## فصل یازدهم: مشتق

# بخش سوم: مشتق ضمنی و مشتق توابع نمایی

### مشتق ضمنی

اگر در تابعی y برحسب x بیان شده باشد، مانند $y=x^{2}+x$ ، گوییم y تابعی صریح برحسب x است. اما گاهی رابطه‌ای مانند $x^{3}+y^{3}=xy$ داریم که در آن y برحسب x به صورت ضمنی بیان می‌شود. در این رابطه‌ها y ممکن است تابعی از x باشد یا نباشد. ولی به هرحال می‌توان مشتق y برحسب x را محاسبه کرد که به آن مشتق‌گیری ضمنی می‌گوییم. مشتق‌گیری ضمنی فرقی با مشتق‌گیری معمولی ندارد. فقط فرض می‌کنیم y تابعی مشتق‌پذیر برحسب x است و از طرفین رابطه‌ی داده شده، نسبت به x مشتق می‌گیریم.

**مثال:** در رابطه‌ی $x^{3}+y^{3}=xy$ داریم:

$$3x^{2}+3y^{2}y'=y+xy'\Rightarrow(3y^{2}-x)y'=y-3x^{2}\Rightarrow y'=\frac{y-3x^{2}}{3y^{2}-x}$$

**تست ۱:** در رابطه‌ی $x^{2}-5xy^{2}+2y+6=0$ مقدار $y'$ در نقطه‌ی $(1,-1)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

**پاسخ:** از طرفین نسبت به متغیر x مشتق می‌گیریم:

$$2x-5(y^{2}+2xyy')+2y'=0$$

حال مقدار $x=1$ و $y=-1$ را در رابطه قرار می‌دهیم:

$$2-5(1-2y')+2y'=0\Rightarrow y'=\frac{1}{4}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

---

**تست ۲:** در نقاط A و B روی منحنی $x^{2}+y^{2}+xy=3$ مماس بر منحنی، موازی نیمساز ربع دوم و چهارم است. این نقاط روی کدام خط قرار دارند؟

۱) $y=x$ ۲) $y=2x$ ۳) $y=-2x$ ۴) $y=x+1$

**پاسخ:** خط مماس بر منحنی موازی نیمساز ربع دوم و چهارم $(y=-x)$ است، یعنی مقدار مشتق برابر $-1$ است. پس می‌توان نوشت:

$$2x+2yy'+y+xy'=0\xrightarrow{y'=-1}2x-2y+y-x=0\Rightarrow x=y$$

بنابراین در نقاط A و B طول و عرض یکسان است و این نقاط روی خط $y=x$ قرار دارند.
بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

---

**تست ۳:** در چند نقطه خط مماس بر منحنی $x^{3}+y^{3}-3xy=3$ موازی محور طول‌هاست؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

**پاسخ:** خط مماس موازی محور طول‌هاست، پس مقدار مشتق برابر صفر است:

$$3x^{2}+3y^{2}y'-3(y+xy')=0\Rightarrow x^{2}+y^{2}y'-y-xy'=0\xrightarrow{y'=0}x^{2}+0-y-0=0\Rightarrow y=x^{2}$$

بنابراین در نقاطی که مشتق صفر است داریم $y=x^{2}$ و با جایگذاری در معادله‌ی منحنی داریم:

$$x^{3}+x^{6}-3x^{3}=3\Rightarrow x^{6}-2x^{3}-3=0\Rightarrow(x^{3}+1)(x^{3}-3)=0\Rightarrow\begin{cases}x^{3}=-1\Rightarrow x=-1\\ x^{3}=3\Rightarrow x=\sqrt[3]{3}\end{cases}$$

پس در ۲ نقطه، خط مماس بر منحنی، موازی محور طول‌هاست.
بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

## روش سریع برای محاسبه‌ی مشتق ضمنی

اگر $F(x,y)=0$ رابطه‌ای باشد که در آن تابع y به طور ضمنی برحسب x بیان شده باشد، مشتق y نسبت به x را می‌توان از رابطه‌ی زیر به دست آورد:

$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}$$

که در این رابطه $F'_x$ مشتق F است وقتی که x را متغیر مستقل و y را عدد ثابت فرض کنیم و $F'_y$ مشتق F است وقتی که y را متغیر مستقل و x را عدد ثابت فرض کنیم.

**مثال:** در رابطه‌ی $x^3+y^3=xy+3$ داریم:

$$F(x,y)=x^3+y^3-xy-3$$

$$\begin{cases} F'_x=3x^2+0-y-0 \\ F'_y=0+3y^2-x-0 \end{cases} \Rightarrow y'=-\frac{3x^2-y}{3y^2-x}$$

**تست ۴: در رابطه‌ی $\sin(xy)-\cos(xy)=y$ مقدار $y'$ در نقطه‌ی $(\frac{\pi}{2},1)$ چقدر است؟**

۱) $\frac{2}{\pi-2}$ ۲) $\frac{1}{\pi-2}$ ۳) $\frac{1}{2-\pi}$ ۴) $\frac{2}{2-\pi}$

**پاسخ:** با استفاده از فرمول مربوط به محاسبه‌ی مشتق ضمنی $(y'=\frac{-F'_x}{F'_y})$ داریم:

$$F(x,y)=\sin(xy)-\cos(xy)-y=0$$

$$y'=-\frac{y\cos(xy)+y\sin(xy)}{x\cos(xy)+x\sin(xy)-1}\Rightarrow y'(\frac{\pi}{2},1)=-\frac{0+1}{0+\frac{\pi}{2}-1}=\frac{2}{2-\pi}$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

## مشتق مراتب بالاتر

مشتقِ مشتق تابع را مشتق دوم آن می‌نامیم. اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد، مشتق دوم f که آن را با $f''(x)$ نشان می‌دهیم، به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f''(x)=(f'(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

به همین ترتیب می‌توان مشتق سوم و چهارم و... و n ام تابع f را تعریف کرد. مشتق n ام تابع را با نماد $f^{(n)}(x)$ نشان می‌دهیم.

**مثال:** برای تابع $f(x)=x^4$ داریم:

$$f'(x)=4x^3 \quad , \quad f''(x)=12x^2 \quad , \quad f^{(3)}(x)=24x \quad , \quad f^{(4)}(x)=24 \quad , \quad f^{(5)}(x)=0$$

**تست ۵: اگر $y=\sin 2x+\cos 2x$ ، حاصل $\frac{y''}{y}$ کدام است؟**

۱) $-4$ ۲) $4$ ۳) $1$ ۴) $-1$

**پاسخ:** مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y'=2\cos 2x-2\sin 2x\Rightarrow y''=-4\sin 2x-4\cos 2x$$

بنابراین داریم:

$$\frac{y''}{y}=\frac{-4(\sin 2x+\cos 2x)}{\sin 2x+\cos 2x}=-4$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

**تست ۶:** **اگر** $g(x)=f(\sqrt{x})$ **و** $f'(۲)=f''(۲)=۴$، **حاصل** $g''(۴)$ **کدام است؟**

**۱)** $\frac{۱}{۸}$ **۲)** $\frac{۵}{۸}$ **۳)** $\frac{۳}{۸}$ **۴)** $\frac{۷}{۸}$

**پاسخ:** مشتق دوم g را محاسبه می‌کنیم:

$$g'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})\Rightarrow g''(x)=\frac{۱}{۲}\left(-\frac{۱}{۲x\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})+\frac{۱}{\sqrt{x}}\times\frac{۱}{\sqrt{x}}f''(\sqrt{x})\right)$$

با جایگذاری $x=۴$ داریم:

$$g''(۴)=\frac{۱}{۲}\left(-\frac{۱}{۱۶}f'(۲)+\frac{۱}{۴}f''(۲)\right)=\frac{۱}{۲}(-\frac{۱}{۴}+۱)=\frac{۳}{۸}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

**تست ۷:** **مشتق دوم تابع** $f(x)=x|x|$ **در** $x=۰$ **کدام است؟**

**۱)** ۲ **۲)** $-۲$ **۳)** صفر **۴)** وجود ندارد

**پاسخ:** تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\geq ۰ \\ -x^۲ & x\leq ۰\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲x & x\geq ۰ \\ -۲x & x\leq ۰\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases} ۲ & x>۰ \\ -۲ & x<۰\end{cases}$$

مشتق دوم تابع در $x=۰$ وجود ندارد. زیرا مشتق دوم راست تابع برابر ۲ و مشتق دوم چپ آن برابر $-۲$ است.
بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

## مشتق توابع نمایی و لگاریتمی

به کمک تعریف مشتق می‌توان مشتق توابع نمایی و لگاریتمی را به دست آورد که به صورت زیر هستند:

$$y=e^x \Rightarrow y'=e^x$$
$$y=\ln x \Rightarrow y'=\frac{۱}{x}\quad (x>۰)$$

البته واضح است که اگر u تابعی از x باشد، می‌توان روابط زیر را نوشت:

$$y=e^u \Rightarrow y'=u'e^u$$
$$y=\ln u \Rightarrow y'=\frac{u'}{u}\quad (u>۰)$$

**مثال:** مشتق تابع $y=e^{۲x}$ به صورت $y'=۲e^{۲x}$ و مشتق تابع $y=\ln(\sqrt{x}+۱)$ به صورت $y'=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+۱}$ است.

**تست ۸:** **اگر** $y=e^{x^۲}$ **و** $\frac{y''}{y}=a+bx^۲$، **مقدار** $a+b$ **چقدر است؟**

**۱)** ۲ **۲)** ۵ **۳)** ۶ **۴)** ۸

**پاسخ:** دوبار از تابع مشتق می‌گیریم:

$$y=e^{x^۲}\Rightarrow y'=۲xe^{x^۲}\Rightarrow y''=۲e^{x^۲}+۴x^۲e^{x^۲}=e^{x^۲}(۲+۴x^۲)$$

بنابراین داریم:

$$\frac{y''}{y}=\frac{e^{x^۲}(۲+۴x^۲)}{e^{x^۲}}=۲+۴x^۲=a+bx^۲\Rightarrow a=۲,\ b=۴\Rightarrow a+b=۶$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

**تست ۹:** در تابع $y=x\ln x$ مقدار مشتق به ازای $x=e$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $1+e$

**پاسخ:** مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y=x\ln x \Rightarrow y'=\ln x+x(\frac{1}{x})=1+\ln x$$

با جایگذاری $x=e$ داریم:

$$y'(e)=1+\ln e=1+1=2$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

**تست ۱۰:** مقدار مشتق تابع $f(x)=\ln(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1})^3$ در نقطه‌ی $x=1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

**پاسخ:** ابتدا ضابطه‌ی تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=3\ln(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1})=3(\ln(x^2+x+1)-\ln(x^2-x+1))$$

حال از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=3(\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{2x-1}{x^2-x+1})\Rightarrow f'(1)=3(\frac{3}{3}-\frac{1}{1})=0$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

**نکته:** برای محاسبه‌ی مشتق $y=a^x$ از یکی از دو روش زیر می‌توان استفاده کرد:

روش اول:

$$y=a^x=e^{(\ln a)x}\Rightarrow y'=(\ln a)e^{(\ln a)x}\Rightarrow y'=(\ln a)a^x$$

روش دوم:

$$y=a^x\Rightarrow \ln y=\ln a^x=x\ln a \xrightarrow[\text{از دو طرف مشتق می‌گیریم}]{\ln y=x\ln a}\frac{y'}{y}=\ln a\Rightarrow y'=y\ln a\Rightarrow y'=(\ln a)a^x$$

مشتق تابع $y=\log_a x$ را نیز می‌توان به کمک خواص لگاریتم به صورت زیر محاسبه کرد:

$$y=\log_a x=\frac{\log_e x}{\log_e a}=\frac{1}{\ln a}\times\ln x\Rightarrow y'=\frac{1}{\ln a}\times\frac{1}{x}$$

**تذکر** مشتق تابع $y=\ln|x|$ نیز به صورت $y'=\frac{1}{x}$ است. زیرا داریم:

$$x>0\Rightarrow y=\ln x\Rightarrow y'=\frac{1}{x}$$

$$x<0\Rightarrow y=\ln(-x)\Rightarrow y'=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}$$

**تست ۱۱:** مقدار مشتق تابع $f(x)=2^{\sin x}$ در $x=\pi$ کدام است؟

۱) $-1$ ۲) ۱ ۳) $\ln 2$ ۴) $-\ln 2$

**پاسخ:** از طرفین رابطه‌ی $y=2^{\sin x}$ لگاریتم طبیعی گرفته، سپس مشتق می‌گیریم:

$$y=2^{\sin x}\Rightarrow \ln y=\ln 2^{\sin x}\Rightarrow \ln y=(\sin x)\ln 2\Rightarrow \frac{y'}{y}=(\ln 2)\cos x$$

$$\Rightarrow y'=y(\ln 2)\cos x\Rightarrow y'=(\ln 2)(\cos x)2^{\sin x}$$

بنابراین داریم:

$$f'(\pi)=(\ln 2)(\cos\pi)\times 2^{\sin\pi}=-\ln 2$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

**تست ۱۲: اگر** $f(x)=\ln|\sin x|$ **و** $g(x)=\ln|\cos x|$، **حاصل** $f'(x)g'(x)$ **کدام است؟**

۱) $\tan^۲ x$ ۲) $-\cot^۲ x$ ۳) ۱ ۴) $-۱$

**پاسخ:** از دو تابع مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\ln|\sin x|\Rightarrow f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$$
$$g(x)=\ln|\cos x|\Rightarrow g'(x)=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$$

بنابراین داریم:

$$f'(x)g'(x)=\cot x\times(-\tan x)=-۱$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

**تست ۱۳: معادله‌ی خط مماس بر منحنی** $y=xe^{\frac{۱}{x}}$ **در نقطه‌ی** $A(۱,e)$ **کدام است؟**

۱) $y=\frac{۱}{e}$ ۲) $y=e$ ۳) $y=x+۱$ ۴) $y=x-e$

**پاسخ:** مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y=xe^{\frac{۱}{x}}\Rightarrow y'=e^{\frac{۱}{x}}+x(-\frac{۱}{x^۲})e^{\frac{۱}{x}}=e^{\frac{۱}{x}}(۱-\frac{۱}{x})$$

بنابراین شیب خط مماس در $x=۱$ برابر است با:

$$m=y'(۱)=۰$$

پس معادله‌ی خط مماس $y=e$ است. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

**تست ۱۴: اگر تابع** $y$ **برحسب** $x$ **در رابطه‌ی** $e^x-\ln x=e^y-\ln y$ **صدق کند، مشتق** $y$ **در نقطه‌ی** $(۱,۱)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{e-۱}{e+۱}$ ۲) $\frac{e+۱}{e-۱}$ ۳) ۱ ۴) $-۱$

**پاسخ:** از طرفین رابطه نسبت به $x$ مشتق می‌گیریم:

$$e^x-\ln x=e^y-\ln y\Rightarrow e^x-\frac{۱}{x}=y'e^y-\frac{y'}{y}$$

با جایگذاری $x=y=۱$ داریم:

$$e-۱=ey'-y'\Rightarrow e-۱=(e-۱)y'\Rightarrow y'=۱$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

**تست ۱۵: عرض نقاطی از منحنی** $y=e^y+x^۲+۲x-۴$ **که درآن‌ها خط مماس بر منحنی موازی محور عرض‌هاست، چقدر است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $-۳$ ۴) $-۲$

**پاسخ:** از طرفین رابطه مشتق می‌گیریم:

$$y=e^y+x^۲+۲x-۴\Rightarrow y'=y'e^y+۲x+۲\Rightarrow y'(۱-e^y)=۲x+۲\Rightarrow y'=\frac{۲x+۲}{۱-e^y}$$

در نقاطی که خط مماس بر منحنی موازی محور عرض‌هاست، مشتق بی‌نهایت است. پس داریم:

$$۱-e^y=۰\Rightarrow e^y=۱\Rightarrow y=۰$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

## آزمون ٥٤

| مبحث آزمون | زمان پیشنهادی | شماره صفحات پاسخ تشریحی در کتاب ضمیمه |
|---|---|---|
| مشتق ضمنی و مشتق توابع نمایی | ۳۰ دقیقه | ۱۷۸ تا ۱۸۰ |

**۱- در رابطه‌ی $x^2-3xy+y^2+1=0$ مقدار $y'$ در نقطه‌ی $A(2,1)$ کدام است؟**

۱) $1$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{-1}{4}$ ۴) $-1$

**۲- شیب خط مماس بر منحنی $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=x+y$ در نقطه‌ی $A(1,1)$ کدام است؟**

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{-1}{3}$ ۳) $1$ ۴) $-1$

**۳- خط مماس بر منحنی $x^2+y^2+xy-3=0$ در چند نقطه، افقی است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

**۴- خط مماس بر منحنی $x^3+y^2+2xy=4$ در کدام نقطه موازی محور عرض‌هاست؟**

۱) $x=1$ ۲) $x=2$ ۳) $x=-1$ ۴) $x=-2$

**۵- شیب خط مماس بر منحنی $e^y+\ln(\frac{x}{y})=e$ در نقطه‌ی $A(1,1)$ کدام است؟**

۱) $\frac{1}{1+e}$ ۲) $\frac{2}{1+e}$ ۳) $\frac{1}{1-e}$ ۴) $\frac{2}{1-e}$

**۶- نمودار منحنی $x^2-xy+y^2=1$ سمت راست محور طول‌ها را در نقطه‌ی $A$ و پایین محور عرض‌ها را در نقطه‌ی $B$ قطع می‌کند. اختلاف مشتق $y$ نسبت به $x$ در این دو نقطه چقدر است؟**

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $1$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

**۷- مقدار مشتق تابع $y=\ln(\frac{x+1}{x-1})$ در نقطه‌ی $x=-3$ کدام است؟**

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{-1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{-1}{4}$

**۸- اگر $f(x)=\ln x$، مشتق $fof$ به ازای $x=e$ برابر کدام است؟**

۱) $1$ ۲) $\frac{1}{e^2}$ ۳) $\frac{1}{e}$ ۴) $e$

**۹- اندازه‌ی مشتق تابع $y=\ln e^{\sqrt{\sin x}}$ در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{6}$ واقع بر آن، کدام است؟**

۱) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ۲) $\frac{\sqrt{6}}{8}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

**۱۰- اگر $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ و $f'(\alpha)=0$، مقدار $f(\alpha)$ کدام است؟**

۱) صفر ۲) $1$ ۳) $e$ ۴) $\frac{1}{e}$

**۱۱- مقدار مشتق تابع $y=\ln|\sqrt[5]{x}|$ در $x=-2$ کدام است؟**

۱) $\frac{\sqrt[5]{2}}{2}$ ۲) $\frac{-\sqrt[5]{2}}{2}$ ۳) $\frac{1}{10}$ ۴) $\frac{-1}{10}$

**۱۲- خط مماس بر منحنی $y=xe^{-x^2}$ در چند نقطه افقی است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

## محاسبات

۱۳- مقدار مشتق تابع $f(x)=\ln|\tan x|$ در $x=\frac{\pi}{8}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}+1$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) صفر

۱۴- در تابع $f(x)=ax^3+bx^2+1$ اگر $f'(1)=4$ و $f''(-1)=-5$، مقدار $ab$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۵- اگر $f(x)=\cos x\cos 2x$، آن‌گاه مقدار $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(\frac{\pi}{4}+h)-f'(\frac{\pi}{4})}{h}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) صفر

۱۶- اگر $y=\sin 2x+\cos 2x$، حاصل $y''^2+4y'^2$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳۲ ۳) $64\sin 4x$ ۴) $16\sin 4x$

۱۷- مشتق دوم تابع $f(x)=x^2\ln x$ در $x=e$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۸- در مورد تابع $f(x)=x^2[x]$ در نقطه‌ی $x=0$ کدام گزینه درست است؟

۱) مشتق اول و دوم دارد. ۲) مشتق اول و دوم ندارد.

۳) مشتق اول دارد ولی مشتق دوم ندارد. ۴) مشتق اول ندارد ولی مشتق دوم دارد.

۱۹- در تابع $y=x^2+e^{ax}$ اگر $y''(0)=6$، مقدار $a$ کدام است؟

۱) $\pm 2$ ۲) $\pm 4$ ۳) $\pm 6$ ۴) $\pm 8$

۲۰- اگر $g(x)=f(\frac{1}{x})$ و $f'(\frac{1}{2})=f''(\frac{1}{2})=16$، حاصل $g''(2)$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۹

## آزمون ۵۵

| مبحث آزمون | زمان پیشنهادی | شماره صفحات پاسخ تشریحی در کتاب ضمیمه |
|---|---|---|
| مشتق ضمنی و مشتق توابع نمایی | ۳۵ دقیقه | ۱۸۰ تا ۱۸۳ |

۱- مقدار $y'$ در نقطهٔ $A(0,1)$ از منحنی $y=y^2+x^2+\sin x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-1$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۲- خط مماس بر منحنی $\frac{\sqrt{x}}{y}+x\sqrt{y}=6$ در نقطهٔ $A(4,1)$ با کدام‌یک از خطوط زیر موازی است؟

۱) محور طول‌ها ۲) محور عرض‌ها ۳) نیمساز ربع اول و سوم ۴) نیمساز ربع دوم و چهارم

۳- دو نقطه روی نمودار $x^2+xy+y^2=1$ یافت می‌شود که مماس در آن نقاط با شیب ۲ می‌باشد، خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند با کدام شیب است؟

۱) ۱ ۲) $-\frac{4}{5}$ ۳) $-\frac{3}{5}$ ۴) صفر

۴- اگر تابع $y$ بر حسب $x$ در رابطهٔ $2e^{xy}=e^x+e^y$ صدق کند، مشتق $y$ در نقطهٔ $(1,1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $e$ ۳) $-1$ ۴) $-e$

۵- در نقطهٔ $A$ خط مماس بر منحنی $x^2-2xy+y^2-2x=4$ موازی محور عرض‌هاست. عرض نقطهٔ $A$ کدام است؟

۱) $-2$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $-3$

۶- در یک نقطه از منحنی $\sqrt{y}+yx\sqrt{x}=6x$ خط مماس موازی محور $x$ هاست. طول آن نقطه کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۴

۷- اگر $f(x)=\ln(e^x+e^{-x})$، مقدار $f'(0)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $e$ ۴) $\ln 2$

۸- هرگاه $f(x)=\ln(1+k|x|)$ و $f'_-(0)-f'_+(0)=-4$، مقدار $k$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $-1$ ۴) $-2$

۹- مقدار مشتق تابع $f(x)=4^{\cos x}$ در $x=\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) $\ln 2$ ۲) $2\ln 2$ ۳) $-\ln 2$ ۴) $-2\ln 2$

۱۰- به فرض آن‌که $f(x)=\frac{\ln x+2}{\ln x-3}$ و $g(x)=e^{2x}$، حاصل $g'(x)f'(g(x))$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) $e^{10}$ ۲) $e^{-10}$ ۳) ۱۰ ۴) $-10$

۱۱- شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\log_x 2$ در $x=2$ کدام است؟

۱) $\ln 4$ ۲) $-\ln 4$ ۳) $\frac{1}{\ln 4}$ ۴) $\frac{-1}{\ln 4}$

۱۲- اگر $y=e^{e^x}$، حاصل $\ln(\frac{y'}{y})$ کدام است؟

۱) $e^x$ ۲) $\frac{1}{x}$ ۳) $x$ ۴) $e^{-x}$

۱۳- اگر $f(x)=\ln(\frac{\sqrt{2x+1}}{x^2+1})$، آن‌گاه مقدار $f'(1)$ کدام عدد است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{-2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{-1}{3}$

محاسبات

۱۴- مقدار مشتق تابع $y=3e^{\sqrt[3]{\ln x}}$ در نقطه‌ای با عرض $3e$ واقع بر منحنی این تابع کدام است؟

۱) $e$ ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) $\frac{-1}{e}$ ۴) $1$

۱۵- مقدار مشتق تابع $y=\tan(\frac{\pi e^{\cos 2x}}{4})$ در $x=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $2\pi$ ۲) $-2\pi$ ۳) $\pi$ ۴) $-\pi$

۱۶- اگر $f(x)=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$، حاصل $f''(0)$ کدام است؟

۱) $-2$ ۲) $2$ ۳) $-4$ ۴) $4$

۱۷- اگر $y=e^{kx}$ در رابطه‌ی $y''+5y'+6y=0$ صدق کند، $k$ کدام است؟

۱) $2,3$ ۲) $-2,-3$ ۳) $-2,3$ ۴) $2,-3$

۱۸- اگر $y=\cos^2 \pi x$ به طوری که $y^{(3)}+ky'=0$، مقدار $k$ کدام عدد می‌باشد؟

۱) $4\pi^2$ ۲) $4\pi^3$ ۳) $8\pi^2$ ۴) $8\pi^3$

۱۹- به فرض آن‌که $y=\ln x^2+\ln\sqrt{x}$ و $y''(\alpha)=-10$، مقدار $\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{\pm 1}{2}$

۲۰- اگر $f(x)=xe^{-x}$ و $f''(\alpha)=0$، مقدار $f'(\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) $\frac{-1}{e}$ ۳) $e$ ۴) $\frac{-1}{e^2}$

## فصل یازدهم: مشتق

# بخش چهارم: آهنگ تغییر، خطوط مماس و قائم

### آهنگ متوسط تغییر

آهنگ متوسط تغییر تابع f نسبت به متغیر x، هنگامی که x در بازه‌ی $[a, b]$ از a تا b تغییر می‌کند، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

اگر فرض کنیم $b=a+h$، خواهیم داشت:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مقدار فوق را آهنگ متوسط تغییر تابع f در a با نِمُو h می‌نامیم.

**تست ۱: آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}$ در بازه‌ی $[۱,۴]$ چند برابر آهنگ متوسط تغییر این تابع در $x=۴$ با نمو $۰/۴۱$ است؟**

**۱)** ۲/۵۱ **۲)** ۲/۸۷ **۳)** ۱/۲۷ **۴)** ۱/۴۱

**پاسخ**: مقدار دو آهنگ تغییر را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر در بازه‌ی } [۱,۴] =\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}=\frac{\frac{۱}{۲}-۱}{۳}=-\frac{۱}{۶}=A_۱$$

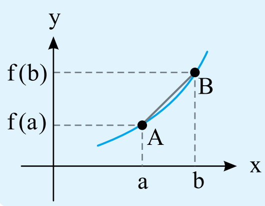
$$\text{آهنگ متوسط تغییر در } x=۴ \text{ با نمو } ۰/۴۱=\frac{f(۴+۰/۴۱)-f(۴)}{۰/۴۱}=\frac{\frac{۱}{۲/۱}-\frac{۱}{۲}}{۰/۴۱}=-\frac{۵۰}{۴۱\times ۲۱}=A_۲$$

بنابراین داریم:

$$\frac{A_۱}{A_۲}=\frac{-\frac{۱}{۶}}{-\frac{۵۰}{۴۱\times ۲۱}}=\frac{۴۱\times ۲۱}{۶\times ۵۰}=\frac{۴۱\times ۷}{۲\times ۵۰}=\frac{۲۸۷}{۱۰۰}=۲/۸۷$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

**نکته**: آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه‌ی $[a, b]$ همان شیب پاره‌خط واصل نقاط $A(a, f(a))$ و $B(b, f(b))$ روی نمودار تابع f است. به عبارت دیگر آهنگ تغییر متوسط، نسبت تغییرات y به تغییرات x در یک بازه است که آن را با $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نیز نشان می‌دهیم.




### آهنگ لحظه‌ای تغییر

مقدار حد آهنگ تغییر متوسط تابع f در نقطه‌ی a با نمو h را وقتی که مقدار نمو متغیر بسیار کوچک باشد، آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در نقطه‌ی a گویند.

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در } x=a=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

همان طور که ملاحظه می‌کنید آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در نقطه‌ی a همان $f'(a)$ است.

**تست ۲: آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=x-\frac{۲}{x}$ در بازه‌ی $[۱,۲]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در کدام نقطه برابر است؟**

۱) $x=\sqrt{۲}$ ۲) $x=\sqrt{۳}$ ۳) $x=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $x=\frac{۳}{۲}$

**پاسخ:** مقدار آهنگ متوسط را محاسبه می‌کنیم:

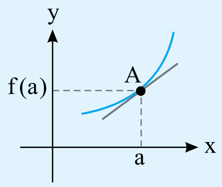
$$\text{آهنگ متوسط تغییر}=\frac{f(۲)-f(۱)}{۲-۱}=\frac{۱-(-۱)}{۱}=۲$$

از طرفی آهنگ لحظه‌ای تغییر همان مشتق تابع است. پس داریم:

$$f'(x)=۱+\frac{۲}{x^۲}=۲\Rightarrow\frac{۲}{x^۲}=۱\Rightarrow x^۲=۲\Rightarrow x=\sqrt{۲}$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

**نکته:** آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در نقطه‌ی a همان شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ی $A(a,f(a))$ است که آن را با $\frac{df}{dx}$ یا $\frac{dy}{dx}$ نیز نشان می‌هیم.




**تست ۳: آهنگ تغییر مساحت دایره نسبت به محیط آن، وقتی که محیط دایره برابر $\pi$ باشد، کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

**پاسخ: راه‌حل اول:** ابتدا مساحت دایره را برحسب محیط آن می‌نویسیم:

$$P=۲\pi r\Rightarrow r=\frac{P}{۲\pi}\quad,\quad S=\pi r^۲=\pi(\frac{P}{۲\pi})^۲=(\frac{۱}{۴\pi})P^۲$$

حال مشتق S را نسبت به P محاسبه می‌کنیم:

$$S'=\frac{۱}{۴\pi}\times۲P=\frac{P}{۲\pi}$$

وقتی $P=\pi$ باشد، داریم:

$$S'=\frac{\pi}{۲\pi}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

**راه‌حل دوم:** با استفاده از مشتق تابع مرکب (قاعده‌ی زنجیری) داریم:

$$\frac{ds}{dr}=\frac{ds}{dp}\times\frac{dp}{dr}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$P=۲\pi r\Rightarrow\frac{dp}{dr}=۲\pi\quad,\quad S=\pi r^۲\Rightarrow\frac{ds}{dr}=۲\pi r$$

بنابراین داریم:

$$۲\pi r=\frac{ds}{dp}\times۲\pi\Rightarrow\frac{ds}{dp}=r$$

وقتی شعاع دایره $\pi$ است، داریم $۲\pi r=\pi\Rightarrow r=\frac{۱}{۲}$، پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{ds}{dp}=\frac{۱}{۲}$$

**تست ۴: کم‌ترین مقدار آهنگ تغییر تابع $f(x)=x^۳-۳x^۲+۵x+۱$ چقدر است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ:** آهنگ تغییر (لحظه‌ای) تابع همان مشتق آن است. پس مشتق را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=۳x^۲-۶x+۵$$

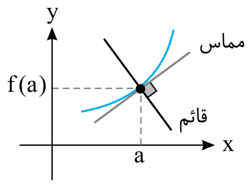
می‌دانیم کم‌ترین مقدار تابع درجه دوم برابر $-\frac{\Delta}{۴a}$ است. پس داریم:

$$\text{کم‌ترین آهنگ تغییر}=-\frac{۳۶-۴\times۳\times۵}{۴\times۳}=۲$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

## معادله‌ی خطوط مماس و قائم بر نمودار

نقطه‌ی $A(a,f(a))$ روی نمودار تابع $f$ را درنظر بگیرید.




خط مماس بر نمودار تابع $f$ در این نقطه، خطی است که شیب آن برابر $f'(a)$ است. بنابراین معادله‌ی این خط به صورت زیر است:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

همچنین خط قائم بر منحنی در این نقطه، خطی است که بر خط مماس در این نقطه، عمود باشد. پس شیب آن $-\frac{۱}{f'(a)}$ و معادله‌ی آن به صورت زیر است:

$$y-f(a)=-\frac{۱}{f'(a)}(x-a)$$

**تست ۵: عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=e^x-\ln x$ در نقطه‌ی $x=۱$ واقع بر نمودار تابع کدام است؟**

**۱)** $e$ **۲)** $۱-۲e$ **۳)** $-۱$ **۴)** $۱$

**پاسخ:** خط مماس در نقطه‌ی $(۱,e)$ مدنظر است. مشتق در این نقطه را محاسبه می‌کنیم تا شیب خط مماس به دست آید:

$$f'(x)=e^x-\frac{۱}{x}\Rightarrow f'(۱)=e-۱$$

بنابراین معادله‌ی خط مماس به صورت زیر است:

$$y-e=(e-۱)(x-۱)\Rightarrow y=(e-۱)x+۱$$

پس عرض از مبدأ خط مماس برابر ۱ است. $(x=۰\Rightarrow y=۱)$ بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

**تست ۶: خط قائم بر منحنی $x^۲-xy+y^۳=۱$ در نقطه‌ی $(۱,-۱)$ محور $x$ ها را با چه طولی قطع می‌کند؟**

**۱)** $\frac{۲}{۳}$ **۲)** $\frac{۵}{۲}$ **۳)** $\frac{۳}{۲}$ **۴)** $\frac{۲}{۵}$

**پاسخ:** شیب خط قائم را محاسبه می‌کنیم:

$$x^۲-xy+y^۳=۱\Rightarrow ۲x-y-xy'+۳y^۲y'=۰$$

$$x=۱,y=-۱\Rightarrow ۲+۱-y'+۳y'=۰\Rightarrow y'=-\frac{۳}{۲}=\text{شیب مماس}\Rightarrow \text{شیب قائم}=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین معادله‌ی خط قائم به شکل زیر است:

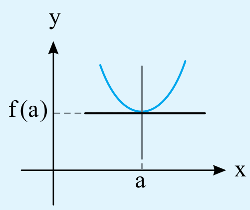
$$y-(-۱)=\frac{۲}{۳}(x-۱)\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x-\frac{۵}{۳}$$

حال محل برخورد با محور $x$ ها را با قرار دادن $y=۰$ محاسبه می‌کنیم:

$$y=۰\Rightarrow \frac{۲}{۳}x-\frac{۵}{۳}=۰\Rightarrow x=\frac{۵}{۲}$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

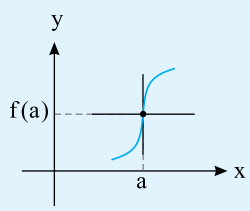
**نکته:** اگر $f'(a)=۰$ آن‌گاه معادلات خطوط مماس و قائم در نقطه‌ی $(a,f(a))$ به شکل زیر خواهد بود:




معادله‌ی خط مماس: $y=f(a)$

معادله‌ی خط قائم: $x=a$

همچنین اگر $f'(a)=\infty$ آن‌گاه داریم:




معادله‌ی خط مماس: $x=a$

معادله‌ی خط قائم: $y=f(a)$

**تست ۷:** **معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع** $f(x)=۲x-\sqrt[۳]{x-۱}$ **در نقطه‌ای به طول** $x=۱$ **روی نمودار تابع، کدام است؟**

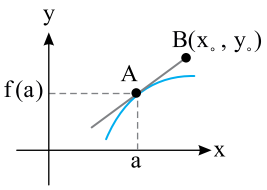
**۱)** $x=۱$ **۲)** $y=۱$ **۳)** $x=۲$ **۴)** $y=۲$

**پاسخ:** مشتق تابع در $x=۱$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=۲-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}}\Rightarrow f'(۱)=\infty$$

خط قائم بر نمودار به صورت $y=f(۱)=۲$ است. بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

## معادله‌ی خطوط مماس و قائم از نقطه‌ای خارج نمودار

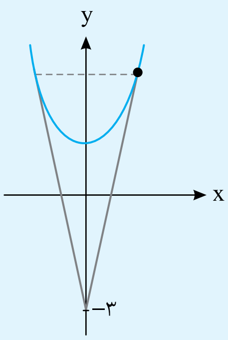



می‌خواهیم از نقطه‌ی معلوم $B(x_۰,y_۰)$ مطابق شکل مماسی بر نمودار تابع f رسم کنیم. فرض کنیم این خط در نقطه‌ی $A(a\,,f(a))$ بر نمودار مماس گردد. شیب خط مماس $f'(a)$ و معادله‌ی آن به صورت $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ است. اگر مقدار a معلوم باشد، معادله‌ی خط مماس هم معلوم خواهد بود. برای معلوم کردن مقدار a کافی است مختصات $B(x_۰,y_۰)$ را در معادله‌ی خط مماس قرار دهیم.

برای خط قائم هم به همین شیوه عمل می‌کنیم. فقط شیب خط قائم برابر $-\frac{۱}{f'(a)}$ است.

**تست ۸:** **از نقطه‌ی** $A(۰\,,-۳)$ **دو مماس بر منحنی تابع** $f(x)=x^۲+۱$ **رسم می‌کنیم. حاصل‌ضرب طول نقاط تماس کدام است؟**

**۱)** $-۴$ **۲)** $۴$ **۳)** $۲$ **۴)** $-۲$




**پاسخ:** اگر مختصات نقطه‌ی تماس $(a\,,a^۲+۱)$ باشد، معادله‌ی خط مماس به صورت $y-(a^۲+۱)=f'(a)(x-a)$ خواهد بود. با توجه به این‌که $f'(a)=۲a$ است، داریم:

$$y-a^۲-۱=۲a(x-a)$$

نقطه‌ی $(۰,-۳)$ در معادله‌ی فوق صدق می‌کند. پس داریم:

$$-۳-a^۲-۱=۲a(۰-a)\Rightarrow a^۲=۴\Rightarrow a=\pm۲$$

بنابراین طول نقاط تماس ۲ و ۲- است که حاصل‌ضرب آن‌ها ۴- است.

البته معادلات خطوط مماس هم به صورت زیر خواهد بود:

$$y=۴x-۳ \qquad , \qquad y=-۴x-۳$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

**تست ۹:** **از نقطه‌ی** $(۳,۰)$ **مماسی بر نمودار تابع** $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}$ **رسم می‌کنیم، عرض از مبدأ خط مماس کدام است؟**

**۱)** $\frac{۱}{۲}$ **۲)** $\frac{۳}{۲}$ **۳)** $۲$ **۴)** $\frac{۵}{۲}$

**پاسخ:** نقطه‌ی تماس را $(a,\frac{۱}{\sqrt{a}})$ فرض می‌کنیم، شیب خط مماس را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{-۱}{۲x\sqrt{x}}\Rightarrow f'(a)=-\frac{۱}{۲a\sqrt{a}}=\text{شیب مماس}$$

بنابراین معادله‌ی مماس به صورت $y-\frac{۱}{\sqrt{a}}=-\frac{۱}{۲a\sqrt{a}}(x-a)$ است. نقطه‌ی $(۳,۰)$ را در معادله جایگذاری می‌کنیم و داریم:

$$۰-\frac{۱}{\sqrt{a}}=\frac{-۱}{۲a\sqrt{a}}(۳-a)\Rightarrow ۲a=۳-a\Rightarrow a=۱\Rightarrow \text{معادله‌ی مماس}: y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲}$$

بنابراین عرض از مبدأ خط مماس $\frac{۳}{۲}$ است و گزینه‌ی (۲) درست است.

**تست ۱۰: از نقطه‌ی $(۳,۰)$ یک خط عمود بر نمودار تابع $f(x)=x^{۲}$ رسم می‌کنیم. شیب این خط کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۲-

**پاسخ**: نقطه‌ی تماس را $(a,a^{۲})$ می‌نامیم و شیب خط قائم را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=x^{۲}\Rightarrow f'(x)=۲x\Rightarrow f'(a)=۲a=\text{شیب مماس}\Rightarrow \text{شیب قائم}=-\frac{۱}{۲a}$$

بنابراین معادله‌ی خط قائم به شکل روبه‌رو است: $y-a^{۲}=-\frac{۱}{۲a}(x-a)$

نقطه‌ی $(۳,۰)$ در معادله‌ی فوق صدق می‌کند. پس داریم: $۰-a^{۲}=-\frac{۱}{۲a}(۳-a)\Rightarrow ۲a^{۳}+a-۳=۰$

واضح است که $a=۱$ در معادله‌ی فوق صدق می‌کند. در نتیجه داریم: $\text{شیب خط قائم}=-\frac{۱}{۲a}=-\frac{۱}{۲}$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

## روشی دیگر برای نوشتن معادله‌ی مماس

اگر خط $y=mx+h$ بر منحنی $y=f(x)$ مماس باشد، باید معادله‌ی $f(x)=mx+h$، که نقاط برخورد خط و منحنی را مشخص می‌کند، دارای ریشه‌ی مکرر باشد. (در حالت خاص که معادله‌ی فوق درجه دوم می‌شود، باید معادله دارای ریشه‌ی مضاعف باشد: $\Delta=۰$)

بنابراین برای پیدا کردن معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ از نقطه‌ی $A(x_۰,y_۰)$ خارج منحنی کافی است معادله‌ی خطی که از این نقطه می‌گذرد را بنویسیم و با معادله‌ی تابع مساوی قرار دهیم و شرط داشتن ریشه‌ی مضاعف را اعمال کنیم. دقت کنید که شیب خط را مقدار مجهول $m$ درنظر می‌گیریم که از شرط داشتن ریشه‌ی مضاعف به دست خواهد آمد.

**تست ۱۱: از نقطه‌ی $A(۴,-۲)$ دو مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^{۲}-۴x$ رسم کرده‌ایم، حاصل‌ضرب شیب خطوط مماس کدام است؟**

۱) ۸ ۲) ۸- ۳) ۴ ۴) ۴-

**پاسخ**: معادله‌ی خطوطی که از نقطه‌ی $A(۴,-۲)$ عبور می‌کنند به صورت زیر است:

$$y-(-۲)=m(x-۴)\Rightarrow y=mx-۴m-۲$$

حال معادله‌ی تابع را مساوی معادله‌ی این خطوط قرار می‌دهیم: $x^{۲}-۴x=mx-۴m-۲\Rightarrow x^{۲}-(m+۴)x+۴m+۲=۰$

برای این‌که خط بر منحنی مماس باشد باید داشته باشیم:

$$\Delta=۰\Rightarrow(m+۴)^{۲}-۴(۴m+۲)=۰\Rightarrow m^{۲}+۸m+۱۶-۱۶m-۸=۰\Rightarrow m^{۲}-۸m+۸=۰$$

شیب خطوط مماس از معادله‌ی فوق به دست می‌آید. اگر این شیب‌ها $m_۱$ و $m_۲$ باشند، $m_۱$ و $m_۲$ ریشه‌های معادله‌ی فوق هستند و ضرب ریشه‌ها مورد سؤال است که برابر $m_۱m_۲=۸$ است.

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

**تست ۱۲: از مبدأ مختصات چند خط می‌توان بر نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x+۱}$ مماس کرد؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

**پاسخ**: اگر نقطه‌ی تماس $(a,\frac{۱}{a+۱})$ باشد، شیب خط مماس را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۱}{x+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۱}{(x+۱)^{۲}}\Rightarrow f'(a)=-\frac{۱}{(a+۱)^{۲}}=\text{شیب خط مماس}$$

بنابراین معادله‌ی مماس به شکل روبه‌رو است: $y-\frac{۱}{a+۱}=-\frac{۱}{(a+۱)^{۲}}(x-a)$

مبدأ مختصات در معادله‌ی فوق صدق می‌کند. پس داریم: $۰-\frac{۱}{a+۱}=-\frac{۱}{(a+۱)^{۲}}(۰-a)\Rightarrow a+۱=-a\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$

یک نقطه‌ی تماس وجود دارد، پس یک خط مماس می‌توان رسم کرد.

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

## آزمون ٥٦

| مبحث آزمون | زمان پیشنهادی | شماره صفحات پاسخ تشریحی در کتاب ضمیمه |
|---|---|---|
| آهنگ تغییر، خطوط مماس و قائم | ۳۰ دقیقه | ۱۸۳ تا ۱۸۶ |

**۱-** آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=x+\frac{۴}{x}$ در بازه‌ی $[۱,a]$ برابر $-۱$ است. مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۲

**۲-** در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۳۶}{x^۲}$، آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_۱=۲$ تا $x_۲=۳$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\sqrt[۳]{۱۲}$ بیشتر است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

**۳-** در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x}{x-۱}$، آهنگ متوسط از $x_۱=۲$ تا $x_۲=۵$، برابر آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\alpha$ است. $\alpha$ کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) $۱+\sqrt{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۴

**۴-** آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\frac{x^۲+a}{x}$ در بازه‌ی $[۱,a]$ برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر در کدام نقطه است؟

۱) $\frac{a}{۲}$ ۲) $\frac{a+۱}{۲}$ ۳) $\sqrt{a}$ ۴) $\frac{a-۱}{۲}$

**۵-** آهنگ تغییر محیط دایره نسبت به مساحت آن، وقتی که شعاع آن برابر $\frac{۲}{\pi}$ واحد باشد، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲\sqrt{\pi}}$

**۶-** بیش‌ترین مقدار آهنگ تغییر تابع $f(x)=-x^۳+۶x^۲+x-۱$ در چه نقطه‌ای اتفاق می‌افتد؟

۱) $x=۱$ ۲) $x=۲$ ۳) $x=۳$ ۴) $x=۴$

**۷-** اگر $y=t^۲+۴\sqrt{t}$ و $x=t-\frac{۱۶}{t}$، آهنگ تغییر y نسبت به x در $t=۴$ چقدر است؟

۱) $\frac{۹}{۲}$ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

**۸-** معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=۲x+\cos x$ در نقطه‌ای به طول صفر روی منحنی کدام است؟

۱) $y=۲x+۱$ ۲) $y=۲x-۱$ ۳) $y=-۲x+۱$ ۴) $y=-۲x-۱$

**۹-** خط قائم بر نمودار تابع $f(x)=(x+۲)e^{۲-x}$ در نقطه‌ی $x=۲$ محور x ها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

۱) $\frac{-۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) ۱۰ ۴) $-۱۰$

**۱۰-** عرض از مبدأ خط قائم بر منحنی به معادله‌ی $y^۲=y\ln(x^۲-۳)+۲x$، در نقطه‌ی $(۲,-۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{-۲}{۳}$ ۲) $\frac{-۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

**۱۱-** خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴x}}$ در نقطه‌ی $(۲,\frac{۱}{۲})$، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۷}{۶}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۲- خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=x^۳+۳x^۲+۱$ بر خط با معادله‌ی $x-۳y=۲$ عمود است. این خط مماس از کدام‌یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

۱) $(۱,۳)$ ۲) $(۱,۴)$ ۳) $(۲,-۶)$ ۴) $(۲,-۴)$

۱۳- منحنی $y=a(x+۱)(x+۴)$ بر نیمساز ناحیه‌ی اول مماس است، a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{-۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{-۱}{۹}$

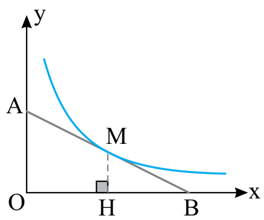
۱۴- از نقطه‌ی $A(-۱,۴)$ دو مماس بر منحنی $y=\frac{x+۱}{x-۳}$ رسم می‌کنیم، حاصل جمع طول نقاط مماس کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) $\frac{۳۵}{۳}$ ۳) $\frac{۲۶}{۳}$ ۴) $\frac{-۲۶}{۳}$

۱۵- از نقطه‌ی $A(-۲,-۱)$ بر منحنی $y=x^۲-۲x$ مماس غیرافقی رسم می‌کنیم، عرض از مبدأ خط مماس کدام است؟

۱) $-۱۲$ ۲) $-۲۵$ ۳) ۲۵ ۴) ۱۲

۱۶- اگر $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}$ در شکل مقابل طول پاره‌خط OA چند برابر طول پاره‌خط MH است؟




۱) $\frac{۴}{۳}$

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۲

۴) $\frac{۵}{۲}$

۱۷- قائم بر $y=\sqrt{x+۱}\,e^{-x}$ در نقطه‌ای به طول $x=۰$ نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $-۱$ ۳) ۳ ۴) ۲

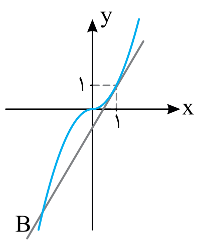
۱۸- خط گذرنده از $A(۱,۳)$ و $B(۲,۱)$ بر نمودار تابع $y=-x^۲-ax+۱$ مماس است. مقدار a کدام است؟

۱) $-۲$ و ۶ ۲) ۶ و ۲ ۳) ۲ و $-۶$ ۴) $-۲$ و $-۶$

۱۹- اگر نمودار تابع $y=x^۳+ax^۲-bx+۳$ در $x=۱$ بر خط $y=۲x$ مماس باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $-۳$ ۳) $-۴$ ۴) ۴

۲۰- اگر $f(x)=x|x|$، در شکل مقابل طول نقطه‌ی B کدام است؟




۱) $-\sqrt{۲}-۱$

۲) $-۲$

۳) $۱-\sqrt{۳}$

۴) $-۳$

## آزمون ۵۷

| مبحث آزمون | زمان پیشنهادی | شماره صفحات پاسخ تشریحی در کتاب ضمیمه |
|---|---|---|
| آهنگ تغییر، خطوط مماس و قائم | ۳۵ دقیقه | ۱۸۶ تا ۱۸۹ |

۱- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=x-\sqrt{x}$ در بازه‌ی $[a^{۲},۴]$ برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$

۲- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\log_{۰/۵} x$ در $x=۰/۵$ با نمو ۰/۵ واحد کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-۲$ ۳) ۲ ۴) $-۴$

۳- آهنگ متوسط تغییر مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع وقتی ضلع آن از ۲ واحد به ۴ واحد تغییر می‌کند، چقدر است؟

۱) $۳\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۴- بیش‌ترین مقدار آهنگ تغییر تابع $f(x)=x-\sin x$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۵- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۹}$ در نقطه‌ی $x=-۴$ با نمو ۴ چقدر از آهنگ تغییر تابع در این نقطه بیش‌تر است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

۶- اگر $x^{۲}+y^{۲}-xy=۱$، آهنگ تغییر y نسبت به x در نقطه‌ی $x=۱$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $-۱$ ۳) ۲ یا $-۱$ ۴) ۱ یا $-۲$

۷- در رابطه‌ی $x^{۲}+y^{۲}-۲x+۴y=۰$ اگر $\frac{dx}{dt}=۰/۲$، آهنگ تغییر y نسبت به متغیر t در نقطه‌ی $(۳,-۳)$ کدام است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

۸- در کدام نقطه از منحنی تابع $f(x)=x-\sqrt[۳]{\sin x}$ خط مماس بر منحنی موازی محور عرض‌ها است؟

۱) $x=\frac{\pi}{۲}$ ۲) $x=\pi$ ۳) $x=\frac{\pi}{۴}$ ۴) $x=\frac{۵\pi}{۶}$

۹- معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع $y=\frac{۲۵x}{x^{۲}+۱}$ در نقطه‌ای به طول ۲ روی منحنی تابع، کدام است؟

۱) $y=-۳x+۱۶$ ۲) $y=۳x-۱۰$ ۳) $y=-۳x+۱۱$ ۴) $y=۳x-۱$

۱۰- در چند نقطه از منحنی $y=\sqrt{۴x-x^{۲}}$ خط مماس موازی یکی از محورهای مختصات است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) هیچ

۱۱- خط مماس بر منحنی $y=m(x^{۲}-۲)^{۲}+۱$ در نقطه‌ای به طول ۱ از مبدأ مختصات می‌گذرد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{-۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

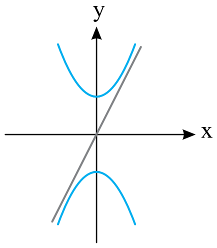
۱۲- عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $f(x)=\ln\sqrt{\frac{\sin x}{۱+\cos x}}$ در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{۲}$ واقع بر آن، کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{۲}$ ۲) $-\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۱۳- خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $\ln(x^{۲}-y)=\sqrt{y+۱}-x$، در نقطه‌ی $(۲,۳)$ نیمساز ناحیه‌ی اول را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۱۴- معادله‌ی دو سهمی مقابل $y=x^2+a$ و $y=-x^2-a$ می‌باشد، اگر خط $y=2x$ بر هر دو سهمی مماس باشد، مقدار مثبت a کدام است؟




۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۵- به ازای کدام مقدار m، سهمی $y=2x^2+(2m+1)x+2m+6$ بر نیمساز ناحیه‌ی سوم مماس است؟

۱) $-2$ ۲) $-4$ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۶- اگر f تابعی مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x+1)}{x^2-1}=2$، شیب خط قائم بر نمودار $y=xf(x)$ در $x=2$ کدام است؟

۱) $\frac{-1}{8}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{-1}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۷- در کدام نقطه، مماس بر منحنی $y=\frac{1}{x}$ دارای عرض از مبدأ ۳ است؟

۱) $(1,1)$ ۲) $(\frac{1}{2},2)$ ۳) $(\frac{2}{3},\frac{3}{2})$ ۴) $(\frac{3}{2},\frac{2}{3})$

۱۸- از مبدأ مختصات، دو مماس عمود بر هم بر منحنی تابع $y=x^2-2x+a$ رسم می‌شود. مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{5}{8}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{9}{4}$

۱۹- خط $y=3-x$ در نقطه‌ای به طول a بر منحنی $y=\frac{k}{x}$ مماس است، ka چقدر است؟

۱) $\frac{9}{8}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{27}{8}$ ۴) $\frac{9}{16}$

۲۰- خط مماس بر منحنی $f(x)=\sqrt{2}\sin x$ در $x=\frac{\pi}{4}$ نسبت به منحنی تابع $g(x)=\sqrt{2}\cos x$ چه وضعی دارد؟

۱) بر آن مماس است. ۲) بر آن عمود است.
۳) آن را قطع نمی‌کند. ۴) آن را در دو نقطه قطع می‌کند.