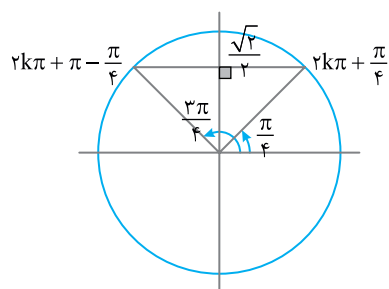


فصل هشتم: مثلثات

بخش سوم: معادلات مثلثاتی



به معادله‌ی ساده‌ی مثلثاتی $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ توجه کنید. اولین جواب‌هایی که به ذهن می‌رسد، $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ هستند. با کمی دقت مشخص است که علاوه بر این دو مقدار بی‌شمار جواب دیگر هم وجود دارد که انتهای کمان آن‌ها بر همین دو جواب منطبق است:

$$x = \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}, -2\pi + \frac{\pi}{4}, 4\pi + \frac{\pi}{4}, -4\pi + \frac{\pi}{4}, \dots$$

$$x = \frac{3\pi}{4}, 2\pi + \frac{3\pi}{4}, -2\pi + \frac{3\pi}{4}, 4\pi + \frac{3\pi}{4}, -4\pi + \frac{3\pi}{4}, \dots$$

بنابراین تمامی جواب‌های معادله‌ی $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$ به صورت $x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4}$ و $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ است که در آن هر عدد صحیح و دلخواهی می‌تواند باشد.

$\sin x = \sin \alpha$ (از یکی از جواب‌هاست) α $\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$	$\cos x = \cos \alpha$ (از یکی از جواب‌هاست) α $\Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha = \begin{cases} 2k\pi + \alpha \\ 2k\pi - \alpha \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$
$\tan x = \tan \alpha$ (از یکی از جواب‌هاست) α $\Rightarrow x = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$	$\cot x = \cot \alpha$ (از یکی از جواب‌هاست) α $\Rightarrow x = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$

مثال: جواب‌های معادله‌ی $2 \sin x + 1 = 0$ را به صورت زیر هستند:

$$2 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

مثال: جواب‌های معادله‌های زیر را در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ مشخص می‌کنیم:

الف) $\cos x = \frac{-1}{2}$

از $\cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$ شروع می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

k	۰	۱
$2k\pi + \frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$

,

k	۰	۱
$2k\pi - \frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$

پس جواب‌ها در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از:

ب) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

معادله را به صورت $\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3}$ می‌نویسیم:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

پس جواب‌ها در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از:

k	۰	۱
$k\pi + \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$

,

k	۰	۱
$k\pi + \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$

بنابراین جواب‌ها به صورت زیر است:

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}$$

پ) $\tan^2 x = 3$

دو معادله‌ی $\tan x = \sqrt{3}$ و $\tan x = -\sqrt{3}$ را جداگانه حل می‌کنیم:

$$\tan x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\tan x = -\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3}$$

k	۰	۱
$k\pi + \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$

,

k	۰	۱
$k\pi - \frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$

بنابراین در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ معادله دارای ۴ جواب مقابل است:

تست ۱: جواب‌های معادله‌ی $\tan x + \sqrt{3} \cot x = 1 + \sqrt{3}$ روی دایره، چند نقطه است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

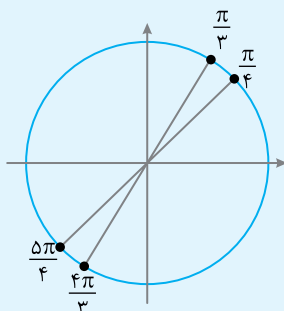
پاسخ: طرفین معادله را در $\tan x$ ضرب می‌کنیم، پس داریم:

$$\tan^2 x + \sqrt{3} = (1 + \sqrt{3}) \tan x \Rightarrow \tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow (\tan x - 1)(\tan x - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = 1 & \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots \\ \tan x = \sqrt{3} & \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \dots \end{cases}$$

این جواب‌ها روی دایره‌ی مثلثاتی ۴ نقطه را مشخص می‌کنند.

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.



معادلات خاص

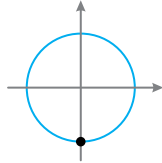
به معادله $\cos x = 1$ توجه کنید. جواب این معادله به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \cos 0 \Rightarrow x = 2k\pi \pm 0 \Rightarrow x = 2k\pi$$

یعنی دو دسته جواب معادله روی هم قرار گرفته‌اند و معادله دارای یک دسته جواب است. یعنی ریشه‌های این معادله، مضاعف هستند. به همین ترتیب می‌توان نشان داد، معادلات زیر همگی دارای یک دسته جواب هستند:

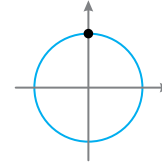
$$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

(ریشه‌ی مضاعف)



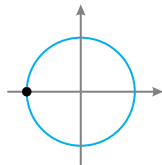
$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

(ریشه‌ی مضاعف)



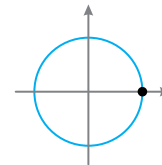
$$\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi$$

(ریشه‌ی مضاعف)



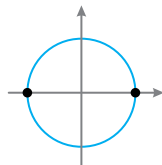
$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$$

(ریشه‌ی مضاعف)

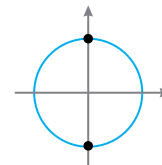


توجه کنید که پاسخ معادلات $\sin x = 0$ و $\cos x = 0$ را نیز می‌توان به صورت یک دسته‌ی کلی نمایش داد ولی ریشه‌ی مضاعف محسوب نمی‌شوند:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$



$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$



تست ۲: جواب کلی معادله $\sin^3 x - \sin x = 0$ کدام است؟

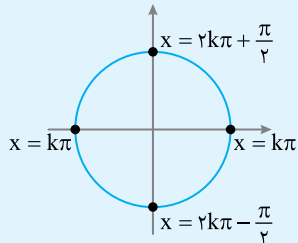
$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۴)$$

$$x = \frac{k\pi}{4} \quad (۳)$$

$$x = \frac{k\pi}{2} \quad (۲)$$

$$x = k\pi \quad (۱)$$

پاسخ:



$$\sin^3 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (\sin^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

نقاط انتهایی جواب‌ها را روی دایره مشخص می‌کنیم، بنابراین جواب کلی معادله را می‌توان به صورت $x = \frac{k\pi}{2}$ نوشت. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تست ۳: نمودار تابع $y = -3 \cos(2x - \frac{\pi}{3})$ در بازه $[-\pi, \pi]$ چند بار دارای بیش‌ترین مقدار می‌گردد؟

$$\text{صفر} \quad (۴)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۳ \quad (۱)$$

پاسخ: عبارت $\cos(2x - \frac{\pi}{3})$ در فاصله $[-1, 1]$ تغییر می‌کند. برای این که $y = -3 \cos(2x - \frac{\pi}{3})$ دارای بیش‌ترین مقدار گردد،

$\cos(2x - \frac{\pi}{3})$ باید برابر با -1 باشد. پس:

$$\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = -1 \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = (2k+1)\pi \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{2\pi}{3}$$

به ازای $k = -1$ و $k = 0$ ، جواب $x = \frac{2\pi}{3}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ در فاصله $[-\pi, \pi]$ خواهد بود. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تست ۴: معادله‌ی $\cos 4x + \cos x = 0$ چند جواب متمایز در بازه‌ی $[0, \pi]$ دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: معادله را به صورت ساده‌تر بازنویسی می‌کنیم:

$$\cos 4x = -\cos x \Rightarrow \cos 4x = \cos(\pi - x) \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5} \\ 4x = 2k\pi - (\pi - x) \Rightarrow x = \frac{(2k-1)\pi}{3} \end{cases}$$

حال اگر بخواهیم جواب‌های واقع در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ را بیابیم، می‌توانیم به ازای مقادیر مختلف k ، جواب‌ها را مشخص کنیم:

k	۰	۱	۲
$\frac{(2k+1)\pi}{5}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	π
	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	π

k	۱	۲
$\frac{(2k-1)\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π
	$\frac{\pi}{3}$	π

با توجه به مشترک بودن $x = \pi$ ، معادله دارای ۴ جواب است:

$$x = \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{\pi}{3}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تست ۵: معادله‌ی $\tan 3x = \cot 5x$ در بازه‌ی $[0, \pi]$ دارای چند جواب است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ: ابتدا نسبت مثلثاتی کتانژانت را به تانژانت تبدیل کرده و سپس معادله را حل می‌کنیم:

$$\tan 3x = \cot 5x \Rightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) \Rightarrow 3x = k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) \Rightarrow 8x = k\pi + \frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{16}$$

برای پیدا کردن تعداد جواب‌ها در بازه‌ی $[0, \pi]$ به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$$0 \leq \frac{(2k+1)\pi}{16} \leq \pi \Rightarrow 0 \leq 2k+1 \leq 16 \Rightarrow -1 \leq 2k \leq 15 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{15}{2} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}$$

معادله هشت جواب دارد. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تست ۶: معادله‌ی $\tan 3x \tan x = 1$ در بازه‌ی $[0, \pi]$ دارای چند جواب است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: طرفین معادله را در $\cot 3x$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \cot 3x \tan 3x \tan x = \cot 3x \Rightarrow \tan x = \cot 3x \Rightarrow \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Rightarrow 4x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{8} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$$

پس معادله در بازه‌ی $[0, \pi]$ دارای ۴ جواب است. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تست ۷: جواب‌های معادله‌ی $9 - 13 \sin x = 6 \cos 2x$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ روی دایره‌ی مثلثاتی چند نقطه را مشخص می‌کنند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: با توجه به اتحاد $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ معادله را بر حسب $\sin x$ می‌نویسیم:

$$9 - 13 \sin x = 6(1 - 2 \sin^2 x) \Rightarrow 12 \sin^2 x - 13 \sin x + 3 = 0$$

حال با فرض $t = \sin x$ داریم:

$$12t^2 - 13t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{24} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{4} = \sin x \\ t = \frac{1}{3} = \sin x \end{cases}$$

معادلات $\sin x = \frac{3}{4}$ و $\sin x = \frac{1}{3}$ هر کدام در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ دارای دو جواب هستند. پس معادله در بازه‌ی فوق دارای

۴ جواب است و جواب‌ها روی دایره، ۴ نقطه را مشخص می‌کنند. بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

شماره صفحات پاسخ تشریحی در کتاب ضمیمه	زمان پیشنهادی	مبحث آزمون
۱۲۱ تا ۱۲۴	۳۰ دقیقه	معادلات مثلثاتی

۱- جواب کلی معادله $\cos(4x + \frac{\pi}{6}) = -1$ کدام است؟

(۱) $k\pi + \frac{5\pi}{12}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{24}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{7\pi}{24}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{24}$

۲- مجموع جواب‌های معادله $x - \cos x = 1 - 2 \sin^2 x$ در بازه $[\pi, 2\pi]$ کدام است؟

(۱) $\frac{8\pi}{3}$ (۲) $\frac{10\pi}{3}$ (۳) 3π (۴) $\frac{11\pi}{3}$

۳- جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \sin(\pi - x) \cos(\frac{3\pi}{2} + x) + 3 \cot x \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟

(۱) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۴- معادله $\sin 2x = 2 \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۵- معادله $(3 \cos x - 1)(4 \sin x - 1) = 0$ در فاصله $(0, 2\pi)$ چند ریشه دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۶- انتهای کمان x از معادله $\cos 2x \sin x - \cos 2x = 0$ بر روی دایره مثلثاتی رأس‌های کدام چندضلعی است؟

(۱) شش ضلعی غیرمنتظم (۲) پنج ضلعی منتظم (۳) شش ضلعی منتظم (۴) پنج ضلعی غیرمنتظم

۷- جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟

(۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۸- ریشه‌ی معادله $\sin x \cos 6x = 1 - \sin 6x \cos x$ کدام است؟

(۱) $\frac{3\pi}{14}$ (۲) $\frac{5\pi}{14}$ (۳) $\frac{\pi}{7}$ (۴) $\frac{2\pi}{7}$

۹- معادله $\sin^3(\pi - x) \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin^4(x - \frac{\pi}{2})$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۰- مجموع جواب‌های معادله $\cos 2x + 2 = \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{5\pi}{2}$ (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) π

۱۱- معادله $\tan 3x = \tan 2x$ چند جواب در بازه $[-\pi, \pi]$ دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲- جواب معادله $\frac{\sin x - \sin x \cos x}{1 + \cos x} = 0$ کدام است؟

(۱) $\frac{k\pi}{2}$ (۲) $k\pi$ (۳) $2k\pi$ (۴) $(2k+1)\pi$

محاسبات

۱۳- تابع $y = -4 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ در بازه $(-2\pi, 3\pi)$ در چند نقطه می‌نیمد دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۴- معادله $\tan^2 x - \cos^2 x = -1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۵- به ازای چه مقدار از m یکی از جواب‌های معادله $m \tan x - 3 \cot x = \sqrt{3}(1+m)$ برابر $k\pi - \frac{\pi}{3}$ است؟

- ۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{3}$

۱۶- معادله $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$ چند جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد؟

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۷- معادله $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 2\sqrt{3}$ در فاصله $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ چند جواب دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۸- جواب کلی معادله مثلثاتی $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 + \sin\left(\frac{5\pi}{4} + x\right)$ کدام است؟

- ۱) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ۲) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ ۳) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

۱۹- جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + x\right)$ به کدام صورت است؟

- ۱) $\frac{2k\pi}{3}$ ۲) $\frac{k\pi}{3}$ ۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۲۰- جواب کلی معادله مثلثاتی $(\sin x - \tan x) \tan\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = \cos \frac{4\pi}{3}$ کدام است؟

- ۱) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ ۲) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi - \frac{\pi}{6}$

مبحث آزمون	زمان پیشنهادی	شماره صفحات پاسخ تشریحی در کتاب ضمیمه
معادلات مثلثاتی	۳۵ دقیقه	۱۲۴ تا ۱۲۷

۱- انتهای کمان جواب‌های معادله $\cos^2 x + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 = 0$ روی دایره‌ی مثلثاتی چند نقطه را مشخص می‌کند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲- جواب‌های معادله $2 \sin^2 x - 1 = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi$ (۴) $2k\pi$

۳- نمودار تابع $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ روی بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ در چند نقطه محور x ها را قطع می‌کند؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴- نمودار تابع $y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)$ روی بازه $[-1, 1]$ در چند نقطه بیش‌ترین مقدار را دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

۵- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{6}$

۶- انتهای کمان جواب‌های معادله $\sin 6x = \sin 2x$ بر روی دایره‌ی مثلثاتی چند نقطه است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

۷- معادله $(4 \cos x + 1)(4 \sin x - \sqrt{15}) = 0$ در فاصله $(0, 2\pi)$ چند جواب متمایز دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۸- به ازای کدام مقادیر m معادله $m \tan x + \cot x = 4$ دو جواب متمایز دارد؟

- (۱) $-1 \leq m \leq 4$ (۲) $m \geq 0$ (۳) $m \leq 4$ (۴) $0 < m \leq 4$

۹- مجموع جواب‌های حاده‌ی معادله $\tan 4x = \cot x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{5}$ (۲) $\frac{4\pi}{5}$ (۳) $\frac{3\pi}{5}$ (۴) $\frac{\pi}{5}$

۱۰- تعداد جواب‌های معادله $\sin 3x + \cos x = 0$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱- یکی از ریشه‌های معادله $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 1$ به صورت $\frac{i\pi}{6}$ است. i کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۱۷ (۳) ۱۶ (۴) ۱۵

۱۲- معادله $\frac{\sin x - \cos x}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = 0$ روی بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۳- جواب کلی معادله $\frac{1}{1+\cot^2 2x} + 1 = 2 \sin 2x$ کدام است؟

- (۱) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

۱۴- تعداد جواب‌های متمایز معادله $\tan x + \cot x + 2 = 0$ در بازه $[-\pi, \pi]$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۵- به ازای کدام مقدار a جواب معادله $4(\sin x + \cos x) + a \sin 2x = 3$ به صورت کلی $k\pi - \frac{\pi}{4}$ است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۳

۱۶- مجموع جواب‌های معادله $\sin(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1$ که در رابطه $0 \leq x \leq 2\pi$ صدق می‌کنند، کدام است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{3\pi}{2}$ (۳) $\frac{5\pi}{4}$ (۴) $\frac{5\pi}{2}$

۱۷- معادله $\cos^2(x + \frac{\sqrt{3}\pi}{4}) + \cos^2 x (1 + \tan^2 x) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۸- انتهای کمان جواب‌های معادله $\frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin x \cos x} + 2\sqrt{3} = 0$ بر روی دایره‌ی مثلثاتی رأس‌های کدام چهارضلعی هستند؟

- (۱) دوزنقه (۲) مربع (۳) مستطیل (۴) غیر مشخص

۱۹- معادله $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \cos 2x$ در فاصله $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۰- جواب کلی معادله $\sin(\pi + x) \cos(\frac{\pi}{2} + x) - 2 \sin(\pi - x) + 1 = 0$ کدام است؟

- (۱) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$