

در نتیجه عرض نقطه برخورد برابر است با $f(1) = 4 \times 1 - 1^2 = 3$. پس نقطه برخورد نمودارهای دو تابع $(1, 3)$ است که فاصله آن از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

توجه کنید که $x_1 + x_2 = \frac{a}{3}$, $x_1 x_2 = \frac{f}{3}$, $x_1 = 3x_2$ **۳ ۲۹۳۵**

بنابراین $x_1 x_2 = \frac{f}{3} \Rightarrow (3x_2)x_2 = \frac{f}{3} \Rightarrow x_2^2 = \frac{f}{9} \Rightarrow x_2 = \pm \frac{\sqrt{f}}{3}$

اگر $x_2 = \frac{\sqrt{f}}{3}$ ، آن گاه $x_1 = 3x_2 = \sqrt{f}$ $\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{4\sqrt{f}}{3} = \frac{a}{3} \Rightarrow a = 4\sqrt{f}$
اگر $x_2 = -\frac{\sqrt{f}}{3}$ ، آن گاه $x_1 = -\sqrt{f}$ $\Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{4\sqrt{f}}{3} = \frac{a}{3} \Rightarrow a = -4\sqrt{f}$

بنابراین اختلاف دو مقدار ممکن a برابر $16\sqrt{f}$ است.

۲ ۲۹۳۶ توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1+3} - \sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$$

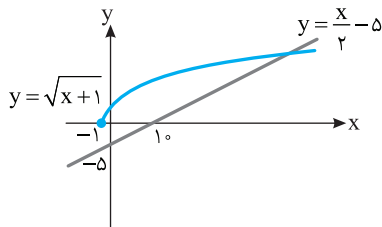
$$\frac{\sqrt{x+1}(\sqrt{x-1+3} - \sqrt{x-1}) - \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1+3})}{(\sqrt{x-1+3})(\sqrt{x-1})} = \frac{(\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x-1}}$$

$$\frac{3\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1} - 3\sqrt{x+1}}{9 - (x-1)} = \sqrt{x-1}$$

$$\frac{-2\sqrt{x^2-1}}{10-x} = \sqrt{x-1} \Rightarrow -2\sqrt{x-1} \times \sqrt{x+1} = (10-x)\sqrt{x-1}$$

$$-2\sqrt{x+1} = 10-x \quad (\text{توجه کنید } \sqrt{x-1} \neq 0) \Rightarrow \sqrt{x+1} = \frac{x}{2} - 5$$

اکنون برای اینکه بفهمیم این معادله چند جواب مثبت دارد، نمودارهای تابع‌های دو طرف معادله را رسم می‌کنیم:



از روی این شکل معلوم می‌شود که معادله مورد نظر یک جواب بزرگ‌تر از ۱۰ دارد، که چون هیچ کدام از مخرج‌ها را صفر نمی‌کند، پس این جواب قابل قبول است.

۲ ۲۹۳۷ گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): $(-1, -2) \Rightarrow (-2, -1): -1 \neq (-2)^2 - (-2) + 1$

گزینه (۲): $(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}) \Rightarrow (\frac{1}{2}, \frac{5}{8}): \frac{5}{8} = (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 1$

چون این تساوی درست است، پس جواب گزینه (۲) است. لازم نیست بقیه گزینه‌ها را بررسی کنیم.

۴ ۲۹۳۸ ابتدا توجه کنید که $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x)$. بنابراین

$$g(2x) = 5x^2 + 11 \xrightarrow{x \rightarrow \frac{x}{2}} g(x) = 5(\frac{x}{2})^2 + 11$$

$$g(x-7) = 5(\frac{x-7}{2})^2 + 11$$

بنابراین کمترین مقدار تابع $y = g(x-7)$ برابر ۱۱ است.

۱ ۲۹۳۹ باید $-9 + k^2 < 0 \Rightarrow k^2 < 9 \Rightarrow -3 < k < 3$

بنابراین k یکی از عددهای صحیح $-2, -1, 0, 1, 2$ است، که مجموع آن‌ها برابر صفر است.

پاسخ کنکور سراسری ۱۴۰۱

۲ ۲۹۲۹ توجه کنید که

$$\sqrt[4]{(\sqrt{4+\sqrt{y}})^{-1} \times \sqrt{1+\sqrt{y}}} = \sqrt[4]{\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{y}}} \times \sqrt{1+\sqrt{y}}}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{y}}} \times (1+\sqrt{y})^2} = \sqrt[4]{\frac{1+2\sqrt{y}+y}{\sqrt{4+\sqrt{y}}}} = \sqrt[4]{\frac{1+y+2\sqrt{y}}{\sqrt{4+\sqrt{y}}}}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{(\sqrt{4+\sqrt{y}})^2}{\sqrt{4+\sqrt{y}}}} = \sqrt[4]{\sqrt{4+\sqrt{y}}}$$

۴ ۲۹۳۰ راه‌حل اول فرض می‌کنیم $a_n = An + B$. در این صورت

$$\begin{cases} a_5 = 8 \\ a_{10} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5A + B = 8 \\ 10A + B = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{5} \\ B = 11 \end{cases}$$

بنابراین $a_n = -\frac{3}{5}n + 11 \Rightarrow a_{16} = -\frac{3}{5} \times 16 + 11 = 1/4$

راه‌حل دوم فرض کنید جمله اول a_1 و قدرنسبت d باشد. در این صورت

$$\begin{cases} a_5 = 8 \\ a_{10} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 4d = 8 \\ a_1 + 9d = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -\frac{3}{5} \\ a_1 = \frac{52}{5} \end{cases}$$

بنابراین $a_{16} = a_1 + 15d = \frac{52}{5} + 15(-\frac{3}{5}) = \frac{1}{5} = 1/4$

۱ ۲۹۳۱ باید $a > 0$ ، $\Delta > 0$ ، $\frac{c}{a} \geq 0$ و $-\frac{b}{a} > 0$.

$a > 0$ ، $\frac{c}{a} \geq 0 \Rightarrow \frac{c}{a} \geq 0$ ✓

$\Delta > 0 \Rightarrow (3+2a)^2 > 0 \Rightarrow a \neq -\frac{3}{2}$

$-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{3+2a}{a} > 0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow 3+2a < 0 \Rightarrow a < -\frac{3}{2}$

چون اشتراک $a > 0$ و $a < -\frac{3}{2}$ تهی است، پس به‌ازای هیچ مقداری از a شرایط مسئله برقرار نیست.

۴ ۲۹۳۲ ابتدا نامعادله $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$ را به کمک تعیین علامت حل می‌کنیم:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$\frac{4-2x}{3x+1}$		-	+	-

بنابراین $-\frac{1}{2} < x \leq 2$. اکنون توجه کنید که $-1 < 3x \leq 6$. پس $[3x]$ می‌تواند

عددهای $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ باشد که تعداد آن‌ها هشت تا است.

۳ ۲۹۳۳ چون f و g تابع‌هایی ثابت‌اند، پس

$$f(x) = b - 3ax \Rightarrow -3a = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow f(x) = b$$

$$g(x) = c - (3b-3)x \Rightarrow -(3b-3) = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow g(x) = c$$

از طرف دیگر،

$$(f+g)(x) = 5 \Rightarrow f(x) + g(x) = 5 \Rightarrow b + c = 5 \Rightarrow 1 + c = 5 \Rightarrow c = 4$$

بنابراین $bc = 4$.

۴ ۲۹۳۴ توجه کنید که

$$g(x) = f(x+2) = 4(x+2) - (x+2)^2 = -x^2 + 4$$

بنابراین $f(x) = g(x) \Rightarrow 4x - x^2 = -x^2 + 4 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$

توجه کنید که ۱ ۲۹۴۰

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < -x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \frac{\pi-x}{4} < \frac{\pi}{2}$$

بنابراین

$$\tan\left(\frac{\pi-x}{4}\right) > 0 \Rightarrow \frac{1-m}{2+m} > 0$$

جدول تعیین علامت این نامعادله به صورت زیر است:

m	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$\frac{1-m}{2+m}$		-	+	-

بنابراین مجموعه مقادیر m بازه $(-2, 1)$ است.

توجه کنید که ۳ ۲۹۴۱

$$2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x = \frac{4}{3}$$

$$2 - \cos^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos^2 x = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

بنابراین

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که ماکزیمم تابع برابر ۵ و مینیمم تابع

برابر ۱ است. بنابراین

$$c = \frac{\text{مینیمم} + \text{ماکزیمم}}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

توجه کنید که ۴ ۲۹۴۳

$$\lambda \cos x - \tan^2 x = 1 \Rightarrow \lambda \cos x = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \lambda \cos x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

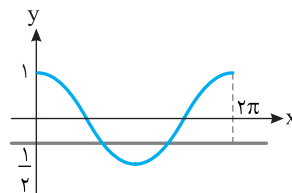
$$\lambda \cos^3 x = 1 \Rightarrow \cos^3 x = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \cos x = \sqrt[3]{\frac{1}{\lambda}} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون برای اینکه تعداد جواب‌ها در بازه $[0, 2\pi]$ را مشخص کنیم، می‌توانیم از جدول

زیر استفاده کنیم:

k	-1	صفر	1
$2k\pi + \frac{\pi}{3}$	$-2\pi + \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$2\pi + \frac{\pi}{3}$
$2k\pi - \frac{\pi}{3}$	$-2\pi - \frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$2\pi - \frac{\pi}{3}$

توجه کنید که فقط جواب‌های $\frac{\pi}{3}$ و $2\pi - \frac{\pi}{3}$ در بازه $[0, 2\pi]$ هستند و بقیه جواب‌هاخارج از این بازه هستند. بنابراین معادله مثلثاتی مورد نظر در بازه $[0, 2\pi]$ دو جواب دارد. توجه کنید که چون تعداد جواب‌های معادله مورد نظر را می‌خواهیم، می‌توانستیم از نمودار هم استفاده کنیم. از روی نمودار زیر معلوم می‌شود که تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی مورد نظر دوتا است.

توجه کنید که ۱ ۲۹۴۴

$$\log_{\lambda} 18 = m \Rightarrow \log_{\sqrt{r}} 18 = \frac{1}{\sqrt{r}} \log_r 18 = m \Rightarrow \log_r 18 = \sqrt{r} m$$

$$\log_r (2 \times 9) = \sqrt{r} m \Rightarrow \log_r 2 + \log_r 3^2 = \sqrt{r} m \Rightarrow 1 + 2 \log_r 3 = \sqrt{r} m$$

$$\log_r 3 = \frac{\sqrt{r} m - 1}{2}$$

از طرف دیگر،

$$\log_r 12 = \log_r (3 \times 4) = \log_r 3 + \log_r 4 = \log_r 3 + 1$$

$$= \frac{1}{2} \log_r 3 + 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{r} m - 1}{2} \right) + 1 = \frac{\sqrt{r} m - 1}{4} + 1 = \frac{\sqrt{r} m + 3}{4}$$

چون نمودار تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس

$$f(0) = 0 \Rightarrow a + b \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0 \Rightarrow a + b = 0 \quad (1)$$

همچنین

$$f^{-1}(-1) = -1 \Rightarrow f(-1) = -1 \Rightarrow a + b \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -1 \Rightarrow a + 2b = -1 \quad (2)$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \quad \text{از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود}$$

بنابراین $a - b = 2$.اگر x_1, \dots, x_q داده‌ها باشند و \bar{x} میانگین آن‌ها باشد، طبق فرض،

$$(x_1 - \bar{x})^2 = (x_2 - \bar{x})^2 = \dots = (x_q - \bar{x})^2 = (x_1 + 1 - \bar{x})^2 = 1$$

و $(x_q - \bar{x})^2 = 0$ بنابراین

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_q - \bar{x})^2 + (x_q - \bar{x})^2}{q} = \frac{\lambda \times 1 + 0}{q} = \frac{\lambda}{q}$$

$$\text{در نتیجه } \sigma = \sqrt{\frac{\lambda}{q}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{q}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

میانگین و میانه داده‌ها برابر است. فرض کنید این مقدار برابر a باشد.

در این صورت میانگین و میانه داده‌های جدید برابر $a + 2$ است، که اختلاف آن‌ها صفر است.توجه کنید که اگر $x \rightarrow 2^+$ ، آن‌گاه $x^2 \rightarrow \lambda^+$ ، پس $[x^2] = \lambda$.

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - [x^2]} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - \lambda} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{3x} = \frac{1}{3}$$

توجه کنید که ۳ ۲۹۴۹

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f - [x])g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (f - 1)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2g(x) = \frac{6}{3} = 2$$

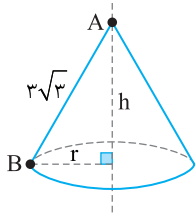
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{|x-1|} = 2 \quad \text{یعنی } \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \frac{6}{3} = 2$$

چون $\lim_{x \rightarrow 1^+} |x-1| = 0$ ، پس $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{ax^2 + bx + c} = 0$ ، یعنی $x=1$ ریشه عبارتزیر رادیکال است. از طرف دیگر، $x=1$ باید ریشه مضاعف عبارت زیر رادیکال باشد چون در غیر این صورت درجه $x-1$ در صورت از درجه $x-1$ در مخرج کمتر و مقدار حد بی‌نهایت می‌شود. بنابراین باید صورت $g(x)$ به صورت $\sqrt{a(x-1)^2}$ باشد. پس

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{a(x-1)^2}}{|x-1|} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{a}|x-1|}{|x-1|} = 2 \Rightarrow \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$$

اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4(x-1)^2}}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2|x-1|}{|x-1|} = 2$$



۲ ۲۹۵۳ اگر شعاع قاعده مخروط برابر r و ارتفاع آن برابر با h باشد، بنابر قضیه فیثاغورس،
 $r^2 + h^2 = AB^2 = (3\sqrt{3})^2 = 27$
 پس $r^2 = 27 - h^2$ از طرف دیگر، حجم مخروط برابر است با

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} (27 - h^2) h = -\frac{\pi}{3} h^3 + 9\pi h \Rightarrow V' = -\pi h^2 + 9\pi$$

$$V' = 0 \Rightarrow -\pi h^2 + 9\pi = 0 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 3 \text{ (غ.ق. غ.ق.)}$$

۳ ۲۹۵۴ شرایط انتخاب کتاب‌ها را می‌توان به صورت زیر حالت‌بندی کرد:

حالت ۱: هیچ کدام از کتاب‌های ریاضی، فیزیک و زیست را انتخاب نکنیم. در این صورت باید هر چهار کتاب را از بین چهار کتاب دیگر انتخاب کنیم. این کار به

$$\binom{4}{4} = 1 \text{ طریق ممکن است.}$$

حالت ۲: کتاب ریاضی را انتخاب کنیم. در این صورت باید حتماً کتاب زیست را هم انتخاب کنیم اما کتاب فیزیک را انتخاب نکنیم. بنابراین باید از بین چهار کتاب

$$\binom{4}{2} = 6 \text{ طریق ممکن است.}$$

حالت ۳: کتاب ریاضی را انتخاب نکنیم، اما کتاب زیست را انتخاب کنیم. در این صورت باید کتاب فیزیک را انتخاب نکنیم، یعنی باید از بین چهار کتاب دیگر سه تا

$$\binom{4}{3} = 4 \text{ طریق ممکن است.}$$

حالت ۴: کتاب ریاضی را انتخاب نکنیم، اما کتاب فیزیک را انتخاب کنیم. در این صورت باید کتاب زیست را انتخاب نکنیم، یعنی باید از بین چهار کتاب دیگر سه تا

$$\binom{4}{3} = 4 \text{ طریق ممکن است.}$$

بنابراین طبق اصل جمع، تعداد انتخاب‌های ممکن برابر است با $1 + 6 + 4 + 4 = 15$.

۲ ۲۹۵۵ اگر A پیشامد شیوع بیماری و B پیشامد بهبود باشد، آن‌گاه

$P(A) = 0.8$ و $P(B|A) = 0.5$. در این صورت احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 0.8 \times 0.5 = 0.4$$

۱ ۲۹۵۶ نقطه B محل برخورد خطوط AB و BC است. پس مختصات آن

جواب‌های دستگاه معادله‌های این دو خط هستند:

$$\begin{cases} y + 2x = 7 \\ 2y - 7x = -19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y - 4x = -14 \\ 2y - 7x = -19 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} -11x = -33$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 1$$

پس باید فاصله نقطه $B(3, 1)$ را از خط $4y - 3x - 17 = 0$ به دست آوریم که برابر

$$BH = \frac{|4 \times 1 - 3 \times 3 - 17|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{22}{5} = 4.4 \text{ است}$$

۴ ۲۹۵۷ چون $DE \parallel BC$ ، پس بنابر تعمیم قضیه تالس،

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{5}{5+7} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{5}{12}$$

بنابراین

$$\frac{S_{BCE}}{S_{BDE}} = \frac{BC}{DE} = \frac{12}{5} = 2.4$$

۲ ۲۹۵۸ چون قطر کوچک بیضی برابر ۱۸ است، پس $2b = 18$ ، یعنی $b = 9$.

همچنین $c = 12$ ، بنابراین $a^2 = b^2 + c^2 = 9^2 + 12^2 = 225 \Rightarrow a = 15$

بنابراین خروج از مرکز برابر است با $e = \frac{c}{a} = \frac{12}{15} = 0.8$

۱ ۲۹۵۰ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt{\frac{2x+1}{\Delta x+9}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{2x+1}{\Delta x+9}} \right)^3$$

$$= \left(\sqrt{\frac{0+1}{0+9}} \right)^3 = \left(\frac{1}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}$$

۴ ۲۹۵۱ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که شیب خط $4y - 3x = n$ برابر با $\frac{3}{4}$ است. از طرف دیگر،

$$f(x) = \frac{x^2 + mx + 1}{x + 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x + m)(x + 3) - (x^2 + mx + 1)(1)}{(x + 3)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 6x + 3m - 1}{(x + 3)^2}$$

چون شیب خط مماس با $f'(1)$ برابر است، پس

$$f'(1) = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1 + 6 + 3m - 1}{16} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{2 + m}{4} = 1 \Rightarrow m = 2$$

بنابراین $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} \Rightarrow f(1) = \frac{1 + 2 + 1}{1 + 3} = 1$

چون نقطه $(1, f(1))$ ، یعنی $(1, 1)$ روی خط $4y - 3x = n$ نیز قرار دارد، پس

$$4 \times 1 - 3 \times 1 = n \Rightarrow n = 1$$

بنابراین $m + n = 2 + 1 = 3$.

راه‌حل دوم معادله حاصل از برخورد خط مماس و تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{x^2 + mx + 1}{x + 3} = \frac{3x + n}{4} \Rightarrow 4(x^2 + mx + 1) = (x + 3)(3x + n)$$

$$4x^2 + 4mx + 4 = 3x^2 + nx + 9x + 3n$$

$$x^2 + (4m - n - 9)x + 4 - 3n = 0$$

چون $x = 1$ ریشه مضاعف این معادله است، پس سمت چپ آن به صورت $(x - 1)^2$

است. بنابراین $x^2 + (4m - n - 9)x + 4 - 3n = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$$\begin{cases} 4m - n - 9 = -2 \\ 4 - 3n = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 1 \end{cases}$$

در نتیجه

پس $m + n = 2 + 1 = 3$.

۲ ۲۹۵۲ چون نقطه $(0, 4)$ روی نمودار تابع قرار دارد و ماکزیمم نسبی تابع

است، پس

$$f(0) = 4 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow f(x) = x^2 + ax^2 + bx + 4$$

$$f'(x) = 2x + 2ax + b$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow f(x) = x^2 + ax^2 + 4$$

اگر طول نقطه تماس نمودار با محور طول‌ها برابر x_0 باشد، آن‌گاه

$$\begin{cases} f(x_0) = 0 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^2 + ax_0^2 + 4 = 0 \\ 2x_0 + 2ax_0 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_0^2 + ax_0^2 + 4 = 0 \\ 2x_0 + 2ax_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_0^2 + 2ax_0 = 0 \\ 2x_0 + 2ax_0 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

از تساوی (۲) به دست می‌آید $x_0 = 0$ یا $x_0 = -\frac{2a}{3}$

نقطه با طول صفر نقطه ماکزیمم نسبی است. بنابراین طول نقطه مینیمم نسبی برابر

$$-\frac{2a}{3} \text{ است. اکنون از تساوی (۱) به دست می‌آید}$$

$$\left(-\frac{2a}{3}\right)^2 + a\left(-\frac{2a}{3}\right)^2 + 4 = 0$$

$$-\frac{4a^2}{9} + \frac{4a^3}{9} + 4 = 0 \Rightarrow \frac{4a^2}{9} = -4 \Rightarrow a^2 = -27 \Rightarrow a = -3$$

بنابراین $x_0 = -\frac{2(-3)}{3} = 2$

$$\frac{-b-8}{8} = -\frac{1}{4} \Rightarrow b = -6$$

بنابراین $b-a = -6 - (-12) = 6$.

۲۹۶۲ راه حل اول ابتدا نامعادله‌های $\frac{1-3x}{x+1} < -2$ را با استفاده از جدول

تعیین علامت حل می‌کنیم. برای حل کردن نامعادله $\frac{1-3x}{x+1} < -2$ جدول تعیین علامت

زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$\frac{1-3x}{x+1}$		-	+	-

پس مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{1-3x}{x+1} < -2$ مجموعه $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$ است.

برای حل کردن نامعادله $\frac{1-3x}{x+1} > -2$ ابتدا آن را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$-2 < \frac{1-3x}{x+1} \Rightarrow \frac{1-3x}{x+1} + 2 > 0 \Rightarrow \frac{1-3x+2x+2}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{3-x}{x+1} > 0$$

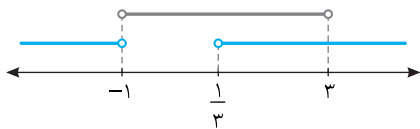
اکنون جدول تعیین علامت زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$\frac{3-x}{x+1}$		-	+	-

پس مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{3-x}{x+1} > 0$ مجموعه $(-1, 3)$ است. بنابراین

مجموعه جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر اشتراک مجموعه‌های جواب‌های دو

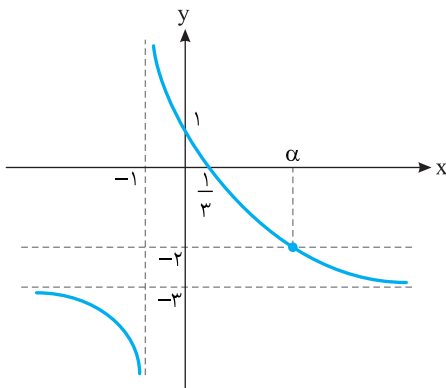
نامعادله‌ای است که حل کردیم، که با توجه به شکل زیر برابر $(\frac{1}{3}, 3)$ است.



اکنون توجه کنید که $\frac{1}{3} < x < 3 \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{x}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow [\frac{x}{2}] = 0$ یا ۱

یعنی مجموعه مقادیر $[\frac{x}{2}]$ دو عضو دارد.

راه حل دوم نمودار تابع $f(x) = \frac{1-3x}{x+1}$ به صورت زیر است:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که مجموعه جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر بازه

$(\frac{1}{3}, \alpha)$ است. برای پیدا کردن α ، توجه کنید که α طول نقطه برخورد خط

$y = -2$ و نمودار تابع f است. بنابراین α جواب معادله زیر است:

$$-2 = \frac{1-3x}{x+1} \Rightarrow -2x-2=1-3x \Rightarrow x=3$$

۲۹۵۹ راه حل اول ابتدا پرازنرها را جداگانه ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{5}+(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$A = \sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}$$

$$A^2 = 3 - \sqrt{5} + 3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{3-\sqrt{5}}\sqrt{3+\sqrt{5}} = 6 - 2\sqrt{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$$

$$= 6 - 2\sqrt{9-5} = 6 - 2\sqrt{4} = 6 - 2 \times 2 = 2$$

توجه کنید که چون $\sqrt{3-\sqrt{5}} < \sqrt{3+\sqrt{5}}$ پس A عددی منفی است. در نتیجه

$$A = -\sqrt{2} \quad \text{بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با } -\frac{1}{\sqrt{2}} \times (-\sqrt{2}) = -1$$

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{5}+(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}) = \frac{1}{2} (\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{5}})$$

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}) = \frac{1}{2} (\sqrt{(1-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(1+\sqrt{5})^2})$$

$$= \frac{1}{2} (|1-\sqrt{5}| - |1+\sqrt{5}|) = \frac{1}{2} (\sqrt{5}-1-1-\sqrt{5}) = \frac{1}{2} (-2) = -1$$

۲۹۶۰ فرض می‌کنیم $a_n = An^2 + Bn + C$. در این صورت بنابر فرض،

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{5} a_5 = -\frac{1}{5} \\ a_5 = 14 \\ a_6 = 17/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{5} \times 5^2 + 5B + C = 14 \\ -\frac{1}{5} \times 6^2 + 6B + C = 17/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5B + C = 19 \\ 6B + C = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 4 \\ C = -1 \end{cases}$$

$$a_n = -\frac{1}{5} n^2 + 4n - 1 \Rightarrow \begin{cases} a_{15} = -\frac{1}{5} \times 15^2 + 4 \times 15 - 1 = 14 \\ a_1 = -\frac{1}{5} \times 1^2 + 4 \times 1 - 1 = \frac{14}{5} \end{cases} \quad \text{بنابراین}$$

در نتیجه $\frac{a_{15}}{a_1} = 5$. پس a_{15} پنج برابر a_1 است.

۲۹۶۱ طول رأس سهمی $f(x) = -ax^2 + ax + 2$ برابر است با

$$-\frac{a}{2(-a)} = \frac{1}{2}$$

بنابراین عرض رأس این سهمی برابر است با

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -a\left(\frac{1}{2}\right)^2 + a\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = -\frac{a}{4} + \frac{a}{2} + 2 = \frac{a+8}{4}$$

طول رأس سهمی $g(x) = 2bx^2 - bx - 1$ برابر است با

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 2b\left(\frac{1}{2}\right)^2 - b\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{-b-8}{4} \quad \text{بنابراین عرض رأس این سهمی برابر است با}$$

اکنون توجه کنید که نقطه $(\frac{1}{2}, \frac{a+8}{4})$ روی سهمی g است. پس مختصات آن در

معادله سهمی g صدق می‌کنند:

$$\frac{a+8}{4} = 2b\left(\frac{1}{2}\right)^2 - b\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{b}{2} - \frac{b}{2} - 1 = -1 \Rightarrow a+8 = -4 \Rightarrow a = -12$$

بنابراین $f(x) = 12x^2 - 12x + 2$. چون نقطه $(\frac{1}{2}, \frac{-b-8}{4})$ روی این سهمی است،

پس مختصات آن در معادله این سهمی صدق می‌کنند:

$$\frac{-b-8}{4} = 12\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 3 - 6 + 2 = -1$$

از طرف دیگر، مجموع جواب‌ها از یک طرف برابر $a+b$ و از طرف دیگر برابر a^2+b^2-12 است. بنابراین $a^2+b^2-12 = a+b$. پس اگر $a=1$ ، آن‌گاه

$$1+b=1+b^2-12 \Rightarrow b^2-b-12=0 \Rightarrow (b-4)(b+3)=0$$

$$b=4 \text{ یا } b=-3 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

در این حالت $a+b=5$. به همین ترتیب معلوم می‌شود که اگر $b=1$ ، آن‌گاه $a=4$ و باز هم $a+b=5$.

توجه کنید که **۱ ۲۹۶۶**

$$\frac{1}{\sqrt{2-x+2}} - \frac{1}{2-\sqrt{2-x}} = \frac{2-x}{5\sqrt{2-x}}$$

$$\frac{2-\sqrt{2-x}-(\sqrt{2-x}+2)}{(\sqrt{2-x}+2)(2-\sqrt{2-x})} = \frac{(\sqrt{2-x})^2}{5\sqrt{2-x}} \Rightarrow \frac{-2\sqrt{2-x}}{4-(2-x)} = \frac{\sqrt{2-x}}{5}$$

چون $x=2$ مخرج کسر سمت راست معادله را صفر می‌کند، بنابراین جواب معادله نیست. یعنی $x \neq 2$ ، پس $\sqrt{2-x} \neq 0$. در نتیجه می‌توانیم دو طرف معادله داده شده را بر $\sqrt{2-x}$ تقسیم کنیم. به این ترتیب، به دست می‌آید

$$\frac{-2}{2+x} = \frac{1}{5} \Rightarrow 2+x=-1 \Rightarrow x=-12$$

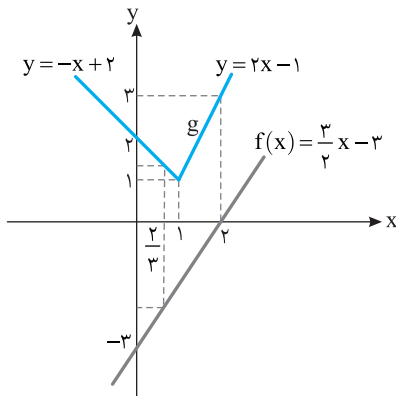
بنابراین معادله مورد نظر جواب مثبت ندارد.

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم: **۱ ۲۹۶۷**

$$(9, -2) \Rightarrow (-2, 9): 9 = -3(-2)^2 + 2(-2) - 11$$

بنابراین گزینه (۱) جواب است. دیگر لازم نیست گزینه‌های دیگر را بررسی کنیم.

ابتدا ضابطه تابع‌های f و g را از روی شکل پیدا می‌کنیم: **۲ ۲۹۶۸**



برای پیدا کردن $f^{-1}(-2)$ فرض می‌کنیم $a=f^{-1}(-2)$. در این صورت

$$f(a)=-2 \Rightarrow \frac{3}{2}a-3=-2 \Rightarrow a=\frac{2}{3} \Rightarrow f^{-1}(-2)=\frac{2}{3} \text{ پس } f(a)=-2$$

$$(g \circ f^{-1})(-2) = g(f^{-1}(-2)) = g\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3} \text{ در نتیجه}$$

$$(g \circ g)(0) = g(g(0)) = g(2) = 3 \text{ همچنین } g(0) = 2 \text{ پس}$$

$$(g \circ f^{-1})(-2) \times (g \circ g)(0) = \frac{4}{3} \times 3 = 4$$

دامنه تابع g مجموعه جواب‌های نامعادله روبه‌رو است: **۴ ۲۹۶۹**

به جدول تعیین علامت زیر توجه کنید:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
x^2		+	+	+
$f(x)$		+	+	-
$x^2 f(x)$		+	+	-

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله $x^2 f(x) \geq 0$ بازه $(-\infty, 3]$ است که عددهای صحیح نامنفی در آن $0, 1, 2, 3$ هستند و تعداد آن‌ها چهارتا است.

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر بازه $(\frac{1}{3}, 3)$ است. اکنون توجه

$$\frac{1}{3} < x < 3 \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{x}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 0 \text{ یا } 1$$

کنید که

بنابراین مجموعه مقادیر $\left[\frac{x}{2}\right]$ دو عضو دارد.

ابتدا ضابطه تابع را به صورت زیر ساده می‌کنیم: **۳ ۲۹۶۳**

$$f(x) = (ax+2)(b-x) - 7x^2 = abx - ax^2 + 2b - 2x - 7x^2$$

$$= -(a+7)x^2 + (ab-2)x + 2b$$

چون تابع f ثابت است، پس ضریب‌های جمله‌های شامل x باید صفر باشند:

$$-(a+7) = 0 \Rightarrow a = -7$$

$$ab-2 = 0 \Rightarrow -7b-2 = 0 \Rightarrow b = -\frac{2}{7}$$

پس ضابطه تابع f به صورت $f(x) = 2b = -\frac{4}{7}$ است و برد آن مجموعه $\{-\frac{4}{7}\}$ است.

تبدیل‌های گفته شده را به ترتیب روی نمودار تابع f انجام می‌دهیم: **۴ ۲۹۶۴**

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} y = f(x-1) \xrightarrow{\text{واحد به راست}} y = f(x)$$

$$y = -f(x-1) \xrightarrow{\text{واحد به پایین}} y = -f(x-1) - 2$$

اگر تابع نهایی را g بنامیم، آن‌گاه

$$g(x) = -f(x-1) - 2 = -\frac{1}{x-1} - 2 = \frac{-1-2x+2}{x-1} = \frac{1-2x}{x-1}$$

اکنون توجه کنید طول‌های نقطه‌های برخورد نمودارهای تابع‌های f و g جواب‌های معادله زیر هستند:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1-2x}{x-1} \Rightarrow x-1 = x-2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

چون نقطه‌های برخورد روی نمودار تابع f هستند، عرض آن‌ها برابر $\sqrt{2}$ و $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$

است. بنابراین نقطه‌های برخورد $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$ و $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$ هستند که فاصله هر دو آن‌ها از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\pm \sqrt{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 2} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

توجه کنید که مجموع جواب‌ها از یک طرف برابر $a+b$

و از طرف دیگر برابر a^2+b^2-12 است. همین‌طور، حاصل ضرب جواب‌ها از یک طرف برابر ab و از طرف دیگر برابر a^2+b^2-12 است. بنابراین

$$\begin{cases} a+b = a^2+b^2-12 \\ ab = a+b-1 \end{cases}$$

چون $S = a+b$ را می‌خواهیم، پس از اتحاد $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ به دست می‌آوریم:

$$a+b = (a+b)^2 - 2ab - 12 \Rightarrow S = S^2 - 2(S-1) - 12$$

$$S = S^2 - 2S + 2 - 12 \Rightarrow S^2 - 3S - 10 = 0$$

$$(S+2)(S-5) = 0 \Rightarrow S = -2, S = 5$$

چون a و b عددهایی طبیعی‌اند، پس مجموع‌شان مثبت است، یعنی $S = -2$ قابل قبول نیست و در نتیجه $S = 5$.

چون حاصل ضرب جواب‌ها از یک طرف برابر ab و از طرف دیگر برابر

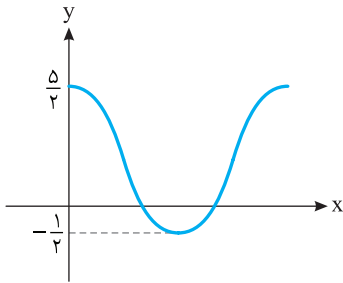
$a+b-1$ است، پس

$$ab = a+b-1 \Rightarrow a+b-ab-1 = 0 \Rightarrow a(1-b) + b-1 = 0$$

$$(1-b)(a-1) = 0 \Rightarrow a=1 \text{ یا } b=1$$

چون گزینه‌ها همگی عددهایی منفی‌اند، پس $a = -\frac{3}{2}$ و در نتیجه $ac = -\frac{3}{2}$.

توجه کنید که اگر $a = \frac{3}{2}$ ، ضابطه تابع به صورت $y = \frac{3}{2} \cos bx + 1$ می‌شود که نمودار آن به صورت زیر است (که شبیه نمودار داده شده نیست):



راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

اکنون توجه کنید که چون $x + \frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{3} - x$ متمم یکدیگرند، پس

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

در نتیجه معادله داده شده به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \pm 1 \Rightarrow \frac{\pi}{3} - x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{3} - k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

k	-2	-1	0	1
$\frac{\pi}{3} - k\pi$	$2\pi + \frac{\pi}{3}$	$\pi + \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$

بنابراین جواب‌ها در بازه $[0, 2\pi]$ برابر $\frac{\pi}{3}$ و $\pi + \frac{\pi}{3}$ هستند، که تعداد آن‌ها دوتا است.

راه‌حل دوم چون $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ و $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ عددهایی در بازه $[-1, 1]$ هستند و حاصل ضربشان برابر ۱ شده است، یا هر دو ۱ هستند یا هر دو -۱ هستند. بنابراین

$$\begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4\pi}{3} \\ x = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

پس معادله مورد نظر در بازه $[0, 2\pi]$ دو جواب دارد.

$$\log_3 3 = a \Rightarrow 3^a = 3$$

توجه کنید که

$$\log_a b = \frac{1}{a} \Rightarrow b = a^{\frac{1}{a}} \Rightarrow b^a = a \Rightarrow (a^{\frac{1}{a}})^a = a \Rightarrow a = a$$

$$(a^{\frac{1}{a}})^2 = b \Rightarrow (a^{\frac{2}{a}})^2 = b \Rightarrow (a^{\frac{2}{a}})^2 = b \Rightarrow b = a^{\frac{4}{a}}$$

بنابراین

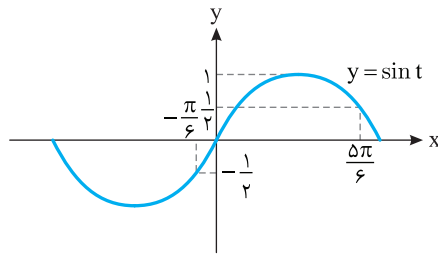
$$\log(3b - 8) = \log(3 \times 3^{\frac{4}{3}} - 8) = \log 10 = 1$$

$$-\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12} \Rightarrow -\frac{\pi}{6} < 2x < \frac{5\pi}{6}$$

ابتدا توجه کنید که

پس اگر $t = 2x$ ، آن‌گاه $-\frac{\pi}{6} < t < \frac{5\pi}{6}$ و در نتیجه از روی نمودار زیر معلوم می‌شود

$$\text{که } -\frac{1}{2} < \sin t \leq 1.$$



بنابراین باید نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$-\frac{1}{2} < \frac{m-1}{4} \leq 1 \Rightarrow -2 < m-1 \leq 4 \Rightarrow -1 < m \leq 5 \Rightarrow m \in (-1, 5]$$

راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که از تساوی داده شده به دست می‌آید:

$$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید:

$$1 + 2 \sin x \cos x = \frac{9}{5} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{2}{5}$$

چون مجموع و حاصل ضرب $\sin x$ و $\cos x$ را داریم، پس $\sin x$ و $\cos x$ جواب‌های معادله درجه دوم زیر هستند:

$$t^2 - \frac{3}{\sqrt{5}}t + \frac{2}{5} = 0 \Rightarrow 5t^2 - 3\sqrt{5}t + 2 = 0$$

$$t = \frac{3\sqrt{5} \pm \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 4(5)(2)}}{2 \times 5} = \frac{3\sqrt{5} \pm \sqrt{5}}{10} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ t = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

در نتیجه $\sin x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ، $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = 2$

یا $\cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ، $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{2}$

راه‌حل دوم توجه کنید که بنابر فرض $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید:

$$1 + \sin 2x = \frac{9}{5} \Rightarrow \sin 2x = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin 2x = \frac{4}{5}$$

اکنون توجه کنید

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \Rightarrow 2 + 2 \tan^2 x = 5 \tan x$$

$$2 \tan^2 x - 5 \tan x + 2 = 0 \Rightarrow \tan x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(2)}}{2 \times 2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

پس $\tan x = \frac{1}{2}$ یا $\tan x = 2$.

راه‌حل دوم از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که

$$|a| + c = \frac{5}{2} \Rightarrow |a| + c = \frac{5}{2}, \quad \text{مینیمم تابع} = -\frac{1}{2} \Rightarrow -|a| + c = -\frac{1}{2}$$

اگر این تساوی‌ها را جمع کنیم، به دست می‌آید $2c = 2$ ، پس $c = 1$. از طرف دیگر،

$$|a| + c = \frac{5}{2} \Rightarrow |a| + 1 = \frac{5}{2} \Rightarrow |a| = \frac{3}{2}$$

۲۹۸۰ راه حل اول توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)-1}{2(x-1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x\sqrt{x}-1}{2x^2+x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x\sqrt{x}-2x^2-x+1}{2(x-1)(2x^2+x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x\sqrt{x}(1-\sqrt{x})+(1-x)}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(2x^2+x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x\sqrt{x}(1-\sqrt{x})+(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(2x^2+x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(2x\sqrt{x}+1+\sqrt{x})}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(2x^2+x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(2x\sqrt{x}+1+\sqrt{x})}{2(\sqrt{x}+1)(2x^2+x-1)} \\ &= \frac{-(2+1+1)}{2(1+1)(2+1-1)} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

راه حل دوم می توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)-1}{2(x-1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x\sqrt{x}-1}{2x^2+x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x\sqrt{x}-2x^2-x+1}{2(x-1)(2x^2+x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x\sqrt{x}-2x^2-x+1}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2(2x^2+x-1)} \end{aligned}$$

اکنون توجه کنید بنابر قاعده هوییتال.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x\sqrt{x}-2x^2-x+1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x}+2x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x - 1}{1} \\ &= 2+2 \times \frac{1}{2} - 2 - 1 = -2 \end{aligned}$$

همچنین $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2(2x^2+x-1)} = \frac{1}{2(2+1-1)} = \frac{1}{4}$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با $(-2) \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$

۲۹۸۱ راه حل اول ابتدا توجه کنید که شیب خط $y=2x+b$ برابر با ۲

است. از طرف دیگر،

$$f(x) = \frac{x+a}{ax+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \times (ax+1) - a(x+a)}{(ax+1)^2} = \frac{1-a^2}{(ax+1)^2}$$

بنابراین $f'(1) = \frac{1-a^2}{(a+1)^2} = \frac{(1-a)(1+a)}{(a+1)^2} = \frac{1-a}{1+a}$

چون شیب خط مماس با $f'(1)$ برابر است، پس

$$2 = \frac{1-a}{1+a} \Rightarrow 2+2a = 1-a \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{x-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}x+1} \Rightarrow f(1) = \frac{1-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}+1} = 1$$

چون نقطه $(1, f(1)) = (1, 1)$ روی خط $y=2x+b$ قرار دارد، پس

$$1 = 2 \times 1 + b \Rightarrow b = -1$$

در نتیجه $a-b = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

راه حل دوم معادله حاصل از برخورد خط و تابع را تشکیل می دهیم:

$$2x+b = \frac{x+a}{ax+1} \Rightarrow 2ax^2 + 2x + abx + b = x+a$$

$$2ax^2 + (1+ab)x + b - a = 0$$

۲۹۷۵ چون نمودار تابع f از نقطه $(\frac{1}{2}, 1)$ می گذرد، پس

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow \sqrt[2]{2^{\frac{a+b}{2}}} = 1 \Rightarrow 2^{\frac{a+b}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 0$$

از طرف دیگر،

$$f^{-1}(9) = 5 \Rightarrow f(5) = 9 \Rightarrow \sqrt[2]{5^{2a+b}} = 9 \Rightarrow 5^{2a+b} = 81 = 3^4 \Rightarrow 2a+b = 4$$

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 0 \\ 2a+b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

بنابراین

در نتیجه $a-b = 2+1 = 3$

۲۹۷۶ توجه کنید که $\sigma = 2$ ، پس $\sigma^2 = 2^2 = 4$ ، از طرف دیگر،

$$\sigma^2 = \frac{a^2 + 0^2 + (-1)^2 + b^2 + (-1)^2 + 3^2}{6} = \frac{a^2 + b^2 + 11}{6} = 4$$

پس $a^2 + b^2 + 11 = 6 \times 4 = 24 \Rightarrow a^2 + b^2 = 13$ (۱)

چون مجموع اختلاف های داده ها از میانگین برابر صفر است، پس

$$a+0+(-1)+b+(-1)+3=0 \Rightarrow a+b=-1 \Rightarrow a=-1-b$$

در نتیجه از تساوی (۱) به دست می آید

$$(-1-b)^2 + b^2 = 13 \Rightarrow 1+b^2+2b+b^2 = 13 \Rightarrow 2b^2+2b-12=0$$

$$b^2+b-6=0 \Rightarrow b = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(1)(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

در نتیجه $b = -3$ یا $b = 2$. اگر $b = 2$ ، آن گاه $a = -1-b = -3$ که چون طبق

فرض $a > 0$ ، پس به تناقض رسیده ایم. بنابراین $b = -3$.

۲۹۷۷ فرض می کنیم داده ها به صورت مرتب شده باشند:

$$\underbrace{X_1, X_2, \dots, X_k}_{\text{داده های کوچک تر از میانه}} ; \underbrace{X_{k+1}, \dots, X_{2k}}_{\text{داده های بزرگ تر از میانه}}$$

فرض کنید \bar{X}_1 میانگین داده های کوچک تر از میانه و \bar{X}_2 میانگین داده های بزرگ تر از

میانه باشد، یعنی $\bar{X}_1 = \frac{X_1 + \dots + X_k}{k}$ ، $\bar{X}_2 = \frac{X_{k+1} + \dots + X_{2k}}{k}$

اگر دو طرف این تساوی ها را در k ضرب کنیم، به دست می آید

$$k\bar{X}_1 = X_1 + \dots + X_k, \quad k\bar{X}_2 = X_{k+1} + \dots + X_{2k}$$

از طرف دیگر، بنابر فرض $-\bar{X}_1 = \bar{X}_2 - 6$ ، پس $\bar{X}_1 + \bar{X}_2 = 6$. اکنون توجه کنید که

میانگین کل داده ها برابر است با

$$\frac{(X_1 + \dots + X_k) + (X_{k+1} + \dots + X_{2k})}{2k} = \frac{k\bar{X}_1 + k\bar{X}_2}{2k} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

۲۹۷۸ توجه کنید که اگر $x \rightarrow (-1)^+$ ، آن گاه $[x] = -1$ و

$$x > -1 \Rightarrow -x < 1 \Rightarrow [-x] = 0$$

همچنین $x > -1 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow |x+1| = x+1$

در نتیجه $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{|x+1| + [x]}{x - [-x]} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x+1+(-1)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x}{x} = 1$

۲۹۷۹ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x+2} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2+x+1}}{x+2} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax}}{x} = 1$$

$$\sqrt{a} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

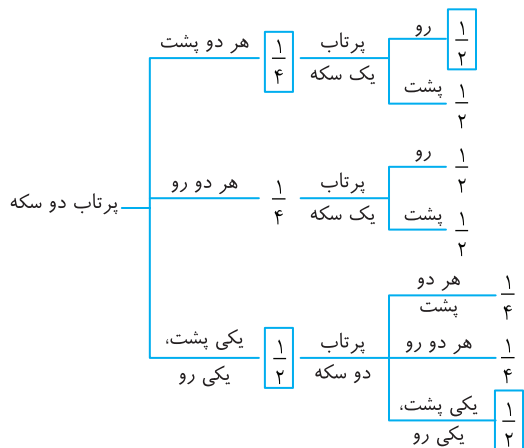
در نتیجه $f(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x^2+x+1}$ ، از طرف دیگر، اگر $x \rightarrow (-1)^-$ ، آن گاه

$$x < -1 \Rightarrow \frac{1}{x} > -1 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = -1$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{[1/x]f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(-1)\sqrt{\frac{1}{4}x^2+x+1}}{x} = -\sqrt{\frac{1}{4}-1+1} = -\frac{1}{2}$

در نتیجه طبق اصل ضرب پاسخ مسئله برابر است با $4! \times 2! = 48$.

۲۹۸۵ (۴) نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود احتمال اینکه دو سکه پشت بیایند برابر است با

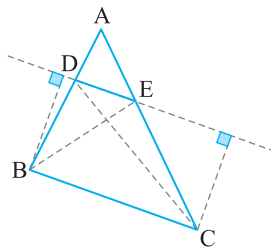
$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

۲۹۸۶ (۳) ابتدا معادله خط BC را می‌نویسیم. چون این خط از نقطه‌های

$B(3, 3)$ و $C(7, 11)$ می‌گذرد، معادله آن به صورت زیر است:

$$y - 3 = \frac{11 - 3}{7 - 3}(x - 3) \Rightarrow y - 3 = 2(x - 3) \Rightarrow y - 3 = 2x - 6 \Rightarrow 2x - y - 3 = 0$$

فاصله نقطه $A(1, 9)$ از این خط برابر است با $AH = \frac{|2 \times 1 - 9 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$



۲۹۸۷ (۴) ابتدا توجه کنید که بنا بر

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$$

اندازه‌های داده شده، در نتیجه بنا بر عکس قضیه تالس $DE \parallel BC$.

بنابراین ارتفاع وارد از رأس C در مثلث CDE با ارتفاع وارد از رأس B در مثلث BDE برابر است. چون

فاصله DE در این دو مثلث هم مشترک است. پس مساحت این دو مثلث برابر است. یعنی نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر ۱ است.

۲۹۸۸ (۲) ابتدا شعاع و مرکز دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 \Rightarrow \text{مرکز: } O_1\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (2, -1)$$

$$r_1 = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + 2^2 - 4 \times 0} = \sqrt{5}$$

$$x^2 + y^2 - 2y - 2 = 0 \Rightarrow \text{مرکز: } O_2\left(-\frac{0}{2}, -\frac{-2}{2}\right) = (0, 1)$$

$$r_2 = \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + (-2)^2 - 4 \times (-2)} = \sqrt{3}$$

اکنون توجه کنید که $O_1O_2 = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{2} = 2 \times 1/4 = 2/8$

از طرف دیگر،

$$r_1 + r_2 = \sqrt{5} + \sqrt{3} = 2/2 + 1/7 = 3/9$$

$$|r_1 - r_2| = |\sqrt{5} - \sqrt{3}| = 2/2 - 1/7 = 0/5$$

چون $|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2$ ، پس دایره‌ها متقاطع‌اند.

چون $x=1$ ریشه مضاعف این معادله است، پس سمت چپ آن به صورت $2a(x-1)^2$

است. بنابراین $2ax^2 + (1+ab)x + b - a = 2a(x^2 - 2x + 1) = 2ax^2 - 4ax + 2a$

$$\begin{cases} 1+ab = -4a \\ b-a = 2a \end{cases} \quad \text{در نتیجه}$$

از معادله دوم به دست می‌آید $b = 3a$ و در نتیجه معادله اول می‌شود

$$1 + a(3a) = -4a \Rightarrow 3a^2 + 4a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1, a = -\frac{1}{3}$$

اگر $a = -1$ ، آن‌گاه $f(x) = \frac{x-1}{-x+1} = -1$ ، یعنی f تابعی ثابت می‌شود که خط

$y = 2x + b$ بر آن مماس نیست. بنابراین $a = -\frac{1}{3}$ و در نتیجه $b = 2a = -\frac{2}{3}$.

$$\text{بنابراین } a - b = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

۲۹۸۲ (۱) توجه کنید که

$$f(x) = x^3 + ax^2 - 2bx - 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax - 2b$$

$$f'(\infty) = -2b \Rightarrow 0 = -2b \Rightarrow b = 0$$

بنابراین

$$\text{پس } f'(x) = 3x^2 + 2ax$$

$$f'(-2) = 3 \times (-2)^2 + 2a(-2) = 12 - 4a = 0 \Rightarrow a = 3$$

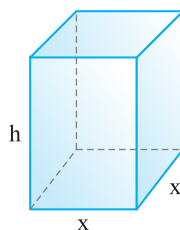
بنابراین $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$. اکنون توجه کنید که

$$f(0) = -4, f(-2) = -8 + 12 - 4 = 0$$

در نتیجه نقطه‌های اکسترمم نسبی تابع $(-2, 0)$ و $(0, -4)$ هستند، که فاصله آن‌ها

$$\sqrt{(-2-0)^2 + (0-(-4))^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

برابر است با



۲۹۸۳ (۲) توجه کنید که مساحت کل این قوطی

حلیبی در باز برابر است با مجموع مساحت قاعده و مساحت چهار وجه آن، که اگر طول ضلع قاعده برابر x

و ارتفاع قوطی برابر h باشد، می‌شود $S = x^2 + 4xh$

از طرف دیگر، حجم این قوطی برابر است با مساحت قاعده آن ضرب در ارتفاع آن، که می‌شود x^2h . بنا بر

$$\text{فرض } x^2h = 4 \text{، پس } h = \frac{4}{x^2} \text{ و در نتیجه}$$

$$S = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \times \frac{4}{x^2} = x^2 + \frac{16}{x}$$

$$S' = 2x - \frac{16}{x^2}$$

باید مینیمم مطلق S را حساب کنیم. توجه کنید که

$$S' = 0 \Rightarrow 2x - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{16}{x^2} \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین مینیمم مطلق S به ازای $x = 2$ به دست می‌آید و برابر است با

$$S = 2^2 + \frac{16}{2} = 12$$

۲۹۸۴ (۳) ابتدا کتاب‌های ریاضی را در قفسه می‌چینیم. این کار به ۴! طریق

ممکن است.



اکنون توجه کنید که برای اینکه موضوع دو کتاب مجاور هر کتاب (به جز کتاب‌های اول و آخر) متفاوت باشد، کتاب‌های آمار باید بین کتاب‌های ریاضی (۲) و ریاضی (۳) قرار

بگیرند (شکل زیر را ببینید). این کار به ۲! طریق ممکن است.

