پاسخ کنکور سراسری ۱۴۰۱

۲۵۰۱ (۲) توجه کنید که

$$\sqrt[4]{(4+\sqrt7)^{-1}}\times\sqrt{1+\sqrt7}=\sqrt[4]{\frac{1}{4+\sqrt7}}\times\sqrt[4]{(1+\sqrt7)^2}$$
$$=\sqrt[4]{\frac{1}{4+\sqrt7}\times(1+\sqrt7)^2}=\sqrt[4]{\frac{1+7+2\sqrt7}{4+\sqrt7}}=\sqrt[4]{\frac{8+2\sqrt7}{4+\sqrt7}}$$
$$=\sqrt[4]{\frac{2(4+\sqrt7)}{4+\sqrt7}}=\sqrt[4]{2}$$

۲۵۰۲ (۴) **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم $a_n=An+B$، در این صورت

$$\begin{cases}a_5=8\\a_{10}=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5A+B=8\\10A+B=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\frac35\\B=11\end{cases}$$

بنابراین $a_n=-\frac35 n+11\Rightarrow a_{16}=-\frac35\times16+11=1/4$

راه‌حل دوم فرض کنید جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت d باشد. در این صورت

$$\begin{cases}a_5=8\\a_{10}=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1+4d=8\\a_1+9d=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=-\frac35\\a_1=\frac{52}{5}\end{cases}$$

بنابراین $a_{16}=a_1+15d=\frac{52}{5}+15(-\frac35)=\frac75=1/4$

۲۵۰۳ (۱) باید $a>0$، $\Delta>0$، $\frac ca\ge0$ و $-\frac ba>0$.

$a>0,\quad \frac ca\ge0\Rightarrow\frac0a\ge0$ ✓

$\Delta>0\Rightarrow(3+2a)^2>0\Rightarrow a\neq-\frac32$

$-\frac ba>0\Rightarrow-\frac{3+2a}{a}>0\xrightarrow{a>0}3+2a<0\Rightarrow a<-\frac32$

چون اشتراک $a>0$ و $a<-\frac32$ تهی است، پس به‌ازای هیچ مقداری از a شرایط مسئله برقرار نیست.

۲۵۰۴ (۴) ابتدا نامعادلهٔ $\frac{4-2x}{3x+1}\ge0$ را به کمک تعیین علامت حل می‌کنیم:

x	$-\infty$		$-\frac13$		2		$+\infty$
$\frac{4-2x}{3x+1}$		$-$		$+$	0	$-$	

بنابراین $-\frac13<x\le2$. اکنون توجه کنید که $-1<3x\le6$. پس $[3x]$ می‌تواند عددهای ۱−، ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ باشد که تعداد آن‌ها هشت تاست.

۲۵۰۵ (۳) چون f و g تابع‌هایی ثابت‌اند، پس

$f(x)=b-3ax\Rightarrow-3a=0\Rightarrow a=0\Rightarrow f(x)=b$

$g(x)=c-(3b-3)x\Rightarrow-(3b-3)=0\Rightarrow b=1\Rightarrow g(x)=c$

از طرف دیگر،

$(f+g)(x)=5\Rightarrow f(x)+g(x)=5\Rightarrow b+c=5\Rightarrow1+c=5\Rightarrow c=4$

بنابراین $bc=4$.

۲۵۰۶ (۴) توجه کنید که

$g(x)=f(x+2)=4(x+2)-(x+2)^2=-x^2+4$

بنابراین $f(x)=g(x)\Rightarrow4x-x^2=-x^2+4\Rightarrow4x=4\Rightarrow x=1$

در نتیجه عرض نقطهٔ برخورد برابر است با $f(1)=4\times1-1^2=3$. پس نقطهٔ برخورد نمودارهای دو تابع $(1,3)$ است که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$$

۲۵۰۷ (۳) توجه کنید که $x_1+x_2=\frac a3,\quad x_1x_2=\frac43,\quad x_1=3x_2$

بنابراین $x_1x_2=\frac43\Rightarrow(3x_2)x_2=\frac43\Rightarrow x_2^2=\frac49\Rightarrow x_2=\pm\frac23$

اگر $x_2=\frac23$، آن‌گاه $x_1=3x_2=3(\frac23)=2\Rightarrow x_1+x_2=\frac83\Rightarrow\frac83=\frac a3\Rightarrow a=8$

اگر $x_2=-\frac23$، آن‌گاه

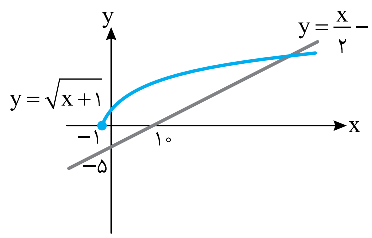
$$x_1=3x_2=3(-\frac23)=-2\Rightarrow x_1+x_2=-\frac83\Rightarrow-\frac83=\frac a3\Rightarrow a=-8$$

بنابراین اختلاف دو مقدار ممکن a برابر ۱۶ است.

۲۵۰۸ (۲) توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+3}-\frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}}=\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$$
$$\frac{\sqrt{x+1}(3-\sqrt{x-1})-\sqrt{x+1}(\sqrt{x-1}+3)}{(\sqrt{x-1}+3)(3-\sqrt{x-1})}=\frac{(\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x-1}}$$
$$\frac{3\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-1}-3\sqrt{x+1}}{9-(x-1)}=\sqrt{x-1}$$
$$\frac{-2\sqrt{x^2-1}}{10-x}=\sqrt{x-1}\Rightarrow-2\sqrt{x-1}\times\sqrt{x+1}=(10-x)\sqrt{x-1}$$
$$-2\sqrt{x+1}=10-x\ (\text{توجه: }\sqrt{x-1}\neq0)\Rightarrow\sqrt{x+1}=\frac x2-5$$

اکنون برای اینکه بفهمیم این معادله چند جواب مثبت دارد، نمودارهای تابع‌های دو طرف معادله را رسم می‌کنیم:



از روی این شکل معلوم می‌شود که معادلهٔ مورد نظر یک جواب بزرگ‌تر از ۱۰ دارد، که چون هیچ‌کدام از مخرج‌ها را صفر نمی‌کند، پس این جواب قابل قبول است.

۲۵۰۹ (۲) گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $(-1,-2)\Rightarrow(-2,-1):-1\neq(-2)^3-(-2)+1$

گزینهٔ (۲): $(\frac58,\frac12)\Rightarrow(\frac12,\frac58):\frac58=(\frac12)^3-\frac12+1$

چون این تساوی درست است، پس جواب گزینهٔ (۲) است. لازم نیست بقیهٔ گزینه‌ها را بررسی کنیم.

۲۵۱۰ (۴) ابتدا توجه کنید که $(gof)(x)=g(f(x))=g(2x)$. بنابراین

$$g(2x)=5x^2+11\xrightarrow{x\to\frac x2}g(x)=5(\frac x2)^2+11$$
$$g(x-7)=5(\frac{x-7}{2})^2+11$$

بنابراین کمترین مقدار تابع $y=g(x-7)$ برابر ۱۱ است.

۲۵۱۱ (۱) باید $-9+k^2<0\Rightarrow k^2<9\Rightarrow-3<k<3$

بنابراین k یکی از عددهای صحیح ۲−، ۱−، ۰، ۱ و ۲ است، که مجموع آن‌ها برابر صفر است.

۲۵۱۲ (۱) توجه کنید که

$$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{4}<-x<\frac{\pi}{4} \Rightarrow 0<\frac{\pi}{4}-x<\frac{\pi}{2}$$

بنابراین

$$\tan(\frac{\pi}{4}-x)>0 \Rightarrow \frac{1-m}{2+m}>0$$

جدول تعیین علامت این نامعادله به صورت زیر است:

m	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$\frac{1-m}{2+m}$	$-$	$+$	0	$-$

بنابراین مجموعهٔ مقادیر m بازهٔ $(-2,1)$ است.

۲۵۱۳ (۳) توجه کنید که

$$2\sin^2 x+\cos^2 x=\frac{4}{3} \Rightarrow 2(1-\cos^2 x)+\cos^2 x=\frac{4}{3}$$

$$2-\cos^2 x=\frac{4}{3} \Rightarrow \cos^2 x=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$

بنابراین

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2} \Rightarrow \tan^2 x=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

۲۵۱۴ (۳) از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که ماکزیمم تابع برابر ۵ و مینیمم تابع برابر ۱ است. بنابراین

$$c=\frac{\text{ماکزیمم}+\text{مینیمم}}{2}=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3$$

۲۵۱۵ (۴) توجه کنید که

$$8\cos x-\tan^2 x=1 \Rightarrow 8\cos x=1+\tan^2 x \Rightarrow 8\cos x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

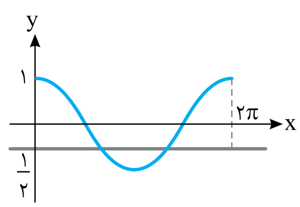
$$8\cos^3 x=1 \Rightarrow \cos^3 x=\frac{1}{8} \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

اکنون برای اینکه تعداد جواب‌ها در بازهٔ $[0,2\pi]$ را مشخص کنیم، می‌توانیم از جدول زیر استفاده کنیم:

k	-1	صفر	1
$2k\pi+\frac{\pi}{3}$	$-2\pi+\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$2\pi+\frac{\pi}{3}$
$2k\pi-\frac{\pi}{3}$	$-2\pi-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$2\pi-\frac{\pi}{3}$

توجه کنید که فقط جواب‌های $\frac{\pi}{3}$ و $2\pi-\frac{\pi}{3}$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ هستند و بقیهٔ جواب‌ها خارج از این بازه هستند. بنابراین معادلهٔ مثلثاتی مورد نظر در بازهٔ $[0,2\pi]$ دو جواب دارد. توجه کنید که چون تعداد جواب‌های معادلهٔ مورد نظر را می‌خواهیم، می‌توانستیم از نمودار هم استفاده کنیم. از روی نمودار زیر معلوم می‌شود که تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی مورد نظر دوتاست.



۲۵۱۶ (۱) توجه کنید که

$$\log_8 18=m \Rightarrow \log_{2^3} 18=\frac{1}{3}\log_2 18=m \Rightarrow \log_2 18=3m$$

$$\log_2(2\times 9)=3m \Rightarrow \log_2 2+\log_2 3^2=3m \Rightarrow 1+2\log_2 3=3m$$

$$\log_2 3=\frac{3m-1}{2}$$

از طرف دیگر،

$$\log_4 12=\log_4(3\times 4)=\log_4 3+\log_4 4=\log_{2^2} 3+1$$

$$=\frac{1}{2}\log_2 3+1=\frac{1}{2}(\frac{3m-1}{2})+1=\frac{3m-1}{4}+1=\frac{3}{4}(m+1)$$

۲۵۱۷ (۳) چون نمودار تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس

$$f(0)=0 \Rightarrow a+b(\frac{1}{2})^0=0 \Rightarrow a+b=0 \quad (1)$$

همچنین

$$f^{-1}(-1)=-1 \Rightarrow f(-1)=-1 \Rightarrow a+b(\frac{1}{2})^{-1}=-1 \Rightarrow a+2b=-1 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a+2b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

بنابراین $a-b=2$.

۲۵۱۸ (۴) اگر $x_1, \dots, x_9$ داده‌ها باشند و $\bar{x}$ میانگین آن‌ها باشد، طبق فرض،

$$(x_1-\bar{x})^2=(x_2-\bar{x})^2=\dots=(x_8-\bar{x})^2=(+1 \text{ یا } -1)^2=1$$

و $(x_9-\bar{x})^2=0$. بنابراین

$$\sigma^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+\dots+(x_8-\bar{x})^2+(x_9-\bar{x})^2}{9}=\frac{8\times 1+0}{9}=\frac{8}{9}$$

در نتیجه $\sigma=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

۲۵۱۹ (۱) میانگین و میانهٔ داده‌ها برابر است. فرض کنید این مقدار برابر a باشد. در این‌صورت میانگین و میانهٔ داده‌های جدید برابر $a+2$ است، که اختلاف آن‌ها صفر است.

۲۵۲۰ (۲) توجه کنید که اگر $x\to 2^+$ ، آن‌گاه $x^3\to 8^+$ ، پس $[x^3]=8$.

بنابراین

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x^3-[x^3]}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x^3-8}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2x}{3x^2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2}{3x}=\frac{1}{3}$$

۲۵۲۱ (۳) توجه کنید که

$$\lim_{x\to 1^+}(4-[x])g(x)=\lim_{x\to 1^+}(4-1)g(x)=\lim_{x\to 1^+}3g(x)=6$$

بنابراین $\lim_{x\to 1^+} g(x)=\frac{6}{3}=2$ ، یعنی $\lim_{x\to 1^+} g(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{|x-1|}=2$

چون $\lim_{x\to 1^+}|x-1|=0$ ، پس $\lim_{x\to 1^+}\sqrt{ax^2+bx+c}=0$ ، یعنی $x=1$ ریشهٔ عبارت زیر رادیکال است. از طرف دیگر، $x=1$ باید ریشهٔ مضاعف عبارت زیر رادیکال باشد چون در غیر این صورت درجهٔ $x-1$ در صورت از درجهٔ $x-1$ در مخرج کمتر و مقدار حد بی‌نهایت می‌شود. بنابراین باید صورت $g(x)$ به‌صورت $\sqrt{a(x-1)^2}$ باشد. پس

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{a(x-1)^2}}{|x-1|}=2 \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{a}|x-1|}{|x-1|}=2 \Rightarrow \sqrt{a}=2 \Rightarrow a=4$$

اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to +\infty} g(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{4(x-1)^2}}{|x-1|}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2|x-1|}{|x-1|}=2$$

۲۵۲۲ (۱) توجه کنید که

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}}\right)^3}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}}\right)^3$$

$$=\left(\sqrt{\frac{0+1}{0+9}}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

۲۵۲۳ (۴) **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که شیب خط $4y-3x=n$ برابر با $\frac{3}{4}$ است. از طرف دیگر،

$$f(x)=\frac{x^2+mx+1}{x+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x+m)(x+3)-(1)(x^2+mx+1)}{(x+3)^2}$$

$$=\frac{x^2+6x+3m-1}{(x+3)^2}$$

چون شیب خط مماس با $f'(1)$ برابر است، پس

$$f'(1)=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{1+6+3m-1}{16}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{2+m}{4}=1\Rightarrow m=2$$

بنابراین
$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x+3}\Rightarrow f(1)=\frac{1+2+1}{1+3}=1$$

چون نقطهٔ $(1,f(1))$، یعنی $(1,1)$ روی خط $4y-3x=n$ نیز قرار دارد، پس

$$4\times1-3\times1=n\Rightarrow n=1$$

بنابراین $m+n=2+1=3$.

راه‌حل دوم معادلهٔ حاصل از برخورد خط مماس و تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{x^2+mx+1}{x+3}=\frac{3x+n}{4}\Rightarrow 4(x^2+mx+1)=(x+3)(3x+n)$$

$$4x^2+4mx+4=3x^2+nx+9x+3n$$

$$x^2+(4m-n-9)x+4-3n=0$$

چون $x=1$ ریشهٔ مضاعف این معادله است، پس سمت چپ آن به‌صورت $(x-1)^2$ است. بنابراین
$$x^2+(4m-n-9)x+4-3n=(x-1)^2=x^2-2x+1$$

در نتیجه
$$\begin{cases}4m-n-9=-2\\4-3n=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\n=1\end{cases}$$

پس $m+n=2+1=3$.

۲۵۲۴ (۲) چون نقطهٔ $(0,4)$ روی نمودار تابع قرار دارد و ماکزیمم نسبی تابع است، پس

$$f(0)=4\Rightarrow c=4\Rightarrow f(x)=x^3+ax^2+bx+4$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$f'(0)=0\Rightarrow b=0\Rightarrow f(x)=x^3+ax^2+4$$

اگر طول نقطهٔ تماس نمودار با محور طول‌ها برابر x_0 باشد، آن‌گاه

$$\begin{cases}f(x_0)=0\\f'(x_0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0^3+ax_0^2+4=0 & (1)\\3x_0^2+2ax_0=0 & (2)\end{cases}$$

از تساوی (۲) به‌دست می‌آید $x_0(3x_0+2a)=0\Rightarrow x_0=0$ یا $x_0=-\frac{2a}{3}$

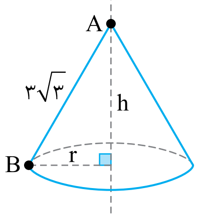
نقطهٔ با طول صفر نقطهٔ ماکزیمم نسبی است. بنابراین طول نقطهٔ مینیمم نسبی برابر $-\frac{2a}{3}$ است. اکنون از تساوی (۱) به‌دست می‌آید

$$\left(-\frac{2a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{2a}{3}\right)^2+4=0$$

$$-\frac{8a^3}{27}+\frac{4a^3}{9}+4=0\Rightarrow\frac{4a^3}{27}=-4\Rightarrow a^3=-27\Rightarrow a=-3$$

بنابراین $x_0=-\frac{2(-3)}{3}=2$.

۲۵۲۵ (۲) اگر شعاع قاعدهٔ مخروط برابر r و ارتفاع آن برابر با h باشد، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،



$$r^2+h^2=AB^2=(3\sqrt{3})^2=27$$

پس $r^2=27-h^2$. از طرف دیگر، حجم مخروط برابر است با

$$V=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi}{3}(27-h^2)h=-\frac{\pi}{3}h^3+9\pi h\Rightarrow V'=-\pi h^2+9\pi$$

$$V'=0\Rightarrow-\pi h^2+9\pi=0\Rightarrow h^2=9\Rightarrow h=-3\ (\text{غ.ق.ق}),\ h=3$$

۲۵۲۶ (۳) شرایط انتخاب کتاب‌ها را می‌توان به‌صورت زیر حالت‌بندی کرد:

حالت ۱: هیچ‌کدام از کتاب‌های ریاضی، فیزیک و زیست را انتخاب نکنیم. در این‌صورت باید هر چهار کتاب را از بین چهار کتاب دیگر انتخاب کنیم. این کار به $\binom{4}{4}=1$ طریق ممکن است.

حالت ۲: کتاب ریاضی را انتخاب کنیم. در این‌صورت باید حتماً کتاب زیست را هم انتخاب کنیم اما کتاب فیزیک را انتخاب نکنیم. بنابراین باید از بین چهار کتاب باقی‌مانده دو تا را انتخاب کنیم. این کار به $\binom{4}{2}=6$ طریق ممکن است.

حالت ۳: کتاب ریاضی را انتخاب نکنیم، اما کتاب زیست را انتخاب کنیم. در این‌صورت باید کتاب فیزیک را انتخاب نکنیم، یعنی باید از بین چهار کتاب دیگر سه تا را انتخاب کنیم. این کار به $\binom{4}{3}=4$ طریق ممکن است.

حالت ۴: کتاب ریاضی را انتخاب نکنیم، اما کتاب فیزیک را انتخاب کنیم. در این‌صورت باید کتاب زیست را انتخاب نکنیم، یعنی باید از بین چهار کتاب دیگر سه تا را انتخاب کنیم. این کار به $\binom{4}{3}=4$ طریق ممکن است.

بنابراین طبق اصل جمع، تعداد انتخاب‌های ممکن برابر است با $1+6+4+4=15$.

۲۵۲۷ (۲) اگر A پیشامد شیوع بیماری و B پیشامد بهبود باشد، آن‌گاه $P(A)=0/08$ و $P(B|A)=0/5$. در این صورت احتمال مورد نظر برابر است با

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=0/08\times0/5=0/04$$

۲۵۲۸ (۱) نقطهٔ B محل برخورد خطوط AB و BC است. پس مختصات آن جواب‌های دستگاه معادله‌های این دو خط هستند:

$$\begin{cases}y+2x=7\\2y-7x=-19\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2y-4x=-14\\2y-7x=-19\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}}-11x=-33$$

$$x=3\Rightarrow y=1$$

پس باید فاصلهٔ نقطهٔ $B(3,1)$ را از خط $4y-3x-17=0$ به‌دست آوریم که برابر است با

$$BH=\frac{|4\times1-3\times3-17|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{22}{5}=4/4$$

۲۵۲۹ (۴) چون $DE\parallel BC$، پس بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{5}{5+7}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{DE}{BC}=\frac{5}{12}$$

بنابراین

$$\frac{S_{BCE}}{S_{BDE}}=\frac{BC}{DE}=\frac{12}{5}=2/4$$

۲۵۳۰ (۲) چون قطر کوچک بیضی برابر ۱۸ است، پس $2b=18$، یعنی $b=9$. همچنین $c=12$. بنابراین $a^2=b^2+c^2=9^2+12^2=225\Rightarrow a=15$

بنابراین خروج از مرکز برابر است با $e=\frac{c}{a}=\frac{12}{15}=0/8$.

۲۵۳۱ (۱) **راه‌حل اول** ابتدا پرانتزها را جداگانه ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt2+\sqrt5}{\sqrt{10}+2}=\frac{\sqrt2+\sqrt5}{\sqrt2\sqrt5+(\sqrt2)^2}=\frac{\sqrt2+\sqrt5}{\sqrt2(\sqrt5+\sqrt2)}=\frac{1}{\sqrt2}$$

$$A=\sqrt{3-\sqrt5}-\sqrt{3+\sqrt5}$$

$$A^2=3-\sqrt5+3+\sqrt5-2\sqrt{3-\sqrt5}\sqrt{3+\sqrt5}=6-2\sqrt{(3-\sqrt5)(3+\sqrt5)}$$

$$=6-2\sqrt{9-5}=6-2\sqrt4=6-2\times2=2$$

توجه کنید که چون $\sqrt{3-\sqrt5}<\sqrt{3+\sqrt5}$، پس A عددی منفی است. در نتیجه $A=-\sqrt2$. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{1}{\sqrt2}\times(-\sqrt2)=-1$.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sqrt2+\sqrt5}{\sqrt{10}+2}=\frac{\sqrt2+\sqrt5}{\sqrt2\sqrt5+(\sqrt2)^2}=\frac{\sqrt2+\sqrt5}{\sqrt2(\sqrt5+\sqrt2)}=\frac{1}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\sqrt2}{2}(\sqrt{3-\sqrt5}-\sqrt{3+\sqrt5})=\frac12(\sqrt2\sqrt{3-\sqrt5}-\sqrt2\sqrt{3+\sqrt5})$$

$$=\frac12(\sqrt{6-2\sqrt5}-\sqrt{6+2\sqrt5})=\frac12(\sqrt{(1-\sqrt5)^2}-\sqrt{(1+\sqrt5)^2})$$

$$=\frac12(|1-\sqrt5|-|1+\sqrt5|)=\frac12(\sqrt5-1-1-\sqrt5)=\frac12(-2)=-1$$

۲۵۳۲ (۴) فرض می‌کنیم $a_n=An^2+Bn+C$. در این صورت بنابر فرض،

$$\begin{cases}A=-\frac{1}{70}a_5=-\frac15\\ a_5=14\\ a_7=17/2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac15\times5^2+5B+C=14\\ -\frac15\times7^2+7B+C=17/2\end{cases}$$

$$\begin{cases}5B+C=19\\ 7B+C=27\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=4\\ C=-1\end{cases}$$

بنابراین

$$a_n=-\frac15n^2+4n-1\Rightarrow\begin{cases}a_{15}=-\frac15\times15^2+4\times15-1=14\\ a_1=-\frac15\times1^2+4\times1-1=\frac{14}{5}\end{cases}$$

در نتیجه $\frac{a_{15}}{a_1}=5$، پس a_{15} پنج برابر a_1 است.

۲۵۳۳ (۲) طول رأس سهمی $f(x)=-ax^2+ax+2$ برابر است با

$$-\frac{a}{2(-a)}=\frac12$$

بنابراین عرض رأس این سهمی برابر است با

$$f(\frac12)=-a(\frac12)^2+a(\frac12)+2=-\frac a4+\frac a2+2=\frac{a+8}{4}$$

طول رأس سهمی $g(x)=2bx^2-bx-1$ برابر است با $-\frac{-b}{2(2b)}=\frac14$

بنابراین عرض رأس این سهمی برابر است با $g(\frac14)=2b(\frac14)^2-b(\frac14)-1=\frac{-b-8}{8}$

اکنون توجه کنید که نقطهٔ $(\frac12,\frac{a+8}{4})$ روی سهمی g است، پس مختصات آن در معادلهٔ سهمی g صدق می‌کنند:

$$\frac{a+8}{4}=2b(\frac12)^2-b(\frac12)-1=\frac b2-\frac b2-1=-1\Rightarrow a+8=-4\Rightarrow a=-12$$

بنابراین $f(x)=12x^2-12x+2$. چون نقطهٔ $(\frac14,\frac{-b-8}{8})$ روی این سهمی است، پس مختصات آن در معادلهٔ این سهمی صدق می‌کنند:

$$\frac{-b-8}{8}=12(\frac14)^2-12(\frac14)+2=\frac34-3+2=-\frac14$$

$$\frac{-b-8}{8}=-\frac14\Rightarrow b=-6$$

بنابراین $b-a=-6-(-12)=6$.

۲۵۳۴ (۲) **راه‌حل اول** ابتدا نامعادله‌های $-2<\frac{1-3x}{x+1}<0$ را با استفاده از جدول تعیین علامت حل می‌کنیم. برای حل کردن نامعادلهٔ $\frac{1-3x}{x+1}<0$ جدول تعیین علامت زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	$-\infty$		-1		$\frac13$		$+\infty$
$\frac{1-3x}{x+1}$		$-$	∥	$+$	0	$-$	

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{1-3x}{x+1}<0$ مجموعهٔ $(-\infty,-1)\cup(\frac13,+\infty)$ است.

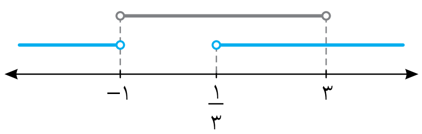
برای حل کردن نامعادلهٔ $-2<\frac{1-3x}{x+1}$ ابتدا آن را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$-2<\frac{1-3x}{x+1}\Rightarrow\frac{1-3x}{x+1}+2>0\Rightarrow\frac{1-3x+2x+2}{x+1}>0\Rightarrow\frac{3-x}{x+1}>0$$

اکنون جدول تعیین علامت زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$\frac{3-x}{x+1}$		$-$	∥	$+$	0	$-$	

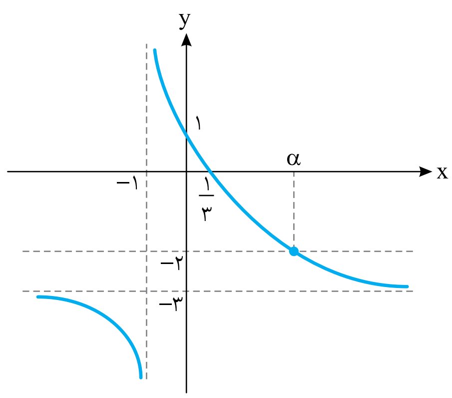
پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{3-x}{x+1}>0$ مجموعهٔ $(-1,3)$ است. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر اشتراک مجموعه‌های جواب‌های دو نامعادله‌ای است که حل کردیم، که با توجه به شکل زیر برابر $(\frac13,3)$ است.



اکنون توجه کنید که $\frac13<x<3\Rightarrow\frac16<\frac x2<\frac32\Rightarrow[\frac x2]=0$ یا ۱

یعنی مجموعهٔ مقادیر $[\frac x2]$ دو عضو دارد.

راه‌حل دوم نمودار تابع $f(x)=\frac{1-3x}{x+1}$ به‌صورت زیر است:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر بازهٔ $(\frac13,\alpha)$ است. برای پیدا کردن α، توجه کنید که α طول نقطهٔ برخورد خط $y=-2$ و نمودار تابع f است. بنابراین α جواب معادلهٔ زیر است:

$$-2=\frac{1-3x}{x+1}\Rightarrow-2x-2=1-3x\Rightarrow x=3$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر بازهٔ $(\frac{۱}{۳},۳)$ است. اکنون توجه کنید که $\frac{۱}{۳}<x<۳\Rightarrow\frac{۱}{۶}<\frac{x}{۲}<\frac{۳}{۲}\Rightarrow[\frac{x}{۲}]=۰$ یا ۱

بنابراین مجموعهٔ مقادیر $[\frac{x}{۲}]$ دو عضو دارد.

۲۵۳۵ (۳) ابتدا ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x)=(ax+۲)(b-x)-۷x^۲=abx-ax^۲+۲b-۲x-۷x^۲$$
$$=-(a+۷)x^۲+(ab-۲)x+۲b$$

چون تابع f ثابت است، پس ضریب‌های جمله‌های شامل x باید صفر باشند:

$$-(a+۷)=۰\Rightarrow a=-۷$$
$$ab-۲=۰\Rightarrow -۷b-۲=۰\Rightarrow b=-\frac{۲}{۷}$$

پس ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x)=۲b=-\frac{۴}{۷}$ است و برد آن مجموعهٔ $\{-\frac{۴}{۷}\}$ است.

۲۵۳۶ (۴) تبدیل‌های گفته شده را به‌ترتیب روی نمودار تابع f انجام می‌دهیم:

$$y=f(x)\xrightarrow{\text{۱ واحد به راست}}y=f(x-۱)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x}}$$
$$y=-f(x-۱)\xrightarrow{\text{۲ واحد به پایین}}y=-f(x-۱)-۲$$

اگر تابع نهایی را g بنامیم، آن‌گاه

$$g(x)=-f(x-۱)-۲=-\frac{۱}{x-۱}-۲=\frac{-۱-۲x+۲}{x-۱}=\frac{۱-۲x}{x-۱}$$

اکنون توجه کنید طول‌های نقطه‌های برخورد نمودارهای تابع‌های f و g جواب‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow\frac{۱}{x}=\frac{۱-۲x}{x-۱}\Rightarrow x-۱=x-۲x^۲\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

چون نقطه‌های برخورد روی نمودار تابع f هستند، عرض آن‌ها برابر $f(\frac{۱}{\sqrt{۲}})=\sqrt{۲}$ و $f(-\frac{۱}{\sqrt{۲}})=-\sqrt{۲}$ است. بنابراین نقطه‌های برخورد $(\frac{۱}{\sqrt{۲}},\sqrt{۲})$ و $(-\frac{۱}{\sqrt{۲}},-\sqrt{۲})$ هستند که فاصلهٔ هر دو آن‌ها از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{(\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}})^۲+(\pm\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۲}+۲}=\sqrt{\frac{۵}{۲}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

۲۵۳۷ (۲) **راه‌حل اول** توجه کنید که مجموع جواب‌ها از یک طرف برابر $a+b$ و از طرف دیگر برابر $a^۲+b^۲-۱۲$ است. همین طور، حاصل‌ضرب جواب‌ها از یک طرف برابر ab و از طرف دیگر برابر $a+b-۱$ است. بنابراین

$$\begin{cases}a+b=a^۲+b^۲-۱۲\\ ab=a+b-۱\end{cases}$$

چون $S=a+b$ را می‌خواهیم، پس از اتحاد $a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab$ به‌دست می‌آوریم:

$$a+b=(a+b)^۲-۲ab-۱۲\Rightarrow S=S^۲-۲(S-۱)-۱۲$$
$$S=S^۲-۲S+۲-۱۲\Rightarrow S^۲-۳S-۱۰=۰$$
$$(S+۲)(S-۵)=۰\Rightarrow S=-۲,S=۵$$

چون a و b عددهایی طبیعی‌اند، پس مجموع‌شان مثبت است، یعنی $S=-۲$ قابل قبول نیست و در نتیجه $S=۵$.

راه‌حل دوم چون حاصل‌ضرب جواب‌ها از یک طرف برابر ab و از طرف دیگر برابر $a+b-۱$ است، پس

$$ab=a+b-۱\Rightarrow a+b-ab-۱=۰\Rightarrow a(۱-b)+b-۱=۰$$
$$(۱-b)(a-۱)=۰\Rightarrow a=۱ \text{ یا } b=۱$$

از طرف دیگر، مجموع جواب‌ها از یک طرف برابر $a+b$ و از طرف دیگر برابر $a^۲+b^۲-۱۲$ است. بنابراین $a+b=a^۲+b^۲-۱۲$. پس اگر $a=۱$، آن‌گاه

$$۱+b=۱+b^۲-۱۲\Rightarrow b^۲-b-۱۲=۰\Rightarrow(b-۴)(b+۳)=۰$$
$$b=۴ \text{ یا } b=-۳ \text{ (غ.ق.ق)}$$

در این حالت $a+b=۵$. به همین ترتیب معلوم می‌شود که اگر $b=۱$، آن‌گاه $a=۴$ و باز هم $a+b=۵$.

۲۵۳۸ (۱) توجه کنید که

$$\frac{۱}{\sqrt{۲-x}+۲}-\frac{۱}{۲-\sqrt{۲-x}}=\frac{۲-x}{۵\sqrt{۲-x}}$$
$$\frac{۲-\sqrt{۲-x}-(\sqrt{۲-x}+۲)}{(\sqrt{۲-x}+۲)(۲-\sqrt{۲-x})}=\frac{(\sqrt{۲-x})^۲}{۵\sqrt{۲-x}}\Rightarrow\frac{-۲\sqrt{۲-x}}{۴-(۲-x)}=\frac{\sqrt{۲-x}}{۵}$$

چون $x=۲$ مخرج کسر سمت راست معادله را صفر می‌کند، بنابراین جواب معادله نیست، یعنی $x\neq۲$، پس $\sqrt{۲-x}\neq۰$. در نتیجه می‌توانیم دو طرف معادلهٔ داده شده را بر $\sqrt{۲-x}$ تقسیم کنیم. به این ترتیب، به دست می‌آید

$$\frac{-۲}{۲+x}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow ۲+x=-۱۰\Rightarrow x=-۱۲$$

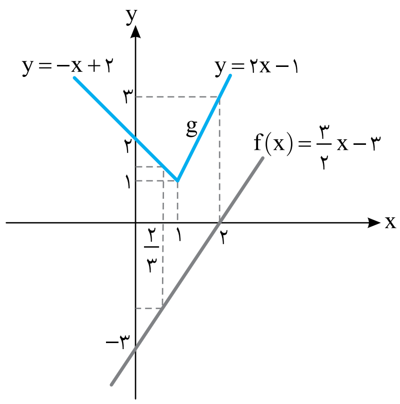
بنابراین معادلهٔ مورد نظر جواب مثبت ندارد.

۲۵۳۹ (۱) گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $(۹,-۲)\Rightarrow(-۲,۹):\ ۹=-۳(-۲)^۳+۲(-۲)-۱۱$

بنابراین گزینهٔ (۱) جواب است. دیگر لازم نیست گزینه‌های دیگر را بررسی کنیم.

۲۵۴۰ (۲) ابتدا ضابطهٔ تابع‌های f و g را از روی شکل پیدا می‌کنیم:



برای پیدا کردن $f^{-۱}(-۲)$ فرض می‌کنیم $a=f^{-۱}(-۲)$. در این صورت $f(a)=-۲$. پس

$$f(a)=-۲\Rightarrow\frac{۳}{۲}a-۳=-۲\Rightarrow a=\frac{۲}{۳}\Rightarrow f^{-۱}(-۲)=\frac{۲}{۳}$$

در نتیجه

$$(gof^{-۱})(-۲)=g(f^{-۱}(-۲))=g(\frac{۲}{۳})=-\frac{۲}{۳}+۲=\frac{۴}{۳}$$

همچنین $g(۰)=۲$، پس

$$(gog)(۰)=g(g(۰))=g(۲)=۳$$

پس

$$(gof^{-۱})(-۲)\times(gog)(۰)=\frac{۴}{۳}\times۳=۴$$

۲۵۴۱ (۴) دامنهٔ تابع g مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ روبه‌رو است: $x^۲f(x)\geq۰$

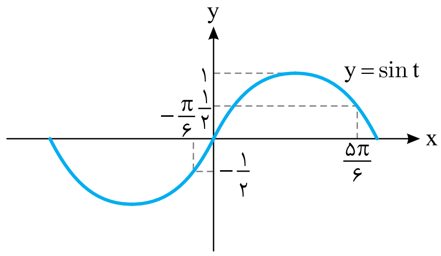
به جدول تعیین علامت زیر توجه کنید:

x	$-\infty$		۰		۳		$+\infty$
$x^۲$		+	۰	+		+	
$f(x)$		+		+	۰	−	
$x^۲f(x)$		+	۰	+	۰	−	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^۲f(x)\geq۰$ بازهٔ $(-\infty,۳]$ است که عددهای صحیح نامنفی در آن ۰، ۱، ۲ و ۳ هستند و تعداد آن‌ها چهارتاست.

۲۵۴۲ (۲) ابتدا توجه کنید که $-\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}\Rightarrow -\frac{\pi}{6}<2x<\frac{5\pi}{6}$

پس اگر $t=2x$، آن‌گاه $-\frac{\pi}{6}<t<\frac{5\pi}{6}$ و در نتیجه از روی نمودار زیر معلوم می‌شود که $-\frac{1}{2}<\sin t\le 1$.



بنابراین باید نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$-\frac{1}{2}<\frac{m-1}{4}\le 1\Rightarrow -2<m-1\le 4\Rightarrow -1<m\le 5\Rightarrow m\in(-1,5]$$

۲۵۴۳ (۳) **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که از تساوی داده شده به‌دست می‌آید:

$$\sin x+\cos x=\frac{6\sqrt{5}}{10}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به‌دست می‌آید:

$$1+2\sin x\cos x=\frac{9}{5}\Rightarrow 2\sin x\cos x=\frac{4}{5}\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{2}{5}$$

چون مجموع و حاصل‌ضرب $\sin x$ و $\cos x$ را داریم، پس $\cos x$ و $\sin x$ جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر هستند:

$$t^2-\frac{3}{\sqrt{5}}t+\frac{2}{5}=0\xrightarrow{\times 5}5t^2-3\sqrt{5}t+2=0$$

$$t=\frac{3\sqrt{5}\pm\sqrt{(3\sqrt{5})^2-4(5)(2)}}{2\times 5}=\frac{3\sqrt{5}\pm\sqrt{5}}{10}\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{2\sqrt{5}}{5}\\ t=\frac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$$

در نتیجه $\sin x=\frac{2\sqrt{5}}{5}\ ,\ \cos x=\frac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=2$

یا $\cos x=\frac{2\sqrt{5}}{5}\ ,\ \sin x=\frac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{2}$

راه‌حل دوم توجه کنید که بنابر فرض $\sin x+\cos x=\frac{6\sqrt{5}}{10}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به‌دست می‌آید:

$$1+\sin 2x=\frac{9}{5}\Rightarrow \sin 2x=\frac{9}{5}-1=\frac{4}{5}$$

اکنون توجه کنید

$$\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\Rightarrow \frac{4}{5}=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\Rightarrow 2+2\tan^2 x=5\tan x$$

$$2\tan^2 x-5\tan x+2=0\Rightarrow \tan x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4(2)(2)}}{2\times 2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}$$

پس $\tan x=2$ یا $\tan x=\frac{1}{2}$.

۲۵۴۴ (۴) از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که

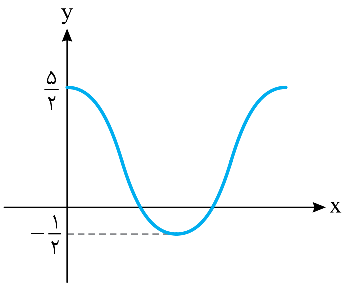
$$\text{ماکزیمم تابع}=\frac{5}{2}\Rightarrow |a|+c=\frac{5}{2}\ ,\quad \text{مینیمم تابع}=-\frac{1}{2}\Rightarrow -|a|+c=-\frac{1}{2}$$

اگر این تساوی‌ها را جمع کنیم، به‌دست می‌آید $2c=2$، پس $c=1$. از طرف دیگر،

$$|a|+c=\frac{5}{2}\Rightarrow |a|+1=\frac{5}{2}\Rightarrow |a|=\frac{3}{2}$$

چون گزینه‌ها همگی عددهایی منفی‌اند، پس $a=-\frac{3}{2}$ و در نتیجه $ac=-\frac{3}{2}$.

توجه کنید که اگر $a=\frac{3}{2}$، ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=\frac{3}{2}\cos bx+1$ می‌شود که نمودار آن به‌صورت زیر است (که شبیه نمودار داده شده نیست):



۲۵۴۵ (۲) **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$\cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos(-(x-\frac{\pi}{3}))=\cos(\frac{\pi}{3}-x)$$

اکنون توجه کنید که چون $x+\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{3}-x$ متمم یکدیگرند، پس

$$\sin(x+\frac{\pi}{6})=\cos(\frac{\pi}{3}-x)$$

در نتیجه معادلهٔ داده شده به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sin(x+\frac{\pi}{6})\cos(x-\frac{\pi}{3})=1\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{3}-x)\cos(\frac{\pi}{3}-x)=1$$

$$\cos^2(\frac{\pi}{3}-x)=1\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{3}-x)=\pm 1\Rightarrow \frac{\pi}{3}-x=k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{\pi}{3}-k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

k	-2	-1	0	1
$\frac{\pi}{3}-k\pi$	$2\pi+\frac{\pi}{3}$	$\pi+\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}-\pi=\frac{-2\pi}{3}$

بنابراین جواب‌ها در بازهٔ $[0,2\pi]$ برابر $\pi+\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{3}$ هستند، که تعداد آن‌ها دوتاست.

راه‌حل دوم چون $\sin(x+\frac{\pi}{6})$ و $\cos(x-\frac{\pi}{3})$ عددهایی در بازهٔ $[-1,1]$ هستند و حاصل‌ضربشان برابر ۱ شده است، یا هر دو ۱ هستند یا هر دو ۱− هستند. بنابراین

$$\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{6})=1\\ \cos(x-\frac{\pi}{3})=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\\ x-\frac{\pi}{3}=0\end{cases}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$$

یا

$$\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{6})=-1\\ \cos(x-\frac{\pi}{3})=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}\\ x-\frac{\pi}{3}=\pi\end{cases}\Rightarrow x=\frac{4\pi}{3}$$

پس معادلهٔ مورد نظر در بازهٔ $[0,2\pi]$ دو جواب دارد.

۲۵۴۶ (۳) توجه کنید که $\log_2 3=a\Rightarrow 2^a=3$

$$\log_8 b=\frac{2}{3}(1+a)\Rightarrow 8^{\frac{2}{3}(1+a)}=b\Rightarrow (2^3)^{\frac{2}{3}(1+a)}=b\Rightarrow 2^{2(1+a)}=b$$

$$(2^{1+a})^2=b\Rightarrow (2\times 2^a)^2=b\Rightarrow (2\times 3)^2=b\Rightarrow b=36$$

بنابراین

$$\log(3b-8)=\log(3\times 36-8)=\log 100=2$$

۲۵۴۷ ① چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(\frac{1}{2},1)$ می‌گذرد، پس

$$f(\frac{1}{2})=1\Rightarrow \sqrt[3]{2^{\frac{a}{2}+b}}=1\Rightarrow 2^{\frac{a}{2}+b}=1\Rightarrow \frac{a}{2}+b=0$$

از طرف دیگر،

$$f^{-1}(8)=5\Rightarrow f(5)=8\Rightarrow \sqrt[3]{2^{5a+b}}=8\Rightarrow 2^{5a+b}=8^3=2^9\Rightarrow 5a+b=9$$

بنابراین

$$\begin{cases}\frac{a}{2}+b=0\\ 5a+b=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-1\end{cases}$$

در نتیجه $a-b=2+1=3$.

۲۵۴۸ ④ توجه کنید که $\sigma=2$، پس $\sigma^2=2^2=4$. از طرف دیگر،

$$\sigma^2=\frac{a^2+0^2+(-1)^2+b^2+(-1)^2+3^2}{6}=\frac{a^2+b^2+11}{6}=4$$

پس

$$a^2+b^2+11=6\times4=24\Rightarrow a^2+b^2=13 \qquad (1)$$

چون مجموع اختلاف‌های داده‌ها از میانگین برابر صفر است، پس

$$a+0+(-1)+b+(-1)+3=0\Rightarrow a+b=-1\Rightarrow a=-1-b$$

در نتیجه از تساوی (۱) به‌دست می‌آید

$$(-1-b)^2+b^2=13\Rightarrow 1+b^2+2b+b^2=13\Rightarrow 2b^2+2b=12$$

$$b^2+b-6=0\Rightarrow b=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(1)(-6)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}$$

در نتیجه $b=-3$ یا $b=2$. اگر $b=2$، آن‌گاه $a=-1-b=-3$ که چون طبق فرض $a>0$، پس به تناقض رسیده‌ایم. بنابراین $b=-3$.

۲۵۴۹ ③ فرض می‌کنیم داده‌ها به‌صورت مرتب شده باشند:

$$\underbrace{x_1,x_2,\dots,x_k}_{\text{داده‌های کوچک‌تر از میانه}}\ ;\ \underset{\text{میانه}}{\uparrow}\ \underbrace{x_{k+1},\dots,x_{2k}}_{\text{داده‌های بزرگ‌تر از میانه}}$$

فرض کنید $\bar{x}_1$ میانگین داده‌های کوچک‌تر از میانه و $\bar{x}_2$ میانگین داده‌های بزرگ‌تر از میانه باشد، یعنی

$$\bar{x}_1=\frac{x_1+\dots+x_k}{k}\ ,\ \bar{x}_2=\frac{x_{k+1}+\dots+x_{2k}}{k}$$

اگر دو طرف این تساوی‌ها را در k ضرب کنیم، به‌دست می‌آید

$$k\bar{x}_1=x_1+\dots+x_k\ ,\ k\bar{x}_2=x_{k+1}+\dots+x_{2k}$$

از طرف دیگر، بنابر فرض $-\bar{x}_1=\bar{x}_2-6$، پس $\bar{x}_1+\bar{x}_2=6$. اکنون توجه کنید که میانگین کل داده‌ها برابر است با

$$\frac{(x_1+\dots+x_k)+(x_{k+1}+\dots+x_{2k})}{2k}=\frac{k\bar{x}_1+k\bar{x}_2}{2k}=\frac{\bar{x}_1+\bar{x}_2}{2}=\frac{6}{2}=3$$

۲۵۵۰ ④ توجه کنید که اگر $x\to(-1)^+$، آن‌گاه $[x]=-1$ و

$$x>-1\Rightarrow -x<1\Rightarrow[-x]=0$$

همچنین

$$x>-1\Rightarrow x+1>0\Rightarrow|x+1|=x+1$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{|x+1|+[x]}{x-[-x]}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x+1+(-1)}{x-0}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x}{x}=1$$

۲۵۵۱ ① توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x+2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{ax^2+x+1}}{x+2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{ax}}{x}=\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{a}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

در نتیجه $f(x)=\sqrt{\frac{1}{4}x^2+x+1}$. از طرف دیگر، اگر $x\to(-1)^-$، آن‌گاه

$$x<-1\Rightarrow\frac{1}{x}>-1\Rightarrow[\frac{1}{x}]=-1$$

بنابراین

$$\lim_{x\to(-1)^-}[\frac{1}{x}]f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}(-1)\sqrt{\frac{1}{4}x^2+x+1}=-\sqrt{\frac{1}{4}-1+1}=-\frac{1}{2}$$

۲۵۵۲ ② **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\lim_{x\to1}\frac{2f(x)-1}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{2x\sqrt{x}}{2x^2+x-1}-1}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{2x\sqrt{x}-2x^2-x+1}{2(x-1)(2x^2+x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x\sqrt{x}(1-\sqrt{x})+(1-x)}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(2x^2+x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x\sqrt{x}(1-\sqrt{x})+(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(2x^2+x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})(2x\sqrt{x}+1+\sqrt{x})}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(2x^2+x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-(2x\sqrt{x}+1+\sqrt{x})}{2(\sqrt{x}+1)(2x^2+x-1)}$$

$$=\frac{-(2+1+1)}{2(1+1)(2+1-1)}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$$

راه‌حل دوم می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to1}\frac{2f(x)-1}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{2x\sqrt{x}}{2x^2+x-1}-1}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{2x\sqrt{x}-2x^2-x+1}{2(x-1)(2x^2+x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x\sqrt{x}-2x^2-x+1}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{2(2x^2+x-1)}$$

اکنون توجه کنید بنابر قاعدهٔ هوپیتال،

$$\lim_{x\to1}\frac{2x\sqrt{x}-2x^2-x+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2\sqrt{x}+2x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-4x-1}{1}$$

$$=2+2\times\frac{1}{2}-4-1=-2$$

همچنین

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{2(2x^2+x-1)}=\frac{1}{2(2+1-1)}=\frac{1}{4}$$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با

$$(-2)\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$$

۲۵۵۳ ③ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که شیب خط $y=2x+b$ برابر با ۲ است. از طرف دیگر،

$$f(x)=\frac{x+a}{ax+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1\times(ax+1)-a(x+a)}{(ax+1)^2}=\frac{1-a^2}{(ax+1)^2}$$

بنابراین

$$f'(1)=\frac{1-a^2}{(a+1)^2}=\frac{(1-a)(1+a)}{(a+1)^2}=\frac{1-a}{1+a}$$

چون شیب خط مماس با $f'(1)$ برابر است، پس

$$2=\frac{1-a}{1+a}\Rightarrow2+2a=1-a\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

بنابراین

$$f(x)=\frac{x-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}x+1}\Rightarrow f(1)=\frac{1-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}+1}=1$$

چون نقطهٔ $(1,f(1))=(1,1)$ روی خط $y=2x+b$ قرار دارد، پس

$$1=2\times1+b\Rightarrow b=-1$$

در نتیجه $a-b=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$.

راه‌حل دوم معادلهٔ حاصل از برخورد خط و تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$2x+b=\frac{x+a}{ax+1}\Rightarrow 2ax^2+2x+abx+b=x+a$$

$$2ax^2+(1+ab)x+b-a=0$$

چون $x=۱$ ریشهٔ مضاعف این معادله است، پس سمت چپ آن به‌صورت $۲a(x-۱)^{۲}$ است. بنابراین $۲ax^{۲}+(۱+ab)x+b-a=۲a(x^{۲}-۲x+۱)=۲ax^{۲}-۴ax+۲a$

در نتیجه
$$\begin{cases} ۱+ab=-۴a \\ b-a=۲a \end{cases}$$

از معادلهٔ دوم به‌دست می‌آید $b=۳a$ و در نتیجه معادلهٔ اول می‌شود

$$۱+a(۳a)=-۴a \Rightarrow ۳a^{۲}+۴a+۱=۰ \Rightarrow a=-۱\,,\ a=-\frac{۱}{۳}$$

اگر $a=-۱$، آن‌گاه $f(x)=\frac{x-۱}{-x+۱}=-۱$، یعنی f تابعی ثابت می‌شود که خط $y=۲x+b$ بر آن مماس نیست. بنابراین $a=-\frac{۱}{۳}$ و در نتیجه $b=۳a=-۱$.

بنابراین $a-b=-\frac{۱}{۳}+۱=\frac{۲}{۳}$.

۲۵۵۴ (۱) توجه کنید که

$$f(x)=x^{۳}+ax^{۲}-۲bx-۴ \Rightarrow f'(x)=۳x^{۲}+۲ax-۲b$$

بنابراین $f'(۰)=-۲b \Rightarrow ۰=-۲b \Rightarrow b=۰$

پس $f'(x)=۳x^{۲}+۲ax$. پس

$$f'(-۲)=۳\times(-۲)^{۲}+۲a(-۲)=۱۲-۴a \Rightarrow ۰=۱۲-۴a \Rightarrow a=۳$$

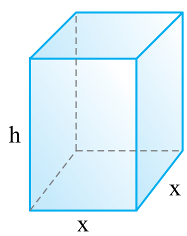
بنابراین $f(x)=x^{۳}+۳x^{۲}-۴$. اکنون توجه کنید که

$$f(۰)=-۴\,,\ f(-۲)=-۸+۱۲-۴=۰$$

در نتیجه نقطه‌های اکسترمم نسبی تابع $(۰,-۴)$ و $(-۲,۰)$ هستند، که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با

$$\sqrt{(-۲-۰)^{۲}+(۰-(-۴))^{۲}}=\sqrt{۴+۱۶}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

۲۵۵۵ (۲) توجه کنید که مساحت کل این قوطی حلبی درباز برابر است با مجموع مساحت قاعده و مساحت چهار وجه آن، که اگر طول ضلع قاعده برابر x و ارتفاع قوطی برابر h باشد، می‌شود $S=x^{۲}+۴xh$ از طرف دیگر، حجم این قوطی برابر است با مساحت قاعدهٔ آن ضرب در ارتفاع آن، که می‌شود $x^{۲}h$. بنابر فرض $x^{۲}h=۴$، پس $h=\frac{۴}{x^{۲}}$ و در نتیجه



$$S=x^{۲}+۴xh=x^{۲}+۴x\times\frac{۴}{x^{۲}}=x^{۲}+\frac{۱۶}{x}$$

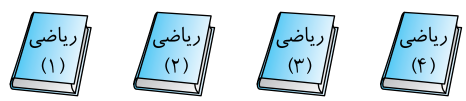
باید مینیمم مطلق S را حساب کنیم. توجه کنید که $S'=۲x-\frac{۱۶}{x^{۲}}$

$$S'=۰ \Rightarrow ۲x-\frac{۱۶}{x^{۲}}=۰ \Rightarrow ۲x=\frac{۱۶}{x^{۲}} \Rightarrow x^{۳}=۸ \Rightarrow x=۲$$

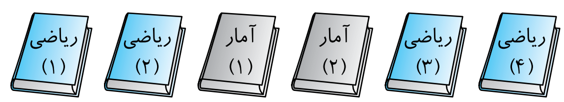
بنابراین مینیمم مطلق S به‌ازای $x=۲$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$S=۲^{۲}+\frac{۱۶}{۲}=۱۲$$

۲۵۵۶ (۳) ابتدا کتاب‌های ریاضی را در قفسه می‌چینیم. این کار به $۴!$ طریق ممکن است.

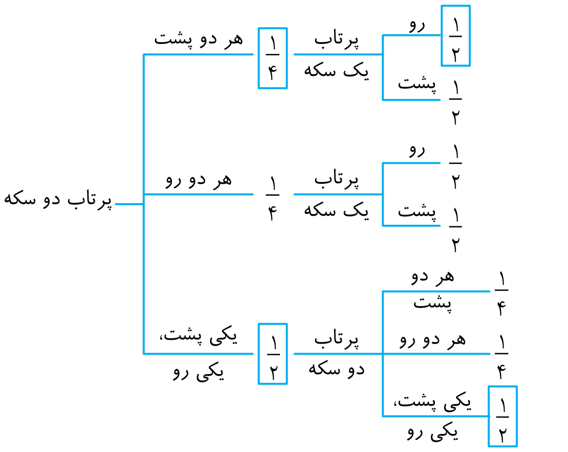


اکنون توجه کنید که برای اینکه موضوع دو کتاب مجاور هر کتاب (به‌جز کتاب‌های اول و آخر) متفاوت باشد، کتاب‌های آمار باید بین کتاب‌های ریاضی (۲) و ریاضی (۳) قرار بگیرند (شکل زیر را ببینید). این کار به $۲!$ طریق ممکن است.



در نتیجه طبق اصل ضرب پاسخ مسئله برابر است با $۴!\times۲!=۴۸$.

۲۵۵۷ (۴) نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



از روی این نمودار معلوم می‌شود احتمال اینکه دقیقاً دو سکه پشت بیایند برابر است با

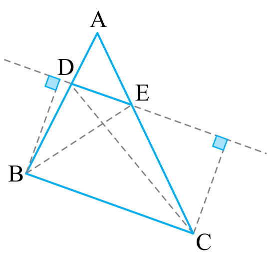
$$\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۸}$$

۲۵۵۸ (۳) ابتدا معادلهٔ خط BC را می‌نویسیم. چون این خط از نقطه‌های $B(۳,۳)$ و $C(۷,۱۱)$ می‌گذرد، معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y-۳=\frac{۱۱-۳}{۷-۳}(x-۳) \Rightarrow y-۳=۲(x-۳) \Rightarrow y-۳=۲x-۶ \Rightarrow ۲x-y-۳=۰$$

فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱,۹)$ از این خط برابر است با $AH=\frac{|۲\times۱-۹-۳|}{\sqrt{۲^{۲}+(-۱)^{۲}}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}=۲\sqrt{۵}$

۲۵۵۹ (۴) ابتدا توجه کنید که بنابر اندازه‌های داده شده، $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=\frac{۱}{۲}$ در نتیجه بنابر عکس قضیهٔ تالس $DE||BC$. بنابراین ارتفاع وارد از رأس C در مثلث CDE با ارتفاع وارد از رأس B در مثلث BDE برابر است. چون قاعدهٔ DE در این دو مثلث هم مشترک است. پس مساحت این دو مثلث برابر است، یعنی نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر ۱ است.



۲۵۶۰ (۲) ابتدا شعاع و مرکز دو دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$x^{۲}+y^{۲}-۴x+۲y=۰ \Rightarrow \text{مرکز}: O_{۱}\left(-\frac{-۴}{۲},-\frac{۲}{۲}\right)=(۲,-۱)$$

$$r_{۱}=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^{۲}+۲^{۲}-۴\times۰}=\sqrt{۵}$$

$$x^{۲}+y^{۲}-۲y-۲=۰ \Rightarrow \text{مرکز}: O_{۲}\left(-\frac{۰}{۲},-\frac{-۲}{۲}\right)=(۰,۱)$$

$$r_{۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۰^{۲}+(-۲)^{۲}-۴\times(-۲)}=\sqrt{۳}$$

اکنون توجه کنید که $O_{۱}O_{۲}=\sqrt{(۲-۰)^{۲}+(-۱-۱)^{۲}}=۲\sqrt{۲}\simeq۲\times۱/۴=۲/۸$

از طرف دیگر،

$$r_{۱}+r_{۲}=\sqrt{۵}+\sqrt{۳}\simeq۲/۲+۱/۷=۳/۹$$

$$|r_{۱}-r_{۲}|=|\sqrt{۵}-\sqrt{۳}|\simeq۲/۲-۱/۷=۰/۵$$

چون $|r_{۱}-r_{۲}|<O_{۱}O_{۲}<r_{۱}+r_{۲}$، پس دایره‌ها متقاطع‌اند.