

جلد اول: درس‌نامه + آزمون‌های مبحثی و جامع

جامع ریاضیات تجربی

+ موج آزمون ویراست دوم

کازم اجاللی، ارشک حمیدی



انتشرالگو

پیشگفتار

به نام خدا

هدفمان از نوشتن این کتاب، فراهم آوردن مسیری است که در آن هم بتوانید مطالب کتاب ریاضی ۳ را یاد بگیرید و بر آن‌ها مسلط شوید، هم مطالب کتاب‌های ریاضی ۱ و ریاضی ۲ را مرور کنید. این کتاب پانزده فصل دارد. به جز فصل پانزدهم، هر فصل از چند درس تشکیل شده است. فصل پانزدهم ویژه «آزمون‌های جامع» است.

مباحث کتاب ریاضی ۳ را در هفت فصل نخست گنجانده‌ایم. هر یک از این‌ها، در صورت لزوم، با درس‌هایی از کتاب‌های ریاضی ۱ و ریاضی ۲ که پیش‌زمینه درس‌های متناظرشان از کتاب ریاضی ۳ هستند، شروع می‌شود. هفت فصل بعدی مربوط به کتاب‌های ریاضی ۱ و ریاضی ۲ هستند. در درس‌نامه‌ها مطالب را با جزئیات کامل، همراه با مثال‌های کلیدی و آموخته‌آورده‌ایم. در انتهای هر درس چندین پرسش با عنوان «دست‌گرمی» آمده است. این پرسش‌ها معیاری است برای اینکه بفهمید تا چه حد درس را خوب یاد گرفته‌اید. پس از آن نوبت آزمون‌هاست. هر آزمون ده پرسش دارد. تلاش کرده‌ایم در هر آزمون همه مطالب مربوط به درس را بگنجانیم. البته، اگر درسی چند آزمون داشته باشد، معمولاً هر چه جلوتر بروید، آزمون‌ها دشوارتر می‌شوند. در انتهای هر فصل هم چند «آزمون فصل» آورده‌ایم، که شامل آزمون‌های تألیفی و برگزیده کنکورهای سراسری است. یک فایل PDF شامل آزمون‌های تألیفی دیگر را هم می‌توانید با اسکن QR Code انتهای پیشگفتار یا از سایت انتشارات الگو به آدرس www.olgoobooks.ir دریافت کنید.

برای هر مطلب که در درس‌نامه آمده است یک شماره (گام) اختصاص داده‌ایم که بتوانیم خواننده را به آن ارجاع دهیم. کل مطالب این کتاب را در ۳۷۲ گام تنظیم کرده‌ایم. در کنار هر آزمون، یک جدول راهنمای ارجاع قرار داده‌ایم که در آن مشخص کرده‌ایم برای حل هر سؤال چه مطالبی مورد نیاز است. شماره این مطالب را در کنار شماره سؤال در ستون گام آورده‌ایم. توصیه می‌کنیم اگر نتوانستید سؤالی را حل کنید قبل از اینکه به پاسخ‌نامه تشریحی مراجعه کنید، گام‌های اشاره شده در درس‌نامه را پیدا کنید و مطالعه نمایید. پاسخ پرسش‌های دست‌گرمی و آزمون‌های این کتاب در جلد دوم آورده شده است. می‌توانید نسخه چاپی جلد دوم را تهیه کنید، همین‌طور می‌توانید فایل PDF آن را با اسکن QR Code پشت جلد کتاب یا از سایت انتشارات الگو دریافت کنید. یادآوری می‌کنیم که اگر این کتاب را دارید، لازم نیست که کتاب موج آزمون ریاضی رشته تجربی (از انتشارات الگو) را تهیه کنید، زیرا این کتاب شامل آزمون‌های کتاب موج آزمون نیز است.

وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها هاله ایمانی، فهیمه گودرزی و عاطفه ربیعی برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم‌ها فاطمه احدی و راضیه صالحی برای صفحه‌آرایی و خانم ستین مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

مؤلفان



می‌توانید فایل PDF آزمون‌های تألیفی جامع فصل‌ها را به صورت رایگان با اسکن QR Code مقابل دریافت کنید.

فصل دوم: مثلثات

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه (گام‌های ۶۹ تا ۷۱).....	۱۰۹
آزمون‌های ۳۷ و ۳۸.....	۱۱۳
درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی (گام‌های ۷۲ تا ۸۰).....	۱۱۵
آزمون‌های ۳۹ و ۴۰.....	۱۲۲
درس سوم: اتحادهای مثلثاتی (گام‌های ۸۱ تا ۸۳).....	۱۲۴
آزمون‌های ۴۱ تا ۴۴.....	۱۲۹
درس چهارم: واحدهای اندازه‌گیری زاویه (گام‌های ۸۴ تا ۸۹).....	۱۳۳
آزمون‌های ۴۵ و ۴۶.....	۱۳۸
درس پنجم: نسبت‌های مثلثاتی همه زاویه‌ها (گام‌های ۹۰ تا ۹۲).....	۱۴۰
آزمون‌های ۴۷ تا ۴۹.....	۱۴۴
درس ششم: سینوس و کسینوس زاویه 2α (گام‌های ۹۳ تا ۹۹).....	۱۴۷
آزمون‌های ۵۰ تا ۵۳.....	۱۵۲
درس هفتم: توابع مثلثاتی (گام‌های ۱۰۰ تا ۱۰۵).....	۱۵۶
آزمون‌های ۵۴ تا ۵۶.....	۱۶۵
درس هشتم: معادلات مثلثاتی (گام‌های ۱۰۶ تا ۱۱۶).....	۱۶۸
آزمون‌های ۵۷ تا ۶۱.....	۱۷۶
آزمون‌های ۶۲ و ۶۳: آزمون‌های فصل دوم.....	۱۸۱
آزمون‌های ۶۴ و ۶۵: آزمون‌های فصل دوم (برگزیده کنکورهای سراسری).....	۱۸۳

فصل سوم: حد و پیوستگی

درس اول: مفهوم حد و قضایای حد (گام‌های ۱۱۷ تا ۱۲۵).....	۱۸۵
آزمون‌های ۶۶ تا ۶۹.....	۱۹۳
درس دوم: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ (گام‌های ۱۲۶ تا ۱۲۹).....	۱۹۷
آزمون‌های ۷۰ و ۷۱.....	۲۰۲

فصل اول: تابع

درس اول: مفاهیم اولیه (گام‌های ۱ تا ۶).....	۱
آزمون‌های ۱ و ۲.....	۶
درس دوم: توابع معروف (گام‌های ۷ تا ۱۲).....	۸
آزمون‌های ۳ و ۴.....	۱۳
درس سوم: سهمی و تابع درجه دوم (گام‌های ۱۳ تا ۲۰).....	۱۵
آزمون‌های ۵ تا ۷.....	۲۳
درس چهارم: دامنه و برد تابع و تساوی توابع (گام‌های ۲۱ تا ۲۳).....	۲۶
آزمون‌های ۸ تا ۱۰.....	۳۲
درس پنجم: مدل‌سازی با توابع (گام ۲۴).....	۳۵
آزمون ۱۱.....	۳۷
درس ششم: جبر توابع (گام ۲۵).....	۳۸
آزمون‌های ۱۲ تا ۱۴.....	۴۱
درس هفتم: ترکیب توابع (گام‌های ۲۶ تا ۲۸).....	۴۴
آزمون‌های ۱۵ تا ۱۸.....	۴۹
درس هشتم: تبدیل نمودار توابع (گام‌های ۲۹ تا ۳۸).....	۵۳
آزمون‌های ۱۹ تا ۲۲.....	۶۸
درس نهم: توابع یک‌به‌یک (گام‌های ۳۹ تا ۴۵).....	۷۶
آزمون‌های ۲۳ و ۲۴.....	۸۰
درس دهم: توابع یکتا (گام‌های ۴۶ تا ۵۸).....	۸۲
آزمون‌های ۲۵ تا ۲۷.....	۹۰
درس یازدهم: تابع وارون (گام‌های ۵۹ تا ۶۸).....	۹۳
آزمون‌های ۲۸ تا ۳۲.....	۱۰۰
آزمون‌های ۳۳ و ۳۴: آزمون‌های فصل اول.....	۱۰۵
آزمون‌های ۳۵ و ۳۶: آزمون‌های فصل اول (برگزیده کنکورهای سراسری).....	۱۰۷

◆ فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: ارتباط مشتق و یکنوایی تابع (گام‌های ۱۸۴ و ۱۸۵) ۲۸۴

آزمون‌های ۱۰۷ و ۱۰۸ ۲۸۷

درس دوم: نقاط بحرانی (گام ۱۸۶) ۲۸۹

آزمون‌های ۱۰۹ و ۱۱۰ ۲۹۱

درس سوم: اکسترم‌های نسبی (گام‌های ۱۸۷ تا ۱۹۱) ۲۹۳

آزمون‌های ۱۱۱ تا ۱۱۳ ۲۹۸

درس چهارم: اکسترم‌های مطلق (گام‌های ۱۹۲ تا ۱۹۴) ۳۰۱

آزمون‌های ۱۱۴ و ۱۱۵ ۳۰۵

درس پنجم: بهینه‌سازی (گام ۱۹۵) ۳۰۷

آزمون‌های ۱۱۶ تا ۱۱۸ ۳۱۱

آزمون‌های ۱۱۹ و ۱۲۰: آزمون‌های فصل پنجم ۳۱۴

آزمون‌های ۱۲۱ و ۱۲۲: آزمون‌های فصل پنجم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۳۱۶

◆ فصل ششم: هندسهٔ تحلیلی

درس اول: خط راست (گام‌های ۱۹۶ تا ۲۰۳) ۳۱۸

آزمون‌های ۱۲۳ تا ۱۲۵ ۳۲۵

درس دوم: تفکر تجسمی (گام‌های ۲۰۴ و ۲۰۵) ۳۲۸

آزمون ۱۲۶ ۳۳۱

درس سوم: بیضی (گام‌های ۲۰۶ تا ۲۱۰) ۳۳۲

آزمون‌های ۱۲۷ تا ۱۲۹ ۳۳۶

درس چهارم: دایره (گام‌های ۲۱۱ تا ۲۱۸) ۳۳۹

آزمون‌های ۱۳۰ تا ۱۳۴ ۳۴۷

آزمون ۱۳۵: آزمون فصل ششم ۳۵۲

آزمون‌های ۱۳۶ و ۱۳۷: آزمون‌های فصل ششم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۳۵۳

درس سوم: بیوستگی (گام‌های ۱۳۰ تا ۱۳۷) ۲۰۴

آزمون‌های ۷۲ و ۷۳ ۲۰۹

درس چهارم: حد بی‌نهایت (گام‌های ۱۳۸ تا ۱۴۰) ۲۱۱

آزمون‌های ۷۴ تا ۷۶ ۲۱۵

درس پنجم: حد در بی‌نهایت (گام‌های ۱۴۱ تا ۱۴۵) ۲۱۸

آزمون‌های ۷۷ تا ۷۹ ۲۲۴

آزمون‌های ۸۰ و ۸۱: آزمون‌های فصل سوم ۲۲۷

آزمون‌های ۸۲ و ۸۳: آزمون‌های فصل سوم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۲۲۹

◆ فصل چهارم: مشتق

درس اول: مفهوم مشتق (گام‌های ۱۴۶ تا ۱۶۰) ۲۳۱

آزمون‌های ۸۴ تا ۸۶ ۲۳۹

درس دوم: قواعد مشتق‌گیری (گام‌های ۱۶۱ تا ۱۶۵) ۲۴۲

آزمون‌های ۸۷ تا ۹۰ ۲۴۷

درس سوم: مشتق تابع مرکب (گام‌های ۱۶۶ تا ۱۶۸) ۲۵۱

آزمون‌های ۹۱ تا ۹۳ ۲۵۴

درس چهارم: مشتق‌پذیری (گام‌های ۱۶۹ تا ۱۷۵) ۲۵۷

آزمون‌های ۹۴ و ۹۵ ۲۶۲

درس پنجم: خط مماس بر نمودار تابع (گام‌های ۱۷۶ تا ۱۷۹) ۲۶۴

آزمون‌های ۹۶ و ۹۷ ۲۶۷

درس ششم: آهنگ تغییر (گام‌های ۱۸۰ و ۱۸۱) ۲۶۹

آزمون ۹۸ ۲۷۱

درس هفتم: مشتق دوم (گام ۱۸۲) ۲۷۲

آزمون ۹۹ ۲۷۴

درس هشتم: قاعدهٔ هویتنال (گام ۱۸۳) ۲۷۵

آزمون ۱۰۰ ۲۷۷

آزمون‌های ۱۰۱ و ۱۰۲: آزمون‌های فصل چهارم ۲۷۸

آزمون‌های ۱۰۳ تا ۱۰۶: آزمون‌های فصل چهارم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۲۸۰

◆ فصل هفتم: آمار و احتمال

- درس اول: اصل جمع و اصل ضرب (گام‌های ۲۱۹ تا ۲۲۳) ۳۵۵
- آزمون‌های ۱۳۸ تا ۱۴۰ ۳۵۹
- درس دوم: جایگشت (گام‌های ۲۲۴ تا ۲۲۶) ۳۶۲
- آزمون‌های ۱۴۱ و ۱۴۲ ۳۶۵
- درس سوم: ترکیب (گام‌های ۲۲۷ تا ۲۳۰) ۳۶۷
- آزمون‌های ۱۴۳ تا ۱۴۵ ۳۷۲
- درس چهارم: احتمال مقدماتی (گام‌های ۲۳۱ و ۲۳۲) ۳۷۵
- آزمون‌های ۱۴۶ تا ۱۵۰ ۳۸۱
- درس پنجم: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل (گام‌های ۲۳۳ تا ۲۳۶) ۳۸۶
- آزمون‌های ۱۵۱ تا ۱۵۳ ۳۹۱
- درس ششم: قانون احتمال کل (گام‌های ۲۳۷ و ۲۳۸) ۳۹۴
- آزمون‌های ۱۵۴ تا ۱۵۶ ۳۹۸
- درس هفتم: آمار (گام‌های ۲۳۹ تا ۲۴۳) ۴۰۱
- آزمون‌های ۱۵۷ و ۱۵۸ ۴۰۴
- آزمون‌های ۱۵۹ و ۱۶۰: آزمون‌های فصل هفتم ۴۰۶
- آزمون‌های ۱۶۱ و ۱۶۲: آزمون‌های فصل هفتم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۴۰۸

◆ فصل هشتم: بازه و مجموعه

- درس اول: مجموعه‌های اعداد (گام‌های ۲۴۴ و ۲۴۵) ۴۱۰
- آزمون‌های ۱۶۳ و ۱۶۴ ۴۱۳
- درس دوم: مجموعه‌ها (گام‌های ۲۴۶ تا ۲۵۴) ۴۱۵
- آزمون‌های ۱۶۵ و ۱۶۶ ۴۱۹
- آزمون ۱۶۸: آزمون فصل هشتم ۴۲۱

◆ فصل نهم: الگو و دنباله

- درس اول: الگو و دنباله (گام‌های ۲۵۵ تا ۲۵۷) ۴۲۲
- آزمون‌های ۱۶۸ و ۱۶۹ ۴۲۶
- درس دوم: دنبالهٔ حسابی (گام‌های ۲۵۸ تا ۲۶۶) ۴۲۸
- آزمون‌های ۱۷۰ و ۱۷۱ ۴۳۱
- درس سوم: دنبالهٔ هندسی (گام‌های ۲۶۷ تا ۲۷۴) ۴۳۳

آزمون‌های ۱۷۲ و ۱۷۳ ۴۳۷

آزمون ۱۷۴: آزمون فصل نهم ۴۳۹

آزمون ۱۷۵: آزمون فصل نهم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۴۴۰

◆ فصل دهم: توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم

- درس اول: توان و ریشه (گام‌های ۲۷۵ تا ۲۸۰) ۴۴۱
- آزمون‌های ۱۷۶ و ۱۷۷ ۴۴۴
- درس دوم: اتحاد (گام‌های ۲۸۱ تا ۲۸۸) ۴۴۶
- آزمون‌های ۱۷۸ تا ۱۸۱ ۴۵۱
- درس سوم: تجزیه (گام‌های ۲۸۹ و ۲۹۰) ۴۵۵
- آزمون‌های ۱۸۲ و ۱۸۳ ۴۵۸
- درس چهارم: گویا کردن مخرج‌های گنگ (گام ۲۹۱) ۴۶۰
- آزمون ۱۸۴ ۴۶۲
- درس پنجم: بخش‌پذیری و تقسیم (گام‌های ۲۹۲ تا ۲۹۴) ۴۶۳
- آزمون‌های ۱۸۵ و ۱۸۶ ۴۶۵
- آزمون‌های ۱۸۷ و ۱۸۸: آزمون فصل دهم ۴۶۷

◆ فصل یازدهم: معادله، تعیین علامت و نامعادله

- درس اول: حل معادلهٔ درجهٔ دوم (گام‌های ۲۹۵ تا ۳۰۱) ۴۶۹
- آزمون‌های ۱۸۹ و ۱۹۰ ۴۷۳
- درس دوم: روابط بین ضرایب و جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (گام‌های ۳۰۲ تا ۳۰۵) ۴۷۵
- آزمون‌های ۱۹۱ و ۱۹۲ ۴۷۹
- درس سوم: رابطهٔ بین ضرایب و علامت جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (گام‌های ۳۰۶ و ۳۰۷) ۴۸۱
- آزمون ۱۹۳ ۴۸۳
- درس چهارم: معادله‌های درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم خاص (گام‌های ۳۰۸ تا ۳۱۱) ۴۸۴
- آزمون ۱۹۴ ۴۸۸
- درس پنجم: معادله‌های گویا (گام‌های ۳۱۲ تا ۳۱۶) ۴۸۹
- آزمون‌های ۱۹۵ و ۱۹۶ ۴۹۳
- درس ششم: تعیین علامت و نامعادله (گام‌های ۳۱۷ تا ۳۲۴) ۴۹۵
- آزمون‌های ۱۹۷ و ۱۹۸ ۵۰۲

◆ فصل چهاردهم: استدلال و هندسه

درس اول: استدلال، عمودمنصف و نیمساز (گام‌های ۳۵۶ تا ۳۵۹).....	۵۷۵
آزمون ۲۳۱.....	۵۷۸
درس دوم: نسبت و تناسب (گام ۳۶۰).....	۵۷۹
آزمون ۲۳۲.....	۵۸۰
درس سوم: قضیه تالس (گام‌های ۳۶۱ تا ۳۶۶).....	۵۸۱
آزمون‌های ۲۳۳ تا ۲۳۵.....	۵۸۷
درس چهارم: تشابه (گام‌های ۳۶۷ تا ۳۷۰).....	۵۹۱
آزمون‌های ۲۳۶ تا ۲۳۹.....	۵۹۶
درس پنجم: روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه (گام‌های ۳۷۱ و ۳۷۲).....	۶۰۴
آزمون‌های ۲۴۰ و ۲۴۱.....	۶۰۷
آزمون ۲۴۲: آزمون فصل چهاردهم.....	۶۱۱
آزمون ۲۴۳: آزمون فصل چهاردهم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری).....	۶۱۲

◆ فصل پانزدهم: آزمون‌های جامع

آزمون‌های ۲۴۴ تا ۲۶۸: آزمون‌های جامع.....	۶۱۳
---	-----

◆ فصل شانزدهم: پاسخنامهٔ کلیدی

دست گرمی.....	۶۸۶
آزمون‌ها.....	۶۹۶

◆ کنکورهای سراسری

آزمون‌های ۲۶۹ تا ۲۷۱: کنکور سراسری ۱۴۰۴.....	۶۹۷
آزمون ۲۷۲: کنکور سراسری ۱۴۰۵.....	۷۰۵

درس هفتم: معادله‌های گنگ (گام‌های ۳۲۵ تا ۳۲۸).....	۵۰۴
آزمون‌های ۱۹۹ و ۲۰۰.....	۵۰۷
آزمون ۲۰۱: آزمون فصل یازدهم.....	۵۰۹
آزمون‌های ۲۰۲ و ۲۰۳: آزمون‌های فصل یازدهم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری).....	۵۱۰

◆ فصل دوازدهم: قدرمطلق و جزء صحیح

درس اول: قدرمطلق و ویژگی‌های آن (گام ۳۲۹).....	۵۱۲
آزمون ۲۰۴.....	۵۱۴
درس دوم: معادلات و نامعادلات قدرمطلق (گام‌های ۳۳۰ تا ۳۳۳).....	۵۱۵
آزمون‌های ۲۰۵ تا ۲۰۷.....	۵۲۱
درس سوم: توابع شامل قدرمطلق (گام‌های ۳۳۴ تا ۳۳۶).....	۵۲۴
آزمون‌های ۲۰۸ و ۲۰۹.....	۵۲۷
درس چهارم: جزء صحیح و ویژگی‌های آن (گام‌های ۳۳۷ و ۳۳۸).....	۵۲۹
آزمون‌های ۲۱۰ و ۲۱۱.....	۵۳۲
درس پنجم: تابع جزء صحیح (گام‌های ۳۳۹ تا ۳۴۱).....	۵۳۴
آزمون‌های ۲۱۲ و ۲۱۳.....	۵۳۷
آزمون ۲۱۴: آزمون فصل دوازدهم.....	۵۳۹
آزمون ۲۱۵: آزمون فصل دوازدهم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری).....	۵۴۰

◆ فصل سیزدهم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی (گام‌های ۳۴۲ تا ۳۴۴).....	۵۴۱
آزمون‌های ۲۱۶ و ۲۱۷.....	۵۴۵
درس دوم: معادلات و نامعادلات نمایی (گام‌های ۳۴۵ و ۳۴۶).....	۵۴۷
آزمون‌های ۲۱۸ و ۲۱۹.....	۵۵۰
درس سوم: لگاریتم (گام‌های ۳۴۷ تا ۳۴۹).....	۵۵۲
آزمون‌های ۲۲۰ تا ۲۲۲.....	۵۵۵
درس چهارم: توابع لگاریتمی (گام‌های ۳۵۰ تا ۳۵۳).....	۵۵۸
آزمون‌های ۲۲۳ و ۲۲۴.....	۵۶۳
درس پنجم: معادلات و نامعادلات لگاریتمی (گام‌های ۳۵۴ و ۳۵۵).....	۵۶۵
آزمون‌های ۲۲۵ تا ۲۲۷.....	۵۶۹
آزمون ۲۲۸: آزمون فصل سیزدهم.....	۵۷۲
آزمون‌های ۲۲۹ و ۲۳۰: آزمون‌های فصل سیزدهم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری).....	۵۷۳

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

۶۹

تعریف نسبت‌های مثلثاتی

در مثلث قائم‌الزاویه، نسبت طول ضلع مقابل به هر زاویه حاده به طول وتر مثلث را **سینوس** این زاویه می‌نامند:

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}, \quad \sin \hat{C} = \frac{AB}{BC}$$

همچنین، نسبت طول ضلع مجاور به هر زاویه حاده (به‌جز وتر) به طول وتر مثلث را **کسینوس** این زاویه می‌نامند:

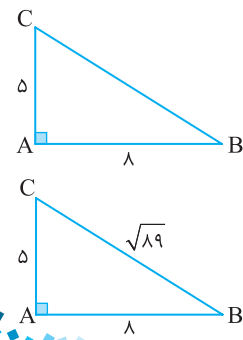
$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}, \quad \cos \hat{C} = \frac{AC}{BC}$$

همین‌طور، نسبت طول ضلع مقابل به هر زاویه حاده به طول ضلع مجاور به این زاویه (به‌جز وتر) را **تانژانت** این زاویه می‌نامند:

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}, \quad \tan \hat{C} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cot \hat{B} = \frac{AB}{AC}, \quad \cot \hat{C} = \frac{AC}{AB}$$

و عکس تانژانت یک زاویه را **کوتانژانت** این زاویه می‌نامند:



در شکل مقابل مقدار $\sin \hat{B} + \cos \hat{B}$ کدام است؟

$$\begin{array}{l} \frac{40}{89} \quad (2) \\ \frac{\sqrt{89}}{13} \quad (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{89}{40} \quad (1) \\ \frac{13}{\sqrt{89}} \quad (3) \end{array}$$

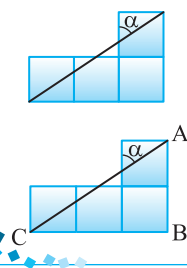
از قضیه فیثاغورس می‌توانیم طول وتر مثلث را به‌دست آوریم: $BC = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}$. بنابراین

$$\sin \hat{B} + \cos \hat{B} = \frac{AC}{BC} + \frac{AB}{BC} = \frac{5}{\sqrt{89}} + \frac{8}{\sqrt{89}} = \frac{13}{\sqrt{89}}$$

تست

□□□□

را حل



در شکل مقابل طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

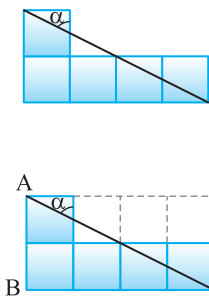
از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که طبق قضیه خطوط موازی و مورب، $\alpha = \hat{CAB}$. بنابراین

$$\tan \alpha = \tan \hat{CAB} = \frac{CB}{AB} = \frac{3}{2}$$

تست

□□□□

را حل



در شکل مقابل طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (3)$$

از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. توجه کنید که بنابر قضیه خطوط موازی و مورب، $\alpha = \hat{ACD}$. بنابراین

$$\sin \alpha = \sin \hat{ACD} = \frac{AD}{AC}$$

از طرف دیگر، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ACD ، $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 4^2 + 2^2 = 20$. پس

$$\sin \alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

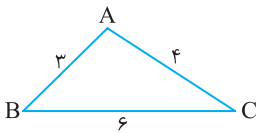
تست

□□□□

را حل

تست

□□□□

در شکل مقابل مقدار $\cos \hat{B} + \frac{4}{3} \cos \hat{C}$ کدام است؟

$$\begin{matrix} 1 & (2) \\ \frac{3}{4} & (4) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & (1) \\ \frac{4}{3} & (3) \end{matrix}$$

راه حل

مطابق شکل، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه ABH، $\cos \hat{B} = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{3}$. در مثلث قائم‌الزاویه AHC، $\cos \hat{C} = \frac{HC}{AC} = \frac{HC}{4}$. بنابراین $\cos \hat{B} + \frac{4}{3} \cos \hat{C} = \frac{BH}{3} + \frac{4}{3} \left(\frac{HC}{4} \right) = \frac{BH+HC}{3} = \frac{BC}{3} = \frac{6}{3} = 2$.

۷۰

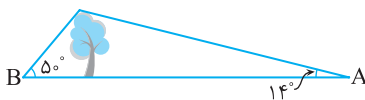
نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های معروف

مقدار نسبت مثلثاتی	$\sin \hat{A}$	$\cos \hat{A}$	$\tan \hat{A}$	$\cot \hat{A}$
مقدار زاویه A				
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۱	۱
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

تست

□□□□

مطابق شکل درختی به ارتفاع ۳ متر از نقطه A با زاویه 14° و از نقطه B با زاویه 5° دیده می‌شود. فاصله A از B تقریباً چقدر است؟ ($\tan 5^\circ \approx 1/19$, $\tan 14^\circ \approx 0/25$)



$$12/52 \quad (4)$$

$$14/52 \quad (3)$$

$$13/52 \quad (2)$$

$$12 \quad (1)$$

راه حل

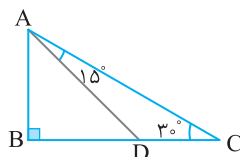
مطابق شکل روبه‌رو، در مثلث قائم‌الزاویه CBH، $\tan 5^\circ = \frac{CH}{BH} = \frac{3}{BH}$. پس $\frac{3}{BH} = \frac{1}{19}$ ، یعنی $BH = \frac{3}{1/19} = 57$.

در مثلث قائم‌الزاویه AHC، $\tan 14^\circ = \frac{CH}{HA} = \frac{3}{HA}$. پس $\frac{3}{HA} = \frac{0}{25}$ ، یعنی $HA = \frac{3}{0/25} = 12$.

بنابراین فاصله دو نقطه A و B تقریباً برابر است با $BA = BH + HA = 57 + 12 = 69$.

تست

□□□□

در شکل مقابل طول CD چقدر است؟ ($AD = 2\sqrt{2}$)

$$\begin{matrix} 2(\sqrt{3}+1) & (2) \\ 3\sqrt{3} & (4) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2(\sqrt{3}-1) & (1) \\ 2\sqrt{3} & (3) \end{matrix}$$

راه حل

ابتدا توجه کنید که $\hat{BAC} = 90^\circ - \hat{C} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. پس $\hat{BAD} = \hat{BAC} - \hat{DAC} = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$.

$$\cos \hat{BAD} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{AB}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{2\sqrt{2}}$$

در مثلث قائم‌الزاویه DBA،

$$\sin \hat{BAD} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{BD}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BD}{2\sqrt{2}}$$

بنابراین $AB = 2$. همچنین، در همین مثلث،

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{BC} \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$$

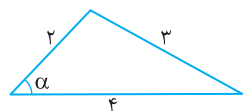
بنابراین $BD = 2$. از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC،

$$\text{به این ترتیب } CD = BC - BD = 2\sqrt{3} - 2 = 2(\sqrt{3} - 1)$$

تست

۷

در شکل مقابل مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟



(۱) $\frac{7}{8}$

(۲) $\frac{13}{16}$

(۳) $\frac{3}{4}$

(۴) $\frac{11}{16}$

راه حل

از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می کنیم. ارتفاع AH را رسم می کنیم. در مثلث های قائم الزاویه ABH و ACH با توجه به قضیه فیثاغورس،

$$x^2 + h^2 = 4, \quad h^2 + (4-x)^2 = 9 \Rightarrow h^2 + x^2 + 16 - 8x = 9$$

اگر به جای $x^2 + h^2$ در معادله دوم مقدار ۴ را قرار دهیم، می توان مقدار x را به دست آورد

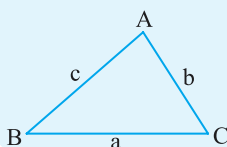
$$4 + 16 - 8x = 9 \Rightarrow 8x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{8}$$

اکنون در مثلث قائم الزاویه ABH مقدار $\cos \alpha$ را به دست می آوریم $\cos \hat{B} = \frac{BH}{AB}$ پس $\cos \alpha = \frac{x}{2} = \frac{11}{16}$

۷۱

محاسبه مساحت مثلث

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب طول های دو ضلع آن در سینوس زاویه میان این دو ضلع.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$$

تست

۸

در مثلث متساوی الساقین ABC می دانیم $AB=AC$ ، $\hat{B} = 67/5^\circ$ و مساحت مثلث $9\sqrt{2}$ است. طول ساق مثلث کدام است؟

(۴) ۶

(۳) ۴

(۲) ۳

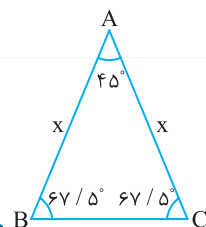
(۱) ۲

راه حل

مطابق شکل مقابل اندازه زاویه A برابر 45° است و اگر طول ساق مثلث را x فرض کنیم، مساحت مثلث برابر

$$S = \frac{1}{2} x^2 \sin \hat{A} \text{ است. پس}$$

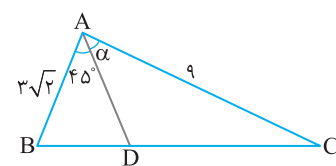
$$9\sqrt{2} = \frac{1}{2} x^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$



تست

۹

در شکل روبه رو $S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{ADC}$ مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟



(۲) $\frac{2}{3}$

(۱) $\frac{1}{3}$

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{3}{4}$

راه حل

توجه کنید که

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{ADC} \Rightarrow \frac{1}{2} AB \times AD \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} AD \times AC \times \sin \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 9 \times \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

تست

۱۰

در یک متوازی الاضلاع که مساحت آن برابر $10\sqrt{3}$ است، اندازه یک ضلع برابر ۲ و اندازه یک زاویه 60° است. اندازه ضلع دیگر کدام است؟

(۴) ۱۲

(۳) ۸

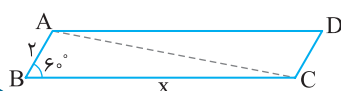
(۲) ۱۰

(۱) ۵

راه حل

مساحت متوازی الاضلاع ABCD دو برابر مساحت مثلث ABC است. پس مساحت مثلث ABC برابر $5\sqrt{3}$ است. بنابراین

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times x \times \sin 60^\circ \Rightarrow 5\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} x \Rightarrow x = 10$$



تست



در شکل مقابل نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث CDE

برابر $\frac{3}{4}$ است. مقدار x کدام است؟

- (۲) ۶
(۴) ۱۰

- (۱) ۴
(۳) ۹

توجه کنید که $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ ، پس $\sin \hat{C}_1 = \sin \hat{C}_2$. از طرف دیگر،

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CDE}} = \frac{\frac{1}{2} CA \times CB \times \sin \hat{C}_1}{\frac{1}{2} CD \times CE \times \sin \hat{C}_2} = \frac{CA \times CB}{CD \times CE} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{2 \times x} \Rightarrow x = 10$$

راه حل

دست گرمی

۵۹- در مثلث قائم الزاویه ABC، اگر $b=5$ و $\cos \hat{B} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ ، مقدار a کدام است؟

- (۲) ۷
(۴) ۱۴

- (۱) ۶
(۳) $\sqrt{7}$

۶۰- در شکل مقابل طول ضلع مربع های کوچک یک واحد است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

- (۲) ۲
(۴) ۴

- (۱) ۱
(۳) ۳

۶۱- در شکل مقابل طول ضلع مربع های کوچک یک واحد است. مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

- (۲) $\frac{2}{\sqrt{13}}$
(۴) $\frac{2}{\sqrt{11}}$

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{13}}$
(۳) $\frac{1}{\sqrt{11}}$

۶۲- مقدار عبارت $A = \frac{4 \sin^3 6^\circ - 3 \sin 6^\circ}{4 \cos^3 2^\circ - 3 \cos 2^\circ}$ کدام است؟

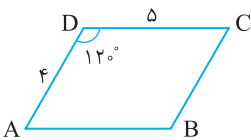
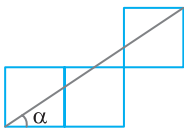
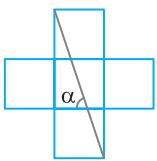
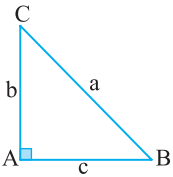
- (۲) -۱
(۴) صفر

- (۱) ۱
(۳) $\frac{1}{2}$

۶۳- در شکل مقابل مساحت متوازی الاضلاع ABCD چقدر است؟

- (۲) $10\sqrt{3}$
(۴) ۱۰

- (۱) $5\sqrt{3}$
(۳) ۵



نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه (۱)

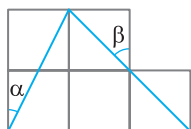
آزمون ۳۷

سؤال	گام
۳۶۱	۶۹
۳۶۲	۶۹
۳۶۳	۶۹
۳۶۴	۶۹ ۷۰
۳۶۵	۶۹
۳۶۶	۶۹
۳۶۷	۶۹
۳۶۸	۶۹
۳۶۹	۷۰ ۷۱
۳۷۰	۷۱

۳۶۱- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، $\hat{A}=90^\circ$ ، $\sin \hat{B}=\frac{1}{3}$ و $AC=2$. مقدار $\tan \hat{C}$ کدام است؟

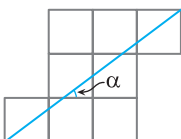
- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{3}$

۳۶۲- در شکل زیر طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\sin \alpha - \cos \beta$ کدام است؟



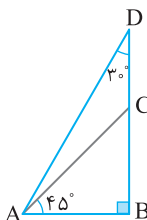
- (۱) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ (۲) $\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ (۳) $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$

۳۶۳- در شکل روبه‌رو طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\tan \alpha + \cot \alpha$ کدام است؟



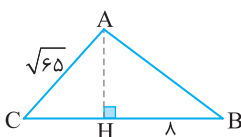
- (۱) $\frac{25}{6}$ (۲) $\frac{49}{16}$ (۳) $\frac{49}{15}$ (۴) $\frac{25}{12}$

۳۶۴- در شکل مقابل نسبت طول DC به طول AC کدام است؟



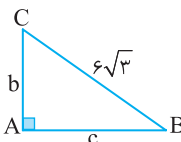
- (۱) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

۳۶۵- در شکل مقابل $HB=8$ و $\tan \hat{B}=\frac{3}{4}$. طول CH کدام است؟



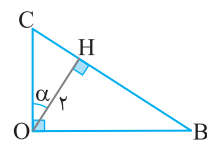
- (۱) $\sqrt{29}$ (۲) ۶ (۳) $\sqrt{35}$ (۴) $\sqrt{24}$

۳۶۶- در شکل مقابل $\cot \hat{B}=\sqrt{2}$. مساحت مثلث چقدر است؟



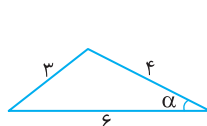
- (۱) ۱۸ (۲) ۳۶ (۳) $18\sqrt{2}$ (۴) $36\sqrt{2}$

۳۶۷- در شکل مقابل $OH=2$. مقدار $OB+OC$ کدام است؟



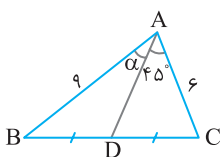
- (۱) $\tan \alpha + \cot \alpha$ (۲) $\frac{2}{\sin \alpha} + \frac{2}{\cos \alpha}$ (۳) $2 \tan \alpha$ (۴) $2 \cot \alpha$

۳۶۸- در شکل مقابل مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟



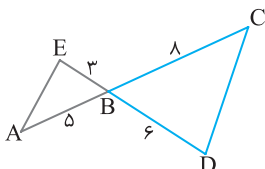
- (۱) $\frac{\sqrt{455}}{36}$ (۲) $\frac{\sqrt{455}}{48}$ (۳) $\frac{29}{36}$ (۴) $\frac{29}{48}$

۳۶۹- در شکل مقابل مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟



- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۳۷۰- در شکل مقابل نسبت مساحت مثلث ABE به مساحت مثلث BCD چقدر است؟



- (۱) $\frac{5}{16}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{7}{15}$ (۴) $\frac{3}{5}$

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه (۲)

آزمون ۳۸

۳۷۱- در مثلث ABC ، اگر $\hat{C}=90^\circ$ ، $\sin \hat{B}=\frac{4}{5}$ و $b+c=7$ ، مقدار a کدام است؟

$$\frac{11}{3} \quad (۴)$$

$$3 \quad (۳)$$

$$\frac{7}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{3} \quad (۱)$$

۳۷۲- در شکل روبه‌رو طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{5}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{5} \quad (۳)$$

۳۷۳- در شکل مقابل نسبت طول ضلع HC به طول ضلع BH چقدر است؟

$$2 \quad (۲)$$

$$\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$\sqrt{5} \quad (۴)$$

$$3 \quad (۳)$$

۳۷۴- مطابق شکل روبه‌رو از دو نقطه A و B روی زمین که ۲۴ متر از هم فاصله دارند،

بالاترین قسمت یک ساختمان به ترتیب با زاویه‌های 3° و 6° دیده می‌شود. ارتفاع

ساختمان کدام است؟

$$6\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$2\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$3\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$4\sqrt{3} \quad (۳)$$

۳۷۵- در مثلث متساوی‌الساقین مقابل $AB=BC$ و طول ارتفاع وارد بر ضلع BC برابر

$8\sqrt{3}$ است. طول ضلع BC کدام است؟

$$16 \quad (۲)$$

$$8 \quad (۱)$$

$$16\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$8\sqrt{3} \quad (۳)$$

۳۷۶- در شکل روبه‌رو $CM=AB$ و $\tan \theta = 3 \tan \alpha$. حاصل عبارت $\cot \alpha + \cot \theta$ کدام

است؟

$$4 \quad (۲)$$

$$2 \quad (۱)$$

$$7 \quad (۴)$$

$$5 \quad (۳)$$

۳۷۷- در شکل مقابل $BC=4$. مقدار $\frac{BH}{HC}$ کدام است؟

$$\tan^2 \beta \quad (۲)$$

$$\tan^2 \alpha \quad (۱)$$

$$\sin \beta + \cos \beta \quad (۴)$$

$$\sin \alpha \cos \alpha \quad (۳)$$

۳۷۸- در نیم‌دایره شکل روبه‌رو، $BD=x$ و $DC=8x$. مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

۳۷۹- در شکل مقابل طول ضلع AB چقدر است؟

$$2\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$\sqrt{2} \quad (۱)$$

$$8\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$4\sqrt{2} \quad (۳)$$

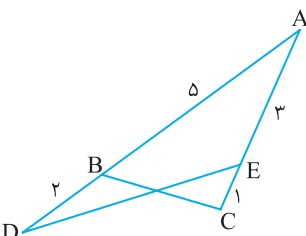
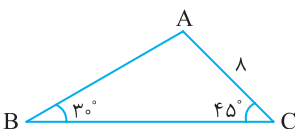
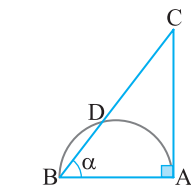
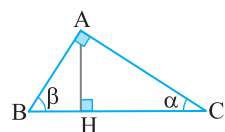
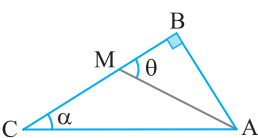
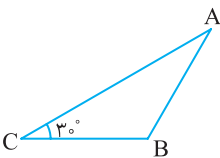
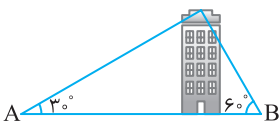
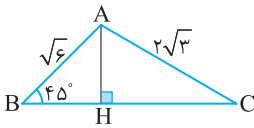
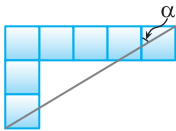
۳۸۰- در شکل روبه‌رو $S_{ADE} + S_{ABC} = \frac{41}{4}$. اندازه زاویه حاده A کدام است؟

$$45^\circ \quad (۲)$$

$$60^\circ \quad (۱)$$

$$15^\circ \quad (۴)$$

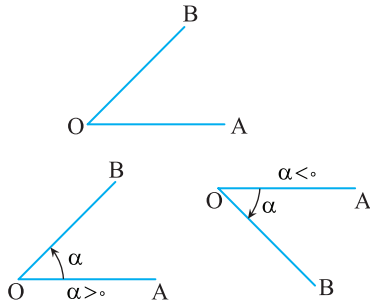
$$30^\circ \quad (۳)$$



سؤال	گام
۳۷۱	۶۹
۳۷۲	۶۹
۳۷۳	۶۹ ۷۰
۳۷۴	۶۹ ۷۰
۳۷۵	۶۹ ۷۰
۳۷۶	۶۹
۳۷۷	۶۹
۳۷۸	۶۹
۳۷۹	۶۹ ۷۰ ۷۱
۳۸۰	۷۰ ۷۱

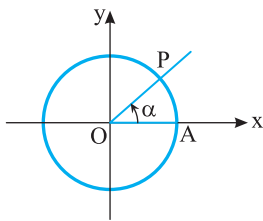
درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی

زاویه مثلثاتی

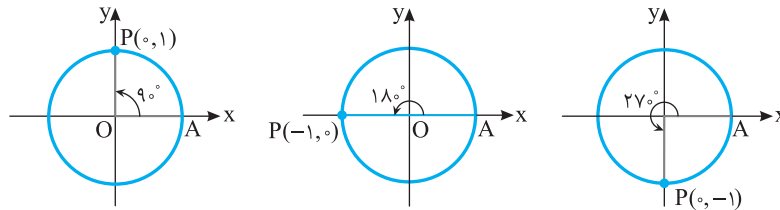


دو نیم خط OA و OB را در نظر بگیرید که در نقطه O مشترک اند. اگر نیم خط OA حول نقطه O دوران کند و بر نیم خط OB منطبق شود، **زاویه‌ای مثلثاتی** ایجاد می‌شود. OA را ضلع ابتدایی، OB را ضلع انتهایی و مقدار دوران را **مقدار زاویه مثلثاتی** می‌نامند. اگر دوران در جهت حرکت عقربه‌های ساعت (ساعتگرد) باشد، اندازه زاویه را منفی در نظر می‌گیرند و اگر در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت (پادساعتگرد) باشد، اندازه زاویه را مثبت در نظر می‌گیرند. اگر رأس زاویه بر مبدأ مختصات واقع باشد و ضلع ابتدایی زاویه بر قسمت مثبت محور طول‌ها واقع باشد، می‌گوییم زاویه در **موقعیت استاندارد** است. از این پس تمام زاویه‌ها را در موقعیت استاندارد در نظر می‌گیریم.

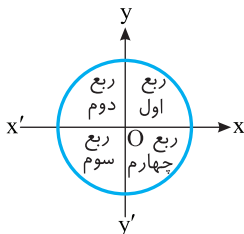
دایره مثلثاتی



دایره‌ای به شعاع ۱ واحد را که مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق باشد، **دایره مثلثاتی** می‌نامند. نقطه تقاطع دایره با محور طول‌ها $A(1, 0)$ و OA ضلع ابتدایی تمام زاویه‌های مثلثاتی است. اگر OA به اندازه α مطابق شکل روبه‌رو دوران کند، بر OP منطبق می‌شود. α را اندازه زاویه مثلثاتی ایجاد شده و کمان AP را کمان روبه‌رو به زاویه α می‌نامیم. چون ضلع ابتدایی تمام زاویه‌های مثلثاتی را OA فرض کرده‌ایم، پس با معلوم بودن نقطه P روی دایره و جهت دوران، زاویه α مشخص می‌شود. مثلاً وقتی P در نقطه‌های $(0, 1)$ ، $(-1, 0)$ و $(0, -1)$ قرار گیرد و جهت دوران پادساعتگرد باشد، زاویه‌های زیر مشخص می‌شوند:



ناحیه‌های مثلثاتی



محورهای $x'Ox$ و $y'Oy$ صفحه مختصات را به چهار ناحیه تقسیم کرده‌اند. ناحیه بین Ox و Oy را **ناحیه اول** یا **ربع اول** مثلثاتی می‌نامند. همچنین ناحیه بین Oy و Ox' را **ربع دوم** مثلثاتی، ناحیه بین Ox' و Oy' را **ربع سوم** مثلثاتی و ناحیه بین Oy' و Ox را **ربع چهارم** مثلثاتی می‌نامند.

تذکر

اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در نقطه‌های $(0, 1)$ ، $(-1, 0)$ ، $(0, -1)$ یا $(1, 0)$ قرار داشته باشد، زاویه α در هیچ‌یک از چهار ناحیه مثلثاتی قرار ندارد.

نکته

ناحیه‌ای که نقطه P ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α ، در آن قرار می‌گیرد برای زاویه‌های مختلف از 0° تا 360° مطابق جدول زیر است:

حدود α	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	$270^\circ < \alpha < 360^\circ$
ناحیه‌ای که P قرار دارد	اول	دوم	سوم	چهارم

تست

□□□□

راه حل

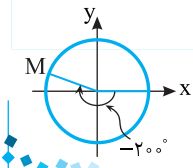
انتهای کمان روبه‌رو به زاویه -20° در کدام ناحیه قرار دارد؟

(۱) اول

(۲) دوم

(۳) سوم

(۴) چهارم

مطابق شکل روبه‌رو انتهای کمان روبه‌رو به زاویه -20° در ناحیه دوم قرار دارد.

تست

□□□□

راه حل

اگر α زاویه‌ای حاده باشد، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه $\alpha + 18^\circ$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

(۱) اول

(۲) دوم

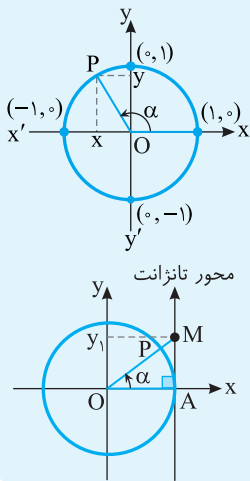
(۳) سوم

(۴) چهارم

چون α زاویه‌ای حاده است، پس $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ، بنابراین $18^\circ < \alpha + 18^\circ < 27^\circ$ و در نتیجه انتهای کمان روبه‌رو به زاویه $\alpha + 18^\circ$ در ناحیه سوم قرار دارد.

۷۳

نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی



در دایره مثلثاتی مقابل برای هر زاویه مانند α ، $\sin \alpha$ برابر عرض نقطه P یعنی y است. پس $\sin \alpha$ با عددی روی محور $y'Oy$ متناظر است. محور $y'Oy$ را **محور سینوس** می‌نامند و چون $-1 \leq y \leq 1$ ، پس $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$. همچنین $\cos \alpha$ برابر طول نقطه P یعنی x است. پس $\cos \alpha$ با عددی روی محور $x'Ox$ متناظر است. محور $x'Ox$ را **محور کسینوس** می‌نامند و چون $-1 \leq x \leq 1$ ، پس $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.

در نقطه $A(1, 0)$ محوری عمود بر محور x رسم می‌کنیم و جهت مثبت آن را مانند محور y انتخاب می‌کنیم. این محور را **محور تانژانت** می‌نامیم. مقدار تانژانت هر زاویه دلخواه، اگر تعریف شده باشد، روی این محور قابل نمایش است. در مثلث قائم‌الزاویه OAM در شکل مقابل می‌توان نوشت $\tan \alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{AM}{1} = AM$. برای مشخص کردن تانژانت زاویه α ، کافی است شعاع OP، ضلع انتهایی زاویه α ، را امتداد دهیم تا محور تانژانت را در نقطه $M(1, y_1)$ قطع کند. در این صورت $y_1 = \tan \alpha$.

نکته

اگر ضلع انتهایی زاویه α روی محور y قرار داشته باشد، تانژانت زاویه α تعریف نمی‌شود.

تست

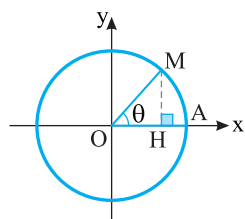
□□□□

راه حل

در دایره مثلثاتی مقابل، $\cos \theta = \frac{2}{3}$. اندازه پاره خط AH چقدر است؟(۱) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$
(۴) $1 - \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$OH = \cos \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow AH = OA - OH = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

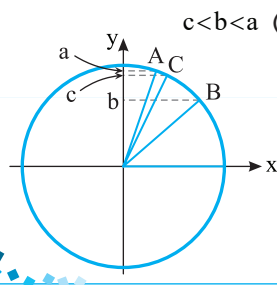
با توجه به شکل،



تست

□□□□

راه حل

اگر $a = \sin 71^\circ$ ، $b = \sin 41^\circ$ و $c = \sin 67^\circ$ ، کدام درست است؟(۱) $a < b < c$ (۲) $b < c < a$ (۳) $a < c < b$ (۴) $c < b < a$ فرض کنید نقاط A، B و C به ترتیب انتهای کمان‌های روبه‌رو به زاویه‌های 71° ، 41° و 67° روی دایره مثلثاتی باشند. از روی شکل مقابل معلوم می‌شود که $b < c < a$.

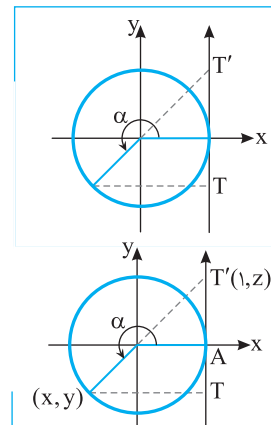
تست

۵

در دایرهٔ مثلثاتی مقابل، طول پاره خط TT' برابر کدام عبارت است؟

- (۱) $\tan \alpha - \sin \alpha$
(۲) $\tan \alpha + \sin \alpha$
(۳) $\sin \alpha - \cos \alpha$
(۴) $\sin \alpha + \cos \alpha$

را حل

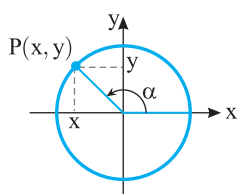


با توجه به شکل روبه‌رو واضح است که $\sin \alpha = y$ و $\tan \alpha = z$. بنابراین طول پاره خط TT' برابر است با

$$TT' = AT + AT' = |y| + |z| = -y + z = -\sin \alpha + \tan \alpha$$

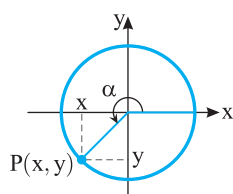
علامت نسبت‌های مثلثاتی

اگر نقطهٔ P انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α ، در ناحیهٔ اول مثلثاتی واقع باشد، طول و عرض آن مثبت است و تمام نسبت‌های مثلثاتی α مثبت‌اند. اگر نقطهٔ P در ناحیه‌های دوم، سوم و چهارم مثلثاتی قرار گیرد، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α می‌توانند مثبت یا منفی باشند، زیرا طول و عرض نقطهٔ P در این ناحیه‌ها می‌توانند مثبت یا منفی باشند. به شکل‌های زیر دقت کنید:



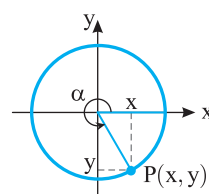
$$\sin \alpha = y > 0, \quad \cos \alpha = x > 0$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} > 0, \quad \cot \alpha = \frac{x}{y} > 0$$



$$\sin \alpha = y > 0, \quad \cos \alpha = x < 0$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} < 0, \quad \cot \alpha = \frac{x}{y} < 0$$



$$\sin \alpha = y < 0, \quad \cos \alpha = x < 0$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} > 0, \quad \cot \alpha = \frac{x}{y} > 0$$

نکته

علامت نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α ، وقتی انتهای کمان روبه‌رو به آن در ناحیه‌های مختلف قرار می‌گیرد، مطابق جدول زیر است:

نسبت \ ناحیه	اول	دوم	سوم	چهارم
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

تست

۶

اگر $|\sin \alpha| = \sin \alpha$ و $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟ ($\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

را حل

با توجه به تساوی $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ ، معلوم است که $\cos \alpha \leq 0$. با توجه به تساوی $|\sin \alpha| = \sin \alpha$ ، معلوم است که $\sin \alpha \geq 0$. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ربع دوم مثلثاتی قرار دارد.

تست

۷

اگر $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ و $\sin \alpha \tan \alpha > 0$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

را حل

با توجه به $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ مشخص است که مقادیر $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ مختلف‌العلامت هستند. پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ دوم یا چهارم قرار دارد. با توجه به $\sin \alpha \tan \alpha > 0$ واضح است که $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ هم‌علامت هستند. پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ اول یا چهارم قرار دارد. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم قرار دارد.

تست

کدام یک عددی مثبت است؟

$\cos 300^\circ$ (۴)

$\sin 300^\circ$ (۳)

$\cos 200^\circ$ (۲)

$\sin 200^\circ$ (۱)

راه حل

انتهای کمان روبه‌رو به زاویه 200° در ربع سوم قرار دارد، پس $\sin 200^\circ$ و $\cos 200^\circ$ اعدادی منفی هستند. انتهای کمان روبه‌رو به زاویه 300° در ربع چهارم قرار دارد، پس $\sin 300^\circ$ عددی منفی و $\cos 300^\circ$ عددی مثبت است.

۷۵

نسبت‌های مثلثاتی چند زاویه معروف

زاویه نسبت	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 180^\circ$	$\alpha = 270^\circ$	$\alpha = 360^\circ$
$\sin \alpha$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos \alpha$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan \alpha$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot \alpha$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

۷۶

نکته

برای هر زاویه دلخواه مانند α ، $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ ، $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ ، $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ عددی در بازه $(-\infty, +\infty)$ است.

تست

حداکثر مقدار عبارت $4 \cos \alpha - 1$ کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

راه حل

طرفین نابرابری $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ را در ۴ ضرب می‌کنیم $-4 \leq 4 \cos \alpha \leq 4$. یک واحد از طرفین نابرابری اخیر کم می‌کنیم $-5 \leq 4 \cos \alpha - 1 \leq 3$. بنابراین حداکثر مقدار عبارت ۳ است.

تست

مجموع حداکثر و حداقل مقدار عبارت $\frac{\sin \alpha}{2 + \sin \alpha}$ کدام است؟

$-\frac{2}{3}$ (۴)

$-\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

راه حل

ابتدا عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A = \frac{\sin \alpha}{2 + \sin \alpha} = \frac{2 + \sin \alpha - 2}{2 + \sin \alpha} = \frac{2 + \sin \alpha}{2 + \sin \alpha} - \frac{2}{2 + \sin \alpha} = 1 - \frac{2}{2 + \sin \alpha}$$

اکنون با توجه به اینکه $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ می‌توانیم محدوده A را بیابیم:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 + \sin \alpha \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin \alpha} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \frac{-2}{2 + \sin \alpha} \leq -1 \Rightarrow -1 \leq 1 - \frac{2}{2 + \sin \alpha} \leq \frac{1}{3}$$

بنابراین حداقل مقدار A برابر -1 و حداکثر مقدار آن $\frac{1}{3}$ است. در نتیجه مجموع حداقل و حداکثر مقدار عبارت، برابر $-\frac{2}{3}$ است.

۷۷

حدود نسبت‌های مثلثاتی در نواحی مختلف

نکته

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	$270^\circ < \alpha < 360^\circ$
$0 < \sin \alpha < 1$	$0 < \sin \alpha < 1$	$-1 < \sin \alpha < 0$	$-1 < \sin \alpha < 0$
$0 < \cos \alpha < 1$	$-1 < \cos \alpha < 0$	$-1 < \cos \alpha < 0$	$0 < \cos \alpha < 1$
$\tan \alpha > 0$	$\tan \alpha < 0$	$\tan \alpha > 0$	$\tan \alpha < 0$
$\cot \alpha > 0$	$\cot \alpha < 0$	$\cot \alpha > 0$	$\cot \alpha < 0$

تست
□□□□

اگر $180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$ ، اختلاف حداقل و حداکثر مقدار عبارت $A = 3 - 2 \sin \alpha$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

را حل

با توجه به $180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$ ، معلوم می‌شود α در ناحیه سوم مثلثاتی قرار دارد و می‌توان نتیجه گرفت $-1 \leq \sin \alpha \leq 0$. بنابراین $-2 \leq -2 \sin \alpha \leq 0$ و در نتیجه $3 - 2 \sin \alpha \leq 5$. پس حداقل مقدار A برابر ۳ و حداکثر مقدار آن برابر ۵ است و اختلاف آن‌ها ۲ است.

۷۸

نکته

با افزایش مقادیر α از 0° به 360° ،

مقادیر $\sin \alpha$ در ناحیه‌های اول و چهارم در حال افزایش و در ناحیه‌های دوم و سوم در حال کاهش هستند.

مقادیر $\cos \alpha$ در ناحیه‌های اول و دوم در حال کاهش و در ناحیه‌های سوم و چهارم در حال افزایش هستند.

مقادیر $\tan \alpha$ در هر چهار ناحیه در حال افزایش هستند.

تست
□□□□

کدام مقدار بزرگ‌تر است؟

$\sin 24^\circ$ (۴)

$\sin 200^\circ$ (۳)

$\sin 14^\circ$ (۲)

$\sin 100^\circ$ (۱)

را حل

توجه کنید که انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های 100° و 14° در ناحیه دوم قرار دارد و سینوس این اعداد مثبت هستند و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های 200° و 24° در ناحیه سوم قرار دارند و سینوس این اعداد منفی هستند. از طرف دیگر در ناحیه دوم، زاویه بزرگ‌تر سینوس کوچک‌تری دارد. بنابراین $\sin 100^\circ$ در بین مقادیر داده شده از همه بزرگ‌تر است.

تست
□□□□

اگر $-6^\circ \leq \alpha \leq 6^\circ$ و $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{m}{4}$ ، چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

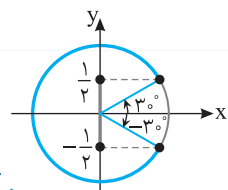
۲ (۲)

۱ (۱)

را حل

از $-6^\circ \leq \alpha \leq 6^\circ$ نتیجه می‌گیریم $-3^\circ \leq \frac{\alpha}{2} \leq 3^\circ$. با توجه به شکل روبه‌رو $-\frac{1}{2} \leq \sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{2}$ و در نتیجه

$-\frac{1}{2} \leq \frac{m}{4} \leq \frac{1}{2}$ ، یعنی $-2 \leq m \leq 2$. بنابراین m می‌تواند مقادیر صحیح 1 ، 0 ، -1 و -2 باشد.



تست
□□□□

اگر $-6^\circ < \alpha < 6^\circ$ و $\cos \alpha = 3m + 1$ ، حدود m کدام است؟

$-\frac{1}{6} < m \leq 0$ (۴)

$-\frac{1}{6} < m < \frac{1}{6}$ (۳)

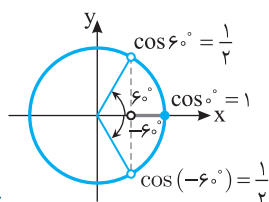
$0 \leq m < \frac{1}{6}$ (۲)

$-\frac{1}{6} < m < 0$ (۱)

را حل

وقتی α از -6° تا 6° تغییر می‌کند، مقدار $\cos \alpha$ از -6° تا 6° افزایش می‌یابد و سپس از 6° تا 0° کاهش می‌یابد. بنابراین $\cos \alpha$ در $\alpha = 0^\circ$ به بیشترین مقدار خود، یعنی ۱ می‌رسد. پس

$$\frac{1}{2} < \cos \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < 3m + 1 \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < 3m \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{6} < m \leq 0$$



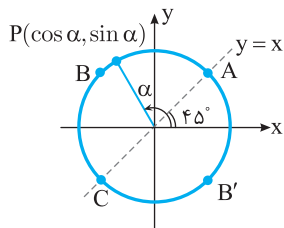
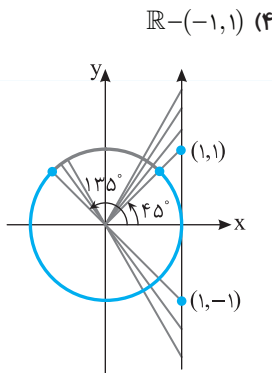
تست ۱۵

اگر $۴۵^\circ \leq \alpha \leq ۱۳۵^\circ$ ، مقادیر $\tan \alpha$ در کدام محدوده قرار دارند؟

- (۱) $[-۱, ۱]$ (۲) $[-۱, +\infty)$ (۳) $(-\infty, ۱]$ (۴) $\mathbb{R} - (-۱, ۱)$

راهنما

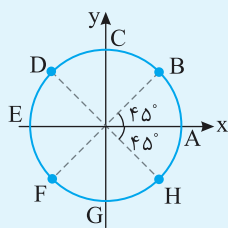
با توجه به شکل روبه‌رو، وقتی $۴۵^\circ \leq \alpha \leq ۱۳۵^\circ$ ، $\tan \alpha \geq ۱$ یا $\tan \alpha \leq -۱$ ، یعنی مقادیر $\tan \alpha$ در $\mathbb{R} - (-۱, ۱)$ قرار دارند.



از روی شکل مقابل معلوم است که اگر نقطه (x, y) روی کمان ABC از دایره مثلثاتی باشد، آن‌گاه $y > x$. بنابراین اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α روی کمان ABC باشد، آن‌گاه $\sin \alpha > \cos \alpha$. همین‌طور، اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α روی کمان $AB'C$ باشد، آن‌گاه $\sin \alpha < \cos \alpha$. به همین ترتیب نتایج زیر به دست می‌آید.

نکته

۷۹



شکل مقابل را در نظر بگیرید. فرض کنید نقطه $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α روی

دایره مثلثاتی باشد. در این صورت

● اگر نقطه P روی کمان BDF باشد، آن‌گاه $\sin \alpha > \cos \alpha$ و اگر نقطه P روی کمان BHF باشد، آن‌گاه $\sin \alpha < \cos \alpha$.

● اگر نقطه P روی کمان DBH باشد، آن‌گاه $\sin \alpha + \cos \alpha > ۰$ و اگر نقطه P روی کمان DFH باشد، آن‌گاه $\sin \alpha + \cos \alpha < ۰$.

● اگر نقطه P روی کمان‌های AB ، CD ، EF یا GH باشد (به شرطی که $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ تعریف شوند)، آن‌گاه $\tan \alpha < \cot \alpha$ و اگر نقطه P روی کمان‌های BC ، DE ، FG یا HA باشد، آن‌گاه $\tan \alpha > \cot \alpha$.

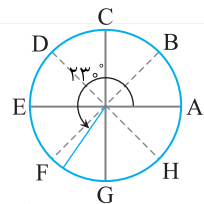
● اگر نقطه P روی کمان‌های ABC یا EFG باشد (به شرطی که $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ تعریف شوند)، آن‌گاه $\tan \alpha + \cot \alpha > ۰$ و اگر نقطه P روی کمان‌های CDE یا GHA باشد، آن‌گاه $\tan \alpha + \cot \alpha < ۰$.

کدام گزینه درست است؟

- (۱) $\sin ۲۵^\circ > \cos ۲۵^\circ$ (۲) $\tan ۲۵^\circ > \cot ۲۵^\circ$ (۳) $\sin ۲۳^\circ > \cos ۲۳^\circ$ (۴) $\tan ۲۳^\circ > \cot ۲۳^\circ$

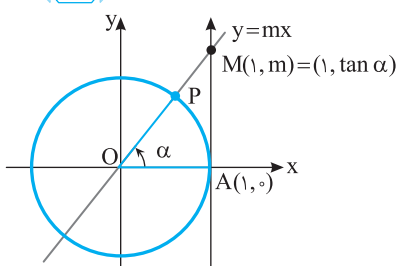
راهنما

با توجه به شکل مقابل، چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه ۲۳° روی کمان FG است، پس $\tan ۲۳^\circ > \cot ۲۳^\circ$. خودتان بررسی کنید که گزینه‌های دیگر درست نیستند.



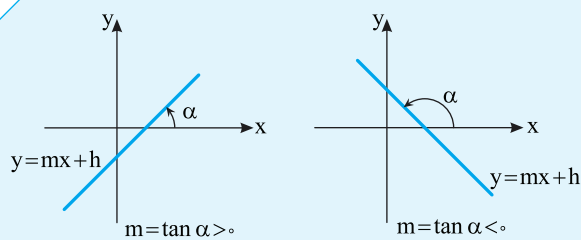
رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

۸۰



می‌دانیم مقدار $\tan \alpha$ برابر عرض نقطه M ، محل برخورد امتداد شعاع OP با محور تانژانت است (شکل روبه‌رو را ببینید). از طرف دیگر، طول نقطه M برابر ۱ است و این نقطه روی خط $y=mx$ قرار دارد، پس عرض آن برابر m است. بنابراین $m = \tan \alpha$. اکنون توجه کنید که همه خط‌های موازی با خط $y=mx$ شیب یکسان با این خط دارند و آن‌ها نیز محور طول‌ها را با زاویه α قطع می‌کنند. بنابراین شیب تمام این خط‌ها همان $\tan \alpha$ است.

نکته



اگر محور طول‌ها و خط $y=mx+h$ یک زاویه مثلثاتی مثبت و کمتر از ۱۸۰° به اندازه α تشکیل دهند، آنگاه $m=\tan \alpha$.

تست ۱۷

معادله خطی که از نقطه $(\sqrt{12}, -2)$ می‌گذرد و با محور طول‌ها زاویه مثلثاتی ۶۰° می‌سازد، کدام است؟

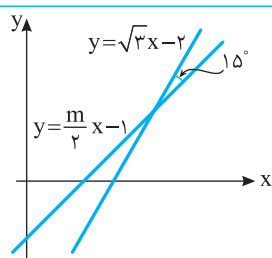
(۱) $y=\sqrt{3}x+8$ (۲) $y=\sqrt{3}x-8$ (۳) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-4$ (۴) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$

راهنما

با توجه به زاویه خط با محور طول‌ها که برابر زاویه مثلثاتی ۶۰° است، شیب خط برابر $\tan ۶۰^\circ$ یا همان $\sqrt{3}$ است. پس معادله خط به صورت $y=\sqrt{3}x+b$ است و چون خط از نقطه $(\sqrt{12}, -2)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادله خط صدق می‌کنند، $-2=\sqrt{3}\sqrt{12}+b$. بنابراین $b=-8$. پس معادله خط $y=\sqrt{3}x-8$ است.

تست ۱۸

با توجه به شکل مقابل مقدار m کدام است؟



(۱) $\sqrt{2}$ (۲) 2 (۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{1}{2}$

راهنما

چون شیب خط $y=\sqrt{3}x-2$ برابر $\sqrt{3}$ است، زاویه مثلثاتی تشکیل شده بین محور طول‌ها و این خط ۶۰° است. پس زاویه مثلثاتی تشکیل شده بین محور طول‌ها و خط $y=\frac{m}{2}x-1$ برابر $۱۸۰^\circ-۱۲۰^\circ-۱۵^\circ=۴۵^\circ$ است و در نتیجه $\frac{m}{2}=\tan ۴۵^\circ=1 \Rightarrow m=2$

دست‌گرمی

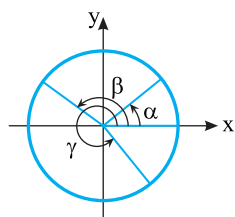
۶۴- انتهای کمان روبه‌رو به کدام یک از زاویه‌های زیر در ناحیه سوم قرار دارد؟

(۱) ۱۷۰° (۲) ۲۶۰° (۳) ۲۸۰° (۴) ۳۳۰°

۶۵- زاویه‌های α ، β و γ مانند شکل روبه‌رو در دایره مثلثاتی مشخص شده‌اند. اگر $a=\cos \alpha$ ،

$b=\cos \beta$ و $c=\cos \gamma$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱) $a>b>c$
(۲) $b>c>a$
(۳) $a>c>b$
(۴) $c>a>b$



۶۶- اگر $\sin \alpha \cos \alpha > 0$ و $\cos \alpha \cot \alpha < 0$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۶۷- اگر $۹۰^\circ \leq \alpha \leq ۱۸۰^\circ$ و $\sin \alpha = \frac{m}{3}$ ، حدود m کدام است؟

(۱) $۲ \leq m \leq ۴$ (۲) $-۲ \leq m \leq ۰$ (۳) $-۲ \leq m \leq ۲$ (۴) $۱ \leq m \leq ۳$

۶۸- حاصل ضرب کمترین و بیشترین مقدار عبارت $A=۲+۳ \sin^2 x$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۱۰

۶۹- معادله خطی که از نقطه $(۶, \sqrt{3})$ می‌گذرد و با محور طول‌ها زاویه مثلثاتی ۳۰° می‌سازد، کدام است؟

(۱) $x-\sqrt{3}y-۳=۰$ (۲) $x+\sqrt{3}y-۹=۰$ (۳) $۲x-\sqrt{3}y-۹=۰$ (۴) $x-۲\sqrt{3}y=۰$

نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی (۱)

آزمون ۳۹

۳۸۱- کدام یک عددی مثبت است؟

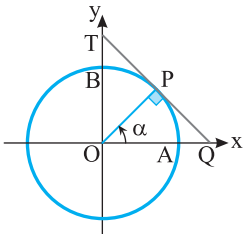
- (۱) $\sin ۲۳^\circ$ (۲) $\cos ۲۳^\circ$ (۳) $\sin ۳۱^\circ$ (۴) $\cos ۳۱^\circ$

۳۸۲- اگر $|\sin \alpha| = -\sin \alpha$ و $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در کدام ربع مثلثاتی است؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۳۸۳- در دایره مثلثاتی مقابل α زاویه‌ای حاده است. طول پاره خط BT کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\cos \alpha}$ (۲) $\frac{1}{\sin \alpha}$ (۳) $\frac{1}{\cos \alpha} - ۱$ (۴) $\frac{1}{\sin \alpha} - ۱$

۳۸۴- اگر $-۱۵^\circ \leq \alpha \leq ۱۵^\circ$ و $\sin ۲\alpha = \frac{m}{۴}$ ، چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۸۵- اگر $۷ = ۲ \sin \alpha + ۵ \cos \beta$ ، مقدار $۳ \sin \alpha - ۴ \cos \beta$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۷

۳۸۶- اگر $۰^\circ \leq \alpha \leq ۱۸۰^\circ$ ، حداکثر مقدار عبارت $\frac{۳}{۲ \sin \alpha + ۱}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۸۷- اگر طول دو ضلع مثلثی $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۶}$ باشد، بیشترین مقدار ممکن مساحت این مثلث کدام است؟

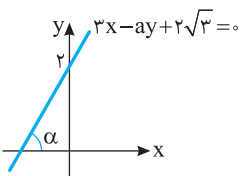
- (۱) $\sqrt{۳}$ (۲) $۲\sqrt{۳}$ (۳) $۳\sqrt{۳}$ (۴) $۴\sqrt{۳}$

۳۸۸- اگر $۹^\circ < \alpha \leq ۱۸^\circ$ و $\tan \alpha = ۲m + ۱$ ، حدود m کدام است؟

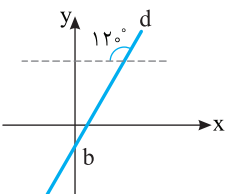
- (۱) $m \leq -\frac{1}{۲}$ (۲) $m < -\frac{1}{۲}$ (۳) $m > -\frac{1}{۲}$ (۴) $m \geq -\frac{1}{۲}$

۳۸۹- در شکل مقابل مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{۲}$ (۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ (۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ (۴) $\frac{1}{۴}$

۳۹۰- معادله خط d در شکل مقابل به صورت $y = a(x - ۲) + \sqrt{۳}$ است. مقدار b کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{۳}$ (۲) $-۲\sqrt{۳}$ (۳) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ (۴) $-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$



سؤال	گام
۳۸۱	۷۲ ۷۴
۳۸۲	۷۴
۳۸۳	۶۹ ۷۳
۳۸۴	۷۸
۳۸۵	۷۶
۳۸۶	۷۷
۳۸۷	۷۱ ۷۷
۳۸۸	۷۷
۳۸۹	۷۵ ۸۰
۳۹۰	۷۵ ۸۰

نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی (۲)

آزمون ۴۰

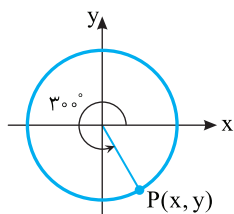
سؤال	گام
۳۹۱	۷۲ ۷۴
۳۹۲	۶۹ ۷۳
۳۹۳	۷۳
۳۹۴	۷۸
۳۹۵	۱۳ ۲۲ ۷۶ ۸۱
۳۹۶	۲۲ ۷۶
۳۹۷	۷۹ ۹۲
۳۹۸	۷۷
۳۹۹	۷۵ ۸۰
۴۰۰	۷۵ ۸۰

۳۹۱- کدام یک عددی منفی است؟

- (۱) $\tan 17^\circ$ (۲) $\tan 19^\circ$ (۳) $\cot 7^\circ$ (۴) $\cot 26^\circ$

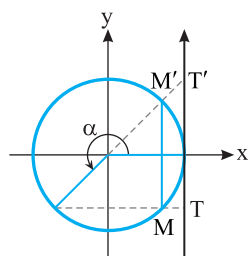
۳۹۲- در دایره مثلثاتی مقابل، مقدار $\frac{y}{x-1}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $-\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$



۳۹۳- در دایره مثلثاتی مقابل طول پاره خط TT' چقدر از طول پاره خط MM' بیشتر است؟

- (۱) $\tan \alpha - \sin \alpha$ (۲) $\tan \alpha + \sin \alpha$ (۳) $\cot \alpha - \cos \alpha$ (۴) $\sin \alpha + \cos \alpha$



۳۹۴- اگر $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$ و $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{m}{4}$ ، مجموع مقادیر صحیح ممکن برای m کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۱۰

۳۹۵- اختلاف حداکثر مقدار و حداقل مقدار عبارت $A = 4 \cos^2 x - 2 \sin x$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{25}{4}$ (۴) ۴

۳۹۶- مقدار عبارت $A = \frac{2 \cos \alpha + 1}{\cos \alpha + 3}$ با کدام یک از اعداد زیر نمی‌تواند برابر باشد؟

- (۱) $\frac{9}{8}$ (۲) $-\frac{7}{8}$ (۳) $\frac{6}{7}$ (۴) ۱

۳۹۷- حاصل عبارت $|\sin 2^\circ - \cos 2^\circ| - |\sin 7^\circ - \cos 7^\circ|$ کدام است؟

- (۱) $-2 \sin 2^\circ$ (۲) $2 \cos 2^\circ$ (۳) $2 \sin 2^\circ$ (۴) صفر

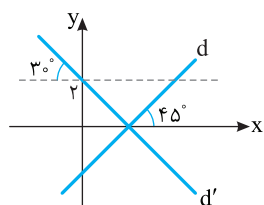
۳۹۸- اگر $18^\circ \leq \alpha < 27^\circ$ و $\tan \alpha = m^3 + m^2$ ، حدود m کدام است؟

- (۱) $m \geq 0$ (۲) $m \leq 0$ (۳) $m \geq -1$ (۴) $m \leq -1$

۳۹۹- در شکل مقابل خط‌های d و d' روی محور x متقاطع‌اند. معادله خط d کدام است؟

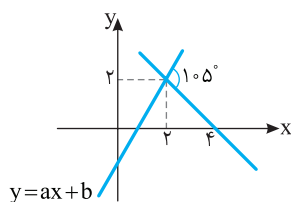
$$(\tan 15^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}})$$

- (۱) $y = x - 2\sqrt{3}$ (۲) $y = 2x - \sqrt{3}$ (۳) $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ (۴) $y = x - \sqrt{3}$



۴۰۰- دو خط شکل مقابل از نقطه $(2, 2)$ عبور می‌کنند. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) $2 - 2\sqrt{3}$ (۲) $2 - \sqrt{3}$ (۳) $1 - \sqrt{3}$ (۴) $2 - 3\sqrt{3}$



نکته زیر از تعریف روابط مثلثاتی نتیجه می‌شود.

نکته رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی

اگر α زاویه‌ای باشد که مخرج‌ها در عبارت‌های زیر صفر نباشند، آن‌گاه رابطه‌های زیر بین نسبت‌های مثلثاتی درست‌اند:

$$۱) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$۲) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$۳) \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$۴) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$۵) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$۶) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

تساوی (۳) را می‌توان به شکل $\tan \alpha \cot \alpha = 1$ نیز نوشت. همین‌طور، از تساوی (۴) نتیجه می‌شود $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ و $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$.

تست

مقدار عبارت $\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}$ کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

راه‌حل

راه‌حل اول می‌دانیم $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$ ، بنابراین

$$\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}} = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = 1$$

راه‌حل دوم می‌دانیم $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ و $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ، بنابراین

$$\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} + \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

تست

ساده شده عبارت $\frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$ کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

راه‌حل

می‌دانیم $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$ و $\tan \beta = \frac{1}{\cot \beta}$ ، بنابراین

$$\frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} = \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\frac{1}{\cot \alpha} + \frac{1}{\cot \beta}} = \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\frac{\cot \beta + \cot \alpha}{\cot \alpha \cot \beta}} = \cot \alpha \cot \beta$$

تست

اگر $\frac{3 \sin x}{2 \sin x + \cos x} = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\tan x$ کدام است؟

۳ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

راه‌حل

از تساوی $\frac{3 \sin x}{2 \sin x + \cos x} = \frac{1}{2}$ نتیجه می‌شود $6 \sin x = 2 \sin x + \cos x$ ، بنابراین $4 \sin x = \cos x$ و در نتیجه $\tan x = \frac{1}{4}$ ، پس $\tan x = \frac{1}{4}$.

تست

حاصل عبارت $\frac{4 \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$ کدام است؟

۲ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

راه‌حل

ابتدا مخرج کسر را به صورت $1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha$ می‌نویسیم. پس $\frac{4 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \cot \alpha$.

تست
□□□□

اگر $\sin \alpha = \sqrt{m}$ و $\cos \alpha = \sqrt{2m-1}$ ، مقدار $\tan^2 \alpha$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

راهنما

با توجه به رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ، مقدار m را حساب می‌کنیم:

$$(\sqrt{m})^2 + (\sqrt{2m-1})^2 = 1 \Rightarrow m + 2m - 1 = 1 \Rightarrow m = \frac{2}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2m-1}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{2} \Rightarrow \tan^2 \alpha = 2$$

برای به دست آوردن $\tan^2 \alpha$ ، از رابطه $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ استفاده می‌کنیم:

تست
□□□□

اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ربع سوم باشد و $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ ، حاصل $\sin \alpha - \cos \alpha$ کدام است؟

$\frac{1}{5}$ (۴)

$-\frac{1}{5}$ (۳)

$-\frac{2}{5}$ (۲)

$-\frac{7}{5}$ (۱)

راهنما

توجه کنید که

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \xrightarrow{\cos \alpha < 0} \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{\sin \alpha}{-\frac{4}{5}} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

تست
□□□□

اگر $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ و $27^\circ < \alpha < 36^\circ$ ، مقدار $15 \tan \alpha - 12 \cot \alpha$ کدام است؟

-۳۳ (۴)

-۳۱ (۳)

-۲۹ (۲)

-۲۷ (۱)

راهنما

راهنما اول ابتدا توجه کنید که اگر $27^\circ < \alpha < 36^\circ$ ، آن‌گاه $\cot \alpha$ مقداری منفی است. پس

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{169}{144} \Rightarrow \cot^2 \alpha = \frac{25}{144} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{5}{12}, \tan \alpha = -\frac{12}{5}$$

$$15 \tan \alpha - 12 \cot \alpha = -36 + 5 = -31$$

راهنما دوم از رابطه $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که اگر $27^\circ < \alpha < 36^\circ$ ، آن‌گاه $\cos \alpha > 0$ ، پس

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{13}$$

$$15 \tan \alpha - 12 \cot \alpha = 15\left(-\frac{12}{5}\right) - 12\left(-\frac{5}{12}\right) = -31 \text{ بنابراین } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{5}{12} \text{ و } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{12}{5}$$

تست
□□□□

اگر $\tan \alpha = 3$ ، مقدار $A = \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - 4 \cos \alpha}$ کدام است؟

۱ (۴)

-۱ (۳)

۷ (۲)

-۷ (۱)

راهنما

راهنما اول از تساوی $\tan \alpha = 3$ به دست می‌آید $\sin \alpha = 3 \cos \alpha$. با جای‌گذاری مقدار $3 \cos \alpha$ به جای $\sin \alpha$ در عبارت A ،

$$A = \frac{2(3 \cos \alpha) + \cos \alpha}{3 \cos \alpha - 4 \cos \alpha} = \frac{7 \cos \alpha}{-\cos \alpha} = -7$$

راهنما دوم صورت و مخرج عبارت A را بر $\cos \alpha$ تقسیم می‌کنیم تا $\tan \alpha$ در عبارت ظاهر شود:

$$A = \frac{\frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{4 \cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{2 \tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 4} = \frac{2 \times 3 + 1}{3 - 4} = -7$$

تست

□□□□

۹ اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه x در ربع اول باشد و $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$ ، حاصل $\sin x + \cos x$ کدام است؟

$$\sqrt{\frac{5}{3}} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{17}}{9} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{17}}{3} \quad (۱)$$

راهنما

$$(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1} - 2 \sin x \cos x + \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1} + 2 \sin x \cos x = 2$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 2 - (\sin x - \cos x)^2 = 2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2 - \frac{1}{9} = \frac{17}{9}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه x در ربع اول قرار دارد، پس $\sin x + \cos x > 0$. در نتیجه $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{17}}{3}$.

تست

□□□□

۱۰ عبارت $\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta$ با کدامیک از عبارت‌های زیر برابر است؟

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad (۴)$$

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad (۳)$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta \quad (۲)$$

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta \quad (۱)$$

راهنما

در عبارت داده شده به جای $\cos^2 \beta$ قرار می‌دهیم $1 - \sin^2 \beta$ و به جای $\cos^2 \alpha$ قرار می‌دهیم $1 - \sin^2 \alpha$. عبارت به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta &= \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta \\ &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \\ &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \end{aligned}$$

تست

□□□□

۱۱ ساده شده عبارت $\frac{\cos 1^\circ}{1 + \sin 1^\circ} - \frac{\cos 1^\circ}{1 - \sin 1^\circ}$ کدام است؟

$$-\frac{2}{\cos 1^\circ} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{\cos^2 1^\circ} \quad (۳)$$

$$2 \tan 1^\circ \quad (۲)$$

$$-2 \tan 1^\circ \quad (۱)$$

راهنما

به کمک مخرج مشترک‌گیری، عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \cos 1^\circ \left(\frac{1}{1 + \sin 1^\circ} - \frac{1}{1 - \sin 1^\circ} \right) &= \left(\frac{1 - \sin 1^\circ - (1 + \sin 1^\circ)}{(1 + \sin 1^\circ)(1 - \sin 1^\circ)} \right) \cos 1^\circ = \frac{-2 \sin 1^\circ \cos 1^\circ}{1 - \sin^2 1^\circ} \\ &= \frac{-2 \sin 1^\circ \cos 1^\circ}{\cos^2 1^\circ} = \frac{-2 \sin 1^\circ}{\cos 1^\circ} = -2 \tan 1^\circ \end{aligned}$$

تست

□□□□

۱۲ هرگاه $\tan^2 \theta + \tan \theta - 1 = 0$ ، حاصل $\tan^4 \theta + \cot^4 \theta$ کدام است؟

$$11 \quad (۴)$$

$$9 \quad (۳)$$

$$7 \quad (۲)$$

$$5 \quad (۱)$$

راهنما

چون $\tan \theta \neq 0$ ، بنابراین تساوی داده شده را می‌توان به صورت $\tan \theta - \frac{1}{\tan \theta} = -1$ نوشت. پس

$$\tan^2 \theta + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \left(\tan \theta - \frac{1}{\tan \theta} \right)^2 + 2 = 3$$

$$\tan^4 \theta + \cot^4 \theta = \tan^4 \theta + \frac{1}{\tan^4 \theta} = \left(\tan^2 \theta + \frac{1}{\tan^2 \theta} \right)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

در نتیجه

تست

□□□□

۱۳ اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ، حاصل عبارت $A = \sqrt{1 + 2\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha}}$ کدام است؟

$$\sqrt{\sin \alpha - \cos \alpha} \quad (۴)$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha \quad (۳)$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha \quad (۲)$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha \quad (۱)$$

راهنما

توجه کنید که

$$A = \sqrt{1 + 2\sqrt{\sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}} = \sqrt{1 + 2|\sin \alpha \cos \alpha|}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ناحیه دوم است، پس $\sin \alpha > 0$ و $\cos \alpha < 0$ ، در نتیجه

$$1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

از طرف دیگر

$$A = \sqrt{1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = |\sin \alpha - \cos \alpha|$$

بنابراین

چون $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ، پس $\sin \alpha > \cos \alpha$ ، بنابراین علامت $\sin \alpha - \cos \alpha$ مثبت است و در نتیجه $A = \sin \alpha - \cos \alpha$.

هر تساوی بین دو عبارت مثلثاتی که به ازای تمام مقادیری از متغیرها (که هر دو عبارت به ازای آن‌ها با معنی‌اند) برقرار باشد، یک اتحاد مثلثاتی است. تمام تساوی‌هایی که در نکته ابتدای درس برای نسبت‌های مثلثاتی آورده‌ایم، اتحاد هستند.

تذکر

برای اثبات درستی یک اتحاد مثلثاتی می‌توان یک طرف تساوی را با استفاده از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی و به کارگیری دیگر اتحادها، به طرف دیگر تبدیل کرد. برای اثبات نادرستی یک رابطه کافی است زاویه‌ای مثال بزنیم که به ازای آن، دو طرف تساوی مقادیر مختلفی داشته باشند.

تست ۱۴

ساده شده عبارت $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{\sin x}$

(۳) $\frac{1}{\cos x}$

(۲) $\sin x$

(۱) $\cos x$

راه حل اول از اتحاد $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin x(1 + \sin x)}{(1 + \sin x) \cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{(1 + \sin x) \cos x} = \frac{1 + \sin x}{(1 + \sin x) \cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

راه حل دوم اگر $x = 30^\circ$ ، آن‌گاه حاصل عبارت $\frac{2}{1 + \frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ و گزینه‌ها به ترتیب $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ و $\frac{2}{3}$ می‌شوند، پس گزینه (۳) درست است.

تست ۱۵

اگر تساوی $\frac{a}{\sin^2 x} + \frac{b}{\sin^4 x} + 1 = \cot^4 x$ یک اتحاد باشد، مقدار ab کدام است؟

(۴) -1

(۳) -2

(۲) 2

(۱) 1

راه حل اول تساوی داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{a \sin^2 x + b}{\sin^4 x} &= \cot^4 x - 1 \Rightarrow \frac{a \sin^2 x + b}{\sin^4 x} = \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^4 x} \\ a \sin^2 x + b &= \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ a \sin^2 x + b &= \cos^2 x - \sin^2 x \Rightarrow a \sin^2 x + b = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

بنابراین باید تساوی $b + a \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$ یک اتحاد باشد که کافی است $a = -2$ و $b = 1$ ، یعنی $ab = -2$.

راه حل دوم چون تساوی یک اتحاد است، پس به ازای هر x دلخواه که $\sin x \neq 0$ ، برقرار است. قرار می‌دهیم $x = 30^\circ$ ، در نتیجه

$$\frac{a}{\frac{1}{4}} + \frac{b}{\frac{1}{16}} + 1 = 9 \Rightarrow a + 4b = 2$$

قرار می‌دهیم $x = 45^\circ$ و در نتیجه $1 = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + 1$ ، پس $a + 2b = 0$. از حل دستگاه $\begin{cases} a + 4b = 2 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$ به دست می‌آید $a = -2$ و $b = 1$ و در نتیجه $ab = -2$.

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x, \quad \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x, \quad \tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

تست
 □□□□

 اگر $2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha = 0$ ، مقدار $\sin \alpha \cos \alpha$ کدام است؟

$$-\frac{13}{27} \quad (4)$$

$$-\frac{9}{26} \quad (3)$$

$$-\frac{4}{13} \quad (2)$$

$$-\frac{6}{13} \quad (1)$$

ابتدا توجه کنید که

راه حل

$$2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha = 0 \Rightarrow 2 \sin \alpha = -3 \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{2} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{2}{3}$$

$$\text{بنابراین } \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{6}{13} \text{ و در نتیجه } \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \tan \alpha + \cot \alpha = -\frac{3}{2} + \frac{-2}{3} = -\frac{13}{6}$$

دست گرمی

 -۷۰ اگر $\frac{1 - \tan x}{\tan x} = 2$ ، مقدار $\frac{\cot x}{\cot x - 1}$ کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

 -۷۱ اگر $\tan \alpha = \frac{1}{2m-1}$ و $\cot \alpha = m+2$ ، مقدار $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ کدام است؟

$$\frac{16}{5} \quad (4)$$

$$\frac{26}{9} \quad (3)$$

$$\frac{626}{25} \quad (2)$$

$$\frac{65}{16} \quad (1)$$

 -۷۲ اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ و $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ، مقدار $\tan \alpha - \cos \alpha$ کدام است؟

$$\frac{1}{20} \quad (4)$$

$$-\frac{31}{20} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{20} \quad (2)$$

$$\frac{31}{20} \quad (1)$$

 -۷۳ ساده شده عبارت $A = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} + \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x}$ کدام است؟

$$2 \quad (4)$$

$$\cos^2 x \quad (3)$$

$$\sin^2 x \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

 -۷۴ ساده شده عبارت $\frac{1}{\sin^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \cot^4 \theta$ کدام است؟

$$\cot^2 \theta \quad (4)$$

$$\tan^2 \theta \quad (3)$$

$$\cos^2 \theta \quad (2)$$

$$\sin^2 \theta \quad (1)$$

 -۷۵ اگر $\tan \alpha + \cot \alpha = 3$ ، مقدار $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ کدام است؟

$$13 \quad (4)$$

$$7 \quad (3)$$

$$11 \quad (2)$$

$$9 \quad (1)$$

 -۷۶ اگر $\cos x \neq 0$ و $3 \sin x + 2 \cos x = 3$ ، مقدار $\cot x$ کدام است؟

$$-\frac{5}{12} \quad (4)$$

$$\frac{5}{12} \quad (3)$$

$$-\frac{12}{5} \quad (2)$$

$$\frac{12}{5} \quad (1)$$

اتحادهای مثلثاتی (۱)

آزمون ۴۱

سؤال	گام
۴۰.۱	۷۴ ۸۱
۴۰.۲	۸۱
۴۰.۳	۸۱
۴۰.۴	۸۱
۴۰.۵	۸۱
۴۰.۶	۷۴ ۸۱
۴۰.۷	۸۱ ۸۲
۴۰.۸	۷۴ ۸۱ ۸۲
۴۰.۹	۸۱ ۸۳
۴۱.۰	۷۴ ۸۳

۴۰.۱ - اگر $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ و انتهای کمان متناظر با زاویه α در ناحیه چهارم باشد، مقدار $\tan \alpha - \cot \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۴۰.۲ - اگر $\tan \alpha = \frac{1}{2m}$ و $\cot \alpha = m+3$ ، مقدار $\sin^2 \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{35}$ (۲) $\frac{16}{37}$ (۳) $\frac{1}{37}$ (۴) $\frac{2}{35}$

۴۰.۳ - ساده شده عبارت $\frac{1}{1+\sin 10^\circ} + \frac{1}{1-\sin 10^\circ}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{\sin^2 10^\circ}$ (۴) $\frac{2}{\cos^2 10^\circ}$

۴۰.۴ - حاصل $A = \frac{\sin 15^\circ - \sin^3 15^\circ}{\cos 15^\circ - \cos^3 15^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\tan^2 15^\circ$ (۲) $\tan 15^\circ$ (۳) $\cot 15^\circ$ (۴) $\cot^2 15^\circ$

۴۰.۵ - اگر $3 \sin^2 x = 1 + 4 \cos^2 x$ ، مقدار $\tan^2 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۴۰.۶ - انتهای کمان متناظر با زاویه α در کدام ناحیه قرار گیرد تا نابرابری $\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + \cot \alpha} \geq 0$ برقرار باشد؟

- (۱) فقط اول یا دوم (۲) فقط اول یا سوم
(۳) فقط دوم یا چهارم (۴) هر چهار ناحیه

۴۰.۷ - ساده شده عبارت $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \cot \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\cos \alpha}$ (۲) $\frac{1}{\sin \alpha}$ (۳) $\sin \alpha$ (۴) $\cos \alpha$

۴۰.۸ - اگر انتهای کمان متناظر با زاویه x در ناحیه دوم باشد و $A = \cot^2 x (1 + \tan^2 x) + \tan^2 x (1 + \cot^2 x)$ ، حاصل $\sqrt{A}$

- کدام است؟
(۱) $\tan x - \cot x$ (۲) $-\tan x - \cot x$
(۳) $\tan x + \cot x$ (۴) $\cot x - \tan x$

۴۰.۹ - اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{27}{64}$ (۲) $\frac{16}{81}$ (۳) $\frac{23}{32}$ (۴) $\frac{16}{27}$

۴۱.۰ - اگر $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{2}{3}$ و انتهای کمان متناظر با زاویه α در ناحیه دوم باشد، مقدار $\sin \alpha \cos \alpha$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ (۲) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۴) $-\frac{\sqrt{6}}{8}$

اتحادهای مثلثاتی (۲)

آزمون ۴۲

۴۱۱- اگر $\cot x = \frac{2}{3}$ و انتهای کمان متناظر با زاویه x در ناحیه سوم باشد، مقدار $2 \cos x - \sin x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{\sqrt{13}}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{13}}$ (۳) $-\frac{7}{\sqrt{13}}$ (۴) $-\frac{1}{\sqrt{13}}$

۴۱۲- اگر $\sin \alpha = \sqrt{k-1}$ و $\cos \alpha = \sqrt{2k-3}$ ، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

۴۱۳- مقدار $\frac{(1+\tan 2^\circ)(1-\cot 2^\circ)}{(1+\cot 2^\circ)(1-\tan 2^\circ)}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱

۴۱۴- ساده شده عبارت $\frac{\tan x}{1+\tan^2 x} \times \frac{1+\cot^2 x}{\cot x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\tan x$ (۳) $\sin x$ (۴) $\cos x$

۴۱۵- اگر $\cot \alpha = \sin \alpha$ ، مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}+2}{8}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}-2}{4}$

۴۱۶- اگر $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$ ، حاصل $\tan x + \cot x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{9}{2}$

۴۱۷- اگر x زاویه‌ای حاده باشد و $\sin x - \cos x = \frac{3}{4}$ ، حاصل $\sin x + \cos x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{23}}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{14}}{4}$ (۳) $-\frac{\sqrt{23}}{4}$ (۴) $-\frac{\sqrt{14}}{4}$

۴۱۸- اگر $\tan x + \cot x = \sqrt{5}$ ، مقدار $\tan^4 x + \cot^4 x$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۱۱

۴۱۹- اگر $18^\circ < \alpha < 27^\circ$ ، عبارت $\cos \alpha - \sqrt{\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ با کدام یک برابر است؟

- (۱) $\cot \alpha$ (۲) $\tan \alpha$ (۳) $\frac{1}{\cos \alpha}$ (۴) $\frac{1}{\sin \alpha}$

۴۲۰- اگر $315^\circ < \alpha < 360^\circ$ ، حاصل عبارت $\sqrt{1+2\sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha}}$ کدام است؟

- (۱) $\sin \alpha + \cos \alpha$ (۲) $\sin \alpha - \cos \alpha$ (۳) $-\sin \alpha + \cos \alpha$ (۴) $-\sin \alpha - \cos \alpha$

سؤال	گام
۴۱۱	۷۴ ۸۱
۴۱۲	۸۱
۴۱۳	۸۱ ۸۲
۴۱۴	۸۱ ۸۲
۴۱۵	۸۱
۴۱۶	۸۱ ۸۳
۴۱۷	۷۴ ۸۱
۴۱۸	۸۱
۴۱۹	۷۴ ۸۱ ۸۲
۴۲۰	۷۴ ۸۱ ۸۲

اتحادهای مثلثاتی (۳)

آزمون ۴۳

سؤال	گام
۴۲۱	۸۱
۴۲۲	۸۱
۴۲۳	۸۱ ۸۲
۴۲۴	۸۱ ۸۲
۴۲۵	۸۱
۴۲۶	۸۱ ۲۸۵ ۲۸۷
۴۲۷	۸۱ ۲۸۵
۴۲۸	۷۴ ۸۱
۴۲۹	۸۱ ۸۲
۴۳۰	۲۲ ۷۶ ۸۱

۴۲۱- اگر $\frac{5 \sin x}{2 \sin x + \cos x} = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\cot x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{16}$ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۴۲۲- اگر $\tan x = \sqrt{\frac{m+2}{2m+5}}$ و $\cos x = \sqrt{\frac{m+2}{3m+7}}$ ، مقدار $\tan x$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{2}$

۴۲۳- ساده شده عبارت $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \cot \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\cos \alpha}$ (۲) $\frac{1}{\sin \alpha}$ (۳) $\sin \alpha$ (۴) $\cos \alpha$

۴۲۴- مقدار $\frac{\sin^2 15^\circ}{1 + \cos 15^\circ} - \frac{\cos^2 15^\circ}{1 + \sin 15^\circ} + \cos 15^\circ$ کدام است؟

- (۱) $-\cos 15^\circ$ (۲) $-\sin 15^\circ$ (۳) $\cos 15^\circ$ (۴) $\sin 15^\circ$

۴۲۵- اگر $\tan x = 3$ ، مقدار عبارت $A = \frac{\sin^3 x - 2 \cos x}{4 \sin x - \cos^3 x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{47}{119}$ (۲) $\frac{1}{17}$ (۳) $\frac{7}{29}$ (۴) $\frac{17}{29}$

۴۲۶- اگر $\sin x - \cos x = \frac{2}{3}$ ، حاصل $\sin^3 x - \cos^3 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{22}{27}$ (۲) $\frac{23}{27}$ (۳) $\frac{8}{9}$ (۴) $\frac{25}{27}$

۴۲۷- اگر $\tan x - \cot x = 3$ ، مقدار $\tan^3 x - \cot^3 x$ کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۷ (۴) ۳۶

۴۲۸- اگر $\tan \alpha - 2 \cot \alpha = \sqrt{2}$ و انتهای کمان نظیر زاویه α در ربع اول باشد، مقدار $\tan^2 \alpha$ کدام است؟

- (۱) $3 - \sqrt{3}$ (۲) $2 - \sqrt{3}$ (۳) $3 + \sqrt{5}$ (۴) $3 - \sqrt{5}$

۴۲۹- حاصل عبارت $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + \frac{1 - 2 \sin^2 x}{\cos^2 x (1 - \tan^2 x)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2 \cot x}{1 - \cot x}$ (۲) $\frac{2 \cos x}{\sin x + \cos x}$ (۳) $\frac{2 \tan x}{\tan x - 1}$ (۴) $\frac{2 \sin x}{\sin x + \cos x}$

۴۳۰- اختلاف حداکثر مقدار و حداقل مقدار عبارت $A = \cos^2 x - 2 \sin x$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

اتحادهای مثلثاتی (۴)

آزمون ۴۴

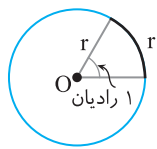
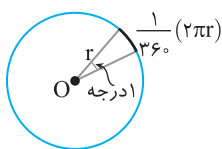
- ۴۳۱- اگر $\tan x = \frac{1}{3}$ ، مقدار عبارت $A = \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 3 \cos x}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۲
- ۴۳۲- مقدار عبارت $A = \frac{\cot^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ}{\tan^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ}$ کدام است؟
 (۱) $\tan^6 15^\circ$ (۲) $\cot^6 15^\circ$ (۳) $1 + \tan^6 15^\circ$ (۴) $1 + \cot^6 15^\circ$
- ۴۳۳- مقدار $(\frac{1}{\cos 2^\circ} + \tan 2^\circ)(1 - \sin 2^\circ)$ کدام است؟
 (۱) $\sin 2^\circ$ (۲) $\cos 2^\circ$ (۳) $\tan 2^\circ$ (۴) $\cot 2^\circ$
- ۴۳۴- حاصل $\frac{\sqrt{1 + \cos 36^\circ} + \sqrt{1 - \cos 36^\circ}}{\sqrt{1 + \sin 36^\circ}}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۱
- ۴۳۵- اگر $3 \sin^2 \alpha - 5 \cos \alpha + 5 = 0$ ، مقدار $\cos^6 \alpha$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) صفر
- ۴۳۶- اگر $\tan x + \cot x = \sqrt{5}$ ، مقدار $\tan^6 x + \cot^6 x$ کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۸ (۴) ۲۷
- ۴۳۷- اگر $\sin^2 x + 3 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = 2$ ، مقدار $\tan x$ کدام است؟
 (۱) $1 \pm \sqrt{2}$ (۲) $-1 \pm \sqrt{2}$ (۳) $2 \pm \sqrt{3}$ (۴) $-2 \pm \sqrt{3}$
- ۴۳۸- حاصل عبارت $\sqrt{1 - 2\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha}}$ به ازای $\alpha = 200^\circ$ کدام است؟
 (۱) $-\sin 200^\circ - \cos 200^\circ$ (۲) $\sin 200^\circ - \cos 200^\circ$ (۳) $-\sin 200^\circ + \cos 200^\circ$ (۴) $\sin 200^\circ + \cos 200^\circ$
- ۴۳۹- حاصل $\frac{\sin^3 40^\circ - \cos^3 40^\circ}{\cos 40^\circ + \cos^2 40^\circ \sin 40^\circ} + 1$ کدام است؟
 (۱) $\sin 40^\circ$ (۲) $\cos 40^\circ$ (۳) $\tan 40^\circ$ (۴) ۱
- ۴۴۰- اگر $\frac{\tan^3 x - \cot^3 x}{\tan x - \cot x} = 7$ ، حاصل $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$ کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

سؤال	گام
۴۳۱	۸۱
۴۳۲	۸۱ ۸۲
۴۳۳	۸۱ ۸۲
۴۳۴	۸۱ ۸۲ ۹۵
۴۳۵	۸۱
۴۳۶	۸۱ ۲۸۱ ۲۸۵
۴۳۷	۸۱
۴۳۸	۷۹ ۸۱ ۸۲
۴۳۹	۸۱ ۸۲
۴۴۰	۸۱ ۸۲ ۲۸۷

درس چهارم: واحدهای اندازه‌گیری زاویه

۸۴

درجه و رادیان



اگر دایره‌ای را به 360 قسمت برابر تقسیم کنیم، کمان‌هایی برابر به دست می‌آیند که هر یک از آن‌ها روبه‌رو به یک زاویه مرکزی هستند. این زاویه‌ها با یکدیگر برابرند و اندازه هر یک از آن‌ها برابر 1 درجه است. به همین ترتیب، اگر روی دایره کمانی با طول برابر با شعاع دایره انتخاب کنیم، اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به این کمان برابر 1 رادیان است.

تعریف

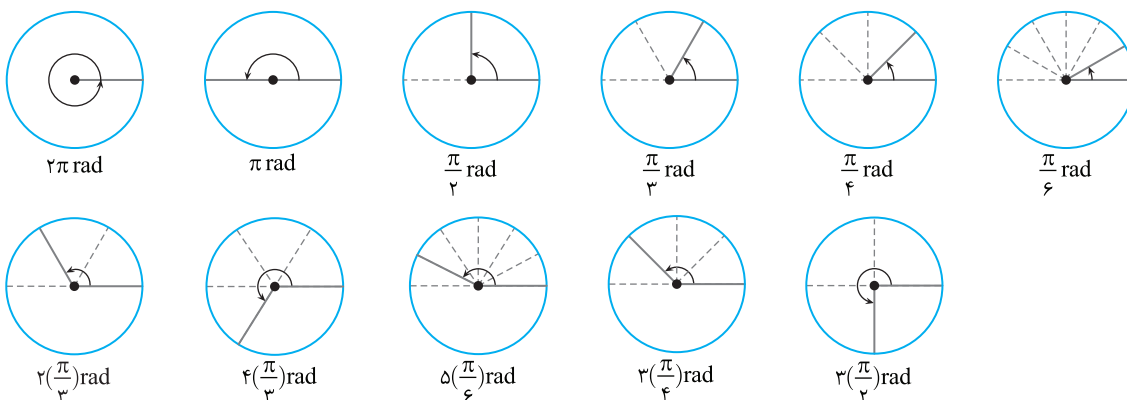
• 1 درجه برابر با اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن $\frac{1}{360}$ محیط دایره است. k درجه را می‌نویسیم k° .

• 1 رادیان برابر با اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن برابر شعاع دایره است. k رادیان را می‌نویسیم $k \text{ rad}$.

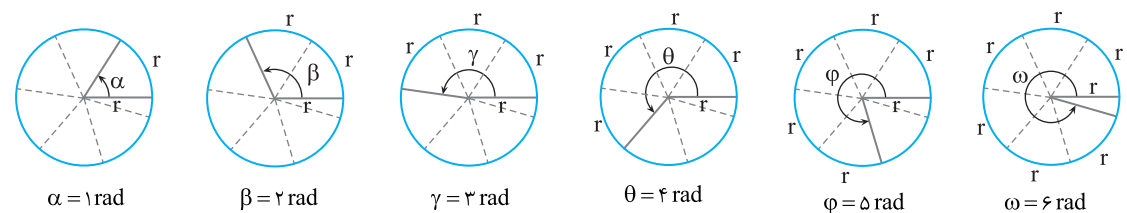
اگر واحد اندازه زاویه‌ای را مشخص نکردیم، منظورمان واحد رادیان است.

تذکر

مثال: در شکل‌های زیر زاویه‌های معروف با اندازه آن‌ها برحسب رادیان نشان داده شده‌اند.



مثال: چون $2\pi \approx 6.28$ ، روی یک دایره کامل می‌توان پشت سر هم شش کمان به طول شعاع جدا کرد (شکل‌های زیر را ببینید).



انتهای کمان روبه‌رو به زاویه 6 - رادیان در کدام ناحیه قرار دارد؟

(۴) چهارم

(۳) سوم

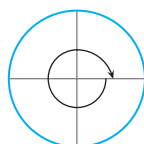
(۲) دوم

(۱) اول

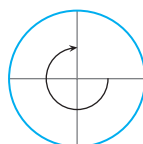
تست
□□□

با توجه به شکل‌های زیر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه 6 - رادیان در ناحیه اول قرار دارد.

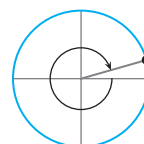
را حل



$(-2\pi) \approx (-6.28)$ رادیان



$(-\frac{3\pi}{2}) \approx (-4.71)$ رادیان



(-6) رادیان

تست

۲

کدام یک از اعداد زیر بزرگتر است؟ (زاویا برحسب رادیان هستند).

$\sin 1$ (۱)

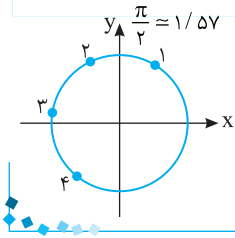
$\sin 2$ (۲)

$\sin 3$ (۳)

$\sin 4$ (۴)

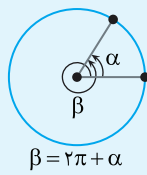
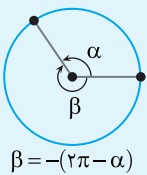
را حل

با توجه به شکل روبه‌رو، واضح است که عرض نقطه‌ای که انتهای کمان نظیر زاویه ۲ رادیان است، بزرگتر از عرض سایر نقاط است، پس $\sin 2$ از بقیه بزرگتر است.



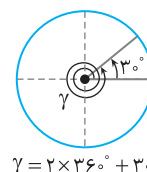
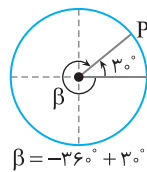
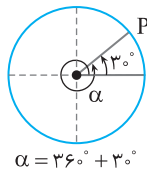
۸۵

زاویه‌های هم‌انتهای



می‌دانیم یک زاویه مثلثاتی در موقعیت استاندارد، زاویه‌ای است که رأس آن روی مرکز دایره مثلثاتی، ضلع ابتدایی آن روی قسمت مثبت محور x و ضلع دیگر آن از دوران ضلع ابتدایی حول رأس آن به اندازه دلخواه به دست آمده باشد. به این ترتیب، دو زاویه با اندازه‌های مختلف ممکن است ضلع ابتدایی و ضلع انتهایی مشترک داشته باشند. معلوم است که در این صورت نقطه انتهایی کمان متناظر با این زاویه‌ها بر هم منطبق است. این زاویه‌ها را **هم‌انتهای** می‌نامیم.

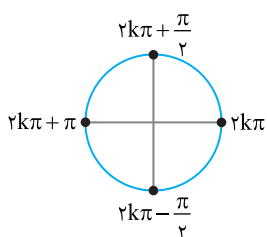
مثال: زاویه‌های 3° ، $3^\circ + 36^\circ$ ، $3^\circ + 36^\circ + 36^\circ$ و $3^\circ + 36^\circ + 36^\circ + 36^\circ$ هم‌انتهای هستند.



نکته

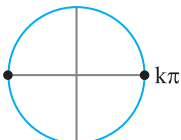
اگر k عدد صحیح دلخواهی باشد،

- زاویه‌های α° و $k \times 36^\circ + \alpha^\circ$ هم‌انتهای هستند.
- زاویه‌های α رادیان و $2k\pi + \alpha$ رادیان هم‌انتهای هستند.



مثال: اندازه زاویه‌هایی که با زاویه‌های صفر رادیان، $\frac{\pi}{2}$ رادیان، π رادیان و $-\frac{\pi}{2}$ رادیان

هم‌انتهای هستند، به ترتیب برابر $2k\pi$ ، $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، $2k\pi + \pi$ و $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ است (ک عددی صحیح است).



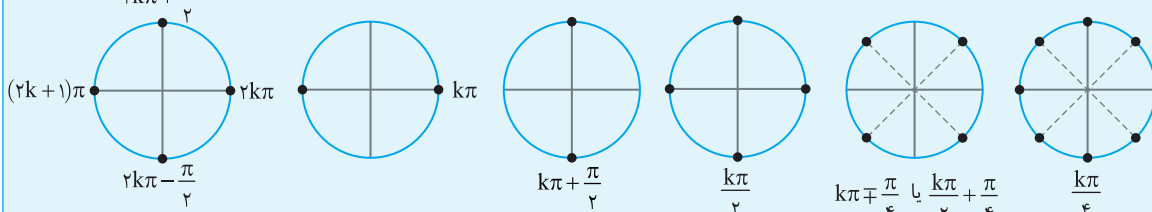
مثال: اندازه زاویه‌هایی که با زاویه‌های صفر رادیان یا π رادیان هم‌انتهای هستند، به ترتیب

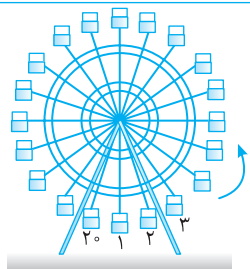
$2k\pi$ یا $2k\pi + \pi$ است که می‌توان آن‌ها را به صورت $k\pi$ نشان داد (ک عددی صحیح است).

۸۶

نکته

نقطه انتهایی کمان متناظر با برخی زاویه‌های معروف را در شکل‌های زیر نشان داده‌ایم. (ک عددی صحیح است).





یک چرخ و فلک مطابق شکل مقابل 20° کابین دارد. در لحظه حرکت چرخ و فلک، کابین شماره یک در پایین ترین نقطه قرار دارد. اگر چرخ و فلک به اندازه $\frac{47\pi}{5}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی

دوران کند، کابین شماره یک در محل فعلی کدام کابین قرار می گیرد؟

- (۱) ششم
(۲) هفتم
(۳) چهاردهم
(۴) پانزدهم

تست ۳

راه حل

زاویه بین هر دو کابین متوالی $\frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}$ رادیان است. از طرف دیگر $\frac{47\pi}{5} = 8\pi + \frac{7\pi}{5} = 8\pi + 14 \times \frac{\pi}{10}$. وقتی چرخ و فلک ۴ دور کامل می زند، یعنی

8π رادیان می چرخد، هر کابین در جای اولیه خود قرار می گیرد. سپس چرخ و فلک به اندازه $14 \times \frac{\pi}{10}$ دیگر دوران می کند که کابین شماره یک به مکان فعلی ۱۴ کابین جلوتر، یعنی کابین پانزدهم منتقل می شود.

رابطه بین واحد درجه و واحد رادیان

با توجه به تعریف واحدهای درجه و رادیان اندازه زاویه های معروف را برحسب درجه و رادیان در جدول زیر نوشته ایم.

درجه	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
رادیان	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

نکته

اگر اندازه زاویه ای برحسب درجه برابر D و برحسب رادیان برابر R باشد، آن گاه $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$.

$$\frac{12^\circ}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

مثال: اگر اندازه زاویه 12° برحسب رادیان برابر با R باشد، آن گاه

$$\frac{D}{180} = \frac{\frac{\pi}{12}}{\pi} \Rightarrow D = \frac{180}{12} = 15^\circ$$

همین طور اگر اندازه زاویه $\frac{\pi}{12}$ رادیان برحسب درجه برابر با D باشد، آن گاه

$$\frac{1^\circ}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{180}$$

مثال: اگر R اندازه زاویه 1° برحسب رادیان باشد، آن گاه

$$\frac{D}{180} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow D = \frac{180}{\pi}$$

بنابراین $1 \text{ rad} = 57.3^\circ$. همین طور، اگر D اندازه زاویه ۱ رادیان برحسب درجه باشد، آن گاه

بنابراین $1 \text{ rad} = 57.3^\circ$.

تست ۴

اندازه زاویه 55° برحسب رادیان کدام است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{18}$ (۲) $\frac{11\pi}{36}$ (۳) $\frac{13\pi}{36}$ (۴) $\frac{7\pi}{18}$

راه حل

در تساوی $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ قرار می دهیم $D = 55^\circ$:

$$\frac{55^\circ}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{11\pi}{36}$$

تست



مجموع و تفاضل دو زاویه به ترتیب برابر 11° و $\frac{2\pi}{9}$ رادیان است. اندازه زاویه بزرگتر چند رادیان است؟

- (۱) $\frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{7\pi}{12}$ (۳) $\frac{5\pi}{12}$ (۴) $\frac{\pi}{7}$

را حل

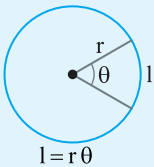
ابتدا توجه کنید که 11° برابر $\frac{11\pi}{18}$ رادیان است. اندازه زاویه بزرگتر را a و اندازه زاویه کوچکتر را b در نظر می‌گیریم:

$$a+b=\frac{11\pi}{18}, \quad a-b=\frac{2\pi}{9}$$

از حل این دستگاه به دست می‌آید $a=\frac{5\pi}{12}$.

۸۸

طول کمان



به کمک اندازه‌گیری برحسب رادیان می‌توانیم رابطه‌ای بین طول کمان، شعاع دایره و اندازه زاویه مرکزی نظیر این کمان پیدا کنیم. فرض کنید شعاع دایره r باشد. اگر طول کمان برابر l باشد، اندازه زاویه مرکزی نظیر این کمان 1 رادیان است. اگر طول کمان برابر l باشد، اندازه زاویه مرکزی نظیر کمان برابر $\frac{1}{r}$ رادیان است. بنابراین $\theta = \frac{l}{r}$.

نکته

اگر در دایره‌ای به شعاع r اندازه زاویه‌ای مرکزی θ رادیان و طول کمان روبه‌رو به این زاویه l باشد، آن‌گاه $l=r\theta$.

توجه کنید که واحد r و l یکسان در نظر گرفته می‌شود.

تست



طول کمان نظیر زاویه مرکزی به اندازه 15° در دایره‌ای به شعاع 18 سانتی‌متر، چند سانتی‌متر است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{2}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) $\frac{4\pi}{3}$ (۴) $\frac{3\pi}{4}$

را حل

اگر اندازه زاویه 15° برحسب رادیان برابر R باشد، آن‌گاه

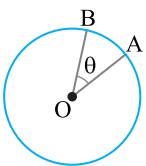
$$\frac{15^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{12}$$

بنابراین طول کمان مورد نظر برابر است با $18 \times \frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{2}$ سانتی‌متر.

تست



در شکل مقابل، دایره‌ای در نقطه A روی مسیری دایره‌ای به مرکز نقطه O و به شعاع 1500 متر ایستاده است. این دایره با سرعت 5 متر بر ثانیه می‌دود. اگر پس از 10 ثانیه در نقطه B باشد، اندازه θ چند درجه است؟ (فرض کنید $\pi=3$)



- (۱) 1° (۲) 2° (۳) 3° (۴) 4°

را حل

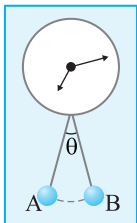
مسافتی که این دایره در 10 ثانیه طی می‌کند برابر است با $5 \times 10 = 50$ متر. بنابراین طول کمان AB برابر 50 متر است. در نتیجه

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{50}{1500} = \frac{1}{30} \text{ rad} = 180^\circ \left(\frac{1}{30} \right) = 180^\circ \left(\frac{1}{3} \right) = 2^\circ$$

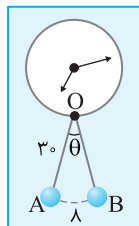
تست



در شکل مقابل، طول پاندول ساعت 30 سانتی‌متر است و این پاندول در هر ثانیه از A به B یا برعکس جابه‌جا می‌شود. اگر طول مسیری که نوک پاندول در یک ثانیه طی می‌کند برابر با 8 سانتی‌متر باشد، اندازه θ چند درجه است؟ (فرض کنید $\pi=3$)



- (۱) 12° (۲) 14° (۳) 16° (۴) 18°



توجه کنید مسیری که نوک پاندول در یک ثانیه طی می کند، کمانی از دایره ای به مرکز نقطه O و شعاع ۳۰ سانتی متر است

(شکل مقابل را ببینید). بنابراین $\theta = \frac{l}{r} = \frac{\lambda}{30} = \frac{4}{15} \text{ rad}$ در نتیجه

$$\theta = 18^\circ \left(\frac{15}{\pi} \right) = 18^\circ \left(\frac{15}{3} \right) = 16^\circ$$

راه حل

در مدت زمان یک ساعت عقربه دقیقه شمار یک دور کامل می چرخد، پس اندازه زاویه ای که طی می کند، 360° یا 2π رادیان است. در همین مدت،

عقربه ساعت شمار، یک دوازدهم یک دایره را می چرخد. بنابراین اندازه زاویه ای که طی می کند برابر 30° یا $\frac{\pi}{6}$ رادیان است.

۸۹

نکته

در یک دقیقه عقربه دقیقه شمار 6° یا $\frac{\pi}{30}$ رادیان را طی می کند. در همین مدت عقربه ساعت شمار $(\frac{1}{12})^\circ$ یا $\frac{\pi}{360}$ رادیان را طی می کند.

تست

۹

وقتی عقربه ساعت شمار به اندازه $\frac{3\pi}{8}$ رادیان دوران می کند، چند دقیقه زمان سپری شده است؟

۱۴۰ (۴)

۱۳۵ (۳)

۱۲۰ (۲)

۱۰۵ (۱)

$$\frac{\pi}{6} = \frac{x}{360} \Rightarrow x = 135 \text{ دقیقه}$$

را حل اول در هر ساعت عقربه ساعت شمار $\frac{1}{12}$ دور می چرخد که معادل $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ رادیان است. بنابراین

$$\frac{1}{x} = \frac{360}{2\pi} \Rightarrow x = 135 \text{ دقیقه}$$

راه حل

را حل دوم با استفاده از نکته بالا نتیجه می گیریم:

دست گرمی

۷۷- اندازه زاویه 75° بر حسب رادیان کدام است؟

$\frac{5\pi}{12}$ (۴)

$\frac{7\pi}{12}$ (۳)

$\frac{13\pi}{12}$ (۲)

$\frac{11\pi}{12}$ (۱)

۷۸- دایره مثلثاتی انتهای کمان روبه رو به زاویه 50° در کدام ناحیه قرار دارد؟

چهارم (۴)

سوم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)

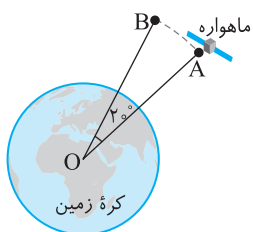
۷۹- مطابق شکل ماهواره ای در شعاع ۳۶۰۰۰ کیلومتری از مرکز زمین در حال گردش روی یک مسیر دایره ای است. این ماهواره چند کیلومتر باید طی کند تا از نقطه A به نقطه B برسد؟

2000π (۱)

2400π (۲)

4000π (۳)

4800π (۴)



واحدهای اندازه گیری زاویه (۱)

آزمون ۴۵

سؤال	گام
۴۴۱	۸۷
۴۴۲	۸۷
۴۴۳	۸۴
۴۴۴	۸۵
۴۴۵	۸۶
۴۴۶	۸۴
۴۴۷	۸۹
۴۴۸	۸۸
۴۴۹	۸۶ ۸۸
۴۵۰	۶۹ ۸۸

۴۴۱- اندازه دو زاویه از مثلثی 36° و $\frac{3\pi}{10}$ رادیان است. اندازه بزرگترین زاویه این مثلث برحسب رادیان کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{5}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{3\pi}{10}$ (۴) $\frac{2\pi}{5}$

۴۴۲- حاصل ضرب اندازه‌های یک زاویه برحسب درجه و برحسب رادیان برابر $\frac{5\pi}{4}$ است. اندازه این زاویه برحسب درجه کدام است؟

- (۱) 100° (۲) 60° (۳) 30° (۴) 15°

۴۴۳- انتهای کمان متناظر با زاویه‌های $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ رادیان را روی دایره مثلثاتی به‌طور متوالی به هم وصل می‌کنیم. چهارضلعی حاصل کدام است؟

- (۱) مربع (۲) مستطیل (۳) لوزی (۴) دوزنقه

۴۴۴- زاویه -56° روی دایره مثلثاتی با کدام یک از زاویه‌های زیر هم‌انتهاست؟

- (۱) 160° (۲) -160° (۳) 140° (۴) -140°

۴۴۵- یک چرخ‌وفلک 20° کابین دارد. در لحظه حرکت چرخ‌وفلک، کابین شماره یک در پایین‌ترین نقطه قرار دارد. اگر چرخ‌وفلک به اندازه $\frac{48\pi}{5}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی دوران کند، کابین شماره یک در محل فعلی کدام کابین قرار می‌گیرد؟

- (۱) چهاردهم (۲) پانزدهم (۳) شانزدهم (۴) هفدهم

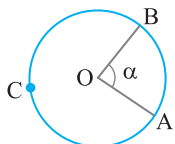
۴۴۶- کدام یک از اعداد زیر کوچکتر است؟ (زوایا برحسب رادیان هستند.)

- (۱) $\sin 1$ (۲) $\sin 2$ (۳) $\sin 4$ (۴) $\sin 6$

۴۴۷- وقتی عقربه ساعت شمار به اندازه $\frac{5\pi}{8}$ رادیان دوران می‌کند، چند دقیقه زمان سپری شده است؟

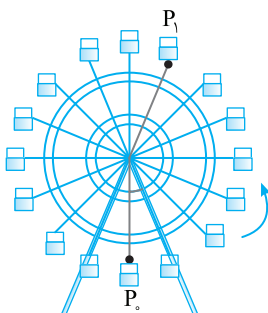
- (۱) 125 (۲) 175 (۳) 225 (۴) 275

۴۴۸- در شکل مقابل O مرکز دایره و اندازه شعاع دایره 4π واحد است. اگر طول کمان ACB، π واحد بیشتر از طول کمان AB باشد، اندازه زاویه α چند رادیان است؟



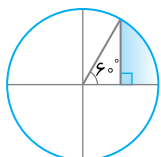
- (۱) $\pi - \frac{1}{4}$ (۲) $\pi - \frac{1}{8}$ (۳) $\pi - \frac{1}{2}$ (۴) $\pi - \frac{3}{2}$

۴۴۹- شعاع چرخ‌وفلک شکل مقابل 40 متر است و در جهت مثلثاتی می‌چرخد. مسافران از نقطه P_0 تا نقطه P_1 چند متر روی چرخ‌وفلک طی می‌کنند؟



- (۱) 35π (۲) 25π (۳) 36π (۴) 32π

۴۵۰- در شکل مقابل اندازه شعاع دایره $6\sqrt{3}$ است. اندازه محیط قسمت رنگی کدام است؟



- (۱) $3(1+\sqrt{3}+\pi)$ (۲) $2(1+\sqrt{3}+\pi)$ (۳) $3(1+\sqrt{3})+2\pi$ (۴) $9+\sqrt{3}(2\pi+3)$

واحدهای اندازه گیری زاویه (۲)

آزمون ۴۶

سؤال	گام
۴۵۱	۸۷
۴۵۲	۸۷
۴۵۳	۸۴
۴۵۴	۸۵
۴۵۵	۸۶
۴۵۶	۸۴
۴۵۷	۸۹
۴۵۸	۸۸
۴۵۹	۷۳ ۸۸
۴۶۰	۸۷ ۸۸

۴۵۱- مجموع اندازه های دو زاویه 400° و تفاضل اندازه های آنها $\frac{4\pi}{9}$ رادیان است. اندازه زاویه بزرگتر برحسب رادیان کدام است؟

- (۱) $\frac{4\pi}{3}$ (۲) $\frac{4\pi}{9}$ (۳) $\frac{8\pi}{9}$ (۴) $\frac{11\pi}{9}$

۴۵۲- اندازه یک زاویه برحسب رادیان از $\frac{\pi}{80}$ برابر اندازه آن برحسب درجه $\frac{5\pi}{36}$ کمتر است. اندازه این زاویه برحسب درجه کدام است؟

- (۱) 15° (۲) 20° (۳) 40° (۴) 50°

۴۵۳- انتهای کمان های متناظر با زاویه های $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{2\pi}{3}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ رادیان را روی دایره مثلثاتی به طور متوالی به هم وصل می کنیم. چهارضلعی حاصل کدام است؟

- (۱) مستطیل (۲) مربع (۳) متوازی الاضلاع (۴) دوزنقه

۴۵۴- زاویه ای با اندازه $\frac{28\pi}{3}$ رادیان روی دایره مثلثاتی با زاویه α هم انتهایست. اندازه α برحسب رادیان کدام می تواند باشد؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{31\pi}{6}$ (۳) $-\frac{2\pi}{3}$ (۴) $-\frac{\pi}{3}$

۴۵۵- انتهای کمان نظیر زاویه هایی به صورت $\alpha = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ را به ازای مقادیر مختلف و صحیح k روی دایره مثلثاتی مشخص می کنیم. اگر این نقاط را متوالیاً به هم وصل کنیم، چه شکلی درست می شود؟

- (۱) مستطیل (۲) مربع (۳) پنج ضلعی منتظم (۴) شش ضلعی منتظم

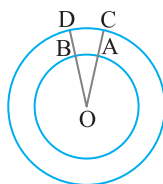
۴۵۶- کدام یک از اعداد زیر بزرگتر است؟ (زاویه ها برحسب رادیان هستند).

- (۱) $\tan 2$ (۲) $\tan 3$ (۳) $\tan 5$ (۴) $\tan 6$

۴۵۷- اندازه زاویه ای که عقربه ساعت شمار بین ساعت ۹ و $10:20'$ طی می کند، چند رادیان است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{9}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{4\pi}{9}$ (۴) $\frac{5\pi}{9}$

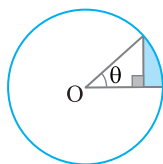
۴۵۸- در شکل مقابل دو دایره هم مرکز به شعاع ۶ و ۹ واحد رسم شده است و $\hat{DOC} = 25^\circ$. طول کمان CD چقدر از طول کمان AB بیشتر است؟



- (۱) $\frac{5\pi}{36}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$

- (۳) $\frac{5\pi}{12}$ (۴) $\frac{5\pi}{9}$

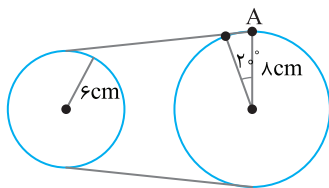
۴۵۹- شعاع دایره شکل مقابل به مرکز O یک واحد است. مقدار محیط قسمت رنگی برحسب θ کدام است؟



- (۱) $1 + \sin \theta + \cos \theta$ (۲) $1 + \sin \theta - \cos \theta$

- (۳) $1 - \theta + \sin \theta + \cos \theta$ (۴) $1 + \theta + \sin \theta - \cos \theta$

۴۶۰- در شکل مقابل اگر نقطه A، 20° روی چرخ بزرگتر جابه جا شود، چرخ کوچکتر چند درجه جابه جا می شود؟



- (۱) $\frac{4\pi}{27}$ (۲) $\frac{9\pi}{27}$

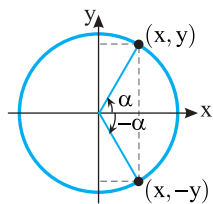
- (۳) $\frac{40}{3}$ (۴) $\frac{80}{3}$

درس پنجم: نسبت‌های مثلثاتی همه زاویه‌ها

توجه کنید که نسبت‌های مثلثاتی زاویه $2k\pi + \alpha$ با نسبت‌های مثلثاتی نظیرشان از زاویه α برابرند، زیرا این دو زاویه هم انتها هستند (k عددی صحیح است). بنابراین،

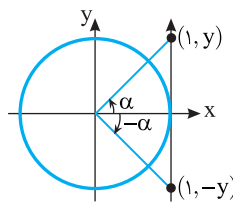
$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha, \quad \tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha, \quad \cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

همین‌طور، نسبت‌های مثلثاتی زاویه $-\alpha$ را می‌توان از روی نسبت‌های مثلثاتی نظیرشان از زاویه α به کمک شکل‌های زیر به دست آورد.



$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$



$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = \frac{1}{\tan(-\alpha)} = \frac{1}{-\tan \alpha} = -\cot \alpha$$

۹۰

نکته

به روش زیر می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی برخی زاویه‌ها را بر حسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ای دیگر حساب کنیم.

(۱) زاویه مورد نظر را به صورت $k\pi \pm \alpha$ (k عددی صحیح است) یا $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$ (k عددی صحیح و فرد است) می‌نویسیم.

(۲) با فرض اینکه α زاویه‌ای حاده است، ناحیه‌ای را که انتهای کمان نظیر زاویه مورد نظر در آن قرار دارد مشخص می‌کنیم.

(۳) علامت نسبت مثلثاتی مورد نظر در ناحیه به دست آمده را یادداشت می‌کنیم.

(۴) عبارت $k\pi \pm$ یا $\frac{k\pi}{2} \pm$ را حذف می‌کنیم.

(۵) اگر در مرحله قبلی $\frac{k\pi}{2} \pm$ را حذف کردیم، نسبت مثلثاتی را به صورت زیر تغییر می‌دهیم.

• سینوس به کسینوس

• کسینوس به سینوس

• تانژانت به کتانژانت

• کتانژانت به تانژانت

مثال:

$$۱) \sin 39^\circ = \sin(2 \times 18^\circ + 3^\circ) = \sin 3^\circ = \frac{1}{2}$$

$$۲) \cos 11^\circ = \cos(9^\circ + 2^\circ) = -\sin 2^\circ$$

$$۳) \tan \frac{11\pi}{6} = \tan(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$۴) \cot \frac{13\pi}{10} = \cot(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{10}) = \tan \frac{\pi}{10}$$

نکته

اگر α زاویه‌ای دلخواه باشد و $k \in \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه با استفاده از روش گفته شده نتیجه‌های زیر به دست می‌آیند.

$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$
$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$	$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha$	$\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan \alpha$
$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$	$\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\tan \alpha$
$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$

$\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos \alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin \alpha$	$\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\cot \alpha$	$\cot(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\tan \alpha$
$\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos \alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin \alpha$	$\tan(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cot \alpha$	$\cot(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\tan \alpha$
$\sin(2k\pi-\alpha)=-\sin \alpha$	$\cos(2k\pi-\alpha)=\cos \alpha$	$\tan(2k\pi-\alpha)=-\tan \alpha$	$\cot(2k\pi-\alpha)=-\cot \alpha$
$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin \alpha$	$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos \alpha$	$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan \alpha$	$\cot(2k\pi+\alpha)=\cot \alpha$

تست
□□□□

حاصل عبارت $A = \frac{1+\cos(12\pi-\alpha)}{\sin^2(\delta\pi-\alpha)} \times \frac{1+\cos(12\pi+\alpha)}{\sin(\gamma\pi+\alpha)}$ به ازای $\alpha = \frac{\delta\pi}{6}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

راه حل

ابتدا توجه کنید که

$$\cos(12\pi-\alpha)=-\cos \alpha, \quad \cos(12\pi+\alpha)=\cos \alpha, \quad \sin(\delta\pi-\alpha)=\sin \alpha, \quad \sin(\gamma\pi+\alpha)=-\sin \alpha$$

$$A = \frac{1-\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \times \frac{1+\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \frac{1-\cos^2 \alpha}{-\sin^3 \alpha} = -\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^3 \alpha} = -\frac{1}{\sin \alpha}$$

بنابراین

$$\text{بنابراین مقدار } A \text{ به ازای } \alpha = \frac{\delta\pi}{6} \text{ برابر است با } -\frac{1}{\sin \frac{\delta\pi}{6}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

تست
□□□□

حاصل عبارت $A = 2\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) + 3\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) + 4\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha) + 5\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$ به ازای $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) -۲

راه حل

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos \alpha, \quad \sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos \alpha, \quad \sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos \alpha, \quad \sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos \alpha$$

$$\text{بنابراین } A = 2\cos \alpha + 3\cos \alpha - 4\cos \alpha - 5\cos \alpha = -4\cos \alpha. \text{ پس مقدار } A \text{ به ازای } \alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ برابر است با } -4\cos \frac{2\pi}{3} = -4(-\frac{1}{2}) = 2$$

تست
□□□□

مقدار $\sin 42^\circ \cos 39^\circ + \cos(-66^\circ) \sin(-33^\circ)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

راه حل

توجه کنید که

$$\sin 42^\circ = \sin(36^\circ + 6^\circ) = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 39^\circ = \cos(36^\circ + 3^\circ) = \cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-66^\circ) = \cos 66^\circ = \cos(72^\circ - 6^\circ) = \cos 6^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin(-33^\circ) = -\sin 33^\circ = -\sin(36^\circ - 3^\circ) = -(-\sin 3^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\text{بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با } \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

تست
□□□□

حاصل $A = 3\sin \frac{3\pi}{4} + 5\sin \frac{\delta\pi}{4} + 7\sin \frac{\gamma\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\frac{9\sqrt{2}}{2}$ (۴) $-\frac{15\sqrt{2}}{2}$

راه حل

ابتدا توجه کنید که

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\delta\pi}{4} = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\gamma\pi}{4} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{بنابراین } A = 3(\frac{\sqrt{2}}{2}) + 5(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + 7(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{9\sqrt{2}}{2}$$

تست



اگر $\tan 2^\circ = a$ ، مقدار $\frac{\tan 2^\circ + \cot 16^\circ}{\tan 76^\circ + \cot 34^\circ}$ بر حسب a کدام است؟

(۴) $\frac{a}{a-1}$

(۳) $\frac{a}{a+1}$

(۲) $a-1$

(۱) $a+1$

راه حل

می توان نوشت

$$\tan 2^\circ = \tan(18^\circ - 16^\circ) = \tan 2^\circ = a$$

$$\cot 16^\circ = \cot(18^\circ - 2^\circ) = -\cot 2^\circ = -\frac{1}{a}$$

$$\tan 76^\circ = \tan(4 \times 18^\circ + 4^\circ) = \tan 4^\circ = 1$$

$$\cot 34^\circ = \cot(36^\circ - 2^\circ) = -\cot 2^\circ = -\frac{1}{a}$$

$$\frac{a - \frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{a^2 - 1}{a - 1} = a + 1$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $a+1$

۹۱

نکته

اگر زاویه های α و β مکمل یکدیگر باشند، سینوس آن ها با هم برابر است و کسینوس آن ها قرینه یکدیگر، تانژانت آن ها قرینه یکدیگر و کتانژانت آن ها هم قرینه یکدیگر است.

$$\alpha + \beta = \pi \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta, \quad \cos \alpha = -\cos \beta$$

$$\tan \alpha = -\tan \beta, \quad \cot \alpha = -\cot \beta$$

تست



مقدار عبارت $A = \frac{\sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5}}$ کدام است؟

(۴) $-\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۲) -1

(۱) 1

راه حل

توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = \pi$ ، آن گاه $\sin \alpha = \sin \beta$ ، بنابراین

$$\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi \Rightarrow \sin \frac{4\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{5}, \quad \frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi \Rightarrow \sin \frac{3\pi}{5} = \sin \frac{2\pi}{5}$$

در نتیجه

$$A = \frac{\sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5}} = 1$$

تست



مقدار عبارت $A = \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 180^\circ$ کدام است؟

(۴) 180°

(۳) 90°

(۲) -1

(۱) 1

راه حل

ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = 180^\circ$ ، آن گاه $\cos \beta = -\cos \alpha$ و در نتیجه $\cos \alpha + \cos \beta = 0$ ، بنابراین

$$\cos 1^\circ + \cos 179^\circ = 0, \quad \cos 2^\circ + \cos 178^\circ = 0, \quad \dots, \quad \cos 89^\circ + \cos 91^\circ = 0$$

از طرف دیگر $\cos 90^\circ = 0$ و $\cos 180^\circ = -1$ ، بنابراین $A = -1$.

تست

حاصل $A = \cos^3 \frac{\pi}{11} + \cos^3 \frac{2\pi}{11} + \dots + \cos^3 \frac{10\pi}{11}$ کدام است؟

- (۱) $5 \cos^3 \frac{\pi}{11}$ (۲) $10 \cos^3 \frac{\pi}{11}$ (۳) ۱ (۴) صفر

راه حل

ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = \pi$ آن گاه $\cos \beta = -\cos \alpha$. پس $\cos^3 \beta = -\cos^3 \alpha$ و در نتیجه $\cos^3 \alpha + \cos^3 \beta = 0$. بنابراین

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi}{11} + \frac{10\pi}{11} = \pi &\Rightarrow \cos^3 \frac{\pi}{11} + \cos^3 \frac{10\pi}{11} = 0 \\ \frac{2\pi}{11} + \frac{9\pi}{11} = \pi &\Rightarrow \cos^3 \frac{2\pi}{11} + \cos^3 \frac{9\pi}{11} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{5\pi}{11} + \frac{6\pi}{11} = \pi &\Rightarrow \cos^3 \frac{5\pi}{11} + \cos^3 \frac{6\pi}{11} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = 0$$

نکته

۹۲

اگر زاویه های α و β متمم یکدیگر باشند، سینوس یکی برابر کسینوس دیگری است و تانژانت یکی برابر کتانژانت دیگری است.

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta, \quad \tan \alpha = \cot \beta$$

تست

مقدار $\sin^2 \frac{\pi}{10} + \sin^2 \frac{2\pi}{5}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) ۱

راه حل

توجه کنید که $\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$. پس $\sin \frac{2\pi}{5} = \cos \frac{\pi}{10}$. در نتیجه $\sin^2 \frac{2\pi}{5} = \cos^2 \frac{\pi}{10}$. بنابراین $\sin^2 \frac{\pi}{10} + \sin^2 \frac{2\pi}{5} = \sin^2 \frac{\pi}{10} + \cos^2 \frac{\pi}{10} = 1$

دست گرمی

۸۰- حاصل عبارت $A = \frac{2 \sin(\pi + \alpha) - 4 \sin(\pi - \alpha)}{3 \cos(\pi + \alpha) - \cos(\pi - \alpha)}$ کدام است؟

- (۱) $3 \tan \alpha$ (۲) $\frac{3}{2} \tan \alpha$ (۳) $-\tan \alpha$ (۴) $-3 \tan \alpha$

۸۱- اگر $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ، مقدار $\frac{\cos(\pi - \alpha) - \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\sin(-\alpha) - \cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha)}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\cot \alpha$ (۲) $-\cot \alpha$ (۳) $\cos \alpha$ (۴) $-\cos \alpha$

۸۲- حاصل عبارت $\frac{\sin 135^\circ - \cos 12^\circ}{\sin 135^\circ + \cos 12^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $1 + 2\sqrt{2}$ (۲) $2 - 3\sqrt{2}$ (۳) $3 + 2\sqrt{2}$ (۴) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

۸۳- حاصل عبارت $A = \sin \frac{7\pi}{6} \tan \frac{5\pi}{4} + \cot \frac{7\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{3}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۸۴- مقدار $\cos^3 \frac{\pi}{8} + \cos^3 \frac{3\pi}{8} + \cos^3 \frac{5\pi}{8} + \cos^3 \frac{7\pi}{8}$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

نسبت‌های مثلثاتی همه زاویه‌ها (۱)

آزمون ۴۷

- ۴۶۱- حاصل عبارت $A = \tan \alpha \cot(-\alpha) + \sin^2(-\alpha) + \cos^2 \alpha$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) $-2 \sin^2 \alpha$
- ۴۶۲- حاصل $\cos(x-90^\circ) \cot(-x-180^\circ)$ کدام است؟
 (۱) $-\sin x$ (۲) $-\cos x$ (۳) $\sin x$ (۴) $\cos x$
- ۴۶۳- اگر $\tan \theta = 0/4$ ، مقدار عبارت $A = \frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) + \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) + \sin(2\pi - \theta)}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{3}{4}$
- ۴۶۴- اگر $x + 3y = \frac{\pi}{2}$ ، حاصل $\tan(2x + 3y)$ کدام است؟
 (۱) $-\tan x$ (۲) $-\cot x$ (۳) $\tan x$ (۴) $\cot x$
- ۴۶۵- اگر $\cos(\frac{3\pi}{2} - x) = 2 \sin(\frac{5\pi}{2} + x)$ ، حاصل $\tan x$ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -۲ (۴) $-\frac{1}{2}$
- ۴۶۶- حاصل $\cos 51^\circ$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ۴۶۷- حاصل $\cos \frac{43\pi}{6}$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ۴۶۸- حاصل $\sin \frac{23\pi}{6} \cos \frac{16\pi}{3} \tan \frac{35\pi}{4} \cot(-\frac{43\pi}{4})$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- ۴۶۹- مقدار عبارت $A = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{3\pi}{5} - \sin \frac{4\pi}{5}}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$
- ۴۷۰- مقدار عبارت $A = \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) صفر

سؤال	گام
۴۶۱	۸۱ ۹۰
۴۶۲	۸۱ ۹۰
۴۶۳	۸۱ ۹۰
۴۶۴	۹۲
۴۶۵	۹۰
۴۶۶	۹۰
۴۶۷	۹۰
۴۶۸	۹۰
۴۶۹	۹۱
۴۷۰	۹۱

نسبت‌های مثلثاتی همهٔ زاویه‌ها (۲)

آزمون ۴۸

سؤال	گام
۴۷۱	۹۰
۴۷۲	۸۱ ۹۰
۴۷۳	۸۱ ۹۰
۴۷۴	۸۱ ۹۰
۴۷۵	۷۴ ۸۱ ۹۰
۴۷۶	۹۰
۴۷۷	۹۰ ۲۹۰
۴۷۸	۹۰
۴۷۹	۹۱ ۹۲
۴۸۰	۹۲

۴۷۱- حاصل عبارت $A = 3 \sin(3\pi - \alpha) + 4 \sin(4\pi + \alpha) + 5 \sin(5\pi + \alpha)$ کدام است؟

- (۱) $4 \sin \alpha$ (۲) $8 \sin \alpha$ (۳) $2 \sin \alpha$ (۴) $12 \sin \alpha$

۴۷۲- حاصل عبارت $A = \frac{3 \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{2 \cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \cot(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$ کدام است؟ $(\alpha \neq \frac{k\pi}{2})$

- (۱) $2 \cot^2 \alpha$ (۲) $\frac{4}{3} \cot^2 \alpha$ (۳) $2 \tan^2 \alpha$ (۴) $\frac{4}{3} \tan^2 \alpha$

۴۷۳- اگر $\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) + 2 \sin(2\pi - \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) - 2 \cos(3\pi + \alpha)} = 3$ ، مقدار $\tan(\alpha - \frac{5\pi}{2})$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $-\frac{1}{5}$

۴۷۴- اگر $\alpha - \beta = \frac{3\pi}{2}$ ، حاصل $\frac{1}{1 - \cot \alpha} + \frac{1}{1 + \cot \beta}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\tan \beta$ (۴) $\cot \alpha$

۴۷۵- اگر $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ و $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \frac{12}{13}$ ، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{5}{6}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{5}{12}$

۴۷۶- حاصل کسر $\frac{\cos(-60^\circ) + \cot 675^\circ}{\tan 945^\circ - \sin(-33^\circ)}$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

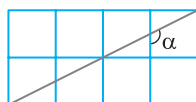
۴۷۷- اگر $\tan 15^\circ = a$ ، حاصل عبارت $A = \frac{2 \tan 75^\circ + \tan 105^\circ}{3 \tan 165^\circ - \tan 255^\circ}$ برحسب a کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{3a^2 + 1}$ (۲) $\frac{3}{3a^2 - 1}$ (۳) $\frac{1}{3a^2 - 1}$ (۴) $\frac{-1}{3a^2 + 1}$

۴۷۸- مقدار عبارت $A = 4 \sin^2 \frac{101\pi}{3} - 2 \cos \frac{98\pi}{3}$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) $1 + \sqrt{3}$ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۷۹- در شکل مقابل طول ضلع هر یک از مربع‌های کوچک برابر با یک واحد است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟



- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

۴۸۰- حاصل عبارت $A = \tan \frac{\pi}{14} \tan \frac{2\pi}{14} \dots \tan \frac{6\pi}{14}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۲

نسبت‌های مثلثاتی همه زاویه‌ها (۳)

آزمون ۴۹

- ۴۸۱- حاصل عبارت $A = \frac{\tan(\pi - \alpha) + 3 \tan(\pi + \alpha)}{\tan(2\pi - \alpha) - \tan(2\pi + \alpha)}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲
- ۴۸۲- مقدار عبارت $A = \frac{4 \sin(\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) + 2 \cos(\frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}{3 \tan(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) - 6 \cot(\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{6})}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{9}$ (۴) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$
- ۴۸۳- در مثلث قائم‌الزاویه ABC حاصل عبارت $\frac{\cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C}}{\sin^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C}}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{3}{2}$
- ۴۸۴- اگر $a + b = \frac{5\pi}{2}$ ، حاصل $\frac{\sin a + \tan a \tan b - 1}{\sin b - \cos^2 a - \cos^2 b + 1}$ کدام است؟
 (۱) $\tan b$ (۲) $\cot b$ (۳) $-\cot b$ (۴) $-\tan b$
- ۴۸۵- اگر $3a + 2b = \pi$ و $\cos(a + b) = \frac{3}{5}$ ، مقدار $\sin \frac{a}{2}$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{2}{5}$ (۲) $-\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{3}{5}$
- ۴۸۶- حاصل عبارت $\frac{\sin^2 41^\circ + \sin^2 49^\circ}{\tan 73^\circ \times \cot 11^\circ}$ کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) ۲
- ۴۸۷- اگر $a = \cot 25^\circ$ ، حاصل عبارت $A = \frac{\cos 115^\circ - 3 \cos 155^\circ}{3 \cos 295^\circ + \cos 335^\circ}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{3a+1}{3-a}$ (۲) $\frac{3a-1}{a-3}$ (۳) $\frac{3a-1}{a+3}$ (۴) $\frac{a+1}{3a-1}$
- ۴۸۸- حاصل عبارت $A = \sin \frac{11\pi}{6} \tan \frac{5\pi}{4} - \cot \frac{9\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{3}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲
- ۴۸۹- حاصل عبارت $A = \cos^2 \frac{\pi}{16} + \cos^2 \frac{3\pi}{16} + \cos^2 \frac{5\pi}{16} + \cos^2 \frac{7\pi}{16}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$
- ۴۹۰- مقدار عبارت $A = \frac{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 89^\circ}{\cos 91^\circ + \cos 92^\circ + \dots + \cos 179^\circ}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

سؤال	گام
۴۸۱	۹۰
۴۸۲	۹۰
۴۸۳	۹۲
۴۸۴	۸۱ ۹۰
۴۸۵	۹۲
۴۸۶	۹۰
۴۸۷	۸۱ ۹۰
۴۸۸	۹۰
۴۸۹	۸۱ ۹۲
۴۹۰	۹۱

فصل دوم: مثلثات

درس ششم: سینوس و کسینوس زاویه 2α

اگر α زاویه‌ای دلخواه باشد، سینوس و کسینوس زاویه 2α را می‌توانیم از تساوی‌های زیر به دست آوریم:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

اگر در تساوی $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ به جای $\cos^2 \alpha$ قرار دهیم $1 - \sin^2 \alpha$ ، به دست می‌آید

$$\cos 2\alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

همین‌طور، اگر به جای $\sin^2 \alpha$ قرار دهیم $1 - \cos^2 \alpha$ ، به دست می‌آید

۹۳

نکته

اگر α زاویه‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ، $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

مثال: اگر $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ، آن‌گاه $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{119}{169}$

تست

□□□□

اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و انتهای کمان نظیر زاویه α در ناحیه دوم دایره مثلثاتی باشد، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

(۴) $-\frac{12}{25}$

(۳) $\frac{12}{25}$

(۲) $\frac{24}{25}$

(۱) $-\frac{24}{25}$

راه‌حل

راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که $\cos \alpha$ عددی منفی است. پس

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{9}{25} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5} \text{ (غ.ق.)}$$

$$\text{بنابراین } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{3}{5} \times -\frac{4}{5} = -\frac{24}{25}$$

راه‌حل دوم می‌دانیم $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ ، پس $\cos 2\alpha = 1 - 2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$

اکنون از اتحاد $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin^2 2\alpha = 1 - \cos^2 2\alpha = 1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2 = \frac{576}{625} \Rightarrow |\sin 2\alpha| = \frac{24}{25}$$

از طرف دیگر چون $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ، پس $180^\circ < 2\alpha < 360^\circ$ ، در نتیجه $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$

تست

□□□□

حاصل عبارت $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \tan \alpha$ کدام است؟

(۴) $\cos \alpha$

(۳) $\sin \alpha$

(۲) ۱

(۱) -۱

راه‌حل

از روابط $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ و $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \tan \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1 - 2 \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha = 1$$

تست

□□□□

حاصل عبارت $\frac{2 \cos^2 x - \cos 2x}{2 \sin^2 x + \cos 2x}$ کدام است؟

(۴) $\cot x$

(۳) $\tan x$

(۲) -۱

(۱) ۱

راه‌حل

توجه کنید که $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$. بنابراین $\frac{2 \cos^2 x - \cos 2x}{2 \sin^2 x + \cos 2x} = \frac{2 \cos^2 x - (2 \cos^2 x - 1)}{2 \sin^2 x + (1 - 2 \sin^2 x)} = \frac{1}{1} = 1$

تست

□□□□

حاصل عبارت $A = \frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2} \cos 2x}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) $2\sqrt{2} \sin x$ (۴) $2\sqrt{2} \cos x$

راهنما

از اتحاد $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2} \cos 2x}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x = \frac{1 - 2\sin^2 x}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x \\ &= \frac{(1 - \sqrt{2} \sin x)(1 + \sqrt{2} \sin x)}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x \\ &= -1 - \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \cos x = -1 \end{aligned}$$

تست

□□□□

حاصل $\frac{2 \sin^2 40^\circ - 1}{\sin 20^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2 \cos 10^\circ}$ (۲) $-\frac{1}{2 \cos 10^\circ}$ (۳) $2 \cos 10^\circ$ (۴) $-\frac{1}{\cos 10^\circ}$

راهنما

توجه کنید که $1 - 2\sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ و $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ، بنابراین

$$\frac{2 \sin^2 40^\circ - 1}{\sin 20^\circ} = \frac{-\cos 80^\circ}{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ} = -\frac{\cos(90^\circ - 10^\circ)}{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ} = -\frac{\sin 10^\circ}{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ} = -\frac{1}{2 \cos 10^\circ}$$

تست

□□□□

مقدار $\sin 10^\circ \cos 10^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

راهنما

ابتدا توجه کنید که

$$\sin 10^\circ = \sin(90^\circ + 10^\circ) = \cos 10^\circ, \quad \cos 10^\circ = \cos(90^\circ + 10^\circ) = -\sin 10^\circ$$

$$\sin 10^\circ \cos 10^\circ = -\sin 10^\circ \cos 10^\circ = -\frac{1}{2}(2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ) = -\frac{1}{2} \sin(2 \times 10^\circ) = -\frac{1}{2} \sin 20^\circ = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

تست

□□□□

مقدار عبارت $A = \left(\cos 75^\circ - \frac{1}{\sin 75^\circ}\right) \left(\sin 75^\circ - \frac{1}{\cos 75^\circ}\right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{4}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) ۲

راهنما

می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} A &= \left(\cos 75^\circ - \frac{1}{\sin 75^\circ}\right) \left(\sin 75^\circ - \frac{1}{\cos 75^\circ}\right) = \left(\frac{\cos 75^\circ \sin 75^\circ - 1}{\sin 75^\circ}\right) \left(\frac{\sin 75^\circ \cos 75^\circ - 1}{\cos 75^\circ}\right) \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} \sin 150^\circ - 1\right) \left(\frac{1}{2} \sin 150^\circ - 1\right)}{\sin 75^\circ \cos 75^\circ} = \frac{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 1\right)}{\frac{1}{2} \sin 150^\circ} \rightarrow A = \frac{\left(-\frac{3}{4}\right) \left(-\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

تست

□□□□

مقدار عبارت $A = \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x)$ به‌ازای $x = \frac{\pi}{24}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

راهنما

ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم: $A = \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \times \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$

$$\text{بنابراین به‌ازای } x = \frac{\pi}{24} \text{ به‌دست می‌آید } A = \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{24} = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

تست

۹

مقدار عبارت $\cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

راه حل

فرض کنید $A = \cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ$. دوطرف این تساوی را در $\sin 2^\circ$ ضرب می‌کنیم و از دستور $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ استفاده می‌کنیم:
 $\sin 2^\circ \cdot A = \sin 2^\circ \cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ = \frac{1}{2} \sin 4^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 8^\circ \right) \cos 8^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 16^\circ \right) = \frac{1}{8} \sin 16^\circ$
 اکنون توجه کنید که $\sin 16^\circ = \sin(18^\circ - 2^\circ) = \sin 2^\circ$. بنابراین $\sin 16^\circ = \sin 2^\circ$. پس $A = \frac{1}{8}$.

نکته

۹۴

چون نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 3° و 45° را می‌دانیم، می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 15° و 22.5° را حساب کنیم.

تست

۱۰

اگر $\sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a}}{2}$ ، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶

راه حل

در اتحاد $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ قرار می‌دهیم $\alpha = 22.5^\circ$. در این صورت
 $\cos 45^\circ = 1 - 2 \sin^2 22.5^\circ \Rightarrow \sin^2 22.5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \Rightarrow a = 2$

نکته

۹۵

اتحادهای $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ و $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ را می‌توانیم به صورت‌های زیر نیز بنویسیم:
 $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$ ، $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$

تست

۱۱

مقدار $2 \sin^2 \frac{5\pi}{16} + \cos \frac{5\pi}{8}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

راه حل

توجه کنید که $2 \sin^2 \frac{5\pi}{16} + \cos \frac{5\pi}{8} = 1 - \cos(2 \times \frac{5\pi}{16}) = 1 - \cos \frac{5\pi}{8}$. بنابراین $2 \sin^2 \frac{5\pi}{16} + \cos \frac{5\pi}{8} = 1$.

عبارت‌های $1 + \sin 2\alpha$ و $1 - \sin 2\alpha$ را می‌توانیم به صورت مربع کامل بنویسیم:

$$1 \pm \sin 2\alpha = 1 \pm 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \pm 2 \sin \alpha \cos \alpha = (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2$$

نکته

۹۶

$$1 - \sin 2\alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2, \quad 1 + \sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$$

تست

۱۲

ساده شده عبارت $A = \sqrt{1 - \sin 1^\circ} + \sqrt{1 + \sin 1^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $2 \sin 5^\circ$ (۲) $2 \cos 5^\circ$ (۳) $\sin 1^\circ$ (۴) $\cos 1^\circ$

راه حل

ابتدا توجه کنید که $1 - \sin 1^\circ = \sin^2 5^\circ + \cos^2 5^\circ - 2 \sin 5^\circ \cos 5^\circ = (\sin 5^\circ - \cos 5^\circ)^2$. به همین ترتیب $1 + \sin 1^\circ = (\sin 5^\circ + \cos 5^\circ)^2$. بنابراین
 $A = \sqrt{(\sin 5^\circ - \cos 5^\circ)^2} + \sqrt{(\sin 5^\circ + \cos 5^\circ)^2} = |\sin 5^\circ - \cos 5^\circ| + |\sin 5^\circ + \cos 5^\circ|$
 با توجه به اینکه $\cos 5^\circ > \sin 5^\circ > 0$ نتیجه می‌شود $A = -\sin 5^\circ + \cos 5^\circ + \sin 5^\circ + \cos 5^\circ = 2 \cos 5^\circ$.

تست

اگر $\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x} = 7-4\sqrt{3}$ ، مقدار $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ کدام است؟

- (۱) $\pm(\frac{2-\sqrt{3}}{2})$ (۲) $\pm(\frac{3-\sqrt{2}}{2})$ (۳) $\pm(3-\sqrt{2})$ (۴) $\pm(2-\sqrt{3})$

راه حل

توجه کنید که

$$\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x} = \frac{1-2\sin x \cos x}{1+2\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x} = \frac{(\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^2 = 7-4\sqrt{3}$$

از طرف دیگر $7-4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2$ ، در نتیجه

$$\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^2 = (2-\sqrt{3})^2 \Rightarrow \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \pm(2-\sqrt{3})$$

مجموع و تفاضل تانژانت و کتانژانت زاویه α را می‌توانیم برحسب نسبت‌های مثلثاتی 2α بنویسیم:

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$\tan \alpha - \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{-\cos 2\alpha}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = -2 \cot 2\alpha$$

۹۷

نکته

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}, \quad \cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$$

تست

مقدار $\tan 75^\circ + \cot 75^\circ$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

راه حل

$$\tan 75^\circ + \cot 75^\circ = \frac{2}{\sin 15^\circ} = \frac{2}{\sin(18^\circ - 3^\circ)} = \frac{2}{\sin 3^\circ} = 4$$

توجه کنید که

$$\begin{aligned} \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} &= \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha \\ \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} &= \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \cos 2\alpha \end{aligned}$$

بنابراین مقدار $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را می‌توانیم برحسب $\tan \alpha$ بنویسیم:

۹۸

نکته

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

تست

اگر $\cot x = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\frac{1+2\cos 2x}{\sin 2x}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{8}$ (۴) $-\frac{1}{16}$

راه حل

$$\text{توجه کنید که } \tan x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cot x = 2 \text{ پس } \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = -\frac{3}{5} \text{ و } \sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{4}{5} \text{ در نتیجه } \frac{1+2\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1-\frac{6}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{1}{4}$$

توجه کنید که

$$\sin^5 \alpha + \cos^5 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos 4\alpha}{2} \right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha$$

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$= 1 - 3(\sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1 - 3 \left(\frac{1}{4} \sin^2 2\alpha \right) = 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \cos 4\alpha}{2} \right) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha$$

۹۹

$$\sin^5 \alpha + \cos^5 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha, \quad \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha$$

نکته

اگر $\sin^5 \alpha + \cos^5 \alpha = \frac{9}{16}$ مقدار $\frac{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha}{\cos 4\alpha}$ کدام است؟

تست ۱۶

(۴) $-\frac{7}{8}$

(۳) $-\frac{11}{24}$

(۲) $-\frac{5}{8}$

(۱) $-\frac{3}{8}$

$$\sin^5 \alpha + \cos^5 \alpha = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha = \frac{9}{16} \Rightarrow \cos 4\alpha = -\frac{3}{4}$$

توجه کنید که راه حل

$$\frac{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha}{\cos 4\alpha} = \frac{\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha}{\cos 4\alpha} = \frac{\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \left(-\frac{3}{4} \right)}{-\frac{3}{4}} = -\frac{11}{24}$$

بنابراین

دست گرمی

۸۵- اگر $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ و $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$ مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

(۴) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۳) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

(۲) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

(۱) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

۸۶- حاصل $\frac{1 - 2 \sin^2(\frac{\pi}{4} - x)}{\cos x}$ کدام است؟

(۴) $2 \cos x$

(۳) $\cos x$

(۲) $2 \sin x$

(۱) $\sin x$

۸۷- مقدار $\frac{1}{\sin^2 15^\circ} + \frac{1}{\cos^2 15^\circ}$ کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۱۶

(۲) ۹

(۱) ۱

۸۸- مقدار $\cos \frac{3\pi}{8}$ کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

(۱) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

۸۹- مقدار $3 \cos^2 10.5^\circ + \sin^2 10.5^\circ$ کدام است؟

(۴) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

(۳) $\sqrt{3}-1$

(۲) $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$

(۱) $1+\sqrt{3}$

۹۰- مقدار $\tan 22/5^\circ - \cot 22/5^\circ$ کدام است؟

(۴) -۲

(۳) ۲

(۲) -۱

(۱) ۱

۹۱- ساده شده عبارت $\frac{\tan 15^\circ}{1+\tan^2 15^\circ}$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۱) $\frac{1}{8}$

سینوس و کسینوس زاویه 2α (۱)

آزمون ۵۰

- ۴۹۱- حاصل $\frac{\cos 2x}{1-\tan^2 x}$ برابر کدام است؟
 (۱) $\cos^2 x$ (۲) $\sin^2 x$ (۳) $\frac{1}{\cos^2 x}$ (۴) $\frac{1}{\sin^2 x}$
- ۴۹۲- مقدار $\cos^4 \frac{\pi}{8} - \sin^4 \frac{\pi}{8}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
- ۴۹۳- مقدار $\cos 15^\circ \sin 75^\circ$ کدام است؟
 (۱) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$
- ۴۹۴- اگر $\pi > \theta > \frac{\pi}{2}$ و $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ، مقدار $\sin 2\theta$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{24}{25}$ (۲) $\frac{24}{25}$ (۳) $\frac{12}{25}$ (۴) $-\frac{12}{25}$
- ۴۹۵- اگر $2\alpha = \frac{1}{4}$ ، مقدار $\tan \alpha + \cot \alpha$ کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶
- ۴۹۶- اگر $\cot x = 3$ ، مقدار عبارت $A = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$ کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۹ (۴) $\frac{1}{9}$
- ۴۹۷- حاصل $\frac{1-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}$ برابر کدام است؟
 (۱) $\sin 20^\circ$ (۲) $\cos 20^\circ$ (۳) $\tan 20^\circ$ (۴) $\cot 20^\circ$
- ۴۹۸- مقدار $\frac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ - \sin 40^\circ} - \sin 40^\circ$ برابر کدام است؟
 (۱) $\sin 40^\circ$ (۲) $\cos 40^\circ$ (۳) $-\cos 40^\circ$ (۴) $-\sin 40^\circ$
- ۴۹۹- اگر $2x = \frac{1}{3}$ ، مقدار $A = \sin^2 x + \cos^2 x$ کدام است؟
 (۱) $\frac{7}{9}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{17}{18}$
- ۵۰۰- اگر $\frac{\sin^3 x}{2 \sin x - \sin 2x} = \frac{2}{3}$ ، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $-\frac{7}{9}$ (۴) $\frac{7}{9}$

سؤال	گام
۴۹۱	۹۳
۴۹۲	۹۳ ۲۸۲
۴۹۳	۹۲ ۹۳
۴۹۴	۷۴ ۸۱ ۹۳
۴۹۵	۸۱ ۹۳ ۹۷
۴۹۶	۹۳ ۹۵
۴۹۷	۹۳
۴۹۸	۹۳ ۲۸۲
۴۹۹	۹۹
۵۰۰	۸۱ ۹۳ ۲۸۲

سینوس و کسینوس زاویه 2α (۲)

آزمون ۵۱

سؤال	گام
۵۰۱	۸۱ ۹۳ ۹۷
۵۰۲	۹۳
۵۰۳	۹۲ ۹۳
۵۰۴	۹۸
۵۰۵	۹۳
۵۰۶	۹۲ ۹۳
۵۰۷	۷۴ ۹۹
۵۰۸	۹۲ ۹۳
۵۰۹	۹۲ ۹۳
۵۱۰	۹۲ ۹۳ ۹۷

۵۰۱- ساده شده عبارت $\sin 2\alpha(\tan \alpha + \cot \alpha)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\sin^2 \alpha$ (۴) $\cos^2 \alpha$

۵۰۲- مقدار $\sin \frac{\pi}{12} (2 \cos^2 \frac{\pi}{24} - 1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۵۰۳- مقدار $\cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}+2}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}-2}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}+2}{2}$

۵۰۴- اگر $\tan x = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\sin 2x + \cos 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{6}{5}$ (۳) $\frac{7}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۵۰۵- اگر $\cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} = 10$ ، مقدار $\cos 2\theta$ کدام است؟ $(\theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$

- (۱) $-\frac{71}{81}$ (۲) $-\frac{79}{81}$ (۳) $-\frac{7}{9}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

۵۰۶- اگر $\cos^2 \theta = a$ ، مقدار $\sin 84^\circ$ بر حسب a کدام است؟

- (۱) $\frac{1-a^2}{2}$ (۲) $\frac{a^2-1}{2}$ (۳) $2a^2-1$ (۴) $1-2a^2$

۵۰۷- اگر $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{2}{3}$ و انتهای کمان روبه روبه زاویه α در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی باشد، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

۵۰۸- مقدار $\frac{\sin 5^\circ \sin 4^\circ}{\cos 1^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۵۰۹- اگر $x = \frac{\pi}{24}$ ، مقدار $\cos 10^\circ x \cos 2x$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۵۱۰- مقدار $\frac{\tan 5^\circ - \tan 4^\circ}{2}$ کدام است؟

- (۱) $\tan 1^\circ$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\cot 1^\circ$

سینوس و کسینوس زاویه 2α (۳)

آزمون ۵۲

- ۵۱۱- ساده شده عبارت $A = \sin x \cos^3 x - \sin^3 x \cos x$ کدام است؟
- (۱) $\frac{1}{4} \sin 4x$ (۲) $\frac{1}{2} \sin 2x$ (۳) $\frac{1}{4} \cos 4x$ (۴) $\frac{1}{2} \cos 2x$
- ۵۱۲- اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟
- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$
- ۵۱۳- اگر $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ، مقدار $\tan 2\alpha$ کدام است؟ ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$)
- (۱) $\frac{29}{7}$ (۲) $\frac{24}{7}$ (۳) $\frac{23}{7}$ (۴) $\frac{18}{7}$
- ۵۱۴- اگر $2 \sin x = 5 \cos x$ ، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟
- (۱) صفر (۲) $\frac{10}{29}$ (۳) $\frac{20}{29}$ (۴) $\frac{1}{29}$
- ۵۱۵- اگر $\sin x = 4 \sin y$ و $\cos y = 3 \cos x$ ، مقدار $\frac{\sin 2x}{\sin 2y}$ کدام است؟
- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$
- ۵۱۶- اگر $\sin x - \cos x = \frac{4}{3}$ ، مقدار عبارت $A = \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos 2x}$ کدام است؟
- (۱) $\frac{25}{24}$ (۲) $-\frac{25}{24}$ (۳) 1 (۴) $\frac{1}{2}$
- ۵۱۷- مقدار $\frac{\sin^2 11^\circ - \sin^2 2^\circ}{\sin 5^\circ}$ کدام است؟
- (۱) صفر (۲) 1 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$
- ۵۱۸- حاصل $\frac{1 + \cos 4^\circ}{\cos 55^\circ \cos 35^\circ}$ کدام است؟
- (۱) $\cos 2^\circ$ (۲) $2 \cos 2^\circ$ (۳) $4 \cos 2^\circ$ (۴) $\frac{1}{2} \cos 2^\circ$
- ۵۱۹- اگر $\cos a \cos 2a = \frac{1}{16 \sin a}$ ، مقدار $\cos 8a$ کدام است؟
- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{7}{8}$ (۴) $\frac{3}{4}$
- ۵۲۰- اگر $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{4}{5}$ ، مقدار $\cos^2 2x$ کدام است؟
- (۱) $\frac{1}{60}$ (۲) $\frac{59}{60}$ (۳) $\frac{13}{15}$ (۴) $\frac{11}{15}$

سؤال	گام
۵۱۱	۹۳
۵۱۲	۹۳
۵۱۳	۷۴ ۸۱ ۹۳
۵۱۴	۸۱ ۹۳ ۹۷
۵۱۵	۹۳
۵۱۶	۹۳ ۲۸۱ ۲۸۲ ۲۸۷
۵۱۷	۹۲ ۹۳
۵۱۸	۹۲ ۹۳ ۹۵
۵۱۹	۹۳
۵۲۰	۸۱ ۹۹

سینوس و کسینوس زاویه 2α (۴)

آزمون ۵۳

سؤال	گام
۵۲۱	۹۳ ۲۸۲
۵۲۲	۷۴ ۹۵
۵۲۳	۷۴ ۹۵
۵۲۴	۹۹
۵۲۵	۹۳ ۹۷ ۲۸۱
۵۲۶	۷۴ ۹۷ ۲۸۲
۵۲۷	۹۲ ۹۳ ۲۸۲
۵۲۸	۸۱ ۹۳ ۹۷ ۳۰۲
۵۲۹	۹۳ ۹۷ ۲۸۱
۵۳۰	۸۱ ۹۳

۵۲۱- ساده شده عبارت $A = \frac{\cos 2x - \sqrt{2} \cos x + 1}{\sqrt{2} \cos x - 1}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{2} \sin x$ (۲) $\sqrt{2} \cos x$ (۳) $\sqrt{2} \tan x$ (۴) $\sqrt{2} \cot x$

۵۲۲- اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ و $\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = 2$ ، مقدار $\tan x + 2 \cot x$ کدام است؟

(۱) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-3\sqrt{2}$ (۴) $-2\sqrt{2}$

۵۲۳- مقدار $A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{8}}}$ کدام است؟

(۱) $2 \sin \frac{\pi}{32}$ (۲) $2 \cos \frac{\pi}{32}$ (۳) $\sin \frac{\pi}{32}$ (۴) $\cos \frac{\pi}{32}$

۵۲۴- مقدار $\sin^4 \frac{\pi}{12} + \cos^4 \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{7}{8}$

۵۲۵- مقدار $\tan^2 \frac{\pi}{8} + \cot^2 \frac{\pi}{8}$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۵۲۶- اگر x زاویه‌ای حاده باشد و $\tan x = \frac{4}{3}$ ، مقدار $\tan^2 \frac{x}{2} - \cot^2 \frac{x}{2}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{15}{4}$ (۳) $-\frac{7}{4}$ (۴) $-\frac{11}{4}$

۵۲۷- حاصل $1 + \frac{\cos 2^\circ}{\sqrt{2} \cos 1^\circ + 1}$ چند برابر $\sin 8^\circ$ است؟

(۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{2}$

۵۲۸- اگر $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ جواب‌های معادله $x^2 - (m+3)x + 2m - 1 = 0$ باشند، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۵۲۹- اگر $\tan^2 x + \cot^2 x = 5$ ، مقدار $\sin^2 2x$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{4}{7}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{8}{9}$

۵۳۰- ساده شده عبارت $\frac{1 + \sin 4^\circ - \cos 4^\circ}{1 + \sin 4^\circ + \cos 4^\circ}$ کدام است؟

(۱) $\tan 2^\circ$ (۲) $\cot 2^\circ$ (۳) $\tan 4^\circ$ (۴) $\cot 4^\circ$

آزمون فصل دوم (۲)

آزمون ۶۳

۶۲۱- مقدار عبارت $A = \frac{(1 + \cot \frac{\pi}{5})(1 - \tan \frac{\pi}{5})}{(1 - \cot \frac{\pi}{5})(1 + \tan \frac{\pi}{5})}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۱

۶۲۲- اگر x زاویه‌ای حاده باشد و $\frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = \frac{7}{25}$ ، مقدار $\cos x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۶۲۳- اگر $\sin x \cos x = \sin x + \cos x$ ، حاصل $\sin x + \cos x$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}-1$ (۲) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ (۳) $1-\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

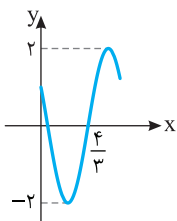
۶۲۴- حاصل عبارت $A = \cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ$ کدام است؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۴۵/۵ (۳) ۸۹ (۴) ۹۰

۶۲۵- اگر $-\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$ و $\tan x = m + 2\sqrt{3}$ ، حداقل مقدار m کدام است؟

- (۱) $-3\sqrt{3}$ (۲) $-4\sqrt{3}$ (۳) $-2\sqrt{3}$ (۴) $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

۶۲۶- بخشی از نمودار تابع $f(x) = a \sin(\pi(b-x))$ به شکل مقابل است. مقدار $a+b$ کدام است؟ ($2 < b < 3$)



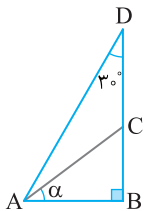
- (۱) $\frac{7}{3}$ (۲) $-\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{13}{3}$

۶۲۷- مقدار عبارت $A = \left(\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}\right)^2$ به ازای $x = \frac{\pi}{16}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ (۲) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ (۴) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

۶۲۸- در شکل روبه‌رو $BC=3$ و $AD=8$. مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{12}{25}$ (۲) $\frac{24}{25}$ (۳) $\frac{7}{15}$ (۴) $\frac{14}{15}$



۶۲۹- نمودار تابع $f(x) = 1 - \sin(2x)$ در بازه $(0, 4\pi)$ چندبار بر محور طول‌ها مماس می‌شود؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۳۰- مجموع جواب‌های معادله $\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8}) = -1$ در بازه $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{11\pi}{4}$ (۲) $\frac{21\pi}{8}$ (۳) $\frac{23\pi}{16}$ (۴) $\frac{21\pi}{16}$

سؤال	گام
۶۲۱	۸۱
۶۲۲	۷۴ ۸۱
۶۲۳	۷۶ ۸۱ ۲۸۱
۶۲۴	۸۱ ۹۱
۶۲۵	۱۰۵
۶۲۶	۱۰۰ ۱۰۳
۶۲۷	۸۱ ۹۳ ۹۵
۶۲۸	۶۹ ۹۳
۶۲۹	۱۰۰ ۱۱۱ ۱۱۳
۶۳۰	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۰۹

آزمون فصل دوم (۳) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

آزمون ۶۴

سؤال	گام
۶۳۱	۸۱ ۹۰
۶۳۲	۸۱ ۹۰ ۹۳
۶۳۳	۱۰۰ ۱۰۳
۶۳۴	۹۷
۶۳۵	۹۰ ۱۰۶
۶۳۶	۱۰۶ ۱۰۹
۶۳۷	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۰۹ ۱۱۰
۶۳۸	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۰۹
۶۳۹	۱۰۶ ۱۱۰ ۱۱۲ ۱۱۵
۶۴۰	۱۰۶ ۱۱۰ ۱۱۵

ریاضی - ۹۱

۶۳۱- اگر $\tan \theta = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ کدام است؟

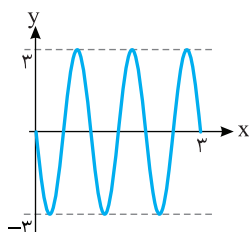
- (۱) -۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۶۳۲- ساده شدهٔ کسر $\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}$ کدام است؟

- (۱) $8 \cos^{-2} \theta$ (۲) $8 \sin^{-2} \theta$ (۳) $16 \cos^{-4} \theta$ (۴) $16 \sin^{-4} \theta$

۶۳۳- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. مقدار ab کدام است؟



خارج از کشور ریاضی - ۹۲

(۱) -۶

(۲) -۳

(۳) $\frac{4}{5}$

(۴) ۶

تجربی - ۹۶

۶۳۴- اگر $\tan x = \frac{4}{3}$ ، مقدار $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۶۳۵- جواب‌های کلی معادلهٔ $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$ به کدام صورت است؟

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۶۳۶- جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۶۳۷- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8}) = 1$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{5\pi}{4}$ (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{7\pi}{4}$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۶۳۸- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{14\pi}{3}$ (۲) 4π (۳) $\frac{9\pi}{2}$ (۴) 5π

تجربی - ۹۵

۶۳۹- جواب‌های کلی معادلهٔ $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$ کدام است؟

- (۱) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$

تجربی - ۹۶

۶۴۰- جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$ کدام است؟

- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$