

مقدمه‌ی مؤلفان

به نام خدا

با سلام:

خدا را شکر می‌کنیم که به ما توفيق داد تا با ارائه‌ی کتابی دیگر در خدمت جامعه‌ی دانش‌آموزی کشور باشیم. در این کتاب مباحث هندسه‌ی تحلیلی و جبر خطی مطرح شده در کتاب درسی به طور کامل بررسی شده است. همچنین همه‌ی مسائل کتاب درسی در درسنامه‌های این کتاب به صورت مسئله یا تست مطرح شده است. با ارائه‌ی تست‌های متتنوع تألیفی و کنکور سال‌های گذشته و حل تشریحی آن‌ها سعی کرده‌ایم در تعمیق مفاهیم مطالب درسی گام مؤثری برداریم.

به خوانندگان این کتاب توصیه می‌کنیم بعد از مطالعه‌ی درسنامه‌ی هر بخش و حل مسائل و تست‌های مطرح شده در آن به حل تست‌های آخر آن بخش بپردازند. موفقیت در یادگیری این درس حاصل تلاش خود شماست، پس لازم است قلم را برداشته و با حل و تکرار مسائل و تست‌ها قدرت درک مطالب را در خود بالا ببرید.

در سال‌های اخیر تعداد سؤالات در درس هندسه تحلیلی و جبر خطی به صورت زیر بوده است.

سال تحصیلی						
بردارها (فصل ۱)						۹۶
معادلات خط و صفحه (فصل ۲)						۹۵
مقاطع مخروطی (فصل ۳)						۹۴
ماتریس و دترمینان (فصل ۴)						۹۳
دستگاه معادلات خطی (فصل ۵)						۹۲
۹۱						۹۰

بنابراین به نظر می‌رسد به همه‌ی فصل‌ها باید توجه لازم شود تا نتیجه‌ی مطلوب حاصل شود. در چاپ جدید کتاب تمامی تست‌ها و مسائل را با توجه به نیاز دانش‌آموزان و سطح یادگیری آن‌ها و نگرش مناسب به کنکور چند سال اخیر تغییر داده‌ایم.

در پایان از همه‌ی همکاران، دبیران محترم، صاحب‌نظران و دانش‌آموزان تقاضا می‌کنیم نظرات سازنده و تأثیرگذار خود را از طریق سایت انتشارات برای ما ارسال نمایند. قبل از اعتماد و حُسن توجه شما عزیزان صمیمانه تشکر می‌کنیم. در ضمن برخود لازم می‌دانیم تشرک کنیم از همه کسانی که در تألیف این کتاب صمیمانه یاریمان کردند و مخصوصاً سپاسگزاری می‌کنیم از تمامی کارکنان انتشارات الگو که از هیچ کمکی فروگذار نکردند. از بخش حروف‌چینی، صفحه‌آرایی و تیم ویراستاری انتشارات بهویژه آقای دکتر آریس آقانیانس که ویرایش علمی کتاب را بر عهده داشتند، قدردانی می‌کنیم.

حسن محمدبیگی، امیر محمد هویدی

فهرست

۱۲۸	آزمون ۶
۱۳۰	آزمون ۷
فصل سوم: مقاطع مخروطی	
بخش اول: دایره	
۱۳۴	درسنامه
۱۵۳	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
بخش دوم: بیضی	
۱۶۰	درسنامه
۱۷۴	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
بخش سوم: سهمی	
۱۸۳	درسنامه
۱۹۲	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
بخش چهارم: هذلولی	
۱۹۹	درسنامه
۲۱۶	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
بخش پنجم: انتقال و دوران محورهای مختصات	
۲۲۴	درسنامه
۲۳۳	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۴۲	آزمون ۸
۲۴۳	آزمون ۹
۲۴۵	آزمون ۱۰
۲۴۶	آزمون ۱۱
۲۴۸	آزمون ۱۲

فصل اول: بردارها

بخش اول: فضای سه بعدی و مفاهیم اولیه‌ی بردارها	
۲	درسنامه
۲۲	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
بخش دوم: ضرب داخلی	
۲۷	درسنامه
۳۷	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
بخش سوم: ضرب خارجی	
۴۲	درسنامه
۵۱	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۵۸	آزمون ۱
۶۰	آزمون ۲
۶۲	آزمون ۳

فصل دوم: معادلات خط و صفحه

بخش اول: خط در فضا	
۶۶	درسنامه
۸۸	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
بخش دوم: صفحه در فضا	
۹۷	درسنامه
۱۱۴	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۲۴	آزمون ۴
۱۲۶	آزمون ۵

● فصل پنجم: دستگاه معادلات خطی

بخش اول: ماتریس‌های وارون‌پذیر

۳۳۰	درسنامه
۳۴۰	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
	بخش دوم: حل دستگاه معادلات خطی
۳۵۱	درسنامه
۳۶۴	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۳۷۸	آزمون ۱۸
۳۸۰	آزمون ۱۹

۳۸۳	پاسخنامه کلیدی تست‌ها
-----	-----------------------

۳۸۹	پاسخنامه کلیدی آزمون‌ها
-----	-------------------------

۳۹۳	ضمیمه کنکور سراسری ۹۵
-----	-----------------------

۳۹۷	ضمیمه کنکور سراسری ۹۶
-----	-----------------------

● فصل چهارم: ماتریس و دترمینان

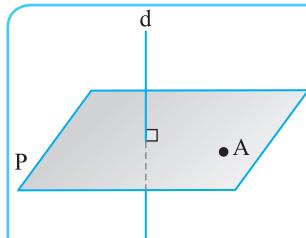
بخش اول: ماتریس‌ها

۲۵۲	درسنامه
۲۶۹	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
	بخش دوم: ماتریس‌ها و تبدیلات هندسی در صفحه
۲۷۷	درسنامه
۲۸۶	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
	بخش سوم: دترمینان‌ها
۲۹۱	درسنامه
۳۰۴	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۳۱۸	آزمون ۱۳
۳۲۰	آزمون ۱۴
۳۲۲	آزمون ۱۵
۳۲۴	آزمون ۱۶
۳۲۶	آزمون ۱۷

فصل دوم: معادلات خط و صفحه

بخش دوم: صفحه در فضا

قبل از اینکه وارد بحث صفحه و معادله‌ی آن شویم، بهتر است به یک قضیه از فصل ۴ هندسه ۲ اشاره کنیم:

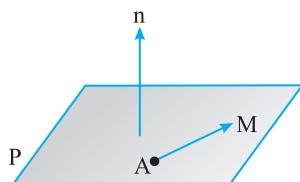


از هر نقطه مانند A در فضا، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد که بر خطی مانند d عمود باشد.

به عبارت دیگر هر صفحه با یک نقطه از آن و یک خط عمود بر آن مشخص می‌شود.

نتیجه: برای مشخص کردن یک صفحه به یک نقطه از آن صفحه و یک راستای عمود (بردار عمود) بر آن نیاز داریم.

معادله‌ی صفحه



از مقدمه‌ی بالا می‌توان نتیجه گرفت که برای نوشتتن معادله‌ی یک صفحه، به یک نقطه از صفحه و یک بردار عمود بر صفحه نیاز داریم.

به بردار عمود بر صفحه بردار نرمال صفحه می‌گوییم.

فرض کنید، صفحه‌ی P از نقطه‌ی P باشد، $n = (a, b, c)$ می‌گذرد و بردار نرمال آن (x_0, y_0, z_0) باشد،

اکنون می‌خواهیم معادله‌ی صفحه را بنویسیم. (شکل را نگاه کنید).

اگر نقطه‌ی $M(x, y, z)$ نقطه‌ای دلخواه باشد، در این صورت نقطه‌ی M روی صفحه‌ی P قرار دارد، اگر و فقط اگر بردارهای n و AM بر هم عمود باشند. بنابراین داریم:

$$n \perp \overrightarrow{AM} \rightarrow n \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \rightarrow \frac{\overrightarrow{AM} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)}{n = (a, b, c)} \rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

نتیجه: معادله‌ی صفحه‌ی P که از نقطه‌ی مشخصی مانند (x_0, y_0, z_0) می‌گذرد و بردار ناصفر (a, b, c) عمود است عبارت است از:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

توجه: اگر معادله‌ی بالا بسط دهیم می‌توانیم معادله را به صورت زیر نیز بنویسیم:

$$ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_{\text{فرض می‌کنیم برای } d \text{ است}} \Rightarrow ax + by + cz = d$$

مثال: می‌خواهیم معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی $(-1, 2, 1)$ و عمود بر بردار $(2, 3, 4)$ را به دست آوریم. با توجه به

آنچه در بالا گفته شد، داریم:

$$\underbrace{2x + 3y + 4z}_{\downarrow} = 2 \times (-1) + 3 \times 2 + 4 \times 1 \Rightarrow 2x + 3y + 4z = \lambda$$

مختصات نقطه را در این رابطه

قرار داده و در سمت راست می‌نویسیم.

نتیجه: از مطالب فوق ۳ نتیجه زیر به دست می‌آید:

- ۱) طول و جهت بردار نرمال (بردار عمود بر صفحه) یک صفحه اهمیتی ندارد، پس اگر n بردار نرمال باشد، هر ضرب مخالف صفر از آن نیز می‌تواند بردار نرمال صفحه باشد. (یعنی هر صفحه بیشمار بردار نرمال دارد.)
- ۲) اگر بخواهیم از معادله صفحه، بردار نرمال را به دست آوریم، کافی است تمام متغیرها را به یک طرف تساوی برد و سپس ضرایب x, y و z مؤلفه‌های بردار نرمال می‌باشد.
- ۳) در مسائل برای نوشتن معادله یک صفحه به دنبال دو چیز می‌گردیم، اول نقطه از صفحه و بعد برداری عمود بر صفحه (بردار نرمال).

مثال: می‌خواهیم، بردار نرمال صفحه‌ی زیر را به دست آوریم:

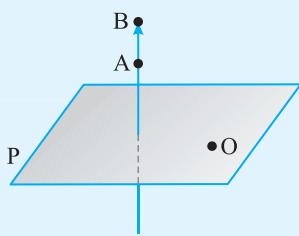
$$\begin{array}{l} \text{متغیرها را به سمت چپ می‌آوریم} \\ 4x - 8z = 2y - 3 \rightarrow 4x - 2y - 8z = -3 \\ n = (4, -2, -8) \xrightarrow{\div 2} (2, -1, -4) \end{array}$$

پس:

تست ۱: اگر $A(1, -1, 2)$ و $B(3, 2, -1)$ باشد، صفحه‌ی گذرنده از مبدأ و عمود بر \overrightarrow{AB} از کدام نقطه می‌گذرد؟

- (۰, ۱, ۱) (۴) (۱, ۲, ۰) (۳) (۲, ۳, -۳) (۲) (۱, ۱, ۱) (۱)

پاسخ: چون خط گذرنده از نقاط A و B بر صفحه عمود است، مطابق شکل می‌توان نتیجه گرفت که \overrightarrow{AB} بر صفحه عمود است، پس می‌توان آن را به عنوان بردار نرمال صفحه در نظر گرفت.



$$\left. \begin{array}{l} \text{نقطه‌ای از صفحه} \\ O(0, 0, 0) \\ \text{بردار نرمال} \\ n = \overrightarrow{AB} = (2, 3, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 3y - 3z = 0$$

در بین گزینه‌ها، فقط گزینه ۴ در معادله صدق می‌کند. (می‌دانیم اگر نقطه‌ای روی صفحه باشد، مختصات آن باید در معادله صدق کند.)

۱: گزینه ۱ $2+3-3=0 \Rightarrow 2 \neq 0$

۲: گزینه ۲ $4+9+9=0 \Rightarrow 22 \neq 0$

۳: گزینه ۳ $2+6-0=0 \Rightarrow 8 \neq 0$

۴: گزینه ۴ $0+3-3=0 \Rightarrow 0=0$

بنابراین گزینه ۴ درست است.

تذکر معادله‌ی صفحه در فضای به صورت $ax + by + cz = d$ است. بد نیست بدانیم که اگر صفحه‌ای از مبدأ مختصات بگذرد، در

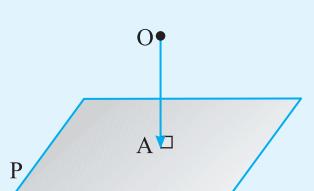
معادله‌ی آن $d = 0$ می‌باشد، یعنی:

فرم کلی معادله صفحه گذرنده از مبدأ: $ax + by + cz = 0$.

تست ۲: اگر نقطه $A(-1, 1, 1)$ تصویر قائم نقطه‌ی O (مبدأ مختصات) روی صفحه‌ی P باشد، معادله‌ی این صفحه کدام است؟

- (۰) $x + y - z = 0$ (۴) $x - y + z = 3$ (۳) $x + y - z = -1$ (۲) $x - y + z = 1$ (۱)

پاسخ: با توجه به شکل و اطلاعات مسأله نقطه‌ای A نقطه‌ای از صفحه است، پس \overrightarrow{OA} را می‌توان به عنوان بردار نرمال صفحه در نظر گرفت:



$$\left. \begin{array}{l} \text{نقطه‌ای از صفحه} \\ A(-1, 1, 1) \\ \text{بردار نرمال} \\ n = \overrightarrow{OA} = (-1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow x - y + z = -1 + 1 + 1 \Rightarrow x - y + z = 1$$

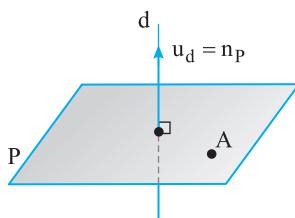
بنابراین گزینه ۳ درست است.

پیشنهاد: بهتر است در حل مسائلی که معادله‌ی صفحه را می‌خواهند، در هر مرحله اطلاعات به دست آمده را روی گزینه‌ها بررسی کنیم. به عنوان مثال در تست بالا چون \overrightarrow{OA} بردار نرمال صفحه است، گزینه‌های ۲ و ۴ رد می‌شوند. از طرفی نقطه‌ی A باید در معادله صدق کند، بنابراین گزینه ۳ درست است.

مسئله ۱ صفحه‌ای که از نقطه‌ی A به ارتفاع ۴ روی محور z می‌گذرد و بر خط $\frac{x-1}{3} = \frac{1-y}{2} = \frac{z}{4}$ عمود است را در نظر بگیرید، مطلوب است:

ب) سه نقطه‌ی دلخواه از صفحه

ج) محل برخورد این صفحه با محور x ها



راه حل: (الف) برای یافتن معادله‌ی صفحه به یک نقطه‌ی از صفحه و بردار نرمال صفحه نیاز داریم. با اطلاعات داده شده $A(0,0,4)$ نقطه‌ای دلخواه از صفحه است.

مطابق شکل مقابل بردار هادی خط d همان بردار نرمال صفحه است، پس:

$$\left. \begin{array}{l} \text{نقطه‌ای دلخواه از صفحه} \\ A(0,0,4) \\ \text{بردار نرمال صفحه} u_d = n_p = (3, -2, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow 3x - 2y + 4z = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 4 \Rightarrow$$

$$3x - 2y + 4z = 16 : \text{معادله صفحه}$$

ب) برای یافتن نقطه‌ی از صفحه کافی است به دو متغیر دلخواه، مقدار داده و متغیر سوم را به دست آوریم:

$$3x - 2y + 4z = 16 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = z = 0 \rightarrow 0 - 2y + 0 = 16 \Rightarrow y = -8 \Rightarrow B(0, -8, 0) \\ \text{نقطه‌ای از صفحه} \\ x = 0, z = 1 \rightarrow 3 \cdot 0 - 2y + 4 \cdot 1 = 16 \Rightarrow y = -6 \Rightarrow C(0, -6, 1) \\ \text{نقطه‌ای از صفحه} \\ y = 1, z = 2 \rightarrow 3x - 2 + 8 = 16 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow D(\frac{1}{3}, 1, 2) \\ \text{نقطه‌ای از صفحه} \end{array} \right.$$

ج) برای یافتن محل برخورد صفحه با محور x ها، کافی است y و z را برابر صفر قرار دهیم:

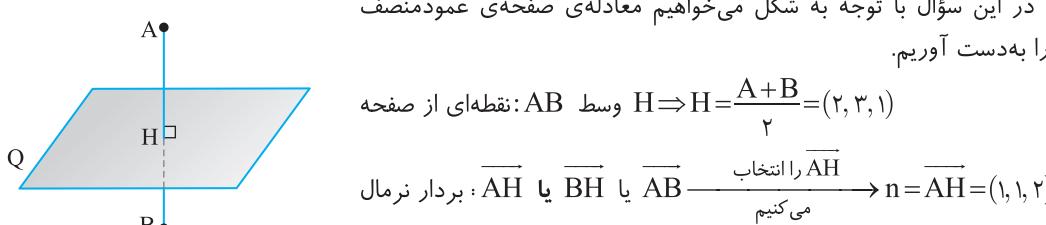
$$3x - 0 + 0 = 16 \rightarrow x = \frac{16}{3} : \text{محل برخورد با محور x ها}$$

مسئله ۲ قرینه‌ی نقطه‌ی A(-1, 2, -1) نسبت به صفحه‌ی Q نقطه‌ی B(3, 4, 3) می‌باشد.

الف) معادله‌ی صفحه‌ی Q را به دست آورید.

ب) اگر این صفحه محورهای مختصات را در نقاط M، N و P قطع کند، مساحت مثلث MNP را به دست آورید.

ج) حجم هرم OMNP را به دست آورید.



راه حل: (الف) در این سؤال با توجه به شکل می‌خواهیم معادله‌ی صفحه‌ی عمودمنصف پاره خط AB را به دست آوریم.

$$AB \text{ وسط } H \Rightarrow H = \frac{A+B}{2} = (2, 3, 1)$$

$$\text{را انتخاب} \rightarrow \overrightarrow{AH} \text{ یا} \overrightarrow{BH} \text{ یا} \overrightarrow{AB} \rightarrow n = \overrightarrow{AH} \text{ می‌کنیم} \Rightarrow n = (1, 1, 2)$$

$$Q: x + y + 2z = 2 + 3 + 2 \cdot 1 \Rightarrow Q: x + y + 2z = 7 \quad \text{در نتیجه:}$$

ب) محل برخورد با محورها را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$x + y + 2z = 7 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{محور x ها} \rightarrow x = 7 \Rightarrow M = (7, 0, 0) \\ y = z = 0 \rightarrow \\ \text{محور y ها} \rightarrow y = 7 \Rightarrow N = (0, 7, 0) \\ x = z = 0 \rightarrow \\ \text{محور z ها} \rightarrow z = \frac{7}{2} \Rightarrow P = (0, 0, \frac{7}{2}) \end{array} \right.$$

مساحت مثلث MNP را با استفاده از ضرب خارجی به دست می‌آوریم:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MP}| = \frac{1}{2} \left| \left(\frac{49}{2}, \frac{49}{2}, \frac{49}{2} \right) \right| = \frac{49\sqrt{6}}{4}$$

ج) در فصل اول دیدیم که حجم هرم OMNP که در آن $P(0, 0, c)$ و $N(0, b, 0)$ و $M(a, 0, 0)$ می‌باشد، برابر $\frac{1}{6}|abc|$ است.

$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{6} \times 7 \times 7 \times \frac{7}{2} = \frac{343}{12}$$

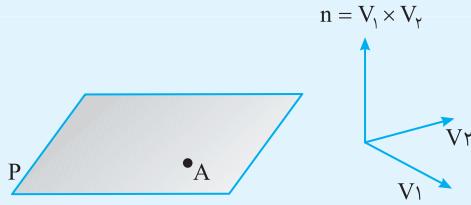
پس:

تست ۳: معادله‌ی صفحه‌ای که از نقطه‌ی A(۳, ۴, -۵) می‌گذرد و با بردارهای $\vec{V}_1 = (1, -2, 1)$ و $\vec{V}_2 = (3, 1, -1)$ موازی باشد کدام است؟

$$x + 4y + 7z + 16 = 0 \quad (۱)$$

$$x + y + z - 2 = 0 \quad (۲)$$

$$x + 4y + 7z - 8 = 0 \quad (۳)$$



پاسخ: نقطه‌ای دلخواه درون صفحه‌ی P می‌باشد.

از آنجا که \vec{V}_1 و \vec{V}_2 بردارهایی موازی صفحه می‌باشند، ضرب خارجی

$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ را می‌توان به عنوان بردار نرمال صفحه در نظر گرفت. در نتیجه داریم:

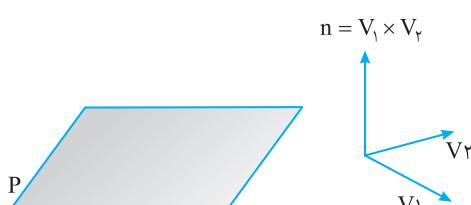
$$\vec{n} = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = (-1, -4, -7)$$

$\xrightarrow{\times (-1)}$: بردار نرمال صفحه $(1, 4, 7)$

پس معادله صفحه به صورت زیر است:

$$x + 4y + 7z = 3 + 4 \times 4 + 7 \times (-5) \Rightarrow x + 4y + 7z = -16$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

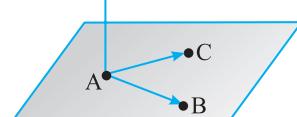


توجه: در تست قبل دیدیم که اگر دو بردار موازی یک صفحه داشته باشیم، ضرب خارجی آنها برداری عمود بر صفحه می‌باشد و در نتیجه می‌توان آن را به عنوان بردار نرمال صفحه در نظر گرفت.

در بسیاری از مسائل، از این مطلب برای نوشتن معادله‌ی صفحه استفاده می‌کنیم اما باید دقت کرد که لزوماً در این گونه مسائل به طور صریح بردارهای موازی صفحه را بیان نمی‌کنند و ما باید با توجه به درک هندسی مسئله آنها را به دست آوریم.

مهم‌ترین این مسائل به صورت زیر است که در هر یک از آنها برای پیدا کردن بردار نرمال، از ضرب خارجی استفاده می‌کنیم:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$



(۱) صفحه‌ی شامل سه نقطه‌ی غیر هم خط A, B و C است:

اگر A, B و C را نقاط روی صفحه بگیریم، داریم:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

مثال: معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده از سه نقطه‌ی A(-1, 0, 2) و B(1, 2, 3) و C(0, -3, 1) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2, 2, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (1, -3, -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, 3, -8)$$

با انتخاب نقطه A یا B یا C به عنوان نقطه‌ی دلخواه از صفحه داریم:

$$x + 3y - 8z = -1 + 0 - 16 \Rightarrow x + 3y - 8z = -17$$

(۲) صفحه‌ی شامل خط d و نقطه‌ی A خارج خط d:

نقطه‌ی دلخواه B را روی خط d در نظر می‌گیریم.

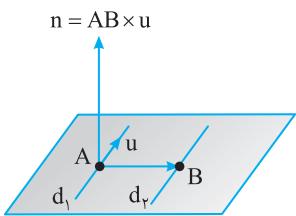
که در آن \vec{n} بردار نرمال صفحه و \vec{u} بردار هادی خط است.

مثال: می‌خواهیم معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی M(1, 1, -1) و خط $x - 1 = \frac{y+1}{2} = 2z$ را به دست آوریم.

$$\begin{aligned} u &= (2, 4, 1) \quad \text{بردار هادی خط} \xrightarrow{\times 2} u = (2, 4, 1) \\ N &= (1, -1, 0) \quad \text{نقطه‌ی دلخواه از خط} \xrightarrow{M(1, 1, -1)} \overrightarrow{MN} = (0, -2, 1) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} u \times \overrightarrow{MN} &= (6, -2, -4) \xrightarrow{\div 2} n = (3, -1, -2) \end{aligned} \right.$$

با انتخاب M(1, 1, -1) به عنوان نقطه دلخواه از صفحه معادله صفحه به صورت رو به رو می‌باشد:

$$3x - y - 2z = 3 - 1 + 2 \Rightarrow 3x - y - 2z = 4$$



$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{u}$$

که در آن \overrightarrow{n} بردار نرمال صفحه و \overrightarrow{u} بردار هادی هر یک از این دو خط است.

(۳) صفحه‌ی شامل دو خط موازی d_1 و d_2

دو نقطه‌ی دلخواه A و B را به ترتیب روی d_1 و d_2 انتخاب می‌کنیم

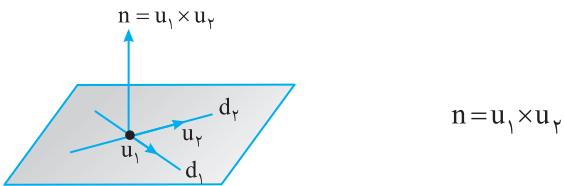
$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{u}$$

مثال: معادله‌ی صفحه‌ی شامل دو خط زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = t + 1 \\ z = -t + 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A(0,0,0) \in d_1 &\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (0,1,1) \Rightarrow \overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{u} = (-2,3,-3) \\ B(0,1,1) \in d_2 &\Rightarrow \overrightarrow{u} = (3,1,-1) \end{aligned}$$

در نتیجه با انتخاب $(0,0,0)$ به عنوان نقطه دلخواه از صفحه داریم:



(۴) معادله‌ی صفحه‌ی شامل دو خط متقاطع d_1 و d_2

اگر u_1 و u_2 به ترتیب بردار هادی خطوط d_1 و d_2 باشند، داریم:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u}_1 \times \overrightarrow{u}_2$$

مثال: معادله‌ی صفحه‌ی شامل دو خط زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$$

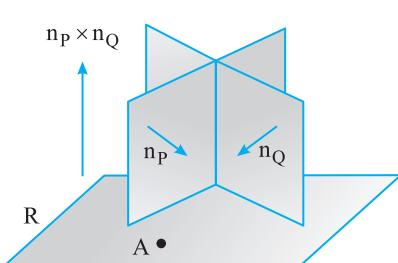
$$\begin{aligned} d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4} \Rightarrow \overrightarrow{u}_1 = (2,3,4) \\ d_2: \begin{cases} x-1 = \frac{y}{3} \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u}_2 = (1,3,0) \end{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{n} = \overrightarrow{u}_1 \times \overrightarrow{u}_2 = (-12,4,3)$$

برای پیدا کردن یک نقطه از صفحه کافی است نقطه‌ای دلخواه روی هر یک از این خطوط انتخاب کنیم. (توجه کنید که لزومی ندارد نقطه‌ی انتخاب شده محل برخورد دو خط باشد.)

$$\begin{aligned} A(1,0,-1) \in d_1 &\Rightarrow -12x + 4y + 3z = -12 + 0 - 3 \Rightarrow -12x + 4y + 3z = -15 \\ &\text{بردار نرمال: } \overrightarrow{n} = (-12,4,3) \end{aligned}$$

توضیح: دقت کنید که این ۴ مورد از مهم‌ترین مسائل یافتن بردار نرمال با استفاده از ضرب خارجی است. ولی این مطلب باید شما را به این فکر بیاندازد که فقط از این ۴ مدل، مسأله مطرح می‌شود. مهم این است که با بررسی این ۴ حالت دید هندسی مناسبی برای حل سایر مسائل به دست آورده باشید. در مسائل بعدی با انواع دیگری از این سوالات مواجه می‌شویم.

مسئله ۳ معادله‌ی صفحه‌ی عمود بر فصل مشترک دو صفحه‌ی $P: 2x - y + z = 5$ و $Q: x + y + z = 0$ و گذرا از نقطه‌ی $(-1, -1, -1)$ را به دست آورید.



راه حل: صفحه‌ی مجھول را R فرض می‌کنیم. $A(-1, -1, -1)$ نقطه‌ای از صفحه

است. چون R بر فصل مشترک P و Q عمود است، پس بر هر دو صفحه عمود

است، بنابراین بردار نرمال‌های P و Q با صفحه‌ی R موازی‌اند. پس داریم:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n}_P = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{n}_Q = (2, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n}_P \times \overrightarrow{n}_Q = (2, 1, -3)$$

پس می‌توان نوشت:

$$R: 2x + y - 3z = 0 + 1 + 3 \Rightarrow R: 2x + y - 3z = 4$$

معادله‌ی صفحه‌های خاص

در این بخش به بررسی معادلات صفحه‌هایی می‌پردازیم که دارای شرایط ویژه‌ای می‌باشند:

۱- صفحه‌های مختصات

اولین نوع خاص صفحات، همان صفحه‌های مختصات هستند، یعنی xOy و xOz

در اینجا معادله‌ی صفحه y را به دست می‌آوریم و به دو صفحه‌ی دیگر فقط اشاره می‌کنیم.

صفحه‌ی xOy از مبدأ می‌گذرد، پس $(0, 0, 0)$ یکی از نقاط روی این صفحه است.

در ضمن بردار یکه $k = (1, 0, 0)$ برداری عمود بر صفحه xOy است، پس k را می‌توان بردار نرمال صفحه

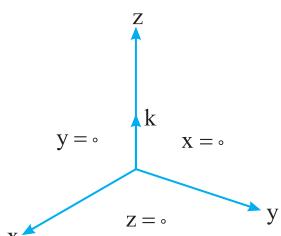
در نظر گرفت، در نتیجه:

xOy : معادله صفحه $z = 0$

به طور مشابه، دو صفحه دیگر به صورت زیر می‌باشند:

xOz : معادله صفحه $y = 0$

yOz : معادله صفحه $x = 0$



۲- صفحات عمود بر محورها (موازی صفحات مختصات)

در این حالت صفحه‌هایی را مورد بحث قرار می‌دهیم که با یکی از صفحات مختصات موازی هستند. که در

این صورت بر محور غیر همنام آن صفحه عمود است. (مانند صفحه‌ی شکل مقابل) در اینجا صفحه‌ای عمود

بر محور Z را بررسی می‌کنیم.

در این حالت چون صفحه بر محور Z ها عمود است، می‌توان $(1, 0, 0) = k$ را به عنوان بردار نرمال در نظر

گرفت. پس معادله‌ی صفحه به صورت زیر خواهد بود:

$$x + 0y + 1z = d \Rightarrow z = d$$

به طور مشابه می‌توان معادلات دیگر این نوع صفحات را به دست آورد.

$x = d$: صفحه عمود بر محور X ها

(yOz صفحه)

$y = d$: صفحه عمود بر محور Y ها

(xOz صفحه)

توجه: این نوع صفحات به طور هندسی نیز قابل تصور هستند. به صفحه‌ی رسم شده در بالا دقیق کنید. در این حالت صفحه بر محور Z ها عمود است و همواره تمام نقاط آن، دارای ارتفاع ثابت می‌باشند. در نتیجه ویژگی مشترک نقاط روی این صفحه به صورت $d = Z$ می‌باشد، که در شکل بالا مشاهده می‌شود.

مثال: صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی $A(-1, 2, 3)$ و موازی صفحه‌ی yOz به صورت $x = -1$ می‌شود.

۳- صفحات موازی محورها (عمود بر صفحات مختصات)

فرض کنید صفحه‌ای داریم که با محور Z ها موازی است. (شکل مقابل) در این حالت، بردار نرمال صفحه بر

محور Z ها عمود است در نتیجه بردار نرمال صفحه بر بردار $(0, 0, 1) = k$ عمود می‌باشد.

$$\begin{aligned} n &= (a, b, c) \\ k &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad \begin{aligned} n \cdot k &= 0 \\ a \times 0 + b \times 0 + c \times 1 &= 0 \Rightarrow c = 0 \end{aligned}$$

در نتیجه معادله‌ی این نوع صفحات به صورت زیر است:

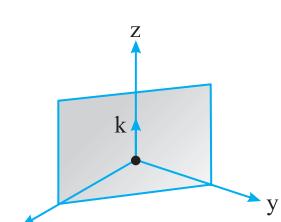
به طور مشابه می‌توان گفت:

$by + cz = d$: صفحه موازی محور X ها

(yOz بر صفحه)

$ax + cz = d$: صفحه موازی محور Y ها

(xOz بر صفحه)



۱۴- صفحه‌ی شامل یکی از محورها

فرض کنید می‌خواهیم صفحه‌ی شامل محور Z را به دست آوریم. چون انطباق، حالت خاص توازی است، این صفحه با محور Z ها موازی است. در نتیجه معادله‌ی آن به صورت $ax+by=d$ است. از طرفی این صفحه شامل مبدأ مختصات می‌باشد پس مختصات مبدأ در آن صدق می‌کند:

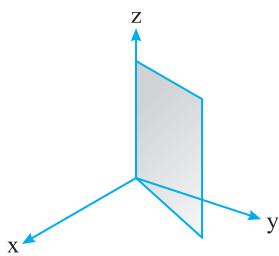
$$ax+by=d \xrightarrow{O(0,0,0)} ax+0+bx=0 \Rightarrow d=0.$$

بنابراین معادله‌ی صفحات شامل محور Z ها به صورت زیر است:

$$ax+by=0.$$

$$by+cz=0: \text{صفحه شامل محور } x\text{ها}$$

$$ax+cz=0: \text{صفحه شامل محور } y\text{ها}$$



مثال: معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی $A(1,2,1)$ و شامل محور y ها را می‌توان، به صورت زیر به دست آورد:

$$\xrightarrow{\text{در معادله صدق می‌کند}} ax+cz=0 \Rightarrow a+c=0 \Rightarrow a=-c$$

$$-cx+cz=0 \xrightarrow{\div c} -x+z=0$$

تساوی را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

نتیجه: می‌توان برای سرعت بخشیدن به حل مسائل، مطالب زیر را در مورد صفحه‌های خاص به خاطر داشت:

۱- معادله‌ی کلی هر صفحه به صورت زیر است:

$$ax+by+cz=d$$

۲- اگر صفحه‌ای از مبدأ مختصات عبور کند، به صورت زیر خواهد بود:

$$ax+by+cz=0$$

۳- اگر صفحه با هر محور موازی باشد، در معادله‌ی آن صفحه مؤلفه‌ی آن محور وجود ندارد و برعکس.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

صفحه‌ای موازی محور x ها است. در نتیجه معادله آن به صورت زیر است:

$$\text{در معادله } x \text{ وجود ندارد} \Rightarrow by+cz=d$$

صفحه‌ای شامل محور y ها است، پس:

$$\left. \begin{array}{l} \text{موازی محور } y\text{ها است} \\ \text{از مبدأ می‌گذرد} \end{array} \right\} \Rightarrow ax+cz=0$$

صفحه‌ای عمود بر محور x ها است، بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} \text{موازی محور } y\text{ها} \\ \text{y ندارد} \\ \text{z ندارد} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{موازی محور } z\text{ها} \\ \text{y ندارد} \\ \text{z ندارد} \end{array} \right\} \Rightarrow x=d$$

مسئله ۱۴: صفحه‌ی P از نقطه‌ای به عرض ۳ روی خط $-1-x=y=z-1$ می‌گذرد و با دو محور Ox و Oy موازی است. معادله‌ی این

صفحه را نوشته و ۲ نقطه‌ی دلخواه را روی آن به دست آورید.

راه حل: نقطه‌ی روی خط را به دست می‌آوریم:

$$-1-x=y=z-1 \xrightarrow{y=r} -1-x=3=z-1 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow A(-2,3,4)$$

از طرفی چون صفحه موازی محورهای x و y است می‌توان نتیجه گرفت که صفحه، موازی صفحه xoy است. (عمود بر محور Z ها).

پس معادله آن برابر است با: $Z=4$

اما برای یافتن نقطه روی این صفحه هر نقطه‌ای که در آن مؤلفه‌ی Z برابر ۴ باشد روی این صفحه قرار دارد، مانند نقاط $(0,0,4)$ ، $(0,1,4)$ و ...

تست ۴: صفحه‌ی شامل محور Z ها و نقطه‌ی $A(1, 2, 2)$ با کدام بردار می‌تواند موازی باشد؟

$$(1, 2, 2) \quad (4)$$

$$(1, +2, 4) \quad (3)$$

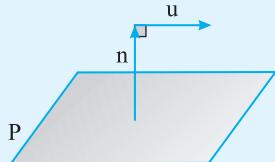
$$(2, 1, 2) \quad (2)$$

$$(-2, 1, 0) \quad (1)$$

پاسخ: چون صفحه‌ی شامل محور Z ها است، پس معادله‌ی آن به صورت $ax + by = 0$ است. همچنین

نقطه‌ی $A(1, 2, 2)$ در معادله صدق می‌کند، پس داریم:

$$ax + by = 0 \xrightarrow{A(1, 2, 2)} a + 2b = 0 \rightarrow a = -2b$$



تساوي بالا را در معادله جایگذاري می‌کنيم:

$$-2bx + by = 0 \xrightarrow{\div b} -2x + y = 0 \Rightarrow n = (-2, 1, 0)$$

با توجه به شکل اگر برداری با صفحه موازی باشد، بر بردار نرمال صفحه عمود است، پس

گزينه‌اي جواب است که ضرب داخلی آن در بردار n برابر صفر باشد. در بين گزينه‌ها فقط

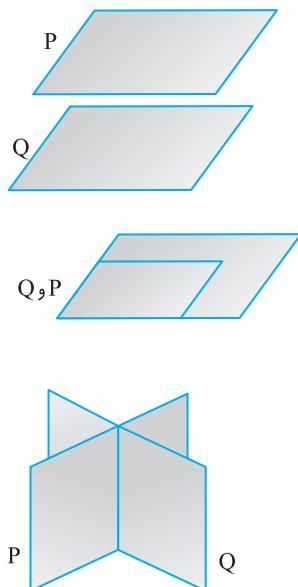
گزينه ۳ اين شرط را دارد.

$$(1, +2, 4) \cdot (-2, 1, 0) = -2 + 2 + 0 = 0$$

بنابراین گزينه‌ي (3) درست است.

وضعیت دو صفحه نسبت به هم

می‌دانیم وضع نسبی دو صفحه در فضا به صورت زیر می‌باشد:

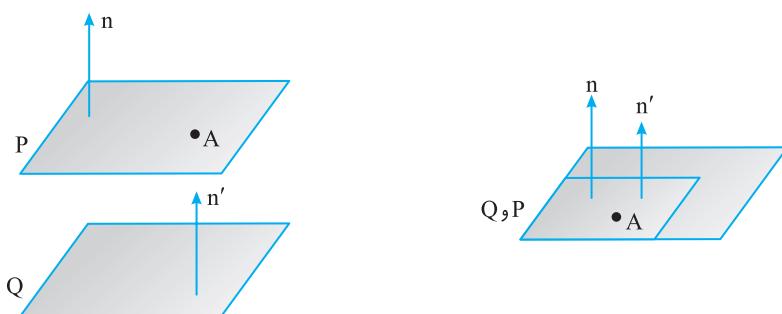


الف) موازی و متمایز

ب) منطبق

وضع نسبی دو صفحه در فضا
۱) موازی
۲) متقاطع

روش تشخيص: اگر دو صفحه موازی باشند، (چه منطبق و چه موازی و متمایز) بردار نرمال آنها با هم موازی‌اند. (شکل را ببینید.)



در اين حالت برای تشخيص موازی و متمایز از منطبق کافی است يك نقطه‌ی دلخواه از يك از دو صفحه انتخاب کرده و در معادله صفحه دیگر قرار دهیم. اگر صدق کرد دو صفحه منطبق‌اند و در غیر این صورت موازی و متمایز می‌باشند.

توجه: دو صفحه که موازی نباشند، متقاطع‌اند.

نکته: می‌توان وضع دو صفحه را به صورت زیر نیز بررسی کرد.

$$\begin{cases} P: ax+by+cz=d \\ Q: a'x+b'y+c'z=d' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \begin{cases} \neq \frac{d}{d'} & \text{دو صفحه موازی و متمایزند.} \\ = \frac{d}{d'} & \text{دو صفحه موازی و منطبق‌اند.} \end{cases} \\ (\text{در این حالت هیچ یک از مؤلفه‌های بردار نرمال نباید صفر باشد}) \\ n=(a, b, c) // n'=(a', b', c') \Rightarrow \text{دو صفحه متقارع‌اند} \end{cases}$$

تست ۵: اگر دو صفحه $a^2x + (b-1)y + cz = -1$ و $2ax - by - z + 2 = 0$ منطبق باشند، کمترین مقدار $a - b + c$ کدام است؟

۲ (۴)

-۲ (۳)

- $\frac{7}{3}$ (۲)- $\frac{1}{6}$ (۱)

پاسخ: شرط منطبق بودن دو صفحه را می‌نویسیم:

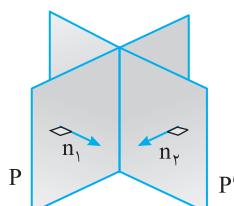
$$\frac{a^2}{2a} = \frac{b-1}{-b} = \frac{c}{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \rightarrow a=1 \\ \Rightarrow b = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow a-b+c = -\frac{1}{6} \\ \Rightarrow c = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

اما اگر $a = 0$ و $b = \frac{2}{3}$ و $c = -\frac{1}{2}$ فرض شود باز هم دو صفحه منطبق‌اند، بنابراین $a - b + c = -\frac{1}{3}$ می‌باشد که از مقدار قبلی کمتر است.

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

چند مطلب در مورد دو صفحه‌ی متقارع

زاویه‌ی بین دو صفحه



اگر P و P' دو صفحه‌ی متقارع با بردار نرمال‌های n_1 و n_2 باشند، زاویه‌ی بین دو صفحه، همان زاویه‌ی بین بردار نرمال آن دو صفحه است. (ممکن است n_1 و n_2 را در نظر نماییم).

پس اگر θ زاویه‌ی حاده بین دو صفحه باشد، داریم:

$$\cos \theta = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1||n_2|}$$

مثال: زاویه‌ی بین دو صفحه‌ی P و Q با معادلات زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} P: 2x - y + 2z = 4 \\ Q: x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = (2, -1, 2) \\ n_2 = (1, -1, 0) \end{cases}$$

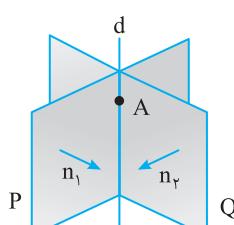
$$\cos \theta = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1||n_2|} = \frac{2+1+0}{3 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

فصل مشترک دو صفحه‌ی متقارع

می‌دانیم اگر دو صفحه با یکدیگر متقارع باشند، فصل مشترک آن‌ها یک خط است. در این بخش می‌خواهیم معادله‌ی خط فصل مشترک را به دست آوریم.

بنابراین شکل مقابل n_1 و n_2 بردارهای نرمال دو صفحه‌ی متقارع P و Q می‌باشند. (مطابق شکل)

چون بردارهای n_1 و n_2 بر این صفحه‌ها عمود می‌باشند، پس بردار n_1 بر هر خط درون صفحه‌ی P عمود است و بردار n_2 بر هر خط درون صفحه‌ی Q . در نتیجه بردارهای n_1 و n_2 بر فصل مشترک (خط d) در شکل عمودند و نهایتاً $n_1 \times n_2$ راستای خط d (هادی خط d) را نشان می‌دهد.



برای یافتن یک نقطه از فصل مشترک، کافی است به جای یکی از متغیرها در معادلات هر دو صفحه عدد دلخواهی قرار دهیم. بعد دو معادله و دو مجهول حاصل را به صورت دستگاه حل کنیم. دو مؤلفه‌ی به دست آمده از دستگاه و مؤلفه‌ای که در ابتدا انتخاب کردیم، روی هم مختصات یک نقطه از فصل مشترک را به دست می‌دهد.

فصل دوم: معادلات خط و صفحه

تعداد سؤالات: ۱۰۸

تست‌های بخش دوم: صفحه در فضا

- ۲۹۷ - اگر نقطه‌ی $A'(1, -1, 2)$ تصویر قائم نقطه‌ی P باشد، معادله‌ی صفحه‌ی P روی صفحه‌ی $A(1, 0, 0)$ به کدام صورت است؟

$$x+y-z-1=0 \quad (4) \quad x+y-z+1=0 \quad (3) \quad -x-y-z+3=0 \quad (2) \quad x-y+z-3=0 \quad (1)$$

- ۲۹۸ - اگر A' تصویر قائم نقطه‌ی $A(2, -1, 1)$ باشد، معادله‌ی خط گذرا از نقاط A و A' کدام است؟

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1} \quad (4) \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = 1-z \quad (3) \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1} \quad (2) \quad \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1} \quad (1)$$

- ۲۹۹ - معادله‌ی صفحه‌ای که بر خط $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = z$ عمود باشد و خط $\frac{x-2}{2} = y = 1-z$ را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کند، کدام است؟

$$4x+2y+z-8=0 \quad (4) \quad 4x+2y-2z-1=0 \quad (3) \quad 4x+2y-2z-16=0 \quad (2) \quad 2x+y-z-4=0 \quad (1)$$

- ۳۰۰ - معادله‌ی صفحه‌ی گذرا از نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر خط $D: (x=2t+1, y=-t+2, z=3)$ و موازی صفحه‌ی $3x-2y-z+1=0$ کدام است؟

$$-3x+2y+z=12 \quad (4) \quad -3x+2y+z+3=0 \quad (3) \quad 3x-2y-z+2=0 \quad (2) \quad 3x+2y-z+5=0 \quad (1)$$

- ۳۰۱ - مکان هندسی نقاطی از فضا که از دو نقطه‌ی $A(1, 2, 3)$ و $B(-1, 3, 2)$ به یک فاصله هستند، کدام است؟

$$2x-y+z=0 \quad (4) \quad 2x-y-z=0 \quad (3) \quad 2x-y+z=4 \quad (2) \quad \frac{x-1}{-2}=y=-z \quad (1)$$

- ۳۰۲ - اگر قرینه‌ی نقطه‌ی $A(5, 1, 4)$ نسبت به صفحه‌ی P نقطه‌ی $(6, -3, 1)$ باشد، تصویر قائم کدام یک از نقاط زیر روی صفحه‌ی P بر خود آن نقطه منطبق است؟

$$(1, 4, 1) \quad (4) \quad (1, 1, 1) \quad (3) \quad (3, 1, 5) \quad (2) \quad (2, 2, 9) \quad (1)$$

- ۳۰۳ - فاصله‌ی مبدأ مختصات از تقاطع صفحه‌ی $2x+y+3z=5$ و صفحه‌ی yoz کدام است؟

$$\sqrt{10} \quad (4) \quad \frac{5}{\sqrt{10}} \quad (3) \quad \frac{1}{\sqrt{10}} \quad (2) \quad \frac{5}{2\sqrt{10}} \quad (1)$$

- ۳۰۴ - صفحه‌ی عمود منصف پاره‌خط واصل بین دو نقطه $A(3, -1, 4)$ و $B(5, 1, 2)$ است. حجم هرم محدود به صفحه‌ی P و صفحات مختصات کدام است؟

$$\frac{1}{12} \quad (4) \quad \frac{1}{8} \quad (3) \quad \frac{1}{6} \quad (2) \quad \frac{1}{4} \quad (1)$$

- ۳۰۵ - قرینه‌ی نقطه‌ی $A(2, 3, 0)$ نسبت به صفحه‌ی $x+y+z=1$ است. حاصل $x+y+z$ کدام است؟

$$4) \text{ صفر} \quad -5 \quad (3) \quad -3 \quad (2) \quad -1 \quad (1)$$

- ۳۰۶ - اگر قرینه‌ی نقطه‌ی $A(1, -1, 3)$ نسبت به صفحه‌ی $A'(1, b, a-1)$ نقطه‌ی $y+z=0$ باشد، آن‌گاه $a-b$ کدام است؟

$$1 \quad (4) \quad -1 \quad (3) \quad 5 \quad (2) \quad -5 \quad (1)$$

- ۳۰۷ - خط گذرا از نقطه‌ی $(3, -1, 2)$ و عمود بر صفحه‌ی $3x+y+z-4=0$ را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

$$(0, -4, 1) \quad (4) \quad (0, 2, -1) \quad (3) \quad (0, -2, 1) \quad (2) \quad (0, 1, 3) \quad (1)$$

- ۳۰۸ - از دو نقطه‌ی $A(2, 0, 0)$ و $B(1, -1, 0)$ چند صفحه می‌گذرد به‌طوری که بر صفحه‌ی $2x-y+2z=3$ عمود باشد؟

$$4) \text{ صفر} \quad 3) \text{ بی‌شمار} \quad 2) \text{ حداقل یک} \quad 1) \text{ دقیقاً یک}$$

- ۳۰۹ - چند صفحه شامل دو نقطه‌ی $A(2, 3, -1)$ و $B(1, 2, 1)$ وجود دارد که بر صفحه‌ی $P: 3x+y-2z+12=0$ عمود باشد؟

$$4) \text{ بی‌شمار} \quad 3) \text{ دو} \quad 2) \text{ یک} \quad 1) \text{ هیچ}$$

-۳۱۰ اگر $A(3, 1, m)$ و $B(2, 1, 3)$ دو نقطه در فضا باشند و بی شمار صفحه شامل A و B بتوان رسم کرد که بر صفحه $x=7-2z$ عمود باشند، آن گاه m کدام است؟

(۵) ۴

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

-۳۱۱ معادله خطی که از نقطه $M(1, 2, 3)$ بگذرد و صفحه N به طول مثبت واقع بر صفحه Oxy قطع کند به طوری که فاصله N از M باشد، کدام است؟

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-3}$$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-3}$$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z}{3}$$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}$$

-۳۱۲ قرینه صفحه $2x-z+y=4$ نسبت به نقطه $(1, 2, 3)$ کدام است؟

$$-z+2x+y=-\frac{9}{4}$$

$$-2x+z-y=-8$$

$$2x-z+y=-2$$

$$2x+y-z=2$$

-۳۱۳ صفحه گذرا از سه نقطه $C(2, 4, 3)$ ، $B(5, 3, 5)$ و $A(2, -1, 4)$ محور y را با چه عرضی قطع می کند؟

(۱) ۱۳

(۳) ۱۳

(۲) ۱۳

(۱) $-\frac{13}{3}$

-۳۱۴ صفحه گذرنده از خط $x+1=2y-1=z+1$ و نقطه $(-1, 1, 1)$ از کدام نقطه می گذرد؟

(۰, ۲, ۰)

(۳) $(2, 0, 0)$ (۲) $(-1, 0, -1)$ (۱) $(0, 0, -4)$

-۳۱۵ بردار نرمال صفحه گذرنده از دو خط زیر کدام است؟

$$d: \frac{x+1}{2} = -y = z+2, \quad d': x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

(۴) چنین صفحه ای وجود ندارد.

(۳) $(1, 1, 1)$ (۲) $(-5, 5, 5)$ (۱) $(5, 5, -5)$

-۳۱۶ صفحه گذرا بر دو خط متقاطع $2x+z=-1$ ، $y=x+2$ و $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{3} = -z$ را با کدام ارتفاع قطع می کند؟

(۵) ۴

(۳) -5

(۲) ۷

(۱) -7

-۳۱۷ صفحه شامل دو خط $D'(y=3, z=5)$ و $D(y=2, z=3)$ کدام است؟

(۴) $y-z=-2$ (۳) $2y-z=1$ (۲) $x=0$ (۱) $y+z=5$

-۳۱۸ صفحه ای که از نقطه $(-1, -2, -1)$ بگذرد و با خطوط $\frac{x}{2} = 1 - y = \frac{z}{3}$ و $3x + 3y = 5$ ، $z=2$ موازی باشد، محور y را با کدام عرض قطع می کند؟

(۴) -1 (۳) $\frac{5}{6}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۱) $-\frac{5}{4}$

-۳۱۹ صفحه گذرنده از نقطه $A(1, 2, 3)$ و عمود بر دو صفحه $2x-y+z=5$ و $2x-2y+3z=1$ ، محور Oy را با چه عرضی قطع می کند؟

(۴) 4 (۳) 3 (۲) 2 (۱) -1

-۳۲۰ معادله صفحه ای که شامل خط $\frac{x-2}{2} = y = z-1$ و با خط $x+1=y=\frac{z+3}{3}$ موازی باشد، کدام است؟

(۴) $-2x+5y-z=5$ (۳) $x+4y-z=2$ (۲) $3x-y+2z=4$ (۱) $2x+y-z=3$

-۳۲۱ صفحه ای محور Ox را در نقطه ای به طول ۲ و محور Oy را در نقطه ای به عرض ۱ قطع می کند و با خط $2x=y-1=-z$ موازی است. این صفحه، محور Oz را با کدام ارتفاع قطع می کند؟

(۴) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۱) $-\frac{4}{3}$

-۳۲۲ معادله صفحه ای که شامل خط $L: P: x-z=1$ و بر صفحه $x=2y$ عمود باشد، کدام است؟

(۴) $x-2y+z=-1$ (۳) $2x-y-z=-2$ (۲) $x-2y+z=1$ (۱) $3x-2y-3z=-3$

- ۳۲۳ - صفحه‌ی گذرا از $A(1,1,1)$ ، موازی خط $P: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1$ و عمود بر صفحه‌ی $D: 2x + 3y = 5$ کدام محور مختصات را قطع نمی‌کند؟

۴) هر سه محور را قطع می‌کند.

۳) محور Z

۲) محور y ها

۱) محور x ها

- ۳۲۴ - مکان هندسی معادله‌ی $20y = 4yz$ کدامیک از گزینه‌های زیر است؟

۴) یک خط

۳) دو صفحه‌ی موازی

۲) دو صفحه‌ی عمود بر هم

۱) یک خط و یک صفحه

۳) دو صفحه‌ی عمود بر هم

- ۳۲۵ - صفحه‌ی عمود منصف پاره خط واصل بین دو نقطه‌ی $(1, 2, 0)$ و $(0, 0, 1)$ موازی کدام است؟

۴) صفحه‌ی xy

۳) محور Oy

۲) محور OZ

۱) صفحه‌ی xOy

- ۳۲۶ - معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده از دو نقطه‌ی $(1, 0, 2)$ و $(0, 1, 3)$ و موازی محور Ox کدام گزینه است؟

$x - 3z + 6 = 0$ (۴)

$x - 3z - 6 = 0$ (۳)

$y - 3z - 6 = 0$ (۲)

$y + 3z - 6 = 0$ (۱)

- ۳۲۷ - معادله‌ی صفحه‌ای که از نقطه‌ی $A(1, 0, 2)$ بگذرد و با محور Oy موازی و بر صفحه‌ی $x + y + z - 5 = 0$ عمود باشد، کدام است؟

$2x + z = 4$ (۴)

$x + z + 1 = 0$ (۳)

$x - z + 1 = 0$ (۲)

$x + y + 1 = 0$ (۱)

- ۳۲۸ - چند صفحه می‌توان بر محور Ox عبور داد به طوری که با صفحه‌ی Oyz زاویه‌ی 30° درجه بسازد؟

۴) بیشمار

۳

۲

۱) هیچ

- ۳۲۹ - صفحه‌ی شامل محور x ها و گذرنده از نقطه‌ی $(1, -2, 3)$ بر کدام صفحه‌ی زیر عمود است؟

$5x + 2y - z = 3$ (۴)

$3x - 4y + 2z = 2$ (۳)

$3x + y - 4z = 1$ (۲)

$4x - 2y + 3z = 5$ (۱)

- ۳۳۰ - معادله‌ی صفحه‌ی شامل محور yz ها و عمود بر صفحه‌ی $2x - 3y + z - 7 = 0$ کدام است؟

$2x - z = 0$ (۴)

$\frac{x}{2} - z = 1$ (۳)

$x - 2z = 0$ (۲)

$x + y + z = 1$ (۱)

- ۳۳۱ - صفحه‌ی $P: x + 2y - 3z = 2$ با کدامیک از صفحات زیر موازی ولی غیرمنطبق است؟

$-2x - 4y + 6z + 4 = 0$ (۴)

$-x - 2y + 3z - 2 = 0$ (۳)

$3x + 6y - 9z - 6 = 0$ (۲)

$5x - 4y - z - 1 = 0$ (۱)

- ۳۳۲ - اگر دو صفحه‌ی $2ax + (2a+c)y - cz + 2a = 0$ و $ax + (b+1)y + z + c = 0$ بر هم منطبق باشند، آن‌گاه:

$a = c = -4, b = -2$ (۴)

$a = 2, b = 4, c = 4$ (۳)

$a = c = -2, b = -4$ (۲)

$a = -2, b = -4, c = 4$ (۱)

- ۳۳۳ - صفحه‌ی $A(0, b, 4)$ از نقطه‌ی $(0, b, 4)$ عبور می‌کند و با صفحه‌ی $3x - 2y + 4z = 8$ موازی است. مقدار $a+b$ چقدر است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

- ۳۳۴ - اگر دو صفحه‌ی $x - y + 2z = 3$ و $ax + 2y - 4z = 1$ دو وجه یک مکعب در فضای باشند، مجموع مقادیر a کدام است؟

-8 (۴)

10 (۳)

8 (۲)

-2 (۱)

- ۳۳۵ - زاویه‌ی بین دو صفحه‌ی $2y - z + x = 7$ و $2x + y + z = 7$ کدام است؟

90° (۴)

60° (۳)

45° (۲)

30° (۱)

- ۳۳۶ - زاویه‌ی بین صفحه‌ی $2x - 8 = y - 1 = z + 5$ و خط $ax + z - y = 4$ می‌باشد. a کدام مقدار می‌تواند باشد؟

۲ (۴)

-4 (۳)

1 (۲)

-2 (۱)

- ۳۳۷ - کدام نقطه روی فصل مشترک دو صفحه‌ی $Q: x + y + z + 1 = 0$ و $P: 2x + 3y + 4z + 5 = 0$ قرار دارد؟

$(-1, -1, -1)$ (۴)

$(1, -1, 1)$ (۳)

$(-1, 1, -1)$ (۲)

$(1, -1, -1)$ (۱)

- ۳۳۸ - بردار هادی فصل مشترک دو صفحه‌ی $x + y - 2z - 4 = 0$ و $x + y - 2z + 1 = 0$ بر کدام بردار زیر عمود است؟

$(2, 0, 3)$ (۴)

$(1, 1, 1)$ (۳)

$(1, 0, 1)$ (۲)

$(2, 1, 0)$ (۱)

- ۳۳۹ - فاصله‌ی مبدأ مختصات از فصل مشترک دو صفحه‌ی $x - 2y + z = 4$ و $x + y - z = 2$ کدام است؟

$2\sqrt{\frac{12}{7}}$ (۴)

$2\sqrt{\frac{7}{13}}$ (۳)

$\sqrt{\frac{13}{7}}$ (۲)

$\sqrt{\frac{7}{13}}$ (۱)

تعداد سؤالات: ۲۵

فصل دوم: تستهای کنکور سال‌های اخیر

- ۴۰۵ - طول عمود مشترک دو خط به معادلات $(x=0, y-z=0)$ و $(x=2, z=0)$ کدام است؟
 سراسری - (۸۸) ۳ (۴) ۲ (۳) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۱)
- ۴۰۶ - صفحه‌ی گذرا از نقطه‌ی $A(1, 2, -2)$ و فصل مشترک دو صفحه به معادلات $2x-y+z=4$ و $x+2z=0$ با محور x ها، کدام وضع را دارد؟
 سراسری - (۸۸) ۴ متقاطع ۳ عمود ۲ منطبق ۱ موازی
- ۴۰۷ - کوتاه‌ترین فاصله بین دو خط به معادلات $D: \begin{cases} x+y=2 \\ x-z=4 \end{cases}$ و $D': \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$ کدام است؟
 سراسری خارج از کشور - (۸۸) ۳ (۴) $\sqrt{6}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۲) ۲ (۱)
- ۴۰۸ - صفحه‌ی به معادله‌ی $x+2y-2z=4$ ، محورهای مختصات را در A, B, C قطع می‌کند. مساحت مثلث ABC کدام است؟
 سراسری خارج از کشور - (۸۸) ۶ (۴) $3\sqrt{3}$ (۳) ۴ (۲) $2\sqrt{3}$ (۱)
- ۴۰۹ - فاصله‌ی دو خط به معادلات $D: \frac{x}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{4}$ و $D': \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ کدام است؟
 سراسری - (۸۹) ۳ (۴) $\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۱)
- ۴۱۰ - اگر زاویه‌ی بین خط $\begin{cases} x-2z=1 \\ y+z=-2 \end{cases}$ و صفحه‌ی $ax+y+z-5=0$ برابر 30° درجه باشد، a کدام است؟
 سراسری خارج از کشور - (۸۹) $\pm\sqrt{1/4}$ (۴) $\pm\sqrt{1/2}$ (۳) $\pm\sqrt{1/1}$ (۲) ± 1 (۱)
- ۴۱۱ - فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط گذرنده بر دو نقطه‌ی $(1, 4, 0), (3, 5, -2)$ کدام است؟
 سراسری خارج از کشور - (۸۹) $\sqrt{15}$ (۴) $\sqrt{14}$ (۳) $\sqrt{13}$ (۲) $\sqrt{10}$ (۱)
- ۴۱۲ - قرینه‌ی نقطه‌ی $A(1, 2, 3)$ نسبت به صفحه‌ی $2x+z=0$ ، برابر با کدام مختصات است؟
 سراسری - (۹۰) $(-5, 2, 3)$ (۴) $(3, 1, -1)$ (۳) $(-1, 2, -3)$ (۲) $(-3, 2, 1)$ (۱)
- ۴۱۳ - صفحه‌ی گذرا بر محور y ها و نقطه‌ی $(-1, 2, 3)$ ، با کدام بردار موازی است؟
 سراسری - (۹۰) $-2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ (۴) $2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ (۳) $\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ (۲) $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ (۱)
- ۴۱۴ - صفحه‌ی P شامل خط به معادله‌ی $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$ ، از مبدأ مختصات می‌گذرد. معادله‌ی آن کدام است؟
 سراسری خارج از کشور - (۹۰) $x+y=0$ (۴) $x-2y+z=0$ (۳) $x-2z=0$ (۲) $2y+z=0$ (۱)
- ۴۱۵ - کوتاه‌ترین فاصله‌ی بین دو خط به معادلات $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = -z$ و $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-2}$ کدام است؟
 سراسری خارج از کشور - (۹۰) ۳ (۴) $2\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۱)
- ۴۱۶ - معادله‌ی صفحه‌ی عمودمنصف پاره خط واصل بین دو نقطه‌ی $(1, -1, 2), (3, 1, 0)$ از نقطه‌ای با کدام مختصات زیر می‌گذرد؟
 سراسری - (۹۱) $(3, -1, 1)$ (۴) $(2, -1, 2)$ (۳) $(2, -1, -1)$ (۲) $(1, -2, 1)$ (۱)
- ۴۱۷ - طول عمودمشترک خط به معادلات $(x=t, y=t+2, z=-2t+5)$ و محور y ها کدام است؟
 سراسری - (۹۱) $2\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{6}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۱)

(سراسری خارج از کشور - ۹۱)

۴۱۸ - معادله‌ی صفحه‌ای که از دو نیمساز ناحیه‌ی اول صفحات xOy و xOz می‌گذرد، کدام است؟

$x+y+z=0 \quad (4)$

$x-y+z=0 \quad (3)$

$x-y-z=0 \quad (2)$

$x+y-z=0 \quad (1)$

۴۱۹ - اگر بردار واحد خط Δ گذرنده از مبدأ به صورت $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی $(1, 0, \sqrt{2})$ از خط Δ کدام است؟

(سراسری خارج از کشور - ۹۱)

$\frac{\sqrt{14}}{2} \quad (4)$

$\frac{\sqrt{13}}{2} \quad (3)$

$\frac{\sqrt{11}}{2} \quad (2)$

$\frac{\sqrt{10}}{2} \quad (1)$

۴۲۰ - از نقطه‌ی $A(5, -2, 1)$ صفحه‌ای بر خط به معادله‌ی $(x=t+1, y=-2t+1, z=2t-3)$ عمود شده است، مختصات نقطه‌ی تلاقی

(سراسری - ۹۲)

$(3, -3, 1) \quad (4)$

$(4, 5, 3) \quad (3)$

$(1, 1, -3) \quad (2)$

$(2, -1, -1) \quad (1)$

۴۲۱ - صفحه‌ی گذرا بر دو خط متقاطع $D: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ و $D': \begin{cases} 2x+y=3 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ (سراسری - ۹۲)

$1/2 \quad (4)$

$0/8 \quad (3)$

$-0/6 \quad (2)$

$-0/8 \quad (1)$

(سراسری خارج از کشور - ۹۲)

۴۲۲ - فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط به معادله‌ی $(x=2, y=t-1, z=-t+1)$ کدام است؟

$2\sqrt{2} \quad (4)$

$\sqrt{5} \quad (3)$

$2 \quad (2)$

$1 \quad (1)$

۴۲۳ - صفحه‌ی گذرا بر نقطه‌ی $A(1, 4, 2)$ و فصل مشترک دو صفحه به معادلات $2x+3y-z=6$ و $2x+3y-z=0$ محور z را با

(سراسری خارج از کشور - ۹۲)

کدام ارتفاع قطع می‌کند؟

$6 \quad (4)$

$5 \quad (3)$

$4 \quad (2)$

$3 \quad (1)$

(سراسری - ۹۳)

$\begin{cases} x=2y-1 \\ z=3y-2 \end{cases}, \text{ کدام است؟}$

$2\sqrt{6} \quad (4)$

$2\sqrt{3} \quad (3)$

$\sqrt{6} \quad (2)$

$\sqrt{3} \quad (1)$

(سراسری خارج از کشور - ۹۳)

$\begin{cases} x+y=-2 \\ z=5 \end{cases}, \text{ کدام است؟}$

$2\sqrt{6} \quad (4)$

$2\sqrt{5} \quad (3)$

$\sqrt{13} \quad (2)$

$2\sqrt{3} \quad (1)$

(سراسری - ۹۴)

$\begin{cases} x-1=\frac{y+2}{2} \\ z=\frac{y+2}{-1} \end{cases}, \text{ کدام است؟}$

$3\sqrt{2} \quad (4)$

$2\sqrt{3} \quad (3)$

$2\sqrt{2} \quad (2)$

$\sqrt{6} \quad (1)$

۴۲۷ - صفحه‌ی گذرنده بر خط به معادله‌ی $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-1}$ و نقطه‌ی $(0, 3, 0)$ محور z را با کدام ارتفاع قطع می‌کند؟ (سراسری - ۹۴)

$3 \quad (4)$

$2 \quad (3)$

$-3 \quad (2)$

$-2 \quad (1)$

۴۲۸ - به ازای کدام مقدار a و b دو خط به معادلات $x=2y-3$, $z=-2y-2$ و $\frac{x+b}{a} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{4}$ در یک صفحه واقع و عمود برهم هستند؟

(سراسری خارج از کشور - ۹۴)

$a=3, b=2 \quad (4)$

$a=3, b=-2 \quad (3)$

$a=-3, b=4 \quad (2)$

$a=-3, b=-2 \quad (1)$

۴۲۹ - فاصله‌ی نقطه‌ی $A(2, 1, 5)$ از فصل مشترک دو صفحه به معادلات $4x+3y-z=2$ و $z=4$, کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۹۴)

$3 \quad (4)$

$2 \quad (3)$

$\sqrt{3} \quad (2)$

$\sqrt{2} \quad (1)$

فصل سوم: مقاطع مخروطی

تعداد سؤالات: ۹۵

تست‌های بخش دوم: بیضی

۵۳۱ - پاره خط AB به طول ۴ مفروض است. مکان هندسی نقطه‌ی M از صفحه که در تساوی $\frac{MA-MB}{MA-2} = 2$ صدق می‌کند، کدام است؟

- (۱) دایره (۲) بیضی (۳) پاره خط (۴) تهی

۵۳۲ - فرض کنید F و F' کانون‌های یک بیضی هستند و M نقطه‌ای روی محیط بیضی است. با تغییر مکان M روی بیضی، محیط و مساحت مثلث' FMF'، در صورت تشکیل مثلث، چگونه تغییر می‌کنند؟ (M روی رأس‌های کانونی قرار نمی‌گیرد)

- (۱) هر دو ثابت (۲) محیط ثابت و مساحت متغیر (۳) محیط متغیر و مساحت ثابت (۴) هر دو متغیر

۵۳۳ - در یک بیضی نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک بیضی $\sqrt{2}$ است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\sqrt{3}$

۵۳۴ - فرض کنید خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{\sqrt{5}}{5}$ و طول قطر کوچک آن ۸ است. اگر M نقطه‌ای متغیر روی محیط این بیضی باشد، بیشترین فاصله‌ی M از کانون‌های این بیضی کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{1-\sqrt{5}}$ (۲) $5+\sqrt{5}$ (۳) $2+\sqrt{5}$ (۴) $2(1+\sqrt{5})$

۵۳۵ - نقطه‌ای روی یک بیضی با خروج از مرکز $\frac{1}{2}$ در حرکت است. بیشترین زاویه‌ای که از این نقطه دو کانون دیده می‌شوند، کدام است؟

- (۱) 30° (۲) 60° (۳) 120° (۴) 150°

۵۳۶ - خط $3x+4y=3$ محور تقارن یک بیضی است. اگر (۱) F یکی از کانون‌های بیضی باشد، فاصله‌ی کانونی این بیضی کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) ۱۲

۵۳۷ - طبق قانون اول کپلر، مسیر حرکت سیارات به دور خورشید یک بیضی است که خورشید در یکی از کانون‌های این بیضی قرار دارد. اگر حداقل فاصله‌ی یک سیاره از خورشید 10 میلیارد کیلومتر و خروج از مرکز مدار گردش سیاره $\frac{1}{11}$ باشد، حداقل فاصله‌ی سیاره از مرکز حرکتش حدوداً چند میلیارد کیلومتر است؟

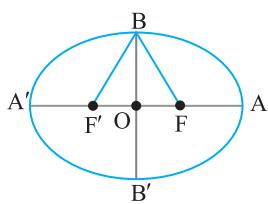
- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۰ (۴) $11/5$

۵۳۸ - اگر در یک بیضی فاصله‌ی رأس کانونی از کانون نزدیک‌تر $\frac{1}{3}$ برابر فاصله‌ی رأس ناکانونی از همان کانون باشد، خروج از مرکز بیضی

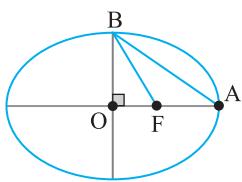
کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۵۳۹ - در بیضی شکل زیر، اگر قطر کوچک بیضی نصف فاصله‌ی کانونی و مساحت مثلث' BFF' برابر ۸ باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟



- (۱) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (۴) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$



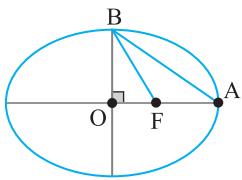
۵۴۰- در شکل مقابل، اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{3}{4}$ باشد، نسبت مساحت مثلث ABF به مساحت مثلث OBF کدام است؟ (F کانون بیضی است)

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$



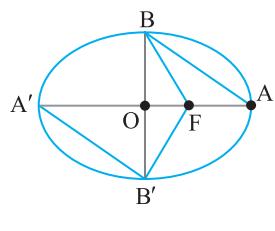
۵۴۱- در شکل مقابل، اندازه‌ی قطر کوچک بیضی $8\sqrt{2}$ و خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{1}{3}$ است. مساحت مثلث BFA کدام است؟

$$4\sqrt{2} \quad (2)$$

$$2\sqrt{2} \quad (1)$$

$$16\sqrt{2} \quad (4)$$

$$8\sqrt{2} \quad (3)$$



۵۴۲- در شکل مقابل که یک بیضی است، مساحت مثلث $A'B'F$ پنج برابر مساحت مثلث ABF است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

$$\frac{1}{5} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

۵۴۳- نقطه‌ی متغیر P روی یک بیضی با کانون‌های F و F' در حال حرکت است. زمانی که فاصله‌ی P تا مرکز بیضی کمترین مقدار ممکن و برابر با $2\sqrt{3}$ واحد باشد، مساحت مثلث $'PFF'$ برابر ۶ می‌شود. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

$$\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (4)$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \quad (1)$$

۵۴۴- در یک بیضی افقی که یکی از کانون‌های آن بر مبدأ مختصات منطبق است، فاصله‌ی کانون دیگر از محل برخورد بیضی با محور لزاها برابر $3\sqrt{5}$ و طول قطر کانونی بیضی $4\sqrt{5}$ است. بیشترین عرض نقاط واقع بر این بیضی کدام است؟

$$4 \quad (4)$$

$$2\sqrt{5} \quad (3)$$

$$2\sqrt{10} \quad (2)$$

$$\sqrt{10} \quad (1)$$

۵۴۵- بیضی‌ای درون یک مستطیل محاط شده است به گونه‌ای که قطرهای بیضی موازی ضلعهای مستطیل‌اند. اگر اندازه‌ی قطر این مستطیل برابر $2\sqrt{3}$ و خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{\sqrt{6}}{3}$ باشد، آن‌گاه فاصله‌ی بین دو کانون این بیضی کدام است؟

$$2\sqrt{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{6} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{2} \quad (1)$$

۵۴۶- در یک بیضی، دو کانون و دو رأس ناکانونی چهار رأس یک لوزی هستند که یک زاویه‌ی آن 60° درجه است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

۵۴۷- رأس کانونی و یک کانون بیضی مشخصی دو سر قطر یک دایره‌اند که این دایره از دو رأس ناکانونی بیضی می‌گذرد. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (1)$$

۵۴۸- اگر F کانون و BB' قطر کوچک بیضی با خروج از مرکز $\frac{1}{3}$ باشد، $\tan(BFB')$ کدام است؟

$$-\frac{2\sqrt{7}}{4} \quad (4)$$

$$2\sqrt{7} \quad (3)$$

$$-\frac{4\sqrt{2}}{7} \quad (2)$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{7} \quad (1)$$

۵۴۹- اگر F(۵, ۱) کانون یک بیضی و B(۳, ۴) رأس ناکانونی آن باشد، آن‌گاه مجموع فواصل هر نقطه روی این بیضی از دو کانون آن برابر

$$27\sqrt{13} \quad (4)$$

$$\sqrt{13} \quad (3)$$

$$4\sqrt{3} \quad (2)$$

$$2\sqrt{3} \quad (1)$$

-۵۵۰- اگر $A(3,1)$ رأس کانونی و $F(2,0)$ کانون یک بیضی با خروج از مرکز $/8^\circ$ باشد، طول قطر کوچک آن کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۳

(۳) ۶

(۴) ۱

-۵۵۱- خروج از مرکز بیضی ای که مجموع فواصل هر نقطه روی آن از دو کانون $(1,0)$ و $(6,0)$ برابر 10° باشد، کدام است؟

$\sqrt{\frac{3}{5}}$

$\frac{\sqrt{3}}{5}$

$\frac{3}{5}$

$\frac{3}{\sqrt{5}}$

-۵۵۲- اگر $(1,0)$ و $(3,1)$ دو کانون یک بیضی گذرنده از نقطه $M(2,3)$ باشند، بیشترین فاصله‌ی هر کانون تا نقاط روی این بیضی کدام است؟

$\sqrt{5}+1$

$\sqrt{5}+2$

$2+\sqrt{3}$

$\sqrt{3}+1$

-۵۵۳- اگر $F(1,5)$ و $F'(1,-1)$ کانون‌های یک بیضی و $M(2,4)$ نقطه‌ای روی آن باشد، طول قطر کوچک بیضی کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۳

(۳) ۶

(۴) ۱

-۵۵۴- نقطه‌ی $O(0,0)$ مرکز یک بیضی قائم است و نقاط $M(0,\sqrt{5})$ و $N(\sqrt{5},0)$ روی این بیضی قرار دارند. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

$\sqrt{5}$

$\frac{\sqrt{20}}{10}$

$\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\frac{\sqrt{30}}{10}$

-۵۵۵- بیضی با کانون‌های $(1,1)$ و $(-3,1)$ بر محور X مماس است. اندازه‌ی بلندترین قطر این بیضی کدام است؟

$2\sqrt{5}$

$\sqrt{5}$

$\sqrt{3}$

$2\sqrt{3}$

-۵۵۶- اگر بیضی با مرکز $(-2,-3)$ به محورهای مختصات مماس باشد، آن‌گاه خروج از مرکز آن کدام است؟

$\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\frac{2}{3}$

-۵۵۷- در بین همه‌ی نقاط روی نمودار یک بیضی، نقاط $(-2,2)$ و $(2,7)$ کمترین فاصله و نقطه‌ی $(10,3)$ یکی از نقاطی است که بیشترین

فاصله را نسبت به مرکز بیضی دارند. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

$\frac{\sqrt{3}}{5}$

$\frac{2}{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{2}$

-۵۵۸- در بیضی با کانون‌های $F(2,2)$ و $F'(2,4)$ ، فاصله‌ی کانون تا دورترین رأس برابر 3 است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

$\frac{2}{3}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}$

-۵۵۹- در بیضی ای که محورهایش موازی محورهای مختصات است، اگر $F(0,-4)$ کانون و $A(0,3)$ رأس آن باشد، آن‌گاه خروج از مرکز

بیضی کدام است؟

$0/8$

$0/6$

$0/4$

$0/2$

-۵۶۰- یک بیضی افقی هم مرکز با دو دایره‌ی $C(O,6)$ و $C'(O,10)$ بر هر دو دایره مماس است همچنین دایره‌ی بزرگ‌تر در ناحیه‌ی اول

بر محورهای مختصات مماس است. فاصله‌ی مبدأ از یک کانون بیضی چقدر است؟

$\sqrt{420}$

$\sqrt{108}$

$\sqrt{104}$

$\sqrt{120}$

-۵۶۱- در بیضی افقی به مرکز $W(2,3)$ ، اگر خروج از مرکز $e = \frac{3}{5}$ و کمترین مقدار x ، -8 باشد، آن‌گاه کمترین مقدار y چقدر است؟

-1

-4

-5

-3

-۵۶۲- نقاط $A(6,1)$ و $A'(-2,1)$ دو سر قطر بزرگ یک بیضی با خروج از مرکز $\frac{\sqrt{3}}{2}$ هستند. محدوده‌ی تغیرات y کدام است؟

$[-2,1]$

$[-3,1]$

$[-1,2]$

$[-1,3]$

-۵۶۳- اگر مجموع فاصله‌های نقطه‌ی M از دو نقطه‌ی ثابت $F(2,0)$ و $F'(-2,0)$ برابر 6 باشد، آن‌گاه مختصات یکی از رأس‌های کانونی شکل

حاصل کدام است؟

$(2,3)$

$(4,0)$

$(-3,0)$

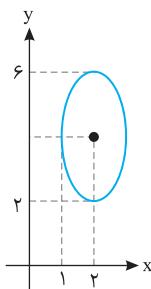
$(2,-3)$

- ۵۶۴- بیضی به مرکز $(-2, 4)$ بر محورهای مختصات مماس است. کدام یک از نقاط زیر، یکی از کانون‌های بیضی است؟

- (۱) $(4, 2+2\sqrt{3})$ (۲) $(-2, 4+\sqrt{3})$ (۳) $(4, 2-2\sqrt{3})$ (۴) $(-2, 4-2\sqrt{3})$

- ۵۶۵- مرکز یک بیضی افقی $(-1, -2)$ است. اگر خروج از مرکز این بیضی $e = \frac{2}{3}$ و فاصله‌ی کانون تا رأس ناکانونی آن ۶ باشد، کانون آن

- کدام گزینه می‌تواند باشد؟
 (۱) $(-1, -1)$ (۲) $(4, -1)$ (۳) $(6, -1)$ (۴) $(-6, -1)$



- ۵۶۶- در بیضی شکل مقابل، مختصات یک کانون کدام است؟

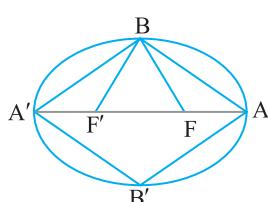
- (۱) $(2, 4)$ (۲) $(2, 4-\sqrt{3})$ (۳) $(2, 4-\sqrt{5})$ (۴) $(2, 3)$

- ۵۶۷- مختصات یک کانون بیضی که بر چهار خط $x=2$, $x=-4$, $y=5$ و $y=1$ مماس باشد، کدام است؟

- (۱) $(-1+\sqrt{5}, -3)$ (۲) $(-1-\sqrt{5}, 3)$ (۳) $(-1, 3-\sqrt{5})$ (۴) $(-1, 3+\sqrt{5})$

- ۵۶۸- در یک بیضی، نقاط $F(2, 2)$ و $F'(2, 4)$ کانون‌های آن و فاصله‌ی رأس کانونی این بیضی از کانون دورتر، ۴ می‌باشد. مختصات یک

- رأس ناکانونی آن کدام است؟
 (۱) $(2+\sqrt{2}, 3)$ (۲) $(2-\sqrt{2}, 3)$ (۳) $(2+2\sqrt{2}, 3)$ (۴) $(2+2\sqrt{2}, 2)$



- ۵۶۹- اگر خروج از مرکز بیضی افقی با معادله‌ی $4x^2 + ky^2 = 1$ باشد، آن‌گاه نسبت مساحت

چهارضلعی $ABA'B'$ به مساحت مثلث BFF' کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{6}{4}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

- ۵۷۰- کمترین فاصله‌ی یک نقطه از بیضی با معادله‌ی $\frac{y^2}{9} + \frac{(x-1)^2}{25} = 1$ از کانون‌های آن چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

- ۵۷۱- اگر نمایش هندسی رابطه‌ی $(k-1)x^2 + (k-2)y^2 = 1$ بیضی باشد، آن‌گاه:

- (۱) بیضی افقی است.
 (۲) بیضی قائم است.
 (۳) به ازای بعضی مقادیر k ، افقی و بعضی مقادیر K قائم است. (۴) هیچ کدام

- ۵۷۲- به ازای کدام مقدار m معادله‌ی $3x^2 + 5y^2 + 6x - 20y + m = 0$ نشان‌دهنده‌ی یک بیضی است؟

- (۱) 23 (۲) 20 (۳) 25 (۴) 28

- ۵۷۳- مجموع فاصله‌های مبدأ مختصات از کانون‌های بیضی با معادله‌ی $25x^2 + 9y^2 - 100x + 18y = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{109}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{109}}{5}$ (۳) $\frac{\sqrt{109}}{6}$ (۴) $\frac{\sqrt{109}}{10}$

- ۵۷۴- فرض کنید AA' و BB' به ترتیب بلندترین و کوتاه‌ترین قطرهای بیضی با معادله‌ی $3x^2 + 2y^2 - 2x = 3$ باشند. طول پاره‌خط AB

- کدام است؟
 (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{6}$

-۵۷۵ فاصله‌ی کانونی مقطع مخروطی با معادله $4x^2 + \frac{y^2}{4} = 8x + 8$ کدام است؟

۶ $\sqrt{5}$ (۴) $3\sqrt{5}$ (۳) ۷ (۲) ۱۴ (۱)

-۵۷۶ مجموع فاصله‌های کانون‌های بیضی $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$ از خط مماس بر آن در رأس ناکانونی B برابر است با:

۹ (۴) ۵ (۳) ۸ (۲) ۶ (۱)

-۵۷۷ مаксیمم مقدار x در مقطع مخروطی با معادله $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$ کدام است؟

۴ (۴) ۲ (۳) ۶ (۲) ۳ (۱)

-۵۷۸ کدام بیضی به دایره نزدیک‌تر است؟

$4x^2 + 9y^2 - 8x - 7y - 2 = 0$ (۲) $\frac{(x-1)^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ (۱)

$5x^2 + 4y^2 - 3x - 12 = 0$ (۴) $5x^2 + 9y^2 + 10x - 6 = 0$ (۳)

-۵۷۹ به ازای کدام مقدار k، خروج از مرکز مقطع به معادله $x^2 + ky^2 = 4x$ برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است؟

۴ و $\frac{1}{4}$ (۴) ۲ و $\frac{1}{2}$ (۳) -۴ و -۲ (۲) ۴ و ۲ (۱)

-۵۸۰ اگر خروج از مرکز بیضی $9x^2 + my^2 - 18x + 2y - 1 = 0$ باشد، مجموع مقادیر به دست آمده برای m کدام است؟

۸۲ (۴) ۸۱ (۳) ۱ (۲) ۲ (۱)

-۵۸۱ به ازای کدام مقدار k، خروج از مرکز بیضی با معادله $2x^2 + y^2 + 4x - 2ky - 15 = 0$ برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است؟

(۴) به k بستگی ندارد $k = \frac{1}{2}$ (۳) $k = 1$ (۲) $k = 0$ (۱)

-۵۸۲ خروج از مرکز مقطع مخروطی با معادله $(x+y+1)(4x+y+2) = (x-2y+3)(x+7y+4)$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{5}}{20}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۲) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۱)

-۵۸۳ اگر فاصله‌ی کانونی بیضی با معادله $-1 < x^2 + m^2 y^2 - 2x = 4m^2 - 4$ باشد، خروج از مرکز بیضی کدام عدد است؟ ($m > 1$)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

-۵۸۴ نقطه‌ی M(x, y) روی بیضی با معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ قرار دارد. شاعر MF که F(c, 0) کانون این بیضی است، برابر کدام است؟

$a + \frac{c}{a} x$ (۴) $b + \frac{c}{a} x$ (۳) $a - \frac{c}{a} x$ (۲) $b - \frac{c}{a} x$ (۱)

-۵۸۵ اگر $x^2 + ay^2 - 2x + a - 3 = 0$ معادله‌ی یک بیضی قائم (قطر بزرگ موازی محور y ها) باشد، مجموعه‌ی مقادیر a به کدام صورت است؟

$1 < a < 4$ (۴) $1 < a < 3$ (۳) $0 < a < 4$ (۲) $0 < a < 1$ (۱)

-۵۸۶ اگر $m^2 x^2 + (4m+1)y^2 - 8x + 18y + 1 = 0$ معادله‌ی یک بیضی افقی (m عدد طبیعی است) با خروج از مرکز $\frac{\sqrt{5}}{3}$ باشد، مختصات

کانون‌های این بیضی کدام است؟

$(1 \pm \sqrt{5}, 1)$ (۴) $(1 \pm \sqrt{5}, -1)$ (۳) $(1 \pm \sqrt{\frac{5}{3}}, -1)$ (۲) $(1 \pm \sqrt{\frac{5}{3}}, 1)$ (۱)