آزمون ۱۰۰

۱- گزینهٔ ۱ زاویهٔ بین بردار $\vec{a}=(-1,\alpha,1)$ و محور z در فضا برابر 45° است. بنابراین

$$\cos 45^\circ=\frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}||\vec{k}|}\xrightarrow{\vec{k}=(0,0,1)}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2+\alpha^2}\times\sqrt{1}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}\frac{1}{2}=\frac{1}{2+\alpha^2}\Rightarrow\alpha=0$$

بنابراین $\vec{a}=(-1,0,1)$. اکنون به‌جای بردار $\vec{b}=(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},2)$ از بردار $\frac{3}{2}\vec{b}=(-2,1,3)$ استفاده می‌کنیم. در این صورت

$$\vec{a}\times\frac{3}{2}\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&0&1\\-2&1&3\end{vmatrix}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$$

توجه کنید که چون $\vec{a}\times\frac{3}{2}\vec{b}=\frac{3}{2}(\vec{a}\times\vec{b})$، پس θ زاویهٔ بین بردار $\vec{a}\times\frac{3}{2}\vec{b}$ و محور z است، بنابراین

$$\cos\theta=\frac{(\vec{a}\times\frac{3}{2}\vec{b})\cdot\vec{k}}{|\vec{a}\times\frac{3}{2}\vec{b}||\vec{k}|}=\frac{(-1,1,-1)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{3}\times\sqrt{1}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲- گزینهٔ ۱ در شکل زیر، مثلث $TB'C'$ انتقال‌یافتهٔ مثلث ABC تحت بردار $\overrightarrow{AT}$ و مثلث TPQ ناحیهٔ محدود بین مثلث اولیه و مثلث انتقال‌یافته است. بنابر فرض تست،

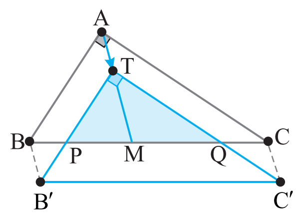
$$\frac{S_{TPQ}}{S_{ABC}}=\frac{1}{16}\qquad(1)$$

از طرف دیگر، چون اضلاع مثلث TPQ با اضلاع مثلث ABC دوبه‌دو موازی‌اند، پس زاویه‌های این دو مثلث مساوی‌اند. در نتیجه این دو مثلث متشابه‌اند. بنابراین نسبت مساحت‌های این دو مثلث مساوی توان دوم نسبت میانه‌های نظیر آن‌ها است، پس

$$\frac{S_{TPQ}}{S_{ABC}}=\left(\frac{TM}{AM}\right)^2\xrightarrow{\text{از (۱)}}\left(\frac{TM}{AM}\right)^2=\frac{1}{16}\Rightarrow\frac{TM}{AM}=\frac{1}{4}\qquad(2)$$

چون در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است، پس $AM=\frac{BC}{2}=\frac{8}{2}=4$. در نتیجه از (۲) به‌دست می‌آید

$$\frac{TM}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow TM=1\Rightarrow AT=AM-TM=4-1=3$$



۳- گزینهٔ ۱ سطر سوم ماتریس A را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\text{سطر سوم حاصل‌ضرب دو ماتریس اول}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}?&?&?\\?&?&?\\3&7&-2\end{bmatrix}$$

اکنون سطر سوم ماتریس A را پیدا می‌کنیم:

$$\text{سطر سوم }A=\begin{bmatrix}?&?&?\\?&?&?\\3&7&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}?&?&?\\?&?&?\\7&1&-5\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A مساوی $7+1-5=3$ است.

۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$BA^TA=52I\Rightarrow B\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\2&1\\3&1\end{bmatrix}=52I$$

$$B\begin{bmatrix}14&4\\4&3\end{bmatrix}=52I\qquad(1)$$

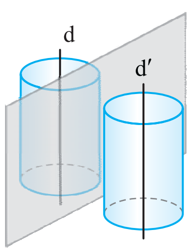
اکنون برای پیدا کردن ماتریس B، طرفین تساوی (۱) را از سمت راست در وارون ماتریس $\begin{bmatrix}14&4\\4&3\end{bmatrix}$ ضرب می‌کنیم. توجه کنید که $\begin{bmatrix}14&4\\4&3\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{26}\begin{bmatrix}3&-4\\-4&14\end{bmatrix}$. بنابراین

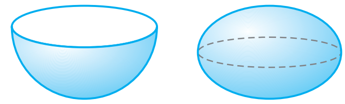
$$B=52I\begin{bmatrix}14&4\\4&3\end{bmatrix}^{-1}=52I\times\frac{1}{26}\begin{bmatrix}3&-4\\-4&14\end{bmatrix}$$

$$=\frac{52}{26}\begin{bmatrix}3&-4\\-4&14\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}3&-4\\-4&14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-8\\-8&28\end{bmatrix}$$

بنابراین ماکزیمم مقدار درایه‌های ماتریس B برابر ۲۸ است.

۵- گزینهٔ ۱ فرض کنید $k>0$. مکان هندسی نقاطی از فضا که از خط‌های موازی d و d' به فاصلهٔ k هستند، دو سطح استوانه‌ای با محورهای d و d' هستند (شکل مقابل را ببینید). صفحه‌هایی که بر این دو سطح استوانه‌ای مماس هستند، از دو خط d و d' به یک فاصله هستند که در اینجا تعداد آن‌ها حداکثر ۴ تا است. در واقع دو تا از این صفحه‌ها می‌توانند طوری بر این دو سطح استوانه‌ای مماس باشند که هر دو سطح در یک طرف این صفحه‌ها باشند و دو تا از این صفحه‌ها می‌توانند طوری بر این دو سطح استوانه‌ای مماس باشند که دو سطح در طرفین این صفحه‌ها باشند. با تغییر مقدار k، تعداد نامتناهی صفحه با این ویژگی خواهیم داشت. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است. در ضمن، چون گزینهٔ (۱) درست است، پس گزینهٔ (۲) نادرست خواهد بود. گزینه‌های (۳) و (۴) در صفحه به‌ترتیب تعریف سهمی و بیضی هستند. در فضا این مکان‌ها سهمی‌گون و بیضی‌گون هستند.





بیضی گون سهمی گون

۶- گزینهٔ ۲ معادلهٔ استاندارد سهمی به‌صورت زیر است:

$$(x-۱)^۲-۱۲y=۶\Rightarrow(x-۱)^۲=۱۲y+۶\Rightarrow(x-۱)^۲=۱۲(y+\frac{۱}{۲})$$

پس این سهمی قائم رو به بالا با رأس $F(۱,-\frac{۱}{۲})$ است و $۴a=۱۲$، یعنی $a=۳$. بنابراین کانون این سهمی به مختصات زیر است:

$$F'=(\alpha\,,a+\beta)=(۱,۳-\frac{۱}{۲})=(۱,\frac{۵}{۲})$$

اکنون مرکز بیضی را پیدا می‌کنیم: $O=\frac{F+F'}{۲}=(۱,۱)$ مرکز بیضی

بنابراین $\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$= فاصلهٔ مرکز بیضی از مبدأ مختصات

۷- گزینهٔ ۳ به کمک قضیهٔ هرون، مساحت مثلث را حساب می‌کنیم. توجه کنید که

$$P=\frac{۱۳+۱۴+۱۵}{۲}=۲۱$$

در نتیجه

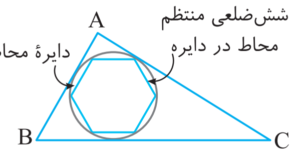
$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{۲۱(۲۱-۱۳)(۲۱-۱۴)(۲۱-۱۵)}$$

$$=\sqrt{۲۱\times۸\times۷\times۶}=\sqrt{۲۱\times۸\times۷\times۳\times۲}=\sqrt{۲۱\times۲۱\times۱۶}=۲۱\times۴=۸۴$$

اکنون شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث برابر است با $r=\frac{S}{P}=\frac{۸۴}{۲۱}=۴$.

بنابراین

$$۲r\sin\frac{۱۸۰^\circ}{۶}=۲(۴)\sin۳۰^\circ=۴$$ = اندازهٔ ضلع شش‌ضلعی منتظم محاطی



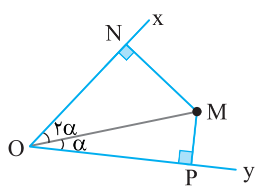
۸- گزینهٔ ۴ شکل مسئله به‌صورت زیر است. توجه کنید که

$$\left.\begin{array}{l}\triangle OMN:\sin۲\alpha=\frac{MN}{OM}\\ \triangle OMP:\sin\alpha=\frac{MP}{OM}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{تقسیم می‌کنیم}}\frac{\sin۲\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{MN}{OM}}{\frac{MP}{OM}}$$

$$\frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{MN}{MP}\Rightarrow۲\cos\alpha=\frac{MN}{MP}$$

از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMP، $\cos\alpha=\frac{OP}{OM}$. بنابراین

$$۲\times\frac{OP}{OM}=\frac{MN}{MP}\Rightarrow\frac{MN}{MP}=\frac{۲OP}{OM}$$



۹- گزینهٔ ۱ از نقطهٔ F عمود HH' و از نقطهٔ E عمود KK' را بر اضلاع AD و BC از مستطیل ABCD وارد می‌کنیم. در نتیجه

$$AM||BN\xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}}\triangle AFM\sim\triangle NFB$$

$$\frac{FH}{FH'}=\frac{AM}{NB}=\frac{۲}{۱}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{FH}{HH'}=\frac{۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{HH'=DC=۸}\frac{FH}{۸}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow FH=\frac{۱۶}{۳}$$

به‌طور مشابه،

$$DM||NC\xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}}\triangle MED\sim\triangle CEN$$

$$\frac{EK}{EK'}=\frac{MD}{CN}=\frac{۴}{۵}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{EK}{KK'}=\frac{۴}{۹}$$

$$\xrightarrow{KK'=DC=۸}\frac{EK}{۸}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow EK=\frac{۳۲}{۹}$$

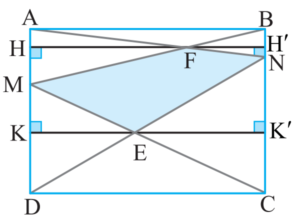
اکنون می‌توانیم مساحت چهارضلعی MENF را پیدا کنیم:

$$S_{MENF}=S_{AND}-S_{AMF}-S_{MED}$$

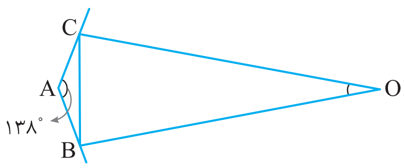
$$=\frac{۱}{۲}DC\times AD-\frac{۱}{۲}FH\times AM-\frac{۱}{۲}EK\times MD$$

$$=\frac{۱}{۲}(۸)(۶)-\frac{۱}{۲}(\frac{۱۶}{۳})(۲)-\frac{۱}{۲}(\frac{۳۲}{۹})(۴)$$

$$=۲۴-\frac{۱۶}{۳}-\frac{۶۴}{۹}=\frac{۲۱۶-۴۸-۶۴}{۹}=\frac{۱۰۴}{۹}$$



۱۰- گزینهٔ ۱ در شکل زیر، O نقطهٔ تلاقی نیمسازهای خارجی دو زاویهٔ کوچک‌تر B و C است. بنابراین $\hat{O}=۹۰^\circ-\frac{\hat{A}}{۲}=۹۰^\circ-\frac{۱۳۸^\circ}{۲}=۲۱^\circ$



۱۱- گزینهٔ ۳ طول وتر ED برابر شعاع دایره است، پس $\overset{\frown}{ED}=۶۰^\circ$.

از طرف دیگر، چون $\hat{C}$ زاویه‌ای محاطی است، پس

$$\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{DEB}}{۲}\Rightarrow۷۰^\circ=\frac{\overset{\frown}{ED}+\overset{\frown}{EB}}{۲}=\frac{۶۰^\circ+\overset{\frown}{EB}}{۲}\Rightarrow\overset{\frown}{EB}=۱۴۰^\circ-۶۰^\circ=۸۰^\circ$$

چون BC قطر دایره است، پس $\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{ED}+\overset{\frown}{DC}=۱۸۰^\circ$

در نتیجه $\overset{\frown}{EDC}=۱۸۰^\circ-\overset{\frown}{BE}=۱۸۰^\circ-۸۰^\circ=۱۰۰^\circ$

۱۲- گزینهٔ ۳ از فرض $\frac{AC}{BC}=\sqrt{۳}$ نتیجه می‌گیریم $AC=\sqrt{۳}BC$. اکنون با استفاده از رابطهٔ طولی در دایره می‌نویسیم:

$$AC^۲=CB\times DC\Rightarrow(\sqrt{۳}BC)^۲=CB\times DC\Rightarrow۳BC=DC$$

$$\frac{DC}{BC}=\frac{۳}{۱}\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}}\frac{DC-BC}{BC}=\frac{۳-۱}{۱}\Rightarrow\frac{DB}{BC}=۲$$

۱۳- گزینهٔ ۱ شعاع‌های OM و ON به‌ترتیب بر خط‌های مماس AB و BC عمود هستند. پس $\hat{M}=\hat{N}=90$. چون $\hat{B}=60^\circ$، پس در چهارضلعی OMBN می‌توان نوشت

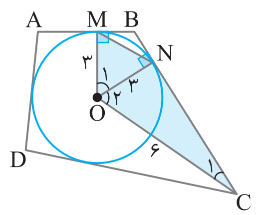
$$\hat{O}_1+\hat{M}+\hat{B}+\hat{N}=360^\circ\Rightarrow\hat{O}_1+90^\circ+120^\circ+90^\circ=360^\circ\Rightarrow\hat{O}_1=60^\circ$$

از طرف دیگر، دو زاویهٔ مجاور $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در ذوزنقهٔ ABCD مکمل‌اند، پس $\hat{C}=60^\circ$. چون OC نیمساز زاویهٔ C است، پس $\hat{C}_1=30^\circ$. در نتیجه $\hat{O}_2=60^\circ$. اکنون توجه کنید که

$$\triangle ONC:\hat{C}_1=30^\circ\Rightarrow ON=\frac{1}{2}OC\xrightarrow{ON=3}OC=6$$

بنابراین

$$S_{OMNC}=S_{OMN}+S_{ONC}$$
$$=\frac{1}{2}OM\times ON\sin\hat{O}_1+\frac{1}{2}ON\times OC\sin\hat{O}_2$$
$$=\frac{1}{2}(3)(3)\sin60^\circ+\frac{1}{2}(3)(6)\sin60^\circ$$
$$=\frac{9}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+9\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{27\sqrt{3}}{4}$$



۱۴- گزینهٔ ۴ نقطهٔ تلاقی قطرهای $x+y=1$ و $x-y=3$ مرکز دایره است:

$$\begin{cases}x+y=1\\x-y=3\end{cases}\xrightarrow{+}2x=4\Rightarrow x=2\Rightarrow y=-1\Rightarrow O(2,-1)\ \text{مرکز}$$

همچنین فاصلهٔ مرکز $O(2,-1)$ تا خط مماس $4x+3y+5=0$ برابر شعاع دایره است، یعنی

$$R=\frac{|4(2)+3(-1)+5|}{\sqrt{16+9}}=\frac{10}{5}=2$$

از طرف دیگر، طول پاره‌خط OM برابر است با

$$OM=\sqrt{(x_M-x_O)^2+(y_M-y_O)^2}=\sqrt{(4-2)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{5}$$

چون $OM>R$، پس نقطهٔ M بیرون دایره است. بنابراین

$$\text{نزدیک‌ترین فاصلهٔ M از دایره}=OM-R=\sqrt{5}-2$$

۱۵- گزینهٔ ۳ بنابر فرض سؤال $OO'=6$، $R=6a-1$ و $R'=a^2-2$. چون دو دایره مماس داخلی هستند، پس

$$OO'=|R'-R|\Rightarrow6=|a^2-2-6a+1|\Rightarrow|a^2-6a-1|=6$$

بنابراین دو حالت داریم:

حالت اول: $a^2-6a-1=6\Rightarrow a^2-6a-7=0\Rightarrow a=-1,a=7$

$a=-1$ غیرقابل قبول است، زیرا به‌ازای آن شعاع‌های R و R′ منفی می‌شوند.

حالت دوم: $a^2-6a-1=-6\Rightarrow a^2-6a+5=0\Rightarrow a=1,a=5$

$a=1$ غیرقابل قبول است، زیرا به‌ازای آن شعاع R′ منفی می‌شود.

پس میانگین مقادیر ممکن برای a مساوی $\frac{7+5}{2}=6$ است.

۱۶- گزینهٔ ۲ چون بردار $(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})$ با بردار $\vec{c}$ موازی است، پس $\vec{a}\times\vec{b}$ با $\vec{c}$ موازی است. در ضمن برای ساده‌تر شدن محاسبات به جای بردار $\vec{b}=(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},2)$ از بردار $\frac{3}{2}\vec{b}=(-2,1,3)$ استفاده می‌کنیم.

در واقع بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ با بردار $\vec{a}\times\frac{3}{2}\vec{b}$ موازی است. توجه کنید که

$$\vec{a}\times\frac{3}{2}\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&\alpha&2\\-2&1&3\end{vmatrix}=(3\alpha-2)\vec{i}-\vec{j}+(-1+2\alpha)\vec{k}$$

بنابر فرض سؤال قرار است بردار $\vec{a}\times\frac{3}{2}\vec{b}$ با $\vec{c}$ موازی باشد. بنابراین

$$\frac{3\alpha-2}{-1}=\frac{-1}{1}=\frac{-1+2\alpha}{-1}$$

در نتیجه

$$\begin{cases}3\alpha-2=1\Rightarrow\alpha=1\\-1+2\alpha=1\Rightarrow\alpha=1\end{cases}$$

پس به‌ازای $\alpha=1$ دو بردار $(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})$ و $\vec{c}$ موازی‌اند.

۱۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\begin{bmatrix}5&-2\\4&a\end{bmatrix}_{2\times2}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}_{2\times1}=\begin{bmatrix}4b_1\\4b_2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}5b_1-2b_2\\4b_1+ab_2\end{bmatrix}_{2\times1}=\begin{bmatrix}4b_1\\4b_2\end{bmatrix}$$

بنابراین $5b_1-2b_2=4b_1\Rightarrow b_1=2b_2\quad(1)$

چون b ماتریسی ناصفر است، پس $b_1,b_2\neq0$. اکنون می‌توان نوشت

$$4b_1+ab_2=4b_2\xrightarrow{\text{از }(1)}8b_2+ab_2=4b_2\xrightarrow[b_2\neq0]{\text{تقسیم بر }b_2}$$
$$8+a=4\Rightarrow a=-4$$

۱۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}6&9&3\\7&8&4\\3&2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&&\\&7&\\&&5\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A برابر $9+7+5=21$ است.

۱۹- گزینهٔ ۴ چون $A=\begin{bmatrix}1&a&3\\-1&1&1\end{bmatrix}$، پس $A^T=\begin{bmatrix}1&-1\\a&1\\3&1\end{bmatrix}$.

بنابراین

$$AA^T=\begin{bmatrix}1&a&3\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\a&1\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+10&a+2\\a+2&3\end{bmatrix}$$

چون AA^T ماتریسی ۲×۲ است، $AA^TB=۵۲I$ و $|B|$ تعریف می‌شود، پس B و I ماتریس‌هایی ۲×۲ هستند. اکنون اگر از دو طرف تساوی $AA^TB=۵۲I$ دترمینان بگیریم، به‌دست می‌آید

$$|AA^TB|=|۵۲I|\Rightarrow|AA^T||B|=۵۲^۲|I|$$

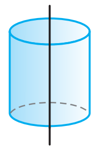
$$\begin{vmatrix} a^۲+۱۰ & a+۲\\ a+۲ & ۳\end{vmatrix}\times۱۰۴=۵۲^۲\Rightarrow(۳a^۲+۳۰-(a+۲)^۲)=\frac{۵۲^۲}{۱۰۴}=۲۶$$

$$۳a^۲+۳۰-a^۲-۴-۴a=۲۶\Rightarrow۲a^۲-۴a=۰\Rightarrow۲a(a-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۰\\a=۲\end{cases}$$

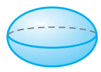
پس مجموع مقادیر ممکن برای a مساوی ۲=۲+۰ است.

۲۰- گزینهٔ ۱ خطوطی که بر d عمودند، اگر موازی باشند، در یک صفحه هستند؛ اگر متقاطع باشند، در صفحه‌هایی عمود بر خط d هستند؛ اگر متنافر باشند، هر کدام از آن‌ها در صفحه‌هایی مختلف واقع هستند. در نتیجه چون در فضا بی‌نهایت خط بر یک خط مفروض عمودند، پس خطوط عمود بر یک خط در فضا بی‌نهایت صفحه در فضا تشکیل می‌دهند.

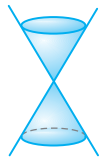
اکنون به نادرستی سایر گزینه‌ها توجه کنید:



مجموعهٔ نقاط متساوی‌الفاصله از یک خط در فضا روی سطحی استوانه‌ای قرار می‌گیرند. پس گزینهٔ (۲) نادرست است.



مجموعهٔ نقاطی از فضا که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطهٔ ثابت به یک اندازه است، شکلی به نام بیضی‌گون است. پس گزینهٔ (۳) نادرست است.



خطوط گذرا از یک نقطه که با محور گذرا از آن نقطه زاویهٔ یکسان می‌سازند، سطح مخروط است. پس گزینهٔ (۴) نادرست است.

۲۱- گزینهٔ ۳ طرفین معادلهٔ بیضی را بر ۱۰۰ تقسیم می‌کنیم:

$$۲۵(x-۱)^۲+۱۶(y+۱)^۲=۱۰۰\Rightarrow\frac{(x-۱)^۲}{۴}+\frac{(y+۱)^۲}{\frac{۲۵}{۴}}=۱$$

پس این بیضی یک بیضی قائم با مرکز $O'(۱,-۱)$ است و

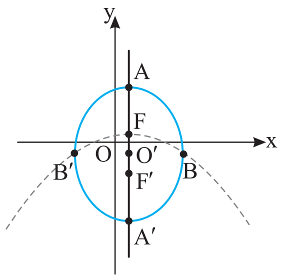
$$\begin{cases}a^۲=\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow a=\frac{۵}{۲}\\ b^۲=۴\Rightarrow b=۲\end{cases}$$

بنابراین $c^۲=a^۲-b^۲=\frac{۲۵}{۴}-۴=\frac{۹}{۴}\Rightarrow c=\frac{۳}{۲}$

با توجه به شکل $O'F'=O'F=c=\frac{۳}{۲}$. چون $OF<OF'$، پس کانون‌ها به مختصات $F(۱,\frac{۱}{۲})$ و $F'(۱,-\frac{۵}{۲})$ هستند. اکنون F رأس و F' کانون سهمی مورد نظر است. با توجه به جایگاه رأس و کانون، این سهمی قائم رو به پایین است و مقدار a در سهمی مساوی $FF'=۳$ است. با توجه به معادلهٔ سهمی قائم رو به پایین،

$$(x-\alpha)^۲=-۴a(y-\beta)\Rightarrow(x-۱)^۲=-۱۲(y-\frac{۱}{۲})\Rightarrow(x-۱)^۲=-۱۲y+۶$$

- توجه کنید معادلهٔ بیضی در کتاب هندسهٔ ۳ نظام جدید حذف شده است.



۲۲- گزینهٔ ۱ شکل مسئله به‌صورت زیر است. سه مثلث AME، CMN و BEN به حالت (زض‌ز) همنهشت هستند. فرض می‌کنیم طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع MEN برابر a باشد. توجه کنید که

$$\triangle AME: \hat{A}=۶۰^\circ\Rightarrow EM=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AE\xrightarrow{EM=a}AE=\frac{۲a}{\sqrt{۳}}\quad(۱)$$

$$\hat{E}=۳۰^\circ\Rightarrow AM=\frac{AE}{۲}\xrightarrow{\text{از }(۱)}AM=\frac{a}{\sqrt{۳}}$$

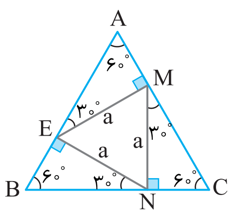
$$\xrightarrow{AM=BE}BE=\frac{a}{\sqrt{۳}}\quad(۲)$$

از جمع کردن تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$AB=AE+BE=\frac{۲a}{\sqrt{۳}}+\frac{a}{\sqrt{۳}}=\frac{۳a}{\sqrt{۳}}=a\sqrt{۳}$$

چون مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABC و MEN متشابه‌اند، پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MEN}}=(\frac{AB}{ME})^۲=(\frac{a\sqrt{۳}}{a})^۲=۳$$



۲۳- گزینهٔ ۳ با توجه به اندازه‌های روی شکل معلوم می‌شود که

$$\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ-۱۱۵^\circ=۶۵^\circ$$

اکنون زاویه‌ها را برحسب کمان‌ها می‌نویسیم

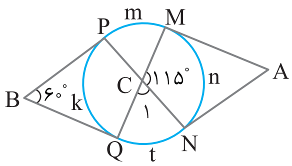
$$\hat{C}_۱=\frac{m+t}{۲}\xrightarrow{\hat{C}_۱=۶۵^\circ}m+t=۱۳۰^\circ$$

$$\hat{B}=\frac{m+n+t-k}{۲}\xrightarrow{\hat{B}=۶۰^\circ}m+n+t-k=۱۲۰^\circ\xrightarrow{m+t=۱۳۰^\circ}$$

$$n-k=-۱۰^\circ\Rightarrow k-n=۱۰^\circ$$

بنابراین

$$M\hat{A}N=\frac{m+k+t-n}{۲}\xrightarrow[k-n=۱۰^\circ]{m+t=۱۳۰^\circ}M\hat{A}N=\frac{۱۳۰^\circ+۱۰^\circ}{۲}=۷۰^\circ$$



۲۴- گزینهٔ ۴ ابتدا مساحت مثلث را به کمک قضیهٔ هرون به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که $P=\frac{۲۱+۱۷+۱۰}{۲}=۲۴$. در نتیجه

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{۲۴(۲۴-۲۱)(۲۴-۱۷)(۲۴-۱۰)}$$

$$=\sqrt{۲۴\times۳\times۷\times۱۴}=\sqrt{۳\times۸\times۳\times۷\times۲\times۷}=\sqrt{۲۱^۲\times۱۶}=۲۱\times۴=۸۴$$

چون $\frac{۱}{۲}\times۸\times۲۱=۸۴$، پس ارتفاع $AH=۸$ وارد بر ضلع به طول ۲۱ است. با فرض $BC=۲۱$، $AB=۱۰$ و $AC=۱۷$ شکل مسئله به‌صورت زیر است. اکنون چون M و N وسط‌های ضلع‌ها هستند، پس

$$MN=\frac{BC}{۲}=\frac{۲۱}{۲}$$

از طرف دیگر، چون $MN||BC$، پس چهارضلعی MNPH ذوزنقه است. بنابراین ارتفاع AH بر MN نیز عمود است. اکنون توجه کنید که

$$\triangle ABH: MH'||BH \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AM}{BM}=\frac{AH'}{HH'} \xrightarrow{AM=BM}$$

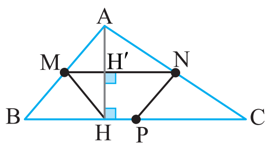
$$AH'=HH'=\frac{۱}{۲}AH\Rightarrow HH'=۴$$

$$\triangle ABH: BH^۲=AB^۲-AH^۲=۱۰^۲-۸^۲=۳۶\Rightarrow BH=۶$$

پس $PH=BP-BH=\frac{BC}{۲}-BH=\frac{۲۱}{۲}-۶=\frac{۹}{۲}$

در نتیجه مساحت ذوزنقهٔ MNPH برابر است با

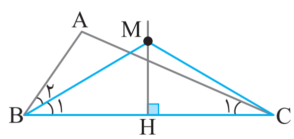
$$S_{MNPH}=\frac{۱}{۲}HH'(MN+PH)=\frac{۱}{۲}(۴)(\frac{۲۱}{۲}+\frac{۹}{۲})=۲\times۱۵=۳۰$$



۲۵- گزینهٔ ۳ در شکل زیر، نیمساز زاویهٔ B عمودمنصف ضلع BC را در نقطهٔ M قطع کرده است. از M به C وصل می‌کنیم. چون M روی عمودمنصف BC است، پس $MB=MC\Rightarrow\hat{B}_۱=M\hat{C}B$

چون زاویهٔ $C_۱$ قسمتی از زاویهٔ MCB است، پس

$$M\hat{C}B>\hat{C}_۱\xrightarrow{M\hat{C}B=\hat{B}_۱}\hat{B}_۱>\hat{C}_۱\xrightarrow{\hat{B}_۱=\frac{\hat{B}}{۲}}\frac{\hat{B}}{۲}>\hat{C}_۱\Rightarrow\hat{B}>۲\hat{C}_۱$$

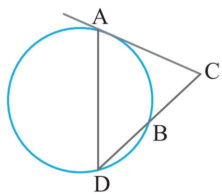


۲۶- گزینهٔ ۴ با استفاده از رابطهٔ طولی در دایره می‌نویسیم

$$CA^۲=CB\times CD\Rightarrow CA^۲=CB(CB+BD)\xrightarrow{DB=BC}$$

$$CA^۲=CB(CB+CB)\Rightarrow CA^۲=۲CB^۲\Rightarrow CA=\sqrt{۲}CB$$

$$\frac{CA}{CB}=\sqrt{۲}$$



۲۷- گزینهٔ ۲ از نقطهٔ O به نقطهٔ A وصل می‌کنیم. در این صورت مثلث OAC قائم‌الزاویه است. بنابراین

$$\triangle OAC:\hat{C}=۳۰^\circ\Rightarrow OA=\frac{۱}{۲}OC\xrightarrow{OA=۶}OC=۱۲$$

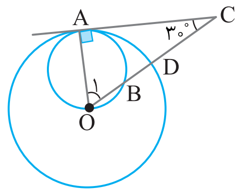
$$\hat{O}_۱=۶۰^\circ\Rightarrow AC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OC\xrightarrow{OC=۱۲}AC=۶\sqrt{۳}$$

اکنون با استفاده از رابطه طولی در دایرهٔ کوچک‌تر می‌نویسیم

$$CA^۲=CB\times CO\Rightarrow(۶\sqrt{۳})^۲=CB\times۱۲\Rightarrow۱۰۸=۱۲CB\Rightarrow BC=۹$$

از طرف دیگر، $CD=OC-OD=۱۲-۶=۶$. بنابراین

$$BD=BC-CD=۹-۶=۳$$



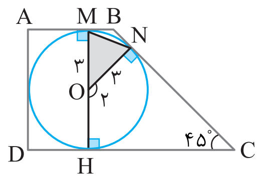
۲۸- گزینهٔ ۳ شعاع OM بر خط مماس AB عمود است. چون $AB||DC$، پس امتداد شعاع OM بر DC عمود است. همین‌طور، شعاع ON بر خط مماس BC عمود است. بنابراین در چهارضلعی ONCH می‌توان نوشت

$$\hat{O}_۲+\hat{N}+\hat{C}+\hat{H}=۳۶۰^\circ\Rightarrow\hat{O}_۲+۹۰^\circ+۴۵^\circ+۹۰^\circ=۳۶۰^\circ$$

$$\hat{O}_۲=۱۳۵^\circ\xrightarrow{\hat{O}_۱+\hat{O}_۲=۱۸۰^\circ}\hat{O}_۱=۴۵^\circ$$

در نتیجه

$$S_{OMN}=\frac{۱}{۲}OM\times ON\sin\hat{O}_۱=\frac{۱}{۲}(۳)(۳)\sin۴۵^\circ=\frac{۹}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۹\sqrt{۲}}{۴}$$



۲۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** مختصات پیکان‌های $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\overrightarrow{BA}=A-B=(-۲,۲,۱)$$

$$\overrightarrow{BC}=C-B=(-۱,-۱,۲)$$

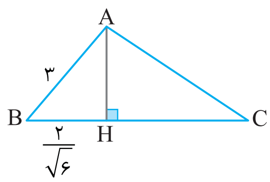
چون پیکان $\overrightarrow{BH}$ تصویر پیکان $\overrightarrow{BA}$ روی پیکان $\overrightarrow{BC}$ است، پس

$$|\overrightarrow{BH}|=\frac{|\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{|۲-۲+۲|}{\sqrt{۱+۱+۴}}=\frac{۲}{\sqrt{۶}}$$

در ضمن $|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{۴+۴+۱}=۳$. بنابراین

$$\triangle ABH: AH^۲=AB^۲-BH^۲\Rightarrow AH^۲=۹-\frac{۴}{۶}=۹-\frac{۲}{۳}=\frac{۲۵}{۳}$$

$$AH=\frac{۵}{\sqrt{۳}}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$$



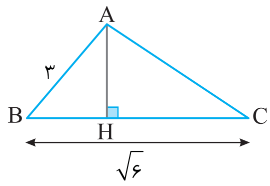
راه‌حل دوم مساحت مثلث ABC را به کمک ضرب خارجی پیدا می‌کنیم

$$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -۲ & ۲ & ۱\\ -۱ & -۱ & ۲\end{vmatrix}=۵\vec{i}+۳\vec{j}+۴\vec{k}$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۵+۹+۱۶}=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$$

در ضمن $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{۱+۱+۴}=\sqrt{۶}$. بنابراین

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH\times BC\Rightarrow\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱}{۲}AH\times\sqrt{۶}\Rightarrow AH=\frac{۵\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$$



۳۰- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم شعاع دایرهٔ بزرگ R باشد. قطر AB عمودمنصف قطر DC است. پس

$$\left.\begin{array}{l}OD=OC\\ ON=ON'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}}ND=CN'\xrightarrow{DN=۱۰}CN'=۱۰$$

در نتیجه $ON=ON'=R-۱۰$. بنابراین از رابطهٔ طولی در دایرهٔ کوچک‌تر به‌دست می‌آید

$$ON\times ON'=OM\times OB\xrightarrow{OM=R-۱۶}$$

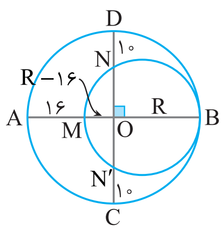
$$(R-۱۰)(R-۱۰)=(R-۱۶)(R)$$

$$R^۲+۱۰۰-۲۰R=R^۲-۱۶R\Rightarrow ۴R=۱۰۰\Rightarrow R=۲۵$$

اکنون می‌توان نوشت

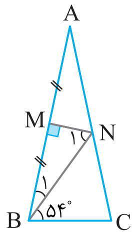
$$MB=OB+OM=R+R-۱۶=۲R-۱۶=۵۰-۱۶=۳۴$$

چون MB قطر دایرهٔ کوچک‌تر است، پس $\text{شعاع دایرهٔ کوچک‌تر}=\frac{MB}{۲}=۱۷$



آزمون ۱۰۱

۱- گزینهٔ ۳ بنابر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت، نقطهٔ N روی عمودمنصف AB است پس N از دو سر ضلع AB به یک فاصله است. یعنی $NA=NB$. بنابراین $\hat{B}_۱=\hat{A}=\alpha$. در ضمن $AB=AC$ پس $\hat{B}_۱+۵۴^{\circ}=\hat{C}$. بنابراین



$$\triangle ABC:\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^{\circ}\Rightarrow \alpha+\hat{B}_۱+۵۴^{\circ}+\hat{B}_۱+۵۴^{\circ}=۱۸۰^{\circ}$$

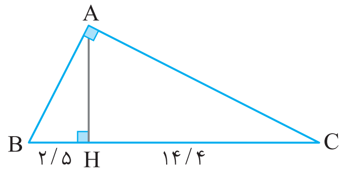
$$\xrightarrow{\hat{B}_۱=\alpha}۳\alpha=۱۸۰^{\circ}-۱۰۸^{\circ}\Rightarrow ۳\alpha=۷۲^{\circ}\Rightarrow \alpha=\frac{۷۲^{\circ}}{۳}=۲۴^{\circ}$$

در نتیجه

$$\triangle BMN:\hat{M}+\hat{N}_۱+\hat{B}_۱=۱۸۰^{\circ}$$

$$\xrightarrow{\hat{B}_۱=۲۴^{\circ}}۹۰^{\circ}+\hat{N}_۱+۲۴^{\circ}=۱۸۰^{\circ}\Rightarrow \hat{N}_۱=۶۶^{\circ}$$

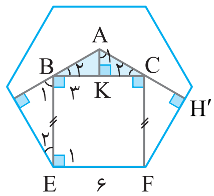
۲- گزینهٔ ۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ارتفاع AH روی وتر BC پاره‌خط‌هایی به طول ۲/۵ و ۱۴/۴ جدا کرده است. با استفاده از رابطهٔ طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:



$$AH^۲=BH\times CH\Rightarrow AH^۲=۲/۵\times ۱۴/۴=\frac{۲۵}{۱۰}\times\frac{۱۴۴}{۱۰}$$

$$AH=\frac{۵\times ۱۲}{۱۰}=\frac{۱۲}{۲}=۶$$

۳- گزینهٔ ۱ بنابر فرض سؤال چهارضلعی BCFE مربع است. پس $\hat{E}_۱=۹۰^{\circ}$. از طرف دیگر هر زاویهٔ داخلی شش‌ضلعی منتظم ۱۲۰° است. بنابراین



$$\hat{E}_۱+\hat{E}_۲=۱۲۰^{\circ}\xrightarrow{\hat{E}_۱=۹۰^{\circ}}\hat{E}_۲=۳۰^{\circ}\Rightarrow \hat{B}_۱=۶۰^{\circ}$$

چون $\hat{B}_۳=۹۰^{\circ}$ و $\hat{B}_۱=۶۰^{\circ}$، پس $\hat{B}_۲=۳۰^{\circ}$.

به همین ترتیب معلوم می‌شود $\hat{C}_۲=۳۰^{\circ}$. پس مثلث ABC متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۱۲۰° است. بنابراین اگر ارتفاع AK وارد بر قاعدهٔ BC را رسم کنیم، AK میانه و نیمساز هم هست. در نتیجه

$$BK=KC=\frac{BC}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳,\quad \hat{A}_۱=\frac{\hat{A}}{۲}=\frac{۱۲۰^{\circ}}{۲}=۶۰^{\circ}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AKC ضلع KC روبه‌رو به زاویهٔ ۶۰° است، پس

$$KC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AC\Rightarrow ۳=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AC\Rightarrow AC=\frac{۶}{\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}$$

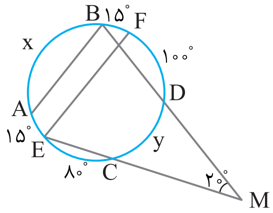
و AK روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° است، پس

$$AK=\frac{۱}{۲}AC=\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۳})\Rightarrow AK=\sqrt{۳}$$

بنابراین

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AK\times BC=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۳})(۶)=۳\sqrt{۳}$$

۴- گزینهٔ ۴ می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی مساوی‌اند، پس



$$AB||EF\Rightarrow \overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{AE}$$

$$\xrightarrow{\overset{\frown}{AE}=۱۵^{\circ}}\overset{\frown}{BF}=۱۵^{\circ}$$

با فرض $\overset{\frown}{AB}=x$ و $\overset{\frown}{CD}=y$ می‌نویسیم:

$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BF}+\overset{\frown}{FD}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{EC}+\overset{\frown}{AE}=۳۶۰^{\circ}$$

$$x+۱۵^{\circ}+۱۰۰^{\circ}+y+۸۰^{\circ}+۱۵^{\circ}=۳۶۰^{\circ}\Rightarrow x+y=۱۵۰^{\circ}\quad(۱)$$

از طرف دیگر،

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{EAB}-\overset{\frown}{CD}}{۲}\Rightarrow ۲۰^{\circ}=\frac{۱۵^{\circ}+x-y}{۲}\Rightarrow x-y=۲۵^{\circ}\quad(۲)$$

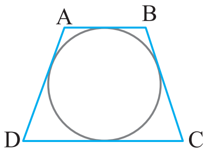
$$\text{از (۱) و (۲)}\Rightarrow\begin{cases}x+y=۱۵۰^{\circ}\\ x-y=۲۵^{\circ}\end{cases}\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}}۲y=۱۲۵^{\circ}\Rightarrow y=۶۲/۵^{\circ}$$

بنابراین

$$\text{زاویهٔ محاطی }\hat{ABD}=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\Rightarrow \hat{ABD}=\frac{۶۲/۵^{\circ}+۸۰^{\circ}+۱۵^{\circ}}{۲}$$

$$=\frac{۱۵۷/۵^{\circ}}{۲}=۷۸/۷۵$$

۵- گزینهٔ ۴ اگر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین بر دایره‌ای به شعاع R محیط باشد، آن‌گاه قطر دایرهٔ محاطی واسطهٔ هندسی بین دو قاعده است؛ پس

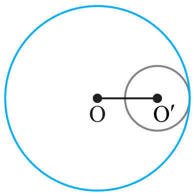


$$۴R^۲=AB\times DC\quad(۱)$$

از طرف دیگر، $\text{مساحت دایره}=۱۵\pi\Rightarrow \pi R^۲=۱۵\pi\Rightarrow R^۲=۱۵\quad(۲)$

$$\text{از (۱) و (۲)}\Rightarrow ۴\times ۱۵=۶\times a\Rightarrow a=۱۰$$

۶- گزینهٔ ۱ فرض کنیم R شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر و R' شعاع دایرهٔ کوچک‌تر باشد. چون دو دایره مماس درونی‌اند، پس $OO'=R-R'$. یعنی $R-R'=۳/۵$. از طرف دیگر،



$$\text{مساحت بین دو دایره}=۲۱\pi\Rightarrow \pi R^۲-\pi R'^۲=۲۱\pi\Rightarrow R^۲-R'^۲=۲۱$$

$$(R-R')(R+R')=۲۱\xrightarrow{R-R'=۳/۵}۳/۵(R+R')=۲۱$$

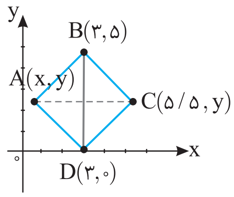
$$R+R'=\frac{۲۱}{۳/۵}=\frac{۲۱}{\frac{۷}{۲}}=۶$$

بنابراین

$$\begin{cases}R-R'=۳/۵\\ R+R'=۶\end{cases}\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}}۲R'=۶-۳/۵$$

$$۲R'=۲/۵\Rightarrow R'=\frac{۲/۵}{۲}=۱/۲۵$$

۷- گزینهٔ ۲ بازتاب نقطهٔ D نسبت به محور x بر خودش منطبق است، پس نقطهٔ D روی محور x قرار دارد، پس $D=(۳,۰)$.



مسلماً بازتاب نقطهٔ C نسبت به قطر BD نقطهٔ A است زیرا قطرهای مربع عمودمنصف یکدیگرند. فرض کنیم $C=(۵/۵,y)$ و $A=(x,y)$. در این صورت چون قطرهای مربع منصف یکدیگرند، بنابراین

$$A+C=B+D\Rightarrow (x,y)+(۵/۵,y)=(۳,۵)+(۳,۰)$$

$$(x+۵/۵,۲y)=(۶,۵)$$

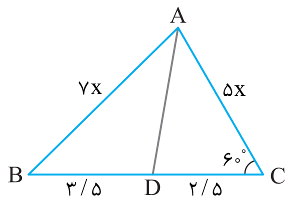
پس

$$\begin{cases} x+۵/۵=۶\Rightarrow x=۰/۵ \\ ۲y=۵\Rightarrow y=۲/۵ \end{cases}\Rightarrow A(۰/۵,۲/۵)$$

بنابراین

$$OA=\sqrt{۰/۵^۲+۲/۵^۲}=\sqrt{(\frac{۱}{۲})^۲+(\frac{۵}{۲})^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۲۵}{۴}}=\sqrt{\frac{۲۶}{۴}}=\sqrt{۶/۵}$$

۸- گزینهٔ ۱ از قضیهٔ نیمساز زاویهٔ داخلی استفاده کرده می‌نویسیم:



$$\text{نیمساز } AD\Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow \frac{۳/۵}{۲/۵}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow \frac{۳۵}{۲۵}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow \frac{۷}{۵}=\frac{AB}{AC}$$

با توجه به تناسب به‌دست آمده فرض می‌کنیم

$$AC=۵x\,,\quad AB=۷x$$

اکنون بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها،

$$AB^۲=AC^۲+BC^۲-۲AC\times BC\cos ۶۰^\circ$$

$$\xrightarrow{BC=۶} ۴۹x^۲=۲۵x^۲+۳۶-۲(۵x)(۶)(\frac{۱}{۲})$$

$$۴۹x^۲=۲۵x^۲+۳۶-۳۰x\Rightarrow ۲۴x^۲+۳۰x-۳۶=۰$$

$$\xrightarrow{\div ۶} ۴x^۲+۵x-۶=۰\Rightarrow x=\frac{-۵\pm\sqrt{۲۵+۹۶}}{۸}$$

$$=\frac{-۵\pm\sqrt{۱۲۱}}{۸}=\frac{-۵\pm ۱۱}{۸}\Rightarrow x=\frac{-۵+۱۱}{۸}\Rightarrow x=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین ضلع کوچک‌تر این مثلث یعنی AC برابر $۵x=۵\times\frac{۳}{۴}=\frac{۱۵}{۴}=۳/۷۵$ است.

(توجه کنید اگر $BD=۲/۵$ و $DC=۳/۵$، آن‌گاه مسئله جواب نخواهد داشت. پس بهتر بود از ابتدا مطرح می‌شد $AB>AC$)

۹- گزینهٔ ۲ ابتدا ماتریس AB را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix} x & -۱ & -x \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ y & z & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲z & \frac{۱}{۲} & ۲ \\ ۲z & ۰ & -۴y \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۲xz-۲z & ۰ & ۲x+۴y \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۲yz+۲z^۲ & \frac{y}{۲}+\frac{z}{۲} & ۲y-۴yz \end{bmatrix}$$

ماتریس AB ماتریس اسکالر است، پس درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر و درایه‌های روی قطر اصلی همگی برابر یکدیگرند. بنابراین

$$\begin{cases} ۲xz-۲z=۲\Rightarrow xz-z=۱ \xrightarrow{\text{از (۱)}} -xy+y=۱ \\ ۲y-۴yz=۲\Rightarrow y-۲yz=۱ \xrightarrow{\text{از (۱)}} y+۲y^۲=۱ \\ ۲x+۴y=۰\Rightarrow x=-۲y \\ ۲yz+۲z^۲=۰ \xrightarrow{z\neq ۰} y=-z \quad (۱) \\ \frac{y}{۲}+\frac{z}{۲}=۰\Rightarrow y=-z \end{cases}$$

در نتیجه

$$۲y^۲+y-۱=۰\Rightarrow y=\frac{-۱\pm\sqrt{۱+۸}}{۴}=\frac{-۱\pm ۳}{۴}\Rightarrow \begin{cases} y=-۱ \\ y=\frac{۱}{۲}\ (\text{غ.ق.ق}) \end{cases}$$

بنابراین

$$-xy+y=۱ \xrightarrow{y=-۱} -xy-۱=۱\Rightarrow xy=-۲$$

دقت کنید $z\neq ۰$ زیرا در غیر این صورت مقدار $۲xz-۲z$ برابر صفر است و با اسکالر بودن ماتریس AB در تناقض است.

۱۰- گزینهٔ ۳ ابتدا دترمینان A را به‌دست می‌آوریم:

$$|A|=\begin{vmatrix} ۱ & -۱ & -۳ \\ ۴ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{vmatrix}=۱(-۱)^۲\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}+(-۱)(-۱)^۳\begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix}$$

$$+(-۳)(-۱)^۴\begin{vmatrix} ۴ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}=۱(۳-۲)+۱(۱۲-۴)-۳(۴-۲)=۱+۸-۶=۳$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} ۲|A| & |A| \\ ۱ & \frac{۲}{|A|} \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}\Rightarrow \begin{bmatrix} ۶ & ۳ \\ ۱ & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

اکنون طرفین تساوی ماتریسی بالا را در وارون ماتریس $\begin{bmatrix} ۶ & ۳ \\ ۱ & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix}$ یعنی ماتریس $\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & -۳ \\ -۱ & ۶ \end{bmatrix}$ از سمت چپ ضرب می‌کنیم. در نتیجه

$$X=\begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & -۳ \\ -۱ & ۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۸ & -۳ \\ -۱۵ & ۶ \end{bmatrix}$$

پس کوچک‌ترین درایهٔ قطر اصلی ماتریس X برابر ۶ است.

۱۱- گزینهٔ ۱ با انتخاب دو مقدار دلخواه برای m دو قطر دایره را به‌دست آورده از تلاقی این دو قطر مرکز دایره به‌دست می‌آید.

$$\left.\begin{array}{l} m=۲\Rightarrow ۳y=۶\Rightarrow y=۲ \\ m=-۱\Rightarrow -۳x=۶\Rightarrow x=-۲ \end{array}\right\}\Rightarrow \text{مرکز دایره } O(-۲,۲)$$

چون A روی دایره است، پس

$$R=OA=\sqrt{(-۱+۲)^۲+(۱-۲)^۲}=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$

بنابراین

$$\text{محیط دایره}=۲\pi R=۲\sqrt{۲}\pi$$

۱۲- گزینهٔ ۲ اگر در سهمی افقی از معادلهٔ سهمی نسبت به y مشتق گرفته مساوی صفر قرار دهیم، آن‌گاه عرض رأس سهمی به‌دست می‌آید، پس

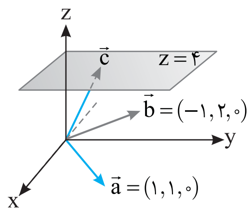
$$f'_y=۰\Rightarrow ۴y-۲a=۰\xrightarrow{y=۱}۴-۲a=۰\Rightarrow a=۲$$

در ضمن رأس سهمی در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند، پس

$$۲-۲a-۸+b=۰\xrightarrow{a=۲}۲-۴-۸+b=۰\Rightarrow b=۱۰$$

بنابراین $\frac{a}{b}=\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۵}$

۱۳- گزینهٔ ۴ ارتفاع بردار $\vec{h}$ برابر ۴ است، پس انتهای بردار $\vec{h}$ روی صفحهٔ $z=۴$ قرار دارد. در ضمن بردار $\vec{h}$ بر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود نیست زیرا $\vec{a}\cdot\vec{h}\neq۰$ و $\vec{b}\cdot\vec{h}\neq۰$، بنابراین بردار $\vec{h}$ روی صفحهٔ $z=۴$ قرار دارد. در نتیجه انتهای بردار $\vec{c}$ روی صفحهٔ $z=۴$ واقع است، بنابراین مختصات بردار $\vec{c}$ به صورت $(x,y,۴)$ است.



بنابر فرض سؤال،

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=۱\Rightarrow(۱,۱,۰)\cdot(x,y,۴)=۱\Rightarrow x+y=۱$$

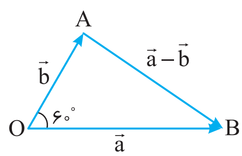
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=۵\Rightarrow(-۱,۲,۰)\cdot(x,y,۴)=۵\Rightarrow -x+۲y=۵$$

بنابراین

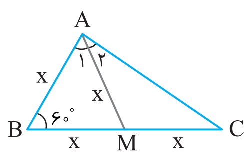
$$\begin{cases}x+y=۱\\-x+۲y=۵\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}}۳y=۶\to y=۲,x=-۱$$

پس $\vec{c}=(-۱,۲,۴)$ و $|\vec{c}|=\sqrt{۱+۴+۱۶}=\sqrt{۲۱}$.

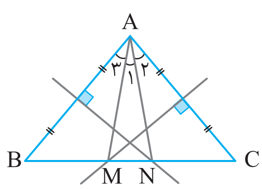
۱۴- گزینهٔ ۱ در نظر بگیرید $|\vec{a}|=۲|\vec{b}|$. در این صورت بردار $\vec{a}-\vec{b}$ مطابق شکل مقابل خواهد بود. در مثلث OAB یک زاویهٔ ۶۰° و اندازهٔ دو ضلع این زاویهٔ ۶۰° به نسبت ۱ به ۲ هستند. پس مثلث OAB قائم‌الزاویه است و $\hat{A}=۹۰^\circ$، پس $\hat{B}=۳۰^\circ$. در نتیجه زاویهٔ بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ برابر ۳۰° است.



نکته: توجه کنید اگر در مثلث ABC، $\hat{B}=۶۰^\circ$، $AB=x$ و $BC=۲x$، آن‌گاه $\hat{A}=۹۰^\circ$. زیرا اگر میانهٔ AM وارد بر BC را رسم کنید، آن‌گاه مثلث ABM متساوی‌الاضلاع و AMC متساوی‌الساقین است؛ پس $\hat{A}_۱=۶۰^\circ$ و $\hat{A}_۲=۳۰^\circ$، در نتیجه $\hat{A}=۹۰^\circ$.



۱۵- گزینهٔ ۲ بنابر داده‌های سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت. می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.



$$\left.\begin{array}{l}\text{M روی عمود منصف AC}\Rightarrow MA=MC\Rightarrow\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=\hat{C}\\ \text{N روی عمود منصف AB}\Rightarrow NA=NB\Rightarrow\hat{A}_۱+\hat{A}_۳=\hat{B}\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}}\hat{A}_۱+\hat{A}_۲+\hat{A}_۳+\hat{A}_۱=\hat{B}+\hat{C}\xrightarrow{\hat{A}_۱+\hat{A}_۲+\hat{A}_۳=۸۰^\circ}$$

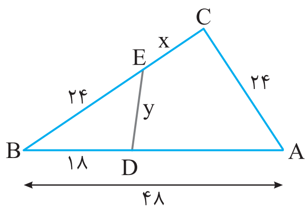
$$۸۰^\circ+\hat{A}_۱=۱۸۰^\circ-۸۰^\circ\Rightarrow\hat{A}_۱=۲۰^\circ$$

۱۶- گزینهٔ ۱ دو مثلث ABC و BDE متشابه‌اند زیرا:

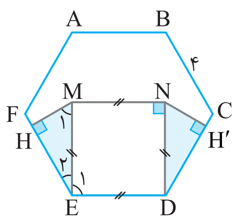
$$\left.\begin{array}{l}E\hat{C}A=B\hat{D}E\\ \hat{B}=\hat{B}\end{array}\right\}\Rightarrow\triangle ABC\sim\triangle BDE\Rightarrow\frac{DE}{AC}=\frac{BD}{BC}=\frac{BE}{AB}$$

$$\frac{y}{۲۴}=\frac{۱۸}{x+۲۴}=\frac{۲۴}{۴۸}\Rightarrow\begin{cases}\frac{y}{۲۴}=\frac{۲۴}{۴۸}\Rightarrow\frac{y}{۲۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=۱۲\\ \frac{۱۸}{x+۲۴}=\frac{۲۴}{۴۸}\Rightarrow\frac{۱۸}{x+۲۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۱۲\end{cases}$$

بنابراین مقدار $\frac{x}{y}$ برابر یک است.



۱۷- گزینهٔ ۴ چهارضلعی MNDE مربع به ضلع ۴ است، پس $\hat{E}_۱=۹۰^\circ$. در ضمن هر زاویهٔ داخلی شش‌ضلعی منتظم ۱۲۰° است، پس $\hat{E}_۲=۳۰^\circ$، در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویهٔ MHE زاویهٔ $M_۱$ برابر ۶۰° می‌شود. بنابراین



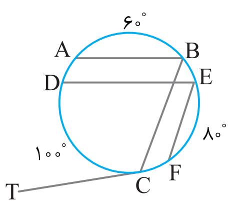
$$\triangle MEH:\hat{M}_۱=۶۰^\circ\Rightarrow HE=\frac{\sqrt{۳}}{۲}ME\xrightarrow{ME=۴}HE=۲\sqrt{۳}$$

$$\triangle MEH:\hat{E}_۲=۳۰^\circ\Rightarrow MH=\frac{۱}{۲}ME\xrightarrow{ME=۴}MH=۲$$

پس $S_{MEH}=\frac{۱}{۲}MH\times EH=\frac{۱}{۲}(۲)(۲\sqrt{۳})=۲\sqrt{۳}$

به همین ترتیب مشخص می‌شود $S_{NDH'}=۲\sqrt{۳}$. بنابراین مجموع مساحت‌های دو مثلث MHE و NDH' برابر $۴\sqrt{۳}$ است.

۱۸- گزینهٔ ۳ می‌دانیم اندازهٔ کمان‌های بین دو وتر موازی مساوی‌اند. بنابراین



$$\left.\begin{array}{l}AB||DE\Rightarrow\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BE}\\ BC||EF\Rightarrow\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CF}\end{array}\right\}$$

$$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CF}=\overset{\frown}{BE}=x$$

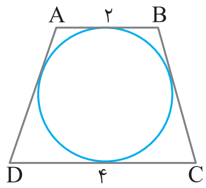
همچنین $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{EF}+\overset{\frown}{CF}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{AD}=۳۶۰^\circ$

$$۶۰^\circ+x+۸۰^\circ+x+۱۰۰^\circ+x=۳۶۰^\circ\Rightarrow۳x=۱۲۰^\circ\Rightarrow x=۴۰^\circ$$

از طرف دیگر زاویهٔ BCT زاویهٔ ظلی است؛ بنابراین

$$B\hat{C}T=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DC}+\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۴۰^\circ+۱۰۰^\circ+۶۰^\circ}{۲}=۱۰۰^\circ$$

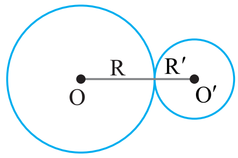
۱۹- گزینهٔ ۱ درذوزنقهٔمتساوی‌الساقین محیطی قطر دایرهٔ محاطی واسطهٔ هندسی بین دو قاعدهٔ ذوزنقه است. به عبارتی اگر R شعاع دایرهٔ محاطی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی ABCD باشد، آن‌گاه $4R^2=AB\times DC$. پس



$$4R^2=AB\times DC\Rightarrow 4R^2=2\times 4\Rightarrow R^2=2$$

بنابراین $\text{مساحت دایره}=\pi R^2=2\pi$

۲۰- گزینهٔ ۴ طـول خط‌المرکزین دو دایـرهٔ مماس خارج مسـاوی $R+R'$ است. پس طول مماس مشترک خارجی این دو دایره $2\sqrt{RR'}$ است. بنابر فرض سؤال،

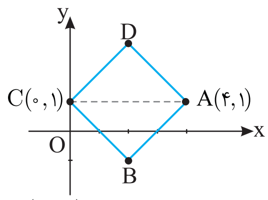


$$\text{طول مماس مشترک خارجی}=\frac{\sqrt{3}}{2}R\Rightarrow 2\sqrt{RR'}=\frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$4RR'=\frac{3}{4}R^2\Rightarrow 4R'=\frac{3}{4}R\Rightarrow R=\frac{16}{3}R'$$

بنابراین شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر $\frac{16}{3}$ برابر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است.

۲۱- گزینهٔ ۱ چون بازتاب نقطـهٔ C نسـبت بـه محـور y بر خودش منطبق اسـت، پس نقطهٔ C روی محـور y قـرار دارد، پـس مختصـات C به‌صـورت $(0,1)$ اسـت. در ضمن عرض نقطهٔ D برابر ۳ اسـت. فرض می‌کنیم $D(x,3)$. چون قطرهای مربع عمودمنصـف یکدیگرند، پس رأس $B(x,y)$ بازتاب D نسبت به قطر AC است. چون قطرهای مربع منصف یکدیگرند، پس

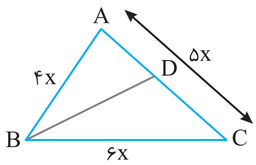


$$A+C=B+D\Rightarrow(4,1)+(0,1)=(x,3)+(x,y)$$

$$\begin{cases}4=2x\Rightarrow x=2\\ 2=3+y\Rightarrow y=-1\end{cases}\Rightarrow B(2,-1)$$

بنابراین $OB=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

۲۲- گزینهٔ ۳ در مثلث ABC فرض کنیم $AB=4x$، $AC=5x$ و $BC=6x$. در ایـن صورت زاویهٔ B زاویهٔ متوسط مثلث است. فرض کنیم BD نیمسـاز زاویهٔ B باشـد. در این صورت دو مثلث ABD و ABC دارای ارتفاع مشترک از رأس B هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیرشان است. پس:



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=\frac{AD}{AC}\qquad(1)$$

از طرف دیگر بنابر قضیهٔ نیمساز داخلی می‌نویسیم:

$$\text{نیمساز}\ BD\Rightarrow\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}\xrightarrow[\text{درمخرج}]{\text{ترکیب}}\frac{AD}{AD+DC}=\frac{AB}{AB+BC}$$

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{AB+BC}\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{4x}{4x+6x}\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{4x}{10x}\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{2}{5}\qquad(2)$$

بنابراین

$$\text{از}\ (1),(2)\Rightarrow\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}}=\frac{5}{2}$$

۲۳- گزینهٔ ۲ وارون ماتریـس $A=\begin{bmatrix}-1&2\\4&-3\end{bmatrix}$ برابـر $A^{-1}=\frac{1}{-5}\begin{bmatrix}-3&-2\\-4&-1\end{bmatrix}$ است. پس

$$\alpha A+\beta I=A^{-1}\Rightarrow\alpha\begin{bmatrix}-1&2\\4&-3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\frac{1}{-5}\begin{bmatrix}-3&-2\\-4&-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-\alpha+\beta&2\alpha\\4\alpha&-3\alpha+\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{cases}-\alpha+\beta=\frac{3}{5}\Rightarrow-\frac{1}{5}+\beta=\frac{3}{5}\Rightarrow\beta=\frac{4}{5}\\ 2\alpha=\frac{2}{5}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{5}\end{cases}$$

در نتیجه $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}}=4$.

۲۴- گزینهٔ ۱ ابتدا درایه‌های ماتریس A^2 را به‌دست آوریم:

$$A^2=A\times A$$

$$=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}$$

اکنون فقط درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^3=A^2\times A$$

$$=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\?&?&?\\?&?&?\end{bmatrix}$$

بنابراین درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 به‌صورت $\begin{bmatrix}1&-1&0\end{bmatrix}$ است.

۲۵- گزینهٔ ۲ برای مشـخص شـدن راه‌حل هر دو دایره را ترسیم می‌کنیم؛ سپس مرکز و شعاع دایره‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$x^2-8x+y^2+15=0\Rightarrow O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(4,0)$$

$$R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{64-60}}{2}=1$$

$$x^2-2x+y^2=0\Rightarrow O'(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(1,0)$$

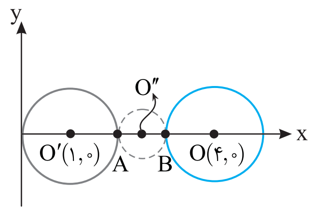
$$R'=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{4}}{2}=1$$

مطابق شـکل دایـرهٔ خطچین به مرکز O'' و شـعاع R'' مرکزش روی محور x قرار دارد و بر هر دو دایره مماس خارج است. در شکل AB قطر دایـرهٔ خطچیـن اسـت چـون $A(2,0)$ و $B(3,0)$ اسـت. پـس $O''=\frac{A+B}{2}=(\frac{5}{2},0)$ و $R''=\frac{AB}{2}=\frac{1}{2}$.

بنابراین معادلهٔ این دایره به صورت زیر است:

$$(x-\frac{۵}{۲})^۲+(y-۰)^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow x^۲+\frac{۲۵}{۴}-۵x+y^۲=\frac{۱}{۴}$$

$$x^۲+y^۲-۵x+۶=۰$$



۲۶- گزینهٔ ۳ ابتدا معادلهٔ بیضی را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$x^۲+۴y^۲-۱۶y-۲x+۱۶=۰\Rightarrow(x^۲-۲x)+۴(y^۲-۴y)+۱۶=۰$$

$$(x-۱)^۲-۱+۴[(y-۲)^۲-۴]+۱۶=۰\Rightarrow(x-۱)^۲+۴(y-۲)^۲=۱$$

$$(x-۱)^۲+\frac{(y-۲)^۲}{\frac{۱}{۴}}=۱$$

بنابراین بیضی افقی با مقادیر $a^۲=۱$ و $b^۲=\frac{۱}{۴}$ است، پس

$$c^۲=a^۲-b^۲=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow c=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین فاصلهٔ دو کانون برابر $۲c=\sqrt{۳}$ است. «توجه کنید معادلهٔ بیضی در کتاب درسی هندسه ۳ مطرح نشده است، پس این سؤال خارج از سرفصل کتاب درسی است».

آزمون ۱۰۲

۱- گزینهٔ ۲ بنابر فرض $\frac{AC}{CG}=\frac{DE}{EF}=۴$. فرض کنید $CG=x$ و $EF=y$. بنابراین $AG=۳x$ و $DF=۳y$. اکنون از C به F وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا خطی را که از D موازی BC رسم می‌شود، در نقطهٔ M قطع کند. در این صورت دو مثلث FEC و FDM دارای دو زاویهٔ مساوی‌اند، پس متشابه‌اند. بنابراین

$$\triangle FEC \sim \triangle FDM \Rightarrow \frac{EC}{DM}=\frac{FE}{FD}=\frac{FC}{FM} \xrightarrow[EF=y]{DF=۳y}$$

$$\frac{EC}{DM}=\frac{FC}{FM}=\frac{۱}{۳} \xrightarrow{EC=۱} \begin{cases} DM=۳ \\ \frac{FM}{FC}=۳\end{cases}$$

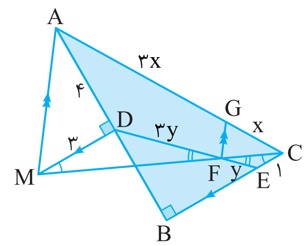
از طرف دیگر مثلث AMD قائم‌الزاویه است، پس

$$AM^۲=AD^۲+MD^۲=۴^۲+۳^۲=۲۵\Rightarrow AM=۵$$

در نتیجه

$$\triangle AMC: \frac{AG}{GC}=\frac{MF}{FC}=۳ \xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ تالس}} AM||FG$$

$$\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{FG}{AM}=\frac{CG}{AC}\Rightarrow\frac{FG}{۵}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow FG=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$



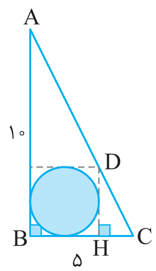
۲- گزینهٔ ۱ در صورتی که قطر دایره برابر ۲R باشد، آن‌گاه مطابق شکل $DH=۲R$ و $CH=BC-BH=۵-۲R$. پس با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس می‌نویسیم

$$\triangle ABC: DH||AB\Rightarrow \frac{DH}{AB}=\frac{CH}{BC}\Rightarrow\frac{۲R}{۱۰}=\frac{۵-۲R}{۵}$$

$$۱۰R=۵۰-۲۰R\Rightarrow ۳۰R=۵۰\Rightarrow R=\frac{۵}{۳}$$

بنابراین

$$\text{مساحت دایره}=\pi R^۲=\pi(\frac{۵}{۳})^۲=\frac{۲۵}{۹}\pi$$



۳- گزینهٔ ۲ تعداد قطرهای n ضلعی محدب را با d(n) نشان می‌دهیم. بنابر فرض سؤال می‌نویسیم

$$d(n)-d(n-۱)=۱۶\Rightarrow\frac{۱}{۲}n(n-۳)-\frac{۱}{۲}(n-۱)(n-۱-۳)=۱۶$$

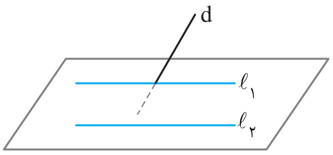
$$\xrightarrow{\text{ضرب در ۲}}(n^۲-۳n)-(n^۲-۵n+۴)=۳۲\Rightarrow ۲n-۴=۳۲\Rightarrow n=۱۸$$

اکنون باید اختلاف تعداد قطرهای ۱۸ضلعی محدب و ۱۶ضلعی محدب را پیدا کنیم.

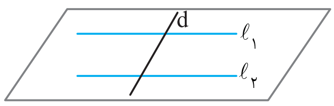
$$d(۱۸)-d(۱۶)=\frac{۱}{۲}(۱۸)(۱۸-۳)-\frac{۱}{۲}(۱۶)(۱۶-۳)$$

$$=۹\times۱۵-۸\times۱۳=۱۳۵-۱۰۴=۳۱$$

۴- گزینهٔ ۴ در شکل (۱) خط‌های $\ell_۱$ و $\ell_۲$ موازی‌اند و خط d خط $\ell_۱$ را قطع کرده است ولی با خط $\ell_۲$ متنافر است. پس d و $\ell_۲$ می‌توانند متنافر باشند. از طرف دیگر، در شکل (۲)، خط d در صفحهٔ دو خط موازی $\ell_۱$ و $\ell_۲$ است و خط $\ell_۱$ را قطع می‌کند. بنابراین خط d خط $\ell_۲$ را نیز قطع می‌کند. پس d و $\ell_۲$ می‌توانند متقاطع هم باشند ولی d نمی‌تواند با $\ell_۲$ موازی باشد، زیرا اگر d موازی $\ell_۲$ باشد، چون $\ell_۱$ و $\ell_۲$ با هم موازی‌اند، پس d موازی $\ell_۱$ است (زیرا دو خط موازی با یک خط با هم موازی‌اند) و این خلاف فرض است. پس d موازی $\ell_۲$ نیست.



شکل (۱)



شکل (۲)

۵- گزینهٔ ۴ ارتفاع AH در ذوزنقهٔ محیطی ABCD را رسم می‌کنیم. پس $AH=۴$. بنابراین

$$\triangle ADH: \hat{D}=۶۰^\circ\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AD\xrightarrow{AH=۴}۴=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AD$$

$$AD=\frac{۸}{\sqrt{۳}}\qquad(۱)$$

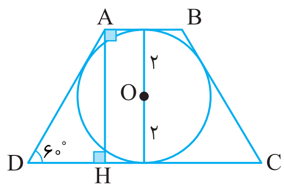
از طرف دیگر

$$\text{محیطی } ABCD\Rightarrow AD+BC=AB+DC\xrightarrow{AD=BC}$$

$$۲AD=AB+DC\xrightarrow{\text{از (۱)}}AB+DC=\frac{۱۶}{\sqrt{۳}}$$

در نتیجه

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AH(AB+DC)=\frac{۱}{۲}(۴)(\frac{۱۶}{\sqrt{۳}})=\frac{۳۲}{\sqrt{۳}}$$



۶- گزینهٔ ۳ در شکل چهارضلعی AMDN محاطی است، پس

$$\hat{A}+\hat{D}_۲=۱۸۰^\circ$$

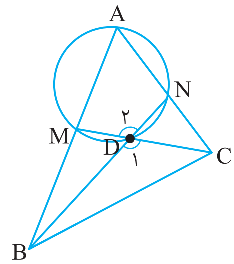
از طرف دیگر $\hat{D}_۱$ زاویهٔ بین دو نیمساز داخلی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در مثلث ABC است، پس

$$\hat{D}_۱=۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲}\qquad(۱)$$

در ضمن $\hat{D}_1=\hat{D}_2$، بنابراین

$$\hat{A}+\hat{D}_2=180^\circ \xrightarrow{\text{از (1)}} \hat{A}+90^\circ+\frac{\hat{A}}{2}=180^\circ \Rightarrow \frac{3}{2}\hat{A}=90^\circ$$

$$\hat{A}=60^\circ$$



۷- گزینهٔ ۲ در شکل $A(1,4)$ و $B(3,2)$ نقاط تلاقی دو دایره به مراکز O و O' و شعاع R است. بنابر فرض سؤال $OO'=2AB$، پس

$$AB=\sqrt{(3-1)^2+(2-4)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\Rightarrow OO'=4\sqrt{2}$$

اکنون معادلهٔ خط OO' را به‌دست می‌آوریم، چون OO' عمودمنصف AB است، پس شیب OO' عکس قرینهٔ شیب AB است و خط OO' از نقطهٔ M وسط AB می‌گذرد.

$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{4-2}{1-3}=\frac{2}{-2}=-1\Rightarrow m_{OO'}=1$$

$$\text{وسط } AB \ M\Rightarrow M=\frac{A+B}{2}=\left(\frac{1+3}{2},\frac{2+4}{2}\right)=(2,3)$$

بنابراین معادلهٔ خط‌المرکزین دو دایره عبارت است از

$$OO': y-y_M=m(x-x_M)\Rightarrow y-3=1(x-2)\Rightarrow y=x+1$$

مراکز دو دایره روی خط $y=x+1$ قرار دارند، پس اگر $O, O'(\alpha,\beta)$ باشد، آن‌گاه $\beta=\alpha+1$. پس مختصات مراکز دایره‌ها به صورت $O, O'(\alpha,\alpha+1)$ است. در ضمن $OM=O'M=\frac{OO'}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$. در نتیجه

$$\left.\begin{matrix}O,O'(\alpha,\alpha+1)\\ M(2,3)\end{matrix}\right\}\Rightarrow OM=O'M=\sqrt{(\alpha-2)^2+(\alpha+1-3)^2}=2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2(\alpha-2)^2}=2\sqrt{2}\Rightarrow 2(\alpha-2)^2=8\Rightarrow(\alpha-2)^2=4$$

$$\begin{cases}\alpha-2=2\Rightarrow\alpha=4\Rightarrow\beta=\alpha+1=5\Rightarrow O'(4,5)\\ \alpha-2=-2\Rightarrow\alpha=0\Rightarrow\beta=\alpha+1=1\Rightarrow O(0,1)\end{cases}$$

شعاع دایره‌ها برابر است با

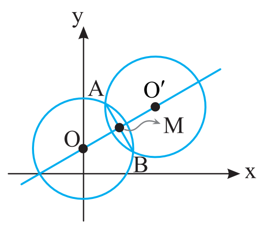
$$R=OA=\sqrt{(0-1)^2+(1-4)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

دایرهٔ به مرکز O' محور xها را قطع نمی‌کند.

$$\text{معادلهٔ دایرهٔ به مرکز } O: (x-0)^2+(y-1)^2=10 \xrightarrow{y=0}$$

$$x^2+1=10\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=3 \text{ یا } -3$$

یعنی این دایره محور xها را در نقاط $(3,0)$ و $(-3,0)$ قطع می‌کند و فاصلهٔ این دو نقطه برابر ۶ است.



۸- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{|2+0+3a|}{\sqrt{1+a^2}}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\frac{25}{2}=\frac{4+9a^2+12a}{1+a^2}$$

$$25+25a^2=8+18a^2+24a\Rightarrow 7a^2-24a+17=0$$

دیده می‌شود که مجموع ضرایب این معادلهٔ درجهٔ دوم صفر است $(7-24+17=0)$. بنابراین $a=1$ یا $a=\frac{17}{7}$.

$$\text{اختلاف مقادیر } a=\frac{17}{7}-1=\frac{10}{7}$$

۹- گزینهٔ ۳

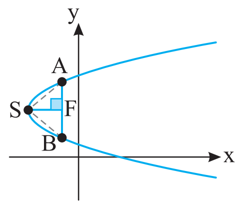
$$y^2-x-4y+2=0\Rightarrow y^2-4y=x-2$$

$$(y-2)^2-4=x-2\Rightarrow(y-2)^2=x+2$$

پس این سهمی افقی رو به راست با رأس $S(-2,2)$ است و $4a=1\Rightarrow a=\frac{1}{4}$

پس شکل این سهمی به صورت زیر است و اگر F کانون سهمی باشد، آن‌گاه AB وتر کانونی این سهمی به طول $4a$، یعنی ۱ است و $SF=a=\frac{1}{4}$. بنابراین

$$S_{ASB}=\frac{1}{2}SF\times AB=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)(1)=\frac{1}{8}$$



۱۰- گزینهٔ ۱

$$D=ABC=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&1\\0&-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x&-1\\1&1&x\\x&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\1&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&x+1&x-1\\x&-x+2&x\\-x-2&-3&-2x+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\1&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+5&\bigcirc&x+1\\\bigcirc&0&\bigcirc\\-2x-7&\bigcirc&-3\end{bmatrix}$$

بنابراین

مجموع درایه‌های قطر فرعی=مجموع درایه‌های قطر اصلی

$$x+5-3=x+1-2x-7\Rightarrow 2x=-8\Rightarrow x=-4$$

۱۱- گزینهٔ ۲

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&2&-3\\3&-2&4\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{بر حسب ستون اول}}$$

$$|A|=1(-1)^2\begin{vmatrix}2&-3\\-2&4\end{vmatrix}+3(-1)^4\begin{vmatrix}-1&2\\2&-3\end{vmatrix}$$

$$=1(8-6)+3(3-4)=2-3=-1$$

بنابراین $||A|A|=|A|^3|A|=|A|^4=(-1)^4=1$