پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{1+\tan^2 x}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{1}{|\cos x|}=\frac{1}{-\cos x} \qquad (\pi<x<\frac{3\pi}{2})$$

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$$

به این ترتیب،

$$\sqrt{1+\tan^2 x}(2\sin^2\frac{\pi}{4}-\sin^2 x)=-\frac{1}{\cos x}(2\times\frac{1}{2}-\sin^2 x)$$

$$=-\frac{1}{\cos x}(1-\sin^2 x)=-\frac{1}{\cos x}\times\cos^2 x=-\cos x$$

۲- گزینهٔ ۳ فرض کنید سرعت آب برابر v باشد. در این صورت، سرعت قایق موتوری در جهت حرکت آب $100+v$ و در جهت مخالف حرکت آب برابر $100-v$ است. در نتیجه

$$\frac{1200}{100-v}-\frac{1200}{100+v}=5\Rightarrow\frac{240}{100-v}-\frac{240}{100+v}=1\Rightarrow 240(\frac{1}{100-v}-\frac{1}{100+v})=1$$

$$240(\frac{2v}{100^2-v^2})=1\Rightarrow 100^2-v^2=480v\Rightarrow v^2+480v-100^2=0$$

$$(v-20)(v+500)=0\Rightarrow v=20$$

۳- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\frac{2x-3}{x+1}>1\Rightarrow\frac{2x-3}{x+1}-1>0\Rightarrow\frac{x-4}{x+1}>0\Rightarrow x>4 \text{ یا } x<-1 \qquad (1)$$

$$\frac{2x-3}{x+1}<3\Rightarrow\frac{2x-3}{x+1}-3<0\Rightarrow\frac{-x-6}{x+1}<0\Rightarrow\frac{x+6}{x+1}>0$$

$$x<-6 \text{ یا } x>-1 \qquad (2)$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر اشتراک جواب‌های (۱) و (۲) است که از روی شکل زیر معلوم می‌شود برابر $\mathbb{R}-[-6,4]$ است.



راه‌حل دوم اعداد ۵ و -7 در نامعادله صدق می‌کنند:

$$1<\frac{2\times 5-3}{5+1}=\frac{7}{6}<3 \quad , \quad 1<\frac{2\times(-7)-3}{-7+1}=\frac{17}{6}<3$$

بنابراین گزینهٔ (۱) جواب نامعادله است.

۴- گزینهٔ ۳ باید دسته‌های چهارتایی، پنج‌تایی یا شش‌تایی از هشت شئ متمایز انتخاب کند. تعداد راه‌های مورد نظر برابر است با

$$\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}=70+56+28=154$$

۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$3a+\sqrt{2a^2+4a}=2\Rightarrow\sqrt{2a^2+4a}=2-3a\Rightarrow 2a^2+4a=4-12a+9a^2$$

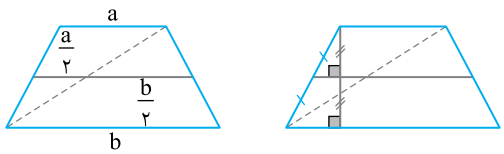
$$7a^2-16a+4=0\Rightarrow(7a-2)(a-2)=0\Rightarrow a=\frac{2}{7}, a=2$$

توجه کنید که اگر $a=2$، تساوی مورد نظر درست نیست (سمت چپ بیشتر از ۲ است). بنابراین $a=\frac{2}{7}$. در نتیجه $\frac{a+1}{a}=1+\frac{1}{a}=1+\frac{7}{2}=4/5$.

۶- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول قاعده‌ها a و b باشد (شکل رسم شده را ببینید). در این صورت طول پاره‌خطی که وسط‌های ساق‌ها را به هم وصل می‌کند برابر $\frac{a+b}{2}$ است. توجه کنید که ارتفاع ذوزنقهٔ بالایی و پایینی برابر است. در نتیجه اگر این ارتفاع برابر h باشد، آن‌گاه

$$\frac{\frac{1}{2}h(a+\frac{a+b}{2})}{\frac{1}{2}h(\frac{a+b}{2}+b)}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{a+\frac{a+b}{2}}{\frac{a+b}{2}+b}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{3a+b}{a+3b}=\frac{1}{2}$$

$$6a+2b=a+3b\Rightarrow 5a=b\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{1}{5}$$



۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس

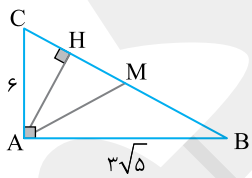
$$BC^2=AB^2+AC^2=(3\sqrt{5})^2+6^2=81\Rightarrow BC=9$$

از طرف دیگر، بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه،

$$AC^2=CH\times CB\Rightarrow 36=CH\times 9\Rightarrow CH=4$$

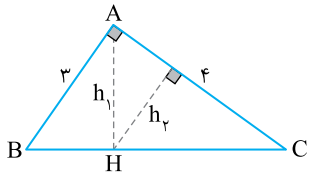
بنابراین $HM=CM-CH=\frac{BC}{2}-CH=\frac{9}{2}-4=\frac{1}{2}$. اکنون توجه کنید که

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}}=\frac{BC}{HM}=\frac{9}{\frac{1}{2}}=18$$



۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که طول ضلع دیگر مثلث ABC برابر ۵ است. از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث متشابه با مثلث اصلی ایجاد می‌کند. بنابراین، با نمادگذاری شکل زیر، مثلث‌های ABC و AHC متشابه‌اند. در نتیجه نسبت ارتفاع‌های آن‌ها برابر نسبت تشابه آن‌هاست یعنی

$$\frac{h_2}{h_1}=\frac{AC}{BC}=\frac{4}{5}.$$



۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{17\pi}{3})=\sin(5\pi+\frac{2\pi}{3})=-\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-\frac{17\pi}{6})=\cos(\frac{17\pi}{6})=\cos(3\pi-\frac{\pi}{6})=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(\frac{19\pi}{4})=\tan(5\pi-\frac{\pi}{4})=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$$

$$\sin(\frac{-11\pi}{6})=-\sin(\frac{11\pi}{6})=-\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=-(-\sin\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$(-\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{\sqrt{3}}{2})+(-1)(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$$

۱۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که نمودار تابع مورد نظر از روی نمودار تابع $y=\sin x$ با تبدیلات به دست آمده است. چون نمودار تابع مورد نظر و نمودار تابع سینوس در یک همسایگی راست نقطهٔ صفر بالای محور x هستند، پس مقدار b مثبت است. بنابراین بیشترین مقدار تابع $y=a+b\sin(x+\frac{\pi}{3})$ برابر $a+b$ است. از روی نمودار معلوم است که این بیشترین مقدار برابر $\sqrt{3}$ است، پس $a+b=\sqrt{3}$. از طرف دیگر، چون نقطهٔ $(\pi,-\frac{3}{2})$ روی نمودار تابع مورد نظر است. پس

$$y=a+b\sin(\pi+\frac{\pi}{3})=-\frac{3}{2}\Rightarrow a-b(\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{3}{2}$$

بنابراین

$$\begin{cases}a+b=\sqrt{3}\\ a-b\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow b+b\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}+\frac{3}{2}$$

$$b(1+\frac{\sqrt{3}}{2})=\sqrt{3}(1+\frac{\sqrt{3}}{2})\Rightarrow b=\sqrt{3}$$

۱۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(0/4)^{2x-1}=(\frac{125}{8})^{x^2}\Rightarrow(\frac{2}{5})^{2x-1}=((\frac{5}{2})^3)^{x^2}\Rightarrow(\frac{2}{5})^{2x-1}=(\frac{2}{5})^{-3x^2}$$

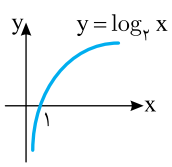
بنابراین

$$2x-1=-3x^2\Rightarrow 3x^2+2x-1=0\Rightarrow(3x-1)(x+1)=0\Rightarrow x=\frac{1}{3},x=-1$$

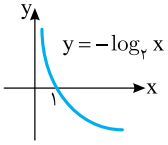
به ازای $x=-1$، مقدار $9x+1$ منفی می‌شود که لگاریتم آن در مبنای ۸ تعریف نمی‌شود. بنابراین $x=\frac{1}{3}$ و

$$\log_8(9x+1)=\log_8(3+1)=\log_{2^3}2^2=\frac{2}{3}\log_2^2=\frac{2}{3}$$

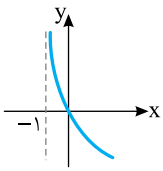
۱۲- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $y=\log_2 x$ به صورت زیر است:



بنابراین نمودار تابع $y=-\log_2 x$ به صورت زیر است:



اگر این نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم به نمودار تابع $y=-\log_2(x+1)$ می‌رسیم که همان نمودار داده شده است:



توجه کنید که $y=-\log_2(x+1)=\log_2(x+1)^{-1}$، بنابراین

$$U(x)=(x+1)^{-1}$$

۱۳- گزینهٔ ۱ برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=-2$ فقط از چپ پیوسته باشد، باید داشته باشیم:

$$\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=f(-2)\ ,\quad \lim_{x\to(-2)^+}f(x)\neq f(-2)$$

اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{8+x^3}{|x+2|}$$

$$=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{(2+x)(4-2x+x^2)}{-(x+2)}=\lim_{x\to(-2)^-}(-(4-2x+x^2))$$

$$=-(4-2(-2)+(-2)^2)=-12$$

چون $f(-2)=a$، پس باید $a=-12$. توجه کنید که $\lim_{x\to(-2)^+}f(x)=12$ و در نتیجه $\lim_{x\to(-2)^+}f(x)\neq f(-2)$.

۱۴- گزینهٔ ۱ فرض کنید A و B به ترتیب پیشامدهای قبولی این فرد در آزمون‌های اول و دوم باشند. در این صورت $P(A)=0/7$، $P(B)=0/6$ و $P(B|A)=0/8$. اکنون توجه کنید که

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow 0/8=\frac{P(A\cap B)}{0/7}$$

$$P(A\cap B)=0/56$$

در نتیجه،

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=0/7+0/6-0/56=0/74$$

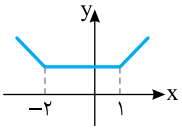
۱۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

گروه اول: $\bar{x}=80\ ,\sigma^2=25\Rightarrow\sigma=5\ ,CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{5}{80}=\frac{1}{16}$

گروه دوم: $\bar{x}=72\ ,\sigma^2=16\Rightarrow\sigma=4\ ,CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{4}{72}=\frac{1}{18}$

چون ضریب تغییرات گروه دوم کمتر است، پس گروه دوم بهتر است. البته بهتر است که در صورت سؤال پرسیده شود «پراکندگی مسئولیت‌پذیری در کدام گروه کمتر است».

۱۶- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به صورت زیر است:



از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(-\infty,-2)$ اکیداً نزولی است.

۱۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=-\cos x$.
بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$۴\sin x(-\cos x)=۱\Rightarrow -۲\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \sin ۲x=-\frac{۱}{۲}=\sin(-\frac{\pi}{۶})$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله و جواب‌های درون بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به صورت زیر هستند:

$$۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۱۲},k\in\mathbb{Z}\Rightarrow ۰\le k\pi-\frac{\pi}{۱۲}\le ۲\pi$$

$$\frac{۱}{۱۲}\le k\le ۲+\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow k=۱,۲$$

$$x=\pi-\frac{\pi}{۱۲},x=۲\pi-\frac{\pi}{۱۲}\qquad (۱)$$

$$۲x=۲k\pi+\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲},k\in\mathbb{Z}\Rightarrow ۰\le k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}\le ۲\pi$$

$$-\frac{۷}{۱۲}\le k<۲-\frac{۷}{۱۲}\Rightarrow k=۰,۱$$

$$x=\frac{۷\pi}{۱۲},x=\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}\qquad (۲)$$

مجموع جواب‌های (۱) و (۲) برابر است با $۴\pi+\frac{۱۴\pi-۲\pi}{۱۲}=۵\pi$.

۱۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$x^۲+۱۰x+۱۶=(x+۲)(x+۸)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to -۸}\frac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}=\frac{۱}{۶}\lim_{x\to -۸}\frac{(x+۲)(x+۸)}{۲+\sqrt[۳]{x}}$$

$$=\frac{۱}{۶}\lim_{x\to -۸}(\frac{(x+۲)(x+۸)}{۲+\sqrt[۳]{x}}\times\frac{۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲}}{۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲}})$$

$$=\frac{۱}{۶}\lim_{x\to -۸}\frac{(x+۲)(x+۸)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}{۲^۳+\sqrt[۳]{x}^۳}$$

$$=\frac{۱}{۶}\lim_{x\to -۸}\frac{(x+۲)(x+۸)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}{۸+x}$$

$$=\frac{۱}{۶}\lim_{x\to -۸}((x+۲)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲}))$$

$$=\frac{۱}{۶}(-۸+۲)(۴-۲(-۲)+۲^۲)=-۱۲$$

راه‌حل دوم با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال به‌دست می‌آید

$$\lim_{x\to -۸}\frac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}=\lim_{x\to -۸}\frac{۲x+۱۰}{۶\times\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}=\frac{-۱۶+۱۰}{۶\times\frac{۱}{۳\times(-۲)^۲}}=\frac{-۶}{\frac{۱}{۲}}=-۱۲$$

۱۹- گزینهٔ ۴ چون تابع در هیچ همسایگی چپ نقطهٔ صفر تعریف نشده است، پس دربارهٔ حد چپ آن در نقطهٔ صفر نمی‌توان حرف زد. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to ۰^+}f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲-۱}{x+x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲-۱}{۲x}$$

چون $\lim_{x\to ۰^+}(x^۲-۱)=-۱$ ، $\lim_{x\to ۰^+}(۲x)=۰$ و در یک همسایگی راست نقطهٔ صفر مقادیر $۲x$ مثبت‌اند، پس

$$\lim_{x\to ۰^+}f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲-۱}{۲x}=-\infty$$

۲۰- گزینهٔ ۳ خارج از برنامهٔ درسی

۲۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=f'(۴)$. از طرف دیگر،

$$f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۵-۲x)-(-۲)(۱+\sqrt{x})}{(۵-۲x)^۲}\Rightarrow f'(۴)=\frac{\frac{۱}{۴}(-۳)+۲(۳)}{(-۳)^۲}=\frac{۷}{۱۲}$$

۲۲- گزینهٔ ۲ چون تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، پس روی $\mathbb{R}$ پیوسته است و در نتیجه در $x=۲$ پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}f(x)\Rightarrow\lim_{x\to ۲^-}(-x^۲+ax+b)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۱}{x-۱}$$

$$-۴+۲a+b=\frac{۱}{۲-۱}=۱\Rightarrow ۲a+b=۵$$

همچنین،

$$f'_-(۲)=f'_+(۲)\Rightarrow\lim_{x\to ۲^-}f'(x)=\lim_{x\to ۲^+}f'(x)$$

$$\lim_{x\to ۲^-}(-۲x+a)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{-۱}{(x-۱)^۲}\Rightarrow -۴+a=-۱\Rightarrow a=۳$$

بنابراین $b=۵-۲a=-۱$.

۲۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)'(۲)=g'(۲)\times f'(g(۲))\qquad (۱)$$

از طرف دیگر، $g'(x)=\frac{۲(x-۱)-(۱)(۲x+۱)}{(x-۱)^۲}=\frac{-۳}{(x-۱)^۲}\Rightarrow g'(۲)=-۳$.
همچنین، $g(۲)=۵$. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $f'(۵)=(-۳)f'(۵)=۶$، پس $f'(۵)=-۲$.

۲۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}=\frac{۸-\frac{۱}{۴}-(\frac{۱}{۲}-۱)}{۳}=\frac{۱۱}{۴}$$

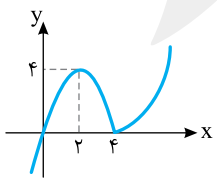
$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای}=f'(۲)$$

از طرف دیگر، $f'(x)=x+\frac{۱}{x^۲}$، پس $f'(۲)=\frac{۹}{۴}$. بنابراین اختلاف مورد نظر می‌شود $\frac{۱۱}{۴}-\frac{۹}{۴}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$.

۲۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}-x^۲+۴x & x\le ۴\\ x^۲-۴x & x>۴\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است. از روی این شکل معلوم می‌شود که $(۴,۰)$ نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f و $(۲,۴)$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است. فاصلهٔ این نقطه‌ها برابر است با $\sqrt{(۴-۲)^۲+(۰-۴)^۲}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$.



۲۶- گزینهٔ ۳ اگر مطابق شکل زیر، طول یکی از ضلع‌های مستطیل برابر x باشد، طول ضلع دیگرش می‌شود $\sqrt{۱۲-x}$. بنابراین

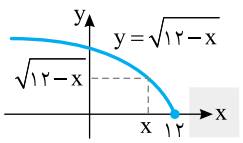
$$\text{مساحت مستطیل}=x\sqrt{۱۲-x}$$

در نتیجه، باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=x\sqrt{۱۲-x}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=(۱)\sqrt{۱۲-x}+x(\frac{-۱}{۲\sqrt{۱۲-x}})$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\sqrt{۱۲-x}(۲\sqrt{۱۲-x})=x\Rightarrow۲(۱۲-x)=x\Rightarrow x=۸$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل مورد نظر به ازای $x=۸$ به دست می‌آید و برابر است با $۸\sqrt{۴}=۱۶$.



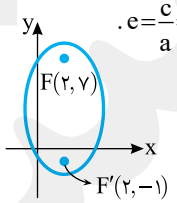
۲۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$FF'=۲c\Rightarrow۸=۲c\Rightarrow c=۴$$

از طرف دیگر، $۲b=۶$، پس $b=۳$ و در نتیجه

$$a^۲=b^۲+c^۲=۹+۱۶=۲۵\Rightarrow a=۵$$

به این ترتیب $e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}=۰/۸$.



۲۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که شکل n ام از مربعی با $n^۲$ دایره و ردیف‌هایی از ۱، ۲، ... و $n-۱$ دایره درست شده است. بنابراین

$$۹^۲+۱+۲+۳+\cdots+۸=۸۱+\frac{۸\times۹}{۲}=۱۱۷$$

۲۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^۲-۲x-۳=(x-۱)^۲-۴\Rightarrow f(x)+۴=(x-۱)^۲$$

$$x=\sqrt{f(x)+۴}+۱$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۴}+۱$. در نتیجه طول نقطهٔ تقاطع نمودار تابع‌های $f^{-۱}$ و g جواب معادلهٔ زیر است:

$$\sqrt{x+۴}+۱=\frac{x-۹}{۲}\Rightarrow۲\sqrt{x+۴}+۲=x-۹\Rightarrow۲\sqrt{x+۴}=x-۱۱\qquad(۱)$$

$$۴(x+۴)=x^۲-۲۲x+۱۲۱\Rightarrow x^۲-۲۶x+۱۰۵=۰\Rightarrow(x-۵)(x-۲۱)=۰$$

$$x=۵\,,\,x=۲۱$$

توجه کنید که $x=۵$ جواب نیست، زیرا به ازای $x=۵$ سمت چپ معادلهٔ (۱) مثبت ولی سمت راست آن منفی است. بنابراین $x=۲۱$.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $f(x)=(x-۱)^۲-۴$. طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع‌های $f^{-۱}$ و g جواب معادلهٔ $f^{-۱}(x)=g(x)$ است. اکنون توجه کنید که

$$f^{-۱}(x)=g(x)\Rightarrow f(f^{-۱}(x))=f(g(x))\Rightarrow x=f(g(x))$$

$$x=(g(x)-۱)^۲-۴\Rightarrow x+۴=(\frac{x-۹}{۲}-۱)^۲\Rightarrow x+۴=(\frac{x-۱۱}{۲})^۲$$

$$۴x+۱۶=x^۲-۲۲x+۱۲۱\Rightarrow x^۲-۲۶x+۱۰۵=۰\Rightarrow(x-۵)(x-۲۱)=۰$$

$$x=۵\,,\,x=۲۱$$

اکنون توجه کنید که $R_{f^{-۱}}=D_f=[۱,+\infty)$، پس مقادیر $f^{-۱}$ مثبت‌اند. اما $g(۵)<۰$، پس $x=۵$ جواب معادلهٔ $f^{-۱}(x)=g(x)$ نیست. بنابراین $x=۲۱$.

۳۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید $A_۱$ پیشامد این باشد که مهرهٔ خارج شده سفید باشد و $A_۲$ پیشامد این باشد که مهرهٔ خارج شده سیاه باشد. در این صورت اگر B پیشامد مورد نظر باشد، بنابر قانون احتمال کل،

$$P(B)=P(A_۱)P(B|A_۱)+P(A_۲)P(B|A_۲)=\frac{۵}{۱۱}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}+\frac{۶}{۱۱}\times\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}$$

$$=\frac{۵}{۱۱}\times\frac{۶}{۴۵}+\frac{۶}{۱۱}\times\frac{۱۰}{۴۵}=\frac{۹۰}{۱۱\times۴۵}=\frac{۲}{۱۱}$$

۳۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{۱+\tan^۲x}=\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲x}}=\frac{۱}{|\cos x|}=\frac{۱}{-\cos x}\qquad(\frac{\pi}{۲}<x<\pi)$$

بنابراین

$$\frac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan^۲x}}(\frac{۱}{\sin x}-\sin x)=\frac{\tan x}{-\frac{۱}{\cos x}}(\frac{۱-\sin^۲x}{\sin x})$$

$$=-\tan x\cos x\times\frac{\cos^۲x}{\sin x}=-\sin x\times\frac{\cos^۲x}{\sin x}=-\cos^۲x$$

۳۲- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم سرعت پرنده در هوای آرام برابر v باشد. چون سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت است، پس سرعت پرنده در جهت موافق باد برابر $v+۵$ و در جهت مخالف باد برابر $v-۵$ است. چون پرنده یک کیلومتر رفته و یک کیلومتر برگشته است، پس مدت زمان رفت $\frac{۱}{v+۵}$ و مدت زمان برگشت $\frac{۱}{v-۵}$ است. به این ترتیب،

$$\frac{۱}{v+۵}+\frac{۱}{v-۵}=\frac{۹}{۶۰}=\frac{۳}{۲۰}\Rightarrow\frac{۲v}{v^۲-۲۵}=\frac{۳}{۲۰}$$

$$۳v^۲-۴۰v-۷۵=۰\Rightarrow(۳v+۵)(v-۱۵)=۰\Rightarrow v=۱۵$$

۳۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\frac{۷x-۸}{x^۲-x-۲}>\frac{x}{x-۲}\Rightarrow\frac{۷x-۸}{(x+۱)(x-۲)}-\frac{x}{x-۲}>۰\Rightarrow\frac{۷x-۸-x(x+۱)}{(x+۱)(x-۲)}>۰$$

$$\frac{-x^۲+۶x-۸}{(x+۱)(x-۲)}>۰\Rightarrow\frac{-(x-۲)(x-۴)}{(x+۱)(x-۲)}>۰\Rightarrow\frac{(x-۲)(x-۴)}{(x+۱)(x-۲)}<۰$$

x	$-\infty$		-۱		۲		۴		$+\infty$
$\frac{(x-۲)(x-۴)}{(x+۱)(x-۲)}$		$+$	∄	$-$	∄	$-$	۰	$+$	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(-۱,۲)\cup(۲,۴)$ می‌شود.

راه‌حل دوم توجه کنید که اعداد صفر و ۳ در نامعادله صدق می‌کنند:

$$\frac{۰-۸}{۰-۰-۲}>\frac{۰}{۰-۲}\Rightarrow۴>۰\,,\quad\frac{۲۱-۸}{۹-۳-۲}>\frac{۳}{۳-۲}\Rightarrow\frac{۱۳}{۴}>۳$$

بنابراین گزینهٔ (۳) جواب نامعادله است.

۳۴- گزینهٔ ۴ باید سه مدرسه از پنج مدرسه انتخاب کنیم (به $\binom{۵}{۳}$ طریق) و از هر کدام از آن‌ها یک نفر را انتخاب کنیم (هر کدام به $\binom{۴}{۱}$ طریق).

بنابراین پاسخ مسئله برابر است با

$$\binom{۵}{۳}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}=۱۰\times۴\times۴\times۴=۶۴۰$$

۳۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

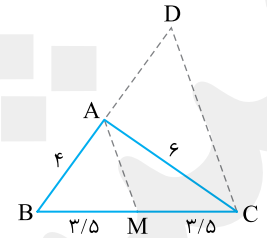
$$۲a+\sqrt{۳a+۱۶}=۱\Rightarrow\sqrt{۳a+۱۶}=۱-۲a\Rightarrow\sqrt{۳a+۱۶}^{۲}=(۱-۲a)^{۲}$$

$$۳a+۱۶=۱-۴a+۴a^{۲}\Rightarrow ۴a^{۲}-۷a-۱۵=۰$$

$$(۴a+۵)(a-۳)=۰\Rightarrow a=-\frac{۵}{۴}\ ,\ a=۳$$

توجه کنید که $a=۳$ در تساوی داده شده صدق نمی‌کند، ولی $a=-\frac{۵}{۴}$ در تساوی داده شده صدق می‌کند. بنابراین $a=-\frac{۵}{۴}$ و $۴a+۹=۴$.

۳۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که در مثلث BCD، از نقطهٔ M، وسط ضلع BC، خطی موازی ضلع CD رسم شده است. در نتیجه، این خط از وسط ضلع DB نیز می‌گذرد. یعنی $BD=۲AB=۸$.



راه‌حل دوم چون $AM||DC$، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BCD،

$$\frac{BA}{BM}=\frac{BD}{BC}\Rightarrow\frac{۴}{۳/۵}=\frac{BD}{۷}\Rightarrow BD=۸$$

۳۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که در مثلث ایجاد شده هم ضلع‌ها به سه قسمت برابر تقسیم می‌شوند. از طرف دیگر، مثلث‌های ABC و AEF متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AEF}}=(\frac{۱}{۲})^{۲}\Rightarrow S_{ABC}=\frac{۱}{۴}S_{AEF}\qquad (۱)$$

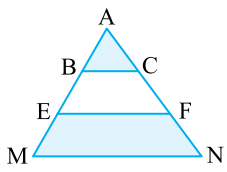
همین‌طور، مثلث‌های AEF و AMN متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}}=(\frac{۲}{۳})^{۲}\Rightarrow S_{AMN}=\frac{۹}{۴}S_{AEF}$$

$$S_{AMN}-S_{AEF}=\frac{۹}{۴}S_{AEF}-S_{AEF}$$

$$S_{EFNM}=\frac{۵}{۴}S_{AEF}\qquad (۲)$$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را بر هم تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید

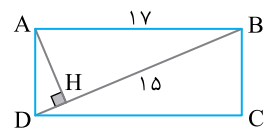


$$\frac{S_{ABC}}{S_{EFNM}}=\frac{۱}{۵}$$

۳۸- گزینهٔ ۱ بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABD،

$$AB^{۲}=BH\times BD\Rightarrow ۱۷^{۲}=۱۵\times BD\Rightarrow BD=\frac{۱۷^{۲}}{۱۵}=\frac{۲۸۹}{۱۵}=۱۹\frac{۴}{۱۵}$$

پس طول قطر مستطیل $\frac{۴}{۱۵}$ واحد از عدد ۱۹ بیشتر است.



۳۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{۹\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha\ ,\quad \cos(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\tan(\alpha-\frac{۳\pi}{۲})=-\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\cot\alpha$$

بنابراین (α چون ربع سوم است، $\cos\alpha<۰$)

$$\cos^{۲}\alpha=\frac{۱}{۱+\tan^{۲}\alpha}=\frac{۱}{۱+\frac{۱۶}{۹}}=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}$$

$$\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\frac{۴}{۳}\times(-\frac{۳}{۵})=-\frac{۴}{۵}$$

$$\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $(-\frac{۳}{۵})(\frac{۴}{۵})+\frac{۳}{۴}=۰/۲۷$.

۴۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $y=a+b\sin x$. از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که b مثبت است، پس بیشترین مقدار تابع برابر $a+b$ است. چون این مقدار برابر ۳ است، پس $a+b=۳$. همچنین، نمودار تابع از نقطهٔ $(-\frac{۵\pi}{۶},۰)$ گذشته است، پس

$$۰=a+b\sin(-\frac{۵\pi}{۶})=a+b(-\frac{۱}{۲})=a-\frac{b}{۲}$$

بنابراین

$$\begin{cases}a+b=۳\\ a-\frac{b}{۲}=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ b=۲\end{cases}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع مورد نظر $y=۱+۲\sin x$ می‌شود، که مقدار آن به ازای $x=\frac{\pi}{۶}$ برابر است با $۱+۲\sin\frac{\pi}{۶}=۲$.

۴۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $۳^{x^{۲}-۲}=۸۱^{x}=(۳^{۴})^{x}=۳^{۴x}$.

بنابراین

$$x^{۲}-۲=۴x\Rightarrow x^{۲}-۴x-۲=۰$$

$$x=۲-\sqrt{۶}\ ,\quad x=۲+\sqrt{۶}$$

چون به ازای $x=۲-\sqrt{۶}$، مقدار $x-۲$ منفی می‌شود و $\log_{۶}(x-۲)$ را می‌خواهیم، پس $x=۲+\sqrt{۶}$ و در نتیجه

$$\log_{۶}(x-۲)=\log_{۶}\sqrt{۶}=\frac{۱}{۲}\log_{۶}۶=\frac{۱}{۲}$$

۴۲- گزینهٔ ۲ چون دامنهٔ تابع بازهٔ $(-\frac{a}{۲},+\infty)$ است و از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که این بازه $(\frac{۱}{۲},+\infty)$ است، پس $a=-۱$. از طرف دیگر نمودار تابع از نقطهٔ $(۲,۰)$ گذشته است، پس $y(۲)=۰$:

$$-۱+\log_{b}(۴-۱)=۰$$

$$\log_{b}۳=۱\Rightarrow b=۳$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $y=-۱+\log_{۳}(۲x-۱)$ می‌شود. طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع مورد نظر با خط $y=۱$ جواب معادلهٔ زیر است:

$$-۱+\log_{۳}(۲x-۱)=۱\Rightarrow\log_{۳}(۲x-۱)=۲$$

$$۲x-۱=۹\Rightarrow x=۵$$

۴۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x^۲-۴}{۲|x-۲|}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{(x-۲)(x+۲)}{۲(-(x-۲))}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۲}{-۲}=-۲$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{۲|x-۲|}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{(x-۲)(x+۲)}{۲(x-۲)}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x+۲}{۲}=۲$$

چون $f(۲)=۲$، پس تابع f در نقطهٔ $x=۲$ فقط از راست پیوسته است.

۴۴- گزینهٔ ۴ فرض کنید A پیشامد موفقیت این فرد و B پیشامد موفقیت دوستش باشد. در این صورت

$$P(A)=۲P(B)\,,\quad P(A\cup B)=\frac{۷}{۹}$$

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{(P(A))^۲}{۲}$$

اکنون توجه کنید که

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\frac{۷}{۹}=P(A)+\frac{P(A)}{۲}-\frac{(P(A))^۲}{۲}$$

$$(P(A))^۲-۳P(A)+\frac{۱۴}{۹}=۰\Rightarrow P(A)=\frac{۲}{۳}\ ,\ P(A)=\frac{۱۴}{۶}\ \text{(غ.ق.ق)}$$

۴۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $\bar{x}_A=۱۴$ و $\bar{x}_B=۱۴/۵$. بنابراین

$$\sigma_A^۲=\frac{۲^۲+۱^۲+۰^۲+۱^۲+۲^۲}{۵}=۲$$

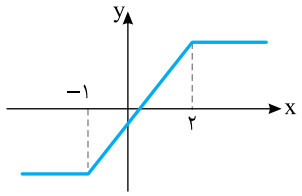
$$\sigma_B^۲=\frac{۲^۲+۱/۵^۲+۱^۲+۱/۵^۲+۳^۲}{۵}=۳/۷$$

چون

$$CV_A=\frac{\sigma_A}{\bar{x}_A}=\frac{\sqrt{۲}}{۱۴},\quad CV_B=\frac{\sigma_B}{\bar{x}_B}=\frac{\sqrt{۳/۷}}{۱۴/۵}$$

پس $CV_A<CV_B$، یعنی دقت عمل A بیشتر است. البته بهتر است در صورت سؤال پرسیده شود «نمرات مهارت» کدام کارگر پراکندگی کمتری دارد.

۴۶- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به صورت زیر است. از روی این نمودار معوم است که تابع f روی بازهٔ $(-۱,۲)$ اکیداً صعودی است.



۴۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cos ۳x+\cos x=۰\Rightarrow \cos ۳x=-\cos x=\cos(\pi-x)$$

بنابراین $(k\in\mathbb{Z})$

$$۳x=۲k\pi+\pi-x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$$

$$۳x=۲k\pi-(\pi-x)\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۲}$$

چون باید $\cos x\neq ۰$، پس جواب‌های به شکل $k\pi-\frac{\pi}{۲}$ قبول نیستند. در نتیجه، جواب‌های کلی معادلهٔ مورد نظر به صورت $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ هستند $(k\in\mathbb{Z})$.

۴۸- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲-۱۸x+۱۶}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{(۵x-۸)(x-۲)}\times\frac{۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}{۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{۸-(۳x+۲)}{(۵x-۸)(x-۲)(۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲})}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{-۳(x-۲)}{(۵x-۸)(x-۲)(۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲})}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{-۳}{(۵x-۸)(۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲})}$$

$$=\frac{-۳}{(۲)(۴+۲\times ۲+۲^۲)}=-\frac{۱}{۸}$$

راه‌حل دوم بنابر قاعدهٔ هوپیتال،

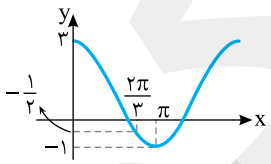
$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲-۱۸x+۱۶}=\lim_{x\to ۲}\frac{-\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}}{۱۰x-۱۸}=\frac{-\frac{۱}{۲^۲}}{۲۰-۱۸}=-\frac{۱}{۸}$$

۴۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^+}\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۲},\quad \lim_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^+}(۱+۲\cos x)=۰$$

و در یک همسایگی راست نقطهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$، مقادیر $۱+۲\cos x$ منفی هستند. بنابراین

$$\lim_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^+}\frac{\sin x}{۱+۲\cos x}=-\infty$$



۵۰- گزینهٔ ۴ خارج از برنامهٔ درسی

۵۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(\frac{۱}{۴}+h)-f(\frac{۱}{۴})}{h}=f'(\frac{۱}{۴})$$

از طرف دیگر،

$$f'(x)=\frac{(-۱)(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(-x-۱)}{(\sqrt{x})^۲}$$

پس

$$f'(\frac{۱}{۴})=\frac{-\frac{۱}{۲}+(۱)(\frac{۱}{۴}+۱)}{\frac{۱}{۴}}=۳$$

۵۲- گزینهٔ ۳ چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته نیز هست. بنابراین

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)\Rightarrow \lim_{x\to ۲^+}\frac{۸}{ax+b}=۴\Rightarrow\frac{۸}{۲a+b}=۴\Rightarrow ۲a+b=۲$$

از طرف دیگر $f'(x)=\begin{cases}\frac{-۸a}{(ax+b)^۲} & x>۲\\ -۳x^۲+۶ & x<۲\end{cases}$. پس

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+} f'(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{-۸a}{(ax+b)^۲}=\frac{-۸a}{(۲a+b)^۲}=\frac{-۸a}{۲^۲}=-۲a$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-} f'(x)=\lim_{x\to ۲^-}(-۳x^۲+۶)=-۶$$

بنابراین

$$f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow -۲a=-۶\Rightarrow a=۳$$

۵۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(x)=x(\frac{۳x+۱}{x+۲})^{\frac{۱}{۳}}$. پس

$$f'(x)=(۱)(\frac{۳x+۱}{x+۲})^{\frac{۱}{۳}}+x\times\frac{۱}{۳}(\frac{(۳)(x+۲)-(۱)(۳x+۱)}{(x+۲)^۲})(\frac{۳x+۱}{x+۲})^{\frac{۱}{۳}-۱}$$

در نتیجه

$$f'(-۳)=(\frac{-۸}{-۱})^{\frac{۱}{۳}}+(-۳)(\frac{۱}{۳})(\frac{۳(-۱)-(-۸)}{(-۱)^۲})(\frac{-۸}{-۱})^{-\frac{۲}{۳}}=۲-۵\times\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

۵۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که نقطه‌های ابتدایی و انتهایی نمودار تابع $(۰,f(۰))$ و $(۸,f(۸))$ هستند. شیب خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند برابر است با $\frac{f(۸)-f(۰)}{۸-۰}=\frac{۳-(-۵)}{۸}=۱$. اکنون طول نقطه‌ای را روی نمودار تابع f پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس در این نقطه بر نمودار تابع برابر ۱ است:

$$f'(x)=\frac{۹}{(x+۱)^۲}\Rightarrow f'(x)=۱\Rightarrow\frac{۹}{(x+۱)^۲}=۱$$

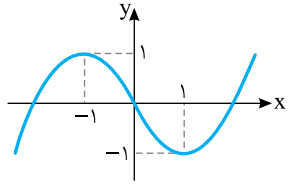
$$(x+۱)^۲=۹\Rightarrow x=۲\ ,\ x=-۴\quad (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین طول نقطهٔ مورد نظر برابر ۲ است و عرض آن برابر است با $f(۲)=۱$. معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(۲,۱)$ می‌گذرد و شیب آن برابر ۱ است به صورت $y-۱=(۱)(x-۲)$ یعنی $y=x-۱$ است. عرض نقطه‌ای که این خط محور y را قطع می‌کند برابر است با $y=۰-۱=-۱$.

۵۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}-x^۲-۲x & x\le ۰\\ x^۲-۲x & x>۰\end{cases}$$

پس نمودار تابع f به صورت زیر است. بنابراین نقطه‌های ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع f نقطه‌های $(-۱,۱)$ و $(۱,-۱)$ هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با $\sqrt{(-۱-۱)^۲+(۱+۱)^۲}=۲\sqrt{۲}$.

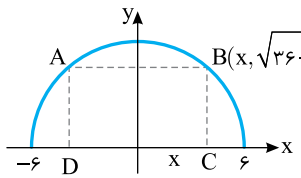


۵۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم مستطیل موردنظر ABCD باشد و طول نقطهٔ C برابر x باشد (شکل زیر را ببینید). چون نقطهٔ B روی دایرهٔ $x^۲+y^۲=۳۶$ است، پس عرض نقطهٔ B برابر است با $\sqrt{۳۶-x^۲}$. به این ترتیب، $S_{ABCD}=۲x\sqrt{۳۶-x^۲}$. باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=۲x\sqrt{۳۶-x^۲}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=۲\sqrt{۳۶-x^۲}-\frac{۲x^۲}{\sqrt{۳۶-x^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۳۶-x^۲=x^۲\Rightarrow x^۲=۱۸\Rightarrow x=۳\sqrt{۲}\ (x>۰)$$

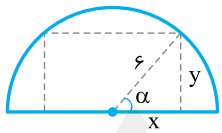
بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مساحت مستطیل ABCD، به ازای $x=۳\sqrt{۲}$ به‌دست می‌آید و برابر است با $۲(۳\sqrt{۲})\sqrt{۳۶-۱۸}=۳۶$.



راه‌حل دوم با نمادگذاری شکل زیر، فرض می‌کنیم طول ضلع‌های مستطیل $۲x$ و y باشند. در این صورت $x=۶\cos\alpha$ و $y=۶\sin\alpha$. بنابراین

مساحت مستطیل $=۲xy=۲(۶\cos\alpha)(۶\sin\alpha)=۳۶\sin ۲\alpha\le ۳۶$

توجه کنید که تساوی وقتی به دست می‌آید که $۲\alpha=۹۰^\circ$، یعنی $\alpha=۴۵^\circ$.



۵۷- گزینهٔ ۱ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. فاصلهٔ مرکز دایره تا خط $۲x-۳y+۱=۰$ برابر است با

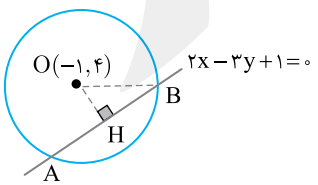
$$OH=\frac{|۲(-۱)-۳(۴)+۱|}{\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳}$$

چون $HB=\frac{AB}{۲}=\sqrt{۷}$، پس بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB،

$$OB^۲=OH^۲+HB^۲=(\sqrt{۱۳})^۲+(\sqrt{۷})^۲=۲۰\Rightarrow OB=۲\sqrt{۵}$$

یعنی شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر $۲\sqrt{۵}$ است. بنابراین معادلهٔ این دایره به صورت $(x+۱)^۲+(y-۴)^۲=۲۰$ است. طول نقطه‌های برخورد این دایره با خط $y=۲$ جواب معادلهٔ زیر هستند:

$$(x+۱)^۲+(۲-۴)^۲=۲۰\Rightarrow(x+۱)^۲=۱۶\Rightarrow x=-۵\ ,\ x=۳$$



۵۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که شکل mام از مستطیلی با $۲\times(n+۱)$ دایره و نواری با n دایره درست شده است. بنابراین تعداد دایره‌های شکل mام برابر است با $۲(n+۱)+n=۳n+۲$. پس تعداد دایره‌های شکل دوازدهم برابر است با $۳\times۱۲+۲=۳۸$.

۵۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $(g^{-1}of^{-1})(8)=g^{-1}(f^{-1}(8))$.

اکنون فرض کنید $f^{-1}(8)=a$. در این صورت

$$f(a)=8\Rightarrow\frac{2}{5}a-4=8\Rightarrow a=30$$

اکنون فرض کنید $g^{-1}(30)=b$. در این صورت

$$g(b)=30\Rightarrow b^3+b=30\Rightarrow b=3$$

بنابراین

$$(g^{-1}of^{-1})(8)=g^{-1}(f^{-1}(8))=g^{-1}(30)=3$$

۶۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید A، B و C به‌ترتیب پیشامد انتخاب بسته‌های ریاضی، تجربی و علوم انسانی باشند. اگر پیشامد برنده شدن بهروز X باشد، آن‌گاه

$$P(X)=P(A)P(X|A)+P(B)P(X|B)+P(C)P(X|C)$$

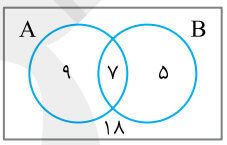
$$=\frac{5}{18}\times 0/7+\frac{7}{18}\times 0/8+\frac{6}{18}\times 0/9=\frac{35}{180}+\frac{56}{180}+\frac{54}{180}=\frac{145}{180}=\frac{29}{36}$$

۶۱- گزینهٔ ۴ اگر گروه ورزش را با A و گروه روزنامهٔ دیواری را با B نمایش دهیم، آن‌گاه $n(A)=16$، $n(B)=12$ و $n(A-B)=9$. بنابراین

$$n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)=16-9=7$$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=16+12-7=21$$

بنابراین $39-21=18$ نفر عضو هیچ یک از دو گروه نیستند. نمودار زیر تعداد افراد هر گروه را نشان می‌دهد.



۶۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$A=\sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}=2^{\frac{2}{5}}\times 2^{\frac{4}{15}}\times 2^{\frac{4}{3}}=2^2=4$$

بنابراین

$$(2A)^{-\frac{1}{3}}=8^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{2}=0/5$$

۶۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که معادلهٔ

$$(2m-1)x^2+6x+m-2=0$$

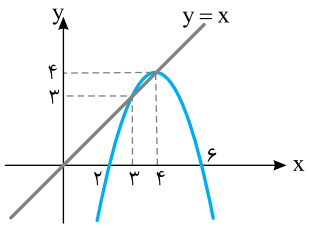
به ازای $m=\frac{1}{2}$ درجهٔ دوم نیست و به صورت $6x-\frac{3}{2}=0$ درمی‌آید که تنها جواب آن $\frac{1}{4}$ است. چون $\frac{1}{2}$ در هر چهار گزینه وجود دارد، پس هیچ کدام از گزینه‌ها جواب نیستند ولی منظور طراح سؤال حالتی بوده که دلتای معادله مثبت است.

در این صورت

$$\Delta=36-4(2m-1)(m-2)>0\Rightarrow(m+1)(2m-7)<0\Rightarrow -1<m<3/5$$

یعنی منظور طراح، گزینهٔ (۳) بوده است.

۶۴- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** اگر نمودار تابع $y=-x^2+2x+5$ را سه واحد به طرف x های مثبت سپس دو واحد به طرف y های منفی انتقال دهیم، نمودار تابع $f(x)=-(x-3)^2+2(x-3)+5-2$ به دست می‌آید. ساده شدهٔ ضابطهٔ این تابع به صورت $f(x)=-x^2+8x-12$ است. بنابراین می‌خواهیم بازه‌ای را معین کنیم که در آن بازه نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار دارد. به نمودار این تابع و خط $y=x$ توجه کنید. در بازهٔ $(3,4)$ نمودار تابع f بالای این خط قرار دارد.



راه‌حل دوم برای اینکه بدانیم در چه بازه‌ای نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار دارد، کافی است نامعادلهٔ $f(x)>x$ را حل کنیم:

$$-x^2+8x-12>x\Rightarrow x^2-7x+12<0$$

$$(x-3)(x-4)<0\Rightarrow 3<x<4$$

راه‌حل سوم در تابع $f(x)=-x^2+8x-12$ مقادیر $f(3)$ و $f(4)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(3)=-9+24-12=3,\quad f(4)=-16+32-12=4$$

بنابراین در نقاط $x=3$ و $x=4$ نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار ندارد، بلکه منطبق بر این خط است. پس گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) که شامل عدد ۳ یا ۴ هستند، جواب نیستند و گزینهٔ (۱) جواب است.

۶۵- گزینهٔ ۲ مجموع اعداد طبیعی دو رقمی مضرب هفت به صورت $S=14+21+\cdots+98$ است. به راحتی می‌توانید این اعداد را جمع بزنید و به عدد ۷۲۸ برسید. البته می‌توانید از فرمول مجموع جملات دنبالهٔ حسابی استفاده کنید. در این مجموع جملهٔ اول برابر ۱۴، جملهٔ آخر برابر ۹۸ و تعداد جملات برابر ۱۳ است. پس

$$S=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{13}{2}(14+98)=728$$

۶۶- گزینهٔ ۴ فرض کنید بهروز به تنهایی در t ساعت این کار را انجام می‌دهد. بنابراین فرهاد در $t+9$ ساعت این کار را انجام می‌دهد. پس بهروز در هر ساعت $\frac{1}{t}$ از این کار و فرهاد در هر ساعت $\frac{1}{t+9}$ از این کار را انجام می‌دهند. اگر هر دو با هم کار کنند، در هر ساعت به مقدار $\frac{1}{t}+\frac{1}{t+9}$ از این کار را انجام می‌دهند. چون با هم در ۲۰ ساعت کار را تمام می‌کنند، پس در یک ساعت $\frac{1}{20}$ کار را با هم انجام می‌دهند. بنابراین

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{t+9}=\frac{1}{20}\Rightarrow 20(t+9)+20t=t(t+9)\Rightarrow t^2-31t-180=0$$

$$(t-36)(t+5)=0\Rightarrow t=36, t=-5\ (\text{غ.ق.ق.})$$

۶۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f^{-1}=\{(2,1),(5,2),(4,3),(6,4)\}$$

بنابراین

$$(gof^{-1})(2)=g(1)=\text{تعریف نشده},\quad (gof^{-1})(5)=g(2)=3$$

$$(gof^{-1})(4)=g(3)=1,\quad (gof^{-1})(6)=g(4)=2$$

بنابراین $D_{gof^{-1}}=\{5,4,6\}$، در نتیجه

$$D_{\frac{g}{gof^{-1}}}=D_g\cap D_{gof^{-1}}-\{x|(gof^{-1})(x)=0\}=\{4,5\}$$

در توابع داده شده در گزینه‌ها فقط تابع گزینهٔ (۱) دامنه‌اش $\{4,5\}$ است.

۶۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر $g(x)=x^۲-x$، آن‌گاه $g(۱)=۰$ و $g(۲)=۲$. بنابراین

$$f(x)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{Ax+B},\quad f(۱)=۰,\quad f(۲)=۲$$

بنابراین

$$f(۱)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{A+B}=۰\Rightarrow ۲^{-A-B}=۲\Rightarrow -A-B=۱\Rightarrow A+B=-۱$$

$$f(۲)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{۲A+B}=۲\Rightarrow ۲^{-۲A-B}=۴\Rightarrow -۲A-B=۲\Rightarrow ۲A+B=-۲$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}A+B=-۱\\ ۲A+B=-۲\end{cases}$ نتیجه می‌شود $A=-۱$ و $B=۰$. در نتیجه

$$f(x)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{-x}\Rightarrow f(۳)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{-۳}=۶$$

۶۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan\frac{۱۱\pi}{۴}=\tan(۳\pi-\frac{\pi}{۴})=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$$

$$\sin\frac{۱۵\pi}{۴}=\sin(۴\pi-\frac{\pi}{۴})=-\sin\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos\frac{۱۳\pi}{۴}=\cos(۳\pi+\frac{\pi}{۴})=-\cos\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین

$$\tan\frac{۱۱\pi}{۴}+\sin\frac{۱۵\pi}{۴}\cos\frac{۱۳\pi}{۴}=-۱+(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-\frac{۱}{۲}$$

۷۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول**

$$\lim_{x\to۰}\frac{\sin a\cos x+\cos a\sin x-\sin a}{x}$$

$$=\lim_{x\to۰}\frac{\sin a(\cos x-۱)}{x}+\lim_{x\to۰}\frac{\cos a\sin x}{x}$$

$$=\lim_{x\to۰}\frac{-۲\sin a\sin^۲\frac{x}{۲}}{x}+\lim_{x\to۰}\frac{\cos a\sin x}{x}$$

$$=-\sin a\lim_{x\to۰}\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}}\times\lim_{x\to۰}\sin\frac{x}{۲}+\cos a\lim_{x\to۰}\frac{\sin x}{x}$$

$$=-\sin a\times۰+\cos a\times۱=\cos a$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to۰}\frac{\sin a\cos x+\cos a\sin x-\sin a}{x}=\lim_{x\to۰}\frac{\sin(x+a)-\sin a}{x}$$

اکنون اگر فرض کنیم $f(x)=\sin x$، مقدار حد فوق برابر مقدار مشتق تابع f در نقطهٔ $x=a$ یعنی $\cos a$ است.

راه‌حل سوم اگر قرار دهیم $a=۰$، حد مورد نظر به صورت زیر در می‌آید

$$\lim_{x\to۰}\frac{\sin۰\cos x+\cos۰\sin x-\sin۰}{x}=\lim_{x\to۰}\frac{\sin x}{x}=۱$$

اکنون در گزینه‌ها $a=۰$ را قرار می‌دهیم و فقط گزینهٔ (۳) به صورت $\cos۰=۱$ در می‌آید.

راه‌حل چهارم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم

$$\lim_{x\to۰}\frac{\sin a\cos x+\cos a\sin x-\sin a}{x}$$

$$=\lim_{x\to۰}\frac{-\sin a\sin x+\cos a\cos x-۰}{۱}=\cos a$$

۷۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(۲)=۲a-۱$$

$$\lim_{x\to۲^-}f(x)=\lim_{x\to۲^-}(ax-۱)=۲a-۱$$

$$\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^+}\frac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}}=\lim_{x\to۲^+}\frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{(x-\sqrt{x+۲})(x+\sqrt{x+۲})}$$

$$=\lim_{x\to۲^+}\frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{x^۲-x-۲}=\lim_{x\to۲^+}\frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{(x-۲)(x+۱)}$$

$$=\lim_{x\to۲^+}\frac{۳(x+\sqrt{x+۲})}{x+۱}=\frac{۳(۲+۲)}{۲+۱}=۴$$

بنابراین برای اینکه تابع f در $x=۲$ پیوسته باشد باید تساوی $۲a-۱=۴$ برقرار باشد که نتیجه می‌شود $a=\frac{۵}{۲}$. توجه کنید که حد راست تابع را می‌توانید به کمک قاعدهٔ هوپیتال نیز به دست آورید:

$$\lim_{x\to۲^+}\frac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}}=\lim_{x\to۲^+}\frac{۳}{۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}}=\frac{۳}{۱-\frac{۱}{۴}}=۴$$

۷۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x)=۱+\frac{a}{۲}\sin۲bx$. بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{۲\pi}{|۲b|}$ و حداکثر مقدار تابع برابر $۱+|\frac{a}{۲}|$ است. با توجه به نمودار تابع f دورهٔ تناوب برابر $\frac{۳\pi}{۴}-(-\frac{\pi}{۴})=\pi$ و حداکثر مقدار تابع برابر $\frac{۳}{۲}$ است. بنابراین

$$\frac{۲\pi}{|۲b|}=\pi\Rightarrow|b|=۱,\quad ۱+|\frac{a}{۲}|=\frac{۳}{۲}\Rightarrow|a|=۱$$

با توجه به اینکه نمودار تابع f در اطراف نقطهٔ $x=۰$ صعودی است، مقادیر a و b هم‌علامت‌اند. بنابراین $a=۱$ و $b=۱$ یا $a=-۱$ و $b=-۱$. پس $a+b$ می‌تواند برابر ۲ یا -۲ باشد که فقط حالت $a+b=۲$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۷۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که مطابق اتحاد چاق و لاغر

$$\sin^۳x+\cos^۳x=(\sin x+\cos x)(\sin^۲x+\cos^۲x-\sin x\cos x)$$

$$=(\sin x+\cos x)(۱-\frac{۱}{۲}\sin۲x)$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به صورت زیر است:

$$(\sin x+\cos x)(۱-\frac{۱}{۲}\sin۲x)=۱-\frac{۱}{۲}\sin۲x$$

$$(\sin x+\cos x-۱)(۱-\frac{۱}{۲}\sin۲x)=۰$$

$$\begin{cases}\sin x+\cos x-۱=۰\\ ۱-\frac{۱}{۲}\sin۲x=۰\Rightarrow\sin۲x=۲\ (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

معادلهٔ $\sin x+\cos x-۱=۰$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ جواب‌های $x=۰$، $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=۲\pi$ را دارد که مجموع آن‌ها برابر $\frac{۵\pi}{۲}$ است.

۷۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to۲}(۲x-۵)=-۱$. بنابراین اولاً باید $\lim_{x\to۲}(x^۲+ax+b)$ برابر صفر باشد ثانیاً باید علامت عبارت $x^۲+ax+b$ در یک همسایگی نقطهٔ $x=۲$ مثبت باشد. پس $x^۲+ax+b$ باید برابر $(x-۲)^۲$ باشد، در نتیجه

$$x^۲+ax+b=x^۲-۴x+۴\Rightarrow a=-۴,b=۴$$

پس $a+b=۰$.

۷۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$g(x)=x+\sqrt{x}\Rightarrow\begin{cases}g(1)=2\\ g'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow g'(1)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{4}{3}\Rightarrow f'(2)=\frac{4}{3}$$

بنابراین

$$(fog)'(1)=g'(1)f'(g(1))=g'(1)f'(2)=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}=2$$

۷۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطهٔ $x=2$ علامت عبارت x^2-2x منفی است، بنابراین $|x^2-2x|=2x-x^2$. در واقع تابع f به صورت زیر است

$$\begin{cases}x^2-2x & x\le0\\ 2x-x^2 & 0<x<2\\ \frac{1}{2}x^2+ax+b & x\ge2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x-2 & x<0\\ 2-2x & 0<x<2\\ x+a & x>2\end{cases}$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر است، پس $f'_+(2)=f'_-(2)$. بنابراین

$$2+a=2-4\Rightarrow a=-4$$

از طرف دیگر تابع f در نقطهٔ $x=2$ پیوسته است. پس

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^-}f(x)=f(2)$$

بنابراین

$$2+2a+b=4-4\Rightarrow b=-2a-2=6$$

در نتیجه $a+b=2$.

۷۷- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[0,2]$ برابر است با

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{12-2}{2}=5$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=\frac{3}{4}$ برابر است با $f'(\frac{3}{4})$:

$$f'(x)=\sqrt{4x+1}+\frac{4(x+2)}{2\sqrt{4x+1}}\Rightarrow f'(\frac{3}{4})=2+\frac{11}{4}=\frac{19}{4}$$

بنابراین آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[0,2]$ از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\frac{3}{4}$ به اندازهٔ $\frac{1}{4}$ بیشتر است.

۷۸- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار تابع f، در نقطهٔ $x=1$ جهت تقعر نمودار تغییر می‌کند و خط مماس بر نمودار افقی است. بنابراین $f'(1)=f''(1)=0$. پس

$$f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx$$
$$f'(x)=12x^3+3ax^2+2bx+c$$
$$f''(x)=36x^2+6ax+2b$$
$$f'(1)=0\Rightarrow12+3a+2b+c=0$$
$$f''(1)=0\Rightarrow36+6a+2b=0$$

چون طبق نمودار، $f'(0)=0$ پس $c=0$. بنابراین از حل دستگاه معادلات به‌دست آمده نتیجه می‌شود $a=-8$ و $b=6$.

۷۹- گزینهٔ ۳ خط $x=1$ مجانب قائم نمودار تابع f است. اکنون توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x+2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2+2x)}{(x-1)^4}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow2(x-1)(x^2-1-x^2-2x)=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2},x=1\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین $x=-\frac{1}{2}$ طول تنها نقطهٔ بحرانی تابع f است:

$$f(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{3},\quad\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$$
$$\lim_{x\to1}f(x)=+\infty$$

بنابراین مینیمم مطلق تابع f روی هر دو بازهٔ $(-\infty,1)$ و $(1,+\infty)$ برابر $-\frac{1}{3}$ است. فاصلهٔ نقطهٔ $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3})$ از مجانب قائم نمودار تابع f برابر $\frac{3}{2}$ است.

۸۰- گزینهٔ ۱ بازهٔ $(x+1,2x-1)$ یک همسایگی عدد ۳ است. بنابراین بایستی

$$x+1<3<2x-1$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های $x+1<3$ و $3<2x-1$ را به‌دست می‌آوریم:

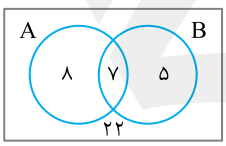
$$x+1<3\Rightarrow x<2\quad(1)$$
$$3<2x-1\Rightarrow x>2\quad(2)$$

اشتراک مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) برابر تهی است.

۸۱- گزینهٔ ۴ اگر گروه آزمایشگاهی را A و گروه فوتبال را B بنامیم. آن‌گاه $n(A)=15$، $n(B)=12$ و $n(A\cap B)=7$. بنابراین

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=12+15-7=20$$

بنابراین $42-20=22$ نفر عضو هیچ یک از دو گروه نیستند. نمودار زیر تعداد افراد هر گروه را نشان می‌دهد.



۸۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A=\sqrt[5]{9\sqrt{3}}(12)^{-1/5}=3^{\frac{2}{5}}\times3^{\frac{1}{10}}\times3^{-\frac{3}{2}}\times2^{-3}=3^{-1}\times2^{-3}=\frac{1}{24}$$

بنابراین $(1+A^{-1})^{\frac{1}{2}}=(1+24)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{25}=5$.

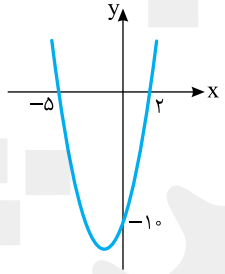
۸۳- گزینهٔ ۲ برای اینکه سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ همواره پایین محور x قرار بگیرد، باید $a<0$ و $b^2-4ac<0$. بنابراین در سهمی به معادلهٔ $y=(1-m)x^2+2(m-3)x-1$ باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$1-m<0\Rightarrow m>1$$
$$4(m-3)^2+4(1-m)<0\Rightarrow m^2-7m+10<0$$
$$(m-2)(m-5)<0\Rightarrow2<m<5$$

بنابراین اگر $2<m<5$، آن‌گاه سهمی مورد نظر همواره پایین محور xها قرار دارد.

۸۴- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=x^۲-x-۳$ را دو واحد به طرف xهای منفی سپس نُه واحد به طرف yهای منفی انتقال دهیم، نمودار تابع $f(x)=(x+۲)^۲-(x+۲)-۳-۹$ به دست می‌آید. سادهٔ شدهٔ ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=x^۲+۳x-۱۰=(x+۵)(x-۲)$ است. نمودار تابع f به صورت زیر است و واضح است که در بازهٔ $(-۵,۲)$ نمودار تابع f زیر محور xها قرار دارد. توجه کنید که اگر نمودار تابع f زیر محور xها قرار داشته باشد، آن‌گاه $f(x)<۰$. بنابراین

$$(x+۵)(x-۲)<۰\Rightarrow -۵<x<۲$$



۸۵- گزینهٔ ۱ مجموع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{۲\times۵}+\frac{۱}{۵\times۸}+\frac{۱}{۸\times۱۱}+\cdots+\frac{۱}{۱۷\times۲۰}$$

$$=\frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۱۱}+\cdots+\frac{۱}{۱۷}-\frac{۱}{۲۰}\right)=\frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲۰}\right)=\frac{۳}{۲۰}=۰/۱۵$$

۸۶- گزینهٔ ۲ اگر $x\geq\frac{۱}{۲}$، آن‌گاه معادله به صورت $۲x-۱+x+۲=۳$ در می‌آید که جواب آن $x=\frac{۲}{۳}$ است. اگر $-۲<x<\frac{۱}{۲}$، آن‌گاه معادله به صورت $-۲x+۱+x+۲=۳$ در می‌آید که $x=۰$ جواب آن است. اگر $x\leq -۲$، آن‌گاه معادله به صورت $-۲x+۱-x-۲=۳$ در می‌آید که $x=-\frac{۴}{۳}$ جواب آن است ولی قابل قبول نیست. بنابراین جواب‌های معادله $x=\frac{۲}{۳}$ و $x=۰$ هستند که مجموع آن‌ها برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

۸۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$g^{-۱}=\{(۳,۲),(۲,۴),(۶,۵),(۱,۳)\}$$

$$f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$$

بنابراین

$$g^{-۱}of=\{(۱,۴),(۴,۵)\}\Rightarrow(g^{-۱}of)-f=\{(۱,۲),(۴,-۱)\}$$

بنابراین برد تابع $(g^{-۱}of)-f$ مجموعهٔ $\{۲,-۱\}$ است.

۸۸- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $f(x)=۳^{Ax+B}$ نمودار تابع $y=x^۲$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند. پس نمودار تابع f از نقاط $(۱,۱)$ و $(۳,۹)$ عبور می‌کند.

بنابراین

$$f(۱)=۱\Rightarrow ۳^{A+B}=۱\Rightarrow A+B=۰$$

$$f(۳)=۹\Rightarrow ۳^{۳A+B}=۹\Rightarrow ۳A+B=۲$$

از حل دستگاه معادلات بالا نتیجه می‌شود $A=۱$ و $B=-۱$ و در نتیجه $f(x)=۳^{x-۱}$. پس عرض نقطهٔ تلاقی نمودار تابع f با محور yها برابر $f(۰)=\frac{۱}{۳}$ است.

۸۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan\frac{۱۷\pi}{۶}=\tan(۳\pi-\frac{\pi}{۶})=-\tan\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\sin\frac{۱۱\pi}{۳}=\sin(۴\pi-\frac{\pi}{۳})=-\sin\frac{\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{۱۰\pi}{۳}=\cos(۳\pi+\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین

$$\tan\frac{۱۷\pi}{۶}\sin\frac{۱۱\pi}{۳}+\cos\frac{۱۰\pi}{۳}=(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۶}-\frac{۱}{۲}=۰$$

۹۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که در یک همسایگی راست $x=۱$ تابع $y=[x]$ با تابع $y=۱$ برابر است. پس

$$\lim_{x\to۱^+}\frac{\sin^۲\pi x}{[x]+\cos\pi x}=\lim_{x\to۱^+}\frac{۱-\cos^۲\pi x}{۱+\cos\pi x}$$

$$=\lim_{x\to۱^+}\frac{(۱-\cos\pi x)(۱+\cos\pi x)}{۱+\cos\pi x}=\lim_{x\to۱^+}(۱-\cos\pi x)=۱-\cos\pi=۲$$

۹۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(۱)=a+b\ ,\quad \lim_{x\to۱^+}f(x)=\lim_{x\to۱^+}(ax+b)=a+b$$

$$\lim_{x\to۱^-}f(x)=\lim_{x\to۱^-}x[x]=\lim_{x\to۱^-}۰=۰$$

تابع f در $x=۱$ پیوسته است، پس $a+b=۰$. از طرف دیگر

$$f(-۱)=-a+b\ ,\quad \lim_{x\to(-۱)^-}f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}(ax+b)=-a+b$$

$$\lim_{x\to(-۱)^+}f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+}x[x]=\lim_{x\to(-۱)^+}(-x)=۱$$

تابع f در $x=-۱$ پیوسته است، پس $-a+b=۱$. از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a+b=۰\\-a+b=۱\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-\frac{۱}{۲}$ و $b=\frac{۱}{۲}$.

۹۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید

$$f(x)=\tan(\pi x)-\cot(\pi x)$$

$$=\frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)}-\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}=\frac{\sin^۲(\pi x)-\cos^۲(\pi x)}{\sin(\pi x)\cos(\pi x)}$$

$$=\frac{-\cos(۲\pi x)}{\frac{۱}{۲}\sin(۲\pi x)}=-۲\cot(۲\pi x)=-۲\tan(\frac{\pi}{۲}-۲\pi x)$$

پس دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{\pi}{|-۲\pi|}=\frac{۱}{۲}$ است.

۹۳- گزینهٔ ۴ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin^۴x+\cos^۴x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow(\sin^۲x+\cos^۲x)^۲-۲\sin^۲x\cos^۲x=\frac{۱}{۲}$$

$$۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\sin^۲۲x=۱\Rightarrow\sin۲x=\pm۱$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند

$$۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ عبارتند از $\frac{\pi}{۴}$، $\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$، $\pi+\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۳\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ که مجموع آن‌ها برابر ۴π است.

۹۴- گزینهٔ ۱ خط $y=۲$ مجانب افقی نمودار تابع f است. زیرا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=۲$$

از طرف دیگر،

$$f(x)=\frac{۲x^۲-x-۲}{x^۲+۲x}=۲-\frac{۵x+۲}{x^۲+۲x}$$
$$=۲-\frac{۵x+۲}{(x+۱)^۲-۱}$$

اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه علامت عبارت $\frac{۵x+۲}{(x+۱)^۲-۱}$ مثبت است و در نتیجه $f(x)<۲$. اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه علامت عبارت $\frac{۵x+۲}{(x+۱)^۲-۱}$ منفی است و در نتیجه $f(x)>۲$. بنابراین نمودار تابع f در $+\infty$ پایین مجانب افقی آن و در $-\infty$ بالای مجانب افقی آن قرار دارد.

۹۵- گزینهٔ ۴ خط $y=۳x-۵$ در نقطهٔ $(۲,۱)$ بر نمودار تابع y مماس است. پس $g(۲)=۱$ و $g'(۲)=۳$. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to۱}\frac{f(x)-f(۱)}{۲x-۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{۱}{۲}\lim_{x\to۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\frac{۲}{۳}$$
$$\frac{۱}{۲}f'(۱)=\frac{۲}{۳}\Rightarrow f'(۱)=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین

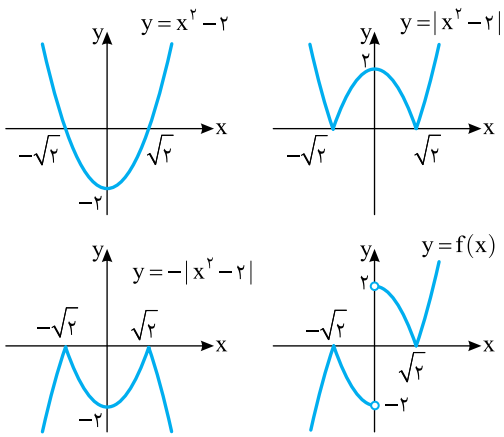
$$(fog)'(۲)=g'(۲)f'(g(۲))=g'(۲)f'(۱)=۳\times\frac{۴}{۳}=۴$$

۹۶- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** تابع f در $x=۰$ تعریف نشده پس در این نقطه مشتق‌پذیر نیست. عبارت $x^۳-۲x$ در ضابطهٔ f داخل قدرمطلق قرار دارد و این عبارت در $x=۰$ و $x=\pm\sqrt{۲}$ برابر صفر می‌شود و در نتیجه تابع f در این نقاط مشتق‌پذیر نیست. بنابراین در سه نقطه تابع f مشتق ندارد.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{|x^۳-۲x|}{x}=\frac{|x||x^۲-۲|}{x}=\begin{cases}|x^۲-۲| & x>۰\\ -|x^۲-۲| & x<۰\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است. واضح است که در $x=۰$، $x=\sqrt{۲}$ و $x=-\sqrt{۲}$ تابع f مشتق‌پذیر نیست.



۹۷- گزینهٔ ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۰,۴]$ برابر است با

$$\frac{f(۴)-f(۰)}{۴-۰}=\frac{(۳+\frac{۱}{۵})-(۱+۱)}{۴}=\frac{۳}{۱۰}$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=\frac{۳}{۲}$ برابر $f'(\frac{۳}{۲})$ است:

$$f(x)=\sqrt{۲x+۱}+\frac{۱}{x+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲x+۱}}-\frac{۱}{(x+۱)^۲}$$
$$f'(\frac{۳}{۲})=\frac{۱}{۲}-\frac{۴}{۲۵}=\frac{۱۷}{۵۰}$$

بنابراین اختلاف $\frac{۳}{۱۰}$ و $\frac{۱۷}{۵۰}$ مورد سؤال است که برابر $۰/۰۴$ است.

۹۸- گزینهٔ ۴ با توجه به نمودار تابع f معلوم است که این تابع فقط در $x=۳$ اکسترمم نسبی دارد. از طرف دیگر،

$$f(x)=x^۴+ax^۳+bx^۲$$
$$f'(x)=۴x^۳+۳ax^۲+۲bx=x(۴x^۲+۳ax+۲b)$$

علامت $f'(x)$ در $x=۰$ نباید تغییر کند و فقط در $x=۳$ باید تغییر کند. بنابراین باید $b=۰$ و

$$f'(x)=x(۴x^۲+۳ax)=x^۲(۴x+۳a),\quad f'(۳)=۰\Rightarrow a=-۴$$

بنابراین

$$f(x)=x^۴-۴x^۳\Rightarrow f(-۲)=۴۸$$

۹۹- گزینهٔ ۳ خط $y=-۱$ مجانب افقی نمودار تابع f است. زیرا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^۲}{x^۲}=-۱$$

اکنون نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f را معین می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۲x-x^۲}{(x+۱)^۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{(۲-۲x)(x+۱)^۲-۲(x+۱)(۲x-x^۲)}{(x+۱)^۴}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۲(x+۱)(۱-x^۲-۲x+x^۲)=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲},x=-۱\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین $x=\frac{۱}{۲}$ طول تنها نقطهٔ بحرانی تابع f است. پس باید طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع هم باشد. فاصلهٔ نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳})$ از خط $y=-۱$ مورد سؤال است که برابر $\frac{۴}{۳}$ است.

۱۰۰- گزینهٔ ۴ ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۹-x^۲}}{x-۱}$ را به دست می‌آوریم:

$$x-۱\neq۰\Rightarrow x\neq۱,۹-x^۲\geq۰\Rightarrow x^۲\leq۹\Rightarrow-۳\leq x\leq۳,D_f=[-۳,۱)\cup(۱,۳]$$

برای این‌که بازهٔ $(k-۲,۳k+۲)$ زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع f باشد یا باید زیرمجموعهٔ $[-۳,۱)$ باشد یا باید زیرمجموعهٔ $(۱,۳]$ باشد. پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول $(k-۲,۳k+۲)\subseteq[-۳,۱)$. در این حالت باید $k-۲\geq-۳$ و $۳k+۲\leq۱$. پس $-۱\leq k\leq-\frac{۱}{۳}$.

حالت دوم $(k-۲,۳k+۲)\subseteq(۱,۳]$. در این حالت باید $k-۲\geq۱$ و $۳k+۲\leq۳$ که ممکن نیست. بنابراین $k\in[-۱,-\frac{۱}{۳}]$ که در گزینهٔ (۴) بازهٔ $[-۱,-\frac{۱}{۳})$ آمده است.

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{۸}+\sqrt{۲۷}}{۵-\sqrt{۶}}=\frac{(۲\sqrt{۲}+۳\sqrt{۳})(۵+\sqrt{۶})}{(۵-\sqrt{۶})(۵+\sqrt{۶})}=\frac{۱۰\sqrt{۲}+۴\sqrt{۳}+۱۵\sqrt{۳}+۹\sqrt{۲}}{۲۵-۶}$$

$$=\frac{۱۹\sqrt{۲}+۱۹\sqrt{۳}}{۱۹}=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$$

از طرف دیگر،

$$۲(\sqrt[۴]{۹}-۱)^{-۱}=\frac{۲}{\sqrt{۳}-۱}=\frac{۲(\sqrt{۳}+۱)}{(\sqrt{۳}-۱)(\sqrt{۳}+۱)}=\frac{۲(\sqrt{۳}+۱)}{۳-۱}=\sqrt{۳}+۱$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-(\sqrt{۳}+۱)=\sqrt{۲}-۱$

۲- گزینهٔ ۳ اعداد مربع کامل به‌صورت زیر هستند:

$$۱^۲, ۲^۲, ۳^۲, \ldots, ۸^۲, ۹^۲, \ldots$$

بنابراین آخرین عدد دستهٔ هشتم عدد $۸^۲$ و آخرین عدد دستهٔ نهم عدد $۹^۲$ است. همچنین اولین عدد دستهٔ نهم $۸^۲+۱$ است. پس واسطهٔ حسابی بین $۸^۲+۱$ و $۹^۲$ را باید حساب کنیم که برابر است با $\frac{۸^۲+۱+۹^۲}{۲}=۷۳$

۳- گزینهٔ ۲ چون چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^۲-۱$ بخش‌پذیر است، پس بر $x-۱$ و $x+۱$ هم بخش‌پذیر است. یعنی $p(-۱)=p(۱)=۰$. از طرف دیگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-۲$ برابر $Q(۲)$ است. بنابراین

$$Q(x)=p(x-۱)+p(۱-x)\Rightarrow Q(۲)=p(۱)+p(-۱)=۰$$

توجه در صورت سؤال نوشته شده است «حاصل تقسیم $Q(x)$ بر $x-۲$» که معلوم نیست چیه! ولی احتمالاً منظور همین «باقی‌مانده» بوده است.

۴- گزینهٔ ۱ مجموع جواب‌ها و حاصل‌ضرب جواب‌ها در معادلهٔ $۳x^۲+(۲m-۱)x+۲-m=۰$ به‌ترتیب برابر $\frac{۱-۲m}{۳}$ و $\frac{۲-m}{۳}$ هستند، پس

$$\frac{۱-۲m}{۳}=\frac{۳}{۲-m}\Rightarrow(۱-۲m)(۲-m)=۹\Rightarrow ۲m^۲-۵m-۷=۰$$

$$(m+۱)(۲m-۷)=۰\Rightarrow m=-۱, m=\frac{۷}{۲}$$

به‌ازای $m=-۱$ معادله به‌صورت $۳x^۲-۳x+۳=۰$ در می‌آید که جواب ندارد، پس فقط $m=\frac{۷}{۲}$ قابل قبول است.

۵- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۱<\frac{x+۱}{۲x-۱}<۳\Rightarrow -۱<\frac{x+۱}{۲x-۱}-۲<۱\Rightarrow -۱<\frac{-۳x+۳}{۲x-۱}<۱$$

$$|\frac{-۳x+۳}{۲x-۱}|<۱\Rightarrow |۳x-۳|<|۲x-۱|$$

بنابراین نامعادله به‌صورت زیر حل می‌شود:

$$(۳x-۳)^۲<(۲x-۱)^۲\Rightarrow (۳x-۳)^۲-(۲x-۱)^۲<۰$$

$$(۳x-۳+۲x-۱)(۳x-۳-۲x+۱)<۰$$

$$(۵x-۴)(x-۲)<۰\Rightarrow \frac{۴}{۵}<x<۲\Rightarrow x\in(۰/۸, ۲)$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که عدد ۱ در نامعادله صدق می‌کند، زیرا $۱<\frac{۱+۱}{۲-۱}<۳$.

همچنین عدد $\frac{۳}{۲}$ در نامعادله صدق می‌کند $۱<\frac{\frac{۳}{۲}+۱}{۲(\frac{۳}{۲})-۱}<۳\Leftrightarrow ۱<\frac{۵}{۴}<۳$

این اعداد فقط عضو بازهٔ گزینهٔ (۴) هستند.

راه‌حل سوم نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x+۱}{۲x-۱}<۳\Rightarrow\frac{x+۱-۶x+۳}{۲x-۱}<۰\Rightarrow\frac{-۵x+۴}{۲x-۱}<۰\Rightarrow x\in(-\infty,\frac{۱}{۲})\cup(\frac{۴}{۵},+\infty)$$

$$\frac{x+۱}{۲x-۱}>۱\Rightarrow\frac{x+۱-۲x+۱}{۲x-۱}>۰\Rightarrow\frac{-x+۲}{۲x-۱}>۰\Rightarrow x\in(\frac{۱}{۲},۲)$$

از اشتراک دو مجموعهٔ جواب به‌دست آمده نتیجه می‌شود

$$x\in(\frac{۴}{۵},۲)=(۰/۸,۲)$$

۶- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** مختصات نقاط را در معادلهٔ سهمی قرار می‌دهیم:

$$y=ax^۲+bx+c$$

$$\begin{cases}x=۰\\y=۵\end{cases}\Rightarrow ۰+۰+c=۵\Rightarrow c=۵,\quad \begin{cases}x=۱\\y=۱۱\end{cases}\Rightarrow a+b+c=۱۱\Rightarrow a+b=۶$$

$$\begin{cases}x=-۲\\y=۵\end{cases}\Rightarrow ۴a-۲b+c=۵\Rightarrow ۴a-۲b=۰\Rightarrow b=۲a$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a+b=۶\\b=۲a\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=۲$ و $b=۴$. پس معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=۲x^۲+۴x+۵$ است که از نقطهٔ $(-۱,۳)$ می‌گذرد.

راه‌حل دوم چون سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ از نقاط $(۰,۵)$، $(-۲,۵)$ و $(۱,۱۱)$ می‌گذرد، پس سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c-۵$ از نقاط $(۰,۰)$، $(-۲,۰)$ و $(۱,۶)$ می‌گذرد و معادلهٔ سهمی‌ای که از این نقاط می‌گذرد به صورت $y=a(x-۰)(x+۲)=a(x^۲+۲x)$ است. این سهمی از نقطهٔ $(۱,۶)$ می‌گذرد. پس $۶=a(۱+۲)\Rightarrow a=۲$

بنابراین معادلهٔ سهمی اولیه به‌صورت $y=۲x^۲+۴x+۵$ است که از نقطهٔ $(-۱,۳)$ می‌گذرد.

راه‌حل سوم چون عرض نقاط $(-۲,۵)$ و $(۰,۵)$ یکسان است، پس طول رأس این سهمی برابر -۱ است. بنابراین معادلهٔ سهمی به‌شکل کلی $y=m(x+۱)^۲+n$ است. این سهمی از نقاط $(۰,۵)$ و $(۱,۱۱)$ می‌گذرد. پس

$$(۰,۵)\in\text{سهمی}\Rightarrow m+n=۵$$

$$(۱,۱۱)\in\text{سهمی}\Rightarrow ۴m+n=۱۱$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}m+n=۵\\۴m+n=۱۱\end{cases}$ به‌دست می‌آید $m=۲$ و $n=۲$. در نتیجه معادلهٔ سهمی به صورت $y=۲(x+۱)^۲+۳$ است که از نقطهٔ $(-۱,۳)$ می‌گذرد.

۷- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را دوازده واحد به راست ببریم، نمودار تابع $y=\sqrt{x-۱۲}$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را دو واحد به بالا انتقال دهیم، نمودار تابع $y=\sqrt{x-۱۲}+۲$ حاصل می‌شود. نقطهٔ برخورد نمودار توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۱۲}+۲$ مد نظر است که طول آن از حل معادلهٔ $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{x}=\sqrt{x-۱۲}+۲\Rightarrow\sqrt{x}-۲=\sqrt{x-۱۲}\Rightarrow x+۴-۴\sqrt{x}=x-۱۲$$

$$۱۶=۴\sqrt{x}\Rightarrow۴=\sqrt{x}\Rightarrow x=۱۶$$

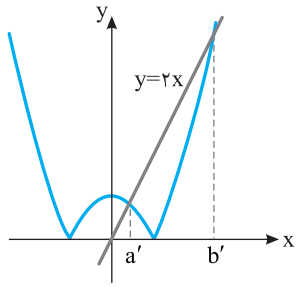
پس نقطهٔ مورد نظر $A(۱۶,۴)$ است که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با $\sqrt{۱۶^۲+۴^۲}=۴\sqrt{۱۷}$

۸- گزینهٔ ۱ نمودار تابع‌های $f(x)=|۲x^۲-۴|=۲|x^۲-۲|$ و $g(x)=۲x$ به‌صورت زیر است. واضح است که در بازهٔ (a',b') نمودار تابع f زیر نمودار تابع g قرار دارد. پس کافی است نقاط a' و b' را معلوم کنیم که جواب معادلهٔ $f(x)=g(x)$ هستند:

$$۲|x^۲-۲|=۲x\Rightarrow|x^۲-۲|=x$$

$$x\geq۰\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۲=x\\x^۲-۲=-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^۲-x-۲=۰\Rightarrow x=۲\ ,\ x=-۱(\text{غ.ق.ق.})\\x^۲+x-۲=۰\Rightarrow x=۱\ ,\ x=-۲(\text{غ.ق.ق.})\end{cases}$$

بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ وقتی است که $a=a'=۱$ و $b=b'=۲$ و در نتیجه $b-a=۱$.



۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید $D_f=D_g=\mathbb{R}$، بنابراین $D_{gof}=\mathbb{R}$. از طرف دیگر،

$$(gof)(x)=g(f(x))=-f^۲(x)+۴f(x)=۴-(f(x)-۲)^۲$$

$$=۴-(۲x-[۲x]-۲)^۲$$

اکنون توجه کنید که

$$۰\leq۲x-[۲x]<۱\Rightarrow-۲\leq۲x-[۲x]-۲<-۱$$

$$۱<(۲x-[۲x]-۲)^۲\leq۴\Rightarrow-۴\leq-(۲x-[۲x]-۲)^۲<-۱$$

$$۰\leq۴-(۲x-[۲x]-۲)^۲<۳\Rightarrow۰\leq(gof)(x)<۳$$

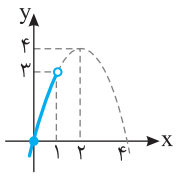
بنابراین برد تابع gof بازهٔ $[۰,۳)$ است.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$۰\leq۲x-[۲x]<۱\Rightarrow۰\leq f(x)<۱$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(t)=-t^۲+۴t,\quad ۰\leq t<۱$$

بنابراین نمودار تابع g به صورت زیر است و در نتیجه $۰\leq g(t)<۳$، یعنی $R_{gof}=[۰,۳)$



۱۰- گزینهٔ ۳ چون $g(x)=f^{-۱}(x)$، پس

$$g(۶)+g(۱۲)=f^{-۱}(۶)+f^{-۱}(۱۲)$$

از طرف دیگر، $f(x)=x+\sqrt{x}$، $f(۴)=۴+۲=۶$ و $f(۹)=۹+۳=۱۲$.

بنابراین $f^{-۱}(۶)=۴$ و $f^{-۱}(۱۲)=۹$ و در نتیجه حاصل عبارت خواسته شده برابر ۱۳ است.

۱۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم نمودار تابع $f^{-۱}$ در نقطهٔ $(a,-a)$ که $a>۰$ نیمساز ناحیهٔ چهارم را قطع کند. در این صورت $f^{-۱}(a)=-a$ و در نتیجه $f(-a)=a$. بنابراین

$$-a-\frac{۲}{-a}=a\Rightarrow۲a=\frac{۲}{a}\Rightarrow a^۲=۱\Rightarrow a=۱$$

راه‌حل دوم ابتدا تابع وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$y=x-\frac{۲}{x},\quad x<۰\Rightarrow y=\frac{x^۲-۲}{x}\Rightarrow xy=x^۲-۲\Rightarrow x^۲-yx-۲=۰$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{y+\sqrt{y^۲+۸}}{۲}>۰(\text{غ. ق. ق.})\\x=\dfrac{y-\sqrt{y^۲+۸}}{۲}\end{cases}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^۲+۸}}{۲}$. طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع $f^{-۱}$ با نیمساز ناحیهٔ دوم (خط $y=-x$) از حل معادلهٔ $f^{-۱}(x)=-x$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{x-\sqrt{x^۲+۸}}{۲}=-x\Rightarrow\sqrt{x^۲+۸}=۳x\quad(x>۰)$$

$$x^۲+۸=۹x^۲\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=۱,x=-۱\quad(\text{غ.ق.ق.})$$

۱۲- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\log_۴۳=\frac{۸}{۱۰}\Rightarrow\frac{۱}{۲}\log_۲۳=\frac{۴}{۵}\Rightarrow\log_۲۳=\frac{۸}{۵}$$

بنابراین

$$\log_{۱۲}۶=\frac{\log_۲۶}{\log_۲۱۲}=\frac{\log_۲۳+\log_۲۲}{\log_۲۳+۲\log_۲۲}=\frac{\frac{۸}{۵}+۱}{\frac{۸}{۵}+۲}=\frac{۱۳}{۱۸}$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\log_۴۳=۰/۸=\frac{۴}{۵}\Rightarrow۴^{\frac{۴}{۵}}=۳\Rightarrow۴^۴=۳^۵\Rightarrow۲^۸=۳^۵$$

(دقت کنید که این تساوی به صورت تقریبی داده شده است و تساوی درستی نیست.)

بنابراین

$$\log_{۱۲}۶=\log_{۱۲}۳+\log_{۱۲}۲=\log_{۲^۲\times۳}۳+\log_{۲^۲\times۳}۲$$

$$=۴\log_{(۲^۸\times۳^۴)}۳+۵\log_{(۲^{۱۰}\times۳^۵)}۲=۴\log_{(۳^۵\times۳^۴)}۳+۵\log_{(۲^{۱۰}\times۲^۸)}۲$$

$$=۴\log_{۳^۹}۳+۵\log_{۲^{۱۸}}۲=\frac{۴}{۹}\log_۳۳+\frac{۵}{۱۸}\log_۲۲=\frac{۴}{۹}+\frac{۵}{۱۸}=\frac{۱۳}{۱۸}$$

۱۳- گزینهٔ ۲ از نمودار تابع f معلوم است که $f(-\frac{۱}{۳})=۰$ و $f(۰)=-۲$. بنابراین

$$f(x)=-۴+۲^{ax+b}\Rightarrow\begin{cases}f(۰)=-۴+۲^{b}=-۲\\ f(-\frac{۱}{۳})=-۴+۲^{-\frac{a}{۳}+b}=۰\end{cases}$$

$$\begin{cases}۲^{b}=۲\Rightarrow b=۱\\ ۲^{-\frac{a}{۳}+۱}=۴\Rightarrow-\frac{a}{۳}+۱=۲\Rightarrow a=-۳\end{cases}$$

پس $f(x)=-۴+۲^{-۳x+۱}\Rightarrow f(-\frac{۵}{۳})=-۴+۲^{۶}=۶۰$

۱۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** فرض کنید $f^{-۱}(۲)=a>۰$. در این صورت $f(a)=۲$ و در نتیجه

$$\frac{۲^{a}+(\frac{۱}{۲})^{a}}{۲}=۲\Rightarrow ۲^{a}+\frac{۱}{۲^{a}}=۴$$

با فرض $b=۲^{a}>۰$ معادله به‌صورت زیر در می‌آید:

$$b+\frac{۱}{b}=۴\Rightarrow b^{۲}-۴b+۱=۰\Rightarrow b=۲+\sqrt{۳}, b=۲-\sqrt{۳}\ (\text{غ.ق.ق})$$

(اگر $b=۲-\sqrt{۳}$، آن‌گاه $a=\log_{۲}(۲-\sqrt{۳})<۰$ که با توجه به دامنهٔ داده شده قابل قبول نیست.) پس $۲^{a}=۲+\sqrt{۳}\Rightarrow a=\log_{۲}(۲+\sqrt{۳})$

راه‌حل دوم تابع وارون تابع $f(x)=\frac{۲^{x}+(\frac{۱}{۲})^{x}}{۲}$ با دامنهٔ $[۰,+\infty)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{۲^{x}+(\frac{۱}{۲})^{x}}{۲}\Rightarrow ۲y=۲^{x}+\frac{۱}{۲^{x}}$$

اگر فرض کنیم $t=۲^{x}>۰$، آن‌گاه

$$۲y=t+\frac{۱}{t}\Rightarrow t^{۲}-۲yt+۱=۰\Rightarrow t=y\pm\sqrt{y^{۲}-۱}\Rightarrow ۲^{x}=y\pm\sqrt{y^{۲}-۱}$$

چون $x\geq۰$، پس فقط $y+\sqrt{y^{۲}-۱}$ قابل قبول است. بنابراین

$$x=\log_{۲}(y+\sqrt{y^{۲}-۱})\Rightarrow f^{-۱}(x)=\log_{۲}(x+\sqrt{x^{۲}-۱})$$

در نتیجه $f^{-۱}(۲)=\log_{۲}(۲+\sqrt{۳})$.

۱۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\tan ۳۰۰^{\circ}=\tan(۳۶۰^{\circ}-۶۰^{\circ})=-\tan ۶۰^{\circ}=-\sqrt{۳}$$

$$\cos ۲۱۰^{\circ}=\cos(۱۸۰^{\circ}+۳۰^{\circ})=-\cos ۳۰^{\circ}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۴۸۰^{\circ}=\tan(۴۵۰^{\circ}+۳۰^{\circ})=\tan(۵\times۹۰^{\circ}+۳۰^{\circ})=-\cot ۳۰^{\circ}=-\sqrt{۳}$$

$$\sin ۸۴۰^{\circ}=\sin(۸۱۰^{\circ}+۳۰^{\circ})=\sin(۹\times۹۰^{\circ}+۳۰^{\circ})=\cos ۳۰^{\circ}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین

$$\tan ۳۰۰^{\circ}\cos ۲۱۰^{\circ}+\tan ۴۸۰^{\circ}\sin ۸۴۰^{\circ}$$
$$=(-\sqrt{۳})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})+(-\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۳}{۲}-\frac{۳}{۲}=۰$$

۱۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$y=a+b\sin(\frac{\pi}{۲}+x)=a+b\cos x$$

پس ماکزیمم تابع برابر $a+|b|$ است که با توجه به شکل برابر ۳ است. از طرف دیگر نمودار تابع از نقطهٔ $(\frac{۷\pi}{۳},۰)$ عبور می‌کند. پس

$$a+b\cos\frac{۷\pi}{۳}=۰\Rightarrow a+b\cos(۲\pi+\frac{\pi}{۳})=۰\Rightarrow a+b\cos\frac{\pi}{۳}=۰$$
$$a+\frac{b}{۲}=۰\Rightarrow a=-\frac{b}{۲}$$

بنابراین $a+|b|=۳\Rightarrow-\frac{b}{۲}+|b|=۳$

با توجه به نمودار تابع واضح است که b مقداری منفی است، پس

$$-\frac{b}{۲}-b=۳\Rightarrow b=-۲$$

۱۷- گزینهٔ ۴ حداکثر مقدار و حداقل مقدار تابع $y=a\sin(bx)+c$ به‌ترتیب برابر $|a|+c$ و $-|a|+c$ است که روی شکل برابر ۱ و ۳- نشان داده شده است. پس

$$\begin{cases}|a|+c=۱\\ -|a|+c=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=-۱\\ |a|=۲\end{cases}$$

از طرف دیگر، دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{۲\pi}{|b|}$ است که روی شکل برابر $\frac{۹\pi}{۲}-(-\frac{۳\pi}{۲})=۶\pi$ نشان داده شده است. پس

$$\frac{۲\pi}{|b|}=۶\pi\Rightarrow|b|=\frac{۱}{۳}$$

پس $|\frac{a}{b}|=\frac{۲}{\frac{۱}{۳}}=۶\Rightarrow\frac{a}{b}=\pm۶$

ولی چون نمودار رسم شده در یک همسایگی راست صفر نزولی است، a و b باید غیرهم‌علامت باشند، پس $\frac{a}{b}=-۶$.

۱۸- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\cos(x+\frac{\pi}{۴})\Rightarrow\sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۲}-x-\frac{\pi}{۴})$$
$$\sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۴}-x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}۲x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}-x\\ ۲x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}+x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}\\ x=(۲k+۱)\pi\end{cases}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

چون شرط $x\neq k\pi$ قرار داده شده است، پس $x=(۲k+۱)\pi$ قابل قبول نیست.

۱۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطهٔ $x=-۲$ تابع $y=[x]$ با تابع $y=-۳$ برابر است. بنابراین

$$\lim_{x\to(-۲)^{-}}\frac{[x]+۳}{x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^{-}}\frac{-۳+۳}{x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^{-}}۰=۰$$

۲۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x^n-12}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{4x^n}=\frac{1}{6}\Rightarrow\begin{cases}n=1\\ a=\frac{2}{3}\end{cases}$$

بنابراین **راه‌حل اول**

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x-12}=\frac{1}{12}\lim_{x\to3}\frac{2x-3\sqrt[3]{x^2-1}}{x-3}$$

$$=\frac{1}{12}\lim_{x\to3}\left(\frac{8x^3-27(x^2-1)}{x-3}\times\frac{1}{4x^2+6x\sqrt[3]{x^2-1}+9\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{12}\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(8x^2-3x-9)}{x-3}$$

$$\times\lim_{x\to3}\frac{1}{4x^2+6x\sqrt[3]{x^2-1}+9\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$$

$$=\frac{1}{12}\lim_{x\to3}(8x^2-3x-9)\times\frac{1}{36+36+36}$$

$$=\frac{1}{12}\times(72-9-9)\times\frac{1}{36\times3}=\frac{1}{24}$$

راه‌حل دوم به کمک قاعدهٔ هوپیتال مقدار حد خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x-12}=\lim_{x\to3}\frac{\frac{2}{3}-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{4}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}-\frac{2\times3}{3\times4}}{4}=\frac{1}{24}$$

۲۱- گزینهٔ ۳ چون تابع f در نقطهٔ $x=-2$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته نیز هست. بنابراین

$$f'_-(-2)=f'_+(-2),\quad f(-2)=\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}f(x)$$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{5-2x} & x\le-2\\ -\frac{1}{2}x^2+bx+c & x>-2\end{cases},\quad f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{\sqrt{5-2x}} & x\le-2\\ -x+b & x>-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'_-(-2)=-\frac{1}{\sqrt{5+4}}=-\frac{1}{3}\\ f'_+(-2)=-(-2)+b=b+2\end{cases}\Rightarrow b+2=-\frac{1}{3}\Rightarrow b=-\frac{7}{3}$$

$$\begin{cases}f(-2)=\sqrt{5+4}=3\\ \lim_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}(-\frac{1}{2}x^2+bx+c)=-2-2b+c=c+\frac{8}{3}\end{cases}$$

$$c+\frac{8}{3}=3\Rightarrow c=\frac{1}{3}$$

۲۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^3=\frac{x^2+2x}{(x^2-x)^3}=\frac{x(x+2)}{x^3(x-1)^3}=\frac{x+2}{x^2(x-1)^3}$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{x^2(x-1)^3-(2x(x-1)^3+3(x-1)^2x^2)(x+2)}{(x^2(x-1)^3)^2}$$

در نتیجه

$$f'(2)=\frac{4\times1^3-(4(1)^3+3(1)^2\times4)(4)}{(4(1)^3)^2}=-\frac{15}{4}$$

۲۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x+\sqrt{4x-x^2}\Rightarrow f'(x)=1+\frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}=\frac{\sqrt{4x-x^2}+2-x}{\sqrt{4x-x^2}}$$

واضح است که $x=0$ و $x=4$ نقاط بحرانی تابع‌اند ولی چون تابع f در یک همسایگی آن‌ها تعریف نمی‌شود، پس این نقاط اکسترمم نسبی تابع نیستند. بنابراین باید معادلهٔ $f'(x)=0$ را حل کنیم تا طول نقاط اکسترمم نسبی به‌دست آید:

$$\sqrt{4x-x^2}+2-x=0\Rightarrow\sqrt{4x-x^2}=x-2,\quad x>2$$

$$4x-x^2=x^2-4x+4\Rightarrow2x^2-8x+4=0$$

$$x^2-4x+2=0\Rightarrow x=2+\sqrt{2},\ x=2-\sqrt{2}\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین نقطهٔ $A(2+\sqrt{2},2+2\sqrt{2})$ نقطهٔ اکسترمم (ماکزیمم) نسبی تابع f است که فاصلهٔ آن از نیمساز ناحیهٔ اول برابر است با $\frac{|2+2\sqrt{2}-(2+\sqrt{2})|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$

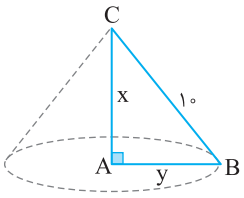
۲۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $x^2+y^2=10$. پس $y^2=10-x^2$. اگر مثلث را حول ضلع AC دوران دهیم، مخروطی به‌دست می‌آید که شعاع قاعدهٔ آن برابر y و ارتفاع آن برابر x است، پس حجم حاصل برابر $V=\frac{\pi}{3}y^2x$ خواهد بود. بنابراین می‌خواهیم حداکثر مقدار تابع $V(x)=\frac{\pi}{3}x(10-x^2)$ حاصل شود.

$$V(x)=\frac{\pi}{3}(10x-x^3)\Rightarrow V'(x)=\frac{\pi}{3}(10-3x^2)$$

$$V'(x)=0\Rightarrow x=\sqrt{\frac{10}{3}}\Rightarrow y^2=10-\frac{10}{3}\Rightarrow y=\sqrt{2}\sqrt{\frac{10}{3}}$$

بنابراین

$$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{10}{3}}}{\sqrt{\frac{10}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{1}$$

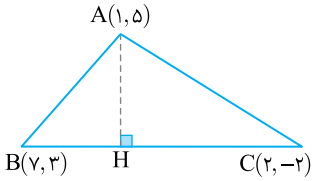


۲۵- گزینهٔ ۴ ابتدا معادلهٔ خط BC را به‌دست می‌آوریم:

$$m_{BC}=\frac{3-(-2)}{7-2}=1$$

$$y-y_B=m_{BC}(x-x_B)\Rightarrow y-3=1\times(x-7)$$

پس معادلهٔ خط BC به‌صورت $x-y-4=0$ است. طول ارتفاع AH برابر فاصلهٔ نقطهٔ A از خط BC است که برابر است با $\frac{|1-5-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$.



۲۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}}=\frac{۳\sqrt{۳}-۱}{۴+\sqrt{۳}}\times\frac{۴-\sqrt{۳}}{۴-\sqrt{۳}}=\frac{۱۲\sqrt{۳}-۹-۴+\sqrt{۳}}{۱۶-۳}$$
$$=\frac{۱۳\sqrt{۳}-۱۳}{۱۳}=\sqrt{۳}-۱$$

همچنین

$$(۲-\sqrt{۳})^{-۱}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴-۳}=۲+\sqrt{۳}$$

بنابراین

$$\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}}+(۲-\sqrt{۳})^{-۱}=\sqrt{۳}-۱+۲+\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}+۱$$

۲۷- گزینهٔ ۴ جملات سوم، هفتم و شانزدهم دنبالهٔ حسابی را به ترتیب a، $a+۴d$ و $a+۱۳d$ در نظر می‌گیریم. چون این اعداد جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی‌اند، پس

$$a(a+۱۳d)=(a+۴d)^۲\Rightarrow a^۲+۱۳ad=a^۲+۸ad+۱۶d^۲$$
$$۵ad=۱۶d^۲\Rightarrow a=\frac{۱۶}{۵}d$$

(توجه کنید که $d\neq۰$. چون در غیر این صورت، $q=۱$ که در گزینه‌ها وجود ندارد.) بنابراین قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با

$$r=\frac{a+۴d}{a}=\frac{\frac{۱۶}{۵}d+۴d}{\frac{۱۶}{۵}d}=\frac{۳۶d}{۱۶d}=\frac{۹}{۴}$$

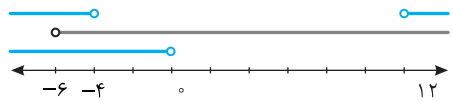
۲۸- گزینهٔ ۱ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-۴$ و $x+۲$ به ترتیب ۳ و ۱ است، پس $p(۴)=۳$ و $p(-۲)=۱$. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $A(x)=p(x^۲)+۴p(-x)$ بر $x-۲$ برابر $A(۲)$ است و برابر است با

$$A(۲)=p(۴)+۴p(-۲)=۳+۴\times۱=۷$$

۲۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون معادله دو جواب مثبت دارد، پس شرایط $\Delta>۰$، $\frac{c}{a}>۰$ و $-\frac{b}{a}>۰$ برقرار هستند. در اینجا $a=۲$، $b=m$ و $c=m+۶$. پس

$$\Delta=b^۲-۴ac=m^۲-۴\times۲(m+۶)>۰\Rightarrow m^۲-۸m-۴۸>۰$$
$$(m-۱۲)(m+۴)>۰\Rightarrow m>۱۲ \text{ یا } m<-۴ \quad (۱)$$
$$\frac{c}{a}>۰\Rightarrow\frac{m+۶}{۲}>۰\Rightarrow m>-۶ \quad (۲)$$
$$-\frac{b}{a}>۰\Rightarrow-\frac{m}{۲}>۰\Rightarrow m<۰ \quad (۳)$$

با توجه به شکل زیر، اشتراک مجموعهٔ جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) به صورت $m\in(-۶,-۴)$ است.



راه‌حل دوم توجه کنید که به ازای $m=-۵$ معادله به صورت $۲x^۲-۵x+۱=۰$ در می‌آید که به وضوح دو جواب مثبت دارد چون $\Delta=۱۷>۰$، $\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}>۰$ و $-\frac{b}{a}=\frac{۵}{۲}>۰$. پس گزینه‌های (۱) و (۲) جواب نیستند. از طرف دیگر به ازای $m=-۱$ معادله به صورت $۲x^۲-x+۵=۰$ در می‌آید که جواب ندارد، زیرا $\Delta=-۳۹<۰$. پس گزینهٔ (۳) هم جواب نیست و گزینهٔ (۴) جواب است.

۳۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۲x-۱}{x+۱}<۳\Rightarrow\frac{۲x-۱-۳x-۳}{x+۱}<۰\Rightarrow\frac{x+۴}{x+۱}>۰$$
$$x\in(-\infty,-۴)\cup(-۱,+\infty) \quad (۱)$$

$$\frac{۲x-۱}{x+۱}>-۱\Rightarrow\frac{۲x-۱+x+۱}{x+۱}>۰\Rightarrow\frac{۳x}{x+۱}>۰$$
$$x\in(-\infty,-۱)\cup(۰,+\infty) \quad (۲)$$

از اشتراک (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$x\in(-\infty,-۴)\cup(۰,+\infty)=\mathbb{R}-[-۴,۰]$$

راه‌حل دوم نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$-۱<\frac{۲x-۱}{x+۱}<۳\Rightarrow-۲<\frac{۲x-۱}{x+۱}-۱<۲\Rightarrow-۲<\frac{x-۲}{x+۱}<۲$$
$$|\frac{x-۲}{x+۱}|<۲\Rightarrow|x-۲|<۲|x+۱|\Rightarrow x^۲-۴x+۴<۴x^۲+۸x+۴$$
$$x^۲+۴x>۰\Rightarrow x\in(-\infty,-۴)\cup(۰,+\infty)$$

راه‌حل سوم واضح است که $x=۰$ در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینهٔ (۴) جواب نیست. از طرف دیگر، $x=-۵$ در نامعادله صدق می‌کند، پس گزینه‌های (۱) و (۲) جواب درست نیستند، بنابراین گزینهٔ (۳) جواب است.

۳۱- گزینهٔ ۲ چون رأس سهمی نقطهٔ $(-۱,۹)$ است، پس معادلهٔ آن به صورت $y=a(x+۱)^۲+۹$ است. این سهمی از نقطهٔ $(۳,۱)$ می‌گذرد، پس

$$۱=a(۳+۱)^۲+۹\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $y=-\frac{۱}{۲}(x+۱)^۲+۹$ است که از نقطهٔ $(۵,-۹)$ می‌گذرد:

$$-\frac{۱}{۲}(۵+۱)^۲+۹=-۱۸+۹=-۹$$

۳۲- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=x^۲-۲x, (x>۱)$ را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-x^۲+۲x$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار اخیر را شانزده واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=-x^۲+۲x+۱۶$ به‌دست می‌آید. نقطهٔ برخورد نمودار تابع اخیر و نمودار تابع اولیه به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x^۲-۲x=-x^۲+۲x+۱۶\Rightarrow x^۲-۲x-۸=۰$$
$$(x-۴)(x+۲)=۰\Rightarrow x=۴, x=-۲ \quad (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین باید فاصلهٔ نقطهٔ $A(۴,۸)$ از مبدأ مختصات را پیدا کنیم که برابر است با

$$OA=\sqrt{۴^۲+۸^۲}=۴\sqrt{۵}$$

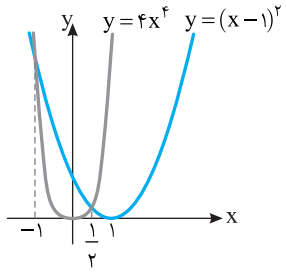
۳۳- گزینهٔ ۲ در نقاطی که طول آن‌ها عضو مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $(x-1)^2>4x^4$ باشد، نمودار تابع $y=(x-1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y=4x^4$ قرار دارد:

$$4x^4<(x-1)^2\Rightarrow(2x)^2-(x-1)^2<0\Rightarrow(2x^2+x-1)(2x^2-x+1)<0$$

عبارت $2x^2-x+1$ همواره مثبت است، زیرا $\Delta=1-8<0$. بنابراین باید نامعادلهٔ $2x^2+x-1<0$ را حل کنیم:

$$(x+1)(2x-1)<0\Rightarrow-1<x<\frac{1}{2}$$

در بازهٔ $(-1,\frac{1}{2})$ چنین اتفاقی می‌افتد. در نتیجه بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{1}{2}-(-1)=\frac{3}{2}$ است. توجه کنید که نمودار تابع‌های $y=(x-1)^2$ و $y=4x^4$ به صورت زیر است:



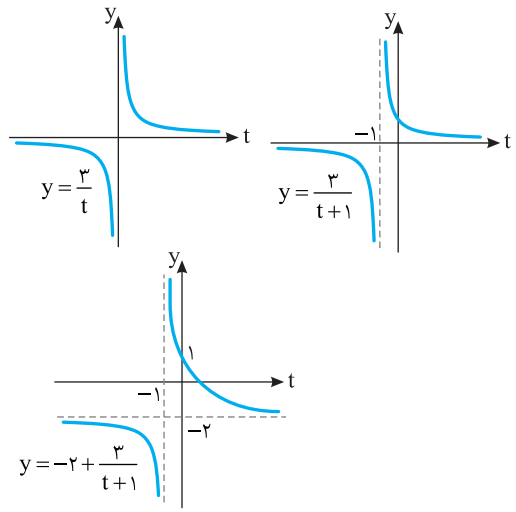
۳۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$0\le x-[x]<1\Rightarrow-1<[x]-x\le0\Rightarrow-1<f(x)\le0$$

بنابراین تابع gof با تابع $y=\frac{1-2t}{t+1}$ که دامنهٔ آن بازهٔ $(-1,0]$ است، برابر است. برد این تابع را به‌دست می‌آوریم:

راه‌حل اول نمودار تابع به صورت زیر رسم می‌شود:

$$y=\frac{1-2t}{t+1}=-2+\frac{3}{t+1}$$



واضح است که برد تابع gof بازهٔ $[1,+\infty)$ است.

راه‌حل دوم به کمک نابرابری‌ها برد تابع را به‌دست می‌آوریم: $y=-2+\frac{3}{t+1}$

$$-1<t\le0\Rightarrow0<t+1\le1\Rightarrow\frac{1}{t+1}\ge1\Rightarrow\frac{3}{t+1}\ge3\Rightarrow-2+\frac{3}{t+1}\ge1\Rightarrow y\ge1$$

بنابراین برد تابع بازهٔ $[1,+\infty)$ است. توجه کنید که به ازای هر $y\ge1$ مقداری مانند t وجود دارد که $y=-2+\frac{3}{t+1}$. این مقدار به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y+2=\frac{3}{t+1}\Rightarrow t+1=\frac{3}{y+2}\Rightarrow t=-1+\frac{3}{y+2}$$

راه‌حل سوم تابع $g(t)=\frac{1-2t}{t+1}$ روی بازهٔ $(-1,0]$ پیوسته و نزولی است. بنابراین برد آن برابر است با $[g(0),\lim\limits_{t\to(-1)^+}g(t))=[1,+\infty)$

۳۵- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$f(x)=x+2\sqrt{x}=(\sqrt{x}+1)^2-1$$

بنابراین تابع وارون تابع f به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y=(\sqrt{x}+1)^2-1\Rightarrow(\sqrt{x}+1)^2=y+1\quad(y\ge-1)$$

$$\sqrt{x}+1=\sqrt{y+1}\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{y+1}-1$$

$$x=(\sqrt{y+1}-1)^2\Rightarrow f^{-1}(x)=(\sqrt{x+1}-1)^2$$

بنابراین

$$g(x)=f^{-1}(x)=(\sqrt{x+1}-1)^2\quad(x\ge-1)$$

$$g(3)+g(15)=f^{-1}(3)+f^{-1}(15)=1+9=10$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$f(x)=x+2\sqrt{x}\Rightarrow\begin{cases}f(1)=3\Rightarrow f^{-1}(3)=1\\ f(9)=15\Rightarrow f^{-1}(15)=9\end{cases}$$

بنابراین

$$g(x)=f^{-1}(x)\Rightarrow g(3)+g(15)=f^{-1}(3)+f^{-1}(15)=1+9=10$$

۳۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا تابع وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$y=x-\frac{1}{2x},\quad x>0$$

$$y=\frac{2x^2-1}{2x}\Rightarrow2xy=2x^2-1\Rightarrow2x^2-2yx-1=0$$

$$\begin{cases}x=\frac{2y+\sqrt{4y^2+8}}{4}\\ x=\frac{2y-\sqrt{4y^2+8}}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{y+\sqrt{y^2+2}}{2}\\ x=\frac{y-\sqrt{y^2+2}}{2}<0\end{cases}\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین $f^{-1}(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+2}}{2}$

طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع f^{-1} با نیمساز ناحیهٔ دوم (خط $y=-x$) از حل معادلهٔ $f^{-1}(x)=-x$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{x+\sqrt{x^2+2}}{2}=-x\Rightarrow\sqrt{x^2+2}=-3x\quad(x<0)$$

$$x^2+2=9x^2\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\frac{1}{2}\ (\text{غ.ق.ق}),\ x=-\frac{1}{2}$$

راه‌حل دوم فرض کنید نقطهٔ $(a,-a)$ نقطهٔ برخورد نمودار تابع f^{-1} با خط $y=-x$ (نیمساز ناحیهٔ دوم) باشد $(a<0)$. بنابراین

$$f^{-1}(a)=-a\Rightarrow f(-a)=a\Rightarrow -a-\frac{1}{-2a}=a$$

$$2a=\frac{1}{2a}\Rightarrow 4a^2=1\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

۳۷- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که $\log_3 2=\frac{5}{8}$، پس $\log_2 3=\frac{8}{5}$. بنابراین

$$\log_{18} 8=\frac{\log_2 8}{\log_2 18}=\frac{3\log_2 2}{\log_2 9+\log_2 2}=\frac{3}{2\log_2 3+1}=\frac{3}{2\times\frac{8}{5}+1}=\frac{5}{7}$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\log_3 2=\frac{5}{8}\Rightarrow 3^{\frac{5}{8}}=2\Rightarrow 3^5=2^8\Rightarrow 3^{10}=2^{16}$$

(دقت کنید که این تساوی به صورت تقریبی داده شده است و تساوی درستی نیست.)

بنابراین

$$\log_{18} 8=\log_{3^2\times 2} 2^3=3\log_{3^2\times 2} 2=3\times 5\log_{3^{10}\times 2^5} 2$$

$$=15\log_{2^{16}\times 2^5} 2=15\log_{2^{21}} 2=\frac{15}{21}\log_2 2=\frac{5}{7}$$

۳۸- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار تابع واضح است که $f(0)=-6$ و $f(\frac{1}{2})=0$. بنابراین

$$f(x)=-9+(\frac{1}{3})^{ax+b}$$

$$\begin{cases} f(0)=-9+(\frac{1}{3})^b=-6 \\ f(\frac{1}{2})=-9+(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}a+b}=0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} 3^{-b}=3\Rightarrow b=-1 \\ 3^{-\frac{a}{2}+1}=9\Rightarrow -\frac{a}{2}+1=2\Rightarrow a=-2 \end{cases}$$

پس

$$f(x)=-9+(\frac{1}{3})^{-2x-1}\Rightarrow f(2)=-9+(\frac{1}{3})^{-5}=234$$

۳۹- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** تابع وارون تابع $f(x)=\frac{2^x-(\frac{1}{2})^x}{2}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{2^x-(\frac{1}{2})^x}{2}\Rightarrow 2y=2^x-\frac{1}{2^x}$$

اگر فرض کنیم $t=2^x>0$، آن‌گاه

$$2y=t-\frac{1}{t}\Rightarrow t^2-2yt-1=0\Rightarrow \begin{cases} t=y+\sqrt{y^2+1} \\ t=y-\sqrt{y^2+1}<0 \quad (\text{غ.ق.ق.}) \end{cases}$$

$$2^x=y+\sqrt{y^2+1}\Rightarrow x=\log_2(y+\sqrt{y^2+1})$$

بنابراین

$$f^{-1}(x)=\log_2(x+\sqrt{x^2+1})\Rightarrow f^{-1}(2)=\log_2(2+\sqrt{5})$$

راه‌حل دوم فرض کنید $f^{-1}(2)=a$. پس $f(a)=2$ و در نتیجه

$$\frac{2^a-(\frac{1}{2})^a}{2}=2\Rightarrow 2^a-\frac{1}{2^a}=4\Rightarrow (2^a)^2-4\times 2^a-1=0$$

اگر فرض کنیم $2^a=b>0$، آن‌گاه

$$b^2-4b-1=0\Rightarrow b=2+\sqrt{5}, b=2-\sqrt{5}<0 \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین

$$2^a=2+\sqrt{5}\Rightarrow a=\log_2(2+\sqrt{5})$$

۴۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\tan 285^\circ=\tan(270^\circ+15^\circ)=-\cot 15^\circ$$

$$\tan(-165^\circ)=\tan(-180^\circ+15^\circ)=\tan 15^\circ$$

$$\sin 1095^\circ=\sin(1080^\circ+15^\circ)=\sin(6\times 180^\circ+15^\circ)=\sin 15^\circ$$

$$\cos 255^\circ=\cos(270^\circ-15^\circ)=-\sin 15^\circ$$

بنابراین

$$\tan 285^\circ\tan(-165^\circ)-\sin 1095^\circ\cos 255^\circ$$

$$=(-\cot 15^\circ)(\tan 15^\circ)-(\sin 15^\circ)(-\sin 15^\circ)$$

$$=-1+\sin^2 15^\circ=-\cos^2 15^\circ$$

۴۱- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل معلوم است که نمودار تابع $f(x)=a+b\sin(x+\frac{\pi}{3})$ از نقطهٔ $(\frac{\pi}{2},0)$ می‌گذرد و حداکثر مقدار آن برابر $\frac{3}{2}$ است. پس

$$f(\frac{\pi}{2})=0\Rightarrow a+b\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3})=0\Rightarrow a+b\cos\frac{\pi}{3}=0$$

$$a+\frac{b}{2}=0\Rightarrow a=-\frac{b}{2}$$

$$a+|b|=\frac{3}{2}\Rightarrow -\frac{b}{2}+|b|=\frac{3}{2}$$

همچنین با توجه به وضعیت نمودار واضح است که b باید منفی باشد. پس

$$-\frac{b}{2}-b=\frac{3}{2}\Rightarrow b=-1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

۴۲- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار واضح است که کمترین مقدار تابع برابر -3 است، پس $-|a|+c=-3$. از طرف دیگر نمودار تابع از نقطهٔ $(\frac{\pi}{6},1)$ عبور می‌کند، پس $a\sin(\frac{b\pi}{6})+c=1$. همچنین دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}$ است. پس $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{3}$ و در نتیجه $|b|=3$. با توجه به نمودار معلوم است که a و b باید هم‌علامت باشند، پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول اگر a و b مثبت باشند، آن‌گاه $b=3$ و در نتیجه

$$\begin{cases} -a+c=-3 \\ a\sin\frac{\pi}{2}+c=1 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} -a+c=-3 \\ a+c=1 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ c=-1 \end{cases}$$

حالت دوم اگر a و b منفی باشند، آن‌گاه $b=-3$ و در نتیجه

$$\begin{cases} a+c=-3 \\ a\sin(\frac{-\pi}{2})+c=1 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a+c=-3 \\ -a+c=1 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ c=-1 \end{cases}$$

۴۳- گزینهٔ ۳ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$۴\sin ۳x\cos ۳x=۱\Rightarrow ۲\sin ۶x=۱\Rightarrow \sin ۶x=\sin\frac{\pi}{۶}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} ۶x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ ۶x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶} \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳۶} \\ x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{۵\pi}{۳۶} \end{cases},\quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,\frac{\pi}{۲})$ به‌ازای $k=۰$ و $k=۱$ حاصل می‌شوند:

$$x=\frac{\pi}{۳۶},x=\frac{۵\pi}{۳۶},x=\frac{۱۳\pi}{۳۶},x=\frac{۱۷\pi}{۳۶}$$

بنابراین معادله در بازهٔ $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ چهار جواب دارد.

۴۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $x\neq\frac{\pi}{۲}$، آن‌گاه

$$\frac{۲\sin^۲x-\sin x-۱}{\cos^۲x}=\frac{(\sin x-۱)(۲\sin x+۱)}{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}=\frac{-۲\sin x-۱}{۱+\sin x}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{-۲\sin x-۱}{۱+\sin x}=\frac{-۲-۱}{۱+۱}=-\frac{۳}{۲}$$

برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۲}$ پیوسته باشد، باید

$$f(\frac{\pi}{۲})=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} f(x)\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

۴۵- گزینهٔ ۲ چون حد تابع f در بی‌نهایت برابر ۲ شده است، پس درجهٔ چندجمله‌ای صورت کسر $f(x)$ با درجهٔ چندجمله‌ای مخرج آن برابر است. اکنون دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد.

حالت اول $a=۰$ و $n=۲$. در این صورت

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{۴x^۲-۶x^۲+۱}{۷x^۲-۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{-۲x^۲}{۷x^۲}=-\frac{۲}{۷}$$

بنابراین حالت اول قابل قبول نیست.

حالت دوم $n=۳$ و $a\neq۰$. در این صورت

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{۴x^۳-۶x^۲+۱}{ax^۳+۷x^۲-۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{۴x^۳}{ax^۳}=\frac{۴}{a}=۲\Rightarrow a=۲$$

بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} f(x)=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{۴x^۳-۶x^۲+۱}{۲x^۳+۷x^۲-۲}=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{(۲x-۱)(۲x^۲-۲x-۱)}{(۲x-۱)(x^۲+۴x+۲)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{۲x^۲-۲x-۱}{x^۲+۴x+۲}=\frac{-\frac{۳}{۲}}{\frac{۱۷}{۴}}=-\frac{۶}{۱۷}$$

۴۶- گزینهٔ ۴ سؤال با این ادبیات دارای بی‌شمار جواب است. کافی است معادلهٔ دو خط را که از نقطهٔ $A(۲,m)$ می‌گذرند، بنویسیم که هر کدام بر نمودار یکی از تابع‌های داده شده مماس باشند. بی‌شمار نقطهٔ مانند A می‌توان پیدا کرد و بی‌شمار مقدار برای a و b وجود دارد. ولی احتمالاً منظور طراح سؤال این بوده که نمودار دو تابع $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ و $g(x)=ax^۲+bx$ از نقطهٔ $(۲,m)$ بگذرند و یک خط در این نقطه بر هر دو نمودار مماس باشد. در این صورت

$$f(۲)=g(۲)\Rightarrow ۴=۴a+۲b\Rightarrow ۴a=۴-۲b$$

$$f'(۲)=g'(۲)\Rightarrow -۳=۴a+b\Rightarrow ۴a=-۳-b$$

بنابراین

$$۴-۲b=-۳-b\Rightarrow b=۷$$

توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۳}{(x-۱)^۲}$$

$$g(x)=ax^۲+bx\Rightarrow g'(x)=۲ax+b$$

۴۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\sqrt[۳]{(\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵})^۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲(\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵})'}{۳\sqrt[۳]{\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵}}}$$

از طرف دیگر،

$$y=\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵}\Rightarrow y'=\frac{(۲-۲x)(۳x+۵)-۳(۲x-x^۲)}{(۳x+۵)^۲}$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{۲((۲-۲x)(۳x+۵)-۳(۲x-x^۲))}{۳(۳x+۵)^۲\sqrt[۳]{\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵}}}$$

$$f'(-۲)=\frac{۲((۲+۴)(-۶+۵)-۳(-۴-۴))}{۳(-۶+۵)^۲\sqrt[۳]{\frac{-۴-۴}{-۶+۵}}}=۶$$

۴۸- گزینهٔ ۱ ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x^۲+۲x-۳}{x^۲+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{(۲x+۲)(x^۲+۱)-۲x(x^۲+۲x-۳)}{(x^۲+۱)^۲}$$

$$=\frac{-۲(x^۲-۴x-۱)}{(x^۲+۱)^۲}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x^۲-۴x-۱=۰\Rightarrow x=۲+\sqrt{۵},x=۲-\sqrt{۵}$$

اکنون به جدول تعیین علامت $f'(x)$ توجه کنید:

x	$-\infty$		$۲-\sqrt{۵}$		$۲+\sqrt{۵}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
			min		max		

بنابراین $x=۲+\sqrt{۵}$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است. مقدار ماکزیمم نسبی تابع f برابر است با

$$f(۲+\sqrt{۵})=\frac{(۲+\sqrt{۵})^۲+۲(۲+\sqrt{۵})-۳}{(۲+\sqrt{۵})^۲+۱}=\frac{۴+۵+۴\sqrt{۵}+۴+۲\sqrt{۵}-۳}{۴+۵+۴\sqrt{۵}+۱}$$

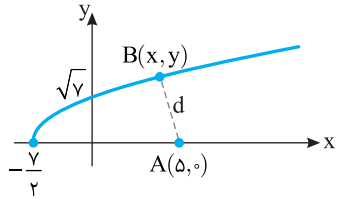
$$=\frac{۶\sqrt{۵}+۱۰}{۴\sqrt{۵}+۱۰}=\frac{۳\sqrt{۵}+۵}{۲\sqrt{۵}+۵}\times\frac{۲\sqrt{۵}-۵}{۲\sqrt{۵}-۵}$$

$$=\frac{۳۰-۱۵\sqrt{۵}+۱۰\sqrt{۵}-۲۵}{۲۰-۲۵}=\frac{۵-۵\sqrt{۵}}{-۵}=\sqrt{۵}-۱$$

۴۹- گزینهٔ ۱ مطابق شکل زیر فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ B روی نمودار تابع $y=\sqrt{2x+7}$ برابر است با

$$d=\sqrt{(x-5)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(\sqrt{2x+7}-0)^2}$$
$$=\sqrt{x^2-10x+25+2x+7}=\sqrt{x^2-8x+32}$$

کمترین مقدار عبارت $x^2-8x+32$ به‌ازای $x=4$ به‌دست می‌آید که برابر ۱۶ است. پس کمترین مقدار d برابر ۴ است.



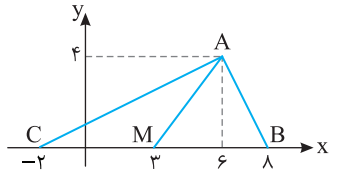
۵۰- گزینهٔ ۲ ابتدا رئوس مثلث را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases} y=0 \\ 2y-x=2 \end{cases} \Rightarrow x=-2, \quad \begin{cases} y=0 \\ y+2x=16 \end{cases} \Rightarrow x=8$$

$$\begin{cases} 2y-x=2 \\ y+2x=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$$

پس مثلث مورد نظر به صورت زیر است و اندازهٔ میانهٔ AM را می‌خواهیم.

چون M نقطهٔ $(3,0)$ است، پس $AM=\sqrt{(6-3)^2+(4-0)^2}=\sqrt{9+16}=5$



۵۱- گزینهٔ ۳ باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ برابر ۸ است، پس $P(1)=8$. باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $2x+1$ برابر ۵ است، پس $P(-\frac{1}{2})=5$.

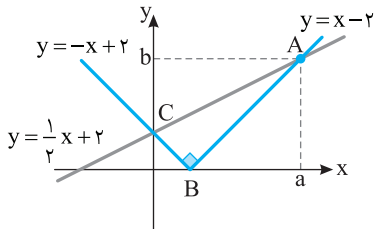
باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $2x^2-x-1$ یک چندجمله‌ای درجهٔ اول به‌صورت $ax+b$ است. بنابراین

$$P(x)=(2x^2-x-1)Q(x)+ax+b=(x-1)(2x+1)Q(x)+ax+b$$

$$\begin{cases} P(1)=a+b=8 \\ P(-\frac{1}{2})=-\frac{a}{2}+b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=6 \end{cases}$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $2x^2-x-1$ برابر $2x+6$ است.

۵۲- گزینهٔ ۴ نمودار دو تابع $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}=|x-2|$ و $g(x)=\frac{1}{2}x+2$ به‌صورت زیر است. مطابق شکل داده شده مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC مد نظر است.



$$x-2=\frac{1}{2}x+2 \Rightarrow x=8 \Rightarrow a=8 \Rightarrow b=8-2=6$$

بنابراین رئوس مثلث نقاط $A(8,6)$، $B(2,0)$ و $C(0,2)$ هستند. پس

$$AB=\sqrt{(8-2)^2+(6-0)^2}=6\sqrt{2}, \quad BC=\sqrt{(2-0)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}$$

پس مساحت مثلث ABC برابر است با

$$S=\frac{1}{2}AB\times BC=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=12$$

۵۳- گزینهٔ ۱ فرض کنید $(g^{-1}of^{-1})(20)=a$، بنابراین

$$g^{-1}(f^{-1}(20))=a \Rightarrow g(a)=f^{-1}(20) \Rightarrow f(g(a))=20$$

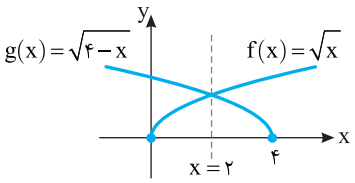
واضح است که $f(16)=20$، زیرا

$$f(x)=x+\sqrt{x} \Rightarrow f(16)=16+\sqrt{16}=16+4=20$$

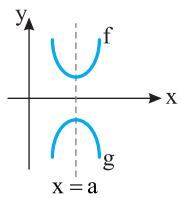
پس $f^{-1}(20)=16$. بنابراین

$$g(a)=16 \Rightarrow \frac{9a+6}{1-a}=16 \Rightarrow 9a+6=16-16a \Rightarrow a=\frac{2}{5}$$

۵۴- گزینهٔ ۳ اگر قرینهٔ نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نسبت به محور y را رسم کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-x}$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار جدید را چهار واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-(x-4)}$ به‌دست می‌آید. بنابراین نمودار دو تابع اولیه و نهایی به‌صورت زیر است. با توجه به شکل معلوم است که نمودار تابع g قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $x=2$ است.



توجه ادبیات سؤال ایراد دارد چون پرسیده شده است: «منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط متقارن هستند؟» این سؤال یعنی نمودار توابع f و g هر دو نسبت به خط $x=a$ متقارن هستند و مقدار a چند است؟ (شکل زیر را ببینید) در حالی که مقصود طراح این بوده است که قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $x=a$ نمودار تابع g می‌شود و a چند است؟ از طرف دیگر سؤال خارج از مباحث کتاب درسی است. چیزی که سؤال پرسیده مثلاً این طوری می‌شود:



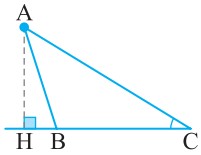
۵۵- گزینهٔ ۴ ابتدا $\cot\hat{C}$ را با معلوم بودن $\sin\hat{C}$ به‌دست می‌آوریم:

$$1+\cot^2\hat{C}=\frac{1}{\sin^2\hat{C}} \Rightarrow 1+\cot^2\hat{C}=\frac{169}{25}$$

$$\cot^2\hat{C}=\frac{144}{25} \Rightarrow \cot\hat{C}=\frac{12}{5}$$

بنابراین در مثلث AHC می‌توان نوشت:

$$\cot\hat{C}=\frac{CH}{AH} \Rightarrow \frac{12}{5}=\frac{9}{AH} \Rightarrow AH=3/75$$



۵۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A=\cos(\frac{11\pi}{4}+\alpha)=\cos(3\pi-\frac{\pi}{4}+\alpha)=-\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})$$

$$=-(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

از طرف دیگر، $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$، پس

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{2}{100}=\frac{49}{50}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{-7}{5\sqrt{2}}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

توجه کنید که انتهای کمان نظیر زاویهٔ α در ربع دوم قرار دارد و $\cos\alpha$ منفی است. در نتیجه $A=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{10}-\frac{7\sqrt{2}}{10})=\frac{3}{5}$.

۵۷- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\tan 3x\tan x=1\Rightarrow\tan 3x=\frac{1}{\tan x}=\cot x$$

$$\tan 3x=\tan(\frac{\pi}{2}-x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$3x=k\pi+\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}=(2k+1)\frac{\pi}{8}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $[\pi,2\pi]$ را تعیین می‌کنیم:

$$k=4\Rightarrow x=\frac{9\pi}{8},\quad k=5\Rightarrow x=\frac{11\pi}{8}$$

$$k=6\Rightarrow x=\frac{13\pi}{8},\quad k=7\Rightarrow x=\frac{15\pi}{8}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله در بازهٔ $[\pi,2\pi]$ برابر 6π است. توجه کنید که به ازای هیچ‌یک از جواب‌ها، مقدار $\tan x$ برابر صفر نیست.

۵۸- گزینهٔ ۳ تعداد اعداد واقع در نوزده دستهٔ اول برابر است با:

$$1+2+\cdots+19=\frac{19\times20}{2}=190$$

بنابراین عدد اول دستهٔ بیستم ۱۹۱ و عدد آخر آن ۲۱۰ است. مجموع این اعداد برابر است با $\frac{20}{2}(191+210)=4010$.

۵۹- گزینهٔ ۱ مقدار جرم باقی‌مانده در بازه‌های زمانی ۳۰ روزهٔ متوالی به‌صورت زیر است.

- در ابتدا $a=24$ گرم موجود است.
- پس از ۳۰ روز مقدار باقی‌مانده برابر است با

$$a-\frac{1}{10}a=\frac{9}{10}a$$

- پس از ۳۰ روز دیگر مقدار باقی‌مانده برابر است با

$$\frac{9}{10}a-\frac{1}{10}(\frac{9}{10}a)=\frac{81}{100}a=(\frac{9}{10})^2a$$

- پس از ۳۰ روز دیگر مقدار باقی‌مانده برابر $(\frac{9}{10})^3a$ خواهد بود.

بنابراین پس از n بازهٔ زمانی ۳۰ روزه مقدار باقی‌مانده از جرم برابر است با

$$(\frac{9}{10})^na=24(\frac{9}{10})^n$$

چون ۸ گرم از ماده قرار است باقی بماند، پس

$$24(\frac{9}{10})^n=8\Rightarrow(\frac{9}{10})^n=\frac{1}{3}\Rightarrow(\frac{10}{9})^n=3$$

$$n=\log_{\frac{10}{9}}3=\frac{1}{\log_3(\frac{10}{9})}=\frac{1}{\log_3 10-\log_3 9}=\frac{1}{\frac{1}{\log 3}-2}=\frac{1}{\frac{100}{48}-2}=12$$

پس برای باقی‌ماندن ۸ گرم از این عنصر ۱۲ تا ۳۰ روز طی می‌شود که برابر ۳۶۰ روز است.

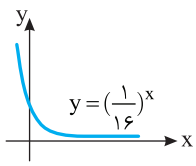
۶۰- گزینهٔ ۱ این سؤال مربوط به حد دنباله‌هاست که خارج از مباحث کتاب درسی است ولی تا حد امکان سعی می‌کنیم با کمک مطالب موجود در کتاب درسی به آن توضیح دهیم. ابتدا توجه کنید که

$$\frac{2^{2n+1}-2^{1-2n}}{2^{2n+1}+3\times2^{1-2n}}=\frac{2\times2^{2n}-2\times2^{-2n}}{2\times2^{2n}+3\times2\times2^{-2n}}=\frac{2^{2n}-2^{-2n}}{2^{2n}+3\times2^{-2n}}$$

$$=\frac{1-2^{-4n}}{1+3\times2^{-4n}}=\frac{1-(\frac{1}{16})^n}{1+3(\frac{1}{16})^n}$$

از طرف دیگر با توجه به نمودار تابع $y=(\frac{1}{16})^x$ واضح است که $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{16})^x=0$. بنابراین حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-(\frac{1}{16})^n}{1+3(\frac{1}{16})^n}=\frac{1-0}{1-3\times0}=1$$



۶۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to1}\frac{(2x+5)-7\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+1}}=\lim_{x\to1}(\frac{(2x+5)^2-49x}{4x^2-(3x+1)}\times\frac{2x+\sqrt{3x+1}}{(2x+5)+7\sqrt{x}})$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{4x^2-29x+25}{4x^2-3x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{2x+\sqrt{3x+1}}{(2x+5)+7\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(4x-25)}{(x-1)(4x+1)}\times\frac{2+2}{2+5+7}$$

$$=\frac{4}{14}\lim_{x\to1}\frac{4x-25}{4x+1}=\frac{2}{7}\times(-\frac{21}{5})=-1/2$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to1}\frac{2x+5-7\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+1}}=\lim_{x\to1}\frac{2-\frac{7}{2\sqrt{x}}}{2-\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}}=\frac{2-\frac{7}{2}}{2-\frac{3}{2\times2}}=-1/2$$

۶۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که تابع f به‌صورت زیر است:

$$|x-1|<1\Rightarrow-1<x-1<1\Rightarrow0<x<2$$

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)[x] & 0<x<2\\ x^2+ax+b & x\le0\text{ یا }x\ge2\end{cases}$$

چون تابع f در نقاط $x=۰$ و $x=۲$ پیوسته است، پس

$$f(۰)=\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^+} f(x)$$

$$b=\lim_{x\to ۰^-}(x^۲+ax+b)=\lim_{x\to ۰^+}((x-۱)[x])\Rightarrow b=۰$$

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)$$

$$۴+۲a+b=\lim_{x\to ۲^+}(x^۲+ax+b)=\lim_{x\to ۲^-}((x-۱)[x])$$

$$۴+۲a=(۲-۱)\times ۱\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

۶۳- گزینهٔ ۱ چون خط $y=-۱$ مجانب افقی نمودار تابع f است، پس

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=-۱\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-۲x^۲+۳x}{ax^۲+bx+c}=-۱\Rightarrow\frac{-۲}{a}=-۱\Rightarrow a=۲$$

بنابراین $f(x)=\frac{-۲x^۲+۳x}{۲x^۲+bx+c}$. چون خطوط $x=۱$ و $x=-۲$ مجانب‌های قائم نمودار تابع f هستند، پس $x=۱$ و $x=-۲$ ریشه‌های چندجمله‌ای $۲x^۲+bx+c$ هستند. پس

$$۲x^۲+bx+c=۲(x-۱)(x+۲)=۲x^۲+۲x-۴\Rightarrow b=۲, c=-۴$$

در نتیجه $f(x)=\frac{-۲x^۲+۳x}{۲x^۲+۲x-۴}\Rightarrow f(-۱)=\frac{-۲-۳}{۲-۲-۴}=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$

۶۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$g(x)=f(\sqrt{۱+\tan^۲ x})\Rightarrow g'(x)=(\sqrt{۱+\tan^۲ x})'f'(\sqrt{۱+\tan^۲ x})$$

$$g'(x)=\frac{۲\tan x(۱+\tan^۲ x)}{۲\sqrt{۱+\tan^۲ x}}f'(\sqrt{۱+\tan^۲ x})$$

بنابراین

$$g'(\frac{\pi}{۳})=\frac{۲\sqrt{۳}(۱+۳)}{۲\sqrt{۱+۳}}f'(\sqrt{۱+۳})\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲\sqrt{۳}\,f'(۲)\Rightarrow f'(۲)=\frac{۱}{۴}$$

۶۵- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۵,۶]$ برابر است با

$$\frac{f(۶)-f(۵)}{۶-۵}=\frac{۳-۴}{۱}=-۱$$

از طرف دیگر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع در نقطهٔ x برابر $f'(x)$ است.

$$f(x)=\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۲x+۴}{۲\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}}=\frac{-x+۲}{\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}}$$

بنابراین

$$\frac{-x+۲}{\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}}=-۱\quad(*)\Rightarrow ۲۱-x^۲+۴x=(x-۲)^۲$$

$$۲۱-x^۲+۴x=x^۲+۴-۴x\Rightarrow ۲x^۲-۸x-۱۷=۰$$

$$x=۲+\frac{۵\sqrt{۲}}{۲},\quad x=۲-\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}\text{(غ.ق.ق.)}$$

توجه کنید که طبق معادلهٔ $(*)$ مقدار x باید بیشتر از ۲ باشد.

۶۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{۵x-۴}{\sqrt{x}}=۵\sqrt{x}-\frac{۴}{\sqrt{x}}\Rightarrow f(۴)=۵\times ۲-\frac{۴}{۲}=۸$$

$$f'(x)=\frac{۵}{۲\sqrt{x}}+\frac{۲}{x\sqrt{x}}\Rightarrow m=f'(۴)=\frac{۵}{۴}+\frac{۲}{۸}=\frac{۳}{۲}$$

معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(۴,۸)$ با شیب $\frac{۳}{۲}$ می‌گذرد، به‌صورت زیر است:

$$y-۸=\frac{۳}{۲}(x-۴)\Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x+۲$$

اگر قرار دهیم $x=۰$، عرض نقطهٔ تقاطع با محور y برابر ۲ به‌دست می‌آید.

۶۷- گزینهٔ ۴ چون $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲+۳x-۱=۰$ هستند، پس مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها معلوم است:

$$\tan\alpha+\tan\beta=-\frac{۳}{۲},\quad \tan\alpha\tan\beta=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{۳}{۲}}{۱-(-\frac{۱}{۲})}=-۱$.

۶۸- گزینهٔ ۱ چندجمله‌ای $P(x)$ بر $۲x-۱$ بخش‌پذیر است. پس $P(\frac{۱}{۲})=۰$. بنابراین

$$P(\frac{۱}{۲})=۲(\frac{۱}{۲})^۴+a(\frac{۱}{۲})^۳+۲(\frac{۱}{۲})^۲-۳(\frac{۱}{۲})=۰\Rightarrow a=۷$$

$$P(x)=۲x^۴+۷x^۳+۲x^۲-۳x$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+۲$ برابر است با

$$P(-۲)=۲(-۲)^۴+۷(-۲)^۳+۲(-۲)^۲-۳(-۲)=-۱۰$$

۶۹- گزینهٔ ۴ طول نقاط تقاطع نمودار تابع‌های $f(x)=|x-۲|+|x+۱|$ و $g(x)=x+۷$ از معادلهٔ $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید. پس

$$f(x)=g(x)\Rightarrow|x-۲|+|x+۱|=x+۷$$

$$x\geq ۲\Rightarrow x-۲+x+۱=x+۷\Rightarrow x=۸$$

$$-۱\leq x\leq ۲\Rightarrow -x+۲+x+۱=x+۷\Rightarrow x=-۴\text{ (غ.ق.ق.)}$$

$$x\leq -۱\Rightarrow -x+۲-x-۱=x+۷\Rightarrow x=-۲$$

بنابراین $A(۸,۱۵)$ و $B(-۲,۵)$ نقاط تقاطع هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با $AB=\sqrt{(۸+۲)^۲+(۱۵-۵)^۲}=۱۰\sqrt{۲}$

۷۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** فرض کنید $(f^{-۱}\,og^{-۱})(-۹)=a$، پس

$$f^{-۱}(g^{-۱}(-۹))=a\Rightarrow f(a)=g^{-۱}(-۹)$$

$$a\geq ۲\Rightarrow a^۲-۴a+۹=g^{-۱}(-۹)$$

$$g(a^۲-۴a+۹)=-۹\Rightarrow\frac{۳-(a^۲-۴a+۹)}{۲}=-۹$$

$$a^۲-۴a-۱۲=۰\Rightarrow(a-۶)(a+۲)=۰\Rightarrow a=۶\ ,\ a=-۲\text{ (غ.ق.ق.)}$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$y=f(x)=x^۲-۴x+۹\Rightarrow y=(x-۲)^۲+۵\Rightarrow y-۵=(x-۲)^۲$$

$$|x-۲|=\sqrt{y-۵}\xrightarrow{x\geq ۲}x-۲=\sqrt{y-۵}$$

$$x=۲+\sqrt{y-۵}\Rightarrow f^{-۱}(x)=۲+\sqrt{x-۵}$$

از طرف دیگر،

$$y=g(x)=\frac{۳-x}{۲}\Rightarrow ۲y=۳-x\Rightarrow x=۳-۲y\Rightarrow g^{-۱}(x)=۳-۲x$$

بنابراین

$$(f^{-۱}og^{-۱})(-۹)=f^{-۱}(g^{-۱}(-۹))=f^{-۱}(۳-۲(-۹))$$

$$=f^{-۱}(۲۱)=۲+\sqrt{۲۱-۵}=۶$$

۷۱- گزینهٔ ۲ اگر بخواهیم قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=(x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم، ابتدا باید آن را نسبت به محور x سپس نسبت به محور y قرینه کنیم (یا ابتدا نسبت به محور y سپس نسبت به محور x قرینه کنیم). ضابطهٔ این تابع به صورت $y=-f(-x)$ خواهد بود. اگر این نمودار را چهار واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $g(x)=-f(-x)+4$ رسم می‌شود. طول نقاط تلاقی نمودار تابع‌های f و g از معادلهٔ $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow(x-1)^2=-(-x-1)^2+4$$

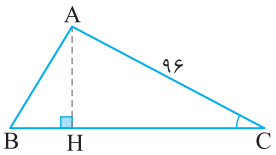
$$x^2-2x+1=-x^2-2x-1+4\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1$$

۷۲- گزینهٔ ۳ ابتدا از $1+\cot^2\hat{C}=\frac{1}{\sin^2\hat{C}}$ مقدار $\sin\hat{C}$ را به‌دست می‌آوریم:

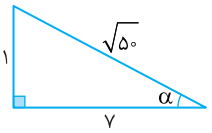
$$1+(\frac{\sqrt{5}}{2})^2=\frac{1}{\sin^2\hat{C}}\Rightarrow\sin^2\hat{C}=\frac{4}{9}\Rightarrow\sin\hat{C}=\frac{2}{3}$$

بنابراین

$$\triangle AHC:\sin\hat{C}=\frac{AH}{AC}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{AH}{96}\Rightarrow AH=64$$



۷۳- گزینهٔ ۱ با توجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل که در آن $\tan\alpha=\frac{1}{7}$،



نتیجه می‌شود

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{50}},\quad \cos\alpha=\frac{7}{\sqrt{50}}$$

بنابراین

$$\sin(\frac{13\pi}{4}+\alpha)=\sin(3\pi+(\frac{\pi}{4}+\alpha))=-\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)$$

$$=-\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

$$=\frac{-\sqrt{2}}{2}(\frac{1}{\sqrt{50}}+\frac{7}{\sqrt{50}})=-\frac{4}{5}$$

۷۴- گزینهٔ ۱ ابتدا معادله را ساده می‌کنیم

$$\sin(x+\frac{\pi}{6})+\cos(x+\frac{\pi}{3})=\cos2x$$

$$(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cos x)+(\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3})=\cos2x$$

$$(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)+(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)=\cos2x$$

$$\cos x=\cos2x$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$2x=2k\pi\pm x\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3},\ x=2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های به صورت $\frac{2k\pi}{3}$ شامل جواب‌های به صورت $2k\pi$ هستند.

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت $x=\frac{2k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$ است.

۷۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که تعداد اعداد نوشته شده در چهل دستهٔ اول برابر است با

$$1+2+3+\cdots+40=\frac{40}{2}(1+40)=820$$

بنابراین آخرین عدد واقع در دستهٔ چهلم همان هشتصدوبیستمین عدد طبیعی فرد است که برابر است با $2\times820-1=1639$.

۷۶- گزینهٔ ۲ مقدار مادهٔ خالص در محلول در روزهای متوالی به صورت زیر است (فرض می‌کنیم محلول ۱۰۰ درصد خالص داریم).

روز اول: ۱۰۰ (غلظت ٪۱۰۰)

روز دوم: $100-4=96$ (غلظت ٪۹۶)

روز سوم: $96-\frac{96}{100}\times4=96(1-\frac{4}{100})$ (غلظت: ٪۹۲/۱۶)

روز چهارم: ...

اکنون توجه کنید که همین مقادیر را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$100,100(1-\frac{4}{100}),100(1-\frac{4}{100})^2,\ldots$$

بنابراین در روز $(n+1)$ ام، یعنی پس از گذشت n روز مقدار مادهٔ خالص برابر $100(1-\frac{4}{100})^n$ خواهد بود که باید $\frac{1}{3}$ مادهٔ خالص اولیه، یعنی $\frac{100}{3}$ لیتر باشد. پس

$$100(1-\frac{4}{100})^n=\frac{1}{3}\times100\Rightarrow(\frac{24}{25})^n=\frac{1}{3}$$

$$n=\log_{\frac{24}{25}}(\frac{1}{3})=\frac{-\log3}{\log\frac{24}{25}}=\frac{-\log3}{\log24-\log25}$$

$$=\frac{-\log3}{\log8+\log3-\log(\frac{100}{4})}=\frac{-\log3}{3\log2+\log3-\log100+\log4}$$

$$=\frac{-\log3}{5\log2+\log3-2}=\frac{-0/48}{5\times0/3+0/48-2}=24$$

۷۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to0^-$، آن‌گاه

$$\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}|\sin\frac{x}{2}|=-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$$

از طرف دیگر،

$$\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}=\frac{(\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x})}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}$$

$$=\frac{2+3x-(2-x)}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}=\frac{4x}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{4x}{-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}\times\lim_{x\to0^-}\frac{1}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}$$

$$=\frac{4}{-\sqrt{2}\times\frac{1}{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=-2$$

۷۸- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع بازهٔ $[-۲,۲]$ در نظر گرفته شده است، بنابراین تابع در نقاط $x=۲$ و $x=-۲$ حد ندارد و پیوسته نیست. در نقاط غیرصحیح بازهٔ $(-۲,۲)$، توابع $y=[x]$ و $y=\sin \pi x$ پیوسته‌اند. بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها، یعنی تابع $f(x)=[x]\sin \pi x$ نیز پیوسته است. در نقاط صحیح این بازه (یعنی $x=۰$، $x=۱$ و $x=-۱$) تابع $y=[x]$ ناپیوسته است ولی چون تابع $y=\sin \pi x$ پیوسته است و مقدار آن برابر صفر است، تابع f پیوسته خواهد بود. بنابراین تابع f فقط در دو نقطهٔ $x=۲$ و $x=-۲$ ناپیوسته است.

۷۹- گزینهٔ ۲ در دو حالت ممکن است تابع $f(x)=\frac{ax^۲+۷x}{۲x^۲+bx+c}$ فقط یک مجانب قائم به معادلهٔ $x=۲$ داشته باشد.

حالت اول $x=۲$ ریشهٔ مضاعف چندجمله‌ای مخرج $f(x)$ باشد، یعنی

$$۲x^۲+bx+c=۲(x-۲)^۲=۲x^۲-۸x+۸$$

$$b=-۸\ ,\ c=۸\Rightarrow f(x)=\frac{ax^۲+۷x}{۲(x-۲)^۲}$$

چون $f(۳)=۶$، پس $\frac{۹a+۲۱}{۲\times ۱}=۶\Rightarrow a=-۱\Rightarrow f(x)=\frac{-x^۲+۷x}{۲(x-۲)^۲}$

پس معادلهٔ مجانب افقی نمودار تابع f به صورت $y=-\frac{۱}{۲}$ است.

حالت دوم $x=۲$ ریشهٔ مخرج $f(x)$ باشد و یکی از ریشه‌های صورت $f(x)$ ریشهٔ دیگر مخرج آن باشد. اگر $a\neq ۰$، آن‌گاه ریشه‌های صورت $f(x)$ اعداد $x=۰$ و $x=-\frac{۷}{a}$ هستند. بنابراین $f(x)$ باید به صورت‌های زیر باشد:

- اگر $x=۰$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج باشد، آن‌گاه

$$f(x)=\frac{x(ax+۷)}{۲x^۲+bx+c}=\frac{x(ax+۷)}{۲x(x-۲)}\Rightarrow c=۰\ ,\ b=-۴\Rightarrow f(x)=\frac{ax+۷}{۲(x-۲)}$$

چون $f(۳)=۶$، پس $\frac{۳a+۷}{۲\times ۱}=۶\Rightarrow a=\frac{۵}{۳}\Rightarrow f(x)=\frac{\frac{۵}{۳}x+۷}{۲x-۴}$

در این حالت معادلهٔ مجانب افقی نمودار تابع f به صورت $y=\frac{۵}{۶}$ است.

- اگر $x=-\frac{۷}{a}$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج باشد، آن‌گاه

$$f(x)=\frac{x(ax+۷)}{۲x^۲+bx+c}=\frac{x(ax+۷)}{۲(x-۲)(ax+۷)}\Rightarrow a=۱\ ,\ b=۱۰\ ,\ c=-۲۸$$

$$f(x)=\frac{x(x+۷)}{۲(x-۲)(x+۷)}=\frac{x}{۲(x-۲)}$$

در این حالت $f(۳)=\frac{۳}{۲}$ که مخالف فرض مسئله است.

اگر $a=۰$، آن‌گاه $f(x)=\frac{۷x}{۲x^۲+bx+c}$ که در این صورت باید داشته باشیم $c=۰$ و $b=-۴$، یعنی $f(x)=\frac{۷x}{۲x^۲-۴x}=\frac{۷}{۲(x-۲)}$ که باز هم شرط $f(۳)=۶$ برقرار نیست. پس خطوط $y=\frac{-۱}{۲}$ و $y=\frac{۵}{۳}$ می‌توانند مجانب افقی نمودار تابع f باشند.

۸۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$g(x)=f(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x})\Rightarrow g'(x)=(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x})'f'(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x})$$

$$g'(x)=\frac{-\cos x(۱+\sin x)-\cos x(۱-\sin x)}{(۱+\sin x)^۲}f'(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x})$$

$$=\frac{-۲\cos x}{(۱+\sin x)^۲}f'(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x})$$

بنابراین

$$g'(\frac{\pi}{۶})=\frac{-۲\cos\frac{\pi}{۶}}{(۱+\sin\frac{\pi}{۶})^۲}f'(\frac{۱-\sin\frac{\pi}{۶}}{۱+\sin\frac{\pi}{۶}})=\frac{-۴\sqrt{۳}}{۹}f'(\frac{۱}{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$f'(\frac{۱}{۳})=-\frac{۳}{۴}$$

۸۱- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع‌های $f(x)=x\sqrt{x}$ و $g(x)=x^۲+ax+b$ در نقطهٔ مشترک $x=۴$ بر یک خط مماس باشند، آن‌گاه

$$\begin{cases} f(۴)=g(۴)\Rightarrow ۸=۱۶+۴a+b\Rightarrow b=-۸-۴a \\ f'(۴)=g'(۴)\Rightarrow ۳=۸+a\Rightarrow a=-۵\Rightarrow b=۱۲ \end{cases}$$

توجه کنید که

$$f(x)=x\sqrt{x}=x^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow f'(۴)=\frac{۳}{۲}\times ۲=۳$$

$$g(x)=x^۲+ax+b\Rightarrow g'(x)=۲x+a\Rightarrow g'(۴)=۸+a$$

۸۲- گزینهٔ ۱ ابتدا $f'(۲)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۰\le x<۴\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^۲+۶x}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x+۶}{۲\sqrt{x^۲+۶x}}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۵}{۴}$$

اکنون توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $x=۵$، تساوی $[\frac{x}{۴}]=۱$ برقرار است. پس در این همسایگی می‌توان نوشت

$$f(x)=x^۲-۹x\Rightarrow f'(x)=۲x-۹\Rightarrow f'(۵)=۱۰-۹=۱$$

بنابراین $f'(۲)-f'(۵)=\frac{۱}{۴}$.

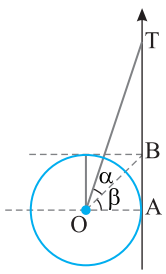
۸۳- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر،

$$OA=AB=۱\ ,\ BT=۲\Rightarrow\begin{cases}\tan(\alpha+\beta)=\frac{AT}{OA}=\frac{۱+۲}{۱}=۳\\ \tan\beta=\frac{AB}{OA}=\frac{۱}{۱}=۱\end{cases}$$

بنابراین

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}\Rightarrow ۳=\frac{\tan\alpha+۱}{۱-\tan\alpha}$$

$$۳-۳\tan\alpha=\tan\alpha+۱\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۱}{۲}$$



پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $t=x^۲\geq ۰$، معادلهٔ مورد نظر به‌صورت $t^۲-۷t-۵=۰$ درمی‌آید. جواب‌های این معادله به‌صورت زیر هستند:

$$t=\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲},\quad t=\frac{۷-\sqrt{۶۹}}{۲}<۰ \text{ (غ.ق.ق.)}$$

چون جواب‌های معادلهٔ بالا باید نامنفی باشند، پس فقط جواب $t=\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}$ قابل قبول است. پس جواب‌های معادلهٔ اصلی به‌صورت زیر هستند:

$$x_۱=\sqrt{\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}},\quad x_۲=-\sqrt{\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}}$$

پس حاصل‌ضرب و مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با

$$P=x_۱x_۲=-(\sqrt{\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}})^۲=-\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}$$

$$S=x_۱+x_۲=\sqrt{\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}}-\sqrt{\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}}=۰$$

بنابراین مقدار عبارت خواسته شده برابر است با

$$۲P^۲-۳SP+۲S=۲P^۲-۰+۰=۲(-\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲})^۲$$

$$=۲(\frac{۴۹+۶۹+۱۴\sqrt{۶۹}}{۴})=۵۹+۷\sqrt{۶۹}$$

۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{vmatrix}\log ۵ & \log ۲\\ \log ۲ & \log ۵\end{vmatrix}=(\log ۵)^۲-(\log ۲)^۲$$

$$=(\log ۵+\log ۲)(\log ۵-\log ۲)$$

$$=\log ۱۰\times\log\frac{۵}{۲}=۱\times\log\frac{۵}{۲}=\log_{۱۰}\frac{۵}{۲}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\log_{۱۰}\frac{۵}{۲}\times\log_{\frac{۵}{۲}}(۳x-۲)=۱$$

$$\log_{۱۰}(۳x-۲)=۱\Rightarrow ۳x-۲=۱۰\Rightarrow ۳x=۱۲\Rightarrow x=۴$$

۳- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$\log_{۲۱}۱۳۲۳=\log_{۲۱}۹\times۱۴۷=\log_{۲۱}۹+\log_{۲۱}۱۴۷$$

$$=۲\log_{۲۱}۳+\log_{۲۱}۱۴۷$$

بنابراین عبارت مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(\log_{۲۱}۳)^۲+\log_{۲۱}۱۴۷(۲\log_{۲۱}۳+\log_{۲۱}۱۴۷)$$

$$=(\log_{۲۱}۳)^۲+۲\log_{۲۱}۳\log_{۲۱}۱۴۷+(\log_{۲۱}۱۴۷)^۲$$

$$=(\log_{۲۱}۳+\log_{۲۱}۱۴۷)^۲=(\log_{۲۱}(۳\times۱۴۷))^۲=(\log_{۲۱}۴۴۱)^۲$$

$$=(\log_{۲۱}۲۱^۲)^۲=(۲\log_{۲۱}۲۱)^۲=(۲\times۱)^۲=۴$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\log_{۲۱}۳=\log_{۲۱}\frac{۲۱}{۷}=\log_{۲۱}۲۱-\log_{۲۱}۷=۱-\log_{۲۱}۷$$

$$\log_{۲۱}۱۴۷=\log_{۲۱}(۲۱\times۷)=\log_{۲۱}۲۱+\log_{۲۱}۷=۱+\log_{۲۱}۷$$

$$\log_{۲۱}۱۳۲۳=\log_{۲۱}(۲۱^۲\times۳)=۲\log_{۲۱}۲۱+\log_{۲۱}۳=۲+\log_{۲۱}۳$$

پس عبارت مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$(۱-\log_{۲۱}۷)^۲+(۱+\log_{۲۱}۷)(۲+\log_{۲۱}۳)$$

$$=۱+(\log_{۲۱}۷)^۲-۲\log_{۲۱}۷+۲+\log_{۲۱}۳$$

$$+۲\log_{۲۱}۷+\log_{۲۱}۷\log_{۲۱}۳$$

$$=۳+\log_{۲۱}۳+(\log_{۲۱}۷)(\log_{۲۱}۷+\log_{۲۱}۳)$$

$$=۳+\log_{۲۱}۳+\log_{۲۱}۷\log_{۲۱}۲۱$$

$$=۳+\log_{۲۱}۳+\log_{۲۱}۷=۳+\log_{۲۱}۲۱=۳+۱=۴$$

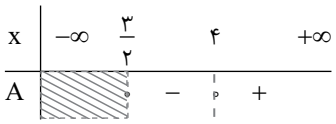
۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $x>\frac{۳}{۲}$، آن‌گاه عبارت $۲x-۳$ مثبت است و در نتیجه نامعادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$((m^۲-۱)x^۲-۴mx+۴)(x-۳\sqrt{x}+۲)>۰$$

از طرف دیگر،

$$A=x-۳\sqrt{x}+۲=(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)$$

بنابراین علامت عبارت A با شرط $x>\frac{۳}{۲}$ به‌صورت زیر است:



چون علامت A روی بازهٔ $(۲,۴)$ منفی است و این بازه مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است، پس علامت عبارت $B=(m^۲-۱)x^۲-۴mx+۴$ در این بازه باید منفی باشد تا حاصل‌ضرب AB مثبت شود. همچنین علامت A روی بازهٔ $(\frac{۳}{۲},۲)$ منفی است و این بازه جواب نامعادله نیست. پس علامت B روی این بازه باید مثبت باشد. بنابراین $x=۲$ باید ریشهٔ B باشد. پس

$$(m^۲-۱)۴-۸m+۴=۰\Rightarrow m^۲-۲m=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۲\\ m=۰\end{cases}$$

اگر $m=۲$، آن‌گاه

$$B=(۳x^۲-۸x+۴)=(۳x-۲)(x-۲)$$

در این صورت علامت B روی بازهٔ $(۲,۴)$ مثبت است که قابل قبول نیست.

اگر $m=۰$، آن‌گاه

$$B=-x^۲+۴=-(x-۲)(x+۲)$$

در این صورت علامت B روی بازهٔ $(۲,۴)$ منفی است و قابل قبول است.

۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2(\frac{1}{4})}{1-(\frac{1}{4})^2}=\frac{8}{15}$$

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2(\frac{1}{4})}{1+(\frac{1}{4})^2}=\frac{8}{17}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-(\frac{1}{4})^2}{1+(\frac{1}{4})^2}=\frac{15}{17}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\frac{8}{15}-\frac{8}{17}}{\frac{8}{17}-\frac{15}{17}}=-\frac{16}{105}$$

۶- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$f(\alpha)=4\sin\alpha\cos2\alpha+2\sin\alpha$$
$$=2\sin\alpha(2\cos2\alpha+1)=2\sin\alpha(\cos2\alpha+1+\cos2\alpha)$$
$$=2\sin\alpha(\cos2\alpha+2\cos^2\alpha)$$
$$=2(\sin\alpha\cos2\alpha+2\sin\alpha\cos^2\alpha)$$
$$=2(\sin\alpha\cos2\alpha+\sin2\alpha\cos\alpha)=2\sin(\alpha+2\alpha)$$
$$=2\sin3\alpha$$

بنابراین

$$f(\frac{41\pi}{9})=2\sin(\frac{41\pi}{3})=2\sin(14\pi-\frac{\pi}{3})=-2\sin\frac{\pi}{3}=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$f(\alpha)=4\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)+2\sin\alpha$$
$$=4\sin\alpha-8\sin^3\alpha+2\sin\alpha$$
$$=6\sin\alpha-8\sin^3\alpha=2(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)=2\sin3\alpha$$

بنابراین

$$f(\frac{41\pi}{9})=2\sin(\frac{41\pi}{3})=-2\sin\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$$

۷- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(1+\cos2\alpha)(1+\cos4\alpha)(1+\cos8\alpha)=\frac{1}{8}$$
$$(2\cos^2\alpha)(2\cos^2 2\alpha)(2\cos^2 4\alpha)=\frac{1}{8}$$
$$(\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha)^2=\frac{1}{64}$$
$$(\frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha}{\sin\alpha})^2=\frac{1}{64}$$
$$(\frac{1}{2}\sin2\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha)^2=\frac{1}{64}\sin^2\alpha$$
$$(\frac{1}{4}\sin4\alpha\cos4\alpha)^2=\frac{1}{64}\sin^2\alpha\Rightarrow(\frac{1}{8}\sin8\alpha)^2=\frac{1}{64}\sin^2\alpha$$
$$\sin^2 8\alpha=\sin^2\alpha\Rightarrow\frac{1-\cos16\alpha}{2}=\frac{1-\cos2\alpha}{2}$$
$$\cos16\alpha=\cos2\alpha$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}16\alpha=2k\pi+2\alpha\\16\alpha=2k\pi-2\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{k\pi}{7}\\\alpha=\frac{k\pi}{9}\end{cases}\qquad k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین بزرگ‌ترین جواب معادله که در بازهٔ $[0,\pi]$ قرار دارد، برابر $\frac{8\pi}{9}$ است.

۸- گزینهٔ ۳ فرض کنید $P(x)=ax^2+bx+c$. در این صورت $P'(x)=2ax+b$. اگر $P(x)$ را بر $P'(x)$ تقسیم کنیم و خارج قسمت برابر $\frac{1}{2}x+1$ و باقی‌مانده برابر -2 باشد، آن‌گاه تساوی زیر همواره برقرار است:

$$P(x)=P'(x)(\frac{1}{2}x+1)-2$$
$$ax^2+bx+c=(2ax+b)(\frac{1}{2}x+1)-2$$

این تساوی را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$ax^2+bx+c=ax^2+(2a+\frac{b}{2})x+b-2$$

برای این که تساوی بالا به‌ازای هر مقدار x برقرار باشد، باید

$$\begin{cases}2a+\frac{b}{2}=b\Rightarrow b=4a\\c=b-2\Rightarrow c=4a-2\end{cases}$$

بنابراین چندجمله‌ای $P(x)$ برابر $ax^2+4ax+4a-2$ است که مجموع ضرایب آن برابر است با $a+4a+4a-2=9a-2$

واضح است که کمترین مقدار این مجموع وقتی a عددی طبیعی است، برابر ۷ است که به‌ازای $a=1$ به‌دست می‌آید.

۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+1\Rightarrow a_{100}=\frac{1}{a_{99}}+1\Rightarrow\frac{k}{m}=\frac{1}{a_{99}}+1$$
$$\frac{1}{a_{99}}=\frac{k-m}{m}\Rightarrow a_{99}=\frac{m}{k-m}$$

بنابراین

$$a_{99}=\frac{1}{a_{98}}+1\Rightarrow\frac{m}{k-m}=\frac{1}{a_{98}}+1\Rightarrow\frac{1}{a_{98}}=\frac{m}{k-m}-1=\frac{2m-k}{k-m}$$
$$a_{98}=\frac{k-m}{2m-k}$$

۱۰- گزینهٔ ۱ ده جملهٔ اول دنباله را پیدا می‌کنیم.

$$a_n=\begin{cases}2^k & n=3k\\-2k+4 & n=3k+1\\[\frac{n}{k+2}]+a & n=3k+2\end{cases}$$

$$k=0\Rightarrow\begin{cases}a_0=2^0=1\\ a_1=-2\times0+4=4\\ a_2=[\frac{3\times0+2}{0+2}]+a=1+a\end{cases}$$

$$k=1\Rightarrow\begin{cases}a_3=2^1=2\\ a_4=-2\times1+4=2\\ a_5=[\frac{3\times1+2}{1+2}]+a=1+a\end{cases}$$

$$k=2\Rightarrow\begin{cases}a_6=2^2=4\\ a_7=-2\times2+4=0\\ a_8=[\frac{3\times2+2}{2+2}]+a=2+a\end{cases}$$

$$k=3\Rightarrow a_9=2^3=8$$

مجموع ده جملهٔ اول دنباله برابر ۱۹ است. پس

$$1+4+1+a+2+2+1+a+4+0+2+a+8=19$$

$$3a+25=19\Rightarrow a=-2$$

بنابراین اگر $n=3k+2$، آن‌گاه

$$a_n=[\frac{n}{k+2}]+a=[\frac{3k+2}{k+2}]-2=[3-\frac{4}{k+2}]-2=1+[\frac{-4}{k+2}]$$

$$a_2=-1,\ a_5=-1,\ a_8=a_{11}=a_{14}=a_{17}=a_{20}=a_{23}=a_{26}=a_{29}=0$$

بنابراین مجموع جملات بالا برابر -2 است.

۱۱- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $t=\sqrt[3]{9\cos^2x-1}$، آن‌گاه ضابطهٔ تابع f به‌صورت $y=2^t-2^{-t}$ در می‌آید. از طرف دیگر،

$$0\le\cos^2x\le1\Rightarrow0\le9\cos^2x\le9\Rightarrow-1\le9\cos^2x-1\le8$$

$$-1\le\sqrt[3]{9\cos^2x-1}\le2\Rightarrow-1\le t\le2$$

بنابراین باید برد تابع با ضابطهٔ $f(t)=2^t-2^{-t}$ و دامنهٔ $[-1,2]$ را به‌دست بیاوریم. توجه کنید که تابع $y=2^t$ اکیداً صعودی است. پس تابع $y=2^{-t}$ اکیداً نزولی است و تابع $y=-2^{-t}$ اکیداً صعودی است. پس تابع $y=2^t-2^{-t}$ نیز اکیداً صعودی است. بنابراین

$$-1\le t\le2\Rightarrow f(-1)\le f(t)\le f(2)$$

$$-\frac{3}{2}\le f(t)\le\frac{15}{4}\Rightarrow R_f=[-\frac{3}{2},\frac{15}{4}]$$

بنابراین $a=-\frac{3}{2}$ و $b=\frac{15}{4}$ و در نتیجه $b-a=\frac{21}{4}$.

۱۲- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** دامنهٔ تابع f مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{1}{6+\sqrt{|x|}-|x|}>0$ است. اگر فرض کنیم $\sqrt{|x|}=t\ge0$، آن‌گاه نامعادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{6+t-t^2}>0\Rightarrow6+t-t^2>0\Rightarrow t^2-t-6<0\Rightarrow(t-3)\underbrace{(t+2)}_{\text{مثبت}}<0$$

$$t-3<0\Rightarrow0\le t<3$$

بنابراین باید نامعادلهٔ $0\le\sqrt{|x|}<3$ را حل کنیم. نابرابری $0\le\sqrt{|x|}$ به‌ازای هر مقدار x برقرار است. پس باید نامعادلهٔ $\sqrt{|x|}<3$ را حل کنیم.

$$\sqrt{|x|}<3\Rightarrow|x|<9\Rightarrow-9<x<9$$

راه‌حل دوم واضح است که $x=-4$ در دامنهٔ تابع قرار دارد.

$$f(-4)=\log_6(\frac{1}{6+\sqrt{4}-4})=\log_6\frac{1}{4}$$

عدد -4 فقط در بازهٔ $(-9,9)$ قرار دارد و عضو بازه‌های دیگر گزینه‌ها نیست. پس گزینهٔ (۱) درست است.

۱۳- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع $y=\sqrt{4-x}$ را k واحد در راستای قائم انتقال دهیم، نمودار تابع $y=\sqrt{4-x}+k$ به‌دست می‌آید و اگر نمودار به‌دست آمده را $k-2$ واحد در راستای افقی انتقال دهیم، نمودار تابع زیر به‌دست می‌آید:

$$y=\sqrt{4-(x-(k-2))}+k=\sqrt{k+2-x}+k=f(x)$$

چون نمودار تابع f نمودار تابع وارونش را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، پس اگر طول نقطهٔ تقاطع a باشد، آن‌گاه

$$f(a)=1\Rightarrow\sqrt{k+2-a}+k=1$$

$$\sqrt{k+2-a}=1-k\xrightarrow{1-k\ge0}a=k+2-(1-k)^2$$

$$f^{-1}(a)=1\Rightarrow f(1)=a\Rightarrow\sqrt{k+2-1}+k=a\xrightarrow{k\ge-1}a=\sqrt{k+1}+k$$

توجه کنید که تساوی‌های فوق فقط برای $-1\le k\le1$ می‌توانند برقرار باشند.

$$k+2-(1-k)^2=\sqrt{k+1}+k\Rightarrow1+2k-k^2=\sqrt{k+1}$$

با شرط $1+2k-k^2\ge0$، یعنی $1-\sqrt{2}\le k\le1+\sqrt{2}$، طرفین را به توان دو می‌رسانیم و معادله را ساده می‌کنیم:

$$k^4-4k^3+2k^2+3k=0\Rightarrow k(k^3-4k^2+2k+3)=0$$

$$k(k-3)(k^2-k-1)=0\Rightarrow\begin{cases}k=0\\ k=3\\ k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

چون $-1\le k\le1$ و $1-\sqrt{2}\le k\le1+\sqrt{2}$، پس $-1\le k\le1$، پس فقط $k=0$ قابل قبول است. بنابراین $f(x)=\sqrt{2-x}$ و طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع $y=f(x)-1$ با محور طول‌ها به‌صورت زیر است:

$$y=0\Rightarrow f(x)-1=0\Rightarrow\sqrt{2-x}=1\Rightarrow x=1$$

۱۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توابع fog و gof را معین می‌کنیم.

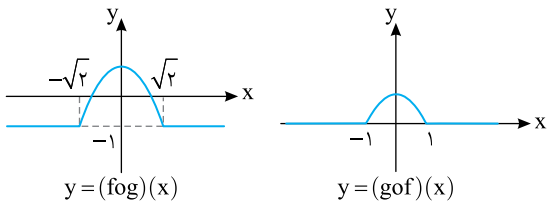
$$(fog)(x)=f(g(x))=f(1-x^2)=\begin{cases}-1 & 1-x^2<-1\\ 1-x^2 & -1\le 1-x^2\le 1\\ 1 & 1-x^2>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-1 & x^2>2\\ 1-x^2 & 0\le x^2\le 2\\ 1 & x^2<0\end{cases}=\begin{cases}-1 & x>\sqrt{2}\ \text{یا}\ x<-\sqrt{2}\\ 1-x^2 & -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\end{cases}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=1-f^2(x)=\begin{cases}1-(-1)^2 & x<-1\\ 1-x^2 & -1\le x\le 1\\ 1-1^2 & x>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & x<-1\ \text{یا}\ x>1\\ 1-x^2 & -1\le x\le 1\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع‌های fog و gof به‌صورت زیر است و هرکدام از آن‌ها در دو نقطه مشتق‌پذیر نیستند.

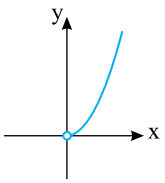


۱۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=9^{\log_3 x}=(3^2)^{\log_3 x}=(3^{\log_3 x})^2=x^2$$

از طرف دیگر، دامنهٔ تابع f بازهٔ $(0,+\infty)$ است.

پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است:



۱۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $x\to 0^+$، آن‌گاه $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\to 0^+$ و $\sqrt{2x}\to 0^+$. بنابراین می‌توانیم از هم‌ارزی‌های زیر استفاده کنیم:

$$\alpha\to 0:\quad \tan\alpha\sim\alpha,\quad 1-\cos\alpha\sim\frac{1}{2}\alpha^2$$

در این صورت حد مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1)^2}{(\frac{1}{2}(\sqrt{2x})^2)^n}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}})^2}{x^n}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\sqrt{1-x^2})^2}{x^n}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-(1-x^2))^2}{x^n}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{(1+\sqrt{1-x^2})^2}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{n-4}}\times\frac{1}{(1+1)^2}\times\frac{1}{1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{4x^{n-4}}$$

اکنون توجه کنید که اگر $n>4$، آن‌گاه حد بالا نامتناهی است و نمی‌تواند برابر a باشد. اگر $n=4$، آن‌گاه حد بالا برابر $\frac{1}{4}$ است و در نتیجه $a=\frac{1}{4}$ و $a+n=\frac{17}{4}$. اگر $n<4$، آن‌گاه حد بالا برابر صفر است و در نتیجه $a=0$ و $a+n<4$. پس $a+n$ می‌تواند تمام مقادیر مجموعهٔ $(-\infty,4)\cup\{\frac{17}{4}\}$ را داشته باشد.

۱۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که توابع $y=\frac{3}{x^2}$ و $y=\frac{-2}{x^2}$ روی بازهٔ $(-\infty,0)$ به‌ترتیب اکیداً صعودی و اکیداً نزولی هستند. پس اگر $x\to(-\frac{1}{2})^-$، آن‌گاه

$$\frac{3}{x^2}\to 12^-,\quad \frac{-2}{x^2}\to(-8)^+$$

بنابراین در یک همسایگی چپ $x=-\frac{1}{2}$، توابع $y=[\frac{3}{x^2}]$ و $y=[\frac{-2}{x^2}]$ به‌ترتیب با تابع‌های $y=11$ و $y=-8$ برابرند. پس

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+[\frac{3}{x^2}]}{16x-[-\frac{2}{x^2}]}=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+11}{16x-(-8)}$$

$$=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x+6}{16x+8}=-\infty$$

۱۸- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون تابع f در دو نقطه ناپیوسته است، پس مخرج $f(x)$ دو ریشه دارد. چون تابع f دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد، پس یا هر دو مجانب آن قائم هستند و مجانب افقی ندارد یا یک مجانب قائم و یک مجانب افقی دارد. اگر $a=0$، آن‌گاه $f(x)=\frac{-bx^2+2}{-bx+2}$ که در این صورت مخرج $f(x)$ فقط یک ریشه دارد و قابل قبول نیست (واضح است که $b\neq 0$). اگر $a\neq 0$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^3}{ax^3}=1$$

یعنی خط $y=1$ مجانب افقی تابع است. پس این تابع فقط یک مجانب قائم دارد، یعنی یکی از ریشه‌های مخرج $f(x)$ ریشهٔ صورت آن نیز هست. اگر این ریشه $x=n$ باشد، آن‌گاه

$$\begin{cases}an^3-bn^2+2=0\\ an^3-bn+2=0\end{cases}\Rightarrow bn^2-bn=0\Rightarrow bn(n-1)=0$$

چون $b\neq 0$ و $n\neq 0$، پس $n=1$، در نتیجه

$$a-b+2=0\Rightarrow b=a+2$$

اکنون توجه کنید که مخرج $f(x)$ علاوه بر $x=1$ یک ریشهٔ مضاعف دارد. پس

$$ax^3-bx+2=ax^3-(a+2)x+2=0\Rightarrow ax(x^2-1)-2(x-1)=0$$

$$(x-1)(a(x^2+x)-2)=0\Rightarrow(x-1)(ax^2+ax-2)=0$$

پس معادلهٔ $ax^2+ax-2=0$ ریشهٔ مضاعف دارد، یعنی

$$\Delta=a^2+8a=0\xrightarrow{a\neq 0}a=-8,\ b=-6$$

راه‌حل دوم مقادیر a و b را از گزینه‌ها در ضابطهٔ f قرار دهید و درست بودن شرایط مسئله را بررسی کنید.

۱۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که حد مخرج کسر $\frac{f(x)}{x}$ در $x=0$ برابر صفر است و اگر حد صورت آن در این نقطه برابر صفر نباشد، حد این کسر نامتناهی می‌شود، پس حد صورت کسر، یعنی $f(x)$ هم باید در $x=0$ برابر صفر باشد. پس

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(\cos^3 2x+ax^2+b)=1+0+b=0\Rightarrow b=-1$$

از طرف دیگر،

$$f(x)=\cos^3 2x+ax^2-1\Rightarrow f'(x)=-6\sin 2x\cos^2 2x+2ax$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{-6\sin 2x\cos^2 2x}{x}+\frac{2ax}{x}\right)$$
$$=-6\times 2\times 1^2+2a=-12+2a=2\Rightarrow a=7$$

بنابراین $a+b=6$.

۲۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که تابع $f(x)=|\sin 2x|+1$ در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر نیست:

$$x>0\Rightarrow f(x)=\sin 2x+1\Rightarrow f'(x)=2\cos 2x\Rightarrow f'_+(0)=2$$
$$x<0\Rightarrow f(x)=-\sin 2x+1\Rightarrow f'(x)=-2\cos 2x\Rightarrow f'_-(0)=-2$$

بنابراین شیب نیم‌مماس‌های راست و چپ که در $x=0$ بر نمودار تابع f رسم می‌شوند، به‌ترتیب برابر ۲ و -2 است. معادلهٔ این نیم‌مماس‌ها به‌صورت زیر است:

نیم‌مماس راست: $y-f(0)=f'_+(0)(x-0)\Rightarrow y-1=2x\Rightarrow y=2x+1$

نیم‌مماس چپ: $y-f(0)=f'_-(0)(x-0)\Rightarrow y-1=-2x\Rightarrow y=-2x+1$

نقاط تلاقی امتداد این نیم‌مماس‌ها و نیمساز ناحیهٔ دوم و ناحیهٔ چهارم را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} y=2x+1 \\ y=-x \end{cases}\Rightarrow 2x+1=-x\Rightarrow x=-\frac{1}{3}\Rightarrow y=\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} y=-2x+1 \\ y=-x \end{cases}\Rightarrow -2x+1=-x\Rightarrow x=1\Rightarrow y=-1$$

پس باید فاصلهٔ نقاط $A(1,-1)$ و $B(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ را پیدا کنیم:

$$AB=\sqrt{(1+\frac{1}{3})^2+(-1-\frac{1}{3})^2}=\sqrt{2\times\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}\sqrt{2}$$

۲۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $D_f=[0,+\infty)-\{1\}$ و

$$f(x)=2x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x)=2(\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}(-\frac{1}{3})(2x)(x^2-1)^{-\frac{4}{3}}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

بنابراین $f'(x)$ روی $(0,+\infty)-\{1\}$ مثبت است. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=2-(+\infty)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=2-(-\infty)=+\infty$$

بنابراین تابع f روی دامنه‌اش صعودی نیست ولی روی بازه‌های $[0,1)$ و $(1,+\infty)$ صعودی است.

۲۲- گزینهٔ ۱ مشتق تابع f را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^4}{x^3-8}\ ,\ D_f=\mathbb{R}-\{2\}$$

$$f'(x)=\frac{4x^3(x^3-8)-3x^2(x^4)}{(x^3-8)^2}=\frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2}$$

x	$-\infty$		0		2		$\sqrt[3]{32}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	∄	$-$	0	$+$	

بنابراین $f'(x)$ روی بازه‌های $[0,2)$ و $(2,\sqrt[3]{32}]$ و هر زیرمجموعهٔ آن‌ها اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار طول این بازه‌ها مربوط به بازهٔ $[0,2)$ است که برابر ۲ است.

۲۳- گزینهٔ ۳ ابتدا اکسترمم‌های نسبی تابع f را معین می‌کنیم:

$$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$$
$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)=6(x+1)(x-2)$$
$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases} x=-1\Rightarrow y=-2-3+12+1=8 \\ x=2\Rightarrow y=16-12-24+1=-19 \end{cases}$$

پس نقاط $A(-1,8)$ و $B(2,-19)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند و شیب پارهخط AB برابر است با $\frac{-19-8}{2-(-1)}=-9$

شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول a برابر $f'(a)$ است. پس می‌خواهیم بدانیم به‌ازای چند مقدار a تساوی $f'(a)=-9$ برقرار است.

$$f'(a)=6(a+1)(a-2)=-9\Rightarrow 2a^2-2a-4=-3\Rightarrow 2a^2-2a-1=0$$

از معادلهٔ بالا دو جواب برای a به‌دست می‌آید. پس دو نقطه روی نمودار تابع f وجود دارد که خط مماس بر نمودار تابع f در آن نقاط موازی پارهخط AB است.

۲۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\log_a c+\log_b c=1\Rightarrow\frac{1}{\log_c a}+\frac{1}{\log_c b}=1$$

$$\log_c b+\log_c a=\log_c a\times\log_c b\Rightarrow\log_c(ab)=\log_c a\times\log_c b$$

۲۵- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\log_2(4^x+15)=x+3\Rightarrow 4^x+15=2^{x+3}$$
$$(2^x)^2-8\times 2^x+15=0\Rightarrow(2^x-5)(2^x-3)=0$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} 2^x-5=0\Rightarrow 2^x=5\Rightarrow x=\log_2 5 \\ 2^x-3=0\Rightarrow 2^x=3\Rightarrow x=\log_2 3 \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر است با

$$\log_2 5+\log_2 3=\log_2 5\times 3=\log_2 15$$

۲۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید بـرای اینکه عبارت‌های رادیکالی موجود در معادله تعریف شده باشند، باید شرایط زیر وجود داشته باشد:

$$-x^۲+۶x-۸\geq ۰\Rightarrow x^۲-۶x+۸\leq ۰\Rightarrow (x-۲)(x-۴)\leq ۰$$

x	$-\infty$		۲		۴		$+\infty$
$(x-۲)(x-۴)$		+	۰	−	۰	+	

$$۲\leq x\leq ۴ \quad (I)$$

$$-x^۳+۴x^۲+۲۵x-۱۰۰\geq ۰\Rightarrow x^۳-۴x^۲-۲۵x+۱۰۰\leq ۰$$

$$(x^۳-۲۵x)-(۴x^۲-۱۰۰)\leq ۰\Rightarrow x(x^۲-۲۵)-۴(x^۲-۲۵)\leq ۰$$

$$(x^۲-۲۵)(x-۴)\leq ۰\Rightarrow (x-۵)(x+۵)(x-۴)\leq ۰$$

x	$-\infty$		-۵		۴		۵		$+\infty$
$(x-۵)(x+۵)(x-۴)$		−	۰	+	۰	−	۰	+	

$$x\leq -۵ \text{ یا } ۴\leq x\leq ۵ \quad (II)$$

از (I) و (II) نتیجه می‌شود فقط به‌ازای $x=۴$ عبارت‌های رادیکالی موجود در معادله تعریف شده هستند. اکنون کافی است مشخص کنیم $x=۴$ جواب معادله هست یا نه.

$$\sqrt{x+\sqrt{-x^۳+۴x^۲+۲۵x-۱۰۰}}+\sqrt{x^۲+\sqrt{-x^۲+۶x-۸}}=x+۲$$

$$\sqrt{۴+۰}+\sqrt{۱۶+۰}=۴+۲\Rightarrow ۲+۴=۴+۲$$

پس $x=۴$ تنها جواب معادله است.

۲۷- گزینهٔ ۲و۳ ابتدا توجه کنید که

$$x-۳\sqrt{x}+۲=(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)$$

بنابراین علامت عبارت $A=\frac{۲x-۳}{x-۳\sqrt{x}+۲}$ مطابق جدول زیر است:

x	$-\infty$		۰		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
A		−		+	‖	−	۰	+	‖	+	

اکنـون فـرض کنیـد $B=(m^۲-۱)x^۲-۴mx+۴$، می‌خواهیـم مجموعـهٔ جواب‌هـای نامعادلهٔ $AB\geq ۰$ یک بازه باشـد. اگر B چندجمله‌ای درجهٔ دوم باشـد و ریشـه نداشته باشـد یا ریشهٔ مضاعف داشـته باشـد، آن‌گاه با توجه به علامت A مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq ۰$ نمی‌تواند یک بازه باشد. پس B دو ریشـه دارد و این ریشـه‌ها باید از اعداد ۱، $\frac{۳}{۲}$ و ۴ باشند، بنابراین سه حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $x=۱$ ریشهٔ B است.

$$m^۲-۱-۴m+۴=۰\Rightarrow m^۲-۴m+۳=۰\Rightarrow m=۳, m=۱ \text{ (غ.ق.ق.)}$$

$$B=۸x^۲-۱۲x+۴=۴(x-۱)(۲x-۱)$$

در این صورت جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		$\frac{۱}{۲}$		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
AB		−	۰	+	‖	+	۰	−	‖	+			

واضح است که مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq ۰$ یک بازه نیست.

حالت دوم: $x=\frac{۳}{۲}$ ریشهٔ B است.

$$(m^۲-۱)\frac{۹}{۴}-۴(\frac{۳}{۲})m+۴=۰\Rightarrow ۹m^۲-۹-۲۴m+۱۶=۰$$

$$۹m^۲-۲۴m+۷=۰\Rightarrow (۳m-۱)(۳m-۷)=۰\Rightarrow m=\frac{۱}{۳}, m=\frac{۷}{۳}$$

اگر $m=\frac{۱}{۳}$، آن‌گاه

$$B=-\frac{۸}{۹}x^۲-\frac{۴}{۳}x+۴=(۲x-۳)(-\frac{۴}{۹}x-\frac{۴}{۳})$$

و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
AB	‖	−	۰	+	‖	+	۰	+	‖	−	

و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq ۰$ بازهٔ $(۱,۴)$ است.

اگر $m=\frac{۷}{۳}$، آن‌گاه

$$B=\frac{۴۰}{۹}x^۲-\frac{۲۸}{۳}x+۴=\frac{۴}{۹}(۵x-۳)(۲x-۳)$$

و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		$\frac{۳}{۵}$		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
AB	‖	−	۰	+	‖	−	۰	+	‖	−	‖	+	

در این صورت مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq ۰$ یک بازه نیست.

حالت سوم: $x=۴$ ریشهٔ B است.

$$۱۶(m^۲-۱)-۱۶m+۴=۰\Rightarrow ۴m^۲-۴m-۳=۰\Rightarrow m=-\frac{۱}{۲}, m=\frac{۳}{۲}$$

اگر $m=-\frac{۱}{۲}$، آن‌گاه

$$B=-\frac{۳}{۴}x^۲+۲x+۴=(x-۴)(-\frac{۳}{۴}x-۱)$$

و جدول تعیین علامت AB به صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
AB	‖	−	۰	+	‖	+	۰	−	‖	−	

و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq ۰$ بازهٔ $(۱,\frac{۳}{۲}]$ است.

اگر $m=\frac{۳}{۲}$، آن‌گاه

$$B=\frac{۵}{۴}x^۲-۶x+۴=(x-۴)(\frac{۵}{۴}x-۱)$$

و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		$\frac{۴}{۵}$		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
AB	‖	−	۰	+	‖	−	۰	+	‖	+			

در این صورت مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq ۰$ یک بازه نیست.

اکنـون توجـه کنید که اگر $m=۱$ یـا $m=-۱$، آن‌گاه چندجمله‌ای B از درجهٔ اول است. این دو حالت را هم باید بررسی کنیم.

اگر $m=۱$، آن‌گاه $B=-۴x+۴$ و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
AB		−	‖	−	۰	+	‖	−			

و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ بازهٔ $[\frac{۳}{۲},۴)$ است.

اگر $m=-۱$، آن‌گاه $B=۴x+۴$ و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$	۰	۱	$\frac{۳}{۲}$	۴	$+\infty$
AB	▨	−	+	۰	−	+

در این صورت مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ یک بازه نیست.

بنابراین به‌ازای $m=\frac{۱}{۳}$، $m=-\frac{۱}{۲}$ و $m=۱$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ یک بازه است.

۲۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** مخرج مشترک می‌گیریم و ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin\theta}{۱-\cos\theta}+\frac{۱+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^۲\theta+۱-\cos^۲\theta}{(۱-\cos\theta)\sin\theta}=\frac{۲\sin^۲\theta}{(۱-\cos\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{۲\sin\theta}{۱-\cos\theta}=\frac{۴\times\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}}{۲\sin^۲\frac{\theta}{۲}}=\frac{۲\cos\frac{\theta}{۲}}{\sin\frac{\theta}{۲}}=۲\cot\frac{\theta}{۲}$$

راه‌حل دوم ابتدا هریک از کسرها را ساده می‌کنیم، سپس حاصل را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sin\theta}{۱-\cos\theta}+\frac{۱+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{۲\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}}{۲\sin^۲\frac{\theta}{۲}}+\frac{۲\cos^۲\frac{\theta}{۲}}{۲\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}}$$

$$=\cot\frac{\theta}{۲}+\cot\frac{\theta}{۲}=۲\cot\frac{\theta}{۲}$$

راه‌حل سوم حاصل عبارت را به‌ازای $\theta=\frac{\pi}{۳}$ حساب می‌کنیم:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{۳}}{۱-\cos\frac{\pi}{۳}}+\frac{۱+\cos\frac{\pi}{۳}}{\sin\frac{\pi}{۳}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}}+\frac{۱+\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\sqrt{۳}+\frac{۳}{\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}$$

اکنون مقدار گزینه‌ها را به‌ازای $\theta=\frac{\pi}{۳}$ حساب می‌کنیم:

گزینهٔ (۱) $\cos\frac{\theta}{۲}=\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

گزینهٔ (۲) $\sin\frac{\theta}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$

گزینهٔ (۳) $۲\cot\frac{\theta}{۲}=۲\cot\frac{\pi}{۶}=۲\sqrt{۳}$

گزینهٔ (۴) $۲\tan\frac{\theta}{۲}=۲\tan\frac{\pi}{۶}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۲۹- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۱+\cos\alpha)(۱+\cos۲\alpha)(۱+\cos۴\alpha)=\frac{۱}{۸}$$

$$(۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲})(۲\cos^۲\alpha)(۲\cos^۲۲\alpha)=\frac{۱}{۸}$$

$$(۸\cos\frac{\alpha}{۲}\cos\alpha\cos۲\alpha)^۲=۱$$

واضح است که $\alpha=۲k\pi$ جواب معادله نیست، پس $\sin\frac{\alpha}{۲}\neq ۰$ و معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{۸\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}\cos\alpha\cos۲\alpha}{\sin\frac{\alpha}{۲}})^۲=۱$$

$$(۴\sin\alpha\cos\alpha\cos۲\alpha)^۲=\sin^۲\frac{\alpha}{۲}$$

$$(۲\sin۲\alpha\cos۲\alpha)^۲=\sin^۲\frac{\alpha}{۲}\Rightarrow\frac{۱-\cos۸\alpha}{۲}=\frac{۱-\cos\alpha}{۲}$$

$$\cos۸\alpha=\cos\alpha$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}۸\alpha=۲k\pi+\alpha\\ ۸\alpha=۲k\pi-\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{۲k\pi}{۷}\\ \alpha=\frac{۲k\pi}{۹}\end{cases},\quad k\in\mathbb{Z}$$

تعداد جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید. (توجه کنید که $\alpha\neq ۲k\pi$)

$$۰<\frac{۲k\pi}{۷}<۲\pi\Rightarrow ۰<k<۷\Rightarrow k\in\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

$$۰<\frac{۲k\pi}{۹}<۲\pi\Rightarrow ۰<k<۹\Rightarrow k\in\{۱,۲,\ldots,۸\}$$

پس معادله ۱۴ جواب در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارد.

۳۰- گزینهٔ ۴ بنابر قضیهٔ تقسیم، تساوی زیر به‌ازای هر مقدار x برقرار است:

$$P(x)=(x^۲+۲x)Q(x)+۳x+۱$$

از طرفین این تساوی مشتق می‌گیریم.

$$P'(x)=(۲x+۲)Q(x)+(x^۲+۲x)Q'(x)+۳$$

در تساوی بالا قرار می‌دهیم $x=-۲$ و نتیجه می‌شود

$$P'(-۲)=(-۴+۲)Q(-۲)+(۴-۴)Q'(-۲)+۳$$

$$P'(-۲)=-۲Q(-۲)+۳=-۲\times۳+۳=-۳$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $P'(x)$ بر $x+۲$ برابر -۳ است.

۳۱- گزینهٔ ۲ ابتدا چند جمله از دنباله را مشخص می‌کنیم.

$$a_۱=-۱,\quad a_{n+۱}=۲-\frac{۱}{a_n}$$

$$a_۲=۲-\frac{۱}{a_۱}=۲+۱=۳\Rightarrow a_۲=\frac{۲\times۲-۱}{۲\times۲-۳}$$

$$a_۳=۲-\frac{۱}{a_۲}=۲-\frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۳}\Rightarrow a_۳=\frac{۲\times۳-۱}{۲\times۳-۳}$$

$$a_۴=۲-\frac{۱}{a_۳}=۲-\frac{۳}{۵}=\frac{۷}{۵}\Rightarrow a_۴=\frac{۲\times۴-۱}{۲\times۴-۳}$$

$$a_۵=۲-\frac{۱}{a_۴}=۲-\frac{۵}{۷}=\frac{۹}{۷}\Rightarrow a_۵=\frac{۲\times۵-۱}{۲\times۵-۳}$$

بنابراین می‌توان حدس زد که

$$a_{۹۹}=\frac{۲\times۹۹-۱}{۲\times۹۹-۳}=\frac{۱۹۷}{۱۹۵},\quad a_{۱۰۰}=\frac{۲\times۱۰۰-۱}{۲\times۱۰۰-۳}=\frac{۱۹۹}{۱۹۷}$$

در نتیجه حاصل‌ضرب صد جملهٔ اول دنباله برابر است با

$$a_۱a_۲\cdots a_{۱۰۰}=(-۱)(\frac{۳}{۱})(\frac{۵}{۳})(\frac{۷}{۵})(\frac{۹}{۷})\cdots(\frac{۱۹۷}{۱۹۵})(\frac{۱۹۹}{۱۹۷})=-۱۹۹$$

۳۲- گزینهٔ ۲ ده جملهٔ اول دنباله را پیدا می‌کنیم.

$$a_n=\begin{cases}2^k & n=3k\\ -2k+4 & n=3k+1\\ [\frac{n}{k+2}]+a & n=3k+2\end{cases}$$

$$k=0\Rightarrow\begin{cases}a_0=2^0=1\\ a_1=-2\times0+4=4\\ a_2=[\frac{3\times0+2}{0+2}]+a=1+a\end{cases}$$

$$k=1\Rightarrow\begin{cases}a_3=2^1=2\\ a_4=-2\times1+4=2\\ a_5=[\frac{3\times1+2}{1+2}]+a=1+a\end{cases}$$

$$k=2\Rightarrow\begin{cases}a_6=2^2=4\\ a_7=-2\times2+4=0\\ a_8=[\frac{3\times2+2}{2+2}]+a=2+a\end{cases}$$

$$k=3\Rightarrow a_9=2^3=8$$

مجموع ده جملهٔ اول دنباله برابر ۱۹ است. پس

$$1+4+1+a+2+2+1+a+4+0+2+a+8=19$$

$$3a+25=19\Rightarrow a=-2$$

بنابراین باید میانگین a_{28} و a_{29} را پیدا کنیم.

$$a_{28}=-2\times9+4=-14,\quad a_{29}=[\frac{29}{9+2}]-2=2-2=0$$

پس میانگین جملات بیست و نهم (a_{28}) و سی‌ام (a_{29}) برابر است با

$$\frac{-14+0}{2}=-7$$

۳۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$0\le\sin^2x\le1\Rightarrow0\le5\sin^2x\le5\Rightarrow-1\le5\sin^2x-1\le4$$

$$0\le\sqrt{5\sin^2x-1}\le2\Rightarrow-2\le-\sqrt{5\sin^2x-1}\le0$$

$$2^{-2}\le2^{-\sqrt{5\sin^2x-1}}\le2^0\Rightarrow\frac{1}{4}\le f(x)\le1$$

بنابراین $R_f=[\frac{1}{4},1]$. در نتیجه

$$a=\frac{1}{4},b=1\Rightarrow a+b=\frac{5}{4}$$

۳۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{t}=\log_{2^{-1}}t^{-1}=\log_2t$$

بنابراین اگر فرض کنیم $t=12+\sqrt{[x]}-[x]$، آن‌گاه

$$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{t}-1=\log_2t-1$$

چون $R_f=\{\log_2 3,\log_2 5\}$، پس

$$\begin{cases}\log_2t-1=\log_2 3\Rightarrow\log_2t=1+\log_2 3=\log_2 6\Rightarrow t=6\\ \log_2t-1=\log_2 5\Rightarrow\log_2t=1+\log_2 5=\log_2 10\Rightarrow t=10\end{cases}$$

بنابراین با فرض $u=\sqrt{[x]}\ge0$ داریم

$$\begin{cases}12+u-u^2=6\Rightarrow u^2-u-6=0\Rightarrow u=3,u=-2\ (\text{غ.ق.ق})\\ 12+u-u^2=10\Rightarrow u^2-u-2=0\Rightarrow u=2,u=-1\ (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

بنابراین

$$\sqrt{[x]}=2\Rightarrow[x]=4\Rightarrow4\le x<5$$

$$\sqrt{[x]}=3\Rightarrow[x]=9\Rightarrow9\le x<10$$

بنابراین حداکثر عددهای صحیح ۴ و ۹ در دامنهٔ تابع f قرار دارند.

۳۵- گزینهٔ ۳ تابع f اکیداً صعودی است و اگر نمودار آن را k واحد به بالا یا پایین منتقل کنیم، باز هم تابعی اکیداً صعودی حاصل می‌شود که نمودار وارونش را روی خط $y=x$ قطع می‌کند. پس نقطهٔ تقاطع نمودار تابع $y=f(x)+k$ و وارونش نقطهٔ $(1,1)$ است، پس

$$f(1)+k=1\Rightarrow\sqrt{\sqrt{1+3}}+k=1\Rightarrow k=-1$$

اکنون اگر نمودار حاصل را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-(f(x)-1)$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را ۴ واحد در جهت افقی به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=-f(x+4)+1$ به‌دست می‌آید. پس ضابطهٔ تابع مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$y=-\sqrt{\sqrt{x+4}+3}+1$$

واضح است که نمودار این تابع از نقطهٔ $(0,1-\sqrt{5})$ عبور می‌کند.

۳۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توابع fog و gof را معین می‌کنیم.

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(1-x^2)=\begin{cases}-1 & 1-x^2<-1\\ 1-x^2 & -1\le1-x^2\le1\\ 1 & 1-x^2>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-1 & x^2>2\\ 1-x^2 & 0\le x^2\le2\\ 1 & x^2<0\end{cases}=\begin{cases}-1 & x>\sqrt{2}\ \text{یا}\ x<-\sqrt{2}\\ 1-x^2 & -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\end{cases}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=1-f^2(x)=\begin{cases}1-(-1)^2 & x<-1\\ 1-x^2 & -1\le x\le1\\ 1-1^2 & x>1\end{cases}$$

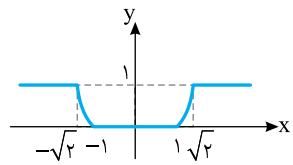
$$=\begin{cases}0 & x<-1\ \text{یا}\ x>1\\ 1-x^2 & -1\le x\le1\end{cases}$$

بنابراین تابع $h=gof-fog$ به‌صورت زیر است:

$$h(x)=\begin{cases}0-(-1) & x<-\sqrt{2}\\ 0-(1-x^2) & -\sqrt{2}\le x<-1\\ 1-x^2-(1-x^2) & -1\le x\le 1\\ 0-(1-x^2) & 1<x\le\sqrt{2}\\ 0-(-1) & x\ge\sqrt{2}\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}1 & x<-\sqrt{2}\ \text{یا}\ x\ge\sqrt{2}\\ x^2-1 & -\sqrt{2}\le x<-1\ \text{یا}\ 1<x\le\sqrt{2}\\ 0 & -1\le x\le 1\end{cases}$$

پس نمودار تابع h به‌صورت زیر است و ماکزیمم مقدار آن برابر ۱ است.



۳۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to 0^+$، آن‌گاه $[x]=0$، پس $\tan[x]=\tan 0=0$

از طرف دیگر، $\sqrt{3x}\to 0^+$ و $(\sqrt{1-x^3}-1)\to 0^-$ و می‌توان از هم‌ارزی‌های $\sin\alpha\sim\alpha$ و $1-\cos\alpha\sim\frac{1}{2}\alpha^2$ استفاده کرد. پس

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\sqrt{1-x^3}-1)-2\tan[x]}{x^n(1-\cos\sqrt{3x})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x^n(\frac{1}{2}(3x))}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-x^3-1}{\frac{3}{2}x^{n+1}}\times\frac{1}{\sqrt{1-x^3}+1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{3x^{n-2}}$$

اکنون توجه کنید که اگر $n>2$، آن‌گاه حد بالا موجود نیست. اگر $n=2$، آن‌گاه حد بالا برابر $-\frac{1}{3}$ است. پس $a=-\frac{1}{3}$ و در نتیجه $a^n=\frac{1}{9}$. اگر $n<2$، آن‌گاه حد مورد نظر برابر صفر است و در نتیجه $a^n=0$. بنابراین مقدار a^n می‌تواند برابر $\frac{1}{9}$ یا صفر باشد که فقط $\frac{1}{9}$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۳۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $x\to(-\frac{1}{2})^+$، آن‌گاه $\frac{-2}{x^2}\to(-8)^-$ و $\frac{3}{x^2}\to 12^+$. بنابراین $[-\frac{2}{x^2}]=-9$ و $[\frac{3}{x^2}]=12$. پس حد مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+}\frac{16x-(-9)}{24x+12}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

۳۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^3-5x+4}{(x-a)(4x^2-4x+1)}=\frac{(x-1)(x^2+x-4)}{(x-a)(2x-1)^2}$$

واضح است که $y=\frac{1}{4}$ مجانب افقی و $x=\frac{1}{2}$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

پس این تابع نباید مجانب قائم دیگری داشته باشد. سه حالت ممکن است:

حالت اول: $x=a$ همان $x=\frac{1}{2}$ باشد، یعنی $a=\frac{1}{2}$.

حالت دوم: $x=a$ همان $x=1$ باشد، یعنی $a=1$.

حالت سوم: $x=a$ ریشهٔ معادلهٔ $x^2+x-4=0$ باشد که در این حالت مجموع مقدارهای ممکن برای a برابر -1 است. پس مجموع تمام مقادیر ممکن a برابر است با

$$\frac{1}{2}+1-1=\frac{1}{2}$$

۴۰- گزینهٔ ۳ ابتدا مشتق تابع f را پیدا می‌کنیم.

$$f(x)=\sin^n(x^2)\Rightarrow f'(x)=2nx\cos(x^2)\sin^{n-1}(x^2)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)f'(x)}{(1-\cos x)^m}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^n(x^2)2nx\cos(x^2)\sin^{n-1}(x^2)}{(1-\cos x)^m}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2nx\sin^{2n-1}(x^2)\cos(x^2)}{(1-\cos x)^m}=32\sqrt{2}$$

اکنون از هم‌ارزی‌های $\sin\alpha\sim\alpha$ و $1-\cos\alpha\sim\frac{1}{2}\alpha^2$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2nx(x^2)^{2n-1}\cos(x^2)}{(\frac{1}{2}x^2)^m}=\lim_{x\to 0^+}\frac{n\times 2^{m+1}x^{4n-1}}{x^{2m}}=32\sqrt{2}$$

بنابراین

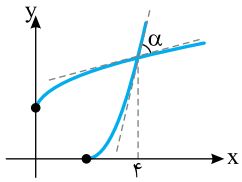
$$\begin{cases}2m=4n-1\Rightarrow m=2n-\frac{1}{2}\\ n\times 2^{m+1}=32\sqrt{2}\Rightarrow n\times 2^{2n+\frac{1}{2}}=32\sqrt{2}\Rightarrow n=2\Rightarrow m=\frac{7}{2}\end{cases}$$

پس $2m+n=9$.

۴۱- گزینهٔ ۴ تابع $f(x)=\sqrt{x}+2$ اکیداً صعودی است و محل تقاطع نمودار آن با نمودار وارونش روی خط $y=x$ است. پس کافی است معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم.

$$\sqrt{x}+2=x\Rightarrow\sqrt{x}=x-2\Rightarrow x=x^2-4x+4$$

$$x^2-5x+4=0\Rightarrow x=4\ ,\ x=1\ (\text{غ.ق.ق})$$



اکنون شیب خطوط مماس بر نمودار تابع‌های f و f^{-1} را در نقطهٔ $x=4$ پیدا می‌کنیم.

$$f(x)=\sqrt{x}+2\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(4)=\frac{1}{4}$$

$$f^{-1}(x)=(x-2)^2\Rightarrow(f^{-1})'(x)=2(x-2)\Rightarrow(f^{-1})'(4)=4$$

تانژانت زاویهٔ بین دو خط با شیب‌های m_1 و m_2 از تساوی

$\tan\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$ به‌دست می‌آید. پس

$$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2(\frac{15}{8})}{1+(\frac{15}{8})^2}=\frac{240}{289},\quad \tan\alpha=\left|\frac{4-\frac{1}{4}}{1+4(\frac{1}{4})}\right|=\frac{15}{8}$$

۴۲- گزینهٔ ۱ مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x)=\sqrt[3]{x}+|x|=\begin{cases}\sqrt[3]{x}+x & x\geq 0\\ \sqrt[3]{x}-x & x\leq 0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1 & x>0\\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1 & x<0\end{cases}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1=0 \quad (\text{غ.ق.ق.})\\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1=0\Rightarrow\sqrt[3]{x^2}=1\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=-1\end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	∄	$+$	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[-1,+\infty)$ صعودی است.

۴۳- گزینهٔ ۴ مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{x^4-3}{x^2-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{4x^3(x^2-2)-2x(x^4-3)}{(x^2-2)^2}$$

$$=\frac{2x^5-8x^3+6x}{(x^2-2)^2}=\frac{2x(x^4-4x^2+3)}{(x^2-2)^2}=\frac{2x(x^2-1)(x^2-3)}{(x^2-2)^2}$$

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	∄	$-$	0	$+$	∄	$+$	0	$-$	∄	$-$	0	$+$

بنابراین تابع f روی بازه‌های $(-2,-\sqrt{3})$، $(-1,0)$، $(1,\sqrt{2})$ و $(\sqrt{2},\sqrt{3})$ اکیداً نزولی است و در نقاط $-\sqrt{3}$، -1، 0، 1 و $\sqrt{3}$ (پنج بار) جهت صعودی و نزولی نمودار تابع f تغییر می‌کند.

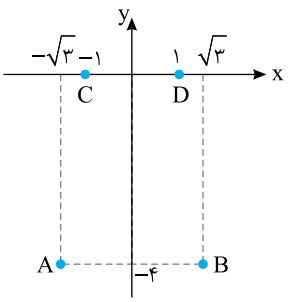
۴۴- گزینهٔ ۱ مشتق اول و مشتق دوم تابع را تعیین علامت می‌کنیم و نقاط مینیمم نسبی و عطف تابع را معین می‌کنیم.

$$f(x)=x^4-6x^2+5\Rightarrow f'(x)=4x^3-12x\Rightarrow f''(x)=12x^2-12$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 4x(x^2-3)=0\Rightarrow x=0, x=\pm\sqrt{3}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow 12(x^2-1)=0\Rightarrow x=\pm 1$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
		min		عطف		max		عطف		min			



پس نقاط $A(-\sqrt{3},-4)$ و $B(\sqrt{3},-4)$ مینیمم نسبی تابع f هستند و نقاط $C(-1,0)$ و $D(1,0)$ نقاط عطف این تابع هستند. شیب پاره‌خط‌های AB و CD برابر صفر است. بنابراین زاویهٔ بین آن‌ها برابر صفر است.

۴۵- گزینهٔ ۴ عبارت مورد نظر را A می‌نامیم. در این صورت

$$A=(a^2+b^2-2ab)^2(a^2+b^2+2ab)^2=((a-b)^2)^2((a+b)^2)^2$$
$$=(((a-b)(a+b))^2)^2$$

از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

$$A=((a^2-b^2)^2)^2=(a^4-2a^2b^2+b^4)^2$$

اکنون توجه کنید که

$$a^4=(\sqrt[4]{\sqrt{6}-2})^4=\sqrt{6}-2,\quad b^4=(\sqrt[4]{\sqrt{6}+2})^4=\sqrt{6}+2$$

$$a^2b^2=(\sqrt[4]{\sqrt{6}-2})^2\times(\sqrt[4]{\sqrt{6}+2})^2=\sqrt{\sqrt{6}-2}\times\sqrt{\sqrt{6}+2}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}=\sqrt{6-4}=\sqrt{2}$$

بنابراین

$$A=(a^4-2a^2b^2+b^4)^2=(\sqrt{6}-2-2\sqrt{2}+\sqrt{6}+2)^2$$
$$=(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})^2=4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2=4(6+2-2\sqrt{12})$$

چون $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$، پس

$$A=4(8-4\sqrt{3})=16(2-\sqrt{3})$$

۴۶- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم $\sqrt[3]{x}=t$. در این صورت معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر در می‌آید:

$$(t^2+\frac{1}{t^2}+1)(t^2-1)=2t\Rightarrow(\frac{t^4+1+t^2}{t^2})(t^2-1)=2t$$

برای اینکه معادله را ساده کنیم، دو طرف آن را در t^2 ضرب می‌کنیم

$$(t^4+t^2+1)(t^2-1)=2t^3$$

اکنون توجه کنید که می‌توانیم سمت چپ معادله را به کمک اتحاد چاق و لاغر ساده کنیم

$$(t^2)^3-1^3=2t^3\Rightarrow(t^3)^2-2t^3-1=0\qquad(*)$$

چون $\sqrt[3]{x}=t$، پس $x=t^3$، در نتیجه معادلهٔ $(*)$ می‌شود $x^2-2x-1=0$، که مجموع جواب‌های آن برابر است با $-\frac{(-2)}{1}=2$.

۴۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که چون x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $x^2+x-5=0$ هستند، پس $x_1+x_2=-1$ و $x_1x_2=-5$. اکنون می‌توانیم مجموع جواب‌های معادلهٔ جدید را به صورت زیر حساب کنیم:

$$S=\frac{1}{(x_1+1)^3}+\frac{1}{(x_2+1)^3}\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}S=\frac{(x_1+1)^3+(x_2+1)^3}{(x_1+1)^3(x_2+1)^3}$$

از اتحاد $a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$ استفاده می‌کنیم و صورت کسر را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$S=\frac{(x_۱+۱+x_۲+۱)^۳-۳(x_۱+۱)(x_۲+۱)(x_۱+۱+x_۲+۱)}{((x_۱+۱)(x_۲+۱))^۳}$$

$$=\frac{(x_۱+x_۲+۲)^۳-۳(x_۱+x_۲+x_۱x_۲+۱)(x_۱+x_۲+۲)}{(x_۱+x_۲+x_۱x_۲+۱)^۳}$$

$$=\frac{(-۱+۲)^۳-۳(-۱-۵+۱)(-۱+۲)}{(-۱-۵+۱)^۳}=\frac{۱-۳(-۵)(۱)}{(-۵)^۳}=-\frac{۱۶}{۱۲۵}$$

همچنین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ جدید به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P=\frac{۱}{(x_۱+۱)^۳}\times\frac{۱}{(x_۲+۱)^۳}=\frac{۱}{((x_۱+۱)(x_۲+۱))^۳}$$

$$=\frac{۱}{(x_۱+x_۲+x_۱x_۲+۱)^۳}=\frac{۱}{(-۱-۵+۱)^۳}=-\frac{۱}{۱۲۵}$$

بنابراین معادلهٔ جدید به‌صورت $x^۲+\frac{۱۶}{۱۲۵}x-\frac{۱}{۱۲۵}=۰$ است، که اگر دو طرف آن را در ۱۲۵ ضرب کنیم، می‌شود $۱۲۵x^۲+۱۶x-۱=۰$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$S=\frac{۱}{(x_۱+۱)^۳}+\frac{۱}{(x_۲+۱)^۳}=(\frac{۱}{x_۱+۱})^۳+(\frac{۱}{x_۲+۱})^۳=\frac{x_۱^۳}{۱۲۵}+\frac{x_۲^۳}{۱۲۵}=\frac{x_۱^۳+x_۲^۳}{۱۲۵}$$

اکنون از اتحاد $a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$ استفاده می‌کنیم. چون $x_۱+x_۲=-۱$ و $x_۱x_۲=-۵$، پس

$$S=\frac{(x_۱+x_۲)^۳-۳x_۱x_۲(x_۱+x_۲)}{۱۲۵}=\frac{(-۱)^۳-۳(-۵)(-۱)}{۱۲۵}=-\frac{۱۶}{۱۲۵}$$

از طرف دیگر،

$$P=\frac{۱}{(x_۱+۱)^۳}\times\frac{۱}{(x_۲+۱)^۳}=(\frac{۱}{x_۱+۱})^۳\times(\frac{۱}{x_۲+۱})^۳=\frac{x_۱^۳}{۵^۳}\times\frac{x_۲^۳}{۵^۳}=\frac{(x_۱x_۲)^۳}{۵^۳\times۵^۳}$$

چون $x_۱x_۲=-۵$، پس $P=\frac{(-۵)^۳}{۵^۳\times۵^۳}$، یعنی $P=-\frac{۱}{۱۲۵}$. در نتیجه معادلهٔ مورد نظر به‌صورت $x^۲+\frac{۱۶}{۱۲۵}x-\frac{۱}{۱۲۵}=۰$ است، که اگر دو طرف آن را در ۱۲۵ ضرب کنیم، می‌شود $۱۲۵x^۲+۱۶x-۱=۰$.

۴۸- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$f(\frac{\pi}{۳۶})=۱۶\cos^۲\frac{۳\pi}{۳۶}\cos^۲\frac{۶\pi}{۳۶}\cos^۲\frac{۱۲\pi}{۳۶}\cos^۲\frac{۲۴\pi}{۳۶}$$

$$=۱۶\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}\cos^۲\frac{\pi}{۶}\cos^۲\frac{\pi}{۳}\cos^۲\frac{۲\pi}{۳}$$

$$=۱۶\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲(\frac{۱}{۲})^۲(-\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۳}{۴}\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}$$

اکنون برای اینکه مقدار $\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}$ را حساب کنیم، از اتحاد مثلثاتی $\cos^۲\alpha=\frac{۱}{۲}(۱+\cos۲\alpha)$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$f(\frac{\pi}{۳۶})=\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۲}(۱+\cos\frac{۲\pi}{۱۲})=\frac{۳}{۸}(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲})$$

$$=\frac{۳}{۸}(\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۱۶}$$

راه‌حل دوم عبارت داده شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=۱۶(\cos۳x\cos۶x\cos۱۲x\cos۲۴x)^۲$$

اکنون عبارت داخل پرانتز را در $\sin۳x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$f(x)=۱۶(\frac{\sin۳x\cos۳x\cos۶x\cos۱۲x\cos۲۴x}{\sin۳x})^۲$$

از اتحاد مثلثاتی $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin۲\alpha$ به‌دست می‌آید

$$\sin۳x\cos۳x=\frac{۱}{۲}\sin۶x$$

در نتیجه

$$f(x)=۱۶(\frac{\frac{۱}{۲}\sin۶x\cos۶x\cos۱۲x\cos۲۴x}{\sin۳x})^۲$$

به‌طور مشابه $\sin۶x\cos۶x=\frac{۱}{۲}\sin۱۲x$، پس

$$f(x)=۱۶(\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\sin۱۲x\cos۱۲x\cos۲۴x}{\sin۳x})^۲$$

به‌طور مشابه با انجام دو مرحلهٔ دیگر عبارت را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم.

$$f(x)=۱۶(\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\sin۲۴x\cos۲۴x}{\sin۳x})^۲$$

$$=۱۶(\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\sin۴۸x}{\sin۳x})^۲=\frac{\sin^۲۴۸x}{۱۶\sin^۲۳x}$$

بنابراین

$$f(\frac{\pi}{۳۶})=\frac{\sin^۲\frac{۴۸\pi}{۳۶}}{۱۶\sin^۲\frac{۳\pi}{۳۶}}=\frac{\sin^۲\frac{۴\pi}{۳}}{۱۶\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}}=\frac{\sin^۲(\pi+\frac{\pi}{۳})}{۱۶\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}}\xrightarrow{\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\ ۲\sin^۲\alpha=۱-\cos۲\alpha}$$

$$f(\frac{\pi}{۳۶})=\frac{(-\sin\frac{\pi}{۳})^۲}{۸(۱-\cos\frac{۲\pi}{۱۲})}=\frac{\sin^۲\frac{\pi}{۳}}{۸(۱-\cos\frac{\pi}{۶})}=\frac{(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}{۸(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})}=\frac{\frac{۳}{۴}}{۴(۲-\sqrt{۳})}$$

در نهایت صورت و مخرج را در مزدوج $۲-\sqrt{۳}$، یعنی $۲+\sqrt{۳}$ ضرب می‌کنیم

$$f(\frac{\pi}{۳۶})=\frac{۳}{۱۶(۲-\sqrt{۳})}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۳(۲+\sqrt{۳})}{۱۶(۴-۳)}=\frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۱۶}$$

راه‌حل سوم عبارت $f(x)$ را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x)=(۲\cos^۲۳x)(۲\cos^۲۶x)(۲\cos^۲۱۲x)(۲\cos^۲۲۴x)$$

$$=(۱+\cos۶x)(۱+\cos۱۲x)(۱+\cos۲۴x)(۱+\cos۴۸x)$$

بنابراین

$$f(\frac{\pi}{۳۶})=(۱+\cos\frac{۶\pi}{۳۶})(۱+\cos\frac{۱۲\pi}{۳۶})(۱+\cos\frac{۲۴\pi}{۳۶})(۱+\cos\frac{۴۸\pi}{۳۶})$$
$$=(۱+\cos\frac{\pi}{۶})(۱+\cos\frac{\pi}{۳})(۱+\cos\frac{۲\pi}{۳})(۱+\cos\frac{۴\pi}{۳})$$
$$=(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲})(۱+\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۲})=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۱۶}$$

۴۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cos(۲\alpha-\frac{\pi}{۲})=\sin ۲\alpha\ ,\quad \cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sin ۲\alpha-\cos\alpha}{\cot ۲\alpha}$. اکنون مقادیر $\cos\alpha$ و $\sin ۲\alpha$ را حساب می‌کنیم. چون $\tan\alpha=\frac{۳}{۴}$، پس می‌توان نوشت

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow ۱+\frac{۹}{۱۶}=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{۱۶}{۲۵}$$

چون انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی است، پس $\cos\alpha<۰$، یعنی $\cos\alpha=-\frac{۴}{۵}$. از طرف دیگر،

$$\sin ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=\frac{۲(\frac{۳}{۴})}{۱+\frac{۹}{۱۶}}=\frac{۲۴}{۲۵}$$

$$\cos ۲\alpha=\frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=\frac{۱-\frac{۹}{۱۶}}{۱+\frac{۹}{۱۶}}=\frac{۷}{۲۵}$$

$$\cot ۲\alpha=\frac{\cos ۲\alpha}{\sin ۲\alpha}=\frac{\frac{۷}{۲۵}}{\frac{۲۴}{۲۵}}=\frac{۷}{۲۴}$$

در نتیجه، عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sin ۲\alpha-\cos\alpha}{\cot ۲\alpha}=\frac{\frac{۲۴}{۲۵}+\frac{۴}{۵}}{\frac{۷}{۲۴}}=\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$

۵۰- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$\cos^۲ x-\sin^۲ x\cos ۳x=۱\Rightarrow ۱-\cos^۲ x+\sin^۲ x\cos ۳x=۰$$
$$\sin^۲ x+\sin^۲ x\cos ۳x=۰\Rightarrow\sin^۲ x(۱+\cos ۳x)=۰$$
$$\begin{cases}\sin^۲ x=۰\Rightarrow\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ \cos ۳x=-۱\Rightarrow ۳x=(۲k+۱)\pi\Rightarrow x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۳}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

برای اینکه جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ را پیدا کنیم، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

k	۰	۱	۲	۳
$k\pi$	۰	π	۲π	~~۳π~~
$\frac{(۲k+۱)\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۳}$	π	$\frac{۵\pi}{۳}$	~~$\frac{۷\pi}{۳}$~~

از این جدول معلوم می‌شود که جواب‌های مورد نظر ۰، $\frac{\pi}{۳}$، π، $\frac{۵\pi}{۳}$ و ۲π هستند، که تعداد آن‌ها پنج‌تاست.

۵۱- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ که در آن $g(x)=\log_۴(x^۲-x-۲)$ و $h(x)=\sqrt{x^۲-۱}+۱$. برای پیدا کردن دامنهٔ تابع f، دامنهٔ تابع‌های g و h را به‌دست می‌آوریم، از آن‌ها اشتراک می‌گیریم و در آخر جواب‌های معادلهٔ $h(x)=۰$ را از آن حذف می‌کنیم، یعنی

$$D_f=(D_g\cap D_h)-\{x\,|\,x\in D_h, h(x)=۰\}$$

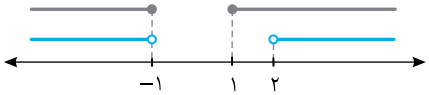
برای پیدا کردن دامنهٔ تابع g باید نامعادلهٔ $x^۲-x-۲>۰$ را حل کنیم:

$$x^۲-x-۲>۰\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}(x-۲)(x+۱)>۰\Rightarrow x<-۱\ \text{یا}\ x>۲$$

پس $D_g=(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$. از طرف دیگر، برای پیدا کردن دامنهٔ تابع h باید نامعادلهٔ $x^۲-۱\geq۰$ را حل کنیم: $x^۲-۱\geq۰\Rightarrow x^۲\geq۱\Rightarrow x\leq-۱$ یا $x\geq۱$

پس $D_h=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$. توجه کنید که معادلهٔ $h(x)=۰$ جواب ندارد، زیرا $\sqrt{x^۲-۱}+۱$ همواره مثبت است. بنابراین

$$D_f=((-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty))\cap((-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty))=(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$$



راه‌حل دوم توجه کنید که عدد ۳ در دامنهٔ تابع f است، زیرا

$$f(۳)=\frac{\log_۴(۹-۳-۲)}{\sqrt{۹-۱}+۱}=\frac{\log_۴ ۴}{\sqrt{۸}+۱}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}+۱}$$

پس گزینه‌های (۲) و (۴) حذف می‌شوند، زیرا ۳ عضو آن‌ها نیست. از طرف دیگر، چون ۲ عضو مجموعهٔ گزینهٔ (۱) نیست، ولی عضو مجموعهٔ گزینهٔ (۳) است، پس کافی است ببینیم ۲ در دامنهٔ تابع f هست یا خیر. توجه کنید که

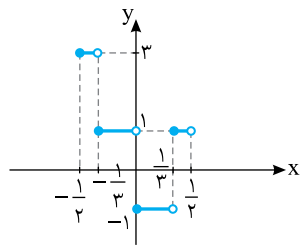
$$f(۲)=\frac{\log_۴(۴-۲-۲)}{\sqrt{۴-۱}+۱}=\frac{\log_۴ ۰}{\sqrt{۳}+۱}$$

چون $\log_۴ ۰$ تعریف نشده است، پس عدد ۲ در دامنهٔ تابع f نیست، یعنی گزینهٔ (۳) نیز حذف می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۱) دامنهٔ تابع f است.

۵۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** چون $-\frac{۱}{۲}\leq x<\frac{۱}{۲}$، پس $-\frac{۳}{۲}\leq ۳x<\frac{۳}{۲}$. بنابراین

$$-\frac{۳}{۲}\leq ۳x<-۱\Rightarrow[۳x]=-۲, -\frac{۱}{۲}\leq x<-\frac{۱}{۳}\Rightarrow f(x)=۲|-۲|-۱=۳$$
$$-۱\leq ۳x<۰\Rightarrow[۳x]=-۱, -\frac{۱}{۳}\leq x<۰\Rightarrow f(x)=۲|-۱|-۱=۱$$
$$۰\leq ۳x<۱\Rightarrow[۳x]=۰, ۰\leq x<\frac{۱}{۳}\Rightarrow f(x)=۲|۰|-۱=-۱$$
$$۱\leq ۳x<\frac{۳}{۲}\Rightarrow[۳x]=۱, \frac{۱}{۳}\leq x<\frac{۱}{۲}\Rightarrow f(x)=۲|۱|-۱=۱$$

در نتیجه نمودار تابع f به‌صورت زیر است:



راه‌حل دوم توجه کنید که اگر $x\to ۰^-$، آن‌گاه $۳x\to ۰^-$، پس $[۳x]=-۱$. در نتیجه

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}(۲|[۳x]|-۱)=۲|-۱|-۱=۱$$

همچنین اگر $x\to ۰^+$، آن‌گاه $۳x\to ۰^+$، پس $[۳x]=۰$. در نتیجه

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}(۲|[۳x]|-۱)=۲|۰|-۱=-۱$$

فقط گزینهٔ (۲) این شرایط را دارد.

۵۳- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** نقطهٔ برخورد منحنی‌ها جواب دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} ۲y=x^۲ \\ x=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳} \end{cases}$$

دو طرف معادلهٔ دوم را به توان دو می‌رسانیم و به جای $x^۲$ قرار می‌دهیم $۲y$:

$$x^۲=(\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳})^۲\Rightarrow ۲y=y+۳+y-۳-۲\sqrt{(y+۳)(y-۳)}$$

$$۲y=۲y-۲\sqrt{y^۲-۹}\Rightarrow -۲\sqrt{y^۲-۹}=۰\Rightarrow y^۲-۹=۰\Rightarrow y=\pm ۳$$

توجه کنید که چون $۲y=x^۲\geq ۰$، پس فقط $y=۳$ قبول است. در نتیجه

$$x=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳}=\sqrt{۶}-\sqrt{۰}=\sqrt{۶}$$

بنابراین نقطهٔ برخورد منحنی‌ها $(\sqrt{۶},۳)$ است، که فاصله‌اش از مبدأ برابر است با

$$\sqrt{(\sqrt{۶})^۲+۳^۲}=\sqrt{۶+۹}=\sqrt{۱۵}$$

راه‌حل دوم با توجه به ضابطهٔ منحنی $x=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳}$، متوجه می‌شویم که $y\geq ۳$. اکنون اگر در ضابطه‌های داده شده قرار دهیم $y=۳$، برای هر دو به‌دست می‌آید $x=\sqrt{۶}$، یعنی $(\sqrt{۶},۳)$ نقطهٔ تلاقی دو منحنی است که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با $\sqrt{(\sqrt{۶})^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۵}$.

۵۴- گزینهٔ ۲ در صورت از ۳^x و در مخرج از $۲^{x-۲}$ فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{۳^x(۱+۳+۳^۲+۳^۳+۳^۴+۳^۵)}{۲^{x-۲}(۱+۲+۲^۲+۲^۳+۲^۴+۲^۵)}=۵۲\Rightarrow\frac{۳^x\times ۳۶۴}{۲^{x-۲}\times ۶۳}=۵۲$$

$$\frac{۳^{x-۲}\times ۹\times ۵۲\times ۷}{۲^{x-۲}\times ۹\times ۷}=۵۲\Rightarrow\frac{۳^{x-۲}}{۲^{x-۲}}=۱\Rightarrow(\frac{۳}{۲})^{x-۲}=۱=(\frac{۳}{۲})^۰\Rightarrow x-۲=۰\Rightarrow x=۲$$

۵۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که انتقال به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ در امتداد محور x در جهت مثبت معادل $\frac{\pi}{۲}$ واحد انتقال به راست و انتقال به اندازهٔ $\frac{۳}{۲}$ در امتداد محور y در جهت منفی معادل $\frac{۳}{۲}$ واحد فقط یک فاصله انتقال به پایین است. پس

$$y=۲^{|\sin x|}\xrightarrow{\text{واحد به راست }\frac{\pi}{۲}} y=۲^{|\sin(x-\frac{\pi}{۲})|}$$

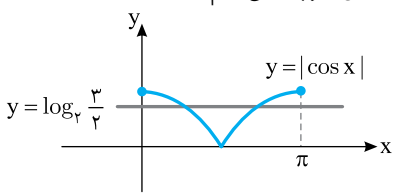
چون که $\sin(x-\frac{\pi}{۲})=-\cos x$، پس

$$y=۲^{|-\cos x|}=۲^{|\cos x|}\xrightarrow{\text{واحد به پایین }\frac{۳}{۲}} y=۲^{|\cos x|}-\frac{۳}{۲}$$

بنابراین با انجام انتقال‌های خواسته شده، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۲^{|\cos x|}-\frac{۳}{۲}$ به‌دست می‌آید. برای پیدا کردن تعداد نقاط برخورد نمودار تابع بالا با محور x در فاصلهٔ $[۰,\pi]$، باید تعداد جواب‌های معادلهٔ $۲^{|\cos x|}-\frac{۳}{۲}=۰$ را در این فاصله پیدا کنیم. اکنون با استفاده از تعریف تابع لگاریتم داریم

$$۲^{|\cos x|}-\frac{۳}{۲}=۰\Rightarrow ۲^{|\cos x|}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow|\cos x|=\log_۲\frac{۳}{۲}$$

توجه کنید که $\log_۲ ۱<\log_۲\frac{۳}{۲}<\log_۲ ۲$، پس $۰<\log_۲\frac{۳}{۲}<۱$. اکنون تعداد نقاط برخورد خط $y=\log_۲\frac{۳}{۲}$ و نمودار تابع $y=|\cos x|$ را روی بازهٔ $[۰,\pi]$ از روی شکل زیر پیدا می‌کنیم که دوتاست.



۵۶- گزینهٔ ۱ اگر فرض کنیم $a=\log_x y$، آن‌گاه $\frac{۱}{a}=\log_y x$.

بنابراین از تساوی داده شده به‌دست می‌آید

$$a-۲(\frac{۱}{a})=۱\xrightarrow{\times a} a^۲-۲=a\Rightarrow a^۲-a-۲=۰$$

به کمک اتحاد جملهٔ مشترک عبارت بالا را تجزیه می‌کنیم

$$(a+۱)(a-۲)=۰\Rightarrow a=-۱, a=۲$$

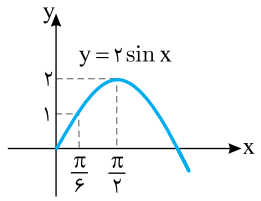
چون $x,y>۱$، پس $a=\log_x y>۰$، در نتیجه فقط $a=۲$ قابل قبول است، پس

$$\log_x y=۲\Rightarrow y=x^۲$$

۵۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** اگر $x\to\frac{\pi}{۶}^-$، آن‌گاه $\sin x\to\frac{۱}{۲}^-$ و در نتیجه $۲\sin x\to ۱^-$، پس $۲\sin x-۱\to ۰^-$. بنابراین $[۲\sin x-۱]=-۱$، یعنی

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}^-}[۲\sin x-۱]=-۱$$

راه‌حل دوم چون به‌ازای هر عدد حقیقی x و هر عدد صحیح k، $[x+k]=[x]+k$، پس $[۲\sin x-۱]=[۲\sin x]-۱$. اکنون به نمودار تابع $y=۲\sin x$ در شکل زیر توجه کنید.



از روی این نمودار معلوم می‌شود که

$$x\to\frac{\pi}{۶}^{-}\Rightarrow ۰<۲\sin x<۱\Rightarrow[۲\sin x]=۰$$

بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}^{-}}([۲\sin x]-۱)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}^{-}}(۰-۱)=-۱$$

۵۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم

$$f(x)=y=۲+\sqrt{x-۱}\Rightarrow y-۲=\sqrt{x-۱}\xrightarrow{\text{به توان دو}}$$

$$(y-۲)^۲=x-۱\Rightarrow x=(y-۲)^۲+۱$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=(x-۲)^۲+۱$. اگر این نمودار را ۲ واحد در جهت مثبت محور x و سپس ۳ واحد در جهت منفی محور y انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x)=f^{-۱}(x-۲)-۳$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$g(۴)=f^{-۱}(۴-۲)-۳=f^{-۱}(۲)-۳=(۲-۲)^۲+۱-۳=-۲$$

راه‌حل دوم قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=۲+\sqrt{x-۱}$ نسبت به خط $y=x$ نمودار تابع $f^{-۱}$ است. بنابراین $g(x)=f^{-۱}(x-۲)-۳$. قرار می‌دهیم $g(۴)=a$ و از تعریف تابع معکوس استفاده می‌کنیم. در نتیجه

$$g(۴)=f^{-۱}(۲)-۳=a\Rightarrow f^{-۱}(۲)=a+۳$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف تابع وارون}} f(a+۳)=۲$$

پس

$$۲+\sqrt{a+۳-۱}=۲\Rightarrow\sqrt{a+۲}=۰\Rightarrow a=-۲$$

۵۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=\begin{cases}۱ & f(x)>۰\\ ۰ & f(x)=۰\\ -۱ & f(x)<۰\end{cases}$$

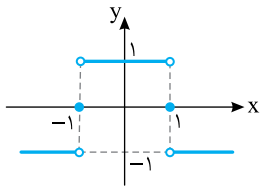
از طرف دیگر، جدول تعیین علامت $f(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$۱-x^۲$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

بنابراین

$$(gof)(x)=\begin{cases}۱ & x\in(-۱,۱)\\ ۰ & x=\pm۱\\ -۱ & x\in(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)\end{cases}$$

پس نمودار تابع gof به‌صورت زیر است، که در نقاط $x=\pm۱$ ناپیوسته است.



۶۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲(x^۲-۴)}{x^۲-۱} & x^۲\geq۴\\ \dfrac{-x^۲(x^۲-۴)}{x^۲-۱} & x^۲\leq۴,\ x\neq\pm۱\end{cases}$$

از طرف دیگر، اگر $g(x)=\dfrac{x^۲(x^۲-۴)}{x^۲-۱}=\dfrac{x^۴-۴x^۲}{x^۲-۱}$، آن‌گاه

$$g'(x)=\frac{(۴x^۳-۸x)(x^۲-۱)-(۲x)(x^۴-۴x^۲)}{(x^۲-۱)^۲}=\frac{۲x((x^۲-۱)^۲+۳)}{(x^۲-۱)^۲}$$

بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}g'(x) & x>۲\text{ یا }x<-۲\\ -g'(x) & -۲<x<۲,\ x\neq\pm۱\end{cases}$$

توجه کنید که تابع f در نقطه‌های ۲ و -۲ مشتق‌پذیر نیست، زیرا این عددها ریشه‌های سادهٔ عبارت داخل قدرمطلق هستند. همچنین،

$$f'(x)=۰\Rightarrow g'(x)=۰\Rightarrow x=۰$$

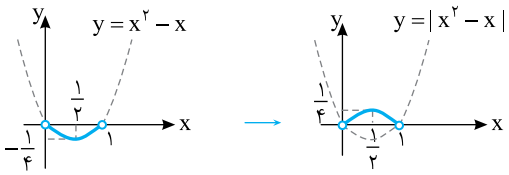
پس نقاط بحرانی تابع f نقطه‌های ۲، -۲ و صفر هستند، که مطابق جدول زیر هر سه طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند $(x\neq\pm۱)$:

x	$-\infty$		-۲		۰		۲		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	

۶۱- گزینهٔ ۳ اگر مختصات نقطهٔ A واقع بر سهمی $f(x)=x^۲$ به‌صورت $(x,x^۲)$ باشد، مختصات نقطهٔ A'، یعنی قرینهٔ A نسبت به نیمساز نواحی اول و سوم، به‌صورت $(x^۲,x)$ است. بنابراین

$$AA'=\sqrt{(x-x^۲)^۲+(x^۲-x)^۲}=\sqrt{۲(x^۲-x)^۲}=\sqrt{۲}|x^۲-x|$$

از طرف دیگر، چون طول نقطهٔ A بین دو طول متوالی از محل برخورد تابع f با خط نیمساز نواحی اول و سوم (خط $y=x$)، یعنی نقاط $(۰,۰)$ و $(۱,۱)$ قرار دارد، پس باید ماکزیمم AA' را در بازهٔ $(۰,۱)$ پیدا کنیم. برای پیدا کردن ماکزیمم تابع $y=|x^۲-x|$ در بازهٔ $(۰,۱)$ از روش رسم نمودار تابع استفاده می‌کنیم.



بنابراین بیشترین مقدار AA' در بازهٔ $(۰,۱)$ به‌ازای $x=\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید، که برابر می‌شود با

$$AA'=\sqrt{۲}|\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}|=\sqrt{۲}\times\frac{۱}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

۶۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})f'(g(\frac{۳}{\sqrt{۸}}))$$

توجه کنید که $g(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=\frac{۱}{\sqrt[۳]{(\frac{۳}{\sqrt{۸}})^{۲}-۱}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۹}{۸}-۱}}=۲$. پس باید مقدار $g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})f'(۲)$ را حساب کنیم. مقدار $g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})$ را به‌سادگی می‌توان حساب کرد

$$g(x)=(x^{۲}-۱)^{-\frac{۱}{۳}}\Rightarrow g'(x)=(-\frac{۱}{۳})(۲x)(x^{۲}-۱)^{-\frac{۱}{۳}-۱}$$

$$=-\frac{۲}{۳}x(x^{۲}-۱)^{-\frac{۴}{۳}}$$

$$g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=-\frac{۲}{۳}(\frac{۳}{\sqrt{۸}})(\frac{۹}{۸}-۱)^{-\frac{۴}{۳}}=-۸\sqrt{۲}$$

برای پیدا کردن مقدار $f'(۲)$ ابتدا ضابطهٔ تابع f را در یک همسایگی نقطهٔ $x=۲$ پیدا می‌کنیم. توجه کنید که

$$x\to ۲\Rightarrow x^{۲}\to ۴\Rightarrow ۴<x^{۲}+\frac{۱}{۲}<۵\Rightarrow[x^{۲}+\frac{۱}{۲}]=۴$$

در نتیجه $f(x)=(۴x)^{۲}+۱=۱۶x^{۲}+۱\Rightarrow f'(x)=۳۲x\Rightarrow f'(۲)=۶۴$

بنابراین $(fog)'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=(-۸\sqrt{۲})(۶۴)=۴(-۱۲۸\sqrt{۲})$

۶۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $g'(x)=۲ax+b$ و $g''(x)=۲a$.

بنابراین

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & x\geq k\\ g'(x) & x<k\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}g'(x) & x\geq k\\ g''(x) & x<k\end{cases}$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=k$ مشتق‌پذیر است، پس

$$g(k)=g'(k)\Rightarrow ak^{۲}+bk+c=۲ak+b$$

$$g'(k)=g''(k)\Rightarrow ۲ak+b=۲a\Rightarrow b=۲a-۲ak$$

اکنون از تساوی $b=۲a-۲ak$ و شرط $b+c=a$ می‌توان نتیجه گرفت

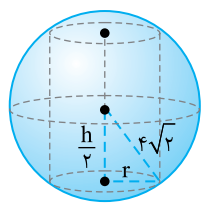
$$ak^{۲}+bk+a-b=۲a\Rightarrow ak^{۲}+(۲a-۲ak)k+a-(۲a-۲ak)=۲a$$

$$a(k^{۲}+۲k-۲k^{۲}+۱-۲+۲k)=۲a\xrightarrow{a\neq ۰}-k^{۲}+۴k-۱=۲$$

$$k^{۲}-۴k+۳=۰\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}(k-۱)(k-۳)=۰\Rightarrow k=۱\,,\,k=۳$$

پس بیشترین مقدار k برابر با ۳ است.

۶۴- گزینهٔ ۲ شکل مقابل را ببینید.



مساحت جانبی استوانه برابر است با $S=۲\pi rh$.

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$r^{۲}+(\frac{h}{۲})^{۲}=(۴\sqrt{۲})^{۲}\Rightarrow r^{۲}=۳۲-\frac{h^{۲}}{۴}$$

$$r=\sqrt{۳۲-\frac{h^{۲}}{۴}}$$

$$S=۲\pi\sqrt{۳۲-\frac{h^{۲}}{۴}}\times h=۲\pi\sqrt{\frac{(۱۲۸-h^{۲})h^{۲}}{۴}}=\pi\sqrt{-h^{۴}+۱۲۸h^{۲}}$$

برای اینکه S ماکزیمم باشد، باید $-h^{۴}+۱۲۸h^{۲}$ ماکزیمم باشد. توجه کنید که

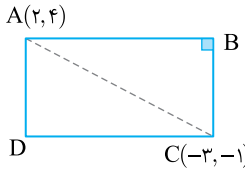
$$y=-h^{۴}+۱۲۸h^{۲}\Rightarrow y'=-۴h^{۳}+۲۵۶h$$

$$y'=۰\Rightarrow -۴h(h^{۲}-۶۴)=۰\Rightarrow h^{۲}=۶۴$$

بنابراین ماکزیمم S به‌ازای $h^{۲}=۶۴$ به‌دست می‌آید، که برابر است با

$$S=\pi\sqrt{-۶۴^{۲}+۱۲۸\times ۶۴}=۶۴\pi$$

۶۵- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول**



ابتدا معادلهٔ خطی را که ضلع AB روی آن است، می‌نویسیم

$$y-۴=۳(x-۲)\Rightarrow ۳x-y-۲=۰$$

فاصلهٔ نقطهٔ C از خط به‌دست آمده برابر است با

$$CB=\frac{|۳(-۳)-(-۱)-۲|}{\sqrt{۳^{۲}+(-۱)^{۲}}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۱۰}}=\sqrt{۱۰}$$

از طرف دیگر، $AC=\sqrt{(۲+۳)^{۲}+(۴+۱)^{۲}}=\sqrt{۵۰}$

اکنون با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC، طول AB را به‌دست می‌آوریم

$$AB^{۲}+BC^{۲}=AC^{۲}\Rightarrow AB^{۲}+۱۰=۵۰\Rightarrow AB=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰}$$

پس محیط مستطیل برابر است با $۲(\sqrt{۱۰}+۲\sqrt{۱۰})=۶\sqrt{۱۰}$.

راه‌حل دوم ابتدا معادلات اضلاع AB و BC را می‌نویسیم

$$AB:۳x-y-۲=۰$$

$$BC\perp AB\Rightarrow m_{BC}=-\frac{۱}{m_{AB}}=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow y-(-۱)=-\frac{۱}{۳}(x-(-۳))$$

$$BC:x+۳y+۶=۰$$

محل تلاقی اضلاع AB و BC همان نقطهٔ B است.

$$\begin{cases}۳x-y-۲=۰\\ x+۳y+۶=۰\end{cases}\Rightarrow B(۰,-۲)$$

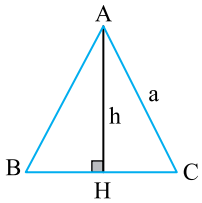
اکنون طول پاره‌خط‌های AB و BC را به‌دست می‌آوریم و سپس محیط مستطیل را محاسبه می‌کنیم.

$$AB=\sqrt{(۲-۰)^{۲}+(۴+۲)^{۲}}=\sqrt{۴+۳۶}=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰}$$

$$BC=\sqrt{(۰+۳)^{۲}+(-۲+۱)^{۲}}=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}$$

در نتیجه محیط مستطیل $=۲(AB+BC)=۲(۲\sqrt{۱۰}+\sqrt{۱۰})=۶\sqrt{۱۰}$

۶۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که



$\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=h$، پس $a=\frac{۲}{\sqrt{۳}}h$، در نتیجه

یعنی $۳a=\frac{۳\times ۲h}{\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}h$،

$۲\sqrt{۳}h=۳a=$ محیط مثلث. از طرف دیگر، چون محیط مثلث برابر $\sqrt{۲۷۰}$ است، پس

$$۲\sqrt{۳}h=\sqrt{۲۷۰}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{۲۷۰}}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۳}{۲}\sqrt{۱۰}$$

اگر مختصات نقطهٔ A به‌صورت (a,b) باشد، آن‌گاه

$$h=AH=\frac{|۳a-b-۵|}{\sqrt{۳^{۲}+(-۱)^{۲}}}=\frac{|۳a-b-۵|}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۳}{۲}\sqrt{۱۰}$$

$$|۳a-b-۵|=\frac{۳}{۲}\sqrt{۱۰}\times\sqrt{۱۰}=۱۵\qquad (*)$$

از طرف دیگر، شیب خطی که ضلع BC روی آن است، برابر ۳ است. چون AH بر BC عمود است، پس شیب خطی که ارتفاع AH روی آن است، قرینهٔ معکوس ۳، یعنی برابر $-\frac{۱}{۳}$ است. به این ترتیب،

$$\frac{b-۱}{a-۲}=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳b-۳=۲-a\Rightarrow a=۵-۳b$$

بنابراین اگر در تساوی (*) به‌جای a قرار دهیم $۵-۳b$، به‌دست می‌آید

$$|۳(۵-۳b)-b-۵|=۱۵$$

$$|۱۰-۱۰b|=۱۵\Rightarrow\begin{cases}۱۰-۱۰b=۱۵\\ ۱۰-۱۰b=-۱۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱۳}{۲}\\ b=\frac{۵}{۲}\Rightarrow a=-\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

در نتیجه A می‌تواند یکی از نقطه‌های $(\frac{۱۳}{۲},-\frac{۱}{۲})$ و $(-\frac{۵}{۲},\frac{۵}{۲})$ باشد.

۶۷- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** با استفاده از اتحاد مزدوج می‌توان نوشت

$$(a+\frac{۱}{a}+\sqrt{۲})^۲(a+\frac{۱}{a}-\sqrt{۲})^۲=((a+\frac{۱}{a})^۲-(\sqrt{۲})^۲)^۲$$

$$=(a^۲+\frac{۱}{a^۲}+۲-۲)^۲=(a^۲+\frac{۱}{a^۲})^۲=a^۴+\frac{۱}{a^۴}+۲$$

اکنون توجه کنید که $a=\sqrt[۴]{۷-۴\sqrt{۳}}\Rightarrow a^۴=۷-۴\sqrt{۳}$

$$\frac{۱}{a^۴}=\frac{۱}{۷-۴\sqrt{۳}}\times\frac{۷+۴\sqrt{۳}}{۷+۴\sqrt{۳}}=\frac{۷+۴\sqrt{۳}}{۴۹-۴۸}=۷+۴\sqrt{۳}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$a^۴+\frac{۱}{a^۴}+۲=(۷-۴\sqrt{۳})+(۷+۴\sqrt{۳})+۲=۱۶$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$a=\sqrt[۴]{۷-۴\sqrt{۳}}=\sqrt[۴]{(۲-\sqrt{۳})^۲}=\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\Rightarrow a^۲=۲-\sqrt{۳}$$

$$\frac{۱}{a^۲}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴-۳}=۲+\sqrt{۳}$$

بنابراین

$$(a+\frac{۱}{a}+\sqrt{۲})^۲(a+\frac{۱}{a}-\sqrt{۲})^۲=((a+\frac{۱}{a})^۲-(\sqrt{۲})^۲)^۲=(a^۲+\frac{۱}{a^۲}+۲-۲)^۲$$

$$=(a^۲+\frac{۱}{a^۲})^۲=(۲-\sqrt{۳}+۲+\sqrt{۳})^۲=۱۶$$

۶۸- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم پول اولیهٔ علی x و پول اولیهٔ اکرم y باشد.

در این صورت

$$\begin{cases}x+y=۱۰۰\\ (x-۱۰)(y+۱۰)=۴۷۵\end{cases}$$

از معادلهٔ اول به‌دست می‌آید $x=۱۰۰-y$ و در نتیجه معادلهٔ دوم را می‌توان این‌طور نوشت

$$(۱۰۰-y-۱۰)(y+۱۰)=۴۷۵\Rightarrow(۱۰۰-(y+۱۰))(y+۱۰)=۴۷۵$$

$$۱۰۰(y+۱۰)-(y+۱۰)^۲=۴۷۵\Rightarrow(y+۱۰)^۲-۱۰۰(y+۱۰)+۴۷۵=۰$$

اگر فرض کنیم $A=y+۱۰$، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$A^۲-۱۰۰A+۴۷۵=۰$$

از اتحاد جملهٔ مشترک استفاده و سمت چپ معادله را تجزیه می‌کنیم.

$$(A-۵)(A-۹۵)=۰\begin{cases}A=۵\Rightarrow y+۱۰=۵\Rightarrow y=-۵\ (\text{غ.ق.ق.})\\ A=۹۵\Rightarrow y+۱۰=۹۵\Rightarrow y=۸۵\ \text{تومان}\end{cases}$$

۶۹- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که چون $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-x-۴=۰$ هستند، پس $x_۱+x_۲=۱$ و $x_۱x_۲=-۴$. اکنون می‌توانیم مجموع جواب‌های معادلهٔ جدید را به‌صورت زیر حساب کنیم:

$$S=(x_۱^۳+\frac{۱}{x_۲})+(x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱})=x_۱^۳+x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}$$

با استفاده از اتحاد $a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$ و نیز مخرج مشترک گرفتن، عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$S=(x_۱+x_۲)^۳-۳x_۱x_۲(x_۱+x_۲)+\frac{x_۱+x_۲}{x_۱x_۲}=۱-۳(-۴)(۱)+\frac{۱}{-۴}=\frac{۵۱}{۴}$$

همچنین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ جدید به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P=(x_۱^۳+\frac{۱}{x_۲})(x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱})=x_۱^۳x_۲^۳+x_۱^۲+x_۲^۲+\frac{۱}{x_۱x_۲}$$

$$=(x_۱x_۲)^۳+(x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲+\frac{۱}{x_۱x_۲}=(-۴)^۳+۱-۲(-۴)+\frac{۱}{-۴}$$

$$=-\frac{۲۲۱}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ جدید به صورت $x^۲-\frac{۵۱}{۴}x-\frac{۲۲۱}{۴}=۰$ است، که اگر دو طرف آن را در ۴ ضرب کنیم، می‌شود $۴x^۲-۵۱x-۲۲۱=۰$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\xrightarrow{\times x}\ x^۳=x^۲+۴x=(x+۴)+۴x=۵x+۴$$

$$x=x^۲-۴\Rightarrow x^۲=x+۴$$

بنابراین $x_۱^۳=۵x_۱+۴$ و $x_۲^۳=۵x_۲+۴$. از طرف دیگر،

$$x_۱x_۲=-۴\Rightarrow\frac{۱}{x_۱}=-\frac{x_۲}{۴},\quad\frac{۱}{x_۲}=-\frac{x_۱}{۴}$$

اکنون می‌توانیم مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ جدید را به‌صورت زیر به‌دست آوریم:

$$S=(x_۱^۳+\frac{۱}{x_۲})+(x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱})=(۵x_۱+۴-\frac{x_۱}{۴})+(۵x_۲+۴-\frac{x_۲}{۴})$$

$$=\frac{۱۹}{۴}(x_۱+x_۲)+۸=\frac{۱۹}{۴}(۱)+۸=\frac{۵۱}{۴}$$

$$P=(x_۱^۳+\frac{۱}{x_۲})(x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱})=(۵x_۱+۴-\frac{x_۱}{۴})(۵x_۲+۴-\frac{x_۲}{۴})$$

$$=(\frac{۱۹}{۴}x_۱+۴)(\frac{۱۹}{۴}x_۲+۴)=(\frac{۱۹}{۴})^۲x_۱x_۲+۱۹(x_۱+x_۲)+۱۶=-\frac{۲۲۱}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ جدید به‌صورت زیر است:

$$x^۲-\frac{۵۱}{۴}x-\frac{۲۲۱}{۴}=۰\Rightarrow ۴x^۲-۵۱x-۲۲۱=۰$$

۷۰- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** می‌توان نوشت

$$f(\frac{\pi}{۱۲})=۳۲\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}\cos^۲\frac{۲\pi}{۱۲}\cos^۲\frac{۴\pi}{۱۲}\cos^۲\frac{۸\pi}{۱۲}\cos^۲\frac{۱۶\pi}{۱۲}$$

$$=۳۲\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}\cos^۲\frac{\pi}{۶}\cos^۲\frac{\pi}{۳}\cos^۲\frac{۲\pi}{۳}\cos^۲\frac{۴\pi}{۳}$$

$$=۳۲\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲(\frac{۱}{۲})^۲(-\frac{۱}{۲})^۲(-\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۳}{۸}\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}$$

اکنون برای اینکه $\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}$ را حساب کنیم، از اتحاد مثلثاتی $\cos^۲\alpha=\frac{۱}{۲}(۱+\cos ۲\alpha)$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$f(\frac{\pi}{۱۲})=\frac{۳}{۸}\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۳}{۸}(\frac{۱}{۲}(۱+\cos\frac{\pi}{۶}))=\frac{۳}{۱۶}(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۳۲}$$

$$=\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۳۲}$$

راه‌حل دوم

$$f(x)=۳۲(\cos x\cos ۲x\cos ۴x\cos ۸x\cos ۱۶x)^۲$$

اکنون عبارت داخل پرانتز را در $\sin x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$f(x)=۳۲(\frac{\sin x\cos x\cos ۲x\cos ۴x\cos ۸x\cos ۱۶x}{\sin x})^۲$$

از اتحاد مثلثاتی $\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$ به‌دست می‌آید

$$f(x)=۳۲(\frac{\frac{۱}{۲}\sin ۲x\cos ۲x\cos ۴x\cos ۸x\cos ۱۶x}{\sin x})^۲$$

به‌طور مشابه $\sin ۲x\cos ۲x=\frac{۱}{۲}\sin ۴x$، پس

$$f(x)=۳۲(\frac{\frac{۱}{۴}\sin ۴x\cos ۴x\cos ۸x\cos ۱۶x}{\sin x})^۲$$

به‌طور مشابه با انجام سه مرحلهٔ دیگر عبارت را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم.

$$f(x)=۳۲(\frac{\frac{۱}{۸}\sin ۸x\cos ۸x\cos ۱۶x}{\sin x})^۲=۳۲(\frac{\frac{۱}{۱۶}\sin ۱۶x\cos ۱۶x}{\sin x})^۲$$

$$=۳۲(\frac{\frac{۱}{۳۲}\sin ۳۲x}{\sin x})^۲=\frac{\sin^۲ ۳۲x}{۳۲\sin^۲ x}$$

بنابراین

$$f(\frac{\pi}{۱۲})=\frac{\sin^۲\frac{۳۲\pi}{۱۲}}{۳۲\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}}=\frac{\sin^۲(۳\pi-\frac{۴\pi}{۱۲})}{۳۲\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}}=\frac{\sin^۲\frac{\pi}{۳}}{۳۲\times\frac{۱}{۲}(۱-\cos\frac{۲\pi}{۱۲})}$$

$$=\frac{\frac{۳}{۴}}{۱۶(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})}=\frac{۳}{۳۲(۲-\sqrt{۳})}=\frac{۳(۲+\sqrt{۳})}{۳۲(۴-۳)}=\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۳۲}$$

۷۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sin(\alpha+\frac{\pi}{۲})=\cos\alpha\,,\quad \sin(\alpha-\pi)=-\sin\alpha$$

از طرف دیگر، $\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha=۱-\frac{۴}{۹}=\frac{۵}{۹}$. چون انتهای کمان α در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی است، پس $\cos\alpha>۰$، یعنی $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{۵}}{۳}$. در نتیجه

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{\sqrt{۵}}{۳}}{\frac{۲}{۳}}=-\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{|\tan^۲\alpha-۱|}=\frac{\frac{۲}{۳}-\frac{\sqrt{۵}}{۳}}{|\frac{۵}{۴}-۱|}=\frac{\frac{۲-\sqrt{۵}}{۳}}{\frac{۱}{۴}}=\frac{۴(۲-\sqrt{۵})}{۳}$$

۷۲- گزینهٔ ۲ معادلهٔ مثلثاتی را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۵\sin^۲ x+۲\cos ۳x+۲=۰\Rightarrow ۵\sin^۲ x+۲(\cos ۳x+۱)=۰$$

$$۵\sin^۲ x+۲(۲\cos^۲\frac{۳x}{۲})=۰\Rightarrow ۵\sin^۲ x+۴\cos^۲\frac{۳x}{۲}=۰$$

چون $۵\sin^۲ x$ و $۴\cos^۲\frac{۳x}{۲}$ غیرمنفی‌اند، پس باید هر دو برابر صفر باشند، بنابراین جواب‌های مشترک معادله‌های مثلثاتی $\sin^۲ x=۰$ و $\cos^۲\frac{۳x}{۲}=۰$ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی مورد نظر هستند:

$$\sin^۲ x=۰\Rightarrow\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\,,k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos^۲\frac{۳x}{۲}=۰\Rightarrow\cos\frac{۳x}{۲}=۰\Rightarrow\frac{۳x}{۲}=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۳},k\in\mathbb{Z}$$

برای اینکه جواب‌های در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ را پیدا کنیم، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

k	-۲	-۱	۰	۱	۲
$k\pi$	~~-۲π~~	$-\pi$	۰	π	~~۲π~~
$(۲k+۱)\frac{\pi}{۳}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۳}$	π	~~$\frac{۵\pi}{۳}$~~

از این جدول معلوم می‌شود که جواب‌های مورد نظر $x=-\pi$ و $x=\pi$ هستند که تعداد آن‌ها دوتاست.

۷۳- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** باید نامعادلهٔ $|x^۲-۲|-x>۰$ را حل کنیم:

$$|x^۲-۲|-x>۰\Rightarrow|x^۲-۲|>x$$

توجه کنید که همواره $|x^۲-۲|\geq۰$، پس تمام xهای منفی و نیز $x=۰$ در این نامعادله صدق می‌کنند: (۱) $x\in(-\infty,۰]$

اکنون فرض می‌کنیم x مثبت باشد. در این صورت

$$|x^۲-۲|>x\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۲>x\Rightarrow x^۲-x-۲=\underbrace{(x+۱)}_{+}(x-۲)>۰\\ x^۲-۲<-x\Rightarrow x^۲+x-۲=(x-۱)\underbrace{(x+۲)}_{+}<۰\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-۲>۰\\ x-۱<۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in(۲,+\infty) & (۲)\\ x\in(۰,۱) & (۳)\end{cases}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر، یعنی دامنهٔ تابع f برابر اجتماع جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) است:

$$D_f=(-\infty,۰]\cup(۰,۱)\cup(۲,+\infty)=(-\infty,۱)\cup(۲,+\infty)$$

راه‌حل دوم توجه کنید که عدد ۲ در دامنهٔ تابع f نیست، زیرا $f(۲)=\log_۴(|۴-۲|-۲)=\log_۴ ۰$ که تعریف نشده است. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) حذف می‌شوند. زیرا عدد ۲ عضو آن‌ها هست. همچنین عدد صفر در دامنهٔ تابع f هست، زیرا $f(۰)=\log_۴(|۰-۲|-۰)=\log_۴ ۲=\frac{۱}{۲}$.

بنابراین گزینهٔ (۱) حذف می‌شود، زیرا عدد صفر عضو آن نیست. در نتیجه گزینهٔ (۴) درست است.

۷۴- گزینهٔ ۲ ابتدا نشان می‌دهیم تابع $f(x)=\sqrt{x+۳}-۱$ با دامنهٔ $D_f=[-۳,+\infty)$ اکیداً صعودی است. می‌توان نوشت

$$x_۱,x_۲\geq-۳:x_۱<x_۲\Rightarrow x_۱+۳<x_۲+۳\Rightarrow\sqrt{x_۱+۳}<\sqrt{x_۲+۳}$$
$$\sqrt{x_۱+۳}-۱<\sqrt{x_۲+۳}-۱\Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲)$$

چون تابع f اکیداً صعودی است، پس نمودار تابع f نمودار تابع وارون خود را روی خط $y=x$ قطع می‌کند. در نتیجه باید معادلهٔ $\sqrt{x+۳}-۱=x$ را حل کنیم تا طول نقطهٔ M به‌دست بیاید:

$$\sqrt{x+۳}-۱=x\Rightarrow\sqrt{x+۳}=x+۱\xrightarrow{\text{دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم}}$$
$$x+۳=(x+۱)^۲\Rightarrow x+۳=x^۲+۲x+۱\Rightarrow x^۲+x-۲=۰$$
$$\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}(x-۱)(x+۲)=۰\Rightarrow x=۱,x=-۲$$

توجه کنید که $x=-۲$ در معادلهٔ مورد نظر صدق نمی‌کند. بنابراین $x=۱$ و عرض نقطهٔ M برابر است با $f(۱)=\sqrt{۱+۳}-۱=۲-۱=۱$

در نتیجه فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات برابر است با $OM=\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}$.

۷۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که هر بار که توپ بالا می‌رود، به همان اندازه هم پایین می‌آید. بنابراین مجموع مورد نظر برابر است با

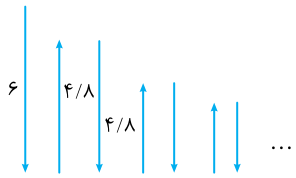
$$S=۶+۲(۰/۸\times۶+(۰/۸)^۲\times۶+\cdots+(۰/۸)^{۹۹}\times۶)$$
$$=۶+۲\times۶(۰/۸+(۰/۸)^۲+\cdots+(۰/۸)^{۹۹})$$

عبارت داخل پرانتز مجموع ۹۹ جملهٔ نخست یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱=۰/۸$ و قدرنسبت $q=۰/۸$ است. بنابراین

$$S=۶+۱۲\times۰/۸\times\frac{(۰/۸)^{۹۹}-۱}{۰/۸-۱}$$

توجه کنید که می‌توانیم از $(۰/۸)^{۹۹}$ صرف‌نظر کنیم، زیرا عددی بسیار کوچک است. بنابراین

$$S\simeq۶+۱۲\times۰/۸\times\frac{۱}{۱-۰/۸}=۵۴\text{ متر}$$



۷۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که ۳ واحد انتقال در امتداد محور x در جهت منفی معادل ۳ واحد انتقال به چپ و ۲ واحد انتقال در امتداد محور y در جهت منفی معادل ۲ واحد انتقال به پایین است. اکنون به تبدیلات زیر توجه کنید:

$$y=۲^{x+|x|}\xrightarrow{\text{۳ واحد به چپ}}y=۲^{x+۳+|x+۳|}$$
$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به پایین}}y=۲^{x+۳+|x+۳|}-۲$$

بنابراین با انجام انتقال‌های خواسته شده، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۲^{x+۳+|x+۳|}-۲$ به‌دست می‌آید. برای یافتن طول نقطهٔ تلاقی نمودار این تابع با محور x باید جواب معادلهٔ زیر را پیدا کنیم:

$$۲^{x+۳+|x+۳|}-۲=۰\Rightarrow۲^{x+۳+|x+۳|}=۲^۱\Rightarrow x+۳+|x+۳|=۱$$
$$|x+۳|=-x-۲\Rightarrow\begin{cases}x+۳=-x-۲\Rightarrow x=-\frac{۵}{۲}\\ -(x+۳)=-x-۲\ \text{جواب ندارد}\end{cases}$$

۷۷- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** مقدار x را برابر ۹ قرار می‌دهیم و معادله را ساده می‌کنیم.

$$۲\log_۹ a+\log_a\sqrt{۹}=۲\Rightarrow۲\log_{۳^۲}a+\log_a ۳=۲$$
$$۲\times(\frac{۱}{۲}\log_۳ a)+\log_a ۳=۲\Rightarrow\log_۳ a+\frac{۱}{\log_۳ a}=۲$$

دو طرف معادله را در $\log_۳ a$ ضرب می‌کنیم:

$$(\log_۳ a)^۲+۱=۲\log_۳ a\Rightarrow(\log_۳ a)^۲-۲\log_۳ a+۱=۰$$

اکنون با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله می‌توان نوشت

$$(\log_۳ a-۱)^۲=۰\Rightarrow\log_۳ a=۱\Rightarrow a=۳^۱=۳$$

راه‌حل دوم می‌توان نوشت

$$۲\log_x a+\log_a\sqrt{x}=۲\Rightarrow\log_{x^{\frac{۱}{۲}}}a+\log_a\sqrt{x}=۲$$
$$\log_{\sqrt{x}}a+\log_a\sqrt{x}=۲\Rightarrow\log_{\sqrt{x}}a+\frac{۱}{\log_{\sqrt{x}}a}=۲$$

چون هر عدد حقیقی و معکوسش هم‌علامت هستند و مجموع $\log_{\sqrt{x}}a$ و معکوسش برابر عددی مثبت است، پس $\log_{\sqrt{x}}a>۰$. همچنین، چون مجموع عدد حقیقی مثبت $\log_{\sqrt{x}}a$ و معکوسش برابر ۲ است، پس این عدد برابر ۱ است. بنابراین

$$\log_{\sqrt{x}}a=۱\xrightarrow{x=۹}\log_{\sqrt{۹}}a=۱\Rightarrow\log_۳ a=۱\Rightarrow a=۳^۱=۳$$

۷۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** چون خط $x=۲$ محور تقارن سهمی است و سهمی از نقطهٔ $(۰,۰)$ می‌گذرد، پس سهمی از نقطهٔ $(۴,۰)$ نیز می‌گذرد.

بنابرایـن معادلهٔ سـهمی به‌صـورت $y=a(x-0)(x-4)$ یا $y=ax(x-4)$ اسـت. چون این سـهمی از نقطهٔ $(2,1)$ نیز می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند. بنابراین

$$1=a\times 2(2-4)\Rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

در نتیجه $f(x)=-\frac{1}{4}x(x-4)$، از طرف دیگر، چون خط راست مورد نظر از نقطه‌های $(1,0)$ و $(0,4)$ می‌گذرد، معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y-0=\frac{0-1}{4-0}(x-4)\Rightarrow y=-\frac{1}{4}(x-4)$$

بنابراین $g(x)=-\frac{1}{4}(x-4)$. اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{f(x)+g(x)}{4-x}=\lim_{x\to 4^-}\frac{-\frac{1}{4}x(x-4)-\frac{1}{4}(x-4)}{4-x}$$

$$=\lim_{x\to 4^-}\frac{-\frac{1}{4}(x-4)(x+1)}{-(x-4)}=\lim_{x\to 4^-}\frac{x+1}{4}=\frac{5}{4}$$

راه‌حل دوم چـون $f(4)=g(4)=0$، پس حد مورد نظـر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{f(x)+g(x)}{4-x}=-\lim_{x\to 4^-}\frac{(f(x)-f(4))+(g(x)-g(4))}{x-4}$$

$$=-\left(\lim_{x\to 4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}+\lim_{x\to 4^-}\frac{g(x)-g(4)}{x-4}\right)=-(f'_-(4)+g'_-(4))$$

از طرف دیگر، سـهمی f و خط راسـت g همه‌جا مشـتق‌پذیرند. پس مقدار حد مورد نظر برابر است با $-(f'(4)+g'(4))$. اکنون توجه کنید که

$$f(x)=-\frac{1}{4}x(x-4)=-\frac{1}{4}x^2+x\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}x+1\Rightarrow f'(4)=-1$$

$$g'(4)=m=-\frac{1}{4}$$

در نتیجه مقدار حد مورد نظر برابر است با $-(-1-\frac{1}{4})=\frac{5}{4}$.

۷۹- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع f^{-1} را پیدا می‌کنیم. برای این کار x را بر حسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\Rightarrow \sqrt{x}+1=y\sqrt{x}-y\Rightarrow \sqrt{x}-y\sqrt{x}=-y-1$$

$$\sqrt{x}(1-y)=-(y+1)\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{y+1}{y-1}\Rightarrow x=(\frac{y+1}{y-1})^2$$

بنابراین $f^{-1}(x)=(\frac{x+1}{x-1})^2$. به این ترتیب

$$(f^{-1})'(x)=2(\frac{x+1}{x-1})(\frac{-2}{(x-1)^2})=\frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$$

$$\text{شیب خط مماس}=(f^{-1})'(2)=\frac{-4(2+1)}{(2-1)^3}=-12$$

۸۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases}f(1)=0 & x>0\\ f(0)=0 & x=0\\ f(-1)=0 & x<0\end{cases}$$

بنابراین $(fog)(x)=0$. در نتیجه

$$((fof)og)(x)=(fo(fog))(x)=f((fog)(x))=f(0)=0$$

یعنی $(fof)og$ تابع ثابت صفر است، پس نقطهٔ ناپیوستگی ندارد.

۸۱- گزینهٔ ۲ ابتـدا توجه کنید کـه مطابق جدول تعییـن علامت زیر، عبارت $3-x^2$ روی بازهٔ $[-1/5,\sqrt{3}]$ نامنفی است.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$-1/5$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$3-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

بنابراین $|3-x^2|=3-x^2$ و در نتیجه $f(x)=x(3-x^2)=3x-x^3$

چون تابع f در هر نقطه از بازهٔ $(-1/5,\sqrt{3})$ مشتق‌پذیر است، پس طول‌های نقـاط بحرانی آن در این بازه از حل معادلهٔ $f'(x)=0$ به‌دسـت می‌آیند. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=3-3x^2=3(1-x^2),\quad f'(x)=0\Rightarrow 1-x^2=0\Rightarrow x=\pm 1$$

بنابراین باید مقادیر $f(\pm 1)$، $f(-1/5)$ و $f(\sqrt{3})$ را با هم مقایسه کنیم:

$$f(1)=2,\quad f(-1)=-2,\quad f(-1/5)=-\frac{9}{8},\quad f(\sqrt{3})=0$$

در نتیجه مینیمم مطلق تابع f برابر است با $f(-1)=-2$ (توجه کنید که چون مقادیـر f به‌ازای عددهای مثبت، مثبت‌انـد، پس کافی بود مقادیر تابع f را فقط برای عددهای منفی حساب می‌کردیم).

۸۲- گزینهٔ ۲ اگـر A نقطـهٔ $(x,\sqrt[3]{-x})$، یعنـی نقطهٔ $(x,-\sqrt[3]{x})$ باشـد، آن‌گاه A'، یعنی قرینهٔ A نسـبت به نیمسـاز نواحی دوم و چهارم نقطهٔ $(\sqrt[3]{x},-x)$ است. بنابراین

$$AA'=\sqrt{(x-\sqrt[3]{x})^2+(-\sqrt[3]{x}+x)^2}=\sqrt{2(x-\sqrt[3]{x})^2}=\sqrt{2}|x-\sqrt[3]{x}|$$

چـون $x\in[0,1]$، پس $x\le\sqrt[3]{x}$ و در نتیجه $AA'=\sqrt{2}(\sqrt[3]{x}-x)$. بنابراین بایـد ماکزیمم مطلق تابع $g(x)=\sqrt{2}(\sqrt[3]{x}-x)$ را روی بازهٔ $[0,1]$ پیدا کنیم. توجه کنید که

$$g'(x)=\sqrt{2}(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-1)$$

$$g'(x)=0\Rightarrow\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-1=0\Rightarrow\sqrt[3]{x^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{27}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

چون $g(1)=g(0)=0$، پس ماکزیمم مطلق تابع g به‌ازای $x=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ به‌دست می‌آید و برابر است با (توجه کنید که $\sqrt[3]{x^2}=\frac{1}{3}$، پس $\sqrt[3]{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$)

$$g(\frac{1}{3\sqrt{3}})=\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}})=\sqrt{2}\times\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{4}{3\sqrt{6}}$$

۸۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که وقتی $x\to(\frac{\sqrt{5}}{2})^-$، آن‌گاه $g(x)\to 2^+$. پس در یک همسایگی چپ $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$، ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x)=(2x)^3$ است، اکنون می‌توان نوشت

$$(fog)'_-(\frac{\sqrt{5}}{2})=g'(\frac{\sqrt{5}}{2})f'_+(g(\frac{\sqrt{5}}{2}))=g'(\frac{\sqrt{5}}{2})f'_+(2)$$

مقدار $g'(\frac{\sqrt{5}}{2})$ را به‌سادگی می‌توان حساب کرد

$$g(x)=(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow g'(x)=-\frac{1}{2}(2x)(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}=\frac{-x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$$

$$g'(\frac{\sqrt{5}}{2})=\frac{-\frac{\sqrt{5}}{2}}{(\frac{1}{2})^3}=-4\sqrt{5}$$

از طرف دیگر،

$$f(x)=(2x)^3=8x^3\Rightarrow f'(x)=24x^2\Rightarrow f'_+(2)=96$$

پس

$$(fog)'_-(\frac{\sqrt{5}}{2})=(-4\sqrt{5})\times 96=(-48\sqrt{5})(8)$$

یعنی $(fog)'_-(\frac{\sqrt{5}}{2})$ هشت برابر $-48\sqrt{5}$ است.

۸۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $g'(x)=2ax+5$ و $g''(x)=2a$.

بنابراین

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & x\le 2\\ g'(x) & x>2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}g'(x) & x\le 2\\ g''(x) & x>2\end{cases}$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر است، پس

$$g(2)=g'(2)\Rightarrow 4a+10+b=4a+5\Rightarrow b=-5$$

$$g'(2)=g''(2)\Rightarrow 4a+5=2a\Rightarrow a=-\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow a+b=-\frac{15}{2}$$

۸۵- گزینهٔ ۳ هر نقطه روی سهمی $y^2=4x$ به‌صورت $A(\frac{t^2}{4},t)$ است. فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ $M(3,0)$ برابر است با

$$AM=\sqrt{(\frac{t^2}{4}-3)^2+(t-0)^2}=\sqrt{\frac{t^4}{16}-\frac{3}{2}t^2+9+t^2}$$

$$=\sqrt{\frac{t^4-8t^2+144}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{(t^2-4)^2+128}$$

بنابراین کمترین مقدار AM به‌ازای $t^2=4$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$\frac{1}{4}\sqrt{128}=2\sqrt{2}$$

۸۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که چون عرض از مبدأ خط مورد نظر برابر -1 است، پس این خط از نقطهٔ $(0,-1)$ می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ این خط به‌صورت زیر است:

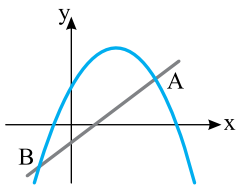
$$y-0=\frac{0+1}{1-0}(x-1)\Rightarrow y=x-1$$

طول نقطه‌های برخورد این خط و سهمی داده شده، یعنی A و B جواب‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$-x^2+2x+1=x-1\Rightarrow x^2-x-2=0 \xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}$$

$$(x+1)(x-2)=0\Rightarrow x_A=2, x_B=-1$$

چون این نقطه‌ها روی خط $y=x-1$ هستند، پس عرض آن‌ها برابر است با $y_A=2-1=1$ و $y_B=-1-1=-2$. بنابراین نقطه‌های مورد نظر $A(2,1)$ و $B(-1,-2)$ هستند که نقطهٔ وسط آن‌ها $M(\frac{2-1}{2},\frac{1-2}{2})$، یعنی $M(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ است. از طرف دیگر، رأس سهمی $y=-x^2+2x+1$ نقطهٔ $(1,2)$ است. بنابراین فاصلهٔ مورد نظر برابر است با $\sqrt{(1-\frac{1}{2})^2+(2+\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$. پس این فاصله $\frac{1}{2}$ برابر $\sqrt{26}$ است.



۸۷- گزینهٔ ۲ فرض کنید مختصات نقطهٔ A به‌صورت (a,b) باشد. چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس میانهٔ AM ارتفاع نیز هست، یعنی خط AM بر خط BC عمود است. اما شیب خط BC برابر $m_{BC}=-\frac{1}{2}$ است و شیب خط AM برابر $m_{AM}=\frac{b-2}{a-3}$ است. اکنون می‌توان نوشت

$$BC\perp AM\Rightarrow m_{BC}\times m_{AM}=-1$$

$$-\frac{1}{2}\times\frac{b-2}{a-3}=-1\Rightarrow b-2=2(a-3)\Rightarrow b=2a-4$$

از طرف دیگر، فاصلهٔ نقطهٔ A از خط BC برابر با $5\sqrt{5}$ است. بنابراین

$$\frac{|a+2b-7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=5\sqrt{5}\xrightarrow{b=2a-4}\frac{|a+4a-8-7|}{\sqrt{5}}=5\sqrt{5}$$

$$|5a-15|=25\Rightarrow\begin{cases}5a-15=25\\ 5a-15=-25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=8\\ a=-2\end{cases}$$

در نتیجه طول نقطهٔ A هرکدام از دو مقدار ۸ و -2 می‌تواند باشد که با توجه به گزینه‌ها، $a=-2$ درست است.

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۴ فرض کنید جملهٔ نخست دنباله برابر a و قدرنسبت آن برابر r باشد، که $r\geq 2$. چون جمله‌های این دنباله عضو مجموعهٔ $\{1,2,\ldots,100\}$ هستند، پس

$$a\geq 1,\quad ar^4\leq 100$$

اکنون توجه کنید که $r\geq 2$، پس

$$r^4\leq ar^4\leq 100\Rightarrow r^4\leq 100\Rightarrow r\leq\sqrt[4]{100}<4$$

چون r عددی طبیعی است و $2\leq r<4$، پس $r=2$ یا $r=3$.

اگر $r=2$، آن‌گاه بزرگ‌ترین جملهٔ دنباله $16a$ است، که چون $16a\leq 100$، پس $a\leq 6$، یعنی a یکی از شش عدد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ است. بنابراین در این حالت شش دنباله با ویژگی مورد نظر به‌دست می‌آیند.

اگر $r=3$، آن‌گاه بزرگ‌ترین جملهٔ دنباله $81a$ است، که چون $81a\leq 100$، پس $a\leq 1$، در نتیجه $a=1$. بنابراین در این حالت یک دنباله با ویژگی مورد نظر به‌دست می‌آید.

در کل تعداد دنباله‌های مورد نظر هفت‌تا است.

۲- گزینهٔ ۱ کمترین مقدار تابع درجهٔ دوم داده شده برابر است با

$$-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{144-4m(5m-1)}{4m}=\frac{m(5m-1)-36}{m}$$

بنابراین

$$\frac{m(5m-1)-36}{m}=2\Rightarrow 5m^2-m-36=2m\Rightarrow 5m^2-3m-36=0$$

$$(m-3)(5m+12)=0\Rightarrow m=3,\ m=-\frac{12}{5}$$

چون تابع درجهٔ دوم داده شده کمترین مقدار دارد، پس ضریب x^2 باید عددی مثبت باشد، یعنی فقط $m=3$ قابل قبول است. در نتیجه معادلهٔ سهمی به صورت $y=3x^2-12x+14$ است، که معادلهٔ محور تقارن آن به صورت $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-12}{6}=2$ است.

۳- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** جواب‌های معادلهٔ $x^2+6x+a=0$ به صورت زیر هستند:

$$\frac{-6+\sqrt{36-4a}}{2}=-3+\sqrt{9-a},\quad \frac{-6-\sqrt{36-4a}}{2}=-3-\sqrt{9-a}$$

چون $\alpha<\beta$، پس $\alpha=-3-\sqrt{9-a}$ و $\beta=-3+\sqrt{9-a}$. در نتیجه

$$3\alpha^2=3(-3-\sqrt{9-a})^2=27+27-3a+18\sqrt{9-a}=54-3a+18\sqrt{9-a}$$

$$2\beta^2=2(-3+\sqrt{9-a})^2=18+18-2a-12\sqrt{9-a}=36-2a-12\sqrt{9-a}$$

بنابراین $3\alpha^2+2\beta^2=90-5a+6\sqrt{9-a}$

در نتیجه

$$3\alpha^2+2\beta^2=12\sqrt{2}+85\Rightarrow 90-5a+6\sqrt{9-a}=12\sqrt{2}+85$$

$$5-5a+6\sqrt{9-a}=12\sqrt{2}$$

توجه کنید که لازم نیست این معادله را حل کنیم و کافی است ببینیم عدد کدام گزینه در این معادله صدق می‌کند. به این ترتیب معلوم می‌شود که $a=1$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$3\alpha^2+2\beta^2=\frac{5}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{5}{2}\beta^2-\frac{1}{2}\beta^2=\frac{5}{2}(\alpha^2+\beta^2)+\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)$$

از طرف دیگر،

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-6)^2-2a=36-2a$$

$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=(-\frac{\Delta}{1})(-6)=6\Delta=6\sqrt{36-4a}=12\sqrt{9-a}$$

بنابراین

$$3\alpha^2+2\beta^2=12\sqrt{2}+85\Rightarrow\frac{5}{2}(36-2a)+\frac{1}{2}(12\sqrt{9-a})=12\sqrt{2}+85$$

$$90-5a+6\sqrt{9-a}=12\sqrt{2}+85\Rightarrow 5-5a+6\sqrt{9-a}=12\sqrt{2}$$

در میان گزینه‌ها فقط $a=1$ جواب این معادله است.

۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{a^3+1}+\frac{1}{a^3-1}=2\Rightarrow\frac{a^3-1+a^3+1}{(a^3+1)(a^3-1)}=2\Rightarrow\frac{2a^3}{a^6-1}=2$$

$$a^3=a^6-1\Rightarrow a^6=a^3+1$$

اکنون توجه کنید که

$$\frac{1}{a^3-\sqrt{a^3+1}}+\frac{1}{a^3+\sqrt{a^3+1}}=\frac{a^3+\sqrt{a^3}+1+a^3-\sqrt{a^3+1}}{(a^3+1)^2-(\sqrt{a^3})^2}$$

$$=\frac{2a^3+2}{a^6+2a^3+1-a^3}=\frac{2(a^3+1)}{a^6+a^3+1}=\frac{2(a^3+1)}{a^3+1+a^3+1}=\frac{2(a^3+1)}{2(a^3+1)}=1$$

پس

$$\left(\frac{1}{a^3-\sqrt{a^3+1}}+\frac{1}{a^3+\sqrt{a^3+1}}\right)^{1401}=1$$

۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^2\sqrt{x^2}=x^2|x|=\begin{cases}x^3 & x\geq 0\\ -x^3 & x\leq 0\end{cases}$$

تابع $g(x)=-x^3$ روی بازهٔ $(-\infty,0]$ نزولی است. پس تابع f نیز روی بازهٔ $(-\infty,0]$ نزولی است. در نتیجه باید وارون تابع $g(x)=-x^3$ با دامنهٔ

$(-\infty,0]$ را به‌دست بیاوریم. توجه کنید که

$$y=-x^3\Rightarrow x^3=-y\Rightarrow x=\sqrt[3]{-y}=-\sqrt[3]{y}$$

در نتیجه $g^{-1}(x)=-\sqrt[3]{x}$. از طرف دیگر،

$$D_g=(-\infty,0]\Rightarrow R_g=[0,+\infty)\Rightarrow D_{g^{-1}}=[0,+\infty)$$

۶- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم A نقطهٔ (x_0,y_0) باشد. چون نقطهٔ A روی خط $x+y=a$ است، پس $x_0+y_0=a$. اکنون توجه کنید که

$$AB=\sqrt{29}\Rightarrow\sqrt{(x_0-(-3))^2+(y_0-2)^2}=\sqrt{29}$$

$$(x_0+3)^2+(y_0-2)^2=29\Rightarrow x_0^2+y_0^2+6x_0-4y_0=16\quad(1)$$

$$AC=5\Rightarrow\sqrt{(x_0-(-1))^2+(y_0-4)^2}=5$$

$$(x_0+1)^2+(y_0-4)^2=25\Rightarrow x_0^2+y_0^2+2x_0-8y_0=8\quad(2)$$

اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، به‌دست می‌آید

$$4x_0+4y_0=8\Rightarrow x_0+y_0=2\Rightarrow a=2$$

۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow f^{-1}(x)=f(x)\Rightarrow(fof)(x)=x\\ a=-d\end{cases}$$

بنابراین در تابع داده شده $(fofof)(x)=f((fof)(x))=f(x)$

در نتیجه $(fofof)(\sqrt{2})=f(\sqrt{2})=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$2^{f(x)}=20\Rightarrow f(x)=\log_2 20=\log_2 4+\log_2 5=2+\log_2 5$$

از طرف دیگر $5^x=10\Rightarrow x=\log_5 10=\log_5 2+\log_5 5=\log_5 2+1$

در نتیجه $\log_5 2=x-1\Rightarrow\log_2 5=\dfrac{1}{x-1}$

بنابراین $f(x)=2+\log_2 5=2+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $\hat{C}=180^\circ-(\hat{A}+\hat{B})$. در نتیجه

$$\sin\hat{C}=\sin(180^\circ-(\hat{A}+\hat{B}))=\sin(\hat{A}+\hat{B})$$
$$=\sin\hat{A}\cos\hat{B}+\cos\hat{A}\sin\hat{B}$$

بنابراین

$$2\cos\hat{A}\sin\hat{B}-\sin\hat{C}=2\cos\hat{A}\sin\hat{B}-\sin\hat{A}\cos\hat{B}-\cos\hat{A}\sin\hat{B}$$
$$=\cos\hat{A}\sin\hat{B}-\sin\hat{A}\cos\hat{B}=\sin(\hat{B}-\hat{A})$$
$$=\sin(\hat{B}-(\hat{B}+45^\circ))=\sin(-45^\circ)$$
$$=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که چون نمودار تابع f در یک همسایگی راست نقطهٔ $x=0$ نزولی است، پس $a>0$. همچنین مینیمم تابع f برابر با $-|a|$ است و چون از روی نمودار معلوم می‌شود که این مینیمم برابر $-\frac{1}{4}$ است، پس

$$-|a|=-\frac{1}{4}\Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

همچنین، یک‌چهارم دورهٔ تناوب تابع برابر است با $\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-\frac{5}{4}$. پس $\frac{1}{4}\times\frac{2\pi}{|b|}=\frac{1}{2}$،

پس $|b|=\pi$ و چون $b>0$، پس $b=\pi$. بنابراین $f(x)=\frac{1}{4}\cos(\pi x+c)$. از طرف دیگر،

$$f(\frac{5}{4})=0\Rightarrow\frac{1}{4}\cos(\frac{5}{4}\pi+c)=0\Rightarrow\cos(\frac{5}{4}\pi+c)=0$$

$$\frac{5}{4}\pi+c=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow c=k\pi-\frac{3\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$$

چون $0<c<\pi$، پس $c=\pi-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$. در نتیجه $\frac{ac}{b}=\frac{1}{16}$.

۱۱- گزینهٔ ۳ دو طرف معادله را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{4}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{12}\\ x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{5\pi}{12}\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}$$

k	۰	۱	−۱
$2k\pi-\frac{\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{12}$	$2\pi-\frac{\pi}{12}$	~~$-2\pi-\frac{\pi}{12}$~~
$2k\pi+\frac{5\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	~~$2\pi+\frac{5\pi}{12}$~~	~~$-2\pi+\frac{5\pi}{12}$~~

بنابراین مجموع جواب‌های معادله در بازهٔ $[-\pi,2\pi]$ برابر است با

$$-\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}+2\pi-\frac{\pi}{12}=\frac{9\pi}{4}$$

۱۲- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** با استفاده از اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+4}}{1+\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to-1}\frac{(2x+3)-(3x+4)}{1+x}\times\frac{1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4}}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{-x-1}{1+x}\times\frac{1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4}}=\lim_{x\to-1}(-1)\times\frac{1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4}}$$

$$=(-1)\times\frac{1+1+1}{1+1}=-\frac{3}{2}$$

راه‌حل دوم با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+4}}{1+\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to-1}\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}-\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$$

$$=\frac{\frac{2}{2\times1}-\frac{3}{2\times1}}{\frac{1}{3\times1}}=\frac{1-\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}}=-\frac{3}{2}$$

۱۳- گزینهٔ ۳ ابتدا شرط‌هایی را که دامنهٔ تابع را مشخص می‌کنند ساده می‌کنیم:

$$|x^3|<x^2\Rightarrow|x|^3<|x|^2\Rightarrow|x|<1,\ x\neq0\Rightarrow x\in(-1,0)\cup(0,1)$$

$$|x^3|=x^2\Rightarrow|x|^3=|x|^2\Rightarrow|x|=1\ \text{یا}\ x=0\Rightarrow x\in\{0,-1,1\}$$

$$|x^3|>x^2\Rightarrow|x|^3>|x|^2\Rightarrow|x|>1,\ x\neq0\Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

بنابراین

$$f(x)=\begin{cases}|x|+[-x] & x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 1+\cos\pi x & x\in\{0,-1,1\}\\ [x^2]-[x] & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$$

توجه کنید که تابع $y=[x^2]$ در نقاطی که x^2 عددی صحیح (به‌جز صفر) است ناپیوسته است. همچنین تابع $y=[x]$ در همهٔ نقاطی که x صحیح است ناپیوسته است. بنابراین تابع $y=[x^2]-[x]$ در همهٔ نقاطی که x^2 صحیح است و x صحیح نیست ناپیوسته است، که تعداد این نقطه‌ها در بازهٔ $(1,+\infty)$ یا $(-\infty,-1)$ بی‌شمار است.

۱۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $p(x)$ به ازای هر عدد طبیعی n بر $x+2$ بخش‌پذیر است. بنابراین اگر $n=1$، آن‌گاه

$$p(x)=x^4+2x^3+x^6+3x^5+16a$$

بر $x+2$ بخش‌پذیر است. در نتیجه

$$p(-2)=0\Rightarrow 16-16+64-96+16a=0\Rightarrow -32+16a=0\Rightarrow a=2$$

بنابراین

$$p(x)=x^4+2x^3+x^6+3x^5+32$$

چون x^2+2x-3 یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم است، پس می‌توان باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر آن را به صورت $cx+d$ نوشت. اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ تقسیم،

$$p(x)=(x^2+2x-3)Q(x)+cx+d=(x-1)(x+3)Q(x)+cx+d$$

اگر در این تساوی به جای x مقادیر 1 و -3 را قرار دهیم، به‌دست می‌آید

$$\begin{cases}p(1)=c+d\\ p(-3)=-3c+d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}39=c+d\\ 59=-3c+d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=-5\\ d=44\end{cases}$$

بنابراین برای $n=1$، باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر x^2+2x-3 برابر $-5x+44$ است.

۱۵- گزینهٔ ۳ عددهای آخر دسته‌ها به صورت زیر هستند:

$$1,3,6,12,24,\ldots$$

توجه کنید که این عددها به جز عدد اول، دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت ۲ تشکیل می‌دهند. بنابراین آخرین عدد دستهٔ دوازدهم برابر 3×2^{10} است. در نتیجه اولین عدد دستهٔ سیزدهم برابر $3\times2^{10}+1$ است. همچنین، آخرین عدد دستهٔ سیزدهم برابر 3×2^{11} است. چون عضوهای دستهٔ سیزدهم دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند، پس میانگین آن‌ها برابر است با میانگین جمله‌های اول و آخر این دنبالهٔ حسابی، که می‌شود

$$\frac{3\times2^{10}+1+3\times2^{11}}{2}=\frac{3\times2^{10}(1+2)+1}{2}=\frac{9\times2^{10}+1}{2}=4608/5$$

۱۶- گزینهٔ ۱ مجانب‌های قائم نمودار تابع f خط‌های $x=-b$ و $x=b$ هستند (یعنی ریشه‌های مخرج تابع f). مجانب‌های افقی نمودار تابع f خط‌های زیر هستند:

$$y=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{|ax|+2x}{|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|a|x+2x}{x}=|a|+2$$

$$y=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{|ax|+2x}{|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-|a|x+2x}{-x}=|a|-2$$

توجه کنید که اگر $b=0$، آن‌گاه نمودار تابع f فقط یک مجانب قائم دارد و اگر $b>0$، آن‌گاه نمودار تابع f مجانب قائم ندارد، زیرا مخرج تابع ریشه ندارد. بنابراین b منفی است و نمی‌تواند با $|a|+2$ برابر باشد. پس

$$\begin{cases}b=|a|-2\\ -b=|a|+2\end{cases}\xrightarrow{+}2|a|=0\Rightarrow a=0\Rightarrow b=-2$$

بنابراین $f(x)=\frac{2x+1}{|x|-2}$ و

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{2x+1}{|x|-2}=\frac{2+1}{1-2}=-3$$

۱۷- گزینهٔ ۲ ابتدا نقطهٔ تلاقی منحنی‌ها را در بازهٔ $[0,\pi]$ پیدا می‌کنیم. طول این نقطه جواب معادلهٔ $f(x)=g(x)$ در بازهٔ $[0,\pi]$ است:

$$\sin x+\frac{1}{2}\cos x=\frac{3}{2}\sin x\Rightarrow\cos x=\sin x$$

$$\tan x=1\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4},\quad k\in\mathbb{Z}$$

چون جواب معادلهٔ $f(x)=g(x)$ در بازهٔ $[0,\pi]$ است، پس $k=0$ و در نتیجه $x=\frac{\pi}{4}$. چون $f(\frac{\pi}{4})=\frac{3\sqrt2}{4}$، بنابراین نقطهٔ تلاقی منحنی‌ها نقطهٔ $(\frac{\pi}{4},\frac{3\sqrt2}{4})$ است. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=\cos x-\frac{1}{2}\sin x\Rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt2}{4}$$

پس شیب خط مماس مورد نظر برابر $\frac{\sqrt2}{4}$ است و معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$$y-\frac{3\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt2}{4}(x-\frac{\pi}{4})$$

طول نقطهٔ برخورد این خط با محور x به ازای $y=0$ به‌دست می‌آید که می‌شود

$$-\frac{3\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt2}{4}(x-\frac{\pi}{4})\Rightarrow-3=x-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}-3$$

۱۸- گزینهٔ ۳ چون f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۵ است، پس

$$f(x+5)=f(x)\Rightarrow f'(x+5)=f'(x)\quad(1)$$

از طرف دیگر،

$$g(x)=f(x+1)+f(3x+10)$$

$$g'(x)=f'(x+1)+3f'(3x+10)\Rightarrow g'(-2)=f'(-1)+3f'(4)\quad(2)$$

چون $f'(-1)=\frac{3}{2}$، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$f'(-1+5)=f'(-1)\Rightarrow f'(4)=f'(-1)=\frac{3}{2}$$

بنابراین از تساوی (۲) نتیجه می‌شود

$$g'(-2)=\frac{3}{2}+3(\frac{3}{2})=4\times\frac{3}{2}=6$$

۱۹- گزینهٔ ۲ بنابر قاعدهٔ هوپیتال،

$$\lim_{h\to0}\frac{f^2(5-h)-3f(5-h)+2}{h(5-h)}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2(-1)f(5-h)f'(5-h)-3(-1)f'(5-h)}{5-2h}$$

$$=\frac{-2f(5)f'(5)+3f'(5)}{5}$$

اکنون توجه کنید که $f(۵)=۲$ و

$$f'(x)=\sqrt[۳]{x+۳}+\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۳)^۲}}\times(x-۴)$$

$$f'(۵)=\sqrt[۳]{۸}+\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۶۴}}\times(۵-۴)=۲+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۲۵}{۱۲}$$

بنابراین مقدار حد مورد نظر برابر است با

$$\frac{-۲\times۲\times\frac{۲۵}{۱۲}+۳\times\frac{۲۵}{۱۲}}{۵}=\frac{-\frac{۲۵}{۱۲}}{۵}=-\frac{۵}{۱۲}$$

۲۰- گزینهٔ ۱ چون نقطهٔ $A(-۱,۱)$ روی نمودار تابع $f(x)=x^۲|x|+۳ax^۲+b$ است، پس

$$f(-۱)=۱\Rightarrow ۱+۳a+b=۱\Rightarrow b=-۳a \quad (۱)$$

همچنین چون نقطهٔ $A(-۱,۱)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است، پس $f'(-۱)=۰$. اکنون توجه کنید که در یک همسایگی $x=-۱$،

$$f(x)=x^۲(-x)+۳ax^۲+b=-x^۳+۳ax^۲+b\Rightarrow f'(x)=-۳x^۲+۶ax$$

$$f'(-۱)=۰\Rightarrow -۳-۶a=۰\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه $b=-۳a=-۳(-\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۲}$. بنابراین $\frac{b}{a}=\frac{\frac{۳}{۲}}{-\frac{۱}{۲}}=-۳$. البته توجه کنید که بدون اینکه مقدارهای a و b را حساب کنیم، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $\frac{b}{a}=-۳$.

۲۱- گزینهٔ ۴ مجانب‌های تابع $f(x)=\frac{ax+۳}{(a+۱)x+a-۱}$ خط‌های $x=\frac{۱-a}{a+۱}$ و $y=\frac{a}{a+۱}$ هستند که محل تلاقی آن‌ها نقطهٔ $(\frac{۱-a}{a+۱},\frac{a}{a+۱})$ است. از طرف دیگر نقطهٔ مینیمم تابع $g(x)=\frac{۳}{۲}x^۲+x+\frac{۵}{۶}$ نقطهٔ $(-\frac{۱}{۳},g(-\frac{۱}{۳}))$ است. بنابراین

$$\frac{۱-a}{a+۱}=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳-۳a=-a-۱\Rightarrow a=۲$$

به این ترتیب، $f(x)=\frac{۲x+۳}{۳x+۱}$. بنابراین طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع f با محور x به صورت مقابل به‌دست می‌آید:

$$f(x)=۰\Rightarrow\frac{۲x+۳}{۳x+۱}=۰\Rightarrow ۲x+۳=۰\Rightarrow x=-\frac{۳}{۲}$$

۲۲- گزینهٔ ۱ اگر طول ضلع مربع اول برابر a باشد، مساحت آن برابر $a^۲$ است و مساحت مربع دوم برابر $۹a^۲$ می‌شود. بنابراین طول ضلع مربع دوم $۳a$ است. در نتیجه محیط‌های مربع‌های اول و دوم به‌ترتیب برابر $۴a$ و $۱۲a$ هستند. بنابراین قدرنسبت دنبالهٔ هندسی مورد نظر برابر است با $\frac{۱۲a}{۴a}=۳$.

۲۳- گزینهٔ ۳ چون نمودار سهمی بر خط $y=-x$ مماس است، پس معادلهٔ $۳x^۲+(۲m-۱)x+m+\frac{۴}{۳}=-x$ باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد. در نتیجه

$$۳x^۲+(۲m-۱)x+m+\frac{۴}{۳}+x=۰\Rightarrow ۳x^۲+۲mx+m+\frac{۴}{۳}=۰ \quad (۱)$$

$$\Delta=۰\Rightarrow ۴m^۲-۴\times۳(m+\frac{۴}{۳})=۰\Rightarrow m^۲-۳m-۴=۰$$

$$(m+۱)(m-۴)=۰\Rightarrow m=-۱,m=۴$$

اکنون باید ببینیم به ازای کدام مقدار m طول نقطهٔ تماس (ریشهٔ مضاعف معادلهٔ (۱))منفی می‌شود تا نقطهٔ تماس در ناحیهٔ دوم واقع شود. توجه کنید که

$$\text{طول نقطهٔ تماس}=-\frac{۲m}{۶}=-\frac{m}{۳}$$

که فقط به ازای $m=۴$ منفی است. بنابراین طول رأس سهمی مورد نظر برابر است با

$$-\frac{۲m-۱}{۶}=-\frac{۲\times۴-۱}{۶}=-\frac{۷}{۶}$$

۲۴- گزینهٔ ۴ چون a واسطهٔ هندسی α و β است، پس $a^۲=\alpha\beta$.

از طرف دیگر، چون α و β جواب‌های معادلهٔ $x^۲+۲(a+۱)x+۲a-۱=۰$ هستند، پس $\alpha\beta=۲a-۱$. در نتیجه

$$a^۲=۲a-۱\Rightarrow a^۲-۲a+۱=۰\Rightarrow(a-۱)^۲=۰\Rightarrow a=۱$$

۲۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که α و β جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر هستند:

$$t^۲-t-۲=۰\Rightarrow(t+۱)(t-۲)=۰\Rightarrow t=-۱,t=۲$$

بنابراین یکی از عددهای α و β برابر -۱ است. در نتیجه، -۱ جواب معادلهٔ درجهٔ سوم داده شده است، یعنی

$$۴(-۱)^۳+k(-۱)^۲-۹(-۱)-۲=۰\Rightarrow -۴+k+۹-۲=۰\Rightarrow k=-۳$$

۲۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$y=f(x)=\sqrt{(x+۱)^۲}-|۳x-۶|=|x+۱|-|۳|x-۲|$$

بنابراین

$$f(x)=\begin{cases}-(x+۱)+۳(x-۲) & x\le -۱\\ x+۱+۳(x-۲) & -۱\le x\le ۲\\ x+۱-۳(x-۲) & x\ge ۲\end{cases}=\begin{cases}-۲x-۷ & x\le -۱\\ ۴x-۵ & -۱\le x\le ۲\\ -۲x+۷ & x\ge ۲\end{cases}$$

چون شیب خط $y=-۲x+۷$ منفی است، پس تابع f روی بازهٔ $[۲,+\infty)$ نزولی است. اکنون توجه کنید که

$$y=-۲x+۷\Rightarrow x=\frac{y-۷}{-۲}=-\frac{۱}{۲}y+\frac{۷}{۲}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۷}{۲}$. از طرف دیگر

$$x\ge ۲\Rightarrow -۲x\le -۴\Rightarrow -۲x+۷\le -۴+۷=۳$$

بنابراین برد تابع f روی بازهٔ $[۲,+\infty)$ برابر $(-\infty,۳]$ است، در نتیجه

$$D_{f^{-۱}}=R_f=(-\infty,۳]$$

۲۷- گزینهٔ ۱ نقطه‌های تقاطع نمودارهای دو تابع را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که ضابطهٔ تابع دوم به‌صورت زیر است:

$$۳y+x=۱۷\Rightarrow y=\frac{۱۷-x}{۳}$$

بنابراین طول نقطه‌های برخورد دو تابع جواب‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$|x+۲|+|x-۱|=\frac{۱۷-x}{۳}$$

از طرف دیگر

$$x\geq 1\Rightarrow x+2+x-1=\frac{17-x}{3}\Rightarrow x=2$$

$$-2\leq x\leq 1\Rightarrow x+2-(x-1)=\frac{17-x}{3}\Rightarrow x=8 \quad (\text{غ.ق.ق})$$

$$x\leq -2\Rightarrow -(x+2)-(x-1)=\frac{17-x}{3}\Rightarrow x=-4$$

بنابراین طول نقطه‌های برخورد به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x=2\Rightarrow y=\frac{17-x}{3}=\frac{17-2}{3}=5$$

$$x=-4\Rightarrow y=\frac{17-x}{3}=\frac{17+4}{3}=7$$

بنابراین نقطه‌های برخورد $(2,5)$ و $(-4,7)$ هستند، که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با

$$\sqrt{(2-(-4))^2+(5-7)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

۲۸- گزینهٔ ۳ تابع‌های $y=x^3$ و $y=3x-12$ اکیداً صعودی‌اند، پس مجموع آن‌ها نیز اکیداً صعودی است. در نتیجه تابع $f(x)=x^3+3x-12$ اکیداً صعودی است. بنابراین نقطه‌های برخورد نمودارهای تابع‌های f و f^{-1} روی خط $y=x$ هستند. در نتیجه طول‌های این نقطه‌ها جواب‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$f(x)=x\Rightarrow x^3+3x-12=x\Rightarrow x^3+2x-12=0\Rightarrow x^3-8+2x-4=0$$

$$(x-2)(x^2+2x+4)+2(x-2)=0\Rightarrow (x-2)(x^2+2x+6)=0 \quad (1)$$

چون دلتای معادلهٔ $x^2+2x+6=0$ منفی است، پس این معادله جواب ندارد. در نتیجه تنها جواب معادلهٔ (۱) برابر $x=2$ است. چون نقطهٔ برخورد نمودارهای تابع‌های f و f^{-1} روی خط $y=x$ است، پس عرض نقطهٔ برخورد برابر است با $y=2$، یعنی نقطهٔ برخورد نمودارهای تابع‌های f و f^{-1} نقطهٔ $(2,2)$ است، که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

۲۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$a^2+9b^2=10ab\Rightarrow a^2+9b^2+6ab=16ab$$

$$(a+3b)^2=16ab\Rightarrow (\frac{a+3b}{4})^2=ab$$

اگر از دو طرف این تساوی در مبنای ۱۰ لگاریتم بگیریم، به‌دست می‌آید

$$\log(\frac{a+3b}{4})^2=\log(ab)\Rightarrow 2\log(\frac{a+3b}{4})=\log a+\log b$$

$$\log(\frac{a+3b}{4})=\frac{\log a+\log b}{2}$$

بنابراین $\log(\frac{a+3b}{4})$ واسطهٔ حسابی $\log a$ و $\log b$ است.

۳۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=4\Rightarrow 1-\sin x=4(1+\sin x)\Rightarrow 5\sin x=-3$$

$$\sin x=-\frac{3}{5}$$

در نتیجه

$$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\Rightarrow -\frac{3}{5}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$-3(1+\tan^2\frac{x}{2})=10\tan\frac{x}{2}\Rightarrow 3\tan^2\frac{x}{2}+10\tan\frac{x}{2}+3=0$$

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{-10\pm\sqrt{100-36}}{2\times 3}=\frac{-10\pm\sqrt{64}}{6}=\frac{-10\pm 8}{6}$$

بنابراین $\tan\frac{x}{2}=-3$ یا $\tan\frac{x}{2}=-\frac{1}{3}$. در نتیجه مقدار صحیح $\tan\frac{x}{2}$ برابر -3 است.

۳۱- گزینهٔ ۱ چون نمودار تابع f در یک همسایگی راست نقطهٔ $x=0$ نزولی است، پس ضریب $\cos x$، یعنی a باید مثبت باشد. از طرف دیگر ماکزیمم مقدار تابع f برابر ۳ و مینیمم مقدار آن برابر -7 است. در نتیجه

$$\begin{cases} a+b=3 \\ -a+b=-7 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-2 \end{cases}$$

و در نتیجه $f(x)=5\cos x-2$

$$f(\frac{\pi}{3})=5\cos\frac{\pi}{3}-2=5\times\frac{1}{2}-2=\frac{1}{2}$$

۳۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}=\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)$$

$$\cos(x-\frac{\pi}{4})=\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}=\cos x\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)=1\Rightarrow(\sin x+\cos x)^2=2$$

$$1+\sin 2x=2\Rightarrow\sin 2x=1\Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4},\quad k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ برابرند با $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$، که مجموع آن‌ها می‌شود $\frac{3\pi}{2}$.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $\cos(x-\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{4}-x)$. بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{4}-x)=1$$

از طرف دیگر زاویه‌های $x+\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4}-x$ متمم یکدیگرند، بنابراین

$$\cos(\frac{\pi}{4}-x)=\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

در نتیجه معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sin^2(x+\frac{\pi}{4})=1$$

$$\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{4}, & k\in\mathbb{Z}\\ \text{یا}\\ \sin(x+\frac{\pi}{4})=-1\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=2k\pi-\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}, & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ برابر $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ هستند، که مجموع آن‌ها برابر است با $\frac{3\pi}{2}$.

۳۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{2-2\cos x}=\sqrt{2(1-\cos x)}=\sqrt{2(2\sin^2\frac{x}{2})}=2|\sin\frac{x}{2}|$$

بنابراین

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{\sqrt{2-2\cos x}}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{2|\sin\frac{x}{2}|}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{-2\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0^-}\frac{2-3x-(2-5x)}{-2\sin\frac{x}{2}(\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-5x})}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{2x}{-2\times\frac{x}{2}(\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-5x})}=\lim_{x\to0^-}\frac{-2}{\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-5x}}$$

$$=\frac{-2}{\sqrt2+\sqrt2}=-\frac{\sqrt2}{2}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{\sqrt{2-2\cos x}}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{-2\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}-\frac{-5}{2\sqrt{2-5x}}}{-2\times\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\frac{-3}{2\sqrt2}+\frac{5}{2\sqrt2}}{-1}=-\frac{\sqrt2}{2}$$

۳۴- گزینهٔ ۳ باید $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)$

از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}([x]-2a)=-1-2a$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{2bx^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2bx^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{(\frac{x}{2})^2}{bx^2}=\frac{1}{4b}$$

$$f(0)=|b-0|=|b|$$

اکنون توجه کنید که باید $|b|=\frac{1}{4b}$. چون سمت راست این تساوی غیرمنفی است، پس سمت چپ آن، یعنی $\frac{1}{4b}$ هم غیرمنفی است. بنابراین b غیرمنفی است. در نتیجه $|b|=b$.

بنابراین

$$\frac{1}{4b}=b\Rightarrow b^2=\frac{1}{4}\Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

در نتیجه

$$-1-2a=\frac{1}{4b}\Rightarrow-1-2a=\frac{1}{2}\Rightarrow a=-\frac{3}{4}$$

پس $b-a=\frac{5}{4}$.

۳۵- گزینهٔ ۴ با توجه به گزینه‌ها خارج قسمت را یک چندجمله‌ای درجهٔ اول به‌صورت $ax+b$ در نظر می‌گیریم. بنابر قضیهٔ تقسیم،

$$f(x)=(x^2+4x+5)(ax+b)+x+2$$

در نتیجه

$$\begin{cases}f(1)=(1+4+5)(a+b)+3\\ f(-1)=(1-4+5)(-a+b)+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}13=10(a+b)+3\\ 11=2(-a+b)+1\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+b=1\\ -a+b=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=3\end{cases}$$

بنابراین خارج قسمت می‌تواند برابر $-2x+3$ باشد.

۳۶- گزینهٔ ۱ بزرگ‌ترین عضو دستهٔ nام برابر 2^n است. بنابراین بزرگ‌ترین عضو دستهٔ سیزدهم برابر 2^{13} است. همین‌طور، بزرگ‌ترین عضو دستهٔ دوازدهم برابر 2^{12} است. بنابراین کوچک‌ترین عضو دستهٔ سیزدهم برابر $2^{12}+1$ است. چون تعداد عضوهای دستهٔ سیزدهم عددی زوج است، پس میانهٔ این دسته برابر با میانگین دو عدد وسطی این دسته است. از طرف دیگر، چون عضوهای دستهٔ سیزدهم دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند، پس میانگین دو عدد وسطی برابر با میانگین عدد اول و عدد آخر دسته است، که برابر است با $\frac{2^{12}+1+2^{13}}{2}=6144/5$.

۳۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{bx^2+7}{4x^2+ax+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{bx^2}{4x^2}=\frac{b}{4}$$

پس مجانب افقی نمودار تابع خط $y=\frac{b}{4}$ است. چون مجانب‌ها در نقطهٔ $(-\frac{1}{2},3)$ تلاقی می‌کنند، پس $\frac{b}{4}=3$، یعنی $b=12$. همین‌طور، چون مجانب قائم از نقطهٔ به طول $-\frac{1}{2}$ می‌گذرد، پس معادلهٔ آن $x=-\frac{1}{2}$ است، یعنی $x=-\frac{1}{2}$ ریشهٔ مخرج تابع است، یعنی

$$4(-\frac{1}{2})^2+a(-\frac{1}{2})+1=0\Rightarrow a=4$$

پس $\frac{b}{a}=\frac{12}{4}=3$.

۳۸- گزینهٔ ۳ شیب خط $6y-3x=1$ برابر است با $\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$. اگر نقطهٔ مورد نظر (x_0,y_0) باشد، آن‌گاه $f'(x_0)=-2$. از طرف دیگر

$$f(x)=x^2-4x+5\Rightarrow f'(x)=2x-4$$

پس

$$f'(x_0)=-2\Rightarrow 2x_0-4=-2\Rightarrow x_0=1$$

چون نقطهٔ مورد نظر روی نمودار تابع f است، پس عرض آن برابر است با $f(1)=1-4+5=2$. بنابراین نقطهٔ مورد نظر $(1,2)$ است.

۳۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$g(x)=f(\tan^۲ x+\sqrt{۲}\cos x)$$

$$g'(x)=(\tan^۲ x+\sqrt{۲}\cos x)'f'(\tan^۲ x+\sqrt{۲}\cos x)$$

$$=(۲\tan x(۱+\tan^۲ x)-\sqrt{۲}\sin x)f'(\tan^۲ x+\sqrt{۲}\cos x)$$

پس

$$g'(\frac{\pi}{۴})=(۲\times ۱\times(۱+۱)-\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲})f'(۱+\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲})=(۴-۱)f'(۱+۱)=۳f'(۲)$$

در نتیجه $\sqrt{۳}=۳f'(۲)\Rightarrow f'(۲)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۴۰- گزینهٔ ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sin x\cos ۲x$ در بازهٔ $[\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲}]$ برابر است با

$$\frac{f(\frac{\pi}{۲})-f(\frac{\pi}{۴})}{\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}}=\frac{۱\times(-۱)-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times۰}{\frac{\pi}{۴}}=-\frac{۴}{\pi}$$

همین‌طور، آهنگ تغییر متوسط تابع $g(x)=\sin^۴ x-\cos^۴ x$ در بازهٔ $[\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲}]$ برابر است با

$$\frac{g(\frac{\pi}{۲})-g(\frac{\pi}{۴})}{\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}}=\frac{(۱-۰)-(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴})}{\frac{\pi}{۴}}=\frac{۴}{\pi}$$

پس نسبت مورد نظر برابر -۱ است.

۴۱- گزینهٔ ۲ چون نقطهٔ $(۰,۰)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d$ است و $f'(x)=۳ax^۲+۲bx+c$، پس

$$\begin{cases}f(۰)=۰\\f'(۰)=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=۰\\c=۰\end{cases}\Rightarrow f(x)=ax^۳+bx^۲, f'(x)=۳ax^۲+۲bx$$

چون نقطهٔ $(۱,۱)$ نیز نقطهٔ اکسترمم نسبی این تابع است، پس

$$\begin{cases}f(۱)=۱\\f'(۱)=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=۱\\۳a+۲b=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۲\\b=۳\end{cases}$$

پس $ab=-۶$.

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ ۲ فرض کنید جمله‌های متوالی دنبالهٔ هندسی a, ar, ar^2 باشند. در این صورت، طبق فرض مسئله $4a, 8ar, 16ar^2$ دنباله‌ای حسابی است. بنابراین

$$8ar=\frac{4a+16ar^2}{2}\Rightarrow 4r=1+4r^2\Rightarrow 4r^2-4r+1=0$$

$$(2r-1)^2=0\Rightarrow r=\frac{1}{2}$$

از طرف دیگر، چون مجموع مربع‌های جمله‌های دنبالهٔ هندسی با مجموع جمله‌های دنبالهٔ حسابی برابر است، پس

$$a^2+a^2r^2+a^2r^4=4a+8ar+16ar^2\Rightarrow a(1+r^2+r^4)=4(1+2r+4r^2)$$

$$a(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16})=4(1+1+1)\Rightarrow a(\frac{16+4+1}{16})=4\times 3\Rightarrow a=\frac{64}{7}$$

۲- گزینهٔ ۴ طول رأس سهمی $y=kx^2-4x-6$ برابر $-\frac{-4}{2k}$، یعنی $\frac{2}{k}$ است. پس عرض آن برابر است با

$$y=k(\frac{2}{k})^2-4(\frac{2}{k})-6=\frac{4}{k}-\frac{8}{k}-6=-\frac{4}{k}-6$$

پس نقطهٔ $(\frac{2}{k}, -\frac{4}{k}-6)$ رأس سهمی است که روی خط $y=-4x-4$ قرار دارد. پس مختصات آن در معادلهٔ این خط صدق می‌کنند:

$$-\frac{4}{k}-6=-4(\frac{2}{k})-4\Rightarrow\frac{4}{k}=2\Rightarrow k=2$$

بنابراین عرض رأس سهمی برابر است با $-\frac{4}{k}-6=-\frac{4}{2}-6=-8$.

۳- گزینهٔ ۳ فرض کنید α جواب مشترک معادله‌های مورد نظر باشد. در این صورت α در هر دو معادله صدق می‌کند:

$$\begin{cases}\alpha^2+6\alpha+m=0\\ \alpha^2+2\alpha-3m=0\end{cases}\Rightarrow(\alpha^2+6\alpha+m)-(\alpha^2+2\alpha-3m)=0$$

$$4\alpha+4m=0\Rightarrow m=-\alpha$$

اکنون در معادلهٔ اول به جای m مقدار $-\alpha$ را قرار می‌دهیم و آن را حل می‌کنیم.

$$\alpha^2+6\alpha+m=0\Rightarrow\alpha^2+6\alpha-\alpha=0\Rightarrow\alpha^2+5\alpha=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0 \ (\text{غ.ق.ق})\\ \alpha=-5\end{cases}$$

پس $m=5$. بنابراین معادله‌ها به‌صورت زیر هستند:

$$x^2+6x+m=0\Rightarrow x^2+6x+5=0\Rightarrow(x+1)(x+5)=0$$

$$x^2+2x-3m=0\Rightarrow x^2+2x-15=0\Rightarrow(x-3)(x+5)=0$$

پس جواب‌های غیرمشترک دو معادله $x=-1$ و $x=3$ هستند که اختلاف آن‌ها برابر ۴ است.

۴- گزینهٔ ۴ باید مقدارهای صحیح x را پیدا کنیم که نابرابری‌های زیر درست باشند:

$$-2<\frac{2}{x^2-3x+2}<0$$

ابتدا نامعادلهٔ سمت راست را حل می‌کنیم:

چون صورت کسر $\frac{2}{x^2-3x+2}$ مثبت است، خود کسر وقتی منفی است که مخرجش منفی باشد.

اکنون توجه کنید که جدول تعیین علامت عبارت $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^2-3x+2<0$ بازهٔ $(1,2)$ است، که چون هیچ عدد صحیحی در این بازه قرار ندارد، پس هیچ عدد صحیحی در نابرابری $\frac{2}{x^2-3x+2}<0$ صدق نمی‌کند. بنابراین دیگر لازم نیست نامعادلهٔ سمت چپ را حل کنیم.

۵- گزینهٔ ۳ شیب خط AB برابر است با $\frac{1+2}{0-4}=-\frac{3}{4}$ و طول پاره‌خط AB برابر است با $AB=\sqrt{(4-0)^2+(-2-1)^2}=5$. چون خط AD بر خط AB عمود است، پس شیب آن برابر $\frac{4}{3}$ است. همچنین $AD=AB=5$. اکنون اگر D را نقطهٔ (a,b) بگیریم، شیب خط AD برابر است با

$$\frac{b-1}{a-0}=\frac{4}{3}\Rightarrow b-1=\frac{4}{3}a$$

همچنین

$$AD=5\Rightarrow\sqrt{(a-0)^2+(b-1)^2}=5\Rightarrow a^2+(b-1)^2=25$$

$$a^2+(\frac{4}{3}a)^2=25\Rightarrow\frac{25a^2}{9}=25\Rightarrow a^2=9\Rightarrow a=\pm 3$$

چون نقطهٔ D در ربع سوم است، پس طول آن منفی است، در نتیجه $a=-3$.

۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع $g^{-1}of^{-1}$ با محور y برابر با صفر و عرض آن برابر α است. بنابراین

$$(g^{-1}of^{-1})(0)=\alpha\Rightarrow(fog)^{-1}(0)=\alpha\Rightarrow(fog)(\alpha)=0$$

$$f(g(\alpha))=0\Rightarrow\log(2g(\alpha)-5)=0\Rightarrow 2g(\alpha)-5=1\Rightarrow g(\alpha)=3$$

اکنون توجه کنید که

$$g(\alpha)=3\Rightarrow\alpha+\sqrt{2\alpha-4}=3\Rightarrow\sqrt{2\alpha-4}=3-\alpha \quad (1)$$

$$2\alpha-4=(3-\alpha)^2\Rightarrow 2\alpha-4=9+\alpha^2-6\alpha\Rightarrow\alpha^2-8\alpha+13=0$$

$$\alpha=4\pm\sqrt{3}$$

از معادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود که $۲\le\alpha\le۳$. بنابراین $\alpha=۴-\sqrt{۳}$.

۷- گزینهٔ ۱ $x=۱$ جواب معادلهٔ $f(x)=g(x)$ است، پس

$$f(۱)=g(۱)\Rightarrow ۲+۲^{b-a}=-۱-۳+۸\Rightarrow ۲^{b-a}=۲\Rightarrow b-a=۱$$

از طرف دیگر،

$$f^{-۱}(۱۰)=-۱\Rightarrow f(-۱)=۱۰\Rightarrow ۲+۲^{b+a}=۱۰\Rightarrow ۲^{b+a}=۸\Rightarrow b+a=۳$$

پس

$$\begin{cases} b-a=۱ \\ b+a=۳ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=۱ \\ b=۲ \end{cases}\Rightarrow ۲b-a=۲\times۲-۱=۳$$

۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $x^۳+۸=(x+۲)(x^۲-۲x+۴)$.

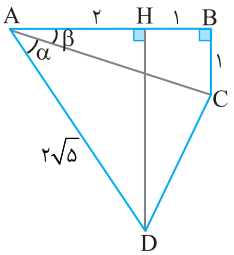
بنابراین اگر دو طرف معادله را در $(x+۲)(x^۲-۲x+۴)$ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید

$$x^۲-۲x+۴-(x^۲-۹x-۲)=۶x(x+۲)\Rightarrow ۷x+۶=۶x^۲+۱۲x$$

$$۶x^۲+۵x-۶=۰\Rightarrow x=\frac{-۵\pm\sqrt{۲۵+۱۴۴}}{۱۲}=\frac{-۵\pm۱۳}{۱۲}\Rightarrow x=-\frac{۳}{۲},x=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین $x=\frac{۲}{۳}$ تنها جواب مثبت معادلهٔ مورد نظر است.

۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،



$$AC^۲=AB^۲+BC^۲=۳^۲+۱^۲=۱۰$$

$$AC=\sqrt{۱۰}$$

همین‌طور، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD،

$$AD^۲=AH^۲+HD^۲$$

$$(۲\sqrt{۵})^۲=۲^۲+HD^۲$$

$$HD^۲=۲۰-۴=۱۶\Rightarrow HD=۴$$

اکنون توجه کنید که در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$\sin\beta=\frac{BC}{AC}=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\ ,\quad \cos\beta=\frac{AB}{AC}=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$$

همچنین، در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD،

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{HD}{AD}=\frac{۴}{۲\sqrt{۵}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{AH}{AD}=\frac{۲}{۲\sqrt{۵}}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

بنابراین

$$\cos\alpha=\cos((\alpha+\beta)-\beta)=\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\times\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}+\frac{۲}{\sqrt{۵}}\times\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۳}{۵\sqrt{۲}}+\frac{۲}{۵\sqrt{۲}}=\frac{۵}{۵\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۰- گزینهٔ ۳ از روی نمودار معلوم می‌شود که دورهٔ تناوب تابع برابر است با $\frac{۴\pi}{۳}-(-\frac{۲\pi}{۳})=۲\pi$. از طرف دیگر دورهٔ تناوب تابع برابر است با $\frac{۲\pi}{|c|}$. در نتیجه

$$\frac{۲\pi}{|c|}=۲\pi\Rightarrow|c|=۱\Rightarrow c=\pm۱$$

چون نمودار تابع $f(x)=a+b\cos(cx-\frac{\pi}{۳})$ از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس

$$f(۰)=۰\Rightarrow a+b\cos(-\frac{\pi}{۳})=۰\Rightarrow a+\frac{b}{۲}=۰\Rightarrow b=-۲a$$

اکنون توجه کنید که مقدار ماکزیمم تابع برابر است با $a+|b|$ و از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که این مقدار برابر ۱ است. در نتیجه $a+|b|=۱$. بنابراین

$$\begin{cases} b=-۲a \\ a+|b|=۱ \end{cases}\Rightarrow a+۲|a|=۱$$

$$\begin{cases} a>۰\Rightarrow ۳a=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۳}\Rightarrow b=-\frac{۲}{۳} \\ a<۰\Rightarrow -a=۱\Rightarrow a=-۱\Rightarrow b=۲ \end{cases}$$

اکنون توجه کنید که

$$f(-\frac{۲\pi}{۳})<۰\Rightarrow a+b\cos(-\frac{۲\pi c}{۳}-\frac{\pi}{۳})<۰$$

$$f(\frac{۴\pi}{۳})<۰\Rightarrow a+b\cos(\frac{۴\pi c}{۳}-\frac{\pi}{۳})<۰$$

اگر $c=۱$، آن‌گاه

$$a+b\cos(-\frac{۲\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳})<۰\Rightarrow a-b<۰\Rightarrow a<b$$

$$a+b\cos(\frac{۴\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳})<۰\Rightarrow a-b<۰\Rightarrow a<b$$

پس در این حالت $a=-۱$ و $b=۲$ قابل قبول است.

اگر $c=-۱$، آن‌گاه

$$a+b\cos(\frac{۲\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳})<۰\Rightarrow a+\frac{b}{۲}<۰$$

ولی می‌دانیم $a+\frac{b}{۲}=۰$، پس این حالت قابل قبول نیست.

بنابراین $a=-۱$، $b=۲$ و $c=۱$، پس $b(c-a)=۴$.

۱۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\frac{۱۷\pi}{۸}+x+\frac{۳\pi}{۸}-x=\frac{۵\pi}{۲}$. بنابراین

$$\cos(\frac{۱۷\pi}{۸}+x)=\cos(\frac{۵\pi}{۲}-(\frac{۳\pi}{۸}-x))=\sin(\frac{۳\pi}{۸}-x)$$

در نتیجه معادلهٔ مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید

$$\sin(\frac{۳\pi}{۸}-x)\cos(\frac{۳\pi}{۸}-x)=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{۱}{۲}\sin(۲(\frac{۳\pi}{۸}-x))=\frac{۱}{۴}$$

$$\sin(\frac{۳\pi}{۴}-۲x)=\frac{۱}{۲}=\sin(\frac{\pi}{۶})$$

در نتیجه

$$\begin{cases} \frac{۳\pi}{۴}-۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ \frac{۳\pi}{۴}-۲x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=-k\pi+\frac{۷\pi}{۲۴}\ ,\ k\in\mathbb{Z} \\ x=-k\pi-\frac{\pi}{۲۴}\ ,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

پس جواب‌های واقع در بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ عبارت‌اند از

$$k=۰\Rightarrow x=\frac{۷\pi}{۲۴},x=-\frac{\pi}{۲۴}$$

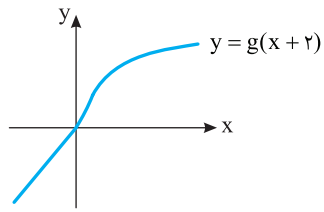
که مجموع آن‌ها برابر است با $\frac{\pi}{۴}$.

۱۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که از روی نمودار معلوم می‌شود که فقط $g(۲)$ برابر صفر است. در نتیجه

$$g(f(g(x+۲)))=۰\Rightarrow f(g(x+۲))=۲\Rightarrow|\frac{۱}{۲}g(x+۲)-۱|=۲$$

$$|g(x+۲)-۲|=۴\Rightarrow g(x+۲)-۲=\pm۴\Rightarrow g(x+۲)=۶ \text{ یا } g(x+۲)=-۲$$

اکنون توجه کنید که نمودار تابع $y=g(x+۲)$ به‌صورت زیر است:



پس خط‌های $y=۶$ و $y=-۲$ هر کدام نمودار تابع $y=g(x+۲)$ را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کنند. بنابراین معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد.

۱۳- گزینهٔ ۱ چون نمودار تابع خطی $f^{-۱}$ از نقطه‌های $(۰,\pi)$ و $(m,۰)$ گذشته است، پس شیب آن برابر است با $\frac{\pi-۰}{۰-m}=-\frac{\pi}{m}$. پس ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ به‌صورت زیر است:

$$f^{-۱}(x)-۰=-\frac{\pi}{m}(x-m)\Rightarrow f^{-۱}(x)=-\frac{\pi}{m}x+\pi$$

اکنون ضابطهٔ تابع f را پیدا می‌کنیم:

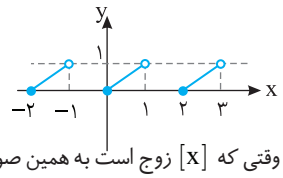
$$y=-\frac{\pi}{m}x+\pi\Rightarrow x=\frac{y-\pi}{-\frac{\pi}{m}}=-\frac{m}{\pi}y+m$$

در نتیجه $f(x)=-\frac{m}{\pi}x+m$. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-۱}(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{\pi}{m}x+\pi}{-\frac{m}{\pi}x+m}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{\pi}{m}x}{-\frac{m}{\pi}x}=\frac{\pi^۲}{m^۲}$$

در نتیجه $\frac{\pi^۲}{m^۲}=\pi\Rightarrow m^۲=\pi\xrightarrow{m<۰}m=-\sqrt{\pi}$

۱۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که نمودار تابع $y=x-[x]$ با شرط اینکه $[x]$ زوج باشد به‌صورت زیر است:



بنابراین نمودار تابع f وقتی که $[x]$ زوج است به همین صورت است. چون تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس در نقطه‌های $x=۰$ و $x=-۱$ نیز پیوسته است. از طرف دیگر تابع f روی بازهٔ $[-۱,۰]$ خطی است و باید از نقطه‌های $(-۱,۱)$ و $(۰,۰)$ عبور کند. پس ضابطهٔ تابع f روی این بازه به صورت زیر است:

$$y-۰=\frac{۱-۰}{-۱-۰}(x-۰)\Rightarrow y=-x$$

در نتیجه باید تساوی $|x-[x-a]|=-x$ به ازای هر x در بازهٔ $[-۱,۰]$ درست باشد.

$$x=۰\Rightarrow|۰-[-a]|=۰\Rightarrow[-a]=۰\Rightarrow۰\le-a<۱\Rightarrow-۱<a\le۰$$

که چون $a<-۱$، به تناقض رسیده‌ایم، یعنی هیچ مقداری برای a قابل قبول نیست.

۱۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$ و

$$f(x)=\frac{x}{۱-x|x|}=\begin{cases}\frac{x}{۱-x^۲} & x\ge۰\ ,\ x\neq۱\\ \frac{x}{۱+x^۲} & x\le۰\end{cases}$$

به علاوه، تابع f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته است. اکنون اگر $x\neq۰,۱$، آن‌گاه ضابطهٔ تابع f' به‌صورت زیر است:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{۱-x^۲+۲x^۲}{(۱-x^۲)^۲} & x>۰\ ,\ x\neq۱\\ \frac{۱+x^۲-۲x^۲}{(۱+x^۲)^۲} & x<۰\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{۱+x^۲}{(۱-x^۲)^۲} & x>۰\ ,\ x\neq۱\\ \frac{۱-x^۲}{(۱+x^۲)^۲} & x<۰\end{cases}$$

از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to۰^+}f'(x)=\lim_{x\to۰^+}\frac{۱+x^۲}{(۱-x^۲)^۲}=۱\Rightarrow f'_+(۰)=۱$$

$$\lim_{x\to۰^-}f'(x)=\lim_{x\to۰^-}\frac{۱-x^۲}{(۱+x^۲)^۲}=۱\Rightarrow f'_-(۰)=۱$$

پس $f'(۰)=۱$. بنابراین تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است. همچنین

$$f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}x>۰\ ,\ x\neq۱:۱+x^۲=۰ & (\text{غ.ق.ق.})\\ x<۰:۱-x^۲=۰\Rightarrow x=-۱\end{cases}$$

پس تنها نقطه‌ای که مشتق تابع f در آن برابر صفر است، $x=-۱$ است و تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد.

۱۶- گزینهٔ ۳ به کمک تعریف مشتق، مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=\frac{۳}{۴}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(\tfrac{۳}{۴})=\lim_{x\to\frac{۳}{۴}^+}\frac{f(x)-f(\frac{۳}{۴})}{x-\frac{۳}{۴}}=\lim_{x\to\frac{۳}{۴}^+}\frac{(۴x-۳)\sqrt{ax}}{x-\frac{۳}{۴}}=\lim_{x\to\frac{۳}{۴}^+}۴\sqrt{ax}$$

$$=۴\sqrt{\frac{۳a}{۴}}=۲\sqrt{۳a}$$

$$f'_-(\tfrac{۳}{۴})=\lim_{x\to\frac{۳}{۴}^-}\frac{f(x)-f(\frac{۳}{۴})}{x-\frac{۳}{۴}}=\lim_{x\to\frac{۳}{۴}^-}\frac{-(۴x-۳)\sqrt{ax}}{x-\frac{۳}{۴}}=\lim_{x\to\frac{۳}{۴}^-}(-۴\sqrt{ax})$$

$$=-۴\sqrt{\frac{۳a}{۴}}=-۲\sqrt{۳a}$$

پس شیب نیم‌خط مماس راست در نقطهٔ $x=\frac{۳}{۴}$ برابر $۲\sqrt{۳a}$ و شیب نیم‌خط مماس چپ در این نقطه برابر $-۲\sqrt{۳a}$ است. در نتیجه

$$۲\sqrt{۳a}-(-۲\sqrt{۳a})=۲\sqrt{۶}\Rightarrow۴\sqrt{۳a}=۲\sqrt{۶}$$

$$\sqrt{۳a}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}\Rightarrow۳a=\frac{۶}{۴}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

۱۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که دلتای چندجمله‌ای f مثبت است. در واقع

$$\Delta=(۲-m)^۲+۲۰(m^۲+۱)>۰$$

از طرف دیگر $S=\alpha+\beta=\frac{m-۲}{m^۲+۱}$. پس باید m را طوری پیدا کنیم که تابع S بیشترین مقدار شود. اکنون توجه کنید که

$$S'(m)=\frac{m^۲+۱-۲m(m-۲)}{(m^۲+۱)^۲}=\frac{-m^۲+۴m+۱}{(m^۲+۱)^۲}$$

$$S'(m)=۰\Rightarrow m^۲-۴m-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۲+\sqrt{۵}\\ m=۲-\sqrt{۵}\end{cases}$$

بـا توجه بـه جدول تغییرات زیر برای تابع S، بیشـترین مقدار ایـن تابع به ازای $m=۲+\sqrt{۵}$ رخ می‌دهد.

m	$-\infty$		$۲-\sqrt{۵}$		$۲+\sqrt{۵}$		$+\infty$
$S'(m)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
		↘	min	↗	max	↘	