پاسخ کنکور سراسری ۱۴۰۰

۲۸۶۹ **۴** عبارت مورد نظر را A می‌نامیم. در این صورت

$$A=(a^۲+b^۲-۲ab)^۲(a^۲+b^۲+۲ab)^۲=((a-b)^۲)^۲((a+b)^۲)^۲$$
$$=(((a-b)(a+b))^۲)^۲$$

از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم. $A=((a^۲-b^۲)^۲)^۲=(a^۴-۲a^۲b^۲+b^۴)^۲$

اکنون توجه کنید که

$$a^۴=(\sqrt[۴]{\sqrt{۶}-۲})^۴=\sqrt{۶}-۲,\quad b^۴=(\sqrt[۴]{\sqrt{۶}+۲})^۴=\sqrt{۶}+۲$$
$$a^۲b^۲=(\sqrt[۴]{\sqrt{۶}-۲})^۲\times(\sqrt[۴]{\sqrt{۶}+۲})^۲=\sqrt{\sqrt{۶}-۲}\times\sqrt{\sqrt{۶}+۲}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{۶}-۲)(\sqrt{۶}+۲)}=\sqrt{۶-۴}=\sqrt{۲}$$

بنابراین $A=(a^۴-۲a^۲b^۲+b^۴)^۲=(\sqrt{۶}-۲-۲\sqrt{۲}+\sqrt{۶}+۲)^۲$

$$=(۲\sqrt{۶}-۲\sqrt{۲})^۲=۴(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})^۲=۴(۶+۲-۲\sqrt{۱۲})$$

چون $\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$، پس $A=۴(۸-۴\sqrt{۳})=۱۶(۲-\sqrt{۳})$

۲۸۷۰ **۴** فرض می‌کنیم $\sqrt[۳]{x}=t$. در این صورت معادلهٔ مورد نظر به شکل مقابل در می‌آید: $(t^۲+\frac{۱}{t^۲}+۱)(t^۲-۱)=۲t\Rightarrow(\frac{t^۴+۱+t^۲}{t^۲})(t^۲-۱)=۲t$

برای اینکه معادله را ساده کنیم، دو طرف آن را در $t^۲$ ضرب می‌کنیم

$$(t^۴+t^۲+۱)(t^۲-۱)=۲t^۳$$

اکنون توجه کنید که می‌توانیم سمت چپ معادله را به کمک اتحاد چاق و لاغر ساده کنیم $(t^۲)^۳-۱^۳=۲t^۳\Rightarrow(t^۳)^۲-۲t^۳-۱=۰$ (*)

چون $\sqrt[۳]{x}=t$، پس $x=t^۳$، در نتیجه معادلهٔ (*) می‌شود $x^۲-۲x-۱=۰$، که مجموع جواب‌های آن برابر است با $-\frac{(-۲)}{۱}=۲$.

۲۸۷۱ **۱** **روش اول:** توجه کنید که چون $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲+x-۵=۰$ هستند، پس $x_۱+x_۲=-۱$ و $x_۱x_۲=-۵$. اکنون می‌توانیم مجموع جواب‌های معادلهٔ جدید را به صورت زیر حساب کنیم:

$$S=\frac{۱}{(x_۱+۱)^۳}+\frac{۱}{(x_۲+۱)^۳}\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}S=\frac{(x_۱+۱)^۳+(x_۲+۱)^۳}{(x_۱+۱)^۳(x_۲+۱)^۳}$$

از اتحاد $a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$ استفاده می‌کنیم و صورت کسر را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$S=\frac{(x_۱+۱+x_۲+۱)^۳-۳(x_۱+۱)(x_۲+۱)(x_۱+۱+x_۲+۱)}{((x_۱+۱)(x_۲+۱))^۳}$$
$$=\frac{(x_۱+x_۲+۲)^۳-۳(x_۱+x_۲+x_۱x_۲+۱)(x_۱+x_۲+۲)}{(x_۱+x_۲+x_۱x_۲+۱)^۳}$$
$$=\frac{(-۱+۲)^۳-۳(-۱-۵+۱)(-۱+۲)}{(-۱-۵+۱)^۳}=\frac{۱-۳(-۵)(۱)}{(-۵)^۳}=-\frac{۱۶}{۱۲۵}$$

همچنین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ جدید به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P=\frac{۱}{(x_۱+۱)^۳}\times\frac{۱}{(x_۲+۱)^۳}=\frac{۱}{((x_۱+۱)(x_۲+۱))^۳}$$
$$=\frac{۱}{(x_۱+x_۲+x_۱x_۲+۱)^۳}=\frac{۱}{(-۱-۵+۱)^۳}=-\frac{۱}{۱۲۵}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت $x^۲+\frac{۱۶}{۱۲۵}x-\frac{۱}{۱۲۵}=۰$ است، که اگر دو طرف آن را در ۱۲۵ ضرب کنیم، می‌شود $۱۲۵x^۲+۱۶x-۱=۰$.

روش دوم: توجه کنید که

$$S=\frac{۱}{(x_۱+۱)^۳}+\frac{۱}{(x_۲+۱)^۳}=(\frac{۱}{x_۱+۱})^۳+(\frac{۱}{x_۲+۱})^۳=\frac{x_۱^۳}{۱۲۵}+\frac{x_۲^۳}{۱۲۵}=\frac{x_۱^۳+x_۲^۳}{۱۲۵}$$

اکنون از اتحاد $a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$ استفاده می‌کنیم. چون $x_۱+x_۲=-۱$ و $x_۱x_۲=-۵$، پس

$$S=\frac{(x_۱+x_۲)^۳-۳x_۱x_۲(x_۱+x_۲)}{۱۲۵}=\frac{(-۱)^۳-۳(-۵)(-۱)}{۱۲۵}=-\frac{۱۶}{۱۲۵}$$

از طرف دیگر،

$$P=\frac{۱}{(x_۱+۱)^۳}\times\frac{۱}{(x_۲+۱)^۳}=(\frac{۱}{x_۱+۱})^۳\times(\frac{۱}{x_۲+۱})^۳=\frac{x_۱^۳}{۵^۳}\times\frac{x_۲^۳}{۵^۳}=\frac{(x_۱x_۲)^۳}{۵^۳\times۵^۳}$$

چون $x_۱x_۲=-۵$، پس $P=\frac{(-۵)^۳}{۵^۳\times۵^۳}$، یعنی $P=-\frac{۱}{۱۲۵}$. در نتیجه معادلهٔ مورد نظر به‌صورت $x^۲+\frac{۱۶}{۱۲۵}x-\frac{۱}{۱۲۵}=۰$ است، که اگر دو طرف آن را در ۱۲۵ ضرب کنیم، می‌شود $۱۲۵x^۲+۱۶x-۱=۰$.

۲۸۷۲ **۴** **روش اول:** ابتدا توجه کنید که

$$f(\frac{\pi}{۳۶})=۱۶\cos^۲\frac{۳\pi}{۳۶}\cos^۲\frac{۶\pi}{۳۶}\cos^۲\frac{۱۲\pi}{۳۶}\cos^۲\frac{۲۴\pi}{۳۶}$$
$$=۱۶\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}\cos^۲\frac{\pi}{۶}\cos^۲\frac{\pi}{۳}\cos^۲\frac{۲\pi}{۳}$$
$$=۱۶\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲(\frac{۱}{۲})^۲(-\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۳}{۴}\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}$$

اکنون برای اینکه مقدار $\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}$ را حساب کنیم، از اتحاد مثلثاتی $\cos^۲\alpha=\frac{۱}{۲}(۱+\cos۲\alpha)$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$f(\frac{\pi}{۳۶})=\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۲}(۱+\cos\frac{۲\pi}{۱۲})=\frac{۳}{۸}(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۳}{۸}(\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۱۶}$$

روش دوم: عبارت داده شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=۱۶(\cos۳x\cos۶x\cos۱۲x\cos۲۴x)^۲$$

اکنون عبارت داخل پرانتز را در $\sin۳x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$f(x)=۱۶(\frac{\sin۳x\cos۳x\cos۶x\cos۱۲x\cos۲۴x}{\sin۳x})^۲$$

از اتحاد مثلثاتی $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin۲\alpha$ به‌دست می‌آید $\sin۳x\cos۳x=\frac{۱}{۲}\sin۶x$، در نتیجه

$$f(x)=۱۶(\frac{\frac{۱}{۲}\sin۶x\cos۶x\cos۱۲x\cos۲۴x}{\sin۳x})^۲$$

به‌طور مشابه $\sin۶x\cos۶x=\frac{۱}{۲}\sin۱۲x$، پس

$$f(x)=۱۶(\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\sin۱۲x\cos۱۲x\cos۲۴x}{\sin۳x})^۲$$

به‌طور مشابه با انجام دو مرحلهٔ دیگر عبارت را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم.

$$f(x)=۱۶(\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\sin۲۴x\cos۲۴x}{\sin۳x})^۲$$
$$=۱۶(\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\sin۴۸x}{\sin۳x})^۲=\frac{\sin^۲۴۸x}{۱۶\sin^۲۳x}$$

بنابراین

$$f(\frac{\pi}{36})=\frac{\sin^2\frac{48\pi}{36}}{16\sin^2\frac{3\pi}{36}}=\frac{\sin^2\frac{4\pi}{3}}{16\sin^2\frac{\pi}{12}}=\frac{\sin^2(\pi+\frac{\pi}{3})}{16\sin^2\frac{\pi}{12}}\xrightarrow{\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\ 2\sin^2\alpha=1-\cos2\alpha}$$

$$f(\frac{\pi}{36})=\frac{(-\sin\frac{\pi}{3})^2}{8(1-\cos\frac{2\pi}{12})}=\frac{\sin^2\frac{\pi}{3}}{8(1-\cos\frac{\pi}{6})}=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{8(1-\frac{\sqrt{3}}{2})}=\frac{\frac{3}{4}}{4(2-\sqrt{3})}$$

در نهایت صورت و مخرج را در مزدوج $3-\sqrt{3}$، یعنی $2+\sqrt{3}$ ضرب می‌کنیم

$$f(\frac{\pi}{36})=\frac{3}{16(2-\sqrt{3})}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{3(2+\sqrt{3})}{16(4-3)}=\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

روش سوم: عبارت $f(x)$ را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x)=(2\cos^2 3x)(2\cos^2 6x)(2\cos^2 12x)(2\cos^2 24x)$$
$$=(1+\cos6x)(1+\cos12x)(1+\cos24x)(1+\cos48x)$$

بنابراین

$$f(\frac{\pi}{36})=(1+\cos\frac{6\pi}{36})(1+\cos\frac{12\pi}{36})(1+\cos\frac{24\pi}{36})(1+\cos\frac{48\pi}{36})$$
$$=(1+\cos\frac{\pi}{6})(1+\cos\frac{\pi}{3})(1+\cos\frac{2\pi}{3})(1+\cos\frac{4\pi}{3})$$
$$=(1+\frac{\sqrt{3}}{2})(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

۲۸۷۳ (۲)

روش اول:

توجه کنید که $\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})=\sin2\alpha$ ، $\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sin2\alpha-\cos\alpha}{\cot2\alpha}$. اکنون مقادیر $\cos\alpha$ و $\sin2\alpha$ را حساب می‌کنیم. می‌توان نوشت

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\xrightarrow{\tan\alpha=\frac{3}{4}}1+\frac{9}{16}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{16}{25}$$

چون انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی است، پس $\cos\alpha<0$، یعنی $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$. از طرف دیگر،

$$\sin2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2(\frac{3}{4})}{1+\frac{9}{16}}=\frac{24}{25}$$

$$\cos2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}}=\frac{7}{25}\ ,\quad\cot2\alpha=\frac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=\frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}}=\frac{7}{24}$$

در نتیجه، عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sin2\alpha-\cos\alpha}{\cot2\alpha}=\frac{\frac{24}{25}+\frac{4}{5}}{\frac{7}{24}}=\frac{1056}{175}$

روش دوم: ابتدا توجه کنید که $\tan2\alpha=\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\frac{\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}}{\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

بنابراین عبارت داده شده را می‌توان این‌طور نوشت

$$\frac{\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})+\cos(\alpha+\pi)}{\cot2\alpha}=\frac{\sin2\alpha-\cos\alpha}{\cot2\alpha}$$
$$=\tan2\alpha(2\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha)$$
$$=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\times\cos\alpha(2\sin\alpha-1)=\frac{2\sin\alpha(2\sin\alpha-1)}{1-\tan^2\alpha}$$

اکنون مقدار $\sin\alpha$ را به‌دست می‌آوریم

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{1-\sin^2\alpha}\Rightarrow\sin^2\alpha=1-\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=1-\frac{1}{1+\frac{9}{16}}$$
$$=1-\frac{1}{\frac{25}{16}}=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$$

چون انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی است، پس $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$. در نتیجه عبارت مورد نظر می‌شود

$$\frac{2(-\frac{3}{5})(2(-\frac{3}{5})-1)}{1-\frac{9}{16}}=\frac{-\frac{6}{5}(-\frac{6}{5}-1)}{\frac{7}{16}}=\frac{\frac{6}{5}\times\frac{11}{5}}{\frac{7}{16}}=\frac{1056}{175}$$

۲۸۷۴ (۳)

می‌توان نوشت

$$\cos^2x-\sin^2x\cos3x=1\Rightarrow1-\cos^2x+\sin^2x\cos3x=0$$
$$\sin^2x+\sin^2x\cos3x=0\Rightarrow\sin^2x(1+\cos3x)=0$$
$$\begin{cases}\sin^2x=0\Rightarrow\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ \cos3x=-1\Rightarrow3x=(2k+1)\pi\Rightarrow x=\frac{(2k+1)\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

برای اینکه جواب‌های در بازهٔ $[0,2\pi]$ را پیدا کنیم، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

k	۰	۱	۲	۳
$k\pi$	۰	π	2π	~~3π~~
$\frac{(2k+1)\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	~~$\frac{7\pi}{3}$~~

از این جدول معلوم می‌شود که جواب‌های مورد نظر ۰، $\frac{\pi}{3}$، π، $\frac{5\pi}{3}$ و 2π هستند، که تعداد آن‌ها پنج‌تاست.

۲۸۷۵ (۱)

روش اول:

توجه کنید که $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ که در آن $g(x)=\log_4(x^2-x-2)$ و $h(x)=\sqrt{x^2-1}+1$. برای پیدا کردن دامنهٔ تابع f، دامنهٔ تابع‌های g و h را به‌دست می‌آوریم، از آن‌ها اشتراک می‌گیریم و در آخر جواب‌های معادلهٔ $h(x)=0$ را از آن حذف می‌کنیم، یعنی

$$D_f=(D_g\cap D_h)-\{x\,|\,x\in D_h,h(x)=0\}$$

برای پیدا کردن دامنهٔ تابع g باید نامعادلهٔ $x^2-x-2>0$ را حل کنیم:

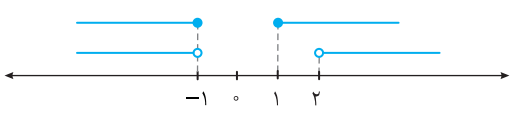
$$x^2-x-2>0\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}(x-2)(x+1)>0\Rightarrow x<-1\ \text{یا}\ x>2$$

پس $D_g=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$. از طرف دیگر، برای پیدا کردن دامنهٔ تابع h باید نامعادلهٔ $x^2-1\geq0$ را حل کنیم:

$$x^2-1\geq0\Rightarrow x^2\geq1\Rightarrow x\geq1\ \text{یا}\ x\leq-1$$

پس $D_h=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. توجه کنید که معادلهٔ $h(x)=0$ جواب ندارد، زیرا $\sqrt{x^2-1}+1$ همواره مثبت است. بنابراین

$$D_f=((-\infty,-1)\cup(2,+\infty))\cap((-\infty,-1]\cup[1,+\infty))$$
$$=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$$



روش دوم: توجه کنید که عدد ۳ در دامنهٔ تابع f است، زیرا

$$f(۳)=\frac{\log_{۴}(۹-۳-۲)}{\sqrt{۹-۱}+۱}=\frac{\log_{۴}۴}{\sqrt{۸}+۱}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}+۱}$$

پس گزینه‌های (۲) و (۴) حذف می‌شوند، زیرا عدد ۳ عضو آن‌ها نیست. از طرف دیگر، چون عدد ۲ عضو مجموعهٔ گزینهٔ (۱) نیست، ولی عضو مجموعهٔ گزینهٔ (۳) است، پس کافی است ببینیم ۲ در دامنهٔ تابع f هست یا خیر. توجه کنید که

$$f(۲)=\frac{\log_{۴}(۴-۲-۲)}{\sqrt{۴-۱}+۱}=\frac{\log_{۴}۰}{\sqrt{۳}+۱}$$

چون $\log_{۴}۰$ تعریف نشده است، پس عدد ۲ در دامنهٔ تابع f نیست، یعنی گزینهٔ (۳) نیز حذف می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۱) دامنهٔ تابع f است.

۲۸۷۶ (۲) روش اول: توجه کنید که

$$-\frac{۱}{۲}\le x<\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\times ۳}-\frac{۳}{۲}\le ۳x<\frac{۳}{۲}$$

بنابراین

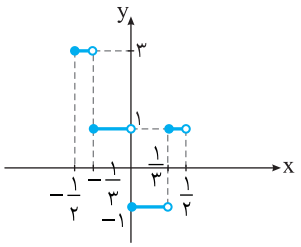
$$-\frac{۳}{۲}\le ۳x<-۱\Rightarrow\begin{cases}[۳x]=-۲\\ -\frac{۱}{۲}\le x<-\frac{۱}{۳}\end{cases}\Rightarrow f(x)=۲|-۲|-۱=۳$$

$$-۱\le ۳x<۰\Rightarrow\begin{cases}[۳x]=-۱\\ -\frac{۱}{۳}\le x<۰\end{cases}\Rightarrow f(x)=۲|-۱|-۱=۱$$

$$۰\le ۳x<۱\Rightarrow\begin{cases}[۳x]=۰\\ ۰\le x<\frac{۱}{۳}\end{cases}\Rightarrow f(x)=۲|۰|-۱=-۱$$

$$۱\le ۳x<\frac{۳}{۲}\Rightarrow\begin{cases}[۳x]=۱\\ \frac{۱}{۳}\le x<\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow f(x)=۲|۱|-۱=۱$$

در نتیجه نمودار تابع f به‌صورت زیر است:



روش دوم: توجه کنید که اگر $x\to ۰^-$، آن‌گاه $۳x\to ۰^-$، پس $[۳x]=-۱$. در نتیجه

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}(۲|[۳x]|-۱)=۲|-۱|-۱=۱$$

همچنین اگر $x\to ۰^+$، آن‌گاه $۳x\to ۰^+$، پس $[۳x]=۰$. در نتیجه

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}(۲|[۳x]|-۱)=۲|۰|-۱=-۱$$

فقط گزینهٔ (۲) این شرایط را دارد.

۲۸۷۷ (۴) روش اول:

نقطهٔ برخورد منحنی‌ها جواب دستگاه مقابل است: $\begin{cases}۲y=x^۲\\ x=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳}\end{cases}$

دو طرف معادلهٔ دوم را به توان دو می‌رسانیم و به جای $x^۲$ قرار می‌دهیم $۲y$:

$$x^۲=(\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳})^۲\Rightarrow ۲y=y+۳+y-۳-۲\sqrt{(y+۳)(y-۳)}$$

$$۲y=۲y-۲\sqrt{y^۲-۹}\Rightarrow -۲\sqrt{y^۲-۹}=۰\Rightarrow y^۲-۹=۰\Rightarrow y=\pm ۳$$

توجه کنید که چون $۲y=x^۲\ge ۰$، پس فقط $y=۳$ قبول است. در نتیجه

$$x=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳}=\sqrt{۶}-\sqrt{۰}=\sqrt{۶}$$

بنابراین نقطهٔ برخورد منحنی‌ها $(\sqrt{۶},۳)$ است، که فاصله‌اش از مبدأ برابر است با

$$\sqrt{(\sqrt{۶})^۲+۳^۲}=\sqrt{۶+۹}=\sqrt{۱۵}$$

روش دوم: با توجه به ضابطهٔ منحنی $x=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳}$، متوجه می‌شویم که $y\ge ۳$. اکنون اگر در ضابطه‌های داده شده قرار دهیم $y=۳$، برای هر دو به‌دست می‌آید $x=\sqrt{۶}$، یعنی $(\sqrt{۶},۳)$ نقطهٔ تلاقی دو منحنی است که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با $\sqrt{(\sqrt{۶})^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۵}$.

۲۸۷۸ (۲) در صورت از ۳^x و در مخرج از $۲^{x-۲}$ فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{۳^x(۱+۳+۳^۲+۳^۳+۳^۴+۳^۵)}{۲^{x-۲}(۱+۲+۲^۲+۲^۳+۲^۴+۲^۵)}=۵۲\Rightarrow\frac{۳^x\times ۳۶۴}{۲^{x-۲}\times ۶۳}=۵۲$$

$$\frac{۳^{x-۲}\times ۹\times ۵۲\times ۷}{۲^{x-۲}\times ۹\times ۷}=۵۲\Rightarrow\frac{۳^{x-۲}}{۲^{x-۲}}=۱\Rightarrow(\frac{۳}{۲})^{x-۲}=۱=(\frac{۳}{۲})^۰$$

$$x-۲=۰\Rightarrow x=۲$$

۲۸۷۹ (۳) توجه کنید که

$$y=۲^{|\sin x|}\xrightarrow{\text{به راست }\frac{\pi}{۲}}y=۲^{|\sin(x-\frac{\pi}{۲})|}$$

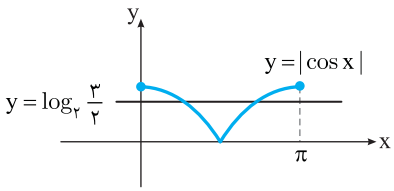
توجه کنید که $\sin(x-\frac{\pi}{۲})=-\cos x$، پس

$$y=۲^{|-\cos x|}=۲^{|\cos x|}\xrightarrow{\text{به پایین }\frac{۳}{۲}}y=۲^{|\cos x|}-\frac{۳}{۲}$$

برای پیدا کردن تعداد نقاط برخورد نمودار تابع بالا با محور x در فاصلهٔ $[۰,\pi]$، باید تعداد جواب‌های معادلهٔ $۲^{|\cos x|}-\frac{۳}{۲}=۰$ را در این فاصله پیدا کنیم. اکنون با استفاده از تعریف تابع لگاریتم داریم

$$۲^{|\cos x|}-\frac{۳}{۲}=۰\Rightarrow ۲^{|\cos x|}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow|\cos x|=\log_{۲}\frac{۳}{۲}$$

توجه کنید که $\log_{۲}۱<\log_{۲}\frac{۳}{۲}<\log_{۲}۲$، پس $۰<\log_{۲}\frac{۳}{۲}<۱$. اکنون تعداد نقاط برخورد خط $y=\log_{۲}\frac{۳}{۲}$ و نمودار تابع $y=|\cos x|$ را روی بازهٔ $[۰,\pi]$ از روی شکل زیر پیدا می‌کنیم، که دوتاست.



۲۸۸۰ (۱) اگر فرض کنیم $a=\log_x y$، آن‌گاه $\frac{۱}{a}=\log_y x$. بنابراین از تساوی داده شده به‌دست می‌آید

$$a-۲(\frac{۱}{a})=۱\xrightarrow{\times a}a^۲-۲=a\Rightarrow a^۲-a-۲=۰$$

به کمک اتحاد جملهٔ مشترک عبارت بالا را تجزیه می‌کنیم

$$(a+۱)(a-۲)=۰\Rightarrow a=-۱,a=۲$$

چون $x,y>۱$، پس $a=\log_x y>۰$، در نتیجه فقط $a=۲$ قابل قبول است، پس

$$\log_x y=۲\Rightarrow y=x^۲$$

۲۸۸۱ **۴** عبارت $\sqrt{x}$ را در پرانتز ضرب می‌کنیم و حد می‌گیریم.

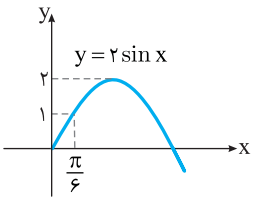
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x^2}-\frac{x}{x^2+1}}\right)=\sqrt{1+1}-\sqrt{0-0}=\sqrt{2}$$

۲۸۸۲ **۱** **روش اول:**

اگر $x\to\frac{\pi}{6}^-$، آن‌گاه $\sin x\to\frac{1}{2}^-$ و در نتیجه $2\sin x\to1^-$، پس $2\sin x-1\to0^-$. بنابراین $[2\sin x-1]=-1$، یعنی $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}[2\sin x-1]=-1$

روش دوم:

چون به‌ازای هر x و هر عدد صحیح k، $[x+k]=[x]+k$، پس $[2\sin x-1]=[2\sin x]-1$. اکنون به نمودار تابع $y=2\sin x$ در شکل مقابل توجه کنید. از روی این نمودار معلوم می‌شود که



$$x\to\frac{\pi}{6}^-\Rightarrow0<2\sin x<1\Rightarrow[2\sin x]=0$$

بنابراین $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}([2\sin x]-1)=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}(0-1)=-1$

۲۸۸۳ **۳** **روش اول:**

ابتدا توجه کنید که برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم

$$f(x)=y=2+\sqrt{x-1}\Rightarrow y-2=\sqrt{x-1}\xrightarrow{\text{به توان دو}}$$
$$(y-2)^2=x-1\Rightarrow x=(y-2)^2+1$$

بنابراین $f^{-1}(x)=(x-2)^2+1$. اگر این نمودار را ۲ واحد در جهت مثبت محور xها و سپس ۳ واحد در جهت منفی محور yها انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x)=f^{-1}(x-2)-3$ به‌دست می‌آید. بنابراین $g(4)=f^{-1}(4-2)-3=f^{-1}(2)-3=(2-2)^2+1-3=-2$

روش دوم: قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=2+\sqrt{x-1}$ نسبت به خط $y=x$ نمودار تابع f^{-1} است. بنابراین $g(x)=f^{-1}(x-2)-3$. قرار می‌دهیم $g(4)=a$ و از تعریف تابع معکوس استفاده می‌کنیم. در نتیجه

$$g(4)=f^{-1}(2)-3=a\Rightarrow f^{-1}(2)=a+3\xrightarrow{\text{تعریف تابع وارون}}$$
$$f(a+3)=2$$

پس $2+\sqrt{a+3-1}=2\Rightarrow\sqrt{a+2}=0\Rightarrow a=-2$

۲۸۸۴ **۳**

توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=\begin{cases}1 & f(x)>0\\ 0 & f(x)=0\\ -1 & f(x)<0\end{cases}$$

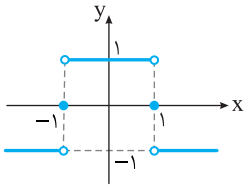
از طرف دیگر، جدول تعیین علامت $f(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

بنابراین

$$(gof)(x)=\begin{cases}1 & x\in(-1,1)\\ 0 & x=\pm1\\ -1 & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$$

پس نمودار تابع gof به‌صورت زیر است، که در نقاط $x=\pm1$ ناپیوسته است.



۲۸۸۵ **۲** توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} & x^2\geq4\\ \frac{-x^2(x^2-4)}{x^2-1} & x^2\leq4\ ,\ x\neq\pm1\end{cases}$$

از طرف دیگر، اگر $g(x)=\frac{x^2(x^2-4)}{x^2-1}=\frac{x^4-4x^2}{x^2-1}$، آن‌گاه

$$g'(x)=\frac{(4x^3-8x)(x^2-1)-(2x)(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x((x^2-1)^2+3)}{(x^2-1)^2}$$

بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}g'(x) & x>2\text{ یا }x<-2\\ -g'(x) & -2<x<2\ ,\ x\neq\pm1\end{cases}$$

توجه کنید که تابع f در نقطه‌های ۲ و -2 مشتق‌پذیر نیست، زیرا این عددها ریشه‌های سادهٔ عبارت داخل قدرمطلق هستند. همچنین،

$$f'(x)=0\Rightarrow g'(x)=0\Rightarrow x=0$$

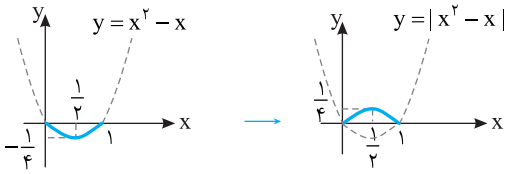
پس نقاط بحرانی تابع f نقطه‌های ۲، -2 و صفر هستند، که مطابق جدول زیر هر سه طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند $(x\neq\pm1)$:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

۲۸۸۶ **۳** اگر مختصات نقطهٔ A واقع بر سهمی $f(x)=x^2$ به‌صورت (x,x^2) باشد، مختصات نقطهٔ A'، یعنی قرینهٔ A نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم، به‌صورت (x^2,x) است. بنابراین

$$AA'=\sqrt{(x-x^2)^2+(x^2-x)^2}=\sqrt{2(x^2-x)^2}=\sqrt{2}|x^2-x|$$
$$=\sqrt{2}|(x-\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4}|$$

از طرف دیگر، چون طول نقطهٔ A بین دو طول متوالی از محل برخورد تابع f با خط نیمساز ناحیهٔ اول و سوم (خط $y=x$)، یعنی نقاط $(0,0)$ و $(1,1)$ قرار دارد، پس باید ماکزیمم AA' را در بازهٔ $(0,1)$ پیدا کنیم. برای پیدا کردن ماکزیمم تابع $y=|x^2-x|$ در بازهٔ $(0,1)$ از روش رسم نمودار تابع استفاده می‌کنیم.



بنابراین بیشترین مقدار AA' در بازهٔ $(0,1)$ به‌ازای $x=\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید، که برابر

$$AA'=\sqrt{2}|\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}|=\sqrt{2}\times\tfrac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

می‌شود با

۲۸۸۷ **۴** ابتدا توجه کنید که

$$(fog)'(\tfrac{3}{\sqrt{8}})=g'(\tfrac{3}{\sqrt{8}})f'(g(\tfrac{3}{\sqrt{8}}))$$

توجه کنید که $g(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=\frac{۱}{\sqrt[۳]{(\frac{۳}{\sqrt{۸}})^۲-۱}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۹}{۸}-۱}}=۲$. پس باید مقدار $g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})f'(۲)$ را حساب کنیم. مقدار $g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})$ را به‌سادگی می‌توان حساب کرد

$$g(x)=(x^۲-۱)^{-\frac{۱}{۳}}\Rightarrow g'(x)=(-\frac{۱}{۳})(۲x)(x^۲-۱)^{-\frac{۱}{۳}-۱}$$

$$=-\frac{۲}{۳}x(x^۲-۱)^{-\frac{۴}{۳}}$$

$$g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=-\frac{۲}{۳}(\frac{۳}{\sqrt{۸}})(\frac{۹}{۸}-۱)^{-\frac{۴}{۳}}=-۸\sqrt{۲}$$

برای پیدا کردن مقدار $f'(۲)$ ابتدا ضابطهٔ تابع f را در یک همسایگی نقطهٔ $x=۲$ پیدا می‌کنیم.

توجه کنید که $x\to ۲\Rightarrow x^۲\to ۴\Rightarrow ۴<x^۲+\frac{۱}{۲}<۵\Rightarrow[x^۲+\frac{۱}{۲}]=۴$

در نتیجه $f(x)=(۴x)^۲+۱=۱۶x^۲+۱\Rightarrow f'(x)=۳۲x\Rightarrow f'(۲)=۶۴$

بنابراین $(fog)'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=(-۸\sqrt{۲})(۶۴)=۴(-۱۲۸\sqrt{۲})$

۲۸۸۸ **۳** توجه کنید که $g'(x)=۲ax+b$ و $g''(x)=۲a$. از طرف دیگر،

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & x\geq k\\ g'(x) & x<k\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}g'(x) & x\geq k\\ g''(x) & x<k\end{cases}$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=k$ مشتق‌پذیر است، پس

$$g(k)=g'(k)\Rightarrow ak^۲+bk+c=۲ak+b$$

$$g'(k)=g''(k)\Rightarrow ۲ak+b=۲a\Rightarrow b=۲a-۲ak$$

اکنون از تساوی $b=۲a-۲ak$ و شرط $b+c=a$ می‌توان نتیجه گرفت

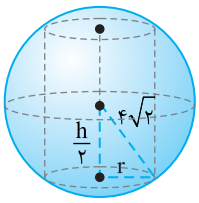
$$ak^۲+bk+a-b=۲a\Rightarrow ak^۲+(۲a-۲ak)k+a-(۲a-۲ak)=۲a$$

$$a(k^۲+۲k-۲k^۲+۱-۲+۲k)=۲a\xrightarrow{a\neq ۰}-k^۲+۴k-۱=۲$$

$$k^۲-۴k+۳=۰\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}(k-۱)(k-۳)=۰\Rightarrow k=۱\,,\,k=۳$$

پس بیشترین مقدار k برابر با ۳ است.

۲۸۸۹ **۲** شکل مقابل را ببینید. مساحت جانبی استوانه برابر است با $S=۲\pi rh$. از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،



$$r^۲+(\frac{h}{۲})^۲=(۴\sqrt{۲})^۲\Rightarrow r^۲=۳۲-\frac{h^۲}{۴}$$

$$r=\sqrt{۳۲-\frac{h^۲}{۴}}$$

$$S=۲\pi\sqrt{۳۲-\frac{h^۲}{۴}}\times h=۲\pi\sqrt{\frac{(۱۲۸-h^۲)h^۲}{۴}}=\pi\sqrt{-h^۴+۱۲۸h^۲}$$

برای اینکه S ماکزیمم باشد، باید $-h^۴+۱۲۸h^۲$ ماکزیمم باشد. توجه کنید که

$$y=-h^۴+۱۲۸h^۲\Rightarrow y'=-۴h^۳+۲۵۶h$$

$$y'=۰\Rightarrow -۴h(h^۲-۶۴)=۰\Rightarrow h^۲=۶۴$$

بنابراین ماکزیمم S به‌ازای $h^۲=۶۴$ به‌دست می‌آید، که برابر است با

$$S=\pi\sqrt{-۶۴^۲+۱۲۸\times ۶۴}=۶۴\pi$$

۲۸۹۰ **۳** فرض می‌کنیم A پیشامد این باشد که دانش‌آموز در امتحان اول قبول شود و B پیشامد این باشد که دانش‌آموز در امتحان دوم قبول شود. در این صورت $P(A)=P(B)=۰/۹$ و $P(A\cap B)=۰/۸۵$. می‌خواهیم $P(A|B)$ را حساب کنیم. توجه کنید که طبق فرمول احتمال شرطی می‌توان نوشت

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۰/۸۵}{۰/۹}=\frac{۸۵}{۹۰}=\frac{۱۷}{۱۸}$$

۲۸۹۱ **۳** ابتدا توجه کنید که چون a ، b و c مثبت هستند، پس $\Delta=b^۲-۴a(-c)=b^۲+۴ac>۰$ ، بنابراین معادلهٔ مورد نظر همواره جواب دارد.

اکنون توجه کنید که چون مجموع جواب‌های هر معادله از حاصل‌ضرب آن‌ها دو واحد بیشتر است، پس

$$-\frac{b}{a}=-\frac{c}{a}+۲\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } a}-b=-c+۲a\Rightarrow c-b=۲a$$

چون $۲a$ عددی زوج است، پس b و c یا هر دو زوج هستند یا هر دو فرد. همچنین چون $c-b=۲a>۰$ ، پس $c>b$. توجه کنید که در مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,۹\}$ ، اعداد ۲ ، ۴ ، ۶ و ۸ زوج هستند. پس دو عدد زوج را به $\binom{۴}{۲}$ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم (که عدد بزرگ‌تر را c و عدد کوچک‌تر را b در نظر می‌گیریم). همین‌طور، در مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,۹\}$ عددهای ۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷ و ۹ فرد هستند. پس دو عدد فرد را به $\binom{۵}{۲}$ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم (که باز هم عدد بزرگ‌تر را c و عدد کوچک‌تر را b در نظر می‌گیریم). با معلوم شدن b و c ، عدد a نیز به‌طور خودکار معلوم می‌شود. بنابراین طبق اصل جمع، پاسخ مسئله برابر است با

$$\binom{۴}{۲}+\binom{۵}{۲}=۶+۱۰=۱۶$$

۲۸۹۲ **۱** **روش اول:** دانش‌آموزان باید یکی در میان بنشینند. ابتدا، مثلاً، چهار دانش‌آموز پایهٔ یازدهم را دور میز گرد می‌نشانیم. این کار به $(۴-۱)!=۶$ حالت امکان‌پذیر است. اکنون چهار صندلی خالی بین آن‌ها داریم که چهار دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم به $۴!$ حالت می‌توانند روی آن‌ها بنشینند. بنابراین طبق اصل ضرب، پاسخ مسئله برابر است با $۶\times ۴!=۱۴۴$.

روش دوم: ابتدا فرض کنید این دانش‌آموزان بخواهند در یک ردیف کنار هم و به‌صورت یکی در میان بنشینند. در این صورت طبق تعمیم اصل ضرب، تعداد راه‌های قرار گرفتن آن‌ها برابر است با $۲\times ۴!\times ۴!$. اکنون اگر این دانش‌آموزان دور یک میز گرد قرار بگیرند، چون نفرات ابتدا و انتها برای آن‌ها معنی ندارد، پس تعداد راه‌های قرار گرفتن آن‌ها $\frac{۱}{۸}$ برابر حالت قبل خواهد بود. در نتیجه پاسخ مسئله برابر است با

$$\frac{۱}{۸}\times ۲\times ۴!\times ۴!=۱۴۴$$

۲۸۹۳ **۱** تعداد کل عضوهای زیرمجموعهٔ مورد نظر، یعنی S به این صورت به‌دست می‌آید. واضح است که تعداد اعداد طبیعی یک‌رقمی که با ارقام ۱ تا ۵ می‌توان ساخت، ۵ تاست. برای به‌دست آوردن تعداد اعداد دورقمی (بدون تکرار ارقام) دو جایگاه یکان و دهگان به‌صورت $\underset{\text{یکان}}{\bigcirc}\ \underset{\text{دهگان}}{\bigcirc}$ در نظر می‌گیریم. برای جایگاه دهگان ۵ انتخاب (هریک از ارقام ۱ تا ۵) و برای جایگاه یکان ۴ انتخاب وجود دارد. توجه کنید رقمی را که برای دهگان انتخاب شد، برای یکان نمی‌توان انتخاب کرد. در نتیجه بنابر اصل ضرب، تعداد اعداد دورقمی با شرایط مورد نظر برابر ۵×۴ است. برای به‌دست آوردن تعداد اعداد سه‌رقمی سه جایگاه $\bigcirc\bigcirc\bigcirc$ را در نظر می‌گیریم که برای جایگاه اول ۵ انتخاب، برای جایگاه دوم ۴ انتخاب (عدد جایگاه اول را نمی‌توانیم انتخاب کنیم) و برای جایگاه سوم ۳ انتخاب (عددهای جایگاه‌های اول و دوم را نمی‌توانیم انتخاب کنیم) وجود دارد. پس بنابر تعمیم اصل ضرب، تعداد اعداد سه‌رقمی با شرایط مورد نظر برابر است با $۵\times ۴\times ۳$. به‌طور مشابه تعداد اعداد چهاررقمی و پنج‌رقمی به‌ترتیب برابر $۵\times ۴\times ۳\times ۲$ و $۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱$ است. خلاصهٔ توضیح بالا در جدول زیر آمده است:

تعداد رقم‌ها	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد عددها	۵	۵×۴	$۵\times ۴\times ۳$	$۵\times ۴\times ۳\times ۲$	$۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱$

بنابراین طبق تعمیم اصل جمع،

$$n(S)=۵+۲۰+۶۰+۱۲۰+۱۲۰=۳۲۵$$

اکنون اگر A این پیشامد باشد که عضو انتخابی بر ۴ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه تعداد اعضای A به این صورت به‌دست می‌آید. از میان اعداد یک‌رقمی ۱ تا ۵، فقط عدد ۴ بر ۴ بخش‌پذیر است. از میان اعداد دورقمی عضو S، فقط اعداد ۱۲، ۲۴، ۳۲ و ۵۲ بر ۴ بخش‌پذیرند. توجه کنید که یک عدد زمانی بر ۴ بخش‌پذیر است که عدد حاصل از دو رقم سمت راست آن بر ۴ بخش‌پذیر باشد، پس برای به‌دست آوردن تعداد اعداد سه‌رقمی، چهاررقمی و پنج‌رقمی عضو S و بخش‌پذیر بر ۴ دو رقم سمت راست را اعداد ۱۲، ۲۴، ۳۲ و ۵۲ در نظر می‌گیریم، سپس تعداد انتخاب‌های جایگاه‌های دیگر را می‌شماریم. مثلاً برای به‌دست آوردن تعداد اعداد چهاررقمی بخش‌پذیر بر ۴ که دو رقم سمت راست آن ۱۲ است، باید تعداد انتخاب‌های دو جایگاه را به‌دست آوریم: ○○۱۲ برای جایگاه اول ۳ انتخاب وجود دارد چون رقم‌های ۱ و ۲ را نمی‌توانیم انتخاب کنیم. برای جایگاه دوم ۲ انتخاب وجود دارد چون رقم‌های ۱ و ۲ و رقمی را که برای جایگاه اول انتخاب شد، نمی‌توانیم انتخاب کنیم. در نتیجه بنابر اصل ضرب، تعداد اعداد چهاررقمی بخش‌پذیر بر ۴ که دو رقم سمت راست آن‌ها ۱۲ است، برابر ۳×۲ است. توضیح بالا در جدول زیر جمع‌بندی شده است:

تعداد رقم‌ها	۱	۲	۳	۴	۵
شکل کلی عدد	۴	۱۲	○۱۲	○○۱۲	○○○۱۲
		۲۴	○۲۴	○○۲۴	○○○۲۴
		۳۲	○۳۲	○○۳۲	○○○۳۲
		۵۲	○۵۲	○○۵۲	○○○۵۲
تعداد عددها	۱	۴	۴×۳	۴×۳×۲	۴×۳×۲×۱

بنابراین طبق تعمیم اصل جمع،

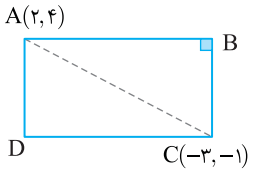
$$n(A)=1+4+12+24+24=65$$

در نتیجه $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{65}{325}=\frac{1}{5}$.

۲۸۹۴ (۳)

روش اول:

ابتدا معادلهٔ خطی را که ضلع AB روی آن است، می‌نویسیم



$$y-4=3(x-2)\Rightarrow 3x-y-2=0$$

فاصلهٔ نقطهٔ C از خط به‌دست آمده برابر است با

$$CB=\frac{|3(-3)-(-1)-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

از طرف دیگر،

$$AC=\sqrt{(2+3)^2+(4+1)^2}=\sqrt{50}$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC، طول AB را به‌دست می‌آوریم

$$AB^2+BC^2=AC^2\Rightarrow AB^2+10=50\Rightarrow AB=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

پس محیط مستطیل برابر است با $2(\sqrt{10}+2\sqrt{10})=6\sqrt{10}$.

روش دوم: ابتدا معادلات اضلاع AB و BC را می‌نویسیم

$$AB: 3x-y-2=0$$

$$BC\perp AB\Rightarrow m_{BC}=-\frac{1}{m_{AB}}=-\frac{1}{3}\Rightarrow y-(-1)=-\frac{1}{3}(x-(-3))$$

$$BC: x+3y+6=0$$

محل تلاقی اضلاع AB و BC همان نقطهٔ B است.

$$\begin{cases}3x-y-2=0\\ x+3y+6=0\end{cases}\Rightarrow B(0,-2)$$

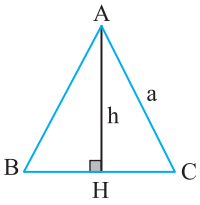
اکنون طول پاره‌خط‌های AB و BC را به‌دست می‌آوریم و سپس محیط مستطیل را محاسبه می‌کنیم.

$$AB=\sqrt{(2-0)^2+(4+2)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

$$BC=\sqrt{(0+3)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

در نتیجه محیط مستطیل $=2(AB+BC)=2(2\sqrt{10}+\sqrt{10})=6\sqrt{10}$

۲۸۹۵ (۲)



توجه کنید که $\frac{\sqrt{3}}{2}a=h$، پس $a=\frac{2}{\sqrt{3}}h$، در نتیجه $3a=\frac{3\times 2h}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}h$، یعنی محیط مثلث $=3a=2\sqrt{3}h$. از طرف دیگر، چون محیط مثلث برابر $\sqrt{270}$ است، پس

$$2\sqrt{3}h=\sqrt{270}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{270}}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{2}\sqrt{10}$$

اگر مختصات نقطهٔ A به‌صورت (a,b) باشد، آن‌گاه

$$h=AH=\frac{|3a-b-5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|3a-b-5|}{\sqrt{10}}=\frac{3}{2}\sqrt{10}$$

$$|3a-b-5|=\frac{3}{2}\sqrt{10}\times\sqrt{10}=15 \qquad (*)$$

از طرف دیگر، شیب خطی که ضلع BC روی آن است، برابر ۳ است. پس شیب خطی که ارتفاع AH روی آن است، برابر $-\frac{1}{3}$ است. به این ترتیب،

$$\frac{b-1}{a-2}=-\frac{1}{3}\Rightarrow 3b-3=2-a\Rightarrow a=5-3b$$

بنابراین اگر در تساوی (*) به‌جای a قرار دهیم $5-3b$، به‌دست می‌آید

$$|3(5-3b)-b-5|=15$$

$$|10-10b|=15\Rightarrow\begin{cases}10-10b=15\\ 10-10b=-15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{13}{2}\\ b=\frac{5}{2}\Rightarrow a=-\frac{5}{2}\end{cases}$$

در نتیجه A می‌تواند یکی از نقطه‌های $(\frac{13}{2},-\frac{1}{2})$ و $(-\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ باشد.

۲۸۹۶ (۱)

توجه کنید که

$$\begin{cases}x^2+y^2+2y-3=0\\ x^2+y^2+2x-3=0\end{cases}\xrightarrow{\text{معادلهٔ دوم را از معادلهٔ اول کم می‌کنیم}}$$

$$2y-3-(2x-3)=0\Rightarrow 2y-2x=0\Rightarrow y=x$$

۲۸۹۷ (۱)

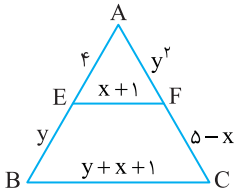
بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{4}{4+y}=\frac{x+1}{y+x+1}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{4}{y}=\frac{x+1}{y}\Rightarrow 4=x+1\Rightarrow x=3$$

$$\frac{4}{y}=\frac{y^2}{5-x}\xrightarrow{x=3}\frac{4}{y}=\frac{y^2}{5-3}\Rightarrow y^3=8\Rightarrow y=2$$

همچنین، بنابر قضیهٔ تالس،

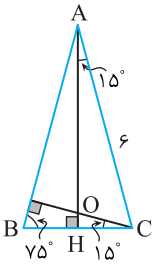
بنابراین $y-2x=2-6=-4$.



۲۸۹۸ (۴)

روش اول:

ابتدا توجه کنید که چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس $A\hat{C}B=A\hat{B}C=75^\circ$، در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC،



$$H\hat{A}C=90^\circ-75^\circ=15^\circ$$

$$\sin 15^\circ=\frac{HC}{AC}\Rightarrow HC=6\sin 15^\circ$$

همین‌طور، چون $\hat{B}=۷۵^\circ$، پس $O\hat{C}B=۹۰^\circ-۷۵^\circ=۱۵^\circ$. در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHC می‌توان نوشت $\tan ۱۵^\circ=\frac{OH}{HC}\Rightarrow OH=HC\times\tan ۱۵^\circ$

اکنون توجه کنید که

$$\sin^۲\alpha=\frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}\Rightarrow \sin^۲ ۱۵^\circ=\frac{۱-\cos ۳۰^\circ}{۲}=\frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}$$

$$\sin ۱۵^\circ=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}$$

$$\cos^۲ ۱۵^\circ=۱-\sin^۲ ۱۵^\circ=۱-\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴}\Rightarrow \cos ۱۵^\circ=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}$$

در نتیجه $\tan ۱۵^\circ=\frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}=\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}}$

صورت و مخرج کسر زیر رادیکال را در مزدوج $۲+\sqrt{۳}$، یعنی $۲-\sqrt{۳}$ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید $\tan ۱۵^\circ=\sqrt{\frac{(۲-\sqrt{۳})^۲}{۴-۳}}=۲-\sqrt{۳}$

بنابراین

$$HC=۶\sin ۱۵^\circ=۶\times\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}=۳\sqrt{۲-\sqrt{۳}}$$

$$OH=HC\times\tan ۱۵^\circ=۳\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\times(۲-\sqrt{۳})$$

در نتیجه

$$S_{OHC}=\frac{۱}{۲}HC\times OH=\frac{۱}{۲}\times۳\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\times۳\sqrt{۲-\sqrt{۳}}(۲-\sqrt{۳})$$

$$=\frac{۹}{۲}(۲-\sqrt{۳})^۲=\frac{۹}{۲}(۷-۴\sqrt{۳})$$

عدد به‌دست آمده به این صورت در گزینه‌ها نیست، بنابراین آن را در مزدوج $۷-۴\sqrt{۳}$، یعنی $۷+۴\sqrt{۳}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم. پس

$$S_{OHC}=\frac{۹(۴۹-۴۸)}{۲(۷+۴\sqrt{۳})}=\frac{۹}{۲(۷+۴\sqrt{۳})}$$

روش دوم: مثلث‌های OHC و CHA به حالت (زز) متشابه هستند و نسبت تشابه آن‌ها برابر $\frac{OH}{CH}$ است. از طرف دیگر، $\frac{OH}{CH}=\tan ۱۵^\circ$. می‌دانیم $\tan ۱۵^\circ=۲-\sqrt{۳}$. بنابراین

$$\frac{\text{مساحت}(OHC)}{\text{مساحت}(CHA)}=(\frac{OH}{CH})^۲=(۲-\sqrt{۳})^۲$$

اما مساحت مثلث CHA برابر است با

$$\text{مساحت}(CHA)=\frac{CH\times AH}{۲}=\frac{۶\sin ۱۵^\circ\times۶\cos ۱۵^\circ}{۲}=۹\sin ۳۰^\circ=\frac{۹}{۲}$$

بنابراین مساحت مثلث OHC برابر است با

$$\text{مساحت}(OHC)=\text{مساحت}(CHA)\times(۲-\sqrt{۳})^۲=\frac{۹}{۲}(۷-۴\sqrt{۳})$$

عدد به‌دست آمده به این صورت در گزینه‌ها نیست، بنابراین آن را در مزدوج $۷-۴\sqrt{۳}$، یعنی $۷+۴\sqrt{۳}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم. پس

$$\text{مساحت}(OHC)=\frac{۹(۴۹-۴۸)}{۲(۷+۴\sqrt{۳})}=\frac{۹}{۲(۷+۴\sqrt{۳})}$$

۲۸۹۹ (۲) **روش اول:** با استفاده از اتحاد مزدوج می‌توان نوشت

$$(a+\frac{۱}{a}+\sqrt{۲})^۲(a+\frac{۱}{a}-\sqrt{۲})^۲=((a+\frac{۱}{a})^۲-(\sqrt{۲})^۲)^۲$$

$$=(a^۲+\frac{۱}{a^۲}+۲-۲)^۲=(a^۲+\frac{۱}{a^۲})^۲=a^۴+\frac{۱}{a^۴}+۲$$

اکنون توجه کنید که $a=\sqrt[۴]{۷-۴\sqrt{۳}}\Rightarrow a^۴=۷-۴\sqrt{۳}$

$$\frac{۱}{a^۴}=\frac{۱}{۷-۴\sqrt{۳}}\times\frac{۷+۴\sqrt{۳}}{۷+۴\sqrt{۳}}=\frac{۷+۴\sqrt{۳}}{۴۹-۴۸}=۷+۴\sqrt{۳}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$a^۴+\frac{۱}{a^۴}+۲=(۷-۴\sqrt{۳})+(۷+۴\sqrt{۳})+۲=۱۶$$

روش دوم: ابتدا توجه کنید که

$$a=\sqrt[۴]{۷-۴\sqrt{۳}}=\sqrt[۴]{(۲-\sqrt{۳})^۲}=\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\Rightarrow a^۲=۲-\sqrt{۳}$$

$$\frac{۱}{a^۲}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴-۳}=۲+\sqrt{۳}$$

بنابراین

$$(a+\frac{۱}{a}+\sqrt{۲})^۲(a+\frac{۱}{a}-\sqrt{۲})^۲=((a+\frac{۱}{a})^۲-(\sqrt{۲})^۲)^۲=(a^۲+\frac{۱}{a^۲}+۲-۲)^۲$$

$$=(a^۲+\frac{۱}{a^۲})^۲=(۲-\sqrt{۳}+۲+\sqrt{۳})^۲=۱۶$$

۲۹۰۰ (۳) فرض می‌کنیم پول اولیهٔ علی x و پول اولیهٔ اکرم y باشد. در این صورت

$$\begin{cases}x+y=۱۰۰\\(x-۱۰)(y+۱۰)=۴۷۵\end{cases}$$

از معادلهٔ اول به‌دست می‌آید $x=۱۰۰-y$ و در نتیجه معادلهٔ دوم را می‌توان این‌طور نوشت

$$(۱۰۰-y-۱۰)(y+۱۰)=۴۷۵\Rightarrow(۱۰۰-(y+۱۰))(y+۱۰)=۴۷۵$$

$$۱۰۰(y+۱۰)-(y+۱۰)^۲=۴۷۵\Rightarrow(y+۱۰)^۲-۱۰۰(y+۱۰)+۴۷۵=۰$$

اگر فرض کنیم $y+۱۰=A$، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$A^۲-۱۰۰A+۴۷۵=۰$$

از اتحاد جملهٔ مشترک استفاده و سمت چپ معادله را تجزیه می‌کنیم.

$$(A-۵)(A-۹۵)=۰\begin{cases}A=۵\Rightarrow y+۱۰=۵\Rightarrow y=-۵\ (\text{غ.ق.ق.})\\A=۹۵\Rightarrow y+۱۰=۹۵\Rightarrow y=۸۵\ \text{تومان}\end{cases}$$

۲۹۰۱ (۱) **روش اول:** توجه کنید که چون $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-x-۴=۰$ هستند، پس $x_۱+x_۲=۱$ و $x_۱x_۲=-۴$. اکنون می‌توانیم مجموع جواب‌های معادلهٔ جدید را به‌صورت زیر حساب کنیم:

$$S=(x_۱^۳+\frac{۱}{x_۲})+(x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱})=x_۱^۳+x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}$$

با استفاده از اتحاد $a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$ و نیز مخرج مشترک گرفتن، عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$S=(x_۱+x_۲)^۳-۳x_۱x_۲(x_۱+x_۲)+\frac{x_۱+x_۲}{x_۱x_۲}=۱-۳(-۴)(۱)+\frac{۱}{-۴}=\frac{۵۱}{۴}$$

همچنین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ جدید به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P=(x_۱^۳+\frac{۱}{x_۲})(x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱})=x_۱^۳x_۲^۳+x_۱^۲+x_۲^۲+\frac{۱}{x_۱x_۲}$$

$$=(x_۱x_۲)^۳+(x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲+\frac{۱}{x_۱x_۲}$$

$$=(-۴)^۳+۱-۲(-۴)+\frac{۱}{-۴}=-\frac{۲۲۱}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به صورت $x^۲-\frac{۵۱}{۴}x-\frac{۲۲۱}{۴}=۰$ است، که اگر دو طرف آن را در ۴ ضرب کنیم، می‌شود $۴x^۲-۵۱x-۲۲۱=۰$.

روش دوم: توجه کنید که

$$x=x^۲-۴\Rightarrow x^۲=x+۴\xrightarrow{\times x}x^۳=x^۲+۴x=(x+۴)+۴x=۵x+۴$$

بنابراین $x_۱^۳=۵x_۱+۴$ و $x_۲^۳=۵x_۲+۴$. از طرف دیگر،

$$x_۱x_۲=-۴\Rightarrow\frac{۱}{x_۱}=-\frac{x_۲}{۴},\quad\frac{۱}{x_۲}=-\frac{x_۱}{۴}$$

بنابراین

$$S=(x_1^3+\frac{1}{x_2})+(x_2^3+\frac{1}{x_1})=(5x_1+4-\frac{x_1}{4})+(5x_2+4-\frac{x_2}{4})$$
$$=\frac{19}{4}(x_1+x_2)+8=\frac{19}{4}(1)+8=\frac{51}{4}$$
$$P=(x_1^3+\frac{1}{x_2})(x_2^3+\frac{1}{x_1})=(5x_1+4-\frac{x_1}{4})(5x_2+4-\frac{x_2}{4})$$
$$=(\frac{19}{4}x_1+4)(\frac{19}{4}x_2+4)=(\frac{19}{4})^2x_1x_2+19(x_1+x_2)+16$$
$$=-\frac{19^2}{4}+19+16=-\frac{221}{4}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$x^2-\frac{51}{4}x-\frac{221}{4}=0\Rightarrow 4x^2-51x-221=0$$

۲۹۰۲ (۱) **روش اول:** می‌توان نوشت

$$f(\frac{\pi}{12})=32\cos^2\frac{\pi}{12}\cos^2\frac{2\pi}{12}\cos^2\frac{4\pi}{12}\cos^2\frac{8\pi}{12}\cos^2\frac{16\pi}{12}$$
$$=32\cos^2\frac{\pi}{12}\cos^2\frac{\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3}\cos^2\frac{2\pi}{3}\cos^2\frac{4\pi}{3}$$
$$=32\cos^2\frac{\pi}{12}(\frac{\sqrt{3}}{2})^2(\frac{1}{2})^2(-\frac{1}{2})^2(-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{8}\cos^2\frac{\pi}{12}$$

اکنون برای اینکه $\cos^2\frac{\pi}{12}$ را حساب کنیم، از اتحاد $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$f(\frac{\pi}{12})=\frac{3}{8}\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{3}{8}(\frac{1}{2}(1+\cos\frac{\pi}{6}))=\frac{3}{16}(1+\frac{\sqrt{3}}{2})$$
$$=\frac{6+3\sqrt{3}}{32}=\frac{6+\sqrt{27}}{32}$$

روش دوم:

$$f(x)=32(\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x\cos 16x)^2$$

اکنون عبارت داخل پرانتز را در $\sin x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$f(x)=32(\frac{\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x\cos 16x}{\sin x})^2$$

از اتحاد مثلثاتی $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ به‌دست می‌آید

$$f(x)=32(\frac{\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x\cos 4x\cos 8x\cos 16x}{\sin x})^2$$

به‌طور مشابه $\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{2}\sin 4x$، پس

$$f(x)=32(\frac{\frac{1}{4}\sin 4x\cos 4x\cos 8x\cos 16x}{\sin x})^2$$

به‌طور مشابه با انجام سه مرحلهٔ دیگر عبارت را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم.

$$f(x)=32(\frac{\frac{1}{8}\sin 8x\cos 8x\cos 16x}{\sin x})^2=32(\frac{\frac{1}{16}\sin 16x\cos 16x}{\sin x})^2$$
$$=32(\frac{\frac{1}{32}\sin 32x}{\sin x})^2=\frac{\sin^2 32x}{32\sin^2 x}$$

بنابراین

$$f(\frac{\pi}{12})=\frac{\sin^2\frac{32\pi}{12}}{32\sin^2\frac{\pi}{12}}=\frac{\sin^2(3\pi-\frac{4\pi}{12})}{32\sin^2\frac{\pi}{12}}=\frac{\sin^2\frac{\pi}{3}}{32\times\frac{1}{2}(1-\cos\frac{2\pi}{12})}$$
$$=\frac{\frac{3}{4}}{16(1-\frac{\sqrt{3}}{2})}=\frac{3}{32(2-\sqrt{3})}=\frac{3(2+\sqrt{3})}{32(4-3)}=\frac{6+\sqrt{27}}{32}$$

۲۹۰۳ (۳) توجه کنید که

$$\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})=\cos\alpha,\quad \sin(\alpha-\pi)=-\sin\alpha$$

از طرف دیگر،

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

چون انتهای کمان α در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی است، پس $\sin\alpha<0$، یعنی $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$. در نتیجه

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{|\tan^2\alpha-1|}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}}{|\frac{5}{4}-1|}=\frac{\frac{2-\sqrt{5}}{3}}{\frac{1}{4}}=\frac{4(2-\sqrt{5})}{3}$$

۲۹۰۴ (۲) معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$5\sin^2 x+2\cos 3x+2=0\Rightarrow 5\sin^2 x+2(\cos 3x+1)=0$$
$$5\sin^2 x+2(2\cos^2\frac{3x}{2})=0\Rightarrow 5\sin^2 x+4\cos^2\frac{3x}{2}=0$$

چون $5\sin^2 x$ و $4\cos^2\frac{3x}{2}$ غیرمنفی‌اند، باید هر دو برابر صفر باشند، بنابراین جواب‌های مشترک معادله‌های $\sin^2 x=0$ و $\cos^2\frac{3x}{2}=0$ جواب‌های مورد نظر هستند:

$$\sin^2 x=0\Rightarrow\sin x=0\Rightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\cos^2\frac{3x}{2}=0\Rightarrow\cos\frac{3x}{2}=0\Rightarrow\frac{3x}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$$

برای اینکه جواب‌های در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ را پیدا کنیم، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

k	-2	-1	0	1	2
$k\pi$	~~-2π~~	$-\pi$	0	π	~~2π~~
$(2k+1)\frac{\pi}{3}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π	~~$\frac{5\pi}{3}$~~

از این جدول معلوم می‌شود که جواب‌های مورد نظر $x=-\pi$ و $x=\pi$ هستند که تعداد آن‌ها دوتاست.

۲۹۰۵ (۴) **روش اول:** باید نامعادلهٔ $|x^2-2|-x>0$ را حل کنیم:

$$|x^2-2|-x>0\Rightarrow|x^2-2|>x$$

توجه کنید که همواره $|x^2-2|\geq 0$، پس تمام xهای منفی و نیز $x=0$ در این نامعادله صدق می‌کنند:

$$x\in(-\infty,0]\qquad(1)$$

اکنون فرض می‌کنیم x مثبت باشد.

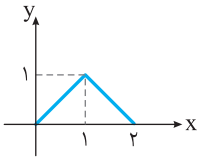
$$|x^2-2|>x\Rightarrow\begin{cases}x^2-2>x\Rightarrow x^2-x-2=\underbrace{(x+1)}_{+}(x-2)>0\\ x^2-2<-x\Rightarrow x^2+x-2=(x-1)\underbrace{(x+2)}_{+}<0\end{cases}$$
$$\begin{cases}x-2>0\\ x-1<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in(2,+\infty)&(2)\\ x\in(0,1)&(3)\end{cases}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر، یعنی دامنهٔ تابع f برابر اجتماع جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) است:

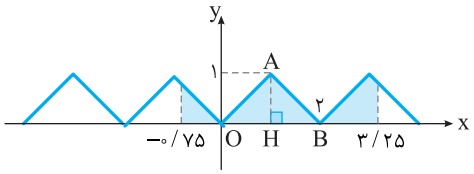
$$D_f=(-\infty,0]\cup(0,1)\cup(2,+\infty)=(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$$

روش دوم: توجه کنید که عدد ۲ در دامنهٔ تابع f نیست، زیرا $f(۲)=\log_{۴}(|۴-۲|-۲)=\log_{۴}۰$ که تعریف نشده است. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) حذف می‌شوند. زیرا عدد ۲ عضو آن‌ها هست. همچنین عدد صفر در دامنهٔ تابع f هست، زیرا $f(۰)=\log_{۴}(|۰-۲|-۰)=\log_{۴}۲=\frac{۱}{۲}$. بنابراین گزینهٔ (۱) حذف می‌شود، زیرا عدد صفر عضو آن نیست. در نتیجه گزینهٔ (۴) درست است.

۲۹۰۶ **۱** ابتدا نمودار تابع f را در بازهٔ $[۰,۲]$ رسم می‌کنیم:



چون تابع f متناوب با دورهٔ تناوب ۲ است، پس نمودار آن در بازه‌هایی به‌طول ۲ تکرار می‌شود.



از روی این شکل معلوم است که مساحت مورد نظر، دو برابر مساحت مثلث OAB است. بنابراین $S=۲S_{OAB}=۲(\frac{۱}{۲}AH\times OB)=۱\times۲=۲$

۲۹۰۷ **۲** ابتدا نشان می‌دهیم تابع $f(x)=\sqrt{x+۳}-۱$ با دامنهٔ $D_f=[-۳,+\infty)$ اکیداً صعودی است. می‌توان نوشت

$$x_۱,x_۲\geq-۳: x_۱<x_۲\Rightarrow x_۱+۳<x_۲+۳\Rightarrow\sqrt{x_۱+۳}<\sqrt{x_۲+۳}$$
$$\sqrt{x_۱+۳}-۱<\sqrt{x_۲+۳}-۱\Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲)$$

چون تابع f اکیداً صعودی است، پس نمودار تابع f نمودار تابع وارون خود را روی خط $y=x$ قطع می‌کند. در نتیجه باید معادلهٔ $\sqrt{x+۳}-۱=x$ را حل کنیم تا طول نقطهٔ M به‌دست بیاید:

$$\sqrt{x+۳}-۱=x\Rightarrow\sqrt{x+۳}=x+۱\xrightarrow{\text{دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم}}$$
$$x+۳=(x+۱)^۲\Rightarrow x+۳=x^۲+۲x+۱\Rightarrow x^۲+x-۲=۰$$
$$\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}(x-۱)(x+۲)=۰\Rightarrow x=۱, x=-۲$$

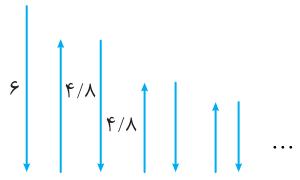
توجه کنید که $x=-۲$ در معادلهٔ مورد نظر صدق نمی‌کند. بنابراین $x=۱$ و عرض نقطهٔ M هم برابر ۱ می‌شود ($f(۱)=\sqrt{۱+۳}-۱=۲-۱=۱$). در نتیجه فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات برابر است با $OM=\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}$.

۲۹۰۸ **۱** توجه کنید که هر بار که توپ بالا می‌رود، به همان اندازه هم پایین می‌آید. بنابراین مجموع مورد نظر برابر است با

$$S=۶+۲(۰/۸\times۶+(۰/۸)^۲\times۶+\cdots+(۰/۸)^{۹۹}\times۶)$$
$$=۶+۲\times۶(۰/۸+(۰/۸)^۲+\cdots+(۰/۸)^{۹۹})$$

عبارت داخل پرانتز مجموع ۹۹ جملهٔ نخست یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱=۰/۸$ و قدرنسبت $q=۰/۸$ است. بنابراین $S=۶+۱۲\times۰/۸\times\frac{(۰/۸)^{۹۹}-۱}{۰/۸-۱}$

توجه کنید که می‌توانیم از $(۰/۸)^{۹۹}$ صرف‌نظر کنیم، زیرا عددی بسیار کوچک است. بنابراین $S\simeq۶+۱۲\times۰/۸\times\frac{۱}{۱-۰/۸}=۵۴$ متر



۲۹۰۹ **۱** به تبدیلات زیر توجه کنید:

$$y=۲^{x+|x|}\xrightarrow{\text{۳ واحد به چپ}}y=۲^{x+۳+|x+۳|}$$
$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به پایین}}y=۲^{x+۳+|x+۳|}-۲$$

بنابراین باید جواب معادلهٔ زیر را پیدا کنیم:

$$۲^{x+۳+|x+۳|}-۲=۰\Rightarrow۲^{x+۳+|x+۳|}=۲^۱\Rightarrow x+۳+|x+۳|=۱$$
$$|x+۳|=-x-۲\Rightarrow\begin{cases}x+۳=-x-۲\Rightarrow x=-\frac{۵}{۲}\\-(x+۳)=-x-۲\ \text{جواب ندارد}\end{cases}$$

۲۹۱۰ **۳** **روش اول:** مقدار x را برابر ۹ قرار می‌دهیم و معادله را ساده می‌کنیم.

$$۲\log_{۹}a+\log_{a}\sqrt{۹}=۲\Rightarrow۲\log_{۳^۲}a+\log_{a}۳=۲$$
$$۲\times(\frac{۱}{۲}\log_{۳}a)+\log_{a}۳=۲\Rightarrow\log_{۳}a+\frac{۱}{\log_{۳}a}=۲$$

دو طرف معادله را در $\log_{۳}a$ ضرب می‌کنیم:

$$(\log_{۳}a)^۲+۱=۲\log_{۳}a\Rightarrow(\log_{۳}a)^۲-۲\log_{۳}a+۱=۰$$

اکنون با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله می‌توان نوشت

$$(\log_{۳}a-۱)^۲=۰\Rightarrow\log_{۳}a=۱\Rightarrow a=۳^۱=۳$$

روش دوم: می‌توان نوشت

$$۲\log_{x}a+\log_{a}\sqrt{x}=۲\Rightarrow\log_{\frac{۱}{x^۲}}a+\log_{a}\sqrt{x}=۲$$
$$\log_{\sqrt{x}}a+\log_{a}\sqrt{x}=۲\Rightarrow\log_{\sqrt{x}}a+\frac{۱}{\log_{\sqrt{x}}a}=۲$$

چون مجموع $\log_{\sqrt{x}}a$ و معکوسش برابر ۲ شده است و هر عدد حقیقی با معکوسش هم‌علامت است، پس $\log_{\sqrt{x}}a>۰$. بنابراین

$$\log_{\sqrt{x}}a=۱\xrightarrow{x=۹}\log_{\sqrt{۹}}a=۱\Rightarrow\log_{۳}a=۱\Rightarrow a=۳^۱=۳$$

۲۹۱۱ **۴** می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۴-x^۲+۱}+\sqrt{x^۲+۱}-x^۲}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۴}+\sqrt{x^۲}-x^۲}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x^۲|+|x|-x^۲}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۲-x-x^۲}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-۱$$

۲۹۱۲ **۳** **روش اول:** چون خط $x=۲$ محور تقارن سهمی است و سهمی از نقطهٔ $(۰,۰)$ می‌گذرد، پس سهمی از نقطهٔ $(۴,۰)$ نیز می‌گذرد (شکل را ببینید). بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=a(x-۰)(x-۴)$ یا $y=ax(x-۴)$ است. چون این سهمی از نقطهٔ $(۲,۱)$ نیز می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند. بنابراین $۱=a\times۲(۲-۴)\Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$

در نتیجه $f(x)=-\frac{۱}{۴}x(x-۴)$. از طرف دیگر، چون خط راست مورد نظر از نقطه‌های $(۰,۱)$ و $(۴,۰)$ می‌گذرد، معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y-۰=\frac{۰-۱}{۴-۰}(x-۴)\Rightarrow y=-\frac{۱}{۴}(x-۴)$$

بنابراین $g(x)=-\frac{۱}{۴}(x-۴)$. اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to۴^-}\frac{f(x)+g(x)}{۴-x}=\lim_{x\to۴^-}\frac{-\frac{۱}{۴}x(x-۴)-\frac{۱}{۴}(x-۴)}{۴-x}$$
$$=\lim_{x\to۴^-}\frac{-\frac{۱}{۴}(x-۴)(x+۱)}{-(x-۴)}=\lim_{x\to۴^-}\frac{x+۱}{۴}=\frac{۵}{۴}$$

روش دوم: چون $f(۴)=g(۴)=۰$ ، پس حد مورد نظر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\lim_{x\to ۴^-}\frac{f(x)+g(x)}{۴-x}=-\lim_{x\to ۴^-}\frac{(f(x)-f(۴))+(g(x)-g(۴))}{x-۴}$$
$$=-(\lim_{x\to ۴^-}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}+\lim_{x\to ۴^-}\frac{g(x)-g(۴)}{x-۴})=-(f'_-(۴)+g'_-(۴))$$

از طرف دیگر، سهمی f و خط راست g همه‌جا مشتق‌پذیرند. پس مقدار حد مورد نظر برابر است با $-(f'(۴)+g'(۴))$. اکنون توجه کنید که

$$f(x)=-\frac{۱}{۴}x(x-۴)=-\frac{۱}{۴}x^۲+x\Rightarrow f'(x)=-\frac{۱}{۲}x+۱\Rightarrow f'(۴)=-۱$$
$$g'(۴)=m=-\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه مقدار حد مورد نظر برابر است با $-(-۱-\frac{۱}{۴})=\frac{۵}{۴}$.

۲۹۱۳ (۱) ابتدا ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم. برای این کار x را بر حسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}\Rightarrow\sqrt{x}+۱=y\sqrt{x}-y\Rightarrow\sqrt{x}-y\sqrt{x}=-y-۱$$
$$\sqrt{x}(۱-y)=-(y+۱)\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{y+۱}{y-۱}\Rightarrow x=(\frac{y+۱}{y-۱})^۲$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=(\frac{x+۱}{x-۱})^۲$. به این ترتیب

$$(f^{-۱})'(x)=۲(\frac{x+۱}{x-۱})(\frac{-۲}{(x-۱)^۲})=\frac{-۴(x+۱)}{(x-۱)^۳}$$
$$\text{شیب خط مماس}=(f^{-۱})'(۲)=\frac{-۴(۲+۱)}{(۲-۱)^۳}=-۱۲$$

۲۹۱۴ (۱) توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases}f(۱)=۰ & x>۰\\ f(۰)=۰ & x=۰\\ f(-۱)=۰ & x<۰\end{cases}$$

بنابراین همواره $(fog)(x)=۰$. در نتیجه همواره

$$((fof)og)(x)=(fo(fog))(x)=f((fog)(x))=f(۰)=۰$$

یعنی $(fof)og$ تابع ثابت صفر است، پس نقطهٔ ناپیوستگی ندارد.

۲۹۱۵ (۲) ابتدا توجه کنید که مطابق جدول تعیین علامت زیر، عبارت $۳-x^۲$ روی بازهٔ $[-۱/۵,\sqrt{۳}]$ نامنفی است.

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		$-۱/۵$		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
$۳-x^۲$		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	

بنابراین $|۳-x^۲|=۳-x^۲$ و در نتیجه $f(x)=x(۳-x^۲)=۳x-x^۳$

اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=۳-۳x^۲=۳(۱-x^۲),\quad f'(x)=۰\Rightarrow ۱-x^۲=۰\Rightarrow x=\pm ۱$$

بنابراین باید مقادیر $f(\pm ۱)$ ، $f(-۱/۵)$ و $f(\sqrt{۳})$ را با هم مقایسه کنیم:

$$f(۱)=۲,\quad f(-۱)=-۲,\quad f(-۱/۵)=-\frac{۹}{۸},\quad f(\sqrt{۳})=۰$$

در نتیجه مینیمم مطلق تابع f برابر است با $f(-۱)=-۲$ (توجه کنید که چون مقادیر f به‌ازای عددهای مثبت، مثبت‌اند، پس کافی بود مقادیر تابع f را فقط برای عددهای منفی حساب می‌کردیم).

۲۹۱۶ (۲) اگر A نقطهٔ $(x,\sqrt[۳]{-x})$ ، یعنی نقطهٔ $(x,-\sqrt[۳]{x})$ باشد، آن‌گاه A' ، یعنی قرینهٔ A نسبت به نیمساز نواحی دوم و چهارم نقطهٔ $(\sqrt[۳]{x},-x)$ است. بنابراین

$$AA'=\sqrt{(x-\sqrt[۳]{x})^۲+(-\sqrt[۳]{x}+x)^۲}=\sqrt{۲(x-\sqrt[۳]{x})^۲}=\sqrt{۲}|x-\sqrt[۳]{x}|$$

چون $x\in[۰,۱]$ ، پس $x\le\sqrt[۳]{x}$ و در نتیجه $AA'=\sqrt{۲}(\sqrt[۳]{x}-x)$. بنابراین باید ماکزیمم مطلق تابع $g(x)=\sqrt{۲}(\sqrt[۳]{x}-x)$ را روی بازهٔ $[۰,۱]$ پیدا کنیم. توجه کنید که

$$g'(x)=\sqrt{۲}(\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}-۱)$$
$$g'(x)=۰\Rightarrow\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}-۱=۰\Rightarrow\sqrt[۳]{x^۲}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=\frac{۱}{\sqrt{۲۷}}=\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$$

چون $g(۱)=g(۰)=۰$ ، پس ماکزیمم مطلق تابع g به‌ازای $x=\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$ به‌دست می‌آید و برابر است با (توجه کنید که $\sqrt[۳]{x^۲}=\frac{۱}{۳}$ ، پس $\sqrt[۳]{x}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$)

$$g(\frac{۱}{۳\sqrt{۳}})=\sqrt{۲}(\frac{۱}{\sqrt{۳}}-\frac{۱}{۳\sqrt{۳}})=\sqrt{۲}\times\frac{۲}{۳\sqrt{۳}}=\frac{۴}{۳\sqrt{۶}}$$

۲۹۱۷ (۴) ابتدا توجه کنید که وقتی $x\to(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^-$ ، آن‌گاه $g(x)\to ۲^+$. پس در یک همسایگی چپ $x=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ، ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x)=(۲x)^۳$ است، اکنون می‌توان نوشت $(fog)'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})f'_+(g(\frac{\sqrt{۵}}{۲}))=g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})f'_+(۲)$

مقدار $g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})$ را به‌سادگی می‌توان حساب کرد

$$g(x)=(x^۲-۱)^{-\frac{۱}{۲}}\Rightarrow g'(x)=-\frac{۱}{۲}(۲x)(x^۲-۱)^{-\frac{۳}{۲}}=\frac{-x}{\sqrt{(x^۲-۱)^۳}}$$
$$g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=\frac{-\frac{\sqrt{۵}}{۲}}{(\frac{۱}{۲})^۳}=-۴\sqrt{۵}$$

از طرف دیگر، $f(x)=(۲x)^۳=۸x^۳\Rightarrow f'(x)=۲۴x^۲\Rightarrow f'_+(۲)=۹۶$

پس $(fog)'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=(-۴\sqrt{۵})\times۹۶=(-۴۸\sqrt{۵})(۸)$

یعنی $(fog)'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲})$ هشت برابر $-۴۸\sqrt{۵}$ است.

۲۹۱۸ (۱) توجه کنید که $g'(x)=۲ax+۵$ و $g''(x)=۲a$. از طرف دیگر،

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & x\le ۲\\ g'(x) & x>۲\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}g'(x) & x\le ۲\\ g''(x) & x>۲\end{cases}$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس

$$g(۲)=g'(۲)\Rightarrow ۴a+۱۰+b=۴a+۵\Rightarrow b=-۵$$
$$g'(۲)=g''(۲)\Rightarrow ۴a+۵=۲a\Rightarrow a=-\frac{۵}{۲}\qquad\Rightarrow a+b=-\frac{۱۵}{۲}$$

۲۹۱۹ (۳) هر نقطه روی سهمی $y^۲=۴x$ به‌صورت $A(\frac{t^۲}{۴},t)$ است. فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ $M(۳,۰)$ برابر است با

$$AM=\sqrt{(\frac{t^۲}{۴}-۳)^۲+(t-۰)^۲}=\sqrt{\frac{t^۴}{۱۶}-\frac{۳}{۲}t^۲+۹+t^۲}$$
$$=\sqrt{\frac{t^۴-۸t^۲+۱۴۴}{۱۶}}=\frac{۱}{۴}\sqrt{(t^۲-۴)^۲+۱۲۸}$$

بنابراین کمترین مقدار AM به‌ازای $t^۲=۴$ به‌دست می‌آید و برابر است با $\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۲۸}=۲\sqrt{۲}$

۲۹۲۰ **۴** فرض کنید A پیشامد این باشد که یک خرگوش نر در اولین بارداری مادر متولد شده باشد و B پیشامد این باشد که یک خرگوش نر در دومین بارداری مادر متولد شده باشد. در این صورت، $P(A)=P(B)=۰/۷$ و $P(A\cap B)=۰/۶$. می‌خواهیم $P(A|B)$ را حساب کنیم. طبق فرمول احتمال شرطی می‌توان نوشت

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۰/۶}{۰/۷}=\frac{۶}{۷}$$

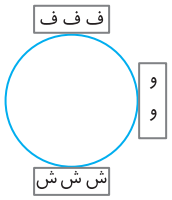
۲۹۲۱ **۳** ابتدا توجه کنید که چون a، b و c مثبت هستند، پس $\Delta=b^۲-۴a(-c)=b^۲+۴ac>۰$، بنابراین معادلهٔ مورد نظر همواره دو جواب دارد.

اکنون توجه کنید که چون فاصلهٔ حاصلضرب جواب‌های هر معادله با مجموع جواب‌های آن معادله دو واحد است، پس

$$|-\frac{c}{a}-(-\frac{b}{a})|=۲\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در a}}|b-c|=۲|a|=۲a$$

چون ۲a عددی زوج است، پس $b-c$ نیز زوج است، یعنی b و c یا هر دو زوج یا هر دو فرد هستند. اکنون توجه کنید که در مجموعهٔ $\{۱,۲,\dots,۹\}$، اعداد ۲، ۴، ۶ و ۸ زوج هستند. پس دو عدد زوج را به $\binom{۴}{۲}$ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم و به دو حالت می‌توانیم یکی را b و دیگری را c بگیریم. بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد انتخاب در این حالت برابر است با $۲\times\binom{۴}{۲}$. همین‌طور، در مجموعهٔ $\{۱,۲,\dots,۹\}$ عددهای ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ فرد هستند. پس دو عدد فرد را به $۲\times\binom{۵}{۲}$ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم. با معلوم شدن b و c، عدد a نیز به‌طور خودکار معلوم می‌شود. بنابراین طبق اصل جمع، پاسخ مسئله برابر است با $۳۲=۲\times\binom{۵}{۲}+۲\times\binom{۴}{۲}$.

۲۹۲۲ **۲** ۳ گروه داریم که می‌خواهند دور یک میز گرد قرار بگیرند، تعداد راه‌های انجام این کار برابر است با $۲!=(۳-۱)!$. در گروه فوتبال افراد را به $۳!$، در گروه والیبال افراد را به $۲!$ و در گروه شنا افراد را به $۳!$ طریق می‌توان مرتب کرد. بنابراین طبق تعمیم اصل ضرب، پاسخ مسئله برابر است با $۱۴۴=۲!۳!۲!۳!$.



۲۹۲۳ **۴** تعداد کل عضوهای زیرمجموعهٔ مورد نظر، یعنی S به این صورت به‌دست می‌آید. واضح است که تعداد اعداد طبیعی یک‌رقمی که با ارقام ۱ تا ۵ می‌توان ساخت، ۵ تاست. برای به‌دست آوردن تعداد اعداد دورقمی (بدون تکرار ارقام) دو جایگاه یکان و دهگان به‌صورت ○ ○ (یکان، دهگان) در نظر می‌گیریم. برای جایگاه دهگان ۵ انتخاب (هریک از ارقام ۱ تا ۵) و برای جایگاه یکان ۴ انتخاب وجود دارد. توجه کنید رقمی را که برای دهگان انتخاب شد، برای یکان نمی‌توان انتخاب کرد. در نتیجه بنابر اصل ضرب، تعداد اعداد دورقمی با شرایط مورد نظر برابر ۵×۴ است. برای به‌دست آوردن تعداد اعداد سه‌رقمی سه جایگاه ○○○ را در نظر می‌گیریم که برای جایگاه اول ۵ انتخاب، برای جایگاه دوم ۴ انتخاب (عدد جایگاه اول را نمی‌توانیم انتخاب کنیم) و برای جایگاه سوم ۳ انتخاب (عددهای جایگاه‌های اول و دوم را نمی‌توانیم انتخاب کنیم) وجود دارد. پس بنابر تعمیم اصل ضرب، تعداد اعداد سه‌رقمی با شرایط مورد نظر برابر است با $۵\times۴\times۳$. به‌طور مشابه تعداد اعداد چهاررقمی و پنج‌رقمی به‌ترتیب برابر $۵\times۴\times۳\times۲$ و $۵\times۴\times۳\times۲\times۱$ است. خلاصهٔ توضیح بالا در جدول زیر آمده است:

تعداد رقم‌ها	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد عددها	۵	۵×۴	۵×۴×۳	۵×۴×۳×۲	۵×۴×۳×۲×۱

بنابراین طبق تعمیم اصل جمع، $n(S)=۵+۲۰+۶۰+۱۲۰+۱۲۰=۳۲۵$

اگر A این پیشامد باشد که عضو انتخابی بر ۳ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه تعداد اعضای A به این صورت به‌دست می‌آید. از میان اعداد یک‌رقمی ۱ تا ۵، فقط عدد ۳ بر ۳ بخش‌پذیر است. از میان اعداد دورقمی عضو S، آن‌هایی بر ۳ بخش‌پذیرند که با ارقام ۱ و ۲، ۱ و ۵، ۲ و ۴ یا ۴ و ۵ ساخته می‌شوند. توجه کنید یک عدد زمانی بر ۳ بخش‌پذیر است که مجموع ارقامش بر ۳ بخش‌پذیر باشد. بنابراین تعداد اعداد دورقمی عضو S و بخش‌پذیر بر ۳ برابر است با $۴\times۲!$. به همین ترتیب، تعداد اعداد سه‌رقمی، چهاررقمی و پنج‌رقمی عضو S که بر ۳ بخش‌پذیرند، به‌دست می‌آید. مثلاً از میان اعداد چهاررقمی عضو S، آن‌هایی بر ۳ بخش‌پذیرند که با ارقام ۱، ۲، ۴ و ۵ ساخته می‌شوند و تعدادشان برابر است با $۴!$. توضیح بالا در جدول زیر جمع‌بندی شده است:

تعداد رقم‌ها	۱	۲	۳	۴	۵
رقم‌های به‌کار رفته	۳	۱,۲	۱,۲,۳	۱,۲,۴,۵	۱,۲,۳,۴,۵
		۱,۵	۱,۳,۵		
		۲,۴	۲,۳,۴		
		۴,۵	۳,۴,۵		
تعداد عددها	۱	۴×۲!	۴×۳!	۴!	۵!

بنابراین طبق تعمیم اصل جمع، $n(A)=۱+۸+۲۴+۲۴+۱۲۰=۱۷۷$

پس $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۷۷}{۳۲۵}$.

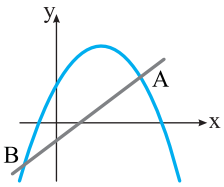
۲۹۲۴ **۴** ابتدا توجه کنید که چون عرض از مبدأ خط مورد نظر برابر -۱ است، پس این خط از نقطهٔ $(۰,-۱)$ می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ این خط به‌صورت زیر است:

$$y-۰=\frac{۰+۱}{۱-۰}(x-۱)\Rightarrow y=x-۱$$

طول نقطه‌های برخورد این خط و سهمی داده شده، یعنی A و B جواب‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$-x^۲+۲x+۱=x-۱\Rightarrow x^۲-x-۲=۰\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}$$

$$(x+۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x_A=۲, x_B=-۱$$



چون این نقطه‌ها روی خط $y=x-۱$ هستند، پس عرض آن‌ها برابر است با $y_A=۲-۱=۱$ و $y_B=-۱-۱=-۲$. بنابراین نقطه‌های مورد نظر $A(۲,۱)$ و $B(-۱,-۲)$ هستند که نقطهٔ وسط آن‌ها $(\frac{۲-۱}{۲},\frac{۱-۲}{۲})$، یعنی $(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$ است. از طرف دیگر، رأس سهمی $y=-x^۲+۲x+۱$ نقطهٔ $(۱,۲)$ است. بنابراین فاصلهٔ مورد نظر برابر است با $\sqrt{(۱-\frac{۱}{۲})^۲+(۲+\frac{۱}{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۲۶}}{۲}$. پس این فاصله برابر $\frac{۱}{۲}$ برابر $\sqrt{۲۶}$ است.

۲۹۲۵ **۲** فرض می‌کنیم مختصات نقطهٔ A به‌صورت (a,b) باشد. چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس میانهٔ AM ارتفاع نیز هست، یعنی خط AM بر خط BC عمود است. شیب خط BC برابر $-\frac{۱}{۲}$ است و شیب خط AM برابر با $\frac{b-۲}{a-۳}$ است.

بنابراین $-\frac{۱}{۲}\times\frac{b-۲}{a-۳}=-۱\Rightarrow b-۲=۲(a-۳)\Rightarrow b=۲a-۴$

از طرف دیگر، فاصلهٔ نقطهٔ A از خط BC برابر با $۵\sqrt{۵}$ است. بنابراین

$$\frac{|a+۲b-۷|}{\sqrt{۱^۲+۲^۲}}=۵\sqrt{۵} \xrightarrow{b=۲a-۴} \frac{|a+۴a-۸-۷|}{\sqrt{۵}}=۵\sqrt{۵}$$

$$|۵a-۱۵|=۲۵\Rightarrow\begin{cases}۵a-۱۵=۲۵\\۵a-۱۵=-۲۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۸\\a=-۲\end{cases}$$

در نتیجه طول نقطهٔ A هرکدام از دو مقدار ۸ و -۲ می‌تواند باشد که با توجه به گزینه‌ها، $a=-۲$ درست است.

۲۹۲۶ (۲) مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲y=۳$ نقطهٔ $(۰,-۱)$ و شعاع آن برابر است با $\frac{۱}{۲}\sqrt{۰^۲+۲^۲-۴(-۳)}=۲$. بنابراین شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر است با $\frac{۳}{۲}\times۲=۳$.

اگر مرکز این دایره نقطهٔ (α,β) باشد، معادلهٔ آن به‌صورت $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=۹$ است. چون نقطهٔ $(۰,-۳)$ روی این دایره است، پس مختصات آن در معادلهٔ دایره صدق می‌کنند، یعنی

$$(۰-\alpha)^۲+(-۳-\beta)^۲=۹\Rightarrow\alpha^۲+(۳+\beta)^۲=۹ \quad (۱)$$

چون دایره‌ها مماس داخلی هستند، پس فاصلهٔ مرکزهای آن‌ها برابر با اختلاف شعاع‌هایشان است، یعنی

$$\sqrt{(\alpha-۰)^۲+(\beta+۱)^۲}=۳-۲\Rightarrow\alpha^۲+(\beta+۱)^۲=۱ \quad (۲)$$

اکنون اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$(۳+\beta)^۲-(\beta+۱)^۲=۹-۱\Rightarrow۹+\beta^۲+۶\beta-\beta^۲-۲\beta-۱=۸\Rightarrow\beta=۰$$

از تساوی (۲) مقدار α را به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha^۲+(۰+۱)^۲=۱\Rightarrow\alpha=۰$$

بنابراین معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به‌صورت $x^۲+y^۲=۹$ است.

۲۹۲۷ (۳) چون $CD||EF$، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌های OCD و OFE متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{OC}{OF}=\frac{CD}{FE}=\frac{OD}{OE}\Rightarrow\frac{OC}{۳}=\frac{y}{۱}=\frac{۴}{y}\Rightarrow y=۲, OC=۶$$

مثلث‌های OCD و OAB متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{OD}{OB}=\frac{CD}{AB}\Rightarrow\frac{۴}{۴+x}=\frac{y}{۲x}\Rightarrow\frac{۴}{۴+x}=\frac{۲}{۲x}\Rightarrow۴x=۴+x\Rightarrow x=\frac{۴}{۳}$$

درنتیجه بنابر قضیهٔ تالس در مثلث OAB می‌توان نوشت

$$CD||AB\Rightarrow\frac{OC}{AC}=\frac{OD}{BD}\Rightarrow\frac{۶}{AC}=\frac{۴}{\frac{۴}{۳}}\Rightarrow AC=۲$$

۲۹۲۸ (۴) توجه کنید

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times AC\sin۴۵^\circ=\frac{۱}{۲}\times۸\times۸\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۱۶\sqrt{۲}$$

از طرف دیگر،

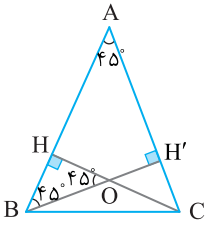
$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}CH\times AB\Rightarrow۱۶\sqrt{۲}=\frac{۱}{۲}\times CH\times۸\Rightarrow CH=\frac{۱۶\sqrt{۲}}{۴}=۴\sqrt{۲}$$

اکنون اگر فرض کنیم $BH=x$، آن‌گاه $AH=۸-x$. در نتیجه بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث AHC،

$$AH^۲+CH^۲=AC^۲\Rightarrow(۸-x)^۲+۳۲=۶۴$$

$$(۸-x)^۲=۳۲\xrightarrow{\sqrt{۳۲}=۴\sqrt{۲}}۸-x=۴\sqrt{۲}\Rightarrow x=۸-۴\sqrt{۲}$$

اکنون توجه کنید که در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH'، چون $\hat{A}=۴۵^\circ$، پس $A\hat{B}H'=۴۵^\circ$. بنابراین مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH متساوی‌الساقین نیز هست. پس $OH=BH=۸-۴\sqrt{۲}$. در نتیجه



$$S_{OBH}=\frac{۱}{۲}\times BH\times OH=\frac{۱}{۲}(۸-۴\sqrt{۲})^۲$$

$$=۸(۲-\sqrt{۲})^۲=۸(۶-۴\sqrt{۲})$$

$$=۱۶(۳-۲\sqrt{۲})=\frac{۱۶(۹-۸)}{۳+۲\sqrt{۲}}=\frac{۱۶}{۳+۲\sqrt{۲}}$$

پاسخ کنکور سراسری ۱۴۰۱

۲۹۲۹ (۲) توجه کنید که

$$\sqrt[4]{(4+\sqrt{7})^{-1}}\times\sqrt{1+\sqrt{7}}=\sqrt[4]{\frac{1}{4+\sqrt{7}}}\times\sqrt[4]{(1+\sqrt{7})^2}$$
$$=\sqrt[4]{\frac{1}{4+\sqrt{7}}\times(1+\sqrt{7})^2}=\sqrt[4]{\frac{1+7+2\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}}=\sqrt[4]{\frac{8+2\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}}$$
$$=\sqrt[4]{\frac{2(4+\sqrt{7})}{4+\sqrt{7}}}=\sqrt[4]{2}$$

۲۹۳۰ (۴) **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم $a_n=An+B$، در این صورت

$$\begin{cases}a_5=8\\a_{10}=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5A+B=8\\10A+B=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\frac{3}{5}\\B=11\end{cases}$$

بنابراین $a_n=-\frac{3}{5}n+11\Rightarrow a_{16}=-\frac{3}{5}\times16+11=1/4$

راه‌حل دوم فرض کنید جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت d باشد. در این صورت

$$\begin{cases}a_5=8\\a_{10}=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1+4d=8\\a_1+9d=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=-\frac{3}{5}\\a_1=\frac{52}{5}\end{cases}$$

بنابراین $a_{16}=a_1+15d=\frac{52}{5}+15(-\frac{3}{5})=\frac{7}{5}=1/4$

۲۹۳۱ (۱) باید $a>0$، $\Delta>0$، $\frac{c}{a}\geq0$ و $-\frac{b}{a}>0$.

$$a>0,\quad \frac{c}{a}\geq0\Rightarrow\frac{0}{a}\geq0\ \checkmark$$
$$\Delta>0\Rightarrow(3+2a)^2>0\Rightarrow a\neq-\frac{3}{2}$$
$$-\frac{b}{a}>0\Rightarrow-\frac{3+2a}{a}>0\xrightarrow{a>0}3+2a<0\Rightarrow a<-\frac{3}{2}$$

چون اشتراک $a>0$ و $a<-\frac{3}{2}$ تهی است، پس به‌ازای هیچ مقداری از a شرایط مسئله برقرار نیست.

۲۹۳۲ (۴) ابتدا نامعادلهٔ $\frac{4-2x}{3x+1}\geq0$ را به کمک تعیین علامت حل می‌کنیم:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$\frac{4-2x}{3x+1}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

بنابراین $-\frac{1}{3}<x\leq2$. اکنون توجه کنید که $-1<3x\leq6$. پس $[3x]$ می‌تواند عددهای -1، 0، 1، 2، 3، 4، 5 و 6 باشد که تعداد آن‌ها هشت تاست.

۲۹۳۳ (۳) چون f و g تابع‌هایی ثابت‌اند، پس

$$f(x)=b-3ax\Rightarrow-3a=0\Rightarrow a=0\Rightarrow f(x)=b$$
$$g(x)=c-(3b-3)x\Rightarrow-(3b-3)=0\Rightarrow b=1\Rightarrow g(x)=c$$

از طرف دیگر،

$$(f+g)(x)=5\Rightarrow f(x)+g(x)=5\Rightarrow b+c=5\Rightarrow1+c=5\Rightarrow c=4$$

بنابراین $bc=4$.

۲۹۳۴ (۴) توجه کنید که

$$g(x)=f(x+2)=4(x+2)-(x+2)^2=-x^2+4$$

بنابراین $f(x)=g(x)\Rightarrow4x-x^2=-x^2+4\Rightarrow4x=4\Rightarrow x=1$

در نتیجه عرض نقطهٔ برخورد برابر است با $f(1)=4\times1-1^2=3$. پس نقطهٔ برخورد نمودارهای دو تابع $(1,3)$ است که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$$

۲۹۳۵ (۳) توجه کنید که $x_1+x_2=\frac{a}{3},\quad x_1x_2=\frac{4}{3},\quad x_1=3x_2$

بنابراین $x_1x_2=\frac{4}{3}\Rightarrow(3x_2)x_2=\frac{4}{3}\Rightarrow x_2^2=\frac{4}{9}\Rightarrow x_2=\pm\frac{2}{3}$

اگر $x_2=\frac{2}{3}$، آن‌گاه $x_1=3x_2=3(\frac{2}{3})=2\Rightarrow x_1+x_2=\frac{8}{3}\Rightarrow\frac{8}{3}=\frac{a}{3}\Rightarrow a=8$

اگر $x_2=-\frac{2}{3}$، آن‌گاه

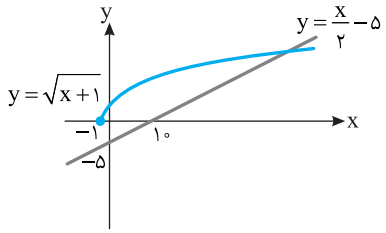
$$x_1=3x_2=3(-\frac{2}{3})=-2\Rightarrow x_1+x_2=-\frac{8}{3}\Rightarrow-\frac{8}{3}=\frac{a}{3}\Rightarrow a=-8$$

بنابراین اختلاف دو مقدار ممکن a برابر ۱۶ است.

۲۹۳۶ (۲) توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+3}-\frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}}=\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$$
$$\frac{\sqrt{x+1}(3-\sqrt{x-1})-\sqrt{x+1}(\sqrt{x-1}+3)}{(\sqrt{x-1}+3)(3-\sqrt{x-1})}=\frac{(\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x-1}}$$
$$\frac{3\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-1}-3\sqrt{x+1}}{9-(x-1)}=\sqrt{x-1}$$
$$\frac{-2\sqrt{x^2-1}}{10-x}=\sqrt{x-1}\Rightarrow-2\sqrt{x-1}\times\sqrt{x+1}=(10-x)\sqrt{x-1}$$
$$-2\sqrt{x+1}=10-x\ (\sqrt{x-1}\neq0\ \text{توجه کنید})\Rightarrow\sqrt{x+1}=\frac{x}{2}-5$$

اکنون برای اینکه بفهمیم این معادله چند جواب مثبت دارد، نمودارهای تابع‌های دو طرف معادله را رسم می‌کنیم:



از روی این شکل معلوم می‌شود که معادلهٔ مورد نظر یک جواب بزرگ‌تر از ۱۰ دارد، که چون هیچ‌کدام از مخرج‌ها را صفر نمی‌کند، پس این جواب قابل قبول است.

۲۹۳۷ (۲) گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $(-1,-2)\Rightarrow(-2,-1):-1\neq(-2)^3-(-2)+1$

گزینهٔ (۲): $(\frac{5}{8},\frac{1}{2})\Rightarrow(\frac{1}{2},\frac{5}{8}):\frac{5}{8}=(\frac{1}{2})^3-\frac{1}{2}+1$

چون این تساوی درست است، پس جواب گزینهٔ (۲) است. لازم نیست بقیهٔ گزینه‌ها را بررسی کنیم.

۲۹۳۸ (۴) ابتدا توجه کنید که $(gof)(x)=g(f(x))=g(2x)$. بنابراین

$$g(2x)=5x^2+11\xrightarrow{x\to\frac{x}{2}}g(x)=5(\frac{x}{2})^2+11$$
$$g(x-7)=5(\frac{x-7}{2})^2+11$$

بنابراین کمترین مقدار تابع $y=g(x-7)$ برابر ۱۱ است.

۲۹۳۹ (۱) باید $-9+k^2<0\Rightarrow k^2<9\Rightarrow-3<k<3$

بنابراین k یکی از عددهای صحیح -2، -1، 0، 1 و 2 است، که مجموع آن‌ها برابر صفر است.

۲۹۴۰ (۱) توجه کنید که

$$-\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۴}\Rightarrow-\frac{\pi}{۴}<-x<\frac{\pi}{۴}\Rightarrow۰<\frac{\pi}{۴}-x<\frac{\pi}{۲}$$

بنابراین

$$\tan(\frac{\pi}{۴}-x)>۰\Rightarrow\frac{۱-m}{۲+m}>۰$$

جدول تعیین علامت این نامعادله به صورت زیر است:

m	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
$\frac{۱-m}{۲+m}$		$-$	∄	$+$	۰	$-$	

بنابراین مجموعهٔ مقادیر m بازهٔ $(-۲,۱)$ است.

۲۹۴۱ (۳) توجه کنید که

$$۲\sin^۲x+\cos^۲x=\frac{۴}{۳}\Rightarrow۲(۱-\cos^۲x)+\cos^۲x=\frac{۴}{۳}$$

$$۲-\cos^۲x=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\cos^۲x=۲-\frac{۴}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین

$$۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}=\frac{۱}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\tan^۲x=\frac{۳}{۲}-۱=\frac{۱}{۲}$$

۲۹۴۲ (۳) از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که ماکزیمم تابع برابر ۵ و مینیمم تابع برابر ۱ است. بنابراین

$$c=\frac{\text{مینیمم}+\text{ماکزیمم}}{۲}=\frac{۵+۱}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳$$

۲۹۴۳ (۴) توجه کنید که

$$۸\cos x-\tan^۲x=۱\Rightarrow۸\cos x=۱+\tan^۲x\Rightarrow۸\cos x=\frac{۱}{\cos^۲x}$$

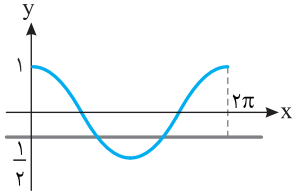
$$۸\cos^۳x=۱\Rightarrow\cos^۳x=\frac{۱}{۸}\Rightarrow\cos x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}$$

$$x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳},\quad k\in\mathbb{Z}$$

اکنون برای اینکه تعداد جواب‌ها در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ را مشخص کنیم، می‌توانیم از جدول زیر استفاده کنیم:

k	-۱	صفر	۱
$۲k\pi+\frac{\pi}{۳}$	$-۲\pi+\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۳}$	$۲\pi+\frac{\pi}{۳}$
$۲k\pi-\frac{\pi}{۳}$	$-۲\pi-\frac{\pi}{۳}$	$-\frac{\pi}{۳}$	$۲\pi-\frac{\pi}{۳}$

توجه کنید که فقط جواب‌های $\frac{\pi}{۳}$ و $۲\pi-\frac{\pi}{۳}$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ هستند و بقیهٔ جواب‌ها خارج از این بازه هستند. بنابراین معادلهٔ مثلثاتی مورد نظر در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دو جواب دارد. توجه کنید که چون تعداد جواب‌های معادلهٔ مورد نظر را می‌خواهیم، می‌توانستیم از نمودار هم استفاده کنیم. از روی نمودار زیر معلوم می‌شود که تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی مورد نظر دوتاست.



۲۹۴۴ (۱) توجه کنید که

$$\log_۸۱۸=m\Rightarrow\log_{۲^۳}۱۸=\frac{۱}{۳}\log_۲۱۸=m\Rightarrow\log_۲۱۸=۳m$$

$$\log_۲(۲\times۹)=۳m\Rightarrow\log_۲۲+\log_۲۳^۲=۳m\Rightarrow۱+۲\log_۲۳=۳m$$

$$\log_۲۳=\frac{۳m-۱}{۲}$$

از طرف دیگر،

$$\log_۴۱۲=\log_۴(۳\times۴)=\log_۴۳+\log_۴۴=\log_{۲^۲}۳+۱$$

$$=\frac{۱}{۲}\log_۲۳+۱=\frac{۱}{۲}(\frac{۳m-۱}{۲})+۱=\frac{۳m-۱}{۴}+۱=\frac{۳}{۴}(m+۱)$$

۲۹۴۵ (۳) چون نمودار تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس

$$f(۰)=۰\Rightarrow a+b(\frac{۱}{۲})^۰=۰\Rightarrow a+b=۰\quad(۱)$$

همچنین

$$f^{-۱}(-۱)=-۱\Rightarrow f(-۱)=-۱\Rightarrow a+b(\frac{۱}{۲})^{-۱}=-۱\Rightarrow a+۲b=-۱\quad(۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\begin{cases}a+b=۰\\a+۲b=-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\b=-۱\end{cases}$$

بنابراین $a-b=۲$.

۲۹۴۶ (۴) اگر $x_۱,\dots x_۹$ داده‌ها باشند و $\bar{x}$ میانگین آن‌ها باشد، طبق فرض،

$$(x_۱-\bar{x})^۲=(x_۲-\bar{x})^۲=\cdots=(x_۸-\bar{x})^۲=(+۱\text{ یا }-۱)^۲=۱$$

و $(x_۹-\bar{x})^۲=۰$. بنابراین

$$\sigma^۲=\frac{(x_۱-\bar{x})^۲+\cdots+(x_۸-\bar{x})^۲+(x_۹-\bar{x})^۲}{۹}=\frac{۸\times۱+۰}{۹}=\frac{۸}{۹}$$

در نتیجه $\sigma=\sqrt{\frac{۸}{۹}}=\frac{\sqrt{۸}}{\sqrt{۹}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$.

۲۹۴۷ (۱) میانگین و میانهٔ داده‌ها برابر است. فرض کنید این مقدار برابر a باشد. در این‌صورت میانگین و میانهٔ داده‌های جدید برابر $a+۲$ است، که اختلاف آن‌ها صفر است.

۲۹۴۸ (۲) توجه کنید که اگر $x\to۲^+$، آن‌گاه $x^۳\to۸^+$، پس $[x^۳]=۸$.

بنابراین

$$\lim_{x\to۲^+}\frac{x^۲-۴}{x^۳-[x^۳]}=\lim_{x\to۲^+}\frac{x^۲-۴}{x^۳-۸}=\lim_{x\to۲^+}\frac{۲x}{۳x^۲}=\lim_{x\to۲^+}\frac{۲}{۳x}=\frac{۱}{۳}$$

۲۹۴۹ (۳) توجه کنید که

$$\lim_{x\to۱^+}(۴-[x])g(x)=\lim_{x\to۱^+}(۴-۱)g(x)=\lim_{x\to۱^+}۳g(x)=۶$$

بنابراین $\lim_{x\to۱^+}g(x)=\frac{۶}{۳}=۲$، یعنی $\lim_{x\to۱^+}g(x)=\lim_{x\to۱^+}\frac{\sqrt{ax^۲+bx+c}}{|x-۱|}=۲$

چون $\lim_{x\to۱^+}|x-۱|=۰$، پس $\lim_{x\to۱^+}\sqrt{ax^۲+bx+c}=۰$، یعنی $x=۱$ ریشهٔ عبارت زیر رادیکال است. از طرف دیگر، $x=۱$ باید ریشهٔ مضاعف عبارت زیر رادیکال باشد چون در غیر این صورت درجهٔ $x-۱$ در صورت از درجهٔ $x-۱$ در مخرج کمتر و مقدار حد بی‌نهایت می‌شود. بنابراین باید صورت $g(x)$ به‌صورت $\sqrt{a(x-۱)^۲}$ باشد. پس

$$\lim_{x\to۱^+}\frac{\sqrt{a(x-۱)^۲}}{|x-۱|}=۲\Rightarrow\lim_{x\to۱^+}\frac{\sqrt{a}|x-۱|}{|x-۱|}=۲\Rightarrow\sqrt{a}=۲\Rightarrow a=۴$$

اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{۴(x-۱)^۲}}{|x-۱|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲|x-۱|}{|x-۱|}=۲$$

۲۹۵۰ **(۱)** توجه کنید که

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}})^3}{x}=\lim_{x\to 0}(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}})^3$$
$$=(\sqrt{\frac{0+1}{0+9}})^3=(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27}$$

۲۹۵۱ **(۴)** **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که شیب خط $4y-3x=n$ برابر با $\frac{3}{4}$ است. از طرف دیگر،

$$f(x)=\frac{x^2+mx+1}{x+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x+m)(x+3)-(1)(x^2+mx+1)}{(x+3)^2}$$
$$=\frac{x^2+6x+3m-1}{(x+3)^2}$$

چون شیب خط مماس با $f'(1)$ برابر است، پس

$$f'(1)=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{1+6+3m-1}{16}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{2+m}{4}=1\Rightarrow m=2$$

بنابراین $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x+3}\Rightarrow f(1)=\frac{1+2+1}{1+3}=1$

چون نقطهٔ $(1,f(1))$، یعنی $(1,1)$ روی خط $4y-3x=n$ نیز قرار دارد، پس

$$4\times 1-3\times 1=n\Rightarrow n=1$$

بنابراین $m+n=2+1=3$.

راه‌حل دوم معادلهٔ حاصل از برخورد خط مماس و تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{x^2+mx+1}{x+3}=\frac{3x+n}{4}\Rightarrow 4(x^2+mx+1)=(x+3)(3x+n)$$
$$4x^2+4mx+4=3x^2+nx+9x+3n$$
$$x^2+(4m-n-9)x+4-3n=0$$

چون $x=1$ ریشهٔ مضاعف این معادله است، پس سمت چپ آن به‌صورت $(x-1)^2$ است. بنابراین $x^2+(4m-n-9)x+4-3n=(x-1)^2=x^2-2x+1$

در نتیجه $\begin{cases}4m-n-9=-2\\4-3n=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\n=1\end{cases}$

پس $m+n=2+1=3$.

۲۹۵۲ **(۲)** چون نقطهٔ $(0,4)$ روی نمودار تابع قرار دارد و ماکزیمم نسبی تابع است، پس

$$f(0)=4\Rightarrow c=4\Rightarrow f(x)=x^3+ax^2+bx+4$$
$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$
$$f'(0)=0\Rightarrow b=0\Rightarrow f(x)=x^3+ax^2+4$$

اگر طول نقطهٔ تماس نمودار با محور طول‌ها برابر x_0 باشد، آن‌گاه

$$\begin{cases}f(x_0)=0\\f'(x_0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0^3+ax_0^2+4=0 & (1)\\3x_0^2+2ax_0=0 & (2)\end{cases}$$

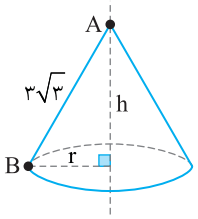
از تساوی (۲) به‌دست می‌آید $x_0(3x_0+2a)=0\Rightarrow x_0=0$ یا $x_0=-\frac{2a}{3}$

نقطهٔ با طول صفر نقطهٔ ماکزیمم نسبی است. بنابراین طول نقطهٔ مینیمم نسبی برابر $-\frac{2a}{3}$ است. اکنون از تساوی (۱) به‌دست می‌آید

$$(-\frac{2a}{3})^3+a(-\frac{2a}{3})^2+4=0$$
$$-\frac{8a^3}{27}+\frac{4a^3}{9}+4=0\Rightarrow\frac{4a^3}{27}=-4\Rightarrow a^3=-27\Rightarrow a=-3$$

بنابراین $x_0=-\frac{2(-3)}{3}=2$.

۲۹۵۳ **(۲)** اگر شعاع قاعدهٔ مخروط برابر r و ارتفاع آن برابر با h باشد، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،



$$r^2+h^2=AB^2=(3\sqrt{3})^2=27$$

پس $r^2=27-h^2$. از طرف دیگر، حجم مخروط برابر است با

$$V=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi}{3}(27-h^2)h=-\frac{\pi}{3}h^3+9\pi h\Rightarrow V'=-\pi h^2+9\pi$$
$$V'=0\Rightarrow-\pi h^2+9\pi=0\Rightarrow h^2=9\Rightarrow h=-3(\text{غ.ق.}),h=3$$

۲۹۵۴ **(۳)** شرایط انتخاب کتاب‌ها را می‌توان به‌صورت زیر حالت‌بندی کرد:

حالت ۱: هیچ‌کدام از کتاب‌های ریاضی، فیزیک و زیست را انتخاب نکنیم. در این‌صورت باید هر چهار کتاب را از بین چهار کتاب دیگر انتخاب کنیم. این کار به $\binom{4}{4}=1$ طریق ممکن است.

حالت ۲: کتاب ریاضی را انتخاب کنیم. در این‌صورت باید حتماً کتاب زیست را هم انتخاب کنیم اما کتاب فیزیک را انتخاب نکنیم. بنابراین باید از بین چهار کتاب باقی‌مانده دو تا را انتخاب کنیم. این کار به $\binom{4}{2}=6$ طریق ممکن است.

حالت ۳: کتاب ریاضی را انتخاب نکنیم، اما کتاب زیست را انتخاب کنیم. در این‌صورت باید کتاب فیزیک را انتخاب نکنیم، یعنی باید از بین چهار کتاب دیگر سه تا را انتخاب کنیم. این کار به $\binom{4}{3}=4$ طریق ممکن است.

حالت ۴: کتاب ریاضی را انتخاب نکنیم، اما کتاب فیزیک را انتخاب کنیم. در این‌صورت باید کتاب زیست را انتخاب نکنیم، یعنی باید از بین چهار کتاب دیگر سه تا را انتخاب کنیم. این کار به $\binom{4}{3}=4$ طریق ممکن است.

بنابراین طبق اصل جمع، تعداد انتخاب‌های ممکن برابر است با $1+6+4+4=15$.

۲۹۵۵ **(۲)** اگر A پیشامد شیوع بیماری و B پیشامد بهبود باشد، آن‌گاه $P(A)=0/08$ و $P(B|A)=0/5$. در این صورت احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=0/08\times 0/5=0/04$$

۲۹۵۶ **(۱)** نقطهٔ B محل برخورد خطوط AB و BC است. پس مختصات آن جواب‌های دستگاه معادله‌های این دو خط هستند:

$$\begin{cases}y+2x=7\\2y-7x=-19\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2y-4x=-14\\2y-7x=-19\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}}-11x=-33$$
$$x=3\Rightarrow y=1$$

پس باید فاصلهٔ نقطهٔ $B(3,1)$ را از خط $4y-3x-17=0$ به‌دست آوریم که برابر است با

$$BH=\frac{|4\times 1-3\times 3-17|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{22}{5}=4/4$$

۲۹۵۷ **(۴)** چون $DE\|BC$، پس بنابر تعمیم قضیهٔ تالس.

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{5}{5+7}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{DE}{BC}=\frac{5}{12}$$

بنابراین

$$\frac{S_{BCE}}{S_{BDE}}=\frac{BC}{DE}=\frac{12}{5}=2/4$$

۲۹۵۸ **(۲)** چون قطر کوچک بیضی برابر ۱۸ است، پس $2b=18$، یعنی $b=9$.

همچنین $c=12$. بنابراین $a^2=b^2+c^2=9^2+12^2=225\Rightarrow a=15$

بنابراین خروج از مرکز برابر است با $e=\frac{c}{a}=\frac{12}{15}=0/8$.

۲۹۵۹ (۱) راه‌حل اول ابتدا پرانتزها را جداگانه ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}+۲}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}\sqrt{۵}+(\sqrt{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}(\sqrt{۵}+\sqrt{۲})}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$A=\sqrt{۳-\sqrt{۵}}-\sqrt{۳+\sqrt{۵}}$$

$$A^۲=۳-\sqrt{۵}+۳+\sqrt{۵}-۲\sqrt{۳-\sqrt{۵}}\sqrt{۳+\sqrt{۵}}=۶-۲\sqrt{(۳-\sqrt{۵})(۳+\sqrt{۵})}$$

$$=۶-۲\sqrt{۹-۵}=۶-۲\sqrt{۴}=۶-۲\times۲=۲$$

توجه کنید که چون $\sqrt{۳-\sqrt{۵}}<\sqrt{۳+\sqrt{۵}}$، پس A عددی منفی است. در نتیجه $A=-\sqrt{۲}$. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times(-\sqrt{۲})=-۱$.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}+۲}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}\sqrt{۵}+(\sqrt{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}(\sqrt{۵}+\sqrt{۲})}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sqrt{۳-\sqrt{۵}}-\sqrt{۳+\sqrt{۵}})=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۲}\sqrt{۳-\sqrt{۵}}-\sqrt{۲}\sqrt{۳+\sqrt{۵}})$$

$$=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۶-۲\sqrt{۵}}-\sqrt{۶+۲\sqrt{۵}})=\frac{۱}{۲}(\sqrt{(۱-\sqrt{۵})^۲}-\sqrt{(۱+\sqrt{۵})^۲})$$

$$=\frac{۱}{۲}(|۱-\sqrt{۵}|-|۱+\sqrt{۵}|)=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵}-۱-۱-\sqrt{۵})=\frac{۱}{۲}(-۲)=-۱$$

۲۹۶۰ (۴) فرض می‌کنیم $a_n=An^۲+Bn+C$. در این صورت بنابر فرض،

$$\begin{cases}A=-\frac{۱}{۷۰}a_۵=-\frac{۱}{۵}\\ a_۵=۱۴\\ a_۷=۱۷/۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{۱}{۵}\times۵^۲+۵B+C=۱۴\\ -\frac{۱}{۵}\times۷^۲+۷B+C=۱۷/۲\end{cases}$$

$$\begin{cases}۵B+C=۱۹\\ ۷B+C=۲۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=۴\\ C=-۱\end{cases}$$

بنابراین $a_n=-\frac{۱}{۵}n^۲+۴n-۱\Rightarrow\begin{cases}a_{۱۵}=-\frac{۱}{۵}\times۱۵^۲+۴\times۱۵-۱=۱۴\\ a_۱=-\frac{۱}{۵}\times۱^۲+۴\times۱-۱=\frac{۱۴}{۵}\end{cases}$

در نتیجه $\frac{a_{۱۵}}{a_۱}=۵$، پس $a_{۱۵}$ پنج برابر $a_۱$ است.

۲۹۶۱ (۲) طول رأس سهمی $f(x)=-ax^۲+ax+۲$ برابر است با

$$-\frac{a}{۲(-a)}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین عرض رأس این سهمی برابر است با

$$f(\frac{۱}{۲})=-a(\frac{۱}{۲})^۲+a(\frac{۱}{۲})+۲=-\frac{a}{۴}+\frac{a}{۲}+۲=\frac{a+۸}{۴}$$

طول رأس سهمی $g(x)=۲bx^۲-bx-۱$ برابر است با $-\frac{-b}{۲(۲b)}=\frac{۱}{۴}$

بنابراین عرض رأس این سهمی برابر است با $g(\frac{۱}{۴})=۲b(\frac{۱}{۴})^۲-b(\frac{۱}{۴})-۱=\frac{-b-۸}{۸}$

اکنون توجه کنید که نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},\frac{a+۸}{۴})$ روی سهمی g است، پس مختصات آن در معادلهٔ سهمی g صدق می‌کنند:

$$\frac{a+۸}{۴}=۲b(\frac{۱}{۲})^۲-b(\frac{۱}{۲})-۱=\frac{b}{۲}-\frac{b}{۲}-۱=-۱\Rightarrow a+۸=-۴\Rightarrow a=-۱۲$$

بنابراین $f(x)=۱۲x^۲-۱۲x+۲$. چون نقطهٔ $(\frac{۱}{۴},\frac{-b-۸}{۸})$ روی این سهمی است، پس مختصات آن در معادلهٔ این سهمی صدق می‌کنند:

$$\frac{-b-۸}{۸}=۱۲(\frac{۱}{۴})^۲-۱۲(\frac{۱}{۴})+۲=\frac{۳}{۴}-۳+۲=-\frac{۱}{۴}$$

$$\frac{-b-۸}{۸}=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow b=-۶$$

بنابراین $b-a=-۶-(-۱۲)=۶$.

۲۹۶۲ (۲) راه‌حل اول ابتدا نامعادله‌های $-۲<\frac{۱-۳x}{x+۱}<۰$ را با استفاده از جدول تعیین علامت حل می‌کنیم. برای حل کردن نامعادلهٔ $\frac{۱-۳x}{x+۱}<۰$ جدول تعیین علامت زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	$-\infty$		-۱		$\frac{۱}{۳}$		$+\infty$
$\frac{۱-۳x}{x+۱}$		$-$	‖	$+$	۰	$-$	

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{۱-۳x}{x+۱}<۰$ مجموعهٔ $(-\infty,-۱)\cup(\frac{۱}{۳},+\infty)$ است.

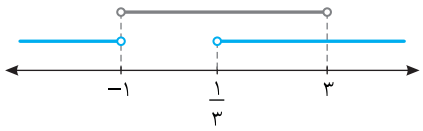
برای حل کردن نامعادلهٔ $-۲<\frac{۱-۳x}{x+۱}$ ابتدا آن را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$-۲<\frac{۱-۳x}{x+۱}\Rightarrow\frac{۱-۳x}{x+۱}+۲>۰\Rightarrow\frac{۱-۳x+۲x+۲}{x+۱}>۰\Rightarrow\frac{۳-x}{x+۱}>۰$$

اکنون جدول تعیین علامت زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	$-\infty$		-۱		۳		$+\infty$
$\frac{۳-x}{x+۱}$		$-$	‖	$+$	۰	$-$	

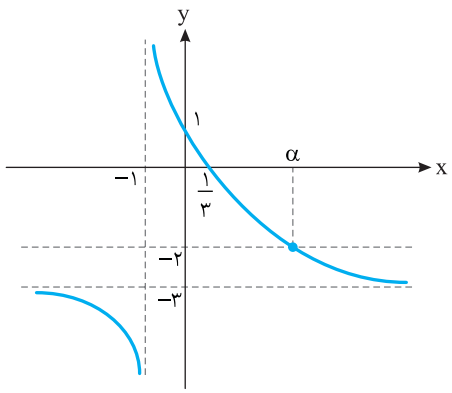
پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{۳-x}{x+۱}>۰$ مجموعهٔ $(-۱,۳)$ است. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر اشتراک مجموعه‌های جواب‌های دو نامعادله‌ای است که حل کردیم، که با توجه به شکل زیر برابر $(\frac{۱}{۳},۳)$ است.



اکنون توجه کنید که $\frac{۱}{۳}<x<۳\Rightarrow\frac{۱}{۶}<\frac{x}{۲}<\frac{۳}{۲}\Rightarrow[\frac{x}{۲}]=۰$ یا ۱

یعنی مجموعهٔ مقادیر $[\frac{x}{۲}]$ دو عضو دارد.

راه‌حل دوم نمودار تابع $f(x)=\frac{۱-۳x}{x+۱}$ به‌صورت زیر است:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر بازهٔ $(\frac{۱}{۳},\alpha)$ است. برای پیدا کردن α، توجه کنید که α طول نقطهٔ برخورد خط $y=-۲$ و نمودار تابع f است. بنابراین α جواب معادلهٔ زیر است:

$$-۲=\frac{۱-۳x}{x+۱}\Rightarrow-۲x-۲=۱-۳x\Rightarrow x=۳$$

بنابرایـن مجموعهٔ جواب‌هـای نامعادله‌های مورد نظر بازهٔ $(\frac{۱}{۳},۳)$ اسـت. اکنون توجه کنید که

$$\frac{۱}{۳}<x<۳\Rightarrow\frac{۱}{۶}<\frac{x}{۲}<\frac{۳}{۲}\Rightarrow[\frac{x}{۲}]=۰\text{ یا }۱$$

بنابراین مجموعهٔ مقادیر $[\frac{x}{۲}]$ دو عضو دارد.

۲۹۶۳ **۳** ابتدا ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x)=(ax+۲)(b-x)-۷x^۲=abx-ax^۲+۲b-۲x-۷x^۲$$
$$=-(a+۷)x^۲+(ab-۲)x+۲b$$

چون تابع f ثابت است، پس ضریب‌های جمله‌های شامل x باید صفر باشند:

$$-(a+۷)=۰\Rightarrow a=-۷$$
$$ab-۲=۰\Rightarrow-۷b-۲=۰\Rightarrow b=-\frac{۲}{۷}$$

پـس ضابطهٔ تابـع f به‌صورت $f(x)=۲b=-\frac{۴}{۷}$ اسـت و بـرد آن مجموعهٔ $\{-\frac{۴}{۷}\}$ است.

۲۹۶۴ **۴** تبدیل‌های گفته شده را به‌ترتیب روی نمودار تابع f انجام می‌دهیم:

$$y=f(x)\xrightarrow{\text{۱ واحد به راست}}y=f(x-۱)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x}}$$
$$y=-f(x-۱)\xrightarrow{\text{۲ واحد به پایین}}y=-f(x-۱)-۲$$

اگر تابع نهایی را g بنامیم، آن‌گاه

$$g(x)=-f(x-۱)-۲=-\frac{۱}{x-۱}-۲=\frac{-۱-۲x+۲}{x-۱}=\frac{۱-۲x}{x-۱}$$

اکنـون توجـه کنید طول‌های نقطه‌هـای برخـورد نمودارهای تابع‌هـای f و g جواب‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow\frac{۱}{x}=\frac{۱-۲x}{x-۱}\Rightarrow x-۱=x-۲x^۲\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

چـون نقطه‌های برخورد روی نمودار تابع f هسـتند، عرض آن‌ها برابر $f(\frac{۱}{\sqrt{۲}})=\sqrt{۲}$ و $f(-\frac{۱}{\sqrt{۲}})=-\sqrt{۲}$ است. بنابراین نقطه‌های برخورد $(\frac{۱}{\sqrt{۲}},\sqrt{۲})$ و $(-\frac{۱}{\sqrt{۲}},-\sqrt{۲})$ هستند که فاصلهٔ هر دو آن‌ها از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{(\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}})^۲+(\pm\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۲}+۲}=\sqrt{\frac{۵}{۲}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

۲۹۶۵ **۲** **راه‌حل اول** توجه کنید که مجموع جواب‌ها از یک طرف برابر $a+b$ و از طـرف دیگر برابر $a^۲+b^۲-۱۲$ اسـت. همین طور، حاصل‌ضـرب جواب‌ها از یک طرف برابر ab و از طرف دیگر برابر $a+b-۱$ است. بنابراین

$$\begin{cases}a+b=a^۲+b^۲-۱۲\\ab=a+b-۱\end{cases}$$

چـون $S=a+b$ را می‌خواهیـم، پـس از اتحاد $a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab$ به‌دسـت می‌آوریم:

$$a+b=(a+b)^۲-۲ab-۱۲\Rightarrow S=S^۲-۲(S-۱)-۱۲$$
$$S=S^۲-۲S+۲-۱۲\Rightarrow S^۲-۳S-۱۰=۰$$
$$(S+۲)(S-۵)=۰\Rightarrow S=-۲,S=۵$$

چون a و b عددهایی طبیعی‌اند، پس مجموع‌شان مثبت است، یعنی $S=-۲$ قابل قبول نیست و در نتیجه $S=۵$.

راه‌حـل دوم چون حاصل‌ضرب جواب‌ها از یک طـرف برابر ab و از طرف دیگر برابر $a+b-۱$ است، پس

$$ab=a+b-۱\Rightarrow a+b-ab-۱=۰\Rightarrow a(۱-b)+b-۱=۰$$
$$(۱-b)(a-۱)=۰\Rightarrow a=۱\text{ یا }b=۱$$

از طـرف دیگـر، مجمـوع جواب‌هـا از یـک طـرف برابـر $a+b$ و از طرف دیگـر برابر $a^۲+b^۲-۱۲$ است. بنابراین $a+b=a^۲+b^۲-۱۲$. پس اگر $a=۱$، آن‌گاه

$$۱+b=۱+b^۲-۱۲\Rightarrow b^۲-b-۱۲=۰\Rightarrow(b-۴)(b+۳)=۰$$
$$b=۴\text{ یا }b=-۳\text{ (غ.ق.ق.)}$$

در این حالت $a+b=۵$. به همین ترتیب معلوم می‌شود که اگر $b=۱$، آن‌گاه $a=۴$ و باز هم $a+b=۵$.

۲۹۶۶ **۱** توجه کنید که

$$\frac{۱}{\sqrt{۲-x}+۲}-\frac{۱}{۲-\sqrt{۲-x}}=\frac{۲-x}{۵\sqrt{۲-x}}$$
$$\frac{۲-\sqrt{۲-x}-(\sqrt{۲-x}+۲)}{(\sqrt{۲-x}+۲)(۲-\sqrt{۲-x})}=\frac{(\sqrt{۲-x})^۲}{۵\sqrt{۲-x}}\Rightarrow\frac{-۲\sqrt{۲-x}}{۴-(۲-x)}=\frac{\sqrt{۲-x}}{۵}$$

چون $x=۲$ مخرج کسـر سـمت راسـت معادله را صفر می‌کند، بنابراین جواب معادله نیست، یعنی $x\neq۲$، پس $\sqrt{۲-x}\neq۰$. در نتیجه می‌توانیم دو طرف معادلهٔ داده شده را بر $\sqrt{۲-x}$ تقسیم کنیم. به این ترتیب، به دست می‌آید

$$\frac{-۲}{۲+x}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow۲+x=-۱۰\Rightarrow x=-۱۲$$

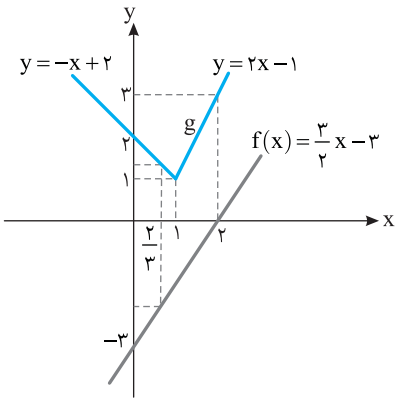
بنابراین معادلهٔ مورد نظر جواب مثبت ندارد.

۲۹۶۷ **۱** گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $(۹,-۲)\Rightarrow(-۲,۹):\ ۹=-۳(-۲)^۳+۲(-۲)-۱۱$

بنابراین گزینهٔ (۱) جواب است. دیگر لازم نیست گزینه‌های دیگر را بررسی کنیم.

۲۹۶۸ **۲** ابتدا ضابطهٔ تابع‌های f و g را از روی شکل پیدا می‌کنیم:



بـرای پیـدا کـردن $f^{-۱}(-۲)$ فـرض می‌کنیـم $a=f^{-۱}(-۲)$. در ایـن صـورت $f(a)=-۲$. پس

$$f(a)=-۲\Rightarrow\frac{۳}{۲}a-۳=-۲\Rightarrow a=\frac{۲}{۳}\Rightarrow f^{-۱}(-۲)=\frac{۲}{۳}$$

در نتیجه

$$(gof^{-۱})(-۲)=g(f^{-۱}(-۲))=g(\frac{۲}{۳})=-\frac{۲}{۳}+۲=\frac{۴}{۳}$$

همچنین $g(۰)=۲$، پس

$$(gog)(۰)=g(g(۰))=g(۲)=۳$$

پس

$$(gof^{-۱})(-۲)\times(gog)(۰)=\frac{۴}{۳}\times۳=۴$$

۲۹۶۹ **۴** دامنهٔ تابع g مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ روبه‌رو است: $x^۲f(x)\geq۰$

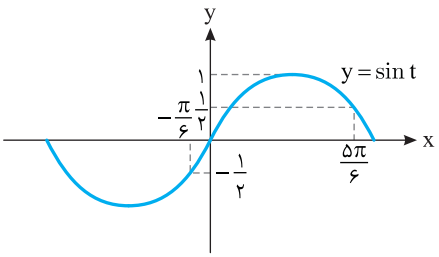
به جدول تعیین علامت زیر توجه کنید:

x	$-\infty$		۰		۳		$+\infty$
$x^۲$		+	۰	+		+	
$f(x)$		+		+	۰	−	
$x^۲f(x)$		+	۰	+	۰	−	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^۲f(x)\geq۰$ بازهٔ $(-\infty,۳]$ اسـت که عددهای صحیح نامنفی در آن ۰، ۱، ۲ و ۳ هستند و تعداد آن‌ها چهارتاست.

۲۹۷۰ **(۲)** ابتدا توجه کنید که $-\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}\Rightarrow-\frac{\pi}{6}<2x<\frac{5\pi}{6}$

پس اگر $t=2x$، آن‌گاه $-\frac{\pi}{6}<t<\frac{5\pi}{6}$ و در نتیجه از روی نمودار زیر معلوم می‌شود که $-\frac{1}{2}<\sin t\leq 1$.



بنابراین باید نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$-\frac{1}{2}<\frac{m-1}{4}\leq 1\Rightarrow -2<m-1\leq 4\Rightarrow -1<m\leq 5\Rightarrow m\in(-1,5]$$

۲۹۷۱ **(۳)** **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که از تساوی داده شده به‌دست می‌آید:

$$\sin x+\cos x=\frac{6\sqrt{5}}{10}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به‌دست می‌آید:

$$1+2\sin x\cos x=\frac{9}{5}\Rightarrow 2\sin x\cos x=\frac{4}{5}\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{2}{5}$$

چون مجموع و حاصل‌ضرب $\sin x$ و $\cos x$ را داریم، پس $\sin x$ و $\cos x$ جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر هستند:

$$t^2-\frac{3}{\sqrt{5}}t+\frac{2}{5}=0\xrightarrow{\times 5}5t^2-3\sqrt{5}t+2=0$$

$$t=\frac{3\sqrt{5}\pm\sqrt{(3\sqrt{5})^2-4(5)(2)}}{2\times 5}=\frac{3\sqrt{5}\pm\sqrt{5}}{10}\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{2\sqrt{5}}{5}\\ t=\frac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$$

در نتیجه $\sin x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ، $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=2$

یا $\cos x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ، $\sin x=\frac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{2}$

راه‌حل دوم توجه کنید که بنابر فرض $\sin x+\cos x=\frac{6\sqrt{5}}{10}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به‌دست می‌آید:

$$1+\sin 2x=\frac{9}{5}\Rightarrow\sin 2x=\frac{9}{5}-1=\frac{4}{5}$$

اکنون توجه کنید

$$\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\Rightarrow\frac{4}{5}=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\Rightarrow 2+2\tan^2 x=5\tan x$$

$$2\tan^2 x-5\tan x+2=0\Rightarrow\tan x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4(2)(2)}}{2\times 2}$$

$$=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}$$

پس $\tan x=2$ یا $\tan x=\frac{1}{2}$.

۲۹۷۲ **(۴)** از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که

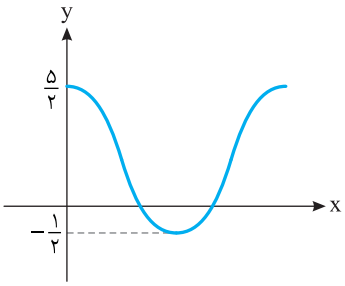
$$\text{مینیمم تابع}=-\frac{1}{2}\Rightarrow-|a|+c=-\frac{1}{2}\quad,\quad\text{ماکزیمم تابع}=\frac{5}{2}\Rightarrow|a|+c=\frac{5}{2}$$

اگر این تساوی‌ها را جمع کنیم، به‌دست می‌آید $2c=2$، پس $c=1$. از طرف دیگر،

$$|a|+c=\frac{5}{2}\Rightarrow|a|+1=\frac{5}{2}\Rightarrow|a|=\frac{3}{2}$$

چون گزینه‌ها همگی عددهایی منفی‌اند، پس $a=-\frac{3}{2}$ و در نتیجه $ac=-\frac{3}{2}$.

توجه کنید که اگر $a=\frac{3}{2}$، ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=\frac{3}{2}\cos bx+1$ می‌شود که نمودار آن به‌صورت زیر است (که شبیه نمودار داده شده نیست):



۲۹۷۳ **(۲)** **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$\cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos(-(x-\frac{\pi}{3}))=\cos(\frac{\pi}{3}-x)$$

اکنون توجه کنید که چون $x+\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{3}-x$ متمم یکدیگرند، پس

$$\sin(x+\frac{\pi}{6})=\cos(\frac{\pi}{3}-x)$$

در نتیجه معادلهٔ داده شده به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sin(x+\frac{\pi}{6})\cos(x-\frac{\pi}{3})=1\Rightarrow\cos(\frac{\pi}{3}-x)\cos(\frac{\pi}{3}-x)=1$$

$$\cos^2(\frac{\pi}{3}-x)=1\Rightarrow\cos(\frac{\pi}{3}-x)=\pm 1\Rightarrow\frac{\pi}{3}-x=k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{\pi}{3}-k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

k	-2	-1	0	1
$\frac{\pi}{3}-k\pi$	$2\pi+\frac{\pi}{3}$	$\pi+\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}-\pi=\frac{-2\pi}{3}$

بنابراین جواب‌ها در بازهٔ $[0,2\pi]$ برابر $\pi+\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{3}$ هستند، که تعداد آن‌ها دوتاست.

راه‌حل دوم چون $\sin(x+\frac{\pi}{6})$ و $\cos(x-\frac{\pi}{3})$ عددهایی در بازهٔ $[-1,1]$ هستند و حاصل‌ضربشان برابر ۱ شده است، یا هر دو ۱ هستند یا هر دو -1 هستند. بنابراین

$$\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{6})=1\\ \cos(x-\frac{\pi}{3})=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\\ x-\frac{\pi}{3}=0\end{cases}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$$

یا

$$\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{6})=-1\\ \cos(x-\frac{\pi}{3})=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}\\ x-\frac{\pi}{3}=\pi\end{cases}\Rightarrow x=\frac{4\pi}{3}$$

پس معادلهٔ مورد نظر در بازهٔ $[0,2\pi]$ دو جواب دارد.

۲۹۷۴ **(۳)** توجه کنید که $\log_2 3=a\Rightarrow 2^a=3$

$$\log_8 b=\frac{2}{3}(1+a)\Rightarrow 8^{\frac{2}{3}(1+a)}=b\Rightarrow(2^3)^{\frac{2}{3}(1+a)}=b\Rightarrow 2^{2(1+a)}=b$$

$$(2^{1+a})^2=b\Rightarrow(2\times 2^a)^2=b\Rightarrow(2\times 3)^2=b\Rightarrow b=36$$

بنابراین

$$\log(3b-8)=\log(3\times 36-8)=\log 100=2$$

۲۹۷۵ **۱** چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},۱)$ می‌گذرد، پس

$$f(\frac{۱}{۲})=۱\Rightarrow\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}+b}=۱\Rightarrow\frac{a}{۲}+b=۱\Rightarrow\frac{a}{۲}+b=۰$$

از طرف دیگر،

$$f^{-۱}(۸)=۵\Rightarrow f(۵)=۸\Rightarrow\sqrt[۳]{۲^{۵a+b}}=۸\Rightarrow۲^{۵a+b}=۸^{۳}=۲^{۹}\Rightarrow۵a+b=۹$$

بنابراین
$$\begin{cases}\frac{a}{۲}+b=۰\\ ۵a+b=۹\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ b=-۱\end{cases}$$

در نتیجه $a-b=۲+۱=۳$.

۲۹۷۶ **۴** توجه کنید که $\sigma=۲$، پس $\sigma^{۲}=۲^{۲}=۴$. از طرف دیگر،

$$\sigma^{۲}=\frac{a^{۲}+۰^{۲}+(-۱)^{۲}+b^{۲}+(-۱)^{۲}+۳^{۲}}{۶}=\frac{a^{۲}+b^{۲}+۱۱}{۶}=۴$$

پس
$$a^{۲}+b^{۲}+۱۱=۶\times۴=۲۴\Rightarrow a^{۲}+b^{۲}=۱۳\qquad(۱)$$

چون مجموع اختلاف‌های داده‌ها از میانگین برابر صفر است، پس

$$a+۰+(-۱)+b+(-۱)+۳=۰\Rightarrow a+b=-۱\Rightarrow a=-۱-b$$

در نتیجه از تساوی (۱) به‌دست می‌آید

$$(-۱-b)^{۲}+b^{۲}=۱۳\Rightarrow۱+b^{۲}+۲b+b^{۲}=۱۳\Rightarrow۲b^{۲}+۲b=۱۲$$

$$b^{۲}+b-۶=۰\Rightarrow b=\frac{-۱\pm\sqrt{۱-۴(۱)(-۶)}}{۲}=\frac{-۱\pm\sqrt{۲۵}}{۲}=\frac{-۱\pm۵}{۲}$$

در نتیجه $b=-۳$ یا $b=۲$. اگر $b=۲$، آن‌گاه $a=-۱-b=-۳$ که چون طبق فرض $a>۰$، پس به تناقض رسیده‌ایم. بنابراین $b=-۳$.

۲۹۷۷ **۳** فرض می‌کنیم داده‌ها به‌صورت مرتب شده باشند:

$$\underbrace{x_۱,x_۲,\dots,x_k}_{\text{داده‌های کوچک‌تر از میانه}}\ ;\ \underbrace{x_{k+۱},\dots,x_{۲k}}_{\text{داده‌های بزرگ‌تر از میانه}}$$

فرض کنید $\bar{x}_۱$ میانگین داده‌های کوچک‌تر از میانه و $\bar{x}_۲$ میانگین داده‌های بزرگ‌تر از میانه باشد، یعنی

$$\bar{x}_۱=\frac{x_۱+\dots+x_k}{k}\ ,\ \bar{x}_۲=\frac{x_{k+۱}+\dots+x_{۲k}}{k}$$

اگر دو طرف این تساوی‌ها را در k ضرب کنیم، به‌دست می‌آید

$$k\bar{x}_۱=x_۱+\dots+x_k\ ,\ k\bar{x}_۲=x_{k+۱}+\dots+x_{۲k}$$

از طرف دیگر، بنابر فرض $\bar{x}_۲-\bar{x}_۱=۶$، پس $\bar{x}_۱+\bar{x}_۲=۶$. اکنون توجه کنید که میانگین کل داده‌ها برابر است با

$$\frac{(x_۱+\dots+x_k)+(x_{k+۱}+\dots+x_{۲k})}{۲k}=\frac{k\bar{x}_۱+k\bar{x}_۲}{۲k}=\frac{\bar{x}_۱+\bar{x}_۲}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳$$

۲۹۷۸ **۴** توجه کنید که اگر $x\to(-۱)^{+}$، آن‌گاه $[x]=-۱$ و

$$x>-۱\Rightarrow-x<۱\Rightarrow[-x]=۰$$

همچنین
$$x>-۱\Rightarrow x+۱>۰\Rightarrow|x+۱|=x+۱$$

در نتیجه
$$\lim_{x\to(-۱)^{+}}\frac{|x+۱|+[x]}{x-[-x]}=\lim_{x\to(-۱)^{+}}\frac{x+۱+(-۱)}{x-۰}=\lim_{x\to(-۱)^{+}}\frac{x}{x}=۱$$

۲۹۷۹ **۱** توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x+۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{ax^{۲}+x+۱}}{x+۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{a}x}{x}=\frac{۱}{۲}$$
$$\sqrt{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه $f(x)=\sqrt{\frac{۱}{۴}x^{۲}+x+۱}$. از طرف دیگر، اگر $x\to(-۱)^{-}$، آن‌گاه

$$x<-۱\Rightarrow\frac{۱}{x}>-۱\Rightarrow[\frac{۱}{x}]=-۱$$

بنابراین
$$\lim_{x\to(-۱)^{-}}[\frac{۱}{x}]f(x)=\lim_{x\to(-۱)^{-}}(-۱)\sqrt{\frac{۱}{۴}x^{۲}+x+۱}=-\sqrt{\frac{۱}{۴}-۱+۱}=-\frac{۱}{۲}$$

۲۹۸۰ **۲** **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\lim_{x\to۱}\frac{۲f(x)-۱}{۲(x-۱)}=\lim_{x\to۱}\frac{\frac{۲x\sqrt{x}}{۲x^{۲}+x-۱}-۱}{۲(x-۱)}=\lim_{x\to۱}\frac{۲x\sqrt{x}-۲x^{۲}-x+۱}{۲(x-۱)(۲x^{۲}+x-۱)}$$
$$=\lim_{x\to۱}\frac{۲x\sqrt{x}(۱-\sqrt{x})+(۱-x)}{۲(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)(۲x^{۲}+x-۱)}$$
$$=\lim_{x\to۱}\frac{۲x\sqrt{x}(۱-\sqrt{x})+(۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x})}{۲(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)(۲x^{۲}+x-۱)}$$
$$=\lim_{x\to۱}\frac{(۱-\sqrt{x})(۲x\sqrt{x}+۱+\sqrt{x})}{۲(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)(۲x^{۲}+x-۱)}$$
$$=\lim_{x\to۱}\frac{-(۲x\sqrt{x}+۱+\sqrt{x})}{۲(\sqrt{x}+۱)(۲x^{۲}+x-۱)}$$
$$=\frac{-(۲+۱+۱)}{۲(۱+۱)(۲+۱-۱)}=-\frac{۴}{۸}=-\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to۱}\frac{۲f(x)-۱}{۲(x-۱)}=\lim_{x\to۱}\frac{\frac{۲x\sqrt{x}}{۲x^{۲}+x-۱}-۱}{۲(x-۱)}=\lim_{x\to۱}\frac{۲x\sqrt{x}-۲x^{۲}-x+۱}{۲(x-۱)(۲x^{۲}+x-۱)}$$
$$=\lim_{x\to۱}\frac{۲x\sqrt{x}-۲x^{۲}-x+۱}{x-۱}\times\lim_{x\to۱}\frac{۱}{۲(۲x^{۲}+x-۱)}$$

اکنون توجه کنید بنابر قاعدهٔ هوپیتال،

$$\lim_{x\to۱}\frac{۲x\sqrt{x}-۲x^{۲}-x+۱}{x-۱}=\lim_{x\to۱}\frac{۲\sqrt{x}+۲x\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}-۴x-۱}{۱}$$
$$=۲+۲\times\frac{۱}{۲}-۴-۱=-۲$$

همچنین
$$\lim_{x\to۱}\frac{۱}{۲(۲x^{۲}+x-۱)}=\frac{۱}{۲(۲+۱-۱)}=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با
$$(-۲)\times\frac{۱}{۴}=-\frac{۱}{۲}$$

۲۹۸۱ **۳** **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که شیب خط $y=۲x+b$ برابر با ۲ است. از طرف دیگر،

$$f(x)=\frac{x+a}{ax+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱\times(ax+۱)-a(x+a)}{(ax+۱)^{۲}}=\frac{۱-a^{۲}}{(ax+۱)^{۲}}$$

بنابراین
$$f'(۱)=\frac{۱-a^{۲}}{(a+۱)^{۲}}=\frac{(۱-a)(۱+a)}{(a+۱)^{۲}}=\frac{۱-a}{۱+a}$$

چون شیب خط مماس با $f'(۱)$ برابر است، پس

$$۲=\frac{۱-a}{۱+a}\Rightarrow۲+۲a=۱-a\Rightarrow a=-\frac{۱}{۳}$$

بنابراین
$$f(x)=\frac{x-\frac{۱}{۳}}{-\frac{۱}{۳}x+۱}\Rightarrow f(۱)=\frac{۱-\frac{۱}{۳}}{-\frac{۱}{۳}+۱}=۱$$

چون نقطهٔ $(۱,f(۱))=(۱,۱)$ روی خط $y=۲x+b$ قرار دارد، پس

$$۱=۲\times۱+b\Rightarrow b=-۱$$

در نتیجه $a-b=-\frac{۱}{۳}+۱=\frac{۲}{۳}$.

راه‌حل دوم معادلهٔ حاصل از برخورد خط و تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$۲x+b=\frac{x+a}{ax+۱}\Rightarrow۲ax^{۲}+۲x+abx+b=x+a$$
$$۲ax^{۲}+(۱+ab)x+b-a=۰$$

چون $x=1$ ریشهٔ مضاعف این معادله است، پس سمت چپ آن به‌صورت $2a(x-1)^2$ است. بنابراین $2ax^2+(1+ab)x+b-a=2a(x^2-2x+1)=2ax^2-4ax+2a$

در نتیجه $\begin{cases}1+ab=-4a\\ b-a=2a\end{cases}$

از معادلهٔ دوم به‌دست می‌آید $b=3a$ و در نتیجه معادلهٔ اول می‌شود

$$1+a(3a)=-4a\Rightarrow 3a^2+4a+1=0\Rightarrow a=-1\ ,\ a=-\frac{1}{3}$$

اگر $a=-1$، آن‌گاه $f(x)=\frac{x-1}{-x+1}=-1$، یعنی f تابعی ثابت می‌شود که خط $y=2x+b$ بر آن مماس نیست. بنابراین $a=-\frac{1}{3}$ و در نتیجه $b=3a=-1$.

بنابراین $a-b=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$.

۲۹۸۲ **۱** توجه کنید که

$$f(x)=x^3+ax^2-2bx-4\Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax-2b$$

بنابراین $f'(0)=-2b\Rightarrow 0=-2b\Rightarrow b=0$

پس $f'(x)=3x^2+2ax$. پس

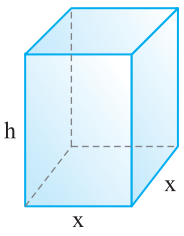
$$f'(-2)=3\times(-2)^2+2a(-2)=12-4a\Rightarrow 0=12-4a\Rightarrow a=3$$

بنابراین $f(x)=x^3+3x^2-4$. اکنون توجه کنید که

$$f(0)=-4\ ,\ f(-2)=-8+12-4=0$$

در نتیجه نقطه‌های اکسترمم نسبی تابع $(0,-4)$ و $(-2,0)$ هستند، که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با $\sqrt{(-2-0)^2+(0-(-4))^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

۲۹۸۳ **۲** توجه کنید که مساحت کل این قوطی حلبی درباز برابر است با مجموع مساحت قاعده و مساحت چهار وجه آن، که اگر طول ضلع قاعده برابر x و ارتفاع قوطی برابر h باشد، می‌شود $S=x^2+4xh$



از طرف دیگر، حجم این قوطی برابر است با مساحت قاعدهٔ آن ضرب در ارتفاع آن، که می‌شود x^2h. بنابر فرض $x^2h=4$، پس $h=\frac{4}{x^2}$ و در نتیجه

$$S=x^2+4xh=x^2+4x\times\frac{4}{x^2}=x^2+\frac{16}{x}$$

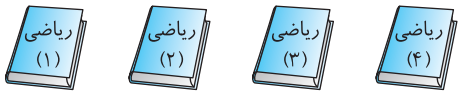
باید مینیمم مطلق S را حساب کنیم. توجه کنید که $S'=2x-\frac{16}{x^2}$

$$S'=0\Rightarrow 2x-\frac{16}{x^2}=0\Rightarrow 2x=\frac{16}{x^2}\Rightarrow x^3=8\Rightarrow x=2$$

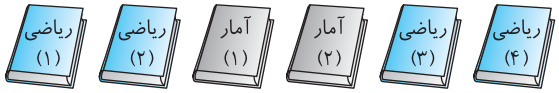
بنابراین مینیمم مطلق S به‌ازای $x=2$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$S=2^2+\frac{16}{2}=12$$

۲۹۸۴ **۳** ابتدا کتاب‌های ریاضی را در قفسه می‌چینیم. این کار به $4!$ طریق ممکن است.

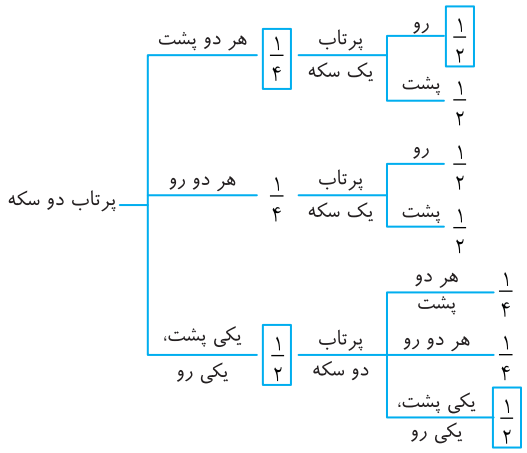


اکنون توجه کنید که برای اینکه موضوع دو کتاب مجاور هر کتاب (به‌جز کتاب‌های اول و آخر) متفاوت باشد، کتاب‌های آمار باید بین کتاب‌های ریاضی (۲) و ریاضی (۳) قرار بگیرند (شکل زیر را ببینید). این کار به $2!$ طریق ممکن است.



در نتیجه طبق اصل ضرب پاسخ مسئله برابر است با $4!\times 2!=48$.

۲۹۸۵ **۴** نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود احتمال اینکه دقیقاً دو سکه پشت بیایند برابر است با

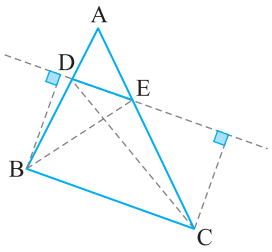
$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

۲۹۸۶ **۳** ابتدا معادلهٔ خط BC را می‌نویسیم. چون این خط از نقطه‌های $B(3,3)$ و $C(7,11)$ می‌گذرد، معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y-3=\frac{11-3}{7-3}(x-3)\Rightarrow y-3=2(x-3)\Rightarrow y-3=2x-6\Rightarrow 2x-y-3=0$$

فاصلهٔ نقطهٔ $A(1,9)$ از این خط برابر است با $AH=\frac{|2\times 1-9-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

۲۹۸۷ **۴** ابتدا توجه کنید که بنابر اندازه‌های داده شده، $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=\frac{1}{2}$



در نتیجه بنابر عکس قضیهٔ تالس $DE||BC$. بنابراین ارتفاع وارد از رأس C در مثلث CDE با ارتفاع وارد از رأس B در مثلث BDE برابر است. چون قاعدهٔ DE در این دو مثلث هم مشترک است. پس مساحت این دو مثلث برابر است، یعنی نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر ۱ است.

۲۹۸۸ **۲** ابتدا شعاع و مرکز دو دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$x^2+y^2-4x+2y=0\Rightarrow \text{مرکز: } O_1\left(-\frac{-4}{2},-\frac{2}{2}\right)=(2,-1)$$

$$r_1=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+2^2-4\times 0}=\sqrt{5}$$

$$x^2+y^2-2y-2=0\Rightarrow \text{مرکز: } O_2\left(-\frac{0}{2},-\frac{-2}{2}\right)=(0,1)$$

$$r_2=\frac{1}{2}\sqrt{0^2+(-2)^2-4\times(-2)}=\sqrt{3}$$

اکنون توجه کنید که $O_1O_2=\sqrt{(2-0)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}\simeq 2\times 1/4=2/8$

از طرف دیگر،

$$r_1+r_2=\sqrt{5}+\sqrt{3}\simeq 2/2+1/7=3/9$$

$$|r_1-r_2|=|\sqrt{5}-\sqrt{3}|\simeq 2/2-1/7=0/5$$

چون $|r_1-r_2|<O_1O_2<r_1+r_2$، پس دایره‌ها متقاطع‌اند.

پاسخ کنکور سراسری ۱۴۰۲ - نوبت دوم

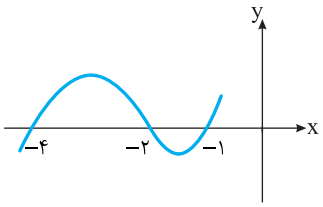
۳۰۱۹ (۱) ابتدا توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}$ و

$$D_g=\{x\in\mathbb{R}\mid -\frac{f(x)}{f(x+2)}\geq 0\}$$

از روی نمودار تابع f معلوم می‌شود که

$$f(x)=0\Rightarrow x\in\{-2,0,1\}$$
$$f(x)>0\Rightarrow x\in(-2,0)\cup(1,+\infty)$$
$$f(x)<0\Rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(0,1)$$

همچنین، نمودار تابع $y=f(x+2)$ به‌صورت زیر است:



بنابراین

$$f(x+2)=0\Rightarrow x\in\{-4,-2,-1\}$$
$$f(x+2)>0\Rightarrow x\in(-4,-2)\cup(-1,+\infty)$$
$$f(x+2)<0\Rightarrow x\in(-\infty,-4)\cup(-2,-1)$$

در نتیجه جدول تعیین علامت عبارت $y=-\frac{f(x)}{f(x+2)}$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		-4		-2		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
y		$-$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

پس $D_g=(-4,-2)\cup(-2,-1)\cup[0,1]$. بنابراین عددهای صحیح دامنهٔ g عددهای ۳-، صفر و ۱ هستند.

۳۰۲۰ (۳) ابتدا توجه کنید که

$$f(-\frac{5}{3})=2[-\frac{5}{3}]-(-\frac{5}{3})=-4+\frac{5}{3}=-\frac{7}{3}$$
$$(gof)(-\frac{5}{3})=g(f(-\frac{5}{3}))=g(-\frac{7}{3})=f([-\frac{7}{3}+f(-\frac{7}{3})])$$

از طرف دیگر، $f(-\frac{7}{3})=2[-\frac{7}{3}]-(-\frac{7}{3})=-6+\frac{7}{3}=-\frac{11}{3}$

پس

$$(gof)(-\frac{5}{3})=f([-\frac{7}{3}-\frac{11}{3}])=f(-6)=2[-6]-(-6)=-12+6=-6$$

۳۰۲۱ (۴) فرض کنید طول مستطیل اولیه برابر x باشد. پس عرض آن $\frac{4}{5}x$ است. اکنون فرض می‌کنیم طول مستطیل را به اندازهٔ a افزایش می‌دهیم. در این صورت، چون یک مستطیل طلایی به‌دست می‌آید، پس

$$x+a=(\frac{\sqrt{5}+1}{2})(\frac{4}{5}x)\Rightarrow\frac{x+a}{x}=\frac{4(\sqrt{5}+1)}{10}$$

چون عرض مستطیل ثابت می‌ماند، پس نسبت مساحت مستطیل‌ها برابر نسبت طول‌های آن‌هاست، یعنی برابر است با $\frac{x+a}{x}=0/4(\sqrt{5}+1)$

۳۰۲۲ (۳) فرض می‌کنیم جواب‌های معادلهٔ $2x^2-ax+b=0$ برابر α و β باشند. در این صورت $\alpha-\frac{1}{2}$ و $\beta-\frac{1}{2}$ جواب‌های معادلهٔ $2ax^2+ax-6=0$ هستند. توجه کنید که

$$\alpha+\beta=\frac{a}{2}\ (1),\quad \alpha\beta=\frac{b}{2}\ (2)$$
$$(\alpha-\frac{1}{2})+(\beta-\frac{1}{2})=-\frac{a}{2a}=-\frac{1}{2}\ (3)$$
$$(\alpha-\frac{1}{2})(\beta-\frac{1}{2})=-\frac{6}{2a}=-\frac{3}{a}\ (4)$$

بنابراین از تساوی (۳) نتیجه می‌شود $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$. در نتیجه از تساوی (۱) به‌دست می‌آید $\frac{a}{2}=\frac{1}{2}$ ، پس $a=1$. اکنون توجه کنید که از تساوی (۴) نتیجه می‌شود

$$\alpha\beta-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\frac{1}{4}=-\frac{3}{a}=-3$$
$$\alpha\beta-\frac{1}{2}(\frac{1}{2})+\frac{1}{4}=-3\Rightarrow\alpha\beta=-3$$

بنابراین از تساوی (۲) به‌دست می‌آید $-3=\frac{b}{2}\Rightarrow b=-6$

به این ترتیب، $[\frac{ab}{4}]=[\frac{-6}{4}]=-2$.

۳۰۲۳ (۲) **تذکر** سؤال به صورت زیر اصلاح می‌شود:

اگر $f(x)=(10x+\log x)^5$ باشد، مجموعهٔ جواب نامعادله $(fof)(x)<f((10x)^5)$ کدام است؟

ابتدا توجه کنید که $D_f=(0,+\infty)$ ، بنابراین

$$D_{fof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_f\}=\{x>0\mid(10x+\log x)^5>0\}$$

اکنون توجه کنید که

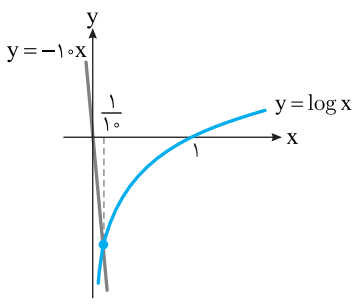
$$(10x+\log x)^5>0\Rightarrow 10x+\log x>0$$
$$\log x>-10x\ (1)$$

چون $\log\frac{1}{10}=-1$ و $-10\times\frac{1}{10}=-1$ ، بنابراین از روی نمودار زیر معلوم می‌شود که مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۱) بازهٔ $(\frac{1}{10},+\infty)$ است. بنابراین باید نامعادلهٔ $(fof)(x)<f((10x)^5)$ را با شرط $x\in(\frac{1}{10},+\infty)$ حل کنیم. اکنون توجه کنید که تابع‌های $y=10x$ و $y=\log x$ صعودی اکیدند، پس مجموع آن‌ها نیز صعودی اکید است. همچنین چون تابع $y=x^5$ صعودی اکید است، پس تابع $f(x)=(10x+\log x)^5$ نیز صعودی اکید است. بنابراین

$$(fof)(x)<f((10x)^5)\Rightarrow f(f(x))<f((10x)^5)\Rightarrow f(x)<(10x)^5$$
$$(10x+\log x)^5<(10x)^5\Rightarrow 10x+\log x<10x\Rightarrow\log x<0\Rightarrow x\in(0,1)$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر برابر است با

$$(0,1)\cap(\frac{1}{10},+\infty)=(\frac{1}{10},1)$$



۳۰۲۴ **۴** ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=۲x^۲-(m+۲)x+m=۰\Rightarrow f(x)=(۲x-m)(x-۱)=۰$$

بنابراین صفرهای تابع f برابرند با $x=۱$ و $x=\frac{m}{۲}$. از طرف دیگر، نقطهٔ تقاطع نمودار تابع f با محور عرض‌ها نقطهٔ $(۰,m)$ است. باید مساحت مثلث با رأس‌های $A(۰,m)$، $B(۱,۰)$ و $C(\frac{m}{۲},۰)$ را پیدا کنیم. معادلهٔ خطی که از نقطه‌های A و B می‌گذرد به‌صورت زیر است:

$$y-۰=\frac{۰-m}{۱-۰}(x-۱)\Rightarrow mx+y-m=۰$$

فاصلهٔ نقطهٔ C از این خط برابر طول ارتفاع وارد بر قاعدهٔ AB در مثلث ABC است که برابر است با

$$\frac{|m(\frac{m}{۲})+۰-m|}{\sqrt{m^۲+۱}}=\frac{|m^۲-۲m|}{۲\sqrt{m^۲+۱}}$$

از طرف دیگر، $AB=\sqrt{۱+m^۲}$. در نتیجه

$$S_{ABC}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times\frac{|m^۲-۲m|}{۲\sqrt{m^۲+۱}}\times\sqrt{۱+m^۲}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow|m^۲-۲m|=۳$$

اکنون توجه کنید که

$$m^۲-۲m=۳\Rightarrow m^۲-۲m-۳=۰\Rightarrow(m-۳)(m+۱)=۰$$

$$m=۳\ ,\ m=-۱$$

$$m^۲-۲m=-۳\Rightarrow m^۲-۲m+۳=۰\Rightarrow\Delta<۰$$ (جواب ندارد)

طول رأس سهمی $y=x^۲-mx+۱$ برابر است با $-\frac{-m}{۲\times۱}=\frac{m}{۲}$

اگر $m=۳$، طول رأس سهمی برابر می‌شود با $\frac{m}{۲}=\frac{۳}{۲}$.

اگر $m=-۱$، طول رأس سهمی برابر می‌شود با $\frac{m}{۲}=-\frac{۱}{۲}$.

۳۰۲۵ **۱** فرض کنید $f^{-۱}(-۱۹)=a$. در این صورت $f(a)=-۱۹$. توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}۲-۳x & x\le-\frac{۳}{۲}\\ ۲+۲mx-x^۲ & x>-\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

چون f وارون‌پذیر است، پس یک‌به‌یک است. در نتیجه باید طول رأس سهمی $y=۲+۲mx-x^۲$ از $-\frac{۳}{۲}$ بزرگتر نباشد. بنابراین $m\le-\frac{۳}{۲}$. از طرف دیگر، برد تابع $y=۲-۳x$ با دامنهٔ $(-\infty,-\frac{۳}{۲}]$ باید با برد تابع $y=۲+۲mx-x^۲$ با دامنهٔ $(-\frac{۳}{۲},+\infty)$ اشتراک نداشته باشد. بنابراین

$$۲-۳(-\frac{۳}{۲})\ge۲+۲m(-\frac{۳}{۲})-(-\frac{۳}{۲})^۲\Rightarrow m\ge-\frac{۲۷}{۱۲}$$

در نتیجه $-\frac{۲۷}{۱۲}\le m\le-\frac{۳}{۲}$ و چون m عددی صحیح است، پس $m=-۲$. پس

$$a\le-\frac{۳}{۲}\Rightarrow f(a)=۲-۳a=-۱۹\Rightarrow a=۷$$ (غ.ق.ق.)

$$a>-\frac{۳}{۲}\Rightarrow f(a)=۲-۴a-a^۲=-۱۹$$

$$a^۲+۴a-۲۱=۰\Rightarrow(a+۷)(a-۳)=۰\Rightarrow a=۳,a=-۷$$ (غ.ق.ق.)

۳۰۲۶ **۴** ابتدا توجه کنید که

$$\log۳۰=\log(۱۰\times۳)=\log۱۰+\log۳=۱+۰/۴=۱/۴$$

$$\log۶=\log(۲\times۳)=\log۲+\log۳=۰/۳+۰/۴=۰/۷$$

$$\log\frac{۵}{۶}=\log۵-\log۶=\log\frac{۱۰}{۲}-\log۶=\log۱۰-\log۲-\log۶$$
$$=۱-۰/۳-۰/۷=۰$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود $۱/۴x^۲+۱/۴x=۰$، که جواب‌هایش صفر و -۱ هستند که اختلاف آن‌ها برابر ۱ است.

۳۰۲۷ **۳** ابتدا توجه کنید که

$$\tan x+\cot x=-۳\Rightarrow\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=-۳$$

$$\frac{\sin^۲x+\cos^۲x}{\sin x\cos x}=-۳\Rightarrow\sin x\cos x=-\frac{۱}{۳}$$

در نتیجه $(\sin x+\cos x)^۲=۱+۲\sin x\cos x=۱-\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳}$

چون $۳\pi<۴x<۴\pi$، پس $\frac{۳\pi}{۴}<x<\pi$. بنابراین $\sin x+\cos x<۰$، در نتیجه $\sin x+\cos x=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$. اکنون توجه کنید که

$$\cos^۳x+\sin^۳x=(\sin x+\cos x)(\sin^۲x+\cos^۲x-\sin x\cos x)$$

$$=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}(۱+\frac{۱}{۳})=-\frac{۴}{۳\sqrt{۳}}$$

پس $\frac{۱}{\cos^۳x+\sin^۳x}=-\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}=-۰/۷۵\sqrt{۳}$.

۳۰۲۸ **۱** ابتدا توجه کنید که $\text{مساحت دایره}=\pi r^۲=\pi\Rightarrow r=۱$

همچنین مثلث BOA متساوی‌الساقین است، پس OM هم عمودمنصف است هم نیمساز. در نتیجه $M\hat{O}A=\frac{A\hat{O}B}{۲}=۶۰^\circ$. همین‌طور، در مثلث متساوی‌الساقین AOD پاره‌خط OH هم عمودمنصف است هم نیمساز. پس $A\hat{O}C=\frac{A\hat{O}D}{۲}=۳۰^\circ$.

بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHO،

$$\sin۳۰^\circ=\frac{AH}{OA}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{AH}{۱}\Rightarrow AH=\frac{۱}{۲}$$

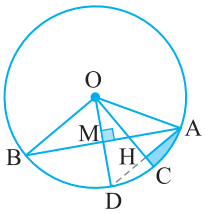
$$\sin۶۰^\circ=\frac{OH}{OA}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{OH}{۱}\Rightarrow OH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

پس محیط مثلث AOH برابر است با $۱+\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۳+\sqrt{۳}}{۲}$. از طرف دیگر، طول کمان AC برابر است با $A\hat{O}C\times r=\frac{\pi}{۶}\times۱=\frac{\pi}{۶}$. همچنین

$$HC=OC-OH=۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}$$

پس محیط شکل رنگی برابر است با $\frac{۱}{۲}+\frac{\pi}{۶}+\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}$. به این ترتیب، اختلاف محیط‌ها برابر است با

$$\frac{۳+\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۱}{۲}-\frac{\pi}{۶}-(\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲})=\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۶}$$



۳۰۲۹ **۲** مختصات نقطهٔ A جواب‌های دستگاه معادله‌های زیر هستند:

$$\begin{cases} ۳y+x=-۹ \\ ax-y=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ y=-۳ \end{cases}$$

مختصات نقطه‌های برخورد این خط‌ها با خط $y-x=۰$ به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} ۳y+x=-۹ \\ y-x=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{۹}{۴} \\ y=-\frac{۹}{۴} \end{cases}, \quad \begin{cases} ax-y=۳ \\ y-x=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۳}{a-۱} \\ y=\frac{۳}{a-۱} \end{cases}$$

بنابراین رأس‌های مثلث مورد نظر $A(۰,-۳)$ ، $B(-\frac{۹}{۴},-\frac{۹}{۴})$ و $C(\frac{۳}{a-۱},\frac{۳}{a-۱})$ هستند. چون مرکز دایره‌ای که از رأس‌های مثلث ABC می‌گذرد روی ضلع BC است، پس زاویهٔ A در این مثلث زاویه‌ای محاطی و روبه‌رو به قطر است، یعنی $\hat{A}=۹۰^\circ$. بنابراین $\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ$ ، پس

$$\hat{C}=۹۰^\circ-\hat{B} \Rightarrow \hat{B}-\hat{C}=۲\hat{B}-۹۰^\circ$$

$$\tan(\hat{B}-\hat{C})=\tan(۲\hat{B}-۹۰^\circ)=-\cot ۲\hat{B}=\frac{-۱}{\tan ۲\hat{B}}=\frac{-۱+\tan^۲\hat{B}}{۲\tan\hat{B}}$$

از طرف دیگر،

$$AH=\frac{|۰-(-۳)|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}$$

$$AB=\sqrt{(۰+\frac{۹}{۴})^۲+(-۳+\frac{۹}{۴})^۲}=\sqrt{\frac{۴۵}{۸}}$$

در نتیجه، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

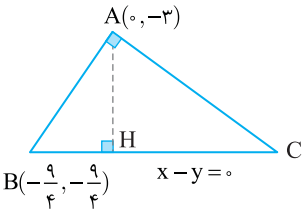
$$AB^۲=AH^۲+BH^۲ \Rightarrow \frac{۴۵}{۸}=\frac{۹}{۲}+BH^۲ \Rightarrow BH=\frac{۳}{۲\sqrt{۲}}$$

بنابراین

$$\tan\hat{B}=\frac{AH}{BH}=\frac{\frac{۳}{\sqrt{۲}}}{\frac{۳}{۲\sqrt{۲}}}=۲$$

در نتیجه

$$\tan(\hat{B}-\hat{C})=\frac{-۱+\tan^۲\hat{B}}{۲\tan\hat{B}}=\frac{-۱+۴}{۴}=\frac{۳}{۴}$$



۳۰۳۰ **۱** ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=a\cos^۲(bx-\frac{\pi}{۴})+c=a\times\frac{۱+\cos(۲(bx-\frac{\pi}{۴}))}{۲}+c$$

$$=\frac{a}{۲}+c+\frac{a}{۲}\cos(۲bx-\frac{\pi}{۲})=\frac{a}{۲}+c+\frac{a}{۲}\sin(۲bx)$$

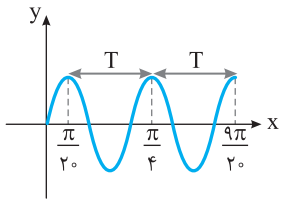
چون ماکزیمم و مینیمم تابع f به‌ترتیب ۱ و -۲ است. پس

$$\begin{cases} \frac{a}{۲}+c+|\frac{a}{۲}|=۱ \\ \frac{a}{۲}+c-|\frac{a}{۲}|=-۲ \end{cases} \Rightarrow |a|=۳ \Rightarrow \begin{cases} a=۳, c=-۲ \\ a=-۳, c=۱ \end{cases}$$

از طرف دیگر، چون دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{۹\pi}{۲۰}-\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۵}$ ، پس

$$\frac{۲\pi}{|۲b|}=\frac{\pi}{۵} \Rightarrow |b|=۵ \Rightarrow b=۵ \text{ یا } b=-۵$$

اکنون توجه کنید که چون دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{\pi}{۵}$ است و $\frac{\pi}{۵}<\frac{\pi}{۴}$ ، پس نمودار تابع f به شکل زیر است:



چون در یک همسایگی راست نقطهٔ صفر تابع f اکیداً صعودی است، پس a و b هم‌علامت‌اند. بنابراین در هر صورت $ab=۱۵$.

۳۰۳۱ **۴** معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sin(\frac{\pi+۴x}{۲})}+\frac{۱}{\cos(\frac{\pi+۸x}{۲})}=۰$$

$$\frac{۱}{\sin(\frac{\pi}{۲}+۲x)}=-\frac{۱}{\cos(\frac{\pi}{۲}+۴x)}$$

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+۲x)=-\cos(\frac{\pi}{۲}+۴x) \Rightarrow \cos ۲x=\sin ۴x$$

$$\cos ۲x=۲\sin ۲x\cos ۲x \Rightarrow \cos ۲x(۱-۲\sin ۲x)=۰$$

توجه کنید که چون $\cos ۲x$ برابر $\sin(\frac{\pi+۴x}{۲})$ است و این عبارت در مخرج است، پس باید $\cos ۲x\neq ۰$ ، در نتیجه

$$۱-۲\sin ۲x=۰ \Rightarrow \sin ۲x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}$$

$$\begin{cases} ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ ۲x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k\pi+\frac{\pi}{۱۲} \\ x=k\pi+\frac{۵\pi}{۱۲} \end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۱۲}$ و $\frac{۵\pi}{۱۲}$ ، که اختلاف آن‌ها $\frac{\pi}{۳}$ است.

بنابراین $\alpha=\frac{\pi}{۳}$ ، پس

$$\tan(۲\alpha)=\tan\frac{۲\pi}{۳}=-\sqrt{۳}$$

۳۰۳۲ **۲** چون حد صورت کسر داده شده برابر صفر است و حد کسر برابر صفر نیست، پس حد مخرج کسر نیز باید صفر باشد. بنابراین

$$\lim_{x\to ۸}(ax-b)=۰ \Rightarrow ۸a=b$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to ۸}\frac{b\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۲b}{ax-b}=\lim_{x\to ۸}\frac{۸a\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۱۶a}{ax-۸a}$$

$$=\lim_{x\to ۸}\frac{۸\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۱۶}{x-۸}=\lim_{x\to ۸}(\frac{۸(\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۲)}{x-۸}\times\frac{\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}+۲}{\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}+۲})$$

$$=\lim_{x\to ۸}(\frac{۸(۲+\sqrt[۳]{x}-۴)}{(\sqrt[۳]{x}-۲)(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴)}\times\frac{۱}{\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}+۲})$$

$$=\lim_{x\to ۸}(\frac{۸}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}\times\frac{۱}{\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}+۲})=\frac{۸}{۴+۴+۴}\times\frac{۱}{۲+۲}=\frac{۱}{۶}$$

۳۰۳۳ **۳** ضابطهٔ تابع‌های f و g را به‌دست آوریم. نمودار تابع f خطی است که از نقطه‌های $(m,۰)$ و $(۰,۳m)$ می‌گذرد. معادلهٔ این خط به‌صورت زیر است:

$$y-۰=\frac{۳m-۰}{۰-m}(x-m) \Rightarrow y=-۳(x-m)$$

بنابراین $f(x)=-۳x+۳m$. همین‌طور، نمودار تابع g خطی است که از نقطه‌های $(۴,۰)$ و $(۰,-۳)$ می‌گذرد. معادلهٔ این خط به‌صورت زیر است:

$$y-۰=\frac{۰-(-۳)}{۴-۰}(x-۴) \Rightarrow y=\frac{۳}{۴}(x-۴)$$

بنابراین $g(x)=\frac{۳}{۴}x-۳$

بنابراین $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|-۳x+۳m|}{\frac{۳}{۴}x-۳}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۳x}{\frac{۳}{۴}x}=-۴$

۳۰۳۴ **(۱)** ابتدا توجه کنید که اگر عبارت $x^۳+((m-۷)x+a)^۲$ ریشه‌ای مانند $x_۰$ به‌جز $x=a$ داشته باشد، آن‌گاه تابع f در نقطهٔ $x=x_۰$ ناپیوسته می‌شود. در نتیجه $x=a$ باید تنها ریشهٔ عبارت $x^۳+((m-۷)x+a)^۲$ باشد. بنابراین

$$a^۳+((m-۷)a+a)^۲=۰\Rightarrow a^۳+a^۲(m-۶)^۲=۰$$

$$a^۲(a+(m-۶)^۲)=۰\Rightarrow a=۰, a=-(m-۶)^۲$$

از طرف دیگر، $x=a$ باید ریشهٔ مضاعف عبارت $۳x^۲+(m-۱)x+m-۴$ باشد، زیرا در غیر این صورت حد تابع f در نقطهٔ $x=a$ نامتناهی می‌شود. بنابراین

$$\Delta=۰\Rightarrow(m-۱)^۲-۱۲(m-۴)=۰\Rightarrow(m-۷)^۲=۰\Rightarrow m=۷$$

بنابراین یا $a=۰$ یا $a=-(۷-۶)^۲=-۱$. توجه کنید که

$$a=۰\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{۳(x+۱)^۲}}{|x^۳|}=+\infty$$

بنابراین $a=-۱$، پس

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to-۱}\frac{\sqrt{۳(x+۱)^۲}}{|x^۳+۱|}=\lim_{x\to-۱}\frac{\sqrt{۳}|x+۱|}{|x+۱||x^۲-x+۱|}$$

$$=\lim_{x\to-۱}\frac{\sqrt{۳}}{|x^۲-x+۱|}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

بنابراین $f(a)=f(-۱)=\frac{۲\sin b}{۳\sqrt{-۱+۲}}=\frac{۲}{۳}\sin b$

در نتیجه $\frac{۲}{۳}\sin b=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow\sin b=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

بنابراین b می‌تواند برابر $\frac{\pi}{۳}$ باشد.

۳۰۳۵ **(۳)** **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که اگر $x<۰$، آن‌گاه

$$g(x)=\frac{۱}{x^۳-(-x^۳)}=\frac{۱}{۲x^۳}$$

بنابراین

$$g'(x)=\frac{-۶x^۲}{(۲x^۳)^۲}=\frac{-۳}{۲x^۴}\Rightarrow g'(-\sqrt[۳]{۲})=\frac{-۳}{۲(-\sqrt[۳]{۲})^۴}=-\frac{۳}{۲\sqrt[۳]{۱۶}}$$

از طرف دیگر، $g(-\sqrt[۳]{۲})=\frac{۱}{۲(-\sqrt[۳]{۲})^۳}=-\frac{۱}{۴}$

همچنین، اگر $x<۰$، آن‌گاه $f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x-(-x)}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲x}}$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{-\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{۴x^۲}}}{\sqrt[۳]{۴x^۲}}=-\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{۱۶x^۴}}$$

$$f'(g(-\sqrt[۳]{۲}))=f'(-\frac{۱}{۴})=-\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{۱۶\times\frac{۱}{۲۵۶}}}=-\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{\frac{۱}{۱۶}}}=-\frac{۲\sqrt[۳]{۱۶}}{۳}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$-\frac{۳}{۲\sqrt[۳]{۱۶}}\times(-\frac{۲\sqrt[۳]{۱۶}}{۳})=۱$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$g'(-\sqrt[۳]{۲})f'(g(-\sqrt[۳]{۲}))=(fog)'(-\sqrt[۳]{۲})$$

بنابراین باید مشتق تابع fog را حساب کنیم. توجه کنید که اگر $x<۰$، آن‌گاه

$$(fog)(x)=f(\frac{۱}{x^۳-|x^۳|})=f(\frac{۱}{۲x^۳})=\frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲x^۳}-|\frac{۱}{۲x^۳}|}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۲}{۲x^۳}}}=x$$

بنابراین $(fog)'(x)=۱$، پس $(fog)'(-\sqrt[۳]{۲})=۱$.

۳۰۳۶ **(۲)** **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم A نقطهٔ $(a,۰)$ و B نقطهٔ $(۰,b)$ باشد. در این صورت $AB=\sqrt{a^۲+b^۲}$. از طرف دیگر،

$$\text{شیب CD}=\frac{-\frac{۵}{۳}}{۵}=-\frac{۱}{۳}$$

و چون $AB\|CD$، پس شیب خط AB هم برابر $-\frac{۱}{۳}$ است. بنابراین

$$\frac{b-۰}{۰-a}=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow a=۳b$$

در نتیجه $AB=\sqrt{(۳b)^۲+b^۲}=\sqrt{۱۰}b$. توجه کنید که معادلهٔ خط CD به صورت $x+۳y-۵=۰$ یا $y=-\frac{۱}{۳}x+\frac{۵}{۳}$ است. پس

$$AD=\frac{|a+۳\times۰-۵|}{\sqrt{۱+۹}}=\frac{|a-۵|}{\sqrt{۱۰}}=\frac{|۳b-۵|}{\sqrt{۱۰}}$$

بنابراین $S_{ABCD}=AD\times AB=\frac{|۳b-۵|}{\sqrt{۱۰}}\times\sqrt{۱۰}b=-(۳b-۵)b=-۳b^۲+۵b$

چون مساحت مستطیل ABCD برحسب b تابعی درجهٔ دوم است، پس مساحت آن به ازای $b=-\frac{۵}{-۶}=\frac{۵}{۶}$ ماکزیمم می‌شود. در نتیجه باید $a=۳b=\frac{۵}{۲}$. بنابراین $AD=\frac{|a-۵|}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۱۰}}$. اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس، در مثلث ADM،

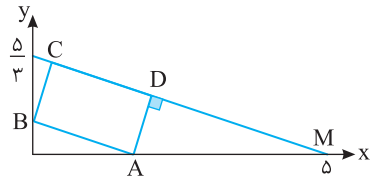
$$AM^۲=AD^۲+DM^۲$$

$$(۵-\frac{۵}{۲})^۲=(\frac{۵}{۲\sqrt{۱۰}})^۲+DM^۲$$

$$\frac{۲۵}{۴}-\frac{۲۵}{۴۰}=DM^۲$$

$$\frac{۲۲۵}{۴۰}=DM^۲\Rightarrow DM=\frac{۱۵}{۲\sqrt{۱۰}}$$

در نتیجه $S_{ADM}=\frac{۱}{۲}AD\times DM=\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۲\sqrt{۱۰}}\times\frac{۱۵}{۲\sqrt{۱۰}}=\frac{۱۵}{۱۶}$



راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\tan\alpha=\frac{ON}{OM}=\frac{\frac{۵}{۳}}{۵}=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین اگر $AD=x$، آن‌گاه

$$\triangle ADM:\tan\alpha=\frac{AD}{DM}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{x}{DM}\Rightarrow DM=۳x$$

همین‌طور،

$$\triangle BCN:\cot\beta=\frac{NC}{BC}\Rightarrow\cot(۹۰^\circ-\alpha)=\frac{NC}{x}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{NC}{x}$$

$$\frac{۱}{۳}=\frac{NC}{x}\Rightarrow NC=\frac{x}{۳}$$

از طرف دیگر،

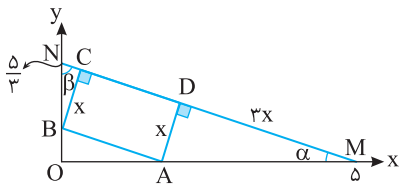
$$NM^۲=OM^۲+ON^۲=۵^۲+(\frac{۵}{۳})^۲=۱۰\times\frac{۲۵}{۹}\Rightarrow NM=\frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰}$$

بنابراین $CD=\frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰}-\frac{x}{۳}-۳x=\frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰}-\frac{۱۰}{۳}x$

در نتیجه $S_{ABCD}=x(\frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰}-\frac{۱۰}{۳}x)=-\frac{۱۰}{۳}x^۲+\frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰}x$

مساحت مستطیل ABCD برحسب x تابعی درجهٔ دوم است که ماکزیمم آن به ازای $x=\frac{-\frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰}}{-\frac{۲۰}{۳}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$ به‌دست می‌آید. در این صورت مساحت مثلث ADM برابر است با

$$\frac{۱}{۲}x(۳x)=\frac{۳}{۲}x^۲=\frac{۳}{۲}(\frac{\sqrt{۱۰}}{۴})^۲=\frac{۱۵}{۱۶}$$



۳۰۳۷ **۲** فرض می‌کنیم عددهای دستهٔ اول به‌صورت زیر باشند:

$$a\,,a+۲,\ldots,a+۱۲$$

در این صورت $\overline{x}=\frac{۷a+۴۲}{۷}=a+۶$. پس

$$\sigma=\frac{۱}{۲}\overline{x}\Rightarrow ۴\sigma^۲=\overline{x}^۲\Rightarrow\frac{۴(۶^۲+۴^۲+۲^۲+۰^۲+۲^۲+۴^۲+۶^۲)}{۷}=(a+۶)^۲$$

$$۴(\frac{۲\times۵۶}{۷})=(a+۶)^۲\Rightarrow(a+۶)^۲=۶۴\Rightarrow a=۲\ ,\ a=-۱۴$$

فرض کنید داده‌های دستهٔ آخر به‌صورت مقابل باشند: $b,b+۲,\ldots,b+۱۲$

در این صورت $\overline{x}=b+۶$. پس $\sigma^۲=\overline{x}\Rightarrow\frac{۲\times۵۶}{۷}=b+۶\Rightarrow b=۱۰$

اگر $a=-۱۴$ ، عدد آخر دستهٔ اول برابر -۲ و عدد آخر دستهٔ آخر برابر ۲۲ است که اختلاف آن‌ها ۲۴ است.

اگر $a=۲$ ، عدد آخر دستهٔ اول برابر ۱۴ و عدد آخر دستهٔ آخر برابر ۲۲ است که اختلاف آن‌ها ۸ است.

۳۰۳۸ **۳** عددی که مضرب ۶ است، زوج است، پس یکان آن باید ۲ باشد. فرض می‌کنیم در ده رقم باقی‌مانده n رقم برابر ۲ باشند. در این صورت $۱۰-n$ رقم برابر ۱ هستند. چون عدد مورد نظر باید بر ۳ هم بخش‌پذیر باشد، پس مجموع رقم‌های آن بر ۳ بخش‌پذیر است. مجموع رقم‌های این عدد برابر است با $n\times۲+(۱۰-n)\times۱+۲=۱۲+n$

چون ۱۲ بر ۳ بخش‌پذیر است، پس n باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد. چون $۰\le n\le۱۰$ است، پس n یکی از عددهای ۰، ۳، ۶ یا ۹ است. توجه کنید که اگر جای رقم‌های ۲ باقی‌مانده را مشخص کنیم، جای رقم‌های ۱ خود به خود مشخص می‌شود. تعداد راه‌های انتخاب جای رقم‌های ۲ برابر است با $\binom{۱۰}{۰}+\binom{۱۰}{۳}+\binom{۱۰}{۶}+\binom{۱۰}{۹}=۳۴۱$

۳۰۳۹ **۲** برای اینکه در n بار پرتاب سکه، پرتاب n ام k امین بار باشد که سکه رو آمده است، باید در $n-۱$ پرتاب قبلی $k-۱$ بار رو و $n-(k-۱)$ بار پشت آمده باشد. در نتیجه، احتمال پیشامد مورد نظر برابر است با

$$\frac{\binom{n-۱}{k-۱}}{۲^n}$$

از طرف دیگر، احتمال اینکه در n پرتاب سکه k بار رو بیاید برابر است با $\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$. در نتیجه

$$\frac{\binom{n-۱}{k-۱}}{۲^n}=\frac{k}{k+۵}\times\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}\Rightarrow\frac{(n-۱)!}{۲^n(k-۱)!(n-k)!}=\frac{k}{k+۵}\times\frac{n!}{۲^n k!(n-k)!}$$

$$۱=\frac{k}{k+۵}\times\frac{n}{k}\Rightarrow k+۵=n$$

$$n+k=(k+۵)+k=۲k+۵$$

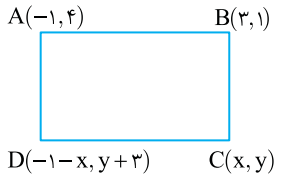
اگر $k=۲$ ، آن‌گاه $n+k=۹$.

۳۰۴۰ **۴** بنابر فرمول احتمال کل، احتمال قبولی امیر در رشتهٔ پزشکی برابر است با

$$\underbrace{۰/۴\times۰/۲۵}_{\text{قبولی دانشگاه A}}+\underbrace{۰/۳۵\times۰/۳}_{\text{قبولی دانشگاه B}}+\underbrace{۰/۲۵\times۰/۳۵}_{\text{قبولی دانشگاه C}}=۰/۲۹۲۵$$

بنابراین ۲۹/۲۵ درصد احتمال قبولی امیر است.

۳۰۴۱ **۳** چون ABCD مستطیل (متوازی‌الاضلاع) است، پس

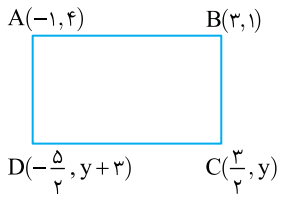


$$x_A+x_C=x_B+x_D\Rightarrow-۱+x=۳-۱-x\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

اکنون توجه کنید که

$$\text{شیب خط AB}=\frac{۱-۴}{۳-(-۱)}=-\frac{۳}{۴}$$

$$\text{شیب خط AD}=\frac{y+۳-۴}{-\frac{۵}{۲}-(-۱)}=\frac{y-۱}{-\frac{۳}{۲}}=-\frac{۲(y-۱)}{۳}$$



چون خط‌های AB و AD بر هم عمودند، حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -۱ است، پس

$$(-\frac{۳}{۴})\times(\frac{-۲(y-۱)}{۳})=-۱\Rightarrow y-۱=-۲\Rightarrow y=-۱$$

اکنون توجه کنید که

$$AB=\sqrt{(۳+۱)^۲+(۱-۴)^۲}=۵$$

$$BC=\sqrt{(۳-\frac{۳}{۲})^۲+(۱+۱)^۲}=\sqrt{\frac{۹}{۴}+۴}=\frac{۵}{۲}$$

بنابراین محیط مستطیل ABCD برابر است با $۲(۵+\frac{۵}{۲})=۱۵$.

۳۰۴۲ **۱** **راه‌حل اول** اگر فرض کنیم $AE=x$ ، آن‌گاه $DE=۲x$. در نتیجه، چون ABCD مربع است، پس $AB=BC=۳x$. فرض می‌کنیم $EF=y$ و $AF=z$. در این صورت از قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود

$$\triangle ABE: BE^۲=AB^۲+AE^۲=۹x^۲+x^۲=۱۰x^۲\Rightarrow BE=\sqrt{۱۰}x$$

بنابراین $BF=\sqrt{۱۰}x-y$. همین‌طور، $AC=۳\sqrt{۲}x$ ، پس $FC=۳\sqrt{۲}x-z$.

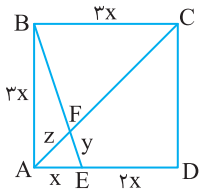
اکنون توجه کنید که مثلث‌های AEF و CBF متشابه‌اند (زز)، پس

$$\frac{AF}{CF}=\frac{AE}{CB}\Rightarrow\frac{z}{۳\sqrt{۲}x-z}=\frac{x}{۳x}=\frac{۱}{۳}$$

اگر این تناسب را ترکیب در مخرج کنیم به‌دست می‌آید $\frac{z}{۳\sqrt{۲}x}=\frac{۱}{۴}$. همین‌طور،

$$\frac{EF}{BF}=\frac{AE}{CB}\Rightarrow\frac{y}{\sqrt{۱۰}x-y}=\frac{x}{۳x}=\frac{۱}{۳}$$

اگر این تناسب را ترکیب در مخرج کنیم به‌دست می‌آید $\frac{y}{\sqrt{۱۰}x}=\frac{۱}{۴}$. بنابراین



$$\frac{z}{۳\sqrt{۲}x}=\frac{y}{\sqrt{۱۰}x}\Rightarrow\frac{y}{z}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۳\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

راه‌حل دوم اگر طول ضلع مربع را $۳a$ بگیریم، می‌توانیم مربع را مانند شکل مقابل روی صفحهٔ مختصات طوری رسم کنیم که رأس A بر مبدأ مختصات منطبق باشد و ضلع‌های AB و AD روی محورهای مختصات باشند. در این صورت معادلهٔ خط AC به‌صورت $y=x$ و معادلهٔ خط BE به‌صورت $y=-۳x+۳a$ است. بنابراین نقطهٔ F محل تلاقی این دو خط است که مختصات آن از حل دستگاه معادلات زیر به‌دست می‌آید:

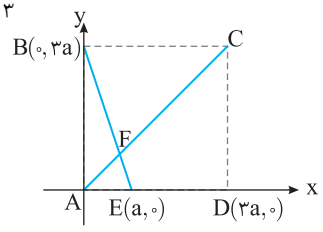
$$\begin{cases}y=x\\y=-۳x+۳a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۳}{۴}a\\y=\frac{۳}{۴}a\end{cases}$$

بنابراین

$$EF=\sqrt{(\frac{۳}{۴}a-a)^۲+(\frac{۳}{۴}a-۰)^۲}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}a$$
$$AF=\sqrt{(\frac{۳}{۴}a)^۲+(\frac{۳}{۴}a)^۲}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}a$$

پس

$$\frac{EF}{AF}=\frac{\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}a}{\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}a}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$



۳۰۴۳ **۴** **راه‌حل اول** چون $CJ||BE$، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث BFE،

$$\frac{FC}{CB}=\frac{FJ}{JE}\Rightarrow\frac{۳}{۶}=\frac{FJ}{۴}\Rightarrow FJ=۲$$

اکنون توجه کنید که مثلث‌های CEJ و DFJ متشابه‌اند (زز). بنابراین

$$\frac{CE}{DF}=\frac{EJ}{FJ}\Rightarrow\frac{CE}{DF}=\frac{۴}{۲}=۲\Rightarrow CE=۲DF$$

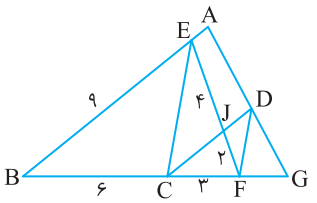
از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث BEF،

$$BE^۲=EF^۲+BF^۲-۲EF\times BF\times\cos\hat{F}$$
$$۸۱=۳۶+۸۱-۲\times۶\times۹\times\cos\hat{F}\Rightarrow\cos\hat{F}=\frac{۱}{۳}$$

در نتیجه، باز هم بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث CEF،

$$CE^۲=CF^۲+EF^۲-۲CF\times EF\times\cos\hat{F}=۹+۳۶-۲\times۳\times۶\times\frac{۱}{۳}=۳۳$$

پس $CE=\sqrt{۳۳}$ و در نتیجه $DF=\frac{۱}{۲}CE=\frac{\sqrt{۳۳}}{۲}$.

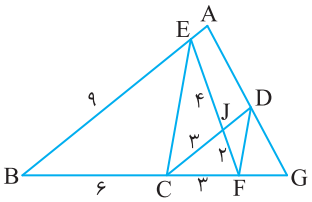


راه‌حل دوم چون $CJ||BE$، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث BFE،

$$\frac{FC}{CB}=\frac{FJ}{JE}\Rightarrow\frac{۳}{۶}=\frac{FJ}{۴}\Rightarrow FJ=۲$$

در همین مثلث، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{CJ}{BE}=\frac{CF}{BF}\Rightarrow\frac{CJ}{۹}=\frac{۳}{۹}\Rightarrow CJ=۳$$



از طرف دیگر، مثلث‌های CEJ و DFJ متشابه‌اند (زز). بنابراین

$$\frac{CE}{DF}=\frac{EJ}{FJ}\Rightarrow\frac{CE}{DF}=\frac{۴}{۲}=۲\Rightarrow CE=۲DF$$

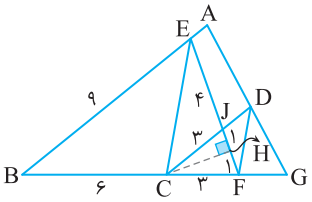
اکنون توجه کنید که مثلث JCF متساوی‌الساقین است $(CJ=CF)$. بنابراین ارتفاع وارد بر قاعدهٔ آن، میانه نیز هست. در نتیجه، اگر این ارتفاع CH باشد، آن‌گاه $JH=۱$. در نتیجه، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث CHJ،

$$CJ^۲=CH^۲+JH^۲\Rightarrow۹=CH^۲+۱\Rightarrow CH=۲\sqrt{۲}$$

همین‌طور، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث CHE،

$$CE^۲=CH^۲+EH^۲=۸+۲۵=۳۳\Rightarrow CE=\sqrt{۳۳}$$

در نتیجه $DF=\frac{۱}{۲}CE=\frac{\sqrt{۳۳}}{۲}$.



۳۰۴۴ **۲** ابتدا معادلهٔ دایره را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲-۳x-۵y+\frac{۱}{۲}=۰$$

بنابراین مرکز دایره نقطهٔ $O(\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲})$ و شعاع آن برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۳)^۲+(-۵)^۲-۴\times\frac{۱}{۲}}=۲\sqrt{۲}$$

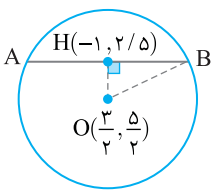
کوتاه‌ترین وتری که از نقطهٔ $H(-۱,۲/۵)$ می‌گذرد، وتری است که در این نقطه بر قطر گذرنده از این نقطه عمود است. فاصلهٔ این نقطه از مرکز دایره برابر است با

$$\sqrt{(\frac{۳}{۲}+۱)^۲+(\frac{۵}{۲}-۲/۵)^۲}=\frac{۵}{۲}$$

در مثلث OHB، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$OB^۲=OH^۲+HB^۲\Rightarrow۸=\frac{۲۵}{۴}+HB^۲\Rightarrow HB=\frac{\sqrt{۷}}{۲}$$

پس $AB=۲HB=\sqrt{۷}$.



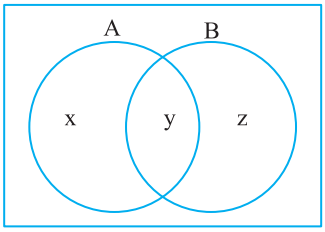
۳۰۴۵ **۴** با توجه به شکل زیر $x+y=m$ و $y+z=k$. در نتیجه

$$m-k=x+y-(y+z)=x-z$$

بنابراین $x-z=۱۴$. همچنین، $n(A\cap B)=y$ و $n(A\cup B)=x+y+z$.

پس $x+y+z-y=x+z=۲۰$. اکنون توجه کنید که

$$\begin{cases} x-z=۱۴ \\ x+z=۲۰ \end{cases} \Rightarrow z=۳$$



۳۰۴۶ (۱) توجه کنید که $a_۲=a+d$ و $a_۳=a+۲d$. بنابراین

$$۶a_۲^۲=۵a_۳a+۳a_۲a \Rightarrow ۶(a+d)^۲=۵(a+۲d)a+۳(a+d)a$$

$$۶a^۲+۶d^۲+۱۲ad=۸a^۲+۱۳ad \Rightarrow ۲a^۲+ad-۶d^۲=۰$$

$$(۲a-۳d)(a+۲d)=۰ \Rightarrow a=\frac{۳}{۲}d \text{ یا } a=-۲d$$

بنابراین اگر $a=\frac{۳}{۲}d$ ، آن‌گاه

$$\frac{a_۴}{d}=\frac{a+۳d}{d}=\frac{\frac{۳}{۲}d+۳d}{d}=\frac{۹}{۲}$$

اگر $a=-۲d$ ، آن‌گاه

$$\frac{a_۴}{d}=\frac{a+۳d}{d}=\frac{-۲d+۳d}{d}=۱$$

بنابراین $\frac{a_۴}{d}$ می‌تواند ۱ باشد.

۳۰۴۷ (۴) فرض می‌کنیم $\log_۳ x=t$. در این صورت

$$x>۱ \Rightarrow \log_۳ x>۰ \Rightarrow t>۰$$

همچنین

$$\log_۹ x+۳\log_{x^۲} ۳=\frac{۱}{۲}\log_۳ x+\frac{۳}{۲}\log_x ۳$$

$$=\frac{۱}{۲}t+\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{t}=\frac{۱}{۲}(t+\frac{۳}{t})=\frac{۱}{۲}((\sqrt{t}-\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{t}})^۲+۲\sqrt{۳})$$

$$=\frac{۱}{۲}(\sqrt{t}-\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{t}})^۲+\sqrt{۳}$$

چون کمترین مقدار $\frac{۱}{۲}(\sqrt{t}-\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{t}})^۲$ برابر صفر است، که به ازای $t=\sqrt{۳}$ به‌دست می‌آید، پس کمترین مقدار عبارت مورد نظر برابر $\sqrt{۳}$ است.

۳۰۴۸ (۲) ابتدا توجه کنید که

$$x=\frac{۷۲}{y^۲-۱} \Rightarrow y^۲-۱=\frac{۷۲}{x} \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{۷۲}{x}+۱}$$

توجه کنید که اگر $\sqrt{\frac{۷۲}{x}+۱}$ عددی صحیح و غیرصفر باشد، به ازای یک مقدار صحیح x دو مقدار صحیح برای y به‌دست می‌آید، که باید یکی از آن‌ها حذف شود. برای اینکه $\sqrt{\frac{۷۲}{x}+۱}$ عددی صحیح شود، باید x عددی صحیح باشد که مقسوم‌علیه ۷۲ است و $\frac{۷۲}{x}+۱$ مربع کامل باشد. پس باید $\frac{۷۲}{x}+۱$ یکی از عددهای صفر، ۱، ۴، ۹، ۲۵، ۳۶، ۴۹ یا ۶۴ باشد. معادله‌های زیر جواب صحیح ندارند:

$$\frac{۷۲}{x}+۱=۱ \ , \quad \frac{۷۲}{x}+۱=۳۶ \ , \quad \frac{۷۲}{x}+۱=۴۹ \ , \quad \frac{۷۲}{x}+۱=۶۴$$

از طرف دیگر،

$$\frac{۷۲}{x}+۱=۰ \Rightarrow \frac{۷۲}{x}=-۱ \Rightarrow x=-۷۲ \Rightarrow y=۰$$

$$\frac{۷۲}{x}+۱=۴ \Rightarrow \frac{۷۲}{x}=۳ \Rightarrow x=\frac{۷۲}{۳}=۲۴ \Rightarrow y=\pm۲$$

$$\frac{۷۲}{x}+۱=۹ \Rightarrow \frac{۷۲}{x}=۸ \Rightarrow x=\frac{۷۲}{۸}=۹ \Rightarrow y=\pm۳$$

$$\frac{۷۲}{x}+۱=۲۵ \Rightarrow \frac{۷۲}{x}=۲۴ \Rightarrow x=\frac{۷۲}{۲۴}=۳ \Rightarrow y=\pm۵$$

بنابراین باید حداقل سه عضو از مجموعهٔ مورد نظر را حذف کنیم.

۳۰۴۹ (۳) نمودار ون مجموعه‌های A و B به صورت زیر است. توجه کنید که $m=x+z$ و $k=y+z$. چون $x+y+z=۱۱$ ، پس

$$m+k=x+z+y+z=۱۱+z \quad (۱)$$

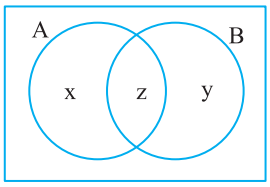
از طرف دیگر،

$$m-k=۵ \quad (۲)$$

با توجه به تساوی‌های (۱) و (۲) می‌نویسیم

$$\begin{cases} m+k=۱۱+z \\ m-k=۵ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲m=۱۶+z \Rightarrow m=۸+\frac{z}{۲}$$

بنابراین کمترین مقدار m برابر با ۸ است.



۳۰۵۰ (۴) قدرنسبت دنبالهٔ هندسی را برابر r می‌گیریم. در این صورت

$$\frac{a_۶}{a_۲^۳}+\frac{a_۲}{a^۲}=۲ \Rightarrow \frac{ar^۵}{(ar)^۳}+\frac{ar}{a^۲}=۲$$

$$\frac{r^۲}{a^۲}+\frac{r}{a}=۲$$

اگر فرض کنیم $\frac{r}{a}=t$ ، آن‌گاه

$$t^۲+t=۲ \Rightarrow t^۲+t-۲=۰ \Rightarrow t=۱ \ , \ t=-۲$$

درنتیجه نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{a^۲}{a_۲}=\frac{a^۲}{ar}=\frac{a}{r}=\frac{۱}{t}$

پس نسبت مورد نظر می‌تواند برابر $-\frac{۱}{۲}$ باشد.

۳۰۵۱ (۲) اگر فرض کنیم $\log_۲ x=t$ ، آن‌گاه چون $x>۱$ ، پس $t>۰$ و

$$\log_۸ x+۴\log_{x^۳} ۲=\frac{۱}{۳}\log_۲ x+\frac{۴}{۳}\log_x ۲=\frac{۱}{۳}t+\frac{۴}{۳}\times\frac{۱}{t}=\frac{۱}{۳}(t+\frac{۴}{t})$$

$$=\frac{۱}{۳}((\sqrt{t}-\frac{۲}{\sqrt{t}})^۲+۴)=\frac{۱}{۳}(\sqrt{t}-\frac{۲}{\sqrt{t}})^۲+\frac{۴}{۳}\geq\frac{۴}{۳}$$

پس کمترین مقدار عبارت $\log_۸ x+۴\log_{x^۳} ۲$ برابر $\frac{۴}{۳}$ است که به ازای $t=۲$ به دست می‌آید. در نتیجه بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ A برابر است با

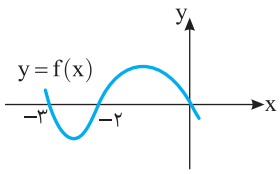
$$\frac{۱}{\sqrt{\frac{۴}{۳}}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۳۰۵۲ (۱) ابتدا توجه کنید که

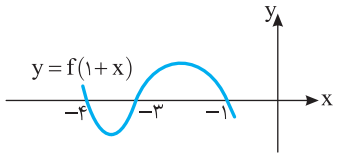
$$x=\frac{۳۰}{۱+|y|} \Rightarrow ۱+|y|=\frac{۳۰}{x} \Rightarrow |y|=\frac{۳۰}{x}-۱ \Rightarrow y=\pm(\frac{۳۰}{x}-۱)$$

توجه کنید که اگر $\frac{۳۰}{x}-۱$ عددی صحیح و غیر صفر باشد، به ازای یک مقدار صحیح x دو مقدار صحیح برای y به دست می‌آید. اگر $x=۳۰$، آن‌گاه $y=۰$. مقسوم‌علیه‌های صحیح ۳۰ عددهای ±۱، ±۲، ±۳، ±۵، ±۶، ±۱۰، ±۱۵ و ±۳۰ هستند. توجه کنید که لازم نیست ۳۰ و -۳۰ را حذف کنیم، و از هر جفت از عددهای دیگر باید یکی را حذف کنیم. بنابراین باید دست‌کم هفت عدد را حذف کنیم.

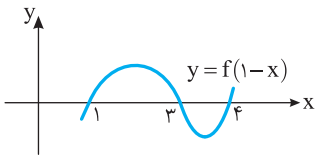
۳۰۵۳ **(۱)** ابتدا نمودار تابع $y=f(x-۲)$ را دو واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x)$ به دست بیاید:



برای رسم نمودار تابع $y=f(۱+x)$ کافی است نمودار تابع f را یک واحد به چپ منتقل کنیم:



برای رسم نمودار تابع $y=f(۱-x)$ کافی است نمودار تابع $y=f(۱+x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم:



اکنون توجه کنید که برای پیدا کردن دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{f(۱-x)}{f(۱+x)}}$ باید نامعادلهٔ $\frac{f(۱-x)}{f(۱+x)}\geq ۰$ را حل کنیم. جدول تعیین علامت این عبارت به صورت زیر است:

x	$-\infty$		-۴		-۳		-۱		۱		۳		۴		$+\infty$
$f(۱+x)$		+	۰	−	۰	+	۰	−		−		−		−	
$f(۱-x)$		−		−		−		−	۰	+	۰	−	۰	+	
$\frac{f(۱-x)}{f(۱+x)}$		−	∄	+	∄	−	∄	+	۰	−	۰	+	۰	−	

بنابراین $D_g=(-۴,-۳)\cup(-۱,۱]\cup[۳,۴]$. پس فقط عددهای صحیح صفر، ۱، ۳ و ۴ در دامنهٔ تابع g هستند.

۳۰۵۴ **(۴)** توجه کنید که $(fog)(-\frac{۱}{۳})=f(g(-\frac{۱}{۳}))$. از طرف دیگر،

$$g(-\frac{۱}{۳})=f([-\frac{۱}{۳}-f(-\frac{۱}{۳})])=f([-\frac{۱}{۳}-(-\frac{۱}{۳}+[-\frac{۱}{۳}])])$$
$$=f(-[-\frac{۱}{۳}])=f(-(-۱))=f(۱)=۱+[۱]=۲$$

پس

$$(fog)(-\frac{۱}{۳})=f(۲)=۲+[۲]=۴$$

۳۰۵۵ **(۳)** اگر طول مستطیل را a و عرض آن را b بگیریم، اندازهٔ قطر مستطیل برابر $\sqrt{a^۲+b^۲}$ است. بنابراین

$$\frac{\sqrt{a^۲+b^۲}}{a}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲} \quad (۱)$$

فرض می‌کنیم $\frac{a}{b}=x$. در این صورت $a=bx$. پس تساوی (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\sqrt{b^۲x^۲+b^۲}}{bx}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\Rightarrow\frac{b\sqrt{x^۲+۱}}{bx}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$$
$$\frac{\sqrt{x^۲+۱}}{x}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\Rightarrow\frac{x^۲+۱}{x^۲}=(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})^۲\Rightarrow۱+\frac{۱}{x^۲}=\frac{۶+۲\sqrt{۵}}{۴}$$
$$\frac{۱}{x^۲}=\frac{۶+۲\sqrt{۵}}{۴}-۱=\frac{۲+۲\sqrt{۵}}{۴}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow x^۲=\frac{۲}{\sqrt{۵}+۱}$$

۳۰۵۶ **(۲)** ابتدا توجه کنید که مجموع ضریب‌های معادلهٔ $x^۲-(a+۱)x+a=۰$ برابر صفر است، پس یکی از جواب‌های آن $x=۱$ است. درنتیجه، طبق فرض مسئله، جواب دیگر این معادله $x=۳$ است. پس $x=۳$ در معادله صدق می‌کند:

$$۹-(a+۱)۳+a=۰\Rightarrow a=۳$$

بنابراین معادلهٔ دوم به صورت $x^۲-۱۰x+b=۰$ درمی‌آید. چون جواب‌های این معادله دو عدد زوج متوالی‌اند، پس اختلاف آن‌ها برابر ۲ است. در نتیجه

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|۱|}=۲\Rightarrow\sqrt{۱۰۰-۴b}=۲\Rightarrow b=۲۴$$

توجه کنید که حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ اول برابر ۳ و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ دوم برابر ۲۴ است. درنتیجه، اختلاف آن‌ها برابر ۲۱ است.

۳۰۵۷ **(۴)** ابتدا توجه کنید که $D_f=(۰,+\infty)$، بنابراین

$$D_{fof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_f\}=\{x>۰\,|\,(۴(\frac{۱}{۲})^x+\log_{۰/۵}x)^۳>۰\}$$

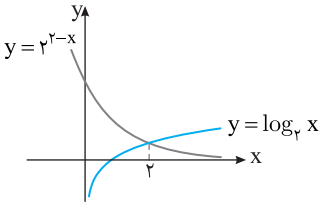
اکنون توجه کنید که

$$(۴(\frac{۱}{۲})^x+\log_{۰/۵}x)^۳>۰\Rightarrow۴(\frac{۱}{۲})^x+\log_{۰/۵}x>۰$$
$$\log_{۰/۵}x>-۴(\frac{۱}{۲})^x\Rightarrow-\log_۲x>-۲^{۲-x}\Rightarrow\log_۲x<۲^{۲-x} \quad (۱)$$

از روی نمودار تابع‌های $y=\log_۲x$ و $y=۲^{۲-x}$ معلوم است که $x=۲$ تنها جواب معادلهٔ $\log_۲x=۲^{۲-x}$ است و مجموعهٔ جواب‌های نامعادله (۱) بازهٔ $(۰,۲)$ است. بنابراین باید نامعادلهٔ $(fof)(x)<f(۲^{۶-۳x})$ را با شرط $x\in(۰,۲)$ حل کنیم. اکنون توجه کنید که تابع‌های $y=۴(\frac{۱}{۲})^x$ و $y=\log_{۰/۵}x$ نزولی اکیدند، پس مجموع آن‌ها نزولی اکید است. همچنین چون تابع $y=x^۳$ صعودی اکید است، پس تابع $f(x)=(۴(\frac{۱}{۲})^x+\log_{۰/۵}x)^۳$ نیز نزولی اکید است. بنابراین

$$(fof)(x)<f(۲^{۶-۳x})\Rightarrow f(x)>۲^{۶-۳x}$$
$$(۴(\frac{۱}{۲})^x+\log_{۰/۵}x)^۳>۲^{۶-۳x}\Rightarrow۴(\frac{۱}{۲})^x+\log_{۰/۵}x>۲^{۲-x}$$
$$۲^{۲-x}+\log_{۰/۵}x>۲^{۲-x}\Rightarrow\log_{۰/۵}x>۰$$

پس $x<۱$. بنابراین جواب نامعادلهٔ مورد نظر بازهٔ $(۰,۱)$ است.



۳۰۵۸ **(۳)** ابتدا توجه کنید که $x=-۱$ و $x=\frac{m+۴}{m}$ صفرهای تابع $y=mx^۲-۴x-(m+۴)$ هستند و $(۰,-m-۴)$ نقطهٔ تقاطع نمودار تابع f با محور y است. مساحت مثلثی که رأس‌های آن $(-۱,۰)$، $(\frac{m+۴}{m},۰)$، $(۰,-m-۴)$ برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\left|\frac{m+۴}{m}-(-۱)\right||-m-۴|=\left|\frac{m+۲}{m}\right||m+۴|$$

چون مساحت این مثلث برابر ۳ است، پس $\left|\frac{(m+۲)(m+۴)}{m}\right|=۳$

بنابراین باید معادله‌های زیر را حل کنیم

$$\frac{(m+۲)(m+۴)}{m}=۳\Rightarrow m^۲+۳m+۸=۰\Rightarrow \Delta<۰ \text{ (جواب ندارد)}$$

$$\frac{(m+۲)(m+۴)}{m}=-۳\Rightarrow m^۲+۹m+۸=۰\Rightarrow m=-۱, m=-۸$$

طول رأس سهمی $y=mx^۲-۴m-(m+۴)$ برابر است با $-\frac{-۴}{۲m}=\frac{۲}{m}$. اگر $m=-۱$، آن‌گاه طول رأس سهمی برابر $-\frac{۱}{۴}$ است، که اختلاف آن‌ها برابر است با $-\frac{۱}{۴}+۲=\frac{۷}{۴}$.

۳۰۵۹ **(۱)** برای اینکه تابع f وارون‌پذیر باشد، باید تابع‌های $g(x)=\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}$ با دامنهٔ $[\frac{۵}{۲},+\infty)$ و $h(x)=-۲x^۲+ax-۲۱$ با دامنهٔ $(-\infty,\frac{۵}{۲})$ یک‌به یک باشند و برد این توابع اشتراکی نداشته باشند. تابع g تابعی خطی است، پس یک به یک است.

برای اینکه تابع h روی بازهٔ $(-\infty,\frac{۵}{۲})$ یک‌به‌یک باشد، باید طول رأس نمودار تابع h (سهمی) در بازهٔ $(-\infty,\frac{۵}{۲})$ نباشد. طول رأس این سهمی $\frac{a}{۴}$ است. بنابراین $\frac{a}{۴}\geq\frac{۵}{۲}$.

پس $a\geq ۱۰$. برای اینکه برد تابع‌های g و h اشتراک نداشته باشد، باید

$$\lim_{x\to(\frac{۵}{۲})^-} h(x)\leq g(\frac{۵}{۲})\Rightarrow -۲(\frac{۵}{۲})^۲+a(\frac{۵}{۲})-۲۱\leq-\frac{۱}{۶}$$

$$\frac{۵}{۲}a\leq\frac{۱۰۰}{۳}\Rightarrow a\leq\frac{۴۰}{۳}$$

بنابراین $۱۰\leq a\leq\frac{۴۰}{۳}$، که بیشترین مقدار ممکن صحیح a برابر ۱۳ است. اگر $a=۱۳$، آن‌گاه

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲} & x\geq\frac{۵}{۲}\\ -۲x^۲+۱۳x-۲۱ & x<\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

اکنون فرض کنید $f^{-۱}(-۳)=m$. بنابراین $f(m)=-۳$. توجه کنید که

$$m\geq\frac{۵}{۲}\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲}m-\frac{۳}{۲}=-۳\Rightarrow m=-۳ \text{ (غ.ق.ق.)}$$

$$m<\frac{۵}{۲}\Rightarrow f(m)=-۲m^۲+۱۳m-۲۱=-۳\Rightarrow m=۲, m=\frac{۹}{۲} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

۳۰۶۰ **(۲)** اختلاف ریشه‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{(\log ۹)^۲+۴\log\frac{۵}{۳}\times\log ۱۵}}{\log\frac{۵}{۳}}$$

اکنون توجه کنید که

$$\log ۹=۲\log ۳=۲\times ۰/۴=۰/۸$$

$$\log\frac{۵}{۳}=\log ۵-\log ۳=\log\frac{۱۰}{۲}-\log ۳$$

$$=\log ۱۰-\log ۲-\log ۳=۱-۰/۳-۰/۴=۰/۳$$

$$\log ۱۵=\log(۳\times ۵)=\log ۳+\log ۵$$

$$=\log ۳+۱-\log ۲=۰/۴+۱-۰/۳=۱/۱$$

بنابراین اختلاف مورد نظر برابر است با

$$\frac{\sqrt{(۰/۸)^۲+۴\times ۰/۳\times ۱/۱}}{۰/۳}=\frac{\sqrt{۱/۹۶}}{۰/۳}=\frac{۱/۴}{۰/۳}=\frac{۱۴}{۳}$$

۳۰۶۱ **(۱)** توجه کنید که

$$\tan x+\cot x=۴\Rightarrow\frac{۱}{\sin x\cos x}=۴\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین

$$(\sin x-\cos x)^۲=۱-۲\sin x\cos x=۱-۲\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$|\sin x-\cos x|=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

از طرف دیگر، $۵\pi<۴x<۶\pi\Rightarrow\frac{۵}{۴}\pi<x<\frac{۳}{۲}\pi$

پس $\sin x-\cos x<۰$. در نتیجه

$$-(\sin x-\cos x)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\sin x-\cos x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

اکنون توجه کنید که

$$\sin^۳ x-\cos^۳ x=(\sin x-\cos x)(۱+\sin x\cos x)$$

$$=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۱+\frac{۱}{۴})=-\frac{۵\sqrt{۲}}{۸}$$

پس

$$\frac{۱}{\sin^۳ x-\cos^۳ x}=\frac{۱}{-\frac{۵\sqrt{۲}}{۸}}=-۰/۸\sqrt{۲}$$

۳۰۶۲ **(۴)** چون محیط دایره برابر ۲π است، پس شعاع آن برابر است با $r=\frac{۲\pi}{۲\pi}=۱$. در نتیجه، چون AH عمودمنصف OB است، پس $OH=BH=\frac{۱}{۲}$. از طرف دیگر، در مثلث OAH از قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود

$$OA^۲=OH^۲+AH^۲\Rightarrow ۱=\frac{۱}{۴}+AH^۲\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

همچنین، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHA،

$$\sin\hat{O}=\frac{AH}{OA}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\hat{O}=\frac{\pi}{۳}$$

بنابراین طول کمان AB برابر است با

$$\overset{\frown}{AB}=OA\times\hat{O}=۱\times\frac{\pi}{۳}=\frac{\pi}{۳}$$

درنتیجه محیط ناحیهٔ رنگی برابر است با

$$\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\pi}{۳}$$

و محیط مثلث OAH برابر است با

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

پس اختلاف مورد نظر برابر است با $\frac{\pi}{۳}-۱=\frac{\pi-۳}{۳}$.

۳۰۶۳ **(۲)** ابتدا رأس‌های مثلث ABC را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases}x+۲y=۳\\ y=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۳\\ y=۰\end{cases}\Rightarrow A=(۳,۰)$$

$$\begin{cases}x+۲y=۳\\ x+y=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-۳\\ y=۳\end{cases}\Rightarrow B=(-۳,۳)$$

$$\begin{cases}۲x+ay=۶\\ x+y=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{۶}{a-۲}\\ y=\frac{۶}{a-۲}\end{cases}\Rightarrow C=(-\frac{۶}{a-۲},\frac{۶}{a-۲})$$

چون مرکز دایرهٔ گفته شده روی نیمساز ناحیهٔ دوم است، پس نقطه‌های B و C دو سر قطر این دایره‌اند و O، مرکز دایره، وسط پاره‌خط BC است. در نتیجه

$$x_O=\frac{-۳+\frac{-۶}{a-۲}}{۲}=\frac{۳a}{۴-۲a}$$

$$y_O=-x_O=-\frac{۳a}{۴-۲a}$$

اکنون توجه کنید که

$$OA=\frac{۱}{۲}BC\Rightarrow OA^۲=\frac{۱}{۴}BC^۲$$

از طرف دیگر،

$$OA^۲=(\frac{۳a}{۴-۲a}-۳)^۲+(-\frac{۳a}{۴-۲a}-۰)^۲=(\frac{۹a-۱۲}{۴-۲a})^۲+\frac{۹a^۲}{(۴-۲a)^۲}=\frac{۹۰a^۲-۲۱۶a+۱۴۴}{۴(a-۲)^۲}$$

$$BC^۲=(-\frac{۶}{a-۲}+۳)^۲+(\frac{۶}{a-۲}-۳)^۲=۲(\frac{۳a-۱۲}{a-۲})^۲=\frac{۱۸a^۲-۱۴۴a+۲۸۸}{(a-۲)^۲}$$

در نتیجه

$$OA^۲=\frac{۱}{۴}BC^۲\Rightarrow\frac{۹۰a^۲-۲۱۶a+۱۴۴}{۴(a-۲)^۲}=\frac{۱}{۴}\times\frac{۱۸a^۲-۱۴۴a+۲۸۸}{(a-۲)^۲}$$

$$۹۰a^۲-۲۱۶a+۱۴۴=۱۸a^۲-۱۴۴a+۲۸۸$$

$$a^۲-a-۲=۰\Rightarrow a=-۱,a=۲\ (غ.ق.ق)$$

بنابراین C نقطهٔ $(-۲,۲)$ است. اکنون توجه کنید که چون A زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر BC است، پس

$$\hat{A}=۹۰^\circ\Rightarrow\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ\Rightarrow\hat{B}=۹۰^\circ-\hat{C}$$

بنابراین

$$\cot(\hat{B}-\hat{C})=\cot(۹۰^\circ-۲\hat{C})=\tan ۲\hat{C}=\frac{\sin ۲\hat{C}}{\cos ۲\hat{C}}$$

$$=\frac{۲\sin\hat{C}\cos\hat{C}}{\cos^۲\hat{C}-\sin^۲\hat{C}}=\frac{\frac{۲\sin\hat{C}\cos\hat{C}}{\cos^۲\hat{C}}}{\frac{\cos^۲\hat{C}}{\cos^۲\hat{C}}-\frac{\sin^۲\hat{C}}{\cos^۲\hat{C}}}=\frac{۲\tan\hat{C}}{۱-\tan^۲\hat{C}}$$

از طرف دیگر،

$$\tan\hat{C}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{(۳+۳)^۲+(۳-۰)^۲}}{\sqrt{(۳-۲)^۲+(۰+۲)^۲}}=\frac{۳\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=۳$$

پس

$$\cot(\hat{B}-\hat{C})=\frac{۲\times۳}{۱-۹}=-\frac{۳}{۴}$$

۳۰۶۴ **۳** ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=a\sin^۲(\frac{\pi}{۴}-bx)+c=a(\frac{۱-\cos ۲(\frac{\pi}{۴}-bx)}{۲})+c$$

$$=\frac{a}{۲}-\frac{a}{۲}\cos(\frac{\pi}{۲}-۲bx)+c=-\frac{a}{۲}\sin ۲bx+\frac{a}{۲}+c$$

پس دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{۲\pi}{|۲b|}$. بنابراین

$$\frac{۲\pi}{۲|b|}=\frac{۱۵\pi}{۴}-(-\frac{۵\pi}{۴})=۵\pi$$

پس $|b|=\frac{۱}{۵}$. از طرف دیگر، ماکزیمم و مینیمم تابع f به ترتیب برابر $\frac{a}{۲}+c+|\frac{a}{۲}|$ و $\frac{a}{۲}+c-|\frac{a}{۲}|$ است. در نتیجه

$$\begin{cases}\frac{a}{۲}+c+|\frac{a}{۲}|=۱\\ \frac{a}{۲}+c-|\frac{a}{۲}|=-۲\end{cases}\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}}۲|\frac{a}{۲}|=۳\Rightarrow|a|=۳$$

بنابراین $|ab|=|a||b|=\frac{۳}{۵}$. از روی نمودار تابع f معلوم می‌شود که چون تابع در همسایگی راست نقطهٔ $x=۰$ صعودی است، پس $-\frac{a}{۲}(۲b)>۰$ یعنی $ab<۰$.

درنتیجه $ab=-\frac{۳}{۵}=-۰/۶$.

۳۰۶۵ **۲** ابتدا توجه کنید که

$$\cot(\frac{\pi+۴x}{۲})=\cot(\frac{\pi}{۲}+۲x)=-\tan ۲x$$

$$\cos(\frac{\pi+۸x}{۲})=\cos(\frac{\pi}{۲}+۴x)=-\sin ۴x$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\tan ۲x=\sin ۴x\Rightarrow\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}=۲\sin ۲x\cos ۲x$$

$$\sin ۲x=۲\sin ۲x\cos^۲ ۲x\Rightarrow\sin ۲x(۲\cos^۲ ۲x-۱)=۰$$

$$\sin ۲x\cos ۴x=۰$$

در نتیجه

$$\sin ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos ۴x=۰\Rightarrow ۴x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۸},k\in\mathbb{Z}$$

چون جواب‌های غیرصفر در بازهٔ $[-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴}]$ را می‌خواهیم، پس در دستهٔ اول هیچ جوابی قابل قبول نیست و جواب‌های قابل قبول در دستهٔ دوم $\frac{\pi}{۸}$ و $-\frac{\pi}{۸}$ هستند، که اختلاف آن‌ها $\frac{\pi}{۴}$ است، پس $\alpha=\frac{\pi}{۴}$ و $\cos ۳\alpha=\cos\frac{۳\pi}{۴}=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$.

۳۰۶۶ **۴** چون حد صورت کسر وقتی که $x\to۱$ برابر با صفر است، پس باید حد مخرج کسر هم صفر باشد، تا حد کسر مورد نظر غیر صفر باشد. بنابراین

$$\lim_{x\to۱}(ax+b)=a+b=۰\Rightarrow a=-b$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to۱}\frac{b\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}-b}{ax+b}=\lim_{x\to۱}\frac{b\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}-b}{-bx+b}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}-۱}{-x+۱}=\lim_{x\to۱}\frac{۲-\sqrt[۳]{x}-۱}{(۱-x)(\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}+۱)}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{۱-\sqrt[۳]{x}}{(۱-\sqrt[۳]{x})(۱+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})(\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}+۱)}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{۱}{(۱+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})(\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}+۱)}=\frac{۱}{۳\times۲}=\frac{۱}{۶}$$

۳۰۶۷ **۳** نمودار تابع f خطی راست است که از نقطه‌های $(۰,۲a)$ و $(۳a,۰)$ گذشته است. معادلهٔ این خط به صورت زیر است

$$y-۰=\frac{۰-۲a}{۳a-۰}(x-۳a)\Rightarrow y=-\frac{۲}{۳}x+۲a$$

بنابراین $f(x)=-\frac{۲}{۳}x+a$. نمودار تابع g خطی راست است که از نقطه‌های $(۰,۲m)$ و $(-m,۰)$ گذشته است. معادلهٔ این خط به صورت زیر است

$$y-۰=\frac{۰-۲m}{-m-۰}(x+m)\Rightarrow y=۲x+۲m$$

بنابراین $g(x)=۲x+۲m$. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{|f(x)|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x+۲m}{|-\frac{۲}{۳}x+۲a|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x+۲m}{-\frac{۲}{۳}x+۲a}=\frac{۲}{-\frac{۲}{۳}}=-۳$$

۳۰۶۸ **۲** ابتدا توجه کنید که اگر عبارت $۲x^۳+(m-۳)x^۲+a^۲$ ریشه‌ای مانند $x_۰$ به‌جز $x=a$ داشته باشد، آن‌گاه تابع f در نقطهٔ $x=x_۰$ ناپیوسته می‌شود. در نتیجه $x=a$ باید تنها ریشهٔ عبارت $۲x^۳+(m-۳)x^۲+a^۲$ باشد. بنابراین

$$۲a^۳+(m-۳)a^۲+a^۲=۰\Rightarrow ۲a^۳+(m-۲)a^۲=۰$$

$$a^۲(۲a+m-۲)=۰\Rightarrow a=۰, a=\frac{۲-m}{۲}$$

اگر $a=۰$، آن‌گاه ضابطهٔ تابع f به ازای $x=۰$ به صورت $\frac{۲\tan b}{\sqrt{-x}}$ است که ممکن نیست. بنابراین $a=\frac{۲-m}{۲}$. از طرف دیگر، $x=a$ باید ریشهٔ مضاعف عبارت $۶x^۲+(m+۳)x+\frac{m}{۲}$ باشد، زیرا در غیر این صورت حد تابع f در نقطهٔ $x=a$ نامتناهی می‌شود. بنابراین

$$\Delta=۰\Rightarrow (m+۳)^۲-۲۴(\frac{m}{۲})=۰\Rightarrow (m-۳)^۲=۰\Rightarrow m=۳$$

پس $a=\frac{۲-۳}{۲}=-\frac{۱}{۲}$. بنابراین

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} \frac{\sqrt{۶(x+\frac{۱}{۲})^۲}}{|۲x^۳+\frac{۱}{۴}|}=\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} \frac{\sqrt{۶}|x+\frac{۱}{۲}|}{۲|x^۳+\frac{۱}{۸}|}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} \frac{\sqrt{۶}|x+\frac{۱}{۲}|}{۲|x+\frac{۱}{۲}||x^۲-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۴}|}=\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} \frac{\sqrt{۶}}{۲|x^۲-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۴}|}$$

$$=\frac{\sqrt{۶}}{۲|\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}|}=\frac{\sqrt{۶}}{۲\times\frac{۳}{۴}}=\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$$

بنابراین

$$f(a)=f(-\frac{۱}{۲})=\frac{۲\tan b}{\sqrt{\frac{۱}{۲}}}=۲\sqrt{۲}\tan b$$

در نتیجه

$$۲\sqrt{۲}\tan b=\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}\Rightarrow \tan b=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

بنابراین b می‌تواند $\frac{\pi}{۳}$ باشد.

۳۰۶۹ **۳** ابتدا توجه کنید که

$$g'(\sqrt[۵]{۳})f'(g(\sqrt[۵]{۳}))=(fog)'(\sqrt[۵]{۳})$$

بنابراین باید مشتق تابع fog را حساب کنیم. توجه کنید که اگر $x>۰$، آن‌گاه

$$(fog)(x)=f(\frac{۱}{x^۵+|x^۵|})=f(\frac{۱}{۲x^۵})=-\frac{۱}{\sqrt[۵]{\frac{۱}{۲x^۵}+|\frac{۱}{۲x^۵}|}}=-\frac{۱}{\sqrt[۵]{\frac{۱}{x^۵}}}=-x$$

بنابراین $(fog)'(x)=-۱$، پس $(fog)'(\sqrt[۵]{۳})=-۱$.

۳۰۷۰ **۴** فرض می‌کنیم $CD=x$، $BC=y$ و طول ضلع کوچک‌تر مثلث قائم‌الزاویه برابر a باشد. در این صورت طول ضلع دیگر این مثلث برابر $۲a$ است. در نتیجه، طول وتر این مثلث برابر با $\sqrt{۵}a$ است. از یک طرف مساحت مثلث برابر است با $\frac{۱}{۲}(a)(۲a)=a^۲$. از طرف دیگر، اگر طول ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه برابر h باشد، مساحت آن برابر است با $\frac{۱}{۲}h\times\sqrt{۵}a$. بنابراین

$$\frac{\sqrt{۵}}{۲}ha=a^۲\Rightarrow h=\frac{۲}{\sqrt{۵}}a$$

اکنون توجه کنید که مثلث‌های MCD و MNP متشابه‌اند. پس نسبت ارتفاع‌های آن‌ها برابر نسبت اضلاع آن‌ها است. یعنی

$$\frac{h-y}{h}=\frac{x}{\sqrt{۵}a}\Rightarrow\frac{\frac{۲}{\sqrt{۵}}a-y}{\frac{۲}{\sqrt{۵}}a}=\frac{x}{\sqrt{۵}a}\Rightarrow\frac{\sqrt{۵}(\frac{۲}{\sqrt{۵}}a-y)}{۲}=\frac{x}{\sqrt{۵}}$$

$$\frac{۲a-\sqrt{۵}y}{۲}=\frac{x}{\sqrt{۵}}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۵}}{۲}(۲a-\sqrt{۵}y)=\sqrt{۵}a-\frac{۵}{۲}y$$

بنابراین مساحت مستطیل برابر است با

$$S=xy=(\sqrt{۵}a-\frac{۵}{۲}y)y=-\frac{۵}{۲}y^۲+\sqrt{۵}ay$$

مساحت مستطیل $ABCD$ برحسب y تابعی درجهٔ دوم است، که ماکزیمم آن وقتی به دست می‌آید که

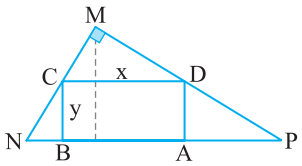
$$y=\frac{-\sqrt{۵}a}{۲(-\frac{۵}{۲})}=\frac{\sqrt{۵}}{۵}a$$

در این صورت

$$x=\sqrt{۵}a-\frac{۵}{۲}(\frac{\sqrt{۵}}{۵}a)=\frac{\sqrt{۵}}{۲}a$$

بنابراین

$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{\sqrt{۵}}{۲}a}{\frac{\sqrt{۵}}{۵}a}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$



۳۰۷۱ **۲** فرض می‌کنیم عددهای دستهٔ اول به صورت زیر باشند

$$a, a+۱, \ldots, a+۶$$

در این صورت $\bar{x}=\frac{۷a+۲۱}{۷}=a+۳$. پس

$$\sigma=\frac{۱}{۲}\bar{x}\Rightarrow ۴\sigma^۲=\bar{x}^۲\Rightarrow\frac{۴(۳^۲+۲^۲+۱^۲+۰^۲+۱^۲+۲^۲+۳^۲)}{۷}=(a+۳)^۲$$

$$\frac{۴(۲\times۱۴)}{۷}=(a+۳)^۲\Rightarrow(a+۳)^۲=۱۶\Rightarrow a=۱ \text{ یا } a=-۷ (\text{غ.ق.ق.})$$

فرض کنید داده‌های دستهٔ آخر به صورت مقابل باشند

$$b, b+۱, \ldots, b+۶$$

در این صورت $\bar{x}=b+۳$. پس

$$\sigma^۳=\bar{x}\Rightarrow(\sqrt{\frac{۲\times۱۴}{۷}})^۳=b+۳\Rightarrow۸=b+۳\Rightarrow b=۵$$

پس اختلاف مورد نظر برابر است با $b-a=۵-۱=۴$.

۳۰۷۲ **۱** چون عدد مورد نظر بر ۶ بخش‌پذیر است، پس زوج است، یعنی یکان آن باید برابر ۸ باشد. چون عدد مورد نظر از دو طرف یکسان خوانده می‌شود، پس اگر هفت رقم سمت راست را مشخص کنیم، هفت رقم سمت چپ نیز مشخص می‌شوند. توجه کنید که چون عدد مورد نظر بر ۶ بخش‌پذیر است، پس بر ۳ هم بخش‌پذیر است. بنابراین مجموع رقم‌هایش بر ۳ بخش‌پذیر است. یعنی دو برابر مجموع هفت رقم سمت راست بر ۳ بخش‌پذیر است، پس مجموع هفت رقم سمت راست بر ۳ بخش‌پذیر است. فرض کنید n تا از این هفت رقم برابر ۷ باشند، در این صورت $۶-n$ تا از رقم‌ها برابر ۸ هستند (توجه کنید که رقم آخر حتماً ۸ است). بنابراین مجموع هفت رقم سمت راست برابر است با $۸+۷\times n+(۶-n)\times۸=۵۶-n=۵۷-(n+۱)$

چون $(n+1)-57$ بر ۳ بخش‌پذیر است و خود ۵۷ نیز بر ۳ بخش‌پذیر است، پس $n+1$ بر ۳ بخش‌پذیر است. چون مقدار n حداکثر ۶ است، پس مقدار n یا ۲ است یا ۵.

اگر $n=2$، باید از میان شش جا دو جا برای رقم‌های ۷ مشخص کنیم تعداد راه‌های این کار برابر است با $\binom{6}{2}=15$.

اگر $n=5$، باید از میان شش جا پنج جا برای رقم‌های ۷ مشخص کنیم. تعداد راه‌های این کار برابر است با $\binom{6}{5}=6$.

بنابراین تعداد عددهای مورد نظر برابر است با $15+6=21$.

۳۰۷۳ **۳** برای اینکه در n بار پرتاب سکه، پرتاب n ام m اُمین بار باشد که سکه رو آمده است، باید در $n-1$ پرتاب قبلی $m-1$ بار رو و $n-(m-1)$ بار پشت آمده باشد، در نتیجه، احتمال پیشامد مورد نظر برابر است با

$$\frac{\binom{n-1}{m-1}}{2^n}$$

از طرف دیگر، احتمال این‌که در n پرتاب سکه m بار رو بیاید برابر است با $\frac{\binom{n}{m}}{2^n}$.

در نتیجه

$$\frac{\binom{n-1}{m-1}}{2^n}=\frac{m}{m+3}\times\frac{\binom{n}{m}}{2^n}$$

$$\frac{(n-1)!}{2^n(m-1)!(n-m)!}=\frac{m}{m+3}\times\frac{n!}{2^n m!(n-m)!}$$

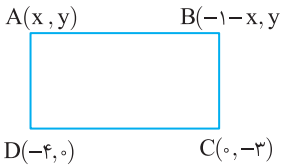
$$1=\frac{m}{m+3}\times\frac{n}{m}\Rightarrow m+3=n\Rightarrow mn=m(m+3)$$

اگر $m=5$، آن‌گاه $mn=40$.

۳۰۷۴ **۱** بنابر فرمول احتمال کل، احتمال پذیرفته شدن پارسا در رشتهٔ مورد علاقه‌اش برابر است با

$$\underbrace{0/35\times 0/3}_{\text{قبولی در رشتهٔ C}}+\underbrace{0/2\times 0/25}_{\text{قبولی در رشتهٔ B}}+\underbrace{0/45\times 0/2}_{\text{قبولی در رشتهٔ A}}=0/245$$

۳۰۷۵ **۳** چون ABCD مستطیل (متوازی‌الاضلاع) است، پس

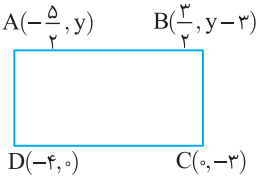


$$x_A+x_C=x_B+x_D\Rightarrow x+0=-1-x-4$$

$$x=-\frac{5}{2}$$

اکنون توجه کنید که

$$\text{شیب خط AD}=\frac{0-y}{-4+\frac{5}{2}}=\frac{2y}{3},\quad \text{شیب خط AB}=\frac{y-3-y}{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}=-\frac{3}{4}$$



چون خط‌های AB و AD بر هم عمودند، حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -1 است. پس

$$(-\frac{3}{4})(\frac{2y}{3})=-1\Rightarrow y=2$$

اکنون توجه کنید که

$$AD=\sqrt{(-\frac{5}{2}+4)^2+(2-0)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{5}{2}$$

$$CD=\sqrt{(-4-0)^2+(0+3)^2}=5$$

بنابراین محیط مستطیل ABCD برابر است با $2(5+\frac{5}{2})=15$.

۳۰۷۶ **۱** طول قطرها را $2x$ و $6x$ در نظر می‌گیریم. در این صورت بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB،

$$AB^2=OA^2+OB^2=x^2+9x^2=10x^2$$

پس $AB=\sqrt{10}x$

اگر فرض کنیم $OF=z$، از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOF به دست می‌آید

$$AF^2=AO^2+FO^2=x^2+z^2\Rightarrow AF=\sqrt{x^2+z^2}$$

همچنین، توجه کنید که $DF=3x-z$. فرض می‌کنیم $EF=t$. از قضیهٔ اساسی تشابه معلوم می‌شود که مثلث‌های AFB و EFD متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{BF}{DF}=\frac{AB}{ED}\Rightarrow\frac{3x+z}{3x-z}=2\Rightarrow 3x+z=6x-2z\Rightarrow x=z$$

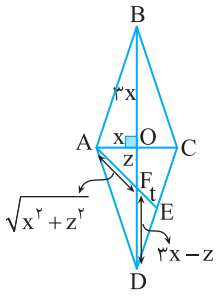
همچنین

$$\frac{EF}{AF}=\frac{ED}{AB}\Rightarrow\frac{t}{\sqrt{x^2+z^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{t}{\sqrt{x^2+x^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{t}{\sqrt{2}x}=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\sqrt{2}}{2}x$$

بنابراین

$$\frac{EF}{AB}=\frac{t}{\sqrt{10}x}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x}{\sqrt{10}x}=\frac{\sqrt{5}}{10}$$



۳۰۷۷ **۳** چون $FC\|AB$، از قضیهٔ تالس در مثلث ADB،

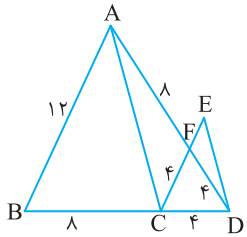
$$\frac{DF}{FA}=\frac{DC}{CB}\Rightarrow\frac{DF}{8}=\frac{4}{8}\Rightarrow DF=4$$

در همین مثلث از تعمیم قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود که

$$\frac{FC}{AB}=\frac{DC}{DB}\Rightarrow\frac{FC}{12}=\frac{4}{12}\Rightarrow FC=4$$

از طرف دیگر، از قضیهٔ اساسی تشابه معلوم می‌شود که مثلث‌های EFD و CFA متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{ED}{CA}=\frac{FD}{FA}\Rightarrow\frac{ED}{CA}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\Rightarrow ED=\frac{1}{2}CA$$



اکنون توجه کنید که مثلث FCD متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه اگر ارتفاع وارد بر ضلع FD را رسم کنیم، آن‌گاه آن ارتفاع میانه هم هست. در نتیجه $FH=\frac{FD}{۲}=۲$.

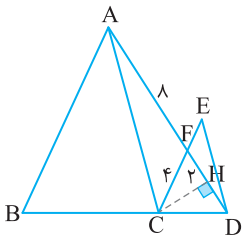
اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث FHC،

$$FC^۲=FH^۲+CH^۲\Rightarrow ۱۶=۴+CH^۲\Rightarrow CH^۲=۱۲$$

همین‌طور، در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC از قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود

$$AC^۲=AH^۲+CH^۲=۱۰۰+۱۲=۱۱۲\Rightarrow AC=۴\sqrt{۷}$$

بنابراین $ED=\frac{۱}{۲}AC=۲\sqrt{۷}$.



۳۰۷۸ **(۲)** مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۲y-a=۰$ نقطهٔ $(۱,-۱)$ و شعاع آن برابر است با $\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴+۴a}=\sqrt{۲+a}$. مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲+۴x-۶y+۶a=۰$ نقطهٔ $(-۲,۳)$ و شعاع آن برابر است با $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۳۶-۲۴a}=\sqrt{۱۳-۶a}$. بنابراین

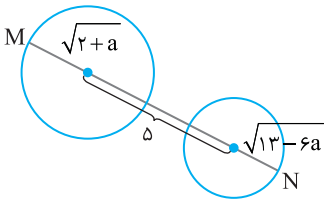
فاصلهٔ مرکزهای دو دایره برابر است با

$$\sqrt{(۱+۲)^۲+(-۱-۳)^۲}=۵$$

فاصلهٔ نقطه‌های M و N وقتی بیشترین مقدار ممکن است که مانند شکل زیر نقطه‌های M و N روی خطی باشند که مرکزهای دایره‌ها را به هم وصل می‌کند. در نتیجه باید

$$\sqrt{۲+a}+\sqrt{۱۳-۶a}+۵=۸\Rightarrow\sqrt{۲+a}+\sqrt{۱۳-۶a}=۳$$

$$\sqrt{۱۳-۶a}=۳-\sqrt{۲+a}\Rightarrow ۱۳-۶a=۹+۲+a-۶\sqrt{۲+a}$$

$$۲-۷a=-۶\sqrt{۲+a}\Rightarrow ۴۹a^۲-۶۴a-۶۸=۰$$

$$(۴۹a+۳۴)(a-۲)=۰\Rightarrow a=۲, a=-\frac{۳۴}{۴۹}\ (\text{غ.ق.ق})$$