

جلد دوم: پاسخ‌های تشریحی

جامع هندسه

حسن محمد بیگی، امیر محمد هویدی



انتشارات
آلگو

پیشگفتار

به نام خدا

با توجه به کنکورهای برگزار شده در دو سال اخیر در داخل و خارج کشور، اهمیت درس هندسه به وضوح از دید طراحان سؤال مشخص است. پس لازم است شما دانش آموزان عزیز و گرانقدر با تست‌های گوناگون هر سه درس هندسه ۱، ۲ و ۳ آشنا شوید. هدف‌مان از نوشتن این کتاب، فراهم آوردن مسیری است که در آن هم بتوانید مطالب کتاب هندسه ۳ را یاد بگیرید و بر آن‌ها مسلط شوید، هم مطالب کتاب‌های هندسه ۱ و هندسه ۲ را مرور کنید. این کتاب یازده فصل دارد. به جز فصل یازدهم، هر فصل از چند درس تشکیل شده است. فصل یازدهم ویژه «آزمون‌های جامع» است.

مباحث کتاب هندسه ۳ را در سه فصل گنجانده‌ایم. هفت فصل دیگر مربوط به کتاب‌های هندسه ۱ و هندسه ۲ هستند. در درس‌نامه‌ها مطالب را با جزئیات کامل، همراه با مثال‌های کلیدی و آموزنده آورده‌ایم. در انتهای هر درس چندین پرسش با عنوان «ایستگاه یادگیری» آمده است. این پرسش‌ها معیاری است برای اینکه بفهمید تا چه حد درس را خوب یاد گرفته‌اید. پس از آن نوبت آزمون‌هاست. همه آزمون‌ها به جز آزمون‌های جامع کلی ده پرسش دارند. تلاش کرده‌ایم در هر آزمون همه مطالب مربوط به درس را بگجانیم. البته، اگر درسی چند آزمون داشته باشد، معمولاً هرچه جلوتر بروید، آزمون‌ها دشوارتر می‌شوند. در انتهای هر فصل هم چند «آزمون فصل» آورده‌ایم.

پاسخ پرسش‌های ایستگاه یادگیری و آزمون‌های این کتاب در جلد دوم آورده شده است. می‌توانید نسخه چاپی جلد دوم را تهیه کنید، همین‌طور می‌توانید فایل PDF آن را از سایت انتشارات الگو دریافت کنید.

وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، فهیمه گودرزی برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم‌ها لیلا پرهیزکاری و فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی و خانم ستین مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

مؤلفان

◆ فصل اول: پاسخ تشریحی ایستگاه‌های یادگیری

پاسخ تشریحی ایستگاه‌های یادگیری ۲

◆ فصل دوم: پاسخ تشریحی آزمون‌ها

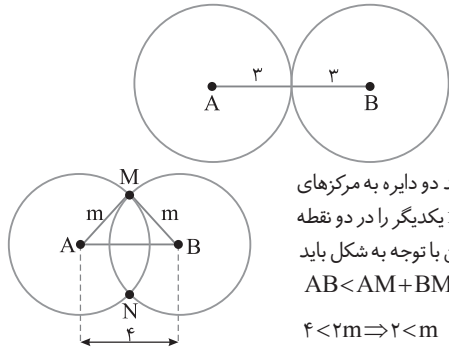
پاسخ تشریحی آزمون‌ها ۱۰۰

فصل اول

پاسخ تشریحی
ایستگاه‌های یادگیری

فصل اول: پاسخ تشریحی ایستگاه‌های یادگیری

۵ ۲ مجموعه نقطه‌هایی که از نقطه A به فاصله ۳ هستند، دایره‌ای است به مرکز A و شعاع $r_1 = 3$. به همین صورت مجموعه نقطه‌هایی که از نقطه B به فاصله ۳ هستند، دایره‌ای است به مرکز B و شعاع $r_2 = 3$. چون $AB = r_1 + r_2$ ، پس یک نقطه با ویژگی مورد نظر به دست می‌آید.



۶ ۱ باید دو دایره به مرکزهای A و B و شعاع m یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند. بنابراین با توجه به شکل باید $AB < AM + BM \Rightarrow 4 < m + m$
 $4 < 2m \Rightarrow 2 < m$

در بین گزینه‌ها فقط $m = 3$ در این نابرابری صدق می‌کند.

۷ ۱ باید مجموع طول‌های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بیشتر باشد:

$$2x - 1 < x + 4 + 5x + 1 \Rightarrow -\frac{3}{2} < x, \quad x + 4 < 2x - 1 + 5x + 1 \Rightarrow \frac{2}{3} < x$$

$$5x + 1 < x + 4 + 2x - 1 \Rightarrow x < 1$$

اکنون از جواب‌های به دست آمده اشتراک می‌گیریم. در این صورت حدود تغییرات x به صورت $\frac{2}{3} < x < 1$ است. یعنی برای x هیچ مقدار صحیحی به دست نمی‌آید.

توجه کنید که در محدوده به دست آمده $2x - 1$ ، $x + 4$ و $5x + 1$ مثبت هستند.

۸ ۱ مثلث با طول اضلاع ۵، $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ وجود ندارد زیرا $\sqrt{2} + \sqrt{3} < 5$. مثلث با طول اضلاع $2\sqrt{2}$ ، $2\sqrt{3}$ و $2\sqrt{10}$ نیز وجود ندارد زیرا $2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} < 2\sqrt{10}$. مثلث با طول اضلاع $2a$ ، $a - 2$ و $a + 2$ نیز وجود ندارد زیرا $(a - 2) + (a + 2) < 2a$. ولی مثلث با طول اضلاع $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{2}$ و ۱ وجود دارد زیرا $1 + \sqrt{2} < \sqrt{3}$ ، $1 + \sqrt{3} < \sqrt{2}$ و $\sqrt{2} + \sqrt{3} < 1$.

۹ ۲ شکل از دو مثلث تشکیل شده است. در هر دو مثلث نابرابری‌های مثلث را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a - 2 < 5 + 2a - 1 \\ 5 < 2a - 1 + a - 2 \\ 2a - 1 < 5 + a - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 < a \\ \frac{4}{3} < a \Rightarrow \frac{4}{3} < a < 4 \\ a < 4 \end{cases} \quad (1)$$

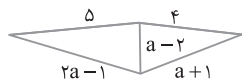
در مثلث دیگر نیز باید هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر باشد:

$$\begin{cases} a - 2 < 4 + a + 1 \\ a + 1 < 4 + a - 2 \\ 4 < a - 2 + a + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < 5 \\ 1 < 2 \Rightarrow \frac{5}{2} < a \\ \frac{5}{2} < a \end{cases} \quad (2)$$

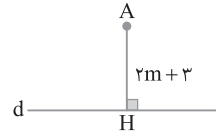
حدود تغییرات a، اشتراک نابرابری‌های

(۱) و (۲) است که می‌شود $\frac{4}{3} < a < 4$.

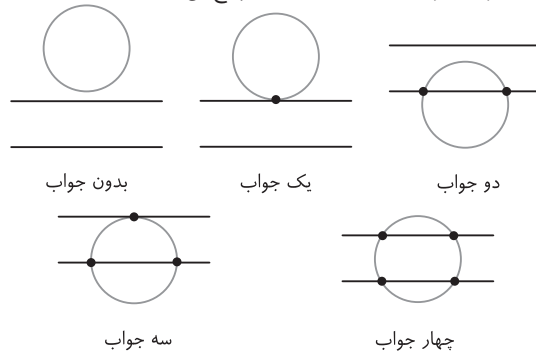
توجه کنید که در این محدوده $a - 2$ ، $a + 1$ و $2a - 1$ مثبت هستند. بنابراین تنها عدد صحیح که در این نابرابری صدق می‌کند $a = 3$ است.



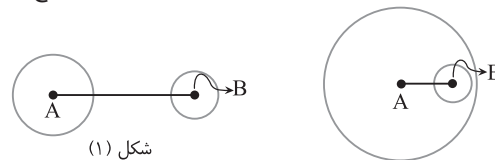
۱ ۴ فاصله نقطه A از خط d برابر $2m + 3$ است و نقطای که از A به فاصله ۹ هستند، روی دایره به مرکز A و شعاع ۹ قرار دارند. بنابر فرض سؤال این دایره خط d را نباید قطع کند. پس باید شعاع دایره از فاصله AH کوچک‌تر باشد. بنابراین $AH > 9 \Rightarrow 2m + 3 > 9 \Rightarrow 2m > 6 \Rightarrow m > 3$
در بین گزینه‌ها فقط $2\sqrt{3}$ در نامساوی $m > 3$ صدق می‌کند.



۲ ۳ مجموعه نقطای که از نقطه A به فاصله ۴ هستند، دایره‌ای است به مرکز A و شعاع ۴ (قطر ۸). همچنین مجموعه نقطای که از خط L به فاصله ۲ هستند، دو خط موازی L هستند که فاصله آن‌ها از L برابر ۲ است (دقت کنید که این دو خط از یکدیگر به فاصله ۴ هستند). نقاط مشترک دایره و این دو خط موازی جواب هستند. حالت‌های زیر رُخ می‌دهد.

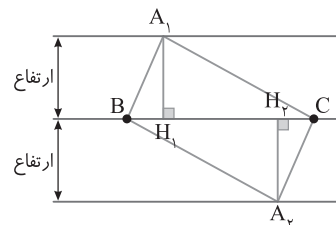


۳ ۲ نقطای که از A به فاصله m و از B به فاصله n هستند به ترتیب روی دو دایره به مراکز A و B و شعاع‌های m و n قرار دارند. اگر این دو دایره یکدیگر را قطع نکنند، نقطه‌ای با ویژگی مورد نظر وجود نخواهد داشت (شکل‌های زیر را ببینید). اگر $m = 1$ و $n = 1$ ، شکل (۲) ایجاد می‌شود و مسئله جواب ندارد. توجه کنید در گزینه‌های (۱) و (۴) دو دایره مماس و در گزینه (۳) دو دایره متقاطع‌اند.

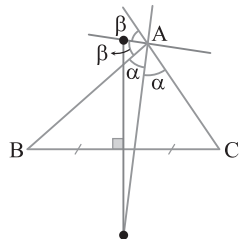


شکل (۲)

۴ ۴ چون طول ارتفاع (AH) ثابت است و رأس‌های B و C هم ثابت هستند، پس روی A دو خط موازی خط گذرنده از نقطه‌های B و C است که فاصله آن‌ها از خط گذرنده از B و C به فاصله ارتفاع وارد بر ضلع BC است.



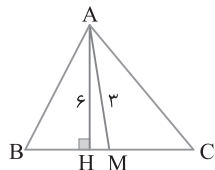
۱۴ ۳ مجموعه نقطه‌هایی که از دو ضلع AB و AC یا امتداد آن‌ها به یک فاصله هستند، نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه A است. همچنین، مجموعه نقطه‌هایی که از B و C به یک فاصله‌اند، عمودمنصف ضلع BC است. بنابراین نقاطی که از AB و AC یا امتداد آن‌ها به یک فاصله و از دو رأس B و C نیز به یک فاصله هستند، محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی A و عمودمنصف ضلع BC هستند. چون مثلث متساوی‌الساقین نیست، جواب دو نقطه مشخص شده در شکل زیر است.



۱۵ ۱ اگر ارتفاع وارد بر BC باشد، آن‌گاه

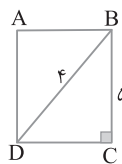
$$S = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow 12 = \frac{1}{2} AH \times (4) \Rightarrow AH = 6$$

بنابراین اگر مثلث ABC قابل رسم باشد، آن‌گاه مانند شکل فرضی زیر ارتفاع AH از میانه AM در مثلث قائم‌الزاویه AMH بزرگ‌تر است که این غیرممکن است، زیرا AM وتر مثلث قائم‌الزاویه AMH است و باید از AH بزرگ‌تر باشد. پس چنین مثلی وجود ندارد.



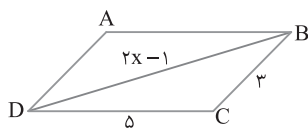
۱۶ ۱ می‌دانیم در مستطیل قطرها مساوی‌اند. پس مستطیلی به طول قطره‌های ۶ و ۵ وجود ندارد.

۱۷ ۴ فرض کنید در مستطیل ABCD، $BD=4$ و $BC=5$. در این صورت در مثلث قائم‌الزاویه BDC وتر کوچک‌تر از ضلع زاویه قائمه است و این ممکن نیست، پس چنین مستطیلی وجود ندارد.

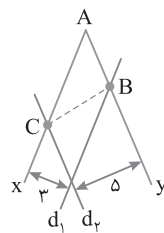
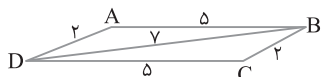


۱۸ ۲ با توجه به شکل زیر، متوازی‌الاضلاع ABCD قابل رسم است هرگاه مثلث BCD قابل رسم باشد. پس طول اضلاع مثلث BCD در نابرابری‌های مثلث یا نتیجه آن صدق می‌کنند.

$$|5-3| < 2x-1 < 5+3 \Rightarrow 2 < 2x-1 < 8 \Rightarrow 3 < 2x < 9 \Rightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{9}{2}$$



۱۹ ۱ با توجه به شکل زیر برای رسم این متوازی‌الاضلاع باید مثلث ABD، قابل رسم باشد، ولی اضلاع این مثلث در نابرابری مثلث صدق نمی‌کنند: $7 < 5+2$. پس با این معلومات متوازی‌الاضلاعی وجود ندارد.



۱۰ ۳ ابتدا زاویه xAy را به اندازه 45° رسم می‌کنیم. خط d_1 را موازی Ax و به فاصله ۳ از آن رسم می‌کنیم. محل برخورد این خط با رأس Ay از B است (خط d_1 در شکل مقابل را ببینید). اکنون خط d_2 را موازی Ay و به فاصله ۵ از آن رسم کرده، محل برخورد آن با رأس Ax را C می‌نامیم (خط d_2 را در شکل مقابل ببینید). مثلث ABC جواب است و این مثلث منحصر به فرد است.

۱۱ ۳ بنابر فرض سؤال،

$$AB < AC \Rightarrow x < 2x-3 \Rightarrow 3 < x$$

از طرف دیگر اضلاع این مثلث باید در نابرابری مثلث صدق کنند. پس

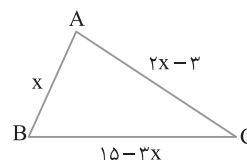
$$AB < AC + BC \Rightarrow x < 2x-3+15-3x \Rightarrow 2x < 12 \Rightarrow x < 6$$

$$AC < AB + BC \Rightarrow 2x-3 < x+15-3x \Rightarrow 4x < 18 \Rightarrow x < \frac{9}{2}$$

$$BC < AC + AB \Rightarrow 15-3x < x+2x-3 \Rightarrow 18 < 6x \Rightarrow 3 < x$$

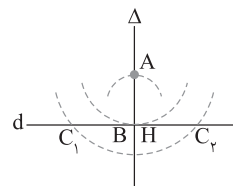
اشتراک جواب‌های نامعادله‌های بالا به صورت $3 < x < \frac{9}{2}$ است و در بین

گزینه‌ها تنها عدد $3\sqrt{2}$ در این فاصله قرار دارد.

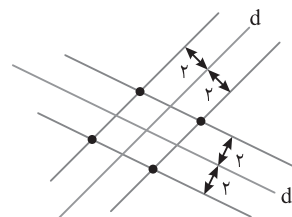


۱۲ ۲ خط دلخواه d را رسم می‌کنیم و خط دلخواه Δ را بر آن عمود

می‌کنیم محل تقاطع Δ و d را H می‌نامیم. از نقطه H کمانی به شعاع h_a رسم می‌کنیم. محل برخورد این کمان با Δ را A در نظر می‌گیریم. از A کمان‌هایی به شعاع $AB=4$ و $AC=7$ رسم می‌کنیم. با توجه به نقاط برخورد این کمان‌ها و خط d تعداد مثلث‌های متمایز مورد نظر معلوم می‌شود. اگر کمان به شعاع کوچک‌تر یعنی AB مماس بر d و کمان دیگر خط d را قطع کند، آن‌گاه تنها یک مثلث با این معلومات قابل رسم است. توجه کنید که مطابق شکل نقطه H و B منطبق هستند و چون دو مثلث AC_1B و AC_2B همنهشت هستند آن‌ها را یک مثلث در نظر می‌گیریم. بنابراین برای رسم چنین مثلی اگر بخواهیم جواب منحصر به فرد داشته باشیم، باید ارتفاع داده شده برابر طول ضلع کوچک‌تر، از بین دو ضلع داده شده باشد. در نتیجه $h_a = c$ ، یعنی $h_a = 4$.



۱۳ ۳ خطوطی موازی دو خط d و d' و به فاصله ۲ از آن‌ها را رسم می‌کنیم. محل برخورد این خط‌ها جواب مسئله است که ۴ نقطه هستند (شکل زیر را ببینید).

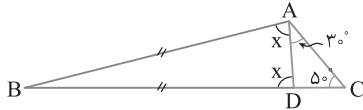


۲۵ ۳ مثلث ABD متساوی الساقین است، اندازه دو زاویه مجاور به

قاعده آن را x در نظر می‌گیریم. $\hat{ADB}$ زاویه خارجی مثلث ADC است، پس

$$x = 3^\circ + 5^\circ = 8^\circ$$

بنابراین $\triangle ABD: \hat{B} + x + x = 18^\circ \Rightarrow \hat{B} + 8^\circ + 8^\circ = 18^\circ \Rightarrow \hat{B} = 2^\circ$



۲۶ ۲ مثلث ABD متساوی الساقین است، اندازه زاویه‌های مجاور به

قاعده آن را x در نظر می‌گیریم. از طرف دیگر AD نیمساز است، پس

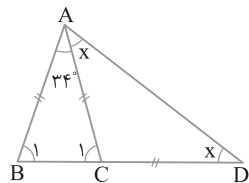
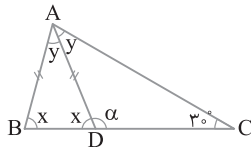
$\hat{BAD} = \hat{DAC}$ و اندازه هر کدام را y انتخاب می‌کنیم. $\hat{ADB}$ زاویه

خارجی مثلث ADC است، پس $x = y + 3^\circ$. در ضمن در مثلث

مجموع زاویه‌ها 18° است، پس $2x + y = 18^\circ$. در نتیجه

$$\begin{cases} x = y + 3^\circ \\ 2x + y = 18^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} 3x + y = y + 21^\circ \Rightarrow x = 7^\circ$$

$$\alpha = 18^\circ - 7^\circ = 11^\circ$$



۲۷ ۴ با استفاده از داده‌های سؤال

شکل مقابل را خواهیم داشت. مثلث‌های

ABC و ACD متساوی الساقین هستند.

اگر اندازه زاویه‌های مجاور به قاعده مثلث

متساوی الساقین ACD را x بنامیم، چون

C_1 زاویه خارجی این مثلث است، پس

بنابراین $\hat{C}_1 = 2x$ ، در نتیجه $\hat{B}_1 = 2x$

$$\triangle ABC: 34^\circ + 2x + 2x = 180^\circ \Rightarrow 4x = 146^\circ \Rightarrow x = 36.5^\circ$$

پس $\hat{ADC} = 36.5^\circ$

۲۸ ۴ زاویه مجاور به قاعده این مثلث نمی‌تواند 11° باشد چون در

این صورت مجموع زاویه‌های آن از 180° بیشتر می‌شود. پس زاویه رأس آن

11° است. در ضمن نیمساز خارجی رأس مثلث متساوی الساقین با قاعده

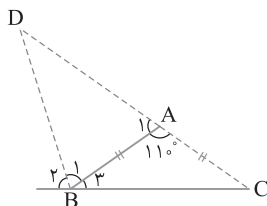
موازی است. پس نیمساز خارجی زاویه‌های مجاور به قاعده (در اینجا B یا C)

را رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع مقابل را در D قطع کند. پس

$$\hat{A}_1 = 180^\circ - 11^\circ = 169^\circ$$

$$\hat{B}_3 = \frac{180^\circ - 11^\circ}{2} = 84.5^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 = \frac{180^\circ - 35^\circ}{2} = \frac{145^\circ}{2} = 72.5^\circ$$

بنابراین $\hat{D} = 180^\circ - (\hat{A}_1 + \hat{B}_1) = 180^\circ - (169^\circ + 72.5^\circ) = 38.5^\circ$

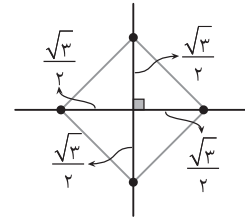


۲۰ ۴ زاویه بین دو قطر متوازی الاضلاع می‌تواند تغییر کند. پس با تغییر

این زاویه نامتناهی متوازی الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ قابل رسم است.

۲۱ ۲ دو قطر مربع مساوی و عمود منصف یکدیگرند. پس مطابق

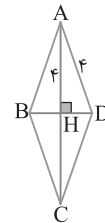
شکل زیر یک مربع به قطر $\sqrt{3}$ قابل رسم است.



۲۲ ۱ در لوزی قطرهای منصف یکدیگر و عمود بر هم هستند. پس در

مثلث قائم الزاویه AHD هم وتر و هم ضلع زاویه قائمه برابر ۴ هستند و این

ممکن نیست. پس چنین لوزی‌ای وجود ندارد.



۲۳ ۲ در متوازی الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو مساوی‌اند، پس

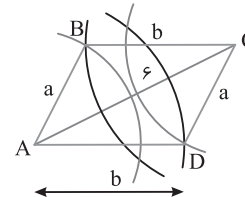
$BC = AD = b$. بنابراین متوازی الاضلاع $ABCD$ در صورتی ایجاد می‌شود

که مثلث ABC به وجود بیاید. پس باید سه عدد a ، b و ۶ در نامساوی‌های

زیر صدق کنند

$$a < b + 6, \quad b < a + 6, \quad 6 < a + b$$

در بین گزینه‌ها فقط $a = 3$ و $b = 4$ در این نامساوی‌ها صدق می‌کنند.



۲۴ ۲ از رأس A خط Ax را موازی با دو خط d و d' رسم می‌کنیم. در

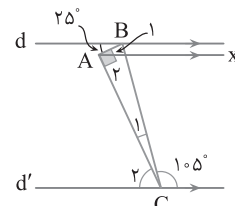
این صورت از قضیه خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} d \parallel Ax \\ \text{مورب } AB \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_1 = 25^\circ \xrightarrow{\hat{A} = 90^\circ} \hat{A}_7 = 65^\circ$$

$$\begin{cases} Ax \parallel d' \\ \text{مورب } AC \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_7 = \hat{C}_7 \Rightarrow \hat{C}_7 = 65^\circ$$

از طرف دیگر

$$\hat{C}_1 + \hat{C}_7 + 105^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 + 65^\circ + 105^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 = 10^\circ$$



۳۴ ۲ در هر مثلث مجموع زاویه‌های داخلی 180° است. بنابراین

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{A} + \hat{C} = 2\hat{B} \end{cases} \Rightarrow \hat{B} + 2\hat{B} = 180^\circ \Rightarrow 3\hat{B} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ$$

پس $\hat{A} + \hat{C} = 120^\circ$ و $\hat{A} - 2\hat{C} = 60^\circ$. بنابراین

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = 120^\circ \\ \hat{A} - 2\hat{C} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\hat{A} + 2\hat{C} = 240^\circ \\ \hat{A} - 2\hat{C} = 60^\circ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع}} 3\hat{A} = 300^\circ \Rightarrow \hat{A} = 100^\circ, \quad \hat{C} = 20^\circ$$

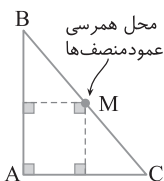
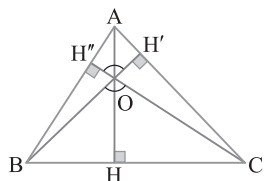
بنابراین مثلث ABC با داشتن زاویه‌ای 100° مثلثی منفرجه‌الزاویه است. پس نقطه هم‌مرسی عمودمنصف‌های آن خارج مثلث قرار دارد.

۳۵ ۱ در شکل زیر دو زاویه BOC و $H''OH'$ مساوی‌اند. در ضمن

چهارضلعی $AH''OH'$ دو زاویه قائمه دارد و چون مجموع زاویه‌های هر

چهارضلعی 360° است. پس

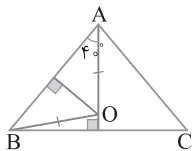
$$\hat{A} + H''\hat{O}H' = 180^\circ \xrightarrow{\hat{A} = 80^\circ} H''\hat{O}H' = 100^\circ \Rightarrow B\hat{O}C = 100^\circ$$



۳۶ ۳ با توجه به شکل مقابل چون

عمودمنصف‌های ضلع‌های AB و AC و عمود منصف‌های ضلع‌های BC و AC در رأس A عمود هستند. پس مثلث ABC قائم‌الزاویه است و عمودمنصف‌های آن در وسط وتر BC هم‌رس هستند (نقطه M را در شکل مقابل ببینید). اکنون به‌دست می‌آید

$$MB + MC = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$$



۳۷ ۲ در مثلث متساوی‌الساقین،

عمودمنصف قاعده، نیمساز رأس است. یعنی

$$O\hat{A}B = \frac{\hat{A}}{2} = 40^\circ$$

از طرف دیگر، $OA = OB$ ، پس مثلث AOB متساوی‌الساقین است و

$$O\hat{B}A = O\hat{A}B = 40^\circ$$

$$A\hat{O}B = 180^\circ - 2 \times 40^\circ = 100^\circ$$

۳۸ ۳ ابتدا اندازه زاویه‌های این مثلث را به‌دست می‌آوریم. می‌دانیم

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \quad \text{پس}$$

$$\begin{cases} 2\hat{A} - \hat{B} = 50^\circ \\ \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \frac{3}{2}\hat{C} + \frac{\hat{A}}{4} = 175^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع دو معادله اول}} \begin{cases} 3\hat{A} + \hat{C} = 230^\circ \\ \frac{3}{2}\hat{C} + \frac{\hat{A}}{4} = 175^\circ \end{cases} \times 4 \Rightarrow \begin{cases} 3\hat{A} + \hat{C} = 230^\circ \\ 3\hat{C} + \hat{A} = 700^\circ \end{cases}$$

$$\times (-3) \Rightarrow \begin{cases} 3\hat{A} + \hat{C} = 230^\circ \\ -18\hat{C} - 3\hat{A} = -2100^\circ \end{cases}$$

$$-17\hat{C} = -1870^\circ \Rightarrow \hat{C} = 110^\circ, \quad \hat{A} = 40^\circ, \quad \hat{B} = 30^\circ$$

پس این مثلث منفرجه‌الزاویه است. بنابراین نقطه تلاقی عمودمنصف‌های آن بیرون مثلث است.

۲۹ ۴ مثلث ABC متساوی‌الساقین است و AM میانه وارد بر قاعده

آن است. پس AM هم نیمساز و هم ارتفاع است. با توجه به شکل

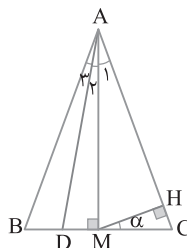
$$\triangle MHC: \hat{C} = 90^\circ - \alpha$$

$$\triangle AMC: \hat{A}_1 = 90^\circ - \hat{C} = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = \alpha$$

چون AD نیمساز زاویه BAM است، پس $2\hat{A}_1 = \alpha \Rightarrow \hat{A}_1 = \frac{\alpha}{2}$

در ضمن زاویه ADB زاویه خارجی مثلث ADM است، پس

$$A\hat{D}B = \hat{A}_1 + 90^\circ = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$



۳۰ ۱ چون ارتفاع‌های مثلث بیرون مثلث یکدیگر را قطع کرده‌اند، پس

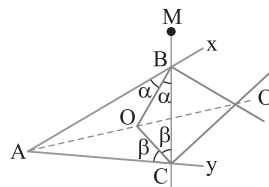
مثلث منفرجه‌الزاویه است. بنابراین نقطه تلاقی عمودمنصف‌های این مثلث نیز خارج مثلث قرار دارد.

۳۱ ۲ مجموع زاویه‌های مثلث ABC برابر 180° است. چون

$\hat{B} + \hat{C} = 80^\circ$ ، پس $\hat{A} = 100^\circ$. بنابراین مثلث ABC منفرجه‌الزاویه است. در نتیجه نقطه برخورد عمودمنصف‌های این مثلث بیرون مثلث قرار دارد.

۳۲ ۲ نقطه‌های برخورد نیمسازهای زاویه‌های B و C، یعنی نقطه‌های

O و O' در شکل، روی نیمساز زاویه A قرار دارند، زیرا نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث هم‌رس‌اند و هر دو نیمساز خارجی با نیمساز زاویه رأس سوم هم‌رس هستند. پس جواب روی نیمساز زاویه xAy است.



۳۳ ۱ راه‌حل اول: نقطه تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث از سه

رأس آن به یک فاصله‌اند، پس

$$SA = SB = SC$$

پس مثلث‌های SAB، SAC و SBC متساوی‌الساقین هستند. با توجه به شکل

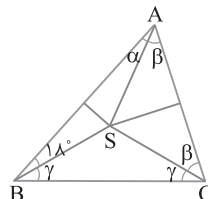
$$\alpha = S\hat{B}A = 18^\circ$$

$$\triangle ABC: \alpha + 2\beta + 2\gamma + 18^\circ = 180^\circ \xrightarrow{\alpha = 18^\circ} 2\beta + 2\gamma = 144^\circ$$

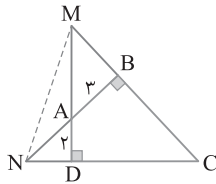
$$\beta + \gamma = 72^\circ \Rightarrow B\hat{C}A = 72^\circ$$

راه‌حل دوم طبق درسنامه چون S محل تلاقی عمودمنصف‌هاست، پس $\hat{A}S\hat{B} = 2\hat{C}$

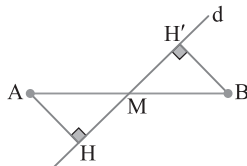
از طرف دیگر $B\hat{C}A = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ$ پس $\hat{A}S\hat{B} = 180^\circ - 18^\circ - 18^\circ = 144^\circ$



۴۳ ۲ از فرض‌های تست شکل زیر ایجاد می‌شود. اگر از M به N وصل کنیم، آن‌گاه نقطه A در مثلث MNC نقطه برخورد ارتفاع‌ها است. پس اگر از C به A وصل کنیم و امتداد دهیم، ارتفاع سوم مثلث MNC به دست می‌آید. بنابراین خط گذرنده از A و C بر MN عمود است.



۴۴ ۲ گزاره (الف) درست است. زیرا اگر خط d از نقطه M وسط پاره خط AB عبور کند، آن‌گاه طول عمودهای AH و BH' برابر است. زیرا دو مثلث قائم‌الزاویه AMH و BMH' به حالت وتر و یک زاویه حاده هم‌نهشت‌اند (به شکل زیر توجه کنید).



گزاره (ب) درست است، زیرا مساحت لوزی برابر نصف حاصل ضرب دو قطر آن است پس در لوزی با مساحت $\frac{7}{5}$ و طول یک قطر ۳، طول قطر دیگر آن ۵ است و با داشتن طول دو قطر ۳ و ۵ در لوزی فقط یک لوزی قابل رسم است. گزاره (پ) نادرست است. زیرا مثال نقض نادرستی یک حکم کلی را مشخص می‌کند. گزاره (ت) نادرست است. به عنوان مثال نقض مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۲۵، ۲۴ و ۷ عدد محیط از عدد مساحت کوچک‌تر است. بنابراین دو تا از این گزاره‌ها درست است.

۴۵ ۳ عکس قضیه «اگر در یک مثلث یک زاویه قائمه باشد، آن‌گاه ضلع روبه‌روی آن بزرگ‌ترین ضلع مثلث است» به صورت «اگر در یک مثلث یک ضلع بزرگ‌ترین ضلع باشد، آن‌گاه زاویه مقابل به آن قائمه است» بیان می‌شود که در حالت کلی درست نیست. زیرا زاویه روبه‌رو به بزرگ‌ترین ضلع مثلث لزومی ندارد قائمه باشد. پس قضیه گزینه (۳) به صورت دوشرطی بیان نمی‌شود.

۴۶ ۳ در نقیض گزاره داده شده کلمه «هر» را به «وجود دارد» تغییر می‌دهیم و سپس فعل جمله را نقیض می‌کنیم. پس به گزاره زیر می‌رسیم:

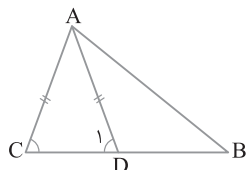
«مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست.»

۴۷ ۳ چهارضلعی‌ای که چهار ضلع برابر دارد لوزی است ولی لزومی ندارد مربع باشد. پس به عنوان مثال لوزی‌ای که یک زاویه آن 30° باشد مثال نقض برای گزاره مطرح شده در گزینه (۳) است. سایر گزینه‌ها یک حکم کلی همواره درست هستند، پس برای آن‌ها مثال نقض وجود ندارد.

۴۸ ۴ در «اگر $AC > AB$ ، آن‌گاه $\hat{B} > \hat{C}$ »، حکم $\hat{B} > \hat{C}$ است و در برهان خلف، فرض اولیه همان نقیض حکم است و نقیض $\hat{B} > \hat{C}$ عبارت $\hat{B} < \hat{C}$ یا $\hat{B} = \hat{C}$ است.

۴۹ ۲ با توجه به شکل،

$$\begin{cases} AD=AC \Rightarrow \hat{D}_1=\hat{C} \\ ADB \text{ مثلث خارجی} \Rightarrow \hat{D}_1 > \hat{B} \end{cases} \Rightarrow \hat{C} > \hat{B}$$



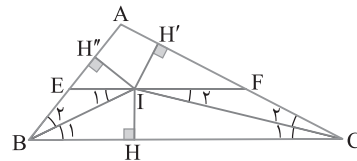
۳۹ ۲ نقطه I روی EF از سه ضلع مثلث ABC به یک فاصله است ($IH=IH'=IH''$). بنابراین I نقطه هم‌رسی نیم‌سازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC است. پس IB و IC به ترتیب نیم‌سازهای زاویه‌های B و C هستند. بنابر قضیه خطوط موازی و مورب،

$$\begin{cases} IE \parallel BC \\ IB \text{ مورب} \end{cases} \Rightarrow \hat{I}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{I}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow IE = BE \quad (1)$$

$$\begin{cases} IF \parallel BC \\ IC \text{ مورب} \end{cases} \Rightarrow \hat{I}_2 = \hat{C}_2 \Rightarrow \hat{I}_2 = \hat{C}_2 \Rightarrow IF = CF \quad (2)$$

از جمع کردن تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

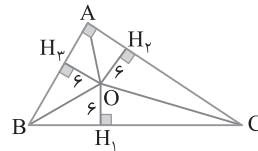
$$IE + IF = BE + CF \Rightarrow EF = 4$$



۴۰ ۳ نقطه O محل هم‌رسی نیم‌سازها است، بنابراین از ضلع‌های مثلث به یک فاصله است، پس $OH_1=OH_2=OH_3=6$ (شکل زیر را ببینید). می‌توان نوشت

$$S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OAC} + S_{OAB} = \frac{1}{2} \times 6 \times BC + \frac{1}{2} \times 6 \times AC + \frac{1}{2} \times 6 \times AB$$

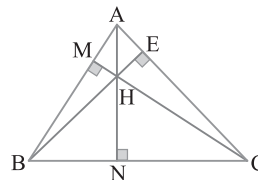
$$= 3(BC + AC + AB) = 3 \times 14 = 42$$



۴۱ ۲ با توجه به شکل، $\hat{AHC}$ مساوی $\hat{MHN}$ است و $\hat{MHN}$ مکمل زاویه B است. در ضمن $\hat{BHC}$ مساوی $\hat{MHE}$ است و $\hat{MHE}$ مکمل زاویه A است. پس

$$\hat{AHC} - \hat{BHC} = (180^\circ - \hat{B}) - (180^\circ - \hat{A}) = \hat{A} - \hat{B}$$

$$\xrightarrow{\hat{B}=60^\circ} \hat{AHC} - \hat{BHC} = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ$$



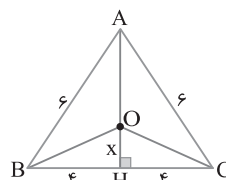
۴۲ ۳ مثلث ABC به طول

اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ متساوی‌الساقین است.

پس عمود منصف قاعده BC از رأس A

می‌گذرد. در ضمن $OA=OB=OC$ از

طرف دیگر.



$$\triangle AHC: AH^2 = AC^2 - CH^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow AH = 2\sqrt{5}$$

با فرض $OH = x$ نتیجه می‌گیریم $OA = 2\sqrt{5} - x$ ، پس $OC = 2\sqrt{5} - x$.

در نتیجه

$$\triangle OHC: OC^2 = OH^2 + CH^2 \Rightarrow (2\sqrt{5} - x)^2 = x^2 + 4^2$$

$$20 + x^2 - 4\sqrt{5}x = x^2 + 16 \Rightarrow 4\sqrt{5}x = 4 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

۵۵ ۳ از فرض تست نتیجه می گیریم

$$\frac{3a}{2a+3b} = -3 \Rightarrow 3a = -6a - 9b \Rightarrow 9a = -9b \Rightarrow a = -b$$

در نسبت خواسته شده $a = -b$ را جایگزین می کنیم:

$$\frac{2a+b}{a-b} = \frac{-2b+b}{-b-b} = \frac{-b}{-2b} = \frac{1}{2}$$

۵۶ ۲ با طرفین، وسطین کردن تناسب داده شده نتیجه می شود

$$3ma + 3nb = na + mb \Rightarrow (3m-n)a = (m-3n)b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{m-3n}{3m-n}$$

اکنون، بنابر ویژگی های تناسب، می توان نوشت

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{(m-3n)+(3m-n)}{(m-3n)-(3m-n)} = \frac{2(m-n)}{-(m+n)}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2(n-m)}{m+n} \text{ پس}$$

۵۷ ۴ راه حل اول از ویژگی های تناسب نتیجه می گیریم

$$\frac{3x}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{2z+1}{4} = \frac{3x+y-3+2z+1}{2+3+4} = \frac{3x+y+2z-2}{9}$$

چون $3x+y+2z=11$ ، $\frac{3x}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{2z+1}{4} = 1$ ، پس $x = \frac{2}{3}$ ، $y = 6$ و

$$z = \frac{3}{2} \text{ در نتیجه } xyz = \frac{2}{3} \times 6 \times \frac{3}{2} = 6$$

راه حل دوم اگر $\frac{3x}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{2z+1}{4} = k$ ، آن گاه $x = \frac{2k}{3}$ ، $y = 3k+3$ و

$$z = \frac{4k-1}{2} \text{ از طرف دیگر چون } 3x+y+2z=11 \text{ در نتیجه}$$

$$2k+3k+3+4k-1=11 \Rightarrow 9k=9 \Rightarrow k=1$$

$$\text{بنابراین } x = \frac{2}{3}، y = 6، z = \frac{3}{2} \text{ و } xyz = 6$$

۵۸ ۴ چون b واسطه هندسی a و c است، پس $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ یا $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ در

تناسب $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ترکیب در صورت انجام می دهیم:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{b+c}{c} \quad ((1) \text{ درستی گزینه})$$

در تناسب $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ ترکیب در صورت انجام می دهیم:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{b+c}{b} \quad ((2) \text{ درستی گزینه})$$

در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ طبق ویژگی های تناسب می توان نوشت

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{b-a}{c-b} \quad ((3) \text{ درستی گزینه})$$

اکنون برای رد گزینه (۴) می توان $a=1$ و $c=4$ را در نظر گرفت:

$$\begin{cases} \frac{b}{c} = \frac{1}{4} \\ \frac{b-c}{a-b} = \frac{2-4}{1-2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{4} = \frac{b-c}{1-b} \Rightarrow \frac{b}{4} = \frac{b-c}{1-b}$$

۵۹ ۴ با استفاده از ویژگی های تناسب می نویسیم:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = \frac{k}{7} \Rightarrow \frac{x+y+z}{5+3+6} = \frac{k}{7} \Rightarrow x+y+z=2k$$

۵۰ ۳ در مثلث ADB زاویه ADC زاویه خارجی این مثلث است، پس

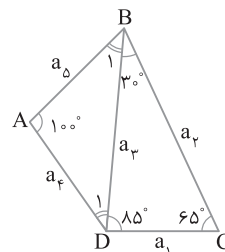
بزرگتر از هر زاویه داخلی غیرمجاورش است. بنابراین $\hat{ADC} > 40^\circ$. پس در مثلث ADC، $AC > AD$.

۵۱ ۲ چون $BC = \frac{AB+AC}{2}$ ، پس طول ضلع BC میانگین

حسابی طول دو ضلع AB و AC است. بنابراین اگر $AB=AC$ ، آن گاه طول ضلع BC هم با طول ضلع AB و AC برابر است، یعنی $AB=AC=BC$. پس مثلث متساوی الاضلاع است و $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}$ (درستی گزینه (۱)). از طرف دیگر اگر $AB \neq AC$ ، طول ضلع BC بین طول این دو ضلع است، یعنی اگر $AB > AC$ ، آن گاه $AB > BC > AC$ ، پس $\hat{C} > \hat{A} > \hat{B}$ (درستی گزینه (۴)) و اگر $AC > AB$ ، آن گاه $AC > BC > AB$ ، در نتیجه $\hat{B} > \hat{A} > \hat{C}$ (درستی گزینه (۳)). بنابراین گزینه (۲) نمی تواند درست باشد.

۵۲ ۳ در مثلث BCD چون $\hat{B} < \hat{C} < \hat{D}$ ، پس (۱) $a_1 < a_3 < a_2$

از طرف دیگر در مثلث ABD زاویه A منفرجه است، پس $\hat{A} > \hat{D}_1$ و $\hat{A} > \hat{B}_1$. در نتیجه $a_3 > a_4$ و $a_3 > a_5$. با مقایسه این نابرابری ها و نابرابری (۱) به دست می آید $a_4 > a_3 > a_5$ و $a_2 > a_3 > a_4$.



۵۳ ۱ چون $\hat{A} = 30^\circ$ و $\hat{B} = 70^\circ$ ، پس

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (30^\circ + 70^\circ) = 80^\circ$$

در هر مثلث ضلع روبه رو به زاویه بزرگتر از ضلع روبه رو به زاویه کوچکتر، بنابراین

$$\begin{cases} \hat{B} > \hat{A} \Rightarrow AC > BC \\ \hat{C} > \hat{B} \Rightarrow AB > AC \end{cases} \Rightarrow AB > AC > BC$$

یعنی $y > x > 3$.

۵۴ ۳ در شکل زیر AB کوچکترین و DC بزرگترین ضلع است.

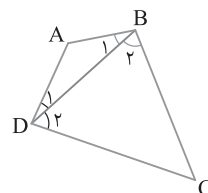
قطر BD را رسم می کنیم. بنابراین در مثلث ABD،

$$AB < AD \Rightarrow \hat{D}_1 < \hat{B}_1 \quad (1)$$

$$BC < DC \Rightarrow \hat{D}_2 < \hat{B}_2 \quad (2) \text{ همچنین در مثلث BCD.}$$

با جمع کردن نابرابری های (۱) و (۲) نتیجه می گیریم

$$\hat{D}_1 + \hat{D}_2 < \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \Rightarrow \hat{D} < \hat{B}$$



۶۴ ۳ چون $\frac{MB}{AM} = \frac{AN}{BN} = \frac{1}{2}$ ، با ترکیب در مخرج کردن این

تناسب‌ها به دست می‌آید

$$\frac{MB}{AM+MB} = \frac{AN}{BN+AN} = \frac{1}{2+1} \Rightarrow \frac{MB}{AB} = \frac{AN}{AB} = \frac{1}{3}$$

پس $\frac{MB}{AN} = \frac{AN}{MB} = \frac{1}{3}$ ، یعنی $MB=AN=4$ ، اکنون می‌توان نوشت

$$MN = AB - (AN + MB) = 12 - (4 + 4) = 4$$



۶۵ ۴ با توجه به فرض داده شده، جای نقطه‌های M و N مانند شکل

زیر است. در تناسب $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$ ترکیب در مخرج انجام می‌دهیم:

$$\frac{MA}{MA+MB} = \frac{2}{3+2} \Rightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{MA}{15} = \frac{2}{5}$$

بنابراین $MA=6$ ، اکنون در تناسب $\frac{NA}{NB} = \frac{2}{3}$ تفصیل در مخرج انجام می‌دهیم:

$$\frac{NA}{NB-NA} = \frac{2}{3-2} \Rightarrow \frac{NA}{AB} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{NA}{15} = \frac{2}{1}$$

بنابراین $NA=3$ ، اکنون می‌توان طول MN را به دست آورد:

$$MN = MA + AN = 6 + 3 = 9$$



۶۶ ۳ بنابر فرض تست $AC^2 = AB \times BC$ ، پس $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$

چون $AB = AC + BC$ (شکل را ببینید)، در نتیجه $\frac{AC+BC}{AC} = \frac{AC}{BC}$ و

$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{BC}$ ، اکنون فرض می‌کنیم نسبت $\frac{AC}{BC}$ برابر x باشد. در

این صورت تساوی $1 + \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{BC}$ به $1 + \frac{1}{x} = x$ تبدیل می‌شود و در نهایت

به معادله $x^2 - x - 1 = 0$ می‌رسیم. بنابراین

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

چون $x > 0$ ، پس $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ قابل قبول است.



۶۷ ۴ در مثلث بزرگ‌ترین ارتفاع بر کوچک‌ترین ضلع وارد می‌شود.

پس در اینجا اگر $a = 4\sqrt{2}$ کوچک‌ترین ضلع مثلث باشد، آن‌گاه $h_a = 5$.

پس

$$S = \frac{1}{2} a \times h_a = \frac{1}{2} (4\sqrt{2}) (5) = 10\sqrt{2}$$

اکنون اگر $h_c = 3$ و $h_b = 4$ ، آن‌گاه

$$S = \frac{1}{2} b \times h_b \Rightarrow b = \frac{2S}{h_b} = \frac{2 \times 10\sqrt{2}}{4} = 5\sqrt{2}$$

چون $h_c = 3$ کوچک‌ترین ارتفاع است، پس c بزرگ‌ترین ضلع است. در

نتیجه ضلع متوسط $b = 5\sqrt{2}$ است.

۶۵ ۱ با استفاده از ویژگی‌های تناسب می‌نویسیم

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{1+2+3+4} = \frac{a_5}{5} \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{10} = \frac{a_5}{5}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{a_5} = \frac{10}{5} = 2$$

۶۶ ۱ راه‌حل اول تناسب داده شده را برابر m قرار داده، نتیجه می‌گیریم

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{5} = \frac{c}{8} = m \Rightarrow \begin{cases} a = 6m \\ b = 5m \Rightarrow \frac{b}{a+c} = \frac{5m}{6m+8m} = \frac{5}{14} \\ c = 8m \end{cases}$$

راه‌حل دوم با استفاده از ویژگی‌های تناسب می‌نویسیم

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{5} = \frac{c}{8} \Rightarrow \frac{a+c}{6+8} = \frac{b}{5} \Rightarrow \frac{b}{a+c} = \frac{5}{14}$$

۶۷ ۲ طول یکی از اضلاع مثلث واسطه هندسی طول دو ضلع دیگر

است، پس سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول اگر x واسطه هندسی بین ۲ و ۵ باشد، آن‌گاه

$$x^2 = 2 \times 5 = 10 \Rightarrow x = \sqrt{10}$$

با سه عدد ۵، ۲ و $\sqrt{10}$ یک مثلث قابل رسم است چون این اعداد در نابرابری‌های

مثلث صدق می‌کنند، یعنی $\sqrt{10} < 2+5$ ، $5 < 2+\sqrt{10}$ و $2 < 5+\sqrt{10}$.

حالت دوم اگر ۵ واسطه هندسی بین ۲ و x باشد، آن‌گاه

$$5^2 = 2x \Rightarrow x = \frac{25}{2} = 12.5$$

با سه عدد ۵، ۲ و 12.5 مثلث قابل رسم نیست زیرا نابرابری $12.5 < 5+2$

برقرار نیست.

حالت سوم اگر ۲ واسطه هندسی بین ۵ و x باشد، آن‌گاه

$$2^2 = 5x \Rightarrow x = \frac{4}{5} = 0.8$$

با سه عدد 0.8 ، ۵ و ۲ مثلث قابل رسم نیست زیرا نابرابری $5 < 2+0.8$

برقرار نیست. بنابراین فقط یک مثلث با ویژگی مورد نظر وجود دارد.

۶۸ ۲ راه‌حل اول فرض می‌کنیم زاویه‌های چهارضلعی، $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ ، $\hat{C}$ و

$\hat{D}$ باشند و $\frac{\hat{A}}{5} = \frac{\hat{B}}{6} = \frac{\hat{C}}{6} = \frac{\hat{D}}{7}$. در این صورت بنابر ویژگی‌های تناسب

$$\frac{\hat{A}}{5} = \frac{\hat{B}}{6} = \frac{\hat{C}}{6} = \frac{\hat{D}}{7} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}}{5+6+6+7} = \frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$$

$$\hat{A} = 5 \times 15^\circ = 75^\circ, \hat{B} = \hat{C} = 6 \times 15^\circ = 90^\circ, \hat{D} = 7 \times 15^\circ = 105^\circ$$

پس $105^\circ - 75^\circ = 30^\circ$ کوچک‌ترین زاویه - بزرگ‌ترین زاویه.

راه‌حل دوم چون زاویه‌های چهارضلعی متناسب با اعداد ۵، ۶، ۶ و ۷ هستند،

آن‌ها را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\hat{A} = 5t, \hat{B} = 6t, \hat{C} = 6t, \hat{D} = 7t$$

چون مجموع زاویه‌های هر چهارضلعی 360° است، پس

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \Rightarrow 5t + 6t + 6t + 7t = 360^\circ$$

$$24t = 360^\circ \Rightarrow t = 15^\circ$$

بزرگ‌ترین زاویه، $\hat{D} = 7t$ و کوچک‌ترین زاویه $\hat{A} = 5t$ است. در نتیجه

$$\hat{D} - \hat{A} = (7-5)t = 2t = 2 \times 15^\circ = 30^\circ$$

۷۰ ۴ می‌دانیم میانه، هر مثلث را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند و برعکس. چون دو مثلث BMN و BMC هم‌مساحت‌اند، پس M وسط ضلع NC است. در نتیجه در مثلث ANC پاره‌خط AM میانه است. بنابراین دو مثلث AMC و AMN هم‌مساحت‌اند. با فرض اینکه مساحت مثلث AME برابر S باشد، نتیجه می‌گیریم $S_{AMN} = S_{AMC} = S + 2$. در ضمن دو مثلث MEC و BMC در ارتفاع نظیر رأس C مشترک هستند. پس

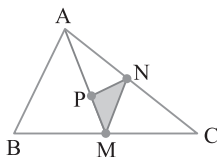
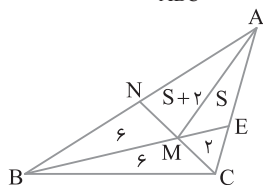
$$\frac{S_{MEC}}{S_{BMC}} = \frac{ME}{BM} \Rightarrow \frac{2}{6} = \frac{ME}{BM} \quad (۱)$$

از طرف دیگر چون دو مثلث AME و ABM در ارتفاع نظیر رأس A مشترک

هستند بنابراین از (۱) نتیجه می‌شود $\frac{S_{AME}}{S_{ABM}} = \frac{ME}{BM} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ، بنابراین

$$\frac{1}{3} = \frac{S}{S+2+6} \Rightarrow 3S = S+8 \Rightarrow S=4$$

پس $S_{ABC} = 6+6+2+4+6=24$.



۷۱ ۲ چون در دو مثلث ABM و ACM، قاعده‌های BM و CM با هم برابرند و ارتفاع نظیر رأس A در این دو مثلث مشترک است، پس

$$S_{ACM} = S_{ABM} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

در نتیجه $S_{ACM} = \frac{1}{2} S_{ABC} = 12$ با استدلالی مشابه می‌نویسیم:

$$S_{MAN} = \frac{1}{2} S_{MAC} = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$

توجه کنید که چون $AP = 2PM$ ، پس $PM = \frac{1}{3} AM$ و در نتیجه چون

مثلث‌های NMP و NAM در ارتفاع نظیر رأس N مشترک هستند، پس

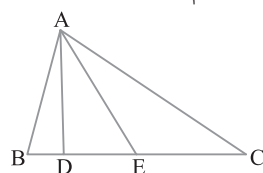
$$\frac{S_{NMP}}{S_{NAM}} = \frac{PM}{AM} \Rightarrow S_{NMP} = \frac{1}{3} S_{NAM} = \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

۷۲ ۲ مثلث‌های ACE، ADE و ABD در ارتفاع رسم شده از رأس A مشترک هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها با نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع برابر هستند، یعنی $CE = 2DE = 3BD$. توجه کنید که از این برابری

نتیجه می‌گیریم عددی مانند k وجود دارد که به ازای آن $DE = \frac{k}{2}$ ، $CE = k$ ،

و $BD = \frac{k}{3}$ می‌نویسیم $BC = BD + DE + EC = \frac{k}{3} + \frac{k}{2} + k = \frac{11k}{6}$.

$$\frac{BC}{DE} = \frac{\frac{11k}{6}}{\frac{k}{2}} = \frac{11}{3} \quad \text{اکنون به دست می‌آید}$$



۶۸ ۴ تمام مثلث‌ها در ارتفاع نظیر رأس A مشترک هستند. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایی است که ارتفاع رأس A بر آن‌ها وارد می‌شود، یعنی

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} + \frac{S_{ACD}}{S_{AEF}} - \frac{S_{ACE}}{S_{ABF}} = \frac{BC}{CD} + \frac{CD}{EF} - \frac{CE}{BF} \quad (۱)$$

از طرف دیگر از تناسب‌های $\frac{BC}{1} = \frac{CD}{2} = \frac{DE}{3} = \frac{EF}{3}$ به دست می‌آید

$$\frac{BC}{1} = \frac{CD}{2} = \frac{DE}{3} = \frac{EF}{3} = \frac{BC+CD+DE+EF}{1+2+3+3}$$

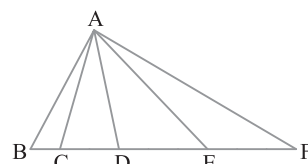
$$\frac{CD}{2} = \frac{DE}{3} = \frac{CD+DE}{2+3}$$

بنابراین $\frac{BC}{1} = \frac{CD}{2} = \frac{DE}{3} = \frac{EF}{3} = \frac{BF}{9} = \frac{CE}{5}$ در نتیجه

$$\frac{BC}{CD} = \frac{1}{2}, \quad \frac{CD}{EF} = \frac{2}{3}, \quad \frac{CE}{BF} = \frac{5}{9} \quad (۲)$$

از برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} + \frac{S_{ACD}}{S_{AEF}} - \frac{S_{ACE}}{S_{ABF}} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{5}{9} = \frac{9+12-10}{18} = \frac{11}{18}$$



۶۹ ۲ دو مثلث OBP و ABO در ارتفاع نظیر رأس B مشترک

هستند. پس $\frac{S_{ABO}}{S_{OBP}} = \frac{AO}{OP}$ ، یعنی $\frac{AO}{OP} = \frac{3}{1}$. در ضمن دو مثلث

AMO و OMP در ارتفاع نظیر رأس M مشترک هستند. پس

$$\frac{S_{AMO}}{S_{OMP}} = \frac{AO}{OP} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{S_{AMO}}{1} = \frac{3}{1} \Rightarrow S_{AMO} = 3 \quad (۱)$$

از طرف دیگر دو مثلث MPC و MBP در ارتفاع نظیر رأس M مشترک هستند. پس

$$\frac{S_{MBP}}{S_{MPC}} = \frac{BP}{PC} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{BP}{PC}$$

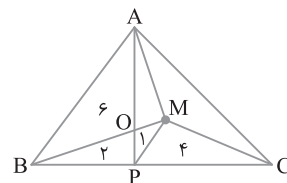
دو مثلث ABP و APC در ارتفاع نظیر رأس A مشترک هستند. در نتیجه

$$\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{BP}{PC} = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{2}{4} \Rightarrow S_{APC} = \frac{32}{3}$$

بنابراین

$$S_{APC} = \frac{32}{3} \Rightarrow 3+1+4+S_{AMC} = \frac{32}{3} \Rightarrow S_{AMC} = \frac{8}{3} \quad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $3S_{AMC} - S_{AMO} = 8 - 3 = 5$.



۷۶ ۴ چون M وسط BC است، پس

$$S_{ABC} = 2S_{AMC} \quad (1)$$

D وسط AE است، پس $AE = 2DE$. چون بنابر فرض مسئله، $CE = 2DE$ ، پس $AE = CE$ ، یعنی E وسط AC است. در نتیجه

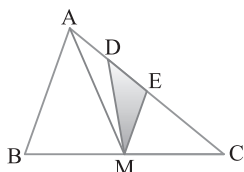
$$S_{AMC} = 2S_{AME} \quad (2)$$

چون D وسط AE است، پس

$$S_{AME} = 2S_{MDE} \quad (3)$$

از تساوی‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود

$$S_{ABC} = 2S_{AMC} = 2(2S_{AME}) = 4(2S_{MDE}) = 8S_{MDE} = 8 \times 3 = 24$$

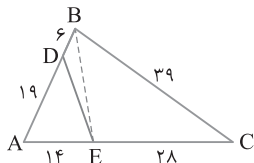


۷۷ ۲ توجه کنید که مطابق شکل زیر دو مثلث ADE و ABE در ارتفاع نظیر رأس E مشترک هستند. همچنین دو مثلث ABE و ABC در ارتفاع نظیر رأس B مشترک هستند. بنابراین

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABE}} = \frac{AD}{AB} = \frac{19}{25}, \quad \frac{S_{ABE}}{S_{ABC}} = \frac{AE}{AC} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}$$

بنابراین، اگر این تساوی‌ها را در هم ضرب کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC} - S_{ADE}} = \frac{19}{75 - 19} \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{BCED}} = \frac{19}{56}$$



۷۸ ۴ مثلث‌های AOB و AON در ارتفاع نظیر رأس A مشترک‌اند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع است، یعنی

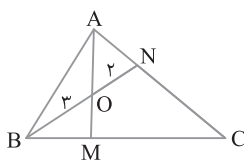
$$\frac{S_{ABN}}{S_{AOB}} = \frac{BN}{OB} = \frac{BO + ON}{OB} = \frac{5}{3} \quad \text{چون } S_{AOB} = 6$$

از طرف دیگر دو مثلث BAN و BNC در ارتفاع نظیر رأس B مشترک‌اند، در نتیجه

$$\frac{S_{BNC}}{S_{BAN}} = \frac{NC}{AN} = 2$$

$$S_{BNC} = 20, \quad \text{یعنی } S_{BNC} = 20$$

$$S_{ABC} = S_{ABN} + S_{BNC} = 10 + 20 = 30$$



۷۳ ۲ مثلث‌های BDE و BAE در ارتفاع نظیر رأس B مشترک‌اند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع است، یعنی

$$\frac{S_{BAE}}{S_{BDE}} = \frac{AE}{ED} = 3$$

نتیجه می‌شود

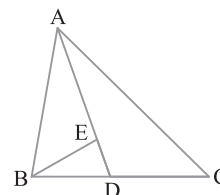
$$\frac{S_{BAE} + S_{BDE}}{S_{BDE}} = \frac{3+1}{1} \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{BDE}} = 4$$

پس $S_{ABD} = 12$. در نتیجه، چون $S_{ABC} = 27$ ، پس

$$S_{ADC} = 27 - 12 = 15$$

از طرف دیگر مثلث‌های ABD و ADC در ارتفاع نظیر رأس A مشترک‌اند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع است، یعنی

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

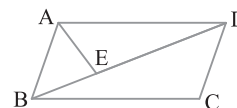


۷۴ ۲ فرض می‌کنیم $BE = x$ ، پس $ED = 2x$. دو مثلث AED و ABD در ارتفاع نظیر رأس A مشترک‌اند، بنابراین

$$\frac{S_{AED}}{S_{ABD}} = \frac{DE}{BD} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3} \quad (1)$$

از طرف دیگر مساحت مثلث ABD نصف مساحت متوازی‌الاضلاع است، بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$S_{AED} = \frac{2}{3} S_{ABD} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} S_{ABCD} \right) = \frac{1}{3} S_{ABCD}$$



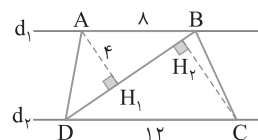
۷۵ ۱ طول ارتفاع نظیر رأس D در مثلث DAB با طول ارتفاع نظیر رأس B در مثلث BCD برابر است. بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت طول قاعده‌های نظیر این ارتفاع‌ها است، یعنی

$$\frac{S_{DAB}}{S_{BCD}} = \frac{AB}{DC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad (1)$$

از طرف دیگر، در این دو مثلث قاعده BD مشترک است (شکل زیر را ببینید). پس

$$\frac{S_{DAB}}{S_{BCD}} = \frac{AH_1}{CH_1} = \frac{4}{CH_1} \quad (2)$$

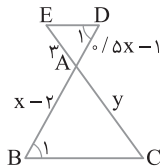
از مقایسه تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\frac{4}{CH_1} = \frac{2}{3}$ ، پس $CH_1 = 6$.



۸۲ ۱ چون $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ ، بنابر عکس قضیه خطوط موازی و مورب، DE

با BC موازی است. اکنون بنابر قضیه تالس، $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ ، یعنی

$$\frac{1}{x-2} = \frac{3}{y} \Rightarrow \frac{1}{x-2} = \frac{3}{y} \Rightarrow y = 6$$

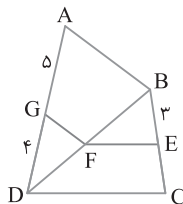


۸۳ ۲ در مثلث DAB، چون FG با BA موازی است، بنابر قضیه

تالس، $\frac{DG}{GA} = \frac{DF}{FB}$. از طرف دیگر در مثلث BCD، EF با CD موازی

است. پس $\frac{DF}{FB} = \frac{CE}{EB}$. با مقایسه دو تناسب به دست آمده، نتیجه می گیریم

$$\frac{DG}{GA} = \frac{CE}{EB} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{CE}{EB} \Rightarrow CE = \frac{4}{5} EB$$

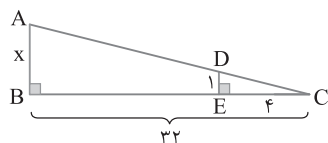


۸۴ ۲ اگر درخت را با یک پاره خط نشان دهیم، شکل مسئله به صورت

زیر است. چون $AB \parallel DE$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{CE}{CB} = \frac{ED}{AB} \Rightarrow \frac{4}{32} = \frac{1}{x}$$

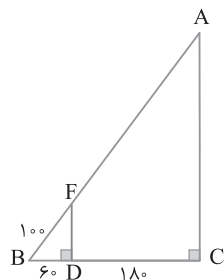
پس x که همان طول درخت است برابر ۸ متر است.



۸۵ ۳ شکل زیر را در نظر می گیریم. چون FD و AC بر BC عمودند،

پس با هم موازی اند. در نتیجه بنابر قضیه تالس، $\frac{BD}{BC} = \frac{BF}{BA}$ ، یعنی

$$\frac{60}{240} = \frac{100}{AB} \Rightarrow AB = 400$$



۷۹ ۱ از M به رأس های B و D وصل می کنیم. فرض می کنیم قطر

BD قطر AC را در O قطع می کند. می دانیم در متوازی الاضلاع دو قطر منصف یکدیگرند، پس $OB = OD$. از طرف دیگر دو مثلث OMB و OMD در ارتفاع نظیر رأس M مشترک اند. بنابراین

$$\frac{S_{OMB}}{S_{OMD}} = \frac{OB}{OD} = 1 \Rightarrow S_{OMB} = S_{OMD} \quad (1)$$

در ضمن، دو مثلث AOB و AOD در ارتفاع نظیر رأس A مشترک اند. بنابراین

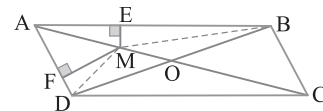
$$\frac{S_{AOD}}{S_{AOB}} = \frac{OD}{OB} = 1 \Rightarrow S_{AOD} = S_{AOB} \quad (2)$$

اگر تساوی (۱) را از تساوی (۲) کم کنیم، نتیجه می شود

$$S_{AMB} = S_{AMD} \Rightarrow \frac{1}{2} ME \times AB = \frac{1}{2} MF \times AD$$

بنابراین $\frac{ME}{MF} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$ و چون $AB = 3BC$ و $BC = AD$ ، پس $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$

در نتیجه $\frac{ME}{MF} = \frac{1}{3}$



۸۰ ۳ نقطه های B و E را به هم وصل می کنیم (شکل زیر را ببینید).

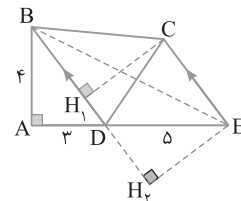
چون $EC \parallel BD$ ، پس ارتفاع های نظیر رأس های C و E در مثلث های CBD و EBD برابرند، یعنی $CH_1 = EH_2$. از طرف دیگر BD قاعده مشترک

نظیر این دو ارتفاع است. پس $S_{CBD} = S_{EBD}$. در نتیجه

$S_{ABCD} = S_{ABE}$ ، یعنی $S_{ABD} + S_{CBD} = S_{ABD} + S_{EBD}$

اکنون $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \times AE = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16$ می توان نوشت

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \times AE = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16$$



۸۱ ۱ با استفاده از تعمیم قضیه تالس می نویسیم

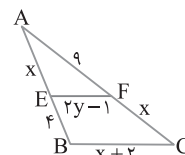
$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{x}{x+4} = \frac{9}{9+x} = \frac{2y-1}{x+2}$$

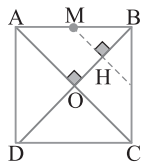
بنابراین $\frac{x}{x+4} = \frac{9}{9+x} \Rightarrow 9x + x^2 = 9x + 36 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$

پس $\frac{9}{9+x} = \frac{2y-1}{x+2} \Rightarrow \frac{9}{9+6} = \frac{2y-1}{6+2} \Rightarrow \frac{9}{15} = \frac{2y-1}{8} \Rightarrow 2y-1 = \frac{24}{5} \Rightarrow y = \frac{29}{10}$

در نتیجه

$$\frac{\text{محیط } AEF}{\text{محیط دوزنقه}} = \frac{x+9+2y-1}{4+2y-1+x+x+2} = \frac{x+2y+8}{2x+2y+5} = \frac{6+5+8}{12+5+5} = \frac{19}{22}$$





۹۰ ۲ در مربع ABCD نقطه M وسط ضلع AB است. طول عمود MH مورد نظر این سؤال است. قطر AC را رسم می‌کنیم. در مربع قطرها بر هم عمودند. پس $MH \parallel AO$. بنابراین چون M وسط AB است، MH، میان خط، پس بنابر قضیه تالس،

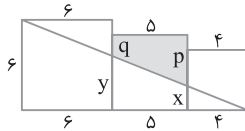
$$MH = \frac{OA}{2} \quad OA = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 8\sqrt{2} = 8 \rightarrow MH = \frac{8}{2} = 4$$

۹۱ ۲ قسمت رنگی یک دوزنقه به ارتفاع ۵ است. بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{x}{6} = \frac{4}{15} \Rightarrow x = \frac{4}{15} \times 6 = \frac{8}{5} = 1.6$$

$$\frac{y}{6} = \frac{9}{15} \Rightarrow y = \frac{9}{15} \times 6 = \frac{18}{5} = 3.6$$

$$\text{بنابراین } 12 = \frac{1}{2} \times 5 \left(\frac{1.6}{5} + \frac{3.6}{5} \right) = \frac{24}{5} = 4.8$$



۹۲ ۳ بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC،

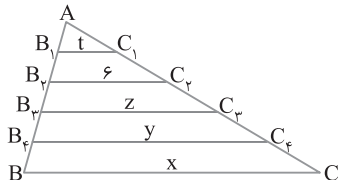
$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AB_1}{AB} \Rightarrow \frac{6}{15} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 5$$

به همین صورت به دست می‌آید

$$\frac{t}{x} = \frac{1}{5} \Rightarrow x = 5 \rightarrow t = 3$$

$$\frac{z}{15} = \frac{3}{5} \Rightarrow z = 9, \quad \frac{y}{15} = \frac{4}{5} \Rightarrow y = 12$$

$$x - y + z - t = 5 - 12 + 9 - 3 = -1 \Rightarrow x - y + z - t = -1$$



۹۳ ۲ راه حل اول با استفاده از تعمیم قضیه تالس می‌نویسیم

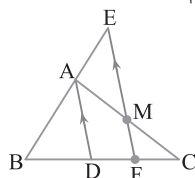
$$\triangle BEF : AD \parallel EF \Rightarrow \frac{AD}{EF} = \frac{BD}{BF} \quad (1)$$

$$\triangle ADC : MF \parallel AD \Rightarrow \frac{AC}{AM} = \frac{CD}{DF} \Rightarrow \frac{AC}{AM} = \frac{CD}{DF} \Rightarrow \frac{AC}{AM} = \frac{CD}{DF} \Rightarrow \frac{AC}{AM} = \frac{CD}{DF}$$

$$DF = \frac{CD}{2} \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{AD}{EF} = \frac{BD}{BD + DF} \Rightarrow \frac{AD}{EF} = \frac{BD}{BD + \frac{1}{2}CD} \Rightarrow \frac{AD}{EF} = \frac{\frac{3}{4}CD}{\frac{3}{4}CD + \frac{1}{2}CD} = \frac{3}{5}$$



۸۶ ۱ در مثلث ABC، بنابر قضیه تالس،

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 = 36$$

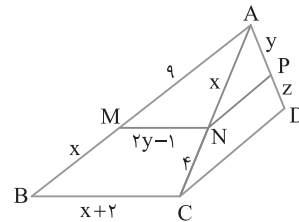
پس $x = 6$. از طرف دیگر، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC،

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{9}{15} = \frac{2y-1}{8}$$

پس $y = \frac{29}{10}$. در مثلث ACD، بنابر قضیه تالس،

$$\frac{AN}{NC} = \frac{AP}{PD} \Rightarrow \frac{29}{4} = \frac{10}{z}$$

$$\text{در نتیجه } z = \frac{29}{15}$$



۸۷ ۱ چون $DE \parallel BC$ ، بنابر قضیه تالس،

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{3}{5}$$

m و n وجود دارند به طوری که

$$AD = 3m, \quad DB = 5m$$

$$AE = 3n, \quad EC = 5n$$

از طرف دیگر چون $EF \parallel AB$ ، بنابر قضیه تالس $\frac{CF}{FB} = \frac{CE}{EA} = \frac{5}{3}$ پس

عددی حقیقی مانند k وجود دارد به طوری که $FB = 3k$ و $CF = 5k$ اکنون می‌توان نوشت

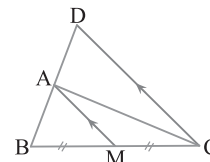
$$\frac{AC}{CE} + \frac{BF}{FC} = \frac{5n}{5n} + \frac{3k}{5k} = \frac{1}{1} + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} = 1.6$$

۸۸ ۲ شکل سؤال را به صورت زیر رسم می‌کنیم. با استفاده از قضیه

$$AM \parallel DC \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BA}{BD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BA}{BD} \quad (1)$$

از طرف دیگر در مثلث ABC پاره خط AM میانه است، پس مساحت مثلث ABM نصف مساحت مثلث ABC است. در ضمن دو مثلث ABC و BDC در ارتفاع نظیر رأس C مشترک هستند. پس

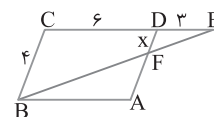
$$\frac{S_{ABC}}{S_{BDC}} = \frac{AB}{BD} \xrightarrow{(1)} \frac{S_{ABC}}{S_{BDC}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{2S_{ABM} = S_{ABC}} \frac{2S_{ABM}}{S_{BDC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{BDC}}{S_{ABM}} = 4$$

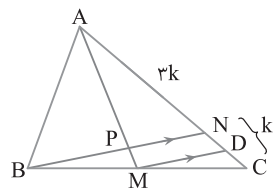


۸۹ ۳ چون ABCD متوازی‌الاضلاع

است، پس ضلع‌های مقابل در آن موازی و برابرند. در نتیجه بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث EBC،

$$\frac{FD}{BC} = \frac{DE}{CE} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{3}{9} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$





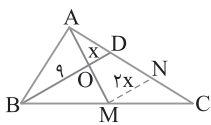
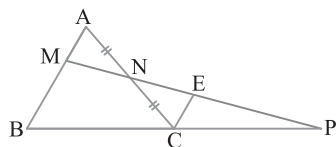
۹۷ ۲ از رأس C خطی موازی با AB رسم می‌کنیم تا پاره خط MP را در E قطع کند. در این صورت دو مثلث AMN و CEN به حالت (ز ض ز) هماهنگ هستند، پس $CE=AM$. در نتیجه $CE=\frac{1}{3}AB$ ، یعنی

$$\frac{CE}{BM}=\frac{1}{2} \quad \text{با تفصیل در مخرج کردن این تناسب به تساوی} \quad \frac{CE}{AB}=\frac{1}{3}$$

می‌رسیم. اکنون از تعمیم قضیه تالس استفاده می‌کنیم

$$\triangle BMP:CE\parallel MB \Rightarrow \frac{CP}{BP}=\frac{CE}{BM}=\frac{1}{2} \Rightarrow CP=\frac{1}{2}BP \Rightarrow CP=BC$$

پس نسبت خواسته شده برابر با یک است.



۹۸ ۲ با توجه به فرض‌های مسئله،

شکل مقابل رسم شده است که در آن از نقطه M خطی موازی BD رسم کرده‌ایم و محل برخورد آن با AC را N نامیده‌ایم. در مثلث AMN، $OD\parallel MN$ و O وسط AM است، پس OD در این مثلث میان خط است، در نتیجه

$$OD=\frac{MN}{2} \quad OD=x \Rightarrow MN=2x \quad (1)$$

از طرف دیگر در مثلث CDB، $MN\parallel BD$ و M وسط BC است، پس در این مثلث MN میان خط است. در نتیجه

$$MN=\frac{BD}{2} \xrightarrow{(1)} BD=2MN=2(2x)=4x \Rightarrow 9+x=4x$$

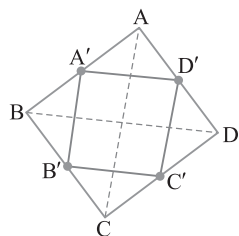
$$9=3x \Rightarrow x=3$$

۹۹ ۱ از قضیه میان خط به ترتیب در مثلث‌های CBD، ABD، ABC و ADC نتیجه می‌گیریم

$$A'D'=\frac{BD}{2}, \quad B'C'=\frac{BD}{2}, \quad A'B'=\frac{AC}{2}, \quad D'C'=\frac{AC}{2}$$

بنابراین

$$A'B'C'D' \text{ محیط } = A'D' + B'C' + A'B' + D'C' \\ = \frac{BD}{2} + \frac{BD}{2} + \frac{AC}{2} + \frac{AC}{2} = BD + AC = a + a = 2a$$



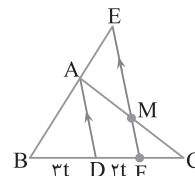
راه حل دوم چون $MF\parallel AD$ و M وسط AC است، پس پاره خط MF میان خط مثلث CAD و در نتیجه F وسط DC است، یعنی $DF=\frac{DC}{2}$. از

طرف دیگر بنابر فرض $\frac{BD}{CD}=\frac{3}{4}$ ، بنابراین عددی مانند t وجود دارد به طوری

که $BD=3t$ و $CD=4t$ ، بنابراین $DF=\frac{DC}{2}=2t$. اکنون توجه کنید که

چون $AD\parallel EF$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث BEF،

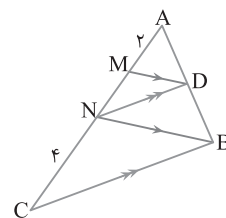
$$\frac{AD}{EF}=\frac{BD}{BF}=\frac{3t}{5t}=\frac{3}{5}$$



۹۴ ۱ دو بار از قضیه تالس به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \triangle ANB:DM\parallel BN &\Rightarrow \frac{AM}{MN}=\frac{AD}{DB} \\ \triangle ABC:DN\parallel BC &\Rightarrow \frac{AN}{NC}=\frac{AD}{DB} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{AM}{MN}=\frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{2}{MN}=\frac{2+MN}{4} \Rightarrow MN^2+2MN-8=0 \\ (MN+4)(MN-2)=0 \Rightarrow MN=2$$



۹۵ ۲ در شکل روبه‌رو در

مثلث ABC، بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{2k-x}{2k}=\frac{x}{3k}$$

با ساده کردن تناسب بالا به دست

$$\text{می‌آید} \quad \frac{x}{k}=\frac{6}{5} \quad \text{اکنون می‌نویسیم}$$

$$\frac{\text{ضلع لوزی}}{BC}=\frac{x}{3k}=\frac{1}{3}\times\frac{x}{k}=\frac{1}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{2}{5}$$

۹۶ ۴ از نقطه M خطی موازی BN رسم می‌کنیم تا AC را در D قطع

کند (شکل را ببینید). چون $\frac{AN}{NC}=3$ ، پس عددی حقیقی مانند k وجود دارد

که $AN=3k$ و $NC=k$ ، از طرف دیگر در مثلث CBN، چون MD با BN موازی است، بنابر قضیه تالس،

$$\frac{CD}{DN}=\frac{CM}{MB} \Rightarrow CD=DN$$

پس D وسط CN است و $ND=\frac{1}{2}NC=\frac{k}{2}$ ، در مثلث AMD، چون PN

$$\text{با MD موازی است، بنابر قضیه تالس،} \quad \frac{AP}{PM}=\frac{AN}{ND}=\frac{3k}{\frac{k}{2}}=6$$

۱۰۳ ۳ با استفاده از قضیه میان خط در مثلث،

$$\triangle ABC: \left. \begin{array}{l} \text{AB وسط M} \\ \text{BC وسط N} \end{array} \right\} \Rightarrow MN = \frac{AC}{2} \quad (۱)$$

$$\triangle ADC: \left. \begin{array}{l} \text{AD وسط F} \\ \text{DC وسط E} \end{array} \right\} \Rightarrow EF = \frac{AC}{2} \quad (۲)$$

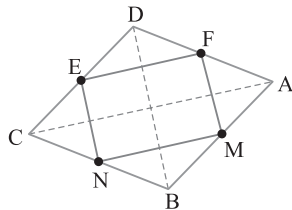
$$\triangle ABD: \left. \begin{array}{l} \text{AB وسط M} \\ \text{AD وسط F} \end{array} \right\} \Rightarrow MF = \frac{DB}{2} \quad (۳)$$

$$\triangle BDC: \left. \begin{array}{l} \text{BC وسط N} \\ \text{DC وسط E} \end{array} \right\} \Rightarrow NE = \frac{BD}{2} \quad (۴)$$

از طرف دیگر بنا بر فرض، $2AC = 3BD = 24$ ، پس $AC = 12$ و $BD = 8$.

اکنون از جمع تساوی‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) نتیجه می‌گیریم

$$(MNEF) = MN + EF + MF + NE = AC + BD = 12 + 8 = 20$$



۱۰۴ ۴ از رأس B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا MN و DC را به

ترتیب در F و E قطع کند. چهارضلعی‌های ABFM و MFED

متوازی‌الاضلاع هستند. پس $BF = AM = 2$ ، $FE = MD = 6$ ،

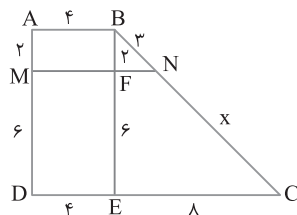
$AB = MF = DE = 4$ و چون $DC = 12$ ، پس $EC = 8$. اکنون بنا بر قضیه

تالس و تعمیم آن،

$$\triangle BEC: NF \parallel EC \Rightarrow \frac{BF}{FE} = \frac{BN}{NC} \Rightarrow \frac{2}{6} = \frac{x}{x} \Rightarrow x = 9$$

$$\triangle BEC: NF \parallel EC \Rightarrow \frac{FN}{EC} = \frac{BF}{BE} \Rightarrow \frac{FN}{8} = \frac{2}{8} \Rightarrow FN = 2$$

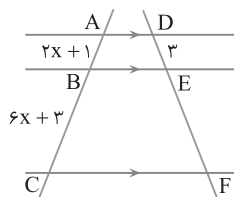
$$x + y = NC + MF + FN = 9 + 4 + 2 = 15 \text{ بنابراین}$$



۱۰۵ ۳ طبق قضیه تالس برای خطوط موازی، پس $\frac{2x+1}{6x+3} = \frac{3}{EF}$

یعنی $\frac{1}{3} = \frac{3}{EF}$ ، اکنون می‌توان نوشت

$$DF = DE + EF = 3 + 9 = 12$$



۱۰۰ ۲ عمود BH را امتداد

می‌دهیم تا AC را در E قطع کند. در این

صورت مثلث ABE متساوی‌الساقین

است زیرا ارتفاع AH در این مثلث

نیمساز نیز هست، پس $AB = AE$. از

طرف دیگر AH میانه نیز هست، پس H وسط BE قرار دارد. پس بنا بر قضیه میان خط،

$$MH \text{ مساوی نصف EC است: } MH = \frac{EC}{2} = \frac{AC - AE}{2} = \frac{AC - AB}{2} \text{ در}$$

$$\text{ضمن } MH = \frac{1}{3} AB \text{ بنابراین}$$

$$\frac{1}{3} AB = \frac{AC - AB}{2} \Rightarrow 2AB = 3AC - 3AB \Rightarrow 5AB = 3AC$$

$$\text{پس نسبت } \frac{AC}{AB} \text{ برابر } \frac{5}{3} \text{ است.}$$

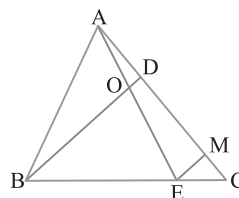
۱۰۱ ۱ از E خطی موازی BD رسم می‌کنیم تا AC را در M قطع کند.

با استفاده از قضیه تالس می‌نویسیم

$$\triangle BDC: ME \parallel BD \Rightarrow \frac{CE}{BE} = \frac{CM}{DM} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{CM}{DM} \quad (۱)$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{DC}{DM} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{DM}{DC} = \frac{3}{4}$$

$$\triangle AME: OD \parallel ME \Rightarrow \frac{AD}{DM} = \frac{AO}{OE} \quad (۲)$$



از طرف دیگر بنا بر فرض،

$$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{AD}{DC} = \frac{1}{2} \quad (۳)$$

از تقسیم تساوی (۳) بر (۱) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\frac{AD}{DC}}{\frac{DM}{DC}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} \Rightarrow \frac{AD}{DM} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{از (۲)}} \frac{AO}{OE} = \frac{AD}{DM} = \frac{2}{3}$$

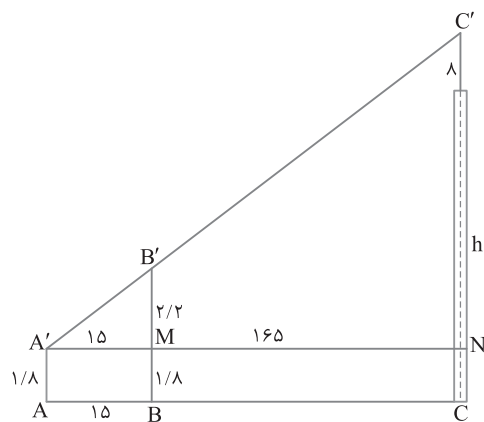
۱۰۲ ۲ در شکل از A' خطی موازی AC (سطح زمین) رسم کرده‌ایم و

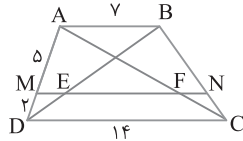
محل‌های برخورد آن با BB' و CC' را به ترتیب M و N نامیده‌ایم. توجه

کنید که $C'N = 8 + h - 1/8 = 6/2 + h$ ، چون

$$B'M \parallel A'M \text{ با } C'N \text{ موازی است، بنا بر تعمیم قضیه تالس، } \frac{B'M}{C'N} = \frac{A'M}{A'N}$$

$$\text{یعنی } h = 20/2 \text{، در نتیجه } 6/2 + h = 26/4 \text{، پس } \frac{2/2}{6/2 + h} = \frac{15}{180} = \frac{1}{12}$$





۱۱۰ ۳ بنابر عکس قضیه تالس در دوزنقه، از تناسب $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = 2$

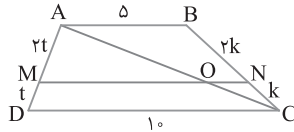
نتیجه می گیریم MN موازی با قاعده های دوزنقه است. از A به C وصل می کنیم تا MN را در O قطع کند. از فرض $\frac{AM}{MD} = \frac{2}{1}$ نتیجه می گیریم $\frac{AM}{AD} = \frac{2}{3}$ و از تناسب $\frac{BN}{NC} = \frac{2}{1}$ نتیجه می گیریم $\frac{BN}{BC} = \frac{2}{3}$. بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\triangle ADC: OM \parallel DC \Rightarrow \frac{OM}{DC} = \frac{AM}{AD} \Rightarrow \frac{OM}{10} = \frac{2}{3} \Rightarrow OM = \frac{20}{3} \quad (1)$$

$$\triangle ABC: ON \parallel AB \Rightarrow \frac{CN}{BC} = \frac{ON}{AB} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{ON}{5} \Rightarrow ON = \frac{5}{3} \quad (2)$$

با جمع کردن تساوی های (۱) و (۲) نتیجه می شود

$$OM + ON = \frac{20}{3} \Rightarrow MN = \frac{25}{3}$$



۱۱۱ ۳ فرض می کنیم زاویه های داخلی مثلثی که با اعداد ۱، ۱ و ۲ متناسب اند، به صورت X، X و ۲X باشند.

$$X + X + 2X = 180^\circ \Rightarrow 4X = 180^\circ \Rightarrow X = 45^\circ$$

بنابراین زاویه های این مثلث 45° ، 45° و 90° هستند، یعنی این مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است و در بین گزینه ها فقط مثلث با اضلاع ۱، ۱ و $\sqrt{2}$ قائم الزاویه متساوی الساقین است. پس این مثلث با مثلث به اضلاع داده شده در گزینه (۳) متشابه است.

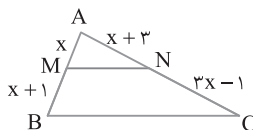
۱۱۲ ۲ چون MN با BC موازی است، بنابر قضیه اساسی تشابه، دو مثلث AMN و ABC متشابه اند و نسبت تشابه آنها برابر نسبت اندازه های ضلع های نظیر است. ابتدا باید مقدار X را به دست آوریم. بنابر قضیه تالس،

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{X}{3X-1} = \frac{X+3}{X+1} \Rightarrow X(3X-1) = (X+1)(X+3) \Rightarrow 3X^2 - X = X^2 + 4X + 3 \Rightarrow 2X^2 - 5X - 3 = 0$$

$$\text{پس } 2X^2 - 5X - 3 = 0 \text{ دو مقدار برای } X \text{ به دست می آید: } X = 3 \text{ و } X = -\frac{1}{2}$$

چون طول پاره خط NC برابر $3X-1$ است و باید مثبت باشد، پس $X > \frac{1}{3}$ در نتیجه $X = 3$. اکنون می توان نوشت

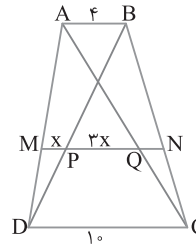
$$\text{نسبت تشابه} = \frac{AM}{AB} = \frac{3}{7}$$



۱۱۳ ۳ چون DE موازی است، بنابر قضیه اساسی تشابه، دو مثلث

$$\triangle ABC \text{ و } \triangle EDC \text{ متشابه اند. بنابراین } \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{16}{x} = \frac{4}{15} \Rightarrow x = 60$$

$$\text{پس } x = 60 \text{ و } y = 6/4 = 3/2 \text{ اکنون می توان نوشت } x - y = 60 - 1.5 = 58.5$$



۱۰۶ ۲ در شکل روبه رو بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\triangle DAB: MP \parallel AB \Rightarrow \frac{DM}{AD} = \frac{x}{4} \quad (1)$$

$$\triangle ADC: MQ \parallel DC \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{4x}{10} \quad (2)$$

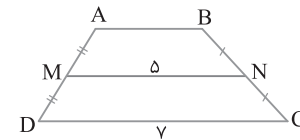
از تقسیم تناسب های (۱) و (۲) به دست می آید

$$\frac{DM}{AD} = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{DM}{10} = \frac{x}{4} \Rightarrow DM = \frac{5x}{2}$$

۱۰۷ ۲ راه حل اول بنابر قضیه میان خط در دوزنقه، اگر M و N وسط های

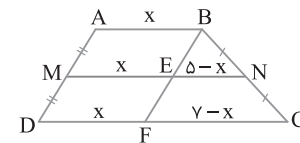
$$\text{دو ساق دوزنقه باشند، آن گاه } MN = \frac{AB+DC}{2} \text{ پس}$$

$$5 = \frac{AB+7}{2} \Rightarrow AB = 3$$



راه حل دوم از رأس B خطی موازی AD رسم می کنیم تا MN و DC را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند. چهارضلعی های ABEM و MEFD متوازی الاضلاع هستند، در نتیجه اندازه اضلاع مانند شکل زیر است. بنابر قضیه میان خط در مثلث BFC،

$$5 - x = \frac{7-x}{2} \Rightarrow 10 - 2x = 7 - x \Rightarrow x = 3$$



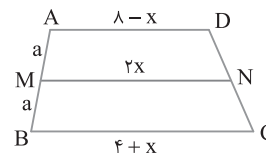
۱۰۸ ۲ از قضیه تالس در دوزنقه استفاده می کنیم

$$\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC} \Rightarrow \frac{a}{a} = \frac{DN}{NC}$$

پس N وسط DC قرار دارد. بنابراین طبق قضیه میان خط در دوزنقه، طول پاره خط MN مساوی نصف مجموع دو قاعده است

$$MN = \frac{AD+BC}{2} \Rightarrow 2x = \frac{8-x+4+x}{2} \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$$

پس حاصل ضرب اندازه دو قاعده برابر است با $(8-x)(4+x) = (5)(7) = 35$



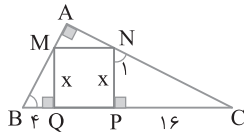
۱۰۹ ۳ از تعمیم قضیه تالس استفاده می کنیم

$$\triangle ADC: MF \parallel DC \Rightarrow \frac{MF}{DC} = \frac{AM}{AD} \Rightarrow \frac{MF}{14} = \frac{5}{14} \Rightarrow MF = 5 \quad (1)$$

$$\triangle ABD: ME \parallel AB \Rightarrow \frac{ME}{AB} = \frac{DM}{DA} \Rightarrow \frac{ME}{7} = \frac{2}{7} \Rightarrow ME = 2 \quad (2)$$

از تفریق تساوی های (۱) و (۲) نتیجه می شود

$$MF - ME = 5 - 2 \Rightarrow EF = 3$$



۱۱۹ مثلث‌های قائم‌الزاویه ACH و BAH متشابه‌اند (ز.ز). پس

$$\frac{CH}{AH} = \frac{AH}{BH} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

در نتیجه

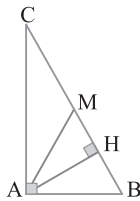
$$\left. \begin{aligned} \frac{CH}{AH} &= \sqrt{3} \\ \frac{AH}{BH} &= \sqrt{3} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{ضرب می‌کنیم}} \frac{CH}{BH} = 3$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{CH}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow CH = \frac{3}{4} BC$$

$$\xrightarrow{CM = \frac{BC}{2}} MH = \frac{3}{4} BC - \frac{1}{2} BC = \frac{1}{4} BC$$

بنابراین

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}} = \frac{\frac{1}{2} AH \times BC}{\frac{1}{2} AH \times MH} = \frac{BC}{MH} = \frac{BC}{\frac{1}{4} BC} = 4$$

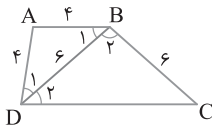


۱۲۰ مثلث‌های ADB و BDC متساوی‌الساقین هستند، پس

$\hat{D}_1 = \hat{B}_1$ و $\hat{D}_2 = \hat{C}$ از طرف دیگر $AB \parallel DC$ و BD مورب است، در نتیجه $\hat{B}_1 = \hat{D}_1 = \hat{D}_2 = \hat{C}$ از این تساوی‌ها نتیجه می‌شود $\hat{B}_1 = \hat{D}_1 = \hat{D}_2 = \hat{C}$ پس

دو مثلث ABD و BCD متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین $\frac{DC}{BD} = \frac{BD}{AD}$ یعنی

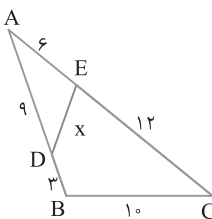
$$\frac{DC}{AB} = \frac{9}{6} \text{ پس } DC = 9 \text{ اکنون می‌توان نوشت } \frac{DC}{AB} = \frac{6}{6} = 1$$



۱۲۱ با توجه به اندازه‌های مشخص شده روی شکل، $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}$

همچنین $\hat{A} = \hat{A}$ پس دو مثلث ADE و ACB به حالت (ض.ض.ض).

متشابه‌اند. بنابراین $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$ یعنی $\frac{x}{12} = \frac{1}{2}$ پس $x = 6$



۱۱۴ چون AB با CD موازی است، بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو

مثلث OAB و OCD متشابه هستند. بنابراین $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{DC}$ یعنی

$\frac{OA}{OC} = \frac{1}{3}$ از طرف دیگر، دو مثلث BAO و BOC در ارتفاع نظیر رأس B

مشترک هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایی است که

این ارتفاع بر آن‌ها وارد شده است، یعنی $\frac{S_{BAO}}{S_{BOC}} = \frac{AO}{OC}$ بنابراین

$$\frac{S_{BAO}}{12} = \frac{1}{3} \text{ پس } S_{BAO} = 4$$

۱۱۵ چون $DC \parallel AM$ ، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث

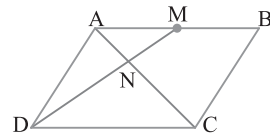
MNA و DNC متشابه‌اند، بنابراین

$$\frac{AN}{NC} = \frac{AM}{DC} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{AC}{NC} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{NC}{AC} = \frac{2}{3}$$

از طرف دیگر دو مثلث DNC و ADC در ارتفاع نظیر رأس D مشترک

هستند، پس

$$\frac{S_{DNC}}{S_{ADC}} = \frac{NC}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{DNC} = \frac{2}{3} S_{ADC} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} S_{ABCD} \right) = \frac{1}{3} S_{ABCD}$$

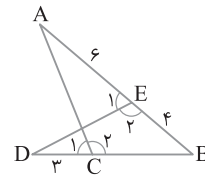


۱۱۶ دو مثلث ABC و DBE متشابه‌اند، زیرا با توجه به شکل زیر

$$\left. \begin{aligned} \hat{E}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \hat{E}_2 = \hat{C}_2 \\ \hat{B} = \hat{B} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(ز.ز)} \triangle ABC \sim \triangle DBE$$

$$\frac{BC}{BE} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{BC}{4} = \frac{10}{BC+3} \Rightarrow BC^2 + 3BC - 40 = 0$$

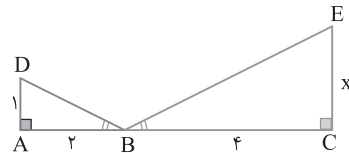
$$(BC+8)(BC-5) = 0 \Rightarrow BC = 5$$



۱۱۷ می‌دانیم در آینه زاویهٔ بازتاب با زاویهٔ تابش برابر است، پس

$\hat{D}_1 = \hat{E}_1$ در نتیجه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BAD و BCE متشابه‌اند

(ز.ز). بنابراین $\frac{CE}{AD} = \frac{CB}{AB}$ یعنی $\frac{x}{9} = \frac{4}{12}$ پس $x = 3$

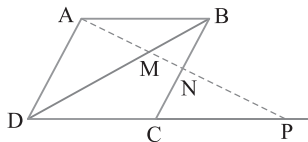


۱۱۸ مثلث ABC قائم‌الزاویه است، پس $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ از طرف

دیگر در مثلث CPN ، $\hat{N}_1 + \hat{C} = 90^\circ$ در نتیجه $\hat{N}_1 = \hat{B}$ پس دو مثلث

قائم‌الزاویهٔ BQM و NPC متشابه‌اند، بنابراین

$$\frac{BQ}{NP} = \frac{QM}{PC} \Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{x}{16} \Rightarrow x = 8$$



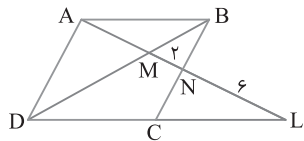
از قضیه اساسی تشابه نتیجه می‌شود که

$$AB \parallel DL \Rightarrow \triangle MBA \sim \triangle MDL \Rightarrow \frac{AM}{ML} = \frac{MB}{MD} \quad (1)$$

$$AD \parallel BN \Rightarrow \triangle MAD \sim \triangle MNB \Rightarrow \frac{MB}{MD} = \frac{MN}{AM} \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

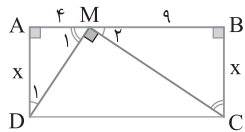
$$\frac{AM}{ML} = \frac{MN}{AM} \Rightarrow \frac{AM}{ML} = \frac{2}{8} \Rightarrow AM^2 = 16 \Rightarrow AM = 4$$



در مثلث AMD، $\hat{M}_1 + \hat{D}_1 = 90^\circ$. از طرف دیگر،

$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 90^\circ$. پس $\hat{M}_2 = \hat{D}_1$. در نتیجه دو مثلث قائم‌الزاویه AMD

و BCM متشابه‌اند (ز ز) و $\frac{AM}{BC} = \frac{AD}{BM}$ ، یعنی $\frac{4}{x} = \frac{x}{9}$ پس $x = 6$.



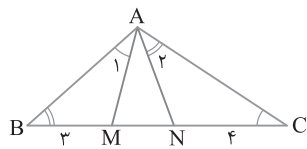
دو مثلث BMA و ANC متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه

$$\frac{AM}{NC} = \frac{BM}{AN} \quad (1)$$

از طرف دیگر $\hat{AMN} = \hat{A}_1 + \hat{B}_2 = \hat{C}_2 + \hat{A}_2 = \hat{ANM}$ پس مثلث AMN

متساوی‌الساقین است و $AM = AN$. اکنون با توجه به تساوی (۱)،

$$AM^2 = BM \times NC = 3 \times 4 \Rightarrow AM = 2\sqrt{3}$$



با توجه به اندازه‌های روی شکل $\frac{AD}{AC} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ و

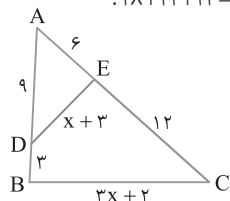
$\frac{AE}{AB} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. بنابراین $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$. از طرف دیگر زاویه بین این ضلع‌های

متناسب زاویه A است. پس دو مثلث AED و ABC متشابه‌اند (ض ض). در نتیجه ضلع‌های نظیرشان متناسب‌اند:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x+3}{3x+2} \Rightarrow x = 4$$

بنابراین ضلع‌های مثلث ABC برابر ۱۸، ۱۲ و ۱۴ هستند، پس محیط این

مثلث برابر است با $18 + 12 + 14 = 44$.



۱۲۲ ۴ با ترکیب در صورت تناسب $\frac{BD}{DC} = \frac{B'D'}{D'C'} = \frac{1}{2}$ نتیجه می‌شود

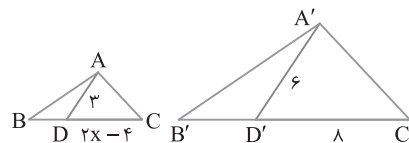
یعنی $\frac{BC}{DC} = \frac{B'C'}{D'C'} = \frac{3}{2}$ و $BC = \frac{3}{2}DC$. از طرف

دیگر چون دو مثلث ABC و A'B'C' متشابه‌اند، پس

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{\frac{3}{2}DC}{\frac{3}{2}D'C'} = \frac{DC}{D'C'}$$

و C'A'D' هم متشابه‌اند (ض ض). در نتیجه $\frac{AD}{A'D'} = \frac{DC}{D'C'}$ ، یعنی

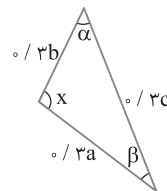
$$\frac{3}{6} = \frac{2x-4}{8} \text{ پس } 2x-4=4 \text{ و در نتیجه } x=4.$$



۱۲۳ ۳ اضلاع دو مثلث متناسب‌اند، زیرا $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$ پس این

دو مثلث متشابه‌اند (ض ض ض). در نتیجه زاویه‌های نظیر این دو مثلث مساوی‌اند.

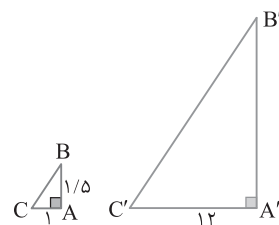
$$\alpha = 47^\circ, \beta = 31^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - (47^\circ + 31^\circ) = 102^\circ \text{ پس}$$



۱۲۴ ۳ چون ضلع‌های دو مثلث موازی هستند، پس این دو مثلث

متشابه‌اند (ز ز). بنابراین مطابق شکل‌های زیر،

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \frac{1/5}{12} = \frac{1}{A'B'} \Rightarrow A'B' = 18$$



۱۲۵ ۲ دو مثلث ABC و BDC متشابه‌اند، زیرا

$$\hat{B}_1 = \hat{A} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(ز ز)} \\ \hat{C} = \hat{C} \end{array} \right. \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle BDC \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{CD}{BC}$$

$$BC^2 = AC \times CD$$

پس BC واسطه هندسی بین AC و CD است.

۱۲۶ ۴ چون BN و AD موازی‌اند، پس بنابر قضیه اساسی تشابه، دو

مثلث MBN و MDA متشابه‌اند. بنابراین $\frac{MB}{MD} = \frac{MN}{MA}$ (۱)

از موازی بودن AB و DP هم نتیجه می‌شود دو مثلث MAB و MPD

متشابه‌اند و $\frac{MB}{MD} = \frac{MA}{MP}$ (۲)

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\frac{MA}{MP} = \frac{MN}{MA}$ پس $MN \times MP = MA^2$.

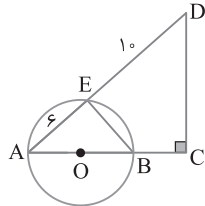
۱۳۵ ۲ زاویه AEB روبه‌رو به قطر AB است، پس $\hat{AEB} = 90^\circ$. از

طرف دیگر $\hat{A} = \hat{A}$ ، پس دو مثلث قائم‌الزاویه AEB و ACD متشابه‌اند (ز.ز).

و در نتیجه $\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$. اگر شعاع دایره را R فرض کنیم،

پس $\frac{2R}{AD} = \frac{AE}{3R}$. در نتیجه $AC = AB + BC = 2R + R = 3R$.

یعنی $AE \times AD = 6R^2$ ، پس $R = 4$.



۱۳۶ ۲ با توجه به درسنامه، دو مثلث AH_1H_2 و ABC با یکدیگر

متشابه هستند و نسبت تشابه آن‌ها برابر است با $\frac{AH_1}{AB} = \frac{H_1H_2}{BC}$. پس

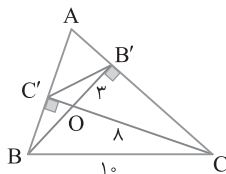
$$\frac{9}{12} = \frac{H_1H_2}{8} \quad \text{و در نتیجه} \quad H_1H_2 = 6$$

۱۳۷ ۴ چون $\hat{B}OC' = \hat{C}OB'$ ، پس دو مثلث قائم‌الزاویه $OC'B$ و

$OB'C$ متشابه‌اند (ز.ز) و $\frac{OC'}{OB} = \frac{OB}{OC}$ ، یعنی $\frac{OC'}{OB} = \frac{OB}{OC}$. همچنین

$\hat{B}'OC' = \hat{B}OC$ ، پس دو مثلث $OB'C'$ و OCB متشابه‌اند (ض.ض).

بنابراین $\frac{OB'}{OC} = \frac{B'C'}{BC}$ ، یعنی $\frac{3}{8} = \frac{B'C'}{10}$ و در نتیجه $B'C' = \frac{3}{8} \times 10 = \frac{15}{4}$.

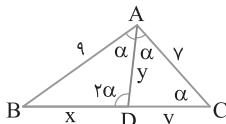


۱۳۸ ۱ در شکل AD نیمساز زاویه A است. چون $\hat{BAD} = \hat{C}$ و

$\hat{B} = \hat{B}$ ، پس دو مثلث BAD و BCA متشابه‌اند (ز.ز) و $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AC}$.

یعنی $\frac{9}{x+y} = \frac{x}{9} = \frac{y}{7}$. حال با استفاده از ویژگی‌های تناسب می‌نویسیم

$$\frac{9}{x+y} = \frac{x+y}{9+y} \Rightarrow (x+y)^2 = 9 \times 16 \Rightarrow x+y = 3 \times 4 \Rightarrow BC = 12$$



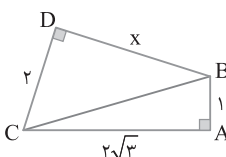
۱۳۹ ۲ با توجه به فرض‌های مسئله شکل زیر را رسم می‌کنیم. بنابر

قضیه فیثاغورس در مثلث ABC.

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{1+12} = \sqrt{13}$$

اکنون بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث BCD.

$$BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{13 - 4} = 3$$



۱۳۱ ۴ با توجه به فرض مسئله مثلث ABC را رسم می‌کنیم و محل

برخورد نیمساز زاویه B با ضلع AC را D می‌نامیم. در این صورت $\hat{CBD} = \hat{A}$

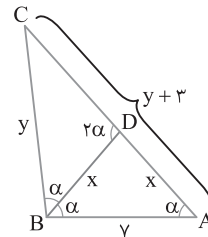
و $\hat{C} = \hat{C}$. در نتیجه دو مثلث ABC و BDC متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین

$\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$ ، یعنی $\frac{x}{y} = \frac{y+3-x}{y} = \frac{y}{y+3}$. اکنون با استفاده از

ویژگی‌های تناسب می‌نویسیم

$$\frac{x+y+3-x}{y+y} = \frac{y}{y+3} \Rightarrow \frac{y+3}{y+y} = \frac{y}{y+3}$$

$$y^2 + 6y + 9 = y^2 + y^2 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow BC = 9$$



۱۳۲ ۴ با توجه به شکل $\hat{AMN} + \hat{M}_1 = 180^\circ$. همچنین بنابر فرض

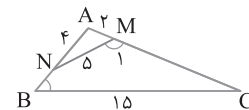
مسئله $\hat{B} + \hat{M}_1 = 180^\circ$. پس $\hat{AMN} = \hat{B}$. از طرف دیگر $\hat{A} = \hat{A}$ ، پس

دو مثلث AMN و ABC متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

یعنی $\frac{2}{4+NB} = \frac{4}{CM+2} = \frac{5}{15}$ ، پس $NB = 2$ و $CM = 10$. اکنون

می‌توان نوشت

$$(BCMN)_{\text{محیط}} = BC + CM + MN + NB = 15 + 10 + 5 + 2 = 32$$

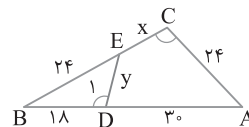


۱۳۳ ۲ چون $\hat{B} = \hat{B}$ و $\hat{D}_1 = \hat{C}$ ، پس دو مثلث BDE و BCA متشابه‌اند

(ز.ز). بنابراین $\frac{ED}{CA} = \frac{BE}{BA} = \frac{BD}{BC}$. پس $\frac{y}{24} = \frac{24}{48} = \frac{18}{24+x}$. در نتیجه

$$\frac{y}{24} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 12, \quad \frac{1}{2} = \frac{18}{24+x} \Rightarrow x = 12$$

$$\text{پس } y - x = 12 - 12 = 0$$

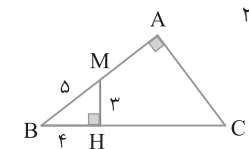


۱۳۴ ۱ چون $\hat{B} = \hat{B}$ و $\hat{H} = \hat{A}$ ، پس دو مثلث BHM و BAC

متشابه هستند (ز.ز). بنابراین $\frac{BC}{BM} = \frac{AB}{BH}$ ، یعنی $\frac{BC}{5} = \frac{4}{4}$ ، پس

$BC = \frac{25}{2}$. با توجه به شکل $CH = BC - BH = \frac{25}{2} - 4 = \frac{17}{2}$. اکنون

$$\frac{MH}{CH} = \frac{3}{\frac{17}{2}} = \frac{6}{17}$$

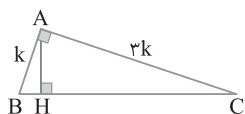


۱۴۴ ۳ چون $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}$ پس عددی حقیقی مانند k وجود دارد که $AB = k$

و $AC = 3k$ توجه کنید که $\frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2} \times k \times 3k = \frac{3}{2} k^2 = 6 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = 2$ یا $k = -2$ (بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ABC).

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

از طرف دیگر طبق رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه ABC ، $BC \times AH = AB \times AC$ پس $AH = 6$.



۱۴۵ ۳ در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) ارتفاع AH را رسم

کرده ایم. فرض کنید $S_{AHC} = 4S_{ABH}$. دو مثلث AHC و ABH در ارتفاع

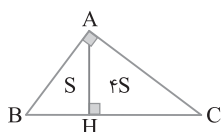
AH مشترک هستند. پس $\frac{S_{ABH}}{S_{AHC}} = \frac{BH}{CH} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{BH}{CH} \Rightarrow CH = 4BH$

از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه،

$$AH^2 = BH \times CH \Rightarrow 8^2 = BH(4BH) \Rightarrow BH^2 = 16 \Rightarrow BH = 4$$

$$CH = 16$$

بنابراین $S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} (8)(20) = 80$



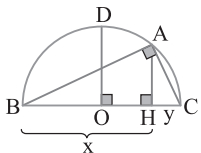
۱۴۶ ۱ زاویه BAC زاویه‌ای محاطی مقابل به کمان 180° است، پس

$\hat{BAC} = 90^\circ$. اکنون، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه ABC ،

می‌توان نوشت $AH^2 = BH \times CH$ ، یعنی $AH = \sqrt{xy}$. از طرف دیگر

OD برابر شعاع دایره است و $OD = OC = \frac{x+y}{2}$. مطابق شکل واضح است

که $AH \leq OD$ ، پس $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ ، یعنی $2\sqrt{xy} \leq x+y$



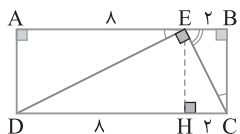
۱۴۷ ۴ چون $\hat{AED} = \hat{ECB}$ و $\hat{ECB} + \hat{CEB} = 90^\circ$ ، پس

$\hat{AED} + \hat{CEB} = 90^\circ$. در نتیجه $\hat{CED} = 90^\circ$. در مثلث قائم الزاویه DEC اگر از

نقطه E عمود EH را بر ضلع DC رسم کنیم، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه،

$$EH^2 = DH \times CH \Rightarrow EH^2 = 8 \times 2 = 16$$

پس $EH = 4$. اکنون می‌توان نوشت $S_{CDE} = \frac{1}{2} DC \times EH = \frac{1}{2} \times 10 \times 4 = 20$

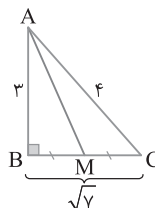


۱۴۰ ۲ بنا بر عکس قضیه فیثاغورس، مثلث ABC قائم الزاویه است،

زیرا $3^2 + (\sqrt{7})^2 = 4^2$ ، یعنی $AC^2 = AB^2 + BC^2$. در هر مثلث میانه

وارد بر کوچک‌ترین ضلع بزرگ‌ترین میانه است. در اینجا باید طول میانه AM را به دست آوریم. در مثلث ABM ، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 = 3^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 = 9 + \frac{7}{4} = \frac{43}{4} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{43}}{2}$$



۱۴۱ ۴ از E خطی موازی DC رسم می‌کنیم تا امتداد AD را در F قطع

کند. چون $AE = 2AC$ ، پس C وسط AE است. بنابراین در مثلث AFE ،

پاره خط DC میان خط است. در نتیجه

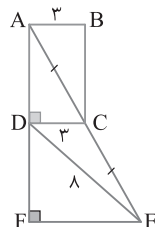
$$DC = \frac{1}{2} FE \Rightarrow FE = 2DC = 2 \times 3 = 6$$

در مثلث DEF ، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$DF = \sqrt{DE^2 - EF^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$$

از طرف دیگر $AD = DF$ ، پس

$$AD = 3\sqrt{3}, S_{ABCD} = AD \times AB = 3\sqrt{3} \times 3 = 9\sqrt{3}$$



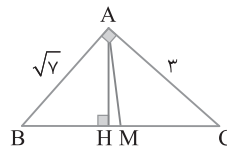
۱۴۲ ۱ در شکل، AH و AM به ترتیب ارتفاع و میانه وارد بر وتر

هستند. باید طول MH را پیدا کنیم. در مثلث ABC ، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{7 + 9} = 4$$

و بنابر رابطه‌های طولی، $AB^2 = BH \times BC$ ، یعنی $7 = BH \times 4$ ، پس

$$BH = \frac{7}{4}. \text{ به این ترتیب } MH = BM - BH = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$$



۱۴۳ ۲ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه ABC ،

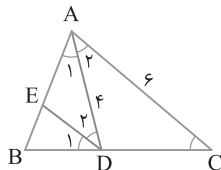
$$AC^2 = CH \times CB \Rightarrow AC^2 = 4 \times 13 \Rightarrow AC = 2\sqrt{13}$$

$$AH^2 = BH \times CH \Rightarrow AH^2 = 9 \times 4 \Rightarrow AH = 6$$

$$\frac{AC}{AH} = \frac{2\sqrt{13}}{6} = \frac{\sqrt{13}}{3} \text{ پس}$$

می‌دانیم در دو مثلث متشابه نسبت نیمسازهای نظیر برابر نسبت ضلع‌های نظیر است. AD نیمساز زاویه A در مثلث ABC و DE نیمساز زاویه D در مثلث DBA است. بنابراین

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{نسبت نیمسازها} = \frac{DE}{AD} \\ \text{نسبت ضلع‌های نظیر} = \frac{AD}{AC} \end{array} \Rightarrow \frac{DE}{AD} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{DE}{4} = \frac{4}{6} \Rightarrow DE = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$



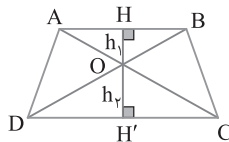
۱۵۲ (۴) دو مثلث OAB و OCD متشابه‌اند، بنابراین

$$\frac{OH}{OH+OH'} = \frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}, \quad \frac{OH}{OH'} = \frac{AB}{DC} = \frac{2}{3}$$

نتیجه $\frac{OH}{HH'} = \frac{2}{5}$ می‌توان نوشت

$$\frac{S_{OAB}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \times OH \times AB}{\frac{1}{2} \times HH' \times (AB+DC)} = \frac{\frac{2}{5} HH' \times AB}{HH' \times (AB + \frac{3}{2} AB)} = \frac{4}{25} = 0.16$$

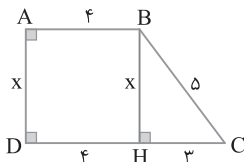
پس مساحت مثلث OAB ۱۶ درصد مساحت دوزنقه $ABCD$ است.



۱۵۳ (۲) در شکل BH ارتفاع وارد بر DC است. پس $ABHD$ مستطیل است. اگر $AD=x$ ، آن‌گاه $BH=x$ و $DH=4$ ، پس $CH=3$. اکنون بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث BCH .

$$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

در نتیجه محیط دوزنقه $= AB + BC + CD + DA = 4 + 5 + 7 + 4 = 20$



۱۵۴ (۱) دو مثلث ABH و CAH با داشتن دو زاویه مساوی متشابه‌اند. پس نسبت BM به AN ، میانه‌های نظیر این دو مثلث با نسبت تشابه آن‌ها برابر است:

$$\triangle ABH \sim \triangle CAH \Rightarrow \frac{BM}{AN} = \frac{AH}{HC} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۵۵ (۲) محیط مثلث اول برابر $(4a-1) + (2a+1) + (2a-2) = 13a-1$ و

محیط مثلث دوم برابر ۲۴ است. می‌دانیم در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها مساوی توان دوم نسبت محیط‌ها است. فرض می‌کنیم P و S به ترتیب مساحت و محیط مثلث اول و P' و S' به ترتیب مساحت و محیط مثلث دوم باشند. بنابراین

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{P}{P'}\right)^2 \Rightarrow \frac{6}{24} = \left(\frac{13a-1}{24}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{13a-1}{24} \Rightarrow a=1$$

۱۴۸ (۲) راه حل اول با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم

$$\triangle ABC: AB^2 = BH \times BC \xrightarrow{BH=x} 4^2 = x(x+6)$$

$$x^2 + 6x - 16 = 0 \Rightarrow (x+8)(x-2) = 0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow BH=2$$

$$\triangle ABC: AH^2 = BH \times CH = 2 \times 6 = 12 \Rightarrow AH = 2\sqrt{3}$$

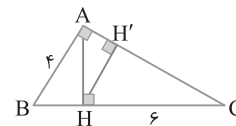
$$\triangle ABC: AC^2 = BC^2 - AB^2 \Rightarrow AC^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$$

$$AC = 4\sqrt{3}$$

بنابراین

$$\triangle AHC: HH' \times AC = AH \times CH \Rightarrow HH' \times 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \times 6$$

$$HH' = 3$$



راه حل دوم پس از اینکه $BH=2$ به دست آمد، توجه کنید که AB و HH' بر AC عمود هستند، بنابراین با هم موازی‌اند. پس بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث CAB .

$$HH' \parallel AB \Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{HH'}{AB} \Rightarrow \frac{6}{8} = \frac{HH'}{4} \Rightarrow HH' = 3$$

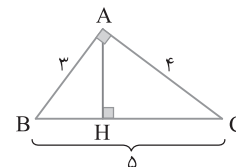
۱۴۹ (۲) مثلث داده شده را مانند شکل زیر رسم می‌کنیم. بین طول

ضلع‌های مثلث داده شده رابطه فیثاغورس برقرار است $(5^2 = 4^2 + 3^2)$ ، پس مثلث قائم‌الزاویه است و بنابر رابطه‌های طولی، $AB \times AC = BC \times AH$.

پس $AH = \frac{12}{5}$ ، در نتیجه $3 \times 4 = 5 \times AH$ می‌دانیم در دو مثلث متشابه

نسبت ارتفاع‌های نظیر با نسبت تشابه برابر است، بنابراین

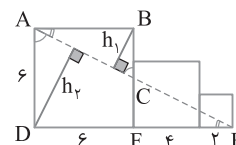
$$\frac{12}{5} = \frac{5}{12} = \frac{1}{12}$$



۱۵۰ (۱) توجه کنید که $\hat{AED} + \hat{EAD} = 90^\circ$ و $\hat{BAC} + \hat{EAD} = 90^\circ$.

پس $\hat{BAC} = \hat{AED}$. در نتیجه دو مثلث قائم‌الزاویه EDA و ABC متشابه‌اند (ز.ز). بنابراین نسبت ارتفاع‌های وارد بر وتر برابر است با نسبت تشابه آن‌ها:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{DE}{AB} = \frac{12}{6} = 2$$



۱۵۱ (۳) نیمساز زاویه ADB را رسم می‌کنیم و محل برخورد آن با ضلع

AB را E می‌نامیم. اکنون دو مثلث ABC و DBA را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{C} \\ \hat{B} = \hat{B} \end{cases} \xrightarrow{(ز.ز)} \triangle DBA \sim \triangle ABC$$

۱۶۱ ابتدا به کمک قضیه تالس مقدار x را به دست می آوریم:

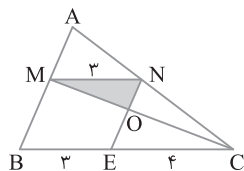
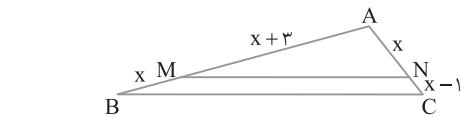
$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{x+3}{x} = \frac{x}{x-1} \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = x^2 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

از طرف دیگر،

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2$$

$$= \left(\frac{x+3}{2x+3}\right)^2 = \left(\frac{2}{2+3}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{4}{25} = \frac{9}{16}$$

$$\frac{S_{ABC} - S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{16-9}{16} \Rightarrow \frac{S_{MNCB}}{S_{ABC}} = \frac{7}{16} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{16}{7} S_{MNCB}$$



۱۶۲ چون $MN \parallel EC$ ،

بنابر قضیه اساسی تشابه دو مثلث OMN و OCE متشابه اند، بنابراین

$$\frac{S_{OMN}}{S_{OCE}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

از طرف دیگر

$$OE \parallel BM \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle OEC \sim \triangle MBC$$

$$\frac{S_{OEC}}{S_{MBC}} = \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{16}{49}$$

در ضمن

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{3}{7}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{MB}{AB} = \frac{4}{7}$$

توجه کنید که دو مثلث BMC و ABC در ارتفاع نظیر از رأس C مشترک

$$\text{هستند. پس } \frac{S_{BMC}}{S_{ABC}} = \frac{BM}{AB} = \frac{4}{7}$$

$$S_{OMN} = \frac{9}{16} S_{OEC} = \frac{9}{16} \left(\frac{16}{49} S_{BMC}\right) = \frac{9 \times 16}{16 \times 49} \times \frac{4}{7} S_{ABC}$$

$$S_{OMN} = \frac{36}{343} S_{ABC}$$

۱۶۳ چون AD بر AB و CD عمودند، پس موازی اند. در نتیجه، بنابر

قضیه اساسی تشابه، دو مثلث AOB و COD متشابه اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر

$$\text{است با } \frac{DC}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{، بنابراین اگر مساحت مثلث } OAB \text{ برابر } S \text{ باشد، مساحت}$$

مثلث ODC برابر $4S$ است. از طرف دیگر از تشابه دو مثلث AOB و COD

$$\text{نتیجه می گیریم } \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{DC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{، بنابراین نسبت مساحت‌های دو مثلث}$$

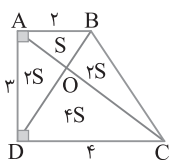
OAB و OBC که در ارتفاع نظیر رأس B مشترک هستند، برابر نسبت قاعده‌های آن‌ها، یعنی

$$\frac{OA}{OC} = \frac{1}{2} \text{ است. پس } S_{OBC} = 2S_{OAB} = 2S$$

به همین ترتیب، $S_{OAD} = 2S_{OAB} = 2S$ ، بنابراین

$$S_{ABCD} = 2S + S + 2S + 4S = \frac{1}{2}(3)(2+4) = 9S \Rightarrow S = 1$$

پس مساحت مثلث OBC مساوی $2S = 2$ است.



۱۵۶ نسبت تشابه دو مثلث $\frac{3}{5}$ یا $\frac{3}{4}$ است (توجه کنید که چون دو

مثلث غیرهمنهشت هستند، نسبت تشابه را ۱ نگرافتم). چون محیط مثلث

دوم برابر $3+4+5=12$ است، پس محیط مثلث اول یکی از دو عدد

$12 \times \frac{3}{5} = 7.2$ یا $12 \times \frac{3}{4} = 9$ است. بنابراین بیشترین محیط مثلث اول برابر ۹ است.

۱۵۷ چون دو مثلث متساوی‌الاضلاع زاویه‌های برابر دارند، پس

همواره متشابه هستند. بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر مربع نسبت

تشابه آن‌ها است: $\frac{S_1}{S_2} = k^2 = 9$ ، در نتیجه $k = 3$. نسبت محیط‌های این دو

مثلث برابر نسبت تشابه آن‌ها است، پس محیط مثلث بزرگ‌تر ۳ برابر محیط

مثلث کوچک‌تر است.

۱۵۸ زاویه‌های مثلث ABC برابر $\hat{A} = 70^\circ$ ، $\hat{B} = 50^\circ$ و $\hat{C} = 60^\circ$ و

زاویه‌های مثلث MPN برابر $\hat{M} = 70^\circ$ ، $\hat{N} = 60^\circ$ و $\hat{P} = 50^\circ$ هستند. پس

دو مثلث ABC و MPN متشابه‌اند (ز.ز). در نتیجه ضلع $AB = 18$ در

مثلث ABC که روبه‌روی زاویه $\hat{C} = 60^\circ$ است، با ضلع MP در مثلث MPN

که روبه‌روی زاویه $\hat{N} = 60^\circ$ است، متناظر است. بنابراین

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MPN}} = \left(\frac{AB}{MP}\right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{AB}{MP} = \frac{3}{2} \xrightarrow{AB=18} \frac{18}{MP} = \frac{3}{2} \Rightarrow MP = 12$$

۱۵۹ در شکل زیر با استفاده از قضیه اساسی تشابه می‌نویسیم

$$MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{x}{3x}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$EF \parallel BC \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{2x}{3x}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{S_{BEFC}}{S_{ABC}} = \frac{5}{9}$$

از تقسیم دو تساوی به دست آمده نتیجه می‌گیریم

$$\frac{S_{AMN}}{S_{BEFC}} = \frac{1}{5} \xrightarrow{S_{AMN}=5} \frac{5}{S_{BEFC}} = \frac{1}{5} \Rightarrow S_{BEFC} = 25$$

در نتیجه

$$\begin{cases} \hat{M}_P = \hat{C} \\ \hat{A} = \hat{A} \end{cases} \xrightarrow{\text{ز.ز}} \triangle AMN \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ACB}} = \left(\frac{A}{10}\right)^2 = \frac{64}{100}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{S_{ACB} - S_{AMN}}{S_{ACB}} = \frac{100 - 64}{100} \Rightarrow \frac{S_{BMNC}}{S_{ACB}} = \frac{36}{100}$$

۱۶۰ در چهارضلعی $BMNC$ زاویه‌های روبه‌رو مکمل اند، پس

$$\hat{M}_1 + \hat{C} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{M}_1 + \hat{M}_P = 180^\circ} \hat{M}_P = \hat{C}$$

بنابراین $MP \parallel BC$ و $NP \parallel AC$ (ز.ز). در نتیجه $MPNC$ یک مربع است.



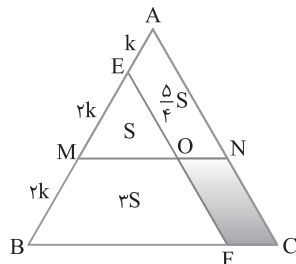
بنابراین مساحت چهارضلعی ANOE برابر $\frac{5}{4}S$ است. در ضمن EF موازی AC

است، پس دو مثلث EBF و ABC با نسبت $\frac{BE}{AB} = \frac{4}{5}$ متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{S_{EBF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow \frac{16}{25} = \frac{4S}{4S + \frac{5}{4}S + S_{ONCF}} \Rightarrow \frac{16}{25} = \frac{4S}{\frac{21}{4}S + S_{ONCF}}$$

بنابراین $S_{ONCF} = S$ ، در نهایت $\frac{S_{ONCF}}{S_{ABC}} = \frac{S}{4S + \frac{5}{4}S + S} = \frac{4}{25}$

یعنی مساحت متوازی‌الاضلاع رنگی $\frac{4}{25} = 16\%$ مساحت مثلث ABC است.



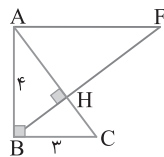
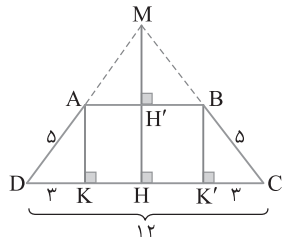
با رسم ارتفاع‌های AK و BK' دو مثلث قائم‌الزاویه ADK و

BCK' همنهشت می‌شوند. پس $DK = \frac{12-6}{2} = 3$ ، در نتیجه با استفاده از

قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه ADK طول ارتفاع AK برابر ۴ است. پس

با قضیه اساسی تشابه $\triangle ABM \sim \triangle DCM$

$$\frac{MH'}{MH} = \frac{AB}{DC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{MH'}{HH'} = \frac{1}{1} \xrightarrow{HH' = AK = 4} MH' = 4$$



در مثلث ABC، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC،

$$BH = \frac{AB \times BC}{AC} = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$$

$$AB^2 = AH \times AC \Rightarrow AH = \frac{AB^2}{AC} = \frac{16}{5}$$

اگر بخواهیم دو مثلث ABH و AFH متشابه باشند، دو حالت زیر رخ می‌دهد:
حالت اول: BH را به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا F به دست آید (در این حالت دو مثلث همنهشت هستند، یعنی نسبت تشابه آن‌ها برابر ۱ است)، پس

$$HF = BH = \frac{12}{5}$$

حالت دوم: در این حالت نسبت تشابه به صورت $\frac{AH}{BH} = \frac{HF}{AH}$ است. یعنی

$$\frac{16}{5} = \frac{HF}{\frac{12}{5}} \Rightarrow HF = \frac{64}{15}$$

هر دو هشت‌ضلعی منظم متشابه‌اند و نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر مربع نسبت تشابه آن‌هاست. پس

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{a}{a'}\right)^2 \Rightarrow \frac{9}{16} = \left(\frac{a}{a'}\right)^2 \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{3}{4}$$

اکنون اگر ضلع کوچک‌تر را ۱۲ در نظر بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{12}{a'} = \frac{3}{4} \Rightarrow a' = \frac{4 \times 12}{3} = 16$$

و در صورتی که ضلع بزرگ‌تر را ۱۲ در نظر بگیریم، نتیجه می‌گیریم

$$\frac{a}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{12 \times 3}{4} = 9$$

هر دو هشت‌ضلعی منظم متشابه‌اند و نسبت مساحت‌های آن‌ها مساوی توان دوم نسبت تشابه آن‌ها و در نتیجه برابر توان دوم نسبت محیط‌های آن‌ها است. پس

$$\frac{\text{مساحت ده‌ضلعی کوچک}}{\text{مساحت ده‌ضلعی بزرگ}} = \left(\frac{9}{12}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\frac{\text{مجموع مساحت‌ها}}{\text{مساحت ده‌ضلعی بزرگ}} = \frac{4+9}{9} \Rightarrow \frac{13}{9} = \frac{78}{9}$$

مساحت ده‌ضلعی بزرگ

در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها با مربع نسبت تشابه

برابر است. پس اگر k نسبت تشابه باشد، $k = \sqrt{\frac{4 \times 5}{16 \times 5}} = \frac{1}{2}$ ، از طرف دیگر،

نسبت محیط دو مثلث متشابه برابر نسبت تشابه است. پس با فرض اینکه P

محیط مثلث مورد نظر باشد، می‌توان نوشت $\frac{P}{32} = \frac{1}{2} \Rightarrow P = 16$

پس $m + m + 3 + 2m + 1 = 16$ ، در نتیجه $m = 3$.

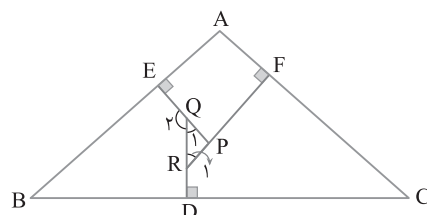
دو مثلث PQR و ABC متشابه‌اند، زیرا در چهارضلعی

BDQE دو زاویه قائمه وجود دارد، پس $\hat{B} + \hat{Q}_1 = 180^\circ$ ، از طرف دیگر

$\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2 = 180^\circ$ ، پس $\hat{B} = \hat{Q}_1$ ، به همین ترتیب ثابت می‌شود $\hat{R}_1 = \hat{C}$.

بنابراین نسبت مساحت‌های این دو مثلث متشابه مساوی توان دوم نسبت

$$\frac{S_{ABC}}{S_{PQR}} = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2 = \left(\frac{APR}{PR}\right)^2 = 64$$



مساحت مثلث OME را برابر S در نظر می‌گیریم (شکل را ببینید).

چون OM موازی BF است، پس دو مثلث OME و FBE بنابر قضیه اساسی تشابه

متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{ME}{BE} = \frac{2k}{4k} = \frac{1}{2}$ است. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها

برابر توان دوم نسبت تشابه، یعنی $\frac{1}{4}$ است:

$$\frac{S_{OME}}{S_{FBE}} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{S_{OME}}{S_{BMOF}} = \frac{1}{3}$$

بنابراین مساحت چهارضلعی BMOF برابر ۳S است. از طرف دیگر چون OE

موازی AN است، پس دو مثلث OME و NMA با نسبت $\frac{ME}{MA} = \frac{2k}{3k} = \frac{2}{3}$

متشابه‌اند و در نتیجه

$$\frac{S_{OME}}{S_{NMA}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{S_{OME}}{S_{ANOE}} = \frac{4}{5}$$

۱۷۴ ۴ از هر رأس n ضلعی محدب $n-3$ قطر می‌گذرد و تعداد کل

قطرها برابر $\frac{1}{2}n(n-3)$ است. بنابر فرض سؤال

$$n-3 = \frac{1}{2}n(n-3) \Rightarrow n=16$$

پس $n-3 = \frac{1}{2}n(n-3) = \frac{1}{2}(16)(16-3) = 8 \times 13 = 104$ تعداد قطرها

۱۷۵ ۳ از هر رأس n ضلعی محدب $n-3$ قطر می‌گذرد. ظاهراً از سه

رأس متوالی آن $3(n-3)$ قطر می‌گذرد. اما در این محاسبه ۱ قطر دوبار

حساب شده است (شکل را ببینید). اگر A ، B و C سه رأس متوالی مورد نظر باشند، قطر AC دو بار حساب شده است: یک بار در محاسبه قطرها نظیر رأس

A و یک بار در محاسبه قطرها نظیر رأس C ، پس
تعداد قطرها رسم شده از سه رأس متوالی n ضلعی
محدب برابر $3(n-3)-1$ است. اکنون، می‌توان
نوشت $n-1 = 3(n-3)-1$ ، یعنی $n=9$.

۱۷۶ ۴ در صورتی که به تعداد اضلاع n ضلعی محدب یکی اضافه کنیم

یعنی آن را به $(n+1)$ ضلعی محدب تبدیل کنیم، به تعداد قطرها آن $n-1$

قطر اضافه می‌شود. پس ۹۹ ضلعی محدب نسبت به ۹۸ ضلعی محدب تعداد
۹۷ قطر بیشتر دارد. بنابراین

$$99 + \text{تعداد قطرها ۹۸ ضلعی} = \text{تعداد قطرها ۹۹ ضلعی}$$

$$94 + 2k + 3 = 97 + \text{تعداد قطرها ۹۸ ضلعی}$$

$$94 - 2k = 97 - 2k + 3 = 100 - 2k$$

۱۷۷ ۳ چون مجموع زاویه‌های خارجی n ضلعی محدب 360° است، پس

n ضلعی محدب بیش از ۳ زاویه غیرمنفرجه داخلی نمی‌تواند داشته باشد. از طرف

دیگر چون در اینجا n ضلعی دقیقاً ۳ زاویه منفرجه دارد و حداکثر هم ۳ زاویه
غیرمنفرجه داخلی می‌تواند داشته باشد، پس حداکثر شش ضلعی است. در نتیجه

$$\frac{6 \times (6-3)}{2} = 9$$

حداکثر تعداد قطرها n ضلعی‌های با این ویژگی برابر است با $\frac{6 \times (6-3)}{2} = 9$.

۱۷۸ ۳ اگر هر زاویه داخلی n ضلعی منتظم k° باشد، که در این جا k

عددی طبیعی است، آن‌گاه هر زاویه خارجی آن نیز برحسب درجه عددی

طبیعی است، زیرا اندازه این زاویه برابر است با $180^\circ - k^\circ$. چون n ضلعی

منتظم است هر زاویه خارجی آن برابر $\frac{360^\circ}{n}$ است و در نتیجه

$$\frac{360^\circ}{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow n \text{ حداکثر } = 360$$

۱۷۹ ۳ می‌دانیم مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب

مضربی از 180° است. بنابراین اگر x زاویه کنار گذاشته شده باشد، آن‌گاه

$$222^\circ + x = 12 \times 180^\circ + 6^\circ + x$$

چون $180^\circ < x < 180^\circ$ مقدار بالا زمانی مضرب 180° است که $x = 12^\circ$.

۱۸۰ ۳ در مثلث قائم‌الزاویه ADH ، بنابر قضیه فیثاغورس

$$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{16 - 8} = 2\sqrt{2}$$

یعنی مثلث ADH قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین

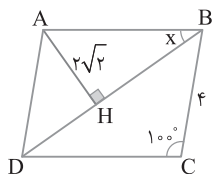
است. پس $\hat{ADH} = 45^\circ$. در ضمن در

متوازی‌الاضلاع زاویه‌های مقابل مساوی‌اند،

پس $\hat{A} = \hat{C} = 100^\circ$ و چون مجموع زاویه‌های

مثلث ADB برابر 180° است، پس

$$x = \hat{ABD} = 180^\circ - 100^\circ - 45^\circ = 35^\circ$$



۱۷۱ ۲ مطابق شکل از M نقطه تلاقی امتداد دو ساق دوزنقه، خطی عمود

بر قاعده‌های AB و DC رسم می‌کنیم تا قاعده‌های AB و DC را به ترتیب در H و H' قطع کند. سپس با رسم عمودهای AE و BF بر DC نتیجه می‌گیریم

$$EF = AB = 9, \quad DE = CF = \frac{DC - AB}{2} = \frac{15 - 9}{2} = 3$$

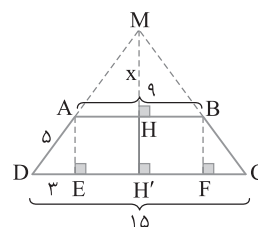
در مثلث ADE ، بنابر رابطه فیثاغورس،

$$AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

پس $HH' = 4$. بنابر قضیه اساسی تشابه، دو مثلث MAB و MDC

متشابه‌اند، بنابراین نسبت ارتفاع‌های نظیر برابر نسبت تشابه است. پس

$$\frac{MH}{MH+4} = \frac{9}{15}, \quad \text{یعنی } \frac{MH}{MH+4} = \frac{AB}{DC}$$



۱۷۲ ۱ نقطه برخورد EF و AH را H' می‌نامیم. چون BC موازی EF

است، پس بنابر قضیه اساسی تشابه، دو مثلث AEF و ABC متشابه هستند.

بنابراین نسبت ارتفاع‌های نظیر با نسبت ضلع‌های نظیر برابر است:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{AH'}{AH}$$

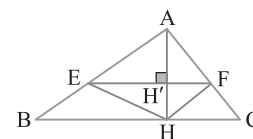
از طرف دیگر $\frac{AE}{EB} = \frac{3}{2}$ با ترکیب در مخرج کردن به
تناسب $\frac{AE}{AB} = \frac{3}{5}$ می‌رسیم. بنابراین $\frac{AH'}{AH} = \frac{3}{5}$ و $\frac{EF}{BC} = \frac{3}{5}$ با تفصیل در

صورت کردن تناسب $\frac{AH'}{AH} = \frac{3}{5}$ به تناسب $\frac{HH'}{AH} = \frac{2}{5}$ می‌رسیم. اکنون

می‌توانیم نسبت خواسته شده را به‌دست آوریم:

$$\frac{S_{EFH}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} HH' \times EF}{\frac{1}{2} AH \times BC} = \frac{HH'}{AH} \times \frac{EF}{BC} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

بنابراین مساحت مثلث EFH ، $\frac{6}{25} \times 100\% = 24\%$ مساحت مثلث ABC است.



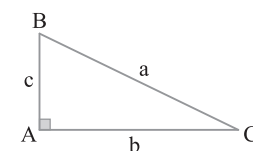
۱۷۳ ۴ چون هر دوشش ضلعی منتظم متشابه هستند، پس نسبت مساحت‌های

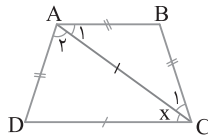
آن‌ها برابر مربع نسبت تشابه آن‌ها است. اکنون اگر S_1 مساحت شش ضلعی ایجاد

شده، روی ضلع به طول b و S_3 مساحت شش ضلعی ایجاد شده روی ضلع به طول c

باشد، آن‌گاه به‌دست می‌آید: $\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{c}{a}\right)^2$ و $\frac{S_3}{S_1} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$ در نتیجه

$$\frac{S_2}{S_1} + \frac{S_3}{S_1} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1 \Rightarrow S_2 + S_3 = S_1$$





۱۸۵ ۳ در شکل زیر M, E و F وسط ضلع‌های دوزنقه ABCD

هستند. دو ارتفاع AH و BH' را رسم کرده‌ایم. چون $HH' = AB = 10$.

پس $DH + CH' = 14 - 10 = 4$. بنابراین $DH = CH' = \frac{4}{2} = 2$. اکنون بنابر

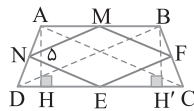
قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه ACH.

$$AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{25 + 144} = 13$$

محیط چهارضلعی MNEF مساوی مجموع طول دو قطر دوزنقه ABCD

است. در نتیجه

$$(MNEF) \text{ محیط} = AC + BD = 13 + 13 = 26$$



۱۸۶ ۴ می‌دانیم اگر وسط‌های ضلع‌های مجاور هر چهارضلعی محدب

را به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع ایجاد می‌شود که ضلع‌های این

متوازی‌الاضلاع موازی و مساوی نصف قطرهای چهارضلعی اولیه است. از

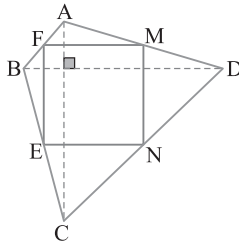
آن‌جا که قطرهای چهارضلعی اولیه مساوی و بر هم عمودند، پس ضلع‌های

متوازی‌الاضلاع ایجاد شده مساوی و بر هم عمودند. پس چهارضلعی حاصل

مربع است. در شکل زیر قطرهای چهارضلعی ABCD بر هم عمودند و با هم

مساوی‌اند و نقطه‌های M, E, N, F وسط‌های ضلع‌های ABCD هستند و

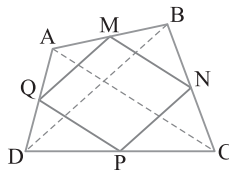
چهارضلعی MNEF مربع است.



۱۸۷ ۳ در شکل نقاط M, N, P و Q وسط ضلع‌های ABCD هستند.

می‌دانیم محیط MNPQ برابر مجموع طول دو قطر ABCD است، پس

$$AC + BD = (\text{محیط } MNPQ) \Rightarrow AC + BD = 10$$



۱۸۸ ۴ در لوزی ضلع‌ها با هم مساوی‌اند و زاویه‌های مقابل برابرند. بنابراین

$$\begin{cases} AM = CP \\ \hat{A} = \hat{C} \\ AQ = CN \end{cases} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \triangle AMQ \cong \triangle CPN \Rightarrow MQ = NP \quad (1)$$

به همین ترتیب می‌توان نوشت

$$\triangle QPD \cong \triangle NMB \Rightarrow QP = MN \quad (2)$$

۱۸۱ ۲ می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند.

$$OA = OC = \frac{AC}{2}, \quad OB = OD = \frac{BD}{2}$$

بنابراین در شکل زیر،

بنابر فرض مسئله $AC + BD = 20$ پس

$$\frac{AC + BD}{2} = 10 \Rightarrow \begin{cases} OA + OB = 10 & (1) \\ OA + OD = 10 & (2) \end{cases}$$

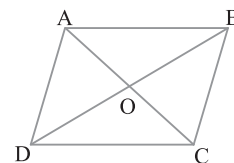
می‌دانیم

$$16 = \text{محیط مثلث } AOD, \quad 18 = \text{محیط مثلث } AOB$$

$$\begin{cases} OA + OB + AB = 18 & (1) \rightarrow AB = 8 \\ OA + OD + AD = 16 & (2) \rightarrow AD = 6 \end{cases}$$

در نهایت به دست می‌آید

$$28 = \text{محیط متوازی‌الاضلاع} = 2(AB + AD) = 2(8 + 6)$$



۱۸۲ ۲ چون ABCD مربع است و مثلث‌های OAB و BCO'

متساوی‌الاضلاع هستند، پس $\hat{ABO} = \hat{CBO}' = 60^\circ$ و $\hat{OBC} = 30^\circ$ و

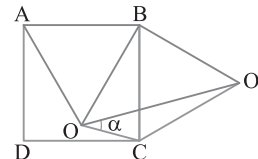
طول ضلع‌های این مثلث‌ها برابر طول ضلع مربع هستند: $OB = O'B$

از طرف دیگر

$$\hat{OBO}' = \hat{OBC} + \hat{CBO}' = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow \hat{BOO}' = 45^\circ$$

مثلث BOC متساوی‌الساقین با زاویه رأس 30° است، پس

$$\hat{BOC} = 75^\circ \Rightarrow \alpha + 45^\circ = 75^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$



۱۸۳ ۲ در لوزی دو زاویه مجاور مکمل

یکدیگرند، پس $\hat{C} = 60^\circ$. در ضمن M و N وسط‌های

دو ضلع لوزی هستند، پس $MC = NC = 3$.

بنابراین مثلث MNC متساوی‌الساقین با زاویه رأس

60° است. پس دو زاویه دیگر آن هم 60° هستند. در

نتیجه مثلث MNC متساوی‌الاضلاع است، پس

$$MN = NC = MC = 3$$

۱۸۴ ۳ اندازه زاویه DCA را برابر x در نظر می‌گیریم. در این صورت از

قضیه خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود $\hat{A}_1 = x$. در ضمن مثلث ABC

متساوی‌الساقین است، پس $\hat{C}_1 = \hat{A}_1 = x$. در دوزنقه متساوی‌الساقین دو

زاویه مجاور به قاعده مساوی‌اند، پس $\hat{D} = \hat{BCD} = 2x$. چون مثلث ADC

متساوی‌الساقین است، پس $\hat{A}_2 = \hat{D} = 2x$. در مثلث ADC مجموع

زاویه‌های داخلی 180° است، پس

$$\hat{A}_2 + \hat{D} + \hat{DCA} = 180^\circ \Rightarrow 2x + 2x + x = 180^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$$

$$\text{بنابراین } \hat{DAC} + \hat{DCA} = 2x + x = 3x = 3 \times 36^\circ = 108^\circ$$

بنابراین در مثلث قائم الزاویه $BH'C$ چون CH' روبه‌رو به زاویه 30° است، اندازه آن نصف طول وتر BC است:

$$\triangle BH'C: \hat{B}_1 = 30^\circ \Rightarrow x = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC = 4$$

چون مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است، بنابراین $AB = AE = BE = 6$ و

$$\triangle BNC: \hat{C}_1 = 30^\circ \Rightarrow BN = \frac{BC}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

پس $NE = BE - BN = 6 - 2 = 4$ بنابراین

$$\triangle MNE: \hat{M}_1 = 60^\circ \Rightarrow NE = \frac{\sqrt{3}}{2} ME \Rightarrow 4 = \frac{\sqrt{3}}{2} ME$$

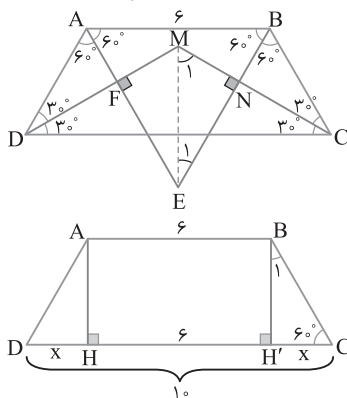
یعنی $ME = \frac{8}{\sqrt{3}}$ بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه MNE .

$$MN = \sqrt{ME^2 - NE^2} = \sqrt{\frac{64}{3} - 16} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

اکنون می‌توان مساحت چهارضلعی $MNEF$ را به‌دست آورد

$$S_{MNEF} = MN \times NE = \frac{4}{\sqrt{3}} \times 4 = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

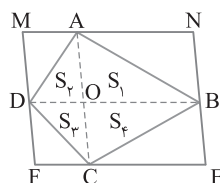
بنابراین مساحت این چهارضلعی ۱۶ برابر $\frac{\sqrt{3}}{3}$ است.



۱۹۲ اگر از رأس‌های چهارضلعی $ABCD$ خط‌هایی موازی قطرهای آن رسم کنیم، چهارضلعی $MNEF$ ایجاد می‌شود. چهارضلعی‌های $AOBN$ و $DOCF$ و $BOCE$ متوازی‌الاضلاع هستند. پس

$$S_{BOCE} = 2S_F, S_{DOCF} = 2S_F, S_{AODM} = 2S_F, S_{AOBN} = 2S_F$$

در نتیجه $S_{MNEF} = 2S_{ABCD}$ پس $S_{MNEF} = 2 \times 12 = 24$.



۱۹۳ فرض می‌کنیم در مثلث قائم الزاویه

ABC پاره‌خط AH ارتفاع وارد بر وتر و AM میانه وارد بر وتر باشد. بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه،

$$AH^2 = BH \times CH \Rightarrow 8^2 = 4BH$$

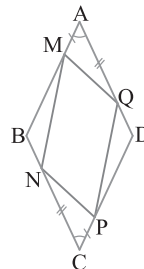
$$BH = \frac{64}{4} = 16$$

پس $BC = 16 + 4 = 20$ می‌دانیم در مثلث قائم الزاویه طول میانه وارد بر وتر

$$AM = \frac{BC}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

نصف طول وتر است. بنابراین

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم ضلع‌های مقابل چهارضلعی $MQPN$ مساوی‌اند. پس این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. در حالت‌های خاص اگر M ، N ، P و Q وسط ضلع‌های لوزی باشند، آن‌گاه $MNPQ$ مستطیل می‌شود و دو قطر آن مساوی می‌شوند و اگر چهارضلعی $ABCD$ مربع باشد، آن‌گاه قطرهای $MNPQ$ بر هم عمود می‌شوند. پس متوازی‌الاضلاع بودن $MQPN$ همواره برقرار است.



۱۸۹ با توجه به شکل زیر، در چهارضلعی $ABCD$ فرض می‌کنیم $AD = BC$ و نقطه‌های M و N به ترتیب وسط‌های AB و CD و نقطه‌های E و F وسط‌های دو قطر آن باشند. بنابر قضیه میان خط،

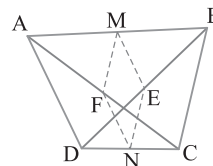
$$\triangle ABC: MF \parallel BC, MF = \frac{BC}{2}$$

$$\triangle BDC: EN \parallel BC, EN = \frac{BC}{2}$$

بنابراین $MF = EN = \frac{BC}{2}$ و $MF \parallel EN$ پس چهارضلعی $MENF$

متوازی‌الاضلاع است. به همین ترتیب از قضیه میان خط نتیجه می‌شود $ME = FN = \frac{AD}{2}$ و چون $BC = AD$ پس $MF = EN = ME = FN$.

پس متوازی‌الاضلاع $MENF$ لوزی است.



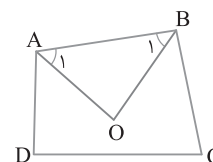
۱۹۰ مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° و مجموع زاویه‌های

داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است. بنابراین

$$\hat{AOB} = 180^\circ - (\hat{A}_1 + \hat{B}_1) \quad (1)$$

$$2\hat{A}_1 + 2\hat{B}_1 + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ - \frac{\hat{C} + \hat{D}}{2} \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\hat{AOB} = \frac{\hat{C} + \hat{D}}{2}$.



۱۹۱ از برخورد نیمسازهای دوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ که یک

زاویه آن 60° است چهارضلعی $MNEF$ به وجود می‌آید به طوری که

$MN = MF$ و $NE = EF$ به عبارتی چهارضلعی $MNEF$ یک کایت است، پس

$\hat{AEB} = 60^\circ$ در نتیجه $\hat{E}_1 = 30^\circ$ و $\hat{M}_1 = 60^\circ$ از طرف دیگر

اگر ارتفاع‌های AH و BH' را رسم کنیم، دو مثلث قائم الزاویه ADH و BCH' همنهشت خواهند شد. پس

$$2x + 6 = 10 \Rightarrow x = 2$$

۱۹۸ ۱ مثلث ABC قائم الزاویه است، زیرا
 $\hat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ$

در نتیجه

$$\hat{A} = 30^\circ \Rightarrow BC = \frac{AB}{2} \quad (1), \quad \hat{B} = 60^\circ \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \quad (2)$$

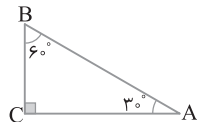
از طرف دیگر، $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \times AC \quad (3)$

مساحت مثلث ABC برابر $2\sqrt{3}$ است. بنابراین با جای گذاری BC و AC از تساوی‌های (۱) و (۲) در تساوی (۳) نتیجه می‌گیریم

$$2\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{AB}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} AB\right) \Rightarrow AB = 4$$

در دو مثلث متشابه، نسبت تشابه برابر نسبت طول ضلع‌های نظیرشان است. در اینجا AB بزرگ‌ترین ضلع مثلث ABC و ۸ طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث

A'B'C' است. بنابراین $\frac{A}{4} = \frac{8}{8}$ نسبت تشابه



۱۹۹ ۳ BH ارتفاع وارد بر ضلع AC است. در مثلث قائم الزاویه ABH ضلع BH روبه‌رو به زاویه 30° است. بنابراین

$$BH = \frac{AB}{2} \Rightarrow 4 = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = 8$$

در ضمن در مثلث قائم الزاویه ABH زاویه B_1 برابر 60° است. پس طول ضلع

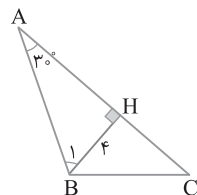
$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} (8) = 4\sqrt{3}$$

از طرف دیگر مساحت مثلث ABC برابر $12\sqrt{3}$ است. بنابراین

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \times AC \Rightarrow 12\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 4 \times AC \Rightarrow AC = 6\sqrt{3}$$

پس $CH = AC - AH = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ از قضیه فیثاغورس در مثلث BHC به دست می‌آید

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 = 4^2 + (2\sqrt{3})^2 = 16 + 12 = 28 \Rightarrow BC = 2\sqrt{7}$$

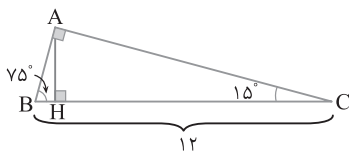


۲۰۰ ۱ در شکل زیر $\hat{A} = 90^\circ$ و $\hat{B} = 75^\circ$

چون $\hat{C} = 180^\circ - (75^\circ + 90^\circ) = 15^\circ$ پس در این مثلث قائم الزاویه، طول

ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ طول وتر است، یعنی $\frac{1}{4} \times 12 = 3$. اکنون

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \times AH = \frac{1}{2} \times 12 \times 3 = 18$$
 می‌توان نوشت



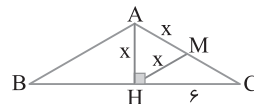
۱۹۴ ۴ در شکل زیر M وسط AC است. فرض می‌کنیم $AH = x$.

بنابراین، با توجه به فرض مسئله، $MH = x$. چون مثلث AHC قائم الزاویه و MH میانه وارد بر وتر است، پس طول آن نصف طول وتر است. در نتیجه $AM = MC = MH = x$ اکنون در مثلث قائم الزاویه AHC از قضیه فیثاغورس نتیجه می‌شود

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow 4x^2 = x^2 + 36$$

$$S = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times x \times 12 = 12\sqrt{3}$$

یعنی $x = 2\sqrt{3}$ در نتیجه



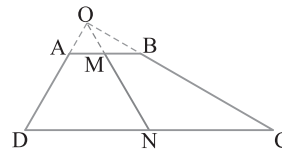
۱۹۵ ۲ ساق‌های دوزنقه ABCD را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در

نقطه O قطع کنند (شکل زیر را ببینید). چون $\hat{D} + \hat{C} = 90^\circ$ پس $\hat{O} = 90^\circ$.

بنابراین دو مثلث OAB و OCD قائم الزاویه هستند. اگر M و N به ترتیب وسط قاعده‌های AB و CD باشند، آنگاه OM و ON میانه‌های وارد بر وتر دو مثلث قائم الزاویه OAB و OCD هستند، پس اندازه هر کدام از آنها نصف طول وتر نظیر آنها است. بنابراین $OM = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$ و

$$MN = ON - OM = 6 - 2 = 4$$

$$ON = \frac{DC}{2} = \frac{12}{2} = 6$$
 در نتیجه



۱۹۶ ۲ میانه AM و ارتفاع AH وارد بر وتر را رسم

می‌کنیم. چون میانه AM نصف وتر است، پس

$AM = BM$. بنابراین $\hat{A}_1 = 22/5^\circ$ در نتیجه زاویه

خارجی M_1 در مثلث ABM برابر 45° است. بنابراین

$$\triangle AHM: \hat{M}_1 = 45^\circ \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{2}}{2} AM$$

$$\frac{AM = \frac{1}{2} BC}{2} \rightarrow AH = \frac{\sqrt{2}}{4} BC$$

۱۹۷ ۴ فرض می‌کنیم $AD = x$ ، در نتیجه $AC = 2x$ ، $AB = \sqrt{2}x$

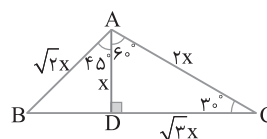
و $CD = \sqrt{3}x$. در مثلث قائم الزاویه ADC، چون $AD = \frac{1}{2} AC$

$$\hat{ACD} = 30^\circ, \quad \hat{CAD} = 60^\circ$$
 پس $CD = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$

از طرف دیگر، در مثلث قائم الزاویه ABD، چون $AD = \frac{\sqrt{2}}{2} AB$ پس این

مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است و $\hat{BAD} = 45^\circ$. اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{\hat{BAC}}{\hat{ACD}} = \frac{\hat{BAD} + \hat{CAD}}{\hat{ACD}} = \frac{45^\circ + 60^\circ}{30^\circ} = \frac{105^\circ}{30^\circ} = \frac{7}{2}$$



۲۰۵ ۴ در شکل زیر نقطه M وسط کمان AB است. از مرکز O به نقطه M وصل می‌کنیم. در این صورت OM بر وتر AB عمود است و OM نیمساز زاویه O است. پس $\hat{O}_1 = 45^\circ$. در نتیجه $\hat{A}_1 = 45^\circ$. بنابراین

$$OA = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = \frac{\sqrt{2}}{2} (2) = \sqrt{2} \Rightarrow \text{شعاع دایره} = \sqrt{2}$$

$$\triangle OAH: \hat{A}_1 = 45^\circ \Rightarrow OH = AH = \frac{\sqrt{2}}{2} OA = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1$$

$$MH = OM - OH = \sqrt{2} - 1$$

پس

$$\triangle AMH: AM^2 = AH^2 + MH^2 = 1^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 = 1 + 3 - 2\sqrt{2} = 4 - 2\sqrt{2} \Rightarrow AM = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$



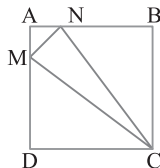
۲۰۶ ۲ طول ضلع مربع را a در نظر می‌گیریم. چون $\frac{AM}{AD} = \frac{AN}{AB} = \frac{1}{4}$

پس $AM = AN = \frac{1}{4}a$ و $DM = BN = \frac{3}{4}a$. اکنون می‌توان نوشت

$$S_{CMN} = S_{ABCD} - (S_{AMN} + S_{BNC} + S_{DMC})$$

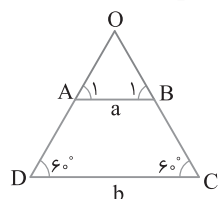
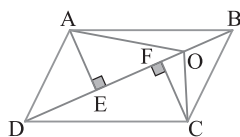
$$= a^2 - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} a^2 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} a^2 \right) = \frac{7}{32} a^2$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{CMN}} = \frac{a^2}{\frac{7}{32} a^2} = \frac{32}{7} \quad \text{بنابراین}$$



۲۰۷ ۲ در شکل زیر AE و CF به ترتیب ارتفاع‌های دو مثلث ADB و CBD هستند. چون دو مثلث ADB و CBD همنهشت هستند و در دو مثلث همنهشت ارتفاع‌های نظیر دو ضلع برابر، برابرند. پس $AE = CF$. در نتیجه در دو مثلث AOB و BOC که دارای قاعده مشترک OB هستند، ارتفاع‌های وارد بر این قاعده نیز برابرند. بنابراین $S_{AOB} = S_{BOC} = 4$. به‌طور مشابه می‌توان ثابت کرد $S_{COD} = S_{AOD} = 10$. در نتیجه

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOD} + S_{COD} = 4 + 4 + 10 + 10 = 28$$



۲۰۸ ۲ ساق‌های دوزنقه ABCD را

امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطه O قطع کنند. در این صورت بنابر قضیه خطوط موازی و مورب، $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 60^\circ$ پس هر دو مثلث OAB و

OCD متساوی‌الاضلاع هستند. بنابراین

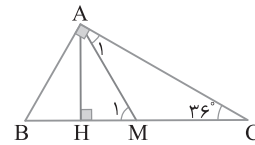
$$S_{ABCD} = S_{OCD} - S_{OAB} = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (b^2 - a^2)$$

۲۰۱ ۲ راه‌حل اول در شکل زیر AM میانه و AH ارتفاع وارد بر وتر است و می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است. پس

$$AM = MC \quad \text{یعنی} \quad AM = \frac{BC}{2}$$

$$\triangle AMC: \hat{M}_1 \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{A}_1 + \hat{C} = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$$

$$\triangle AHM: \hat{HAM} = 90^\circ - \hat{M}_1 = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$$

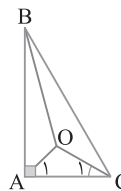


راه‌حل دوم در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، زاویه بین میانه و ارتفاع

وارد بر وتر برابر است با $|\hat{B} - \hat{C}|$. در اینجا فرض می‌کنیم $\hat{C} = 36^\circ$ پس

$$\hat{B} = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$$

$$\text{زاویه بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر} = |\hat{B} - \hat{C}| = |54^\circ - 36^\circ| = 18^\circ$$



۲۰۲ ۲ مثلث ABC قائم‌الزاویه است و

$$BC = \frac{2\sqrt{3}}{3} AB \quad \text{پس} \quad AB = \frac{\sqrt{3}}{2} BC \quad \text{بنابراین}$$

$\hat{C} = 60^\circ$. در ضمن نقطه O از سه ضلع مثلث ABC به یک فاصله است. پس نقطه تلاقی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC است. در نتیجه

$$\begin{cases} \hat{C}_1 = 30^\circ \\ \hat{A}_1 = 45^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{AOC} = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$$

۲۰۳ ۴ با توجه به فرض‌های مسئله شکل زیر رسم می‌شود. مثلث قائم‌الزاویه ABH متساوی‌الساقین است. پس $AH = BH = 3$.

$$S_{ABC} = \frac{9}{2} (1 + \sqrt{3}) \Rightarrow \frac{1}{2} \times BH \times AC = \frac{9}{2} (1 + \sqrt{3})$$

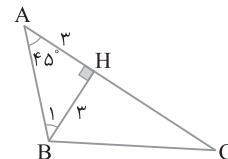
$$\frac{3}{2} AC = \frac{9}{2} (1 + \sqrt{3}) \Rightarrow AC = 3 + 3\sqrt{3} \Rightarrow 3 + HC = 3 + 3\sqrt{3}$$

$$HC = 3\sqrt{3}$$

بنابراین، طبق قضیه فیثاغورس،

$$\triangle BHC: BC^2 = BH^2 + CH^2 = (3)^2 + (3\sqrt{3})^2 = 36 \Rightarrow BC = 6$$

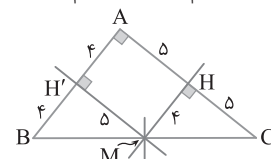
$$a = 6$$



۲۰۴ ۳ عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC در نقطه M روی ضلع

BC هم‌رساند (شکل زیر را ببینید). چون نقطه تلاقی عمودمنصف‌های ضلع‌های مثلث از سه رأس مثلث به یک فاصله است، پس $MA = MB = MC$. در نتیجه M وسط ضلع BC است و AM میانه و نصف BC است. پس مثلث ABC قائم‌الزاویه است. یعنی چهارضلعی AHMH' مستطیل است. بنابر فرض $MH = 4$ و $MH' = 5$. بنابراین $AB = 8$ و $AC = 10$. در نتیجه

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} \times 8 \times 10 = 40$$



۲۱۴) در مثلث متساوی‌الاضلاع مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث تا سه ضلع آن، برابر ارتفاع مثلث است. اگر x فاصله نقطه O تا ضلع AB و h طول ارتفاع مثلث ABC باشد، آن‌گاه

$$S_{ABC} = 3\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = 3\sqrt{3} \Rightarrow AB^2 = 12 \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{3}) = 3$$

$$\frac{3}{8} + \frac{15}{8} + x = 3 \Rightarrow x = 3 - \frac{18}{8} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

بنابراین

۲۱۵) ۴) بنابر فرض مسئله، چون $\frac{DN}{CN} = \frac{2}{5}$ و $\frac{AM}{MB} = \frac{4}{1}$ ، پس $DN = 2y$ و $CN = 5y$ وجود دارند به‌طوری‌که $AM = 4x$ ، $MB = x$ ، $AB = CD$ چون $AB = CD$ پس

$$\frac{S_{AMND}}{S_{BMNC}} = \frac{\frac{1}{2}h(4x+2y)}{\frac{1}{2}h(x+5y)} = \frac{2(4x+y)}{x+5y} \quad (1)$$

از طرف دیگر چون $AB = CD$ پس $5x = 4y$ در نتیجه $x = \frac{4}{5}y$ اکنون تساوی (۱) را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{S_{AMND}}{S_{BMNC}} = \frac{2(\frac{16}{5}y+y)}{\frac{4}{5}y+5y} = \frac{19}{16}$$

۲۱۶) ۱) می‌دانیم قطره‌های لوزی بر هم عمود و منصف یکدیگرند. با توجه به شکل زیر و بنابر فرض،

$$\frac{BD}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{OB}{OA} = \frac{3}{4}$$

بنابراین عددی مانند k وجود دارد به‌طوری‌که $OB = 3k$ و $OA = 4k$ در مثلث OAB بنابر قضیه فیثاغورس

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \Rightarrow 16k^2 + 9k^2 = 100$$

پس $k = 2$ در نتیجه $OB = 6$ و $OA = 8$ اکنون طول دو قطر به‌دست می‌آید $AC = 16$ و $BD = 12$ در نهایت می‌نویسیم

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 16 \times 12 = 96$$

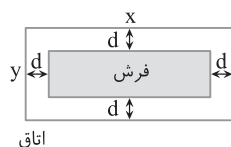
۲۱۷) ۲) طول و عرض اتاق را به ترتیب x و y و فاصله هر طرف فرش از کنار دیوار اتاق را d در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$26 = 2(x+y) \Rightarrow x+y = 13$$

بنابراین $x = 9$ و $y = 4$ پس طول و عرض فرش به ترتیب برابر $9-2d$ و $4-2d$ است، پس

$$18 = 2(9-2d+4-2d) = 18 \Rightarrow 13-4d = 9 \Rightarrow 4d = 4 \Rightarrow d = 1$$

پس طول و عرض فرش برابر ۷ و ۲ است. بنابراین مساحت فرش برابر $7 \times 2 = 14$ است.



۲۰۹) ۲) اگر مساحت مثلث S باشد، آن‌گاه $2S = ah_a = bh_b = ch_c$ پس $h_c = \frac{2S}{c}$ ، $h_b = \frac{2S}{b}$ ، $h_a = \frac{2S}{a}$ را بر حسب S در تساوی داده شده قرار می‌دهیم:

$$bh_a + ch_b + ah_c = 12 \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right)$$

$$b \left(\frac{2S}{a} \right) + c \left(\frac{2S}{b} \right) + a \left(\frac{2S}{c} \right) = 12 \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right)$$

$$2S \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right) = 12 \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right) \Rightarrow 2S = 12 \Rightarrow S = 6$$

۲۱۰) ۳) در هر مثلث، نسبت طول دو ضلع، برابر با عکس نسبت طول ارتفاع‌های نظیر آن‌هاست، یعنی $\frac{b}{a} = \frac{h_a}{h_b}$ از طرف دیگر، بنابر فرض مسئله،

یعنی $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$ از تساوی‌های به دست آمده نتیجه می‌گیریم $\frac{a}{b} = \frac{h_a}{h_b}$ بنابراین $a^2 = b^2$ و $a = b$ مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

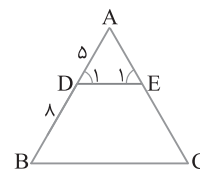
۲۱۱) ۴) در هر مثلث نسبت طول دو ضلع، برابر با عکس نسبت طول ارتفاع‌های نظیر آن‌هاست. پس $\frac{h_a}{h_c} = \frac{c}{a} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{5}$ و $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$ اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_a}{h_c} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$$

۲۱۲) ۴) در شکل زیر، از قضیه خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود $\hat{D}_1 = \hat{E}_1 = 60^\circ$ پس $\triangle ADE$ مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۵ است. بنابراین

$$S_{BCED} = S_{ABC} - S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4} (13)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} (5)^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} (169 - 25) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 144 = 36\sqrt{3}$$



۲۱۳) ۴) مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس $\hat{B} = \hat{C} = 75^\circ$ در نتیجه $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - (75^\circ + 75^\circ) = 30^\circ$ از طرف دیگر می‌دانیم مجموع فاصله‌های نقطه M روی قاعده مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق برابر ارتفاع وارد بر ساق است. بنابراین با توجه به شکل مقابل،

$$MH + MH' = BK \xrightarrow{MH + MH' = 3\sqrt{2}} BK = 3\sqrt{2}$$

در ضمن در مثلث قائم‌الزاویه ABK

$$\hat{A} = 30^\circ \Rightarrow BK = \frac{AB}{2} \Rightarrow 3\sqrt{2} = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = 6\sqrt{2} \Rightarrow AC = 6\sqrt{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BK \times AC = \frac{1}{2} (3\sqrt{2}) (6\sqrt{2}) = 18$$

پس

۲۲۱ ۴ چون $AD \parallel BC$ ، بنابر قضیه اساسی تشابه، دو مثلث OAD و

OCB متشابه هستند و نسبت تشابه آنها $\frac{AD}{BC} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ است. پس

$$\frac{S_{OAD}}{S_{OBC}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow S_{OBC} = 9S_{OAD}$$

از طرف دیگر $S_{OAB} = S_{OCD} = \sqrt{S_{OAD} \times S_{OBC}}$ پس

$$S_{OAB} = S_{OCD} = \sqrt{S_{OAD} \times 9S_{OAD}} = 3S_{OAD}$$

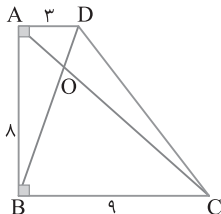
اکنون می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \text{مساحت دوزنقه} &= S_{OAD} + S_{OCD} + S_{OBC} + S_{OAB} \\ &= S_{OAD} + 3S_{OAD} + 9S_{OAD} + 3S_{OAD} = 16S_{OAD} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{همچنین} \quad \text{مساحت دوزنقه} = \frac{1}{2} \times 8 \times (3+9) = 48 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید $S_{OAD} = 3$. در نتیجه

$$S_{OAB} = 3S_{OAD} = 9$$

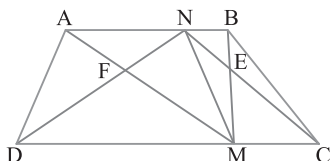


۲۲۲ ۳ در هر دوزنقه با رسم دو قطر دو مثلثی که بین ساق و دو قطر قرار می‌گیرند هم‌مساحت‌اند. پس در دوزنقه BNMC دو مثلث BEC و MNE هم‌مساحت‌اند و در دوزنقه ANMD دو مثلث ANM و MNF هم‌مساحت‌اند. بنابراین

$$S_{BEC} = S_{MNE} \Rightarrow S = 3S - 4 \Rightarrow S = 2 \Rightarrow S_{MNE} = 2$$

$$S_{MNF} = S_{ADF} \Rightarrow 5S' - 16 = S' \Rightarrow S' = 4 \Rightarrow S_{MNF} = 4$$

$$S_{MENF} = S_{MNE} + S_{MNF} = 2 + 4 = 6 \quad \text{در نتیجه}$$



۲۲۳ ۴ در دوزنقه ABCD تساوی زیر برقرار است:

$$S_{BEC} = S_{ADE} = \sqrt{S_{ABE} \times S_{DEC}} = 4 \quad (1)$$

از طرف دیگر،

$$AB \parallel DC \xrightarrow[\text{تشابه}]{\text{قضیه اساسی}} \triangle ABE \sim \triangle CDE$$

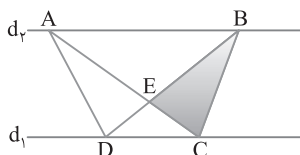
$$\frac{S_{ABE}}{S_{DEC}} = \left(\frac{BE}{DE}\right)^2 = 2^2 = 4 \quad (2)$$

در نتیجه بنابر تساوی (۱)،

$$\sqrt{S_{ABE} \times S_{DEC}} = 4 \xrightarrow{(2)} \sqrt{4S_{DEC} \times S_{DEC}} = 4 \Rightarrow S_{DEC} = 2$$

پس بنابر تساوی (۲)، $S_{ABE} = 8$. بنابراین

$$S_{ABCD} = S_{BEC} + S_{ADE} + S_{ABE} + S_{DEC} = 4 + 4 + 8 + 2 = 18$$



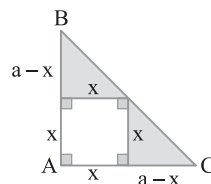
۲۱۸ ۱ شکل سؤال به صورت زیر است. اگر ضلع مربع را x و هر ضلع

زاویه قائمه در مثلث ABC را a در نظر بگیریم، آن‌گاه مساحت مثلث برابر $\frac{1}{2}a^2$ و مساحت مربع x^2 است. با توجه به شکل مجموع مساحت‌های دو

مثلث رنگی و مساحت مربع برابر مساحت مثلث بزرگ است. پس

$$x^2 + \frac{1}{2}x(a-x) + \frac{1}{2}x(a-x) = \frac{a^2}{2} \Rightarrow x^2 + ax - x^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow x = \frac{a}{2}$$

$$\text{بنابراین} \quad \frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{a^2}{2}} = \frac{a^2}{2x^2} = \frac{a^2}{2\left(\frac{a}{2}\right)^2} = 2$$



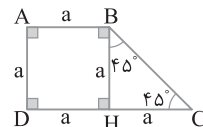
۲۱۹ ۲ در دوزنقه قائم‌الزاویه ABCD فرض می‌کنیم $AB = AD = a$.

با رسم ارتفاع BH دوزنقه به یک مربع به ضلع a و یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین با اضلاع قائمه a تقسیم می‌شود. پس

$$S_{ABCD} = 54 \Rightarrow \frac{1}{2}a(a+2a) = 54 \Rightarrow \frac{3a^2}{2} = 54 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

بنابراین بنابر قضیه فیثاغورس،

$$\triangle BHC: BC^2 = BH^2 + CH^2 = 6^2 + 6^2 = 2 \times 6^2 \Rightarrow BC = 6\sqrt{2}$$



۲۲۰ ۳ می‌دانیم پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق دوزنقه را به هم وصل

می‌کند مساوی نصف مجموع دو قاعده است، پس $MN = \frac{AB+DC}{2}$. در

ضمن MN موازی با دو قاعده است. اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، بنابر قضیه

تالس در مثلث ADH، $\frac{AH'}{H'H} = \frac{AM}{MD} = 1$ یعنی $AH' = HH'$. با انتخاب

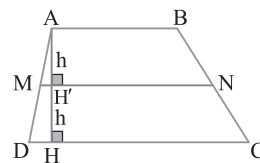
می‌نویسیم $AH' = h$

$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{\frac{1}{2}h(AB+MN)}{\frac{1}{2}h(DC+MN)} = \frac{2}{3}$$

$$3AB + 3MN = 2DC + 2MN$$

$$MN = 2DC - 3AB \Rightarrow \frac{AB+DC}{2} = 2DC - 3AB$$

$$AB + DC = 4DC - 6AB \Rightarrow 3DC = 7AB \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{3}{7}$$



۲۲۷۲ ابتدا N را به M و A وصل می‌کنیم. می‌دانیم در هر مثلث، هر میانه، مثلث را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند. در مثلث NPC پاره‌خط

$$S_{NPQ} = \frac{1}{2} S_{NPC} \quad (۱) \quad \text{پس PQ میانه است،}$$

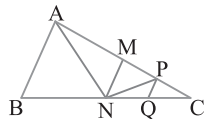
$$S_{NPC} = \frac{1}{2} S_{MNC} \quad (۲) \quad \text{و در مثلث MNC پاره‌خط NP میانه است، پس}$$

$$S_{MNC} = \frac{1}{2} S_{ANC} \quad (۳) \quad \text{و در مثلث ANC پاره‌خط MN میانه است، پس}$$

$$S_{ANC} = \frac{1}{2} S_{ABC} \quad (۴) \quad \text{و در مثلث ABC پاره‌خط AN میانه است، پس}$$

از تساوی‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} S_{NPQ} &= \frac{1}{2} S_{NPC} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} S_{MNC} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} S_{ANC} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} S_{ABC} \right) = \frac{1}{16} S_{ABC} \end{aligned}$$



۲۲۸۲ مثلثی که طول دو میانه آن با هم برابر هستند، متساوی‌الساقین است. در شکل زیر G محل برخورد میانه‌های مثلث است. پس

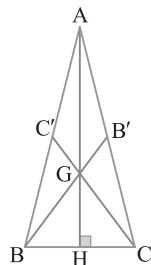
$$GH = \frac{1}{3} AH = \frac{1}{3} \times 16 = \frac{16}{3}, \quad CG = \frac{2}{3} CC' = \frac{2}{3} \times 10 = \frac{20}{3}$$

چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس ارتفاع AH هم هست. بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث CGH،

$$CH = \sqrt{CG^2 - GH^2} = \sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^2 - \left(\frac{16}{3}\right)^2} = 4$$

در نتیجه $BC = 2CH = 8$. اکنون می‌توان نوشت

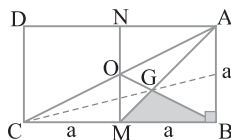
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \times AH = \frac{1}{2} \times 8 \times 16 = 64$$



۲۲۹۱ در شکل زیر MO میان‌خط مثلث ABC است، چون از وسط CB موازی AB رسم شده است. پس O وسط AC است، یعنی OB میانه وارد بر ضلع AC است. در نتیجه در مثلث ABC، نقطه G محل برخورد

میانه‌ها است. پس $S_{GBM} = \frac{1}{6} S_{ABC} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{2} \times a \times 2a \right) = \frac{a^2}{6}$. در نتیجه

$$S_{GBM} = \frac{1}{6} S_{ABMN}$$



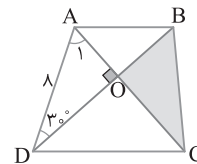
۲۲۴۴ در دوزنقه ABCD که در آن O نقطه برخورد قطرها است، دو مثلث AOD و BOC هم‌مساحت هستند. از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه طول ضلع روبه‌رو به زاویه 30° نصف اندازه وتر و طول ضلع روبه‌رو به زاویه

60° مساوی $\frac{\sqrt{3}}{2}$ اندازه وتر است. بنابراین

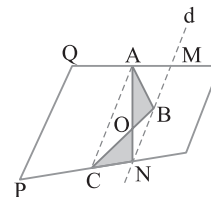
$$\triangle AOD : \hat{A}DO = 30^\circ \Rightarrow OA = \frac{AD}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\triangle AOD : \hat{A}_1 = 60^\circ \Rightarrow OD = \frac{\sqrt{3}}{2} AD = \frac{\sqrt{3}}{2} (4) = 2\sqrt{3}$$

$$S_{BOC} = S_{AOD} = \frac{1}{2} OA \times OD = \frac{1}{2} (2)(2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \quad \text{بنابراین}$$



۲۲۵۳ از نقطه B خط d را موازی AC رسم می‌کنیم. چون $d \parallel AC$ ، پس بنابر قضیه شبه پروانه در دوزنقه ABNC، دو مثلث AOB و ONC هم‌مساحت‌اند. توجه کنید که مثلث ONC در مزرعه I و مثلث AOB در مزرعه II قرار دارد. اکنون اگر مرز جدید را پاره‌خط AN در نظر بگیریم، مثلث AOB در مزرعه I و مثلث ONC در مزرعه II قرار می‌گیرد و به این ترتیب مرز جدید خطی راست می‌شود و مساحت مزرعه‌ها تغییر نمی‌کند. به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت MC نیز می‌تواند مرز مورد نظر باشد.



۲۲۶۳ از قضیه اساسی تشابه نتیجه می‌شود

$$AB \parallel DC \Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OCD$$

پس نسبت مساحت‌های این دو مثلث متشابه مساوی توان دوم نسبت ضلع‌های نظیر آنها است:

$$\frac{S_{OAB}}{S_{OCD}} = \left(\frac{AB}{DC} \right)^2 = \left(\frac{a}{2a} \right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{OCD} = 4 S_{OAB} \quad (۱)$$

از طرف دیگر در دوزنقه ABCD دو مثلث OAD و OBC هم‌مساحت هستند و مساحت آن‌ها واسطه هندسی مساحت‌های دو مثلث OAB و OCD است. بنابراین

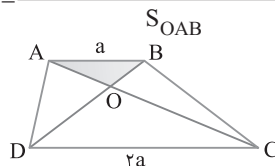
$$S_{OBC} = S_{OAD} = \sqrt{S_{OAB} \times S_{OCD}} \quad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$S_{OBC} = S_{OAD} = \sqrt{S_{OAB} \times 4 S_{OAB}} = 2 S_{OAB}$$

اکنون می‌توانیم نسبت خواسته شده را به دست آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{S_{ABCD}}{S_{OAB}} &= \frac{S_{OAB} + S_{OCD} + S_{OAD} + S_{OBC}}{S_{OAB}} \\ &= \frac{S_{OAB} + 4 S_{OAB} + 2 S_{OAB} + 2 S_{OAB}}{S_{OAB}} = 9 \end{aligned}$$



در ضمن دو مثلث ABQ و ABC در ارتفاع نظیر رأس B مشترک هستند. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایی است که این ارتفاع بر آن‌ها وارد شده است:

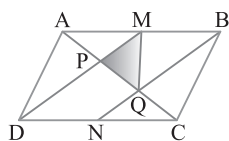
$$\frac{S_{ABQ}}{S_{ABC}} = \frac{AQ}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{ABQ} = \frac{2}{3} S_{ABC}$$

$$\frac{S_{ABC} = \frac{1}{3} S_{ABCD}}{S_{ABQ} = \frac{2}{3} S_{ABC}} \rightarrow S_{ABQ} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \quad (۳)$$

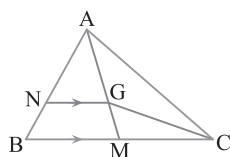
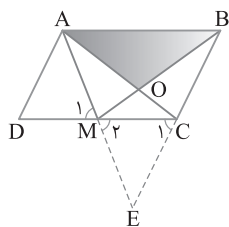
از تساوی‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم

$$S_{MPQ} = \frac{1}{3} S_{AMQ} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} S_{AQB} \right) = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{3} S_{ABCD} \right)$$

$$= \frac{1}{27} S_{ABCD} \xrightarrow{S_{MPQ} = 3} S_{ABCD} = 36$$



پاره‌خط‌های AM و BC را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در E قطع کنند. چون دو مثلث AMD و EMC همنهشت هستند ($\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ، $\hat{D} = \hat{C}$ ، $DM = MC$)، پس $AM = ME$ و $AD = CE$. در نتیجه $BC = CE$. بنابراین M وسط AE و C وسط BE است. پس O مرکز ثقل (محل برخورد میانه‌ها) در مثلث ABE است. پس مساحت مثلث OAB مساوی $\frac{1}{3}$ مساحت مثلث ABE است. از طرف دیگر چون دو مثلث ADM و ECM همنهشت هستند، پس هم‌مساحت‌اند. در نتیجه مساحت متوازی‌الاضلاع با مساحت مثلث ABE برابر است. بنابراین مساحت مثلث AOB مساوی $\frac{1}{3}$ مساحت متوازی‌الاضلاع است.



نقطه G نقطه هم‌رسی میانه‌های مثلث ABC است، پس مساحت مثلث MGC مساوی $\frac{1}{6}$ مساحت مثلث ABC است. از طرف دیگر،

$$NG \parallel BM \xrightarrow[\text{تشابه}]{\text{قضیه اساسی}} \triangle ANG \sim \triangle ABM$$

$$\frac{S_{ANG}}{S_{ABM}} = \left(\frac{AG}{AM} \right)^2 = \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{9}$$

چون AM میانه است، پس $S_{ABM} = S_{AMC}$ ، پس $S_{ABM} = \frac{1}{2} S_{ABC}$

$$\frac{S_{ANG}}{S_{ABM}} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_{ANG}}{\frac{1}{2} S_{ABC}} = \frac{4}{9} \Rightarrow S_{ANG} = \frac{2}{9} S_{ABC}$$

بنابراین

$$\frac{S_{ANG}}{S_{MGC}} = \frac{\frac{2}{9} S_{ABC}}{\frac{1}{6} S_{ABC}} = \frac{4}{3}$$

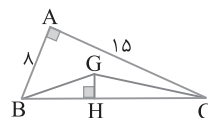
در نتیجه

در شکل زیر G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC است. در این صورت $S_{GBC} = \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 8 \times 15 \right) = 20$. از طرف دیگر بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ABC ،

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$$

چون $S_{GBC} = 20$ پس

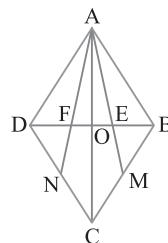
$$\frac{1}{2} BC \times GH = 20 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 17 \times GH = 20 \Rightarrow GH = \frac{40}{17}$$



می‌دانیم در هر مثلث فاصله مرکز ثقل (نقطه برخورد میانه‌ها) تا وسط هر ضلع $\frac{1}{3}$ اندازه میانه نظیر این ضلع و فاصله‌اش تا هر رأس $\frac{2}{3}$ اندازه میانه نظیر آن رأس است (شکل زیر را ببینید). در مثلث ADC ، نقطه F مرکز ثقل است، پس

$$OF = \frac{1}{3} OD \xrightarrow{OD = \frac{DB}{2} = 3} OF = \frac{1}{3} \times 3 = 1$$

به همین ترتیب $OE = 1$ ، بنابراین $EF = OF + OE = 2$.

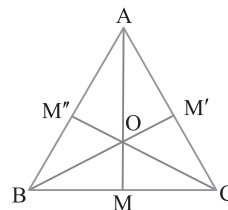


با رسم میانه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع این مثلث به شش مثلث همنهشت تقسیم می‌شود. چون در مثلث متساوی‌الاضلاع میانه، ارتفاع هم هست، پس با توجه به شکل زیر $AM = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$. از طرف دیگر نقطه تلاقی میانه‌ها هر میانه را با نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند، پس با توجه به شکل زیر

$$OA = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} BC \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} BC$$

بنابراین

$$\frac{OA}{BC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} BC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



ثابت می‌شود در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ پاره‌خط‌های DM و BN قطر AC را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند، یعنی $AP = PQ = QC$. همچنین میانه هر مثلث آن مثلث را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند، بنابراین

$$\triangle AMQ: \text{میانه } MP \Rightarrow S_{MPQ} = \frac{1}{2} S_{AMQ} \quad (۱)$$

$$\triangle AQB: \text{میانه } MQ \Rightarrow S_{AMQ} = \frac{1}{2} S_{AQB} \quad (۲)$$

از طرف دیگر شکل داده شده در این سؤال با شکلی که در صفحه مختصات معمولی رسم شده با نسبت $\sqrt{2}$ متشابه است. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها $\frac{S_{ABCDEFGH}}{S_A} = 2 \Rightarrow S_{ABCDEFGH} = 16$ است. بنابراین $(\sqrt{2})^2 = 2$

۲۴۱ (۲) اگر b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی چندضلعی شبکه‌ای باشد، آن‌گاه بنا بر فرض $b \times i = 48$. پس حالت‌های مختلفی که حاصل ضرب b و i برابر ۴۸ می‌شود و مساحت چندضلعی شبکه‌ای به کمک رابطه پیک به صورت زیر است:

$b \geq 3$	۳	۴	۶	۸	۱۲	۱۶	۲۴	۴۸
$i \geq 0$	۱۶	۱۲	۸	۶	۴	۳	۲	۱
S	$\frac{33}{2}$	۱۳	۱۰	۹	۹	۱۰	۱۳	۲۴

بنابراین کمترین مساحت ممکن برای این چندضلعی شبکه‌ای برابر ۹ است.

۲۴۲ (۳) فرض می‌کنیم b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی یک چندضلعی شبکه‌ای باشد، پس $S = \frac{b}{2} + i - 1$. اکنون اگر تعداد نقاط مرزی و درونی را چهار برابر

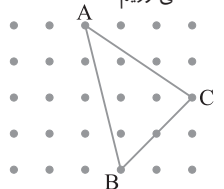
کنیم، یعنی b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی چندضلعی شبکه‌ای جدید باشد، آن‌گاه مساحت آن برابر می‌شود با $S' = \frac{4b}{2} + 4i - 1 = 2b + 4i - 1$

$$S' - S = (2b + 4i - 1) - \left(\frac{b}{2} + i - 1\right) = \frac{3}{2}b + 3i$$

$$S' - S = 3\left(\frac{b}{2} + i\right) \xrightarrow{\frac{b}{2} + i = S+1} S' - S = 3(S+1) \Rightarrow S' = 4S + 3$$

پس S' از چهار برابر S سه تا بیشتر است.

۲۴۳ (۳) بزرگ‌ترین ارتفاع بر کوچک‌ترین ضلع مثلث وارد می‌شود. طول ضلع‌های مثلث را به کمک قضیه فیثاغورس به دست می‌آوریم



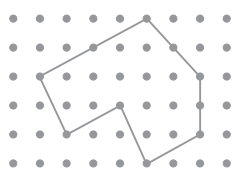
$$AB = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$AC = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

BC کوچک‌ترین ضلع مثلث است. اکنون به کمک قضیه پیک مساحت مثلث را به دست می‌آوریم: $S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{4}{2} + 4 - 1 = 5$. اگر h طول ارتفاع وارد بر

ضلع BC باشد، آن‌گاه $S = \frac{1}{2} h \times BC \Rightarrow 5 = \frac{1}{2} h \times 2\sqrt{2} \Rightarrow h = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

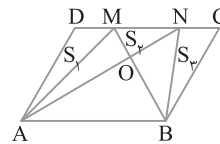


۲۴۴ (۳) اگر این شکل روی صفحه مختصات معمولی که فاصله نقطه‌های همسایه در آن برابر با یک واحد است، رسم می‌شود، می‌توانستیم با استفاده از قضیه پیک مساحتش را پیدا کنیم. توجه کنید که در آن شکل $b = 10$ و $i = 13$. بنابراین مساحت شکل مورد نظر برابر می‌شود با

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{10}{2} + 13 - 1 = 17$$

اکنون توجه کنید که شکل داده شده در صورت مسئله با شکلی که در صفحه مختصات معمولی رسم شده، متشابه هستند. بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با مربع نسبت تشابه آن‌ها. نسبت تشابه آن‌ها برابر است با نسبت فاصله هر دو نقطه افقی یا عمودی متوالی در آن‌ها. بنابراین اگر X مساحت چندضلعی شبکه‌ای

مورد نظر باشد، نتیجه می‌شود $\frac{X}{17} = \left(\frac{2}{1}\right)^2$. در نتیجه $X = 68$.



۲۳۶ (۳) در دوزنقه $ABNM$ دو مثلث AMO و BNO هم‌مساحت‌اند. فرض کنید مساحت آن‌ها برابر S باشد و مساحت مثلث AOB را برابر S' در نظر بگیرید. بنابراین

$$S_{AMO} \times S_{BNO} = S_{MNO} \times S_{AOB} \Rightarrow S^2 = S_p S' \quad (1)$$

از طرف دیگر

$$S_{ABCD} = 30 \Rightarrow S_1 + S_p + S_r + 2S + S' = 30 \Rightarrow 2S + S' = 21 \quad (2)$$

همچنین مثلث AMB و متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هم‌ارتفاع و هم‌قاعده هستند بنابراین

$$\frac{S_{AMB}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{AMB} = \frac{S_{ABCD}}{2} \Rightarrow S + S' = \frac{30}{2} \Rightarrow S + S' = 15 \quad (3)$$

$$\begin{cases} 2S + S' = 21 \\ S + S' = 15 \end{cases} \Rightarrow S = 6, S' = 9$$

در نتیجه

$$(1) \Rightarrow S^2 = S_p S' \Rightarrow 6^2 = 9 S_p \Rightarrow S_p = 4$$

۲۳۷ (۴) اگر b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی این چندضلعی شبکه‌ای

باشد، آن‌گاه بنا بر فرمول پیک، $S = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow \frac{b}{2} + i - 1 = 14 - 2i \Rightarrow b = 14 - 2i$

با توجه به اینکه بیشترین تعداد نقاط مرزی یعنی b زمانی اتفاق می‌افتد که کمترین تعداد نقاط درونی یعنی i را داشته باشیم و کمترین مقدار i برابر صفر است، پس بیشترین مقدار b مساوی ۱۴ است.

۲۳۸ (۳) مساحت چندضلعی شبکه‌ای از رابطه $S = \frac{b}{2} + i - 1$ به دست می‌آید:

$$9/5 = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow \frac{b}{2} + i = 14/5 \Rightarrow b + 2i = 28/5 \quad (1)$$

در چندضلعی شبکه‌ای b ، تعداد نقاط مرزی آن، به مجموعه $\{3, 4, 5, \dots\}$ متعلق است و i ، تعداد نقاط درونی آن، عضو مجموعه $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ است. پس با توجه به تساوی (۱) نتیجه می‌گیریم b باید عددی فرد باشد تا i عددی صحیح شود:

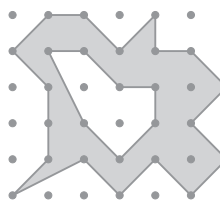
$$b = 3 \Rightarrow i = 9, \quad b = 11 \Rightarrow i = 5, \quad b = 19 \Rightarrow i = 1$$

$$b = 5 \Rightarrow i = 8, \quad b = 13 \Rightarrow i = 4, \quad b = 21 \Rightarrow i = 0$$

$$b = 7 \Rightarrow i = 7, \quad b = 15 \Rightarrow i = 3, \quad b = 23 \Rightarrow i = -1 \quad (\text{غ. ق. ق.})$$

$$b = 9 \Rightarrow i = 6, \quad b = 17 \Rightarrow i = 2,$$

بنابراین i می‌تواند ۱۰ مقدار متفاوت داشته باشد تا شرایط این سؤال برقرار باشد.



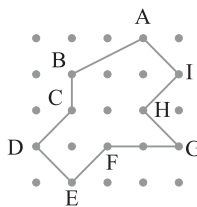
$$S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{18}{2} + 11 - 1 = 19, \quad S' = \frac{b'}{2} + i' - 1 = \frac{7}{2} + 2 - 1 = \frac{9}{2}$$

در نتیجه $S - S' = 19 - \frac{9}{2} = \frac{29}{2}$ مساحت خواسته شده.

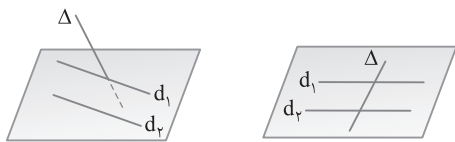
۲۴۰ (۴) اگر این شکل روی صفحه

مختصات معمولی که فاصله بین هر دو نقطه متوالی به صورت افقی و عمودی یک واحد است، رسم می‌شود، آن‌گاه می‌توانستیم با استفاده از قضیه پیک مساحت آن را پیدا کنیم. توجه کنید که در آن شکل $b = 10$ و $i = 4$.

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{10}{2} + 4 - 1 = 8$$



۲۵۳ ۲ خطهای Δ و d_p متقاطع یا متناظر هستند.



d_p و Δ متناظرند.

d_p و Δ متقاطع اند.

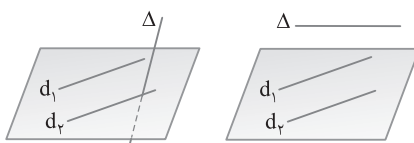
توجه کنید که خطهای Δ و d_p نمی‌توانند موازی باشند چون در این صورت

Δ و d_1 هم موازی می‌شوند و این با فرض مسئله در تناقض است.

۲۵۴ ۱ خطهای Δ و d_p نمی‌توانند موازی باشند، چون در این صورت

Δ و d_1 هم موازی می‌شوند و این با فرض مسئله در تناقض است. اما Δ با

d_p می‌تواند متناظر یا متقاطع باشد.

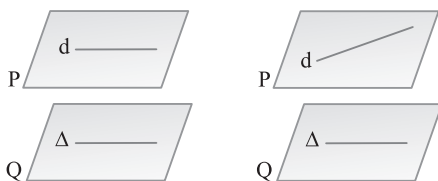


d_p و Δ متقاطع اند.

d_p و Δ متناظر هستند.

۲۵۵ ۴ دو خط d و Δ هیچ نقطه مشترکی ندارند، پس یا موازی اند یا

متناظر. به عبارت دیگر متقاطع نیستند.



d و Δ موازی اند.

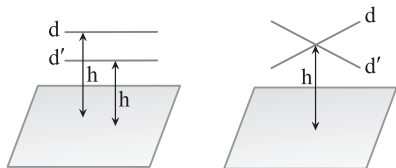
d و Δ متناظرند.

۲۵۶ ۴ d' نمی‌تواند بر P عمود باشد، چون اگر d' بر P عمود باشد،

d و d' با هم موازی هستند.

۲۵۷ ۳ دو خط d و d' که هر دو از صفحه P به فاصله h هستند

می‌توانند یا موازی یا متقاطع باشند (به شکل‌های زیر دقت کنید)



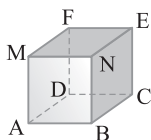
۲۵۸ ۴ در مکعب شکل زیر دو وجه متقاطع BCEN و MNEF را در

نظر بگیرید. یال‌های دوبه‌دو متناظر در این دو وجه عبارت‌اند از:

$\{MF, NB\}, \{MF, EC\}, \{FE, NB\},$

$\{FE, BC\}, \{MN, EC\}, \{MN, BC\}$

پس ۶ جفت یال دوبه‌دو متناظر وجود دارد.



۲۵۹ ۴ در صورتی که سه نقطه متمایز روی یک خط باشند، از آن‌ها

نامتناهی صفحه می‌گذرد. پس گزینه (۴) لزوماً درست نیست. سایر گزینه‌ها

درست هستند.

۲۴۵ ۳ تعداد خط‌هایی که این n نقطه مشخص می‌کنند برابر تعداد

راه‌های انتخاب ۲ نقطه از این n نقطه است:

$$\binom{n}{2} = 55 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 55 \Rightarrow n = 11$$

تعداد صفحه‌هایی که ۱۱ نقطه با شرایط بالا مشخص می‌کنند، حداکثر برابر

$$\binom{11}{3} = 165 \text{ است.}$$



۲۴۶ ۳ خط d با صفحه P در دو نقطه

مشترک است، پس خط d بر صفحه P واقع است.

۲۴۷ ۲ دو خط AB و CD نه موازی اند و نه متقاطع، پس متناظرند. به

همین ترتیب، دو خط AC و BD و دو خط AD و BC متناظرند. بنابراین سه

جفت خط متناظر داریم.

۲۴۸ ۳ از نقطه O و خط d صفحه P را می‌گذرانیم. اگر خط d' صفحه

P را در نقطه A قطع کند، آن‌گاه وضعیت خط AO و d نسبت به هم تعیین

کننده جواب است. اگر OA و d موازی باشند،

مسئله جواب ندارد و اگر OA خط d را قطع کند،

خط OA جواب مسئله است. در ضمن، اگر خط

d' صفحه P را قطع نکند، باز هم مسئله جواب

ندارد. بنابراین مسئله حداکثر یک جواب دارد.

۲۴۹ ۲ از نقطه A خط‌های Ax و Ay را

به ترتیب به موازات دو خط d و Δ رسم

می‌کنیم. از دو خط متقاطع Ax و Ay تنها یک

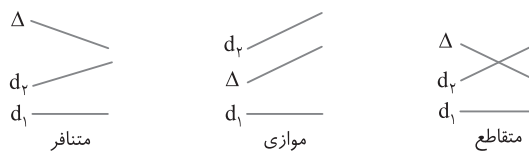
صفحه می‌گذرد به طوری که دو خط متناظر d و

Δ موازی این صفحه هستند.

۲۵۰ ۴ اگر دو خط d و d' موازی یا متقاطع باشند، از آن‌ها تنها یک

صفحه می‌گذرد و اگر این دو خط متناظر باشند، از آن‌ها صفحه‌ای نمی‌گذرد.

۲۵۱ ۴ خطهای Δ و d_p هریک از سه حالت را می‌توانند داشته باشند.



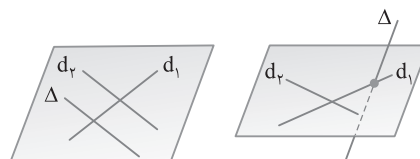
متناظر

موازی

متقاطع

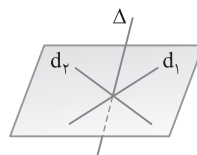
بنابراین وضع Δ و d_p نامشخص است.

۲۵۲ ۴ خطهای Δ و d_p می‌توانند موازی، متقاطع یا متناظر باشند.

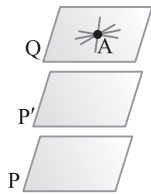


d_p و Δ موازی اند.

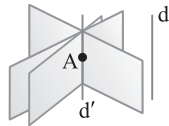
d_p و Δ متناظرند.



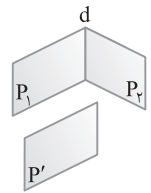
d_p و Δ متقاطع اند.



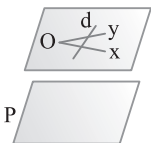
۲۶۷ (۲) از نقطه A، صفحه Q را موازی دو صفحه P و P' در نظر می‌گیریم (شکل مقابل را ببینید). تمام خط‌هایی که از A می‌گذرند و درون صفحه Q قرار دارند با دو صفحه P و P' موازی هستند. پس نامتناهی خط از A می‌گذرند و با P و P' موازی هستند.



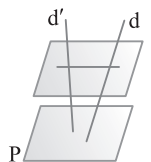
۲۶۸ (۴) از نقطه A یک و تنها یک خط موازی خط d می‌توان رسم کرد (خط d' در شکل مقابل). از خط d' نامتناهی صفحه می‌گذرد. خط d با تمام این صفحه‌ها موازی است. چون d با یک خط از این صفحه‌ها (خط d') موازی است.



۲۶۹ (۲) صفحه P' که با صفحه P موازی است، حتماً صفحه P' را قطع می‌کند، زیرا اگر P' با P موازی باشد، آن‌گاه باید P' با P موازی باشد که خلاف فرض متقاطع بودن آن‌ها است. همچنین، P' نمی‌تواند بر P منطبق باشد چون اگر باشد، آن‌گاه P و P' هم موازی خواهند بود و هم متقاطع.



۲۷۰ (۱) اگر دو خط Ox و Oy موازی صفحه P باشند، آن‌گاه صفحه گذرا از دو خط متقاطع Ox و Oy با صفحه P موازی است. خط d که این دو خط متقاطع را قطع می‌کند در این صفحه قرار می‌گیرد، پس خط d نیز موازی صفحه P است.

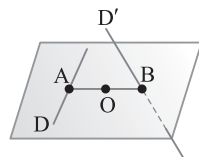


۲۷۱ (۴) تمام صفحه‌هایی که با صفحه P موازی باشند، دو خط d و d' را در دو نقطه قطع می‌کنند. خطی که از این دو نقطه عبور می‌کند، خط مورد نظر است. بنابراین نامتناهی خط با این شرایط وجود دارد.

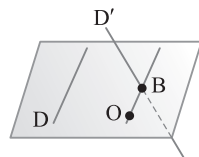
۲۷۲ (۳) می‌دانیم خط و صفحه عمود بر یک صفحه یا با هم موازی اند یا خط درون صفحه قرار دارد، پس $d \parallel P'$ می‌تواند درست باشد.

۲۷۳ (۳) محل برخورد D' با صفحه را B می‌نامیم. در این صورت دو حالت وجود دارد:

(۱) امتداد OB خط D را در A قطع می‌کند. در این حالت یک جواب داریم.



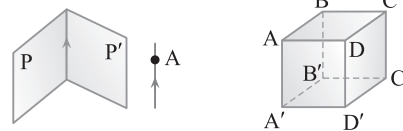
(۲) امتداد OB در صفحه، با خط D موازی است و در این حالت جواب نداریم. پس حداکثر یک جواب داریم.



۲۷۴ (۴) شکل‌های گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) به ترتیب نمای روبه‌رو، نمای بالا و نمای چپ شکل داده شده هستند. ولی شکل گزینه (۴) نمایی از این شکل را مشخص نمی‌کند.

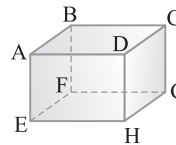
۲۶۰ (۴) دو خط عمود بر یک خط در فضا می‌توانند متقاطع یا متناظر هم باشند، پس گزینه (۱) نادرست است. دو صفحه عمود بر یک صفحه می‌توانند متقاطع باشند، پس گزینه (۲) نادرست است. از هر نقطه غیر واقع بر یک صفحه فقط یک خط می‌توان بر آن صفحه عمود کرد، پس گزینه (۳) هم نادرست است. ولی از هر نقطه غیر واقع بر یک صفحه بی‌شمار خط موازی با آن صفحه می‌توان رسم کرد.

۲۶۱ (۲) خطی که از نقطه A به موازات فصل مشترک دو صفحه P و P' رسم می‌شود تنها خطی است که با این دو صفحه موازی است و از A می‌گذرد. در ضمن گزینه (۱) نادرست است. به عنوان مثال نقض در مکعب زیر دو صفحه ABCD و DCC'D' متقاطع‌اند و صفحه A'B'C'D' صفحه DCC'D' را قطع کرده ولی با صفحه ABCD موازی است. گزینه (۳) نادرست است. به عنوان مثال نقض در مکعب زیر دو صفحه ABCD و DCC'D' متقاطع‌اند. صفحه BCC'B' بر ABCD عمود است ولی با DCC'D' موازی نیست.

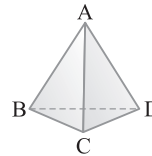


گزینه (۴) نادرست است. چون هر صفحه‌ای بر فصل مشترک صفحات P و P' عمود باشد بر هر دو صفحه P و P' عمود است. پس بی‌شمار صفحه عمود بر صفحات P و P' رسم می‌شود.

۲۶۲ (۲) در مکعب مستطیل شکل زیر خط AB با خط‌های CD و GH و EF موازی است (۳ خط). خط AB با خط‌های AD، AE، BC و BF متقاطع است (۴ خط). خط AB با خط‌های EH، FG و CG و DH متناظر است (۴ خط).



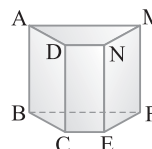
۲۶۳ (۲) خط AB با خط‌های AD، AC، BD و BC متقاطع است و فقط با خط CD متناظر است.



۲۶۴ (۳) از دو خط متناظر هیچ صفحه‌ای عبور نمی‌کند و نقطه مشترکی ندارند. به همین علت گزینه (۱) نادرست است. در ضمن دو خط موازی هم نقطه اشتراکی ندارند و می‌توانند در دو صفحه متمایز باشند. پس گزینه‌های (۲) و (۴) نیز نادرست است.

۲۶۵ (۱) چنین خطی وجود ندارد. این مطلب را ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم خطی وجود داشته باشد که از A می‌گذرد و دو خط D و D' را به ترتیب در M و N قطع می‌کند. چون دو نقطه از این خط در صفحه شامل D و D' است، پس این خط هم در صفحه شامل D و D' است. در نتیجه نقطه A هم در این صفحه قرار دارد و این خلاف فرض است.

۲۶۶ (۴) دو خط EF و BC در صفحه BCEF قرار دارند و موازی نیستند، پس متقاطع‌اند. بنابراین گزینه (۴) درست است. نادرستی سایر گزینه‌ها را بررسی کنید.



۲۸۶ ۱ اگر از مکعب داده شده دو ردیف از نمای روبه‌رو را حذف کنیم، یعنی $2 \times 3 \times 3 = 18$ مکعب کوچک، به شکل زیر می‌رسیم و با حذف مکعب‌هایی که با علامت $\times$ مشخص شده‌اند نمای مقابل جسم حاصل همان نمای خواسته شده می‌شود. بنابراین حداکثر باید $18 + 5 = 23$ مکعب از این شکل حذف کنیم.



۲۸۷ ۲ از وجه بالای مکعب مستطیل داده شده چهار مکعب حذف می‌کنیم و این حذف کردن را تا پایین ادامه می‌دهیم تا نمای بالای شکل باقیمانده به صورت آنچه مسئله می‌خواهد درآید. پس حداقل مکعب‌های حذف شده برابر است با $n = 4 \times 4 = 16$. اکنون اگر ردیف بالا یعنی ردیف چهارم و بعد ردیف سوم و ردیف دوم را از این شکل حذف کنیم و فقط ردیف اول باقی بماند و از این ردیف چهار مکعب کوچک برداریم، آن‌گاه نمای بالای شکل باقیمانده به صورت آنچه مسئله می‌خواهد درمی‌آید. پس حداکثر مکعب‌های حذف شده برابر $m = 3 \times 12 + 4 = 40$ است. بنابراین

$$\frac{m}{2} - n = 20 - 16 = 4$$

۲۸۸ ۳ تعداد مکعب‌های $1 \times 1 \times 1$ در مکعب اصلی a^3 است. مکعب‌هایی که رنگ نشده‌اند، مکعب‌هایی هستند که درون مکعب بزرگ قرار دارند و با هم مکعبی تشکیل می‌دهند که اندازه هر یال آن ۲ تا کمتر از اندازه یال مکعب بزرگ‌تر است. در نتیجه تعداد آن‌ها برابر $(a-2)^3$ است. بنابراین برای به دست آوردن تعداد مکعب‌های $1 \times 1 \times 1$ رنگ شده باید تعداد کل مکعب‌های $1 \times 1 \times 1$ را منهای تعداد مکعب‌های $1 \times 1 \times 1$ رنگ نشده کنیم. پس

$$98 = a^3 - (a-2)^3 \Rightarrow 98 = a^3 - a^3 + 6a^2 - 12a + 8$$

$$6a^2 - 12a - 90 = 0 \Rightarrow a^2 - 2a - 15 = 0 \Rightarrow (a-5)(a+3) = 0 \Rightarrow a = 5$$

از طرفی تعداد مکعب‌های $1 \times 1 \times 1$ که فقط دو وجه رنگی دارند روی یال‌های مکعب بزرگ هستند، به جز دو مکعب $1 \times 1 \times 1$ گوشه‌های یال‌ها. پس بر روی هر یال $5 - 2 = 3$ مکعب کوچک با این ویژگی قرار دارند و چون مکعب دارای ۱۲ یال است، پس تعداد مکعب‌های $1 \times 1 \times 1$ با دو وجه رنگ شده برابر است با $12 \times 3 = 36$.

۲۸۹ ۱ مطابق شکل زیر صفحه افقی این استوانه را که یک مخروط از آن جدا شده است در دو دایره هم‌مرکز به شعاع‌های $O'B$ و AH قطع می‌کند که مساحت بین این دو دایره مساحت مقطع حاصل است. توجه کنید که

$$O'B = 4 \quad \text{از طرف دیگر،}$$

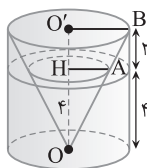
$$\triangle OO'B : AH \parallel O'B \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}}$$

$$\frac{AH}{O'B} = \frac{OH}{OO'} \Rightarrow \frac{AH}{4} = \frac{4}{6} \Rightarrow AH = \frac{8}{3}$$

بنابراین

$$\text{مساحت مقطع} = \pi(O'B)^2 - \pi(AH)^2 = \pi(4)^2 - \pi\left(\frac{8}{3}\right)^2 = 16\pi - \frac{64}{9}\pi$$

$$= \frac{80}{9}\pi$$



۲۷۵ ۳ مکعب‌هایی که دو وجه رنگ شده دارند، فقط روی یال‌های این مکعب مستطیل قرار دارند. روی هشت یال آن هر یال دو مکعب و روی چهار یال آن هر یال سه مکعب کوچک دارای دو وجه رنگ شده وجود دارد. پس $8 \times 2 + 4 \times 3 = 28$ مکعب با دو وجه رنگ شده وجود دارد یعنی $a = 28$. از طرف دیگر فقط مکعب‌های کوچک موجود در کنج‌های این مکعب مستطیل دارای سه وجه رنگ شده هستند. پس $b = 8$. در ضمن اگر از هر طرف یک لایه برداریم، آن‌گاه به تعداد $(4-2)(5-2)(4-2) = 12$ مکعب باقی می‌ماند که وجه رنگ شده ندارند. پس $c = 12$. بنابراین

$$2a - 3b + c = 2 \times 28 - 3 \times 8 + 12 = 44$$



۲۷۶ ۲ نمای روبه‌رو و چپ شکل داده شده به صورت



است. ولی نمای بالای آن به صورت

$$2 \quad 277$$

$$2 \quad 278$$

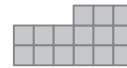
$$3 \quad 279$$

$$3 \quad 280$$

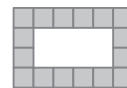
$$2 \quad 281$$

$$2 \quad 282$$

۲۸۳ ۲ نمای روبه‌روی شکل داده شده به صورت زیر است که در آن ۱۵ مربع وجود دارد.

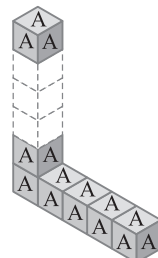


نمای بالای شکل به صورت زیر است که در آن ۱۶ مربع وجود دارد.



پس نسبت خواسته شده $\frac{15}{16}$ است.

۲۸۴ ۱ در ردیف افقی ۵ مکعب وجود دارد. روی اولین مکعب در سمت راست ۵ حرف A، روی سه تای بعدی هر کدام ۴ حرف A و روی مکعب آخر ۴ حرف A دیده می‌شود. پس در ردیف افقی در مجموع $5 + 4 \times 4 = 21$ حرف A دیده می‌شود. در مکعب‌هایی که به صورت عمودی چیده شده‌اند، اولین مکعب پایینی را قبلاً شمرده‌ایم. از میان ۵ تای دیگر چهار مکعب به شکل عمودی روی هم قرار دارند که روی وجه‌های آن‌ها ۴ حرف A دیده می‌شود و روی مکعب آخر ۵ حرف A. پس در مجموع $4 \times 4 + 5 = 21$ حرف A دیده می‌شود. بنابراین در کل تعداد $21 + 21 = 42$ حرف A وجود دارد.



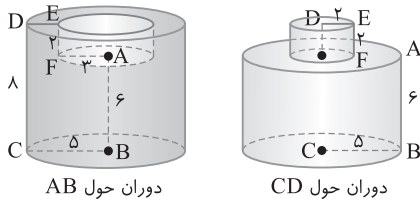
$$4 \quad 285$$

جسم فضایی حاصل از دوران شکل داده شده حول CD استوانه‌ای به شعاع قاعده ۵ و ارتفاع ۶ است که استوانه‌ای به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۲ روی آن قرار گرفته است. بنابراین حجم این جسم فضایی برابر است با

$$V' = \pi(BC)^2(AB) + \pi(DE)^2(EF) = \pi(5)^2(6) + \pi(2)^2(2) = 158\pi$$

$$\frac{V}{V'} = \frac{182\pi}{158\pi} = \frac{91}{79}$$

بنابراین



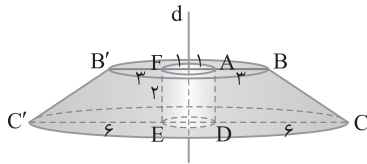
از دوران دوزنقه قائم الزاویه ABCD حول خط d یک مخروط ناقص به وجود می‌آید که از آن استوانه‌ای حذف شده است. اگر این شکل را با صفحه عمودی شامل خط d قطع کنیم، سطح مقطع حاصل دوزنقه متساوی الساقین BCC'B' می‌شود که از آن مستطیل ADEF حذف شده است. طول ارتفاع دوزنقه BCC'B' برابر ۲ AD=۲ و قاعده‌های آن BB'=۸ و CC'=۱۴ است. پس

$$S_{BCC'B'} = \frac{1}{2}AD(BB' + CC') = \frac{1}{2}(2)(8 + 14) = 22$$

$$S_{ADEF} = 2 \times 2 = 4$$

پس مساحت سطح مقطع مورد نظر برابر است با

$$S = S_{BCC'B'} - S_{ADEF} = 22 - 4 = 18$$



مثلاً ABC متساوی الساقین است. اگر ارتفاع BH را رسم کنیم، دو مثلث قائم الزاویه ABH و BHC ایجاد می‌شود که از دوران آن‌ها حول AC دو مخروط با شعاع قاعده BH و ارتفاع‌های AH و CH به وجود می‌آید. پس

$$\text{حجم شکل} = \frac{1}{3}\pi BH^2 \times AH + \frac{1}{3}\pi BH^2 \times CH = \frac{1}{3}\pi BH^2(AH + CH)$$

$$= \frac{1}{3}\pi BH^2 \times AC$$

پس لازم است طول ارتفاع BH را به دست آوریم. ابتدا طول ارتفاع AH' را به دست می‌آوریم:

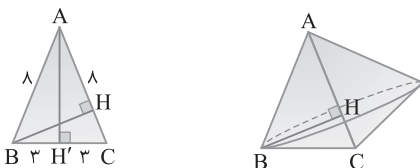
$$\triangle AH'C: AH'^2 = AC^2 - CH'^2 = 8^2 - 3^2 = 55 \Rightarrow AH' = \sqrt{55}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH' \times BC = \frac{1}{2}BH \times AC \Rightarrow \sqrt{55} \times 6 = BH \times 8$$

$$BH = \frac{3\sqrt{55}}{4}$$

$$\text{بنابراین} \text{حجم} = \frac{1}{3}\pi BH^2 \times AC = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{3\sqrt{55}}{4}\right)^2 \times 8 = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{9 \times 55}{16}\right) \times 8$$

$$= \frac{3 \times 55}{2}\pi = \frac{165}{2}\pi$$



ارتفاع هرم و ارتفاع مثلث جانبی با هم مثلث قائم الزاویه OHH' را می‌سازند. پس بنابر قضیه فیثاغورس،

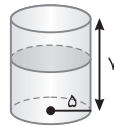
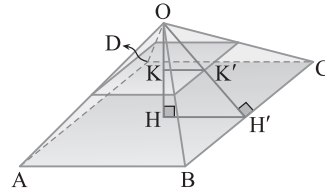
$$HH'^2 = OH'^2 - OH^2 = (2\sqrt{3})^2 - (4)^2 = 12 - 16 = -4 \Rightarrow HH' = 2\sqrt{3}$$

از طرف دیگر صفحه موازی با قاعده که ارتفاع هرم را نصف می‌کند، این هرم را در یک مربع قطع می‌کند و KK' نصف ضلع این مربع است. توجه کنید که

$$\triangle OHH': KK' \parallel HH' \rightarrow \text{تعمیم قضیه تالس}$$

$$\frac{OK}{OH} = \frac{KK'}{HH'} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{KK'}{2\sqrt{3}} \Rightarrow KK' = \sqrt{3}$$

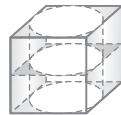
بنابراین طول ضلع مقطع $2\sqrt{3}$ است. پس $(2\sqrt{3})^2 = 12 =$ مساحت مقطع.



اگر استوانه قائم به شعاع قاعده

۵ را با یک صفحه افقی قطع کنیم، سطح مقطع حاصل دایره‌ای به شعاع ۵ است. بنابراین

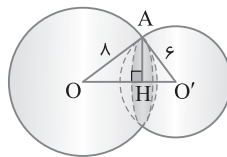
$$\text{مساحت سطح مقطع} = \pi(5)^2 = 25\pi$$



صفحه افقی مکعب را در یک مربع

به طول ضلع ۴ و استوانه را در یک دایره به شعاع ۲ قطع می‌کند، پس مساحت سطح مقطع حاصل تفاضل مساحت دایره از مساحت مربع است.

$$\text{مساحت سطح مقطع} = 4^2 - \pi(2)^2 = 16 - 4\pi$$



مساحت مقطع برخورد دو کره

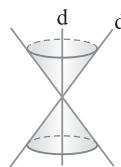
یک دایره است (شکل مقابل را ببینید). در مثلث OAO' طول ارتفاع AH برابر اندازه شعاع این دایره است. مثلث OAO'

قائم الزاویه است، زیرا $8^2 + 6^2 = 10^2$. پس بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم الزاویه،

$$AH \times OO' = OA \times O'A \Rightarrow AH \times 10 = 8 \times 6 \Rightarrow AH = 4/5$$

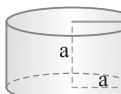
$$\text{بنابراین} \text{محیط سطح مقطع} = 2\pi R = 2\pi(AH) = 9/5\pi$$

بنابراین



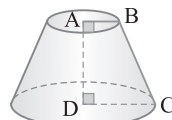
از دوران خط d' حول خط d

سطحی ایجاد می‌شود که شبیه به مخروط است که آن را سطح مخروطی می‌نامیم. دقت کنید این سطح از دو طرف نامحدود است، پس فکر نکنید که دو مخروط ایجاد شده است.



از دوران مربع به طول ضلع a حول

یکی از ضلع‌هایش استوانه‌ای به شعاع قاعده a و ارتفاع a به وجود می‌آید.



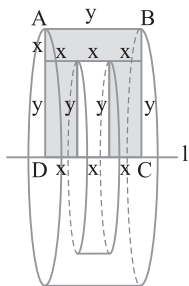
از دوران دوزنقه قائم الزاویه

ABCD حول ساق قائم AD یک مخروط ناقص به وجود می‌آید.

جسم فضایی حاصل از دوران شکل داده شده حول AB

استوانه‌ای به شعاع قاعده ۵ و ارتفاع ۸ است که استوانه‌ای به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۲ از آن حذف شده است. بنابراین حجم این جسم فضایی برابر است با

$$V = \pi(BC)^2(CD) - \pi(AF)^2(EF) = \pi(5)^2(8) - \pi(3)^2(2) = 182\pi$$



۳۰۳ اگر x عرض و y طول هریک از مستطیل‌های همنهشت باشند، آن‌گاه از دوران قسمت رنگی حول خط l یک استوانه به ارتفاع y و شعاع قاعده $x+y$ ایجاد می‌شود، به‌طوری که یک استوانه به ارتفاع x و شعاع قاعده y از آن جدا شده باشد، پس

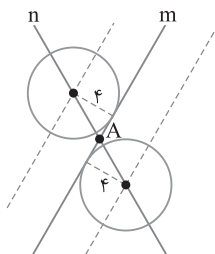
$$\pi(x+y)^2 y - \pi y^2 x = 39\pi \xrightarrow{y=3x}$$

$$\pi(4x)^2 (3x) - \pi(3x)^2 x = 39\pi \Rightarrow 39x^3 \pi = 39\pi \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

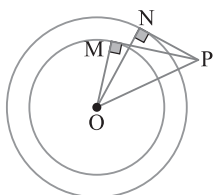
بنابراین $x \times y = 1 \times 3 = 3 =$ مساحت یک مستطیل کوچک.

۳۰۴ فاصله نزدیک‌ترین نقطه خط d از مرکز دایره C طول عمودی است که از O بر d وارد می‌شود، اگر OH عمود از نقطه O بر خط d باشد، آن‌گاه $OH = 3\sqrt{2}$.

چون $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$ ، پس $OH < r$ ، بنابراین خط d دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.



۳۰۵ مرکز دایره‌هایی که بر خط m مماس هستند و شعاع آن‌ها ۴ است، روی دو خط موازی با m و به فاصله ۴ از خط m قرار دارند. اگر این دو خط موازی را رسم کنیم، هر یک از آن‌ها خط n را در یک نقطه قطع می‌کنند. پس دو نقطه روی خط n قرار دارند که مرکز دایره‌ای به شعاع ۴ هستند و خط m بر این دایره‌ها مماس است.



۳۰۶ از مرکز O به نقطه‌های تماس M و N وصل می‌کنیم. در این صورت شعاع‌های OM و ON به‌ترتیب بر خط‌های مماس PM و PN عمود هستند. از قضیه فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه ایجاد شده به دست می‌آید

$$\triangle OPM: PM^2 + OM^2 = OP^2 \Rightarrow 16 + 9 = OP^2 \Rightarrow OP = 5$$

بنابراین

$$\triangle OPN: PN^2 + ON^2 = OP^2 \Rightarrow PN^2 + 16 = 25 \Rightarrow PN = 3$$

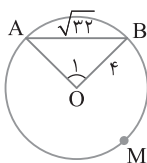
۳۰۷ از مرکز O به نقطه‌های A و B وصل می‌کنیم. در این صورت طول ضلع‌های مثلث OAB در رابطه فیثاغورس صدق می‌کنند:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 32$$

بنابراین مثلث OAB قائم‌الزاویه است و $\hat{O} = 90^\circ$. در نتیجه اندازه کمان

AB برابر 90° است. بنابراین اندازه کمان AMB برابر $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$ است. طول کمان AMB برابر است با

$$\text{طول کمان} = \frac{\text{اندازه کمان}}{360^\circ} (2\pi r) \Rightarrow \text{طول کمان } AMB = \frac{270^\circ}{360^\circ} (2\pi \times 4) = 6\pi$$

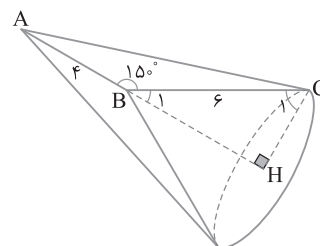


۳۰۸ ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. در این صورت با توجه به شکل از دوران مثلث ABC حول AB دو مخروط با شعاع قاعده CH و ارتفاع‌های AH و BH به‌دست می‌آید که تفاضل حجم این دو مخروط حجم شکل خواسته شده است. چون $\hat{B} = 15^\circ$ ، پس $\hat{B}_1 = 30^\circ$. بنابراین

$$\triangle BHC: \hat{B}_1 = 30^\circ \Rightarrow CH = \frac{BC}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \text{حجم شکل} &= \frac{1}{3} \pi CH^2 \times AH - \frac{1}{3} \pi CH^2 \times BH = \frac{1}{3} \pi CH^2 (AH - BH) \\ &= \frac{1}{3} \pi CH^2 \times AB = \frac{1}{3} \pi (3)^2 (4) = 12\pi \end{aligned}$$



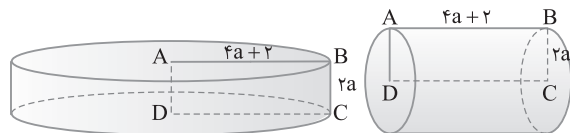
۳۰۹ از دوران مستطیل $ABCD$ حول طول DC ، استوانه‌ای به ارتفاع $4a+2$ و شعاع قاعده $2a$ به‌دست می‌آید. پس

$$V_1 = \pi R^2 h = \pi (2a)^2 (4a+2)$$

و از دوران مستطیل $ABCD$ حول عرض AD ، استوانه‌ای به ارتفاع $2a$ و شعاع قاعده $4a+2$ به‌دست می‌آید. پس $V_2 = \pi R^2 h = \pi (4a+2)^2 (2a)$. بنابر فرض سؤال،

$$\frac{V_1}{V_2} = 1 \Rightarrow \frac{\pi (2a)^2 (4a+2)}{\pi (4a+2)^2 (2a)} = 1 \Rightarrow \frac{2a}{4a+2} = 1 \Rightarrow 2a = 4a+2 \Rightarrow a = -1$$

پس مستطیل به اضلاع ۲ و ۶ است و مساحت آن برابر ۱۲ است.

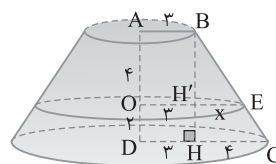


۳۰۲ از دوران دورنقه قائم‌الزاویه $ABCD$ حول AD یک مخروط ناقص ایجاد می‌شود و سطح مقطع حاصل از برخورد این مخروط ناقص با یک صفحه موازی با قاعده‌های آن یک دایره است. اگر ارتفاع BH را رسم کنیم، آن‌گاه از تعمیم قضیه تالس نتیجه می‌شود

$$\triangle BHC: H'E \parallel HC \Rightarrow \frac{BH'}{BH} = \frac{H'E}{CH} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$

بنابراین شعاع دایره مقطع برابر $\frac{17}{3}$ است. پس

$$\text{محیط سطح مقطع} = 2\pi R = 2\pi \left(\frac{17}{3}\right) = \frac{34}{3} \pi$$

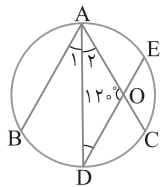


بنابر قضیه خطوط موازی و مورب،

$$\left\{ \begin{array}{l} AB \parallel DE \\ AD \text{ مورب} \end{array} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D} \xrightarrow{\hat{A}_1 = \hat{A}_2} \hat{A}_2 = \hat{D}$$

در مثلث AOD مجموع اندازه زاویه‌ها برابر 180° است، پس

$$\hat{A}_2 + \hat{D} + 120^\circ = 180^\circ \xrightarrow{\hat{A}_2 = \hat{D}} 2\hat{A}_2 = 60^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = 30^\circ$$



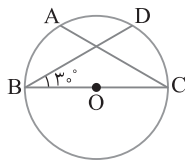
بنابراین $\hat{A}_1 = 30^\circ$ و زاویه $\hat{A}_1$ زاویه محاطی

است، پس

$$\hat{A}_1 = \frac{\widehat{BD}}{2} \Rightarrow 30^\circ = \frac{\widehat{BD}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} = 60^\circ$$

اندازه هر زاویه محاطی مساوی نصف کمان مقابلش است، پس

$$\hat{B} = \frac{\widehat{CD}}{2} \Rightarrow 30^\circ = \frac{\widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{CD} = 60^\circ$$



چون D وسط کمان AC است، پس $\widehat{AD} = 60^\circ$

و چون BC قطر دایره است، پس

$$\widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{AD} + \widehat{CD} = 180^\circ$$

$$\widehat{AB} + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 60^\circ$$

$$\text{بنابراین } \hat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

عمودهای CH و DH' را بر AB وارد می‌کنیم. کمان‌های AC

و BD بین دو وتر موازی AB و CD محصور هستند. پس این دو کمان مساوی‌اند.

در نتیجه $AC = BD$. بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویه ACH و BDH' و

همنهشت‌اند (وتر و یک ضلع زاویه قائمه)، پس $AH = BH'$. از طرف دیگر،

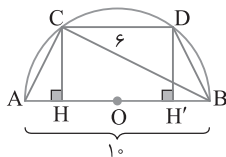
چهارضلعی CDH'H مستطیل است. بنابراین $HH' = CD = 6$. در نتیجه

$$AH + HH' + BH' = 10 \Rightarrow 2AH + 6 = 10 \Rightarrow AH = 2$$

در ضمن مثلث ABC قائم‌الزاویه است و زاویه C در آن قائمه است. زیرا این زاویه،

زاویه محاطی روبه‌رو به قطر است. بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AC^2 = AH \times AB = 2 \times 10 = 20 \Rightarrow AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$



زاویه MNP زاویه محاطی است، پس

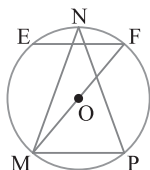
$$\widehat{MNP} = \frac{\widehat{MP}}{2} \Rightarrow 40^\circ = \frac{\widehat{MP}}{2} \Rightarrow \widehat{MP} = 80^\circ$$

چون MF قطر دایره است، پس اندازه کمان MPF برابر 180° است. در

نتیجه $\widehat{FP} = 100^\circ$. از طرف دیگر می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر

موازی در دایره مساوی‌اند، پس $\widehat{EF} \parallel \widehat{MP} \Rightarrow \widehat{EM} = \widehat{FP} \Rightarrow \widehat{EM} = 100^\circ$

بنابراین اندازه زاویه محاطی F برابر است با $\hat{F} = \frac{\widehat{EM}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$



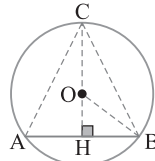
مطابق شکل، در صورتی بیشترین مساحت به دست می‌آید که

طول ارتفاع CH بیشترین مقدار ممکن باشد و این موضوع زمانی اتفاق می‌افتد

که CH در راستای قطر دایره باشد. چون در این شرایط ارتفاع AB، CH

نصف می‌کند، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین می‌شود. بنابراین

$$\left\{ \begin{array}{l} OB = 5 \\ BH = 4 \end{array} \Rightarrow OH = \sqrt{25 - 16} = 3 \right.$$



از طرف دیگر، $CH = OH + OC = 8$.

بنابراین بیشترین مساحت مثلث ABC

برابر است با

$$S = \frac{1}{2} AB \times CH = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32$$

راه‌حل اول زاویه $\hat{M}_1$ زاویه خارجی مثلث MBC است.

بنابراین $\hat{M}_1 = \hat{C} + \hat{B}$. از طرف دیگر $\hat{B} = 4\hat{C}$ ، در نتیجه $\hat{M}_1 = 5\hat{C}$. در

ضمن زاویه C زاویه محاطی روبه‌رو به کمان AB است، پس $\hat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2}$. در

$$\text{نتیجه } \hat{M}_1 = \frac{5}{2} \widehat{AB}$$

راه‌حل دوم زاویه C زاویه محاطی روبه‌رو به

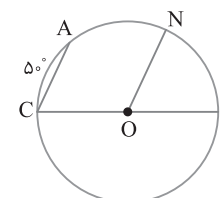
کمان AB است، پس $\hat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2}$. همچنین

$$\hat{B} = \frac{\widehat{DC}}{2}, \text{ از طرف دیگر } \hat{B} = 4\hat{C} \Rightarrow \widehat{DC} = 4\widehat{AB}$$

بنابراین $\widehat{DC} = 4\widehat{AB}$. چون $\hat{M}_1$ زاویه

بین دو وتر متقاطع از دایره است، پس

$$\hat{M}_1 = \frac{\widehat{DC} + \widehat{AB}}{2} = \frac{4\widehat{AB} + \widehat{AB}}{2} = \frac{5\widehat{AB}}{2}$$



چون CI قطر دایره است،

پس

$$\widehat{AC} + \widehat{ANI} = 180^\circ \xrightarrow{\widehat{AC} = 50^\circ} \widehat{ANI} = 130^\circ$$

بنابراین اندازه زاویه محاطی C برابر است با $\hat{C} = \frac{\widehat{ANI}}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$. از

طرف دیگر از قضیه خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود

$$\left\{ \begin{array}{l} CA \parallel ON \\ CI \text{ مورب} \end{array} \Rightarrow \hat{NOI} = \hat{C} = 65^\circ \right.$$

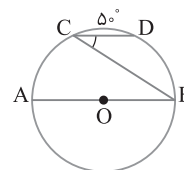
کمان‌های محصور بین دو وتر موازی در یک دایره، مساوی‌اند. بنابراین

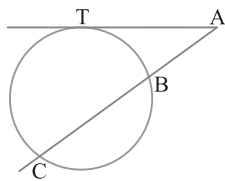
$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

از طرف دیگر،

$$\widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{BD} = 180^\circ \Rightarrow 2\widehat{BD} + 50^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = 65^\circ$$

چون زاویه DCB زاویه محاطی روبه‌رو به کمان BD است، $\hat{DCB} = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{65^\circ}{2}$.





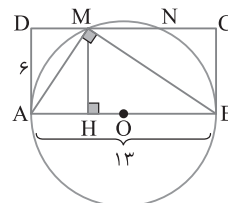
۳۱۶. شکل تست به صورت زیر است. از نقطه M به نقطه‌های A و B وصل می‌کنیم. چون زاویه M محاطی روبه‌رو به قطر دایره است، پس قائمه است. پس مثلث AMB قائم‌الزاویه است. اگر ارتفاع MH را در این مثلث رسم کنیم و طول AH را برابر X بگیریم، آن‌گاه $BH = 13 - X$. از رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه AMB نتیجه می‌شود

$$MH^2 = AH \times BH \xrightarrow{MH=AD=6} 36 = x(13-x)$$

$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

جواب‌های این معادله $x = 9$ و $x = 4$ هستند. بنابراین اگر اندازه قسمت کوچک‌تر یعنی AH برابر ۴ باشد، آن‌گاه $DM = 4$. به همین ترتیب ثابت می‌شود $NC = 4$. بنابراین

$$MN = DC - (DM + NC) = 13 - (4 + 4) = 5$$



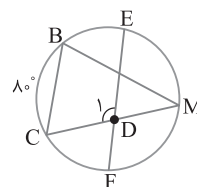
$$\hat{B} = \frac{\widehat{CF} + \widehat{FM}}{2} \quad (1) \quad \text{زاویه B زاویه محاطی است، پس}$$

$$\hat{D}_1 = \frac{\widehat{EBC} + \widehat{FM}}{2} \quad (2) \quad \text{و زاویه D}_1 \text{ زاویه بین دو وتر متقاطع است، پس}$$

با جمع تساوی‌های (۱) و (۲) و در نظر گرفتن $EM = FM$ نتیجه می‌شود

$$\hat{B} + \hat{D}_1 = \frac{\widehat{CF} + \widehat{FM} + \widehat{EBC} + \widehat{EM}}{2} = \frac{36^\circ}{2} = 18^\circ$$

همان‌طور که می‌بینید اندازه کمان BC تأثیری در جواب ندارد و یک فرض اضافی است.



$$\text{چون } \hat{E} = 30^\circ \text{ پس} \quad (3) \quad 18^\circ$$

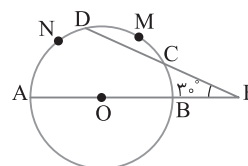
$$\frac{1}{2} (\widehat{AND} - \widehat{BC}) = 30^\circ \Rightarrow \widehat{AND} - \widehat{BC} = 60^\circ \quad (1)$$

از طرف دیگر چون AB قطر دایره است، پس

$$\widehat{AND} + \widehat{BC} + \widehat{DMC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AND} + \widehat{BC} + 30^\circ = 180^\circ$$

$$\widehat{AND} + \widehat{BC} = 150^\circ \quad (2) \quad \text{در نتیجه}$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\widehat{AND} = 105^\circ$.



$$\text{هر دایره } 360^\circ \text{ است، بنابراین}$$

$$\widehat{TC} + \widehat{BC} + \widehat{BT} = 360^\circ \Rightarrow 2\widehat{BT} + 2\widehat{BT} + \widehat{BT} = 360^\circ \Rightarrow 5\widehat{BT} = 360^\circ$$

در نتیجه $\widehat{BT} = 72^\circ$ و $\widehat{TC} = 144^\circ$. پس اندازه زاویه A برابر است با

$$\hat{A} = \frac{\widehat{TC} - \widehat{BT}}{2} = \frac{144^\circ - 72^\circ}{2} = 36^\circ$$

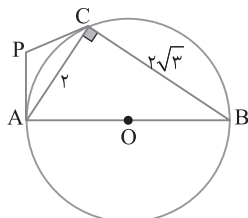
$$AC = 2, AB = 4 \Rightarrow AC = \frac{1}{2} AB \Rightarrow \hat{B} = 30^\circ$$

زاویه B محاطی روبه‌رو به کمان AC است، بنابراین

$$\hat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} = 30^\circ = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{AC} = 60^\circ$$

چون AB قطر دایره است، پس $\widehat{BC} = 120^\circ$. از طرف دیگر زاویه P بین دو مماس بر دایره است، پس اندازه آن برابر است با

$$\hat{P} = \frac{\widehat{ABC} - \widehat{AC}}{2} = \frac{(180^\circ + 120^\circ) - 60^\circ}{2} = \frac{240^\circ}{2} = 120^\circ$$



۳۲۱. اگر از مرکز دایره به نقاط A، B، C و D وصل کنیم، مثلث

OBC متساوی‌الاضلاع است. پس $\widehat{BC} = 60^\circ$. مثلث OCD قائم‌الزاویه

است، زیرا $r^2 + (r\sqrt{2})^2 = r^2 + r^2$ ، پس بنابر عکس قضیه فیثاغورس

$\widehat{COD} = 90^\circ$. پس $\widehat{CÔD} = 90^\circ$. همچنین مثلث OAD متساوی‌الساقین با

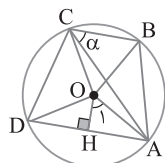
زاویه رأس 120° است، زیرا اگر ارتفاع OH را در آن رسم کنیم، $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}r$

پس $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}OA$ ، در نتیجه $\hat{O}_1 = 60^\circ$. چون در مثلث متساوی‌الساقین

OAD، ارتفاع همان نیمساز است، پس $\widehat{AÔD} = 120^\circ$ و $\widehat{AD} = 120^\circ$. در نتیجه

$$\widehat{AB} = 360^\circ - (\widehat{AD} + \widehat{DC} + \widehat{BC}) = 360^\circ - (120^\circ + 90^\circ + 60^\circ) = 90^\circ$$

$$\text{بنابراین } \alpha = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$



۳۲۲. می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی مساوی‌اند، پس

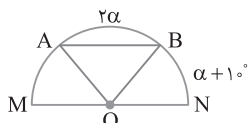
$$\widehat{AM} = \widehat{BN} = \alpha + 10^\circ \quad \text{در نتیجه}$$

$$\widehat{AM} + \widehat{AB} + \widehat{BN} = 180^\circ \Rightarrow \alpha + 10^\circ + 2\alpha + \alpha + 10^\circ = 180^\circ$$

$$4\alpha = 160^\circ \Rightarrow \alpha = 40^\circ$$

پس زاویه مرکزی AOB برابر 80° است. بنابراین

$$\text{طول کمان AB} = \frac{2\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{80^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi(4) = \frac{16}{9}\pi$$

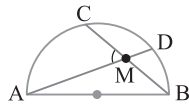


۳۲۶ ۳) کمان AB برابر 180° است. با فرض

$$\widehat{AC} = \widehat{CD} = \widehat{DB} = x$$

$$\widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{DB} = 180^\circ \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 180^\circ \Rightarrow \frac{9x}{12} = 180^\circ \Rightarrow x = 240^\circ$$

بنابراین $\widehat{AC} = \frac{240^\circ}{3} = 80^\circ$ و $\widehat{DB} = \frac{240^\circ}{6} = 40^\circ$ در نتیجه



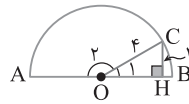
$$\widehat{AMC} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} = \frac{80^\circ + 40^\circ}{2} = 60^\circ$$

۳۲۷ ۲) بنابر فرض، طول عمود CH

برابر ۲ است. پس در مثل قائم الزاویه OCH

ضلع CH نصف OC است. در نتیجه

$$\widehat{O_1} = 30^\circ \text{ پس } \widehat{O_2} = 150^\circ$$



$$\text{طول کمان } AC = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{150^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi(4) = \frac{1}{3} \pi \approx 1.0$$

۳۲۸ ۲) اگر r شعاع دایره باشد، آن گاه $OA = OB = r$. از فرض

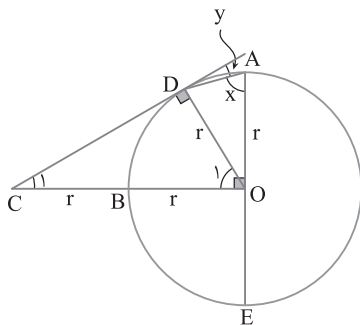
$OA = \frac{1}{2} OC$ نتیجه می‌گیریم $OC = 2r$ پس $BC = r$. اکنون از مرکز O

به نقطه تماس D وصل می‌کنیم. زاویه D قائمه است. در مثل قائم الزاویه ODC .

$$OD = \frac{OC}{2} \Rightarrow \widehat{C_1} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{O_1} = 60^\circ$$

بنابراین زاویه محاطی x برابر است با $x = \frac{\widehat{DBE}}{2} = \frac{60^\circ + 90^\circ}{2} = 75^\circ$ و زاویه ظلی y

برابر است با $y = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{90^\circ - 60^\circ}{2} = 15^\circ$ بنابراین $x - y = 75^\circ - 15^\circ = 60^\circ$.



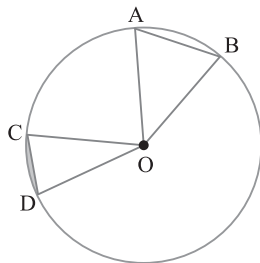
۳۲۹ ۲) فرض می‌کنیم $\widehat{COD} = \alpha$. در این صورت بنابر فرض

$$\frac{\sqrt{2}}{2} S_{OAB} + S_{\text{قطعه}} = \frac{\pi}{12}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} (1)(1) \sin 45^\circ + \frac{\alpha}{360^\circ} \pi (1)^2 - \frac{1}{2} (1)(1) \sin \alpha = \frac{\pi}{12}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{360^\circ} \pi - \frac{1}{2} \sin \alpha = \frac{\pi}{12} \Rightarrow \frac{\alpha}{360^\circ} \pi + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sin \alpha \right) = \frac{\pi}{12}$$

تساوی به دست آمده در صورتی برقرار است که $\alpha = 30^\circ$.



۳۲۳ ۱) از مرکز O به رأس‌های چهارضلعی $ABCD$ وصل می‌کنیم. در

این صورت مثلث OCD متساوی الاضلاع است، پس $\widehat{O_1} = 60^\circ$ در نتیجه

$\widehat{CD} = 60^\circ$. در ضمن مثلث OBC قائم الزاویه است، زیرا اضلاع آن r و

$r\sqrt{2}$ هستند، $((r\sqrt{2})^2 = r^2 + r^2)$ پس $\widehat{O_2} = 90^\circ$. در نتیجه

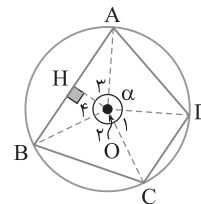
$\widehat{BC} = 90^\circ$. در مثلث متساوی الساقین OAB با رسم عمود OH به دست می‌آید

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} r \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2} OA \Rightarrow \widehat{O_3} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ$$

$$\widehat{AB} = 120^\circ$$

بنابراین $\widehat{AD} = 360^\circ - (120^\circ + 90^\circ + 60^\circ) = 90^\circ$ پس

$$\text{طول کمان } AD = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{1}{4} (2\pi r) = \frac{\pi r}{2}$$



۳۲۴ ۱) ابتدا اندازه کمان BC را به دست می‌آوریم:

$$\widehat{P} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2} \xrightarrow{\widehat{P} = 30^\circ} \widehat{AD} - \widehat{BC} = 60^\circ$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{AD} = 360^\circ \Rightarrow 130^\circ + \widehat{BC} + 120^\circ + \widehat{AD} = 360^\circ$$

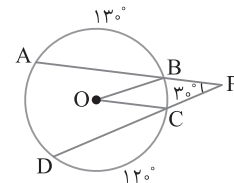
$$\widehat{AD} + \widehat{BC} = 110^\circ$$

بنابراین

$$\begin{cases} \widehat{AD} - \widehat{BC} = 60^\circ \\ \widehat{AD} + \widehat{BC} = 110^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} 2\widehat{BC} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 25^\circ$$

پس اندازه زاویه مرکزی BOC برابر 25° است. در نتیجه

$$\text{طول کمان } BC = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{25^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi(3) = \frac{25}{60} \pi = \frac{5}{12} \pi$$



۳۲۵ ۱) محیط این قطعه برابر مجموع طول کمان CD و طول وتر

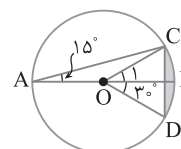
$\widehat{O_1}$ است. زاویه A محاطی است، پس $\widehat{BC} = 30^\circ$. در نتیجه زاویه مرکزی $\widehat{O_1}$

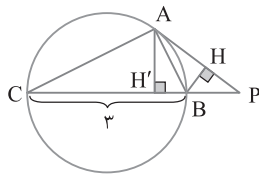
برابر 30° است. در نتیجه مثلث OCD متساوی الاضلاع به ضلع ۳ است.

پس $CD = 3$. از طرف دیگر،

$$\text{طول کمان } CD = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi(3) = \pi$$

بنابراین محیط قطعه مورد نظر برابر $\pi + 3$ است.





راه حل دوم بنابر روابط طولی در دایره،

$$PA^2 = PB \times PC$$

$$PA^2 = 1 \times (1+3) = 4 \Rightarrow PA = 2$$

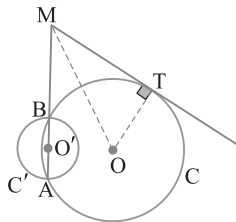
از طرف دیگر چون $BH = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و

در مثلث قائم الزاویه BHP، $BP = 1$

$$\sin \hat{P} = \frac{BH}{BP} \Rightarrow \sin \hat{P} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{P} = 45^\circ$$

بنابراین در مثلث قائم الزاویه $AH'P$

$$AH' = \frac{\sqrt{2}}{2} AP \xrightarrow{AP=2} AH' = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2}$$



بنابر روابط طولی در دایره C،

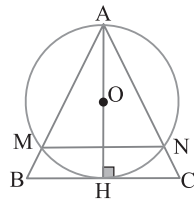
$$MT^2 = MA \times MB$$

$$= (9+6)(9) = 135$$

از طرف دیگر در مثلث MTO قضیه فیثاغورس،

$$MT^2 = OM^2 - R^2 \xrightarrow{(1)}$$

$$135 = 184 - R^2 \Rightarrow R^2 = 49 \Rightarrow R = 7$$



در مثلث متساوی الساقین

ارتفاع ABC از ارتفاع AH نیز هست،

پس $BH = CH = 5$ بنابر قضیه

فیثاغورس در مثلث AHC،

$$CA^2 = AH^2 + CH^2$$

$$= 10^2 + 5^2 = 125 \Rightarrow CA = 5\sqrt{5}$$

از طرف دیگر، بنابر روابط طولی در دایره،

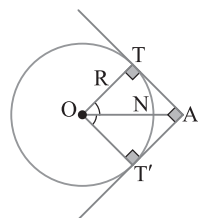
$$CH^2 = CN \times CA \Rightarrow 5^2 = CN \times 5\sqrt{5} \Rightarrow CN = \sqrt{5}$$

به همین ترتیب ثابت می شود $BM = \sqrt{5}$ پس $BM = CN$ بنابراین

$\frac{AB}{MB} = \frac{AC}{NC}$ پس بنابر عکس قضیه تالس، $MN \parallel BC$ بنابر تعمیم قضیه

تالس، $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ چون $AM = AB - BM = 5\sqrt{5} - \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

$$\frac{4\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} = \frac{MN}{10} \Rightarrow MN = 8$$



چهارضلعی $ATOT'$

یک مربع است، چون زاویه های آن

90° هستند و دو ضلع مجاور آن،

یعنی AT و AT' نیز باهم برابرند

(زیرا دو مماس رسم شده از نقطه A

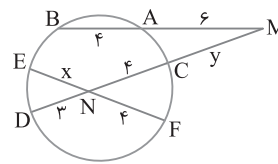
هستند). $OA = R\sqrt{2}$ پس

اگر از A به مرکز O وصل کنیم تا دایره را در نقطه

N قطع کند، آن گاه N نزدیک ترین

نقطه دایره به A است. بنابراین

$$AN = OA - R = R\sqrt{2} - R = 4\sqrt{2} - 4 = 4(\sqrt{2} - 1) = \frac{4}{\sqrt{2} + 1}$$



بنابر روابط طولی

طولی در دایره،

$$NE \times NF = ND \times NC$$

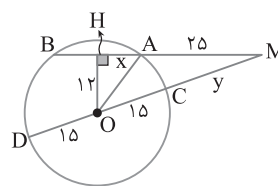
$$x \times 4 = 3 \times 4$$

یعنی $x = 3$ همچنین

$$MA \times MB = MC \times MD \Rightarrow 6 \times 10 = y(y+7)$$

با حل این معادله به دست می آید $y = -12$ و $y = 5$ چون $y > 0$ پس

$y = 5$ قبول است. اکنون می توان نوشت $x + y = 3 + 5 = 8$



شعاع OA را رسم

می کنیم. در مثلث قائم الزاویه

OAH بنابر قضیه فیثاغورس،

$$x = \sqrt{OA^2 - OH^2}$$

$$= \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$$

بنابراین $AB = 2x = 18$ اکنون بنابر روابط طولی در دایره می توان نوشت

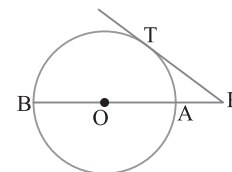
$$MC \times MD = MA \times MB$$

یعنی $y(y+30) = 25 \times 43$ با حل این معادله به دست می آید

$$y = -15 \pm \sqrt{13}$$

چون $y = -15 - \sqrt{13} < 0$ بنابراین غیر قابل قبول است، پس

$$y = 10\sqrt{13} - 15$$



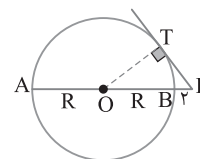
باتوجه به روابط طولی

در دایره، $PT^2 = PA \times PB$ پس

$$PT^2 = PA(PA + AB)$$

$$= 4 \times (4 + 12) = 64$$

بنابراین $PT = 8$



بنابر روابط طولی در

دایره،

$$PT^2 = PA \times PB = 18 \times 2 = 36$$

پس $PT = 6$ اکنون اگر شعاع

دایره را R فرض کنیم، آن گاه

$$2R = AB = PA - PB = 18 - 2 = 16$$

پس $R = 8$ در نتیجه $S_{OPT} = \frac{1}{2} OT \times PT = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$

راه حل اول بنابر روابط طولی در دایره،

$$PA^2 = PB \times PC = 1 \times (1+3) = 4 \Rightarrow PA = 2$$

از طرف دیگر، زاویه ظلّی BAP و زاویه محاطی C رویه رو به کمان AB

هستند، پس مساوی اند:

$$\begin{cases} \hat{BAP} = \hat{C} \\ \hat{P} = \hat{P} \end{cases} \xrightarrow{(ZZ)} \triangle ABP \sim \triangle CAP$$

$$\frac{S_{CAP}}{S_{ABP}} = \left(\frac{CP}{PA}\right)^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$$

پس

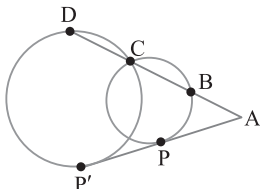
$$\frac{\frac{1}{2} AH' \times CP}{\frac{1}{2} BH \times PA} = 4 \Rightarrow \frac{AH' \times 4}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times 2} = 4 \Rightarrow AH' = \sqrt{2}$$

۳۴۲ (۲) از رابطه‌های طولی در هر دو دایره استفاده می‌کنیم:

$$AP'^2 = AC \times AD \xrightarrow{AP' = 2AP} 4AP^2 = AC \times AD \quad (۱)$$

همچنین (۲) $AP^2 = AB \times AC$ از برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$4AB \times AC = AC \times AD \Rightarrow 4AB = AD \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{1}{4}$$

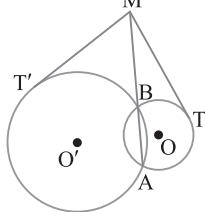


۳۴۳ (۱) از رابطه‌های طولی در هر دو دایره استفاده می‌کنیم:

$$MT^2 = MA \times MB, \quad MT'^2 = MA \times MB$$

از مقایسه این تساوی‌ها نتیجه می‌گیریم

$$MT^2 = MT'^2 \Rightarrow MT = MT' \Rightarrow \frac{MT'}{MT} = 1$$



۳۴۴ (۱) چون وتر AD' بر دایره کوچک‌تر مماس است، پس شعاع OT بر AD' عمود است و آن را نصف می‌کند، یعنی $AT = D'T$. از طرف دیگر بنابر رابطه‌های طولی در دایره کوچک‌تر،

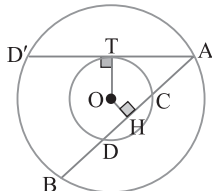
$$AT^2 = AC \times AD = 4(4+5) = 36 \Rightarrow AT = 6$$

پس $AD' = 2AT = 12$. در ضمن اگر از مرکز O عمود OH را بر وتر AB رسم کنیم، چون دو دایره هم‌مرکز هستند، هم وتر AB و هم وتر CD نصف می‌شود:

$$CH = \frac{CD}{2} = \frac{5}{2}, \quad AB = 2AH$$

از طرف دیگر، $AH = AC + CH = 4 + \frac{5}{2} = \frac{13}{2}$. در نتیجه $AB = 13$.

بنابراین $AB - AD' = 13 - 12 = 1$. پس طول وتر AB یک واحد از طول وتر AD' بیشتر است.



۳۴۵ (۲) از مرکز O به نقطه‌های تماس T ، T' و T'' وصل می‌کنیم، شعاع $MTOT'$ دایره بر خط مماس در نقطه تماس عمود است، در چهارضلعی

$$\hat{T} = \hat{T}' = 90^\circ$$

بنابراین چهارضلعی $MTOT'$ مربعی به طول ضلع R است. از طرف دیگر ON نیمساز زاویه بین دو مماس NT' و NT'' است، پس در مثلث قائم‌الزاویه $OT'N$ ،

$$\hat{ONT}' = 30^\circ \Rightarrow OT' = \frac{1}{2}ON \xrightarrow{OT'=R} ON = 2R$$

همچنین $T'ON = 60^\circ \Rightarrow NT' = \frac{\sqrt{3}}{2}ON = \frac{\sqrt{3}}{2}(2R) = \sqrt{3}R$

۳۳۸ (۳) می‌دانیم طول دو مماس رسم شده بر دایره از یک نقطه برابرند،

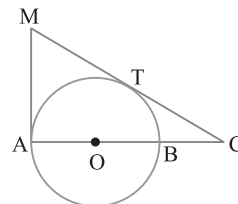
پس $MA = MT$. بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$CT^2 = CB \times CA \xrightarrow{\frac{CB=1}{CA=3}} CT^2 = 1 \times 3 = 3 \Rightarrow CT = \sqrt{3}$$

از طرف دیگر قطر AB بر مماس AM عمود است، پس مثلث AMC قائم‌الزاویه است. بنابر قضیه فیثاغورس در این مثلث،

$$MA^2 + AC^2 = MC^2 \xrightarrow{MA=MT} MT^2 + 3^2 = (\sqrt{3} + MT)^2$$

$$MT^2 + 9 = 3 + MT^2 + 2\sqrt{3}MT \Rightarrow 2\sqrt{3}MT = 6 \Rightarrow MT = \sqrt{3}$$



۳۳۹ (۲) از مرکز O به نقطه تماس B وصل می‌کنیم. در این صورت شعاع OB بر مماس MB عمود است. در ضمن می‌دانیم OA نیمساز زاویه بین دو مماس AB و AC است. پس $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 30^\circ$. در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویه OAB ،

$$\hat{A}_1 = 30^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 60^\circ \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{3}}{2}OA$$

$$\xrightarrow{AB=9} 9 = \frac{\sqrt{3}}{2}OA \Rightarrow OA = 6\sqrt{3}$$

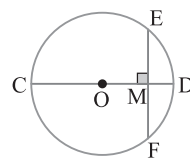
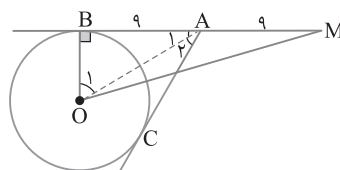
از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه OAB ،

$$\hat{A}_1 = 30^\circ \Rightarrow OB = \frac{1}{2}OA \xrightarrow{OA=6\sqrt{3}} OB = 3\sqrt{3}$$

بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه OBM ،

$$OM^2 = MB^2 + OB^2 = 18^2 + (3\sqrt{3})^2 = 351$$

در نتیجه $OM = \sqrt{351} = 3\sqrt{39}$.



۳۴۰ (۱) کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطه

M وتر عمود بر CD است. فرض می‌کنیم EF وتر گذرنده از M و عمود بر قطر CD باشد. چون قطر CD بر وتر EF عمود است، پس M وسط EF قرار دارد، یعنی $ME = MF$. بنابر

رابطه‌های طولی در دایره،

$$ME \times MF = MC \times MD \Rightarrow ME \times ME = 8$$

$$ME^2 = 8 \Rightarrow ME = 2\sqrt{2}$$

پس $EF = 2ME = 4\sqrt{2}$.

۳۴۱ (۳) بنابر قضیه فیثاغورس،

$$\triangle AED: ED^2 = AE^2 + AD^2$$

$$ED^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \Rightarrow ED = 4\sqrt{2}$$

از طرف دیگر بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$EF \times ED = EA \times EB \Rightarrow EF \times 4\sqrt{2} = 4 \times 4 \Rightarrow EF = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

نسبت اضلاع نظیر این دو مثلث متشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{OP}{O'P} = \frac{OT}{O'T'} \Rightarrow \frac{OP}{O'P} = \frac{7}{3}$$

با ترکیب در مخرج کردن این تناسب به‌دست می‌آید $\frac{OP}{OO'} = \frac{7}{10}$. از طرف

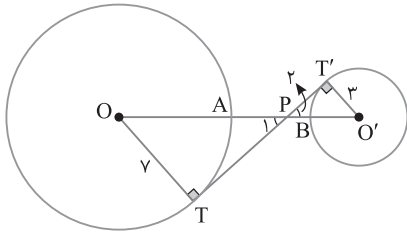
دیگر طول خط‌المركزین OO' برابر است با

$$OO' = OA + AB + BO' = 7 + 5 + 3 = 15$$

$$\frac{OP}{15} = \frac{7}{10} \Rightarrow OP = \frac{21}{2}$$

بنابراین

$$\text{در نتیجه } AP = OP - OA = \frac{21}{2} - 7 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$$



بنابر فرض تست اندازه زاویه بین مماس مشترک خارجی TT' و

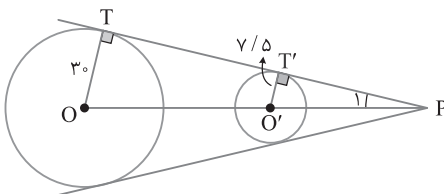
خط‌المركزین OO' ، یعنی $\hat{P}_1$ برابر 30° است. چون شعاع‌های $O'T'$ و OT بر مماس مشترک عمودند، پس مثلث‌های OPT و $O'PT'$ قائم‌الزاویه هستند. بنابراین

$$\triangle OPT: \hat{P}_1 = 30^\circ \Rightarrow OT = \frac{1}{2} OP \Rightarrow 3 = \frac{1}{2} OP \Rightarrow OP = 6$$

$$\triangle O'PT': \hat{P}_1 = 30^\circ \Rightarrow O'T' = \frac{1}{2} O'P \Rightarrow 7/5 = \frac{1}{2} O'P \Rightarrow O'P = 15$$

اکنون می‌توان طول خط‌المركزین OO' را به‌دست آورد

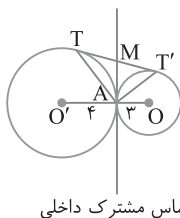
$$OO' = OP - O'P = 6 - 15 = 45$$



شکل سؤال به‌صورت زیر است. مماس مشترک داخلی دو دایره

را رسم می‌کنیم تا TT' را در نقطه M قطع کند. چون مماس‌های رسم شده بر دایره از یک نقطه، برابرند، پس

$$\left. \begin{array}{l} MT = MA \\ MT' = MA \end{array} \right\} \Rightarrow MT = MT', MA = \frac{TT'}{2}$$



پس در مثلث ATT' پاره‌خط AM میانه است و نصف ضلع TT' است. بنابراین مثلث ATT' قائم‌الزاویه است. از طرف دیگر طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس از رابطه $TT' = 2\sqrt{r'r'}$ به‌دست می‌آید. پس بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ATT' ،

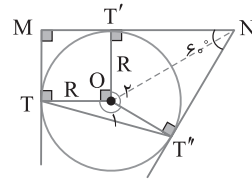
$$AT^2 + AT'^2 = TT'^2 \xrightarrow{TT' = 2\sqrt{r'r'}} \rightarrow$$

$$AT^2 + AT'^2 = 4r'r' = 4(4)(3) = 48$$

درضمن مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی $OT'NT''$ برابر 360° است.

پس $\hat{O}_p = 120^\circ$. در نتیجه $\hat{O}_1 = 150^\circ$. چون دو مثلث قائم‌الزاویه ONT'' و ONT' به حالت (ضضض) همنهشت هستند، پس مساحت چهارضلعی $OT'NT''$ دو برابر مساحت مثلث ONT' است. بنابراین

$$\begin{aligned} S_{MNT''T} &= S_{MTOT'} + S_{OT'NT''} + S_{OTT''} \\ &= R^2 + 2\left(\frac{1}{2} R \times \sqrt{3} R\right) + \frac{1}{2} (R \times R \times \sin 150^\circ) \\ &= R^2 + \sqrt{3} R^2 + \frac{R^2}{4} = \left(\frac{5}{4} + \sqrt{3}\right) R^2 \end{aligned}$$



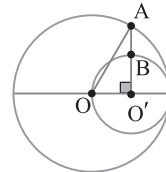
با توجه به شکل قطر دایره کوچک‌تر شعاع دایره بزرگ‌تر است، پس

$$OO' = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$OA^2 = OO'^2 + O'A^2 \Rightarrow (6\sqrt{3})^2 = (3\sqrt{3})^2 + O'A^2$$

از این تساوی نتیجه می‌شود $O'A = 9$. بنابراین

$$AB = O'A - O'B = 9 - 3\sqrt{3} = 3(3 - \sqrt{3})$$



شکل تست به صورت زیر است. مثلث به طول ضلع‌های ۸، ۶

و قائم‌الزاویه است، زیرا $10^2 = 8^2 + 6^2$. چون $OO' = 10$ ، $O'O = 6$ و $OO'' = 8$ پس $R + R' = 10$ ، $R + R'' = 8$ ، $R' + R'' = 6$

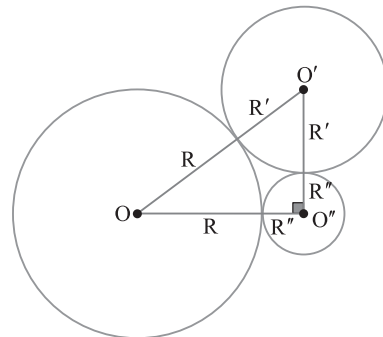
با جمع سه تساوی بالا به‌دست می‌آید

$$2(R + R' + R'') = 24 \Rightarrow R + R' + R'' = 12$$

چون $R + R' = 10$ ، پس $R'' + 10 = 12$ ، در نتیجه $R'' = 2$. بنابراین

$$R = 6, R' = 4$$

$$\pi R^2 + \pi R'^2 + \pi R''^2 = \pi(6^2 + 4^2 + 2^2) = 56\pi$$



مطابق شکل، اگر خط‌المركزین OO' دایره‌ها را در نقطه‌های A

و B قطع کند، آن‌گاه AB فاصله نزدیک‌ترین نقطه‌های دو دایره از یکدیگر است. پس $AB = 5$. فرض کنید TT' مماس مشترک داخلی دو دایره، خط‌المركزین OO' را در P قطع کند. اگر از O به T و از O' به T' وصل کنیم، آن‌گاه دو مثلث OPT و $O'PT'$ قائم‌الزاویه هستند. بنابراین

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{P}_1 = \hat{P}_2 \\ \hat{T} = \hat{T}' = 90^\circ \end{array} \right. \xrightarrow{(ز ز)} \triangle OPT \sim \triangle O'PT'$$

۳۵۶ ۱) اگر شعاع دایره کوچک‌تر باشد، آن گاه $OO' = R$. پس $AO'' = 4R$ و $O'O'' = 2R$. این صورت شعاع OT بر خط مماس AT عمود است. توجه کنید که بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$AT^2 = AO' \times AB \Rightarrow AT^2 = 6R \times 8R$$

$$AT^2 = 48R^2 \Rightarrow AT = 4\sqrt{3}R$$

$$\triangle AOT: \sin \hat{O}_1 = \frac{AT}{AO} = \frac{4\sqrt{3}R}{4R} = \frac{4\sqrt{3}}{4} \quad \text{بنابراین}$$

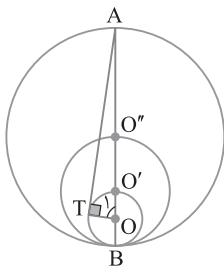
از طرف دیگر،

$$S_{TOO'} = 14\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2} OT \times OO' \sin \hat{O}_1 = 14\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2} R \times R \times \frac{4\sqrt{3}}{4} = 14\sqrt{3} \Rightarrow R^2 = 49 \Rightarrow R = 7$$

پس محیط دایره بزرگ‌تر به شعاع $4R$ برابر است با

$$\text{محیط} = 2\pi(4R) = 8\pi R = 8\pi(7) = 56\pi$$



۳۵۷ ۱) اندازه هر ضلع n ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع R برابر

$$C_n = 2R \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)^\circ \quad \text{و اندازه هر ضلع } n \text{ ضلعی منتظم محیط بر دایره به}$$

شعاع R برابر $C'_n = 2R \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)^\circ$ است. چون هر دو n ضلعی منتظم متشابه‌اند،

$$\frac{C_n}{C'_n} = \frac{2R \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)^\circ}{2R \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)^\circ} = \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)^\circ \quad \text{پس نسبت تشابه آنها برابر است با}$$

$$\cos^2\left(\frac{180^\circ}{n}\right)^\circ \quad \text{بنابراین نسبت مساحت‌های آنها}$$

۳۵۸ ۳) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی 360° است:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{D} + \hat{C} = 360^\circ \Rightarrow 112^\circ + 138^\circ + \hat{D} + \hat{C} = 360^\circ \Rightarrow \hat{D} + \hat{C} = 110^\circ$$

از طرف دیگر چون طول مماس‌های رسم شده از هر نقطه بر یک دایره برابرند، پس

$$CM = CN \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{N}_1, \quad DN = DP \Rightarrow \hat{N}_2 = \hat{P}_2$$

در ضمن مجموع زاویه‌های داخلی دو مثلث MNC و DPN روی هم برابر

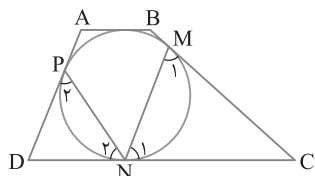
360° است. بنابراین

$$\hat{D} + \hat{C} + \hat{P}_2 + \hat{N}_2 + \hat{M}_1 + \hat{N}_1 = 360^\circ$$

$$110^\circ + 2\hat{N}_2 + 2\hat{N}_1 = 360^\circ \Rightarrow \hat{N}_1 + \hat{N}_2 = 125^\circ$$

بنابراین با توجه به شکل،

$$\hat{N}_1 + \hat{N}_2 + \hat{MNP} = 180^\circ \Rightarrow 125^\circ + \hat{MNP} = 180^\circ \Rightarrow \hat{MNP} = 55^\circ$$



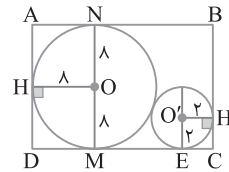
۳۵۱ ۲) مطابق شکل قطر دایره بزرگ‌تر برابر عرض مستطیل است، پس

$BC = 16$. از طرف دیگر ME مماس مشترک خارجی دو دایره است. پس طول

آن برابر $2\sqrt{8 \times 2} = 8$ است. در ضمن چهارضلعی‌های $O'H'DM$ و $O'H'CE$

به ترتیب مربع‌هایی به اضلاع ۸ و ۲ هستند. پس $CE = 2$ و $DM = 8$.

بنابراین $2(DC + BC) = 2(8 + 8 + 2 + 16) = 68$ محیط مستطیل



۳۵۲ ۴) نقطه M روی AB است. با فرض $MA = 3x$ و $MB = 2x$

نتیجه می‌گیریم $AB = 5 \Rightarrow 2x + 3x = 5 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow MB = 2, AM = 3$

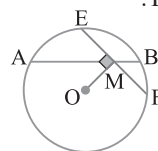
از طرف دیگر کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M وتر عمود بر OM است. اگر

وتر گذرنده از M و عمود بر OM باشد، آن گاه M وسط EF است. اکنون با

استفاده از رابطه‌های طولی در دایره،

$$ME \times MF = MB \times MA \Rightarrow ME^2 = 2 \times 3 = 6 \Rightarrow ME = \sqrt{6}$$

بنابراین $EF = 2ME = 2\sqrt{6}$.



۳۵۳ ۳) همواره طول مماس مشترک خارجی دو دایره بزرگ‌تر از طول

مماس مشترک داخلی آنها است (در صورت وجود مماس مشترک). بنابر

فرض سؤال می‌نویسیم:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{2}$$

$$\text{طول مماس مشترک داخلی}$$

$$\frac{\sqrt{OO'^2 - (r-r')^2}}{\sqrt{OO'^2 - (r+r')^2}} = \sqrt{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{OO'^2 - (3-2)^2}{OO'^2 - (3+2)^2} = 2$$

$$OO'^2 - 1 = 2OO'^2 - 25 \Rightarrow OO'^2 = 49 \Rightarrow OO' = 7$$

۳۵۴ ۴) دو زاویه B و D مساوی‌اند، زیرا

دو زاویه روبه‌رو در متوازی‌الا

در ضمن دو زاویه M_1 و B محاطی روبه‌رو به

کمان AC هستند. پس مساوی‌اند. در نتیجه



$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{D} \\ \hat{M}_1 = \hat{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{D} \Rightarrow MC = DC = 3 + 5 = 8$$

از طرف دیگر با استفاده از رابطه‌های طولی در دایره،

$$DN \times DC = DA \times DM \Rightarrow 3 \times 8 = 2 \times DM \Rightarrow DM = 12$$

بنابراین $\text{محیط MDC} = MD + MC + DC = 12 + 8 + 8 = 28$

۳۵۵ ۴) پاره‌خط AB را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه دیگری مثل

C قطع کند. با استفاده از رابطه‌های طولی در دایره،

$$AT^2 = AB \times AC \Rightarrow 10^2 = 5AC \Rightarrow AC = 20 \Rightarrow BC = 20 - 5 = 15$$

اکنون اگر عمود OH را از مرکز O بر وتر BC

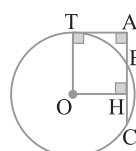
وارد کنیم، این وتر نصف می‌شود. پس

$$BH = \frac{BC}{2} = \frac{15}{2}$$

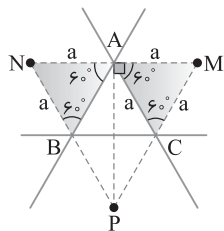
در ضمن چهارضلعی $OTAH$

مستطیل است. بنابراین شعاع OT

برابر AH است:



$$R = OT = AH = AB + BH = 5 + \frac{15}{2} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$$



۳۶۴ ۱ از شکل زیر استفاده می‌کنیم. توجه کنید که چهارضلعی

$OH'AH''$ مربع است، پس $AH' = AH'' = r$. در نتیجه

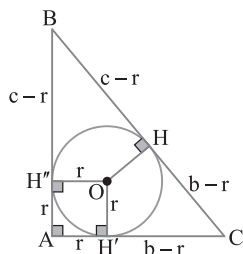
$$BH'' = AB - AH'' = c - r, \quad CH' = AC - AH' = b - r$$

از طرف دیگر، چون مماس‌های رسم شده بر دایره از یک نقطه، مساوی‌اند، پس

$$BH = BH'' = c - r \quad \text{و} \quad CH = CH' = b - r$$

$$BC = a \Rightarrow BH + CH = a \Rightarrow c - r + b - r = a$$

در نتیجه $b + c = 2r + a$.



۳۶۵ ۳ می‌دانیم مساحت و محیط مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع

a به ترتیب برابر است با $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ و $2P = 3a$. اکنون با توجه به رابطه

$$r = \frac{S}{P} \quad \text{می‌توان نوشت} \quad r = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{3a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6} a$$

۳۶۶ ۴ شعاع دایره محاطی داخلی مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع

a برابر $\frac{\sqrt{3}}{6} a$ است. چون $a = m - 4$ ، پس $r = \frac{\sqrt{3}}{6} (m - 4)$. اکنون اگر

طول ضلع مربع محاط در این دایره را b فرض کنیم، آن‌گاه

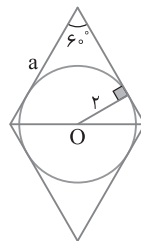
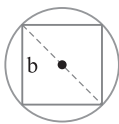
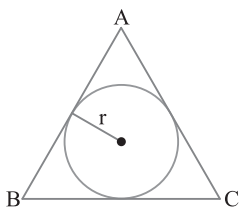
$$\sqrt{2}b = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{6} (m - 4) = \sqrt{2}b$$

پس $b = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} (m - 4)$. مساحت این مربع برابر b^2 است. در نتیجه

$$\frac{1}{6} (m - 4)^2 = \frac{m}{2} + 1 \Rightarrow m^2 - 8m + 16 = 3m + 6$$

$$m^2 - 11m + 10 = 0 \Rightarrow (m - 10)(m - 1) = 0$$

در نتیجه $m = 1$ یا $m = 10$. چون $m > 4$ ، پس $m = 10$ جواب است.



۳۵۹ ۴ می‌دانیم شعاع دایره محاطی هر

چندضلعی محیطی با مساحت S و محیط $2P$ برابر

است با $r = \frac{S}{P}$. اگر a طول ضلع لوزی باشد، آن‌گاه

$$a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \times \sin 60^\circ}{2a} = \frac{a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2a}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$S = a^2 \sin 60^\circ = \frac{64}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{32\sqrt{3}}{3}$$

۳۶۰ ۳ اگر O نقطه تلاقی قطرهای مستطیل $ABCD$ باشد، آن‌گاه چون

زاویه A قائمه است، پس BD قطر دایره است. با استدلالی مشابه نتیجه می‌شود

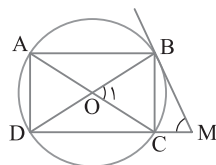
AC قطر دایره است. بنابراین نقطه تلاقی قطرهای مستطیل $ABCD$ ، یعنی O

مرکز دایره است. از طرف دیگر، مثلث BMC قائم‌الزاویه است. چون $\angle BMC = 65^\circ$

پس $\angle CBM = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$. زاویه $\angle CBM$ زاویه ظلی روبه‌رو به کمان BC

است، پس $\angle BOC = 50^\circ$. در ضمن زاویه $\angle O_1$ زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان BC است.

پس $\angle O_1 = 50^\circ$ ، یعنی اندازه زاویه حاده بین دو قطر مستطیل 50° است.



۳۶۱ ۴ هر n ضلعی منتظم در یک دایره محاط است. یعنی دایره‌ای از

رأس‌های آن می‌گذرد، به طوری که دایره به n قسمت مساوی تقسیم می‌شود

و اندازه هر قسمت برابر $\frac{360^\circ}{n}$ است. زاویه بین دو قطر متوالی کوچک‌ترین

زاویه بین دو قطر است و این زاویه محاطی روبه‌رو به کمان $\frac{360^\circ}{n}$ است، پس اندازه

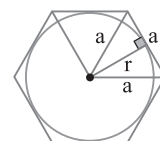
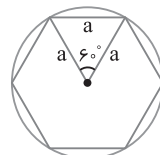
آن $\frac{180^\circ}{n}$ است. بنابراین $\frac{180^\circ}{n} = 15^\circ$ زاویه بین دو قطر متوالی

۳۶۲ ۱ در شش ضلعی منتظم به طول ضلع a ، اندازه شعاع دایره

محیطی برابر a است (شکل سمت چپ را ببینید). پس $R = a$ ، از طرف دیگر

اندازه شعاع دایره محاطی آن برابر $\frac{\sqrt{3}}{2} a$ است (شکل سمت راست را ببینید).

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} a \quad \text{پس} \quad \frac{r}{R} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



۳۶۳ ۳ در شکل، P و N ، M مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی مثلث

متساوی‌الاضلاع ABC هستند. توجه کنید که مثلث AMC متساوی‌الاضلاع

است. پس $AM = a$. به طور مشابه $AN = a$. در نتیجه $MN = 2a$ ، با

استدلالی مشابه نتیجه می‌شود $MP = NP = 2a$. بنابراین مثلث MNP

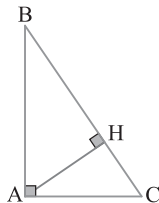
مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $2a$ است و مساحت آن برابر است با

$$S_{MNP} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2a)^2 = \sqrt{3} a^2$$

۳۷۱ (۱) در مثلث قائم الزاویه، شعاع دایره محیطی نصف وتر است:

$$R = \frac{BC}{2}, \quad R' = \frac{AB}{2}, \quad R'' = \frac{AC}{2}$$

$$R + R' + R'' = \frac{BC + AB + AC}{2} = \frac{2P}{2} = P \quad \text{بنابراین}$$



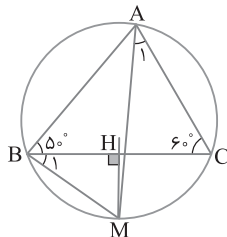
۳۷۲ (۲) دایره محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. نیمساز زاویه A از

وسط کمان BC عبور می‌کند. از طرف دیگر عمود منصف ضلع BC نیز از وسط کمان BC می‌گذرد. بنابراین نقطه تلاقی عمود منصف BC و نیمساز زاویه داخلی A (نقطه M) وسط کمان BC است. چون

$$\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ \quad \text{پس} \quad \hat{A} = 180^\circ - (50^\circ + 60^\circ) = 70^\circ$$

زاویه A_1 و B_1 هر دو محاطی روبه‌رو به کمان MC هستند. پس مساوی‌اند.

$$\text{بنابراین} \quad \hat{MBC} = \hat{A}_1 = 35^\circ$$



۳۷۳ (۳) فرض کنید O مرکز دایره محاطی داخلی مثلث قائم الزاویه

ABC و شعاع آن باشد. از مرکز دایره به نقطه‌های تماس H و H' وصل می‌کنیم (شکل زیر را ببینید). در این صورت چهارضلعی AHOH' مربعی به طول ضلع r است. می‌دانیم اگر S مساحت مثلث و 2P محیط آن باشد،

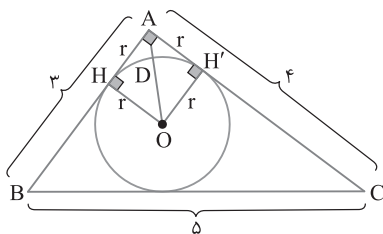
$$\text{آن‌گاه} \quad r = \frac{S}{P} \quad \text{بنابراین در مثلث ABC,} \quad \frac{r}{P} = \frac{S}{P} = \frac{\frac{1}{2}(3)(4)}{\frac{3+4+5}{2}} = \frac{6}{6} = 1, \quad \text{اگر از}$$

O به رأس A وصل کنیم تا دایره محاطی داخلی را در نقطه D قطع کند، آن‌گاه طول AD برابر فاصله A تا نزدیک‌ترین نقطه دایره است. بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث OAH،

$$OA^2 = AH^2 + OH^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow OA = \sqrt{2}$$

بنابراین

$$AD = OA - OD \xrightarrow{OD=r=1} AD = \sqrt{2} - 1$$



۳۶۷ (۲) می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a برابر

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \quad \text{است. اکنون می‌توان از رابطه} \quad r_a = \frac{S}{P-a} \quad \text{که در آن S مساحت}$$

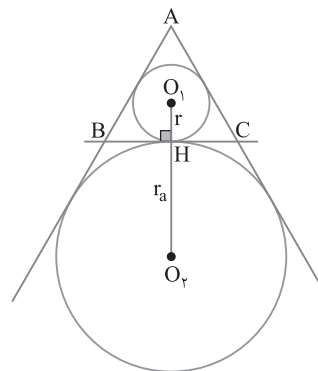
مثلث و P نصف محیط مثلث است، شعاع دایره محاطی خارجی را به دست آورد:

$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{3a}{2} - a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

۳۶۸ (۴) از شکل زیر استفاده می‌کنیم.

$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{3a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6} a, \quad r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$\text{در نتیجه} \quad O_1 O_2 = r + r_a = \frac{\sqrt{3}}{6} a + \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{2\sqrt{3}}{3} a$$



۳۶۹ (۱) عبارت $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$ را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{\frac{S}{P-a}} + \frac{1}{\frac{S}{P-b}} + \frac{1}{\frac{S}{P-c}} = \frac{P-a+P-b+P-c}{S}$$

$$= \frac{3P - (a+b+c)}{S} = \frac{3P - 2P}{S} = \frac{P}{S} = \frac{1}{\frac{S}{P}} = \frac{1}{r} = \frac{1}{\frac{1}{4}P}$$

۳۷۰ (۱) راه حل اول با توجه به شکل زیر، ضلع کوچک‌ترین ضلع

است، اگر $AH = x$ و $BH = y$ ، آن‌گاه $x + y = 8$ و چون طول مماس‌های

رسم شده از یک نقطه بر دایره برابرند، پس

$$9 - x = 13 - y \Rightarrow y - x = 4$$

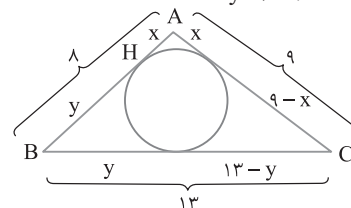
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ y - x = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 6 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

راه حل دوم توجه کنید که $x = AH = P - a = \frac{8+9+13}{2} - 13 = 15 - 13 = 2$

$$y = BH = P - b = \frac{8+9+13}{2} - 9 = 15 - 9 = 6$$

و

اکنون می‌توان نوشت $\frac{x}{y} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.



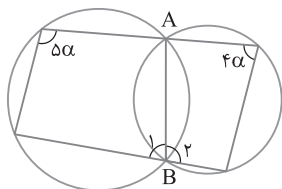
۳۷۷ ۲ با توجه به شکل زیر، وتر AB را رسم می‌کنیم. در این صورت دو چهارضلعی محاطی در دو دایره ایجاد می‌شود. در هر چهارضلعی محاطی زاویه‌های مقابل مکمل یکدیگرند. بنابراین

$$\Delta\alpha + \hat{B}_1 = 180^\circ, \quad 4\alpha + \hat{B}_2 = 180^\circ$$

از جمع طرفین تساوی‌های به دست آمده نتیجه می‌گیریم

$$9\alpha + \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 360^\circ \xrightarrow{\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ} 9\alpha = 180^\circ$$

در نتیجه $\alpha = 20^\circ$.



۳۷۸ ۲ از N به B وصل می‌کنیم. در این صورت زاویه ANB

محاطی روبه‌رو به قطر AB است. پس $\angle ANB = 90^\circ$. در نتیجه نقطه M از دو ضلع زاویه HBN به یک فاصله است (چون $MH = MN$). پس MB نیمساز زاویه HBN است، یعنی $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$. از طرف دیگر چهارضلعی

$MNBH$ محاطی است، بنابراین

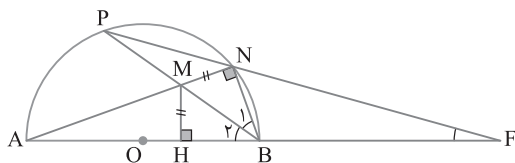
$$\hat{HBN} + \hat{NMH} = 180^\circ \Rightarrow \hat{HBN} + 118^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{HBN} = 62^\circ$$

پس $\hat{B}_2 = 31^\circ$. زاویه B_2 محاطی روبه‌رو به کمان AP است، پس

$$\widehat{AP} = 62^\circ. \text{ در ضمن در مثلث قائم‌الزاویه } ABN \text{ چون } \angle ABN = 62^\circ,$$

پس $\hat{A} = 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$. بنابراین اندازه کمان BN برابر $2\hat{A}$ ، یعنی 56° مساوی است. بنابراین اندازه زاویه F که بین امتداد دو وتر دایره قرار

$$\text{دارد برابر است با } \hat{F} = \frac{\widehat{AP} - \widehat{BN}}{2} = \frac{62^\circ - 56^\circ}{2} = 3^\circ$$



۳۷۹ ۴ با توجه به شکل زیر چهارضلعی $ABCD$ محاطی است، پس

دو زاویه مقابل آن مکمل یکدیگرند: $\hat{A} + \hat{C}_2 = 180^\circ$. در ضمن

$$\hat{C}_1 = \hat{A} \xrightarrow{\hat{A} = 3x} \hat{C}_1 = 3x \quad \text{بنابراین} \quad \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ$$

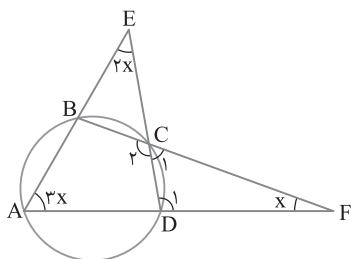
از طرف دیگر، زاویه D_1 زاویه خارجی مثلث ADE است، پس

$$\hat{D}_1 = \hat{A} + \hat{E} = 3x + 2x = 5x$$

چون مجموع زاویه‌های داخلی مثلث DCF برابر 180° است، پس

$$\hat{D}_1 + \hat{C}_1 + \hat{F} = 180^\circ \Rightarrow 5x + 3x + x = 180^\circ \Rightarrow 9x = 180^\circ$$

بنابراین $x = 20^\circ$.



۳۷۴ ۲ ثابت می‌کنیم $AM = AP = \frac{\text{محیط}(\text{مثلث } ABC)}{2}$. فرض

کنید $BN = x$ ، پس $CN = a - x$. از طرف دیگر طول مماس‌های رسم شده بر دایره از یک نقطه برابرند. پس $BM = BN = x$ و $CP = CN = a - x$.

در نتیجه

$$AM = AB + BM = AB + BN = c + x$$

$$AP = AC + CP = AC + CN = b + a - x$$

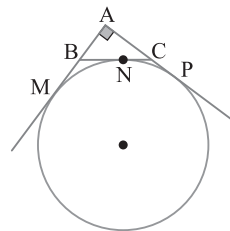
از جمع طرفین دو برابری بالا نتیجه می‌گیریم $AM + AP = a + b + c$. چون

$$AM = AP \quad \text{پس} \quad 2AM = a + b + c$$

$$AM = \frac{a + b + c}{2} = P \Rightarrow AM = \text{نصف محیط}$$

در مثلث ABC بنابر قضیه فیثاغورس، $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 10$.

$$\text{نتیجه} \quad 2P = a + b + c = 24 \quad \text{بنابراین} \quad P = \frac{24}{2} = 12 \quad AM = P = 12$$



۳۷۵ ۲ دایره محاطی داخلی مثلث قائم‌الزاویه ABC را رسم می‌کنیم

(شکل زیر را ببینید). اگر از مرکز دایره به نقطه‌های تماس H و H' وصل

کنیم، آن‌گاه چهارضلعی $AHOH'$ مربع به طول ضلع r است. چون طول

مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره برابرند، پس

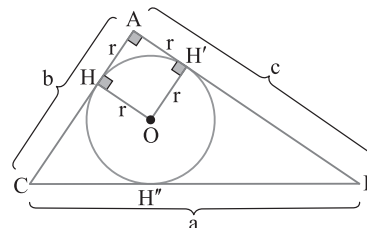
$$BH'' = BH' = c - r, \quad CH'' = CH = b - r$$

چون $BC = BH'' + CH''$ ، بنابراین

$$a = c - r + b - r \Rightarrow 2r = b + c - a$$

$$2r = a + b + c - 2a \Rightarrow 2r = 2P - 2a$$

یعنی $r = P - a$.



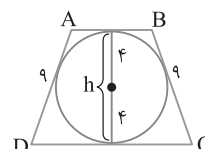
۳۷۶ ۳ اگر $ABCD$ دوزنقه متساوی‌الساقین محیط بر دایره‌ای به

شعاع ۴ باشد، آن‌گاه طول ارتفاع دوزنقه برابر قطر دایره محاطی، یعنی ۸ است.

در ضمن در چهارضلعی محاطی مجموع طول ضلع‌های مقابل برابر یکدیگرند،

پس $AB + CD = AD + BC = 9 + 9 = 18$ ، بنابراین

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} h (AB + CD) = \frac{1}{2} (8) (18) = 72$$



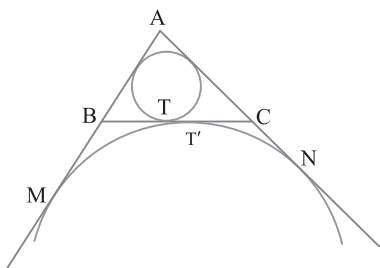
۳۸۳ (۲) در شکل، دایره محاطی داخلی و بخشی از دایره محاطی خارجی نظیر ضلع بزرگ‌تر BC را رسم کرده‌ایم. در این صورت TT' مماس مشترک داخلی این دو دایره است. اگر P نصف محیط مثلث ABC باشد، آن‌گاه $AM=AN=P$ ، $BT=P-b$ و $CT'=CN$ و $CT'=CN$ بنابرین

$$P = \frac{5+6+7}{2} = 9, \quad BT = P - b = 9 - 6 = 3$$

$$CT' = CN = AN - AC = P - AC = 9 - 6 = 3$$

$$TT' = BC - BT - CT' = 7 - 3 - 3 = 1$$

پس



۳۸۴ (۲) کوچک‌ترین ارتفاع مثلث بر بزرگ‌ترین ضلع آن وارد می‌شود. پس ۱۲ طول ارتفاع وارد بر وتر است، بنابراین با توجه به شکل زیر، $h_a = 12$. بزرگ‌ترین ارتفاع مثلث بر کوچک‌ترین ضلع آن وارد می‌شود. در شکل، ضلع AB را بزرگ‌تر از AC انتخاب کرده‌ایم. پس $h_b = 20$. اکنون بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$\triangle ABH: AB^2 = BH^2 + AH^2 \Rightarrow 20^2 - 12^2 = BH^2 \Rightarrow BH^2 = 256$$

$$BH = 16$$

$$\triangle ABC: AH^2 = BH \times CH \Rightarrow 12^2 = 16 \times CH \Rightarrow CH = 9$$

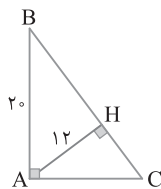
$$\triangle ACH: AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow AC^2 = 12^2 + 9^2 = 225$$

$$AC = 15 \Rightarrow h_c = 15$$

از طرف دیگر،

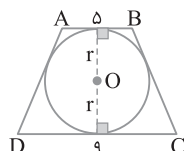
$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{15} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{5+3+4}{60} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{12}{60} = \frac{1}{r} \Rightarrow r = 5$$



۳۸۵ (۲) هر دوزنقه متساوی‌الساقین، محاطی است. پس این دوزنقه متساوی‌الساقین هم محاطی و هم محیطی است و مساحت این نوع دوزنقه مساوی حاصل ضرب میانگین حسابی در میانگین هندسی دو قاعده است. اگر a و b طول دو قاعده این دوزنقه باشند، آن‌گاه

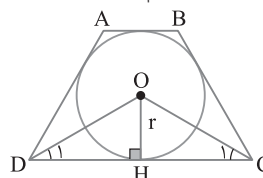
$$S = \frac{1}{2}(a+b)\sqrt{ab} = \frac{1}{2}(9+5)\sqrt{9 \times 5} = 7 \times 3\sqrt{5} = 21\sqrt{5}$$



۳۸۰ (۲) در دوزنقه متساوی‌الساقین محیطی، خطی که مرکز دایره محاطی را به رأسی از دوزنقه وصل می‌کند، نیمساز زاویه این رأس است. زیرا مرکز دایره محاطی هر چهارضلعی محیطی نقطه تلاقی نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن چهارضلعی است.

در نتیجه با توجه به شکل زیر، $\hat{C}_1 = \hat{C} = 30^\circ$ و $\hat{D}_1 = \hat{D} = 30^\circ$. بنابراین مثلث ODC متساوی‌الساقین است. در ضمن OH شعاع وارد بر نقطه تماس است، پس بر CD عمود است. بنابراین در مثلث متساوی‌الساقین ODC، OH هم ارتفاع و هم میانه است، در نتیجه $DH = \frac{CD}{2}$. از طرف دیگر،

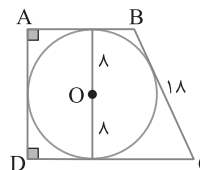
$$\tan \hat{D}_1 = \frac{OH}{DH} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{r}{\frac{CD}{2}} \Rightarrow CD = \frac{2r}{\tan 30^\circ} = 2r\sqrt{3}$$



۳۸۱ (۳) در شکل زیر، دوزنقه قائم‌الزاویه ABCD بر دایره به شعاع ۸ و مرکز O محیط است. پس ساق قائم این دوزنقه برابر ۱۶ است، یعنی $AD = 16$. از طرف دیگر دوزنقه ABCD محیطی است، پس مجموع اضلاع مقابلش برابرند: $AB + CD = AD + BC = 16 + 18 = 34$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AD(AB + CD) = \frac{1}{2}(16)(34) = 272$$

بنابرین



۳۸۲ (۲) در شکل، O مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ABC است. طول

وتر BC برابر $\sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ است. اگر S مساحت P و نصف محیط مثلث ABC باشد، آن‌گاه

$$r = OH = \frac{S}{P} = \frac{\frac{1}{2}(4\sqrt{2})(3\sqrt{2})}{\frac{3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2}} = \frac{24}{12\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

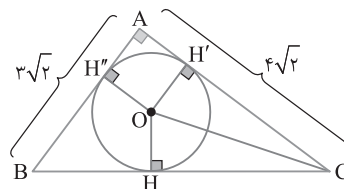
از طرف دیگر،

$$CH = P - c = \frac{3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2} - 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

بنابرین در مثلث قائم‌الزاویه OHC،

$$OC^2 = OH^2 + CH^2 = (\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 2 + 18 = 20 \Rightarrow OC = 2\sqrt{5}$$

به طور مشابه $BH = P - b = 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ و $BO = \sqrt{BH^2 + OH^2} = \sqrt{10}$. در ضمن چهارضلعی $AH'OH''$ مربع و قطر آن است. پس $AO = OH'\sqrt{2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$. بنابراین $CO = 2\sqrt{5}$ بیشترین فاصله مرکز دایره محاطی داخلی از رأس‌های مثلث است.



۳۸۹ ۲ چون بازتاب تبدیل طولها است، پس تصویر مثلث ABC با خودش

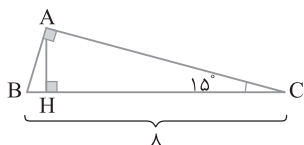
همنهشت و مساحتش با مساحت مثلث ABC برابر است. از برابری های

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ, \hat{A} = 90^\circ, \hat{C} = \frac{1}{6}\hat{A} \text{ و } \hat{B} = 5\hat{C} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

نتیجه می گیریم $\hat{C} = 15^\circ$ و $\hat{B} = 75^\circ$. در مثلث قائم الزاویه، اگر یک زاویه 15° باشد، ارتفاع وارد

بر وتر $\frac{1}{4}$ طول وتر است، پس $AH = \frac{1}{4}BC = \frac{1}{4} \times 8 = 2$. اکنون می نویسیم

$$S_{A'B'C'} = S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \times AH = \frac{1}{2} \times 8 \times 2 = 8$$

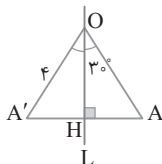


۳۹۰ ۱ راه حل اول چون O روی خط L است، $OA' = OA$ بازتاب OA است و چون

بازتاب ایزومتري است، $OA = OA'$. در بازتاب اندازه زاویه حفظ می شود، پس

بنابراین مثلث OAA' در رأس O متساوی الساقین است $\angle A'OH = \angle AOH = 30^\circ$

و $\angle AOA' = 60^\circ$. پس این مثلث متساوی الاضلاع است و $AA' = OA' = OA = 4$



راه حل دوم بنابر تعریف بازتاب، L عمود منصف AA' است، پس

$$A'H = AH = \frac{AA'}{2}$$

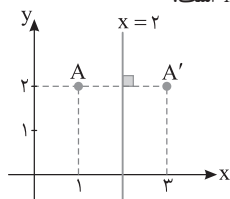
عمود منصف، $OA = OA' = 4$. اکنون با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم الزاویه،

$$\triangle OAH: \angle AOH = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{OA}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

بنابراین $AA' = 2AH = 4$

۳۹۱ ۲ شکل مربوط به مسئله را رسم می کنیم. با توجه به شکل تصویر

نقطه A نقطه $A'(3, 2)$ است.



۳۹۲ ۳ تصویر نقطه تلاقی خط $1+3y=2x$ با محور بازتاب $x+y=3$ ،

خودش است. در نتیجه

$$\begin{cases} 1+3y=2x \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=1 \\ 3x+3y=9 \end{cases} \Rightarrow 5x=10 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=1$$

۳۹۳ ۱ خط $y=2x-1$ با محور بازتاب، یعنی خط $y=2x+m$ موازی

است، پس باید تصویرش موازی خودش باشد، یعنی باید دو خط $y=(a+1)x-3a$

و $y=2x-1$ نیز با هم موازی باشند. بنابراین $a+1=2$ ، یعنی $a=1$.

۳۹۴ ۳ بنابر تعریف بازتاب، خط d عمود منصف پاره خط AB است. پس

شیب خط d عکس و قرینه شیب AB است و از نقطه M وسط AB می گذرد:

$$m_{AB} = \frac{3-5}{1+1} = -1 \Rightarrow m_d = 1, \quad M = \frac{A+B}{2} = (2, 4)$$

$$d \text{ معادله خط } y-4=1(x-2) \Rightarrow y-x=2$$

۳۸۶ ۳ با توجه به تعریف بازتاب، حکم های (الف) و (ب) درست هستند.

اگر خط L بر خط d عمود باشد، آن گاه بازتاب L بر خودش منطبق می شود،

پس شیب خط حفظ می شود و اگر نقطه ای روی خط d باشد، بازتاب آن نقطه

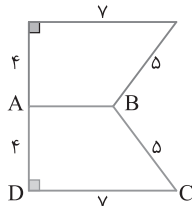
خودش است. دو نقطه A و B بازتاب یکدیگر نسبت به خط d هستند هرگاه d

عمود منصف AB باشد. اگر خط L با d موازی باشد، بازتاب خط L موازی d

است. در صورتی بازتاب L بر خودش منطبق است که L بر خط d منطبق باشد.

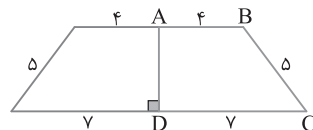
۳۸۷ ۳ بازتاب دوزنقه ABCD نسبت به خط AB شکلی به صورت

زیر است، که محیط این شکل برابر $4+4+7+7+5+5=32$ است.



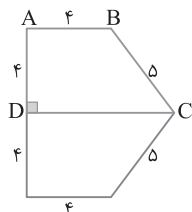
بازتاب دوزنقه ABCD نسبت به خط AD شکلی به صورت زیر است، که

محیط این شکل $4+4+5+5+7+7=32$ است.



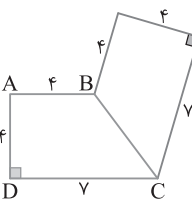
بازتاب دوزنقه ABCD نسبت به خط DC شکلی به صورت زیر است، که

محیط این شکل $4+4+4+4+5+5=26$ است.



بازتاب دوزنقه ABCD نسبت به خط BC شکلی به صورت زیر است، که

محیط این شکل $4+4+4+4+7+7=30$ است.



بنابراین شکلی که از بازتاب نسبت به خط DC به دست می آید کمترین محیط را دارد.

۳۸۸ ۴ بنابر تعریف بازتاب، خط d عمود منصف پاره خط AA' است. چون

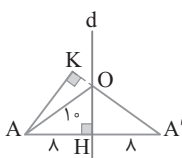
$AA' = 16$ ، پس مطابق شکل زیر، $AH = A'H = 8$. در ضمن مثلث OAA'

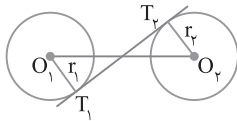
متساوی الساقین است و باید طول عمود AK را به دست آوریم، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$\triangle OAH: OH^2 = OA^2 - AH^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow OH = 6$$

$$S_{OAA'} = \frac{1}{2}OH \times AA' = \frac{1}{2}AK \times OA' \Rightarrow 6 \times 16 = AK \times 10$$

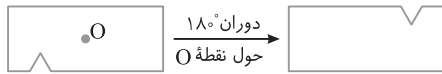
$$AK = \frac{6 \times 16}{10} = 9.6$$





انتقال یافته هر خط با خودش موازی است و در بین گزینه‌ها تنها خط $2y+3x=7$ با خط $2y+3x=5$ موازی است.

اگر شکل داده شده را حول هر نقطه دلخواه در صفحه، به اندازه 180° دوران دهیم، شکل گزینه (۴) به دست می‌آید.



در حالت کلی $R(R(R...R(A)))$ یعنی نقطه A را n مرتبه

حول O به اندازه $n\alpha$ دوران دهیم. چون $R(R(R(A)))=A$ پس $\alpha=36^\circ$ ، یعنی $\alpha=12^\circ$.

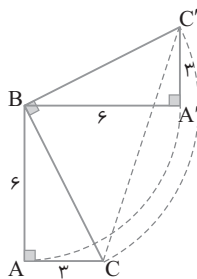


هر نقطه روی نیمسازهای زاویه بین دو خط مرکز دورانی است که در آن تصویر خط d است (شکل مقابل را ببینید).

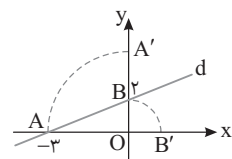
دوران و انتقال تبدیل‌های طولی هستند، پس مساحت تصویر این مثلث برابر مساحت شکل اولیه است. $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{3})^2=3\sqrt{3}$.

در شکل زیر مثلث $A'BC'$ دوران یافته مثلث ABC به مرکز B با زاویه 90° است. می‌دانیم دوران تبدیلی طولی است، پس $A'B=AB=6$ و $A'C'=AC=3$ زاویه بین هر خط و دوران یافته آن برابر زاویه دوران است. پس BC بر BC' عمود است، یعنی مثلث BCC' قائم‌الزاویه است.

درضمن $BC=BC'=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ بنابراین $\triangle BCC': CC'^2=BC^2+BC'^2=45+45=90 \Rightarrow CC'=3\sqrt{10}$.



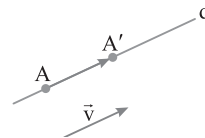
دوران یافته نقطه A به مرکز O با زاویه 90° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت نقطه $A'(0,3)$ و دوران یافته نقطه B به مرکز O با زاویه 90° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت نقطه $B'(2,0)$ است. اکنون برای به دست آوردن تصویر d معادله خط گذرا از نقاط A' و B' را می‌نویسیم:



$$m_{A'B'} = \frac{y_{A'} - y_{B'}}{x_{A'} - x_{B'}} = \frac{3-0}{0-(-3)} = -\frac{3}{3} = -1$$

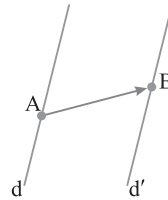
$$d \text{ تصویر } y-0 = -\frac{3}{1}(x-2) \Rightarrow y = -\frac{3}{1}x + 6 \Rightarrow 3x + y = 6$$

اگر خط d با بردار انتقال $\vec{v}$ موازی باشد، آن‌گاه انتقال یافته هر نقطه مثل A از خط d تحت بردار $\vec{v}$ نقطه‌ای مثل A' روی خط d است، پس در این حالت انتقال یافته خط d بر خودش منطبق می‌شود. البته اگر بردار انتقال بردار صفر باشد، تصویر خط d تحت این انتقال بر خودش منطبق می‌شود، ولی لازم نیست حتماً بردار انتقال بردار صفر باشد.

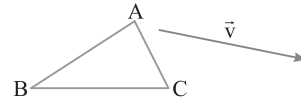


انتقال شیب خط را حفظ می‌کند، پس خط d با انتقال یافته آن، یعنی خط Δ موازی است. البته ممکن است d بر Δ در حالت خاص منطبق شود که در این حالت هم d با Δ موازی است.

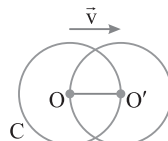
اگر دو خط متقاطع باشند، هیچ برداری نمی‌تواند آن‌ها را به یکدیگر نظیر کند، اما اگر دو خط موازی باشند، نامتناهی بردار وجود دارد که آن‌ها را به یکدیگر تصویر می‌کند. اگر A نقطه‌ای دلخواه روی خط d و B نقطه‌ای دلخواه روی خط d' باشد، آن‌گاه خط d' تصویر d تحت انتقال با بردار $\vec{AB}$ است.



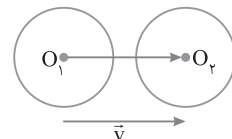
انتقال تبدیلی طولی است، پس مثلث ABC با تصویرش تحت تبدیلی انتقال همنهشت است. بنابراین مثلث ABC و تصویرش هم‌مساحت هستند.



در این سؤال جهت بردار $\vec{v}$ تأثیری در راه حل ندارد. اندازه بردار $\vec{v}$ با شعاع دایره برابر است. پس انتقال یافته مرکز O تحت بردار $\vec{v}$ نقطه O' روی دایره C است. اگر به مرکز O' و شعاع ۸ دایره‌ای رسم کنیم، این دایره متقاطع با دایره C و انتقال یافته دایره C خواهد بود.



اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آن‌گاه انتقال یافته یکدیگرند و بردار انتقال O_1O_2 است.

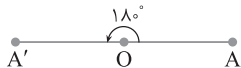


دقت کنید که طول بردار انتقال برابر طول پاره خط O_1O_2 در شکل زیر است. از طرف دیگر،

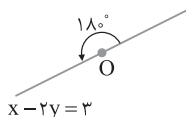
$$T_1T_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - (r_1 + r_2)^2} \xrightarrow{r_1=r_2=3} \lambda = \sqrt{O_1O_2^2 - (3+3)^2}$$

$$64 = O_1O_2^2 - 36 \Rightarrow O_1O_2^2 = 100 \Rightarrow O_1O_2 = 10$$

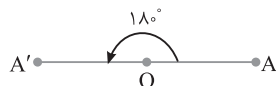
یعنی طول بردار انتقال برابر ۱۰ است.



۴۱۳ توجه کنید که O روی خط $x-2y=3$ است. پس تصویر این خط حول O به اندازه 18° خودش است، یعنی $x-2y=3$ معادله خط تصویر



۴۱۴ اگر نقطه A' دوران یافته 18° نقطه A به مرکز O باشد، آن گاه $OA=OA'$ و $\angle OAA'=18^\circ$. پس A' مجانس A به مرکز O با نسبت ۱- است و چون نسبت تجانس منفی است، پس این تجانس معکوس است.



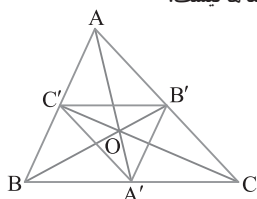
۴۱۵ نقاط A' و B' مجانس نقاط A و B به مرکز O با نسبت $\frac{4}{5}$

هستند. پس پاره خط A'B' مجانس پاره خط AB به مرکز O با نسبت $\frac{4}{5}$

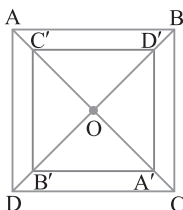
است، پس $\frac{A'B'}{AB} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{A'B'}{20} = \frac{4}{5} \Rightarrow A'B' = 16$



۴۱۶ چون نقطه های A', B' و C' وسط های ضلع های مثلث ABC هستند، پس مرکز تجانس O نقطه برخورد میانه های AA', BB' و CC' است. بنابر ویژگی نقطه برخورد میانه های مثلث نتیجه می گیریم $OA=2OA'$ ، $OB=2OB'$ و $OC=2OC'$. چون نقطه های A' و B' در دو طرف مرکز O قرار دارند، پس A' مجانس A' در تجانس به مرکز O با نسبت ۲- است. به همین ترتیب B' مجانس B' و C' مجانس C' به مرکز O با نسبت ۲- است. بنابراین مثلث ABC مجانس مثلث A'B'C' به مرکز O با نسبت ۲- است. توجه کنید که مثلث A'B'C' نیز مجانس مثلث ABC با نسبت تجانس $-\frac{1}{2}$ است که در گزینه ها نیست.

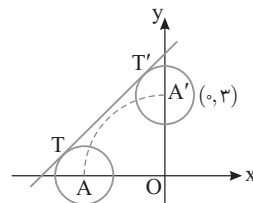


۴۱۷ چون نسبت تجانس $-\frac{3}{4}$ است، پس این تجانس معکوس و انقباض است. بنابراین مجانس این مربع، مربعی کوچک تر از آن است و درون مربع اول قرار می گیرد. مجانس مربع ABCD به مرکز O با نسبت $-\frac{3}{4}$ مربع A'B'C'D' است.



۴۰۹ اگر نقطه A را به مرکز O با زاویه 90° در جهت حرکت عقربه های ساعت دوران دهیم، به نقطه $A'(0,3)$ می رسمیم. دایره به مرکز A' و شعاع ۱ تصویر دایره اولیه است. طول خط المکرزین این دو دایره برابر است با $AA'=3\sqrt{2}$. پس طول مماس مشترک خارجی TT' برابر است با

$$TT' = \sqrt{AA'^2 - (R-R')^2} = \sqrt{18 - (1-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$



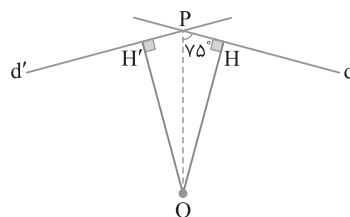
۴۱۰ راه حل اول از شکل زیر استفاده می کنیم. بنابر تعریف دوران، $\angle HOH' = \alpha$

اکنون توجه کنید که در چهارضلعی OHPH'،

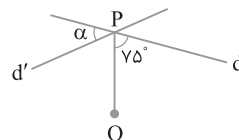
$$\angle HPH' = 180^\circ - \angle HOH' = 180^\circ - \alpha \quad (۱)$$

همچنین PO نیمساز زاویه HPH' است، در نتیجه با استفاده از برابری (۱)،

$$\angle OPH = \frac{1}{2} \angle HPH' = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}. \text{ پس } 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 75^\circ, \text{ یعنی } \alpha = 30^\circ.$$



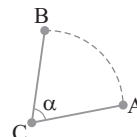
راه حل دوم می دانیم زاویه بین خط d و دوران یافته اش (d') برابر زاویه دوران است، البته آن زاویه ای که مرکز دوران درون آن نیست. O مرکز دوران است، پس روی نیمساز زاویه بین دو خط d و d' قرار دارد. بنابراین OP نیمساز زاویه بین دو خط d و d' است. در نتیجه $\alpha = 180^\circ - 2 \times 75^\circ = 30^\circ$.



۴۱۱ طول پاره خط AB برابر است با

$$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

از طرف دیگر چون B دوران یافته A به مرکز C است، پس بنابر تعریف دوران $CA=CB$. بنابر فرض سؤال $CA=2\sqrt{2}$ ، بنابراین مثلث ABC مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $2\sqrt{2}$ است. پس $\alpha = 60^\circ$.



۴۱۲ اگر $A'(1,-3)$ دوران یافته $A(-2,1)$ به مرکز O با زاویه

180° باشد، آن گاه O وسط AA' است. پس $O = \frac{A+A'}{2} = (-\frac{1}{2}, -1)$

اگر دوران یافته نقطه B(2,1) به مرکز O با زاویه 180° نقطه B' باشد، نتیجه می گیریم O وسط BB' است. پس

$$O = \frac{B+B'}{2} \Rightarrow B' = 2O - B = 2(-\frac{1}{2}, -1) - (2, 1) = (-3, -3)$$

۴۲۱ ۴ مرکز تجانس مستقیم و O_1 مرکز تجانس معکوس است (شکل زیر را ببینید). توجه کنید که مثلث‌های O_1AB و O_1CD متساوی‌الاضلاع هستند، پس

$$O_1H_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

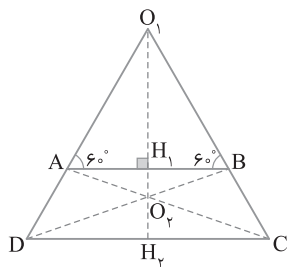
$$O_1H_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} CD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$$

$$H_1H_2 = O_1H_2 - O_1H_1 = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3} \quad \text{در نتیجه}$$

چون CD مجانس AB به مرکز O_1 است، پس $\frac{O_1H_2}{O_1H_1} = \frac{CD}{AB} = \frac{3}{2}$ ، یعنی

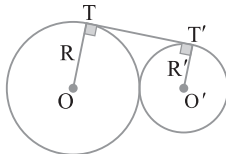
$$\frac{O_1H_2}{O_1H_1} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{پس} \quad \frac{O_1H_2}{\sqrt{3} - O_1H_1} = \frac{3}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{O_1H_2}{H_1H_2 - O_1H_1} = \frac{3}{2}$$

$$O_1O_2 = O_1H_2 - O_1H_1 = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3} \quad \text{اکنون می‌توان نوشت}$$



۴۲۲ ۳ دو دایره که فقط سه مماس مشترک دارند، مماس خارج‌اند (شکل زیر را ببینید). همچنین نسبت تجانس دو دایره برابر نسبت شعاع‌های آن‌هاست، پس $R' = 4$ و $R = 6$ در نتیجه $\frac{R'}{R} = \frac{2}{3}$ و $R + R' = 10$. طول مماس مشترک خارجی

$$TT' = 2\sqrt{6 \times 4} = 4\sqrt{6} \quad \text{بنابراین}$$



۴۲۳ ۱ در شکل $A'B'$ مجانس AB به مرکز O با نسبت $\frac{Y}{4}$ است.

باید مساحت قسمت رنگی را به دست آوریم. بنابر تعریف تجانس،

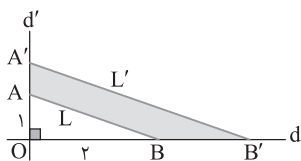
$$OA' = \frac{Y}{4} OA = \frac{Y}{4} (1) = \frac{Y}{4}, \quad OB' = \frac{Y}{4} OB = \frac{Y}{4} (2) = \frac{Y}{2}$$

پس

$$S_{\text{قسمت رنگی}} = S_{OA'B'} - S_{OAB}$$

$$= \frac{1}{2} (OA')(OB') - \frac{1}{2} (OA)(OB)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{4} \right) \left(\frac{Y}{2} \right) - \frac{1}{2} (1)(2) = \frac{Y^2}{16} - 1 = \frac{33}{16}$$

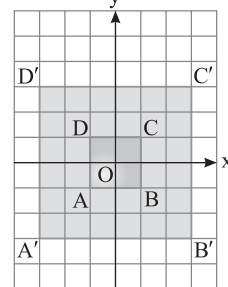


۴۱۸ ۲ راه‌حل اول چون مربع $ABCD$ مجانس $A'B'C'D'$ است، پس مربع $ABCD$ با مربع $A'B'C'D'$ با نسبت تشابه $|k|$ متشابه

$$|k| = \frac{AB}{A'B'} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow k = \pm \frac{1}{3}$$

است، بنابراین

توجه کنید که $k = \frac{1}{3}$ در گزینه‌ها هست.



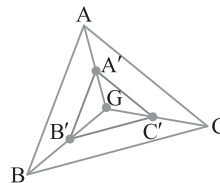
راه‌حل دوم با توجه به شکل، نقاط A, O, C, C' و A', O, C' روی یک خط هستند. بنابراین اگر تجانس را مستقیم در نظر بگیریم، A مجانس A' و C مجانس C' است، که در این حالت

$$OA = \frac{1}{3} OA', \quad OC = \frac{1}{3} OC'$$

و اگر تجانس را معکوس در نظر بگیریم، C مجانس A' و A مجانس C' است که در این حالت

$$OC = -\frac{1}{3} OA', \quad OA = -\frac{1}{3} OC'$$

بنابراین نسبت تجانس $k = \frac{1}{3}$ یا $k = -\frac{1}{3}$ است که $k = \frac{1}{3}$ در گزینه‌ها آمده است.



۴۱۹ ۲ نقطه G مرکز ثقل (محل

تلاقی میانه‌ها) در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است و مثلث $A'B'C'$ مجانس

مثلث ABC به مرکز G با نسبت $\frac{1}{2}$

است. پس مثلث $A'B'C'$ با مثلث

ABC با نسبت $\frac{1}{4}$ متشابه است. بنابراین

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow[\text{در صورت تفضیل}]{\text{تفاضل}} \frac{S_{ABC} - S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{4-1}{4}$$

$$\frac{S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} (4)^2 = 4\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \rightarrow \frac{S_{ABC} - S_{A'B'C'}}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{4}$$

$$S_{ABC} - S_{A'B'C'} = 3\sqrt{3}$$

۴۲۰ ۱ مجانس مربع $ABCD$ به

مرکز A با نسبت $\frac{5}{4}$ مربع $AB'C'D'$

است (شکل مقابل را ببینید). می‌دانیم مربع $AB'C'D'$ با مربع $ABCD$ با

نسبت تشابه $k = \frac{5}{4}$ متشابه است، پس

نسبت مساحت‌های این دو مربع برابر توان دوم نسبت تجانس است، پس

$$\frac{S_{AB'C'D'}}{S_{ABCD}} = \left(\frac{5}{4} \right)^2 = \frac{25}{16} \xrightarrow[\text{در صورت تفضیل}]{\text{تفاضل}} \frac{S_{AB'C'D'} - S_{ABCD}}{S_{ABCD}} = \frac{25-16}{16}$$

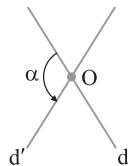
$$\frac{S_{AB'C'D'} - S_{ABCD} = 9}{16} \rightarrow \frac{18}{S_{ABCD}} = \frac{9}{16} \Rightarrow S_{ABCD} = 32$$



گزینه (۲) نادرست است چون دو مربع متشابه‌اند ولی لزومی ندارد مجانس هم باشند.
گزینه (۳) نادرست است، به عنوان مثال نقض، دوران جهت شکل را حفظ می‌کند ولی در حالت کلی شیب خط را حفظ نمی‌کند.

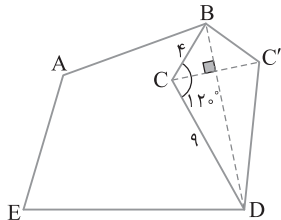
۴۲۸ (۳) دو خط موازی می‌توانند دوران یافته 180° یکدیگر باشند.
دو خط موازی تحت برداری که شروعش روی یکی از دو خط و پایانش روی خط دیگر باشد، انتقال یافته یکدیگر هستند.
دو خط موازی نسبت به خطی که موازی آن‌ها و به یک فاصله از آن‌هاست بازتاب هم هستند.
دو خط موازی می‌توانند مجانس یکدیگر در تجانس به مرکز هر نقطه دلخواه (به جز نقاط روی این دو خط) در صفحه باشند.

۴۲۹ (۳) در شکل زیر خط d' تصویر خط d تحت دوران حول نقطه O با زاویه دوران α است.



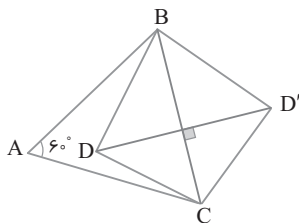
۴۳۰ (۲) بازتاب نقطه C را نسبت به خط BD نقطه C' می‌نامیم. چون بازتاب تبدیلی طولی‌است، پس دو مثلث BCD و $BC'D$ هم‌نهشت و در نتیجه هم‌مساحت می‌شوند. بنابراین به مساحت زمین اولیه مساحت چهارضلعی $BCDC'$ اضافه می‌شود، در صورتی که محیط زمین جدید $ABC'DE$ با محیط زمین اولیه $ABCDE$ برابر است. پس کافی است مساحت چهارضلعی $BCDC'$ را به دست آوریم:

$$S_{BCDC'} = 2S_{BCD} = 2\left(\frac{1}{2} BC \times CD \sin 120^\circ\right) = 4 \times 9 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$$



۴۳۱ (۴) از B به C وصل می‌کنیم. چون $AB=AC$ و $\hat{A}=60^\circ$ پس مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، پس $BC=17$. از طرف دیگر $17^2 = 17^2 + 11^2 + (2\sqrt{42})^2$ ، در نتیجه مثلث BDC قائم‌الزاویه است. اکنون بازتاب نقطه D نسبت به خط BC را D' می‌نامیم. در این صورت چهارضلعی $ABD'C$ در تعداد اضلاع، طول اضلاع و اندازه $\hat{A}=60^\circ$ با چهارضلعی $ABDC$ برابر است و مساحتش به اندازه مساحت چهارضلعی $BCDC'$ بیشتر است. بنابراین

$$S_{BCDC'} = 2S_{BCD} = 2\left(\frac{1}{2} BD \times DC\right) = 2\sqrt{42} \times 11 = 22\sqrt{42}$$



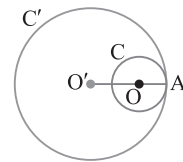
۴۲۴ (۲) فرض می‌کنیم نقطه تماس دو دایره نقطه A باشد. در این صورت مجانس نقطه A بر خودش تصویر شده است. پس A نقطه ثابت این تجانس است، یعنی A مرکز تجانس است. بنابراین مرکز O' مجانس مرکز O با نسبت ۴ است. پس

$$AO' = 4AO \Rightarrow AO + OO' = 4AO \xrightarrow{OO'=6} \rightarrow$$

$$AO + 6 = 4AO \Rightarrow AO = 2 \Rightarrow R = 2$$

در نتیجه $R' = O'A = 4AO = 4 \times 2 = 8$. بنابراین

$$\pi(O'A)^2 - \pi(OA)^2 = \pi(8)^2 - \pi(2)^2 = 64\pi - 4\pi = 60\pi$$

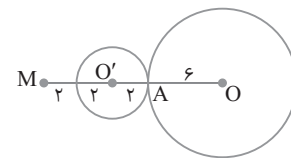


۴۲۵ (۳) برای پیدا کردن مجانس دایره $C(O, 6)$ به مرکز M و نسبت

$$\frac{1}{3} \text{ ابتدا مجانس } O \text{ را به دست می‌آوریم: } MO' = \frac{1}{3} MO = \frac{1}{3}(12) = 4$$

اکنون دایره به مرکز O' و شعاع $2 = \frac{1}{3}(6)$ را رسم می‌کنیم که مجانس دایره

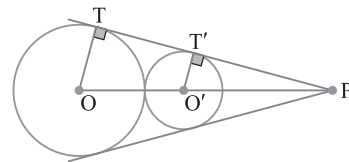
C است. مطابق شکل دیده می‌شود دایره‌های C و C' مماس بیرونی هستند، زیرا طول خط‌المركزین $OO' = 6 + 2 = 8$ برابر مجموع شعاع‌های این دو دایره است.



۴۲۶ (۴) نقطه تلاقی مماس مشترک‌های خارجی دو دایره و خط‌المركزین

آن‌ها مرکز تجانس مستقیم آن‌ها است. در اینجا طول خط‌المركزین دو دایره برابر جمع شعاع‌های آن‌ها است پس دو دایره مماس خارجی‌اند. در شکل، P مرکز تجانس مستقیم دو دایره است. شعاع‌های OT و $O'T'$ بر مماس مشترک خارجی TT' عمود هستند، پس موازی‌اند، در نتیجه بنابر تعمیم قضیه تالس،

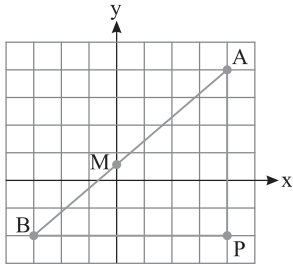
$$\begin{aligned} \triangle POT : OT \parallel O'T' &\Rightarrow \frac{PO}{OT} = \frac{O'T'}{OT} = \frac{3}{7} \\ \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} &\frac{PO - PO'}{OT} = \frac{7 - 3}{7} \\ \frac{OO'}{PO} = \frac{4}{7} \xrightarrow{OO'=1} &\frac{1}{PO} = \frac{4}{7} \Rightarrow PO = \frac{7}{4} = 1.75 \end{aligned}$$



۴۲۷ (۴) در تبدیل همانی تمام نقاط صفحه بر خودشان تصویر می‌شوند.

پس اگر در تبدیلی تمام نقاط صفحه نقطه ثابت آن باشند در حقیقت تمام نقاط بر خودشان تصویر شده‌اند پس این تبدیل همانی است.

گزینه (۱) نادرست است، به عنوان مثال نقض، تبدیل تجانس اندازه زاویه‌ها را حفظ می‌کند ولی در حالت کلی طول‌ها نیست.



۴۳۶ (۴) چون $S=12$ و $AB=8$ ، پس طول ارتفاع وارد بر ضلع AB برابر

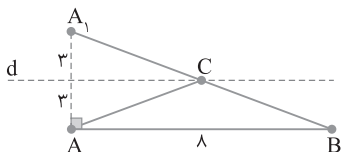
مقدار ثابت $h=\frac{2S}{AB}=3$ است، یعنی رأس C روی خطی موازی AB و به فاصله ۳ از

آن قرار دارد (شکل زیر را ببینید که در آن C روی خط d در حرکت است). می‌خواهیم جای C را به گونه‌ای به دست آوریم که $CA+CB$ مینیمم باشد. بازتاب A را نسبت به خط d ، A_1 می‌نامیم. محل برخورد A_1B با این خط نقطه مطلوب برای C است. اکنون توجه کنید که در این حالت $CA+CB=A_1B$ ، همچنین در مثلث

قائم‌الزاویه A_1AB بنابر قضیه فیثاغورس،

$$A_1B = \sqrt{A_1A^2 + AB^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

بنابراین $CA+CB+AB=10+8=18$ کمترین (محیط ABC).



۴۳۷ (۱) شکل سؤال به صورت زیر است. بنابر مسئله هرون، اگر بازتاب A

نسبت به خط d نقطه A' باشد و از نقطه A' به B وصل کنیم تا d را در M قطع کند، آن‌گاه $AM+MB$ کمترین مقدار ممکن را دارد. چون بازتاب ایزومتري است، پس $AM=A'M$. بنابر این $AM+MB$ برابر $A'B$ است. از A' خطی عمود بر امتداد BQ رسم می‌کنیم تا آن را در H قطع کند. بنابر قضیه فیثاغورس،

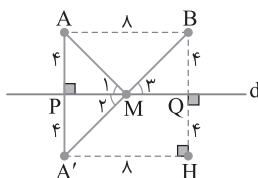
$$\triangle A'BH: A'B = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$$

در ضمن مطابق شکل $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ و $\hat{M}_2 = \hat{M}_3$ پس $\hat{M}_1 = \hat{M}_3$ بنابراین

دو مثلث قائم‌الزاویه AMP و BMQ همنهشت هستند. در نتیجه

$$PM=MQ \xrightarrow{PQ=8} PM=4$$

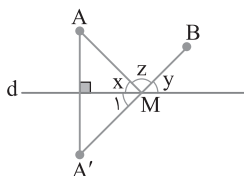
$$\triangle APM: AM^2 = AP^2 + PM^2 = 4^2 + 4^2 = 2 \times 4^2 \Rightarrow AM = 4\sqrt{2}$$



۴۳۸ (۳) بنابر مسئله هرون اگر بازتاب A را نسبت به d نقطه A' بنامیم

و از A' به B وصل کنیم تا خط d را در M قطع کند، آن‌گاه $MA+MB$ مینیمم است. چون بازتاب ایزومتري است، پس اندازه زاویه را حفظ می‌کند،

پس $\hat{M}_1 = x$ در ضمن $\hat{M}_1 = y$ ، بنابراین $x=y$.



۴۳۲ (۴) به کمک مسئله هم‌پیرامونی، اگر بازتاب BC را نسبت به

خط BC پیدا کنیم، شکل جدید ویژگی گفته شده در سؤال را دارد و $S_1=S_2$

(شکل زیر را ببینید). بنابر فرض سؤال،

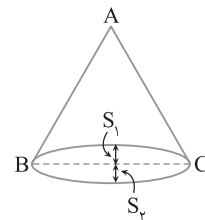
$$S_{ABC} - S_1 = 12\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} + S_2 = 2 \times 12\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \quad \left. \begin{array}{l} \\ + \\ \end{array} \right\} S_1=S_2$$

$$2S_{ABC} = 36\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABC} = 18\sqrt{3}$$

می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر $\frac{\sqrt{3}}{4} BC^2$ است، پس

$$\frac{\sqrt{3}}{4} BC^2 = 18\sqrt{3} \Rightarrow BC^2 = 4 \times 9 \times 2 \Rightarrow BC = 6\sqrt{2}$$



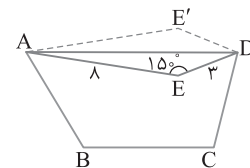
۴۳۳ (۲) به کمک مسئله هم‌پیرامونی، اگر بازتاب E را نسبت به خط AD

نقطه E' بنامیم، مساحت چهارضلعی $AEDE'$ میزان افزایش مساحت خواسته شده است:

$$S_{AEDE'} = 2S_{ADE} = 2\left(\frac{1}{2} AE \times DE \sin 15^\circ\right) = 8 \times 3 \times \frac{1}{2} = 12$$

بنابراین

$$S_{AEDE'} + S_{ADE} = 12 + 16 = 28 = \text{مساحت زمین اولیه} = \text{مساحت زمین جدید}$$



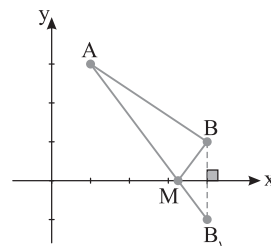
۴۳۴ (۱) فرض کنید B_1 بازتاب B نسبت به محور x باشد، در این

صورت محل برخورد پاره خط AB_1 با محور x نقطه M است و به ازای آن

$MA+MB$ کمترین مقدار است. اکنون توجه کنید که در این حالت

$$MA+MB=AB_1 \text{ چون } A(1,3) \text{ و } B_1(4,-1), \text{ پس}$$

$$MA+MB=AB_1 = \sqrt{(1-4)^2 + (3+1)^2} = 5$$



۴۳۵ (۴) دو نقطه A و B در دو طرف محور y قرار دارند. پس طول

پاره خط AB کمترین فاصله بین این دو نقطه است (شکل زیر را ببینید). بنابر

قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه ABP ،

$$AB^2 = AP^2 + BP^2 \xrightarrow{\substack{AP=6 \\ BP=7}} AB^2 = 6^2 + 7^2 = 85$$

بنابراین $AB = \sqrt{85}$.

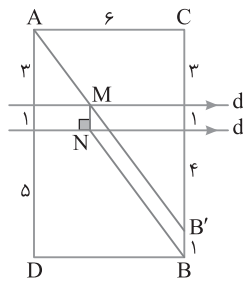
۴۴۲ ۲ نقطه B را به اندازه یک واحد (فاصله بین d و d') روی BC به بالا منتقل می‌کنیم تا به B' برسیم. از B' به A وصل می‌کنیم تا d را در M قطع کند. از M خطی عمود بر d و d' رسم می‌کنیم تا d' را در N قطع کند. در این صورت مسیر AMNB مسیری کوتاه‌ترین مسیری که از A به B می‌رود است و طول این مسیر برابر $AB' + BB'$ است. در مثلث قائم‌الزاویه $AB'C$ طول AB' را به دست می‌آوریم:

$$AB' = \sqrt{AC^2 + BC'^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

بنابراین

$$AMNB \text{ مسیر طول} = AM + MN + NB = AM + BB' + MB'$$

$$= AB' + BB' = 10 + 1 = 11$$

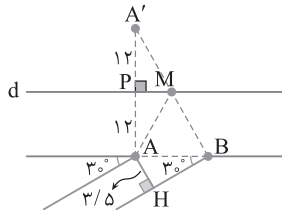


۴۴۳ ۳ برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر، بنابر روش هرون، بازتاب نقطه A را نسبت به خط d نقطه A' می‌نامیم (شکل زیر را ببینید). از A' به B وصل می‌کنیم تا خط d را در M قطع کند. در این صورت مسیر مینیمم است و طول این مسیر مینیمم برابر $A'B'$ است. در شکل از نقطه A خطی عمود بر راستای خیابان فرعی رسم کرده‌ایم و نقطه H به دست آمده است. پس

$$\triangle ABH: \hat{B} = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{1}{2} AB \Rightarrow 3/5 = \frac{1}{2} AB \Rightarrow AB = 6$$

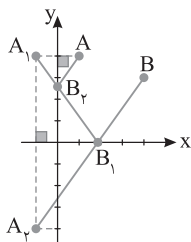
بنابراین

$$\triangle AA'B: A'B^2 = AB^2 + AA'^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow A'B = 10$$



۴۴۴ ۳ قرینه A نسبت به محور y نقطه A_1 و قرینه نقطه A_1 نسبت به محور x نقطه A_2 می‌نامیم. از A_2 به B وصل می‌کنیم و نقطه برخورد آن با محور x را B_1 می‌نامیم. همچنین از B_1 به A_1 وصل می‌کنیم و نقطه برخورد آن با محور y را B_2 می‌نامیم. مسیر مورد نظر AB_2B_1B است. اکنون توجه کنید که طول این مسیر برابر طول پاره خط BA_2 است. چون B نقطه $(3, 4)$ و A_2 نقطه $(-1, -4)$ است، پس

$$AB_2B_1B \text{ طول مسیر} = A_2B = \sqrt{(4+1)^2 + (3+4)^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$$

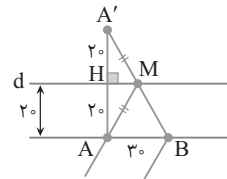


۴۳۹ ۳ فرض کنید A' بازتاب نقطه A نسبت به خط d باشد (شکل زیر را ببینید). از A' به B وصل می‌کنیم تا d را در نقطه M قطع کند. در این صورت مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است و طول این مسیر برابر $A'B$ است. بنابر قضیه فیثاغورس،

$$\triangle AA'B: A'B^2 = AA'^2 + AB^2$$

$$A'B^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow A'B = 5$$

در این صورت طول مسیر AMBA برابر $5 + 3 = 8$ است.



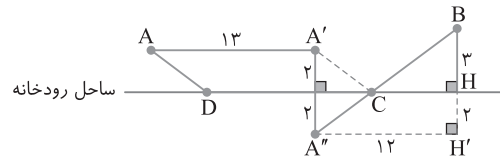
۴۴۰ ۲ مطابق شکل زیر، نقطه A را در راستای ساحل رودخانه به اندازه ۱۳ کیلومتر به راست منتقل می‌کنیم تا به نقطه A' برسیم. سپس A' را نسبت به خط ساحل رودخانه بازتاب می‌کنیم تا به نقطه A'' برسیم. از A'' به B وصل می‌کنیم تا خط ساحل رودخانه را در C قطع کند. نقطه C را ۱۳ کیلومتر مطابق شکل در راستای خط ساحل به چپ منتقل می‌کنیم تا به نقطه D برسیم. در این صورت مسیر ADCB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است و طول آن برابر $AD + DC + BC$ است. چون $AD = A'C$ و بنابر ویژگی‌های بازتاب $A'C = A''C$ ، پس $AD = A''C$. در نتیجه طول مسیر برابر است با $A''C + DC + BC = DC + A''B = 13 + A''B$

بنابراین باید طول $A''B$ را به دست آوریم. مطابق شکل از A'' خطی موازی ساحل رودخانه رسم می‌کنیم تا امتداد BH را در H' قطع کند. در مثلث قائم‌الزاویه $A''BH'$ ، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$\left. \begin{array}{l} A''H' = 12 \\ BH' = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow A''B = \sqrt{A''H'^2 + BH'^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

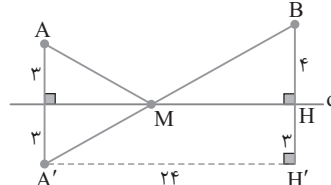
بنابراین

$$ADCB \text{ مسیر طول} = 13 + A''B = 13 + 13 = 26$$

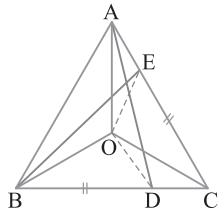


۴۴۱ ۱ بنابر مسئله هرون، بازتاب نقطه A را نسبت به خط d، A' می‌نامیم و از A' به B وصل می‌کنیم تا d را در نقطه M قطع کند. در این صورت مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است و طول این مسیر برابر $A'B$ است (شکل زیر را ببینید). از A' خطی موازی d رسم می‌کنیم تا امتداد BH را در H' قطع کند. بنابر قضیه فیثاغورس،

$$\triangle A'BH': A'B^2 = A'H'^2 + BH'^2 = 24^2 + 7^2 = 625 \Rightarrow A'B = 25$$

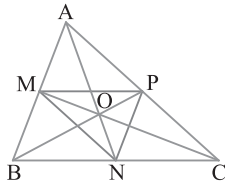


BE و AD برابر زاویه دوران و زاویه دیگر برابر مکمل آن است. پس اندازه زاویه بین دو پاره خط AD و BE برابر 60° یا 120° است.

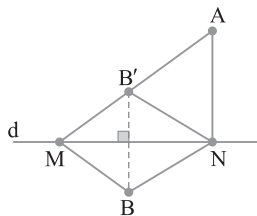
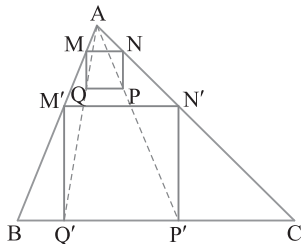


۴ ۴۴۹ چهار مثلث مجانس مثلث ABC وجود دارد:

- مثلث MNP در تجانس به مرکز O و نسبت $k = -\frac{1}{3}$.
- مثلث AMP در تجانس به مرکز A و نسبت $k = \frac{1}{3}$.
- مثلث BMN در تجانس به مرکز B و نسبت $k = \frac{1}{3}$.
- مثلث CNP در تجانس به مرکز C و نسبت $k = \frac{1}{3}$.



۴ ۴۵۰ در مثلث ABC، مربع MNPQ را طوری رسم کرده‌ایم که MN موازی ضلع BC است (شکل زیر را ببینید). AQ و AP را امتداد می‌دهیم تا ضلع BC را به ترتیب در نقطه‌های P' و Q' قطع کنند. از P' و Q' عمودهایی بر ضلع BC رسم می‌کنیم تا ضلع‌های AC و AB را به ترتیب در N' و M' قطع کنند. توجه کنید که مربع‌های MNPQ و M'N'P'Q' مجانس یکدیگرند.



۳ ۴۵۱ بازتاب نقطه B را

نسبت به خط d نقطه B' می‌نامیم. از A به B' وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا خط d را در M قطع کند. در این صورت $|MA - MB|$ بیشترین مقدار ممکن است، زیرا اگر نقطه دیگری مثل N روی d در نظر بگیریم، آن‌گاه

$$|AN - NB| = |AN - NB'| \quad (۱)$$

با توجه به نامساوی مثلث در مثلث ANB' می‌نویسیم:

$$|AN - NB'| < AB' \quad (۲)$$

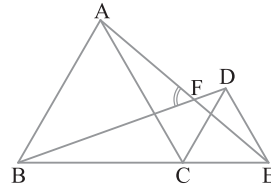
با مقایسه رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$|AN - NB| < AB' = |AM - MB'| = |AM - MB|$$

بنابراین $|AM - MB|$ بیشترین مقدار را دارد. پس تبدیل به کار رفته در حل این مسئله بازتاب است.

۳ ۴۴۵ توجه کنید که $CE = CD$ و $\angle ECD = 60^\circ$. همچنین

$\angle ACB = 60^\circ$ و $CA = CB$. پس D دوران یافته E حول C به اندازه 60° و B هم دوران یافته A تحت همین تبدیل دوران است. در نتیجه پاره خط DB دوران یافته پاره خط EA حول C و زاویه 60° است. می‌دانیم اگر دو خط، دوران یافته یکدیگر باشند، زاویه بین دو خط با زاویه دوران برابر است، پس $\angle AFB = 60^\circ$.

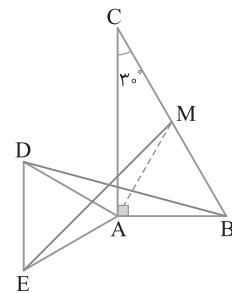


۳ ۴۴۶ در مثلث قائم الزاویه، طول ضلع روبه‌رو به زاویه 30° نصف طول وتر است. همچنین اندازه میانه وارد بر وتر هم نصف طول وتر است، پس

$$AB = AM = \frac{BC}{2}$$

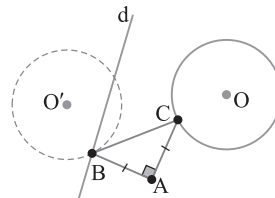
اکنون توجه کنید که مثلث ABM متساوی‌الاضلاع است. اگر R تبدیل دوران 60° حول نقطه A باشد، آن‌گاه $R(B) = M$ و $R(D) = E$. در نتیجه $R(BD) = ME$. پس اندازه زاویه بین دو پاره خط

ME و BD همان زاویه دوران یعنی 60° است.



۴ ۴۴۷ از شکل زیر استفاده می‌کنیم. اگر مثلث ABC مثلث مورد نظر

باشد، آن‌گاه $AB = AC$ و $\angle BAC = 90^\circ$. پس B دوران یافته C تحت دوران 90° حول A است. بنابراین برای رسم، دایره (O, R) را حول A به اندازه 90° دوران می‌دهیم تا دایره (O', R) به دست آید. محل برخورد این دایره با خط d را B می‌نامیم. اکنون اگر B را حول A به اندازه 90° دوران دهیم، C به دست می‌آید. تعداد نقطه‌های مشترک خط d و دایره C' تعداد جواب‌های مسئله است که می‌تواند صفر، ۱ یا ۲ باشد.

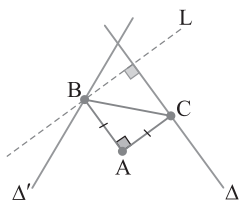


۱ ۴۴۸ از شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن O مرکز ثقل (محل

برخورد میانه‌ها) در مثلث ABC است. اکنون توجه کنید که

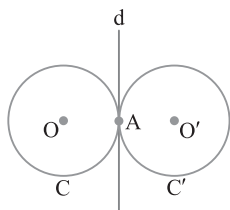
$$OB = OC = OA, \quad \angle BOC = \angle COA = \angle AOB = 120^\circ$$

اگر R تبدیل دوران 120° حول نقطه O باشد، آن‌گاه $R(B) = C$ و $R(C) = A$ ، یعنی $R(BC) = CA$. پس اگر هر نقطه‌ای روی BC را تحت تبدیل R دوران دهیم، آن‌گاه نقطه‌ای روی CA به دست می‌آید. چون $BD = CE$ ، پس $R(D) = E$. همچنین $R(A) = B$. در نتیجه $R(AD) = BE$. بنابراین چون BE دوران یافته AD است، یک زاویه بین



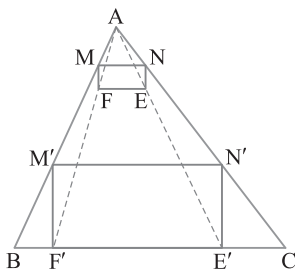
۴۵۶ ۴ چون $OO' = 2R$ ، پس دو دایره مماس خارج هستند (شکل زیر را ببینید).

- بازتاب دایره C نسبت به خط d (مماس مشترک داخلی دو دایره) دایره C' است.
- دایره C' دوران یافته دایره C به مرکز A و زاویه دوران 180° است.
- مجانس دایره C در تجانس به مرکز A و نسبت $k = -1$ دایره C' است.



۴۵۷ ۴ در مثلث ABC، پاره خط MN را موازی BC رسم می کنیم. روی MN مستطیل MNEF را رسم می کنیم به گونه ای که $MN = 2MF$. از A به نقطه های E و F وصل می کنیم و امتداد می دهیم تا ضلع BC را به ترتیب در E' و F' قطع کنند. از E' و F' عمودهایی بر BC رسم می کنیم تا ضلع های AC و AB را به ترتیب در نقطه های N' و M' قطع کنند. در این صورت چهارضلعی M'N'E'F' مجانس مستطیل MNEF به مرکز A و نسبت $\frac{AM'}{AM}$ است. چون

مجانس هر شکل با خودش متشابه است، پس چهارضلعی M'N'E'F' مستطیل مورد نظر سؤال است. پس برای حل این سؤال از تبدیل تجانس استفاده می کنیم.



۴۵۸ ۲ چون $2x+1$ بزرگ ترین عدد است، پس این عدد اندازه وتر مثلث است. اکنون بنابر قضیه فیثاغورس،

$$(2x+1)^2 = (2x-1)^2 + x^2 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 - 4x + 1 + x^2$$

$$x^2 - 8x = 0$$

پس $x=0$ یا $x=8$ و چون $x \neq 0$ ، پس $x=8$. در نتیجه طول ضلع های این مثلث ۸، ۱۵ و ۱۷ است و طول ضلع متوسط آن برابر ۱۵ است.

۴۵۹ ۴ با توجه به شکل روبه رو و استفاده از قضیه فیثاغورس به دست می آید

$$OA_7 = \sqrt{OA_1^2 + A_1A_7^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$OA_8 = \sqrt{OA_7^2 + A_7A_8^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

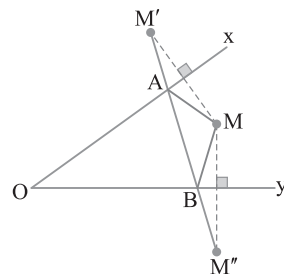
به همین صورت می توان نتیجه گرفت که $OA_9 = \sqrt{9} = 3$. در نتیجه

مساحت نهمین مثلث، که همان مثلث OA_9A_1 است، برابر است با

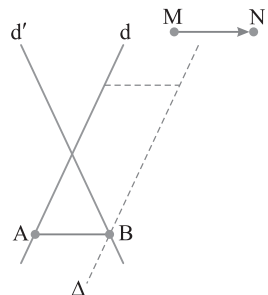
$$\frac{1}{2} OA_9 \times A_9A_1 = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{3}{2}$$

۴۵۲ ۳ از شکل زیر استفاده می کنیم که در آن M' بازتاب M نسبت به Ox و M'' بازتاب M نسبت به Oy است. محل برخورد $M'M''$ با Ox و Oy رأس های A و B از مثلث مورد نظر هستند. زیرا محیط مثلث ABM برابر است با $MA + AB + MB$ و چون $MA = M'A$ و $MB = M''B$ ، نتیجه می گیریم $M'A + AB + M''B$ (محیط مثلث ABC)

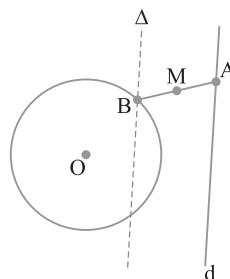
همچنین چون A و B روی خط $M'M''$ قرار دارند، $M'A + AB + M''B$ کمترین است. پس تبدیل به کار رفته در حل این مسئله بازتاب است.



۴۵۳ ۲ خط d را تحت بردار انتقال می دهیم تا به خط Δ برسیم. نقطه برخورد خط Δ با خط d' را B می نامیم. از B خطی موازی MN رسم می کنیم تا خط d را در نقطه A قطع کند. در این صورت B انتقال یافته A تحت بردار MN است و چون انتقال تبدیلی طولی است و شیب خط را حفظ می کند، پس $AB = MN$ و $AB \parallel MN$. بنابراین برای پیدا کردن پاره خط AB از تبدیل انتقال استفاده می کنیم.



۴۵۴ ۱ خط d را به مرکز M با زاویه 180° دوران می دهیم تا خط Δ به دست آید. نقطه برخورد Δ با دایره را B می نامیم. از B به M وصل می کنیم و امتداد می دهیم تا خط d را در A قطع کند. B دوران یافته A به مرکز M با زاویه 180° است، پس $AM = BM$. بنابراین برای حل این سؤال از تبدیل دوران استفاده می کنیم.

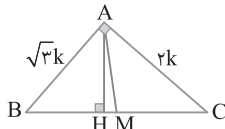


۴۵۵ ۲ از شکل زیر استفاده می کنیم. خط Δ را حول A به اندازه 90° دوران می دهیم تا خط L در شکل به دست آید. محل برخورد خط L با Δ' را B می نامیم. اکنون اگر نقطه B را حول نقطه A به اندازه 90° دوران دهیم، نقطه C روی خط Δ به دست می آید. مثلث ABC جواب مسئله است. بنابراین برای حل این سؤال از تبدیل دوران استفاده می کنیم. توجه کنید که چون دوران تبدیلی طولی است، پس $AB = AC$.

از طرف دیگر بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC،
 $AB^2 = BH \times BC$ یعنی $3k^2 = BH \times k\sqrt{7}$ پس $BH = \frac{3k}{\sqrt{7}}$. چون
 نقطه M وسط وتر BC است، پس $BM = \frac{1}{2} BC = \frac{k\sqrt{7}}{2}$ در نتیجه

$$HM = BM - BH = \frac{k}{2\sqrt{7}} \text{ اکنون می‌توان نوشت}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}} = \frac{BC}{HM} = \frac{\sqrt{7}k}{\frac{k}{2\sqrt{7}}} = 14$$

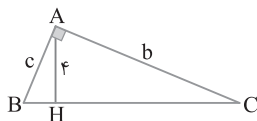


راه حل اول از شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنابر روابط طولی در
 مثلث قائم‌الزاویه، $AH \times BC = AB \times AC$

از طرف دیگر بنابر قضیه فیثاغورس $BC = \sqrt{b^2 + c^2}$ پس
 $4\sqrt{b^2 + c^2} = bc$ دو طرف این برابری را به توان دو می‌رسانیم:

$$16(b^2 + c^2) = b^2 c^2 \Rightarrow \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2} = \frac{1}{16}$$

$$\text{در نتیجه } \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2} = \frac{1}{16}$$



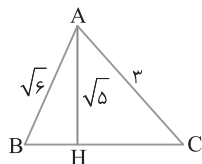
راه حل دوم می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه ABC با وتر a و ارتفاع وارد بر وتر

$$h. \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{16} \text{ پس در اینجا } \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

در مثلث‌های ABH و ACH بنابر قضیه فیثاغورس،

$$\text{در نتیجه } CH = \sqrt{9-5} = 2 \text{ و } BH = \sqrt{6-5} = 1 \\ BC = BH + CH = 1 + 2 = 3$$

بنابراین طول ضلع‌های این مثلث ۳، ۳ و $\sqrt{6}$ است و طول بزرگ‌ترین ضلع آن
 برابر ۳ است.



از شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنابر قضیه فیثاغورس،

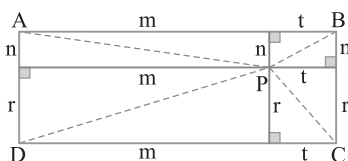
$$PA^2 + PC^2 = (m^2 + n^2) + (r^2 + t^2)$$

$$PB^2 + PD^2 = (t^2 + n^2) + (m^2 + r^2)$$

با مقایسه برابری‌های بالا نتیجه می‌گیریم

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$$

$$\text{در نتیجه } PD = \sqrt{107} \text{ پس } 10^2 + 4^2 = 3^2 + PD^2$$



بنابر قضیه فیثاغورس،

$$AC^2 = BC^2 + AB^2$$

یعنی $b^2 = a^2 + c^2$ از طرف دیگر بنابر فرض

مسئله، $b^2 = 2ac$ در نتیجه $a^2 + c^2 = 2ac$

یعنی $a^2 + c^2 - 2ac = 0$ پس $(a-c)^2 = 0$

بنابراین $a = c$ در نتیجه $\hat{A} = \hat{C} = 45^\circ$

توجه کنید که

$$P-b = \frac{a+b+c}{2} - b = \frac{a+c-b}{2}$$

$$P-c = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2}$$

بنابراین

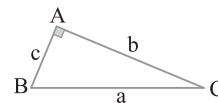
$$(P-b)(P-c) = \left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right) = \frac{(a+(c-b))(a-(c-b))}{2}$$

$$= \frac{1}{4}(a^2 - (c-b)^2) = \frac{1}{4}(a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc))$$

از طرف دیگر، بنابر قضیه فیثاغورس $a^2 = b^2 + c^2$ پس

$$(P-b)(P-c) = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - b^2 - c^2 + 2bc) = \frac{1}{4}bc$$

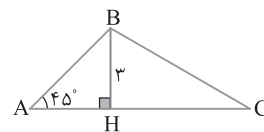
چون $S = \frac{1}{2}bc$ پس $(P-b)(P-c) = S$



چون $\hat{A} = 45^\circ$ ، پس $\hat{ABH} = 45^\circ$ در نتیجه مثلث ABH

متساوی‌الساقین است بنابراین $AH = 3$ توجه کنید که

$$S_{ABC} = S_{ABH} + S_{BCH} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 + \frac{1}{2} \times 3 \times CH = \frac{9}{2} + \frac{3 \times CH}{2}$$



از طرف دیگر بنابر فرض مسئله $S_{ABC} = \frac{9}{2}(1 + \sqrt{3})$ پس

$$\frac{9}{2} + \frac{3 \times CH}{2} = \frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

یعنی $CH = 3\sqrt{3}$ اکنون بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث BCH

$$BC = \sqrt{BH^2 + CH^2} = \sqrt{9 + 27} = 6$$

توجه کنید اگر $\hat{B} < 45^\circ$ در نظر گرفته شود، آن‌گاه

ارتفاع BH بیرون مثلث قرار می‌گیرد و چون

$$S_{ABH} = \frac{9}{2}, \quad S_{ABC} = \frac{9}{2}(1 + \sqrt{3})$$

در نتیجه $S_{ABC} > S_{ABH}$ که با توجه به شکل

قابل قبول نیست.

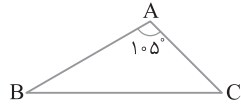
چون $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ پس عددی مانند k وجود دارد به طوری که

$AB = \sqrt{3}k$ ، $AC = 2k$ بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه ABC،

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3k^2 + 4k^2} = k\sqrt{7}$$

پس اندازه زاویه B برابر است با

$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 180^\circ - (105^\circ + 45^\circ) = 30^\circ$$



۴۷۳ بنابر قضیه سینوسها $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$ پس

$b \sin \hat{A} = a \cos \hat{C}$ از مقایسه این برابری با $a \sin \hat{B} = b \sin \hat{A}$ نتیجه می‌گیریم $a \sin \hat{B} = a \cos \hat{C}$ پس $\sin \hat{B} = \cos \hat{C}$. اگر سینوس یک زاویه از مثلث با کسینوس زاویه دیگر آن برابر و دو زاویه حاده باشند، مجموع آن‌ها 90° است، یعنی $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$. در نتیجه $\hat{B} + 3\hat{B} = 90^\circ$. بنابراین $\hat{B} = 22.5^\circ$.

۴۷۴ بنابر قضیه سینوسها $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$ پس

$$a^2 \sin^2 \hat{B} = b^2 \sin^2 \hat{A}$$

به جای $b^2 \sin^2 \hat{A}$ در فرض تست قرار می‌دهیم $a^2 \sin^2 \hat{B}$ ، بنابراین

$$a^2 \cos^2 \hat{B} + b^2 \sin^2 \hat{A} = a^2 \cos^2 \hat{B} + a^2 \sin^2 \hat{B}$$

$$= a^2 (\cos^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{B}) = a^2$$

بنابراین $a^2 = 8$ ، یعنی $a = 2\sqrt{2}$.

۴۷۵ بنابر فرض تست $\frac{BC}{AC} = \frac{\cos \hat{A}}{\cos \hat{B}}$ از طرف دیگر بنابر قضیه

سینوسها، $\frac{BC}{AC} = \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}}$ در نتیجه $\frac{\cos \hat{A}}{\cos \hat{B}} = \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}}$ اکنون توجه کنید

که از این برابری نتیجه می‌گیریم $\tan \hat{A} = \tan \hat{B}$ ، یعنی $\hat{A} = \hat{B}$. چون $\hat{C} = 90^\circ$ ، پس $\hat{A} = \hat{B} = 45^\circ$. اکنون از فرض تست نتیجه می‌گیریم

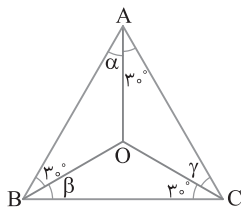
$$\frac{BC}{\cos 45^\circ} = 8 \text{، یعنی } \frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 8 \text{، بنابراین } BC = 4\sqrt{2}$$

۴۷۶ در مثلث AOB، بنابر قضیه سینوسها، $\frac{OA}{\sin 30^\circ} = \frac{OB}{\sin \alpha}$

در نتیجه $\sin \alpha = \frac{OB}{2OA}$ با استدلالی مشابه در مثلث‌های OBC و OAC،

$\sin \beta = \frac{OC}{2OB}$ و $\sin \gamma = \frac{OA}{2OC}$ از ضرب این سه تساوی به دست آمده

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{1}{8}$$



۴۷۷ بنابر قضیه کسینوسها،

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$5 = 3 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 + 1 - 2\sqrt{3} - 2(3-1) \cos \hat{A}$$

$$-4 \cos \hat{A} = -3 \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{3}{4}$$

۴۶۷ ابتدا با استفاده از قضیه سینوسها اندازه زاویه C را به دست می‌آوریم:

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{3}{\sin \hat{C}} = \frac{\sqrt{18}}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{3}{\sin \hat{C}} = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{C} = 30^\circ \text{ یا } \hat{C} = 150^\circ$$

چون $\hat{B} = 45^\circ$ ، پس $\hat{C} = 30^\circ$ قابل قبول است و

$$\hat{A} = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$$

۴۶۸ اگر شعاع دایره محیطی مثلث ABC باشد، آن‌گاه بنابر قضیه

سینوسها $a = 2R \sin \hat{A}$ و $b = 2R \sin \hat{B}$ با قرار دادن این برابری‌ها در

تساوی $a \sin \hat{A} = b \sin \hat{B}$ نتیجه می‌گیریم $2R \sin^2 \hat{A} = 2R \sin^2 \hat{B}$

پس $\sin^2 \hat{A} = \sin^2 \hat{B}$ ، یعنی $\sin \hat{A} = \sin \hat{B}$ یا $\sin \hat{A} = -\sin \hat{B}$

فرض $\sin \hat{A} = \sin \hat{B}$ نتیجه می‌شود $\hat{A} = \hat{B}$ (یا $\hat{A} = 180^\circ - \hat{B}$) که در این

حالت مجموع زاویه‌های مثلث بیشتر از 180° می‌شود) در نتیجه $BC = AC$ ،

یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین است. با فرض $\sin \hat{A} = -\sin \hat{B}$ نتیجه

می‌شود $\hat{A} = -\hat{B}$ یا $\hat{A} = 180^\circ + \hat{B}$ که غیرممکن هستند.

۴۶۹ چون $\frac{\hat{A}}{a} = \frac{\hat{B}}{b} = 15^\circ$ ، پس $\hat{A} = 105^\circ$ و $\hat{B} = 45^\circ$ در نتیجه

بنابر قضیه سینوسها، $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{A}) = 180^\circ - (45^\circ + 105^\circ) = 30^\circ$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ در نتیجه } \frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{AB}{\frac{1}{2}} \text{، یعنی } \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}}$$

۴۷۰ بنابر قضیه سینوسها $\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$ پس $\frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{b}$

اکنون می‌توان برابری $c = (b^2 - 2) \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}}$ را به صورت $c = (b^2 - 2) \frac{c}{b}$

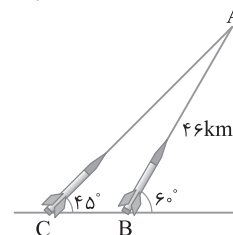
نوشت. پس $1 = (b^2 - 2) \times \frac{1}{b}$ یا $b^2 - b - 2 = 0$ چون $b > 0$ ، با حل این

معادله به دست می‌آید $b = 2$.

۴۷۱ بنابر قضیه سینوسها در مثلث ABC،

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{46}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 12^\circ}$$

$$\frac{46}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow AC = \frac{46\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 23\sqrt{6}$$



۴۷۲ بنابر قضیه سینوسها،

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}} \quad (1)$$

از طرف دیگر بنابر فرض $\frac{AC}{AB} = \frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{C}}$ ، بنابراین از رابطه (۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}} = \frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{C}} \Rightarrow \sin \hat{C} = \cos \hat{C} \text{، } \tan \hat{C} = 1 \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ$$

۴۸۳) اندازه هر زاویه داخلی هشت ضلعی منتظم برابر است با

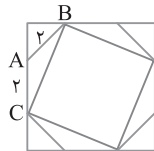
$$180^\circ - \frac{360^\circ}{8} = 135^\circ$$

اکنون بنابر قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC،

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos 135^\circ$$

$$= 2^2 + 2^2 - 2(2)(2)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$BC^2 = 4 + 4 + 4\sqrt{2} \Rightarrow BC^2 = 4(2 + \sqrt{2}) \Rightarrow \text{مساحت مربع} = 4(2 + \sqrt{2})$$



۴۸۴) برای به دست آوردن $\tan \hat{B}$ باید $\sin \hat{B}$ و $\cos \hat{B}$ را

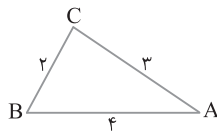
به دست آوریم. بنابر قضیه کسینوس‌ها،

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \Rightarrow 9 = 4 + 16 - 2(2)(4) \cos \hat{B}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{-11}{-16} = \frac{11}{16} \Rightarrow \sin \hat{B} = \sqrt{1 - \cos^2 \hat{B}} = \sqrt{1 - \frac{121}{256}} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

بنابراین

$$\tan \hat{B} = \frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}} = \frac{\frac{3\sqrt{15}}{16}}{\frac{11}{16}} = \frac{3\sqrt{15}}{11}$$



۴۸۵) با رسم قطر BD در مثلث ABD با استفاده از قضیه فیثاغورس

می‌نویسیم

$$BD^2 = \Delta^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow BD = 13$$

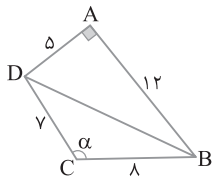
اکنون با استفاده از قضیه کسینوس‌ها در مثلث BDC، کسینوس زاویه α را به دست می‌آوریم:

$$BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2BC \times DC \cos \alpha$$

$$13^2 = 8^2 + 7^2 - 2(8)(7) \cos \alpha \Rightarrow 169 = 64 + 49 - 112 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\frac{56}{112} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120^\circ$$

$$\tan \alpha = \tan 120^\circ = -\sqrt{3} \quad \text{بنابراین}$$



۴۸۶) بنابر قضیه استوارت در مثلث ABC،

$$AB^2 \times DC + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + BD \times DC \times BC$$

$$7^2 \times 7 + 13^2 \times 5 = AD^2 \times 12 + 5 \times 7 \times 12 \Rightarrow 343 + 845 = 12AD^2 + 420$$

$$12AD^2 = 768 \Rightarrow AD^2 = 64 \Rightarrow AD = 8$$

بنابراین $7 + 5 + 8 = 20$ (محیط (مثلث ABC)).

۴۷۸) با مقایسه برابری فرض مسئله و تساوی $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$

، نتیجه می‌گیریم $\cos \hat{C} = \frac{1}{2}$ پس $\hat{C} = 60^\circ$.

۴۷۹) بنابر قضیه کسینوس‌ها، $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ ، بنابراین

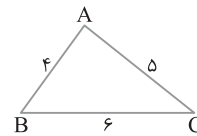
$$\begin{aligned} \frac{(b+c)^2 - a^2}{bc(\cos \hat{A} + 1)} &= \frac{b^2 + c^2 + 2bc - a^2}{bc(\cos \hat{A} + 1)} \\ &= \frac{a^2 + 2bc \cos \hat{A} - a^2 + 2bc}{bc(\cos \hat{A} + 1)} = \frac{2bc(\cos \hat{A} + 1)}{bc(\cos \hat{A} + 1)} = 2 \end{aligned}$$

۴۸۰) در هر مثلث زاویه بزرگ‌تر روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر است. پس در

شکل زیر، کسینوس $\hat{A}$ مورد سؤال است. بنابر قضیه کسینوس‌ها،

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A}$$

$$36 = 16 + 25 - 2(4)(5) \cos \hat{A} \Rightarrow -5 = -40 \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$



۴۸۱) اندازه هر زاویه داخلی هشت ضلعی منتظم برابر $180^\circ - \frac{360^\circ}{8} = 135^\circ$

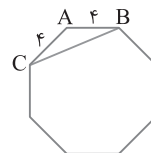
است. در شکل زیر، BC کوچک‌ترین قطر هشت ضلعی منتظم است. بنابر قضیه کسینوس‌ها،

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A}$$

$$BC^2 = 16 + 16 - 2(4)(4) \cos 135^\circ$$

$$BC^2 = 32 - 32\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow BC^2 = 32 + 16\sqrt{2}$$

$$BC^2 = 16(2 + \sqrt{2}) \Rightarrow BC = 4\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$



۴۸۲) برای به دست آوردن مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین زاویه‌های

مثلث ABC کافی است اندازه زاویه متوسط را از 180° کم کنیم. در شکل زیر، ضلع متوسط مثلث ABC است. پس

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos \hat{B}$$

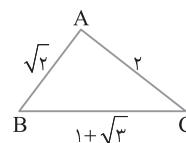
$$2^2 = (\sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{2})(1 + \sqrt{3}) \cos \hat{B}$$

$$4 = 2 + 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{3}) \cos \hat{B}$$

$$-2 - 2\sqrt{3} = -2\sqrt{2}(1 + \sqrt{3}) \cos \hat{B}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{-2\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})} = \frac{-2(1 + \sqrt{3})}{-2\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ$$

بنابراین $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ مجموع دو زاویه دیگر.



۴۹۲ ۳ از رابطه مساحت مثلث نتیجه می شود

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} (1+3 \cos \theta) (3 - \cos \theta) \sin 30^\circ = 2$$

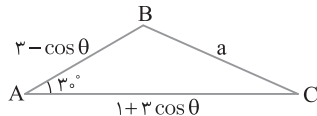
$$3 \cos^2 \theta - 8 \cos \theta + 5 = 0$$

چون مجموع ضریبهای معادله فوق صفر است، پس $\cos \theta = \frac{5}{3}$ یا $\cos \theta = 1$.

می دانیم $\cos \theta \leq 1$ ، پس جواب $\cos \theta = \frac{5}{3}$ قابل قبول نیست. در نتیجه

$\cos \theta = 1$ ، پس $AC = 4$ و $AB = 2$. بنابر قضیه کسینوسها،

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = 16 + 4 - 2(4)(2) \cos 30^\circ = 20 - 8\sqrt{3}$$



۴۹۳ ۳ بنابر قضیه کسینوسها،

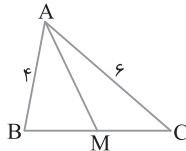
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \hat{A} = 16 + 16 - 2(4)(4) \cos 60^\circ$$

$$BC^2 = 32 - 16 = 16 \Rightarrow BC = 4$$

اکنون از قضیه میانهها به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2} \Rightarrow 16 + 16 = 2AM^2 + \frac{(4)^2}{2}$$

$$32 = 2AM^2 + 8 \Rightarrow AM^2 = 12 \Rightarrow AM = 2\sqrt{3}$$



۴۹۴ ۲ راه حل اول در شکل $a=4$ ، $b=3$ و $c=2$. اکنون بنابر قضیه

میانهها،

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow 9 + 4 = 2m_a^2 + \frac{16}{2} \Rightarrow m_a^2 = \frac{5}{2}$$

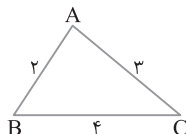
$$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2} \Rightarrow 16 + 9 = 2m_c^2 + \frac{4}{2} \Rightarrow m_c^2 = \frac{23}{2}$$

$$a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2} \Rightarrow 16 + 4 = 2m_b^2 + \frac{9}{2} \Rightarrow m_b^2 = \frac{31}{4}$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{5}{2} + \frac{23}{2} + \frac{31}{4} = \frac{87}{4}$$

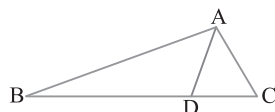
راه حل دوم می دانیم $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4} (a^2 + b^2 + c^2)$ پس

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4} (16 + 9 + 4) = \frac{3}{4} (29) = \frac{87}{4}$$



۴۹۵ ۲ طبق فرض $\frac{BD}{DC} = \frac{5}{2}$. چون AD نیمساز زاویه داخلی A است،

بنابر قضیه نیمسازها، $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ ، یعنی $\frac{5}{2} = \frac{AB}{AC}$ پس $2AB = 5AC$.



۴۸۷ ۲ برای محاسبه اندازه زاویه B با استفاده از قضیه کسینوسها می نویسیم:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \quad (1)$$

از طرف دیگر بنابر فرض

$$2ac = \sqrt{2} (a^2 + c^2 - b^2) \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - \sqrt{2} ac \quad (2)$$

با مقایسه برابریهای (۱) و (۲) نتیجه می گیریم $\cos \hat{B} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ$.

۴۸۸ ۲ ابتدا رابطه داده شده بین طول ضلعها را ساده می کنیم:

$$b^2 + c^2 - a^2 = ba^2 + ca^2 - a^2 \Rightarrow (b+c)(b^2 - bc + c^2) = a^2(b+c)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc \quad (1)$$

از طرف دیگر بنابر قضیه کسینوسها، $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \quad (2)$

با مقایسه برابریهای (۱) و (۲) نتیجه می گیریم $\cos \hat{A} = \frac{1}{2}$ پس $\hat{A} = 60^\circ$.

۴۸۹ ۳ از شکل زیر استفاده می کنیم. در متوازی الاضلاع قطرها متصف یکدیگرند. بنابر قضیه کسینوسها،

$$\triangle AOB: AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \times OB \times \cos 120^\circ$$

$$= 4 + 16 - 2(2)(4) \left(-\frac{1}{2}\right) = 28$$

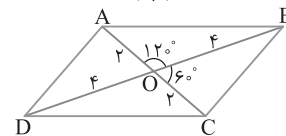
در نتیجه $AB = 2\sqrt{7}$. از طرف دیگر،

$$\triangle BOC: BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2OB \times OC \times \cos 60^\circ$$

$$= 16 + 4 - 2(4)(2) \left(\frac{1}{2}\right) = 12$$

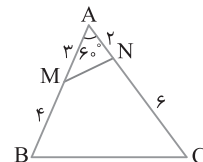
در نتیجه $BC = 2\sqrt{3}$. بنابرین نسبت اندازه دو ضلع متوازی الاضلاع برابر است با

$$\frac{AB}{BC} = \frac{2\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$



۴۹۰ ۲ بنابر قضیه کسینوسها در مثلثهای AMN و ABC،

$$\frac{BC}{MN} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \hat{A}}}{\sqrt{AM^2 + AN^2 - 2AM \times AN \times \cos \hat{A}}} = \frac{\sqrt{7^2 + 8^2 - 2(7)(8) \cos 60^\circ}}{\sqrt{4^2 + 5^2 - 2(4)(5) \cos 60^\circ}} = \frac{\sqrt{49 + 64 - 56}}{\sqrt{16 + 25 - 20}} = \frac{\sqrt{57}}{\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{57}{21}}$$

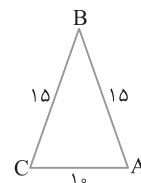


۴۹۱ ۴ شکل تست به صورت زیر است. بنابر قضیه کسینوسها،

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \Rightarrow 10^2 = 15^2 + 15^2 - 2(15)(15) \cos \hat{B}$$

$$100 = 225 + 225 - 450 \cos \hat{B} \Rightarrow -350 = -450 \cos \hat{B}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{350}{450} = \frac{7}{9}$$



۴ ۵۰۱ چون AD نیمساز مثلث ABE است، پس بنابر قضیه نیمسازها،

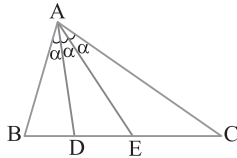
$$\frac{DE}{BD} = \frac{AE}{AB} \quad (۱)$$

همچنین AE نیمساز مثلث ADC است، پس بنابر قضیه نیمسازها،

$$\frac{EC}{DE} = \frac{AC}{AD} \quad (۲)$$

با ضرب کردن دو طرف برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{EC}{BD} = \frac{AE \times AC}{AB \times AD}$$



۱ ۵۰۲ از شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن AD نیمساز وارد بر وتر

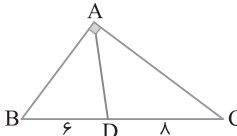
BC است. بنابر قضیه نیمسازها، $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{3}{4}$. در نتیجه عددی

مانند k وجود دارد به‌طوری که $AB = 3k$ و $AC = 4k$. اکنون بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ABC،

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 9k^2 + 16k^2 = 14^2$$

در نتیجه $k = \frac{14}{5}$. پس $AB = 3k = \frac{42}{5}$ و $AC = 4k = \frac{56}{5}$. در نتیجه

$$(ABC \text{ محیط}) = AB + AC + BC = \frac{42}{5} + \frac{56}{5} + 14 = 33\frac{4}{5}$$



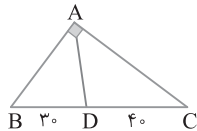
۴ ۵۰۳ از شکل زیر استفاده می‌کنیم. چون نقطه D از ضلع‌های زاویه A به یک فاصله است، پس AD نیمساز است. بنابر قضیه نیمسازها،

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{3}{4}$. یعنی عددی مانند k وجود دارد به‌طوری که $AB = 3k$ و $AC = 4k$. بنابر قضیه فیثاغورس،

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 9k^2 + 16k^2 = 7^2$$

در نتیجه $k = 1$. پس $AB = 3k = 3$ و $AC = 4k = 4$. با معلوم شدن طول ضلع‌ها می‌توان نوشت

$$(ABC \text{ محیط}) = AB + AC + BC = 3 + 4 + 7 = 14$$

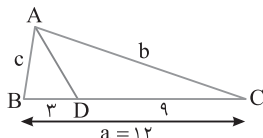


۳ ۵۰۴ از شکل زیر استفاده می‌کنیم. چون AD نیمساز زاویه A

است، پس بنابر قضیه نیمسازها، $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$. یعنی $\frac{c}{b} = \frac{1}{3}$. پس $b = 3c$. اکنون با توجه به برابری صورت تست می‌توان نوشت

$$a^2 = b^2 + c^2 - \frac{bc}{3} \Rightarrow 12^2 = 9c^2 + c^2 - \frac{3c \times c}{3}$$

با حل این معادله به دست می‌آید $c = 4$. پس $b = 3c = 12$. در نهایت می‌توان نوشت $(ABC \text{ محیط}) = a + b + c = 12 + 12 + 4 = 28$.



۳ ۴۹۶ M وسط BC است. چون

AD نیمساز زاویه داخلی A است، پس

$$BD = \frac{BC \times AB}{AB + AC} = \frac{15 \times 6}{6 + 12} = 5$$

همچنین $BM = \frac{1}{2} BC = 7.5$. اکنون می‌توان نوشت

$$DM = BM - BD = 7.5 - 5 = 2.5$$

۲ ۴۹۷ از شکل مقابل استفاده

می‌کنیم که در آن AD نیمساز زاویه

داخلی A است. بنابر قضیه نیمسازها،

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$$

پس $AC = 3k$. چون مساحت مثلث ABC برابر ۲۷ است، پس

$$\frac{1}{2} AB \times AC = 27 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 2k \times 3k = 27$$

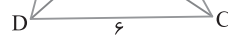
پس $k = 3$. در نتیجه $AB = 6$ و $AC = 9$. اکنون بنابر قضیه فیثاغورس،

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 9^2} = 3\sqrt{13}$$

۱ ۴۹۸ در مثلث ABD، چون

AO نیمساز است، پس

$$BO = \frac{BD \times AB}{AB + AD} = \frac{2}{5} BD \quad (۱)$$



همچنین در مثلث CBD چون CO' نیمساز است، پس

$$BO' = \frac{BD \times CB}{CD + CB} = \frac{2}{5} BD \quad (۲)$$

با مقایسه تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $BO = BO'$. پس در واقع O و O' بر هم منطبق هستند و در نتیجه $OO' = 0$.

۱ ۴۹۹ در دو مثلث MAB و

MAC، بنابر قضیه نیمسازها،

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AM}{MB}, \quad \frac{AE}{EC} = \frac{AM}{MC}$$

از طرف دیگر چون AM میانه است، پس $MB = MC$. در نتیجه

$DE \parallel BC$. اکنون بنابر عکس قضیه تالس، نتیجه می‌گیریم $DE \parallel BC$.

پس بنابر تعمیم قضیه تالس، $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$.

۲ ۵۰۰ چون مثلث‌های BAO و

BAD در ارتفاع نظیر رأس B مشترک

هستند، پس

$$\frac{S_{BAO}}{S_{BAD}} = \frac{AO}{AD} \quad (۱)$$

در مثلث ABC، پاره‌خط AD نیمساز است، بنابراین

$$BD = \frac{BC \times AB}{AB + AC} = \frac{8 \times 10}{10 + 12} = \frac{40}{11}$$

همچنین در مثلث BAD، BO نیمساز است، پس $AO = \frac{AD \times AB}{BD + AB}$. در نتیجه

$$\frac{AO}{AD} = \frac{AB}{BD + AB} = \frac{10}{\frac{40}{11} + 10} = \frac{11}{15} \quad (۲)$$

اکنون با مقایسه برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\frac{S_{BAO}}{S_{BAD}} = \frac{11}{15}$.

راه حل دوم چون $a=9$, $b=8$, $c=4$ پس $P=\frac{a+b+c}{2}=\frac{21}{2}$ بنابراین

$$d_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcP(P-a)} = \frac{2}{12} \sqrt{4 \times 8 \times \frac{21}{2} \left(\frac{21}{2} - 9\right)}$$

$$= \frac{1}{6} \sqrt{4 \times 4 \times 21 \times \frac{3}{2}} = \frac{2 \times 2 \times 3}{6} \sqrt{\frac{7}{2}} = 2 \sqrt{\frac{7}{2}} = \sqrt{14}$$

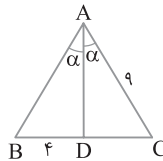
فرض کنید $AB=CD=x$ طول نیمساز AD را محاسبه می کنیم.

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC \Rightarrow AD^2 = 9x - 4x \Rightarrow AD^2 = 5x \quad (1)$$

از طرف دیگر بنابر قضیه نیمساز،

$$AD \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{x}{9} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6 \quad (2)$$

از تساوی (۱) و (۲) نتیجه می گیریم $AD^2 = 5 \times 6 \Rightarrow AD = \sqrt{30}$



راه حل اول با توجه به شکل،

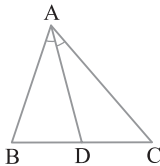
$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$$

$$\frac{1}{2} AB \times AC \sin 60^\circ = \frac{1}{2} AB \times AD \sin 30^\circ + \frac{1}{2} AC \times AD \sin 30^\circ$$

$$(8)(10) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (8)(AD) \left(\frac{1}{2}\right) + (10)(AD) \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$80\sqrt{3} = 8AD + 10AD \Rightarrow 80\sqrt{3} = 18AD \Rightarrow AD = \frac{80\sqrt{3}}{18} = \frac{40\sqrt{3}}{9}$$

راه حل دوم اگر d_a طول نیمساز زاویه A باشد، آن را



$$d_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\hat{A}}{2} \quad \begin{matrix} b=AC=10 \\ c=AB=8 \end{matrix}$$

$$d_a = \frac{2(10)(8)}{10+8} \cos \frac{60^\circ}{2}$$

$$= \frac{2 \times 10 \times 8}{18} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{40\sqrt{3}}{9}$$

در مثلث های AMB و AMC چون MQ و MP نیمساز

هستند، پس بنابر قضیه نیمسازها،

$$\frac{AQ}{BQ} = \frac{AM}{BM}, \quad \frac{AP}{PC} = \frac{AM}{MC}$$

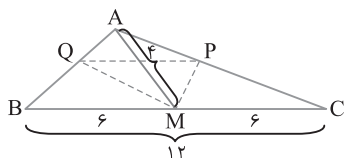
چون $BM=MC$ پس $\frac{AQ}{BQ} = \frac{AP}{PC}$ در نتیجه بنابر عکس قضیه تالس

$PQ \parallel BC$ اکنون بنابر تعمیم قضیه تالس، $\frac{PQ}{BC} = \frac{AQ}{AB}$ یا تفصیل در

مخرج به دست می آید $\frac{PQ}{BC-PQ} = \frac{AQ}{AB-AQ}$ یعنی $\frac{PQ}{12-PQ} = \frac{4}{6}$

از طرف دیگر $\frac{AQ}{BQ} = \frac{AM}{BM}$ بنابر این $\frac{PQ}{12-PQ} = \frac{4}{6}$ با حل این معادله به

دست می آید $PQ = 4/8$



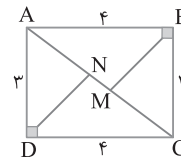
از شکل زیر استفاده می کنیم. بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث

ABC، $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ ، بنابر قضیه نیمسازها

در مثلث ABC، $AM = \frac{AC \times AB}{AB+BC} = \frac{5 \times 4}{4+3} = \frac{20}{7}$ ، از طرف دیگر در مثلث

ADC، $AN = \frac{AC \times AD}{AD+DC} = \frac{5 \times 3}{3+4} = \frac{15}{7}$ ، اکنون می توان نوشت

$$MN = AM - AN = \frac{20}{7} - \frac{15}{7} = \frac{5}{7}$$



بنابر قضیه نیمسازها،

$$AD \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{AB}{AC}$$

عددی مانند x وجود دارد $AB = yx, AC = 5x$

اکنون در مثلث ABC از قضیه کسینوس ها استفاده می کنیم:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \cos 60^\circ$$

$$(yx)^2 = (5x)^2 + 12^2 - 2(5x)(12) \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$49x^2 = 25x^2 + 144 - 60x \Rightarrow 24x^2 + 60x - 144 = 0$$

$$2x^2 + 5x - 12 = 0$$

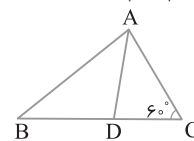
جواب های این معادله عبارتند از:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 96}}{4} = \frac{-5 \pm 11}{4} \quad x > 0 \Rightarrow x = \frac{-5 + 11}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

بنابراین

$$AC = 5x = \frac{15}{2}, AB = yx = \frac{21}{2}, BC = 12$$

$$(ABC) \text{ محیط} = \frac{15}{2} + \frac{21}{2} + 12 = 30$$



راه حل اول بنابر قضیه سینوس ها،

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \xrightarrow{\sin \hat{B} = 2 \sin \hat{C}} \frac{b}{2 \sin \hat{C}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow b = 2c$$

$$\xrightarrow{c=4} b = 8$$

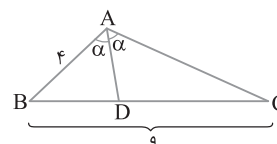
بنابر قضیه نیمساز،

$$AD \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}$$

$$\frac{BD}{BD+DC} = \frac{1}{1+2} \Rightarrow \frac{BD}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow BD = 3, DC = 6$$

بنابراین

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC = 4 \times 8 - 3 \times 6 = 14 \Rightarrow AD = \sqrt{14}$$



۵۱۱ ۳) بنابر قضیه نیمسازها در مثلث‌های ABM و CBM،

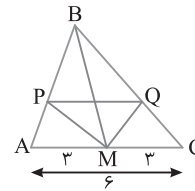
$$\frac{BP}{PA} = \frac{BM}{MA} = \frac{5}{3} \quad (۱), \quad \frac{BQ}{QC} = \frac{BM}{MC} = \frac{5}{3}$$

در نتیجه $\frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC}$. پس بنابر عکس قضیه تالس $PQ \parallel AC$. با ترکیب در

مخرج برابری (۱) نتیجه می‌شود $\frac{BP}{BP+PA} = \frac{5}{5+3}$ پس $\frac{BP}{BA} = \frac{5}{8}$. اکنون

بنابر تعمیم قضیه تالس، $\frac{PQ}{AC} = \frac{BP}{BA}$. یعنی $\frac{PQ}{6} = \frac{5}{8}$. در نتیجه

$$PQ = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$



۵۱۲ ۳) چون BI نیمساز زاویه B از مثلث BAD است، پس بنابر

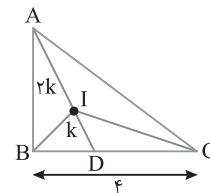
قضیه نیمسازها، $\frac{AB}{BD} = \frac{AI}{ID}$. پس $\frac{AB}{BD} = \frac{2}{1}$. همچنین CI نیمساز زاویه

C در مثلث ACD است، بنابراین $\frac{AI}{ID} = \frac{AC}{CD}$. پس $\frac{AC}{CD} = \frac{2}{1}$. در نتیجه

$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} = \frac{2}{1}$. اکنون بنابر ویژگی‌های تناسب می‌توان نوشت

$\frac{AB+AC}{BD+CD} = \frac{2}{1}$ ، یعنی $\frac{AB+AC}{BC} = \frac{2}{1}$ یا $\frac{AB+AC}{4} = \frac{2}{1}$. در نتیجه

$AB+AC=8$. اکنون می‌توان محیط مثلث ABC را به دست آورد
 $(\text{مثلث } ABC) = (AB+AC)+BC = 8+4=12$



۵۱۳ ۱) راه حل اول بنابر قضیه نیمسازها،

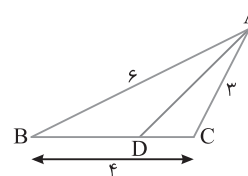
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BD}{BD+DC} = \frac{2}{2+1}$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BD}{4} = \frac{2}{3} \Rightarrow BD = \frac{8}{3}$$

در نتیجه $DC = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$. بنابراین

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC = 6 \times 3 - \frac{8}{3} \times \frac{4}{3} = 18 - \frac{32}{9} = \frac{130}{9}$$

در نتیجه $AD = \frac{\sqrt{130}}{3}$



راه حل دوم چون $a=4$ ، $b=3$ و $c=6$ ، پس $P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13}{2}$. بنابراین

$$d_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcP(P-a)} = \frac{2}{9} \sqrt{3 \times 6 \times \frac{13}{2} \left(\frac{13}{2} - 4\right)} = \frac{2}{9} \sqrt{3 \times 3 \times 13 \times \frac{5}{2}} \\ = \frac{2 \times 3}{9} \sqrt{\frac{13 \times 5}{2}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{4 \times 13 \times 5}{2}} = \frac{\sqrt{130}}{3}$$

۵۱۴ ۱) اگر h_a ، h_b و h_c طول ارتفاع‌های مثلث ABC باشند،

آن‌گاه $h_a = \frac{2S}{a}$ ، $h_b = \frac{2S}{b}$ و $h_c = \frac{2S}{c}$. اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\frac{2S}{a}} + \frac{1}{\frac{2S}{b}} + \frac{1}{\frac{2S}{c}} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{13}{2 \times 12} = \frac{3}{4}$$

۵۱۵ ۳) می‌دانیم مساحت هر مثلث برابر نصف حاصل ضرب طول دو

ضلع در سینوس زاویه بین آن دو ضلع است، پس $S = \frac{1}{2} a \times c \times \sin \hat{B}$. چون

$a \times c = 2b^2$ ، پس $S = \frac{1}{2} (2b^2) \sin \hat{B} = b^2 \sin \hat{B}$. همچنین

$\frac{1}{2} b^2 \sin \hat{B} = b^2 \sin \hat{B}$ ، یعنی $\sin \hat{B} = \frac{1}{2}$. در نتیجه

$\hat{B} = 30^\circ$ یا $\hat{B} = 150^\circ$. چون زاویه A در این مثلث منفرجه است، پس $\hat{B} = 150^\circ$ قابل قبول نیست.

۵۱۶ ۱) می‌دانیم در هر مثلث، نسبت دو ارتفاع دلخواه، برابر است با

معکوس نسبت قاعده‌های نظیر آن دو ارتفاع، بنابراین

$$\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \quad \frac{h_c}{h_b} = \frac{b}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

اکنون می‌توان نوشت $\frac{h_a+h_c}{h_b} = \frac{h_a}{h_b} + \frac{h_c}{h_b} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

۵۱۷ ۲) راه حل اول با استفاده از دستور هرون مساحت مثلث را به دست

می‌آوریم:

$$P = \frac{1}{2} (24 + 10 + 26) = 30$$

$$S = \sqrt{30 \times (30-24) \times (30-10) \times (30-26)} = 120$$

می‌دانیم اگر شعاع دایره محاطی داخلی مثلث ABC باشد، آن‌گاه $r = \frac{S}{P}$

$$\text{پس } r = \frac{120}{30} = 4$$

راه حل دوم برای به دست آوردن مساحت مثلث ABC، چون ۱۰ و ۲۶ و ۲۴ اعداد فیثاغورسی هستند ($26^2 = 24^2 + 10^2$)، می‌توان از روش کلاسیک نیز

مساحت مثلث را به دست آورد:

۵۱۸ ۳) با استفاده از دستور هرون مساحت مثلث را به دست می‌آوریم:

$$P = \frac{4+5+7}{2} = 8, \quad S = \sqrt{8(8-4)(8-5)(8-7)} = 4\sqrt{6}$$

می‌دانیم اگر شعاع دایره محیطی مثلث ABC باشد، آن‌گاه $R = \frac{abc}{4S}$ ، پس

$$R = \frac{4 \times 5 \times 7}{4 \times 4\sqrt{6}} = \frac{35}{4\sqrt{6}}$$

در نتیجه $2R = \frac{35}{2\sqrt{6}}$ طول قطر دایره محیطی.

پس ابتدا S' را به کمک دستور هرون به دست می آوریم:

$$S' = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad P = \frac{5+9+6}{2} = 10$$

$$S' = \sqrt{10(10-5)(10-9)(10-6)} = \sqrt{10 \times 5 \times 1 \times 4} = 10\sqrt{2}$$

$$S = \frac{4}{3} S' = \frac{4}{3} \times 10\sqrt{2} = \frac{40\sqrt{2}}{3}$$
 بنابراین

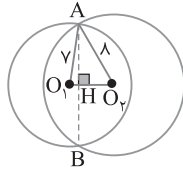
با استفاده از دستور هرون مساحت مثلث $O_1 O_2 A$ را به دست می آوریم:

$$P = \frac{7+8+5}{2} = 10 \Rightarrow S = \sqrt{10 \times (10-7) \times (10-8) \times (10-5)} = 10\sqrt{3}$$

اکنون طول ارتفاع AH را به دست می آوریم:

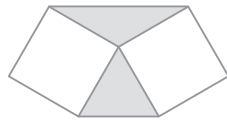
$$AH = \frac{2S}{O_1 O_2} = \frac{2 \times 10\sqrt{3}}{5} = 4\sqrt{3}$$

$$AB = 2AH = 2 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$
 بنابراین



اگر ضلع مثلث متساوی الاضلاع a باشد، اضلاع مربع ها نیز به طول a هستند و زاویه رأس دو مثلث متساوی الساقین رنگی 60° و 120° است. بنابراین

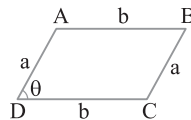
$$\begin{aligned} \text{مساحت قسمت رنگی} &= \frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} a^2 \sin 120^\circ \\ &= \frac{a^2 \sin 60^\circ}{a^2} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



متوازی الاضلاع $ABCD$ با دو ضلع به طول های ثابت a و b و زاویه متغیر θ مفروض است.

$$\text{ثابت } 2(a+b) = \text{محیط متوازی الاضلاع}$$

$$\text{متغیر } ab \sin \theta = \text{مساحت متوازی الاضلاع}$$



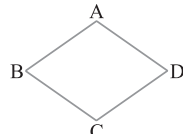
مساحت هر چهارضلعی برابر است با نصف حاصل ضرب دو قطر در سینوس زاویه بین دو قطر آن. بنابراین

$$\text{مساحت متوازی الاضلاع} = \frac{1}{2} (8)(6) \sin 60^\circ = 24 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

مساحت لوزی $ABCD$ برابر $AB^2 \sin \hat{A}$ است.

$$\sin \hat{A} = \sqrt{1 - \cos^2 \hat{A}} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$$

$$S_{ABCD} = AB^2 \sin \hat{A} = (26)^2 \left(\frac{5}{13}\right) = 260$$
 بنابراین



از شکل زیر استفاده می کنیم. توجه کنید که $a=14$,

$$b=8+x \text{ و } c=6+x. \text{ در نتیجه } P = \frac{a+b+c}{2} = x+14. \text{ می دانیم اگر } r$$

شعاع دایره محاطی داخلی مثلث ABC باشد، آن گاه $r = \frac{S}{P}$ پس $S = rP$ ، یعنی

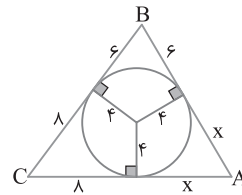
$$S = 4(x+14) \quad (1)$$

از طرف دیگر بنابر دستور هرون،

$$S = \sqrt{(x+14)(x)(6)(8)} = \sqrt{48x(x+14)} \quad (2)$$

با مقایسه تساوی های (۱) و (۲) نتیجه می گیریم $48x(x+14) = (4(x+14))^2$.

با حل این معادله به دست می آید $x=7$ پس $a=14$ ، $b=8+x=15$ و $c=6+x=13$ ، یعنی اندازه کوچک ترین ضلع مثلث برابر ۱۳ است.



راه حل اول میانه های $CM''=5$ ، $BM'=9$ و $AM=6$ را

در مثلث ABC در نظر بگیرد. پاره خط OM را به اندازه خودش امتداد می دهیم تا به D برسیم. در این صورت در مثلث OCD اندازه ضلع ها برابرند با

$$OC = \frac{2}{3} CM'', OD = \frac{2}{3} AM, CD = OB = \frac{2}{3} BM'$$

بنابراین $OC = \frac{10}{3}$ ، $OD = 4$ و $CD = 6$ ، پس سه ضلع مثلث OCD معلوم

است و به کمک دستور هرون می توان مساحت آن را به دست آورد. در ضمن می دانیم

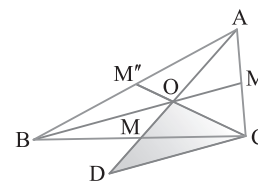
$$S_{OCD} = 2S_{OMC} \text{ و } S_{OMC} = \frac{1}{6} S_{ABC} \text{ پس } S_{ABC} = 3S_{OCD}$$

توجه کنید که $S_{OCD} = \sqrt{P(P-OC)(P-OD)(P-CD)}$ چون در

$$\text{مثلث } OCD \text{ مقدار } P \text{ برابر } \frac{10}{3} + 4 + 6 = \frac{40}{3} \text{ است، پس}$$

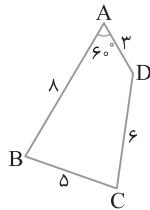
$$\begin{aligned} S_{OCD} &= \sqrt{\frac{40}{3} \left(\frac{40}{3} - \frac{10}{3}\right) \left(\frac{40}{3} - 4\right) \left(\frac{40}{3} - 6\right)} \\ &= \sqrt{\frac{40}{3} \times \frac{10}{3} \times \frac{8}{3} \times \frac{2}{3}} = \frac{40\sqrt{2}}{9} \end{aligned}$$

$$S_{ABC} = 3 \times \frac{40\sqrt{2}}{9} = \frac{40\sqrt{2}}{3}$$
 بنابراین



راه حل دوم اگر S مساحت مثلث و S' مساحت مثلث ساخته شده با میانه های

$$S' = \frac{3}{4} S \text{ آن گاه}$$



۵۲۹ ۳ در شکل زیر، فرض کنید $BC=8$ و طول میانه‌های BM و CN

به ترتیب برابر ۶ و ۹ باشد. نقطه O محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC است. پس

$$OB = \frac{2}{3} BM = \frac{2}{3}(6) = 4, \quad OC = \frac{2}{3} CN = \frac{2}{3}(9) = 6$$

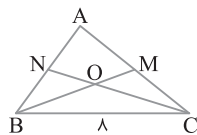
اکنون به کمک قضیه هرون مساحت مثلث OBC را پیدا می‌کنیم:

$$P = \frac{6+4+8}{2} = 9$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{9(9-6)(9-4)(9-8)} = \sqrt{9 \times 3 \times 5 \times 1} = 3\sqrt{15}$$

از طرف دیگر مساحت مثلث ABC سه برابر مساحت مثلث OBC است.

$$S_{ABC} = 3 \times 3\sqrt{15} = 9\sqrt{15} \text{ پس}$$



۵۳۰ ۴ طول خط‌الممرکزین دو دایره مماس خارجی برابر مجموع

شعاع‌های دو دایره است. پس اضلاع مثلث $OO'O''$ برابر $OO'=8$.

$OO''=9$ و $O'O''=11$ است. اکنون مساحت این مثلث را به کمک قضیه

هرون به دست می‌آوریم:

$$P = \frac{8+9+11}{2} = 14$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{14(14-8)(14-9)(14-11)} = \sqrt{14 \times 6 \times 5 \times 3} = \sqrt{4 \times 9 \times 5 \times 7} = 6\sqrt{35}$$

۵۳۱ ۱ سه ضلع مثلث ABC معلوم است. به نظر می‌رسد برای

محاسبه مساحت از قضیه هرون استفاده کنیم ولی طول اضلاع اعداد گنگ

هستند و محاسبه به کمک رابطه هرون وقت گیر می‌شود. در اینجا با استفاده

از قضیه کسینوس‌ها یکی از زاویه‌های مثلث مثلاً $\hat{A}$ را به دست می‌آوریم تا به

کمک رابطه مساحت سینوسی، مساحت مثلث را پیدا کنیم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A}$$

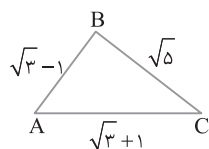
$$5 = 4 + 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} - 2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) \cos \hat{A}$$

$$-3 = -4 \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{3}{4}$$

$$\sin \hat{A} = \sqrt{1 - \cos^2 \hat{A}} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

بنابراین

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \sin \hat{A} = \frac{1}{2} (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{\sqrt{7}}{4}$$



۵۲۶ ۱ اضلاع چهارضلعی $ABCD$ قطره‌های کوچک هشت ضلعی

منتظم هستند، پس مساوی‌اند. بنابراین $AB = \frac{8+4\sqrt{2}}{4} = 2+\sqrt{2}$ از طرف

دیگر اندازه هر زاویه داخلی هشت ضلعی منتظم 135° است. پس با توجه به

شکل زیر و بنابر قضیه کسینوس‌ها،

$$\triangle OAB: AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2(AO)(BO) \cos 135^\circ$$

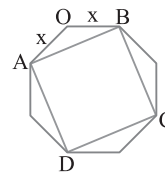
$$(2+\sqrt{2})^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$2x^2 + \sqrt{2}x^2 = (2+\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 = 2+\sqrt{2}$$

بنابراین

$$S_{ABCD} = 4S_{OAB}$$

$$= 4 \left(\frac{1}{2} x^2 \sin 135^\circ \right) = 2(2+\sqrt{2}) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} + 2$$



۵۲۷ ۱ در مثلث ABC فرض می‌کنیم $AB=2\sqrt{2}$ ، $AC=4$ ،

$\hat{A} = \frac{3\pi}{4}$ ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد. به کمک قضیه کسینوس‌ها

طول ضلع BC را به دست می‌آوریم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$\xrightarrow{\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}} BC^2 = 8 + 16 - 2(2\sqrt{2})(4) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

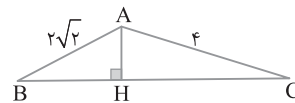
$$BC^2 = 8 + 16 + 16 = 40 \Rightarrow BC = 2\sqrt{10}$$

اکنون مساحت مثلث ABC را به دو صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \sin \hat{A}$$

$$AH \times BC = AB \times AC \sin \hat{A} \Rightarrow AH \times 2\sqrt{10} = 2\sqrt{2} \times 4 \times \sin \frac{3\pi}{4}$$

$$\xrightarrow{\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}} AH = \frac{2\sqrt{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$



۵۲۸ ۲ ابتدا با استفاده از قضیه کسینوس‌ها طول قطر BD را به دست می‌آوریم:

$$\triangle ABD: BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \cos 60^\circ$$

$$BD^2 = 8^2 + 3^2 - 2(8)(3) \left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow BD^2 = 64 + 9 - 24 \Rightarrow BD = 7$$

اکنون به کمک قضیه هرون مساحت مثلث BCD را پیدا می‌کنیم:

$$P = \frac{5+6+7}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$S_{BCD} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = \sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2} = 6\sqrt{6}$$

پس $A = [2 - 2ij]_{4 \times 4}$ بنابرین درایه‌های روی قطر اصلی آن به صورت زیر هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & ? & ? & ? \\ ? & -6 & ? & ? \\ ? & ? & -16 & ? \\ ? & ? & ? & -30 \end{bmatrix}$$

بنابرین مجموع درایه‌های روی قطر اصلی A برابر $-52 = -30 - 16 - 6 - 0$ است.

در گزینه (۱)، درایه a_{11} برابر $1 - 2 = -1$ است، پس این گزینه

درست نیست. در گزینه (۲)، درایه a_{22} برابر $3 - 1 = 2$ است، پس این گزینه

هم درست نیست. در گزینه (۳)، درایه a_{11} برابر $1 - 1 = 0$ است، پس این

گزینه هم درست نیست. بنابرین گزینه (۴) درست است.

دو ماتریس هم مرتبه مساوی اند هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر

با هم برابر باشند. چون $A = B$ پس

$$z - 1 = -3 \Rightarrow z = -2, \quad \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 3$$

$$\text{بنابرین } \frac{x}{2} - y + 2z = \frac{6}{2} - 3 - 4 = -4$$

درایه‌های این دو ماتریس را تعیین می‌کنیم:

$$A = [2ij - 1]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 11 \\ 5 & 11 & 17 \end{bmatrix}$$

$$B = [i^2 - 3j]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -8 \\ 1 & -2 & -5 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{بنابرین } 2A - B = 2 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 11 \\ 5 & 11 & 17 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -5 & -8 \\ 1 & -2 & -5 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2A - B = \begin{bmatrix} ? & 11 & ? \\ ? & 16 & ? \\ ? & 19 & ? \end{bmatrix} \quad \text{ستون دوم ماتریس } 2A - B \text{ را لازم داریم، پس}$$

در نتیجه مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $2A - B$ برابر است با

$$11 + 16 + 19 = 46$$

ماتریس‌های A و B را در معادله زیر قرار می‌دهیم:

$$mA - nB = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow m \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -n = -3 \Rightarrow n = 3 \\ -2m = -4 \Rightarrow m = 2 \\ m + n = 5 \\ 2m - 3n = 0 \end{cases}$$

توجه کنید مقادیر m و n به دست آمده در معادله چهارم صدق نمی‌کنند، پس $n = 3$ و $m = 2$ قابل قبول نیست.

مساحت مثلث را با استفاده از قضیه هرون به صورت زیر

به دست می‌آوریم:

$$P = \frac{5 + x + x + 1}{2} = x + 3$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

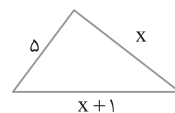
$$= \sqrt{(x+3)(x+3-5)(x+3-x)(x+3-x-1)}$$

$$= \sqrt{(x+3)(x-2)(2)(2)} = \sqrt{6(x^2 + x - 6)}$$

بنابر فرض سؤال $S = 6\sqrt{6}$ ، پس

$$\sqrt{6(x^2 + x - 6)} = 6\sqrt{6} \Rightarrow x^2 + x - 42 = 0$$

$$(x+7)(x-6) = 0 \xrightarrow{x>0} x = 6$$



شعاع دایره محاطی خارجی نظیر ضلع BC (بزرگ‌ترین ضلع در

شکل زیر) از رابطه $r_a = \frac{S}{P-a}$ به دست می‌آید.

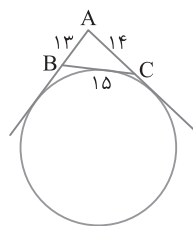
مساحت مثلث ABC را با استفاده از قضیه هرون به دست می‌آوریم:

$$P = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$$

$$= \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = \sqrt{21 \times 21 \times 16} = 21 \times 4 = 84$$

$$\text{بنابرین } r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{84}{21-15} = \frac{84}{6} = 14$$



ابتدا درایه‌های ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$a_{11} = 3, \quad a_{12} = 3, \quad a_{13} = 5$$

$$a_{21} = 6, \quad a_{22} = 8, \quad a_{23} = 4$$

$$\text{بنابرین } A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{اکنون به دست می‌آید}$$

$$A \text{ مجموع درایه‌های ماتریس } = 3 + 3 + 5 + 6 + 8 + 4 = 29$$

با توجه به تعریف درایه‌های ماتریس A .

$$a_{22} = 2^2 - 1 = 3, \quad a_{31} = 3 + 1 = 4, \quad a_{33} = 7$$

$$\text{بنابرین } 2a_{22} - 3a_{31} + 4a_{33} = 2(3) - 3(4) + 4(7) = 22$$

ماتریس A مربعی از مرتبه $(2n) \times (6-n)$ است، پس

$$6 - n = 2n \Rightarrow 3n = 6 \Rightarrow n = 2$$

۵۴۵) ابتدا درایه‌های ماتریس‌های A و B را به دست می‌آوریم:

$$a_{11}=1-2=-1, \quad a_{12}=1-4=-3, \quad a_{13}=1-6=-5$$

$$a_{21}=2-2=0, \quad a_{22}=2-4=-2, \quad a_{23}=2-6=-4$$

پس $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ از طرف دیگر، $b_{11}=2+1=3$

بنابراین $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ پس $b_{13}=2+3=5$ و $b_{12}=2+2=4$

$$C = \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$C^T = C \times C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -10 & -25 \\ 0 & 15 & 30 \\ 2 & 14 & 26 \end{bmatrix}$$

در نتیجه مجموع درایه‌های ماتریس C^T برابر است با
 $5-10-25+15+30+2+14+26=57$

۵۴۶) ابتدا ماتریس AB را به دست می‌آوریم:

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & b & -1 \\ 2 & 1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -2 \\ 1 & a \\ 2b & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a-b & 1+ab \\ 2a+1-2ab & -4-2a \end{bmatrix}$$

در ماتریس قطری درایه‌های بالا و پایین قطری اصلی صفر هستند، پس

$$\begin{cases} 1+ab=0 \Rightarrow ab=-1 & (1) \\ 2a+1-2ab=0 \Rightarrow 2a+1+2=0 \Rightarrow a=-\frac{3}{2} \xrightarrow{(1)} b=\frac{2}{3} \end{cases}$$

بنابراین $a^2-3b=(-\frac{3}{2})^2-3(\frac{2}{3})=\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4}$

۵۴۷) در ماتریس قطری درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند، پس

$$2y+3=0 \Rightarrow y=-\frac{3}{2}, \quad x-2y=0 \Rightarrow x=2y \xrightarrow{y=-\frac{3}{2}} x=-3$$

پس $A = \begin{bmatrix} -3+Z & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ اکنون ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} -3+Z & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3+Z & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3+Z)^2 & 0 \\ 0 & \frac{9}{4} \end{bmatrix}$$

چون A^2 اسکالر است، پس درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر هستند.

$$(-3+Z)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow -3+Z = \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} -3+Z = \frac{3}{2} \Rightarrow Z = \frac{9}{2} \\ -3+Z = -\frac{3}{2} \Rightarrow Z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

پس کمترین مقدار $x+y+Z$ به ازای $Z=\frac{3}{2}$ به دست می‌آید:

$$x+y+Z = -3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = -3$$

۵۴۱) ضرب دو ماتریس در صورتی قابل تعریف است که تعداد

ستون‌های ماتریس سمت چپ با تعداد سطرهاى ماتریس سمت راست برابر باشد. در اینجا ماتریس A ماتریسی 2×3 و ماتریس C ماتریسی 3×5 است، پس ماتریس AC قابل تعریف و از مرتبه 2×5 است. سایر گزینه‌ها این ویژگی را ندارند و ضرب آن‌ها قابل تعریف نیست.

۵۴۲) ابتدا ماتریس‌های AB و BA را پیدا می‌کنیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -14 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{بنابراین } AB - BA = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -14 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

۵۴۳) راه‌حل اول ابتدا ماتریس A^2 را پیدا می‌کنیم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1-k \\ 2+2k & -2+k^2 \end{bmatrix}$$

چون $A^2 + 2A - I = \bar{O}$ پس

$$\begin{bmatrix} -1 & -1-k \\ 2+2k & -2+k^2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -k-3 \\ 2k+6 & k^2+2k-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} -k-3=0 \Rightarrow k=-3 \\ 2k+6=0 \Rightarrow k=-3 \\ k^2+2k-3=0 \Rightarrow (k+3)(k-1)=0 \Rightarrow k=-3 \text{ یا } k=1 \end{cases}$$

بنابراین $k=-3$ که در هر سه معادله صدق می‌کند، قابل قبول است. پس به‌ازای یک مقدار k تساوی ماتریسی داده شده برقرار است.

راه‌حل دوم بنابر قضیه کیلی - همیلتون،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & k \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = (k+1)A - (k+2)I$$

طبق فرض $A^2 = I - 2A$ ، بنابراین $(k+1)A - (k+2)I = I - 2A$. در نتیجه

$$\begin{cases} k+1=-2 \Rightarrow k=-3 \\ -(k+2)=1 \Rightarrow k=-3 \end{cases}$$

پس فقط یک مقدار برای k به دست می‌آید.

۵۴۴) چون $c_{11}=16$ پس $a+2b+6=16$ $\begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 3 \end{bmatrix}$

یعنی $a+2b=10$. همچنین از $c_{22}=0$ به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} a & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ a \\ 4 \end{bmatrix} = -a+2a+8=0$$

پس $a=-8$ و از برابری $a+2b=10$ به دست می‌آید $-8+2b=10$ ، یعنی

$$b=9 \text{ بنابراین } a-b=-8-9=-17$$

۵۴۸ ضرب ماتریس‌ها را به ترتیب پیدا می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{1 \times 3} \begin{bmatrix} x & 1 & -1 \\ 2 & -x & 1 \\ 1 & -2 & x \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix}_{3 \times 1} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2x-2 & x+2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 2x-2+2x+4-3x=0 \Rightarrow x=-2$$

بنابراین معادله مورد نظر فقط یک جواب دارد.

۵۴۹ چون A از مرتبه 5×2 و C از مرتبه $p \times q$ است، پس AC از

مرتبه $5 \times q$ است و $p=2$. برای اینکه $(2AC)^3$ قابل تعریف باشد، باید $q=5$. همچنین $(2AC)^3$ از مرتبه 5×5 باید با ماتریس $3B$ قابل تفریق شدن باشد، پس باید ماتریس‌های $(2AC)^3$ و $3B$ هم‌مرتبه باشند، یعنی $5 \times 5 = k \times 5 = 5 \times 5$ بنابراین $k=5$. در نتیجه $pqk=2 \times 5 \times 5 = 50$.

۵۵۰ برای به‌دست آوردن این درایه به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

(ستون اول B) A (سطر سوم C) = درایه سطر سوم و ستون اول ماتریس CAB

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 10$$

۵۵۱ برای به‌دست آوردن درایه سطر دوم و ستون دوم ماتریس

BAB به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}_{\substack{\downarrow \\ \text{سطر دوم B}}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{\substack{\downarrow \\ A}} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}_{\substack{\downarrow \\ \text{ستون دوم B}}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 24+3-8-14=5$$

۵۵۲ ابتدا طرفین تساوی $A^2=2A+I$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$A^2=2A+I \Rightarrow A^4=(2A+I)^2 \Rightarrow A^4=4A^2+4A+I$$

$$A^4=4(2A+I)+I+4A \Rightarrow A^4=12A+5I \xrightarrow[\text{در ضرب می‌کنیم}]{A}$$

$$A^5=12A^2+5A \Rightarrow A^5=12(2A+I)+5A \Rightarrow A^5=29A+12I$$

بنابراین $\alpha=29$ و $\beta=12$ پس $\alpha-2\beta=29-24=5$.

۵۵۳ توجه کنید که

$$A^2=A \times A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

اکنون می‌توانیم ماتریس A^{20} را به صورت زیر به‌دست آوریم:

$$A^{20}=(A^3)^6 \times A^2=I^6 \times A^2=A^2=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

۵۵۴ ابتدا ماتریس A^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=A \times A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

چون A^2 ماتریس خاصی نیست، ماتریس A^3 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^3=A^2 \times A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

ماتریس A^3 نیز کمکی برای پیدا کردن توان‌های بالای A نمی‌کند، پس A^4 را پیدا می‌کنیم:

$$A^4=A^3 \times A^2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

بنابراین برای پیدا کردن A^{16} آن را برحسب A^4 می‌نویسیم:

$$A^{16}=(A^4)^4=(-I)^4=I$$

۵۵۵ می‌دانیم $\alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \tan^2 \alpha$ پس

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1+\tan^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1+\tan^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \cos^2 \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \cos^2 \alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

بنابراین $A^4=(A^2)^2=I^2=I$ و $A^6=(A^2)^3 \times A=I^3 \times A=A$ پس

$$A^6+A^4=A+I$$

۵۵۶ در حالت کلی، حاصل ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ و

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a+b & 1 \end{bmatrix}$$

برابر است با $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$ اکنون با

توجه به این رابطه می‌توانیم ماتریس A را به‌دست آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+2+\dots+10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 55 & 1 \end{bmatrix}$$

دقت کنید که $1+2+\dots+10 = \frac{1 \times (1+10)}{2} = 55$

ماتریس A^3 نیز کمکی برای پیدا کردن توان‌های بالاتر A نمی‌کند، پس ماتریس A^4 را پیدا می‌کنیم:

$$A^4 = A^3 \times A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

بنابراین $A^{12} = (A^4)^3 = I^3 = I$

ماتریس A^3 را به دست می‌آوریم:

$$A^3 = A - I \xrightarrow{\text{در } A \text{ ضرب می‌کنیم}} A^3 = A^2 - A$$

$$A^3 = A - I - A \Rightarrow A^3 = -I$$

بنابراین $A^{200} = (A^3)^{66} \times A^2 = (-I)^{66} \times A^2 = I \times A^2 = A^2 = A - I$

ابتدا ماتریس A^2 را پیدا می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

در نتیجه $A^4 = A^2 \times A^2 = I \times I = I$ و $A^4 = A^2 \times A^2 = I \times I = I$ اکنون توجه کنید که

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & -d \\ -a & -b \end{bmatrix} \text{ یعنی در نتیجه } b = -4 \text{ و } c = -1 \text{ پس}$$

$$b + c = -4 - 1 = -5$$

در عبارت داده شده از سمت چپ از A و از سمت راست از B

فکتور می‌گیریم:

$$A \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} B + A \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} B = A \left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \right) B = A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} B = A(2I)B = 2AB = 2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

راه حل اول ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}$$

بنابر فرض سؤال،

$$A^2 = \alpha A + \beta I \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha + \beta & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha + \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta = 9 \\ \alpha = 2 \end{cases} \Rightarrow \beta = 13$$

این مقادیر α و β در دو معادله $5\alpha = 10$ و $4\alpha + \beta = 21$ نیز صدق می‌کنند. پس زوج مرتب (α, β) برابر $(2, 13)$ است.

ماتریس قطری است و می‌دانیم حاصل ضرب دو ماتریس

قطری یک ماتریس قطری است که درایه‌های قطر اصلی آن از ضرب نظیر به نظیر درایه‌های این دو ماتریس به دست می‌آیند. بنابراین

$$A^7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^7 = \begin{bmatrix} 1^7 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^7 & 0 \\ 0 & 0 & 2^7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^7 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس A^7 برابر $2^7 = 128$ است.

ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & 1399 & 1398 \\ 0 & 0 & 1397 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1399 & 1398 \\ 0 & 0 & 1397 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1399 \times 1397 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

چون ماتریس A^2 ماتریس خاصی نیست، ماتریس A^3 را به دست می‌آوریم:

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1399 \times 1397 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1399 & 1398 \\ 0 & 0 & 1397 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

چون $A^3 = \bar{O}$ ، پس به ازای هر عدد طبیعی n که $n \geq 3$ ، $A^n = \bar{O}$ ، بنابراین

$$(A^4 - I)(I + A^3) = (\bar{O} - I)(I + \bar{O}) = -I^2 = -I$$

در بین گزینه‌ها فقط گزینه (۳) برابر $-I$ است، چون $A^{1400} = \bar{O}$ ، پس

$$A^{1400} - I = -I$$

ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

چون A^2 ماتریس خاصی نیست، ماتریس A^3 را به دست می‌آوریم:

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر،

$$A^3 + A^2 + A + 3I = \bar{O} \Rightarrow A^2 + A + I = -A^3 - 2I \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}(-A^3 - 2I) = \frac{1}{3}(A^3 + 2I)$$

۵۷۲ (۱) طرفین تساوی $AC + CB = AB$ را از چپ در A^{-1} و از

راست در B^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$AC + CB = AB \xrightarrow{A^{-1} \times} A^{-1}AC + A^{-1}CB = A^{-1}AB$$

$$C + A^{-1}CB = B \xrightarrow{\times B^{-1}} CB^{-1} + A^{-1}CBB^{-1} = BB^{-1}$$

$$CB^{-1} + A^{-1}C = I$$

۵۷۳ (۳) می‌دانیم حاصل ضرب هر ماتریس وارون‌پذیر در وارونش برابر I

است، پس، $(A - 2I)(A - 2I)^{-1} = I$. ضرب را به صورت زیر انجام می‌دهیم:

$$A(A - 2I)^{-1} - 2(A - 2I)^{-1} = I$$

$$A(A - 2I)^{-1} = I + 2(A - 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{بنابراین}$$

۵۷۴ (۲) طرفین تساوی $A^2 = 4A - 3I$ را در A^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$A^2 = 4A - 3I \xrightarrow{A^{-1} \times} A = 4I - 3A^{-1} \Rightarrow 3A^{-1} = -A + 4I$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}A + \frac{4}{3}I \xrightarrow{A^{-1} = \alpha A + \beta I} \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{3} \\ \beta = \frac{4}{3} \end{cases}$$

بنابراین $2\alpha - \beta = -\frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -2$

۵۷۵ (۳) ماتریسی وارون‌پذیر است که دترمینان آن غیرصفر باشد. اکنون

دترمینان ماتریس هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\text{گزینه (۱): } \begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & a+1 \end{vmatrix} = a^2 - 1$$

صفر است، پس این ماتریس همواره وارون‌پذیر نیست.

$$\text{گزینه (۲): } \begin{vmatrix} a+1 & b \\ b-1 & a \end{vmatrix} = a^2 + a - b^2 + b$$

$a=0$ و $b=0$ صفر است، پس این ماتریس همواره وارون‌پذیر نیست.

$$\text{گزینه (۳): } \begin{vmatrix} a^2+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 1$$

نمی‌شود، پس این ماتریس همواره وارون‌پذیر است.

$$\text{گزینه (۴): } \begin{vmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2+1 \end{vmatrix} = a^2(b^2+1)$$

$a=0$ صفر است، پس این ماتریس همواره وارون‌پذیر نیست.

۵۷۶ (۳) ابتدا درایه‌های ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$a_{11} = 2 - 1 = 1, \quad a_{12} = 2 - 2 = 0, \quad a_{21} = 8 - 1 = 7, \quad a_{22} = 8 - 2 = 6$$

$$\text{پس } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{بنابراین } A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{در نتیجه}$$

$$6A^{-1} + A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = 7I$$

راه حل دوم بنابر قضیه کیلی - همیلتون

$$A^2 = (-2+4)A - (-8-5)I_p = 2A + 13I_p$$

اکنون با مقایسه این برابری با تساوی $A^2 = \alpha A + \beta I_p$ به دست می‌آید

$$\alpha = 2 \quad \text{و} \quad \beta = 13$$

۵۶۴ (۱) بنابر قضیه کیلی - همیلتون،

$$A^2 = (3+1)A - (3+2)I = 4A - 5I$$

دو طرف این برابری را در A ضرب می‌کنیم: $A^3 = 4A^2 - 5A$. مقدار A^2 را در این برابری قرار می‌دهیم:

$$A^3 = 4(4A - 5I) - 5A = 16A - 20I - 5A = 11A - 20I$$

چون $A^3 = \alpha A + \beta I$ ، پس $\alpha = 11$ و $\beta = -20$. در نتیجه

$$\alpha + \beta = 11 - 20 = -9$$

۵۶۵ (۴) از تساوی $2A - B = I$ به دست می‌آید $B = 2A - I$. دو طرف

این تساوی را به توان دو می‌رسانیم: $B^2 = 4A^2 - 4A + I$. چون $A^2 = A$ ، پس

$$B^2 - I = I - I = \bar{O} \quad \text{اکنون به دست می‌آید } B^2 = 4A - 4A + I = I$$

۵۶۶ (۳) از خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها نتیجه می‌شود

$$A(BA)^5 B = A(BA)(BA)(BA)(BA)(BA)B$$

$$= (AB)(AB)(AB)(AB)(AB)(AB) = (AB)^6 = C^6$$

۵۶۷ (۱) تساوی $BA + mAB = \bar{O}$ را می‌توان به صورت

$$AB = \left(-\frac{1}{m}\right)BA \quad \text{نوشت. اکنون دو طرف این تساوی را از سمت راست در}$$

$$B \text{ ضرب می‌کنیم: } AB^2 = \left(-\frac{1}{m}\right)BAB \quad \text{بنابراین}$$

$$AB^2 = \left(-\frac{1}{m}\right)B(AB) = \left(-\frac{1}{m}\right)B\left(-\frac{1}{m}\right)BA$$

$$= \left(-\frac{1}{m}\right) \times \left(-\frac{1}{m}\right)BBA = \frac{1}{m^2} B^2 A$$

۵۶۸ (۲) از خاصیت توزیع‌پذیری ضرب ماتریس روی جمع ماتریس‌ها

نتیجه می‌شود

$$(A + 3I)(-4A - 2I) = -4A^2 - 2A - 12A - 6I = -4A^2 - 14A - 6I$$

از طرف دیگر، از فرض $A^2 + 4A = \bar{O}$ نتیجه می‌گیریم $A^2 = -4A$. پس

$$(A + 3I)(-4A - 2I) = 16A - 14A - 6I = 2A - 6I$$

۵۶۹ (۱) حاصل ضرب دو ماتریس که وارون یکدیگرند، برابر ماتریس

همانی است. پس

$$A(2I - A) = I \Rightarrow 2A - A^2 = I \Rightarrow A^2 = 2A - I \xrightarrow{\text{طرفین را در } A \text{ ضرب می‌کنیم}}$$

$$A^3 = 2A^2 - A \Rightarrow A^3 = 2(2A - I) - A \Rightarrow A^3 = 3A - 2I$$

$$A^3 + 2I = 3A$$

۵۷۰ (۱) از تساوی $A^2 = A + I$ به دست می‌آید:

$$A^2 - A = I \Rightarrow A(A - I) = I$$

بنابراین ماتریس A وارون‌پذیر است و $A^{-1} = A - I$.

۵۷۱ (۱) تساوی داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A^3 + A^2 + A = -3I \Rightarrow A(A^2 + A + I) = -3I \Rightarrow A\left(\frac{A^2 + A + I}{-3}\right) = I$$

بنابراین ماتریس A وارون‌پذیر است و

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}(A^2 + A + I) \quad (1)$$

$$(2B)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{بنابراین}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix}$$

۵۸۲ الف وارون ماتریس A^{-1} را به دست می‌آوریم تا ماتریس A به دست آید:

$$A = (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

اکنون برای اینکه بتوانیم A^{2^0} را تعیین کنیم، ماتریس A^2 را پیدا می‌کنیم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

چون ماتریس A^2 ماتریس خاصی نیست، پس A^3 را پیدا می‌کنیم:

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

چون ماتریس A^3 نیز ماتریس خاصی نیست، پس A^4 را به دست می‌آوریم:

$$A^4 = A^3 \times A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = -4I$$

$$A^{2^0} = (A^4)^5 = (-4I)^5 = -4^5 I = -2^{10} I = \begin{bmatrix} -2^{10} & 0 \\ 0 & -2^{10} \end{bmatrix} \quad \text{بنابراین}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس A^{2^0} برابر $-2^{10} - 2^{10} = -2^{11}$ است.

۵۸۳ الف به سادگی می‌توان ثابت کرد چون ماتریس A یک ماتریس

قطری است، پس وارون آن به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^3} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & b^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & b^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a+3} & 0 \\ 0 & -4a \end{bmatrix} \quad \text{بنابراین}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{a+3} \Rightarrow a=2, \quad b^3 = -4a \xrightarrow{a=2} b^3 = -8 \Rightarrow b = -2$$

$$a+2b=2-4=-2 \quad \text{پس}$$

$$A^{-1} - 2I = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{از تساوی ۲ ۵۸۴}$$

$$A^{-1} = 2I + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{از طرف دیگر، } A = (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A + I = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{نهایت به دست می‌آید}$$

۵۷۷ الف ابتدا درایه‌های ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$a_{11} = 1-2 = -1, \quad a_{12} = 1-4 = -3$$

$$a_{21} = 2-2 = 0, \quad a_{22} = 2-4 = -2$$

$$\text{پس } A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{بنابراین}$$

$$A + I = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A - I = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

اکنون تساوی داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$AB - B = I + A \Rightarrow (A - I)B = I + A$$

طرفین این تساوی را از چپ در $(A - I)^{-1}$ ضرب می‌کنیم:

$$(A - I)B = I + A \xrightarrow{(A - I)^{-1} \times} B = (A - I)^{-1}(I + A)$$

$$B = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس B برابر $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ است.

۵۷۸ الف می‌دانیم حاصل ضرب دو ماتریس که وارون یکدیگرند، برابر

ماتریس همانی است، پس

$$(A - I)(A - I)^{-1} = I \Rightarrow A(A - I)^{-1} - (A - I)^{-1} = I$$

$$A(A - I)^{-1} = I + (A - I)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های $A(A - I)^{-1}$ برابر ۹ است.

۵۷۹ الف از تساوی داده شده به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$A + B = 2AB \Rightarrow 2AB - B = A \Rightarrow (2A - I)B = A \quad (۱)$$

توجه کنید که

$$2A - I = 2 \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2A - I)^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$$

طرفین تساوی (۱) را از سمت چپ در $(2A - I)^{-1}$ ضرب می‌کنیم

$$(2A - I)B = A \Rightarrow B = (2A - I)^{-1}A$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس B برابر -۳ است.

۵۸۰ الف از تقریب دو تساوی فرض سؤال ماتریس $2B$ به دست می‌آید:

$$\left. \begin{aligned} A + B &= [2j - i]_{r \times r} \\ A - B &= [2i - j]_{r \times r} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{-} 2B = [(2j - i) - (2i - j)]_{r \times r}$$

$$2B = [-3i + 3j]_{r \times r} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

۵۸۸ ۳ طرفین تساوی $A+B=AB$ را از سمت چپ در A^{-1} و از

سمت راست در B^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$A+B=AB \xrightarrow{A^{-1} \times} A^{-1}A+A^{-1}B=A^{-1}AB$$

$$I+A^{-1}B=B \xrightarrow{\times B^{-1}} IB^{-1}+A^{-1}BB^{-1}=BB^{-1}$$

$$B^{-1}+A^{-1}=I$$

اکنون به دست می‌آید

$$B^{-1}=I-A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}-\frac{1}{-2+1}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

۵۸۹ ۱ راه حل اول از معادله اول x را به دست می‌آوریم $x=\frac{1-by}{a}$.

مقدار به دست آمده را در معادله دوم قرار می‌دهیم: $\frac{b}{a}-\frac{b}{a}y+ay=1$

با حل این معادله به دست می‌آید $y=\frac{1}{a+b}$. دیگر نیازی به محاسبه x نیست.

چون در بین گزینه‌ها فقط در گزینه (۱) این مقدار y وجود دارد.

راه حل دوم مجهول y را حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} ax+by=1 \\ bx+ay=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2x+aby=a \\ b^2x+aby=b \end{cases}$$

معادله دوم را از معادله اول کم می‌کنیم: $(a^2-b^2)x=a-b$ ، یعنی

$$x=\frac{1}{a+b}$$

۵۹۰ ۲ از معادله اول دستگاه به دست می‌آید $4x+9y=y$ ، یعنی

$$4x+8y=0 \quad x+2y=0$$

۵۹۱ ۳ چون دستگاه داده شده بی‌شمار جواب دارد، پس

$$\frac{m^2}{3}=\frac{-3}{m^2-1}=\frac{3-2m}{3} \Rightarrow \frac{m^2}{3}=\frac{3-2m}{3}$$

$$m^2+2m-3=0 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-3 \end{cases}$$

به ازای $m=1$ تناسب اولیه به صورت $\frac{1}{3}=\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ درمی‌آید که قابل قبول

است. به ازای $m=-3$ تناسب اولیه به صورت $3=3=3$ درمی‌آید که قابل قبول است. پس حاصل ضرب مقادیر m برابر -3 است.

۵۹۲ ۳ ابتدا دستگاه $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ را حل می‌کنیم. برای حل این

دستگاه از روش تبدیل استفاده می‌کنیم. از معادله اول به دست می‌آید $x=5-2y$. مقدار آن را در معادله دوم قرار می‌دهیم: $2(5-2y)+y=4$.

در نتیجه $y=2$. پس $x=5-2y=5-4=1$. جواب‌ها را در معادله

$x+y=m^2+m+1$ قرار می‌دهیم، پس $3=m^2+m+1$ ، یعنی

$$m^2+m-2=0 \quad \text{در نهایت به دست می‌آید } m=-2 \text{ یا } m=1.$$

۵۸۵ ۲ راه حل اول با توجه به تساوی $\alpha A+\beta I=2A^{-1}$ ،

$$\text{پس } \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \times \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha+\beta & 0 \\ -\alpha & 2\alpha+\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha=1 \\ \alpha+\beta=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=3 \end{cases}$$

یعنی $(\alpha, \beta)=(-1, 3)$. توجه کنید که این مقادیر در معادله $2\alpha+\beta=1$

نیز صدق می‌کنند.

راه حل دوم دو طرف تساوی $\alpha A+\beta I=2A^{-1}$ را در A ضرب می‌کنیم:

$$\alpha A^2+\beta A=2I \Rightarrow A^2=(-\frac{\beta}{\alpha})A+(\frac{2}{\alpha})I \quad (1)$$

از طرف دیگر بنابر قضیه کیلی - هملتون: $A^2=3A-2I$ (۲)

با مقایسهٔ برابری‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید

$$\begin{cases} -\frac{\beta}{\alpha}=3 \\ \frac{2}{\alpha}=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=3 \end{cases}$$

۵۸۶ ۲ طرفین تساوی $AXA=I$ را از سمت چپ و از سمت راست در

ماتریس A^{-1} ضرب می‌کنیم تا ماتریس X به دست آید:

$$AXA=I \xrightarrow{A^{-1} \times} XA=A^{-1} \xrightarrow{\times A^{-1}} X=(A^{-1})^2$$

توجه کنید که $A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$. بنابراین

$$X=(A^{-1})^2=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

در نهایت به دست می‌آید:

$$X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10+6-4-2 \\ 10+6-4-2 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

۵۸۷ ۴ فرض می‌کنیم $B=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ ،

یعنی تساوی داده شده در صورت سؤال را به صورت $BAC=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

می‌نویسیم. دو طرف این تساوی را از چپ در B^{-1} و از راست در C^{-1} ضرب

می‌کنیم، در نتیجه

$$A=B^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}C^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\times\frac{1}{1}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 41 & 32 \\ -59 & -46 \end{bmatrix}$$

در نهایت به دست می‌آید

$$A=41+32-59-46=-32$$

پس

$$x=c-2 \xrightarrow{x=-1} c=1$$

$$y=-c-4 \xrightarrow{c=1} y=-5$$

با استفاده از دستور ساروس به دست می‌آید

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & -4 & 2 \\ -4 & 7 & -4 \\ -7 & -4 & 7 \end{vmatrix} = (56 + 0 - 56) - (0 + 0 + 0) = 0$$

با توجه به تعریف به دست می‌آید

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -7 \\ 1 & -2 & -5 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

اگر دترمینان را بر حسب سطر سوم بسط دهیم، آن‌گاه

$$|A| = 3 \begin{vmatrix} -4 & -7 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -4 & -7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \times 6 - 3 \times 6 = 0$$

ماتریس A قطری است، پس درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی آن صفر هستند. پس

$$b+1=0 \Rightarrow b=-1, \quad a-2=0 \Rightarrow a=2$$

بنابراین

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

در ضمن ماتریس B اسکالر است، پس هم درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی آن صفر هستند و هم درایه‌های قطر اصلی آن با هم برابرند. پس

$$a+b=c \Rightarrow c=2-1=1$$

توجه کنید در ماتریس B به ازای $a=2$ و $b=-1$ درایه‌های بالا و پایین قطر

$$\text{اصلی صفر هستند. بنابراین } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ در نتیجه}$$

$$|AB| = |A||B| = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -28 \times 1 = -28$$

در ماتریس قطری، درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند. اکنون درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی حاصل ضرب داده شده را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 5 & -2 \\ -b & a+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & b-4-2a-2 \\ -a+15-4b & ? \end{bmatrix}$$

پس

$$\begin{cases} b-4-2a-2=0 \\ -a+15-4b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a+b=6 \\ a+4b=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a-4b=-24 \\ a+4b=15 \end{cases} \xrightarrow{+}$$

$$9a=-9 \Rightarrow a=-1, \quad b=4$$

بنابراین

$$\begin{vmatrix} 3a-1 & ab \\ -b & a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -4-16=-20$$

۵۹۳ فرض می‌کنیم $\frac{1}{2x-1}=A$ و $\frac{1}{y-2}=B$. اکنون دستگاه را به

$$\text{شکل } \begin{cases} A+2B=-\frac{1}{3} \\ 2A-3B=\frac{5}{3} \end{cases} \text{ می‌نویسیم. به روش حذف این دستگاه را حل می‌کنیم:}$$

$$2 \times \begin{cases} A+2B=-\frac{1}{3} \\ 2A-3B=\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A+4B=-\frac{2}{3} \\ 2A-3B=\frac{5}{3} \end{cases}$$

معادله پایین را از معادله بالا کم می‌کنیم: $7B=-\frac{7}{3}$. در نتیجه $B=-\frac{1}{3}$. باقرار دادن مقدار B در معادله $A+2B=-\frac{1}{3}$ به دست می‌آید: $A-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$.

$$\text{یعنی } A=\frac{1}{3} \text{ در نتیجه } \begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=-3 \end{cases} \text{ پس } \begin{cases} A=\frac{1}{2x-1}=\frac{1}{3} \\ B=\frac{1}{y-2}=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$x+y=2-1=1 \text{ در نهایت به دست می‌آید: } x+y=2-1=1$$

۵۹۴ اگر A ماتریس ضرایب باشد، بنابر فرض مسئله،

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ بنابراین } A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{بنابراین } x+y=1+3=4$$

۵۹۵ چون دستگاه معادلات جواب منحصر به فرد دارد، پس

$$\frac{m-1}{2} \neq \frac{3m}{4} \text{ در نتیجه } m \neq -2$$

۵۹۶ چون دستگاه جواب ندارد، پس $\frac{m-1}{3} \neq \frac{4}{m+3}$. از

$$\frac{m-1}{3} \neq \frac{4}{m+3} \text{ به دست می‌آید } m=-5 \text{ یا } m=3 \text{ از طرف دیگر از } \frac{m-1}{3} \neq \frac{4}{m+3}$$

به دست می‌آید $m \neq 3$ در نتیجه به ازای $m=-5$ این دستگاه جواب ندارد.

۵۹۷ از این معادله ماتریسی دستگاه معادلات زیر به وجود می‌آید:

$$\begin{bmatrix} 2m+1 & 3 \\ 3m & m+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+6 \\ 7m^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (2m+1)x+3y=m+6 \\ 3mx+(m+2)y=7m^2 \end{cases}$$

شرط جواب نداشتن این دستگاه این است که

$$\frac{2m+1}{3m} \neq \frac{m+6}{7m^2} \quad (1)$$

$$\frac{2m+1}{3m} = \frac{m+6}{7m^2} \Rightarrow 2m^2+4m+m+2=9m \Rightarrow 2m^2-4m+2=0$$

$$m^2-2m+1=0 \Rightarrow (m-1)^2=0 \Rightarrow m=1$$

به ازای $m=1$ رابطه (۱) به صورت $1=1 \neq 1$ درمی‌آید که قابل قبول نیست.

پس m ای که به ازای آن دستگاه فوق جواب نداشته باشد، وجود ندارد.

۵۹۸ در روش ماتریس وارون جواب‌های دستگاه به صورت زیر

به دست می‌آید:

$$X=A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c-2 \\ -c-4 \end{bmatrix}$$

۶۰۷ ۱ از طرفین تساوی داده شده دترمینان می گیریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4|A| & 1 \\ 3 & |A| \end{vmatrix} \text{ یعنی } |A| = 4|A|^2 - 3. \text{ از حل این معادله به دست}$$

می آید $|A| = 1$ یا $|A| = -\frac{3}{4}$. اگر $|A| = 1$ ، آن گاه $|A|^2 - 1 = 0$ و اگر

$$2|A|^2 - 1 = \frac{1}{8} \text{ آن گاه } |A| = -\frac{3}{4}$$

۶۰۸ ۴ از طرفین تساوی داده شده دترمینان می گیریم:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{|A|}{2} & 5 & |A| \\ 0 & 2|A| & 7 \\ 0 & 0 & \frac{|A|}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \frac{|A|}{2} \times 2|A| \times \frac{|A|}{4}$$

$$|A|^3 = 4|A| \Rightarrow |A| = -2, |A| = 0, |A| = 2$$

از طرف دیگر $|A| = -8|A| \Rightarrow |A| = (-2)^3$ اگر $|A| = 2$ ، آن گاه $|A| = -2A$ برابر -16 است. اگر $|A| = -2$ ، حاصل $-2A$ برابر 16 است. همچنین اگر $|A| = 0$ ،

آن گاه $-2A$ برابر صفر است. پس کمترین مقدار $-2A$ برابر -16 است.

۶۰۹ ۳ ماتریسی همواره وارون پذیر است که دترمینان آن همواره

غیر صفر باشد. دترمینان ماتریس گزینه (۱) برابر $a^2(a^2+1)(a^2+2)$ است که به ازای $a=0$ صفر است. دترمینان گزینه (۲) برابر $a^2 \times a^2 \times a^2 - a^2$ است که به ازای $a=0$ صفر است. دترمینان گزینه (۴) برابر $-a \times a \times a$ است که به ازای $a=0$ صفر است. ولی دترمینان گزینه (۳) برابر $(a^2+1)(a^2+2)(a^2+3)$ است که همواره غیر صفر است.

۶۱۰ ۱ از طرفین تساوی داده شده دترمینان می گیریم:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} |A| \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(-3+2)|A|(-3-0) = 5-8 \Rightarrow 3|A| = -3 \Rightarrow |A| = -1$$

۶۱۱ ۱ دترمینان ماتریس قطری برابر m

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -m & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

است، پس دترمینان وارون آن برابر $\frac{1}{m}$ است، پس بنا بر فرض سؤال،

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & m & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{m} \Rightarrow 2(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & 3 \end{vmatrix} - 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & m \end{vmatrix} = \frac{1}{m}$$

$$2(3) - (m+2) = \frac{1}{m} \Rightarrow 4-m = \frac{1}{m} \Rightarrow 4m-m^2 = 1 \Rightarrow m^2 - 4m + 1 = 0$$

پس مجموع مقادیر m برابر $\frac{b}{a} = 4$ است. $S = -\frac{b}{a}$

۶۰۳ ۲ راه حل اول ابتدا درایه های ماتریس های A و B را به دست می آوریم:

$$A = [2i-j]_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = [j^2 - 2i]_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ -9 & 6 & 31 \\ -17 & 10 & 55 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = -1 \times 2 \times 0 - 2 \times 32 + 7 \times 12 = -20 - 64 + 84 = 0$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 32 \\ 22 & 20 \end{bmatrix}$$

$$|BA| = 40 \times 20 - 22 \times 32 = 8(100 - 88) = 8 \times 12 = 96$$

$$\text{پس } |AB| - |BA| = 0 - 96 = -96$$

راه حل دوم برای محاسبه $|AB|$ توجه کنید که اگر یک ماتریس 3×2 در یک ماتریس 2×3 ضرب شود، دترمینان ماتریس حاصل ضرب صفر است. پس $|AB| = 0$.

۶۰۴ ۱ ضرب ماتریس ها خاصیت شرکت پذیری دارد، پس $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ بنابراین

$$|(A \times B) \times C| = |A \times (B \times C)| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{بسط بر حسب سطر دوم}} 1(-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(1-2) - (1+3) = 1-4 = -3$$

۶۰۵ ۳ اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند، آن گاه دو ماتریس BA و AB دارای دو ویژگی زیر هستند:

(۱) مجموع درایه های قطر اصلی AB مساوی مجموع درایه های قطر اصلی BA است.

$$(۲) |AB| = |BA|$$

در ماتریس AB مجموع درایه های قطر اصلی -1 است و $|AB| = -10$ در

$$\text{بین گزینه ها فقط ماتریس } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \text{ این ویژگی ها را دارد.}$$

۶۰۶ ۲ ماتریس A برابر است با

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & m & 1 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2-3 & -1-0 \\ 8-6 & -m-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -m-2 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$|A| = m+2+2 \Rightarrow |A| = m+4$$

از طرف دیگر،

$$|2A| = 12 \Rightarrow 2^2 |A| = 12 \Rightarrow |A| = 3 \Rightarrow m+4 = 3 \Rightarrow m = -1$$

۶۱۲ ۳ توجه کنید که

$$A^2 = \bar{O} \Rightarrow A^2 - I = -I \Rightarrow \frac{1}{2}(2(A-I)(A+I)) = -I$$

$$|\frac{1}{2}(2A-2I)(A+I)| = |-I| \Rightarrow (\frac{1}{2})^2 |2A-2I| |A+I| = (-1)^2 |I|$$

$$\frac{1}{8}(-8)|A+I| = -1 \Rightarrow |A+I| = 1$$

۶۱۳ ۴ ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

بنابراین

$$|(A^4 + A^3 + A^{10})^{-1}| = |((A^2)^2 + (A^2)^3 + (A^2)^5)^{-1}|$$

$$= |(I^2 + I^3 + I^5)^{-1}| = |(3I)^{-1}| = |\frac{1}{3}I| = (\frac{1}{3})^3 |I| = \frac{1}{27}$$

۶۱۴ ۳ بنابر فرض تساوی زیر برقرار است:

$$\begin{vmatrix} a & b & c+3 \\ m & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 6$$

اکنون اگر هر دو دترمینان را بر حسب سطر اول بسط دهیم، مقادیر a ، b و c با ضرایب آن‌ها حذف می‌شوند و فقط عبارت زیر باقی می‌ماند:

$$3(-1)^4 \begin{vmatrix} m & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow 3(-2m-12) = 6 \Rightarrow -2m-12=2 \Rightarrow m=-7$$

۶۱۵ ۳ در دترمینان خواسته شده از ستون اول عدد ۶، از ستون دوم عدد ۵ و از ستون سوم عدد ۳ را فاکتور می‌گیریم. سپس از سطر اول عدد ۲، از سطر دوم عدد ۷ و از سطر سوم عدد ۳ را فاکتور می‌گیریم. پس

$$\begin{vmatrix} 12a & 10b & 6c \\ 42d & 35e & 21f \\ 18m & 15n & 9k \end{vmatrix} = 6 \times 5 \times 3 \times \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 7d & 7e & 7f \\ 3m & 3n & 3k \end{vmatrix}$$

$$= 6 \times 5 \times 3 \times 2 \times 7 \times 3 \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & k \end{vmatrix}$$

$$= 6 \times 5 \times 3 \times 2 \times 7 \times 3 \times \frac{1}{126} = 3 \times 0 \times 6 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{6 \times 21} = 3$$

$$-2+1=-1 \text{ برابر } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ دترمینان ماتریس}$$

است، پس $|A^{-1}| = -1$ در نتیجه

$$B = \begin{bmatrix} 1 & |B| \\ 1 & \frac{1}{|B|} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{از طرفین دترمینان}} |B| = \frac{1}{|B|} - |B|$$

$$2|B| = \frac{1}{|B|} \Rightarrow |B|^2 = \frac{1}{2}$$

$$|B| = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ بنابراین } |B| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |B|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow |B| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

۶۱۷ ۳ راه حل اول ماتریس‌های BA و AB را به دست می‌آوریم:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -6 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -6 \end{bmatrix}$$

اکنون به دست می‌آید $|AB| = -10$ و

$$|BA| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= -1(-1)^2 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 9 & -6 \end{vmatrix} + 3(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} - 2(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

بسط بر حسب سطر اول

در نتیجه $|AB| + |BA| = -10 + 0 = -10$.راه حل دوم برای به دست آوردن $|BA|$ توجه کنید که دترمینان حاصل ضرب ماتریس 3×1 در ماتریس 1×3 ، صفر است. بنابراین بدون محاسبه می‌توانستیم نتیجه بگیریم $|BA| = 0$.

۶۱۸ ۲ حاصل دترمینان را با بسط دادن بر حسب ستون اول به دست

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & f & g \end{vmatrix} = a(dg - fe)$$

می‌آوریم: توجه کنید در حاصل این

دترمینان مقادیر b و c وجود ندارند. به عبارت دیگر، b و c هر تغییری کنند، روی مقدار دترمینان اثر نخواهند داشت.

۶۱۹ ۱ دترمینان‌ها را حساب می‌کنیم تا معادله هر دو خط به دست آید:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 2a & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(-1)^2 \begin{vmatrix} 2a & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} y & 2a \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

بسط بر حسب سطر اول

با ساده کردن به دست می‌آید: $y = -(3a+1)x - a$. از طرف دیگر،

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1(-1)^4 \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3(-1)^5 \begin{vmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

بسط بر حسب ستون سوم

با ساده کردن به دست می‌آید: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{a}{6} + \frac{1}{3}$. شیب خط اول برابر $-(3a+1)$ و شیب خط دوم برابر $-\frac{1}{2}$ است. چون دو خط بر هم عمود هستند،پس حاصل ضرب این شیب‌ها برابر -1 است: $-(3a+1)(-\frac{1}{2}) = -1$.در نتیجه $3a+1 = -2$ ، یعنی $a = -1$.

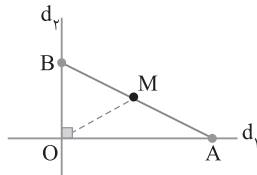
۳- $|A| = -3$ ، آنگاه $|2A| = -12$.

۶۳۵ (۳) در شکل زیر مثلث OAB قائم‌الزاویه است و در مثلث

قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است. پس $OM = \frac{1}{2}AB$. چون O

نقطه‌ای ثابت و $\frac{1}{2}AB$ مقداری ثابت است، پس مکان هندسی نقطه M دایره

به مرکز O و شعاع $\frac{1}{2}AB$ است.



۶۳۶ (۱) فرض کنید M نقطه‌ای از مکان هندسی باشد و مماس‌های

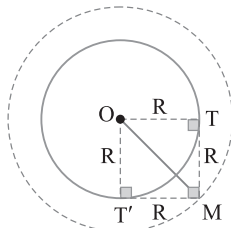
MT و MT' بر هم عمود باشند (شکل زیر را ببینید). از نقطه O به نقاط

T و T' وصل می‌کنیم. در این صورت در چهارضلعی OTMT' همه

زاویه‌ها قائمه‌اند و دو ضلع مجاور آن یعنی OT و OT' برابرند، پس OTMT'

مربع به طول ضلع R است. در نتیجه نقطه M از مرکز O به فاصله ثابت

$\sqrt{2}R$ است. پس M روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{2}R$ است.

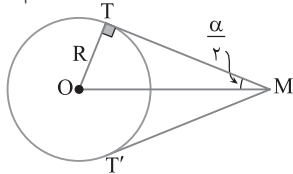


۶۳۷ (۲) فرض کنید M نقطه‌ای از این مکان هندسی باشد (شکل زیر را ببینید).

چون OM نیمساز زاویه TMT' است، پس در مثلث قائم‌الزاویه OMT،

$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{OM}$ ، یعنی $OM = \frac{R}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. مقدار $\frac{R}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ ثابت است، پس

مکان هندسی نقطه M دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\frac{R}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ است.



۶۳۸ (۲) فرض کنید M نقطه‌ای از مکان هندسی باشد (شکل زیر را ببینید).

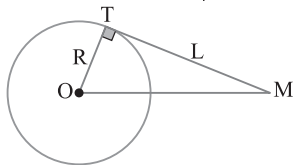
در مثلث قائم‌الزاویه OMT، بنابر قضیه فیثاغورس،

$OM = \sqrt{OT^2 + MT^2} = \sqrt{R^2 + L^2}$. چون R و L مقادیر ثابتی هستند،

پس $OM = \sqrt{R^2 + L^2}$ مقدار ثابتی است. در نتیجه نقطه M از نقطه ثابت

O به فاصله ثابت $\sqrt{R^2 + L^2}$ است. در نهایت، مکان هندسی دایره‌ای است

به مرکز O و شعاع $\sqrt{R^2 + L^2}$.



۶۲۹ (۳) صفحه موازی با محور یک سطح مخروطی از هر دو تکه بالا و

پایین سطح مخروطی عبور می‌کند. اگر این صفحه از رأس سطح مخروطی عبور

نکند، مقطع حاصل هذلولی است و اگر از رأس سطح مخروطی عبور کند مقطع

حاصل دو خط متقاطع است.

۶۳۰ (۲) فصل مشترک یک صفحه با یک سطح استوانه‌ای می‌تواند دایره،

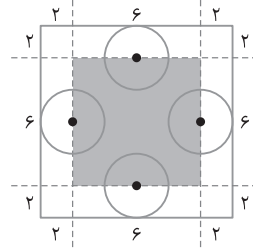
بیضی، دو خط موازی یا یک خط باشد ولی مستطیل هیچ وقت ایجاد نمی‌شود.

۶۳۱ (۳) به شکل زیر نگاه کنید. برای اینکه سکه به طور کامل درون مربع

باشد، باید فاصله مرکز سکه تا ضلع‌های مربع حداقل برابر ۲ باشد، یعنی مرکز

سکه درون مربعی به طول ضلع ۶ قرار گیرد. در این حالت مساحت مکان

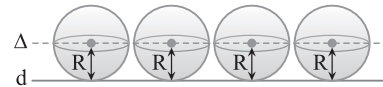
هندسی مورد نظر برابر $6 \times 6 = 36$ است.



۶۳۲ (۱) با توجه به شکل، مرکز این توپ که در راستای خط d می‌غلتد از

خط d به فاصله شعاع توپ است، یعنی مکان هندسی مورد نظر خطی است

موازی خط d و به فاصله R (شعاع توپ) از خط d.



۶۳۳ (۳) در شکل زیر مثلث ABC یکی از مثلث‌های مورد نظر است.

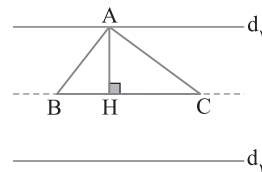
توجه کنید که $S = \frac{1}{2}AH \times BC$. پس $AH = \frac{2S}{BC}$. چون مساحت (S) و

قاعده BC ثابت هستند، پس اندازه ارتفاع AH هم ثابت است، یعنی فاصله

رأس A از خط BC مقداری ثابت است، بنابراین مکان هندسی رأس A دو

خط موازی BC در دو طرف آن و به فاصله AH از آن است (دو خط d_1 و

d_2 را در شکل ببینید).



۶۳۴ (۳) در شکل زیر یکی از مثلث‌ها و میانه AM از آن را رسم کرده‌ایم

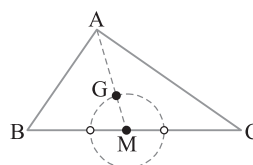
و G مرکز ثقل این مثلث است. توجه کنید که $MG = \frac{1}{3}AM$. چون نقطه

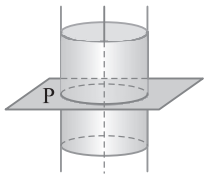
M نقطه‌ای ثابت و MG هم مقداری ثابت است، پس مکان هندسی G

دایره‌ای است به مرکز M و شعاع $\frac{1}{3}AM$. توجه کنید که محل برخورد این

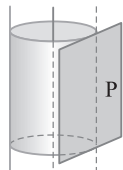
دایره با ضلع BC عضو مکان هندسی نیست. اما در تست‌ها معمولاً این مکان

هندسی را یک دایره در نظر می‌گیریم.

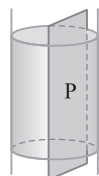




۶۴۴ (۴) فصل مشترک صفحه P با یک سطح استوانه‌ای در صورتی که P بر محور آن عمود باشد یک دایره است. و اگر صفحه P مماس بر سطح استوانه‌ای باشد، مقطع یک خط است.



و در صورتی که صفحه P موازی با محور سطح استوانه‌ای آن را قطع کند، مقطع دو خط موازی است.



ولی در هیچ حالتی مقطع صفحه با سطح استوانه‌ای دو خط متقاطع نیست.

۶۴۵ (۳) اگر صفحه قاطع هر دو تکه بالا و پایین سطح مخروطی را قطع کند و از رأس سطح مخروطی عبور نکند، آن گاه سطح مقطع یک هذلولی است.

۶۴۶ (۴) اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن بگذرد، سطح مقطع یک نقطه است.

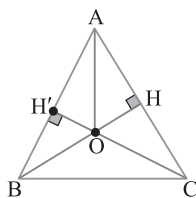
در صورتی که صفحه P موازی محور سطح مخروطی و گذرا از رأس آن باشد، سطح مقطع دو خط متقاطع است.

اگر صفحه P موازی مولد سطح مخروطی (در هر یک از وضعیت‌های آن) و گذرا از رأس باشد، سطح مقطع یک خط است. ولی در هیچ حالتی سطح مقطع صفحه و سطح مخروطی دو خط موازی نیست.

۶۴۷ (۱) در مثلث ABC، در شکل زیر عمودهای OH و OH' را به ترتیب بر اضلاع AC و AB وارد می‌کنیم. توجه کنید که

$$\left. \begin{aligned} \frac{S_{OAB}}{S_{OAC}} &= \frac{\frac{1}{2} OH' \times AB}{\frac{1}{2} OH \times AC} \\ \frac{S_{OAB}}{S_{OAC}} &= \frac{AB}{AC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{OH'}{OH} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow OH = OH'$$

پس نقطه O از دو ضلع زاویه A به یک فاصله است. در نتیجه O روی نیمساز داخلی یا خارجی زاویه A است (بدیهی است که O روی نقطه A نمی‌تواند قرار بگیرد. زیرا در این صورت مثلث‌های AOB و AOC تشکیل نخواهند شد).



۶۴۸ (۲) به m دو مقدار دلخواه می‌دهیم و جواب‌های مشترک دو معادله به‌دست آمده را پیدا می‌کنیم. به این ترتیب مختصات مرکز دایره به‌دست می‌آید. توجه کنید که

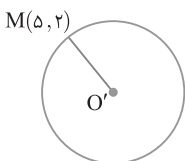
$$m = -2 \Rightarrow -x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad m = -1 \Rightarrow y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$$

پس مرکز دایره نقطه O'(1, -1) است.

فاصله O' تا نقطه M(5, 2) برابر شعاع

دایره مورد نظر است:

$$r = O'M = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$



۶۳۹ (۲) راه‌حل اول در شکل زیر، وتر AB از دایره C(O, R) به طول

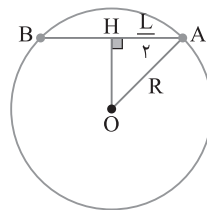
L است. از نقطه O عمودی بر وتر AB رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه H قطع کند. در این صورت H وسط AB است. در مثلث قائم‌الزاویه OAH، بنابر قضیه

$$\text{فیثاغورس، } OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}}. \text{ چون } L \text{ و } R \text{ مقادیر}$$

ثابتی هستند، پس OH طول ثابتی دارد. بنابراین H در فاصله ثابتی از نقطه ثابت

O است، یعنی مکان هندسی، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع $\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}}$.

راه‌حل دوم فرض کنید $L = 2R$. در این صورت مکان هندسی مورد نظر وسط قطرهای دایره C(O, R)، یعنی مرکز آن است. فقط در گزینه (۲) به ازای $L = 2R$ نقطه O به‌دست می‌آید.



۶۴۰ (۲) فرض کنید M نقطه‌ای از مکان هندسی باشد (شکل زیر را

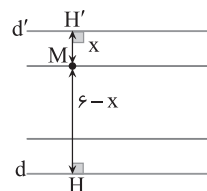
ببینید). بنابر فرض سؤال $MH - MH' = 5$ یعنی $6 - x - x = 5$ پس

$x = \frac{1}{2}$ ، یعنی M روی خطی موازی d و d' و به فاصله $\frac{1}{2}$ از خط d' است.

به همین صورت اگر $MH' - MH = 5$ ، نقطه M روی خطی موازی d و d'

و به فاصله $\frac{1}{2}$ از خط d است، یعنی مکان هندسی مورد نظر دو خط موازی d

و d' است.



۶۴۱ (۴) توجه کنید که نقطه‌هایی که بین دو خط هستند تفاضل فاصله

آن‌ها از دو خط کمتر از ۵ است. نقطه‌هایی که روی دو خط یا در دو طرف دو

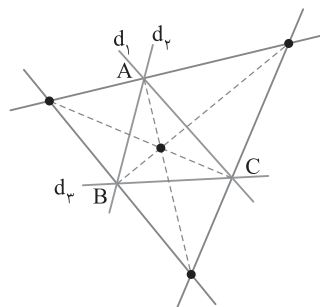
خط هستند، تفاضل فاصله‌شان از دو خط برابر ۵ است. در نتیجه نقطه‌ای که

تفاضل فاصله آن از دو خط موازی مورد نظر برابر ۶ باشد وجود ندارد.

۶۴۲ (۳) مطابق شکل زیر، سه خط d_1 ، d_2 و d_3 دایره دو متقاطع

هستند. محل هم‌رسانی نیمسازهای داخلی و خارجی مثلث ABC نقطه‌های

مورد نظر هستند.



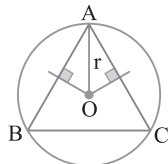
۶۴۳ (۲) اگر صفحه از رأس سطح مخروطی موازی با مولد (در هر یک از

وضعیت‌های آن) عبور کند، فصل مشترک آن‌ها یک خط است.

یعنی $a+c=-1$ ، $-b+c=-1$ و $a-b+c=-2$. از قرار دادن $-b+c=-1$ (معادله دوم) در معادله سوم به دست می‌آید $a=-1$. در نتیجه $c=0$ و $b=1$ ، یعنی معادله دایره محیطی مثلث ABC به صورت $x^2+y^2-x+y=0$ است. اکنون قطر دایره را به دست می‌آوریم:

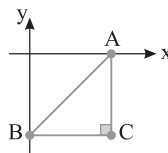
$$2r = \sqrt{a^2+b^2-4c} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

راه حل دوم این روش را توضیح می‌دهیم. محاسبات به عهده خودتان. معادلات عمود منصف‌های دو پاره خط AB و AC را می‌نویسیم و سپس محل برخورد آن‌ها را به دست می‌آوریم. این نقطه مرکز دایره محیطی است (نقطه O را در شکل زیر ببینید). فاصله O از هر کدام از رأس‌ها برابر شعاع دایره محیطی است.



راه حل سوم این روش گاهی اوقات جواب می‌دهد. در این روش نقطه‌های داده شده را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم. اگر مثلث قائم الزاویه بود، آن گاه وسط وتر مرکز دایره محیطی و طول وتر قطر دایره محیطی است (شکل زیر را ببینید):

$$2r = AB = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$



۶۵۴ (۱) فرض می‌کنیم $M(x, y)$ نقطه‌ای از این مکان هندسی باشد. اگر $A(2, 1)$ و $B(1, 2)$ دو نقطه داده شده باشند، آن گاه

$$MA = MB \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

$$x^2 + 4 - 4x + y^2 + 1 - 2y = x^2 + 1 - 2x + y^2 + 4 - 4y$$

$$3x^2 + 3y^2 - 4x - 14y + 15 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{4}{3}x - \frac{14}{3}y + 5 = 0$$

مکان هندسی نقطه M یک دایره است و نقطه (m, n) مرکز این دایره است. در نتیجه

$$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (\frac{2}{3}, \frac{14}{3}) = (m, n) \Rightarrow m+n = \frac{2}{3} + \frac{14}{3} = 3$$

۶۵۵ (۱) ابتدا وضعیت نقطه A و دایره را نسبت به هم مشخص می‌کنیم:

$$C(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 - 2 - 5 = -\frac{3}{2} < 0$$

می‌دانیم از نقطه‌ای درون دایره هیچ مماسی بر دایره رسم نمی‌شود.

۶۵۶ (۲) چون نقطه A خارج دایره است، پس $C(A) > 0$ ، یعنی

$$C(-1, 3) = 1 + 9 - 2 - 12 + m > 0 \Rightarrow m > 4$$

بودن معادله داده شده این است که $a^2 + b^2 - 4c > 0$ ، یعنی $4 + 16 - 4m > 0$. بنابراین $m < 5$. اشتراک دو نابرابری حاصل به صورت $4 < m < 5$ است.

۶۵۷ (۱) طول کوتاه‌ترین وتر برابر $2\sqrt{|C(A)|}$ است و طول بلندترین وتر همان طول قطر $(2r)$ است.

$$\text{طول کوتاه‌ترین وتر} = 2\sqrt{|C(A)|} = 2\sqrt{|1+1-4-2-5|} = 4\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt{16+4+16} = 3$$

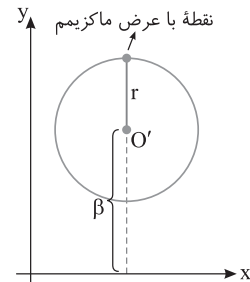
$$\text{طول بلندترین وتر} = 2r = 6$$

$$\text{در نتیجه} \quad \frac{\text{طول کوتاه‌ترین وتر}}{\text{طول بلندترین وتر}} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

۶۴۹ (۲) راه حل اول مطابق شکل زیر، اگر $O'(\alpha, \beta)$ مرکز دایره باشد،

بیشترین عرض نقاط دایره برابر $\beta + r$ است. بنابراین مرکز و شعاع دایره مورد نظر را تعیین می‌کنیم. توجه کنید که

$$\begin{cases} O' = (\frac{4+2}{2}, \frac{2-2}{2}) = (3, 0) \\ r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{4+16}}{2} = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \text{عرض ماکزیمم} = \beta + r = 0 + \sqrt{5} = \sqrt{5}$$



راه حل دوم مرکز این دایره $O'(3, 0)$ و شعاع آن $r = \sqrt{5}$ است. پس معادله

دایره به صورت $(x-3)^2 + y^2 = 5$ است و در این معادله، بیشترین و کمترین

مقادیر y وقتی ایجاد می‌شوند که $(x-3)^2$ برابر صفر باشد. پس جواب‌های

$y^2 = 5$ بیشترین و کمترین مقادیر y را معلوم می‌کند. در نتیجه $\sqrt{5}$

بیشترین مقدار y و $-\sqrt{5}$ کمترین مقدار y است.

۶۵۰ (۴) در معادله گسترده دایره ضرایب x^2 و y^2 با هم برابرند:

$$a-3b=2a-b \Rightarrow a=-2b$$

در معادله دایره از برابری $a=-2b$ استفاده می‌کنیم:

$$(-2b-3b)x^2 + (-4b-b)y^2 + 5bx - 5by = 0$$

$$(-5b)x^2 + (-5b)y^2 + 5bx - 5by = 0$$

دو طرف تساوی را بر $-5b$ تقسیم می‌کنیم: $x^2 + y^2 - x + y = 0$. اکنون

$$\text{شعاع دایره به دست می‌آید} \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} = \frac{1}{2}\sqrt{1+1-0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۶۵۱ (۲) در معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ اگر $c < 0$ ، آن گاه

معادله دایره است، یعنی گزینه‌های (۱) و (۳) دایره هستند. اکنون در گزینه‌های

دیگر $a^2 + b^2 - 4c$ را به دست می‌آوریم. گزینه (۲) دایره نیست، زیرا

$$a^2 + b^2 - 4c = 4 + 9 - 16 = -1 < 0$$

$$a^2 + b^2 - 4c = 16 + 25 - 20 > 0$$

۶۵۲ (۳) برای اینکه این معادله نشان‌دهنده یک دایره باشد باید ضرایب

x^2 و y^2 برابر باشند: $k = \frac{1}{k}$ ، در نتیجه $k = \pm 1$. به ازای $k=1$ معادله

داده شده به صورت $x^2 + y^2 - 2x + 2 = 0$ است که در آن

$k=-1$ ، یعنی این معادله دایره نیست. به ازای $k=1$

معادله داده شده به صورت $x^2 + y^2 + 2x - 2 = 0$ است. چون $c = -2 < 0$ ،

پس این معادله نشان‌دهنده یک دایره است.

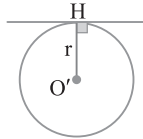
۶۵۳ (۲) راه حل اول معادله دایره محیطی این مثلث را به صورت

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ در نظر می‌گیریم. نقطه‌های } A, B \text{ و } C \text{ در این}$$

معادله صدق می‌کنند:

$$A \in \text{دایره} \Rightarrow 1 + a + c = 0, \quad B \in \text{دایره} \Rightarrow 1 - b + c = 0$$

$$C \in \text{دایره} \Rightarrow 1 + 1 + a - b + c = 0$$



۶۶۳ ۲ مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط بتوان مماسی به طول L بر دایره $C(O, R)$ رسم کرد، دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{L^2 + R^2}$ است (شکل زیر را ببینید). مرکز O و شعاع R را در دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 5$ به دست می‌آوریم:

$$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (1, 1), \quad R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{4 + 4 + 20}}{2} = \sqrt{7}$$

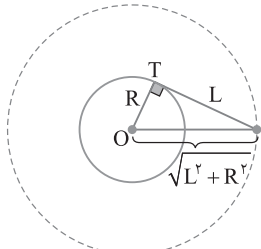
بنابراین از نقاط روی دایره‌ای به مرکز $O(1, 1)$ و شعاع $\sqrt{7}$ می‌توان مماس‌هایی به طول $3\sqrt{2}$ بر دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 5$ رسم کرد. نقاط تلاقی خط $x + y = 3$ و دایره به مرکز $O(1, 1)$ و شعاع $\sqrt{5}$ ، جواب‌های این تست هستند:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25 \\ x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x \end{cases}$$

$$(x-1)^2 + (3-x-1)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + 1 - 2x + x^2 + 4 - 4x = 25$$

$$2x^2 - 6x - 20 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+2) = 0$$

اگر $x = 5$ ، آن‌گاه $y = -2$ ، پس نقطه مورد نظر $(5, -2)$ است. اگر $x = -2$ ، آن‌گاه $y = 5$ ، پس نقطه مورد نظر $(-2, 5)$ است که در گزینه‌ها وجود ندارد.



۶۶۴ ۳ دو خط داده شده متقاطع هستند (شکل زیر را ببینید). فاصله مرکز دایره تا دو خط مماس برابر است:

$$MH = MH' \Rightarrow \frac{|\sqrt{10} - 3b|}{\sqrt{1+9}} = \frac{|b - 3\sqrt{10}|}{\sqrt{1+9}} \Rightarrow |\sqrt{10} - 3b| = |b - 3\sqrt{10}|$$

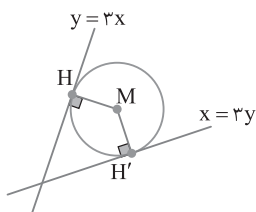
$$\sqrt{10} - 3b = b - 3\sqrt{10} \Rightarrow 4b = 4\sqrt{10} \Rightarrow b = \sqrt{10}$$

$$r = \frac{|\sqrt{10} - 3\sqrt{10}|}{\sqrt{10}} = 2$$

$$\sqrt{10} - 3b = -b + 3\sqrt{10} \Rightarrow 2b = -2\sqrt{10}$$

$$b = -\sqrt{10} \Rightarrow r = \frac{|\sqrt{10} + 3\sqrt{10}|}{\sqrt{10}} = 4$$

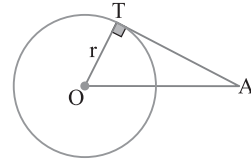
پس شعاع دایره کوچک‌تر برابر ۲ است.



۶۵۸ ۱ راه حل اول از معادله دایره به دست می‌آید $O(1, -2)$ و

$$r = \sqrt{1 + 4 - 3} = \sqrt{2} \quad \text{همچنین} \quad OA = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$AT = \sqrt{OA^2 - r^2} = \sqrt{18 - 2} = 4$$



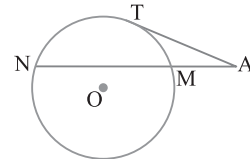
راه حل دوم طول مماس رسم شده از نقطه A بر دایره برابر $\sqrt{C(A)}$ است، در نتیجه

$$AT = \sqrt{C(A)} = \sqrt{4^2 + 1^2 - 2 \times 4 + 4 \times 1 + 3} = 4$$

۶۵۹ ۲ فرض کنید AT بر دایره مماس است. با توجه به روابط طولی در دایره، $AT^2 = AM \times AN$ ، پس باید مربع طول مماس را به دست آوریم.

$$AT = \sqrt{C(A)} = \sqrt{9 + 4 + 6 - 7} = \sqrt{12}$$

در نتیجه $MA \times NA = AT^2 = 12$.



۶۶۰ ۱ معادله $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$ یک دایره به مرکز $O(1, 1)$ و

شعاع $r = \sqrt{1 + 1 + 2} = 2$ است. برای مشخص کردن وضعیت خط و دایره نسبت به هم، فاصله مرکز دایره تا خط را به دست می‌آوریم و با شعاع دایره مقایسه کنیم:

$$OH = \frac{|1 + 1 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{فاصله } O \text{ تا خط. چون } OH < r$$

پس خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند. در ضمن مختصات مرکز $O(1, 1)$

در معادله خط صدق نمی‌کنند. پس گزینه (۴) نمی‌تواند درست باشد.

۶۶۱ ۳ معادله نیمساز ناحیه اول $y = x$ است. پس فاصله مرکز

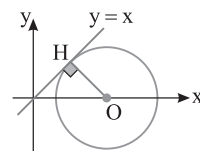
$$O(2, 0) \text{ از این خط برابر شعاع دایره است. پس } r = OH = \frac{|2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

بنابراین معادله دایره به صورت $(x-2)^2 + y^2 = 2$ است. اکنون طول نقاط

برخورد دایره را با خط $y = 1$ می‌یابیم:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (x-2)^2 + 1 = 2 \Rightarrow (x-2)^2 = 1$$

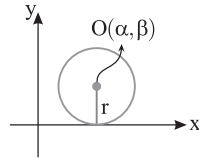
$$x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3, \quad x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1$$



۶۶۲ ۱ از معادله دایره به دست می‌آید $O'(2, -1)$ و $r = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

فاصله مرکز دایره از خط داده شده برابر شعاع دایره است، در نتیجه

$$O'H = r \Rightarrow \frac{|2 - 2 - a|}{\sqrt{1 + 4}} = \sqrt{5} \Rightarrow |a| = 5 \Rightarrow a = \pm 5$$

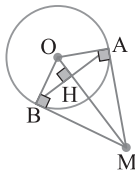


راه حل دوم معادله حاصل از برخورد محور X و دایره $x^2 + y^2 - mx + 2y + 1 = 0$ را به دست می آوریم. معادله محور X، $y = 0$ است. بنابراین در معادله دایره قرار می دهیم $y = 0$. در نتیجه $x^2 - mx + 1 = 0$ معادله حاصل از برخورد محور X و این دایره است. این معادله باید ریشه مضاعف داشته باشد، پس $m = \pm 2$.

۴۶۶۸ مرکز این دایره نقطه $O(0, 0)$ و شعاع آن برابر ۵ است. پس

$$OM = \sqrt{(-6-0)^2 + (-8-0)^2} = \sqrt{36+64} = 10, \quad OA = 5$$

در نتیجه در مثلث قائم الزاویه OAM، OM دو برابر OA است. پس $\hat{AMO} = 30^\circ$ و $\hat{AMB} = 60^\circ$. از طرف دیگر می دانیم $MA = MB$. پس مثلث AMB متساوی الساقین با زاویه رأس 60° است. بنابراین مثلث AMB متساوی الاضلاع است. اکنون طول MA را به دست می آوریم $\triangle OAM: MA^2 = OM^2 - OA^2 = 75 \Rightarrow MA = 5\sqrt{3} \Rightarrow AB = 5\sqrt{3}$



۴۶۶۹ اگر از نقطه A دو مماس عمود بر هم بر دایره $C(O, r)$ رسم کنیم، مطابق شکل زیر چهارضلعی ATOT' مربع به ضلع r است، پس $OA = r\sqrt{2}$. اکنون مرکز و شعاع دایره را به دست می آوریم:

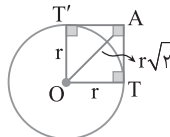
$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + a - 1 = 0$$

$$\begin{cases} O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (1, -1) \\ r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{4 + 4 - 4a + 4}}{2} = \sqrt{3-a} \end{cases}$$

بنابراین

$$OA = r\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}\sqrt{3-a} \rightarrow$$

$$a^2 + 1 - 2a + 4 = 6 - 2a \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

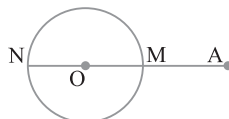


۴۷۰۰ اگر از A به مرکز O وصل کنیم و امتداد دهیم تا دایره را در نقاط M و N قطع کند، آن گاه M نزدیک ترین و N دورترین نقطه دایره به A است. همچنین $AM = OA - r$ و $AN = OA + r$. بنابر فرض سؤال $(OA+r)(OA-r) = 36$ ، پس $OA^2 - r^2 = 36$. از طرف دیگر می دانیم

$$OA^2 - r^2 = C(A)$$

$$C(A) = 36 \Rightarrow C(3, 4) = 36 \Rightarrow 9 + 16 + 6 - 4m + 1 = 36$$

$$32 - 4m = 36 \Rightarrow 4m = -4 \Rightarrow m = -1$$

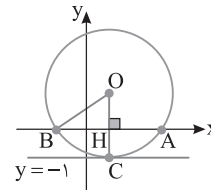


۴۶۶۵ راه حل اول فرض کنید خط $y = -1$ در نقطه C بر این دایره

مماس است. اگر O مرکز دایره باشد، آن گاه شعاع OC بر خط $y = -1$ عمود است و در نتیجه OC بر AB عمود است (شکل زیر را ببینید). چون $AB = 4$ و OH عمود منصف AB است، پس $BH = 2$. بنابراین در مثلث قائم الزاویه OBH: $OB = r$ ، $OH = r - 1$ ، $BH = 2$. در نتیجه

$$\triangle OBH: OB^2 = BH^2 + OH^2 \Rightarrow r^2 = 2^2 + (r-1)^2$$

$$r^2 = 4 + r^2 + 1 - 2r \Rightarrow r = \frac{5}{2}$$



راه حل دوم با توجه به شکل بالا، C نقطه $(1, -1)$ است. فرض کنید معادله دایره ای که

از نقاط A، B و C می گذرد به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ باشد. بنابراین

$$\begin{cases} A \in \text{دایره} \Rightarrow 9 + 3a + c = 0 \\ B \in \text{دایره} \Rightarrow 1 - a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + c = -9 \\ -a + c = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -2, c = -3$$

$$C \in \text{دایره} \Rightarrow 1 + 1 + a - b + c = 0 \xrightarrow{a=-2, c=-3} 2 - 2 - b - 3 = 0$$

$$b = -3$$

بنابراین معادله دایره $x^2 + y^2 - 2x - 3y - 3 = 0$ است، پس

$$r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{4 + 9 + 12}}{2} = \frac{5}{2}$$

۴۶۶۶ توجه کنید که

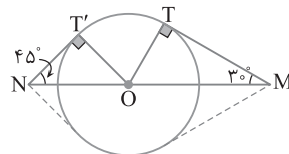
$$r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{16 + 16}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

با توجه به شکل زیر، در حالتی که MN از مرکز O عبور کند بیشترین طول MN ایجاد می شود. بنابر روابط طولی در مثلث قائم الزاویه،

$$\triangle OMT: \hat{M} = 30^\circ \Rightarrow OT = \frac{1}{2} OM \xrightarrow{OT=2\sqrt{2}} OM = 4\sqrt{2}$$

$$\triangle ONT': \hat{N} = 45^\circ \Rightarrow OT' = \frac{\sqrt{2}}{2} ON \xrightarrow{OT'=2\sqrt{2}} ON = 4$$

$$MN = OM + ON = 4\sqrt{2} + 4 = 4(\sqrt{2} + 1)$$



۴۶۶۷ راه حل اول دایره به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r بر محور X مماس

است، هرگاه $|\beta| = r$ (شکل زیر را ببینید).

$$x^2 + y^2 - mx + 2y + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (\frac{m}{2}, -1) \\ r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{m^2 + 4 - 4}}{2} = \frac{|m|}{2} \end{cases}$$

بنابراین

$$|\beta| = r \Rightarrow 1 = \frac{|m|}{2} \Rightarrow |m| = 2 \Rightarrow m = \pm 2$$

۶۷۴ (۴) تمام خط‌های قائم بر دایره‌ای دلخواه از مرکز دایره می‌گذرند.

پس M مرکز دایره است: $M(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (2, 1)$. در نتیجه مجموع مختصات M برابر ۳ است.

۶۷۵ (۱) در هر دایره خط‌های قائم بر آن همواره از نقطه ثابت مرکز می‌گذرند.

پس نقطه $A(2, -2)$ مرکز این دایره است. چون در معادله دایره ضرایب x^2 و y^2 برابرند، پس $a=3$. در نتیجه معادله دایره به صورت زیر درمی‌آید:

$$3x^2 + 3y^2 + bx + cy - 3 = 0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۳}}$$

$$x^2 + y^2 + \frac{b}{3}x + \frac{c}{3}y - 1 = 0$$

$$O(-\frac{b}{6}, -\frac{c}{6}) = (-\frac{b}{6}, -\frac{c}{6}) = (2, -2) \Rightarrow b = -12, c = 12$$

بنابراین معادله دایره $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$ است. بیشترین فاصله نقاط روی دایره برابر قطر دایره است:

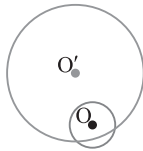
$$2r = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 - 4(-1)} = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$$

۶۷۶ (۳) ابتدا مرکز و شعاع دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$C: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0 \Rightarrow O(1, -2), r=1$$

$$C': 2x^2 + 2y^2 - 4y - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y - 1.5 = 0 \Rightarrow O'(0, 1), r'=1.5$$

اکنون طول خط‌المركزین دو دایره را به دست می‌آوریم: $OO' = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$. چون $|r-r'| < OO' < r+r'$ ، پس دو دایره متقاطع هستند.

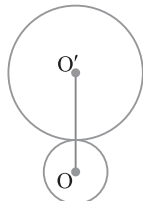


۶۷۷ (۱) ابتدا مرکز و شعاع دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$C: x^2 + y^2 - 2x + 2y + k = 0 \Rightarrow O(1, -1), r = \sqrt{2-k}$$

$$C': x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow O'(1, 2), r' = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$$

اکنون طول خط‌المركزین دو دایره را به دست می‌آوریم: $OO' = 3$. چون دو دایره مماس خارج هستند، پس $OO' = r+r'$ ، یعنی $3 = \sqrt{2-k} + \sqrt{2}$. نهایت به دست می‌آید $k=1$.



۶۷۸ (۴) ابتدا مرکز و شعاع دایره داده شده را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \Rightarrow O'(2, 3), r' = 4$$

اکنون طول خط‌المركزین دو دایره را به دست می‌آوریم: $OO' = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$. چون دو دایره مماس داخل هستند، پس $|r-r'| = OO'$ ، یعنی $r-4 = \pm 2\sqrt{2}$.

در نتیجه

$$r = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

۶۷۱ (۴) راه حل اول در دایره به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r بیشترین مقدار

x برابر $\alpha+r$ است. بنابراین مرکز و شعاع این دایره را به دست می‌آوریم

$$\begin{cases} O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (-4, 5) \\ r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{64 + 100 - 148}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2 \end{cases}$$

پس بیشترین مقدار x در این دایره برابر $\alpha+r = -4+2 = -2$ است. راه حل دوم معادله دایره را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

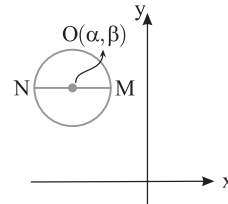
$$x^2 + y^2 + 8x - 10y + 37 = 0 \Rightarrow (x+4)^2 - 16 + (y-5)^2 - 25 + 37 = 0$$

$$(x+4)^2 + (y-5)^2 = 4$$

اگر $(y-5)^2$ صفر باشد، آن‌گاه بیشترین و کمترین مقدار x به دست می‌آیند. پس

$$(x+4)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x+4=2 \Rightarrow x=-2 \\ x+4=-2 \Rightarrow x=-6 \end{cases}$$

پس ماکزیمم x برابر -2 و مینیمم آن برابر -6 است.



۶۷۲ (۱) این خطوط را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. از برخورد این

خطوط مثلث قائم‌الزاویه ABC ایجاد می‌شود (شکل زیر را ببینید). بنابراین

BC قطر دایره محیطی این مثلث است. چون $B(-1, 4)$ و $C(0, 2)$ پس

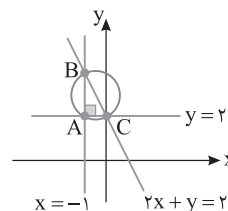
مرکز و شعاع دایره به صورت زیر است:

$$O(-\frac{1+0}{2}, \frac{4+2}{2}) = (-\frac{1}{2}, 3), r = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{1+4}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

بنابراین معادله دایره به صورت زیر است:

$$(x+\frac{1}{2})^2 + (y-3)^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{4}x + y^2 + 9 - 6y = \frac{5}{4}$$

$$x^2 + y^2 + x - 6y + 8 = 0$$



۶۷۳ (۳) فرض می‌کنیم $M(x, y)$ نقطه‌ای از این مکان هندسی باشد.

بنا بر فرض

$$MA = \sqrt{2}MO \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{\text{توان دو}}$$

$$x^2 + 1 - 2x + y^2 + 1 + 2y = 2x^2 + 2y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$$

پس مکان هندسی مورد نظر دایره است و شعاع آن برابر است با:

$$r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{4+4+8}}{2} = 2$$

بنابراین $\pi r^2 = 4\pi$ مساحت دایره.

۶۷۹ ۳ ابتدا مرکز و شعاع دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \Rightarrow O_1(3, 2), r_1 = 2$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow O_2(-1, 0), r_2 = 2$$

چون شعاع‌های دو دایره با هم برابرند، پس مرکز دایره مورد نظر روی عمودمنصف O_1O_2 است (شکل زیر را ببینید):

$$m_{O_1O_2} = \frac{2-0}{3+1} = \frac{1}{2}, \quad H\left(\frac{3-1}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (1, 1)$$

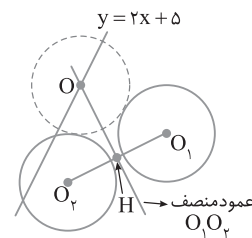
$$m_{\text{عمودمنصف}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2 = -\frac{1}{\frac{1}{2}}$$

اکنون معادله عمودمنصف O_1O_2 را می‌نویسیم: $y-1 = -2(x-1)$ ، در نتیجه $y = 2x + 5$. محل برخورد این عمودمنصف با خط $y = 2x + 5$ مرکز دایره خواسته شده است:

$$\begin{cases} y + 2x = 3 \\ y = 2x + 5 \end{cases} \Rightarrow 2x + 5 + 2x = 3 \Rightarrow 4x = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow O\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$$

با فرض اینکه شعاع دایره خواسته شده است، به دست می‌آید:

$$r = O_1O - r_1 = \sqrt{\left(3 + \frac{1}{2}\right)^2 + (2-4)^2} - 2 = \frac{\sqrt{65}}{2} - 2 = \frac{\sqrt{65} - 4}{2}$$

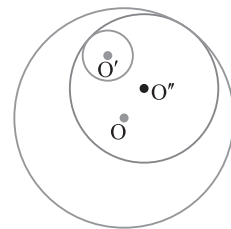


۶۸۰ ۴ توجه کنید که

$$\frac{MA - MB}{MA - 2} = 2 \Rightarrow MA - MB = 2MA - 4 \Rightarrow MA + MB = 4$$

یعنی مجموع فاصله‌های نقطه M از دو نقطه ثابت A و B مقدار ثابت ۴ است و این مقدار بیشتر از فاصله دو نقطه ثابت A و B است. در نتیجه، مکان هندسی نقطه M ، یک بیضی با دو نقطه ثابت A و B و مقدار ثابت $2a = 4$ است.

۶۸۱ ۳ در شکل زیر دایره به مرکز O'' و شعاع R'' یکی از دایره‌های مورد بحث در مسئله است و فرض کرده‌ایم $R > R'$. در این صورت $OO'' = R - R''$ و $O'O'' = R'' - R'$. با جمع کردن برابری‌های بالا به دست می‌آید $OO'' + O'O'' = R - R'$ ، یعنی مجموع فاصله‌های نقطه O'' از دو نقطه ثابت O و O' برابر مقدار ثابت $R - R'$ است. همچنین $OO'' < R - R'$ ، در نتیجه مکان هندسی O'' یک بیضی با نقطه‌های ثابت O و O' و مقدار ثابت $R - R'$ است.



۶۸۲ ۳ اگر دو نقطه ثابت تعریف بیضی (کانون‌ها) F و F' باشند، چون

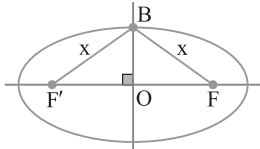
$$MF + MF' = 3 < 2a = 6$$

۶۸۳ ۲ چون نقطه M درون بیضی است، پس $FF' \leq MF + MF' < 2a \Rightarrow 5 \leq 2x - 1 < 14$

$$6 \leq 2x < 15 \Rightarrow 3 \leq x < \frac{15}{2} = 7.5$$

یعنی $x \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

۶۸۴ ۲ چون B روی عمودمنصف FF' است، پس $BF = BF'$. همچنین می‌دانیم $BF + BF' = 2a$ ، یعنی $2BF = 2a$ ، در نتیجه $BF = a$.



۶۸۵ ۳ چون طول قطر بزرگ برابر $2a = 12$ و M روی بیضی است، پس $MF + MF' = 12$. دو طرف این برابری را به توان دو می‌رسانیم:

$$MF^2 + MF'^2 + 2MF \times MF' = 144$$

می‌دانیم $MF \times MF' = 26$ ، پس $MF^2 + MF'^2 + 52 = 144$. در نتیجه

$$MF^2 + MF'^2 = 92$$

۶۸۶ ۳ می‌دانیم مساحت یک چهارضلعی که قطرهای آن بر هم عمود هستند، برابر نصف حاصل ضرب دو قطر است. پس

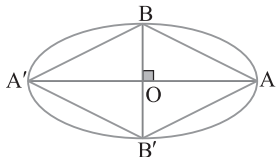
$$(ABA'B' \text{ چهارضلعی}) = \frac{1}{2} AA' \times BB' = \frac{1}{2} \times 2a \times 2b = 2ab$$

از طرف دیگر در مثلث قائم الزاویه OAB ، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

اکنون نسبت خواسته شده به دست می‌آید

$$\frac{\text{مساحت (چهارضلعی } ABA'B')}{AB} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

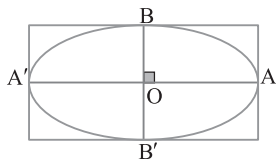


۶۸۷ ۳ توجه کنید که طول و عرض این مستطیل، به ترتیب همان اندازه‌های قطر بزرگ و قطر کوچک این بیضی هستند. در نتیجه $2(2a + 2b) = 4(a + b)$ محیط مستطیل

دقت کنید که مقدار b را باید حساب کنیم:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

$$\text{محیط مستطیل} = 4(10 + 8) = 72$$



۶۸۸ ۴ راه حل اول عرض کانون‌ها برابر یکدیگر است، پس قطر بزرگ

بیضی موازی محور x است (شکل زیر را ببینید). مرکز بیضی وسط F و F' یعنی $O(-1, 1)$ است. با توجه به شکل، فاصله مرکز بیضی تا محور x برابر b است، پس $b = 1$. از طرف دیگر، $2c = FF' = 4 \Rightarrow c = 2$

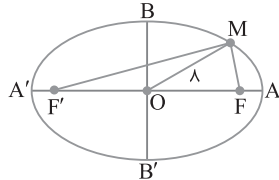
اکنون با استفاده از برابری $a^2 = b^2 + c^2$ ، a را به دست می‌آوریم

$$a^2 = b^2 + c^2 = 1 + 4 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5}$$

بنابراین قطر بزرگ این بیضی $2a = 2\sqrt{5}$ است.

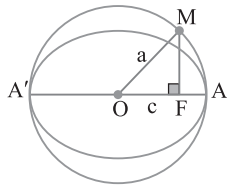
۶۹۲ ۴ بنابر فرض مسئله $2a=20$ و $2b=12$ پس $a=10$ و $b=6$. پس $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$ بنابر این $FF'=2c=16$. توجه کنید که در مثلث MFF' ، میانه OM نصف ضلع FF' است، پس این مثلث قائم الزاویه است و $\angle F'MF=90^\circ$. بنابر قضیه فیثاغورس،

$$MF'^2 + MF^2 = FF'^2 = 16^2 = 256$$



۶۹۳ ۱ چون M روی دایره به قطر AA' است، پس $OM=a$. از طرف دیگر می دانیم $OF=c$. اکنون در مثلث قائم الزاویه OMF ، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$MF = \sqrt{OM^2 - OF^2} = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{b^2} = b$$



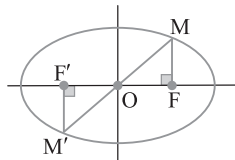
۶۹۴ ۲ فرض کنید، نقطه M و کانون F ، طولهای برابر دارند. MF

نصف وتر کانونی بیضی است، پس $MF = \frac{b^2}{a}$ و $OF=c$. از طرف دیگر $2a=6$ ، پس $a=3$ و $2b=2\sqrt{6}$ ، پس $b=\sqrt{6}$. در نتیجه چون $c^2 = a^2 - b^2$ ، پس $c = \sqrt{9-6} = \sqrt{3}$. بنابر قضیه فیثاغورس،

$$\triangle OMF: OM^2 = MF^2 + OF^2 \xrightarrow[OF=c]{MF=\frac{b^2}{a}}$$

$$OM^2 = \left(\frac{b^2}{a}\right)^2 + c^2 = \left(\frac{6}{3}\right)^2 + 3 = 7$$

پس $OM = \sqrt{7}$. در نتیجه اندازه قطر MM' برابر $2\sqrt{7}$ است.



۶۹۵ ۲ فاصله دو کانون بیضی برابر $2c$ است، پس $2c=FF'=8$.

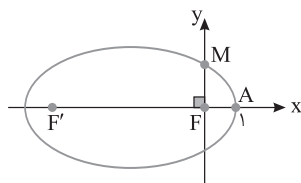
یعنی $c=4$. از طرف دیگر، مرکز بیضی وسط دو کانون F و F' است. پس

$$\text{مرکز بیضی} = O = \left(\frac{-4+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (-4, 0)$$

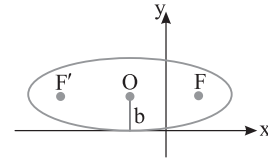
در نتیجه $a=OA=5$ ، پس $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25-16}=3$.

$$MF = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{5}$$

پس $M(0, \frac{9}{5})$ نقطه مورد نظر است.



راه حل دوم توجه کنید که $2c=FF'=4$. چون اندازه بلندترین قطر بیضی $2a$ است و $a > c$ ، پس باید $2a > 2c=4$ ، یعنی باید گزینه ای را انتخاب کنیم که از ۴ بزرگتر باشد. فقط گزینه (۴) این شرط را دارد.

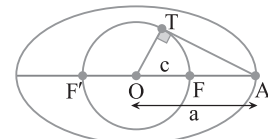


۶۸۹ ۲ راه حل اول در شکل زیر مرکز دایره و مرکز بیضی است. در

مثلث قائم الزاویه OAT ، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$AT = \sqrt{OA^2 - OT^2} = \sqrt{a^2 - c^2}$$

در بیضی $a^2 - c^2 = b^2$ پس $AT = \sqrt{b^2} = b$.



راه حل دوم بنابر روابط طولی در دایره، $AT = \sqrt{(a-c)(a+c)}$ ، پس

$$AT = \sqrt{a^2 - c^2} = b$$

۶۹۰ ۳ راه حل اول بنابر فرض مسئله.

$$2a = 2(2b) \Rightarrow a = 2b$$

از طرف دیگر، چون $a^2 = b^2 + c^2$ ، پس

$$(2b)^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4b^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 3b^2 = c^2 \Rightarrow \sqrt{3}b = c$$

در مثلث قائم الزاویه $OB\hat{F}$ ، بنابر نسبت های مثلثاتی

$$\tan(\angle O\hat{B}F) = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}b}{b} = \sqrt{3}$$

پس $\angle O\hat{B}F = 60^\circ$. در نتیجه

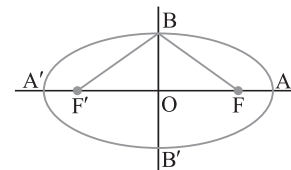
$$\angle F\hat{B}F' = 2(\angle O\hat{B}F) = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$

راه حل دوم می دانیم $BF=a$. پس در مثلث قائم الزاویه $OB\hat{F}$ ، وتر BF دو

برابر ضلع OB است. پس $\angle B\hat{F}O = 30^\circ$. در نتیجه در مثلث متساوی الساقین

$\angle B\hat{F}F'$ ، اندازه دو زاویه مجاور قاعده، 30° است. پس

$$\angle F\hat{B}F' = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$$



۶۹۱ ۴ راه حل اول بنابر فرض های مسئله.

$$FA = a - c = 8, \quad FA' = a + c = 18$$

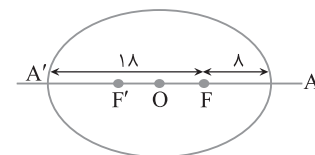
بنابر این

$$2b = 2\sqrt{a^2 - c^2} = 2\sqrt{(a-c)(a+c)} = 2\sqrt{8 \times 18} = 24$$

راه حل دوم چون $FA' = FA = 18$ و $F'A' + F'F = 18$ ، پس $F'F = 10$. در

نتیجه $c=5$. بنابر این $a=OA=c+FA=5+18=23$. در نتیجه

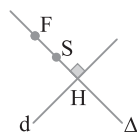
$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{23^2 - 5^2} = 22$$



۷۰۰ ۱) معادله خط Δ ، گذرنده از F و عمود بر خط d را می‌نویسیم، چون $m_d = 1$ ، پس $m_{\Delta} = -1$ ، در نتیجه $\Delta: y - 2 = -(x - 1)$ ، بنابراین $\Delta: x + y = 3$ ، محل برخورد دو خط d و Δ را به دست می‌آوریم:

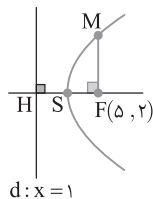
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow H(3, 0)$$

نقطه S، رأس سهمی، وسط پاره خط FH است، پس $S(\frac{1+3}{2}, \frac{2+0}{2}) = (2, 1)$ ، بنابراین مجموع طول و عرض رأس سهمی برابر است با $2+1=3$.

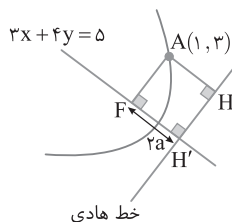


۷۰۱ ۲) با توجه به شکل، FM نصف طول وتر کانونی است، پس

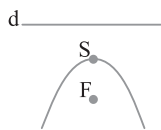
$$FM = 2a = FH = 4$$



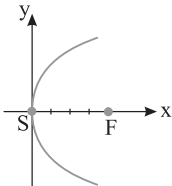
۷۰۲ ۲) شکل سؤال به صورت زیر است. چون A روی سهمی است، پس $AH = AF$ ، بنابراین چهارضلعی AHH'F مربعی به ضلع 2a است. بنابراین فاصله نقطه A(1,3) از خط $3x + 4y = 5$ برابر 2a است. در نتیجه $2a = AF = \frac{|3+12-5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2$ ، پس فاصله کانونی سهمی برابر 1 است.



۷۰۳ ۳) صورت کلی معادله این سهمی $y^2 = 4ax$ است. بنابراین $4a = 16$ ، پس $a = 4$ ، در نتیجه فاصله رأس تا کانون این سهمی برابر 4 است. می‌دانیم نزدیک‌ترین نقطه سهمی به کانون، رأس سهمی است. معادله سهمی، $x^2 = -4y$ است که در آن رأس، S(0,0) است.



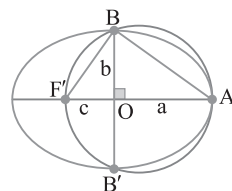
۷۰۵ ۳) می‌دانیم $a = |SF| = 4$ ، در ضمن از موقعیت F و S نسبت به هم نتیجه می‌گیریم دهانه سهمی رو به راست است، پس معادله سهمی به شکل $y^2 = 4ax$ است، در نتیجه $y^2 = 16x$



۶۹۶ ۲) می‌دانیم $AA' = 2a$ ، پس $2a = AA' = \sqrt{(-2-4)^2 + 0} = 6$ ، یعنی $a = 3$ ، همچنین چون $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ و $a = 3$ ، پس $c = \sqrt{5}$ ، اکنون به دست

می‌آید $MN = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 2^2}{3} = \frac{8}{3}$ ، در نتیجه $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{9 - 5} = 2$.

۶۹۷ ۴) دایره به قطر AF' از دو رأس B و B' می‌گذرد. زاویه ABF'، زاویه محاطی مقابل به قطر AF' است، پس $\angle ABF' = 90^\circ$ ، بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABF'، یعنی $b^2 = ac$ ، پس $e = \sqrt{1 - \frac{c}{a}} = \sqrt{1 - e}$ ، دو طرف برابری $e = \sqrt{1 - e}$ را به توان دو می‌رسانیم، پس $e^2 = 1 - e$ ، با حل این معادله به دست می‌آید $e = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



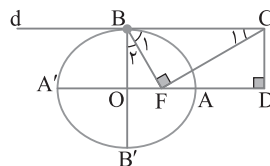
۶۹۸ ۳) بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$\Delta BFC: \hat{C}_1 = 30^\circ \Rightarrow BF = \frac{1}{2} BC \xrightarrow{BF=a} BC = 2a$$

چهارضلعی BCDO مستطیل است، پس $OD = BC = 2a$ ، در نتیجه $AD = a$ ، از طرف دیگر $\hat{C}_1 + \hat{B}_1 = 90^\circ$ و $\hat{B}_1 + \hat{B}_p = 90^\circ$ ، در نتیجه $\hat{B}_p = \hat{C}_1 = 30^\circ$ ، اکنون بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$\Delta BOF: \hat{B}_p = 30^\circ \Rightarrow OF = \frac{1}{2} BF \xrightarrow{\frac{BF=a}{OF=c}} c = \frac{1}{2} a \Rightarrow FA = \frac{a}{2}$$

در نتیجه $\frac{AD}{AF} = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2$

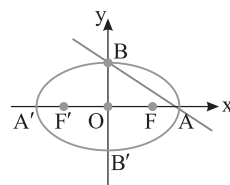


۶۹۹ ۳) نقطه تلاقی خط $3x + 4y = 12$ با محور x رأس A است. پس

از حل معادله حاصل از برخورد این خط با محور x نقطه A به دست می‌آید:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow A(4, 0)$$

از طرف دیگر فاصله مرکز بیضی تا رأس A برابر نصف قطر بزرگ بیضی است. بنابراین $a = OA = 4 \Rightarrow 2a = 8$ طول قطر بزرگ $\Rightarrow$



۷۰۹ ۴ ابتدا معادله سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$y = -2 + (2x+1)^2 \Rightarrow y = -2 + 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = y + 2 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(y+2)$$

رأس این سهمی نقطه $S(-\frac{1}{2}, -2)$ است. بنابراین فاصله مبدأ از رأس برابر است با

$$OS = \sqrt{\frac{1}{4} + 4} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

۷۱۰ ۲ به موازات هر خط دلخواهی می‌توان مماس بر سهمی رسم کرد

به غیر از خطوطی که موازی محور تقارن سهمی هستند. چون در معادله این سهمی توان y برابر ۲ است، پس محور تقارن آن موازی محور x است. در نتیجه به موازات خطوط با معادله $y = k$ نمی‌توان مماس بر این سهمی رسم کرد.

۷۱۱ ۱ ابتدا معادله سهمی را به شکل استاندارد می‌نویسیم

$$3x^2 - 6x = -4y - 1 \Rightarrow x^2 - 2x = \frac{-4y - 1}{3}$$

$$x^2 - 2x + 1 = \frac{-4y - 1 + 3}{3}$$

در نتیجه $S(h, k) = (1, -2)$. در نتیجه رأس این سهمی $S(h, k) = (1, -2)$

است و $a = \frac{1}{3}$. همچنین دهانه این سهمی رو به پایین است. بنابراین معادله

خط هادی آن به صورت $y = k + a = -2 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}$ است.

۷۱۲ ۳ معادله سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$x^2 - 4x = -8y + 12 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = -8y + 12 + 4$$

$$(x-2)^2 = -8(y-2)$$

در نتیجه رأس این سهمی $S(h, k) = (2, 2)$ است و $a = 2$. همچنین دهانه

این سهمی رو به پایین است. اکنون کانون به دست می‌آید $F(h, k-a) = (2, 2-2) = (2, 0)$ است، پس

$A = \frac{(2, 2) + (2, 0)}{2} = (2, 1)$ توجه کنید که خط MN گذرا از A و عمود بر

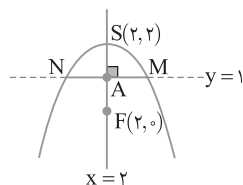
محور تقارن (خط $x = 2$) است، پس معادله آن $y = 1$ است. با قرار دادن

$y = 1$ در معادله سهمی طول نقطه‌های M و N به دست می‌آید:

$$x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 + 2\sqrt{2}, x_2 = 2 - 2\sqrt{2}$$

پس $M(2+2\sqrt{2}, 1)$ و $N(2-2\sqrt{2}, 1)$ در نتیجه

$$MN = |2+2\sqrt{2} - 2+2\sqrt{2}| = 4\sqrt{2}$$



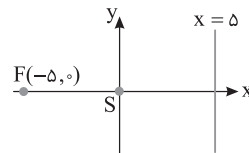
۷۰۶ ۲ کانون و خط هادی را در شکل زیر رسم کرده‌ایم. به سادگی می‌توان

فهمید رأس سهمی $S(0, 0)$ است و $a = 5$. همچنین دهانه سهمی رو به چپ است، پس صورت کلی معادله این سهمی $y^2 = -4ax$ و در نتیجه معادله سهمی $y^2 = -20x$ است. برای به دست آوردن محل برخورد این سهمی با

$$\begin{cases} y^2 = -20x \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^2 = -20x \Rightarrow x = 0 \text{ (غ.ق.)}, x = -20 \Rightarrow y = -20$$

$$A(-20, -20)$$

$$A(-20, -20) \Rightarrow \text{مجموع مختصات} = -20 - 20 = -40$$



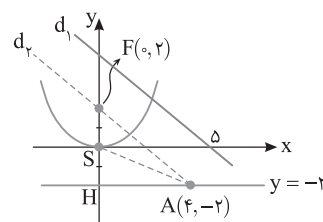
۷۰۷ ۲ رأس این سهمی $S(0, 0)$ و صورت کلی آن $x^2 = 4ay$ است،

پس در این سهمی مقدار a برابر ۲ است. همچنین دهانه این سهمی رو به بالا و کانون آن $F(0, 2)$ است. بنابراین شکل سهمی به صورت زیر است. معادله خط d_1 گذرنده از $F(0, 2)$ و موازی خط $d_2: x+y=5$ را به دست می‌آوریم. چون $m_{d_1} = -1$ ، پس $m_{d_2} = -1$ ، در نتیجه $d_1: y-2 = -x$ ، بنابراین $d_1: x+y=2$. معادله حاصل از برخورد این خط را با خط هادی $(y=-2)$ به دست می‌آوریم تا مختصات A به دست آید:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow A(4, -2)$$

مساحت مثلث ASF به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S_{ASF} = \frac{1}{2} \times FS \times AH = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$



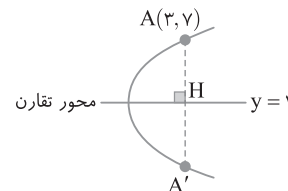
۷۰۸ ۴ می‌دانیم محور کانونی هر سهمی محور تقارن آن است. پس قرینه

نقطه $A(3, 7)$ نسبت به محور تقارن این سهمی روی آن قرار دارد. رأس سهمی $(y-1)^2 = 4a(x-b)$ نقطه $(b, 1)$ است و $y=1$ محور تقارن آن است. برای

پیدا کردن قرینه نقطه $A(3, 7)$ نسبت به خط $y=1$ از A عمود AH را بر این خط وارد می‌کنیم و به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا به A' برسیم. نقطه H به

مختصات $(3, 1)$ است و $H = \frac{A+A'}{2}$. بنابراین $A' = 2H - A$. پس

$$A' = 2(3, 1) - (3, 7) = (6, 2) - (3, 7) = (3, -5)$$



۷۱۳ ۴ معادله داده شده را مرتب می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 + \frac{y}{m}x + 8y = 12 - mx^2 \Rightarrow (1+m)x^2 + y^2 + \frac{y}{m}x + 8y = 12$$

در معادله سهمی ای که دهانه آن رو به راست است x^2 وجود ندارد. پس باید ضریب آن صفر باشد. در نتیجه $1+m=0$ ، یعنی $m=-1$. بنابراین معادله سهمی به صورت $y^2 - 2x + 8y = 12$ است. اکنون معادله سهمی را به

صورت استاندارد می‌نویسیم تا مختصات رأس آن را به دست آوریم:

$$y^2 + 8y = 2x + 12 \Rightarrow (y+4)^2 - 16 = 2x + 12$$

$$(y+4)^2 = 2x + 28 \Rightarrow (y+4)^2 = 2(x+14)$$

بنابراین رأس این سهمی نقطه $S(-14, -4)$ است.

۷۱۴ ۳ راه حل اول ابتدا معادله سهمی را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$y^2 - my = nx \Rightarrow y^2 - my + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = nx + \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

$$\left(y - \frac{m}{2}\right)^2 = n\left(x + \frac{m^2}{4n}\right)$$

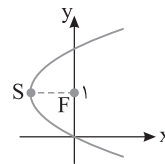
بنابراین رأس این سهمی $S(h, k) = \left(-\frac{m^2}{4n}, \frac{m}{2}\right)$ است و $a = \frac{n}{4}$. چون

عرض رأس سهمی برابر ۱ است (شکل زیر را ببینید)، پس $\frac{m}{2} = 1$ ، یعنی

$m=2$. همچنین کانون این سهمی $F(h+a, k) = (0, 1)$ است. پس

$\left(\frac{n}{4}, 1\right) = (0, 1)$ ، یعنی $\frac{n}{4} - 1 = 0$ ، پس $n = \pm 4$. مقدار $n = -2$ قابل

قبول نیست، چون دهانه سهمی رو به راست است. بنابراین $m=n=2$.



راه حل دوم فرض کنید سهمی محور عرض‌ها را در نقاط A و B قطع کرده است. چون F وسط A و B است، پس نقطه B (0,2) است و مختصات آن در معادله سهمی صدق می‌کنند:

$$4 = 2m \Rightarrow m = 2$$

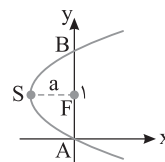
از طرف دیگر، طول وتر کانونی (AB) برابر 4a است. چون A(0,0) و

B(0,2)، پس $AB=2$. بنابراین $4a=2$. در نتیجه $a = \frac{1}{2}$. با توجه به

شکل زیر، رأس این سهمی $S(-a, 1) = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ است. مختصات S در معادله

سهمی صدق می‌کنند:

$$1 = 2 - \frac{1}{2}n \Rightarrow n = 2$$



۷۱۵ ۴ راه حل اول چون سهمی از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس

مختصات $O(0,0)$ در معادله سهمی صدق می‌کنند:

$$O \in \text{سهمی} \Rightarrow 0 = 0 + n \Rightarrow n = 0$$

اکنون معادله سهمی را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$y^2 - 4y + 4 = mx + 4 \Rightarrow (y-2)^2 = m(x + \frac{4}{m})$$

چون دهانه سهمی رو به چپ است، پس معادله آن به شکل $(y-k)^2 = -4a(x-h)$

است. رأس این سهمی $S(h, k) = \left(-\frac{4}{m}, 2\right)$ است و $a = -\frac{m}{4}$. همچنین کانون

سهمی نقطه $F(h-a, k)$ است. با توجه به شکل $F(0, 2)$ ، بنابراین

$$h-a=0 \Rightarrow -\frac{4}{m} + \frac{m}{4} = 0$$

در نتیجه $m = \pm 4$. چون دهانه سهمی رو به چپ است مقدار $m=4$ قابل

قبول نیست، پس $m=-4$. در نتیجه $m+n = -4+0 = -4$.

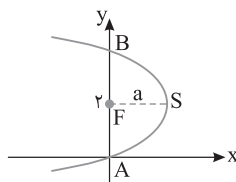
راه حل دوم سهمی از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس $n=0$. با توجه به شکل زیر، وتر کانونی سهمی است. چون $AF=2$ ، پس $2a=2 \Rightarrow a=1$

رأس سهمی نقطه $S(a, 2) = (1, 2)$ است. بنابراین مختصات S در معادله

سهمی صدق می‌کنند:

$$4 - 8 = m \Rightarrow m = -4$$

در نتیجه $m+n = -4$.



۷۱۶ ۳ در سهمی فاصله کانونی را با a نمایش می‌دهیم. در اینجا برای

اینکه اشتباهی صورت نگیرد، در معادله سهمی داده شده، به جای a، m را قرار می‌دهیم.

پس معادله داده شده $x^2 - mx = 2my + 3$ می‌شود. اکنون توجه کنید که

$$a = \left| \frac{2m}{4} \right| = \left| \frac{m}{2} \right| \quad \left(\text{ضریب متغیر درجه ۲} \right)$$

چون فاصله کانون تا خط هادی برابر 2a است، پس $a=3$. در نتیجه $\left| \frac{m}{2} \right| = 3$

یعنی $m = \pm 6$. اکنون به ازای $m=6$ معادله سهمی را به شکل استاندارد

$$(x-3)^2 = 12(y+1)$$

می‌نویسیم. در این معادله رأس سهمی $S(3, -1)$ است.

چون این جواب در گزینه‌ها هست، پس دیگر بررسی $m=-6$ لازم نیست.

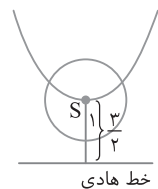
۷۱۷ ۴ مکان هندسی نقاطی که از رأس سهمی به فاصله ۱ هستند،

دایره‌ای به مرکز رأس سهمی و شعاع ۱ است. نقاط برخورد این دایره با خط

هادی نقاط مورد نظر هستند. فاصله رأس سهمی تا خط هادی برابر a است. a

را با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم:

$$a = \left| \frac{-6}{4 \times 1} \right| = \frac{3}{2} \quad \left(\text{ضریب متغیر درجه ۲} \right)$$



چون $a = \frac{3}{2} > 1$ ، پس دایره خط هادی را قطع

نمی‌کند، یعنی چنین نقطه‌ای وجود ندارد.

۷۱۸ ۲ آینه سهمی را مطابق شکل

روی محورهای مختصات قرار می‌دهیم به طوری

که رأس آن مبدأ مختصات باشد. با توجه به

فرض تست نقطه $A(2, 4)$ روی این آینه

سهمی قرار دارد. همچنین از روبه‌رو این آینه

یک سهمی به معادله $x^2 = 4ay$ است. پس

$$x^2 = 4ay \xrightarrow{A \in \text{سهمی}} 2^2 = 4a(4) \Rightarrow a = \frac{4 \times 0}{16} = 2.5$$

۷۲۶ ۲ رابطه $x^2 + y^2 - 2x + 4y \leq 3$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y \leq 3 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 \leq 3$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 8$$

بنابراین رابطه $x^2 + y^2 - 2x + 4y \leq 3$ درون و روی دایره به مرکز $(1, -2)$

و شعاع $2\sqrt{2}$ است. همچنین رابطه $x \geq 3$ سمت راست و روی خط $x=3$

است. پس روابط $x^2 + y^2 - 2x + 4y \leq 3$ و $x \geq 3$ یک قطعه از دایره را

مشخص می‌کنند (شکل زیر را ببینید). فاصله مرکز O از وتر AB برابر ۲ است

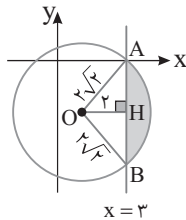
و $OA=OB=2\sqrt{2}$ ، پس بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث‌های OAH و

OBH ، $AH=BH=2$. در نتیجه زاویه AOB برابر 90° است

$$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2$$

مساحت (مثلث OAB) - مساحت (قطاع OAB) = مساحت قسمت رنگی

$$\text{مساحت قسمت رنگی} = \frac{90^\circ}{360^\circ} \pi (2\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2} (2\sqrt{2})(2\sqrt{2}) = 2\pi - 4$$



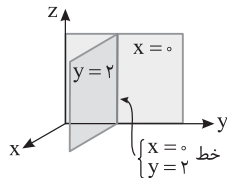
۷۲۷ ۴ ارتفاع و عرض نقطه A منفی و طول آن مثبت است، پس نقطه

A در ناحیه هشتم دستگاه مختصات $\mathbb{R}^3$ واقع است.

۷۲۸ ۱ $x=0$ معادله صفحه YZ است و $y=2$ معادله صفحه‌ای موازی

صفحه XZ و به فاصله ۲ از آن است. پس $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ خطی عمود بر صفحه XY

و در نتیجه موازی محور Z است.



۷۲۹ ۳ یال AB فصل مشترک دو صفحه $x=2$ و $z=3$ است و عرض

نقاط روی آن بین صفر و ۷ هستند. پس معادلات یال AB به صورت زیر هستند:

$$AB: \begin{cases} x=2 \\ 0 \leq y \leq 7 \\ z=3 \end{cases}$$

۷۳۰ ۲ در ناحیه دوم دستگاه مختصات فضایی $x < 0$ ، $y > 0$ و $z > 0$ ، پس،

$$2a+1 > 0 \Rightarrow a > -\frac{1}{2} \quad (1)$$

در ناحیه هشتم دستگاه مختصات فضایی $x > 0$ ، $y < 0$ و $z < 0$ ، پس

$$3a-14 < 0 \Rightarrow a < \frac{14}{3} \quad (2)$$

از نابرابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $-\frac{1}{2} < a < \frac{14}{3}$. پس بیشترین مقدار

صحیح a برابر ۴ است.

۷۱۹ ۱ بنابر خاصیت بازتابندگی سهمی بازتاب پرتوهای نوری که موازی

محور سهمی بر آن می‌تابند از کانون آن می‌گذرند. پس باید کانون سهمی داده شده را به دست آوریم:

$$x^2 - 2x + 4y + 5 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + 4y + 5 = 0$$

$$(x-1)^2 = -4y - 4 \Rightarrow (x-1)^2 = -4(y+1)$$

پس دهانه این سهمی رو به پایین و رأس آن $S(h, k) = (1, -1)$ است. همچنین

$4a=4$. در نتیجه $a=1$. مختصات کانون این سهمی به صورت زیر است:

$$F(h, k-a) = (1, -1-1) = (1, -2)$$

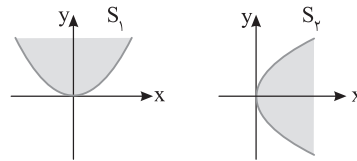
۷۲۰ ۱ رابطه $-1 \leq y \leq 3$ و $2 \leq x \leq 5$ نمایانگر مستطیلی در دستگاه

مختصات $\mathbb{R}^2$ است، به طوری که اضلاع آن روی خط‌های $x=2$ ، $x=5$ ،

$$y=3 \text{ و } y=-1 \text{ قرار دارند.}$$

۷۲۱ ۴ نمودارهای S_1 و S_2 رسم شده است (شکل‌های زیر را ببینید).

پس $S_1 \cap S_2$ همانند شکل گزینه (۴) است.



۷۲۲ ۲ با توجه به شکل، پاره‌خط AB روی خط $x=3$ قرار دارد و

عرض A برابر ۱ و عرض B برابر -3 است. پس رابطه مربوط به پاره‌خط AB به صورت $x=3$ و $-3 \leq y \leq 1$ است.

۷۲۳ ۳ پاره‌خط AB روی خط $y=3$ و پاره‌خط DC روی خط $y=-4$

قرار دارد. همچنین پاره‌خط BC روی خط $x=4$ و پاره‌خط AD روی خط $x=1$

قرار دارد. بنابراین ناحیه رنگی در رابطه $1 \leq x \leq 4$ و $-4 \leq y \leq 3$ صدق می‌کند.

۷۲۴ ۳ معادله $x^2 + y^2 = 4$ مشخص کننده یک دایره به مرکز مبدأ و

شعاع ۲ است. رابطه $x^2 + y^2 \leq 4$ نشان‌دهنده نقاط درون و روی این دایره است.

۷۲۵ ۳ ناحیه‌ای که در روابط $(x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 9$ و

$\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{4}{5}$ صدق می‌کند قسمتی از سطح دایره به مرکز $(3, 2)$ و شعاع

۳ است که بین دو خط موازی $x=1/5$ و $x=4/5$ قرار دارد (شکل زیر را

ببینید). در شکل مثلث OAB مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ است. پس

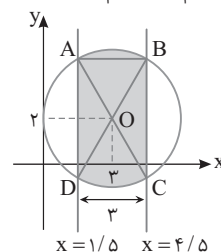
$$\angle AOB = 60^\circ \text{ و } \angle BOC = 120^\circ. \text{ بنابراین}$$

$$\text{مساحت قطاع } OAB = \frac{60^\circ}{360^\circ} \pi (3)^2 = \frac{3\pi}{2}$$

$$S_{OBC} = S_{OAD} = \frac{1}{2} (3)(3) \sin 120^\circ = \frac{9}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

در نتیجه

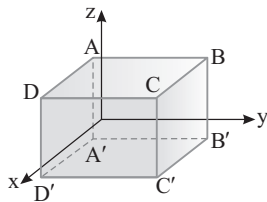
$$S_{OBC} + 2(\text{مساحت قطاع } OAB) = 2\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2\left(\frac{9\sqrt{3}}{4}\right) = 3\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}$$



$$\begin{cases} y=5 \\ z=-1 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x=7 \\ z=2 \end{cases} \quad \text{۷۳۸ (۱) دو یال این مکعب مستطیل روی خط‌های}$$

هستند. پس این مکعب مستطیل به صفحات $x=3$ ، $x=7$ ، $y=1$ ، $y=5$ ، $z=-1$ و $z=2$ محدود است و شکل آن به صورت زیر است. پس ابعاد این مکعب مستطیل $AD=7-3=4$ ، $AB=5-1=4$ و $AA'=2-(-1)=3$ است. بنابراین در ضمن قطر وجه‌های موازی صفحه YOZ برابر DC' است. بنابراین

$$\frac{|AC'|}{|DC'|} = \frac{\sqrt{4^2+4^2+3^2}}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{25}}$$



۷۳۹ (۱) قرینه نقطه $A(x, y, z)$ نسبت به صفحه yz نقطه $A'(-x, y, z)$ است، پس در اینجا $A'(-2, 4, -5)$ از طرف دیگر، قرینه نقطه $A(x, y, z)$ نسبت به محور y نقطه $A''(-x, y, -z)$ است. بنابراین قرینه $A'(-2, 4, -5)$ نسبت به محور y نقطه $A''(2, 4, 5)$ است. بنابراین $x_{A''} + y_{A''} + z_{A''} = 2 + 4 + 5 = 11$

۷۴۰ (۲) اگر $A(x, y, z)$ نقطه‌ای باشد که در شرط مسئله صدق می‌کند، آن‌گاه (فاصله A از صفحه yz) $= \frac{1}{2}$ فاصله A از محور x

یعنی $\sqrt{y^2+z^2} = \frac{1}{2}|x|$ پس $x^2 = 4(y^2+z^2)$ تنها گزینه (۲) در این برابری صدق می‌کند.

۷۴۱ (۴) فرض کنید فاصله $A(x_0, y_0, z_0)$ از صفحه‌های xy ، xz و yz به ترتیب برابر ۱، ۲ و ۳ باشد. در این صورت:
 $|y_0| = 2$ فاصله A تا صفحه xz ، $|z_0| = 1$ فاصله A تا صفحه xy
 $|x_0| = 3$ فاصله A تا صفحه yz

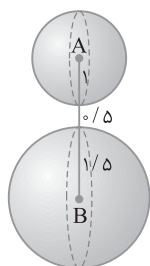
می‌دانیم فاصله A تا مبدأ مختصات برابر $|OA| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ است. بنابراین
 $|OA| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

۷۴۲ (۲) فاصله نقطه (x, y, z) از صفحه xz برابر $|y|$ است، پس
 $m = \pm 1$ بنابراین

$$m=1 \Rightarrow M(2, 1, 1) \Rightarrow \text{فاصله } M \text{ از محور } y = \sqrt{x^2+z^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$m=-1 \Rightarrow M(0, -1, 1) \Rightarrow \text{فاصله } M \text{ از محور } y = \sqrt{x^2+z^2} = \sqrt{0+1} = 1$$

در بین گزینه‌ها عدد $\sqrt{5}$ وجود دارد.



۷۴۳ (۱) مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله ۱ هستند کره‌ای به مرکز A و شعاع ۱ است و مکان

هندسی نقاطی که از B به فاصله $\frac{3}{4}$ هستند کره‌ای به مرکز B و شعاع $\frac{3}{4}$ است. نقاط تلاقی این دو کره

جواب این مسئله است. توجه کنید که

$$|AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (2-4)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$$

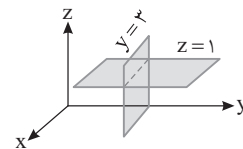
چون $|AB|$ از مجموع شعاع‌های دو کره بیشتر است، پس دو کره نقطه تلاقی ندارند. پس این مسئله جواب ندارد.

۷۳۱ (۳) نقاط E, F, H و M روی فقط یک وجه مکعب قرار دارند. سایر نقطه‌ها یا روی هیچ وجهی قرار ندارند (مثل D) یا روی دو یا سه وجه هم‌زمان واقع هستند. پس چهار نقطه بین این نقاط روی فقط یک وجه قرار دارند.

۷۳۲ (۱) $y=3$ معادله صفحه‌ای موازی با صفحه xz است و $z=1$

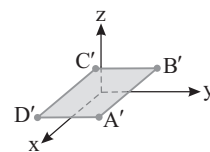
معادله صفحه‌ای موازی با صفحه xy است. پس معادلات فصل $\begin{cases} y=3 \\ z=1 \end{cases}$

مشترک این دو صفحه را نشان می‌دهند که خطی است موازی محور x .



۷۳۳ (۳) ارتفاع‌های نقاط A, B, C و D همگی برابر ۳ است. پس این

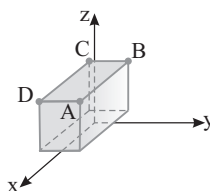
نقاط روی صفحه $z=3$ قرار دارند. تصویر آن‌ها روی صفحه xy نقاط $A'(2, 1, 0)$ ، $B'(-1, 1, 0)$ ، $C'(-1, -1, 0)$ و $D'(2, -1, 0)$ هستند. این نقاط همگی روی صفحه $z=0$ قرار دارند، عرض دو نقطه A' و B' برابر ۱ و عرض دو نقطه C' و D' برابر -1 است. طول دو نقطه B' و C' برابر -1 و طول دو نقطه A' و D' برابر ۲ است. بنابراین $A'B'C'D'$ بین $x=2$ و $x=-1$ قرار دارند و $A'D'$ و $B'C'$ بین $y=1$ و $y=-1$ هستند. پس سطح $A'B'C'D'$ در روابط $-1 \leq x \leq 2$ ، $-1 \leq y \leq 1$ و $z=0$ صدق می‌کند. این سطح با سطح $ABCD$ هم‌مساحت و موازی است.



۷۳۴ (۲) وجه $ADD'A'$ روی صفحه $x=4$ قرار دارد، متغیر y در آن بین صفر و ۵ و متغیر z در آن بین صفر و ۱ است. بنابراین روابط مشخص کننده این وجه $x=4$ ، $0 \leq y \leq 5$ و $0 \leq z \leq 1$ هستند.

۷۳۵ (۲) نقطه $(5, 6, -1)$ مختصات نقطه D' است، پس روی وجه‌های $ADD'A'$ ، $DCC'D'$ و $A'B'C'D'$ قرار دارد. پس گزینه (۲) نادرست است. به درستی سایر گزینه‌ها توجه کنید.

۷۳۶ (۳) ارتفاع هر چهار نقطه A, B, C و D برابر ۳ است. پس این نقاط روی صفحه $z=3$ هستند. در ضمن عرض دو نقطه A و B برابر ۱ و عرض دو نقطه C و D برابر -1 است. همچنین طول دو نقطه B و C برابر -1 و طول دو نقطه A و D برابر ۲ است. پس AB و CD بین $x=-1$ و $x=2$ قرار دارند و BC و AD بین $y=1$ و $y=-1$ قرار دارند. بنابراین سطح محدود به چهارضلعی $ABCD$ با روابط $-1 \leq x \leq 2$ ، $-1 \leq y \leq 1$ و $z=3$ مشخص می‌شود.



۷۳۷ (۳) در ناحیه سوم دستگاه مختصات فضایی X منفی، Y منفی و Z مثبت است. پس نقطه $A(1, -2, 3)$ در این ناحیه قرار ندارد. پس گزینه (۳) نادرست است. درستی سایر گزینه‌ها را بررسی کنید.

۷۴۹ ۳ برداری که اندازه آن برابر یک است، بردار یکه است. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم

$$(۱) \text{ گزینه } ۱: \left| \frac{\sqrt{3}}{3} \vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{3} \vec{j} \right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \neq 1$$

$$(۲) \text{ گزینه } ۲: \left| \vec{i} + \vec{j} \right| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \neq 1$$

$$(۳) \text{ گزینه } ۳: \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1 \quad \checkmark$$

$$(۴) \text{ گزینه } ۴: \left| \vec{i} - \vec{j} \right| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \neq 1$$

۷۵۰ ۴ چون $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی هستند، پس باید مضرب هم باشند و چون مؤلفه x در $\vec{b}'$ ، -۲ برابر مؤلفه x در $\vec{a}$ است، پس

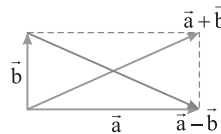
$$\vec{b} = -۲\vec{a} \Rightarrow (-۲, ۴) = -۲(۱, -m+۲) = (-۲, ۲m-۴)$$

$$۲m-۴=۴ \Rightarrow m=۴$$

۷۵۱ ۴ توجه کنید که بردارهای $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ هم‌اندازه هستند، زیرا

اندازه هر دوی آن‌ها برابر $\sqrt{\left(\frac{۷}{۸}\right)^2 + \left(\frac{۲}{۳}\right)^2}$ است. از طرف دیگر $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$

قطرهای متوازی‌الاضلاع به اضلاع $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند. متوازی‌الاضلاع با قطرهای برابر مستطیل است، پس $\vec{a} \perp \vec{b}$.



۷۵۲ ۱ چون $|\vec{3a} + \vec{b}| = |\vec{3a} - \vec{b}|$ پس متوازی‌الاضلاعی که روی دو

بردار $\vec{3a}$ و $\vec{b}$ ایجاد می‌شود، دارای قطرهایی با طول برابر است، یعنی این متوازی‌الاضلاع مستطیل است و $\vec{3a} \perp \vec{b}$ در نتیجه $\vec{a} \perp \vec{b}$.

۷۵۳ ۳ تساوی داده شده را ساده می‌کنیم. می‌دانیم $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

و $\vec{MP} + \vec{PN} = \vec{MN}$ پس

$$\vec{AB} + \vec{BC} + ۳\vec{MP} + ۳\vec{PN} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AC} + ۳\vec{MN} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AC} = -۳\vec{MN}$$

پس $\vec{AC}$ و $\vec{MN}$ مضرب منفی یکدیگرند. پس موازی و غیرهم‌جهت هستند، در نتیجه زاویه بین آن‌ها ۱۸۰° است.

۷۵۴ ۴ چون $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ پس

$$۳\vec{OA} + ۶\vec{BZ} + ۲\vec{AZ} + \vec{AB} + ۵\vec{OB}$$

$$= ۳\vec{OA} + ۶(\vec{OZ} - \vec{OB}) + ۲(\vec{OZ} - \vec{OA}) + \vec{OB} - \vec{OA} + ۵\vec{OB} = ۸\vec{OZ}$$

۷۵۵ ۲ تصویر بردار $\vec{a} = (-۳, ۱, ۴)$ روی صفحه xz بردار

$$\vec{b} = (-۳, ۰, ۴) \text{ است و اندازه این بردار برابر است با } \sqrt{(-۳)^2 + ۴^2} = ۵.$$

۷۵۶ ۳ می‌دانیم بازتاب ایزومتري است. پس اگر $\vec{a}'$ قرینه $\vec{a}$ نسبت

$$\text{به } \vec{b} \text{ باشد، آن‌گاه } |\vec{a}'| = |\vec{a}| = \sqrt{۴+۱+۴} = ۳.$$

۷۵۷ ۳ چون بردار $\vec{v}$ با صفحه xy موازی است، پس بر محور z عمود است. در نتیجه مختص (مؤلفه) z در آن صفر است، یعنی $m-۱=۰$ ، پس

$$m=۱. \text{ بنابراین } \vec{v} = (۴, ۳, ۰). \text{ در نتیجه } |\vec{v}| = \sqrt{۱۶+۹} = ۵.$$

۷۵۸ ۱ توجه کنید که

$$\vec{a} - ۲\vec{b} = (۲, ۳, ۱) - ۲(۱, -۱, ۱) = (۲, ۳, ۱) - (۲, -۲, ۲) = (۰, ۵, -۱)$$

$$\vec{a} + ۲\vec{b} = (۲, ۳, ۱) + ۲(۱, -۱, ۱) = (۲, ۳, ۱) + (۲, -۲, ۲) = (۴, ۱, ۳)$$

$$\text{در نتیجه } \frac{|\vec{a} - ۲\vec{b}|}{|\vec{a} + ۲\vec{b}|} = \frac{\sqrt{۲۵+۱}}{\sqrt{۱۶+۱+۹}} = \frac{\sqrt{۲۶}}{\sqrt{۲۶}} = ۱$$

۷۴۴ ۲ بنابر فرض مسئله $A'(۱, ۲, ۰)$ و $B'(۰, ۰, -۳)$. اگر M وسط

پاره‌خط $A'B'$ باشد، آن‌گاه

$$M = \frac{A' + B'}{۲} = \frac{(۱, ۲, ۰) + (۰, ۰, -۳)}{۲} = \left(\frac{۱}{۲}, ۱, -\frac{۳}{۲}\right)$$

۷۴۵ ۳ چون نقطه $M(۲, ۳, ۰)$ وسط پاره‌خط واصل نقاط $A(۴, ۵, ۲)$ و

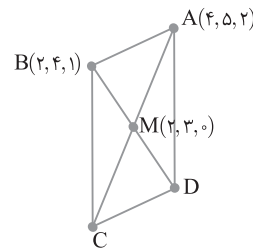
$B(۲, ۴, ۱)$ نیست، پس A و B رأس‌های مجاور متوازی‌الاضلاع هستند. نقطه M

وسط قطر BD در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ است (شکل زیر را ببینید). در نتیجه

$$M = \frac{B + D}{۲}. \text{ پس } D = ۲M - B = ۲(۲, ۳, ۰) - (۲, ۴, ۱) = (۲, ۲, -۱)$$

اکنون توجه کنید که $|AB| = \sqrt{۴+۱+۱} = \sqrt{۶}$ و $|AD| = \sqrt{۴+۹+۹} = \sqrt{۲۲}$

در نتیجه طول بزرگ‌ترین ضلع متوازی‌الاضلاع برابر $\sqrt{۲۲}$ است.

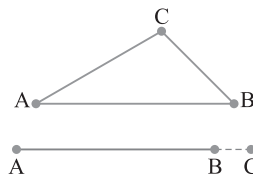


۷۴۶ ۲ اگر C روی خط AB نباشد، آن‌گاه بنابر نابرابری‌های مثلث،

$$|AC| - |BC| < |AB| \text{ و اگر } C \text{ روی خط } AB \text{ باشد، بیشترین مقدار}$$

$$|AC| - |BC| \text{ زمانی اتفاق می‌افتد که } C \text{ در طرفین پاره‌خط } AB \text{ باشد. در}$$

$$\text{این صورت } |AC| - |BC| = |AB|. \text{ پس بیشترین مقدار } |AC| - |BC| \text{ برابر است با } |AB| = \sqrt{۱+۴+۴} = ۳.$$



۷۴۷ ۱ ابتدا نقطه وسط AB را به دست می‌آوریم. اگر M وسط AB

باشد، آن‌گاه

$$M = \frac{A + B}{۲} = \left(\frac{-۲+۲m}{۲}, \frac{m-۲-m}{۲}, \frac{۳-۱}{۲}\right) = (m-۱, -۱, ۱)$$

فاصله M از مبدأ برابر $\sqrt{۲}$ است، پس

$$|OM| = \sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{(m-۱)^2 + ۱ + ۱} = \sqrt{۲}$$

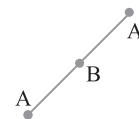
$$m^2 - ۲m + ۳ = ۲ \Rightarrow m^2 - ۲m + ۱ = 0 \Rightarrow (m-۱)^2 = 0 \Rightarrow m=۱$$

۷۴۸ ۳ اگر نقطه A' قرینه نقطه A نسبت به نقطه B باشد، آن‌گاه B

وسط AA' قرار دارد. بنابراین

$$B = \frac{A + A'}{۲} \Rightarrow A' = ۲B - A$$

$$A' = ۲(۲, ۳, -۱) - (۱, -۲, ۴) \Rightarrow A' = (۳, ۸, -۶)$$



۷۶۵ (۱) ابتدا مختصات دو بردار موازی را پیدا می‌کنیم:

$$2\vec{a} + \vec{j} = 2(1, m, 2) + (0, 1, 0) = (2, 2m+1, 4)$$

$$\vec{i} - 3\vec{b} = (1, 0, 0) - 3(2, -1, n) = (-5, 3, -3n)$$

می‌دانیم مختصات دو بردار موازی متناسب‌اند، پس

$$\frac{2}{-5} = \frac{2m+1}{3} = \frac{4}{-3n} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2m+1}{3} = -\frac{2}{5} \Rightarrow 10m+5 = -6 \Rightarrow m = -\frac{11}{10} \\ \frac{4}{-3n} = -\frac{2}{5} \Rightarrow 6n = 20 \Rightarrow n = \frac{10}{3} \end{cases}$$

$$\text{بنابراین } 3mn = 3\left(-\frac{11}{10}\right)\left(\frac{10}{3}\right) = -11$$

۷۶۶ (۲) چون دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی هستند، پس $\frac{k}{3} = \frac{4}{m} = \frac{2}{1}$ در

$$\text{نتیجه } k=6 \text{ و } m=2 \text{ بنابراین } m+k=2+6=8$$

۷۶۷ (۱) می‌دانیم $\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$ و $\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB}$ ، برابری

دوم را از برابری اول کم می‌کنیم

$$\vec{AC} - \vec{BC} = \vec{OB} - \vec{OA} \xrightarrow{\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}}$$

$$(1, 3, -1) - (-1, -1, 3) = \vec{AB}$$

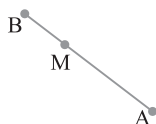
$$\text{بنابراین } |\vec{AB}| = \sqrt{4+16+16} = 6 \text{ در نتیجه } \vec{AB} = (2, 4, -4)$$

۷۶۸ (۱) چون M روی پاره‌خط AB است و $|\vec{AM}| = 2|\vec{BM}|$ ، پس

$$\vec{AM} = 2\vec{BM} \text{ بنابراین } \vec{OM} - \vec{OA} = 2(\vec{OB} - \vec{OM}) \text{ در نتیجه}$$

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + 2\vec{OB}}{3} = \frac{(2, 3, -2) + 2(3, -1, 1)}{3} = \left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$$

$$\text{در نتیجه مجموع مختصات } M = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3$$



۷۶۹ (۱) توجه کنید که ترتیب قرار گرفتن نقطه‌ها روی خط مهم نیست،

باید $\vec{AB} \parallel \vec{AC}$ ، بنابراین

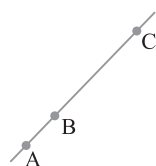
$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-1, 3, k) - (5, 1, 2) = (-6, 2, k-2)$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (9, m, 5) - (5, 1, 2) = (4, m-1, 3)$$

چون $\vec{AB}$ با $\vec{AC}$ موازی است، پس $\frac{-6}{4} = \frac{2}{m-1} = \frac{k-2}{3}$ ، بنابراین

$$m = -\frac{1}{3} \text{ و } k = -\frac{5}{2} \text{ در نتیجه}$$

$$\sqrt{3 \cdot mk} = \sqrt{3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{2.5}$$



۷۷۰ (۴) چون $\vec{a} = (2, -3)$ و $\vec{b} = (1, 2)$ ، به‌دست می‌آید

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 6 = -4$$

۷۵۹ (۲) بردارهای $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ دو قطر متوازی‌الاضلاع هستند که

$\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع مجاور آن هستند:

$$\vec{a} + \vec{b} = (3, -1, 2) + (1, 2, -1) = (4, 1, 1)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (3, -1, 2) - (1, 2, -1) = (2, -3, 3)$$

اکنون توجه کنید که

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{16+1+1} = 3\sqrt{2}, \quad |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{4+9+9} = \sqrt{22}$$

بنابراین طول قطر کوچک برابر $3\sqrt{2}$ است.

۷۶۰ (۳) چون زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ منفرجه است، پس $|\vec{a} - \vec{b}| > |\vec{a} + \vec{b}|$.

یعنی $\sqrt{(x+1)^2 + 16 + (x-1)^2} > \sqrt{(x-3)^2 + x^2 + 1}$ دو طرف را به توان

$$\text{دو می‌رسانیم: } (x+1)^2 + 16 + (x-1)^2 > (x-3)^2 + x^2 + 1$$

با ساده کردن این نابرابری به‌دست می‌آید $x > -\frac{4}{3}$.

۷۶۱ (۳) توجه کنید که $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3$ ، پس $\vec{a} + \vec{b}$ راستای نیمساز زاویه

بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است:

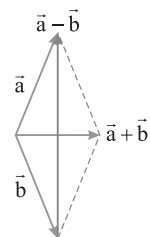
$$\vec{a} + \vec{b} = (1, 2, -2) + (2, 1, -2) = (3, 3, -4)$$

$$= (3, 3, -4)$$

۷۶۲ (۴) توجه کنید که چون $\frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$ ، پس $\vec{a} + \vec{b}$ نیمساز زاویه بین

$\vec{a}$ و $\vec{b}$ است. در نتیجه متوازی‌الاضلاع ایجاد شده روی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ لوزی است و

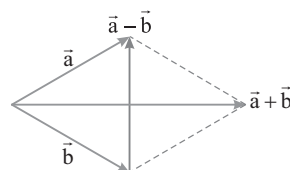
$$(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$$



۷۶۳ (۴) توجه کنید که چون $\vec{a}$ و $\vec{b}$ قرینه هم هستند، پس $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

بنابراین متوازی‌الاضلاع ایجاد شده روی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ لوزی است. در لوزی قطرهای

بر هم عمود هستند، در نتیجه $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$.



۷۶۴ (۲) بردار $|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}$ در راستای نیمساز زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است

$$\text{و } |\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b} = 1(-2, 1, 2) + 3(1, 0, 0) = (1, 1, 2)$$

هم‌جهت با نیمساز زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مضرب مثبت بردار $(1, 1, 2)$ است. پس

بردار مورد نظر را $(m, m, 2m)$ در نظر می‌گیریم که $m > 0$ اندازه این

$$\text{بردار برابر } \sqrt{6} \text{ است، پس } \sqrt{m^2 + m^2 + 4m^2} = \sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{6}m = \sqrt{6}$$

در نتیجه $m=1$ و بردار مطلوب $(1, 1, 2)$ است.

گزینه (۴) اگر بردار $\vec{a}$ بر صفحه دو بردار $\vec{x}$ و $\vec{y}$ عمود باشد، بر هر بردار درون این صفحه عمود است. بردار $\vec{x} + \vec{y}$ در صفحه دو بردار $\vec{x}$ و $\vec{y}$ است، پس $\vec{a}$ بر $\vec{x} + \vec{y}$ عمود است و $\vec{a} \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = 0$. در نتیجه گزینه (۴) هم جواب نیست. بنابراین گزینه (۲) درست است.

۷۸۱ (۲) توجه کنید که

$$\vec{a} \cdot (\vec{r}\vec{b} + \vec{a}) = \vec{r}\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} = 2 \times (-3) + 2^2 = -6 + 4 = -2$$

۷۸۲ (۲) عبارت خواسته شده را ساده می کنیم:

$$(\vec{a} + \vec{r}\vec{b}) \cdot (\vec{r}\vec{a} + \vec{b}) = \vec{r}\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{r}^2 \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{r}\vec{b} \cdot \vec{b} \\ = 3|\vec{a}|^2 + \vec{r}\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{r}|\vec{b}|^2 = 3 \times 4 + 2 \times 4 + 2 \times 9 = 12 + 8 + 18 = 38$$

۷۸۳ (۳) چون بردارهای $\vec{a} + \vec{r}\vec{b}$ و $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}$ بر هم عمود هستند، پس $(\vec{a} + \vec{r}\vec{b}) \cdot (\vec{a}\vec{b} + \vec{b}) = 0$ یعنی

$$\vec{a}\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{r}\vec{a}\vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{r}\vec{b} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow 5|\vec{a}|^2 + \vec{r}\vec{a} \cdot \vec{b} + 3|\vec{b}|^2 = 0$$

چون $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ پس $5 + \vec{r}\vec{a} \cdot \vec{b} + 3 = 0$ یا $\vec{r}\vec{a} \cdot \vec{b} = -8$ بنابراین

$$\cos \theta = -\frac{1}{2} \quad \text{در نتیجه } \theta = 120^\circ$$

۷۸۴ (۲) توجه کنید که

$$|\vec{r}\vec{a} - \vec{r}\vec{b}|^2 = \vec{r}\vec{a} \cdot \vec{r}\vec{a} - 2\vec{r}\vec{a} \cdot \vec{r}\vec{b} + \vec{r}\vec{b} \cdot \vec{r}\vec{b} = \vec{r}^2(|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2) \\ = 4 \times 9 + 9 \times 16 - 12 \times 2 \times 4 \times \frac{1}{2} = 108$$

در نتیجه $|\vec{r}\vec{a} - \vec{r}\vec{b}| = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

۷۸۵ (۲) از برابری های داده شده به دست می آید $|\vec{a}| = 4$ ، $|\vec{b}| = 6$ و

$|\vec{a} + \vec{b}| = 3$ می دانیم $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 16 + 36 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 9$ پس $\vec{a} \cdot \vec{b} = -14$ در نتیجه $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{95}$

۷۸۶ (۳) با توجه به اتحاد $|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$10^2 - 8^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow 100 - 64 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 9$$

۷۸۷ (۴) از برابری $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ نتیجه می گیریم $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$ پس $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$ یعنی $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{c}|^2$ در نتیجه $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$

۷۸۸ (۱) از برابری $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ نتیجه می گیریم

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}) = 0$$

یعنی

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2)$$

$$= -\frac{1}{2}(16 + 25 + 36) = -\frac{1}{2} \times 77 = -\frac{77}{2}$$

۷۸۹ (۳) توجه کنید که

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} \\ = 4 + 25 + 16 + 2 \times 2 \times 5 \times \frac{1}{2} - 2 \times 2 \times 4 \times \frac{1}{2} - 2 \times 5 \times 4 \times \frac{1}{2} = 27 \Rightarrow |\vec{v}| = 3\sqrt{3}$$

۷۹۰ (۱) از برابری $\vec{a} + \vec{r}\vec{b} + \vec{r}\vec{c} = \vec{0}$ نتیجه می گیریم

$$|\vec{a} + \vec{r}\vec{b} + \vec{r}\vec{c}|^2 = |\vec{0}|^2 = 0 \quad \text{پس } |\vec{a} + \vec{r}\vec{b} + \vec{r}\vec{c}| = 0 \quad \text{در نتیجه}$$

$$|\vec{a}|^2 + \vec{r}^2|\vec{b}|^2 + \vec{r}^2|\vec{c}|^2 + 2\vec{r}\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{r}\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{r}\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{r}\vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2 + \vec{r}^2|\vec{b}|^2) = -\frac{1}{4}(4 + 4 \times 1) = -2$$

۷۷۱ (۴) چون $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ ، پس $m - 1 - 4 = 4$ ، بنابراین $m = 9$ در نتیجه $\vec{b} = (8, 2)$ و $|\vec{b}| = \sqrt{64 + 4} = 2\sqrt{17}$

۷۷۲ (۴) از تعریف ضرب داخلی به دست می آید $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ پس

$$\cos \theta = \frac{3 - 2}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = -\frac{1}{5\sqrt{2}}$$

۷۷۳ (۱) توجه کنید که

$$|\vec{a} + \vec{b}| + \vec{a} \cdot \vec{b} = |(1, -1, 1) + (-1, 4, -5)| + (1, -1, 1) \cdot (-1, 4, -5) \\ = |(0, 3, -4)| + (-1 - 4 - 5) = \sqrt{9 + 16} - 10 = 5 - 10 = -5$$

۷۷۴ (۴) اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، از $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$

نتیجه می گیریم $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ، یعنی $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ در نتیجه $(1, 3, m - 2) \cdot (m, 2m + 1, -4) > 0 \Rightarrow m + 6m + 3 - 4m + 8 > 0$

$$3m + 11 > 0 \Rightarrow m > -\frac{11}{3} \approx -3.67$$

کوچکترین مقدار صحیح m برابر -3 است.

۷۷۵ (۱) توجه کنید که $\vec{a} - \vec{b} = (1, 2, 3) - (1, 1, -1) = (0, 1, 4)$

انکون اگر زاویه بین بردارهای $\vec{a} - \vec{b}$ و $\vec{b}$ برابر θ باشد، آن گاه

$$\cos \theta = \frac{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{a} - \vec{b}||\vec{b}|} = \frac{(0, 1, 4) \cdot (1, 1, -1)}{\sqrt{1 + 16} \sqrt{1 + 1}} = \frac{1 - 4}{\sqrt{17} \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$$

۷۷۶ (۴) چون اندازه این دو بردار با هم برابر است، پس

$$\sqrt{4 + (m + 1)^2 + 16} = \sqrt{m^2 + 16 + 9}$$

می رسانی: $(m + 1)^2 + 20 = m^2 + 25$ با حل این معادله به دست می آید

$m = 2$ ، یعنی $\vec{a} = (2, 3, 4)$ و $\vec{b} = (2, 4, 3)$ اگر θ زاویه بین این دو بردار باشد، آن گاه

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{4 + 12 + 12}{\sqrt{4 + 9 + 16} \sqrt{4 + 16 + 9}} = \frac{28}{29}$$

۷۷۷ (۳) زاویه بین دو بردار $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ را به دست می آوریم. توجه

کنید که $\vec{AB} = (2, -1, 2)$ و $\vec{AC} = (3, -3, 0)$ پس

$$\cos \hat{A} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|} = \frac{6 + 3}{\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 45^\circ$$

۷۷۸ (۱) توجه کنید که $\vec{OA} = (1, m, 2)$ و $\vec{OB} = (m - 1, 2, 2)$

چون $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ بر هم عمود هستند، پس $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ یعنی

$$(1, m, 2) \cdot (m - 1, 2, 2) = 0 \Rightarrow m - 1 + 2m + 4 = 0$$

با حل معادله بالا به دست می آید $m = -1$

۷۷۹ (۲) چون $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود هستند، پس $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ یعنی

$$(4, 5, n) \cdot (2, m, 3) = 0 \Rightarrow 8 + 5m + 3n = 0 \Rightarrow 5m + 3n = -8$$

در بین گزینه ها فقط اعداد گزینه (۲) در این برابری صدق می کنند.

۷۸۰ (۲) بنابر فرض می خواهیم $\vec{a} \cdot (\vec{x} + \vec{y}) \neq 0$

گزینه (۱) اگر $\vec{x}$ قرینه $\vec{y}$ باشد، آن گاه $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$ پس $\vec{a} \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = 0$

پس گزینه (۱) جواب نیست.

گزینه (۳) اگر سه بردار دوبه دو بر هم عمود باشند، آن گاه

$$\vec{a} \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{a} \cdot \vec{x} + \vec{a} \cdot \vec{y} = 0 + 0 = 0$$

۷۹۸ ۱ راه حل اول با توجه به شکل، درمی‌یابیم اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر 60° باشد، آنگاه زاویه بین دو بردار $\vec{a}'$ و $\vec{b}'$ نیز 60° خواهد بود. از طرف دیگر،

$$|\vec{a}'| = |\vec{a}| \cos 60^\circ, \quad |\vec{b}'| = |\vec{b}| \cos 60^\circ \quad (۱)$$

$$\vec{a}' \cdot \vec{b}' = |\vec{a}'| |\vec{b}'| \cos 60^\circ \xrightarrow{(۱)}$$

$$\vec{a}' \cdot \vec{b}' = (|\vec{a}| \cos 60^\circ)(|\vec{b}| \cos 60^\circ) \cos 60^\circ$$

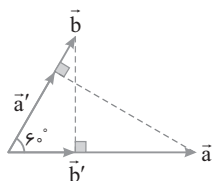
$$= \underbrace{(|\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ)}_{\vec{a} \cdot \vec{b}} \cos^2 60^\circ = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

راه حل دوم می‌دانیم $|\vec{b}'| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|}$ و $|\vec{a}'| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$. بنابراین

$$\vec{a}' \cdot \vec{b}' = |\vec{a}'| |\vec{b}'| \cos \theta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} \times \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|} \times \cos \theta$$

$$= \frac{|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta}{|\vec{b}|} \times \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|} \times \cos \theta$$

$$= |\vec{a} \cdot \vec{b}| \cos \theta \cos \theta = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$



۷۹۹ ۱ در شکل فرضی زیر ارتفاع AH و میانه AM وارد بر ضلع BC است، بنابراین MH تصویر قائم میانه AM بر امتداد BC است و می‌دانیم

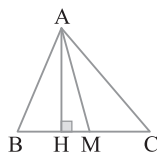
اگر $\vec{a}'$ تصویر قائم $\vec{a}$ روی امتداد $\vec{b}$ باشد، آنگاه $|\vec{a}'| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$.

$$\vec{M} = \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2} = (0, 3, 1), \quad \vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA} = (0, 4, -1)$$

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = (-2, -2, 0)$$

اکنون باید اندازه تصویر قائم $\vec{AM}$ بر $\vec{BC}$ را پیدا کنیم:

$$|\vec{AM}'| = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{BC}|}{|\vec{BC}|} = \frac{|0 \cdot -2 + 4 \cdot -2 + 0 \cdot 0|}{\sqrt{4 + 4 + 0}} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$



۸۰۰ ۱ توجه کنید که

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-2-0)\vec{i} - (4+3)\vec{j} + (0-1)\vec{k} = -2\vec{i} - 7\vec{j} - \vec{k}$$

طول تصویر قائم این بردار روی محور y برابر ۷ است.

۸۰۱ ۴ می‌دانیم $\vec{a} \times \vec{b}$ بر هر ترکیب خطی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است، یعنی همواره $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$. پس این تساوی به ازای تمام مقادیر m درست است.

۷۹۱ ۳ فرض کنید $\vec{a} = (2x, y, \sqrt{2}z)$ و $\vec{b} = (2, 2, -\sqrt{2})$. در این

صورت بنابر نابرابری کوشی - شوارتز،

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow |4x + 2y - 2z| \leq \sqrt{4x^2 + y^2 + 2z^2} \sqrt{4 + 4 + 2}$$

$$|4x + 2y - 2z| \leq 20.$$

پس حداکثر مقدار عبارت $4x + 2y - 2z$ برابر ۲۰ است.

۷۹۲ ۱ فرض کنید $\vec{a} = (3x, 2y, \sqrt{2}z)$ و $\vec{b} = (1, 1, 2\sqrt{2})$. در این

صورت بنابر نابرابری کوشی - شوارتز،

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow |3x + 2y + 4z| \leq \sqrt{9x^2 + 4y^2 + 2z^2} \sqrt{1 + 1 + 8}$$

$$\frac{5}{\sqrt{10}} \leq \sqrt{9x^2 + 4y^2 + 2z^2} \Rightarrow \frac{25}{10} \leq 9x^2 + 4y^2 + 2z^2$$

پس حداقل مقدار عبارت $9x^2 + 4y^2 + 2z^2$ برابر ۲/۵ است.

۷۹۳ ۲ فرض می‌کنیم $\vec{a} = (0, -3, 6)$ و $\vec{b} = (2, -1, -2)$. اگر $\vec{a}'$

تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$ باشد، آنگاه

$$\vec{a}' = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \left(\frac{0 + 3 - 12}{9}\right)(2, -1, -2) = (-2, 1, 2)$$

۷۹۴ ۲ توجه کنید که

$$\vec{v}_2 \text{ بر } \vec{v}_1 \text{ تصویر قائم} = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_2|} = \frac{2 + 2 + 4}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{8}{3}$$

۷۹۵ ۲ اگر $\vec{a}'$ تصویر قائم $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ باشد، آنگاه $|\vec{a}'| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$. اکنون

بنابر فرض سؤال،

$$\vec{a} - \vec{b} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k} \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{1 + 16 + 49} \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 66$$

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 66 \Rightarrow 9 + 49 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 66 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -4$$

$$|\vec{a}'| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{|-4|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \text{ پس}$$

۷۹۶ ۳ توجه کنید که زاویه بین $\vec{a}'$ و

$\vec{b}'$ با زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر است. بنابراین

فرض، $|\vec{a}'| = \frac{1}{\sqrt{2}} |\vec{a}|$ از طرف دیگر،

$$|\vec{a}'| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta}{|\vec{b}|} = |\vec{a}| |\cos \theta|$$

$$\text{پس } |\cos \theta| = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ یعنی } |\vec{a}| |\cos \theta| = \frac{1}{\sqrt{2}} |\vec{a}|$$

در نتیجه $\theta = 60^\circ$ یا $\theta = 120^\circ$.

۷۹۷ ۱ با توجه به شکل طول تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی امتداد بردار $\vec{b}$

برابر $\sqrt{3}$ است، پس

$$|\vec{a}'| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{|m - 1 + m - 1|}{\sqrt{1 + (m - 1)^2}} \Rightarrow 3(1 + (m - 1)^2) = (2m - 2)^2$$

$$3 + 3m^2 + 3 - 6m = 4m^2 + 4 - 8m \Rightarrow m^2 - 2m - 2 = 0.$$

مجموع ریشه‌های این معادله درجه دوم برابر است با

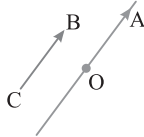
$$-\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2 \Rightarrow \text{مجموع مقادیر } m = 2$$

۸۰۸ ۳ می‌دانیم ضرب خارجی روی جمع و تفریق بردارها خاصیت توزیع‌پذیری دارد. پس

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OA} \times (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

بنابراین $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{CB}$ موازی هستند. پس A روی خطی قرار دارد که از مبدأ O می‌گذرد و با $\overrightarrow{CB}$ موازی است. مختصات $\overrightarrow{CB}$ برابر $(1, 0, 0)$ است. بنابراین خط فوق موازی بردار $\vec{k}$ ، یعنی موازی محور Z است و چون این خط از مبدأ می‌گذرد، پس مکان نقطه A همان محور Z است.



۸۰۹ ۱ ابتدا بردار $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$ را ساده می‌کنیم:

$$(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b} = 2\vec{a} \times \vec{b}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}) = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$$

پس مجموع مختصات این بردار مساوی $-6 = -4 - 2$ است.

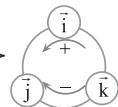
۸۱۰ ۱ بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ و مضارب غیرصفر آن هم بر $\vec{a}$ ، هم بر $\vec{b}$ و هم بر ترکیب‌های خطی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مثل $7\vec{a} - \vec{b}$ و $3\vec{a} + 9\vec{b}$ عمود هستند.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$$

در بین گزینه‌ها تنها بردار $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ مضرب بردار $(3, 3, -3)$ است. توجه کنید که

$$\frac{1}{12}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{1}{12}(3, 3, -3) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$$

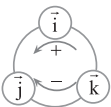
۸۱۱ ۳ به کمک نمودار چرخشی حاصل ضرب خارجی



بردارهای $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ برابر هستند با $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ ، $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$ و $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ ، در نتیجه

$$(-2\vec{i} \times (3\vec{i} \times \vec{j})) \times \vec{k} = (-6\vec{i} \times \vec{k}) \times \vec{k} = 6\vec{j} \times \vec{k} = 6\vec{i}$$

۸۱۲ ۱ به کمک نمودار چرخشی ضرب‌های خارجی



بردارهای $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ برابر هستند با $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ ، $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ و $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$. پس

$$2\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) - \vec{j} \cdot (2\vec{k} \times \vec{i}) + 3\vec{k} \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) = 2\vec{i} \cdot \vec{i} - 2\vec{j} \cdot \vec{j} - 3\vec{k} \cdot \vec{k} = 2 - 2 - 3 = -3$$

۸۰۲ ۳ $\vec{a} \times \vec{b}$ بر صفحه شامل $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است. پس بر هر ترکیب خطی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نیز عمود است. در نتیجه $\vec{a} \times \vec{b}$ و هر مضرب مخالف صفر آن بر $2\vec{a} - \vec{b}$ و $\vec{a} + 2\vec{b}$ عمود هستند:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

در بین گزینه‌ها، گزینه (۳) قرینه $\vec{a} \times \vec{b}$ است، پس بر $2\vec{a} - \vec{b}$ و $\vec{a} + 2\vec{b}$ عمود است.

۸۰۳ ۴ چون $\vec{b} \times \vec{c}$ بر $\vec{b}$ و $\vec{c}$ عمود است، پس هر مضرب ناصفری از آن هم بر $\vec{b}$ و $\vec{c}$ عمود است و برعکس، یعنی هر برداری که بر $\vec{b}$ و $\vec{c}$ عمود باشد، باید مضرب $\vec{b} \times \vec{c}$ باشد. در نتیجه $\vec{a}$ مضرب $\vec{b} \times \vec{c}$ است. از طرف

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

دیگر $\vec{a} = m(\vec{b} \times \vec{c}) = (-m, 3m, 2m)$. عددی ناصفر مانند m وجود دارد که به‌ازای آن $|\vec{a}| = 2$ ، چون $|\vec{a}| = 2$ ، پس

$$\sqrt{m^2 + 9m^2 + 4m^2} = 2 \Rightarrow \sqrt{14}|m| = 2$$

در نتیجه $m = \pm \frac{2}{\sqrt{14}}$ ، یعنی $\vec{a} = (\frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{6}{\sqrt{14}}, \frac{4}{\sqrt{14}})$ یا

$$\vec{a} = (\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-6}{\sqrt{14}}, \frac{-4}{\sqrt{14}})$$

$$x + y + z = \frac{-2}{\sqrt{14}} + \frac{6}{\sqrt{14}} + \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{14}}$$

$$x + y + z = \frac{2}{\sqrt{14}} - \frac{6}{\sqrt{14}} - \frac{4}{\sqrt{14}} = -\frac{8}{\sqrt{14}}$$

۸۰۴ ۲ اگر θ زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، آن‌گاه

$$|\vec{a}||\vec{b}|\sin \theta = \sqrt{3}|\vec{a}||\vec{b}|\cos \theta \Rightarrow \sin \theta = \sqrt{3}\cos \theta$$

$$\tan \theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

۸۰۵ ۱ بنابر اتحاد لاگرانژ،

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 2^2 \times 15^2 - 24^2 = 2^2(15^2 - 12^2) = 2^2 \times 9^2$$

در نتیجه $|\vec{a} \times \vec{b}| = 18$.

۸۰۶ ۲ توجه کنید که

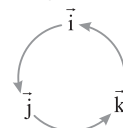
$$\begin{aligned} |(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| &= |\vec{a} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b}| \\ &= |\vec{0} + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{0}| = 2|\vec{b} \times \vec{a}| = 2|\vec{b}||\vec{a}|\sin \theta \\ &= 2 \times 5 \times 4 \sin \theta = 40 \sin \theta \end{aligned}$$

چون $|\vec{a} \times \vec{b}| = 18$ ، پس $40 \sin \theta = 18$ ، یعنی $\sin \theta = \frac{9}{20}$. نتیجه $\theta = 30^\circ$.

۸۰۷ ۳ می‌دانیم $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ ، $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ و $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$. عبارت داده

شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} + \vec{i} \times \vec{j} - \vec{i} \times \vec{k} + 2\vec{j} \times \vec{i} - \vec{j} \times \vec{j} + \vec{j} \times \vec{k} + \vec{k} \times \vec{i} + 2\vec{k} \times \vec{j} \\ = \vec{0} + \vec{k} + \vec{j} - 2\vec{k} - \vec{0} + \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{i} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \end{aligned}$$



۸۱۹ اگر $\vec{b}'$ تصویر قائم بردار $\vec{b}$ روی امتداد بردار $\vec{a}$ باشد، آن‌گاه

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|} = |\vec{b}'| = 2 \text{ و چون } |\vec{b}| = 3 \text{ پس } \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|} = 2 \text{ اگر زاویه بین دو بردار}$$

$\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، آن‌گاه

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|} = 2 \Rightarrow \frac{|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta}{|\vec{a}|} = 2$$

$$|\vec{b}| \cos \theta = 2 \xrightarrow{|\vec{b}|=3} \cos \theta = \frac{2}{3}$$

پس $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ می‌دانیم مساحت

متوازی‌الاضلاعی که توسط دو بردار $2\vec{a} + \vec{b}$ و $3\vec{a} - 2\vec{b}$ ساخته می‌شود، برابر

اندازه حاصل ضرب خارجی این دو بردار است. بنابراین

$$S = |(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})| = \left| \begin{matrix} \vec{a} \times \vec{a} & \vec{a} \times (-2\vec{b}) & \vec{b} \times \vec{a} & \vec{b} \times (-2\vec{b}) \end{matrix} \right|$$

$$= \left| \begin{matrix} 0 & -2\vec{a} \times \vec{b} & \vec{a} \times \vec{b} & 0 \end{matrix} \right|$$

$$= 2|\vec{a} \times \vec{b}| = 2|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 2(3) \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = 2\sqrt{5}$$

۸۲۰ بنابر فرض تست،

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \Rightarrow (m, 2m, 3) \cdot (3, -1, 2m) = 7$$

$$3m - 2m + 6m = 7 \Rightarrow m = 1$$

پس $\vec{a} = (1, 2, 3)$ و $\vec{b} = (3, -1, 2)$ در نتیجه

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (7, 7, -7) \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{49 + 49 + 49} = 7\sqrt{3}$$

از طرف دیگر مساحت مثلث ایجاد شده با $\vec{a} + 2\vec{b}$ و $2\vec{b} - \vec{a}$ برابر است با

$$S = \frac{1}{2} |(\vec{a} + 2\vec{b}) \times (2\vec{b} - \vec{a})| = \frac{1}{2} |\vec{a} \times 2\vec{b} - \vec{a} \times \vec{a} + 4\vec{b} \times \vec{b} - 2\vec{b} \times \vec{a}|$$

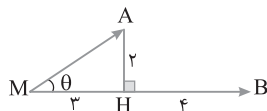
$$= \frac{1}{2} |4\vec{a} \times \vec{b}| = 2|\vec{a} \times \vec{b}| = 2 \times 7\sqrt{3} = 14\sqrt{3}$$

۸۲۱ راه حل اول می‌دانیم اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{MA}$ و $\vec{MB}$

باشد، آن‌گاه θ $|\vec{MA} \times \vec{MB}| = |\vec{MA}| |\vec{MB}| \sin \theta$ بنابرین با توجه به شکل،

$$\triangle MAH : \sin \theta = \frac{AH}{MA} \xrightarrow{MA = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}} \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$|\vec{MA} \times \vec{MB}| = |\vec{MA}| |\vec{MB}| \sin \theta = \sqrt{13} \times 2 \times \frac{2}{\sqrt{13}} = 4$$



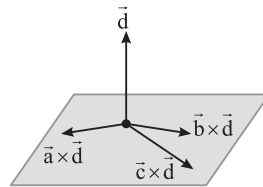
راه حل دوم می‌دانیم $|\vec{MA} \times \vec{MB}|$ دو برابر مساحت مثلث ایجاد شده توسط

این دو بردار است (یعنی مثلث MAB در شکل)، پس ابتدا مساحت این مثلث را حساب می‌کنیم:

$$S_{MAB} = \frac{1}{2} \times |\vec{MB}| \times |\vec{AH}| = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

۸۱۳ سه بردار $\vec{a} \times \vec{d}$ ، $\vec{b} \times \vec{d}$ و $\vec{c} \times \vec{d}$ بر بردار $\vec{d}$ عمودند، پس این

سه بردار در صفحه عمود بر $\vec{d}$ قرار دارند.



۸۱۴ ضرب داخلی و ضرب خارجی بین دو بردار تعریف می‌شوند. در

عبارت $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$ حاصل $\vec{a} \cdot \vec{b}$ یک عدد است و ضرب خارجی بین یک عدد

و بردار $\vec{c}$ تعریف نشده است. پس $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$ تعریف نشده است.

۸۱۵ مختصات بردار $2\vec{a} \times (\vec{a} - \vec{b})$ را به دست می‌آوریم:

$$2\vec{a} \times (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} \times \vec{a} - 2\vec{a} \times \vec{b} = -2\vec{a} \times \vec{b} = -2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -2(-\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$$

پس مختص عرض این بردار برابر -4 است.

۸۱۶ توجه کنید که $\vec{AB} = (1, 2, -2)$ و $\vec{AC} = (-4, 4, -2)$.

در نتیجه

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (4, 10, 12)$$

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |(4, 10, 12)| = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 100 + 144} = \sqrt{65}$$

۸۱۷ مساحت مثلث ساخته شده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر

$$\frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| \text{ است. پس باید } |\vec{a} \times \vec{b}| \text{ را به دست آوریم. اگر } \theta \text{ زاویه بین دو بردار}$$

$\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، با استفاده از فرض سؤال به دست می‌آید

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow \frac{1}{5} = 3 \times 2 \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{1}{6} \Rightarrow \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{36}} = \frac{5}{6}$$

$$\text{پس } \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 3 \times 2 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{4}$$

۸۱۸ ابتدا اندازه بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ را به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{2} |(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| = 3 \Rightarrow \frac{1}{2} |2\vec{a} \times \vec{a} - 2\vec{a} \times \vec{b} + 2\vec{b} \times \vec{a} - 2\vec{b} \times \vec{b}| = 3$$

$$\frac{1}{2} |0 - 2\vec{a} \times \vec{b} + 2\vec{b} \times \vec{a} + 0| = 3 \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{3}{2}$$

از طرف دیگر بنابر اتحاد لاگرانژ،

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \Rightarrow \frac{9}{4} + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 1$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 1 - \frac{9}{4} = -\frac{5}{4}$$

چون زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ حاده است، پس $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{2}{3}$

۸۲۶ ۴ می‌دانیم $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ پس

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{c} = |\vec{c}|^2 = 4 + 9 + 1 = 14$$

۸۲۷ ۱ از برابری $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ نتیجه می‌گیریم

$$\vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0}$$

در نتیجه $\vec{a} \parallel (\vec{b} - \vec{c})$ (درستی گزینه (۲)). گزینه (۳) هم همواره برقرار است. دو طرف برابری $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ را در $\vec{c}$ ضرب داخلی می‌کنیم:
 $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$ چون $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = 0$ پس $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ ، یعنی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم‌صفحه‌اند، یعنی موازی یک صفحه‌اند (درستی گزینه (۴)).

۸۲۸ ۳ سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه هستند، هرگاه حاصل ضرب

مختلط آن‌ها صفر باشد:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & m & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ m & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{\text{بسط بر حسب سطر اول}}$$

$$-1(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + m(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ m & -1 \end{vmatrix} + 3(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$-1(-1) - m(-2) + 3(4 - m) = 0 \Rightarrow 1 + 2m + 12 - 3m = 0 \Rightarrow m = 13$$

۸۲۹ ۴ نقاط A ، B ، C و D در یک صفحه‌اند، هرگاه حاصل ضرب

مختلط $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ و $\vec{AD}$ برابر صفر باشد. توجه کنید A را نقطه شروع هر سه بردار گرفته‌ایم چون مختصات A از بقیه ساده‌تر و محاسبات در کل راحت‌تر می‌شود:

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-1, 2, 1) - (1, 0, 0) = (-2, 2, 1)$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (2, 0, 2) - (1, 0, 0) = (1, 0, 2)$$

$$\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA} = (m, -1, -1) - (1, 0, 0) = (m-1, -1, -1)$$

بنابراین

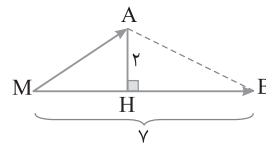
$$\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \times \vec{AD}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ m-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{بسط بر حسب سطر دوم}} 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+ 2(-1)^5 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ m-1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-(-2+1) - 2(2-2m+2) = 0 \Rightarrow 1 - 4 + 4m = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{4}$$

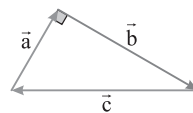
$$|\vec{MA} \times \vec{MB}| = 2S_{MAB} = 14 \text{ در نتیجه}$$



۸۲۷ ۴ می‌توان برای بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ شکل زیر را در نظر گرفت.

چون $3^2 + 4^2 = 5^2$ ، پس مثلث شکل زیر قائم‌الزاویه است. از طرف دیگر مساحت مثلث ساخته شده روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$ است. در نتیجه

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 2S = 2 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 12$$



۸۲۳ ۳ در متوازی‌الاضلاع ABCD،

$$|\vec{AB} \times \vec{AD}| = |\vec{AC} \times \vec{AB}| = S_{ABCD}, |\vec{BD} \times \vec{AC}| = 2S_{ABCD}$$

بنابراین

$$|\vec{AB} \times \vec{AD}| + |\vec{AC} \times \vec{AB}| + |\vec{BD} \times \vec{AC}| = 1 + 1 + 2 = 4$$

۸۲۴ ۳ حجم متوازی‌السطوحی که با بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ساخته

می‌شود، برابر $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ است. پس ابتدا $\vec{b} \times \vec{c}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = (6-2)\vec{i} - (3-0)\vec{j} + (1-0)\vec{k} = (4, -3, 1)$$

اکنون توجه کنید که

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (2, -1, 1) \cdot (4, -3, 1) = 8 + 3 + 1 = 12$$

در نتیجه حجم این متوازی‌السطوح برابر ۱۲ است. پس حجم هرم هم‌حجم با این متوازی‌السطوح نیز برابر ۱۲ است.

۸۲۵ ۳ حجم متوازی‌السطوح ساخته شده روی بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$

برابر $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ است. بنابراین $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = 12$ پس $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = 6$.

از طرف دیگر، حجم متوازی‌السطوح ساخته شده روی بردارهای $\vec{a} + \vec{b}$ ، $\vec{b} + \vec{c}$ و $\vec{c} + \vec{a}$ مساوی $|(\vec{a} + \vec{b}) \cdot ((\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{c} + \vec{a}))|$ است. چون ضرب

داخلی و ضرب خارجی روی جمع بردارها خاصیت توزیع‌پذیری دارند و

$$\vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) = \vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) = 0$$

پس

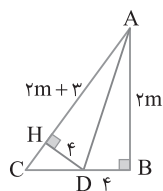
$$\begin{aligned} & (\vec{a} + \vec{b}) \cdot ((\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{c} + \vec{a})) \\ &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}) \\ &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}) \\ &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) + \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) + \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \\ &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \\ &= 2\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 2 \times 6 = 12 \end{aligned}$$

بنابراین حجم متوازی‌السطوح مورد نظر برابر ۱۲ است.

فصل دوم

پاسخ تشریحی
آزمون‌ها

فصل دوم: پاسخ تشریحی آزمون‌ها

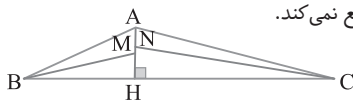


۳ ۶ می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. پس عمود DH برابر DB و مساوی ۴ است. در ضمن دو مثلث قائم‌الزاویه ABD و AHD به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه همنهشت هستند. پس $AH = AB = 2m$

در نتیجه $CH = AC - AH = 2m + 3 - 2m = 3$ ، پس بنابر قضیه فیثاغورس

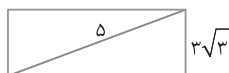
$$\triangle DCH: DC^2 = CH^2 + DH^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow DC = 5$$

۷ ۱ نقاطی که از دو ضلع مثلث به یک فاصله‌اند روی نیمساز زاویه بین آن دو ضلع قرار دارند. اگر نیمسازهای زاویه‌های B و C را رسم کنیم تا ارتفاع AH را به ترتیب در نقاط M و N قطع کنند، دو نقطه M و N روی AH از دو ضلع مثلث به یک فاصله‌اند. توجه کنید نیمساز زاویه A ارتفاع AH را درون مثلث قطع نمی‌کند.



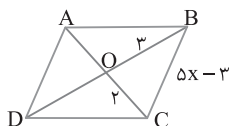
۸ ۴ زاویه بین دو قطر مستطیل معلوم نیست، پس با تغییر این زاویه نامتناهی مستطیل با معلوم بودن طول قطر مساوی $2\sqrt{6}$ قابل رسم است.

۹ ۴ عدد $3\sqrt{3}$ از ۵ بزرگ‌تر است. پس مستطیل با طول قطر ۵ و طول ضلع $3\sqrt{3}$ وجود ندارد، پس گزینه (۱) نادرست است. در ضمن با تغییر زاویه بین دو ضلع مجاور متوازی‌الاضلاع نامتناهی متوازی‌الاضلاع قابل رسم است. پس گزینه (۲) نادرست است. با معلوم بودن طول یک ضلع لوزی و تغییر زاویه بین دو ضلع آن نامتناهی لوزی قابل رسم است، پس گزینه (۳) نادرست است. ولی چون در مربع قطرها مساوی و عمودمنصف یکدیگرند، با داشتن طول یک قطر مربع فقط یک مربع قابل رسم است.

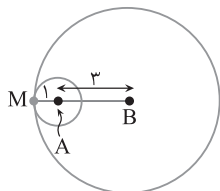


۱۰ ۴ در متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند. پس در صورتی متوازی‌الاضلاع ABCD قابل رسم است که مثلث OBC قابل رسم باشد، بنابراین اضلاع مثلث OBC باید در نابرابری‌های مثلث یا نتیجه آن صدق کنند، در نتیجه

$$|3-2| < 5x-3 < 3+2 \Rightarrow 1 < 5x-3 < 5 \Rightarrow 4 < 5x < 8 \Rightarrow \frac{4}{5} < x < \frac{8}{5}$$



۱۱ ۲ نقاطی که از A به فاصله ۱ هستند روی دایره به مرکز A و شعاع ۱ و نقاطی که از B به فاصله ۴ هستند روی دایره به مرکز B و شعاع ۴ هستند. مطابق شکل مقابل، این دو دایره در نقطه M مماس هستند و این نقطه جواب این سؤال است.



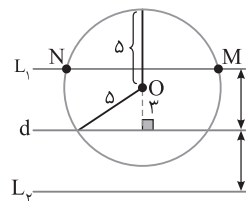
۱ ۲ مجموعه نقطه‌هایی که از نقطه A به فاصله ۴ هستند، دایره‌ای است به مرکز A و شعاع ۴ (قطر ۸). همچنین مجموعه نقطه‌هایی که از خط L به فاصله ۵ هستند، دو خط موازی L و به فاصله ۵ از آن هستند (دقت کنید فاصله این دو خط ۱۰ است). تعداد نقطه‌های مشترک دایره و دو خط موازی L، تعداد جواب‌ها است. حالت‌های زیر به دست می‌آید.



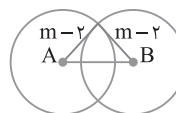
۱ جواب دارد هیچ جوابی ندارد دو جواب دارد

توجه کنید، چون قطر دایره (۸) از فاصله دو خط (۱۰) کمتر است، پس حالت‌های دیگری رخ نمی‌دهد.

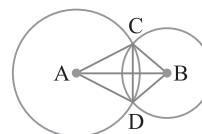
۲ ۲ مجموعه نقطه‌هایی که از خط d به فاصله ۴ هستند، دو خط موازی d و به فاصله ۴ از آن است (دو خط L_1 و L_2 را در شکل زیر ببینید). در نتیجه تعداد نقطه‌هایی که این شرط را دارند دو تا است (نقطه‌های M و N در شکل).



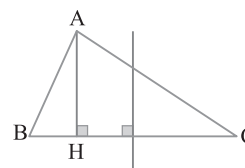
۳ ۱ مجموعه نقطه‌هایی که از A و B به فاصله $m-2$ هستند، محل برخورد دو دایره به مراکز A و B و شعاع $r_1 = r_2 = m-2$ است. چون بنابر صورت مسئله می‌خواهیم دو نقطه دارای این ویژگی باشند، باید دو دایره متقاطع باشند، یعنی $|r_1 - r_2| < AB < r_1 + r_2 \Rightarrow 0 < 4 < 2m-4 \Rightarrow 4 < m$



۴ ۴ چون $AC = AD$ و $BC = BD$ ، پس AB عمودمنصف پاره‌خط CD است. بنابراین هر نقطه روی پاره‌خط AB از دو نقطه C و D به یک فاصله است.

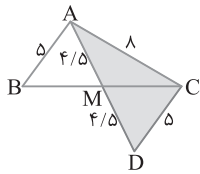
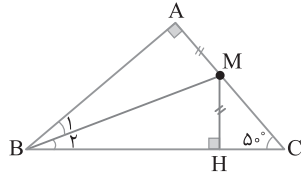


۵ ۱ مجموعه نقطاتی که از دو رأس B و C به یک فاصله‌اند، عمودمنصف ضلع BC است. این عمودمنصف با ارتفاع AH موازی است. بنابراین نقطه‌ای روی AH وجود ندارد که از B و C به یک فاصله باشد.



۱۶ ۳ شکل سؤال به صورت زیر است. نقطه M از دو ضلع AB و BC به یک فاصله است (MA=MH). پس M روی نیمساز زاویه B است. یعنی BM نیمساز زاویه B است. بنابراین

$$\hat{B} = 90^\circ - \hat{C} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2} = 20^\circ \Rightarrow \hat{HBM} = 20^\circ$$

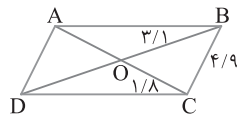


۱۷ ۲ در مثلث ABC میانه AM را به اندازه خودش امتداد می دهیم تا به نقطه D برسیم. در این صورت سه ضلع مثلث ADC برابر ۸، ۵ و ۹ است و با این داده ها فقط یک مثلث ADC قابل رسم است (توجه کنید ۸، ۵ و ۹ در نابرابری های مثلث صدق می کنند)، پس فقط یک مثلث ABC قابل رسم است.



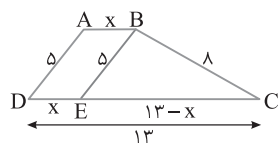
۱۸ ۱ در مستطیل ABCD با داشتن قطر BD=6 و ضلع BC=5 به کمک رابطه فیثاغورس ضلع DC به دست می آید و با داشتن طول سه ضلع، مثلث BCD به صورت یکتا قابل رسم است. اگر از B و D موازی اضلاع روبه روی آنها رسم کنیم، مستطیل ABCD به دست می آید. پس با این معلومات فقط یک مستطیل قابل رسم است.

۱۹ ۱ در متوازی الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند، پس اگر در متوازی الاضلاع ABCD، BD=6/2، AC=3/6، آن گاه OB=3/1 و OC=1/8. در این صورت در مثلث OBC، چون 4/9=3/1+1/8، پس BC < OB+OC، یعنی طول ضلع ها در نابرابری های مثلث صدق نمی کنند. بنابراین چنین متوازی الاضلاعی وجود ندارد.

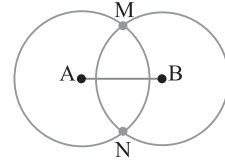


۲۰ ۱ فرض می کنیم ABCD دوزنقه مورد نظر باشد. اگر از رأس B خطی موازی ساق AD رسم کنیم، تا قاعده DC را در E قطع کند. آن گاه دوزنقه به یک متوازی الاضلاع و یک مثلث تقسیم می شود. برای آنکه دوزنقه قابل رسم باشد باید مثلث BEC قابل رسم باشد. پس لازم است اضلاع این مثلث در نابرابری های مثلث یا نتیجه آن صدق کنند. پس

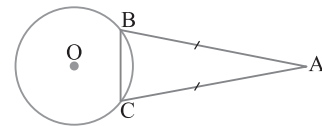
$$|8-5| < 13-x < 8+5 \Rightarrow 3 < 13-x < 13 \xrightarrow{\text{از طرفین ۱۳ را کم می کنیم}} -10 < -x < 0 \Rightarrow 0 < x < 10$$



۱۲ ۳ مجموعه نقطه هایی که هم از A و هم از B به فاصله ۵ هستند نقطه های برخورد دو دایره به مراکز A و B و شعاع ۵ است. با فرض $r_1=r_2=5$ ، چون $|r_1-r_2|=0$ و $|r_1-r_2| < AB < r_1+r_2$ ، پس $AB=6$ و دو نقطه با این ویژگی وجود دارد. بنابراین دو دایره متقاطع هستند و دو نقطه با این ویژگی وجود دارد.



۱۳ ۲ چون AB=AC، پس A روی عمودمنصف BC قرار دارد. از طرف دیگر OB=OC، پس O نیز روی عمودمنصف BC قرار دارد. بنابراین OA عمودمنصف BC است.



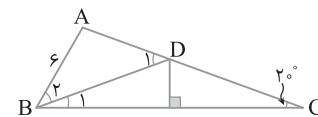
۱۴ ۲ چون D روی عمودمنصف BC است، بنابر خاصیت عمودمنصف BD=DC، پس مثلث BDC متساوی الساقین است، بنابراین $\hat{B}_1 = \hat{C} = 20^\circ$. زاویه $\hat{D}_1$ زاویه خارجی برای مثلث BDC است:

$$\hat{D}_1 = \hat{B}_1 + \hat{C} = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ \quad (1)$$

$$\hat{B}_2 = \hat{B} - \hat{B}_1 = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ \quad (2)$$

از طرف دیگر

از مقایسه برابری های (۱) و (۲) به دست می آید $\hat{D}_1 = \hat{B}_2 = 40^\circ$. بنابراین مثلث ABD متساوی الساقین است و $AD=AB=6$.



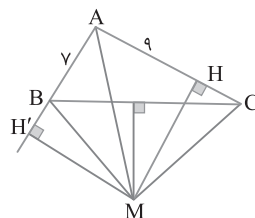
۱۵ ۲ نقطه M از دو رأس B و C به یک فاصله است، پس M روی عمودمنصف ضلع BC است. در ضمن نقطه M از دو ضلع AB و AC به یک فاصله است، پس M روی نیمساز زاویه A قرار دارد و عمودهای MH و MH' مساوی اند. بنابر فرض سؤال تصویر AM روی AC برابر ۹ است، پس AH=9. از طرف دیگر،

$$\left. \begin{array}{l} MB=MC \\ MH=MH' \\ \hat{H}=\hat{H}'=90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle MCH \cong \triangle MBH' \Rightarrow BH'=CH$$

$$\left. \begin{array}{l} MH=MH' \\ AM=AM \\ \hat{H}=\hat{H}'=90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle AMH \cong \triangle AMH' \Rightarrow AH'=AH$$

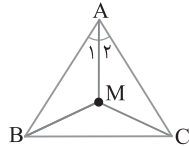
$$9+BH'=9 \Rightarrow BH'=2$$

پس CH=2. در نتیجه AC=9+2=11.



از طرف دیگر می‌دانیم بین نیمسازهای زاویه‌های داخلی $\hat{C}$ و $\hat{B}$ یعنی زاویه BMC مساوی $\frac{\hat{A}}{2} + 90^\circ$ است. بنابراین

$$\hat{BMC} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} = 90^\circ + \frac{64^\circ}{2} = 122^\circ$$

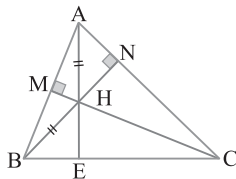


نقطه تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC درون آن قرار دارد پس همه زاویه‌های این مثلث حاده هستند. پس گزینه (۱) نادرست است.

از طرف دیگر $HA=HB$ ، پس مثلث ABH متساوی‌الساقین است. بنابراین ارتفاع HM در مثلث ABH میانه هم هست. پس M وسط AB قرار دارد. بنابراین ارتفاع CM در مثلث ABC میانه هم هست. پس M متساوی‌الساقین است ($CA=CB$). با توجه به شکل دو زاویه BHC و MHN متقابل به رأس هستند پس مساوی‌اند. در نتیجه $\hat{MHN} = 112^\circ$.

چون مجموع زوایای چهارضلعی $AMHN$ برابر 360° است در نتیجه $\hat{B} = 68^\circ$. بنابراین $\hat{A} = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (68^\circ + 68^\circ) = 44^\circ$$

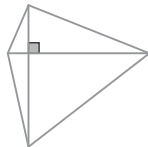


عکس قضیه‌های مطرح‌شده در گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) درست هستند. پس آن‌ها را به صورت دو شرطی می‌توان نوشت. ولی عکس قضیه «اگر دو مثلث همنهشت باشند، آن‌گاه هم‌مساحت هستند» به صورت «اگر دو مثلث هم‌مساحت باشند، آن‌گاه همنهشت هستند» نادرست است.

گزاره (ب) یک قضیه است. پس همواره درست است و نمی‌توان با مثال نقض آن را رد کرد. ولی سه گزینه دیگر با مثال نقض رد می‌شوند. برای گزاره (الف) دو مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الاضلاع با مساحت ۵ هم‌مساحت هستند، ولی همنهشت نیستند.

برای گزاره (پ) دو عدد $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ گنگ هستند ولی مجموع آن‌ها برابر صفر است و گنگ نیست.

برای گزاره (ت) چهارضلعی مقابل دارای دو قطر مساوی و عمود بر هم است ولی لوزی نیست.



اگر نقطه‌ای دلخواه درون مثلث ABC باشد، آن‌گاه محیط $(\triangle ABC) < OA + OB + OC < 2 \times$ محیط $(\triangle ABC)$

$$3 < OA + OB + OC < 6 \quad (۱)$$

از طرف دیگر

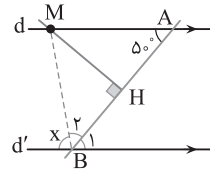
$$\text{محیط}(\triangle OAC) + \text{محیط}(\triangle OBC) + \text{محیط}(\triangle OAB) = 2(OA + OB + OC) + \text{محیط}(\triangle ABC) = 2(OA + OB + OC) + 6$$

اکنون از نابرابری (۱) به دست می‌آید $12 < 2(OA + OB + OC) + 6 < 18$

در میان اعداد داده شده، فقط ۱۳ در این نابرابری‌ها صدق می‌کند.

نقطه M روی عمودمنصف پاره‌خط AB است. پس $MA=MB$. بنابراین $\hat{B}_1 = \hat{MAB} = 50^\circ$. از طرف دیگر از قضیه خطوط موازی و مورب نتیجه می‌گیریم $\hat{B}_1 = 50^\circ$. بنابراین

$$x = 180^\circ - (\hat{B}_1 + \hat{B}_2) = 180^\circ - (50^\circ + 50^\circ) = 80^\circ$$



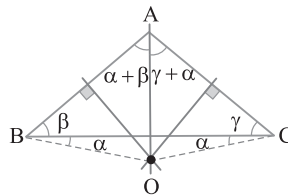
در هر مثلث نیمسازهای زاویه‌های داخلی درون مثلث هم‌مساحت هستند. پس نوع این مثلث مشخص نیست، می‌تواند حاده‌الزاویه، قائم‌الزاویه یا منفرجه‌الزاویه باشد. بنابراین جایگاه نقطه تلاقی ارتفاع‌های این مثلث نامشخص است.

از فرض $\hat{B} + \hat{C} = 70^\circ$ نتیجه می‌گیریم $\hat{A} = 110^\circ$. پس نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع این مثلث بیرون آن قرار دارد (شکل زیر را ببینید). در ضمن نقطه تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث از سه رأس آن به یک فاصله است. پس $OA=OB=OC$. در نتیجه مثلث‌های OBC و OAB متساوی‌الساقین هستند. بنابراین با توجه به شکل

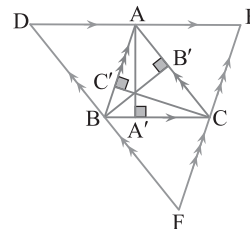
$$\hat{A} = 110^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \alpha = 110^\circ \Rightarrow \frac{2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 110^\circ}{\text{مجموع زاویه‌های مثلث } ABC}$$

$$\alpha + 90^\circ = 110^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$$

$$\text{پس } \hat{BOC} = 180^\circ - (\alpha + \alpha) = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$



در مثلث ABC از هر رأس خطی موازی ضلع روبه‌رو به آن رسم می‌کنیم. مثلث DEF به دست می‌آید. می‌دانیم نقطه هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث ABC همان نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌های مثلث DEF است و چون عمودمنصف‌های مثلث DEF هم‌مساحت هستند، پس ارتفاع‌های مثلث ABC نیز هم‌مساحت هستند.



فرض می‌کنیم $\hat{A} = x$. پس $\hat{B} = 5x$ و $\hat{C} = 6x$. در نتیجه $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow x + 5x + 6x = 180^\circ \Rightarrow 12x = 180^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$

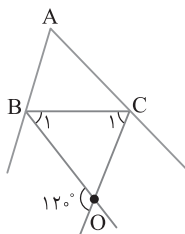
بنابراین $\hat{A} = 15^\circ$ ، $\hat{B} = 75^\circ$ و $\hat{C} = 90^\circ$. پس زاویه بین نیمسازهای داخلی $\hat{C}$ و $\hat{B}$ برابر است با $90^\circ + \frac{15^\circ}{2} + \frac{15^\circ}{2} = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$

نقطه M از اضلاع مثلث ABC به یک فاصله است. پس M نقطه تلاقی نیمسازهای مثلث ABC است. بنابراین

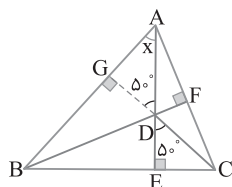
$$\hat{A} = 64^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 32^\circ \Rightarrow \hat{A} = 64^\circ$$

با توجه به شکل زیر چون $\hat{O} = 12^\circ$ ، پس $\hat{B}\hat{O}\hat{C} = 6^\circ$. در نتیجه

$$6^\circ = 9^\circ - \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 6^\circ$$



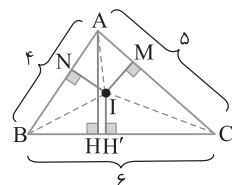
۳۶ (۲) CD را امتداد می‌دهیم تا ضلع AB را در G قطع کند (شکل زیر را ببینید). چون ارتفاع‌های مثلث هم‌رس هستند، پس ارتفاع CG وارد بر ضلع AB است. اکنون به‌دست می‌آید $x = 9^\circ - 5^\circ = 4^\circ$.



۳۷ (۲) نقطه I از اضلاع مثلث ABC به یک فاصله است، پس نقطه تلاقی نیم‌سازهای زاویه‌های داخلی مثلث است. فرض کنید $IH' = IN = IM = x$. در ضمن کوتاه‌ترین ارتفاع مثلث ارتفاع وارد بر بزرگ‌ترین ضلع مثلث است، بنابراین باید نسبت $\frac{IH'}{AH}$ را به‌دست آوریم. با توجه به شکل می‌نویسیم

$$S_{ABC} = S_{AIB} + S_{AIC} + S_{BIC} \Rightarrow \frac{1}{2} AH \times 6 = \frac{1}{2} (4x) + \frac{1}{2} (5x) + \frac{1}{2} (6x)$$

$$6AH = 4x + 5x + 6x = 15x \Rightarrow \frac{x}{AH} = \frac{6}{15} \xrightarrow{IH' = x} \frac{IH'}{AH} = \frac{2}{5}$$



۳۸ (۲) توجه کنید که اعداد $2\sqrt{3}$ ، $3\sqrt{2}$ و ۷ در نابرابری‌های مثلث صدق می‌کنند، یعنی

$$7 < 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}, \quad 2\sqrt{3} < 7 + 3\sqrt{2}, \quad 3\sqrt{2} < 7 + 2\sqrt{3}$$

اکنون طرفین نابرابری‌های بالا را در a ضرب می‌کنیم

$$7a < (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})a \Rightarrow 7a < 3\sqrt{2}a + 2\sqrt{3}a$$

$$2\sqrt{3}a < (7 + 3\sqrt{2})a \Rightarrow 2\sqrt{3}a < 7a + 3\sqrt{2}a$$

$$3\sqrt{2}a < (7 + 2\sqrt{3})a \Rightarrow 3\sqrt{2}a < 7a + 2\sqrt{3}a$$

پس مثلث با طول اضلاع $2\sqrt{3}a$ ، $3\sqrt{2}a$ و ۷a وجود دارد. بنابراین گزینه (۲) همیشه درست است و مثال نقض ندارد.

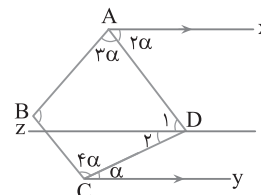
در گزینه (۱) مثلث منفرجه و در گزینه (۳) همه مثلث‌ها به جز مثلث متساوی‌الاضلاع و در گزینه (۴) مثلث قائم‌الزاویه می‌توانند مثال نقض باشند.

۳۹ (۴) نقطه هم‌رسی نیم‌سازهای زاویه‌های داخلی مثلث از ضلع‌های مثلث به یک فاصله است، پس $3x + 1 = 2x + 5$. یعنی $x = 4$. در نتیجه فاصله نقطه هم‌رسی نیم‌سازهای زاویه‌های داخلی از هر سه ضلع برابر با ۲x + ۵ = ۲ × ۴ + ۵ = ۱۳ است.

۳۱ (۳) مطابق شکل از نقطه D خط Dz را موازی دو نیم‌خط موازی Ax و Cy رسم می‌کنیم.

$$\begin{cases} Ax \parallel Dz \xrightarrow{\text{مورب AD}} \hat{D}_1 = 2\alpha \\ Cy \parallel Dz \xrightarrow{\text{مورب CD}} \hat{D}_7 = \alpha \end{cases} \xrightarrow{+} \hat{D} = 3\alpha$$

از طرف دیگر مجموع زوایای چهارضلعی ABCD مساوی 360° است. پس $3\alpha + 3\alpha + 4\alpha + 100^\circ = 360^\circ \Rightarrow 10\alpha = 26^\circ \Rightarrow \alpha = 2.6^\circ$
بنابراین $\hat{D} = 3 \times 2.6 = 7.8^\circ$



۳۲ (۱) در مثلث ABC فرض کنید $\hat{A} = 2x$ ، $\hat{B} = 3x$ و $\hat{C} = 7x$. پس $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 2x + 3x + 7x = 180^\circ \Rightarrow 12x = 180^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$
در نتیجه $\hat{A} = 30^\circ$ ، $\hat{B} = 45^\circ$ و $\hat{C} = 105^\circ$. بنابراین مثلث ABC یک زاویه منفرجه دارد، پس نقطه تلاقی ارتفاع‌ها خارج مثلث است.

۳۳ (۴) راه حل اول

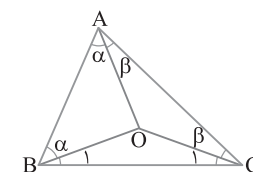
(۱) چون $\hat{B} + \hat{C} = 110^\circ$ ، پس $\hat{A} = 70^\circ$.

(۲) چون O محل هم‌رسی عمودمنصف‌ها است، پس $OA = OB$ و $OA = OC$ ، یعنی دو مثلث OAB و OAC متساوی‌الساقین هستند و در آن‌ها زاویه‌های روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند.

(۳) در مثلث OBC، مجموع زاویه‌های داخلی 180° است:

$$\hat{O} + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{O} = 180^\circ - (\hat{B}_1 + \hat{C}_1) = 180^\circ - (\hat{B} - \alpha + \hat{C} - \beta)$$

$$= 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C} - \hat{A}) = 180^\circ - (110^\circ - 70^\circ) = 140^\circ$$



راه حل دوم با توجه به درس‌نامه «در مثلث ABC با سه زاویه حاده، اگر O محل هم‌رسی عمودمنصف‌ها باشد، آن‌گاه $\hat{B}\hat{O}\hat{C} = 2\hat{A}$ ». اکنون به سادگی به‌دست می‌آید

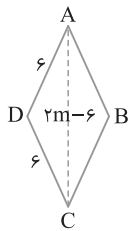
$$\hat{B}\hat{O}\hat{C} = 2\hat{A} = 2(180^\circ - (\hat{B} + \hat{C})) = 2(180^\circ - 110^\circ) = 2 \times 70^\circ = 140^\circ$$

۳۴ (۴) فرض کنید نیم‌ساز زاویه A میانه BM را در نقطه O قطع کند. چون $AC = 2AB$ ، پس $AB = AM$. یعنی مثلث ABM متساوی‌الساقین است. پس نیم‌ساز A در این مثلث، ارتفاع هم هست و بر BM عمود است.

۳۵ (۳) در شکل زیر محل برخورد نیم‌سازهای زاویه‌های خارجی B و C است. در مثلث OBC،

$$\hat{B}\hat{O}\hat{C} = 180^\circ - (\hat{B}_1 + \hat{C}_1) = 180^\circ - \left(\frac{180^\circ - \hat{B}}{2} + \frac{180^\circ - \hat{C}}{2} \right)$$

$$= \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

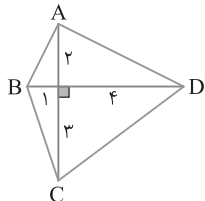


۴۶ ۳ فرض کنید ABCD لوزی مورد نظر باشد. با توجه به شکل اگر مثلث ADC با ابعاد ۶، ۶ و ۶-۲m قابل رسم باشد، لوزی ABCD نیز قابل رسم خواهد بود. پس

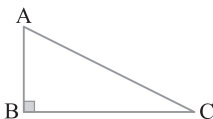
$$6-6 < 2m-6 < 6+6 \Rightarrow 6 < 2m < 18 \Rightarrow 3 < m < 9$$

توجه کنید که در این محدوده، $6-2m > 0$ پس m می‌تواند ۵ عدد صحیح ۴، ۵، ۶، ۷ یا ۸ باشد.

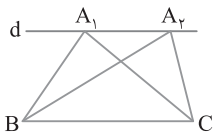
۴۷ ۴ رد گزینه (۱) مطابق شکل زیر دو پاره‌خط AC و BD، هر یک به طول ۵ سانتی‌متر را عمود بر هم رسم کرده‌ایم. واضح است که در این چهارضلعی قطرها برابرند و بر هم عمودند ولی این چهارضلعی مربع نیست.



رد گزینه (۲) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه (مانند شکل زیر) معلوم می‌شود AB ارتفاع است ولی با خود ضلع AB هم‌طول است.



رد گزینه (۳) ضلع BC و خط d موازی آن را در نظر می‌گیریم. اگر رأس سوم مثلث روی خط d باشد، مساحت مثلث‌های ایجاد شده برابرند ولی این دو مثلث لزوماً هم‌نهشت نیستند (در شکل زیر مثلث‌های A_1BC و A_2BC هم‌مساحت‌اند ولی هم‌نهشت نیستند).

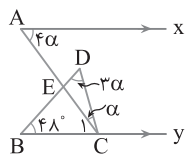


۴۸ ۳ می‌دانیم $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ ، پس $\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C}$. اکنون با استفاده از فرض می‌نویسیم

$$\hat{A} = \hat{B} - 2\hat{C} \Rightarrow 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = \hat{B} - 2\hat{C} \Rightarrow 180^\circ + \hat{C} = 2\hat{B}$$

$$\hat{B} = 90^\circ + \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow \hat{B} > 90^\circ$$

پس مثلث ABC منفرجه است. بنابراین نقطه تلاقی ارتفاع‌های این مثلث خارج آن قرار دارد.



۴۹ ۴ با استفاده از قضیه خطوط موازی و مورب می‌نویسیم

$$Ax \parallel By \xrightarrow{\text{مورب AC}} \hat{A} = \hat{C}_1$$

$$\hat{C}_1 = 4\alpha$$

از طرف دیگر مجموع زوایای مثلث BDC برابر 180° است. پس

$$48^\circ + 2\alpha + \alpha + 4\alpha = 180^\circ \Rightarrow 8\alpha = 132^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{132^\circ}{8} = \frac{33^\circ}{2}$$

در نتیجه $\hat{C}_1 = 4\alpha = 4 \times \frac{33^\circ}{2} = 66^\circ$. بنابراین

$\hat{AEB} = \hat{B} + \hat{C}_1 = 48^\circ + 66^\circ = 114^\circ \Rightarrow \hat{AEB} = \hat{B} + \hat{C}_1 = 114^\circ$ زاویه خارجی مثلث BEC

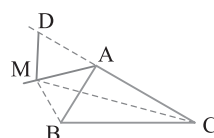
۴۰ ۱ مانند شکل زیر روی امتداد ضلع AC نقطه D را طوری انتخاب می‌کنیم که $AB = AD$. در این صورت دو مثلث AMB و AMD هم‌نهشت‌اند (ض ز ض). بنابراین $MD = MB$. اکنون در مثلث MDC

$$CD < MD + MC \Rightarrow CA + AD < MD + MC$$

چون $AD = AB$ و $MD = MB$ پس

$$CA + AB < MB + MC$$

$$\text{بنابراین } \frac{MB + MC}{CA + AB} < 1.$$



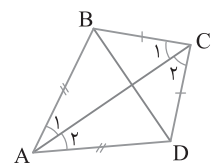
۴۱ ۲ باید هر کدام از عددهای داده شده از مجموع دو عدد دیگر کوچک‌تر باشد:

$$x + 5 < 2x + 4x - 4 \Rightarrow \frac{9}{5} < x, \quad 2x < x + 5 + 4x - 4 \Rightarrow -\frac{1}{3} < x$$

$$4x - 4 < 2x + x + 5 \Rightarrow x < 9$$

اشتراک جواب‌های به‌دست آمده، یعنی $\frac{9}{5} < x < 9$ محدوده X است. توجه

کنید که در این محدوده $2x$ ، $4(x-1)$ و $x+5$ مثبت هستند.



۴۲ ۳ با رسم قطر AC نتیجه

می‌شود دو مثلث ABC و ADC به حالت

(ض ض ض) هم‌نهشت هستند. پس

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ و } \hat{C}_1 = \hat{C}_2. \text{ بنابراین } AC$$

نیمساز زاویه‌های A و C است. پس گزاره

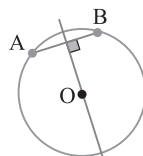
(الف) درست است. از طرف دیگر نقطه‌های

A و C از دو سر پاره‌خط BD به یک فاصله

هستند. پس AC عمودمنصف BD است.

بنابراین گزاره (پ) نیز درست است. ولی

گزاره‌های (ب) و (ت) درست نیستند.



۴۳ ۱ AB وتر دایره است. بنابراین A

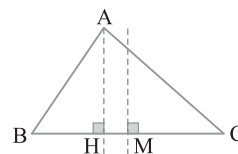
و B روی دایره‌اند. پس فاصله آن‌ها تا مرکز دایره

یعنی OA و OB یکسان است. بنابراین روی

عمودمنصف AB واقع شده است. یعنی فاصله

O تا عمودمنصف AB صفر است.

۴۴ ۱ مرکز دایره‌ای که از دو نقطه B و C می‌گذرد، روی عمودمنصف ضلع BC است. چون مثلث ABC متساوی‌الساقین نیست، پس عمودمنصف BC و ارتفاع AH موازی‌اند (شکل زیر را ببینید). بنابراین دایره‌ای با این شرایط وجود ندارد.



۴۵ ۳ در مثلث BCD دو زاویه B و C مساوی‌اند، پس $DC = BD$.

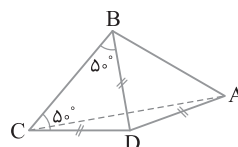
در ضمن با توجه به اطلاعات روی شکل $BD = DA$ ، پس $DC = DA$.

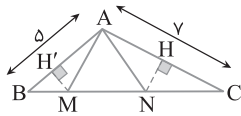
بنابراین نقطه D از دو سر پاره‌خط AC به یک فاصله است. پس D روی

عمودمنصف AC است. توجه کنید نقطه B از دو سر پاره‌خط AC به یک

فاصله نیست. بنابراین B روی عمودمنصف AC نیست، به عبارت دیگر BD

عمودمنصف AC نیست.





۵۳ ۲ دو مثلث ANC و AMB در ارتفاع نظیر رأس A مشترک هستند. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایی است که این ارتفاع بر آن‌ها وارد شده است. در نتیجه

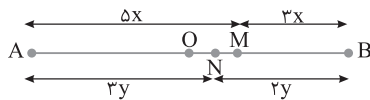
$$\frac{S_{ANC}}{S_{AMB}} = \frac{NC}{BM} = \frac{2BM}{BM} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}NH \times \gamma}{\frac{1}{2}MH' \times \delta} = 2 \Rightarrow \frac{NH}{MH'} = \frac{10}{\gamma}$$

۵۴ ۲ اگر طول ضلع سوم را x فرض کنیم، بنابر فرض مسئله $x^2 = 8 \times 10$ ، یعنی $x = 4\sqrt{5}$.

۵۵ ۳ با توجه به اطلاعات مسئله شکل زیر را رسم می‌کنیم. توجه کنید که $AB = 8x = 5\gamma$. بنابر این عددی مانند k وجود دارد که به ازای آن $x = 8k$ و $y = 8k$ اکنون می‌نویسیم

$$MN = AM - NA = 5x - 3y = 25k - 24k = k$$

چون $MN = 3$ ، پس $k = 3$. در نهایت به دست می‌آید:
 $AB = 8x = 40k = 120$.



۵۶ ۳ عدد x واسطه هندسی y و 4 است، پس $x^2 = 4y$ (۱)

در ضمن عدد ۱۲ واسطه هندسی x و ۳۶ است، پس $12^2 = 36x$. در نتیجه $x = 4$. اکنون از برابری (۱) به دست می‌آید $4^2 = 4y$ ، یعنی $y = 4$. در نهایت به دست می‌آید $x - 2y = 4 - 8 = -4$.

۵۷ ۱ راه حل اول عکس نسبت مورد نظر $\frac{ab+ac}{bc}$ است که برابر

$$\frac{a}{c} + \frac{a}{b} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 \text{ و } \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \text{ از طرف دیگر بنابر فرض } \frac{a}{c} = \frac{2}{3} \text{ و } \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \text{ بنابر این}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{a}{b} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

بنابراین نسبت مورد نظر نیز برابر است با ۱.

راه حل دوم نسبت‌های داده شده را برابر m در نظر می‌گیریم. پس

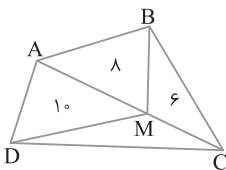
$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6} = m \Rightarrow a = 2m, b = 3m, c = 6m$$

بنابراین

$$\frac{bc}{ab+ac} = \frac{(3m)(6m)}{(2m)(3m) + (2m)(6m)} = \frac{18m^2}{6m^2 + 12m^2} = \frac{18m^2}{18m^2} = 1$$

۵۸ ۲ با استفاده از ویژگی‌های تناسب می‌نویسیم

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6} = \frac{d}{5} \Rightarrow \frac{a+b+c+d}{2+3+6+5} = \frac{c}{6} \Rightarrow a+b+c+d = \frac{16c}{6} = \frac{4c}{3}$$



۵۹ ۲ مثلث‌های BAM و BCM در ارتفاع نظیر رأس B مشترک‌اند، بنابر این

$$\frac{S_{BAM}}{S_{BCM}} = \frac{AM}{MC}$$

پس $\frac{AM}{MC} = \frac{8}{3}$ به همین ترتیب

مثلث‌های DAM و DCM در ارتفاع نظیر رأس D مشترک‌اند، در نتیجه

$$\frac{S_{DAM}}{S_{DCM}} = \frac{AM}{MC} = \frac{8}{3} \text{ بنابر این } \frac{10}{3} = \frac{4}{3} \text{ پس } S_{DCM} = 7/5$$

۵۰ ۳ از فرض تست شکل زیر را خواهیم داشت. چون $\hat{C} < 45^\circ$ و

$\hat{A}_1 + \hat{C} = 90^\circ$ ، پس $\hat{A}_1 > 45^\circ$ ، در نتیجه $\hat{A}_1 > \hat{C}$. بنابر این

$$\Delta AHC: \hat{A}_1 > \hat{C} \Rightarrow CH > AH \quad (1)$$

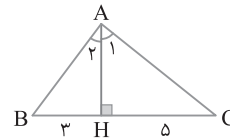
از طرف دیگر چون $\hat{B} > 45^\circ$ و $\hat{B} + \hat{A}_1 = 90^\circ$ ، پس $\hat{A}_1 < 45^\circ$. در نتیجه

$$\Delta ABH: \hat{B} > \hat{A}_1 \Rightarrow AH > BH \quad (2) \text{ بنابر این } \hat{B} > \hat{A}_1$$

با مقایسه نابرابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$BH < AH < CH \Rightarrow 3 < AH < 5$$

در بین گزینه‌ها تنها عدد ۴ در این فاصله قرار دارد.



۵۱ ۳ مثلث‌های ACE، ADE و ABD در ارتفاع نظیر رأس A مشترک هستند. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایی است که این ارتفاع بر آن‌ها وارد شده است. پس

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ADE}} = \frac{EC}{DE} = \frac{3}{1} \xrightarrow{DE=x} EC=3x$$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ABD}} = \frac{EC}{BD} = \frac{3}{1} \xrightarrow{BD=y} EC=2y$$

پس $3x = 2y$ بنابر این

$$\frac{DE}{BD} + \frac{BC}{DE} = \frac{DE}{BD} + \frac{BD+DE+EC}{DE} = \frac{x}{y} + \frac{y+x+3x}{x}$$

$$= \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 4 = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + 4 = \frac{37}{6}$$



۵۲ ۳ بنابر فرض سؤال، طول پاره‌خط‌ها روی شکل نوشته شده است.

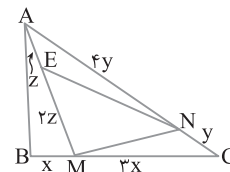
دو مثلث AMN و MNE در ارتفاع نظیر رأس N مشترک هستند.

$$\text{پس } \frac{S_{MNE}}{S_{AMN}} = \frac{2z}{3z} = \frac{2}{3} \text{ همچنین دو مثلث AMN و AMC در ارتفاع نظیر}$$

رأس M مشترک هستند. پس $\frac{S_{AMN}}{S_{AMC}} = \frac{4y}{5y} = \frac{4}{5}$ و دو مثلث ABC و AMC

$$\text{در ارتفاع نظیر رأس A مشترک هستند، پس } \frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4} \text{ بنابر این}$$

$$S_{MNE} = \frac{2}{3} S_{AMN} = \frac{2}{3} \left(\frac{4}{5} S_{AMC} \right) = \frac{8}{15} \left(\frac{3}{4} S_{ABC} \right) = \frac{2}{5} S_{ABC}$$

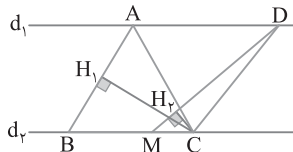


طول ارتفاع نظیر رأس A در مثلث ABC، با طول ارتفاع نظیر رأس D در مثلث DMC برابر است. بنابراین نسبت مساحت‌های این دو مثلث برابر نسبت طول قاعده‌های نظیر این ارتفاع‌ها است، یعنی

$$\frac{S_{DMC}}{S_{ABC}} = \frac{MC}{BC} = \frac{1}{3} \quad (۱)$$

از طرف دیگر با توجه به شکل زیر.

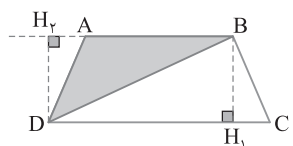
$$\frac{S_{DMC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} MD \times CH_2}{\frac{1}{2} AB \times CH_1} = \frac{MD \times CH_2}{AB \times CH_1} = \frac{4 \times CH_2}{3 \times CH_1} \quad (۲)$$



از مقایسه تساوی‌های (۱) و (۲)

نتیجه می‌شود

$$\frac{4CH_2}{3CH_1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CH_2}{CH_1} = \frac{1}{4}$$



در شکل مقابل

BH_1 و DH_2 به ترتیب

ارتفاع‌های مثلث‌های BDC و

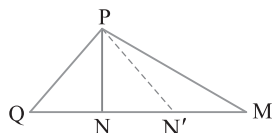
DAB هستند. چون دو مثلث

DAB و BDC دارای ارتفاع

برابر هستند ($BH_1 = DH_2$)، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت

قاعده‌های نظیر این ارتفاع‌ها است، یعنی $\frac{S_{DAB}}{S_{BDC}} = \frac{AB}{DC}$. پس $\frac{S_{DAB}}{S_{BDC}} = \frac{2}{3}$.

در نتیجه $S_{DAB} = 4$.



مثلث دو

PQN و PNM در ارتفاع

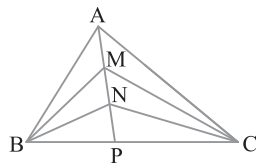
نظیر رأس P مشترک‌اند.

بنابراین نسبت مساحت‌های

آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایی است که این ارتفاع بر آن‌ها وارد شده است. از طرف دیگر از فرض‌های $MN = 2NQ$ و $MN = 2MN'$ نتیجه می‌گیریم

$MN' = NQ$ پس

$$\frac{S_{PN'M}}{S_{PQN}} = \frac{MN'}{NQ} \Rightarrow S_{PN'M} = S_{PQN} = 8$$



با تفصیل در مخرج

تناسب $\frac{S_{ABP}}{S_{ABC}} = \frac{2}{5}$ به دست

می‌آید $\frac{S_{ABP}}{S_{ABC} - S_{ABP}} = \frac{2}{5-2}$

یعنی $\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{2}{3}$

از طرف دیگر، دو مثلث ABP و ACP در ارتفاع نظیر رأس A مشترک‌اند، پس

دو مثلث MBP و MCP هم در ارتفاع نظیر رأس M $\frac{S_{MBP}}{S_{MCP}} = \frac{BP}{PC} = \frac{2}{3}$

مشترک‌اند، پس $\frac{S_{MBP}}{S_{MCP}} = \frac{BP}{PC} = \frac{2}{3}$. به طور مشابه $\frac{S_{NBP}}{S_{NCP}} = \frac{BP}{PC} = \frac{2}{3}$ در نتیجه

$$\frac{S_{MBP}}{S_{MCP}} = \frac{S_{NBP}}{S_{NCP}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{S_{MBP} - S_{NBP}}{S_{MCP} - S_{NCP}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{S_{BMN}}{S_{CMN}} = \frac{2}{3}$$

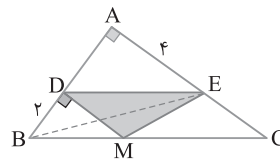
در شکل B را به E وصل کرده‌ایم. مساحت دو مثلث BDE و

MDE برابر است، زیرا قاعده DE در آن‌ها مشترک است و رأس‌های B و M در

این دو مثلث، روی خطی موازی این قاعده قرار دارند. از طرف دیگر در مثلث BDE،

اگر BD را قاعده در نظر بگیریم، ارتفاع وارد بر این قاعده AE است، پس

$$S_{MDE} = S_{BDE} = 4 \text{ در نتیجه } S_{BDE} = \frac{1}{2} \times BD \times AE = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$



راه حل اول فرض کنید $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = t$. بنابراین $x = 3t$ ، $y = 4t$ و $z = 5t$ اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{x}{x+y+z} = \frac{3t}{3t+4t+5t} = \frac{3t}{12t} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

راه حل دوم از تناسب $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ نتیجه می‌شود $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{3+4+5}$

پس $\frac{x}{x+y+z} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ در نتیجه $\frac{x}{3} = \frac{x+y+z}{12}$

از تساوی $2x = 3y = z$ نتیجه می‌شود $x = \frac{z}{3}$ و $y = \frac{z}{2}$

اکنون این مقدارها را در عبارت خواسته شده قرار می‌دهیم:

$$\frac{3x+y-z}{x+y} = \frac{\frac{3z}{2} + \frac{z}{2} - z}{\frac{3z}{2} + \frac{z}{2}} = \frac{\frac{9z+2z-2z}{2}}{\frac{3z+z}{2}} = \frac{9z}{5z} = \frac{9}{5}$$

از تناسب $\frac{a}{b-2a} = -2$ نتیجه می‌شود $a = -2b + 4a$ ، پس

نتیجه $\frac{2a+c}{3a-c} = 5$. $b = 1/5a$ از طرف دیگر با طرفین وسطین کردن تناسب

می‌شود $c = 2a$ ، $15a - 5c = 3a + c$ در نتیجه

$$a + b + c = a + 1/5a + 2a = 4/5a$$

اندازه‌های AM و AN را تعیین می‌کنیم. تفاضل

اندازه‌های این دو پاره‌خط برابر طول MN است (شکل زیر را ببینید). در تناسب

$$\frac{AM}{MB} = \frac{3}{1} \text{ با ترکیب کردن در مخرج به دست می‌آید}$$

$$\frac{AM}{AM+MB} = \frac{3}{3+1} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow AM = \frac{3}{4}a$$

و در تناسب $\frac{BN}{AN} = \frac{3}{1}$ با ترکیب کردن در صورت به دست می‌آید

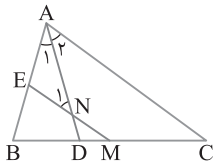
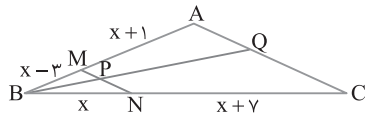
$$\frac{BN+AN}{AN} = \frac{3+1}{1} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{4}{1} \Rightarrow AN = \frac{1}{4}a$$

$$MN = AM - AN = \frac{3}{4}a - \frac{1}{4}a = \frac{2}{4}a = \frac{1}{2}a$$



در تناسب $\frac{MC}{MB} = \frac{1}{2}$ ترکیب در مخرج می‌کنیم:

$$\frac{MC}{MB+MC} = \frac{1}{2+1} \Rightarrow \frac{MC}{BC} = \frac{1}{3}$$



۷۴ ۴ بنابر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت. MN را امتداد می‌دهیم تا AB را در E قطع کند. توجه کنید که

$$ME \parallel AC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{BM}{MC} = \frac{BE}{EA} \xrightarrow{BM=MC} 1 = \frac{BE}{EA}$$

$$BE = EA = \frac{AB}{2}$$

در مثلث ABC نقطه M وسط BC و نقطه E وسط AB است پس بنابر قضیه

$$\text{میان خط } ME = \frac{AC}{2} \text{ از طرف دیگر.}$$

$$\left. \begin{array}{l} ME \parallel AC \\ AD \text{ مورب} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \hat{N}_1 = \hat{A}_2 \xrightarrow{\hat{A}_1 = \hat{A}_2} \hat{N}_1 = \hat{A}_1$$

$$AE = NE \Rightarrow NE = \frac{AB}{2}$$

$$MN = ME - NE = \frac{AC}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{AC - AB}{2} = \frac{8 - 6}{2} = 1 \quad \text{بنابراین}$$

۷۵ ۱ دو مثلث ABD و ACD در ارتفاع نظیر رأس A مشترک هستند، پس

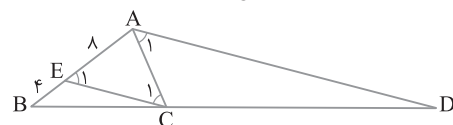
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{CD} \quad \text{اکنون با استفاده از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم}$$

$$\hat{A}_1 = \hat{C}_1 \xrightarrow{\text{عکس قضیه خطوط موازی و مورب}} AD \parallel CE$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{BD}{CD} = \frac{BA}{EA}$$

$$\hat{C}_1 = \hat{E}_1 \Rightarrow AE = AC \xrightarrow{AC=8} AE = 8$$

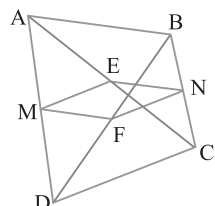
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \quad \text{بنابراین}$$



۷۶ ۲ در چهارضلعی ABCD، دو ضلع AB و DC برابرند و

نقاط E و F وسط‌های دو قطر AC و BD هستند. همچنین M و N به ترتیب وسط‌های AD و BC هستند. بنابر قضیه میان خط در مثلث،

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC : EN = \frac{AB}{2} \\ \triangle ABD : MF = \frac{AB}{2} \\ \triangle ADC : ME = \frac{DC}{2} \\ \triangle BDC : NF = \frac{DC}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{AB=DC} EN = MF = ME = NF$$



بنابراین چهارضلعی MENF لوزی است. توجه کنید که چهارضلعی MENF متوازی‌الاضلاع نیز هست ولی لوزی پاسخ جامع‌تر و کامل‌تری است.

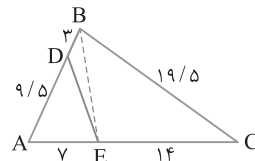
۶۹ ۲ ابتدا B را به E وصل می‌کنیم (شکل زیر را ببینید).

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABE}} = \frac{AD}{AB} = \frac{9/5}{12/5} = \frac{19}{25}, \quad \frac{S_{ABE}}{S_{ABC}} = \frac{AE}{AC} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

اگر این تساوی‌ها را در هم ضرب کنیم، به دست می‌آید $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{19}{75}$. اکنون

اگر این تناسب را تفصیل در مخرج کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC} - S_{ADE}} = \frac{19}{75 - 19} \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{BCED}} = \frac{19}{56}$$



۷۰ ۳ نقطه‌های B و E را به هم وصل می‌کنیم (شکل را ببینید). چون

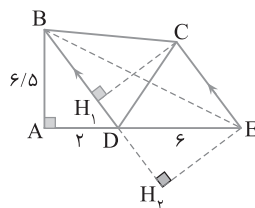
$EC \parallel BD$ پس ارتفاع‌های نظیر رأس‌های C و E در مثلث‌های CBD و EBD

برابرند، یعنی $CH_1 = EH_2$. از طرف دیگر BD قاعده مشترک نظیر این دو ارتفاع

است، پس $S_{ABD} + S_{CBD} = S_{ABD} + S_{EBD}$. در نتیجه $S_{CBD} = S_{EBD}$

یعنی $S_{ABCD} = S_{ABE}$. اکنون می‌توان نوشت

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \times AE = \frac{1}{2} \times 6/5 \times 8 = 26$$

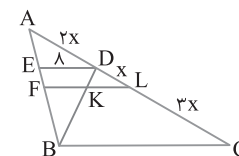


۷۱ ۱ با فرض $DL = x$ ، نتیجه می‌گیریم $AD = 2x$ و $LC = 3x$.

با استفاده از تعمیم قضیه تالس،

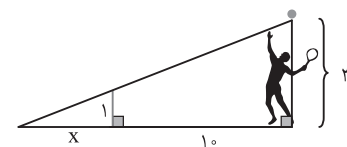
$$\triangle ABC : ED \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC} \Rightarrow \frac{2x}{6x} = \frac{x}{BC} \Rightarrow BC = 24$$

$$\triangle ABC : FL \parallel BC \Rightarrow \frac{AL}{AC} = \frac{FL}{BC} \Rightarrow \frac{3x}{6x} = \frac{FL}{24} \Rightarrow FL = 12$$



۷۲ ۲ شکل مسئله به صورت زیر است. اگر X فاصله مورد نظر باشد،

$$\frac{x}{x+10} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x = x+10 \Rightarrow x = 5$$



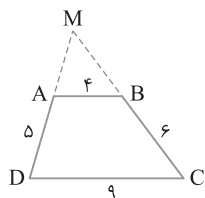
۷۳ ۲ چون $\frac{BM}{MA} = \frac{BP}{PQ}$ پس بنابر عکس قضیه تالس در مثلث

BAQ، MP موازی AQ است. بنابراین MN هم موازی AC است. بنابر

قضیه تالس در مثلث BAC، $\frac{BM}{MA} = \frac{BN}{NC}$. یعنی $\frac{x-3}{x+1} = \frac{x}{x+7}$ پس $x = 7$.

بنابراین $MA=4$ و $MB=\frac{24}{5}$ ، پس محیط مثلث AMB برابر است با

$$MA+MB+AB=4+\frac{24}{5}+4=\frac{64}{5}=12\frac{8}{5}$$



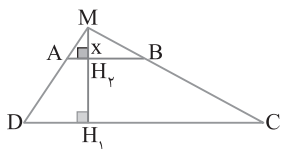
در مثلث MCD ، بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{MA}{MD} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

اکنون در مثلث MDH_1 ، بنابر تعمیم قضیه تالس می‌نویسیم

$$\frac{MH_2}{MH_1} = \frac{MA}{MD} \Rightarrow \frac{x}{x+4} = \frac{1}{3} \Rightarrow x=2$$

در نهایت به دست می‌آید $MH_1 = x+4=6$ فاصله M تا قاعده DC



از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم

$$\triangle BMC:DN \parallel CM \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{BD}{DC} = \frac{BN}{MN} \Rightarrow \frac{2x}{3x} = \frac{BN}{MN}$$

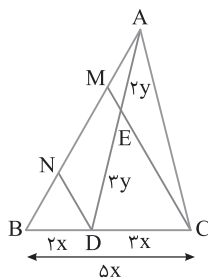
$$BN = \frac{2}{3}MN$$

$$\triangle AND:DN \parallel ME \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AE}{ED} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{2y}{3y} = \frac{AM}{MN}$$

$$AM = \frac{2}{3}MN$$

بنابراین $BN=AM=\frac{2}{3}MN$ پس

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AM+MN+BN}{AM} = \frac{AM+\frac{2}{3}AM+AM}{AM} = \frac{7}{2}$$



از نقطه E خطی موازی CN رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در F

قطع کند. بنابر قضیه تالس،

$$\triangle AFE:MN \parallel FE \Rightarrow \frac{AN}{NF} = \frac{AM}{ME} = 1 \Rightarrow AN=NF$$

$$\triangle BNC:FE \parallel NC \Rightarrow \frac{BF}{FN} = \frac{BE}{EC} = 1 \Rightarrow BF=FN$$

نقاط M, N, E به ترتیب وسط‌های اضلاع AB, AC, BC هستند، پس بنابر قضیه میان خط در مثلث ABC ،

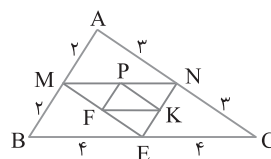
$$ME = \frac{AC}{2}, NE = \frac{AB}{2}, MN = \frac{BC}{2}$$

از طرف دیگر نقاط F, P, K به ترتیب وسط‌های اضلاع ME, MN, NE در مثلث MNE هستند. پس بنابر قضیه میان خط در مثلث MNE ،

$$FK = \frac{MN}{2}, PF = \frac{NE}{2}, PK = \frac{ME}{2}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{FK+PF}{BC} &= \frac{\frac{MN}{2} + \frac{NE}{2}}{BC} = \frac{\frac{BC+AB}{2}}{BC} \\ &= \frac{BC+AB}{4BC} = \frac{10+4}{4 \times 10} = \frac{14}{40} = \frac{7}{20} = 0.35 \end{aligned}$$

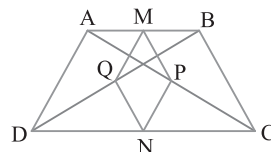


اگر نقطه‌های M و N وسط‌های دو قاعده و نقطه‌های P و Q

وسط‌های دو قطر دوزنقه باشند، آن‌گاه بنابر قضیه میان خط در مثلث‌های ABD و ABC ، MP نصف BC و MQ نصف AD است و چون ساق‌های AD و BC مساوی‌اند، پس $MP=MQ$. از طرف دیگر بنابر قضیه میان خط در مثلث‌های ADC و BDC ، NP نصف AD و NQ نصف BC است، در نتیجه $NP=NQ$. بنابراین چهارضلعی $MPNQ$ لوزی است. قطر MN در این لوزی برابر ارتفاع دوزنقه، یعنی 4 و قطر دیگر آن، یعنی PQ مساوی نصف

تفاضل دو قاعده، یعنی $3=\frac{6}{2}$ است. بنابراین

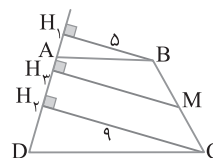
$$\text{مساحت لوزی} = \frac{1}{2}MN \times PQ = \frac{1}{2}(4)(3) = 6$$



در شکل M وسط ساق BC است، چهارضلعی BH_1H_2C دوزنقه

قائم‌الزاویه است و MH_3 میان خط آن است، در نتیجه

$$MH_3 = \frac{BH_1 + CH_2}{2} = \frac{5+9}{2} = 7$$



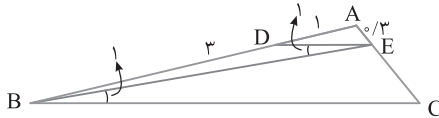
ساق‌های دوزنقه $ABCD$ را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در M

قطع کنند. از تعمیم قضیه تالس نتیجه می‌شود

$$AB \parallel DC \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{4}{9}$$

با تفصیل در مخرج کردن تناسب به دست آمده نتیجه می‌گیریم

$$\frac{MA}{MD-MA} = \frac{MB}{MC-MB} = \frac{4}{9-4} \Rightarrow \frac{MA}{5} = \frac{MB}{6} = \frac{4}{5}$$

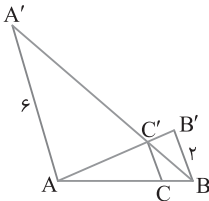


۸۷ ۱ در مثلث BAA' ، CC' با AA' موازی است. بنابر تعمیم

$$\frac{CC'}{AA'} = \frac{BC}{AB} \quad (۱) \quad \text{قضیه تالس،}$$

از طرف دیگر، در مثلث ABB' ، چون CC' و BB' موازی اند، بنابر تعمیم

$$\frac{CC'}{BB'} = \frac{AC}{AB} \quad (۲) \quad \text{قضیه تالس،}$$



با جمع کردن دو طرف تساوی‌های (۱) و (۲)

$$\frac{CC'}{AA'} + \frac{CC'}{BB'} = 1 \quad \text{اکنون}$$

با قرار دادن مقادیرهای $AA' = 6$ و $BB' = 2$ معلوم می‌شود که

$$\frac{CC'}{6} + \frac{CC'}{2} = 1 \quad \text{پس } CC' = \frac{3}{2}$$

۸۸ ۴ طول هر ضلع لوزی را برابر x می‌گیریم. بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\triangle ABD:MF \parallel AD \Rightarrow \frac{BF}{BD} = \frac{MF}{AD} = \frac{x}{6} \quad (۱)$$

$$\triangle ACD:NE \parallel AD \Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{NE}{AD} = \frac{x}{6} \quad (۲)$$

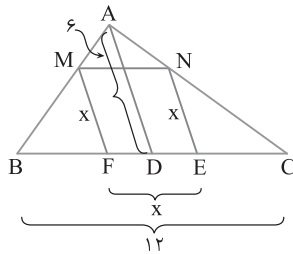
از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\frac{BF}{BD} = \frac{CE}{CD} = \frac{x}{6}$. بنابر ویژگی‌های تناسب

می‌نویسیم $\frac{BF+CE}{BD+CD} = \frac{x}{6}$. مقدار $BF+CE$ مساوی $BC-EF$ ، یعنی

$12-x$ است. در ضمن $BD+CD$ برابر BC و مساوی 12 است. بنابراین،

$$\frac{12-x}{12} = \frac{x}{6} \Rightarrow 12-x = 2x \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

پس محیط لوزی $MNEF$ برابر $4x$ و مساوی 16 است.



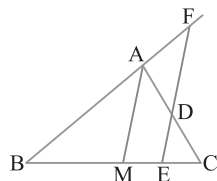
۸۹ ۳ دو بار از قضیه تالس استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم

$$\triangle AMC:DE \parallel AM \Rightarrow \frac{CM}{ME} = \frac{AC}{AD} \quad (۱)$$

$$\triangle BFE:AM \parallel FE \Rightarrow \frac{BM}{ME} = \frac{AB}{AF} \quad (۲)$$

چون $CM=BM$ ، پس یک طرف تساوی‌های (۱) و (۲) با هم مساوی‌اند و در نتیجه

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AF} \xrightarrow{\text{تعویض جای طرفین}} \frac{AF}{AD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AF}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow AF = 4$$



بنابراین $AN=NF=BF$. پس $AN = \frac{1}{3} AB$. از طرف دیگر بنابر قضیه

$$\triangle AEF:MN = \frac{FE}{2}, \quad \triangle BNC:FE = \frac{NC}{2}, \quad \text{میان خط در مثلث،}$$

در نتیجه $MN = \frac{NC}{4}$. چون دو مثلث AMN و ANC در ارتفاع نظیر

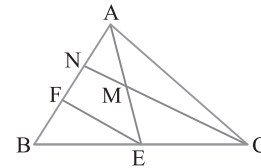
$$\frac{S_{AMN}}{S_{ANC}} = \frac{MN}{NC} = \frac{1}{4} \quad (۱) \quad \text{رأس } A \text{ مشترک هستند، پس}$$

همچنین چون دو مثلث ABC و ANC در ارتفاع نظیر رأس C مشترک

$$\frac{S_{ANC}}{S_{ABC}} = \frac{AN}{AB} = \frac{1}{3} \quad (۲) \quad \text{هستند، پس}$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$S_{AMN} = \frac{1}{4} S_{ANC} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} S_{ABC} \right) = \frac{1}{12} S_{ABC} = \frac{1}{12} \times 48 = 4$$



۸۴ ۲ با دو بار استفاده از قضیه تالس می‌نویسیم

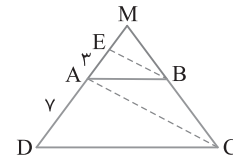
$$\triangle MAC:BE \parallel AC \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MB}{BC} \quad (۱)$$

$$\triangle MDC:AB \parallel DC \Rightarrow \frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \quad (۲)$$

با مقایسه تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\frac{ME}{AE} = \frac{MA}{AD}$. اگر $ME = x$ ، آن‌گاه

$$\frac{x}{3} = \frac{x+3}{7} \Rightarrow 7x = 3x+9 \Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{4}$$

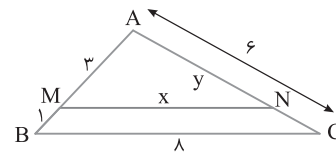
بنابراین $MD = \frac{9}{4} + 3 + 7 = \frac{51}{4}$.



۸۵ ۲ شکل مسئله به صورت زیر است. چون MN با BC موازی است،

بنابر تعمیم قضیه تالس، $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ ، یعنی $\frac{3}{4} = \frac{y}{6} = \frac{x}{8}$. در نتیجه

$x = 6$ و $y = \frac{9}{2}$. بنابراین طول ضلع بزرگ‌تر مثلث حاصل برابر 6 سانتی‌متر است.



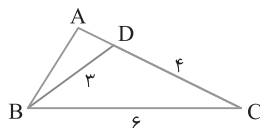
۸۶ ۳ چون $\hat{E}_1 = \hat{B}_1$ ، از عکس قضیه خطوط موازی و مورب نتیجه

می‌شود DE با BC موازی است. در نتیجه بنابر قضیه تالس، $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

$$\text{یعنی } \frac{1}{4} = \frac{0/3}{AC} \quad \text{پس } AC = 4 \times \frac{0}{3} = \frac{0}{2}$$

۹۰ ۳ راه حل اول از قضیه میان خط در دوزنقه نتیجه می گیریم اگر E و F وسطهای دوساق باشند، آن گاه EF موازی با قاعده‌ها است. بنابر تعمیم قضیه تالس،

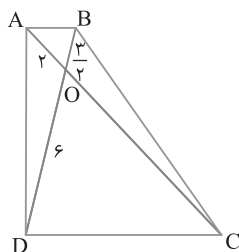
$$AB + AD = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



۹۴ ۲ چون AB و DC موازی اند، از قضیه اساسی تشابه نتیجه می شود که مثلث های OAB و OCD متشابه اند. بنابراین

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow \frac{2}{OC} = \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow OC = \lambda$$

به این ترتیب $AC=AO+OC=2+8=10$.



۹۵ ۴ برج پیزا و تیر فلزی نگه دارنده را با پاره‌خط‌هایی مطابق شکل زیر نشان می‌دهیم. در دو مثلث BCA و BED ، $\hat{B} = \hat{B}$ و $\hat{C} = \hat{E} = 90^\circ$ ، بنابراین دو مثلث قائم الزاویه BCA و BED متشابه‌اند

(ز.ز)، پس $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DE}$ ، یعنی $\frac{AB}{11} = \frac{5}{10}$ ، در نتیجه

$AB=55$

۹۶ ۳ چون دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند، پس $\hat{A}CB = \hat{A}'C'B'$ و در نتیجه $\hat{OCB} = \hat{OC'B'}$. بنابراین دو مثلث OCB و $OC'B'$ به حالت (ز ز) متشابه هستند و

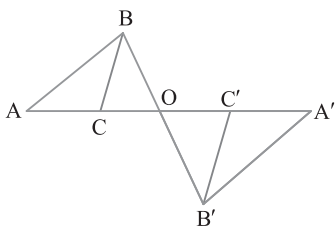
$$\frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{BC}{B'C'} \quad (1)$$

از طرف دیگر چون دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \quad (2)$$

از مقایسه تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\frac{OC}{OC'} = \frac{AC}{A'C'}$ پس

$$OC \times A'C' = OC' \times AC$$

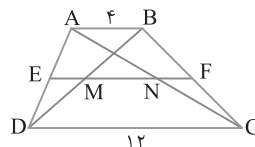


$$\triangle ADC:EN\parallel DC \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{EN}{DC} \Rightarrow \frac{EN}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow EN = \frac{1}{2} DC \quad (1)$$

$$\triangle ABD: EM \parallel AB \Rightarrow \frac{DE}{AD} = \frac{EM}{AB} \Rightarrow \frac{EM}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow EM = \frac{1}{2} AB \quad (2)$$

از تفریق تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

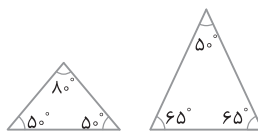
$$MN = \frac{1}{2}(DC - AB) \Rightarrow MN = \frac{1}{2}(12 - 4) = 4$$



راه حل دوم چون E و F وسط‌های ساق‌های دوزنقه هستند، پاره‌خط EF موازی
 قاعده‌هاست. از طرف دیگر چون E وسط AD است و $EM \parallel AB$ ، پس EM
 در مثلث DAB میان‌خط است، یعنی M نیز وسط قطر BD از دوزنقه ABCD
 است. به طور مشابه N نیز وسط قطر AC است و می‌دانیم اگر M و N وسط
 قطرهای دوزنقه ABCD باشند، آن‌گاه

$$MN = \frac{|DC - AB|}{2} = \frac{12 - 4}{2} = 4$$

۹۱ ۳ در شکل‌های زیر دو مثلث، متساوی‌الساقین هستند و یک زاویه مساوی دارند. ولی متشابه نیستند، چون بقیه زاویه‌های آن‌ها نامساوی‌اند. پس گزینه (۱) نادرست است. در ضمن دو متوازی‌الاضلاع که یک زاویه مساوی داشته باشند، سایر زاویه‌های آن‌ها نیز مساوی هستند. ولی لزومی ندارد اضلاع آن‌ها متناسب باشند. پس گزینه (۲) نادرست است. ولی دو لوزی با زاویه‌های مساوی حتماً متشابه‌اند زیرا اضلاع آن‌ها در هر صورت متناسب‌اند. دو مثلث متساوی‌الساقین ممکن است متشابه نباشند. برای مثال نقص، می‌توانید شکل‌های زیر را در نظر بگیرید.



۹۲ ۴ با توجه به داده‌های روی شکل و فرض سؤال نتیجه می‌گیریم

$$\frac{ra}{fa} = \frac{rb}{fb} = \frac{r}{f} \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{AE}{BC} = \frac{BE}{BD}$$

پس دو مثلث ABE و CDB به حالت (ض ض ض) متشابه‌اند. پس زاویه‌های نظیر این دو مثلث مساوی‌اند:

$$\begin{cases} 2x - y = x + y \\ 2x - 1 = y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = y \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 0$$

پس

$$\hat{A} = 110^\circ - (22 - 7 + 22 - 1)^\circ = 110^\circ - (42 - 8)^\circ = 110^\circ - 34^\circ$$

$$\hat{C} = 1\lambda^\circ - (y + 1\delta + x + y)^\circ = 1\lambda^\circ - (x + 2y + 1\delta)^\circ = 1\delta 2^\circ$$

بنابراین $\hat{A} + \hat{C} = 30.4^\circ$

۹۳ ۲ در دو مثلث ABD و ACB زاویه A مشترک است و واضح است که دو زاویه ABC و ABD نامساوی اند، پس باید $\widehat{ABC} = \widehat{ADB}$. در نتیجه از تشابه مثلثهای ABD و ACB نتیجه می‌شود

$$\text{پس } \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2} \text{ چون } \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{4+AD} = \frac{1}{2} \text{ پس } \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$$

عددی حقیقی مانند k وجود دارد که $AD=k$ و $AB=2k$. به این ترتیب

$$\frac{AB}{r+AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{rk}{r+k} = \frac{1}{2}$$

۱۰۲ ۲ در دو مثلث متشابه ضلع‌ها نظیر به نظیر متناسب هستند. پس

a را با ۹ یا با b نظیر قرار می‌دهیم تا بیشترین مقدار a را به دست آوریم. اگر a

را با ۹ نظیر بگیریم، به دو تناسب زیر می‌رسیم

$$\frac{a}{9} = \frac{5}{7} = \frac{4}{b} \Rightarrow a = \frac{45}{7} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{9} = \frac{5}{7} = \frac{4}{7} \Rightarrow a = \frac{36}{7}$$

اگر a را با b نظیر بگیریم، به تناسب‌های $\frac{a}{b} = \frac{5}{7} = \frac{4}{9}$ یا $\frac{a}{b} = \frac{5}{7} = \frac{4}{9}$ می‌رسیم

که این تناسب‌ها درست نیستند. پس $a = \frac{45}{7}$ بیشترین مقدار برای a است.

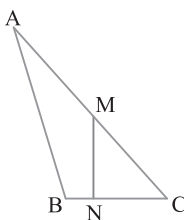
۱۰۳ ۱ اگر زاویه حاده یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه حاده مثلث

قائم‌الزاویه دیگری مساوی باشد، آن‌گاه این دو مثلث با داشتن دو زاویه مساوی متشابه خواهند بود. اگر دو ضلع قائم دو مثلث قائم‌الزاویه متناسب باشند، آن‌گاه این دو مثلث دارای زاویه بین مساوی 90° هم هستند، پس متشابه‌اند. اگر نسبت دو زاویه حاده دو مثلث قائم‌الزاویه برابر باشد، آن‌گاه دو مثلث دارای زاویه‌های حاده مساوی هستند، پس دو مثلث متشابه می‌شوند. تساوی وترهای دو مثلث قائم‌الزاویه تشابه آن‌ها را نتیجه نمی‌دهد.

۱۰۴ ۲ از تناسب $\frac{NC}{BC} = \frac{MC}{AC}$ بنابر عکس قضیه تالس نتیجه می‌شود

MN موازی AB است که خلاف فرض تست است. پس گزینه (۱) نادرست است. در ضمن در تناسب $\frac{NC}{AC} = \frac{BC}{MC}$ ، چون ضلع‌های نظیر به نظیر دو

مثلث قرار دارند، پس نمی‌توان تشابه را نتیجه گرفت، بنابراین گزینه (۳) نیز نادرست است. با فرض $\angle BNM = \angle ABC$ نمی‌توان تساوی زاویه‌های دو مثلث را نتیجه گرفت، پس گزینه (۴) نیز نادرست است. ولی با فرض $\angle MNC = \angle BAC$ تشابه دو مثلث ABC و MNC نتیجه می‌شود، زیرا زاویه C نیز در دو مثلث مشترک است، پس گزینه (۲) درست است.



۱۰۵ ۲ مطابق شکل زیر، چون چهارضلعی ABCD مربع است و

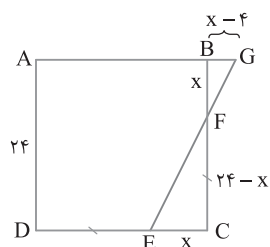
پس، $FC = ED$

$$BF = EC = x, \quad FC = ED = 24 - x$$

چون $BG \parallel EC$ ، پس بنابر قضیه اساسی تشابه، دو مثلث FCE و FBG

متشابه‌اند. بنابراین $\frac{FB}{FC} = \frac{BG}{CE} \Rightarrow \frac{x}{24-x} = \frac{x-4}{x}$

پس $x^2 - 14x + 48 = 0$ و این معادله دو ریشه دارد: $x = 8$ و $x = 6$.

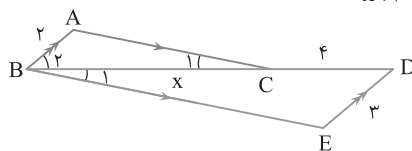


۹۷ ۳ چون $AC \parallel BE$ و BC ممرب است، پس $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$ از طرف

دیگر $AB \parallel ED$ و BD ممرب است، پس $\hat{B}_2 = \hat{D}$ در نتیجه دو مثلث ABC

و EDB به حالت (ز) متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر است با $\frac{BC}{BD} = \frac{AB}{DE}$.

بنابراین $\frac{x}{x+4} = \frac{2}{3}$ ، یعنی $3x = 2x + 8$ و در نتیجه $x = 8$.



۹۸ ۱ دو مثلث ADE و ABC متشابه‌اند، زیرا $\hat{A} = \hat{A}$ و $\hat{D}_1 = \hat{B}$ از

طرف دیگر چون $FE \parallel BC$ ، پس بنابر قضیه اساسی تشابه $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ بنابراین

$$\triangle ADE \sim \triangle AEF \Rightarrow \frac{ED}{EF} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \frac{AD=4}{AE=7} \Rightarrow \frac{ED}{EF} = \frac{4}{7}$$

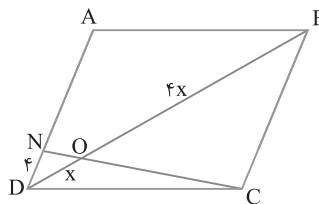
۹۹ ۱ بنابر فرض‌های تست شکل زیر را خواهیم داشت. بنابر قضیه

اساسی تشابه، دو مثلث ODN و OBC متشابه هستند. بنابراین

$$\frac{OD}{OB} = \frac{ND}{BC} \Rightarrow \frac{x}{4x} = \frac{4}{BC} \Rightarrow BC = 16$$

پس $AD = 16$ ، زیرا در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های مقابل مساوی‌اند و در نتیجه

$$AN = 16 - 4 = 12$$

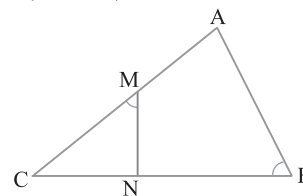


۱۰۰ ۳ دو مثلث MNC و BAC را در نظر می‌گیریم:

$$\left. \begin{array}{l} \angle MNC = \angle B \\ \angle C = \angle C \end{array} \right\} \xrightarrow{(ز)} \triangle MNC \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{NC}{AC} = \frac{MC}{BC}$$

$$\xrightarrow{AC=2MC} \frac{4}{2MC} = \frac{MC}{6+4} \Rightarrow MC^2 = 20$$

$$MC = 2\sqrt{5} \Rightarrow AC = 4\sqrt{5}$$



۱۰۱ ۳ اگر در این تشابه $\hat{A} = \hat{A}'$ ، $\hat{B} = \hat{B}'$ و $\hat{C} = \hat{C}'$ ، آن‌گاه نسبت

تشابه برابر $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ یا معکوس آن است (درستی گزینه (۱)).

با استفاده از ویژگی‌های تناسب می‌توان دید که چون $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$ ، پس

نسبت $\frac{A'B' + A'C'}{AB + AC}$ ، یعنی گزینه (۲) هم همان نسبت تشابه است. از طرف

دیگر از تناسب $\frac{AB}{A'B'} = \frac{2AC}{2A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ نتیجه می‌گیریم

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC + 2AC + AB}{B'C' + 2A'C' + A'B'}$$

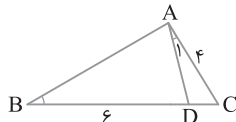
۱۱۰ (۲) دو مثلث ADC و BAC را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B} \\ \hat{C} = \hat{C} \end{cases} \xrightarrow{(ز)} \triangle ADC \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC}$$

$$\frac{4}{BC} = \frac{DC}{4} \Rightarrow (6+DC)DC = 16 \Rightarrow DC = 2$$

از طرف دیگر دو مثلث ADC و ABC در ارتفاع نظیر رأس A مشترک هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایی است که این

ارتفاع بر آن‌ها وارد شده است. پس $\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = \frac{DC}{BC} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

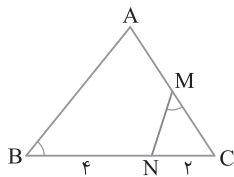


۱۱۱ (۲) چون $\hat{C} = \hat{C}$ و $\hat{M} = \hat{B}$ پس دو مثلث MNC و BAC به حالت (ز ز) متشابه‌اند. اکنون نسبت تشابه دو مثلث را می‌نویسیم

$\frac{MC}{BC} = \frac{NC}{AC}$ چون M وسط AC است، پس $MC = \frac{AC}{2}$. بنابراین $\frac{AC}{2BC} = \frac{NC}{AC}$ در نتیجه

$$AC^2 = 2NC \times BC = 2NC(NC + NB) = 2 \times 2 \times (2 + 4) = 24$$

$$AC = 2\sqrt{6}$$



۱۱۲ (۲) در دو مثلث متشابه ضلع‌های نظیر متناسب‌اند. پس

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{7} = \frac{1}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = \frac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow x + y = \frac{15}{5} = 3$$

دقت کنید اگر تناسب $\frac{x}{8} = \frac{y}{7} = \frac{1}{5}$ هم نوشته شود، جواب نهایی همان مقدار ۲۴ است.

۱۱۳ (۱) توجه کنید که طول ضلع مربع به مساحت ۲ برابر $\sqrt{2}$ است

پس $NE = EH = \sqrt{2}$. همچنین طول ضلع مربع به مساحت ۱۸ برابر $3\sqrt{2}$ است پس $MH = 3\sqrt{2}$. در نتیجه $ME = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

اکنون دو مثلث قائم‌الزاویه PQR و MNE را در نظر بگیرید. با فرض اینکه طول ضلع مربع سوم برابر X باشد داریم:

$$\left. \begin{aligned} RQ \parallel BC &\Rightarrow \hat{P}RQ = \hat{C} \\ PC \text{ مورب} & \\ NE \parallel BC &\Rightarrow \hat{M}NE = \hat{B} \\ BN \text{ مورب} & \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+} \hat{P}RQ + \hat{M}NE = \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$

$$\hat{P}RQ + \hat{R}PQ = 90^\circ \Rightarrow \hat{M}NE = \hat{R}PQ \Rightarrow \triangle PQR \sim \triangle NEM$$

$$\frac{QR}{ME} = \frac{PQ}{NE} \Rightarrow \frac{x}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} - x}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{3\sqrt{2} - x}{1} \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$$

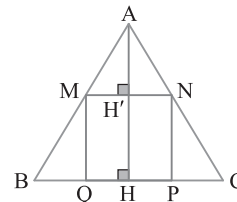
۱۰۶ (۱) در مثلث ABC ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم MN

را در H' قطع می‌کند. چون MH' با BH موازی است، بنابراین قضیه اساسی تشابه دو مثلث AMH' و ABH متشابه‌اند و $\frac{AH'}{AH} = \frac{AM}{AB}$. با استدلالی مشابه

دو مثلث AMN و ABC متشابه‌اند و $\frac{MN}{BC} = \frac{AH'}{AH}$ پس $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$

با تفصیل در صورت به دست می‌آید $\frac{BC - MN}{BC} = \frac{AH - AH'}{AH}$ یعنی

$$\frac{a - MN}{a} = \frac{MN}{h_a} \quad \text{و از این تساوی به دست می‌آید} \quad MN = \frac{a \times h_a}{a + h_a}$$

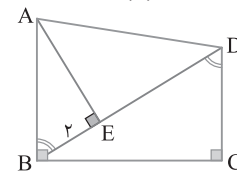


۱۰۷ (۱) با توجه به شکل معلوم می‌شود $\hat{A}BE + \hat{D}BC = 90^\circ$ و

$\hat{B}DC + \hat{D}BC = 90^\circ$ پس $\hat{A}BE = \hat{B}DC$. بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویه

ABE و BDC متشابه‌اند (ز ز). در نتیجه $\frac{AE}{BC} = \frac{BE}{DC}$ یعنی $\frac{AE}{BC} = \frac{2}{4}$

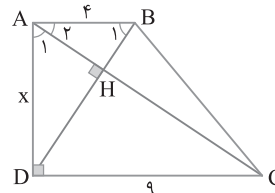
پس $2BC = AE \times DC = 10$ از طرف دیگر چون $AE \times DC = 10$ پس $BC = 5$ یعنی ارتفاع این دوزنقه برابر ۵ است.



۱۰۸ (۳) با توجه به شکل زیر، چون $\hat{A}HB = 90^\circ$ ، پس $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 90^\circ$. از

طرف دیگر $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ$ پس $\hat{B}_1 = \hat{A}_2$. بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویه ABD و

DAC متشابه‌اند (ز ز) و $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DC}$ یعنی $\frac{4}{x} = \frac{x}{9}$ پس $x^2 = 4 \times 9$ و $x = 6$.

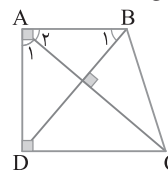


۱۰۹ (۲) دو مثلث قائم‌الزاویه ABD و DAC را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ \\ \hat{B}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \\ \hat{A} = \hat{D} = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{(ز)} \triangle ABD \sim \triangle DAC$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AD^2 = AB \times DC$$

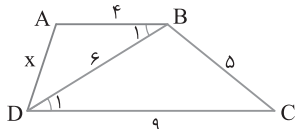
پس ارتفاع AD واسطه هندسی بین دو قاعده AB و DC است.



۱۱۷ ۱) $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ پس BD مورب است، پس $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$.

از طرف دیگر، $\frac{AB}{DB} = \frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$ ، پس دو مثلث BAD و DBC متشابه‌اند

(ض ز ض). بنابراین $\frac{AD}{BC} = \frac{2}{3}$ ، یعنی $\frac{x}{5} = \frac{2}{3}$ ، پس $x = \frac{10}{3}$.



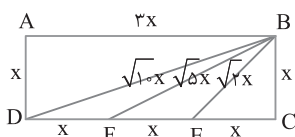
۱۱۸ ۱) اگر اندازه عرض مستطیل را x در نظر بگیریم، آن‌گاه اندازه طول

مستطیل برابر $3x$ است و بنابر قضیه فیثاغورس $BE = \sqrt{2}x$ ، $BF = \sqrt{5}x$

و $BD = \sqrt{10}x$. در این صورت نسبت‌های $\frac{BE}{ED} = \frac{\sqrt{2}x}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

و $\frac{BF}{BD} = \frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{10}x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ مساوی یکدیگرند، بنابراین

در نتیجه دو مثلث BEF و DEB ضلع‌های متناسب دارند، در نتیجه متشابه‌اند (ض ض ض).



۱۱۹ ۴) دو مثلث APQ و ACB را در نظر بگیرید:

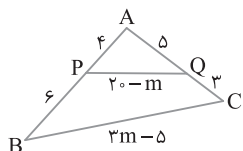
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{8} = \frac{5}{10} \Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{AQ}{AB} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \triangle APQ \sim \triangle ACB \\ \hat{A} = \hat{A} \end{array} \right.$$

$$\frac{4}{8} = \frac{20-m}{3m-5} \Rightarrow 3m-5=40-2m \Rightarrow 5m=45 \Rightarrow m=9$$

بنابراین

$$BPQC = BP + PQ + QC + BC = 6 + 20 - m + 3 + 3m - 5$$

$$= 24 + 2m = 24 + 18 = 42$$



۱۲۰ ۱) در مثلث قائم‌الزاویه ADC با استفاده از قضیه فیثاغورس

می‌توان نوشت

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 2^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40 \Rightarrow AC = 2\sqrt{10}$$

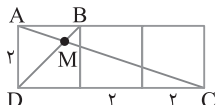
از طرف دیگر،

$$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی متشابه}} \triangle ABM \sim \triangle CDM$$

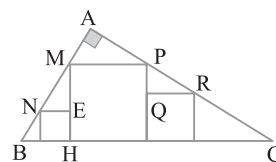
$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{DC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AM}{AC} = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{AC=2\sqrt{10}} \frac{AM}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{4} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

پس AM مساوی $\frac{1}{2}$ برابر $\sqrt{10}$ است.



بنابراین مساحت مربع سوم برابر $x^2 = 8$ است.



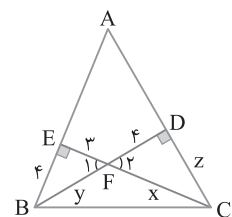
۱۱۴ ۳) مثلث FBE قائم‌الزاویه است، پس بنابر قضیه فیثاغورس،

$$y = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5. \text{ از طرف دیگر، چون } \hat{F}_1 = \hat{F}_2 \text{ و } \hat{E} = \hat{D} = 90^\circ, \text{ پس دو}$$

مثلث FEB و FDC متشابه‌اند (ز ز)، در نتیجه $\frac{BF}{FC} = \frac{FE}{FD} = \frac{EB}{DC}$ ، یعنی

$$\frac{5}{x} = \frac{3}{4} = \frac{4}{z} \text{ بنابراین } x = \frac{20}{3} \text{ و } z = \frac{16}{3} \text{ اکنون می‌توان نوشت}$$

$$x + y + z = \frac{20}{3} + 5 + \frac{16}{3} = 17$$



۱۱۵ ۳) فرض می‌کنیم $\hat{A}_1 = \hat{C} = \alpha$ و $\hat{A}_2 = \hat{B} = \beta$ زاویه‌های

$\triangle AMN$ و $\triangle ANM$ به ترتیب زاویه‌های خارجی مثلث‌های ABM و ACN هستند. بنابراین

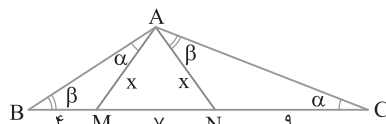
$$\hat{AMN} = \hat{A}_1 + \hat{B} = \alpha + \beta, \quad \hat{ANM} = \hat{C} + \hat{A}_2 = \alpha + \beta$$

پس $\hat{AMN} = \hat{ANM}$ و در نتیجه $AM = AN = x$ از طرف دیگر دو

مثلث AMB و CNA متشابه‌اند (ز ز). بنابراین

$$\frac{AN}{BM} = \frac{NC}{AM} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{9}{x}$$

در نتیجه $x = 6$ و محیط مثلث AMN برابر است با $6 + 6 + 7 = 19$.



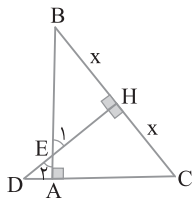
۱۱۶ ۲) با توجه به شکل $\hat{E}_1$ و $\hat{E}_2$ در دو مثلث قائم‌الزاویه BHE و

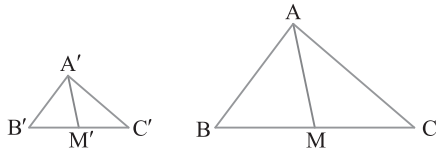
DAE برابرند، پس $\hat{B} = \hat{D}$. در نتیجه

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{D} \\ \hat{H} = \hat{H} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ز ز)}} \triangle BEH \sim \triangle DCH$$

$$\frac{EH}{HC} = \frac{BH}{DH} \Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{x}{5} \Rightarrow x^2 = 20 \Rightarrow x = 2\sqrt{5}$$

بنابراین وتر BC مساوی $4\sqrt{5}$ است.





۱ ۱۲۷ بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث BHM

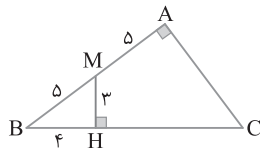
$$MH = \sqrt{MB^2 - BH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

دو مثلث BMH و BCA به حالت تساوی دو زاویه ($\hat{B} = \hat{B}$)

متشابه‌اند، پس $\frac{BC}{BM} = \frac{AB}{BH}$ ، یعنی $\frac{BC}{5} = \frac{4}{3}$

پس $BC = \frac{20}{3}$ ، از طرف دیگر، $HC = BC - BH = \frac{20}{3} - 4 = \frac{4}{3}$ اکنون

$$\frac{MH}{HC} = \frac{3}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{4} = \frac{6}{2}$$

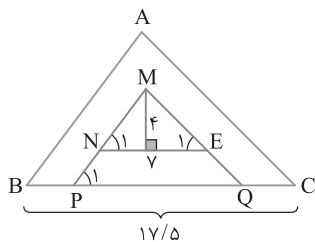


۲ ۱۲۸ با توجه به شکل زیر، ضلع‌های MN و ME را به ترتیب از سمت E و امتداد می‌دهیم تا ضلع BC را در نقطه‌های P و Q قطع کنند. بنابر قضیه خطوط موازی و مورب،

$$\left\{ \begin{array}{l} NE \parallel PQ \\ MP \text{ مورب} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{N}_1 = \hat{P}_1, \quad \left\{ \begin{array}{l} MP \parallel AB \\ BC \text{ مورب} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{P}_1 = \hat{B}$$

بنابراین $\hat{N}_1 = \hat{B}$. به همین ترتیب ثابت می‌شود $\hat{E}_1 = \hat{C}$. پس دو مثلث MNE و ABC دو زاویه مساوی دارند و در نتیجه متشابه هستند. بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها مساوی توان دوم نسبت ضلع‌های نظیر آن‌ها است:

$$\frac{S_{MNE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{NE}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{17/5} = \left(\frac{4}{BC}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = 87/5$$



۱ ۱۲۹ مطابق شکل زیر، دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و HAC

$$\frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AC^2}{BC^2} \quad (1)$$

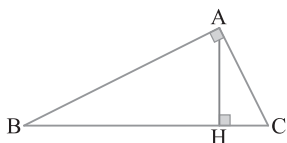
متشابه‌اند. پس

از طرف دیگر،

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = (2AC)^2 + AC^2 = 5AC^2 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \frac{AC^2}{5AC^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow S_{ABC} = 5S_{ACH}$$

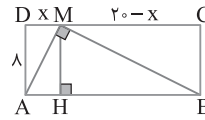


۳ ۱۲۱ بنابر فرض سؤال، مثلث AMB قائم‌الزاویه است. با فرض $DM = x$ نتیجه می‌گیریم $MC = 20 - x$. اکنون با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه AMB می‌نویسیم

$$MH^2 = AH \times BH \Rightarrow 8^2 = x(20 - x) \Rightarrow x^2 - 20x + 64 = 0$$

$$(x - 16)(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ یا } x = 16$$

پس فاصله نزدیک‌تر برابر ۴ است.



۳ ۱۲۲ در دو مثلث متشابه نسبت محیط‌ها برابر نسبت اضلاع متناظر است.

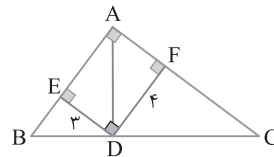
$$\frac{P}{P'} = \frac{a}{a'} \Rightarrow \frac{6+5+9}{P'} = \frac{5}{12/5} \Rightarrow \frac{20}{P'} = \frac{5}{12/5} \Rightarrow P' = \frac{20 \times 12/5}{5} = 50$$

۳ ۱۲۳ دو مثلث قائم‌الزاویه ADC و BDA متشابه‌اند، زیرا

$$\hat{C} = \hat{BAD} + \hat{DAC} = 90^\circ \text{ و } \hat{C} + \hat{DAC} = 90^\circ \text{ در نتیجه } \hat{C} = \hat{BAD}$$

همچنین $\hat{ADC} = \hat{ADB} = 90^\circ$ ، بنابراین نسبت ارتفاع‌های نظیر در این دو مثلث متشابه برابر نسبت ضلع‌های نظیر آن‌ها است:

$$\frac{DE}{DF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$$

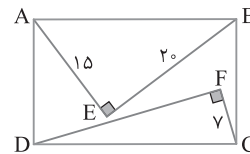


۲ ۱۲۴ در مثلث ABE، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$$

چون ABCD مستطیل است، پس $DC = AB = 25$. اکنون بنابر قضیه

$$DF = \sqrt{DC^2 - FC^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24 \text{ در مثلث DFC فیثاغورس}$$



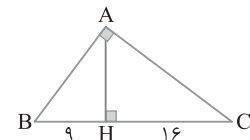
۲ ۱۲۵ با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم

$$AB^2 = BH \times BC = 9 \times 25 \Rightarrow AB = 3 \times 5 = 15$$

$$AC^2 = CH \times BC = 16 \times 25 \Rightarrow AC = 4 \times 5 = 20$$

$$ABC \text{ محیط} = AB + AC + BC = 15 + 20 + 25 = 60$$

بنابراین



۴ ۱۲۶ هر مثلث با رسم میانه به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌شود.

از طرف دیگر نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه مساوی توان دوم نسبت تشابه

$$S_{ABM} = \frac{1}{2} S_{ABC} \text{ چون } \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \left(\frac{AC}{A'C'}\right)^2 = 4 \text{ بنابراین}$$

$$\frac{S_{ABM}}{S_{A'C'M'}} = 4 \text{ پس } S_{A'C'M'} = \frac{1}{4} S_{A'B'C'}$$

۱۳۴ ۱ مطابق شکل زیر MN و AH هر دو بر BC عمودند، پس موازی‌اند و HM و AB هر دو بر AC عمودند، پس موازی‌اند. اکنون با استفاده از قضیه تالس می‌نویسیم

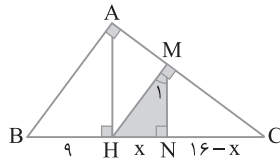
$$\begin{cases} MH \parallel AB \Rightarrow \frac{CM}{AM} = \frac{CH}{BH} \\ MN \parallel AH \Rightarrow \frac{CM}{AM} = \frac{CN}{HN} \end{cases} \Rightarrow \frac{CH}{BH} = \frac{CN}{HN} \Rightarrow \frac{16}{9} = \frac{16-x}{x}$$

$$16x = 144 - 9x \Rightarrow x = \frac{144}{25}$$

از طرف دیگر چون $\hat{M}_1 = \hat{C}$ ، پس دو مثلث HMN و BCA متشابه‌اند (ز). پس نسبت محیط‌های دو مثلث برابر نسبت اضلاع نظیر است:

$$\frac{\text{محیط MHN}}{\text{محیط ABC}} = \frac{HN}{AB} \Rightarrow \frac{144}{25} = \frac{HN}{15} \Rightarrow HN = \frac{144}{25} \times \frac{15}{15} = \frac{144}{25}$$

$$\frac{\text{محیط MHN}}{\text{محیط ABC}} = \frac{144}{25} = \frac{144}{25 \times 15} = \frac{144}{375} = \frac{48}{125}$$



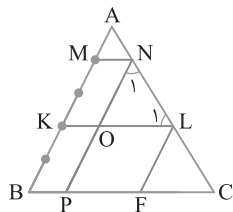
۱۳۵ ۳ از قضیه خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} KL \parallel BC \Rightarrow \hat{L}_1 = \hat{C}, \\ \text{مورب AC} \end{cases} \quad \begin{cases} NP \parallel AB \Rightarrow \hat{N}_1 = \hat{A}, \\ \text{مورب AC} \end{cases}$$

بنابراین دو مثلث NOL و ABC متشابه هستند (ز). پس ضلع‌های آنها متناسب‌اند: $\frac{ON}{AB} = \frac{OL}{BC} = \frac{NL}{AC}$. از طرف دیگر می‌دانیم ضلع‌های مقابل

متوازی الاضلاع مساوی‌اند. پس $ON = MK = \frac{2}{5} AB$. بنابراین نسبت تشابه

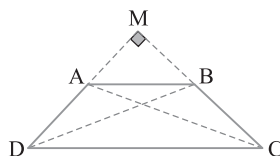
دو مثلث متشابه NOL و ABC برابر $\frac{2}{5}$ است. پس نسبت محیط‌های این دو مثلث مساوی $\frac{2}{5} = 0.4$ است.



۱۳۶ ۱ با توجه به شکل زیر در مثلث MAC، بنابر قضیه فیثاغورس، $BD^2 = MB^2 + MD^2$ و در مثلث MBD، $AC^2 = MA^2 + MC^2$ از طرف دیگر $MA^2 + MB^2 = AB^2$ و $MD^2 + MC^2 = DC^2$. اکنون می‌توان نوشت

$$AC^2 + BD^2 = MA^2 + MC^2 + MB^2 + MD^2$$

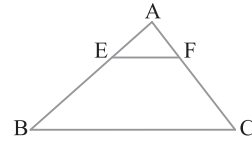
$$= (MA^2 + MB^2) + (MC^2 + MD^2) = AB^2 + DC^2 = 32$$



۱۳۰ ۱ مساحت مثلث AEF را برابر S در نظر می‌گیریم. در نتیجه مساحت دوزنقه BCFE بنابر فرض ۱۵S است. پس $S_{ABC} = 16S$. از طرف دیگر

$$EF \parallel BC \xrightarrow[\text{تشابه}]{\text{قضیه اساسی}} \triangle AEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2$$

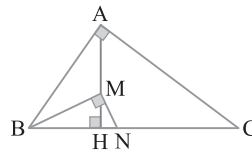
$$\frac{1}{16} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{1}{4} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{تفصیل در}} \frac{AE}{BE} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BE}{AE} = 3$$



۱۳۱ ۲ طول BH را برابر x در نظر می‌گیریم و با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم

$$\begin{cases} \triangle ABC : AH^2 = BH \times CH \Rightarrow AH^2 = 9x \\ \triangle BMN : MH^2 = BH \times HN \Rightarrow MH^2 = x \end{cases}$$

$$\frac{AH^2}{MH^2} = 9 \Rightarrow \frac{AH}{MH} = 3 \Rightarrow \frac{MH}{AH} = \frac{1}{3}$$

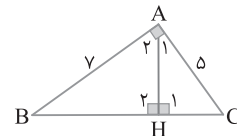


۱۳۲ ۱ دو مثلث قائم‌الزاویه ABH و CAH متشابه‌اند، زیرا

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_p = 90^\circ \text{ و } \hat{A}_p + \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}$$

$$\hat{A}_1 = \hat{B}, \quad \hat{H}_1 = \hat{H}_p = 90^\circ \xrightarrow{\text{(ز)}} \triangle ABH \sim \triangle CAH$$

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ACH}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}$$



۱۳۳ ۱ دو مثلث متشابه‌اند، پس اضلاع نظیر آنها متناسب‌اند. توجه

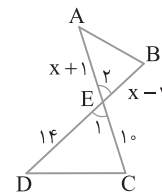
کنید که مطابق شکل زیر $\hat{E}_1 = \hat{E}_p$. از طرف دیگر $\hat{A} \neq \hat{C}$ زیرا اگر $\hat{A} = \hat{C}$

آن‌گاه $AB \parallel DC$ که این طور نیست، پس $\hat{A} = \hat{D}$ و $\hat{B} = \hat{C}$. در نتیجه

$$\frac{x+1}{14} = \frac{x-2}{10} \Rightarrow 10x + 10 = 14x - 28 \Rightarrow 4x = 38 \Rightarrow x = \frac{19}{2}$$

بنابراین

$$\frac{S_{ABE}}{S_{DCE}} = \left(\frac{x-2}{10}\right)^2 = \left(\frac{2}{10}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$



بدون اینکه از کلی بودن راه حل چیزی کم شود، فرض می‌کنیم

$$AB=1 \text{ و } AC=\sqrt{15} \text{، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث } ABC.$$

$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{1+15}=4$$

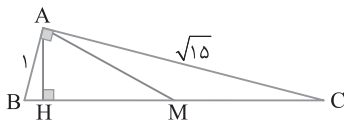
بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، $AB^2=BC \times BH$ ، پس

$$1=4 \times BH \text{، بنابراین } BH=\frac{1}{4} \text{، اکنون می‌توان نوشت}$$

$$MH=BM-BH=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$$

چون مثلث‌های ABC و AMH در ارتفاع نظیر رأس A مشترک‌اند، پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}} = \frac{BC}{MH} = \frac{4}{\frac{7}{4}} = \frac{16}{7}$$



طول ضلع‌های زاویه قائمه را در این مثلث $3x$ و $5x$ فرض

می‌کنیم. چون مساحت مثلث 16 است، پس $\frac{1}{2} \times 5x \times 3x = 16$ ، یعنی

$$x = 4\sqrt{\frac{2}{15}} \text{، بنابراین طول ضلع‌های زاویه قائمه برابر } 12\sqrt{\frac{2}{15}} \text{ و } 20\sqrt{\frac{2}{15}}$$

است و بنابر قضیه فیثاغورس،

$$\text{طول وتر} = \sqrt{12^2 \times (\frac{2}{15}) + 20^2 \times (\frac{2}{15})} = 8\sqrt{\frac{17}{15}}$$

زاویه‌های دو مثلث قائم‌الزاویه ABH و CBA مساوی‌اند، پس

این دو مثلث متشابه‌اند (ز.ز).

$$\triangle ABH \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABH}} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{4}{1}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}-S_{ABH}} = \frac{16}{16-9}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AHC}} = \frac{16}{7} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{16}{7} S_{AHC}$$

نقطه‌های B و D را به یکدیگر وصل می‌کنیم. اگر فرض کنیم

$DC=x$ و $BE=y$ ، نتیجه می‌شود $AD=2x$ و $CE=2y$ ، دو مثلث DEC

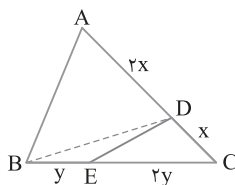
و DBC در ارتفاع نظیر رأس D مشترک‌اند، پس $\frac{S_{DEC}}{S_{DBC}} = \frac{CE}{BC} = \frac{2y}{3y} = \frac{2}{3}$

یعنی $S_{DEC} = \frac{2}{3} S_{DBC}$ ، از طرف دیگر دو مثلث BCD و BAC در ارتفاع نظیر

رأس B مشترک‌اند، پس $\frac{S_{BCD}}{S_{BAC}} = \frac{CD}{AC} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$ ، یعنی $S_{BCD} = \frac{1}{3} S_{BAC}$

اکنون می‌توان نوشت

$$S_{DEC} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} S_{ABC}\right) = \frac{2}{9} S_{ABC} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CDE}} = \frac{9}{2}$$



دو مثلث قائم‌الزاویه ADH' و BDH زاویه حاده مساوی

دارند ($\hat{D}_1 = \hat{D}_2$)، پس متشابه هستند. نسبت ضلع‌های نظیر آن‌ها را

می‌نویسیم: $\frac{DH}{DH'} = \frac{BH}{AH'}$ ، بنابر فرض تست $DH'=6$ ، $BH=4$ و

$DH=3$ ، بنابراین

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{AH'} \Rightarrow AH'=8$$

از طرف دیگر بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث BDH ،

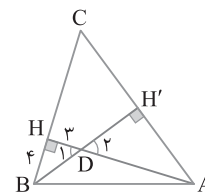
$$BD=\sqrt{BH^2+DH^2}=\sqrt{16+9}=5$$

در نتیجه $BH'=5+6=11$ ، اکنون در مثلث قائم‌الزاویه ABH' می‌نویسیم:

$$AB^2=AH'^2+BH'^2$$

$$=64+121=185$$

بنابراین $AB=\sqrt{185}$



با توجه به شکل باید طول BB' را به دست آوریم. مساحت

مثلث $DB'C$ ، $\frac{1}{16}$ مساحت مثلث ABC است. از طرف دیگر چون

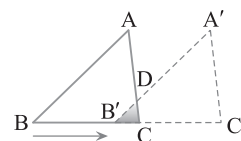
AB موازی است، بنابر قضیه اساسی تشابه، مثلث‌های ABC و $DB'C$

متشابه‌اند. اگر نسبت تشابه k فرض شود، نسبت مساحت آن‌ها k^2 است.

پس $k^2 = \frac{1}{16}$ و $k = \frac{1}{4}$ ، از طرف دیگر $\frac{CB'}{CB} = k = \frac{1}{4}$ ، یعنی $\frac{CB'}{8} = \frac{1}{4}$ ،

پس $CB'=2$ ، بنابراین

$$BB'=BC-B'C=8-2=6$$



اگر طول AD را برابر $4x$ انتخاب کنیم، آن‌گاه از $AD=\frac{4}{5} DB$

نتیجه می‌گیریم $DB=5x$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس،

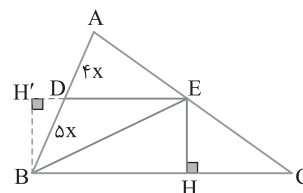
$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{4x}{9x} = \frac{4}{9}$$

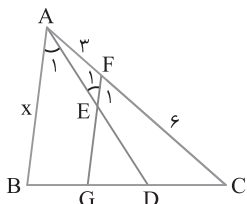
اکنون ارتفاع‌های EH و BH' را به ترتیب در مثلث‌های EBC و EBD رسم

می‌کنیم. این دو ارتفاع مساوی‌اند، زیرا فاصله دو خط موازی BC و DE

هستند. بنابراین

$$\frac{S_{EBC}}{S_{EBD}} = \frac{\frac{1}{2} EH \times BC}{\frac{1}{2} BH' \times DE} = \frac{BC}{DE} = \frac{9}{4} = \frac{9}{25}$$





۱۴۸ چون $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ پس EF با AB موازی است. EF را از طرف E امتداد می دهیم تا BC را در G قطع کند. در مثلث ABD، چون EG موازی AB است، بنابر تعمیم قضیه تالس، یعنی $\frac{EG}{AB} = \frac{DE}{AD}$ یا $\frac{EG}{x} = \frac{1}{2}$. از طرف دیگر در مثلث CAB، FG و AB با هم موازی هستند، پس بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{x+1}{x} = \frac{6}{9} \Rightarrow \frac{FG}{AB} = \frac{CF}{CA}$$

۱۴۹ در مثلث CAM، بنابر تعمیم قضیه تالس،

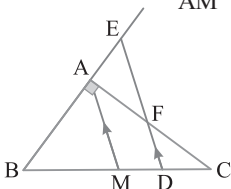
$$\frac{DF}{AM} = \frac{CD}{CM} \quad (۱)$$

از طرف دیگر در مثلث BED، بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{DE}{AM} = \frac{BD}{BM} \quad (۲)$$

دو طرف تساوی های (۱) و (۲) را با هم جمع می کنیم

$$\frac{DF}{AM} + \frac{DE}{AM} = \frac{CD}{CM} + \frac{BD}{BM}$$



چون $BM = CM$ پس

$$\frac{DF+DE}{AM} = \frac{BD+CD}{BM} = \frac{BC}{BM} = 2$$

پس $DF+DE = 2AM = 5$.

۱۵۰ از قضیه تالس نتیجه می شود

$$\triangle ABD: OA' \parallel AD \Rightarrow \frac{BA'}{AA'} = \frac{BO}{OD} \quad (۱)$$

$$\triangle ABC: OB' \parallel BC \Rightarrow \frac{AB'}{BB'} = \frac{AO}{OC} \quad (۲)$$

$$AB \parallel DC \Rightarrow \frac{BO}{OD} = \frac{AO}{OC} \quad (۳)$$

از تساوی های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می گیریم

$$\frac{BA'}{AA'} = \frac{AB'}{BB'} \xrightarrow{\text{ویزگی های تناسب}} \frac{AA'}{BB'} = \frac{BA'}{AB'} \quad (*)$$

از طرف دیگر از قضیه تالس نتیجه می شود

$$\triangle ABD: OA' \parallel AD \Rightarrow \frac{BA'}{BA} = \frac{BO}{BD} \quad (۴)$$

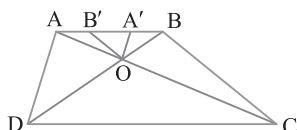
$$\triangle ABC: OB' \parallel BC \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AO}{AC} \quad (۵)$$

$$AB \parallel DC \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD} \quad (۶)$$

از تساوی های (۴)، (۵) و (۶) نتیجه می گیریم

$$\frac{BA'}{BA} = \frac{AB'}{AB} \xrightarrow{\text{ویزگی های تناسب}} \frac{BA'}{AB'} = \frac{BA}{AB} = 1 \Rightarrow BA' = AB'$$

بنابراین با توجه به تناسب (*) مشخص می شود $\frac{AA'}{BB'} = 1$.



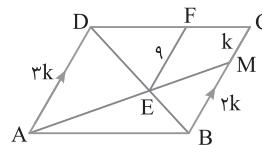
۱۴۴ چون $\frac{CM}{MB} = \frac{1}{2}$ پس عددی حقیقی مانند k وجود دارد که

$CM = k$ و $MB = 2k$ چون AD و MB موازی اند، بنابر تعمیم قضیه تالس، $\frac{ED}{EB} = \frac{AD}{MB} = \frac{3}{2}$ تناسب را ترکیب در مخرج می کنیم:

$$\frac{ED}{EB+ED} = \frac{3}{2+3} \Rightarrow \frac{ED}{DB} = \frac{3}{5}$$

در مثلث DBC، چون $EF \parallel BC$ ، بنابر تعمیم قضیه تالس، $\frac{EF}{BC} = \frac{DE}{DB} = \frac{3}{5}$.

پس $\frac{9}{5} = \frac{3}{BC} \Rightarrow BC = 15$. بنابراین $AD = 15$.

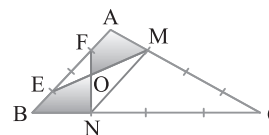


۱۴۵ شکل را به صورت زیر نام گذاری می کنیم و نقطه M را به نقطه N وصل می کنیم. با توجه به شکل $\frac{CM}{AM} = \frac{3}{1}$ و $\frac{CN}{BN} = \frac{3}{1}$ ، بنابراین

$\frac{CM}{AM} = \frac{CN}{BN}$ پس بنابر عکس قضیه تالس MN موازی AB است. بنابراین دو مثلث AME و BNF دارای ارتفاع و قاعده مساوی اند، پس هم مساحت هستند. اگر از مساحت هر دوی آن ها مساحت مثلث OEF را کم کنیم، نتیجه می شود

$$S_{AME} - S_{OEF} = S_{BNF} - S_{OEF} \Rightarrow S_{AMOF} = S_{BNOE}$$

بنابراین دو چهارضلعی رنگی هم مساحت هستند.



۱۴۶ بنابر فرض $\hat{D}_1 = \hat{A}_1$ و چون

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ، بنابراین $\hat{D}_1 = \hat{A}_2$ در نتیجه

مثلث EAD متساوی الساقین است، پس

$AE = DE = 8$ همچنین بنابر عکس

قضیه خطوط موازی و مورب، از تساوی

$\hat{D}_1 = \hat{A}_2$ توازی DE و AC نتیجه

می شود. اکنون از قضیه تالس نتیجه می شود

$$DE \parallel AC \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{AB-AE}{AB} = \frac{12-8}{12} = \frac{1}{3}$$

۱۴۷ چون AM میانه است، پس $BM = MC$ از قضیه تالس

نتیجه می شود

$$\triangle BDN: AM \parallel DN \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BM}{MN} \quad (۱)$$

$$\triangle AMC: AM \parallel EN \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{MC}{MN} \quad (۲)$$

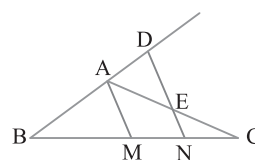
از تساوی های (۱) و (۲) نتیجه می گیریم

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \xrightarrow{\text{ویزگی های تناسب}}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$$

پس بنابر فرض $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$ نتیجه

$$\frac{AD}{AE} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{2}{3}$$



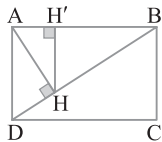
۱۵۶ ۲ از نقطه H عمود HH' بر AB رسم می‌کنیم. HH' فاصله H تا ضلع AB است. بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$\triangle ABD: BD^2 = AB^2 + AD^2 = 12 + 4 = 16 \Rightarrow BD = 4$$

$$\triangle ABD: AH \times BD = AB \times AD \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{3} \times 2}{4} = \sqrt{3}$$

$$\triangle ABD: AB^2 = BH \times BD \Rightarrow 12 = BH \times 4 \Rightarrow BH = 3$$

$$\triangle ABH: HH' \times AB = AH \times BH \Rightarrow HH' = \frac{AH \times BH}{AB} = \frac{\sqrt{3} \times 3}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2}$$

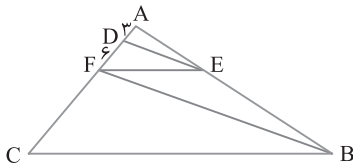


۱۵۷ ۴ از قضیه تالس و تعمیم آن استفاده می‌کنیم

$$\triangle ABF: DE \parallel FB \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AF} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

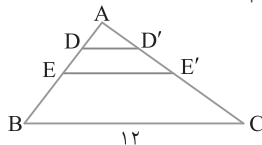
$$\triangle ABC: EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \quad (2)$$

$$\frac{EF}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow BC = 3EF$$
 از تناسب‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود



۱۵۸ ۲ نقطه‌های E و E' به ترتیب وسط‌های ضلع‌های AB و AC هستند. پس بنابر قضیه میان خط $EE' = \frac{BC}{2} = 6$. از طرف دیگر نقطه‌های

D و D' به ترتیب وسط‌های پاره‌خط‌های AE و AE' هستند، پس بنابر قضیه میان خط $DD' = \frac{EE'}{2} = 3$. بنابراین $DD' + EE' = 6 + 3 = 9$.



۱۵۹ ۳ از A به C وصل می‌کنیم تا MN را در O قطع کند. بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\triangle ADC: OM \parallel DC \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{OM}{DC} \quad (1)$$

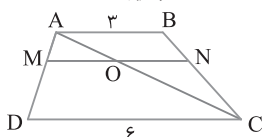
$$\triangle ABC: ON \parallel AB \Rightarrow \frac{CN}{BC} = \frac{ON}{AB} \xrightarrow[\text{تفضیل در صورت}]{\text{تفاضل در صورت}} \frac{BN}{BC} = \frac{AB - ON}{AB} \quad (2)$$

از طرف دیگر بنابر قضیه تالس در دوزنقه، $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC}$. از مقایسه این

تناسب با تناسب‌های (۱) و (۲) و بنابر فرض $\frac{AM}{AD} = \frac{1}{3}$ نتیجه می‌گیریم

$$\frac{OM}{DC} = \frac{AB - ON}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{OM}{6} = \frac{3 - ON}{3} \Rightarrow OM = 3 - ON$$

بنابراین $OM = 2$ و $ON = 2$. در نتیجه $MN = 4$.



۱۵۱ ۴ اضلاع این دو مثلث را به ترتیب از بزرگ به کوچک می‌نویسیم:

$$\left. \begin{matrix} 6, 4, 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3}, \frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{6}} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{6}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{4}{\sqrt{6}}} = \sqrt{3}$$

پس دو مثلث به حالت (ض ض ض) متشابه‌اند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر توان دوم نسبت تشابه یعنی $\sqrt{3}^2 = 3$ است.

۱۵۲ ۳ راه‌حل اول فرض کنید $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = k$. در این صورت

$$\frac{x+y}{z} = \frac{2k+3k}{6k} = \frac{5}{6}. \quad x=2k, \quad y=3k, \quad z=6k \text{ بنابرین}$$

راه‌حل دوم چون $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6}$ ، بنابر ویژگی‌های تناسب $\frac{x+y}{2+3} = \frac{z}{6}$ ، در نتیجه

$$\frac{x+y}{z} = \frac{5}{6}$$

۱۵۳ ۱ در دو مثلث متشابه نسبت میانه‌های نظیر برابر نسبت تشابه

است، پس اگر $\frac{m}{m'} = k$ آن‌گاه $\frac{m'}{m} = \frac{1}{k}$ ، در نتیجه

$$\frac{m}{m'} + \frac{m'}{m} = \frac{1}{3} \Rightarrow k + \frac{1}{k} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{k^2 + 1}{k} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3k^2 - 10k + 3 = 0$$

این معادله درجه دوم را حل می‌کنیم

$$k = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} \Rightarrow k = \frac{10 \pm 8}{6} \Rightarrow k = 3 \text{ یا } k = \frac{1}{3}$$

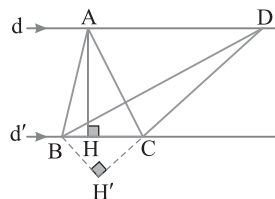
بنابراین نسبت مساحت‌های این دو مثلث متشابه برابر k^2 یعنی $\frac{1}{9}$ یا ۹ است.

۱۵۴ ۱ توجه کنید که $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \times AH = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$. دو

مثلث ABC و DBC، قاعده مشترکی دارند (BC) و رأس‌های روبه‌روی این قاعده (A و D)، روی یک خط، موازی این قاعده است، پس مساحت‌های این

مثلث‌ها برابرند. یعنی $S_{DBC} = S_{ABC}$. در نتیجه $\frac{1}{2} CD \times BH' = 6$ ، یعنی

$$BH' = 2, \quad \frac{1}{2} \times 6 \times BH' = 6$$



۱۵۵ ۳ تناسب $\frac{CD}{DB} = \frac{1}{2}$ را ترکیب در مخرج می‌کنیم

$$\frac{CD}{BC} = \frac{1}{3}, \text{ یعنی } \frac{CD}{CD+DB} = \frac{1}{2+1}$$

دو مثلث ADC و ABC در ارتفاع نظیر رأس A مشترک‌اند، پس

$$\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = \frac{DC}{BC}, \text{ یعنی } \frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{3}, \text{ پس } S_{ADC} = \frac{1}{3} S_{ABC}$$

مثلث DAE و DAC در ارتفاع نظیر رأس D مشترک‌اند، بنابراین

$$\frac{S_{DAE}}{S_{DAC}} = \frac{AE}{AC}, \text{ یعنی } \frac{S_{DAE}}{S_{DAC}} = \frac{1}{2}, \text{ پس } S_{DAE} = \frac{1}{2} S_{DAC}$$

۱۶۴ ۱ مثلث BEC متساوی الاضلاع است، پس

$$BC=BE \quad (۱)$$

در مربع ضلع‌های مجاور با هم برابرند، پس

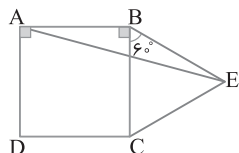
$$AB=BC \quad (۲)$$

از مقایسه تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $AB=BE$ ، بنابراین مثلث

ABE متساوی الساقین است، پس

$$\hat{BAE} = \frac{180^\circ - \hat{ABE}}{2} = \frac{180^\circ - (90^\circ + 6^\circ)}{2} = 42^\circ$$

اکنون می‌توان نوشت $\hat{DAE} = 90^\circ - \hat{BAE} = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$



۱۶۵ ۱ از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی متوازی الاضلاعی به

اضلاع a و b و یک زاویه برابر θ یک مستطیل به طول اضلاع $|a-b|\sin \frac{\theta}{2}$

و $|a-b|\cos \frac{\theta}{2}$ به دست می‌آید. بنابراین

$$\text{طول مستطیل} = |a-b|\sin \frac{\theta}{2} = (13-8)\sin \frac{120^\circ}{2} = 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{عرض مستطیل} = |a-b|\cos \frac{\theta}{2} = (13-8)\cos \frac{120^\circ}{2} = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

پس

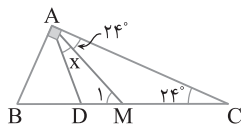
$$\text{مساحت مستطیل} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

۱۶۶ ۴ در مثلث قائم الزاویه ABC نیمساز AD و میانه AM وارد بر

وتر را رسم کرده‌ایم. چون میانه AM نصف وتر است، پس $AM=MC$.

بنابراین $\hat{MAC} = \hat{C} = 24^\circ$. از طرف دیگر AD نیمساز زاویه قائمه است، پس

$$\hat{BAD} = \hat{DAC} = 45^\circ \Rightarrow x + 24^\circ = 45^\circ \Rightarrow x = 21^\circ$$

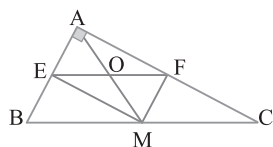


۱۶۷ ۴ می‌دانیم در هر مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر

است، پس $AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 10 = 5$. همچنین در مثلث ABC،

پاره‌های EM و MF میان خط هستند، در نتیجه $EM \parallel AC$ و $MF \parallel BA$. پس چهارضلعی AEMF متوازی الاضلاع است. بنابراین O محل تقاطع قطرهای این متوازی الاضلاع و در نتیجه وسط AM است.

$$OM = \frac{AM}{2} = \frac{5}{2}$$



۱۶۰ ۴ عمودهای OH و AH' را بر BC وارد می‌کنیم. در این صورت

OH و AH' موازی هستند. از تعمیم قضیه تالس نتیجه می‌شود

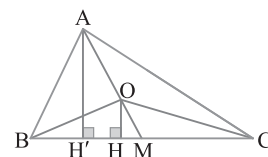
$$\triangle AMH' : OH \parallel AH' \Rightarrow \frac{OH}{AH'} = \frac{OM}{AM} \quad (۱)$$

از طرف دیگر دو مثلث ABC و OBC دارای قاعده مساوی هستند (BC)،

پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت ارتفاع‌های وارد بر این قاعده است:

$$\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}} = \frac{S'}{S} = \frac{OH}{AH'} \quad (۲)$$

با مقایسه تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\frac{S'}{S} = \frac{OM}{AM}$



۱۶۱ ۱ راه حل اول بنابر فرض سؤال

$1^\circ = \text{تعداد قطرهای } (n+1) \text{ ضلعی} - \text{تعداد قطرهای } (n+2) \text{ ضلعی}$

$$\frac{1}{2}(n+2)(n+2-3) - \frac{1}{2}(n+1)(n+1-3) = 1^\circ$$

$$\frac{1}{2}(n+2)(n-1) - \frac{1}{2}(n+1)(n-2) = 1^\circ$$

$$n^2 + n - 2 - n^2 + n + 2 = 2 \Rightarrow 2n = 2 \Rightarrow n = 1^\circ$$

بنابراین $\text{تعداد قطرهای } n \text{ ضلعی} = \frac{1}{2}n(n-3) = \frac{1}{2}(1^\circ)(1^\circ-3) = 35$

راه حل دوم تعداد قطرهای $(n+1)$ ضلعی $n(n+1-1) = n(n)$ تا کمتر از تعداد

قطرهای $(n+2)$ ضلعی است. بنابراین $n=1^\circ$. در نتیجه

$$\text{تعداد قطرهای } 1^\circ \text{ ضلعی} = \frac{(1^\circ)(1^\circ-3)}{2} = 35$$

۱۶۲ ۳ به گزاره‌های زیر توجه کنید:

- متوازی الاضلاعی که قطرهاش عمود منصف هم باشند لوزی است، ولی لزومی ندارد مربع باشد.
- در مستطیل همواره طول دو قطر برابر هستند و این ویژگی جدیدی برای مستطیل نیست.
- لوزی‌ای که دو قطرش برابر باشند، مربع است.
- متوازی الاضلاعی که قطرهاش نیمساز زاویه‌های آن باشند، لوزی است.

پس گزینه (۳) درست است.

۱۶۳ ۳ در متوازی الاضلاع مجاور مکمل اند، پس

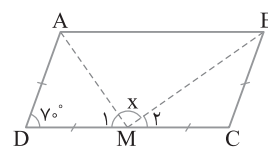
$$\hat{C} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

مثلث‌های DAM و CMB متساوی الساقین هستند. پس

$$\hat{M}_1 = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ, \quad \hat{M}_2 = \frac{180^\circ - 110^\circ}{2} = 35^\circ$$

اکنون به دست می‌آید

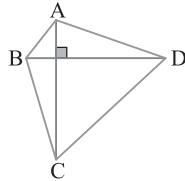
$$x = 180^\circ - (\hat{M}_1 + \hat{M}_2) = 180^\circ - (55^\circ + 35^\circ) = 90^\circ$$



از هر رأس یک $n-3$ ضلعی قطر رسم می‌شود، پس از سه رأس متوالی آن ظاهراً $3(n-3)$ قطر عبور می‌کند ولی یک قطر از بین آن‌ها دو بار محاسبه شده است:

$$3(n-3) - 1 = 3(9-3) - 1 = 17$$

در شکل زیر قطرهای چهارضلعی ABCD مساوی و بر هم عمودند ولی ABCD مربع نیست. پس گزینه (۳) نادرست است. سایر گزینه‌ها قضیه هستند.



از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی یک مستطیل به طول a و

عرض b مربعی به طول ضلع $\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)$ ایجاد می‌شود. پس طول ضلع

مربع ABCD برابر $\frac{3\sqrt{2}}{2}(4-1) = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ و مساحت آن برابر است با

$$S_{ABCD} = \left(\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

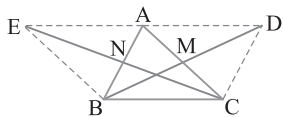
برابر نصف مساحت مستطیل اولیه است، پس $S_{MNOP} = \frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 2$.

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{MNOP}} = \frac{\frac{9}{2}}{2} = \frac{9}{4}$$

در شکل زیر نقاط M و N به ترتیب وسط AC و AB هستند.

چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است، چون قطرهاش یکدیگر را نصف می‌کنند (نقطه M وسط AC و وسط BD است). بنابراین $AD=BC$ و $AD \parallel BC$. به طور مشابه چهارضلعی ACBE نیز متوازی‌الاضلاع است، زیرا قطرهاش منصف یکدیگرند. بنابراین $AE=BC$ و $AE \parallel BC$. به این ترتیب AD و AE که موازی با BC هستند، در یک راستا قرار دارند. در نتیجه

$$\frac{DE}{BC} = 2 \text{ پس } DE = AE + AD = BC + BC = 2BC$$

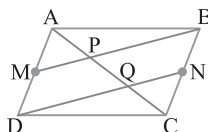


می‌توان ثابت کرد در شکل داده شده $AP=PQ=QC$. با

فرض $AP=x$ نتیجه می‌گیریم $AC=3x$ و $PQ=x$. پس بنا بر فرض سؤال می‌توان نوشت:

$$AC + PQ = 36 \Rightarrow 3x + x = 36 \Rightarrow x = 9$$

$$\text{بنابراین } AQ = 2x = 2 \times 9 = 18$$



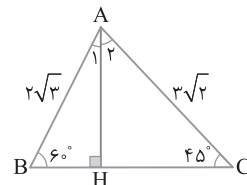
ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در دو مثلث قائم‌الزاویه ایجاد شده می‌نویسیم

$$\triangle ABH: \hat{B} = 60^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = 30^\circ \Rightarrow BH = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$\triangle ACH: \hat{C} = 45^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = 45^\circ \Rightarrow CH = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = 3$$

از جمع این دو تساوی به دست می‌آید:

$$BH + CH = \sqrt{3} + 3 \Rightarrow BC = \sqrt{3} + 3$$



اگر در مثلثی طول میانه وارد بر یک ضلع نصف طول آن ضلع باشد، آن‌گاه آن مثلث قائم‌الزاویه است. در اینجا بنا بر فرض تست

$$AM = \frac{BC}{2} \text{ پس } \hat{A} = 90^\circ \text{ از طرف دیگر } \hat{C}_1 = \frac{11}{5} \hat{B}$$

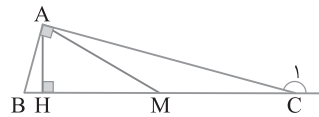
$$\hat{C}_1 = 90^\circ + \hat{B} \Rightarrow \frac{11}{5} \hat{B} = 90^\circ + \hat{B} \Rightarrow \hat{B} = 75^\circ$$

پس $\hat{C} = 15^\circ$. در نتیجه ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{2}$ برابر وتر است:

$$AH = \frac{1}{2} BC \Rightarrow 2 = \frac{1}{2} BC \Rightarrow BC = 4$$

اکنون به دست می‌آید

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \times AH = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$



در مثلث BDC پاره‌خط AB میانه

و طول آن نصف طول DC است. پس $\hat{BDC}$ قائم‌الزاویه است. بنابراین طبق قضیه فیثاغورس،

$$BD^2 = DC^2 - BC^2 = 8^2 - (2\sqrt{7})^2 = 64 - 28 = 36 \Rightarrow BD = 6$$

پس

$$BDC \text{ محیط} = BD + DC + BC = 6 + 8 + 2\sqrt{7} = 14 + 2\sqrt{7}$$

اندازه هر زاویه داخلی یک n ضلعی منتظم برابر $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$

است. پس اندازه هر زاویه داخلی یک $(n+3)$ ضلعی منتظم برابر

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{n+3} \text{ است.}$$

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{n} + 10^\circ = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n+3} \Rightarrow \frac{360^\circ}{n} - 10^\circ = \frac{360^\circ}{n+3}$$

$$\frac{360^\circ - 10^\circ n}{n} = \frac{360^\circ}{n+3}$$

$$360^\circ n + 3 \times 360^\circ - 10^\circ n^2 - 30^\circ n = 360^\circ n$$

$$10^\circ n^2 + 30^\circ n - 3 \times 360^\circ = 0 \Rightarrow 10^\circ (n-9)(n+12) = 0 \Rightarrow n = 9$$

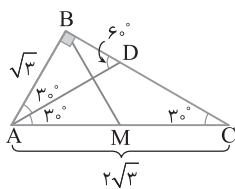
۱۸۰ ۲ چون $(\sqrt{3})^2 + 3^2 = (2\sqrt{3})^2$ پس $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

در نتیجه مثلث ABC در رأس B قائم الزاویه است. در این مثلث،

$AB = \frac{1}{2} AC$ بنابراین $\hat{A} = 60^\circ$ و $\hat{C} = 30^\circ$. چون AD نیمساز زاویه A

است، پس $\hat{BAD} = 30^\circ$. در مثلث قائم الزاویه BAD، چون $\hat{ADB} = 90^\circ$ ، پس

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} AD \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} AD \Rightarrow AD = 2$$

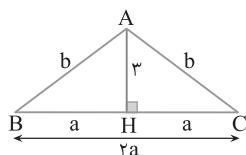


از طرف دیگر، در مثلث قائم الزاویه، طول میانه وارد بر وتر نصف وتر است، پس

$$BM = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

اکنون می توان نوشت

$$\frac{AD}{BM} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



۱۸۱ ۳ فرض می کنیم مثلث

ABC متساوی الساقین با ساق هایی به

اندازه b و قاعده ای به اندازه 2a باشد و AH

ارتفاع وارد بر قاعده باشد. در این صورت

$$\triangle AHC: AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow 3^2 = b^2 - a^2$$

$$(b-a)(b+a) = 9 \quad (1)$$

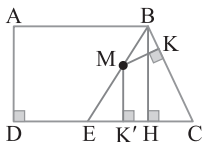
از طرف دیگر محیط مثلث ABC برابر ۱۸ است، پس

$$2b + 2a = 18 \Rightarrow b + a = 9 \quad (2)$$

از تساوی های (۱) و (۲) نتیجه می شود $b - a = 1$. بنابراین

$$\begin{cases} b+a=9 \\ b-a=1 \end{cases} \Rightarrow b=5, a=4$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} (3)(8) = 12 \text{ پس}$$



۱۸۲ ۳ مثلث BEC متساوی الساقین

با قاعده BE است. پس مجموع فاصله های

نقطه M روی قاعده آن از دو ساق CB و CE

برابر ارتفاع وارد بر ساق BH است. چون

$MK + MK' = AD$ پس $BH = AD$

۱۸۳ ۳ ساق های دوزنقه را امتداد می دهیم تا یکدیگر را در نقطه O قطع

کنند. چون $\hat{D} = 75^\circ$ و $\hat{C} = 15^\circ$ ، پس $\hat{O} = 90^\circ$. یعنی مثلث های OAB و

ODC قائم الزاویه هستند. بنابر قضیه خطوط موازی و مورب می توان نتیجه

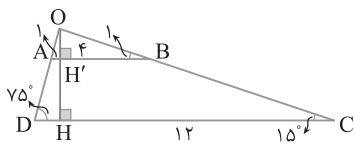
گرفت $\hat{A}_1 = 75^\circ$ و $\hat{B}_1 = 15^\circ$. اکنون اگر ارتفاع OH را بر DC وارد کنیم،

آن گاه OH بر AB نیز عمود خواهد بود، بنابراین

$$\triangle OAB: \hat{B}_1 = 15^\circ \Rightarrow OH' = \frac{AB}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\triangle ODC: \hat{C} = 15^\circ \Rightarrow OH = \frac{DC}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} HH' (AB + DC) = \frac{1}{2} (2)(4 + 12) = 16 \text{ و } HH' = 2 \text{ بنابراین}$$



۱۷۶ ۱ اگر a طول و b عرض مستطیل باشد، آن گاه از برخورد

نیمسازهای زاویه های داخلی این مستطیل مربعی به ضلع $(a-b)\frac{\sqrt{2}}{2}$ و از

برخورد نیمسازهای زاویه های خارجی آن مربعی به ضلع $(a+b)\frac{\sqrt{2}}{2}$ ایجاد

می شود. بنابر فرض سؤال،

$$\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b))^2}{(\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b))^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

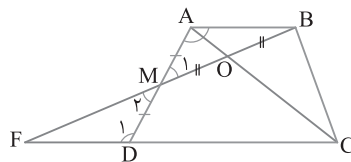
$$2\sqrt{2}a - 2\sqrt{2}b = a + b \Rightarrow (2\sqrt{2}-1)a = (2\sqrt{2}+1)b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1}$$

۱۷۷ ۳ با توجه به شکل زیر چون $AB \parallel DC$ ، از قضیه خطوط موازی و

مورب نتیجه می شود $\hat{MAB} = \hat{D}_1$ در نتیجه

$$\begin{cases} \hat{MAB} = \hat{D}_1 \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ AM = MD \end{cases} \xrightarrow{\text{(رض ز)}} \triangle ABM \cong \triangle DFM$$

بنابراین $FM = BM$. از طرف دیگر $OB = \frac{1}{2} BM$ پس $\frac{FM}{OB} = 2$.



۱۷۸ ۲ مطابق شکل از رأس A خطی موازی ضلع BC رسم می کنیم تا

قاعده CD را در نقطه E قطع کند. بنابر قضیه خطوط موازی و مورب

$$AE \parallel BC \Rightarrow \hat{AED} = \hat{C} = 30^\circ$$

پس مثلث ADE قائم الزاویه است. در ضمن ABCE متوازی الاضلاع است،

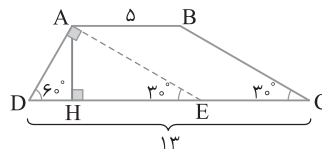
بنابراین $CE = AB = 5$ ، در نتیجه $DE = CD - CE = 8$. می دانیم در هر

مثلث قائم الزاویه، طول ضلع روبه رو به زاویه 30° ، نصف اندازه وتر و طول ضلع

روبه رو به زاویه 60° ، اندازه وتر است. پس

$$\triangle ADE: \hat{D} = 60^\circ \Rightarrow AE = \frac{\sqrt{3}}{2} DE = 4\sqrt{3}$$

$$\triangle AHE: \hat{AEH} = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{AE}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$



۱۷۹ ۱ در مثلث ABC بنابر فرض سؤال می نویسیم

$$\frac{\hat{A}}{6} = \frac{\hat{B}}{5} = \frac{\hat{C}}{1} \xrightarrow{\text{ویزگی تناسب}} \frac{\hat{A}}{6} = \frac{\hat{B}}{5} = \frac{\hat{C}}{1} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{6 + 5 + 1} = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ$$

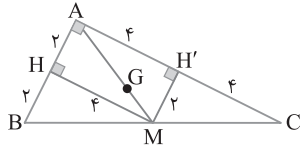
پس $\hat{A} = 90^\circ$ ، $\hat{B} = 75^\circ$ و $\hat{C} = 15^\circ$. در نتیجه مثلث ABC قائم الزاویه

است و در آن ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ وتر است. بنابراین

$$S = \frac{1}{2} (\text{وتر}) (\text{ارتفاع وارد بر وتر}) = \frac{1}{2} \left(\frac{64}{4}\right) (64) = 512$$

اگر G محل هم‌رسمی میانه‌های مثلث ABC باشد، آن‌گاه $GM = \frac{1}{3}AM$. از طرف دیگر چون در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است، پس

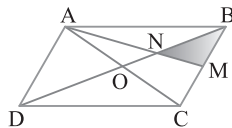
$$GM = \frac{1}{3}AM \xrightarrow{AM=BC=2\sqrt{5}} GM = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{5} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$



۱۸۸ ۳ قطر دیگر متوازی‌الاضلاع را رسم می‌کنیم تا قطر BD را در نقطه O قطع کند. چون قطرهای متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند، پس در مثلث ABC پاره‌خط BO میانه است. در ضمن AM نیز میانه است، پس نقطه هم‌رسمی میانه‌های

مثلث ABC است. پس مساحت مثلث BMN مساوی $\frac{1}{6}$ مساحت مثلث ABC است و چون مثلث ABC هم نصف متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مساحت دارد، در نتیجه

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2(6S_{BMN}) = 12S_{BMN} = 12 \times 4 = 48$$

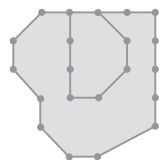


۱۸۹ ۲ b_1 و i_1 را به ترتیب تعداد نقاط مرزی و درونی چندضلعی

شبکه‌ای بزرگ در نظر می‌گیریم $b_1 = 15 \Rightarrow S_1 = \frac{b_1}{2} + i_1 - 1 = 6 + i_1$

همچنین b_2 و i_2 را به ترتیب تعداد نقاط مرزی و درونی چندضلعی شبکه‌ای

کوچک در نظر می‌گیریم $b_2 = 8 \Rightarrow S_2 = \frac{b_2}{2} + i_2 - 1 = 3 + i_2$



مساحت بین دو چندضلعی شبکه‌ای به صورت $S_1 - S_2 = 3 + i_1 - i_2$ به دست می‌آید. بنابر

فرض مسئله $i_1 - i_2 = 12$ ، پس

$3 + i_1 - i_2 = 3 + 12 = 15$

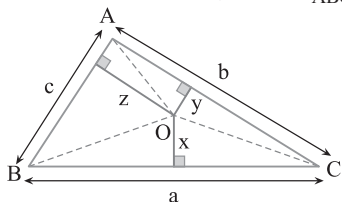
۱۹۰ ۲ برای محاسبه مساحت از قضیه پیک، می‌دانیم $S = \frac{b}{2} + i - 1$.

اگر به نقطه‌های درونی ۱ واحد اضافه شود به دست می‌آید $S' - S = (\frac{b}{2} + i) - (\frac{b}{2} + i - 1) = 1$ بنابراین $S' = \frac{b}{2} + i + 1 = \frac{b}{2} + i + 1$ یعنی مقدار مساحت ۱ واحد افزایش می‌یابد.

۱۹۱ ۲ از نقطه O به سه رأس مثلث ABC وصل می‌کنیم. مثلث ABC به سه مثلث OBC ، OAC و OAB تقسیم می‌شود (شکل زیر را ببینید). توجه کنید که

$$S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OAC} + S_{OAB} = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}by + \frac{1}{2}cz = \frac{1}{2}(ax + by + cz)$$

بنابراین $ax + by + cz = 2S_{ABC} = 2S$

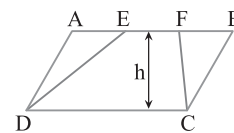


۱۸۴ ۱ چهارضلعی $DCFE$ دوزنقه است و اندازه ارتفاع آن با اندازه ارتفاع متوازی‌الاضلاع $ABCD$ برابر است. پس

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{DCFE}} = \frac{h \times DC}{\frac{1}{2}h(EF + DC)} = \frac{2DC}{EF + DC}$$

از طرف دیگر بنابر فرض $AB = 3EF$ و چون $AB = DC$ ، پس $DC = 3EF$. در نتیجه

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{DCFE}} = \frac{2(3EF)}{EF + 3EF} = \frac{6EF}{4EF} = \frac{3}{2}$$



۱۸۵ ۱ از نقطه O خطی عمود بر دو قاعده دوزنقه رسم می‌کنیم تا قاعده‌های AB و DC را به ترتیب در H' و H قطع کند (شکل زیر را ببینید).

$$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle OAB \sim \triangle OCD$$

$$\frac{AB}{DC} = \frac{OA}{OC} \quad (1)$$

$$\triangle ODC: OC^2 = DC^2 - OD^2 = 15^2 - 9^2 = 144 \Rightarrow OC = 12 \quad (2)$$

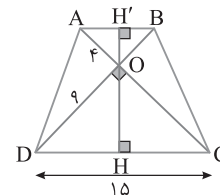
$$\xrightarrow{(1) \text{ و } (2)} \frac{AB}{15} = \frac{4}{12} \Rightarrow AB = 5$$

از طرف دیگر بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$\triangle ODC: OH \times DC = OD \times OC \Rightarrow OH = \frac{9 \times 12}{15} \Rightarrow OH = \frac{36}{5}$$

$$\triangle OAB \sim \triangle OCD \Rightarrow \frac{OH'}{OH} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{OH'}{\frac{36}{5}} = \frac{5}{15} \Rightarrow OH' = \frac{12}{5}$$

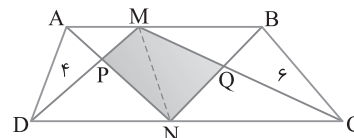
بنابراین $HH' = \frac{36}{5} + \frac{12}{5} = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$ ارتفاع دوزنقه



۱۸۶ ۴ نقطه‌های M و N را به هم وصل می‌کنیم (شکل زیر را ببینید). چهارضلعی‌های $AMND$ و $MBCN$ دوزنقه هستند. بنابر قضیه شبه‌پروانه

$$S_{MPN} = S_{APD} = 4, \quad S_{MQN} = S_{BCQ} = 6$$

در نتیجه $S_{MPNQ} = S_{MPN} + S_{MQN} = 4 + 6 = 10$



۱۸۷ ۲ چون نقطه هم‌رسمی عمود منصف‌ها روی یکی از اضلاع قرار دارد،

پس مثلث قائم‌الزاویه است و نقطه هم‌رسمی عمود منصف‌ها وسط وتر است. پس شکل مسئله به صورت زیر است. چهارضلعی $AHMH'$ مستطیل است، پس $HM = AH' = CH' = 4$ و $MH' = AH = BH = 2$ فیثاغورس در مثلث ABC نتیجه می‌شود

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 4^2 + 8^2 = 80 \Rightarrow BC = 4\sqrt{5}$$

۱۹۵ ۴ دو ضلع AB و DC را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطه O

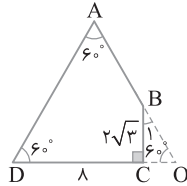
قطع کنند. در این صورت مثلث OAD متساوی‌الاضلاع است، زیرا $\hat{O} = 60^\circ$. پس

$$\triangle OBC: \hat{B}_1 = 30^\circ \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{OC}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{OC}{2\sqrt{3}} \Rightarrow OC = 2$$

$$OD = 1.$$

بنابراین

$$S_{ABCD} = S_{OAD} - S_{OBC} = \frac{\sqrt{3}}{4} OD^2 - \frac{1}{2} (OC \times BC) \\ = \frac{\sqrt{3}}{4} (1)^2 - \frac{1}{2} (2 \times 2\sqrt{3}) = 25\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 23\sqrt{3}$$



۱۹۶ ۳ نقاط M و N وسط‌های ساق‌های دوزنقه ABCD هستند،

پس MN میان‌خط دوزنقه ABCD است. در نتیجه MN موازی دو قاعده و

مساوی نصف مجموع دو قاعده است، یعنی

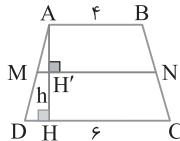
$$MN = \frac{AB + DC}{2} = \frac{4 + 6}{2} = 5$$

در ضمن اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، آن‌گاه

$$\triangle ADH: MH' \parallel DH \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AM}{MD} = \frac{AH'}{HH'} \\ \xrightarrow{AM=MD} AH' = HH' = h$$

بنابراین

$$\frac{S_{MNCD}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} h (MN + DC)}{\frac{1}{2} (2h) (AB + DC)} = \frac{5 + 6}{2(4 + 6)} = \frac{11}{20} = 0.55$$



۱۹۷ ۴ می‌دانیم نقطه برخورد میانه‌ها در هر مثلث هر میانه را به نسبت

۱ به ۲ تقسیم می‌کند. پس

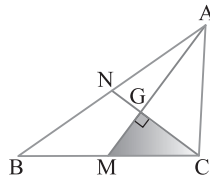
$$GM = \frac{1}{3} AM = \frac{1}{3} \times 9 = 3, \quad GC = \frac{2}{3} CN = \frac{2}{3} \times 6 = 4$$

چون مثلث GMC قائم‌الزاویه است، پس

$$S_{GMC} = \frac{1}{2} GM \times GC = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

در ضمن می‌دانیم اگر میانه‌های مثلثی رسم شوند، آن‌ها به شش مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند و مثلث GMC یکی از این شش مثلث است. پس

$$S_{ABC} = 6 S_{GMC} = 6 \times 6 = 36$$



۱۹۲ ۱ مطابق شکل زیر اگر طول MA را برابر ۳x از نظر بگیریم، آن‌گاه از

فرض $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$ نتیجه می‌گیریم $MB = 2x$. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم.

چون $MN \parallel BC$ ، پس AH بر MN نیز عمود است. بنابر قضیه اساسی تشابه،

$$MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AH'}{AH} = \frac{AM}{AB} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$$

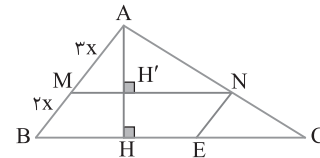
با تفصیل در صورت کردن تناسب فوق نتیجه می‌شود $\frac{HH'}{AH} = \frac{2}{5}$. از طرف دیگر با

استفاده از تعمیم قضیه تالس به تناسب $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{3}{5}$ می‌رسیم. اکنون

می‌توانیم نسبت مساحت متوازی‌الاضلاع به مساحت مثلث ABC را به دست آوریم:

$$\frac{S_{BMNE}}{S_{ABC}} = \frac{HH' \times MN}{\frac{1}{2} AH \times BC} = 2 \left(\frac{HH'}{AH} \right) \left(\frac{MN}{BC} \right) = 2 \left(\frac{2}{5} \right) \left(\frac{3}{5} \right) = \frac{12}{25}$$

عدد $\frac{12}{25}$ معادل $\frac{12}{25} \times 100 = 48\%$ است.



۱۹۳ ۳ از B موازی AD رسم کرده‌ایم تا DC را در E قطع کند.

چهارضلعی ABED متوازی‌الاضلاع است و در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های مقابل با هم برابرند:

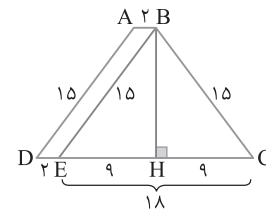
$$DE = AB = 2 \Rightarrow EC = CD - DE = 20 - 2 = 18, \quad BE = AD = 15$$

مثلث BCE متساوی‌الساقین است. ارتفاع BH را در این مثلث رسم کرده‌ایم.

در مثلث BCH بنابر قضیه فیثاغورس،

$$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AB + CD) \times BH = \frac{1}{2} (2 + 20) \times 12 = 132$$



۱۹۴ ۱ اگر نقطه‌های M و N وسط‌های دو ساق دوزنقه ABCD

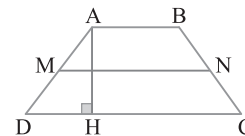
باشند، آن‌گاه بنابر قضیه میان‌خط در دوزنقه $MN = \frac{AB + CD}{2}$ (۱)

از طرف دیگر مساحت دوزنقه برابر است با

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AB + CD) \times AH$$

$$28 = \frac{1}{2} (AB + CD) \times 7 \Rightarrow \frac{1}{2} (AB + CD) = 4 \quad (2)$$

از برابری‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید $MN = 4$.



۲۰۱ ۴ اندازه هر زاویه مربع برابر 90° و اندازه هر زاویه داخلی پنج‌ضلعی

منتظم برابر $108^\circ = \frac{(5-2)180^\circ}{5}$ است. در ضمن $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$ (شکل

زیر را ببینید)، بنابراین $90^\circ + 108^\circ + \gamma = 360^\circ \Rightarrow \gamma = 162^\circ$

از طرف دیگر اندازه هر زاویه داخلی n ضلعی منتظم مساوی $\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$

است. در نتیجه

$$\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n} = 162^\circ \Rightarrow 18^\circ n - 360^\circ = 162^\circ n$$

$$18^\circ n = 360^\circ \Rightarrow n = 20$$

۲۰۲ ۲ در مثلث متساوی الساقین زاویه‌های روبه‌روی ساق‌ها مساوی هستند،

پس $\hat{B} = \hat{C} = \alpha$. چون $AMNP$ متوازی‌الاضلاع است، پس ضلع‌های مقابل در آن موازی هستند. بنابر قضیه خطوط موازی و مورب،

$$AC \parallel MN \xrightarrow{\text{مورب } BC} \hat{N}_1 = \hat{C} = \alpha = \hat{B} \Rightarrow MB = MN$$

بنابراین

$$(AMNP) \text{ محیط} = 2(AM + MN)$$

$$= 2(AM + MB)$$

$$= 2AB = 10$$

۲۰۳ ۳ با استفاده از فرض‌های تست شکل زیر را رسم کرده‌ایم. در مثلث

قائم‌الزاویه AHB ، پاره‌خط HE میانه‌ی وارد بر وتر است، پس $HE = \frac{1}{2} AB = AE$

. یعنی مثلث AEH متساوی الساقین است. بنابراین (۱) $\hat{H}_1 = \hat{A}_1$

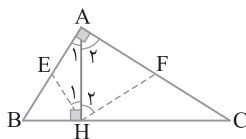
از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه AHC ، پاره‌خط HF میانه‌ی وارد بر وتر است،

پس (۲) $HF = \frac{AC}{2} = AF$. یعنی مثلث AFC متساوی الساقین است. بنابراین

$$\hat{H}_2 = \hat{A}_2 \quad (2)$$

از جمع کردن تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2$

یعنی $\hat{EHF} = \hat{A} = 90^\circ$



۲۰۴ ۳ در مثلث قائم‌الزاویه ABC زاویه C برابر 45° است، پس این مثلث

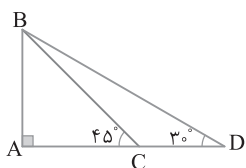
متساوی الساقین است و $AB = AC$. از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه ABD ،

$$\hat{D} = 30^\circ \Rightarrow AB = \frac{BD}{2}, \quad \hat{ABD} = 60^\circ \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{3}}{2} BD$$

بنابراین $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AD} = \frac{\frac{BD}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} BD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. با تفصیل در مخرج کردن این

$$\frac{AC}{AD - AC} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1}$$

تناسب به دست می‌آید



۱۹۸ ۳ شکل سؤال به صورت زیر است. دو مثلث APM و PRM در

ارتفاع نظیر رأس P مشترک هستند. پس

$$\frac{S_{PRM}}{S_{APM}} = \frac{RM}{AM} = \frac{y}{4y} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

در ضمن دو مثلث APM و ABM دارای ارتفاع مشترک از رأس M هستند. پس

$$\frac{S_{APM}}{S_{ABM}} = \frac{AP}{AB} = \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5} \quad (2)$$

در مثلث ABC پاره‌خط AM میانه است. پس دو مثلث ABM و AMC

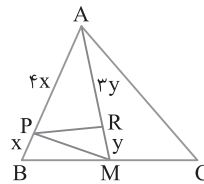
هم‌مساحت‌اند. پس

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

از تساوی‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم

$$S_{PRM} = \frac{1}{4} S_{APM} = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{5} S_{ABM} \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} S_{ABC} \right) = \frac{1}{10} S_{ABC}$$

$$\frac{S_{PRM}}{S_{ABC}} = \frac{1}{10} = 10\% \text{ بنابراین}$$



۱۹۹ ۲ فرض کنید S مساحت چندضلعی شبکه‌ای اولیه و S' مساحت

چندضلعی شبکه‌ای جدید باشد. بنابر قضیه پیک،

$$S = \frac{b}{2} + i - 1, \quad S' = \frac{b + \lambda}{2} + (i - 1) - 1$$

از طرف دیگر $S' = 3S$ پس

$$\frac{b + \lambda}{2} + i - 2 = 3 \left(\frac{b}{2} + i - 1 \right) \Rightarrow \frac{b}{2} + 4 + i - 2 = \frac{3b}{2} + 3i - 3 \Rightarrow b + 2i = 5$$

با استفاده از تساوی بالا، در جدول زیر حالت‌های مختلف i و b نوشته شده است.

i	۰	۱	۲
b	۵	۳	۱

مسلماً حالت $b = 1$ و $i = 2$ قابل قبول نیست، زیرا $b \geq 3$. در ضمن حالت

$b = 5$ و $i = 0$ نیز قابل قبول نیست، زیرا در این صورت در چندضلعی شبکه‌ای

جدید تعداد نقاط درونی -1 می‌شود که ممکن نیست. پس فقط حالت $i = 1$

و $b = 3$ قابل قبول است.

۲۰۰ ۳ فرض کنید b تعداد نقاط مرزی، i تعداد نقاط درونی و S

مساحت چندضلعی شبکه‌ای کوچک‌تر باشد. در این صورت $b' = 4b$ و

$i' = 3i$ و $S' = 4S$ به ترتیب تعداد نقاط مرزی، درونی و مساحت چندضلعی

شبکه‌ای بزرگ‌تر هستند. بنابر قضیه پیک

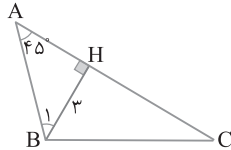
$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \quad (1)$$

$$S' = \frac{b'}{2} + i' - 1 \Rightarrow 4S = \frac{4b}{2} + 3i - 1 \xrightarrow{(1)} 4 \left(\frac{b}{2} + i - 1 \right) = 2b + 3i - 1 \Rightarrow 2b + 4i - 4 = 2b + 3i - 1 \Rightarrow i = 3$$

در هر چندضلعی شبکه‌ای کمترین تعداد نقاط مرزی برابر ۳ است، پس حداقل

مساحت چندضلعی شبکه‌ای کوچک‌تر برابر است با

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{3}{2} + 3 - 1 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$$



۲۰۸ ۳ چون $2S = ah_a = bh_b = ch_c$ پس

$$a = \frac{2S}{h_a}, \quad b = \frac{2S}{h_b}, \quad c = \frac{2S}{h_c}$$

این عبارت‌ها را در تساوی داده شده قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{\frac{2S}{h_a}} + \frac{1}{\frac{2S}{h_b}} + \frac{1}{\frac{2S}{h_c}} = \frac{4}{S} \Rightarrow \frac{h_a}{2S} + \frac{h_b}{2S} + \frac{h_c}{2S} = \frac{4}{S} \Rightarrow h_a + h_b + h_c = 8$$

۲۰۹ ۴ بنابر قضیه میان‌خط در دوزنقه، طول پاره‌خطی که وسط‌های دو

ساق دوزنقه را به هم وصل می‌کند نصف مجموع طول دو قاعده است. پس

مجموع طول دو قاعده این دوزنقه برابر ۱۶ است. بنابراین

$$32 = \frac{1}{2} (4)(16) = \frac{1}{2} (\text{مجموع طول دو قاعده}) (\text{ارتفاع}) = \frac{1}{2} (4) (16) = 32$$

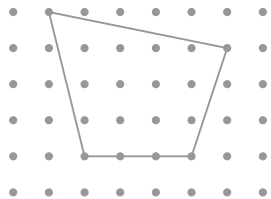
۲۱۰ ۲ با توجه به شکل تعداد نقطه‌های مرزی برابر ۶ و تعداد نقطه‌های

درونی ۱۲ است ($i=12$ و $b=6$). در نتیجه مساحت شکل مورد نظر برابر

است با $S = \frac{b}{2} + i - 1 = 3 + 12 - 1 = 14$. اگر وسط‌های ضلع‌های مجاور یک

چهارضلعی را به هم وصل کنیم، مساحت چهارضلعی ایجاد شده نصف مساحت

چهارضلعی اصلی است. بنابراین مساحت چهارضلعی حاصل برابر $\frac{14}{2} = 7$ است.



۲۱۱ ۲ اگر یک n ضلعی به $(n+1)$ ضلعی تبدیل شود، به تعداد قطره‌ای

n ضلعی $n-1$ قطر اضافه می‌شود. پس n ضلعی نسبت به $(n-1)$ ضلعی

$$n-2 = \frac{3}{4}(n-1) \quad \text{اکنون می‌توان نوشت}$$

در نتیجه $n=5$. مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب برابر

$$(n-2) \times 180^\circ \text{ است. چون } n=5, \text{ پس}$$

$$540^\circ = (5-2) \times 180^\circ = \text{مجموع زاویه‌های داخلی پنج ضلعی محدب}$$

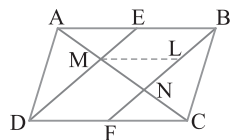
۲۱۲ ۴ چون $BE \parallel DF$ و $BE = DF$ ، پس چهارضلعی BEDF

متوازی‌الاضلاع است. بنابراین $BF \parallel DE$. اگر از M خطی موازی EB رسم کنیم تا

NB را در L قطع کند، آن‌گاه BLME متوازی‌الاضلاع است، پس

ML = BE = AE = FC. در نتیجه سه مثلث AME و MNL و CNF به حالت

(رض ز) همنهشت هستند و در نتیجه $AM = MN = NC$ ، یعنی $NC = \frac{1}{3} MC$.



۲۰۵ ۴ از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی مستطیل ABCD

(با طول AB و عرض BC) مربع MNEF ایجاد می‌شود به طوری که اندازه

ضلع این مربع $\frac{\sqrt{2}}{2}(AB-BC)$ است. پس طول قطر این مربع یعنی ME

مساوی $\sqrt{2}$ برابر اندازه ضلع این مربع است. بنابراین

$$ME = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (AB-BC) \right) = AB-BC \quad (1)$$

با توجه به شکل چون نقطه‌های M و E روی طول‌های مستطیل ABCD قرار

دارند، پس $ME = BC$. پس از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$BC = AB-BC \Rightarrow AB = 2BC \quad (2)$$

از طرف دیگر بنابر فرض تست، مساحت مربع MNEF برابر ۸ است. بنابراین

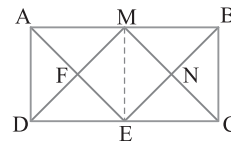
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} (AB-BC) \right)^2 = 8 \Rightarrow \frac{(AB-BC)^2}{2} = 8 \Rightarrow AB-BC = 4 \quad (3)$$

از تساوی‌های (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم

$$2BC - BC = 4 \Rightarrow BC = 4, \quad AB = 8$$

$$\text{محیط } (ABCD) = 2(AB+BC) = 2(8+4) = 24$$

بنابراین



۲۰۶ ۲ می‌دانیم تفاضل فاصله‌های هر نقطه دلخواه بر امتداد قاعده مثلث

متساوی‌الساقین از دو ساق برابر طول ارتفاع وارد بر ساق است و این ویژگی به

اینکه M در کجای امتداد قاعده قرار دارد بستگی ندارد. پس فرض

$MB = 4MC$ در حل این تست تأثیری ندارد. بنابراین با توجه به شکل باید

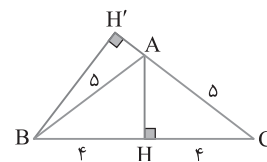
اندازه ارتفاع $BH' = 4$ را به دست آوریم. به همین علت ابتدا مساحت مثلث ABC

را پیدا می‌کنیم. برای این کار ارتفاع AH وارد بر قاعده BC را رسم می‌کنیم.

می‌دانیم این ارتفاع، میانه هم هست. بنابراین $AH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. در نتیجه

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} BH' \times AC \Rightarrow 3 \times 8 = BH' \times 5$$

$$BH' = \frac{24}{5} = 4 \frac{4}{5}$$



۲۰۷ ۴ مثلث قائم‌الزاویه ABH یک زاویه 45° دارد، پس زاویه B

نیز 45° است (شکل زیر را ببینید). بنابراین مثلث ABH متساوی‌الساقین است و

$$AH = BH = 3. \text{ در ضمن مساحت مثلث } ABC \text{ مساوی } \frac{9}{2}(1+\sqrt{3})$$

است. بنابراین

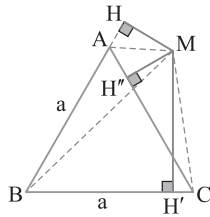
$$S_{ABC} = \frac{9}{2}(1+\sqrt{3}) \Rightarrow \frac{1}{2} BH \times AC = \frac{9}{2}(1+\sqrt{3})$$

$$\frac{1}{2} \times 3 \times AC = \frac{9}{2}(1+\sqrt{3}) \Rightarrow AC = 3 + 3\sqrt{3}$$

چون $AH = 3$ و $AC = 3 + 3\sqrt{3}$ ، پس $CH = 3\sqrt{3}$. در نتیجه بنابر

قضیه فیثاغورس در مثلث BHC

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 = 3^2 + (3\sqrt{3})^2 = 36 \Rightarrow BC = 6$$



۲۱۶ ۳ فرض می‌کنیم h طول ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع a باشد. از نقطه M به رأس‌های مثلث ABC وصل می‌کنیم. با توجه به شکل نتیجه می‌شود

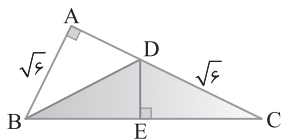
$$S_{ABC} = S_{AMB} + S_{MBC} - S_{AMC}$$

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}MH \times a + \frac{1}{2}MH' \times a - \frac{1}{2}MH'' \times a \Rightarrow h = MH + MH' - MH''$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر طول ارتفاع مثلث ABC است.

۲۱۷ ۲ در مثلث BCD پاره‌خط AB ارتفاع وارد بر ضلع DC است.

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}AB \times DC = \frac{1}{2}(\sqrt{6})(\sqrt{6}) = 3$$



۲۱۸ ۲ چون $ah_a = bh_b$ پس $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$ در نتیجه $\frac{a}{b} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ یعنی $b = 2a$

از طرف دیگر بنا بر فرض تست محیط مثلث برابر $5a$ است. بنابراین

$$a + b + c = 5a \Rightarrow b + c = 4a \xrightarrow{b=2a} 2a + c = 4a \Rightarrow c = 2a$$

چون $b = 2a$ و $c = 2a$ پس $b = c$ ، در نتیجه مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۲۱۹ ۳ می‌دانیم در دوزنقه $ABCD$ ، مساحت مثلث OBC برابر

است با مساحت مثلث OAD . پس مساحت مثلث OAD نیز برابر ۸ است.

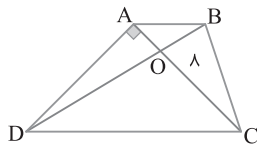
از طرف دیگر $OA = \frac{1}{3}OC$ پس $OA = \frac{1}{4}AC$ در نتیجه $OA = \frac{1}{4} \times 8 = 2$.

چون مثلث OAD قائم‌الزاویه است، پس

$$S_{OAD} = \frac{1}{2}AD \times OA \Rightarrow 8 = \frac{1}{2} \times AD \times 2 \Rightarrow AD = 8$$

از قضیه فیثاغورس در مثلث ADC نتیجه می‌شود

$$DC^2 = AD^2 + AC^2 = 8^2 + 8^2 \Rightarrow DC = 8\sqrt{2}$$



۲۲۰ ۴ مساحت چهارضلعی شبکه‌ای $ABCD$ را به کمک قضیه پیک

به‌دست می‌آوریم. در این چهارضلعی شبکه‌ای $b = 10$ و $i = 16$. پس

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{10}{2} + 16 - 1 = 20$$

اندازه قاعده‌های AB و CD را در این دوزنقه به‌دست می‌آوریم

$$AB^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \Rightarrow AB = 3\sqrt{2}$$

$$CD^2 = 5^2 + 5^2 = 50 \Rightarrow CD = 5\sqrt{2}$$

در صورتی که h طول ارتفاع این دوزنقه باشد، می‌توان نوشت

$$S = \frac{1}{2}h(AB + DC) \Rightarrow 20 = \frac{1}{2}h(3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}) \Rightarrow h = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

۲۱۳ ۲ از رأس D عمود DH' را بر AH وارد می‌کنیم. در این صورت

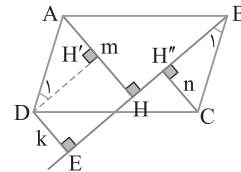
چهارضلعی $DEHH'$ مستطیل است، پس $HH' = k$. از طرف دیگر دو مثلث قائم‌الزاویه ADH' و CBH'' همنهشت هستند، زیرا

$$\begin{cases} \hat{D}_1 = \hat{B}_1 \\ AD = BC \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} \triangle ADH' \cong \triangle CBH''$$

$$\hat{H}' = \hat{H}'' = 90^\circ$$

در نتیجه $AH' = CH'' = n$ چون $AH = m$ پس

$$AH = AH' + HH' \Rightarrow m = n + k$$



۲۱۴ ۲ فرض می‌کنیم ارتفاع ساختمان یعنی AH برابر x باشد (شکل زیر را

ببینید). در مثلث قائم‌الزاویه ABH یک زاویه حاده 45° است، پس این مثلث

متساوی‌الساقین نیز هست. بنابراین $BH = AH = x$. از طرف دیگر در مثلث

قائم‌الزاویه AHC زاویه C برابر 30° است. در نتیجه $\hat{HAC} = 60^\circ$ و می‌توان نوشت

$$\triangle AHC: \hat{C} = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{AC}{2} \quad (1)$$

$$\triangle AHC: \hat{HAC} = 60^\circ \Rightarrow HC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC \quad (2)$$

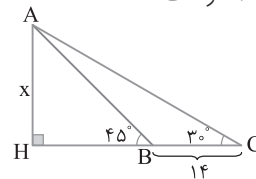
از تقسیم تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{AH}{HC} = \frac{\frac{AC}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{x}{x + 14} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x\sqrt{3} = x + 14$$

$$x(\sqrt{3} - 1) = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{\sqrt{3} - 1}$$

عدد $\sqrt{3}$ تقریباً مساوی 1.7 است، بنابراین $x \approx \frac{14}{1.7 - 1} = 20$.

ارتفاع ساختمان تقریباً 20 متر است.



۲۱۵ ۲ فرض کنید $AD = a$ ، در این صورت $AB = 2a$. اکنون

نیمساز زاویه C را رسم می‌کنیم تا AB را در M قطع کند. در این صورت بنا بر

قضیه خطوط موازی و مورب،

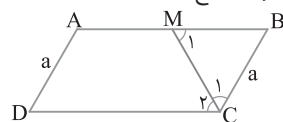
$$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{مورب MC}} \hat{M}_1 = \hat{C}_1 \xrightarrow{\hat{C}_1 = \hat{C}_2} \hat{M}_1 = \hat{C}_1$$

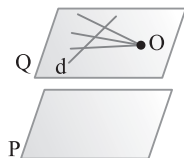
$$MB = BC = a$$

چون $AB = 2a$ ، پس نقطه M وسط AB است. به همین ترتیب نتیجه

می‌شود نیمساز زاویه D نیز از نقطه M وسط AB می‌گذرد پس نقطه تلاقی

نیمسازهای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ وسط ضلع AB است.





۲۲۵ ۲ تنها زمانی شرایط مسئله رخ

می‌دهد که صفحه گذرنده از نقطه O و خط d (صفحه Q در شکل زیر) با صفحه P موازی باشد. در این حالت خط d موازی صفحه P است. پس گزینه (۲) درست است.

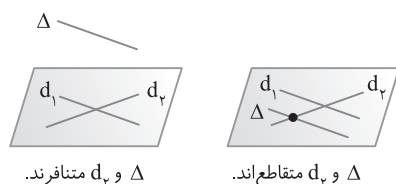
(توجه کنید که لازم است نقطه O و خط d در صفحه موازی با P قرار داشته باشند تا شرایط سؤال برقرار شود)

۲۲۶ ۱ می‌دانیم دو خط عمود بر یک صفحه با هم موازی‌اند. پس اگر

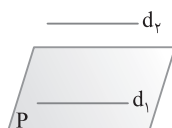
صفحه‌ای مانند P وجود داشته باشد که d و d' بر آن عمود باشند، می‌توان نتیجه گرفت که d و d' موازی‌اند و این خلاف فرض مسئله است. نتیجه می‌گیریم هیچ صفحه‌ای مانند P وجود ندارد.

۲۲۷ ۳ دو خط Δ و d_p می‌توانند متقاطع یا متناظر باشند اما نمی‌توانند

موازی باشند. در حقیقت، می‌دانیم دو خط موازی با یک خط، با هم موازی‌اند. اگر Δ و d_p موازی باشند، باید d_1 و d_p هم موازی باشند و این امکان ندارد. حالت متقاطع و متناظر بودن Δ و d_p را در شکل‌های زیر ببینید.



۲۲۸ ۴ خط d_p می‌تواند با صفحه P موازی باشد.



و از طرف دیگر خط d_p می‌تواند بر صفحه P واقع باشد.



۲۲۹ ۴ دو خط AB و CD حتماً متناظر هستند زیرا در غیر این صورت با

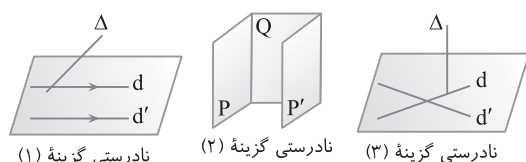
متقاطع یا موازی خواهند بود. که در هر دو حالت صفحه‌ای وجود دارد که شامل خطوط AB و CD می‌شود. یعنی چهار نقطه A, B, C, D در یک صفحه قرار می‌گیرند که با فرض سؤال در تناقض است. پس AB و CD متناظرند.

۲۳۰ ۲ فقط گزاره‌های (پ) و (ت) همواره درست

هستند. گزاره (الف) نادرست است. زیرا اگر Δ با تمام خط‌های صفحه P موازی باشد، آن‌گاه تمام خط‌ها در صفحه P با هم موازی‌اند که نادرست است. در ضمن خط Δ با نامتناهی خط از صفحه P موازی و با نامتناهی خط از صفحه P متناظر است. پس گزاره (ب) نیز نادرست است.

۲۳۱ ۴ در فضا اگر صفحه‌ای یکی از دو خط موازی را قطع کند لزوماً

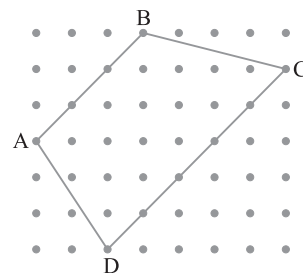
خط دیگر را نیز قطع می‌کند. پس گزینه (۴) درست است. در شکل‌های زیر، نادرستی سایر گزینه‌ها را می‌توانید ببینید.



نادرستی گزینه (۱)

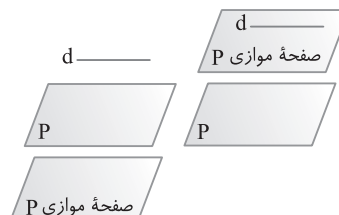
نادرستی گزینه (۲)

نادرستی گزینه (۳)

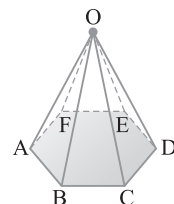


۲۲۱ ۴ خط d صفحه P را قطع نکرده است، پس d با P موازی است.

پس هر صفحه موازی با P با خط d موازی است یا خط d بر آن واقع است.



نادرستی سایر گزینه‌ها را بررسی کنید.



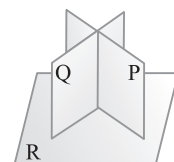
۲۲۲ ۲ در هرم با قاعده شش ضلعی (شکل

زیر) یال AB با یال‌های OC و OD و OE و OF متناظر است. توجه کنید AB با یال‌های BC و CD و ED و EF و AF نمی‌تواند متناظر باشد زیرا AB با آن‌ها در یک صفحه است. در ضمن AB با یال‌های OA و OB متقاطع است.

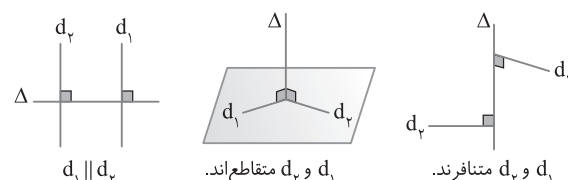
۲۲۳ ۳ بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱) اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد با نامتناهی خط از آن صفحه موازی است، اما با تمام خط‌های آن صفحه موازی نیست و با برخی متناظر است.

گزینه (۲) در شکل زیر دو صفحه P و Q بر صفحه R عمود هستند، ولی با هم موازی نیستند.

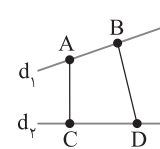


گزینه (۴) دو خط عمود بر یک خط در فضا، لزوماً موازی نیستند.

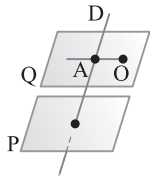


۲۲۴ ۲ ثابت می‌کنیم AC و BD متناظر هستند.

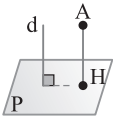
برهان خلف فرض می‌کنیم AC و BD متناظر نباشند (فرض خلف). دو حالت رخ می‌دهد: AC و BD موازی هستند یا اینکه AC و BD متقاطع هستند. در هر دو حالت صفحه‌ای شامل AC و BD دارد (این صفحه را P می‌نامیم). چون A و B در صفحه P هستند، پس خط d_1 در این صفحه است و از طرف دیگر چون C و D در صفحه P هستند، پس d_p هم در صفحه P قرار دارد. این



مطلب با متناظر بودن d_1 و d_p در تناقض است (چون دو خط متناظر نمی‌توانند در یک صفحه قرار گیرند) در نتیجه AC و BD نه موازی و نه متقاطع‌اند. یعنی AC و BD متناظرند.



۲۳۹ ۱ از نقطه O صفحه Q را موازی با صفحه P رسم می‌کنیم تا خط D را در نقطه A قطع کند. در این صورت OA خط مورد نظر است، زیرا خط OA خط D را قطع کرده و چون در صفحه‌ای قرار دارد که با صفحه P موازی است، پس موازی صفحه P است.



۲۴۰ ۴ می‌دانیم از نقطه A فقط یک خط مثل AH موازی با خط d می‌توان رسم کرد. چون $d \perp P$ ، پس $AH \perp P$ ، بنابراین از AH هر صفحه‌ای عبور کند هم عمود بر صفحه P و هم موازی d است. توجه کنید که یکی از این صفحات شامل دو خط d و AH است که در این حالت d بر آن صفحه واقع می‌شود.



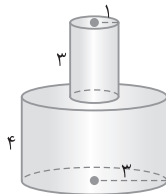
۲۴۱ ۴ نمای چپ شکل به صورت 6×6 و نمای بالای آن به شکل 3×3 است. اگر مساحت هر مربع کوچک a واحد مربع باشد، آن‌گاه مساحت نمای چپ $8 \times a$ واحد مربع و مساحت نمای بالا $6 \times a$ واحد مربع است. بنابراین

$$\frac{\text{مساحت نمای چپ}}{\text{مساحت نمای بالا}} = \frac{8 \times a}{6 \times a} = \frac{4}{3}$$

۲۴۲ ۳ در کل شکل مورد نظر از ۶۰ مکعب تشکیل شده است. ۱۲ مکعب که شکل نمای بالای خواسته شده را تشکیل می‌دهند نگه می‌داریم و سایر مکعب‌ها را برمی‌داریم. پس حداکثر مکعب‌های حذف شده برابر است. $60 - 12 = 48$

۲۴۳ ۱ این شکل فضایی استوانه‌ای به شعاع قاعده ۱ و ارتفاع ۳ است که روی استوانه دیگری به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۴ قرار دارد (شکل زیر را ببینید). بنابراین حجم استوانه به ارتفاع ۳ + حجم استوانه به ارتفاع ۴ = حجم شکل

$$= \pi(3)^2(4) + \pi(1)^2(3) = 36\pi + 3\pi = 39\pi$$



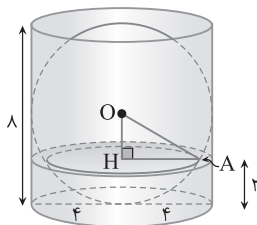
۲۴۴ ۲ شکل سؤال به صورت زیر است. صفحه موازی با قاعده استوانه به فاصله ۲ از آن این شکل را در دو دایره قطع می‌کند. در حقیقت، استوانه را در دایره‌ای به شعاع ۴ مساوی شعاع قاعده استوانه و کره را در دایره‌ای به شعاع AH قطع می‌کند. توجه کنید که

$$OH = 4 - 2 = 2, \quad OA = \text{شعاع کره} = 4$$

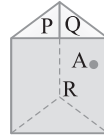
$$\triangle OAH: AH^2 = OA^2 - OH^2 = 4^2 - 2^2 = 12 \Rightarrow AH = 2\sqrt{3}$$

پس مساحت مقطع حاصل مساحت بین دو دایره به شعاع‌های ۴ و $2\sqrt{3}$ است:

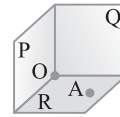
$$\text{مساحت خواسته شده} = \pi(4)^2 - \pi(2\sqrt{3})^2 = 16\pi - 12\pi = 4\pi$$



۲۳۲ ۴ سه صفحه دایره دو متقاطع R، Q و P به دو صورت که در شکل‌های (۱) و (۲) رسم شده‌اند، می‌توانند باشند. در شکل (۱) سه صفحه دارای نقطه مشترک O هستند که مورد نظر سؤال نیست و در شکل (۲) سه صفحه دایره دو متقاطع‌اند و فاقد نقطه مشترک هستند، ولی از این نوع صفحات گذرنده از A و متقاطع با Q و P نامتناهی وجود دارد.



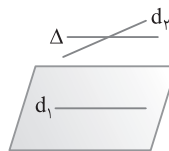
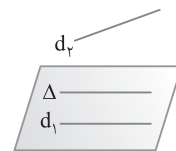
شکل (۲)



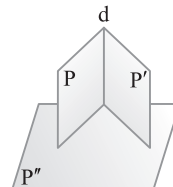
شکل (۱)

۲۳۳ ۳ دو خط AB و EE' در یک صفحه قرار ندارند و موازی با هم نیستند، پس متناظرند. نادرستی سایر گزینه‌ها را بررسی کنید.

۲۳۴ ۳ دو خط Δ و d_1 نمی‌توانند موازی باشند. چون اگر $d_1 \parallel \Delta$ ، آن‌گاه از $d_1 \parallel \Delta$ نتیجه می‌گیریم $d_1 \parallel d_2$ که درست نیست. به شکل‌های زیر نگاه کنید:

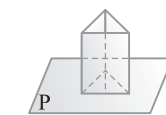
 Δ و d_1 متقاطع‌اند. Δ و d_2 متناظرند.

۲۳۵ ۴ می‌دانیم دو خط عمود بر یک صفحه موازی‌اند. پس گزینه (۴) درست است. البته گزینه (۲) نیز می‌تواند قابل قبول باشد ولی گزینه (۴) دقیق‌تر است زیرا دو خط موازی AB و d خود به خود در یک صفحه قرار می‌گیرند.

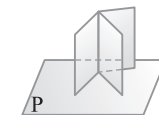


۲۳۶ ۴ اگر دو صفحه متقاطع بر صفحه‌ای عمود باشند، فصل مشترک آن‌ها نیز بر آن صفحه عمود است. در شکل زیر صفحه‌های متقاطع P و P' بر P'' عمود هستند و فصل مشترک آن‌ها یعنی خط d بر P'' عمود است.

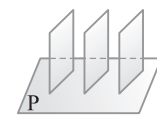
۲۳۷ ۴ مطابق شکل‌های زیر فقط گزینه (۴) ممکن نیست و در نتیجه پاسخ تست است.



گزینه (۳) درست است.

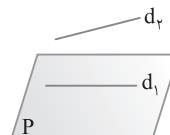


گزینه (۲) درست است.

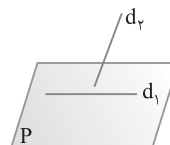


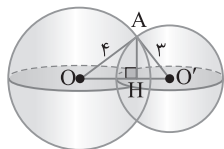
گزینه (۱) درست است.

۲۳۸ ۱ صفحه P می‌تواند با خط d_1 موازی باشد.



از طرف دیگر صفحه P می‌تواند با خط d_2 متقاطع باشد.





۲۵۰) مثلث ABC مثلثی متساوی الاضلاع به ضلع ۴ است که مخروط به ارتفاع $OA = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = 2\sqrt{3}$ و شعاع قاعده ۲ ایجاد می‌شود. از دوران این مثلث حول AO یک دایره‌ای به شعاع ۱ از آن جدا شده است.

به طوری که نیم کره‌ای به شعاع ۱ از آن جدا شده است. پس

$$\text{حاصل} = \text{حجم مخروط} - \text{حجم نیم کره} = \frac{1}{3} \pi (2)^2 (2\sqrt{3}) - \frac{2}{3} \pi (1)^3$$

$$= \frac{\lambda \sqrt{r}}{r} \pi - \frac{r}{r} \pi = \frac{\lambda \sqrt{r} - r}{r} \pi$$

۲۵۱) اگر همه مکعب‌ها را به‌جز ردیف اول که در پایین شکل قرار دارد حذف کنیم، آن‌گاه نمای بالای شکل تغییر نمی‌کند. پنج ردیف بالای ردیف اول در هر ردیف دارای ۱۵ مکعب کوچک هستند به‌جز ردیف بالایی، پس حداکثر تعداد مکعب‌هایی که باید حذف شوند برابر $15 \times 5 - 1 = 74$ است.

۲۵۲ ۴ در شکل گسترده داده شده وجه‌های (A, C) ، (E, F) و (B, D) مقابل هم قرار دارند. پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) نادرست هستند.

۲۵۳ ۳) نمای روبه‌روی این منشور مثلث قائم‌الزاویه ABC است. چون اضلاع مثلث ABC در رابطه فیثاغورس صدق می‌کنند، پس

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$

نمای بالای این منشور مستطیلی به طول ۶ و عرض ۲ است، پس

$$۱۲ = ۶ \times ۲ = \text{مساحت مستطیل} = \text{مساحت نمای بالا}$$

بنابراین مجموع مساحت‌های نمای بالا و روبه‌رو برابر $21 = 9 + 12$ است.

۲۵۴ اگر مربع‌هایی را که با علامت $\times$ مشخص شده‌اند از ردیف بالایی مکعب مستطیل داده شده حذف کنیم و این حذف کردن را در لایه‌های زیرین نیز انجام دهیم، نمای بالا به‌صورت خواسته شده درمی‌آید. بنابراین تعداد $3 \times 8 = 24$ مکعب کوچک را باید حذف کنیم.

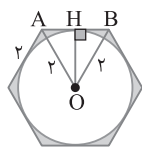
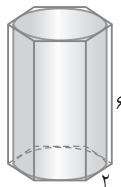


بزرگ‌ترین استوانه ممکن درون منشور هم‌ارتفاع با منشور است و قاعده‌های این استوانه دایره‌های محاطی هر دو قاعده هستند. صفحه موازی با قاعده، این شکل را در یک شش‌ضلعی منتظم و یک دایره قطع می‌کند. مقطع حاصل به صورت زیر است. باید مساحت قسمت رنگی را به دست آوریم. چون مثلث OAB مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ است، پس

$$\text{OH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} (2) = \sqrt{3}$$

مساحت دایره - مساحت شش ضلعی منتظم = مساحت مقطع

$$= \varphi\left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right)(r)^r - \pi(\sqrt{r})^r = \varphi\sqrt{r} - r\pi$$



۲۴۵ ۳ سطح مقطع حاصل مثلث $A'C'B$ است. بنابر قضیه فیثاغورس،

$$\triangle BB'C': BC'^2 = BB'^2 + B'C'^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow BC' = 5$$

پس مثلث $BC'A'$ متساوی الساقین است. برای به دست آوردن مساحت آن ارتفاع $C'H$ را رسم می کنیم. این ارتفاع میانه هم هست. از طرف دیگر

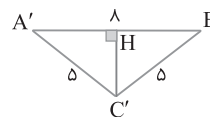
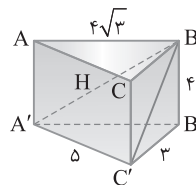
$$\triangle AA'B: A'B^\gamma = AB^\gamma + AA'^\gamma = (\epsilon\sqrt{\gamma})^\gamma + \epsilon^\gamma = \epsilon\epsilon \Rightarrow A'B = \lambda$$

$$A'H = \epsilon$$

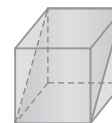
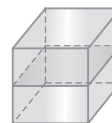
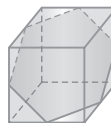
$$\Delta A'C'H:C'H^r = A'C'^r - A'H^r = 5^r - 4^r = 9 \Rightarrow C'H = 3$$

در نتیجه

$$S_{A'BC'} = \frac{1}{2} C'H \times A'B = \frac{1}{2} (3)(4) = 6$$



۲۴۶ ۳ سطح مقطع یک مکعب با صفحه‌های قائم، افقی و مایل می‌تواند مستطیل، مربع، مثلث متساوی‌الاضلاع و شش‌ضلعی منتظم باشد (شکل‌های زیر را ببینید).



سطح مقطع شش ضلعی
منتظم

سطح مقطع مثلث
تساوی اضلاع

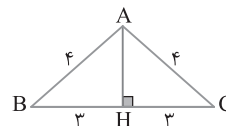
مسطح مقطع
مربع

سطح مقطع
مستطیل

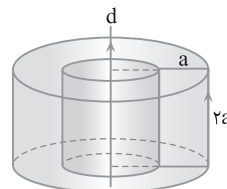
اما هیچ گاه یک لوزی ایجاد نمی شود.

۲۴۷ ۲ مثلث ABC متساوی الساقین است. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. از دوران این مثلث حول BC دو مخروط مساوی با ارتفاع $BH=3$ و شعاع قاعده $AH=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$ ایجاد می‌شود.

$$\text{حجم شکل حاصل} = 2\left(\frac{1}{3} \pi A H^2 \times B H\right) = 2\left(\frac{1}{3} \pi \times (\sqrt{V})^2 \times 3\right) = 14 \pi$$



۲۴۸ ۲ شکل حاصل به صورت زیر است، که فضای بین دو استوانه است.



۲۴۹) شکل حاصل از برخورد دو کره یک دایره است. در شکل زیر AH شعاع این دایره است. اضلاع مثلث AOO' برابر ۳، ۴ و ۵ هستند، پس مثلث AOO' قائم الزاویه است. پس

$$AH \times OO' = OA \times O'A \Rightarrow AH \times 5 = 3 \times 4 \Rightarrow AH = \frac{12}{5}$$

بنابراین

$$\text{مساحت سطح مقطع} = \pi A H^2 = \pi \left(\frac{12}{25} \right)^2 = \frac{144}{25} \pi = 5.76 \pi$$

۲۶۰ از دوران مثلث قائم الزاویه ABC حول وتر BC دو مخروط با قاعده مشترک به دست می‌آید.

حجم مخروط با ارتفاع CH + حجم مخروط با ارتفاع BH = حجم شکل

$$= \frac{1}{3} \pi (AH)^2 (BH) + \frac{1}{3} \pi (AH)^2 (CH) \\ = \frac{1}{3} \pi (AH)^2 (BH + CH) = \frac{1}{3} \pi (AH)^2 (BC)$$

از طرف دیگر، بنابر قضیه فیثاغورس،

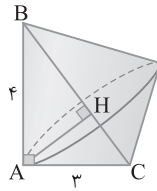
$$\triangle ABC: BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

پس طبق روابط طولی در مثلث قائم الزاویه،

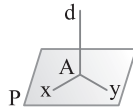
$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$$

بنابراین

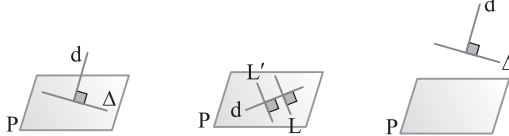
$$\text{حجم شکل} = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{12}{5}\right)^2 (5) = \frac{48}{5} \pi = 9\frac{6}{5} \pi$$



۲۶۱ می‌دانیم اگر خط d بر دو خط Ax و Ay واقع بر صفحه P در نقطه A عمود باشد، آن‌گاه خط d بر صفحه P عمود است. بنابراین گزینه (۳) درست است.

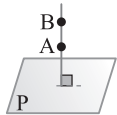


با توجه به شکل‌های زیر سایر گزینه‌ها نادرست هستند.

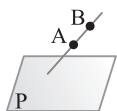


خط d بر خط Δ که خط d بر دو خط موازی موازی P است عمود است ولی خط d بر صفحه P عمود نیست. (نادرستی گزینه (۱))
خط d بر دو خط موازی در صفحه P عمود است ولی d بر P عمود نیست. (نادرستی گزینه (۲))
خط d بر خط Δ موازی P است عمود است ولی خط d بر صفحه P عمود نیست. (نادرستی گزینه (۴))

۲۶۲ دو صفحه بر هم عمودند هرگاه یک خط واقع در یکی از صفحه‌ها بر صفحه دیگر عمود باشد و هرگاه خطی بر دو خط متقاطع واقع در صفحه‌ای در نقطه برخورد آن‌ها عمود باشد بر آن صفحه عمود است. پس با شرط‌های گزینه (۴) یک خط واقع در صفحه P بر صفحه P' عمود است، بنابراین صفحه P بر P' عمود است.



۲۶۳ می‌دانیم از خطی عمود بر صفحه P نامتناهی صفحه عمود بر P می‌گذرد و از خطی غیر عمود بر صفحه P فقط یک صفحه عمود بر P می‌گذرد. بنابراین اگر خط گذرا بر دو نقطه A و B بر صفحه P عمود باشد، از این دو نقطه نامتناهی صفحه عمود بر P عبور می‌کند.



در صورتی که خط گذرا بر دو نقطه A و B بر صفحه P عمود نباشد، از این دو نقطه فقط یک صفحه عمود بر P می‌گذرد.

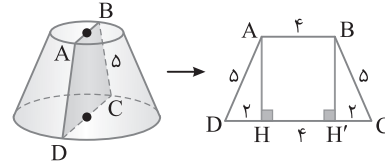
۲۵۶ سطح مقطع حاصل از این برش عمودی دوزنقه متساوی الساقین ABCD است. برای محاسبه مساحت این دوزنقه ارتفاع‌های AH و BH' را رسم می‌کنیم. در این صورت مثلث‌های قائم الزاویه ADH و BCH' (به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه) همنهشت هستند، پس $DH = CH' = 2$.

از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه ADH به دست می‌آید

$$AH^2 = AD^2 - DH^2 = 5^2 - 2^2 = 21 \Rightarrow AH = \sqrt{21}$$

بنابراین

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AH (AB + DC) = \frac{1}{2} (\sqrt{21}) (4 + 8) = 6\sqrt{21}$$



۲۵۷ از دوران مثلث قائم الزاویه حول خط d یک مخروط، از دوران مستطیل یک استوانه و از دوران ربع دایره یک نیم کره به وجود می‌آید. بنابراین شکل ایجاد شده به صورت مقابل است.

۲۵۸ با توجه به شکل مقابل از دوران ربع دایره حول AB یک نیم کره، از دوران مستطیل CDBM حول AB یک استوانه و از دوران مثلث قائم الزاویه BCM حول AB یک مخروط به دست می‌آید. پس شکل حاصل یک نیم کره است که استوانه‌ای از آن حذف و مخروطی به آن اضافه شده است.

۲۵۹ ضلع BC را امتداد می‌دهیم تا خط d را در نقطه O قطع کند. جسم حاصل از دوران این شکل حول خط d دو مخروط و یک استوانه خواهد بود (شکل زیر را ببینید). پس برای محاسبه حجم خواسته شده باید حجم مخروط بزرگ‌تر را منهای مجموع حجم‌های مخروط کوچک‌تر و استوانه کنیم. اکنون با استفاده از قضیه تالس می‌نویسیم:

$$\triangle OHC: BH' \parallel CH \Rightarrow \frac{OH'}{OH} = \frac{BH'}{CH} \Rightarrow \frac{OH'}{OH} = \frac{3}{4} \\ \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{OH'}{HH'} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{OH'}{2} = \frac{3}{1} \Rightarrow OH' = 6 \Rightarrow OH = 8$$

بنابراین

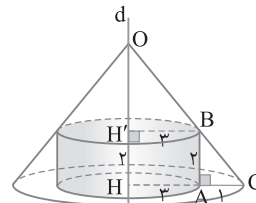
$$\text{حجم مخروط بزرگ} = \frac{1}{3} \pi (CH)^2 (OH) = \frac{1}{3} \pi (4)^2 (8) = 16 \times 8 = 128$$

$$\text{حجم مخروط کوچک} = \frac{1}{3} \pi (BH')^2 (OH') = \frac{1}{3} \pi (3)^2 (6) = 54$$

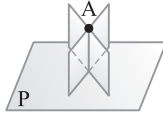
$$\text{حجم استوانه} = \pi (AH)^2 (AB) = \pi (3)^2 (2) = 54$$

$$\text{حجم استوانه} + \text{حجم مخروط کوچک} - \text{حجم مخروط بزرگ} = \text{حجم جسم} \\ = 128 - (54 + 54) = 20$$

توجه کنید در محاسبات بنابر فرض سؤال π را ۳ در نظر گرفته‌ایم.



۲۷۲ ۴ از نقطه A یک خط عمود بر صفحه P می‌توان رسم کرد و از این خط نامتناهی صفحه می‌گذرد، به طوری که همگی آن‌ها بر P عمود هستند.



۲۷۳ ۴ اگر سه خط به صورت یا باشند، از آن‌ها فقط یک صفحه می‌گذرد و در صورتی که دو خط در نقطه A متقاطع باشند و خط سوم از A بگذرد و در صفحه دو خط متقاطع دیگر نباشد، از آن‌ها صفحه‌ای عبور نمی‌کند. پس گزینه (۴) درست است.

۲۷۴ ۲ از یک نقطه خارج یک صفحه، می‌توان نامتناهی صفحه بر صفحه مفروض عمود کرد، زیرا با توجه به اینکه از هر نقطه خارج یک صفحه فقط یک خط می‌توان بر صفحه مفروض عمود کرد همه صفحه‌هایی که از این خط منحصر به فرد می‌گذرند بر صفحه مفروض عمود هستند.

۲۷۵ ۳

۲۷۶ ۴ هر سه نمای شکل داده شده به صورت زیر هستند.



۲۷۷ ۴ نمای بالای مکعب مستطیل داده شده به صورت زیر است. اگر سه ردیف کامل از نمای بالای مکعب مستطیل را حذف کنیم، یعنی $3 \times 4 \times 5 = 60$ مکعب، تا به ردیف آخر برسیم و از ردیف آخر ۶ مکعب را که با علامت $\times$ مشخص شده‌اند، حذف کنیم، آن‌گاه نمای بالای شکل حاصل همان شکلی خواهد شد که مورد نظر است. پس حداکثر مکعب‌هایی که باید حذف کنیم ۶۶ است.

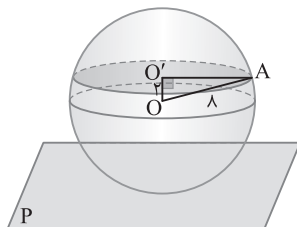


۲۷۸ ۳ سطح مقطع صفحه موازی P با کره، دایره‌ای به شعاع $O'A$ است. از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه $OO'A$ نتیجه می‌شود

$$O'A^2 = OA^2 - OO'^2 = 8^2 - 2^2 = 60.$$

بنابراین

$$\pi O'A^2 = 60\pi = \text{مساحت سطح مقطع}$$



۲۷۹ ۴ ارتفاع‌های AH و BH' را در دوزنقه ABCD رسم می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویه ADH و BCH' به حالت (وتر و یک ضلع قائمه) همنهشت هستند. از دوران این دو مثلث قائم‌الزاویه حول DC، دو مخروط ایجاد می‌شود و از دوران مستطیل ABH'H یک استوانه ایجاد می‌شود.



۲۶۴ ۲ اگر خطی بر صفحه‌ای عمود نباشد، از آن خط تنها یک صفحه عمود بر آن صفحه می‌توان رسم کرد.

۲۶۵ ۱ اگر خط D با صفحه P موازی باشد، از D فقط یک صفحه موازی با P می‌گذرد و چون D بر P عمود نیست، از خط D فقط یک صفحه عمود بر صفحه P می‌گذرد.

۲۶۶ ۱

۲۶۷ ۱ نمای بالای شکل به صورت زیر است و قسمت رنگی آن شامل یک مربع به ضلع ۱ و ۵ مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع زاویه قائمه ۱ است، پس مساحت قسمت رنگی برابر است با



$$= 1^2 + 5 \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1\right) = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$$

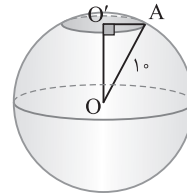
۲۶۸ ۳ فرض می‌کنیم صفحه، کره به شعاع ۱۰ را در دایره به شعاع $O'A$ قطع کند (شکل زیر را ببینید). چون مساحت سطح مقطع حاصل 25π است، پس

$$\pi O'A^2 = 25\pi \Rightarrow O'A = 5$$

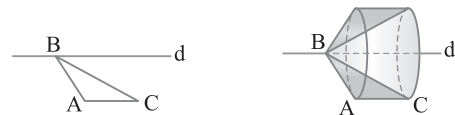
از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه $OO'A$ نتیجه می‌شود

$$OO'^2 = OA^2 - O'A^2 = 10^2 - 5^2 = 75$$

بنابراین $OO' = 5\sqrt{3}$. پس فاصله مرکز کره از صفحه برش برابر با $5\sqrt{3}$ است.



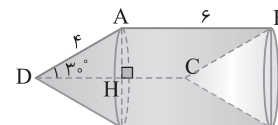
۲۶۹ ۴ از دوران ضلع AC حول خط d یک استوانه ایجاد می‌شود. همچنین از دوران ضلع BC حول خط d یک مخروط و از دوران ضلع AB حول خط d مخروط دیگری به وجود می‌آید. پس شکل حاصل یک استوانه است که از آن یک مخروط جدا شده و مخروط دیگری به آن اضافه شده است.



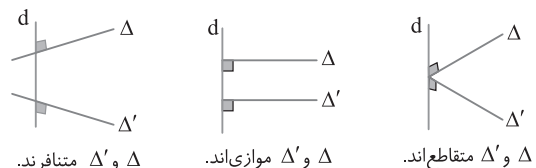
۲۷۰ ۴ از دوران متوازی‌الاضلاع ABCD حول ضلع DC یک استوانه با دو مخروط مساوی ایجاد می‌شود که یک مخروط از آن جدا شده و مخروط دیگر به آن اضافه شده است. بنابراین حجم خواسته شده معادل حجم استوانه‌ای به ارتفاع AB و شعاع قاعده AH است. در مثلث قائم‌الزاویه ADH ضلع

$$AH \text{ روبه‌رو به زاویه } 30^\circ \text{ است، پس } AH = \frac{AD}{2} = 2. \text{ بنابراین}$$

$$\text{حجم} = \pi (AH)^2 AB = \pi (2)^2 \times 6 = 24\pi$$



۲۷۱ ۱ با توجه به شکل‌های زیر دو خط Δ و Δ' می‌توانند هر سه حالت موازی، متناظر و متقاطع را داشته باشند.



۲۸۳ چون $\hat{A} = 30^\circ$ ، پس $\widehat{BC} = 60^\circ$. از طرف دیگر مثلث ABC

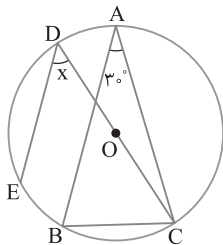
متساوی الساقین است، بنابراین

$$\widehat{B} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 15^\circ \xrightarrow{\widehat{AD} + \widehat{AC} = 180^\circ} \widehat{AD} = 3^\circ$$

کمان‌های محصور بین دو وتر موازی، مساوی‌اند:

$$AB \parallel DE \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{BE} = 3^\circ$$

$$x = \frac{\widehat{BE} + \widehat{BC}}{2} = \frac{3^\circ + 60^\circ}{2} = 45^\circ \quad \text{پس زاویه EDC زاویه محاطی است، پس}$$



۲۸۴ چون کمان‌های محصور بین دو وتر موازی مساوی‌اند، پس

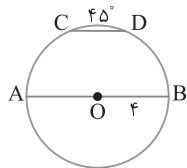
$\widehat{AC} = \widehat{BD}$. در ضمن AB قطر دایره است. بنابراین

$$\widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{BD} = 180^\circ \xrightarrow{\widehat{AC} = \widehat{BD}} \widehat{BD} + \widehat{CD} + \widehat{BD} = 180^\circ$$

$$2\widehat{BD} + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = 67.5^\circ$$

از طرف دیگر، $\frac{\text{طول کمان BD}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه‌ی کمان BD}}{360^\circ}$ ، در نتیجه

$$\frac{67.5^\circ}{360^\circ} = \frac{\text{طول کمان BD}}{2\pi(4)} \Rightarrow \text{طول کمان BD} = \frac{3\pi}{2}$$



۲۸۵ از A به C وصل می‌کنیم. در این صورت زاویه محاطی ACB

روبرو به قطر است، پس قائمه است. در مثلث قائم‌الزاویه ACE

$$\hat{E} = 60^\circ \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow \frac{CE}{AE} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

از طرف دیگر دوزاویه A_1 و C_1 محاطی روبرو به کمان BD هستند، پس مساوی‌اند

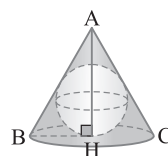
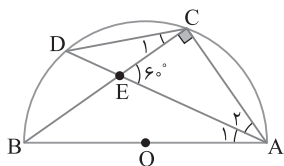
و دوزاویه B و D محاطی روبرو به کمان AC هستند، پس مساوی‌اند. بنابراین

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{B} = \hat{D} \end{cases} \xrightarrow{(ز.ز)} \triangle ABE \sim \triangle CDE$$

نسبت تشابه این دو مثلث متشابه برابر $\frac{CE}{AE}$ است، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها

$$\frac{S_{CDE}}{S_{ABE}} = \left(\frac{CE}{AE}\right)^2 \quad (2) \quad \text{مساوی توان دوم این نسبت تشابه است، یعنی}$$

$$\frac{S_{CDE}}{S_{ABE}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود}$$



۲۸۰ از دوران مثلث متساوی‌الاضلاع

حول ارتفاع AH یک مخروط ایجاد می‌شود

و از دوران دایره حول AH یک کره به وجود می‌آید.

برای محاسبه حجم خواسته شده باید حجم مخروط

را منهای حجم کره کنیم. در مخروط ایجاد شده

پاره خط AH ارتفاع و طول آن مساوی $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر طول ضلع مثلث ABC است

و BH شعاع قاعده این مخروط، نصف طول ضلع BC است. بنابراین

$$h = AH = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{3}) = 3, \quad R_1 = BH = \frac{BC}{2} = \sqrt{3}$$

بنابراین

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \pi R_1^2 h = \frac{1}{3} \pi (\sqrt{3})^2 (3) = 3\pi$$

از طرف دیگر مرکز دایره نقطه برخورد میانه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع ABC

است. پس $R_2 = \frac{1}{3} h = \frac{3}{3} = 1$. بنابراین شعاع کره برابر ۱ است. در نتیجه

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3} \pi R_2^3 = \frac{4}{3} \pi (1)^3 = \frac{4}{3} \pi$$

پس حجم خواسته شده برابر است با

$$\text{حجم} = 3\pi - \frac{4}{3} \pi = \frac{5\pi}{3}$$

۲۸۱ چون خط و دایره نقطه مشترکی ندارند، شکل زیر را رسم می‌کنیم،

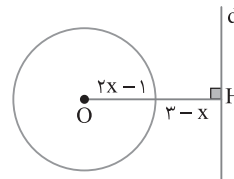
پس $r < OH$ و $OH = 2x - 1 + 3 - x = x + 2$ در نتیجه

$$2x - 1 < x + 2 \Rightarrow x < 3$$

از طرف دیگر چون $3 - x$ فاصله است، پس باید مثبت باشد، در نتیجه $x < 3$.

همچنین طول شعاع دایره باید مثبت باشد، یعنی $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

از اشتراک محدوده‌های به دست آمده نتیجه می‌شود $\frac{1}{2} < x < 3$.



۲۸۲ با توجه به شکل زیر شعاع OM بر خط مماس DC عمود

است. در ضمن شعاع OB بر خط مماس BC و شعاع OA بر خط مماس

AD عمود است. بنابراین

$$OB = OM \Rightarrow \text{OC نیمساز زاویه C است.}$$

$$OA = OM \Rightarrow \text{OD نیمساز زاویه D است.}$$

در ضمن دو مثلث قائم‌الزاویه OMC و OBC بنا به حالت وتر و یک ضلع

زاویه قائمه همنهشت هستند، پس $BC = MC$. به طور مشابه $DM = AD$.

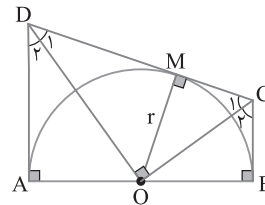
از طرف دیگر دو مماس AD و BC بر AB عمودند، پس موازی‌اند. در

نتیجه بنابر قضیه خطوط موازی و مورب،

$$\hat{D} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{D}_1 + \hat{C}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{DOC} = 90^\circ$$

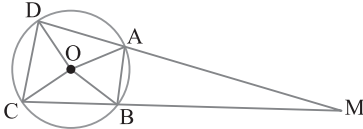
پس مثلث ODC قائم‌الزاویه است. از رابطه‌های طولی در این مثلث نتیجه می‌شود

$$OM^2 = DM \times MC \Rightarrow r^2 = AD \times BC$$



۲۹۱ ۴ از مرکز O به نقطه‌های A و B وصل می‌کنیم. در این صورت مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است ($OA=OB=AB=r$). پس اندازه زاویه مرکزی AOB برابر 60° است. بنابراین $AB=60^\circ$. از طرف دیگر اگر از O به نقطه‌های C و D وصل کنیم، آن‌گاه $OC=OD=r$ و $CD=r\sqrt{2}$. بنابراین مثلث OCD قائم‌الزاویه است، زیرا $CD^2=OD^2+OC^2$. پس اندازه زاویه مرکزی COD برابر 90° است. بنابراین $CD=90^\circ$. در ضمن زاویه M زاویه بین امتداد دو وتر است، بنابراین

$$\hat{M} = \frac{1}{2}(\widehat{CD} - \widehat{AB}) = \frac{90^\circ - 60^\circ}{2} = 15^\circ$$



۲۹۲ ۱ چون مثلث AMD متساوی‌الساقین است، پس $\hat{A} = \hat{M} = \alpha$.

زاویه A زاویه محاطی در دایره است، پس

$$\hat{A} = \frac{1}{2}(\widehat{DC} + \widehat{BC}) \xrightarrow{\hat{A} = \alpha} \widehat{DC} + \widehat{BC} = 2\alpha$$

$$18^\circ + \widehat{BC} = 2\alpha \Rightarrow \widehat{BC} = 2\alpha - 18^\circ \quad (1)$$

از طرف دیگر زاویه M زاویه بین امتداد دو وتر است، پس

$$\hat{M} = \frac{1}{2}(\widehat{AD} - \widehat{BC}) \xrightarrow{\hat{M} = \alpha} \widehat{AD} - \widehat{BC} = 2\alpha \quad (2)$$

در ضمن AB قطر دایره است، پس

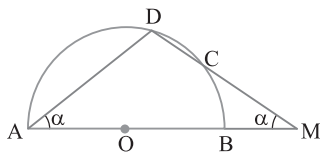
$$\widehat{AD} + \widehat{DC} + \widehat{BC} = 180^\circ \xrightarrow{\widehat{DC} = 18^\circ} \widehat{AD} + \widehat{BC} = 162^\circ \quad (3)$$

از تساوی‌های (۲) و (۳) به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} \widehat{AD} - \widehat{BC} = 2\alpha \\ \widehat{AD} + \widehat{BC} = 162^\circ \end{cases} \xrightarrow{-} \widehat{BC} = 162^\circ - 2\alpha \quad (4)$$

اکنون از تساوی‌های (۱) و (۴) نتیجه می‌گیریم

$$2(2\alpha - 18^\circ) = 162^\circ - 2\alpha \Rightarrow 6\alpha = 198^\circ \Rightarrow \alpha = 33^\circ \Rightarrow \hat{M} = 33^\circ$$



۲۹۳ ۴ با توجه به شکل زیر زاویه B_1 زاویه خارجی مثلث متساوی‌الساقین

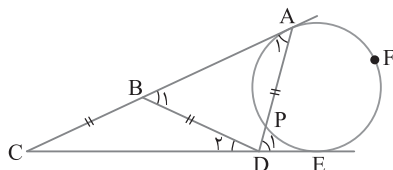
BCD است. چون $\hat{D}_1 = \hat{C} = 25^\circ$ ، پس $\hat{B}_1 = \hat{C} + \hat{D}_1 = 50^\circ$. مثلث ABD

نیز متساوی‌الساقین است، پس $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 50^\circ$. در نتیجه اندازه زاویه D_1

که زاویه خارجی مثلث ACD است، برابر است با $\hat{C} + \hat{A}_1 = 25^\circ + 50^\circ = 75^\circ$.

از طرف دیگر زاویه D_1 زاویه بین امتداد یک وتر و خط مماس است. بنابراین

$$\hat{D}_1 = \frac{1}{2}(\widehat{AFE} - \widehat{PE}) \Rightarrow 75^\circ = \frac{1}{2}(\widehat{AFE} - \widehat{PE}) \Rightarrow \widehat{AFE} - \widehat{PE} = 150^\circ$$



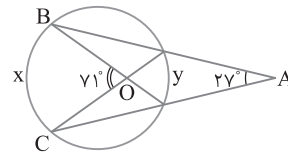
۲۸۶ ۱ با توجه به شکل زیر،

$$\hat{A} = 27^\circ \Rightarrow \frac{x-y}{2} = 27^\circ, \quad \hat{O} = 71^\circ \Rightarrow \frac{x+y}{2} = 71^\circ$$

بنابراین

$$\begin{cases} x-y=54^\circ \\ x+y=142^\circ \end{cases} \xrightarrow{+} 2x=196^\circ \Rightarrow x=98^\circ$$

$$\text{پس } y=44^\circ, \text{ در نتیجه } \frac{x}{y} = \frac{98^\circ}{44^\circ} = \frac{49}{22}$$

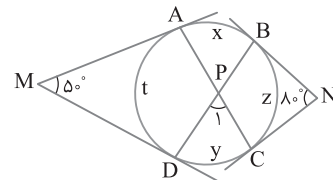


۲۸۷ ۳ با توجه به شکل زیر،

$$\begin{cases} 80^\circ = \frac{x+t+y-z}{2} \Rightarrow x+t+y-z=160^\circ \\ 50^\circ = \frac{x+z+y-t}{2} \Rightarrow x+z+y-t=100^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}}$$

$$2x+2y=260^\circ \Rightarrow x+y=130^\circ$$

$$\text{بنابراین } \hat{P}_1 = \frac{x+y}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$$

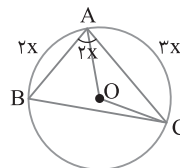


۲۸۸ ۳ زاویه A محاطی است، پس کمان BC برابر $4x$ است. پس

$$2x+3x+4x=360^\circ \Rightarrow x=40^\circ$$

بنابراین $\widehat{AC}=3x=120^\circ$. پس زاویه مرکزی AOC برابر 120° است. در نتیجه

$$\text{طول کمان AC} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi(3) = 2\pi$$



۲۸۹ ۲ زاویه مرکزی AOB را برابر α انتخاب می‌کنیم. در این صورت

$$\text{طول کمان AB} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r \Rightarrow 5 = \frac{\alpha \pi r}{180^\circ} \quad (1)$$

از طرف دیگر،

$$\text{طول کمان A'B'} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi(3r) = \frac{\alpha \pi r}{180^\circ} \times 3$$

$$\xrightarrow{\text{از (۱)}} \text{طول کمان A'B'} = 5 \times 3 = 15$$

۲۹۰ ۱ مساحت قطاع OAB به صورت زیر به دست می‌آید

$$\frac{30^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 6^2 = 3\pi$$

مساحت مثلث OAB برابر است با $\frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin 30^\circ = 9$. اکنون می‌توان نوشت

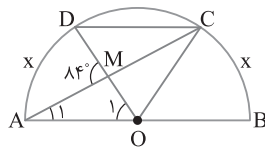
$$\text{مساحت مثلث OAB} - (\text{مساحت قطاع OAB}) = \text{مساحت قطاع}$$

$$= 3\pi - 9 = 3(\pi - 3)$$

از طرف دیگر AB قطر نیم‌دایره است. پس

$$\widehat{AD} + \widehat{BC} + \widehat{DC} = 180^\circ \Rightarrow 2x + \widehat{DC} = 180^\circ$$

$$112^\circ + \widehat{DC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DC} = 68^\circ$$



۲۹۸ الف مجموع کمان‌های a ، b و c برابر 36° است. اکنون از فرض

سؤال با استفاده از ویژگی‌های تناسب می‌نویسیم

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{2+3+5} = \frac{36^\circ}{10} = 3.6^\circ$$

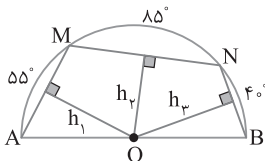
پس $a = 7.2^\circ$ و $c = 18^\circ$. در نتیجه

$$\widehat{M} = \frac{c-a}{2} = \frac{18^\circ - 7.2^\circ}{2} = \frac{10.8^\circ}{2} = 5.4^\circ$$

۲۹۹ الف شکل سؤال به صورت زیر است. چون اندازه کمان AB برابر

18° است. پس $\widehat{BN} = 4^\circ$. در ضمن می‌دانیم وتر بزرگ‌تر به مرکز دایره نزدیک‌تر است. پس

$$\widehat{BN} < \widehat{AM} < \widehat{MN} \Rightarrow BN < AM < MN \Rightarrow h_3 > h_1 > h_2$$

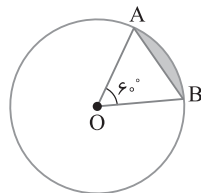


۳۰۰ الف محیط قطعه رنگی برابر طول کمان AB به اضافه طول وتر AB است:

$$AB \text{ کمان } = \frac{\alpha}{36^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{6^\circ}{36^\circ} \cdot 2\pi(6) = 2\pi$$

در ضمن مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است، پس $AB = 6$. بنابراین

$$\text{محیط قطعه} = 2\pi + 6$$



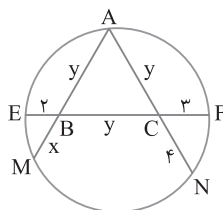
۳۰۱ الف اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را برابر y انتخاب

می‌کنیم. با استفاده از رابطه‌های طولی در دایره،

$$CN \times CA = CF \times CE \Rightarrow 4y = 3(2+y) \Rightarrow y = 6$$

$$BM \times BA = BE \times BF \Rightarrow xy = 2(3+y)$$

$$\xrightarrow{y=6} 6x = 18 \Rightarrow x = 3$$



۲۹۴ الف در دایره داده شده زاویه M زاویه بین دو مماس MA و MB

است. بنابراین $\widehat{M} = \frac{1}{2}(\widehat{ACB} - \widehat{AB})$. در ضمن مثلث OBC

متساوی‌الساقین است، پس

$$\widehat{BOC} = 180^\circ - (2 \times 50^\circ) = 80^\circ$$

چون $\widehat{BOC}$ زاویه مرکزی در این دایره است، پس $\widehat{BC} = 80^\circ$. بنابراین

$$\widehat{ACB} = \widehat{AC} + \widehat{BC} = 180^\circ + 80^\circ = 260^\circ \quad \text{و} \quad \widehat{AB} = 100^\circ$$

$$\text{در نتیجه} \quad \widehat{M} = \frac{1}{2}(\widehat{ACB} - \widehat{AB}) = \frac{1}{2}(260^\circ - 100^\circ) = 80^\circ$$

۲۹۵ الف دو مثلث OMN و OAN متساوی‌الساقین هستند، پس با

توجه به شکل زیر، $OM = MN \Rightarrow \widehat{N} = \widehat{O}_1$ ، $OA = ON \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{N}$.

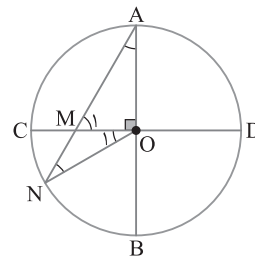
از طرف دیگر زاویه M_1 زاویه خارجی مثلث OMN است. بنابراین

$$\widehat{M}_1 = \widehat{N} + \widehat{O}_1 \xrightarrow{\widehat{O}_1 = \widehat{N}} \widehat{M}_1 = 2\widehat{N}$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویه OAM

$$\widehat{A} + \widehat{M}_1 + \widehat{O} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{N} + 2\widehat{N} + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{N} = 30^\circ$$

چون $\widehat{A} = \widehat{N}$ ، پس $\widehat{A} = 30^\circ$.



۲۹۶ الف با توجه به شکل زیر زاویه C محاطی روبه‌رو به کمان BD و زاویه D_1

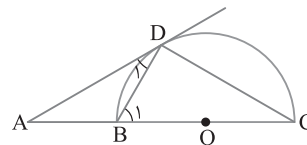
ظلی روبه‌رو به کمان BD است. بنابراین اندازه هر کدام از آنها مساوی نصف کمان BD است، در نتیجه $\widehat{C} = \widehat{D}_1$. از طرف دیگر، بنا بر فرض، $AB = BD \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{D}_1$

همچنین زاویه B_1 زاویه خارجی مثلث ABD است، پس

$$\widehat{B}_1 = \widehat{A} + \widehat{D}_1 \xrightarrow{\widehat{A} = \widehat{D}_1} \widehat{B}_1 = 2\widehat{D}_1 \xrightarrow{\widehat{D}_1 = \widehat{C}} \widehat{B}_1 = 2\widehat{C}$$

در ضمن زاویه BDC محاطی روبه‌رو به قطر است، پس قائمه است. بنابراین

$$\widehat{B}_1 + \widehat{C} = 90^\circ \Rightarrow 2\widehat{C} + \widehat{C} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 30^\circ$$



۲۹۷ الف می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی مساوی‌اند، پس

$$\widehat{AD} = \widehat{BC} = x$$

زاویه A_1 محاطی روبه‌رو به کمان BC است و $\widehat{O}_1$ زاویه مرکزی مقابل به

کمان AD ، پس $\widehat{A}_1 = \frac{x}{2}$ و $\widehat{O}_1 = x$. زاویه AMD زاویه خارجی مثلث

OAM است، پس

$$\widehat{AMD} = \widehat{A}_1 + \widehat{O}_1 \Rightarrow 84^\circ = \frac{x}{2} + x \Rightarrow \frac{3}{2}x = 84^\circ \Rightarrow x = 56^\circ$$

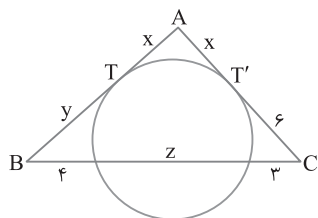
بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$CT'^2 = 3(3+z) \Rightarrow 36 = 3(3+z) \Rightarrow z=9$$

$$BT^2 = 4(4+z) \Rightarrow y^2 = 4(4+9) \Rightarrow y = 2\sqrt{13}$$

با جای گذاری مقادیر به دست آمده برای y و z در برابری (۱) نتیجه می‌شود

$$x = 1 + \sqrt{13}$$



ابتدا باید وضعیت نسبی دو دایره را مشخص کنیم. برای این کار

شعاع‌های دو دایره را برحسب d به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 3R_1 + 4R_2 = 4d \\ R_1 + 2R_2 = \frac{11}{6}d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3R_1 + 4R_2 = 4d \\ -2R_1 - 4R_2 = -\frac{11}{3}d \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} R_1 = \frac{d}{3}, R_2 = \frac{3}{4}d$$

بین شعاع‌های $R_1 = \frac{d}{3}$ و $R_2 = \frac{3}{4}d$ و طول خط‌المركزین d ، رابطه

$|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$ برقرار است. پس دو دایره متقاطع هستند و دو

دایره متقاطع دو مماس مشترک دارند.

مماس مشترک داخلی دو دایره را رسم می‌کنیم تا FD را در نقطه

M قطع کند. چون طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره مساوی‌اند،

$$\hat{MAD} = \hat{MDA} \quad (1)$$

پس $MD = MA$. در نتیجه

از طرف دیگر زاویه محاطی B و زاویه ظلی MAF در دایره C روبه‌رو به کمان

$$\hat{MAF} = \hat{B} \quad (2)$$

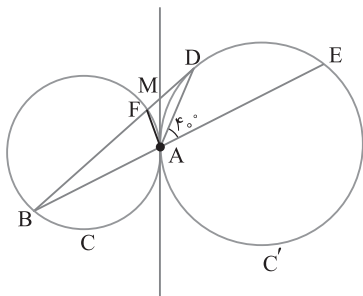
پس AF هستند.

در ضمن زاویه DAE زاویه خارجی مثلث ABD است، پس

$$\hat{B} + \hat{MDA} = 40^\circ$$

با جمع طرفین تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\hat{MAD} + \hat{MAF} = \hat{MDA} + \hat{B} \Rightarrow \hat{DAF} = 40^\circ$$



اگر TT' مماس مشترک خارجی دو دایره باشد، آنگاه

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (r-r')^2} \Rightarrow 10 = \sqrt{(r+6)^2 - (r-4)^2}$$

$$100 = \underbrace{(r+6)^2 - (r-4)^2}_{\text{مزدوج}} = (r+6+r-4)(r+6-r+4) = (2r+2)(10)$$

به دست می‌آید $r=4$.

بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$PA \times PB = PC \times PD \Rightarrow 3 \times 4 = 2 \times PC \Rightarrow PC = 6$$

بنابراین $CD=8$. از مرکز O عمود OH را بر CD رسم می‌کنیم. در این

صورت $DH=4$ و $PH=4-2=2$. همچنین از مرکز O عمود OH' را بر

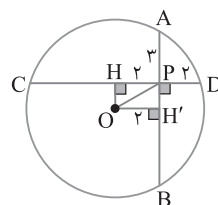
AB وارد می‌کنیم. چون H' وسط AB است، پس $AH' = \frac{y}{2}$. در نتیجه

توجه کنید که چهارضلعی $OH'PH$ مستطیل است، پس $PH' = \frac{y}{2} - 3 = \frac{1}{2}$.

بنابر قضیه فیثاغورس، $OH' = HP = 2$.

$$\triangle OPH': OP^2 = OH'^2 + PH'^2 = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

$$\text{بنابراین } OP = \frac{\sqrt{17}}{2}$$



از B به نقاط E و F وصل می‌کنیم. در این صورت دو زاویه E و

F قائمه هستند، چون محاطی روبه‌رو بر قطر AB هستند. در ضمن قطر AB

بر خط مماس CD عمود است. بنابراین مثلث‌های ABC و ABD قائم‌الزاویه

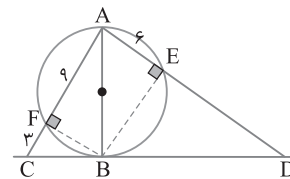
هستند. بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$\begin{cases} \triangle ABD: AB^2 = AE \times AD \\ \triangle ABC: AB^2 = AF \times AC \end{cases} \Rightarrow AE \times AD = AF \times AC$$

$$\xrightarrow{\frac{AF=9, FC=3}{AE=6}} 6AD = 9 \times 12 \Rightarrow AD = 18$$

$$DE = AD - AE = 18 - 6 = 12$$

بنابراین

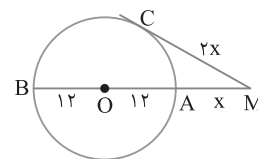


فرض می‌کنیم طول MA برابر x باشد. در این صورت با توجه

به فرض تست $MC=2x$. بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$MC^2 = MA \times MB \Rightarrow (2x)^2 = x(x+24) \Rightarrow 4x = x+24 \Rightarrow x=8$$

بنابراین $MA=8$.



طول دو مماس رسم شده از یک نقطه بر دایره مساوی است، پس

$$AT = AT' = x \quad (\text{شکل زیر را ببینید}). \text{ از طرف دیگر،}$$

$$(\text{مثلث } ABC) \text{ محیط} = 24 + 4\sqrt{13} \Rightarrow 2x + 6 + 3 + 4 + y + z = 24 + 4\sqrt{13}$$

$$2x + y + z = 11 + 4\sqrt{13} \quad (1)$$

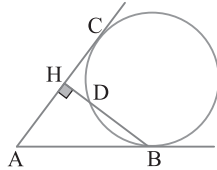
۳۱۲ ۱ می‌دانیم طول دو مماسی که از یک نقطه بر دایره رسم می‌شود، مساوی‌اند. پس $AB=AC \Rightarrow AB=AH+CH=3\sqrt{5}+2\sqrt{5}=5\sqrt{5}$ از طرف دیگر،

$$\triangle ABH: BH^2 = AB^2 - AH^2 = (5\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{5})^2 = 125 - 45 = 80 \\ BH = 4\sqrt{5}$$

اکنون بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$HC^2 = HD \times HB \Rightarrow (2\sqrt{5})^2 = HD(4\sqrt{5}) \Rightarrow 20 = 4\sqrt{5}HD$$

$$HD = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$



۳۱۳ ۱ AO را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه دیگری مانند N قطع کند. با توجه به شکل $ON=OM=4$ پس $AM=OA-OM=12-4=8$ اکنون بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$AM \times AN = AC \times AB \Rightarrow 8 \times 16 = AC \times AB \quad (1)$$

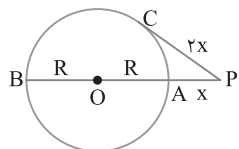
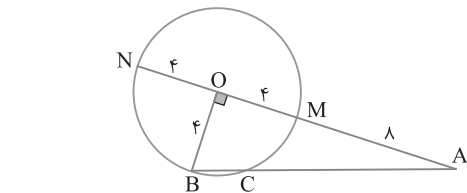
از طرف دیگر،

$$\triangle OAB: AB^2 = OA^2 + OB^2 = 12^2 + 4^2 = 144 + 16 = 160$$

بنابراین $AB = 4\sqrt{10}$ و بنابر تساوی (۱)،

$$8 \times 16 = AC \times 4\sqrt{10} \Rightarrow AC = \frac{32}{\sqrt{10}} = \frac{32\sqrt{10}}{10} = \frac{16\sqrt{10}}{5}$$

$$BC = AB - AC = 4\sqrt{10} - \frac{16\sqrt{10}}{5} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$$

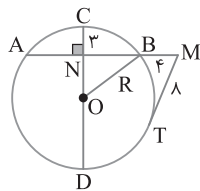


۳۱۴ ۱ مطابق شکل زیر اگر فرض کنیم $PA=x$ ، آن‌گاه $PC=2x$.

بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$PC^2 = PA \times PB \Rightarrow 4x^2 = x(x+2R) \Rightarrow 4x = x+2R \Rightarrow x = \frac{2R}{3}$$

$$PB = PA + AB = x + 2R = \frac{2R}{3} + 2R = \frac{8}{3}R$$



۳۱۵ ۴ بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$MT^2 = MB \times MA \Rightarrow 64 = 4 \times MA$$

$$MA = 16$$

از طرف دیگر،

$$MA = MB + AB \Rightarrow 16 = 4 + AB$$

$$AB = 12$$

چون شعاع OC بر وتر AB عمود است، آن را نصف می‌کند. پس $NB=6$ اکنون بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه ONB،

$$OB^2 = NB^2 + ON^2 \Rightarrow R^2 = 6^2 + (R-3)^2$$

$$R^2 = 36 + R^2 + 9 - 6R \Rightarrow 6R = 45 \Rightarrow R = 7.5$$

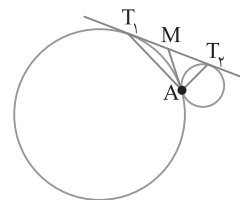
۳۰۹ ۳ از نقطه A مماس مشترک داخلی دو دایره را رسم می‌کنیم تا مماس مشترک خارجی را در نقطه M قطع کند. می‌دانیم اگر از هر نقطه خارج دایره مماس‌هایی بر دایره رسم کنیم، طول این مماس‌ها با هم برابرند:

$$\begin{cases} MT_1 = MA \\ MT_2 = MA \end{cases} \Rightarrow MT_1 = MT_2 = MA = \frac{T_1 T_2}{2} \quad (1)$$

بنابراین MA در مثلث $AT_1 T_2$ ، میانه‌ی وارد بر ضلع $T_1 T_2$ است و نصف طول این ضلع است. از طرف دیگر، طول مماس مشترک خارجی در دو دایره مماس خارج $T_1 T_2 = 2\sqrt{r_1 r_2}$ است. پس

$$T_1 T_2 = 2\sqrt{3 \times 12} = 12 \quad (2)$$

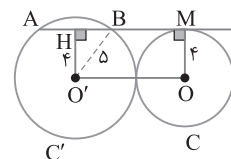
$$AM = \frac{T_1 T_2}{2} = \frac{12}{2} = 6 \quad \text{به دست می‌آید (۲) و (۱) اکنون بنابر برابری‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید.}$$



۳۱۰ ۳ از O به M وصل می‌کنیم. چون AM بر دایره C مماس است، OM بر AM عمود است. از O' نیز عمود O'H را بر AB رسم می‌کنیم. پس $AH=HB$. چهارضلعی OO'HM مستطیل است، پس $O'H=OM=4$ در مثلث O'HB بنابر قضیه فیثاغورس،

$$HB = \sqrt{O'B^2 - O'H^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

$$AB = 2HB = 2 \times 3 = 6 \quad \text{در نتیجه}$$



۳۱۱ ۱ اگر طول MA را برابر x بگیریم، آن‌گاه $MB=3x$ و

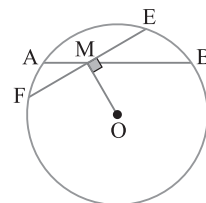
$$AB=2 \Rightarrow MA+MB=2 \Rightarrow x+3x=2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

در نتیجه $MA=\frac{1}{2}$ و $MB=\frac{3}{2}$. از طرف دیگر کوتاه‌ترین و تری که از M می‌گذرد و تری مثل EF است که بر OM عمود باشد. در ضمن چون OM بر وتر EF عمود است، پس M وسط EF است، یعنی $ME=MF$. بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$MA \times MB = ME \times MF \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = ME \times ME \Rightarrow ME^2 = \frac{3}{4}$$

$$ME = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{بنابراین } EF = 2ME = \sqrt{3}$$



۳۲۰ (۱) چون شعاع OA بر مماس AB عمود است، پس $\hat{A} = 90^\circ$ ، در نتیجه

$$\begin{cases} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{(ز)} \triangle OAM \sim \triangle O'BM$$

نسبت اضلاع نظیر این دو مثلث متشابه را می نویسیم: $\frac{OA}{O'B} = \frac{AM}{MB}$ با

ترکیب در صورت تناسب بالا نتیجه می شود

$$\frac{OA+O'B}{O'B} = \frac{AM+MB}{MB} \quad (۱)$$

چون چهارضلعی OHBA مستطیل است، پس $OA = BH$ ، در نتیجه

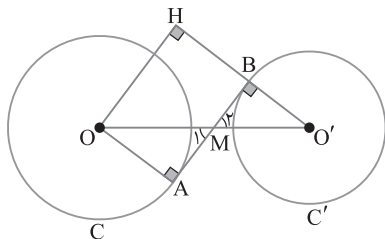
$$OA + O'B = BH + O'B = O'H = 4$$

در ضمن $AB = OH = 3$ و $MB = AB - AM = 3 - \frac{15}{8} = \frac{9}{8}$ ، بنابراین از

تساوی (۱) نتیجه می گیریم:

$$\frac{4}{O'B} = \frac{3}{\frac{9}{8}} \Rightarrow 3O'B = \frac{9}{2} \Rightarrow O'B = \frac{3}{2}$$

پس شعاع دایره C' برابر $\frac{3}{2}$ است.



۳۲۱ (۲) اگر شعاع دایره محاطی داخلی مثلث ABC باشد، آن گاه

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{5}{12} + \frac{1}{h_c} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{h_c} = \frac{2}{3} - \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{1}{h_c} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$h_c = 4$$

چون مثلث دو ارتفاع مساوی ۴ دارد، پس این مثلث متساوی الساقین است. در ضمن این مثلث متساوی الساقین نمی تواند قائم الزاویه باشد، زیرا ارتفاع وارد بر وتر این مثلث باید کوچک ترین ارتفاع باشد و ارتفاع های دیگر باید از آن بزرگ تر باشند که چنین شرایطی نیست.

۳۲۲ (۴) اگر از مرکز دایره به رأس های هشت ضلعی منتظم وصل کنیم،

هشت ضلعی منتظم به هشت مثلث متساوی الساقین مساوی هم تقسیم

$$\text{می شود. در ضمن } \widehat{AB} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ, \hat{O}_1 = 45^\circ. \text{ بنابراین}$$

$$\text{مساحت هشت ضلعی} = 8S_{OAB} = 8\left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \sin 45^\circ\right) = 16 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$$



۳۱۶ (۳) فرض می کنیم TT' مماس مشترک خارجی این دو دایره باشد.

پس بنابر فرض سؤال،

$$TT'^2 = (2R)(2R') \Rightarrow TT' = \sqrt{OO'^2 - (R-R')^2}$$

$$OO'^2 - (R-R')^2 = 4RR' \Rightarrow OO'^2 - R^2 - R'^2 + 2RR' = 4RR'$$

$$OO'^2 = R^2 + R'^2 + 2RR' \Rightarrow OO'^2 = (R+R')^2 \Rightarrow OO' = R+R'$$

پس این دو دایره مماس خارجی اند.

۳۱۷ (۲) مماس مشترک داخلی دو دایره را رسم می کنیم تا مماس مشترک

خارجی TT' را در M قطع کند. می دانیم طول مماس های رسم شده بر دایره،

$$MA = MT, \quad MA = MT'$$

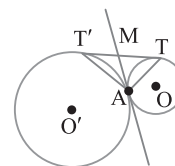
از یک نقطه مساوی اند. پس

پس $MT = MT'$ و از جمع طرفین دو تساوی بالا نتیجه می گیریم،

$$MA = \frac{TT'}{2}. \text{ پس در مثلث } ATT' \text{ میانه } AM \text{ نصف } TT' \text{ است. پس این}$$

مثلث قائم الزاویه است. ولی اگر دو دایره مساوی باشند می تواند متساوی الساقین

باشد. بنابراین ATT' لزومی ندارد قائم الزاویه متساوی الساقین باشد.



۳۱۸ (۴) شعاع های O_1T_1 ، O_2T_2 و O_3T_3 بر خط Δ عمود هستند،

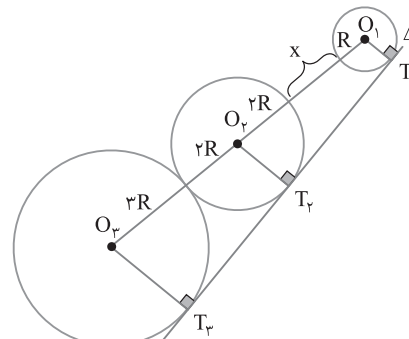
پس موازی اند. بنابراین چهارضلعی $O_1T_1T_3O_3$ دوزنقه قائم الزاویه است.

$$\text{چون } O_2T_2 = 2R \text{ و } \frac{O_1T_1 + O_3T_3}{2} = \frac{R + 3R}{2} = 2R$$

$$O_2T_2 = \frac{O_1T_1 + O_3T_3}{2}. \text{ در نتیجه بنابر قضیه میان خط در دوزنقه، مرکز}$$

O_2 وسط O_1O_3 است. بنابراین

$$O_1O_2 = O_2O_3 \Rightarrow R + x + 2R = 2R + 3R \Rightarrow x = 2R$$



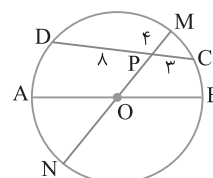
۳۱۹ (۴) اگر نیم دایره را کامل کنیم و MO را امتداد دهیم تا دایره را در

نقطه N قطع کند، آن گاه بنابر رابطه های طولی در دایره،

$$PN \times PM = PC \times PD \Rightarrow 4PN = 3 \times 8 \Rightarrow PN = 6$$

بنابراین قطر MN برابر است با $6 + 4 = 10$. پس شعاع دایره برابر ۵ است. در

نتیجه مساحت نیم دایره برابر $\frac{25\pi}{2} = 12.5\pi$ است.



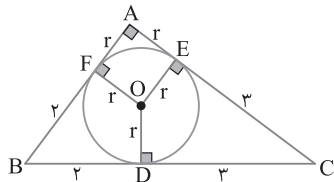
۳۲۷ ۱) از شکل زیر استفاده می‌کنیم. اگر S مساحت و P نصف محیط

$$\text{مثلث } ABC \text{ باشد، آن گاه } r = \frac{S}{P} \text{ پس}$$

$$r = \frac{\frac{1}{2} AB \times AC}{P} = \frac{\frac{1}{2} (r+2)(r+3)}{\frac{(r+2)(r+3)}{2r+10}} = \frac{1}{2}$$

با حل معادله بالا به دست می‌آید $r=1$ یا $r=-6$ ، که چون $r>0$ ، پس $r=1$.

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} (1+2)(1+3) = 6 \text{ اکنون می‌توان نوشت}$$

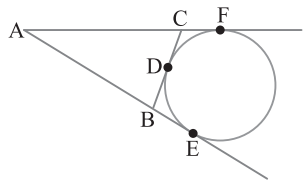


۳۲۸ ۴) می‌دانیم طول مماس AE مساوی نصف محیط مثلث ABC است.

پس محیط مثلث ABC مساوی $2AE$ است و چون مماس AE اندازه ثابتی دارد، بنابراین محیط ABC ثابت است. از طرف دیگر شعاع دایره محاطی خارجی نظیر ضلع

BC ، از رابطه $r_a = \frac{S}{P-a}$ به دست می‌آید که S مساحت مثلث ABC و P

نصف محیط آن است. چون r_a و P ثابت هستند ولی a اندازه متغیری دارد، پس S متغیر است. بنابراین محیط مثلث ABC ثابت و مساحت آن متغیر است.



۳۲۹ ۱) اگر S مساحت و P نصف محیط مثلث ABC باشد، آن گاه

$$r_a = \frac{S}{P-a} \text{ و } r_b = \frac{S}{P-b} \text{ چون } r_a = 2r_b \text{ پس } \frac{S}{P-a} = 2 \frac{S}{P-b} \text{ یعنی}$$

$$2P - 2a = P - b \Rightarrow P = 2a - b \Rightarrow \frac{a+b+c}{2} = 2a - b$$

در نتیجه $c = 3(a-b)$.

۳۳۰ ۲) زاویه M زاویه بین امتداد دو وتر دایره است، بنابراین

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow x = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{AD} - \widehat{BC} = 2x \quad (1)$$

از طرف دیگر AB قطر نیم دایره است، پس

$$\widehat{AB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AD} + 2x + \widehat{BC} = 180^\circ$$

با توجه به تساوی (۱)،

$$\widehat{AD} + \widehat{AD} - \widehat{BC} + \widehat{BC} = 180^\circ$$

$$2\widehat{AD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DCB} = 90^\circ$$

زاویه A محاطی روبه‌رو به کمان DCB است، پس $\hat{A} = \frac{\widehat{DCB}}{2}$ ، در نتیجه

$$3x = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

اکنون توجه کنید که چون چهارضلعی $ABCD$ محاطی است، پس

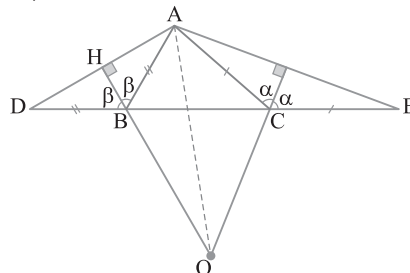
$$\hat{A} + \hat{BCD} = 180^\circ$$

در نتیجه

$$\hat{BCD} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

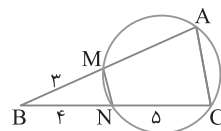
۳۲۳ ۲) شکل سؤال به صورت زیر است. نقطه تلاقی عمودمنصف‌های دو

ضلع AD و AE ، یعنی نقطه O در شکل، مرکز دایره محاطی ADE است. چون دو مثلث ABD و ACE متساوی الساقین هستند، پس این دو عمودمنصف نیمساز زاویه‌های خارجی B و C در مثلث ABC هستند. بنابراین نقطه O که محل تلاقی دو نیمساز خارجی زاویه‌های B و C در مثلث ABC است روی نیمساز A نیز واقع است (توجه کنید در هر مثلث دو نیمساز خارجی با نیمساز داخلی زاویه سوم هم‌مرس‌اند).



۳۲۴ ۳) چهارضلعی $AMNC$ محاطی

است. دایره محاطی آن را رسم می‌کنیم. بنابر رابطه‌های طولی در دایره،



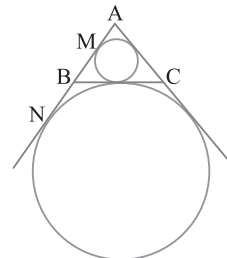
$$BN \times BC = BM \times BA$$

$$4 \times 9 = 3(3 + MA) \Rightarrow 12 = 3 + MA \Rightarrow MA = 9$$

۳۲۵ ۴) در شکل دایره محاطی داخلی و دایره محاطی خارجی نظیر ضلع بزرگ‌تر BC را رسم کرده‌ایم. پس MN مماس مشترک خارجی این دو دایره است. اگر P نصف محیط مثلث ABC باشد، آن گاه $AM = P - a$ و $AN = P$ ، بنابراین

$$P = \frac{4+5+7}{2} = 8, \quad AM = P - a = 8 - 7 = 1, \quad AN = P = 8$$

پس $MN = AN - AM = 8 - 1 = 7$.



۳۲۶ ۱) راه‌حل اول در دوزنقه متساوی الساقین محاطی، قطر دایره

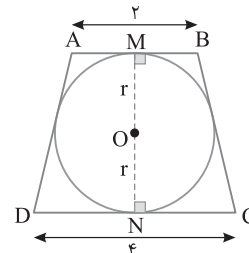
محاطی واسطه هندسی طول قاعده‌ها است. پس $(2r)^2 = AB \times CD = 2 \times 4$.

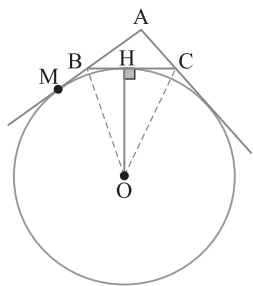
یعنی $2r = \sqrt{2}$. بنابراین طول ارتفاع دوزنقه برابر $2r = 2\sqrt{2}$ است. اکنون می‌توان مساحت دوزنقه را به صورت زیر به دست آورد:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AB + CD) \times MN = \frac{1}{2} (2 + 4) \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

راه‌حل دوم مساحت دوزنقه متساوی الساقین محاطی برابر است با حاصل ضرب میانگین حسابی و میانگین هندسی دو قاعده.

$$S_{ABCD} = \sqrt{AB \times DC} \times \left(\frac{AB + DC}{2} \right) = \sqrt{2 \times 4} \times \left(\frac{2 + 4}{2} \right) = 2\sqrt{2} \times 3 = 6\sqrt{2}$$





۳۳۵ ۲ در دایره به شعاع R طول یک ضلع n ضلعی منتظم محاطی از

برابری $C_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$ و طول یک ضلع n ضلعی منتظم محیطی از

برابری $C'_n = 2R \tan \frac{180^\circ}{n}$ به دست می آید. پس

$$\frac{C_n}{C'_n} = \frac{rR \sin \frac{1\lambda^\circ}{n}}{rR \tan \frac{1\lambda^\circ}{n}} \Rightarrow \frac{C_n}{C'_n} = \cos \frac{1\lambda^\circ}{n} \xrightarrow{n=\sqrt{r}} \frac{C_n = \sqrt{r}}{n=\sqrt{r}}$$

$$\frac{r\sqrt{r}}{C'_n} = \cos \frac{1\lambda^\circ}{\epsilon} \Rightarrow C'_n = \frac{r\sqrt{r}}{\cos 30^\circ} = \frac{r\sqrt{r}}{\frac{\sqrt{r}}{2}} = 2r$$

۳۳۶ ۲ ارتفاع BH را در دوزنقه قائم الزاویه ABCD رسم می‌کنیم. اگر

r شعاع دایره محاطی این دوزنقه باشد، آن گاه مطابق شکل زیر، ارتفاع دوزنقه برابر قطر دایره محاطی است. در ضمن چون دوزنقه محیطی است، پس

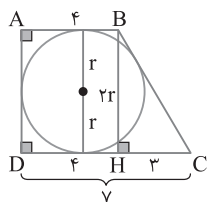
$$AB+DC=AD+BC \Rightarrow f+y=AD+BC \Rightarrow AD+BC=11$$

$$\xrightarrow{AD=yr} BC=11-yr$$

بنابراین

$$\Delta BHC:BC^r=BH^r+CH^r\Rightarrow(11-r)^r=r^r+(r)^r$$

$$121 + 4r^2 - 44r = 9 + 4r^2 \Rightarrow 44r = 112 \Rightarrow r = \frac{112}{44} = \frac{28}{11}$$



۳۳۷ ۴ چهارضلعی ABCD محاطی است، پس زاویه‌های مقابل آن

مکمل اند، در نتیجه

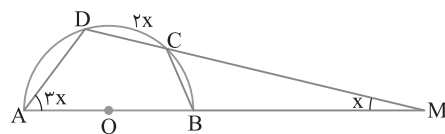
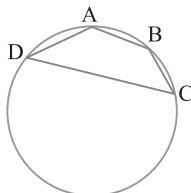
$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha + 2\beta + \alpha + 2\beta - 2^\circ = 180^\circ \Rightarrow 4\alpha + 4\beta = 182^\circ$$

$$\alpha + \beta = \Delta^\circ \quad (1)$$

$$\hat{B} + \hat{D} = 1\lambda^\circ \Rightarrow \textcircled{1}\alpha + \beta + \textcircled{2}\alpha - \beta = 1\lambda^\circ \Rightarrow \textcircled{3}\alpha = 1\lambda^\circ \Rightarrow \alpha = \textcircled{3}^\circ$$

یس بنابر برابری (۱)، $\beta = 2^\circ$. یس

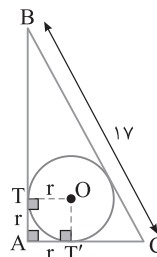
$$r\alpha + r\beta = r(r^\circ) + r(r^\circ) = 1r^\circ$$



از شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن دایره محاطی مثلث

قائم الزاویه ABC، با مرکز O رسم شده است. چهارضلعی OTAT' مربع است، چون شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است. اگر P نصف محیط مثلث و a طول وتر مثلث باشد، می دانیم $AT = P - a$ ، یعنی

$$r = P - a \Rightarrow r = 20 - 17 = 3$$



۳۳۲ ۲ اگر r_a, r_b و r_c شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی مثلث و r شعاع

دایره محاطی داخلی آن باشد. آن گاه $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$ پس $\frac{1}{r} = \frac{1}{2}$ ، یعنی $r = \frac{1}{2}$.

از طرف دیگر اگر S مساحت و P نصف محیط مثلث باشد، آنگاه $r = \frac{S}{P}$ پس

$$\frac{1}{2} = \frac{S}{\frac{9}{2}} \Rightarrow S = \frac{9}{4} = 2.25$$

در مثلث متساوی الاضلاع مرکز دایره محاطی داخلی و مرکز دایره

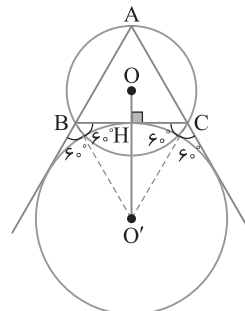
محیطی بر هم منطبق اند چون نیمساز زاویه‌ها، عمود منصف اضلاع نیز هست. در واقع نیمساز، عمود منصف، میانه و ارتفاع یکی هستند. پس O محل تلاقی میانه‌ها

نیز هست. در نتیجه با توجه به شکل زیر $\text{OH} = \frac{1}{3} \text{AH}$ ، همچنین $\text{O}^{\prime}\text{H} = \text{AH}$

، چون مثلث $O'BC$ متساوی الاضلاع و با ABC هم‌نهشت است. بنابراین

$$OO' = OH + O'H = \frac{1}{3}AH + AH = \frac{4}{3}AH$$

$$\frac{AH}{r} = \frac{\sqrt{r}}{r} (r\sqrt{r}) = \sqrt{r} \rightarrow OO' = \frac{r}{\sqrt{r}} \times \sqrt{r} = r$$



۳۳۴ ۲ با توجه به شکل زیر، OH شعاع دایره محاطی خارجی، نظیر ضلع

BC از مثلث ABC است. اگر این دایره در نقطه M بر امتداد ضلع AB مماس باشد، آن گاه $BM=BH$. از طرف دیگر اگر P نصف محیط مثلث

ABC باشد، آن گاه $AM = P$. پس،

$$BH=BM=AM-AB=P-AB=\frac{12+9+7}{2}-9=5$$

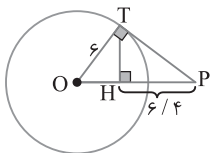
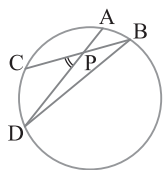
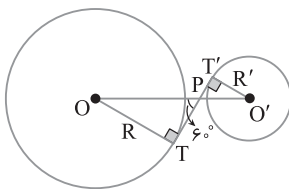

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{D\hat{A}E} = \frac{\widehat{DC} + \widehat{CE}}{2} \\ \widehat{A\hat{D}C} = \frac{\widehat{AE} + \widehat{CE}}{2} \end{array} \right. \xrightarrow{\widehat{AE} = \widehat{DC}} \widehat{D\hat{A}E} = \widehat{A\hat{D}C}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{DC} = \text{AE} \\ \hat{\text{ADC}} = \hat{\text{DAE}} \\ \hat{\text{C}} = \hat{\text{E}} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{(زض)}} \triangle \text{ACD} \cong \triangle \text{DEA}$$


Figure 1 shows a Cartesian coordinate system with x and y axes. A circle is centered at the point (4, 3) with a radius of 2. A straight line passes through the points A(-2, 0) and B(0, 4). The origin is labeled O. The x-axis has a tick mark at 4, and the y-axis has a tick mark at 3.

$$\Delta \text{OTP:PT}^{\text{r}} = \text{OP}^{\text{r}} - \text{OT}^{\text{r}} = 1 \cdot 0^{\text{r}} - 0^{\text{r}} = 0^{\text{r}} \Rightarrow \text{PT} = \Lambda$$



۳۴۸ ۱ با توجه به شکل

مقابل، فرض کنید مماس مشترک داخلی TT' خط‌المرکزین OO' را در نقطه P قطع کرده باشد، در این صورت $\hat{P} = 60^\circ$. از O' به T' و از O به T وصل می‌کنیم. در این صورت $\hat{T} = \hat{T}' = 90^\circ$. بنابراین با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی،

$$\triangle OPT: \hat{P} = 60^\circ \Rightarrow OT = \frac{\sqrt{3}}{2} OP \Rightarrow \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} OP \Rightarrow OP = \frac{14}{\sqrt{3}}$$

$$\triangle O'PT': \hat{P} = 60^\circ \Rightarrow O'T' = \frac{\sqrt{3}}{2} O'P \Rightarrow R' = \frac{\sqrt{3}}{2} O'P$$

$$O'P = \frac{2R'}{\sqrt{3}}$$

بنابر فرض $OO' = 6\sqrt{3}$ ، بنابراین با توجه به شکل،

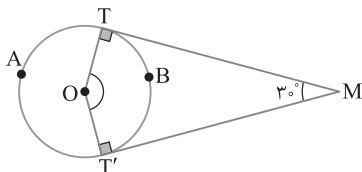
$$OP + O'P = OO' \Rightarrow \frac{14}{\sqrt{3}} + \frac{2R'}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3} \Rightarrow 14 + 2R' = 18 \Rightarrow R' = 2$$

۳۴۹ ۳ زاویه بین دو مماس MT و MT' مساوی 30° است.

شعاع‌های OT و OT' بر این دو مماس عمودند، پس چهارضلعی $OTMT'$ محاطی است، زیرا $\hat{T} + \hat{T}' = 180^\circ$. بنابراین $\hat{O} + \hat{M} = 180^\circ$.

چون $\hat{M} = 30^\circ$ ، پس $\hat{O} = 150^\circ$ و چون $\hat{O}$ زاویه مرکزی است، پس اندازه آن

با اندازه کمان TBT' برابر است، یعنی $TBT' = 150^\circ$.



۳۵۰ ۳ ابتدا شکل را به صورت زیر رسم می‌کنیم. بنابر قضیه فیثاغورس

توجه کنید که دایره محاطی مثلث داخلی مثلث با شعاع r رسم شده است. اگر P نصف محیط مثلث ABC باشد، آن‌گاه، $P = \frac{3+4+5}{2} = 6$

$$BH = P - b = 6 - 3 = 3, \quad CH = P - c = 6 - 4 = 2$$

$$AH' = P - a = 6 - 5 = 1$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{1}{2} \times 3 \times 4}{6} = 1 \quad \text{همچنین اگر } S \text{ مساحت مثلث } ABC \text{ باشد، آن‌گاه}$$

بنابر قضیه فیثاغورس،

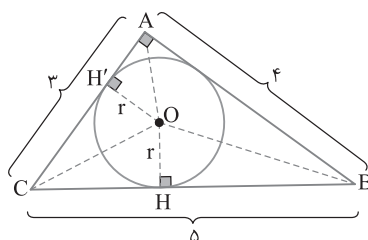
$$\triangle OBH: OB = \sqrt{OH^2 + BH^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

$$\triangle OCH: OC = \sqrt{OH^2 + CH^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$\triangle AOH': OA = \sqrt{OH'^2 + AH'^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

پس فاصله دورترین رأس این مثلث از محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های

داخلی آن برابر $\sqrt{10}$ است.



۳۴۵ ۲ مجموع اندازه‌های کمان‌های ایجاد شده روی دایره برابر 360° است، پس

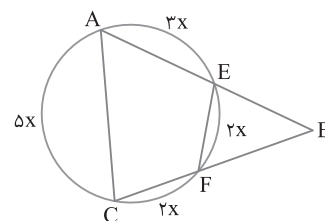
$$\widehat{AE} + \widehat{EF} + \widehat{FC} + \widehat{AC} = 360^\circ \Rightarrow 3x + 2x + 2x + 5x = 360^\circ$$

$$12x = 360^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$$

در نتیجه $\widehat{AC} = 5x = 150^\circ$ و $\widehat{EF} = 2x = 60^\circ$. از طرف دیگر زاویه B زاویه

بین امتداد دو وتر دایره است، پس

$$\hat{B} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{EF}}{2} = \frac{150^\circ - 60^\circ}{2} = 45^\circ$$



۳۴۶ ۲ بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$OT^2 = OP \times OQ \Rightarrow OT^2 = OP(OP + PQ)$$

$$4^2 = OP(OP + 8) \Rightarrow OP^2 + 8OP - 16 = 0$$

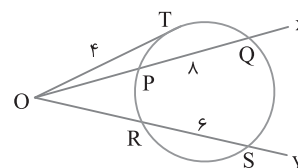
جواب مثبت این معادله $OP = 4\sqrt{2} - 4$ است. همچنین بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$OT^2 = OR \times OS \Rightarrow 4^2 = OR(OR + RS)$$

$$16 = OR(OR + 6) \Rightarrow OR^2 + 6OR - 16 = 0$$

جواب مثبت این معادله $OR = 2$ است. بنابراین

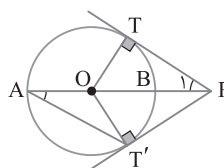
$$OP + OR = 4\sqrt{2} - 4 + 2 = 4\sqrt{2} - 2$$



۳۴۷ ۴ بنابر قضیه خطوط موازی و

مورب در شکل مقابل،

$$\begin{cases} PT \parallel AT' \\ \text{مورب } AP \end{cases} \Rightarrow \hat{A} = \hat{P}_1$$



از طرف دیگر $\hat{A}$ زاویه محاطی است، پس $\hat{A} = \frac{\widehat{BT'}}{2}$. در نتیجه $\hat{P}_1 = \frac{\widehat{BT'}}{2}$

درضمن $\hat{P}_1$ زاویه بین امتداد وتر و خط مماس بر دایره است، پس اندازه آن

نصف قدرمطلق تفاضل کمان‌های روبه‌روی آن است، یعنی $\hat{P}_1 = \frac{\widehat{AT} - \widehat{BT}}{2}$

همچنین می‌دانیم OP نیمساز زاویه TOT' است، پس $\widehat{BT} = \widehat{BT'}$ ، بنابراین

$$\hat{P}_1 = \frac{\widehat{AT} - \widehat{BT}}{2} \xrightarrow{\hat{P}_1 = \frac{\widehat{BT'}}{2}} \frac{\widehat{BT'}}{2} = \frac{\widehat{AT} - \widehat{BT}}{2} \xrightarrow{\widehat{BT'} = \widehat{BT}} \widehat{BT} = \widehat{AT} - \widehat{BT} \Rightarrow 2\widehat{BT} = \widehat{AT}$$

چون AB قطر دایره است، پس

$$\widehat{AT} + \widehat{BT} = 180^\circ \Rightarrow 2\widehat{BT} + \widehat{BT} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BT} = 60^\circ$$

بنابراین $TBT' = 2\widehat{BT} = 120^\circ$.

۳۵۱) بنابر فرض مسئله،

$$OA + R = 9, \quad OA - R = 5$$

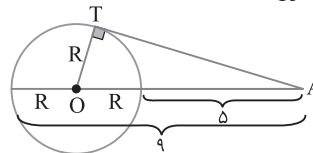
با حل دستگاه حاصل از دو معادله بالا به دست می‌آید

$$OA = 7, \quad R = 2$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویه OAT بنابر قضیه فیثاغورس،

$$AT = \sqrt{OA^2 - OT^2} = \sqrt{7^2 - 2^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\text{در نتیجه} \quad \frac{AT}{R} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$



۳۵۲) ۱

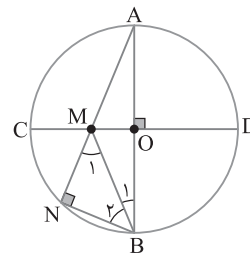
از نقطه B به نقطه M وصل می‌کنیم. زاویه N محاطی روبه‌رو به قطر

است. پس $\hat{N} = 90^\circ$ ، در نتیجه $\hat{B}_1 + \hat{M}_1 = 90^\circ$ ، از طرف دیگر بنابر فرضپس $\hat{B}_1 = \hat{M}_1$ ، در نتیجه $2\hat{M}_1 = 90^\circ$ و $\hat{M}_1 = 45^\circ$. در ضمن

CD عمود منصف AB است، پس نقطه M از دایره AB به یک فاصله است، یعنی

MA = MB، پس $\hat{A} = \hat{B}_1$ ، چون $\hat{M}_1$ زاویه خارجی مثلث AMB است، پس

$$\hat{M}_1 = \hat{A} + \hat{B}_1 \Rightarrow 45^\circ = \hat{A} + \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = 22.5^\circ$$

بنابراین اندازه زاویه A، $\frac{1}{4}$ قائمه است.

۳۵۳) ۱

می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی مساوی‌اند. بنابراین

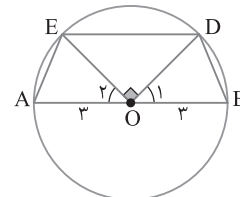
$$DE \parallel AB \Rightarrow \widehat{DB} = \widehat{AE} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

چون $\widehat{DOE} = 90^\circ$ ، پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 45^\circ$. با توجه به شکل،

$$S_{ABDE} = S_{OAE} + S_{ODE} + S_{OBD}$$

$$= \frac{1}{2} (3) (3) \sin 45^\circ + \frac{1}{2} (3) (3) + \frac{1}{2} (3) (3) \sin 45^\circ$$

$$= \frac{9\sqrt{2}}{4} + \frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{2}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{2} + \frac{9}{2} = \frac{9}{2} (\sqrt{2} + 1)$$



۳۵۴) ۱

چون AB قطر دایره است، پس

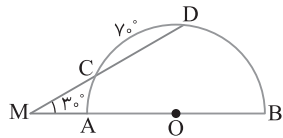
$$\widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{BD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AC} + 70^\circ + \widehat{BD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AC} + \widehat{BD} = 110^\circ$$

از طرف دیگر زاویه M زاویه بین امتداد دو وتر دایره است، بنابراین

$$\hat{M} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2} \Rightarrow 30^\circ = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} - \widehat{AC} = 60^\circ$$

از تساوی‌های به دست آمده به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} \widehat{AC} + \widehat{BD} = 110^\circ \\ \widehat{BD} - \widehat{AC} = 60^\circ \end{cases} \xrightarrow{-} 2\widehat{AC} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 25^\circ$$

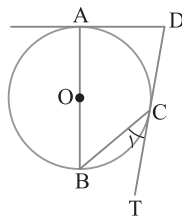
۳۵۵) ۲ مطابق شکل زیر، زاویه C_1 زاویه ظلی است، پس

$$\hat{C}_1 = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow 40^\circ = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 80^\circ$$

چون AB قطر دایره است، پس $\widehat{AC} + \widehat{BC} = 180^\circ$. در نتیجه $\widehat{AC} = 100^\circ$.

در ضمن زاویه D زاویه بین دو مماس بر دایره است، پس

$$\hat{D} = \frac{\widehat{ABC} - \widehat{AC}}{2} = \frac{(180^\circ + 80^\circ) - 100^\circ}{2} = 80^\circ$$



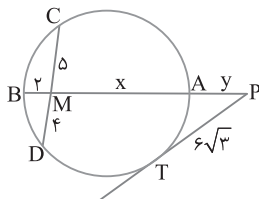
۳۵۶) ۱ بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$MA \times MB = MC \times MD \Rightarrow 2x = 5 \times 4 \Rightarrow x = 10$$

از طرف دیگر،

$$PT^2 = PA \times PB \Rightarrow (6\sqrt{3})^2 = y(y + x + 2)$$

$$108 = y(y + 12) \Rightarrow y^2 + 12y - 108 = 0 \Rightarrow (y - 6)(y + 18) = 0$$

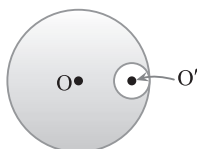
جواب مثبت این معادله $y = 6$ است.۳۵۷) ۴ اگر R و R' ($R > R'$) شعاع‌های دو دایره مماس داخلباشند، آن‌گاه طول خط‌المركزین آن‌ها برابر $R - R'$ است. پس $R - R' = 4$.از طرف دیگر مساحت ناحیه محدود بین دو دایره $\pi R^2 - \pi R'^2$ است. بنابراین

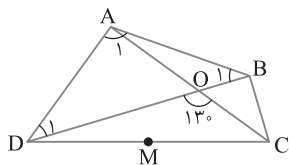
$$\pi R^2 - \pi R'^2 = 32\pi \Rightarrow R^2 - R'^2 = 32$$

$$(R - R')(R + R') = 32 \xrightarrow{R - R' = 4} R + R' = 8$$

در نتیجه

$$\begin{cases} R + R' = 8 \\ R - R' = 4 \end{cases} \Rightarrow R = 6, \quad R' = 2$$

پس نسبت شعاع‌های این دو دایره برابر است با $\frac{R}{R'} = \frac{6}{2} = 3$.



۳۶۰ می‌دانیم در دوزنقه متساوی الساقین محیطی، قطر دایره محاطی

واسطه هندسی طول قاعده‌ها است، پس $4r^2 = AB \times CD$ ، یعنی

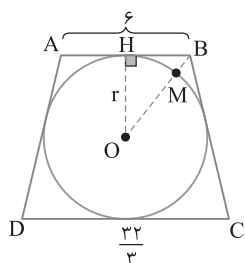
$4r^2 = 6 \times \frac{32}{3}$ ، بنابراین $r = 4$. از طرف دیگر چون دوزنقه متساوی الساقین

است، پس $BH = \frac{1}{2} AB = 3$.

اکنون در مثلث قائم الزاویه OBH، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$OB = \sqrt{OH^2 + BH^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

در نتیجه $BM = OB - OM = 5 - 4 = 1$.



۳۶۱ در شکل زیر محور بازتاب و تصویر نقطه A تحت این

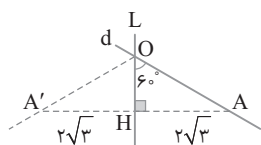
بازتاب است. توجه کنید که محور بازتاب (L) عمودمنصف AA' است،

پس $AH = A'H = \frac{AA'}{2} = 2\sqrt{3}$. در مثلث قائم الزاویه OAH، چون

$\hat{O} = 60^\circ$ ، پس

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} OA \Rightarrow 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} OA$$

یعنی $OA = 4$.

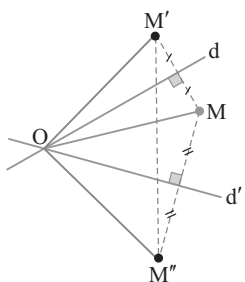


۳۶۲ توجه کنید که خط d عمودمنصف پاره خط MM' و خط d'

عمودمنصف پاره خط MM'' است، پس بنابر خاصیت عمودمنصف $OM = OM' = OM'' = 3\sqrt{2}$.

همچنین می‌دانیم $\hat{M'OM} = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$ ، بنابراین مثلث OM'M'' قائم الزاویه است. در نتیجه

$$M'M'' = \sqrt{OM'^2 + OM''^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = 6$$



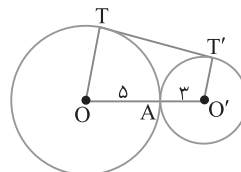
۳۵۸ دو دایره مماس بیرونی هستند، پس $OO' = 5 + 3 = 8$. از

طرف دیگر $OT = 5$ و $O'T' = 3$ ، پس باید طول مماس مشترک خارجی TT' را به دست آوریم:

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{8^2 - (5 - 3)^2} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \text{محیط } TOO'T' &= OT + TT' + O'T' + OO' = 5 + 2\sqrt{15} + 3 + 8 \\ &= 16 + 2\sqrt{15} = 2(8 + \sqrt{15}) \end{aligned}$$



۳۵۹ راه حل اول چون چهارضلعی ABCD محاطی است، پس

دایره‌ای از رأس‌های آن می‌گذرد. با رسم این دایره نتیجه می‌گیریم

$$AB = AD \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AD} \Rightarrow \frac{\hat{C}_1 = \widehat{AB}}{\hat{C}_2 = \widehat{AD}} \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{C}_2 = 40^\circ$$

پس $\widehat{AB} = \widehat{AD} = 80^\circ$. از طرف دیگر زاویه O_1 زاویه بین دو وتر دایره است.

بنابراین

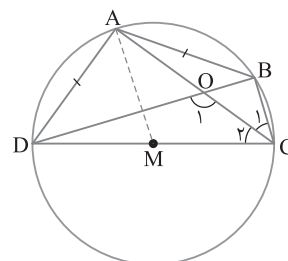
$$\hat{O}_1 = \frac{\widehat{AB} + \widehat{DC}}{2} \Rightarrow 130^\circ = \frac{80^\circ + \widehat{DC}}{2} \Rightarrow \widehat{DC} = 180^\circ$$

در نتیجه قطر این دایره است، پس زاویه DAC

روبه‌رو به این قطر است، قائمه است. اگر M وسط DC باشد، آن‌گاه AM

میانۀ وارد بر وتر مثلث قائم الزاویه ADC است، چون شعاع دایره برابر ۸

است، پس $DC = 16$. بنابراین $AM = \frac{DC}{2} = \frac{16}{2} = 8$.



راه حل دوم چون چهارضلعی ABCD محاطی است، پس زاویه‌های مقابل در

آن مکمل‌اند، در نتیجه

$$\hat{C} + \hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 80^\circ \Rightarrow \hat{A} = 100^\circ$$

همچنین چون $AB = AD$ ، مثلث ABD متساوی الساقین است، بنابراین

$$\hat{D}_1 = \hat{B}_1 = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ$$

از طرف دیگر $\hat{C} = 130^\circ$ ، چون $\hat{C} = \hat{C}_1 + \hat{D}_1$ ، پس

$$\hat{C} = \hat{C}_1 + \hat{D}_1 \Rightarrow 130^\circ = \hat{C}_1 + 40^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 = 90^\circ$$

چون چهارضلعی ABCD محاطی است، در نتیجه قطر دایره است. پس

فاصله رأس A تا وسط DC همان میانۀ نظیر ضلع

DC در مثلث قائم الزاویه ADC است. در نتیجه $AM = \frac{DC}{2} = 8$.

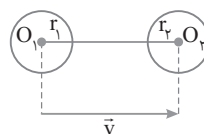
$$2X + 3 = X + 4 \Rightarrow X = 1$$

بنابراین $r_1 = r_2 = 5$. اکنون با توجه به شکل زیر می‌توان نوشت

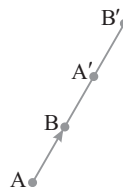
یعنی $y > 3$ چون x عددی طبیعی است و می‌خواهیم $x + y$ کمترین مقدار طبیعی ممکن باشد، پس $y = 4$. اکنون به دست می‌آید

$$x + y = 1 + 4 = 5$$

$x + y$ کمترین مقدار طبیعی



پاره خط AB' را به ۳ قسمت مساوی تقسیم می کنند. بنابراین $\frac{AB'}{AA'} = \frac{3}{2}$
یعنی $2AB' = 3AA'$.



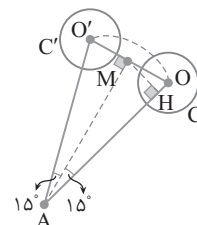
تغییر نمی‌دهند. ولی تجانس با نسبت $\frac{1}{4}$ - مساحت مثلث را با ضریب

$\frac{1}{16} = \left(-\frac{1}{4}\right)^2$ تغییر می‌دهد. از طرف دیگر مثلث با اضلاع ۵، ۱۲ و ۱۳

قائم الزاویه است، زیرا $۵^2 + ۱۲^2 = ۱۳^2$. پس اگر S' مساحت مثلث خواسته شده و S مساحت مثلث اولیه باشد، آن گاه

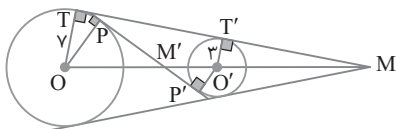
$$S' = \frac{1}{16} S = \frac{1}{16} (\frac{1}{2} \times ۱۲ \times ۵) = \frac{۱۵}{۸}$$

به مرکز A با زاویه 30° باشد. بنابر فرض سؤال C' مجانس C نیز هست. چون C و C' مساوی‌اند، پس نسبت تجانس ۱ یا $1-1$ است. ولی نسبت تجانس ۱ درست نیست چون تجانس با نسبت ۱ تبدیل همانی است ولی در اینجا C بر C' منطبق نیست. بنابراین نسبت تجانس در اینجا $1-1$ است. بنابراین اگر M مرکز تجانس باشد، M وسط OO' است. پس در مثلث متساوی‌الساقین OAO' ، پاره‌خط AM هم میانه، هم ارتفاع و هم نیمساز است. پس مثلث AOM قائم‌الزاویه است و $\hat{MAO} = 15^\circ$. بنابراین عمود MH در مثلث قائم‌الزاویه AOM، $\frac{1}{4}$ برابر وتر است و چون $AO = 8$. پس



$MH = \frac{1}{4}(\lambda) = 2$. پس فاصله مرکز تجانس M تا OA برابر ۲ است.

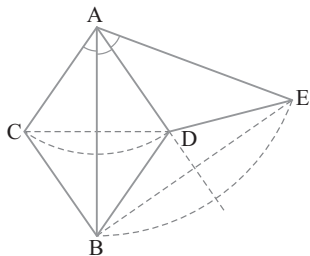
d' بازتاب فقط	d' مجاس d به	d' دوران یافته d	d' تصویر d با نامتهای
نسبت به خط Δ	مرکز هر نقطه روی	به مرکز هر نقطه	بردار انتقال است، که
است.	صفحه به جز نقاط	روی خط وسط	ابتدای آن‌ها روی d و
d و d' است.	با زاویه	اتهای آن‌ها روی d' است.	
	۱۸۰° است.		

$$\frac{\frac{3}{4} = \frac{MO'}{MQ}}{\gamma} \xrightarrow{\text{تفصيل در مخرج}} \frac{\frac{3}{4} = \frac{MO'}{OQ'}}{\frac{4}{4}} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{MO'}{12} \Rightarrow MO' = 9$$

$$\begin{aligned} \Delta \text{MOT:OP} \parallel \text{O'P'} &\xrightarrow[\text{تالاس}]{\text{تعميم قضيه}} \frac{\text{O'P'}}{\text{OP}} = \frac{\text{O'M'}}{\text{OM'}} \Rightarrow \frac{\gamma}{\gamma} = \frac{\text{O'M'}}{\text{OM'}} \\ &\xrightarrow[\text{تركيب در مختار}]{\gamma} \frac{\gamma}{10} = \frac{\text{O'M'}}{\text{OO'}} \Rightarrow \frac{\gamma}{10} = \frac{\text{O'M'}}{12} \Rightarrow \text{O'M'} = \gamma/6 \end{aligned}$$

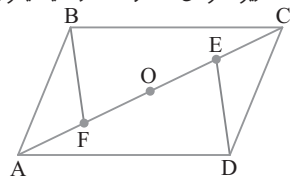
بنابراین فاصلهٔ مرکزهای تجانس مستقیم و معکوس دو دایره برابر است با

$$MM' = O'M + O'M' = 9 + 3/6 = 12/6$$

۳۶۹ ۴ می‌دانیم نتیجه ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع یک دوران با زاویه دو برابر زاویه بین دو محور بازتاب است. بنابراین مثلث ADE دوران یافته مثلث ACB به مرکز A و زاویه ۲A است.

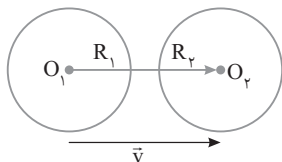


F تحت دوران به مرکز O و زاویه 180° است. با همین استدلال C تصویر A و D تصویر B تحت این دوران هستند. زیرا قطرهای AC و BD در O یکدیگر را نصف می‌کنند.



۳۷۶ ۲ اندازه بردار انتقال برابر O_1O_2 است، یعنی $|\vec{v}| = O_1O_2$ ،

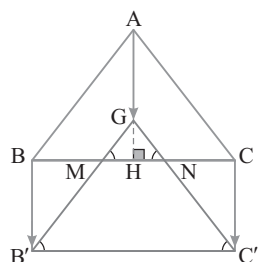
پس $R_1 = R_2$ ، اما چون دو دایره انتقال یافته یکدیگرند، پس $R_1 = R_2$ و $|\vec{v}| > 2R_1$ ، همچنین $\vec{v} \parallel O_1O_2$ ، پس گزینه (۲) نادرست است.



۳۷۷ ۱ توجه کنید که مثلث GMN هم متساوی الاضلاع است، پس با

مثلث ABC متشابه است. بنابر ویژگی‌های میانه $GH = \frac{1}{3}AH$. چون در دو مثلث متشابه نسبت میانه‌ها با نسبت تشابه برابر است و نسبت مساحت‌ها برابر مربع نسبت تشابه است، پس

$$\frac{S_{GMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{GH}{AH}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{S_{GMN}}{\sqrt{3} \times 6^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{GMN} = \sqrt{3}$$

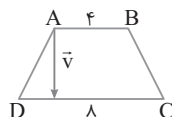


۳۷۸ ۳ می‌دانیم ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی یک انتقال است و

بردار انتقال آن دو برابر برداری است که دو سر آن روی این دو خط موازی است و بر آن‌ها عمود است. بردار انتقال ترکیب این دو بازتاب، $2\vec{v}$ است که $2\vec{v}$ در شکل زیر نشان داده شده است. با توجه به شکل اندازه بردار $2\vec{v}$ برابر ارتفاع دوزنقه است. اگر طول ارتفاع را h فرض کنیم، آن‌گاه

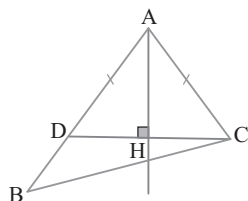
$$\frac{1}{2}(AB+CD) \times h = 18 \Rightarrow \frac{1}{2}(4+8) \times h = 18$$

یعنی $h = 3$. در نهایت به دست می‌آید $2 \times 3 = 6$ (اندازه بردار $2\vec{v}$). $OO'' = 2 \times 3 = 6$

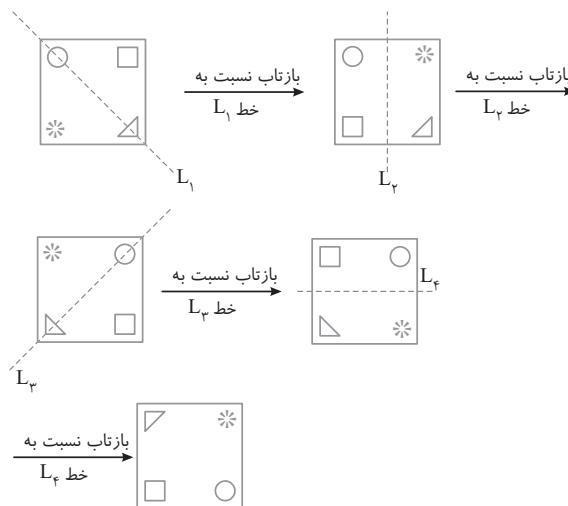


۳۷۹ ۱ در شکل زیر، طبق فرض AD بازتاب ضلع AC است. بنابر

تعریف بازتاب محور بازتاب عمود منصف CD است. از طرف دیگر چون بازتاب طولی است، $AC = AD$ پس بنابر خاصیت عمود منصف A روی عمود منصف پاره خط CD است. چون مثلث ACD متساوی الساقین است، عمود منصف CD نیمساز زاویه A است. در نتیجه محور بازتاب نیمساز زاویه A است.

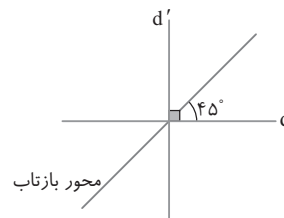


۳۷۱ ۳ به ترتیب بازتاب‌های خواسته شده را به دست می‌آوریم:



۳۷۲ ۳ چون شیب خط d برابر $\frac{3}{4}$ و شیب خط d' برابر $-\frac{2}{3}$ است،

پس دو خط برهم عمودند. محور بازتاب، نیمساز زاویه بین خط و تصویرش تحت بازتاب است. پس زاویه محور بازتاب، با هریک از این خط‌ها برابر 45° است.



۳۷۳ ۳ ابتدا توجه کنید که شعاع دو دایره برابرند، زیرا انتقال تبدیلی

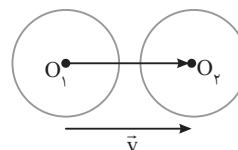
طول‌یاست، پس $x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5$

اکنون با توجه به شکل زیر می‌توان نوشت

$$R_1 + R_2 > R_1 + R_2 \Rightarrow 3y - 1 > 4 + 4 \Rightarrow 3y - 1 > 8$$

یعنی $y > 3$. چون x عددی طبیعی است و می‌خواهیم $x + y$ کمترین مقدار طبیعی ممکن باشد، بنابراین $y = 4$. در نتیجه

$$x + y \text{ کمترین مقدار طبیعی} = 5 + 4 = 9$$



۳۷۴ ۲ عرض دو نقطه A و B مساوی است، پس AB موازی محور x

است. بنابراین خط d که عمود منصف AB است، عمود بر محور x و در نتیجه موازی با محور y است.

۳۷۵ ۱ در دو حالت، بازتاب یک خط بر خودش نگاشته می‌شود: زمانی

که خط بر محور بازتاب عمود باشد و یا خط بر محور بازتاب منطبق باشد. حالت اول خط بر محور بازتاب عمود است: در این حالت شیب خط و محور

$$a = -\frac{4}{3} \text{، یعنی } a + 1 = -\frac{1}{3}$$

بازتاب قرینه و معکوس یکدیگرند: $a + 1 = -\frac{1}{3}$ ، یعنی $a = -\frac{4}{3}$

حالت دوم خط بر محور بازتاب منطبق است: توجه کنید که در این حالت باید $\frac{1}{1} = \frac{a+1}{3} = \frac{2}{-1}$ و این تساوی‌ها هیچ‌گاه رخ نمی‌دهد.

بنابراین A' مجانس A'' در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{k}{k'}$ است.

توجه کنید که نسبت $\frac{k'}{k}$ نیز می‌تواند درست باشد که در گزینه‌ها نیست.

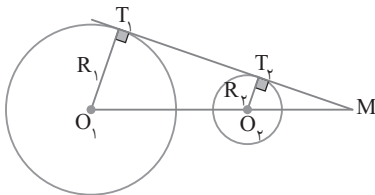
۳۸۵ (۳) مرکز تجانس مستقیم محل برخورد مماس مشترک‌های خارجی و خط‌المركزین دو دایره است (نقطه M در شکل زیر). اکنون توجه کنید که دو

مثلث MO_1T_1 و MO_2T_2 متشابه‌اند و $\frac{O_1M}{O_2M} = \frac{R_1}{R_2}$ ، یعنی

$$\frac{O_1M}{O_1M - O_1O_2} = \frac{R_1}{R_1 - R_2}$$

با حل این معادله به دست می‌آید $O_1M = \frac{R_1 \times O_1O_2}{R_1 - R_2}$. بنابراین فاصله M

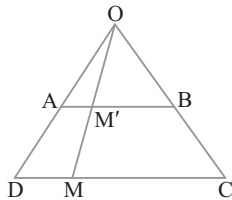
از نزدیک‌ترین نقطه دایره بزرگ‌تر $R_1 - R_2 = \frac{R_1 \times O_1O_2}{O_1M - R_1}$ است.



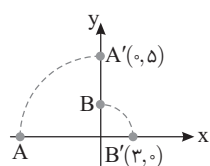
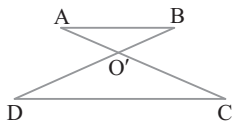
۳۸۶ (۱) نقطه برخورد خط‌های AD و BC ، یعنی نقطه O ، مرکز تجانس آن‌هاست، زیرا اگر M نقطه‌ای دلخواه روی CD باشد، از O به M وصل می‌کنیم تا AB را در M' قطع کند. آن‌گاه بنابر قضیه تالس،

$$\triangle ODM : AM' \parallel DM \Rightarrow \frac{OA}{OD} = \frac{OM'}{OM} \Rightarrow OM = \frac{OD}{OA} OM'$$

بنابراین هر نقطه روی پاره‌خط CD مجانس یکی از نقطه‌های پاره‌خط AB با نسبت $\frac{OD}{OA}$ است.



البته دقت کنید که نقطه برخورد خط‌های AC و BD نیز می‌تواند مرکز تجانس دیگری برای این دو پاره‌خط باشد.

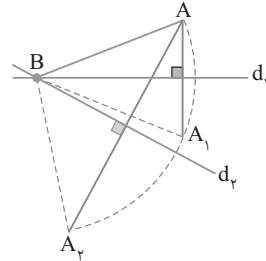


۳۸۷ (۱) در شکل زیر، نقاط $A'(0,5)$ و $B'(3,0)$ به ترتیب دوران یافته نقاط A و B به مرکز O با زاویه 90° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت هستند. باید معادله خط $A'B'$ را به دست آوریم:

$$m_{A'B'} = \frac{y_{A'} - y_{B'}}{x_{A'} - x_{B'}} = \frac{5 - 0}{0 - 3} = -\frac{5}{3}$$

$$A'B' \text{ خط: } y - 0 = -\frac{5}{3}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{5}{3}x + 5 \Rightarrow 3y + 5x = 15$$

۳۸۰ (۱) با توجه به شکل زیر، خط d_1 عمودمنصف AA_1 است، بنابراین $BA = BA_1$. همچنین d_2 عمودمنصف AA_2 است، پس $BA = BA_2$. اگر A' بازتاب نقطه A نسبت به خطی گذرا از B باشد، به سادگی معلوم می‌شود که $BA = BA'$. در نتیجه مکان هندسی نقطه‌هایی مانند A' دایره‌ای است به مرکز B و شعاع AB .

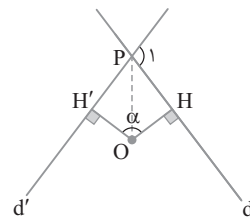


۳۸۱ (۴) در حالت کلی $\underbrace{R(R(R \dots (R(A)) \dots))}_{n \text{ مرتبه}}$ ، یعنی نقطه A را

حول نقطه O به اندازه $n\alpha$ دوران دهیم. چون $R(R(A)) = A$ ، پس $\alpha = 36^\circ$ ، یعنی $\alpha = 18^\circ$. مسلماً مضرب‌های 18° نیز می‌توانند زاویه‌های مورد قبول دیگر باشند.

۳۸۲ (۱) فرض کنید d' دوران یافته خط d به مرکز O با زاویه α باشد. می‌دانیم زاویه بین خط و دوران یافته‌اش با زاویه دوران برابر است، البته آن زاویه‌ای که مرکز دوران درون آن نیست. پس با توجه به شکل $\angle HOH' = \angle P = \alpha$. از طرف دیگر، OP نیمساز است، در نتیجه

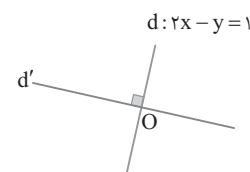
$$\angle OPH = \frac{1}{2} \angle HPH' = \frac{18^\circ - \alpha}{2} = 9^\circ - \frac{\alpha}{2}$$



۳۸۳ (۱) توجه کنید که نقطه O روی خط $2x - y = 1$ قرار دارد. تصویر این خط، خطی است که از O می‌گذرد و بر خط $2x - y = 1$ عمود است. اگر

خط تصویر را d' فرض کنیم، آن‌گاه $m_{d'} = -\frac{1}{m_d} = -\frac{1}{2}$. اکنون معادله

خط d' را به شکل زیر می‌نویسیم: $d': y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow 2y + x = -2$



۳۸۴ (۱) فرض کنید A' مجانس A در تجانس به مرکز O و نسبت k باشد:

$$OA' = k \times OA \quad (۱)$$

همچنین A'' مجانس A در تجانس به مرکز O و نسبت k' باشد:

$$OA'' = k' \times OA \quad (۲)$$

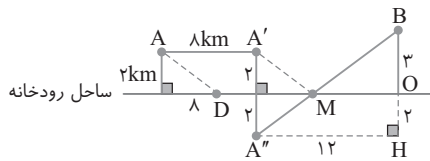
با تقسیم برابری (۱) بر برابری (۲) می‌توان نوشت

$$\frac{OA'}{OA''} = \frac{k}{k'} \Rightarrow OA' = \left(\frac{k}{k'}\right) OA''$$

با توجه به شکل،

$$\triangle A''BH: A''B'' = A''H'' + BH'' = 12^2 + 5^2 = 169 \Rightarrow A''B = 13$$

بنابراین $DM + A''B = 8 + 13 = 21$ طول مسیر مینیمم.



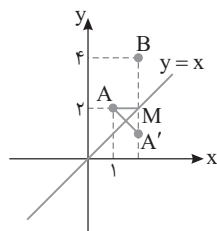
۳۹۳ بازناب نقطه A را نسبت به خط $y=x$ به دست آورده A' می‌نامیم.

از A' به B وصل می‌کنیم تا خط $y=x$ را در M قطع کند. در این صورت مسیر کوتاهترین مسیر است و چون بازتاب ایزومتري است، $AM = A'M$. بنابراین

$$AMB \text{ طول مسیر } = AM + MB = A'M + MB = A'B$$

از طرف دیگر بازتاب نقطه $A(1, 2)$ نسبت به خط $y=x$ نقطه $A'(2, 1)$

$$\text{است. در نتیجه } A'B = \sqrt{(2-2)^2 + (1-4)^2} = 3 = \text{طول مسیر } AMB.$$

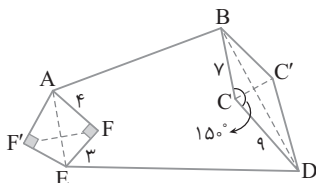


۳۹۴ بازتاب F را نسبت به AE و بازتاب C را نسبت به BD به دست

می‌آوریم. چندضلعی $ABC'D'EF'$ چندضلعی مطلوب است. اکنون توجه کنید که میزان افزایش مساحت برابر است با

$$S_{AFEF'} + S_{BCDC'} = 2S_{AFE} + 2S_{BCD}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \times 3 \times 4\right) + 2\left(\frac{1}{2} \times 7 \times 9 \times \sin 15^\circ\right) = 12 + \frac{63}{2} = \frac{87}{2}$$



۳۹۵ در مسیر MABM چون AB ثابت است، پس باید

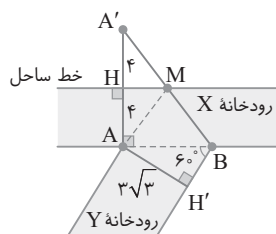
$MA + MB$ کمترین باشد. فرض کنید A' بازتاب نقطه A نسبت به خط ساحل باشد، پس M نقطه هرون برای A و B روی خط ساحل است. در مثلث

$$ABH', \text{ چون } \hat{B} = 60^\circ, \text{ پس } AH' = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \text{ و چون } AH' = 3\sqrt{3},$$

پس $AB = 6$. در مثلث ABA' بنابر قضیه فیثاغورس،

$$A'B = \sqrt{AA'^2 + AB^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$$

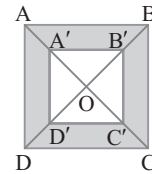
$$MABM \text{ کمترین طول مسیر } = \frac{MA+MB}{A'B} + AB = 10 + 6 = 16$$



۳۸۸ مجانس مربع ABCD به مرکز O نقطه تلاقی قطرهای آن با

نسبت $\frac{2}{3}$ مربع $A'B'C'D'$ است. بنابر فرض سوال مساحت قسمت رنگی

$$\text{برابر ۵ است و } A'B' = \frac{2}{3} AB \text{ پس}$$



$$S_{\text{مناطق رنگی}} = S_{ABCD} - S_{A'B'C'D'}$$

$$5 = AB^2 - A'B'^2 \Rightarrow 5 = AB^2 - \left(\frac{2}{3} AB\right)^2$$

$$5 = \frac{5}{9} AB^2 \Rightarrow AB^2 = 9 \Rightarrow AB = 3$$

بنابراین محیط مربع ABCD برابر $4 \times 3 = 12$ است.

۳۸۹ در تجانس، نسبت مساحت تصویر به مساحت شکل اولیه

مساوی توان دوم نسبت تجانس است. اگر مثلث $A'B'C'$ تصویر مثلث ABC تحت این تجانس باشد، آن‌گاه

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = k^2 \Rightarrow \frac{100}{144} = k^2 \Rightarrow \frac{25}{36} = k^2 \Rightarrow k = \pm \frac{5}{6}$$

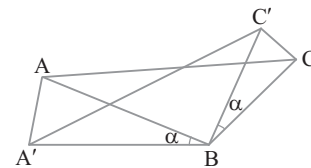
$$\text{بنابراین } |k| \times \text{طول پاره خط} = \frac{5}{6} \times 18 = 15$$

۳۹۰ در شکل زیر، $BA'C'$ دوران یافته BAC به مرکز B با زاویه

α در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. چون دوران طولیا است، پس $BA = BA'$ و $BC = BC'$ پس دو مثلث BAA' و BCC'

متساوی الساقین با زاویه رأس برابر هستند. بنابراین متشابه‌اند.

$$\triangle BAA' \sim \triangle BCC' \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AA'}{CC'} \Rightarrow \frac{12}{8} = \frac{6}{CC'} \Rightarrow CC' = 4$$



۳۹۱ از A خطی موازی d رسم

می‌کنیم تا BB' را در M قطع کند. در این

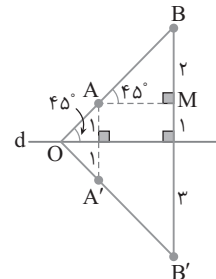
صورت چون $\hat{BAM} = 45^\circ$ ، پس مثلث

AMB قائم‌الزاویه و متساوی الساقین

است. در نتیجه $AM = BM = 2$ (شکل

مقابل را ببینید). چهارضلعی $ABB'A'$

دورزنه است و ارتفاع آن AM است:



$$S_{ABB'A'} = \frac{1}{2} (AA' + BB') \times AM = \frac{1}{2} (2 + 6) \times 2 = 8$$

۳۹۲ ابتدا نقطه A را در راستای خط ساحل رودخانه ۸km به راست

انتقال می‌دهیم تا به نقطه A' برسیم. سپس با توجه به مسئله هرون بازتاب

نقطه A' را نسبت به خط ساحل رودخانه A'' نامیده از A'' به B وصل

می‌کنیم تا خط ساحل رودخانه را در M قطع کند. اکنون M را در راستای خط

ساحل، ۸km به چپ انتقال می‌دهیم تا نقطه D به دست آید. در این صورت

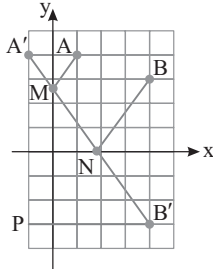
مسیر $ADMB$ کوتاهترین مسیر ممکن برای این جاده است. طول این مسیر برابر $AD + DM + MB$ است و چون $AD = A'M = A''M$ ، پس طول

این مسیر برابر $A''M + DM + MB$ یا $A''B + DM$ است. پس کافی است $A''B$ را به دست آوریم. از A'' خطی عمود بر امتداد BO رسم می‌کنیم تا آن را در H قطع کند.

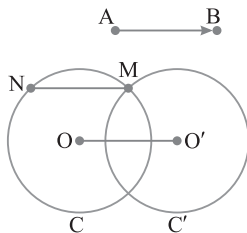
مینیم است. چون بازتاب ایزومتري است. پس $AM=A'M$ و $BN=B'N$. پس طول مسیر $AMNB$ برابر طول پاره خط $A'B'$ است و وتر مثلث قائم‌الزاویه $A'B'P$ است. پس

$$A'B'^2 = A'P^2 + B'P^2 \xrightarrow{A'P=7, B'P=5} A'B'^2 = 7^2 + 5^2 = 74$$

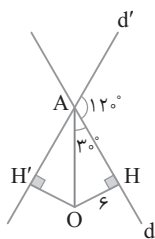
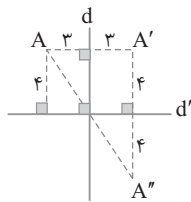
$$A'B' = \sqrt{74}$$



۴۰۰ (۴) دایره $C(O, R)$ را تحت بردار $\vec{AB}$ انتقال می‌دهیم. فرض کنید انتقال یافته این دایره، دایره $C'(O', R)$ باشد و دایره C' دایره C را در نقطه M قطع کند. از خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا دایره C را در نقطه N قطع کند. در این صورت M انتقال یافته N تحت بردار $\vec{AB}$ است. چون انتقال تبدیلی طولی است و شیب خط را حفظ می‌کند. پس $MN=AB$ و $MN \parallel AB$. بنابراین برای پیدا کردن وتر مورد نظر از تبدیل انتقال استفاده می‌کنیم. مسلماً اگر $AB > 2R$ ، چنین وتری وجود ندارد.



d, d'



۴۰۱ (۳) اگر بردار انتقال موازی با خط مورد نظر باشد، آن‌گاه تصویر خط تحت این انتقال بر خودش منطبق است. توجه کنید که بردار انتقال بردار صفر هم می‌تواند باشد که در گزینه‌ها نیست.

۴۰۲ (۴) بنابر اطلاعات داده شده و ویژگی‌های بازتاب نتیجه می‌گیریم مثلث $AA'A''$ در رأس A' قائم‌الزاویه است. اکنون بنابر قضیه فیثاغورس در این مثلث به دست می‌آید $AA'' = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

۴۰۳ (۳) می‌دانیم O روی نیمساز زاویه A است و $\hat{HOH}' = 12^\circ$. چون مجموع زاویه‌های چهارضلعی $AHOH'$ برابر 360° است، پس $\hat{HAH}' = 6^\circ$. بنابراین $\hat{OAH} = 3^\circ$. اکنون در مثلث قائم‌الزاویه OAH چون $\hat{OAH} = 3^\circ$ ، پس ضلع مقابل به این زاویه نصف وتر است. بنابراین

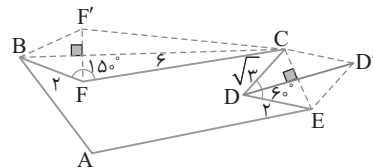
$$OH = \frac{1}{2} OA \Rightarrow OA = 2OH = 12$$

۳۹۶ (۱) اگر بازتاب D نسبت به خط CE نقطه D' و بازتاب F نسبت به خط BC نقطه F' باشد، آن‌گاه چندضلعی $ABF'CD'E$ هم‌محیط با چندضلعی $ABFCDE$ است ولی مساحت آن به اندازه $S_{BFCF'} + S_{DCD'E}$ اضافه می‌شود.

$$S_{DCD'E} = 2S_{DCE} = 2\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3})(2) \sin 60^\circ\right) = 3$$

$$S_{BFCF'} = 2S_{BFC} = 2\left(\frac{1}{2}(2)(6) \sin 150^\circ\right) = 6$$

پس میزان افزایش مساحت برابر $6+3=9$ است.



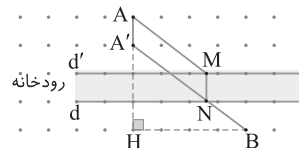
۳۹۷ (۲) مطابق شکل زیر، نقطه A را با برداری به طول ۱ (اندازه عرض رودخانه) در راستای عمود بر راستای رودخانه انتقال می‌دهیم تا به نقطه A' برسیم. سپس از A' به B وصل می‌کنیم تا خط d را در N قطع کند (شکل زیر را ببینید). از N عمودی بر خط d رسم می‌کنیم تا خط d' را در M قطع کند. در این صورت MN پل مورد نظر و مسیر $AMNB$ مسیر مینیم است:

$$AMNB \text{ مسیر } = AM + MN + NB$$

چون $AA'NM$ متوازی‌الاضلاع است، پس $AM=A'N$. در نتیجه $AMNB \text{ مسیر } = A'N + MN + NB = A'B + MN$

مطابق شکل طول $A'B$ را در مثلث قائم‌الزاویه $A'BH$ به دست می‌آوریم $A'B^2 = A'H^2 + BH^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow A'B = 5$

درضمن $MN=1$. بنابراین $AMNB \text{ مسیر } = 5+1=6$.



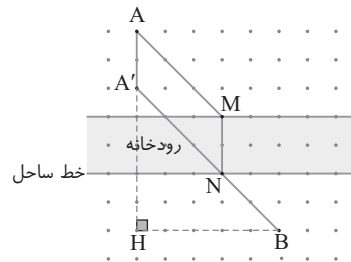
۳۹۸ (۴) مطابق شکل زیر، نقطه A را به اندازه عرض رودخانه یعنی ۲ واحد منتقل می‌کنیم تا به A' برسیم. سپس از A' به B وصل می‌کنیم تا خط ساحل رودخانه را که در شکل مشخص شده در N قطع کند. آن‌گاه MN پل مورد نظر و مسیر $AMNB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن است. با توجه به شکل، $AMNB \text{ مسیر } = AM + MN + NB$

$$\xrightarrow{MN=2, AM=A'N} AMNB \text{ مسیر } = A'N + NB + 2 = A'B + 2$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویه $A'HB$ می‌توان طول $A'B$ را به دست آورد:

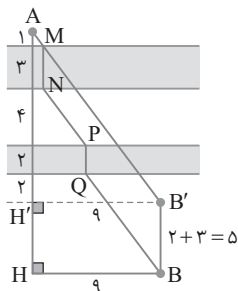
$$A'B = \sqrt{A'H^2 + BH^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

بنابراین طول مسیر مینیم مساوی $5\sqrt{2} + 2$ است.

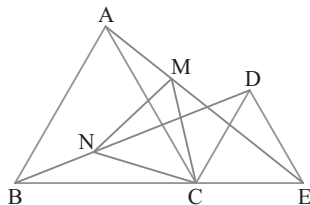


۳۹۹ (۴) بازتاب A را نسبت به محور y نقطه A' و بازتاب B را نسبت به محور x نقطه B' می‌نامیم. از A' به B' وصل می‌کنیم تا محورهای y و x را به ترتیب در نقاط M و N قطع کند. در این صورت مسیر $AMNB$ مسیر

۴۰۸ ۲ مانند مسئلهٔ احداث پُل عمل می‌کنیم با این تفاوت که B' انتقال یافته نقطه B با برداری عمود بر راستای ساحل رودخانه‌ها و به طولی برابر مجموع عرض رودخانه‌ها است. مطابق شکل، مسیر مورد نظر $AMNPQB$ است که برابر $AB' + BB'$ است. در مثلث قائم‌الزاویه $AH'B'$ بنابر قضیهٔ فیثاغورس $AB' = \sqrt{AH'^2 + H'B'^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$ اکنون طول مسیر به دست می‌آید $AB' + BB' = 15 + 5 = 20$.



۴۰۹ ۲ توجه کنید که $CE = CD$ و $\angle ECD = 60^\circ$. همچنین $CA = CB$ و $\angle ACB = 60^\circ$. پس D دوران یافته E حول C با زاویه 60° و B دوران یافته A حول C با زاویه 60° است. در نتیجه DB دوران یافته EA تحت این دوران است. بنابراین هر نقطه روی DB ، دوران یافته نقطه‌ای روی EA است. چون دوران ایزومتري است، پس N دوران یافته M است. در نتیجه $\angle MCN = 60^\circ$ و $CM = CN$ پس مثلث CMN متساوی‌الاضلاع است.



۴۱۰ ۲ از فرض تست و تعریف تبدیل تجانس نتیجه می‌شود

$$AN = 2ON \Rightarrow OA = 3ON$$

$N \xrightarrow[\text{با نسبت ۳}]{\text{تحت تجانس به مرکز O}} A$

$$BM = 2OM \Rightarrow OB = 3OM$$

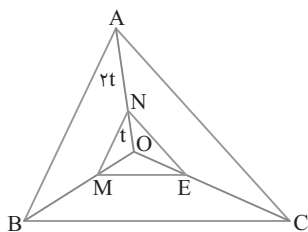
$M \xrightarrow[\text{با نسبت ۳}]{\text{تحت تجانس به مرکز O}} B$

$$CE = 2OE \Rightarrow OC = 3OE$$

$E \xrightarrow[\text{با نسبت ۳}]{\text{تحت تجانس به مرکز O}} C$

پس مثلث ABC مجانس مثلث NME به مرکز O با نسبت ۳ است. بنابراین این دو مثلث با نسبت ۳ متشابه‌اند. در نتیجه $\frac{S_{ABC}}{S_{NME}} = 3^2 = 9$ ، پس

$$\frac{S_{NME}}{S_{ABC}} = \frac{1}{9}$$



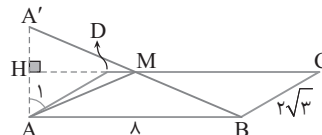
۴۰۴ ۱ بنابر مسئلهٔ هرون، اگر A' بازتاب A نسبت به خط CD باشد و از A' به B وصل کنیم تا DC را در M قطع کند، آن‌گاه مسیر AMB مینیمم است. در مثلث قائم‌الزاویه ADH زاویه A_1 برابر 60° است. پس

$$DH = \frac{\sqrt{3}}{2} AD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 3$$

درضمن MH با AB موازی است. پس بنابر قضیهٔ میان خط (H وسط AA') طول MH نصف AB و برابر ۴ است. پس

$$MD = MH - DH = 4 - 3 = 1 \Rightarrow MC = 8 - 1 = 7$$

$$\frac{DM}{MC} = \frac{1}{7} \text{ بنابراین}$$



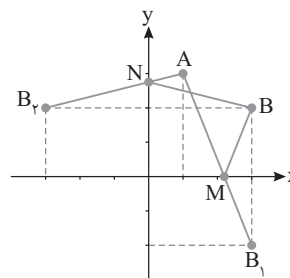
۴۰۵ ۲ فرض کنید R تبدیل دوران حول نقطهٔ O به اندازه α باشد. در این صورت $\underbrace{R(R(\dots R(A)\dots))}_{n \text{ مرتبه}}$ یعنی نقطهٔ A را حول O به اندازه $n\alpha$

دوران دهیم. در اینجا $\alpha = 60^\circ$ و چون $\underbrace{R(R(\dots R(A)\dots))}_{n \text{ مرتبه}} = A$

$$n \times 60^\circ = 360^\circ \Rightarrow n = 6$$

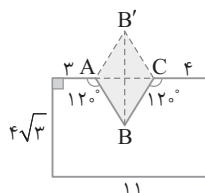
۴۰۶ ۲ B_1 قرینه B نسبت به محور X و B_2 قرینه B نسبت به محور Y است. محل برخورد AB_1 با محور X نقطهٔ M و محل برخورد AB_2 با محور Y نقطهٔ N است. اکنون توجه کنید که $MA + MB = AB_1$ و $NA + NB = AB_2$ پس

$$\frac{MA + MB}{NA + NB} = \frac{AB_1}{AB_2} = \frac{\sqrt{(3-1)^2 + (-2-3)^2}}{\sqrt{(1+3)^2 + (3-2)^2}} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{17}}$$



۴۰۷ ۳ با توجه به شکل زیر، اگر بازتاب نقطه B را نسبت به AC ، B' بنامیم، آن‌گاه به مساحت زمین اولیه مساحت چهارضلعی $ABCB'$ اضافه خواهد شد. بدون آنکه محیط زمین تغییر کند. با توجه به داده‌های شکل، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $AC = 11 - (3 + 4) = 4$ است. بنابراین $S_{AB'C} + \text{مساحت (مستطیل به اضلاع ۱۱ و ۴)} = \text{مساحت زمین جدید}$

$$= (4\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{4} (4)^2 = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

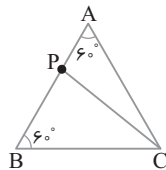


۴۱۶ فرض کنید R و R' به ترتیب شعاع‌های دایره‌های محیطی

مثلث‌های APC و BPC باشند، در این صورت بنابر قضیه سینوس‌ها،

$$\left. \begin{aligned} \triangle APC: \frac{PC}{\sin \hat{A}} = 2R &\Rightarrow \frac{PC}{\sin 60^\circ} = 2R \\ \triangle BPC: \frac{PC}{\sin \hat{B}} = 2R' &\Rightarrow \frac{PC}{\sin 60^\circ} = 2R' \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2R = 2R' \Rightarrow R = R'$$

پس تفاضل شعاع دایره‌های محیطی دو مثلث همواره صفر است.



۴۱۷ فرض کنید R شعاع دایره محیطی مثلث ABC باشد، در این

صورت بنابر قضیه سینوس‌ها،

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

$$\frac{a}{2R} = \sin \hat{A}, \quad \frac{b}{2R} = \sin \hat{B}, \quad \frac{c}{2R} = \sin \hat{C}$$

اکنون از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم

$$\frac{a \sin \hat{A} + b \sin \hat{B} + c \sin \hat{C}}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

$$a\left(\frac{a}{2R}\right) + b\left(\frac{b}{2R}\right) + c\left(\frac{c}{2R}\right) = 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R} = 2(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow R = \frac{1}{4}$$

بنابراین $\pi R^2 = \frac{\pi}{16}$ مساحت دایره محیطی.

۴۱۸ بنابر قضیه سینوس‌ها،

$$\frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{b}$$

اکنون از فرض نتیجه می‌گیریم

$$rc = (b^2 - r^2) \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}} \Rightarrow rc = (b^2 - r^2) \times \frac{c}{b}$$

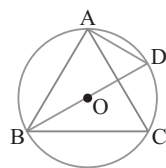
$$\frac{b^2 - r^2}{b} = 2 \Rightarrow b^2 - 2b - 2 = 0$$

$$b = \frac{2 + \sqrt{4 + 8}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

۴۱۹ شکل سؤال به صورت زیر است. بنابر قضیه سینوس‌ها،

$$\triangle ABC: \frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \xrightarrow{\hat{C} = \hat{B} = \frac{\pi}{6}} \frac{AB}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{AC}{\sin \frac{\pi}{6}} \Rightarrow \frac{AB}{\frac{1}{2}} = \frac{AC}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{AB}{1} = \frac{AC}{1}$$

$$AB = 1 \Rightarrow AB^2 = 1$$



۴۱۱ بنابر روابط طولی در مثلث قائم الزاویه ABC .

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow (8\sqrt{5})^2 = BH(BH + 4)$$

$$BH^2 + 4BH - 320 = 0 \Rightarrow (BH + 20)(BH - 16) = 0 \Rightarrow BH = 16$$

اکنون توجه کنید که $AH^2 = BH \times CH = 16 \times 4 = 64 \Rightarrow AH = 8$

۴۱۲ از شکل زیر استفاده می‌کنیم. بدون اینکه کلیت راه‌حل تغییر کند

می‌توانیم فرض کنیم $AB = 2$. در این صورت $AC = \sqrt{5}$. در مثلث ABC ، بنابر

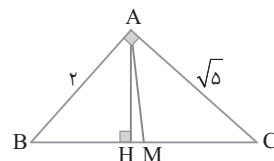
قضیه فیثاغورس، $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{4 + 5} = 3$

بنابر روابط طولی در مثلث ABC ، $AB^2 = BH \times BC$ ، یعنی $4 = BH \times 3$. پس

$$BH = \frac{4}{3}, \quad BM = \frac{BC}{2} = \frac{3}{2}$$

در نتیجه $MH = BM - BH = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{1}{6}$. اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}} = \frac{BC}{MH} = \frac{3}{\frac{1}{6}} = 18$$



۴۱۳ در هر مثلث قائم الزاویه طول میانه وارد بر وتر نصف طول وتر

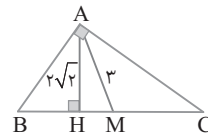
است. پس $BC = 6$ و $CM = 3$. بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث AMH ،

$MH^2 = AM^2 - AH^2 = 9 - 8 = 1$ پس $CH = 4$. بنابر روابط طولی در

مثلث قائم الزاویه،

$$AC^2 = CH \times BC = 4 \times 6 \Rightarrow AC = 2\sqrt{6}$$

توجه کنید $AB = 2\sqrt{3}$ ضلع کوچک‌تر مثلث است.



۴۱۴ اگر R شعاع دایره محیطی مثلث ABC باشد، آن‌گاه بنابر قضیه

سینوس‌ها،

$$\frac{AC}{\sin \hat{B}} = 2R \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow R = 2\sqrt{3}$$

بنابراین $\pi R^2 = 12\pi$ مساحت دایره محیطی.

۴۱۵ شکل به صورت زیر است. بنابر قضیه سینوس‌ها،

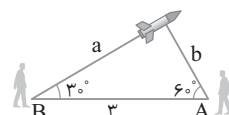
$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{2}} \Rightarrow a = \sqrt{3}b$$

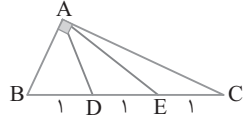
از طرف دیگر مثلث قائم الزاویه است. پس

$$a^2 + b^2 = 3^2 \Rightarrow (\sqrt{3}b)^2 + b^2 = 9 \Rightarrow 4b^2 = 9 \Rightarrow b^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$a = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$ab = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$





۴۲۵ ۱ قطره‌های متوازی الاضلاع منصف یکدیگرند. به کمک قضیه کسینوس‌ها طول اضلاع این متوازی الاضلاع را به دست می‌آوریم:

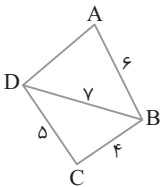
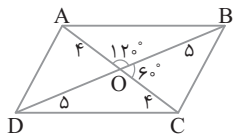
$$\triangle OAB: AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \times OB \cos 12^\circ$$

$$AB^2 = 16 + 25 - 2 \times 4 \times 5 \times \frac{1}{2} \Rightarrow AB^2 = 16 + 25 + 20 = 61 \Rightarrow AB = \sqrt{61}$$

$$\triangle OBC: BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2OB \times OC \cos 6^\circ$$

$$BC^2 = 25 + 16 - 2 \times 5 \times 4 \times \frac{1}{2} \Rightarrow BC^2 = 25 + 16 - 20 = 21 \Rightarrow BC = \sqrt{21}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{61}{21}} \quad \text{بنابراین}$$



۴۲۶ ۲ در چهارضلعی محاطی، زاویه‌های

مقابل مکمل‌اند، پس $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$. بنابراین $\cos \hat{A} = -\cos \hat{C}$. اکنون در مثلث BDC با استفاده از قضیه کسینوس‌ها مقدار $\cos \hat{C}$ را پیدا می‌کنیم

$$BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2BC \times DC \cos \hat{C}$$

$$7^2 = 5^2 + 4^2 - 2(4)(5) \cos \hat{C} \Rightarrow \cos \hat{C} = -\frac{1}{5}$$

در نتیجه $\cos \hat{A} = \frac{1}{5}$ ، بنابراین

$$\triangle ABD: BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \times AB \cos \hat{A}$$

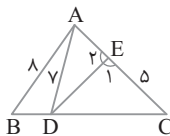
$$7^2 = AD^2 + 6^2 - 2AD \times 6 \times \frac{1}{5} \Rightarrow AD^2 - \frac{12}{5}AD - 13 = 0$$

$$5AD^2 - 12AD - 65 = 0$$

پس

$$AD = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 20 \times 65}}{10} = \frac{12 \pm \sqrt{4(36 + 325)}}{10} = \frac{12 \pm 2\sqrt{361}}{10} = \frac{12 + 19 \times 2}{10} = 5$$

بنابراین محیط چهارضلعی ABCD برابر $5 + 5 + 4 + 6 = 20$ است.



۴۲۷ ۲ در مثلث ABD زاویه B برابر 6°

و ضلع AB برابر ۸ است. پس با استفاده از قضیه کسینوس‌ها می‌توانیم طول BD را پیدا کنیم:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \times BD \cos 6^\circ$$

$$49 = 64 + BD^2 - 2(8)BD \times \frac{1}{2}$$

$$BD^2 - 8BD + 15 = 0 \Rightarrow (BD - 3)(BD - 5) = 0 \Rightarrow BD = 3 \text{ یا } BD = 5$$

چون $CD > BD$ ، پس $BD = 3$ قابل قبول است و $CD = 8 - 3 = 5$.

بنابراین $CD = 5$ ، $CE = 5$ و $\hat{C} = 6^\circ$. پس مثلث DEC متساوی‌الاضلاع

است. در نتیجه $\hat{E} = 6^\circ$ ، پس $\hat{AED} = 12^\circ$.

۴۲۵ ۲ چون مثلث ABC متساوی‌الساقین و مثلث ADC متساوی‌الاضلاع

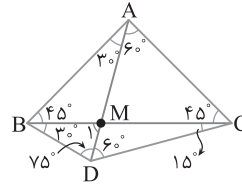
است، پس $AB = AC = AD = DC$. پس مثلث ABD متساوی‌الساقین با زاویه رأس 30° است. بنابراین $\hat{ABD} = \hat{ADB} = 75^\circ$ ، در نتیجه $\hat{M}_1 = 75^\circ$ ، یعنی

$BM = BD$ (شکل زیر را ببینید). اکنون از قضیه سینوس‌ها نتیجه می‌شود

$$\triangle AMC: \frac{MC}{\sin 60^\circ} = \frac{AM}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{4\sqrt{3}}{2} = \frac{AM}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow AM = 4\sqrt{2}$$

$$\triangle ABM: \frac{BM}{\sin 30^\circ} = \frac{AM}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{BM}{\frac{1}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow BM = 4$$

بنابراین $BD = 4$.



۴۲۱ ۳ بنابر فرض تست،

$$(a+b+c)(a+b-c) = 3ab \Rightarrow (a+b)^2 - c^2 = 3ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = 3ab$$

یعنی (۱) $c^2 = a^2 + b^2 - ab$. از طرف دیگر، بنابر قضیه کسینوس‌ها،

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \quad (2)$$

با مقایسهٔ برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\cos \hat{C} = \frac{1}{2}$. پس $\hat{C} = 60^\circ$.

۴۲۲ ۲ از قضیه کسینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

در نتیجه $bc = 40$. بنابراین $25 = 25 + 40\sqrt{3} - 2bc \times \frac{\sqrt{3}}{2}$. اکنون می‌توان

$$\text{نوشت } S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 40 \times \frac{1}{2} = 10$$

۴۲۳ ۲ مثلث BCD متساوی‌الساقین است، زیرا

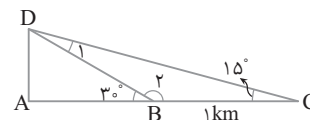
$$\hat{B}_\gamma = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ, \quad \hat{D}_1 = 180^\circ - \hat{B}_\gamma - \hat{C} = 15^\circ$$

بنابراین $DB = BC = 1 \text{ km}$. برای محاسبهٔ فاصلهٔ کشتی C از محل انتشار نور، یعنی طول پاره‌خط DC، بنابر به قضیه کسینوس‌ها در مثلث BCD،

$$DC^2 = DB^2 + BC^2 - 2DB \times BC \times \cos \hat{B}_\gamma = 1^2 + 1^2 - 2(1)(1) \cos 150^\circ$$

$$= 2 - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + \sqrt{3}$$

در نتیجه $DC = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.



۴۲۴ ۲ در مثلث ABE، پاره‌خط AD میانه است. پس بنابر قضیه

میانه‌ها، $2AD^2 + \frac{BE^2}{2} = AB^2 + AE^2$. همچنین در مثلث ADC، پاره‌خط

AE میانه است، پس $2AE^2 + \frac{DC^2}{2} = AD^2 + AC^2$. با جمع کردن این دو

تساوی نتیجه می‌گیریم $AD^2 + AE^2 + 4 = AB^2 + AC^2$. چون مثلث

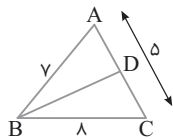
قائم‌الزاویه است، $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 9$ ، پس $AD^2 + AE^2 = 5$.

۴۳۳ ۲ فرض می‌کنیم BD نیمساز زاویه B باشد، بنابر قضیه نیمسازها،

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{y}{\lambda}$$

پس DC قطعه بزرگ‌تر است و باید DC را به‌دست آوریم. با ترکیب در صورت تناسب به‌دست آمده می‌نویسیم:

$$\frac{AD+DC}{DC} = \frac{y+\lambda}{\lambda} \xrightarrow{AC=5} \frac{5}{DC} = \frac{15}{\lambda} \Rightarrow DC = \frac{\lambda}{3}$$



۴۳۴ ۴ می‌دانیم اگر d_a نیمساز زاویه داخلی A باشد، آن‌گاه

$$d_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\hat{A}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{d_a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{d_a} = \frac{b+c}{bc} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\hat{A}}{2}} = \frac{b+c}{bc}$$

$$\cos \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} = 30^\circ \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

۴۳۵ ۲ چون عددهای ۹، ۱۲ و ۱۵ از ضرب ۳ در عددهای فیثاغورسی

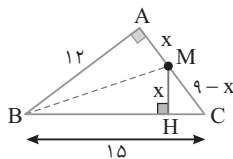
۴، ۵ و ۳ به‌دست می‌آیند، پس عددهای فیثاغورسی هستند و مثلث

قائم‌الزاویه است ($15^2 = 12^2 + 9^2$). از طرف دیگر، چون M از دو ضلع

AB و BC به یک فاصله است، پس M روی نیمساز زاویه B قرار دارد.

اکنون بنابر قضیه نیمسازها، $\frac{MA}{MC} = \frac{AB}{BC}$ ، یعنی $\frac{x}{9-x} = \frac{12}{15}$. در نتیجه

$$x = 4$$



۴۳۶ ۲ چون $AB=12$ و $AC=20$ ، پس $AB=3AC=60$ ، پس

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (1)$$

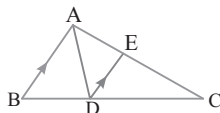
از طرف دیگر چون DE موازی است، بنابر قضیه تالس،

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AE}{EC} \quad (2)$$

با مقایسهٔ برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{EC}$ ، یعنی

$$\frac{AE+EC}{EC} = \frac{3+5}{5} \quad \frac{AE}{EC} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

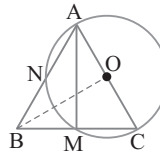
$$\text{پس } \frac{AC}{EC} = \frac{\lambda}{5} \text{، یعنی } \frac{20}{5} = \frac{\lambda}{5} \text{، در نتیجه } EC = 12/5$$



۴۲۸ ۳ بنابر قضیه میانه‌ها رابطه زیر برقرار است:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(16 + 25 + 49) = \frac{3}{4} \times 90 = 67.5$$



۴۲۹ ۱ از A به M وصل می‌کنیم. در این

صورت زاویهٔ محاطی M روبه‌رو به قطر AC

است، پس $\hat{M} = 90^\circ$. بنابرین AM ارتفاع و در

نتیجه میانهٔ مثلث متساوی‌الساقین ABC است.

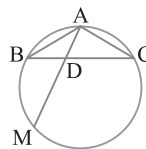
بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$BN \times BA = BM \times BC \Rightarrow 2 \times 9 = \frac{BC}{2} \times BC \Rightarrow BC^2 = 36 \Rightarrow BC = 6$$

اکنون از قضیه میانه‌ها در مثلث ABC نتیجه می‌گیریم

$$AB^2 + BC^2 = 2OB^2 + \frac{AC^2}{2} \Rightarrow 9^2 + 6^2 = 2OB^2 + \frac{9^2}{2}$$

$$117 - \frac{81}{2} = 2OB^2 \Rightarrow OB^2 = \frac{153}{4} = \frac{9 \times 17}{4} \Rightarrow OB = \frac{3}{2} \sqrt{17}$$



۴۳۰ ۱ بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$AD \times DM = BD \times DC$$

$$2AD = BD \times DC \quad (1)$$

از طرف دیگر بنابر قضیه استوارت در مثلث ABC،

$$AB^2 \times DC + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + BD \times DC \times BC \xrightarrow{(1)}$$

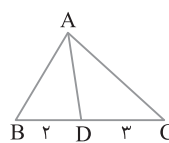
$$2DC + 2BD = AD^2 \times BC + 2AD \times BC$$

$$2BC = AD^2 \times BC + 2AD \times BC \xrightarrow{\text{حذف BC}} AD^2 + 2AD - 3 = 0$$

$$\text{بنابرین } AD = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

۴۳۱ ۲ بنابر فرض سؤال، $AB + AC + BC = 15$ و $BC = 5$ ، پس

$$AB + AC = 10$$



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}}$$

$$\frac{2+3}{3} = \frac{AB+AC}{AC} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{10}{AC}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{AC} \Rightarrow AC = 6, AB = 4$$

بنابرین طول بزرگ‌ترین ضلع این مثلث برابر است با $AC = 6$.

۴۳۲ ۲ با استفاده از قضیه نیمسازها،

$$\text{نیمساز } BD \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \xrightarrow{\text{مخرج}} \frac{AD}{AD+DC} = \frac{AB}{AB+BC}$$

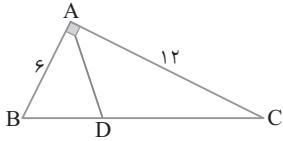
$$\frac{AD}{AD+DC} = \frac{AB}{AB+BC} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AB+BC}$$

$$AD = \frac{AB \times AC}{AB+BC} \quad (1)$$

با توجه به فرض $AB = \frac{2}{3}AC = \frac{1}{2}BC$ ، در نتیجه $AC = \frac{3}{2}AB$ و

$BC = 2AB$. در نتیجه بنابر برابری (۱)،

$$AD = \frac{AB \times \frac{3}{2}AB}{AB + 2AB} = \frac{\frac{3}{2}AB^2}{3AB} = \frac{1}{2}AB$$



۴۴۰ راه حل اول از شکل

رو به رو استفاده می کنیم. بنابر قضیه فیثاغورس،

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5}$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیه نیمسازها،

$$BD = \frac{BC \times AB}{AB + AC} = \frac{6\sqrt{5} \times 6}{18} = 2\sqrt{5}$$

چون $DC = BC - BD$ ، پس $DC = 6\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$. اکنون با استفاده از فرمول محاسبه طول نیمساز می توان نوشت

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC = 6 \times 12 - 2\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} = 32$$

یعنی $AD = 4\sqrt{2}$

راه حل دوم چون $a = 6\sqrt{5}$ ، $b = 12$ ، $c = 6$ ، پس $P = \frac{a+b+c}{2} = 9 + 3\sqrt{5}$

بنابراین

$$d_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcP(P-a)} = \frac{2}{18} \sqrt{12 \times 6(9+3\sqrt{5})(9-3\sqrt{5})}$$

$$= \frac{1}{9} \sqrt{2 \times 6 \times 6 \times (9^2 - 9 \times 5)} = \frac{1}{9} \sqrt{2 \times 6 \times 6 \times 36} = 4\sqrt{2}$$

۴۴۱ می دانیم در هر مثلث نسبت طول دو ارتفاع برابر با عکس نسبت

طول قاعده هایی است که این ارتفاع ها بر آن ها وارد می شوند. در نتیجه

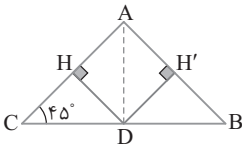
$$\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} + \frac{h_c}{h_a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} = \frac{4}{3} + \frac{6}{4} + \frac{3}{6} = \frac{10}{3}$$

۴۴۲ چون $\hat{A} + \hat{B} = 5\hat{C}$ و $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

یعنی $5\hat{C} = 180^\circ$ ، بنابراین $\hat{C} = 36^\circ$. اکنون می توان

مساحت مثلث را به صورت زیر به دست آورد:

$$S = \frac{1}{2} BC \times AC \times \sin 36^\circ = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{1}{2} = 6$$



۴۴۳ راه حل اول مساحت مثلث

ABC را با S نشان می دهیم. مساحت را

به دو روش به دست می آوریم:

$$S = \frac{1}{2} AC \times BC \times \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} AC \times BC \quad (1)$$

همچنین اگر عمود DH' را بر AB رسم کنیم، آن گاه

$$S = S_{ACD} + S_{ABD} = \frac{1}{2} DH \times AC + \frac{1}{2} DH' \times AB$$

چون D روی نیمساز زاویه A است، پس $DH = DH'$ ، در نتیجه

$$S = \frac{1}{2} DH(AB + AC) \quad (2)$$

با مقایسه برای های (۱) و (۲) می توان نوشت

$$\frac{\sqrt{2}}{4} AC \times BC = \frac{1}{2} DH(AB + AC)$$

$$\frac{AC \times BC}{DH(AB + AC)} = \sqrt{2} \quad \text{بنابراین}$$

راه حل دوم بنابر قضیه نیمسازها $DC = \frac{BC \times AC}{AC + AB}$ همچنین

$$\sin \hat{C} = \sin 45^\circ = \frac{DH}{DC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{BC \times AC}{DH(AC + AB)} = \sqrt{2} \quad \text{پس}$$

$$\frac{DC}{DH} = \sqrt{2} \quad \text{یعنی}$$

۴۳۷ AD نیمساز زاویه A است، پس بنابر قضیه نیمسازها،

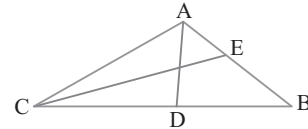
$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{4}{5}$. پس $AB = \frac{4}{5} AC$. به همین صورت CE نیمساز زاویه

C است، پس بنابر قضیه نیمسازها، $\frac{AC}{BC} = \frac{AE}{EB} = \frac{2}{3}$. پس $BC = \frac{3}{2} AC$

محیط مثلث برابر ۶۶ است، بنابراین

$$AB + AC + BC = 66 \Rightarrow \frac{4}{5} AC + AC + \frac{3}{2} AC = 66$$

در نتیجه $AC = 20$. اکنون می توان نوشت $AB = \frac{4}{5} AC = \frac{4}{5} \times 20 = 16$



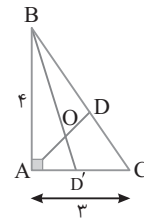
۴۳۸ راه حل اول چون مثلث قائم الزاویه است، پس

$BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. در مثلث ABC، بنابرین

$AD' = \frac{AC \times AB}{AB + BC} = \frac{3 \times 4}{4 + 5} = \frac{12}{9}$. اکنون بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث

ABD'،

$$BD' = \sqrt{AB^2 + AD'^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$$



راه حل دوم چون $a = 5$ ، $b = 3$ ، $c = 4$ ، پس $P = \frac{a+b+c}{2} = 6$ ، بنابراین

$$d_b = \frac{2}{a+c} \sqrt{acP(P-b)} = \frac{2}{9} \sqrt{5 \times 4 \times 6 \times 3} = \frac{2}{9} \sqrt{4 \times 9 \times 2 \times 5} = \frac{4\sqrt{10}}{9}$$

۴۳۹ دو مثلث ADC و ABE دو زاویه مساوی دارند (زاویه های

E و C هر دو محاطی رو به رو به کمان AB هستند و $\hat{BAE} = \hat{DAC} = \frac{\hat{A}}{2}$ ،

پس متشابه اند. بنابراین اضلاع متناظر آن ها متناسب اند:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AB \times AC = AD \times AE$$

اگر در این تساوی به جای AE مقدار مساوی آن، یعنی $AD + DE$ را قرار

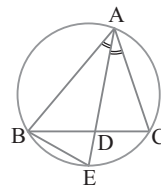
دهیم، به دست می آید

$$AB \times AC = AD(AD + DE) = AD^2 + AD \times DE$$

بنابر روابط طولی در دایره $AD \times DE = BD \times DC$ ، پس

$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$. بنابراین گزینه های (۱)، (۲) و (۳) درست

هستند و گزینه (۴) بنابر روابط طولی در دایره نادرست است.

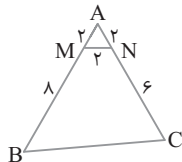


مثلت AMN مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۲ است، پس

$$\hat{A} = 60^\circ \text{ بنابراین}$$

$$S_{MNCB} = S_{ABC} - S_{AMN}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} AB \times AC \sin 60^\circ - \frac{1}{2} AM \times AN \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} (10)(8) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} (2)(2) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 20\sqrt{3} - \sqrt{3} = 19\sqrt{3} \end{aligned}$$



ابتدا با استفاده از روابط طولی در دایره طول BD و DC را

به دست می آوریم:

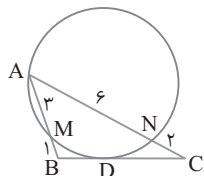
$$BD^2 = BM \times BA = 1 \times 4 = 4 \Rightarrow BD = 2$$

$$CD^2 = CN \times CA = 2 \times 8 = 16 \Rightarrow CD = 4$$

پس $BC = 6$. اکنون به کمک قضیه هرون مساحت ABC را پیدا می کنیم:

$$P = \frac{4+8+6}{2} = 9$$

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{9(9-4)(9-8)(9-6)} \\ &= \sqrt{9 \times 5 \times 1 \times 3} = 3\sqrt{15} \end{aligned}$$



$r = \frac{S}{P}$ شعاع دایره محاطی داخلی مثلث BCD از رابطه

به دست می آید. برای محاسبه مساحت مثلث BCD، قطر BD را رسم می کنیم. در مثلث قائم الزاویه ABD، بنابر قضیه فیثاغورس.

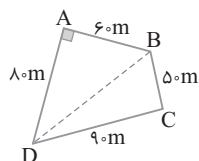
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow BD = 10$$

به کمک قضیه هرون مساحت مثلث BCD را به دست می آوریم:

$$P = \frac{9+5+10}{2} = 12$$

$$\begin{aligned} S_{BCD} &= \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \\ &= \sqrt{12(12-9)(12-5)(12-10)} \\ &= \sqrt{12 \times 3 \times 7 \times 2} = 10\sqrt{14} \\ &= 10\sqrt{6 \times 2 \times 14} = 60\sqrt{14} \end{aligned}$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{60\sqrt{14}}{12} = 5\sqrt{14} \text{ بنابراین}$$



به کمک دستور هرون مساحت های مثلث های ABD و BCD

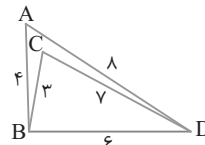
را به دست می آوریم. در مثلث ABD چون $P = \frac{4+8+6}{2} = 9$ پس

$$S_{ABD} = \sqrt{9(9-4)(9-8)(9-6)} = \sqrt{9 \times 5 \times 1 \times 3} = 3\sqrt{15}$$

در مثلث BCD چون $P = \frac{3+7+6}{2} = 8$ پس

$$S_{BCD} = \sqrt{8(8-3)(8-7)(8-6)} = \sqrt{8 \times 5 \times 1 \times 2} = 4\sqrt{10}$$

پس مساحت چهارضلعی مقعر ABCD مساوی $3\sqrt{15} + 4\sqrt{10}$ است.



چون $r = \frac{S}{P}$ و $r_a = \frac{S}{P-a}$ ، $r_b = \frac{S}{P-b}$ ، $r_c = \frac{S}{P-c}$ پس

$$r r_a r_b r_c = \frac{S}{P} \times \frac{S}{P-a} \times \frac{S}{P-b} \times \frac{S}{P-c} = \frac{S^4}{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

بنابر دستور هرون، $S^2 = P(P-a)(P-b)(P-c)$.

$$\text{در نتیجه } r r_a r_b r_c = \frac{S^4}{S^2} = S^2$$

با استفاده از قضیه هرون مساحت مثلث را به دست می آوریم:

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$\begin{aligned} \frac{P=7+4+5}{2}=8 &\rightarrow S = \sqrt{8(8-7)(8-4)(8-5)} \\ &= \sqrt{8 \times 1 \times 4 \times 3} = 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

در هر مثلث، بزرگ ترین ارتفاع بر کوچک ترین ضلع وارد می شود، پس اگر h

طول بزرگ ترین ارتفاع این مثلث باشد، آن گاه

$$S = \frac{1}{2} a \times h \xrightarrow{a=4} 4\sqrt{6} = \frac{1}{2} \times 4 \times h \Rightarrow h = 2\sqrt{6}$$

بنابر قضیه استوارت،

$$AB^2 \times DC + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + DB \times DC \times BC$$

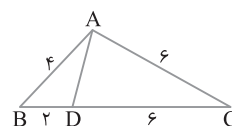
$$16 \times 6 + 36 \times 2 = 8AD^2 + 2 \times 6 \times 8$$

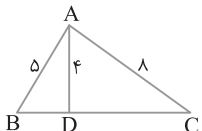
$$96 + 72 = 8AD^2 + 96 \Rightarrow AD^2 = 9 \Rightarrow AD = 3$$

اکنون با استفاده از قضیه هرون مساحت مثلث ABD را پیدا می کنیم:

$$P = \frac{4+3+2}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\begin{aligned} S_{ABD} &= \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{\frac{9}{2} \left(\frac{9}{2}-4\right) \left(\frac{9}{2}-3\right) \left(\frac{9}{2}-2\right)} \\ &= \sqrt{\frac{9}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{2}} = \frac{3}{4} \sqrt{15} \end{aligned}$$





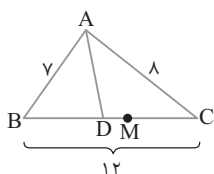
۴۵۶ با توجه به شکل زیر، زاویه A زاویه بزرگ‌تر مثلث ABC است

و AD نیمساز $\hat{A}$ است. با استفاده از قضیه نیمساز می‌نویسیم

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{8} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BD}{BD+DC} = \frac{5}{5+8} \Rightarrow \frac{BD}{12} = \frac{5}{13} \Rightarrow BD = \frac{60}{13}$$

در ضمن اگر M وسط BC باشد، آن‌گاه $BM = 6$. پس

$$DM = BM - BD = 6 - \frac{60}{13} = \frac{78}{13} - \frac{60}{13} = \frac{18}{13}$$



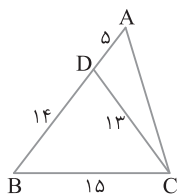
۴۵۷ ابتدا با استفاده از قضیه هرون مساحت مثلث BDC را به دست می‌آوریم:

$$P = \frac{14+13+15}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

$$S_{BDC} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{21(21-14)(21-13)(21-15)} = \sqrt{21 \times 7 \times 8 \times 6} = \sqrt{21 \times 2 \times 1 \times 16} = 24$$

از طرف دیگر دو مثلث ABC و BDC در ارتفاع نظیر رأس C مشترک هستند. پس

$$\frac{S_{BDC}}{S_{ABC}} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{24}{S_{ABC}} = \frac{14}{19} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{24 \times 19}{14} = 6 \times 19 = 114$$



۴۵۸ روی عمود منصف DC است، پس $AC = AD = 41$

اکنون مساحت مثلث ADC را به کمک قضیه هرون به دست می‌آوریم:

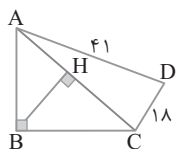
$$P = \frac{41+41+18}{2} = 50$$

$$S_{ADC} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{50(50-41)(50-41)(50-18)} = \sqrt{50 \times 9 \times 9 \times 32} = 9 \times 5 \times 2 \times 4 = 360$$

بنابراین $S_{ABC} = S_{ABCD} - S_{ADC} = 401 - 360 = 41$ فاصله B از قطر

AC برابر عمود BH است. پس

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \times AC \Rightarrow 41 = \frac{1}{2} BH \times 41 \Rightarrow BH = 2$$



۴۵۱ بنابر قضیه سینوس‌ها،

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} = \frac{a}{b}$$

بنابر فرض سؤال،

$$a = (2b^2 - 3) \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} \Rightarrow a = (2b^2 - 3) \times \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{2b^2 - 3}{b} = 1$$

$$2b^2 - b - 3 = 0 \Rightarrow b = -1, b = \frac{3}{2}$$

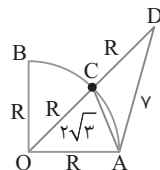
$b = -1$ قابل قبول نیست، پس $b = \frac{3}{2}$.

۴۵۲ فرض می‌کنیم شعاع ربع دایره باشد. بنابر فرض سؤال، داده‌های روی شکل را خواهیم داشت. پس در مثلث OAD پاره خط AC میانه است. در نتیجه، بنابر قضیه میانه‌ها،

$$OA^2 + AD^2 = 2AC^2 + \frac{OD^2}{2} \Rightarrow R^2 + 49 = 2(2\sqrt{3})^2 + \frac{(2R)^2}{2}$$

$$R^2 + 49 = 24 + 2R^2 \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = 5$$

بنابراین $\text{مساحت ربع دایره} = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi(5)^2}{4} = \frac{25}{4}\pi$



۴۵۳ بنابر قضیه سینوس‌ها،

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin 30^\circ} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2b = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{a}{2b}, \sin \hat{C} = \frac{c}{2b}$$

اکنون بنابر فرض،

$$\sin \hat{A} + \sin \hat{C} = a + c$$

$$\frac{a}{2b} + \frac{c}{2b} = a + c \Rightarrow \frac{a+c}{2b} = a+c \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

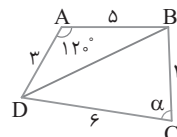
۴۵۴ ابتدا قطر BD را رسم می‌کنیم. بنابر قضیه کسینوس‌ها،

$$\triangle ABD: BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \cos 120^\circ$$

$$BD^2 = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5)\left(-\frac{1}{2}\right) = 9 + 25 + 15 = 49 \Rightarrow BD = 7$$

$$\triangle BCD: BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2BC \times DC \cos \alpha$$

$$7^2 = 4^2 + 6^2 - 2(4)(6) \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{16}$$



۴۵۵ با استفاده از قضیه استوارت در مثلث ABC می‌نویسیم:

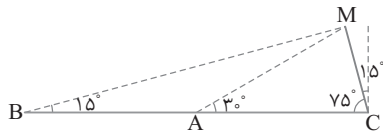
$$AB^2 \times DC + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + BD \times DC \times BC$$

با فرض $BD = x$ ، نتیجه می‌گیریم $CD = 2x$. پس

$$5^2(2x) + 4^2(x) = 4^2(3x) + (x)(2x)(3x)$$

$$50x + 64x = 48x + 6x^2 \Rightarrow 6x^2 = 66x \Rightarrow x^2 = 11 \Rightarrow x = \sqrt{11}$$

بنابراین $\text{محیط (مثلث ADC)} = 8 + 4 + 2\sqrt{11} = 12 + 2\sqrt{11}$



از تساوی داده شده نتیجه می‌گیریم
 $a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 + b^4 + c^4 = 0$

با حل این معادله نسبت به a^2 به دست می‌آید

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm \sqrt{2}bc \quad (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \quad (2) \quad \text{بنابر قضیه کسینوس‌ها،}$$

با مقایسهٔ برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\cos \hat{A} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. در نتیجه

$$\hat{A} = 135^\circ \text{ یا } \hat{A} = 45^\circ$$

در مثلث OAB بنابر قضیه کسینوس‌ها،

$$\begin{aligned} AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2OA \times OB \times \cos 120^\circ \\ &= R^2 + R^2 - 2R \times R \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 3R^2 \\ \text{پس } AB &= \sqrt{3}R \end{aligned}$$

به شکل زیر توجه کنید که در آن BD وتر بی‌تری از دایره است. در مثلث ABD چون $\hat{B} = 90^\circ$ پس $\hat{B} = 90^\circ$ محاطی مقابل به قطر است، در نتیجه،

$$BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{16 - 1} = \sqrt{15}$$

بنابر قضیه فیثاغورس، چون دو وتر AB و BC با هم برابرند، پس کمان‌های نظیر آن‌ها نیز با هم برابرند $(\widehat{AB} = \widehat{BC})$ و در نتیجه $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$. از طرف دیگر در مثلث

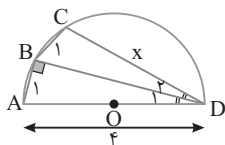
$$ABD, \cos \hat{D}_1 = \frac{\sqrt{15}}{4}, \cos \hat{D}_2 = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ پس } \cos \hat{D}_2 = \frac{\sqrt{15}}{4}. \text{ اکنون بنابر قضیه}$$

کسینوس‌ها در مثلث BCD،

$$BC^2 = CD^2 + BD^2 - 2CD \times BD \times \cos \hat{D}_2$$

$$1 = x^2 + 15 - 2x \times \sqrt{15} \times \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$2x^2 - 15x + 28 = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ یا } x = 3/5$$



در نتیجه $x = CD = 3/5$. توجه کنید

که $x = 4$ قابل قبول نیست زیرا باید

$$CD < AD = 4$$

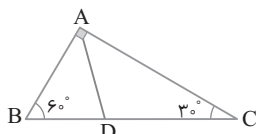
از شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنابر نسبت‌های مثلثاتی در مثلث

$$\text{قائم‌الزاویه } ABC, \tan 30^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ یعنی } \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ از طرف دیگر}$$

$$\text{چون } AD \text{ نیمساز زاویه } A \text{ است، پس } \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ اکنون توجه}$$

کنید که چون دو مثلث ABD و ACD در ارتفاع نظیر رأس A مشترک

$$\text{هستند، پس } \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ بنابرین } \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{DC}$$

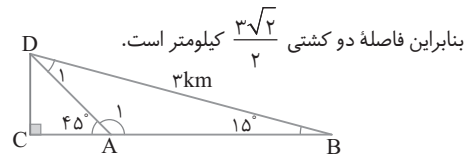


زاویه DAC زاویه خارجی مثلث ABD است، بنابراین

$$45^\circ = \hat{D}_1 + 15^\circ \Rightarrow \hat{D}_1 = 30^\circ$$

در مثلث ABD بنابر قضیه سینوس‌ها،

$$\frac{AB}{\sin \hat{D}_1} = \frac{BD}{\sin \hat{A}_1} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{3}{\sin 135^\circ} \Rightarrow \frac{AB}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow AB = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

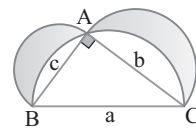


بزرگ‌ترین میانه، میانه وارد بر کوچک‌ترین ضلع است، یعنی باید

$$m_a \text{ را به دست آوریم. بنابر قضیه میانه‌ها، } b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \text{ پس}$$

$$m_a = \frac{\sqrt{43}}{2} \text{ با حل این معادله به دست می‌آید } m_a = \frac{\sqrt{43}}{2} \text{ یا } 16 + 9 = 2m_a^2 + \frac{9}{2}$$

از شکل مقابل استفاده می‌کنیم.



بنابر قضیه فیثاغورس،

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (1)$$

توجه کنید که مساحت کل شکل برابر است با

$$(\text{مساحت مثلث } ABC) + (\text{مجموع مساحت‌های نیم‌دایره‌های به قطرهای } b \text{ و } c)$$

یعنی

$$= \frac{1}{2} \pi \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \pi \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \frac{bc}{2} = \frac{\pi}{8} (b^2 + c^2) + \frac{bc}{2} \quad (2)$$

از طرف دیگر، مساحت کل شکل برابر است با

$$(\text{مجموع مساحت‌های دو ناحیه رنگی}) + (\text{مساحت نیم‌دایره به قطر } a)$$

یعنی

$$(3) \quad \frac{\pi}{8} a^2 + (\text{مجموع مساحت‌های دو ناحیه رنگی}) = \text{مساحت کل شکل}$$

از مقایسهٔ برابری‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم

$$\text{مجموع مساحت‌های دو ناحیه رنگی} = \frac{bc}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

بنابر قضیه سینوس‌ها،

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sin \hat{A}} = \frac{3}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{3}{2} > 1$$

در نتیجه چنین مثلی وجود ندارد.

اگر R شعاع دایره محیطی مثلث ABC باشد، آن‌گاه بنابر قضیه

$$\text{سینوس‌ها } a = 2R \sin \hat{A} \text{ و } b = 2R \sin \hat{B} \text{ بنابرین از تساوی}$$

$$ab = 64 \sin \hat{A} \sin \hat{B} \text{ نتیجه می‌گیریم}$$

$$4R^2 \sin \hat{A} \sin \hat{B} = 64 \sin \hat{A} \sin \hat{B} \Rightarrow 4R^2 = 64$$

$$\text{پس } R = 4$$

بنابر قضیه سینوس‌ها در مثلث AMC،

$$\frac{AM}{\sin 75^\circ} = \frac{MC}{\sin 30^\circ} \xrightarrow{\substack{\sin 75^\circ \approx 0.95 \\ MC=5}} \frac{AM}{0.95} = \frac{5}{0.5}$$

بنابرین $AM = 9/5$. از طرف دیگر زاویه MAC زاویه خارجی مثلث AMB

است، پس $\hat{MAC} = \hat{AMB} + \hat{B}$. در نتیجه $\hat{AMB} = 15^\circ$. به عبارت دیگر

مثلث AMB در رأس A، متساوی‌الساقین است. در نتیجه

$$AB = AM = 9/5$$

۴۷۳ ۳ از برابری $2A - B = I$ به دست می‌آید

$$B = 2A - I = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین $1 - 2 + 4 - 1 = 2$ مجموع درایه‌های ماتریس B .

۴۷۴ ۲ به سادگی می‌توان نشان داد

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a+b & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+2+\dots+n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{بنابراین}$$

چون درایه سطر دوم و ستون اول A برابر ۵۵ است، پس

$$\frac{n(n+1)}{2} = 55 \Rightarrow n = 10$$

۴۷۵ ۲ دو ماتریس هم مرتبه مساوی اند هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر

برابر باشند:

$$A = B \Rightarrow \begin{cases} 2m+n=5 \\ m-n=-2 \\ p+3=-t \\ p+2=t-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m=3 \Rightarrow m=1 \Rightarrow n=3 \\ 2p+5=-1 \Rightarrow p=-3 \Rightarrow t=0 \end{cases}$$

بنابراین $2m - n + p + 3t = 2(1) - 3 - 3 + 0 = -4$.

۴۷۶ ۴ ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2-1 & 2a \\ -2a & a^2-1 \end{bmatrix}$$

بنابر فرض سؤال مجموع درایه‌های ماتریس A^2 برابر صفر است، پس

$$a^2 - 1 + 2a - 2a + a^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm 1$$

پس مجموع مقادیر a برابر صفر است.

۴۷۷ ۲ ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = 2A$$

می‌دانیم اگر $A^2 = kA$ ، آن‌گاه به ازای هر عدد طبیعی n ، $A^n = k^{n-1}A$.

پس $A^6 = 2^5 A = 32A$. بنابراین $k = 32$.

۴۷۸ ۲ از تساوی $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ نتیجه می‌گیریم

پس $AB = BA$.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & y \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+1 & x+y \\ 5 & 2y+1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y+1 & x+y \\ 5 & 3x+1 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$AB = BA \Rightarrow 3x+1 = 2y+1 \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{CN}{AC} = \frac{BM}{BC} = \frac{1}{3} \quad \text{چون } ۴۶۹ \text{ ۳}$$

پس اعدادی مانند k و k' وجود دارند

به طوری که $CN = k$ ، $AC = 3k$

$$BM = k'$$
، $BC = 3k'$

اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{S_{MNC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} CN \times CM \times \sin \hat{C}}{\frac{1}{2} AC \times BC \times \sin \hat{C}} = \frac{\frac{1}{2} \times k \times 2k' \times \sin \hat{C}}{\frac{1}{2} \times 3k \times 3k' \times \sin \hat{C}} = \frac{2}{9}$$

۴۷۰ ۲ چون

$$r = \frac{S}{P}, \quad r_a = \frac{S}{P-a}, \quad r_b = \frac{S}{P-b}, \quad r_c = \frac{S}{P-c}$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

پس

$$r r_a r_b r_c = \frac{S^4}{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \frac{S^4}{S^2} = S^2 \quad (۱)$$

$$\text{همچنین } h_c = \frac{2S}{c}, \quad h_b = \frac{2S}{b}, \quad h_a = \frac{2S}{a} \quad \text{بنابراین}$$

$$h_a h_b h_c = \frac{8S^3}{abc} \quad (۲)$$

با توجه به برابری‌های (۱) و (۲) می‌توان نوشت

$$\frac{r r_a r_b r_c}{h_a h_b h_c} = \frac{S^2}{\frac{8S^3}{abc}} = \frac{abc}{8S}$$

می‌دانیم اگر R شعاع دایره محیطی مثلث ABC باشد، آن‌گاه $R = \frac{abc}{4S}$ پس

$$\frac{r r_a r_b r_c}{h_a h_b h_c} = \frac{1}{2} R = \frac{1}{2} \times 16 = 8$$

۴۷۱ ۱ چون $a_{ij} = i^3 + j^3 + ij$ ، پس به ازای هر i و j به دست می‌آید

$a_{jj} = a$. پس درایه‌های بالای قطر اصلی و درایه‌های پایین قطر اصلی

نظیر به نظیر با هم برابرند. در نتیجه $x = y$ ، یعنی $\frac{x}{y} = 1$.

۴۷۲ ۱ طرفین برابری اول را در ۲ و طرفین برابری دوم را در ۳ ضرب

می‌کنیم، سپس طرفین آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم تا ماتریس A به دست آید:

$$\begin{cases} 4A + 6B = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \\ 9A - 6B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow 13A = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{یعنی } A = \begin{bmatrix} \frac{7}{13} & \frac{10}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix} \quad \text{بنابراین}$$

$$A \text{ مجموع درایه‌های قطر اصلی } = \frac{7}{13} + \frac{2}{13} = \frac{9}{13}$$

۴۸۲ (۴) ابتدا دو معادله داده شده را با هم جمع می‌کنیم. در این صورت

$$2X = A + B$$

$$2Y = A - B \Rightarrow Y = \frac{A - B}{2}$$

$$\text{در نتیجه } 2X + Y = A + B + \frac{A - B}{2} = \frac{3A + B}{2} \text{، یعنی}$$

$$2X + Y = \left[\frac{3(i-j) + i + j}{2} \right]_{2 \times 2} = [2i - j]_{2 \times 2}$$

$$\text{پس } 2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ در نتیجه مجموع درایه‌های ماتریس } 2X + Y$$

$$\text{برابر است با } 1 + 0 + 3 + 2 = 6$$

۴۸۳ (۱) برای تعریف شدن ماتریس BC باید $n = 3$. فرض کنید

$D = BC$ ، در این صورت D ماتریسی از مرتبه $m \times 5$ است. از طرف دیگر،

برای تعریف شدن ضرب ماتریسی $A_{2 \times 3} D_{m \times 5}$ باید $m = 3$. بنابراین

$$m + n = 3 + 3 = 6$$

۴۸۴ (۱) چون $C_{13} = -2$ ، پس

$$\begin{bmatrix} a & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3a + 2 - 1 = -2$$

یعنی $a = -1$ ، همچنین از $C_{22} = 0$ به دست می‌آید

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2b + 8 = 0$$

یعنی $b = -4$. اکنون به دست می‌آید $a + b = -1 - 4 = -5$.

۴۸۵ (۳) ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 120 & 144 \\ -100 & -120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120 & 144 \\ -100 & -120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

بنابراین $A^{1399} = \bar{O}$.

۴۸۶ (۳) ماتریس $A + I$ را به دست می‌آوریم:

$$A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

اکنون $(A + I)^2$ و $(A + I)^3$ را به دست می‌آوریم تا شاید بتوان از روی آن‌ها

جواب را به دست آورد:

$$(A + I)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(A + I)^3 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$$

در ماتریس‌های بالا، اگر درایه واقع در سطر اول و ستون دوم را از درایه واقع در سطر اول و ستون اول کم کنیم، حاصل برابر ۱ می‌شود. پس می‌توان حدس زد که $a - b = 1$. توجه کنید که این استدلال برای تست به کار می‌رود و در مسئله‌های تشریحی جواب نمی‌دهد.

۴۷۹ (۱) راه حل اول ابتدا ماتریس A^3 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

از فرض تست نتیجه می‌گیریم

$$A^3 = \alpha A + \beta I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \beta & 0 \\ \alpha & 2\alpha + \beta \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha = 7 \end{cases} \Rightarrow \beta = -6$$

دقت کنید چون مقادیر $\alpha = 7$ و $\beta = -6$ در تساوی $2\alpha + \beta = 8$ نیز صدق

می‌کنند، پس این مقادیر قابل قبول هستند. پس $\alpha - \beta = 7 + 6 = 13$.

راه حل دوم بنابر قضیه کیلی - همیلتون،

$$A^2 = (1 + 2)A - (2 - 0)I_2 \Rightarrow A^2 = 3A - 2I_2$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{A \text{ در}} A^3 = 3A^2 - 2A$$

$$A^3 = 3(3A - 2I_2) - 2A \Rightarrow A^3 = 9A - 6I_2 - 2A \Rightarrow A^3 = 7A - 6I_2$$

با مقایسه این تساوی با $A^3 = \alpha A + \beta I_2$ ، نتیجه می‌گیریم $\alpha = 7$ و

$\beta = -6$ پس

$$\alpha - \beta = 13$$

۴۸۰ (۲) راه حل اول از تساوی $A^2 - A + I = \bar{O}$ نتیجه می‌گیریم

پس $A^2 = A - I$

$$A^4 = A^2 \times A^2 = (A - I)(A - I) = A^2 - 2A + I$$

$$\xrightarrow{A^2 = A - I} A^4 = A - I - 2A + I = -A$$

بنابراین

$$A^{400} = (A^4)^{100} = (-A)^{100} = A^{100} = (A^4)^{25} = (-A)^{25}$$

$$= -(A^4)^6 \times A = -(-A)^6 \times A = -A^7 = -A^4 \times A^3$$

$$= -(-A)A^3 = A^4 = -A$$

راه حل دوم طرفین فرض را در $A + I$ ضرب می‌کنیم:

$$(A + I)(A^2 - A + I) = \bar{O} \Rightarrow A^3 + I = \bar{O} \Rightarrow A^3 = -I$$

اکنون می‌توان نوشت $A^{400} = (A^3)^{133} A = (-I)^{133} A = -IA = -A$

۴۸۱ (۳) از تساوی داده شده به دست می‌آید

$$\begin{bmatrix} m & -6 \\ -1 & n \end{bmatrix} = [i^2 - 3j]_{2 \times 2} - [i]_{2 \times 2} = [i^2 - i - 3j]_{2 \times 2}$$

$$\text{اگر } A = \begin{bmatrix} m & -6 \\ -1 & n \end{bmatrix} \text{، آن گاه چون } a_{11} = m \text{ و } a_{22} = n \text{، پس}$$

$$m + n = -3 - 4 = -7 \text{، بنابراین } n = 4 - 2 - 6 = -4 \text{ و } m = 1 - 1 - 3 = -3$$

اکنون از برابری (۱) ماتریس C را به دست می آوریم:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$$

راه حل اول ابتدا ماتریس A^{-1} را به دست می آوریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{9-8} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

اکنون از برابری $\alpha A + \beta I = A^{-1}$ به دست می آید

$$\alpha \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3\alpha + \beta & 2\alpha \\ 4\alpha & 3\alpha + \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{cases} 3\alpha + \beta = 3 \\ 2\alpha = -2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -1 \\ \begin{cases} 3\alpha + \beta = 3 \\ \alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \beta = 6$$

توجه کنید که $\alpha = -1$ در معادله $4\alpha = -4$ نیز صدق می کند، پس $\alpha + \beta = 5$.

راه حل دوم طرفین برابری $\alpha A + \beta I = A^{-1}$ را در A ضرب می کنیم:

$$\alpha A^2 + \beta A = I \Rightarrow A^2 = -\frac{\beta}{\alpha} A + \frac{1}{\alpha} I$$

بنابر قضیه کیلی - همیلتون،

$$A^2 = (3+3)A - (9-8)I = 6A - I$$

با مقایسه این دو برابری به دست می آید:

$$\begin{cases} -\frac{\beta}{\alpha} = 6 \\ \frac{1}{\alpha} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 6 \\ \alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = 5$$

۴۹۵ (۱) چون A وارون پذیر نیست، پس $|A| = 0$ ، یعنی

$$3a + 3 - 2a + 2 = 0 \Rightarrow a = -5$$

$$\text{بنابراین } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \text{ پس}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{3+5} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

در نهایت $B^{-1} = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} + \frac{5}{8} + \frac{1}{8} = 1$ مجموع درایه های B^{-1} .

۴۹۶ (۴) از برابری $AX + 2I = 4A$ به دست می آید $AX = 4A - 2I$.

در نتیجه $X = 4A^{-1}A - 2A^{-1}I$ ، پس $X = 4I - 2A^{-1}$ ، بنابراین

$$X = 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \times \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه های X برابر ۸ است.

۴۸۷ (۴) بنابر فرض های مسئله،

$$A^3 + B^3 = AA^2 + BB^2 = AA + B(B-I)$$

$$= A^2 + B^2 - B = A + B - I - B = A - I$$

۴۸۸ (۱) بنابر قضیه کیلی - همیلتون، $A^2 = (1+0)A - (0+1)I = A - I$.

دو طرف این برابری را به توان دو می رسانیم:

$$A^4 = (A-I)(A-I) = A^2 - 2A + I$$

به جای A^2 مقدار $A - I$ را قرار می دهیم، در این صورت

$$A^4 = (A-I) - 2A + I = -A \\ \text{یعنی } \alpha = -1 \text{ و } \beta = 0. \text{ در نتیجه } \alpha + \beta = -1$$

۴۸۹ (۱) بنابر فرض، $A^2 + A + I = \bar{O}$ ، دو طرف این برابری را در

$$A - I \text{ ضرب می کنیم، در این صورت } (A-I)(A^2 + A + I) = (A-I) \times \bar{O} = \bar{O},$$

یعنی $A^3 - I = \bar{O}$ ، پس $A^3 = I$ ، اکنون به دست می آید

$$A^{1398} = (A^3)^{466} = I^{466} = I$$

۴۹۰ (۳) توان های ماتریس A را تا جایی که بتوان حدس زد A^n چگونه

است، به دست می آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2^2-1 & 2^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2^3-1 & 2^3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2^4-1 & 2^4 \end{bmatrix}$$

$$\text{می توان ثابت کرد به ازای هر عدد طبیعی } n, A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2^n-1 & 2^n \end{bmatrix}.$$

$$A^n = \text{مجموع درایه های ماتریس } 2^{n+1}$$

بنابر فرض مسئله $2^{n+1} = 2^{10}$ ، در نتیجه $n = 9$.

۴۹۱ (۴) تساوی داده شده را به صورت زیر می نویسیم:

$$A^3 - 2A^2 + 4A = -2I \Rightarrow A(A^2 - 2A + 4I) = -2I$$

$$A\left(\frac{A^2 - 2A + 4I}{-2}\right) = I \Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}A^2 + A - 2I\right) = I$$

بنابراین A وارون پذیر است و $A^{-1} = -\frac{1}{2}A^2 + A - 2I$.

۴۹۲ (۴) از دو طرف تساوی $A^2 = 3I$ ، ماتریس 4I را کم می کنیم:

$$A^2 = 3I \Rightarrow A^2 - 4I = -I \Rightarrow (A-2I)(A+2I) = -I$$

$$(A-2I)(-A-2I) = I$$

چون حاصل ضرب دو ماتریس برابر ماتریس همانی است، پس این دو ماتریس

وارون یکدیگرند، یعنی $(A-2I)^{-1} = -A-2I$.

۴۹۳ (۱) از $AC + 2I = B$ به دست می آید $AC = B - 2I$ ، برابری اخیر

را از سمت چپ در A^{-1} ضرب می کنیم

$$C = A^{-1}B - 2A^{-1} \quad (1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{9-8} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

۴ ۵۰۱ دستگاه معادلات داده شده را می‌توان به صورت تساوی ماتریسی $AX=B$ نوشت. در صورتی این دستگاه به روش ماتریس وارون قابل حل نیست که ماتریس ضرایب A وارون‌پذیر نباشد، پس باید $|A|$ برابر صفر باشد

$$|A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m-9=0 \Rightarrow m=9$$

۱ ۵۰۲ چون دستگاه داده شده بی‌شمار جواب دارد، پس

$$\frac{m+1}{1} = \frac{3}{m-1} = \frac{m}{-m} \Rightarrow m^2-1=3 \Rightarrow m^2=4 \Rightarrow m=\pm 2$$

اگر $m=2$ ، آن‌گاه تناسب بالا به صورت $3=3=-1$ است که درست نیست. اگر $m=-2$ ، آن‌گاه تناسب بالا به صورت $-1=-1=-1$ است که درست است. بنابراین به ازای $m=-2$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

۳ ۵۰۳ جواب‌های دستگاه معادلات $AX=B$ به روش ماتریس وارون به صورت زیر است:

$$X=A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow y=4$$

۳ ۵۰۴ در دستگاه $\begin{cases} ax+4y=7 \\ 2x+by=4 \end{cases}$ ، ماتریس ضرایب $A = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 2 & b \end{bmatrix}$ است و بنابر فرض، $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & c \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 2 & b \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ab-8} \begin{bmatrix} b & -4 \\ -2 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & c \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{ab-8} \begin{bmatrix} b & -4 \\ -2 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & c \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \\ \frac{-2}{ab-8} = -2 \Rightarrow ab-8=1 \Rightarrow ab=9 \\ \frac{-4}{ab-8} = c \Rightarrow c=-4 \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow x=5, \quad y=-2$$

پس $x+y+xy=5-2-10=-7$.

۴ ۵۰۵ در حل دستگاه $AX=B$ به روش ماتریس وارون جواب‌ها

به صورت $X=A^{-1}B$ محاسبه می‌شوند. در اینجا $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ c & -5 \end{bmatrix}$ و

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ پس } B = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

چون $|A|=17$ ، پس $A^{-1} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -c & a \end{bmatrix}$ ، بنابراین

$$X=A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -34 \\ ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ ? \end{bmatrix}$$

در نتیجه $x=-2$ (توجه کنید مقدار y مورد نظر نیست برای همین سطر دوم جواب را محاسبه نکردیم).

۳ ۴۹۷ از ماتریس $(A+I)^{-1}$ وارون می‌گیریم تا ماتریس $A+I$ به دست آید.

$$A+I = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \quad \text{بنابراین:}$$

$$4(A^2-A) = 4 \left(\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= 4 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 6I$$

۲ ۴۹۸ می‌دانیم $|B^{-1}|$ مساوی $\frac{1}{|B|}$ است. در اینجا $|B|=-2$ پس

$|B^{-1}| = \frac{1}{-2}$. از طرف دیگر وارون ماتریس A^{-1} برابر A است. بنابراین

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|B^{-1}|A = \frac{1}{-2} \times \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad \text{در نتیجه}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس $|B^{-1}|A$ برابر است با $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$.

۱ ۴۹۹ ابتدا عبارت خواسته شده را ساده می‌کنیم، سپس از برابری $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ استفاده می‌کنیم.

$$(A^{-1}+B)(B^{-1}-A) = A^{-1}B^{-1} - I + I - BA$$

$$= A^{-1}B^{-1} - BA = (BA)^{-1} - BA$$

$$= \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $(A^{-1}+B)(B^{-1}-A)$ برابر -2 است.

۴ ۵۰۰ از تساوی $BA=I$ نتیجه می‌گیریم A وارون B است و از تساوی $CB=I$ نتیجه می‌گیریم C وارون B است. چون وارون هر ماتریس در صورت وجود یکتاست پس $A=C$ ، بنابراین

$$C^2 = A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس C^2 برابر -2 است.

دستگاه معادلات داده شده در صورتی بی‌شمار جواب دارد که

$$\frac{m}{4} = \frac{-3}{m-8} = \frac{5}{3m+4} \quad (۱)$$

$$\frac{m}{4} = \frac{-3}{m-8} \Rightarrow m^2 - 8m + 12 = 0 \Rightarrow (m-6)(m-2) = 0$$

$$m=6 \text{ یا } m=2$$

به ازای $m=6$ برابری (۱) به صورت $\frac{6}{4} = \frac{-3}{-2} = \frac{5}{22}$ در می‌آید که نادرست است.

به ازای $m=2$ برابری (۱) به صورت $\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{5}{10}$ در می‌آید که درست است.

پس به ازای $m=2$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

$$M = \begin{bmatrix} 2m-1 & \frac{m}{2} \\ m-3 & m-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{m=2} M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های M^{-1} برابر ۳ است.

حل این دستگاه به روش ماتریس وارون به صورت زیر است:

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ k^2 - 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4k - k^2 + 1 \\ -7k + 2k^2 - 2 \end{bmatrix}$$

پس $x = 4k - k^2 + 1$ و $y = -7k + 2k^2 - 2$ ، از طرف دیگر بنا بر فرض سؤال،

$$x + y = 7 \Rightarrow (4k - k^2 + 1) + (-7k + 2k^2 - 2) = 7 \Rightarrow k^2 - 3k - 8 = 0$$

در این معادله مجموع مقادیر k برابر 3 است.

ابتدا درایه‌های ماتریس‌های A و B را به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -10 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \text{ پس}$$

$$|BA| = \begin{vmatrix} -8 & -10 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 40 + 30 = 70 \quad \text{بنابراین}$$

درایه‌های ماتریس A هر کدام یک درمیان 2×2 هستند.

بنابراین ماتریس A برابر است با

$$A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 3+2 \\ -1+6 & 2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 25 = -31 \quad \text{بنابراین}$$

دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ در صورتی بی‌شمار جواب

دارد که $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. بنابراین در دستگاه معادلات داده شده،

$$\frac{m}{m+6} = \frac{m-3}{-(m+2)} = \frac{2m+1}{10+\Delta m} \quad (۱)$$

از تساوی $\frac{m}{m+6} = \frac{2m+1}{10+\Delta m}$ مقدار m را به دست می‌آوریم

$$m(10+\Delta m) = (m+6)(2m+1) \Rightarrow 10m + \Delta m^2 = 2m^2 + 13m + 6$$

$$3m^2 - 3m - 6 = 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$(m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow m=2 \text{ یا } m=-1$$

به ازای $m=2$ برابری (۱) به صورت $\frac{2}{8} = \frac{-1}{-4} = \frac{5}{20}$ در می‌آید که درست است.

به ازای $m=-1$ برابری (۱) به صورت $\frac{-1}{5} = \frac{-4}{-1} = \frac{-1}{5}$ در می‌آید که نادرست است.

پس $m=2$ قابل قبول است.

شرط جواب نداشتن این دستگاه به صورت زیر است:

$$\frac{m+2}{6} = \frac{-1}{-(m+1)} \neq \frac{4}{5} \quad (۱)$$

$$\frac{m+2}{6} = \frac{-1}{-(m+1)} \Rightarrow (m+2)(m+1) = 6 \Rightarrow m^2 + 3m - 4 = 0$$

$$(m+4)(m-1) = 0 \Rightarrow m=-4 \text{ یا } m=1$$

به ازای $m=-4$ برابری (۱) به صورت $\frac{-2}{6} = \frac{1}{-3} \neq \frac{4}{5}$ در می‌آید که درست است.

به ازای $m=1$ برابری (۱) به صورت $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \neq \frac{4}{5}$ در می‌آید که درست است.

پس هر دو مقدار -4 و 1 قابل قبول هستند. اکنون این مقادیر را در دستگاه دوم

$$m=-4 \Rightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ -4x-4y=8 \end{cases} \quad \text{جایگزین می‌کنیم:}$$

چون $\frac{1}{-4} = \frac{-1}{-4} = \frac{-2}{8}$ ، پس در این حالت دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

$$m=1 \Rightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ -4x+y=8 \end{cases}$$

چون $\frac{1}{-4} \neq \frac{1}{1}$ ، پس در این حالت دستگاه یک جواب دارد.

در حل دستگاه به روش ماتریس وارون، $X = A^{-1}B$ ، در اینجا

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ و } A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x=5, y=-2$$

از طرف دیگر وارون ماتریس A^{-1} همان ماتریس ضرایب یعنی

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ است. در نتیجه}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$a=0, b=-1, c=-1, d=-2$$

$$cy+bx+ad = (-1)(-2) + (-1)(5) + (0)(-2) = 2-5+0 = -3$$

۵۱۸ ۳) ماتریس A از مرتبه 3×3 است، پس به ازای هر عدد حقیقی k .

$$|kA| = k^3 |A| \quad \text{بنابراین}$$

$$\left| \frac{2A}{|A|} \right| = \left| \frac{2}{|A|} A \right| = \left(\frac{2}{|A|} \right)^3 |A| = \frac{8}{|A|^3}$$

$$|A| = |A|^3 \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

$$|\sqrt{2}A| = (\sqrt{2})^3 |A| = 2|A| = 2|A|^3 \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

بنابراین

$$\left| \frac{2A}{|A|} \right| + |A| = |\sqrt{2}A| \Rightarrow \frac{8}{|A|^3} + |A| = 2|A| \Rightarrow \frac{8}{|A|^3} = |A| \Rightarrow |A|^4 = 8 \Rightarrow |A| = \sqrt[4]{8} = \sqrt{2}$$

$$\frac{8}{|A|^3} = |A| \Rightarrow |A|^6 = 8 \Rightarrow |A|^2 = 2 \Rightarrow |A| = \pm \sqrt{2}$$

۵۱۹ ۱) می‌دانیم $AA^{-1} = I$. در تساوی $|I + BA^{-1}| = 6$ به جای I

ماتریس AA^{-1} را جایگزین می‌کنیم. سپس از ماتریس A^{-1} فاکتور می‌گیریم:

$$|I + BA^{-1}| = 6 \Rightarrow |AA^{-1} + BA^{-1}| = 6 \Rightarrow |(A+B)A^{-1}| = 6$$

$$|A+B||A^{-1}| = 6 \xrightarrow{|A+B|=3} 3|A^{-1}| = 6 \Rightarrow |A^{-1}| = 2$$

$$\xrightarrow{|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}} \frac{1}{|A|} = 2 \Rightarrow |A| = \frac{1}{2}$$

$$\text{در نتیجه } |A^2| = |A|^2 = \frac{1}{4}$$

۵۲۰ ۴) می‌دانیم $A^{-1}A = I$ ، پس

$$|A^{-1} + I| = 1 \Rightarrow |A^{-1} + A^{-1}A| = 1 \Rightarrow |A^{-1}(I + A)| = 1$$

$$|A^{-1}||I + A| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{6} \Rightarrow |A| = \frac{6}{1} = 6$$

۵۲۱ ۱) راه حل اول ابتدا درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس‌های A و B

را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a_{11} = 1 - 2 = -1 \\ a_{12} = 1 - 3 = -2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \\ a_{23} = 2 - 3 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{11} = 2 - 1 = 1 \\ b_{12} = 3 - 1 = 2 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \\ b_{23} = 3 - 2 = 1 \end{cases}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \quad \text{پس}$$

بنابراین مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس $A+B$ برابر صفر است.

$$A+B = [a_{ij} + b_{ij}] = \begin{cases} 0 & i < j \\ r_i & i \geq j \end{cases} \quad \text{راه حل دوم بنابر جمع ماتریس‌ها.}$$

بنابراین درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس $A+B$ همگی برابر صفر هستند.

در نتیجه مجموع این درایه‌ها نیز برابر صفر است.

۵۱۳ ۳) از طرفین تساوی داده شده درمیان می‌گیریم:

$$2A = \begin{bmatrix} |A| & -1 \\ 4 & |A| \end{bmatrix} \Rightarrow |2A| = |A|^2 + 4 \Rightarrow 4|A| = |A|^2 + 4$$

$$|A|^2 - 4|A| + 4 = 0 \Rightarrow (|A| - 2)^2 = 0 \Rightarrow |A| = 2$$

$$\text{بنابراین } |-3A^2| = (-3)^2 |A|^2 = 9|2|^2 = 36$$

۵۱۴ ۲) درمیان 3×3 داده شده در صورت سؤال را برحسب سطر دوم

بسط می‌دهیم. در این صورت

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ k-1 & k+2 & k \\ d & e & f \end{vmatrix} = 24$$

$$(k-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} + (k+2)(-1)^4 \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + k(-1)^5 \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = 24$$

$$k-1+2k+4+k=24 \Rightarrow 7k=21 \Rightarrow k=3$$

۵۱۵ ۱) از تساوی داده شده به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$|3AB - 2B| = 64 \Rightarrow |(3A - 2I)B| = 64 \Rightarrow |3A - 2I||B| = 64 \quad (1)$$

اکنون ماتریس $3A - 2I$ و سپس درمیان آن را به دست می‌آوریم:

$$3A - 2I = 3 \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 18 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$|3A - 2I| = 70 - 54 = 16$$

اکنون از تساوی (۱) نتیجه می‌گیریم

$$16|B| = 64 \Rightarrow |B| = 4$$

۵۱۶ ۴) محاسبه این درمیان با استفاده از تعریف وقت گیر است، به

همین دلیل مقدار آن را در حالت خاص حساب می‌کنیم. با انتخاب $x = -1$ و

$Z = 2$ مقدار Y با توجه به فرض $Y = X + Z$ برابر ۱ می‌شود. با این مقادیر

گزینه (۱) برابر -1 ، گزینه (۲) برابر -2 ، گزینه (۳) برابر 1 و گزینه (۴) برابر

۲ می‌شود. اکنون مقدار درمیان را با این اعداد به دست می‌آوریم و با گزینه‌ها

مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} 1+x & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(0-1) + 3(2-1) = -1+3 = 2$$

بسط برحسب سطر اول

این مقدار با عدد گزینه (۴) مساوی است. پس گزینه (۴) درست است.

۵۱۷ ۴) به درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس A عدد k را اضافه

کرده‌ایم ولی حاصل درمیان تغییر نکرده است. پس باید

$$\begin{vmatrix} x & 6 & 7 \\ -5 & a & b+k \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 6 & 7 \\ -5 & a & b \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

اکنون هر دو درمیان را برحسب سطر دوم بسط می‌دهیم. چون همه درایه‌های هر دو

درمیان به جز درایه سطر دوم و ستون سوم برابر هستند، پس باید $A_{23} = 0$ ، یعنی

$$(-1)^5 \begin{vmatrix} x & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3$$

اکنون عبارت خواسته شده را به دست می آوریم:

$$\frac{1}{|2A^{-1} + 3B^{-1}|} = \frac{1}{-14 + 9} = -\frac{1}{5}$$

$$(2A^{-1} + 3B^{-1})^{-1} = -\frac{1}{5} \times \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

در نهایت

$$(2A^{-1} + 3B^{-1})^{-1} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} - \frac{3}{5} - \frac{7}{5} = -1$$

۵۲۸ دو خط بر هم منطبق هستند، پس دستگاه معادلات

$$\begin{cases} mx + 2(m^2 + 1)y = 3m + 2 \\ 2x + 5my = 4 \end{cases}$$

بی شمار جواب دارد.

$$\frac{m}{2} = \frac{2(m^2 + 1)}{5m} = \frac{3m + 2}{4} \quad (1)$$

شرط بی شمار جواب

$$\frac{m}{2} = \frac{2(m^2 + 1)}{5m} \Rightarrow 5m^2 = 4m^2 + 4 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

باید $m = \pm 2$ در تساوی (۱) صدق کنند:

$$m = 2 \xrightarrow{(1)} \frac{2}{2} = \frac{10}{10} \neq \frac{8}{4}$$

$$m = -2 \xrightarrow{(1)} \frac{-2}{2} = \frac{10}{-10} = -\frac{4}{4}$$

پس فقط مقدار $m = -2$ قابل قبول است.

۵۲۹ ابتدا ماتریس M را به دست می آوریم:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 1 & 14 & -3 \\ 4 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

پس

$$M = AB - (A+B) + I$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 1 & 14 & -3 \\ 4 & 8 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & 9 & -6 \\ 3 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

اکنون دترمینان ماتریس M را با بسط دادن بر حسب سطر اول آن به دست می آوریم:

$$|M| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & 9 & -6 \\ 3 & 6 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-1)^2 \begin{vmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} + 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - 4(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-18) - 1(6) - 4(-15) = -72 - 6 + 60 = -18$$

۵۲۲ ابتدا حاصل ضرب را به دست می آوریم:

$$\begin{bmatrix} 3 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+x & -1 & 7-2x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+x & -1 & 7-2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+x & -1 & 7-2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ x \end{bmatrix} = 4+x-10+7x-2x^2$$

حاصل را برابر صفر قرار می دهیم:

$$4+x-10+7x-2x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x = 3$$

پس مجموع مقادیر x برابر ۴ است.

۵۲۳ در عبارت خواسته شده از طرف چپ ماتریس A و از طرف

راست ماتریس B را فاکتور می گیریم:

$$A \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} + B + A \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = B + A \left(\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \right) B$$

$$= A \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} B = A(3I)B = 3AB = 3 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 12 \end{bmatrix}$$

۵۲۴ ابتدا ماتریس A^2 را به دست می آوریم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{می توان ثابت کرد}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2+n=1388 \Rightarrow n=1386$$

۵۲۵ از تساوی $B = I - A$ نتیجه می گیریم $A + B = I$. پس

$$A^2 + AB + B = A(A+B) + B = AI + B = A + B = I$$

۵۲۶ دو طرف برابری داده شده را در A^{-1} ضرب می کنیم:

$$A^{-1}(A^3 - 2A^2 - A - I) = A^{-1} \times \vec{0} \Rightarrow A^2 - 2A - I - A^{-1} = \vec{0}$$

$$\text{به دست می آید } A^{-1} = A^2 - 2A - I$$

۵۲۷ توجه کنید که $|A| = 10 - 9 = 1$ و $|B| = 2 - 3 = -1$. بنابراین

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$2A^{-1} + 3B^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

۵۳۸ ۱ جواب‌های دستگاه معادلات در روش ماتریس وارون به صورت

زیر به دست می‌آید:

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ 1-m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3m+1-m \\ 5m+2-2m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m+1 \\ 3m+2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 2m+1 \\ y = 3m+2 \end{cases}$$

از طرف دیگر بنا بر فرض نقطه $(4-m, n-1)$ جواب این دستگاه است، پس

$$\begin{cases} 4-m = 2m+1 \Rightarrow m=1 \\ n-1 = 3m+2 \Rightarrow n-1=5 \Rightarrow n=6 \end{cases}$$

بنابراین $2n-m=12-1=11$.

۵۳۹ ۳ بنا بر فرض سؤال، اختلاف دترمینان $\begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 4 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ از

دترمینان $\begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 5 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ برابر ۶ است. هر دو دترمینان را با بسط دادن

برحسب سطر سوم حساب می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 5 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 5(-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & a \\ 5 & 8 \end{vmatrix} + 6(-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -5(24-5a) + 6(-3-10) = -120 + 25a - 78 = 25a - 198$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 4 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 5(-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & a \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 6(-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -5(21-4a) + 6(-6-8) = -105 + 20a - 48 = 20a - 153$$

بنابراین

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 5 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 4 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

$$(25a - 198) - (20a - 153) = 6 \Rightarrow 5a - 45 = 6 \Rightarrow 5a = 51 \Rightarrow a = 10.2$$

۵۴۰ ۱ راه حل اول توجه کنید که

$$\left| A + \frac{A}{|A|} \right| = 4 \Rightarrow \left| \left(1 + \frac{1}{|A|} \right) A \right| = 4 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{|A|} \right)^2 |A| = 4$$

در $|A|$ ضرب می‌کنیم $\rightarrow \left(1 + \frac{1}{|A|} + \frac{1}{|A|^2} \right) |A| = 4 \Rightarrow |A| + \frac{1}{|A|} + \frac{1}{|A|^2} = 4$

$$|A|^2 + 1 + \frac{1}{|A|} = 4|A| \Rightarrow |A|^2 - 2|A| + 1 = 0 \Rightarrow (|A| - 1)^2 = 0 \Rightarrow |A| = 1$$

راه حل دوم ماتریس I در رابطه $|A + \frac{A}{|A|}| = 4$ صدق می‌کند:

$$\left| I + \frac{I}{|I|} \right| = |2I| = 2^2 = 4$$

بنابراین جواب برابر $|I| = 1$ است.

۵۳۰ ۲ طرفین فرض $2B - A = kBA$ را از سمت چپ در B^{-1} و از سمت راست در A^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$2B - A = kBA \xrightarrow{B^{-1} \times} 2B^{-1}B - B^{-1}A = kB^{-1}BA$$

$$2I - B^{-1}A = kA \xrightarrow{\times A^{-1}} 2IA^{-1} - B^{-1}AA^{-1} = kAA^{-1}$$

$$2A^{-1} - B^{-1} = kI \Rightarrow |2A^{-1} - B^{-1}| = |kI| = k^2$$

۵۳۱ ۴ چون ماتریس AB تعریف شده است، پس تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر است، یعنی تعداد سطرهای B برابر ۴ است. در بین گزینه‌ها فقط گزینه (۴) این ویژگی را دارد.

۵۳۲ ۳ ضرب‌های سمت چپ تساوی داده شده را انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x+1 & -2x-1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x(-x+1) + 2(-2x-1) + 0 = 0$$

یعنی $-x^2 - 3x - 2 = 0$. بنابراین $x_1 = -2$ و $x_2 = -1$ ، در نتیجه

$$x_1 + x_2 = -3$$

۵۳۳ ۴ بنا بر تعریف توان و خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها،

$$A(BA)^5 B = A(BA)(BA)(BA)(BA)(BA)B$$

$$= (AB)(AB)(AB)(AB)(AB)(AB) = (AB)^6 = C^6$$

۵۳۴ ۴ ابتدا درایه‌های ماتریس‌های A و B را به دست می‌آوریم

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -5 & -8 \end{bmatrix}$$

پس $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -19 & -34 \end{bmatrix}$ بنابراین

$$AB - B = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -19 & -34 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -14 & -26 \end{bmatrix}$$

در نتیجه مجموع درایه‌های ماتریس $AB - B$ برابر -40 است.

۵۳۵ ۲ بنا بر قضیه کیلی - هملتون،

$$A^2 = (2+4)A - (1+3)I_2 \Rightarrow A^2 = 6A - 4I_2$$

بنابراین $\alpha = 6$ و $\beta = -4$ ، در نتیجه $\alpha + \beta = 2$.

۵۳۶ ۴ می‌دانیم $(A^{-1})^{-1} = A$. پس

$$A = \frac{1}{\lambda - 6} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\lambda - 6} & -\frac{1}{\lambda - 6} \\ -\frac{3}{\lambda - 6} & \frac{1}{\lambda - 6} \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} \frac{4}{\lambda - 6} & -\frac{2}{\lambda - 6} \\ -\frac{6}{\lambda - 6} & \frac{2}{\lambda - 6} \end{bmatrix}$$

اکنون به دست می‌آید.

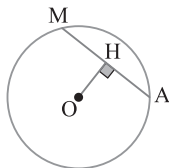
۵۳۷ ۲ طرفین برابری $A^3 = A$ را در A^{-1} و طرفین برابری

$B^3 = B$ را در B^{-1} ضرب می‌کنیم، در این صورت $A^2 = I$ و $B^2 = I$.

اکنون توجه کنید که

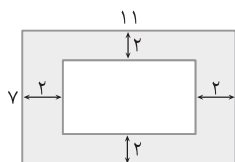
$$(3A^2 - B^2)^{-1} = (3I - I)^{-1} = (2I)^{-1} = \frac{1}{2}I^{-1} = \frac{1}{2}I$$

۵۴۶ (۲) در شکل زیر H وسط وتر AM از دایره C(O, r) است. می‌دانیم اگر از مرکز دایره به وسط وتری از دایره وصل کنیم این پاره‌خط بر وتر عمود است. پس $\angle AHO = 90^\circ$. در نتیجه مکان هندسی وسط وترهای AM دایره‌ای به قطر OA است.

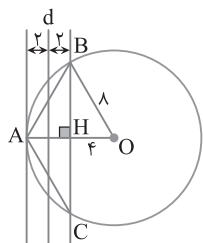
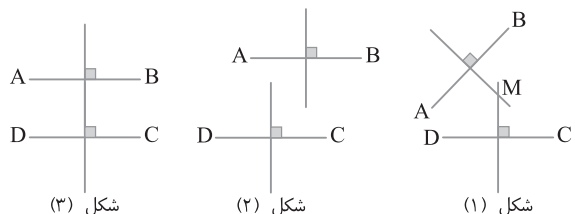


۵۴۷ (۴) مجموعه نقطه‌های مورد نظر، نقاط مشترک عمودمنصف ضلع BC و نیمساز زاویه A است. از طرف دیگر حداکثر تعداد نقاط، مورد نظر است. پس با فرض اینکه مثلث در رأس A متساوی الساقین باشد، چون عمودمنصف پاره‌خط BC و نیمساز زاویه A بر هم منطبق هستند، در این حالت نامتناهی نقطه به دست می‌آید.

۵۴۸ (۲) مطابق شکل زیر، مرکز سکه که باید درون مستطیل باشد از هر ضلع مستطیل به فاصله حداکثر ۲ است. پس مکان هندسی مورد نظر قسمت رنگی است که مساحت بین مستطیل به اضلاع ۱۱ و ۷ و مستطیل به اضلاع ۳ و ۷ است. پس $11 \times 7 - 7 \times 3 = 7 \times 8 = 56$ مساحت خواسته شده



۵۴۹ (۳) مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB است. مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه C و D به یک فاصله‌اند عمودمنصف CD است. این دو خط عمودمنصف یا در یک نقطه متقاطع‌اند، یا موازی‌اند یا منطبق‌اند (شکل‌های زیر را ببینید). پس این مسئله یا یک جواب دارد یا جواب ندارد یا بی‌شمار جواب دارد. پس حالتی که دو نقطه ایجاد شود وجود ندارد.



۵۵۰ (۴) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ۲ هستند دو خط موازی است. چون دقیقاً سه نقطه روی دایره وجود دارد که از d به فاصله ۲ هستند پس مطابق شکل مقابل، یکی از دو خط موازی، مماس بر دایره و خط دیگر دایره را در دو نقطه قطع می‌کند. اگر نقاط برخورد و تماس را B، C و A بنامیم، آن‌گاه مساحت مثلث ABC مورد نظر است. ارتفاع AH برابر ۴ است، پس $OH = 4$. در نتیجه بنابر قضیه فیثاغورس،

$$\Delta OBH: BH^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48 \Rightarrow BH = 4\sqrt{3} \Rightarrow BC = 8\sqrt{3}$$

$$\text{بنابراین } S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} (4) (8\sqrt{3}) = 16\sqrt{3}$$

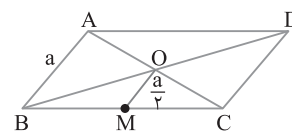
۵۴۱ (۴) اگر صفحه قاطع که هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع می‌کند، شامل محور سطح مخروطی نباشد، مقطع مخروطی حاصل هذلولی است و اگر شامل محور سطح مخروطی باشد، مقطع حاصل دو خط متقاطع است که در اینجا دو خط متقاطع مورد نظر سؤال است.

۵۴۲ (۳) فرض کنید O نقطه تلاقی دو قطر متوازی الاضلاع ABCD باشد. از O به نقطه M وسط ضلع BC وصل می‌کنیم. بنابر قضیه میان خط،

$$\left. \begin{array}{l} AO=OC \\ BM=MC \end{array} \right\} \Rightarrow OM = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} \quad (1)$$

چون ضلع BC ثابت است، پس نقطه M وسط BC ثابت است. پس بنابر تساوی (۱) فاصله نقطه متغیر O از نقطه ثابت M برابر مقدار ثابت $\frac{a}{2}$ است.

پس مکان هندسی O دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{a}{2}$ است.

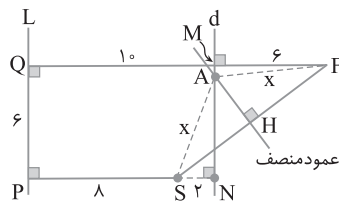


۵۴۳ (۱) مکان هندسی نقاطی که از S و F به یک فاصله هستند، عمودمنصف FS است و مکان هندسی نقاطی که از خط L به فاصله ۱۰ هستند دو خط موازی L است که در اینجا یکی را در نظر گرفته‌ایم (d). محل برخورد این دو مکان هندسی نقطه A است. با توجه به شکل و بنابر قضیه فیثاغورس، $\Delta ASN: AS^2 = AN^2 + SN^2 \xrightarrow{AS=x} x^2 = (6-AM)^2 + 4$
 $\Delta AMF: AF^2 = AM^2 + MF^2 \xrightarrow{AF=AS=x} x^2 = AM^2 + 36$
 تساوی دوم را از تساوی اول کم می‌کنیم:

$$0 = 36 + AM^2 - 12AM + 4 - AM^2 - 36 \Rightarrow AM = \frac{1}{3}$$

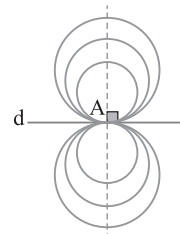
بنابراین $x^2 = AM^2 + 36 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{9} + 36 \Rightarrow x^2 = \frac{325}{9} \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{13}}{3}$

دقت کنید مکان هندسی نقاطی که از خط L به فاصله ۱۰ هستند دو خط موازی L است. اگر خط d' را در طرف دیگر L به فاصله ۱۰ رسم کنیم، عمودمنصف SF آن را در نقطه‌ای مثل A' قطع می‌کند. این نقطه هم می‌تواند جواب باشد.



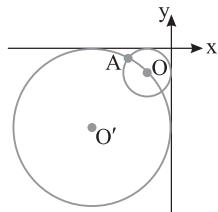
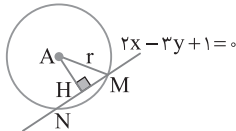
۵۴۴ (۴) مکان هندسی نقطه‌هایی که از دو نقطه A و B به یک فاصله هستند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. این خط (عمودمنصف پاره‌خط AB) دایره را حداکثر در دو نقطه قطع می‌کند.

۵۴۵ (۳) چون شعاع دایره، در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، پس مکان هندسی مورد نظر خطی است که از A می‌گذرد و بر خط d عمود است.



$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-4)^2 = 20 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow (x+1)^2 + 4 = 20 \Rightarrow (x+1)^2 = 16$$

$$\begin{cases} x+1=4 \Rightarrow x=3 \\ x+1=-4 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$$

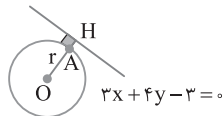


۵۵۵ ۳ مرکز چنین دایره‌ای در ناحیه سوم مختصات قرار دارد و از محورهای مختصات به فاصله r است (شعاع دایره). پس نقطه $(-r, -r)$ مرکز این دایره است. بنابراین معادله این دایره به صورت زیر است:

$$(x+r)^2 + (y+r)^2 = r^2 \xrightarrow{A \in \text{دایره}} (-9+r)^2 + (-2+r)^2 = r^2$$

$$81 + r^2 - 18r + 4 + r^2 - 4r = r^2 \Rightarrow r^2 - 22r + 85 = 0$$

$$(r-5)(r-17) = 0 \Rightarrow r=5 \text{ یا } r=17$$



۵۵۶ ۲ با توجه به شکل مقابل، کمترین فاصله نقاط دایره از خط برابر $AH=OH-r$ است.

$$x^2 + y^2 + 4x + 8y + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (-2, -4) \\ r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{16 + 64 - 16}}{2} = 4 \end{cases}$$

$$OH = \frac{|-6 - 16 - 3|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{25}{5} = 5$$

بنابراین $AH=OH-r=5-4=1$.

۵۵۷ ۴ می‌دانیم طول مماس رسم شده از نقطه A بر دایره $C(x, y) = 0$ برابر $\sqrt{C(A)}$ است. ابتدا معادله دایره را به ۳ تقسیم می‌کنیم زیرا زمانی می‌توانیم از فرمول‌های مربوط به دایره استفاده کنیم که ضرایب x^2 و y^2 برابر یک باشند. پس

$$3x^2 + 3y^2 - mx + 3y - \frac{15}{3} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{mx}{3} + y - \frac{5}{3} = 0$$

$$\text{طول مماس} = \sqrt{C(A)} \Rightarrow 2\sqrt{3} = \sqrt{4 + 1 + \frac{m^2}{3} + 1 - \frac{5}{3}}$$

$$12 = \frac{m^2}{3} + \frac{7}{3} \Rightarrow 72 = 4m + 21 \Rightarrow 4m = 51 \Rightarrow m = \frac{51}{4} = 12.75$$

۵۵۸ ۴ با انتخاب دو مقدار برای m دو قطر دایره را به دست می‌آوریم. نقطه برخورد آن‌ها مرکز دایره است.

$$\begin{cases} m=-3 \Rightarrow -x+2=0 \Rightarrow x=2 \\ m=-2 \Rightarrow y+2=0 \Rightarrow y=-2 \end{cases} \Rightarrow \text{مرکز دایره} = O(2, -2)$$

از طرف دیگر فاصله مرکز O تا خط مماس $3x - 4y + 6 = 0$ برابر شعاع دایره است.

$$r = OH = \frac{|6 + 8 + 6|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4$$

بنابراین $\text{مساحت دایره} = \pi r^2 = 16\pi$.

۵۵۱ ۳ دو دایره f و f' مماس خارج‌اند، پس طول خط‌المركزین آن‌ها مساوی مجموع شعاع‌های آن‌ها است:

$$f: (x-3)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow O(3, 0), r=3$$

$$f': x^2 + y^2 - 14x - m = 0$$

$$\begin{cases} O'(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (7, 0) \\ r' = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{196 + 4m}}{2} = \sqrt{49 + m} \end{cases}$$

پس $OO' = r + r' \Rightarrow 4 = 3 + \sqrt{49 + m} \Rightarrow 1 = \sqrt{49 + m} \Rightarrow m = -48$ درضمن دو دایره f و f'' مماس داخل هستند، پس طول خط‌المركزین آن‌ها مساوی قدر مطلق تفاضل شعاع‌های آن‌ها است:

$$f'': x^2 + y^2 - 8x - n = 0$$

$$\begin{cases} O''(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (4, 0) \\ r'' = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{64 + 4n}}{2} = \sqrt{16 + n} \end{cases}$$

$$OO'' = |r - r''| \Rightarrow 1 = |3 - \sqrt{16 + n}| \Rightarrow \begin{cases} n=0 \\ n=-12 \end{cases}$$

بنابراین کمترین مقدار $m+n$ مساوی $-48-12=-60$ است.

۵۵۲ ۳ دو دایره به مراکز O و O' و شعاع‌های r و r' مماس خارج‌اند هرگاه $OO' = r + r'$ پس

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (2, -1) \\ r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{16 + 4 + 16}}{2} = 3 \end{cases}$$

چون $O'(-1, 3)$ پس $OO' = \sqrt{9 + 16} = 5$ بنابراین

$$OO' = r + r' \Rightarrow 5 = 3 + r' \Rightarrow r' = 2$$

۵۵۳ ۲ دو خط $y = 2x + 10$ و $y = 2x$ موازی‌اند. پس مرکز دایره روی خط موازی آن‌ها و به یک فاصله از آن‌ها به معادله $y = 2x + 5$ قرار دارد. اگر $O(\alpha, \beta)$ مرکز دایره باشد، آن‌گاه O نقطه $(\alpha, 2\alpha + 5)$ است. چون دایره از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس فاصله O تا مبدأ مساوی فاصله O تا خط $y = 2x$ است. بنابراین

$$\sqrt{\alpha^2 + (2\alpha + 5)^2} = \frac{|2\alpha + 5 - 2\alpha|}{\sqrt{5}}$$

$$\alpha^2 + 4\alpha^2 + 20\alpha + 25 = \frac{25}{5} \Rightarrow 5\alpha^2 + 20\alpha + 20 = 0$$

$$\alpha^2 + 4\alpha + 4 = 0 \Rightarrow (\alpha + 2)^2 = 0 \Rightarrow \alpha = -2 \Rightarrow O(-2, 1)$$

۵۵۴ ۱ با توجه به شکل زیر و فرض $MN = 2\sqrt{7}$ نتیجه می‌گیریم $MH = \sqrt{7}$ از طرف دیگر،

$$\text{فاصله } A \text{ تا خط} = AH = \frac{|-2 - 12 + 1|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

بنابر قضیه فیثاغورس،

$$\Delta AMH: AM^2 = AH^2 + MH^2 \Rightarrow r^2 = \sqrt{13}^2 + \sqrt{7}^2 = 20$$

$$r = \sqrt{20}$$

معادله دایره به مرکز $A(-1, 4)$ و شعاع $\sqrt{20}$ به صورت

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 20$$

$y = 2$ را به دست می‌آوریم

۵۶۳ ۳ چون شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، با تعیین مختصات مرکز دایره، شیب OA را تعیین می‌کنیم و از آنجا شیب خط مماس را به دست می‌آوریم

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3, \quad O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (1, 1)$$

$$m_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{3-1}{2-1} = 2$$

پس شیب خط مماس برابر $-\frac{1}{2}$ است. در نتیجه معادله خط مماس به صورت

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4$$

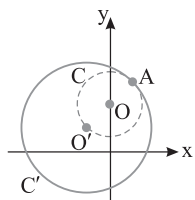
مقابل است:

پس عرض از مبدأ این خط، یعنی عرض برخورد آن با محور y برابر ۴ است.

۵۶۴ ۳ فرض کنید $O(0, \beta)$ مرکز دایره C و O' مرکز دایره داده شده باشد. در این صورت O, A, O' روی یک خط هستند:

$$\begin{cases} O'(-1, 1) \\ A(1, 3) \end{cases} \Rightarrow m_{O'A} = \frac{3-1}{1+1} = 1$$

$$O'A \text{ خط: } y - 1 = 1(x + 1) \Rightarrow y = x + 2$$



مختصات مرکز O باید در معادله خط $O'A$

صدق کنند. پس $\beta = 2$. بنابراین $O(0, 2)$

مرکز دایره C است. شعاع دایره C برابر OA است. بنابراین

$$r = OA = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

۵۶۵ ۱ امتداد خط‌المركزين O_1O_2 دایره O_1 را در نقطه A قطع

می‌کند (شکل زیر را ببینید). نقطه A دورترین نقطه دایره C_1 از C_2 است،

پس از A بلندترین مماس را می‌توان بر C_2 رسم کرد:

$$\begin{cases} O_1(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (2, 3) \\ O_2(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (-2, 0) \end{cases} \Rightarrow O_1O_2 = \sqrt{16+9} = 5$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{16 + 36 - 4a}}{2} = \sqrt{13 - a}$$

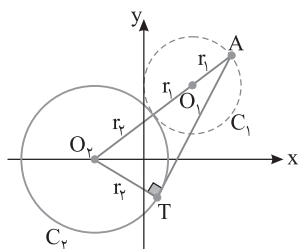
$$r_2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{16 + 20}}{2} = 3$$

دو دایره مماس خارج هستند، پس

$$O_1O_2 = r_1 + r_2 \Rightarrow 5 = \sqrt{13 - a} + 3 \Rightarrow a = 9 \Rightarrow r_1 = \sqrt{13 - 9} = 2$$

با توجه به شکل، طول مماس AT را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \Delta O_1AT: AT &= \sqrt{AO_1^2 - O_1T^2} = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - r_2^2} \\ &= \sqrt{(4+3)^2 - 3^2} = \sqrt{49 - 9} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \end{aligned}$$



توجه کنید که اگر نقطه تماس دو

دایره را B_1 و محل تلاقی امتداد

AO_2 با دایره C_2 را B_2

بنامیم، برای محاسبه طول

AT می‌توانستیم از برابری

$$AT^2 = AB_1 \times AB_2$$

استفاده کنیم.

۵۵۹ ۳ معادله مقطع مخروطی داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(2x+6)^2 + (2-2y)^2 = 32 \Rightarrow (2(x+3))^2 + (-2(y-1))^2 = 32$$

$$4(x+3)^2 + 4(y-1)^2 = 32 \Rightarrow (x+3)^2 + (y-1)^2 = 8$$

پس این مقطع مخروطی، دایره به مرکز $(-3, 1)$

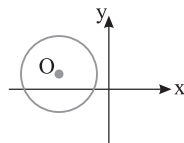
و شعاع $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ است. چون $2\sqrt{2}$

کوچکتر از $|-3|$ است، پس دایره محور y را قطع

نمی‌کند (شکل مقابل را ببینید). بنابراین دایره در

ناحیه‌های دوم و سوم قرار دارد. در نتیجه این

دایره در ناحیه‌های اول و چهارم قرار ندارد.



۵۶۰ ۱ نقطه A روی دایره $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2$ قرار دارد. پس

شیب خط مماس در نقطه A ، عکس و قرینه شیب OA است (O مرکز دایره است).

$$O(2, -1) \Rightarrow m_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{-2+1}{3-2} = -1$$

بنابراین شیب خط مماس برابر ۱ است. پس

$$\text{برخورد با محور } y: y + 2 = (x - 3) \xrightarrow{x=0} y + 2 = -3 \Rightarrow y = -5$$

$$y + 2 = -3 \Rightarrow y = -5$$

۵۶۱ ۳ در معادله دایره ضرایب x^2 و y^2 با هم برابرند، پس $a = 2$.

معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$2x^2 + 2y^2 - 4x - 4my - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2my - \frac{1}{2} = 0$$

مرکز دایره نقطه $O(1, m)$ است. قطر دایره از مرکز دایره می‌گذرد، پس

$$2m - m = 1 \Rightarrow m = 1$$

در نتیجه معادله دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y - \frac{1}{2} = 0$ است. پس

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{4+4+2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow 2r = \sqrt{10}$$

۵۶۲ ۴ راه‌حل اول فرض می‌کنیم معادله دایره به صورت

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ باشد. در این صورت}$$

$$A \in \text{دایره} \Rightarrow 1 + 4 + a - 2b + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - 2b + c = -5 \\ 3a - 2b + c = -13 \\ 3a + 2b + c = -13 \end{cases}$$

$$B \in \text{دایره} \Rightarrow 9 + 4 + 3a - 2b + c = 0$$

$$C \in \text{دایره} \Rightarrow 9 + 4 + 3a + 2b + c = 0$$

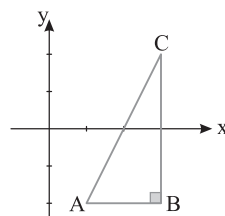
معادله اول را از معادله دوم کم می‌کنیم:

معادله دوم را از معادله سوم کم می‌کنیم:

بنابراین $c = -1$ و شعاع دایره برابر است با

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 0 + 4} = \sqrt{5}$$

پس $\pi r^2 = 5\pi$ مساحت دایره.



راه‌حل دوم نقطه‌های A, B, C را در

دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم. با توجه

به شکل مثلث ABC قائم‌الزاویه است، پس

شعاع دایره گذرنده از این سه نقطه برابر

$$\text{است با } r = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 4^2}}{2} = \sqrt{5}$$

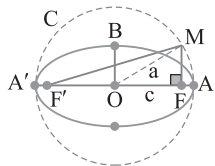
پس $\pi r^2 = 5\pi$ مساحت دایره.

۵۷۰ (۱) دایره به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r بر محور y مماس است، هرگاه $|\alpha| = r$.

$$x^2 + y^2 + 4x + my + 4 = 0$$

$$\begin{cases} O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (-2, -\frac{m}{2}) \\ r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{16 + m^2 - 16}}{2} = \frac{|m|}{2} \end{cases}$$

$$|\alpha| = r \Rightarrow 2 = \frac{|m|}{2} \Rightarrow |m| = 4 \Rightarrow m = \pm 4 \quad \text{بنابراین}$$



۵۷۱ (۱) شعاع دایره C ، برابر a

است، پس $OM = a$. در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویه OMF بنابر قضیه فیثاغورس،

$$MF = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{b^2} = b$$

از طرف دیگر بنابر فرض سؤال،

$$2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

$$2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$$

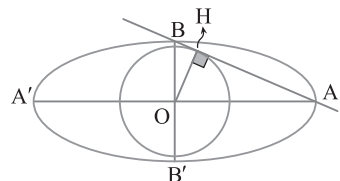
$$S_{MFF'} = \frac{1}{2} MF \times FF' = \frac{1}{2} b \times 2c = bc = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \quad \text{بنابراین}$$

۵۷۲ (۴) قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ و قطر کوچک بیضی برابر $2b$ است.

پس $OA = a = 12$ و $OB = b = 5$. در مثلث قائم‌الزاویه OAB ارتفاع OH را رسم می‌کنیم. OH شعاع دایره مماس بر AB است. بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$\triangle OAB: AB^2 = OB^2 + OA^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow AB = 13$$

$$\triangle OAB: OH \times AB = OB \times OA \Rightarrow OH = \frac{5 \times 12}{13} = \frac{60}{13}$$



۵۷۳ (۲) مبدأ مختصات (مرکز بیضی) وسط دو کانون F و F' است. در

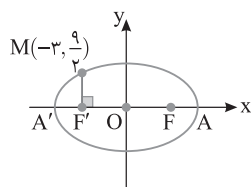
نتیجه $F'(-3, 0)$ کانون دیگر این بیضی است. چون دو نقطه M و F' دارای

طول‌های مساوی‌اند، پس $MF' = MF$ ، عمود بر قطر بزرگ AA' است (شکل زیر را ببینید). در نتیجه $MF' = \frac{b^2}{a}$. از طرف دیگر $MF' = \frac{9}{2}$ ، پس $\frac{b^2}{a} = \frac{9}{2}$ ، در

نتیجه $b^2 = \frac{9}{2}a$. در ضمن $c = OF = 3$ ، بنابراین

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = \frac{9}{2}a + 9 \Rightarrow 2a^2 - 9a - 18 = 0$$

$$a = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 144}}{4} = \frac{9 \pm 15}{4} \Rightarrow a = \frac{9 + 15}{4} = 6$$



$$\text{در نتیجه} \quad \frac{c}{a} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

۵۶۶ (۱) فرض کنید $C(x, y): x^2 + y^2 + 4x - 2y - m = 0$. پاره‌خط AB

درون دایره $C(x, y) = 0$ قرار دارد، پس هر دو نقطه A و B درون این دایره واقع‌اند. بنابراین اگر مختصات A و B را در $C(x, y)$ قرار دهیم باید عددی

منفی به دست آید. پس

$$C(A) < 0 \Rightarrow 4 + 1 + 8 + 2 - m < 0 \Rightarrow m > 15$$

$$C(B) < 0 \Rightarrow 4 + 9 + 8 - 6 - m < 0 \Rightarrow m > 15$$

پس حدود تغییرات m به صورت $m > 15$ است. در ضمن توجه کنید به ازای

همه این مقادیر معادله $x^2 + y^2 + 4x - 2y - m = 0$ معادله یک دایره است.

زیرا $a^2 + b^2 - 4c$ به ازای آن‌ها مثبت است.

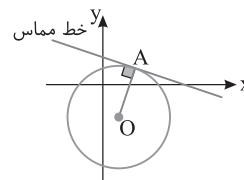
۵۶۷ (۳) اگر O مرکز دایره باشد، آنگاه شیب خط مماس، عکس و قرینه

شیب شعاع OA است.

$$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (1, -2), \quad m_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{1 + 2}{2 - 1} = 3$$

پس شیب خط مماس $-\frac{1}{3}$ و معادله آن به صورت زیر است:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2) \xrightarrow{x=0} y - 1 = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{5}{3}$$



۵۶۸ (۱) نقاط تلاقی دایره را با محورهای مختصات به دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0 \xrightarrow{y=0} x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16}}{2} \Rightarrow x = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

پس نقاط تلاقی دایره با محور x دو نقطه $A(2 + 2\sqrt{2}, 0)$ و $B(2 - 2\sqrt{2}, 0)$

هستند. پس $AB = 4\sqrt{2}$.

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0 \xrightarrow{x=0} y^2 - 2y - 4 = 0$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2} \Rightarrow y = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

پس نقاط تلاقی دایره با محور y دو نقطه $C(0, 1 + \sqrt{5})$ و $D(0, 1 - \sqrt{5})$

هستند. پس $CD = 2\sqrt{5}$. بنابراین نسبت طول این دو وتر برابر است با

$$\frac{AB}{CD} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

۵۶۹ (۴) اگر $W(0, 0)$ مبدأ مختصات، O مرکز دایره r شعاع دایره

باشد، آنگاه فاصله دورترین نقطه دایره تا W برابر $WO + r$ است.

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (-1, 1) \\ r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{4 + 4}}{2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

پس $OW = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ ، بیشترین فاصله $OW + r = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

بنابراین $FF' = 2c = 2\sqrt{17}$ ، پس میانه OM در مثلث MFF' نصف FF' است. پس این مثلث قائم الزامه است، یعنی $\angle FMF' = 90^\circ$. در نتیجه $MF^2 + MF'^2 = FF'^2 \xrightarrow{FF'=2\sqrt{17}} MF^2 + MF'^2 = 68$ (۱)
از طرف دیگر، $MF + MF' = 2a = 10$. بنابراین $MF = 10 - MF'$ ، پس از تساوی (۱) نتیجه می گیریم

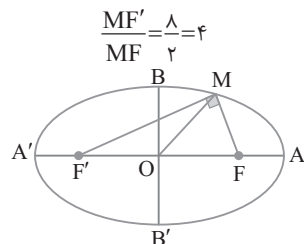
$$(10 - MF')^2 + MF'^2 = 68$$

$$100 + MF'^2 - 20MF' + MF'^2 = 68$$

$$2MF'^2 - 20MF' + 32 = 0 \Rightarrow MF'^2 - 10MF' + 16 = 0$$

$$(MF' - 2)(MF' - 8) = 0 \Rightarrow MF' = 2 \text{ یا } MF' = 8$$

با توجه به شکل $MF' = 8$ قابل قبول است. پس $MF = 10 - 8 = 2$. در نتیجه



۵۷۹ (۲) طول وتر کانونی MN برابر $\frac{2b^2}{a}$ است. بنابر فرض سؤال

$$AF = a - c = 2 \text{ و } a = OA = 8$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28$$

در مثلث OMN ارتفاع برابر $OF = c = 6$ و قاعده برابر $MN = \frac{2b^2}{a}$ است. پس

$$S_{OMN} = \frac{1}{2} OF \times MN = \frac{1}{2} (c) \left(\frac{2b^2}{a} \right) = \frac{b^2 c}{a} = \frac{28 \times 6}{8} = 21$$

۵۸۰ (۲) راه حل اول بنابر فرض های سؤال $OF = 6$ و $AF = 6$ ، پس $c = 6$ و $a = 12$. از D به کانون F' وصل می کنیم. چون D روی بیضی است، پس $DF + DF' = 2a$. بنابر قضیه فیثاغورس،

$$\triangle DFF': DF'^2 = DF^2 + FF'^2 \xrightarrow{FF'=2c}$$

$$(2a - DF)^2 = DF^2 + (2c)^2 \xrightarrow{\frac{a=12}{c=6}} (24 - DF)^2 = DF^2 + 12^2$$

$$24^2 + DF^2 - 48DF = DF^2 + 12^2 \Rightarrow 48DF = 24^2 - 12^2$$

$$48DF = (24 + 12)(24 - 12) \Rightarrow 48DF = 36 \times 12 \Rightarrow DF = 9$$

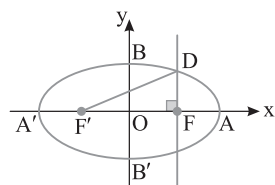
مطابق شکل، DF برابر عرض نقطه D و OF برابر طول نقطه D است. بنابراین

$$D(OF, DF) = (6, 9)$$

راه حل دوم می دانیم اندازه DF برابر $\frac{b^2}{a}$ است. چون

$$b^2 = a^2 - c^2 = 12^2 - 6^2 = 108$$

پس مختصات D برابر است با $(c, \frac{b^2}{a}) = (6, 9)$.



۵۷۴ (۳) وسط دو کانون F و F' مرکز بیضی است. پس

$$O = \frac{F + F'}{2} = (-1, 3)$$

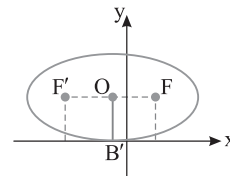
نقطه B' بر محور x مماس است پس $b = OB' = y_O = 3$. در ضمن

$$2c = FF' = 6 \Rightarrow c = 3$$

در نتیجه

$$a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 9 = 18 \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$$

دورترین فاصله نقاط هر بیضی از یکدیگر برابر $2a$ است. پس $2a = 6\sqrt{2}$.



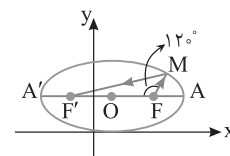
۵۷۵ (۲) بنابر ویژگی بازتابندگی بیضی بازتابش این پرتو نور از کانون دیگر

بیضی یعنی F' می گذرد. با توجه به شکل نقطه F' از مرکز O به فاصله c قرار دارد. اکنون بنابر فرض سؤال،

$$AA' = 8 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4, \quad c = 2 \Rightarrow b = 2$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}, \quad O = \frac{A + A'}{2} = (1, 2)$$

بنابراین مختصات کانون F' به صورت $(1 - 2\sqrt{3}, 2)$ است.



۵۷۶ (۳) طول BB' برابر قطر کوچک بیضی است. پس

$$2b = BB' = 2\sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2}$$

در ضمن خروج از مرکز بیضی را می توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{\Delta}{\gamma}} = \sqrt{1 - \frac{2}{a^2}} \Rightarrow \frac{\Delta}{\gamma} = 1 - \frac{2}{a^2} \Rightarrow \frac{2}{a^2} = 1 - \frac{\Delta}{\gamma}$$

$$\frac{2}{a^2} = \frac{\gamma}{\gamma} \Rightarrow a^2 = \gamma$$

پس

$$c^2 = a^2 - b^2 = \gamma - 2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

دایره به قطر فاصله کانونی، دایره به شعاع c است. پس مساحت این دایره برابر

$$\pi c^2 = 5\pi$$

۵۷۷ (۴) ابتدا تساوی داده شده در صورت سؤال را ساده می کنیم:

$$\frac{3MB + 2MA}{\Delta - MA} = 1 \Rightarrow 3MB + 2MA = \Delta - MA$$

$$3MB + 3MA = \Delta \Rightarrow MB + MA = \frac{\Delta}{3}$$

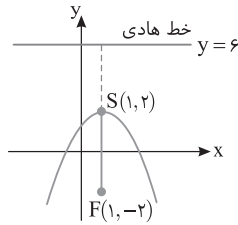
مجموع فاصله های نقطه M از دو نقطه A و B مقدار ثابت $\frac{\Delta}{3}$ است ولی این

مقدار از فاصله دو نقطه A و B کوچک تر است. پس مکان هندسی M تهی است.

۵۷۸ (۱) بنابر فرض های سؤال $2a = 10$ و $2b = 4\sqrt{2}$ ، پس $a = 5$ و

$$b = 2\sqrt{2}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - (2\sqrt{2})^2 = 17 \Rightarrow c = \sqrt{17}$$



۵۸۵ ۲ برای اینکه حرف a در معادله این سهمی با فاصله کانونی سهمی اشتباه گرفته نشود در اینجا به جای a از حرف m استفاده می‌کنیم. پس معادله سهمی $y^2 - 6y + 2x + m = 0$ است. معادله سهمی را استاندارد کرده تا خط هادی آن به دست آید:

$$y^2 - 6y + 2x + m = 0 \Rightarrow (y-3)^2 - 9 + 2x + m = 0$$

$$(y-3)^2 = -2x - m + 9 \Rightarrow (y-3)^2 = -2\left(x + \frac{m-9}{2}\right)$$

پس دهانه این سهمی رو به چپ و رأس آن $S(h, k) = \left(-\frac{m}{2} + \frac{9}{2}, 3\right)$ است.

همچنین $4a = 2$ ، پس $a = \frac{1}{2}$. خط هادی این سهمی به صورت زیر است:

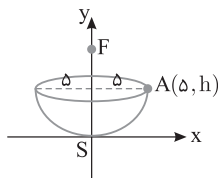
$$d: x = h + a \Rightarrow x = -\frac{m}{2} + \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \xrightarrow{\left(\frac{3}{2}, 3\right) \in d} \frac{3}{2} = -\frac{m}{2} - \frac{m}{2}$$

$$\frac{m}{2} = \frac{y}{2} \Rightarrow m = y$$

۵۸۶ ۲ مطابق شکل زیر، دیش را روی دستگاه مختصات قرار می‌دهیم. اگر h گودی این دیش باشد، آن‌گاه نقطه $A(\Delta, h)$ روی آن قرار خواهد داشت. در ضمن بنابر فرض $a = SF = 6$. از روبه‌رو این دیش یک سهمی با دهانه رو به بالا دیده می‌شود. پس معادله آن به صورت زیر است:

$$x^2 = 4ay \xrightarrow{a=6} x^2 = 24y \xrightarrow{A \in \text{سهمی}} \rightarrow$$

$$2\Delta = 24h \Rightarrow h = \frac{2\Delta}{24}$$



۵۸۷ ۴ بنابر تعریف سهمی این دایره‌ها بر خط هادی سهمی مماس هستند.

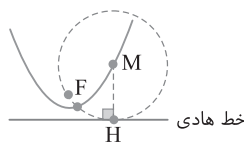
$$x^2 - 2x - 2 = 3y \Rightarrow (x-1)^2 - 1 - 2 = 3y$$

$$(x-1)^2 = 3y + 3 \Rightarrow (x-1)^2 = 3(y+1)$$

پس دهانه این سهمی رو به بالا و $S(h, k) = (1, -1)$ است. همچنین

$4a = 3$. در نتیجه $a = \frac{3}{4}$. معادله خط هادی این سهمی به صورت زیر است:

$$y = k - a \Rightarrow y = -1 - \frac{3}{4} \Rightarrow y = -\frac{7}{4} \Rightarrow 4y + 7 = 0$$

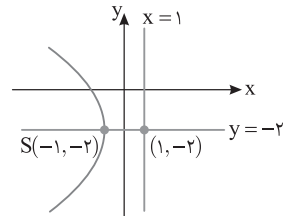


۵۸۱ ۲ با توجه به فرض‌های سؤال خط $y = -2$ محور تقارن و خط

$x = 1$ خط هادی این سهمی است. چون رأس سهمی روی محور تقارن قرار دارد و طول آن -1 است، پس رأس سهمی $S(h, k) = (-1, -2)$ است. در ضمن فاصله رأس S تا خط هادی برابر a است، پس $a = 2$. از طرف دیگر از موقعیت خط هادی و رأس نسبت به هم نتیجه می‌گیریم دهانه این سهمی رو به چپ است، پس معادله آن به صورت زیر است:

$$(y-k)^2 = -4a(x-h) \Rightarrow (y+2)^2 = -8(x+1)$$

در بین نقاط داده شده فقط مختصات نقطه $(-3, -6)$ در این سهمی صدق می‌کنند.



۵۸۲ ۱ در معادله سهمی داده شده به جای حرف a از حرف m استفاده

می‌کنیم تا a با فاصله کانونی سهمی اشتباه گرفته نشود. پس معادله سهمی $2y^2 + 4y - mx = 0$ است. در ضمن کمترین فاصله نقاط سهمی از کانون آن برابر فاصله کانونی یا همان a است. در سهمی $Ay^2 + By + Cx + D = 0$ عدد a را از برابری زیر می‌توان به دست آورد:

$$a = \frac{|C|}{|4A|} \xrightarrow{a=\frac{3}{2}} \frac{3}{2} = \frac{|-m|}{4 \times 2} \Rightarrow |m| = 3 \Rightarrow m = \pm 3$$

۵۸۳ ۳ اگر S رأس d خط هادی این سهمی باشد، آن‌گاه دایره به قطر SH دایره مورد نظر است. معادله سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 \Rightarrow 2y = x^2 - 6x + 4 \Rightarrow 2y = (x-3)^2 - 9 + 4$$

$$(x-3)^2 = 2y + 5 \Rightarrow (x-3)^2 = 2\left(y + \frac{5}{2}\right)$$

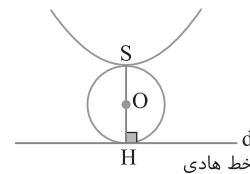
پس دهانه این سهمی رو به بالا و $S(h, k) = \left(3, -\frac{5}{2}\right)$ رأس آن است.

همچنین $4a = 2$ ، پس $a = \frac{1}{2}$. در نتیجه خط $x = 3$ محور این سهمی و خط

$y = k - a = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = -3$ خط هادی آن است. نقطه تلاقی این دو خط نقطه

H است. پس $H(3, -3)$ ، بنابراین

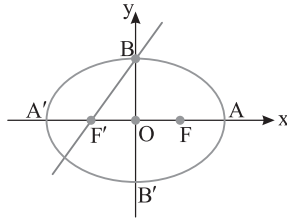
$$O = \frac{S+H}{2} = \left(3, -\frac{11}{4}\right), \quad r = \frac{SH}{2} = \frac{a}{2} = \frac{1}{4}$$



۵۸۴ ۲ با توجه به موقعیت رأس و کانون این سهمی نسبت به هم نتیجه

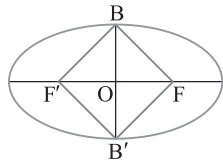
می‌گیریم دهانه این سهمی رو به پایین است و $a = FS = 4$. از طرف دیگر، اگر $S(h, k)$ رأس این سهمی باشد، آن‌گاه $y = k + a$ خط هادی این سهمی

است، در نتیجه $y = 2 + 4 = 6$ معادله خط هادی این سهمی است.



۵۹۲ در مربع فطرها مساوی اند. چون چهارضلعی BFB'F' مربع است، پس $BB' = FF'$ یعنی $2b = 2c$ پس $b = c$ در نتیجه $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + b^2 = 2b^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}b$

بنابراین $\frac{\text{قطر بزرگ}}{\text{قطر کوچک}} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}b}{b} = \sqrt{2}$



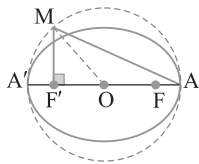
۵۹۳ نقطه $M(1, 1)$ روی بیضی با کانون‌های $F(2, 5)$ و $F'(2, -3)$ قرار دارد. پس بنابر تعریف بیضی،

$$MF + MF' = 2a \Rightarrow \sqrt{(1-2)^2 + (1-5)^2} + \sqrt{(1-2)^2 + (1+3)^2} = 2a$$

$$\sqrt{64+16} + \sqrt{64+16} = 2a \Rightarrow 2\sqrt{80} = 2a \Rightarrow a = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$2c = FF' = \sqrt{(2-2)^2 + (5+3)^2} = 8 \Rightarrow c = 4$$

بنابراین $\frac{c}{a} = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ از خروج از مرکز.



۵۹۴ می‌دانیم در بیضی $AA' = 2a$

پس $a = 6$ در ضمن $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$ پس $c = 4$. همچنین اگر از مرکز O به M وصل کنیم، آن‌گاه $OM = a$ و $OF' = c$ پس

$$\Delta MF'O : MF'^2 = OM^2 - OF'^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$$

بنابراین

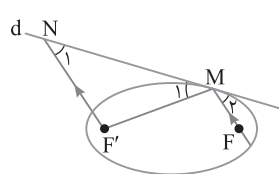
$$\Delta AMF' : AM^2 = MF'^2 + AF'^2 \xrightarrow{AF' = a+c} AM^2 = 20 + (a+c)^2$$

$$AM^2 = 20 + (6+4)^2 = 120 \Rightarrow AM = 2\sqrt{30}$$

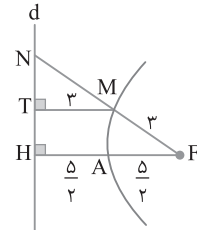
۵۹۵ شکل سؤال به صورت زیر است. از ویژگی بازتابندگی بیضی نتیجه می‌گیریم $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$. از طرف دیگر،

$$\left. \begin{matrix} NF' \parallel MF \\ \text{مورب } d \end{matrix} \right\} \Rightarrow \hat{N}_1 = \hat{M}_2 \xrightarrow{\hat{M}_1 = \hat{M}_2} \hat{N}_1 = \hat{M}_1$$

پس مثلث MNF' متساوی‌الساقین است. ولی اگر این مثلث قائم‌الزاویه باشد، یعنی $\hat{F}' = 90^\circ$ ، آن‌گاه $\hat{F}'MF = 90^\circ$. این نتیجه در حالت کلی لزومی ندارد درست باشد.



همچنین اگر این مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، یعنی $\hat{F}'MF = 60^\circ$ ، آن‌گاه $\hat{F}' = 60^\circ$. این نتیجه هم در حالت کلی لزومی ندارد درست باشد.



۵۸۸ MT و FH بر خط d عمودند. پس موازی‌اند. در ضمن نقاط M و A روی این سهمی هستند. پس $MT = MF = 3$ و $FA = AH$. از طرف دیگر کوتاه‌ترین فاصله نقاط سهمی از خط هادی آن برابر a و در شکل برابر AH است. بنابراین $FA = AH = \frac{5}{2}$ در نتیجه

$$\Delta NHF : MT \parallel FH \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{MN}{NF} = \frac{MT}{FH} \Rightarrow \frac{MN}{NF} = \frac{3}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل درمخرج}} \frac{MN}{NF - MN} = \frac{3}{5-3} \Rightarrow \frac{MN}{MF} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{MN}{3} = \frac{3}{2} \Rightarrow MN = \frac{9}{2} = 4.5$$

۵۸۹ بنابر ویژگی بازتابندگی سهمی هر پرتو نوری که موازی با محور سهمی بر آن تابیده شود بازتاب آن از کانون سهمی می‌گذرد. پس نقطه مورد نظر سؤال کانون این سهمی است.

$$y^2 + 2y + 3x - 2 = 0 \Rightarrow (y+1)^2 - 1 + 3x - 2 = 0$$

$$(y+1)^2 = -3x + 3 \Rightarrow (y+1)^2 = -3(x-1)$$

پس دهانه این سهمی رو به چپ و نقطه $S(h, k) = (1, -1)$ رأس آن است. همچنین $4a = 3$ پس $a = \frac{3}{4}$. کانون این سهمی به صورت زیر است:

$$F(h-a, k) = (1 - \frac{3}{4}, -1) = (\frac{1}{4}, -1)$$

۵۹۰ معادله سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم

$$2x^2 - 4y + 4x - 8 = 0 \Rightarrow 2(x^2 + 2x) = 4y + 8$$

$$2((x+1)^2 - 1) = 4y + 8 \Rightarrow 2(x+1)^2 = 4y + 10$$

$$(x+1)^2 = 2(y + \frac{5}{2})$$

پس رأس این سهمی $S(h, k) = (-1, -\frac{5}{2})$ و دهانه آن رو به بالا است.

$$a = \frac{1}{2} \text{ پس } 4a = 2$$

پس کانون این سهمی $F(h, k+a) = (-1, -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}) = (-1, -2)$ است. اکنون

وضعیت نقطه $F(-1, -2)$ را نسبت به دایره $C: x^2 + y^2 - x + 2y - 1 = 0$ بررسی می‌کنیم. برای این کار مختصات نقطه F را در معادله $C(x, y) = x^2 + y^2 - x + 2y - 1$ قرار می‌دهیم:

$$C(-1, -2) = 1 + 4 + 1 - 4 - 1 = 1 > 0$$

پس F بیرون این دایره است. بنابراین از نقطه F دو مماس بر این دایره رسم می‌شود.

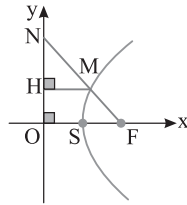
۵۹۱ نقاط تلاقی خط $2y - 3x = 6$ را با محورهای مختصات به دست می‌آوریم تا کانون F' و رأس B را پیدا کنیم.

$$\begin{cases} 2y - 3x = 6 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2 \Rightarrow F'(-2, 0)$$

$$\begin{cases} 2y - 3x = 6 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 3 \Rightarrow B(0, 3)$$

بنابراین $a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 4 = 13$ پس $b = OB = 3$ و $c = OF' = 2$. در ضمن $FB = a$. پس مساحت دایره به قطر FB برابر است با

$$\pi \left(\frac{FB}{2} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{4} = \frac{13\pi}{4}$$



۶۰۰ (۳) بنابر خاصیت بازتابندگی سهمی هر پرتو نوری که موازی با محور سهمی بر سهمی، بتابد بازتابش از کانون سهمی می‌گذرد. پس در این سؤال نقطه $(1, -3)$ کانون سهمی است. بنابراین لازم است کانون این سهمی را پیدا کنیم:

$$x^2 - 2x + my + 9 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + my + 9 = 0$$

$$(x-1)^2 = -my - 8 \Rightarrow (x-1)^2 = -m\left(y + \frac{8}{m}\right)$$

پس دهانه این سهمی رو به پایین است، چون با فرض $m > 0$ مقدار $-m$ منفی است. همچنین رأس این سهمی $S(h, k) = (1, -\frac{8}{m})$ است و $4a = m$ ، پس

$$a = \frac{m}{4}. \text{ مختصات کانون این سهمی به صورت زیر است:}$$

$$F(h, k-a) = (1, -\frac{8}{m} - \frac{m}{4}) = (1, -3)$$

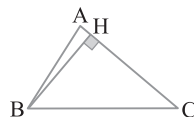
بنابراین

$$-\frac{8}{m} - \frac{m}{4} = -3 \Rightarrow m^2 + 32 = 12m \Rightarrow m^2 - 12m + 32 = 0$$

$$(m-4)(m-8) = 0 \Rightarrow m = 4, m = 8$$

$m = 8$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۶۰۱ (۳) طول ارتفاع وارد بر ضلع AC معلوم است. پس رأس B از خط AC به فاصله ثابتی قرار دارد. بنابراین مکان هندسی رأس B دو خط موازی AC به فاصله BH از آن است.



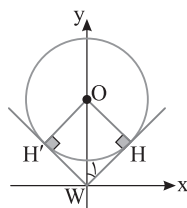
۶۰۲ (۳) مرکز دایره‌ای که بر نیمسازهای ناحیه‌های اول و دوم مماس است روی محور Y قرار دارد، چون هر نقطه روی محور Y از این دو نیمساز به یک فاصله است. از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه OWH (W مبدأ مختصات است) زاویه W_1 برابر 45° است، پس مثلث OWH

متساوی‌الساقین نیز هست. در نتیجه $WH = OH = 3\sqrt{2}$. بنابراین

$$\triangle OWH : OW^2 = OH^2 + WH^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 36$$

$$OW = 6$$

پس معادله دایره مورد نظر $x^2 + (y-6)^2 = 18$ یا $x^2 + y^2 - 12y + 18 = 0$ است.



۵۹۶ (۴) رأس سهمی نزدیک‌ترین نقطه سهمی تا کانون آن است. بنابراین باید مقدار ثابت a را به دست آوریم

$$a = \left| \frac{\text{ضرب متغیری که عبارت نسبت به آن درجه ۱ است}}{\text{ضرب متغیر درجه ۲}} \right|$$

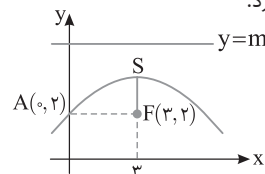
$$= \left| \frac{5}{4 \times (-7)} \right| = \frac{5}{28}$$

۵۹۷ (۴) راه حل اول شکل تقریبی این سهمی به صورت زیر است. فرض می‌کنیم خط $y = m$ خط هادی این سهمی باشد. می‌دانیم فاصله هر نقطه روی سهمی از کانون و خط هادی به یک اندازه است. پس نقطه $A(0, 2)$ که روی سهمی قرار دارد، این ویژگی را دارد:

$$\sqrt{(0-3)^2 + (2-2)^2} = |2-m| \Rightarrow 3 = |2-m| \Rightarrow \begin{cases} 2-m=3 \Rightarrow m=-1 \\ 2-m=-3 \Rightarrow m=5 \end{cases}$$

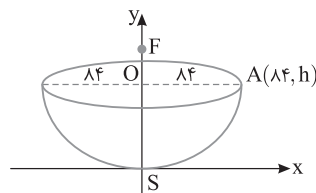
$m = -1$ قابل قبول نیست زیرا خط $y = -1$ سهمی را قطع می‌کند، پس نمی‌تواند خط هادی باشد. بنابراین $y = 5$ خط هادی است.

راه حل دوم فاصله $A(0, 2)$ تا کانون $F(3, 2)$ برابر ۳ است. پس گزینه‌ای درست است که بالاتر از A باشد و فاصله A تا آن برابر ۳ باشد که فقط گزینه (۴) این ویژگی‌ها را دارد.



۵۹۸ (۲) آینه سهموی این تلسکوپ انعکاسی از روبه‌رو یک سهمی با رأس $S(0, 0)$ و دهانه رو به بالا دیده می‌شود. معادله این سهمی $x^2 = 4ay$ است. بنابر فرض، فاصله رأس تا کانون ۷۲ است، پس $a = ۷۲$. بنابراین معادله سهمی به صورت $x^2 = 4 \times ۷۲y$ است. فرض می‌کنیم فاصله رأس S تا مرکز قاعده این آینه سهموی یعنی O برابر h باشد. در این صورت نقطه $A(۸۴, h)$ روی این سهمی است.

$$A \in \text{سهمی} \Rightarrow ۸۴^2 = 4 \times ۷۲ \times h \Rightarrow h = \frac{۸۴ \times ۸۴}{4 \times ۷۲} = ۲۴/۵$$



۵۹۹ (۳) در سهمی $y^2 = ۸(x-2)$ رأس، نقطه $S(2, 0)$ است. همچنین $4a = ۸$ ، بنابراین $a = ۲$. پس $OF = 2a = 4$. در شکل MH موازی OF است. پس

$$\triangle NOF : MH \parallel OF \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{NH}{OH} = \frac{MN}{MF}$$

$$\xrightarrow{\text{چون } M \text{ روی سهمی است}} \frac{MF}{OH} = \frac{MH}{OH} \Rightarrow \frac{NH}{OH} = \frac{MN}{MH} \quad (۱)$$

$$\triangle NOF : MH \parallel OF \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{MN}{FN} = \frac{MH}{OF}$$

$$\xrightarrow{\text{ویژگی‌های تناسب}} \frac{MN}{MH} = \frac{FN}{OF} \quad (۲)$$

از برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{NH}{OH} = \frac{FN}{OF} \Rightarrow OF = \frac{OH \times FN}{NH} \xrightarrow{OF=4} \frac{OH \times FN}{NH} = 4$$

۶۰۶ ۱) دو سر قطر بزرگ این بیضی عرض برابر دارند، پس خط AA'

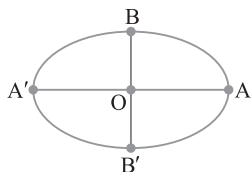
موازی محور x است. بنابراین محدوده تغییرات y بین عرض نقاط B و B' (دو سر قطر کوچک این بیضی) است. اکنون توجه کنید که

$$2a = AA' \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{c}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$$

مرکز بیضی وسط قطر بزرگ آن است، بنابراین $O = \frac{A+A'}{2} = (2, 1)$. از

طرف دیگر، $b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 12 = 4$ ، در نتیجه $b = 2$. نقاط B و B' از مرکز O در راستای محور y به اندازه $b = 2$ واحد بالاتر و پایین‌تر هستند.

پس $B(2, 1+2) = (2, 3)$ و $B'(2, 1-2) = (2, -1)$. بنابراین تغییرات y در این بیضی در فاصله $[-1, 3]$ است.



۶۰۷ ۳) بنابر فرض‌های سؤال شکل زیر را خواهیم داشت. طول پاره‌خط

PA' را می‌خواهیم. از M به کانون دیگر بیضی یعنی F' وصل می‌کنیم و از F' به موازات MF خطی رسم می‌کنیم تا خط مماس را در نقطه N قطع کند.

توجه کنید که

$$\begin{cases} 2a = 12 \Rightarrow a = 6 \\ 2c = 6 \Rightarrow c = 3 \end{cases} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow b = 3\sqrt{3}$$

$$MF = \frac{b^2}{a} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

از طرف دیگر بنابر خاصیت بازتابندگی بیضی $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ و بنابر قضیه خطوط

موازی و مورب $\hat{M}_1 = \hat{N}$ ، پس $\hat{M}_2 = \hat{N}$. در نتیجه $MF' = NF'$. چون M روی بیضی است،

$$MF + MF' = 2a \Rightarrow \frac{9}{2} + MF' = 12 \Rightarrow MF' = \frac{15}{2} \Rightarrow NF' = \frac{15}{2}$$

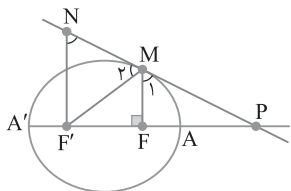
از تعمیم قضیه تالس نتیجه می‌گیریم

$$\triangle PNF' : MF' \parallel NF' \Rightarrow \frac{PF}{PF'} = \frac{MF}{NF'} \Rightarrow \frac{PF}{PF'} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{PF}{PF' - PF} = \frac{3}{5-3} \Rightarrow \frac{PF}{FF'} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{PF}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow PF = 9$$

$$PF = 9 \xrightarrow{FA = a - c = 3} PA + 3 = 9 \Rightarrow PA = 6$$

بنابراین $PA' = PA + 2a = 6 + 12 = 18$.



۶۰۳ ۱) ابتدا وضعیت نسبی دو دایره را مشخص می‌کنیم:

$$C: x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$$

$$\begin{cases} O(1, -3) \\ r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{4 + 36 - 36}}{2} = 1 \end{cases}$$

$$C': x^2 + y^2 - 8x - 2y + 13 = 0$$

$$\begin{cases} O'(4, 1) \\ r' = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{64 + 4 - 52}}{2} = 2 \end{cases}$$

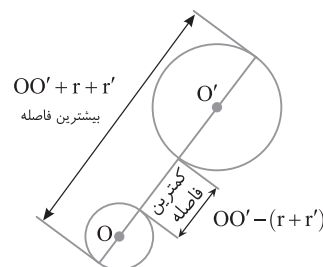
$$OO' = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

چون $OO' > r + r'$ پس دو دایره متقاطع‌اند. توجه کنید که بیشترین و

کمترین فاصله بین نقاط روی دو دایره متقاطع برابرند با

$$OO' - (r + r') = 2 \text{ : کمترین فاصله, } OO' + r + r' = 8 \text{ : بیشترین فاصله}$$

بنابراین باید $2 \leq MN \leq 8$. در بین گزینه‌ها، فقط گزینه (۱) در این نابرابری‌ها صدق نمی‌کند.



۶۰۴ ۳) چون شعاع دایره در نقطه تماس، بر خط مماس عمود است، با

به‌دست آوردن مختصات مرکز O در دایره و شیب OA ، شیب خط مماس را به‌دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4 \Rightarrow O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (2, -1)$$

پس $m_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{-1 + 1}{5 - 2} = 0$. بنابراین شیب خط مماس بر دایره در

نقطه A تعریف نشده است، پس معادله خط مماس به صورت $x = 5$ است.

۶۰۵ ۲) در مثلث قائم‌الزاویه OBF ، بنابر روابط مثلثاتی،

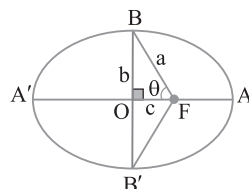
$$\tan \theta = \frac{OB}{OF} = \frac{b}{c} \text{ توجه کنید که}$$

$$\tan(\hat{BFB}') = \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \times \frac{b}{c}}{1 - \frac{b^2}{c^2}} = \frac{2bc}{c^2 - b^2} \quad (1)$$

از طرف دیگر $\frac{c}{a} = \frac{1}{3}$ و $a^2 = b^2 + c^2$ ، در نتیجه $(3c)^2 = b^2 + c^2$ ، با

ساده کردن این برابری به‌دست می‌آید $b = 2\sqrt{2}c$. اکنون می‌توان برابری (۱)

$$\text{را به شکل زیر نوشت: } \tan(\hat{BFB}') = \frac{2bc}{c^2 - b^2} = \frac{4\sqrt{2}c^2}{c^2 - 8c^2} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$



۶۱۲ ۳ از معادله دایره به دست می‌آید: $O(-1, 1)$ و $r = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

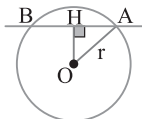
به کمک دستور فاصله نقطه از خط به دست می‌آید $OH = \frac{|-1+1-1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

اکنون در مثلث قائم الزاویه $OA H$ ، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{3 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

می‌دانیم عمودی که از مرکز دایره بر یک وتر رسم می‌شود، آن وتر را نصف می‌کند، پس

$$AB = 2AH = 2\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = \sqrt{10}$$

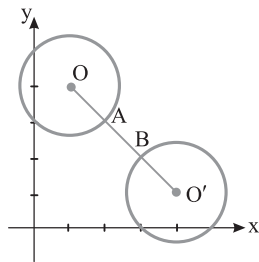


۶۱۳ ۲ ابتدا با پیدا کردن مرکزهای دو دایره و شعاع‌های آن‌ها، وضعیت

نسبی دو دایره را بررسی می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 15 = 0 \Rightarrow O(1, 4), \quad r = \frac{\sqrt{4+64-60}}{2} = \sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 15 = 0 \Rightarrow O'(4, 1), \quad r' = \frac{\sqrt{64+4-60}}{2} = \sqrt{2}$$



چون $OO' > r + r'$ و $OO' = 3\sqrt{2}$

مطابق شکل مقابل، دو دایره متخارج

هستند و قطر کوچک‌ترین دایره

مماس بر آن‌ها است:

$$AB = OO' - (r + r') = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

پس شعاع دایره مماس مساوی $\frac{AB}{2}$ ، یعنی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

۶۱۴ ۴ با توجه به مختصات $A(-2, 1)$ دایره مورد نظر در ربع دوم قرار

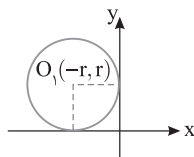
دارد. مرکز دایره‌ای به شعاع r که در ربع دوم بر هر دو محور مختصات مماس است

به صورت $O_1(-r, r)$ است. بنابراین معادله این دایره به شکل

$(x+r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ است. مختصات A در معادله دایره صدق می‌کنند:

$$(-2+r)^2 + (1-r)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 - 4r + 4 + r^2 - 2r + 1 = r^2 \Rightarrow r^2 - 6r + 5 = 0$$

در نتیجه $r=1$ یا $r=5$.



۶۱۵ ۳ قطر BB' برابر $2b$ است، پس مساحت دایره به قطر BB' برابر

πb^2 است، یعنی کافی است b را به دست آوریم. می‌دانیم در بیضی فاصله کانون

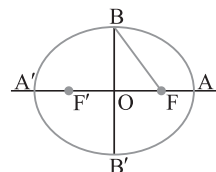
تا نقطه B برابر a است، یعنی $FB=a$. بنابر فرض، چون $FB=5$ ، پس $a=5$ ،

چون $AF'=a+c$ ، پس $a+c=8$ ، چون $a=5$ ، پس $c=3$. اکنون از تساوی

$a^2 = b^2 + c^2$ به دست می‌آید

$5^2 = b^2 + 3^2$ ، یعنی $b=4$. در نتیجه

BB' به قطر BB' مساحت دایره $= \pi b^2 = 16\pi$



۶۰۸ ۴ ابتدا معادله سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم

$$y^2 + 4y + 2x - 1 = 0 \Rightarrow (y+2)^2 - 4 + 2x - 1 = 0$$

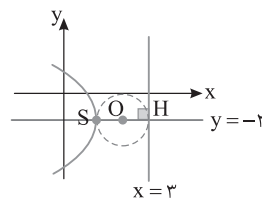
$$(y+2)^2 = -2x + 5 \Rightarrow (y+2)^2 = -2\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

دهانه این سهمی رو به چپ و رأس آن $S(h, k) = (\frac{5}{2}, -2)$ است. همچنین

$4a=2$ ، پس $a = \frac{1}{2}$. بنابراین معادله خط هادی این سهمی به صورت زیر است:

$$x = h + a = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3$$

پس اگر عمود SH را بر خط هادی رسم کنیم، دایره به قطر SH جواب سؤال است. با توجه به شکل H نقطه $(3, -2)$ است پس مختصات O مرکز دایره



$$O = \frac{S+H}{2} = (\frac{11}{4}, -2) \text{ و شعاع}$$

دایره مساوی $\frac{SH}{2} = \frac{a}{2} = \frac{1}{4}$ است.

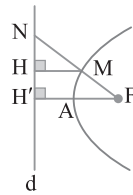
پس معادله دایره

$$\left(x - \frac{11}{4}\right)^2 + (y+2)^2 = \frac{1}{16}$$

۶۰۹ ۳ فاصله کانونی دیش از برابری زیر به دست می‌آید:

$$\frac{(\text{قطر دهانه دیش})^2}{16 \times (\text{عمق دیش})} = \text{فاصله کانونی دیش}$$

$$\text{در نتیجه } \frac{(64)^2}{16 \times 32} = 8 = \text{فاصله کانونی دیش.}$$



۶۱۰ ۲ هر نقطه سهمی از کانون و خط هادی آن

به یک فاصله است، پس $MH = MF = \frac{9}{2}$. همچنین

$AF = AH'$ ، پس $FH' = 2AH' = \frac{15}{2}$. در ضمن

دو پاره خط MH و FH' بر خط d عمودند پس

موازی‌اند. در نتیجه

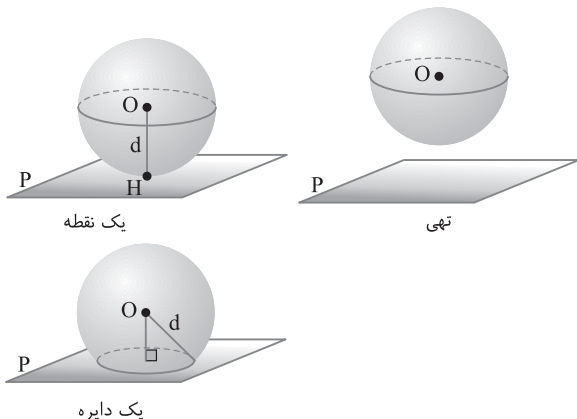
$$\triangle NH'F : MH \parallel FH' \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{MH}{FH'} = \frac{MN}{NF}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{MN}{MN + \frac{9}{2}} \Rightarrow 3MN + \frac{27}{2} = 5MN \Rightarrow 2MN = \frac{27}{2} \Rightarrow MN = \frac{27}{4}$$

۶۱۱ ۴ مکان هندسی نقاطی از فضا که از نقطه O به فاصله d هستند،

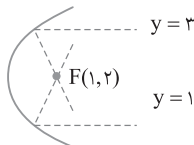
کره‌ای به مرکز O و شعاع d است. محل تلاقی صفحه P با این کره جواب

است. این محل تلاقی می‌تواند دایره، نقطه یا تهی باشد (شکل‌های زیر را ببینید).



۶۲۰ (۱) معادله سهمی را به صورت استاندارد در می آوریم:

$y^2 - 4y = 8x + 4 \Rightarrow (y-2)^2 - 4 = 8x + 4 \Rightarrow (y-2)^2 = 8(x+1)$
پس دهانه این سهمی رو به راست و نقطه $S(h, k) = (-1, 2)$ رأس آن است.
همچنین $a=2$ ، بنابراین کانون این سهمی $F(h+a, k) = (1, 2)$ است. توجه کنید که چون هر دو شعاع نور موازی محور سهمی هستند، پس بازتاب آن‌ها از کانون سهمی می‌گذرد. در نتیجه محل برخورد بازتاب‌ها، کانون سهمی است.



۶۲۱ (۴) ناحیه رنگی درون و روی دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۲ و پایین و روی خط گذرنده از نقاط $A(2, 0)$ و $B(0, -2)$ است.

$$x^2 + y^2 \leq 4 \text{ درون و روی دایره} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \text{ معادله دایره}$$

$$AB \text{ خط } y=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x-2 \Rightarrow x-y=2$$

پایین خط $x-y=2$ در رابطه $x-y \geq 2$ صدق می‌کند. بنابراین رابطه ناحیه

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x-y \geq 2 \end{cases} \text{ رنگی به صورت است.}$$

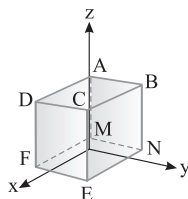
۶۲۲ (۴) وجه‌های این مکعب مستطیل موازی با صفحه‌های مختصات هستند. نقطه $C(3, 3, 2)$ رأس C است و این نقطه روی سه وجه DCEF، BCEN و ABCD قرار دارد. پس قابل قبول نیست. نقطه $(3, -1, 1)$ روی

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ -3 \leq z \leq 2 \end{cases} \text{ یال DF قرار دارد، زیرا یال DF به معادله } y=-1 \text{ است. پس این نقطه}$$

روی دو وجه ADFM و DCEF است، پس قابل قبول نیست. در ضمن نقطه $(0, 0, 0)$ درون این مکعب مستطیل قرار دارد، زیرا تمام نقاط درون این مکعب مستطیل در معادلات $-2 < x < 3$ ، $-1 < y < 3$ ، $-3 < z < 2$ صدق می‌کنند.

ولی نقطه $(3, 2, -1)$ فقط روی وجه DCEF قرار دارد زیرا معادله این وجه

$$\begin{cases} x=3 \\ -1 \leq y \leq 3 \\ -3 \leq z \leq 2 \end{cases} \text{ به صورت است.}$$



۶۲۳ (۲) نقطه A روی محور y قرار دارد، پس مختصات A به صورت

$$\begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=-3\sqrt{2} \end{cases} \text{ است، پس مختصات B } (0, y, 0) \text{ است و نقطه B روی خط}$$

به صورت $(2\sqrt{2}, -3\sqrt{2}, z)$ است. بنابراین

$$|AB| = \sqrt{(2\sqrt{2}-0)^2 + (y+3\sqrt{2})^2 + (z-0)^2} = \sqrt{8 + (y+3\sqrt{2})^2 + z^2}$$

چون کمترین مقدار عبارت‌های $(y+3\sqrt{2})^2$ و z^2 برابر صفر است، پس

کمترین طول پاره خط AB برابر $\sqrt{8}$ یا $2\sqrt{2}$ است.

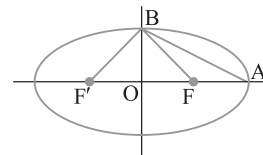
۶۱۶ (۲) در مثلث $F'BA$ ارتفاع $OB=b$ و قاعده $F'A=a+c$

است. در مثلث OBF ارتفاع $OB=b$ و قاعده $OF=c$ است. بنابراین فرض،

$$S_{F'BA} = \Delta S_{OBF} \Rightarrow \frac{1}{2} OB \times F'A = \Delta \left(\frac{1}{2} OB \times OF \right)$$

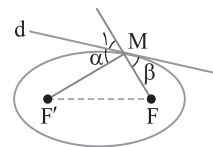
$$F'A = \Delta OF \Rightarrow a+c = \Delta c \Rightarrow a = \Delta c$$

بنابراین خروج از مرکز بیضی برابر است با $e = \frac{c}{a} = \frac{c}{\Delta c} = \frac{1}{\Delta}$



۶۱۷ (۳) نقطه M روی بیضی قرار دارد، پس $MF + MF' = 2a$. سایر

نقاط خط d بیرون این بیضی هستند، بنابراین مجموع فاصله‌های آن‌ها از کانون‌های F و F' بزرگ‌تر از 2a است. پس از بین همه نقاط روی خط d مجموع فاصله‌های نقطه M از دو کانون F و F' کمترین مقدار را دارد. از طرف دیگر، بنابر ویژگی بازتابندگی بیضی، دو زاویه α و β مساوی‌اند. در ضمن $\hat{M}_1 = \alpha$ ، پس $\hat{M}_1 = \beta$ ، یعنی خط d نیمساز خارجی مثلث MFF' است. پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) درست هستند و در حالت کلی لزومی ندارد زاویه FMF' قائمه باشد.



۶۱۸ (۲) معادله سهمی را استاندارد می‌کنیم، معادله خط هادی را به دست

می‌آوریم و با $x = -\frac{y}{2}$ مقایسه می‌کنیم. در ضمن در معادله سهمی به جای

متغیر a از استفاده می‌کنیم تا با فاصله کانونی سهمی اشتباه نشود:

$$y^2 = my + 2x + 5 \Rightarrow y^2 - my = 2x + 5 \Rightarrow \left(y - \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} = 2x + 5$$

$$\left(y - \frac{m}{2}\right)^2 = 2x + 5 + \frac{m^2}{4} \Rightarrow \left(y - \frac{m}{2}\right)^2 = 2\left(x + \frac{5}{2} + \frac{m^2}{8}\right)$$

پس دهانه این سهمی رو به راست و رأس آن $S(h, k) = \left(-\frac{5}{2} - \frac{m^2}{8}, \frac{m}{2}\right)$

است. همچنین $4a=2$ ، در نتیجه $a = \frac{1}{2}$. پس خط هادی این سهمی به

صورت زیر است:

$$x = h - a \Rightarrow x = -\frac{5}{2} - \frac{m^2}{8} - \frac{1}{2} \xrightarrow{x = -\frac{y}{2}} -\frac{y}{2} = -\frac{5}{2} - \frac{m^2}{8} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{m^2}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

بنابراین $a = \pm 2$.

۶۱۹ (۳) از معادله سهمی نتیجه می‌شود رأس آن $S(h, k) = (-m, -2)$

است و $a=2$. همچنین دهانه این سهمی رو به پایین است. در این سهمی

کانون $F(h, k-a) = (-m, -4)$ است. مختصات F در معادله $3x+y=2$

صدق می‌کنند:

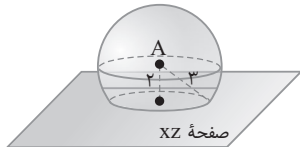
$$3(-m) - 4 = 2 \Rightarrow m = -2$$

۶۲۹ ۴ راه حل اول هر نقطه روی صفحه XZ به صورت $M(x, 0, z)$ است. طبق فرض تست، $|AM|=3$ ، بنابراین

$$\sqrt{(x-1)^2 + 4 + (z+1)^2} = 3 \Rightarrow (x-1)^2 + (z+1)^2 = 5 \quad (1)$$

پس نقاطی از صفحه XZ که در رابطه (۱) صدق می‌کنند، جواب این تست هستند. در نتیجه مسئله نامتناهی جواب دارد.

راه حل دوم مکان هندسی نقاطی از فضا که از A به فاصله ۳ هستند کره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ است. فاصله نقطه A از صفحه XZ برابر $|y|$ یعنی ۲ است. پس کره‌ای به مرکز A و شعاع ۳، صفحه XZ را قطع می‌کند و محل تقاطع یک دایره است، پس مسئله نامتناهی جواب دارد.



۶۳۰ ۳ نقطه M وسط پاره خط BC است. پس

$$M = \frac{B+C}{2} = \left(\frac{2m+1-1}{2}, \frac{3+5}{2}, \frac{m+m+4}{2} \right) = (m, 4, m+2)$$

چون $|AM|=2$ ، پس

$$\sqrt{(m+1)^2 + (4-2)^2 + (m+2-1)^2} = 2 \Rightarrow \sqrt{2(m+1)^2 + 4} = 2$$

$$2(m+1)^2 + 4 = 4 \Rightarrow (m+1)^2 = 0 \Rightarrow m = -1$$

پس M نقطه $(-1, 4, 1)$ است. در نتیجه مجموع مختصات M برابر $-1+4+1=4$ است.

۶۳۱ ۴ می‌دانیم $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$. پس

$$\overrightarrow{AM} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = -\frac{3}{4}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{7}{4}\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OM} = -\frac{3}{4}(-1, -1, 3) + \frac{7}{4}(2, -1, 0) = \left(\frac{1}{4}, -1, -\frac{9}{4} \right)$$

پس مختص عرض OM برابر -1 است.

۶۳۲ ۳ بردار $2\vec{a} - \vec{b}$ برابر $2(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) - (\vec{j} + m\vec{k})$ یا $2\vec{i} + \vec{j} + (4-m)\vec{k}$ است. بنابراین

$$|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{4+1+(4-m)^2} = \sqrt{5+16+m^2-8m} = \sqrt{m^2-8m+21}$$

بنابر فرض سؤال،

$$\frac{|2\vec{a} - \vec{b}| + 12}{2|\vec{a}| + |\vec{b}|} = \sqrt{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{m^2-8m+21} + 12}{2\sqrt{1+1+4} + \sqrt{1+m^2}} = \sqrt{6}$$

$$\sqrt{m^2-8m+21} + 12 = 12 + \sqrt{6}\sqrt{1+m^2}$$

$$m^2 - 8m + 21 = 6 + 6m^2 \Rightarrow 5m^2 + 8m - 15 = 0$$

مجموع مقادیر m در معادله به دست آمده برابر $-\frac{8}{5}$ است.

۶۳۳ ۲ در صورتی که سه نقطه A ، B و C بر هم منطبق باشند، از آن‌ها نامتناهی خط می‌گذرد که در این سؤال سه نقطه متمایز هستند. در صورتی که سه نقطه A ، B و C در یک راستا باشند، از آنها یک خط می‌گذرد و در غیر این صورت از آن‌ها خطی عبور نمی‌کند.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3, 6, 1) - (1, 5, -2) = (2, 1, 3)$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (-1, 4, -5) - (1, 5, -2) = (-2, -1, -3)$$

پس $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$ ، در نتیجه $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$. بنابراین نقاط A ، B و C روی یک خط قرار دارند.

۶۲۴ ۴ تصویر قائم $A(x, y, z)$ بر صفحه XZ نقطه $A'(x, 0, z)$ و

تصویر قائم A بر صفحه YZ نقطه $A''(0, y, z)$ است. پس

$$\begin{cases} A(2, 3, -1) \xrightarrow[\text{صفحه } XZ]{\text{تصویر روی}} A'(2, 0, -1) \\ B(4, -1, 1) \xrightarrow[\text{صفحه } YZ]{\text{تصویر روی}} B'(0, -1, 1) \end{cases}$$

$$|A'B'| = \sqrt{(2-0)^2 + (0+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

۶۲۵ ۳ فاصله نقطه $A(x, y, z)$ از مبدأ مختصات برابر است با

$$|OA| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow 3 = \sqrt{(a-1)^2 + a^2 + a^2}$$

$$3 = \sqrt{a^2 - 2a + 1 + a^2 + a^2} \Rightarrow 3 = \sqrt{3a^2 - 2a + 1} \Rightarrow 9 = 3a^2 - 2a + 1$$

$$3a^2 - 2a - 8 = 0 \Rightarrow a = 2, a = -\frac{4}{3}$$

اگر $a=2$ ، آن‌گاه $A(1, 2, 2)$ ، بنابراین

$$\text{فاصله نقطه } A \text{ از محور } x = \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

عدد $2\sqrt{2}$ در گزینه‌ها وجود دارد، پس نیازی به بررسی حالت $a = -\frac{4}{3}$ نیست.

۶۲۶ ۲ فرض کنید M نقطه وسط پاره خط AB باشد:

$$M = \frac{A+B}{2} = (m-1, -1, 1)$$

می‌دانیم $|MC| = 3\sqrt{2}$ ، بنابراین

$$\sqrt{(m-1+1)^2 + (-1-3)^2 + (1-1)^2} = 3\sqrt{2}$$

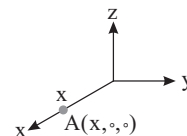
در نتیجه $m = \pm\sqrt{2}$ ، پس $\sqrt{m^2 + 16} = 3\sqrt{2}$.

۶۲۷ ۳ می‌دانیم اگر $A(x, y, z)$ ، آن‌گاه تصویر قائم A روی محور x نقطه $H(x, 0, 0)$ و قرینه A نسبت به محور x نقطه $A'(x, -y, -z)$ است.

طبق فرض، دو نقطه H و A' بر هم منطبق هستند. بنابراین

$$(x, 0, 0) = (x, -y, -z) \Rightarrow y = 0, z = 0$$

بنابراین A نقطه $(x, 0, 0)$ است، پس فاصله A از مبدأ مختصات، محور y ، محور z و صفحه YZ برابر $|x|$ است و فاصله A از صفحه xy برابر صفر است، پس گزینه (۳) پاسخ سؤال است.



۶۲۸ ۲ تصویر قائم نقطه (x, y, z) روی صفحه YZ نقطه $(0, y, z)$ و

قرینه آن نسبت به محور y نقطه $(-x, y, -z)$ است. بنابراین

$$M(m-1, 1, -1) \xrightarrow[\text{صفحه } YZ]{\text{تصویر روی}} A(0, 1, -1)$$

$$M(m-1, 1, -1) \xrightarrow[\text{محور } y]{\text{قرینه نسبت به}} B(-m+1, 1, 1)$$

$$|AB| = \sqrt{(1-m)^2 + 0 + 4}$$

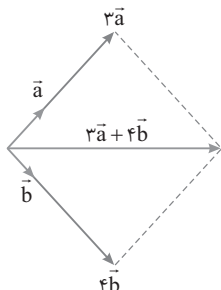
چون $|AB| = \sqrt{(1-m)^2 + 4}$ ، پس کمترین فاصله دو نقطه A و B از هم

وقتی به دست می‌آید که $(1-m)^2$ برابر صفر شود. بنابراین مینیمم فاصله A

از B برابر است با $\sqrt{4} = 2$.

۶۳۹ ۲ چون $3\vec{a} + 4\vec{b}$ نیمساز زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است، پس متوازی الاضلاع ایجاد شده روی $3\vec{a}$ و $4\vec{b}$ لوزی است، پس $|3\vec{a}| = |4\vec{b}|$.

یعنی $3|\vec{a}| = 4|\vec{b}|$ ، در نتیجه $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = \frac{4}{3}$.



۶۴۰ ۲ توجه کنید که $\vec{a}' = (-2, 3, -6)$ و $\vec{b}' = (1, \beta, -\gamma)$ چون $\vec{a}'$

و $\vec{b}'$ در یک امتداد هستند، پس $\frac{-2}{1} = \frac{3}{\beta} = \frac{-6}{-\gamma}$ ، یعنی $\beta = -\frac{3}{2}$ و $\gamma = -3$.

$$|\vec{a}' + \vec{b}'| = |(-2+1, 3-\frac{3}{2}, -6+3)| = |(-1, \frac{3}{2}, -3)| = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + 9} = \frac{7}{2}$$

۶۴۱ ۴ رابطه داده شده سطح بین دو دایره است، زیرا

$$-4 \leq x^2 + y^2 - 4x - 8y \leq 12 \Rightarrow -4 \leq (x-2)^2 - 4 + (y-4)^2 - 16 \leq 12$$

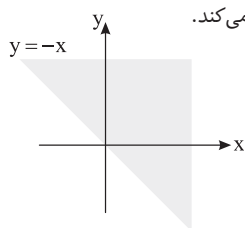
$$-4 \leq (x-2)^2 + (y-4)^2 - 20 \leq 12 \Rightarrow 16 \leq (x-2)^2 + (y-4)^2 \leq 32$$

رابطه فوق سطح بین دو دایره هم‌مرکز به شعاع‌های $\sqrt{16}$ و $\sqrt{32}$ است. بنابراین مساحت دایره کوچک‌تر - مساحت دایره بزرگ‌تر = مساحت خواسته شده

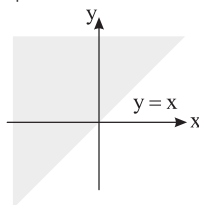
$$= \pi(\sqrt{32})^2 - \pi(\sqrt{16})^2 = 32\pi - 16\pi = 16\pi$$

۶۴۲ ۳ نمودار $x + y \geq 0$ ، بالا و روی نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم

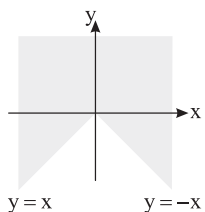
مختصات را مشخص می‌کند.



نمودار $y - x \geq 0$ ، بالا و روی نیمساز ناحیه‌های اول و سوم مختصات را مشخص می‌کند.



پس نمودار $A \cup B$ به صورت زیر است که شامل مناطق (۱)، (۳) و (۴) است.



۶۳۴ ۳ نقطه A روی خط $\begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases}$ است، پس A نقطه $(4, -3, z)$

است و نقطه B روی خط $\begin{cases} x=2 \\ z=0 \end{cases}$ است. پس B نقطه $(2, y, 0)$ است. پس

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-2, y+3, -z)$$

$$\vec{AB} \parallel \vec{a} \Rightarrow \frac{-2}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{-z}{1} \Rightarrow \begin{cases} y+3=4 \Rightarrow y=1 \\ -z=-2 \Rightarrow z=2 \end{cases}$$

بنابراین

$$\vec{AB} = (-2, 4, -2) \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{4+16+4} = 2\sqrt{6}$$

۶۳۵ ۴ اگر $\vec{a} = (x, y, z)$ ، آن‌گاه

$$xy \text{ بر صفحه } \vec{a} \text{ طول تصویر } \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{2}$$

$$xz \text{ بر صفحه } \vec{a} \text{ طول تصویر } \sqrt{x^2 + z^2} = 2$$

$$yz \text{ بر صفحه } \vec{a} \text{ طول تصویر } \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{6}$$

در نتیجه $x^2 + y^2 = 8$ ، $x^2 + z^2 = 4$ و $y^2 + z^2 = 6$. از جمع این برابری‌ها به دست می‌آید $2(x^2 + y^2 + z^2) = 18$ ، پس $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ، بنابراین

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{9} = 3$$

۶۳۶ ۴ توجه کنید که $\vec{a} + \vec{b} = (2, 0, 1)$ چون $\vec{c}$ در خلاف جهت

$\vec{a} + \vec{b}$ است، پس عددی منفی مانند m وجود دارد که به ازای آن $\vec{c} = m(\vec{a} + \vec{b})$ ، یعنی

$$\vec{c} = (2m, 0, m), m < 0$$

طول بردار $\vec{c}$ برابر ۳ است، پس

$$\sqrt{4m^2 + m^2} = 3 \Rightarrow \sqrt{5}|m| = 3 \Rightarrow |m| = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

چون m منفی است، پس $m = -\frac{3}{\sqrt{5}}$ و $\vec{c} = (-\frac{6}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{3}{\sqrt{5}})$ در نهایت

به دست می‌آید.

$$\vec{c} \text{ مجموع مؤلفه‌های بردار } \vec{c} = -\frac{6}{\sqrt{5}} + 0 - \frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{9}{\sqrt{5}}$$

۶۳۷ ۳ اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ضلع‌های مجاور این متوازی الاضلاع باشند، آن‌گاه

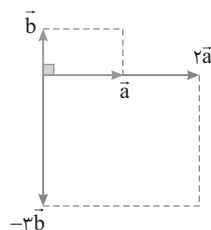
$$\vec{a} + \vec{b} = (3, 5, 4) \text{ و } \vec{a} - \vec{b} = (-3, -1, -8)$$

$$\vec{b} = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} - \vec{b})}{2} = (3, 3, 6), \vec{a} = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b})}{2} = (0, 2, -2)$$

واضح است که $\vec{a}$ ضلع کوچک‌تر است و $|\vec{a}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$.

۶۳۸ ۳ توجه کنید که $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{9+1+49} = \sqrt{59}$ در

نتیجه متوازی الاضلاع ساخته شده روی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مستطیل است، یعنی $\vec{a} \perp \vec{b}$. در نتیجه $\vec{a} \perp (-3\vec{b})$.



۴۴۹ ۴ بردارهای $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ قطره‌های متوازی‌الاضلاع هستند که $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع مجاور آن هستند. متوازی‌الاضلاعی که دو قطرش بر هم عمود باشند، لوزی است. پس دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ اضلاع مجاور یک لوزی و در نتیجه هم‌اندازه هستند. بنابراین

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow \sqrt{m^2 + 4 + 1} = \sqrt{41} \Rightarrow m^2 = 36 \Rightarrow m = \pm 6$$

چون $m > 0$ ، پس $m = 6$ قابل قبول است.

۴۵۰ ۲ اگر O مبدأ مختصات باشد، آن‌گاه $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ و

مختصات نقطه M در تساوی $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$ صدق می‌کند. پس

$$(2, -1, 1) = \vec{OB} - \vec{OA} \quad (1)$$

$$(3, 1, 2) = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} \Rightarrow \vec{OA} + \vec{OB} = (6, 2, 4) \quad (2)$$

برابری اول را از برابری دوم کم می‌کنیم

$$2\vec{OA} = (4, 3, 3) \Rightarrow \vec{OA} = (2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$$

چون مختصات بردار $\vec{OA}$ همان مختصات نقطه A است، پس ارتفاع نقطه A برابر $\frac{3}{2}$ است.

۴۵۱ ۲ فرض می‌کنیم اندازه دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر x باشد. اگر θ

زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، آن‌گاه

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow 36 = x^2 + x^2 + 2x^2\cos\theta$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow 12 = x^2 + x^2 - 2x^2\cos\theta$$

از جمع دو تساوی بالا نتیجه می‌گیریم

$$48 = 4x^2 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$$

بنابراین

$$36 = 2x^2 + 2x^2\cos\theta \Rightarrow 36 = 2(2\sqrt{3})^2 + 2(2\sqrt{3})^2\cos\theta$$

$$36 = 24 + 24\cos\theta \Rightarrow 24\cos\theta = 12 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

۴۵۲ ۴ می‌دانیم $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. پس از

فرض سؤال به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = -\vec{b} \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |-\vec{b}|^2$$

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = (-\vec{b}) \cdot (-\vec{b})$$

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}|^2$$

$$16 + 25 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}) = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{41}{2}$$

۴۵۳ ۲ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b} + \vec{c}$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{(\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{c})} (\vec{b} + \vec{c})$$

بردار $\vec{b} + \vec{c}$ به مختصات $(2, -3, 6)$ است، پس

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= \frac{(-1, -3, 0) \cdot (2, -3, 6)}{(2, -3, 6) \cdot (2, -3, 6)} (2, -3, 6) \\ &= \frac{-2+9+0}{4+9+36} (2, -3, 6) = \frac{7}{49} (2, -3, 6) \end{aligned}$$

۴۴۳ ۳ تصویر قائم نقطه $A(a, b, c)$ بر محور x نقطه $A'(a, 0, 0)$

است. بنابر فرض سؤال $A'(2, 0, 0)$ ، پس $a = 2$. از طرف دیگر قرینه نقطه $A(a, b, c)$ نسبت به صفحه xy نقطه $A''(a, b, -c)$ است و بنابر فرض سؤال $A''(a, 3, 4)$ ، پس $b = 3$ و $c = -4$. بنابراین A نقطه $(2, 3, -4)$ است. در نتیجه قرینه A نسبت به محور y نقطه $(-2, 3, 4)$ است.

۴۴۴ ۲ برای به دست آوردن قرینه یک نقطه نسبت به محور Z باید دو

مؤلفه X و Y را قرینه کنیم و Z را بدون تغییر بنویسیم. بنابراین قرینه نقطه $A(m+n, 4, m+2)$ نسبت به محور Z نقطه $A'(-m-n, -4, m+2)$

است. از طرف دیگر بنابر فرض سؤال A' نقطه $(2, 2m-n, n)$ است، پس $(-m-n, -4, m+2) = (2, 2m-n, n)$

$$\begin{cases} -m-n=2 \\ 2m-n=-4 \\ m+2=n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+n=-2 \\ m-n=-2 \end{cases} \Rightarrow m=-2, n=0$$

توجه کنید که این مقادیر در برابری $2m-n=-4$ صدق می‌کنند. در نتیجه $A''(-m, -2m, n)$ نقطه $A''(2, 4, 0)$ است و $A(m+n, 4, m+2)$ نقطه $A(-2, 4, 0)$ است. پس دو نقطه A'' و A' قرینه یکدیگر نسبت به محور y هستند.

۴۴۵ ۲ رأس‌های A، B و C از این مکعب نقطه‌های $A(0, 0, 2)$ ، $B(2, 0, 0)$ و $C(0, 2, 0)$ هستند. پس

$$|AB| = |AC| = |BC| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

بنابراین مثلث ABC متساوی‌الاضلاع به ضلع $2\sqrt{2}$ است. در نتیجه

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} |AB|^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{3}$$

۴۴۶ ۳ بردار $\vec{a}$ روی هر دو صفحه XY و XZ قرار دارد، پس بردار $\vec{a}$

روی فصل مشترک این دو صفحه، یعنی محور X قرار دارد. بنابراین باید مؤلفه‌های Y و Z این بردار صفر باشند. پس

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, x = -1$$

بنابراین $x = 1$ قابل قبول است. در نتیجه $\vec{a} = (2, 0, 0) \Rightarrow |\vec{a}| = 2$

۴۴۷ ۱ فرض کنید $\vec{a} = (x, y, z)$. در این صورت طول تصویر $\vec{a}$ روی محور Z برابر $|z|$ است. در نتیجه $|z| = 3$. به این ترتیب،

$$|\vec{a}| = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 4 \xrightarrow{|z|=3} \sqrt{x^2 + y^2 + 9} = 4$$

$$x^2 + y^2 + 9 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 = 7$$

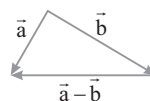
از طرف دیگر، اندازه تصویر بردار $\vec{a} = (x, y, z)$ روی صفحه xy برابر $\sqrt{x^2 + y^2}$ است. بنابراین

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{7} \Rightarrow \text{طول تصویر } \vec{a} \text{ روی صفحه } xy = \sqrt{7}$$

۴۴۸ ۳ چون بردارها از مبدأ مختصات شروع می‌شوند، پس بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ از یک نقطه شروع می‌شوند. در نتیجه ضلع سوم مثلث با توجه به شکل $\vec{a} - \vec{b}$ است. پس

$$\vec{a} - \vec{b} = (1-x)\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \xrightarrow{|\vec{a}-\vec{b}|=3\sqrt{2}} 3\sqrt{2} = \sqrt{(1-x)^2 + 1 + 1}$$

$$18 = (1-x)^2 + 2 \Rightarrow (1-x)^2 = 16 \Rightarrow 1-x = \pm 4 \Rightarrow x = 5 \text{ یا } x = -3$$



۶۵۸ ۱ از فرض های سؤال نتیجه می شود

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2}|\vec{a}+\vec{b}|\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|^2=2|\vec{a}+\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$-(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)=6\vec{a}\cdot\vec{b}\xrightarrow{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=30}\rightarrow-30=6\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$$

۶۵۹ ۳ بنابر فرض $OM=4$. پس $\sqrt{a^2+b^2+\frac{c^2}{4}}=4$ اکنون فرض

کنید $\vec{u}=(a, b, \frac{c}{4})$ و $\vec{v}=(1, 2, 6)$. در این صورت بنابر نابرابری کوشی - شوارتز:

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leq|\vec{u}||\vec{v}|\Rightarrow|a+2b+3c|\leq\sqrt{a^2+b^2+\frac{c^2}{4}}\sqrt{1+4+36}$$

$$|a+2b+3c|\leq 4\sqrt{41}$$

پس بیشترین مقدار $a+2b+3c$ برابر $4\sqrt{41}$ است.

۶۶۰ ۳ اندازه زاویه بین $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ اندازه زاویه $\hat{A}$ است:

$$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(1, -1, 0), \quad \vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}=(-1, 0, 1)$$

بنابراین

$$\cos \hat{A}=\frac{|\vec{AB}\cdot\vec{AC}|}{|\vec{AB}||\vec{AC}|}=\frac{-1+0+0}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{-1}{2}\Rightarrow\hat{A}=120^\circ$$

۶۶۱ ۱ می دانیم $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$ اکنون عبارت

داده شده را ساده می کنیم:

$$(\vec{i}\times(\vec{j}\times\vec{k})+\vec{i}-\vec{j}\times\vec{k})\times\vec{k}=(\vec{i}\times\vec{i}+\vec{i}-\vec{i})\times\vec{k}=\vec{0}\times\vec{k}=\vec{0}$$

۶۶۲ ۳ ابتدا بردار $\vec{b}\times\vec{c}$ و سپس بردار $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ را به دست می آوریم:

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-3\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix}=-3\vec{i}+\vec{j}-6\vec{k}$$

مختص عرض $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ برابر ۱ است.

۶۶۳ ۱ از تساوی داده شده در صورت سؤال به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c})=\vec{0}$$

پس بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}-\vec{c}$ موازی هستند. بنابراین مختصات این دو بردار

متناسب هستند. بنابراین

$$\vec{a}=(2, -1, 1), \quad \vec{b}-\vec{c}=(m-1, 1, -1)$$

$$\vec{a}\parallel\vec{b}-\vec{c}\Rightarrow\frac{m-1}{2}=\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1}\Rightarrow m-1=-2\Rightarrow m=-1$$

۶۶۴ ۱ فرض می کنیم زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر θ باشد. در این صورت

$$|2\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})|=36\Rightarrow|\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})|=18\Rightarrow|\frac{\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}}{2}|=18\Rightarrow|\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{2}|=18$$

$$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=18\Rightarrow(6)(5)\sin\theta=18\Rightarrow\sin\theta=\frac{3}{5}$$

$$\text{پس } \cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}=\pm\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\pm\frac{4}{5}$$

$$\text{پس } \cos\theta=-\frac{4}{5} \text{ در نتیجه}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=36+6\times 5(-\frac{4}{5})=12$$

۶۵۴ ۳ زاویه بین بردار $\vec{a}$ و بردار $\vec{k}$ (بردار واحد محور Z) زاویه خواسته شده است. پس

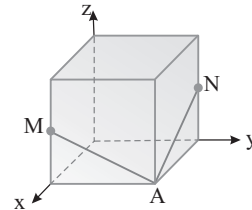
$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}||\vec{k}|}=\frac{(\sqrt{2}, -1, 1)\cdot(0, 0, 1)}{\sqrt{2+1+1}\sqrt{1}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ$$

۶۵۵ ۱ مطابق شکل، یال های مکعب را در راستای محورهای مختصات

قرار می دهیم. اگر طول ضلع مکعب را ۲ در نظر بگیریم، آن گاه

$$A(2, 2, 0), M(2, 0, 1), N(0, 2, 1), \quad \vec{AM}=(0, -2, 1), \vec{AN}=(-2, 0, 1)$$

$$\cos \hat{MAN}=\frac{|\vec{AM}\cdot\vec{AN}|}{|\vec{AM}||\vec{AN}|}=\frac{0+0+1}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{1}{5}$$



۶۵۶ ۲ در مربع ABCD، نقاط A و C دو سر قطر هستند. پس اگر

a ضلع مربع باشد، آن گاه اندازه AC برابر $a\sqrt{2}$ است. بنابراین

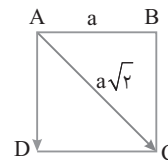
$$|\vec{AC}|=\sqrt{(2-2)^2+(-2-1)^2+(3+1)^2}=\sqrt{9+16}=5\Rightarrow\sqrt{2}a=5$$

$$a=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

از طرف دیگر، در مربع قطر نیمساز است، پس زاویه بین $\vec{AC}$ و $\vec{AD}$ برابر

45° است. به این ترتیب،

$$\vec{AC}\cdot\vec{AD}=|\vec{AC}||\vec{AD}|\cos 45^\circ=(5)(\frac{5}{\sqrt{2}})(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{25}{2}$$



۶۵۷ ۴ می دانیم اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، آن گاه

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \text{ و } |\vec{b}|\cos\theta \text{ برابر اندازه تصویر قائم } \vec{b} \text{ روی امتداد}$$

بردار $\vec{a}$ است. بنابراین $\vec{a}\cdot\vec{b}$ معادل حاصل ضرب اندازه بردار $\vec{a}$ در اندازه

تصویر بردار $\vec{b}$ روی بردار $\vec{a}$ است. در شکل داده شده، از نقاط C، E، F

و D بر AB عمود می کنیم. بنابر آنچه گفته شد،

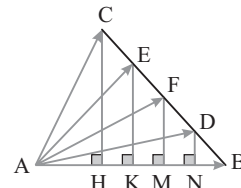
$$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=|\vec{AB}|(|\vec{AC}| \text{ بر } \vec{AC} \text{ تصویر قائم})=|\vec{AB}||\vec{AH}|$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{AE}=|\vec{AB}|(|\vec{AE}| \text{ بر } \vec{AE} \text{ تصویر قائم})=|\vec{AB}||\vec{AK}|$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{AF}=|\vec{AB}|(|\vec{AF}| \text{ بر } \vec{AF} \text{ تصویر قائم})=|\vec{AB}||\vec{AM}|$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{AD}=|\vec{AB}|(|\vec{AD}| \text{ بر } \vec{AD} \text{ تصویر قائم})=|\vec{AB}||\vec{AN}|$$

با توجه به شکل و مقادیر به دست آمده، حاصل $|\vec{AB}||\vec{AN}|$ از بقیه بزرگ تر است.



۶۷۰ (۲) راه‌حل اول ابتدا بردارهای $\vec{r}\vec{a}-\vec{r}\vec{b}$ و $\vec{r}\vec{a}-\vec{r}\vec{b}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\vec{c}=\vec{r}\vec{a}+\vec{r}\vec{b}=\vec{r}(-1,0,2)+\vec{r}(0,2,-1)=(-3,4,4)$$

$$\vec{d}=\vec{r}\vec{a}-\vec{r}\vec{b}=\vec{r}(-1,0,2)-\vec{r}(0,2,-1)=(-2,-2,5)$$

$$\vec{e}=\vec{r}\vec{a}-\vec{r}\vec{b}=\vec{r}(-1,0,2)-\vec{r}(0,2,-1)=(-2,-6,7)$$

می‌دانیم حجم متوازی‌السطوح ساخته شده روی بردارهای $\vec{c}$ ، $\vec{d}$ و $\vec{e}$ برابر $|\vec{c} \cdot (\vec{d} \times \vec{e})|$ است. پس ابتدا $\vec{d} \times \vec{e}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{d} \times \vec{e} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 5 \\ -2 & -6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} \vec{k} = (16, 4, 8)$$

در نتیجه $\vec{c} \cdot (\vec{d} \times \vec{e}) = (-3, 4, 4) \cdot (16, 4, 8) = -48 + 16 + 32 = 0$ بنابراین بردارهای فوق در یک صفحه هستند و متوازی‌السطوحی تشکیل نمی‌شود.

راه‌حل دوم توجه کنید که بردارهای $\vec{r}\vec{a}-\vec{r}\vec{b}$ و $\vec{r}\vec{a}-\vec{r}\vec{b}$ ترکیب‌های خطی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند. در نتیجه این بردارها در صفحه شامل $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند. پس این سه بردار در یک صفحه واقع‌اند. در نتیجه حجم متوازی‌السطوح تشکیل شده روی این سه بردار برابر صفر است.

۶۷۱ (۳) کافی است زاویه بین $\vec{AB}$ و $\vec{v}$ را به دست آوریم. زیرا ضرایب مثبت اندازه بردارها را عوض می‌کنند، ولی زاویه بین آن‌ها را تغییر نمی‌دهند.

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (1, 2, 3) - (0, 1, 1) = (1, 1, 2)$$

اگر θ زاویه بین $\vec{AB}$ و $\vec{v}$ باشد، آن‌گاه

$$\cos \theta = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{v}|}{|\vec{AB}| |\vec{v}|} = \frac{(1, 1, 2) \cdot (1, 0, -1)}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \theta = 120^\circ$$

۶۷۲ (۱) در مستطیل ABCD زاویه B قائمه است، پس بردارهای $\vec{BA}$ و $\vec{BC}$ بر هم عمودند. بنابراین ضرب داخلی این دو بردار صفر است.

$$\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} = (m-2, -2, 2)$$

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = (-3, 1, 0)$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow -3m + 6 - 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{4}{3}$$



۶۷۳ (۴) بنابر فرض‌های سؤال $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ و $|\vec{a}| = |\vec{d}|$ پس $\vec{a}$ مضربی از $\vec{d}$ است. بنابراین عددی مانند m وجود دارد به طوری که $\vec{a} = m\vec{d} = (0, -m, 2m)$ همچنین $\vec{b} \perp \vec{c}$ پس $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$. در نتیجه

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \xrightarrow{\text{ضرب داخلی می‌کنیم}} \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{c}$$

$$(0, -m, 2m) \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = |\vec{c}|^2$$

$$-\frac{1}{4}m + m = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{4}m = \frac{7}{4} \Rightarrow 3m = 7 \Rightarrow m = \frac{7}{3}$$

در نتیجه

$$\vec{a} = (0, -\frac{7}{3}, \frac{14}{3}) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{196}{9}} = \sqrt{\frac{245}{9}} = \frac{\sqrt{245}}{3} = \frac{7\sqrt{5}}{3}$$

۶۶۵ (۲) ابتدا با داشتن طول بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ ، زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست می‌آوریم. اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، آن‌گاه

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos \theta$$

$$(2\sqrt{13})^2 = 4^2 + 9(2)^2 - 12(4)(2)\cos \theta$$

$$52 = 16 + 36 - 96 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin \theta = (4)(2)\sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$$

۶۶۶ (۱) ضرب داخلی و ضرب خارجی روی جمع بردارها خاصیت توزیع پذیری دارند. چون دو بردار واحد $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند، پس $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. بنابراین

$$|(\vec{r}\vec{a}+\vec{r}\vec{b}) \times (\vec{r}\vec{a}-\vec{r}\vec{b})| = |\vec{r}\vec{a} \times \vec{r}\vec{a} - \vec{r}\vec{a} \times \vec{r}\vec{b} + \vec{r}\vec{b} \times \vec{r}\vec{a} - \vec{r}\vec{b} \times \vec{r}\vec{b}|$$

$$= |\vec{r}\vec{b} \times \vec{r}\vec{a}| = |\vec{r}||\vec{b}||\vec{a}|\sin 90^\circ = 7 \quad (1)$$

$$(\vec{r}\vec{a}+\vec{r}\vec{b}) \cdot (\vec{r}\vec{a}-\vec{r}\vec{b}) = \vec{r}\vec{a} \cdot \vec{r}\vec{a} - \vec{r}\vec{a} \cdot \vec{r}\vec{b} + \vec{r}\vec{b} \cdot \vec{r}\vec{a} - \vec{r}\vec{b} \cdot \vec{r}\vec{b}$$

$$= 6|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{b}|^2 = 4 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$|(\vec{r}\vec{a}+\vec{r}\vec{b}) \times (\vec{r}\vec{a}-\vec{r}\vec{b})| + (\vec{r}\vec{a}+\vec{r}\vec{b}) \cdot (\vec{r}\vec{a}-\vec{r}\vec{b}) = 7 + 4 = 11$$

۶۶۷ (۳) چون $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$. پس دو بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ و $\vec{c}$ موازی‌اند.

بنابراین مختصات این دو بردار متناسب‌اند:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = (-3, -6, 3)$$

بنابراین

$$\vec{a} \times \vec{b} \parallel \vec{c} \Rightarrow \frac{-3}{3m} = \frac{-6}{2-n} = \frac{3}{m+n} \Rightarrow \frac{-1}{m} = \frac{-2}{2-n} = \frac{1}{m+n}$$

پس

$$\begin{cases} \frac{-1}{3m} = \frac{-2}{2-n} \\ \frac{-1}{3m} = \frac{1}{m+n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-n = 6m \\ 3m = -m-n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6m+n=2 \\ 4m+n=0 \end{cases} \Rightarrow 2m=2 \Rightarrow m=1, n=-4$$

در نتیجه $4m-n=4+4=8$

۶۶۸ (۳) می‌دانیم اگر $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ، آن‌گاه

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$$

پس

$$|\vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = 2$$

۶۶۹ (۳) مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی دو بردار ساخته می‌شود

مساوی اندازه حاصل ضرب خارجی آن دو بردار است:

$$S = |(\vec{r}\vec{b} + \vec{a}\vec{a}) \times (\vec{r}\vec{a} + \vec{b}\vec{b})| = |\vec{r}\vec{b} \times \vec{r}\vec{a} + \vec{r}\vec{b} \times \vec{b}\vec{b} + \vec{a}\vec{a} \times \vec{r}\vec{a} + \vec{a}\vec{a} \times \vec{b}\vec{b}| = |\vec{r}\vec{b} \times \vec{r}\vec{a} + \vec{a}\vec{a} \times \vec{b}\vec{b}| = |\vec{r}\vec{b} \times \vec{r}\vec{a}| = |\vec{r}||\vec{b}||\vec{a}|\sin \theta = 18 \times 2 \times 4 \sin 120^\circ = 72\sqrt{3}$$

۶۷۸ (۲) ابتدا با داشتن طول بردار $\vec{a}-\vec{b}$ ، زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست می آوریم. فرض کنید θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد. در این صورت

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$6^2 = 4 \times 3^2 + 6^2 - 4(3)(6)\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

از طرف دیگر، مساحت مثلثی که روی $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{a}+3\vec{b}$ ساخته می شود برابر است با

$$S = \frac{1}{2} |(\vec{a}-\vec{b}) \times (\vec{a}+3\vec{b})| = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{a} + 3\vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} - 3\vec{b} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |4\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$= 2|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = 2(3)(6)(\sin 60^\circ) = 36 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$$

۶۷۹ (۲) حاصل $|\vec{DC} \times \vec{BC}|$ مساوی مساحت متوازی الاضلاع ABCD است. چون در متوازی الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند. پس مساحت متوازی الاضلاع ABCD چهار برابر مساحت مثلث OBC است. از طرف دیگر $\vec{BC} = \vec{AD}$ پس

$$\vec{BO} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 5\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$S_{OBC} = \frac{1}{2} |\vec{BO} \times \vec{BC}| = \frac{1}{2} \sqrt{5^2 + 5^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$|\vec{DC} \times \vec{BC}| = S_{ABCD} = 4S_{OBC} = 4\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) = 10\sqrt{2}$$

۶۸۰ (۴) نقاط A, B, C, D در یک صفحه هستند، هرگاه $\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \times \vec{AD}) = 0$.

توجه کنید که

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-1, 2, 0) - (1, 0, 2) = (-2, 2, -2)$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (3, 1, 1) - (1, 0, 2) = (2, 1, -1)$$

$$\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA} = (0, 1, m) - (1, 0, 2) = (-1, 1, m-2)$$

$$\vec{AC} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & m-2 \end{vmatrix} = (m-1)\vec{i} - (2m-5)\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \times \vec{AD}) = 0 \Rightarrow (-2, 2, -2) \cdot (m-1, -2m+5, 3) = 0$$

$$-2m+2-4m+10-6=0 \Rightarrow -6m+6=0 \Rightarrow m=1$$

۶۸۱ (۳) نمودار $y = x^2$ یک سهمی است و رابطه $-2 \leq x < 3$ از $x = -2$ (توپر) تا $x = 3$ (توخالی) از این سهمی را نمایش می دهد. پس شکل گزینه (۳) درست است.

۶۸۲ (۳) فرض کنید $A(x_0, y_0, z_0)$ و فاصله A از محورهای x, y و z به ترتیب ۳، ۴ و ۵ باشد. در این صورت

$$x \text{ فاصله } A \text{ از محور } x = \sqrt{y_0^2 + z_0^2} = 3 \Rightarrow y_0^2 + z_0^2 = 9$$

$$y \text{ فاصله } A \text{ از محور } y = \sqrt{x_0^2 + z_0^2} = 4 \Rightarrow x_0^2 + z_0^2 = 16$$

$$z \text{ فاصله } A \text{ از محور } z = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 5 \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = 25$$

با جمع کردن این سه به دست می آید $2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = 50$ یا

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 25$$

$$|OA| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{25} = 5$$

۶۷۴ (۴) اندازه دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را برابر x در نظر می گیریم. اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، آنگاه بنابر فرض سؤال.

$$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{a}+\vec{b}| \Rightarrow |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 3|\vec{a}+\vec{b}|^2$$

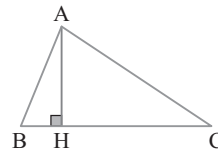
$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 3(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)$$

$$x^2 + x^2 - 2x^2 \cos\theta = 3(x^2 + x^2 + 2x^2 \cos\theta)$$

$$4x^2 \cos\theta = -4x^2 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120^\circ$$

۶۷۵ (۴) شکل فرضی زیر را ببینید. توجه کنید که CH اندازه تصویر $\vec{CA}$ بر $\vec{CB}$ است. یعنی

$$CH = \frac{|\vec{CA} \cdot \vec{CB}|}{|\vec{CB}|} = \frac{|(1, 2, -1) \cdot (3, 4, 0)|}{|(3, 4, 0)|} = \frac{3+8+0}{\sqrt{9+16}} = \frac{11}{5}$$



۶۷۶ (۳) ابتدا بردار $\vec{b} \times \vec{c}$ و سپس بردار $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ را به دست می آوریم:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & m+1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (r-m-1)\vec{i} - (-2+2m+2)\vec{j} - \vec{k}$$

$$= (1-m, -2m, -1)$$

بنابراین

$$|\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})| = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{(1-m)^2 + 4m^2 + 1} = \sqrt{2}$$

$$1+m^2-2m+4m^2+1=2 \Rightarrow 5m^2-2m=0 \Rightarrow m=0, m=\frac{2}{5}$$

۶۷۷ (۴) راه حل اول حاصل ضرب خارجی بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بر دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{c}$ عمود است. پس بردار $\vec{a}$ موازی بردار $\vec{b} \times \vec{c}$ است:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = (-1, -3, -7)$$

چون بردار $\vec{a}$ با بردار $\vec{b} \times \vec{c}$ موازی است، پس مؤلفه های دو بردار متناسب هستند:

$$\frac{m+1}{-1} = \frac{-1}{-3} = \frac{n}{-7} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m+1}{-1} = \frac{-1}{-3} \Rightarrow m+1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow m = -\frac{4}{3} \\ \frac{-1}{-3} = \frac{n}{-7} \Rightarrow n = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

$$2m+n = -\frac{8}{3} - \frac{7}{3} = -5$$

راه حل دوم بردار $\vec{a}$ بر دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{c}$ عمود است، پس حاصل ضرب داخلی $\vec{a}$ با بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر صفر است:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow m+1-2-n=0, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow m+1+5+2n=0$$

$$\begin{cases} m-n=1 \\ m+2n=-6 \end{cases} \xrightarrow{-} 3n=-7 \Rightarrow n=-\frac{7}{3}, m=-\frac{4}{3} \Rightarrow 2m+n=-5$$

۶۸۷ (۱) بردار $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ هم بر $\vec{a}$ عمود است و هم بر $\vec{b}$ پس $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ از طرف دیگر،

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \Rightarrow |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin 30^\circ \Rightarrow |\vec{c}| = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \Rightarrow |\vec{c}| = \frac{3}{4}$$

$$بنابراین |\vec{c} + \vec{a}| = \sqrt{|\vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2 + 2\vec{c} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3^2 + 0} = 5$$

۶۸۸ (۲) ابتدا با استفاده از اتحاد لاگرانژ اندازه $\vec{a} \times \vec{b}$ را به دست می آوریم:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 + 9 = 4 \times 9$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = 27 \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 3\sqrt{3}$$

بنابراین

$$|(\vec{r}\vec{a} + \vec{r}\vec{b}) \times (\vec{r}\vec{a} - \vec{r}\vec{b})| = \left| \begin{matrix} \vec{r}\vec{a} \times \vec{r}\vec{a} & \vec{r}\vec{a} \times \vec{r}\vec{b} & \vec{r}\vec{b} \times \vec{r}\vec{a} & \vec{r}\vec{b} \times \vec{r}\vec{b} \end{matrix} \right|$$

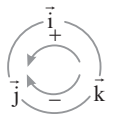
$$= |\vec{r}\vec{b} \times \vec{r}\vec{a}| = |\vec{r}| |\vec{b} \times \vec{a}| = |\vec{r}| |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{r}| (3\sqrt{3}) = 21\sqrt{3}$$

۶۸۹ (۴) ضرب خارجی روی جمع بردارها خاصیت توزیع پذیری دارد. به کمک این ویژگی عبارت داده شده را ساده می کنیم:

$$\vec{r}\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{r}\vec{k}) - \vec{j} \times (\vec{r}\vec{i} - \vec{k}) + \vec{r}\vec{k} \times (\vec{r}\vec{j} - \vec{i})$$

$$= \vec{r}\vec{i} \times \vec{j} + \vec{r}\vec{i} \times \vec{k} - \vec{r}\vec{j} \times \vec{i} + \vec{j} \times \vec{k} + \vec{r}\vec{k} \times \vec{j} - \vec{r}\vec{k} \times \vec{i}$$

اکنون با استفاده از نمودار چرخشی زیر ضرب خارجی بردارهای $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ را



$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

بنابراین $\vec{r}\vec{k} - \vec{r}\vec{j} + \vec{j} - \vec{r}\vec{i} + \vec{i} + \vec{r}\vec{k} - \vec{r}\vec{j} + \vec{j} - \vec{r}\vec{i} = -\vec{r}\vec{i} + \vec{j} - \vec{r}\vec{j} + \vec{k} = \vec{k} - \vec{r}(\vec{i} - \vec{j})$ عبارت داده شده

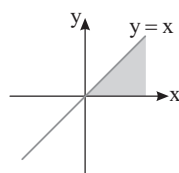
۶۹۰ (۱) طرفین تساوی $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ را در $\vec{a}$ ضرب داخلی می کنیم.

چون $\vec{a} \times \vec{c}$ بر $\vec{a}$ عمود است، پس $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = 0$ برابر صفر است. بنابراین

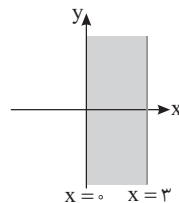
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$|\vec{a}|^2 - |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 0 \Rightarrow 3^2 - 3 \times 4 \cos \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

۶۹۱ (۲) نمودار $y = x$ همان نیمساز ناحیه های اول و سوم است و ناحیه $y \leq x$ در شکل رنگ شده است.

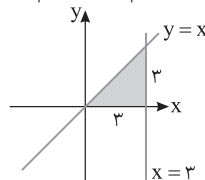


ناحیه $3 \leq x \leq 9$ بین دو خط $x = 3$ و $x = 9$ قرار دارد که در شکل زیر مشخص شده است.



بنابراین ناحیه مورد نظر، اشتراک دو شکل بالا است که یک مثلث قائم الزاویه

به اضلاع قائمه ۳ و ۳ است. پس $\frac{1}{2}(3)(3) = \frac{9}{2}$ مساحت ناحیه مورد نظر.



۶۸۳ (۲) دو بردار $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ قطره های متوازی الاضلاعی هستند که

$\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع مجاور آن هستند. چون

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 1^2}$$

پس در این متوازی الاضلاع دو قطر هم اندازه هستند. در نتیجه این متوازی الاضلاع مستطیل است و اضلاع مجاور مستطیل بر هم عمودند.

بنابراین $\vec{a} \perp \vec{b}$ پس $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

۶۸۴ (۲) اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع مجاور یک متوازی الاضلاع باشند، آن گاه

$\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ قطره های این متوازی الاضلاع هستند. فرض کنید

$\vec{a} + \vec{b} = (-1, 3, 5)$ و $\vec{a} - \vec{b} = (3, -1, 1)$ در این صورت

$$\begin{cases} \vec{r}\vec{a} = (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}) = (2, 2, 6) \Rightarrow \vec{a} = (1, 1, 3) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{11} \\ \vec{r}\vec{b} = (\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} - \vec{b}) = (-4, 4, 4) \Rightarrow \vec{b} = (-2, 2, 2) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{12} \end{cases}$$

پس نسبت اندازه ضلع بزرگ تر به اندازه ضلع کوچک تر این متوازی الاضلاع

$$\text{برابر است با } \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{11}}.$$

۶۸۵ (۲) راه حل اول فرض کنید $\vec{a}'$ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار

$\vec{c}$ و $\vec{b}'$ تصویر قائم $\vec{b}$ بر امتداد بردار $\vec{c}$ باشد و $\vec{a}' = -\vec{b}'$ می دانیم

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} \vec{c} \quad \text{و} \quad \vec{b}' = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} \vec{c} \quad \text{بنابراین}$$

$$\vec{a}' - \vec{b}' = -\vec{b}' \Rightarrow \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} \vec{c} = -\frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} \vec{c} \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{c} + (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{c} = \vec{0}$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{c} = \vec{0}$$

چون بردار $\vec{c}$ غیر صفر است، پس لازم است $\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ بنابراین

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ ، یعنی بردار $\vec{a} + \vec{b}$ بر بردار $\vec{c}$ عمود است. پس گزینه ای

می تواند $\vec{a} + \vec{b}$ باشد که بر بردار $\vec{c}$ عمود باشد. اکنون گزینه ها را بررسی می کنیم:

گزینه (۱) $4 - 1 - 2 \neq 0 \Rightarrow (2, -1, 2) \cdot (2, 1, -1) = 4 - 1 - 2 \neq 0$ ، پس گزینه (۱) درست نیست.

گزینه (۲) $2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow (2, -1, 2) \cdot (1, 1, -1) = 2 - 1 - 1 = 0$ ، پس گزینه (۲) درست است.

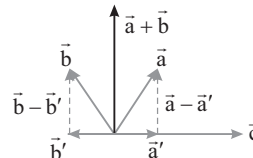
بنابراین نیازی به بررسی گزینه های دیگر نیست.

راه حل دوم مطابق شکل، بردارهای $\vec{a} - \vec{a}'$ و $\vec{b} - \vec{b}'$ بر بردار $\vec{c}$ عمودند.

پس مجموع آن ها بر $\vec{c}$ عمود است:

$$\vec{a} - \vec{a}' + \vec{b} - \vec{b}' = (\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a}' + \vec{b}') = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} \perp \vec{c}$$

که در بین گزینه ها فقط در گزینه (۲) این شرط برقرار است.



۶۸۶ (۲) فرض می کنیم $\vec{a} = (x, y, z)$ و $\vec{b} = (2, 1, 1)$ در این صورت

بنابر نابرابری کوشی - شوارتز،

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow |2x + y + z| \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{4 + 1 + 1}$$

$$|2x + y + z| \leq \sqrt{6} \sqrt{6} \Rightarrow |2x + y + z| \leq 6$$

بنابراین بیشترین مقدار $2x + y + z$ برابر ۶ است.

۶۹۸ ضرب خارجی روی جمع بردارها خاصیت توزیع پذیری دارد. بنابراین

$$|\vec{r}\vec{a} \times (\vec{a} - \frac{\vec{b}}{3})| = 8 \Rightarrow |\vec{r}\vec{a} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b}| = 8 \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 8$$

اکنون از اتحاد $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$ استفاده و مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b}$ را تعیین می کنیم:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \Rightarrow 8^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 3^2 \times 4^2$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 144 - 64 = 80 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm 4\sqrt{5}$$

چون زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ منفرجه است، پس $\vec{a} \cdot \vec{b}$ منفی است، یعنی جواب $-4\sqrt{5}$ درست است. بنابراین

$$\vec{r}\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{r}\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{r}\vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{r}\vec{b} \cdot \vec{a} + 2|\vec{b}|^2 = 2(-4\sqrt{5}) + 2(3)^2 = 18 - 8\sqrt{5}$$

۶۹۹ می دانیم $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ ، $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ ، $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ ، اکنون به دست می آید

$$((\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{j}) \times \vec{k} = (\vec{k} \times \vec{j}) \times \vec{k} = (-\vec{i}) \times \vec{k} = \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad (۱)$$

$$\vec{j} \times (\vec{i} - \vec{k}) = \vec{j} \times \vec{i} - \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} - \vec{i} \quad (۲)$$

از برابری های (۱) و (۲) نتیجه می گیریم

$$((\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{j}) \times \vec{k} - \vec{j} \times (\vec{i} - \vec{k}) = \vec{j} + \vec{k} + \vec{i} - \vec{j} = \vec{i} + \vec{k}$$

در نتیجه طول بردار مورد نظر برابر است با $|\vec{i} + \vec{k}| = \sqrt{2}$.

۷۰۰ طرفین تساوی داده شده را در $\vec{a}$ ضرب داخلی می کنیم. چون

$$\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

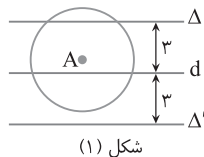
$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} m & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$m \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$-11m + 12 + 10 = 0 \Rightarrow -11m = -22 \Rightarrow m = 2$$

۷۰۱ نقطاتی که از A به فاصله ۳



شکل (۱)

سانتی متر هستند روی دایره ای به مرکز A و شعاع ۳ سانتی متر قرار دارند و نقطاتی که از خط d به فاصله ۳ سانتی متر هستند روی دو خط موازی Δ' و Δ'' در طرفین خط d و به فاصله ۳ سانتی متر از آن واقع اند. وضعیت های مختلف دایره و خطوط

Δ' و Δ'' را نسبت به هم بررسی می کنیم.

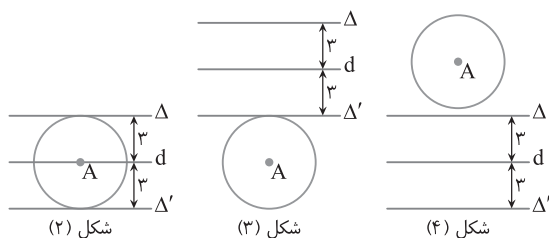
۱- فقط یکی از دو خط Δ' و Δ'' دایره را در دو نقطه قطع می کند (شکل (۱)).

۲- دایره بر هر دو خط Δ' و Δ'' مماس می شود (شکل (۲)).

۳- دایره فقط بر یکی از خطوط Δ' و Δ'' مماس می شود (شکل (۳)).

۴- دایره اصلاً هیچ یک از خطوط Δ' و Δ'' را قطع نمی کند (شکل (۴)).

بنابراین حداکثر ۲ نقطه با این شرایط وجود دارند.



شکل (۲)

شکل (۳)

شکل (۴)

۶۹۲ تصویر قائم نقطه $A(x, y, z)$ روی صفحه xz نقطه

$H(x, 0, z)$ و قرینه نقطه A نسبت به صفحه yz نقطه $B(-x, y, z)$ است. پس

$$A(2, -1, 3) \xrightarrow[\text{صفحه } xz]{\text{تصویر قائم روی}} A'(2, 0, 3)$$

$$A(2, -1, 3) \xrightarrow[\text{صفحه } yz]{\text{قرینه A نسبت به}} A''(-2, -1, 3)$$

اگر M وسط $A'A''$ باشد، مختصات M به صورت زیر به دست می آید:

$$M = \frac{A' + A''}{2} = (0, -1, 3) \Rightarrow x_M + y_M + z_M = 0 - 1 + 3 = 2$$

۶۹۳ بردار $\vec{c}$ هم راستا و غیر هم جهت با بردار $\vec{a} + \vec{b}$ است، پس $\vec{c}$

یک مضرب منفی $\vec{a} + \vec{b}$ است. توجه کنید که

$$\vec{a} + \vec{b} = (1, -1, 2) + (3, 1, 4) = (4, 0, 6)$$

در بین گزینه ها فقط بردار $(-\frac{4}{\sqrt{13}}, 0, -\frac{6}{\sqrt{13}})$ مضرب منفی $\vec{a} + \vec{b}$ است.

۶۹۴ نقاط A، B و C روی یک خط قرار دارند هرگاه $|\vec{AB}| = |\vec{AC}|$.

پس باید مختصات بردارهای $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ متناسب باشند:

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (n, 0, 3) - (-2, n-1, m+1) = (n+2, -n+1, 2-m)$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (-1, n, 0) - (-2, n-1, m+1) = (1, 1, -m-1)$$

بنابراین

$$|\vec{AB}| = |\vec{AC}| \Rightarrow \frac{n+2}{1} = \frac{-n+1}{1} = \frac{2-m}{-m-1}$$

$$\frac{n+2}{1} = \frac{-n+1}{1} \Rightarrow 2n = -1 \Rightarrow n = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{n+2}{1} = \frac{2-m}{-m-1} \Rightarrow \frac{-1}{2} + 2 = \frac{2-m}{-m-1}$$

$$2-m = -\frac{3}{2}m - \frac{3}{2} \Rightarrow m = -7$$

در نتیجه $m+n = -7 - \frac{1}{2} = -\frac{15}{2}$.

۶۹۵ از $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ نتیجه می گیریم $\vec{a} \perp \vec{b}$ و چون $|\vec{b}| = |\vec{a}| = 2$ پس

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 + 4 - 0 = 8 \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{2}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{2}$$

۶۹۶ عبارت خواسته شده را به صورت زیر می نویسیم:

$$\vec{r}\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$= \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = -\vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{a} = -|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = -4 - 4 = -8$$

۶۹۷ می دانیم ضرب داخلی روی جمع بردارها خاصیت توزیع پذیری

دارد. ابتدا طرف راست تساوی داده شده را ساده می کنیم. توجه کنید که بردار

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \text{ و } \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \text{ بنابراین}$$

$$\vec{r}\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b}) - \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a}) =$$

$$\vec{r}\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{r}\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) - \vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

پس تساوی داده شده به صورت زیر درمی آید:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow \frac{|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta}{|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta} = 1 \Rightarrow \tan \theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

۴ ۷۰۲ می‌دانیم در هر مثلث هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است، پس

$$x+2 < 2x-3+4x-7 \Rightarrow 12 < 5x \Rightarrow x > \frac{12}{5}$$

$$2x-3 < x+2+4x-7 \Rightarrow 2 < 3x \Rightarrow x > \frac{2}{3}$$

$$4x-7 < 2x-3+x+2 \Rightarrow x < 6$$

اشتراک این نابرابری‌ها به صورت $\frac{12}{5} < x < 6$ است. توجه کنید که در این ناحیه $x+2$ ، $2x-3$ و $4x-7$ مثبت هستند.

۴ ۷۰۳ با توجه به شکل زیر نتیجه می‌گیریم

$$\begin{cases} \hat{C}_1 = \hat{C}_2 = 18^\circ - 2y \\ \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 18^\circ - 2x \end{cases} \xrightarrow{+} \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 36^\circ - 2x - 2y \quad (1)$$

از طرف دیگر در مثلث ABC،

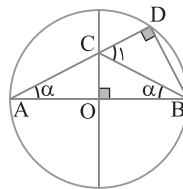
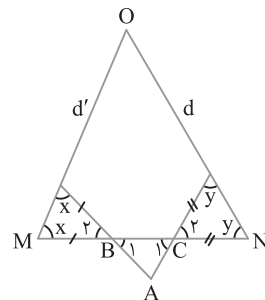
$$\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 18^\circ - \hat{A} \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 18^\circ - 10^\circ = 8^\circ \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$8^\circ = 36^\circ - 2x - 2y \Rightarrow x + y = 14^\circ$$

اکنون اگر نقطه تلاقی دو خط d و d' را O در نظر بگیریم، آن‌گاه در مثلث OMN،

$$\hat{O} = 18^\circ - (x + y) = 18^\circ - 14^\circ \Rightarrow \hat{O} = 4^\circ$$



۳ ۷۰۴ با توجه به شکل مقابل چون زاویه

C_1 زاویه خارجی مثلث ABC است، پس

$\hat{C}_1 = 2\alpha$. همچنین در مثلث قائم‌الزاویه BDC،

بنابر نسبت‌های مثلثاتی، $\cos \hat{C}_1 = \frac{CD}{CB}$. از

طرف دیگر، $CB = CA$ ، در نتیجه

$$\cos 2\alpha = \frac{CD}{CA} \text{ یعنی } \cos \hat{C}_1 = \frac{CD}{CA}$$

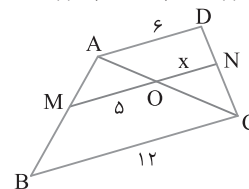
بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\triangle ABC: OM \parallel BC \Rightarrow \frac{OM}{BC} = \frac{AO}{AC} \Rightarrow \frac{5}{12} = \frac{AO}{AC} \quad (1)$$

$$\triangle ADC: ON \parallel AD \Rightarrow \frac{ON}{AD} = \frac{OC}{AC} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{OC}{AC} \quad (2)$$

با جمع تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{5}{12} + \frac{x}{6} = \frac{AO+OC}{AC} \Rightarrow \frac{5}{12} + \frac{x}{6} = 1 \Rightarrow \frac{x}{6} = 1 - \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{7}{12} \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$



۱ ۷۰۶ از قضیه میان خط نتیجه می‌شود

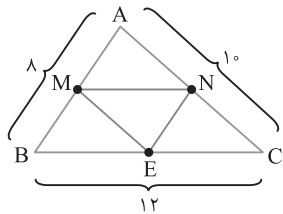
$$\begin{cases} \text{AB وسط M} \\ \text{AC وسط N} \end{cases} \Rightarrow MN = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\begin{cases} \text{AC وسط N} \\ \text{BC وسط E} \end{cases} \Rightarrow NE = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\begin{cases} \text{BC وسط E} \\ \text{AB وسط M} \end{cases} \Rightarrow EM = \frac{AC}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

بنابراین

$$\frac{\text{محیط MNEB}}{\text{محیط MNCE}} = \frac{MN+NE+EB+BM}{MN+NC+CE+EM} = \frac{6+4+6+4}{6+5+6+5} = \frac{20}{22} = \frac{10}{11}$$



۱ ۷۰۷ ابتدا با استفاده از قضیه فیثاغورس طول AB را به دست می‌آوریم

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 25^2 = AB^2 + 7^2 \Rightarrow 25^2 - 7^2 = AB^2$$

$$AB^2 = (25-7)(25+7) = 18 \times 32 = 36 \times 16 \Rightarrow AB = 6 \times 4 = 24$$

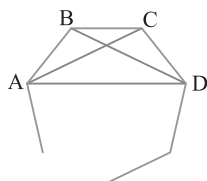
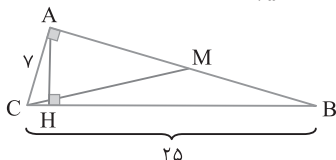
پس ضلع AB ضلع متوسط این مثلث است. اگر CM میانه وارد بر ضلع AB باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned} \triangle AMC: CM^2 &= AC^2 + AM^2 - 2 \cdot AC \cdot AM \cdot \cos \frac{2\pi}{3} \\ &= 49 + 144 = 193 \Rightarrow CM = \sqrt{193} \end{aligned}$$

از رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه طول ارتفاع AH را به دست می‌آوریم:

$$AB \times AC = AH \times BC \Rightarrow 24 \times 7 = AH \times 25 \Rightarrow AH = \frac{168}{25}$$

$$\frac{CM}{AH} = \frac{\sqrt{193}}{\frac{168}{25}} = \frac{25\sqrt{193}}{168} \text{ بنابراین}$$



۱ ۷۰۸ از هر رأس n ضلعی محدب

$n-3$ قطر می‌گذرد. پس ظاهراً از چهار

رأس متوالی آن $4(n-3)$ قطر عبور می‌کند

ولی سه تا از قطرهای دو بار حساب شده‌اند.

مثلاً، در شکل مقابل از رأس A دو قطر AD

و AC دو بار حساب می‌شوند، یک بار از

رأس A و بار دیگر از رأس‌های C و D. به

طور مشابه قطر BD دو بار حساب می‌شود.

بنابراین تعداد قطرهای رسم شده از چهار

رأس متوالی برابر $4(n-3)-3$ است. پس

$$4(n-3)-3=33 \Rightarrow 4(n-3)=36 \Rightarrow n-3=9 \Rightarrow n=12$$

$$\text{در نتیجه } \frac{1}{2}n(n-3) = \frac{1}{2}(12)(12-3) = 54 \text{ قطرها.}$$

۷۱۳ ۲ با توجه به شکل زیر، مثلث ABD متساوی الساقین با زاویه رأس

$$\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = \frac{180^\circ - 15^\circ}{2} = 15^\circ$$

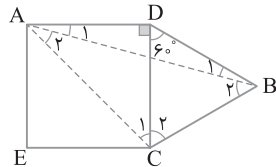
مثلث BDC متساوی الاضلاع است، پس $\hat{B}_2 = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$ ، از طرف دیگر،

قطر مربع نیمساز است، پس $\hat{C}_1 = 45^\circ$ ، بنابراین $\hat{ACB} = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$ ،

در ضمن $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 45^\circ$ ، پس $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 45^\circ$ ، در نتیجه $\hat{A}_2 = 30^\circ$ ،

بنابراین بزرگترین زاویه مثلث ABC برابر 105° و کوچکترین زاویه آن 30° است،

پس نسبت این دو زاویه برابر $\frac{105^\circ}{30^\circ} = \frac{7}{2}$ است.



۷۱۴ ۳ فرض کنید $AB = x$ ، در این صورت تناسبهای زیر به دست می آید

$$\frac{x}{2} = \frac{4}{6} \Rightarrow x = \frac{4}{3}, \quad \frac{x}{4} = \frac{6}{2} \Rightarrow x = 12, \quad \frac{x}{6} = \frac{2}{4} \Rightarrow x = 3$$

پس سه مقدار مختلف برای طول پاره خط AB به دست می آید.

۷۱۵ ۴ بنابر فرض تست اگر MB را برابر x در نظر بگیریم، آن گاه

$$AM = 2x, \quad \text{چون محیط متوازی الاضلاع برابر } 20 \text{ است، پس}$$

$$10 = x + MN \Rightarrow MN = 10 - x$$

از طرف دیگر، بنابر تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC ،

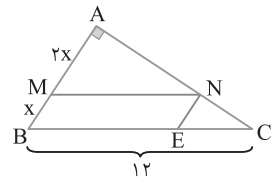
$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{2x}{3x} = \frac{10-x}{12} \Rightarrow 24x = 30x - 3x^2$$

$$3x^2 = 6x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow AB = 6$$

اکنون می توانیم اندازه ضلع AC را با استفاده از قضیه فیثاغورس به دست آوریم:

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 12^2 - 6^2 = 108 \Rightarrow AC = 6\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} (6)(6\sqrt{3}) = 18\sqrt{3}$$



۷۱۶ ۳ اعداد ۹، ۱۲ و ۱۵ طولهای اضلاع یک مثلث قائم الزاویه

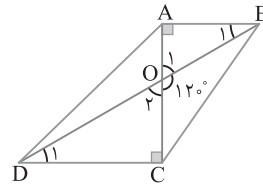
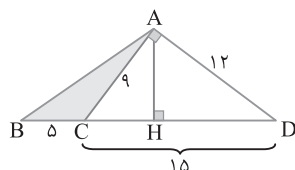
هستند، زیرا $15^2 = 12^2 + 9^2$ ، پس مثلث ACD در رأس A قائم الزاویه

است. ارتفاع AH در این مثلث قائم الزاویه را رسم می کنیم. مسلماً ارتفاع

مثلث ABC نیز هست. بنابر روابط طولی در مثلث قائم الزاویه ACD ،

$$AH \times CD = AC \times AD \Rightarrow AH \times 15 = 9 \times 12 \Rightarrow AH = \frac{36}{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \left(\frac{36}{5} \right) (15) = 18$$



۷۰۹ ۱ زاویه BOC برابر

120° است، پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 60^\circ$ ،

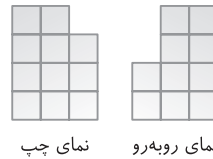
بنابراین $\hat{B}_1 = \hat{D}_1 = 30^\circ$ ، می دانیم

در مثلث قائم الزاویه ضلع روبه رو به

زاویه 30° نصف وتر است. پس

$$\begin{cases} \triangle OAB: \hat{B}_1 = 30^\circ \Rightarrow OA = \frac{1}{2} OB \\ \triangle OCD: \hat{D}_1 = 30^\circ \Rightarrow OC = \frac{1}{2} OD \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} OA + OC = \frac{1}{2} (OB + OD) \Rightarrow AC = \frac{1}{2} BD$$



۷۱۰ ۱ نمای چپ و نمای روبه روی

شکل داده شده به صورت مقابل است:

نمای چپ از ۱۱ مربع کوچک و نمای

روبه رو از ۱۰ مربع کوچک تشکیل شده

است، پس نسبت مساحت نمای چپ به

مساحت نمای روبه رو برابر $\frac{11}{10}$ است.

۷۱۱ ۱ بنابر فرضهای سؤال شکل زیر را رسم می کنیم. می دانیم در

مثلث متساوی الساقین دو زاویه مجاور قاعده مساوی اند، پس

$$BM = BA \Rightarrow \hat{M}_1 = x + z, \quad CN = CA \Rightarrow \hat{N}_1 = x + y$$

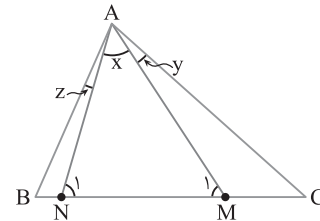
با جمع تساویهای بالا نتیجه می گیریم:

$$\hat{M}_1 + \hat{N}_1 = 2x + y + z \xrightarrow{\hat{M}_1 + \hat{N}_1 = 180^\circ - x}$$

$$180^\circ - x = 2x + y + z \Rightarrow 180^\circ = 2x + x + y + z$$

از طرف دیگر چون $\hat{A} = 72^\circ$ ، پس $x + y + z = 72^\circ$ ، بنابراین

$$180^\circ = 2x + 72^\circ \Rightarrow 2x = 108^\circ \Rightarrow x = 54^\circ$$



۷۱۲ ۳ مثلث ABM متساوی الساقین است، پس $\hat{M}_1 = \hat{A}_1$ ، در

نتیجه $\hat{M}_2 = \hat{A}_2$ ، بنابراین

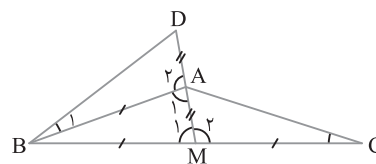
$$\begin{cases} AD = AM \\ AB = MC \end{cases} \xrightarrow{\text{(ض.ض)}} \triangle ABD \cong \triangle MCA \Rightarrow \hat{C} = \hat{B}_1$$

$$\hat{A}_2 = \hat{M}_2$$

چون $\hat{C} + \hat{D} = 61^\circ$ ، پس $\hat{B}_1 + \hat{D} = 61^\circ$ ، از طرف دیگر، زاویه خارجی

مثلث ABD است. پس $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 + \hat{D} = 61^\circ$ ، بنابراین $\hat{M}_1 = 61^\circ$ ، در نتیجه

$$\hat{ABC} = 180^\circ - (61^\circ + 61^\circ) = 58^\circ$$



۷۲۰ ۱ نماهای مختلف این شکل به صورت زیر است:



نمای روبه‌رو: $n_1 = 15$



نمای بالا: $n_2 = 15$



نمای چپ: $n_3 = 9$

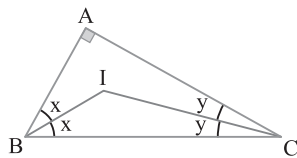
$$\frac{n_1 + n_2}{n_3} = \frac{15 + 15}{9} = \frac{10}{3} \text{ پس}$$

۷۲۱ ۲ راه‌حل اول با توجه به فرض سؤال شکل زیر به دست می‌آید. پس

$$\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow 2x + 2y = 90^\circ \Rightarrow x + y = 45^\circ$$

بنابراین

$$\hat{BIC} = 180^\circ - (x + y) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$



راه‌حل دوم می‌دانیم $\hat{BIC} = \frac{\hat{A}}{2} + 90^\circ$ ، در نتیجه $\hat{BIC} = \frac{90^\circ}{2} + 90^\circ = 135^\circ$

۷۲۲ ۴ بنابر فرض‌های تست شکل زیر به دست می‌آید. چون

$CA = CD$ ، پس $\hat{CAD} = \hat{D} = x$ ، در ضمن $\hat{C}_1$ زاویه خارجی مثلث

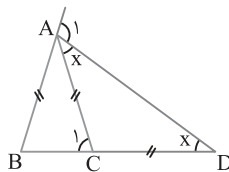
ACD است، پس $\hat{C}_1 = 2x$ و چون $AB = AC$ ، پس $\hat{B} = \hat{C}_1 = 2x$ از

طرف دیگر $\hat{A}_1$ زاویه خارجی مثلث ABD است، بنابراین

$$\hat{A}_1 = \hat{B} + \hat{D} \Rightarrow 102^\circ = 2x + x \Rightarrow 3x = 102^\circ \Rightarrow x = 34^\circ$$

پس $\hat{B} = \hat{C}_1 = 68^\circ$ ، در نتیجه $\hat{BAC} = 180^\circ - (68^\circ + 68^\circ) = 44^\circ$

بنابراین اندازه کوچک‌ترین زاویه مثلث ABC برابر 44° است.

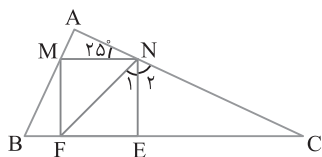


۷۲۳ ۳ می‌دانیم در مربع قطر نیمساز است، پس $\hat{N}_1 = 45^\circ$ از طرف

دیگر $MN \parallel BC$ و NC مورب است، بنابراین $\hat{C} = \hat{ANM} = 25^\circ$

مثلث قائم‌الزاویه NEC، $\hat{N}_2 = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$ ، بنابراین

$$\hat{FNC} = \hat{N}_1 + \hat{N}_2 = 45^\circ + 65^\circ = 110^\circ$$



۷۲۴ ۴ با استفاده از ویژگی‌های تناسب نتیجه می‌شود:

$$a = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{d}{4} \Rightarrow \frac{a+b+c+d}{1+2+3+4} = \frac{d}{4} \Rightarrow a+b+c+d = \frac{1}{4}d = 2/\Delta d$$

۷۱۷ ۱ اندازه هر زاویه داخلی هشت‌ضلعی منتظم برابر $180^\circ - \frac{360^\circ}{8} = 135^\circ$

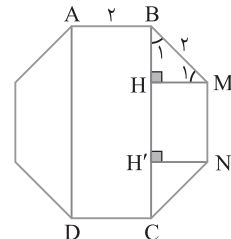
است. پس اگر عمودهای MH و NH' را بر BC وارد کنیم، آن‌گاه مثلث‌های BMH و NCH' قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین هستند. چون $BM = 2$ ، پس

$$MH^2 + BH^2 = BM^2 \Rightarrow 2BH^2 = 4 \Rightarrow BH = \sqrt{2}$$

به همین ترتیب $CH' = \sqrt{2}$. در ضمن چهارضلعی MHH'N مستطیل است، پس $HH' = MN = 2$ در نتیجه

$$BC = BH + HH' + CH' = \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 2$$

بنابراین $S_{ABCD} = AB \times BC = 2(2\sqrt{2} + 2) = 4(\sqrt{2} + 1)$

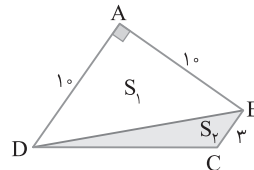


۷۱۸ ۲ راه‌حل اول توجه کنید که مساحت دوزنقه ABCD برابر است با

$$S = \frac{1}{2} AB \times (AD + BC) = \frac{1}{2} \times 10 \times (10 + 3) = 65$$

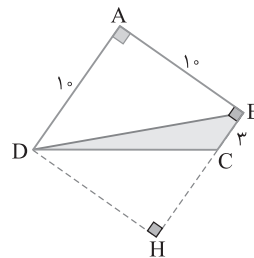
از طرف دیگر $S_1 = \frac{1}{2} AD \times AB = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50$ اکنون به دست می‌آید

$$S_p = S - S_1 = 65 - 50 = 15$$



راه‌حل دوم ارتفاع وارد بر ضلع BC در مثلث DBC را رسم می‌کنیم. طول این

ارتفاع برابر ۱۰ است، پس $S_{DBC} = \frac{1}{2} (10) \times 3 = 15$



۷۱۹ ۱ مساحت قسمت رنگی مساوی مساحت مستطیل منهای مجموع

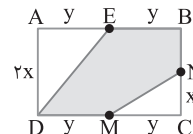
مساحت‌های دو مثلث قائم‌الزاویه ADE و MNC است، پس

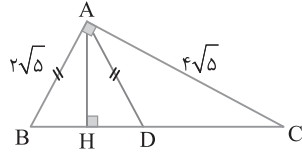
$$52 = S_{ABCD} - (S_{ADE} + S_{MNC})$$

$$52 = (2x)(2y) - \left(\frac{1}{2}(2x)(y) + \frac{1}{2}xy \right)$$

$$52 = 4xy - \frac{3}{2}xy \Rightarrow 52 = \frac{5}{2}xy \Rightarrow xy = \frac{2 \times 52}{5}$$

مساحت مستطیل برابر $4xy$ است، پس $\frac{4 \times 16}{5} = \frac{64}{5}$ مساحت مستطیل.

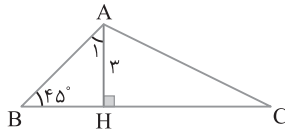




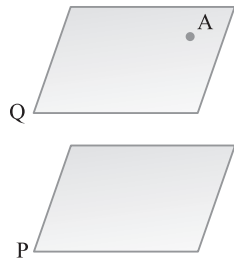
۷۲۹ (۴) چون $\hat{B} = 45^\circ$ ، پس $\hat{A}_1 = 45^\circ$ ، در نتیجه $BH = AH = 3$ ،
از طرف دیگر،

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow \frac{9}{2} (1 + \sqrt{3}) = \frac{1}{2} (3) (BC) \Rightarrow BC = 3 + 3\sqrt{3}$
چون $BH = 3$ و $BC = 3 + 3\sqrt{3}$ ، پس $HC = 3\sqrt{3}$ ، در نتیجه بنابر
قضیه فیثاغورس،

$$\triangle AHC: AC^2 = AH^2 + CH^2 = 3^2 + (3\sqrt{3})^2 = 36 \Rightarrow AC = 6$$



۷۳۰ (۳) تمام خطوط گذرنده از A و موازی P در صفحه ای شامل A و
موازی صفحه P قرار دارند (صفحه Q در شکل زیر). اگر خط d در نقطه A بر
صفحه Q عمود باشد، آن گاه بر P هم عمود است و تعداد خطوط گذرنده از A
در صفحه Q که بر d عمود هستند، بی نهایت است. پس کافی است $d \perp P$.
توجه کنید که باید A روی خط d باشد تا شرایط سؤال برقرار باشد.

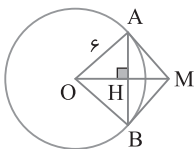
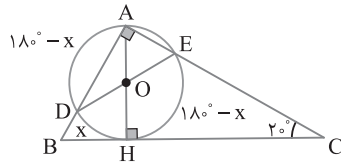


ریاضی خارج از کشور - ۹۵

۷۳۱ (۳) چون DE و AH قطرهای دایره هستند. با فرض $DH = x$

نتیجه می شود $\widehat{EH} = \widehat{AD} = 180^\circ - x$ ، اکنون به دست می آید

$$\hat{C} = \frac{\widehat{ADH} - \widehat{EH}}{2} \Rightarrow 2^\circ = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 4^\circ$$



۷۳۲ (۴) مرکز O را به نقاط A و B
وصل می کنیم. چون $OA = OB$ و
 $MA = MB$ پس OM عمود منصف
AB است. بنابر روابط طولی در مثلث قائم الزاویه،

$$\triangle OAM: MA^2 = OM^2 - OA^2 = 8^2 - 6^2 = 28 \Rightarrow MA = 2\sqrt{7}$$

$$\triangle OAM: AH \times OM = OA \times MA \Rightarrow AH \times 8 = 6 \times 2\sqrt{7}$$

$$AH = \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

$$AB = 2AH = 3\sqrt{7} \text{ بنابرین}$$

۷۲۵ (۲) مثلث های ACE، ADE و ABD در ارتفاع رسم شده از رأس
A مشترک هستند، پس نسبت مساحت های آنها مساوی نسبت قاعده های
نظیر این ارتفاع در آنها است. بنابر فرض مسئله،

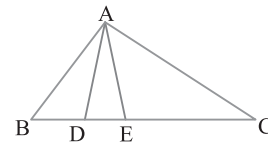
$$\frac{S_{ACE}}{S_{ADE}} = 4 \Rightarrow \frac{CE}{DE} = 4 \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{CE}{DC} = \frac{4}{5} \Rightarrow DC = \frac{5}{4} CE$$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ABD}} = 3 \Rightarrow \frac{CE}{BD} = 3 \Rightarrow BD = \frac{1}{3} CE$$

با توجه به برابری های $DE = \frac{1}{4} CE$ و $BD = \frac{1}{3} CE$ نتیجه می شود:

$$BE = BD + DE = \frac{1}{3} CE + \frac{1}{4} CE = \frac{7}{12} CE$$

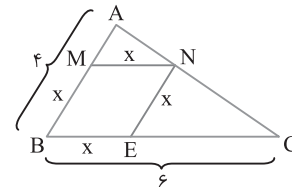
$$\text{بنابراین } \frac{DC}{BE} = \frac{\frac{5}{4} CE}{\frac{7}{12} CE} = \frac{15}{7}$$



۷۲۶ (۳) طول هر ضلع لوزی را برابر x در نظر می گیریم. چون AB و NE
موازی هستند، بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{NE}{AB} = \frac{CE}{CB} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{6-x}{6} \Rightarrow x = 2$$

بنابراین محیط لوزی BMNE مساوی $4x = 9/6$ است.



۷۲۷ (۴) اندازه هر زاویه داخلی n ضلعی منتظم برابر $180^\circ - (\frac{360^\circ}{n})$

است. پس هر چقدر n بزرگ تر باشد $(\frac{360^\circ}{n})$ کوچک تر و در نتیجه

$180^\circ - (\frac{360^\circ}{n})$ بزرگ تر است. بنابراین یازده ضلعی منتظم در بین گزینه ها

بزرگ ترین زاویه داخلی را دارد.

۷۲۸ (۱) ابتدا با استفاده از قضیه فیثاغورس اندازه وتر BC را به دست می آوریم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = (2\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2 = 20 + 80 = 100 \Rightarrow BC = 10$$

اکنون اندازه ارتفاع AH را با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم الزاویه تعیین می کنیم:

$$AB \times AC = AH \times BC \Rightarrow 2\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} = AH \times 10 \Rightarrow AH = 4$$

بنابراین

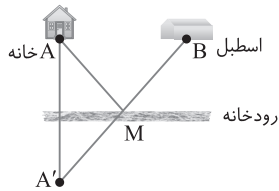
$$\triangle ABH: BH^2 = AB^2 - AH^2 = (2\sqrt{5})^2 - 4^2 = 20 - 16 = 4$$

$$BH = 2$$

در مثلث متساوی الساقین ABD ارتفاع AH میانه هم هست، پس

$$BD = 2BH = 4$$

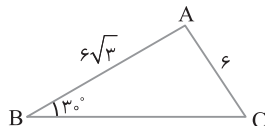
۷۳۷ ۳ موقعیت خانه را با نقطه A و موقعیت اسطبل را با نقطه B مشخص می‌کنیم. بازتاب A را نسبت به خط ساحل رودخانه به دست آورده و می‌نامیم. از A' به B وصل می‌کنیم تا خط ساحل رودخانه را در M قطع کند. بنابر مسئله هرون مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیر است. پس تبدیل بازتاب برای پیدا کردن کمترین مسیر به کار برده می‌شود.



۷۳۸ ۲ بنابر قضیه سینوس‌ها،

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{6\sqrt{3}}{\sin \hat{C}} = \frac{6}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sin \hat{C}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین $\hat{C} = 60^\circ$ یا $\hat{C} = 120^\circ$. پس $\hat{A} = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$ یا $\hat{A} = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$



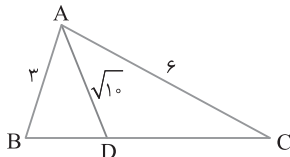
۷۳۹ ۴ از قضیه نیمسازها نتیجه می‌شود

$$AD \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow DC = 2BD$$

نیمساز AD $\Rightarrow AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$

$$10 = 3 \times 6 - BD(2BD) \Rightarrow 2BD^2 = 8 \Rightarrow BD = 2$$

بنابراین $DC = 4$. پس $BC = 4 + 2 = 6$.



۷۴۰ ۲ فرض می‌کنیم مثلث ABC مثلث مورد نظر باشد. بنابراین

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \sin \hat{A} \Rightarrow \sqrt{189} = \frac{1}{2} (5)(6) \sin \hat{A}$$

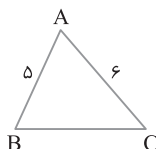
$$\sin \hat{A} = \frac{\sqrt{189}}{15} = \frac{3\sqrt{21}}{15} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

پس $\cos \hat{A} = \frac{2}{5}$ اگر $\cos \hat{A} = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \hat{A}} = \pm \sqrt{1 - \frac{21}{25}} = \pm \frac{4}{5}$ قضیه کسینوس‌ها نتیجه می‌شود

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A} = 5^2 + 6^2 - 2(5)(6)\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$= 25 + 36 - 24 = 37 \Rightarrow BC = \sqrt{37}$$

چون $BC = \sqrt{37}$ در گزینه‌ها وجود دارد، پس دیگر لازم نیست حالت $\cos \hat{A} = \frac{-2}{5}$ را در نظر بگیریم.



۷۳۳ ۱ ابتدا اندازه x را به دست می‌آوریم. می‌دانیم طول دو مماس رسم شده از یک نقطه بر دایره مساوی‌اند. پس با توجه به شکل،

$$BC = 13 \Rightarrow 8 - x + 9 - x = 13 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

پس $\frac{x}{y} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. بنابراین $y = 8 - x = 6$.

۷۳۴ ۱ راه‌حل اول در لوزی قطرهای عمود منصف یکدیگرند و نیمساز زاویه‌ها نیز هستند. پس مثلث AOD قائم‌الزاویه است و در آن $\hat{A}_1 = 15^\circ$. پس ارتفاع OH در این مثلث ربع وتر است، بنابراین

$$OH = \frac{1}{2} AD \xrightarrow{AD=8} OH = 2$$

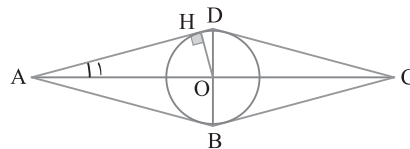
بنابراین شعاع دایره محاطی این لوزی برابر ۲ است.

راه‌حل دوم شعاع دایره محاطی هر چندضلعی محیطی برابر $\frac{S}{P}$ است که در آن S مساحت چندضلعی و P نصف محیط آن است. بنابراین

$$AB^2 \sin 30^\circ = 8^2 \times \frac{1}{2} = 32 \Rightarrow S = 32$$

$$4 \times 8 = 32 \Rightarrow P = 16$$

پس $\frac{S}{P} = \frac{32}{16} = 2$ شعاع دایره محاطی لوزی.



۷۳۵ ۱ سه مثلث ABH، ACH و ABC دایره‌دو متشابه‌اند. توجه کنید که نسبت شعاع‌های دایره‌های محاطی مثلث‌های متشابه برابر نسبت اضلاع نظیر آن‌ها یا همان نسبت تشابه آن‌ها است. بنابراین

$$\triangle ABH \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{r_1}{r} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{r_1}{AB} = \frac{r}{BC}$$

$$\triangle ACH \sim \triangle BCA \Rightarrow \frac{r_2}{r} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{r_2}{AC} = \frac{r}{BC}$$

$$\frac{r}{BC} = \frac{r_1}{AB} = \frac{r_2}{AC}$$

در نتیجه بنابر ویژگی‌های تناسب

$$\frac{r}{BC} = \frac{r + r_1 + r_2}{BC + AB + AC}$$

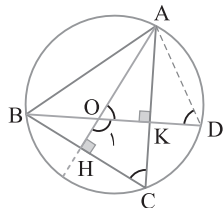
می‌دانیم $BC + AB + AC = 2P$ و $r = \frac{S}{P}$ که S مساحت مثلث ABC است.

$$\frac{\frac{S}{P}}{\frac{2P}{BC}} = \frac{r + r_1 + r_2}{2P} \Rightarrow r + r_1 + r_2 = \frac{2S}{BC}$$

در نتیجه

چون $S = \frac{1}{2} AH \times BC$ ، پس $r + r_1 + r_2 = AH$.

۷۳۶ ۲ دو دایره $C(O, r)$ و $C'(O', r)$ انتقال یافته یکدیگر با بردار OO' هستند و همین دو دایره دوران یافته یکدیگر با زاویه‌ای به اندازه 180° و به مرکز وسط OO' هستند. همچنین این دو دایره مجانس معکوس یکدیگر به مرکز وسط OO' و با نسبت -۱ هستند. ولی مماس مشترک‌های خارجی این دو دایره موازی‌اند، پس نمی‌توانند مجانس مستقیم یکدیگر باشند.



۷۴۵ ۳ در هر n ضلعی تعداد قطرهای برابر $\frac{1}{2}n(n-3)$ است. پس بنابر

فرض سؤال،

$$\frac{1}{2}n(n-3) = n+18 \Rightarrow n^2 - 3n = 2n + 36$$

$$n^2 - 5n - 36 = 0 \Rightarrow (n-9)(n+4) = 0 \Rightarrow n = 9$$

از طرف دیگر هر n ضلعی منتظم دایره محیطی خود را به n کمان مساوی تقسیم می‌کند به طوری که اندازه هر کمان برابر $\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$ است. در نتیجه، زاویه بین دو

قطر متوالی گذرنده از یک رأس در n ضلعی منتظم زاویه‌ای محاطی روبه‌رو به کمان $\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$ است، پس اندازه این زاویه برابر $\left(\frac{180}{n}\right)^\circ$ است. در نتیجه زاویه بین دو

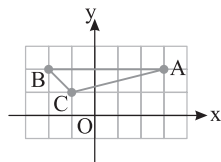
قطر متوالی گذرنده از یک رأس در نه ضلعی منتظم مساوی 20° است. $\left(\frac{180}{9}\right)^\circ = 20^\circ$

۷۴۶ ۱ می‌دانیم در تبدیل بازتاب اگر نقطه‌ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود. پس تبدیل بازتاب نامتناهی نقطه ثابت دارد. ولی انتقال در حالت کلی (به جز انتقال با بردار صفر) نقطه ثابت ندارد و تجانس و دوران یک نقطه ثابت دارند.

۷۴۷ ۲ فرض کنید S مساحت مثلث ABC و S' مساحت مجانس آن

باشد. اگر نسبت تجانس برابر k باشد، آن‌گاه $S' = k^2 S$. بنابراین باید مساحت مثلث ABC را به دست آوریم و ۹ برابر کنیم. با توجه به شکل، ارتفاع نظیر ضلع AB برابر ۱ و طول ضلع AB برابر ۵ است. پس

$$S' = 9 \times \frac{5}{2} = \frac{45}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}(1)(5) = \frac{5}{2}$$



۷۴۸ ۱ از قضیه سینوس‌ها نتیجه می‌شود

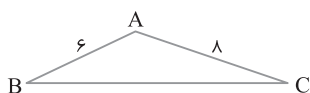
$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{12}{\sin 30^\circ} = \frac{12\sqrt{3}}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{12}{\frac{1}{2}} = \frac{12\sqrt{3}}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین $\hat{B} = 60^\circ$ یا $\hat{B} = 120^\circ$. چون مثلث ABC منفرجه است، پس $\hat{B} = 120^\circ$ قابل قبول است. در نتیجه $\hat{C} = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$.

۷۴۹ ۳ چون زاویه A منفرجه است، پس

$$BC^2 > AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 > 6^2 + 8^2 \Rightarrow BC^2 > 100 \Rightarrow BC > 10$$

از طرف دیگر بنابر نابرابری‌های مثلث $BC < 6 + 8$. بنابراین باید طول ضلع BC در نابرابری‌های $10 < BC < 14$ صدق کند. در بین گزینه‌ها تنها عدد ۱۳ در این نابرابری‌ها صدق می‌کند.

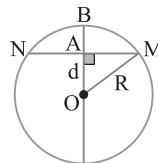


۷۴۱ ۲ راه حل اول با توجه به شکل زیر و فرض‌های سؤال $R-d=2$ و

$$R^2 - d^2 = AM^2 = 4^2$$

$$(R-d)(R+d) = 16 \Rightarrow 2(R+d) = 16$$

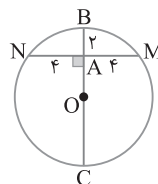
یعنی $R+d=8$ = فاصله دورترین نقطه دایره تا A .



راه حل دوم با توجه به شکل زیر و روابط طولی در دایره،

$$AB \times AC = AM \times AN \Rightarrow 2 \times AC = 4 \times 4 \Rightarrow AC = 8$$

پس فاصله دورترین نقطه دایره تا نقطه A برابر ۸ است.



۷۴۲ ۴ طول مماس مشترک خارجی و مماس مشترک داخلی دو دایره به

شعاع‌های R و R' و خط‌المرکزین d از برابری‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2 - (R-R')^2}$$

$$8 = \sqrt{d^2 - (R-R')^2} \Rightarrow 64 = d^2 - (R-R')^2$$

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^2 - (R+R')^2}$$

$$6 = \sqrt{d^2 - (R+R')^2} \Rightarrow 36 = d^2 - (R+R')^2$$

از تفاضل تساوی‌های بالا نتیجه می‌گیریم

$$28 = -(R-R')^2 + (R+R')^2$$

$$28 = -R^2 - R'^2 + 2RR' + R^2 + R'^2 + 2RR'$$

$$28 = 4RR' \Rightarrow RR' = 7$$

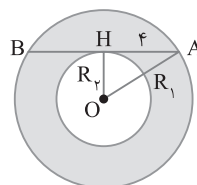
۷۴۳ ۳ فرض کنید R_1 شعاع دایره بزرگ و R_2 شعاع دایره کوچک

باشد. با توجه به شکل زیر در مثلث OAH ، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$OA^2 - OH^2 = AH^2 \Rightarrow R_1^2 - R_2^2 = 16$$

بنابراین مساحت ناحیه بین دو دایره برابر است با

$$\pi R_1^2 - \pi R_2^2 = \pi(R_1^2 - R_2^2) = 16\pi$$



۷۴۴ ۴ زاویه $\hat{AOD}$ مکمل زاویه $\hat{O}_1$ است، یعنی $\hat{AOD} + \hat{O}_1 = 180^\circ$.

چهارضلعی $OHCK$ محاطی است، چون $\hat{H} + \hat{K} = 180^\circ$. پس

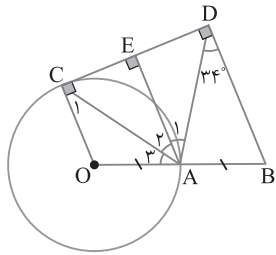
$\hat{C} + \hat{O}_1 = 180^\circ$. در نتیجه $\hat{C} = \hat{AOD}$. از طرف دیگر دو زاویه $\hat{C}$ و $\hat{D}$

زاویه‌های محاطی روبه‌رو به کمان AB هستند، پس $\hat{C} = \hat{D}$. بنابراین

$\hat{AOD} = \hat{D}$ ، در نتیجه $\hat{AOD} = \hat{ADO}$.

اکنون از برابری‌های (۱)، (۲) و (۳) به دست می‌آید

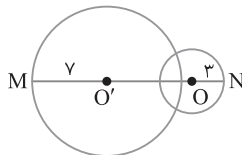
$$\widehat{OAD} = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = 3 \times 34^\circ = 102^\circ$$



ریاضی - ۹۴

۷۵۳ ۴ با توجه به شکل زیر فاصله بین دورترین نقاط دو دایره از یکدیگر است و $MN = OO' + 3 + 7 = OO' + 10$. از طرف دیگر چون دو دایره متقاطع اند، پس فقط مماس مشترک خارجی دارند و طول مماس مشترک خارجی دو دایره به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \text{طول مماس مشترک خارجی} &= \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} \\ 3 &= \sqrt{OO'^2 - (3 - 7)^2} \Rightarrow 9 = OO'^2 - 16 \Rightarrow OO'^2 = 25 \Rightarrow OO' = 5 \\ \text{بنابراین } MN &= 5 + 10 = 15 \end{aligned}$$

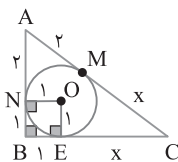


۷۵۴ ۳ از مرکز O به نقاط تماس E و N وصل می‌کنیم (شکل زیر را ببینید). چهارضلعی ONBE مربعی به طول ضلع ۱ است. از طرف دیگر، طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره برابر هستند. در نتیجه بنابر قضیه فیثاغورس و اطلاعات روی شکل،

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \Rightarrow (y+x)^2 = 3^2 + (1+x)^2 \\ 4 + x^2 + 4x &= 9 + 1 + x^2 + 2x \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

بنابراین

$$AB + AC + BC = 3 + 2 + x + 1 + x = 6 + 2x = 12 \quad (\text{محلث } ABC)$$



۷۵۵ ۱ تعداد قطره‌های هر n ضلعی برابر $\frac{1}{2}n(n-3)$ است. پس بنابر

$$\text{فرض سؤال. } \frac{1}{2}n(n-3) = 4n \Rightarrow n^2 - 3n = 8n \Rightarrow n^2 = 11n \Rightarrow n = 11$$

از طرف دیگر هر n ضلعی منتظم در یک دایره محاط است و دایره محیطی خود را به n کمان مساوی که اندازه هر کدام برابر $(\frac{360}{n})^\circ$ است تقسیم می‌کند. پس زاویه بین دو قطر متوالی گذرنده از یک رأس در n ضلعی منتظم، زاویه‌ای محاطی روبه‌رو به کمان $(\frac{360}{n})^\circ$ است. در نتیجه اندازه این زاویه برابر $(\frac{180}{n})^\circ$ است. بنابراین در یازده ضلعی منتظم اندازه زاویه بین دو قطر متوالی گذرنده از یک رأس برابر $(\frac{180}{11})^\circ$ است.

۷۵۰ ۳ از قضیه نیمسازها نتیجه می‌شود

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = \frac{3}{4}AC$$

از طرف دیگر بنابر قضیه فیثاغورس،

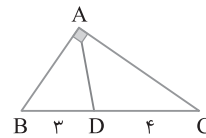
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 7^2 = (\frac{3}{4}AC)^2 + AC^2$$

$$49 = \frac{9}{16}AC^2 + AC^2 \Rightarrow 25AC^2 = 49 \times 16$$

$$AC^2 = \frac{49 \times 16}{25} \Rightarrow AC = \frac{7 \times 4}{5} = \frac{28}{5}$$

پس $AB = \frac{3}{4} \times \frac{28}{5} = \frac{21}{5}$ در نتیجه

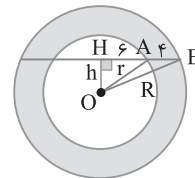
$$AC - AB = \frac{28}{5} - \frac{21}{5} = \frac{7}{5} = 1\frac{1}{5}$$



۷۵۱ ۲ راه حل اول فرض کنید شعاع دایره R و شعاع دایره r شعاع دایره کوچک باشد. با توجه به شکل در مثلث‌های قائم‌الزاویه OHA و OHB بنابر قضیه فیثاغورس. $R^2 - h^2 = 6^2$ و $R^2 - h^2 = 10^2$. در نتیجه $(R^2 - h^2) - (R^2 - h^2) = 10^2 - 6^2$

یعنی $R^2 - r^2 = 8^2$ اکنون توجه کنید که

$$(R^2 - r^2)\pi = 64\pi = \text{مساحت ناحیه محدود بین دو دایره}$$

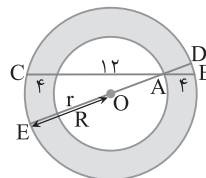


راه حل دوم بنابر فرض‌های سؤال شکل زیر را رسم می‌کنیم. توجه کنید که بنابر روابط طولی در دایره بزرگ‌تر، $AD \times AE = AB \times AC = 4 \times 16 = 64$ از طرف دیگر، $AE = R + r$ و $AD = R - r$ پس

$$(R - r)(R + r) = 64 \Rightarrow R^2 - r^2 = 64$$

در نتیجه مساحت ناحیه بین دو دایره برابر است با

$$\pi(R^2 - r^2) = 64\pi$$



۷۵۲ ۳ با توجه به فرض‌های سؤال شکل زیر را رسم کرده‌ایم. از A عمود AE را بر مماس CD رسم می‌کنیم. AE با BD موازی و AD مماس است، پس $\widehat{A}_1 = 34^\circ$ (۱)

در دوزنقه OBDC، AE میان خط است، در نتیجه مثلث ACD متساوی‌الساقین است و AE ارتفاع و نیمساز است، در نتیجه

$$\widehat{A}_2 = \widehat{A}_1 = 34^\circ \quad (۲)$$

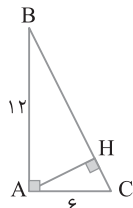
OC و AE موازی هستند و AC مماس است، پس $\widehat{C}_1 = \widehat{A}_2 = 34^\circ$

همچنین مثلث OAC متساوی‌الساقین است، در نتیجه (۳) $\widehat{A}_3 = \widehat{C}_1 = 34^\circ$

۷۶۲ ۴ فرض کنید AH ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم الزاویه ABC باشد. از روابط طولی در مثلث قائم الزاویه نتیجه می شود

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 144 + 36 = 180 \Rightarrow BC = 6\sqrt{5}$$

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times 6\sqrt{5} = 12 \times 6 \Rightarrow AH = \frac{12}{\sqrt{5}}$$



$$\frac{AH}{BC} = \frac{\frac{12}{\sqrt{5}}}{6\sqrt{5}} = \frac{2}{5}$$

بنابراین

۷۶۳ ۴ مساحت چندضلعی شبکه ای به کمک قضیه پیک به صورت زیر

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \xrightarrow{S=3} 3 = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow i = 4 - \frac{b}{2} \quad (1)$$

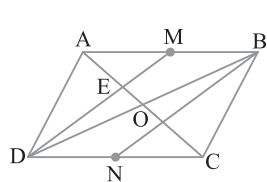
اگر $b=4$ و $i=2$ ، آن گاه رابطه (۱) درست است.

اگر $b=6$ و $i=1$ ، آن گاه رابطه (۱) درست است.

اگر $b=8$ و $i=0$ ، آن گاه رابطه (۱) درست است.

اگر $b=10$ و $i=3$ ، آن گاه رابطه (۱) نادرست است. پس (۱۰، ۳) نمی تواند

دوتایی (b, i) باشد.



۷۶۴ ۳ راه حل اول قطر BD را

رسم می کنیم تا قطر AC را در O قطع کند. در متوازی الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می کنند. بنابراین در مثلث ABD پاره خط های AO و DM میانه هستند.

بنابراین نقطه E، نقطه همرسی میانه های مثلث ABD است. بنابراین

$$DE = \frac{2}{3} DM, \quad EM = \frac{1}{3} DM \Rightarrow \frac{DE}{EM} = 2$$

راه حل دوم چون $AM \parallel DC$ ، بنابر قضیه اساسی تشابه،

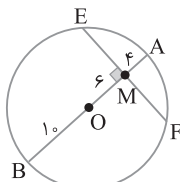
$$\triangle AME \sim \triangle CDE \Rightarrow \frac{DE}{EM} = \frac{DC}{AM} = 2$$

۷۶۵ ۴ نمای بالا و روبه روی شکل داده شده در گزینه (۴) به درستی رسم شده است.

۷۶۶ ۱ راه حل اول از M به مرکز O وصل می کنیم. سپس OM را از دو طرف امتداد می دهیم تا دایره را در نقاط A و B قطع کند. در این صورت با توجه به شکل A نزدیک ترین نقطه دایره تا M است. پس بنابر فرض $MA=4$. کوتاه ترین وتر گذرنده از M در این دایره وتر EF عمود بر OM است. در ضمن چون OM بر EF عمود است، پس وتر EF در نقطه M نصف می شود. یعنی $ME=MF$. بنابر رابطه های طولی در دایره،

$$ME \times MF = MA \times MB \xrightarrow{MA=4, MB=10-4=6} \Rightarrow ME \times ME = 4 \times 6 \Rightarrow ME^2 = 24 \Rightarrow ME = 2\sqrt{6}$$

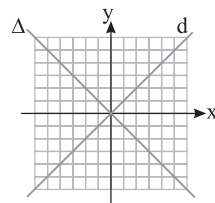
پس $EF=16$.



راه حل دوم بنابر قضیه فیثاغورس $MF = \sqrt{OF^2 - OM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

پس $EF=16$.

۷۵۶ ۳ با توجه به شکل خط d در راستای نیمساز ناحیه های اول و سوم و خط Δ در راستای نیمساز ناحیه های دوم و چهارم قرار دارد. پس این دو خط بر هم عمودند. بنابراین خط Δ دوران یافته خط d با زاویه 90° و به مرکز مبدأ مختصات است.

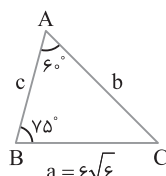
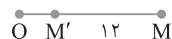


۷۵۷ ۳ بنابر تعریف تجانس، شکل سؤال به صورت زیر است. فرض می کنیم $OM' = x$. در نتیجه $OM = OM' + MM' = x + 12$. از طرف دیگر بنابر تعریف تجانس،

$$OM' = \frac{1}{4} OM \Rightarrow x = \frac{1}{4} (x + 12) \Rightarrow 4x = x + 12 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

پس $OM' = 4$ و $OM = 16$. بنابراین

$$OM^2 + OM'^2 = 16^2 + 4^2 = 256 + 16 = 272$$



۷۵۸ ۲ اندازه زاویه C برابر است با

$$180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$$

بنابر قضیه سینوس ها در مثلث ABC،

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{6\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{6\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow c = 12$$

۷۵۹ ۴ در این سؤال $AB^2 = 36$ و $AC^2 + BC^2 = 5^2 + 4^2 = 41$.

پس $AB^2 < AC^2 + BC^2$. بنابراین $\hat{C} < 90^\circ$ ، پس $\hat{C} > 90^\circ$ نادرست است.

۷۶۰ ۲ بنابر فرض سؤال BH نیمساز زاویه B است. پس از قضیه نیمسازها نتیجه می شود

$$\frac{AH}{HC} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AH}{AC} = \frac{c}{a+c} \xrightarrow{AC=b} AH = \frac{bc}{a+c}$$

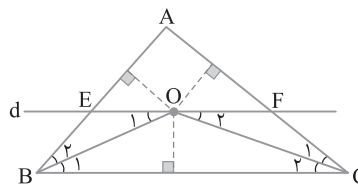
۷۶۱ ۳ چون نقطه O از اضلاع مثلث ABC به یک فاصله است. پس O نقطه تلاقی نیمسازهای مثلث ABC است. بنابراین اگر از O به رأس های B و C وصل کنیم، آن گاه OB و OC به ترتیب نیمسازهای زاویه های B و C هستند. در نتیجه

$$OE \parallel BC \xrightarrow{\text{مورب}} \hat{O}_1 = \hat{B}_1 \xrightarrow{\hat{B}_1 = \hat{B}_2} \hat{O}_1 = \hat{B}_2 \Rightarrow BE = OE$$

$$OF \parallel BC \xrightarrow{\text{مورب}} \hat{O}_2 = \hat{C}_2 \xrightarrow{\hat{C}_2 = \hat{C}_1} \hat{O}_2 = \hat{C}_1 \Rightarrow FC = OF$$

از جمع تساوی های بالا نتیجه می شود

$$BE + FC = OE + OF \Rightarrow BE + FC = EF$$



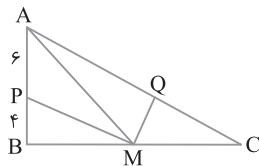
در ضمن دو مثلث AMQ و AMC در ارتفاع نظیر رأس M مشترک هستند. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایی است که این ارتفاع بر آن‌ها وارد شده است، بنابراین

$$\frac{S_{AMQ}}{S_{AMC}} = \frac{AQ}{AC} = \frac{3}{5} \quad (۱)$$

دو مثلث AMC و ABC در ارتفاع نظیر رأس A مشترک هستند، پس

$$\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = \frac{MC}{BC} = \frac{1}{2} \quad (۲)$$

از ضرب تساوی‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید $\frac{S_{AMQ}}{S_{ABC}} = \frac{3}{10}$



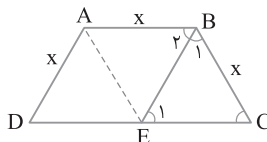
۷۷۱ فرض کنید در دوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ طول دو ساق و

طول قاعده کوچک برابر x باشند. پس بنابر فرض سؤال،

$$\Delta x \Rightarrow x + x + x + DC = \Delta x \Rightarrow DC = 2x$$

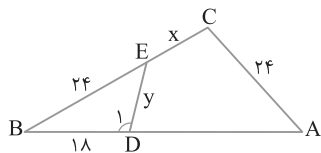
اکنون از B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا DC را در E قطع کند. در این صورت چهارضلعی $ABED$ متوازی‌الاضلاع است. پس $BE = DE = x$ ، در نتیجه $EC = x$. بنابراین مثلث BEC متساوی‌الاضلاع است، در نتیجه $\hat{B}_1 = \hat{E}_1 = \hat{C} = 60^\circ$. چون در دوزنقه زاویه‌های مجاور به ساق مکمل هم

هستند، پس $\hat{B}_2 = 60^\circ$. بنابراین BE نیمساز زاویه B است. به همین ترتیب ثابت می‌شود AE نیمساز زاویه A است. پس نقطه تلاقی نیمسازهای دو زاویه بزرگ‌تر دوزنقه وسط قاعده بزرگ‌تر است.



۷۷۲ دو مثلث BDE و BCA به حالت (زز) متشابه‌اند، بنابراین

$$\frac{BD}{BC} = \frac{DE}{AC} = \frac{BE}{AB} \quad \text{یعنی} \quad \frac{18}{x+24} = \frac{y}{24} = \frac{24}{48} \quad \text{در نتیجه} \quad x=12 \quad \text{و} \quad y=12$$



۷۷۳ با استفاده از قضیه پیک مساحت چندضلعی شبکه‌ای به صورت

زیر تعیین می‌شود:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow 7 = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow i = 8 - \frac{b}{2}$$

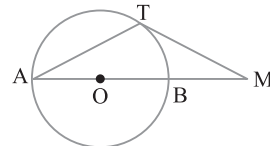
چون می‌خواهیم i بیشترین مقدار ممکن باشد، پس باید b کمترین مقدار خود را داشته باشد. از طرف دیگر، همواره $b \geq 3$ و i عدد طبیعی یا صفر است، در نتیجه $b \geq 4$. بنابراین کمترین مقدار b برابر ۴ و بیشترین تعداد نقاط درونی برابر $i = 8 - \frac{4}{2} = 6$ است.

۷۶۷ اندازه زاویه M برابر $\frac{\widehat{AT} - \widehat{BT}}{2}$ است. از طرف دیگر $MT = AT$ ، پس $\hat{A} = \hat{M}$. در ضمن زاویه A زاویه محاطی روبه‌رو به کمان BT است، پس $\frac{\widehat{BT}}{2} = \frac{\widehat{AT} - \widehat{BT}}{2} \Rightarrow 2\widehat{BT} = \widehat{AT}$ توجه کنید که

چون AB قطر دایره است، پس $\widehat{AT} + \widehat{BT} = 180^\circ$. در نتیجه

$$2\widehat{BT} + \widehat{BT} = 180^\circ \Rightarrow 3\widehat{BT} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BT} = 60^\circ$$

پس $\hat{A} = \frac{\widehat{BT}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$. در نتیجه زاویه A ، $\frac{1}{3}$ زاویه قائمه است.

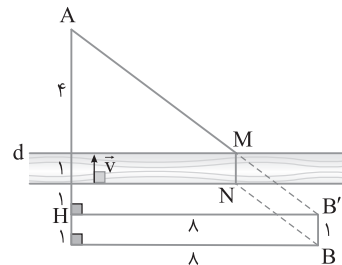


۷۶۸ نقطه B را با بردار $\vec{v}$ انتقال می‌دهیم تا به نقطه B' برسیم.

توجه کنید که $\vec{v}$ عمود بر راستای رودخانه، به اندازه ۱ و از پایین به بالا است. محل برخورد AB' با خط d نقطه M است و از روی آن پل MN به دست می‌آید. با توجه به مسئله احداث پل، طول کوتاه‌ترین مسیر برابر $AB' + MN$ است. در

مثلث $AB'H$ بنابر قضیه فیثاغورس، $AB' = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. در نتیجه

$$10 + 1 = 11 \quad \text{طول کوتاه‌ترین مسیر}$$

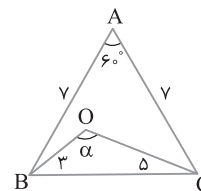


۷۶۹ از B به C وصل می‌کنیم. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، زیرا دو ضلع مساوی دارد و زاویه بین این دو ضلع مساوی 60° است. پس $BC = 7$

$$\triangle OBC: BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2OB \cdot OC \cos \alpha$$

$$7^2 = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5) \cos \alpha \Rightarrow 49 = 9 + 25 - 30 \cos \alpha$$

$$15 = -30 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120^\circ$$



۷۷۰ از قضیه نیمسازها نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} \triangle AMB: \text{نیمساز } MP \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{AM}{MB} \\ \triangle AMC: \text{نیمساز } MQ \Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{MC} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{MB=MC} \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{QC} \Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{AQ}{QC}$$

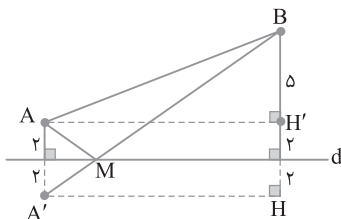
$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AQ}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

۷۷۸ ۲ برای یافتن نقطه M بازتاب نقطه A نسبت به خط d، یعنی نقطه A' را پیدا می‌کنیم. محل برخورد A'B با خط d نقطه M است. می‌دانیم طول A'B طول کوتاه‌ترین مسیر است. با توجه به شکل و فرض سؤال، $A'B=15$ ، $BH=7+2=9$

$$\triangle A'BH: A'H^2 = A'B^2 - BH^2 = 15^2 - 9^2 = 144$$

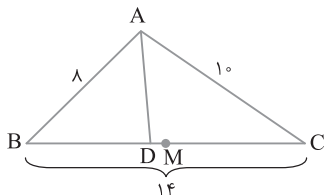
$$A'H=12 \Rightarrow AH'=12$$

$$\triangle ABH': AB^2 = BH'^2 + AH'^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow AB=13$$



۷۷۹ ۴ با توجه به اندازه‌ها در شکل زیر زاویه A بزرگ‌ترین زاویه مثلث است. اگر AD نیمساز زاویه A و M وسط ضلع بزرگ‌تر BC باشد، آن‌گاه بنابر قضیه نیمسازها،

$$\begin{aligned} AD \Rightarrow \frac{BD}{DC} &= \frac{AB}{AC} = \frac{1}{10} \\ \xrightarrow[\text{در مخرج ترکیب}]{\frac{BD}{BC} = \frac{1}{18}} \frac{BD}{18} &= \frac{1}{14} \Rightarrow BD = \frac{56}{9} \\ \text{بنابراین } DM &= BM - BD = \frac{14}{2} - \frac{56}{9} = \frac{7}{9} \end{aligned}$$



۷۸۰ ۴ فرض کنید در مثلث ABC زاویه بین دو ضلع با طول‌های $a=7$ و $b=4$ برابر θ باشد. در این صورت بنابر برابری سینوسی مساحت مثلث،

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta \Rightarrow 7 = \frac{1}{2} (7)(4) \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2}$$

بنابراین $\theta = 30^\circ$ یا $\theta = 150^\circ$ که $\theta = 150^\circ$ در گزینه‌ها هست.

۷۸۱ ۳ بنابر فرض‌های سؤال شکل زیر را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل،

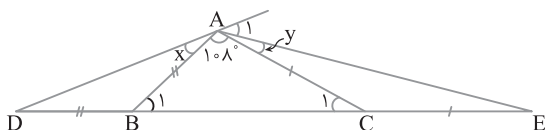
$$\begin{cases} BA=BD \Rightarrow \hat{D}=x \\ CA=CE \Rightarrow \hat{E}=y \end{cases} \xrightarrow{+} \hat{D} + \hat{E} = x + y \quad (1)$$

از طرف دیگر، زاویه‌های B_1 و C_1 به ترتیب زاویه‌های خارجی مثلث‌های ABD و ACE هستند، پس $\hat{B}_1 = 2x$ و $\hat{C}_1 = 2y$. در ضمن

$$\triangle ABC: \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + 108^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2x + 2y = 72^\circ \Rightarrow x + y = 36^\circ$$

بنابراین $\hat{DAE} = x + y + 108^\circ = 36^\circ + 108^\circ = 144^\circ$. چون DAE بزرگ‌ترین زاویه داخلی مثلث ADE است، پس $\hat{A}_1$ کوچک‌ترین زاویه خارجی

این مثلث است. در نتیجه $\hat{A}_1 = 180^\circ - \hat{DAE} = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$

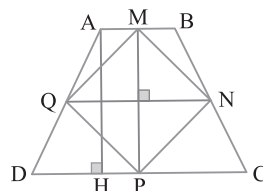


۷۷۴ ۳ می‌دانیم با وصل کردن وسط‌های ضلع‌های مجاور یک دوزنقه متساوی‌الساقین یک لوزی ایجاد می‌شود. بنابر فرض، $AH = \frac{1}{2}(AB+CD)$.

در نتیجه $MP = \frac{1}{2}(AB+CD)$. همچنین NQ میان‌خط دوزنقه است، پس

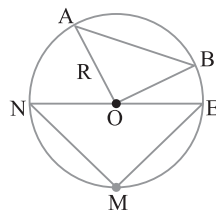
$$NQ = \frac{1}{2}(AB+CD)$$

هم برابری دارند ($NQ=MP$)، یعنی این چهارضلعی مربع است.



۷۷۵ ۳ از دوران مربع حول AB یک استوانه و از دوران دایره حول AB یک کره ایجاد می‌شود. شکل حاصل از دوران قسمت رنگی حول AB استوانه‌ای است که یک کره از آن جدا شده است.

۷۷۶ ۳ فرض کنید شعاع دایره برابر R باشد. چون $\widehat{AB} = 90^\circ$ ، پس زاویه مرکزی AOB قائمه است. بنابرین مثلث OAB قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. از طرف دیگر چون $\widehat{MN} = \widehat{ME}$ ، پس وترهای MN و ME مساوی‌اند. همچنین زاویه NME زاویه محاطی رویه قطر است. پس قائمه است. بنابرین مثلث MNE قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. در نتیجه دو مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین OAB و MNE متشابه‌اند. از طرف دیگر بنابر قضیه فیثاغورس، $\triangle OAB: AB^2 = OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 \Rightarrow AB = R\sqrt{2}$
در نتیجه $\frac{S_{OAB}}{S_{MNE}} = \left(\frac{AB}{NE}\right)^2 = \left(\frac{R\sqrt{2}}{2R}\right)^2 = \frac{1}{2}$



۷۷۷ ۴ مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس

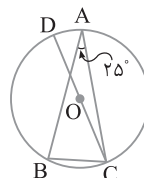
$$\hat{B} = \frac{180^\circ - 25^\circ}{2} = 77.5^\circ$$

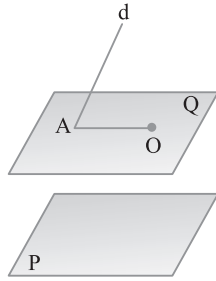
$$\widehat{B} \Rightarrow \widehat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{AC} = 2\hat{B} = 155^\circ$$

چون DC قطر دایره است، پس $\widehat{AD} = 180^\circ - \widehat{AC} = 180^\circ - 155^\circ = 25^\circ$. از طرف دیگر، بین طول کمان AD و اندازه آن رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{\text{طول کمان AD}}{360^\circ} = \frac{\text{طول کمان AD}}{2\pi R} \Rightarrow \frac{25^\circ}{360^\circ} = \frac{\text{طول کمان AD}}{6\pi}$$

$$\text{طول کمان AD} = \frac{25^\circ \times 6\pi}{360^\circ} = \frac{5\pi}{12}$$



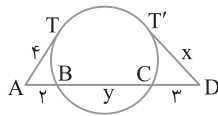


۷۸۵ ۳ تمام خطوط گذرنده از O و موازی P در صفحه‌ای شامل O و موازی P هستند. پس از نقطه O صفحه Q را موازی با صفحه P رسم می‌کنیم. اگر خط d صفحه Q را در نقطه A قطع کند. آن‌گاه OA موازی P و متقاطع با d است. مسلماً وقتی خط d صفحه Q را قطع کند، صفحه P را نیز قطع می‌کند. یعنی باید d با P متقاطع باشد. توجه کنید که چون فقط یک خط گذرا از O، موازی P و متقاطع با d هست، پس O نباید روی خط d باشد.

۷۸۶ ۳ فرض کنید اندازه وتر BC برابر y باشد. بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$AT^2 = AB \times AC \Rightarrow 4^2 = 2(2+y) \Rightarrow 8 = 2+y \Rightarrow y = 6$$

$$DT^2 = DC \times DB \Rightarrow x^2 = 3(3+6) \Rightarrow x^2 = 27 \Rightarrow x = 3\sqrt{3}$$



۷۸۷ ۳ طول مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع‌های R و R' و طول خط‌المركزین d از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

$$15 = \sqrt{d^2 - (3+5)^2} \Rightarrow 15^2 = d^2 - 64 \Rightarrow d^2 = 225 + 64 = 289$$

$$d = 17$$

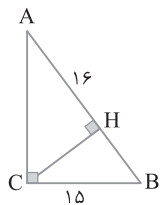
چون $d > R + R'$ ، پس دو دایره متخارج هستند. مطابق شکل زیر، بیشترین فاصله بین نقاط دو دایره برابر طول پاره خط AB است و

$$AB = OO' + R + R' = \frac{OO' = 17}{R=3, R'=5} \rightarrow AB = 17 + 3 + 5 = 25$$



۷۸۸ ۲ تبدیل T را تبدیل همانی می‌گوییم هرگاه به ازای هر نقطه A از صفحه P، $T(A) = A$ ، یعنی در تبدیل همانی هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می‌کنیم. در نتیجه هر تبدیل همانی طولیاست، پس گزاره (الف) درست است. گزاره (ب) نادرست است، زیرا انتقال با بردار صفر، همانی است. گزاره (پ) نادرست است، زیرا تجانس با نسبت $k=1$ تبدیل همانی است. دوران با زاویه 360° تبدیل همانی است، زیرا دوران یافته هر نقطه به هر مرکزی بر خودش منطبق می‌شود، پس گزاره (ت) درست است. پس دو تا از گزاره‌های داده شده درست هستند.

۷۸۹ ۲ بنابر فرض‌های سؤال، شکل زیر را رسم می‌کنیم. با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه،



$$BC^2 = BH \times AB \Rightarrow 15^2 = BH(BH + 16)$$

$$BH^2 + 16BH - 225 = 0$$

$$(BH + 25)(BH - 9) = 0$$

$$BH = 9 \Rightarrow AB = 16 + 9 = 25$$

بنابر قضیه فیثاغورس،

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 25^2 - 15^2 = (25-15)(25+15)$$

$$= 10 \times 40 = 400 \Rightarrow AC = 20$$

۷۸۲ ۳ فرض کنید در چهارضلعی ABCD دو قطر AC و BD برابر باشند و نقاط M، N، E و F وسط‌های اضلاع این چهارضلعی باشند. بنابر قضیه میان‌خط،

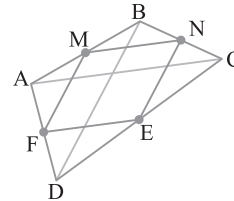
$$\begin{cases} \text{AB وسط M} \\ \text{BC وسط N} \end{cases} \Rightarrow MN \parallel AC, \quad MN = \frac{AC}{2}$$

$$\begin{cases} \text{DC وسط E} \\ \text{AD وسط F} \end{cases} \Rightarrow EF \parallel AC, \quad EF = \frac{AC}{2}$$

$$\begin{cases} \text{AB وسط M} \\ \text{AD وسط F} \end{cases} \Rightarrow MF \parallel BD, \quad MF = \frac{BD}{2}$$

$$\begin{cases} \text{BC وسط N} \\ \text{DC وسط E} \end{cases} \Rightarrow NE \parallel BD, \quad NE = \frac{BD}{2}$$

چون $AC = BD$ ، پس $MN = NE = EF = MF$. بنابراین چهارضلعی MNEF لوزی است.



۷۸۳ ۲ بنابر قضیه پیک، $S = \frac{b}{2} + i - 1$. اکنون گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\text{گزینه (۱): } S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{6}{2} + 3 - 1 = 5$$

$$\text{گزینه (۲): } S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{6}{2} + 6 - 1 = 8$$

$$\text{گزینه (۳): } S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{12}{2} + 2 - 1 = 7$$

$$\text{گزینه (۴): } S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{6}{2} + 4 - 1 = 6$$

پس چندضلعی شبکه‌ای با داده‌های $b=6$ و $i=6$ بیشترین مساحت را دارد.

۷۸۴ ۲ می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است،

پس $AM = \frac{BC}{2}$. در ضمن چون $AH < AM$ ، پس بنابر فرض سؤال

$$\frac{AH}{AM} = \frac{2}{3} \quad \text{در نتیجه}$$

$$\frac{AH}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AH}{\frac{1}{2}BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow AH = \frac{1}{3}BC \quad (1)$$

از طرف دیگر،

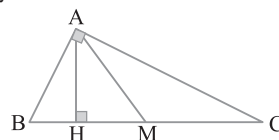
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \times BC \xrightarrow{(1)} 24 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}BC \right) BC$$

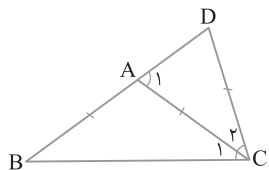
$$BC^2 = 6 \times 24 \Rightarrow BC = 12$$

بنابراین $AH = 4$ و $AM = 6$. بنابر قضیه فیثاغورس،

$$\triangle AHM: MH^2 = AM^2 - AH^2 \Rightarrow MH^2 = 6^2 - 4^2 = 20$$

$$MH = 2\sqrt{5}$$





۷۹۲ با توجه به فرض‌های سؤال اندازه‌های روی شکل را خواهیم داشت. بنابر تعمیم قضیه تالس.

$$MP \parallel AB \Rightarrow \frac{MP}{AB} = \frac{CP}{AC} \Rightarrow \frac{x+y}{10} = \frac{y-x+6}{5}$$

$$5x+5y=10y-10x+60 \Rightarrow 15x-5y=60 \Rightarrow 3x-y=12 \quad (1)$$

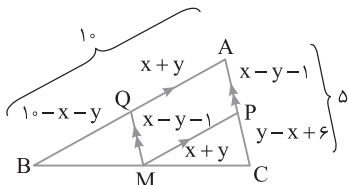
از طرف دیگر با توجه به شکل.

$$AP < AC \Rightarrow x-y-1 < 5 \xrightarrow{(1)} x+12-3x-1 < 5 \Rightarrow -2x < -6 \Rightarrow x > 3$$

$$AQ < AB \Rightarrow x+y < 10 \xrightarrow{(1)} x+3x-12 < 10 \Rightarrow 4x < 22 \Rightarrow x < \frac{11}{2}$$

از اشتراک نابرابری‌های به دست آمده به نابرابری $3 < x < \frac{11}{2}$ می‌رسیم. توجه

کنید که در این ناحیه $x+y > 0$ و $x-y > 10$.



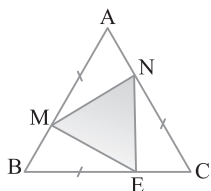
۷۹۳ راه‌حل اول مثلث‌های AMN، CNE و BEM به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند، پس مساحت‌های برابر دارند. طول اضلاع مثلث ABC را برابر x انتخاب می‌کنیم، در این صورت،

$$S_{MNE} = S_{ABC} - 3S_{AMN} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - 3\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times x \times \frac{x}{3} \sin 60^\circ\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{12}x^2$$

$$\frac{S_{MNE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{12}x^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}x^2} = \frac{1}{3}$$

اکنون می‌توانیم نسبت خواسته شده را به دست آوریم:



راه‌حل دوم فرض کنید $AN = t$ و $AM = 2t$. بنابر قضیه کسینوس‌ها.

$$MN^2 = t^2 + 4t^2 - 2(t)(2t) \cos 60^\circ = 5t^2 - 2t^2 = 3t^2 \Rightarrow MN = \sqrt{3}t$$

به همین صورت $ME = NE = \sqrt{3}t$. بنابرین مثلث MNE متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه مثلث MNE با مثلث ABC به حالت (ض‌ض) و نسبت

تشابه $\frac{\sqrt{3}t}{3t}$ متشابه است. پس نسبت مساحت‌های این دو مثلث توان دوم

$$\frac{S_{MNE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{\sqrt{3}t}{3t}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

نسبت تشابه آن‌هاست، یعنی

۷۹۰ راه‌حل اول ابتدا با استفاده از قضیه کسینوس‌ها طول ضلع BC را به دست می‌آوریم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A}$$

$$= 16 + 81 - 2(4)(9) \cos 60^\circ = 97 - 36 = 61 \Rightarrow BC = \sqrt{61}$$

بنابر قضیه نیمسازها.

$$\hat{A} \text{ نیمساز زاویه داخلی } \hat{A} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{9}$$

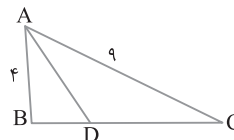
$$\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{BD}{BC} = \frac{4}{13} \Rightarrow \frac{BD}{\sqrt{61}} = \frac{4}{13}$$

$$BD = \frac{4\sqrt{61}}{13}, DC = \frac{9\sqrt{61}}{13}$$

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC = 4 \times 9 - \frac{4\sqrt{61}}{13} \times \frac{9\sqrt{61}}{13}$$

$$= 36 - \frac{36}{13} = 36\left(1 - \frac{1}{13}\right) = 36\left(\frac{12}{13}\right)$$

$$AD = \frac{6}{13} \sqrt{108} = \frac{6 \times 6\sqrt{3}}{13} = \frac{36\sqrt{3}}{13}$$



راه‌حل دوم اگر d_a طول نیمساز زاویه داخلی A باشد، آن‌گاه

$$d_a = \frac{2bc \cos \frac{\hat{A}}{2}}{b+c} = \frac{2(9)(4) \cos \frac{60^\circ}{2}}{9+4} = \frac{2(36) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{13} = \frac{36\sqrt{3}}{13}$$

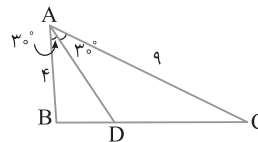
راه‌حل سوم با توجه به شکل زیر.

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$$

$$\frac{1}{2} AB \times AC \sin 60^\circ = \frac{1}{2} AB \times AD \sin 30^\circ + \frac{1}{2} AD \times AC \sin 30^\circ$$

$$4 \times 9 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4AD \left(\frac{1}{2}\right) + 9AD \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$36\sqrt{3} = 13AD \Rightarrow AD = \frac{36\sqrt{3}}{13}$$



۷۹۱ بنابر فرض، $AB = AC$ ، پس $\hat{B} = \hat{C}_1 = x$ ، چون $\hat{A}_1$ زاویه

خارجی مثلث ABC است، پس $\hat{A}_1 = \hat{B} + \hat{C}_1 = 2x$. از طرف دیگر،

$$CA = CD \text{، بنابرین } \hat{A}_1 = \hat{D} \text{، در نتیجه } \hat{D} = 2x \text{، در ضمن،}$$

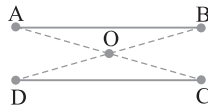
$$BD = BC \Rightarrow \hat{D} = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 \Rightarrow 2x = x + \hat{C}_2 \Rightarrow \hat{C}_2 = x$$

در مثلث BDC مجموع زاویه‌های داخلی برابر 180° است، بنابرین

$$\hat{B} + \hat{D} + \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ \Rightarrow x + 2x + x + x = 180^\circ$$

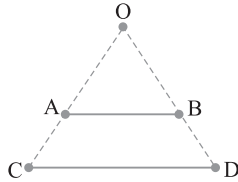
$$5x = 180^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$$

$$\text{پس } \hat{BAC} = 180^\circ - 2x = 180^\circ - 2(36^\circ) = 108^\circ$$



اگر دو پاره‌خط AB و CD موازی و نامساوی باشند، آن‌گاه مجانس هم هستند. می‌توانید مرکز تجانس را نقطه تلاقی AC و BD و نسبت تجانس را برابر

$\frac{OA}{OC}$ در نظر بگیرید (شکل زیر را ببینید).



بنابر فرض سؤال شکل زیر به دست می‌آید. بنابر روابط طولی در مثلث قائم الزاویه ABH،

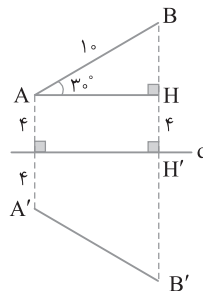
$$\hat{A} = 30^\circ \Rightarrow BH = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5, \quad BH' = 5 + 4 = 9 \Rightarrow B'H' = 9$$

پس $BB' = 18$. از طرف دیگر،

$$\triangle ABH: \hat{B} = 60^\circ \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} (10) = 5\sqrt{3}$$

بنابراین

$$S_{ABB'A'} = \frac{1}{2} AH (AA' + BB') = \frac{1}{2} (5\sqrt{3}) (10 + 18) \\ = \frac{1}{2} (5\sqrt{3}) (28) = 70\sqrt{3}$$



مثلث به اضلاع ۸، ۶ و ۱۰ قائم‌الزاویه است. زیرا $10^2 = 8^2 + 6^2$.

مطابق شکل BC وتر این مثلث و AH ارتفاع نظیر بزرگ‌ترین ضلع است. همچنین BD نیمساز زاویه متوسط است. بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

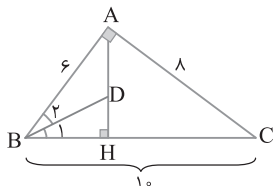
$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 6^2 = BH \times 10 \Rightarrow BH = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}$$

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times 10 = 6 \times 8 \Rightarrow AH = \frac{6 \times 8}{10} = \frac{24}{5}$$

اکنون از قضیه نیمسازها نتیجه می‌شود

$$BD \Rightarrow \frac{AD}{DH} = \frac{AB}{BH} = \frac{6}{\frac{18}{5}} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{AD}{DH} = \frac{5}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب}} \frac{AD}{AH} = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{AD}{\frac{24}{5}} = \frac{5}{8} \Rightarrow AD = 3$$



۷۹۴ ۴ چون $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، پس عددی مانند k وجود دارد به طوری که

$$AB = \sqrt{3}k \text{ و } AC = 2k. \text{ بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث } ABC,$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3k^2 + 4k^2} = \sqrt{7}k$$

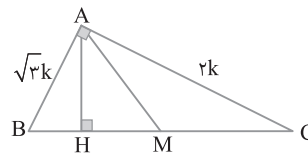
$$AM = \frac{1}{2} BC = \frac{\sqrt{7}}{2} k \text{ میانۀ وارد بر وتر است، پس}$$

بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه $AH \times BC = AB \times AC$ ، در نتیجه

$$AH = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} k \text{ بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث } AMH,$$

$$MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{7}{4} k^2 - \frac{12}{7} k^2} = \frac{1}{2\sqrt{7}} k$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}} = \frac{\frac{1}{2} AB \times AC}{\frac{1}{2} AH \times MH} = \frac{\frac{\sqrt{3}k^2}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{14} k^2} = 14 \text{ بنابراین}$$



۷۹۵ ۴ چهارضلعی ABEF متوازی‌الاضلاع است (زیرا $AB \parallel EF$ و

$AB = EF$)، پس دو خط AF و BE موازی‌اند، نه متناظر.

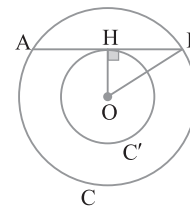
۷۹۶ ۱ توجه کنید که دو دایره هم‌مرکز هستند. اگر وتر AB از دایره C بر دایره

C' مماس باشد، OH عمود بر AB و H وسط AB است. بنابر قضیه فیثاغورس،

$$\triangle OBH: BH^2 = OB^2 - OH^2 = 8^2 - 5^2 = 64 - 25 = 39$$

$$BH = \sqrt{39}$$

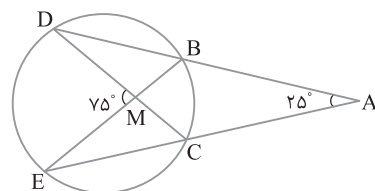
پس $AB = 2\sqrt{39}$.



۷۹۷ ۳ توجه کنید که

$$\begin{cases} \hat{A} = \frac{\widehat{DE} - \widehat{BC}}{2} \xrightarrow{\hat{A} = 25^\circ} \widehat{DE} - \widehat{BC} = 50^\circ \\ \hat{M} = \frac{\widehat{DE} + \widehat{BC}}{2} \xrightarrow{\hat{M} = 75^\circ} \widehat{DE} + \widehat{BC} = 150^\circ \end{cases}$$

$$2\widehat{BC} = 100^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 50^\circ$$

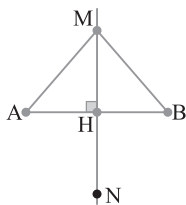


۷۹۸ ۳ اگر دو پاره‌خط مجانس هم باشند، آن‌گاه موازی هستند، چون

تجانس شیب خط را حفظ می‌کند. همچنین اگر دو پاره‌خط AB و CD موازی

و مساوی باشند، آن‌گاه مجانس هم هستند. در این صورت مرکز تجانس نقطه

تلاقی AC و BD و نسبت تجانس برابر ۱- است (شکل زیر ببینید).



۸۰۶ ۳ با توجه به شکل زیر R و h را به دست می آوریم:

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow O(-1, 1), R = \sqrt{2}$$

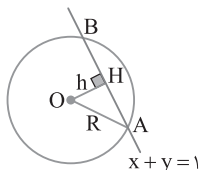
$$x + y = 1 \text{ فاصله نقطه } O \text{ از خط } h = \frac{|-1+1-1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

اکنون بنابر قضیه فیثاغورس،

$$\triangle OAH: AH = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

در نتیجه

$$AB = 2AH = 2 \times \frac{\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$$



۸۰۷ ۱ چون M روی این بیضی است، پس

$$2a = MF + MF' = \sqrt{3^2 + 4^2} + \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 + 5 = 10$$

اکنون باید بررسی کنیم که کدام نقطه در بین گزینه‌ها مجموع فاصله‌هایش از F و F' برابر ۱۰ است. در بین گزینه‌ها تنها گزینه (۱) این شرط را دارد.

بررسی گزینه (۱):

$$\begin{aligned} & \sqrt{(-3-1)^2 + (-5+2)^2} + \sqrt{(-3-0)^2 + (-5+1)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2} + \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 + 5 = 10 \end{aligned}$$

۸۰۸ ۴ در متوازی‌الاضلاع مجموع مختصات دو رأس مقابل به هم، برابر

مجموع مختصات دو رأس دیگر است. بنابراین

$$ABCD \Rightarrow A + C = B + D$$

$$(a, 2, 3) + (2, 1, 2) = (-3, b, 1) + (4, -1, c)$$

$$(a+2, 3, 5) = (1, b-1, 1+c)$$

$$a+2=1 \Rightarrow a=-1, \quad b-1=3 \Rightarrow b=4, \quad 1+c=5 \Rightarrow c=4$$

پس $abc = -16$.

۸۰۹ ۱ چون $\vec{a}$ با $\vec{b}$ موازی است، پس قرینه $\vec{a}$ نسبت به $\vec{b}$ خودش است.

۸۱۰ ۱ مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{a}-2\vec{b}$ و $3\vec{a}+2\vec{b}$ تولید

می‌شود برابر است با $S = \frac{1}{2} |(\vec{a}-2\vec{b}) \times (3\vec{a}+2\vec{b})|$. توجه کنید که

$$\begin{aligned} (\vec{a}-2\vec{b}) \times (3\vec{a}+2\vec{b}) &= 3\vec{a} \times \vec{a} - 6\vec{b} \times \vec{a} + 2\vec{a} \times \vec{b} - 4\vec{b} \times \vec{b} \\ &= 6\vec{a} \times \vec{b} + 2\vec{a} \times \vec{b} = 8\vec{a} \times \vec{b} \end{aligned}$$

بنابراین

$$S = \frac{1}{2} |8\vec{a} \times \vec{b}| = 4 |\vec{a} \times \vec{b}| = 4 |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \frac{\pi}{4} = 4 \times 5 \times 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 50\sqrt{2}$$

۸۰۱ ۳ طرفین فرض $A^2 + 3A = I$ را در ماتریس A ضرب می‌کنیم:

$$A^2 + 3A = I \xrightarrow{A \times} A^3 + 3A^2 = A \Rightarrow A^3 = -3A^2 + A$$

از طرف دیگر از برابری $A^2 + 3A = I$ نتیجه می‌شود $A^2 = -3A + I$ ، پس

$$A^3 = -3(-3A + I) + A$$

بنابراین $A^3 = 10A - 3I$. با مقایسه این برابری با فرض $A^3 = \alpha A + \beta I$

$$\alpha = 10, \quad \beta = -3 \Rightarrow \alpha\beta = -30$$

نتیجه می‌گیریم

۸۰۲ ۱ حاصل دترمینان را برحسب سطر اول حساب می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -m \end{vmatrix} + m(-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ = -m - 2m = -3m$$

بنابر فرض سؤال این دترمینان برابر -۴ است، پس $-3m = -4 \Rightarrow m = \frac{4}{3}$

۸۰۳ ۴ ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I$$

بنابراین $A^6 = (A^2)^3 = (4I)^3 = 64I$ ، پس $4A^6 = 64I$. در نتیجه

$$(4A^6)^{-1} = (64I)^{-1} = \frac{1}{64}I$$

۸۰۴ ۳ ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه داده شده

است. بنابر فرض سؤال $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ بنابراین

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 4, \quad y = -2$$

از طرف دیگر،

$$A = (A^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

در نتیجه $xy + abc = -8 + 0 = -8$.

۸۰۵ ۴ مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله‌اند،

عمودمنصف پاره‌خط AB است. اگر نقطه M روی عمودمنصف AB باشد

به‌طوری که $S_{AMB} < 12$ ، آن‌گاه مطابق شکل زیر،

$$\frac{1}{2} MH \times AB < 12 \Rightarrow \frac{1}{2} MH \times 9 < 12 \Rightarrow MH < \frac{8}{3}$$

به همین ترتیب در طرف دیگر پاره‌خط AB نقطه N با شرط $NH < \frac{8}{3}$

می‌تواند این شرط را داشته باشد. بنابراین مکان هندسی مورد نظر، پاره‌خط

MN به طول $\frac{16}{3}$ است.

$$\begin{vmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{vmatrix} = a^4 = 0 \Rightarrow a = 0$$

گزینه (۳):

پس ماتریس گزینه (۳) به ازای $a = 0$ وارون پذیر نیست.

$$\begin{vmatrix} 0 & a^2 \\ a^2+1 & 0 \end{vmatrix} = -a^2(a^2+1) = 0 \Rightarrow a = 0$$

گزینه (۴):

پس ماتریس گزینه (۴) به ازای $a = 0$ وارون پذیر نیست.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ اگر } \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ بنابر فرض سؤال}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ پس}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 14, y = 11$$

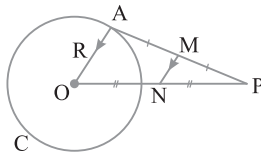
$$\text{بنابراین } 2x - 3y = 2(14) - 3(11) = 28 - 33 = -5$$

۸۱۵ (۴) در شکل زیر نقطه A روی دایره $C(O, R)$ و M وسط پاره خط PA است. از نقطه M پاره خط MN را موازی OA رسم کرده ایم. توجه کنید که در مثلث OAP ، پاره خط MN میان خط است. در نتیجه $MN = \frac{1}{2}R$ و

وسط پاره خط OP است. بنابراین نقطه M از نقطه ثابت N به فاصله ثابت $\frac{1}{2}R$

است. در نتیجه مکان هندسی نقطه M دایره ای به مرکز N و شعاع $\frac{1}{2}R$ است.

توجه کنید که اگر P درون دایره هم باشد، باز هم مکان هندسی یک دایره است.



۸۱۶ (۱) می دانیم اگر $O'(\alpha, \beta)$ مرکز دایره

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ باشد، آن گاه شعاع این}$$

$$\text{دایره برابر } \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c} \text{ است. بنابراین شعاع دایره}$$

$$\text{داده شده برابر است با } R = \sqrt{1+4-1} = 2 \text{ اکنون این}$$

دایره را رسم می کنیم. همان طور که دیده می شود، سطح

دایره در نواحی اول و دوم قرار دارد. دقت کنید که در

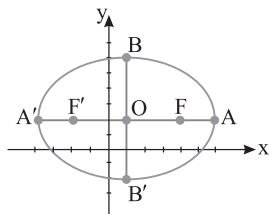
حل این سؤال لزومی به پیدا کردن m و n نیست.

۸۱۷ (۳) فاصله دو کانون بیضی برابر $2c$ است. بنابراین

$$a = 5, \frac{c}{a} = \frac{3}{5}, \text{ پس } \frac{c}{a} = \frac{3}{5}, \text{ از طرف دیگر } 2c = FF' = 6 \Rightarrow c = 3$$

$$\text{از برابری } a^2 = b^2 + c^2 \text{ به دست می آید } 25 = b^2 + 9, \text{ در نتیجه } b^2 = 16$$

یعنی $b = 4$. شکل بیضی به صورت زیر است. از این شکل به دست می آید



$$O(\alpha, \beta) = \frac{F+F'}{2} = (1, 2)$$

$$y \in [\beta - b, \beta + b] = [2 - 4, 2 + 4]$$

$$= [-2, 6]$$

۸۱۱ (۴) ماتریس $A^2 + AB + BA + B^2$ مساوی $(A+B)^2$ است.

پس لازم است ابتدا ماتریس $A+B$ را به دست آوریم:

$$A+B = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 11 \\ 6 & 4 & 13 \\ 12 & 0 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 7 & -11 \\ -6 & -3 & -13 \\ -12 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^2 + AB + BA + B^2 = (A+B)^2 = I^2 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ بنابراین}$$

مجموع درایه های ماتریس فوق برابر ۳ است.

۸۱۲ (۴) ابتدا هر دو دترمینان را حساب می کنیم:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ m & m-n & n \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بسط بر حسب سطر سوم}}$$

$$m(-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (m-n)(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + n(-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= m(-4-1) + (n-m)(8-3) + n(2+3)$$

$$= -5m + 5n - 5m + 5n = 10n - 10m$$

$$\begin{vmatrix} m & m-n & n \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بسط بر حسب سطر اول}}$$

$$m(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (m-n)(-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + n(-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= m(2+4) + (n-m)(3-8) + n(-3-4)$$

$$= 6m - 5n + 5m - 7n = 11m - 12n$$

بنابراین

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ m & m-n & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & m-n & n \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$10n - 10m + 11m - 12n = 4 \Rightarrow m - 2n = 4 \Rightarrow 2n - m = -4$$

۸۱۳ (۲) ماتریسی وارون پذیر است که دترمینان آن نامساوی صفر باشد.

اکنون گزینه ها را بررسی می کنیم.

$$\begin{vmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & a^2-1 \end{vmatrix} = (a+1)(a^2-1) = 0 \Rightarrow a = -1, a = 1$$

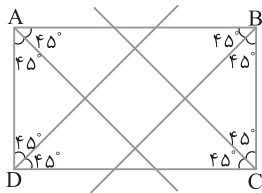
گزینه (۱):

پس این ماتریس به ازای $a = -1$ و $a = 1$ وارون پذیر نیست.

$$\begin{vmatrix} 0 & a^2+1 \\ -1-a^2 & 0 \end{vmatrix} = -(a^2+1)(-1-a^2) = (a^2+1)^2$$

گزینه (۲):

این عبارت همواره غیر صفر است، پس ماتریس گزینه (۲) همواره وارون پذیر است.



۸۲۴ مکان هندسی نقاطی که از اضلاع مستطیل ABCD به یک فاصله اند، محل برخورد نیمسازهای زاویه های این مستطیل است، ولی نیمسازهای زاویه های مستطیل در حالت کلی همسر نیستند. بنابراین نقطه ای که از هر چهار ضلع مستطیل به یک فاصله باشد، وجود ندارد.

۸۲۵ راه حل اول فاصله M از دو خط مماس برابر است. بنابراین اگر نقاط تماس را H و H' در نظر بگیریم، آن گاه

$$|MH| = |MH'| \Rightarrow \frac{|2\sqrt{5}-2b|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|b-4\sqrt{5}|}{\sqrt{1+4}}$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{5}-2b = b-4\sqrt{5} \Rightarrow b = 2\sqrt{5} \Rightarrow M(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) \\ 2\sqrt{5}-2b = -b+4\sqrt{5} \Rightarrow b = -2\sqrt{5} \Rightarrow M(2\sqrt{5}, -2\sqrt{5}) \end{cases}$$

اگر $M(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ مرکز این دایره باشد، آن گاه

$$R = |MH| = \frac{|2\sqrt{5}-4\sqrt{5}|}{\sqrt{5}} = 2$$

اگر $M(2\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$ مرکز دایره انتخاب شود، آن گاه

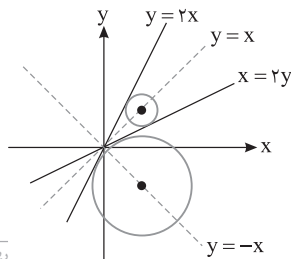
$$R = |MH| = \frac{|2\sqrt{5}+4\sqrt{5}|}{\sqrt{5}} = 6$$

بنابراین شعاع دایره کوچکتر برابر ۲ است.

راه حل دوم مرکز M روی نیمسازهای زاویه های بین دو خط $y=2x$ و $y=-x$ قرار دارد و با توجه به شکل زیر، خطوط $y=x$ و $y=2y$ نیمسازهای زاویه های بین این دو خط هستند:

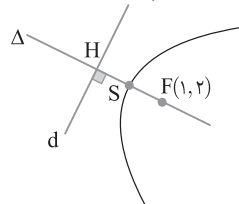
$$M \Rightarrow M(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) \Rightarrow R = |MH| = 2$$

$$M \Rightarrow M(2\sqrt{5}, -2\sqrt{5}) \Rightarrow R = |MH| = 6$$



ریاضی خارج از کشور - ۹۲

۸۲۶ توجه کنید که S وسط پاره خط FH است (شکل زیر را ببینید). معادله خط Δ گذرنده از F و عمود بر خط d را می نویسیم:



$$m_d = 2 \Rightarrow m_{\Delta} = -\frac{1}{2}$$

$$\Delta \text{ معادله خط: } y-2 = -\frac{1}{2}(x-1)$$

$$x+2y-5=0$$

محل برخورد دو خط d و Δ را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} x+2y-5=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow x+2(2x+1)-5=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow y=4$$

$$H(-3, 4)$$

$$S = \frac{F+H}{2} = \frac{(1, 2) + (-3, 4)}{2} = (-1, 3)$$

۸۱۸ از تساوی $xy=0$ نتیجه می گیریم $x=0$ یا $y=0$. در فضای $\mathbb{R}^2$ هر کدام از معادلات $x=0$ و $y=0$ یک خط هستند. پس مکان هندسی مورد نظر دو خط است.

۸۱۹ توجه کنید که

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) \Rightarrow 3^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2(1^2 + 2^2)$$

$$9 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 10 \Rightarrow |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 1 \Rightarrow |\vec{a}-\vec{b}| = 1$$

۸۲۰ بنابر فرض مسئله، $\frac{1}{2}[(2\vec{a}+3\vec{b}) \times (2\vec{a}-3\vec{b})] = 3\vec{e}$ پس

$$\frac{1}{2}[4\vec{a} \times \vec{a} - 6\vec{a} \times \vec{b} + 6\vec{b} \times \vec{a} - 9\vec{b} \times \vec{b}] = 3\vec{e}$$

$$\frac{1}{2}[-12\vec{a} \times \vec{b}] = 3\vec{e} \Rightarrow 6|\vec{a} \times \vec{b}| = 3\vec{e} \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}$$

مساحت مثلث بنا شده روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{a}+2\vec{b}$ برابر است با

$$S = \frac{1}{2}|(\vec{a}-\vec{b}) \times (\vec{a}+2\vec{b})| = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{a} + 2\vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} - 2\vec{b} \times \vec{b}|$$

$$= \frac{1}{2}|2\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{4} \Rightarrow S = \frac{1}{4} \times 6 = \frac{3}{2}$$

۸۲۱ طرفین برابری داده شده را به توان دو می رسانیم:

$$A^2 = 2A - 3I \Rightarrow A^4 = (2A - 3I)^2 = 4A^2 + 9I^2 - 12AI$$

$$\xrightarrow{A^2 = 2A - 3I} A^4 = 4(2A - 3I) + 9I - 12A$$

$$A^4 = 8A - 12I + 9I - 12A = -4A - 3I$$

۸۲۲ با انتخاب $x=1$ ، $y=0$ و $z=0$ حاصل دترمینان اول را به دست می آوریم:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & y & z \\ 1 & z & x \end{vmatrix} = m \xrightarrow{\substack{x=1 \\ y=z=0}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = m$$

$$\xrightarrow{\text{بسط بر حسب سطر دوم}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m \Rightarrow m = -1$$

اکنون با همین مقادیر حاصل دترمینان دوم را به دست می آوریم:

$$\begin{vmatrix} x & 2x-4y+3 & 3 \\ y & 2y-4z+3 & 3 \\ z & 2z-4x+3 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{x=1 \\ y=z=0}} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{بسط بر حسب} \\ \text{ستون اول}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

چون $m = -1$ ، پس حاصل این دترمینان برابر $-12m$ است.

۸۲۳ می دانیم اگر حاصل ضرب دو ماتریس مربعی و هم مرتبه برابر ماتریس همانی I باشد، آن گاه این دو ماتریس وارون یکدیگرند. توجه کنید که

$$A^3 = \vec{0} \Rightarrow \lambda A^3 = \vec{0} \xrightarrow{\text{اضافه می کنیم}} -27I$$

$$\lambda A^3 - 27I = -27I \Rightarrow (2A - 3I)(4A^2 + 6A + 9I) = -27I$$

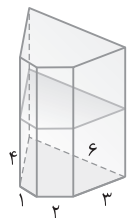
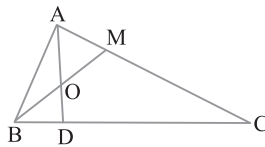
$$(2A - 3I) \frac{4A^2 + 6A + 9I}{-27} = I \Rightarrow (2A - 3I)^{-1} = -\frac{1}{27}(4A^2 + 6A + 9I)$$

وارد شده است، بنابراین $\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AC}$. از طرف دیگر، بنابر فرض سؤال

$$\frac{AM}{MC} = \frac{1}{3} \quad \text{با ترکیب در مخرج این تناسب به تساوی می‌رسیم. بنابراین}$$

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4} \xrightarrow{S_{ABM} = 2S_{OAB}} \frac{2S_{OAB}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S_{OAB}}{S_{ABC}} = \frac{1}{8}$$

عدد $\frac{1}{8}$ معادل 12.5% درصد است.



صفحه‌ای افقی این منشور را در یک پنج‌ضلعی همنهشت با قاعده آن برش می‌دهد. پس محیط سطح مقطع حاصل برابر محیط قاعده منشور است:
محیط سطح مقطع $= 1+2+3+6+4=16$

از مرکز O به نقطه تماس T وصل می‌کنیم. زاویه OTM برابر

90° است. در مثلث قائم‌الزاویه OTM ضلع OT نصف وتر OM است، پس $\hat{M} = 30^\circ$ ، در نتیجه $\hat{O} = 60^\circ$. پس مساحت قطاع OAT برابر است با

$$(\text{قطاع OAT}) = \frac{60^\circ}{360^\circ} \pi R^2 = \frac{1}{6} \pi (6)^2 = 6\pi$$

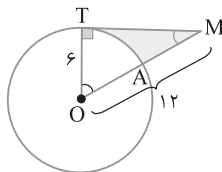
از طرف دیگر، مساحت مثلث قائم‌الزاویه OTM برابر است با

$$(\text{مثلث OTM}) = \frac{1}{2} OT \times OM \sin 60^\circ = \frac{1}{2} (6) (12) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 18\sqrt{3}$$

در نتیجه

مساحت (قطاع OAT) - مساحت (مثلث OTM) = مساحت قسمت رنگی

$$= 18\sqrt{3} - 6\pi$$



بنابر فرض سؤال $AC=8$ و $BC=4$. بنابر رابطه‌های طولی

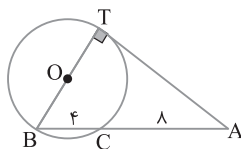
در دایره، $AT^2 = AC \times AB = 8(8+4) = 96$ ، پس $AT = 4\sqrt{6}$. چون

قطر دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، پس مثلث ABT در رأس T قائم‌الزاویه است. پس بنابر قضیه فیثاغورس،

$$BT^2 = AB^2 - AT^2 = 12^2 - (4\sqrt{6})^2 = 144 - 96 = 48$$

پس $BT = 4\sqrt{3}$. در نتیجه

$$S_{ABT} = \frac{1}{2} AT \times BT = \frac{1}{2} (4\sqrt{6}) (4\sqrt{3}) = 8\sqrt{18} = 24\sqrt{2}$$



وقتی نقطه M روی یک سر قطر کوچک این بیضی قرار می‌گیرد، فاصله M از مرکز بیضی کمترین مقدار خود را که برابر b است می‌گیرد. پس در نتیجه $b = 3\sqrt{2}$

$$S_{MFF'} = 9 \Rightarrow \frac{1}{2} (b)(2c) = 9 \Rightarrow bc = 9 \Rightarrow 3\sqrt{2}c = 9 \Rightarrow c = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

بنابراین $a^2 = b^2 + c^2 = (3\sqrt{2})^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 18 + \frac{9}{2} = \frac{45}{2}$. چون طول قطر

بزرگ هر بیضی برابر 2a است، پس مربع طول قطر بزرگ این بیضی $4a^2$

$$4a^2 = 4\left(\frac{45}{2}\right) = 90$$

است. در نتیجه

در قرینه کردن نسبت به محور X، محور Z و مبدأ مختصات،

عرض نقطه باید قرینه شود، در حالی که $n^2 + 4$ و 5 هیچ‌گاه نمی‌توانند قرینه یکدیگر باشند، زیرا

$$n^2 + 4 = -5 \Rightarrow n^2 = -9 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

می‌دانیم $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ بنابراین

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= 1 + 4 + 20 + 0 + 0 + 0 = 25 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 5 \end{aligned}$$

اندازه تصویر بردار $\vec{a}$ روی امتداد بردار $\vec{b}$ از برابری $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$ به

دست می‌آید. در نتیجه $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{1}{2} |\vec{b}|$. اکنون توجه کنید که

$$\frac{|\vec{a}| |\vec{b}| |\cos 30^\circ|}{|\vec{b}|} = \frac{1}{2} |\vec{b}| \Rightarrow |\vec{a}| \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} |\vec{b}| \Rightarrow \sqrt{3} |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

$$\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|^2} = \frac{|\vec{a}| |\vec{b}| \sin 30^\circ}{|\vec{a}|^2} = \frac{|\vec{a}| \times \sqrt{3} |\vec{a}| \times \frac{1}{2}}{|\vec{a}|^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

با توجه به فرض مسئله معادله زیر به دست می‌آید

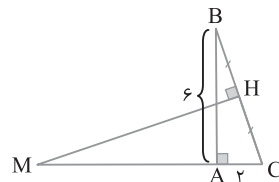
$$(n-2) \times 180^\circ = 4 \times 360^\circ \Rightarrow n = 10$$

شکل مسئله به صورت زیر است. بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ABC،

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 2^2 = 40 \Rightarrow BC = 2\sqrt{10}$$

دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و HMC در زاویه C مشترک هستند، پس متشابه‌اند. بنابراین

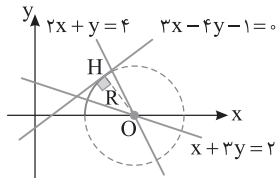
$$\frac{MC}{BC} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{MA+2}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow MA+2=10 \Rightarrow MA=8$$



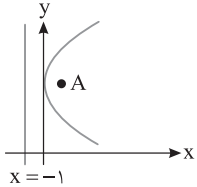
در مثلث ABM پاره‌خط AO میانه است، پس دو مثلث

OAB و AOM هم‌مساحت‌اند، در نتیجه $S_{OAB} = \frac{1}{2} S_{ABM}$. از طرف

دیگر، دو مثلث ABM و ABC در ارتفاع نظیر رأس B مشترک هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها مساوی نسبت قاعده‌هایی است که این ارتفاع بر آن‌ها



۸۴۲ ۳ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت و یک خط ثابت به یک فاصله اند سهمی ای است که در آن نقطه ثابت، کانون و خط ثابت، خط هادی است. در این سؤال نقطه $A(1, 4)$ کانون سهمی و خط $x = -1$ خط هادی است. با توجه به موقعیت کانون و خط هادی این سهمی نسبت به هم، دهانه آن رو به راست است.



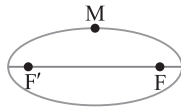
۸۴۳ ۱ مجموع فاصله های هر نقطه روی بیضی از دو کانون آن برابر $2a$ است، پس

$$MF + MF' = 2a \Rightarrow \sqrt{(2-4)^2 + (3-2)^2} + MF' = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{5} + MF' = 2\sqrt{5} \Rightarrow MF' = \sqrt{5}$$

پس $MF = MF'$ ، در نتیجه M روی یک سر قطر کوچک بیضی قرار دارد. بنابراین فاصله M از خط FF' برابر b است. خط FF' موازی محور x است، پس معادله آن به صورت $y = 2$ است و فاصله $M(2, 3)$ از این خط برابر ۱

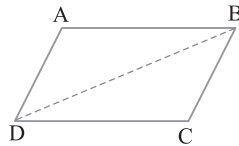
$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ و } b = 1 \text{ است. پس}$$



۸۴۴ ۱ قریبه نقطه $A(2, -1, 1)$ نسبت به محور x و محور y به ترتیب $B(2, 1, -1)$ و $C(-2, -1, -1)$ هستند. اگر BD قطر متوازی الاضلاع باشد، چهارضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع مورد نظر است و در این متوازی الاضلاع $A + C = B + D \Rightarrow D = A + C - B$

$$D = (2, -1, 1) + (-2, -1, -1) - (2, 1, -1) = (-2, -3, 1)$$

$$\text{فاصله } D \text{ تا محور } y \text{ برابر است با } \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$



۸۴۵ ۲ فرض کنید $\vec{a} = (x, y, z)$ زاویه بین $\vec{a}$ و محور x برابر α باشد. در این صورت $\vec{a} \cdot \vec{i} = x$ ، $\vec{a} \cdot \vec{j} = y$ و $\vec{a} \cdot \vec{k} = z$. بنابراین $\vec{a} \cdot \vec{i} = 1 \Rightarrow x = 1$

$$\vec{a} \cdot (\vec{j} - \vec{k}) = 1 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{j} - \vec{a} \cdot \vec{k} = 1 \Rightarrow y - z = 1$$

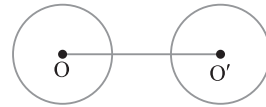
$$\vec{a} \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 1 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{i} + \vec{a} \cdot \vec{j} + \vec{a} \cdot \vec{k} = 1 \Rightarrow x + y + z = 1$$

$$\begin{cases} y - z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$$

$$\text{در نتیجه } \vec{a} = (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \text{، بنابراین } \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| |\vec{i}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

۸۳۷ ۲ برای انتقال دادن دایره $C(O, \sqrt{5})$ ابتدا مرکز O را با بردار به طول ۹ منتقل می کنیم تا به نقطه O' برسیم. سپس دایره ای به مرکز O' و شعاع $\sqrt{5}$ رسم می کنیم. پس طول خط المکرتین OO' برابر طول بردار انتقال، یعنی ۹ است، در نتیجه

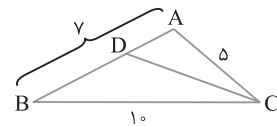
$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2} = \sqrt{9^2 - (\sqrt{5} + \sqrt{5})^2} = \sqrt{81 - 20} = \sqrt{61}$$



۸۳۸ ۳ فرض کنید نیمساز زاویه C ضلع AB را در نقطه D قطع کند. بنابر قضیه نیمسازها،

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{AB}{BD} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{y}{BD} = \frac{3}{2} \Rightarrow BD = \frac{14}{3}$$



۸۳۹ ۴ ابتدا ماتریس A^2 را به دست می آوریم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\text{بنابراین } A^4 = (A^2)^2 \times A = I^2 \times A = A, \quad A^6 = (A^2)^3 = I^3 = I$$

$$\text{پس } A^4 - A^6 = A - I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

در نتیجه مجموع درایه های این ماتریس برابر صفر است.

۸۴۰ ۳ حاصل دترمینان را بر حسب سطر سوم حساب می کنیم تا در محاسبات از متغیر a فقط یک بار استفاده شود و راه حل کوتاه تری داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & a & 7 \end{vmatrix} = 6(-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + a(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 7(-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 6(6+5) - a(4-20) + 7(-2-12) = 66 + 16a - 98 = 16a - 32$$

بنابر فرض سؤال حاصل دترمینان برابر صفر است، پس

$$16a - 32 = 0 \Rightarrow 16a = 32 \Rightarrow a = 2$$

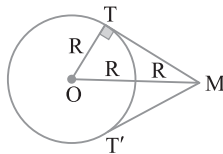
۸۴۱ ۱ چون دو خط $2x + y = 4$ و $x + 3y = 2$ بر دایره عمود هستند، پس هر دوی آن ها از مرکز دایره می گذرند، یعنی محل برخورد آن ها مرکز دایره است. بنابراین

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow 2x + \frac{2-x}{3} = 4 \Rightarrow 6x + 2 - x = 12 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 0$$

بنابراین $O(2, 0)$ مرکز دایره است. اکنون فاصله مرکز دایره را از خط مماس حساب

می کنیم تا شعاع دایره به دست آید: $R = \frac{|6 - 0 - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = 1$. در نهایت به دست می آید

$$\text{مساحت دایره} = \pi \times 1^2 = \pi$$



۸۴۶ ۳ چون $a = \frac{rS}{h_a}$ ، $b = \frac{rS}{h_b}$ و $c = \frac{rS}{h_c}$ ، بنابراین معکوس طول

ارتفاع‌های مثلث در نابرابری‌های مثلث صدق می‌کنند، پس اگر طول ارتفاع

سوم را h فرض کنیم آن‌گاه $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} < \frac{1}{h} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{h} < \frac{3}{4}$

پس $\frac{4}{3} < h < 4$ ، در بین گزینه‌ها فقط عدد ۳ در این بازه قرار دارد.

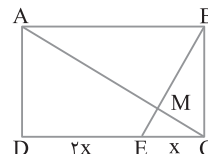
۸۴۷ ۳ بنابر فرض‌های تست شکل زیر را رسم می‌کنیم. توجه کنید که

$EC \parallel AB \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle CEM \sim \triangle ABM$

$$\frac{MB}{ME} = \frac{AB}{EC} \Rightarrow \frac{MB}{ME} = \frac{3x}{x} = \frac{3}{1}$$

با ترکیب در مخرج تناسب به دست آمده نتیجه می‌شود

$$\frac{MB}{BE} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{MB}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow MB = 9$$



۸۴۸ ۳ هر مثلث با رسم میانه به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌شود. از

طرف دیگر، اگر دو مثلث ارتفاع‌های مساوی داشته باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها با نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع‌ها برابر است. بنابراین

$$OB \Rightarrow S_{AOB} = \frac{1}{2} S_{ABM} \quad (1)$$

$$AM \Rightarrow S_{ABM} = \frac{1}{2} S_{ABC} \quad (2)$$

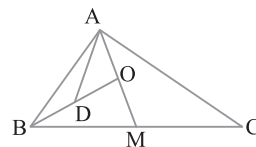
$$\frac{S_{AOD}}{S_{AOB}} = \frac{OD}{OB} = \frac{OD}{2OD} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

از طرف دیگر.

از تساوی‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود

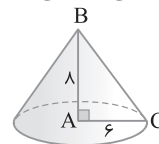
$$S_{AOD} = \frac{1}{2} S_{AOB} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} S_{ABM} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} S_{ABC} \right) = \frac{1}{8} S_{ABC}$$

بنابراین مساحت مثلث ABC هشت برابر مساحت مثلث AOD است.



۸۴۹ ۳ مثلث قائم‌الزاویه ABC با اضلاع قائم $AB=8$ و $AC=6$ را

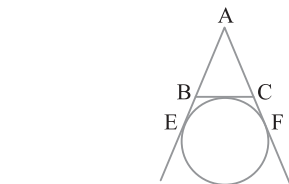
رسم می‌کنیم. ضلع AB در این مثلث ضلع متوسط است. از دوران مثلث ABC حول ضلع AB یک مخروط به ارتفاع ۸ و شعاع قاعده ۶ به وجود می‌آید.



۸۵۰ ۴ مطابق شکل از نقطه M مماس‌های MT و MT' را بر دایره

C(O, R) رسم کرده‌ایم. در مثلث قائم‌الزاویه OMT،

$$\begin{cases} OT=R \\ OM=2R \end{cases} \Rightarrow OT = \frac{1}{2} OM \Rightarrow \widehat{OMT} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{TMT'} = 60^\circ$$



۸۵۱ ۲ می‌دانیم محیط مثلث ABC برابر $2AE$ است، بنابراین

$$3m - 2 = 2 \times 14 \Rightarrow 3m - 2 = 28 \Rightarrow 3m = 30 \Rightarrow m = 10$$

۸۵۲ ۳ تبدیل‌های دوران و انتقال هر دو طولی هستند، پس مساحت مثلث

به دست آمده تحت این تبدیل‌ها با مساحت مثلث اولیه برابر است. بنابراین

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} (2\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}$$

۸۵۳ ۴ قطر BD را رسم می‌کنیم. بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ABD،

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

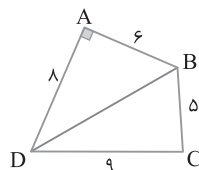
اکنون مساحت مثلث BCD را بنابر دستور هرون به دست می‌آوریم:

$$P = \frac{10+9+5}{2} = 12, \quad S_{BCD} = \sqrt{12 \times 2 \times 3 \times 7} = 6\sqrt{14}$$

از طرف دیگر، چون مثلث ABD قائم‌الزاویه است، پس

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \times AD = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$$

$$S_{ABCD} = S_{BCD} + S_{ABD} = 6\sqrt{14} + 24$$



۸۵۴ ۳ ابتدا مجموع دو ماتریس A و B را به دست می‌آوریم:

$$A+B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & m & 0 \\ n & 1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3 & 0 \\ 2 & p & k \\ s & -4 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & m-3 & 0 \\ n+2 & 1+p & 3+k \\ 5+s & 0 & e-1 \end{bmatrix}$$

بنابر فرض سؤال،

$$A+B=I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & m-3 & 0 \\ n+2 & 1+p & 3+k \\ 5+s & 0 & e-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس

$$m-3=0 \Rightarrow m=3, \quad n+2=0 \Rightarrow n=-2$$

$$1+p=1 \Rightarrow p=0, \quad 3+k=0 \Rightarrow k=-3$$

$$5+s=0 \Rightarrow s=-5, \quad e-1=1 \Rightarrow e=2$$

$$mn+ps-ke = (3)(-2) + (0)(-5) - (-3)(2) = 0$$

۸۶۰ ۱ اگر بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه باشند، آن‌گاه نامتناهی بردار عمود بر آن‌ها رسم می‌شود و در صورتی که این بردارها در یک صفحه نباشند، بردار عمود بر آن‌ها وجود ندارد. برای تشخیص هم‌صفحه بودن بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ضرب مختلط آن‌ها را به دست می‌آوریم:

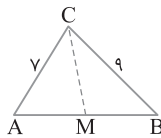
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} + 3(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 2(-26) - 3(-4) - 1(10) = -52 + 12 - 10 = -50$$

پس بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه نیستند. بنابراین بردار عمود بر این سه بردار وجود ندارد.

۸۶۱ ۲ بنابر نایبرای‌ها در مثلث اگر CM میانه وارد بر ضلع AB باشد، آن‌گاه

$$\frac{|AC-BC|}{2} < CM < \frac{AC+BC}{2} \Rightarrow \frac{|7-9|}{2} < CM < \frac{7+9}{2}$$

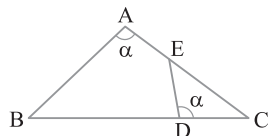
یعنی $1 < CM < 8$. در بین گزینه‌ها فقط عدد ۳ در این بازه قرار دارد.



۸۶۲ ۱ دو مثلث ABC و DEC را در نظر می‌گیریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{D} = \hat{A} = \alpha \\ \hat{C} = \hat{C} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle DEC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{CE}{BC}$$

بنابراین $BC \times CD = AC \times CE$.

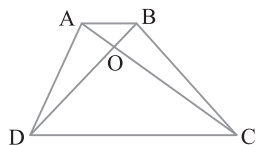


۸۶۳ ۴ در دوزنقه ABCD اگر O محل تلاقی دو قطر باشد، آن‌گاه

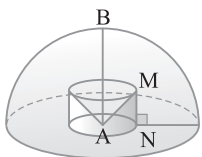
$$S_{OBC} = S_{OAD} = \sqrt{S_{OAB} \times S_{ODC}}$$

بنابراین $S_{OBC} = S_{OAD} = \sqrt{3 \times 12} = 6$ پس

$$S_{ABCD} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{ODC} + S_{OAD} = 3 + 6 + 12 + 6 = 27$$



۸۶۴ ۳ از دوران ربع دایره حول AB یک نیم کره ایجاد می‌شود، از دوران MN حول AB یک استوانه و از دوران AM حول AB یک مخروط به وجود می‌آید. بنابراین شکل حاصل یک نیم کره است که یک استوانه از آن جدا شده و یک مخروط به آن اضافه شده است.



۸۵۵ ۲ با استفاده از تساوی $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ماتریس

$B^{-1}(C^{-1}A)^{-1}$ را برحسب ماتریس‌های AB و C می‌نویسیم:

$$B^{-1}(C^{-1}A)^{-1} = B^{-1}(A^{-1}C) = (B^{-1}A^{-1})C = (AB)^{-1}C$$

پس لازم است ماتریس $(AB)^{-1}$ را پیدا کنیم:

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{4-3} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین

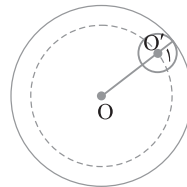
$$B^{-1}(C^{-1}A)^{-1} = (AB)^{-1}C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های این ماتریس برابر $2+11+1+7=21$ است.

۸۵۶ ۴ شعاع سکه برابر ۱ است. در صورتی سکه درون دایره C قرار می‌گیرد که

فاصله مرکز سکه تا نقطه O حداکثر برابر $OO' = 8-1=7$ باشد. پس مکان هندسی

مرکز سکه دایره‌ای توپر به شعاع ۷ است و مساحت این دایره $\pi(7)^2 = 49\pi$ است.



۸۵۷ ۲ ابتدا مرکز و شعاع دو دایره را به دست می‌آوریم:

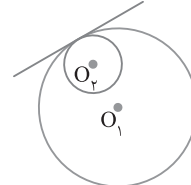
$$C_1: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 13 = 0 \Rightarrow O_1(1, -2), R_1 = 3\sqrt{2}$$

$$C_2: x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow O_2(-1, 0), R_2 = \sqrt{2}$$

بنابراین $O_1O_2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. چون $O_1O_2 = R_1 - R_2$ پس دو

دایره مماس درون هستند و طول مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر صفر است.

مماس مشترک خارجی



۸۵۸ ۱ می‌دانیم MF نصف وتر کانونی و برابر $\frac{b^2}{a}$ است. از طرف

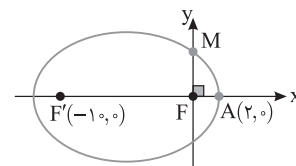
دیگر، $F(0, 0)$ پس $FF' = 10$ ، بنابراین $c = 5$. در ضمن $A(2, 0)$ ،

پس $AF = 2$ ، بنابراین

$$2 = a - c \Rightarrow 2 = a - 5 \Rightarrow a = 7$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$$

در نتیجه $MF = \frac{b^2}{a} = \frac{24}{7}$ ، بنابراین مختصات نقطه M برابر $(\frac{24}{7}, 0)$ است.



۸۵۹ ۳ نقاط روی محور Z به صورت $B(0, 0, m)$ ، $m \in \mathbb{R}$ هستند.

توجه کنید که تعداد جواب‌های معادله $|AB| = 7$ مورد نظر است. بنابراین

$$\sqrt{4 + 36 + (m+1)^2} = 7 \Rightarrow 40 + (m+1)^2 = 49 \Rightarrow (m+1)^2 = 9$$

این معادله دو جواب دارد، پس دو نقطه با ویژگی مورد نظر وجود دارد.

۸۷۰ ۴ از طرفین تساوی داده شده دترمینان می‌گیریم:

$$2A = \begin{vmatrix} |A| & -2 \\ 2 & |A| \end{vmatrix} \Rightarrow |2A| = \begin{vmatrix} |A| & -2 \\ 2 & |A| \end{vmatrix}$$

$$2^2 |A| = |A|^2 + 4 \Rightarrow |A|^2 - 4|A| + 4 = 0 \Rightarrow (|A| - 2)^2 = 0 \Rightarrow |A| = 2$$

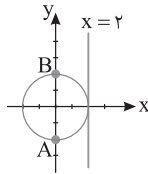
بنابراین $|-2A|^2 = (-2)^2 |A|^2 = (-2)^2 (2)^2 = 2^4 = 16$.

۸۷۱ ۱ از شکل زیر استفاده می‌کنیم. مرکز این دایره روی محور x است. پس می‌توان آن را $O(\alpha, 0)$ در نظر گرفت. فاصله مرکز این دایره تا خط $x=2$ با فاصله

آن تا نقطه A برابر است. توجه کنید که این فاصله برابر شعاع دایره است، پس

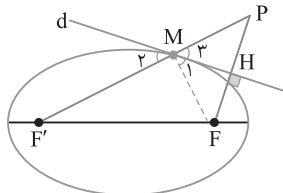
$$|\alpha - 2| = \sqrt{4 + \alpha^2} \Rightarrow (\alpha - 2)^2 = 4 + \alpha^2$$

به دست می‌آید $\alpha = 0$. پس $O(0, 0)$ مرکز دایره است و $R = OA = 2$.



۸۷۲ ۱ با توجه به شکل زیر و ویژگی بازتاب در بیضی، $\hat{M}_1 = \hat{M}_p$. از

طرف دیگر، چون در مثلث MPF ، MH هم میانه است و هم ارتفاع. پس این مثلث متساوی‌الساقین است و در نتیجه MH نیمساز نیز هست، پس زاویه‌های M_3 و M_1 برابرند، بنابراین $\hat{M}_p = \hat{M}_3$. پس M, P و F' روی یک خط هستند. اکنون توجه کنید که $PF' = PM + MF' = MF + MF' = 2a$ یعنی طول پاره خط PF' برابر طول قطر بزرگ بیضی است.



۸۷۳ ۱ چون محور تقارن این سهمی موازی محور x است، پس دهانه این

سهمی رو به راست یا چپ است، همچنین

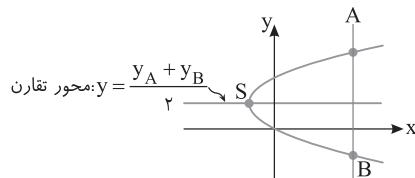
$$\text{معادله محور تقارن: } y = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y = 1$$

بنابراین اگر $S(h, k)$ رأس این سهمی باشد، آن گاه $k = 1$. از طرف دیگر، رأس سهمی روی نیمساز نواحی دوم و چهارم ($y = -x$) است، پس $S(h, -h)$ ، همچنین چون $k = 1$ ، پس $S(-1, 1)$. با توجه به موقعیت نقاط A و B نسبت به نقطه S معلوم می‌شود دهانه این سهمی رو به راست است. اکنون معادله سهمی را می‌نویسیم:

$$(y-1)^2 = 4a(x+1) \xrightarrow[\text{صدق می‌کنند}]{\text{مختصات } A(3,3) \text{ در معادله}} 4 = 4a(4) \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

می‌دانیم فاصله کانون تا خط هادی یک سهمی برابر $2a$ است. چون $a = \frac{1}{4}$ ،

$$\text{پس } 2a = \frac{1}{2}$$



۸۶۵ ۴ طول مماس مشترک خارجی دو دایره در صورت وجود از طول

مماس مشترک داخلی آن‌ها در صورت وجود بزرگ‌تر است. پس اگر $TT' = 15$ ، پس طول مماس مشترک خارجی این دو دایره باشد.

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 15 = \sqrt{d^2 - (14 - 6)^2}$$

$$15^2 = d^2 - 8^2 \Rightarrow d^2 = 225 + 64 = 289 \Rightarrow d = 17$$

۸۶۶ ۳ در مثلث با ارتفاع‌های h_a ، h_b و h_c و شعاع دایره محاطی

داخلی r تساوی زیر برقرار است:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{6+4+3}{12} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{13}{12} = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{12}{13}$$

۸۶۷ ۴ چون نقاط B و C نقاط ثابت

این تبدیل هستند، پس خط BC محور بازتاب

است. بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ABC ،

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

اکنون با توجه به شکل و بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC ،

$$AB \times AC = BC \times AH \Rightarrow 3 \times 4 = 5 \times AH$$

$$\text{یعنی } AH = \frac{12}{5} \text{، در نتیجه } \frac{24}{5} = 4 \times 8 / 8$$

۸۶۸ ۳ با توجه به شکل، مثلث ADE متساوی‌الاضلاع است، پس

$$\hat{A} = 60^\circ \text{، با استفاده از قضیه کسینوس‌ها در مثلث } ABC$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos 60^\circ$$

$$208 = AB^2 + 144 - 2AB \times 12 \times \frac{1}{2}$$

$$208 = AB^2 - 12AB + 144 \Rightarrow AB^2 - 12AB - 64 = 0$$

$$(AB - 16)(AB + 4) = 0 \Rightarrow AB = 16$$

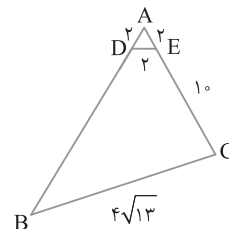
بنابراین

$$S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE}$$

$$= \frac{1}{2} AB \times AC \sin 60^\circ - \frac{1}{2} AD \times AE \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} (16)(12) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} (2)(2) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 48\sqrt{3} - \sqrt{3} = 47\sqrt{3}$$



۸۶۹ ۱ اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه

$$A^n = B^n = \bar{O}, n \geq 3 \text{، پس به ازای هر عدد طبیعی}$$

$$B^3 = \bar{O} \text{ و } A^3 = \bar{O} \text{، بنابراین در اینجا } A^6 + B^6 = \bar{O} \text{، پس } B^6 = \bar{O} \text{ و } A^6 = \bar{O}$$

۸۷۸ ۱ فرض کنید دوزنقه ABCD با رسم خط d به متوازی الاضلاع AMND و دوزنقه BMNC با مساحت‌های مساوی تقسیم شده باشد. ارتفاع AH=h ارتفاع هر دو چهارضلعی است، پس

$$S_{AMND} = S_{BMNC} \Rightarrow h \times AM = \frac{1}{2} h (MB + NC)$$

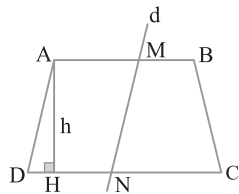
$$2AM = MB + NC$$

چون $MB = AB - AM = 15 - AM$ و $NC = DC - DN = 21 - DN$ بنابراین

$$2AM = 15 - AM + 21 - DN \xrightarrow{AM=DN}$$

$$2AM = 36 - AM - AM \Rightarrow 4AM = 36 \Rightarrow AM = 9$$

پس $MB = 15 - 9 = 6$ ، در نتیجه $\frac{MB}{AM} = \frac{2}{3}$



۸۷۹ ۲ نمای روبه‌روی شکل داده شده به صورت است. نمای

بالای آن به صورت است. نمای چپ آن به صورت است.

است. بنابراین نماهای روبه‌رو و چپ مثل هم هستند.

۸۸۰ ۲ با توجه به شکل زاویه BMD زاویه بین دو وتر متقاطع AB و CD است. بنابراین

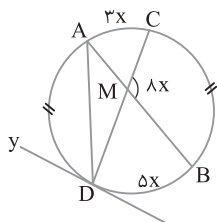
$$\widehat{BMD} = \frac{\widehat{BD} + \widehat{AC}}{2} \Rightarrow 18^\circ - 8x = \frac{5x + 3x}{2} \Rightarrow 18^\circ = 12x \Rightarrow x = 15^\circ$$

در ضمن مجموع اندازه کمان‌های AD، AC، BC و BD برابر 360° است، پس

$$2\widehat{AD} + 8x = 360^\circ \Rightarrow 2\widehat{AD} + 8(15^\circ) = 360^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = 120^\circ$$

از طرف دیگر، زاویه ADy زاویه ظلی مقابل به کمان AD است، پس نصف

$$\widehat{ADy} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \quad \text{اندازه کمان AD است، در نتیجه}$$



۸۸۱ ۲ با توجه به رابطه‌های طولی در دایره،

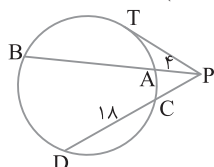
$$PA \times PB = PC \times PD \Rightarrow 4(4 + AB) = PC(PC + 18)$$

$$\xrightarrow{AB=3PC} 4(4 + 3PC) = PC^2 + 18PC$$

$$PC^2 + 6PC - 16 = 0 \Rightarrow (PC + 8)(PC - 2) = 0 \Rightarrow PC = 2$$

بنابراین

$$PT^2 = PC \times PD \xrightarrow{PC=2} PT^2 = 2(2 + 18) = 40 \Rightarrow PT = 2\sqrt{10}$$



۸۷۴ ۴ فاصله نقطه $A(x, y, z)$ از صفحه YZ برابر $|x|$ است. اکنون گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): فاصله نقطه $(-3, 2, 1)$ از صفحه YZ برابر $|-3| = 3$ است.

گزینه (۲): فاصله نقطه $(-2, -3, -4)$ از صفحه YZ برابر $|-2| = 2$ است.

گزینه (۳): فاصله نقطه $(2, 5, 7)$ از صفحه YZ برابر ۲ است.

گزینه (۴): فاصله نقطه $(-5, 1, 5)$ از صفحه YZ برابر $|-5| = 5$ است.

پس نقطه $(-5, 1, 5)$ از صفحه YZ دورتر است.

۸۷۵ ۲ مساحت مثلث تولید شده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با

$$\frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| \quad \text{است، پس}$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|, \theta=120^\circ} S = 4\sqrt{3}$$

$$4\sqrt{3} = \frac{1}{2} |\vec{a}|^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| = 4$$

بنابر قضیه کسینوس‌ها طول ضلع سوم این مثلث برابر است با

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ = 16 + 16 - 2 \times 4 \times 4 \times (-\frac{1}{2}) = 48$$

$$\text{طول ضلع سوم} = 4\sqrt{3}$$

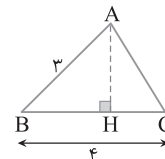


۸۷۶ ۴ مثلث فرضی زیر را در نظر بگیرید. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم.

در این صورت

$$S = 7 \Rightarrow \frac{1}{2} AH \times BC = 7 \Rightarrow \frac{1}{2} AH \times 4 = 7 \Rightarrow AH = \frac{7}{2} = 3.5$$

اکنون توجه کنید که در مثلث قائم‌الزاویه ABH، طول وتر AB از ضلع زاویه قائمه AH کوچک‌تر است و این ممکن نیست. بنابراین چنین مثلثی وجود ندارد.



۸۷۷ ۱ فرض کنید در مثلث قائم‌الزاویه ABC، $BC = 6$ و ارتفاع AH وارد بر وتر باشد (شکل زیر را ببینید). بنابر فرض $\frac{CH}{BH} = \frac{1}{3}$ ، پس عددی

مانند k وجود دارد به طوری که $CH = k$ و $BH = 3k$. چون $BC = 6$ ، پس

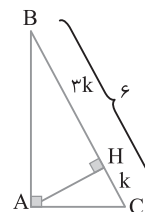
$$CH + BH = k + 3k = 6 \Rightarrow 4k = 6 \Rightarrow k = \frac{3}{2} \quad \text{بنابراین } CH = \frac{3}{2} \text{ و } BH = \frac{9}{2}$$

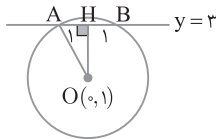
اکنون بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC،

$$AB = \sqrt{BH \times BC} = \sqrt{\frac{9}{2} \times 6} = 3\sqrt{3}$$

$$AC = \sqrt{CH \times BC} = \sqrt{\frac{3}{2} \times 6} = 3$$

در نهایت می‌توان نوشت $AB + AC = 3\sqrt{3} + 3 = 3(\sqrt{3} + 1)$.





۸۸۸ (۲) دهانه سهمی $y^2 = 8x$ رو به راست است و خط $y=2$ موازی محور تقارن این سهمی است. رأس این سهمی $S(0,0)$ است و $4a=8$ ، پس $a=2$. بنابراین کانون آن نقطه $F(2,0)$ است. بنابر خاصیت بازتابندگی سهمی اگر شعاع نوری موازی محور سهمی به آن بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی می‌گذرد. پس معادله شعاع بازتابش، معادله خط گذرنده از نقاط M و F است، به طوری که نقطه M نقطه تلاقی سهمی با خط $y=2$ است:

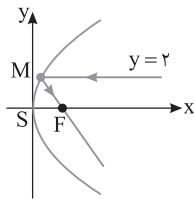
$$y^2 = 8x \xrightarrow{y=2} M\left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

بنابراین

$$m_{MF} = \frac{y_M - y_F}{x_M - x_F} = \frac{2 - 0}{\frac{1}{2} - 2} = \frac{2}{-\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3}$$

بنابرین معادله خط بازتابش

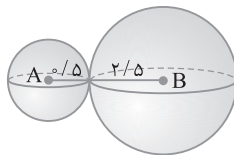
$$y - 0 = -\frac{4}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y + 4x = 8$$



۸۸۹ (۲) طول پاره خط AB برابر است با

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (4-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3$$

از طرف دیگر، مکان هندسی نقاطی از فضا که از نقطه A به فاصله $\frac{\pi}{5}$ هستند، کره‌ای به مرکز A و شعاع $\frac{\pi}{5}$ است و مکان هندسی نقاطی از فضا که از نقطه B به فاصله $\frac{2\pi}{5}$ هستند، کره‌ای به مرکز B و شعاع $\frac{2\pi}{5}$ است. چون طول خط‌المركزین دو کره با مجموع شعاع‌های آن‌ها برابر است، پس این دو کره بر هم مماس هستند. بنابراین فقط یک نقطه با ویژگی مورد نظر وجود دارد.

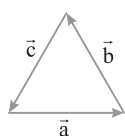
۸۹۰ (۱) با توجه به شکل $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ، پس $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

بنابراین

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 3\epsilon$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 3\epsilon$$

$$3|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = 3\epsilon \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \epsilon \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{\epsilon}$$

بنابراین مساحت این مثلث برابر است با $\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2} = \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}$.

از طرف دیگر، مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به طول

ضلع x برابر $\frac{\sqrt{3}}{4} x^2$ است. در نتیجه

$$\frac{\sqrt{3}}{4} x^2 = \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{2\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{3}}}$$

۸۸۲ (۱) ترکیب دو دوران هم‌مرکز با زاویه‌های α و β ، یک دوران بازاویه $\alpha + \beta$ است. بنابراین ترکیب دو دوران با یک مرکز و با زاویه‌های 40° و 130° یک دوران با زاویه $170^\circ = 130^\circ + 40^\circ$ است.

۸۸۳ (۴) ابتدا به کمک قضیه هرون مساحت این مثلث را به دست می‌آوریم:

$$P = \frac{9+16+23}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{24(24-9)(24-16)(24-23)} = \sqrt{24 \times 15 \times 8 \times 1} = \sqrt{288} = 24\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{24 \times 15 \times 8 \times 1} = \sqrt{3 \times 8 \times 15 \times 8} = 24\sqrt{2}$$

طول ارتفاع وارد بر ضلع به اندازه ۱۶ مورد سؤال است، در نتیجه

$$S = \frac{1}{2}(\text{ارتفاع})(\text{قاعده}) \Rightarrow 24\sqrt{2} = \frac{1}{2}(16) \Rightarrow \text{ارتفاع} = 3\sqrt{2}$$

۸۸۴ (۴) ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^{1399} = (A^2)^{699} \times A = I^{699} \times A = A$$

$$A^{1400} = (A^2)^{700} = I^{700} = I$$

بنابراین

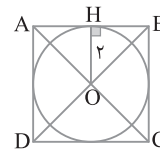
$$A^{1400} - A^{1399} = I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۸۸۵ (۱) ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

پس $A^5 = (A^2)^2 \times A = I^2 \times A = A$ ، بنابراین

$$(A^5 + 3A^2 - A)^{-1} = (A + 3I - A)^{-1} = (3I)^{-1} = \frac{1}{3}I$$

۸۸۶ (۳) مکان هندسی نقاطی که از مرکز O ، نقطه تلاقی قطرهای مربعABCD، به فاصله ۲ هستند دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲ است. چون فاصله مرکز O از ضلع مربع، یعنی عمود OH برابر ۲ است، پس این دایره بر اضلاع مربع مماس است، بنابراین روی این مربع چهار نقطه با شرایط خواسته شده وجود دارد.۸۸۷ (۲) فرض می‌کنیم دایره به شعاع R و مرکز O روی خط $y=3$ وتر $AB=2$ را جدا کند. عمود OH را بر خط $y=3$ وارد می‌کنیم. طول عمود OH برابر ۲ است و

$$\triangle AOH: AO^2 = OH^2 + AH^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \Rightarrow AO = \sqrt{5} = R$$

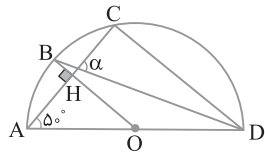
بنابراین معادله دایره به صورت زیر است:

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 + 1 - 2y = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y = 4$$

۸۹۵ ۲ اندازه زاویه AOB در مثلث قائم الزاویه AOH برابر 40°

است. چون $\widehat{AOB}$ زاویه مرکزی است، پس $\widehat{AB} = 40^\circ$. زاویه محاطی DAC برابر 50° است، بنابراین $\widehat{DC} = 100^\circ$. در نتیجه

$$\alpha = \frac{\widehat{DC} + \widehat{AB}}{2} = \frac{100^\circ + 40^\circ}{2} = 70^\circ$$



۸۹۶ ۴ می دانیم بین طول کمان AB و اندازه کمان AB رابطه زیر

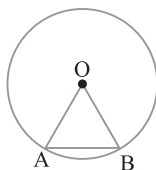
برقرار است:

$$\frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان AB}}{360^\circ} \Rightarrow \frac{3\pi}{2\pi(18)} = \frac{\text{اندازه کمان AB}}{360^\circ}$$

$$\text{اندازه کمان AB} = 30^\circ$$

بنابراین اندازه زاویه مرکزی AOB برابر 30° است، پس

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \times OB \sin \hat{O} = \frac{1}{2} (18)(18) \sin 30^\circ = 81$$



۸۹۷ ۱ در مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است، پس

$$AM = \frac{1}{2} BC$$

به این ترتیب $AM = MB$ ، از طرف دیگر $\hat{C} = 30^\circ$ ، پس

$$AB = \frac{1}{2} BC = MB$$

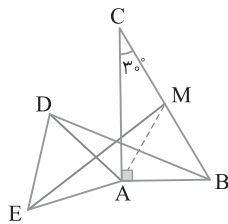
پس مثلث BAM متساوی الاضلاع است. اکنون اگر

تبدیل T را دوران 60° حول A در نظر بگیریم، آن گاه

$$T(B) = M, T(D) = E \Rightarrow T(BD) = ME$$

می دانیم اگر دو پاره خط دوران یافته یکدیگر باشند، زاویه بین آنها با زاویه دوران

برابر است، پس زاویه بین دو خط BD و EM برابر 60° است.



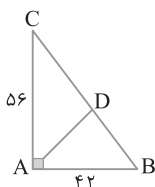
۸۹۸ ۳ فرض می کنیم AD نیمساز زاویه A

باشد. بنابر قضیه فیثاغورس،

$$\triangle ABC: BC^2 = AB^2 + AC^2 = 42^2 + 56^2$$

$$= 14^2(3^2 + 4^2) = 14^2 \times 5^2 \Rightarrow BC = 14 \times 5 = 70$$

اکنون با استفاده از قضیه نیمسازها،



ترکیب $\Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{56}{42} = \frac{4}{3}$ در مخرج است

$$\frac{CD}{BC} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{CD}{70} = \frac{4}{7} \Rightarrow CD = \frac{70 \times 4}{7} = 40$$

۸۹۱ ۲ چون این n ضلعی منتظم است، اندازه زاویه های خارجی آن

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}$$

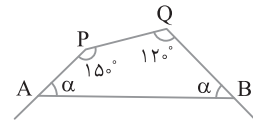
است. از طرف دیگر در چهارضلعی APQB مجموع زاویه های

داخلی برابر 360° است، پس $2\alpha + 15^\circ + 12^\circ = 360^\circ$. به دست می آید

$$\alpha = 45^\circ, \text{ یعنی } \frac{360^\circ}{n} = 45^\circ \text{ یا } n = 8$$

در نهایت به دست می آید

$$\text{تعداد قطرهای هشت ضلعی منتظم} = \frac{8 \times 5}{2} = 20$$



۸۹۲ ۳ چون $PQ \parallel BC$ ، بنابر قضیه اساسی تشابه دو مثلث APE و ABF

متشابه هستند، در نتیجه $\frac{AP}{AB} = \frac{AE}{AF} = \frac{4}{7}$. همچنین بنابر قضیه اساسی تشابه

دو مثلث APQ و ABC نیز با نسبت تشابه $\frac{AP}{AB}$ متشابه هستند. پس

نسبت مساحت های این دو مثلث برابر مربع نسبت تشابه آنها است:

$$\frac{S_{APQ}}{S_{ABC}} = \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{16}{49}$$

با تفصیل نسبت در مخرج به دست می آید:

$$\frac{S_{APQ}}{S_{BPQC}} = \frac{16}{49-16} = \frac{16}{33}$$

۸۹۳ ۱ مثلث های BRS و BAC در ارتفاع نظیر رأس B مشترک اند، پس

$$\frac{S_{BRS}}{S_{BAC}} = \frac{RS}{AC} = \frac{1}{5}$$

در نتیجه چون $S_{BAC} = 15$ ، پس $S_{BRS} = 3$. همچنین مثلث های CPQ و

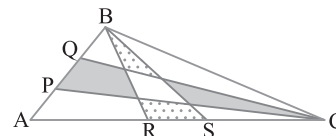
CAB در ارتفاع نظیر رأس C مشترک اند، پس $\frac{S_{CPQ}}{S_{CAB}} = \frac{PQ}{AB} = \frac{1}{3}$. در

نتیجه چون $S_{CAB} = 15$ ، پس $S_{CPQ} = 5$. اگر مساحت ناحیه مشترک

مثلث های BRS و CPQ را با Z نشان دهیم، آن گاه $x + z = 5$ و $y + z = 3$.

$$x - y = (x + z) - (y + z) = 5 - 3 = 2$$

اکنون به دست می آید



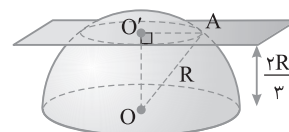
۸۹۴ ۳ اگر صفحه ای موازی با قاعده نیم کره آن را قطع کند، سطح مقطع

حاصل دایره است. اگر O مرکز نیم کره و O' مرکز دایره ایجاد شده باشد،

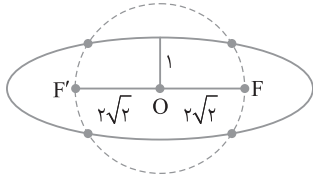
آن گاه در مثلث قائم الزاویه OO'A بنابر قضیه فیثاغورس،

$$OA^2 = OO'^2 + O'A^2 \Rightarrow R^2 = \left(\frac{2R}{3}\right)^2 + O'A^2 \Rightarrow O'A^2 = \frac{5}{9}R^2$$

بنابراین $\pi(O'A)^2 = \pi(O'A)^2 = \frac{5\pi}{9}R^2$ مساحت سطح مقطع.



۳ ۹۰۲ با توجه به شکل طول قطر بزرگ بیضی برابر طول DC و مساوی $۹-۳=۶$ است و طول قطر کوچک بیضی برابر طول BC و مساوی $۴-۲=۲$ است، پس $۲a=۶$ و $۲b=۲$. بنابراین $۳^۲-۱^۲=۸$ ، پس $c^۲=a^۲-b^۲=۳^۲-۱^۲=۸$ ، پس $c=۲\sqrt{۲}$. یعنی دایره به قطر FF' و شعاع $c=۲\sqrt{۲}$. چون $c>b$ ، پس در اینجا دایره به قطر FF' بیضی را در چهار نقطه قطع می‌کند.



۳ ۹۰۳ محور تقارن این سهمی موازی محور y است، پس با توجه به موقعیت نقطه $S(h, k)=(۲, ۱)$ و معادله این سهمی به صورت

$$(x-۲)^۲=۴a(y-۱) \text{ چون } A \text{ روی سهمی است، پس}$$

$$۴=۴a \times ۴ \Rightarrow a=\frac{1}{۴}$$

خط هادی این سهمی به صورت $y=k-a$ است. بنابراین معادله خط هادی

$$\text{این سهمی } y=۱-\frac{1}{۴} \text{، یعنی } y=\frac{۳}{۴} \text{ است.}$$

۳ ۹۰۴ می‌دانیم بردار $\vec{a}$ و بردار $\vec{a}'$ اندازه‌های برابر دارند، زیرا قرینه کردن تبدیلی ایزومتري است، پس به وجود بردار $\vec{b}$ (برداري که با جهت مثبت محورهای مختصات زوایای برابر می‌سازد) احتیاجی نیست:

$$|\vec{a}'|=|\vec{a}|=\sqrt{۱+۱+۴}=\sqrt{۶}$$

۴ ۹۰۵ ابتدا بردار $\vec{a} \times \vec{k}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{a} \times \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۱ & ۲ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۲\vec{i} - \vec{j}$$

اکنون ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{a} \times \vec{k}$ را تعیین می‌کنیم:

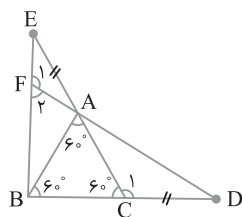
$$\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۱ & ۲ & -۴ \\ ۲ & -۱ & ۰ \end{vmatrix} = -۴\vec{i} - ۸\vec{j} - ۵\vec{k}$$

بنابراین

$$|\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{k})| = \text{مساحت (متوازی‌الاضلاع مورد نظر)} \\ = \sqrt{۱۶+۶۴+۲۵} = \sqrt{۱۰۵}$$

۲ ۹۰۶ دو مثلث ACD و BAE همنهشت‌اند. زیرا

$$\begin{cases} CD=AE \\ AC=AB \end{cases} \xrightarrow{\text{(ض.ض)}} \triangle ACD \cong \triangle BAE \Rightarrow \hat{D}=\hat{E} \\ \hat{C}_1=\hat{E}AB=۱۲^\circ$$



بنابراین دو مثلث ACD و AFE دو زاویه مساوی دارند: $\hat{D}=\hat{E}$ و $\hat{E}AF=\hat{D}AC$ ، پس زاویه‌های سوم آن‌ها نیز برابرند، یعنی $\hat{F}_1=\hat{C}_1=۱۲^\circ$

در نتیجه $\hat{F}_1=۶^\circ$. تجزیه خارج از کشور - ۹۷

۳ ۸۹۹ ابتدا ماتریس‌های A و B را به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۲ \\ ۴ & ۴ & ۴ \\ ۶ & ۶ & ۶ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{۲} & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ \frac{1}{۲} & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ \frac{1}{۲} & ۱ & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$$

بنابراین

(ستون سوم B) (سطر دوم A) = درایه سطر دوم و ستون سوم AB

$$= \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ \\ ۴ \\ ۴ \end{bmatrix} = [۶+۶+۶]=۱۸$$

(ستون سوم A) (سطر دوم B) = درایه سطر دوم و ستون سوم BA

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{۲} & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ \frac{1}{۲} & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ \frac{1}{۲} & ۱ & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ ۲ \end{bmatrix} = [۱+۴+۹]=۱۴$$

پس مجموع درایه‌های سطر دوم و ستون سوم ماتریس‌های AB و BA برابر $۱۸+۱۴=۳۲$ است.

۳ ۹۰۰ ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & m \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ وارون پذیر نیست، پس دترمینان آن

صفر است:

$$\begin{vmatrix} ۲ & m \\ -۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow ۶+m=۰ \Rightarrow m=-۶$$

$$A = \begin{bmatrix} -۵ & ۹ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \text{ برابر } m=-۶ \text{ به ازای } A = \begin{bmatrix} m+۱ & ۳-m \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \text{ ماتریس}$$

است. بنابراین

$$A^{-1} = \frac{1}{۵-۱۸} \begin{bmatrix} -۱ & -۹ \\ -۲ & -۵ \end{bmatrix} = \frac{1}{-۱۳} \begin{bmatrix} -۱ & -۹ \\ -۲ & -۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{۱۳} & \frac{۹}{۱۳} \\ \frac{۲}{۱۳} & \frac{۵}{۱۳} \end{bmatrix}$$

۱ ۹۰۱ راه حل اول معادله دایره را به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$

در نظر می‌گیریم و مختصات نقاط داده شده را در معادله دایره قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} (۰, ۰) \in \text{دایره} \Rightarrow c=۰ \\ (۲, ۱) \in \text{دایره} \Rightarrow ۴+۱+۲a+b=۰ \Rightarrow ۲a+b=-۵ \\ (-۲, ۴) \in \text{دایره} \Rightarrow ۴+۱۶-۲a+۴b=۰ \Rightarrow -۲a+۴b=-۲۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۲a+b=-۵ \\ -۲a+۴b=-۲۰ \end{cases} \xrightarrow{+} ۵b=-۲۵ \Rightarrow b=-۵ \Rightarrow a=۰$$

$$\text{معادله دایره: } x^۲+y^۲-۵y=۰ \Rightarrow R=\frac{1}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

راه حل دوم دایره از نقاط $A(۲, ۱)$ ، $B(-۲, ۴)$ و $C(۰, ۰)$ می‌گذرد. توجه

کنید که $m_{CA}=\frac{-۱}{۰-۲}=\frac{1}{۲}$ و $m_{CB}=\frac{-۴}{۰+۲}=-۲$ ، پس $CA \perp CB$.

بنابراین مثلث ABC در رأس C قائم‌الزاویه است و دایره مورد نظر، دایره

$$\text{محیطی این مثلث است. بنابراین } R=\frac{|AB|}{۲}=\frac{\sqrt{۱۶+۹}}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

بنابراین

$$\begin{cases} BC=CM \\ AD=DM \end{cases} \xrightarrow{+} AD+BC=CM+DM$$

$$2BC=DC \text{ یا } 2BC=AB$$

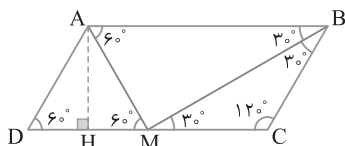
از طرف دیگر محیط متوازی الاضلاع برابر $12\sqrt{3}$ است. پس
محیط $= 12\sqrt{3} \Rightarrow 2(AB+BC) = 12\sqrt{3}$

$$2\left(AB + \frac{AB}{2}\right) = 12\sqrt{3} \Rightarrow 3AB = 12\sqrt{3} \Rightarrow AB = 4\sqrt{3}$$

در ضمن در مثلث متساوی الاضلاع ADM ارتفاع AH برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}AD$ و

$$\text{مساوی } 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{AB}{2}\right) \text{ است. در نتیجه}$$

$$S_{ABCD} = AH \times AB = 3 \times 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$



تجربی - ۹۷

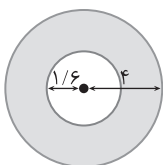
۹۱۱ رأس بزرگ‌ترین مخروط، مطابق شکل (۱) روی مرکز یک قاعده استوانه و قاعده این مخروط بر قاعده دیگر استوانه منطبق است. اگر این جسم هندسی را با صفحه‌ای موازی قاعده قطع دهیم، نمای شکل از روبه‌رو به صورت شکل (۲) است:

$$\triangle OHB : H'A \parallel HB \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{AH'}{BH} = \frac{OH'}{OH}$$

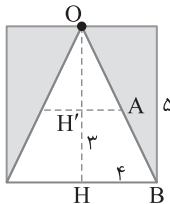
$$\frac{AH'}{4} = \frac{5-3}{5} \Rightarrow AH' = 4 \times \frac{2}{5} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$$

از طرف دیگر، سطح مقطع حاصل از نمای بالا به صورت شکل (۳) است. پس مساحت خواسته شده برابر است با

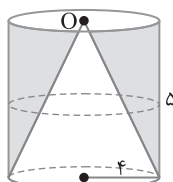
$$S = \pi \times 4^2 - \pi \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \pi(16 - \frac{1}{25}) = \frac{399}{25}\pi$$



شکل (۳)



شکل (۲)



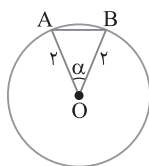
شکل (۱)

تجربی خارج از کشور - ۹۶

۹۱۲ هشت ضلعی منتظم از ۸ مثلث همنهشت مانند OAB در شکل زیر تشکیل شده است. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمان AB برابر

$$\text{است با } \alpha = \frac{360}{8} = 45^\circ \text{ اکنون توجه کنید که}$$

$$8S_{OAB} = 8 \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 45^\circ \right) = 8\sqrt{2}$$



ریاضی - ۹۶

۹۰۷ بنابر فرض‌های سؤال اعدادی مانند x و y وجود دارند به‌طوری‌که $AB=2x$ و $CD=\Delta x$. همچنین $AF=y$ و $AD=4y$ ، پس $FD=3y$. بنابر تعمیم قضیه تالس،

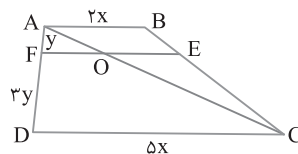
$$\triangle ADC : OF \parallel DC \Rightarrow \frac{OF}{CD} = \frac{AF}{AD} = \frac{1}{4} \xrightarrow{CD=\Delta x} OF = \frac{\Delta}{4}x$$

$$\triangle ABC : OE \parallel AB \Rightarrow \frac{CE}{BC} = \frac{OE}{AB} \xrightarrow{\frac{CE}{BC} = \frac{DF}{AD} = \frac{3}{4}} \frac{3}{4} = \frac{OE}{AB}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{OE}{AB} \xrightarrow{AB=2x} OE = \frac{3}{2}x$$

$$\frac{EF}{CD} = \frac{4}{\Delta x} = \frac{11}{20} \text{ پس } EF = OF + OE = \frac{\Delta}{4}x + \frac{3}{2}x = \frac{11}{4}x$$

بنابراین



تجربی خارج از کشور - ۹۷

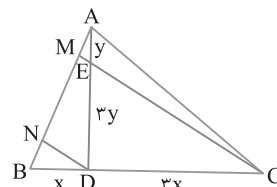
۹۰۸ از فرض‌های سؤال اطلاعات روی شکل به دست می‌آیند. بنابر قضیه تالس،

$$\triangle BMC : DN \parallel CM \Rightarrow \frac{BN}{MN} = \frac{BD}{DC} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \Rightarrow BN = \frac{1}{3}MN$$

$$\triangle AND : ME \parallel DN \Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{AE}{DE} = \frac{y}{3y} = \frac{1}{3} \Rightarrow AM = \frac{1}{3}MN$$

بنابراین $AM=BN$ پس

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AM}{AM+MN+BN} = \frac{AM}{AM+3AM+AM} = \frac{1}{5} \Rightarrow AB = 5AM$$



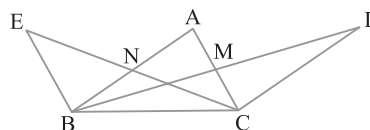
ریاضی خارج از کشور - ۹۷

۹۰۹ در مثلث ABC پاره‌خط BM میانه است، پس

$$S_{BMC} = \frac{1}{2}S_{ABC} \text{ در ضمن در مثلث BCD پاره‌خط CM میانه است،}$$

$$\text{پس } S_{BMC} = \frac{1}{2}S_{BCD} \text{ بنابرین } S_{ABC} = S_{BCD} \text{ به همین ترتیب}$$

$$\text{معلوم می‌شود } S_{ABC} = S_{BEC} \text{ پس } S_{BEC} = S_{BCD} \text{ تجربی خارج از کشور - ۹۷}$$



۹۱۰ در متوازی الاضلاع ABCD نیمسازهای زاویه‌های A و B

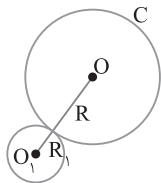
یکدیگر را در نقطه M روی ضلع DC قطع کرده‌اند. پس مثلث BMC متساوی الساقین و مثلث ADM متساوی الاضلاع است (شکل زیر را ببینید).

۹۱۸ ۲ چون تمام خط‌های قائم بر دایره C از نقطه (۸, ۷) می‌گذرند،

پس مرکز دایره C نقطه O(۸, ۷) است. همچنین اگر O_۱ و R_۱ به ترتیب مرکز و شعاع دایره داده شده باشند، آن‌گاه O_۱(۲, -۱) و R_۱=۳. بنابراین

$$OO_1 = \sqrt{3^2 + 6^2} = 6.75$$

$$R = OO_1 - R_1 = 6.75 - 3 = 3.75$$



ریاضی خارج از کشور - ۹۶

۹۱۹ ۴ برای آنکه a را با فاصله کانونی سهمی اشتباه نگیریم، به جای a

از حرف m استفاده می‌کنیم. پس معادله سهمی به شکل $2y^2 - 12y + mx + 8 = 0$ در می‌آید. اکنون معادله این سهمی را به صورت

استاندارد می‌نویسیم:

$$2y^2 - 12y + mx + 8 = 0 \Rightarrow 2(y^2 - 6y) = -mx - 8$$

$$2((y-3)^2 - 9) = -mx - 8 \Rightarrow 2(y-3)^2 = -mx + 10$$

$$(y-3)^2 = -\frac{m}{2}\left(x - \frac{10}{m}\right)$$

با توجه به گزینه‌ها، m عددی مثبت است، پس دهانه این سهمی رو به چپ

است. همچنین نقطه $S(h, k) = (\frac{10}{m}, 3)$ رأس این سهمی است و $4a = \frac{m}{2}$.

پس $a = \frac{m}{8}$. بنابراین معادله خط هادی این سهمی به صورت زیر است:

$$x = h + a \frac{y-k}{a} \Rightarrow \frac{y-3}{a} = \frac{10}{m} + \frac{m}{2} \Rightarrow 2ym = m^2 + 80$$

$$m^2 - 2ym + 80 = 0 \Rightarrow (m-16)(m-5) = 0 \Rightarrow m=16, m=5$$

ریاضی - ۹۷

۹۲۰ ۴ مساحت مثلثی که روی دو بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ و $\vec{a} + 2\vec{b}$ ساخته

می‌شود مساوی نصف اندازه ضرب خارجی این دو بردار است:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |(\vec{a} + 2\vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{b})|$$

را به دست آوریم:

$$\vec{a} + 2\vec{b} = (2, -1, 1) + 2(0, 1, -1) = (2, 1, -1)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0, 2, 2)$$

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (4, -4, 4)$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3 \times 4^2} = 2\sqrt{3}$$

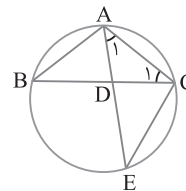
ریاضی خارج از کشور - ۹۷

۹۱۳ ۳ شکل سؤال به صورت زیر است. از E به C وصل می‌کنیم. توجه

کنید که $\hat{B}$ و $\hat{E}$ زاویه‌های محاطی رویه‌رو به کمان AC هستند، پس برابرند. از طرف دیگر $\hat{B} = \hat{C}_1$ ، در نتیجه $\hat{C}_1 = \hat{E}$. پس در مثلث‌های ADC و ACE،

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_1 \\ \hat{C}_1 = \hat{E} \end{cases} \xrightarrow{(ز.ز)} \triangle ADC \sim \triangle ACE$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow AD \times AE = AC^2$$



ریاضی خارج از کشور - ۹۷

۹۱۴ ۱ فرض می‌کنیم $\hat{A} = 60^\circ$ ، $a = 3\sqrt{7}$ و $b = 9$. با توجه به

قضیه کسینوس‌ها،

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \Rightarrow 9 \times 7 = 9^2 + c^2 - 2 \times 9 \times c \times \cos 60^\circ$$

$$63 = 81 + c^2 - 9c \Rightarrow c^2 - 9c + 18 = 0 \Rightarrow (c-6)(c-3) = 0 \Rightarrow c=3, 6$$

تجربی - ۹۶

۹۱۵ ۲ با توجه به تعریف ماتریس A، $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ در

$$نتیجه A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ اکنون توجه کنید که}$$

$$A^2 - 4A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} = 5I$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $A^2 - 4A$ برابر $3 \times 5 = 15$ است.

ریاضی خارج از کشور - ۹۶

۹۱۶ ۴ بدون اینکه کلیت راه‌حل تغییر کند، فرض می‌کنیم $a = 5$ و

$b = c = 0$ بنابراین

$$\begin{vmatrix} 4+a & b & c \\ a & 4+b & c \\ a & b & 4+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 9 \times 4 \times 4 = 144$$

ریاضی خارج از کشور - ۹۶

۹۱۷ ۴ توجه کنید که

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3 \times 4 - 2 \times 5} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

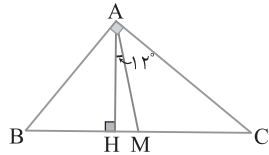
بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با

$$A^{-1} \times (2B) = (2A^{-1}) \times B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -14 \\ -11 & 15 \end{bmatrix}$$

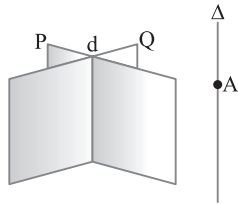
تجربی - ۹۶

۹۲۴ ۴ در هر مثلث قائم الزاویه، زاویه بین ارتفاع و میانه وارد بر وتر مساوی تفاضل دو زاویه حاده است. پس $\hat{H}A\hat{M} = \hat{B} - \hat{C}$ ، بنابراین $\hat{B} - \hat{C} = ۱۲^\circ$ در ضمن $\hat{B} + \hat{C} = ۹۰^\circ$ ، در نتیجه $\hat{B} = ۵۱^\circ$ و $\hat{C} = ۳۹^\circ$.

تجربی - ۹۷

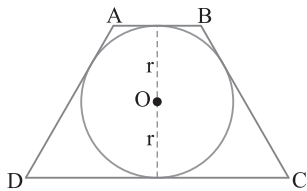


۹۲۵ ۴ بنابر شکل زیر، دو صفحه متقاطع P و Q با فصل مشترک d را در نظر می‌گیریم. از نقطه A خط Δ را موازی خط d رسم می‌کنیم. تمام صفحه‌هایی که از Δ می‌گذرند و با P و Q موازی نیستند و همچنین از خط d نمی‌گذرند جواب این تست هستند. واضح است که نامتناهی صفحه با این ویژگی‌ها وجود دارد.



ریاضی خارج از کشور - ۹۶

۹۲۶ ۴ چون $\frac{AB}{DC} = \frac{1}{3}$ ، پس عددی مانند k وجود دارد به‌طوری‌که $AB = k$ و $DC = 3k$. در دوزنقه متساوی الساقین محیط بر دایره، قطر دایره محاطی، واسطه هندسی طول دو قاعده است: $k \times 3k = ۱۲$ ، یعنی $k = ۲$. در نتیجه $AB = ۲$ و $DC = ۶$. اکنون مساحت دوزنقه به صورت زیر به‌دست می‌آید $S = \frac{1}{2}(AB + DC) \times (2r) = \frac{1}{2}(2 + 6) \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

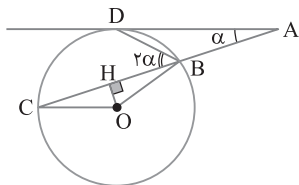


ریاضی خارج از کشور - ۹۶

۹۲۷ ۲ بنابر فرض سؤال اگر $\hat{D}A\hat{C} = \alpha$ ، آن‌گاه $\hat{D}B\hat{C} = 2\alpha$ و چون زاویه DBC محاطی است، پس کمان مقابل به آن یعنی DC برابر 4α است. در نتیجه

$$\hat{A} = \frac{\widehat{DC} - \widehat{DB}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{4\alpha - \widehat{DB}}{2} \Rightarrow \widehat{DB} = 2\alpha$$

پس زاویه مرکزی COB برابر $4\alpha + 2\alpha$ ، یعنی 6α است و چون OH بر وتر BC عمود است، این زاویه مرکزی را نصف می‌کند. بنابراین $\hat{C}O\hat{H} = 3\alpha$. در نتیجه زاویه COH سه برابر زاویه DAC است.



ریاضی - ۹۷

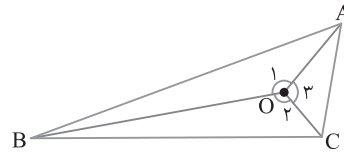
۹۲۱ ۳ بنابر فرض سؤال $\frac{\hat{O}_1}{7} = \frac{\hat{O}_2}{6} = \frac{\hat{O}_3}{5}$. در ضمن می‌دانیم زاویه

بین دو نیمساز داخلی هر مثلث برابر 90° به اضافه نصف زاویه سوم آن است.

پس $\hat{O}_1 = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ ، $\hat{O}_2 = 90^\circ + \frac{\hat{B}}{2}$ و $\hat{O}_3 = 90^\circ + \frac{\hat{C}}{2}$. در نتیجه

$$\frac{90^\circ + \frac{\hat{C}}{2}}{7} = \frac{90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}}{6} = \frac{90^\circ + \frac{\hat{B}}{2}}{5} = \frac{270^\circ + \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{2}}{7+6+5} = \frac{360^\circ}{18} = 20^\circ$$

بنابراین $\frac{90^\circ + \frac{\hat{C}}{2}}{7} = 20^\circ$. پس $\hat{C} = ۱۰۰^\circ$.



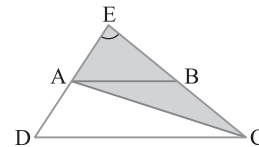
ریاضی - ۹۷

۹۲۲ ۴ مطابق شکل دو ضلع AB و DC موازی هستند، پس بنابر

تعمیم قضیه تالس، $\frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{CD} = \frac{3}{5}$. اکنون نسبت مساحت‌ها را

حساب می‌کنیم

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{AEC}} = \frac{S_{EDC} - S_{AEB}}{S_{AEC}} = \frac{\frac{1}{2}ED \times EC \times \sin \hat{E} - \frac{1}{2}EA \times EB \times \sin \hat{E}}{\frac{1}{2}EA \times EC \times \sin \hat{E}} = \frac{ED}{EA} - \frac{EB}{EC} = \frac{5}{3} - \frac{3}{5} = \frac{25-9}{15} = \frac{16}{15} \Rightarrow \frac{S_{AEC}}{S_{ABCD}} = \frac{15}{16}$$



تجربی خارج از کشور - ۹۶

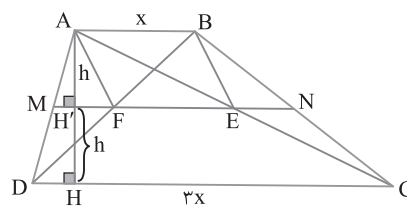
۹۲۳ ۴ با توجه به شکل زیر، چون N وسط BC است و $NE \parallel AB$ ،

بنابر قضیه تالس E هم وسط AC است. به‌طور مشابه F هم وسط BD است. می‌دانیم طول پاره‌خطی که وسط‌های دو قطر دوزنقه را به هم وصل می‌کند

مساوی نصف تفاضل دو قاعده است. پس $EF = \frac{3x-x}{2} = x$. بنابراین

چهارضلعی ABEF متوازی الاضلاع است. در ضمن اگر ارتفاع AH را بر DC رسم کنیم، آن‌گاه با استفاده از قضیه تالس معلوم می‌شود ارتفاع MN از نصف می‌کند، یعنی $AH' = HH' = h$ ، در نتیجه

$$\frac{S_{ABEF}}{S_{ABCD}} = \frac{hx}{\frac{1}{2}(2h)(x+3x)} = \frac{1}{4}$$



ریاضی - ۹۷

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 2a-2 & a-3 & a-7 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} = (2a-2)(-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \\ + (a-3)(-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + (a-7)(-1)^5 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ = -2a \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ - 3 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \quad (2)$$

تفاضل تساوی‌های (۱) و (۲) جواب این سؤال است:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 2a & a+1 & a-1 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 2a-2 & a-3 & a-7 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ = (-20+6) + (25-8) - 2(-16+15) + 3(-20+6) - 7(25-8) \\ = -14 + 17 + 2 - 42 - 119 = -156$$

ریاضی خارج از کشور - ۹۷

پس به دترمینان اولیه مقدار ۱۵۶ واحد اضافه می‌شود.

ابتدا وارون ماتریس A را پیدا می‌کنیم:

$$A^{-1} = \frac{1}{7(-2) - 3(-4)} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}$$

حاصل ضرب خواسته شده برابر است با

$$B \times (2A^{-1}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -15 \\ -14 & -25 \end{bmatrix}$$

ریاضی خارج از کشور - ۹۷

حاصل دترمینان را با بسط دادن نسبت به سطر اول حساب می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} 0 & x-3 & x-2 \\ x+3 & 0 & -4 \\ x+2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -(x-3)(4x+8) + (x-2)(6x+18) = 0$$

$$-4x^2 - 8x + 12x + 24 + 6x^2 + 18x - 36 = 0$$

$$2x^2 + 10x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x = -6$$

ریاضی - ۹۷

۹۳۳ با توجه به اطلاعات مسئله، خط $3x + 2y = a$ از مرکز دایره داده شدهمی‌گذرد. مرکز این دایره $O(1, -\frac{1}{2})$ است. پس $3 \times 1 + 2 \times (-\frac{1}{2}) = a \Rightarrow a = 2$ ۹۳۴ با توجه به موقعیت کانون و خط هادی نسبت به هم، دهانه این سهمی رو به راست است. عمود FH را بر خط هادی رسم می‌کنیم، در این صورت H نقطه $(-4, 3)$ است. بنابراین اگر $S(h, k)$ رأس این سهمی باشد، آن‌گاه $a = FS = 3$ و $S = \frac{F+H}{2} = (-1, 3)$ در نتیجه معادله سهمی به صورت زیر است

$$(y-k)^2 = 4a(x-h) \Rightarrow (y-3)^2 = 12(x+1)$$

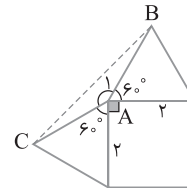
$$\xrightarrow{\text{برخورد با محور } x} \xrightarrow{y=0} 9 = 12x + 12 \Rightarrow 12x = -3 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

۹۲۸ ابتدا اندازه زاویه $\hat{A}_1$ را حساب می‌کنیم:

$$\hat{A}_1 + 60^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = 150^\circ$$

مساحت مثلث ABC برابر است با

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A}_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 150^\circ = 1$$



تجربی خارج از کشور - ۹۶

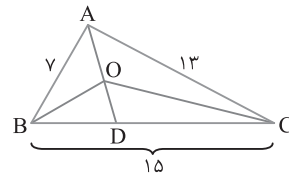
۹۲۹ اگر O نقطه تلاقی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC

باشد، آن‌گاه بنابر قضیه نیمساز،

$$\triangle ABC: \hat{A} \text{ نیمساز } AD \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{7}{13} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}$$

$$\frac{BD}{15} = \frac{7}{20} \Rightarrow BD = \frac{21}{4}$$

$$\triangle ABD: \hat{B} \text{ نیمساز } BO \Rightarrow \frac{AO}{OD} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{AO}{OD} = \frac{7}{\frac{21}{4}} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$$

پس نقطه O نیمساز زاویه A را با نسبت $\frac{4}{3}$ یا $\frac{3}{4}$ تقسیم می‌کند.

ریاضی خارج از کشور - ۹۷

۹۳۰ اگر از هر دایره واقع در سطر دوم دترمینان داده شده دو برابر

شماره ستون آن کم شود، به دترمینان زیر می‌رسیم:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 2a-2 & a-3 & a-7 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$$

اکنون هر دو دترمینان را برحسب سطر دوم بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 2a & a+1 & a-1 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 2a(-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \\ + (a+1)(-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + (a-1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ = -2a \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ - a \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \quad (1)$$

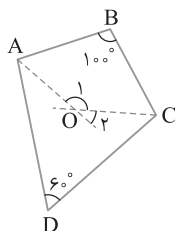
۹۳۸ ۱ می دانیم مجموع زاویه های داخلی یک چهارضلعی برابر 360° است، پس

$$\frac{\hat{A}}{3} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{5} = \frac{\hat{D}}{12} = \alpha \Rightarrow \hat{A} = 3\alpha, \hat{B} = 4\alpha, \hat{C} = 5\alpha, \hat{D} = 12\alpha$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \Rightarrow 3\alpha + 4\alpha + 5\alpha + 12\alpha = 360^\circ$$

$$14/4\alpha = 360^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{360^\circ}{14/4} = 25^\circ$$

بنابراین زاویه های این چهارضلعی برابرند با $\hat{A} = 3\alpha = 75^\circ$ ، $\hat{B} = 4\alpha = 100^\circ$ ، $\hat{C} = 5\alpha = 125^\circ$ و $\hat{D} = 12\alpha = 300^\circ$ (شکل زیر را ببینید). اکنون نیمسازهای زاویه های داخلی A و C را رسم می کنیم. اگر محل تلاقی این دو نیمساز باشد، آن گاه در چهارضلعی OABC مجموع زاویه های داخلی 360° است، پس

$$\frac{75^\circ}{2} + \frac{100^\circ}{2} + \frac{125^\circ}{2} + \hat{O}_1 = 360^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 160^\circ \Rightarrow \hat{O}_2 = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$$


تجربی - ۹۶

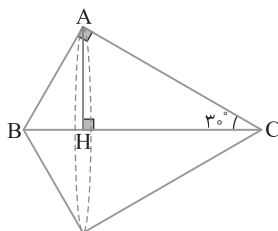
۹۳۹ ۲ توجه کنید که شکل حاصل از دوران بیان شده در صورت تست، دو مخروط است که شعاع قاعده هریک از آنها، برابر ارتفاع وارد بر وتر این مثلث است (شکل زیر را ببینید). چون طول وتر مثلث ABC برابر ۸ و زاویه C برابر 30° است، پس $AB = 4$ و $AC = 4\sqrt{3}$. اکنون بنابر روابط طولی در مثلث قائم الزاویه،

$$AH = \frac{AB \times AC}{BC} = 2\sqrt{3}$$

در نهایت حجم شکل ایجاد شده به صورت زیر به دست می آید

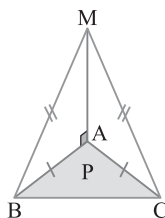
$$V = \frac{1}{3} \pi (AH)^2 \times BH + \frac{1}{3} \pi (AH)^2 \times CH = \frac{1}{3} \pi (AH)^2 (BH + CH)$$

$$= \frac{1}{3} \pi (AH)^2 (BC) = \frac{1}{3} \pi \times 12 \times 8 = 32\pi$$

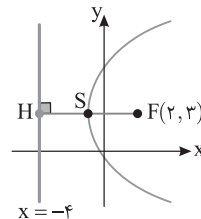


ریاضی خارج از کشور - ۹۶

۹۴۰ ۱ شکل سؤال به صورت زیر است. دو مثلث MAB و MAC به حالت (ض ض ض) منتهی هستند، پس $\hat{MAC} = \hat{MAB} = 90^\circ$. بنابراین $MA \perp AC$ چون MA هم بر AB و هم بر AC عمود است، پس MA بر صفحه مثلث ABC، یعنی صفحه P عمود است (چون MA بر دو خط متقاطع صفحه P در نقطه تقاطع آنها عمود است). در ضمن MA و BC نامتقاطع هستند.



ریاضی - ۹۷ با تغییر



تجربی خارج از کشور - ۹۶

۹۳۵ ۲ حجم متوازی السطوح ساخته شده روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a} \times \vec{b}$ مساوی قدرمطلق ضرب مختلط آنها است:

$$\text{حجم متوازی السطوح} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})| = |\vec{a} \times \vec{b}|^2$$

پس لازم است بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ را به دست آوریم:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 10\vec{i} + 9\vec{j} + 7\vec{k}$$

بنابراین $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = 10^2 + 9^2 + 7^2 = 230$. ریاضی - ۹۷

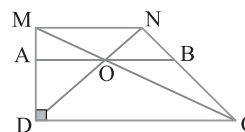
۹۳۶ ۲ شکل سؤال به صورت زیر است. توجه کنید که

$$\triangle MDC: OA \parallel DC \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{تعمیم قضیه}} \frac{MA}{MD} = \frac{OA}{DC}$$

$$\triangle NDC: OB \parallel DC \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{تعمیم قضیه}} \frac{NB}{NC} = \frac{OB}{DC}$$

از طرف دیگر بنابر قضیه تالس در دوزنقه، $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}$. در نتیجه

$$\frac{OA}{DC} = \frac{OB}{DC} \Rightarrow OA = OB \Rightarrow \frac{OA}{OB} = 1$$



تجربی - ۹۷

۹۳۷ ۱ در مثلث قائم الزاویه ABD، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

قائم الزاویه ABD، $AH = \frac{AD \times AB}{BD} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$. همچنین بنابر روابط

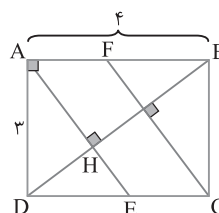
طولی در مثلث قائم الزاویه ADE،

$$AD^2 = AH \times AE \Rightarrow 9 = \frac{12}{5} \times AE \Rightarrow AE = \frac{15}{4}$$

بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ADE، $DE = \sqrt{AE^2 - AD^2} = \frac{9}{4}$.

اکنون می توان مساحت متوازی الاضلاع AECF را به صورت زیر به دست آورد

$$S = EC \times AD = \left(4 - \frac{9}{4}\right) \times 3 = 5/25$$



ریاضی - ۹۶

۹۴۵ ۱) ماتریس C برابر است با

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

پس فقط لازم است درایه‌های قطر اصلی C^T را حساب کنیم

$$C^T = C \times C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C^T برابر $4 \times 4 = 16$ است.

ریاضی - ۹۷

۹۴۶ ۱) بنابر فرض سؤال باید حاصل عبارت زیر را به‌دست آوریم:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 5 & a+1 & 7 \\ 3 & b+1 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & a & 7 \\ 3 & b & 6 \end{vmatrix} \quad (1)$$

اکنون حاصل هر دو دترمینان را با بسط دادن برحسب ستون دوم حساب می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 5 & a+1 & 7 \\ 3 & b+1 & 6 \end{vmatrix} = 4(-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (a+1)(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$+ (b+1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -4(30-21) + (a+1)(12-12)$$

$$- (b+1)(14-20) = -36 + 0 + 6b + 6 = 6b - 30$$

از طرف دیگر.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & a & 7 \\ 3 & b & 6 \end{vmatrix} = 3(-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (a)(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$+ b(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -3(30-21) + a(12-12) - b(14-20)$$

$$= -27 + 0 + 6b = 6b - 27$$

بنابراین حاصل عبارت (۱) برابر است با

$$(6b - 30) - (6b - 27) = -30 + 27 = -3$$

ریاضی - ۹۶

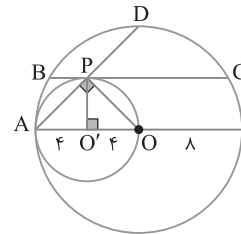
۹۴۱ ۲) شکل سؤال به صورت زیر است. اگر از P به A و O وصل کنیم.

زاویه P محاطی رویه‌رو به قطر OA است. پس قائمه است. بنابراین OP، AD را نصف می‌کند. بنابر رابطه‌های طولی در دایره،

$$PB \times PC = PA \times PD \xrightarrow{PA=PD} PB \times PC = PA^2 \quad (1)$$

از طرف دیگر شعاع O'P بر وتر BC عمود است و چون BC موازی خط‌المركزین دو دایره است، پس PO' بر OA عمود است. در نتیجه $PA = 4\sqrt{2}$. بنابراین

$$\text{از تساوی (۱) نتیجه می‌شود } PB \times PC = (4\sqrt{2})^2 = 32$$



ریاضی - ۹۷

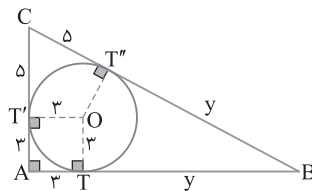
۹۴۲ ۳) به شکل زیر توجه کنید. چون چهارضلعی OTAT' مربع است و

طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره با هم برابرند، با فرض $AC = 8$ اندازه‌های مشخص شده روی شکل به‌دست می‌آیند. مساحت مثلث ABC برابر است

با $S = \frac{1}{2} AC \times AB = 4(y+3)$. همچنین محیط این مثلث برابر است با

$$2P = 2(y+8) \quad \text{اگر شعاع دایره محاطی داخلی مثلث ABC باشد، آن‌گاه } \frac{S}{P} = r$$

$$\text{یعنی } 3 = \frac{4(y+3)}{y+8} \quad \text{پس } y = 12 \quad \text{بنابراین } BC = y + 5 = 12 + 5 = 17$$

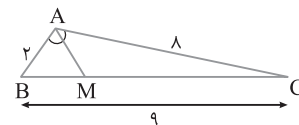


ریاضی خارج از کشور - ۹۶

۹۴۳ ۳) از قضیه نیمسازها نتیجه می‌شود

$$AM \text{ نیمساز زاویه } A \text{ است} \Rightarrow \frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}} \frac{BM}{9} = \frac{1}{5} \Rightarrow BM = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$$



ریاضی - ۹۷ یا تغییر

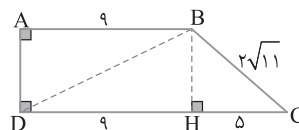
۹۴۴ ۳) در دوزنقه قائم‌الزاویه ABCD مطابق شکل زیر ارتفاع BH را

رسم می‌کنیم. در مثلث BCH، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{44 - 25} = \sqrt{19}$$

اکنون در مثلث BDH بنابر قضیه فیثاغورس،

$$BD = \sqrt{BH^2 + DH^2} = \sqrt{19 + 81} = 10$$



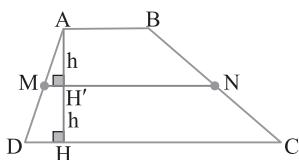
ریاضی خارج از کشور - ۹۶

بنابر فرض سؤال،

$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{\frac{1}{2}h(AB+MN)}{\frac{1}{2}h(MN+DC)} = \frac{3}{5}$$

$$5AB + 5MN = 3MN + 3DC \Rightarrow 5AB - 3DC = -2\left(\frac{AB+DC}{2}\right)$$

$$5AB = 3DC \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{3}{5}$$

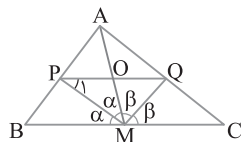


بنابر فرض سؤال شکل زیر را خواهیم داشت. بنابر قضیه نیمساز،

$$\left. \begin{aligned} \triangle AMB: \text{نیمساز } MP &\Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{AM}{BM} \\ \triangle AMC: \text{نیمساز } MQ &\Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{MC} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{BM=MC} \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{QC} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} PQ \parallel BC$$

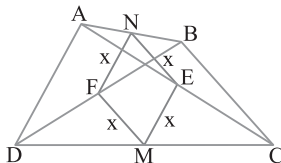
در نتیجه

$$PQ \parallel BC \left\{ \begin{array}{l} \text{قضیه خطوط} \\ \text{موازی و مورب} \end{array} \right. \Rightarrow \hat{P}_1 = \alpha \Rightarrow OM = OP$$



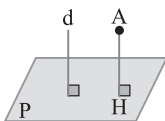
۹۵۳ فرض کنید نقاط M و N وسط‌های دو ضلع غیر مجاور

چهارضلعی ABCD و نقاط E و F وسط‌های دو قطر آن باشند و چهارضلعی MENF لوزی به ضلع x باشد. بنابر قضیه میان خط در مثلث‌های CAD و ABC نتیجه می‌گیریم $AD = 2ME = 2x$ و $BC = 2EN = 2x$. پس $BC = AD$ ، یعنی دو ضلع غیرمجاور دیگر چهارضلعی ABCD برابرند.



۹۵۴ در صورتی که خط d بر صفحه P عمود باشد، آن‌گاه از A فقط

یک خط عمود بر P مثل AH می‌توان رسم کرد به‌طوری‌که AH موازی خط d است (زیرا AH و d هر دو بر صفحه P عمودند). اکنون هر صفحه‌ای گذرا از AH (به جز صفحه شامل d) هم بر P عمود است و هم موازی d است. پس در این حالت تعداد صفحات رسم شده نامتناهی است. توجه کنید که A نباید روی خط d باشد.

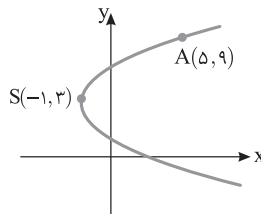


۹۴۷ با توجه به موقعیت رأس $S(h, k) = (-1, 3)$ و نقطه $(5, 9)$

که سهمی از آن می‌گذرد، دهانه سهمی رو به راست است. پس معادله کلی آن به صورت مقابل است: $(y-k)^2 = 4a(x-h) \Rightarrow (y-3)^2 = 4a(x+1)$ نقطه $(5, 9)$ روی این سهمی است، بنابراین

$$(9-3)^2 = 4a(5+1) \Rightarrow 36 = 24a \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

در سهمی فاصله کانون تا خط هادی برابر ۲a است، پس این فاصله برابر ۳ است.



تجربی - ۹۶

۹۴۸ در معادله سهمی داده شده به جای a از حرف m استفاده می‌کنیم تا

a را با فاصله کانونی اشتباه نگیریم. پس معادله سهمی به صورت $2y^2 - 4y = mx$ در می‌آید. اکنون معادله این سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$2(y^2 - 2y) = mx \Rightarrow 2((y-1)^2 - 1) = mx$$

$$2(y-1)^2 = mx + 2 \Rightarrow 2(y-1)^2 = m\left(x + \frac{2}{m}\right) \Rightarrow (y-1)^2 = \frac{m}{2}\left(x + \frac{2}{m}\right)$$

فرض کنید $m > 0$ ، در این صورت دهانه سهمی رو به راست است. همچنین

$$a = \frac{m}{8} \text{ پس } 4a = \frac{m}{2} \text{ و رأس این سهمی است } S(h, k) = \left(-\frac{2}{m}, 1\right)$$

بنابراین

$$x = h - a \xrightarrow{x=-1} -1 = -\frac{2}{m} - \frac{m}{8} \Rightarrow 1 = \frac{2}{m} + \frac{m}{8}$$

$$8m = m^2 + 16 \Rightarrow m^2 - 8m + 16 = 0 \Rightarrow (m-4)^2 = 0 \Rightarrow m = 4$$

پس کانون این سهمی به صورت زیر است:

$$F(a+h, k) = \left(\frac{m}{8} - \frac{2}{m}, 1\right) = \left(\frac{4}{8} - \frac{2}{4}, 1\right) = (0, 1)$$

ریاضی خارج از کشور - ۹۷

$$FA = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

۹۴۹ طرفین تساوی داده شده را در بردار $\vec{a}$ ضرب داخلی می‌کنیم:

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = 0 \quad (1)$$

چون $\vec{a} \times \vec{b}$ بر $\vec{a}$ عمودند، پس $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ و $\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = 0$. در

نتیجه از تساوی (۱) به برابری $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ می‌رسیم. بنابراین بردارهای $\vec{a}$ ،

$\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه قرار دارند.

ریاضی خارج از کشور - ۹۷

۹۵۰ چون بردار $\vec{a}$ را می‌توان به صورت مجموع دو بردار هم‌راستا با

بردارهای $(1, 2, 3)$ و $(-2, 4, 1)$ نوشت، پس بردار $\vec{a}$ و این دو بردار

هم‌صفحه‌اند. بنابراین ضرب مختلط این بردارها برابر صفر است:

$$(-3, 10, m) \cdot ((3, 1, 2) \times (1, 4, -2)) = 0$$

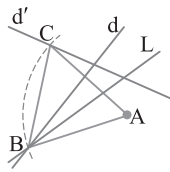
$$(-3, 10, m) \cdot (-10, 8, 11) = 0 \Rightarrow 11m + 110 = 0 \Rightarrow m = -10$$

ریاضی خارج از کشور - ۹۶

۸۵۱ در دوزنقه ABCD نقاط M و N وسط‌های دو ساق هستند،

پس بنابر قضیه میان خط در دوزنقه $MN = \frac{AB+DC}{2}$ و اگر ارتفاع AH را

رسم کنیم، آن‌گاه $AH' = HH' = h$.



۹۵۹ ۴ خط d' را به مرکز A با زاویه 60° دوران می‌دهیم تا خط L به دست آید. فرض کنید d, L را در B قطع کند، نقطه B را به مرکز A با زاویه 60° دوران می‌دهیم تا به نقطه C روی خط d' برسیم. در این صورت مثلث ABC مثلث مورد نظر است.

۹۶۰ ۱ با استفاده از قضیه کسینوس‌ها در مثلث AMN زاویه A را به دست می‌آوریم

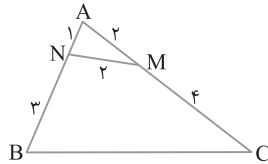
$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \times AN \cos \hat{A}$$

$$4 = 4 + 1 - 2(2)(1) \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{1}{4}$$

اکنون از قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC استفاده می‌کنیم

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A}$$

$$BC^2 = 16 + 36 - 2(4)(6)\left(\frac{1}{4}\right) = 40 \Rightarrow BC = 2\sqrt{10}$$



۹۶۱ ۳ بازتاب B را نسبت به محور x ، B_1 می‌نامیم بنابراین

$B_1(9, -11)$. همچنین بازتاب A را نسبت به محور y ، A_1 می‌نامیم پس

$A_1(-3, 5)$. طول پاره خط A_1B_1 کمترین اندازه خط شکسته $AMNB$ است:

$$|A_1B_1| = \sqrt{(9+3)^2 + (5+11)^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$$

۹۶۲ ۱ حاصل ضرب داده شده را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} x & 2x & -1 \end{bmatrix}_{1 \times 3} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 11x-1 & -x-2 & -3x \end{bmatrix}_{1 \times 3}$$

جواب معادله زیر را می‌خواهیم

$$\begin{bmatrix} x & 2x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11x-1 & -x-2 & -3x \end{bmatrix}_{1 \times 3} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = 0$$

$$11x^2 - x - 2x^2 - 4x + 3x = 0 \Rightarrow 9x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = \frac{2}{9}$$

۹۶۳ ۲ طرفین تساوی داده شده را از سمت چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم

$$AX = A - 2I \xrightarrow{A^{-1} \times} X = I - 2A^{-1} \quad (1)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6-4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

اکنون از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

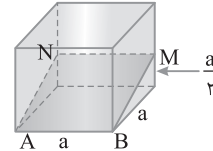
$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

۹۵۵ ۲ در مکعب زیر صفحه گذرا بر یال AB و نقطه M وسط یال دیگر مکعب، رسم شده است. اگر طول ضلع مکعب a باشد، آن گاه

$$Sh = \frac{1}{2}(a)\left(\frac{a}{2}\right)(a) = \frac{a^3}{4}$$

$$a^3 - \frac{a^3}{4} = \frac{3a^3}{4}$$

$$\frac{\text{حجم قسمت کوچک تر}}{\text{حجم قسمت بزرگ تر}} = \frac{\frac{a^3}{4}}{\frac{3a^3}{4}} = \frac{1}{3}$$



۹۵۶ ۴ اگر از مرکز دایره به نقاط A و B وصل کنیم، آن گاه مثلث

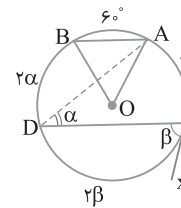
OAB متساوی الاضلاع است. پس اندازه کمان AB برابر 60° است. از طرف دیگر می‌دانیم کمان‌های بین دو وتر موازی مساوی‌اند، پس

$\widehat{BD} = \widehat{AC} = 2\alpha$. در ضمن زاویه $\widehat{DCx}$ ظلی است، پس $\widehat{DC} = 2\beta$. در نتیجه

$$\widehat{AC} + \widehat{BD} + \widehat{DC} + \widehat{AB} = 360^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\alpha + 2\beta + 60^\circ = 360^\circ$$

$$\beta = 2\alpha \rightarrow 8\alpha = 300^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{300^\circ}{8}$$

$$\widehat{BD} = 2\alpha = 2\left(\frac{300^\circ}{8}\right) = \frac{300^\circ}{4} = 75^\circ$$



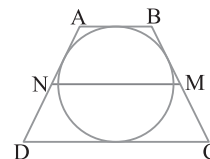
۹۵۷ ۴ فرض کنید دوزنقه متساوی الساقین $ABCD$ محیطی باشد،

پس $AB + DC = AD + BC$. چون $AD = BC$ در نتیجه

$AB + DC = 2BC$. در ضمن اگر نقاط M و N وسط‌های دو ساق دوزنقه

باشند، آن گاه بنابر قضیه میان خط در دوزنقه $MN = \frac{AB + DC}{2}$ پس نتیجه

می‌گیریم $MN = BC$



۹۵۸ ۳ دو n ضلعی منتظم محاط و محیط بر دایره به شعاع R متشابه‌اند

و نسبت تشابه آن‌ها مساوی $\cos \frac{180^\circ}{n}$ است. پس

$$\frac{\text{مساحت شش ضلعی منتظم محاطی}}{\text{مساحت شش ضلعی منتظم محیطی}} = \cos^2 \frac{180^\circ}{6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\frac{6\sqrt{3}}{S} = \frac{3}{4} \Rightarrow S = 8\sqrt{3}$$

۹۶۹ ۳ بنابر فرض سؤال، شکل (۱) را خواهیم داشت. باید طول عمود CH وارد بر BD را به دست آوریم. از D به C وصل می‌کنیم. دو مثلث ABC و DBC هم‌مساحت‌اند، زیرا قاعده مشترک (BC) داشته و دو رأس A و D روی خطی موازی با این قاعده مشترک قرار دارند. اکنون مساحت مثلث متساوی الساقین ABC را به دست می‌آوریم. برای این کار ارتفاع AK را در مثلث ABC (شکل (۲)) رسم می‌کنیم.

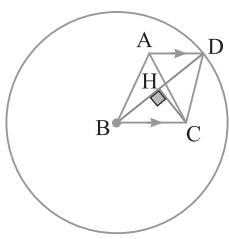
$$\triangle AKC: AK^2 = AC^2 - KC^2 = 17^2 - 8^2$$

$$= (17-8)(17+8) = 9 \times 25 \Rightarrow AK = 15$$

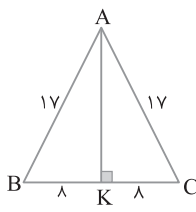
$$S_{BDC} = S_{ABC} = \frac{1}{2} AK \times BC = \frac{1}{2} (15)(16) = 120$$

در نتیجه

$$S_{BDC} = 120 \Rightarrow \frac{1}{2} CH \times BD = 120 \Rightarrow CH = \frac{120 \times 2}{25} = \frac{48}{5} = 9.6$$



شکل (۱)



شکل (۲)

۹۷۰ ۳ با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم الزاویه می‌نویسیم

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

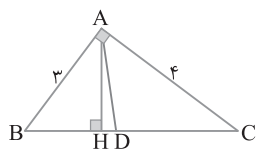
$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 9 = BH \times 5 \Rightarrow BH = \frac{9}{5}$$

از طرف دیگر بنابر قضیه نیمساز داخلی می‌توان نوشت

$$AD \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$$

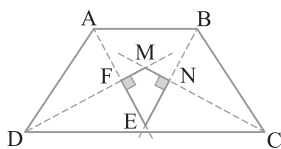
$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BD}{BC} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{BD}{5} = \frac{3}{7} \Rightarrow BD = \frac{15}{7}$$

$$\text{بنابراین } DH = BD - BH = \frac{15}{7} - \frac{9}{5} = \frac{75 - 63}{35} = \frac{12}{35}$$



۹۷۱ ۱ از برخورد نیمسازهای داخلی دوزنقه متساوی الساقین یک

کایت که دو زاویه مقابل آن قائمه هستند ایجاد می‌شود. چون دو زاویه مقابل چهارضلعی حاصل مکمل‌اند پس چهارضلعی ایجاد شده محاطی است. از طرف دیگر مجموع اضلاع مقابل این چهارضلعی (کایت) برابر است، پس این چهارضلعی محیطی هم هست.



۹۶۴ ۴ توجه کنید که

$$||A|A| = |A|^3 |A| = |A|^4 = 4^4 = 256$$

۹۶۵ ۴ راه‌حل اول نقطه $(-1, 4)$ فقط در گزینه (۴) صدق می‌کند پس

گزینه (۴) درست است.

راه‌حل دوم ابتدا مختصات نقاط تلاقی خط $y=x$ (نیمساز ناحیه اول) با دایره

$$x^2 + y^2 - 4x = 6 \text{ را به دست می‌آوریم}$$

$$x^2 + y^2 - 4x = 6 \xrightarrow{y=x} 2x^2 - 4x = 6$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

پس نقاط $A(3, 3)$ و $B(-1, -1)$ نقاط تلاقی دایره با خط $y=x$ هستند و این نقاط روی دایره C هم قرار دارند. بنابراین دایره C از نقاط $A(3, 3)$ و $B(-1, -1)$ و $D(-1, 4)$ عبور می‌کند. فرض می‌کنیم معادله دایره C به صورت

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ باشد. در این صورت}$$

$$A \text{ مختصات } \Rightarrow 9 + 9 + 3a + 3b + c = 0$$

$$B \text{ مختصات } \Rightarrow 1 + 1 - a - b + c = 0$$

$$D \text{ مختصات } \Rightarrow 1 + 16 - a + 4b + c = 0$$

$$c = -6, a = -1, b = -3 \Rightarrow x^2 + y^2 - x - 3y - 6 = 0$$

۹۶۶ ۱ با توجه به جایگاه کانون و خط هادی دهانه سهمی رو به چپ

است. اگر عمود FH را بر خط هادی وارد کنیم، آن‌گاه $H(4, 1)$. پس رأس S

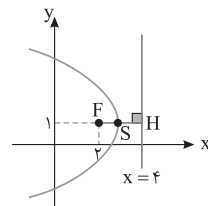
به صورت زیر به دست می‌آید

$$S = \frac{F+H}{2} = \frac{(2, 1) + (4, 1)}{2} = (3, 1), a = SF = 1$$

معادله این سهمی در حالت کلی به صورت زیر است

$$(y-\beta)^2 = -4a(x-\alpha) \xrightarrow{\alpha=3, \beta=1} (y-1)^2 = -4(x-3)$$

$$y^2 + 1 - 2y = -4x + 12 \Rightarrow y^2 - 2y + 4x = 11$$

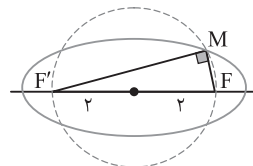


۹۶۷ ۲ بنابر فرض سؤال $a = 2\sqrt{5}$ ، پس $a^2 = 20$ و $b^2 = 2$ ، پس

$$c^2 = a^2 - b^2 = 20 - 2 = 18 \Rightarrow c = 3\sqrt{2}$$

بنابراین $b=1$. پس دایره هم‌مرکز با بیضی و به شعاع ۲، از کانون‌های بیضی عبور می‌کند. پس

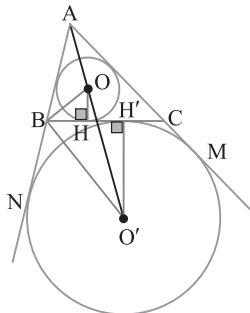
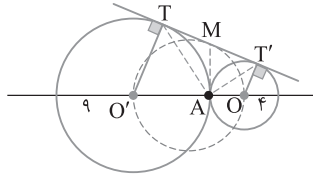
$$MF^2 + MF'^2 = FF'^2 = 4^2 = 16$$



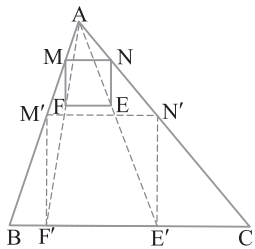
۹۶۸ ۴ ضرب مختلط این سه بردار صفر است، پس

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & m & 5 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{\text{بسط بر حسب ستون دوم}}$$

$$-2(10+4) - m(-1-6) = 0 \Rightarrow -28 = -7m \Rightarrow m = 4$$

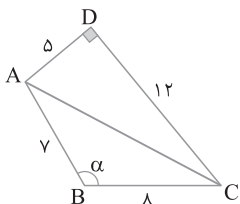


$BH = P - AC = 10 - 7 = 3$, $AM = P = 10$, $CM = P - AC = 3$
در ضمن $CH' = 3$ پس $CM = CH'$ بنابراین:
 $HH' = BC - BH - CH' \Rightarrow HH' = 8 - 3 - 3 = 2$



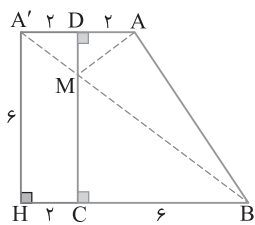
۹۷۶ ۳ بنابر فرض سؤال
شکل مقابل را خواهیم داشت به
طوری که O مرکز دایره محاطی
داخلی و O' مرکز دایره محاطی
خارجی نظیر ضلع BC است. باید
طول HH' که تصویر قائم OO'
روی ضلع BC است را به دست
آوریم. می‌دانیم P نصف محیط
مثلث (ABC) برابر ۱۰ است، پس

۹۷۷ ۲ مربع دلخواه MNEF
به طوری که MN موازی با BC باشد را
مطابق شکل ترسیم می‌کنیم. از A به E و
F وصل کرده امتداد می‌دهیم تا ضلع BC
را به ترتیب در E' و F' قطع کنند. در
نقاط E' و F' عمودهایی بر BC رسم
کرده تا اضلاع AC و AB را به ترتیب در
نقاط N' و M' قطع کنند. در این
صورت M'N'E'F' مجانس مربع
MNEF به مرکز A است. پس
M'N'E'F' مربع مطلوب است.



۹۷۸ ۳ در شکل مقابل قطر
AC را رسم کرده‌ایم.
در مثلث قائم الزاویه ADC،

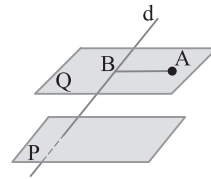
$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + DC^2 \\ &= 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow AC = 13 \\ \text{اکنون با استفاده از قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC می‌توان نوشت} \\ AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos \alpha \\ 13^2 &= 7^2 + 8^2 - 2(7)(8) \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2} \\ \text{بنابراین } \alpha &= 120^\circ, \text{ نتیجه } \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



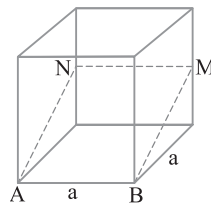
۹۷۹ ۱ بازتاب نقطه A را نسبت به
DC نقطه A' می‌نامیم. از A' به B
وصل می‌کنیم تا DC را در نقطه M قطع
کند. در این صورت AMB کوتاه‌ترین مسیر
است یعنی مقدار MA + MB کمترین
است. همچنین چون بازتاب ایزومتري است
MA + MB برابر A'B است، مطابق
شکل در مثلث قائم الزاویه A'HB
می‌توان طول A'B را به دست آورد

$$\triangle A'HB: A'B^2 = A'H^2 + BH^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \Rightarrow A'B = 10$$

۹۷۲ ۴ فرض کنید خط d با صفحه P متقاطع باشد. می‌دانیم از نقطه
A تنها یک صفحه مثل Q موازی با P قابل رسم است و این صفحه خط d
را در نقطه‌ای مثل B قطع می‌کند. در این صورت خط AB موازی P است
و خط d را قطع کرده و یکتا است. در صورتی که d منطبق بر P باشد خطی
که از A گذشته و با P موازی باشد و خط d را قطع کند وجود ندارد و اگر d



موازی P باشد این مسئله نامتناهی جواب
خواهد داشت. در ضمن اگر d بر P عمود
باشد نیز مسئله یک جواب خواهد داشت
ولی لزومی بر عمود بودن d بر P نیست.
فقط d صفحه P را قطع کند کافی است تا
مسئله یک جواب داشته باشد.



۹۷۳ ۱ در مکعب شکل مقابل صفحه گذرا
بر یال AB و نقطه M وسط یال متناظر با AB
رسم شده است. اگر طول یال مکعب a باشد
آن‌گاه مقطع حاصل یعنی ABMN مستطیلی به
ضلع a و $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$ است، پس

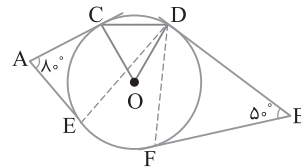
$$\frac{S_{ABMN}}{\text{مساحت یک وجه}} = \frac{a \times \frac{\sqrt{5}}{2}a}{a^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

۹۷۴ ۳ چون وتر CD برابر شعاع دایره است، پس اگر O مرکز دایره
باشد، آن‌گاه مثلث OCD متساوی‌الاضلاع است. بنابراین اندازه کمان CD
برابر ۶۰° است، پس

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\widehat{CD} + \widehat{DF} + \widehat{EF} - \widehat{CE}}{2} \Rightarrow 8^\circ = \frac{60^\circ + \widehat{DF} + \widehat{EF} - \widehat{CE}}{2} \\ \widehat{DF} + \widehat{EF} - \widehat{CE} &= 10^\circ \quad (1) \\ \hat{B} &= \frac{\widehat{CD} + \widehat{CE} + \widehat{EF} - \widehat{DF}}{2} \Rightarrow 5^\circ = \frac{60^\circ + \widehat{CE} + \widehat{EF} - \widehat{DF}}{2} \\ \widehat{CE} + \widehat{EF} - \widehat{DF} &= 40^\circ \quad (2) \end{aligned}$$

از جمع تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$2\widehat{EF} = 140^\circ \Rightarrow \widehat{EF} = 70^\circ \Rightarrow \widehat{EDF} = \frac{\widehat{EF}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$$



۹۷۵ ۱ دایره به قطر OO' در نقطه M بر مماس مشترک دو دایره
مماس است. از M به A وصل می‌کنیم. در این صورت

$$\left. \begin{aligned} MA &= MT \\ MA &= MT' \end{aligned} \right\} \Rightarrow MA = MT = MT' = \frac{TT'}{2}$$

در واقع در مثلث TAT' پاره‌خط AM میانه است و اندازه آن نصف TT'
است یعنی مثلث TAT' در رأس A قائم‌الزاویه است. بنابراین

$$\begin{aligned} TT' &= \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{(9+4)^2 - (9-4)^2} \\ &= \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \end{aligned}$$

$$\text{در نتیجه } MA = \frac{TT'}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

راه حل دوم فرض کنید معادله دایره مورد نظر به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ باشد. برای یافتن معادله وتر مشترک دو دایره، معادلات دو دایره را برابر هم قرار می‌دهیم

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = x^2 + y^2 - 17 \Rightarrow ax + by = -c - 17$$

وتر مشترک دو دایره بر خط $2x - y = 3$ منطبق است، پس

$$\begin{cases} a = -2b \\ \frac{a}{2} = \frac{b}{-1} = \frac{-c-17}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = -2b \\ c = 3b - 17 \end{cases} \end{cases}$$

نقطه $(6, -1)$ روی دایره C است، پس مختصات آن در معادله دایره C صدق می‌کند

$$x^2 + y^2 + (-2b)x + by + 3b - 17 = 0$$

$$\xrightarrow{(6, -1)} 36 + 1 - 12b - b + 3b - 17 = 0$$

$$10b = 20 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ c = -11 \end{cases}$$

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{16 + 4 + 44}}{2} = \frac{\sqrt{64}}{2} = 4$$
 شعاع دایره

۹۸۴ ابتدا معادله سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم

$$2x^2 - 4x + 3y = 4 \Rightarrow 2(x^2 - 2x) = -3y + 4$$

$$2((x-1)^2 - 1) = -3y + 4 \Rightarrow 2(x-1)^2 = -3y + 6$$

$$2(x-1)^2 = -3(y-2) \Rightarrow (x-1)^2 = -\frac{3}{2}(y-2)$$

پس دهانه سهمی رو به پایین است، $S(1, 2)$ مختصات رأس سهمی است و

$$a = \frac{3}{8}. \text{ بنابراین مختصات کانون این سهمی به صورت زیر است}$$

$$F(\alpha, -a + \beta) = (1, -\frac{3}{8} + 2) = (1, \frac{13}{8})$$

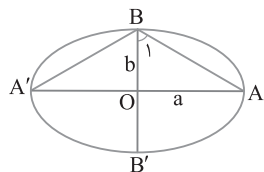
۹۸۵ اگر AA' قطر بزرگ و BB' قطر کوچک بیضی باشند، آن‌گاه

اندازه زاویه ABA' مورد سؤال است. می‌دانیم $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ و بنابر فرض

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow \frac{2}{3} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
 پس $e = \sqrt{\frac{2}{3}}$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویه OAB می‌نویسیم

$$\tan \hat{B} = \frac{a}{b} = \sqrt{3} \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ \Rightarrow \hat{ABA'} = 120^\circ$$



۹۸۶ حجم متوازی‌السطوح بنا شده روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a} \times \vec{b}$

مساوی است با $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|$. پس لازم است $\vec{a} \times \vec{b}$ را به دست آوریم

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - 12\vec{k}$$

$$\text{حجم متوازی‌السطوح} = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = 9 + 36 + 144 = 189$$

۹۸۰ در ماتریس قطری، درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند.

پس حاصل ضرب دو ماتریس داده شده را به دست آورده، درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی را صفر قرار می‌دهیم

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 2x-1+4y & -2x+4 \\ 7+y & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$-2x+4=0 \Rightarrow x=2, \quad 7+y=0 \Rightarrow y=-7$$

بنابراین

۹۸۱ طرفین تساوی $AX=B$ را از سمت چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم تا ماتریس X به دست آید

$$AX=B \xrightarrow{A^{-1} \times} X=A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-4+3} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$$

۹۸۲ حاصل دترمینان را بر حسب ستون دوم به دست می‌آوریم

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -1(-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 6(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (3+10) - 6(10-12) = 13+12=25$$

۹۸۳ راه حل اول ابتدا نقطه تلاقی دایره $x^2 + y^2 = 17$ و خط

$$2x - y = 3 \text{ را به دست می‌آوریم}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ 2x - y = 3 \Rightarrow y = 2x - 3 \end{cases}$$

$$x^2 + (2x-3)^2 = 17 \Rightarrow 5x^2 - 12x - 8 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 12x = 8 \quad (1)$$

نقطه A را روی هر دو دایره و همچنین روی خط $2x - y = 3$ در نظر می‌گیریم.

فرض می‌کنیم $A(x, 2x-3)$ و مرکز دایره C نقطه $O'(\alpha, \beta)$

باشد، پس باید داشته باشیم

$$O'A = O'B \Rightarrow \sqrt{(\alpha-x)^2 + (\beta-2x+3)^2} = \sqrt{(\alpha-6)^2 + (\beta+1)^2}$$

$$\alpha^2 + x^2 - 2\alpha x + \beta^2 + 4x^2 + 9 - 4\beta x + 6\beta - 12x$$

$$= \alpha^2 + 36 - 12\alpha + \beta^2 + 1 + 2\beta$$

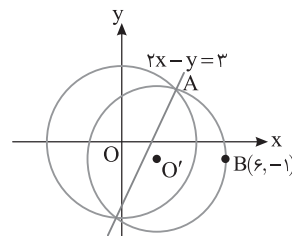
$$\xrightarrow{(1)} \underbrace{5x^2 - 12x - 2\alpha x - 4\beta x + 9 + 6\beta}_{\Delta} = 37 - 12\alpha + 2\beta$$

$$x(-2\alpha - 4\beta) + 12\alpha + 4\beta = 20$$

تساوی به دست آمده در صورتی برقرار است که $-2\alpha - 4\beta = 0$ و

$$12\alpha + 4\beta = 20 \text{ پس:}$$

$$\begin{cases} -2\alpha - 4\beta = 0 \\ 12\alpha + 4\beta = 20 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2, \beta = -1 \Rightarrow O'(2, -1) \Rightarrow R = O'B = 4$$



۹۹۰ ۲ ارتفاع دوزنقه‌ها را رسم می‌کنیم و از رأس B پاره خط BM را موازی AD رسم می‌کنیم تا دوزنقه ABCD به متوازی‌الاضلاع ABMD و مثلث BMC تقسیم شود (شکل زیر را ببینید). در این صورت $DM = 5$ و $MC = 4$. با فرض $MN = x$ نتیجه می‌گیریم $ON = x - 5$. بنابراین

$$S_{ABNM} = S_{MNCD} \Rightarrow \frac{1}{2}(h)(5+x) = \frac{1}{2}(h')(9+x)$$

$$\frac{h}{h'} = \frac{9+x}{5+x} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{h}{h+h'} = \frac{x+9}{2x+14} \quad (1)$$

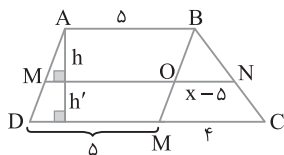
از طرف دیگر،

$$ON \parallel MC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle OBN \sim \triangle MBC$$

$$\frac{ON}{MC} = \frac{h}{h+h'} \Rightarrow \frac{x-5}{4} = \frac{h}{h+h'} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \text{ و } (2)} \frac{x+9}{2x+14} = \frac{x-5}{4} \Rightarrow 2x^2 + 4x - 70 = 4x + 36$$

$$2x^2 = 106 \Rightarrow x^2 = 53 \Rightarrow x = \sqrt{53}$$



۹۹۱ ۳ راه‌حل اول فرض کنید $DA = x$ ، پس بنابر فرض $DG = 3DA$ نتیجه می‌گیریم $AG = 2x$ ، بنابراین

$$AF \parallel ED \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle AFG \sim \triangle DEG$$

$$\frac{S_{AFG}}{S_{DEG}} = \left(\frac{AG}{GD}\right)^2 = \left(\frac{2x}{3x}\right)^2 = \frac{4}{9} \quad (1)$$

در ضمن دو مثلث GED و GEC دارای ارتفاع مشترک نظیر رأس G هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایی است که این ارتفاع بر آن‌ها وارد شده است، پس

$$\frac{S_{GED}}{S_{GEC}} = \frac{ED}{EC} = \frac{2}{5} \Rightarrow S_{GED} = \frac{2}{5} S_{GEC} \quad (2)$$

اکنون از برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $S_{AFG} = \frac{1}{63} S_{GEC}$ از طرف دیگر،

$$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle AGB \sim \triangle DGC$$

$$\frac{S_{AGB}}{S_{DGC}} = \left(\frac{AG}{DG}\right)^2 = \left(\frac{2x}{3x}\right)^2 = \frac{4}{9} \xrightarrow{\text{تفصیل در صورت}} \frac{S_{ABCD}}{S_{DGC}} = \frac{5}{9} \quad (3)$$

در ضمن دو مثلث GDC و GEC دارای ارتفاع مشترک نظیر از رأس A هستند، پس

$$\frac{S_{GDC}}{S_{GEC}} = \frac{DC}{EC} = \frac{5}{5} \quad (4)$$

اکنون از تساوی‌های (۳) و (۴) نتیجه می‌گیریم $S_{ABCD} = \frac{25}{63} S_{GEC}$ ، بنابراین

$$\frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{63} S_{GEC}}{\frac{25}{63} S_{GEC}} = \frac{1}{25} \Rightarrow \frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{25} \times 100 = 4\%$$

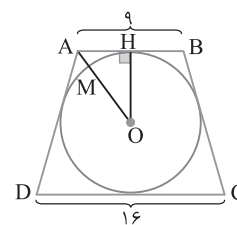
۹۸۷ ۱ از نقطه O مرکز دایره محاطی دوزنقه متساوی‌الساقین ABCD، به رأس A وصل می‌کنیم تا دایره را در M قطع کند. طول پاره خط AM کمترین فاصله نقاط دایره تا رأس قاعده کوچک دوزنقه است. اگر شعاع دایره محاطی باشد، آنگاه $4R^2 = AB \times DC$ ، پس $4R^2 = 9 \times 16$ ، در نتیجه $R^2 = 36$ ، پس $R = 6$. اکنون در مثلث قائم‌الزاویه OAH،

$$\left. \begin{aligned} AH &= \frac{AB}{2} = \frac{9}{2} \\ OH &= R = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow OA^2 = OH^2 + AH^2$$

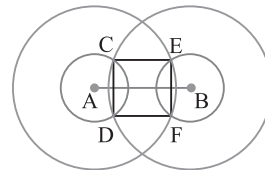
$$OA^2 = 36 + \frac{81}{4} = \frac{225}{4} \Rightarrow OA = \frac{15}{2}$$

$$AM = OA - OM = \frac{15}{2} - 6 = \frac{3}{2}$$

بنابراین



۹۸۸ ۲ نقطه A از دو نقطه C و D به یک فاصله است، پس A روی عمودمنصف CD است. با استدلالی مشابه روی عمودمنصف EF است. پس AB عمودمنصف CD و EF است. یعنی CD و EF موازی هم و عمود بر AB هستند. همین‌طور فاصله CE از AB برابر با فاصله DF از AB است، بنابراین $AB \parallel CE \parallel DF$. در نتیجه دو خط موازی CD و EF عمود بر دو خط موازی DF و CE هستند. بنابراین چهارضلعی مورد نظر مستطیل است.



۹۸۹ ۱ با دو بار استفاده از قضیه تالس می‌نویسیم:

$$\triangle ABC: ON \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{NB} = \frac{OA}{OC} \quad (1)$$

$$\triangle ABD: OM \parallel AD \Rightarrow \frac{BM}{AM} = \frac{OB}{OD} \quad (2)$$

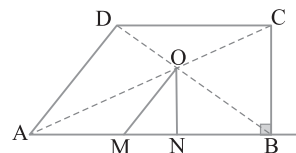
از طرف دیگر،

$$DC \parallel AB \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle ODC \sim \triangle OBA \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \quad (3)$$

بنابراین

$$\xrightarrow{(3) \text{ و } (2)} \frac{AN}{NB} = \frac{BM}{AM} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{AB}{NB} = \frac{AB}{AM}$$

$$AM = NB \Rightarrow \frac{AM}{BN} = 1$$



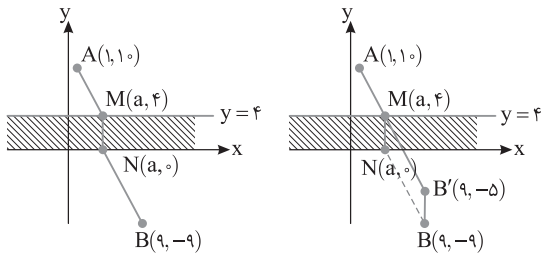
۹۹۴ ۱ با توجه به شکل سمت چپ پاره خط MN موازی محور y است.

پس طول مینیمم خط شکسته AMNB همان مسئله احداث پل است. در نتیجه باید نقطه B را در راستای محور y به اندازه ۴ واحد (طول MN) به بالا انتقال دهیم تا به نقطه B' برسیم. سپس از B' به A وصل می کنیم تا M به دست آید. سپس عمود MN مسیر مینیمم AMNB را ایجاد می کند. طول

این مسیر برابر AB' + MN یعنی AB' + ۴ است.

$$AB' = \sqrt{(9-1)^2 + (10+5)^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$$

پس طول مسیر مینیمم مساوی ۱۷ + ۴ = ۲۱ است.



۹۹۵ ۴ از دوران مثلث قائم الزاویه ABC حول خط d یک استوانه که از

آن مخروطی جدا شده است به دست می آید به طوری که ارتفاع استوانه و مخروط

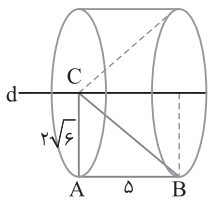
برابر ۵ و شعاع قاعده هر دو آن ها $2\sqrt{6}$ است.

$$\text{حجم استوانه} = \pi R^2 h = \pi (2\sqrt{6})^2 (5) = 24 \times 5 \pi$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi (2\sqrt{6})^2 (5) = \frac{24 \times 5}{3} \pi$$

بنابراین

$$\text{حجم خواسته شده} = 24 \times 5 \pi - \frac{24 \times 5}{3} \pi = \frac{2 \times 24 \times 5}{3} \pi = 80 \pi$$



۹۹۶ ۴ راه حل اول بنابر رابطه های طولی در دایره تساوی زیر برقرار است:

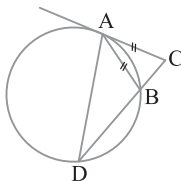
$$CA^2 = CB \times CD$$

بنابر قضیه استوارت در مثلث ADC.

$$AC^2 \times BD + AD^2 \times BC = AB^2 \times DC + BD \times BC \times DC$$

$$\frac{AC^2 = CB \times CD}{AB = AC} \rightarrow CB \times CD \times BD + AD^2 \times BC = CB \times CD \times DC + BD \times BC \times DC$$

$$AD^2 \times BC = CB \times CD \times CD \Rightarrow AD^2 = CD^2 \Rightarrow AD = CD$$



راه حل دوم با فرض $AD = x$ نتیجه می گیریم $AG = 2x$. بنابر قضیه تالس.

$$\frac{GF}{FE} = \frac{GA}{AD} = 2 \text{ و } \frac{GB}{BC} = \frac{GA}{AD} = 2$$

به دست می آیند. ارتفاع GH را رسم می کنیم تا FB را در H' قطع کند.

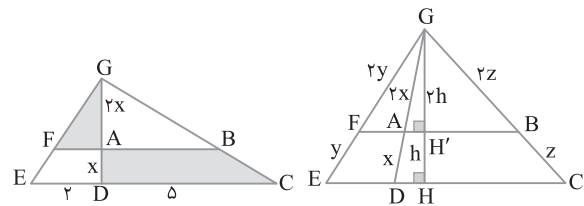
$$\text{به طور مشابه معلوم می شود } \frac{GH'}{HH'} = 2 \text{ پس}$$

$$\triangle GED : AF \parallel ED \Rightarrow \frac{AF}{ED} = \frac{GF}{GE} \Rightarrow \frac{AF}{2} = \frac{2y}{3y} \Rightarrow AF = \frac{4}{3}$$

$$\triangle GDC : AB \parallel DC \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{GB}{GC} \Rightarrow \frac{AB}{5} = \frac{2z}{3z} \Rightarrow AB = \frac{10}{3}$$

بنابراین

$$\frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} (rh) (AF)}{\frac{1}{2} h (AB + DC)} = \frac{2 \times \frac{4}{3}}{10 + 5} = \frac{8}{15} \Rightarrow \frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}} = \frac{8}{15} \times 100 = 53.3\%$$

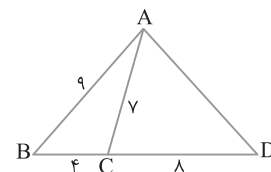


۹۹۲ ۱ بنابر قضیه استوارت،

$$AB^2 \times CD + AD^2 \times BC = AC^2 \times BD + BC \times CD \times BD$$

$$81 \times 8 + 4 \times AD^2 = 49 \times 12 + 4 \times 8 \times 12 \xrightarrow{\div 4} 162 + AD^2 = 147 + 96$$

$$AD^2 = 81 \Rightarrow AD = 9$$



۹۹۳ ۴ توجه کنید که شعاع دایره بزرگ تر قطر دایره کوچک تر است (شکل

زیر را ببینید). پس اگر OM را رسم کنیم، آن گاه زاویه M قائمه است. پس عمود

OM وتر CD را نصف می کند یعنی $CM = MD$. بنابر رابطه های طولی در دایره،

$$MA \times MB = MC \times MD \xrightarrow{MC=MD} MA \times MB = MD^2 \quad (1)$$

در ضمن طول کمان AC از رابطه زیر به دست می آید:

$$\text{طول کمان AC} = \frac{\alpha}{360} (2\pi R) \Rightarrow \frac{4\pi}{3} = \frac{\alpha}{360} 2\pi \times 4$$

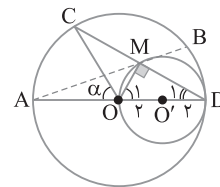
$$\alpha = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 60^\circ$$

بنابراین $\hat{D}_1 = 30^\circ$. پس $\hat{O}_1 = 60^\circ$. در نتیجه

$$\triangle OMD : \hat{O}_1 = 60^\circ \Rightarrow MD = \frac{\sqrt{3}}{2} OD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

$$MA \times MB = MD^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$$

بنابر برابری (۱).



مرکز O در ناحیه چهارم مختصات قرار دارد، پس β باید منفی باشد:

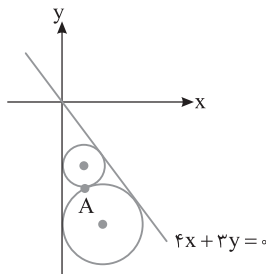
$$-5R = 4R + 3\beta \Rightarrow \beta = -3R \Rightarrow O(R, -3R)$$

بنابراین

$$OA = R \Rightarrow \sqrt{(R-1)^2 + (-3R+4)^2} = R$$

$$R^2 + 1 - 2R + 9R^2 + 16 - 24R = R^2 \Rightarrow 9R^2 - 26R + 17 = 0$$

$$R = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \times 9 \times 17}}{18} = \frac{13 \pm 4}{9} \Rightarrow R = \frac{17}{9}, R = 1$$



۳ ۱۰۰۰ دایره به قطر FF' بیضی را در نقطه M قطع کرده است، پس

زاویه M محاطی و روبه‌رو به قطر FF' است، پس $\hat{M} = 90^\circ$ ، یعنی مثلث MFF' قائم‌الزاویه است. از طرف دیگر بنابر فرض،

$$2b = 2\sqrt{7} \Rightarrow b = \sqrt{7}, \quad 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 7 = 9 \Rightarrow c = 3 \quad \text{پس}$$

$$\triangle MFF': MF^2 + MF'^2 = FF'^2 = (2c)^2 = 36 \quad (1) \quad \text{بنابراین}$$

درضمن $MF + MF' = 2a = 8$ ، پس

$$(MF + MF')^2 = 64 \Rightarrow MF^2 + MF'^2 + 2MF \times MF' = 64$$

$$\xrightarrow{\text{از (1)}} 36 + 2MF \times MF' = 64 \Rightarrow MF \times MF' = 14$$

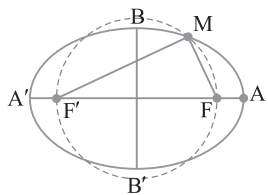
در نتیجه $MF + MF' = 8$ و $MF \times MF' = 14$ با فرض $S = 8$ و $P = 14$

می‌توان نوشت

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 14 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 14}}{2} = 4 \pm \sqrt{2}$$

بنابراین فاصله M از یک کانون $4 + \sqrt{2}$ و از کانون دیگر $4 - \sqrt{2}$ است، پس

فاصله M تا کانون نزدیک‌تر $4 - \sqrt{2}$ است.



۲ ۱۰۰۱ سهمی $y^2 + ay + bx + 1 = 0$ افقی است، پس عرض رأس سهمی

با عرض کانون آن برابر و مساوی -2 است. معادله سهمی را استاندارد می‌کنیم:

$$\left(y + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} = -bx - 1 \Rightarrow \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = -bx - 1 + \frac{a^2}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{عرض رأس سهمی } -2 \text{ است}} -\frac{a}{2} = -2 \Rightarrow a = 4$$

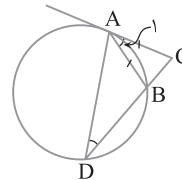
در نتیجه معادله سهمی به صورت زیر درمی‌آید:

$$(y+2)^2 = -bx + 3 \Rightarrow (y+2)^2 = -b\left(x - \frac{3}{b}\right)$$

راه حل دوم زاویه ظلی A_1 و زاویه محاطی D برابرند، زیرا مطابق شکل زیر

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2} \\ \hat{D} = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D} \quad \left. \begin{array}{l} \hat{C} = \hat{C} \end{array} \right\} \xrightarrow{(ز)} \triangle ABC \sim \triangle DAC$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC} \xrightarrow{AB=AC} AD = DC$$



۲ ۹۹۷ چهارضلعی ABCD محاطی است، پس زاویه‌های مقابل آن

مکمل‌اند (شکل زیر را ببینید). پس $\hat{A} = 120^\circ$. با رسم قطر BD و استفاده از

قضیه کسینوس‌ها می‌نویسیم:

$$\triangle BDC: BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2BC \times DC \cos 60^\circ$$

$$BD^2 = 49 + 81 - 2(7)(9)\left(\frac{1}{2}\right) = 67 \Rightarrow BD = \sqrt{67}$$

$$\triangle ABD: BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \cos 120^\circ$$

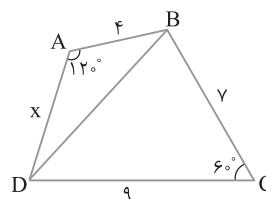
$$67 = 16 + x^2 - 2(4)(x)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$67 = 16 + x^2 + 4x \Rightarrow x^2 + 4x - 51 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \times 51}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 51}}{1} \Rightarrow x = -2 + \sqrt{55}$$

بنابراین $x + 2$ مساوی $\sqrt{55}$ است. دقت کنید که $x = -2 - \sqrt{55}$ غیر قابل

قبول است.



۱ ۹۹۸ کوچک‌ترین دایره گذرا از دو نقطه A و B دایره‌ای به قطر AB

است. پس مرکز دایره وسط AB و شعاع آن نصف طول پاره خط AB است:

$$O = \frac{A+B}{2} = (-1, 3), \quad R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{36+16}}{2} = \frac{\sqrt{52}}{2}$$

بنابراین معادله دایره به صورت زیر است:

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = \frac{52}{4} \xrightarrow{y=0} (x+1)^2 + 9 = \frac{52}{4} \Rightarrow (x+1)^2 = 4$$

$$x+1=2 \text{ یا } x+1=-2 \Rightarrow x=1 \text{ یا } x=-3$$

۲ ۹۹۹ در شکل زیر دایره‌ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و گذرنده از نقطه

$A(1, -4)$ بر خط $4x + 3y = 0$ و محور y مماس است. چون دایره بر محور y

مماس است، پس طول مرکز آن برابر R است، بنابراین $O(R, \beta)$ مرکز دایره است و

$$R = \frac{|4R + 3\beta|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \Rightarrow \text{فاصله } O \text{ تا خط } (4x + 3y = 0) = \text{فاصله } O \text{ تا محور } y$$

$$\Delta R = 4R + 3\beta, \quad -\Delta R = 4R + 3\beta$$

۱۰۰۵ ۱ طول وتر این مثلث $2x+3$ است. پس بنابر قضیه فیثاغورس،

$$(2x+3)^2 = (2x+1)^2 + (x+1)^2$$

$$4x^2 + 9 + 12x = 4x^2 + 1 + 4x + x^2 + 1 + 2x \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$(x-7)(x+1) = 0 \Rightarrow x=7, x=-1$$

مقدار $x=-1$ قابل قبول نیست چون طول ضلع $x+1$ به ازای آن صفر می شود. به ازای $x=7$ اندازه اضلاع مثلث برابر ۱۷، ۱۵ و ۸ هستند، بنابراین

$$S = \frac{1}{2} (8)(15) = 60$$

۱۰۰۶ ۳ در دوزنقه متساوی الساقین محیطی حاصل ضرب دو قاعده مساوی مربع قطر دایره محاطی است. اگر شعاع دایره محاطی باشد، آن گاه

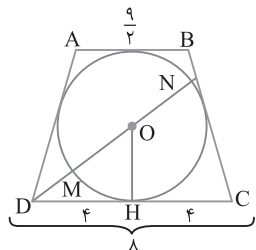
$$AB \times DC = 4R^2 \Rightarrow \frac{9}{2} \times 8 = 4R^2 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3$$

اکنون از مرکز O به رأس D خطی رسم می کنیم تا دایره را در نقطه های M و N قطع کند. در این صورت طول پاره خط DM نزدیک ترین و طول پاره خط DN دورترین فاصله نقاط دایره تا رأس D هستند. مسلماً $DN = DO + R$. برای به دست آوردن اندازه DO در مثلث قائم الزاویه ODH ، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$OD^2 = OH^2 + DH^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow OD = 5$$

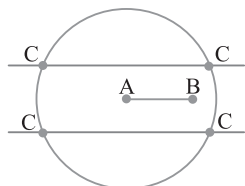
بنابراین

$$D \text{ فاصله دورترین نقاط دایره تا نقطه } D = OD + R = 5 + 3 = 8$$



۱۰۰۷ ۴ مجموعه نقاطی که از نقطه A به فاصله ۷ هستند دایره ای به

مرکز A و شعاع ۷ است و مجموعه نقاطی که از AB به فاصله ۵ هستند دو خط موازی AB در طرفین آن است. نقاط تلاقی این دو خط موازی با دایره، چهار نقطه است که جواب این سؤال هستند.

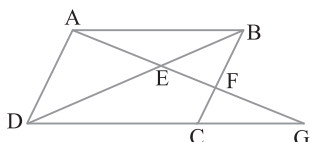


۱۰۰۸ ۱ بنابر قضیه اساسی تشابه،

$$AD \parallel BF \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle FBE \Rightarrow \frac{AE}{EF} = \frac{DE}{BE} \quad (1)$$

$$AB \parallel DG \Rightarrow \triangle AEB \sim \triangle GED \Rightarrow \frac{DE}{EB} = \frac{EG}{AE} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \text{ و } (2)} \frac{AE}{EF} = \frac{EG}{AE} \Rightarrow AE^2 = EF \times EG$$



با فرض $b < 0$ نتیجه می گیریم دهانه سهمی رو به راست است و رأس آن $S(\alpha, \beta) = (\frac{3}{b}, -2)$ است و $4a = -b$ پس $a = -\frac{b}{4}$. مختصات کانون این

سهمی به صورت مقابل است: $F(a+\alpha, \beta) = (-\frac{b}{4} + \frac{3}{b}, -2) = (-\frac{1}{4}, -2)$

بنابراین

$$-\frac{b}{4} + \frac{3}{b} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-b^2 + 12}{4b} = -\frac{1}{4} \Rightarrow 4b^2 - 4b - 4 = 0$$

$$b^2 - b - 1 = 0 \Rightarrow (b-4)(b+3) = 0 \Rightarrow b=4 \text{ یا } b=-3$$

پس کمترین مقدار b برابر -3 است.

۱۰۰۲ ۴ ابتدا ماتریس A^2 و سپس درایه های سطر اول ماتریس A^3 را پیدا می کنیم.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 24 \\ -2 & -3 & -7 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 24 \\ -2 & -3 & -7 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 6 & 86 \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

۱۰۰۳ ۳ با فرض $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ نتیجه می گیریم

$$B^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

و با فرض $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ نتیجه می گیریم $C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

اکنون طرفین رابطه ماتریسی داده شده را از چپ در B^{-1} و از راست در C^{-1} ضرب می کنیم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow X = B^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} C^{-1}$$

$$X = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 20 & -24 \\ -16 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

۱۰۰۴ ۳ حاصل دترمینان را برحسب سطر اول بسط می دهیم:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 3 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4(-1)^2 \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} + 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3-x \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2-x \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-4(6+x^2-5x-2) - 1(3-x-3) + 1(2-6+3x) = 0$$

$$-4(6+x^2-5x-2) - 1(3-x-3) + 1(2-6+3x) = 0$$

$$-4(6+x^2-5x-2) - 1(3-x-3) + 1(2-6+3x) = 0$$

$$-4(6+x^2-5x-2) - 1(3-x-3) + 1(2-6+3x) = 0$$

$$-4x^2 + 24x - 20 = 0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } -4} x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x-1)(x-5) = 0 \Rightarrow x=1 \text{ یا } x=5$$

۱۰۱۲ ۳ از مرکز O به نقطه M وصل می‌کنیم در این صورت $\widehat{OMD}$ زاویه محاطی روبه‌رو به قطر OD است. پس $\widehat{OMD} = 90^\circ$ ، بنابراین OM بر وتر CD عمود است. پس OM وتر CD را نصف می‌کند، یعنی $CM = MD$ (۱)

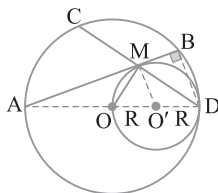
$$\widehat{AMO'} = \widehat{B} = 90^\circ \Rightarrow MO' \parallel BD$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AM}{MB} = \frac{AO'}{O'D} = \frac{rR}{R} = 3 \Rightarrow AM = 3MB \quad (2)$$

بنابراین روابط طولی در دایره $MA \times MB = MC \times MD$

$$\xrightarrow{\text{از (۱) و (۲)}} 3MB \times MB = MC \times MC$$

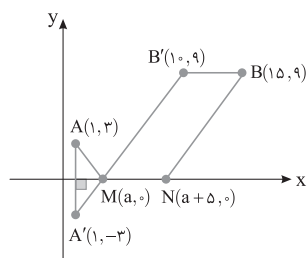
$$\frac{MC^2}{MB^2} = 3 \Rightarrow \frac{MC}{MB} = \sqrt{3}$$



۱۰۱۳ ۳ با توجه به شکل و موقعیت نقاط A، B، M و N این سؤال همان مسئله شیه‌هرون است که می‌خواهیم از A به B برویم به‌طوری که $MN = 5$ قسمتی از مسیر در ساحل رودخانه باشد. برای تعیین مسیر مینیمم ابتدا B را به اندازه 5 واحد در راستای محور X به طرف A منتقل می‌کنیم تا به B' برسیم و بازتاب A را نسبت به محور X نقطه A' می‌نامیم. از A' به B' وصل می‌کنیم تا محور X در نقطه M قطع شود. مسیر AMNB مسیر مینیمم است و طول آن برابر $A'B' + BB' = 15 + 5 = 20$ است.

$$\begin{cases} A'(1, -3) \\ B'(10, 9) \end{cases} \Rightarrow A'B' = \sqrt{(10-1)^2 + (9+3)^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$$

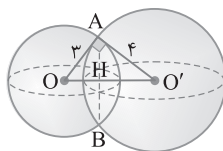
$$\text{طول مسیر مینیمم} = A'B' + BB' = 15 + 5 = 20$$



۱۰۱۴ ۴ تلاقی دو کره یک دایره است. در شکل AH شعاع دایره مورد نظر است. چون $OA = 3$ ، $O'A = 4$ و $OO' = 5$ ، پس مثلث $OA'O'$ قائم‌الزاویه است. بنابراین با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:

$$AH \times OO' = OA \times O'A \Rightarrow AH \times 5 = 3 \times 4 \Rightarrow AH = \frac{12}{5}$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi AH^2 = \pi \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{144}{25} \pi = \frac{5}{7} \pi$$



۱۰۰۹ ۱ با توجه به شکل زیر، دو مثلث OAB و OCD متشابه‌اند زیرا $AB \parallel DC$ پس

$$\triangle OAB \sim \triangle OCD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{DC}$$

$$= \frac{5}{9} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{OA}{AC} = \frac{OB}{BD} = \frac{5}{14}$$

بنابراین

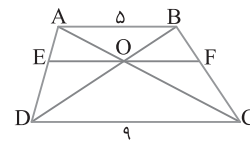
$$\triangle ADC : OE \parallel DC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{OE}{DC} = \frac{OA}{AC}$$

$$\frac{OE}{9} = \frac{5}{14} \Rightarrow OE = \frac{45}{14}$$

$$\triangle BDC : OF \parallel DC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{OF}{DC} = \frac{OB}{BD}$$

$$\frac{OF}{9} = \frac{5}{14} \Rightarrow OF = \frac{45}{14}$$

$$\text{پس } EF = OE + OF = \frac{90}{14} = \frac{45}{7}$$



۱۰۱۵ ۲ به کمک قضیه تالس X را به دست می‌آوریم:

$$AB \parallel DC \Rightarrow \frac{EA}{AD} = \frac{EB}{BC} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{3x-4}{4} \Rightarrow 3x^2 - 4x - 20 = 0$$

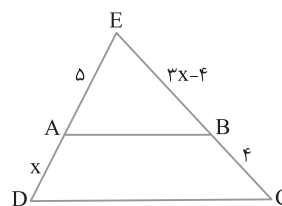
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 240}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{3} \Rightarrow x = \frac{10}{3} \text{ یا } x = -2$$

مسلماً $x = -2$ قابل قبول نیست. پس با فرض $x = \frac{10}{3}$ مسئله را حل می‌کنیم:

$$AB \parallel DC \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle DCE$$

$$\frac{S_{ABE}}{S_{DCE}} = \left(\frac{EA}{ED}\right)^2 = \left(\frac{5}{5+x}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{ABE}}{S_{DCE}} = \left(\frac{5}{5+\frac{10}{3}}\right)^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow \frac{25 \times 25}{9} = \frac{25}{9}$$

$$\xrightarrow{\text{تفصیل در مخرج}} \frac{S_{ABE}}{S_{ABCD}} = \frac{9}{16} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{16}{9} S_{ABE}$$



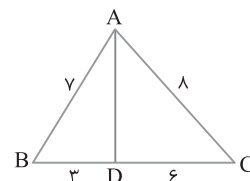
۱۰۱۱ ۲ با استفاده از قضیه استوارت،

$$AB^2 \times DC + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + BD \times DC \times BC$$

$$49 \times 6 + 64 \times 3 = AD^2 \times 9 + 3 \times 6 \times 9 \xrightarrow{+3} 49 \times 2 + 64$$

$$= AD^2 \times 3 + 6 \times 9$$

$$162 = 3AD^2 + 54 \Rightarrow AD^2 = 36 \Rightarrow AD = 6$$



۱۰۲۰ معادله سهمی را استاندارد می‌کنیم:

$$(y + \frac{a}{2})^2 = -bx + 9 + \frac{a^2}{4}$$

چون $y=1$ محور تقارن سهمی است، پس

$$-\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = -2$$

پس معادله سهمی به صورت زیر در می‌آید:

$$(y-1)^2 = -bx + 10 \Rightarrow (y-1)^2 = -b(x - \frac{10}{b})$$

پس این سهمی افقی است و رأس آن $S(h, k) = (\frac{10}{b}, 1)$ است و چون علامت b مشخص نیست دهانه سهمی یا به چپ یا به راست باز می‌شود. اگر $b > 0$ ،آن‌گاه دهانه سهمی به چپ باز می‌شود $4a = b$ ، پس $a = \frac{b}{4}$ و

$$x = a + h \xrightarrow{x = \frac{13}{4}} \frac{13}{4} = \frac{b}{4} + \frac{10}{b}$$

$$\xrightarrow{\text{در } 4b \text{ ضرب می‌کنیم}} 13b = b^2 + 40 \Rightarrow b^2 - 13b + 40 = 0$$

$$(b-8)(b-5) = 0 \Rightarrow b = 8, b = 5$$

چون این مقادیر در گزینه (۱) وجود دارند، پس لزومی به بررسی حالت $b < 0$ نیست.۱۰۲۱ ابتدا ماتریس A^T را به دست می‌آوریم:

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

اکنون فقط درایه‌های سطر اول ماتریس A^F را پیدا می‌کنیم:

$$A^F = A^T \times A^T = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

۱۰۲۲ طرفین تساوی $AX = A^{-1}$ را از سمت چپ در A^{-1} ضربمی‌کنیم تا ماتریس X به دست آید:

از طرف دیگر.

$$AX = A^{-1} \Rightarrow X = (A^{-1})^T \quad (1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\frac{3}{4}-1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -4 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} X = (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & -14 \\ -56 & 25 \end{bmatrix}$$

۱۰۲۳ دترمینان را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & x+5 \\ x-1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & x+5 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + 2(-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & x+5 \\ x-1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+ 3(-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ x-1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-4-6x-30) + (-2)(2-x^2-4x+5)$$

$$+ 3(-12-4x+4) = 0 \Rightarrow -6x-34+2x^2+8x-14-24-12x = 0$$

$$2x^2-10x-72=0 \xrightarrow{\div 2} x^2-5x-36=0 \Rightarrow (x-9)(x+4)=0$$

$$x=9, x=-4$$

۱۰۲۴ طول مستطیل ABCD را x و عرض آن را y در نظر می‌گیریم.بنابر فرض سؤال $x = 1/5 y - 2$ ، بنابراین

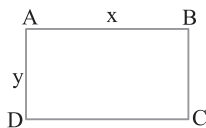
$$S_{ABCD} = 192 \Rightarrow xy = 192 \Rightarrow (\frac{1}{5}y - 2)y = 192$$

$$\frac{1}{5}y^2 - 2y - 192 = 0 \xrightarrow{\text{ضرب در ۵}} 3y^2 - 4y - 384 = 0$$

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \times 3 \times 384}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 1152}}{3} = \frac{2 \pm 34}{3} \Rightarrow y = 12$$

پس $x = 16$ ، در نتیجه

$$\text{محیط مستطیل} = 2(x+y) = 2(16+12) = 56$$

۱۰۲۵ زاویه بین بردار $\vec{a} = (-1, \alpha, 1)$ و محور Z در فضا برابر 45°

است. بنابراین

$$\cos 45^\circ = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| |\vec{k}|} \quad \vec{k} = (0, 0, 1) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2 + \alpha^2} \times \sqrt{1}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2 + \alpha^2} \Rightarrow \alpha = 0$$

بنابراین $\vec{a} = (-1, 0, 1)$. اکنون به جای بردار $\vec{b} = (-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 2)$ از بردار

$$\frac{3}{4} \vec{b} = (-2, 1, 3)$$
 استفاده می‌کنیم. در این صورت

$$\vec{a} \times \frac{3}{4} \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

توجه کنید که چون $\vec{a} \times \frac{3}{4} \vec{b} = \frac{3}{4} (\vec{a} \times \vec{b})$ ، پس θ زاویه بین بردار $\vec{a} \times \frac{3}{4} \vec{b}$ ومحور Z است، بنابراین

$$\cos \theta = \frac{(\vec{a} \times \frac{3}{4} \vec{b}) \cdot \vec{k}}{|\vec{a} \times \frac{3}{4} \vec{b}| |\vec{k}|} = \frac{(-1, 1, -1) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{3} \times \sqrt{1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

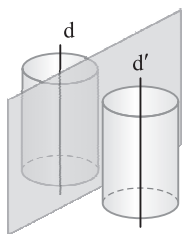
اکنون برای پیدا کردن ماتریس B، طرفین تساوی (۱) را از سمت راست در

وارون ماتریس $\begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ضرب می‌کنیم. توجه کنید که

$$\begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} \quad \text{بنابراین}$$

$$B = \Delta 2I \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \Delta 2I \times \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} \\ = \frac{\Delta 2}{26} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -8 & 28 \end{bmatrix}$$

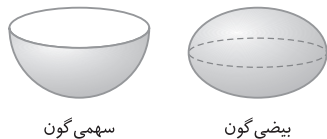
بنابراین ماکزیم مقدار درایه‌های ماتریس B برابر ۲۸ است.



۱۰۲۹ فرض کنید $k > 0$. مکان هندسی

نقطاتی از فضا که از خط‌های موازی d و d' به فاصله k هستند، دو سطح استوانه‌ای با محورهای d و d' هستند (شکل مقابل را ببینید). صفحه‌هایی که بر این دو سطح استوانه‌ای مماس هستند، از دو خط d و d' به یک فاصله هستند که در اینجا تعداد آن‌ها حداکثر ۴ تا است. در واقع دو تا از این

صفحه‌ها می‌توانند طوری بر این دو سطح استوانه‌ای مماس باشند که هر دو سطح در یک طرف این صفحه‌ها باشند و دو تا از این صفحه‌ها می‌توانند طوری بر این دو سطح استوانه‌ای مماس باشند که دو سطح در طرفین این صفحه‌ها باشند. با تغییر مقدار k، تعداد نامتناهی صفحه با این ویژگی خواهیم داشت. بنابراین گزینه (۱) درست است. در ضمن، چون گزینه (۱) درست است، پس گزینه (۲) نادرست خواهد بود. گزینه‌های (۳) و (۴) در صفحه به ترتیب تعریف سهمی و بیضی هستند. در فضا این مکان‌ها سهمی گون و بیضی گون هستند.



۱۰۳۰ معادله استاندارد سهمی به صورت زیر است:

$$(x-1)^2 - 12y = 6 \Rightarrow (x-1)^2 = 12(y + \frac{1}{2})$$

پس این سهمی قائم رو به بالا با رأس $F(1, -\frac{1}{2})$ است و $4a = 12$ ، یعنی

$a = 3$. بنابراین کانون این سهمی به مختصات زیر است:

$$F' = (\alpha, a + \beta) = (1, 3 - \frac{1}{2}) = (1, \frac{5}{2})$$

اکنون مرکز بیضی را پیدا می‌کنیم: $O = \frac{F+F'}{2} = (1, 1)$ مرکز بیضی

بنابراین $\text{فاصله مرکز بیضی از مبدأ مختصات} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

۱۰۳۱ به کمک قضیه هرون، مساحت مثلث را حساب می‌کنیم. توجه کنید که

$$P = \frac{13+14+15}{2} = 21$$

در نتیجه

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} \\ = \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 3 \times 2} = \sqrt{21 \times 21 \times 16} = 21 \times 4 = 84$$

۱۰۲۶ در شکل زیر، مثلث $TB'C'$ انتقال یافته مثلث ABC تحت

بردار $\vec{AT}$ و مثلث TPQ ناحیه محدود بین مثلث اولیه و مثلث انتقال یافته است. بنابر فرض تست،

$$\frac{S_{TPQ}}{S_{ABC}} = \frac{1}{16} \quad (1)$$

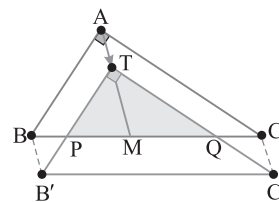
از طرف دیگر، چون اضلاع مثلث TPQ با اضلاع مثلث ABC دویه‌دو موازی‌اند، پس زاویه‌های این دو مثلث مساوی‌اند. در نتیجه این دو مثلث متشابه‌اند. بنابراین نسبت مساحت‌های این دو مثلث مساوی توان دوم نسبت میانه‌های نظیر آن‌ها است، پس

$$\frac{S_{TPQ}}{S_{ABC}} = \left(\frac{TM}{AM}\right)^2 \xrightarrow{\text{از (۱)}} \left(\frac{TM}{AM}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{TM}{AM} = \frac{1}{4} \quad (2)$$

چون در مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است، پس

$$AM = \frac{BC}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{در نتیجه از (۲) به دست می‌آید}$$

$$\frac{TM}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow TM = 1 \Rightarrow AT = AM - TM = 4 - 1 = 3$$



۱۰۲۷ سطر سوم ماتریس A را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\text{سطر سوم حاصل ضرب دو ماتریس اول} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

اکنون سطر سوم ماتریس A را پیدا می‌کنیم:

$$\text{سطر سوم A} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A مساوی $7+1-5=3$ است.

۱۰۲۸ توجه کنید که

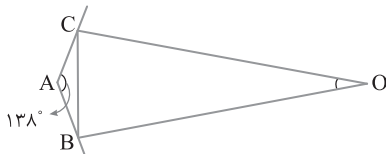
$$BA^T A = \Delta 2I \Rightarrow B \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \Delta 2I$$

$$B \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \Delta 2I \quad (1)$$

۱۰۳۴ در شکل زیر، O نقطه تلاقی نیمسازهای خارجی دو زاویه

$$\hat{O} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} = 90^\circ - \frac{138^\circ}{2} = 21^\circ$$

کوچک‌تر B و C است. بنابراین



۱۰۳۵ طول وتر ED برابر شعاع دایره است، پس $\widehat{ED} = 60^\circ$. از طرف

دیگر، چون $\hat{C}$ زاویه‌ای محاطی است، پس

$$\hat{C} = \frac{\widehat{DEB}}{2} \Rightarrow 70^\circ = \frac{\widehat{ED} + \widehat{EB}}{2} = \frac{60^\circ + \widehat{EB}}{2} \Rightarrow \widehat{EB} = 140^\circ - 60^\circ = 80^\circ$$

چون BC قطر دایره است، پس

$$\widehat{BE} + \widehat{ED} + \widehat{DC} = 180^\circ$$

$$\widehat{EDC} = 180^\circ - \widehat{BE} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

در نتیجه

۱۰۳۶ از فرض $\frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$ نتیجه می‌گیریم $AC = \sqrt{3}BC$. اکنون

با استفاده از رابطه طولی در دایره می‌نویسیم:

$$AC^2 = CB \times DC \Rightarrow (\sqrt{3}BC)^2 = CB \times DC \Rightarrow 3BC = DC$$

$$\frac{DC}{BC} = \frac{3}{1} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{DC - BC}{BC} = \frac{3 - 1}{1} \Rightarrow \frac{DB}{BC} = 2$$

۱۰۳۷ شعاع‌های OM و ON به ترتیب بر خط‌های مماس AB و BC عمود هستند. پس $\hat{M} = \hat{N} = 90^\circ$. چون $\hat{B} = 60^\circ$ ، پس در چهارضلعی

OMBN می‌توان نوشت

$$\hat{O}_1 + \hat{M} + \hat{B} + \hat{N} = 360^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 + 90^\circ + 120^\circ + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 60^\circ$$

از طرف دیگر، دو زاویه مجاور $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در دوزنقه ABCD مکمل‌اند، پس

$\hat{C} = 60^\circ$. چون OC نیمساز زاویه C است، پس $\hat{C}_1 = 30^\circ$. در نتیجه

$\hat{O}_1 = 60^\circ$. اکنون توجه کنید که

$$\triangle ONC : \hat{C}_1 = 30^\circ \Rightarrow ON = \frac{1}{2} OC \xrightarrow{ON=3} OC = 6$$

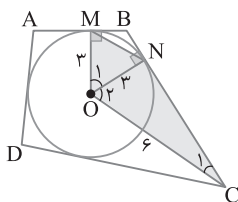
بنابراین

$$S_{OMNC} = S_{OMN} + S_{ONC}$$

$$= \frac{1}{2} OM \times ON \sin \hat{O}_1 + \frac{1}{2} ON \times OC \sin \hat{O}_1$$

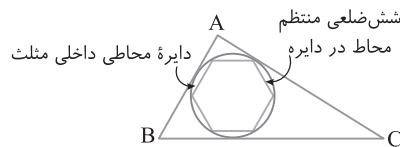
$$= \frac{1}{2} (3)(3) \sin 60^\circ + \frac{1}{2} (3)(6) \sin 60^\circ$$

$$= \frac{9}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 9 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$



اکنون شعاع دایره محاطی داخلی مثلث برابر است با $r = \frac{S}{P} = \frac{84}{21} = 4$. بنابراین

$$\text{اندازه ضلع شش ضلعی منتظم محاطی} = 2r \sin \frac{180^\circ}{6} = 2(4) \sin 30^\circ = 4$$



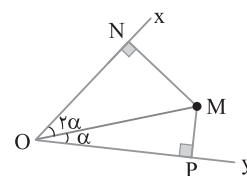
۱۰۳۲ شکل مسئله به صورت زیر است. توجه کنید که

$$\left. \begin{aligned} \triangle OMN : \sin 2\alpha &= \frac{MN}{OM} \\ \triangle OMP : \sin \alpha &= \frac{MP}{OM} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تقسیم می‌کنیم}} \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{MN}{OM}}{\frac{MP}{OM}}$$

$$\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{MN}{MP} \Rightarrow 2 \cos \alpha = \frac{MN}{MP}$$

از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه OMP، $\cos \alpha = \frac{OP}{OM}$. بنابراین

$$2 \times \frac{OP}{OM} = \frac{MN}{MP} \Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{2OP}{OM}$$



۱۰۳۳ از نقطه F عمود HH' و از نقطه E عمود KK' را بر اضلاع AD و BC از مستطیل ABCD وارد می‌کنیم. در نتیجه

$$AM \parallel BN \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle AFM \sim \triangle NFB$$

$$\frac{FH}{FH'} = \frac{AM}{NB} = \frac{2}{1} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{FH}{HH'} = \frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{HH' = DC = 8} \frac{FH}{8} = \frac{2}{3} \Rightarrow FH = \frac{16}{3}$$

به‌طور مشابه،

$$DM \parallel NC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle MED \sim \triangle CEN$$

$$\frac{EK}{EK'} = \frac{MD}{CN} = \frac{4}{5} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{EK}{KK'} = \frac{4}{9}$$

$$\xrightarrow{KK' = DC = 8} \frac{EK}{8} = \frac{4}{9} \Rightarrow EK = \frac{32}{9}$$

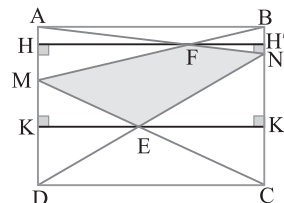
اکنون می‌توانیم مساحت چهارضلعی MENF را پیدا کنیم:

$$S_{MENF} = S_{AND} - S_{AMF} - S_{MED}$$

$$= \frac{1}{2} DC \times AD - \frac{1}{2} FH \times AM - \frac{1}{2} EK \times MD$$

$$= \frac{1}{2} (8)(6) - \frac{1}{2} \left(\frac{16}{3} \right) (2) - \frac{1}{2} \left(\frac{32}{9} \right) (4)$$

$$= 24 - \frac{16}{3} - \frac{64}{9} = \frac{216 - 48 - 64}{9} = \frac{104}{9}$$



۴۱۰۴۲ توجه کنید که

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & & \\ & 7 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A برابر $9+7+5=21$ است.

۴۱۰۴۳ چون $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ پس $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

بنابراین

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+10 & a+2 \\ a+2 & 3 \end{bmatrix}$$

چون $AA^T B = \Delta 2I$ و $|B|$ تعریف می‌شود، پس B و I ماتریس‌هایی 2×2 هستند. اکنون اگر از دو طرف تساوی $AA^T B = \Delta 2I$ درمیان بگیریم، به دست می‌آید

$$|AA^T B| = \Delta 2I \Rightarrow |AA^T| |B| = \Delta 2^2 |I|$$

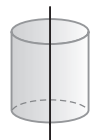
$$\begin{vmatrix} a^2+10 & a+2 \\ a+2 & 3 \end{vmatrix} \times 10^4 = \Delta 2^2 \Rightarrow (3a^2+30-(a+2)^2) = \frac{\Delta 2^2}{10^4} = 26$$

$$3a^2+30-a^2-4-4a=26 \Rightarrow 2a^2-4a=0 \Rightarrow 2a(a-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای a مساوی $0+2=2$ است.

۱۱۰۴۴ خطوطی که بر d عمودند، اگر موازی باشند، در یک صفحه هستند؛ اگر متقاطع باشند، در صفحه‌هایی عمود بر خط d هستند؛ اگر متناظر باشند، هر کدام از آن‌ها در صفحه‌هایی مختلف واقع هستند. در نتیجه چون در فضا بی‌نهایت خط بر یک خط مفروض عمودند، پس خطوط عمود بر یک خط در فضا بی‌نهایت صفحه در فضا تشکیل می‌دهند.

اکنون به نادرستی سایر گزینه‌ها توجه کنید:



مجموعه نقاط متساوی‌الفاصله از یک خط در فضا روی سطحی استوانه‌ای قرار می‌گیرند. پس گزینه (۲) نادرست است.



مجموعه نقاطی از فضا که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه ثابت به یک اندازه است، شکلی به نام بیضی گون است. پس گزینه (۳) نادرست است.



خطوط گذرا از یک نقطه که با محور گذرا از آن نقطه زاویه یکسان می‌سازند، سطح مخروطی است. پس گزینه (۴) نادرست است.

۴۱۰۳۸ نقطه تلاقی قطره‌های $x+y=1$ و $x-y=3$ مرکز دایره است:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \xrightarrow{+} 2x=4 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow O(2, -1) \text{ مرکز}$$

همچنین فاصله مرکز $O(2, -1)$ تا خط مماس $4x+3y+5=0$ برابر شعاع

$$R = \frac{|4(2)+3(-1)+5|}{\sqrt{16+9}} = \frac{10}{5} = 2 \text{ یعنی دایره است،}$$

از طرف دیگر، طول پاره‌خط OM برابر است با

$$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{(4-2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{5}$$

چون $OM > R$ ، پس نقطه M بیرون دایره است. بنابراین

$$OM - R = \sqrt{5} - 2 = \text{نزدیک‌ترین فاصله M از دایره}$$

۳۱۰۳۹ بنابر فرض سؤال $OO' = 6$ و $R = 6a - 1$ و $R' = a^2 - 2$ چون دو دایره مماس داخلی هستند، پس

$$OO' = |R' - R| \Rightarrow 6 = |a^2 - 2 - 6a + 1| \Rightarrow |a^2 - 6a - 1| = 6$$

بنابراین دو حالت داریم:

حالت اول: $a^2 - 6a - 1 = 6 \Rightarrow a^2 - 6a - 7 = 0 \Rightarrow a = -1, a = 7$

$a = -1$ غیرقابل قبول است، زیرا به ازای آن شعاع‌های R و R' منفی می‌شوند.

حالت دوم: $a^2 - 6a - 1 = -6 \Rightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Rightarrow a = 1, a = 5$

$a = 1$ غیرقابل قبول است، زیرا به ازای آن شعاع R' منفی می‌شود.

پس میانگین مقادیر ممکن برای a مساوی $\frac{7+5}{2} = 6$ است.

۲۱۰۴۰ چون بردار $(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b})$ یا بردار $\vec{c}$ موازی است، پس $\vec{a} \times \vec{b}$

با $\vec{c}$ موازی است. در ضمن برای ساده‌تر شدن محاسبات به جای بردار

$$\vec{b} = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 2\right) \text{ از بردار } \frac{3}{4}\vec{b} = (-1, 1, 3) \text{ استفاده می‌کنیم. در واقع بردار}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ با بردار $\vec{a} \times \frac{3}{4}\vec{b}$ موازی است. توجه کنید که

$$\vec{a} \times \frac{3}{4}\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & \alpha & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (3\alpha - 2)\vec{i} - \vec{j} + (-1 + 2\alpha)\vec{k}$$

بنابر فرض سؤال قرار است بردار $\vec{a} \times \frac{3}{4}\vec{b}$ با $\vec{c}$ موازی باشد. بنابراین

$$\frac{3\alpha - 2}{-1} = \frac{-1}{1} = \frac{-1 + 2\alpha}{-1} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha - 2 = 1 \Rightarrow \alpha = 1 \\ -1 + 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

در نتیجه

پس به ازای $\alpha = 1$ دو بردار $(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b})$ و $\vec{c}$ موازی‌اند.

۱۱۰۴۱ توجه کنید که

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & a \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5b_1 - 2b_2 \\ 4b_1 + ab_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

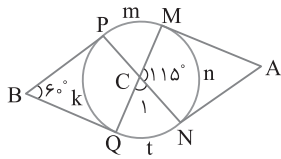
بنابراین $5b_1 - 2b_2 = 4b_1 \Rightarrow b_1 = 2b_2$ (۱)

چون b ماتریسی ناصفر است، پس $b_1, b_2 \neq 0$. اکنون می‌توان نوشت

$$4b_1 + ab_2 = 4b_2 \xrightarrow{\text{از (۱)}} 8b_2 + ab_2 = 4b_2 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } b_2 \neq 0} 8 + a = 4 \Rightarrow a = -4$$

بنابراین

$$\widehat{MAN} = \frac{m+k+t-n}{2} \xrightarrow{m+t=130^\circ, k-n=10^\circ} \widehat{MAN} = \frac{130^\circ + 10^\circ}{2} = 70^\circ$$



۴۱۰۴۸ ابتدا مساحت مثلث را به کمک قضیه هرون به دست می آوریم.

$$\text{توجه کنید که } P = \frac{21+17+10}{2} = 24 \text{ در نتیجه}$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} \\ = \sqrt{24 \times 3 \times 7 \times 14} = \sqrt{3 \times 8 \times 3 \times 7 \times 2 \times 7} = \sqrt{21^2 \times 16} = 21 \times 4 = 84$$

چون $\frac{1}{2} \times 8 \times 21 = 84$ ، پس ارتفاع $AH = 8$ وارد بر ضلع به طول ۲۱ است.

با فرض $BC = 21$ ، $AB = 10$ و $AC = 17$ شکل مسئله به صورت زیر است.

$$MN = \frac{BC}{2} = \frac{21}{2}$$

از طرف دیگر، چون $MN \parallel BC$ ، پس چهارضلعی $MNPH$ دوزنقه است.

بنابراین ارتفاع AH بر MN نیز عمود است. اکنون توجه کنید که

$$\triangle ABH : MH' \parallel BH \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AM}{BM} = \frac{AH'}{HH'} \xrightarrow{AM=BM} \frac{AH'}{HH'} = 1$$

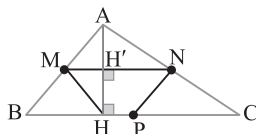
$$AH' = HH' = \frac{1}{2} AH \Rightarrow HH' = 4$$

$$\triangle ABH : BH' = AB^2 - AH'^2 = 10^2 - 4^2 = 36 \Rightarrow BH = 6$$

$$PH = BP - BH = \frac{BC}{2} - BH = \frac{21}{2} - 6 = \frac{9}{2} \quad \text{پس}$$

در نتیجه مساحت دوزنقه $MNPH$ برابر است با

$$S_{MNPH} = \frac{1}{2} HH' (MN + PH) = \frac{1}{2} (4) \left(\frac{21}{2} + \frac{9}{2} \right) = 2 \times 15 = 30$$



۳۱۰۴۹ در شکل زیر، نیمساز زاویه B عمود منصف ضلع BC را در نقطه

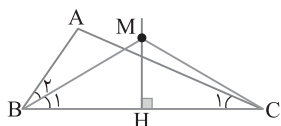
M قطع کرده است. از M به C وصل می کنیم. چون M روی عمود منصف

BC است، پس

$$MB = MC \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{M}CB$$

چون زاویه C_1 قسمتی از زاویه MCB است، پس

$$\hat{M}CB > \hat{C}_1 \xrightarrow{\hat{M}CB = \hat{B}_1} \hat{B}_1 > \hat{C}_1 \xrightarrow{\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}} \frac{\hat{B}}{2} > \hat{C}_1 \Rightarrow \hat{B} > 2\hat{C}_1$$



۳۱۰۴۵ طرفین معادله بیضی را بر ۱۰۰ تقسیم می کنیم:

$$25(x-1)^2 + 16(y+1)^2 = 100 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{\frac{25}{4}} = 1$$

پس این بیضی یک بیضی قائم با مرکز $O'(1, -1)$ است و

$$\begin{cases} a^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow a = \frac{5}{2} \\ b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4} \Rightarrow c = \frac{3}{2} \quad \text{بنابراین}$$

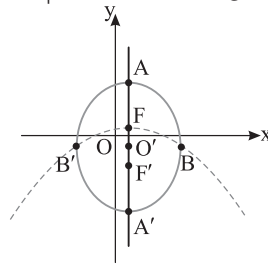
با توجه به شکل $O'F' = OF' = c = \frac{3}{2}$ ، چون $OF < OF'$ ، پس کانون‌ها به

مختصات $F(1, \frac{1}{2})$ و $F'(1, -\frac{5}{2})$ هستند. اکنون رأس و کانون سهمی

مورد نظر است. با توجه به جایگاه رأس و کانون، این سهمی قائم رو به پایین است و مقدار a در سهمی مساوی $FF' = 3$ است. با توجه به معادله سهمی قائم رو به پایین،

$$(x-\alpha)^2 = -4a(y-\beta) \Rightarrow (x-1)^2 = -12(y-\frac{1}{2}) \Rightarrow (x-1)^2 = -12y + 6$$

● توجه کنید معادله بیضی در کتاب هندسه ۳ نظام جدید حذف شده است.



۱۱۰۴۶ شکل مسئله به صورت زیر است. سه مثلث AME ، CMN و

BEN به حالت (رض ز) همنهشت هستند. فرض می کنیم طول ضلع مثلث

متساوی الاضلاع MEN برابر a باشد. توجه کنید که

$$\triangle AME : \hat{A} = 60^\circ \Rightarrow EM = \frac{\sqrt{3}}{2} AE \xrightarrow{EM=a} AE = \frac{2a}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

$$\hat{E} = 30^\circ \Rightarrow AM = \frac{AE}{2} \xrightarrow{(1)} AM = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow{AM=BE} BE = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

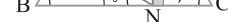
از جمع کردن تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می گیریم

$$AB = AE + BE = \frac{2a}{\sqrt{3}} + \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{3a}{\sqrt{3}} = a\sqrt{3}$$

چون مثلث‌های متساوی الاضلاع ABC و

MEN متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MEN}} = \left(\frac{AB}{ME} \right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{a} \right)^2 = 3$$



۳۱۰۴۷ با توجه به اندازه‌های روی شکل معلوم می شود که

$$\hat{C}_1 = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

اکنون زاویه‌ها را برحسب کمان‌ها می نویسیم

$$\hat{C}_1 = \frac{m+t}{2} \xrightarrow{\hat{C}_1 = 65^\circ} m+t = 130^\circ$$

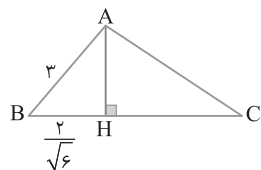
$$\hat{B} = \frac{m+n+t-k}{2} \xrightarrow{\hat{B} = 60^\circ} m+n+t-k = 120^\circ \xrightarrow{m+t=130^\circ}$$

$$n-k = -10^\circ \Rightarrow k-n = 10^\circ$$

در ضمن $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{4+4+1} = 3$. بنابراین

$$\triangle ABH: AH^2 = AB^2 - BH^2 \Rightarrow AH^2 = 9 - \frac{4}{6} = 9 - \frac{2}{3} = \frac{25}{3}$$

$$AH = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$



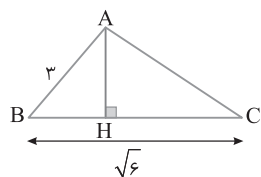
راه حل دوم مساحت مثلث ABC را به کمک ضرب خارجی پیدا می کنیم

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \sqrt{25+9+16} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

در ضمن $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$. بنابراین

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} AH \times \sqrt{6} \Rightarrow AH = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$



۳۱۰۵۴ فرض می کنیم شعاع دایره بزرگ R باشد. قطر AB عمود منصف

قطر DC است. پس

$$\left. \begin{array}{l} OD = OC \\ ON = ON' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{کم می کنیم}} ND = CN' \xrightarrow{DN=1^\circ} CN' = 1^\circ$$

در نتیجه $ON = ON' = R - 1^\circ$. بنابراین از رابطه طولی در دایره کوچک تر

به دست می آید

$$ON \times ON' = OM \times OB \xrightarrow{OM=R-16} \rightarrow$$

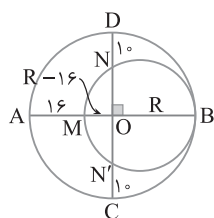
$$(R-1^\circ)(R-1^\circ) = (R-16)(R)$$

$$R^2 + 100 - 20R = R^2 - 16R \Rightarrow 4R = 100 \Rightarrow R = 25$$

اکنون می توان نوشت

$$MB = OB + OM = R + R - 16 = 2R - 16 = 50 - 16 = 34$$

چون MB قطر دایره کوچک تر است، پس $\frac{MB}{2} = 17$ = شعاع دایره کوچک تر

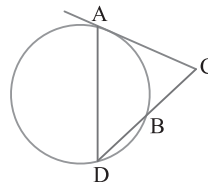


۴۱۰۵۰ با استفاده از رابطه طولی در دایره می نویسیم

$$CA^2 = CB \times CD \Rightarrow CA^2 = CB(CB + BD) \xrightarrow{DB=BC} \rightarrow$$

$$CA^2 = CB(CB + CB) \Rightarrow CA^2 = 2CB^2 \Rightarrow CA = \sqrt{2}CB$$

$$\frac{CA}{CB} = \sqrt{2}$$



۲۱۰۵۱ از نقطه O به نقطه A وصل می کنیم. در این صورت مثلث

OAC قائم الزاویه است. بنابراین

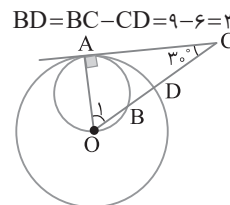
$$\triangle OAC: \hat{C} = 3^\circ \Rightarrow OA = \frac{1}{2} OC \xrightarrow{OA=6} \rightarrow OC = 12$$

$$\hat{O}_1 = 6^\circ \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} OC \xrightarrow{OC=12} \rightarrow AC = 6\sqrt{3}$$

اکنون با استفاده از رابطه طولی در دایره کوچک تر می نویسیم

$$CA^2 = CB \times CO \Rightarrow (6\sqrt{3})^2 = CB \times 12 \Rightarrow 108 = 12CB \Rightarrow BC = 9$$

از طرف دیگر، $CD = OC - OD = 12 - 6 = 6$. بنابراین



۳۱۰۵۲ شعاع OM بر خط مماس AB عمود است. چون $AB \parallel DC$ ،

پس امتداد شعاع OM بر DC عمود است. همین طور، شعاع ON بر خط

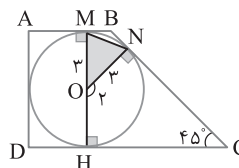
مماس BC عمود است. بنابراین در چهارضلعی ONCH می توان نوشت

$$\hat{O}_1 + \hat{N} + \hat{C} + \hat{H} = 360^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 + 90^\circ + 45^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$

$$\hat{O}_1 = 135^\circ \xrightarrow{\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ} \hat{O}_2 = 45^\circ$$

در نتیجه

$$S_{OMN} = \frac{1}{2} OM \times ON \sin \hat{O}_1 = \frac{1}{2} (3) \sin 45^\circ = \frac{9}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$



۲۱۰۵۳ راه حل اول مختصات پیکانهای $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ را پیدا می کنیم:

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (-2, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (-1, -1, 2)$$

چون پیکان $\overrightarrow{BH}$ تصویر پیکان $\overrightarrow{BA}$ روی پیکان $\overrightarrow{BC}$ است، پس

$$|\overrightarrow{BH}| = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{|2 - 2 + 2|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

۴۱۰۵۸ می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی مساوی‌اند، پس

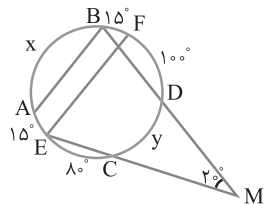
$$AB \parallel EF \Rightarrow \widehat{BF} = \widehat{AE}$$

$$\widehat{AE} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{BF} = 15^\circ$$

با فرض $\widehat{AB} = x$ و $\widehat{CD} = y$ می‌نویسیم:

$$\widehat{AB} + \widehat{BF} + \widehat{FD} + \widehat{CD} + \widehat{EC} + \widehat{AE} = 360^\circ$$

$$x + 15^\circ + 100^\circ + y + 8^\circ + 15^\circ = 360^\circ \Rightarrow x + y = 15^\circ \quad (1)$$



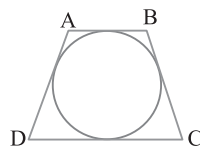
از طرف دیگر،

$$\widehat{M} = \widehat{EAB} - \widehat{CD} \Rightarrow 2^\circ = \frac{15^\circ + x - y}{2} \Rightarrow x - y = 25^\circ \quad (2)$$

$$\begin{cases} x + y = 15^\circ \\ x - y = 25^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20^\circ \\ y = -5^\circ \end{cases} \quad \text{کم می‌کنیم} \Rightarrow 2y = 125^\circ \Rightarrow y = 62.5^\circ$$

بنابراین

$$\widehat{ABD} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{ABD} = \frac{62.5^\circ + 8^\circ + 15^\circ}{2} = \frac{85.5^\circ}{2} = 42.75^\circ$$



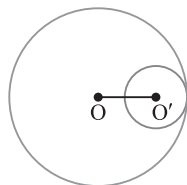
۴۱۰۵۹ اگر دوزنقه متساوی الساقین بر

دایره به شعاع R محیط باشد، آن‌گاه قطر دایره محاطی واسطه هندسی بین دو قاعده

$$4R^2 = AB \times DC \quad (1) \quad \text{است؛ پس}$$

از طرف دیگر، $\pi R^2 = 15\pi \Rightarrow R^2 = 15 \quad (2)$

$$\text{از (1) و (2)} \Rightarrow 4 \times 15 = 6 \times a \Rightarrow a = 10$$



۱۱۰۶۵ فرض کنیم R شعاع دایره

بزرگ‌تر و R' شعاع دایره کوچک‌تر باشد.

چون دو دایره مماس درونی‌اند، پس

$$OO' = R - R' \quad \text{یعنی } R - R' = 3/5$$

طرف دیگر،

$$21\pi = \pi R^2 - \pi R'^2 \Rightarrow R^2 - R'^2 = 21$$

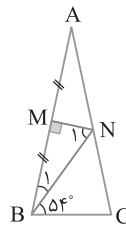
$$(R - R')(R + R') = 21 \xrightarrow{R - R' = 3/5} 3/5 (R + R') = 21$$

$$R + R' = \frac{21}{3/5} = \frac{21}{3/5} = 7$$

بنابراین

$$\begin{cases} R - R' = 3/5 \\ R + R' = 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} 2R' = 6 - 3/5$$

$$2R' = 2/5 \Rightarrow R' = \frac{2/5}{2} = 1/5$$



۳۱۰۵۵ بنابر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم

داشت، نقطه N روی عمود منصف AB است، پس

از دو سر ضلع AB به یک فاصله است. یعنی

$$NA = NB \quad \text{بنابراین } \hat{B}_1 = \hat{A} = \alpha \quad \text{در ضمن}$$

$$AB = AC \quad \text{پس } \hat{B}_1 + 54^\circ = \hat{C} \quad \text{بنابراین}$$

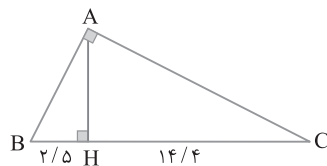
$$\triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \hat{B}_1 + 54^\circ + \hat{B}_1 + 54^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{B}_1 = \alpha \rightarrow 3\alpha = 180^\circ - 108^\circ \Rightarrow 3\alpha = 72^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{72^\circ}{3} = 24^\circ$$

در نتیجه

$$\triangle BMN: \hat{M} + \hat{N}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ$$

$$\hat{B}_1 = 24^\circ \rightarrow 90^\circ + \hat{N}_1 + 24^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{N}_1 = 66^\circ$$



۲۱۰۵۶ در مثلث

قائم‌الزاویه ABC ارتفاع

AH روی وتر BC

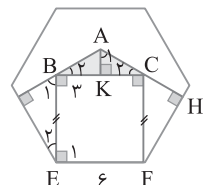
پاره‌خط‌هایی به طول ۲/۵

و ۱۴/۴ جدا کرده است.

با استفاده از رابطه طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:

$$AH^2 = BH \times CH \Rightarrow AH^2 = 2/5 \times 14/4 = \frac{25}{10} \times \frac{144}{10}$$

$$AH = \frac{5 \times 12}{10} = \frac{12}{2} = 6$$



۱۱۰۵۷ بنابر فرض سؤال چهارضلعی

BCFE مربع است. پس $\hat{E}_1 = 90^\circ$ از

طرف دیگر هر زاویه داخلی شش‌ضلعی

منتظم 120° است. بنابراین

$$\hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 120^\circ \xrightarrow{\hat{E}_1 = 90^\circ} \hat{E}_2 = 30^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 = 60^\circ$$

چون $\hat{B}_2 = 90^\circ$ و $\hat{B}_1 = 60^\circ$ ، پس $\hat{B}_3 = 30^\circ$.

به همین ترتیب معلوم می‌شود $\hat{C}_3 = 30^\circ$. پس مثلث ABC متساوی‌الساقین

با زاویه رأس 120° است. بنابراین اگر ارتفاع AK وارد بر قاعده BC را رسم

کنیم، AK میانه و نیمساز هم هست. در نتیجه

$$BK = KC = \frac{BC}{2} = \frac{6}{2} = 3, \quad \hat{A}_1 = \hat{A} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

در مثلث قائم‌الزاویه AKC ضلع KC روبه‌رو به زاویه 60° است، پس

$$KC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC \Rightarrow 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} AC \Rightarrow AC = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

و AK روبه‌رو به زاویه 30° است، پس

$$AK = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} (2\sqrt{3}) \Rightarrow AK = \sqrt{3}$$

بنابراین

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AK \times BC = \frac{1}{2} (\sqrt{3}) (6) = 3\sqrt{3}$$

ماتریس AB اسکالر است، پس درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر و درایه‌های روی قطر اصلی همگی برابر یکدیگرند. بنابراین

$$\begin{cases} 2xz - 2z = 2 \Rightarrow xz - z = 1 \xrightarrow{\text{از (۱)}} -xy + y = 1 \\ 2y - 4yz = 2 \Rightarrow y - 2yz = 1 \xrightarrow{\text{از (۱)}} y + 2y^2 = 1 \\ 2x + 4y = 0 \Rightarrow x = -2y \\ 2yz + 2z^2 = 0 \xrightarrow{z \neq 0} y = -z \quad (۱) \\ \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0 \Rightarrow y = -z \end{cases}$$

در نتیجه

$$2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = \frac{1}{2} \text{ (غ.ق.ق.)} \end{cases}$$

بنابراین $-xy + y = 1 \xrightarrow{y = -1} -xy - 1 = 1 \Rightarrow xy = -2$
دقت کنید $z \neq 0$ زیرا در غیر این صورت مقدار $2xz - 2z$ برابر صفر است و با اسکالر بودن ماتریس AB در تناقض است.

۳۱۰۶۴ ابتدا دترمینان A را به دست می‌آوریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(3-2) + 1(12-4) - 3(4-2) = 1+8-6=3$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} 2|A| & |A| \\ 1 & \frac{2}{|A|} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون طرفین تساوی ماتریسی بالا را در وارون ماتریس یعنی $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

$$\text{ماتریس} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ از سمت چپ ضرب می‌کنیم. در نتیجه}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -15 & 6 \end{bmatrix}$$

پس کوچک‌ترین درایه قطر اصلی ماتریس X برابر ۶ است.

۱۱۰۶۵ با انتخاب دو مقدار دلخواه برای m دو قطر دایره را به دست آورده از تلاقی این دو قطر مرکز دایره به دست می‌آید.

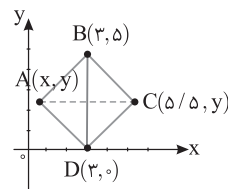
$$\begin{cases} m=2 \Rightarrow 3y=6 \Rightarrow y=2 \\ m=-1 \Rightarrow -3x=6 \Rightarrow x=-2 \end{cases} \Rightarrow \text{مرکز دایره } O(-2, 2)$$

چون A روی دایره است، پس

$$R = OA = \sqrt{(-1+2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\text{محیط دایره} = 2\pi R = 2\sqrt{2}\pi$$

بنابراین



بازتاب نقطه D نسبت به محور x بر خودش منطبق است، پس نقطه D روی محور x قرار دارد، پس $D=(3, 0)$. مسلماً بازتاب نقطه C نسبت به قطر BD نقطه A است زیرا قطرهای مربع عمودمنصف یکدیگرند. فرض کنیم

یکدیگرند، بنابراین

$$A+C=B+D \Rightarrow (x, y) + (5/5, y) = (3, 5) + (3, 0)$$

$$(x+5/5, 2y) = (6, 5)$$

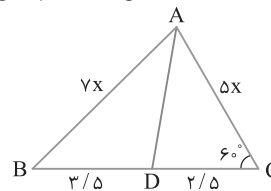
پس

$$\begin{cases} x+5/5=6 \Rightarrow x=5/5 \\ 2y=5 \Rightarrow y=5/2 \end{cases} \Rightarrow A(5/5, 5/2)$$

بنابراین

$$OA = \sqrt{5/5^2 + 5/2^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \sqrt{6.5}$$

۱۱۰۶۲ از قضیه نیمساز زاویه داخلی استفاده کرده می‌نویسیم:



$$AD \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{3/5}{2/5} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{7x}{5x} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{7}{5}$$

با توجه به تناسب به دست آمده فرض می‌کنیم

$$AC = 5x, \quad AB = 7x$$

اکنون بنابر قضیه کسینوس‌ها،

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \cos 60^\circ$$

$$\xrightarrow{BC=6} 49x^2 = 25x^2 + 36 - 2(5x)(6)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$49x^2 = 25x^2 + 36 - 30x \Rightarrow 24x^2 + 30x - 36 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 6} 4x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+96}}{8}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{-5 \pm 11}{8} \Rightarrow x = \frac{-5+11}{8} \Rightarrow x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

بنابراین ضلع کوچک‌ترین مثلث یعنی AC برابر $5x = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3.75$ است.

(توجه کنید اگر $BD = 2/5$ و $DC = 3/5$ ، آن‌گاه مسئله جواب نخواهد داشت. پس بهتر بود از ابتدا مطرح می‌شد $AB > AC$)

۲۱۰۶۳ ابتدا ماتریس AB را پیدا می‌کنیم:

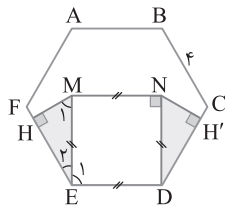
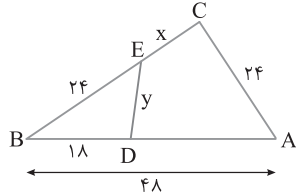
$$AB = \begin{bmatrix} x & -1 & -x \\ 0 & 0 & 4 \\ y & z & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2z & \frac{1}{2} & 2 \\ 2z & 0 & -4y \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xz-2z & 0 & 2x+4y \\ 0 & 2 & 0 \\ 2yz+2z^2 & \frac{y}{2} + \frac{z}{2} & 2y-4yz \end{bmatrix}$$

۱۰۷۰ دو مثلث ABC و BDE متشابه‌اند زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{E\hat{C}A} = \widehat{B\hat{D}E} \\ \widehat{B} = \widehat{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle BDE \Rightarrow \frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{BE}{AB}$$

$$\frac{y}{24} = \frac{18}{x+24} = \frac{24}{48} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{y}{24} = \frac{24}{48} \Rightarrow \frac{y}{24} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 12 \\ \frac{18}{x+24} = \frac{24}{48} \Rightarrow \frac{18}{x+24} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 12 \end{array} \right.$$

بنابراین مقدار $\frac{x}{y}$ برابر یک است.



۱۰۷۱ چهارضلعی MNDE

مربع به ضلع ۴ است، پس $\hat{E}_1 = 90^\circ$.

در ضمن هر زاویه داخلی شش ضلعی

منتظم 120° است، پس $\hat{E}_2 = 30^\circ$ ، در

نتیجه در مثلث قائم الزاویه MHE زاویه

M_1 برابر 60° می‌شود، بنابراین

$$\triangle MEH: \hat{M}_1 = 60^\circ \Rightarrow HE = \frac{\sqrt{3}}{2} ME \xrightarrow{ME=4} HE = 2\sqrt{3}$$

$$\triangle MEH: \hat{E}_2 = 30^\circ \Rightarrow MH = \frac{1}{2} ME \xrightarrow{ME=4} MH = 2$$

$$S_{MEH} = \frac{1}{2} MH \times EH = \frac{1}{2} (2)(2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

پس

به همین ترتیب مشخص می‌شود $S_{NDH'} = 2\sqrt{3}$. بنابراین مجموع

مساحت‌های دو مثلث MHE و NDH' برابر $4\sqrt{3}$ است.

۱۰۷۲ می‌دانیم اندازه کمان‌های

بین دو وتر موازی مساوی‌اند. بنابراین

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel DE \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BE} \\ BC \parallel EF \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{CF} \end{array} \right\}$$

$$\widehat{AD} = \widehat{CF} = \widehat{BE} = x$$

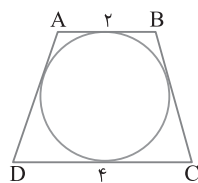
$$\widehat{AB} + \widehat{BE} + \widehat{EF} + \widehat{CF} + \widehat{CD} + \widehat{AD} = 360^\circ$$

همچنین

$$60^\circ + x + 80^\circ + x + 100^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow 3x = 120^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$$

از طرف دیگر زاویه BCT زاویه ظلی است: بنابراین

$$\widehat{BCT} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{DC} + \widehat{AB}}{2} = \frac{40^\circ + 100^\circ + 60^\circ}{2} = 100^\circ$$



۱۰۷۳ در دوزنقه متساوی الساقین محیطی

قطر دایره محاطی واسطه هندسی بین دو قاعده

دوزنقه است. به عبارتی اگر شعاع دایره محاطی

دوزنقه متساوی الساقین محیطی ABCD باشد،

آن‌گاه $4R^2 = AB \times DC$ پس

$$4R^2 = AB \times DC \Rightarrow 4R^2 = 2 \times 4 \Rightarrow R^2 = 2$$

بنابراین مساحت دایره $\pi R^2 = 2\pi$

۱۰۶۶ اگر در سهمی افقی از معادله سهمی نسبت به y مشتق گرفته

مساوی صفر قرار دهیم، آن‌گاه عرض رأس سهمی به دست می‌آید، پس

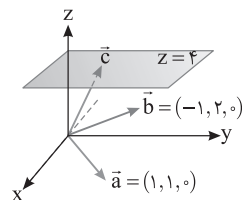
$$f'_y = 0 \Rightarrow 4y - 2a = 0 \xrightarrow{y=1} 4 - 2a = 0 \Rightarrow a = 2$$

در ضمن رأس سهمی در معادله سهمی صدق می‌کند، پس

$$2 - 2a - 8 + b = 0 \xrightarrow{a=2} 2 - 4 - 8 + b = 0 \Rightarrow b = 10$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

بنابراین



۱۰۶۷ ارتفاع بردار $\vec{h}$ برابر ۴

است، پس انتهای بردار $\vec{h}$ روی صفحه

$Z=4$ قرار دارد. در ضمن بردار $\vec{h}$ بر

بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود نیست زیرا

$\vec{a} \cdot \vec{h} \neq 0$ و $\vec{b} \cdot \vec{h} \neq 0$. بنابراین بردار $\vec{h}$

روی صفحه $Z=4$ قرار دارد. در نتیجه

انتهای بردار $\vec{c}$ روی صفحه $Z=4$ واقع است. بنابراین مختصات بردار $\vec{c}$ به

صورت $(x, y, 4)$ است. بنابر فرض سؤال،

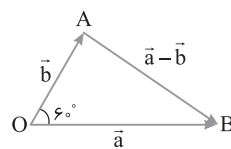
$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \Rightarrow (1, 1, 0) \cdot (x, y, 4) = 1 \Rightarrow x + y = 1$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 5 \Rightarrow (-1, 2, 0) \cdot (x, y, 4) = 5 \Rightarrow -x + 2y = 5$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ -x + 2y = 5 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} 3y = 6 \Rightarrow y = 2, x = -1$$

بنابراین

$$|\vec{c}| = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21} \text{ و } \vec{c} = (-1, 2, 4)$$



۱۰۶۸ در نظر بگیرید $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$.

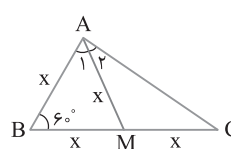
در این صورت بردار $\vec{a} - \vec{b}$ مطابق شکل

مقابل خواهد بود. در مثلث OAB یک

زاویه 60° و اندازه دو ضلع این زاویه 60°

به نسبت ۱ به ۲ هستند. پس مثلث OAB قائم الزاویه است و $\hat{A} = 90^\circ$ ، پس

$\hat{B} = 30^\circ$. در نتیجه زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ برابر 30° است.



نکته: توجه کنید اگر در مثلث ABC

$\hat{B} = 60^\circ$ ، $AB = x$ و $BC = 2x$ ،

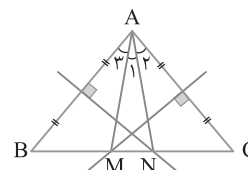
آن‌گاه $\hat{A} = 90^\circ$. زیرا اگر میانه AM وارد

بر BC را رسم کنید، آن‌گاه مثلث ABM

متساوی الاضلاع و مثلث AMC

متساوی الساقین است: پس $\hat{A}_1 = 60^\circ$ و

$\hat{A}_2 = 30^\circ$ ، در نتیجه $\hat{A} = 90^\circ$.



۱۰۶۹ بنابر داده‌های سؤال

شکل مقابل را خواهیم داشت. می‌دانیم

هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط

از دو سر پاره خط به یک فاصله است.

$$\left\{ \begin{array}{l} AC \text{ عمود منصف } M \Rightarrow MA = MC \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{C} \\ AB \text{ عمود منصف } N \Rightarrow NA = NB \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = \hat{B} \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_1 = \hat{B} + \hat{C} \xrightarrow{\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ} \hat{A}_1 + \hat{A}_1 = 180^\circ - 80^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = 50^\circ$$

$$80^\circ + \hat{A}_1 = 180^\circ - 80^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = 20^\circ$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha + \beta & 2\alpha \\ 4\alpha & -3\alpha + \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = \frac{3}{5} \Rightarrow -\frac{1}{5} + \beta = \frac{3}{5} \Rightarrow \beta = \frac{4}{5} \\ 4\alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{10}} = 8$$

۱۰۷۸ ابتدا درایه‌های ماتریس A^2 را به دست آوریم:

$$A^2 = A \times A$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

اکنون فقط درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 را به دست می‌آوریم:

$$A^3 = A^2 \times A$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

بنابراین درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 به صورت $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ است.

۱۰۷۹ برای مشخص شدن راه‌حل هر دو دایره را ترسیم می‌کنیم: سپس مرکز و شعاع دایره‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$x^2 - 8x + y^2 + 15 = 0 \Rightarrow O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (4, 0)$$

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{64 - 60}}{2} = 1$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0 \Rightarrow O'\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (1, 0)$$

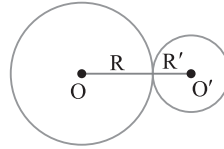
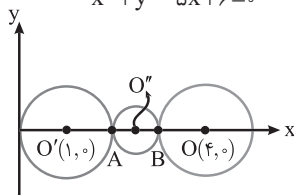
$$R' = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

مطابق شکل دایره خط‌چین به مرکز O'' و شعاع R'' مرکزش روی محور x قرار دارد و بر هر دو دایره مماس خارج است. در شکل AB قطر دایره خط‌چین است چون $A(2, 0)$ و $B(3, 0)$ است. پس $O'' = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$

$$R'' = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(x - \frac{5}{2})^2 + (y - 0)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 - 5x + \frac{25}{4} = \frac{1}{4}$$

$$x^2 + y^2 - 5x + 6 = 0$$

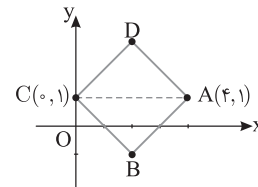


۱۰۷۴ طول خط‌المركزين دو دایره مماس خارج مساوی $R + R'$ است. پس طول مماس مشترک خارجی این دو دایره $2\sqrt{RR'}$ است. بنابر فرض سؤال،

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{3}R \Rightarrow 2\sqrt{RR'} = \sqrt{3}R$$

$$4RR' = \frac{3}{4}R^2 \Rightarrow 4R' = \frac{3}{4}R \Rightarrow R = \frac{16}{3}R'$$

بنابراین شعاع دایره بزرگ‌تر $\frac{16}{3}$ برابر شعاع دایره کوچک‌تر است.



۱۰۷۵ چون بازتاب نقطه C

نسبت به محور y بر خودش منطبق است، پس نقطه C روی محور y قرار دارد، پس مختصات C به صورت $(0, 1)$ است. در ضمن عرض نقطه

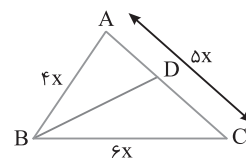
D برابر ۳ است. فرض می‌کنیم $D(x, 3)$. چون قطرها AC و BD یکدیگر را در مرکز O نصف می‌کنند، پس

$$A + C = B + D \Rightarrow (4, 1) + (0, 1) = (x, 3) + (x, y)$$

$$\begin{cases} 4 = 2x \Rightarrow x = 2 \\ 2 = 3 + y \Rightarrow y = -1 \end{cases} \Rightarrow B(2, -1)$$

$$OB = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

بنابراین



۱۰۷۶ در مثلث ABC فرض

کنیم $AB = 4x$ ، $AC = 5x$ و $BC = 6x$. در این صورت زاویه B زاویه متوسط مثلث است. فرض کنیم BD نیمساز زاویه B باشد. در این

صورت دو مثلث ABD و ABC دارای ارتفاع مشترک از رأس B هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیرشان است. پس:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AC} \quad (1)$$

از طرف دیگر بنابر قضیه نیمساز داخلی می‌نویسیم:

$$BD \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \xrightarrow{\text{ترکیب درمخرج}} \frac{AD}{AD + DC} = \frac{AB}{AB + BC}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AB + BC} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{4x}{4x + 6x} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{AD}{10x} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{2}{5} \quad (2)$$

بنابراین

$$\text{از (۱)، (۲)} \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{5}{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

۱۰۷۷ وارون ماتریس

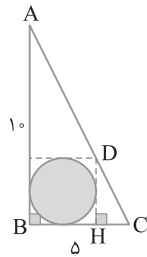
$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha A + \beta I = A^{-1} \Rightarrow \alpha \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\pi R^2 = \pi \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \pi$$

مساحت دایره



تعداد قطرهای n ضلعی محدب را با d(n) نشان می‌دهیم.

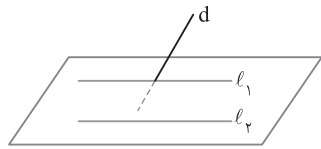
بنابر فرض سؤال می‌نویسیم

$$d(n) - d(n-1) = 16 \Rightarrow \frac{1}{2}n(n-3) - \frac{1}{2}(n-1)(n-4) = 16$$

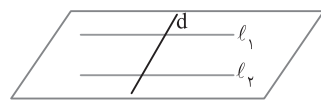
$$\xrightarrow{\text{ضرب در ۲}} (n^2 - 3n) - (n^2 - 5n + 4) = 32 \Rightarrow 2n - 4 = 32 \Rightarrow n = 18$$

اکنون باید اختلاف تعداد قطرهای ۱۸ ضلعی محدب و ۱۶ ضلعی محدب را پیدا کنیم.

$$d(18) - d(16) = \frac{1}{2}(18)(18-3) - \frac{1}{2}(16)(16-4) = 9 \times 15 - 8 \times 12 = 135 - 96 = 39$$



شکل (۱)



شکل (۲)

در شکل (۱) خط‌های l_1 و l_2 موازی‌اند و خط d خط l_1 را قطع کرده است ولی باخط l_2 متناظر است. پسd و l_2 می‌توانند متناظر

باشند. از طرف دیگر، در

شکل (۲)، خط d در صفحه

دو خط موازی l_1 و l_2 است و خط l_1 را قطع می‌کند. بنابراین خط d خط l_2 را نیز قطع می‌کند. پسd و l_2 می‌توانند متقاطع هم باشند ولی d نمی‌تواند با l_2 موازی باشد، زیرااگر d موازی l_2 باشد، چون l_1 و l_2 با هم موازی‌اند، پس d موازی l_1 است

(زیرا دو خط موازی با یک خط با هم موازی‌اند) و این خلاف فرض است. پس d

موازی l_2 نیست.

ارتفاع AH در دوزنقه محیطی ABCD را رسم می‌کنیم. پس

بنابراین $AH = 4$

$$\triangle ADH: \hat{D} = 60^\circ \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AD \xrightarrow{AH=4} 4 = \frac{\sqrt{3}}{2} AD$$

$$AD = \frac{8}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

از طرف دیگر

$$\text{محیطی } ABCD \Rightarrow AD + BC = AB + DC \xrightarrow{AD=BC}$$

$$2AD = AB + DC \xrightarrow{\text{از (۱)}} AB + DC = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

ابتدا معادله بیضی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$x^2 + 4y^2 - 16y - 2x + 16 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x) + 4(y^2 - 4y) + 16 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + 4[(y-2)^2 - 4] + 16 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 1$$

$$(x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

بنابراین بیضی افقی با مقادیر $a^2 = 1$ و $b^2 = \frac{1}{4}$ است. پس

$$c^2 = a^2 - b^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین فاصله دو کانون برابر $2c = \sqrt{3}$ است. «توجه کنید معادله بیضی در کتاب درسی هندسه ۳ مطرح نشده است، پس این سؤال خارج از سرفصل کتاب درسی است».بنابر فرض $\frac{AC}{CG} = \frac{DE}{EF} = 4$. فرض کنید $CG = x$ و $EF = y$. بنابراین $AG = 3x$ و $DF = 3y$. اکنون از C به F وصل کرده و

امتداد می‌دهیم تا خطی را که از D موازی BC رسم می‌شود، در نقطه M قطع

کند. در این صورت دو مثلث FEC و FDM دارای دو زاویه مساوی‌اند، پس

متشابه‌اند. بنابراین

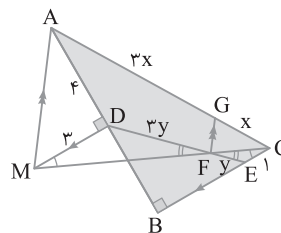
$$\triangle FEC \sim \triangle FDM \Rightarrow \frac{EC}{DM} = \frac{FE}{FD} = \frac{FC}{FM} \xrightarrow{\substack{DF=3y \\ EF=y}} \frac{EC}{DM} = \frac{FC}{FM} = \frac{1}{3} \Rightarrow EC = 1$$

از طرف دیگر مثلث AMD قائم‌الزاویه است، پس

$$AM^2 = AD^2 + MD^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow AM = 5$$

در نتیجه

$$\triangle AMC: \frac{AG}{GC} = \frac{MF}{FC} = 3 \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} AM \parallel FG \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{FG}{AM} = \frac{CG}{AC} \Rightarrow \frac{FG}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow FG = 1$$



در صورتی که قطر دایره برابر ۲R باشد، آن‌گاه مطابق شکل

 $CH = BC - BH = 5 - 2R$ و $DH = 2R$ پس با استفاده از تعمیم قضیه

تالس می‌نویسیم

$$\triangle ABC: DH \parallel AB \Rightarrow \frac{DH}{AB} = \frac{CH}{BC} \Rightarrow \frac{2R}{10} = \frac{5-2R}{5}$$

$$10R = 50 - 20R \Rightarrow 30R = 50 \Rightarrow R = \frac{5}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} O, O'(\alpha, \alpha+1) \\ M(2, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow OM = O'M = \sqrt{(\alpha-2)^2 + (\alpha+1-3)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2(\alpha-2)^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2(\alpha-2)^2 = 8 \Rightarrow (\alpha-2)^2 = 4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha-2=2 \Rightarrow \alpha=4 \Rightarrow \beta=\alpha+1=5 \Rightarrow O'(4, 5) \\ \alpha-2=-2 \Rightarrow \alpha=0 \Rightarrow \beta=\alpha+1=1 \Rightarrow O(0, 1) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha-2=2 \Rightarrow \alpha=4 \Rightarrow \beta=\alpha+1=5 \Rightarrow O'(4, 5) \\ \alpha-2=-2 \Rightarrow \alpha=0 \Rightarrow \beta=\alpha+1=1 \Rightarrow O(0, 1) \end{array} \right.$$

شعاع دایره‌ها برابر است با

$$R = OA = \sqrt{(0-1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

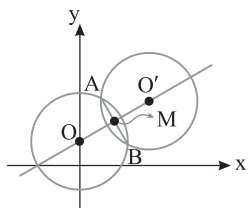
دایره به مرکز O' محور X ها را قطع نمی‌کند.

$$O \text{ به مرکز: } (x-0)^2 + (y-1)^2 = 10 \xrightarrow{y=0}$$

$$x^2 + 1 = 10 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } -3$$

یعنی این دایره محور X ها را در نقاط $(3, 0)$ و $(-3, 0)$ قطع می‌کند و فاصله

این دو نقطه برابر ۶ است.



می‌توان نوشت ۴۱۰۸۸

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{|2+0+3a|}{\sqrt{1+a^2}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{25}{2} = \frac{4+9a^2+12a}{1+a^2}$$

$$25+25a^2=4+18a^2+24a \Rightarrow 7a^2-24a+17=0$$

دیده می‌شود که مجموع ضرایب این معادله درجه دوم صفر است

$$.a = \frac{17}{7} \text{ یا } a = 1 \text{ بنابراین } (7-24+17=0)$$

$$a = \frac{17}{7} - 1 = \frac{10}{7}$$

۳۱۰۸۹

$$y^2 - x - 4y + 2 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y = x - 2$$

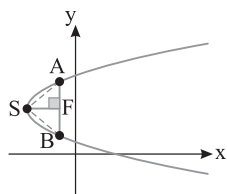
$$(y-2)^2 - 4 = x - 2 \Rightarrow (y-2)^2 = x + 2$$

پس این سهمی افقی رو به راست با رأس $S(-2, 2)$ است و $4a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{4}$

پس شکل این سهمی به صورت زیر است و اگر F کانون سهمی باشد، آن‌گاه

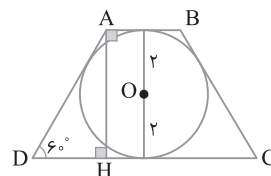
AB وتر کانونی این سهمی به طول ۴ا، یعنی ۱ است و $SF=a=\frac{1}{4}$. بنابراین

$$S_{ASB} = \frac{1}{2} SF \times AB = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)(1) = \frac{1}{8}$$



در نتیجه

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AH(AB+DC) = \frac{1}{2} (4) \left(\frac{16}{\sqrt{3}}\right) = \frac{32}{\sqrt{3}}$$



در شکل چهارضلعی AMDN محاطی است، پس

$$\hat{A} + \hat{D}_1 = 180^\circ$$

از طرف دیگر $\hat{D}_1$ زاویه بین دو نیمساز داخلی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در مثلث ABC است،

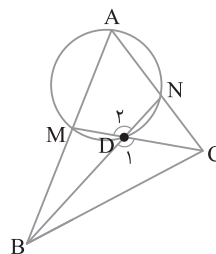
پس

$$\hat{D}_1 = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} \quad (1)$$

در ضمن $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ ، بنابراین

$$\hat{A} + \hat{D}_2 = 180^\circ \xrightarrow{\text{از (1)}} \hat{A} + 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} = 180^\circ \Rightarrow \frac{3}{2} \hat{A} = 90^\circ$$

$$\hat{A} = 60^\circ$$



در شکل $A(1, 4)$ و $B(3, 2)$ نقاط تلاقی دو دایره به مراکز O

و O' شعاع R است. بنابر فرض سؤال $OO' = 2AB$ ، پس

$$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Rightarrow OO' = 4\sqrt{2}$$

اکنون معادله خط OO' را به دست می‌آوریم. چون OO' عمودمنصف AB

است، پس شیب OO' عکس قرینه شیب AB است و خط OO' از نقطه

M وسط AB می‌گذرد.

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{4-2}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow m_{OO'} = 1$$

$$AB \text{ وسط } M \Rightarrow M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (2, 3)$$

بنابراین معادله خط‌المركزین دو دایره عبارت است از

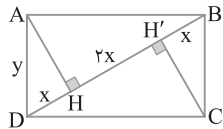
$$OO': y - y_M = m(x - x_M) \Rightarrow y - 3 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x + 1$$

مراکز دو دایره روی خط $y = x + 1$ قرار دارند. پس اگر $O, O'(\alpha, \beta)$ باشد،

آن‌گاه $\beta = \alpha + 1$. پس مختصات مراکز دایره‌ها به صورت $O, O'(\alpha, \alpha+1)$

$$\text{است. در ضمن } OM = O'M = \frac{OO'}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

۱۰۹۰



۱۰۹۴ بنابر فرض سؤال،
 $HH' = 2DH = 2BH' = 2x$
 اگر AD را برابر y در نظر بگیریم، آن‌گاه با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم

$$\triangle ABD: AD^2 = DH \times DB \Rightarrow y^2 = (x)(4x) \Rightarrow y = 2x \quad (۱)$$

$$AB^2 = BD^2 - AD^2 \xrightarrow{\text{از (۱)}} \rightarrow$$

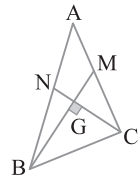
$$AB^2 = (4x)^2 - (2x)^2 = 12x^2 \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}x$$

$$\triangle ADH: AH^2 = AD^2 - DH^2 \xrightarrow{\text{از (۱)}} \rightarrow$$

$$AH^2 = (2x)^2 - x^2 = 3x^2 \Rightarrow AH = \sqrt{3}x$$

$$\frac{\text{مساحت مستطیل}}{\text{مساحت مثلث ADH}} = \frac{AB \times AD}{\frac{1}{2} AH \times DH} = \frac{(2\sqrt{3}x)(2x)}{\frac{1}{2}(\sqrt{3}x)(x)} = 8 \quad \text{بنابراین}$$

$$\frac{\text{مساحت مستطیل}}{\text{مساحت مثلث ADH}} = \frac{AB \times AD}{\frac{1}{2} AH \times DH} = \frac{(2\sqrt{3}x)(2x)}{\frac{1}{2}(\sqrt{3}x)(x)} = 8 \quad \text{بنابراین}$$



۱۰۹۵ اگر نقطه تلاقی میانه‌ها باشد، آن‌گاه داریم

$$CG = \frac{2}{3} CN \xrightarrow{CN=4/5} \rightarrow$$

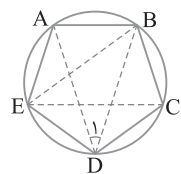
$$CG = \frac{2}{3} (4/5) = 8/15$$

از طرف دیگر مساحت مثلث BGC مساوی $\frac{1}{3}$ مساحت مثلث ABC است.

$$S_{BGC} = \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{3} (18) = 6 \Rightarrow \frac{1}{2} CG \times BG = 6$$

$$\frac{1}{2} (3) \times BG = 6 \Rightarrow BG = 4 \xrightarrow{BG = \frac{2}{3} BM} \rightarrow BM = 6$$

$$\frac{BM}{CN} = \frac{6}{4/5} = \frac{4}{3} \quad \text{بنابراین}$$

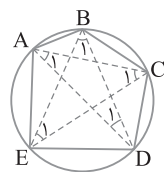


۱۰۹۶ راه‌حل اول این سؤال را در حالت خاص که پنج‌ضلعی، منتظم است، حل می‌کنیم.
 پنج‌ضلعی، منتظم محاط در دایره، دایره را به پنج قسمت مساوی $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ تقسیم می‌کند.

زاویه محاطی $\hat{D}_1$ روبه‌رو به وتر AB است، پس

$$\hat{D}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

به همین ترتیب زاویه‌های محاطی روبه‌رو به اضلاع این پنج‌ضلعی منتظم برابر 36° هستند. بنابراین مجموع این زاویه‌ها $5 \times 36^\circ = 180^\circ$ است.



راه‌حل دوم فرض کنید ABCDE یک پنج‌ضلعی

دلخواه محاط در دایره باشد. داریم

$$\hat{A}_1 = \frac{\widehat{CD}}{2}, \quad \hat{B}_1 = \frac{\widehat{ED}}{2}, \quad \hat{C}_1 = \frac{\widehat{AE}}{2}$$

$$\hat{D}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2}, \quad \hat{E}_1 = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

در نتیجه

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{D}_1 + \hat{E}_1 = \frac{\widehat{CD} + \widehat{ED} + \widehat{AE} + \widehat{AB} + \widehat{BC}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

$$D = ABC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & x+1 & x-1 \\ x & -x+2 & x \\ -x-2 & -3 & -2x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+5 & 0 & x+1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2x-7 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

بنابراین

مجموع درایه‌های قطر فرعی = مجموع درایه‌های قطر اصلی

$$x+5-3 = x+1-2x-7 \Rightarrow 2x = -8 \Rightarrow x = -4$$

۱۰۹۱

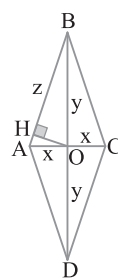
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بر حسب ستون اول}}$$

$$|A| = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 3(-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(8-6) + 3(3-4) = 2-3 = -1$$

$$||A|A| = |A|^3 |A| = |A|^4 = (-1)^4 = 1$$

بنابراین



۱۰۹۲ در لوزی قطرها عمود منصف یکدیگرند. با

توجه به شکل و فرض سؤال می‌نویسیم

$$AB^2 = AC \times BD \Rightarrow z^2 = (2x)(2y)$$

$$z^2 = 4xy \Rightarrow xy = \frac{z^2}{4} \quad (۱)$$

با رسم ارتفاع OH در مثلث قائم‌الزاویه AOB نتیجه می‌گیریم

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OH \times z = \frac{1}{2} xy \Rightarrow OH = \frac{xy}{z} \xrightarrow{(۱)} = \frac{z}{4}$$

چون ارتفاع OH در مثلث قائم‌الزاویه AOB مساوی $\frac{1}{4}$ وتر است، پس یک

زاویه این مثلث 15° است.

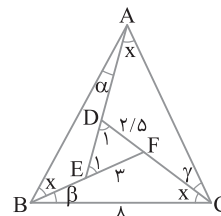
۱۰۹۳ بنابر فرض سؤال، $\hat{ABF} = \hat{CAE} = \hat{BCD} = x$. در این صورت داریم

$$\triangle ABE: \hat{E}_1 \Rightarrow \hat{E}_1 = x + \alpha = \hat{A}$$

$$\triangle ADC: \hat{D}_1 \Rightarrow \hat{D}_1 = x + \gamma = \hat{C}$$

بنابراین دو مثلث DEF و CAB متشابه‌اند، زیرا دارای دو زاویه مساوی‌اند.

$$\triangle DEF \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{DF}{CB} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow \frac{2/5}{8} = \frac{3}{AB} \Rightarrow AB = \frac{24}{2/5} = 60$$



۴۱۱۰۰

$$A = \begin{bmatrix} \log_6 3 & \log_6 2 \\ \log_6 2 & \log_6 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{می گیریم}]{\text{دترمینان}} |A| = \begin{vmatrix} \log_6 3 & \log_6 2 \\ \log_6 2 & \log_6 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (\log_6 3)^2 - (\log_6 2)^2 = (\log_6 3 - \log_6 2)(\log_6 3 + \log_6 2)$$

$$= (\log_6 \frac{3}{2})(\log_6 6) = (\log_6 \frac{3}{2})(1) = \log_6 \frac{3}{2}$$

بنابراین

$$B = \begin{bmatrix} 6|A| & 2|A| \\ 3|A| & 36|A| \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 6|A| & 2|A| \\ 3|A| & 36|A| \end{vmatrix}$$

$$|B| = 6|A| \times 36|A| - 3|A| \times 2|A| = 6^2 |A|^2 - 6|A|^2 = 6^2 \log_6^2 \frac{3}{2} - 6 \log_6^2 \frac{3}{2}$$

$$= 6 \log_6^2 (\frac{3}{2})^2 - 6 \log_6^2 \frac{3}{2} = ((\frac{3}{2})^2) \log_6^2 6 - (\frac{3}{2}) \log_6^2 6 = \frac{27}{4} - \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$$

نکته: می دانیم $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$, $n \log_b a = \log_b a^n$, $\log_a a = 1$

$$\log_c (\frac{a}{b}) = \log_c a - \log_c b \text{ و } \log_c (ab) = \log_c a + \log_c b$$

در صورت سؤال مشخص نشده است که سهمی افقی یا قائم است. فرض کنید سهمی قائم رو به بالا با رأس $(-1, -1)$ باشد. داریم

$$(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$$

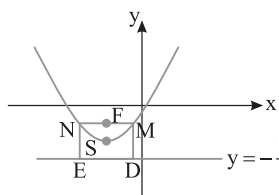
$$\alpha = \beta = -1 \Rightarrow (x+1)^2 = 4a(y+1)$$

نقطه $(1, 1)$ در معادله این سهمی صدق می کند. پس

$$(x+1)^2 = 4a(y+1) \Rightarrow (1+1)^2 = 4a(1+1) \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

اگر MN وتر گذرنده از کانون F و عمود بر محور سهمی باشد و MD و NE عمود بر خط هادی باشند، آن گاه $MN = 4a = 1$ و $NE = 2a = \frac{1}{2}$ پس

$$MNED = \sqrt{MN^2 + NE^2} = \sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$



۳۱۱۰۲ فرض کنید θ زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد. بنابر فرض سؤال می نویسیم

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{5} |\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = \frac{3}{5} |\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow \cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

بنابراین

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \left(\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} \frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}|} \right) \times \left(\frac{3\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3\vec{a} \times \vec{a}}{|\vec{a}|^2} + \frac{2\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} + \frac{6\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{b}| |\vec{a}|} + \frac{2\vec{b} \times \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{2} \frac{|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{2} \sin \theta = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

۴۱۰۹۷ شعاع دایره محاط خارجی نظیر ضلع BC از رابطه زیر تعیین می شود:

$$r_a = \frac{S}{P-a}, \quad P = \frac{9+8+7}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}$$

$$= \sqrt{12 \times 5 \times 4 \times 3} = \sqrt{12^2 \times 5} = 12\sqrt{5}$$

$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{12\sqrt{5}}{12-7} = \frac{12\sqrt{5}}{5} = \frac{12}{5}\sqrt{5}$$

بنابراین

۲۱۰۹۸ مثلث های با مساحت

30° و ضلع مشترک 15 واحد دارای

$$\text{ارتفاع برابر } h = \frac{2 \times 30^\circ}{15} = 4 \text{ هستند.}$$

اگر ABC مثلث مورد نظر باشد و $BC = 15$ ، آن گاه رأس A روی خط d موازی BC و به فاصله $h = 4$ از

آن قرار دارد. برای پیدا کردن رأس A روی خط d به طوری که محیط ABC مینیمم باشد، از مسئله هرون استفاده می کنیم. بازتاب B را نسبت به d نقطه B' می نامیم. از C به B' وصل می کنیم تا خط d را در A قطع کند. در این صورت $AB + BC$ مینیمم است. چون $AH \parallel BB'$ ، پس طبق تعمیم قضیه تالس $\frac{CH}{BC} = \frac{AH}{BB'} = \frac{1}{2}$ پس AH میانه است. بنابراین مثلث ABC متساوی الساقین است.

$$\Delta AHC : AC^2 = AH^2 + CH^2$$

$$AC^2 = 4^2 + (\frac{15}{2})^2 = 16 + \frac{225}{4} = \frac{289}{4} \Rightarrow AC = \frac{17}{2} \Rightarrow AB = \frac{17}{2}$$

بنابراین

$$ABC \text{ محیط مثلث } = AB + AC + BC = \frac{17}{2} + \frac{17}{2} + 15 = 32$$

۱۱۰۹۹ نیمساز زاویه A در مثلث ABC یعنی AE را رسم می کنیم. در این صورت AD نیمساز زاویه A در مثلث ABE است. با استفاده از قضیه نیمساز می نویسیم

$$\Delta ABE: \text{نیمساز } AD \Rightarrow \frac{BD}{DE} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{8}{y} \Rightarrow y = 2x \quad (1)$$

$$\Delta ABE: \text{نیمساز } AD \Rightarrow AD^2 = AB \times AE - BD \times DE$$

$$36 = 8y - 4x \xrightarrow{\text{از (1)}} 36 = 16x - 4x \Rightarrow x = 3 \xrightarrow{\text{از (1)}} y = 6$$

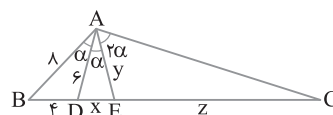
$$\Delta ABC: \text{نیمساز } AE \Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{4+x}{z} = \frac{8}{AC} \xrightarrow{x=3} \frac{7}{z} = \frac{8}{AC} \Rightarrow z = \frac{7}{8} AC \quad (2)$$

$$\frac{y}{z} = \frac{8}{AC} \Rightarrow z = \frac{y}{8} AC \quad (2)$$

$$\Delta ABC: \text{نیمساز } AE \Rightarrow AE^2 = AB \times AC - BE \times EC$$

$$y^2 = 8AC - (4+x)(z) \xrightarrow{x=3, y=6} 36 = 8AC - 7 \times \frac{y}{8} AC$$

$$36 = (8 - \frac{7}{8}) AC \Rightarrow AC = \frac{36}{\frac{57}{8}} = \frac{36 \times 8}{57} = \frac{8 \times 12}{19} = \frac{96}{19}$$



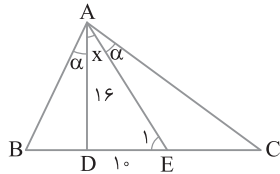
۴۱۱۰۵ فرض می‌کنیم $\hat{B}\hat{A}\hat{D} = \hat{E}\hat{A}\hat{C} = \alpha$ و $\hat{D}\hat{A}\hat{E} = x$. در این صورت داریم

$$\begin{cases} BA = BE \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{B}\hat{A}\hat{E} = x + \alpha \\ \hat{AEC} \text{ مثلث خارجی} \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{E}_1 + \hat{C} \Rightarrow \hat{C} = x \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{cases} \hat{D}\hat{A}\hat{E} = x = \hat{C} \\ \hat{E}_1 = x + \alpha = \hat{D}\hat{A}\hat{C} \end{cases} \xrightarrow{(ز)} \triangle ADE \sim \triangle CDA \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{DE}{DA}$$

$$\frac{16}{10 + EC} = \frac{10}{16} \Rightarrow 100 + 10 \cdot EC = 256 \Rightarrow 10 \cdot EC = 156 \Rightarrow EC = 15.6$$



۴۱۱۰۶ با توجه به داده‌های

سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت به‌طوری که اگر $HH' = x$ ، آن‌گاه $BH' = DH = 2x$ در ضمن AH و CH' بر قطر BD عمودند، پس موازی‌اند. با استفاده از تعمیم قضیه تالس می‌نویسیم

$$\triangle BAH : AH \parallel MH' \Rightarrow \frac{MH'}{AH} = \frac{BH'}{BH} \Rightarrow \frac{MH'}{AH} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3} \quad (1)$$

از طرف دیگر،

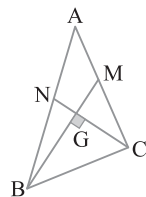
$$\begin{cases} BH' = DH = 2x \\ \hat{H}' = \hat{H} = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{(وضی)} \triangle BCH' \cong \triangle DAH \Rightarrow CH' = AH \\ BC = DA$$

چون $CM = AN$ ، پس $MH' = NH$. به این ترتیب، دو دوزنقه $AMH'H$ و $CNHH'$ دارای ارتفاع مشترک HH' و قاعده‌های مساوی‌اند، بنابراین هم‌مساحت‌اند و داریم

$$\begin{aligned} \frac{\text{مساحت متوازی‌الاضلاع کوچک}}{\text{مساحت کوچک‌ترین مثلث}} &= \frac{S_{AMCN}}{S_{BMH'}} = \frac{2S_{AMH'H}}{\frac{1}{2}MH' \times BH'} \\ &= \frac{2(\frac{1}{2}HH'(MH' + AH))}{\frac{1}{2}MH' \times BH'} \xrightarrow{(1)} \frac{x(MH' + \frac{3}{2}MH')}{\frac{1}{2}MH'(2x)} = \frac{\frac{5}{2}MH'}{MH'} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

(مساحت کوچک‌ترین مثلث) $= \frac{5}{2}$ مساحت متوازی‌الاضلاع کوچک

۴۱۱۰۷ در صورتی که G محل تلاقی دو میانه عمود بر هم BM و CN باشد، خواهیم داشت



$$BG = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}(12) = 8$$

$$CG = \frac{2}{3}CN = \frac{2}{3}(9) = 6$$

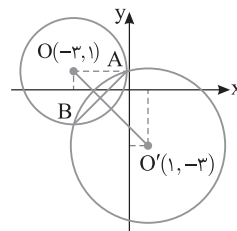
$$S_{BGC} = \frac{1}{2}BG \times CG = \frac{1}{2}(8)(6) = 24$$

در ضمن می‌دانیم $S_{BGC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \Rightarrow S_{ABC} = 3S_{BGC} = 3 \times 24 = 72$

۱۱۱۰۳ خط $y - x = 0$ بر دایره $x^2 + y^2 + 6x - 2y = r$ مماس است، پس فاصله مرکز این دایره تا خط مماس برابر شعاع دایره است.

$$\begin{cases} O = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (-3, 1) \\ R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \\ = \frac{\sqrt{36 + 4 + 4r}}{2} = \sqrt{10 + r} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y - r = 0$$

$$\text{فاصله } O \text{ تا خط مماس} = R \Rightarrow \frac{|1+3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{10+r} \Rightarrow r = -2$$



پس معادله دایره کوچک‌تر به صورت

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2 = 0$$

است و $R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. اگر O' مرکز دایره

دوم باشد، چون خط $y = x$ عمود منصف OO' است، پس O'

قرینه O نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم است. پس $O'(1, -3)$ و شعاع

دایره دوم برابر $R = 4\sqrt{2}$ است.

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 32 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 6y - 22 = 0$$

اگر A و B نقاط تلاقی دو دایره باشند، آن‌گاه تلاقی وتر مشترک دو دایره با یکی

از دایره‌ها مختصات این نقاط را ایجاد می‌کند.

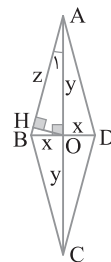
$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 6y - 22 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر مشترک}}$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y - 22 = 0$$

$$8x - 8y + 24 = 0 \xrightarrow{\div 8} x - y + 3 = 0 \Rightarrow y = x + 3 \quad (2)$$

$$(2) \text{ از } (1) \Rightarrow x^2 + (x+3)^2 + 6x - 2(x+3) - 22 = 0$$

$$2x^2 + 10x + 5 = 0 \Rightarrow B \text{ و } A \text{ حاصل ضرب طول نقاط } P = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$$



۴۱۱۰۴ در لوزی قطرها عمود منصف یکدیگرند. با

توجه به شکل داریم

$$AB^2 = AC \times BD \Rightarrow z^2 = (2x)(2y)$$

$$z^2 = 4xy \Rightarrow xy = \frac{z^2}{4} \quad (1)$$

از طرف دیگر اگر ارتفاع OH در مثلث قائم‌الزاویه AOB

را رسم کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{1}{2}OH \times AB = \frac{1}{2}OA \times OB \Rightarrow OH \times z = xy \Rightarrow OH = \frac{xy}{z}$$

$$\xrightarrow{(1)} OH = \frac{\frac{z^2}{4}}{z} = \frac{z}{4} = \frac{AB}{4}$$

چون در مثلث قائم‌الزاویه OAB ارتفاع وارد بر وتر ربع وتر است، پس یک

زاویه حاده این مثلث 15° است. یعنی $\hat{A}_1 = 15^\circ$. بنابراین $\hat{A} = 30^\circ$ و

در نتیجه $\hat{B} = 150^\circ$.

بنابراین

$$OO' \text{ معادله خط } y-1=\frac{1}{2}(x+3) \Rightarrow x-2y=-5$$

$$\begin{cases} x-2y=-5 \\ y+2x=0 \end{cases} \Rightarrow 5x=-5 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow H(-1, 2)$$

$$OO' \text{ وسط } H \Rightarrow H = \frac{O+O'}{2} \Rightarrow O' = 2H - O$$

$$O' = 2(-1, 2) - (-3, 1) = (-1, 3)$$

بنابراین معادله دایره کوچک‌تر به صورت زیر است:

$$R' = OH = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$C': (x-1)^2 + (y-3)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$$

از طرف دیگر، چون شعاع دایره بزرگ‌تر دو برابر R' است، پس شعاع دایره

$$C: x^2 + y^2 + 6x - 2y = a \text{ برابر } 2\sqrt{5} \text{ است. بنابراین}$$

$$2\sqrt{5} = \frac{\sqrt{36+4+4a}}{2} \Rightarrow 2\sqrt{5} = \sqrt{10+a} \Rightarrow 20 = 10+a \Rightarrow a = 10$$

اکنون وتر مشترک دو دایره C و C' را به دست می‌آوریم تا برخورد این وتر مشترک با یکی از دایره‌ها نقاط تلاقی A و B را ایجاد کند.

$$\begin{cases} C: x^2 + y^2 + 6x - 2y - 10 = 0 \\ C': x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 10 = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 \Rightarrow 8x + 4y = 15$$

$$y = \frac{15-8x}{4}$$

$$C: x^2 + \left(\frac{15-8x}{4}\right)^2 + 6x - 2\left(\frac{15-8x}{4}\right) - 10 = 0$$

$$x^2 + \frac{225 + 64x^2 - 240x}{16} + 6x - \frac{15-8x}{2} - 10 = 0$$

$$5x^2 - 5x - \frac{55}{16} = 0 \Rightarrow \text{جمع ریشه‌ها} = S = \frac{5}{5} = 1$$

نقطه تلاقی نیمسازها از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. ۳ ۱۱۱۶فرض کنید $BE = x$. با استفاده از قضیه فیثاغورس می‌نویسیم ۲ ۱۱۱۷

$$\triangle ABE: AE^2 = AB^2 + BE^2 = 11^2 + x^2 \Rightarrow AE = \sqrt{121 + x^2} \quad (1)$$

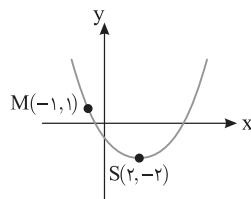
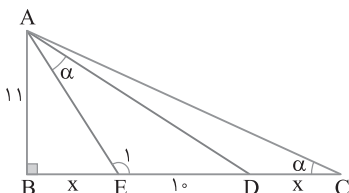
از طرف دیگر، دو مثلث AED و AEC متشابه هستند. زیرا

$$\begin{cases} \hat{E}_1 = \hat{E}_1 \\ \hat{DAE} = \hat{ACD} = \alpha \end{cases} \xrightarrow{(زر)} \triangle CEA \sim \triangle AED \Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{EC}{AE}$$

$$AE^2 = ED \times EC \xrightarrow{(1)} 121 + x^2 = 10(10 + x)$$

$$121 + x^2 = 100 + 10x \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-7) = 0$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = 7 \end{cases}$$

توجه کنید که در گزینه‌ها فقط $x = 7$ وجود دارد.طول وتری که از کانون ۱ ۱۱۱۳

بر محور سهمی عمود می‌شود، برابر

است. در این سؤال نوع سهمی

مشخص نیست. فرض می‌کنیم

رأس سهمی قائم رو به بالا

باشد که از نقطه $M(-1, 1)$ عبور

می‌کند. داریم

$$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta) \Rightarrow \text{معادله سهمی قائم رو به بالا}$$

$$(x-2)^2 = 4a(y+2) \xrightarrow{M \in \text{سهمی}} (-1-2)^2 = 4a(1+2) \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$4a = 4\left(\frac{3}{4}\right) = 3 \text{ بنابراین}$$

ضرب داخلی دو بردار عمود بر هم برابر صفر است. در صورتی ۴ ۱۱۱۴که θ زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، داریم

$$\left(\frac{9\vec{a} + 7\vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}\right) \cdot \left(\frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}\right) = 0 \Rightarrow \frac{9\vec{a} \cdot \vec{a} - 27\vec{a} \cdot \vec{b} + 7\vec{b} \cdot \vec{a} - 14\vec{b} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2} = 0$$

$$\frac{9|\vec{a}|^2 - 20|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta - 14|\vec{b}|^2}{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2} = 0 \Rightarrow 9 - 20 \cos \theta - 14 = 0$$

$$\cos \theta = -\frac{5}{9} \Rightarrow \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{25}{81}} = \sqrt{\frac{56}{81}} = \frac{2\sqrt{14}}{9}$$

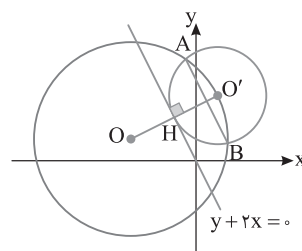
بنابراین

$$S_{\text{متوازی الاضلاع}} = \left| \left(\frac{3\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{7\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \times \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{3\vec{a} \times \vec{a}}{|\vec{b}|^2} - \frac{6\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} + \frac{7\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \frac{14\vec{b} \times \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right|$$

$$= \left| \frac{7\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right| = \frac{7}{|\vec{a}| |\vec{b}|} |\vec{b} \times \vec{a}| = \frac{7}{|\vec{a}| |\vec{b}|} (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta)$$

$$= 7 \sin \theta = 7 \times \frac{2\sqrt{14}}{9} = \frac{14\sqrt{14}}{9}$$

مرکز دایره بزرگ‌تر $x^2 + y^2 + 6x - 2y = a$ به مختصات ۳ ۱۱۱۵ $O(-3, 1)$ است. چون خط $y+2x=0$ عمود منصف خط‌المركزین دو دایرهاست، پس اگر O' مرکز دایره کوچک‌تر باشد، آن‌گاه پای عمود H وسط OO' خواهد بود. شیب خط $y+2x=0$ برابر -2 است، پس شیب خط OO' برابر $\frac{1}{2}$ است.

۱۱۲۲۴ در مثلث متساوی الساقین میانه وارد بر قاعده ارتفاع هم هست. پس مثلث های $\triangle ABH$ و $\triangle ACH$ قائم الزاویه متساوی الساقین هستند. بنابراین $\hat{A} = 90^\circ$ در نتیجه $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{C} = \hat{B} = 45^\circ$.

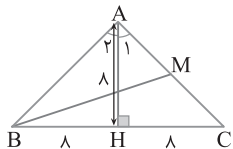
اگر BM میانه نظیر ساق AC باشد، داریم

$$\triangle AHC: AC^2 = AH^2 + CH^2 = 8^2 + 8^2 = 2 \times 8^2$$

$$AC = 8\sqrt{2} \Rightarrow AM = 4\sqrt{2}$$

$$\triangle ABM: BM^2 = AB^2 + AM^2 \Rightarrow BM^2 = (8\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2$$

$$BM^2 = 128 + 32 = 160 \Rightarrow BM = 4\sqrt{10}$$



۱۱۲۲۳ از چپ از ماتریس A و از راست از ماتریس B فاکتور می گیریم.

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} B - \frac{3}{2} A \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} B \\ = A \left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \right) B \\ = A \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} B = A(-3I)B = -3AB \\ = -3 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -6 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین حاصل ضرب درایه های غیرواقع بر قطر اصلی این ماتریس برابر ۹ است.

۱۱۲۲۴ ابتدا سطر سوم ماتریس A^2 را پیدا می کنیم.

$$\begin{aligned} A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

اکنون سطر سوم ماتریس A^3 را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

پس سطر سوم ماتریس A^3 برابر $[-10 \quad 1 \quad 7]$ است.

۱۱۱۸۳ نقطه M وسط ضلع مربع است، پس $AM = BM = 3$.

از طرف دیگر

$$BM \parallel DC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle BME \sim \triangle DCE$$

$$\frac{ME}{CE} = \frac{BM}{DC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

چون مثلث BCM قائم الزاویه است، می نویسیم

$$\triangle BCM: CM^2 = BC^2 + BM^2 = 6^2 + 3^2 = 45 \Rightarrow CM = 3\sqrt{5} \quad (2)$$

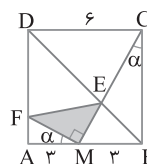
$$(2) \text{ و } (1) \Rightarrow ME = \sqrt{5}, CE = 2\sqrt{5}$$

درضمن دو مثلث قائم الزاویه AMF و BCM دارای زاویه حاده مساوی α هستند پس متشابه هستند. داریم

$$\triangle AMF \sim \triangle BCM \Rightarrow \frac{AM}{BC} = \frac{MF}{CM} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{MF}{3\sqrt{5}} \Rightarrow MF = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

بنابراین

$$S_{MFE} = \frac{1}{2} ME \times MF = \frac{1}{2} (\sqrt{5}) \left(\frac{3}{2} \sqrt{5} \right) = \frac{15}{4} = 3.75$$



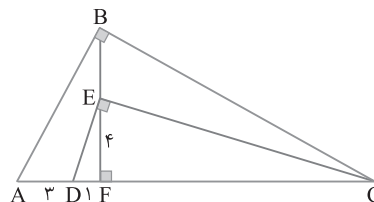
۱۱۱۹۴ با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم الزاویه می نویسیم

$$\triangle DEC: EF^2 = DF \times FC \Rightarrow 4^2 = 1 \times FC \Rightarrow FC = 16$$

$$\triangle ABC: BF^2 = AF \times FC \Rightarrow BF^2 = 4 \times 16 = 64 \Rightarrow BF = 8$$

$$\triangle BFC: BC^2 = BF^2 + FC^2 \Rightarrow BC^2 = 8^2 + 16^2 = 8^2 (1+4)$$

$$BC = 8\sqrt{5}$$



۱۱۲۰۲ با توجه به داده های روی شکل و استفاده از قضیه روابط طولی در

دایره می نویسیم

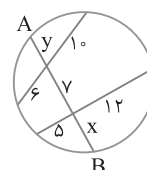
$$\begin{cases} 6 \times 10 = y(7+x) \Rightarrow 60 = 7y + xy \\ 5 \times 12 = x(7+y) \Rightarrow 60 = 7x + xy \end{cases} \Rightarrow x = y$$

بنابراین

$$6 \times 10 = y(7+x) \xrightarrow{y=x} 60 = x(7+x) \Rightarrow x^2 + 7x - 60 = 0$$

$$(x+12)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$AB = x + y + 7 = 5 + 5 + 7 = 17 \text{ پس}$$



۱۱۲۱۱ تبدیل های دوران، انتقال و تجانس هر سه جهت شکل را حفظ

می کنند. اما در تبدیل بازتاب نسبت به خط جهت شکل تغییر می کند.

۱۱۲۹ چون G مرکز ثقل مثلث ABC است، پس BD میانه این مثلث

است. در نتیجه $AD=DC$ و $\frac{GD}{BD}=\frac{1}{3}$. اکنون از نقطه E خطی موازی

میانه BD رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطه M قطع کند.

$$\triangle GDC: EM \parallel GD \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{EC}{EG} = \frac{CM}{DM} \xrightarrow{EC=EG} \frac{1}{1} = \frac{CM}{DM}$$

$$\Rightarrow CM = DM$$

با فرض $CM=DM=x$ ، بنابراین $AD=2x$ نتیجه می‌گیریم

$$\triangle AEM: FD \parallel EM \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{AD}{AM} = \frac{FD}{EM} \Rightarrow \frac{2x}{3x} = \frac{FD}{EM}$$

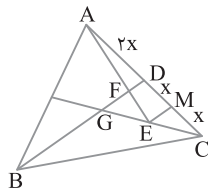
$$EM = \frac{3}{2} FD$$

از طرف دیگر

$$\triangle GDC: EM \parallel DG \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{CM}{CD} = \frac{EM}{GD} \Rightarrow \frac{x}{3x} = \frac{EM}{GD}$$

$$GD = 2EM = 2\left(\frac{3}{2} FD\right) = 3FD$$

چون $\frac{GD}{BD} = \frac{1}{3}$ ، پس $\frac{3FD}{BD} = \frac{1}{3}$ ، در نتیجه $\frac{BD}{FD} = 9$.



۱۱۳۰ دو مثلث ABC و BEH هم‌نهشت‌اند، پس مثلث ABC

قائم‌الزاویه است، $BC=EH=8$ و $BH=AB=4$ همچنین

$$\text{پس } AC = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

$$\triangle BEH: DF \parallel EH \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{DF}{EH} = \frac{BF}{BH} \Rightarrow \frac{DF}{8} = \frac{BF}{4}$$

$$DF = 2BF \quad (1)$$

از طرف دیگر دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و BEH هم‌نهشت‌اند، پس $\hat{E} = \hat{C}$ و داریم

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel EH \\ BE \text{ مورب} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{E} \xrightarrow{\hat{E} = \hat{C}} \hat{B}_1 = \hat{C} \xrightarrow{\hat{A} + \hat{C} = 90^\circ} \hat{B}_1 + \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \hat{D}_1 = 90^\circ$$

$$\hat{B}_1 + \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \hat{D}_1 = 90^\circ$$

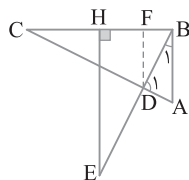
در نتیجه BD ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه ABC است، پس با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم

$$\triangle ABC: AB \times BC = BD \times AC \Rightarrow 4 \times 8 = BD \times 4\sqrt{5} \Rightarrow BD = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

بنابراین

$$\triangle BDF: BD^2 = BF^2 + DF^2 \xrightarrow{(1)} \left(\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 = BF^2 + (2BF)^2$$

$$\frac{64}{5} = 5BF^2 \Rightarrow BF^2 = \frac{64}{25} \Rightarrow BF = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$$



۱۱۲۵ با توجه به فرض سؤال شکل زیر را خواهیم داشت.

$$2c = FF' = 6 \Rightarrow c = 3$$

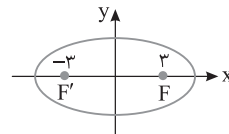
$$\frac{1}{3} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3}{a} \Rightarrow a = 9$$

پس

$$b^2 = a^2 - c^2 = 9^2 - 3^2 = 72 \Rightarrow b = 6\sqrt{2}$$

$$\text{قطر کوچک بیضی} = 2b = 12\sqrt{2}$$

$$\text{قطر کوچک بیضی} = 2b = 12\sqrt{2}$$



۱۱۲۶ حجم متوازی‌السطوح و مساحت قاعده آن که متوازی‌الاضلاع به

ضلع‌های $\vec{b}$ و $\vec{c}$ است را پیدا می‌کنیم.

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 10\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$S = |\vec{b} \times \vec{c}| = \sqrt{8^2 + 10^2 + 4^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (2, -3, 4) \cdot (8, 10, -4) = 16 - 30 - 16 = -30$$

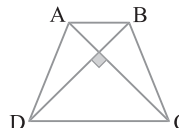
$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = 30$$

$$V = S \cdot h \Rightarrow 30 = 6\sqrt{5}h \Rightarrow h = \sqrt{5}$$

۱۱۲۷ در دوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ ، دو قطر AC و BD بر هم

عمودند و اندازه این دو قطر برابر است. ولی $ABCD$ مربع نیست. توجه کنید که گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) گزاره‌های همیشه درست هستند، پس برای آن‌ها نمی‌توان

مثال نقض ارائه کرد.



۱۱۲۸ بنابر فرض، چهارضلعی $ABCD$ مربع است. با توجه به

شکل می‌نویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{MND} = 90^\circ \Rightarrow \hat{N}_1 + \hat{N}_2 = 90^\circ \\ \triangle DNC: \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{D}_1 + \hat{N}_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{N}_1$$

بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویه BMN و CND با داشتن دو زاویه مساوی متشابه

$$\frac{ND}{MN} = \frac{CD}{BN} \Rightarrow \frac{4}{1} = \frac{CD}{BN} \xrightarrow{BN=x} CD = 4x \quad \text{پس}$$

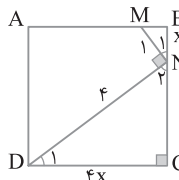
$$BC = CD = 4x \xrightarrow{BN=x} NC = 3x \quad \text{در نتیجه}$$

$$\triangle DNC: DN^2 = CD^2 + NC^2 \Rightarrow 4^2 = (4x)^2 + (3x)^2 \Rightarrow 16 = 25x^2$$

$$x = \frac{4}{5}$$

پس طول ضلع مربع مساوی $\frac{16}{5}$ است. پس

$$S_{ABCD} = CD^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{256}{25} = 10\frac{6}{25}$$



$$2I - 3A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{Ax} 2A - 3B^{-1} = A \times \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2A - 3B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A - 3B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & ? \\ ? & 0 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های قطر اصلی این ماتریس برابر ۲- است.

۴۱۱۳۵ ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\text{مجموع درایه‌های } A^2}{\text{مجموع درایه‌های } A} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{بنابراین}$$

۱۱۱۳۶ ابتدا در معادله سهمی حرف a را به m تغییر می‌دهیم تا a با پارامتر

سهمی اشتباه گرفته نشود. پس معادله سهمی به صورت $3y^2 - 3x - my = 0$ است. اکنون معادله سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$3y^2 - my = 3x \Rightarrow 3(y^2 - \frac{m}{3}y) = 3x \Rightarrow (y - \frac{m}{6})^2 - \frac{m^2}{36} = x$$

$$(y - \frac{m}{6})^2 = x + \frac{m^2}{36}$$

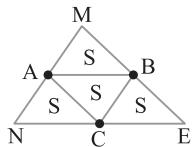
پس این سهمی افقی رو به راست با رأس $(-\frac{m^2}{36}, \frac{m}{6})$ است به طوری که

۴۱۱۳۷ پس $a = \frac{1}{4}$. معادله خط هادی این نوع سهمی به صورت زیر است:

$$x = -a + \alpha \Rightarrow x = -\frac{1}{4} - \frac{m^2}{36} \xrightarrow{x = -\frac{5}{4}} -\frac{5}{4} = -\frac{1}{4} - \frac{m^2}{36} \xrightarrow{\times(-4)} x = \frac{1}{4} + \frac{m^2}{9}$$

$$5 = 1 + \frac{m^2}{9} \Rightarrow m^2 = 36 \Rightarrow m = \pm 6$$

بنابراین اختلاف مقادیر m برابر ۱۲ است.



۳۱۱۳۷ نقاط A, B, C و وسط‌های اضلاع

مثلث MNE به مساحت ۶۴ هستند. چون مثلث ABC با مثلث MNE متشابه با نسبت

تشابه $\frac{1}{2}$ است، پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNE}} = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{S_{MNE}=64} S_{ABC} = 16$$

اکنون با استفاده از ضرب خارجی، مساحت مثلث ABC را پیدا می‌کنیم.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-4, -2a, 0), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (2, -4 - a, 0)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -2a & 0 \\ 2 & -4-a & 0 \end{vmatrix} = (16 + 4a + 4a)\vec{k} = (16 + 8a)\vec{k}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \Rightarrow 16 = \frac{1}{2} \sqrt{(16 + 8a)^2} \Rightarrow |16 + 8a| = 32$$

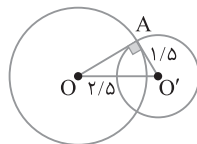
$$\begin{cases} 16 + 8a = 32 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-4, -4, 0) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 4\sqrt{2} \\ 16 + 8a = -32 \Rightarrow a = -6 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-4, 12, 0) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 4\sqrt{10} \end{cases}$$

۴۱۱۳۱ مماس‌های رسم شده در نقطه تلاقی دو دایره به مراکز O و O' ،

یعنی A بر هم عمودند، پس این مماس‌ها از مراکز دو دایره عبور می‌کنند. نتیجه در مثلث OAO' قائم‌الزاویه است.

$$\triangle OAO': OA^2 = OO'^2 - O'A^2 = 2/\delta^2 - 1/\delta^2 = 6/25 - 2/25 = 4$$

$$OA = 2$$



۲۱۱۳۲ بنابر مسئله کتاب درسی هندسه

یازدهم، فصل ۳، $EF \parallel BC$ موازی BC است. پس

$$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AB}$$

$$\frac{EF}{10} = \frac{12\sqrt{2}}{15\sqrt{2}} \Rightarrow EF = 8$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیه نیمساز در مثلث ABD می‌نویسیم

$$\text{نیمساز } DF: \frac{AF}{BF} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{12\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{AD}{5} \Rightarrow AD = 20$$

$$\text{نیمساز } DF: DF^2 = AD \times BD - AF \times BF = 20 \times 5 - 12\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 100 - 72 = 28 \Rightarrow DF = \sqrt{28}$$

در ضمن DE و DF به ترتیب نیمسازهای زاویه‌های ADC و ADB هستند، پس $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$. در نتیجه $\alpha + \beta = 90^\circ$ ، پس مثلث DEF قائم‌الزاویه است.

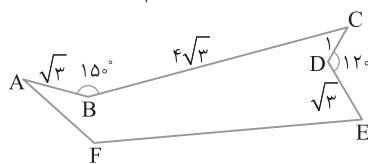
$$\triangle DEF: DE^2 = EF^2 - DF^2 = 8^2 - (\sqrt{28})^2 = 64 - 28 = 36 \Rightarrow DE = 6$$

۳۱۱۳۳ بنابر مسئله هم‌پیرامونی، میزان افزایش مساحت برابر $2S_{DEC} + 2S_{ABC}$ است.

$$2S_{ABC} = 2(\frac{1}{2} AB \times BC \sin 15^\circ) = \sqrt{3} \times 4 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 6$$

$$2S_{DEC} = 2(\frac{1}{2} DC \times DE \sin 12^\circ) = 1 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

بنابراین میزان افزایش مساحت برابر $6 + \frac{3}{2} = 7\frac{1}{2}$ است.



۲۱۱۳۴ ابتدا ماتریس A را به دست می‌آوریم.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{وارون می‌گیریم}}$$

$$A = (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{-2+1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

اکنون طرفین تساوی داده شده را از سمت چپ در ماتریس A ضرب می‌کنیم.

برای دریافت ادامه پاسخ‌های تشریحی به سایت نشر الگو
به نشانی www.olgoobooks.ir مراجعه نمایید.

[illegible]