پاسخ کنکور سراسری ۱۴۰۰

۲۸۶۹ (۴) عبارت مورد نظر را A می‌نامیم. در این صورت

$$A=(a^2+b^2-2ab)^2(a^2+b^2+2ab)^2=((a-b)^2)^2((a+b)^2)^2$$
$$=(((a-b)(a+b))^2)^2$$

از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم. $A=((a^2-b^2)^2)^2=(a^4-2a^2b^2+b^4)^2$

اکنون توجه کنید که

$$a^4=(\sqrt[4]{\sqrt{6}-2})^4=\sqrt{6}-2,\quad b^4=(\sqrt[4]{\sqrt{6}+2})^4=\sqrt{6}+2$$
$$a^2b^2=(\sqrt[4]{\sqrt{6}-2})^2\times(\sqrt[4]{\sqrt{6}+2})^2=\sqrt{\sqrt{6}-2}\times\sqrt{\sqrt{6}+2}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}=\sqrt{6-4}=\sqrt{2}$$

بنابراین

$$A=(a^4-2a^2b^2+b^4)^2=(\sqrt{6}-2-2\sqrt{2}+\sqrt{6}+2)^2$$
$$=(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})^2=4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2=4(6+2-2\sqrt{12})$$

چون $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$، پس $A=4(8-4\sqrt{3})=16(2-\sqrt{3})$

۲۸۷۰ (۴) فرض می‌کنیم $\sqrt[3]{x}=t$. در این صورت معادلهٔ مورد نظر به شکل مقابل در می‌آید:

$$(t^2+\frac{1}{t^2}+1)(t^2-1)=2t\Rightarrow(\frac{t^4+1+t^2}{t^2})(t^2-1)=2t$$

برای اینکه معادله را ساده کنیم، دو طرف آن را در t^2 ضرب می‌کنیم

$$(t^4+t^2+1)(t^2-1)=2t^3$$

اکنون توجه کنید که می‌توانیم سمت چپ معادله را به کمک اتحاد چاق و لاغر ساده کنیم

$$(t^2)^3-1^3=2t^3\Rightarrow(t^3)^2-2t^3-1=0\qquad(*)$$

چون $\sqrt[3]{x}=t$، پس $x=t^3$، در نتیجه معادلهٔ $(*)$ می‌شود $x^2-2x-1=0$، که مجموع جواب‌های آن برابر است با $-\frac{(-2)}{1}=2$.

۲۸۷۱ (۱) **روش اول:** توجه کنید که چون x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $x^2+x-5=0$ هستند، پس $x_1+x_2=-1$ و $x_1x_2=-5$. اکنون می‌توانیم مجموع جواب‌های معادلهٔ جدید را به صورت زیر حساب کنیم:

$$S=\frac{1}{(x_1+1)^3}+\frac{1}{(x_2+1)^3}\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}S=\frac{(x_1+1)^3+(x_2+1)^3}{(x_1+1)^3(x_2+1)^3}$$

از اتحاد $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ استفاده می‌کنیم و صورت کسر را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$S=\frac{(x_1+1+x_2+1)^3-3(x_1+1)(x_2+1)(x_1+1+x_2+1)}{((x_1+1)(x_2+1))^3}$$
$$=\frac{(x_1+x_2+2)^3-3(x_1+x_2+x_1x_2+1)(x_1+x_2+2)}{(x_1+x_2+x_1x_2+1)^3}$$
$$=\frac{(-1+2)^3-3(-1-5+1)(-1+2)}{(-1-5+1)^3}=\frac{1-3(-5)(1)}{(-5)^3}=-\frac{16}{125}$$

همچنین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ جدید به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P=\frac{1}{(x_1+1)^3}\times\frac{1}{(x_2+1)^3}=\frac{1}{((x_1+1)(x_2+1))^3}$$
$$=\frac{1}{(x_1+x_2+x_1x_2+1)^3}=\frac{1}{(-1-5+1)^3}=-\frac{1}{125}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت $x^2+\frac{16}{125}x-\frac{1}{125}=0$ است، که اگر دو طرف آن را در ۱۲۵ ضرب کنیم، می‌شود $125x^2+16x-1=0$.

روش دوم: توجه کنید که

$$S=\frac{1}{(x_1+1)^3}+\frac{1}{(x_2+1)^3}=(\frac{1}{x_1+1})^3+(\frac{1}{x_2+1})^3=\frac{x_1^3}{125}+\frac{x_2^3}{125}=\frac{x_1^3+x_2^3}{125}$$

اکنون از اتحاد $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ استفاده می‌کنیم. چون $x_1+x_2=-1$ و $x_1x_2=-5$، پس

$$S=\frac{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)}{125}=\frac{(-1)^3-3(-5)(-1)}{125}=-\frac{16}{125}$$

از طرف دیگر،

$$P=\frac{1}{(x_1+1)^3}\times\frac{1}{(x_2+1)^3}=(\frac{1}{x_1+1})^3\times(\frac{1}{x_2+1})^3=\frac{x_1^3}{5^3}\times\frac{x_2^3}{5^3}=\frac{(x_1x_2)^3}{5^3\times5^3}$$

چون $x_1x_2=-5$، پس $P=\frac{(-5)^3}{5^3\times5^3}$، یعنی $P=-\frac{1}{125}$. در نتیجه معادلهٔ مورد نظر به‌صورت $x^2+\frac{16}{125}x-\frac{1}{125}=0$ است، که اگر دو طرف آن را در ۱۲۵ ضرب کنیم، می‌شود $125x^2+16x-1=0$.

۲۸۷۲ (۴) **روش اول:** ابتدا توجه کنید که

$$f(\frac{\pi}{36})=16\cos^2\frac{3\pi}{36}\cos^2\frac{6\pi}{36}\cos^2\frac{12\pi}{36}\cos^2\frac{24\pi}{36}$$
$$=16\cos^2\frac{\pi}{12}\cos^2\frac{\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3}\cos^2\frac{2\pi}{3}$$
$$=16\cos^2\frac{\pi}{12}(\frac{\sqrt{3}}{2})^2(\frac{1}{2})^2(-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}\cos^2\frac{\pi}{12}$$

اکنون برای اینکه مقدار $\cos^2\frac{\pi}{12}$ را حساب کنیم، از اتحاد مثلثاتی $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$f(\frac{\pi}{36})=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}(1+\cos\frac{2\pi}{12})=\frac{3}{8}(1+\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{3}{8}(\frac{2+\sqrt{3}}{2})=\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

روش دوم: عبارت داده شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=16(\cos3x\cos6x\cos12x\cos24x)^2$$

اکنون عبارت داخل پرانتز را در $\sin3x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$f(x)=16(\frac{\sin3x\cos3x\cos6x\cos12x\cos24x}{\sin3x})^2$$

از اتحاد مثلثاتی $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin2\alpha$ به‌دست می‌آید $\sin3x\cos3x=\frac{1}{2}\sin6x$، در نتیجه

$$f(x)=16(\frac{\frac{1}{2}\sin6x\cos6x\cos12x\cos24x}{\sin3x})^2$$

به‌طور مشابه $\sin6x\cos6x=\frac{1}{2}\sin12x$، پس

$$f(x)=16(\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin12x\cos12x\cos24x}{\sin3x})^2$$

به‌طور مشابه با انجام دو مرحلهٔ دیگر عبارت را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم.

$$f(x)=16(\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin24x\cos24x}{\sin3x})^2$$
$$=16(\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin48x}{\sin3x})^2=\frac{\sin^2 48x}{16\sin^2 3x}$$

بنابراین

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right)=\frac{\sin^2\frac{48\pi}{36}}{16\sin^2\frac{3\pi}{36}}=\frac{\sin^2\frac{4\pi}{3}}{16\sin^2\frac{\pi}{12}}=\frac{\sin^2(\pi+\frac{\pi}{3})}{16\sin^2\frac{\pi}{12}}\xrightarrow[2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha]{\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha}$$

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right)=\frac{(-\sin\frac{\pi}{3})^2}{8(1-\cos\frac{2\pi}{12})}=\frac{\sin^2\frac{\pi}{3}}{8(1-\cos\frac{\pi}{6})}=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{8(1-\frac{\sqrt{3}}{2})}=\frac{\frac{3}{4}}{4(2-\sqrt{3})}$$

در نهایت صورت و مخرج را در مزدوج $2-\sqrt{3}$، یعنی $2+\sqrt{3}$ ضرب می‌کنیم

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right)=\frac{3}{16(2-\sqrt{3})}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{3(2+\sqrt{3})}{16(4-3)}=\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

روش سوم: عبارت $f(x)$ را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x)=(2\cos^2 3x)(2\cos^2 6x)(2\cos^2 12x)(2\cos^2 24x)$$
$$=(1+\cos 6x)(1+\cos 12x)(1+\cos 24x)(1+\cos 48x)$$

بنابراین

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right)=(1+\cos\frac{6\pi}{36})(1+\cos\frac{12\pi}{36})(1+\cos\frac{24\pi}{36})(1+\cos\frac{48\pi}{36})$$
$$=(1+\cos\frac{\pi}{6})(1+\cos\frac{\pi}{3})(1+\cos\frac{2\pi}{3})(1+\cos\frac{4\pi}{3})$$
$$=(1+\frac{\sqrt{3}}{2})(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

۲۸۷۳ ② روش اول:

توجه کنید که $\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})=\sin 2\alpha$ ، $\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sin 2\alpha-\cos\alpha}{\cot 2\alpha}$. اکنون مقادیر $\cos\alpha$ و $\sin 2\alpha$ را حساب می‌کنیم. می‌توان نوشت

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\xrightarrow{\tan\alpha=\frac{3}{4}}1+\frac{9}{16}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{16}{25}$$

چون انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی است، پس $\cos\alpha<0$، یعنی $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$. از طرف دیگر،

$$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2(\frac{3}{4})}{1+\frac{9}{16}}=\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}}=\frac{7}{25}\ ,\quad \cot 2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}}=\frac{7}{24}$$

در نتیجه، عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\sin 2\alpha-\cos\alpha}{\cot 2\alpha}=\frac{\frac{24}{25}+\frac{4}{5}}{\frac{7}{24}}=\frac{1056}{175}$$

روش دوم: ابتدا توجه کنید که

$$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}}{\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

بنابراین عبارت داده شده را می‌توان این‌طور نوشت

$$\frac{\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})+\cos(\alpha+\pi)}{\cot 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha-\cos\alpha}{\cot 2\alpha}$$
$$=\tan 2\alpha(2\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha)$$
$$=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\times\cos\alpha(2\sin\alpha-1)=\frac{2\sin\alpha(2\sin\alpha-1)}{1-\tan^2\alpha}$$

اکنون مقدار $\sin\alpha$ را به‌دست می‌آوریم

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{1-\sin^2\alpha}\Rightarrow\sin^2\alpha=1-\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=1-\frac{1}{1+\frac{9}{16}}$$
$$=1-\frac{1}{\frac{25}{16}}=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$$

چون انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی است، پس $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$. در نتیجه عبارت مورد نظر می‌شود

$$\frac{2(-\frac{3}{5})(2(-\frac{3}{5})-1)}{1-\frac{9}{16}}=\frac{-\frac{6}{5}(-\frac{6}{5}-1)}{\frac{7}{16}}=\frac{\frac{6}{5}\times\frac{11}{5}}{\frac{7}{16}}=\frac{1056}{175}$$

۲۸۷۴ ③ می‌توان نوشت

$$\cos^2 x-\sin^2 x\cos 3x=1\Rightarrow 1-\cos^2 x+\sin^2 x\cos 3x=0$$

$$\sin^2 x+\sin^2 x\cos 3x=0\Rightarrow\sin^2 x(1+\cos 3x)=0$$

$$\begin{cases}\sin^2 x=0\Rightarrow\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ \cos 3x=-1\Rightarrow 3x=(2k+1)\pi\Rightarrow x=\frac{(2k+1)\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

برای اینکه جواب‌های در بازهٔ $[0,2\pi]$ را پیدا کنیم، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

k	0	1	2	3
$k\pi$	0	π	2π	$\cancel{3\pi}$
$\frac{(2k+1)\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	$\cancel{\frac{7\pi}{3}}$

از این جدول معلوم می‌شود که جواب‌های مورد نظر 0، $\frac{\pi}{3}$، π، $\frac{5\pi}{3}$ و 2π هستند، که تعداد آن‌ها پنج‌تاست.

۲۸۷۵ ① روش اول:

توجه کنید که $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ که در آن $g(x)=\log_4(x^2-x-2)$ و $h(x)=\sqrt{x^2-1}+1$. برای پیدا کردن دامنهٔ تابع f، دامنهٔ تابع‌های g و h را به‌دست می‌آوریم، از آن‌ها اشتراک می‌گیریم و در آخر جواب‌های معادلهٔ $h(x)=0$ را از آن حذف می‌کنیم، یعنی

$$D_f=(D_g\cap D_h)-\{x\mid x\in D_h, h(x)=0\}$$

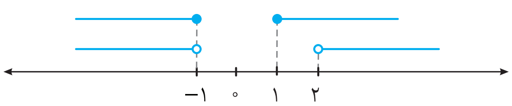
برای پیدا کردن دامنهٔ تابع g باید نامعادلهٔ $x^2-x-2>0$ را حل کنیم:

$$x^2-x-2>0\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}(x-2)(x+1)>0\Rightarrow x<-1 \text{ یا } x>2$$

پس $D_g=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$. از طرف دیگر، برای پیدا کردن دامنهٔ تابع h باید نامعادلهٔ $x^2-1\geq 0$ را حل کنیم: $x^2-1\geq 0\Rightarrow x^2\geq 1\Rightarrow x\geq 1 \text{ یا } x\leq -1$

پس $D_h=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. توجه کنید که معادلهٔ $h(x)=0$ جواب ندارد، زیرا $\sqrt{x^2-1}+1$ همواره مثبت است. بنابراین

$$D_f=((-\infty,-1)\cup(2,+\infty))\cap((-\infty,-1]\cup[1,+\infty))$$
$$=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$$



روش دوم: توجه کنید که عدد ۳ در دامنهٔ تابع f است، زیرا

$$f(۳)=\frac{\log_۴(۹-۳-۲)}{\sqrt{۹-۱}+۱}=\frac{\log_۴ ۴}{\sqrt{۸}+۱}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}+۱}$$

پس گزینه‌های (۲) و (۴) حذف می‌شوند، زیرا عدد ۳ عضو آن‌ها نیست. از طرف دیگر، چون عدد ۲ عضو مجموعهٔ گزینهٔ (۱) نیست، ولی عضو مجموعهٔ گزینهٔ (۳) است، پس کافی است ببینیم ۲ در دامنهٔ تابع f هست یا خیر. توجه کنید که

$$f(۲)=\frac{\log_۴(۴-۲-۲)}{\sqrt{۴-۱}+۱}=\frac{\log_۴ ۰}{\sqrt{۳}+۱}$$

چون $\log_۴ ۰$ تعریف نشده است، پس عدد ۲ در دامنهٔ تابع f نیست، یعنی گزینهٔ (۳) نیز حذف می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۱) دامنهٔ تابع f است.

۲۸۷۶ (۲) روش اول: توجه کنید که

$$-\frac{۱}{۲}\le x<\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\times ۳}-\frac{۳}{۲}\le ۳x<\frac{۳}{۲}$$

بنابراین

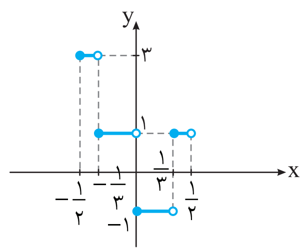
$$-\frac{۳}{۲}\le ۳x<-۱\Rightarrow\begin{cases}[۳x]=-۲\\ -\frac{۱}{۲}\le x<-\frac{۱}{۳}\end{cases}\Rightarrow f(x)=۲|-۲|-۱=۳$$

$$-۱\le ۳x<۰\Rightarrow\begin{cases}[۳x]=-۱\\ -\frac{۱}{۳}\le x<۰\end{cases}\Rightarrow f(x)=۲|-۱|-۱=۱$$

$$۰\le ۳x<۱\Rightarrow\begin{cases}[۳x]=۰\\ ۰\le x<\frac{۱}{۳}\end{cases}\Rightarrow f(x)=۲|۰|-۱=-۱$$

$$۱\le ۳x<\frac{۳}{۲}\Rightarrow\begin{cases}[۳x]=۱\\ \frac{۱}{۳}\le x<\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow f(x)=۲|۱|-۱=۱$$

در نتیجه نمودار تابع f به‌صورت زیر است:



روش دوم: توجه کنید که اگر $x\to ۰^-$، آن‌گاه $۳x\to ۰^-$، پس $[۳x]=-۱$. در نتیجه

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}(۲|[۳x]|-۱)=۲|-۱|-۱=۱$$

همچنین اگر $x\to ۰^+$، آن‌گاه $۳x\to ۰^+$، پس $[۳x]=۰$. در نتیجه

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}(۲|[۳x]|-۱)=۲|۰|-۱=-۱$$

فقط گزینهٔ (۲) این شرایط را دارد.

۲۸۷۷ (۴) روش اول:

نقطهٔ برخورد منحنی‌ها جواب دستگاه مقابل است: $\begin{cases}۲y=x^۲\\ x=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳}\end{cases}$

دو طرف معادلهٔ دوم را به توان دو می‌رسانیم و به جای $x^۲$ قرار می‌دهیم $۲y$:

$$x^۲=(\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳})^۲\Rightarrow ۲y=y+۳+y-۳-۲\sqrt{(y+۳)(y-۳)}$$

$$۲y=۲y-۲\sqrt{y^۲-۹}\Rightarrow -۲\sqrt{y^۲-۹}=۰\Rightarrow y^۲-۹=۰\Rightarrow y=\pm ۳$$

توجه کنید که چون $۲y=x^۲\ge ۰$، پس فقط $y=۳$ قبول است. در نتیجه

$$x=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳}=\sqrt{۶}-\sqrt{۰}=\sqrt{۶}$$

بنابراین نقطهٔ برخورد منحنی‌ها $(\sqrt{۶},۳)$ است، که فاصله‌اش از مبدأ برابر است با

$$\sqrt{(\sqrt{۶})^۲+۳^۲}=\sqrt{۶+۹}=\sqrt{۱۵}$$

روش دوم: با توجه به ضابطهٔ منحنی $x=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳}$، متوجه می‌شویم که $y\ge ۳$. اکنون اگر در ضابطه‌های داده شده قرار دهیم $y=۳$، برای هر دو به‌دست می‌آید $x=\sqrt{۶}$، یعنی $(\sqrt{۶},۳)$ نقطهٔ تلاقی دو منحنی است که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با $\sqrt{(\sqrt{۶})^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۵}$.

۲۸۷۸ (۲) در صورت از ۳^x و در مخرج از $۲^{x-۲}$ فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{۳^x(۱+۳+۳^۲+۳^۳+۳^۴+۳^۵)}{۲^{x-۲}(۱+۲+۲^۲+۲^۳+۲^۴+۲^۵)}=۵۲\Rightarrow\frac{۳^x\times ۳۶۴}{۲^{x-۲}\times ۶۳}=۵۲$$

$$\frac{۳^{x-۲}\times ۹\times ۵۲\times ۷}{۲^{x-۲}\times ۹\times ۷}=۵۲\Rightarrow\frac{۳^{x-۲}}{۲^{x-۲}}=۱\Rightarrow\left(\frac{۳}{۲}\right)^{x-۲}=۱=\left(\frac{۳}{۲}\right)^۰$$

$$x-۲=۰\Rightarrow x=۲$$

۲۸۷۹ (۳) توجه کنید که

$$y=۲^{|\sin x|}\xrightarrow{\text{به راست } \frac{\pi}{۲}} y=۲^{|\sin(x-\frac{\pi}{۲})|}$$

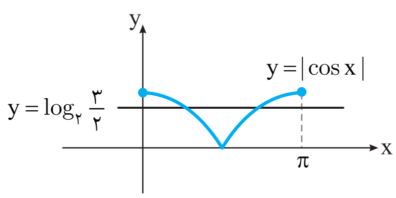
توجه کنید که $\sin(x-\frac{\pi}{۲})=-\cos x$، پس

$$y=۲^{|-\cos x|}=۲^{|\cos x|}\xrightarrow{\text{به پایین } \frac{۳}{۲}} y=۲^{|\cos x|}-\frac{۳}{۲}$$

برای پیدا کردن تعداد نقاط برخورد نمودار تابع بالا با محور x در فاصلهٔ $[۰,\pi]$، باید تعداد جواب‌های معادلهٔ $۲^{|\cos x|}-\frac{۳}{۲}=۰$ را در این فاصله پیدا کنیم. اکنون با استفاده از تعریف تابع لگاریتم داریم

$$۲^{|\cos x|}-\frac{۳}{۲}=۰\Rightarrow ۲^{|\cos x|}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow|\cos x|=\log_۲\frac{۳}{۲}$$

توجه کنید که $\log_۲ ۱<\log_۲\frac{۳}{۲}<\log_۲ ۲$، پس $۰<\log_۲\frac{۳}{۲}<۱$. اکنون تعداد نقاط برخورد خط $y=\log_۲\frac{۳}{۲}$ و نمودار تابع $y=|\cos x|$ را روی بازهٔ $[۰,\pi]$ از روی شکل زیر پیدا می‌کنیم، که دوتاست.



۲۸۸۰ (۱) اگر فرض کنیم $a=\log_x y$، آن‌گاه $\log_y x=\frac{۱}{a}$. بنابراین از تساوی داده شده به‌دست می‌آید

$$a-۲\left(\frac{۱}{a}\right)=۱\xrightarrow{\times a}a^۲-۲=a\Rightarrow a^۲-a-۲=۰$$

به کمک اتحاد جملهٔ مشترک عبارت بالا را تجزیه می‌کنیم

$$(a+۱)(a-۲)=۰\Rightarrow a=-۱, a=۲$$

چون $x,y>۱$، پس $a=\log_x y>۰$، در نتیجه فقط $a=۲$ قابل قبول است، پس

$$\log_x y=۲\Rightarrow y=x^۲$$

۲۸۸۱ (۴) عبارت $\sqrt{x}$ را در پرانتز ضرب می‌کنیم و حد می‌گیریم.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}}\right)$$

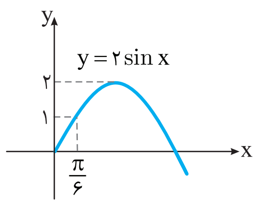
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x^2}-\frac{x}{x^2+1}}\right)=\sqrt{1+1}-\sqrt{0-0}=\sqrt{2}$$

۲۸۸۲ (۱) روش اول:

اگر $x\to\frac{\pi}{6}^-$، آن‌گاه $\sin x\to\frac{1}{2}^-$ و در نتیجه $2\sin x\to1^-$، پس $2\sin x-1\to0^-$. بنابراین $[2\sin x-1]=-1$، یعنی $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}[2\sin x-1]=-1$

روش دوم:

چون به‌ازای هر x و هر عدد صحیح k، $[x+k]=[x]+k$، پس $[2\sin x-1]=[2\sin x]-1$. اکنون به نمودار تابع $y=2\sin x$ در شکل مقابل توجه کنید. از روی این نمودار معلوم می‌شود که



$$x\to\frac{\pi}{6}^-\Rightarrow0<2\sin x<1\Rightarrow[2\sin x]=0$$

بنابراین $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}([2\sin x]-1)=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}(0-1)=-1$

۲۸۸۳ (۳) روش اول:

ابتدا توجه کنید که برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم

$$f(x)=y=2+\sqrt{x-1}\Rightarrow y-2=\sqrt{x-1}\xrightarrow{\text{به توان دو}}$$

$$(y-2)^2=x-1\Rightarrow x=(y-2)^2+1$$

بنابراین $f^{-1}(x)=(x-2)^2+1$. اگر این نمودار را ۲ واحد در جهت مثبت محور x و سپس ۳ واحد در جهت منفی محور y انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x)=f^{-1}(x-2)-3$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$g(4)=f^{-1}(4-2)-3=f^{-1}(2)-3=(2-2)^2+1-3=-2$$

روش دوم: قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=2+\sqrt{x-1}$ نسبت به خط $y=x$ نمودار تابع f^{-1} است. بنابراین $g(x)=f^{-1}(x-2)-3$. قرار می‌دهیم $g(4)=a$ و از تعریف تابع معکوس استفاده می‌کنیم. در نتیجه

$$g(4)=f^{-1}(2)-3=a\Rightarrow f^{-1}(2)=a+3\xrightarrow{\text{تعریف تابع وارون}}$$

$$f(a+3)=2$$

پس

$$2+\sqrt{a+3-1}=2\Rightarrow\sqrt{a+2}=0\Rightarrow a=-2$$

۲۸۸۴ (۳)

توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=\begin{cases}1 & f(x)>0\\ 0 & f(x)=0\\ -1 & f(x)<0\end{cases}$$

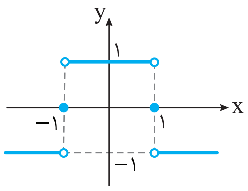
از طرف دیگر، جدول تعیین علامت $f(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

بنابراین

$$(gof)(x)=\begin{cases}1 & x\in(-1,1)\\ 0 & x=\pm1\\ -1 & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$$

پس نمودار تابع gof به‌صورت زیر است، که در نقاط $x=\pm1$ ناپیوسته است.



۲۸۸۵ (۲) توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} & x^2\ge4\\[2mm] \dfrac{-x^2(x^2-4)}{x^2-1} & x^2\le4\ ,\ x\ne\pm1\end{cases}$$

از طرف دیگر، اگر $g(x)=\frac{x^2(x^2-4)}{x^2-1}=\frac{x^4-4x^2}{x^2-1}$، آن‌گاه

$$g'(x)=\frac{(4x^3-8x)(x^2-1)-(2x)(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x((x^2-1)^2+3)}{(x^2-1)^2}$$

بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}g'(x) & x>2 \text{ یا } x<-2\\ -g'(x) & -2<x<2\ ,\ x\ne\pm1\end{cases}$$

توجه کنید که تابع f در نقطه‌های ۲ و ۲− مشتق‌پذیر نیست، زیرا این عددها ریشه‌های سادهٔ عبارت داخل قدرمطلق هستند. همچنین،

$$f'(x)=0\Rightarrow g'(x)=0\Rightarrow x=0$$

پس نقاط بحرانی تابع f نقطه‌های ۲، ۲− و صفر هستند، که مطابق جدول زیر هر سه طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند $(x\ne\pm1)$:

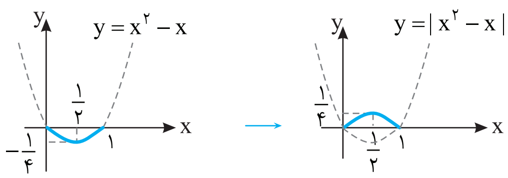
x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	0	$-$		$+$	

۲۸۸۶ (۳) اگر مختصات نقطهٔ A واقع بر سهمی $f(x)=x^2$ به‌صورت (x,x^2) باشد، مختصات نقطهٔ A'، یعنی قرینهٔ A نسبت به نیمساز نواحی اول و سوم، به‌صورت (x^2,x) است. بنابراین

$$AA'=\sqrt{(x-x^2)^2+(x^2-x)^2}=\sqrt{2(x^2-x)^2}=\sqrt{2}|x^2-x|$$

$$=\sqrt{2}\left|(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\right|$$

از طرف دیگر، چون طول نقطهٔ A بین دو طول متوالی از محل برخورد تابع f با خط نیمساز نواحی اول و سوم (خط $y=x$)، یعنی نقاط $(0,0)$ و $(1,1)$ قرار دارد، پس باید ماکزیمم AA' را در بازهٔ $(0,1)$ پیدا کنیم. برای پیدا کردن ماکزیمم تابع $y=|x^2-x|$ در بازهٔ $(0,1)$ از روش رسم نمودار تابع استفاده می‌کنیم.



بنابراین بیشترین مقدار AA' در بازهٔ $(0,1)$ به‌ازای $x=\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید، که برابر می‌شود با

$$AA'=\sqrt{2}\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right|=\sqrt{2}\times\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۲۸۸۷ (۴) ابتدا توجه کنید که

$$(fog)'(\frac{3}{\sqrt{8}})=g'(\frac{3}{\sqrt{8}})f'(g(\frac{3}{\sqrt{8}}))$$

توجه کنید که $g(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=\frac{۱}{\sqrt[۳]{(\frac{۳}{\sqrt{۸}})^{۲}-۱}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۹}{۸}-۱}}=۲$. پس باید مقدار $g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})f'(۲)$ را حساب کنیم. مقدار $g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})$ را به‌سادگی می‌توان حساب کرد

$$g(x)=(x^{۲}-۱)^{-\frac{۱}{۳}}\Rightarrow g'(x)=(-\frac{۱}{۳})(۲x)(x^{۲}-۱)^{-\frac{۱}{۳}-۱}$$

$$=-\frac{۲}{۳}x(x^{۲}-۱)^{-\frac{۴}{۳}}$$

$$g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=-\frac{۲}{۳}(\frac{۳}{\sqrt{۸}})(\frac{۹}{۸}-۱)^{-\frac{۴}{۳}}=-۸\sqrt{۲}$$

برای پیدا کردن مقدار $f'(۲)$ ابتدا ضابطهٔ تابع f را در یک همسایگی نقطهٔ $x=۲$ پیدا می‌کنیم.

توجه کنید که $x\to۲\Rightarrow x^{۲}\to۴\Rightarrow ۴<x^{۲}+\frac{۱}{۲}<۵\Rightarrow [x^{۲}+\frac{۱}{۲}]=۴$

در نتیجه $f(x)=(۴x)^{۲}+۱=۱۶x^{۲}+۱\Rightarrow f'(x)=۳۲x\Rightarrow f'(۲)=۶۴$

بنابراین $(fog)'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=(-۸\sqrt{۲})(۶۴)=۴(-۱۲۸\sqrt{۲})$

۲۸۸۸ (۳) توجه کنید که $g'(x)=۲ax+b$ و $g''(x)=۲a$. از طرف دیگر،

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & x\geq k\\ g'(x) & x<k\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}g'(x) & x\geq k\\ g''(x) & x<k\end{cases}$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=k$ مشتق‌پذیر است، پس

$$g(k)=g'(k)\Rightarrow ak^{۲}+bk+c=۲ak+b$$

$$g'(k)=g''(k)\Rightarrow ۲ak+b=۲a\Rightarrow b=۲a-۲ak$$

اکنون از تساوی $b=۲a-۲ak$ و شرط $b+c=a$ می‌توان نتیجه گرفت

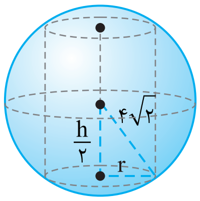
$$ak^{۲}+bk+a-b=۲a\Rightarrow ak^{۲}+(۲a-۲ak)k+a-(۲a-۲ak)=۲a$$

$$a(k^{۲}+۲k-۲k^{۲}+۱-۲+۲k)=۲a\xrightarrow{a\neq۰}-k^{۲}+۴k-۱=۲$$

$$k^{۲}-۴k+۳=۰\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}(k-۱)(k-۳)=۰\Rightarrow k=۱\,,k=۳$$

پس بیشترین مقدار k برابر با ۳ است.

۲۸۸۹ (۲) شکل مقابل را ببینید. مساحت جانبی استوانه برابر است با $S=۲\pi rh$. از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،



$$r^{۲}+(\frac{h}{۲})^{۲}=(۴\sqrt{۲})^{۲}\Rightarrow r^{۲}=۳۲-\frac{h^{۲}}{۴}$$

$$r=\sqrt{۳۲-\frac{h^{۲}}{۴}}$$

$$S=۲\pi\sqrt{۳۲-\frac{h^{۲}}{۴}}\times h=۲\pi\sqrt{\frac{(۱۲۸-h^{۲})h^{۲}}{۴}}=\pi\sqrt{-h^{۴}+۱۲۸h^{۲}}$$

برای اینکه S ماکزیمم باشد، باید $-h^{۴}+۱۲۸h^{۲}$ ماکزیمم باشد. توجه کنید که

$$y=-h^{۴}+۱۲۸h^{۲}\Rightarrow y'=-۴h^{۳}+۲۵۶h$$

$$y'=۰\Rightarrow-۴h(h^{۲}-۶۴)=۰\Rightarrow h^{۲}=۶۴$$

بنابراین ماکزیمم S به‌ازای $h^{۲}=۶۴$ به‌دست می‌آید، که برابر است با

$$S=\pi\sqrt{-۶۴^{۲}+۱۲۸\times۶۴}=۶۴\pi$$

۲۸۹۰ (۳) فرض می‌کنیم A پیشامد این باشد که دانش‌آموز در امتحان اول قبول شود و B پیشامد این باشد که دانش‌آموز در امتحان دوم قبول شود. در این صورت $P(A)=P(B)=۰/۹$ و $P(A\cap B)=۰/۸۵$. می‌خواهیم $P(A|B)$ را حساب کنیم. توجه کنید که طبق فرمول احتمال شرطی می‌توان نوشت

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۰/۸۵}{۰/۹}=\frac{۸۵}{۹۰}=\frac{۱۷}{۱۸}$$

۲۸۹۱ (۳) ابتدا توجه کنید که چون a ، b و c مثبت هستند، پس $\Delta=b^{۲}-۴a(-c)=b^{۲}+۴ac>۰$ ، بنابراین معادلهٔ مورد نظر همواره جواب دارد.

اکنون توجه کنید که چون مجموع جواب‌های هر معادله از حاصل‌ضرب آن‌ها دو واحد بیشتر است، پس

$$-\frac{b}{a}=-\frac{c}{a}+۲\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } a}-b=-c+۲a\Rightarrow c-b=۲a$$

چون $۲a$ عددی زوج است، پس b و c یا هر دو زوج هستند یا هر دو فرد. همچنین چون $c-b=۲a>۰$ ، پس $c>b$. توجه کنید که در مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۹\}$ ، اعداد ۲ ، ۴ ، ۶ و ۸ زوج هستند. پس دو عدد زوج را به $\binom{۴}{۲}$ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم (که عدد بزرگ‌تر را c و عدد کوچک‌تر را b در نظر می‌گیریم). همین‌طور، در مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۹\}$ عددهای ۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷ و ۹ فرد هستند. پس دو عدد فرد را به $\binom{۵}{۲}$ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم (که باز هم عدد بزرگ‌تر را c و عدد کوچک‌تر را b در نظر می‌گیریم). با معلوم شدن b و c ، عدد a نیز به‌طور خودکار معلوم می‌شود. بنابراین طبق اصل جمع، پاسخ مسئله برابر است با

$$\binom{۴}{۲}+\binom{۵}{۲}=۶+۱۰=۱۶$$

۲۸۹۲ (۱) **روش اول:** دانش‌آموزان باید یکی در میان بنشینند. ابتدا، مثلاً، چهار دانش‌آموز پایهٔ یازدهم را دور میز گرد می‌نشانیم. این کار به $(۴-۱)!=۶$ حالت امکان‌پذیر است. اکنون چهار صندلی خالی بین آن‌ها داریم که چهار دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم به $۴!$ حالت می‌توانند روی آن‌ها بنشینند. بنابراین طبق اصل ضرب، پاسخ مسئله برابر است با $۶\times۴!=۱۴۴$.

روش دوم: ابتدا فرض کنید این دانش‌آموزان بخواهند در یک ردیف کنار هم و به‌صورت یکی در میان بنشینند. در این صورت طبق تعمیم اصل ضرب، تعداد راه‌های قرار گرفتن آن‌ها برابر است با $۲\times۴!\times۴!$. اکنون اگر این دانش‌آموزان دور یک میز گرد قرار بگیرند، چون نفرات ابتدا و انتها برای آن‌ها معنی ندارد، پس تعداد راه‌های قرار گرفتن آن‌ها $\frac{۱}{۸}$ برابر حالت قبل خواهد بود. در نتیجه پاسخ مسئله برابر است با

$$\frac{۱}{۸}\times۲\times۴!\times۴!=۱۴۴$$

۲۸۹۳ (۱) تعداد کل عضوهای زیرمجموعهٔ مورد نظر، یعنی S به این صورت به‌دست می‌آید. واضح است که تعداد اعداد طبیعی یک‌رقمی که با ارقام ۱ تا ۵ می‌توان ساخت، ۵ تاست. برای به‌دست آوردن تعداد اعداد دورقمی (بدون تکرار ارقام) دو جایگاه یکان و دهگان به‌صورت ○ ○ (دهگان یکان) در نظر می‌گیریم. برای جایگاه دهگان ۵ انتخاب (هریک از ارقام ۱ تا ۵) و برای جایگاه یکان ۴ انتخاب وجود دارد. توجه کنید رقمی را که برای دهگان انتخاب شد، برای یکان نمی‌توان انتخاب کرد. در نتیجه بنابر اصل ضرب، تعداد اعداد دورقمی با شرایط مورد نظر برابر ۵×۴ است. برای به‌دست آوردن تعداد اعداد سه‌رقمی سه جایگاه ○○○ را در نظر می‌گیریم که برای جایگاه اول ۵ انتخاب، برای جایگاه دوم ۴ انتخاب (عدد جایگاه اول را نمی‌توانیم انتخاب کنیم) و برای جایگاه سوم ۳ انتخاب (عددهای جایگاه‌های اول و دوم را نمی‌توانیم انتخاب کنیم) وجود دارد. پس بنابر تعمیم اصل ضرب، تعداد اعداد سه‌رقمی با شرایط مورد نظر برابر است با $۵\times۴\times۳$. به‌طور مشابه تعداد اعداد چهاررقمی و پنج‌رقمی به‌ترتیب برابر $۵\times۴\times۳\times۲$ و $۵\times۴\times۳\times۲\times۱$ است. خلاصهٔ توضیح بالا در جدول زیر آمده است:

تعداد رقم‌ها	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد عددها	۵	۵×۴	۵×۴×۳	۵×۴×۳×۲	۵×۴×۳×۲×۱

بنابراین طبق تعمیم اصل جمع، $n(S)=۵+۲۰+۶۰+۱۲۰+۱۲۰=۳۲۵$

اکنون اگر A این پیشامد باشد که عضو انتخابی بر ۴ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه تعداد اعضای A به این صورت به‌دست می‌آید. از میان اعداد یک‌رقمی ۱ تا ۵ ، فقط عدد ۴ بر ۴ بخش‌پذیر است. از میان اعداد دورقمی عضو S، فقط اعداد ۱۲، ۲۴، ۳۲ و ۵۲ بر ۴ بخش‌پذیرند. توجه کنید که یک عدد زمانی بر ۴ بخش‌پذیر است که عدد حاصل از دو رقم سمت راست آن بر ۴ بخش‌پذیر باشد، پس برای به‌دست آوردن تعداد اعداد سه‌رقمی، چهاررقمی و پنج‌رقمی عضو S و بخش‌پذیر بر ۴ دو رقم سمت راست را اعداد ۱۲، ۲۴، ۳۲ و ۵۲ در نظر می‌گیریم، سپس تعداد انتخاب‌های جایگاه‌های دیگر را می‌شماریم. مثلاً برای به‌دست آوردن تعداد اعداد چهاررقمی بخش‌پذیر بر ۴ که دو رقم سمت راست آن ۱۲ است، باید تعداد انتخاب‌های دو جایگاه را به‌دست آوریم: ◯◯۱۲

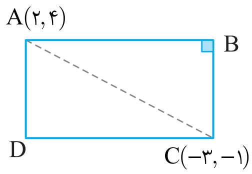
برای جایگاه اول ۳ انتخاب وجود دارد چون رقم‌های ۱ و ۲ را نمی‌توانیم انتخاب کنیم.
برای جایگاه دوم ۲ انتخاب وجود دارد چون رقم‌های ۱ و ۲ و رقمی را که برای جایگاه اول انتخاب شد، نمی‌توانیم انتخاب کنیم. در نتیجه بنابر اصل ضرب، تعداد اعداد چهاررقمی بخش‌پذیر بر ۴ که دو رقم سمت راست آن‌ها ۱۲ است، برابر 3×2 است.
توضیح بالا در جدول زیر جمع‌بندی شده است:

تعداد رقم‌ها	۱	۲	۳	۴	۵
شکل کلی عدد	۴	۱۲	◯۱۲	◯◯۱۲	◯◯◯۱۲
		۲۴	◯۲۴	◯◯۲۴	◯◯◯۲۴
		۳۲	◯۳۲	◯◯۳۲	◯◯◯۳۲
		۵۲	◯۵۲	◯◯۵۲	◯◯◯۵۲
تعداد عددها	۱	۴	4×3	$4\times3\times2$	$4\times3\times2\times1$

بنابراین طبق تعمیم اصل جمع، $n(A)=1+4+12+24+24=65$

در نتیجه $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{65}{325}=\frac{1}{5}$.

۲۸۹۴ ③ روش اول: ابتدا معادلهٔ خطی را که ضلع AB روی آن است، می‌نویسیم



$$y-4=3(x-2)\Rightarrow 3x-y-2=0$$

فاصلهٔ نقطهٔ C از خط به‌دست آمده برابر است با

$$CB=\frac{|3(-3)-(-1)-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

از طرف دیگر،

$$AC=\sqrt{(2+3)^2+(4+1)^2}=\sqrt{50}$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC، طول AB را به‌دست می‌آوریم

$$AB^2+BC^2=AC^2\Rightarrow AB^2+10=50\Rightarrow AB=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

پس محیط مستطیل برابر است با $2(\sqrt{10}+2\sqrt{10})=6\sqrt{10}$.

روش دوم: ابتدا معادلات اضلاع AB و BC را می‌نویسیم

$$AB: 3x-y-2=0$$

$$BC\perp AB\Rightarrow m_{BC}=-\frac{1}{m_{AB}}=-\frac{1}{3}\Rightarrow y-(-1)=-\frac{1}{3}(x-(-3))$$

$$BC: x+3y+6=0$$

محل تلاقی اضلاع AB و BC همان نقطهٔ B است.

$$\begin{cases}3x-y-2=0\\ x+3y+6=0\end{cases}\Rightarrow B(0,-2)$$

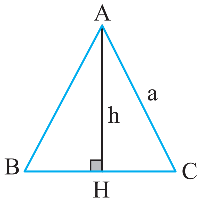
اکنون طول پاره‌خط‌های AB و BC را به‌دست می‌آوریم و سپس محیط مستطیل را محاسبه می‌کنیم.

$$AB=\sqrt{(2-0)^2+(4+2)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

$$BC=\sqrt{(0+3)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

در نتیجه $\text{محیط مستطیل}=2(AB+BC)=2(2\sqrt{10}+\sqrt{10})=6\sqrt{10}$

۲۸۹۵ ② توجه کنید که $\frac{\sqrt{3}}{2}a=h$ ، پس $a=\frac{2}{\sqrt{3}}h$ ، در نتیجه $3a=\frac{3\times2h}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}h$ ، یعنی $\text{محیط مثلث}=3a=2\sqrt{3}h$. از طرف دیگر، چون محیط مثلث برابر $\sqrt{270}$ است، پس



$$2\sqrt{3}h=\sqrt{270}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{270}}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{2}\sqrt{10}$$

اگر مختصات نقطهٔ A به‌صورت (a,b) باشد، آن‌گاه

$$h=AH=\frac{|3a-b-5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|3a-b-5|}{\sqrt{10}}=\frac{3}{2}\sqrt{10}$$

$$|3a-b-5|=\frac{3}{2}\sqrt{10}\times\sqrt{10}=15 \qquad (*)$$

از طرف دیگر، شیب خطی که ضلع BC روی آن است، برابر ۳ است. پس شیب خطی که ارتفاع AH روی آن است، برابر $-\frac{1}{3}$ است. به این ترتیب،

$$\frac{b-1}{a-2}=-\frac{1}{3}\Rightarrow 3b-3=2-a\Rightarrow a=5-3b$$

بنابراین اگر در تساوی $(*)$ به‌جای a قرار دهیم $5-3b$ ، به‌دست می‌آید

$$|3(5-3b)-b-5|=15$$

$$|10-10b|=15\Rightarrow\begin{cases}10-10b=15\\ 10-10b=-15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{13}{2}\\ b=\frac{5}{2}\Rightarrow a=-\frac{5}{2}\end{cases}$$

در نتیجه A می‌تواند یکی از نقطه‌های $(\frac{13}{2},-\frac{1}{2})$ و $(-\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ باشد.

۲۸۹۶ ①

توجه کنید که

$$\begin{cases}x^2+y^2+2y-3=0\\ x^2+y^2+2x-3=0\end{cases}\xrightarrow{\text{معادلهٔ دوم را از معادلهٔ اول کم می‌کنیم}}$$

$$2y-3-(2x-3)=0\Rightarrow 2y-2x=0\Rightarrow y=x$$

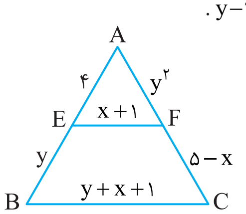
۲۸۹۷ ①

بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

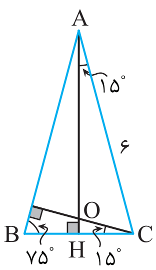
$$\frac{4}{4+y}=\frac{x+1}{y+x+1}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{4}{y}=\frac{x+1}{y}\Rightarrow 4=x+1\Rightarrow x=3$$

همچنین، بنابر قضیهٔ تالس، $\frac{4}{y}=\frac{y^2}{5-x}\xrightarrow{x=3}\frac{4}{y}=\frac{y^2}{5-3}\Rightarrow y^3=8\Rightarrow y=2$

بنابراین $y-2x=2-6=-4$.



۲۸۹۸ ④ روش اول:



ابتدا توجه کنید که چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس $A\hat{C}B=A\hat{B}C=75^\circ$ ، در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC ،

$$H\hat{A}C=90^\circ-75^\circ=15^\circ$$

$$\sin15^\circ=\frac{HC}{AC}\Rightarrow HC=6\sin15^\circ$$

همین‌طور، چون $\hat{B}=75^\circ$، پس $O\hat{C}B=90^\circ-75^\circ=15^\circ$. در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHC می‌توان نوشت $\tan 15^\circ=\frac{OH}{HC}\Rightarrow OH=HC\times\tan 15^\circ$

اکنون توجه کنید که

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\Rightarrow \sin^2 15^\circ=\frac{1-\cos 30^\circ}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos^2 15^\circ=1-\sin^2 15^\circ=1-\frac{2-\sqrt{3}}{4}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\Rightarrow \cos 15^\circ=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

در نتیجه

$$\tan 15^\circ=\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$

صورت و مخرج کسر زیر رادیکال را در مزدوج $2+\sqrt{3}$، یعنی $2-\sqrt{3}$ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید

$$\tan 15^\circ=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{4-3}}=2-\sqrt{3}$$

بنابراین

$$HC=6\sin 15^\circ=6\times\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=3\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$OH=HC\times\tan 15^\circ=3\sqrt{2-\sqrt{3}}\times(2-\sqrt{3})$$

در نتیجه

$$S_{OHC}=\frac{1}{2}HC\times OH=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2-\sqrt{3}}\times 3\sqrt{2-\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})$$

$$=\frac{9}{2}(2-\sqrt{3})^2=\frac{9}{2}(7-4\sqrt{3})$$

عدد به‌دست آمده به این صورت در گزینه‌ها نیست، بنابراین آن را در مزدوج $7-4\sqrt{3}$، یعنی $7+4\sqrt{3}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم. پس

$$S_{OHC}=\frac{9(49-48)}{2(7+4\sqrt{3})}=\frac{9}{2(7+4\sqrt{3})}$$

روش دوم: مثلث‌های OHC و CHA به حالت (زز) متشابه هستند و نسبت تشابه آن‌ها برابر $\frac{OH}{CH}$ است. از طرف دیگر، $\frac{OH}{CH}=\tan 15^\circ$. می‌دانیم $\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$. بنابراین

$$\frac{\text{مساحت}(OHC)}{\text{مساحت}(CHA)}=\left(\frac{OH}{CH}\right)^2=(2-\sqrt{3})^2$$

اما مساحت مثلث CHA برابر است با

$$\text{مساحت}(CHA)=\frac{CH\times AH}{2}=\frac{6\sin 15^\circ\times 6\cos 15^\circ}{2}=9\sin 30^\circ=\frac{9}{2}$$

بنابراین مساحت مثلث OHC برابر است با

$$\text{مساحت}(OHC)=\text{مساحت}(CHA)\times(2-\sqrt{3})^2=\frac{9}{2}(7-4\sqrt{3})$$

عدد به‌دست آمده به این صورت در گزینه‌ها نیست، بنابراین آن را در مزدوج $7-4\sqrt{3}$، یعنی $7+4\sqrt{3}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم. پس

$$\text{مساحت}(OHC)=\frac{9(49-48)}{2(7+4\sqrt{3})}=\frac{9}{2(7+4\sqrt{3})}$$

۲۸۹۹ (۲) **روش اول:** با استفاده از اتحاد مزدوج می‌توان نوشت

$$\left(a+\frac{1}{a}+\sqrt{2}\right)^2\left(a+\frac{1}{a}-\sqrt{2}\right)^2=\left(\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-(\sqrt{2})^2\right)^2$$

$$=\left(a^2+\frac{1}{a^2}+2-2\right)^2=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2=a^4+\frac{1}{a^4}+2$$

اکنون توجه کنید که

$$a=\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\Rightarrow a^4=7-4\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{a^4}=\frac{1}{7-4\sqrt{3}}\times\frac{7+4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}=\frac{7+4\sqrt{3}}{49-48}=7+4\sqrt{3}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$a^4+\frac{1}{a^4}+2=(7-4\sqrt{3})+(7+4\sqrt{3})+2=16$$

روش دوم: ابتدا توجه کنید که

$$a=\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}=\sqrt[4]{(2-\sqrt{3})^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}\Rightarrow a^2=2-\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{a^2}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

بنابراین

$$\left(a+\frac{1}{a}+\sqrt{2}\right)^2\left(a+\frac{1}{a}-\sqrt{2}\right)^2=\left(\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-(\sqrt{2})^2\right)^2=\left(a^2+\frac{1}{a^2}+2-2\right)^2$$

$$=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2=(2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3})^2=16$$

۲۹۰۰ (۳) فرض می‌کنیم پول اولیهٔ علی x و پول اولیهٔ اکرم y باشد. در این صورت

$$\begin{cases}x+y=100\\(x-10)(y+10)=475\end{cases}$$

از معادلهٔ اول به‌دست می‌آید $x=100-y$ و در نتیجه معادلهٔ دوم را می‌توان این‌طور نوشت

$$(100-y-10)(y+10)=475\Rightarrow(100-(y+10))(y+10)=475$$

$$100(y+10)-(y+10)^2=475\Rightarrow(y+10)^2-100(y+10)+475=0$$

اگر فرض کنیم $y+10=A$، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$A^2-100A+475=0$$

از اتحاد جملهٔ مشترک استفاده و سمت چپ معادله را تجزیه می‌کنیم.

$$(A-5)(A-95)=0\begin{cases}A=5\Rightarrow y+10=5\Rightarrow y=-5\ (\text{غ.ق.ق})\\A=95\Rightarrow y+10=95\Rightarrow y=85\ \text{تومان}\end{cases}$$

۲۹۰۱ (۱) **روش اول:** توجه کنید که چون x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $x^2-x-4=0$ هستند، پس $x_1+x_2=1$ و $x_1x_2=-4$. اکنون می‌توانیم مجموع جواب‌های معادلهٔ جدید را به‌صورت زیر حساب کنیم:

$$S=\left(x_1^3+\frac{1}{x_2}\right)+\left(x_2^3+\frac{1}{x_1}\right)=x_1^3+x_2^3+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$$

با استفاده از اتحاد $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ و نیز مخرج مشترک گرفتن، عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$S=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)+\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=1-3(-4)(1)+\frac{1}{-4}=\frac{51}{4}$$

همچنین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ جدید به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P=\left(x_1^3+\frac{1}{x_2}\right)\left(x_2^3+\frac{1}{x_1}\right)=x_1^3x_2^3+x_1^2+x_2^2+\frac{1}{x_1x_2}$$

$$=(x_1x_2)^3+(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+\frac{1}{x_1x_2}$$

$$=(-4)^3+1-2(-4)+\frac{1}{-4}=-\frac{221}{4}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به صورت $x^2-\frac{51}{4}x-\frac{221}{4}=0$ است، که اگر دو طرف آن را در ۴ ضرب کنیم، می‌شود $4x^2-51x-221=0$.

روش دوم: توجه کنید که

$$x=x^2-4\Rightarrow x^2=x+4\xrightarrow{\times x}x^3=x^2+4x=(x+4)+4x=5x+4$$

بنابراین $x_1^3=5x_1+4$ و $x_2^3=5x_2+4$. از طرف دیگر،

$$x_1x_2=-4\Rightarrow\frac{1}{x_1}=-\frac{x_2}{4},\quad \frac{1}{x_2}=-\frac{x_1}{4}$$

بنابراین

$$S=(x_1^3+\frac{1}{x_2})+(x_2^3+\frac{1}{x_1})=(5x_1+4-\frac{x_1}{4})+(5x_2+4-\frac{x_2}{4})$$
$$=\frac{19}{4}(x_1+x_2)+8=\frac{19}{4}(1)+8=\frac{51}{4}$$
$$P=(x_1^3+\frac{1}{x_2})(x_2^3+\frac{1}{x_1})=(5x_1+4-\frac{x_1}{4})(5x_2+4-\frac{x_2}{4})$$
$$=(\frac{19}{4}x_1+4)(\frac{19}{4}x_2+4)=(\frac{19}{4})^2x_1x_2+19(x_1+x_2)+16$$
$$=-\frac{19^2}{4}+19+16=-\frac{221}{4}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$x^2-\frac{51}{4}x-\frac{221}{4}=0\Rightarrow 4x^2-51x-221=0$$

۲۹۰۲ ۱ **روش اول:** می‌توان نوشت

$$f(\frac{\pi}{12})=32\cos^2\frac{\pi}{12}\cos^2\frac{2\pi}{12}\cos^2\frac{4\pi}{12}\cos^2\frac{8\pi}{12}\cos^2\frac{16\pi}{12}$$
$$=32\cos^2\frac{\pi}{12}\cos^2\frac{\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3}\cos^2\frac{2\pi}{3}\cos^2\frac{4\pi}{3}$$
$$=32\cos^2\frac{\pi}{12}(\frac{\sqrt{3}}{2})^2(\frac{1}{2})^2(-\frac{1}{2})^2(-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{8}\cos^2\frac{\pi}{12}$$

اکنون برای اینکه $\cos^2\frac{\pi}{12}$ را حساب کنیم، از اتحاد $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$f(\frac{\pi}{12})=\frac{3}{8}\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{3}{8}(\frac{1}{2}(1+\cos\frac{\pi}{6}))=\frac{3}{16}(1+\frac{\sqrt{3}}{2})$$
$$=\frac{6+3\sqrt{3}}{32}=\frac{6+\sqrt{27}}{32}$$

روش دوم:

$$f(x)=32(\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x\cos 16x)^2$$

اکنون عبارت داخل پرانتز را در $\sin x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$f(x)=32(\frac{\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x\cos 16x}{\sin x})^2$$

از اتحاد مثلثاتی $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ به‌دست می‌آید

$$f(x)=32(\frac{\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x\cos 4x\cos 8x\cos 16x}{\sin x})^2$$

به‌طور مشابه $\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{2}\sin 4x$، پس

$$f(x)=32(\frac{\frac{1}{4}\sin 4x\cos 4x\cos 8x\cos 16x}{\sin x})^2$$

به‌طور مشابه با انجام سه مرحلهٔ دیگر عبارت را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم.

$$f(x)=32(\frac{\frac{1}{8}\sin 8x\cos 8x\cos 16x}{\sin x})^2=32(\frac{\frac{1}{16}\sin 16x\cos 16x}{\sin x})^2$$
$$=32(\frac{\frac{1}{32}\sin 32x}{\sin x})^2=\frac{\sin^2 32x}{32\sin^2 x}$$

بنابراین

$$f(\frac{\pi}{12})=\frac{\sin^2\frac{32\pi}{12}}{32\sin^2\frac{\pi}{12}}=\frac{\sin^2(3\pi-\frac{4\pi}{12})}{32\sin^2\frac{\pi}{12}}=\frac{\sin^2\frac{\pi}{3}}{32\times\frac{1}{2}(1-\cos\frac{2\pi}{12})}$$
$$=\frac{\frac{3}{4}}{16(1-\frac{\sqrt{3}}{2})}=\frac{3}{32(2-\sqrt{3})}=\frac{3(2+\sqrt{3})}{32(4-3)}=\frac{6+\sqrt{27}}{32}$$

۲۹۰۳ ۳ توجه کنید که

$$\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})=\cos\alpha,\quad \sin(\alpha-\pi)=-\sin\alpha$$

از طرف دیگر،

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

چون انتهای کمان α در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی است، پس $\sin\alpha<0$، یعنی $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$. در نتیجه

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{|\tan^2\alpha-1|}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}}{|\frac{5}{4}-1|}=\frac{\frac{2-\sqrt{5}}{3}}{\frac{1}{4}}=\frac{4(2-\sqrt{5})}{3}$$

۲۹۰۴ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$5\sin^2x+2\cos 3x+2=0\Rightarrow 5\sin^2x+2(\cos 3x+1)=0$$
$$5\sin^2x+2(2\cos^2\frac{3x}{2})=0\Rightarrow 5\sin^2x+4\cos^2\frac{3x}{2}=0$$

چون $5\sin^2x$ و $4\cos^2\frac{3x}{2}$ غیرمنفی‌اند، باید هر دو برابر صفر باشند، بنابراین جواب‌های مشترک معادله‌های $\sin^2x=0$ و $\cos^2\frac{3x}{2}=0$ جواب‌های مورد نظر هستند:

$$\sin^2x=0\Rightarrow\sin x=0\Rightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\cos^2\frac{3x}{2}=0\Rightarrow\cos\frac{3x}{2}=0\Rightarrow\frac{3x}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$$

برای اینکه جواب‌های در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ را پیدا کنیم، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

k	-2	-1	0	1	2
$k\pi$	$\cancel{-2\pi}$	$-\pi$	0	π	$\cancel{2\pi}$
$(2k+1)\frac{\pi}{3}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π	$\cancel{\frac{5\pi}{3}}$

از این جدول معلوم می‌شود که جواب‌های مورد نظر $x=-\pi$ و $x=\pi$ هستند که تعداد آن‌ها دوتاست.

۲۹۰۵ ۴ **روش اول:** باید نامعادلهٔ $|x^2-2|-x>0$ را حل کنیم:

$$|x^2-2|-x>0\Rightarrow|x^2-2|>x$$

توجه کنید که همواره $|x^2-2|\geq 0$، پس تمام xهای منفی و نیز $x=0$ در این نامعادله صدق می‌کنند:

$$x\in(-\infty,0]\qquad(1)$$

اکنون فرض می‌کنیم x مثبت باشد.

$$|x^2-2|>x\Rightarrow\begin{cases}x^2-2>x\Rightarrow x^2-x-2=\underbrace{(x+1)}_{+}(x-2)>0\\ x^2-2<-x\Rightarrow x^2+x-2=(x-1)\underbrace{(x+2)}_{+}<0\end{cases}$$

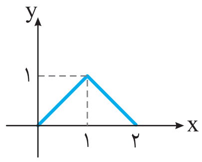
$$\begin{cases}x-2>0\\ x-1<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in(2,+\infty)\qquad(2)\\ x\in(0,1)\qquad(3)\end{cases}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر، یعنی دامنهٔ تابع f برابر اجتماع جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) است:

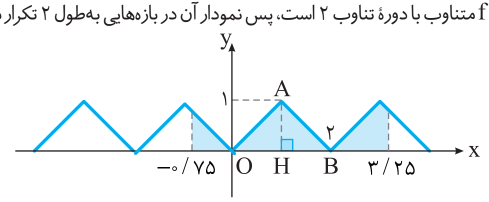
$$D_f=(-\infty,0]\cup(0,1)\cup(2,+\infty)=(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$$

روش دوم: توجه کنید که عدد ۲ در دامنهٔ تابع f نیست، زیرا $f(۲)=\log_۴(|۴-۲|-۲)=\log_۴ ۰$ که تعریف نشده است. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) حذف می‌شوند. زیرا عدد ۲ عضو آن‌ها هست. همچنین عدد صفر در دامنهٔ تابع f هست، زیرا $f(۰)=\log_۴(|۰-۲|-۰)=\log_۴ ۲=\frac{۱}{۲}$. بنابراین گزینهٔ (۱) حذف می‌شود، زیرا عدد صفر عضو آن نیست. در نتیجه گزینهٔ (۴) درست است.

۲۹۰۶ (۱) ابتدا نمودار تابع f را در بازهٔ $[۰,۲]$ رسم می‌کنیم:



چون تابع f متناوب با دورهٔ تناوب ۲ است، پس نمودار آن در بازه‌هایی به‌طول ۲ تکرار می‌شود.



از روی این شکل معلوم است که مساحت مورد نظر، دو برابر مساحت مثلث OAB است. بنابراین $S=۲S_{OAB}=۲(\frac{۱}{۲}AH\times OB)=۱\times۲=۲$

۲۹۰۷ (۲) ابتدا نشان می‌دهیم تابع $f(x)=\sqrt{x+۳}-۱$ با دامنهٔ $D_f=[-۳,+\infty)$ اکیداً صعودی است. می‌توان نوشت

$$x_۱,x_۲\ge-۳: x_۱<x_۲\Rightarrow x_۱+۳<x_۲+۳\Rightarrow\sqrt{x_۱+۳}<\sqrt{x_۲+۳}$$
$$\sqrt{x_۱+۳}-۱<\sqrt{x_۲+۳}-۱\Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲)$$

چون تابع f اکیداً صعودی است، پس نمودار تابع f نمودار تابع وارون خود را روی خط $y=x$ قطع می‌کند. در نتیجه باید معادلهٔ $\sqrt{x+۳}-۱=x$ را حل کنیم تا طول نقطهٔ M به‌دست بیاید:

$$\sqrt{x+۳}-۱=x\Rightarrow\sqrt{x+۳}=x+۱\xrightarrow{\text{دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم}}$$
$$x+۳=(x+۱)^۲\Rightarrow x+۳=x^۲+۲x+۱\Rightarrow x^۲+x-۲=۰$$
$$\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}(x-۱)(x+۲)=۰\Rightarrow x=۱, x=-۲$$

توجه کنید که $x=-۲$ در معادلهٔ مورد نظر صدق نمی‌کند. بنابراین $x=۱$ و عرض نقطهٔ M هم برابر ۱ می‌شود ($f(۱)=\sqrt{۱+۳}-۱=۲-۱=۱$). در نتیجه فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات برابر است با $OM=\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}$.

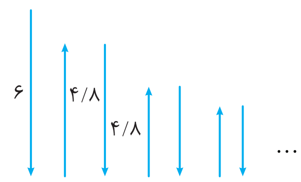
۲۹۰۸ (۱) توجه کنید که هر بار که توپ بالا می‌رود، به همان اندازه هم پایین می‌آید. بنابراین مجموع مورد نظر برابر است با

$$S=۶+۲(۰/۸\times۶+(۰/۸)^۲\times۶+\cdots+(۰/۸)^{۹۹}\times۶)$$
$$=۶+۲\times۶(۰/۸+(۰/۸)^۲+\cdots+(۰/۸)^{۹۹})$$

عبارت داخل پرانتز مجموع ۹۹ جملهٔ نخست یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱=۰/۸$ و قدرنسبت $q=۰/۸$ است. بنابراین $S=۶+۱۲\times۰/۸\times\frac{(۰/۸)^{۹۹}-۱}{۰/۸-۱}$

توجه کنید که می‌توانیم از $(۰/۸)^{۹۹}$ صرف‌نظر کنیم، زیرا عددی بسیار کوچک است.

بنابراین $S\simeq۶+۱۲\times۰/۸\times\frac{۱}{۱-۰/۸}=۵۴$ متر



۲۹۰۹ (۱) به تبدیلات زیر توجه کنید:

$$y=۲^{x+|x|}\xrightarrow{\text{۳ واحد به چپ}}y=۲^{x+۳+|x+۳|}$$
$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به پایین}}y=۲^{x+۳+|x+۳|}-۲$$

بنابراین باید جواب معادلهٔ زیر را پیدا کنیم:

$$۲^{x+۳+|x+۳|}-۲=۰\Rightarrow۲^{x+۳+|x+۳|}=۲^۱\Rightarrow x+۳+|x+۳|=۱$$
$$|x+۳|=-x-۲\Rightarrow\begin{cases}x+۳=-x-۲\Rightarrow x=-\frac{۵}{۲}\\ -(x+۳)=-x-۲ \quad \text{جواب ندارد}\end{cases}$$

۲۹۱۰ (۳) **روش اول:** مقدار x را برابر ۹ قرار می‌دهیم و معادله را ساده می‌کنیم.

$$۲\log_۹ a+\log_a\sqrt{۹}=۲\Rightarrow۲\log_{۳^۲}a+\log_a ۳=۲$$
$$۲\times(\frac{۱}{۲}\log_۳ a)+\log_a ۳=۲\Rightarrow\log_۳ a+\frac{۱}{\log_۳ a}=۲$$

دو طرف معادله را در $\log_۳ a$ ضرب می‌کنیم:

$$(\log_۳ a)^۲+۱=۲\log_۳ a\Rightarrow(\log_۳ a)^۲-۲\log_۳ a+۱=۰$$

اکنون با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله می‌توان نوشت

$$(\log_۳ a-۱)^۲=۰\Rightarrow\log_۳ a=۱\Rightarrow a=۳^۱=۳$$

روش دوم: می‌توان نوشت

$$۲\log_x a+\log_a\sqrt{x}=۲\Rightarrow\log_{x^{\frac{۱}{۲}}}a+\log_a\sqrt{x}=۲$$
$$\log_{\sqrt{x}}a+\log_a\sqrt{x}=۲\Rightarrow\log_{\sqrt{x}}a+\frac{۱}{\log_{\sqrt{x}}a}=۲$$

چون مجموع $\log_{\sqrt{x}}a$ و معکوسش برابر ۲ شده است و هر عدد حقیقی با معکوسش هم‌علامت است، پس $\log_{\sqrt{x}}a>۰$. بنابراین

$$\log_{\sqrt{x}}a=۱\xrightarrow{x=۹}\log_{\sqrt{۹}}a=۱\Rightarrow\log_۳ a=۱\Rightarrow a=۳^۱=۳$$

۲۹۱۱ (۴) می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۴-x^۲+۱}+\sqrt{x^۲+۱}-x^۲}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۴}+\sqrt{x^۲}-x^۲}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x^۲|+|x|-x^۲}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۲-x-x^۲}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-۱$$

۲۹۱۲ (۳) **روش اول:** چون خط $x=۲$ محور تقارن سهمی است و سهمی از نقطهٔ $(۰,۰)$ می‌گذرد، پس سهمی از نقطهٔ $(۴,۰)$ نیز می‌گذرد (شکل را ببینید). بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=a(x-۰)(x-۴)$ یا $y=ax(x-۴)$ است. چون این سهمی از نقطهٔ $(۲,۱)$ نیز می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند. بنابراین $۱=a\times۲(۲-۴)\Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$

در نتیجه $f(x)=-\frac{۱}{۴}x(x-۴)$. از طرف دیگر، چون خط راست مورد نظر از نقطه‌های $(۰,۱)$ و $(۴,۰)$ می‌گذرد، معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y-۰=\frac{۰-۱}{۴-۰}(x-۴)\Rightarrow y=-\frac{۱}{۴}(x-۴)$$

بنابراین $g(x)=-\frac{۱}{۴}(x-۴)$. اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to۴^-}\frac{f(x)+g(x)}{۴-x}=\lim_{x\to۴^-}\frac{-\frac{۱}{۴}x(x-۴)-\frac{۱}{۴}(x-۴)}{۴-x}$$
$$=\lim_{x\to۴^-}\frac{-\frac{۱}{۴}(x-۴)(x+۱)}{-(x-۴)}=\lim_{x\to۴^-}\frac{x+۱}{۴}=\frac{۵}{۴}$$

روش دوم: چون $f(۴)=g(۴)=۰$، پس حد مورد نظر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\lim_{x\to ۴^-}\frac{f(x)+g(x)}{۴-x}=-\lim_{x\to ۴^-}\frac{(f(x)-f(۴))+(g(x)-g(۴))}{x-۴}$$

$$=-(\lim_{x\to ۴^-}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}+\lim_{x\to ۴^-}\frac{g(x)-g(۴)}{x-۴})=-(f'_-(۴)+g'_-(۴))$$

از طرف دیگر، سهمی f و خط راست g همه‌جا مشتق‌پذیرند. پس مقدار حد مورد نظر برابر است با $-(f'(۴)+g'(۴))$. اکنون توجه کنید که

$$f(x)=-\frac{۱}{۴}x(x-۴)=-\frac{۱}{۴}x^۲+x\Rightarrow f'(x)=-\frac{۱}{۲}x+۱\Rightarrow f'(۴)=-۱$$

$$g'(۴)=m=-\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه مقدار حد مورد نظر برابر است با $-(-۱-\frac{۱}{۴})=\frac{۵}{۴}$.

۲۹۱۳ (۱) ابتدا ضابطهٔ تابع f^{-1} را پیدا می‌کنیم. برای این کار x را بر حسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}\Rightarrow\sqrt{x}+۱=y\sqrt{x}-y\Rightarrow\sqrt{x}-y\sqrt{x}=-y-۱$$

$$\sqrt{x}(۱-y)=-(y+۱)\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{y+۱}{y-۱}\Rightarrow x=(\frac{y+۱}{y-۱})^۲$$

بنابراین $f^{-1}(x)=(\frac{x+۱}{x-۱})^۲$. به این ترتیب

$$(f^{-1})'(x)=۲(\frac{x+۱}{x-۱})(\frac{-۲}{(x-۱)^۲})=\frac{-۴(x+۱)}{(x-۱)^۳}$$

$$\text{شیب خط مماس}=(f^{-1})'(۲)=\frac{-۴(۲+۱)}{(۲-۱)^۳}=-۱۲$$

۲۹۱۴ (۱) توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases}f(۱)=۰ & x>۰\\ f(۰)=۰ & x=۰\\ f(-۱)=۰ & x<۰\end{cases}$$

بنابراین همواره $(fog)(x)=۰$. در نتیجه همواره

$$((fof)og)(x)=(fo(fog))(x)=f((fog)(x))=f(۰)=۰$$

یعنی $(fof)og$ تابع ثابت صفر است، پس نقطهٔ ناپیوستگی ندارد.

۲۹۱۵ (۲) ابتدا توجه کنید که مطابق جدول تعیین علامت زیر، عبارت $۳-x^۲$ روی بازهٔ $[-۱/۵,\sqrt{۳}]$ نامنفی است.

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$	$-۱/۵$	$\sqrt{۳}$		$+\infty$
$۳-x^۲$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

بنابراین $|۳-x^۲|=۳-x^۲$ و در نتیجه $f(x)=x(۳-x^۲)=۳x-x^۳$

اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=۳-۳x^۲=۳(۱-x^۲),\quad f'(x)=۰\Rightarrow ۱-x^۲=۰\Rightarrow x=\pm۱$$

بنابراین باید مقادیر $f(\pm۱)$، $f(-۱/۵)$ و $f(\sqrt{۳})$ را با هم مقایسه کنیم:

$$f(۱)=۲,\quad f(-۱)=-۲,\quad f(-۱/۵)=-\frac{۹}{۸},\quad f(\sqrt{۳})=۰$$

در نتیجه مینیمم مطلق تابع f برابر است با $f(-۱)=-۲$ (توجه کنید که چون مقادیر f به‌ازای عددهای مثبت، مثبت‌اند، پس کافی بود مقادیر تابع f را فقط برای عددهای منفی حساب می‌کردیم).

۲۹۱۶ (۲) اگر A نقطهٔ $(x,\sqrt[۳]{-x})$، یعنی نقطهٔ $(x,-\sqrt[۳]{x})$ باشد، آن‌گاه A'، یعنی قرینهٔ A نسبت به نیمساز نواحی دوم و چهارم نقطهٔ $(\sqrt[۳]{x},-x)$ است. بنابراین

$$AA'=\sqrt{(x-\sqrt[۳]{x})^۲+(-\sqrt[۳]{x}+x)^۲}=\sqrt{۲(x-\sqrt[۳]{x})^۲}=\sqrt{۲}|x-\sqrt[۳]{x}|$$

چون $x\in[۰,۱]$، پس $x\le\sqrt[۳]{x}$ و در نتیجه $AA'=\sqrt{۲}(\sqrt[۳]{x}-x)$. بنابراین باید ماکزیمم مطلق تابع $g(x)=\sqrt{۲}(\sqrt[۳]{x}-x)$ را روی بازهٔ $[۰,۱]$ پیدا کنیم. توجه کنید که

$$g'(x)=\sqrt{۲}(\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}-۱)$$

$$g'(x)=۰\Rightarrow\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}-۱=۰\Rightarrow\sqrt[۳]{x^۲}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=\frac{۱}{\sqrt{۲۷}}=\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$$

چون $g(۱)=g(۰)=۰$، پس ماکزیمم مطلق تابع g به‌ازای $x=\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$ به‌دست می‌آید و برابر است با (توجه کنید که $\sqrt[۳]{x^۲}=\frac{۱}{۳}$، پس $\sqrt[۳]{x}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$)

$$g(\frac{۱}{۳\sqrt{۳}})=\sqrt{۲}(\frac{۱}{\sqrt{۳}}-\frac{۱}{۳\sqrt{۳}})=\sqrt{۲}\times\frac{۲}{۳\sqrt{۳}}=\frac{۴}{۳\sqrt{۶}}$$

۲۹۱۷ (۴) ابتدا توجه کنید که وقتی $x\to(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^-$، آن‌گاه $g(x)\to۲^+$. پس در یک همسایگی چپ $x=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$، ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x)=(۲x)^۳$ است. اکنون می‌توان نوشت

$$(fog)'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})f'_+(g(\frac{\sqrt{۵}}{۲}))=g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})f'_+(۲)$$

مقدار $g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})$ را به‌سادگی می‌توان حساب کرد

$$g(x)=(x^۲-۱)^{-\frac{۱}{۲}}\Rightarrow g'(x)=-\frac{۱}{۲}(۲x)(x^۲-۱)^{-\frac{۳}{۲}}=\frac{-x}{\sqrt{(x^۲-۱)^۳}}$$

$$g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=\frac{-\frac{\sqrt{۵}}{۲}}{(\frac{۱}{۲})^۳}=-۴\sqrt{۵}$$

از طرف دیگر،

$$f(x)=(۲x)^۳=۸x^۳\Rightarrow f'(x)=۲۴x^۲\Rightarrow f'_+(۲)=۹۶$$

پس

$$(fog)'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=(-۴\sqrt{۵})\times۹۶=(-۴۸\sqrt{۵})(۸)$$

یعنی $(fog)'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲})$ هشت برابر $-۴۸\sqrt{۵}$ است.

۲۹۱۸ (۱) توجه کنید که $g'(x)=۲ax+۵$ و $g''(x)=۲a$. از طرف دیگر،

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & x\le۲\\ g'(x) & x>۲\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}g'(x) & x\le۲\\ g''(x) & x>۲\end{cases}$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس

$$g(۲)=g'(۲)\Rightarrow۴a+۱۰+b=۴a+۵\Rightarrow b=-۵$$

$$g'(۲)=g''(۲)\Rightarrow۴a+۵=۲a\Rightarrow a=-\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow a+b=-\frac{۱۵}{۲}$$

۲۹۱۹ (۳) هر نقطه روی سهمی $y^۲=۴x$ به‌صورت $A(\frac{t^۲}{۴},t)$ است. فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ $M(۳,۰)$ برابر است با

$$AM=\sqrt{(\frac{t^۲}{۴}-۳)^۲+(t-۰)^۲}=\sqrt{\frac{t^۴}{۱۶}-\frac{۳}{۲}t^۲+۹+t^۲}$$

$$=\sqrt{\frac{t^۴-۸t^۲+۱۴۴}{۱۶}}=\frac{۱}{۴}\sqrt{(t^۲-۴)^۲+۱۲۸}$$

بنابراین کمترین مقدار AM به‌ازای $t^۲=۴$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۲۸}=۲\sqrt{۲}$$

۲۹۲۰ **۴** فرض کنید A پیشامد این باشد که یک خرگوش نر در اولین بارداری مادر متولد شده باشد و B پیشامد این باشد که یک خرگوش نر در دومین بارداری مادر متولد شده باشد. در این صورت، $P(A)=P(B)=۰/۷$ و $P(A\cap B)=۰/۶$. می‌خواهیم $P(A|B)$ را حساب کنیم. طبق فرمول احتمال شرطی می‌توان نوشت

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۰/۶}{۰/۷}=\frac{۶}{۷}$$

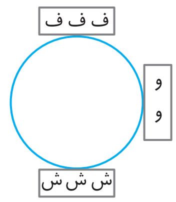
۲۹۲۱ **۳** ابتدا توجه کنید که چون a، b و c مثبت هستند، پس $\Delta=b^۲-۴a(-c)=b^۲+۴ac>۰$، بنابراین معادلهٔ مورد نظر همواره دو جواب دارد.

اکنون توجه کنید که چون فاصلهٔ حاصل‌ضرب جواب‌های هر معادله با مجموع جواب‌های آن معادله دو واحد است، پس

$$\left|-\frac{c}{a}-\left(-\frac{b}{a}\right)\right|=۲\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } a}|b-c|=۲|a|=۲a$$

چون $۲a$ عددی زوج است، پس $b-c$ نیز زوج است، یعنی b و c یا هر دو زوج یا هر دو فرد هستند. اکنون توجه کنید که در مجموعهٔ $\{۱,۲,\dots,۹\}$، اعداد ۲، ۴، ۶ و ۸ زوج هستند. پس دو عدد زوج را به $\binom{۴}{۲}$ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم و به دو حالت می‌توانیم یکی را b و دیگری را c بگیریم. بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد انتخاب در این حالت برابر است با $۲\times\binom{۴}{۲}$. همین‌طور، در مجموعهٔ $\{۱,۲,\dots,۹\}$ عددهای ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ فرد هستند. پس دو عدد فرد را به $۲\times\binom{۵}{۲}$ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم. با معلوم شدن b و c، عدد a نیز به‌طور خودکار معلوم می‌شود. بنابراین طبق اصل جمع، پاسخ مسئله برابر است با $۲\times\binom{۴}{۲}+۲\times\binom{۵}{۲}=۳۲$.

۲۹۲۲ **۲** ۳ گروه داریم که می‌خواهند دور یک میز گرد قرار بگیرند، تعداد راه‌های انجام این کار برابر است با $(۳-۱)!=۲!$. در گروه فوتبال افراد را به $۳!$، در گروه والیبال افراد را به $۲!$ و در گروه شنا افراد را به $۳!$ طریق می‌توان مرتب کرد. بنابراین طبق تعمیم اصل ضرب، پاسخ مسئله برابر است با $۲!۳!۲!۳!=۱۴۴$.



۲۹۲۳ **۴** تعداد کل عضوهای زیرمجموعهٔ مورد نظر، یعنی S به این صورت به‌دست می‌آید. واضح است که تعداد اعداد طبیعی یک‌رقمی که با ارقام ۱ تا ۵ می‌توان ساخت، ۵ تاست. برای به‌دست آوردن تعداد اعداد دورقمی (بدون تکرار ارقام) دو جایگاه یکان و دهگان به‌صورت ○ ○ (دهگان یکان) در نظر می‌گیریم. برای جایگاه دهگان ۵ انتخاب (هریک از ارقام ۱ تا ۵) و برای جایگاه یکان ۴ انتخاب وجود دارد. توجه کنید رقمی را که برای دهگان انتخاب شد، برای یکان نمی‌توان انتخاب کرد. در نتیجه بنابر اصل ضرب، تعداد اعداد دورقمی با شرایط مورد نظر برابر ۴×۵ است. برای به‌دست آوردن تعداد اعداد سه‌رقمی سه جایگاه ○○○ را در نظر می‌گیریم که برای جایگاه اول ۵ انتخاب، برای جایگاه دوم ۴ انتخاب (عدد جایگاه اول را نمی‌توانیم انتخاب کنیم) و برای جایگاه سوم ۳ انتخاب (عددهای جایگاه‌های اول و دوم را نمی‌توانیم انتخاب کنیم) وجود دارد. پس بنابر تعمیم اصل ضرب، تعداد اعداد سه‌رقمی با شرایط مورد نظر برابر است با $۵\times۴\times۳$. به‌طور مشابه تعداد اعداد چهاررقمی و پنج‌رقمی به‌ترتیب برابر $۵\times۴\times۳\times۲$ و $۵\times۴\times۳\times۲\times۱$ است. خلاصهٔ توضیح بالا در جدول زیر آمده است:

تعداد رقم‌ها	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد عددها	۵	۵×۴	۵×۴×۳	۵×۴×۳×۲	۵×۴×۳×۲×۱

بنابراین طبق تعمیم اصل جمع، $n(S)=۵+۲۰+۶۰+۱۲۰+۱۲۰=۳۲۵$

اگر A این پیشامد باشد که عضو انتخابی بر ۳ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه تعداد اعضای A به این صورت به‌دست می‌آید. از میان اعداد یک‌رقمی ۱ تا ۵، فقط عدد ۳ بر ۳ بخش‌پذیر است. از میان اعداد دورقمی عضو S، آن‌هایی بر ۳ بخش‌پذیرند که با ارقام ۱ و ۲، ۱ و ۵، ۲ و ۴ یا ۴ و ۵ ساخته می‌شوند. توجه کنید یک عدد زمانی بر ۳ بخش‌پذیر است که مجموع ارقامش بر ۳ بخش‌پذیر باشد. بنابراین تعداد اعداد دورقمی عضو S و بخش‌پذیر بر ۳ برابر است با $۴\times۲!$. به همین ترتیب، تعداد اعداد سه‌رقمی، چهاررقمی و پنج‌رقمی عضو S که بر ۳ بخش‌پذیرند، به‌دست می‌آید. مثلاً از میان اعداد چهاررقمی عضو S، آن‌هایی بر ۳ بخش‌پذیرند که با ارقام ۱، ۲، ۴ و ۵ ساخته می‌شوند و تعدادشان برابر است با $۴!$. توضیح بالا در جدول زیر جمع‌بندی شده است:

تعداد رقم‌ها	۱	۲	۳	۴	۵
رقم‌های به‌کار رفته	۳	۱,۲	۱,۲,۳	۱,۲,۴,۵	۱,۲,۳,۴,۵
		۱,۵	۱,۳,۵		
		۲,۴	۲,۳,۴		
		۴,۵	۳,۴,۵		
تعداد عددها	۱	۴×۲!	۴×۳!	۴!	۵!

بنابراین طبق تعمیم اصل جمع، $n(A)=۱+۸+۲۴+۲۴+۱۲۰=۱۷۷$

پس $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۷۷}{۳۲۵}$.

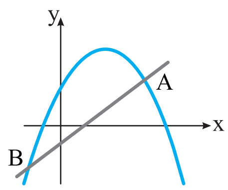
۲۹۲۴ **۴** ابتدا توجه کنید که چون عرض از مبدأ خط مورد نظر برابر -۱ است، پس این خط از نقطهٔ $(۰,-۱)$ می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ این خط به‌صورت زیر است:

$$y-۰=\frac{۰+۱}{۱-۰}(x-۱)\Rightarrow y=x-۱$$

طول نقطه‌های برخورد این خط و سهمی داده شده، یعنی A و B جواب‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$-x^۲+۲x+۱=x-۱\Rightarrow x^۲-x-۲=۰\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}$$

$$(x+۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x_A=۲,x_B=-۱$$



چون این نقطه‌ها روی خط $y=x-۱$ هستند، پس عرض آن‌ها برابر است با $y_A=۲-۱=۱$ و $y_B=-۱-۱=-۲$. بنابراین نقطه‌های مورد نظر $A(۲,۱)$ و $B(-۱,-۲)$ هستند که نقطهٔ وسط آن‌ها $\left(\frac{۲-۱}{۲},\frac{۱-۲}{۲}\right)$، یعنی $\left(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲}\right)$ است. از طرف دیگر، رأس سهمی $y=-x^۲+۲x+۱$ نقطهٔ $(۱,۲)$ است. بنابراین فاصلهٔ مورد نظر برابر است با $\sqrt{(۱-\frac{۱}{۲})^۲+(۲+\frac{۱}{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۲۶}}{۲}$. پس این فاصله برابر $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۶}$ است.

۲۹۲۵ **۲** فرض می‌کنیم مختصات نقطهٔ A به‌صورت (a,b) باشد. چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس میانهٔ AM ارتفاع نیز هست، یعنی AM بر خط BC عمود است. شیب خط BC برابر $-\frac{۱}{۲}$ است و شیب خط AM برابر با $\frac{b-۲}{a-۳}$ است.

بنابراین $-\frac{۱}{۲}\times\frac{b-۲}{a-۳}=-۱\Rightarrow b-۲=۲(a-۳)\Rightarrow b=۲a-۴$

از طرف دیگر، فاصلهٔ نقطهٔ A از خط BC برابر با $۵\sqrt{۵}$ است. بنابراین

$$\frac{|a+۲b-۷|}{\sqrt{۱^۲+۲^۲}}=۵\sqrt{۵}\xrightarrow{b=۲a-۴}\frac{|a+۴a-۸-۷|}{\sqrt{۵}}=۵\sqrt{۵}$$

$$|۵a-۱۵|=۲۵\Rightarrow\begin{cases}۵a-۱۵=۲۵\\ ۵a-۱۵=-۲۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۸\\ a=-۲\end{cases}$$

در نتیجه طول نقطهٔ A هرکدام از دو مقدار ۸ و ۲− می‌تواند باشد که با توجه به گزینه‌ها، $a=-۲$ درست است.

۲۹۲۶ (۲) مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲y=۳$ نقطهٔ $(۰,-۱)$ و شعاع آن برابر است با $۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{۰^۲+۲^۲-۴(-۳)}$. بنابراین شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر است با $\frac{۳}{۲}\times۲=۳$.

اگر مرکز این دایره نقطهٔ (α,β) باشد، معادلهٔ آن به‌صورت $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=۹$ است. چون نقطهٔ $(۰,-۳)$ روی این دایره است، پس مختصات آن در معادلهٔ دایره صدق می‌کنند، یعنی $(۰-\alpha)^۲+(-۳-\beta)^۲=۹\Rightarrow\alpha^۲+(۳+\beta)^۲=۹ \quad (۱)$

چون دایره‌ها مماس داخلی هستند، پس فاصلهٔ مرکزهای آن‌ها برابر با اختلاف شعاع‌هایشان است، یعنی $\sqrt{(\alpha-۰)^۲+(\beta+۱)^۲}=۳-۲\Rightarrow\alpha^۲+(\beta+۱)^۲=۱ \quad (۲)$

اکنون اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$(۳+\beta)^۲-(\beta+۱)^۲=۹-۱\Rightarrow۹+\beta^۲+۶\beta-\beta^۲-۲\beta-۱=۸\Rightarrow\beta=۰$$

از تساوی (۲) مقدار α را به‌دست می‌آوریم: $\alpha^۲+(۰+۱)^۲=۱\Rightarrow\alpha=۰$

بنابراین معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به‌صورت $x^۲+y^۲=۹$ است.

۲۹۲۷ (۳) چون $CD||EF$، پس بنابر قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌های OCD و OFE متشابه‌اند. بنابراین $\frac{OC}{OF}=\frac{CD}{FE}=\frac{OD}{OE}\Rightarrow\frac{OC}{۳}=\frac{y}{۱}=\frac{۴}{y}\Rightarrow y=۲, OC=۶$

مثلث‌های OCD و OAB متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{OD}{OB}=\frac{CD}{AB}\Rightarrow\frac{۴}{۴+x}=\frac{y}{۲x}\Rightarrow\frac{۴}{۴+x}=\frac{۲}{۲x}\Rightarrow۴x=۴+x\Rightarrow x=\frac{۴}{۳}$$

درنتیجه بنابر قضیهٔ تالس در مثلث OAB می‌توان نوشت

$$CD||AB\Rightarrow\frac{OC}{AC}=\frac{OD}{BD}\Rightarrow\frac{۶}{AC}=\frac{۴}{\frac{۴}{۳}}\Rightarrow AC=۲$$

۲۹۲۸ (۴) توجه کنید

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times AC\sin۴۵^\circ=\frac{۱}{۲}\times۸\times۸\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۱۶\sqrt{۲}$$

از طرف دیگر،

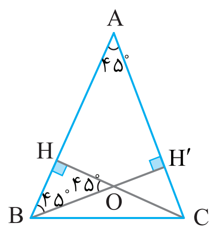
$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}CH\times AB\Rightarrow۱۶\sqrt{۲}=\frac{۱}{۲}\times CH\times۸\Rightarrow CH=\frac{۱۶\sqrt{۲}}{۴}=۴\sqrt{۲}$$

اکنون اگر فرض کنیم $BH=x$، آن‌گاه $AH=۸-x$. در نتیجه بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث AHC،

$$AH^۲+CH^۲=AC^۲\Rightarrow(۸-x)^۲+۳۲=۶۴$$

$$(۸-x)^۲=۳۲\xrightarrow{\sqrt{۳۲}=۴\sqrt{۲}}۸-x=۴\sqrt{۲}\Rightarrow x=۸-۴\sqrt{۲}$$

اکنون توجه کنید که در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH'، چون $\hat{A}=۴۵^\circ$، پس $A\hat{B}H'=۴۵^\circ$. بنابراین مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH متساوی‌الساقین نیز هست. پس $OH=BH=۸-۴\sqrt{۲}$. در نتیجه



$$S_{OBH}=\frac{۱}{۲}\times BH\times OH=\frac{۱}{۲}(۸-۴\sqrt{۲})^۲$$

$$=۸(۲-\sqrt{۲})^۲=۸(۶-۴\sqrt{۲})$$

$$=۱۶(۳-۲\sqrt{۲})=\frac{۱۶(۹-۸)}{۳+۲\sqrt{۲}}=\frac{۱۶}{۳+۲\sqrt{۲}}$$