پ)

تعداد کسانی که فقط به ریاضی علاقه دارند $=n(A)-x-y-۶$

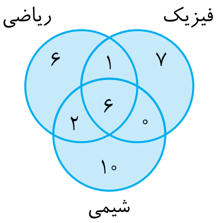
$=۱۵-۱-۲-۶=۶$

تعداد کسانی که فقط به شیمی علاقه دارند $=n(C)-y-z-۶$

$=۱۸-۲-۰-۶=۱۰$

بنابراین تعداد کسانی که فقط به یک درس علاقه دارند، برابر است با $۷+۶+۱۰=۲۳$

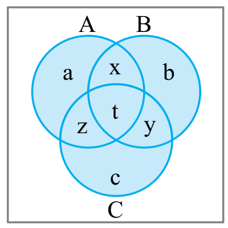
ت) تعداد دانش‌آموزانی که حداقل به دو درس علاقه دارند برابر است با $x+y+z+۶=۹$.



۴۲ چون هر عضو U عضو دست‌کم یکی از این مجموعه‌ها است، پس

$$n(A\cup B\cup C)=n(U)=۵۰$$

وضعیت مجموعه‌ها را در نمودار زیر نشان داده‌ایم.



هدف‌مان پیدا کردن بیش‌ترین مقدار $a+b+c$ است. توجه کنید که

$$n(A\cup B\cup C)=a+b+c+x+y+z+t=۵۰$$

$$\left.\begin{array}{l} n(A\cap B)=x+t=۱۱ \\ n(B\cap C)=y+t=۱۰ \\ n(A\cap C)=z+t=۹ \end{array}\right\} \Rightarrow x+y+z+t=۳۰-۲t$$

در نتیجه $a+b+c=۲۰+۲t$. به این ترتیب، بیش‌ترین مقدار $a+b+c$ وقتی پیش می‌آید که t بیش‌ترین مقدار ممکن باشد. از تساوی‌های $z+t=۹$ ، $y+t=۱۰$ ، $x+t=۱۱$ نتیجه می‌گیریم که بیش‌ترین مقدار ممکن t برابر با ۹ است (به ازای $x=۲$ ، $y=۱$ و $z=۰$). در نتیجه، بیش‌ترین مقدار $a+b+c$ برابر با ۳۸ است.

۴۳ توجه کنید که در شکل n اُم روی هر ضلع $n+۱$ نقطه وجود دارد. شکل n اُم چهار ضلع دارد، پس تعداد کل این نقطه‌ها می‌شود $۴(n+۱)$. اما در این نحوه‌ی شمارش، نقطه‌های مشترک بین ضلع‌ها را دو بار شمرده‌ایم.

بنابراین، اگر تعداد نقطه‌های شکل n اُم را با a_n نشان دهیم،

$$a_n=۴(n+۱)-۴=۴n$$

راه‌های دیگری هم برای حل این مسأله وجود دارد. مثلاً در شکل n اُم، به‌جز چهار گوشه، $n-۱$ نقطه وجود دارد. پس تعداد کل این نقطه‌ها می‌شود $۴(n-۱)$، که اگر چهار نقطه‌ی رأس‌ها را هم حساب کنیم، نتیجه می‌شود

$$a_n=۴(n-۱)+۴=۴n$$

۴۴ توجه کنید که در هر شکل، تعداد مربع‌های ردیف پایین، از شماره‌ی شکل دو تا بیش‌تر است و در ستون‌های بالای هر ردیف به اندازه‌ی شماره‌ی شکل، مربع وجود دارد. بنابراین، اگر تعداد مربع‌های شکل n اُم a_n باشد،

$$a_n=n+۲+۲n=۳n+۲$$

۴۵ توجه کنید که در شکل n اُم مستطیلی $۲\times n$ وجود دارد، که ستونی از $n-۱$ مربع به بالای آن چسبیده است و یک مربع هم در کنار آن قرار دارد. بنابراین، اگر تعداد مربع‌های شکل n اُم را a_n بگیریم،

$$a_n=۲n+n-۱+۱=۳n$$

۴۶ توجه کنید که شکل اول از ۱۰ نقطه‌ی رنگی تشکیل شده است و در شکل‌های بعدی، هر شکل با اضافه شدن ۴ نقطه به شکل قبلی به‌دست آمده است. بنابراین، اگر تعداد نقطه‌های رنگی در شکل n اُم را a_n بگیریم،

$$a_n=۱۰+۴(n-۱)=۴n+۶$$

۴۷ توجه کنید که در بالا و پایین هر شکل دو نقطه داریم. نقطه‌های وسط (از شکل دوم به بعد) از چند ردیف سه تایی تشکیل شده‌اند: شکل اول ردیفی ندارد، شکل دوم ۱ ردیف دارد، شکل سوم ۲ ردیف دارد، ... و شکل n اُم $n-۱$ ردیف دارد. بنابراین اگر تعداد نقطه‌های شکل n اُم را a_n بگیریم،

$$a_n=۲+۲+۳(n-۱)=۳n+۱$$

۴۸ توجه کنید که شکل n اُم در هر ضلعش n مربع کوچک دارد و در درونش $n-۱$ مربع کوچک. بنابراین، اگر تعداد مربع‌های کوچک شکل n اُم را a_n بگیریم،

$$a_n=۴n+n-۱=۵n-۱$$

۴۹ به الگوی شکل‌ها دقت کنید. شکل اول از یک مربع کوچک ساخته شده است. در شکل دوم، از سه طرف یک مربع به شکل اول اضافه کرده‌ایم. در شکل سوم، از سه طرف دو مربع به شکل اول اضافه کرده‌ایم. در شکل چهارم، از سه طرف سه مربع به شکل اول اضافه کرده‌ایم. به این ترتیب، اگر تعداد مربع‌ها در شکل n اُم را a_n بنامیم،

$$a_n=۱+۳(n-۱)=۳n-۲$$

در نتیجه $a_{۵۰}=۳\times۵۰-۲=۱۴۸$، یعنی برای ساختن شکل ۵۰ اُم ۱۴۸ مربع کوچک لازم داریم.

۵۰ ابتدا جمله‌ی عمومی تعداد صندلی‌ها را وقتی که n میز را به هم چسبانده‌ایم، پیدا می‌کنیم. دور میز اول ۶ صندلی وجود دارد. وقتی دو میز را می‌چسبانیم، به تعداد صندلی‌های اولیه ۴ تا اضافه می‌شود؛ وقتی سه میز را می چسبانیم، به تعداد صندلی‌های اولیه 2×4 تا اضافه می‌شود؛ ...؛ وقتی n میز را می‌چسبانیم، به تعداد صندلی‌های اولیه $4(n-1)$ تا اضافه می‌شود. بنابراین اگر تعداد صندلی‌های دور n میز a_n باشد،

$$a_n=6+4(n-1)=4n+2$$

اگر $4n+2=34$، آن‌گاه $n=8$، یعنی باید ۸ میز را به هم بچسبانیم.

۵۱ محیط شکل اول ۸ سانتی‌متر است. با اضافه کردن هر کاشی ۴ سانتی‌متر به محیط شکل قبلی اضافه می‌شود. بنابراین، محیط شکل n اُم برابر است با

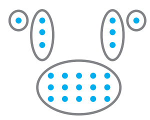
$$8+4(n-1)=4n+4$$

۵۲ تعداد مربع‌های رنگی هر شکل برابر است با مساحت کل شکل منهای مساحت چهار مربع سفید که حذف شده‌اند. طول ضلع مربع بزرگ $2n+1$ است و طول ضلع هر یک از مربع‌های سفید $n-1$ است. بنابراین اگر تعداد مربع‌های شکل n اُم را a_n بگیریم،

$$a_n=(2n+1)^2-4(n-1)^2=4n^2+4n+1-4(n^2-2n+1)$$
$$=12n-3$$

۵۳ در کف شکل n اُم مستطیلی $n(n+2)$ قرار دارد. دو ستون n تایی هم به کف این مستطیل چسبیده‌اند و در کنار هر ستون هم یک نقطه وجود دارد. بنابراین، اگر تعداد نقطه‌های شکل n اُم را a_n بگیریم،

$$a_n=n(n+2)+2n+2=n^2+4n+2$$



۵۴ توجه‌کنید که شکل n اُم از مربعی به طول ضلع $n+1$ و پلکانی از $n+1$ مربع کوچک درست شده است. بنابراین، اگر تعداد مربع‌های کوچک شکل n اُم را a_n بگیریم،

$$a_n=(n+1)^2+n+1=n^2+3n+2$$

۵۵ توجه‌کنید که در شکل n اُم تعداد نقطه‌ها n^2 است و تعداد ضربدرها $8n$ است. اگر $n^2=8n$، آن‌گاه $n=8$. پس در شکل هشتم، تعداد نقطه‌ها با تعداد ضربدرها برابر است.

۵۶ این ریسمان از تکه‌هایی به طول ۱ سانتی‌متر، ۲ سانتی‌متر و ... ۱۶ سانتی‌متر تشکیل شده است، که هر تکه دو بار آمده است. بنابراین طول کل ریسمان برابر است با

$$2(1+2+\ldots+16)=2\left(\frac{16\times17}{2}\right)=272$$ سانتی‌متر

۵۷ توجه‌کنید که از یک طرف تعداد کل توپ‌ها برابر است با $n\times n=n^2$. از طرف دیگر اگر تعداد توپ‌ها را از طریق ردیف‌های L شکل حساب کنیم، می‌شود

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)$$

بنابراین $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$

۵۸ در کف شکل n اُم، $2n-1$ مثلث کوچک وجود دارد. هر ردیف بالایی، دو مثلث از ردیف پایینی‌اش کم‌تر دارد، تا این‌که در آخرین ردیف، یک مثلث کوچک وجود دارد. بنابراین، اگر تعداد مثلث‌های کوچک در شکل n اُم را a_n بگیریم،

$$a_n=(2n-1)+(2n-3)+\ldots+5+3+1=n^2$$

۵۹ **راه‌حل اول**: در شکل n اُم، ردیف وسط از $2n-1$ مربع کوچک درست شده است. هر ردیف بالایی، دو مربع از ردیف پایینی‌اش کم‌تر دارد؛ تا این‌که در آخرین ردیف، یک مثلث وجود دارد. در مورد ردیف‌های پایین ردیف وسط، همین وضعیت وجود دارد. بنابراین اگر یک‌بار تعداد مربع‌های ردیف وسط را اضافه و کم کنیم، تعداد مربع‌ها در شکل n اُم برابر می‌شود با

$$a_n=2((2n-1)+(2n-3)+\ldots+5+3+1)-(2n-1)$$
$$=2n^2-2n+1$$

راه‌حل دوم: به همان راه‌حل اول معلوم می‌شود که تعداد مربع‌ها در ردیف وسط و ردیف‌های بالای آن برابر است با

$$(2n-1)+(2n-3)+\ldots+5+3+1=n^2$$

و تعداد مربع‌ها در ردیف‌های زیر ردیف وسط برابر است با

$$(2n-3)+(2n-5)+\ldots+5+3+1=(n-1)^2$$

پس تعداد کل مربع‌ها برابر است با $n^2+(n-1)^2$.

۶۰ تعداد مربع‌های کوچک در این شکل‌ها به ترتیب ۱، ۴، ۹ و ۱۶ است، که همگی به شکل n^2 هستند. بنابراین به‌نظر می‌رسد که تعداد مربع‌های کوچک در هر یک از این شکل‌ها، عددی به شکل n^2 است و چون ۱۲۳ به این شکل نیست، پس نمی‌توان با این تعداد مربع، یکی از شکل‌ها را ساخت.

اکنون جمله‌ی عمومی این الگو را به‌دست می‌آوریم. توجه‌کنید که در شکل n اُم، ردیف وسط از n مربع درست شده است؛ در هر طرف آن، یک ردیف $(n-1)$تایی داریم؛ یک ردیف $(n-2)$تایی داریم؛ ...؛ یک ردیف ۲ تایی داریم و یک ردیف از یک مربع داریم. بنابراین، اگر تعداد مربع‌ها در شکل n اُم را با a_n نشان دهیم،

$$a_n=n+2((n-1)+(n-2)+\ldots+2+1)$$
$$=n+2\left(\frac{(n-1)n}{2}\right)=n+n^2-n=n^2$$

۶۱

الف) ممکن است **ب)** ممکن است

پ) ممکن است

ت) ممکن نیست (a_2 بی‌معنی است).

ث) ممکن نیست (a_1 بی‌معنی است).

۶۲

الف) $a_n=2n-1$ **ب)** $a_n=(-1)^n(2n-1)$

پ) $a_n=n^2-1$ **ت)** $a_n=n+(-1)^{n+1}$

۶۳ توجه‌کنید که $a_n=n(20-n)$ و چون n عددی مثبت است، برای اینکه a_n عددی مثبت باشد، باید $20-n$ نیز مثبت باشد. بنابراین $20-n>0$، یعنی $n<20$. پس n می‌تواند عددهای ۱، ۲، ... و ۱۹ باشد، که تعداد آن‌ها ۱۹تا است.

۶۴ ابتدا توجه‌کنید که اگر $a_n=(-1)^n\frac{n-1}{4n+4}=-\frac{1}{6}$، آن‌گاه n عددی فرد است، زیرا اگر n زوج باشد، $(-1)^n\frac{n-1}{4n+4}$ عددی مثبت می‌شود. اگر n عددی فرد باشد، $(-1)^n=-1$، پس $\frac{n-1}{4n+4}=\frac{1}{6}$. اگر این معادله را حل کنیم، به‌دست می‌آید $n=5$. پس جمله‌ی پنجم دنباله، برابر با $-\frac{1}{6}$ است.

۶۵ چند جمله‌ی اول این دنباله را حساب می‌کنیم:

$$a_1=2\ ,\ a_2=5\ ,\ a_3=11\ ,\ a_4=23\ ,\ a_5=47\ ,\ a_6=95$$

در نتیجه کوچک‌ترین n موردنظر ۶ است.

۶۶ باید تفاضل هر دو جمله‌ی متوالی برابر باشد، بنابراین باید

$$7a+20-(2a-1)=(a+42)-(7a+20)$$
$$5a+21=-6a+22$$
$$11a=1$$

پس $a=\frac{1}{11}$.

۶۷ اگر قدرنسبت این دنباله d باشد، جمله‌ی عمومی آن به شکل $a_n=a_1+(n-1)d$ است. بنابراین

$$a_8=a_1+7d$$
$$25=4+7d\Rightarrow d=3$$

در نتیجه

$$a_{101}=a_1+(101-1)d=4+100\times3=304$$

۶۸ فرض کنید قدرنسبت این دنباله‌ی حسابی d باشد. توجه کنید که

$$a_{12}=a_1+11d=16$$

از طرف دیگر،

$$a_{10}=a_1+9d$$
$$a_{14}=a_1+13d$$

اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم به‌دست می‌آید

$$a_{10}+a_{14}=(a_1+9d)+(a_1+13d)=2a_1+22d$$
$$=2(a_1+11d)=2(16)=32$$

۶۹ قدرنسبت این دنباله را با d نشان می‌دهیم. در این‌صورت

$$a_2+a_9=(a_1+d)+(a_1+8d)=2a_1+9d=-4\quad (1)$$
$$a_3+a_4=(a_1+2d)+(a_1+3d)=2a_1+5d=4\quad (2)$$

اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، به‌دست می‌آید $d=-2$، و اگر این مقدار را در تساوی (۱) قرار دهیم، به‌دست می‌آید $a_1=7$.

۷۰ قدرنسبت این دنباله برابر است با $10-3=7$. اکنون توجه کنید که

آخرین جمله $=444$

دومین جمله از آخر $=444-7$

سومین جمله از آخر $=444-7-7=444-2\times7$

چهارمین جمله از آخر $=444-3\times7$

⋮

دوازدهمین جمله از آخر $=444-11\times7=367$

۷۱ فرض کنید قدرنسبت این دنباله d باشد. در این‌صورت

$$d=\frac{a_{30}-a_{16}}{30-16}=\frac{20-13}{14}=\frac{1}{2}$$

در نتیجه

$$a_{16}=13\Rightarrow a_1+15\times\frac{1}{2}=13\Rightarrow a_1=\frac{11}{2}$$

اگر $\frac{27}{2}$ جمله‌ی kاُم این دنباله باشد، آن‌گاه

$$a_k=a_1+(k-1)d=\frac{11}{2}+\frac{k-1}{2}=\frac{k+10}{2}=\frac{27}{2}$$

نتیجه می‌شود $k=17$. یعنی جمله‌ی هفدهم این دنباله $\frac{27}{2}$ است.

۷۲ در این‌جا $a_1=-3$ و $d=-4$، بنابراین جمله‌ی عمومی این دنباله $a_n=-3+(n-1)(-4)$ است. اگر -83 جمله‌ی nاُم این دنباله باشد:

$$-83=-3-4(n-1)\Rightarrow n=21$$

بنابراین -83 جمله‌ی ۲۱اُم دنباله‌ی موردنظر است.