضای x و y متعلق به A وجود دارند که x بر y بخش‌پذیر باشد؟**

راه حل: خیر، مثلاً زیرمجموعه‌ی ۱۰ عضوی $\{۱۱,۱۲,...,۲۰\}$ از مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۲۰\}$ ویژگی گفته شده را ندارد.

تمرین ۴۴: **آیا درست است که برای هر زیرمجموعه‌ی ۱۰ عضوی از مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۲۰\}$ مانند A، اعضای x و y متعلق به A وجود دارند به‌طوری که $x - y = ۲$؟**

اثبات بازگشتی

دو حکم را **معادل** گوییم، هرگاه بتوان درستی هر یک را از درستی دیگری نتیجه گرفت.

مثال ۴: حکم‌های «$[x]=1$» و «$1 \le x < 2$» معادل‌اند، زیرا از هر یک می‌توان دیگری را نتیجه گرفت.

مثال ۵: حکم‌های «$|x|=|y|$» و «$x^2 = y^2$» معادل‌اند.

گاهی برای اثبات یک حکم آن را به حکمی ساده‌تر تبدیل می‌کنیم که معادل با حکم اولیه باشد و این کار را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا به حکمی که درستی آن برای ما معلوم است برسیم. به این ترتیب بازگشت از حکم آخر درستی حکم اولیه را نتیجه می‌دهد. به این روش اثبات، **اثبات بازگشتی** گفته می‌شود.

مسأله‌ی ۳۶: **فرض کنید x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند. ثابت کنید** $\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$.

راه حل: چنان‌چه طرفین نابرابری داده شده را به توان ۲ برسانیم نتیجه می‌گیریم $\frac{x^2+2xy+y^2}{4} \ge xy$.

$$\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy} \quad (*) \qquad\qquad \frac{x^2+2xy+y^2}{4} \ge xy \quad (**)$$

توجه کنید که نابرابری‌های (*) و (**) معادل‌اند، زیرا اگر (*) درست باشد، با توجه به مثبت بودن طرفین این رابطه، می‌توانیم طرفین را به توان ۲ رسانده و (**) را نتیجه بگیریم و اگر (**) درست باشد، می‌توانیم از طرفین رابطه جذر گرفته و (*) را نتیجه بگیریم. معادل بودن (*) و (**) را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{x^2+2xy+y^2}{4} \ge xy$$

با توجه به توضیحات فوق برای اثبات نابرابری (*) کافی است معادل آن یعنی نابرابری (**) را اثبات کنیم. برای اثبات نابرابری (**) نیز سعی می‌کنیم این نابرابری را به نابرابری‌های ساده‌تری که با آن معادل باشند تبدیل کنیم.

$$\frac{x^2+2xy+y^2}{4} \ge xy \xleftrightarrow{\text{طرفین را در ۴ ضرب می‌کنیم}} x^2+2xy+y^2 \ge 4xy$$
$$\xleftrightarrow{\text{طرفین را با } -4xy \text{ جمع می‌کنیم}} x^2-2xy+y^2 \ge 0$$
$$\longleftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$$

با توجه به این‌که نابرابری آخر همواره درست است نتیجه می‌گیریم معادل آن، یعنی نابرابری (*) نیز درست است.

تمرین ۴۵: **الف) فرض کنید x یک عدد حقیقی مثبت باشد. ثابت کنید** $x+\frac{1}{x} \ge 2$.

ب) فرض کنید x یک عدد حقیقی منفی باشد. ثابت کنید $x+\frac{1}{x} \le -2$.

تمرین ۴۶: **به ازای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید** $\frac{x+y}{2} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$.

مسأله‌ی ۳۷: **به ازای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید** $x^2+y^2 \ge 2(x+y-1)$.

راه حل: می‌توان نوشت:

$$x^2+y^2 \ge 2(x+y-1) \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-2y+2 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)+(y^2-2y+1) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 \ge 0$$

چون نابرابری آخر همواره درست است، لذا معادل آن یعنی نابرابری اولیه نیز درست است.

تمرین ۴۷: به ازای هر سه عدد حقیقی x، y و z ثابت کنید $x^۲+y^۲+z^۲+۳\geq ۲(x+y+z)$.

تمرین ۴۸: به ازای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید $۲x^۲+y^۲\geq ۲xy+۲x-۱$.

مسأله‌ی ۳۸: به ازای هر سه عدد حقیقی x، y و z ثابت کنید $x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+xz+yz$.

راه حل: می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+xz+yz &\Leftrightarrow x^۲+y^۲+z^۲-xy-xz-yz\geq ۰ \Leftrightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲-۲xy-۲xz-۲yz\geq ۰ \\ &\Leftrightarrow (x^۲-۲xy+y^۲)+(x^۲-۲xz+z^۲)+(y^۲-۲yz+z^۲)\geq ۰ \\ &\Leftrightarrow (x-y)^۲+(x-z)^۲+(y-z)^۲\geq ۰ \end{aligned}$$

چون نابرابری آخر درست است، پس معادل آن، ینی نابرابری اولیه نیز درست است.

تمرین ۴۹: به ازای هر سه عدد حقیقی مثبت x، y و z ثابت کنید $\frac{x+y+z}{۳}\leq\sqrt{\frac{x^۲+y^۲+z^۲}{۳}}$.

مسأله‌ی ۳۹: به ازای هر چهار عدد حقیقی a، b، c و d ثابت کنید $(ab+cd)^۲\leq (a^۲+c^۲)(b^۲+d^۲)$.

راه حل: می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} (ab+cd)^۲\leq (a^۲+c^۲)(b^۲+d^۲) &\Leftrightarrow a^۲b^۲+۲abcd+c^۲d^۲\leq a^۲b^۲+a^۲d^۲+b^۲c^۲+c^۲d^۲ \\ &\Leftrightarrow a^۲d^۲-۲abcd+b^۲c^۲\geq ۰ \Leftrightarrow (ad-bc)^۲\geq ۰ \end{aligned}$$

چون نابرابری آخر درست است، پس معادل آن، یعنی نابرابری اولیه نیز درست است.

تمرین ۵۰: به ازای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید $(a^۲+b^۲)(a^۴+b^۴)\geq (a^۳+b^۳)^۲$

تمرین ۵۱: به ازای هر چهار عدد حقیقی مثبت a، b، c و d ثابت کنید $\sqrt{(a+b)(c+d)}\geq\sqrt{ac}+\sqrt{bd}$.

مسأله‌ی ۴۰: به ازای هر دو عدد حقیقی مثبت x و y ثابت کنید $x^۳+y^۳\geq x^۲y+xy^۲$.

راه حل: می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} x^۳+y^۳\geq x^۲y+xy^۲ &\Leftrightarrow x^۳+y^۳-x^۲y-xy^۲\geq ۰ \Leftrightarrow (x^۳-x^۲y)+(y^۳-xy^۲)\geq ۰ \Leftrightarrow x^۲(x-y)+y^۲(y-x)\geq ۰ \\ &\Leftrightarrow (x-y)(x^۲-y^۲)\geq ۰ \Leftrightarrow (x-y)(x-y)(x+y)\geq ۰ \Leftrightarrow (x-y)^۲(x+y)\geq ۰ \end{aligned}$$

چون نابرابری آخر درست است، لذا معادل آن، یعنی نابرابری اولیه نیز درست است.

تمرین ۵۲: به ازای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید $x^۴+y^۴\geq x^۳y+xy^۳$.

تمرین ۵۳: به ازای هر عدد حقیقی مثبت x ثابت کنید $x^۵+\frac{۱}{x^۵}\geq x^۳+\frac{۱}{x^۳}$.

مسأله‌ی ۴۱: فرض کنید a، b و c عددهای حقیقی مثبتی باشند به‌گونه‌ای که $a+b>c$. ثابت کنید $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$.

راه حل: می‌توان نوشت:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}\Leftrightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b})^۲>c\Leftrightarrow a+۲\sqrt{ab}+b>c$$

اما نابرابری آخر درست است زیرا $a+۲\sqrt{ab}+b>a+b$ و $a+b>c$، پس $a+۲\sqrt{ab}+b>c$. نتیجه می‌گیریم نابرابری اولیه نیز درست است.

تمرین ۵۴: فرض کنید a، b و c عددهای حقیقی مثبتی باشند به‌گونه‌ای که $a+b<c$. ثابت کنید $\sqrt{a}+\sqrt{b}<\sqrt{2c}$.

مسألهٔ ۴۲: فرض کنید x و y دو عدد حقیقی باشند به‌گونه‌ای که $|x|<1$ و $|y|<1$. ثابت کنید $|x+y|<|1+xy|$.

راه حل: می‌توان نوشت:

$$|x+y|<|1+xy| \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2<1+2xy+x^2y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-1-x^2y^2<0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-x^2y^2)+(y^2-1)<0 \Leftrightarrow x^2(1-y^2)-(1-y^2)<0 \Leftrightarrow (x^2-1)(1-y^2)<0$$

اما نابرابری آخر درست است، زیرا از $|x|<1$ نتیجه می‌گیریم $x^2-1<0$ و از $|y|<1$ نتیجه می‌گیریم $1-y^2>0$، پس $(x^2-1)(1-y^2)<0$.
لذا نابرابری معادل با این نابرابری، یعنی نابرابری اولیه نیز درست است.

تمرین ۵۵: فرض کنید $0<x<y<1$. ثابت کنید $\frac{y-x}{1-xy}<1$.

مسألهٔ ۴۳: ثابت کنید $\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

راه حل: می‌توان نوشت:

$$\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\sqrt{2}+\sqrt{5} \Leftrightarrow 7+2\sqrt{10}=(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow 7+2\sqrt{10}=2+2\sqrt{10}+5$$

چون تساوی آخر برقرار است، لذا تساوی اولیه نیز برقرار است.

تمرین ۵۶: ثابت کنید $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=4$.

مسألهٔ ۴۴: ثابت کنید $\sqrt{29}+\sqrt{31}<2\sqrt{30}$.

راه حل: می‌توان نوشت:

$$\sqrt{29}+\sqrt{31}<2\sqrt{30} \Leftrightarrow (\sqrt{29}+\sqrt{31})^2<(2\sqrt{30})^2 \Leftrightarrow 29+2\sqrt{29\times 31}+31<120$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{899}<60 \Leftrightarrow \sqrt{899}<30 \Leftrightarrow 899<900$$

چون نابرابری آخر درست است، پس نابرابری اولیه نیز درست است.

تمرین ۵۷: ثابت کنید $\sqrt{14}-\sqrt{13}<\sqrt{11}-\sqrt{10}$.

مسألهٔ ۴۵: فرض کنید a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند. به ازای هر عدد حقیقی x ثابت کنید $|a\sin x+b\cos x|\le\sqrt{a^2+b^2}$.

راه حل: می‌توان نوشت:

$$|a\sin x+b\cos x|\le\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow a^2\sin^2 x+2ab\sin x\cos x+b^2\cos^2 x\le a^2+b^2$$
$$\Leftrightarrow a^2(1-\sin^2 x)-2ab\sin x\cos x+b^2(1-\cos^2 x)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow a^2\cos^2 x-2ab\sin x\cos x+b^2\sin^2 x\ge 0 \Leftrightarrow (a\cos x-b\sin x)^2\ge 0$$

چون نابرابری آخر همواره درست است،لذا معادل آن، یعنی نابرابری اولیه نیز درست است.

تمرین ۵۸: فرض کنید a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند. به ازای هر عدد حقیقی x، $x\neq\frac{k\pi}{2}$، ثابت کنید $|a\tan x+b\cot x|\ge 2\sqrt{ab}$.

برهان خلف (اثبات غیر مستقیم)

گاهی اوقات برای اثبات درستی یک حکم، ابتدا فرض می‌کنیم این حکم درست نباشد، سپس با استفاده از روش استنتاج به یک تناقض می‌رسیم (یعنی به نتیجه‌ای می‌رسیم که می‌دانیم درست نیست). از تناقض حاصل نتیجه می‌گیریم که حکم اولیه درست بوده است. به این روش اثبات، **برهان خلف** یا **اثبات غیر مستقیم** گفته می‌شود.

مسأله‌ی ۴۶: فرض کنید n عددی صحیح باشد. اگر n^2 زوج باشد، ثابت کنید n نیز عددی زوج است.

راه حل: فرض کنید حکم درست نباشد یعنی فرض کنید n عددی فرد باشد، در این صورت به ازای عددی صحیح مانند q، $n = 2q + 1$. در نتیجه:

$$n^2 = (2q+1)^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 2(\underbrace{2q^2 + 2q}_{t}) + 1 = 2t + 1$$

پس n^2 عددی فرد است. اما این نتیجه با فرض مسأله تناقض دارد. پس با فرض فرد بودن n به تناقض رسیدیم، لذا n باید عددی زوج باشد.

تمرین ۵۹: فرض کنید n عددی صحیح باشد.

الف) اگر n^2 فرد باشد، ثابت کنید n نیز عددی فرد است.

ب) اگر $5n + 3$ عددی فرد باشد، ثابت کنید n عددی زوج است.

ج) اگر n^2 بر ۳ بخش‌پذیر باشد، ثابت کنید n نیز بر ۳ بخش‌پذیر است.

د) اگر n^2 بر۱۰ بخش‌پذیر باشد، ثابت کنید n نیز بر ۱۰ بخش‌پذیر است.

مسأله‌ی ۴۷: ثابت کنید $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.

راه حل: فرض کنید حکم درست نباشد، یعنی فرض کنید $\sqrt{2}$ عددی گویا باشد، در این صورت اعداد صحیح a و b وجود دارند به‌طوری که نسبت به هم اول‌اند (عامل مشترکی به جز ۱ ندارند) و $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. در نتیجه $\frac{a^2}{b^2} = 2$ و لذا $2b^2 = a^2$. از این رابطه نتیجه می‌گیریم a^2 عددی زوج و لذا بنا بر حکم مسأله‌ی قبل، a نیز عددی زوج است، پس به ازای عددی صحیح مانند q، $a = 2q$. در نتیجه:

$$2b^2 = a^2 = (2q)^2 = 4q^2 \Rightarrow b^2 = 2q^2$$

حال از این رابطه نتیجه می‌گیریم b^2 عددی زوج است و لذا بنا بر مسأله‌ی قبل b نیز عددی زوج است. پس a و b هر دو مضرب ۲ هستند و لذا نمی‌توانند نسبت به هم اول باشند. اما این نتیجه با فرض اولیه در مورد a و b در تناقض است. پس فرض گویا بودن $\sqrt{2}$ به تناقض رسید، لذا $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.

تمرین ۶۰: ثابت کنید $\sqrt{3}$ عددی گنگ است.

تمرین ۶۱: ثابت کنید $\sqrt[3]{2}$ عددی گنگ است.

تمرین ۶۲: ثابت کنید $\sqrt{6}$ عددی گنگ است.

تمرین ۶۳: فرض کنید x عددی حقیقی باشد. ثابت کنید حداقل یکی از اعداد $x + \sqrt{2}$ و $x - \sqrt{2}$ عددی گنگ است.

مسأله‌ی ۴۸: **ثابت کنید $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ عددی گنگ است.**

راه حل: فرض کنید حکم درست نباشد، یعنی فرض کنید $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ عددی گویا باشد، در این صورت اعداد صحیح a و b وجود دارند به‌طوری که $\frac{a}{b}=\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$. در نتیجه:

$$\sqrt{۳}=\frac{a}{b}-\sqrt{۲}\Rightarrow ۳=\frac{a^{۲}}{b^{۲}}-\frac{۲a\sqrt{۲}}{b}+۲\Rightarrow \frac{۲a\sqrt{۲}}{b}=(\frac{a^{۲}}{b^{۲}}+۲)-۳$$
$$\Rightarrow \frac{۲a\sqrt{۲}}{b}=\frac{a^{۲}}{b^{۲}}-۱=\frac{a^{۲}-b^{۲}}{b^{۲}}\Rightarrow \sqrt{۲}=\frac{a^{۲}-b^{۲}}{b^{۲}}\times\frac{b}{۲a}=\frac{a^{۲}-b^{۲}}{۲ab}$$

چون a و b عددهایی صحیح و ناصفرند (چرا؟)، لذا از این رابطه نتیجه می‌گیریم $\sqrt{۲}$ عددی گویا است. اما می‌دانیم $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است. پس با فرض گویا بودن $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ به تناقض رسیدیم، لذا $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ عددی گنگ است.

تمرین ۶۴: **ثابت کنید $\sqrt{۵}+\sqrt{۲}$ عددی گنگ است.**

تمرین ۶۵: **ثابت کنید $\sqrt{۵}-\sqrt{۳}$ عددی گنگ است.**

تمرین ۶۶: **ثابت کنید $\sqrt{۱+\sqrt{۲}}$ عددی گنگ است.**

تمرین ۶۷: **ثابت کنید $\sqrt{۲}-\sqrt[۳]{۲}$ عددی گنگ است.**

مسأله‌ی ۴۹: **ثابت کنید $\log_{۲}^{۵}$ عددی گنگ است.**

راه حل: فرض کنید حکم درست نباشد، یعنی فرض کنید $\log_{۲}^{۵}$ عددی گویا باشد، در این صورت اعداد طبیعی a و b وجود دارند به‌گونه‌ای که $\log_{۲}^{۵}=\frac{a}{b}$ (توجه کنید که $\log_{۲}^{۵}$ عددی مثبت است، لذا می‌توان فرض کرد a و b نیز مثبت‌اند). حال می‌توان نوشت:

$$\log_{۲}^{۵}=\frac{a}{b}\Rightarrow ۵=۲^{\frac{a}{b}}\Rightarrow ۵^{b}=۲^{a}$$

اما تساوی آخر نمی‌تواند برقرار باشد، زیرا سمت چپ این تساوی عددی فرد و سمت راست آن عددی زوج است. پس با فرض گویا بودن $\log_{۲}^{۵}$ به تناقض رسیدیم، لذا این عدد، عددی گنگ است.

تمرین ۶۸: **ثابت کنید $\log_{۳}^{۲}$ عددی گنگ است.**

تمرین ۶۹: **ثابت کنید $\log_{۳}^{۷}$ عددی گنگ است.**

مسأله‌ی ۵۰: **ثابت کنید $\sin ۱۵^\circ$ عددی گنگ است.**

راه حل: فرض کنید $\sin ۱۵^\circ$ عددی گویا باشد. چون مجموعه‌ی اعداد گویا نسبت به اعمال جمع و ضرب بسته است، لذا از گویا بودن $\sin ۱۵^\circ$ و رابطه‌ی $\cos ۳۰^\circ=۱-۲\sin^{۲}۱۵^\circ$، نتیجه می‌گیریم $\cos ۳۰^\circ$ نیز عددی گویا است، پس $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ عددی گویا است و لذا $۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}$ نیز عددی گویا است. اما می‌دانیم $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است. پس با فرض گویا بودن $\sin ۱۵^\circ$ به تناقض رسیدیم، لذا این عدد، عددی گنگ است.

تمرین ۷۰: **ثابت کنید $\cos ۱۵^\circ$ عددی گنگ است.**

تمرین ۷۱: **ثابت کنید $\cos ۱۰^\circ$ عددی گنگ است (راهنمایی:** $\cos ۳\alpha=۴\cos^{۳}\alpha-۳\cos\alpha$).

مسأله‌ی ۵۱: ثابت کنید کوچک‌ترین عدد حقیقی مثبت وجود ندارد.

راه حل: فرض کنید حکم درست نباشد، یعنی فرض کنید کوچک‌ترین عدد حقیقی مثبت وجود داشته باشد. این عدد را با ε نشان می‌دهیم. چون $\varepsilon > 0$، پس $0 < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$، یعنی $\frac{\varepsilon}{2}$ عددی مثبت کوچک‌تر از ε است. اما این نتیجه با این فرض که ε کوچک‌ترین عدد حقیقی مثبت است تناقض دارد. از تناقض حاصل نتیجه می‌گیریم کوچک‌ترین عدد حقیقی مثبت وجود ندارد.

تمرین ۷۲: می‌دانیم مجموعه‌ی اعداد طبیعی از بالا بی‌کران است، یعنی برای هر عدد حقیقی M، عدد طبیعی n وجود دارد که $n > M$. فرض کنید ε عددی حقیقی باشد به‌گونه‌ای که برای هر عدد طبیعی n، $\varepsilon \le \frac{1}{n}$. ثابت کنید $\varepsilon \le 0$.

تمرین ۷۳: ثابت کنید در بازه‌ی $[0,1)$ عددی که از همه‌ی اعضا بزرگ‌تر باشد وجود ندارد.

تمرین ۷۴: ثابت کنید در مجموعه‌ی $A = \{x \in Q \mid x > \sqrt{2}\}$ عددی که از همه‌ی اعضا کوچک‌تر باشد وجود ندارد (Q مجموعه‌ی اعداد گویا است). به‌طور مشابه ثابت کنید در مجموعه‌ی اعداد گنگی که از $\sqrt{2}$ بزرگ‌ترند، کوچک‌ترین عدد وجود ندارد.

تمرین ۷۵: فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند به‌گونه‌ای که برای هر $\varepsilon > 0$، $a < b + \varepsilon$. ثابت کنید $a \le b$.

مسأله‌ی ۵۲: ثابت کنید مجموع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

راه حل: فرض کنید حکم درست نباشد، در این صورت عدد گویای x و عدد گنگ y وجود دارد به‌طوری که $x + y$ عددی گویا است. فرض کنید $x + y = z$، در این صورت $y = z - x$. چون x و z هر دو گویا هستند، لذا $z - x$، نیز عددی گویا است. (چرا؟) اما طبق فرض $y = z - x$ عددی گنگ است. پس با فرض درست نبودن حکم به تناقض رسیدیم. نتیجه می‌گیریم حکم درست است.

تمرین ۷۶: ثابت کنید حاصل ضرب یک عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

مسأله‌ی ۵۳: فرض کنید A مجموعه‌ای دلخواه باشد. ثابت کنید $\phi \subseteq A$.

راه حل: فرض کنید حکم درست نباشد، یعنی فرض کنید $\phi \not\subset A$، در این صورت در مجموعه‌ی ϕ عضوی مانند x وجود دارد که در مجموعه‌ی A قرار ندارد. اما می‌دانیم مجموعه‌ی ϕ هیچ عضوی ندارد. از تناقض حاصل درستی حکم نتیجه می‌شود.

تمرین ۷۷: به روش برهان خلف هر یک از احکام زیر را ثابت کنید.

الف) اگر $x^4 > x^2$، **آنگاه** $|x| > 1$.

ب) اگر $x \ne y$، **آنگاه** $\frac{x^2 + y^2}{2} \ne xy$.

مسأله‌ی ۵۴: فرض کنید n عددی صحیح به فرم $4k + 2$ باشد. ثابت کنید n را نمی‌توان به‌صورت تفاضل مربع‌های دو عدد صحیح نمایش داد.

راه حل: فرض کنید حکم درست نباشد، در این صورت عددهای صحیح a و b وجود دارند به‌گونه‌ای که $a^2 - b^2 = n$. دو حالت وجود دارد.

حالت اول: یکی از a و b زوج و دیگری فرد باشد. در این حالت یکی از a^2 و b^2 زوج و دیگری فرد است، لذا $a^2 - b^2$ عددی فرد است. چون n عددی زوج است، لذا در این حالت $a^2 - b^2$ نمی‌تواند برابر n باشد.

حالت دوم: a و b، هر دو زوج یا هر دو فرد باشند. در این حالت هر دو عدد $a + b$ و $a - b$ زوج‌اند، لذا اعداد صحیح q_1 و q_2 وجود دارند به‌طوری که $a + b = 2q_1$ و $a - b = 2q_2$. در نتیجه:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 2q_1 \times 2q_2 = 4q_1q_2$$

پس $a^2 - b^2$ بر ۴ بخش‌پذیر است. اما چون n بر ۴ بخش‌پذیر نیست، لذا در این حالت نیز $a^2 - b^2$ نمی‌تواند برابر n باشد.

پس در هر دو حالت فرض $a^2 - b^2 = n$ به تناقض انجامید. نتیجه می‌گیریم n را نمی‌توانیم به‌صورت تفاضل مربع‌های دو عدد صحیح نمایش دهیم.

تمرین ۷۸: فرض کنید n عددی طبیعی به فرم $۴k+۳$ باشد. ثابت کنید n را نمی‌توان به‌صورت مجموع مربع‌های دو عدد صحیح نمایش داد.

مسأله‌ی ۵۵: فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، . . . و $a_{۲۰}$ عددهایی صحیح باشند به‌گونه‌ای که $۱ \leq a_۱ < a_۲ < \cdots < a_{۲۰} \leq ۷۰$. ثابت کنید در بین تفاضل‌های $a_۲ - a_۱$، $a_۳ - a_۲$، $a_۴ - a_۳$، . . . و $a_{۲۰} - a_{۱۹}$ حداقل چهار عدد برابر وجود دارد.

راه حل: فرض کنید حکم درست نباشد، یعنی فرض کنید در بین ۱۹ تفاضل داده شده حداکثر سه عدد برابر یافت شود. فرض کنید مجموع ۱۹ تفاضل داده شده برابر S باشد. در این صورت از یک سو:

$$S = (a_{۲۰} - a_{۱۹}) + (a_{۱۹} - a_{۱۸}) + (a_{۱۸} - a_{۱۷}) + \cdots + (a_۴ - a_۳) + (a_۳ - a_۲) + (a_۲ - a_۱) = a_{۲۰} - a_۱ \leq ۷۰ - ۱ = ۶۹ \qquad (*)$$

اما از سوی دیگر، چون هر یک از ۱۹ تفاضل داده شده عددی طبیعی است و در بین آن‌ها حداکثر سه عدد برابر یافت می‌شود، لذا کم‌ترین مقدار S هنگامی رخ می‌دهد که در بین ۱۹ تفاضل، سه تا برابر ۱، سه تا برابر ۲، . . .، سه تا برابر ۶ و یکی برابر ۷ باشند. یعنی:

$$S \geq ۳(۱+۲+۳+۴+۵+۶)+۷ = ۳\times۲۱+۷ = ۷۰ \qquad (**)$$

اما این رابطه با رابطه‌ی $(*)$ تناقض دارد. از تناقض حاصل، درستی حکم نتیجه می‌شود.

تمرین ۷۹: فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، . . . و $a_۸$ عددهای صحیح باشند به‌گونه‌ای که $۱ \leq a_۱ < a_۲ < \cdots < a_۸ \leq ۱۶$. ثابت کنید در بین تفاضل‌های $a_۲ - a_۱$، $a_۳ - a_۲$، . . . و $a_۸ - a_۷$ حداقل سه عدد برابر وجود دارد.

مسأله‌ی ۵۶: ثابت کنید معادله‌ی $\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} = ۱$ در مجموعه‌ی اعداد فرد جواب ندارد.

راه حل: فرض کنید حکم درست نباشد، یعنی اعداد فرد a و b وجود داشته باشند که $\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} = ۱$. با ضرب طرفین این تساوی در ab نتیجه می‌گیریم $a+b = ab$. چون a و b فردند، لذا $a+b$ عددی زوج و ab عددی فرد است، پس $a+b$ نمی‌تواند با ab برابر باشد. از تناقض حاصل، درستی حکم نتیجه می‌شود.

تمرین ۸۰: ثابت کنید معادله‌ی $\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} + \frac{۱}{z} = \frac{۱}{۲}$ در مجموعه‌ی اعداد فرد جواب ندارد.

مسأله‌ی ۵۷: اعداد مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۱۹\}$ را به ۳ دسته تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید دسته‌ای وجود دارد که مجموع اعضای آن بزرگ‌تر یا مساوی با ۶۴ است.

راه حل: مجموع اعداد دسته‌ها را به ترتیب با $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ نشان می‌دهیم. فرض کنید حکم درست نباشد، یعنی $S_۱ < ۶۴$، $S_۲ < ۶۴$ و $S_۳ < ۶۴$. چون $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ عددهایی صحیح‌اند، لذا $S_۱ \leq ۶۳$، $S_۲ \leq ۶۳$ و $S_۳ \leq ۶۳$، در نتیجه $S_۱ + S_۲ + S_۳ \leq ۳\times۶۳ = ۱۸۹$. از سوی دیگر با توجه به فرض مسأله $S_۱ + S_۲ + S_۳ = ۱+۲+\cdots+۱۹ = \frac{۱۹\times۲۰}{۲} = ۱۹۰$. اما این رابطه با رابطه‌ی قبلی در تناقض است. از تناقض حاصل، درستی حکم نتیجه می‌شود.

تمرین ۸۱: اعداد مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۹\}$ را به سه دسته تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید دسته‌ای وجود دارد که حاصل ضرب اعضای آن بزرگ‌تر یا مساوی با ۷۲ است.

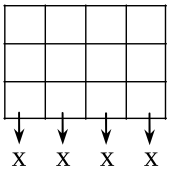
مسأله‌ی ۵۸: فرض کنید $p_۱$، $p_۲$، . . . و p_k کلیه‌ی اعداد اول مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۱۰۰\}$ باشند و $A = p_۱p_۲...p_k + ۱$. ثابت کنید A بر هیچ‌یک از $p_۱$، $p_۲$، . . . و p_k بخش‌پذیر نیست.

راه حل: فرض کنید حکم درست نباشد، یعنی اندیس $۱ \leq i \leq k$ وجود داشته باشد به‌طوری که A بر p_i بخش‌پذیر باشد، پس عدد صحیح q وجود دارد به‌گونه‌ای که $A = p_iq$. چون حاصل ضرب $p_۱p_۲...p_k$ بر p_i بخش‌پذیر است، پس عدد صحیح q' وجود دارد به‌گونه‌ای که $p_۱p_۲...p_k = p_iq'$. حال از تساوی $A = p_۱p_۲...p_k + ۱$ نتیجه می‌گیریم $p_iq = p_iq' + ۱$، پس $p_i(q-q') = ۱$، لذا عدد ۱ بر p_i بخش‌پذیر است، اما می‌دانیم ۱ بر هیچ عدد اولی بخش‌پذیر نیست. تناقض حاصل درستی حکم را نتیجه می‌دهد.

تمرین ۸۲: با مفروضات مسأله‌ی قبل ثابت کنید A بر هیچ‌یک از اعضای مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۱۰۰\}$ غیر از ۱ بخش‌پذیر نیست.

تمرین ۸۳: فرض کنید n عددی طبیعی باشد. ثابت کنید $n!+۱$ بر هیچ‌یک از اعداد ۲، ۳، . . . و n بخش‌پذیر نیست.

مسأله‌ی ۵۹: ثابت کنید اعداد ۱ تا ۱۲ را نمی‌توان در خانه‌های یک جدول ۳×۴ (۳ سطر و ۴ ستون) قرار داد به‌طوری که مجموع اعداد واقع در هر ستون با یک‌دیگر برابر باشند.



راه حل: فرض کنید حکم درست نباشد، یعنی فرض کنید بتوان اعداد ۱ تا ۱۲ را در خانه‌های یک جدول ۳×۴ قرار داد به‌طوری که مجموع اعداد واقع در هر ستون با یک‌دیگر برابر باشند و در این حالت فرض کنید مجموع اعداد هر ستون برابر x باشد.

در این صورت مجموع کل اعداد جدول از یک سو برابر $۴x$ و از سوی دیگر برابر $۱+۲+\cdots+۱۲$ است. در نتیجه:

$$۴x = ۱+۲+\cdots+۱۲ = \frac{۱۲ \times ۱۳}{۲} = ۷۸ \Rightarrow x = \frac{۷۸}{۴} = \frac{۳۹}{۲}$$

اما x برابر مجموع سه عدد صحیح است و نمی‌تواند برابر $\frac{۳۹}{۲}$ باشد. از تناقض حاصل درستی حکم نتیجه می‌شود.

تمرین ۸۴: آیا اعداد ۱ تا ۳۰ را می‌توان در خانه‌های یک جدول ۵×۶ (۵ سطر و ۶ ستون) قرار داد به‌طوری که مجموع اعداد واقع در هر ستون با یک‌دیگر برابر باشند.

تمرین ۸۵: روی ۱۲ یال مکعبی اعداد ۱ تا ۱۲ نوشته شده است. روی هر رأس، مجموع اعداد نوشته شده روی سه یال خروجی از این رأس را می‌نویسیم. آیا ممکن است که ۸ عدد نوشته شده روی رأس‌ها با هم برابر باشند؟

اصل لانه‌ی کبوتر

فرض کنید در یک جمع ۸ نفر حضور داشته باشند. هر یک از این افراد در یکی از روزهای شنبه، یکشنبه، . . . و جمعه متولد شده‌اند. متولدین روز شنبه را در یک دسته در کنار هم قرار می‌دهیم. همین کار را در مورد متولدین روزهای دیگر نیز انجام می‌دهیم. در این صورت ۸ نفر به ۷ دسته تقسیم می‌شوند (البته ممکن است بعضی از این دسته‌ها خالی باشند).

جمعه　پنج شنبه　چهارشنبه　سه شنبه　دوشنبه　یکشنبه　شنبه

فکر می‌کنید چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ کاملاً درست است. دسته‌ای وجود دارد که حداقل دو نفر در آن قرار گرفته‌اند و این به معنای آن است که حداقل دو نفر از این جمع در یک روز از هفته متولد شده‌اند.

مثال فوق حالتی خاصی از یک قضیه‌ی کلی است.

قضیه‌ی ۴: (اصل لانه کبوتر): اگر m کبوتر وارد n لانه شوند و $m > n$، آن‌گاه لانه‌ای وجود دارد که حداقل دو کبوتر وارد آن شده‌اند.

علی‌رغم این‌که اصل لانه کبوتر خیلی بدیهی و واضح به‌نظر می‌رسد ولی می‌توانیم آن را به روش برهان خلف اثبات کنیم.

برهان: فرض کنید حکم قضیه درست نباشد، در این صورت در هر لانه حداکثر یک کبوتر وارد شده است، لذا در n لانه حداکثر n کبوتر وارد شده‌اند. اما این نتیجه با فرض قضیه متناقض است، زیرا طبق فرض بیش از n کبوتر وارد لانه‌ها شده‌اند. از تناقض حاصل نتیجه می‌گیریم حکم قضیه درست می‌باشد.

اصل لانه کبوتر در عین سادگی، کلید حل بسیاری از مسائل است. در حل مسائل معمولاً از یکی از دو صورت زیر که هر یک با صورت اصل لانه کبوتر معادل است استفاده می‌کنیم.

۱- اگر m شیء به n دسته تقسیم شوند و $m > n$، آن‌گاه دسته‌ای وجود دارد که حداقل دو شیء در آن قرار گرفته‌اند.

۲- اگر m شیء از n دسته انتخاب شوند و $m > n$، آن‌گاه دسته‌ای وجود دارد که حداقل دو شیء از آن انتخاب شده‌اند.

مهم‌ترین روش حل مسائل مربوط به اصل لانه کبوتر، دسته‌بندی اشیاء بر اساس ویژگی مورد نظر است.

مسأله‌ی ۶۰: ثابت کنید در بین ۳۵ دانش‌آموز یک کلاس دو نفر وجود دارند که حرف اول فامیل آن‌ها یکسان است.

راه حل: برای حل این مسأله دانش‌آموزان کلاس را بر اساس حرف اول فامیلشان دسته‌بندی می‌کنیم، یعنی دانش‌آموزانی را که حرف اول فامیل آن‌ها (الف) است در یک دسته قرار می‌دهیم، دانش‌آموزانی را که حرف اول فامیل آن‌ها (ب) است در یک دسته قرار می‌دهیم و . . . . به این ترتیب ۳۵ دانش‌آموز به ۳۲ دسته تقسیم می‌شوند.

ی … پ ب الف

چون ۳۵ > ۳۲، لذا بنا بر اصل لانه کبوتر حداقل دو نفر در یک دسته قرار می‌گیرند. اما وجود دو نفر در یک دسته به این معنی است که حرف اول فامیل این دو نفر یکسان است.

تمرین ۸۶: ۷ تاس را پرتاب کرده‌ایم. ثابت کنید دو تاس وجود دارند که عدد رو شده‌ی آن‌ها با هم برابر است.

تمرین ۸۷: ثابت کنید در بین ۴۰۰ دانش‌آموز یک مدرسه دو نفر وجود دارند که تاریخ تولد یکسانی دارند.

مسأله‌ی ۶۱: **در یک جعبه مهره‌هایی از ۱۰ رنگ مختلف وجود دارند. حداقل چند مهره از جعبه بیرون آوریم تا مطمئن باشیم در بین آن‌ها حداقل دو مهره‌ی هم‌رنگ وجود دارد؟**

راه حل: مهره‌های داخل جعبه را بر اساس رنگشان دسته‌بندی می‌کنیم. با توجه به فرض مسأله، مهره‌ها به ۱۰ دسته تقسیم می‌شوند.

□ □ ... □
۱ ۲ ۱۰

چنان‌چه ۱۰ مهره از جعبه بیرون آوریم، نمی‌توانیم مطمئن باشیم که بین آن‌ها حداقل دو مهره‌ی هم‌رنگ وجود دارد، زیرا ممکن است که از هر یک از ۱۰ دسته دقیقاً یک مهره انتخاب شده باشد. ولی اگر ۱۱ مهره از جعبه بیرون آوریم، چون $۱۰ < ۱۱$، لذا بنا بر اصل لانه کبوتر حداقل دو مهره از یک دسته‌اند، پس در بین ۱۱ مهره حداقل دو مهره‌ی هم‌رنگ وجود دارد. نتیجه می‌گیریم پاسخ مسأله برابر ۱۱ است.

حال این مسأله را مطرح می‌کنیم. با مفروضات مسأله‌ی قبل حداقل چند مهره از جعبه باید بیرون آوریم تا مطمئن باشیم که در بین آن‌ها حداقل ۵ مهره‌ی هم‌رنگ وجود دارد؟

چنان‌چه ۴۰ مهره از جعبه بیرون آوریم، نمی‌توانیم مطمئن باشیم که در بین آن‌ها حداقل ۵ مهره‌ی هم‌رنگ وجود دارد، زیرا ممکن است که از هر یک از ۱۰ رنگ دقیقاً ۴ مهره انتخاب شده باشد. ولی اگر ۴۱ مهره از جعبه بیرون آوریم، قطعاً در بین آن‌ها ۵ مهره‌ی هم‌رنگ وجود دارد. این نکته از صورت تعمیم یافته‌ی اصل لانه کبوتر ناشی می‌شود.

قضیه‌ی ۵: **(صورت تعمیم یافته‌ی اصل لانه کبوتر): اگر m کبوتر وارد n لانه شوند و $m > nk$، آن‌گاه لانه‌ای وجود دارد که حداقل $k+1$ کبوتر وارد آن شده‌اند.**

برهان: این قضیه را نیز همانند صورت ساده‌ی اصل لانه کبوتر می‌توانیم به روش برهان خلف ثابت کنیم. اگر حکم قضیه درست نباشد، آن‌گاه در هر لانه حداکثر k کبوتر وارد شده‌اند، لذا در n لانه حداکثر nk کبوتر وارد شده‌اند. اما این نتیجه با فرض قضیه متناقض است، زیرا طبق فرض بیش از nk کبوتر وارد لانه‌ها شده‌اند. از تناقض حاصل نتیجه می‌گیریم حکم قضیه درست است.

در مسأله‌ی قبل اگر ۴۱ مهره از جعبه بیرون آوریم، در این صورت چون مهره‌های جعبه را به ۱۰ دسته تقسیم کرده‌ایم و $۴ \times ۱۰ < ۴۱$، لذا حداقل $۴ + ۱$ مهره از یک دسته‌اند، یعنی حداقل ۵ مهره‌ی هم‌رنگ در بین مهره‌های خارج شده وجود دارد.

مسأله‌ی ۶۲: **۳ نفر نامزد ریاست جمهوری هستند. در یک حوزه ۲۰۰ نفر در رأی‌گیری شرکت کرده‌اند. ثابت کنید یکی از نامزدها حداقل ۶۷ رأی در این حوزه به دست آورده است (فرض کنید هر یک از ۲۰۰ نفر دقیقاً به یکی از نامزدها رأی داده باشند).**

راه حل: نامزدهای ریاست جمهوری را به ترتیب A، B و C می‌نامیم. شرکت کنندگان در رأی‌گیری را به سه دسته تقسیم می‌کنیم: یک دسته، آن‌هایی که به A رأی داده‌اند، یک دسته آن‌هایی که به B رأی داده‌اند و دسته‌ی آخر، آن‌هایی که به C رأی داده‌اند. پس ۲۰۰ نفر به سه دسته تقسیم می‌شوند. چون $۶۶ \times ۳ < ۲۰۰$، لذا بنا بر اصل لانه کبوتر حداقل ۶۷ نفر در یک دسته قرار می‌گیرند. پس یکی از نامزدها حداقل ۶۷ رأی در این حوزه به دست آورده است.

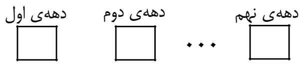
□ □ □
A B C

تمرین ۸۸: **یک کارخانه‌ی سازنده‌ی اتومبیل ۷ نوع خودرو تولید می‌کند. در بین ۱۰۰ محصول از این کارخانه ثابت کنید حداقل ۱۵ تا از یک نوع‌اند.**

تمرین ۸۹: **یک ناشر در فصل پاییز ۱۰۰۰۰ نسخه از کتاب‌های خود را فروخته است. ثابت کنید روزی در این فصل وجود دارد که حداقل ۱۱۲ نسخه از کتاب‌های این ناشر به فروش رفته است.**

مسأله‌ی ۶۳: **با مفروضات تمرین قبل ثابت کنید ۱۰ روز متوالی در فصل پاییز وجود دارد که طی آن حداقل ۱۱۱۲ نسخه از کتاب‌های ناشر به فروش رفته است.**

راه حل: فصل پاییز ۹۰ روز دارد. روزهای این فصل را به ۹ دهه تقسیم می‌کنیم: دهه‌ی اول از اول مهر تا دهم مهر، دهه‌ی دوم از یازدهم مهر تا بیستم مهر، . . . و دهه‌ی نهم از بیست و یکم آذر تا سی‌ام آذر. حال کتاب‌هایی از ناشر را که در فصل پاییز به فروش رفته‌اند به ۹ دسته تقسیم می‌کنیم: کتابهایی که در دهه‌ی اول به فروش رفته‌اند، کتاب‌هایی که در دهه‌ی دوم به فروش رفته‌اند، . . . و کتاب‌هایی که در دهه‌ی نهم به فروش رفته‌اند.



پس ۱۰۰۰۰ جلد کتاب به ۹ دسته تقسیم می‌شوند. چون $۱۱۱۱ \times ۹ < ۱۰۰۰۰$، لذا بنا بر اصل لانه کبوتر حداقل ۱۱۱۲ جلد کتاب در یک دسته قرار می‌گیرند، پس ۱۰ روز متوالی وجود دارد که طی آن حداقل ۱۱۱۲ نسخه از کتاب‌های ناشر به فروش رفته‌اند.

تمرین ۹۰: یک شطرنج‌باز در طی ۸ روز، ۲۵ بار مسابقه داده است. ثابت کنید دو روز متوالی وجود دارد که این شطرنج‌باز طی آن حداقل ۷ بار مسابقه داده است.

تمرین ۹۱: ۶ حرف a و ۲۵ حرف b به ترتیبی دور یک دایره نوشته شده‌اند. ثابت کنید ۵ حرف متوالی دور این دایره وجود دارد که همگی برابر b هستند.

تمرین ۹۲: فرض کنید ماتریسی ۹×۷، ۲۲ درایه‌ی صفر داشته باشد. ثابت کنید سطر و ستونی وجود دارد که روی هم حداقل ۶ درایه‌ی صفر دارند.

تمرین ۹۳: می‌دانیم در بین هر ۱۰۰ جفت جوراب از محصولات یک کارخانه حداقل ۴ جفت از یک اندازه‌اند. این کارخانه حداکثر در چند اندازه‌ی مختلف جوراب تولید می‌کند؟

تمرین ۹۴: یک کلاس ۲۵ دانش‌آموز دارد. در هر زنگ فیزیک معلم ۳ دانش‌آموز را پای تخته می‌آورد. این کلاس حداقل چند جلسه تشکیل شود تا مطمئن باشیم دانش‌آموزی وجود دارد که حداقل ۵ بار پای تخته رفته است؟

مسأله‌ی ۶۴: ۱۱ عدد حقیقی از بازه‌ی $[۰,۱)$ داده شده است. ثابت کنید تفاضل دوتا از این عددها کم‌تر از ۰/۱ است.

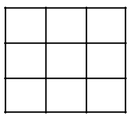
راه حل: اعداد بازه‌ی $[۰,۱)$ را به‌صورت زیر به ۱۰ دسته تقسیم می‌کنیم:

$[۰,۰/۱) \quad [۰/۱,۰/۲) \quad [۰/۲,۰/۳) \quad \dots \quad [۰/۹,۱)$

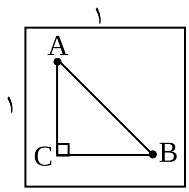
حال ۱۱ عدد از این ۱۰ دسته در اختیار داریم. چون $۱۰ < ۱۱$، لذا بنا بر اصل لانه کبوتر دوتا از این اعداد در یک دسته قرار دارند. اما با توجه به روش دسته‌بندی، تفاضل هر دو عددی که در یک دسته قرار دارند کم‌تر از ۰/۱ است، لذا تفاضل دوتا از ۱۱ عدد داده شده کم‌تر از ۰/۱ است.

مسأله‌ی ۶۵: ۱۰ نقطه درون مربعی به ضلع ۳ داده شده است. ثابت کنید فاصله‌ی دوتا از این نقاط حداکثر برابر $\sqrt{۲}$ است.

راه حل: مربع به ضلع ۳ را به ۹ مربع به ضلع واحد تقسیم می‌کنیم.



حال ۱۰نقطه از این ۹ مربع داده شده است. چون $۹ < ۱۰$، لذا بنا بر اصل لانه کبوتر دوتا از این نقاط در یک مربع واحد قرار دارند. با توجه به شکل مقابل فاصله‌ی بین هر دو نقطه‌ای که در یک مربع به ضلع واحد قرار داشته باشند از $\sqrt{۲}$ بیش‌تر نیست، لذا فاصله‌ی دوتا از ۱۰ نقطه‌ی داده شده حداکثر $\sqrt{۲}$ است.



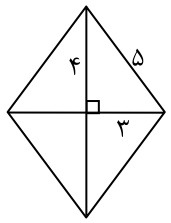
$$AB = \sqrt{AC^{۲} + BC^{۲}} \leq \sqrt{۱+۱} = \sqrt{۲}$$

تمرین ۹۵: ۷ نقطه روی محیط یک دایره به شعاع واحد داده شده است. ثابت کنید فاصله‌ی دوتا از این نقاط کم‌تر از ۱ است.

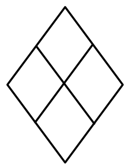
تمرین ۹۶: ۱۷ نقطه درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد داده شده است. ثابت کنید فاصله‌ی دوتا از این نقاط حداکثر برابر $\frac{۱}{۴}$ است.

تمرین ۹۷: ۵ نقطه درون یک دایره به شعاع $\sqrt{۲}$ داده شده است. ثابت کنید فاصله‌ی دوتا از این نقاط حداکثر برابر ۲ است.

مسأله‌ی ۶۶: **۵ نقطه درون یک لوزی به اقطار ۶ و ۸ داده شده است. ثابت کنید فاصله‌ی دوتا از این نقاط حداکثر برابر ۵ است.**



راه حل: لوزی را با رسم اقطار آن به ۴ مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۳، ۴ و ۵ تقسیم می‌کنیم.
حال ۵ نقطه از این ۴ مثلث داده شده است. چون $۴ < ۵$، لذا بنا بر اصل لانه کبوتر دوتا از این نقاط در یکی از ۴ مثلث قرار دارند. اما فاصله‌ی هر دو نقطه‌ای که درون یک مثلث به اضلاع ۳، ۴ و ۵ قرار دارند از ۵ بیش‌تر نیست، لذا فاصله‌ی دوتا از ۵ نقطه‌ی داده شده حداکثر برابر ۵ است.



یادداشت: با یک روش دسته‌بندی بهتر نسبت به راه حل ارائه شده می‌توانیم حکمی قوی‌تر از حکم داده شده در صورت مسأله را ثابت کنیم. در واقع می‌توانیم ثابت کنیم فاصله‌ی دوتا از ۵ نقطه‌ی داده شده حداکثر برابر ۴ است. روش حل به این صورت است که لوزی داده شده را همانند شکل روبه‌رو به ۴ لوزی به اقطار ۳ و ۴ تقسیم کنیم.
حال از ۵ نقطه‌ی داده شده حداقل دوتا در یکی از این ۴ لوزی قرار دارند. اما در یک لوزی به اقطار ۳ و ۴ فاصله‌ی هر دو نقطه حداکثر برابر ۴ است، لذا فاصله‌ی دوتا از ۵ نقطه‌ی داده شده حداکثر برابر ۴ است.

تمرین ۹۸: ۳۳ خانه از یک صفحه‌ی شطرنجی ۸×۸ با رنگ قرمز رنگ شده است. ثابت کنید مربعی ۲×۲ وجود دارد که حداقل سه خانه از آن رنگ شده است.

تمرین ۹۹: هر نقطه از یک خط با یکی از ۱۹ رنگ موجود رنگ شده است. ثابت کنید روی این خط دو نقطه‌ی هم‌رنگ وجود دارند که فاصله‌ی آن‌ها از هم مضرب صحیحی از ارتفاع برج میلاد است.

تمرین ۱۰۰: ۵۰ نقطه درون یک مستطیل ۹×۸ داده شده است. ثابت کنید مستطیلی ۳×۲ وجود دارد که شامل حداقل ۵ تا از این نقاط است.

مسأله‌ی ۶۷: **۶ عدد از مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۱۰\}$ داده شده است. ثابت کنید مجموع دوتا از این اعداد برابر ۱۱ است.**

راه حل: اعداد مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۱۰\}$ را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که مجموع اعداد در هر دسته برابر ۱۱ شود. پس دسته‌بندی زیر را به دست می‌آوریم:

$\{۱,۱۰\}$ $\{۲,۹\}$ $\{۳,۸\}$ $\{۴,۷\}$ $\{۵,۶\}$

حال ۶ عدد از ۵ دسته داده شده است. چون $۵ < ۶$، لذا بنا بر اصل لانه کبوتر دوتا از این اعداد در یک دسته قرار دارند، پس در بین ۶ عدد داده شده دو عدد وجود دارند که مجموع آن‌ها برابر ۱۱ است.

تمرین ۱۰۱: ۶ عدد از مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۱۰\}$ داده شده است. ثابت کنید تفاضل دوتا از این اعداد برابر ۵ است.

مسأله‌ی ۶۸: **۶ عدد از مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۱۰\}$ داده شده است. ثابت کنید تفاضل دوتا از این اعداد برابر ۱ است.**

راه حل: اعداد مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۱۰\}$ را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تفاضل اعداد هر دسته برابر ۱ شود. پس دسته‌بندی زیر را به دست می‌آوریم:

$\{۱,۲\}$ $\{۳,۴\}$ $\{۵,۶\}$ $\{۷,۸\}$ $\{۹,۱۰\}$

توجه کنید علی‌رغم این‌که تفاضل اعداد ۲ و ۳ نیز برابر ۱ است ولی دسته‌ی $\{۲,۳\}$ را در نظر نگرفتیم، زیرا عدد ۲ را به همراه عدد ۱ در یک دسته قرار داده‌ایم. حال ۶ عدد از ۵ دسته داده شده است. چون $۵ < ۶$، لذا بنا بر اصل لانه کبوتر دوتا از این اعداد در یک دسته قرار دارند، پس در بین ۶ عدد داده شده دو عدد وجود دارند که تفاضل آن‌ها برابر ۱ است.

تمرین ۱۰۲: ۷ عدد از مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۱۲\}$ داده شده است. ثابت کنید تفاضل دوتا از این اعداد برابر ۲ است.

مسأله‌ی ۶۹: **۷ عدد از مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۴۸\}$ داده شده است. ثابت کنید به ازای دوتا از این اعداد مانند x و y،** $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|<۱$.

راه حل: اعداد مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۴۸\}$ را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که برای هر دو عدد x و y از یک دسته، $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|<۱$. لذا دسته‌بندی زیر را به دست می‌آوریم:

$\{۱,۲,۳\}$ $\{۴,۵,۶,۷,۸\}$ $\{۹,...,۱۵\}$ $\{۱۶,...,۲۴\}$ $\{۲۵,...,۳۵\}$ $\{۳۶,...,۴۸\}$

در واقع در دسته‌ی kام همه‌ی اعداد صحیح از عدد $k^۲$ تا $(k+۱)^۲-۱$ را قرار می‌دهیم، لذا اگر دو عدد a و b از این دسته انتخاب شوند، آن‌گاه $k^۲ \le a < (k+۱)^۲$ و $k^۲ \le b < (k+۱)^۲$، پس $k \le \sqrt{a} < k+۱$ و $k \le \sqrt{b} < k+۱$، در نتیجه $|\sqrt{a}-\sqrt{b}|<۱$. حال ۷ عدد از ۶ دسته‌ی فوق داده شده است، لذا بنا بر اصل لانه کبوتر حداقل دو تا از آن‌ها در یک دسته قرار دارند. مثلاً فرض کنید x و y در یک دسته قرار داشته باشند، در این‌صورت بنا بر آن‌چه ملاحظه کردیم، $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|<۱$.

تمرین ۱۰۳: ۸ عدد از مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۲۱\}$ داده شده است. ثابت کنید به ازای دو تا از این اعداد مانند x و y، $|x-y|\le ۲$.

مسأله‌ی ۷۰: ۷ عدد از مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۱۱\}$ داده شده است. ثابت کنید مجموع دو تا از این اعداد برابر ۱۳ است.

راه حل: اعداد مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۱۱\}$ را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که مجموع اعداد هر دسته برابر ۱۳ شود. لذا دسته‌بندی زیر را به دست می‌آوریم:

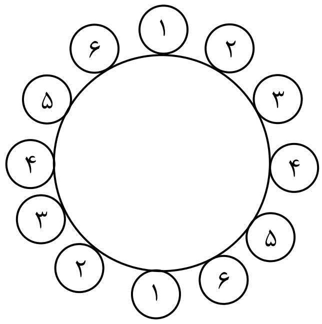
$\{۱\}$ $\{۲,۱۱\}$ $\{۳,۱۰\}$ $\{۴,۹\}$ $\{۵,۸\}$ $\{۶,۷\}$

توجه کنید که چون مجموع عدد ۱ با هیچ‌یک از اعضای مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۱۱\}$ برابر ۱۳ نمی‌شود، لذا این عدد را در یک دسته‌ی تک عضوی قرار دادیم. حال ۷ عدد از ۶ دسته‌ی فوق داده شده است، لذا بنا بر اصل لانه کبوتر حداقل دو تا متعلق به یک دسته‌اند، پس در بین ۷ عدد داده شده دو عدد وجود دارند که مجموع آن‌ها برابر ۱۳ است.

تمرین ۱۰۴: ۱۱ عدد از مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۱۷\}$ داده شده است. ثابت کنید مجموع دوتا از این اعداد برابر ۲۰ است.

مسأله‌ی ۷۱: ۱۲ صندلی به فواصل مساوی دور یک میز دایره‌ای شکل چیده شده‌اند. ۷ نفر روی ۷ تا از این صندلی‌ها نشسته‌اند. ثابت کنید دو نفر وجود دارند که روبه‌روی یک‌دیگر نشسته‌اند.

راه حل: صندلی‌ها را به ۶ دسته‌ی دوتایی تقسیم می‌کنیم به‌طوری که هر صندلی با صندلی روبه‌روی خود در یک دسته قرار گیرد.



حال ۷ نفر به ۶ دسته تقسیم شده‌اند. چون $۶<۷$، لذا بنا بر اصل لانه کبوتر دو نفر وجود دارند که در یک دسته قرار گرفته‌اند، لذا دو نفر وجود دارند که روی دو صندلی روبه‌روی هم نشسته‌اند.

تمرین ۱۰۵: در یک جمع ۹ زوج (زن و شوهر) حضور دارند. ۱۰ نفر از افراد این جمع را انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید در بین افراد انتخاب شده حداقل یک زوج وجود دارد.

تمرین ۱۰۶: ۳۳ زیر مجموعه از مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۶\}$ داده شده است. ثابت کنید در بین آن‌ها دو زیر مجموعه وجود دارند که مکمل یک‌دیگرند.

تمرین ۱۰۷: در کشوی یک میز ۷ جفت جوراب وجود دارد. حداقل چند لنگه جوراب از کشو بیرون آوریم تا مطمئن باشیم در بین آن‌ها حداقل یک جفت جوراب وجود دارد؟

مسأله‌ی ۷۲: **۱۸ عدد صحیح داده شده است. ثابت کنید تفاضل دو تا از این اعداد بر ۱۷ بخش‌پذیر است؟**

راه حل: بنا بر قضیه‌ی تقسیم برای هر عدد صحیح a، اعداد صحیح q و r وجود دارند به‌طوری که $a = ۱۷q + r$ و $۰ \le r < ۱۷$ (به q و r به ترتیب خارج قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۱۷ گفته می‌شود). حال ۱۸ عدد داده شده را بر اساس باقی مانده‌ی تقسیمشان بر ۱۷ دسته‌بندی می‌کنیم.

$۱۷q$ $۱۷q + ۱$ $۱۷q + ۲$ ... $۱۷q + ۱۶$

پس ۱۸ عدد به ۱۷ دسته تقسیم می‌شوند. بنا بر اصل لانه کبوتر دو تا از این اعداد در یک دسته قرار دارند. مثلاً فرض کنید m و n متعلق به یک دسته باشند، در این‌صورت اعداد صحیح $q_۱$، $q_۲$ و r وجود دارند به‌طوری که $m = ۱۷q_۱ + r$ و $n = ۱۷q_۲ + r$. در نتیجه:

$$m - n = (۱۷q_۱ + r) - (۱۷q_۲ + r) = ۱۷(q_۱ - q_۲)$$

پس $m - n$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است، لذا در بین ۱۸ عدد دو عدد وجود دارند که تفاضلشان بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

تمرین ۱۰۸: ۸۰ عدد صحیح داده شده است. ثابت کنید در بین این اعداد حداقل ۱۲ عدد وجود دارند که باقی‌مانده‌های تقسیم آن‌ها بر ۷ با هم برابر است.

مسأله‌ی ۷۳: **یک دانشگاه ۱۰۲۵ دانشجو دارد. ثابت کنید دو دانشجو وجود دارند که هم حرف اول اسم آن‌ها یکی است و هم حرف اول فامیل آن‌ها.**

راه‌حل: ابتدا دانشجویان را بر اساس حرف اول اسمشان دسته‌بندی می‌کنیم. نتیجه می‌گیریم ۱۰۲۵ دانشجو به ۳۲ دسته تقسیم می‌شوند. چون $۳۲ \times ۳۲ < ۱۰۲۵$، پس طبق اصل لانه‌ی کبوتر حداقل ۳۳ نفر در یک دسته قرار می‌گیرند، یعنی ۳۳ نفر وجود دارند که حرف اول اسم آن‌ها یکی است.

الف   ب   پ   ...   ی

حال این ۳۳ دانشجو را که حرف اول اسم آن‌ها یکی است بر اساس حرف اول فامیلشان دسته‌بندی می‌کنیم. لذا ۳۳ نفر به ۳۲ دسته تقسیم می‌شوند. چون $۳۲ < ۳۳$، پس بنا بر اصل لانه کبوتر دسته‌ای وجود دارد که حداقل دو نفر در آن قرار می‌گیرند. لذا در بین این ۳۳ دانشجو که حرف اول اسم آن‌ها یکی است دو نفر وجود دارند که حرف اول فامیلشان نیز یکی است.

تمرین ۱۰۹: ۱۵۰ سکه‌ی ۵، ۱۰، ۲۵ و ۵۰ تومانی را بین سه نفر تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید فردی وجود دارد که حداقل ۱۳ سکه‌ی مشابه دریافت کرده است.

تمرین ۱۱۰: در یک اردوی دانش‌آموزی ۱۱۰ نفر شرکت کرده‌اند. هر روز صبح دانش‌آموزان توسط ۳ دستگاه اتوبوس از اردوگاه به مکان‌های مشخص شده منتقل می‌شوند. ثابت کنید در پایان روز سوم، می‌توان ۵ نفر پیدا کرد که در هر سه روز در کنار یک‌دیگر (در یک اتوبوس) بوده‌اند.

مسأله‌ی ۷۴: **۱۴ مسابقه بین ۹ تیم فوتبال انجام شده است. ثابت کنید تیمی وجود دارد که حداقل ۴ بازی انجام داده است.**

راه حل: به ازای هر تیم یک دسته در نظر می‌گیریم. چون در هر مسابقه دو تیم شرکت می‌کنند، لذا در ۱۴ مسابقه جمعاً ۲۸ تیم شرکت کرده‌اند. این ۲۸ تیم به ۹ دسته تقسیم می‌شوند (یا در واقع ۹ تیم مختلف‌اند). چون $۳ \times ۹ < ۲۸$، پس تیمی وجود دارد که حداقل در ۴ مسابقه حاضر بوده است.

تیم ۱   تیم ۲   ...   تیم ۹

تمرین ۱۱۱: یک تیم فوتبال ۲۳ بازیکن دارد. این تیم سال گذشته ۳۰ بار مسابقه داده است. در هر مسابقه ۱۱ تا از بازیکنان در زمین حضور داشتند. ثابت کنید بازیکنی وجود دارد که حداقل در ۱۵ مسابقه درون زمین بوده است.

تمرین ۱۱۲: در یک پادگان ۹ سرباز حضور دارند. به مدت ۱۱۰ شب هر شب دو تا از این ۹ نفر نگهبانی داده‌اند. ثابت کنید دو نفر وجود دارند که حداقل چهار شب با هم نگهبانی داده‌اند.

مسأله‌ی ۷۵: ۲۱ نفر در یک آزمون ۵ سؤالی شرکت کرده‌اند. به ازای هر پاسخ درست، غلط و نزده به ترتیب ۴ نمره‌ی مثبت، یک نمره‌ی منفی و صفر نمره منظور می‌شود. ثابت کنید دو نفر وجود دارند که نمره‌ی آن‌ها برابر است.

راه حل: افراد شرکت کننده در آزمون را بر حسب نمره‌ای که کسب کرده اند دسته‌بندی می‌کنیم. با توجه به فرض، نمره‌ی هر فرد عددی بین ۵− تا ۲۰ است و توجه کنید که نمره‌ی هیچ فردی برابر ۱۹، ۱۸، ۱۷، ۱۴، ۱۳ و ۹ نمی‌تواند باشد (مثلاً برای به دست آوردن نمره‌ی ۱۴ باید حداقل به ۴ سؤال پاسخ درست و به ۲ سؤال پاسخ غلط بدهیم، لذا آزمون باید حداقل ۶ سؤال داشته باشد که این‌گونه نیست). پس شرکت‌کنندگان در آزمون حداکثر ۲۰ نمره‌ی مختلف می‌توانند داشته باشند، لذا ۲۱ نفر به ۲۰ دسته تقسیم می‌شوند.

۵− ... ۷ ۸ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۵ ۱۶ ۲۰

چون ۲۰ > ۲۱، لذا بنا بر اصل لانه کبوتر حداقل دو نفر در یک دسته قرار می‌گیرند و این به معنای آن است که دو نفر وجود دارند که نمره‌ی آن‌ها برابر است.

تمرین ۱۱۳: ۲۰۰ نفر در مسابقه‌ی پرتاب دارت شرکت کرده‌اند. هر فرد ۱۰ دارت پرتاب می‌کند. امتیاز هر پرتاب یکی از اعداد صفر، ۱، ۲ و ۵ است. ثابت کنید ۵ نفر وجود دارند که امتیاز یکسان به‌دست می‌آورند.

تمرین ۱۱۴: در یک مسابقه یک داور و ۱۰ شرکت کننده حضور دارند. هر شرکت کننده و هم‌چنین داور جایگشتی از اعداد مجموعه‌ی {۱,۲,...,۹} را در یک ردیف می‌نویسند. در پایان، داور جایگشت هر شرکت کننده را با جایگشت خود مقایسه می‌کند و به ازای هر مرتبه‌ای که عدد نوشته شده توسط شرکت کننده در آن مرتبه با عدد نوشته شده توسط داور برابر بود یک امتیاز به شرکت کننده می‌دهد (مثلاً اگر جایگشت نوشته شده توسط داور برابر ۲۷۵۱۳۶۹۴۸ و جایگشت نوشته شده توسط شرکت کننده برابر ۳۷۵۶۴۹۲۱۸ باشد، امتیاز شرکت کننده برابر ۳ است و این امتیاز از ارقام ۷، ۵ و ۸ به دست می‌آید). ثابت کنید دو شرکت کننده وجود دارند که امتیاز یکسانی به دست می‌آورند.

مسأله‌ی ۷۶: ۸ عدد از مجموعه‌ی {۱,۲,...,۱۴} داده شده است. ثابت کنید در بین آن‌ها دو عدد وجود دارند که یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد.

راه حل: اعداد مجموعه‌ی {۱,۲,...,۱۴} را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که برای هر دو عدد متعلق به یک دسته یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد. توجه کنید اعداد این مجموعه را به ۷ دسته‌ی دو عضوی با ویژگی گفته شده نمی‌توان تقسیم کرد، زیرا اعداد ۱۱ و ۱۳ را فقط با عدد ۱ می‌توان در یک دسته قرار داد، در حالی‌که عدد ۱ فقط می‌تواند در یک دسته قرار گیرد. لذا برای دسته‌بندی، باید در برخی از دسته‌ها بیش از دو عضو قرار دهیم. دسته‌بندی زیر ویژگی‌های مورد نظر را دارد.

{۱,۲,۴,۸} {۳,۶,۱۲} {۵,۱۰} {۷,۱۴} {۹} {۱۱} {۱۳}

حال ۸ عدد از ۷ دسته‌ی فوق داده شده است، لذا بنا بر اصل لانه کبوتر حداقل دو تا از آن‌ها متعلق به یک دسته‌اند. اما بنا بر روش دسته‌بندی، هر دو عددی که متعلق به یک دسته باشند، یکی بر دیگری بخش‌پذیر است. پس در بین ۸ عدد، دو عدد وجود دارند که یکی بر دیگری بخش‌پذیر است.

یادداشت: توجه کنید که علاوه بر دسته‌بندی ارائه شده در راه حل مسأله‌ی قبل، دسته‌بندی‌های دیگری نیز می‌توان برای حل مسأله ارائه داد. مثلاً دسته‌بندی زیر:

{۲,۶,۱۲} {۱,۳,۹} {۴,۸} {۵,۱۰} {۷,۱۴} {۱۱} {۱۳}

تمرین ۱۱۵: ۵ عدد از مجموعه‌ی {۱,۲,...,۱۴} داده شده است. ثابت کنید در بین آن‌ها دو عدد وجود دارند به‌طوری که هیچ‌یک بر دیگری بخش‌پذیر نباشد.

مسأله‌ی ۷۷: ۵ نقطه با مختصات صحیح در صفحه‌ی مختصات داده شده است. ثابت کنید نقطه‌ی وسط دو تا از این نقاط، نقطه‌ای با مختصات صحیح است.

راه حل: فرض کنید $P=(a,b)$ و $Q=(c,d)$ دو نقطه با مختصات صحیح در صفحه‌ی مختصات باشند، در این‌صورت مختصات نقطه‌ی وسط این دو نقطه برابر $(\frac{a+c}{۲},\frac{b+d}{۲})$ است. در صورتی این نقطه مختصات صحیح دارد که هر دو عدد $a+c$ و $b+d$ زوج باشند یا معادلاً زوجیت a و c و هم‌چنین زوجیت b و d یکسان باشند.

پس ۵ نقطه‌ی داده شده را بر اساس زوجیت هر یک از مؤلفه‌هایشان دسته‌بندی می‌کنیم. نتیجه می‌گیریم ۵ نقطه به ۴ دسته‌ی زیر تقسیم می‌شوند.

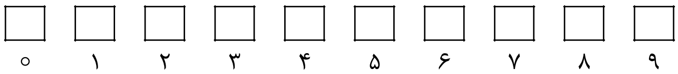
(فرد, فرد) (فرد, زوج) (زوج, فرد) (زوج, زوج)

بنا بر اصل لانه کبوتر حداقل دو نقطه در یک دسته قرار می‌گیرند. با توجه به توضیحات فوق نقطه‌ی وسط این دو نقطه، نقطه‌ای با مختصات صحیح است.

تمرین ۱۱۶: **۹ عدد طبیعی داده شده است به‌طوری که غیر از ۲، ۳ و ۵ بر هیچ عدد اول دیگری بخش‌پذیر نیستند. ثابت کنید حاصل ضرب دو تا از این اعداد مربع کامل است.**

مسأله‌ی ۷۸: **۱۰ نفر در یک جمع حضور دارند. ثابت کنید دو نفر وجود دارند که تعداد دوستان آن‌ها در این جمع برابر است.**

راه حل: ۱۰ نفر را بر اساس تعداد دوستانشان در این جمع دسته‌بندی می‌کنیم. تعداد دوستان هر فرد در این جمع یکی از اعداد ۰، ۱، ۲، . . . و ۹ است. پس افراد این جمع به ۱۰ دسته تقسیم می‌شوند.



توجه کنید که اگر فردی در این جمع ۹ دوست داشته باشد، آن‌گاه این فرد با همه‌ی افراد جمع دوست است و لذا هر فرد در این جمع حداقل یک دوست دارد، پس دسته‌ی افرادی که صفر دوست دارند خالی است و اگر هیچ فردی در این جمع ۹ دوست نداشته باشد، آن‌گاه دسته‌ی افرادی که ۹ دوست دارند خالی است. پس حداقل یکی از ۱۰ دسته‌ی فوق خالی است، لذا ۱۰ نفر این جمع حداکثر به ۹ دسته تقسیم می‌شوند. پس بنا بر اصل لانه کبوتر دسته‌ای وجود دارد که حداقل دو نفر در آن قرار دارند، لذا تعداد دوستان این دو نفر در این جمع برابر است.

تمرین ۱۱۷: **۱۹ نفر در یک جمع حضور دارند. هر فرد در این جمع با تعداد زوجی از افراد جمع دوست است. ثابت کنید سه نفر وجود دارند که تعداد دوستان آن‌ها در این جمع با هم برابر است.**

تمرین ۱۱۸: **۲۰ نفر در یک جمع حضور دارند. هر فرد در این جمع با تعداد زوجی از افراد جمع دوست است. ثابت کنید سه نفر وجود دارند که تعداد دوستان آن‌ها در این جمع با هم برابر است.**