

نقطه‌های تقاطع نمودارهای دو تابع را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که

ضابطه تابع دوم به صورت زیر است:

$$3y + x = 17 \Rightarrow y = \frac{17-x}{3}$$

بنابراین طول نقطه‌های برخورد دو تابع جواب‌های معادله زیر هستند:

$$|x+2| + |x-1| = \frac{17-x}{3}$$

از طرف دیگر

$$x \geq 1 \Rightarrow x+2+x-1 = \frac{17-x}{3} \Rightarrow x=2$$

$$-2 \leq x \leq 1 \Rightarrow x+2-(x-1) = \frac{17-x}{3} \Rightarrow x=8 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

$$x \leq -2 \Rightarrow -(x+2)-(x-1) = \frac{17-x}{3} \Rightarrow x=-4$$

بنابراین طول نقطه‌های برخورد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x=2 \Rightarrow y = \frac{17-x}{3} = \frac{17-2}{3} = 5$$

$$x=-4 \Rightarrow y = \frac{17-x}{3} = \frac{17+4}{3} = 7$$

بنابراین نقطه‌های برخورد $(2, 5)$ و $(-4, 7)$ هستند، که فاصله آن‌ها برابر است با

$$\sqrt{(2-(-4))^2 + (5-7)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

تابع‌های $y=x^3$ و $y=3x-12$ اکیداً صعودی‌اند، پس مجموع

آن‌ها نیز اکیداً صعودی است. در نتیجه تابع $f(x)=x^3+3x-12$ اکیداً صعودی

است. بنابراین نقطه‌های برخورد نمودارهای تابع‌های f و f^{-1} روی خط $y=x$

هستند. در نتیجه طول‌های این نقطه‌ها جواب‌های معادله زیر هستند:

$$f(x)=x \Rightarrow x^3+3x-12=x \Rightarrow x^3+2x-12=0 \Rightarrow x^3-8+2x-4=0$$

$$(x-2)(x^2+2x+6)=0 \Rightarrow (x-2)(x^2+2x+6)=0 \quad (1)$$

چون دلتای معادله $x^2+2x+6=0$ منفی است، پس این معادله جواب ندارد. در

نتیجه تنها جواب معادله (۱) برابر $x=2$ است. چون نقطه برخورد نمودارهای تابع‌های

f و f^{-1} روی خط $y=x$ است، پس عرض نقطه برخورد برابر است با $y=2$ ، یعنی

نقطه برخورد نمودارهای تابع‌های f و f^{-1} نقطه $(2, 2)$ است، که فاصله آن از مبدأ

مختصات برابر است با

$$\sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

ابتدا توجه کنید که

$$a^2+9b^2=10ab \Rightarrow a^2+9b^2+6ab=16ab$$

$$(a+3b)^2=16ab \Rightarrow \left(\frac{a+3b}{4}\right)^2=ab$$

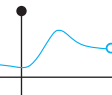
اگر از دو طرف این تساوی در مبنای ۱۰ لگاریتم بگیریم، به دست می‌آید

$$\log\left(\frac{a+3b}{4}\right)^2 = \log(ab) \Rightarrow 2\log\left(\frac{a+3b}{4}\right) = \log a + \log b$$

$$\log\left(\frac{a+3b}{4}\right) = \frac{\log a + \log b}{2}$$

بنابراین $\log\left(\frac{a+3b}{4}\right)$ واسطه حسابی $\log a$ و $\log b$ است.

پاسخ کنکور ریاضی سال ۱۴۰۱ - خارج از کشور



اگر طول ضلع مربع اول برابر a باشد، مساحت آن برابر a^2 است و

مساحت مربع دوم برابر $9a^2$ می‌شود. بنابراین طول ضلع مربع دوم $3a$ است. در نتیجه محیط‌های مربع‌های اول و دوم به ترتیب برابر $4a$ و $12a$ هستند. بنابراین

$$\text{قدرنسبت دنباله هندسی مورد نظر برابر است با } \frac{12a}{4a} = 3.$$

چون نمودار سهمی بر خط $y=-x$ مماس است، پس معادله

$$3x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3} = -x$$

$$3x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3} + x = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2mx + m + \frac{4}{3} = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 4m^2 - 4 \times 3 \left(m + \frac{4}{3}\right) = 0 \Rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0$$

$$(m+1)(m-4) = 0 \Rightarrow m = -1, m = 4$$

اکنون باید ببینیم به ازای کدام مقدار m طول نقطه تماس (ریشه مضاعف معادله (۱))

منفی می‌شود تا نقطه تماس در ناحیه دوم واقع شود. توجه کنید که

$$\text{طول نقطه تماس} = -\frac{2m}{6} = -\frac{m}{3}$$

که فقط به ازای $m=4$ منفی است. بنابراین طول رأس سهمی مورد نظر برابر است با

$$-\frac{2m-1}{6} = -\frac{2 \times 4 - 1}{6} = -\frac{7}{6}$$

چون a واسطه هندسی α و β است، پس $a^2 = \alpha\beta$. از طرف دیگر،

چون α و β جواب‌های معادله $x^2 + 2(a+1)x + 2a - 1 = 0$ هستند، پس

$$a^2 = 2a - 1 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

ابتدا توجه کنید که α و β جواب‌های معادله درجه دوم زیر هستند:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t+1)(t-2) = 0 \Rightarrow t = -1, t = 2$$

بنابراین یکی از عدد‌های α و β برابر -1 است. در نتیجه، -1 جواب معادله درجه

سوم داده شده است، یعنی

$$4(-1)^3 + k(-1)^2 - 9(-1) - 2 = 0 \Rightarrow -4 + k + 9 - 2 = 0 \Rightarrow k = -3$$

ابتدا توجه کنید که

$$y = f(x) = \sqrt{(x+1)^2} - |3x-6| = |x+1| - 3|x-2|$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)+3(x-2) & x \leq -1 \\ x+1+3(x-2) & -1 \leq x \leq 2 \\ x+1-3(x-2) & x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 2x-7 & x \leq -1 \\ 4x-5 & -1 \leq x \leq 2 \\ -2x+7 & x \geq 2 \end{cases}$$

چون شیب خط $y=-2x+7$ منفی است، پس تابع f روی بازه $[2, +\infty)$ نزولی است.

اکنون توجه کنید که

$$y = -2x+7 \Rightarrow x = \frac{y-7}{-2} = -\frac{1}{2}y + \frac{7}{2}$$

$$\text{بنابراین } f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \text{ از طرف دیگر}$$

$$x \geq 2 \Rightarrow -2x \leq -4 \Rightarrow -2x+7 \leq -4+7=3$$

بنابراین برد تابع f روی بازه $[2, +\infty)$ برابر $(-\infty, 3]$ است. در نتیجه

$$D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 3]$$

۲۳۰۸ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = 4 \Rightarrow 1-\sin x = 4(1+\sin x) \Rightarrow 5\sin x = -3 \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{5}$$

در نتیجه

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow -\frac{3}{5} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow -3(1 + \tan^2 \frac{x}{2}) = 10 \tan \frac{x}{2}$$

$$3 \tan^2 \frac{x}{2} + 10 \tan \frac{x}{2} + 3 = 0$$

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2 \times 3} = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{-10 \pm 8}{6}$$

بنابراین $\tan \frac{x}{2} = -\frac{1}{3}$ یا $\tan \frac{x}{2} = -3$. در نتیجه مقدار صحیح $\tan \frac{x}{2}$ برابر -3 است.چون نمودار تابع f در یک همسایگی راست نقطه $x=0$ نزولی است، پس ضریب $\cos x$ باید مثبت باشد. از طرف دیگر ماکزیمم مقدار تابع f برابر ۳ و مینیمم مقدار آن برابر -7 است. در نتیجه

$$\begin{cases} a+b=3 \\ -a+b=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-2 \end{cases}$$

در نتیجه $f(x) = 5 \cos x - 2$ و $f(\frac{\pi}{3}) = 5 \cos \frac{\pi}{3} - 2 = 5 \times \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}$

۲۳۱۰ راه حل اول توجه کنید که

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \sin x \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x)$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} = \cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x)$$

بنابراین معادله مورد نظر را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x) \times \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x) = 1 \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = 2$$

$$1 + \sin 2x = 2 \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین جواب های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ برابرند با $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$. که مجموع آنهامی شود $\frac{3\pi}{2}$.۲۳۱۱ راه حل دوم ابتدا توجه کنید که $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4} - x)$. بنابراین معادله مورد

نظر به صورت روبه رو درمی آید:

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) \cos(\frac{\pi}{4} - x) = 1$$

از طرف دیگر زاویه های $x + \frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4} - x$ متمم یکدیگرند، بنابراین

$$\cos(\frac{\pi}{4} - x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

در نتیجه معادله مورد نظر به صورت زیر درمی آید:

$$\sin^2(x + \frac{\pi}{4}) = 1$$

$$\begin{cases} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{یا} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = -1 \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین جواب های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ برابر $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ هستند، که مجموع آنها برابر است با $\frac{3\pi}{2}$.

۲۳۱۱ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{2-2\cos x} = \sqrt{2(1-\cos x)} = \sqrt{2(2\sin^2 \frac{x}{2})} = 2|\sin \frac{x}{2}|$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-2\cos x} - \sqrt{2-2\cos x}}{\sqrt{2-2\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-2\cos x} - \sqrt{2-2\cos x}}{2|\sin \frac{x}{2}|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-2\cos x} - \sqrt{2-2\cos x}}{-2\sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2-2\cos x - (2-2\cos x)}{-2\sin \frac{x}{2}(\sqrt{2-2\cos x} + \sqrt{2-2\cos x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{-2x \frac{x}{2}(\sqrt{2-2\cos x} + \sqrt{2-2\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{\sqrt{2-2\cos x} + \sqrt{2-2\cos x}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۳۱۲ راه حل دوم از قاعده هویتنال استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-2\cos x} - \sqrt{2-2\cos x}}{\sqrt{2-2\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-2\cos x} - \sqrt{2-2\cos x}}{-2\sin \frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-3}{2\sqrt{2-2\cos x}} - \frac{-5}{2\sqrt{2-2\cos x}}}{\frac{-3}{2} - \frac{-5}{2}} = \frac{\frac{-3+5}{2\sqrt{2-2\cos x}}}{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۳۱۲ باید $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

از طرف دیگر،

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ([x] - 2a) = -1 - 2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{2bx^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2bx^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\frac{x}{2})^2}{bx^2} = \frac{1}{4b}$$

$$f(0) = |b-0| = |b|$$

اکنون توجه کنید که باید $|b| = \frac{1}{4b}$. چون سمت راست این تساوی غیرمنفی است، پسسمت چپ آن، یعنی $\frac{1}{4b}$ هم غیرمنفی است. بنابراین b غیرمنفی است. در نتیجه

$$\frac{1}{4b} = b \Rightarrow b^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$-1 - 2a = \frac{1}{4b} \Rightarrow -1 - 2a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

در نتیجه

$$b - a = \frac{5}{4}$$

۲۳۱۳ با توجه به گزینه ها خارج قسمت را یک چندجمله ای درجه اول به صورت

 $ax + b$ در نظر می گیریم. بنابر قضیه تقسیم،

$$f(x) = (x^2 + 2x + 5)(ax + b) + x + 2$$

در نتیجه

$$\begin{cases} f(1) = (1+2+5)(a+b) + 3 \\ f(-1) = (1-2+5)(-a+b) + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13 = 6(a+b) + 3 \\ 11 = 2(-a+b) + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -a+b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}$$

بنابراین خارج قسمت می تواند برابر $-2x + 3$ باشد.

۲۳۱۹ ۲ چون نقطه $(0,0)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع

پس $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ است و $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = ax^3 + bx^2, f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

چون نقطه $(1,1)$ نیز نقطه اکسترمم نسبی این تابع است، پس

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$$

پس $ab = -6$.

۲۳۱۴ ۱ بزرگ‌ترین عضو دسته 2^n برابر 2^n است. بنابراین بزرگ‌ترین عضو

دسته سیزدهم برابر 2^{13} است. همین‌طور، بزرگ‌ترین عضو دسته دوازدهم برابر 2^{12}

است. بنابراین کوچک‌ترین عضو دسته سیزدهم برابر $2^{12} + 1$ است. چون تعداد

عضوهای دسته سیزدهم عددی زوج است، پس میانه این دسته برابر با میانگین دو عدد

وسطی این دسته است. از طرف دیگر، چون عضوهای دسته سیزدهم دنباله‌ای حسابی

تشکیل می‌دهند، پس میانگین دو عدد وسطی برابر با میانگین عدد اول و عدد آخر دسته

$$\text{است، که برابر است با } \frac{2^{12} + 1 + 2^{13}}{2} = 6144/5.$$

۲۳۱۵ ۱ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{bx^2 + \gamma}{4x^2 + ax + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{bx^2}{4x^2} = \frac{b}{4}$

پس مجانب افقی نمودار تابع خط $y = \frac{b}{4}$ است. چون مجانب‌ها در نقطه $(-\frac{1}{4}, 3)$

تلاقی می‌کنند، پس $\frac{b}{4} = 3$ ، یعنی $b = 12$. همین‌طور، چون مجانب قائم از نقطه به

طول $-\frac{1}{4}$ می‌گذرد، پس معادله آن $x = -\frac{1}{4}$ است، یعنی $x = -\frac{1}{4}$ ریشهٔ مخرج تابع

است، یعنی

$$4(-\frac{1}{4})^2 + a(-\frac{1}{4}) + 1 = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$\text{پس } \frac{b}{a} = \frac{12}{4} = 3.$$

۲۳۱۶ ۳ شیب خط $6y - 3x = 1$ برابر است با $-\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$. اگر نقطه مورد نظر

(x_0, y_0) باشد، آن‌گاه $f'(x_0) = -2$ از طرف دیگر

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow f'(x) = 2x - 4$$

$$f'(x_0) = -2 \Rightarrow 2x_0 - 4 = -2 \Rightarrow x_0 = 1$$

چون نقطه مورد نظر روی نمودار تابع f است، پس عرض آن برابر است با

$$f(1) = 1 - 4 + 5 = 2.$$

۲۳۱۷ ۴ توجه کنید که

$$g(x) = f(\tan^2 x + \sqrt{2} \cos x)$$

$$g'(x) = (\tan^2 x + \sqrt{2} \cos x) f'(\tan^2 x + \sqrt{2} \cos x)$$

$$= (2 \tan x (1 + \tan^2 x) - \sqrt{2} \sin x) f'(\tan^2 x + \sqrt{2} \cos x)$$

پس

$$g'(\frac{\pi}{4}) = (2 \times 1 \times (1+1) - \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}) f'(1 + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}) = (4-1) f'(1+1) = 3 f'(2)$$

$$\sqrt{3} = 3 f'(2) \Rightarrow f'(2) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

در نتیجه

۲۳۱۸ ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sin x \cos 2x$ در بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

$$\frac{f(\frac{\pi}{2}) - f(\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{1 \times (-1) - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi}$$

برابر است با

همین‌طور، آهنگ تغییر متوسط تابع $g(x) = \sin^4 x - \cos^4 x$ در بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

برابر است با

$$\frac{g(\frac{\pi}{2}) - g(\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{(1-0) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{4})}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$$

پس نسبت مورد نظر برابر -1 است.

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله $x^2 - 3x + 2 < 0$ بازه $(1, 2)$ است، که چون هیچ عدد صحیحی در این بازه قرار ندارد، پس هیچ عدد صحیحی در نابرابری $x^2 - 3x + 2 < 0$ صدق نمی‌کند. بنابراین دیگر لازم نیست نامعادله سمت چپ را حل کنیم.

۲۳۲۴ شیب خط AB برابر است با $\frac{1+2}{-4} = -\frac{3}{4}$ و طول پاره خط AB برابر است با $AB = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-1)^2} = 5$. چون خط AD بر خط AB عمود است، پس شیب آن برابر $\frac{4}{3}$ است. همچنین $AD = AB = 5$. اکنون اگر D را نقطه (a, b) بگیریم، شیب خط AD برابر است با $\frac{b-1}{a-0} = \frac{4}{3} \Rightarrow b-1 = \frac{4}{3}a$

$$AD = 5 \Rightarrow \sqrt{(a-0)^2 + (b-1)^2} = 5 \Rightarrow a^2 + (b-1)^2 = 25$$

$$a^2 + \left(\frac{4}{3}a\right)^2 = 25 \Rightarrow \frac{25a^2}{9} = 25 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

چون نقطه D در ربع سوم است، پس طول آن منفی است، در نتیجه $a = -3$.
۲۳۲۵ توجه کنید که طول نقطه برخورد نمودار تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ با محور y برابر با صفر و عرض آن برابر α است. بنابراین

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(0) = \alpha \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(0) = \alpha \Rightarrow (f \circ g)(\alpha) = 0$$

$$f(g(\alpha)) = 0 \Rightarrow \log(2g(\alpha) - 5) = 0 \Rightarrow 2g(\alpha) - 5 = 1 \Rightarrow g(\alpha) = 3$$

اکنون توجه کنید که

$$g(\alpha) = 3 \Rightarrow \alpha + \sqrt{2\alpha - 4} = 3 \Rightarrow \sqrt{2\alpha - 4} = 3 - \alpha \quad (1)$$

$$2\alpha - 4 = (3 - \alpha)^2 \Rightarrow 2\alpha - 4 = 9 + \alpha^2 - 6\alpha \Rightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 13 = 0 \Rightarrow \alpha = 4 \pm \sqrt{3}$$

از معادله (۱) نتیجه می‌شود که $2 \leq \alpha \leq 3$. بنابراین $\alpha = 4 - \sqrt{3}$.

۲۳۲۶ $x = 1$ جواب معادله $f(x) = g(x)$ است، پس

$$f(1) = g(1) \Rightarrow 2 + 2^{b-a} = -1 - 3 + 8 \Rightarrow 2^{b-a} = 2 \Rightarrow b - a = 1$$

از طرف دیگر،

$$f^{-1}(1) = -1 \Rightarrow f(-1) = 1 \Rightarrow 2 + 2^{b+a} = 1 \Rightarrow 2^{b+a} = -1 \Rightarrow b + a = 3$$

پس

$$\begin{cases} b - a = 1 \\ b + a = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow 2b - a = 2 \times 2 - 1 = 3$$

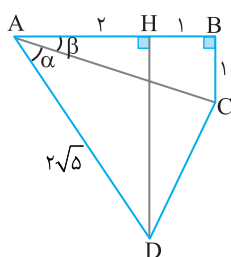
۲۳۲۷ ابتدا توجه کنید که $x^2 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$. بنابراین اگر دو

طرف معادله را در $(x+2)(x^2 - 2x + 4)$ ضرب کنیم، به دست می‌آید

$$x^2 - 2x + 4 - (x^2 - 9x - 2) = 6x(x+2) \Rightarrow 7x + 6 = 6x^2 + 12x$$

$$6x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{12} = \frac{-5 \pm 13}{12} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}, x = \frac{2}{3}$$

بنابراین $x = \frac{2}{3}$ تنها جواب مثبت معادله مورد نظر است.



۲۳۲۸ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیه

فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه ABC،

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$

$$AC = \sqrt{10}$$

همین‌طور، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث

قائم الزاویه AHD،

$$AD^2 = AH^2 + HD^2$$

$$(2\sqrt{5})^2 = 2^2 + HD^2$$

$$HD^2 = 20 - 4 = 16 \Rightarrow HD = 4$$

پاسخ کنکور ریاضی سال ۱۴۰۲ (نوبت اول)

۲۳۲۰ فرض کنید جمله‌های متوالی دنباله هندسی a, ar, ar^2 باشند. در این

صورت، طبق فرض مسئله $4a, 8ar, 16ar^2$ دنباله‌ای حسابی است. بنابراین

$$8ar = \frac{4a + 16ar^2}{2} \Rightarrow 4r = 1 + 4r^2 \Rightarrow 4r^2 - 4r + 1 = 0 \Rightarrow (2r - 1)^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

از طرف دیگر، چون مجموع مربع‌های جمله‌های دنباله هندسی با مجموع جمله‌های دنباله حسابی برابر است، پس

$$a^2 + a^2r^2 + a^2r^4 = 4a + 8ar + 16ar^2 \Rightarrow a(1 + r^2 + r^4) = 4(1 + 2r + 4r^2)$$

$$a\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) = 4\left(1 + 1 + 1\right) \Rightarrow a\left(\frac{16 + 4 + 1}{16}\right) = 4 \times 3 \Rightarrow a = \frac{64}{7}$$

۲۳۲۱ طول رأس سهمی $y = kx^2 - 4x - 6$ برابر $-\frac{4}{2k}$ ، یعنی $\frac{2}{k}$ است.

پس عرض آن برابر است با

$$y = k\left(\frac{2}{k}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{k}\right) - 6 = \frac{4}{k} - \frac{8}{k} - 6 = -\frac{4}{k} - 6$$

پس نقطه $\left(\frac{2}{k}, -\frac{4}{k} - 6\right)$ رأس سهمی است که روی خط $y = -4x - 4$ قرار دارد.

پس مختصات آن در معادله این خط صدق می‌کنند:

$$-\frac{4}{k} - 6 = -4\left(\frac{2}{k}\right) - 4 \Rightarrow \frac{4}{k} = 2 \Rightarrow k = 2$$

بنابراین عرض رأس سهمی برابر است با $-\frac{4}{2} - 6 = -8$.

۲۳۲۲ فرض کنید α جواب مشترک معادله‌های مورد نظر باشد. در این صورت α در هر دو معادله صدق می‌کند:

$$\begin{cases} \alpha^2 + 6\alpha + m = 0 \\ \alpha^2 + 2\alpha - 3m = 0 \end{cases} \Rightarrow (\alpha^2 + 6\alpha + m) - (\alpha^2 + 2\alpha - 3m) = 0$$

$$4\alpha + 4m = 0 \Rightarrow m = -\alpha$$

اکنون در معادله اول به جای m مقدار $-\alpha$ را قرار می‌دهیم و آن را حل می‌کنیم.

$$\alpha^2 + 6\alpha + m = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 6\alpha - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 5\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \text{ (غ.ق.)} \\ \alpha = -5 \end{cases}$$

پس $m = 5$. بنابراین معادله‌ها به صورت زیر هستند:

$$x^2 + 6x + m = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+5) = 0$$

$$x^2 + 2x - 3m = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+5) = 0$$

پس جواب‌های غیرمشترک دو معادله $x = 3$ و $x = -1$ هستند که اختلاف آن‌ها برابر ۴ است.

۲۳۲۳ باید مقدارهای صحیح x را پیدا کنیم که نابرابری‌های زیر درست باشند:

$$-2 < \frac{2}{x^2 - 3x + 2} < 0$$

ابتدا نامعادله سمت راست را حل می‌کنیم:

چون صورت کسر $\frac{2}{x^2 - 3x + 2}$ مثبت است، خود کسر وقتی منفی است که مخرجش

منفی باشد.

اکنون توجه کنید که جدول تعیین علامت عبارت $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

به صورت زیر است:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		+	-	+

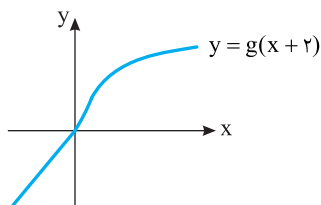
پس جواب‌های واقع در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ عبارت‌اند از $x = -\frac{\pi}{24}$, $x = \frac{7\pi}{24}$ $k=0 \Rightarrow$ که مجموع آن‌ها برابر است با $\frac{\pi}{4}$.

۲۳۳۱۲ توجه کنید که از روی نمودار معلوم می‌شود که فقط $g(2)$ برابر صفر است. در نتیجه

$$g(f(g(x+2))) = 0 \Rightarrow f(g(x+2)) = 2 \Rightarrow \left| \frac{1}{2}g(x+2) - 1 \right| = 2$$

$$|g(x+2) - 2| = 4 \Rightarrow g(x+2) - 2 = \pm 4 \Rightarrow g(x+2) = 6 \text{ یا } g(x+2) = -2$$

اکنون توجه کنید که نمودار تابع $y = g(x+2)$ به صورت زیر است:



پس خط‌های $y = -2$ و $y = 6$ هر کدام نمودار تابع $y = g(x+2)$ را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کنند. بنابراین معادله مورد نظر دو جواب دارد.

۲۳۳۲۱ چون نمودار تابع خطی f^{-1} از نقطه‌های $(0, \pi)$ و $(m, 0)$ گذشته است، پس شیب آن برابر است با $-\frac{\pi}{m}$. پس ضابطه تابع f^{-1} به صورت زیر است:

$$f^{-1}(x) - 0 = -\frac{\pi}{m}(x - m) \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{\pi}{m}x + \pi$$

اکنون ضابطه تابع f را پیدا می‌کنیم:

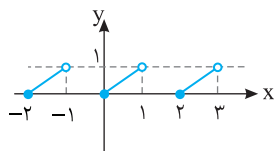
$$y = -\frac{\pi}{m}x + \pi \Rightarrow x = \frac{y - \pi}{-\frac{\pi}{m}} = -\frac{m}{\pi}y + m$$

در نتیجه $f(x) = -\frac{m}{\pi}x + m$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi}{m}x + \pi}{-\frac{m}{\pi}x + m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi}{m}x}{-\frac{m}{\pi}x} = \frac{\pi^2}{m^2}$$

در نتیجه $\frac{\pi^2}{m^2} = \pi \Rightarrow m^2 = \pi \xrightarrow{m < 0} m = -\sqrt{\pi}$

۲۳۳۳۱ ابتدا توجه کنید که نمودار تابع $y = x - [x]$ با شرط اینکه $[x]$ زوج باشد به صورت زیر است:



بنابراین نمودار تابع f وقتی که $[x]$ زوج است به همین صورت است. چون تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس در نقطه‌های $x = -1$ و $x = 0$ نیز پیوسته است. از طرف دیگر تابع f روی بازه $[-1, 0]$ خطی است و باید از نقطه‌های $(-1, 1)$ و $(0, 0)$ عبور کند. پس ضابطه تابع f روی این بازه به صورت زیر است:

$$y - 0 = \frac{1 - 0}{-1 - 0}(x - 0) \Rightarrow y = -x$$

در نتیجه باید تساوی $|x - [x - a]| = -x$ به ازای هر x در بازه $[-1, 0]$ درست باشد. $x = 0 \Rightarrow |0 - [-a]| = 0 \Rightarrow [-a] = 0 \Rightarrow -a < 1 \Rightarrow -1 < a \leq 0$ که چون $a < -1$ ، به تناقض رسیده‌ایم، یعنی هیچ مقداری برای a قابل قبول نیست.

اکنون توجه کنید که در مثلث قائم‌الزاویه ABC ,

$$\sin \beta = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos \beta = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

همچنین، در مثلث قائم‌الزاویه AHD ,

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{HD}{AD} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos(\alpha + \beta) = \frac{AH}{AD} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

بنابراین

$$\cos \alpha = \cos((\alpha + \beta) - \beta) = \cos(\alpha + \beta) \cos \beta + \sin(\alpha + \beta) \sin \beta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3}{5\sqrt{2}} + \frac{2}{5\sqrt{2}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۳۲۹۳ از روی نمودار معلوم می‌شود که دوره تناوب تابع برابر است با $\frac{2\pi}{3} - (-\frac{2\pi}{3}) = \frac{4\pi}{3}$. از طرف دیگر دوره تناوب تابع برابر است با $\frac{2\pi}{|c|}$. در نتیجه

$$\frac{2\pi}{|c|} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow |c| = 1 \Rightarrow c = \pm 1$$

چون نمودار تابع $f(x) = a + b \cos(cx - \frac{\pi}{3})$ از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس

$$f(0) = 0 \Rightarrow a + b \cos(-\frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow b = -2a$$

اکنون توجه کنید که مقدار ماکزیمم تابع برابر است با $a + |b|$ و از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که این مقدار برابر ۱ است. در نتیجه $a + |b| = 1$. بنابراین

$$\begin{cases} b = -2a \\ a + |b| = 1 \end{cases} \Rightarrow a + 2|a| = 1$$

$$\begin{cases} a > 0 \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow b = -\frac{2}{3} \\ a < 0 \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

اکنون توجه کنید که

$$f(-\frac{2\pi}{3}) < 0 \Rightarrow a + b \cos(-\frac{2\pi c}{3} - \frac{\pi}{3}) < 0$$

$$f(\frac{4\pi}{3}) < 0 \Rightarrow a + b \cos(\frac{4\pi c}{3} - \frac{\pi}{3}) < 0$$

اگر $c = 1$ ، آن‌گاه

$$a + b \cos(-\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) < 0 \Rightarrow a - b < 0 \Rightarrow a < b$$

$$a + b \cos(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) < 0 \Rightarrow a - b < 0 \Rightarrow a < b$$

پس در این حالت $a = -1$ و $b = 2$ قابل قبول است.

اگر $c = -1$ ، آن‌گاه $a + b \cos(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) < 0 \Rightarrow a + \frac{b}{2} < 0$

ولی می‌دانیم $a + \frac{b}{2} = 0$. پس این حالت قابل قبول نیست.

بنابراین $a = -1$ ، $b = 2$ و $c = 1$. پس $b(c - a) = 4$.

۲۳۳۰۴ ابتدا توجه کنید که $\frac{1}{\lambda} \sqrt{\pi} + x + \frac{3\pi}{\lambda} - x = \frac{5\pi}{2}$ بنابراین

$$\cos(\frac{1}{\lambda} \sqrt{\pi} + x) = \cos(\frac{5\pi}{2} - (\frac{3\pi}{\lambda} - x)) = \sin(\frac{3\pi}{\lambda} - x)$$

در نتیجه معادله مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید

$$\sin(\frac{3\pi}{\lambda} - x) \cos(\frac{3\pi}{\lambda} - x) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin(2(\frac{3\pi}{\lambda} - x)) = \frac{1}{4}$$

$$\sin(\frac{3\pi}{\lambda} - 2x) = \frac{1}{2} = \sin(\frac{\pi}{6})$$

در نتیجه

$$\begin{cases} \frac{3\pi}{\lambda} - 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \frac{3\pi}{\lambda} - 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -k\pi + \frac{7\pi}{24}, k \in \mathbb{Z} \\ x = -k\pi - \frac{\pi}{24}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به جدول تغییرات زیر برای تابع S ، بیشترین مقدار این تابع به ازای $m=2+\sqrt{5}$ رخ می‌دهد.

m	$-\infty$	$2-\sqrt{5}$	$2+\sqrt{5}$	$+\infty$
$S'(m)$		-	+	-
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		min	max	

۲۳۳۴ ابتدا توجه کنید که $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ و

$$f(x) = \frac{x}{1-x|x|} = \begin{cases} \frac{x}{1-x^2} & x \geq 0, x \neq 1 \\ \frac{x}{1+x^2} & x \leq 0 \end{cases}$$

به علاوه، تابع f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته است. اکنون اگر $x \neq 1$ ، آنگاه ضابطه تابع f' به صورت زیر است:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} & x > 0, x \neq 1 \\ \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} & x > 0, x \neq 1 \\ \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & x < 0 \end{cases}$$

از طرف دیگر،

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} = 1 \Rightarrow f'_+(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 1 \Rightarrow f'_-(0) = 1$$

پس $f'(0) = 1$. بنابراین تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق پذیر است. همچنین

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 1: 1+x^2 = 0 \\ x < 0: 1-x^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

پس تنها نقطه‌ای که مشتق تابع f در آن برابر صفر است، $x = -1$ است و تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد.

۲۳۳۵ به کمک تعریف مشتق، مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطه

$$x = \frac{3}{4} \text{ را به دست می‌آوریم:}$$

$$f'_+\left(\frac{3}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{3}{4}\right)}{x - \frac{3}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^+} \frac{(4x-3)\sqrt{ax}}{x - \frac{3}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^+} 4\sqrt{ax}$$

$$= 4\sqrt{\frac{3a}{4}} = 2\sqrt{3a}$$

$$f'_-\left(\frac{3}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{3}{4}\right)}{x - \frac{3}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^-} \frac{-(4x-3)\sqrt{ax}}{x - \frac{3}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^-} (-4\sqrt{ax})$$

$$= -4\sqrt{\frac{3a}{4}} = -2\sqrt{3a}$$

پس شیب نیم خط مماس راست در نقطه $x = \frac{3}{4}$ برابر $2\sqrt{3a}$ و شیب نیم خط مماس

چپ در این نقطه برابر $-2\sqrt{3a}$ است. در نتیجه

$$2\sqrt{3a} - (-2\sqrt{3a}) = 2\sqrt{6} \Rightarrow 4\sqrt{3a} = 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt{3a} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow 3a = \frac{6}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۲۳۳۶ توجه کنید که دلتای چندجمله‌ای f مثبت است. در واقع

$$\Delta = (2-m)^2 + 2(m^2+1) > 0$$

از طرف دیگر $S = \alpha + \beta = \frac{m-2}{m^2+1}$. پس باید m را طوری پیدا کنیم که تابع S

بیشترین مقدار شود. اکنون توجه کنید که

$$S'(m) = \frac{m^2+1-2m(m-2)}{(m^2+1)^2} = \frac{-m^2+4m+1}{(m^2+1)^2}$$

$$S'(m) = 0 \Rightarrow m^2 - 4m - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 + \sqrt{5} \\ m = 2 - \sqrt{5} \end{cases}$$