

جلد دوم: پاسخ‌های تشریحی

جامع ریاضی ۱ و حسابان

+ موج آزمون ویراست دوم

رشته ریاضی

کازم اجلالی، ارشک حمیدی



انتشرالگو

◆ فصل اول: پاسخ سؤال‌های دست‌گرمی

پاسخ دست‌گرمی‌ها ۲

◆ فصل دوم: پاسخ آزمون‌ها

پاسخ آزمون‌های فصل اول ۳۴

پاسخ آزمون‌های فصل دوم ۷۱

پاسخ آزمون‌های فصل سوم ۱۱۷

پاسخ آزمون‌های فصل چهارم ۱۴۵

پاسخ آزمون‌های فصل پنجم ۱۷۳

پاسخ آزمون‌های فصل ششم ۲۰۷

پاسخ آزمون‌های فصل هفتم ۲۱۱

پاسخ آزمون‌های فصل هشتم ۲۲۳

پاسخ آزمون‌های فصل نهم ۲۳۵

پاسخ آزمون‌های فصل دهم ۲۵۱

پاسخ آزمون‌های فصل یازدهم ۲۶۳

پاسخ آزمون‌های فصل دوازدهم ۲۷۷

پاسخ آزمون‌های فصل سیزدهم ۲۸۱

فصل اول

پاسخ سؤال‌های
دست‌گرمی

پاسخ سؤال‌های دست‌گرمی



۱- گزینه ۲ از تساوی دو زوج مرتب نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} a+2b=-1 \\ 2a-b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow a-b=2$$

۲- گزینه ۳ از هریک از عددهای ۱ و ۲ دو پیکان خارج شده است، پس

$$a+b=2 \text{ و } a-b=6 \text{ که نتیجه می‌شود } a=4 \text{ و } b=-2. \text{ بنابراین } ab=-8.$$

۳- گزینه ۱ با توجه به زوج‌های مرتب (۳، ۴) و (۳، m^2) نتیجه

می‌شود $m^2=4$ ، پس $m=\pm 2$. با توجه به زوج‌های مرتب (۴، $m+n$) و (۴، $2n+1$) نتیجه می‌شود $m+n=2n+1$ ، پس $n=m-1$. اگر $m=2$ ،

آن‌گاه $n=1$ و $f=\{(3,4), (3,2), (4,3)\}$ که به خاطر دو زوج مرتب (۳، ۴) و (۳، ۲) که عضو رابطه هستند، این رابطه، تابع نیست. اگر $m=-2$ ،

آن‌گاه $n=-3$ و $f=\{(3,4), (-9,-2), (4,-5)\}$. بنابراین رابطه f ،

تابع است، پس $mn=6$.

۴- گزینه ۱ برای اینکه برد تابع f تک‌عضوی باشد باید اعداد $3m$ و

$2m+n$ یکسان باشند:

$$3m=6 \Rightarrow m=2, \quad 2m+n=6 \xrightarrow{m=2} 4+n=6 \Rightarrow n=2$$

بنابراین $mn=4$.

۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f(x)=4x+4 \Rightarrow \begin{cases} f(\frac{x}{y})=4(\frac{x}{y})+4=2x+4 \\ f(\frac{x}{f})=4(\frac{x}{f})+4=x+4 \end{cases}$$

$$f(\frac{x}{y})-f(\frac{x}{f})=2x+4-(x+4)=x \text{ بنابراین}$$

۶- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $\frac{2}{x-1}=t$ ، آن‌گاه $\frac{x-1}{2}=\frac{1}{t}$ و $t \neq 0$.

$$\text{پس } x=\frac{2}{t}+1=\frac{2+t}{t} \text{ به این ترتیب}$$

$$f(\frac{2}{x-1})=\frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f(t)=\frac{\frac{2+t}{t}+1}{\frac{2+t}{t}-1}=\frac{2+t}{t}=\frac{2+t}{t}=t+1$$

بنابراین اگر $x \neq 0$ ، آن‌گاه $f(x)=x+1$.

۷- گزینه ۴ چون $f(2)-f(4)=\frac{2}{5}$ ، پس ابتدا مقادیر $f(2)$ و

$f(4)$ را حساب می‌کنیم:

$$2 < 4 \Rightarrow f(2)=k \times 2 + 4 = 2k + 4, \quad 4 \geq 4 \Rightarrow f(4)=\frac{2}{5} \times 4 = \frac{8}{5}$$

بنابراین

$$f(2)-f(4)=\frac{2}{5} \Rightarrow 2k+4-\frac{8}{5}=\frac{2}{5} \Rightarrow 2k=\frac{2}{5}+\frac{8}{5}-4=-2$$

پس $2k=-2$ ، یعنی $k=-1$.

۸- گزینه ۳ برای اینکه تابع ثابت باشد، باید فقط یک عضو در برد آن

$$\begin{cases} a-b=2 \\ 3a-7b=2 \end{cases} \text{ وجود داشته باشد. با توجه به آنکه } f(1)=2 \text{، پس}$$

$$a=3 \text{ و } b=1. \text{ در نتیجه } a+b=4.$$

۹- گزینه ۲ راه‌حل اول توجه کنید که چون تابع f همانی است، پس

$$f(x-4)=x-4 \text{ بنابراین}$$

$$(2a-7)x+b+1=x-4 \Rightarrow \begin{cases} 2a-7=1 \Rightarrow a=4 \\ b+1=-4 \Rightarrow b=-5 \end{cases}$$

$$\text{در نتیجه } f(a+b)=f(-1)=-1.$$

راه‌حل دوم اگر در تساوی داده شده قرار دهیم $x=\frac{1}{p}$ ، به دست می‌آید

$$f(-\frac{1}{p})=(2a-7) \times \frac{1}{p} + b + 1 \Rightarrow -\frac{1}{p} = a - \frac{7}{p} + b + 1 \Rightarrow a+b=-1$$

۱۰- گزینه ۳ ضابطه تابع f به صورت زیر است:

$$f(x)=ax^2-3ax+x^2-bx+b=(a+1)x^2-(3a+b)x+b$$

برای اینکه تابع f خطی باشد، باید ضابطه آن یک چندجمله‌ای درجه اول باشد. پس

$$a+1=0 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow f(x)=(3-b)x+b$$

$$\text{در نتیجه } f(1)=3-b+b=3.$$

۱۱- گزینه ۲ مقادیر $x=0$ و $x=2$ ، $x=3$ و $x=0$ را در ضابطه تابع قرار می‌دهیم:

$$f(3)=9a+3b+c, \quad f(2)=4a+2b+c, \quad f(0)=c$$

بنابراین

$$f(3)-2f(2)+2f(0)=9a+3b+c-8a-4b-2c+2c=a-b+c=f(-1)$$

۱۲- گزینه ۴ تساوی را به شکل $2x+f(x)=4x \times f(x)-12$

$$\text{می‌نویسیم. در نتیجه } (4x-1) \times f(x)=2x+12, \text{ پس } f(x)=\frac{2x+12}{4x-1}$$

۱۳- گزینه ۲ طول رأس سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ ، $x=-\frac{b}{2a}$

است. بنابراین طبق معادله داده شده $x=-\frac{2}{2a}$ طول رأس سهمی است. پس

$$\frac{-2}{2a}=1 \text{ و در نتیجه } a=-1. \text{ مختصات رأس سهمی در معادله آن صدق می‌کند، پس}$$

$$-1=a+2+b \xrightarrow{a=-1} -1=-1+2+b \Rightarrow b=-2$$

$$\text{بنابراین } ab=2.$$

۱۴- گزینه ۱ چون سهمی در نقاطی به طول ۱- و ۵ محور طول‌ها را

قطع کرده است، این نقاط عرض یکسان دارند. پس معادله محور تقارن به صورت

$$x=\frac{5-1}{2}=2 \text{ است که نقاط } (0,-1) \text{ و } (5,0) \text{ نسبت به آن قرینه یکدیگرند.}$$

۱۵- گزینه ۱ از روی شکل معلوم می‌شود که $c=5$. همچنین با توجه به

$$\text{معادله داده شده، طول رأس سهمی برابر } x=-\frac{b}{2} \text{ است، پس } -\frac{b}{2}=-2.$$

$$\text{بنابراین } b=4, \text{ در نتیجه } b-c=-1.$$

۲۱- گزینه ۲) توجه کنید که

$$D_f = \{x | 9 - x^2 \geq 0, x^2 - 1 > 0\}$$

$$9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1$$

از اشتراک ناحیه‌های فوق معلوم می‌شود که $D_f = [-3, -1) \cup (1, 3]$ پس
عددهای صحیح ± 2 و ± 3 در دامنه تابع هستند.

۲۲- گزینه ۳) راه حل اول از $-4 \leq x \leq 4$ نتیجه می‌گیریم
 $-8 \leq -2x \leq 8$ ، پس $-5 = 3 - 8 \leq 3 - 2x \leq 3 + 8 = 11$ بنابراین برد تابع f
بازه $[-5, 11]$ است.

راه حل دوم چون $f(x) = -2x + 3$ یک تابع خطی است که ضریب x در آن
منفی است برد آن با توجه به دامنه برابر $[f(4), f(-4)]$ است که برابر
 $[-5, 11]$ می‌شود.

۲۳- گزینه ۳) ابتدا توجه کنید که $f(x) = x^2 + 2x - 2 = (x+1)^2 - 3$

از طرف دیگر، اگر $x \in [-4, 5]$ آن‌گاه

$$-4 \leq x \leq 5 \Rightarrow -3 \leq x+1 \leq 6 \Rightarrow 0 \leq (x+1)^2 \leq 36 \Rightarrow -3 \leq (x+1)^2 - 3 \leq 33$$

بنابراین بزرگ‌ترین عضو برد f برابر ۳۳ است.

۲۴- گزینه ۴) در مورد گزینه (۴)، $D_f = D_g = [0, 1]$ و اگر $x \in [0, 1]$

آن‌گاه $f(x) = g(x)$ ، بنابراین این دو تابع برابرند. در مورد گزینه‌های دیگر، یا
دامنه تابع‌ها برابر نیست، یا $f(x) \neq g(x)$.

گزینه (۱) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ ، $D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_f \neq D_g$

گزینه (۲) $D_f = D_g = \mathbb{R}$ ، $f(x) = |x|$ ، $g(x) = x \Rightarrow f(x) \neq g(x)$

گزینه (۳) $D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ ، $D_g = [1, +\infty) \Rightarrow D_f \neq D_g$

۲۵- گزینه ۱) توجه کنید که $S = \pi r^2$ و در نتیجه $r = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}}$ بنابراین

$$P = 2\pi r = 2\pi \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}} \right) \Rightarrow P(S) = 2\sqrt{\pi} \sqrt{S} = 2\sqrt{\pi} S$$

۲۶- گزینه ۱) اگر طول ضلع مربع را a فرض کنیم، شعاع دایره $\frac{a}{2}$ و

محیط مربع برابر $4a$ می‌شود. بنابراین

$$P = 4a \Rightarrow a = \frac{P}{4}, \text{ مساحت دایره } = \pi \frac{a^2}{4}, \text{ مساحت مربع } = a^2$$

$$a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = a^2 \left(\frac{4 - \pi}{4} \right)$$

$$= \frac{P^2}{16} \left(\frac{4 - \pi}{4} \right) = \left(\frac{4 - \pi}{64} \right) P^2$$

۲۷- گزینه ۳) معادله نیم‌دایره را پیدا می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \xrightarrow{y \geq 0} y = \sqrt{1 - x^2}$$

بنابراین طول مستطیل $2x$ و عرض آن $\sqrt{1 - x^2}$ می‌شود و محیط آن برابر

$$\text{است با } P(x) = 2(2x + \sqrt{1 - x^2}) = 4x + 2\sqrt{1 - x^2}$$

۲۸- گزینه ۳) توجه کنید که

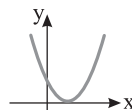
$$\begin{aligned} (f+g)(2) &= f(2) + g(2) = -1 - 2 = -3 \\ (f-g)(1) &= f(1) - g(1) = 2 - (-1) = 3 \end{aligned} \Rightarrow \frac{(f+g)(2)}{(f-g)(1)} = \frac{-3}{3} = -1$$

۱۶- گزینه ۳) توجه کنید که محور تقارن سهمی مورد نظر خط

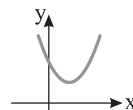
$x = -\frac{b}{2a}$ است. چون علامت a و b فرق می‌کند، پس $-\frac{b}{2a} > 0$ و در نتیجه

محور تقارن از ناحیه‌های اول و چهارم می‌گذرد (گزینه‌های (۱) و (۳)). همچنین،
اگر سهمی از مبدأ مختصات بگذرد، آن‌گاه $c = 0$ ، که درست نیست. بنابراین
سهمی مورد نظر می‌تواند به صورت گزینه (۳) باشد.

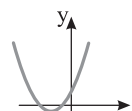
۱۷- گزینه ۳) نمودار تابع در حالت‌های زیر از ناحیه چهارم نمی‌گذرد:



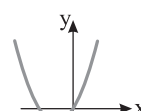
$$\Delta = 0$$



$$\Delta < 0$$



$$\Delta > 0, \frac{c}{a} > 0, -\frac{b}{a} < 0$$



$$\Delta > 0, c = 0, -\frac{b}{a} < 0$$

بنابراین Δ را حساب می‌کنیم: $\Delta = m^2 - 4(4 - m^2) = 5m^2 - 16$ اکنون
توجه کنید که

$$-4 \leq m \leq 4 \Rightarrow -16 \leq 5m^2 - 16 \leq 16 \Rightarrow \frac{-4}{\sqrt{5}} \leq m \leq \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow 5m^2 - 16 > 0 \Rightarrow m < -\frac{4}{\sqrt{5}} \text{ یا } m > \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{c}{a} \geq 0 \Rightarrow 4 - m^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq m \leq 2 \\ -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow -m < 0 \Rightarrow m > 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک گیری از بازه‌های به دست آمده}} \frac{4}{\sqrt{5}} < m \leq 2$$

اجتماع محدوده‌های به دست آمده در همه حالت‌ها برابر است با

$$-\frac{4}{\sqrt{5}} \leq m \leq 2$$

۱۸- گزینه ۲) محیط شکل برابر است با

$$4x + 4y = 40 \Rightarrow y = 10 - x$$

مساحت شکل برابر است با

$$S = 2xy + xy = 3xy = 3x(10 - x) = -3x^2 + 30x$$

بیشترین مقدار این عبارت درجه دوم برابر $-\frac{\Delta}{4a}$ است. بنابراین

$$S_{\max} = -\frac{900}{4(-3)} = 75$$

۱۹- گزینه ۳) اعدادی که جواب معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، در دامنه

تابع f قرار ندارند. با توجه به معادله مجموع این اعداد برابر $S = -\frac{b}{a} = 3$ است.

۲۰- گزینه ۴) اگر دامنه این تابع $\mathbb{R}$ باشد، باید مخرج $f(x)$ به ازای

تمام مقادیر حقیقی x مخالف صفر باشد، پس

$$x^2 + kx + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \Delta = k^2 - 4 < 0$$

$$k^2 < 4 \Rightarrow |k| < 2 \Rightarrow -2 < k < 2$$

با توجه به مقادیر داده شده گزینه (۴) درست است.

۳۴- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $(f \circ f)(3) = f(f(3))$ از طرف دیگر،

$$f(3) = 3^2 + 4 = 13, \quad f(f(3)) = f(13) = \frac{13-1}{2} = 6$$

بنابراین $(f \circ f)(3) = 6$.

۳۵- گزینه ۳ ابتدا $(f \circ g)(a)$ و $(g \circ f)(a)$ را به دست می‌آوریم

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(3a-2) = 2(3a-2) + 3 = 6a-1$$

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(2a+3) = 3(2a+3) - 2 = 6a+7$$

بنابراین معادله زیر به دست می‌آید

$$6a-1+6a+7=2a \Rightarrow 12a=-6 \Rightarrow a=-\frac{3}{5}$$

۳۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+2x) = a(x^2+2x)+1 = ax^2+2ax+1$$

بنابراین باید مجموعه جواب‌های معادله $ax^2+2ax+1=2$ دو عضوی باشد.

یعنی باید Δ معادله $ax^2+2ax-1=0$ مثبت باشد:

$$\Delta = (2a)^2 - 4a(-1) = 4a^2 + 4a > 0 \Rightarrow 4a(a+1) > 0 \Rightarrow a > 0 \text{ یا } a < -1$$

۳۷- گزینه ۱ به محاسبات زیر توجه کنید

$$(f \circ g)(-3) = f(g(-3)) = f(1) = \sqrt{3}$$

$$(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(0) = 2$$

$$(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(1) = \sqrt{3}$$

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3) \text{ تعریف نشده}$$

$$f \circ g = \{(-3, \sqrt{3}), (-2, 2), (-1, \sqrt{3})\}$$

۳۸- گزینه ۲ دامنه تابع $f \circ g$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{0 \leq x \leq 2, -1 \leq 5-2x \leq 3\}$$

از نامعادله $-1 \leq 5-2x \leq 3$ نتیجه می‌شود $-6 \leq -2x \leq -2$ پس $1 \leq x \leq 3$.

$$D_{f \circ g} = \{0 \leq x \leq 2, 1 \leq x \leq 3\} = [1, 2]$$

۳۹- گزینه ۳ دامنه تابع‌های f و g به ترتیب $D_f = [1, +\infty)$ و

$$D_g = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \mid x \geq 1, -\sqrt{3} \leq \sqrt{x-1} \leq \sqrt{3}\}$$

از نامعادله $-\sqrt{3} \leq \sqrt{x-1} \leq \sqrt{3}$ نتیجه می‌شود $x-1 \leq 3$ پس $x \leq 4$.

$$D_{g \circ f} = \{x \mid x \geq 1, x \leq 4\} = [1, 4]$$

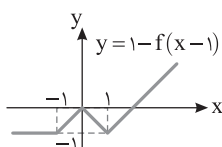
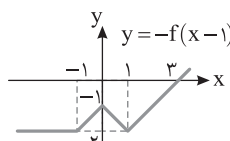
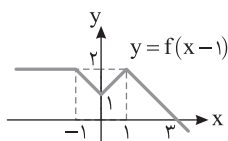
۴۰- گزینه ۲ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست انتقال

می‌دهیم تا نمودار تابع $y = f(x-1)$ به دست بیاید. سپس قرینه این نمودار را

نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -f(x-1)$ به دست بیاید.

در آخر، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع

$$y = 1 - f(x-1)$$



۲۹- گزینه ۱ توجه کنید که

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x \mid x \in D_f \cap D_g, g(x) \neq 0\} = \{1, 2, 3\}$$

بنابراین

$$\left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{6}{-1} = -6, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{0}{9} = 0$$

بنابراین مجموع مقادیر تابع $\frac{f}{g}$ برابر ۳- است.

۳۰- گزینه ۱ راه حل اول توجه کنید که

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2+3x+2) - (x^2+2x+1) = x+1$$

$$(f-g)(x-1) = x-1+1 = x$$

راه حل دوم چون $f(1) = 6$ و $g(1) = 4$ ، پس $(f-g)(1) = 6-4 = 2$. اکنون اگر

در عبارت $(f-g)(x-1)$ به جای x قرار دهیم ۲، $(f-g)(1)$ به دست

می‌آید که برابر ۲ است. تنها در عبارت گزینه (۱)، با قرار دادن $x=2$ ، حاصل ۲

می‌شود.

۳۱- گزینه ۲ راه حل اول دامنه تابع f به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{cases} 8-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 8 \\ x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \end{cases} \Rightarrow 3 < x \leq 8 \Rightarrow D_f = (3, 8]$$

دامنه تابع g به صورت زیر به دست می‌آید

x	$-\infty$	3	5	$+\infty$
$\frac{x-3}{5-x}$		$-$	$+$	$-$

$$\Rightarrow D_g = [3, 5)$$

بنابراین دامنه تابع $f \times g$ به صورت زیر است

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = (3, 8] \cap [3, 5) = (3, 5)$$

راه حل دوم با توجه به گزینه‌ها امتحان می‌کنیم که آیا عدد ۶ در دامنه تابع

$f \times g$ قرار دارد یا نه. چون $x=6$ عبارت زیر رادیکال در تابع g را منفی

می‌کند، پس $x=6$ در دامنه تابع g نیست و در نتیجه در دامنه $f \times g$ هم

نیست. پس گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) نمی‌توانند جواب باشند.

۳۲- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$g(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$$

بنابراین

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} 2x-1-(x-1) & x \geq 1 \\ 3x+1-(-x+1) & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ 4x & x < 1 \end{cases}$$

۳۳- گزینه ۳ به محاسبات زیر توجه کنید

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(-1) = 2$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(-1) = 2$$

$$(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(3) = 2$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(-2) = 4$$

$$g \circ f = \{(1, 2), (2, 2), (-1, 2), (3, 4)\}$$

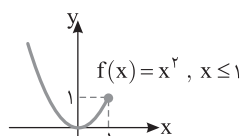
به همین ترتیب باید مؤلفه اول دوزوج مرتب $(10, 3)$ و $(1+b, 3)$ برابر باشند،

$$10 = 1+b \Rightarrow b=9$$

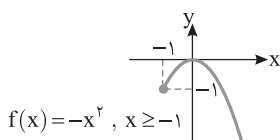
بنابراین $a+b=11$.

۴۷- گزینه ۳ با توجه به نمودار تابع های داده شده، واضح است که تابع

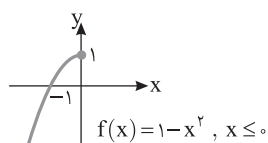
$f(x)=1-x^2, x \leq 0$ یک به یک است.



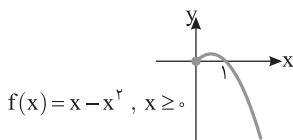
گزینه (۱)



گزینه (۲)



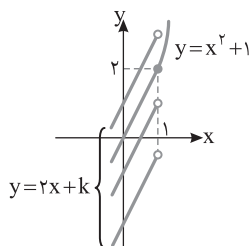
گزینه (۳)



گزینه (۴)

۴۸- گزینه ۴ راه حل اول نمودار تابع به ازای مقادیر مختلف k به

شکل زیر است



واضح است که بیشترین مقدار تابع $y=2x+k$ به ازای $x < 1$ نباید از ۲

بیشتر باشد، پس

$$2+k \leq 2 \Rightarrow k \leq 0$$

راه حل دوم اگر $x \geq 1$ ، آن گاه تابع $g(x)=x^2+1$ یک به یک است و

$R_g = [2, +\infty)$ و اگر $x < 1$ ، آن گاه تابع $h(x)=2x+k$ یک به یک است و

$R_h = (-\infty, 2+k)$. در نتیجه برای اینکه تابع f یک به یک باشد باید

$$2+k \leq 2 \Rightarrow k \leq 0$$

پس $R_g \cap R_h = \emptyset$

۴۹- گزینه ۳ تابع گزینه (۱) اکیداً نزولی نیست، زیرا $-3 < -1$ ، اما

$f(-3) < f(-1)$ تابع گزینه (۲) اکیداً نزولی نیست، زیرا $0 < 1$ ، اما

$f(0) = f(1)$ تابع گزینه (۳) اکیداً نزولی است، زیرا $-3 < -1 < 1$ و

$f(-3) > f(-1) > f(1)$ تابع گزینه (۴) اکیداً نزولی نیست، زیرا $-2 < -1$ ،

اما $f(-2) = f(-1)$

۵۰- گزینه ۳ چون تابع f نزولی است و $1 < 2 < 3$ ، پس

$$f(1) \geq f(2) \geq f(3) \Rightarrow 2a+1 \geq a-2 \geq 2-a$$

اکنون توجه کنید که

$$2a+1 \geq a-2 \Rightarrow a \geq -3 \quad (1), \quad a-2 \geq 2-a \Rightarrow a \geq 2 \quad (2)$$

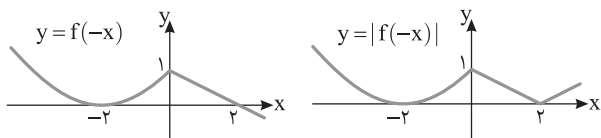
اشتراک جواب های نامعادله های (۱) و (۲) می شود $a \geq 2$.

۴۱- گزینه ۳ ابتدا نمودار تابع $y=f(-x)$ را رسم می کنیم. برای این کار،

قرینه نمودار f را نسبت به محور y رسم می کنیم. اکنون، برای رسم نمودار تابع

$y=|f(-x)|$ ، قرینه قسمتی از نمودار تابع $y=f(-x)$ را که زیر محور x است

نسبت به محور x رسم می کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می کنیم.



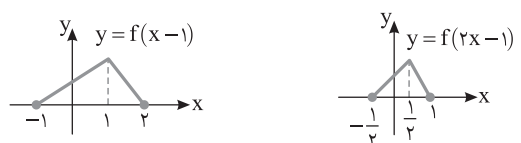
۴۲- گزینه ۲ برای رسم نمودار تابع $y=f(2x-1)$ کافی است ابتدا

نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم تا نمودار تابع

$y=f(x-1)$ رسم شود. سپس در نمودار اخیر طول نقاط را بر ۲ تقسیم

می کنیم تا نمودار تابع $y=f(2x-1)$ به دست آید. توجه کنید که با این کار

نمودار در راستای محور طول ها منقبض می شود.



۴۳- گزینه ۲ اگر نمودار تابع $g(x)=f(2x)-1$ را یک واحد به سمت

راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(2(x-1))-1$ به دست می آید. اگر طول

نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=f(2(2x-1))-1=f(4x-2)-1$

به دست می آید و اگر عرض نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع

$y=2(f(4x-2)-1)$ به دست می آید. پس ضابطه تابعی که نمودار آن

به دست آمده به صورت $y=2f(4x-2)-2$ است.

۴۴- گزینه ۱ ابتدا نمودار تابع $y=|x|$ را رسم می کنیم و آن را دو

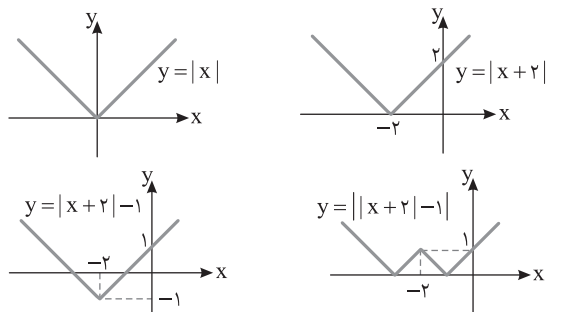
واحد به سمت چپ منتقل می کنیم تا نمودار تابع $y=|x+2|$ به دست آید. این

نمودار را یک واحد به پایین منتقل می کنیم تا نمودار تابع $y=|x+2|-1$ رسم

شود. اکنون قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به این محور

قرینه می کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می کنیم تا نمودار تابع

$y=||x+2|-1|$ رسم شود.



۴۵- گزینه ۳ در تابع $\{(1, 3), (2, 4), (5, 7), (6, 1)\}$ هر مؤلفه دوم

متناظر دقیقاً یک مؤلفه اول است. یعنی هیچ دو زوج مرتبی مؤلفه دوم یکسان

ندارند، پس این تابع یک به یک است.

۴۶- گزینه ۲ چون مؤلفه دوم زوج مرتب های $(a, 1)$ و $(4-a, 1)$

یکسان هستند، پس باید مؤلفه های اول آن ها هم برابر باشند،

$$4-a=a \Rightarrow a=2$$

راه‌حل دوم چون نمودار تابع f از نقطه $(-3, 21)$ عبور می‌کند، پس نمودار تابع

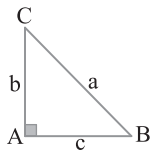
f^{-1} از نقطه $(21, -3)$ عبور می‌کند. اکنون گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱) $f^{-1}(21) = 2 - \sqrt{25} = -3$

گزینه (۲) $f^{-1}(21) = -2 + \sqrt{25} = 3$

گزینه (۳) $f^{-1}(21) = 2 - \sqrt{17}$

گزینه (۴) $f^{-1}(21) = 2 + \sqrt{17}$



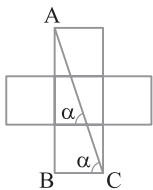
۵۹- گزینه (۲) با توجه به شکل،

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{a} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \frac{2\sqrt{6}}{a} a$$

اکنون طبق قضیه فیثاغورس،

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 25 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{a}\right)^2 a^2 \Rightarrow a^2 = 25 + \frac{24}{a^2} a^2$$

$$\frac{25}{a^2} a^2 = 25 \Rightarrow a^2 = 49 \Rightarrow a = 7$$



۶۰- گزینه (۳) ابتدا توجه کنید

که بنابر قضیه خطوط موازی و مورب،

$$\alpha = \hat{ACB}$$

$$\tan \alpha = \tan \hat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{1} = 3$$

۶۱- گزینه (۲) ابتدا شکل را

به صورت مقابل کامل می‌کنیم. اکنون

توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در

مثلث قائم‌الزاویه ABC ،

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2^2 + 3^2 = 13 \Rightarrow AB = \sqrt{13}$$

در نتیجه، $\triangle ABC: \sin \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

۶۲- گزینه (۴) صورت کسر برابر است با

$$4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$$

بنابراین $A = 0$

۶۳- گزینه (۲) توجه کنید که

$$S_{ABCD} = 2S_{ADC}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} DC \times AD \times \sin \hat{D}\right)$$

$$= 5 \times 4 \times \sin 120^\circ = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

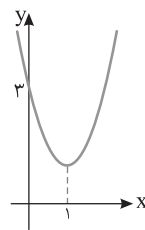
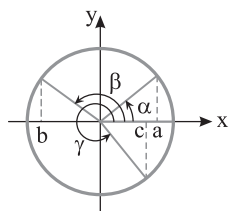
۶۴- گزینه (۲) اگر $18^\circ < \alpha < 27^\circ$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α

در ناحیه سوم قرار دارد.

۶۵- گزینه (۳) از روی شکل

مقابل معلوم می‌شود که $b < 0$ و $a > c$.

بنابراین $a > c > b$



۵۱- گزینه (۲) طول رأس سهمی $y = 2x^2 - 4x + 3$

برابر است با $-\frac{b}{2a} = 1$. از روی نمودار تابع f معلوم است

که این تابع روی بازه $[1, +\infty)$ و هر زیر مجموعه آن اکیداً

صعودی است. از بازه‌های داده شده فقط بازه $(1, 2)$

زیرمجموعه بازه $[1, +\infty)$ است.

۵۲- گزینه (۴) اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را یک واحد به سمت راست

انتقال دهیم، نمودار تابع $y = f(x-1)$ به دست می‌آید. بنابراین، اگر نمودار

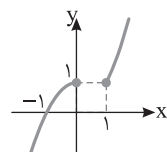
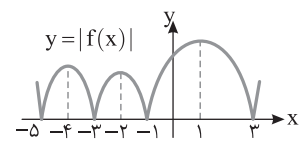
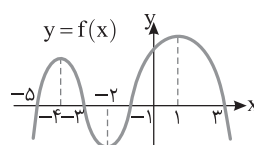
تابع $y = f(x-1)$ را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار تابع

$y = f(x)$ به دست می‌آید. اکنون اگر قرینه قسمتهایی از این نمودار را که زیر

محور x است، نسبت به محور x رسم کنیم و قسمتهایی را که زیر محور x

است حذف کنیم، نمودار تابع $y = |f(x)|$ به دست می‌آید. از روی این نمودار

معلوم است که تابع $y = |f(x)|$ روی بازه $(-2, -1)$ اکیداً نزولی است.



۵۳- گزینه (۱) با توجه به نمودار، تابع f

صعودی است.

۵۴- گزینه (۳) برای اینکه تابعی وارون‌پذیر باشد، باید یک‌به‌یک باشد.

تابع گزینه (۱) یک‌به‌یک نیست، زیرا $f(1) = f(3) = 2$. تابع گزینه (۲)

یک‌به‌یک نیست، زیرا $f(2) = f(5) = 3$. تابع گزینه (۳) یک‌به‌یک است، زیرا

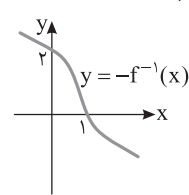
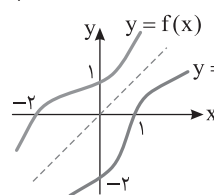
$f(1) = -1$ ، $f(2) = -2$ ، $f(3) = -4$ ، $f(4) = -5$ ، بنابراین مقادیر تابع f

متمايزند. تابع گزینه (۴) هم یک‌به‌یک نیست، زیرا $f(1) = f(3) = 0$.

۵۵- گزینه (۱) ابتدا نمودار تابع f^{-1} را رسم می‌کنیم. برای این کار باید

قرینه نمودار f را نسبت به خط $y = x$ رسم کنیم. سپس نمودار تابع $f^{-1} - f$ را رسم

می‌کنیم. برای این کار باید قرینه نمودار تابع f^{-1} را نسبت به محور x رسم کنیم.



۵۶- گزینه (۲) توجه کنید که

$$(f^{-1} \circ g)(2) = f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(1) = 4$$

$$(g^{-1} \circ f)(3) = g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(4) = 3$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۷ است.

۵۷- گزینه (۲) توجه کنید که $f(1) = 2$ ، پس $f^{-1}(2) = 1$. به این

ترتیب، $f(1) + f^{-1}(2) = 3$.

۵۸- گزینه (۱) راه‌حل اول ابتدا ضابطه تابع f را به صورت

$$y = (x-2)^2 - 4$$

$$(x-2)^2 = y+4 \Rightarrow |x-2| = \sqrt{y+4} \xrightarrow{x < 2}$$

$$2-x = \sqrt{y+4} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{y+4} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+4}$$

$$A = \frac{\tan^2 x + \cot^2 x}{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{\tan^2 x \cos^2 x + \cot^2 x \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\sin^2 x \times \cos^2 x + \cos^2 x \times \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{2 \sin^2 x \cos^2 x}{1} = 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

۷۴- گزینه ۴ راه حل اول مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{1}{\sin^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} = \frac{1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} = \frac{\cos^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} = \frac{\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}{\sin^4 \theta} = \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\sin^4 \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \cot^2 \theta$$

راه حل دوم اگر در عبارت داده شده به جای θ مقدار 3° را قرار دهیم، مقدار عبارت

$$\text{برابر است با } 3 = 9 - 4 - 9 = 16 - 9 = 7. \text{ اگر در گزینه ها به جای } \theta \text{ مقدار } 3^\circ \text{ را قرار دهیم، فقط } \cot^2 \theta \text{ برابر ۳ می شود. تنها گزینه (۴) می تواند درست باشد.}$$

۷۵- گزینه ۳ طرفین تساوی $\tan \alpha + \cot \alpha = 3$ را به توان دو

$$\text{می رسانیم: } \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 \tan \alpha \cot \alpha = 9$$

چون $\tan \alpha \cot \alpha = 1$ ، پس

$$\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 = 9 \Rightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 7$$

۷۶- گزینه ۱ دو طرف تساوی داده شده را بر $\sin x$ تقسیم می کنیم:

$$3 + \frac{2 \cos x}{\sin x} = \frac{3}{\sin x} \Rightarrow 3 + 2 \cot x = \frac{3}{\sin x}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به دست می آید

$$9 + 12 \cot x + 4 \cot^2 x = \frac{9}{\sin^2 x} = 9(1 + \cot^2 x)$$

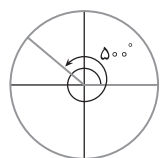
$$9 + 12 \cot x + 4 \cot^2 x = 9 + 9 \cot^2 x \Rightarrow 4 \cot^2 x - 12 \cot x = 0$$

$$\cot x = 0, \cot x = \frac{12}{4}$$

چون $\cos x \neq 0$ ، پس $\cot x \neq 0$ و در نتیجه $\cot x = \frac{12}{4}$

۷۷- گزینه ۴ در تساوی $\frac{D}{18^\circ} = \frac{R}{\pi}$ قرار می دهیم $D = 75^\circ$:

$$\frac{75^\circ}{18^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{5\pi}{12}$$



۷۸- گزینه ۲ راه حل اول 50° را می توان

5° تا 90° به علاوه 5° در نظر گرفت. 5° تا 90°

یعنی 5° تا ربع دایره، پس انتهای کمان روبه رو به

زاویه 50° در ناحیه دوم قرار دارد.

راه حل دوم $50^\circ = 36^\circ + 14^\circ$ و $50^\circ \leq 14^\circ \leq 180^\circ$ ، پس انتهای کمان

روبه رو به زاویه مرکزی 50° در ناحیه دوم قرار دارد.

۷۹- گزینه ۳ ابتدا اندازه زاویه مرکزی AOB را بر حسب رادیان

$$\frac{D}{18^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{2^\circ}{18^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{9}$$

حساب می کنیم:

طول مسیر ماهواره برابر طول کمان AB است که برابر است با

$$l = r \times \theta \Rightarrow AB = 36000 \times \frac{\pi}{9} = 4000\pi \text{ کیلومتر}$$

۶۶- گزینه ۳ با توجه به $\sin \alpha \cos \alpha > 0$ ، مشخص است که

مقادیر $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ هم علامت هستند. با توجه به $\cos \alpha \cot \alpha < 0$ ،

مشخص است که مقادیر $\cos \alpha$ و $\cot \alpha$ مختلف علامت هستند. بنابراین

انتهای کمان روبه رو به زاویه α در ناحیه سوم قرار دارد. در این ناحیه،

$$\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0, \cot \alpha > 0$$

۶۷- گزینه ۱ چون $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ، پس $0 \leq \sin \alpha \leq 1$ و در نتیجه

$$0 \leq \frac{m}{2} - 1 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{m}{2} \leq 2 \Rightarrow 2 \leq m \leq 4$$

۶۸- گزینه ۴ می دانیم $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، بنابراین $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ ،

پس $3 \sin^2 x \leq 3$ و در نتیجه $2 \leq 2 + 3 \sin^2 x \leq 5$. بنابراین کمترین

مقدار عبارت ۲ و بیشترین مقدار آن ۵ است، که حاصل ضرب آن ها ۱۰ می شود.

۶۹- گزینه ۱ با توجه به اینکه محور طول ها با خط مورد نظر زاویه

مثلثاتی 30° تشکیل می دهد، شیب خط برابر $\tan 30^\circ$ یا همان $\frac{\sqrt{3}}{3}$ است.

پس معادله آن به صورت $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ است و چون خط از نقطه $(6, \sqrt{3})$

می گذرد، پس مختصات این نقطه در معادله خط صدق می کنند:

$$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 6 + b \Rightarrow b = -\sqrt{3}$$

پس معادله خط $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$ یا همان $x - \sqrt{3}y - 3 = 0$ است.

۷۰- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\frac{1 - \tan x}{\tan x} = 2 \Rightarrow 1 - \tan x = 2 \tan x \Rightarrow \tan x = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\cot x}{\cot x - 1} = \frac{3}{3 - 1} = \frac{3}{2} \text{ در نتیجه } \cot x = \frac{1}{\tan x} = 3$$

۷۱- گزینه ۲ با توجه به رابطه $\tan \alpha \cot \alpha = 1$ می توان نوشت

$$\left(\frac{1}{2m-1}\right)(m+2) = 1 \Rightarrow 2m-1 = m+2 \Rightarrow m = 3$$

بنابراین $\tan \alpha = \frac{1}{5}$ و $\cot \alpha = 5$ و در نتیجه

$$\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = \frac{1}{25} + 25 = \frac{626}{25}$$

۷۲- گزینه ۴ با توجه به رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ می توان نوشت

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

با توجه به اینکه $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ، مقدار $\cos \alpha$ باید منفی باشد، پس

$$\cos \alpha = -\frac{4}{5}, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ به دست می آید}$$

$$\tan \alpha - \cos \alpha = -\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{1}{20} \text{ بنابراین } \tan \alpha = \frac{5}{4} = -\frac{3}{4}$$

۷۳- گزینه ۱ با استفاده از اتحادهای $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ و

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \cos^3 \frac{\pi}{\lambda} + \cos^3 \frac{3\pi}{\lambda} + \cos^3 \frac{5\pi}{\lambda} + \cos^3 \frac{7\pi}{\lambda} \\ &= -\cos^3 \frac{7\pi}{\lambda} - \cos^3 \frac{5\pi}{\lambda} + \cos^3 \frac{5\pi}{\lambda} + \cos^3 \frac{7\pi}{\lambda} = 0 \end{aligned}$$

۸۶- گزینه ۱ از رابطه‌های نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زاویه‌ها

نتیجه می‌شود

$$\frac{\cos 2^\circ \cos 4^\circ - \sin 2^\circ \sin 4^\circ}{\sin 2^\circ \cos 4^\circ + \sin 4^\circ \cos 2^\circ} = \frac{\cos(2^\circ + 4^\circ)}{\sin(2^\circ + 4^\circ)} = \cot 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

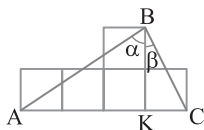
۸۷- گزینه ۴ چون $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

پس

$$\sin 3x \cos 2x + \cos 3x \sin 2x = \sin(3x + 2x) = \sin 5x$$

بنابراین مقدار عددی عبارت مورد نظر به ازای $x = \frac{\pi}{15}$ برابر می‌شود با

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



۸۸- گزینه ۲ از نمادگذاری شکل

مقابل استفاده می‌کنیم. در این صورت، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$\triangle AKB: AB^2 = AK^2 + BK^2 = 3^2 + 2^2 = 13 \Rightarrow AB = \sqrt{13}$$

$$\triangle BKC: BC^2 = BK^2 + CK^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \Rightarrow BC = \sqrt{5}$$

اکنون توجه کنید که $\hat{ABC} = \alpha + \beta$ ، در نتیجه

$$\cos(\hat{ABC}) = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{2}{\sqrt{13}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{13}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}} - \frac{3}{\sqrt{65}} = \frac{1}{\sqrt{65}} = \frac{\sqrt{65}}{65}$$

۸۹- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\sin 25^\circ + \cos 25^\circ = \sqrt{2} \sin(25^\circ + 45^\circ) = \sqrt{2} \sin 70^\circ$$

در نتیجه، چون $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$ ، پس

$$\frac{\sin 25^\circ + \cos 25^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sqrt{2} \sin 70^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sqrt{2} \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \sqrt{2}$$

۹۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\begin{aligned} A &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 15^\circ + \frac{1}{2} \cos 15^\circ \right) \\ &= 2(\cos 30^\circ \sin 15^\circ + \sin 30^\circ \cos 15^\circ) \\ &= 2 \sin(30^\circ + 15^\circ) = 2 \sin(45^\circ) = \sqrt{2} \end{aligned}$$

۹۱- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $\sin \alpha$ مقداری منفی است. پس

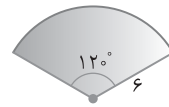
$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \frac{1}{3} = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow 2 \sin^2 \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{3}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (غ.ق.)}$$

۹۲- گزینه ۲ توجه کنید که $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ پس

$$\begin{aligned} \frac{1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}{\cos x} &= \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}{\cos x} = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right)}{\cos x} \\ &= \frac{\sin 2x}{\cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x} = 2 \sin x \end{aligned}$$

۸۰- گزینه ۱ ناحیه مورد نظر قطاعی از دایره به شعاع ۶ است، که

اندازه زاویه قطاع برحسب درجه 12° است. ابتدا اندازه زاویه قطاع را برحسب رادیان حساب می‌کنیم. اگر این اندازه θ 

$$\frac{12^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta}{\pi} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

باشد، آن‌گاه

مساحت قطاعی که در آن $r = 6$ و $\theta = \frac{2\pi}{3}$ برابر است با

$$\frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{2\pi}{3} = 12\pi \text{ م}^2$$

۸۱- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha, & \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha, & \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \end{aligned}$$

$$A = \frac{-2 \sin \alpha - 4 \sin \alpha}{-3 \cos \alpha + \cos \alpha} = \frac{-6 \sin \alpha}{-2 \cos \alpha} = 3 \tan \alpha$$

بنابراین

۸۲- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha, & \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos \alpha \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha, & \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) &= \sin \alpha \end{aligned}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{-\cos \alpha - \cos \alpha}{-\sin \alpha - \sin \alpha} = \frac{-2 \cos \alpha}{-2 \sin \alpha} = \cot \alpha$$

۸۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \sin 135^\circ &= \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 12^\circ &= \cos(180^\circ - 6^\circ) = -\cos 6^\circ = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\sin 135^\circ - \cos 12^\circ}{\sin 135^\circ + \cos 12^\circ} &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} \\ &= \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2 - 1} = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

۸۴- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \sin \frac{7\pi}{6} &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\ \tan \frac{5\pi}{4} &= \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \\ \cot \frac{7\pi}{4} &= \cot\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cot \frac{\pi}{4} = -1 \\ \cos \frac{5\pi}{3} &= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

بنابراین $A = -\frac{1}{2} \times 1 - 1 \times \frac{1}{2} = -1$

۸۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\lambda} + \frac{7\pi}{\lambda} &= \pi \Rightarrow \cos \frac{\pi}{\lambda} = -\cos \frac{7\pi}{\lambda} \\ \frac{3\pi}{\lambda} + \frac{5\pi}{\lambda} &= \pi \Rightarrow \cos \frac{3\pi}{\lambda} = -\cos \frac{5\pi}{\lambda} \end{aligned}$$

۹۸- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=7 \Rightarrow \frac{\tan \frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan \frac{\pi}{4} \tan x}=7 \Rightarrow \frac{1+\tan x}{1-\tan x}=7$$

$$1+\tan x=7-7 \tan x \Rightarrow 8 \tan x=6 \Rightarrow \tan x=\frac{3}{4}$$

بنابراین

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1+\frac{9}{16}=\frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x=\frac{16}{25} \Rightarrow \cos x=\frac{4}{5}$$

پس

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \frac{3}{4}=\frac{\sin x}{\frac{4}{5}} \Rightarrow \sin x=\frac{3}{5}$$

۹۹- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\tan 28^\circ=\tan(18^\circ+10^\circ)=\tan 10^\circ=\tan(6^\circ+4^\circ)$$

$$=\frac{\tan 6^\circ+\tan 4^\circ}{1-\tan 6^\circ \tan 4^\circ}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} \times \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{1-3}$$

$$=\frac{1+3+2\sqrt{3}}{-2}=-2-\sqrt{3}$$

۱۰۰- گزینه ۱ فرض کنید $\alpha=a-b$ و $\beta=a+b$ در این صورت

$$2b=\beta-\alpha$$

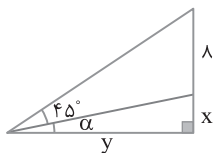
$$\tan 2b=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan \beta-\tan \alpha}{1+\tan \alpha \tan \beta}=\frac{3+4}{1-12}=-\frac{7}{11}$$

$$\cot 2b=-\frac{11}{7} \quad \text{پس}$$

۱۰۱- گزینه ۲ چون $\tan(\alpha+35^\circ)=\frac{1}{3}$ پس

$$\tan(10^\circ-\alpha)=\tan(45^\circ-(\alpha+35^\circ))=\frac{\tan 45^\circ-\tan(\alpha+35^\circ)}{1+\tan 45^\circ \tan(\alpha+35^\circ)}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$



۱۰۲- گزینه ۳ با توجه به شکل،

$$\tan \alpha=\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$$

$$\tan(45^\circ+\alpha)=\frac{1+x}{y}$$

از طرف دیگر،

$$\tan(45^\circ+\alpha)=\frac{\tan 45^\circ+\tan \alpha}{1-\tan 45^\circ \tan \alpha}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$$

بنابراین

$$\frac{1+x}{y}=3, \quad \frac{x}{y}=\frac{1}{2} \Rightarrow y=2x$$

در نتیجه

$$\frac{1+x}{2x}=3 \Rightarrow 6x=1+x \Rightarrow x=\frac{1}{5}$$

۹۳- گزینه ۳ می‌توان نوشت

$$\frac{1}{\sin^2 15^\circ}+\frac{1}{\cos^2 15^\circ}=\frac{\cos^2 15^\circ+\sin^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ}$$

$$=\frac{1}{(\sin 15^\circ \cos 15^\circ)^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2} \sin 30^\circ\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}=16$$

۹۴- گزینه ۱ با توجه به اینکه $\frac{3\pi}{8}$ رادیان، نصف $\frac{3\pi}{4}$ رادیان است،

در تساوی $\cos 2\alpha=2\cos^2 \alpha-1$ قرار می‌دهیم $\alpha=\frac{3\pi}{8}$ و در نتیجه

$$\cos\left(2 \times \frac{3\pi}{8}\right)=2\cos^2 \frac{3\pi}{8}-1 \Rightarrow \cos \frac{3\pi}{4}=2\cos^2 \frac{3\pi}{8}-1$$

$$\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=2\cos^2 \frac{3\pi}{8}-1 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}=2\cos^2 \frac{3\pi}{8}-1$$

$$2\cos^2 \frac{3\pi}{8}=1-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos^2 \frac{3\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$$

۹۵- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\cos 105^\circ=\cos(90^\circ+15^\circ)=-\sin 15^\circ$$

$$\sin 105^\circ=\sin(90^\circ+15^\circ)=\cos 15^\circ$$

بنابراین

$$3\cos^2 105^\circ+\sin^2 105^\circ=3\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ$$

$$=2\sin^2 15^\circ+(\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ)=2\sin^2 15^\circ+1$$

$$=1-\cos(2 \times 15^\circ)+1=2-\cos 30^\circ=2-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4-\sqrt{3}}{2}$$

۹۶- گزینه ۴ راه‌حل اول می‌توان نوشت

$$\frac{\sin 22/5^\circ}{\cos 22/5^\circ}-\frac{\cos 22/5^\circ}{\sin 22/5^\circ}=\frac{\sin^2 22/5^\circ-\cos^2 22/5^\circ}{\sin 22/5^\circ \times \cos 22/5^\circ}$$

$$=\frac{-\cos(2 \times 22/5^\circ)}{\frac{1}{2} \sin(2 \times 22/5^\circ)}=\frac{-\cos 45^\circ}{\frac{1}{2} \sin 45^\circ}=-2$$

راه‌حل دوم می‌دانیم $\cot \alpha-\tan \alpha=2 \cot 2\alpha$ ، بنابراین

$$\tan 22/5^\circ-\cot 22/5^\circ=-(\cot 22/5^\circ-\tan 22/5^\circ)$$

$$=-2 \cot 45^\circ=-2$$

۹۷- گزینه ۲ راه‌حل اول عبارت را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin 15^\circ}{\tan 15^\circ}=\frac{\cos 15^\circ}{1+\tan^2 15^\circ}=\sin 15^\circ \cos 15^\circ$$

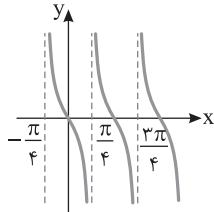
$$=\frac{1}{2} \sin 30^\circ=\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

راه‌حل دوم می‌دانیم $\sin 2\alpha=\frac{2 \tan \alpha}{1+\tan^2 \alpha}$ پس

$$\frac{\tan 15^\circ}{1+\tan^2 15^\circ}=\frac{1}{2} \sin 30^\circ=\frac{1}{4}$$

۱۰۷- گزینه ۱ تابع $f(x) = -\tan 2x$ روی بازه‌های به صورت

$(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4})$ که $k \in \mathbb{Z}$ اکیداً نزولی است. بنابراین تابع f روی بازه $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ اکیداً نزولی است و روی بازه‌های دیگر چنین نیست.



۱۰۸- گزینه ۲ توجه کنید که تابع تانژانت روی بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ اکیداً

صعودی است، پس

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(-\frac{\pi}{4}) < \tan x < \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow -1 < \tan x < 1$$

$$-1 < \frac{2m-3}{5} < 1 \Rightarrow -1 < m < 4$$

۱۰۹- گزینه ۲ معادله را به صورت $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos x$ می‌نویسیم.

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + x \Rightarrow 2k\pi = -\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - x \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه $(0, 2\pi)$ را مشخص می‌کنیم:

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{17\pi}{8}$

(غ.ق.ق.)

بنابراین معادله دو جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.

۱۱۰- گزینه ۲ معادله را به صورت $\tan(x - \frac{\pi}{6}) = \tan 2x$ می‌نویسیم

و جواب‌های آن به صورت زیر هستند

$$2x = k\pi + x - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون تعداد جواب‌های واقع در بازه $(-\pi, \pi)$ را به دست می‌آوریم. به دو روش

می‌توان این کار را انجام داد.

راه حل اول

k	۰	۱	۲	-۱
x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{7\pi}{6}$

(غ.ق.ق.) (غ.ق.ق.)

راه حل دوم

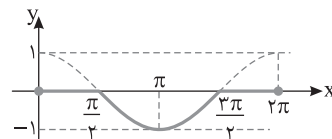
$$-\pi < k\pi - \frac{\pi}{6} < \pi \Rightarrow -\frac{5\pi}{6} < k\pi < \frac{7\pi}{6} \Rightarrow -\frac{5}{6} < k < \frac{7}{6}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0, 1\}$$

بنابراین معادله در بازه $(-\pi, \pi)$ دو جواب دارد.

۱۰۳- گزینه ۲ توجه کنید که ضابطه تابع به شکل زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos x}{2} & \cos x \geq 0 \\ \frac{\cos x + \cos x}{2} & \cos x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ یا } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \\ \cos x & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$



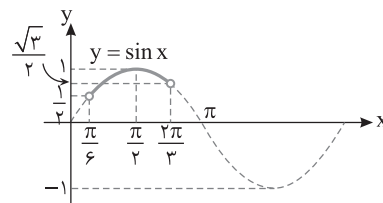
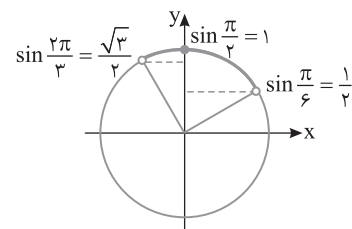
بنابراین نمودار تابع به شکل روبه‌رو رسم می‌شود:

۱۰۴- گزینه ۲ با توجه به هر یک از شکل‌های زیر می‌توان فهمید که اگر

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}, \text{ آن‌گاه } \frac{1}{2} < \sin x \leq 1 \text{ و می‌توان نوشت}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{m-1}{4} \leq 1 \Rightarrow 2 < m-1 \leq 4 \Rightarrow 3 < m \leq 5$$

بنابراین m می‌تواند مقادیر صحیح ۴ و ۵ باشد.



۱۰۵- گزینه ۳ می‌دانیم دوره تناوب توابع $y = a \sin(bx+c)$ و

$$y = a \cos(bx+c) \text{ برابر } T = \frac{2\pi}{|b|} \text{ است. پس } T_f = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$$\text{بنابراین } T_g = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$T_f = 2T_g \Rightarrow 4 = \frac{4\pi}{|a|} \Rightarrow |a| = \pi \Rightarrow a = \pm \pi$$

۱۰۶- گزینه ۱ چون $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ ، پس

$$f(x) = \sin^2 x + 12 = \frac{1 - \cos 2x}{2} + 12 = \frac{25 - \cos 2x}{2}$$

بنابراین دوره تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$.

نکته دوره تناوب توابع $y = a \sin^2(bx+c)$ و $y = a \cos^2(bx+c)$ برابر

$$T = \frac{\pi}{|b|} \text{ است.}$$

بنابراین جواب‌ها به صورت مضارب زوج و مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ هستند که می‌توان

$$\text{آنها را به صورت جواب کلی } x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \text{ نوشت.}$$

۱۱۵- گزینه ۲) معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2(1 - \cos^2 x) + 5 \cos x = 4 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$$

$$(\cos x - 2)(2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 2, \cos x = \frac{1}{2}$$

معادله $\cos x = 2$ جواب ندارد، پس $\cos x = \frac{1}{2}$. جواب‌های معادله که در

بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند، $\frac{\pi}{3}$ و $2\pi - \frac{\pi}{3}$ هستند که مجموع آنها برابر 2π است.

۱۱۶- گزینه ۳) معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2 \sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow 2 \sin x \cos^2 x = \sin x$$

$$\sin x (2 \cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x \cos 2x = 0$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه $(0, 2\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ و $\frac{9\pi}{4}$.

پس معادله در این بازه پنج جواب دارد.

۱۱۷- گزینه ۱) در یک همسایگی محذوف ۱، مقادیر f منفی هستند،

بنابراین در این همسایگی $|f(x)| = -f(x)$ ، پس

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{|f(x)|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{-f(x)} = -1$$

۱۱۸- گزینه ۴) اگر $x \rightarrow 1^+$ ، آن‌گاه $f(x) \rightarrow (-1)^-$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow (-1)^-} f(t) = 2$$

۱۱۹- گزینه ۴) مقادیر حد راست و حد چپ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 2x) = 8 + 4 = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3x) = 4 - 6 = -2$$

بنابراین مقدار حد راست تابع در $x = 2$ ، ۱۴ واحد از مقدار حد چپ آن در این نقطه بیشتر است.

۱۲۰- گزینه ۲) توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x+a}{2x-3} = \frac{3 \times 2 + a}{2 \times 2 - 3} = 6 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax + b) = 2^2 + a(2) + b = 4 + 2a + b$$

چون $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ ، پس هر یک از حدهای بالا برابر با ۴ است:

$$\begin{cases} 6 + a = 4 \\ 4 + 2a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2$$

۱۱۱- گزینه ۱) توجه کنید که $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$ ، بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} - 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{6} - 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -k\pi - \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{(2k+1)\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۱۱۲- گزینه ۳) معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$3 \tan^2 x = 1 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت $x = k\pi - \frac{\pi}{6}$ و $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$ هستند.

۱۱۳- گزینه ۴) جایی که نمودار تابع f خط $y = -1$ را قطع می‌کند،

$f(x) = -1$ است، پس

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \Rightarrow 2x = -k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$x = -\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ عبارت‌اند از

k	۰	۱	۲	-۱	-۲
x	$\frac{\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{9\pi}{8}$

بنابراین نمودار تابع خط $y = -1$ را در پنج نقطه از بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ قطع می‌کند.

۱۱۴- گزینه ۲) راه حل اول توجه کنید که

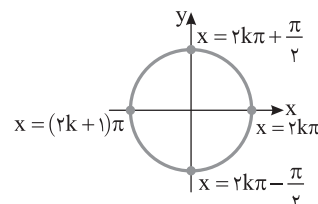
$$\sin^3 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (\sin^2 x - 1) = 0$$

$$\sin x (\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, & k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

نقاط انتهایی کمان‌های نظیر جواب‌ها را روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم.

بنابراین جواب‌های کلی معادله را می‌توان به صورت $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ نوشت.



راه حل دوم توجه کنید که

$$\sin^3 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (\sin^2 x - 1) = 0 \Rightarrow -\sin x \cos^2 x = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

راه حل دوم اگر $x - 2\pi = t$ ، آن‌گاه $x = 2\pi + t$. همچنین اگر $x \rightarrow 2\pi$ ، آن‌گاه $t \rightarrow 0$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2\pi + t)}{1 - \cos(2\pi + t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{1 - \cos t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{\frac{t^2}{2}} = 2$$

۱۲۹- گزینه ۲ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} &= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \end{aligned}$$

۱۳۰- گزینه ۱ با استفاده از اتحاد $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - (1 - 2\sin^2 x)}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2\sin^2 x}{\sin^2 x} = 2$$

۱۳۱- گزینه ۳ می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin 2x}{x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2 \frac{\sin 2x}{2}}{\frac{x}{1 - \sin^2 x}} = \frac{0 + 2 \times 1}{1 - 0} = 2$$

۱۳۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 16} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{(x^2 - 4)(x^2 + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 4} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 + 4} = 1 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

۱۳۳- گزینه ۲ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - 1 + \frac{(2x)^2}{2}}{x \cdot \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + 2x^2}{\frac{x^2}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2}x^2}{\frac{x^2}{2}} = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

۱۳۴- گزینه ۱ فرض می‌کنیم $x - \pi = t$. در این صورت $x = \frac{\pi + t}{2}$

و اگر $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ، آن‌گاه $t \rightarrow 0$. بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos 2x &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos 2(\frac{\pi + t}{2})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{t}{2})}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin \frac{t}{2}}{t} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

۱۳۵- گزینه ۱ توجه کنید که $f(2) = 1$ و

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(x - \frac{x-2}{x-2}\right) = 2 - 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(x + \frac{x-2}{x-2}\right) = 2 + 1 = 3$$

بنابراین تابع در $x = 2$ فقط پیوستگی راست دارد.

۱۲۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضایای حد، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

وجود دارد. از طرف دیگر

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1 - xf(x)) = 6 \Rightarrow (-1)^2 - (-1) + 1 - (-1) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 6$$

پس $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$

۱۲۲- گزینه ۲ اگر $x \rightarrow 2^+$ ، آن‌گاه $\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{2}^+$. در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x[\sqrt{2x}]) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x) = 4 \quad \text{پس } [\sqrt{2x}] = 2$$

۱۲۳- گزینه ۲ عامل $x - 3$ را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم.

سپس حد را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

۱۲۴- گزینه ۳ حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ است. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 64} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x^2 + 4x + 16)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+4}{x^2 + 4x + 16} = \frac{4+4}{4^2 + 4 \times 4 + 16} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

۱۲۵- گزینه ۱ وقتی x از سمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود، $3x - 4$ از

سمت چپ به ۱- نزدیک می‌شود. پس $[3x - 4] = -2$ ، از طرف دیگر وقتی x

از سمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود، $|x - 1| = -(x - 1)$. بنابراین حد مورد نظر

برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} ([3x - 4] + \frac{|x - 1|}{x - 1}) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2 + \frac{-(x - 1)}{x - 1}) = -2 - 1 = -3$$

۱۲۶- گزینه ۲ حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ است. توجه کنید که بنابر

اتحاد مزدوج، $x - 9 = (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

۱۲۷- گزینه ۱ با استفاده از اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 2}{x^2 - 49} &= \lim_{x \rightarrow 7} \left(\frac{\sqrt[3]{x+1} - 2}{x^2 - 49} \times \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{x+1} + 4}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{x+1} + 4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \left(\frac{x+1-8}{(x-7)(x+7)} \times \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{x+1} + 4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{(x+7)(\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{x+1} + 4)} = \frac{1}{14(4+4+4)} = \frac{1}{168} \end{aligned}$$

۱۲۸- گزینه ۳ راه حل اول می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2\pi} (1 + \cos x) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

۱۴۴- گزینه ۲ توجه کنید که اگر $x \rightarrow 1^-$ ، آن گاه $\frac{1}{x} \rightarrow 1^+$ پس

$$t = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow t \rightarrow 2^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = +\infty$$

۱۴۵- گزینه ۲ اگر $x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+$ ، آن گاه $\tan x \rightarrow -\infty$. همچنین

چون $4x \rightarrow (2\pi)^+$ ، پس $\cos 4x \rightarrow 1^-$ و در نتیجه $(\cos 4x - 1) \rightarrow 0^-$.

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\tan x}{\cos 4x - 1} = +\infty$$

۱۴۶- گزینه ۲ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$ و چون حد چپ و حد راست

تابع در نقطه $x=2$ برابر $+\infty$ است، باید $x=2$ ریشه مضاعف مخرج باشد. به عبارت دیگر مخرج باید به صورت $(x-2)^2$ باشد. زیرا فقط در این صورت مقادیر تابع در دو طرف $x=2$ هم علامت خواهند بود. پس

$$x^2 + 2ax + b = (x-2)^2 \Rightarrow x^2 + 2ax + b = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow a = -2, b = 4$$

$$\text{پس } a+b=2$$

۱۴۷- گزینه ۲ صورت و مخرج کسر را تجزیه، سپس کسر را ساده

$$\text{می کنیم: } f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{x+1}{(x-1)(x+2)}$$

پس $x=1$ و $x=-2$ مجانب های قائم نمودار تابع f هستند.

۱۴۸- گزینه ۱ در حالی که مخرج ریشه مضاعف دارد، نمودار تابع یک

$$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 8m = 0 \Rightarrow m = 0, m = 8$$

مجانب قائم دارد:

در حالت $m=0$ ، تنها مجانب قائم $x=0$ و در حالت $m=8$ ، تنها مجانب

قائم $x=2$ است. همچنین اگر $x=3$ ریشه مضاعف مخرج باشد، مخرج عامل

$x-3$ دارد که با صورت کسر ساده می شود. در این صورت مخرج درجه اول

است و تنها یک ریشه دارد. در نتیجه نمودار تابع یک مجانب قائم دارد:

$$f(x) = \frac{x-3}{(x-3)(2x-3)} = \frac{1}{2x-3}$$

پس $x = \frac{3}{2}$ مجانب قائم نمودار تابع است. بنابراین به ازای سه مقدار m ،

نمودار تابع f فقط یک مجانب قائم دارد.

۱۴۹- گزینه ۳ مخرج توابع $y = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ و $y = \frac{x}{x^2+1}$ ریشه ندارد،

پس نمودار این توابع مجانب قائم ندارد. همچنین ریشه مضاعف مخرج تابع $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ ،

$x=0$ است که تابع در اطراف آن تعریف نشده است. پس نمودار این تابع نیز

$$\text{مجانب قائم ندارد. } x=0 \text{ مجانب قائم نمودار تابع } y = \frac{\sqrt{x-1}}{x} \text{ است:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x-1}}{x} = +\infty$$

۱۳۶- گزینه ۴ چون تابع در نقطه ۳ پیوسته است، حدهای چپ و راست تابع در این نقطه با هم برابرند:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (16 - ax^2) = 16 - 9a$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x + a) = 6 + a$$

بنابراین $16 - 9a = 6 + a$ و در نتیجه $a = 1$. به این ترتیب

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 3 \\ 16-x^2 & x < 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (16 - x^2) = 16 - 1^2 = 15$$

۱۳۷- گزینه ۳ باید مخرج هیچ جا صفر نشود، در نتیجه باید دلتای

$$\Delta = (-2m)^2 - 4(m+6) < 0 \Rightarrow 4m^2 - 4(m+6) < 0$$

$$m^2 - m - 6 < 0 \Rightarrow (m-3)(m+2) < 0 \Rightarrow -2 < m < 3$$

بنابراین تابع f به ازای چهار مقدار صحیح $-1, 0, 1$ و 2 برای m روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۳۸- گزینه ۱ در نقاطی که مقدار $\frac{1}{x}$ عددی صحیح شود، تابع $y = \left[\frac{1}{x}\right]$

ناپیوسته است. این نقاط به صورت زیر هستند:

$$\frac{1}{x} = k, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{10} < \frac{1}{k} < 1 \Rightarrow 1 < k < 10 \Rightarrow 2 \leq k \leq 9$$

$$\text{در بازه } \left(\frac{1}{10}, 1\right),$$

یعنی در هشت نقطه تابع ناپیوسته است.

۱۳۹- گزینه ۱ توجه کنید که وقتی x از سمت چپ به -2 نزدیک می شود، $x+2$ از سمت چپ به صفر نزدیک می شود. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{1}{x+2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[-x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[-x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$$

۱۴۱- گزینه ۱ اگر $x \rightarrow 3^-$ ، آن گاه $(x-3)^2 \rightarrow 0^+$ ، بنابراین برای اینکه حاصل حد $-\infty$ شود، باید حد صورت کسر عددی منفی شود:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (ax^3 + 3) < 0 \Rightarrow 27a + 3 < 0 \Rightarrow a < -\frac{1}{9}$$

۱۴۲- گزینه ۴ برای اینکه نمودار تابع شبیه شکل مورد نظر شود، وقتی

$$x \rightarrow 2^- \text{ و } x \rightarrow 2^+, \text{ باید } f(x) \rightarrow -\infty \text{ فقط در گزینه (۴)،}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

۱۴۳- گزینه ۳ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$ و اگر $x \rightarrow 1^+$ ، مقادیر

$x-1$ مثبت اند و به صفر میل می کنند. بنابراین $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$.

همین طور $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$ و اگر $x \rightarrow 1^-$ ، مقادیر $x-1$ منفی اند و به صفر

میل می کنند. بنابراین $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$. به این ترتیب، نمودار تابع f در

همسایگی نقطه $x=1$ به شکل گزینه (۳) است.

۱۵۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \right] = [0] = 0$$

از طرف دیگر، اگر $x \rightarrow -\infty$ ، آن‌گاه $-\frac{1}{x} < 0$ ، بنابراین $\left[-\frac{1}{x} \right] = -1$ ، پس

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1) = -1$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر -1 است.

۱۵۸- گزینه ۲ چون خط $y=2$ مجانب افقی نمودار تابع f است، پس

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+1}{(a-1)x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{(a-1)x} = \frac{a}{a-1}$$

(همین‌طور وقتی که $x \rightarrow -\infty$)

$$\text{بنابراین } a=2 \text{، پس } a=2 \text{ و در نتیجه } f(x) = \frac{2x+1}{x-2} \text{، بنابراین } x=2$$

ریشهٔ مخرج و خط $x=2$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

۱۵۹- گزینه ۴ چون

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2+x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

پس خط $y=2$ مجانب افقی تابع f است. برای پیدا کردن محل برخورد نمودار

تابع با مجانب افقی آن، باید معادلهٔ $f(x)=2$ را حل کنیم:

$$\frac{2x^2}{x^2+x+1} = 2 \Rightarrow 2x^2 = 2x^2 + 2x + 2 \Rightarrow x = -1$$

چون $f(-1)=2$ ، پس نقطهٔ مورد نظر $(-1, 2)$ است.

۱۶۰- گزینه ۱ خط $y=-1$ مجانب افقی نمودار تابع $y = \frac{-x+1}{x+1}$

است. برای یافتن رفتار این تابع در اطراف مجانب افقی باید ببینیم وقتی $x \rightarrow +\infty$ یا وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، مقادیر تابع بیشتر از -1 هستند یا کمتر از آن:

$$y = \frac{-x+1}{x+1} = \frac{-(x+1)+2}{x+1} = -1 + \frac{2}{x+1} \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow +\infty \Rightarrow y > -1 \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow y < -1 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف مجانب افقی آن به شکل گزینهٔ (۱) است.

۱۶۱- گزینه ۱ ابتدا تابع را به صورت

$$f(x) = \frac{x^2-4x+7}{x^2-4} = 1 + \frac{-4x+11}{x^2-4}$$

می‌نویسیم تا بتوان آن را راحت‌تر بررسی کرد. پس وقتی $x \rightarrow +\infty$ ،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \quad f(x) < 1$$

و وقتی $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, \quad f(x) > 1$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف مجانب افقی آن به شکل گزینهٔ (۱) است.

۱۶۲- گزینه ۳ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $x=3$ برابر

$$f'(3)=2 \text{ است. پس شیب خط عمود بر این خط، که همان خط مماس بر}$$

نمودار تابع در نقطهٔ $x=-1$ است، برابر $-\frac{1}{2}$ است. پس $f'(-1)=-\frac{1}{2}$

۱۵۰- گزینه ۲ ریشه‌های مخرج در بازهٔ $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از $x = \frac{\pi}{4}$ و

$$x = \frac{5\pi}{4} \text{ که } x = \frac{5\pi}{4} \text{ ریشهٔ صورت کسر نیست. پس خط } x = \frac{5\pi}{4} \text{ مجانب قائم}$$

$$\text{نمودار تابع است. با اینکه } x = \frac{\pi}{4} \text{ ریشهٔ صورت نیز هست، ولی خط } x = \frac{\pi}{4}$$

مجانب قائم نمودار تابع است، زیرا

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{4x-\pi}}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{4x-\pi}}{\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{4x-\pi}}{\sqrt{2} \sqrt{2}(x - \frac{\pi}{4})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{4(x - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2}(x - \frac{\pi}{4})} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2} \sqrt[3]{(x - \frac{\pi}{4})^3}} = +\infty$$

پس نمودار تابع f دو مجانب قائم دارد.

۱۵۱- گزینه ۳ ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$$

بنابراین خط‌های $\frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) مجانب‌های قائم نمودار تابع هستند.

پس خط‌های $x = 2k\pi + \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) مجانب‌های قائم نمودار این تابع هستند.

۱۵۲- گزینه ۲ از روی شکل معلوم است که $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ ۱۵۳- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 2$$

۱۵۴- گزینه ۴ بزرگ‌ترین جملهٔ $(x+1)^2$ برابر x^2 است. همچنین

بزرگ‌ترین جملهٔ $(x+1)^3$ و $(x-1)^3$ برابر x^3 است. پس

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x(x+1)^2}{(x+1)^3 + (x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{2x^3} = 1$$

۱۵۵- گزینه ۴ توجه کنید که وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، مقادیر $x+1$ و $3-x$

به ترتیب منفی و مثبت‌اند. بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a|x+1| + 3x-1}{|3-x| + ax-15} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a(-x-1) + 3x-1}{3-x+ax-15} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-a+3)x - a-1}{(a-1)x - 12} = \frac{3-a}{a-1} \end{aligned}$$

در نتیجه $\frac{3-a}{a-1} = 2$ ، بنابراین $\frac{3-a}{a-1} = 2$

۱۵۶- گزینه ۳ برای آنکه حد مورد نظر برابر صفر شود، باید

درجهٔ مخرج بیشتر از درجهٔ صورت باشد. مخرج از درجهٔ اول است، پس باید

ضریب جملات درجهٔ دوم و سوم در صورت برابر صفر باشند:

$$\begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ 2a-b=0 \Rightarrow 2a=b \end{cases}$$

بنابراین $a+b=3$

۱۷۱- گزینہ ۳ بنابر قاعدہ تقسیم،

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

پس $\left(\frac{f}{g}\right)'(-1) = \frac{f'(-1)g(-1) - g'(-1)f(-1)}{g^2(-1)}$. از طرف دیگر،

$$\begin{cases} f(x) = x^r + x^{-1} \\ f'(x) = rx^{r-1} - x^{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = -r \\ f'(-1) = r \end{cases}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(-1) = \frac{4 \times 2 - (-4)(-3)}{(2)^2} = -1 \quad \text{بنابراین}$$

۱۷۲- گزینه ۱ ابتدا ضابطه تابع را به کمک اتحاد مزدوج ساده می کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x^r - 1)(x^r + 1)(x^f + 1) = x(x^f - 1)(x^f + 1) \\ &= x(x^{\wedge} - 1) = x^q - x \end{aligned}$$

بنابراین $f'(x) = 9x^8 - 1$ پس $f'(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}) = 9(\frac{1}{\sqrt[4]{3}})^8 - 1 = 0$

۱۷۳- گزینه ۲ توجه کنید که مقدار عبارت $4x - x^2$ در اطراف نقطه $x = -2$ منفی است و مقدار عبارت $x + 1$ هم در اطراف $x = -2$ منفی است.

یس در اطراف این نقطه

$$f(x) = x^2 - 9x - x - 1 = x^2 - 10x - 1$$
$$f'(x) = 2x - 10 \Rightarrow f'(-2) = -14$$

همچنین توجه کنید که در یک همسایگی نقطه $x=5$ مقدار عبارتهای x^2-x+4 و $x+1$ به ترتیب منفی و مثبت است. پس در اطراف این نقطه

$$f(x) = x^2 - 4x + x + 1 = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow f'(\delta) = 7$$

$$. f'(\delta) + f'(-2) = -2 \text{ نتیجه}$$

۱۷۴- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{(\sin x + x \cos x - \sin x)(x \cos x - \sin x)}{(x \cos x - \sin x)^r} - \frac{(\cos x - x \sin x - \cos x)(x \sin x + \cos x)}{(x \cos x - \sin x)^r} = \frac{x \cos x (x \cos x - \sin x) + x \sin x (x \sin x + \cos x)}{(x \cos x - \sin x)^r}$$

۱۷۵- گزینه ۳ در نقطه $X = \pi$ ، عبارت $\sin X$ عامل صفرکننده است، بنابراین کافی است فقط مشتق آن را در نقطه $X = \pi$ حساب کنیم و در بقیه عبارت ضرب کنیم:

$$f'(\pi) = \cos(\pi) \times \cos^8(\pi) = \cos^9(\pi) = -1$$

۱۷۶- گزینه ۲ توجه کنید که $(g^n)' = ng'g^{n-1}$ ، بنابراین

$$f'(x) = f(x^r + \alpha)'(x^r + \alpha)^{r-1} = f(x)(x^r + \alpha)^r = 16x(x^r + \alpha)^r$$

$$\therefore f'(-1) = 16(-1)(-1)^r + \alpha)^r = -16 \times 5^r \quad \text{من ابراهيم}$$

۱۶۳- گزینه ۴ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌های $x=a$ و $x=c$ صفر، در نقطه $x=b$ منفی و در نقطه $x=d$ مثبت است.

۱۶۴- گزینه ۲ با توجه به تعریف مشتق تابع f در نقطه $x=1$ ،

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) + \gamma}{\gamma h} = \frac{1}{\gamma} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{1}{\gamma} f'(1) = \frac{1}{\gamma} (-\gamma) = -1$$

۱۶۵- گزینه ۱

$$f'(\delta) = \lim_{x \rightarrow \delta} \frac{f(x) - f(\delta)}{x - \delta} = \lim_{x \rightarrow \delta} \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-\delta)-0}{x-\delta}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \delta} ((x-1)(x-2)(x-3)(x-4)) = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

۱۶۶- گزینه ۲ با استفاده از تعریف مشتق در نقطه $x=1$ مقدار $f'(1)$

را بہ دست می آوریم:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{(x-1) \cos^r(\pi x)}{\tan(\frac{\pi x}{f})} - \frac{(1-1) \cos^r(\pi)}{\tan(\frac{\pi}{f})}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos^r(\pi x)}{\tan(\frac{\pi x}{f})} = \frac{\cos^r(\pi)}{\tan \frac{\pi}{f}} = -1 \end{aligned}$$

۱۶۷- گزینه ۲ می‌دانیم اگر تابع f در نقطه x_0 مشتق پذیر باشد، آن‌گاه

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + mh) - f(x_0 + nh)}{h} = (m-n)f'(x_0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r+rh) - f(r-rh)}{rh} = \frac{1}{r} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r+rh) - f(r-rh)}{h}$$

$$= \frac{1}{r} (r - (-r))f'(r) = \frac{r}{r} f'(r)$$

۱۶۸- گزینه ۳ با استفاده از تعریف، مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطه $x=1$ را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{|x^r - 1|}{x^r} - 0}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x^r+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x^r+1} = 1 \\ f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{|x^r - 1|}{x^r} - 0}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{(x^r+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x+1)}{x^r+1} = -1 \end{aligned}$$

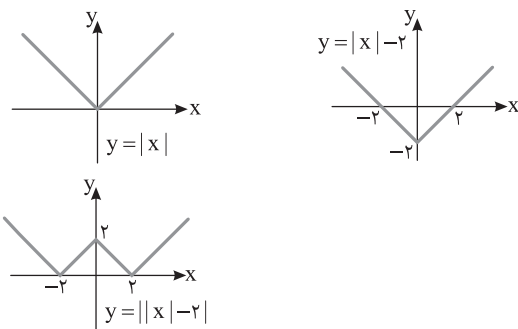
بنابراین مقدار مشتق راست تابع f در نقطه $x=1$ به اندازه ۲ واحد از مشتق چپ تابع در این نقطه بیشتر است.

۱۶۹- گزینه ۳ تابع f در نقطه‌های ۳-، ۱ و ۵ پیوسته نیست، پس در بین نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست. همین‌طور، در نقطه‌های ۱- و ۳ مشتق چپ و مشتق راست تابع f برابر نیستند، پس تابع f در این نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست. تابع f در نقطه‌های ۲- و ۴ مشتق‌پذیر است. بنابراین تابع f در پنج نقطهٔ صحیح از دامنه‌اش مشتق‌پذیر نیست.

۱۷۰- گزینه ۴ بنابر تعریف مشتق، $g(x) = f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ بنابرین

$$g(\lambda) = \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} = \frac{1}{12}$$

۱۸۵- گزینه ۴ نمودار تابع f به صورت زیر رسم می‌شود:



در نقاط $x=0$ ، $x=2$ و $x=-2$ نمودار تابع نقطه گوشه‌ای دارد و تابع در این نقاط مشتق ندارد. پس $D_{f'} = \mathbb{R} - \{0, \pm 2\}$.

۱۸۶- گزینه ۳ چون تابع f در نقطه $x=3$ مشتق‌پذیر نیست، پس

مقدار $x^2 + ax - 12$ به ازای $x=3$ صفر است: $9 + 3a - 12 = 0 \Rightarrow a = 1$. بنابراین $f(x) = |x^2 + x - 12|$ در نزدیکی نقطه -2 علامت عبارت

$x^2 + x - 12$ منفی است، بنابراین

$$f(x) = -(x^2 + x - 12) \Rightarrow f'(x) = -2x - 1 \Rightarrow f'(-2) = 3$$

۱۸۷- گزینه ۲ فرض کنید نقطه مورد نظر (x_0, y_0) باشد. شیب

خط مماس بر نمودار تابع f در این نقطه برابر با $f'(x_0)$ است، که چون خط مماس موازی محور x است، پس $f'(x_0) = 0$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$$

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow 3(x_0 - 1)^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 1$$

بنابراین $y_0 = f(x_0) = f(1) = -1$.

۱۸۸- گزینه ۳ شیب خط مماس مورد نظر برابر $f'(-2)$ است:

$$f(x) = \frac{2x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(-2) = 2$$

از طرف دیگر $f(-2) = 4$ ، پس خط مماس از نقطه $(-2, 4)$ می‌گذرد.

بنابراین معادله خط مماس به صورت زیر است:

$$y - 4 = 2(x + 2) \Rightarrow y = 2x + 8$$

۱۸۹- گزینه ۴ فرض کنید خط مورد نظر در نقطه (x_0, y_0) بر نمودار

تابع، که سهمی است، مماس باشد. در این صورت، مقدار مشتق f به ازای $x = x_0$ برابر با شیب خط $y = x + 5$ است. بنابراین

$$y' = 4x - 4 \Rightarrow 4x_0 - 4 = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{5}{4}$$

چون نقطه (x_0, y_0) روی سهمی $y = 2x^2 - 4x + 6$ است، پس

$$y_0 = 2x_0^2 - 4x_0 + 6 = 2 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 4 \times \frac{5}{4} + 6 = \frac{33}{8}$$

بنابراین خط مورد نظر از نقطه $\left(\frac{5}{4}, \frac{33}{8}\right)$ می‌گذرد و شیب آن ۱ است، پس

معادله اش به صورت $y - \frac{33}{8} = x - \frac{5}{4}$ ، یعنی $8y - 8x - 23 = 0$ است.

۱۹۰- گزینه ۲ نقطه تماس را $(a, \frac{1}{\sqrt{a}})$ فرض می‌کنیم. شیب خط

مماس را به دست می‌آوریم: $f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow f'(a) = -\frac{1}{2a\sqrt{a}}$

۱۷۷- گزینه ۳ توجه کنید که $(\sqrt{g})' = \frac{g'}{2\sqrt{g}}$. بنابراین

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} \Rightarrow f'(2) = \frac{3 \times 4}{2\sqrt{9}} = 2$$

۱۷۸- گزینه ۱ بنابر قاعده تقسیم،

$$f'(x) = \frac{(9x^2 - 4x)(x+1)^2 - 2(x+1)(3x^3 - 2x^2 + 1)}{(x+1)^4}$$

در نتیجه $f'(1) = \frac{3}{4}$.

۱۷۹- گزینه ۴ اگر از دو طرف تساوی $f(-3x+5) = 2x^3 + 4x - 6$

طبق قاعده زنجیری مشتق بگیریم به دست می‌آید:

$$(-3x+5)'f'(-3x+5) = 6x^2 + 4$$

$$-3f'(-3x+5) = 6x^2 + 4 \xrightarrow{x=1} -3f'(2) = 10 \Rightarrow f'(2) = -\frac{10}{3}$$

۱۸۰- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f'(2x)g'(f(2x)) = \frac{1}{y}(g(f(2x)))' = \left(\frac{1}{y}g(f(2x))\right)'$$

بنابراین ضابطه تابع $y = \frac{1}{y}g(f(2x))$ را به دست می‌آوریم و مشتق آن را

حساب می‌کنیم:

$$y = \frac{1}{y}g(f(2x)) = \frac{1}{y}g(8x^3+1) = \frac{1}{y}\sqrt[3]{1-(8x^3+1)} = \frac{1}{y}\sqrt[3]{-8x^3} = -x$$

در نتیجه $y' = -1$.

۱۸۱- گزینه ۲ توجه کنید که $(g^2)' = 2g'g$. بنابراین

$$f'(x) = 2(\tan x)'(\tan x) = 2(1+\tan^2 x)(\tan x)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2(1+3)(\sqrt{3}) = 8\sqrt{3}$$

در نتیجه

۱۸۲- گزینه ۱ توجه کنید که $(g^n)' = ng'g^{n-1}$. بنابراین

$$f'(x) = 3(\sin x^2)' \sin^2 x^2 = 3(x^2)' \cos x^2 \times \sin^2 x^2$$

$$= 3(2x) \cos x^2 \times \sin^2 x^2 = 6x \sin^2 x^2 \cos x^2$$

$$f'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = 6 \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{2\pi}$$

در نتیجه

۱۸۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 1 \\ 3x^2+2 & x > 1 \end{cases}$$

بنابراین $f'(-1) + f'(2) = -3 + 14 = 11$.

۱۸۴- گزینه ۴ شرط لازم برای مشتق‌پذیری، پیوستگی است:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow a+2 = 1+2b \Rightarrow a-2b = -1$$

همچنین باید مشتق چپ و مشتق راست تابع با هم برابر باشند:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax+2 & x > 1 \\ 3x^2+2b & x < 1 \end{cases} \Rightarrow 2a+2 = 3+2b \Rightarrow 2a-2b = 1$$

$$\begin{cases} a-2b = -1 \\ 2a-2b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a+b = \frac{7}{2}$$

۱۹۷- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = 2 \cos 2x \Rightarrow f''(x) = -4 \sin 2x \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4\left(\frac{1}{2}\right) = -2$$

۱۹۸- گزینه ۴ توجه کنید که $f(x) = 1 - \sin 2x$ بنابراین

$$f'(x) = -2 \cos 2x \Rightarrow f''(x) = -2(-2 \sin 2x) = 4 \sin 2x$$

۱۹۹- گزینه ۲ از قاعده هوییتال استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 3x^2 + 5}{x^3 + 3x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x^2 - 6x}{3x^2 + 6x} = \frac{6+6}{3-6} = -4$$

۲۰۰- گزینه ۳ از قاعده هوییتال استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - x}{x^2 - 7x + 12} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{3}{2\sqrt{3x}} - 1}{2x - 7} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{9}} - 1}{6 - 7} = \frac{1}{2}$$

۲۰۱- گزینه ۴ از قاعده هوییتال استفاده می کنیم:

$$L = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(1+h) + f'(1-h)}{1} = f'_+(1) + f'_-(1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x > 1 \\ 4x^3 & x < 1 \end{cases}$$

اکنون تابع مشتق را پیدا می کنیم:

واضح است که $f'_+(1) = 3$ و $f'_-(1) = 4$ بنابراین $L = 3 + 4 = 7$

۲۰۲- گزینه ۳ بنابر قاعده هوییتال،

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۲۰۳- گزینه ۳ می دانیم اگر $f'(x) \geq 0$ و نقاطی که $f'(x) = 0$

تشکیل یک بازه ندهند تابع اکیداً صعودی است. روی بازه $(-\infty, 3]$ نمودار

تابع مشتق بالای محور x یا مماس بر آن است و فقط در نقطه $x=1$ و $x=3$ مشتق برابر صفر است. پس تابع روی بازه $(-\infty, 3]$ اکیداً صعودی است.

بنابراین بیشترین مقدار ممکن a برابر ۳ است.

۲۰۴- گزینه ۱ توجه کنید که $f'(x) = x^2 - 1$ پس

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1$$

بنابراین تابع f روی بازه های $(-\infty, -1]$ و $[1, +\infty)$ اکیداً صعودی است، پس

روی بازه $(-1, 1)$ اکیداً صعودی نیست.

۲۰۵- گزینه ۲ توجه کنید که $f'(x) = -3x^2 + 2x = x(-3x + 2)$

بنابراین

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$

در نتیجه تابع f روی بازه $(0, \frac{2}{3})$ اکیداً صعودی است. بنابراین بیشترین

مقدار ممکن a برابر $\frac{2}{3}$ است.

بنابراین معادله خط مماس به صورت $y - \frac{1}{\sqrt{a}} = -\frac{1}{2a\sqrt{a}}(x-a)$ است. نقطه $(3, 0)$ را در معادله جای گذاری می کنیم:

$$0 - \frac{1}{\sqrt{a}} = -\frac{1}{2a\sqrt{a}}(3-a) \Rightarrow 2a = 3-a \Rightarrow a=1$$

بنابراین معادله خط مماس به صورت $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ است. در نتیجه عرض از مبدأ خط مماس برابر $\frac{3}{2}$ است.

۱۹۱- گزینه ۲ مقدار دو آهنگ تغییر را حساب می کنیم:

$$[1, 4] \text{ آهنگ تغییر متوسط در بازه } \frac{f(4) - f(1)}{4-1} = \frac{2}{3} = -\frac{1}{6} = A_1$$

$$[4, 4/41] \text{ آهنگ تغییر متوسط در بازه } \frac{f(4/41) - f(4)}{4/41 - 4}$$

$$= \frac{\frac{1}{2/41} - \frac{1}{2}}{\frac{4}{41} - 4} = \frac{\frac{41}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{4}{41} - 4} = \frac{40}{41 \times 21} = -\frac{50}{41 \times 21} = A_2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{50}{41 \times 21}} = \frac{41 \times 21}{6 \times 50} = \frac{41 \times 7}{2 \times 50} = \frac{287}{100} = 2/87$$

بنابراین

۱۹۲- گزینه ۱ مقدار آهنگ تغییر متوسط را در بازه $[1, 2]$ حساب می کنیم:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = \frac{1 - (-1)}{1} = 2$$

از طرف دیگر، آهنگ تغییر لحظه ای در نقطه مورد نظر همان مشتق تابع در این نقطه است که باید برابر ۲ باشد. پس

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} = 2 \Rightarrow \frac{2}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = -\sqrt{2} \text{ (غ.ق.)}, x = \sqrt{2}$$

۱۹۳- گزینه ۳ آهنگ تغییر لحظه ای تابع همان مشتق آن است. پس

مشتق تابع f را پیدا می کنیم: $f'(x) = -3x^2 + 6x - 6$. بیشترین مقدار تابع

درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$) برابر $-\frac{\Delta}{4a}$ است. پس بیشترین مقدار

$$\text{آهنگ تغییر لحظه ای برابر است با } -3 = -\frac{36 - 4(-3)(-6)}{4(-3)}$$

۱۹۴- گزینه ۴ مشتق اول و دوم تابع را حساب می کنیم:

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 2a$$

بنابراین

$$f''(2) = -2 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

$$f'(2) = -2 \Rightarrow 4a + b = -2 \Rightarrow b = 2$$

در نتیجه $a - b = -3$

۱۹۵- گزینه ۳ مشتق دوم تابع f را به دست می آوریم:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 2 \Rightarrow f''(x) = 12x + 6$$

$$f''(a) = 0 \Rightarrow 12a + 6 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

بنابراین

۱۹۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(-1) = -2$$

۲۰۶- گزینه ۴ مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = -x^3 + mx^2 - 12x + 1 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 2mx - 12$$

باید مشتق تابع نامثبت باشد، یعنی $f'(x) \leq 0$ ، در نتیجه $-3x^2 + 2mx - 12 \leq 0$.

برای اینکه این نابرابری همواره درست باشد، باید

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 4m^2 - 144 \leq 0 \Rightarrow m^2 \leq 36 \Rightarrow -6 \leq m \leq 6$$

بنابراین اگر m عضو مجموعه $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6\}$ باشد، تابع اکیداً نزولی است.

۲۰۷- گزینه ۲ توجه کنید که $f'(x) = \frac{2 \sin 2x}{\cos^2 2x}$ از طرف دیگر،

$$x \in (\pi, \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow 2x \in (2\pi, 3\pi) \Rightarrow \sin 2x > 0$$

$$x \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}) \Rightarrow 2x \in (-\pi, -\frac{\pi}{3}) \Rightarrow \sin 2x < 0$$

$$x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Rightarrow 2x \in (\pi, 2\pi) \Rightarrow \sin 2x < 0$$

$$x \in (-\frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{6}) \Rightarrow 2x \in (-5\pi, -\frac{7\pi}{3}) \Rightarrow \sin 2x > 0$$

بنابراین f' فقط روی بازه $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6})$ اکیداً نزولی است.

۲۰۸- گزینه ۲ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x) = -6x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

پس $(0, 0)$ و $(1, 1)$ نقاط بحرانی تابع f هستند که فاصله آن‌ها برابر $\sqrt{2}$ است.

۲۰۹- گزینه ۱ ابتدا تابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم، سپس

مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 - x^2 & x \geq -2 \\ -2x - 4 - x^2 & x < -2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2 - 2x & x > -2 \\ -2 - 2x & x < -2 \end{cases}$$

تابع در نقطه $x = -2$ مشتق ندارد، پس نقطه به طول ۲- نقطه بحرانی تابع است. از طرف دیگر،

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ -2 - 2x = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین نقطه به طول ۱ نقطه بحرانی تابع است. مجموع عرض‌های

$$\text{نقاط بحرانی برابر است با } f(-2) + f(1) = -4 + 5 = 1.$$

۲۱۰- گزینه ۳ ریشه‌های صورت و مخرج تابع مشتق اگر در دامنه تابع

باشند، طول نقاط بحرانی هستند.

$$f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{(x^2 - 4)}{3\sqrt{x^2}} = \frac{6x^2 + x^2 - 4}{3\sqrt{x^2}} = \frac{7x^2 - 4}{3\sqrt{x^2}}$$

مشخص است که صورت کسر دو ریشه و مخرج آن یک ریشه دارد که همگی در دامنه تابع هستند (دامنه تابع $\mathbb{R}$ است)، بنابراین تابع f سه نقطه بحرانی دارد.

۲۱۱- گزینه ۳ توجه کنید که $D_f = [1, 3]$ و

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}$$

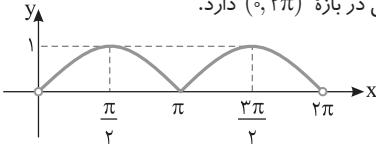
تابع f در نقاط $x = 1$ و $x = 3$ مشتق‌پذیر نیست. از طرف دیگر

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{3-x} \Rightarrow x-1 = 3-x \Rightarrow x = 2$$

پس مجموعه طول نقاط بحرانی تابع $\{1, 2, 3\}$ است که دارای سه عضو است.

۲۱۲- گزینه ۳ نمودار تابع f به صورت زیر است. در $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$

مشتق تابع f برابر صفر است و در $x = \pi$ تابع f مشتق ندارد (نقطه گوشه‌ای). پس تابع f سه نقطه بحرانی در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.

۲۱۳- گزینه ۲ تابع f در نقطه‌های ۱- و ۲- مینیمم نسبی دارد. مجموع

این عددها برابر ۱ است.

۲۱۴- گزینه ۳ جدول تعیین علامت $f'(x)$ به صورت زیر است.

بنابراین تابع f فقط یک نقطه مینیمم نسبی در $x = -2$ دارد.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	+

۲۱۵- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $f'(x) = 8x^3 - 3x^2 = x^2(8x - 3)$

بنابراین جدول تغییرات تابع f به صورت زیر است:

x	$-\infty$	0	$\frac{3}{8}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	-	+
$f(x)$		$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

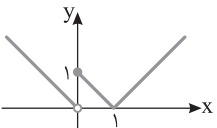
نسبی
min

بنابراین تابع f فقط یک نقطه اکسترم نسبی دارد.

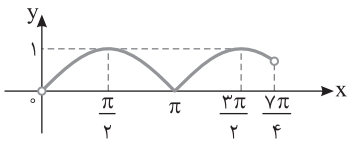
۲۱۶- گزینه ۱ نمودار تابع f به شکل

مقابل است. این تابع در نقطه $x = 0$ ماکزیمم

نسبی و در نقطه $x = 1$ مینیمم نسبی دارد.

۲۱۷- گزینه ۳ نمودار تابع f به صورت زیر است و تابع در نقاط

$x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$ ماکزیمم نسبی دارد و در نقطه $x = \pi$ مینیمم نسبی دارد.

۲۱۸- گزینه ۲ توجه کنید که $f'(x) = 1 - 2 \cos x$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$f'(x)$		-	+	-

بنابراین تابع f در نقاط $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{5\pi}{3}$ اکسترم نسبی دارد.

۲۱۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $f'(x) = 4x - 8$ ، بنابراین

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

اکنون توجه کنید که چون $f(0) = 1$ ، $f(2) = -7$ و $f(5) = 11$ ، پس مقدار

ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f به ترتیب برابر ۱۱ و -۷ و اختلاف آن‌ها

برابر $11 - (-7) = 18$ است.

۲۲۶- گزینه ۴ توجه کنید که مساحت مستطیل ABCD برابر است با

$$f(x) = (3x-1)(1-2x)$$

را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = 3(1-2x) + (3x-1)(-2) = -12x + 5$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -12x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{12}$$

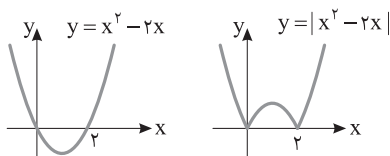
بنابراین تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد و بیشترین مقدار آن به ازای $x = \frac{5}{12}$

به دست می آید، که برابر است با $\frac{1}{24}$. در نتیجه بیشترین مقدار مساحت

مستطیل ABCD برابر $\frac{1}{24}$ است.

۲۲۷- گزینه ۲ نمودار تابع را رسم می کنیم. جهت تععر نمودار تابع f

روی بازه $(-\infty, 0)$ رو به بالا، روی بازه $(0, 2)$ رو به پایین و روی بازه $(2, +\infty)$ رو به بالاست. پس دوبار جهت تععر نمودار تابع f تغییر کرده است.



۲۲۸- گزینه ۲ مشتق دوم تابع را پیدا می کنیم:

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + x - 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 12x + 1 \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 12$$

برای اینکه جهت تععر نمودار تابع رو به پایین باشد، باید علامت مشتق دوم تابع منفی باشد:

$$12x^2 - 12 < 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

بنابراین جهت تععر نمودار تابع f روی بازه $(-1, 1)$ رو به پایین است. پس

بیشترین مقدار $b-a$ برابر است با $2 - (-1) = 3$.

۲۲۹- گزینه ۲ مشتق دوم تابع را پیدا و تعیین علامت می کنیم:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 + 8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

پس

با توجه به جدول زیر، جهت تععر f روی بازه $(-2, 2)$ رو به پایین است. پس بیشترین مقدار a برابر ۲ است.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f''(x)$		+	-	+

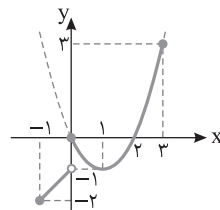
۲۳۰- گزینه ۱ باید مشتق دوم تابع روی $\mathbb{R}$ نامنفی باشد. پس

$$f'(x) = 8x^3 - 6mx^2 + 6x$$

$$f''(x) = 24x^2 - 12mx + 6 = 6(4x^2 - 2mx + 1) \geq 0$$

در نتیجه باید

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 4m^2 - 16 \leq 0 \Rightarrow m^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq m \leq 2$$



۲۲۰- گزینه ۳ نمودار تابع f به صورت

مقابل است. حداکثر مقدار تابع برابر ۳ و حداقل مقدار آن برابر ۲- است و اختلاف این دو مقدار برابر ۵ است.

۲۲۱- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x(x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, \quad x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1 \text{ (غ.ق.)}$$

از طرف دیگر، $f(1) = \frac{1}{2}$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. بنابراین

ماکزیمم مطلق تابع f برابر است با $f(1) = \frac{1}{2}$.

۲۲۲- گزینه ۲ نقاط بحرانی تابع را پیدا می کنیم:

$$f'(x) = -2 \sin 2x + 2 \cos x = 0 \Rightarrow -4 \sin x \cos x + 2 \cos x = 0$$

$$2 \cos x (1 - 2 \sin x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

اکنون مقادیر تابع در نقاط زیر را حساب می کنیم:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}, \quad f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}, \quad f(0) = 1, \quad f(\pi) = 1$$

در نتیجه بیشترین مقدار تابع برابر $\frac{3}{2}$ است.

۲۲۳- گزینه ۳ چون $y = 2x - a$ پس

$$A(x) = xy = x(2x - a) = 2x^2 - ax$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 4x - a = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{4}$$

بنابراین کمترین مقدار xy برابر است با $\frac{a^2}{8} - a \times \frac{a}{4} = -\frac{a^2}{8}$.

۲۲۴- گزینه ۱ طول اضلاع قائمه مثلث را a و b فرض می کنیم.

می خواهیم بیشترین مقدار مساحت، یعنی $S = \frac{1}{2}ab$ را به دست آوریم. توجه

کنید که $a^2 + b^2 = 16$ پس $b = \sqrt{16 - a^2}$ در نتیجه

$$S(a) = \frac{1}{2}a\sqrt{16 - a^2}$$

$$S'(a) = \frac{1}{2}\sqrt{16 - a^2} - \frac{a^2}{2\sqrt{16 - a^2}} \Rightarrow S'(a) = 0 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$$

بنابراین بیشترین مقدار S برابر است با $\frac{1}{2}(2\sqrt{2})\sqrt{8} = 4$.

۲۲۵- گزینه ۴ نقطه $B(x, y)$ را روی نمودار در نظر می گیریم. پس

$$y = \sqrt{2x+9}$$

$$d(x) = AB = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + 2x+9} = \sqrt{x^2 - 6x + 25}$$

$$d'(x) = \frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+25}}, \quad d'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین کمترین مقدار d به ازای $x = 3$ به دست می آید و برابر است با ۴.

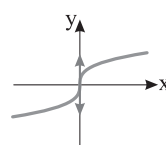
۲۳۱- گزینه ۱ مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x) = 2 - \frac{1}{4\sqrt{x^3}} = \frac{8\sqrt{x^3} - 1}{4\sqrt{x^3}}$$

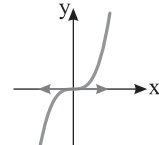
$$f''(x) = 0 \Rightarrow 8\sqrt{x^3} = 1 \Rightarrow x^3 = \left(\frac{1}{8}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

چون مخرج کسر $f''(x)$ روی بازه مورد نظر مثبت است، علامت $f''(x)$ و صورت کسر یکسان است. بنابراین روی بازه $(0, \frac{1}{4})$ ، $f''(x) < 0$ و روی بازه $(\frac{1}{4}, 1)$ ، $f''(x) > 0$. پس جهت تقعر نمودار تابع f ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالاست.

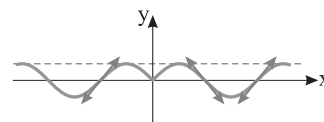
۲۳۲- گزینه ۳ نمودار توابع به شکل زیر است:



$$y = \sqrt[3]{x}$$

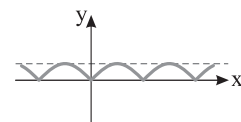
در $x=0$ نقطه عطف دارد.

$$y = x^3$$

در $x=0$ نقطه عطف دارد.

$$y = \sin|x|$$

در تمام نقاط برخورد با محور طول‌ها به جز $x=0$ نقطه عطف دارد.



$$y = |\sin x|$$

نقطه عطف ندارد.

۲۳۳- گزینه ۱ مشتق دوم تابع را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x) = x^4 - x^3 \Rightarrow f''(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{3}{4}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	-	+	+
f	$\cap$	$\cap$	نقطه عطف	$\cup$

مشتق دوم در $x = \frac{3}{4}$ تغییر علامت می‌دهد و تابع در این نقطه مشتق دارد.

یعنی خط مماس دارد. پس $x = \frac{3}{4}$ طول تنها نقطه عطف نمودار تابع است.

۲۳۴- گزینه ۱ مشتق دوم تابع را پیدا و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	$\frac{0}{0}$	+	-	$\frac{0}{0}$
f(x)	$\cap$	$\cup$	نقطه عطف	$\cap$	$\cup$

جهت تقعر نمودار در $x=0$ ، $x=1$ و $x=-1$ تغییر می‌کند ولی فقط در نقطه $x=0$ خط مماس وجود دارد. پس نمودار تابع فقط یک نقطه عطف دارد.

۲۳۵- گزینه ۴ مشتق دوم تابع را پیدا می‌کنیم:

$$y' = 4x^3 + 3ax^2 + 12x \Rightarrow y'' = 12x^2 + 6ax + 12 = 6(2x^2 + ax + 2)$$

برای اینکه نمودار تابع نقطه عطف نداشته باشد، باید مشتق دوم تغییر علامت ندهد، یعنی معادله $2x^2 + ax + 2 = 0$ نباید ریشه ساده داشته باشد. پس

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow a^2 - 4 \times 2 \times 2 \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq 16 \Rightarrow -4 \leq a \leq 4$$

۲۳۶- گزینه ۲ مشتق دوم تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2x + b \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2$$

در نقطه $x=1$ که طول نقطه عطف نمودار تابع است، مقدار مشتق دوم موجود و برابر صفر است. پس

$$f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

از طرف دیگر مختصات نقطه عطف در معادله تابع صدق می‌کنند. پس

$$f(1) = 1 \Rightarrow -\frac{1}{3}(1)^3 + (1)^2 + b + 1 = 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} + 1 = -b \Rightarrow b = -\frac{2}{3}$$

۲۳۷- گزینه ۳ نمودار در نقطه $x=-1$ بر محور طول‌ها مماس شده

است. پس در این نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع هر دو صفر هستند:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2 \Rightarrow f(-1) = -1 + a - b + 2 = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(-1) = 3 - 2a + b = 0$$

$$\begin{cases} a - b = -1 \\ -2a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow ab = 20$$

۲۳۸- گزینه ۳ مجانب‌های نمودار تابع $x=-2$ و $y=\frac{a}{4}$ هستند.

پس محل برخورد آن‌ها نقطه $(-2, \frac{a}{4})$ است که مختصات آن در معادله خط

$$\frac{a}{4} = 2(-2) + 1 \Rightarrow a = -6$$

صدق می‌کنند: $y = 2x + 1$ ۲۳۹- گزینه ۳ مجانب قائم تابع $x=a$ است که نباید در بازه $(2, +\infty)$ قرار بگیرد. پس $a \leq 2$. از طرف دیگر، مشتق تابع باید منفی باشد تا تابع اکیداً

$$f'(x) = \frac{-2a - a - 3}{(x-a)^2} < 0 \Rightarrow -3a - 3 < 0 \Rightarrow a > -1$$

بنابراین $-1 < a \leq 2$. توجه کنید که اگر $a=-1$ ، آن‌گاه $f(x)=2$. این تابع نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست.

۲۴۰- گزینه ۴ طبق نمودار $f(0)=\frac{1}{4}$ ، چون $f(0)=\frac{b}{4}$ ، پس $b=1$.

در نتیجه $f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 2}$. از اینکه نمودار بر محور x (در قسمت $x < 0$)

مماس است، نتیجه می‌گیریم معادله $x^2 + ax + 1 = 0$ ریشه مضاعف منفی دارد:

$$\Delta = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \xrightarrow{\text{ریشه منفی}} a = 2 \Rightarrow a + b = 3$$

۲۴۱- گزینه ۱ نمودار تابع از مبدأ مختصات عبور کرده است، پس

$f(0)=0$ ، در نتیجه $a=0$. همچنین $x=1$ مجانب قائم نمودار تابع است و

چون $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ ، پس $x=1$ ریشه مضاعف مخرج است. بنابراین،

$$2x^2 + bx + c = 2(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2 \Rightarrow b = -4, c = 2$$

$$\text{پس } f(x) = \frac{x}{2x^2 - 4x + 2}, \text{ در نتیجه } f(2) = 1$$

است. بنابراین $A = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$. در نتیجه A مجموعه‌ای متناهی است. از طرفی مجموعه B شامل اعداد صحیحی است که معکوسشان از ۱ بزرگ‌ترند. می‌دانیم معکوس همهٔ عددهای صحیح (به جز صفر)، از ۱ کوچک‌ترند پس مجموعه B تهی است. بنابراین مجموعه B نیز مجموعه‌ای متناهی است.

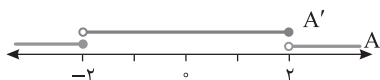
گزینه ۲۵۰- (۴) اگر تعداد محدودی از اعضای مجموعه نامتناهی A را که در مجموعه متناهی B نیز قرار دارند، حذف کنیم، باز هم مجموعه‌ای نامتناهی باقی می‌ماند. یعنی $A-B$ نامتناهی است. بررسی سایر گزینه‌ها به صورت زیر است:

گزینه (۱) اگر $A = \mathbb{W}$ و $B = \mathbb{N}$ ، آن‌گاه $A-B = \{0\}$. پس $A-B$ متناهی است ولی A و B نامتناهی‌اند.

گزینه (۲) اگر $A = \mathbb{Z}$ و $B = \{1\}$ ، آن‌گاه $A-B = \mathbb{Z} - \{1\}$. پس $A-B$ نامتناهی است ولی B متناهی است.

گزینه (۳) اگر $A = \{\frac{1}{n}\}$ و $B = \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه $A-B = \emptyset$. پس A متناهی و B نامتناهی است ولی $A-B$ متناهی است.

گزینه ۲۵۱- (۳) با توجه به شکل زیر، $A' = (-2, 2]$. بنابراین اعداد صحیح -1 ، صفر، 1 و 2 عضو A' هستند، که مجموع آن‌ها برابر ۲ است.



گزینه ۲۵۲- (۳) مجموعهٔ علاقه‌مندان به فوتبال را با A و مجموعهٔ علاقه‌مندان به والیبال را با B نشان می‌دهیم. در این صورت $n(A) = 30$ ، $n(B) = 35$. از طرف دیگر ۴۰ نفر حداقل به یکی از دو رشته علاقه دارند. پس $n(A \cup B) = 40$. بنابراین

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$40 = 30 + 35 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 25$$

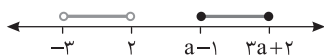
پس ۲۵ نفر به هر دو رشته علاقه دارند.

گزینه ۲۵۳- (۲)

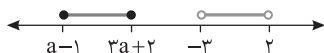
$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = n(A - B) + n(B - A)$$

$$20 - 4 = n(A - B) + n(B - A) \Rightarrow n(A - B) + n(B - A) = 16$$

گزینه ۲۵۴- (۱) توجه کنید که در دو حالت زیر این دو بازه جدا از هم هستند:



$$a - 1 \geq 2 \Rightarrow a \geq 3$$



$$3a + 2 \leq -3 \Rightarrow a \leq -\frac{5}{3}$$

از طرف دیگر برای اینکه $[a-1, 3a+2]$ بازه باشد باید $a-1 < 3a+2$ و در

نتیجه $a > -\frac{3}{2}$. بنابراین

$$a \in ([3, +\infty) \cup (-\infty, -\frac{5}{3}]) \cap (-\frac{3}{2}, +\infty)$$

اگر $a \geq 3$ ، دو بازه مورد نظر جدا از هم هستند.

گزینه ۲۴۲- (۱) خط $y = 0$ مجانب افقی نمودار تابع است، پس درجهٔ

صورت باید کمتر از درجهٔ مخرج باشد. بنابراین $a = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{bx+1}{x^2+1}$

تابع در نقطهٔ $x = \frac{1}{2}$ ماکزیمم نسبی دارد و مشتق آن در این نقطه صفر است:

$$f'(x) = \frac{b(x^2+1) - 2x(bx+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-bx^2 - 2x + b}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow -\frac{b}{4} - 1 + b = 0 \Rightarrow b = \frac{4}{3}$$

گزینه ۲۴۳- (۱) تابع در $x = -1$ و $x = 1$ تعریف نشده است. پس این

اعداد باید ریشهٔ مخرج باشند: $\begin{cases} 1+b+c=0 \\ 1-b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=-1 \end{cases}$. در $x = 1$ حفره

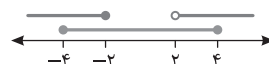
وجود دارد، پس باید صورت کسر هم در این نقطه صفر باشد:

$$1+a-2=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow a+b+c=0$$

گزینه ۲۴۴- (۲) در نقطه‌ای که f ناپیوسته است، f' تعریف نمی‌شود.

پس گزینه (۴) نادرست است. اگر نقطهٔ ناپیوستگی f را $x=a$ بنامیم، نمودار f روی بازهٔ $(-\infty, a)$ نزولی است، پس f' روی این بازه منفی است و گزینه (۱) نادرست است. در نقطه‌ای از بازهٔ $(-\infty, a)$ جهت تقعر نمودار f تغییر می‌کند (از رو به بالا به رو به پایین)، پس نمودار f' در این نقطه باید از حالت صعودی به حالت نزولی تغییر کند. پس گزینه (۳) نادرست است.

گزینه ۲۴۵- (۲) به کمک شکل زیر، مجموعهٔ داده شده را ساده‌تر می‌نویسیم: $A = [-4, -2] \cup (2, 4]$. بنابراین اعداد صحیح -4 ، -3 ، -2 ، 3 و 4 در مجموعهٔ A قرار دارند.



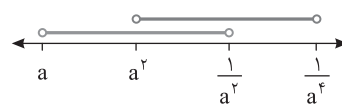
گزینه ۲۴۶- (۲) عدد ۲ باید در نامساوی‌های زیر صدق کند:

$$2a \leq 2 \Rightarrow a \leq 1, \quad 2 < 3+a \Rightarrow a > -1$$

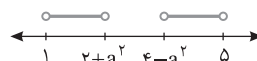
بنابراین $-1 < a \leq 1$ و در نتیجه $a \in (-1, 1]$.

گزینه ۲۴۷- (۴) چون $-1 < a < 0$ ، پس $a < a^2 < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a^4}$. بنابراین با

توجه به شکل زیر، $(a, \frac{1}{a^2}) \cap (a^2, \frac{1}{a^4}) = (a^2, \frac{1}{a^2})$



گزینه ۲۴۸- (۳) در حالت زیر اشتراک بازه‌ها تهی خواهد بود:



$$4 - a^2 \geq 2 + a^2 \Rightarrow a^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq a \leq 1$$

$$a \in [-1, 1]$$

پس

یعنی

گزینه ۲۴۹- (۳) ابتدا مجموعهٔ A را با نوشتن اعضایش مشخص می‌کنیم.

توجه کنید برای آنکه $\frac{1}{x}$ عددی صحیح شود، مقادیر صحیحی که x می‌تواند

اختیار کند، شامل مقسوم‌علیه‌های صحیح عدد ۱۰ یعنی $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$

۲۶۴- گزینه ۲ عدد $\frac{1}{x}$ واسطه حسابی $\frac{1}{x+2}$ و $\frac{1}{x}$ است. پس

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{x} \times \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} \right) \Rightarrow 1 = \frac{x+2+x}{x(x+2)}$$

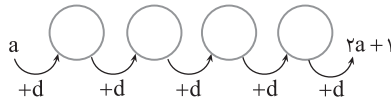
$$x^2 + 2x = 2x + 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \quad \text{در نتیجه}$$

۲۶۵- گزینه ۲ چون $a > 0$ ، پس $a + 1 > a$. اکنون قدرنسبت دنباله

را به دست می‌آوریم $d = \frac{2a+1-a}{4+1} = \frac{a+1}{5}$. اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین

عددهایی که درج کرده‌ایم برابر $3d$ است و در نتیجه

$$\frac{3(a+1)}{5} = 9 \Rightarrow 3a+3=45 \Rightarrow 3a=42 \Rightarrow a=14$$



۲۶۶- گزینه ۳ جملات دنباله حسابی را به صورت $a-d, a, a+d$

در نظر می‌گیریم. مجموع آن‌ها $3a$ است. پس $3a=21$ و در نتیجه $a=7$. از

$$(a-d)(a)(a+d) = 168 \Rightarrow 7(49-d^2) = 168 \quad \text{طرف دیگر،}$$

$$49-d^2 = 24 \Rightarrow d^2 = 25 \Rightarrow d = \pm 5 \Rightarrow 2, 7, 12 \quad \text{یا } 12, 7, 2$$

پس نسبت بزرگ‌ترین عدد به کوچک‌ترین عدد برابر ۶ است.

۲۶۷- گزینه ۳ فرض کنید قدرنسبت این دنباله هندسی r باشد ($r > 0$).

در این صورت

$$a_1 + a_8 = 30 \Rightarrow a_1 + a_1 r^7 = 30 \Rightarrow a_1(1+r^7) = 30 \quad (1)$$

$$a_3 + a_6 = 120 \Rightarrow a_1 r^2 + a_1 r^5 = 120 \Rightarrow a_1 r^2(1+r^3) = 120 \quad (2)$$

اگر تساوی (۲) را بر تساوی (۱) تقسیم کنیم، به دست می‌آید $r^3 = 4$ ؛ پس

$$r^4 = 16. \quad \text{به این ترتیب، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود } a_1 = \frac{30}{17}$$

۲۶۸- گزینه ۲ راه حل اول چون $3+9=5+7=4+8$

$$a_3 a_9 = a_5 a_7 = a_4 a_8$$

$$\text{در نتیجه } a_3 a_9 a_4 = (a_4 a_8)^2 = 9$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$a_4 = a_1 r^3, \quad a_8 = a_1 r^7 \Rightarrow a_4 a_8 = a_1^2 r^{10} = 3$$

$$a_3 a_9 a_4 = a_1 r^2 a_1 r^6 a_1 r^3 = a_1^3 r^{11} = a_1^2 r^{10} = 9 \quad \text{پس}$$

۲۶۹- گزینه ۱ توجه کنید که

$$a_1 a_2 \cdots a_8 = \sqrt{(a_1 a_8)^8} \Rightarrow 81 = \sqrt{(a_1 a_8)^8} \Rightarrow a_1 a_8 = \pm 3$$

از طرف دیگر،

$$2+7=1+8 \Rightarrow a_2 a_7 = a_1 a_8, \quad 4+5=1+8 \Rightarrow a_4 a_5 = a_1 a_8$$

$$\text{پس } a_2 a_4 a_5 a_7 = (a_2 a_7)(a_4 a_5) = (a_1 a_8)^2 = 9$$

۲۷۰- گزینه ۲ اگر جمله اول دنباله حسابی a و قدرنسبت آن d باشد،

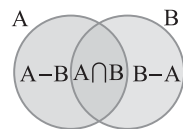
جملات دوم، چهارم و نهم به ترتیب $a+d$ ، $a+3d$ و $a+8d$ هستند. پس

$a+3d$ واسطه هندسی $a+d$ و $a+8d$ است و در نتیجه

$$(a+3d)^2 = (a+d)(a+8d) \Rightarrow a^2 + 6ad + 9d^2 = a^2 + 9ad + 8d^2$$

$$d^2 = 3ad \Rightarrow d = 3a$$

پس قدرنسبت دنباله حسابی ۳ برابر جمله اول آن است.



۲۵۵- گزینه ۱ با توجه به شکل مقابل

مجموعه‌های $A-B$ ، $A \cap B$ و $B-A$ دو

به دو جدا از هم هستند.

۲۵۶- گزینه ۱ توجه کنید که در شکل اول، ۶ دایره رنگی وجود دارد. در

شکل دوم، ۴ دایره رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود، در شکل سوم،

2×4 دایره رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود، ... در شکل n ام،

$4(n-1)$ دایره رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود. بنابراین اگر تعداد

دایره‌های رنگی در شکل n ام را a_n بگیریم، $a_n = 6 + 4(n-1) = 4n + 2$

(توجه کنید که شکل n ام، n دایره خاکستری دارد). بنابراین

$$a_{20} = 4 \times 20 + 2 = 82$$

۲۵۷- گزینه ۱ جمله عمومی الگو $t_n = an + b$ است، پس

$$\begin{cases} t_4 = 16 \\ t_{16} = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b = 16 \\ 16a + b = 28 \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق به دست می‌آید $a=1$ و $b=12$. بنابراین

$$t_n = n + 12 \Rightarrow t_7 = 14$$

۲۵۸- گزینه ۲ شکل n ام از $(n+2)^2$ مربع کوچک تشکیل شده است

که اگر n زوج باشد، $(n+2)^2$ مربع کوچک سفید و اگر n فرد باشد،

$2(n+2)^2 - 1 = 2n + 3$ مربع کوچک سفید در شکل وجود دارد. بنابراین در

شکل هجدهم، $(20)^2$ مربع کوچک وجود دارد که 40 آن‌ها سفید هستند.

پس در شکل هجدهم 360 مربع کوچک رنگی وجود دارد.

۲۵۹- گزینه ۳ باید ببینیم به ازای کدام مقدار n تساوی $\frac{fn-3}{n+3}$

$$fn-3 = 3n+9 \Rightarrow n=12$$

برقرار می‌شود. پس

بنابراین جمله دوازدهم دنباله برابر ۳ است.

۲۶۰- گزینه ۴ عدد آخر دسته اول 2^2 ، عدد آخر دسته دوم 4^2 ، عدد

آخر دسته سوم 6^2 و ... عدد آخر دسته n ام برابر $(2n)^2$ است. پس عدد

آخر دسته دهم 20^2 است. بنابراین عدد اول دسته یازدهم 40^2 است.

۲۶۱- گزینه ۴ از رابطه داده شده $a_n = a_{n-1} - 3$ به دست می‌آید.

یعنی هر جمله دنباله از جمع کردن -3 با جمله قبلی آن به دست می‌آید. پس

یک دنباله حسابی با قدرنسبت -3 و جمله اول -4 داریم که جمله بیستم آن

$$\text{برابر است با } a_{20} = a_1 + 19d = -4 + 19(-3) = -61$$

۲۶۲- گزینه ۱ فرض کنید جمله اول این دنباله، a_1 و قدرنسبت آن d باشد.

در این صورت $a_4 = 5 \Rightarrow a_1 + (4-1)d = 5 \Rightarrow a_1 + 3d = 5 \quad (1)$

$$a_9 = 30 \Rightarrow a_1 + (9-1)d = 30 \Rightarrow a_1 + 8d = 30 \quad (2)$$

اگر تساوی (۱) را از تساوی (۲) کم کنیم، به دست می‌آید $5d = 25$ ، پس

$d = 5$. اکنون اگر این مقدار d را در تساوی (۱) قرار دهیم، به دست می‌آید

$$a_1 = -10. \quad \text{بنابراین جمله عمومی دنباله حسابی مورد نظر، برابر است با}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -10 + (n-1)(5) = 5n - 15$$

۲۶۳- گزینه ۲ این اعداد دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند که متناهی

بوده و قدرنسبت آن ۷ است. کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی که بر ۷ بخش‌پذیر

است، 105 و بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی که بر ۷ بخش‌پذیر است، 994 است.

$$\text{پس تعداد این اعداد } 1 + \frac{994-105}{7} \text{ است که برابر است با } 128.$$

۲۷۸- گزینه ۲ چون $x < 0$ ، پس $\sqrt[4]{x^4} = |x| = -x$ در نتیجه

$$3\sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt[4]{x^4} = 3x + 2(-x) = x$$

۲۷۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$b\sqrt[6]{a^6} - a = 0 \Rightarrow b|a| - a = 0 \Rightarrow b|a| = a$$

بنابراین اگر $a > 0$ ، $b = 1$ و اگر $a < 0$ ، $b = -1$. در نتیجه $\sqrt[6]{a^6} + \sqrt[6]{b^6} = |a| + |b| = |a| + 1$ و اگر a منفی باشد، برابر با $1 - a$ است.

۲۸۰- گزینه ۱ می توان نوشت

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[2]{x^n}}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[2]{x^n}}} \Rightarrow \sqrt[4]{x^{\frac{n}{2 \times 3 \times 2}}} = \sqrt[4]{x^{\frac{n}{12}}} \Rightarrow \frac{n}{12} = \frac{3}{16} \Rightarrow \frac{n}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow n = 2$$

۲۸۱- گزینه ۳ از $a > \sqrt{a}$ نتیجه می شود $a > 1$. بنابراین $a^2 < a^3$ و در

نتیجه $\sqrt[3]{a^2} < \sqrt[3]{a^3}$ یعنی $\sqrt[3]{a^2} < a$. همچنین $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$ پس

$$a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3} > \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

بنابراین نابرابری داده شده در گزینه (۳) نادرست است.

۲۸۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\frac{3}{a^5} = 16 \Rightarrow (a^5)^{\frac{3}{5}} = 16^{\frac{3}{5}} \Rightarrow a = 16^{\frac{1}{5}}$$

بنابراین $a^{\frac{3}{4}} = (16^{\frac{1}{5}})^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{3}{20}} = 16^{\frac{3}{20}} = (2^4)^{\frac{3}{20}} = 2^{\frac{12}{20}} = 2^{\frac{3}{5}} = 3^{\frac{3}{5}}$

۲۸۳- گزینه ۳ با استفاده از نمایش اعداد با نمای گویا به دست می آید

$$\sqrt{3\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{3}} = \sqrt{3 \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{3^{1\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}} = \sqrt{3^{1\frac{7}{12}}} = 3^{\frac{7}{24}}$$

بنابراین $a = \frac{19}{24}$

۲۸۴- گزینه ۳ توجه کنید که $(2a + \frac{3}{a})^2 - 12 = 4a^2 + \frac{9}{a^2} - 12$ از طرف

دیگر، بنابر فرض $a + \frac{3}{2a} = 4$ ، اگر دو طرف این تساوی را در ۲ ضرب کنیم، به دست

می آید $2a + \frac{3}{a} = 8$. بنابراین، حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $8^2 - 12 = 52$.

۲۸۵- گزینه ۲ می توان نوشت

$$\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}} \div \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}} \times \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}}{\sqrt{(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}} = \frac{\sqrt{9-(2\sqrt{2})^2}}{\sqrt{36-(2\sqrt{5})^2}} = \frac{\sqrt{9-8}}{\sqrt{36-20}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$$

۲۸۶- گزینه ۱ بنابر اتحاد مربع مجموع سه جمله،

$$(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(-ab-bc+ca) \quad (1)$$

از طرف دیگر، $ab+bc-ca=8 \Rightarrow -ab-bc+ca=-8$

در نتیجه، از تساوی (۱) نتیجه می شود

$$36 = a^2 + b^2 + c^2 - 16 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 52$$

۲۷۱- گزینه ۴ در این دنباله $a_1 = -7$ و $d = 2$ ، بنابراین

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2 \times (-7) + 9 \times 2) = 20$$

۲۷۲- گزینه ۱ بنابر فرض مسئله،

$$S_{15} = \frac{15}{2}(2a_1 + 14d) = 300 \Rightarrow a_1 + 7d = 20$$

بنابراین $a_8 = a_1 + 7d = 20$

۲۷۳- گزینه ۳ جمله اول دنباله برابر ۹ و قدرنسبت آن ۸ است. بنابراین

مجموع n جمله نخست دنباله برابر است با

$$\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2 \times 9 + 8(n-1)) = \frac{n}{2}(18 + 8n - 8) = 4n^2 + 5n$$

در نتیجه $4n^2 + 5n = 636 \Rightarrow 4n^2 + 5n - 636 = 0$

$$(4n+53)(n-12) = 0 \Rightarrow n = -\frac{53}{4} \text{ (غ.ق.)}, n = 12$$

بنابراین باید دوازده جمله نخست دنباله را جمع کنیم.

۲۷۴- گزینه ۲ با قرار دادن $n = 1$ جمله نخست به دست می آید

$$a_1 = S_1 = 5 - 4 = 1$$

با قرار دادن $n = 2$ مجموع جمله های اول و دوم به دست می آید، سپس جمله دوم را حساب می کنیم:

$$S_2 = a_1 + a_2 = 5 \times 2^2 - 4 \times 2 = 12 \Rightarrow a_2 = 12 - a_1 = 12 - 1 = 11$$

$$d = a_2 - a_1 = 11 - 1 = 10$$

بنابراین

۲۷۵- گزینه ۱ بنابر فرض مسئله،

$$S_7 = a_1 \frac{q^7 - 1}{q - 1} = 195 \Rightarrow 135(q^7 - 1) = 195(q - 1)$$

$$135(q-1)(q^2+q+1) = 195(q-1) \Rightarrow 9q^2 + 9q + 9 = 13$$

$$9q^2 + 9q - 4 = 0 \Rightarrow (3q-1)(3q+4) = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{3}, q = -\frac{4}{3}$$

۲۷۶- گزینه ۳ توجه کنید که $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ در این دنباله $a_1 = \frac{2}{9}$

$$\text{و } q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{9}} = -\frac{3}{2}$$

$$S_n = \frac{55}{72} \Rightarrow \frac{55}{72} = \frac{2}{9} \times \frac{(-\frac{3}{2})^n - 1}{-\frac{3}{2} - 1} \Rightarrow (-\frac{3}{2})^n = -\frac{243}{32} = (-\frac{3}{2})^5$$

بنابراین $n = 5$. یعنی باید پنج جمله نخست دنباله مورد نظر را با هم جمع کنیم

تا حاصل برابر $\frac{55}{72}$ شود.

۲۷۷- گزینه ۱ بنابر فرض مسئله،

$$S_5 = 5a_1 \Rightarrow a_1 \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 5a_1 \Rightarrow q^5 - 1 = 5(q - 1) \quad (1)$$

$$S_{15} = 100 \Rightarrow a_1 \frac{q^{15} - 1}{q - 1} = 100 \Rightarrow a_1(q^{15} - 1) = 100(q - 1) \quad (2)$$

دو طرف تساوی (۲) را بر دو طرف تساوی (۱) تقسیم می کنیم:

$$\frac{a_1(q^{15} - 1)}{q^5 - 1} = \frac{100(q - 1)}{5(q - 1)} \Rightarrow \frac{a_1(q^{15} - 1)}{q^5 - 1} = 20$$

پس $a_1 + a_6 + a_{11} = 20$ ، بنابراین $a_1 q^{10} + a_1 q^5 + a_1 = 20$

۲۹۵- گزینه ۱ مخرج کسر را گویا کرده و عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - 5 = \frac{(4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} - 5 = \frac{4\sqrt{3}+4+6+2\sqrt{3}}{3-1} - 5 = \frac{10+6\sqrt{3}}{2} - 5 = 5+3\sqrt{3}-5 = 3\sqrt{3}$$

۲۹۶- گزینه ۳ صورت و مخرج کسر داده شده را در $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{4}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} \times \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{4(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2+2\sqrt{2}} = \frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2+\sqrt{2}+\sqrt{6}$$

۲۹۷- گزینه ۴ ابتدا مخرج طرف چپ تساوی را گویا می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}-1} \times \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1} = \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{(\sqrt[3]{3})^3-1} = \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{2}$$

$$a = \frac{1}{2} \quad \text{بنابراین}$$

۲۹۸- گزینه ۱ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ برابر

$$P(2) = 2^5 - 4(2)^3 + 3(2)^2 - 2 + 1 = 11 \quad \text{است با}$$

۲۹۹- گزینه ۴ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ برابر

$$P(1) = 3 - 4a - 5 = -4a - 2 \quad \text{است با}$$

بخش‌پذیر است، پس این باقی‌مانده صفر است، در نتیجه

$$-4a - 2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

۳۰۰- گزینه ۲ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+4$ برابر با

$$P(-4) = 16 \quad \text{است و چون بنابر فرض، این باقی‌مانده ۱۶ است، پس}$$

در نتیجه

$$P(x) = ax^{13} + bx^{97} - 5 \Rightarrow P(-4) = a(-4)^{13} + b(-4)^{97} - 5$$

$$16 = -4^{13}a - 4^{97}b - 5 \Rightarrow 4^{13}a + 4^{97}b = -21 \quad (1)$$

از طرف دیگر، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-4$ برابر با $P(4)$

است. اکنون توجه کنید که

$$P(4) = 4^{13}a + 4^{97}b - 5 \xrightarrow{\text{بنابر تساوی (۱)}} P(4) = -21 - 5 = -26$$

بنابراین باقی‌مانده مورد نظر برابر -26 است.

۳۰۱- گزینه ۴ چون باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$

برابر ۴ است، پس $P(2) = 4$. در نتیجه، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای

$$P(4x) \text{ بر } 1-2x \text{ برابر است با } P(2) = 4$$

۳۰۲- گزینه ۱ جواب‌های معادله برابر هستند با

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 13}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{12}}{2} = 4 \pm \sqrt{3}$$

۲۸۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$ و

$$(x-4)(x+1) = x^2 - 3x - 4$$

$$(x-1)(x-2)(x-4)(x+1) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 3x - 4)$$

$$= (7+2)(7-4) = 27$$

۲۸۸- گزینه ۲ ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - (8x^3 - 12x^2 + 6x - 1)$$

$$= -7x^3 + 6x^2 + 6x - 7$$

بنابراین ضریب x^2 برابر ۶ است.

۲۸۹- گزینه ۳ ابتدا عبارت را به کمک اتحاد مزدوج و اتحاد چاق و لاغر

ساده می‌کنیم:

$$A = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)+1$$

$$= ((x-1)(x^2+x+1))((x+1)(x^2-x+1))+1$$

$$= (x^3-1)(x^3+1)+1 = x^6-1+1 = x^6$$

حال قرار می‌دهیم $x = \sqrt[12]{2}$ و نتیجه می‌شود $A = (\sqrt[12]{2})^6 = \sqrt{2}$

۲۹۰- گزینه ۱ می‌توان نوشت

$$x^2 - y^2 - 6x - 8y - 7 = (x^2 - 6x + 9) - (y^2 + 8y + 16)$$

$$= (x-3)^2 - (y+4)^2 = (x-3-(y+4))(x-3+y+4)$$

$$= (x-y-7)(x+y+1)$$

بنابراین $x+y+1$ عامل عبارت مورد نظر است.

۲۹۱- گزینه ۳ توجه کنید که

$$x^4 + 3x^2 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - x^2 = (x^2+2)^2 - x^2$$

$$= (x^2+2-x)(x^2+2+x)$$

بنابراین x^2-x+2 عاملی از عبارت مورد نظر است.

۲۹۲- گزینه ۳ صورت کسر اول برابر است با

$$3y^3 + 3 = 3(y^3+1) = 3(y+1)(y^2-y+1)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{3(y+1)(y^2-y+1)}{y-x} \times \frac{x(y-x)}{x(1-y+y^2)} = 3(y+1)$$

۲۹۳- گزینه ۳ با توجه به اتحاد جمله مشترک، عبارت داده شده را

ساده می‌کنیم:

$$a^2 + ab + ac + bc = a^2 + a(b+c) + bc = (a+b)(a+c)$$

توجه کنید که $a+c = a+b+c-b = 3+2=5$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر

$$\text{برابر است با } 3 \times 5 = 15$$

۲۹۴- گزینه ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{a^6-1}{a^4-a^2} = \frac{(a^2)^3-1}{a^2(a^2-1)} = \frac{(a^2-1)((a^2)^2+a^2+1)}{a^2(a^2-1)}$$

$$= \frac{a^4+a^2+1}{a^2} = \frac{a^4}{a^2} + \frac{a^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} = a^2 + \frac{1}{a^2} + 1$$

$$= (a - \frac{1}{a})^2 + 2 + 1 = \sqrt{5}^2 + 3 = 8$$

۳۱۲- گزینه ۴ β جواب معادله است. پس در معادله صدق می‌کند:

$$2\beta^2 - \beta - 7 = 0 \Rightarrow 2\beta^2 = \beta + 7$$

از طرف دیگر، $\alpha + \beta = \frac{1}{\beta}$. بنابراین $\alpha + 2\beta^2 = \alpha + \beta + 7 = \frac{1}{\beta} + 7 = \frac{1+7\beta}{\beta}$

۳۱۳- گزینه ۳ مجموع و حاصل ضرب جواب‌ها را حساب می‌کنیم

$$S = \alpha + \beta = 2 - \sqrt{3} + 3 + \sqrt{3} = 5$$

$$P = \alpha\beta = (2 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3}) = 3 - \sqrt{3}$$

بنابراین معادله مورد نظر به شکل زیر است:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 3 - \sqrt{3} = 0$$

۳۱۴- گزینه ۱ توجه کنید که $x_1 + x_2 = 1$ و $x_1 x_2 = -1$. بنابراین

$$\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} = \frac{x_2 + 1 + x_1 + 1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = \frac{x_1 + x_2 + 2}{1 + (x_1 + x_2) + x_1 x_2} = \frac{1 + 2}{1 + 1 - 1} = 3$$

$$\frac{1}{x_1 + 1} \times \frac{1}{x_2 + 1} = \frac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = \frac{1}{1 + (x_1 + x_2) + x_1 x_2} = \frac{1}{1 + 1 - 1} = 1$$

بنابراین معادله مورد نظر $x^2 - 3x + 1 = 0$ است.

۳۱۵- گزینه ۲ برای اینکه جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$

مختلف علامت باشند، کافی است $\frac{c}{a} < 0$. توجه کنید که در این حالت

$\Delta > 0$. بنابراین

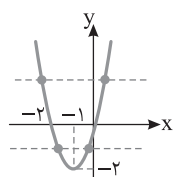
$$\frac{m+2}{m} < 0 \Rightarrow -2 < m < 0$$

۳۱۶- گزینه ۴ راه حل اول برای اینکه معادله مورد نظر دو جواب منفی

داشته باشد، باید $\Delta > 0$ ، مجموع جواب‌ها منفی و حاصل ضرب آن‌ها مثبت باشد. در نتیجه

$$\Delta > 0 \Rightarrow 16 - 4(-2)(a) > 0 \Rightarrow a > -2, \quad \frac{4}{-2} = -2 < 0, \quad \frac{a}{-2} > 0 \Rightarrow a < 0$$

بنابراین $-2 < a < 0$.



راه حل دوم ابتدا معادله داده شده را به صورت

$$2x^2 + 4x = a$$

می‌نویسیم. اکنون سهمی به معادله

$y = 2x^2 + 4x$ و خط $y = a$ را در یک دستگاه

مختصات رسم می‌کنیم. بنابراین اگر $-2 < a < 0$ ، معادله دو جواب منفی دارد و اگر $a > 0$ ، معادله یک جواب منفی و یک جواب مثبت دارد.

توجه کنید که $x = -2$ و $x = 0$ طول نقاط برخورد سهمی با محور x هستند و رأسش که نقطهٔ مینیمم آن است نقطهٔ $(-1, -2)$ است.

۳۱۷- گزینه ۱ شرط داشتن دو جواب، مثبت بودن Δ است. پس

$$\Delta = (a+1)^2 - 64 > 0 \Rightarrow (a+1)^2 > 64 \Rightarrow \begin{cases} a+1 > 8 \Rightarrow a > 7 \\ \text{یا} \\ a+1 < -8 \Rightarrow a < -9 \end{cases} \quad (1)$$

شرط مثبت بودن دو جواب این است که مجموع و حاصل ضرب جواب‌ها مثبت باشند. حاصل ضرب جواب‌ها برابر ۴ است که مثبت است و مجموع جواب‌ها

$$-\frac{a+1}{2} > 0 \Rightarrow a+1 < 0 \Rightarrow a < -1 \quad (2) \quad \text{پس برابر } -\frac{a+1}{2} \text{ است.}$$

از نابرابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a < -9$.

۳۰۳- گزینه ۳ معادلهٔ گزینه (۳) به ازای هر مقدار m جواب حقیقی

دارد، زیرا معادله‌ای که به ازای هر m ، دلتای مربوط به آن همیشه مثبت باشد، جواب این تست است.

$$mx^2 - x - m = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 4m^2 > 0$$

توجه کنید که اگر $m = 0$ ، آن‌گاه معادله به یک معادلهٔ درجهٔ اول تبدیل می‌شود که باز هم دارای جواب حقیقی است. بررسی سایر گزینه‌ها به صورت زیر است:

گزینه (۱) $\Delta = 4 - 4m \Rightarrow \Delta = 4 - 4m \Rightarrow m = 1$ همواره مثبت نیست.

گزینه (۲) $\Delta = 1 - 4m^2 \Rightarrow \Delta = 1 - 4m^2 \Rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$ همواره مثبت نیست.

گزینه (۴) $\Delta = 1 - 4m \Rightarrow \Delta = 1 - 4m \Rightarrow m = \frac{1}{4}$ همواره مثبت نیست.

۳۰۴- گزینه ۱ باید $\Delta \geq 0$ ، پس

$$x^2 - (k+1)x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (k+1)^2 - 4 \geq 0$$

$$(k+1)^2 \geq 4 \xrightarrow{k > 0} k+1 \geq 2 \Rightarrow k \geq 1$$

پس حداقل مقدار مثبت k برابر ۱ است.

۳۰۵- گزینه ۱ توجه کنید که چون مجموع ضریب‌های معادله

$$92x^2 - 167x + 75 = 0$$

مورد نظر ۱ و جواب دیگر آن $\frac{75}{92}$ است. چون $\frac{75}{92} < 1$ ، پس کوچک‌ترین

جواب $\frac{75}{92}$ است.

۳۰۶- گزینه ۱ معادله را به روش تجزیه حل می‌کنیم:

$$(x - \sqrt{3})(x - 2\sqrt{2}) = 0 \xrightarrow{x_1 < x_2} x_1 = \sqrt{3}, \quad x_2 = 2\sqrt{2}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (\sqrt{3})^4 + (2\sqrt{2})^4 = 9 + 16 = 25$$

۳۰۷- گزینه ۳ این دو عدد فرد را x و $x+2$ فرض می‌کنیم. بنابراین

$$x^2 + (x+2)^2 = 13 \Rightarrow 2x^2 + 4x + 4 = 13 \Rightarrow x^2 + 2x - 6 = 0$$

$$(x+9)(x-7) = 0 \Rightarrow x = -9 \text{ (غ.ق.)}, \quad x = 7$$

بنابراین دو عدد مورد نظر، ۷ و ۹ هستند و اختلاف مربع‌های آن‌ها برابر $81 - 49 = 32$ یعنی ۳۲ است.

۳۰۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2)$$

از طرف دیگر، $x_1 + x_2 = 4$ و $x_1 x_2 = -1$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $(-1)(4) = -4$.

۳۰۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $\alpha + \beta = 2$ و $\alpha\beta = -5$. بنابراین

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 8 - 3(-5)(2) = 38$$

۳۱۰- گزینه ۳ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha = -\frac{1}{\beta}$

و در نتیجه $\alpha\beta = -1$. بنابراین

$$\frac{m-1}{2} = -1 \Rightarrow m-1 = -2 \Rightarrow m = -1$$

۳۱۱- گزینه ۴ توجه کنید که $x_1 + x_2 = -5$ و چون $2x_1 - x_2 = 17$ ،

پس با جمع کردن طرفین این تساوی‌ها به دست می‌آید $x_1 = 4$. چون x_1 جواب معادلهٔ مورد نظر است، پس ۴ در این معادله صدق می‌کند:

$$4^2 + 5(4) - 4m + 16 = 0 \Rightarrow m = 13$$

۳۲۳- گزینه ۳ معادله را به شکل $(x^2 - x)^2 + 2(x^2 - x) - 3 = 0$

می‌نویسیم. با قرار دادن $x^2 - x = t$ به دست می‌آید

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = -3, t = 1$$

معادله جواب ندارد $\Delta < 0 \Rightarrow x^2 - x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - x = -3$

$x^2 - x = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ مجموع جواب‌ها $= 1$

۳۲۴- گزینه ۲ معادله مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$x\left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = 0 \Rightarrow x\left(\frac{2(x+1) - (x-1)}{(x-1)(x+1)}\right) = 0$$

$$x\left(\frac{x+3}{(x-1)(x+1)}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x(x+3)}{(x-1)(x+1)} = 0$$

جواب‌های این معادله ۰ و ۳ هستند که هر دو قابل قبول هستند و مجموع آن‌ها ۳ است.

۳۲۵- گزینه ۳ دو طرف معادله را در مخرج مشترک کسرهای دو طرف

که برابر $3(x-3)(x+3)$ است ضرب می‌کنیم:

$$3(x-3)(x+3) \frac{x+3}{x-3} + 3(x-3)(x+3) \frac{x-3}{x+3} = 1 \Rightarrow 3(x-3)(x+3) = 1$$

$$3(x+3)^2 + 3(x-3)^2 = 1 \Rightarrow (x-3)(x+3)$$

$$3(x^2 + 6x + 9) + 3(x^2 - 6x + 9) = 1 \Rightarrow (x^2 - 9)$$

$$6x^2 + 54 = 1 \Rightarrow 6x^2 - 9 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 144 \Rightarrow x = \pm 6$$

چون ۶- و ۶ هیچ کدام از مخرج‌ها را صفر نمی‌کنند، هر دو قابل قبول هستند. بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر برابر ۳۶- است.

۳۲۶- گزینه ۲ معادله مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\frac{2x - 2a + x + 3}{(x+3)(x-a)} = 4 \Rightarrow \frac{3x - 2a + 3}{(x+3)(x-a)} = 4$$

$$3x - 2a + 3 = 4x^2 + (12 - 4a)x - 12a$$

$$4x^2 + (9 - 4a)x - 10a - 3 = 0$$

$$\text{بنابراین } \frac{9a-9}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow 9a-9 = -1 \Rightarrow a=2$$

اگر $a=2$ ، آن‌گاه معادله به صورت $4x^2 + x - 23 = 0$ درمی‌آید که چون $\Delta > 0$ پس معادله دو جواب دارد. $x = -3$ و $x = 2$ که هر کدام مخرج یکی از کسرها را در معادله اولیه صفر می‌کنند، هیچ کدام جواب معادله بالا نیستند. پس هر دو جواب این معادله قابل قبول هستند.

۳۲۷- گزینه ۱ طرفین معادله را در $x(x+a)$ ضرب می‌کنیم

$$x + a + 3x = 2x^2 + 2ax \Rightarrow 2x^2 + (2a-4)x - a = 0$$

برای اینکه معادله جواب داشته باشد باید $\Delta \geq 0$ ، پس

$$(2a-4)^2 - 4a \geq 0 \Rightarrow 4a^2 - 16a + 16 + 4a \geq 0 \Rightarrow a^2 - 3a + 4 \geq 0$$

عبارت $a^2 - 3a + 4$ همواره مثبت است. پس معادله به‌ازای تمام مقادیر a جواب دارد.

۳۲۸- گزینه ۲ سمت راست معادله داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{15}{x^2 + x + 1} = 2(x^2 + x + 1) - 1$$

اگر فرض کنیم $x^2 + x + 1 = t$ ، این معادله می‌شود

$$\frac{15}{t} = 2t - 1 \Rightarrow 15 = 2t^2 - t \Rightarrow 2t^2 - t - 15 = 0 \Rightarrow t = -\frac{5}{2}, t = 3$$

۳۱۸- گزینه ۴ توجه کنید که معادله دو جواب دارد که یکی مثبت و

یکی منفی است، پس حاصل ضرب جواب‌ها منفی است:

$$\frac{5(k-2)}{k+6} < 0 \Rightarrow k \in (-6, 2)$$

از طرف دیگر چون قدرمطلق جواب منفی از جواب مثبت بزرگ‌تر است، پس

مجموع جواب‌ها منفی است

$$-\frac{17(k+1)}{k+6} < 0 \Rightarrow \frac{k+1}{k+6} > 0 \Rightarrow k \in (-\infty, -6) \cup (-1, +\infty)$$

بنابراین $k \in (-1, 2)$.

۳۱۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $x = -1$ یک جواب معادله است.

$$(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) - 1 = 0$$

بنابراین معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x^2(x+1) - (2x^2 + 3x + 1) = 0$$

$$x^2(x+1) - (x+1)(2x+1) = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

پس جواب‌های دیگر از حل معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ به دست می‌آیند که

عبارت‌اند از $1 + \sqrt{2}$ و $1 - \sqrt{2}$. در نتیجه مجموع جواب‌های منفی معادله برابر است با $-1 + (1 - \sqrt{2}) = -\sqrt{2}$.

۳۲۰- گزینه ۴ چون $x = 2$ یکی از جواب‌های معادله است، پس در

معادله صدق می‌کند: $8 + 4a + 2 + 6 = 0$ پس $a = -4$. چون $x = 2$ عاملی از

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x-2)Q(x)$$
 است، بنابراین $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x-2)Q(x)$

برای به دست آوردن $Q(x)$ چندجمله‌ای $x^3 - 4x^2 + x + 6$ را بر $x - 2$

تقسیم می‌کنیم. که نتیجه می‌شود $Q(x) = x^2 - 2x - 3$. بنابراین

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x-2)(x^2 - 2x - 3) = (x-2)(x+1)(x-3)$$

پس به غیر از $x = 2$ جواب‌های دیگر معادله ۱- و ۳ هستند که مجموع مربع‌های آن‌ها ۱۰ است.

۳۲۱- گزینه ۴ اگر فرض کنیم $t = x^2 \geq 0$ ، معادله به صورت

$$t^2 - 3t - 1 = 0 \text{ در می‌آید که جواب‌های آن } t = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \text{ است. عدد}$$

$$\frac{3 - \sqrt{13}}{2} \text{ منفی است و قابل قبول نیست. بنابراین}$$

$$x^2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}}$$

پس حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر است با

$$-\sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}} = -\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

۳۲۲- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $x^2 = t$ ، آن‌گاه $x = \pm \sqrt{t}$ و $t \geq 0$.

همچنین معادله به شکل $t^2 - 2t + m^2 - 1 = 0$ در می‌آید. اگر این معادله دو

جواب مثبت داشته باشد، معادله اصلی چهار جواب خواهد داشت. بنابراین در

$$\text{معادله } t^2 - 2t + m^2 - 1 = 0 \text{ باید شرط‌های زیر برقرار باشند:}$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4 - 4(m^2 - 1) > 0 \Rightarrow m^2 < 2 \Rightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$$

$$-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow 2 > 0, \quad \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow m^2 - 1 > 0 \Rightarrow m < -1 \text{ یا } m > 1$$

بنابراین اگر m عضو مجموعه $(1, \sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, -1)$ باشد، معادله اصلی

چهار جواب خواهد داشت. این مجموعه را می‌توان به صورت زیر هم نوشت

$$m \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) - [-1, 1]$$

به این ترتیب

$$x^2 + x + 1 = -\frac{5}{2} \Rightarrow x^2 + x + \frac{7}{2} = 0 \quad (\Delta < 0)$$

$$x^2 + x + 1 = 3 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1$$

بنابراین معادله مورد نظر دو جواب دارد.

۳۲۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4$$

پس معادله مورد نظر به معادله $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{3}{2}$ تبدیل می‌شود.

بنابراین یا $x - \frac{1}{x} = 0$ ، یعنی $x^2 - 1 = 0$ ، که مجموع جواب‌هایش صفر است.

یا $x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$ ، یعنی $x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$ که مجموع جواب‌هایش $\frac{3}{2}$ است.

بنابراین مجموع جواب‌های معادله مورد نظر برابر با $\frac{3}{2}$ است.

۳۳۰- گزینه ۴ اگر این عدد x باشد، آن‌گاه

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 4 \Rightarrow x + 1 = 4x^2 \Rightarrow 4x^2 - x - 1 = 0$$

معادله بالا دو جواب دارد که حاصل ضرب آن‌ها برابر $-\frac{1}{4}$ است.

۳۳۱- گزینه ۳ اگر ماشین کندتر به تنهایی در t ساعت کار را تمام کند،

ماشین سریع‌تر به تنهایی در $\frac{t}{3}$ ساعت کار را تمام می‌کند. پس ماشین کندتر

به تنهایی در یک ساعت $\frac{1}{t}$ کار و ماشین سریع‌تر به تنهایی در یک ساعت $\frac{3}{t}$

کار را انجام می‌دهد. از طرف دیگر دو ماشین با هم در یک ساعت $\frac{1}{6}$ کار را

انجام می‌دهند. بنابراین

$$\frac{1}{t} + \frac{3}{t} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{4}{t} = \frac{1}{6} \Rightarrow t = 24$$

بنابراین ماشین کندتر به تنهایی در ۲۴ ساعت کار را انجام می‌دهد.

۳۳۲- گزینه ۳ با توجه به جدول تعیین علامت باید $a - b < 0$ ، پس

$a < b$. همچنین $x = b$ ریشه عبارت است، بنابراین

$$(a - b)b - 2a + 2b = 0 \Rightarrow (a - b)b - 2(a - b) = 0$$

$$(a - b)(b - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - b = 0 \Rightarrow a = b \\ b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2 \end{cases} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

چون a عددی طبیعی است، پس

$$a < b = 2 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین $a + b = 3$.

۳۳۳- گزینه ۲ با توجه به جدول تعیین علامت، مشخص است که

عبارت مورد نظر باید چندجمله‌ای درجه اول باشد. پس $a - 2 = 0$ و در نتیجه

$a = 2$. بنابراین عبارت به صورت $y = -(2 + b)x + 4$ است. چون $x = 4$

ریشه عبارت است، پس

$$-(2 + b) \times 4 + 4 = 0 \Rightarrow b = -1$$

بنابراین $a - b = 3$.

۳۳۴- گزینه ۳ ابتدا عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم

$$y = \frac{(x-1)(x-2)(x-1)(x+1)}{(x-2)^3}$$

اکنون آن را ساده می‌کنیم $y = \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-2)^2}$. چون عبارت‌های $(x-1)^2$ و

$(x-2)^2$ نامنفی هستند، علامت عبارت اخیر را با توجه به علامت $x+1$ تعیین می‌کنیم:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
y		$-$	$+$	$+$	$+$

۳۳۵- گزینه ۲ دو نامعادله $3x - 2 < 5x + 6$ و $4x - 1 < 3x - 2$ را

حل می‌کنیم:

$$3x - 2 < 5x + 6 \Rightarrow -2x < 8 \Rightarrow x > -4$$

$$4x - 1 < 3x - 2 \Rightarrow x < -1$$

اشتراک مجموعه جواب‌های فوق یعنی $-4 < x < -1$ جواب مسئله است. پس

$$a = -4 \text{ و } b = -1 \text{ و در نتیجه } a + b = -5$$

۳۳۶- گزینه ۱ باید شرایط $\Delta < 0$ و $a > 0$ برقرار باشند. پس

$$m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1 \quad (1)$$

$$\Delta = 8 - 4m(m - 1) < 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Rightarrow (m + 1)(m - 2) > 0$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر باید

$$m < -1 \text{ یا } m > 2 \quad (2)$$

از دو شرط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $m > 2$.

m	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$m^2 - m - 2$		$+$	$-$	$+$

۳۳۷- گزینه ۴ ابتدا جدول تعیین علامت عبارت $y = \frac{(1-x)^2(x+2)^3}{x|x|(2-x)^5}$

را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$	-2	0	1	2	$+\infty$
y		$+$	$-$	$+$	$+$	$-$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ است.

۳۳۸- گزینه ۱ نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x - \frac{2}{x} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x} \geq 0$$

به کمک تعیین علامت مجموعه جواب‌های نامعادله را تعیین می‌کنیم.

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$\frac{x^2 - x - 2}{x}$		$-$	$+$	$-$	$+$

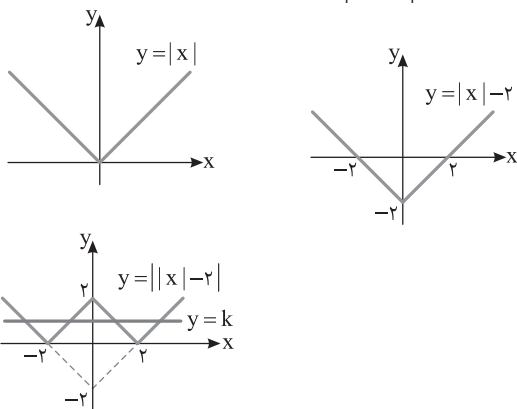
این مجموعه به صورت $[0, 2) \cup (-1, +\infty)$ است. پس $a = -1$ و $b = 2$. در

نتیجه $a + b = 1$.

۳۴۵- گزینه ۳ تعداد جواب‌های معادله مورد نظر، تعداد نقطه‌های

برخورد نمودار تابع‌های $y=|x|-2$ و $y=k$ است. نمودار $y=|x|-2$

را در شکل زیر رسم کرده‌ایم:

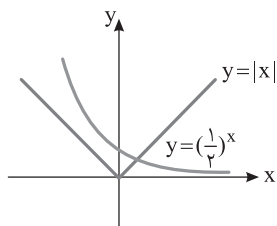


از روی شکل معلوم است که اگر خط $y=k$ نمودار $y=|x|-2$ را در چهار نقطه قطع کرده باشد، باید $0 < k < 2$.

۳۴۶- گزینه ۲ معادله را به صورت $|x| = (\frac{1}{4})^x$ می‌نویسیم و نمودار

تابع‌های $y=|x|$ و $y=(\frac{1}{4})^x$ را رسم می‌کنیم. نمودارها یکدیگر را در یک

نقطه قطع می‌کنند، پس معادله یک جواب دارد.

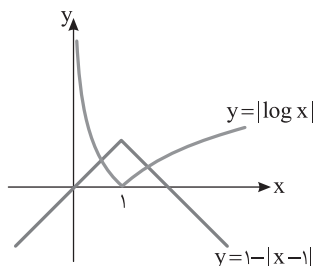


۳۴۷- گزینه ۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$|\log x| = 1 - |x - 1|$$

و نمودار تابع‌های $y=|x-1|$ و $y=|\log x|$ را رسم می‌کنیم. با توجه به

شکل معادله مورد نظر دو جواب دارد.



۳۴۸- گزینه ۱

$$\begin{aligned} |3 + |2 - |1 + a|| &= |3 + |2 - (-(1+a))|| & (\text{چون } 1+a < 0) \\ &= |3 + |3 + a|| = |3 - (3+a)| & (\text{چون } 3+a < 0) \\ &= |-a| = -a & (\text{چون } a < 0) \end{aligned}$$

۳۳۹- گزینه ۱ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و معادله را ساده می‌کنیم:

$$x^2 - 5x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 - 5x + 5 \Rightarrow x - 1 = x^2 - 4x + 4$$

جواب‌های این معادله به صورت $x = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ و $x = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ هستند. ولی

در معادله اصلی صدق نمی‌کند زیرا این عدد کوچک‌تر از ۲ است و

در معادله $\sqrt{x-1} = x-2$ اگر $1 < x < 2$ ، آن‌گاه سمت چپ معادله، نامنفی و

سمت راست آن منفی است که قابل قبول نیست. بنابراین فقط $x = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$

جواب معادله است.

۳۴۰- گزینه ۱ معادله را به شکل $\sqrt{x+1} + 1 = \sqrt{2x+3}$ می‌نویسیم و

طرفین آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$x+1+1+2\sqrt{x+1} = 2x+3 \Rightarrow 2\sqrt{x+1} = x+1 \Rightarrow \sqrt{x+1} = \frac{x+1}{2}$$

دوباره طرفین تساوی اخیر را به توان دو می‌رسانیم:

$$4(x+1) = (x+1)^2 \Rightarrow 4x+4 = x^2+2x+1 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow x=-1, x=3$$

هر دو جواب در معادله اصلی صدق می‌کنند، پس مجموع جواب‌ها برابر ۲ است.

۳۴۱- گزینه ۴ معادله مورد نظر را این‌طور می‌نویسیم:

$$x^2 + 5x + 28 - 24 - 5\sqrt{x^2 + 5x + 28} = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}$$

اکنون اگر فرض کنیم $\sqrt{x^2 + 5x + 28} = t$ ، این معادله می‌شود

$$t^2 - 24 - 5t = 0 \Rightarrow (t-8)(t+3) = 0 \Rightarrow t=8, t=-3$$

چون $t \geq 0$ ، پس $t=8$ ، یعنی

$$\sqrt{x^2 + 5x + 28} = 8 \Rightarrow x^2 + 5x + 28 = 64 \Rightarrow x^2 + 5x - 36 = 0$$

$$(x-4)(x+9) = 0 \Rightarrow x=4, x=-9$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر برابر ۳۶- است.

۳۴۲- گزینه ۲ اگر این عدد را x فرض کنیم، آن‌گاه

$$x - \sqrt{x} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}} \frac{x^2}{4} = x \Rightarrow x^2 = 4x$$

$$x=0, x=4$$

چون هر دو عدد در معادله اولیه صدق می‌کنند، بنابراین دو عدد با خاصیت

مورد نظر وجود دارد.

۳۴۳- گزینه ۱ از روی شکل معلوم است که $a > 1$. چون $x=1$ جواب

معادله است، پس

$$2 \times 1^2 - 1 = |1-a| \Rightarrow |1-a| = 1 \xrightarrow{a>1} a-1=1$$

بنابراین $a=2$.

۳۴۴- گزینه ۴ اگر خط و سهمی نقطه مشترکی نداشته باشند، باید

معادله $x^2 + 2kx + k + 1 = -x$ جواب نداشته باشد. بنابراین معادله

$$x^2 + (2k+1)x + k+1 = 0$$

یعنی جواب ندارد، یعنی

$$\Delta = (2k+1)^2 - 4(k+1) < 0 \Rightarrow 4k^2 + 4k + 1 - 4k - 4 < 0$$

$$k^2 < \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} < k < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۳۵۷- گزینه ۲ نامعادله را به شکل زیر ساده می کنیم:

$$|x-2| < 6 \Rightarrow -6 < x-2 < 6 \Rightarrow -4 < x < 8$$

نابرابری $-4 < x$ همواره برقرار است، پس کافی است نامعادله $|x| < 8$ را

$$|x| < 8 \Rightarrow -8 < x < 8$$

حل کنیم:

بنابراین اعداد صحیح -7 تا 7 در نامعادله صدق می کنند که تعداد آن ها ۱۵ تا است.

۳۵۸- گزینه ۲ ابتدا نامعادله را به صورت $|x-2| > |x-2|$ می نویسیم.

اکنون دو طرف نامعادله را به توان ۲ می رسانیم تا به نامعادله زیر برسیم:

$$4x^2 > (x-2)^2 \Rightarrow (2x)^2 - (x-2)^2 > 0$$

در نتیجه $(2x - (x-2))(2x + x - 2) > 0$ یا به طور معادل

$$(x+2)(3x-2) > 0$$

بنابراین مجموعه جواب های مورد نظر برابر است با $(-\infty, -2) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$.

۳۵۹- گزینه ۲ توجه کنید که $x-2+x-4=2x-6$ ، در نتیجه

$$|x-2|+|x-4|=|x-2+x-4|$$

بنابراین، حالت تساوی نابرابری مثلث پیش آمده است. در نتیجه

$$(x-2)(x-4) \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - (2, 4)$$

پس تنها عدد صحیحی که تساوی مورد نظر به ازای آن برقرار نیست ۳ است.

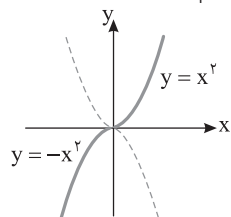
۳۶۰- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}-1) + f(\sqrt{5}-2) &= 5|3(\sqrt{3}-1)-2| - 3|5(\sqrt{3}-1)-2| \\ &+ 5|3(\sqrt{5}-2)-2| - 3|5(\sqrt{5}-2)-2| = 5|\underbrace{3\sqrt{3}-5}_{+}| - 3|\underbrace{5\sqrt{3}-7}_{+}| \\ &+ 5|\underbrace{3\sqrt{5}-8}_{-}| - 3|\underbrace{5\sqrt{5}-12}_{-}| = -4+4=0 \end{aligned}$$

۳۶۱- گزینه ۳ ضابطه تابع f به شکل $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ است.

پس باید برای $x \geq 0$ نمودار تابع $y = x^2$ را رسم کنیم و برای $x \leq 0$ نمودار

تابع $y = -x^2$ را رسم کنیم.



۳۶۲- گزینه ۱ توجه کنید که $\frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$ ، بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x > 1 \\ x^2-1 & x < 1 \end{cases} \text{ در نتیجه نمودار تابع } f \text{ مانند گزینه (۱) است.}$$

۳۶۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)+x & x \leq -1 \\ x+1+x & -1 < x \leq 0 \\ x+1-x & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & x \leq -1 \\ 2x+1 & -1 < x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

در نتیجه نمودار تابع f مانند گزینه (۳) است.

۳۴۹- گزینه ۴ چون a منفی است، پس $|a| = -a$ ، در نتیجه

$$|a-b| = |-a-b|$$

$$b < |a| = -a \Rightarrow a+b < 0$$

اکنون توجه کنید که

$$|a-b| = |-a-b| = -a-b$$

بنابراین $|a-b| = |-a-b| = -a-b$ از طرف دیگر،

$$|b-2a| = |b-2|a| = |b+2a|$$

چون $b+2a = \frac{b+a}{2} + \frac{a}{2} < 0$ ، در نتیجه $|b+2a| = -b-2a$ ، بنابراین

$$-a-b - (-b-2a) = a$$

۳۵۰- گزینه ۳ چون $1 < x < 2$ ، پس

$$\frac{|x-2|}{x-2} = \frac{2-x}{x-2} = -1, \quad \frac{x-1}{|x-1|} = \frac{x-1}{x-1} = 1, \quad \frac{|x|}{x} = 1$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-1-1+1=-1$.

۳۵۱- گزینه ۴ توجه کنید که $x^2 < x \Rightarrow x^2 - x = x(x-1) < 0$

در نتیجه $0 < x < 1$ ، بنابراین $|x+1| = x+1$ ، $|1-x| = 1-x$ و $|x| = x$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $x+1-(1-x)+x=3x$.

۳۵۲- گزینه ۱ عبارت A را می توان به صورت زیر نوشت

$$A = |2x-6| + |7-2x|$$

با توجه به نابرابری مثلث، $A \geq |2x-6+7-2x| \Rightarrow A \geq 1$

پس کمترین مقدار عبارت A برابر ۱ است.

۳۵۳- گزینه ۴ معادله را به شکل زیر حل می کنیم:

$$|x-2|=3 \Rightarrow \begin{cases} x-2=3 \\ x-2=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-1 \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب های معادله برابر ۴ است.

۳۵۴- گزینه ۱ راه حل اول توجه کنید که $|x|=|x|$ و $|3x|=3|x|$.

بنابراین معادله مورد نظر می شود

$$|x|+|x|+3|x|=15 \Rightarrow 5|x|=15 \Rightarrow |x|=3 \Rightarrow x=3, x=-3$$

بنابراین مجموع جواب های معادله مورد نظر صفر است.

راه حل دوم توجه کنید که اگر x جواب معادله مورد نظر باشد، $-x$ هم جواب

این معادله است. بنابراین مجموع جواب های معادله مورد نظر صفر است.

۳۵۵- گزینه ۴ از تساوی $|3x-x^2|=|x-1|$ تساوی های زیر نتیجه

$$3x-x^2=x-1 \Rightarrow x^2-2x-1=0 \quad (1)$$

می شوند

$$3x-x^2=-(x-1) \Rightarrow x^2-4x+1=0 \quad (2)$$

مجموع جواب های معادله (۱) برابر ۲ و مجموع جواب های معادله (۲) برابر

۴ است. پس مجموع جواب های معادله اصلی برابر ۶ است (توجه کنید که

معادله های به دست آمده، جواب مشترک ندارند).

۳۵۶- گزینه ۲ نامعادله را به صورت زیر حل می کنیم:

$$-3 \leq 2x-a \leq 3 \Rightarrow a-3 \leq 2x \leq a+3 \Rightarrow \frac{a-3}{2} \leq x \leq \frac{a+3}{2}$$

بنابراین مجموعه جواب های نامعادله، بازه $[\frac{a-3}{2}, \frac{a+3}{2}]$ است. پس

$$\frac{a-3}{2} = -a \Rightarrow a-3 = -2a \Rightarrow a=1, \quad \frac{a+3}{2} = b \Rightarrow b=2$$

۳۶۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\left[\frac{1}{p}\right] = 0, \left[\frac{2}{p}\right] = \left[\frac{3}{p}\right] = 1, \left[\frac{4}{p}\right] = \left[\frac{5}{p}\right] = 2, \dots, \left[\frac{18}{p}\right] = \left[\frac{19}{p}\right] = 9, \left[\frac{20}{p}\right] = 10.$$

از جمع تساوی‌های بالا نتیجه می‌شود

$$\left[\frac{1}{p}\right] + \left[\frac{2}{p}\right] + \left[\frac{3}{p}\right] + \dots + \left[\frac{20}{p}\right] = 2(1+2+\dots+9) + 10 = 90 + 10 = 100.$$

۳۶۵- گزینه ۴ ابتدا با حل نامعادله، محدوده X را می‌یابیم:

$$x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 0.$$

اگر عددی بین -۱ و صفر باشد و به توان هر عدد فردی برسد، در همان محدوده باقی می‌ماند، ولی اگر به توان عددی زوج برسد، عددی بین صفر و ۱ می‌شود، یعنی

$$-1 < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x^{2k} < 1 \Rightarrow [x^{2k}] = 0 \\ -1 < x^{2k+1} < 0 \Rightarrow [x^{2k+1}] = -1 \end{cases}$$

$$[x] + [x^2] + \dots + [x^{10}] = 5 \times 0 + 5 \times (-1) = -5$$

۳۶۶- گزینه ۱ راه حل اول از نابرابری $n^3 < n^3 + 3n^2 < (n+1)^3$ نتیجه می‌گیریم $n < \sqrt[3]{n^3 + 3n^2} < n+1$ ، بنابراین $[\sqrt[3]{n^3 + 3n^2}] = n$.

راه حل دوم چون تساوی به ازای هر عدد طبیعی n باید برقرار باشد، پس مثلاً به ازای $n=2$ باید تساوی برقرار باشد. اگر $n=2$ ، آن‌گاه

$$[\sqrt[3]{n^3 + 3n^2}] = [\sqrt[3]{20}] = 2$$

از طرف دیگر فقط عبارت گزینه (۱) به ازای $n=2$ برابر ۲ می‌شود.۳۶۷- گزینه ۳ چون $[x]$ عدد صحیح است، معادله را به صورت

$$[x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x < 0 \quad \text{بنابراین} \quad [x] + [x] = [x] - [x] - 2$$

۳۶۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f\left(-\frac{1}{p}\right) = \left| \left[-\frac{5}{p}\right] + \left[-\frac{7}{p}\right] \right| = |-3 + (-4)| = 7$$

۳۶۹- گزینه ۱ به جای x در ضابطه f قرار می‌دهیم $x+1$ ، پس

$$f(x+1) = 4(x+1) - [x+1] - [3(x+1)] = 4x + 4 - [x] - 1 - [3x] - 3 = 4x - [x] - [3x] = f(x)$$

۳۷۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که باید

$$[x] - 2 \geq 0 \Rightarrow [x] \geq 2 \Rightarrow x \geq 2$$

بنابراین $D_f = [2, +\infty)$.

۳۷۱- گزینه ۲ مقادیری از x که مخرج f(x) را صفر می‌کنند، در

دامنه تابع f قرار ندارند. اکنون توجه کنید که

$$\left[\frac{x}{3}\right] - 2 = 0 \Rightarrow \left[\frac{x}{3}\right] = 2 \Rightarrow 2 \leq \frac{x}{3} < 3 \Rightarrow 6 \leq x < 9$$

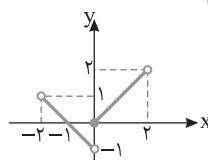
بنابراین $D_f = \mathbb{R} - [6, 9)$ ، پس $a=6$ ، $b=9$ و در نتیجه $a+b=15$.

۳۷۲- گزینه ۴ ضابطه تابع به شکل زیر است

$$-2 < x < 0 \Rightarrow -1 < \frac{x}{2} < 0 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = -1 \Rightarrow f(x) = -x - 1$$

$$0 \leq x < 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 0 \Rightarrow f(x) = x$$

پس نمودار تابع به شکل مقابل است



۳۷۳- گزینه ۲ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(0) = -\frac{3}{4} \Rightarrow 4^a + b = -\frac{3}{4}$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow 4^{1+a} + b = 0 \Rightarrow 4 \times 4^a + b = 0$$

اگر رابطه اول را از رابطه دوم کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$3 \times 4^a = \frac{3}{4} \Rightarrow a = -1$$

$$4^{-1} + b = -\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} + b = -\frac{3}{4} \Rightarrow b = -1$$

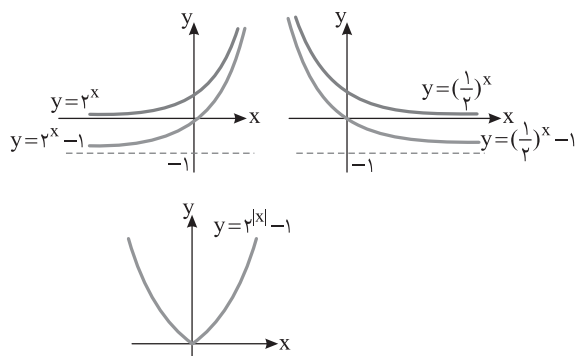
در نتیجه $a+b=-2$.۳۷۴- گزینه ۴ ابتدا $f(-x)$ را به دست می‌آوریم

$$f(-x) = \frac{2^{-x} - 1}{2^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{2^x} - 1}{\frac{1}{2^x} + 1} = \frac{1 - 2^x}{1 + 2^x}$$

$$f(x) + f(-x) = \frac{2^x - 1}{1 + 2^x} + \frac{1 - 2^x}{1 + 2^x} = \frac{2^x - 1 + 1 - 2^x}{1 + 2^x} = 0.$$

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & x \geq 0 \\ 2^{-x} - 1 & x < 0 \end{cases} \quad \text{توجه کنید که یعنی}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & x \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 & x < 0 \end{cases}.$$

۳۷۶- گزینه ۱ اگر تابع $y = a^x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشد، آن‌گاه $a > 1$ ، بنابراین $3^k + 1 > 1$ ، پس $k > 0$.

$$\frac{1}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{4}\right)^{-4} \quad \text{توجه کنید که}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \left(\frac{1}{16}\right)^{x-1} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \left(\left(\frac{3}{4}\right)^4\right)^{x-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4(x-1)}$$

$$x = \frac{2}{5} \quad \text{در نتیجه} \quad x+2 = -4(x-1)$$

۳۷۸- گزینه ۱ با فاکتورگیری از 5^x معادله را حل می‌کنیم

$$5^x (1 + 3 \times 5^{-2}) = 140 \Rightarrow 5^x \left(1 + \frac{3}{25}\right) = 140 \Rightarrow 5^x \times \frac{28}{25} = 140$$

$$5^x = \frac{25 \times 140}{28} = 125 = 5^3 \Rightarrow x = 3$$

پس معادله یک جواب دارد.

۳۸۷- گزینه ۲ از تساوی $\log 4 = a$ نتیجه می‌شود

$$\log 2^2 = a \Rightarrow 2 \log 2 = a \Rightarrow \log 2 = \frac{a}{2}$$

$$\log 125 = \log 5^3 = 3 \log 5 = 3 \log \frac{10}{2} = 3(\log 10 - \log 2)$$

$$= 3(1 - \frac{a}{2}) = 3 - \frac{3a}{2}$$

۳۸۸- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\log 3^0 = a \Rightarrow \log(3 \times 10) = a \Rightarrow \log 3 + \log 10 = a \Rightarrow \log 3 = a - 1$$

$$\log 5^0 = b \Rightarrow \log(5 \times 10) = b \Rightarrow \log 5 + \log 10 = b \Rightarrow \log 5 = b - 1$$

$$\log_5 3 = \frac{\log 3}{\log 5} = \frac{a-1}{b-1}$$

۳۸۹- گزینه ۱ توجه کنید که $3^{x+2} = 3^2 \times 3^x = 9 \times 3^x = 4$ بنابراین

$$3^x = \frac{4}{9} \Rightarrow x = \log_3 \frac{4}{9}$$

۳۹۰- گزینه ۱ فرض کنید که نمودار f از روی نمودار $y = \log_a x$

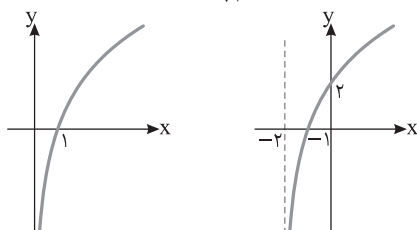
به‌دست آمده باشد. معلوم است که نمودار $y = \log_a x$ دو واحد به سمت

چپ منتقل شده است تا نمودار f به‌دست آید. بنابراین ضابطه تابع f می‌تواند

$\log_a(x+2)$ باشد. از طرف دیگر $f(0) = 2$ پس $\log_a 2 = 2$

یعنی $a^2 = 2$. بنابراین $a = \sqrt{2}$ (توجه کنید که $a > 0$). بنابراین

$$f(x) = \log_{\sqrt{2}}(x+2)$$



۳۹۱- گزینه ۳ می‌توان نوشت

$$f(x) = 4 + \log(2x-4) = 6 \Rightarrow \log(2x-4) = 2 \Rightarrow 2x-4 = 10^2 \Rightarrow x = 52$$

$$\text{بنابراین } f(52) = 6 \text{ پس } f^{-1}(6) = 52$$

۳۹۲- گزینه ۲ لگاریتم فقط برای اعداد مثبت تعریف می‌شود، پس

$$9 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow -3 < x < 3 \Rightarrow D_f = (-3, 3)$$

بنابراین اعداد صحیح ± 1 ، ± 2 و صفر در دامنه تابع هستند.

۳۹۴- گزینه ۴ اگر $y = 3^{5x-1}$ آن‌گاه

$$\log_3 y = 5x - 1 \Rightarrow x = \frac{\log_3 y + 1}{5}$$

$$\text{بنابراین } f^{-1}(x) = \frac{\log_3 x + 1}{5}$$

۳۹۵- گزینه ۲ ابتدا x را بر حسب y حساب می‌کنیم:

$$y = \log_3(x-2) \Rightarrow 3^y = x-2 \Rightarrow x = 3^y + 2$$

$$\text{بنابراین } f^{-1}(x) = 3^x + 2$$

۳۹۶- گزینه ۱ کافی است معادله $x^2 - 7x = x$ را حل کنیم:

$$x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 8$$

واضح است که $x = 0$ قابل قبول نیست چون لگاریتم صفر تعریف نمی‌شود.

پس معادله فقط یک جواب دارد.

۳۷۹- گزینه ۲ با توجه به نمودار تابع $y = 2^x$ ، معادله $2^x = a$

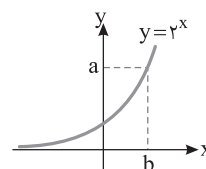
در صورتی که $a > 0$ ، دقیقاً یک جواب دارد ($x = b$) و اگر $a \leq 0$ ، جواب

ندارد. بنابراین

$$2^x - 6 = 0 \Rightarrow \text{یک جواب دارد. } 2^x - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\text{جواب ندارد. } 2^x + 6 = 0 \Rightarrow \text{جواب ندارد. } 2^x + 5 = 0 \Rightarrow$$

چون تابع $y = 2^x$ یک‌به‌یک است، پس معادله اصلی دو جواب دارد.



۳۸۰- گزینه ۲ اگر فرض کنیم $3^x = t$ ، معادله مورد نظر می‌شود

$$3 \times 9 \times 9^x - 6 \times 3^x - 1 = 0 \Rightarrow 27t^2 - 6t - 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{9}, t = \frac{1}{3}$$

چون $t > 0$ ، پس $t = \frac{1}{3}$ ، یعنی $3^x = \frac{1}{3} = 3^{-1}$ پس $x = -1$. در نتیجه

معادله یک جواب دارد.

۳۸۱- گزینه ۱ می‌دانیم اگر $0 < a < 1$ و $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ آن‌گاه

$$f(x) > g(x) \text{ و بالعکس. چون } 0 < \frac{1}{3} < 1 \text{، پس}$$

$$3 - x > x - 3 \Rightarrow x < 3$$

۳۸۲- گزینه ۱ اگر فرض کنیم $5^x = t$ ، نامعادله داده شده را می‌توان

این‌طور نوشت

$$25^x + 24 \times 5^{x-1} < 1 \Rightarrow t^2 + 24 \times \frac{t}{5} < 1 \Rightarrow 5t^2 + 24t < 5$$

$$5t^2 + 24t - 5 < 0 \Rightarrow (t+5)(t-\frac{1}{5}) < 0$$

چون $t+5 > 0$ ، پس $t - \frac{1}{5} < 0 \Rightarrow t < \frac{1}{5}$ ، یعنی $5^x < \frac{1}{5} = 5^{-1}$ ، در نتیجه $x < -1$.

۳۸۳- گزینه ۴ توجه کنید که $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{y}}} = y^{\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}} = y^{\frac{1}{60}} = \sqrt[60]{y}$. اکنون اگر

از ویژگی $\log_a x^n = n \log_a x$ استفاده کنیم، به‌دست می‌آید

$$\log_y \sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{y}}} = \log_y y^{\frac{1}{60}} = \frac{1}{60} \log_y y = \frac{1}{60}$$

۳۸۴- گزینه ۳ با استفاده از تساوی $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$

به‌دست می‌آید

$$\log_4(\sqrt{3}-1) + \log_4(\sqrt{3}+1) = \log_4((\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)) = \log_4 2 = \frac{1}{2}$$

۳۸۵- گزینه ۱ چون $\frac{1}{\log_a x} = \log_x a$ ، پس

$$\frac{1}{\log_4 6} + \frac{1}{\log_9 6} = \log_6 4 + \log_6 9 = \log_6(4 \times 9)$$

$$= \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2 \log_6 6 = 2$$

۳۸۶- گزینه ۳ به کمک تساوی $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ می‌توان نوشت

$$3^{\log_4 6} = 6^{\log_4 3} = 6^{\frac{1}{2} \log_2 3} = 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$$

۳۹۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\log_p \sqrt{x} = \log_p x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_p x$$

$$\log_p (x-6) = \log_{p^2} (x-6) = \frac{1}{2} \log_p (x-6)$$

در نتیجه، معادله مورد نظر می‌شود

$$\frac{1}{2} \log_p x + \frac{1}{2} \log_p (x-6) = 2 \Rightarrow \log_p x + \log_p (x-6) = 4$$

$$\log_p (x(x-6)) = 4 \Rightarrow x(x-6) = 2^4 \Rightarrow x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$(x-8)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 8, \quad x = -2 \quad (\text{غ.ق.})$$

دقت کنید که $x = -2$ در معادله اصلی صدق نمی‌کند، بنابراین غیرقابل قبول است.

۳۹۸- گزینه ۴ با استفاده از تعریف لگاریتم معادله را به صورت

$$x = (2x-1)^2 \text{ می‌نویسیم. بنابراین}$$

$$4x^2 - 4x + 1 = x \Rightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$(4x-1)(x-1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}, x = 1$$

پایه لگاریتم عبارت $2x-1$ است که به ازای $x=1$ برابر ۱ و به ازای $x=\frac{1}{4}$ برابر $-\frac{1}{4}$ می‌شود. ولی می‌دانیم که پایه لگاریتم باید مثبت و مخالف ۱ باشد. پس

هیچ کدام از مقدارهای به دست آمده قابل قبول نیستند و معادله جواب ندارد.

۳۹۹- گزینه ۴ نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\log_3 (10-x) \leq \log_3 9$$

نتیجه می‌گیریم

$$10-x \leq 9 \Rightarrow x \geq 1$$

از طرف دیگر عبارت $\log_3 (10-x)$ وقتی معنادار است که $10-x > 0$ و درنتیجه $x < 10$. پس مجموعه جواب‌های نامعادله بازه $(1, 10)$ است.۴۰۰- گزینه ۲ از نامعادله $\log(x+2) > \log(2x+1)$ نتیجه می‌شود

$$x+2 > 2x+1 \Rightarrow x < 1$$

عبارت $\log(x+2)$ برای $x > -2$ و عبارت $\log(2x+1)$ برای $x > -\frac{1}{2}$ معنادار است. پس مجموعه جواب‌های نامعادله $(-\frac{1}{2}, 1)$ است.۴۰۱- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که باید $x-2 > 0$ ، یعنی $x > 2$. از

طرف دیگر، باید

$$\log_{\frac{1}{5}} (x-2) \geq 0 = \log_{\frac{1}{5}} 1$$

در نتیجه (چون $0 < \frac{1}{5}$)

$$x-2 \leq 1 \Rightarrow x \leq 3$$

بنابراین $D_f = (2, 3]$. به این ترتیب $a=2$ و $b=3$. پس $ab=6$.

۴۰۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$AB=AC \Rightarrow \sqrt{(a+1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (1-5)^2}$$

$$\sqrt{a^2 + 2a + 1} = \sqrt{a^2 - 6a + 9 + 16}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید

$$a^2 + 2a + 1 = a^2 - 6a + 25 \Rightarrow 8a = 24 \Rightarrow a = 3$$

۴۰۳- گزینه ۲ توجه کنید که $AB = \sqrt{(0-3)^2 + (0-0)^2} = 3$. بنابراین

$$AC = 3 \Rightarrow \sqrt{(0-a)^2 + (0-b)^2} = 3 \Rightarrow a^2 + b^2 = 9 \quad (1)$$

$$BC = 3 \Rightarrow \sqrt{(3-a)^2 + (0-b)^2} = 3 \Rightarrow (3-a)^2 + b^2 = 9$$

$$9 - 6a + a^2 + b^2 = 9 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $9 - 6a = 0$. پس $a = \frac{3}{2}$. در نتیجه ازتساوی (۱) به دست می‌آید $b^2 = 9 - a^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$. بنابراین

$$|b| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

۴۰۴- گزینه ۱ وسط ضلع BC نقطه $(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+1}{2})$ یعنی نقطه

(۱، ۲) است. طول میانه نظیر رأس A برابر با فاصله نقطه A از نقطه وسط

$$\text{ضلع BC است، یعنی برابر است با } \sqrt{(2-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{10}.$$

۴۰۵- گزینه ۳ شیب خط راستی که از نقطه‌های $(3, a)$ و $(2, 7)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{a-7}{3-2} = a-7$. شیب خط راستی که از نقطه‌های $(-1, 4)$ و $(1, 8)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{4-8}{-1-1} = 2$. اگر دو خط بر هم عمودباشند، حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -1 است، پس

$$(a-7)(2) = -1 \Rightarrow a = \frac{13}{2}$$

۴۰۶- گزینه ۳ طول عمود وارد از نقطه $(3, 1)$ بر خط $4x + 3y + 20 = 0$

فاصله این نقطه از این خط است که برابر است با

$$\frac{|4 \times 3 + 3 \times 1 + 20|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{35}{5} = 7$$

۴۰۷- گزینه ۴ فرض کنید خط $ax + by + c = 0$ ویژگی‌های مورد نظررا داشته باشد، چون شیب این خط -1 است، پس $-\frac{a}{b} = -1$. در نتیجه $a = b$. از طرف دیگر، چون فاصله مبدأ از این خط برابر با ۵ است، پس

$$\frac{|a \times 0 + a \times 0 + c|}{\sqrt{a^2 + a^2}} = 5 \Rightarrow \frac{|c|}{\sqrt{2}|a|} = 5 \Rightarrow |c| = 5\sqrt{2}|a| \Rightarrow c = \pm 5\sqrt{2}a$$

بنابراین خط‌های راست مورد نظر $ax + ay + 5\sqrt{2}a = 0$ و $ax + ay - 5\sqrt{2}a = 0$ هستند که می‌توان آن‌ها را به صورت $x + y + 5\sqrt{2} = 0$ و $x + y - 5\sqrt{2} = 0$ نوشت.

فصل دوم

پاسخ آزمون‌ها

فصل اول



۸- گزینه ۳ برای $x=2$ از ضابطه اول به دست می آید

$$f(2)=4m-2$$

و از ضابطه دوم $f(2)=8-m$ برای اینکه رابطه، تابع باشد، باید فقط یک مقدار برای $f(2)$ وجود داشته باشد. یعنی $4m-2=8-m$ پس $m=2$. بنابراین باید $f(2)$ را محاسبه کنیم که برابر است با $f(2)=8-2=6$.

۹- گزینه ۳ اگر $n \in \mathbb{N}$ آن گاه عدد $\sqrt[n]{n}$ وقتی که n توان چهارم عددی طبیعی باشد، گویا خواهد بود. پس $\sqrt[4]{16}$ و $\sqrt[4]{81}$ اعدادی گویا هستند و بقیه اعداد داده شده گنگ هستند. بنابراین

$$f(\sqrt[4]{2})+f(\sqrt[4]{3})+\dots+f(\sqrt[4]{100})=2 \times 1+97 \times 0=2$$

۱۰- گزینه ۲ رابطه $(y-1)^3=|x-1|$ را می توان به صورت

$y=\sqrt[3]{|x-1|}+1$ نوشت. برای هر x دقیقاً یک مقدار y وجود دارد که در تساوی فوق صدق می کند. بنابراین در این رابطه y تابعی از x است. بقیه گزینه ها را می توان با مثال نقض رد کرد:

$$|y|=|x|, x=1 \Rightarrow y=\pm 1$$

$$|y|=x^2+1, x=2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{5}$$

$$|y^3|=x-1, x=2 \Rightarrow y=\pm 1$$

۱۱- گزینه ۱ با توجه به زوج های مرتب $(2,0)$ و $(2,m^3-m)$

نتیجه می شود:

$$m^3-m=0 \Rightarrow m=0, 1, -1$$

اگر $m=0$ ، $f=\{(2,0), (0,1), (0,2)\}$ ، f تابع نیست.

اگر $m=1$ ، $f=\{(2,0), (1,1), (0,2), (2,1)\}$ ، f تابع نیست.

اگر $m=-1$ ، $f=\{(2,0), (-1,1), (0,2), (-2,1)\}$ ، f تابع است.

پس m فقط می تواند برابر -1 باشد.

۱۲- گزینه ۳ چون $f(1)=2$ و $f(4)=2$ ، پس $f(a)=1$ یا $f(a)=4$.

از $f(a)=1$ نتیجه می شود $a=3$ و از $f(a)=4$ نتیجه می شود $a=5$. بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a برابر ۸ است.

۱۳- گزینه ۲ با توجه به شکل، جواب نامعادله مورد نظر به صورت

$$[4, 5] \cup [-5, -2]$$

در این نامعادله صدق می کنند.

۱۴- گزینه ۴ ابتدا $x=2$ را در رابطه داده شده قرار می دهیم:

$$f(2)-2f(2)=4-6+4 \Rightarrow f(2)=-2$$

پس $f(x)=x^2-3x$ ، در نتیجه $f(-2)=10$.

۱۵- گزینه ۲ اگر فرض کنیم $t=x^2+1$ ، آن گاه $x^2=t-1$ و $t \geq 1$

بنابراین

$$f(x^2+1)=(x^2)^2-x^2 \Rightarrow f(t)=(t-1)^2-(t-1)=t^2-3t+2$$

بنابراین اگر $x \geq 1$ ، آن گاه $f(x)=x^2-3x+2$.

۱- گزینه ۲ چون f فقط یک زوج مرتب دارد، پس تساوی های

$$2a-b=1, 2a+b+c=2, 2a=2 \text{ و } a=1 \text{ برقرار است که نتیجه می شود } c=0 \text{ و } b=1.$$

۲- گزینه ۴ از عدد ۲ دو پیکان خارج شده است، پس دو عدد a^2 و

$a+2$ باید یکسان باشند. پس $a^2=a+2$ که نتیجه می شود $a=-1$ یا $a=2$. اگر $a=2$ ، باید داشته باشیم $b=a^2=4$ پس $a+b=6$. اگر $a=-1$ ، باید داشته باشیم $b=2b+1$ پس $b=-1$ و در نتیجه $a+b=-2$. پس حاصل $a+b$ برابر ۶ یا -2 است.

۳- گزینه ۳ دامنه تابع مجموعه $\{1, 3, 5\}$ است که ۳ عضو دارد.

برد تابع مجموعه $\{3, 5, a^2\}$ است که باید تعداد اعضای آن کمتر از ۳ باشد. یعنی یا باید $a^2=3$ یا باید $a^2=5$. بنابراین $a=\pm\sqrt{3}$ یا $a=\pm\sqrt{5}$ پس ۴ مقدار مختلف برای a وجود دارد.

۴- گزینه ۴ تعداد جواب های معادله $f(x)=1$ برابر با تعداد نقطه های برخورد خط $y=1$ با نمودار تابع f است. از روی شکل روبرو معلوم است که تعداد این نقطه ها سه تا است.

۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f(x^2-fx)=8x-2x^2+12=-2(x^2-fx)+12$$

بنابراین، اگر x عددی حقیقی باشد که $x^2-fx=3$ (چنین x ای وجود دارد، زیرا دلتای معادله درجه دوم $x^2-fx-3=0$ مثبت است)، آن گاه

$$f(3)=-2(3)+12=6$$

۶- گزینه ۴ در ضابطه تابع به جای x ، مقدار $x-1$ را قرار می دهیم:

$$f(x-1)=(x-1)^2-2(x-1)=x^2-4x+3$$

در ضابطه تابع به جای x مقدار $x+1$ را قرار می دهیم:

$$f(x+1)=(x+1)^2-2(x+1)=x^2-1$$

بنابراین $f(x-1)+f(x+1)=2x^2-4x+2=2(x^2-2x)+2=2f(x)+2$.

۷- گزینه ۱ راه حل اول فرض می کنیم $\frac{x+1}{x-2}=t$ و در نتیجه

$$tx-2t=x+1 \Rightarrow tx-x=2t+1 \Rightarrow (t-1)x=2t+1 \Rightarrow x=\frac{2t+1}{t-1}, t \neq 1$$

در رابطه داده شده به جای x قرار می دهیم:

$$f(t)=2\left(\frac{2t+1}{t-1}\right)-1=\frac{4t+2-t+1}{t-1}=\frac{3t+3}{t-1}$$

در نتیجه اگر $x \neq 1$ ، آن گاه $f(x)=\frac{3x+3}{x-1}$.

راه حل دوم اگر در رابطه داده شده قرار دهیم $x=-1$ ، به دست می آید

$$f(0)=-3$$

اکنون در توابع داده شده در گزینه ها به جای x مقدار صفر را قرار می دهیم. تنها تابعی که در آن $f(0)=-3$ تابع گزینه (۱) است.

۲۲- گزینه ۲ اگر f تابعی ثابت باشد، باید ضرایب x^2 و x برابر با صفر باشند:

$$4-a=0 \Rightarrow a=4, 3+b=0 \Rightarrow b=-3$$

در این صورت $f(x)=ab+19=4 \times (-3)+19=7$
بنابراین

$$f(a+b)=f(1)=7$$

۲۳- گزینه ۳ در تابع همانی، ضابطه تابع به شکل $f(x)=x$ است. بنابراین

$$f(-4)=m-2n=-4, f(6)=m+n=6$$

$$\begin{cases} m-2n=-4 \\ m+n=6 \end{cases} \Rightarrow m=\frac{8}{3}, n=\frac{10}{3}$$

از طرف دیگر $f(\frac{m}{n})=k=\frac{m}{n}$ ، بنابراین $k=\frac{m}{n}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

۲۴- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا ضابطه تابع را ساده می کنیم:

$$f(x)=\frac{(x^2-4)+2ax+4a}{x+2}=\frac{(x-2)(x+2)+2a(x+2)}{x+2}=\frac{(x+2)(x-2+2a)}{x+2}=x-2+2a, x \neq -2$$

ضابطه تابع همانی $f(x)=x$ است. بنابراین باید $2a-2=0$ و در نتیجه $a=1$ پس $f(-a)=f(-1)=-1$

راه حل دوم چون تابع f همانی است، پس $f(0)=0$ ، بنابراین

$$\frac{4a-4}{2}=0 \Rightarrow a=1$$

در نتیجه $f(-a)=f(-1)=-1$

۲۵- گزینه ۱ چون f تابعی خطی است، پس ضابطه آن به صورت $f(x)=ax+b$ است، بنابراین

$$f(2)-3f(-2)=2a+b-3(-2a+b)=8a-2b=46$$

$$f(3)-3f(1)=3a+b-3(a+b)=-2b=22$$

در نتیجه $a=3$ ، $b=-11$ و $f(x)=3x-11$ ، بنابراین $f(-2)=-17$

۲۶- گزینه ۳ راه حل اول فرض کنید $f(x)=ax+b$ در این صورت $f(x-1)=a(x-1)+b=ax-a+b$

$$2f(x+2)=2(a(x+2)+b)=2(ax+2a+b)=2ax+4a+2b$$

پس $f(x-1)+2f(x+2)=3ax+3a+2b=-9x+21$ ، بنابراین

$$\begin{cases} 3a=-9 \\ 3a+2b=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=10 \end{cases} \Rightarrow f(x)=-3x+10$$

راه حل دوم تساوی داده شده به ازای هر x برقرار است، پس $x=1$ را در این تساوی قرار می دهیم: $f(0)+2f(3)=12$ ، فقط در تابع گزینه (۳) این شرط برقرار است.

۲۷- گزینه ۱ ابتدا $f(-1)$ و $f(2)$ را حساب می کنیم تا مقادیر a و b به دست آید:

$$\begin{cases} f(-1)=a+b=3 \\ f(2)=4a-2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

بنابراین $f(x)=x^2-2x$ و در نتیجه $f(1)=-1$

۱۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$x^3+6x^2+12x=(x+2)^3-8$$

$$x^3+6x^2+12x+10=(x+2)^3+2$$

بنابراین $f(x+2)=\frac{(x+2)^3-8}{(x+2)^3+2}$ اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم

$$f(x)=\frac{x^3-8}{x^3+2}$$

۱۷- گزینه ۲ توجه کنید که اگر $-1 \leq x < 0$ ، آن گاه $-1 \leq x < 0$ ، پس

$$f(-x)=\frac{\sqrt{1-(-x)}}{-x}=\frac{\sqrt{1+x}}{-x}=-f(x)$$

و اگر $-1 \leq -x < 0$ ، آن گاه $0 < x \leq 1$ ، پس

$$f(-x)=\frac{\sqrt{1+(-x)}}{-x}=\frac{\sqrt{1-x}}{-x}=-f(x)$$

بنابراین همواره $f(-x)=-f(x)$

۱۸- گزینه ۲ چون

$$f(-1)=a \times (-1)+b=b-a, f(6)=a \times (6)+4b=6a+4b$$

پس

$$f(-1)+f(6)=-1 \Rightarrow b-a+6a+4b=-1$$

$$5(a+b)=-1 \Rightarrow a+b=-2$$

در نتیجه $f(1)=a+4b=(a+b)+3b=3b-2$

۱۹- گزینه ۴ اگر ضابطه داده شده، متعلق به یک تابع باشد باید در

$x=2$ مقدار $f(x)$ منحصر به فرد باشد. یعنی مقدار $f(2)$ در ضابطه اول با

مقدار آن در ضابطه دوم برابر باشد. اگر $f(x)=2x^2+a$ ، آن گاه

$$f(2)=8+a, f(x)=ax^3-2, f(x)=ax^3-2, \text{ آن گاه } f(2)=8a-2$$

$$8+a=8a-2 \Rightarrow 7a=10 \Rightarrow a=\frac{10}{7}$$

و در نتیجه

$$vf(va)=vf(10)=v(2 \times 10^2 + \frac{10}{7})=1410$$

۲۰- گزینه ۱ رابطه $y^3+3y^2+3y-x^3=0$ را به شکل زیر

$$(y+1)^3-1-x^3=0 \Rightarrow (y+1)^3=1+x^3$$

می نویسیم:

$$y+1=\sqrt[3]{1+x^3} \Rightarrow y=-1+\sqrt[3]{1+x^3}$$

واضح است که در این رابطه به ازای هر مقدار x دقیقاً یک مقدار y وجود دارد، پس y تابعی از x است. برای رابطه های دیگر می توان مثال های نقض زیر را در نظر گرفت:

$$y^2-2y+x^2=0, x=0 \Rightarrow y=0, y=2$$

$$y^3-xy+x^3=4, x=\sqrt[3]{4} \Rightarrow y=0, y=\pm\sqrt[3]{4}$$

$$y^2+xy+x^2=9, x=3 \Rightarrow y=0, y=-3$$

۲۱- گزینه ۲ برد تابع ثابت، یک عضو دارد. بنابراین

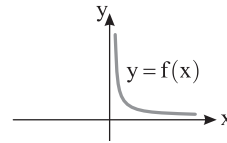
$$m-2=4 \Rightarrow m=6$$

$$m+2n=4 \xrightarrow{m=6} 6+2n=4 \Rightarrow n=-1$$

$$mn+k=4 \xrightarrow{m=6, n=-1} -6+k=4 \Rightarrow k=10$$

۲۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x > 0$ ، آن‌گاه $|x| = x$ ، پس

$f(x) = \frac{1}{x}$. همچنین اگر $x \leq 0$ ، آن‌گاه $|x| = -x$ و $|x| = 0$ در نتیجه



تابع به ازای $x \leq 0$ تعریف نمی‌شود،

بنابراین $D_f = (0, +\infty)$. بنابراین نمودار

این تابع به صورت مقابل خواهد بود:

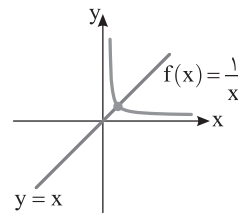
۲۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f = (0, +\infty)$ و

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} = \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت روبه‌رو

است و خط $y = x$ را در یک نقطه قطع

می‌کند.



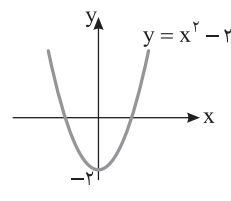
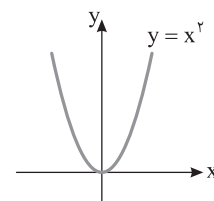
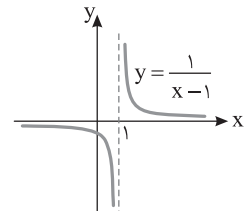
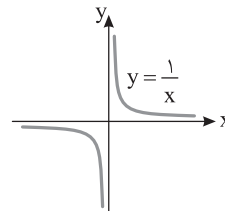
۳۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1} = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{x-1}$$

بنابراین اگر نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را یک واحد به راست منتقل کنیم نمودار تابع f

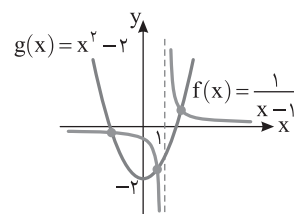
به دست می‌آید. همچنین اگر نمودار تابع $y = x^2$ را دو واحد به پایین منتقل

کنیم نمودار تابع g به دست می‌آید.



مطابق شکل زیر نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1} = \frac{1}{x-1}$ در سه نقطه نمودار

تابع $g(x) = x^2 - 2$ را قطع می‌کند.



۳۱- گزینه ۳ ضابطه این تابع $f(x) = x$ است. پس $f(2) = 2$. در نتیجه

$$14 - 2k = 2 \Rightarrow 2k = 12 \Rightarrow k = 6$$

بنابراین باید $f(14 - 3 \times 6) = f(-4) = -4$ را حساب کنیم:

۳۲- گزینه ۱ ضابطه تابع را به شکل زیر می‌نویسیم

$$f(x) = kmx - kx^2 - 2m + 2x + 2x^2 = (2-k)x^2 + (2+km)x - 2m$$

در تابع ثابت، مقدار تابع به x بستگی ندارد. پس در ضابطه نباید x وجود داشته

باشد. یعنی ضرایب x و x^2 باید صفر باشند. پس

$$2-k=0 \Rightarrow k=2$$

$$2+km=0 \xrightarrow{k=2} 2+2m=0 \Rightarrow m=-1$$

بنابراین $k+m=1$.

۳۳- گزینه ۳ ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است. بنابراین

$$a-2=0, \quad b-3=1, \quad a+b-c=0$$

در نتیجه $a=2, b=4, c=6$ و $a+b-c=0$.

۳۴- گزینه ۳ راه حل اول ضابطه تابع ثابت به صورت $f(x) = k$

است. بنابراین

$$\frac{2x+1}{ax-3} = k \Rightarrow 2x+1 = kax - 3k$$

تساوی فوق یک اتحاد است. پس باید تساوی‌های $ka=2$ و $1=-3k$ برقرار

باشند. بنابراین $k=-\frac{1}{3}$ و $a=-6$.

راه حل دوم با توجه به اینکه $f(0) = -\frac{1}{3}$ و تابع ثابت است، پس $f(1) = -\frac{1}{3}$

و در نتیجه

$$f(1) = \frac{2+1}{a-3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow 9 = -a+3 \Rightarrow a = -6$$

۳۵- گزینه ۴ ضابطه تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = 2mx - mx^2 + x^2 - 4x - m = (1-m)x^2 + (2m-4)x - m$$

ضابطه توابع خطی به شکل $f(x) = ax + b$ است. یعنی یک چندجمله‌ای

درجه اول است. بنابراین باید $m=1$ تا ضابطه تابع یک چندجمله‌ای درجه اول

شود، یعنی

$$m=1 \Rightarrow f(x) = -2x-1$$

بنابراین $f(m) = f(1) = -3$.

۳۶- گزینه ۴ چون تابع خطی است، باید ضابطه آن یک چندجمله‌ای

درجه اول باشد. پس باید صورت و مخرج کسر در ضابطه داده شده ساده شوند.

یعنی صورت باید به شکل ضرب دو عبارت باشد که یکی از آن‌ها $x+1$ است. یعنی

$$x^2 + mx + 2 = (x+1)(x+a) \Rightarrow x^2 + mx + 2 = x^2 + (a+1)x + a$$

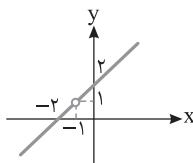
برای اینکه تساوی فوق برقرار باشد باید داشته باشیم

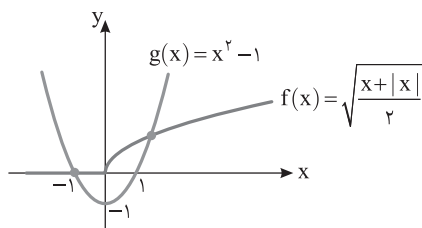
$$a=2, \quad m=a+1 \xrightarrow{a=2} m=3$$

پس ضابطه تابع به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{(x+1)(x+2)}{x+1} = x+2, \quad x \neq -1$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است:





۴۱- گزینه ۴ چون سهمی ماکزیمم دارد، باید ضریب x^2 منفی باشد.

پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند. با توجه به شکل داده شده طول رأس سهمی عددی منفی است. در گزینه (۳) طول رأس سهمی $x = -\frac{4}{2(-1)} = 2$ و در گزینه (۴)

طول رأس سهمی $x = -\frac{-4}{2(-1)} = -2$ است. پس گزینه (۴) درست است.

۴۲- گزینه ۳ طول رأس سهمی $x = -\frac{-2}{2k} = \frac{1}{k}$ است. عرض رأس

سهمی را پیدا می‌کنیم: $y = k(\frac{1}{k})^2 - 2(\frac{1}{k}) + 2 = 2 - \frac{1}{k}$ چون رأس سهمی

روی خط $y = -2x$ است، پس $2 - \frac{1}{k} = -2(\frac{1}{k})$ در نتیجه $k = \frac{-1}{2}$.

۴۳- گزینه ۲ محور تقارن سهمی به معادله $y = mx^2 + 2mx + 3m$

خط $y = -\frac{2m}{2m} = -m$ است. بنابراین $-m = 2$ ، یعنی $m = -2$. به این

ترتیب، معادله سهمی می‌شود $y = -2x^2 + 8x - 6$ ، که عرض رأس آن برابر

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \times (-6) - 8^2}{4(-2)} = 2 \text{ است با } \frac{4 \times (-2) - (-6)^2}{4(-2)} = 2$$

۴۴- گزینه ۲ راه حل اول با توجه به شکل محور تقارن سهمی داده

شده از وسط نقاط $(3, 0)$ و $(-1, 0)$ می‌گذرد، پس معادله آن $x = \frac{3-1}{2} = 1$

است. از طرف دیگر با توجه به معادله داده

شده، طول رأس سهمی $x = \frac{b}{2a}$ است.

بنابراین $\frac{b}{2a} = 1$. در نتیجه $\frac{b}{a} = 2$.

راه حل دوم سهمی از نقطه $(-1, 0)$ عبور کرده است، پس مختصات این نقطه

در معادله سهمی صدق می‌کنند. بنابراین

$$0 = a(-1)^2 - b(-1) + c \Rightarrow a + b + c = 0 \quad (1)$$

همچنین سهمی از نقطه $(3, 0)$ عبور کرده است، پس

$$9a - 3b + c = 0 \quad (2)$$

دو طرف معادله (۱) را از دو طرف معادله (۲) کم می‌کنیم:

$$9a - 3b + c - a - b - c = 0 \Rightarrow 8a - 4b = 0 \Rightarrow 8a = 4b \Rightarrow \frac{b}{a} = 2$$

راه حل سوم مجموع جواب‌های معادله $ax^2 - bx + c = 0$ برابر $\frac{b}{a}$ است. از

طرف دیگر با توجه به شکل، جواب‌های این معادله $x = -1$ و $x = 3$ هستند.

$$\frac{b}{a} = 3 + (-1) = 2 \text{ بنابراین}$$

۳۷- گزینه ۳ ضابطه تابع را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر

می‌گیریم. بنابراین

$$f(1) = a + b \Rightarrow f(f(1)) = f(a + b) = a(a + b) + b = a^2 + ab + b = 1$$

$$f(-1) = -a + b \Rightarrow f(f(-1)) = f(-a + b) = a(-a + b) + b =$$

$$= -a^2 + ab + b = -7$$

اگر طرفین تساوی‌های اخیر را از هم کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$a^2 + ab + b - (-a^2 + ab + b) = 1 - (-7) \Rightarrow 2a^2 = 8 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

$$a^2 + ab + b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \Rightarrow 4 + 2b + b = 1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow f(x) = 2x - 1 \\ a = -2 \Rightarrow 4 - 2b + b = 1 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow f(x) = -2x + 3 \end{cases}$$

بنابراین $f(0) = 3$ یا $f(0) = -1$.

۳۸- گزینه ۱ راه حل اول در ضابطه تابع به جای x مقدار $x-1$ را

قرار می‌دهیم:

$$f(x-1) = a(x-1)^2 - b(x-1) + 2 = ax^2 - 2ax - bx + a + b + 2$$

بنابراین از رابطه داده شده به دست می‌آید

$$f(x-1) - f(x) = ax^2 - 2ax - bx + a + b + 2 - ax^2 + bx - 2 = 6x + 2$$

بنابراین $-2ax + a + b = 6x + 2$. چون این رابطه به ازای هر x برقرار است، پس

$$\begin{cases} -2a = 6 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow a - b = -8$$

راه حل دوم چون رابطه $f(x-1) - f(x) = 6x + 2$ به ازای هر مقدار x برقرار

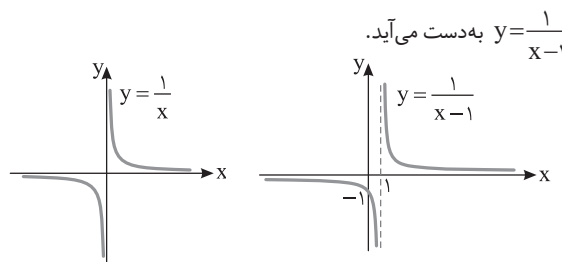
است، پس به ازای $x = 1$ هم برقرار است:

$$f(0) - f(1) = 8 \Rightarrow 2 - (a - b + 2) = 8 \Rightarrow 2 - a + b - 2 = 8 \Rightarrow a - b = -8$$

۳۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

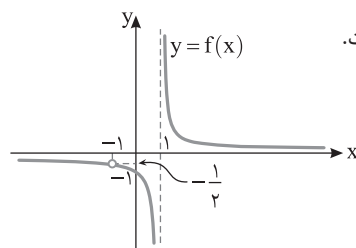
اگر نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم نمودار تابع



بنابراین نمودار تابع f به صورت شکل رسم شده است که خطوط $y = 0$ و

$y = -\frac{1}{2}$ را قطع نمی‌کند. پس k فقط می‌تواند مقادیر 0 و $-\frac{1}{2}$ را داشته باشد

که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{1}{2}$ است.



۴۰- گزینه ۲ برای $x \geq 0$ و $|x| = x$ و $f(x) = \sqrt{x}$ و برای $x < 0$ ،

$|x| = -x$ و $f(x) = 0$. نمودار تابع‌های f و g را در شکل زیر رسم کرده‌ایم. از

روی این شکل معلوم می‌شود که نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند.

۴۵- گزینه ۱ راه حل اول با توجه به نمودار داده شده، c و $-2c$

جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ هستند. بنابراین

$$\begin{cases} c - 2c = -\frac{b}{a} \\ c(-2c) = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{b}{a} \Rightarrow b = ac \\ -2c = \frac{1}{a} \Rightarrow ac = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow ac + b = -1$$

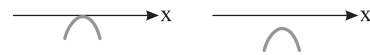
راه حل دوم با توجه به نمودار داده شده، c یکی از جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ است. بنابراین

$$ac^2 + bc + c = 0 \xrightarrow{c \neq 0} ac + b + 1 = 0 \Rightarrow ac + b = -1$$

۴۶- گزینه ۱ برای آنکه نمودار یک سهمی، محور x را در دو طرف مبدأ مختصات قطع کند، باید حاصل ضرب جواب‌های معادله $y = 0$ منفی باشد. پس

$$\frac{m-2}{m} < 0 \Rightarrow 0 < m < 2$$

۴۷- گزینه ۲ در حالت‌های زیر نمودار تابع درجه دوم از ناحیه‌های اول و دوم صفحه مختصات عبور نمی‌کند.



بنابراین معادله $f(x) = 0$ حداکثر یک جواب دارد و ضریب x^2 در این معادله منفی است.

$$a = m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1 \quad (1)$$

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 1 - 4(m-1)^2 \leq 0 \Rightarrow (m-1)^2 \geq \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} m-1 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow m \geq \frac{3}{2} \\ m-1 \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow m \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2)$$

از اشتراک ناحیه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $m \leq \frac{1}{2}$.

۴۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{fac - b^2}{4a} = 5 \Rightarrow \frac{4(2m) - 36}{4} = 5 \Rightarrow 2m - 9 = 5 \Rightarrow m = 7$$

۴۹- گزینه ۳ مجموع طول نرده‌های استفاده شده برابر با $4x + 3y = 200$ است. پس $4x = 200 - 3y$. همچنین مساحت کل زمین

برابر است با $A = 2xy$. در نتیجه

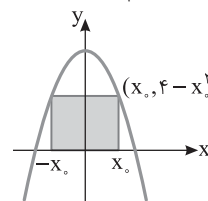
$$A = 2xy = \frac{1}{2} \times 4xy = \frac{1}{2} (200 - 3y)y = \frac{1}{2} (200y - 3y^2)$$

بنابراین

$$2A = 200y - 3y^2 = -3(y^2 - \frac{200}{3}y) = -3((y - \frac{100}{3})^2 - \frac{10000}{9})$$

$$= \frac{10000}{3} - 3(y - \frac{100}{3})^2 \leq \frac{10000}{3}$$

بنابراین $A \leq \frac{10000}{3}$ ، یعنی حداکثر مساحت اصطیل برابر $\frac{10000}{3}$ است.



۵۰- گزینه ۲ با توجه به شکل زیر

می‌توان نتیجه گرفت محیط مستطیل برابر است با

$$\begin{aligned} 2(2x_0 + 4 - x_0^2) &= -2x_0^2 + 4x_0 + 8 \\ &= -2(x_0^2 - 2x_0 + 1) + 10 \\ &= -2(x_0 - 1)^2 + 10 \leq 10 \end{aligned}$$

در نتیجه بیشترین محیط مستطیل برابر است با ۱۰.

۵۱- گزینه ۴ مختصات رأس سهمی را پیدا می‌کنیم:

$$x = -\frac{-2}{2 \times 3} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3(\frac{1}{3})^2 - 2(\frac{1}{3}) + 1 = \frac{2}{3}$$

بنابراین رأس سهمی نقطه $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ است و چون ضریب x^2 عددی مثبت

است، پس سهمی دارای پایین‌ترین نقطه است، یعنی گزینه (۴) درست است.

۵۲- گزینه ۳ رأس سهمی $y = ax^2 - 2ax + 2$ نقطه $(1, 2-a)$ است

که روی سهمی $y = bx^2 + 2bx + 1$ قرار دارد. پس

$$2-a = b+2b+1 \Rightarrow a+3b-1=0 \quad (1)$$

رأس سهمی $y = bx^2 + 2bx + 1$ نقطه $(-1, 1-b)$ است که روی سهمی

$y = ax^2 - 2ax + 2$ قرار دارد. پس

$$1-b = a+2a+2 \Rightarrow b = -3a-1 \quad (2)$$

اگر در معادله (۱) مقدار b را از معادله (۲) قرار دهیم، آن‌گاه

$$a+3(-3a-1)-1=0 \Rightarrow a+b=0 \text{ و در نتیجه } b = -\frac{1}{3}a$$

۵۳- گزینه ۱ معادله محور تقارن سهمی $y = ax^2 + bx + c$

به صورت $x = -\frac{b}{2a}$ است. در نتیجه

$$-\frac{m-2}{2(3m-4)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 3m-4 = -m+2 \Rightarrow 4m=6 \Rightarrow m=\frac{3}{2}$$

۵۴- گزینه ۴ توجه کنید که چون $OA < OB$ ، پس محور تقارن

سهمی پاره خط OB را قطع می‌کند. در نتیجه، $-\frac{b}{2a} > 0$ ، یعنی علامت b و a

فرق می‌کند. از طرف دیگر، چون سهمی پایین‌ترین نقطه دارد، پس $a > 0$. در نتیجه $b < 0$. از طرف دیگر، عرض نقطه تلاقی سهمی و محور y منفی است، پس $c < 0$. به این ترتیب، $bc > 0$.

۵۵- گزینه ۲ سهمی از نقطه $(0, 0)$ عبور می‌کند. پس $c = 0$. طول

رأس سهمی برابر $x = 1$ است. پس $-\frac{b}{2a} = 1$ در نتیجه $b = -2a$. عرض

رأس سهمی برابر است با $y = -1$. بنابراین

$$ax^2 + bx + 1 = -1 \xrightarrow{b=-2a} a-2a = -1 \Rightarrow a=1$$

بنابراین $b = -2$.

۵۶- گزینه ۱ با توجه به اینکه سهمی محور طول‌ها را در $x = 4$ و

$x = -2$ قطع کرده است، معادله سهمی به شکل $f(x) = k(x+2)(x-4)$

است. از طرف دیگر مساحت مستطیل برابر $4f(-1)$ است. بنابراین

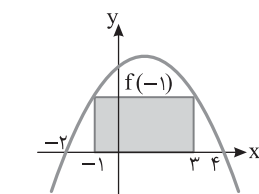
$$4f(-1) = 8 \Rightarrow f(-1) = 2$$

$$k(-1+2)(-1-4) = 2 \Rightarrow k = -\frac{2}{5}$$

پس

بنابراین معادله سهمی به شکل $f(x) = -\frac{2}{5}(x+2)(x-4)$ یا

$$f(x) = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{16}{5}$$



۶۲- گزینه ۱ سهمی به معادله $y = x^2 - 2x$ دارای پایین‌ترین نقطه

به مختصات $x=1$ و $y=-1$ است. پس سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ از نقطه $(0, -2)$ عبور می‌کند و رأس آن $(1, -1)$ است. بنابراین

$$-2 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = -2$$

$$x = -\frac{b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$$

$$y = a(1)^2 + b(1) - 2 = -1 \Rightarrow a + b = 1$$

$$\frac{b}{2a} = -1 \Rightarrow a - 2a = 1 \Rightarrow a = -1, b = 2$$

$$\text{بنابراین } abc = (-1)(2)(-2) = 4$$

۶۳- گزینه ۲ محور تقارن سهمی به معادله $y = x^2 - 4x + 1$ خط $x=2$

است و محور تقارن سهمی به معادله $y = ax^2 - a^3x$ خط $x = \frac{a^2}{2}$ است. پس

$$\frac{a^2}{2} = 2 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

۶۴- گزینه ۴ ابتدا نابرابری $\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$ را به صورت $\frac{b^2}{4a} > c$

می‌نویسیم. می‌دانیم عرض رأس سهمی مورد نظر برابر $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ است.

که منفی است. در نتیجه باید عرض رأس سهمی مورد نظر منفی باشد، بنابراین در بین گزینه‌های داده شده گزینه (۴) می‌تواند درست باشد.

۶۵- گزینه ۴ معادله سهمی $y = ax^2 + bx + c$ است. مختصات

نقاط داده شده را در معادله سهمی قرار می‌دهیم:

$$x = -1, y = 0 \Rightarrow 0 = a - b + c \quad (1)$$

$$x = 1, y = 4 \Rightarrow 4 = a + b + c \quad (2)$$

$$x = 2, y = 9 \Rightarrow 9 = 4a + 2b + c \quad (3)$$

اگر دو طرف معادله (۱) را از دو طرف معادله (۲) کم کنیم، به معادله زیر می‌رسیم:

$$4 - 0 = a + b + c - (a - b + c) \Rightarrow 4 = 2b \Rightarrow b = 2$$

در معادله‌های (۱) و (۳) به جای b مقدار ۲ را قرار می‌دهیم و دستگاه معادلات زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a - 2 + c = 0 \\ 4a + 4 + c = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ 4a + c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

بنابراین معادله سهمی $y = x^2 + 2x + 1$ است. این سهمی از نقطه $(-2, 1)$ عبور می‌کند.

۶۶- گزینه ۱ چون سهمی ماکزیمم دارد، پس

$$m + 1 < 0 \Rightarrow m < -1$$

همچنین، سهمی محور x را قطع نمی‌کند. در نتیجه دلتای معادله آن منفی است:

$$\Delta = (m+1)^2 + 16(m+1) < 0$$

بنابراین به نامعادله $(m+1)(m+17) < 0$ می‌رسیم. می‌دانیم $m+1 < 0$ ، در

نتیجه $m+17 > 0$ ، پس $m > -17$. بنابراین $m \in (-17, -1)$.

۶۷- گزینه ۲ اگر نمودار تابع f فقط از ناحیه سوم عبور نکند، آن‌گاه از

ناحیه‌های اول، دوم و چهارم عبور می‌کند. (توجه کنید که ضریب x^2 مثبت است و سهمی کمترین مقدار دارد.) پس باید معادله $f(x) = 0$ دو جواب داشته باشد که یا هر دو مثبت باشند یا یکی مثبت و دیگری صفر باشد. بنابراین

۵۷- گزینه ۴ با توجه به شکل معلوم می‌شود ضریب x^2 و عرض

نقطه تقاطع سهمی با محور y مثبت است. در نتیجه

$$m + 2 > 0, m > 0 \quad (1)$$

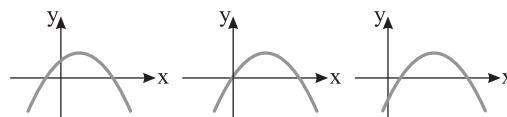
از طرف دیگر، چون مجموع ضرایب صفر است، بنابراین، جواب‌های معادله

$y = 0$ اعداد $\frac{m}{m+2}$ و ۱ هستند، که با توجه به شرط (۱) هر دو مثبت هستند.

بنابراین حدود m بازه $(0, +\infty)$ است.

۵۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که نمودار تابع f یک سهمی است که

ماکزیمم دارد. بنابراین در حالت کلی باید به صورت‌های زیر باشد تا از ناحیه اول صفحه مختصات عبور کند.



بنابراین باید معادله $f(x) = 0$ دو جواب داشته باشد که هر دو منفی نباشند یا

اینکه یکی صفر و دیگری منفی نباشد. اگر یکی از جواب‌ها $x = 0$ باشد، آن‌گاه

$m = 0$ و معادله به صورت $f(x) = -x^2$ در می‌آید که از ناحیه اول صفحه

مختصات عبور نمی‌کند. پس شرط داشتن دو جواب منفی

$$\left(\frac{c}{a} > 0, -\frac{b}{a} < 0, \Delta > 0\right) \text{ را بررسی می‌کنیم:}$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow m^2 + 8m > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -8 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow -2m > 0 \Rightarrow m < 0 \\ -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow m < 0 \end{cases}$$

پس $m < 0$ ، نباید برقرار باشد و در نتیجه $m > 0$.

۵۹- گزینه ۱ جواب‌های معادله را با α و β نشان می‌دهیم. در این

صورت طبق فرض مسئله، $\alpha + \beta = 2\alpha\beta$ ، چون $\alpha + \beta = -(k-2)$ و

$\alpha\beta = -k$ ، بنابراین $-k + 2 = -2k \Rightarrow k = -2$. بنابراین

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 1 = -2(x^2 + 2x) + 1 = -2(x+1)^2 + 3 \leq 3$$

پس بیشترین مقدار $f(x)$ برابر ۳ است.

۶۰- گزینه ۲ طول اضلاع قائمه را با b و c نشان می‌دهیم. در این

صورت $b + c = 8$ از طرف دیگر،

$$S = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}b(8-b) = \frac{1}{2}(8b - b^2)$$

بیشترین مقدار عبارت $8b - b^2$ به ازای $b = \frac{-8}{2(-1)} = 4$ به دست می‌آید. در

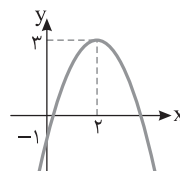
$$\text{نتیجه، بیشترین مقدار } S \text{ برابر است با } \frac{1}{2}(8 \times 4 - 4^2) = \frac{1}{2}(32 - 16) = 8$$

۶۱- گزینه ۲ سهمی از نقطه $(0, -1)$ عبور می‌کند. طول رأس سهمی

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(-1) - 16}{4(-1)} = 3 \text{ و عرض آن } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$$

است. در نتیجه رأس سهمی نقطه $(2, 3)$ و نمودار آن به شکل زیر است.

بنابراین این سهمی از ناحیه دوم نمی‌گذرد.



۷۲- گزینه ۳ ریشه‌های مخرج کسر را به دست می‌آوریم:

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1, \quad x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

بنابراین $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1, \pm\sqrt{2}\}$. پس چهار عدد در دامنه تابع قرار ندارند.

۷۳- گزینه ۲ مخرج کسر را مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های آن را

$$2|x| - |x-1| = 0 \Rightarrow 2|x| = |x-1|$$

به دست می‌آوریم:

$$2x = x-1 \Rightarrow x = -1, \quad 2x = -x+1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

در نتیجه $D_f = \mathbb{R} - \{-1, \frac{1}{3}\}$. بنابراین دو عدد -1 و $\frac{1}{3}$ در دامنه تابع قرار

ندارند که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{2}{3}$ است.

۷۴- گزینه ۱ برای اینکه $\mathbb{R}$ دامنه تابع باشد، باید مخرج کسر ضابطه

تابع ریشه نداشته باشد. بنابراین

$$\Delta = m^2 - 16 < 0 \Rightarrow m^2 < 16 \Rightarrow -4 < m < 4$$

۷۵- گزینه ۲ باید نامعادله $\frac{9-x}{x+2} \geq 0$ را حل کنیم. با توجه به جدول

تعیین علامت زیر، جواب نامعادله به صورت $-2 < x \leq 9$ است.				
x	$-\infty$	-2	9	$+\infty$
$\frac{9-x}{x+2}$		-	+	-

پس $D_f = (-2, 9]$. در نتیجه $a = -2$ ، $b = 9$ و $a - b = -11$.

۷۶- گزینه ۳ شرط‌های زیر برای تعیین دامنه وجود دارد:

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1, \quad y-x \geq 0 \Rightarrow x \leq y$$

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{y-x} \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \neq \sqrt{y-x} \Rightarrow x-1 \neq y-x \Rightarrow x \neq \frac{y+1}{2}$$

بنابراین $D_f = [1, y] - \{\frac{y+1}{2}\}$. پس عددهای صحیح $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ در دامنه

تابع قرار دارند.

۷۷- گزینه ۲ توجه کنید که $D_f = \{x | x^2 + 2x + 2 - m^2 \geq 0\}$

برای اینکه همواره $x^2 + 2x + 2 - m^2 \geq 0$ باید $\Delta \leq 0$.

$$\Delta = 2^2 - 4(2 - m^2) \leq 0 \Rightarrow 4 - 8 + 4m^2 \leq 0 \Rightarrow m^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq m \leq 1$$

بنابراین کمترین مقدار ممکن m برابر -1 و بیشترین مقدار آن برابر 1 است که اختلاف آن‌ها برابر 2 است.

۷۸- گزینه ۲ برای اینکه

از نمودار تابع $y = f(x-2)$ به

نمودار تابع $y = f(x)$ برسیم،

کافی است آن را دو واحد به چپ

منتقل کنیم.

برای به دست آوردن دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{x}{f(x)}}$ عبارت $\frac{x}{f(x)}$ را تعیین

علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	-5	-3	0	2	$+\infty$
f(x)		+	-	+	+	-
x		-	-	-	+	+
$\frac{x}{f(x)}$		-	+	-	+	-

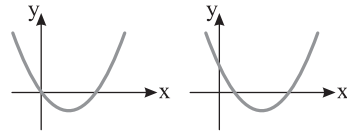
بنابراین $D_g = (-5, -3) \cup [0, 2)$ ، پس دامنه تابع g شامل سه عدد صحیح است.

$$\Delta > 0 \Rightarrow m^2 + 4m > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty) \quad (1)$$

$$-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -m > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 0) \quad (2)$$

$$\frac{c}{a} \geq 0 \Rightarrow -m \geq 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 0] \quad (3)$$

از اشتراک مجموعه جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود $m \in (-\infty, -4)$.



۶۸- گزینه ۳ از شکل روبه‌رو و فرض

مسئله نتیجه می‌شود

$$2(a+b) = 24 \Rightarrow a+b = 12 \Rightarrow b = 12-a$$

اکنون توجه کنید که $1^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (12-a)^2 = 2a^2 - 24a + 144$

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-24)^2 - 4 \times 2 \times 144}{4 \times 2} = 72 \text{ برابر است با } 72$$

بنابراین

$$1^2 \geq 72 \Rightarrow 1 \geq 6\sqrt{2}$$

۶۹- گزینه ۳ چون نمودار تابع f از نقطه $(0, -2)$ گذشته است، پس

$$f(0) = -2 \Rightarrow c = -2$$

از طرف دیگر، x_1 و x_2 جواب‌های معادله $-x^2 + bx + c = 0$ هستند، در

نتیجه $x_1 + x_2 = b$ و $x_1 x_2 = -c = 2$ ، بنابراین

$$x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{4}x_1 x_2 = 42 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - \frac{3}{4}x_1 x_2 = 42$$

$$b^2 - \frac{3}{4} \times 2 = 42 \Rightarrow b^2 = 49$$

عرض رأس سهمی برابر است با $\frac{fac-b^2}{4a}$. در نتیجه بیشترین مقدار تابع f

$$\text{برابر است با } \frac{4(-1)(-2) - 49}{4(-1)} = \frac{41}{4}$$

۷۰- گزینه ۲ از فرض مسئله، معلوم می‌شود که

$$3x + 2y = 4$$

باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن شود. در نتیجه

مساحت پنجره را حساب می‌کنیم:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + xy \Rightarrow 4S = \sqrt{3}x^2 + 4xy$$

چون $2y = 4 - 3x$ ، پس

$$4S = \sqrt{3}x^2 + 2x(4 - 3x) = \sqrt{3}x^2 + 2x(4 - 3x) = (\sqrt{3} - 6)x^2 + 8x$$

چون $\sqrt{3} - 6 < 0$ ، بیشترین مقدار عبارت فوق به ازای

$$x = \frac{-8}{2(\sqrt{3} - 6)} = \frac{4}{6 - \sqrt{3}}$$

۷۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1, \quad 1-\frac{1}{x+1}=0 \Rightarrow \frac{x}{x+1}=0 \Rightarrow x=0$$

بنابراین $D_f = \mathbb{R} - \{0, -1\}$.

۸۵- گزینه ۱ باید $x=2$ و $x=-1$ جواب‌های معادله $a|x|-bx+1=0$

باشند. بنابراین $a|x|-bx+1=0 \xrightarrow{x=-1} a+b+1=0$

$$a|x|-bx+1=0 \xrightarrow{x=2} 2a-2b+1=0$$

$$.ab=\frac{3}{16} \text{ بنابراین } a=-\frac{3}{4} \text{ و } b=-\frac{1}{4} \text{ در نتیجه}$$

۸۶- گزینه ۳ شرط‌های زیر برای تعیین دامنه تابع وجود دارند:

$$3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3, \quad x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

$$\sqrt{x+2}-2 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+2} \neq 2 \Rightarrow x+2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$$

بنابراین $D_f = [-2, 3] - \{2\}$ و عددهای صحیح $-2, -1, 0, 1, 3$ در

دامنه تابع قرار دارند.

۸۷- گزینه ۳ دامنه تابع f بازه $[-3, 2]$ است. بنابراین عبارت

$$\mathbb{R} - (-3, 2) \text{ باید روی این بازه نامنفی باشد و روی بازه } \mathbb{R} - (-3, 2)$$

منفی باشد. پس $x=2$ و $x=-3$ جواب‌های معادله $ax^2+bx+2a^2$

هستند. یعنی اگر به جای x یک بار 2 و بار دیگر -3 قرار دهیم مقدار عبارت

برابر صفر خواهد شد:

$$3 \times \begin{cases} 4a+2b+2a^2=0 \\ 9a-3b+2a^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12a+6b+6a^2=0 \\ 18a-6b+4a^2=0 \end{cases}$$

$$3 \cdot a + 1 \cdot a^2 = 0$$

$$1 \cdot a(3+a) = 0 \Rightarrow a=0, a=-3$$

اگر $a=0$ از معادله (I) نتیجه می‌شود $b=0$ و اگر $a=-3$ از معادله (I)

نتیجه می‌شود $-12+2b+18=0 \Rightarrow b=-3$

اگر $a=b=0$ آن‌گاه $f(x)=0$ و $D_f = \mathbb{R}$. پس فقط $a=b=-3$ قابل

قبول است و در نتیجه $a+b=-6$.

۸۸- گزینه ۴ باید نامعادله $\frac{f(x)}{x^2-x} \geq 0$ را حل کنیم. مطابق جدول تعیین

علامت زیر جواب نامعادله به صورت $1 < x \leq 2$ یا $0 < x < 1$ یا $x=-1$ است.

بنابراین $D_g = \{-1\} \cup (0, 1) \cup (1, 2]$.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
f(x)		-	+	-	+	+	
x^2-x		+	+	+	-	+	+
$\frac{f(x)}{x^2-x}$		-	+	-	+	+	

۸۹- گزینه ۲ راه حل اول فرض کنید $g(x)=ax+b$ و تابع f با تابع g

$$\frac{x^2-mx+3}{3-x} = ax+b \text{ تساوی } x \neq 3 \text{ در این صورت به ازای هر } x \neq 3 \text{ تساوی}$$

برقرار است. پس

$$x^2-mx+3=3ax+3b-ax^2-bx=-ax^2+(3a-b)x+3b$$

تساوی بالا به ازای هر $x \neq 3$ برقرار است. بنابراین

$$a=-1, \quad 3=3b \Rightarrow b=1, \quad -m=3a-b \xrightarrow{b=1} m=4$$

بنابراین $g(x)=-x+1$. همچنین باید تساوی $f(3)=g(3)$ درست باشد. پس

$$f(3)=n, \quad g(3)=-3+1=-2 \Rightarrow n=-2$$

در نتیجه $m+n=2$.

۷۹- گزینه ۲ تساوی‌های زیر باید برقرار باشند:

$$(1, 2a) = (1, 8) \Rightarrow a=4$$

$$(2, 2a+b) = (2, 5) \Rightarrow 2a+b=5 \xrightarrow{a=4} 8+b=5 \Rightarrow b=-3$$

$$(a+c, 3) = (5, 3) \Rightarrow a+c=5 \xrightarrow{a=4} 4+c=5 \Rightarrow c=1$$

بنابراین $a+b+c=2$.

۸۰- گزینه ۲ تابع‌های $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{6-x}$ و $f(x)=\sqrt{6x-x^2}$

برابرند، زیرا

$$D_f = D_g = [0, 6], \quad f(x) = \sqrt{6x-x^2} = \sqrt{x(6-x)} = \sqrt{x}\sqrt{6-x} = g(x)$$

تابع‌های $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{6-x}$ و $f(x)=\sqrt{x^2-3x}$ و همین‌طور تابع‌های

$g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x+3}$ و $f(x)=\sqrt{x^2+3x}$ دامنه یکسان ندارند، پس برابر

نیستند. تابع‌های $g(x)=x-3$ و $f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}$ دامنه یکسان

دارند، اما ضابطه برابر ندارند، زیرا

$$f(x) = \sqrt{x^2-6x+9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3| \neq g(x)$$

۸۱- گزینه ۴ سه کسر در ضابطه تابع وجود دارد. مخرج هر یک را

برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1, \quad x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$1 - \frac{4}{x+1} = 0 \Rightarrow x+1-4=0 \Rightarrow x=3$$

بنابراین $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 2, 3\}$. پس حاصل ضرب عددهایی که در دامنه

تابع قرار ندارند برابر -6 است.

۸۲- گزینه ۳ مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های آن

را به دست می‌آوریم:

$$x^3-2x^2-x+2=0 \Rightarrow x^3-x-2x^2+2=0$$

$$x(x^2-1)-2(x^2-1)=0 \Rightarrow (x^2-1)(x-2)=0$$

$$(x-1)(x+1)(x-2)=0 \Rightarrow x=1, x=-1, x=2$$

بنابراین $D_f = \mathbb{R} - \{1, -1, 2\}$. پس سه عدد در دامنه تابع قرار ندارند.

۸۳- گزینه ۳ چون $x=4$ در دامنه تابع نیست، پس مخرج حداقل

یکی از کسرهای ضابطه تابع را صفر می‌کند. بنابراین

$$x-a=0 \xrightarrow{x=4} 4-a=0 \Rightarrow a=4$$

$$x - \frac{a+1}{x-a} = 0 \xrightarrow{x=4} 4 - \frac{a+1}{4-a} = 0 \Rightarrow a=3$$

پس حاصل جمع مقادیر ممکن برای a برابر 7 است.

۸۴- گزینه ۲ چون فقط یک عدد حقیقی در دامنه تابع قرار ندارد، پس

معادله $m^2x^2+x+1=0$ باید فقط یک جواب داشته باشد. در دو حالت این

اتفاق می‌افتد.

حالت اول مخرج ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\Delta = 1 - 4m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

در این حالت $x=-2$ ریشه مخرج است، در نتیجه $n=-2$.

حالت دوم مخرج عبارت درجه اول باشد، یعنی ضریب x^2 برابر صفر باشد.

در این حالت $m=0$ و $x=-1$ ریشه مخرج است. در نتیجه $n=-1$.

پس حاصل ضرب مقادیر ممکن برای n ، 2 است.

۹۳- گزینه ۳ هر دو عبارت رادیکالی باید بامعنی باشند. در نتیجه $\frac{16-x^2}{x} \geq 0$ و $-\frac{x}{x+5} \geq 0$. با توجه به جدول‌های تعیین علامت زیر مجموعه جواب‌های نامعادله اول $(-\infty, -4] \cup (0, 4]$ و مجموعه جواب‌های نامعادله دوم $[-5, 0]$ است. بنابراین دامنه تابع f برابر است با

$$((-\infty, -4] \cup (0, 4]) \cap (-5, 0] = (-5, -4]$$

x	$-\infty$	-4	0	4	$+\infty$
$16-x^2$	-	0	+	+	-
x	-	-	0	+	+
$\frac{16-x^2}{x}$	+	0	-	+	-

x	$-\infty$	-5	0	$+\infty$
$-\frac{x}{x+5}$	-	0	+	-

بنابراین $a = -5$ ، $b = -4$ و $a+b = -9$.

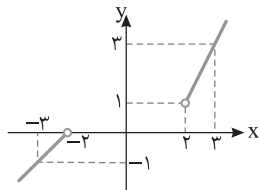
۹۴- گزینه ۳ شرط تعیین دامنه به صورت زیر است $(a+2)x^2 + ax + b \geq 0$.

مجموعه جواب‌های نامعادله فوق نمی‌تواند به صورت $(-\infty, 3]$ باشد، مگر اینکه عبارت $(a+2)x^2 + ax + b$ درجه اول باشد، یعنی $a+2=0$. در نتیجه $a = -2$. پس نامعادله به صورت $-2x + b \geq 0$ درمی‌آید: $-2x + b \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{b}{2} \Rightarrow D_f = (-\infty, \frac{b}{2}]$ بنابراین $\frac{b}{2} = 3$ و در نتیجه $b = 6$.

۹۵- گزینه ۳ دامنه تابع g از حل نامعادله $-x^3 f(x) \geq 0$ به دست می‌آید. با توجه به جدول تعیین علامت زیر، مجموعه جواب‌های این نامعادله $\{1, 2\} \cup \{-1, 0\}$ است که شامل چهار عدد صحیح است.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$-x^3$	+	+	+	0	-	-	-
$f(x)$		-	0	0	+	0	-
$-x^3 f(x)$		-	0	0	-	+	-

۹۶- گزینه ۱ راه حل اول نمودار تابع به شکل زیر است. واضح است که برد تابع $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ است. پس $a = 0$ و $b = 1$. در نتیجه $a+b = 1$.



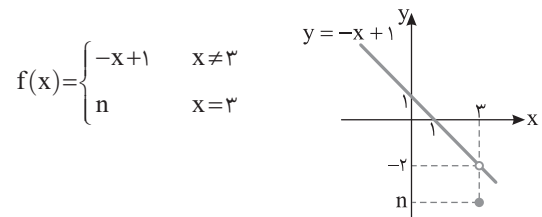
راه حل دوم اگر $x > 2$ ، آن‌گاه $2x > 4 \Rightarrow 2x - 3 > 1 \Rightarrow f(x) > 1$
 اگر $x < -2$ ، آن‌گاه $x + 2 < 0 \Rightarrow f(x) < 0$
 پس $R_f = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) = \mathbb{R} - [0, 1]$ پس $a = 0$ و $b = 1$. در نتیجه $a+b = 1$

راه حل دوم برای اینکه تابع f خطی باشد، باید کسر $\frac{x^2 - mx + 3}{3-x}$ ساده شود. یعنی باید صورت کسر عامل $x-3$ داشته باشد. پس صورت کسر به ازای $x=3$ صفر می‌شود.

$$9 - 3m + 3 = 0 \Rightarrow m = 4$$

$$\frac{x^2 - mx + 3}{3-x} = \frac{x^2 - 4x + 3}{3-x} = \frac{(x-1)(x-3)}{-(x-3)} = -x+1$$

پس نمودار تابع f به صورت زیر است:



واضح است که اگر $n \neq -2$ آن‌گاه تابع f خطی نیست. پس $n = -2$ ، بنابراین $m+n = 2$.

۹۰- گزینه ۳ ضابطه دو تابع را مساوی قرار می‌دهیم:

$$\frac{bx+2}{ax+b} = c \Rightarrow \lambda cx + bc = bx + 2$$

$$\begin{cases} \lambda c = b \\ bc = 2 \end{cases} \Rightarrow c \times \lambda c = 2 \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{\lambda}, b = 4 \\ c = -\frac{1}{\lambda}, b = -4 \end{cases}$$

اگر $b = 4$ ، آن‌گاه $f(x) = \frac{4x+2}{\lambda x+4}$. بنابراین $x = -\frac{1}{\lambda}$ در دامنه تابع f قرار ندارد و در دامنه تابع g نیز نباید قرار داشته باشد. پس $a = -\frac{1}{\lambda}$ و در نتیجه

$$\frac{ab}{c} = -4 \text{ در حالت } b = -4, f(x) = \frac{-4x+2}{\lambda x-4} \text{ که نتیجه می‌شود } a = \frac{1}{\lambda} \text{ و } \frac{ab}{c} = 4$$

۹۱- گزینه ۱ عددهایی که مخرج ضابطه تابع را صفر می‌کنند، در دامنه تابع قرار ندارند. پس $x=2$ جواب معادله $x^3 - (a+1)x + a = 0$ است. پس

$$8 - 2(a+1) + a = 0 \Rightarrow a = 6$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت $f(x) = \frac{1}{x^3 - 7x + 6}$ است. دامنه تابع را

به دست می‌آوریم:

$$x^3 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x^2 + 2x - 3) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 1, x = -3$$

در نتیجه $D_f = \mathbb{R} - \{1, 2, -3\}$.

۹۲- گزینه ۳ شرایط زیر برای تعیین دامنه تابع وجود دارد:

$$2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$4 - \sqrt{2x-1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2x-1} \leq 4 \Rightarrow 2x-1 \leq 16 \Rightarrow x \leq \frac{17}{2}$$

$$\text{بنابراین } D_f = [\frac{1}{2}, \frac{17}{2}] \text{ پس } a = \frac{1}{2}, b = \frac{17}{2} \text{ و } a+b = 9$$

۱۰۱- گزینه ۴ طول مستطیل را x و عرض آن را $x-2$ در نظر می‌گیریم، پس محیط آن برابر است با $P(x)=2(x+x-2)=4x-4$.

۱۰۲- گزینه ۴ اگر شعاع دایره باشد، $P=2\pi r$ و در نتیجه $r=\frac{P}{2\pi}$.

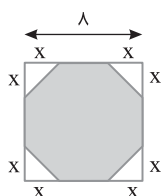
از طرف دیگر $S=\pi r^2$ ، بنابراین $S(P)=\frac{1}{4\pi}P^2$ و $S=\pi(\frac{P}{2\pi})^2=\frac{\pi P^2}{4\pi^2}\Rightarrow S(P)=\frac{1}{4\pi}P^2$.

۱۰۳- گزینه ۲ ابعاد مستطیل x و $2-\frac{x}{2}$ هستند، پس محیط آن

به صورت $P(x)=2(x+2-\frac{x}{2})=x+4$ به دست می‌آید.

۱۰۴- گزینه ۲ با توجه به شکل درمی‌یابیم که اندازه شعاع ربع دایره و ضلع مربع برابر r است. از طرف دیگر، اگر مساحت ربع دایره را از مساحت مربع کم کنیم، مساحت قسمت رنگی به دست می‌آید، بنابراین

$$S(r)=r^2-\frac{1}{4}\pi r^2=(\frac{4-\pi}{4})r^2$$



۱۰۵- گزینه ۳ مقدار x باید مثبت باشد و

مقدار بریده شده یعنی $2x$ باید از ۸ کمتر باشد.

پس $0 < 2x < 8$ در نتیجه $0 < x < 4$ ، بنابراین دامنه این تابع بازه $(0, 4)$ است.

۱۰۶- گزینه ۴ از روی شکل معلوم است که نقطه A از یک طرف تا

محل برخورد خط با محور x ، یعنی نقطه $(6, 0)$ ، و از طرف دیگر تا مبدأ مختصات می‌تواند حرکت کند. بنابراین، دامنه این تابع بازه $(0, 6)$ است.

۱۰۷- گزینه ۴ توجه کنید که حجم مخزن برابر است با حجم نیم کره $\times 2 +$ حجم استوانه V

$$= \pi(r^2)(20) + 2 \times \frac{2}{3}\pi(r^3) = \frac{4\pi}{3}r^3 + 20\pi r^2$$

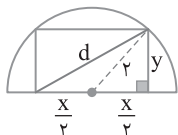
۱۰۸- گزینه ۲ مطابق شکل زیر، با استفاده از رابطه فیثاغورس،

$$(\frac{x}{2})^2 + y^2 = 2^2 \Rightarrow y^2 = 4 - \frac{x^2}{4}$$

همچنین طول قطر مستطیل از رابطه فیثاغورس قابل محاسبه است:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 4 - \frac{x^2}{4}}$$

بنابراین $d(x) = \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 4}$ ضابطه تابع مورد نظر است.



۱۰۹- گزینه ۳ شیب خطی که از نقطه‌های $(2, 3)$ و $(x, 0)$ عبور

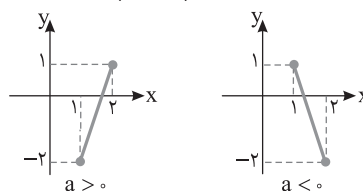
می‌کند، برابر $\frac{3-0}{2-x}$ است. شیب خطی که از نقطه‌های $(2, 3)$ و $(0, y)$ عبور

می‌کند، برابر $\frac{y-3}{0-2}$ است. چون نقطه‌های $(2, 3)$ ، $(x, 0)$ و $(0, y)$ روی

یک خط واقع‌اند، پس برابری $\frac{3-0}{2-x} = \frac{y-3}{0-2}$ برقرار است. بنابراین

$$y-3 = \frac{-6}{2-x} \Rightarrow y = 3 - \frac{6}{2-x} \Rightarrow y = \frac{3x}{x-2}$$

۹۷- گزینه ۳ فرض کنید $f(x)=ax+b$ ، نمودار تابع f در دو حالت $a > 0$ و $a < 0$ را در شکل‌های زیر رسم کرده‌ایم.



اگر $a > 0$ ، آن‌گاه $f(1) = -2$ و $f(2) = 1$ ، پس

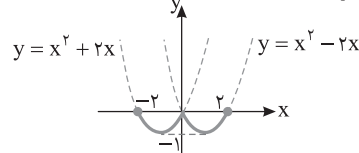
$$\begin{cases} a+b=-2 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-5 \end{cases} \Rightarrow f(x)=3x-5 \Rightarrow f(\frac{4}{3})=-1$$

اگر $a < 0$ ، آن‌گاه $f(1) = 1$ و $f(2) = -2$ ، پس

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow f(x)=-3x+4 \Rightarrow f(\frac{4}{3})=0$$

۹۸- گزینه ۱ نمودار تابع f به صورت زیر است. واضح است که برد

تابع f بازه $[-1, 0]$ است.



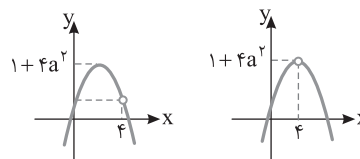
۹۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که اگر دامنه تابع

$f(x) = -x^2 - 4ax + 1$ مجموعه اعداد حقیقی باشد، برد آن بازه $(-\infty, 1+4a^2]$ است. در این حالت نمودار تابع f یک سهمی است و با حذف یک عدد از دامنه مطابق شکل زیر، عددی از برد حذف نمی‌شود، مگر اینکه طول رأس سهمی را حذف کنیم. بنابراین طول رأس سهمی برابر ۴ و عرض آن برابر $1+4a^2$ است:

$$\text{طول رأس سهمی} = x = -\frac{-4a}{2(-1)} = 4 \Rightarrow a = -2$$

$$\text{عرض رأس سهمی} = y = 1 + 4a^2 = 1 + 16 \Rightarrow b = 17$$

بنابراین $a+b=15$.



۱۰۰- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$x \neq 1 \Rightarrow g(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1} = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$g(x) = f(x) \Rightarrow a = 1$$

از طرف دیگر،

$$x = 1 \Rightarrow g(x) = g(1) = b, \quad f(1) = 4, \quad g(1) = f(1) \Rightarrow b = 4$$

بنابراین $a+b=5$.

راه حل دوم با استفاده از نقطه‌های $x=1$ و $x=0$ مقادیر a و b به راحتی به دست می‌آیند.

$$\begin{cases} f(0) = g(0) \Rightarrow a = 1 \\ f(1) = g(1) \Rightarrow 3 + a = b \end{cases} \xrightarrow{a=1} \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a+b=5$$

$$f(x) + g(x) + f(x) - g(x) = x^2 - 1 + x - 3 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + x - 4}{2}$$

پس باید حاصل ضرب جواب‌های معادله $\frac{x^2 + x - 4}{2} = 2$ را به دست آوریم

$$x^2 + x - 4 = 4 \Rightarrow x^2 + x - 8 = 0$$

حاصل ضرب جواب‌های معادله بالا برابر $\frac{c}{a} = -8$ است.

۱۱۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ و $D_g = \mathbb{R} - \{3\}$

از طرف دیگر،

$$D_{\frac{f+g}{f}} = (D_f \cap D_g) - \{x | f(x) = 0\} = (\mathbb{R} - \{2, 3\}) - \{x | \frac{x+4}{x-2} = 0\}$$

$$= \mathbb{R} - \{2, 3, -4\}$$

پس مجموع اعدادی که در دامنه تابع $\frac{f+g}{f}$ قرار ندارند برابر ۱ است.

۱۱۷- گزینه ۱ ابتدا ضابطه تابع f را حساب می‌کنیم:

$$f(x) + g(x) = x^2 - 4x, \quad f(x) - g(x) = x^2 - 6x - 12$$

با جمع طرفین دو تساوی بالا نتیجه می‌شود

$$2f(x) = 2x^2 - 10x - 12 \Rightarrow f(x) = x^2 - 5x - 6$$

بنابراین

$$D_{\frac{f+g}{f}} = (D_f \cap D_g) - \{x | f(x) = 0\}$$

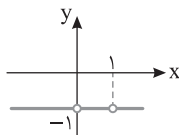
$$= (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) - \{x | x^2 - 5x - 6 = 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 6\}$$

۱۱۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ پس

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x+1}{x^2-x} - \frac{x^2+1}{x^2-x} = \frac{x-x^2}{x^2-x} = -1$$

بنابراین باید نمودار تابع $y = -1$ را با دامنه $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ رسم کنیم که به صورت زیر است.

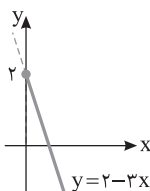


۱۱۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f = D_g = [0, +\infty)$ پس

$$D_{\frac{f+g}{f}} = D_f \cap D_g = [0, +\infty)$$

$$(g-f)(x) = g(x) - f(x) = 2 - \sqrt{x} - (3x - \sqrt{x}) = 2 - 3x$$

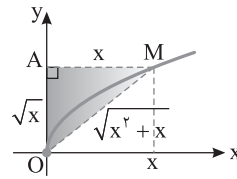
پس نمودار تابع $g-f$ به صورت روبه‌رو است و برد آن بازه $(-\infty, 2]$ است.



۱۱۰- گزینه ۴ مطابق شکل زیر طول ضلع OM به کمک قضیه فیثاغورس برابر است با $\sqrt{AM^2 + OA^2} = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x})^2} = \sqrt{x^2 + x}$

پس محیط مثلث OAM برابر است با

$$P(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt{x^2 + x}$$



۱۱۱- گزینه ۲ اشتراک دامنه‌های f و g مجموعه $\{2, 3, 4\}$ است که

دامنه تابع $f+g$ است. پس این تابع به شکل زیر است.

$$f+g = \{(2, 2), (3, 11), (4, -1)\}$$

بنابراین $R_{f+g} = \{2, 11, -1\}$ و مجموع اعضای برد $f+g$ برابر ۱۲ است.

۱۱۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$D_f = \{1, 3, 5, -1\}, \quad D_g = \{1, 2, 5, 4\}$$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{1, 5\}$$

راه حل اول بنابراین a یکی از مقادیر ۱ یا ۵ است. از طرف دیگر،

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 2 + 4 = 6$$

$$(f-g)(1) = f(1) - g(1) = 2 - 4 = -2$$

$$(f+g)(5) = f(5) + g(5) = 6 + 2 = 8$$

$$(f-g)(5) = f(5) - g(5) = 6 - 2 = 4$$

پس $(f+g)(5) = 2(f-g)(5)$ و در نتیجه $a = 5$.

راه حل دوم توجه کنید که

$$(f+g)(a) = 2(f-g)(a) \Rightarrow f(a) + g(a) = 2f(a) - 2g(a) \Rightarrow f(a) = 3g(a)$$

$$f(1) = 2, g(1) = 4 \Rightarrow f(1) \neq 3g(1)$$

$$f(5) = 6, g(5) = 2 \Rightarrow f(5) = 3g(5) \Rightarrow a = 5$$

۱۱۳- گزینه ۱ توجه کنید که $D_f = (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$ و

$$D_{\frac{f+g}{f}} = D_g \cap D_f = \{-1, 0, 2, 4\}$$

بنابراین a باید یکی از مقدارهای ۱ یا ۰ یا ۴ باشد:

$$(2g-f)(-1) = 2g(-1) - f(-1) = 4 - 2 = 2$$

$$(2g-f)(0) = 2g(0) - f(0) = 2 - 0 = 2$$

$$(2g-f)(4) = 2g(4) - f(4) = 6 - 2 = 4$$

پس $(2g-f)(4) = 4$. بنابراین $a = 4$ و در نتیجه $f(-a) = f(-4) = \sqrt{28}$.

۱۱۴- گزینه ۳ راه حل اول توجه کنید که

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} + \frac{x^4-x^2}{x^2+1} = \frac{x^2-1+x^4-x^2}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^4-1}{x^2+1} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1} = x^2-1$$

راه حل دوم توجه کنید که $f(0) = -1$ و $g(0) = 0$ پس $(f+g)(0) = -1$ با

توجه به گزینه‌ها فقط در گزینه (۳) به ازای $x = 0$ حاصل -1 است.

۱۱۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow f(x) + g(x) = x^2 - 1$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = x - 3$$

طرفین تساوی‌های بالا را جمع می‌کنیم

۱۲۶- گزینه ۱ ابتدا دامنه تابع های f و g را به دست می آوریم:

$$\frac{5-x}{x-1} \geq 0 \Rightarrow 1 < x \leq 5 \Rightarrow D_f = (1, 5]$$

$$\frac{x-1}{4-x} \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x < 4 \Rightarrow D_g = [1, 4)$$

بنابراین

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = (1, 5] \cap [1, 4) = (1, 4)$$

۱۲۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = \frac{x}{(x+1)^2} \quad (1)$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = x \Rightarrow g(x) = xf(x) \quad (2)$$

اگر به جای $g(x)$ در تساوی (۱) معادل آن یعنی $xf(x)$ را از تساوی (۲) قرار دهیم، به دست می آید

$$f(x) \times xf(x) = \frac{x}{(x+1)^2} \Rightarrow f^2(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\text{بنابراین } g^2(x) = x^2 f^2(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2} \text{ در نتیجه}$$

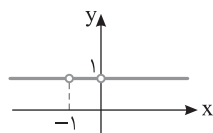
$$(f^2 - g^2)(x) = f^2(x) - g^2(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{1+x}$$

۱۲۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} = 1$$

پس اگر $x \neq -1$ و $x \neq 0$ ، آن گاه $(f+g)(x) = 1$. بنابراین نمودار تابع $f+g$ به صورت زیر است.



۱۲۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

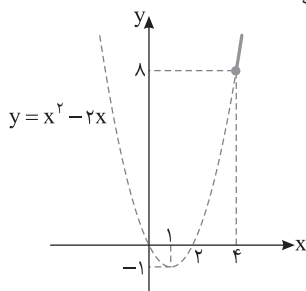
$$D_f = D_g = [4, +\infty)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 + \sqrt{x-4} - 2x - \sqrt{x-4} = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$$

برای تعیین برد تابع $f-g$ به ترتیب زیر عمل می کنیم:

$$x \geq 4 \Rightarrow x-1 \geq 3 \Rightarrow (x-1)^2 \geq 9 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 \geq 8 \Rightarrow (f-g)(x) \geq 8$$

پس $R_{f-g} = [8, +\infty)$. برد تابع $f-g$ از روی نمودار آن هم مشخص است.



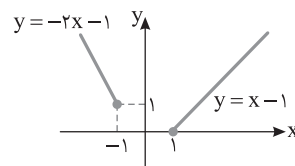
۱۲۰- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} 2x - (x+1) & x \geq 1 \\ x - 1 - 3x & x \leq -1 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -2x-1 & x \leq -1 \end{cases}$$

اکنون برد تابع $f-g$ را به صورت زیر به دست می آوریم

$$\begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 0 \\ x \leq -1 \Rightarrow -2x \geq 2 \Rightarrow -2x-1 \geq 1 \Rightarrow y \geq 1 \end{cases}$$

بنابراین برد تابع $f-g$ بازه $[0, +\infty)$ است. از روی نمودار تابع $f-g$ هم می توان برد آن را به دست آورد.



۱۲۱- گزینه ۴ توجه کنید که $D_{f-2g} = D_f \cap D_g = \{0, 1, 2\}$. بنابراین

$$(f-2g)(0) = f(0) - 2g(0) = 1 - 2(-1) = 3$$

$$(f-2g)(1) = f(1) - 2g(1) = 4 - 2(2) = 0$$

$$(f-2g)(2) = f(2) - 2g(2) = -6 - 2(3) = -12$$

بنابراین مجموع مقادیر تابع $f-2g$ برابر -۱ است.

۱۲۲- گزینه ۴ توجه کنید که

$$(f+g)(x) = 2x+1 \Rightarrow (f+g)(2) = 2 \times 2 + 1 = 5 \Rightarrow f(2) + g(2) = 5 \quad (1)$$

$$(f-g)(x) = 1-x \Rightarrow (f-g)(2) = 1-2 = -1 \Rightarrow f(2) - g(2) = -1 \quad (2)$$

اگر دستگاه معادله های (۱) و (۲) را حل کنیم، به دست می آید $f(2) = 2$ و $g(2) = 3$. بنابراین $(f \times g)(2) = f(2) \times g(2) = 2 \times 3 = 6$.

۱۲۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$D_f = (-\infty, 4] - \{0\}, \quad D_g = \{-2, -1, 0, 3, 4, 5\}$$

بنابراین

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x | g(x) = 0\} = \{-2, -1, 3, 4\} - \{-1\} = \{-2, 3, 4\}$$

پس تابع $\frac{f}{g}$ سه زوج مرتب دارد.

۱۲۴- گزینه ۳ توجه کنید که

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = |x-1| + |x| = \begin{cases} -2x+1 & x \leq 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$$

در بازه $[0, 1]$ تابع $f+g$ ثابت است. در این بازه،

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \left| \frac{x-1}{x} \right| - \left| \frac{x}{x-1} \right| = -x + 1 - x = -2x + 1$$

۱۲۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(f+2g)(x) = f(x) + 2g(x) \Rightarrow f(x) + 2g(x) = 1-x$$

$$f(x) = 1-x-2g(x)$$

$$(2f-g)(x) = 2f(x) - g(x) \Rightarrow 2f(x) - g(x) = x^2$$

$$2(1-x-2g(x)) - g(x) = x^2 \Rightarrow -5g(x) + 2-2x = x^2$$

بنابراین

$$g(x) = \frac{1}{5}(-x^2 - 2x + 2)$$

۱۳۰- گزینه ۴ اگر $x > 1$ ، آن‌گاه

$$f(x)=1, g(x)=-2 \Rightarrow (f-g)(x)=1-(-2)=3$$

اگر $0 < x \leq 1$ ، آن‌گاه

$$f(x)=1, g(x)=2 \Rightarrow (f-g)(x)=1-2=-1$$

اگر $-1 \leq x \leq 0$ ، آن‌گاه

$$f(x)=-1, g(x)=2 \Rightarrow (f-g)(x)=-1-2=-3$$

اگر $x < -1$ ، آن‌گاه

$$f(x)=-1, g(x)=-2 \Rightarrow (f-g)(x)=-1-(-2)=1$$

بنابراین $R_{f-g} = \{3, -1, -3, 1\}$ ۱۳۱- گزینه ۱ دامنه تابع g به شکل زیر است:

$$D_g = D_f - \{x | f(x)=2\} = \{1, 4, 3, 5\} - \{4, 3\} = \{1, 5\}$$

از طرف دیگر،

$$g(1) = \frac{f(1)}{2-f(1)} = \frac{-1}{2-(-1)} = -\frac{1}{3}, \quad g(5) = \frac{f(5)}{2-f(5)} = \frac{1}{2-1} = 1$$

بنابراین $g = \{(1, -\frac{1}{3}), (5, 1)\}$ ۱۳۲- گزینه ۱ ابتدا مقادیر $f(a)$ و $g(a)$ را به دست می‌آوریم:

$$(f-g)(a)=2 \Rightarrow f(a)-g(a)=2 \Rightarrow f(a)=g(a)+2 \quad (1)$$

$$(f \times g)(a)=8 \Rightarrow f(a)g(a)=8 \xrightarrow{(1)} (g(a)+2)g(a)=8$$

$$g^2(a)+2g(a)-8=0 \Rightarrow (g(a)+4)(g(a)-2)=0$$

$$\begin{cases} g(a)=-4 \xrightarrow{(1)} f(a)=-2 \\ g(a)=2 \xrightarrow{(1)} f(a)=4 \end{cases}$$

بنابراین

$$\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{4}{2} = 2, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

۱۳۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$D_f = [-3, 3], \quad D_g = \{1, -1, 3, -3, -4\}$$

$$f(x)=0 \Rightarrow \sqrt{9-x^2}=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$$

بنابراین

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | f(x)=0\} = \{1, -1, 3, -3\} - \{3, -3\} = \{1, -1\}$$

از طرف دیگر،

$$\left(\frac{g}{f}\right)(1) = \frac{g(1)}{f(1)} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \left(\frac{g}{f}\right)(-1) = \frac{g(-1)}{f(-1)} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین $\frac{g}{f} = \{(1, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-1, \frac{\sqrt{2}}{2})\}$ و در نتیجه برد تابع $\frac{g}{f}$ فقط یک عضو دارد.۱۳۴- گزینه ۴ دامنه تابع‌های f و g مجموعه $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ است. پس

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

اکنون ضابطه تابع $f-g$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} (f-g)(x) &= f(x) - g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2-x} \\ &= \frac{x+x-1}{x^2-x} = \frac{2(x-1)}{x(x-1)} = \frac{2}{x} \end{aligned}$$

۱۳۵- گزینه ۱ ابتدا دامنه تابع‌های f و g را به دست می‌آوریم

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4 \end{cases} \Rightarrow D_f = [-2, 2]$$

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow D_g = [-2, 1]$$

بنابراین $D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-2, 1]$ پس $a=-2$ ، $b=1$ و در نتیجه

$$a+b=-1$$

۱۳۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{1}{(ax+2)^2}, \quad g(x) = \frac{1}{(x+1)(x+b)}$$

چون فقط $x=-1$ در دامنه تابع $f+g$ قرار ندارد، پس تنها $x=-1$ می‌تواند ریشه مخرج در تابع‌های f و g باشد. بنابراین باید $b=1$. برای a دو حالت وجود دارد:حالت اول اگر $x=-1$ ریشه مخرج $f(x)$ باشد، آن‌گاه $a=2$.حالت دوم اگر مخرج $f(x)$ ریشه نداشته باشد، آن‌گاه $a=0$.بنابراین $a+b$ می‌تواند ۱ یا ۳ باشد.۱۳۷- گزینه ۲ ابتدا دامنه تابع f را به دست می‌آوریم:

$$ax-a+1 \geq 0 \Rightarrow ax \geq a-1$$

اگر $a > 0$ ، آن‌گاه $x \geq \frac{a-1}{a}$. اگر $a < 0$ ، آن‌گاه $x \leq \frac{a-1}{a}$. اگر $a=0$ ، آن‌گاه

$$D_g = [2, +\infty) \text{ و } D_{f \times g} = [2, 5] \text{ و اینک به این موضوع و اینک } x \in \mathbb{R}$$

باید $D_f = (-\infty, \frac{a-1}{a}]$ در نتیجه

$$\frac{a-1}{a} = 5 \Rightarrow a-1=5a \Rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

$$\text{پس } f(x) = \sqrt{-\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}} \text{ و در نتیجه } f(3) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۳۸- گزینه ۲ ابتدا ضابطه تابع $(f+g)^2$ را به دست می‌آوریم (توجه کنید که $x \geq 1$):

$$(f+g)^2(x) = f^2(x) + g^2(x) + 2f(x)g(x)$$

$$= x + \sqrt{x} + x - \sqrt{x} + 2\sqrt{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})} = 2x + 2\sqrt{x^2 - x}$$

با توجه به اینکه $f(x)$ و $g(x)$ عبارت‌هایی مثبت هستند، پس $(f+g)(x)$ هم مثبت است. بنابراین $(f+g)(x) = \sqrt{2x+2\sqrt{x^2-x}}$. پس $a=2$.بنابراین $b=1$ و در نتیجه $a+b=3$.۱۳۹- گزینه ۳ دامنه تابع‌های f و g به صورت زیر است:

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_f = [2, +\infty)$$

$$a-x \geq 0 \Rightarrow x \leq a \Rightarrow D_g = (-\infty, a]$$

چون $D_{f-g} = D_f \cap D_g = [2, 4]$ پس $a=4$. از طرف دیگر،

$$(f+g)(3) = 5 \Rightarrow f(3) + g(3) = \sqrt{3-2} + \sqrt{4-3} = b = 5$$

$$2+b=5 \Rightarrow b=3$$

در نتیجه $a+b=7$.

۱۴۷- گزینه ۳ فرض کنید $g(x) = x^2$ تابع $f(x^2)$ تابع fog

است. بنابراین می توان نوشت

$$D_{fog} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x | x \in \mathbb{R}, 1 \leq x^2 \leq 4\}$$

از نامعادله های $1 \leq x^2 \leq 4$ نتیجه می شود

$$\begin{cases} x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq x^2 \Rightarrow x \leq -1, x \geq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -2 \leq x \leq -1, 1 \leq x \leq 2$$

بنابراین $D_{f(x^2)} = [-2, -1] \cup [1, 2]$

۱۴۸- گزینه ۳ ابتدا دامنه تابع fog را با توجه به $D_f = [-2, 2]$ و

$D_g = \mathbb{R}$ به دست می آوریم

$$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{-2 \leq x \leq 2, \sqrt{4-x^2} \in \mathbb{R}\} = [-2, 2]$$

اکنون ضابطه تابع fog را مشخص می کنیم

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{4-x^2}) = (\sqrt{4-x^2})^2 + 1 = 5 - x^2$$

برای محاسبه برد از دامنه تابع کمک می گیریم

$$-2 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow -4 \leq -x^2 \leq 0$$

$$1 \leq 5 - x^2 \leq 5 \Rightarrow 1 \leq (gof)(x) \leq 5$$

بنابراین $R_{gof} = [1, 5]$

۱۴۹- گزینه ۲ توجه کنید که

$$D_{fog} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x | x \geq a, 0 \leq |x-1| \leq 3\}$$

$$= \{x | x \geq a, -3 \leq x-1 \leq 3\} = \{x | x \geq a, -2 \leq x \leq 4\}$$

بنابراین $D_{fog} = [a, +\infty) \cap [-2, 4] = [-2, 4]$ برای اینکه این تساوی برقرار

باشد، باید $-2 \leq a$ یعنی حداکثر مقدار a برابر -2 است.

۱۵۰- گزینه ۳ می توان نوشت

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 2g(x)-1 & g(x) < 0 \\ g(x)+4 & g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2(3x-6)-1 & 3x-6 < 0 \\ 3x-6+4 & 3x-6 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 6x-13 & x < 2 \\ 3x-2 & x \geq 2 \end{cases}$$

۱۵۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$$(fog)(-1) = f(g(-1)) = f(3) = 7, \quad (fog)(1) = f(g(1)) = f(2) = 5$$

$$(fog)(3) = f(g(3)) = f(0) = -1, \quad (fog)(5) = f(g(5)) = f(1) = 0$$

بنابراین $fog = \{(-1, 7), (1, 5), (3, -1), (5, 0)\}$

۱۵۲- گزینه ۱ توجه کنید که $f(2) = 3$ در نتیجه

$$(gof)(2) = g(f(2)) = g(3) = 3m+2 = 8 \Rightarrow m=2$$

۱۵۳- گزینه ۴ ابتدا $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$ را به دست می آوریم

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = \frac{1}{2x+1-1} = \frac{1}{2x}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{2}{x-1} + 1 = \frac{x+1}{x-1}$$

بنابراین

$$(fog)(x) + (gof)(x) = \frac{1}{2x} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2x^2+2x}{2x(x-1)} = \frac{2x^2+3x-1}{2x^2-2x}$$

۱۴۰- گزینه ۲ راه حل اول توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & x \leq 0 \\ x+2 & 0 < x < 1 \\ x+2 & x \geq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2x+3 & x \leq 0 \\ 2x+3 & 0 < x < 1 \\ 3x+2 & x \geq 1 \end{cases}$$

بنابراین

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} -3x-1 & x \leq 0 \\ -x-1 & 0 < x < 1 \\ -2x & x \geq 1 \end{cases}$$

راه حل دوم توجه کنید که $f(2) = 4$ و $g(2) = 8$ پس

$$(f-g)(2) = 4 - 8 = -4$$

$$\text{همچنین } (f-g)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} - 4 = -\frac{3}{2} \text{ پس } g\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \text{ و } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

$$\text{همچنین } (f-g)(-1) = 3 - 1 = 2 \text{ پس } g(-1) = 1 \text{ و } f(-1) = 3$$

همه این شرایط فقط در تابع گزینه (۲) وجود دارد.

۱۴۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$$(fog)(-2) = f(g(-2)) = f(2) = 3$$

$$(gof)(-1) = g(f(-1)) = g(-3) = -2$$

$$\text{بنابراین } (fog)(-2) - (gof)(-1) = 3 - (-2) = 5$$

۱۴۲- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $(fog)(-2) = f(g(-2))$ از

$$\text{طرف دیگر } f(g(-2)) = f(4) = 4^2 + 2 = 18 \text{ و } g(-2) = -2 + 6 = 4$$

۱۴۳- گزینه ۲ راه حل اول توجه کنید که

$$(fog)(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 2 = 3(4x+3) - 2 = 12x + 7$$

$$\text{بنابراین } (fog)(x-1) = 12(x-1) + 7 = 12x - 5$$

راه حل دوم دقت کنید که

$$(fog)(x-1) = f(g(x-1)) = f(4(x-1)+3)$$

$$= f(4x-1) = 3(4x-1) - 2 = 12x - 5$$

۱۴۴- گزینه ۴ راه حل اول توجه کنید که $(gof)(x) = g(f(x))$

بنابراین

$$(gof)(x) = g\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = \frac{2\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)-2}{\frac{2x+1}{x-1}+2} = \frac{4x+2-2x+2}{2x+1+2x-2} = \frac{2x+4}{4x-1}$$

راه حل دوم توجه کنید که $(gof)(0) = g(f(0)) = g(-1) = -4$ فقط در

گزینه (۴) تساوی بالا برقرار است.

۱۴۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 6x + 15) = 5x^2 - 3x + 2$$

بنابراین $f((x-3)^2 + 6) = 5x^2 - 3x + 2$ اگر در این تساوی قرار دهیم

$$x=3 \text{ به دست می آید } f(6) = 38$$

۱۴۶- گزینه ۳ توجه کنید که

$$D_{fog} = \{x | x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{1 \leq x \leq 2, 1 \leq 4-2x \leq 2\}$$

از نامعادله $1 \leq 4-2x \leq 2$ نتیجه می شود $-3 \leq -2x \leq -2$ پس $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$

$$\text{بنابراین } D_{fog} = \{1 \leq x \leq 2, 1 \leq x \leq \frac{3}{2}\} = \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

۱۵۴- گزینۀ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f^2(x) + 3f(x) + 2$$

$$(f \circ f)(x) = 6 \Rightarrow f^2(x) + 3f(x) + 2 = 6$$

بنابراین

$$f^2(x) + 3f(x) - 4 = 0 \Rightarrow (f(x) - 1)(f(x) + 4) = 0$$

$$\begin{cases} f(x) = 1 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 1 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 & (1) \\ f(x) = -4 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = -4 \Rightarrow x^2 + 3x + 6 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Delta < 0 \text{ در معادله (۱) حاصل جمع جواب‌ها برابر } -3$$

معادله (۲) جواب ندارد. پس حاصل جمع جواب‌های معادله $(f \circ f)(x) = 6$ برابر -3 است.

۱۵۵- گزینۀ ۲ می‌توان نوشت

$$g(x-1) = \frac{x+2}{3} \xrightarrow{x \rightarrow x+1} g(x) = \frac{(x+1)+2}{3} = \frac{x+3}{3}$$

$$(f \circ g)(x) = 6x + 5 \Rightarrow f(g(x)) = 6x + 5 \Rightarrow f\left(\frac{x+3}{3}\right) = 6x + 5$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=0$ ، به‌دست می‌آید $f(1)=5$.

۱۵۶- گزینۀ ۲ ابتدا دامنه تابع $g \circ f$ را به‌دست می‌آوریم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \{-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, \sqrt{3-x^2} \in \{-3, 0, 1, 2\}\}$$

$$\sqrt{3-x^2} = -3 \quad (\text{غ.ق.})$$

$$\sqrt{3-x^2} = 0 \Rightarrow 3-x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3-x^2} = 1 \Rightarrow 3-x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$\sqrt{3-x^2} = 2 \Rightarrow 3-x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = -1 \quad (\text{غ.ق.})$$

بنابراین

$$D_{g \circ f} = \{-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, x \in \{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}\}\} = \{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}\}$$

پس حاصل ضرب اعضای دامنه تابع $g \circ f$ برابر ۶ است.

۱۵۷- گزینۀ ۳ فرض کنید $g(x) = 2^x$ ، تابع $y = f(2^x)$ تابع

$y = (f \circ g)(x)$ است. دامنه تابع g ، $\mathbb{R}$ است، پس

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 1 \leq 2^x \leq 4\}$$

از نامعادله‌های $1 \leq 2^x \leq 4$ نتیجه می‌شود $0 \leq x \leq 2$ ، پس $D_{f \circ g} = [0, 2]$.

۱۵۸- گزینۀ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ و

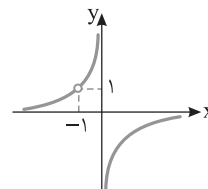
$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \neq -1, \frac{x-1}{x+1} \neq -1\}$$

$$\frac{x-1}{x+1} = -1 \Rightarrow x-1 = -x-1 \Rightarrow x=0$$

بنابراین $D_g = D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$. اکنون ضابطه تابع g را به‌دست می‌آوریم

$$g(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)-1}{f(x)+1} = \frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1} = \frac{x-1-x-1}{x-1+x+1} = \frac{-2}{x}$$

بنابراین نمودار تابع g به شکل مقابل است.



۱۵۹- گزینۀ ۳ توجه کنید که

$$D_{g \circ f} = \{x \mid x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{x \mid -2 \leq x \leq 3, 1 \leq x^2 - 3 \leq 13\}$$

از حل نامعادله $1 \leq x^2 - 3 \leq 13$ نتیجه می‌شود $2 \leq x \leq 4$ یا $-4 \leq x \leq -2$. بنابراین $D_{g \circ f} = [2, 4] \cup \{-2\}$.

۱۶۰- گزینۀ ۴ تابع $g \circ f$ به شکل زیر است

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 3-f(x) & f(x) > 0 \\ 2-f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

کافی است نامعادله‌های $f(x) > 0$ و $f(x) < 0$ را حل کنیم.

حل $f(x) > 0$: اگر $x \geq 0$ ، آن‌گاه

$$f(x) = x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x \geq 0$$

اگر $x < 0$ ، آن‌گاه

$$f(x) = x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in \emptyset$$

حل $f(x) < 0$: اگر $x \geq 0$ ، آن‌گاه

$$f(x) = x+1 < 0 \Rightarrow x < -1 \Rightarrow x \in \emptyset$$

اگر $x < 0$ ، آن‌گاه

$$f(x) = x-1 < 0 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x < 0$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 3-(x+1) & x \geq 0 \\ 2-(x-1) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2-x & x \geq 0 \\ 3-x & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین

۱۶۱- گزینۀ ۳ توجه کنید که

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(4) = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(1) = 2 \Rightarrow b = 2$$

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(2) = 4 \Rightarrow c = 4$$

$$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(3) = 3 \Rightarrow d = 3$$

بنابراین $a-b+c-d=0$.

۱۶۲- گزینۀ ۴ ابتدا مقادیر $(f \circ g)(2)$ و $(g \circ f)(a)$ را به‌دست می‌آوریم

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(2) = 4 + a$$

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(3a) = 6 - 6a$$

بنابراین باید معادله زیر را حل کنیم

$$4 + a - (6 - 6a) = 3 \Rightarrow 7a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{7}$$

۱۶۳- گزینۀ ۴ باید $(f \circ f)(x)$ را به‌دست آوریم

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)+2}{f(x)-2} = \frac{\frac{x+2}{x-2}+2}{\frac{x+2}{x-2}-2} = \frac{x+2+2x-4}{x+2-2x+4} = \frac{3x-2}{-x+6}$$

$$= \frac{3x-2}{-x+6}$$

۱۶۴- گزینۀ ۴ با توجه به ضابطه تابع f

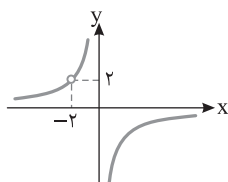
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)}{g(x)-1}$$

بنابراین

$$\frac{g(x)}{g(x)-1} = \frac{x}{2x+1} \Rightarrow 2xg(x) + g(x) = xg(x) - x$$

$$(x+1)g(x) = -x \Rightarrow g(x) = \frac{-x}{x+1}$$

بنابراین نمودار تابع g به شکل زیر است و برد تابع g برابر است با $\mathbb{R} - \{0, 2\}$.



۱۷۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 6x-1 & x < 0 \\ 3x-4 & x \geq 0 \end{cases}$$

۱۷۱- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f(1)=4, \quad f(2)=3, \quad f(3)=2, \quad f(4)=1, \quad f(5)=5 \\ f(g(1))=2, \quad f(g(2))=5, \quad f(g(3))=1, \quad f(g(4))=4, \quad f(g(5))=3$$

اکنون توجه کنید که

$$f(g(1))=f(2) \Rightarrow g(1)=3, \quad f(g(2))=f(5) \Rightarrow g(2)=5$$

$$f(g(3))=f(4) \Rightarrow g(3)=4, \quad f(g(4))=f(1) \Rightarrow g(4)=1$$

$$f(g(5))=f(3) \Rightarrow g(5)=2$$

$$g = \{(1, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 1), (5, 2)\}$$

۱۷۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\Delta = (gof)(a) = g(f(a)) = g(a + \sqrt{a})$$

از طرف دیگر $g(6) = 5$ پس

$$a + \sqrt{a} = 6 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow g(a) = g(4) = 1$$

۱۷۳- گزینه ۲ راه حل اول توجه کنید که

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(-5x + 2a)$$

$$= 2(-5x + 2a) - a + 1 = -10x + 3a + 1$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x - a + 1)$$

$$= -5(2x - a + 1) + 2a = -10x + 7a - 5$$

چون $(fog)(x) = (gof)(x)$ همواره برقرار است، پس

$$7a - 5 = 3a + 1 \Rightarrow 4a = 6 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

راه حل دوم تساوی داده شده به ازای $x=0$ برقرار است. پس

$$(fog)(0) = (gof)(0) \Rightarrow f(g(0)) = g(f(0)) \Rightarrow f(2a) = g(-a+1)$$

$$4a - a + 1 = -5(-a+1) + 2a \Rightarrow 3a + 1 = 7a - 5 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

۱۷۴- گزینه ۱ توجه کنید که $(gof)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$

$$g\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{1}{x+2} \quad (*)$$

بنابراین

$$\text{اگر فرض کنیم } t = \frac{x+1}{x-2} \text{ آن گاه}$$

$$tx - 2t = x + 1 \Rightarrow (t-1)x = 2t + 1 \Rightarrow x = \frac{2t+1}{t-1}$$

در تساوی (*) به جای x قرار می‌دهیم و نتیجه می‌شود

$$g(t) = \frac{1}{\frac{2t+1}{t-1} + 2} = \frac{t-1}{2t+1+2t-2} = \frac{t-1}{4t-1} \Rightarrow g(x) = \frac{x-1}{4x-1}$$

۱۶۵- گزینه ۳ توجه کنید که

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \sqrt{4f(x)-19}$$

$$\sqrt{4f(x)-19} = \sqrt{4g(x)+x} \Rightarrow 4f(x)-19 = 4g(x)+x$$

$$f(x)-g(x) = \frac{x+19}{4} \Rightarrow (f-g)(x) = \frac{x+19}{4}$$

$$\text{در نتیجه } (f-g)(5) = \frac{5+19}{4} = 6$$

۱۶۶- گزینه ۳ دامنه تابع‌های f و g به شکل زیر است:

$$D_f = [1, +\infty), \quad D_g = [0, 3]$$

$$\text{بنابراین } D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq 1 \mid 0 \leq \sqrt{x-1} \leq 3\}$$

$$x-1 \leq 9 \Rightarrow x \leq 10 \quad \text{از نامعادله‌های } 0 \leq \sqrt{x-1} \leq 3 \text{ نتیجه می‌شود}$$

$$\text{بنابراین } D_{gof} = \{x \mid x \geq 1, x \leq 10\} = [1, 10]$$

۱۶۷- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $g(x) = \frac{1}{x} + 3$ آن گاه $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\text{و } h(x) = f(g(x)) = (fog)(x)$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid 2 \leq \frac{1}{x} + 3 \leq 4\}$$

باید نامعادله‌های $2 \leq \frac{1}{x} + 3 \leq 4$ را حل کنیم:

$$-1 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1-x}{x} \leq 0 & (1) \\ \frac{1}{x} + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{1+x}{x} \geq 0 & (2) \end{cases}$$

از حل نامعادله (۱) نتیجه می‌شود $x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ و از حل نامعادله (۲)

نتیجه می‌شود $x \in (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$. از اشتراک ناحیه‌های به دست آمده

$$\text{دامنه تابع } h \text{ مشخص می‌شود: } D_h = \mathbb{R} - (-1, 1)$$

۱۶۸- گزینه ۲ راه حل اول ابتدا دامنه تابع gof را مشخص می‌کنیم:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq 1 \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty)$$

اکنون ضابطه تابع gof را به دست می‌آوریم:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 + 6 = x - 1 + 6 = x + 5$$

اکنون با توجه به دامنه تابع gof که شرط $x \geq 1$ را دارد، برد آن را پیدا می‌کنیم:

$$x \geq 1 \Rightarrow x + 5 \geq 6 \Rightarrow (gof)(x) \geq 6 \Rightarrow R_{gof} = [6, +\infty)$$

راه حل دوم چون $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، پس $f(x) \geq 0$ از طرف دیگر،

$$(gof)(x) = g(f(x)) = f^2(x) + 6 \geq 6$$

$$\text{بنابراین } R_{gof} = [6, +\infty)$$

۱۶۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ و

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \neq -2, \frac{2x-4}{x+2} \neq -2\}$$

$$\frac{2x-4}{x+2} \neq -2 \Rightarrow 2x-4 \neq -2x-4 \Rightarrow x \neq 0$$

بنابراین $D_g = D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$ اکنون ضابطه تابع g را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{2f(x)-4}{f(x)+2}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2x-4}{x+2}\right)-4}{\frac{2x-4}{x+2}+2} = \frac{4x-8-4x-8}{2x-4+2x+4} = -\frac{4}{x}$$

۱۷۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$(g \circ f)(x) = x^2 + f(x) \Rightarrow g(f(x)) = x^2 + f(x)$$

$$f^2(x) - 3f(x) + 4 = x^2 + f(x)$$

$$f^2(x) - 4f(x) - x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (f(x) - 2)^2 = x^2$$

چون f تابعی چندجمله‌ای است، پس $f(x) - 2 = -x$ یا $f(x) - 2 = x$ پس

$$f(x) = -x + 2 \quad \text{یا} \quad f(x) = x + 2$$

۱۷۶- گزینه ۲ چون f خطی است، پس ضابطه آن به صورت $f(x) = ax + b$ است. پس

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = af(x) + b = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$$

$$a^2x + ab + b = 4x - 3 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ ab + b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2, b = 3 \\ a = 2, b = -1 \end{cases}$$

بنابراین $f(x) = 2x - 1$ یا $f(x) = -2x + 3$ که نتیجه می‌شود $f(0) = 3$ یا $f(0) = -1$.

۱۷۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $((f \circ f) \circ g)(x) = f(f(g(x)))$ از طرف دیگر، می‌توان نوشت $f(g(x)) = f(|x|) = ||x| + 2| - 4$ چون

$$|x| + 2 > 0, \quad \text{پس} \quad f(g(x)) = |x| + 2 - 4 = |x| - 2 \quad \text{و}$$

$$f(f(g(x))) = f(|x| - 2) = ||x| - 2| + 2 - 4 = ||x| - 2| - 2 = |x| - 4$$

۱۷۸- گزینه ۳ ابتدا دامنه تابع f را به دست می‌آوریم

$$4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(4 - x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow D_f = [0, 4]$$

بنابراین

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{0 \leq x \leq 4 \mid 0 \leq \sqrt{4x - x^2} - 1 \leq 4\}$$

پس

$$1 \leq \sqrt{4x - x^2} \leq 5 \Rightarrow 1 \leq 4x - x^2 \leq 25 \Rightarrow -3 \leq 4x - x^2 - 4 \leq 21$$

$$-3 \leq -(x - 2)^2 \leq 21 \Rightarrow -21 \leq (x - 2)^2 \leq 3 \Rightarrow |x - 2| \leq \sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3} \leq x - 2 \leq \sqrt{3} \Rightarrow 2 - \sqrt{3} \leq x \leq 2 + \sqrt{3}$$

$$D_{f \circ f} = \{0 \leq x \leq 4, 2 - \sqrt{3} \leq x \leq 2 + \sqrt{3}\} = [2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$$

۱۷۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f = [k, +\infty)$ و $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

بنابراین

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq 0 \mid \frac{1}{x} + 3 \geq k\}$$

نامعادله $\frac{1}{x} + 3 \geq k$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{1}{x} + 3 - k \geq 0 \Rightarrow \frac{1 + (3 - k)x}{x} \geq 0$$

مجموعه جواب‌های نامعادله فوق یا به صورت $(0, \frac{1}{k-3}]$ یا به صورت

$$(-\infty, \frac{1}{k-3}] \cup (0, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$$

بنابراین

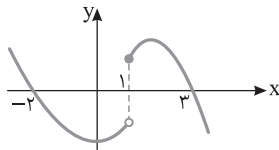
$$\frac{1}{k-3} = -1 \Rightarrow k - 3 = -1 \Rightarrow k = 2$$

۱۸۰- گزینه ۳ توجه کنید که

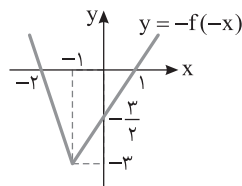
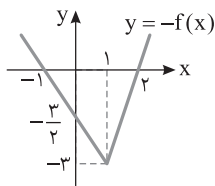
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} g^2(x) - 1 & g(x) < 0 \\ 3g(x) + 4 & 0 \leq g(x) < 2 \\ 5 & g(x) \geq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x+1)^2 - 1 & x+1 < 0 \\ 3(x+1) + 4 & 0 \leq x+1 < 2 \\ 5 & x+1 \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} x^2 + 2x & x < -1 \\ 3x + 7 & -1 \leq x < 1 \\ 5 & x \geq 1 \end{cases}$$

۱۸۱- گزینه ۱ برای رسم نمودار تابع $-f$ باید قرینه نمودار تابع f را نسبت به محور x رسم کنیم.

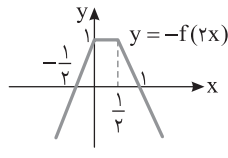
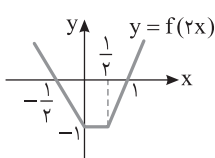


۱۸۲- گزینه ۳ ابتدا قرینه نمودار تابع f را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -f(x)$ به دست بیاید. سپس، قرینه این نمودار را نسبت به محور y رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -f(-x)$ به دست بیاید.



۱۸۳- گزینه ۲ ابتدا طول نقاط روی نمودار f را در $\frac{1}{4}$ ضرب می‌کنیم تا

نمودار تابع $y = f(2x)$ به دست بیاید. اکنون قرینه این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -f(2x)$ به دست بیاید.



۱۸۴- گزینه ۱ ابتدا نمودار تابع $y = \sin 2x$ را روی بازه $[0, \pi]$ رسم

می‌کنیم. برای این کار، طول هر نقطه روی نمودار تابع $y = \sin x$ روی بازه $[0, 2\pi]$ را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم. سپس عرض هر نقطه روی نمودار به دست

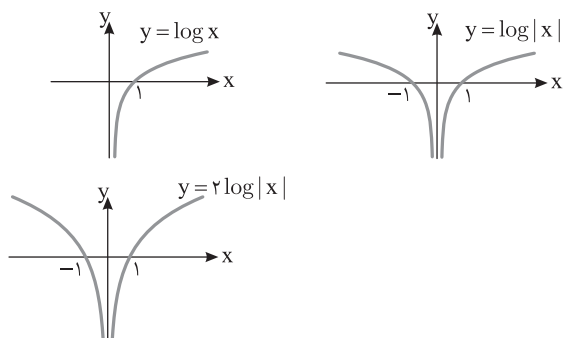
آمده را در ۲ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y = 2 \sin 2x$ روی بازه $[0, \pi]$ به دست بیاید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $y = 2 \sin 2x - 1$ روی بازه $[0, \pi]$ به دست می‌آید. در آخر قرینه

قسمت‌هایی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.

۱۸۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

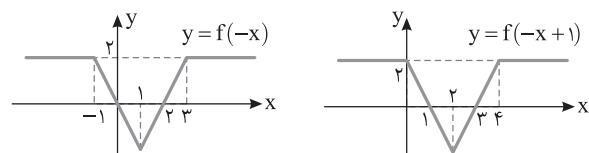
$$f(x) = \log x^2 = \log |x|^2 = 2 \log |x|$$

پس ابتدا نمودار تابع $y = \log x$ را رسم می‌کنیم و قرینه آن نسبت به محور عرض‌ها را به نمودار اضافه می‌کنیم تا نمودار تابع $y = \log |x|$ به دست آید. اکنون عرض نقاط این نمودار را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y = 2 \log |x|$ به دست آید.



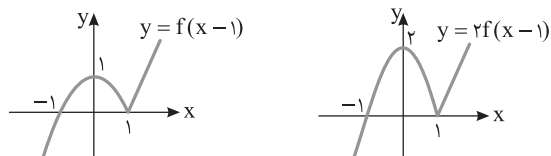
۱۹۰- گزینه ۴ اگر نمودار تابع f را نسبت به محور y قرینه کنیم، نمودار

تابع $y = f(-x)$ به دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y = f(-(x-1)) = f(-x+1)$ به دست می‌آید.



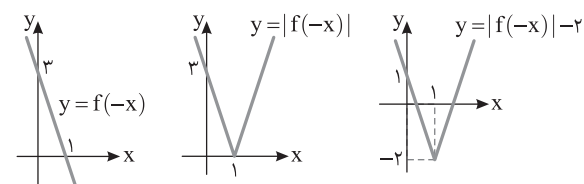
۱۹۱- گزینه ۳ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل

می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f(x-1)$ به دست بیاید. سپس عرض هر نقطه روی این نمودار را ۲ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y = 2f(x-1)$ به دست بیاید.



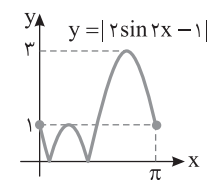
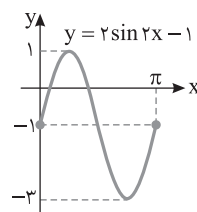
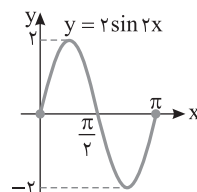
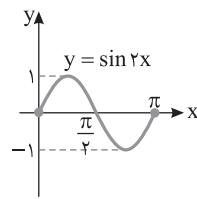
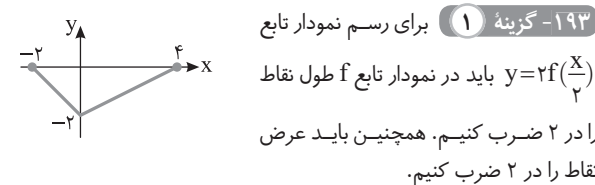
۱۹۲- گزینه ۱ ابتدا نمودار تابع $y = f(-x)$ را رسم می‌کنیم. برای این

کار، قرینه نمودار تابع f را نسبت به محور y رسم می‌کنیم. سپس نمودار تابع $y = |f(-x)|$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینه قسمتی از نمودار تابع $y = f(-x)$ را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم. در آخر، نمودار تابع $y = |f(-x)|$ را دو واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = |f(-x)| - 2$ به دست بیاید.



۱۹۳- گزینه ۱ برای رسم نمودار تابع

$y = 2f(\frac{x}{2})$ باید در نمودار تابع f طول نقاط را در ۲ ضرب کنیم. همچنین باید عرض نقاط را در ۲ ضرب کنیم.



۱۸۵- گزینه ۳ اگر نمودار تابع f را a واحد به سمت راست منتقل کنیم،

نمودار تابع $y = f(x-a)$ به دست می‌آید. اگر نمودار به دست آمده را a واحد به بالا انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x) = f(x-a) + a$ به دست می‌آید. چون نمودار اخیر از مبدأ مختصات عبور می‌کند، پس $g(0) = 0$. در نتیجه

$$g(0) = f(-a) + a = 0 \Rightarrow a^2 - 7a + 9 + a = 0$$

$$a^2 - 6a + 9 = 0 \Rightarrow (a-3)^2 = 0 \Rightarrow a = 3$$

۱۸۶- گزینه ۲ اگر طول نقاط نمودار تابع f را دو برابر کنیم، نمودار تابع

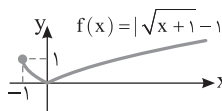
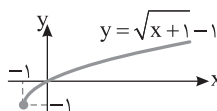
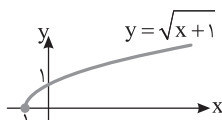
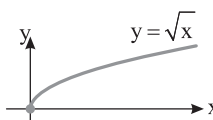
$y = f(\frac{x}{2})$ به دست می‌آید. اگر نمودار به دست آمده را یک واحد به سمت راست

منتقل کنیم، نمودار تابع $y = f(\frac{x-1}{2})$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت

به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = -f(\frac{x-1}{2})$ به دست می‌آید.

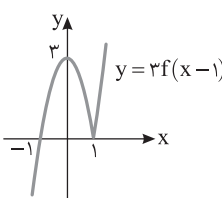
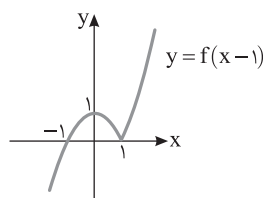
۱۸۷- گزینه ۲ ابتدا نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را یک واحد به سمت چپ

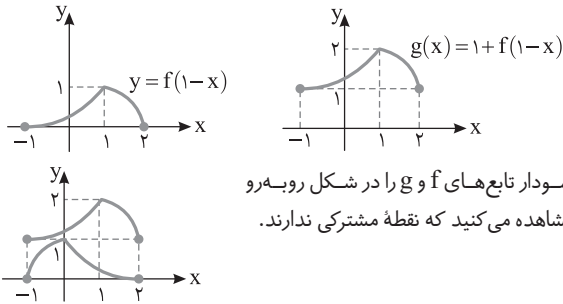
منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = \sqrt{x+1}$ به دست آید، سپس این نمودار را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = \sqrt{x+1} - 1$ به دست آید. اکنون قرینه قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع f رسم شود.



۱۸۸- گزینه ۳ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل

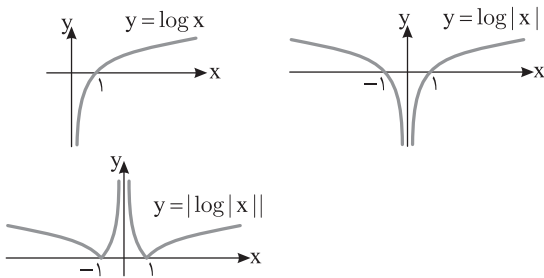
می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f(x-1)$ به دست بیاید. سپس عرض هر نقطه روی این نمودار را ۳ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y = 3f(x-1)$ به دست بیاید.





نمودار تابع‌های f و g را در شکل روبه‌رو مشاهده می‌کنید که نقطهٔ مشترکی ندارند.

۱۹۹- گزینه ۳ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم



۲۰۰- گزینه ۱ فرض کنید $h(x)=x-|x|$. در این صورت دامنهٔ تابع g

با دامنهٔ تابع f برابر است:

$$D_{f \circ h} = \{x \in D_h \mid h(x) \in D_f\} = \{x \mid -2 \leq x - |x| \leq 2\} = [-1, +\infty)$$

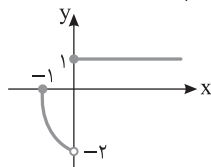
اکنون توجه کنید که $x \geq 0 \Rightarrow g(x) = -f(0)$, $x < 0 \Rightarrow g(x) = -f(2x)$

پس $g(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -f(2x) & -1 \leq x < 0 \end{cases}$. پس در بازه $[0, +\infty)$ باید نمودار

تابع $y=1$ را رسم کنیم و در بازه $[-1, 0)$ باید ابتدا طول نمودار تابع f را

نصف کنیم تا نمودار تابع $y=f(2x)$ رسم شود و سپس نمودار این قسمت را

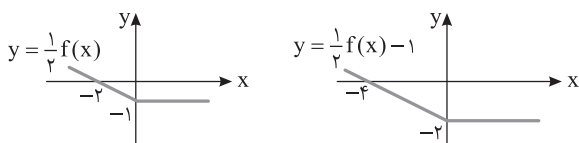
نسبت به محور x قرینه کنیم تا نمودار تابع $y=-f(2x)$ رسم شود.



۲۰۱- گزینه ۳ ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع f را نصف می‌کنیم

تا نمودار تابع $\frac{1}{2}f$ به دست بیاید. سپس این نمودار را یک واحد به پایین انتقال

می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\frac{1}{2}f(x)-1$ به دست بیاید.



توجه کنید که اگر $x < 0$ ، نمودار f خطی است که از نقطه‌های $(0, -2)$ و

$(-2, 0)$ می‌گذرد، بنابراین اگر $x < 0$ ، ضابطهٔ f به صورت $f(x) = -x - 2$

است. در نتیجه اگر $x < 0$ و $\frac{1}{2}f(x) - 1 = 0$ ، آن‌گاه $\frac{1}{2}(-x-2) - 1 = 0$ ، پس

$x = -4$. یعنی نمودار تابع $y=\frac{1}{2}f(x)-1$ محور x را در نقطه‌ای به طول

-4 قطع می‌کند.

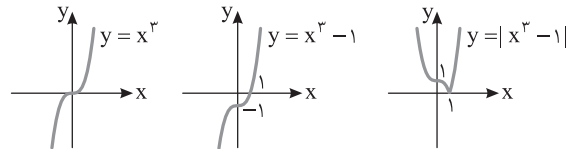
۱۹۴- گزینه ۱ ابتدا نمودار تابع $y=x^3$ را رسم می‌کنیم و آن را یک

واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=x^3-1$ به دست آید.

اکنون قسمتی از این نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این

محور قرینه می‌کنیم، سپس قسمتی را که پایین محور طول‌ها است حذف

می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|x^3-1|$ به دست آید.



۱۹۵- گزینه ۱ اگر نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست و دو واحد

به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-1)+2$ به دست می‌آید. بنابراین باید

جواب‌های معادلهٔ $f(x-1)+2=0$ را به دست آوریم:

$$-(x-1)^2 + (x-1) - 2 + 2 = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x - 1 + x - 1 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x=1, x=2$$

۱۹۶- گزینه ۱ اگر طول نقاط روی نمودار تابع f را نصف کنیم، نمودار

تابع $y=f(2x)$ رسم می‌شود و اگر عرض نقاط این نمودار را سه برابر کنیم،

نمودار تابع $y=3f(2x)$ رسم می‌شود. اگر نمودار اخیر را دو واحد به سمت

چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=3f(2(x+2))$ رسم می‌شود. پس اکنون

نمودار تابع $y=3f(2x+4)$ به دست آمده است که اگر آن را نسبت به محور

عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=3f(-2x+4)$ به دست می‌آید.

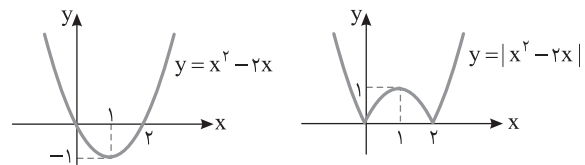
۱۹۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f(x) = |x||x-2| = |x(x-2)| = |x^2-2x|$$

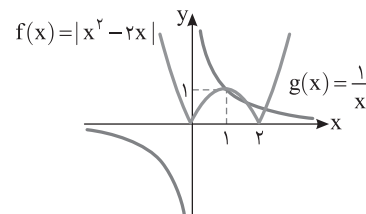
بنابراین، ابتدا نمودار تابع $y=x^2-2x$ را رسم می‌کنیم. سپس، قرینهٔ قسمتی

از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی

را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.



مطابق شکل زیر، نمودار توابع f و g در سه نقطه متقاطع‌اند.



۱۹۸- گزینه ۴ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا

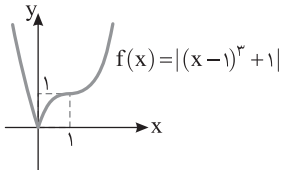
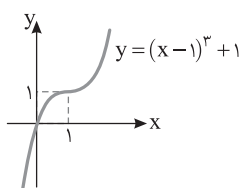
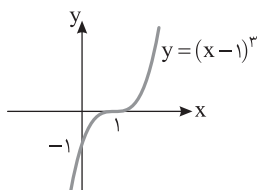
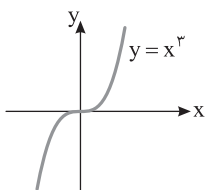
نمودار تابع $y=f(1+x)$ رسم شود. سپس نمودار این تابع را نسبت به محور

عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(1-x)$ رسم شود. در آخر نمودار حاصل

را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $g(x)=1+f(1-x)$ رسم شود.



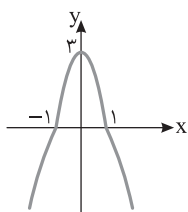
بنابراین کافی است نمودار تابع $y=x^3$ را یک واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا منتقل کنیم. سپس قسمتی از نمودار را که زیر محور x است نسبت به این محور قرینه کنیم و در آخر قسمتی را که زیر محور x است حذف کنیم.



۲۰۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$g(x) = -2f(x) + |f(x)| = \begin{cases} -2f(x) + f(x) & f(x) \geq 0 \\ -2f(x) + (-f(x)) & f(x) < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -f(x) & f(x) \geq 0 \\ -3f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

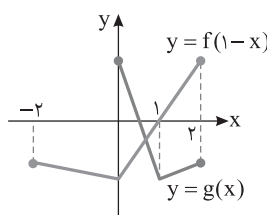
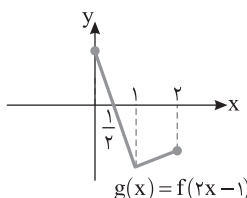
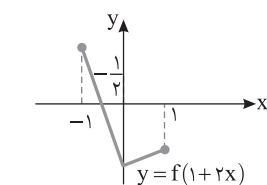
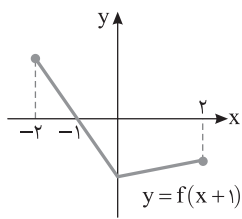
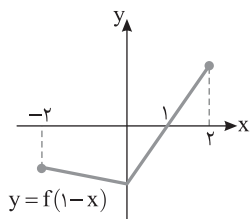


بنابراین کافی است در جاهایی که مقدار f منفی است، یعنی در بازه $(-1, 1)$ ، عرض نقاط روی

نمودار f را ۳ برابر کنیم و نمودار را نسبت به محور طولها قرینه کنیم، در بقیه جاها نمودار g قرینه نمودار f نسبت به محور طولها است.

۲۰۹- گزینه ۱ اگر نمودار تابع $y=f(1-x)$ را نسبت به محور عرضها

قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(1+x)$ به دست می آید و اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=f(1+2x)$ به دست می آید. اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(1+2(x-1))=f(2x-1)$ به دست می آید.

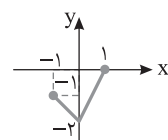


با توجه به شکل مقابل نمودار توابع $y=g(x)$ و $y=f(1-x)$ یک نقطه برخورد دارند.

۲۰۲- گزینه ۴ اگر نمودار تابع f را نسبت به محور عرضها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به دست می آید و اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(-(x-1))$ به دست می آید. پس نمودار نهایی نمودار تابع $y=f(-x+1)$ است.

۲۰۳- گزینه ۴ برای رسم نمودار تابع $y=-\frac{1}{2}f(2x)$ باید در نمودار

تابع f طول نقاط را بر ۲ تقسیم کنیم و عرض نقاط را در $-\frac{1}{2}$ ضرب کنیم.



بنابراین نمودار در راستای محور طولها منقبض می شود و در راستای محور عرضها علاوه بر اینکه منقبض می شود، نسبت به محور طولها قرینه هم می شود.

۲۰۴- گزینه ۴ توجه کنید که اگر نمودار تابع f را a واحد به سمت راست

منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-a)$ به دست می آید و اگر نمودار به دست آمده را a واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $g(x)=f(x-a)+a$ به دست می آید. این نمودار باید از مبدأ مختصات عبور کند، پس $g(0)=0$ و در نتیجه

$$f(-a)+a=0 \text{ اگر } f(x)=-x^2+3x-2 \text{ آن گاه}$$

$$f(-a)+a=0 \Rightarrow -a^2-3a-2+a=0 \Rightarrow a^2+2a+2=0$$

$$\text{اگر } f(x)=x^2+1 \text{ آن گاه}$$

$$f(-a)+a=0 \Rightarrow a^2+1+a=0 \Rightarrow a^2+a+1=0$$

$$\text{اگر } f(x)=-x^2-1 \text{ آن گاه}$$

$$f(-a)+a=0 \Rightarrow -a^2-1+a=0 \Rightarrow a^2-a+1=0$$

معادله های بالا جواب ندارند. پس گزینه های (۱)، (۲) و (۳) جواب نیستند.

$$\text{اگر } f(x)=x^2+5x+4 \text{ آن گاه}$$

$$f(-a)+a=0 \Rightarrow a^2-5a+4+a=0 \Rightarrow a^2-4a+4=0$$

$$(a-2)^2=0 \Rightarrow a=2$$

۲۰۵- گزینه ۲ اگر نمودار تابع $y=|x|$ را $2a^2$ واحد به سمت راست

منتقل کنیم، نمودار تابع $y=|x-2a^2|$ به دست می آید و اگر این نمودار را a^2

واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x)=|x-2a^2|-a^2$ به دست می آید. با

توجه به نمودار این تابع مساحت ناحیه مورد نظر

$$\text{برابر است با } S=\frac{1}{2}a^2(2a^2)=a^4 \text{ بنابراین}$$

$$a^4=4 \text{ پس } a=\pm\sqrt{2}$$

۲۰۶- گزینه ۱ اگر نمودار تابع $y=f(x-2)$ را یک واحد به سمت

راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-1-2)=f(x-3)$ به دست می آید.

اگر این نمودار را یک واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-3)-1$

به دست می آید. اگر نمودار به دست آمده را نسبت به محور طولها قرینه کنیم،

نمودار تابع $y=-f(x-3)+1$ به دست می آید و اگر این نمودار را نسبت به

محور عرضها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(-x-3)+1$ به دست می آید.

اکنون اگر طول نقاط روی نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع

$$y=-f(-2x-3)+1 \text{ به دست می آید.}$$

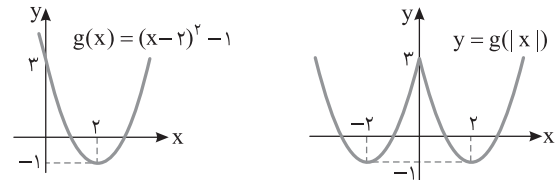
۲۰۷- گزینه ۱ ضابطه تابع را به صورت زیر می نویسیم:

$$f(x)=|x^3-3x^2+3x|=|(x-1)^3+1|$$

۲۱۰- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(x) = x^2 - 4|x| + 3 = |x|^2 - 4|x| + 3$$

پس اگر فرض کنیم $g(x) = x^2 - 4x + 3$ ، آنگاه $f(x) = g(|x|)$. به این ترتیب، کافی است نمودار $y = g(|x|)$ را رسم کنیم. برای این کار، ابتدا نمودار تابع g را رسم می‌کنیم، سپس قسمتی از این نمودار را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینه قسمتی از این نمودار را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم.

۲۱۱- گزینه ۱ توجه کنید که همواره $f(x) \leq 0$. بنابراین

$$y = |f(x)| - f(x) = -f(x) - f(x) = -2f(x)$$

برای رسم کردن نمودار $y = -2f(x)$ ، ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع f را در ۲ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y = 2f(x)$ به دست بیاید. سپس قرینه این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -2f(x)$ به دست بیاید.

۲۱۲- گزینه ۴ اگر طول نقاط نمودار تابع f را دو برابر کنیم، نمودار تابع

$y = f(\frac{x}{2})$ به دست می‌آید. اگر نمودار به دست آمده را یک واحد به چپ

منتقل کنیم، نمودار تابع $y = f(\frac{x+1}{2})$ به دست می‌آید. پس نمودار مورد نظر

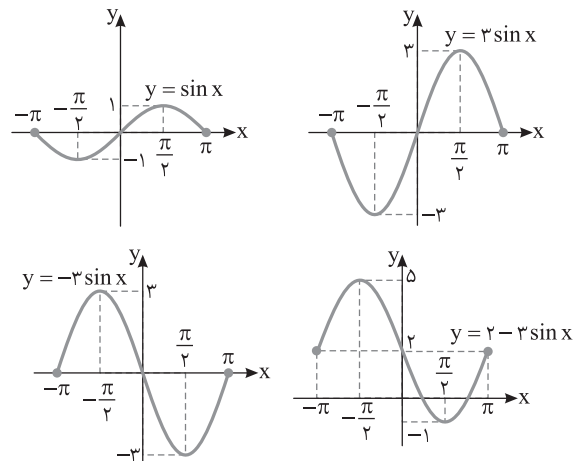
متعلق به تابع $y = f(\frac{x}{2} + \frac{1}{2})$ است.

۲۱۳- گزینه ۴ ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y = \sin x$ روی

بازه $[-\pi, \pi]$ را ۳ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y = 3 \sin x$ به دست بیاید.

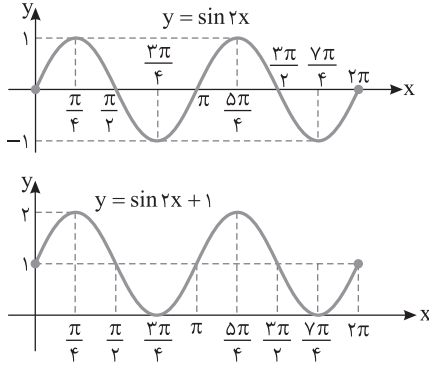
سپس، قرینه این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -3 \sin x$ به دست بیاید. در آخر، نمودار تابع $y = 2 - 3 \sin x$ را ۲ واحد

به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = 2 - 3 \sin x$ به دست بیاید.

۲۱۴- گزینه ۱ ابتدا طول هر نقطه روی نمودار تابع $y = \sin x$ روی بازه

$[0, 2\pi]$ را ضرب در $\frac{1}{2}$ می‌کنیم تا نمودار تابع $y = \sin 2x$ روی بازه $[0, \pi]$

به دست بیاید. سپس، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع f به دست بیاید.

۲۱۵- گزینه ۴ با توجه به شکل معلوم می‌شود که a عددی مثبت است.

از طرف دیگر،

$$f(0) = |a| - 2 = a - 2, \quad f(a) = -2$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow |x - a| - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - a = 2 \Rightarrow x = a + 2 \\ x - a = -2 \Rightarrow x = a - 2 \end{cases}$$

بنابراین با توجه به شکل زیر

$$S_1 = \frac{(a-2)^2}{2}, \quad S_2 = \frac{2(a+2-(a-2))}{2} = 4$$

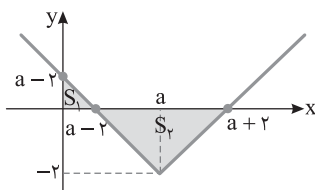
$$S_1 + S_2 = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{(a-2)^2}{2} + 4 = \frac{9}{2} \Rightarrow a^2 - 4a + 4 + 8 = 9$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow (a-3)(a-1) = 0 \Rightarrow a = 3, a = 1 \text{ (غ.ق.)}$$

اگر $a = 1$ ، آنگاه $f(x) = |x-1| - 2$ و در نتیجه $f(0) = -1$ ولی در نمودار رسم

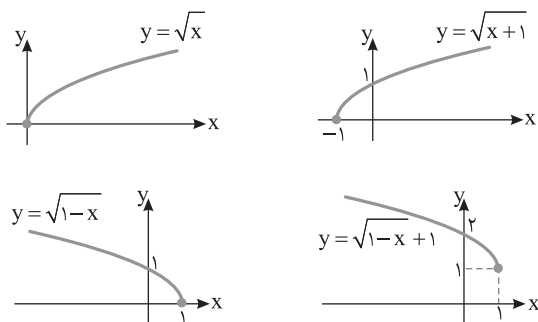
شده مقدار $f(0)$ عددی مثبت است. پس $a = 1$ قابل قبول نیست. در نتیجه

$$f(x) = |x-3| - 2 \Rightarrow f(\frac{1}{3}) = f(\frac{1}{3}) = |\frac{1}{3}-3| - 2 = \frac{2}{3}$$



۲۱۶- گزینه ۴ نمودار تابع را به شکل زیر رسم می‌کنیم. بنابراین اگر

نمودار نهایی را دو واحد به پایین ببریم، هر دو محور مختصات را قطع می‌کند.

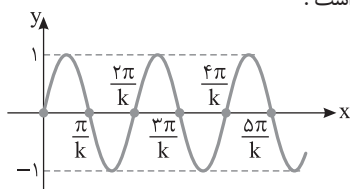


راه حل دوم در شکل (۲)، نقطه $(-4, 0)$ روی نمودار تابع است. در گزینه های (۱)، (۲) و (۳) به ازای $x = -4$ مقادیر $f(5)$ و $f(-5)$ ظاهر می شوند اما با توجه به شکل (۱)، عدد های ۵ و -۵ در دامنه تابع f نیستند، پس این سه گزینه رد می شوند.

گزینه ۳ - ۲۲۰ مطابق شکل باید $\frac{4\pi}{k} \leq \frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{k}$ تا نمودار تابع پنج بار

محور طول ها را روی بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ قطع کند. بنابراین $8 \leq k < 10$ ، پس حداقل

مقدار k برابر ۸ است.



گزینه ۳ - ۲۲۱ چون مؤلفه دوم زوج مرتب های $(9, 1)$ و $(a^2, 1)$

مساوی هستند، باید مؤلفه های اول آنها هم مساوی باشند:

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

به همین ترتیب باید مؤلفه های اول زوج مرتب های $(6, 2)$ و $(3a+b, 2)$ نیز

مساوی باشند، پس $3a+b=6$ ، بنابراین $b=6-3a$.

اگر $a=3$ ، آن گاه $b=-3$ و تابع به صورت زیر است:

$$f = \{(9, 1), (6, 2), (3, 9)\}$$

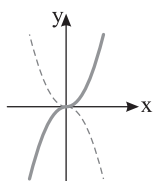
اگر $a=-3$ ، آن گاه $b=15$ و تابع به صورت زیر است:

$$f = \{(9, 1), (6, 2), (-3, -45)\}$$

پس $a-b=6$ یا $a-b=-18$.

گزینه ۳ - ۲۲۲ توابع $y=x^2$ ، $y=|x|$ و $y=[x]$ یک به یک نیستند،

چون خطی موازی محور طول ها وجود دارد که نمودار آنها را در بیش از یک نقطه قطع می کند. ولی نمودار تابع $y=x|x|$ به صورت زیر است و هر خط موازی محور طول ها آن را در یک نقطه قطع می کند. پس این تابع یک به یک است.



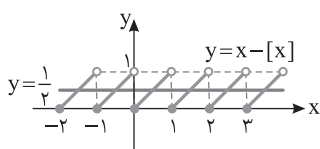
$$y = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

گزینه ۴ - ۲۲۳ توابع $y=\sqrt{x+1}$ ، $y=2x+3$ و $y=\frac{1}{x-1}$ یک به یک

هستند چون هر خط موازی محور طول ها نمودار آنها را حداکثر در یک نقطه

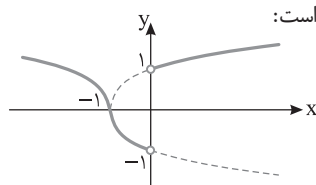
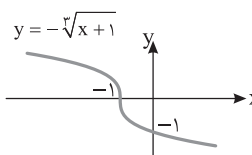
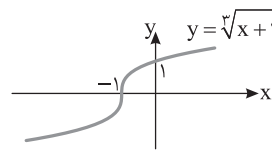
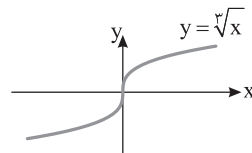
قطع می کند. تابع $y=x-[x]$ یک به یک نیست. چون مثلاً خط $y=\frac{1}{2}$

نمودار آن را در بیش از یک نقطه قطع می کند.



گزینه ۳ - ۲۱۷ ضابطه تابع به شکل $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x > 0 \\ -\sqrt[3]{x+1} & x < 0 \end{cases}$

است. اکنون توجه کنید که نمودار توابع $y=\sqrt[3]{x+1}$ و $y=-\sqrt[3]{x+1}$ به صورت زیر است:



بنابراین نمودار تابع f به شکل زیر است:

گزینه ۴ - ۲۱۸ فرض کنید $h(x) = x + |x|$. در این صورت دامنه تابع g

با دامنه تابع f برابر است:

$$D_{f \circ h} = \{x \in D_h \mid h(x) \in D_f\} = \{x \mid -2 \leq x + |x| \leq 2\} = (-\infty, 1]$$

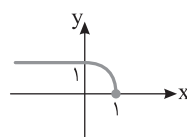
اکنون توجه کنید که

$$x \leq 0 \Rightarrow g(x) = -f(x-x) = -f(0) = 1$$

$$0 < x \leq 1 \Rightarrow g(x) = -f(x+x) = -f(2x)$$

پس $g(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ -f(2x) & 0 < x \leq 1 \end{cases}$. پس در بازه $(-\infty, 0]$ باید نمودار تابع

$y=1$ را رسم کنیم و در بازه $(0, 1]$ باید ابتدا طول نقاط نمودار تابع f واقع در



بازه $(0, 2]$ را نصف کنیم تا نمودار تابع

$y=f(2x)$ رسم شود و سپس نمودار این

قسمت را نسبت به محور x قرینه کنیم.

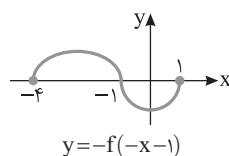
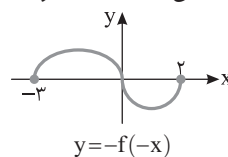
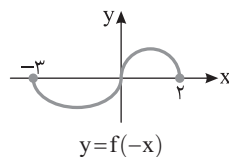
گزینه ۴ - ۲۱۹ راه حل اول اگر نمودار تابع f را نسبت به محور y قرینه

کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به دست می آید. اگر این نمودار را نسبت به

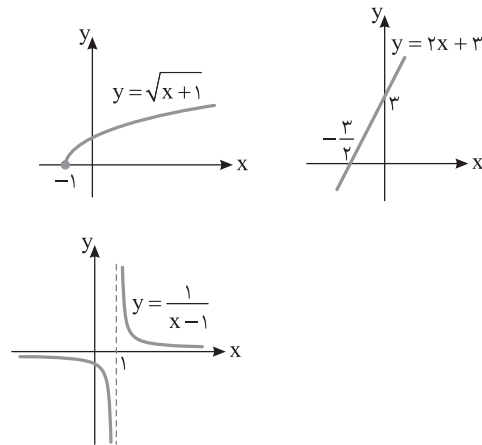
محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(-x)$ به دست می آید. اکنون اگر این

نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار تابع $y=-f(-(x+1))$

به دست می آید، که همان نمودار شکل (۲) است.



نمودار سایر توابع به صورت زیر است:

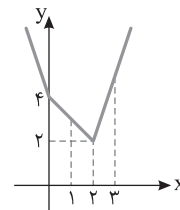


۲۲۴- گزینه ۱ تابع $f(x) = x^3 - \sqrt{x}$ یک به یک نیست. زیرا $f(0) = f(1) = 0$.

۲۲۵- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} 3x-4 & x \geq 2 \\ -x+4 & 0 \leq x \leq 2 \\ -3x+4 & x \leq 0 \end{cases}$$

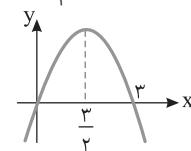
بنابراین نمودار تابع f به صورت مقابل است. این تابع روی بازه‌های $(-\infty, 2]$ و $[2, +\infty)$ یک به یک است ولی روی بازه $[1, 3]$ یک به یک نیست.



۲۲۶- گزینه ۱ شرط یک به یک نبودن این تابع $-2a-3=0$ است. پس $a = -\frac{3}{2}$. توجه کنید که در این صورت تابع f با یک تابع ثابت برابر است

$$f(x) = \frac{ax+3}{x-2} = \frac{-\frac{3}{2}x+3}{x-2} = \frac{-3x+6}{2x-4} = \frac{-3(x-2)}{2(x-2)} = -\frac{3}{2} \Rightarrow f(3) = -\frac{3}{2}$$

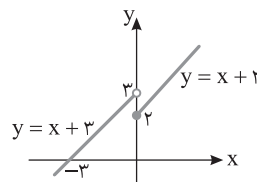
۲۲۷- گزینه ۲ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. از روی شکل معلوم است که تابع روی بازه $(-\infty, \frac{3}{2}]$ یک به یک است. اما اگر $a > \frac{3}{2}$



خطی موازی با محور طول‌ها وجود دارد که نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند. بنابراین حداکثر مقدار a برابر $\frac{3}{2}$ است.

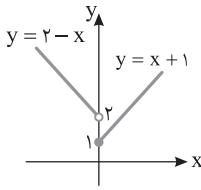
۲۲۸- گزینه ۴ نمودار تابع گزینه (۴)

به صورت روبه‌رو است. هر خط موازی محور طول‌ها نمودار تابع f را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. پس این تابع یک به یک است. نمودار تابع‌های سایر گزینه‌ها به صورت زیر است:

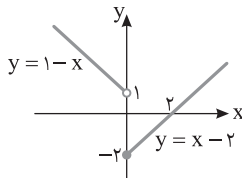


گزینه (۱)

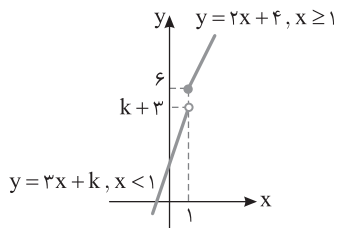
گزینه (۲)



گزینه (۳)



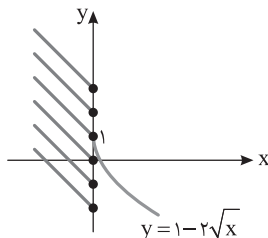
۲۲۹- گزینه ۳ راه حل اول نمودار تابع f به صورت زیر است. مطابق شکل واضح است که با شرط $k+3 \leq 6$ تابع f یک به یک است. پس $k \leq 3$.



راه حل دوم اگر $x \geq 1$ ، آن گاه تابع $g(x) = 2x+4$ یک به یک است. همچنین اگر $x < 1$ ، تابع $h(x) = 3x+k$ یک به یک است. از طرف دیگر $x \geq 1 \Rightarrow 2x \geq 2 \Rightarrow 2x+4 \geq 6 \Rightarrow g(x) \geq 6 \Rightarrow R_g = [6, +\infty)$
 $x < 1 \Rightarrow 3x < 3 \Rightarrow 3x+k < k+3 \Rightarrow h(x) < k+3 \Rightarrow R_h = (-\infty, k+3)$
 برای اینکه تابع f یک به یک باشد، باید $R_g \cap R_h = \emptyset \Rightarrow [6, +\infty) \cap (-\infty, k+3) = \emptyset \Rightarrow k+3 \leq 6 \Rightarrow k \leq 3$
 پس حداکثر مقدار ممکن k برابر ۳ است.

۲۳۰- گزینه ۱ راه حل اول نمودار تابع f به ازای مقدارهای مختلف k به شکل زیر است. برای اینکه تابع یک به یک باشد، باید کمترین مقدار عبارت $4k-x$ به ازای $x \leq 0$ از ۱ کمتر نباشد:
 $x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow 4k-x \geq 4k$

یعنی $4k \geq 1$ ، پس $k \geq \frac{1}{4}$.



راه حل دوم اگر $x > 0$ ، آن گاه تابع $g(x) = 1-2\sqrt{x}$ یک به یک است و اگر $x \leq 0$ ، آن گاه تابع $h(x) = 4k-x$ یک به یک است و
 $x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 0 \Rightarrow -2\sqrt{x} < 0 \Rightarrow 1-2\sqrt{x} < 1 \Rightarrow R_g = (-\infty, 1)$
 $x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow 4k-x \geq 4k \Rightarrow R_h = [4k, +\infty)$

برای اینکه تابع f یک به یک شود، باید $R_g \cap R_h = \emptyset$. پس

$$4k \geq 1 \Rightarrow k \geq \frac{1}{4}$$

بنابراین گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) رد می‌شوند. توجه کنید که می‌توانید ثابت کنید تابع گزینه (۱) یک‌به‌یک است. اگر $(x_1, f(x_1))$ و $(x_2, f(x_2))$ دو زوج مرتب از تابع f باشند که $f(x_1) = f(x_2)$ ، آن‌گاه

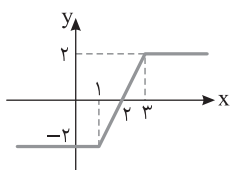
$$\begin{aligned} x_1^3 + x_1 + 1 &= x_2^3 + x_2 + 1 \Rightarrow x_1^3 - x_2^3 + x_1 - x_2 = 0 \\ (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + (x_1 - x_2) &= 0 \\ (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1) &= 0 \end{aligned} \quad (۱)$$

اکنون توجه کنید که $A = (x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 + 1 > 0$ بنابراین از معادله (۱) نتیجه می‌شود $x_1 - x_2 = 0$ ، پس $x_1 = x_2$ و تابع f یک‌به‌یک است.

۲۳۴- گزینه (۲) ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} x \geq 3 &\Rightarrow f(x) = x - 1 - x + 3 = 2 \\ 1 \leq x \leq 3 &\Rightarrow f(x) = x - 1 + x - 3 = 2x - 4 \\ x \leq 1 &\Rightarrow f(x) = -x + 1 + x - 3 = -2 \end{aligned}$$

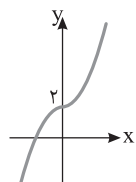
بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است و این تابع روی بازه $[1, 3]$ یک‌به‌یک است. توجه کنید که تابع f روی هر بازه $[c, d]$ که $c \geq 1$ و $d \leq 3$ نیز یک‌به‌یک است. پس حداکثر مقدار ممکن برای b برابر ۳ و حداقل مقدار ممکن برای a برابر ۱ است و در نتیجه حداکثر مقدار ممکن برای $b - a$ برابر ۲ است.



۲۳۵- گزینه (۳) تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad - bc \neq 0$ یک‌به‌یک

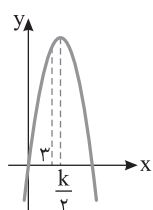
است و اگر $ad - bc = 0$ ، آن‌گاه تابع f برابر یک تابع ثابت است که یک‌به‌یک نیست. پس اگر $k^3 - 4k = 0$ ، آن‌گاه تابع f یک‌به‌یک نیست. از معادله اخیر به دست می‌آید $k = 0$ و $k = \pm 2$. پس به ازای سه مقدار مختلف k تابع f یک‌به‌یک نیست.

۲۳۶- گزینه (۲) نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & x < 0 \\ x^2 + 2 & x \geq 0 \end{cases}$ به شکل زیر



است. واضح است که تابع یک‌به‌یک است. بقیه گزینه‌ها را می‌توانید با رسم نمودار یا آوردن مثال نقض، رد کنید.

۲۳۷- گزینه (۳) نمودار تابع $y = -x^2 + kx$



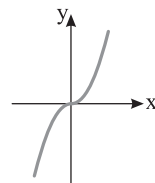
به شکل مقابل است. اگر $x = 3$ قبل از طول رأس سهمی قرار گیرد یا بر آن منطبق شود، تابع در بازه $(-\infty, 3]$ یک‌به‌یک است. بنابراین

$$3 \leq \frac{k}{2} \Rightarrow k \geq 6$$

۲۳۱- گزینه (۳) در گزینه (۱)، $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ پس تابع

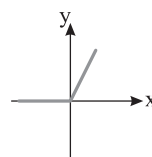
یک‌به‌یک نیست. در گزینه (۲)، $f(x) = |x|$ ، $x \neq 0$ پس تابع یک‌به‌یک نیست. در گزینه (۴) مثلاً $f(1) = f(-1)$ پس تابع یک‌به‌یک نیست. در گزینه (۳) نمودار تابع به صورت زیر است و تابع یک‌به‌یک است.

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

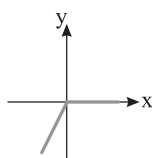


۲۳۲- گزینه (۳) نمودار تابع‌ها به شکل زیر است:

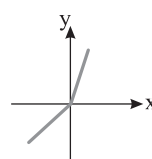
تابع یک‌به‌یک نیست $f(x) = x + |x| = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$ گزینه (۱)



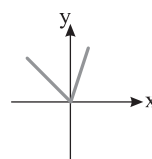
تابع یک‌به‌یک نیست $f(x) = x - |x| = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$ گزینه (۲)



تابع یک‌به‌یک است $f(x) = 2x + |x| = \begin{cases} x & x < 0 \\ 3x & x \geq 0 \end{cases}$ گزینه (۳)



تابع یک‌به‌یک نیست $f(x) = x + 2|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 3x & x \geq 0 \end{cases}$ گزینه (۴)

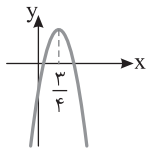


۲۳۳- گزینه (۱) در تابع گزینه (۲)، $f(0) = f(1) = f(-1) = 0$.

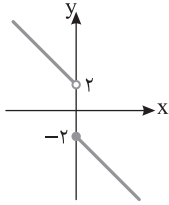
در تابع گزینه (۳)، اگر $x \leq 0$ ، آن‌گاه $f(x) = 0$.

در تابع گزینه (۴)، $f(0) = f(2) = 0$.

۲۴۴- گزینه ۱ در تابع نمایشی $y=a^x$ اگر $a>1$ ، آن‌گاه تابع صعودی است. بنابراین



۲۴۵- گزینه ۱ طول رأس سهمی به معادله $f(x)=-4x^2+6x-1$ برابر است با $-\frac{b}{2a}=\frac{3}{4}$. از روی نمودار این سهمی معلوم است که تابع f روی بازه $(\frac{3}{4}, +\infty)$ اکیداً نزولی است.



۲۴۶- گزینه ۴ نمودار تابع گزینه (۴) به صورت زیر است و این تابع نزولی است.

$$f(x)=\begin{cases} -x-2 & x\geq 0 \\ -x+2 & x<0 \end{cases}$$

با رسم نمودار توابع گزینه‌های دیگر می‌توانید نزولی بودن آن‌ها را رد کنید.

۲۴۷- گزینه ۱ شرط صعودی بودن تابع f آن است که همه مقادیر تابع $y_1=2x+1$ کوچک‌تر از یا مساوی با کمترین مقدار تابع $y_2=x+a$ باشد:

$$\begin{cases} x\geq 1 \Rightarrow x+a\geq 1+a \Rightarrow y_1\geq 1+a \\ x<1 \Rightarrow 2x+1<3 \Rightarrow y_2<3 \end{cases}$$

بنابراین $a\leq 1+3$. پس $a\geq 2$.

۲۴۸- گزینه ۲ از تعریف تابع صعودی نتیجه می‌شود $2m-1\geq m+1 \Rightarrow m\geq 2$

۲۴۹- گزینه ۲ برای پیدا کردن دامنه تابع g باید نامعادله $f(x)\geq 0$ را حل کنیم. چون $f(0)=0$ و اگر $x<0$ ، آن‌گاه $f(x)<f(0)$ ، پس باید نامعادله $f(x)\geq f(0)$ را حل کنیم که با توجه به اکیداً صعودی بودن تابع f نتیجه می‌شود $x\geq 0$. پس $D_g=[0, +\infty)$.

۲۵۰- گزینه ۱ مجموع دو تابع صعودی با دامنه $\mathbb{R}$ ، تابعی صعودی با دامنه $\mathbb{R}$ است. بنابراین مجموع دو تابع $f+g$ و $f-g$ ، یعنی تابع $2f$ صعودی است، پس تابع f نیز صعودی است.

۲۵۱- گزینه ۴ تابع f اکیداً صعودی، تابع g اکیداً نزولی، تابع h ثابت (هم صعودی و هم نزولی) و تابع k غیریکنواست.

۲۵۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\begin{aligned} -2 < 0 < 1 &\Rightarrow 4x \leq x^2 + 3 \leq 7x - x^2 \\ 4x \leq x^2 + 3 &\Rightarrow x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \text{ یا } x \geq 3 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x^2 + 3 \leq 7x - x^2 &\Rightarrow 2x^2 - 7x + 3 \leq 0 \\ (2x-1)(x-3) &\leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 3 \end{aligned} \quad (2)$$

با توجه به شرایط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود اگر $x=3$ یا $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ، آن‌گاه تابع f صعودی است. پس به ازای مقادیر صحیح ۳ و ۱ تابع f صعودی است.

۲۵۳- گزینه ۳ تابع $-f$ روی بازه‌هایی اکیداً صعودی است که تابع f روی آن‌ها اکیداً نزولی است. تابع f روی بازه $[-3, 1]$ اکیداً نزولی است، بنابراین تابع $-f$ روی این بازه اکیداً صعودی است.

۲۳۸- گزینه ۴ راه حل اول توجه کنید که اگر $f(x_1)=f(x_2)$ ، آن‌گاه

$$\begin{aligned} x_1 - k\sqrt{x_1} &= x_2 - k\sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 - x_2 - k(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) = 0 \\ (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) - k(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) &= 0 \\ (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - k) &= 0 \end{aligned}$$

اگر $k < 0$ ، آن‌گاه $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - k \neq 0$ و در نتیجه $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

پس تابع یک‌به‌یک است.

به ازای $k=0$ هم تابع به صورت $f(x)=x$ است و یک‌به‌یک است. اما اگر $k>0$ ، آن‌گاه از $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - k = 0$ می‌توان مقدار x_1 را برحسب x_2 به دست آورد و از $f(x_1)=f(x_2)$ لزوماً $x_1=x_2$ نتیجه نمی‌شود. پس در این حالت تابع یک‌به‌یک نیست.

راه حل دوم (این راه حل پس از مطالعه فصل کاربرد مشتق قابل استفاده است)، تابع f روی بازه $[0, +\infty)$ پیوسته است. پس در صورتی که یک‌به‌یک باشد،

$$f'(x) = 1 - \frac{k}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - k}{2\sqrt{x}}$$

اگر $k \leq 0$ ، آن‌گاه $f'(x) > 0$ و در نتیجه تابع f اکیداً صعودی است و یک‌به‌یک است. اگر $k > 0$ ، آن‌گاه تابع f روی بازه $[0, \frac{k^2}{4}]$ اکیداً نزولی و روی بازه $[\frac{k^2}{4}, +\infty)$ اکیداً صعودی است، پس روی بازه $[0, +\infty)$ غیریکنواست.

۲۳۹- گزینه ۱ معادله را به صورت $f(x^2+1)=f(x^3+3)$ می‌نویسیم.

چون f تابعی یک‌به‌یک است، پس

$$x^3+3=x^2+1 \Rightarrow x^3-x^2+2=0$$

واضح است که $x=-1$ یکی از جواب‌های معادله است، به کمک تقسیم عبارت x^3-x^2+2 را تجزیه می‌کنیم:

$$x^3-x^2+2=(x+1)(x^2-2x+2)=0$$

معادله $x^2-2x+2=0$ جواب ندارد. پس $x=-1$ تنها جواب معادله است.

۲۴۰- گزینه ۲ تابع $g(x)=f(|x|)$ قطعاً یک‌به‌یک نیست، زیرا

$$x=a \Rightarrow g(a)=f(|a|), \quad x=-a \Rightarrow g(-a)=f(|-a|)=f(|a|)$$

بنابراین $g(-a)=g(a)$ و در نتیجه این تابع یک‌به‌یک نیست.

۲۴۱- گزینه ۲ تابع گزینه (۱) صعودی نیست، زیرا $1 < 2$ ، اما $f(1) > f(2)$.

تابع گزینه (۲) صعودی است، زیرا $2 < 4 < 5$ و $f(2)=f(4)<f(5)$.

تابع گزینه (۳) صعودی نیست، زیرا $2 < 3$ ، اما $f(2)>f(3)$.

تابع گزینه (۴) هم صعودی نیست، زیرا $-2 < 3$ ، اما $f(-2)>f(3)$.

۲۴۲- گزینه ۲ چون تابع f اکیداً صعودی است، پس

$$1 < 2 < 3 \Rightarrow f(1) < f(2) < f(3) \Rightarrow a^2 - 1 < a + 1 < 3a - 1$$

$$a^2 - 1 < a + 1 \Rightarrow (a+1)(a-2) < 0 \Rightarrow -1 < a < 2 \quad (1)$$

$$a + 1 < 3a - 1 \Rightarrow a > 1 \quad (2)$$

اشتراک جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) می‌شود $1 < a < 2$.

۲۴۳- گزینه ۲ با توجه به شکل سؤال تابع f روی بازه $[-2, 3]$ و هر بازه $[a, b]$ که $-2 \leq a < b \leq 3$ صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار $b-a$

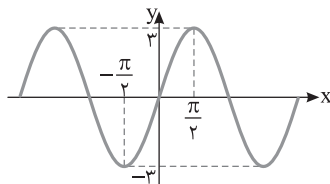
برابر ۵ است.

۲۶۳- گزینه ۲ اگر نمودار تابع $y = \sin x$ را رسم کنیم و عرض هر

نقطه آن را سه برابر کنیم، نمودار تابع $f(x) = 3 \sin x$ به دست می آید که به صورت زیر است. واضح است که تابع f روی بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ و هر بازه دیگر

به صورت $[-\frac{\pi}{2}, a]$ که $-\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ صعودی است. پس حداکثر مقدار a

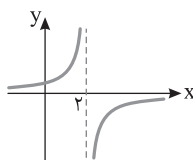
برابر $\frac{\pi}{2}$ است.



۲۶۴- گزینه ۲ ابتدا نمودار تابع $y = \frac{1}{-x}$ را دو واحد به سمت راست انتقال

می دهیم تا نمودار تابع $y = \frac{1}{-(x-2)} = \frac{1}{-x+2}$ به دست بیاید. اکنون از روی این

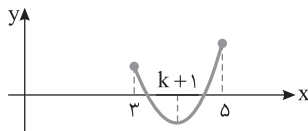
نمودار معلوم است که تابع f روی بازه $(-\infty, 2)$ و هر بازه دیگری مانند $(-\infty, a)$ که $a \leq 2$ صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار a برابر ۲ است.



۲۶۵- گزینه ۳ نمودار تابع باید به شکل زیر باشد، یعنی اگر طول رأس

سه می که $x = k+1$ است، در بازه $(3, 5)$ باشد، آن گاه تابع غیرکنوای شود. پس

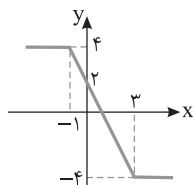
$$3 < k+1 < 5 \Rightarrow 2 < k < 4$$



۲۶۶- گزینه ۴ نمودار تابع f به صورت زیر است. از روی نمودار تابع f

معلوم است که این تابع روی بازه $[-1, 3]$ و هر بازه ای به صورت $[a, b]$ که $-1 \leq a < b \leq 3$ اکیداً نزولی است. بنابراین، بیشترین مقدار $b-a$ وقتی به

دست می آید که $a = -1$ و $b = 3$ ، که در این صورت $b-a = 4$.



۲۶۷- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

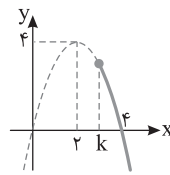
$$f(x) = kx + |x-1| = \begin{cases} (k+1)x-1 & x \geq 1 \\ (k-1)x+1 & x < 1 \end{cases}$$

برای اینکه تابع f صعودی باشد، باید هر دو خط موجود در ضابطه تابع صعودی باشند، یعنی شیب نامنفی داشته باشند. پس

$$\begin{cases} k+1 \geq 0 \\ k-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow k \geq 1$$

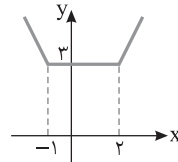
۲۵۴- گزینه ۳ باید مبنای لگاریتم بین صفر و ۱ باشد. پس

$$0 < k-1 < 1 \Rightarrow 1 < k < 2$$



۲۵۵- گزینه ۲ نمودار تابع f به شکل مقابل

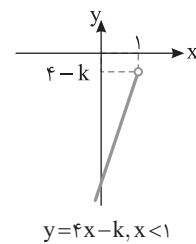
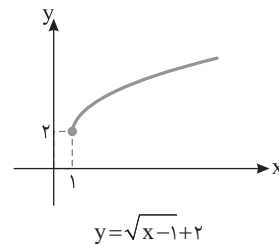
است. برای اینکه تابع نزولی باشد، باید دامنه آن زیرمجموعه بازه $[2, +\infty)$ باشد، بنابراین $k \geq 2$.



۲۵۶- گزینه ۳ نمودار تابع f به صورت

مقابل است. چون تابع f روی بازه $[a, b]$ هم صعودی است هم نزولی، پس روی این بازه تابعی ثابت است. از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازه $[-1, 2]$ تابعی ثابت است، همین طور روی هر بازه ای مانند $[a, b]$ که $-1 \leq a < b \leq 2$. بنابراین بیشترین مقدار ممکن $b-a$ وقتی به دست می آید که $a = -1$ و $b = 2$ ، که در این صورت $b-a = 3$.

۲۵۷- گزینه ۳ توابع $y = \sqrt{x-1}+2$ و $y = 4x-k$ صعودی هستند.



مطابق شکل های بالا کافی است $4-k$ بیشتر از ۲ نباشد تا تابع f صعودی باشد. پس $4-k \leq 2$ ، در نتیجه $k \geq 2$.

۲۵۸- گزینه ۳ با توجه به تعریف تابع اکیداً نزولی،

$$a^2 - 3 < 2a \Rightarrow a^2 - 2a - 3 < 0 \Rightarrow (a+1)(a-3) < 0 \Rightarrow -1 < a < 3$$

۲۵۹- گزینه ۱ دامنه تابع g از حل نامعادله زیر به دست می آید:

$$f(x-2) - 2 \geq 0 \Rightarrow f(x-2) \geq 2 \Rightarrow f(x-2) \geq f(1)$$

با توجه به اکیداً نزولی بودن تابع f نتیجه می شود

$$x-2 \leq 1 \Rightarrow x \leq 3$$

بنابراین $D_g = (-\infty, 3]$.

۲۶۰- گزینه ۲ توابع $y = x$ و $y = f(x)$ صعودی اند، پس مجموع

آنها صعودی است. یعنی تابع $y = x + f(x)$ صعودی است.

۲۶۱- گزینه ۳ از تعریف تابع صعودی نتیجه می شود

$$1 < 2 < 3 \Rightarrow f(1) \leq f(2) \leq f(3) \Rightarrow m-1 \leq 2m \leq m+3$$

$$m-1 \leq 2m \Rightarrow m \geq -1, \quad 2m \leq m+3 \Rightarrow m \leq 3$$

بنابراین $-1 \leq m \leq 3$ و در نتیجه m می تواند پنج مقدار صحیح ۳، ۲، ۱، ۰ و -۱ را داشته باشد.

۲۶۲- گزینه ۴ تابعی که هم صعودی است و هم نزولی، تابعی ثابت

است. پس f تابع ثابت است. بنابراین

$$f(1) = f(2) = f(3), \quad a-2 = 3a+6 = 4a-b, \quad a = -4, \quad b = -10$$

در نتیجه $a+b = -14$.

۲۷۶- گزینه ۱ دامنه تابع f^{-1} همان برد تابع f است. پس برد تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = (x+1)^2 - 1$$

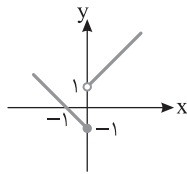
$$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x+1 \leq 3$$

$$0 \leq (x+1)^2 \leq 9 \Rightarrow -1 \leq (x+1)^2 - 1 \leq 8 \Rightarrow -1 \leq f(x) \leq 8$$

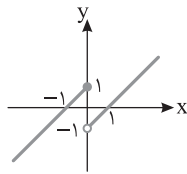
$$\text{بنابراین } D_{f^{-1}} = R_f = [-1, 8]$$

۲۷۷- گزینه ۴ نمودار تابع‌ها به شکل زیر است:

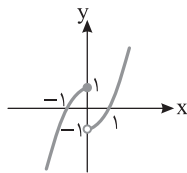
گزینه (۲)



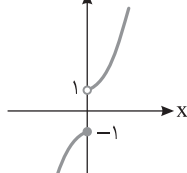
گزینه (۱)



گزینه (۳)



گزینه (۴)



با توجه به نمودارها واضح است که تابع گزینه (۴) وارون‌پذیر است.

۲۷۸- گزینه ۳ اگر نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم

نمودار تابع f^{-1} به دست می‌آید. بنابراین باید تابع وارون تابع $f(x) = 3x - 4$ را به دست آوریم.

$$y = 3x - 4 \Rightarrow y + 4 = 3x \Rightarrow x = \frac{y+4}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}$$

بنابراین معادله خط جدید $y = \frac{x+4}{3}$ است.

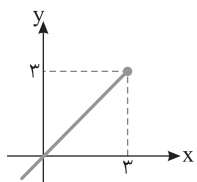
۲۷۹- گزینه ۳ راه حل اول از تساوی $y = \sqrt{x-1} + 2$ مقدار x را

برحسب y به دست می‌آوریم:

$$y - 2 = \sqrt{x-1} \Rightarrow (y-2)^2 = x-1 \Rightarrow x = (y-2)^2 + 1 \Rightarrow x = y^2 - 4y + 5$$

$$\text{بنابراین } f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5$$

راه حل دوم توجه کنید که $f(1) = 2$ ، پس $f^{-1}(2) = 1$ که فقط در تابع گزینه (۳) صدق می‌کند.



۲۸۰- گزینه ۲ برای هر $x \in D_f$

تساوی $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ برقرار است. پس

تابع g به صورت $g(x) = x$ ، $x \leq 3$ است و

نمودار آن به شکل روبه‌رو است.

۲۸۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f = \{1, 2, 3, 5\}$ و

$$f^{-1} = \{(3, 1), (4, 2), (2, 3), (1, 5)\} \Rightarrow D_{f^{-1}} = \{3, 4, 2, 1\}$$

۲۶۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که تابع f اکیداً صعودی است، پس

$$x > 6 \Rightarrow f(x) > f(6) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$x < 6 \Rightarrow f(x) < f(6) \Rightarrow f(x) < 0$$

برای به دست آوردن دامنه تابع g باید نامعادله $\frac{4-x^2}{f(x)} \geq 0$ را حل کنیم. با

توجه به جدول تعیین علامت زیر، جواب نامعادله به صورت زیر است:

$$x \in (-\infty, -2] \cup [2, 6)$$

بنابراین در دامنه تابع g چهار عدد طبیعی قرار دارد.

x	$-\infty$	-2	2	6	$+\infty$
$4-x^2$	-	0	+	0	-
$f(x)$	-	-	-	-	+
$\frac{4-x^2}{f(x)}$	+	0	-	0	-

۲۶۹- گزینه ۲ تابع $y = \sqrt{x}$ صعودی است، پس تابع $y = \sqrt{x} + 1$

نیز صعودی است. همچنین مقادیر تابع $y = \sqrt{x} + 1$ همواره مثبت هستند.

بنابراین تابع $y = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ نزولی است.

۲۷۰- گزینه ۳ تابع‌های $y = x^3$ و $y = x$ صعودی‌اند، پس مجموع

آنها یعنی $y = x^3 + x$ صعودی است. توابع سه گزینه دیگر غیریکنوا هستند.

۲۷۱- گزینه ۳ ابتدا از تساوی $(f^{-1} \circ g^{-1})(a) = -1$ مقدار a را پیدا

می‌کنیم:

$$f^{-1}(g^{-1}(a)) = -1 \Rightarrow f(-1) = g^{-1}(a)$$

$$4 = g^{-1}(a) \Rightarrow g(4) = a \Rightarrow a = -2$$

بنابراین مقدار $f^{-1}(-2)$ را می‌خواهیم که با توجه به تساوی $f(3) = -2$ نتیجه می‌گیریم $f^{-1}(-2) = 3$.

۲۷۲- گزینه ۴ تابع f^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$f^{-1} = \{(2, -1), (5, 3), (3, -2), (-1, 5)\}$$

در نتیجه $g \circ f^{-1} = \{(2, 4), (5, 0)\}$.

۲۷۳- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $g(3) = 2$ ، پس $g^{-1}(2) = 3$. بنابراین

$$f^{-1}(a) + g^{-1}(2) = 6 \Rightarrow f^{-1}(a) + 3 = 6$$

$$f^{-1}(a) = 3 \Rightarrow f(3) = a \Rightarrow a = 2$$

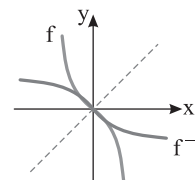
در نتیجه $g(a) = g(2) = 4$.

۲۷۴- گزینه ۴ چون نمودار تابع f از نقطه $(9, 11)$ عبور می‌کند، نمودار

تابع f^{-1} از نقطه $(11, 9)$ عبور می‌کند.

۲۷۵- گزینه ۳ نمودار تابع f^{-1} قرینه نمودار تابع f نسبت به خط

$y=x$ است که به شکل زیر است:



بنابراین

$$\begin{aligned} D_{f \circ f^{-1}} &= D_f \cap D_{f^{-1}} = \{1, 2, 3\} \\ (f \circ f^{-1})(1) &= f(1) \circ f^{-1}(1) = 3 \times 5 = 15 \\ (f \circ f^{-1})(2) &= f(2) \circ f^{-1}(2) = 4 \times 3 = 12 \\ (f \circ f^{-1})(3) &= f(3) \circ f^{-1}(3) = 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

 بنابراین تابع $f \circ f^{-1}$ به صورت زیر است

$$f \circ f^{-1} = \{(1, 15), (2, 12), (3, 2)\}$$

۲۸۲- گزینه ۲ فرض کنید $f^{-1}(3) = a$. پس $f(a) = 3$ و در نتیجه

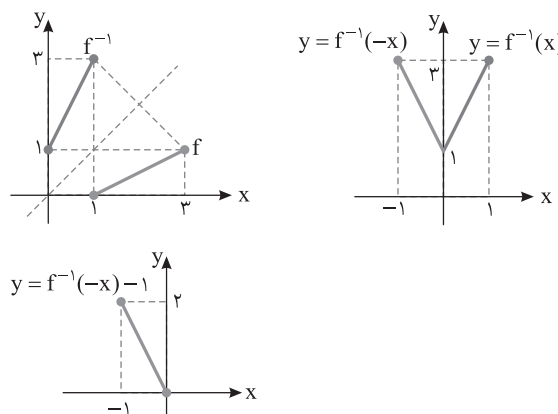
$$\frac{a}{a-1} = 3 \Rightarrow a = 3a - 3 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

 یعنی $f^{-1}(3) = \frac{3}{2}$
۲۸۳- گزینه ۴ چون نمودار تابع f از نقطه $(8, 9)$ عبور می‌کند، نمودار

 تابع f^{-1} از نقطه $(9, 8)$ عبور می‌کند:

$$f(8) = 9 \Rightarrow \sqrt[3]{8-1} = 9 \Rightarrow f^{-1}(9) = 8$$

۲۸۴- گزینه ۴ ابتدا قرینه نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ رسم

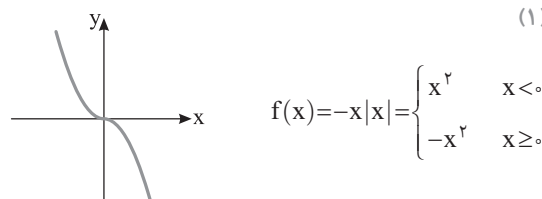
 می‌کنیم تا نمودار تابع f^{-1} به دست بیاید. سپس قرینه نمودار تابع f^{-1} را نسبت به محور y پیدا می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f^{-1}(-x)$ به دست بیاید. در آخر نمودار تابع $y = f^{-1}(-x) - 1$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f^{-1}(-x) - 1$ به دست بیاید.

۲۸۵- گزینه ۳ برد تابع f^{-1} برابر دامنه تابع f است. پس دامنه تابع f را به دست می‌آوریم:

$$4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(4-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4, \quad x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

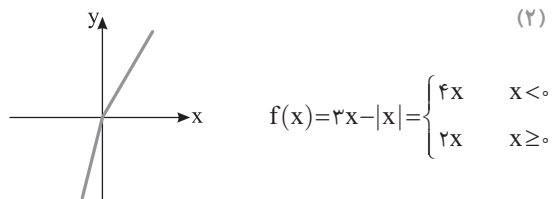
 پس $R_{f^{-1}} = D_f = [0, 4] \setminus \{1\}$. بنابراین اعداد صحیح صفر، ۲، ۳ و ۴ در برد تابع f^{-1} قرار دارند.

۲۸۶- گزینه ۴ نمودار تابع‌های چهار گزینه به صورت زیر است:

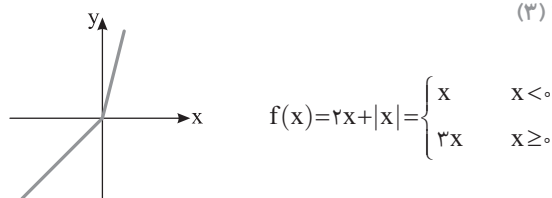
گزینه (۱)



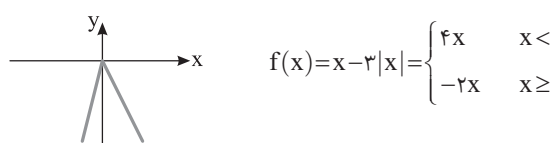
گزینه (۲)



گزینه (۳)



گزینه (۴)


 با توجه به نمودارها، تابع $f(x) = x - 3|x|$ وارون پذیر نیست.

۲۸۷- گزینه ۱ ابتدا $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم

$$y = a - 3x \Rightarrow 3x = a - y \Rightarrow x = \frac{a-y}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{a-x}{3}$$

 بنابراین باید معادله $x^2 = \frac{a-x}{3}$ فقط یک جواب داشته باشد

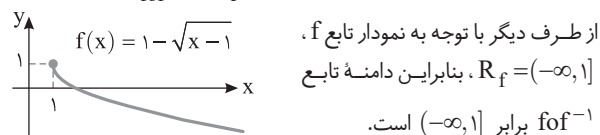
$$3x^2 + x - a = 0, \quad \Delta = 1 + 12a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{12}$$

۲۸۸- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 = (x-2)^2 - 2, \quad D_f = [2, +\infty)$$

 بنابراین f تابعی یک به یک است. توجه کنید که

$$\begin{aligned} y = (x-2)^2 - 2 &\Rightarrow (x-2)^2 = y+2 \Rightarrow |x-2| = \sqrt{y+2} \\ \xrightarrow{x \geq 2} x-2 &= \sqrt{y+2} \Rightarrow x = \sqrt{y+2} + 2 \end{aligned}$$

 بنابراین $f^{-1}(x) = \sqrt{x+2} + 2$
۲۸۹- گزینه ۳ توجه کنید که $D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f$

 از طرف دیگر با توجه به نمودار تابع f ، $R_f = (-\infty, 1]$ ، بنابراین دامنه تابع $f \circ f^{-1}$ برابر $(-\infty, 1]$ است.

۲۹۰- گزینه ۴ راه حل اول توجه کنید که

$$(f^{-1} \circ g)^{-1}(x) = \frac{x-2}{2} \Rightarrow (g^{-1} \circ f)(x) = \frac{x-2}{2} \Rightarrow g^{-1}(f(x)) = \frac{x-2}{2}$$

$$g^{-1}(x-1) = \frac{x-2}{2} \xrightarrow{(x \rightarrow x+1)} g^{-1}(x) = \frac{x-1}{2} \Rightarrow g(x) = 2x+1$$

 راه حل دوم اگر تابع‌های وارون دو طرف تساوی $(f^{-1} \circ g)^{-1}(x) = \frac{x-2}{2}$ را

پیدا کنیم به دست می‌آید

$$(f^{-1} \circ g)(x) = 2x+2 \quad (1)$$

 از طرف دیگر، $f^{-1}(x) = x+1$ ، پس از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$f^{-1}(g(x)) = 2x+2 \Rightarrow g(x)+1 = 2x+2 \Rightarrow g(x) = 2x+1$$

۲۹۵- گزینه ۱ چون نمودار تابع‌های f و f^{-1} در نقطه $(1, 2)$ برخورد

$$(1, 2) \in f \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow \sqrt{a+b} = 2 \quad \text{می‌کند، پس}$$

$$(1, 2) \in f^{-1} \Rightarrow (2, 1) \in f \Rightarrow f(2) = 1 \Rightarrow \sqrt{2a+b} = 1$$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow a=-3, b=7 \quad \text{در نتیجه}$$

$$ab = -21 \quad \text{بنابراین}$$

۲۹۶- گزینه ۲ چون f تابعی خطی است، فرض می‌کنیم $f(x) = ax + b$

$$f(1) = 3 \Rightarrow a + b = 3 \quad (1) \quad \text{در این صورت}$$

$$f^{-1}(11) = 3 \Rightarrow f(3) = 11 \Rightarrow 3a + b = 11 \quad (2)$$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم، به دست می‌آید $a = 4$ و $b = -1$.
بنابراین $f(x) = 4x - 1$ و در نتیجه $f(-3) = -13$.

۲۹۷- گزینه ۲ ابتدا $f(x)$ را به دست می‌آوریم که وارون تابع $f^{-1}(x)$

$$y = 2x + k \Rightarrow 2x = y - k \Rightarrow x = \frac{y-k}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{x-k}{2} \quad \text{است:}$$

$$\text{بنابراین معادله } x^2 = \frac{x-k}{2} \text{ نباید جواب داشته باشد}$$

$$2x^2 = x - k \Rightarrow 2x^2 - x + k = 0, \quad \Delta < 0 \Rightarrow 1 - 8k < 0 \Rightarrow k > \frac{1}{8}$$

۲۹۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x) = (x+1)^3 - 1$. بنابراین تابع f

یک به یک است. از طرف دیگر،

$$y = (x+1)^3 - 1 \Rightarrow (x+1)^3 = y+1 \Rightarrow x+1 = \sqrt[3]{y+1} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y+1} - 1$$

$$\text{در نتیجه } f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$$

۲۹۹- گزینه ۱ توجه کنید که $f^{-1}(x) = \frac{x+a}{x-2}$. بنابراین

$$\text{پس } f^{-1}(3) = \frac{3+a}{3-2} = a+3$$

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(3) = \frac{9}{4} \Rightarrow f^{-1}(f^{-1}(3)) = \frac{9}{4}$$

$$f^{-1}(a+3) = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{(a+3)+a}{a+3-2} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{2a+3}{a+1} = \frac{9}{4} \Rightarrow 4a+12 = 9a+9 \Rightarrow a=3$$

۳۰۰- گزینه ۱ توجه کنید که $D_{f^{-1} \circ f} = D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

۳۰۱- گزینه ۲ ابتدا به تابع‌های f^{-1} و g^{-1} توجه کنید:

$$f^{-1} = \{(2, 1), (3, -1), (-2, 2), (1, 4)\}$$

$$g^{-1} = \{(2, 3), (3, 4), (4, 2), (1, 1)\}$$

$$D_{f^{-1} \circ g^{-1}} = D_{f^{-1}} \cap D_{g^{-1}} = \{2, 3, -2, 1\} \cap \{2, 3, 4, 1\} = \{2, 3, 1\}$$

اکنون می‌توانیم تابع $f^{-1} \circ g^{-1}$ را به دست آوریم:

$$f^{-1} \circ g^{-1} = \{(2, 1-3), (3, -1-4), (1, 4-1)\}$$

$$= \{(2, -2), (3, -5), (1, 3)\}$$

مجموع عضوهای دامنه و برد تابع $f^{-1} \circ g^{-1}$ برابر است با

$$2 + (-2) + 3 + (-5) + 1 + 3 = 2$$

۲۹۱- گزینه ۱ ابتدا f^{-1} و g^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, -2), (1, 4)\}$$

$$g^{-1} = \{(2, 2), (1, 3), (-1, 4), (-2, 1)\}$$

اکنون $g^{-1} \circ f^{-1}$ را به دست می‌آوریم:

$$2 \xrightarrow{f^{-1}} 1 \xrightarrow{g^{-1}} 3$$

$$3 \xrightarrow{f^{-1}} 2 \xrightarrow{g^{-1}} 2$$

$$4 \xrightarrow{f^{-1}} -2 \xrightarrow{g^{-1}} 1$$

$$1 \xrightarrow{f^{-1}} 4 \xrightarrow{g^{-1}} \text{تعریف نشده}$$

$$g^{-1} \circ f^{-1} = \{(2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

توجه کنید که می‌توان ابتدا fog را حساب کرد، سپس با استفاده از تساوی $g^{-1} \circ f^{-1} = (\text{fog})^{-1}$ مسئله را حل کرد.

۲۹۲- گزینه ۱ اگر نقطه‌های (y, a) و $(-1, b)$ روی نمودار تابع وارون

تابع f باشند، نقطه‌های (a, y) و $(b, -1)$ روی تابع f هستند. اما از طرف دیگر نمی‌دانیم a و b بزرگ‌تر از یک هستند یا کوچک‌تر از آن. پس با فرض $x < 1$ به دست می‌آید:

$$(x, y) \text{ ق.ق.} \Rightarrow x+3 = -1 \Rightarrow x = -4, \quad (x, y) \text{ غ.ق.} \Rightarrow x+3 = 7 \Rightarrow x = 4$$

همچنین با فرض $x \geq 1$,

$$(x, y) \text{ غ.ق.} \Rightarrow 3x+1 = -1 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}, \quad (x, y) \text{ ق.ق.} \Rightarrow 3x+1 = 7 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$f(-4) = -1 \Rightarrow f^{-1}(-1) = -4, \quad f(2) = 7 \Rightarrow f^{-1}(7) = 2$$

$$\text{بنابراین } f^{-1}(7) + f^{-1}(-1) = 2 - 4 = -2$$

۲۹۳- گزینه ۴ نمودار تابع f^{-1} از نقطه $(3, 2)$ عبور می‌کند، پس

نمودار تابع f از نقطه $(2, 3)$ عبور می‌کند. بنابراین

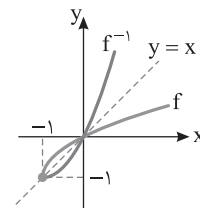
$$f(2) = 3 \Rightarrow 2 + 2 + a = 3 \Rightarrow a = -7$$

در نتیجه

$$f(x) = x^3 + x - 7 \Rightarrow f(3) = 27 + 3 - 7 = 23$$

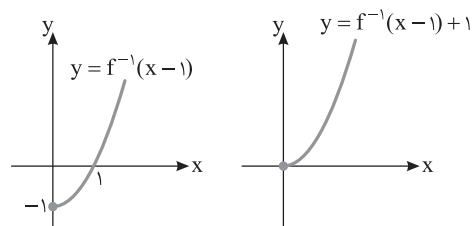
۲۹۴- گزینه ۲ نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$

نسبت به خط $y = x$ است.



اگر نمودار $y = f^{-1}(x)$ را یک واحد به راست و یک واحد به بالا منتقل کنیم،

نمودار تابع $y = f^{-1}(x-1) + 1$ رسم می‌شود.



$$x < -2 \Rightarrow y = -2x - 3 \Rightarrow x = \frac{-y-3}{2} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = \frac{-x-3}{2} \\ \frac{-y-3}{2} < -2 \Rightarrow y > 1 \end{cases}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{2} & x < 1 \\ \frac{-x-3}{2} & x > 1 \end{cases}$$

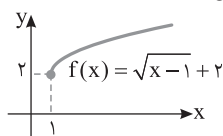
بنابراین

۳۰۹- گزینه ۲) برای هر $x \in R_f$ تساوی $(f \circ f^{-1})(x) = x$ برقرار

است. با توجه به نمودار تابع f ، $R_f = [2, +\infty)$ ، پس برای هر $x \geq 2$ ،

$$g(x) = x + 3 \text{ بنابراین}$$

$$x \geq 2 \Rightarrow x + 3 \geq 5 \Rightarrow g(x) \geq 5 \Rightarrow R_g = [5, +\infty)$$



۳۱۰- گزینه ۲) راه حل اول ضابطه تابع وارون تابع های f و g را پیدا

می کنیم که به صورت زیر هستند:

$$f^{-1}(x) = (x-1)^3 + 2, \quad g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}(\sqrt[3]{x+1})$$

بنابراین

$$= (\sqrt[3]{x+1}-1)^3 + 2 = x+2$$

راه حل دوم توجه کنید که $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = (g \circ f)^{-1}(x)$ از طرف دیگر،

$$(g \circ f)(x) = g(1 + \sqrt{x-1}) = (1 + \sqrt{x-1})^3 = x-2$$

$$\text{و } (g \circ f)^{-1}(x) = x+2 \text{ بنابراین } (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = x+2$$

۳۱۱- گزینه ۲) توجه کنید که $(f \circ g^{-1})(a) = a$

بنابراین $f(g^{-1}(a)) = a$ چون $f(c) = a$ ، پس $g^{-1}(a) = c$ و در نتیجه

$$g(c) = a \text{ به همین ترتیب}$$

$$(f \circ g^{-1})(b) = c \Rightarrow f(g^{-1}(b)) = c \xrightarrow{f(b)=c}$$

$$g^{-1}(b) = b \Rightarrow g(b) = b$$

$$(f \circ g^{-1})(c) = d \Rightarrow f(g^{-1}(c)) = d \xrightarrow{f(d)=d}$$

$$g^{-1}(c) = d \Rightarrow g(d) = c$$

$$(f \circ g^{-1})(d) = b \Rightarrow f(g^{-1}(d)) = b \xrightarrow{f(a)=b}$$

$$g^{-1}(d) = a \Rightarrow g(a) = d$$

$$\text{پس } g = \{(a, d), (b, b), (c, a), (d, c)\}$$

۳۱۲- گزینه ۲) فرض می کنیم $f^{-1}(1) = a$ در این صورت

$$f(a) = 1 \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{a+2} + 2 = 1 \Rightarrow a + \sqrt{a+2} + 2 = 1$$

$$\sqrt{a+2} = -a-1 \quad (*) \Rightarrow a+2 = a^2 + 2a + 1$$

$$a^2 + a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad a = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

از تساوی (*) واضح است که $-a-1 \geq 0$ ، پس $a \leq -1$ بنابراین

قابل قبول نیست.

۳۰۲- گزینه ۴) توجه کنید که $f(9) = \sqrt[3]{9-1} + 2 = 2+2=4$ پس

$$f^{-1}(4) = 9 \text{ و در نتیجه } f(9) + f^{-1}(4) = 13$$

۳۰۳- گزینه ۴) چون نمودار تابع f از نقطه $(8, 13)$ عبور می کند،

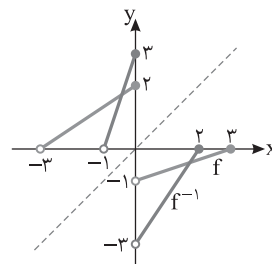
نمودار تابع f^{-1} از نقطه $(13, 8)$ می گذرد:

$$f(8) = 2 \times 8 + \sqrt[3]{8-5} = 13 \Rightarrow f^{-1}(13) = 8$$

۳۰۴- گزینه ۲) نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ قرینه می کنیم تا

نمودار تابع f^{-1} رسم شود. بنابر شکل زیر، نمودار تابع های f و f^{-1} در دو

نقطه متقاطع اند.



۳۰۵- گزینه ۳) چون $(1, 2)$ نقطه برخورد نمودار تابع های f و f^{-1}

است، پس $(1, 2) \in f$ و $(1, 2) \in f^{-1}$ ، یعنی $(2, 1) \in f$ ، بنابراین

$$\begin{cases} f(1) = 2 \Rightarrow a\sqrt{b-3} = 2 \\ f(2) = 1 \Rightarrow a\sqrt{b-6} = 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{b-3} = 2\sqrt{b-6} \Rightarrow b-3 = 4b-24 \Rightarrow b = 7$$

پس $a=1$ و در نتیجه $a+b=8$.

۳۰۶- گزینه ۳) در تساوی $f(2x-1) = g(3x) - 1$ قرار می دهیم $x=2$:

$$f(3) = g(6) - 1 \Rightarrow g(6) = f(3) + 1$$

از طرف دیگر، $f^{-1}(2) = 3$ پس $f(3) = 2$ در نتیجه $g(6) = 3$.

۳۰۷- گزینه ۲) راه حل اول ابتدا ضابطه تابع f را به صورت

$$y = (\sqrt{x+1})^2 - 1 \text{ می نویسیم. حالا } x \text{ را بر حسب } y \text{ پیدا می کنیم:}$$

$$y+1 = (\sqrt{x+1})^2 \Rightarrow \sqrt{y+1} = \sqrt{x+1}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y+1} - 1 \Rightarrow x = (\sqrt{y+1} - 1)^2$$

$$\text{بنابراین } f^{-1}(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^2 = x+1+1-2\sqrt{x+1} = x+2-2\sqrt{x+1}$$

$$f(1) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 1$$

راه حل دوم

در بین گزینه های داده شده فقط اگر در عبارت داده شده در گزینه (۲)، به جای

x قرار دهیم ۳، حاصل ۱ می شود.

۳۰۸- گزینه ۱) ابتدا توجه کنید که

$$\begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow f(x) = x+2-x+1-2x = -2x+3 \\ -2 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = x+2+x-1-2x = 1 \\ x \leq -2 \Rightarrow f(x) = -x-2+x-1-2x = -2x-3 \end{cases}$$

بنابراین تابع f با دامنه $\mathbb{R} - [-2, 1]$ وارون پذیر است. توجه کنید که تابع f روی

$\mathbb{R} - [a, b]$ که در آن $a \leq -2$ و $b \geq 1$ هم وارون پذیر است ولی برای اینکه

$b-a$ کمترین مقدار باشد دامنه را $\mathbb{R} - [-2, 1]$ در نظر می گیریم.

$$x > 1 \Rightarrow y = -2x+3 \Rightarrow x = \frac{3-y}{2} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = \frac{3-x}{2} \\ \frac{3-y}{2} > 1 \Rightarrow y < 1 \end{cases}$$

$$x < 1 \Rightarrow 2x + 1 < 3 \Rightarrow g(x) < 3$$

$$g(x) = 2x + 1 \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

$$x \geq 1 \Rightarrow 4x - 1 \geq 3 \Rightarrow h(x) \geq 3$$

$$h(x) = 4x - 1 \Rightarrow h^{-1}(x) = \frac{x+1}{4}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & x < 3 \\ \frac{x+1}{4} & x \geq 3 \end{cases} \quad \text{بنابراین}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(0)=1$ و $f(2)=7$ پس $f^{-1}(1)=0$ و

$f^{-1}(7)=2$. این شرایط فقط در تابع گزینۀ (۱) وجود دارد.

۳۱۹- گزینۀ (۴) راه‌حل اول چون f و f^{-1} تابع‌هایی برابرند، پس دامنه

آن‌ها برابر است. اکنون توجه کنید که

$$f(x) = \frac{(a+1)x + 4}{3x - 1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 4}{3x - (a+1)} \Rightarrow D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{a+1}{3} \right\}$$

بنابراین $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{a+1}{3} \right\}$ پس $\frac{a+1}{3} = \frac{1}{3}$ ، در نتیجه $a=0$.

توجه کنید که اگر $a=0$ ، آن‌گاه $f(x) = f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3x-1}$.

راه‌حل دوم در تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $f = f^{-1}$ ، آن‌گاه $a=-d$ ، بنابراین

در اینجا $a+1 = -(-1)$ ، در نتیجه $a=0$.

۳۲۰- گزینۀ (۳) برای هر $x \in D_{f^{-1}} = R_f$ تساوی $(f \circ f^{-1})(x) = x$

برقرار است. برد تابع f را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} + 2 \geq 2 \Rightarrow f(x) \geq 2 \Rightarrow R_f = [2, +\infty)$$

پس برای هر $x \geq 2$ ، $g(x) = 2x$ ، بنابراین

$$x \geq 2 \Rightarrow 2x \geq 4 \Rightarrow g(x) \geq 4 \Rightarrow R_g = [4, +\infty)$$

۳۲۱- گزینۀ (۱) با توجه به زوج مرتب‌های $(1, 0)$ و $(4m^3 - m, 1)$

باید تساوی $4m^3 - m = 0$ برقرار باشد. پس

$$m(4m^2 - 1) = 0 \Rightarrow m = 0, m = \pm \frac{1}{2}$$

به ازای $m=0$ رابطه به شکل زیر درمی‌آید که تابع نیست.

$$f = \{(1, 0), (0, 2), (0, 4)\}$$

به ازای $m = \frac{1}{2}$ رابطه به شکل زیر درمی‌آید که تابع نیست.

$$f = \{(1, 0), (1, 2), (0, 4), (2, 2)\}$$

به ازای $m = -\frac{1}{2}$ رابطه به شکل زیر درمی‌آید که تابع است.

$$f = \{(1, 0), (-1, 2), (0, 4), (-2, 2)\}$$

پس فقط به ازای $m = -\frac{1}{2}$ رابطه تابع است.

۳۱۳- گزینۀ (۴) فرض می‌کنیم طول نقطه برخورد a باشد. در این صورت

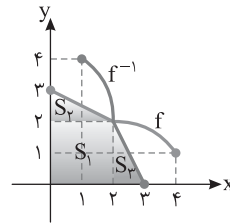
عرض آن $a+1$ است. پس نقطه $(a, a+1)$ روی نمودار تابع f^{-1} است. در

نتیجه نقطه $(a+1, a)$ روی نمودار تابع f است. پس

$$f(a+1) = a \Rightarrow (a+1)^3 + 2(a+1) + 9 = a$$

$$a^3 + 3a^2 + 4a + 12 = 0 \Rightarrow (a+3)(a^2 + 4) = 0 \Rightarrow a = -3$$

پس عرض نقطه برخورد $a+1 = -2$ است.



۳۱۴- گزینۀ (۲) نمودار تابع f^{-1}

قرینه نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$

است که در شکل رسم شده است. بنابراین

مساحت قسمت رنگی مورد نظر است که

از دو مثلث و یک مربع تشکیل شده است:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 \Rightarrow S = 2 \times 2 + \frac{1 \times 2}{2} + \frac{1 \times 2}{2} = 6$$

۳۱۵- گزینۀ (۲) اگر (m, n) نقطه برخورد نمودار تابع‌های f و f^{-1}

باشد، نتیجه می‌شود $f(m) = n$ و $f(n) = m$ ، بنابراین

$$f(-1) = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - a + b = \frac{1}{3}, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \Rightarrow -\frac{1}{3} + \frac{a}{3} + b = -1$$

در نتیجه

$$\begin{cases} -a + b = -\frac{2}{3} \\ a + 3b = -\frac{26}{9} \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{2}{9}, b = -\frac{8}{9}$$

پس $a + b = -\frac{10}{9}$.

۳۱۶- گزینۀ (۳) توجه کنید که

$$(g^{-1} \circ f)(-1) = g^{-1}(f(-1)) = g^{-1}(3)$$

اکنون فرض کنید $g^{-1}(3) = s$. در این صورت $g(s) = 3$ و اگر در تساوی

$$g(x) = 1 - f(x+1)$$

قرار دهیم $x=s$ ، به دست می‌آید

$$\begin{cases} g(s) = 1 - f(s+1) \\ g(s) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(s+1) = -2$$

بنابراین، چون تابع f یک‌به‌یک است، $s+1=4$ ، پس $s=3$. یعنی $g^{-1}(3)=3$.

۳۱۷- گزینۀ (۳) از تساوی $y = \frac{2x+a}{x+b}$ مقدار x را بر حسب y به دست می‌آوریم:

$$yx + by = 2x + a \Rightarrow (y-2)x = a - by \Rightarrow x = \frac{a-by}{y-2}$$

بنابراین $f^{-1}(x) = \frac{a-bx}{x-2}$ و در نتیجه $a=-4$ ، $b=-3$ و $ab=12$.

۳۱۸- گزینۀ (۱) راه‌حل اول توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} 3x + (-(x-1)) & x < 1 \\ 3x + (x-1) & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 2x + 1 & x < 1 \\ 4x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

فرض کنید برای $x < 1$ ، $g(x) = 2x + 1$ و برای $x \geq 1$ ، $h(x) = 4x - 1$

بنابراین

۳۲۷- گزینه ۲ ابتدا $(f \circ f)(x)$ را به دست می آوریم:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = a(ax^2 + b)^2 + b$$

$$= a(a^2x^4 + 2abx^2 + b^2) + b = a^3x^4 + 2a^2bx^2 + ab^2 + b$$

بنابراین تساوی زیر به ازای هر مقدار x برقرار است:

$$a^3x^4 + 2a^2bx^2 + ab^2 + b = 27x^4 - 18x^2 + 2$$

پس باید تساوی های زیر درست باشند:

$$a^3 = 27, \quad 2a^2b = -18, \quad ab^2 + b = 2$$

از $a^3 = 27$ نتیجه می شود $a = 3$ ، در نتیجه از $2a^2b = -18$ و $ab^2 + b = 2$ به دست می آید که یعنی $b = -1$ و $a = 3$ مقادیر b در تساوی $ab^2 + b = 2$ هم صدق می کنند. پس $a + b = 2$.

۳۲۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = 3x + |k||x| = \begin{cases} (3+|k|)x & x \geq 0 \\ (3-|k|)x & x < 0 \end{cases}$$

برای اینکه تابع f صعودی باشد، باید خطوط $y = (3+|k|)x$ و $y = (3-|k|)x$ شیب نامنفی داشته باشند. شیب خط $y = (3-|k|)x$ همواره مثبت است، پس باید شیب خط $y = (3+|k|)x$ همواره نامنفی باشد.

$$3 - |k| \geq 0 \Rightarrow |k| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq k \leq 3$$

۳۲۹- گزینه ۳ اگر (m, n) نقطه برخورد نمودار تابع های f و f^{-1} باشد، نتیجه می شود $f(m) = n$ و $f(n) = m$. بنابراین

$$f(-1) = \frac{1}{3} \Rightarrow -a + \frac{2}{9} + b = \frac{1}{3}, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \Rightarrow \frac{a}{27} - \frac{2}{27} + b = -1$$

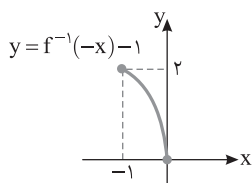
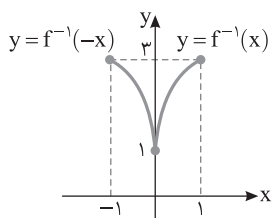
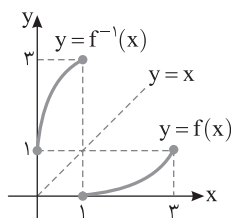
در نتیجه

$$\begin{cases} -a + b = \frac{1}{9} \\ a + 27b = -25 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = -\frac{8}{9}$$

$$\text{پس } a + b = -\frac{17}{9}$$

۳۳۰- گزینه ۴ ابتدا قرینه نمودار تابع f را نسبت به خط $y = x$ رسم

می کنیم تا نمودار تابع f^{-1} به دست بیاید. سپس قرینه نمودار تابع f^{-1} را نسبت به محور y پیدا می کنیم تا نمودار تابع $y = f^{-1}(-x)$ به دست بیاید. در آخر نمودار تابع $y = f^{-1}(-x)$ را یک واحد به پایین منتقل می کنیم تا نمودار تابع $y = f^{-1}(-x) - 1$ به دست بیاید.



۳۲۲- گزینه ۴ راه حل اول اگر f تابع ثابت c باشد، آن گاه

$$f(x) = \frac{(a+2)x+3}{2x-3} = c$$

بنابراین $(a+2)x+3 = 2cx-3c$. در نتیجه $a+2=2c$ و $3=-3c$. به این ترتیب $c=-1$ و $a=2c-2=-4$.

راه حل دوم f تابعی ثابت است، پس $f(1)=f(2)$. بنابراین

$$\frac{a+2+3}{2-3} = \frac{2(a+2)+3}{4-3} \Rightarrow \frac{a+5}{-1} = 2a+7 \Rightarrow a = -4$$

راه حل سوم مشتق تابع ثابت برابر صفر است. پس

$$f'(x) = \frac{(a+2)(2x-3) - 2((a+2)x+3)}{(2x-3)^2} = \frac{-3(a+2)-6}{(2x-3)^2}$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} -3(a+2)-6=0 \Rightarrow a=-4$$

۳۲۳- گزینه ۱ اولاً توجه کنید که شرط $x \geq 0$ برای دامنه تابع وجود دارد. عددهای داده شده در گزینه ها بزرگ تر از صفر هستند. پس ریشه های مخرج را به دست می آوریم:

$$x-1-\sqrt{x}=0 \Rightarrow x-1=\sqrt{x} \xrightarrow{(x-1) \geq 0} x^2-2x+1=x$$

$$x^2-3x+1=0 \Rightarrow x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad (\text{غ.ق.})$$

بنابراین دامنه تابع $\{x \mid x \geq 0\} - \left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$ است.

۳۲۴- گزینه ۱ توجه کنید که $D_f = \{x \mid 16 - |x^2 - 9| \geq 0\}$ ، یعنی

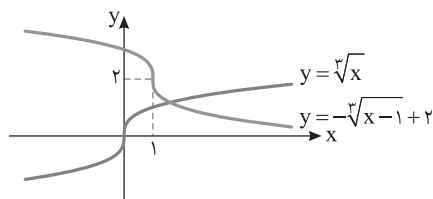
$$D_f = \{x \mid |x^2 - 9| \leq 16\}$$

$$-16 \leq x^2 - 9 \leq 16 \Rightarrow -7 \leq x^2 \leq 25 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 25 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5$$

پس $D_f = [-5, 5]$ و در نتیجه $a = -5$ و $b = 5$ و $b - a = 10$.

۳۲۵- گزینه ۱ اگر نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x}$ را یک واحد به راست و دو

واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x-1}-2$ به دست می آید. اگر این نمودار را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = -\sqrt[3]{x-1}+2$ به دست می آید. دو نمودار مطابق شکل زیر در یک نقطه متقاطع اند.



۳۲۶- گزینه ۱ توجه کنید که $D_f = \{x \mid x^2 - 4x \geq 0\}$ ، یعنی

$$D_f = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty) \quad \text{و} \quad D_g = \{-1, 0, 1, 3, 4\}$$

$$D_{fg+f} = D_g \cap D_f = \{-1, 0, 4\}$$

بنابراین a باید -1 یا صفر یا 4 باشد:

$$(fg+f)(-1) = 2g(-1) + f(-1) = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$(fg+f)(0) = 2g(0) + f(0) = 2 + 0 = 2$$

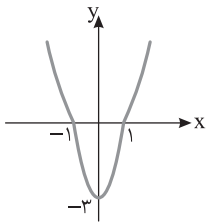
$$(fg+f)(4) = 2g(4) + f(4) = 6 + 0 = 6$$

بنابراین $a = 4$ و در نتیجه $f(-4) = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

۳۳۶- گزینه ۴ توجه کنید که

$$g(x) = -2f(x) - |f(x)| = \begin{cases} -2f(x) - f(x) & f(x) \geq 0 \\ -2f(x) - (-f(x)) & f(x) < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -3f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$



بنابراین کافی است در جاهایی که مقدار f نامنفی است،

در بازه $[-1, 1]$ عرض نقاط روی نمودار f را

۳ برابر کنیم و نمودار را نسبت به محور

طول‌ها قرینه کنیم، در بقیه جاها نمودار g

قرینه نمودار f نسبت به محور طول‌ها است.

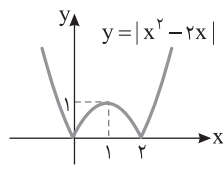
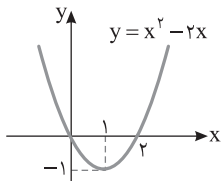
۳۳۷- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f(x) = |x| |x-2| = |x(x-2)| = |x^2 - 2x|$$

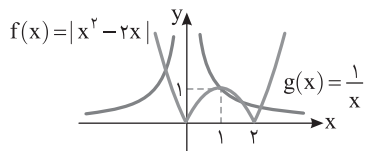
بنابراین، ابتدا نمودار تابع $y = x^2 - 2x$ را رسم می‌کنیم. سپس، قرینه قسمتی

از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی

را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.



مطابق شکل زیر، نمودار توابع f و g در چهار نقطه متقاطع‌اند.



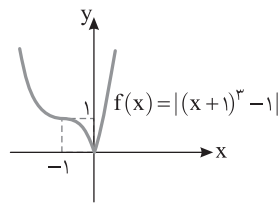
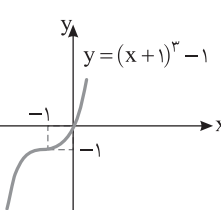
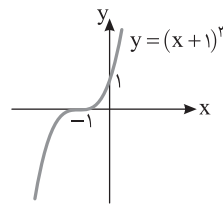
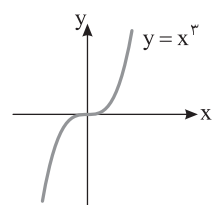
۳۳۸- گزینه ۱ ضابطه تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = |x^3 + 3x^2 + 3x| = |(x+1)^3 - 1|$$

بنابراین کافی است نمودار تابع $y = x^3$ را یک واحد به سمت چپ و یک واحد به

سمت پایین منتقل کنیم، سپس قرینه قسمتی از نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار

دارد نسبت به این محور رسم کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف کنیم.



۳۳۱- گزینه ۲ اگر ضابطه داده شده متعلق به یک تابع باشد، باید در

$x=2$ مقدار $f(x)$ منحصر به فرد باشد، یعنی مقدار $f(2)$ در ضابطه اول با

مقدار آن در ضابطه دوم برابر باشد. اگر $f(x) = \sqrt{x+2} + a$ ، آن‌گاه

$$f(2) = 2 + a, \quad f(x) = ax^3 + 16, \quad \text{آن‌گاه } f(2) = 8a + 16$$

$$2 + a = 8a + 16 \Rightarrow a = -2$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} - 2 & x \geq 2 \\ -2x^3 + 16 & x \leq 2 \end{cases} \text{ پس}$$

$$f(a) = f(-2) = -2(-2)^3 + 16 = 32$$

۳۳۲- گزینه ۳ ضابطه تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = 2mx - mx^2 + x^2 + 4x + m = (1-m)x^2 + (2m+4)x + m$$

ضابطه توابع خطی به شکل $y = ax + b$ است، یعنی یک چندجمله‌ای درجه اول

است. بنابراین باید $m=1$ تا ضابطه تابع یک چندجمله‌ای درجه اول شود، یعنی

$$m=1 \Rightarrow f(x) = 6x + 1$$

$$f(m) = f(1) = 7$$

۳۳۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \left[\frac{x+1}{x}\right] + \left[-\frac{1}{x}\right] = \left[1 + \frac{1}{x}\right] + \left[-\frac{1}{x}\right] = 1 + \left[\frac{1}{x}\right] + \left[-\frac{1}{x}\right]$$

$$f(-x) = 1 + \left[-\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{1}{-x}\right] = 1 + \left[-\frac{1}{x}\right] + \left[-\frac{1}{x}\right] = f(x)$$

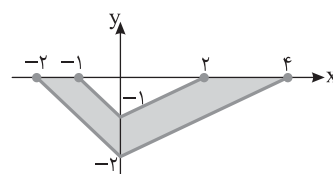
۳۳۴- گزینه ۱ برای رسم نمودار تابع $y = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$ باید در نمودار تابع f

طول نقاط را در ۲ ضرب کنیم تا نمودار تابع $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$ به دست آید. همچنین

در نمودار به دست آمده باید عرض نقاط را در ۲ ضرب کنیم تا نمودار تابع

$y = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$ به دست آید. بنابراین مساحت قسمت رنگی در شکل زیر

$$\text{مورد سؤال است که برابر است با } \frac{1}{2} \times 6 \times 2 - \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{9}{2}$$

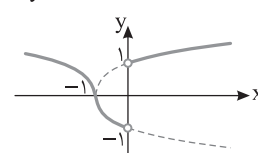
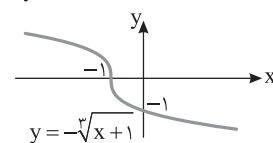
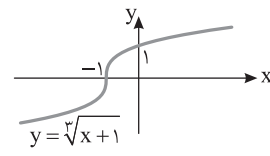
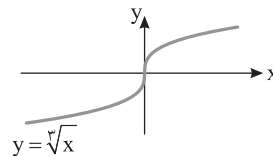


۳۳۵- گزینه ۳ ضابطه تابع به شکل

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x > 0 \\ -\sqrt[3]{x+1} & x < 0 \end{cases}$$

است. اکنون توجه کنید که نمودار توابع $y = \sqrt[3]{x+1}$ و $y = -\sqrt[3]{x+1}$

به صورت زیر است:



بنابراین نمودار تابع f به شکل روبه‌رو

است:

۳۴۵- گزینه ۲ دامنه تابع f به صورت $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ است، پس باید دامنه g هم به همین صورت باشد، یعنی $x = -2$ ریشه مضاعف مخرج $g(x)$ باشد:

$$x^2 + cx + 4 = (x+2)^2 \Rightarrow x^2 + cx + 4 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow c = 4$$

از طرف دیگر ضابطه f و g باید برابر باشند، پس باید صورت $g(x)$ یک عامل ۵ و یک عامل $x+2$ داشته باشد:

$$g(x) = f(x) \Rightarrow \frac{ax+b}{(x+2)^2} = \frac{5}{x+2} \Rightarrow ax+b = 5(x+2) \Rightarrow a=5, b=10$$

بنابراین $abc = 5(10)(4) = 200$

۳۴۶- گزینه ۲ دامنه تابع g به صورت زیر است:

$$D_g = D_f - \{x | f(x) = 2\} = \{1, 4, 3, 5\} - \{4, 3\} = \{1, 5\}$$

از طرف دیگر،

$$g(1) = \frac{3f(1)}{2-f(1)} = \frac{-3}{2-(-1)} = -1, \quad g(5) = \frac{3f(5)}{2-f(5)} = \frac{3}{2-1} = 3$$

بنابراین $g = \{(1, -1), (5, 3)\}$ و $R_g = \{-1, 3\}$. پس مجموع اعضای برد تابع g برابر ۲ است.

۳۴۷- گزینه ۳ توجه کنید

$$D_{fog} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x | -5 \leq x \leq 4, 1 \leq |x-1| \leq 4\}$$

بنابراین

$$1 \leq |x-1| \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x-1 \leq 4 \Rightarrow 2 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq x-1 \leq -1 \Rightarrow -3 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$D_{fog} = [-5, 4] \cap ([-3, 0] \cup [2, 5]) = [-3, 0] \cup [2, 4]$$

پس اعداد صحیح $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ در دامنه تابع fog قرار دارند که تعداد آن‌ها هفت تا است.

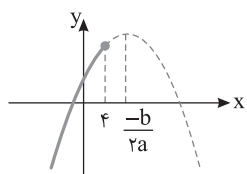
۳۴۸- گزینه ۳ تابع $y = ax^2 + bx + c$ با شرط $a < 0$ روی بازه $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ صعودی و روی بازه $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ نزولی است. بنابراین باید شرایط زیر برقرار باشند تا تابع f صعودی باشد:

$$k+2 < 0 \Rightarrow k < -2$$

$$4 \leq \frac{-2}{2(k+2)} \Rightarrow 4 + \frac{2}{2(k+2)} \leq 0 \Rightarrow \frac{4k+9}{k+2} \leq 0 \Rightarrow -\frac{9}{4} \leq k < -2$$

$$\text{بنابراین اگر } -\frac{9}{4} \leq k < -2, \text{ آن گاه تابع } f$$

روی بازه $(-\infty, 4]$ صعودی است.



۳۴۹- گزینه ۴ نمودار تابع f^{-1} از نقطه $(4, 8)$ عبور می‌کند، پس

نمودار تابع f از نقطه $(8, 4)$ عبور می‌کند. بنابراین

$$f(8) = 4 \Rightarrow \frac{1}{16} \times 8^3 + \sqrt[3]{8} + 2a = 4 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

در نتیجه

$$f(x) = \frac{1}{16} x^3 + \sqrt[3]{x} - 3 \Rightarrow f(0) = -3$$

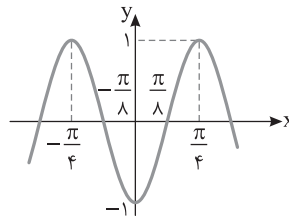
۳۳۹- گزینه ۲ از تساوی $y = \sqrt[3]{2-3x}$ مقدار x را بر حسب y به دست می‌آوریم:

$$y^3 = 2-3x \Rightarrow x = \frac{2-y^3}{3}$$

بنابراین $f^{-1}(x) = \frac{-x^3+2}{3}$ و در نتیجه $a=-1, b=2, ab=-2$.

۳۴۰- گزینه ۱ توجه کنید که $f(x) = -\cos 4x$. اگر نمودار تابع $y = \cos x$ را رسم کنیم و نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = -\cos x$ به دست می‌آید. اگر طول هر نقطه از این نمودار را یک چهارم کنیم، نمودار تابع $y = -\cos 4x$ به دست می‌آید.

با توجه به شکل، تابع f روی بازه $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ اکیدا نزولی است، پس حداقل مقدار a برابر $-\frac{\pi}{4}$ است.



۳۴۱- گزینه ۲ ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است. بنابراین $a=0, b=-1, b+c=0 \Rightarrow c=1$

پس $g(x) = 2^x - x + 1 = -x + 2$ و در نتیجه یک تابع خطی است.

۳۴۲- گزینه ۱ کافی است در تساوی داده شده به جای x قرار دهیم $\frac{1}{x}$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} + 2}{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{1+2x}{1+x^2} = \frac{x(1+2x)}{1+x^2} \Rightarrow f(x) = \frac{x+2x^2}{1+x^2}$$

۳۴۳- گزینه ۴ توجه کنید که $D_f = \{x | x-3 \neq 0, \frac{x-y}{2-x} \geq 0\}$. از طرف دیگر، $x \in (2, 7] \Rightarrow \frac{x-y}{2-x} \geq 0 \Rightarrow x-3=0$. آن گاه $x=3$. بنابراین

$$D_f = (2, 3) \cup (3, 7] = (2, 7] - \{3\}$$

پس $a=2, b=7, c=3$ و در نتیجه $a+b+c=12$.

۳۴۴- گزینه ۲ چون فقط یک عدد حقیقی در دامنه تابع قرار ندارد، پس معادله $m^2x^2 + 3x + 1 = 0$ باید فقط یک جواب داشته باشد. در دو حالت این اتفاق می‌افتد.

حالت اول این معادله ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\Delta = 9 - 4m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm \frac{3}{2}$$

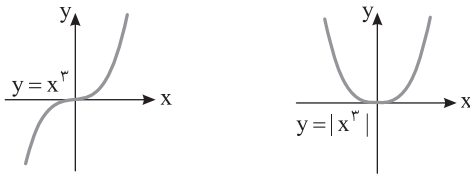
در این حالت $x = -\frac{2}{3}$ ریشه مضاعف مخرج است، در نتیجه $n = -\frac{2}{3}$.

حالت دوم این معادله یک معادله درجه اول باشد، یعنی ضریب x^2 برابر صفر باشد: $m=0$. در این حالت $x = -\frac{1}{3}$ ریشه مضاعف مخرج است. در نتیجه

$n = -\frac{1}{3}$ پس دو مقدار مختلف برای n وجود دارد.

۳۵۶- گزینه ۳ راه حل اول با توجه به نمودار تابع $y = |x^3|$ معلوم

می‌شود که این تابع یک به یک نیست، بنابراین وارون ناپذیر است.



راه حل دوم سه نقطه $(1, 1)$ ، $(-1, 1)$ و $(0, 0)$ روی نمودار این تابع هستند، پس

این تابع صعودی، نزولی، یک به یک و وارون پذیر نیست. خارج از کشور تجربی - ۹۵

۳۵۷- گزینه ۴ توجه کنید که $(f^{-1} \circ g)(a) = f^{-1}(g(a)) = 6$

بنابراین $g(a) = f(6) = 12 - 5 = 7$ با توجه به اینکه $g(4) = 7$ نتیجه می‌شود

$$a = 4$$

ریاضی - ۹۳

۳۵۸- گزینه ۳ اگر $x < 0$ ، آن گاه

$$y = -\sqrt{-x} \Rightarrow -x = y^2 \Rightarrow x = -y^2 \xrightarrow{y < 0} x = y|y|$$

و اگر $x \geq 0$ ، آن گاه $y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2 \xrightarrow{y \geq 0} x = y|y|$

بنابراین در هر حالتی $x = y|y|$ و ضابطه تابع وارون تابع f به صورت

$f^{-1}(x) = x|x|$ است. تجربی - ۹۶

۳۵۹- گزینه ۲ راه حل اول ابتدا ضابطه تابع وارون تابع f را به دست می‌آوریم

$$y = \frac{x+4}{x-2} \Rightarrow xy - 2y = x + 4 \Rightarrow x(y-1) = 2y+4 \Rightarrow x = \frac{2y+4}{y-1}$$

بنابراین $f^{-1}(x) = \frac{2x+4}{x-1}$. اکنون با حل معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ نقطه‌های

برخورد دو تابع را می‌یابیم:

$$\frac{x+4}{x-2} = \frac{2x+4}{x-1} \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 2x^2 - 8x$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-4) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 4$$

راه حل دوم کافی است طول نقطه‌های برخورد نمودار تابع f و خط $y = x$ را بیابیم:

$$\frac{x+4}{x-2} = x \Rightarrow x^2 - 2x = x + 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 4$$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۳۶۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$ax + by = a \Rightarrow y = \frac{a-ax}{b}, \quad 2x - 3y = b \Rightarrow y = \frac{2x-b}{3}$$

چون خط‌های داده شده نسبت به نیمساز ربع‌های اول و سوم قرینه یکدیگر

هستند، پس تابع‌های $y = \frac{2x-b}{3}$ و $y = \frac{a-ax}{b}$ وارون یکدیگرند. از طرف

دیگر، وارون تابع $y = \frac{2x-b}{3}$ می‌شود $y = \frac{3x+b}{2}$. بنابراین $\frac{a}{b} = \frac{b}{2}$ و

$$\frac{-a}{b} = \frac{3}{2}. \text{ در نتیجه } b^2 = 16, \text{ یعنی } b = \pm 4. \text{ در نتیجه}$$

$$b = -4 \Rightarrow \frac{-a}{-4} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a + b = 2$$

$$b = 4 \Rightarrow \frac{-a}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -6 \Rightarrow a + b = -2$$

بنابراین $a + b = \pm 2$

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۳۵۰- گزینه ۳ در تساوی $f(2x+1) = 2g(3x) - 1$ قرار می‌دهیم

$$f(5) = 2g(6) - 1 \Rightarrow g(6) = \frac{f(5)+1}{2} \quad : x = 2$$

از طرف دیگر، $f^{-1}(2) = 5 \Rightarrow f(5) = 2$

$$\text{در نتیجه } g(6) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

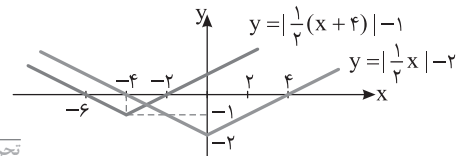
۳۵۱- گزینه ۲ نمودار اولیه و نمودار انتقال یافته را در یک دستگاه

مختصات رسم می‌کنیم. طول نقطه برخورد نمودارها جواب معادله زیر است:

$$|\frac{1}{2}(x+4)| - 1 = |\frac{1}{2}x| - 2 \quad (1)$$

توجه کنید که x منفی و $x+4$ مثبت است. بنابراین معادله (۱) می‌شود

$$|\frac{1}{2}(x+4)| - 1 = -\frac{1}{2}x - 2 \Rightarrow x = -3$$



تجربی - ۹۳

۳۵۲- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(a + \sqrt{a})$

از طرف دیگر $g(6) = 5$ پس $a + \sqrt{a} = 6 \Rightarrow a = 4$

تجربی - ۹۱

۳۵۳- گزینه ۴ توجه کنید که

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = \frac{2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) + 2}{\frac{2x-1}{x+1} - 2} = \frac{4x - 2 + 2x + 2}{2x - 2 - 2x + 1} = 2x$$

تجربی - ۹۶

۳۵۴- گزینه ۳ ابتدا ضابطه تابع g را پیدا می‌کنیم:

$$g(f(x)) = g(2x+3) = 8x^2 + 22x + 20$$

فرض می‌کنیم $2x+3 = t$. در این صورت $x = \frac{t-3}{2}$ و

$$g(t) = 8\left(\frac{t-3}{2}\right)^2 + 22\left(\frac{t-3}{2}\right) + 20$$

$$= 2t^2 - 12t + 18 + 11t - 33 + 20 = 2t^2 - t + 5$$

بنابراین $g(x) = 2x^2 - x + 5$ و

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(2x^2 - x + 5) + 3 = 4x^2 - 2x + 13$$

ریاضی - ۹۲

۳۵۵- گزینه ۴ برای اینکه از نمودار $y = f(x-2)$ به نمودار

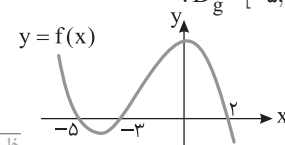
$y = f(x)$ برسیم، کافی است آن را مطابق شکل زیر دو واحد به چپ منتقل

کنیم. برای به دست آوردن دامنه تابع $g(x) = \sqrt{xf(x)}$ ، عبارت $xf(x)$ را

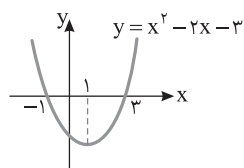
تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	-5	-3	0	2	$+\infty$
$f(x)$		+	-	+	+	-
x		-	-	-	+	+
$xf(x)$		-	+	-	+	-

بنابراین $D_g = [-5, -3] \cup [0, 2]$



خارج از کشور تجربی - ۹۴



۳۶۶- گزینه ۱ دامنه تابع از

نامساوی $-2 < x - 1 < 2$ به دست می‌آید، پس $D_f = (-1, 3)$. با توجه به نمودار تابع $y = x^2 - 2x - 3$ ، در بازه $(-1, 3)$ مقدار تابع f همواره منفی است و این تابع نه صعودی است و نه نزولی.

ریاضی - ۹۱

۳۶۷- گزینه ۲ راه حل اول از تساوی $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$ نتیجه می‌شود

$$g^{-1}(f^{-1}(a)) = 8 \Rightarrow g(8) = f^{-1}(a)$$

بنابراین

$$\sqrt{5 \times 8 + 9} = f^{-1}(a) \Rightarrow f^{-1}(a) = 7$$

پس $a = f(7)$ ، یعنی $a = 3$.

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$. چون

$(f \circ g)^{-1}(a) = 8$ ، بنابراین $(f \circ g)^{-1}(a) = 8$ ، یعنی $(f \circ g)(8) = a$.

در نتیجه

$$f(g(8)) = a \Rightarrow f(7) = a \Rightarrow a = 3$$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۳۶۸- گزینه ۴ ضابطه تابع را به صورت $f(x) = \begin{cases} 4x - 4 & x \leq 2 \\ 4 & x > 2 \end{cases}$

می‌نویسیم. تابع f در بازه $(-\infty, 2]$ وارون پذیر است. فرض می‌کنیم

$$y = 4x - 4, \text{ در این صورت } x = \frac{y+4}{4}. \text{ از طرف دیگر،}$$

$$x \leq 2 \Rightarrow 4x - 4 \leq 4 \Rightarrow y \leq 4$$

$$\text{بنابراین } f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 1, x \leq 4$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۳۶۹- گزینه ۱ ابتدا برای $0 < x < 1$ ضابطه تابع وارون تابع را به دست

می‌آوریم:

$$y = \frac{|x|}{x} \sqrt{1-x^2} = \frac{x}{x} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2}$$

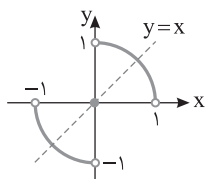
$$y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1 - y^2 \Rightarrow x = \sqrt{1-y^2}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2} = f(x)$$

به همین ترتیب برای $-1 < x < 0$:

$$y = \frac{|x|}{x} \sqrt{1-x^2} = \frac{-x}{x} \sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2 = 1 - x^2$$

$$x^2 = 1 - y^2 \Rightarrow x = -\sqrt{1-y^2} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{1-x^2} = f(x)$$



همچنین $f(0) = 0$ ، در نتیجه $f^{-1}(0) = 0$.

پس در هر صورت می‌توان نوشت

$$f^{-1}(x) = f(x). \text{ توجه کنید که نمودار تابع}$$

به شکل مقابل است که از دو ربع دایره و یک

نقطه تشکیل شده و نسبت به خط $y = x$ متقارن است، بنابراین وارون آن با

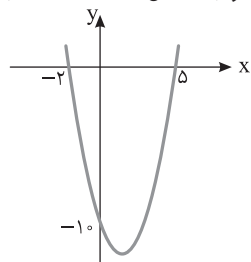
خودش برابر است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۳۶۱- گزینه ۳ طول نقاط تلاقی نمودار تابع مورد نظر با محور x

جواب‌های معادله $x^2 - 3x - 10 = 0$ هستند. جواب‌های این معادله $x = -2$ و $x = 5$ هستند. بنابراین نمودار تابع مورد نظر به صورت مقابل است. از روی این شکل معلوم است که باید نمودار تابع را حداقل دو واحد به طرف x ‌های مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x غیرمنفی باشد.

خارج از کشور تجربی - ۹۳



۳۶۲- گزینه ۳ ابتدا دقت کنید که

$$f(2x-3) = 2x-3 - [2x-3] = 2x-3 - [2x] + 3 = 2x - [2x]$$

پس $g(x) = f(2x-3) - 2f(x) = 2x - [2x] - 2x + 2[x] = 2[x] - [2x]$. اکنون فرض می‌کنیم k عدد صحیح دلخواهی باشد. در این صورت اگر

$$2k \leq 2x < 2k+1 \Rightarrow [2x] = 2k \text{ و } [x] = k, \text{ آن گاه } k \leq x < k + \frac{1}{2}$$

بنابراین $g(x) = 2k - 2k = 0$. اگر $k + \frac{1}{2} \leq x < k+1$ ، آن گاه $[x] = k$ و

$$2k+1 \leq 2x < 2k+2 \Rightarrow [2x] = 2k+1$$

بنابراین $g(x) = 2k - 2k - 1 = -1$. در نتیجه $R_g = \{-1, 0\}$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۳۶۳- گزینه ۲ ابتدا $(f \circ g)(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = (2x+4-3)^2 = (2x+1)^2$$

اکنون معادله $(f \circ g)(x) = f(x)$ را حل می‌کنیم:

$$(2x+1)^2 = (2x-3)^2 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$16x = 8 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

تجربی - ۹۲

۳۶۴- گزینه ۳ توجه کنید که

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2x+3}{2-x}\right) = \frac{1-2\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{2-x} = \frac{2x+3+2}{2-x}$$

$$\frac{2-x-6x-9}{2-x} = \frac{-7x-7}{2-x} = \frac{-7(x+1)}{2-x}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۳۶۵- گزینه ۲ توجه کنید که $D_{g \circ f} = \{x | x \in D_f, f(x) \in D_g\}$

از طرف دیگر، $D_g = [0, 1]$ و $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$. در نتیجه

$$D_{g \circ f} = \left\{x \mid x \neq \pm 1, 0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1\right\}$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 = \frac{1+x^2-1-x^2}{1-x^2} = 0 \leq 0$$

$$\frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0 \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x = 0 \text{ یا } x > 1$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow 1-x^2 > 0 \Rightarrow -1 < x < 1$$

از اشتراک ناحیه‌های به دست آمده دامنه تابع $g \circ f$ به دست می‌آید. بنابراین

$$D_{g \circ f} = \{0\}$$

ریاضی - ۹۶

۳۷۰- گزینه ۴ راه حل اول ابتدا ضابطه تابع f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$y = (x+1)^2 \Rightarrow x+1 = \sqrt{y} \Rightarrow x = \sqrt{y}-1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x}-1$$

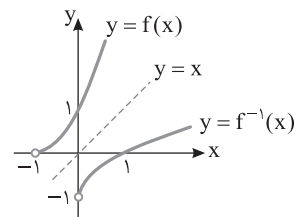
اکنون محل برخورد نمودار تابع‌های f و f^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow (x+1)^2 + 1 = \sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{x \geq 0} (x+1)^4 + 2(x+1)^2 + 1 = x$$

$$(x+1)^4 + 2x^2 + 3x + 3 = 0$$

معادله بالا با توجه به اینکه مجموع چند مقدار نامنفی است، جواب ندارد.



راه حل دوم نمودار تابع f را رسم

می‌کنیم. با قرینه کردن نمودار

نسبت به خط $y = x$ ، نمودار

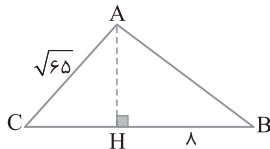
f^{-1} را رسم می‌کنیم. واضح است

که دو نمودار نقطه برخوردی ندارند.

ریاضی - ۹۲

فصل دوم

در مثلث قائم الزاویه ACH با استفاده از قضیه فیثاغورس می‌توانیم طول ضلع CH را حساب کنیم:



$$AC^2 = CH^2 + AH^2$$

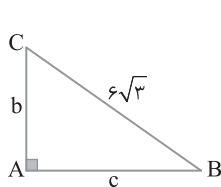
$$5 = CH^2 + 1 \Rightarrow CH = \sqrt{4} = 2$$

۳۷۶- گزینه ۳ با توجه به شکل $\cot \hat{B} = \frac{c}{b} = \sqrt{2}$ بنابراین

$$c = b\sqrt{2}$$

$$b^2 + c^2 = (6\sqrt{3})^2 \Rightarrow b^2 + (b\sqrt{2})^2 = (6\sqrt{3})^2$$

$$b^2 + 2b^2 = 36 \times 3 \Rightarrow b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$$



بنابراین $c = 6\sqrt{2}$ و در نتیجه

$$S = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$$

۳۷۷- گزینه ۲ در مثلث قائم الزاویه OBC، $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ ، همچنین در مثلث قائم الزاویه OCH، $\hat{HOC} + \hat{C} = 90^\circ$ ، در نتیجه $\hat{B} = \hat{HOC} = \alpha$ اکنون در مثلث قائم الزاویه OHB،

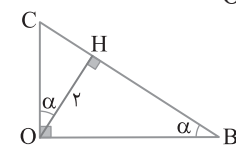
$$\sin \alpha = \sin \hat{B} = \frac{OH}{OB} = \frac{2}{OB} \Rightarrow OB = \frac{2}{\sin \alpha}$$

در مثلث قائم الزاویه OCH،

$$\cos \alpha = \frac{OH}{OC} = \frac{2}{OC} \Rightarrow OC = \frac{2}{\cos \alpha}$$

بنابراین

$$OB + OC = \frac{2}{\sin \alpha} + \frac{2}{\cos \alpha}$$



۳۷۸- گزینه ۲ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر،

$\sin \alpha = \frac{y}{4}$ ، بنابراین باید مقدار y را به دست آوریم. در مثلث قائم الزاویه

ACH، $x^2 + y^2 = 9$ ، در مثلث قائم الزاویه ABH،

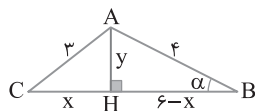
$$y^2 + (6-x)^2 = 16 \Rightarrow y^2 + x^2 - 12x + 36 = 16$$

با جای گذاری $x^2 + y^2 = 9$ به دست می‌آید

$$9 - 12x + 36 = 16 \Rightarrow 12x = 29 \Rightarrow x = \frac{29}{12}$$

$$\xrightarrow{x^2 + y^2 = 9} \left(\frac{29}{12}\right)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = \frac{455}{144} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{455}}{12}$$

و در نتیجه



$$\sin \alpha = \frac{\frac{\sqrt{455}}{12}}{4} = \frac{\sqrt{455}}{48}$$

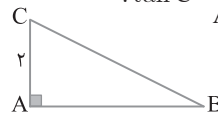
۳۷۱- گزینه ۱ با توجه به شکل زیر،

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow BC = 6$$

اکنون طبق قضیه فیثاغورس

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow 6^2 = 2^2 + AB^2 \Rightarrow AB^2 = 32$$

یعنی $AB = 4\sqrt{2}$ ، بنابراین $\tan \hat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

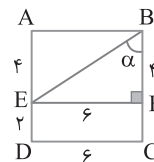


۳۷۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که طول ضلع مربع ABCD برابر ۶

است. مطابق شکل زیر، پاره خط EF را موازی DC رسم می‌کنیم. در این

صورت، $BF = AE = 4$ و $EF = DC = 6$ ، در نتیجه،

$$\triangle BFE: \tan \alpha = \frac{EF}{BF} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

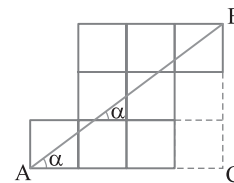


۳۷۳- گزینه ۴ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. توجه کنید که

بنابر قضیه خطوط موازی و مورب، $\alpha = \hat{BAC}$ ، در نتیجه

$$\tan \alpha = \tan \hat{BAC} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\text{پس } \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12}$$



۳۷۴- گزینه ۱ مطابق شکل داده شده، در مثلث قائم الزاویه ABC،

چون $\hat{CAB} = 45^\circ$ پس این مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است. از طرف

دیگر در مثلث قائم الزاویه ABD، $\hat{BAD} = 60^\circ$ ، پس

$$\tan 60^\circ = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x+y}{y} = \frac{x}{y} + 1 \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{3} - 1$$

اکنون توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس

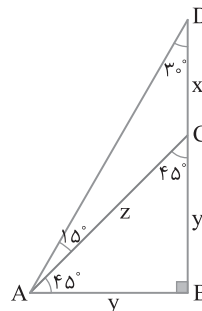
در مثلث ABC،

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$z^2 = y^2 + y^2 \Rightarrow z = y\sqrt{2}$$

بنابراین

$$\frac{DC}{AC} = \frac{x}{\sqrt{2}y} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$



۳۷۵- گزینه ۱ در مثلث قائم الزاویه AHB، در مورد زاویه B می‌دانیم

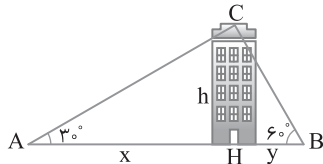
$$\tan \hat{B} = \frac{AH}{HB} = \frac{3}{4} = \frac{AH}{8} \Rightarrow AH = 6$$

۳۸۴- گزینه ۲ ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. مطابق شکل زیر در مثلث‌های قائم‌الزاویه ACH و BCH،

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \sqrt{3}h, \quad \tan 60^\circ = \frac{h}{y} = \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}h$$

بنابراین $x+y = \frac{4\sqrt{3}}{3}h$ از طرف دیگر $x+y=24$ ، بنابراین

$$24 = \frac{4\sqrt{3}}{3}h \Rightarrow h = 6\sqrt{3}$$

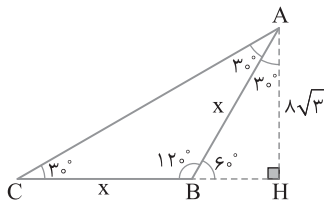


۳۸۵- گزینه ۲ ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر، در مثلث قائم‌الزاویه ABH،

$$\tan 60^\circ = \frac{AH}{BH} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{BH} \Rightarrow BH = 8$$

از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه ABH،

$$\sin \hat{A}BH = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = 16$$

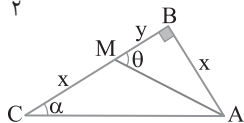


۳۸۶- گزینه ۱ فرض کنید $CM=AB=x$ و $MB=y$. طبق

فرض $\tan \theta = 3 \tan \alpha$ ، بنابراین $\frac{x}{y} = \frac{3x}{x+y}$ پس $x+y=3y$ ، در

نتیجه $x=2y$ از این رو $\tan \alpha = \frac{y}{3}$ و $\tan \theta = 2$ ، بنابراین $\cot \alpha = \frac{3}{y}$ و

$$\cot \alpha + \cot \theta = \frac{3}{y} + \frac{1}{2} = 2 \quad \text{و در نتیجه} \quad \cot \theta = \frac{1}{2}$$



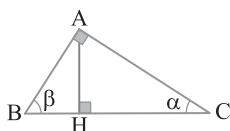
۳۸۷- گزینه ۱ راه حل اول در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABH و ACH،

$$\begin{cases} \cos \beta = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = \cos \beta \times AB \\ \cos \alpha = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = \cos \alpha \times AC \end{cases} \Rightarrow \frac{BH}{HC} = \frac{AB \cos \beta}{AC \cos \alpha}$$

از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه ABC،

$$\cos \beta = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{4}, \quad \cos \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{4}$$

$$\frac{BH}{HC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \tan^2 \alpha \quad \text{بنابراین}$$

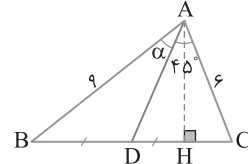


۳۷۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که چون مثلث‌های ABD و ACD در ارتفاع

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AH \times BD}{\frac{1}{2}AH \times CD} = \frac{BD}{CD} = 1 \quad \text{وارد از رأس A مشترک اند، پس}$$

$$S_{ABD} = S_{ACD} \Rightarrow \frac{1}{2}AB \times AD \times \sin \alpha = \frac{1}{2}AC \times AD \times \sin 45^\circ$$

$$AB \times \sin \alpha = AC \times \sin 45^\circ \Rightarrow 9 \times \sin \alpha = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

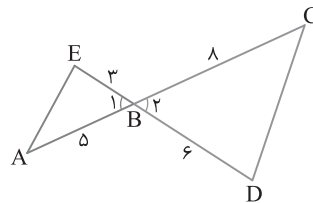


۳۸۰- گزینه ۱ دقت کنید که در شکل زیر $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ ، از طرف دیگر،

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin \hat{B}_1, \quad S_{BCD} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \sin \hat{B}_2$$

بنابراین

$$\frac{S_{ABE}}{S_{BCD}} = \frac{5}{16}$$



۳۸۱- گزینه ۲ مطابق شکل،

$$\sin \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{4}{5} \Rightarrow c = \frac{5}{4}b$$

از طرف دیگر $b+c=7$ ، بنابراین

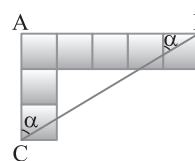
$$b + \frac{5}{4}b = 7 \Rightarrow \frac{9b}{4} = 7 \Rightarrow b = \frac{28}{9}, \quad c = \frac{5}{4} \times \frac{28}{9} = \frac{35}{9}$$

اکنون طبق قضیه فیثاغورس،

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \left(\frac{35}{9}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{28}{9}\right)^2$$

$$a^2 = \frac{35^2 - 28^2}{9^2} = \frac{(35-28)(35+28)}{9^2} = \frac{7 \times 63}{9^2} = \frac{7 \times 7}{9} = \frac{49}{9} \Rightarrow a = \frac{7}{3}$$

۳۸۲- گزینه ۴ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. توجه کنید که



بنابر قضیه خطوط موازی و مورب،

در نتیجه $\alpha = \hat{ACB}$

$$\tan \alpha = \tan \hat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}$$

۳۸۳- گزینه ۱ در مثلث قائم‌الزاویه ABH،

$$\sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{AH}{\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AH}{\sqrt{6}} \Rightarrow AH = \sqrt{3}$$

از طرف دیگر چون $\tan \hat{B} = \tan 45^\circ = \frac{AH}{BH}$ ، پس $1 = \frac{\sqrt{3}}{BH}$ ، بنابراین

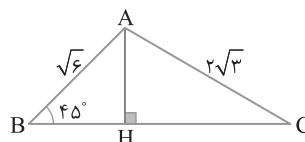
$BH = \sqrt{3}$. در مثلث قائم‌الزاویه AHC، طبق قضیه فیثاغورس،

$$AH^2 + HC^2 = AC^2$$

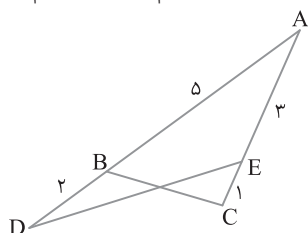
$$(\sqrt{3})^2 + HC^2 = (2\sqrt{3})^2$$

$$HC^2 = 9 \Rightarrow HC = 3$$

$$\frac{HC}{BH} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad \text{بنابراین}$$



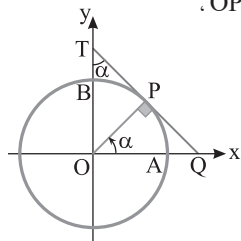
$$\frac{4}{5} \sin \hat{A} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{4}{5} \xrightarrow{\alpha \text{ حاده است}} \hat{A} = 30^\circ$$



۳۹۱- گزینه ۴ انتهای کمان روبه‌رو به زاویه 23° در ربع سوم قرار دارد، پس $\sin 23^\circ$ و $\cos 23^\circ$ اعدادی منفی هستند. انتهای کمان روبه‌رو به زاویه 31° در ربع چهارم قرار دارد، پس $\sin 31^\circ$ عددی منفی و $\cos 31^\circ$ عددی مثبت است.

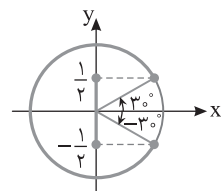
۳۹۲- گزینه ۴ از تساوی $\cos x \sqrt{1 + \tan^2 x} = 1$ واضح است که باید $\cos x > 0$. بنابراین از تساوی $\tan x = -\frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$ نتیجه می‌شود که $\tan x < 0$. بنابراین انتهای کمان زاویه x در ناحیه چهارم قرار دارد.

۳۹۳- گزینه ۴ توجه کنید که دو مثلث قائم الزاویه POQ و OTQ در زاویه حاده رأس Q مشترک‌اند، پس زاویه حاده دیگر آن‌ها نیز برابر است، یعنی $\hat{O}TQ = \hat{P}OQ = \alpha$. در مثلث قائم الزاویه OPT ،



$$\sin \alpha = \frac{OP}{OT} = \frac{1}{OB + BT} = \frac{1}{1 + BT}$$

$$1 + BT = \frac{1}{\sin \alpha} \Rightarrow BT = \frac{1}{\sin \alpha} - 1$$



۳۹۴- گزینه ۴ از $-15^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ$ نتیجه می‌گیریم $-30^\circ \leq 2\alpha \leq 30^\circ$. با توجه به شکل مقابل $-\frac{1}{2} \leq \sin 2\alpha \leq \frac{1}{2}$ و در نتیجه $-\frac{1}{2} \leq \frac{m}{4} \leq \frac{1}{2}$ ، یعنی $-2 \leq m \leq 2$. بنابراین m می‌تواند مقادیر صحیح ± 2 و ± 1 و صفر باشد.

۳۹۵- گزینه ۱ می‌دانیم حداکثر مقدار $\sin \alpha$ و $\cos \beta$ برابر ۱ است. بنابراین از تساوی $2 \sin \alpha + 5 \cos \beta = 7$ نتیجه می‌شود $\sin \alpha = 1$ و $\cos \beta = 1$. بنابراین $3 \sin \alpha - 4 \cos \beta = 3 - 4 = -1$.

۳۹۶- گزینه ۳ از $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ نتیجه می‌شود $0 \leq \sin \alpha \leq 1$. بنابراین $0 \leq 2 \sin \alpha \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 2 \sin \alpha + 1 \leq 3$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{2 \sin \alpha + 1}{3} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{3}{2 \sin \alpha + 1} \leq 3$$

پس حداکثر مقدار عبارت برابر ۳ است.

۳۹۷- گزینه ۱ فرض کنید زاویه بین این دو ضلع α باشد. چون $\sin \alpha \leq 1$ پس

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \times \sqrt{6} \sin \alpha = \sqrt{3} \sin \alpha \leq \sqrt{3}$$

اگر زاویه بین این دو ضلع 90° باشد، مساحت مثلث برابر $\sqrt{3}$ می‌شود. بنابراین بیشترین مقدار ممکن مساحت مثلث مورد نظر برابر $\sqrt{3}$ است.

راه‌حل دوم در مثلث قائم الزاویه ABC .

$$\sin \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{4} \Rightarrow AB = 4 \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{4} \Rightarrow AC = 4 \cos \alpha$$

در مثلث قائم الزاویه AHC

$$\cos \alpha = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = AC \cos \alpha = 4 \cos^2 \alpha$$

در مثلث قائم الزاویه ABH

$$\cos \beta = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \cos \beta = 4 \sin \alpha \cos \beta$$

چون α و β متمم هستند، پس $\cos \beta = \sin \alpha$ و در نتیجه

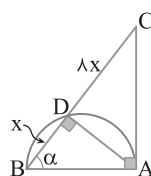
$$\frac{BH}{HC} = \frac{4 \sin^2 \alpha}{4 \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha \text{ بنابراین } BH = 4 \sin^2 \alpha$$

۳۸۸- گزینه ۲ در مثلث قائم الزاویه ABD ، $\cos \alpha = \frac{BD}{AB} = \frac{x}{AB}$

در مثلث قائم الزاویه ABC ، $\cos \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{x + \lambda x} = \frac{AB}{9x}$ بنابراین

$$\frac{x}{AB} = \frac{AB}{9x} \Rightarrow AB^2 = 9x^2 \Rightarrow AB = 3x$$

در نتیجه $\cos \alpha = \frac{x}{AB} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$



۳۸۹- گزینه ۴ راه‌حل اول توجه کنید که

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BC \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times \lambda x \times BC \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda x BC \quad (1)$$

همین‌طور،

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} AB \times BC \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} AB \times BC \quad (2)$$

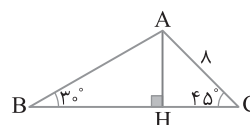
از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \lambda x BC = \frac{1}{4} AB \times BC \Rightarrow AB = \lambda \sqrt{2} x$$

راه‌حل دوم ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر در مثلث AHC

$$\sin \hat{C} = \sin 45^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AH}{\lambda} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda$$

در مثلث ABH ، $\sin \hat{B} = \sin 30^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \lambda}{AB} \Rightarrow AB = \lambda \sqrt{2}$



۳۹۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} AD \times AE \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times x \times 3 \times \sin \hat{A} = \frac{3}{2} \sin \hat{A}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 \times \sin \hat{A} = 10 \sin \hat{A}$$

بنابراین $S_{ADE} + S_{ABC} = (\frac{3}{2} + 10) \sin \hat{A} = \frac{23}{2} \sin \hat{A}$ پس

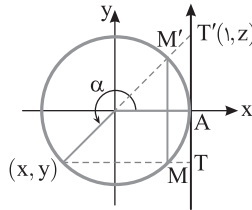
۳۰۳- گزینه ۲ با توجه به شکل زیر واضح است که $\sin \alpha = y$ و

$\tan \alpha = z$. بنابراین طول پاره‌خط TT' برابر است با

$$TT' = AT + AT' = |y| + |z| = -y + z = -\sin \alpha + \tan \alpha$$

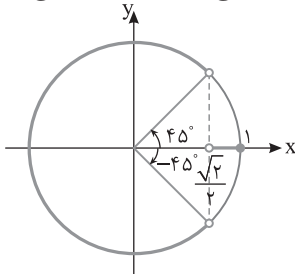
از طرف دیگر، $MM' = 2|y| = -2y = -2\sin \alpha$. بنابراین

$$TT' - MM' = \tan \alpha - \sin \alpha - (-2\sin \alpha) = \tan \alpha + \sin \alpha$$



۳۰۴- گزینه ۳ وقتی $-90^\circ < \alpha < 45^\circ$ ، $-45^\circ < \frac{\alpha}{2} < 45^\circ$ و مطابق

شکل زیر، $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos \frac{\alpha}{2} \leq 1$. در نتیجه $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{m}{4} \leq 1$ ، یعنی $\sqrt{2} < m \leq 4$. پس m می‌تواند مقادیر صحیح ۳ یا ۴ باشد که مجموع آن‌ها برابر ۷ است.



۳۰۵- گزینه ۳ به جای $\cos^2 x$ قرار می‌دهیم $1 - \sin^2 x$. پس

عبارت به شکل زیر درمی‌آید:

$$A = 4(1 - \sin^2 x) - 2\sin x = -4\sin^2 x - 2\sin x + 4$$

$$= -\left(2\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}$$

اکنون دو راه حل ارائه می‌کنیم.

راه حل اول چون $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، پس

$$-2 \leq 2\sin x \leq 2 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq 2\sin x + \frac{1}{2} \leq \frac{5}{2}$$

$$0 \leq \left(2\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{25}{4} \Rightarrow -\frac{25}{4} \leq -\left(2\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$$

$$-2 \leq \frac{17}{4} - \left(2\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{17}{4} \Rightarrow -2 \leq A \leq \frac{17}{4}$$

پس اختلاف حداکثر و حداقل مقدار A برابر $\frac{17}{4} - (-2) = \frac{25}{4}$ است.

راه حل دوم اگر فرض کنیم $t = \sin x$ ، آن‌گاه

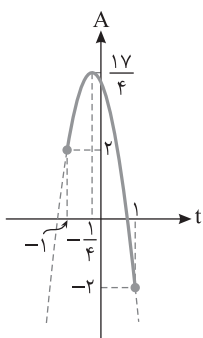
$$A = -\left(2t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

نمودار A برحسب t به صورت مقابل است.

$$\text{واضح است که } -2 \leq A \leq \frac{17}{4}$$

پس اختلاف حداکثر و حداقل مقدار A برابر

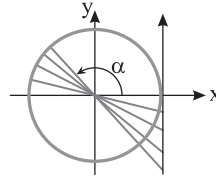
$$\frac{17}{4} - (-2) = \frac{25}{4} \text{ است.}$$



۳۹۸- گزینه ۱ می‌دانیم اگر $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ ، آن‌گاه $\tan \alpha \leq 0$.

بنابراین

$$2m + 1 \leq 0 \Rightarrow m \leq -\frac{1}{2}$$



۳۹۹- گزینه ۳ چون خط از نقطه $(0, 2)$ می‌گذرد، پس مختصات این

نقطه در معادله خط صدق می‌کنند:

$$3 \times 0 - a \times 2 + 2\sqrt{3} = 0 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

بنابراین معادله خط به صورت $3x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0$ یا همان $y = \sqrt{3}x + 2$ با همان

است که شیب آن $\sqrt{3}$ است. پس $\tan \alpha = \sqrt{3}$. بنابراین

$$\alpha = 60^\circ \Rightarrow \sin \alpha = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

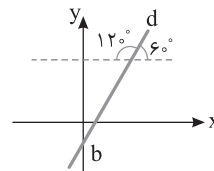
۴۰۰- گزینه ۱ با توجه به شکل رسم شده شیب خط برابر $\tan 60^\circ$ است

و عرض از مبدأ آن برابر b است. از طرف دیگر در خط به معادله $y = ax - 2a + \sqrt{3}$

شیب خط برابر a و عرض از مبدأ آن برابر $-2a + \sqrt{3}$ است.

بنابراین

$$a = \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \quad b = -2a + \sqrt{3} = -2\sqrt{3} + \sqrt{3} = -\sqrt{3}$$



۴۰۱- گزینه ۱ انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های 70° ، 170° ، 190° و

260° به ترتیب در ناحیه‌های اول، دوم، سوم و سوم مثلثاتی است. پس $\tan 170^\circ$

عددی منفی است و $\tan 190^\circ$ ، $\cot 70^\circ$ و $\cot 260^\circ$ اعدادی مثبت هستند.

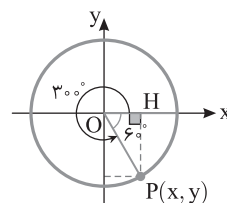
۴۰۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که در مثلث OPH،

$$\sin 60^\circ = \frac{PH}{OP} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{PH}{1} \Rightarrow PH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{OH}{OP} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{OH}{1} \Rightarrow OH = \frac{1}{2}$$

از طرف دیگر $x = OH$ و $y = -PH$. بنابراین

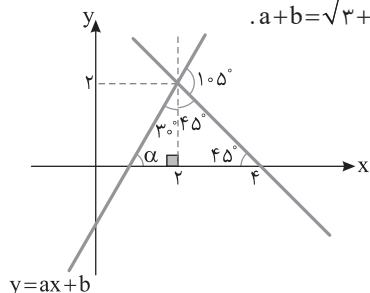
$$x = \frac{1}{2}, \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{y}{x-1} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}-1} = \sqrt{3}$$



۴۱۰- گزینه ۲ با توجه به شکل زیر، واضح است که $\alpha = 6^\circ$ و در نتیجه

$a = \tan \alpha = \tan 6^\circ = \sqrt{3}$ ، یعنی معادله خط $y = \sqrt{3}x + b$ است و چون نقطه $(2, 2)$ روی خط قرار دارد، پس $2 = \sqrt{3} \times 2 + b \Rightarrow b = 2 - 2\sqrt{3}$

بنابراین $a + b = \sqrt{3} + 2 - 2\sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$



۴۱۱- گزینه ۲ با استفاده از اتحاد $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$ مقدار

$\tan \alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 5 \Rightarrow \tan^2 \alpha = 4 \Rightarrow \tan \alpha = \pm 2$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ناحیه چهارم است، پس $\tan \alpha < 0$ ،

در نتیجه $\tan \alpha = -2$. بنابراین $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{1}{2}$ پس

$$\tan \alpha - \cot \alpha = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

۴۱۲- گزینه ۳ با استفاده از اتحاد $\tan \alpha \cot \alpha = 1$ مقدار m را

$$\frac{1}{2m} (m + 3) = 1 \Rightarrow m + 3 = 2m \Rightarrow m = 3$$

حساب می‌کنیم:

بنابراین $\cot \alpha = 6$ و به کمک اتحاد $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha$ مقدار

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + 6^2 = 37 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{37}$$

$\sin^2 \alpha$ را به دست می‌آوریم:

۴۱۳- گزینه ۴ مخرج مشترک می‌گیریم و عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{1 + \sin 10^\circ} + \frac{1}{1 - \sin 10^\circ} = \frac{1 - \sin 10^\circ + 1 + \sin 10^\circ}{(1 + \sin 10^\circ)(1 - \sin 10^\circ)} = \frac{2}{1 - \sin^2 10^\circ} = \frac{2}{\cos^2 10^\circ}$$

۴۱۴- گزینه ۳ در صورت کسر از $\sin 15^\circ$ و در مخرج کسر از

$\cos 15^\circ$ فاکتور می‌گیریم:

$$A = \frac{\sin 15^\circ (1 - \sin^2 15^\circ)}{\cos 15^\circ (1 - \cos^2 15^\circ)} = \frac{\sin 15^\circ \times \cos^2 15^\circ}{\cos 15^\circ \times \sin^2 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \cot 15^\circ$$

۴۱۵- گزینه ۳ راه حل اول در تساوی $3 \sin^2 x = 1 + 4 \cos^2 x$ به

جای $\sin^2 x$ قرار می‌دهیم $1 - \cos^2 x$ و مقدار $\cos^2 x$ را به دست می‌آوریم:

$$3(1 - \cos^2 x) = 1 + 4 \cos^2 x \Rightarrow 3 - 3 \cos^2 x = 1 + 4 \cos^2 x$$

$$7 \cos^2 x = 2 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{2}{7}$$

اکنون به کمک اتحاد $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ مقدار $\tan^2 x$ را حساب می‌کنیم:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{7}{2} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{5}{2}$$

۴۰۶- گزینه ۱ راه حل اول عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A = \frac{3 \cos \alpha + 1}{\cos \alpha + 3} = \frac{3 \cos \alpha + 9}{\cos \alpha + 3} - \frac{8}{\cos \alpha + 3} = 3 - \frac{8}{\cos \alpha + 3}$$

از $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ نتیجه می‌شود

$$2 \leq \cos \alpha + 3 \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{\cos \alpha + 3} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -4 \leq \frac{-8}{\cos \alpha + 3} \leq -2$$

$$-1 \leq 3 - \frac{8}{\cos \alpha + 3} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq A \leq 1$$

بنابراین A نمی‌تواند برابر $\frac{9}{8}$ شود.

راه حل دوم اگر قرار دهیم $A = \frac{9}{8}$ ، آن‌گاه

$$\frac{3 \cos \alpha + 1}{\cos \alpha + 3} = \frac{9}{8} \Rightarrow 24 \cos \alpha + 8 = 9 \cos \alpha + 27$$

$$15 \cos \alpha = 19 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{19}{15}$$

چون مقدار $\cos \alpha$ نمی‌تواند برابر $\frac{19}{15}$ باشد، پس مقدار A هم نمی‌تواند برابر $\frac{9}{8}$

باشد.

۴۰۷- گزینه ۴ می‌دانیم اگر $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ آن‌گاه $\sin \alpha < \cos \alpha$ و

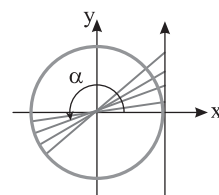
اگر $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ آن‌گاه $\sin \alpha > \cos \alpha$. بنابراین $\sin 20^\circ < \cos 20^\circ$ و

$\sin 70^\circ > \cos 70^\circ$ در نتیجه

$$A = \underbrace{|\sin 20^\circ - \cos 20^\circ|}_{-} - \underbrace{|\sin 70^\circ - \cos 70^\circ|}_{+} = -\sin 20^\circ + \cos 20^\circ - (\sin 70^\circ - \cos 70^\circ) = -\sin 20^\circ + \cos 20^\circ - \sin 70^\circ + \cos 70^\circ$$

چون زاویه‌های 20° و 70° متمم یکدیگرند، پس $\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$ و

$\cos 20^\circ = \sin 70^\circ$ و در نتیجه $A = 0$.



۴۰۸- گزینه ۳ از $180^\circ \leq \alpha < 270^\circ$

نتیجه می‌شود $\tan \alpha \geq 0$ و در نتیجه

$m^2 + m^2 \geq 0$ ، یعنی $m^2(m+1) \geq 0$.

چون $m^2 \geq 0$ همواره درست است، پس کافی

است $m+1 \geq 0$ که در نتیجه $m \geq -1$.

۴۰۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که شیب خط d' برابر $\tan 15^\circ$ و

عرض از مبدأ آن برابر ۲ است. پس معادله آن به صورت $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$

است. بنابراین طول نقطه A که محل برخورد خط d' با محور x است،

به صورت روبه‌رو به دست می‌آید: $0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}x_A + 2 \Rightarrow x_A = 2\sqrt{3}$

از طرف دیگر شیب خط d برابر $\tan 45^\circ$ است و این خط از نقطه A می‌گذرد.

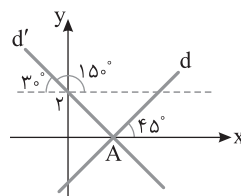
بنابراین معادله این خط به صورت $y = x + b$ است و اگر مختصات نقطه A را

در معادله این خط قرار دهیم، نتیجه می‌شود

$$0 = 2\sqrt{3} + b \Rightarrow b = -2\sqrt{3}$$

پس معادله خط d به صورت $y = x - 2\sqrt{3}$

است.



چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ربع دوم است، پس $\sin \alpha > 0$ و $\cos \alpha < 0$ و در نتیجه $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ پس $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{-\sqrt{6}}{6}$.

۴۲۱- گزینه ۴ به کمک اتحاد $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ مقدار $\sin x$ را

حساب می‌کنیم:

$$1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{9}{13} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{3}{\sqrt{13}}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه x در ناحیه سوم است، پس $\sin x < 0$ ، بنابراین $\sin x = -\frac{3}{\sqrt{13}}$. اکنون با استفاده از اتحاد $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ مقدار

$$\frac{2}{3} = \frac{\cos x}{-\frac{3}{\sqrt{13}}} \Rightarrow \cos x = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

$\cos x$ را حساب می‌کنیم:

$$2 \cos x - \sin x = -\frac{4}{\sqrt{13}} - \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{13}}$$

۴۲۲- گزینه ۱ از اتحاد $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ استفاده می‌کنیم:

$$(\sqrt{k-1})^2 + (\sqrt{2k-3})^2 = 1 \Rightarrow k-1+2k-3=1 \Rightarrow 3k=5 \Rightarrow k=\frac{5}{3}$$

بنابراین $\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ، $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$ و در نتیجه

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{2}$$

۴۲۳- گزینه ۴

$$\frac{(1+\tan 20^\circ)(1-\cot 20^\circ)}{(1+\cot 20^\circ)(1-\tan 20^\circ)} = \frac{1-\cot 20^\circ + \tan 20^\circ - \tan 20^\circ \cot 20^\circ}{1-\tan 20^\circ + \cot 20^\circ - \tan 20^\circ \cot 20^\circ}$$

$$= \frac{1-\cot 20^\circ + \tan 20^\circ - 1}{1-\tan 20^\circ + \cot 20^\circ - 1} = \frac{\tan 20^\circ - \cot 20^\circ}{\cot 20^\circ - \tan 20^\circ} = -1$$

۴۲۴- گزینه ۱ توجه کنید که $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ ، بنابراین

$$\frac{1+\cot^2 x}{\cot x} = \frac{1+\frac{1}{\tan^2 x}}{\frac{1}{\tan x}} = \frac{\tan^2 x + 1}{\tan x}$$

$$\frac{\tan x}{1+\tan^2 x} \times \frac{1+\cot^2 x}{\cot x} = \frac{\tan x}{1+\tan^2 x} \times \frac{\tan^2 x + 1}{\tan x} = 1$$

۴۲۵- گزینه ۱ تساوی داده شده را به صورت $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \sin \alpha$

می‌نویسیم. بنابراین $\cos \alpha = \sin^2 \alpha$ (*)

با استفاده از اتحاد $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ درمی‌آید. پس $\cos \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

$$\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

از تساوی (*) مشخص است که $\cos \alpha$ عددی مثبت است، پس

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

راه حل دوم ابتدا دو طرف معادله داده شده را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$3 \sin^2 x = 1 + 4 \cos^2 x \Rightarrow 3 \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} + 4$$

چون $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ ، پس

$$3 \tan^2 x = 1 + \tan^2 x + 4 \Rightarrow 2 \tan^2 x = 5 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{5}{2}$$

۴۱۶- گزینه ۴ عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + \cot \alpha} = \frac{\sin \alpha (1 + \frac{1}{\cos \alpha})}{\cos \alpha (1 + \frac{1}{\sin \alpha})} = \tan \alpha \left(\frac{1 + \cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \right)$$

$$= \tan^2 \alpha \left(\frac{1 + \cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \right)$$

واضح است که عبارت‌های $1 + \cos \alpha$ ، $1 + \sin \alpha$ و $\tan^2 \alpha$ همگی همواره نامنفی هستند. پس در هر چهار ناحیه، عبارت فوق نامنفی است.

۴۱۷- گزینه ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha - \cos \alpha (1 - \cos \alpha)}{(1 - \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha) \sin \alpha}$$

$$= \frac{1 - \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha) \sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

۴۱۸- گزینه ۲ عبارت A را ساده می‌کنیم:

$$A = \cot^2 x + \underbrace{\cot^2 x \tan^2 x}_1 + \tan^2 x + \underbrace{\tan^2 x \cot^2 x}_1$$

$$= \tan^2 x + \cot^2 x + 2 = (\tan x + \cot x)^2$$

بنابراین $\sqrt{A} = \sqrt{(\tan x + \cot x)^2} = |\tan x + \cot x|$. چون انتهای

کمان روبه‌رو به زاویه x در ناحیه دوم قرار دارد، پس $\tan x < 0$ و $\cot x < 0$. در نتیجه $\tan x + \cot x < 0$ ، بنابراین $\sqrt{A} = -\tan x - \cot x$

۴۱۹- گزینه ۳ طرفین تساوی $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ را به توان دو

می‌رسانیم:

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}$$

$$1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{8}$$

بنابراین

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1 - 2\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{23}{32}$$

۴۲۰- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

پس

$$\frac{2}{3} = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{6}$$

$$(\sin \alpha \cos \alpha)^2 = \frac{1}{6} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$$

۴۳۱- گزینه ۳ از تساوی $\frac{\Delta \sin x}{2 \sin x + \cos x} = \frac{1}{2}$ نتیجه می‌شود $\Delta \sin x = \sin x + \cos x$ و در نتیجه $\sin x = 2 \sin x + \cos x$ بنابرین $\sin x = -\cos x$ پس $\cot x = -1$

۴۳۲- گزینه ۱ از اتحاد $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ نتیجه می‌شود

$$1 + \left(\sqrt{\frac{m+2}{2m+5}} \right)^2 = \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{m+2}{2m+5}} \right)^2}$$

$$1 + \frac{m+2}{2m+5} = \frac{2m+5}{m+2} \Rightarrow \frac{2m+5+m+2}{2m+5} = \frac{2m+5}{m+2}$$

$$\frac{3m+7}{2m+5} = \frac{2m+5}{m+2} \Rightarrow 3m+7 = 2m+5 \Rightarrow m = -2$$

(توجه کنید که $3m+7$ نمی‌تواند صفر باشد). بنابرین

$$\tan x = \frac{-3+2}{2(-2)+5} = 1$$

۴۳۳- گزینه ۲ با استفاده از اتحاد $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ و مخرج

مشترک‌گیری به دست می‌آید

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)}$$

$$= \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

۴۳۴- گزینه ۴ چون $\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ = 1$ می‌توان نوشت

$$\frac{\sin^2 15^\circ}{1 + \cos 15^\circ} - \frac{\cos^2 15^\circ}{1 + \sin 15^\circ} + \cos 15^\circ = \frac{1 - \cos^2 15^\circ}{1 + \cos 15^\circ} - \frac{1 - \sin^2 15^\circ}{1 + \sin 15^\circ} + \cos 15^\circ$$

$$= \frac{(1 - \cos 15^\circ)(1 + \cos 15^\circ)}{1 + \cos 15^\circ} - \frac{(1 - \sin 15^\circ)(1 + \sin 15^\circ)}{1 + \sin 15^\circ} + \cos 15^\circ$$

$$= 1 - \cos 15^\circ - (1 - \sin 15^\circ) + \cos 15^\circ = \sin 15^\circ$$

۴۳۵- گزینه ۲ صورت و مخرج کسر A را بر $\cos^3 x$ تقسیم می‌کنیم

و از اتحادهای $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ استفاده می‌کنیم:

$$A = \frac{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} - \frac{2 \cos x}{\cos^3 x}}{\frac{4 \sin x}{\cos^3 x} - \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x}} = \frac{\frac{\sin^3 x - 2 \cos^2 x}{\cos^3 x}}{\frac{4 \sin x - 1}{\cos^3 x}} = \frac{\sin^3 x - 2 \cos^2 x}{4 \sin x - 1}$$

$$= \frac{\tan^3 x - 2(1 + \tan^2 x)}{4 \tan x - 1} = \frac{3^3 - 2(1 + 3^2)}{4 \times 3 - 1} = \frac{27 - 20}{11} = \frac{7}{11}$$

۴۳۶- گزینه ۲ راه حل اول توجه کنید که

$$\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)$$

$$= (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)$$

بنابرین باید حاصل $\sin x \cos x$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x = \frac{4}{9}$$

بنابرین $\sin x \cos x = \frac{5}{18}$. در این صورت حاصل عبارت مورد نظر برابر

$$\sin^3 x - \cos^3 x = \left(\frac{2}{3} \right) \left(1 + \frac{5}{18} \right) = \frac{2}{3} \times \frac{23}{18} = \frac{23}{27}$$

۴۲۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که اگر دو طرف تساوی فرض مسئله را به توان دو برسانیم، نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{9} = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$$

بنابرین $\sin x \cos x = \frac{4}{9}$. اکنون توجه کنید که

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

بنابرین عبارت مورد نظر برابر با $\frac{9}{4}$ است.

۴۲۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2$$

در نتیجه $(\sin x + \cos x)^2 = \frac{23}{16}$. بنابرین $(\frac{\sqrt{23}}{4})^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 2$

چون x زاویه‌ای حاده است، پس $\cos x > 0$ و $\sin x > 0$. بنابرین

$$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{23}}{4}$$

۴۲۸- گزینه ۳ دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\tan x + \cot x)^2 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x + 2 \tan x \cot x = 5$$

$$\tan^2 x + \cot^2 x + 2 = 5$$

پس $\tan^2 x + \cot^2 x = 3$. اکنون دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\tan^2 x + \cot^2 x)^2 = 3^2 \Rightarrow \tan^4 x + \cot^4 x + 2 \tan^2 x \cot^2 x = 9$$

$$\tan^4 x + \cot^4 x + 2 = 9$$

پس $\tan^4 x + \cot^4 x = 7$

۴۲۹- گزینه ۳ عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A = \cos \alpha - \sqrt{\tan^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}$$

$$= \cos \alpha - \sqrt{\tan^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \cos \alpha - |\tan \alpha \sin \alpha|$$

چون $18^\circ < \alpha < 27^\circ$ ، پس $\sin \alpha < 0$ و $\tan \alpha > 0$. در نتیجه $\sin \alpha \tan \alpha < 0$

$$A = \cos \alpha + \tan \alpha \sin \alpha = \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

۴۳۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A = \sqrt{1 + 2\sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{\cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}}$$

$$= \sqrt{1 + 2\sqrt{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}} = \sqrt{1 + 2|\sin \alpha \cos \alpha|}$$

چون $36^\circ < \alpha < 45^\circ$ ، پس $\sin \alpha < 0$ و $\cos \alpha > 0$. بنابرین

$\sin \alpha \cos \alpha < 0$ پس

$$A = \sqrt{1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$= \sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = |\sin \alpha - \cos \alpha|$$

چون $\sin \alpha < 0$ و $\cos \alpha > 0$ ، پس $\sin \alpha - \cos \alpha < 0$ و در نتیجه

$$A = -\sin \alpha + \cos \alpha$$

۴۴۰- گزینه ۳ به جای $\cos^2 x$ قرار می‌دهیم $1 - \sin^2 x$. عبارت به شکل زیر است:

$$A = 1 - \sin^2 x - 2 \sin x = 1 - (\sin^2 x + 2 \sin x + 1 - 1)$$

$$= 1 - (\sin x + 1)^2 + 1 = 2 - (\sin x + 1)^2$$

چون $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، پس

$$0 \leq \sin x + 1 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq (\sin x + 1)^2 \leq 4 \Rightarrow -4 \leq -(\sin x + 1)^2 \leq 0$$

$$-2 \leq 2 - (\sin x + 1)^2 \leq 2 \Rightarrow -2 \leq A \leq 2$$

بنابراین اختلاف حداکثر و حداقل مقدار A برابر ۴ واحد است.

۴۴۱- گزینه ۱ راه حل اول از تساوی $\tan x = \frac{1}{3}$ نتیجه می‌شود

یعنی $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{3}$ ، $\cos x = 3 \sin x$. در عبارت A به جای $\cos x$ قرار

می‌دهیم $3 \sin x$. در این صورت $A = \frac{2 \sin x + 3 \sin x}{\sin x + 9 \sin x} = \frac{5 \sin x}{10 \sin x} = \frac{1}{2}$

راه حل دوم صورت و مخرج عبارت A را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم تا A بر حسب $\tan x$ نوشته شود:

$$A = \frac{\frac{2 \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{3 \cos x}{\cos x}} = \frac{2 \tan x + 1}{\tan x + 3}$$

اکنون با قرار دادن $\frac{1}{3}$ به جای $\tan x$ در عبارت فوق، مقدار A به دست

$$A = \frac{\frac{2}{3} + 1}{\frac{1}{3} + 3} = \frac{1}{2}$$

۴۴۲- گزینه ۲ راه حل اول توجه کنید که $\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$ و

$$\cot 15^\circ = \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}$$

$$A = \frac{\cot^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ}{\tan^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ} = \frac{\frac{\cos^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ} - \cos^2 15^\circ}{\frac{\sin^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ} - \sin^2 15^\circ} = \frac{\frac{\cos^2 15^\circ (1 - \sin^2 15^\circ)}{\sin^2 15^\circ}}{\frac{\sin^2 15^\circ (1 - \cos^2 15^\circ)}{\cos^2 15^\circ}}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ \sin^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ}}{\frac{\sin^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}} = \frac{\frac{\cos^2 15^\circ (1 - \sin^2 15^\circ)}{\sin^2 15^\circ}}{\frac{\sin^2 15^\circ (1 - \cos^2 15^\circ)}{\cos^2 15^\circ}}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ}}{\frac{\sin^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}} = \frac{\cos^4 15^\circ}{\sin^4 15^\circ} = \cot^4 15^\circ$$

راه حل دوم کسر را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A = \frac{\cot^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ}{\tan^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ} = \frac{\cot^2 15^\circ (1 - \sin^2 15^\circ)}{\tan^2 15^\circ (1 - \cos^2 15^\circ)} = \frac{\cot^2 15^\circ \cos^2 15^\circ}{\tan^2 15^\circ \sin^2 15^\circ} = \cot^4 15^\circ$$

راه حل دوم طرفین تساوی $\sin x - \cos x = \frac{2}{3}$ را به توان سه می‌رسانیم

$$(\sin x - \cos x)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\sin^3 x - 3 \sin^2 x \cos x + 3 \sin x \cos^2 x - \cos^3 x = \frac{8}{27}$$

$$\sin^3 x - \cos^3 x - 3 \sin x \cos x (\sin x - \cos x) = \frac{8}{27}$$

بنابراین باید حاصل $\sin x \cos x$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x = \frac{4}{9}$$

بنابراین $\sin x \cos x = \frac{5}{18}$ در نتیجه

$$\sin^3 x - \cos^3 x - 3 \times \frac{5}{18} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27} \Rightarrow \sin^3 x - \cos^3 x = \frac{23}{27}$$

۴۳۷- گزینه ۴ از اتحاد $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$ استفاده

می‌کنیم:

$$\tan^3 x - \cot^3 x = (\tan x - \cot x)^3 + 3 \tan x \cot x (\tan x - \cot x)$$

چون $\tan x \cot x = 1$ و $\tan x - \cot x = 3$ ، پس

$$\tan^3 x - \cot^3 x = 3^3 + 3 \times 1 \times 3 = 36$$

۴۳۸- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $t = \tan \alpha$ ، آن‌گاه $\cot \alpha = \frac{1}{t}$ و

معادله داده شده به صورت $t - \frac{2}{t} = \sqrt{2}$ درمی‌آید. دو طرف این معادله را در t

ضرب کرده و آن را حل می‌کنیم:

$$t^2 - 2 = \sqrt{2}t \Rightarrow t^2 - \sqrt{2}t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{10}}{2}$$

چون انتهای کمان نظیر زاویه α در ربع اول است، پس $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2}$

قابل قبول نیست. در نتیجه $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2}$

بنابراین $\tan \alpha = \sqrt{2} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$ در نتیجه

$$\tan^2 \alpha = \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{2} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{2} = 3 + \sqrt{5}$$

۴۳۹- گزینه ۳ ابتدا صورت و مخرج کسر دوم را ساده‌تر می‌کنیم:

$$1 - 2 \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x (1 - \tan^2 x) = \cos^2 x \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

در نتیجه دومین کسر برابر با ۱ است. بنابراین حاصل عبارت برابر است با

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + 1 = \frac{2 \sin x}{\sin x - \cos x}$$

با تقسیم صورت و مخرج این کسر بر $\cos x$ معلوم می‌شود که کسر برابر

$$\frac{2 \tan x}{\tan x - 1}$$

۴۴۷- گزینه ۲ دو طرف تساوی داده شده را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{3 \cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos^2 x}$$

با توجه به اتحادهای $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ ، تساوی

قبلی را طوری می‌نویسیم که در آن فقط $\tan x$ وجود داشته باشد:

$$\tan^2 x + 3 - 2 \tan x = 2(1 + \tan^2 x) \Rightarrow \tan^2 x + 2 \tan x - 1 = 0$$

$$\text{بنابراین } \tan x = -1 \pm \sqrt{2}$$

۴۴۸- گزینه ۲ عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{1 - 2\sqrt{\sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}} = \sqrt{1 - 2\sqrt{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}} \\ &= \sqrt{1 - 2\sqrt{(\sin \alpha \cos \alpha)^2}} = \sqrt{1 - 2|\sin \alpha \cos \alpha|} \end{aligned}$$

چون $\alpha = 200^\circ$ ، پس $\sin \alpha < 0$ ، $\cos \alpha < 0$ و در نتیجه $\sin \alpha \cos \alpha > 0$.

بنابراین عبارت A به شکل زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{1 - 2\sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha} \\ &= \sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = |\sin \alpha - \cos \alpha| = |\sin 200^\circ - \cos 200^\circ| \end{aligned}$$

توجه کنید که $\sin 200^\circ - \cos 200^\circ > 0$ ، بنابراین $A = \sin 200^\circ - \cos 200^\circ$.

۴۴۹- گزینه ۳ ابتدا صورت و مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

صورت کسر

$$\begin{aligned} &\sin^3 40^\circ - \cos^3 40^\circ \\ &= (\sin 40^\circ - \cos 40^\circ)(\sin^2 40^\circ + \sin 40^\circ \cos 40^\circ + \cos^2 40^\circ) \\ &= (\sin 40^\circ - \cos 40^\circ)(1 + \sin 40^\circ \cos 40^\circ) \end{aligned}$$

مخرج کسر

$$\cos 40^\circ + \cos^2 40^\circ \sin 40^\circ = \cos 40^\circ (1 + \cos 40^\circ \sin 40^\circ)$$

بنابراین حاصل کسر برابر است با

$$\frac{\sin 40^\circ - \cos 40^\circ}{\cos 40^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} - 1 = \tan 40^\circ - 1$$

در نتیجه حاصل عبارت مورد نظر برابر $\tan 40^\circ$ است.

۴۵۰- گزینه ۲ توجه کنید که بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$\begin{aligned} &\frac{\tan^3 x - \cot^3 x}{\tan x - \cot x} \\ &= \frac{(\tan x - \cot x)(\tan^2 x + \tan x \cot x + \cot^2 x)}{\tan x - \cot x} \\ &= \tan^2 x + 1 + \cot^2 x = 6 \end{aligned}$$

بنابراین $\tan^2 x + \cot^2 x = 6$ در نتیجه

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \cot^2 x + 1 + \tan^2 x \\ &= 2 + \tan^2 x + \cot^2 x = 2 + 6 = 8 \end{aligned}$$

۴۵۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که 36° برابر با $\frac{36^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{5}$ رادیان

است. بنابراین اندازه زاویه سوم مثلث برابر است با $\pi - (\frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{5}) = \frac{\pi}{2}$

این زاویه از بقیه بزرگ‌تر است.

۴۴۳- گزینه ۲ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} &(\frac{1}{\cos 20^\circ} + \tan 20^\circ)(1 - \sin 20^\circ) = (\frac{1}{\cos 20^\circ} + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ})(1 - \sin 20^\circ) \\ &= \frac{1}{\cos 20^\circ}(1 + \sin 20^\circ)(1 - \sin 20^\circ) = \frac{1}{\cos 20^\circ}(1 - \sin^2 20^\circ) \\ &= \frac{1}{\cos 20^\circ}(\cos^2 20^\circ) = \cos 20^\circ \end{aligned}$$

۴۴۴- گزینه ۳ راه حل اول فرض کنید

$$B = \sqrt{1 + \cos 36^\circ} + \sqrt{1 - \cos 36^\circ}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} B^2 &= 1 + \cos 36^\circ + 1 - \cos 36^\circ + 2\sqrt{(1 - \cos 36^\circ)(1 + \cos 36^\circ)} \\ &= 2 + 2\sqrt{1 - \cos^2 36^\circ} = 2 + 2\sqrt{\sin^2 36^\circ} = 2 + 2\sin 36^\circ \end{aligned}$$

چون $B > 0$ ، پس $B = \sqrt{2(1 + \sin 36^\circ)}$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر با $\sqrt{2}$ است.

راه حل دوم می‌دانیم (درس هفتم این فصل را ببینید)

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x, \quad 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

بنابراین

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{1 + \cos 36^\circ} + \sqrt{1 - \cos 36^\circ}}{\sqrt{1 + \sin 36^\circ}} \\ &= \frac{\sqrt{2\cos^2 18^\circ} + \sqrt{2\sin^2 18^\circ}}{\sqrt{2\cos^2 18^\circ + \cos^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ}} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\cos 18^\circ + \sin 18^\circ)}{\sqrt{2}(\cos 18^\circ + \sin 18^\circ)} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

۴۴۵- گزینه ۱ راه حل اول معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$3(1 - \cos^2 \alpha) - 5\cos \alpha + 5 = 0 \Rightarrow 3\cos^2 \alpha + 5\cos \alpha - 8 = 0$$

اگر فرض کنیم $t = \cos \alpha$ ، می‌توانیم معادله را به شکل $3t^2 + 5t - 8 = 0$ بنویسیم که چون مجموع ضرایب معادله صفر است، پس یکی از جواب‌های آن

$t = 1$ و دیگری $t = \frac{-8}{3}$ است. چون $\cos \alpha = -\frac{8}{3}$ قابل قبول نیست، پس

$\cos \alpha = 1$ و در نتیجه $\cos^6 \alpha = 1$.

راه حل دوم $\alpha = 0$ در معادله صدق می‌کند، پس کافی است مقدار $\cos^6 \alpha$ را به ازای $\alpha = 0$ حساب کنیم، که برابر ۱ می‌شود.

۴۴۶- گزینه ۳ دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\tan x + \cot x)^2 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x + 2 \underbrace{\tan x \cot x}_1 = 5$$

$$\tan^2 x + \cot^2 x + 2 = 5$$

پس $\tan^2 x + \cot^2 x = 3$. اکنون دو طرف این تساوی را به توان سه می‌رسانیم:

$$(\tan^2 x + \cot^2 x)^3 = 3^3$$

$$\tan^6 x + 3\tan^4 x \cot^2 x + 3\tan^2 x \cot^4 x + \cot^6 x = 27$$

$$\tan^6 x + \cot^6 x + 3\tan^2 x \cot^2 x (\tan^2 x + \cot^2 x) = 27$$

با توجه به اینکه $\tan^2 x \cot^2 x = 1$ و $\tan^2 x + \cot^2 x = 3$ نتیجه می‌شود

$$\tan^6 x + \cot^6 x + 9 = 27 \Rightarrow \tan^6 x + \cot^6 x = 18$$

۴۵۸- گزینه ۲ طول کمان AB برابر است با $4\pi\alpha$. از طرف دیگر طول کمان ACB برابر است با محیط دایره منهای طول کمان AB یعنی $8\pi^2 - 4\pi\alpha$. بنابراین

$$8\pi^2 - 4\pi\alpha = 4\pi\alpha + \pi \Rightarrow 8\alpha = 8\pi - 1 \Rightarrow \alpha = \pi - \frac{1}{8}$$

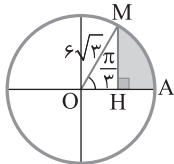
۴۵۹- گزینه ۱ ۱۶ کابین در این چرخ و فلک وجود دارد. پس زاویه بین دو کابین متوالی برابر $\frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$ است. بنابراین زاویه متناظر به کمان P_1P_2 برابر $\frac{7\pi}{8}$ است. بنابراین

$$\widehat{P_1P_2} = r\theta = 40 \times \frac{7\pi}{8} = 35\pi \text{ متر}$$

۴۶۰- گزینه ۳ با توجه به شکل زیر،

$$MH = 6\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} = 9, \quad \widehat{AM} = 6\sqrt{3} \times \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}\pi$$

$$OH = 6\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow AH = 6\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$



بنابراین اندازه محیط قسمت رنگی برابر است با

$$9 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\pi = 9 + \sqrt{3}(3 + 2\pi)$$

۴۶۱- گزینه ۱ ابتدا 400° را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{400^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{20\pi}{9}$$

بنابراین اگر اندازه زاویه بزرگتر برحسب رادیان برابر X و اندازه زاویه کوچکتر برحسب رادیان برابر Y باشد، آن‌گاه

$$\begin{cases} x+y = \frac{20\pi}{9} \\ x-y = \frac{4\pi}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4\pi}{3} \\ y = \frac{8\pi}{9} \end{cases}$$

پس اندازه زاویه بزرگتر برحسب رادیان $\frac{4\pi}{3}$ است.

۴۶۲- گزینه ۲ فرض می‌کنیم اندازه زاویه برحسب درجه برابر D و

برحسب رادیان برابر R باشد. بنابراین $R = \frac{\pi}{180^\circ} D = \frac{5\pi}{36}$. از طرف دیگر،

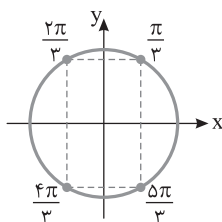
$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{\pi}{180^\circ} D - \frac{5\pi}{36}}{\pi} \Rightarrow D = \frac{180^\circ}{180^\circ} D - \frac{5 \times 180^\circ}{36}$$

$$\frac{5}{4} D = 225^\circ \Rightarrow D = 225^\circ$$

۴۶۳- گزینه ۱ با توجه به شکل

مقابل، چهارضلعی حاصل مستطیل است.



۴۵۲- گزینه ۴ اگر اندازه زاویه برحسب درجه برابر D و برحسب رادیان

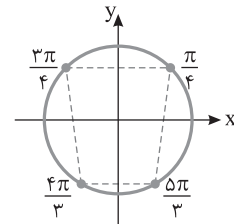
$$\text{برابر R باشد، آن‌گاه } D \times R = \frac{5\pi}{4}, \text{ بنابراین } R = \frac{5\pi}{4D}$$

$$\text{از طرف دیگر، } \frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \text{، بنابراین}$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{5\pi}{4D} \Rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{5}{4D} \Rightarrow D^2 = \frac{900^\circ}{4} \Rightarrow D = 15^\circ$$

بنابراین اندازه این زاویه برابر 15° است.

۴۵۳- گزینه ۴ با توجه به شکل زیر، چهارضلعی حاصل دوزنقه است.



۴۵۴- گزینه ۱ می‌دانیم اگر به زاویه‌ای مضرب‌های زوج π را اضافه یا

از آن کم کنیم، زاویه جدید، با زاویه اولیه هم‌انتهای است. اکنون توجه کنید که

$$-56^\circ + 4\pi = -56^\circ + 72^\circ = 16^\circ$$

از طرف دیگر، چون اختلاف 56° با هیچ‌یک از زاویه‌های داده شده دیگر مضربی زوج از π نیست، پس با هیچ‌یک از آن‌ها هم‌انتهای نیست.

۴۵۵- گزینه ۴ زاویه بین هر دو کابین متوالی $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$ رادیان است. از

طرف دیگر، $\frac{48\pi}{5} = 8\pi + \frac{8\pi}{5} = 8\pi + 16 \times \frac{\pi}{5}$. وقتی چرخ و فلک ۴ دور کامل

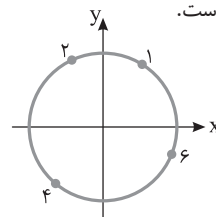
می‌زند، یعنی 8π رادیان می‌چرخد، هر کابین در جای اولیه خود قرار می‌گیرد.

سپس چرخ و فلک به اندازه $16 \times \frac{\pi}{5}$ رادیان دیگر دوران می‌کند که کابین شماره

یک به مکان فعلی ۱۶ کابین جلوتر، یعنی کابین هفدهم منتقل می‌شود.

۴۵۶- گزینه ۳ با توجه به شکل زیر، واضح است که عرض نقطه‌ای که

انتهای کمان نظیر زاویه ۴ رادیان است، کوچک‌تر از عرض بقیه نقاط است، پس $\sin 4$ از بقیه کوچک‌تر است.



۴۵۷- گزینه ۳ راه‌حل اول در هر ساعت عقربه ساعت‌شمار $\frac{1}{12}$ دور

می‌چرخد که معادل $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ رادیان است. بنابراین

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow x = 225 \text{ دقیقه}$$

راه‌حل دوم می‌دانیم در هر دقیقه، عقربه ساعت‌شمار $(\frac{1}{5})^\circ$ یا $\frac{\pi}{360}$ رادیان

$$\text{طی می‌کند، پس } \frac{1}{x} = \frac{360}{225} \text{، بنابراین دقیقه } x = \frac{5\pi}{360} = \frac{\pi}{72}$$

راه حل دوم می‌دانیم عقربه ساعت‌شمار در هر دقیقه $(\frac{\pi}{180})^\circ$ یا $\frac{\pi}{360}$ رادیان طی می‌کند. از طرف دیگر از ساعت ۹ تا ساعت $10:20'$ برابر 80 دقیقه است، پس

$$\frac{\pi}{180} = \frac{80}{x} \Rightarrow x = 80 \times \frac{\pi}{360} = \frac{2\pi}{9} \text{ rad}$$

۴۶۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{25^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{5\pi}{36} \text{ rad}$$

بنابراین $\widehat{AB} = 6 \times \frac{5\pi}{36}$ و $\widehat{CD} = 9 \times \frac{5\pi}{36}$ پس

$$\widehat{CD} - \widehat{AB} = \frac{45\pi}{36} - \frac{30\pi}{36} = \frac{15\pi}{36} = \frac{5\pi}{12}$$

۴۶۹- گزینه ۴ زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان AB را α فرض می‌کنیم. مساحت قسمت رنگی از تفاضل مساحت مثلث OAC و قطاع OAB به دست می‌آید:

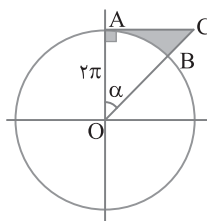
$$\triangle OAC: \tan \alpha = \frac{AC}{2\pi} \Rightarrow AC = 2\pi \tan \alpha$$

$$S_{OAC} = \frac{OA \times AC}{2} = \frac{2\pi \times 2\pi \tan \alpha}{2} = 2\pi^2 \tan \alpha$$

$$S_{\text{قطاع}} = \frac{1}{2} r^2 \alpha = \frac{1}{2} (2\pi)^2 \alpha = 2\pi^2 \alpha$$

بنابراین $2\pi^2 (\tan \alpha - \alpha) = 2\pi^2 (1 - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \tan \alpha - \alpha = 1 - \frac{\pi}{4}$

پس $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ، در نتیجه طول کمان AB برابر است با $L = r\alpha = 2\pi \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{2}$



۴۷۰- گزینه ۴ با جابه‌جایی نقطه A به اندازه 20° یا $\frac{\pi}{9}$ رادیان، ریسمان

به اندازه $l = r\theta = 8 \times \frac{\pi}{9} = \frac{8\pi}{9}$ سانتی‌متر جابه‌جا می‌شود. در نتیجه اگر فرض

کنیم چرخ کوچک به اندازه α رادیان جابه‌جا شده است، معلوم می‌شود

$$\frac{8\pi}{9} = 6\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{4\pi}{27}$$

بنابراین اندازه‌ای که چرخ کوچک‌تر جابه‌جا شده است برحسب درجه برابر است با

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow D = 180^\circ \times \frac{R}{\pi} = 180^\circ \times \frac{4}{27} = \frac{80}{3}$$

۴۷۱- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

بنابراین

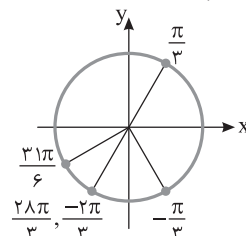
$$A = -\tan \alpha \cot \alpha + (-\sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha$$

$$= -\tan \alpha \cot \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = -1 + 1 = 0$$

۴۶۴- گزینه ۳ اگر به زاویه‌ای مضربی زوج از π را اضافه یا از آن کم کنیم، زاویه جدید با زاویه اولیه هم‌انتهای است. اکنون توجه کنید که $\frac{28\pi}{3} = 9\pi + \frac{\pi}{3}$ و $\frac{31\pi}{6} = 5\pi + \frac{\pi}{6}$. بنابراین انتهای کمان‌های نظیر زاویه‌های

داده شده مانند شکل روبه‌رو است. از روی شکل معلوم است که انتهای کمان

نظیر زاویه‌های $\frac{28\pi}{3}$ و $\frac{31\pi}{6}$ یکسان است.



۴۶۵- گزینه ۴ توجه کنید که

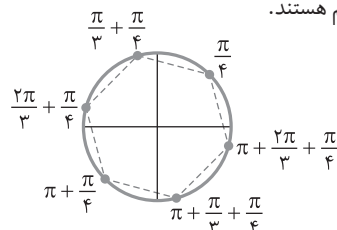
$$k=3s \Rightarrow \alpha = \frac{3s\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = s\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$k=3s+1 \Rightarrow \alpha = \frac{(3s+1)\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = s\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$$

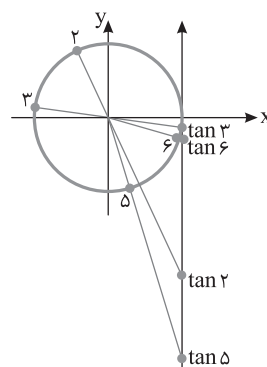
$$k=3s+2 \Rightarrow \alpha = \frac{(3s+2)\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = s\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$$

بنابراین انتهای کمان نظیر زاویه‌های مورد نظر مطابق شکل زیر رأس‌های یک

شش ضلعی منتظم هستند.



۴۶۶- گزینه ۲ با توجه به شکل زیر $\tan 3$ بزرگ‌تر از اعداد دیگر است.



۴۶۷- گزینه ۱ راه حل اول چون عقربه ساعت‌شمار در هر ساعت $\frac{1}{12}$

دایره را طی می‌کند، پس در هر ساعت $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ رادیان را طی می‌کند. بنابراین

در هر 20 دقیقه، $\frac{20}{60} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{18}$ رادیان را طی می‌کند، یعنی از ساعت ۹ تا

ساعت $10:20'$ که یک ساعت و 20 دقیقه زمان گذشته است، عقربه

ساعت‌شمار زاویه‌ای به اندازه $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{18}$ رادیان را طی می‌کند، یعنی زاویه‌ای به

اندازه $\frac{2\pi}{9}$ رادیان.

۴۸۰- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = \pi$ ، آن‌گاه

$\cos \beta = -\cos \alpha$ ، در نتیجه $\cos \alpha + \cos \beta = 0$ ، اکنون توجه کنید که

$$\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi \Rightarrow \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = 0$$

$$\frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi \Rightarrow \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = 0$$

پس $A = 0$.

۴۸۱- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\sin(3\pi - \alpha) = \sin \alpha, \sin(4\pi + \alpha) = \sin \alpha, \sin(\Delta\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

بنابراین $A = 3\sin \alpha + 4\sin \alpha - 5\sin \alpha = 2\sin \alpha$.

۴۸۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

$$A = \frac{3\cot \alpha - \cot \alpha}{2\tan \alpha - \tan \alpha} = \frac{2\cot \alpha}{\tan \alpha} = 2\cot^2 \alpha$$

۴۸۳- گزینه ۴ ابتدا تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 2\sin(2\pi - \alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - 2\cos(3\pi + \alpha)} = 3 \Rightarrow \frac{\cos \alpha - 2\sin \alpha}{-\sin \alpha + 2\cos \alpha} = 3$$

$$\cos \alpha - 2\sin \alpha = -3\sin \alpha + 6\cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha = 5\cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 5$$

$$\tan\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) = -\tan\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = -\cot \alpha = -\frac{1}{5}$$

۴۸۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\alpha = \frac{3\pi}{2} + \beta \Rightarrow \cot \alpha = \cot\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right) = -\tan \beta$$

بنابراین

$$\frac{1}{1 - \cot \alpha} + \frac{1}{1 + \cot \beta} = \frac{1}{1 + \tan \beta} + \frac{1}{1 + \cot \beta} = \frac{1 + \cot \beta + 1 + \tan \beta}{(1 + \tan \beta)(1 + \cot \beta)}$$

$$= \frac{2 + \tan \beta + \cot \beta}{1 + \cot \beta + \tan \beta + \tan \beta \cot \beta} = \frac{2 + \tan \beta + \cot \beta}{2 + \tan \beta + \cot \beta} = 1$$

۴۸۵- گزینه ۴ توجه کنید که $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$ ، در نتیجه

از فرض مسئله نتیجه می‌شود $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ ، اکنون توجه کنید که

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{169}{144} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{25}{144}$$

چون α در ناحیه دوم قرار دارد، پس $\tan \alpha < 0$ ، بنابراین $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$.

۴۸۶- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \cos(2 \times 36^\circ - 12^\circ)$$

$$= \cos 12^\circ = -\cos 6^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cot 67.5^\circ = \cot(2 \times 36^\circ - 4.5^\circ) = -\cot 4.5^\circ = -1$$

$$\tan 94.5^\circ = \tan(3 \times 36^\circ - 13.5^\circ) = -\tan 13.5^\circ = \tan 4.5^\circ = 1$$

$$\sin(-33^\circ) = -\sin 33^\circ = -\sin(36^\circ - 3^\circ) = \sin 3^\circ = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

بنابراین حاصل کسر مورد نظر برابر است با $-\frac{3}{2}$.

۴۷۲- گزینه ۲ چون $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ، پس

$$\cos(x - 90^\circ) = \cos(90^\circ - x) = \sin x$$

همچنین، $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$ ، پس

$$\cot(-x - 180^\circ) = -\cot(180^\circ + x) = -\cot x$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sin x(-\cot x) = -\cos x$$

۴۷۳- گزینه ۴ می‌توان نوشت

$$A = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) + \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) + \sin(2\pi - \theta)} = \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta - \cos \theta}{2\sin \theta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cot \theta$$

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\tan \theta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times \frac{3}{4}} = -\frac{3}{4}$$

۴۷۴- گزینه ۲ چون $x + 3y = \frac{\pi}{2}$ ، در نتیجه $2x + 3y = \frac{\pi}{2} + x$ ، پس

$$\tan(2x + 3y) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$$

۴۷۵- گزینه ۳ توجه کنید که $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$ و

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$-\sin x = 2\cos x \Rightarrow \tan x = -2$$

۴۷۶- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\cos 51^\circ = \cos(36^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$$

$$= \cos(18^\circ - 3^\circ) = -\cos 3^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴۷۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\cos \frac{43\pi}{6} = \cos\left(7\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴۷۸- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\sin \frac{23\pi}{6} = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{16\pi}{3} = \cos\left(5\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{35\pi}{4} = \tan\left(9\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\cot\left(-\frac{43\pi}{4}\right) = -\cot \frac{43\pi}{4} = -\cot\left(11\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -(-\cot \frac{\pi}{4}) = 1$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)(1) = -\frac{1}{4}$$

۴۷۹- گزینه ۲ توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = \pi$ ، آن‌گاه $\sin \alpha = \sin \beta$ ، بنابراین

$$\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi \Rightarrow \sin \frac{4\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{5}, \quad \frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi \Rightarrow \sin \frac{3\pi}{5} = \sin \frac{2\pi}{5}$$

$$A = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5}} = -1$$

در نتیجه $A = -1$.

۴۹۳- گزینه ۲ راه حل اول در مثلث قائم الزاویه اندازه یکی از زوایا 90°

است. مثلاً فرض کنید $\hat{A}=90^\circ$. پس $\sin \hat{A}=1$ و $\cos \hat{A}=0$. در این صورت زاویه‌های B و C متمم یکدیگرند، پس $\sin^2 \hat{C}=\cos^2 \hat{B}$. بنابراین ساده شده عبارت به شکل زیر است:

$$\frac{\cos^2 \hat{A}+\cos^2 \hat{B}+\cos^2 \hat{C}}{\sin^2 \hat{A}+\sin^2 \hat{B}+\sin^2 \hat{C}}=\frac{0+\sin^2 \hat{C}+\cos^2 \hat{C}}{1+\sin^2 \hat{B}+\cos^2 \hat{B}}=\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

راه حل دوم مثلث ABC را با زاویه‌های زیر در نظر بگیرید:

$$\hat{A}=90^\circ, \quad \hat{B}=45^\circ, \quad \hat{C}=45^\circ$$

$$\frac{\cos^2 \hat{A}+\cos^2 \hat{B}+\cos^2 \hat{C}}{\sin^2 \hat{A}+\sin^2 \hat{B}+\sin^2 \hat{C}}=\frac{0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

در این صورت

۴۹۴- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\sin a=\sin\left(\frac{5\pi}{2}-b\right)=\cos b, \quad \tan a=\tan\left(\frac{5\pi}{2}-b\right)=\cot b$$

بنابراین

$$\frac{\sin a+\tan a \tan b-1}{\sin b-\cos^2 a-\cos^2 b+1}=\frac{\cos b+\cot b \tan b-1}{\sin b-\cos^2 a-\sin^2 a+1}$$

$$=\frac{\cos b+1-1}{\sin b-1+1}=\frac{\cos b}{\sin b}=\cot b$$

۴۹۵- گزینه ۴ توجه کنید که

$$3a+2b=\pi \Rightarrow a+2(a+b)=\pi \Rightarrow \frac{a}{2}+(a+b)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{a}{2}=\frac{\pi}{2}-(a+b)$$

$$\sin \frac{a}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-(a+b)\right)=\cos(a+b)=\frac{3}{5}$$

بنابراین

۴۹۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\sin 41^\circ=\sin(36^\circ+5^\circ)=\sin 5^\circ=\sin(90^\circ-40^\circ)=\cos 40^\circ$$

$$\sin 40^\circ=\sin(36^\circ+4^\circ)=\sin 4^\circ$$

بنابراین

$$\sin^2 41^\circ+\sin^2 40^\circ=\cos^2 40^\circ+\sin^2 40^\circ=1$$

همچنین $\tan 73^\circ=\tan(2 \times 36^\circ+11^\circ)=\tan 11^\circ$ بنابراین

$$\tan 73^\circ \times \cot 11^\circ=\tan 11^\circ \times \cot 11^\circ=1$$

بنابراین مقدار کسر مورد نظر برابر است با ۱.

۴۹۷- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\cos 115^\circ=\cos(90^\circ+25^\circ)=-\sin 25^\circ$$

$$\cos 155^\circ=\cos(180^\circ-25^\circ)=-\cos 25^\circ$$

$$\cos 295^\circ=\cos(270^\circ+25^\circ)=\sin 25^\circ$$

$$\cos 335^\circ=\cos(360^\circ-25^\circ)=\cos 25^\circ$$

$$\text{بنابراین } A=\frac{-\sin 25^\circ+3 \cos 25^\circ}{3 \sin 25^\circ+\cos 25^\circ}$$

صورت و مخرج کسر A را بر

$\sin 25^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$A=\frac{\frac{-\sin 25^\circ}{\sin 25^\circ}+\frac{3 \cos 25^\circ}{\sin 25^\circ}}{\frac{3 \sin 25^\circ}{\sin 25^\circ}+\frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ}}=\frac{-1+3 \cot 25^\circ}{3+\cot 25^\circ}=\frac{-1+3a}{3+a}=\frac{3a-1}{a+3}$$

۴۸۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\tan 75^\circ=\tan(90^\circ-15^\circ)=\cot 15^\circ=\frac{1}{a}$$

$$\tan 105^\circ=\tan(90^\circ+15^\circ)=-\cot 15^\circ=-\frac{1}{a}$$

$$\tan 165^\circ=\tan(180^\circ-15^\circ)=-\tan 15^\circ=-a$$

$$\tan 255^\circ=\tan(270^\circ-15^\circ)=\cot 15^\circ=\frac{1}{a}$$

$$A=\frac{2\left(\frac{1}{a}\right)-\frac{1}{a}}{3(-a)-\frac{1}{a}}=\frac{\frac{1}{a}}{\frac{-3a^2-1}{a}}=\frac{1}{-3a^2-1}=\frac{-1}{3a^2+1}$$

بنابراین

۴۸۸- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sin \frac{10\pi}{3}=\sin\left(\frac{10}{3}\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(3\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin \frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{9\pi}{3}=\cos\left(\frac{9\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(3\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos \frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

$$A=4-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)=3+1=4$$

بنابراین



۴۸۹- گزینه ۳ از نماد گذاری شکل

روبرو استفاده می‌کنیم. توجه کنید که

$$\tan \alpha=\tan(180^\circ-\beta)=-\tan \beta$$

از طرف دیگر $\beta+\gamma=90^\circ$. پس $\tan \beta=\cot \gamma$. اکنون توجه کنید که

$$\cot \gamma=\frac{4}{2}=2. \quad \tan \alpha=-2$$

بنابراین

۴۹۰- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ آن‌گاه

$$\tan \beta=\cot \alpha \quad \text{و در نتیجه} \quad \tan \alpha \tan \beta=\tan \alpha \cot \alpha=1$$

بنابراین

$$\frac{\pi}{14}+\frac{6\pi}{14}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \frac{\pi}{14} \tan \frac{6\pi}{14}=1$$

$$\frac{2\pi}{14}+\frac{5\pi}{14}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \frac{2\pi}{14} \tan \frac{5\pi}{14}=1$$

$$\frac{3\pi}{14}+\frac{4\pi}{14}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \frac{3\pi}{14} \tan \frac{4\pi}{14}=1$$

پس $A=1$.

۴۹۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan \alpha, \quad \tan(\pi+\alpha)=\tan \alpha$$

$$\tan(2\pi-\alpha)=-\tan \alpha, \quad \tan(2\pi+\alpha)=\tan \alpha$$

$$A=\frac{-\tan \alpha+3 \tan \alpha}{-\tan \alpha-\tan \alpha}=\frac{2 \tan \alpha}{-2 \tan \alpha}=-1$$

بنابراین

۴۹۲- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos \frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}, \quad \tan\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\cot \frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin \frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}, \quad \cot\left(\frac{7\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\tan \frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$A=\frac{4\left(\frac{1}{2}\right)-2\left(\frac{1}{2}\right)}{3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-6\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

بنابراین

۴۹۸- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\sin \frac{11\pi}{6} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{5\pi}{4} = \tan(\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\cot \frac{9\pi}{4} = \cot(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cot \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\cos \frac{5\pi}{3} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{بنابراین } A = -\frac{1}{2} \times 1 - 1 \times \frac{1}{2} = -1$$

۴۹۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ آن‌گاه

$$\sin \beta = \cos \alpha \quad \text{بنابراین} \quad \frac{\pi}{16} + \frac{7\pi}{16} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{7\pi}{16} = \sin \frac{\pi}{16}$$

$$\frac{3\pi}{16} + \frac{5\pi}{16} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{5\pi}{16} = \sin \frac{3\pi}{16}$$

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{16} + \cos^2 \frac{3\pi}{16} + \sin^2 \frac{3\pi}{16} + \sin^2 \frac{\pi}{16} \quad \text{پس}$$

$$= (\sin^2 \frac{\pi}{16} + \cos^2 \frac{\pi}{16}) + (\sin^2 \frac{3\pi}{16} + \cos^2 \frac{3\pi}{16}) = 1 + 1 = 2$$

۵۰۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = 180^\circ$ آن‌گاه

$$\cos \beta = -\cos \alpha$$

$$\cos 179^\circ = -\cos 1^\circ, \quad \cos 178^\circ = -\cos 2^\circ, \quad \dots$$

$$\cos 92^\circ = -\cos 88^\circ, \quad \cos 91^\circ = -\cos 89^\circ$$

$$\text{پس } A = \frac{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 89^\circ}{-\cos 1^\circ - \cos 2^\circ - \dots - \cos 89^\circ} = -1$$

۵۰۱- گزینه ۴ توجه کنید که $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ در نتیجه

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

۵۰۲- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $\cos \hat{A} > 0$ و $\sin \hat{B} < 0$ اما از

طرف دیگر،

$$\cos \hat{A} = \sqrt{1 - \sin^2 \hat{A}} = \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$$

$$\sin \hat{B} = -\sqrt{1 - \cos^2 \hat{B}} = -\sqrt{1 - (\frac{5}{13})^2} = -\frac{12}{13}$$

$$\cos(\hat{A} + \hat{B}) = \cos \hat{A} \cos \hat{B} - \sin \hat{A} \sin \hat{B} \quad \text{بنابراین}$$

$$= \frac{4}{5} \times (-\frac{5}{13}) - \frac{3}{5} \times (-\frac{12}{13}) = \frac{16}{65} = \frac{16}{5 \times 13}$$

۵۰۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\frac{3}{10} = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\frac{1}{2} = \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{3}{10} + \frac{1}{2} = 2 \sin \alpha \cos \beta \Rightarrow \sin \alpha \cos \beta = \frac{2}{5}$$

۵۰۴- گزینه ۱ توجه کنید که $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$

$$\text{بنابراین } \sin 75^\circ + \cos 75^\circ = \sqrt{2} \sin(75^\circ + 45^\circ) = \sqrt{2} \sin 120^\circ$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

۵۰۵- گزینه ۳ از فرض مسئله نتیجه می‌شود $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{4}$ در نتیجه

$$\sin(\alpha - \beta) > 0, \quad \text{همچنین } \pi < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$$

در نتیجه

$$\sin(\alpha - \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha - \beta)} = \sqrt{1 - (\frac{12}{13})^2} = \frac{5}{13}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = -\sqrt{1 - \sin^2(\alpha + \beta)} = -\sqrt{1 - (-\frac{3}{5})^2} = -\frac{4}{5}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$\sin 2\alpha = \sin((\alpha + \beta) + (\alpha - \beta))$$

$$= \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$$

$$= (-\frac{3}{5})(\frac{5}{13}) + (-\frac{4}{5})(\frac{12}{13}) = \frac{-36 - 40}{65} = -\frac{56}{65}$$

۵۰۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$61^\circ + 29^\circ = 90^\circ \Rightarrow \sin 29^\circ = \cos 61^\circ$$

$$31^\circ + 59^\circ = 90^\circ \Rightarrow \sin 59^\circ = \cos 31^\circ$$

بنابراین صورت کسر مورد نظر برابر است با

$$\sin 61^\circ \sin 31^\circ + \cos 61^\circ \cos 31^\circ = \cos(61^\circ - 31^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

از طرف دیگر، مخارج کسر مورد نظر برابر است با

$$\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \sin 18^\circ \cos 12^\circ = \sin(12^\circ + 18^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \quad \text{بنابراین، کسر مورد نظر برابر است با}$$

۵۰۷- گزینه ۲ ابتدا عبارت داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم

$$A = 2(\frac{1}{2} \sin 15^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 15^\circ)$$

و در نتیجه

$$A = 2(\cos 60^\circ \sin 15^\circ - \sin 60^\circ \cos 15^\circ)$$

$$= 2 \sin(15^\circ - 60^\circ) = -2 \sin 45^\circ = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

۵۰۸- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x$$

همچنین

$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\sin x - (-\cos x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)} = \frac{\sin x + \cos x}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)} = \sqrt{2}$$

۵۱۳- گزینه ۲) توجه کنید که

$$\frac{1}{3} = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$-\frac{1}{4} = \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

اگر دو طرف تساوی‌های بالا را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{24} \quad \text{بنابراین}$$

۵۱۴- گزینه ۴) ابتدا توجه کنید که

$$\cos 65^\circ = \cos(90^\circ - 25^\circ) = \sin 25^\circ$$

$$\sin 55^\circ = \sin(90^\circ - 35^\circ) = \cos 35^\circ$$

در نتیجه

$$\sin 35^\circ \cos 25^\circ + \cos 65^\circ \sin 55^\circ$$

$$= \sin 35^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 35^\circ$$

$$= \sin(35^\circ + 25^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۵۱۵- گزینه ۳) توجه کنید که

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x)$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x)$$

در نتیجه فرض مسئله به تساوی زیر تبدیل می‌شود

$$\sin x + \cos x = 3(\cos x - \sin x)$$

بنابراین

$$4 \sin x = 2 \cos x \Rightarrow \tan x = \frac{1}{2}$$

۵۱۶- گزینه ۳) دو طرف تساوی داده شده را بر $2\sqrt{3}$ تقسیم می‌کنیم

$$3 \cos x + \sqrt{3} \sin x = 3 \Rightarrow \frac{3}{2\sqrt{3}} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \sin x = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{6} \cos x + \sin \frac{\pi}{6} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{3} = \tan 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} \quad \text{ابتدا توجه کنید که} \quad \text{۵۱۷- گزینه ۴)}$$

بنابراین

$$\cos 10^\circ + \sqrt{3} \sin 10^\circ = \cos 10^\circ + \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} \sin 10^\circ$$

$$= \frac{\cos 60^\circ \cos 10^\circ + \sin 60^\circ \sin 10^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\cos(60^\circ - 10^\circ)}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \cos 50^\circ$$

$$\frac{\cos 10^\circ + \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\cos 50^\circ} = \frac{2 \cos 50^\circ}{\cos 50^\circ} = 2 \quad \text{بنابراین}$$

۵۰۹- گزینه ۲) ابتدا توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس،

$$\triangle ADE: DE = \sqrt{AE^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

$$\triangle ABC: AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

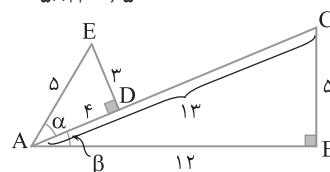
اکنون توجه کنید که

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \beta = \frac{12}{13}, \quad \sin \beta = \frac{5}{13}$$

بنابراین

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} - \frac{3}{5} \times \frac{5}{13}$$

$$= \frac{33}{65}$$



۵۱۰- گزینه ۳) از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. در این صورت

بنابر قضیه فیثاغورس،

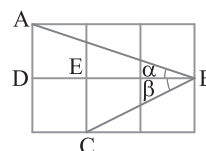
$$\triangle ABD: AB^2 = AD^2 + DB^2 \Rightarrow AB = \sqrt{10}$$

$$\triangle BCE: BC^2 = BE^2 + CE^2 \Rightarrow BC = \sqrt{5}$$

با توجه به شکل زیر $\angle ABC = \alpha + \beta$ ، بنابراین

$$\cos(\angle ABC) = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{3}{\sqrt{10}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



۵۱۱- گزینه ۴) به کمک اتحادهای نسبت‌های مثلثاتی مجموع دو زاویه،

به دست می‌آید

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos x - \cos x \cos \frac{\pi}{6} + \sin x \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = \sin x$$

۵۱۲- گزینه ۱) ابتدا مقادیر $\sin \beta$ و $\cos \alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{5} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow \sin^2 \beta + \frac{9}{25} = 1 \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{16}{25}$$

$$\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi \rightarrow \sin \beta = -\frac{4}{5}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

بنابراین

$$= \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{3}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{11\sqrt{5}}{25}$$

$$A = \frac{2 \cos \alpha \cos \beta}{2 \cos \alpha \sin \beta} = \cot \beta \quad \text{بنابراین}$$

راه حل دوم فرض کنید $\alpha = 0$. در این صورت

$$A = \frac{\cos(-\beta) + \cos \beta}{\sin \beta - \sin(-\beta)} = \frac{2 \cos \beta}{2 \sin \beta} = \cot \beta$$

راه حل سوم اگر $\beta = 0$ ، عبارت A تعریف نمی‌شود و تنها گزینه‌ای که به ازای

$\beta = 0$ تعریف نشده، گزینه (۴) است.

۵۲۲- گزینه (۴) چون $\theta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ پس $\sin \theta < 0$. بنابراین

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}$$

پس $\sin \theta = -\frac{5}{13}$. اکنون می‌توان نوشت

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \theta - \sin \theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{12}{13} + \frac{5}{13}\right) = -\frac{7\sqrt{2}}{26}$$

۵۲۳- گزینه (۲) از تساوی‌های داده شده نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = 4 \Rightarrow \cos \alpha \cos \beta = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{4} = \frac{3}{4} = \frac{3}{32}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{3}{32} - \frac{9}{32} = -\frac{9}{32} \quad \text{بنابراین}$$

۵۲۴- گزینه (۱)

$$\begin{aligned} & (\sin x + \cos y)^2 + (\cos x + \sin y)^2 \\ &= \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + \underbrace{\sin^2 y + \cos^2 y}_1 + 2(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \\ &= 1 + 1 + 2 \sin(x + y) = 2(1 + \sin(x + y)) = 2\left(1 + \sin \frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3 \end{aligned}$$

۵۲۵- گزینه (۱) توجه کنید که

$$\begin{aligned} & \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha) \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha + \sin \alpha) \\ &= \frac{1}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha) = \frac{1}{2}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned}$$

در نتیجه $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$. از طرف دیگر، $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1}{4}$

در نتیجه $\cos^2 \alpha = \frac{5}{8}$ و $\sin^2 \alpha = \frac{3}{8}$. بنابراین

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{9+25}{64} = \frac{17}{32}$$

۵۲۶- گزینه (۳) چون α و β حاده هستند، پس $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$

بنابراین $0 < \alpha + \beta < \pi$. در نتیجه $\sin(\alpha + \beta) > 0$. اکنون توجه کنید که

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{3}{5}, \quad \sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \frac{4}{5}$$

بنابراین

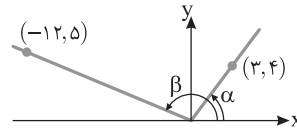
$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sin((\alpha + \beta) - \alpha) = \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{7}{25} \end{aligned}$$

۵۱۸- گزینه (۱) با توجه به شکل معلوم می‌شود که

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin \beta = \frac{5}{13}, \quad \cos \beta = -\frac{12}{13}$$

بنابراین

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = -\frac{33}{65}$$



۵۱۹- گزینه (۳) با توجه به شکل، از قضیه فیثاغورس نتیجه می‌شود

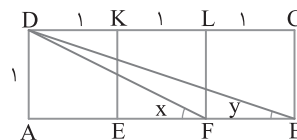
$$DF = \sqrt{AF^2 + AD^2} = \sqrt{5}, \quad DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{10}$$

بنابراین

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin y = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos y = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

در نتیجه

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{50}}$$



۵۲۰- گزینه (۲) با توجه به شکل زیر معلوم می‌شود که

$$\theta + \alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = 2\pi \quad \text{در نتیجه} \quad \theta = \frac{3\pi}{2} - (\alpha + \beta) \quad \text{بنابراین}$$

$$\cos \theta = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = -\sin(\alpha + \beta)$$

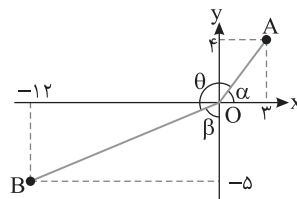
از طرف دیگر، $OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ و $OB = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. پس

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin \beta = \frac{12}{13}, \quad \cos \beta = \frac{5}{13}$$

بنابراین

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} = \frac{56}{65}$$

در نتیجه $\cos \theta = -\frac{56}{65}$



۵۲۱- گزینه (۴) راه حل اول صورت کسر A به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} & \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= 2 \cos \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

مخرج کسر A به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} & \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &= 2 \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

۵۳۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$$2 \cos(a+b) = 3 \cos(a-b)$$

$$2(\cos a \cos b - \sin a \sin b) = 3(\cos a \cos b + \sin a \sin b)$$

در نتیجه $\cos a \cos b = -5 \sin a \sin b$. بنابراین

$$\frac{\cos b}{\sin b} = -5 \frac{\sin a}{\cos a} \Rightarrow \cot b = -5 \tan a = -1$$

۵۳۲- گزینه ۲ توجه کنید $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$

$$. 24 \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{24}{\sqrt{2}} (\sin \alpha - \cos \alpha) = \frac{24}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{4} = 3\sqrt{2}$$

۵۳۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\sin a - \cos b = \frac{2}{3} \Rightarrow (\sin a - \cos b)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\sin^2 a + \cos^2 b - 2 \sin a \cos b = \frac{4}{9} \quad (1)$$

همین طور،

$$\cos a - \sin b = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow (\cos a - \sin b)^2 = \frac{5}{9}$$

$$\cos^2 a + \sin^2 b - 2 \cos a \sin b = \frac{5}{9} \quad (2)$$

اگر دو طرف تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید

$$(\sin^2 a + \cos^2 a) + (\sin^2 b + \cos^2 b)$$

$$- 2(\sin a \cos b + \cos a \sin b) = 1$$

$$. \sin(a+b) = \frac{1}{2} \text{ پس } 1 + 1 - 2 \sin(a+b) = 1$$

۵۳۴- گزینه ۲ ابتدا دو طرف هر تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم تا

رابطه‌های زیر به دست آید

$$\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y + 2 \cos x \cos y = \frac{1}{4} \\ \sin^2 x + \sin^2 y + 2 \sin x \sin y = \frac{1}{16} \end{cases}$$

با جمع کردن طرفین این دو تساوی معلوم می‌شود

$$\sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 y + \cos^2 y + 2(\sin x \sin y + \cos x \cos y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$

$$= \frac{5}{16} \Rightarrow 2 + 2 \cos(x-y) = \frac{5}{16} \Rightarrow \cos(x-y) = -\frac{27}{32}$$

۵۳۵- گزینه ۳ می‌توان نوشت

$$\cos 17^\circ = \cos(45^\circ - 28^\circ) = \cos 45^\circ \cos 28^\circ + \sin 45^\circ \sin 28^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 28^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 28^\circ = \frac{\cos 28^\circ + \sin 28^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{k^3}{\sqrt{2}}$$

۵۳۶- گزینه ۱ از فرض مسئله نتیجه می‌شود $\cos(\hat{A} + \hat{B}) = -\frac{1}{2}$

$$. \cos \hat{C} = \cos(180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})) = -\cos(\hat{A} + \hat{B}) = \frac{1}{2}$$

۵۳۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\cos(\hat{A} + \hat{B}) = \cos \hat{A} \cos \hat{B} - \sin \hat{A} \sin \hat{B} = 0$$

بنابراین $\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$ و در نتیجه $\hat{C} = 90^\circ$. به این ترتیب $\cos \hat{B} = \sin \hat{A}$

و $\sin \hat{C} = 1$ در نتیجه مقدار عبارت مورد نظر برابر است با ۲.

۵۲۷- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که چون $\cos \hat{A} > 0$ و $\cos \hat{B} > 0$ ،

بنابراین زاویه‌های A و B حاده هستند پس $\sin \hat{A}$ و $\sin \hat{B}$ اعدادی مثبت هستند، پس

$$\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1 \Rightarrow \sin^2 \hat{A} + \frac{9}{25} = 1 \Rightarrow \sin^2 \hat{A} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{4}{5}$$

$$\sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = 1 \Rightarrow \sin^2 \hat{B} + \frac{1}{9} = 1 \Rightarrow \sin^2 \hat{B} = \frac{8}{9} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

از طرف دیگر،

$$\cos \hat{C} = \cos(\pi - (\hat{A} + \hat{B})) = -\cos(\hat{A} + \hat{B})$$

$$= -\cos \hat{A} \cos \hat{B} + \sin \hat{A} \sin \hat{B}$$

$$. \cos \hat{C} = -\frac{3}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}-3}{15}$$

$$\text{پس } 15 \cos \hat{C} = 8\sqrt{2}-3$$

۵۲۸- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\sin a - \cos a = 4 \sin b \sin(a+b) + 4 \cos b \cos(a+b)$$

$$= 4(\cos((a+b)-b)) = 4 \cos a$$

$$\sin a = 5 \cos a \Rightarrow \tan a = 5$$

بنابراین

۵۲۹- گزینه ۳ با توجه به شکل معلوم می‌شود که

$$\gamma = \alpha + \beta \Rightarrow \sin \gamma = \sin(\alpha + \beta)$$

توجه کنید که

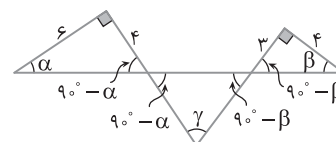
$$\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{16+36}} = \frac{4}{\sqrt{52}}, \quad \cos \alpha = \frac{6}{\sqrt{52}}$$

$$\sin \beta = \frac{3}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5}, \quad \cos \beta = \frac{4}{5}$$

بنابراین

$$\sin \gamma = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{4}{\sqrt{52}} \times \frac{4}{5} + \frac{6}{\sqrt{52}} \times \frac{3}{5} = \frac{34}{5\sqrt{52}} = \frac{17}{5\sqrt{13}}$$



۵۳۰- گزینه ۴ با نمادگذاری شکل زیر $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

بنابراین $\alpha = 90^\circ - (\beta + \gamma)$ ، توجه کنید که

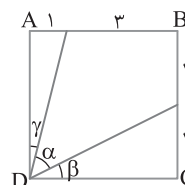
$$\sin \beta = \frac{2}{\sqrt{16+4}} = \frac{2}{\sqrt{20}}, \quad \cos \beta = \frac{4}{\sqrt{20}}$$

$$\sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{16+1}} = \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \cos \gamma = \frac{4}{\sqrt{16+1}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

و در نتیجه

$$\cos \alpha = \cos(90^\circ - (\beta + \gamma)) = \sin(\beta + \gamma) = \sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma$$

$$= \frac{2}{\sqrt{20}} \times \frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{20}} \times \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{12}{\sqrt{20} \sqrt{17}} = \frac{6}{\sqrt{170}}$$



۵۳۸- گزینه ۱ با توجه به شکل زیر

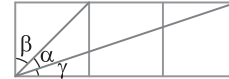
$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{9+1}} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

با نامگذاری شکل زیر، $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. بنابراین $\alpha = 90^\circ - (\beta + \gamma)$ و در نتیجه

$$\sin \alpha = \sin(90^\circ - (\beta + \gamma)) = \cos(\beta + \gamma) = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$



۵۳۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که عبارت را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$A = \sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right)$$

$$= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \sin x - \sin \frac{\pi}{6} \cos x \right) = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$$

بنابراین $-1 \leq \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$ ، در نتیجه $-2 \leq 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \leq 2$. پس

حداقل مقدار عبارت برابر ۲- و حداکثر مقدار آن برابر ۲ است.

۵۴۰- گزینه ۴ توجه کنید که $\alpha = x + y$. همچنین با توجه به شکل

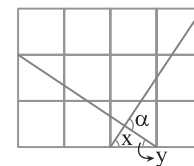
$$\text{زیر } \sin x = \frac{3}{\sqrt{13}} \text{ و } \cos x = \frac{2}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\sin y = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \cos y = \frac{3}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

راه‌حل اول می‌توان نوشت

$$\sin \alpha = \sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$= \frac{3}{\sqrt{13}} \times \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{13}} \times \frac{2}{\sqrt{13}} = 1$$



راه‌حل دوم با توجه به اینکه $\sin x = \cos y$ و $\sin y = \cos x$ ، پس

زاویه‌های x و y متمم‌اند، بنابراین $\alpha = 90^\circ$.

۵۴۱- گزینه ۱ توجه کنید که $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. بنابراین

$$\frac{\cos 2x}{1 - \tan^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \cos^2 x$$

۵۴۲- گزینه ۲ می‌توان نوشت

$$\cos^4 \frac{\pi}{8} - \sin^4 \frac{\pi}{8} = \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} \right) \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} \right)$$

$$= 1 \times \cos \left(2 \times \frac{\pi}{8} \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۵۴۳- گزینه ۲ توجه کنید که $15^\circ + 75^\circ = 90^\circ$ ، بنابراین

$$\cos 15^\circ = \sin 75^\circ$$

در نتیجه $\cos 15^\circ \sin 75^\circ = \cos 15^\circ \cos 15^\circ = \cos^2 15^\circ$

از طرف دیگر، $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ ، پس

$$\cos 30^\circ = 2 \cos^2 15^\circ - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cos^2 15^\circ - 1$$

پس $\cos^2 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+2}{4}$. در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$.

۵۴۴- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \frac{16}{25} + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = \frac{9}{25} \xrightarrow{\frac{\pi}{2} < \theta < \pi} \cos \theta = -\frac{3}{5}$$

بنابراین

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{5} \right) = -\frac{24}{25}$$

۵۴۵- گزینه ۲ راه‌حل اول از اتحادهای $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ و

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \text{ نتیجه می‌شود}$$

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}} = 8$$

راه‌حل دوم از اتحاد $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$$

۵۴۶- گزینه ۲ توجه کنید که $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

پس $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$

$$A = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = \frac{1}{3}$$

۵۴۷- گزینه ۳ از اتحاد $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم.

توجه کنید که

$$\frac{1 - \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{2 \sin^2 20^\circ}{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \tan 20^\circ$$

۵۴۸- گزینه ۲ توجه کنید که $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ، بنابراین

$$\frac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ - \sin 40^\circ} - \sin 40^\circ = \frac{\cos(2 \times 40^\circ)}{\cos 40^\circ - \sin 40^\circ} - \sin 40^\circ$$

$$= \frac{\cos^2 40^\circ - \sin^2 40^\circ}{\cos 40^\circ - \sin 40^\circ} - \sin 40^\circ = (\cos 40^\circ + \sin 40^\circ) - \sin 40^\circ$$

$$= \cos 40^\circ$$

۵۴۹- گزینه ۴ توجه کنید که

$$A = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$$A = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^2 = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$$

بنابراین

۵۵۷- گزینه ۱ تساوی داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 - \frac{1}{3} \sin^2 2\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\sin^2 2\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin 2\alpha = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

با توجه به اینکه $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ربع چهارم است، پس $\sin \alpha < 0$ و $\cos \alpha > 0$ ، در نتیجه $\sin \alpha \cos \alpha < 0$.

یعنی $\sin 2\alpha < 0$ پس $\sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

۵۵۸- گزینه ۱ توجه کنید که $\sin 5^\circ = \sin(9^\circ - 4^\circ) = \cos 4^\circ$

و $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ بنابراین

$$\frac{\sin 5^\circ \sin 4^\circ}{\cos 1^\circ} = \frac{\cos 4^\circ \sin 4^\circ}{\cos 1^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \sin 8^\circ}{\cos 1^\circ}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sin(9^\circ - 1^\circ)}{\cos 1^\circ} = \frac{1}{2} \times \frac{\cos 1^\circ}{\cos 1^\circ} = \frac{1}{2}$$

۵۵۹- گزینه ۴ توجه کنید که اگر $x = \frac{\pi}{24}$ ، آن‌گاه

$$10x + 2x = 12x = \frac{\pi}{2}$$

پس $\cos 10x = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = \sin 2x$ در نتیجه

$$\cos 10x \cos 2x = \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x$$

$$= \frac{1}{2} \sin(4 \times \frac{\pi}{24}) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۵۶۰- گزینه ۱ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\tan 5^\circ = \tan(9^\circ - 4^\circ) = \cot 4^\circ$$

بنابراین

$$\tan 5^\circ - \tan 4^\circ = \cot 4^\circ - \tan 4^\circ = \frac{\cos 4^\circ}{\sin 4^\circ} - \frac{\sin 4^\circ}{\cos 4^\circ}$$

$$= \frac{\cos^2 4^\circ - \sin^2 4^\circ}{\sin 4^\circ \cos 4^\circ} = \frac{\cos(2 \times 4^\circ)}{\frac{1}{2} \sin(2 \times 4^\circ)} = \frac{2 \cos 8^\circ}{\sin 8^\circ}$$

$$= 2 \cot 8^\circ = 2 \cot(9^\circ - 1^\circ) = 2 \tan 1^\circ$$

$$\frac{\tan 5^\circ - \tan 4^\circ}{2} = \tan 1^\circ \quad \text{بنابراین}$$

راه‌حل دوم از اتحاد $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\tan 5^\circ - \tan 4^\circ}{2} = \frac{\cot 4^\circ - \tan 4^\circ}{2} = \frac{2 \cot 8^\circ}{2} = \tan 1^\circ$$

۵۶۱- گزینه ۱ از عبارت $\sin x \cos x$ فاکتور می‌گیریم

$$A = \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

۵۶۲- گزینه ۳ دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{4}$$

$$1 + \sin 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{3}{4}$$

۵۵۰- گزینه ۳ توجه کنید که $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ، بنابراین

$$\frac{\sin^3 x}{2 \sin x - \sin 2x} = \frac{\sin^3 x}{2 \sin x - 2 \sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x}{2(1 - \cos x)}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 x}{2(1 - \cos x)} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

بنابراین $\frac{1 + \cos x}{2} = \frac{2}{3}$ پس $\cos x = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$ در نتیجه

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = \frac{2}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$$

۵۵۱- گزینه ۲ می‌دانیم $\sin 78^\circ = \cos 12^\circ$ و $\sin 86^\circ = \cos 4^\circ$

بنابراین

$$\frac{\sin 78^\circ}{\sin 86^\circ} \cdot \frac{\sin 12^\circ}{\sin 4^\circ} = \frac{\cos 12^\circ}{\cos 4^\circ} \cdot \frac{\sin 12^\circ}{\sin 4^\circ}$$

$$= \frac{\sin 4^\circ \cos 12^\circ - \sin 12^\circ \cos 4^\circ}{\sin 4^\circ \cos 4^\circ} = \frac{\sin(4 - 12)^\circ}{\sin 4^\circ \cos 4^\circ}$$

$$= \frac{-\sin 8^\circ}{\sin 4^\circ \cos 4^\circ} = \frac{-2 \sin 4^\circ \cos 4^\circ}{\sin 4^\circ \cos 4^\circ} = -2$$

۵۵۲- گزینه ۴ توجه کنید که $2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x$ و

بنابراین $2 \sin x \cos x = \sin 2x$

$$\sin \frac{\pi}{12} (2 \cos^2 \frac{\pi}{24} - 1) = \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$$

$$= \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$$

۵۵۳- گزینه ۱ توجه کنید که $\sin \frac{3\pi}{8} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}) = \cos \frac{\pi}{8}$

$$\cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8} = \cos^2 \frac{\pi}{8}$$

از طرف دیگر می‌دانیم $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ پس

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos(\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

۵۵۴- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}, \quad \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\sin 2x + \cos 2x = \frac{2 \tan x + 1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2(\frac{1}{3}) + 1 - \frac{1}{9}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{\frac{4}{9} + 1 - \frac{1}{9}}{\frac{10}{9}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

۵۵۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$9 \cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} = 10 \Rightarrow 9 \cos^2 \theta + 1 = 10 \cos \theta$$

$$9 \cos^2 \theta - 10 \cos \theta + 1 = 0 \Rightarrow \cos \theta = 1 \quad (\text{غ.ق.}) \quad \text{یا} \quad \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2\left(\frac{1}{9}\right)^2 - 1 = -\frac{79}{81}$$

۵۵۶- گزینه ۳ توجه کنید که $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ و

$$\sin 84^\circ = \sin(90^\circ - 6^\circ) = \cos 6^\circ = \cos(2 \times 3^\circ) = 2 \cos^2 3^\circ - 1 = 2a^2 - 1$$

$$A = \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{(\cos x + \sin x)(\cos^2 x + \sin^2 x - \sin x \cos x)}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \frac{1 + \frac{1}{\cos x - \sin x}}{\frac{1 - \sin x \cos x}{\cos x - \sin x}} = \frac{1 + \frac{1}{\cos x - \sin x}}{-\frac{4}{3}} = -\frac{25}{24}$$

۵۶۷- گزینه ۲) توجه کنید که $\sin 11^\circ = \sin(90^\circ - 79^\circ) = \cos 79^\circ$

و $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ ، بنابراین

$$\frac{\sin^2 11^\circ - \sin^2 2^\circ}{\sin 5^\circ} = \frac{\cos^2 2^\circ - \sin^2 2^\circ}{\sin 5^\circ} = \frac{\cos(2 \times 2^\circ)}{\sin 5^\circ} = \frac{\cos 4^\circ}{\sin 5^\circ}$$

از طرف دیگر می‌دانیم $\cos 4^\circ = \cos(90^\circ - 86^\circ) = \sin 86^\circ$ ، بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر ۱ است.

۵۶۸- گزینه ۳) توجه کنید که $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$ ، بنابراین

$1 + \cos 4^\circ = 2 \cos^2 2^\circ$ ، از طرف دیگر، $55^\circ + 35^\circ = 90^\circ$ ، پس

$\cos 55^\circ = \sin 35^\circ$ ، به این ترتیب

$$\frac{1 + \cos 4^\circ}{\cos 55^\circ \cos 35^\circ} = \frac{2 \cos^2 2^\circ}{\sin 35^\circ \cos 35^\circ} = \frac{2 \cos^2 2^\circ}{\frac{1}{2} \sin(2 \times 35^\circ)} = \frac{4 \cos^2 2^\circ}{\sin 70^\circ}$$

اکنون توجه کنید که $2^\circ + 70^\circ = 90^\circ$ ، پس $\cos 2^\circ = \sin 70^\circ$ ، در نتیجه

$$\frac{4 \cos^2 2^\circ}{\cos 2^\circ} = 4 \cos 2^\circ = 4 \cos 2^\circ \text{ با } 4 \cos 2^\circ \text{ برابر است}$$

۵۶۹- گزینه ۳) می‌توان نوشت

$$\cos a \cos 2a = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \sin a \cos a \cos 2a = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2a \cos 2a = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 4a = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 4a = \frac{1}{2}$$

$$\text{در نتیجه } \cos 4a = 1 - 2 \sin^2 2a = 1 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

۵۷۰- گزینه ۴) ابتدا توجه کنید که

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$

$$\frac{4}{5} = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{4}{15}$$

$$\text{بنابراین } \cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$$

۵۷۱- گزینه ۲) راه‌حل اول عبارت را به شکل زیر ساده می‌کنیم

$$\tan 75^\circ - \tan 15^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} - \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$$

$$= \frac{\sin 75^\circ \cos 15^\circ - \sin 15^\circ \cos 75^\circ}{\cos 75^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\sin(75^\circ - 15^\circ)}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}$$

$$= \frac{\sin 60^\circ}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$$

۵۶۳- گزینه ۲) توجه کنید که

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5} \quad \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$$

به این ترتیب

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \frac{9}{25} - 1 = -\frac{7}{25}$$

$$\text{بنابراین } \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{24}{7}$$

۵۶۴- گزینه ۳) راه‌حل اول بنابر فرض $\sin x = \frac{5}{4} \cos x$ ، دو طرف

این تساوی را در $\sin x$ ضرب می‌کنیم:

$$\sin^2 x = \frac{5}{4} \cos x \sin x \quad (1)$$

همچنین، بنابر فرض، $\cos x = \frac{4}{5} \sin x$ ، دو طرف این تساوی را در $\cos x$

ضرب می‌کنیم:

$$\cos^2 x = \frac{4}{5} \sin x \cos x \quad (2)$$

اگر دو طرف تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید

$$1 = \frac{5}{4} \sin x \cos x + \frac{4}{5} \sin x \cos x \Rightarrow 1 = \frac{29}{20} \sin x \cos x$$

$$\text{بنابراین } \sin x \cos x = \frac{20}{29} \text{ و در نتیجه } \sin 2x = \frac{40}{29}$$

راه‌حل دوم دو طرف تساوی $2 \sin x = 5 \cos x$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$4 \sin^2 x = 25 \cos^2 x$$

با توجه به $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ نتیجه می‌شود

$$4 \sin^2 x = 25(1 - \sin^2 x) \Rightarrow 29 \sin^2 x = 25 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{25}{29}$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{25}{29} = \frac{4}{29} \Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = \frac{100}{29^2}$$

$$\sin x \cos x = \frac{10}{29} \Rightarrow \sin 2x = \frac{20}{29}$$

توجه کنید که با توجه به فرض مسئله $\sin x$ و $\cos x$ هم علامت هستند و

$\sin x \cos x$ مقداری مثبت دارد.

راه‌حل سوم از $2 \sin x = 5 \cos x$ نتیجه می‌شود $\tan x = \frac{5}{2}$ ، پس

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 \times \frac{5}{2}}{1 + \frac{25}{4}} = \frac{20}{29}$$

۵۶۵- گزینه ۱) توجه کنید که

$$\frac{\sin 2x}{\sin 2y} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin y \cos y} = \frac{\sin x}{\sin y} \times \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{4 \sin y}{\sin y} \times \frac{\cos x}{3 \cos x} = \frac{4}{3}$$

۵۶۶- گزینه ۲) ابتدا دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin x - \cos x)^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = \frac{16}{9}$$

$$-2 \sin x \cos x = \frac{16}{9} \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{8}{9}$$

اکنون می‌توان نوشت

۵۷۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha, \quad \cot \alpha + \tan \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

بنابراین، اگر اتحادهای فوق را برای $\alpha = \frac{x}{2}$ استفاده کنیم، می‌توان نوشت

$$A = \tan^2 \frac{x}{2} - \cot^2 \frac{x}{2} = \left(\tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2} \right) \left(\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} \right) \\ = \frac{2}{\sin x} \times (-2 \cot x) = -\frac{4 \cot x}{\sin x}$$

از طرف دیگر،

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \quad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16 \quad \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{16}{25} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \rightarrow \sin x = \frac{4}{5}$$

$$A = \frac{-4 \times \frac{1}{16}}{\frac{4}{5}} = -\frac{15}{4}$$

۵۷۷- گزینه ۳ از اتحاد $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ نتیجه می‌شود

$$\frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{2} \cos 10^\circ + 1} + 1 = \frac{2 \cos^2 10^\circ - 1}{\sqrt{2} \cos 10^\circ + 1} + 1 \\ = \frac{(\sqrt{2} \cos 10^\circ + 1)(\sqrt{2} \cos 10^\circ - 1)}{\sqrt{2} \cos 10^\circ + 1} + 1 = \sqrt{2} \cos 10^\circ - 1 + 1 \\ = \sqrt{2} \cos 10^\circ = \sqrt{2} \cos (90^\circ - 80^\circ) = \sqrt{2} \sin 80^\circ$$

۵۷۸- گزینه ۱ راه حل اول ابتدا توجه کنید که حاصل ضرب جواب‌های

معادله برابر $2m-1$ است. بنابراین

$$\tan \alpha \cot \alpha = 2m-1 \Rightarrow 1 = 2m-1 \Rightarrow m=1$$

اکنون توجه کنید که مجموع جواب‌های معادله برابر $m+3$ است. پس

$$\tan \alpha + \cot \alpha = m+3 = 4 \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 4$$

$$\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 4 \Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 4 \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

راه حل دوم برای تعیین $\sin 2\alpha$ می‌توانیم از اتحاد زیر استفاده کنیم:

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

بنابراین

$$\tan \alpha + \cot \alpha = m+3 = 4 \Rightarrow \frac{2}{\sin 2\alpha} = 4 \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

۵۷۹- گزینه ۲ راه حل اول تساوی داده شده را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$\tan^2 x + \cot^2 x = 5 \Rightarrow (\tan x + \cot x)^2 - 2 \tan x \cot x = 5$$

$$(\tan x + \cot x)^2 = 7 \Rightarrow \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 = 7$$

$$\left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \right)^2 = 7 \Rightarrow \left(\frac{1}{\sin x \cos x} \right)^2 = 7$$

$$\frac{4}{\sin^2 2x} = 7 \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{4}{7}$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$\tan 75^\circ - \tan 15^\circ = \cot 15^\circ - \tan 15^\circ = 2 \cot 30^\circ = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

۵۷۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ و

بنابراین $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$

$$\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = 2 \Rightarrow \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} = 2 \Rightarrow \tan^2 x = 2 \Rightarrow \tan x = \pm \sqrt{2}$$

چون $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ، مقدار $\sqrt{2}$ قابل قبول نیست. پس

$$\tan x = -\sqrt{2} \Rightarrow \cot x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

در نتیجه $\tan x + 2 \cot x = -\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

۵۷۳- گزینه ۲ اگر در اتحاد $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$ قرار دهیم

اتحاد $\alpha = \frac{x}{2}$ ، $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ به دست می‌آید. پس

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{8}}} = \sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \cos \frac{\pi}{8})}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 \times 2 \cos^2 \frac{\pi}{16}}} \\ = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{16}} = \sqrt{2 \cos^2 \frac{\pi}{16}} = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{16} \\ = \sqrt{2 \times 2 \cos^2 \frac{\pi}{32}} = 2 \cos \frac{\pi}{32} = 2 \cos \frac{\pi}{32}$$

۵۷۴- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\sin^4 \frac{\pi}{12} + \cos^4 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{2\pi}{12} \\ = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$$

۵۷۵- گزینه ۳ راه حل اول توجه کنید که

$$\tan^2 x + \cot^2 x = (\tan x + \cot x)^2 - 2 \tan x \cot x$$

$$= \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 - 2 = \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} \right)^2 - 2$$

$$= \left(\frac{1}{\sin 2x} \right)^2 - 2 = \frac{4}{\sin^2 2x} - 2$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x = \frac{\pi}{8}$ ، به دست می‌آید

$$\tan^2 \frac{\pi}{8} + \cot^2 \frac{\pi}{8} = \frac{4}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} - 2 = \frac{4}{1} - 2 = 2$$

راه حل دوم از اتحاد $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan^2 \frac{\pi}{8} + \cot^2 \frac{\pi}{8} = \left(\tan \frac{\pi}{8} + \cot \frac{\pi}{8} \right)^2 - 2 = \left(\frac{2}{\sin \frac{\pi}{4}} \right)^2 - 2$$

$$= \frac{4}{1} - 2 = 2$$

۵۸۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$A = \frac{1 + \tan 75^\circ}{1 - \tan 75^\circ} = \frac{\tan 45^\circ + \tan 75^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 75^\circ}$$

$$A = \tan(45^\circ + 75^\circ) = \tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3} \quad \text{بنابراین}$$

۵۸۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\tan(\delta^\circ + \alpha) = \tan(45^\circ + (\delta^\circ + \alpha)) = \frac{\tan 45^\circ + \tan(\delta^\circ + \alpha)}{1 - \tan 45^\circ \tan(\delta^\circ + \alpha)} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2$$

۵۸۷- گزینه ۲ توجه کنید که $20^\circ + 25^\circ = 45^\circ$. اگر از دو طرف این

تساوی تانژانت بگیریم، نتیجه می‌شود

$$1 = \tan(20^\circ + 25^\circ) = \frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ}$$

$$1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ = \tan 20^\circ + \tan 25^\circ$$

$$\tan 20^\circ + \tan 25^\circ + \tan 20^\circ \tan 25^\circ = 1$$

از طرف دیگر،

$$(1 + \tan 20^\circ)(1 + \tan 25^\circ) = 1 + \tan 20^\circ + \tan 25^\circ + \tan 20^\circ \tan 25^\circ = 1 + 1 = 2$$

۵۸۸- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\cot \hat{A} = 3 \Rightarrow \tan \hat{A} = \frac{1}{3}, \quad \cot \hat{B} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan \hat{B} = 2$$

از طرف دیگر، $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})$. در نتیجه

$$\tan \hat{C} = \tan(180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})) = -\tan(\hat{A} + \hat{B})$$

$$= -\frac{\tan \hat{A} + \tan \hat{B}}{1 - \tan \hat{A} \tan \hat{B}} = -\frac{\frac{1}{3} + 2}{1 - \frac{1}{3} \times 2} = -7$$

۵۸۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $\tan \alpha = 4$ و $\tan \beta = \frac{2}{3}$.

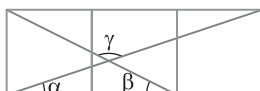
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{4 + \frac{2}{3}}{1 - 4 \times \frac{2}{3}} = -\frac{14}{5} \quad \text{بنابراین}$$

۵۹۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\tan \alpha = \frac{1}{3}, \quad \tan \beta = \frac{1}{2}$$

بنابراین

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = 1$$

از طرف دیگر، چون $0 < \tan \alpha, \tan \beta < 1$ و تابع تانژانت روی بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ اکیداً صعودی است، پس $0^\circ < \alpha, \beta < 45^\circ$ ، در نتیجه $0^\circ < \alpha + \beta < 90^\circ$.بنابراین $\alpha + \beta = 45^\circ$. در نتیجه $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 135^\circ$.راه حل دوم از اتحاد $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan^2 x + \cot^2 x = 5 \Rightarrow (\tan x + \cot x)^2 - 2 = 5$$

$$\left(\frac{2}{\sin 2x}\right)^2 - 2 = 5 \Rightarrow \frac{4}{\sin^2 2x} = 7 \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{4}{7}$$

۵۸۰- گزینه ۱ با استفاده از اتحادهای

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sin 40^\circ - \cos 40^\circ}{1 + \sin 40^\circ + \cos 40^\circ} &= \frac{1 + 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ - (1 - 2\sin^2 20^\circ)}{1 + 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ + 2\cos^2 20^\circ - 1} \\ &= \frac{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ + 2\sin^2 20^\circ}{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ + 2\cos^2 20^\circ} = \frac{2\sin 20^\circ (\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)}{2\sin 20^\circ (\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)} \\ &= \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \tan 20^\circ \end{aligned}$$

۵۸۱- گزینه ۱ توجه کنید که $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$. بنابراین

$$\begin{aligned} \tan \frac{\pi}{12} &= \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{(3 - \sqrt{3})^2}{3^2 - 3} = \frac{9 + 3 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

۵۸۲- گزینه ۲ با توجه به رابطه $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$.مقدار $\tan(\alpha + \beta)$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{5}{5} = 1$$

۵۸۳- گزینه ۳ ابتدا مقدار m را به دست می‌آوریم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \Rightarrow 3 - \frac{2}{m} = \frac{m + \frac{2}{m}}{1 - m(\frac{2}{m})}$$

$$3 - \frac{2}{m} = -m - \frac{2}{m} \Rightarrow m = -3$$

بنابراین $\tan \beta = -\frac{2}{3}$ ، $\tan \alpha = -3$ و در نتیجه

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-3 + \frac{2}{3}}{1 - 3(-\frac{2}{3})} = -\frac{7}{9}$$

۵۸۴- گزینه ۳ از روابط مجموع و حاصل ضرب جواب‌های معادله درجه دوم

 $x^2 - 5x - 2 = 0$ نتیجه می‌شود $\tan \alpha + \tan \beta = 5$ و $\tan \alpha \tan \beta = -2$.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{5}{1 + 2} = \frac{5}{3} \quad \text{بنابراین}$$

از معادله اول نتیجه می‌شود $\tan \beta = \frac{4}{3} - \tan \alpha$ که اگر در معادله دوم به جای

$\tan \beta$ مقدار مساوی آن، یعنی $\frac{4}{3} - \tan \alpha$ را قرار دهیم، معادله زیر به دست

می‌آید $\tan \alpha (\frac{4}{3} - \tan \alpha) = \frac{-1}{3} \Rightarrow 3 \tan^2 \alpha - 4 \tan \alpha - 1 = 0$

پس $\tan \alpha = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$ که از حاده بودن α نتیجه می‌شود $\tan \alpha = \frac{2 + \sqrt{7}}{3}$

۵۹۷- گزینه ۲ ابتدا از دو طرف تساوی $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$ تانژانت می‌گیریم:

$$\tan(\alpha + \beta) = -1 \Rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = -1$$

$$\tan \alpha + \tan \beta = -1 + \tan \alpha \tan \beta$$

$$\tan \alpha + \tan \beta - \tan \alpha \tan \beta = -1$$

از طرف دیگر،

$$A = (1 - \tan \alpha)(1 - \tan \beta) = 1 - \tan \beta - \tan \alpha + \tan \alpha \tan \beta$$

$$= 1 - (\tan \alpha + \tan \beta - \tan \alpha \tan \beta) = 1 - (-1) = 2$$

۵۹۸- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\Delta x + 7y = 2(2x + 3y) + x + y = 180^\circ + x + y$$

بنابراین

$$\tan(\Delta x + 7y) = \tan(180^\circ + x + y) = \tan(x + y)$$

$$= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{2 + 3}{1 - 2 \times 3} = -1$$

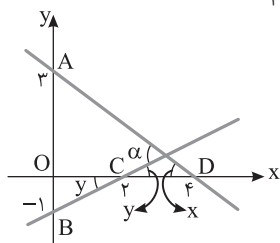
۵۹۹- گزینه ۲ با نمادگذاری شکل زیر نتیجه می‌شود که $\alpha = x + y$

از طرف دیگر،

$$\Delta AOD: \tan x = \frac{3}{4}, \quad \Delta OBC: \tan y = \frac{1}{2}$$

در نتیجه

$$\tan \alpha = \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{4}}{1 - \frac{3}{8}} = 2$$



۶۰۰- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\cot x - \tan x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cot 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cot 2x = -\frac{1}{4}$$

در نتیجه

$$\tan 2x = -4$$

بنابراین

$$\tan 4x = \frac{2 \tan 2x}{1 - \tan^2 2x} = \frac{-8}{1 - 16} = \frac{8}{15}$$

۵۹۱- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \times \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{1 - 3} = \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{-2} = -2 - \sqrt{3}$$

۵۹۲- گزینه ۴ راه حل اول توجه کنید که

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \Rightarrow 3 = \frac{2 - \tan \beta}{1 + 2 \tan \beta}$$

$$3 + 6 \tan \beta = 2 - \tan \beta \Rightarrow 7 \tan \beta = -1 \Rightarrow \tan \beta = -\frac{1}{7}$$

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که $\beta = \alpha - (\alpha - \beta)$ بنابراین

$$\tan \beta = \tan(\alpha - (\alpha - \beta)) = \frac{\tan \alpha - \tan(\alpha - \beta)}{1 + \tan \alpha \tan(\alpha - \beta)} = \frac{2 - 3}{1 + 2 \times 3} = -\frac{1}{7}$$

۵۹۳- گزینه ۱ توجه کنید که $\tan(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x}$ ، بنابراین

$$\frac{\tan x - 1}{1 + \tan x} = 4 \Rightarrow 4 + 4 \tan x = \tan x - 1 \Rightarrow \tan x = -\frac{5}{3}$$

۵۹۴- گزینه ۱ از رابطه مربوط به حاصل ضرب جواب‌های معادله درجه

دوم نتیجه می‌شود

$$\cot \alpha \cot \beta = -2 \Rightarrow \frac{1}{\tan \alpha} \times \frac{1}{\tan \beta} = -2 \Rightarrow \tan \alpha \tan \beta = -\frac{1}{2}$$

از رابطه مربوط به مجموع جواب‌های معادله درجه دوم نتیجه می‌شود

$$\cot \alpha + \cot \beta = \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} = 6$$

پس

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha \tan \beta} = 6 \xrightarrow{\tan \alpha \tan \beta = -\frac{1}{2}} \tan \alpha + \tan \beta = -3$$

بنابراین

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-3}{1 - (-\frac{1}{2})} = -2$$

$$\cot(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}$$

۵۹۵- گزینه ۱ توجه کنید که $\cot 50^\circ = \cot(90^\circ - 40^\circ) = \tan 40^\circ$

بنابراین

$$\frac{\tan 50^\circ - \cot 50^\circ}{1 + \tan 50^\circ \cot 50^\circ} = \frac{\tan 50^\circ - \tan 40^\circ}{1 + \tan 50^\circ \tan 40^\circ} = \tan(50^\circ - 40^\circ) = \tan 10^\circ$$

۵۹۶- گزینه ۱ ابتدا از دو طرف تساوی $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ تانژانت می‌گیریم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1$$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 + \frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow \tan \alpha + \tan \beta = \frac{4}{3}$$

اکنون باید دستگاه معادلات زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = \frac{4}{3} \\ \tan \alpha \tan \beta = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

۶۰۱- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$. بنابراین

$$\begin{aligned}\tan \frac{5\pi}{12} &= \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

۶۰۲- گزینه ۲ توجه کنید که از $\cot a \cot b = 3$ نتیجه می‌شود

$$\tan a \tan b = \frac{1}{3}$$

$$\cot(a-b) = \frac{1}{\tan(a-b)} = \frac{1 + \tan a \tan b}{\tan a - \tan b} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}$$

۶۰۳- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{25}{9} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{16}{9} \xrightarrow{x \text{ حاده است}} \tan x = \frac{4}{3}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan x} = \frac{1 + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3}} = -7 \quad \text{بنابراین}$$

۶۰۴- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sin x = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \frac{16}{25}$$

$$\xrightarrow{x \text{ حاده است}} \cos x = \frac{4}{5} \Rightarrow \tan x = \frac{3}{4}$$

$$\sin y = \frac{5}{13} \Rightarrow \cos^2 y = 1 - \sin^2 y = \frac{144}{169}$$

$$\xrightarrow{y \text{ منفرجه است}} \cos y = -\frac{12}{13} \Rightarrow \tan y = -\frac{5}{12}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{12}}{1 + \frac{3}{4} \times \frac{5}{12}} = \frac{1}{63}$$

۶۰۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \Rightarrow \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \tan \frac{\pi}{4}} = 2 \Rightarrow \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} = 2$$

$$\tan x + 1 = 2 - 2 \tan x \Rightarrow 3 \tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{3}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan x \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

۶۰۶- گزینه ۳ از تساوی $\alpha - \beta = \frac{7\pi}{4}$ نتیجه می‌شود

$$\tan(\alpha - \beta) = -1$$

بنابراین

$$\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = -1 \Rightarrow \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - 6} = -1 \Rightarrow \tan \alpha - \tan \beta = 5$$

اکنون باید دستگاه معادلات زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} \tan \alpha - \tan \beta = 5 \\ \tan \alpha \tan \beta = -6 \end{cases}$$

اگر از معادله اول $\tan \beta$ را برحسب $\tan \alpha$ نوشته و در معادله دوم جای گذاری کنیم، به معادله $\tan \alpha(\tan \alpha - 5) = -6$ می‌رسیم. پس

$$\tan^2 \alpha - 5 \tan \alpha + 6 = 0 \Rightarrow \tan \alpha = 2 \text{ یا } \tan \alpha = 3$$

۶۰۷- گزینه ۱ توجه کنید که عبارت $\tan x + \tan y$ در صورت

بسط $\tan(x+y)$ آمده است. بنابراین خوب است که عبارت

$$\tan(20^\circ + 25^\circ)$$

$$\tan(20^\circ + 25^\circ) = \frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ} = 1 \Rightarrow \frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ} = 1$$

اگر این تناسب را طرفین - وسطین کنیم، به دست می‌آید

$$\tan 20^\circ + \tan 25^\circ = 1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ$$

$$\tan 20^\circ + \tan 25^\circ + \tan 20^\circ \tan 25^\circ = 1$$

۶۰۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که از $\sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$

نتیجه می‌شود که $\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = 2 \sin \alpha \sin \beta$. اگر

طرفین را بر $\sin \alpha \cos \beta$ تقسیم کنیم، می‌توان نوشت:

$$\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} + \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta} = 2 \Rightarrow \frac{1}{\tan \beta} + \frac{1}{\tan \alpha} = 2$$

$$\tan \alpha + \tan \beta = 2 \tan \alpha \tan \beta \Rightarrow \tan \alpha + \tan \beta = -6$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-6}{1 - (-3)} = -\frac{3}{2} \quad \text{بنابراین}$$

۶۰۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

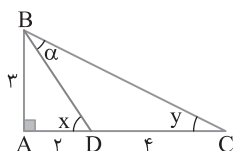
$$\tan \beta = \tan((\alpha + \beta) - \alpha) = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha}{1 + \tan(\alpha + \beta) \tan \alpha} = \frac{-1 - 3}{1 - 3} = 2$$

$$\tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = \frac{4}{1 - 4} = -\frac{4}{3} \quad \text{بنابراین}$$

۶۱۰- گزینه ۴ با نمادگذاری شکل زیر، $x = \alpha + y$ ، پس $\alpha = x - y$.

$$\triangle ABD: \tan x = \frac{3}{2}, \quad \triangle ABC: \tan y = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{از طرف دیگر،}$$

$$\tan \alpha = \tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7} \quad \text{بنابراین}$$



۶۱۶- گزینه ۱) توجه کنید که

$$\begin{aligned}\tan 40^\circ + 2 \tan 10^\circ &= \tan 40^\circ + 2 \tan (50^\circ - 40^\circ) \\ &= \tan 40^\circ + 2 \times \frac{\tan 50^\circ - \tan 40^\circ}{1 + \tan 50^\circ \tan 40^\circ} \\ &= \tan 40^\circ + 2 \times \frac{\tan 50^\circ - \tan 40^\circ}{1 + \cot 40^\circ \tan 40^\circ} \\ &= \tan 40^\circ + 2 \times \frac{\tan 50^\circ - \tan 40^\circ}{2} = \tan 50^\circ\end{aligned}$$

۶۱۷- گزینه ۲) توجه کنید که $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ بنابراین

$$\begin{aligned}\tan (80^\circ - 20^\circ) &= \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\tan 80^\circ - \tan 20^\circ}{1 + \tan 20^\circ \tan 80^\circ} = \sqrt{3} \\ \tan 80^\circ - \tan 20^\circ &= \sqrt{3} + \sqrt{3} \tan 20^\circ \tan 80^\circ \\ \tan 80^\circ - \tan 20^\circ - \sqrt{3} \tan 20^\circ \tan 80^\circ &= \sqrt{3} \\ \tan 20^\circ - \tan 80^\circ + \sqrt{3} \tan 20^\circ \tan 80^\circ &= -\sqrt{3}\end{aligned}$$

پس

۶۱۸- گزینه ۲) ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned}\tan \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = \frac{\tan \alpha - 1 + 2}{1 - \tan \alpha} \\ &= -1 + \frac{2}{1 - \tan \alpha}\end{aligned}$$

چون $-\frac{1}{2} \leq \tan \alpha < 1$ بنابراین

$$-1 < -\tan \alpha \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow 0 < 1 - \tan \alpha \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1 - \tan \alpha}{2} \leq \frac{1}{4}$$

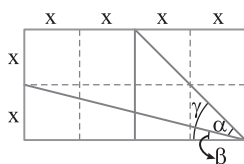
$$\frac{2}{1 - \tan \alpha} \geq 4 \Rightarrow -1 + \frac{2}{1 - \tan \alpha} \geq 3 \Rightarrow \tan \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \geq 3$$

بنابراین حداقل مقدار $\tan \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$ برابر ۳ است.

۶۱۹- گزینه ۳) با توجه به شکل زیر $\alpha = \gamma - \beta$ و در نتیجه

$$\tan \alpha = \tan (\gamma - \beta) = \frac{\tan \gamma - \tan \beta}{1 + \tan \gamma \tan \beta}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\frac{2x}{2x} - \frac{x}{4x}}{1 + \frac{2x}{2x} \times \frac{x}{4x}} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5}\end{aligned}$$



۶۲۰- گزینه ۴) با نمادگذاری شکل زیر

$$\alpha + x + 45^\circ + y + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ - (x + y)$$

از طرف دیگر،

$$\triangle ABC: \tan x = \frac{1}{3}, \quad \triangle DEF: \tan y = \frac{1}{3}$$

۶۱۱- گزینه ۲) توجه کنید که $\cot(\alpha + \beta) = \frac{1}{\tan(\alpha + \beta)}$ بنابراین

$$\begin{aligned}\cot(\alpha + \beta) &= \frac{1}{\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}} = \frac{1 - \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{\cot \alpha} \times \frac{1}{\cot \beta}}{\frac{1}{\cot \alpha} + \frac{1}{\cot \beta}} = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}\end{aligned}$$

۶۱۲- گزینه ۴) توجه کنید که

$$\cot a - \cot b = 2 \Rightarrow \frac{1}{\tan a} - \frac{1}{\tan b} = 2 \Rightarrow \frac{\tan b - \tan a}{\tan a \tan b} = 2$$

چون $\tan a \tan b = 3$ پس

$$\frac{\tan b - \tan a}{3} = 2 \Rightarrow \tan a - \tan b = -6$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} = \frac{-6}{1 + 3} = -\frac{3}{2}$$

۶۱۳- گزینه ۱) ابتدا توجه کنید که $(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) = 2\alpha$ بنابراین

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \tan ((\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)) = \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan(\alpha - \beta)}{1 - \tan(\alpha + \beta) \tan(\alpha - \beta)} \\ &= \frac{-2 + 3}{1 - (-2)(3)} = \frac{1}{7}\end{aligned}$$

۶۱۴- گزینه ۴) توجه کنید که

$$\tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x}$$

$$\tan \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan x - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan x \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x}$$

در نتیجه

$$\cot \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{1 - \tan x}{\tan x + 1}$$

$$\cot \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\tan \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{1 + \tan x}{\tan x - 1}$$

بنابراین

$$\tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \tan \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = -(\cot \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \cot \left(x - \frac{\pi}{4} \right))$$

و مقدار عبارت مورد نظر برابر ۱- است.

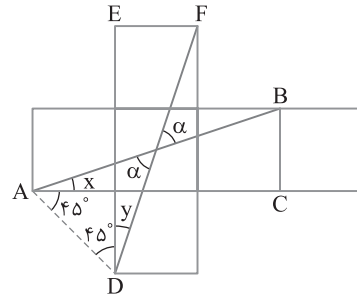
۶۱۵- گزینه ۱) توجه کنید که $(\frac{\pi}{9} - \alpha) + (\alpha + \frac{5\pi}{36}) = \frac{\pi}{4}$ بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{9} - \alpha &= \frac{\pi}{4} - \left(\alpha + \frac{5\pi}{36} \right) \Rightarrow \tan \left(\frac{\pi}{9} - \alpha \right) = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \left(\alpha + \frac{5\pi}{36} \right) \right) \\ &= \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \left(\alpha + \frac{5\pi}{36} \right)}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \left(\alpha + \frac{5\pi}{36} \right)} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

بنابراین

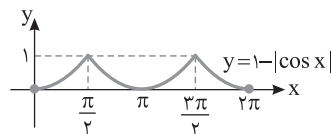
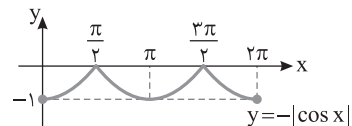
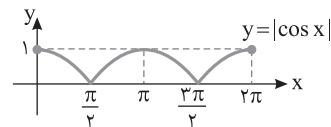
$$\tan \alpha = \tan(90^\circ - (x+y)) = \cot(x+y) = \frac{1}{\tan(x+y)}$$

$$= \frac{1 - \tan x \tan y}{\tan x + \tan y} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{4}{3}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



۶۲۱- گزینه ۴ ابتدا نمودار تابع $y = \cos x$ را رسم می‌کنیم و قرینه

قسمت‌هایی را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به محور طول‌ها رسم می‌کنیم. سپس قسمت‌هایی را که پایین محور طول‌ها قرار دارند حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $y = |\cos x|$ به دست آید. نمودار به دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -|\cos x|$ به دست آید و در نهایت نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم.



۶۲۲- گزینه ۴ چون نمودار تابع از نقاط $(\frac{\pi}{3}, 0)$ و $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}-1)$

می‌گذرد، پس

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}-1 \Rightarrow a \cos \frac{\pi}{4} - b = \sqrt{2}-1 \Rightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2} - b = \sqrt{2}-1$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a \cos \frac{\pi}{3} - b = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} = b$$

در نتیجه

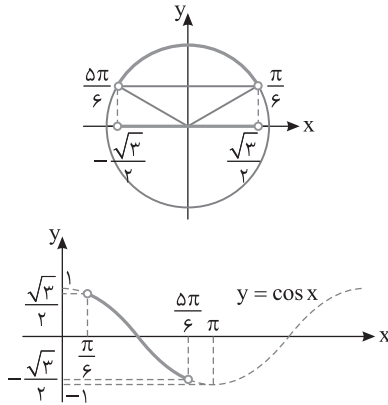
$$\frac{a\sqrt{2}}{2} - b = b\sqrt{2} - b = b(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}-1 \Rightarrow b=1$$

بنابراین $a=2b=2$. پس مقدار ab برابر ۲ است.

۶۲۳- گزینه ۴ با توجه به هر یک از شکل‌های زیر می‌توان فهمید که اگر

$$\text{پس } -\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ آن گاه } \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{3}m < \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$$



۶۲۴- گزینه ۳ دوره تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{|k|}$ ، بنابراین

$$\frac{2\pi}{|k|} = \frac{\pi}{2k+1} \Rightarrow |k| = 4k+2$$

اگر $k > 0$ ، آن گاه

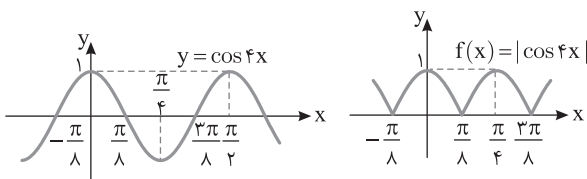
$$k = 4k+2 \Rightarrow k = -\frac{2}{3} \quad (\text{غ.ق.})$$

اگر $k < 0$ ، آن گاه

$$-k = 4k+2 \Rightarrow k = -\frac{2}{5}$$

۶۲۵- گزینه ۳ از روی نمودار تابع f در شکل زیر معلوم است که دوره

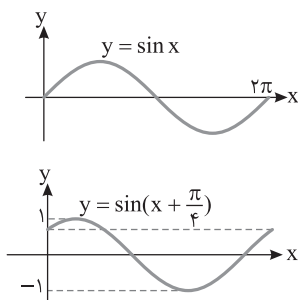
$$\text{تناوب آن برابر است با } \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$



۶۲۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که ضابطه تابع به صورت $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$

است. بنابراین کافی است نمودار تابع $y = \sin x$ را رسم کنیم و آن را به اندازه $\frac{\pi}{4}$

به چپ انتقال دهیم.



۶۳۲- گزینه ۲ با توجه به شکل $f(0)=2$ و کمترین مقدار تابع برابر ۱

است. بنابراین $f(0)=2a-b=2$ و $f_{\min}=2a-b-|a+b|$ با توجه به

شکل ضریب $\sin x$ مثبت است، پس مینیمم تابع برابر است با

$$\begin{cases} 2a-b=2 \\ a-2b=1 \end{cases} \text{ نتیجه}$$

می‌شود $a=1$ و $b=0$. بنابراین $f(x)=\sin x+2$ که بیشترین مقدار آن

برابر ۳ است.

۶۳۳- گزینه ۴ با توجه به شکل‌های زیر، اگر $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$ ، آن‌گاه

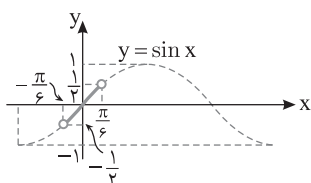
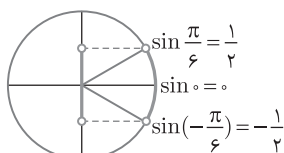
$$-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < \frac{m+1}{2m} < \frac{1}{2} \Rightarrow -1 < \frac{m+1}{m} < 1 \Rightarrow \left| \frac{m+1}{m} \right| < 1$$

$$|m+1| < |m|, m \neq 0$$

در نتیجه

$$m^2 + 2m + 1 < m^2 \Rightarrow m < -\frac{1}{2}$$



۶۳۴- گزینه ۳ ضابطه تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \cos^2 x = 1 + 2 \cos^2 x$$

چون $-1 \leq \cos x \leq 1$ ، پس

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2 \cos^2 x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 1 + 2 \cos^2 x \leq 3 \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 3$$

بنابراین برد تابع بازه $[1, 3]$ است.

۶۳۵- گزینه ۱ کمترین مقدار تابع f برابر $3a-a^2$ است که وقتی

$$\cos ax = -1 \text{ اتفاق می‌افتد. بنابراین}$$

$$3a-a^2=2 \Rightarrow a^2-3a+2=0 \Rightarrow a=1, a=2$$

دوره تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ است. پس اگر $a=1$ ، آن‌گاه دوره تناوب این تابع

برابر 2π است و اگر $a=2$ ، آن‌گاه دوره تناوب آن برابر π است.

۶۳۶- گزینه ۱ توجه کنید که از اتحاد $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ استفاده

می‌کنیم. بنابراین

$$f(x) = \cos^4 x + \frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{3 \cos^4 x + 1}{2}$$

$$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ دوره تناوب تابع } f \text{ برابر است با}$$

۶۳۷- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که کمترین مقدار تابع برابر $a-2$ است

که با توجه به نمودار تابع برابر -1 است. پس $a-2=-1 \Rightarrow a=1$

از طرف دیگر با توجه به نمودار دوره تناوب تابع برابر $\frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ است. پس

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |b| = 4 \Rightarrow b = \pm 4$$

اگر $b=-4$ ، آن‌گاه $f(x) = 1 + 2 \sin(-\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4})$ که در این صورت تابع

باید در همسایگی راست $x=0$ نزولی باشد که این‌طور نیست. پس $b=4$ و در نتیجه $b-a=4$.

توجه کنید که اگر $b=-4$ ، آن‌گاه $f(x) = 1 + 2 \sin(-\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4})$

که $f(\frac{\pi}{8})=1$ با توجه به شکل این‌طور نیست.

۶۳۸- گزینه ۳ دامنه تابع از نامساوی $\{\frac{\pi x}{2} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ به دست

می‌آید. پس $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$.

۶۳۹- گزینه ۱ توجه کنید که اگر $-\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$ ، آن‌گاه

$\tan x \geq \tan(-\frac{\pi}{3})$ و در نتیجه $\tan x \geq -\sqrt{3}$ ، بنابراین

$$\frac{2-m}{\sqrt{3}} \geq -\sqrt{3} \Rightarrow 2-m \geq -3 \Rightarrow m \leq 5$$

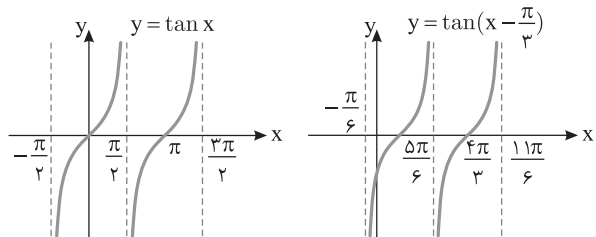
پس حداکثر مقدار m برابر ۵ است.

۶۴۰- گزینه ۱ اگر نمودار تابع $y = \tan x$ را $\frac{\pi}{3}$ واحد به سمت راست

منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{3})$ به دست می‌آید که به صورت

زیر است. بنابراین تابع f روی بازه $(\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$ اکیدا صعودی است و حداقل

مقدار a برابر $\frac{5\pi}{6}$ است.

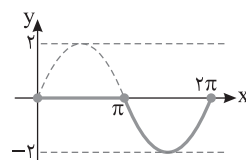


۶۴۱- گزینه ۳ ضابطه تابع به شکل زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ \sin x + \sin x & \pi < x \leq 2\pi \end{cases} = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ 2 \sin x & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است. توجه کنید که در بازه $[\pi, 2\pi]$ نمودار تابع

از دو برابر کردن عرض نقاط روی نمودار تابع $y = \sin x$ به دست آمده است.



۶۴۱- گزینه ۱ ابتدا نمودار تابع $y = \cos x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن

را به اندازه $\frac{\pi}{4}$ به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$

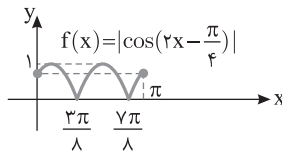
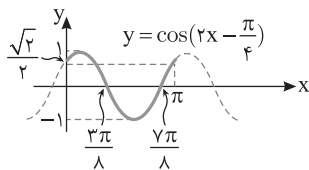
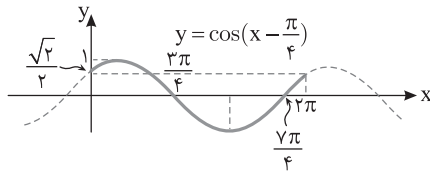
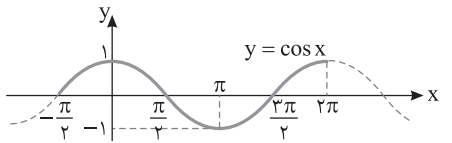
به دست آید. سپس طول نقاط روی این نمودار را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع

$y = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$ به دست آید. در آخر قریبه قسمت‌هایی از نمودار به دست

آمده را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، نسبت به این محور رسم می‌کنیم و

قسمت‌هایی را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، حذف می‌کنیم تا نمودار تابع

$f(x) = |\cos(2x - \frac{\pi}{4})|$ به دست آید.



۶۴۲- گزینه ۲ نمودار تابع از نقطه $(0, 2)$ عبور می‌کند، یعنی $f(0) = 2$.

بنابراین

$$f(0) = a - 2b \sin 0 = a \Rightarrow a = 2$$

پس ضابطه تابع به صورت $f(x) = 2 - 2b \sin x$ است. بیشترین مقدار تابع

برابر ۶ است که یا به ازای $\sin x = 1$ به دست می‌آید یا به ازای $\sin x = -1$

(بستگی به علامت b دارد). اگر $b > 0$ ، آن‌گاه بیشترین مقدار تابع به ازای

$\sin x = -1$ به دست می‌آید که برابر است با $2 + 2b$.

بنابراین

$$2 + 2b = 6 \Rightarrow b = 2$$

و در نتیجه $f(x) = 2 - 4 \sin x$. اگر $b < 0$ ، آن‌گاه بیشترین مقدار تابع به

ازای $\sin x = 1$ به دست می‌آید که برابر است با $2 - 2b$.

بنابراین

$$2 - 2b = 6 \Rightarrow b = -2$$

و در نتیجه $f(x) = 2 + 4 \sin x$. با توجه به اینکه برای x هایی که کمی

بزرگ‌تر از صفر هستند، مقدار تابع کمتر از ۲ است، ضابطه $f(x) = 2 + 4 \sin x$

قابل قبول نیست. بنابراین $b = 2$ و در نتیجه $ab = 4$.

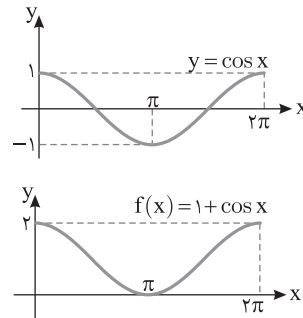
۶۳۷- گزینه ۲ ضابطه تابع به شکل زیر است. توجه کنید که از اتحاد

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$f(x) = 2 \sin^2(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}) = 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 2(\frac{1 + \cos x}{2}) = 1 + \cos x$$

بنابراین کافی است نمودار تابع $y = \cos x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ یک واحد به بالا

انتقال دهیم.



۶۳۸- گزینه ۴ با توجه به شکل حداکثر مقدار تابع برابر ۱ است. این

مقدار زمانی به دست می‌آید که $\cos(\frac{\pi}{4} - bx) = 1$ ، پس

$$a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1$$

در نتیجه

$$f(x) = -1 + 2 \sin bx$$

با توجه به شکل دوره تناوب تابع برابر با $\frac{13\pi}{18} - \frac{\pi}{18} = \frac{2\pi}{3}$ است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow b = \pm 3$$

برای $x > 0$ نمودار تابع $f(x) = -1 + 2 \sin bx$ به صورت صعودی شروع

می‌شود، پس $b = 3$ قابل قبول است، یعنی $f(x) = -1 + 2 \sin 3x$ و مقدار

$b - a$ برابر است با ۴. توجه کنید که اگر $b = -3$ ، آن‌گاه

$f(\frac{\pi}{18}) = -2$ و $f(x) = -1 + 2 \sin(-3x)$ که با توجه به شکل این‌طور نیست.

۶۳۹- گزینه ۳ تابع $y = \tan x$ روی بازه $[0, \frac{\pi}{4}]$ اکیداً صعودی است،

پس

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan 0 \leq \tan x \leq \tan \frac{\pi}{4}$$

$$0 \leq \tan x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\tan x \leq 0 \Rightarrow 1 \leq \frac{3 - \tan x}{2} \leq \frac{3}{2}$$

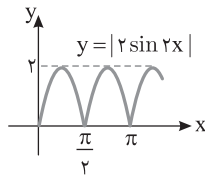
$$\text{بنابراین } R_f = [1, \frac{3}{2}]$$

۶۴۰- گزینه ۲ توجه کنید که اگر $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ ، آن‌گاه $\tan x > 1$ و اگر

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4} \text{، آن‌گاه } \tan x < -1 \text{، بنابراین}$$

$$\frac{m-1}{2} > 1 \Rightarrow m-1 > 2 \Rightarrow m > 3$$

$$\frac{m-1}{2} < -1 \Rightarrow m-1 < -2 \Rightarrow m < -1$$



اکنون کافی است نمودار تابع را فقط در یک دوره تناوب مثلاً در بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ رسم کنیم.

۶۴۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که کمترین مقدار تابع برابر $1-|a|$

است که با توجه به نمودار تابع، برابر -1 است:

$$1-|a| = -1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

از طرف دیگر با توجه به نمودار مقدار $f(0)$ مثبت است:

$$f(0) > 0 \Rightarrow 1 + a \sin \frac{\pi}{4} > 0 \Rightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2} + 1 > 0 \Rightarrow a > -\sqrt{2}$$

بنابراین فقط $a=2$ قابل قبول است. با توجه به نمودار تابع، دوره تناوب تابع برابر $\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$ است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{|a|} = 4 \Rightarrow |a| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{\pi}{2}$$

با توجه به اینکه تابع $f(x) = 1 + 2 \sin(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4})$ در یک همسایگی صفر صعودی است، فقط مقدار $b=2$ قابل قبول است. پس $a+b=4$. توجه کنید که اگر $b=-2$ ، آن گاه $f(x) = 1 + 2 \sin(-\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4})$ و $f(\frac{1}{2}) = 1$ که با توجه به شکل این طور نیست.

۶۴۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi x}{4} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6}$$

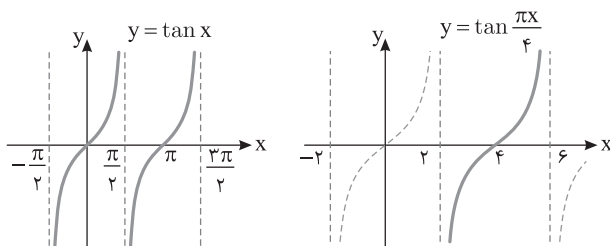
از طرف دیگر تابع $y = \tan x$ روی بازه $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$ اکیداً صعودی است، پس تابع f روی این بازه اکیداً نزولی است. بنابراین

$$-\tan \frac{\pi}{6} \leq -\tan(\frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{3}) \leq -\tan(-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq f(x) \leq \sqrt{3}$$

پس $R_f = [-\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}]$

۶۵۰- گزینه ۳ برای رسم نمودار تابع f ابتدا نمودار تابع $y = \tan x$ را

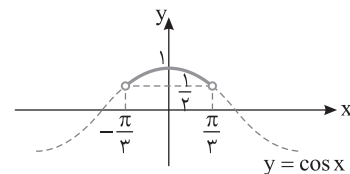
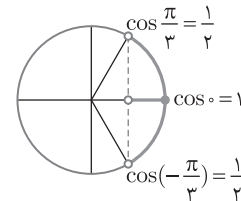
رسم می کنیم، سپس طول نقاط روی این نمودار را در $\frac{4}{\pi}$ ضرب می کنیم. پس حداکثر مقدار a برای اینکه تابع f روی دامنه اش یعنی بازه $(2, a)$ اکیداً صعودی باشد برابر ۶ است.



۶۴۳- گزینه ۲ با توجه به شکل های زیر اگر $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ ، آن گاه

$$\frac{1}{2} < \cos x \leq 1 \quad \text{بنابراین}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{m^2+1}{4} \leq 1 \Rightarrow 2 < m^2+1 \leq 4 \Rightarrow 1 < m^2 \leq 3 \Rightarrow 1 < |m| \leq \sqrt{3}$$



۶۴۴- گزینه ۱ ضابطه تابع را به شکل $f(x) = (\sin^2 x + 1)^2 - 1$

می نویسیم. چون $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، پس

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \sin^2 x + 1 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq (\sin^2 x + 1)^2 \leq 4$$

$$0 \leq (\sin^2 x + 1)^2 - 1 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 3$$

بنابراین برد تابع بازه $[0, 3]$ است.

۶۴۵- گزینه ۴ دوره تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|a\pi|}$ است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{|a\pi|} = 4 \Rightarrow |a| = \frac{1}{2}$$

کمترین مقدار تابع f برابر $|a| - |b|$ است. بنابراین

$$|a| - |b| = -3 \Rightarrow \frac{1}{2} - |b| = -3 \Rightarrow |b| = \frac{7}{2}$$

بیشترین مقدار تابع f برابر $|a| + |b|$ است که برابر است با $\frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4$.

۶۴۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \cos^2 ax (1 - \cos^2 ax) = \cos^2 ax \sin^2 ax = (\cos ax \sin ax)^2$$

$$= (\frac{1}{2} \sin 2ax)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2ax = \frac{1}{4} (1 - \cos 4ax)$$

بنابراین دوره تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|4a|}$ است. پس

$$\frac{2\pi}{|4a|} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

۶۴۷- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = 4 |\sin x \cos x| = 4 |\frac{1}{2} \sin 2x| = |2 \sin 2x|$$

بنابراین ابتدا نمودار تابع $y = \sin x$ را رسم می کنیم، سپس طول نقاط آن را نصف و عرض نقاط آن را دو برابر می کنیم تا نمودار تابع $y = 2 \sin 2x$ به دست آید. سپس قرینه قسمت هایی از نمودار را که زیر محور طول ها قرار دارند، نسبت به این محور رسم می کنیم و در آخر قسمت هایی را که زیر محور طول ها قرار دارند، حذف می کنیم.

۶۵۱- گزینه ۱ جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند

$$3x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های به صورت $\frac{2k\pi}{5}$ شامل جواب‌های به صورت $2k\pi$ هم هستند (مثلاً اگر در $\frac{2k\pi}{5}$ قرار دهید $k=5$ ، آن‌گاه جواب 2π به دست می‌آید که از قرار دادن $k=1$ در $2k\pi$ حاصل می‌شود). پس جواب‌های کلی معادله به صورت $\frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$ هستند.

۶۵۲- گزینه ۴ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin \frac{x}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4}$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\frac{x}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 8k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 8k\pi + 3\pi, k \in \mathbb{Z}$$

۶۵۳- گزینه ۳ اگر نمودار تابع f محور طول‌ها را در نقطه‌ای با طول x

$$\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = k\pi \quad \text{پس } f(x) = 0$$

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(3k+1)\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ را به دست می‌آوریم:

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{(3k+1)\pi}{6} < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -3 < 3k+1 < 9 \Rightarrow -\frac{4}{3} < k < \frac{8}{3}$$

بنابراین به ازای $k=-1, k=0, k=1$ و $k=2$ چهار مقدار برای x به دست می‌آید که طول نقاط برخورد نمودار تابع f با محور طول‌ها هستند.

۶۵۴- گزینه ۱ جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$4x = k\pi + 2x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه $(0, 2\pi)$ را به دست می‌آوریم:

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵
x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$

(غ.ق.ق.) (غ.ق.ق.)

بنابراین مجموع جواب‌ها در بازه $(0, 2\pi)$ برابر است با

$$\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} + \frac{11\pi}{6} = \frac{13\pi}{3}$$

۶۵۵- گزینه ۴ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(x + \frac{\pi}{5}) = -\sin x \Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{5}) = \cos(\frac{\pi}{2} + x)$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x + \frac{\pi}{5} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow 2k\pi = -\frac{3\pi}{10}, k \in \mathbb{Z} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$x + \frac{\pi}{5} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = k\pi - \frac{7\pi}{10}, k \in \mathbb{Z}$$

۶۵۶- گزینه ۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin 2x (\cos 2x - 1) = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \quad \text{یا} \quad \cos 2x = 1$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \quad 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های معادله دوم جزء جواب‌های معادله اول هستند، بنابراین جواب‌های معادله اصلی $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ است.

۶۵۷- گزینه ۲ اگر فرض کنیم $t = \sin 2x$ ، آن‌گاه معادله به صورت

$$t^2 - 7t + 5 = 0 \quad \text{درمی‌آید و از حل این معادله درجه دوم نتیجه می‌شود } t=1$$

$$\text{و } t = \frac{5}{4} \quad \text{بنابراین}$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ \sin 2x = \frac{5}{4} \quad (\text{غ.ق.ق.}) \end{cases}$$

۶۵۸- گزینه ۴ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2 \sin 2x \cos 2x = \sqrt{2} \sin 2x \Rightarrow 2 \sin 2x (\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازه $[0, \pi]$ عبارت‌اند از $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{8}, \pi$. پس معادله

پنج جواب در این بازه دارد.

۶۵۹- گزینه ۳ با استفاده از اتحاد $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ معادله

به صورت زیر درمی‌آید:

$$2 \cos^2 x - 1 = \cos x - 1 \Rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت زیر هستند:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \quad \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

۶۶۰- گزینه ۱ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos 2x + 2 \sin^2 x = \sin 2x \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x + 2 \sin^2 x = \sin 2x$$

$$\sin 2x = 1$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

۶۶۱- گزینه ۱ راه حل اول جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$5x = 2k\pi + 4x \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$5x = 2k\pi - 4x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{9}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های به صورت $\frac{2k\pi}{9}$ شامل جواب‌های به صورت $2k\pi$ هم هستند (مثلاً

اگر در $\frac{2k\pi}{9}$ قرار دهید $k=9$ ، آن‌گاه جواب 2π به دست می‌آید که از قرار

دادن $k=1$ در $2k\pi$ حاصل می‌شود). پس جواب‌های کلی معادله به صورت

$$\frac{2k\pi}{9}, k \in \mathbb{Z} \quad \text{هستند.}$$

۶۶۶- گزینه ۲) معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\sqrt{2} \sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (\sqrt{2} \sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ یا } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین جوابهای معادله در بازه $(0, 2\pi)$ عبارتند از $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ که

مجموع آنها برابر 2π است.

۶۶۷- گزینه ۳) ابتدا معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$2(1 - \sin^2 x) - 3 \sin x - 3 = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$$

اگر فرض کنیم $t = \sin x$ ، معادله به صورت $2t^2 + 3t + 1 = 0$ درمی آید. از

حل این معادله نتیجه می شود $t = -1$ و $t = -\frac{1}{2}$. بنابراین

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$$

توجه کنید که فقط جوابهای واقع در بازه $(-\pi, 0)$ را مشخص کرده ایم که

تعداد آنها سه تا است.

۶۶۸- گزینه ۱) چون $\sin 4x \neq 0$ ، معادله به صورت زیر درمی آید:

$$\frac{1}{\cos 2x} = \frac{1}{\sin 4x} \Rightarrow \sin 4x = \cos 2x \Rightarrow 2 \sin 2x \cos 2x = \cos 2x$$

$$2 \sin 2x \cos 2x - \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x (2 \sin 2x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 & (\text{غ.ق.ق.}) \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

جوابهای واقع در بازه $[0, \pi]$ عبارتند از $\frac{\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$ ، که مجموع آنها برابر

$\frac{\pi}{2}$ است.

۶۶۹- گزینه ۲) معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{3 \sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin 2x \cos x = 3 \sin x \cos 2x$$

اکنون از اتحادهای $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ و $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ استفاده می کنیم

$$2 \sin x \cos^2 x - 3 \sin x (2 \cos^2 x - 1) = 0$$

$$\sin x (2 \cos^2 x - 6 \cos^2 x + 3) = 0$$

$$\sin x (3 - 4 \cos^2 x) = 0$$

بنابراین جوابهای معادله در بازه $(0, 2\pi)$ به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi \\ \cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$

پس مجموع جوابهای معادله در این بازه برابر است با 5π .

راه حل دوم $x = 0$ جواب معادله است، پس گزینه های (۲) و (۴) رد می شوند

(به ازای هیچ مقدار صحیح k ، $x = 0$ به دست نمی آید). اگر $k = 9$ ، آنگاه

$\frac{k\pi}{9} = \pi$ ، اما $x = \pi$ جواب معادله نیست، پس گزینه (۳) هم رد می شود.

۶۶۲- گزینه ۳) ابتدا معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$2 \sin x = -\sqrt{3} \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{3})$$

بنابراین جوابهای کلی معادله به صورت زیر است:

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}, x = 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}, x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}$$

۶۶۳- گزینه ۳) در نقاطی که $\sin 3x = 1$ ، نمودار تابع f حداکثر مقدار

$$3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(4k+1)\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

خود را دارد. پس

k	-1	0	1	2
x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$

بنابراین نمودار تابع در بازه $[-\pi, 2\pi]$ ، چهار بار به حداکثر مقدار خود می رسد.

برای پیدا کردن نقاطی که نمودار تابع در آنها حداکثر می شود، می توانیم به

شکل زیر نیز عمل کنیم:

$$-\pi \leq \frac{(4k+1)\pi}{6} \leq 2\pi \Rightarrow -6 \leq 4k+1 \leq 12 \Rightarrow -7 \leq 4k \leq 11$$

$$-\frac{7}{4} \leq k \leq \frac{11}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{-1, 0, 1, 2\}$$

۶۶۴- گزینه ۱) معادله را به صورت زیر می نویسیم

$$\sin \frac{x}{2} = \cos \frac{2x}{3} \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}) = \cos \frac{2x}{3}$$

بنابراین جوابهای معادله به صورت زیر هستند

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = 2k\pi + \frac{2x}{3} \Rightarrow x = \frac{(-12k+3)\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = 2k\pi - \frac{2x}{3} \Rightarrow x = 12k\pi - 3\pi, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جوابهای واقع در بازه $(0, 2\pi)$ را مشخص می کنیم. واضح است که

هیچ یک از جوابهای به صورت $x = 12k\pi - 3\pi$ در بازه $(0, 2\pi)$ قرار ندارند.

پس جوابهای به صورت $x = \frac{(-12k+3)\pi}{7}$ را بررسی می کنیم

k	0	1	-1
x	$\frac{3\pi}{7}$	$-\frac{9\pi}{7}$	$\frac{15\pi}{7}$

(غ.ق.ق. (غ.ق.ق.)

بنابراین معادله فقط یک جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.

۶۶۵- گزینه ۴) توجه کنید که $\frac{\pi}{4} + x + \frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{2}$ ، بنابراین

$$\cot(\frac{\pi}{4} - x) = \cot(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{4} + x)) = \tan(\frac{\pi}{4} + x)$$

بنابراین معادله به صورت زیر ساده می شود:

$$\tan(\frac{\pi}{4} + x) + \tan(\frac{\pi}{4} + x) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan(\frac{\pi}{4} + x) = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \frac{\pi}{6}$$

پس جوابهای کلی معادله به صورت زیر است:

$$\frac{\pi}{4} + x = k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12}$$

۶۷۰- گزینه ۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \sin^2 x \cos^2 x &= 3 \\ 16 \sin^2 x \cos^2 x &= 3 \Rightarrow 4(2 \sin x \cos x)^2 = 3 \\ 4 \sin^2 2x &= 3 \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازه $(0, \pi)$ به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned}2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \quad 2x = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \\ 2x = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \quad 2x = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}\end{aligned}$$

پس مجموع جواب‌های معادله در بازه $(0, \pi)$ برابر است با 2π .

۶۷۱- گزینه ۳ جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned}\Delta x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Delta x = 2k\pi + \pi - 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

۶۷۲- گزینه ۱ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos \frac{x}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\frac{x}{2} = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 4k\pi \pm \frac{4\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های معادله در بازه $(-\pi, 2\pi)$ را به دست می‌آوریم:

k	۰	۱	-۱
$x = 4k\pi - \frac{4\pi}{3}$	$-\frac{4\pi}{3}$ (غ.ق.ق.)	$4\pi - \frac{4\pi}{3}$ (غ.ق.ق.)	$-4\pi - \frac{4\pi}{3}$ (غ.ق.ق.)
k	۰	۱	-۱
$x = 4k\pi + \frac{4\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$ (غ.ق.ق.)	$4\pi + \frac{4\pi}{3}$ (غ.ق.ق.)	$-4\pi + \frac{4\pi}{3}$ (غ.ق.ق.)

بنابراین معادله فوق یک جواب در بازه $(-\pi, 2\pi)$ دارد.

۶۷۳- گزینه ۳ در نقاطی که $\cos 4x = 1$ ، تابع f به حداقل مقدار خود

می‌رسد. پس

$$4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

k	-۱	۰	۱	۲	۳
x	$-\frac{\pi}{2}$	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$

بنابراین در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ نمودار تابع ۵ بار به حداقل مقدار خود می‌رسد.

۶۷۴- گزینه ۳ ابتدا معادله را به صورت $\cos(\frac{\pi}{9} + 2x) = \cos(\frac{\pi}{9})$

می‌نویسیم. پس جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$\begin{aligned}2x - \frac{\pi}{9} = 2k\pi + \frac{\pi}{9} + 2x \Rightarrow 2k\pi = -\frac{2\pi}{9}, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ (غ.ق.ق.)} \\ 2x - \frac{\pi}{9} = 2k\pi - \frac{\pi}{9} - 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{18}, \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

۶۷۵- گزینه ۲ جواب‌های معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}2 \cos^3 x - \cos x &= 0 \Rightarrow \cos x(2 \cos^2 x - 1) = 0 \\ \cos x &= 0, \quad \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

چون جواب‌های معادله را در بازه $(0, 2\pi)$ می‌خواهیم، پس این جواب‌ها

به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned}\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\end{aligned}$$

بنابراین معادله شش جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.

۶۷۶- گزینه ۳ با توجه به $\sin(\pi + x) = -\sin x$ معادله را به صورت

زیر می‌نویسیم:

$$\sin^2 x - \sin x - 2 = 0 \Rightarrow (\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$\sin x - 2 = 0 \Rightarrow \sin x = 2 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

$$\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۶۷۷- گزینه ۳ راه حل اول معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\cos 2x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos 2x = \cos^2 x$$

اکنون از اتحاد $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ استفاده می‌کنیم:

$$2 \cos^2 x - 1 = \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm 1$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x = 2k\pi \text{ یا } x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

پس جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از صفر، π و 2π .

راه حل دوم از اتحاد $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که

معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$1 - \cos 2x = \sin^2 x \Rightarrow 2 \sin^2 x = \sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$$

$$x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, x = \pi, x = 2\pi$$

۶۷۸- گزینه ۱ اگر فرض کنیم $t = \tan x$ ، آن‌گاه $\cot x = \frac{1}{t}$ و در

نتیجه معادله به شکل $3t - \frac{3}{t} = 2\sqrt{3}$ درمی‌آید. بنابراین

$$3t^2 - 2\sqrt{3}t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 + 36}}{6} \Rightarrow t = \sqrt{3}, \quad t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین جواب‌های معادله که در بازه $(\pi, 2\pi)$ قرار دارند به صورت زیر هستند:

$$\tan x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$$

$$\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6}$$

مجموع این جواب‌ها برابر است با $\frac{19\pi}{6}$.

k	۰	۱	۲
$x = (6k-1)\frac{\pi}{9}$	$-\frac{\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{9}$
	(غ.ق.ق.)	(غ.ق.ق.)	

بنابراین مجموع جواب‌های واقع در بازه $(0, \pi)$ برابر است با

$$\frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{9} + \frac{5\pi}{9} = \frac{13\pi}{9}$$

۶۸۳- گزینه ۱ با استفاده از اتحاد $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ ، معادله را

به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(3x - \frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow \sin 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۶۸۴- گزینه ۲ چون $\cos(x - \frac{\pi}{6}) \neq 0$ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(x - \frac{\pi}{6}) = -\sin 3x \Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{2} + 3x)$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} x - \frac{\pi}{6} &= 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 3x \Rightarrow x = -k\pi - \frac{\pi}{3} \\ x \in (0, \pi) &\Rightarrow 0 < -k\pi - \frac{\pi}{3} < \pi \Rightarrow \frac{1}{3} < -k < \frac{4}{3} \Rightarrow -\frac{4}{3} < k < -\frac{1}{3} \\ k \in \mathbb{Z} &\Rightarrow k \in \{-1\} \Rightarrow x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 3x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \\ x \in (0, \pi) &\Rightarrow 0 < \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} < \pi \Rightarrow \frac{1}{12} < k < \frac{25}{12} \\ k \in \mathbb{Z} &\Rightarrow k \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

پس جواب‌های واقع در بازه $(0, \pi)$ عبارت‌اند از $\frac{2\pi}{3}$ ، $\frac{5\pi}{12}$ و $\frac{11\pi}{12}$ که $\frac{11\pi}{12}$ که $\frac{2\pi}{3}$

قابل قبول نیست زیرا باعث صفر شدن مخرج در معادله اصلی می‌شود (توجه

کنید که این جواب در اثر ضرب کردن طرفین معادله در $\cos(x - \frac{\pi}{6})$ به

وجود آمده است). بنابراین معادله دو جواب در بازه $(0, \pi)$ دارد.

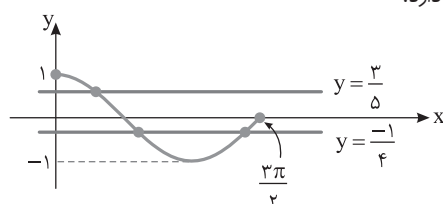
۶۸۵- گزینه ۳ جواب‌های معادله به صورت $\cos x = -\frac{1}{4}$ یا

$\cos x = \frac{3}{5}$ هستند. پس با توجه به نمودار تابع $y = \cos x$ و خطوط

$y = \frac{3}{5}$ و $y = -\frac{1}{4}$ ، معادله $\cos x = \frac{3}{5}$ در بازه $[0, \frac{3\pi}{2}]$ یک جواب و معادله

$\cos x = -\frac{1}{4}$ در این بازه دو جواب دارد. پس معادله مورد نظر در بازه فوق

سه جواب دارد.



۶۷۹- گزینه ۴ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم، سپس از اتحاد

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

استفاده می‌کنیم.

$$1 + \cos \frac{x}{2} = -\cos x \xrightarrow{\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1}$$

$$1 + \cos \frac{x}{2} = -2\cos^2 \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow \cos \frac{x}{2} (2\cos \frac{x}{2} + 1) = 0$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است

$$\cos \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 4k\pi \pm \frac{4\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

از جواب‌های $x = 4k\pi - \frac{4\pi}{3}$ هیچ یک در بازه $(0, 2\pi)$ قرار ندارند، ولی از

جواب‌های $x = 2k\pi + \pi$ و $x = 4k\pi + \frac{4\pi}{3}$ جواب‌های واقع در بازه $(0, 2\pi)$

به‌دستی می‌آیند که π و $\frac{4\pi}{3}$ هستند و مجموع آن‌ها $\frac{7\pi}{3}$ است.

۶۸۰- گزینه ۲ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را به صورت

زیر می‌نویسیم:

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 1$$

$$2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin x \xrightarrow{1 - \sin x = 1} 1 - \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = 0$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ عبارتند از $x = 0$ ، $x = \pi$ و $x = 2\pi$.

ولی توجه کنید که جواب $x = 0$ در معادله اصلی صدق نمی‌کند و قابل قبول

نیست. این جواب به دلیل اینکه طرفین معادله را به توان دو رسانده‌ایم، تولید

شده است. بنابراین معادله در بازه $[0, 2\pi]$ دو جواب دارد.

۶۸۱- گزینه ۳ جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$3x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + x - \frac{\pi}{9} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{9}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - x + \frac{\pi}{9} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{13\pi}{36}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون تعداد جواب‌های واقع در بازه $(0, 2\pi)$ را به دست می‌آوریم:

$$0 < k\pi + \frac{\pi}{9} < 2\pi \Rightarrow -\frac{1}{9} < k < \frac{17}{9} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0, 1\}$$

$$0 < \frac{k\pi}{2} + \frac{13\pi}{36} < 2\pi \Rightarrow -\frac{13}{18} < k < \frac{59}{18} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

بنابراین معادله در بازه $(0, \pi)$ شش جواب دارد.

۶۸۲- گزینه ۲ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 3x = \cos \frac{\pi}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9} = \frac{(6k \pm 1)\pi}{9}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه $(0, \pi)$ را معین می‌کنیم

k	۰	۱	۲
$x = (6k+1)\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{7\pi}{9}$	$\frac{13\pi}{9}$

(غ.ق.ق.)

۶۸۶- گزینه ۲ راه حل اول معادله را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\tan x + \frac{1}{\tan x} = 2 \Rightarrow \tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 0$$

$$(\tan x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \tan x = 1$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

راه حل دوم معادله را به کمک اتحاد $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$ به صورت

زیر می نویسیم:

$$\frac{2}{\sin 2x} = 2 \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۶۸۷- گزینه ۲ اگر فرض کنیم $t = \tan x$ ، آن گاه معادله به صورت

$$3t^2 + 4\sqrt{3}t + 3 = 0$$

$$t = -\sqrt{3} \quad \text{یا} \quad t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{cases} \tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3} = k\pi - \frac{2\pi}{6} \\ \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت $x = k\pi - \frac{n\pi}{6}$ هستند که در آن k

هر عدد صحیح دلخواه و n برابر ۱ یا ۲ است.

۶۸۸- گزینه ۳ با توجه به اتحاد $\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \sin^2 \alpha$ معادله را

به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos \lambda x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \lambda x = 1$$

$$\cos \lambda x = -\cos 2x \Rightarrow \cos \lambda x = \cos(\pi - 2x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\lambda x = 2k\pi + \pi - 2x \Rightarrow x = (2k+1) \frac{\pi}{10}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\lambda x = 2k\pi - \pi + 2x \Rightarrow x = (2k-1) \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

k	۰	۱	۲
$x = (2k+1) \frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{2}$

(غ.ق.ق.)

k	۰	۱	۲
$x = (2k-1) \frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$

(غ.ق.ق.) (غ.ق.ق.)

پس جواب‌های معادله که در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ قرار دارند عبارتند از

$$\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{6}$$

۶۸۹- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\cos^4 x - \sin^4 x = 1 \Rightarrow (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1$$

$$\cos 2x = 1$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه $(0, 3\pi)$ به ازای $k=1, 2$ به دست می آیند که

عبارت‌اند از π و 2π و مجموع آن‌ها برابر 3π است.

۶۹۰- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $t = \cos x$ ، آن گاه $\sin^2 x = 1 - t^2$ و

$$\text{معادله به صورت } (2 - \sqrt{2})(1 - t^2) + t - 1 = 0 \text{ در می آید. بنابراین}$$

$$(2 - \sqrt{2})(1 - t)(1 + t) - (1 - t) = 0$$

$$(1 - t)((2 - \sqrt{2})(1 + t) - 1) = 0$$

$$(1 - t)(2 - \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})t - 1) = 0$$

$$t = 1, \quad t = \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} \times \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس جواب‌های معادله در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ به صورت زیر هستند:

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0, \quad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4}$$

بنابراین تعداد جواب‌های معادله در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ سه است.

۶۹۱- گزینه ۱ معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\sin(x - \frac{\pi}{3}) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

بنابراین جواب‌های آن به صورت زیر هستند:

$$x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2k\pi = -\frac{7\pi}{12}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{13\pi}{24}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه $(-\pi, 2\pi)$ را به دست می آوریم:

k	۰	۱	۲	-۱	-۲
x	$\frac{13\pi}{24}$	$\frac{37\pi}{24}$	$\frac{61\pi}{24}$	$-\frac{11\pi}{24}$	$-\frac{35\pi}{24}$

(غ.ق.ق.) (غ.ق.ق.)

پس معادله سه جواب در بازه فوق دارد.

۶۹۲- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\sin(x + \frac{5\pi}{36}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

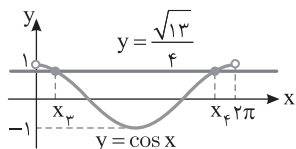
بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$x + \frac{5\pi}{36} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{2\pi}{18}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x + \frac{5\pi}{36} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{11\pi}{18}$$

پس ۱ می تواند برابر ۲ یا ۱۱ باشد.

همچنین با توجه به نمودار تابع $y = \cos x$ و خط $y = \frac{\sqrt{13}}{4}$ ، معادله $\cos x = \frac{\sqrt{13}}{4}$ دو جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.



ولی توجه کنید که یکی از این جواب‌ها (x_3) همان جواب معادله $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ است (x_1) ، زیرا $(\frac{\sqrt{3}}{4})^2 + (\frac{\sqrt{13}}{4})^2 = 1$. بنابراین معادله مورد نظر مسئله سه جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.

۶۹۶- گزینه ۲ راه حل اول معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم. توجه کنید که $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$.

$$-(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos 2x \Rightarrow \cos 2x = \cos x$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

واضح است که جواب‌های $\frac{2k\pi}{3}$ شامل جواب‌های $2k\pi$ نیز می‌شوند. پس جواب‌های کلی به صورت $\frac{2k\pi}{3}$ ، $k \in \mathbb{Z}$ هستند.

راه حل دوم $x = 0$ جواب معادله است. پس گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند. به ازای $k = 3$ ، گزینه (۱) برابر π می‌شود، اما $x = \pi$ جواب معادله نیست:

$$\sin^2 \pi - \cos^2 \pi = -1, \quad \sin(\frac{3\pi}{2} - \pi) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

بنابراین گزینه (۱) هم رد می‌شود.

۶۹۷- گزینه ۲ راه حل اول معادله را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} \times \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = 1 \Rightarrow \sin 2x \sin 4x = \cos 2x \cos 4x$$

$$\cos 2x \cos 4x - \sin 2x \sin 4x = 0 \Rightarrow \cos(4x + 2x) = 0$$

$$6x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = \frac{(2k+1)\pi}{12}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

انکون جواب‌های واقع در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ را به دست می‌آوریم:

k	۰	۱	۲	۳
x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$

(غ.ق.ق.)

توجه کنید که $x = \frac{\pi}{4}$ قابل قبول نیست، زیرا به ازای آن $\tan 2x$ تعریف نشده است. پس معادله دو جواب در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ دارد.

۶۹۳- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

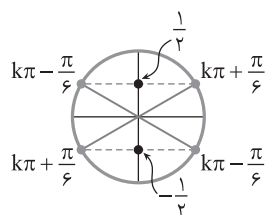
$$\sin^2(\Delta x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin(\Delta x - \frac{\pi}{3}) = \pm \frac{1}{2}$$

با توجه به شکل زیر جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\Delta x - \frac{\pi}{3} = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Delta x = k\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{5} = \frac{k\pi + \pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Delta x = k\pi - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}$$



بنابراین می‌تواند مقادیر ۳ و ۱ را داشته باشد که مجموع آن‌ها برابر ۴ است.

۶۹۴- گزینه ۱ چون $\cos 2x \neq 0$ ، طرفین معادله را در $\cos 2x$ ضرب می‌کنیم

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \cos 2x \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{(4k+1)\pi}{12}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + 2x \Rightarrow x = -\frac{(4k+1)\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

انکون جواب‌های واقع در بازه $(0, \pi)$ را به دست می‌آوریم:

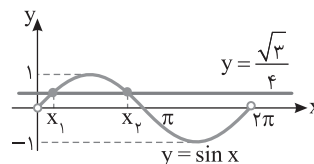
k	۰	۱	۲
$x = \frac{(4k+1)\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{9\pi}{12}$
	(غ.ق.ق.)	(غ.ق.ق.)	(غ.ق.ق.)

k	۰	۱	-۱
$x = -\frac{(4k+1)\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
	(غ.ق.ق.)	(غ.ق.ق.)	(غ.ق.ق.)

جواب‌های واقع در بازه $(0, \pi)$ عبارتند از $\frac{\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$ ولی $\frac{3\pi}{4}$ قابل قبول نیست، زیرا باعث صفر شدن مخرج کسر در معادله اصلی می‌شود (توجه کنید که $x = \frac{3\pi}{4}$ در اثر ضرب کردن معادله در $\cos 2x$ به وجود آمده است). پس تعداد جواب‌ها در بازه $(0, \pi)$ برابر یک است.

۶۹۵- گزینه ۲ توجه کنید که $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ یا $\cos x = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

توجه به نمودار تابع $y = \sin x$ و خط $y = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ، معادله $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ دو جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.



راه حل دوم توجه کنید که

۶۹۹- گزینه ۳ راه حل اول معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = \sin x$$

$$(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = \sin x$$

$$\sin x - \sin^2 x \cos x + \cos x - \sin x \cos^2 x = \sin x$$

$$\cos x(-\sin^2 x + 1 - \sin x \cos x) = 0$$

$$\cos x(\cos^2 x - \sin x \cos x) = 0 \Rightarrow \cos^2 x(\cos x - \sin x) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت زیر هستند:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

پس معادله در بازه $[0, 2\pi]$ چهار جواب دارد.

راه حل دوم معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x \Rightarrow \sin x - \sin^2 x - \cos^3 x = 0$$

$$\sin x(1 - \sin^2 x) - \cos^3 x = 0 \Rightarrow \sin x \cos^2 x - \cos^3 x = 0$$

$$\cos^2 x(\sin x - \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ \sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

پس معادله در بازه $[0, 2\pi]$ چهار جواب دارد.

۷۰۰- گزینه ۲ معادله را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\tan^2 x = 2 - 2 \sin^2 x \Rightarrow \tan^2 x = 2(1 - \sin^2 x)$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 2 \cos^2 x \xrightarrow{\cos x \neq 0} \sin^2 x = 2 \cos^4 x$$

$$1 - \cos^2 x = 2 \cos^4 x \Rightarrow 2 \cos^4 x + \cos^2 x - 1 = 0$$

$$(\cos^2 x + 1)(2 \cos^2 x - 1) = 0$$

چون $\cos^2 x + 1 \neq 0$ ، بنابراین

$$2 \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

۷۰۱- گزینه ۴ ابتدا معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\sin x(1 - \sin^2 x) - \cos x(1 - \cos^2 x) = 0$$

$$\sin x \cos^2 x - \cos x \sin^2 x = 0$$

$$\sin x \cos x(\cos x - \sin x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x(\cos x - \sin x) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \sin x \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از صفر، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، π ، $\frac{5\pi}{4}$ ، $\frac{7\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{2}$.

$\frac{5\pi}{4}$ که مجموع آن‌ها برابر است با $\frac{13\pi}{4}$.

$$\tan 2x \tan 4x = 1 \Rightarrow \tan 2x \times \frac{2 \tan 2x}{1 - \tan^2 2x} = 1$$

$$2 \tan^2 2x = 1 - \tan^2 2x \Rightarrow 3 \tan^2 2x = 1 \Rightarrow \tan 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{cases} \tan 2x = \tan \frac{\pi}{6} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \\ \tan 2x = \tan(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ را می یابیم.

k	۰	۱	k	۱	۲
x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}	\frac{\pi}{12}	\frac{7\pi}{12}	x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12}	\frac{5\pi}{12}	\frac{11\pi}{12}

(غ.ق.ق.)

(غ.ق.ق.)

بنابراین معادله دو جواب در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ دارد.

راه حل سوم معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\tan 2x = \cot 4x = \tan(\frac{\pi}{2} - 4x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{2} - 4x \Rightarrow 6x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ به صورت $x = \frac{\pi}{12}$ و $x = \frac{5\pi}{12}$ هستند.

۶۹۸- گزینه ۴ از اتحاد مثلثاتی $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ کمک

می گیریم و معادله را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$$

طرفین معادله را در $\cos x + \sin x$ ضرب می کنیم

$$\cos x - \sin x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)^2$$

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = 0 & (1) \\ (\cos x + \sin x)^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

از معادله (۱) جواب‌های زیر در بازه $[0, \pi]$ به دست می آید:

$$\cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

از معادله (۲) جواب‌های زیر در بازه $[0, \pi]$ به دست می آید:

$$\cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi$$

$$x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$$

پس مجموع جواب‌های واقع در بازه $[0, \pi]$ برابر $\frac{7\pi}{4}$ است.

۷۰۶- گزینه ۲) راه حل اول معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\sin x \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \cos x = 3 \sin x \cos \frac{\pi}{12} - 3 \sin \frac{\pi}{12} \cos x$$

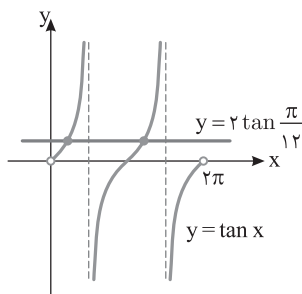
$$2 \sin \frac{\pi}{12} \cos x = 2 \sin x \cos \frac{\pi}{12}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{12}}{2 \cos \frac{\pi}{12}}$$

$$\tan x = 2 \tan \frac{\pi}{12}$$

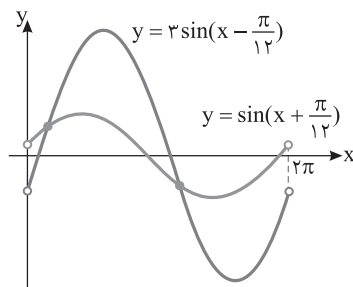
با توجه به نمودار تابع های $y = \tan x$ و خط $y = 2 \tan \frac{\pi}{12}$ معادله فوق دو

جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.



راه حل دوم نمودار تابع های $y = \sin(x + \frac{\pi}{12})$ و $y = 3 \sin(x - \frac{\pi}{12})$ را در

بازه $(0, 2\pi)$ رسم می کنیم و تعداد نقاط برخورد آن ها را می یابیم. با توجه به شکل زیر معادله مورد نظر دو جواب دارد.



۷۰۷- گزینه ۲) ابتدا معادله را ساده می کنیم:

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{4}$$

$$(\cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \times \frac{\sqrt{2}}{2})(\cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \times \frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{4}$$

$$(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 (\cos^2 x - \sin^2 x) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} \cos 2x = -\frac{1}{4}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3}$$

پس جواب های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۷۰۲- گزینه ۳) ابتدا توجه کنید که

$$x + \frac{\pi}{9} - (x - \frac{7\pi}{18}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x - \frac{7\pi}{18} = (x + \frac{\pi}{9}) - \frac{\pi}{2}$$

بنابراین معادله به صورت زیر ساده می شود

$$\sin^2(x + \frac{\pi}{9}) + 2 \sin^2(-\frac{\pi}{2} + (x + \frac{\pi}{9})) = 2$$

$$\sin^2(x + \frac{\pi}{9}) + 2 \cos^2(x + \frac{\pi}{9}) = 2$$

$$1 - \cos^2(x + \frac{\pi}{9}) + 2 \cos^2(x + \frac{\pi}{9}) = 2$$

$$\cos^2(x + \frac{\pi}{9}) = 1 \Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{9}) = \pm 1 \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{9}) = 0$$

بنابراین جواب های معادله به صورت زیر است:

$$x + \frac{\pi}{9} = k\pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{9}, k \in \mathbb{Z}$$

۷۰۳- گزینه ۳) معادله را به صورت زیر ساده می کنیم. توجه کنید که از

اتحاد های چاق و لاغر و $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ استفاده می کنیم.

$$(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$(\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x) - (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0$$

$$(\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x - \sin x - \cos x) = 0$$

$$(\cos x - \sin x)(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$$

بنابراین جواب های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت زیر هستند:

$$\cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \cos x = 1 \Rightarrow x = 0, 2\pi$$

پس معادله در این بازه پنج جواب دارد.

۷۰۴- گزینه ۲) دو طرف معادله داده شده را به توان دو می رسانیم و از

اتحاد $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ استفاده می کنیم.

$$2(\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x) = 3 \Rightarrow 2(1 + \sin 2x) = 3$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

جواب های معادله در بازه $(0, \pi)$ به ازای $k=0$ ، $\frac{\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$ است، پس

مجموع جواب ها برابر $\frac{\pi}{3}$ است.

۷۰۵- گزینه ۲) از $\cos(2\pi \sin x) = -1$ نتیجه می شود

$$2\pi \sin x = 2k\pi + \pi \Rightarrow \sin x = k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

با توجه به $-1 \leq \sin x \leq 1$ نتیجه می شود که k می تواند مقادیر صفر و -1 را داشته باشد. بنابراین جواب های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت زیر هستند:

$$k=0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$$

$$k=-1 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}, x = \frac{11\pi}{6}$$

پس مجموع جواب ها برابر است با 4π .

۷۰۸- گزینه ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \tan 2x \Rightarrow \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan x} = \tan 2x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan(2x)$$

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ را به دست می‌آوریم:

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵
x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{4}$

(غ.ق.ق.) (غ.ق.ق.)

توجه کنید که $\frac{7\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ جواب معادله نیستند زیرا به ازای این مقادیر

$\tan 2x$ تعریف نمی‌شود. پس معادله چهار جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد.

۷۰۹- گزینه ۴ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم

$$\frac{\tan 3x - \tan x}{1 + \tan x \tan 3x} = \frac{\tan \delta x + \tan x}{1 - \tan x \tan \delta x}$$

$$\tan(3x - x) = \tan(\delta x + x) \Rightarrow \tan 2x = \tan \delta x$$

بنابراین جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$6x = k\pi + 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

فقط $x = \frac{\pi}{4}$ در بازه $(0, \frac{\pi}{4})$ قرار دارد که قابل قبول نیست زیرا باعث صفر

شدن مخرج کسر $\frac{1 + \tan x \tan 3x}{1 - \tan x \tan \delta x}$ می‌شود. بنابراین معادله در بازه

$(0, \frac{\pi}{4})$ جواب ندارد.

۷۱۰- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $t = \tan x$ ، آن‌گاه $\cot x = \frac{1}{t}$ و در

نتیجه معادله به صورت $3t + \frac{k}{t} = 2$ درمی‌آید. اگر دو طرف معادله را در t ضرب

کنیم، معادله به صورت زیر درمی‌آید: $3t^2 + k = 2t \Rightarrow 3t^2 - 2t + k = 0$

معادله فوق با شرط مقابل جواب دارد: $\Delta = 4 - 12k \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{1}{3}$

اکنون فرض کنید t_1 جواب معادله درجه دوم فوق باشد. در این صورت

معادله $\tan x = t_1$ جواب دارد و در نتیجه معادله اصلی نیز جواب خواهد

داشت. پس کافی است $k \leq \frac{1}{3}$.

۷۱۱- گزینه ۱ دو طرف تساوی $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}$ را به توان دو

می‌رسانیم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{9} \Rightarrow 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{8}{9}$$

اگر فرض کنیم $A = \sin \alpha - \cos \alpha$ ، آن‌گاه

$$A^2 = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= 1 - \left(-\frac{8}{9}\right) = \frac{17}{9} \Rightarrow A = \pm \frac{\sqrt{17}}{3}$$

چون انتهای کمان نظیر زاویه α در ناحیه چهارم قرار دارد، $\sin \alpha < 0$ و

$\cos \alpha > 0$. پس مقدار $\sin \alpha - \cos \alpha$ منفی است و در نتیجه $A = -\frac{\sqrt{17}}{3}$.

۷۱۲- گزینه ۳ فرض می‌کنیم اندازه این زاویه برحسب درجه برابر D و

برحسب رادیان برابر R باشد. بنابراین $D = \frac{200}{\pi} R - 5$. از تساوی

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

به دست می‌آید

$$\frac{\frac{200}{\pi} R - 5}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow 180R = 200R - 5\pi \Rightarrow 20R = 5\pi \Rightarrow R = \frac{\pi}{4}$$

۷۱۳- گزینه ۳ از نمودار داده شده مشخص است که سه برابر دوره تناوب

برابر ۶ است، پس دوره تناوب تابع $f(x) = a \sin(bx)$ برابر ۲ است:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow \frac{1}{|b|} = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

از طرف دیگر حداکثر مقدار تابع برابر ۴ است. پس $|a| = 4$. در نتیجه $a = \pm 4$.

با توجه به نمودار که در شروع به صورت نزولی است، دو حالت زیر قابل قبول است:

$$\begin{cases} a=4 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 4 \sin(-\pi x), \quad \begin{cases} a=-4 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -4 \sin(\pi x)$$

در هر دو حالت مقدار ab برابر ۴- است.

۷۱۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\cot 38^\circ = \cot(27^\circ + 11^\circ) = -\tan 11^\circ$$

بنابراین

$$\frac{1}{1 - \cot 38^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 11^\circ} = \frac{1}{1 + \tan 11^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 11^\circ}$$

$$= \frac{1 + \cot 11^\circ + 1 + \tan 11^\circ}{(1 + \tan 11^\circ)(1 + \cot 11^\circ)}$$

$$= \frac{2 + \tan 11^\circ + \cot 11^\circ}{1 + \cot 11^\circ + \tan 11^\circ + \tan 11^\circ \cot 11^\circ}$$

$$= \frac{2 + \tan 11^\circ + \cot 11^\circ}{2 + \tan 11^\circ + \cot 11^\circ} = 1$$

۷۱۵- گزینه ۳ چون $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ پس

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} + \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{2} \sin(15^\circ + 45^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ}$$

$$= 4\sqrt{2} \sin 60^\circ = 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6}$$

۷۱۶- گزینه ۳ دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم و از

اتحادهای $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ و $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ استفاده

می‌کنیم:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{4}$$

$$1 + \sin 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{3}{4}$$

$$\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{8}$$

بنابراین

۷۲۱- گزینه ۴ می‌دانیم $\tan \alpha \cot \alpha = 1$ ، بنابراین

$$A = \frac{1 - \tan \frac{\pi}{5} + \cot \frac{\pi}{5} - \tan \frac{\pi}{5} \cot \frac{\pi}{5}}{1 + \tan \frac{\pi}{5} - \cot \frac{\pi}{5} - \tan \frac{\pi}{5} \cot \frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{1 - \tan \frac{\pi}{5} + \cot \frac{\pi}{5} - 1}{1 + \tan \frac{\pi}{5} - \cot \frac{\pi}{5} - 1} = \frac{-(\tan \frac{\pi}{5} - \cot \frac{\pi}{5})}{\tan \frac{\pi}{5} - \cot \frac{\pi}{5}} = -1$$

۷۲۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ ، بنابراین از فرض

مسئله نتیجه می‌شود

$$\frac{\tan x - \frac{1}{\tan x}}{\tan x + \frac{1}{\tan x}} = \frac{y}{25} \Rightarrow \frac{\tan^2 x - 1}{\tan^2 x + 1} = \frac{y}{25}$$

$$25 \tan^2 x - 25 = y \tan^2 x + y \Rightarrow \tan^2 x = \frac{16}{9}$$

از اتحاد $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{9}{25}$$

چون x زاویه‌ای حاده است، پس $\cos x > 0$ ، در نتیجه $\cos x = \frac{3}{5}$.

۷۲۳- گزینه ۳ فرض می‌کنیم $\sin x + \cos x = y$ ، در نتیجه

$$y^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{y^2 - 1}{2}$$

بنابراین معادله مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{y^2 - 1}{2} = y \Rightarrow y^2 - 2y - 1 = 0$$

پس $y = \pm \sqrt{2}$ ، ولی چون $1 + \sqrt{2} > 2$ ، پس $\sin x + \cos x$ نمی‌تواند با

این عدد برابر باشد و در نتیجه $\sin x + \cos x = 1 - \sqrt{2}$.

۷۲۴- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\cos^2 179^\circ = \cos^2 (180^\circ - 1^\circ) = \cos^2 1^\circ$$

$$\cos^2 178^\circ = \cos^2 (180^\circ - 2^\circ) = \cos^2 2^\circ$$

$$\vdots$$

$$\cos^2 91^\circ = \cos^2 (180^\circ - 89^\circ) = \cos^2 89^\circ$$

بنابراین

$$A = 2(\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \dots + \cos^2 89^\circ) + \cos^2 90^\circ + \cos^2 180^\circ$$

از طرف دیگر $\cos^2 90^\circ = 0$ و همچنین

$$\cos^2 89^\circ = \sin^2 1^\circ, \cos^2 88^\circ = \sin^2 2^\circ, \dots, \cos^2 46^\circ = \sin^2 44^\circ$$

بنابراین

$$A = 2(\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ + \dots$$

$$+ \sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ + \cos^2 45^\circ) + \cos^2 180^\circ$$

$$\xrightarrow{\cos^2 45^\circ = \frac{1}{2}} A = 2 \left(\underbrace{(1+1+\dots+1)}_{64} + \frac{1}{2} \right) + 1 = 9$$

۷۱۷- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$A = \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$$

بنابراین $A = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

۷۱۸- گزینه ۱ معادله را به صورت $\cos 2x = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ می‌نویسیم. بنابراین جواب‌ها به صورت زیر هستند: ($k \in \mathbb{Z}$)

$$2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad 2x = 2k\pi - x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi - \pi}{3}$$

جواب‌های واقع در بازه $[0, \pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ که مجموع آن‌ها برابر $\frac{5\pi}{6}$ است.

۷۱۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $1 + \sin 2x = (\cos x + \sin x)^2$

بنابراین معادله به صورت زیر ساده می‌شود:

$$(\cos x + \sin x)^2 = \cos x + \sin x$$

$$(\cos x + \sin x)(\cos x + \sin x - 1) = 0$$

اگر $\cos x + \sin x = 0$ ، آن‌گاه $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$. اگر $\cos x + \sin x = 1$ ، آن‌گاه

$$1 - \cos x = \sin x$$

از اتحادهای $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$ و $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ به ازای

$\alpha = \frac{x}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \\ \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازه $(0, 2\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{7\pi}{4}$.

۷۲۰- گزینه ۱ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم

$$\frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{3}}{1 - \tan x \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} \tan x - 3} \Rightarrow \frac{\tan x + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan x} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} \tan x - 3}$$

$$\sqrt{3} \tan^2 x - 3 \tan x + 3 \tan x - 3\sqrt{3} = 3 + \sqrt{3} - (3\sqrt{3} + 3) \tan x$$

$$\sqrt{3} \tan^2 x + (3 + 3\sqrt{3}) \tan x - 3 - 4\sqrt{3} = 0$$

اگر فرض کنیم $t = \tan x$ معادله فوق به یک معادله درجه دوم تبدیل می‌شود که مجموع ضرایب آن صفر است. پس $\tan x = 1$ و

$$\tan x = -\frac{3 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

در بازه $(0, \frac{\pi}{4})$ مورد سؤال است، پس $\tan x = -\frac{3 + 4\sqrt{3}}{3}$ قابل قبول

نیست و معادله $\tan x = 1$ هم فقط یک جواب ($x = \frac{\pi}{4}$) در این بازه دارد.

۷۲۹- گزینه ۱ ابتدا دقت کنید که $\frac{\pi}{\lambda} + \frac{3\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$ در ادامه معادله را

به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{\lambda} - x\right) = -1$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right)\right) = -1$$

$$2 \sin\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) = -1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{\lambda} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x + \frac{\pi}{\lambda} = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{7\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

پس جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ که

مجموع آن‌ها برابر $\frac{11\pi}{6}$ است.

۷۳۰- گزینه ۱ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2 \sin 3x \cos 4x - 2 \sin 4x \cos 3x = -1$$

$$2 \sin(3x - 4x) = -1 \Rightarrow 2 \sin(-x) = -1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازه $(0, \pi)$ عبارت‌اند از $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{5\pi}{6}$ که

مجموع آن‌ها برابر π است.

۷۳۱- گزینه ۲ وقتی چرخ و فلک ۱۸۰ ثانیه (۳ دقیقه) می‌چرخد، ۶ دور

چرخیده و کابین‌ها در محل اولیه خود قرار گرفته‌اند. باید ببینیم در ۴ ثانیه هر کابین چقدر جابه‌جا می‌شود. چون در هر ۶۰ ثانیه ۲ دور می‌چرخد، پس در ۴

ثانیه $2 \times \frac{4}{60}$ دور، یعنی $\frac{2}{15}$ دور معادل $\frac{8\pi}{15}$ رادیان می‌چرخد.

چون زاویه بین دو کابین متوالی $\frac{2\pi}{3}$ رادیان است، پس هر کابین به ۴ کابین

جلوتر منتقل می‌شود. یعنی کابین شماره یک به محل کابین شماره پنج منتقل می‌شود.

۷۳۲- گزینه ۳ در صورت کسر از $\sin 25^\circ$ و در مخرج کسر از

$\cos 25^\circ$ فاکتور می‌گیریم:

$$A = \frac{\sin 25^\circ (1 - \sin^2 25^\circ)}{\cos 25^\circ (1 - \cos^2 25^\circ)} = \frac{\sin 25^\circ \times \cos^2 25^\circ}{\cos 25^\circ \times \sin^2 25^\circ} = \frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ} = \cot 25^\circ$$

۷۳۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$7a + 9a = \frac{7\pi}{32} + \frac{9\pi}{32} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 9a = \frac{\pi}{2} - 7a \Rightarrow \cos 9a = \sin 7a$$

به همین ترتیب

$$21a + 27a = \frac{21\pi}{32} + \frac{27\pi}{32} = \frac{48\pi}{32} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 27a = \frac{3\pi}{2} - 21a$$

$$\cos 27a = -\sin 21a$$

$$\frac{\sin 7a \cos 27a}{\sin 21a \cos 9a} = -\frac{\sin 7a \sin 21a}{\sin 21a \sin 9a} = -1 \text{ بنابراین}$$

۷۲۵- گزینه ۱ توجه کنید که اگر $-\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$ ، آن‌گاه

$\tan x \geq \tan(-\frac{\pi}{3})$ ، زیرا تابع $y = \tan x$ روی بازه $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

اکیداً صعودی است و در نتیجه $\tan x \geq -\sqrt{3}$ ، بنابراین

$$m + 2\sqrt{3} \geq -\sqrt{3} \Rightarrow m \geq -3\sqrt{3}$$

پس حداقل مقدار m برابر $-3\sqrt{3}$ است.

۷۲۶- گزینه ۴ بیشترین و کمترین مقدار تابع به ترتیب برابر ۲ و -۲

هستند. پس $|a| = 2$. نمودار تابع از نقطه $(\frac{\pi}{3}, 0)$ عبور می‌کند، بنابراین

$$f(\frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow a \sin(\pi(b - \frac{\pi}{3})) = 0 \Rightarrow \sin(\pi(b - \frac{\pi}{3})) = 0$$

$$\pi(b - \frac{\pi}{3}) = k\pi \Rightarrow b = k + \frac{\pi}{3}$$

چون $2 < b < 3$ ، پس $b = \frac{7\pi}{3}$. بنابراین ضابطه تابع به صورت

$f(x) = 2 \sin(\frac{7\pi}{3} - \pi x)$ یا $f(x) = -2 \sin(\frac{7\pi}{3} - \pi x)$ است. چون

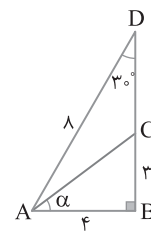
$f(0) > 0$ ، پس ضابطه تابع به صورت $f(x) = 2 \sin(\frac{7\pi}{3} - \pi x)$ است. در

نتیجه $a = 2$ ، $b = \frac{7\pi}{3}$ و $a + b = \frac{13\pi}{3}$.

۷۲۷- گزینه ۲ چون $\sin \hat{D} = \sin 30^\circ = \frac{AB}{\lambda} = \frac{1}{2}$ ، پس $AB = 4$.

بنابراین با استفاده از قضیه فیثاغورس، $AC = 5$. در نتیجه $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و

$\cos \alpha = \frac{4}{5}$. بنابراین $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2(\frac{3}{5})(\frac{4}{5}) = \frac{24}{25}$.



۷۲۸- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \alpha}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}$$

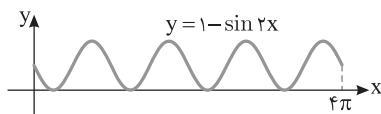
به همین ترتیب $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$. در نتیجه، عبارت مورد نظر

برابر است با

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} + \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{(1 + \tan \alpha)^2 + (1 - \tan \alpha)^2}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2(1 + \tan^2 \alpha)}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha}\right)}{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{2}{\cos 2\alpha} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6$$

پس به ازای $k=0, k=1, k=2, k=3$ چهار مقدار برای x به دست می‌آید که طول نقاط تماس نمودار تابع با محور طول‌هاست.



۷۳۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$2 \cos^2 2x + 3 \cos 2x + 1 = 0 \Rightarrow (2 \cos 2x + 1)(\cos 2x + 1) = 0$$

بنابراین

$$\cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه $[0, \pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ که مجموع آن‌ها

برابر $\frac{3\pi}{2}$ است.

۷۴۰- گزینه ۲ دو طرف معادله را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{12}$$

$$x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{12}$$

بنابراین معادله در بازه $(0, 2\pi)$ دو جواب $\frac{23\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$ را دارد.

۷۴۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$$A = \frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(\frac{3\pi}{2} + \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cot \theta$$

ریاضی - ۹۱

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \tan \theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} = 3$$

۷۴۲- گزینه ۴ از اتحادهای $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ و

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}$$

اکنون از اتحاد $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sin^4 \theta \cos^4 \theta} = \frac{1}{\frac{1}{16} \sin^4 2\theta} = \frac{16}{\sin^4 2\theta}$$

۷۳۴- گزینه ۲ حداقل مقدار تابع مورد نظر باید -4 و حداکثر مقدار آن

۲ باشد. حداقل مقدار تابع $y = 3 \cos(2x) - 4$ برابر -7 و حداقل مقدار تابع

$y = -2 \cos(3x) + 1$ برابر -1 است. پس این توابع جواب نیستند.

در تابع $y = -3 \sin(3x) - 1$ مقدار تابع در $x=0$ برابر -1 است و تابع در

سمت راست $x=0$ نزولی است. پس $y = -3 \sin(3x) - 1$ جواب نیست.

ولی تابع $y = 3 \sin(2x) - 1$ در سمت راست $x=0$ صعودی است.

۷۳۵- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \tan((x+10^\circ) + (y+35^\circ)) &= \frac{\tan(x+10^\circ) + \tan(y+35^\circ)}{1 - \tan(x+10^\circ) \tan(y+35^\circ)} \\ &= \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}} = \frac{9}{7} \quad (1) \end{aligned}$$

از طرف دیگر،

$$\tan((x+10^\circ) + (y+35^\circ)) = \tan((x+y) + 45^\circ)$$

$$= \frac{\tan(x+y) + \tan 45^\circ}{1 - \tan(x+y) \tan 45^\circ} = \frac{\tan(x+y) + 1}{1 - \tan(x+y)} \quad (2)$$

اگر تساوی (۱) و (۲) را برابر قرار دهیم، به دست می‌آید

$$\frac{\tan(x+y) + 1}{1 - \tan(x+y)} = \frac{9}{7} \Rightarrow \tan(x+y) = \frac{1}{8}$$

۷۳۶- گزینه ۲ دو طرف تساوی $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{2}{3}$ را به توان دو

می‌رسانیم:

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{4}{9}$$

$$1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{4}{9} \Rightarrow 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{5}{9}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{5}{9} \text{ و در نتیجه } \sin^2 2\alpha = \frac{25}{81}$$

۷۳۷- گزینه ۲ از اتحادهای $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ و

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \tan^2 x} &= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1 + \sin^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \end{aligned}$$

بنابراین $A = \left(\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}\right)^2 = \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$ اکنون به ازای

$$x = \frac{\pi}{16} \text{ مقدار عبارت } A \text{ را به دست می‌آوریم:}$$

$$\frac{1 + \cos 4\left(\frac{\pi}{16}\right)}{2} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

۷۳۸- گزینه ۴ از روی نمودار تابع f در شکل زیر معلوم می‌شود که وقتی

نمودار تابع f بر محور طول‌ها مماس می‌شود، پس $f(x) = 0$

$$1 - \sin(2x) = 0 \Rightarrow \sin(2x) = 1$$

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$0 < x < 4\pi \Rightarrow 0 < k\pi + \frac{\pi}{4} < 4\pi \Rightarrow 0 < k + \frac{1}{4} < 4 \Rightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{15}{4}$$

۷۴۸- گزینه ۱) معادله را به صورت $\cos 3x = -\cos x = \cos(\pi - x)$

نوشته و حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

با توجه به $\cos x \neq 0$ ، جواب $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$ غیرقابل قبول است. پس جواب

کلی $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ است. خارج از کشور تجربی - ۹۴

۷۴۹- گزینه ۱) ابتدا دقت کنید که $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$. در ادامه معادله را

به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{8}\right)\right) = 1$$

$$2\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

پس جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت زیر هستند که مجموع آن‌ها برابر

$$x_1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{8} \Rightarrow x_1 + x_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \quad \text{است:} \quad \frac{3\pi}{4}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۷۵۰- گزینه ۴) زاویه $\frac{\pi}{3} - x$ ، متمم زاویه x است، پس

$$\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0 \Rightarrow \sin 2x + \sin x = 0$$

$$\sin 2x = -\sin x \Rightarrow \sin 2x = \sin(-x)$$

$$2x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, \quad 2x = 2k\pi + \pi + x \Rightarrow x = (2k+1)\pi$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$ و π .

خارج از کشور تجربی - ۹۶

مجموع این جواب‌ها برابر 5π است.

۷۵۱- گزینه ۱) از اتحاد $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$ استفاده می‌کنیم.

ابتدا دو طرف عبارت داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}$$

$$1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\frac{3}{4} \quad \text{بنابراین} \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha$$

تجربی - ۹۵

۷۵۲- گزینه ۳) عبارت را بر حسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه 20° می‌نویسیم:

$$A = \frac{\sin(270^\circ - 20^\circ) + \sin(720^\circ - 20^\circ)}{\cos(540^\circ + 20^\circ) - \cos(90^\circ + 20^\circ)} = \frac{-\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ + \sin 20^\circ}$$

سپس صورت و مخرج را بر $\cos 20^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$A = \frac{-\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ + \sin 20^\circ} = \frac{-1 - \tan 20^\circ}{-1 + \tan 20^\circ} = \frac{-1 - \frac{1}{5}}{-1 + \frac{1}{5}} = \frac{-\frac{6}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{2}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۷۴۳- گزینه ۱) از نمودار داده شده مشخص است که سه برابر دوره

تناوب، برابر ۳ است، پس دوره تناوب تابع $y = a \sin(b\pi x)$ برابر ۱ است:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 1 \Rightarrow \frac{2}{|b|} = 1 \Rightarrow b = \pm 2$$

از طرف دیگر حداکثر مقدار تابع برابر ۳ است. پس $|a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$

با توجه به نمودار که در شروع به صورت نزولی است، دو حالت زیر قابل قبول است:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow y = 3 \sin(-2\pi x)$$

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow y = -3 \sin(2\pi x)$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

در هر دو حالت مقدار ab برابر -6 است.

۷۴۴- گزینه ۲) از اتحاد $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$ استفاده

می‌کنیم. اگر $\alpha = \frac{x}{2}$ ، آن‌گاه

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = -2 \cot x = -\frac{2}{\tan x} = -\frac{2}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{2}$$

تجربی - ۹۶

۷۴۵- گزینه ۲) ابتدا توجه کنید که

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} + \cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= 2 \cos x \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} \cos x = \cos x$$

$$\text{بنابراین} \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \times \frac{4}{9} - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9} \quad \text{و} \quad \cos x = \frac{2}{3}$$

تجربی - ۹۳

۷۴۶- گزینه ۲) ابتدا مقدار $\tan \alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$\tan \alpha = \tan((\alpha - \beta) + \beta) = \frac{\tan(\alpha - \beta) + \tan \beta}{1 - \tan(\alpha - \beta) \tan \beta} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} = 2$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2(2)}{1 + 4} = \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \quad \text{اکنون می‌توان نوشت:}$$

تجربی - ۹۴

۷۴۷- گزینه ۴) کافی است صورت و مخرج برابر باشند به شرطی که

مخرج صفر نباشد:

$$\sin 3x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \Rightarrow \sin 3x = \sin x$$

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (\text{غ.ق.})$$

به ازای $x = k\pi$ مخرج کسر صفر می‌شود، پس این جواب غیرقابل قبول است

خارج از کشور تجربی - ۹۳

و جواب $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ است.

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\cos x = \frac{3}{4} \quad (\text{غ.ق.}), \quad \cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۷۵۸- گزینه ۲ با استفاده از اتحاد $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم.

$$-(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos x \Rightarrow \cos 2x = \cos x$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

واضح است که جواب $\frac{2k\pi}{3}$ شامل جواب $2k\pi$ نیز می‌شود، پس جواب‌های

کلی به صورت $\frac{2k\pi}{3}$ هستند. تجربی - ۹۱

۷۵۹- گزینه ۱ از اتحادهای $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ و

$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$ استفاده می‌کنیم. ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(2\cos^2 x - 1) + 2\sin x \cos x = 0 \Rightarrow \cos 2x + \sin 2x = 0$$

$$\cos 2x = -\sin 2x \Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 2x \Rightarrow k = -\frac{1}{4} \quad (\text{غ.ق.}) \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

راه حل دوم برای به دست آوردن جواب‌های کلی معادله $\cos 2x = -\sin 2x$

به کمک دایره مثلثاتی متوجه می‌شویم: $2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

تجربی - ۹۴

۷۶۰- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = 1 - \cos^2 x$$

$$\sin x \cos x = \sin^2 x \Rightarrow \sin x (\cos x - \sin x) = 0$$

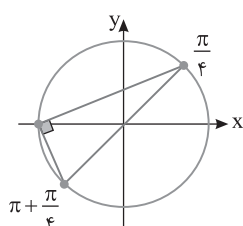
پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, \quad \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

دقت کنید که به ازای $x = 2k\pi$ مخرج کسر صفر می‌شود. پس جواب‌های

معادله $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ و $x = (2k+1)\pi$ هستند که روی دایره مثلثاتی مطابق

خارج از کشور ریاضی - ۹۱



۷۵۳- گزینه ۴ با توجه به شکل حداکثر مقدار تابع برابر ۱ است، این

مقدار زمانی به دست می‌آید که $\cos(bx + \frac{\pi}{4}) = -1$ پس $a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1$

در نتیجه $y = -1 - 2\cos(bx + \frac{\pi}{4}) = -1 + 2\sin(bx)$ با توجه به شکل

دوره تناوب تابع برابر با $\frac{2\pi}{3}$ است. بنابراین $\frac{13\pi}{18} - \frac{\pi}{18} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow b = \pm 3$

برای $x > \frac{\pi}{18}$ نمودار تابع $y = -1 + 2\sin(bx)$ به صورت صعودی شروع

می‌شود، پس $b = 3$ قابل قبول است. یعنی $y = -1 + 2\sin(3x)$ و مقدار

ریاضی - ۹۵

$a + b$ برابر است با $-1 + 3 = 2$.

۷۵۴- گزینه ۳ چون $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$ ، پس

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{-\sqrt{2}\sin(15^\circ - 45^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 30^\circ}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 2\sqrt{2}$$

ریاضی - ۹۶

۷۵۵- گزینه ۱ راه حل اول ابتدا $\tan 2\alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times 2}{1 - 4} = -\frac{4}{3}$$

$$\tan(2\alpha - \beta) = \frac{\tan 2\alpha - \tan \beta}{1 + \tan 2\alpha \tan \beta} = \frac{-\frac{4}{3} - \frac{1}{3}}{1 + (-\frac{4}{3}) \times \frac{1}{3}} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{9}} = -3$$

راه حل دوم ابتدا $\tan(\alpha - \beta)$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = 1$$

$$\tan(2\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan(\alpha - \beta)}{1 - \tan \alpha \tan(\alpha - \beta)} = \frac{2 + 1}{1 - 2 \times 1} = \frac{3}{-1} = -3$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۷۵۶- گزینه ۴ با استفاده از اتحاد مزدوج و اتحاد

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin^2(\pi + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

تجربی - ۹۲

۷۵۷- گزینه ۳ با استفاده از اتحاد $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

ساده می‌کنیم:

$$2\cos 2x = \frac{\cos x}{\sin x} (4\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}) = 4\cos x + 1$$

$$2(2\cos^2 x - 1) = 4\cos x + 1 \Rightarrow 4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$$

$$(2\cos x + 1)(2\cos x - 3) = 0$$

راه حل دوم با توجه به اتحاد $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos^2 x + 2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow 3 \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \cos \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \cos \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

این جواب‌ها همان $k\pi + \frac{\pi}{2}$ هستند.

تجربی - ۹۶

۷۶۶- گزینه ۴ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\tan 3x = \frac{1}{\tan x} \Rightarrow \tan 3x = \cot x \Rightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

توجه کنید که جواب‌های به دست آمده در دامنه تعریف عبارت‌های معادله قرار دارند و $\tan\left(\frac{3k\pi}{4} + \frac{3\pi}{8}\right)$ و $\tan\left(\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right)$ مقادیری تعریف شده هستند.

تجربی - ۹۷

۷۶۷- گزینه ۳ می‌دانیم $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

پس می‌توان نوشت:

$$2\sqrt{2} \sin x \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} + x \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \pi - x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

واضح است که جواب $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ را نیز در خود دارد، زیرا

کافی است مقادیر k را مضرب ۳ انتخاب کنیم. پس جواب کلی معادله به صورت $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ است.

ریاضی - ۹۲

۷۶۸- گزینه ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x \Rightarrow \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan x} = \tan 3x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan(3x) \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{4} - x$$

$$4x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۴

۷۶۹- گزینه ۱ ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\left(\cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{4}$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{\pi}{3}$$

۷۶۱- گزینه ۳ با توجه به شکل دوره تناوب تابع برابر π است، پس

$$\frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2$$

بیشترین مقدار تابع برابر $1/5$ است، پس $|a| = \frac{1}{5}$. با توجه به آنکه تابع در

شروع از مبدأ یک روند نزولی دارد باید a و b مختلف‌العلامت باشند. اگر فرض

کنیم $a = \frac{1}{5}$ و $b = -2$ ، آنگاه

$$y = 1 + \frac{1}{5} \sin\left(-2x - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow y(0) = \frac{3}{5}$$

اما با توجه به نمودار تابع $1/5 < y(0) < 1$ ، پس این حالت غیرقابل قبول است.

بنابراین $a = -\frac{1}{5}$ و $b = 2$ ، یعنی $a + b = \frac{3}{5}$. خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۷۶۲- گزینه ۴ تانژانت‌ها را برحسب سینوس و کسینوس می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \cos 5^\circ \left(\frac{\sin 7^\circ}{\cos 7^\circ} + \frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ} \right) \\ = \cos 5^\circ \left(\frac{\sin 7^\circ \cos 1^\circ + \sin 1^\circ \cos 7^\circ}{\cos 1^\circ \cos 7^\circ} \right) \\ = \frac{\cos 5^\circ \times \sin(7^\circ + 1^\circ)}{\cos 1^\circ \cos 7^\circ} = \frac{\cos 5^\circ \sin 8^\circ}{\cos 1^\circ \cos 7^\circ} = \frac{\cos 5^\circ \cos 1^\circ}{\cos 1^\circ \cos 7^\circ} \\ = \frac{\cos 5^\circ}{\cos 7^\circ} = \frac{\sin 4^\circ}{\sin 2^\circ} = \frac{2 \sin 2^\circ \cos 2^\circ}{\sin 2^\circ} = 2 \cos 2^\circ \end{aligned}$$

ریاضی - ۸۵

۷۶۳- گزینه ۲ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\tan 2x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۷۶۴- گزینه ۱ معادله داده شده را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی،

بازنویسی کرده و آن را حل می‌کنیم:

$$2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 0$$

$$-2 \cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{-4}$$

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \\ \cos x = 2 \text{ (غ.ق.)} \end{cases}$$

تجربی - ۹۵

۷۶۵- گزینه ۳ راه حل اول با توجه به اتحاد $2 \cos^2 x = \cos 2x + 1$

معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos 2x + \cos 2x + 1 = 0$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۷۷۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که برای تعریف شدن عبارت سمت

چپ معادله لازم است که

$$1 + \cos x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq -1 \Rightarrow x \neq 2k\pi + \pi$$

با شرط فوق معادله را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\sin 3x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 3x = -\sin 2x \Rightarrow \sin 3x = \sin(-2x)$$

بنابراین جواب های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ 3x = 2k\pi + \pi + 2x \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \text{ (غ.ق.)} \end{cases}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۷

۷۷۵- گزینه ۳ از اتحادهای

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

و اتحاد مزدوج برای ساده کردن معادله استفاده می کنیم:

$$2 \sin 2x \cos 2x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$2 \sin 2x \cos 2x = -\cos 2x \Rightarrow \cos 2x(2 \sin 2x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases} \end{cases}$$

پس جواب های معادله در بازه $[0, \pi]$ عبارت اند از $\frac{7\pi}{12}$ و $\frac{11\pi}{12}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$

ریاضی - ۹۵

که مجموعشان برابر $\frac{30\pi}{12} = \frac{5\pi}{2}$ است.

۷۷۶- گزینه ۲ از اتحاد مثلثاتی $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ کمک

می گیریم و معادله را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\begin{aligned} \sin 2x(\sin x + \cos x) &= (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)^2 \\ &= (\cos x + \sin x) \times (\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x) \end{aligned}$$

پس

$$\sin 2x(\sin x + \cos x) = (\cos x + \sin x)(1 - \sin 2x)$$

$$(\cos x + \sin x)(2 \sin 2x - 1) = 0$$

پس جواب های معادله در بازه $[0, \pi]$ به صورت زیر هستند:

$$\cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

که مجموع این سه جواب برابر است با $\frac{5\pi}{4}$.

تجربی - ۹۳

پس جواب های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۷۷۰- گزینه ۴ معادله را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\sin x + \sin 2x + \sin(2x + x) = 0$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x = 0$$

$$\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x(1 + \cos x) = 0$$

$$\sin x(1 + \cos 2x) + 2 \sin x \cos x(1 + \cos x) = 0$$

$$\sin x(1 + 2 \cos^2 x - 1 + 2 \cos x + 2 \cos^2 x) = 0$$

$$2 \sin x \cos x(2 \cos x + 1) = 0 \Rightarrow \sin 2x(2 \cos x + 1) = 0$$

بنابراین جواب های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \text{ (غ.ق.)} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۷۷۱- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که چون نمودار تابع از نقطه $(0, 0)$

$$0 = a + b \cos(0) = a + b \quad (1)$$

گذشته است، پس

از طرف دیگر، چون تابع کسینوس در همسایگی راست نقطه $x = 0$ نزولی

است، اما تابع مورد نظر در همسایگی راست نقطه $x = 0$ صعودی است، پس

b عددی منفی است. در نتیجه، چون بیشترین مقدار تابع مورد نظر برابر ۴

است، پس $4 = a - b \quad (2)$

از تساوی های (۱) و (۲) نتیجه می شود $b = -2$.

ریاضی - ۹۷

۷۷۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha - \cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \frac{2}{9} = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{7}{9}$$

از طرف دیگر،

$$\text{چون } \alpha \text{ در ربع چهارم است، پس } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ و در نتیجه}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۷۷۳- گزینه ۳ از رابطه داده شده نتیجه می شود:

$$\frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \alpha}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1}{5}$$

$$1 + \tan \alpha = 5 - 5 \tan \alpha \Rightarrow 6 \tan \alpha = 4 \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{2}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

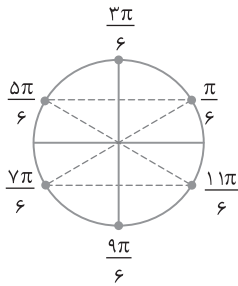
بنابراین

خارج از کشور ریاضی - ۸۸

بنابراین

$$\begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} = k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ \sin x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}, x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

اگر انتهای کمان نظیر جواب‌های معادله را روی دایره مثلثاتی نشان دهیم، به صورت زیر خواهند بود که می‌توان آن‌ها را به صورت $\frac{(2k+1)\pi}{6}$ نشان داد.



ریاضی - ۹۷

با شرط $\sin x \neq 0$ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin(2x+x) = 2 \sin x \cos^2 x$$

$$\sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x = 2 \sin x \cos^2 x$$

$$2 \sin x \cos^2 x + \sin x \cos 2x = 2 \sin x \cos^2 x$$

$$\sin x \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

ریاضی - ۹۳

ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin x + \sin 2x}{\cos x + \cos 2x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin^2 x + \sin 2x \sin x = \cos^2 x + \cos 2x \cos x$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$$

$$-\cos 2x = \cos(2x+x) \Rightarrow \cos(\pi-2x) = \cos 3x$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - 2x \\ 3x = 2k\pi - \pi + 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{5} \\ x = 2k\pi - \pi \end{cases} \text{ (غ.ق.)}$$

واضح است که مضارب فرد k باعث صفر شدن مخرج کسر در معادله اصلیمی‌شوند. بنابراین گزینه (۴) باید به صورت $\left\{ \frac{1}{5}(2k+1)\pi \right\} - \{(2k+1)\pi\}$

نوشته می‌شد.

ریاضی - ۹۴

معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin x \sin 3x = \cos(3x-x)$$

$$\sin x \sin 3x = \cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x$$

$$\cos 3x \cos x = 0$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ \cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = (2k+1)\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

واضح است که جواب $(2k+1)\frac{\pi}{6}$ شامل جواب $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ نیز هست (کافیاست $2k+1$ مضرب ۳ باشد). پس جواب کلی معادله همان $(2k+1)\frac{\pi}{6}$

است.

ریاضی - ۹۶

معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(2 \sin x \cos x)(2 \sin 2x \cos 2x) = 1 - \sin^2 x$$

$$(2 \sin x \cos x)(4 \sin x \cos x \cos 2x) = \cos^2 x$$

$$8 \sin^2 x \cos^2 x \cos 2x - \cos^2 x = 0$$

$$\cos^2 x (8 \sin^2 x \cos 2x - 1) = 0$$

$$\cos^2 x (8 \sin^2 x (1 - 2 \sin^2 x) - 1) = 0$$

$$\cos^2 x (-16 \sin^4 x + 8 \sin^2 x - 1) = 0 \Rightarrow -\cos^2 x (4 \sin^2 x - 1)^2 = 0$$

فصل سوم



بنابراین $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$. همچنین $\lim_{t \rightarrow 3} f(t) = 6$. بنابرین $\lim_{x \rightarrow 1} f(2x+1) = \lim_{t \rightarrow 3} f(t) = 6$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x+1)}{x+2} = \frac{6}{1+2} = 2$$

حد چپ و حد راست تابع در $x=2$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (6x^2 - x^3) = 24 - 8 = 16$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x^2 - x^3) = 12 - 8 = 4$$

بنابراین مجموع حد چپ و حد راست تابع در $x=2$ برابر ۲۰ است.

ابتدا نامعادله را حل می‌کنیم

$$|x-1| < 2 \Rightarrow -2 < x-1 < 2 \Rightarrow -1 < x < 3$$

پس بازه $(-1, 3)$ مجموعه جواب‌های نامعادله است که همسایگی نقطه $x=-2$ نیست.

با توجه به شکل می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 2a, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = a-2, \quad f(a) = a$$

$$2a - (a-2) = 3a + 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

بنابراین

ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow 1^+$ آن‌گاه $(1-x^2) \rightarrow 0^-$

و اگر $x \rightarrow 1^-$ آن‌گاه $(1-x^2) \rightarrow 0^+$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(1-x^2) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(1-x^2) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 3 - 1 = 2$$

در سمت راست نقطه -1 ، $[x] = -1$ و $|x| = -x$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f\left(\frac{|x|}{[x]}\right) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f\left(\frac{-x}{-1}\right) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -1$$

چون

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow (-1)^+, \quad x \rightarrow (-1)^- \Rightarrow f(x) \rightarrow 1^-$$

می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \circ f)(x) = \lim_{t \rightarrow (-1)^+} f(t) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} (f \circ f)(x) = \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 1$$

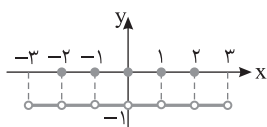
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \circ f)(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (f \circ f)(x) = -1 - 1 = -2$$

ابتدا توجه کنید که

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [-x] = -[x] \Rightarrow f(x) = 0$$

$$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [-x] = -[x] - 1 \Rightarrow f(x) = -1$$

بنابراین نمودار تابع f در بازه $(-3, 3)$



به شکل مقابل است. با توجه به نمودار، تابع f در تمام نقاط این بازه حد دارد و حد آن برابر -1 است.

کافی است $x=2$ عضو بازه $(a-2, 2a)$ باشد. یعنی

$$a-2 < 2 \Rightarrow a < 4, \quad 2a > 2 \Rightarrow a > 1$$

بنابراین $1 < a < 4$.

دامنه تابع از شرط $[x] \neq 2$ به دست می‌آید که به صورت

$$D_f = (-\infty, 2) \cup [3, +\infty)$$

مقابل است:

بنابراین تابع در همسایگی چپ نقطه $x=3$ تعریف نشده است.

توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$ و $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 3$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۷ است.

توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$. در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x+1) = \lim_{y \rightarrow 1} f(y) = 0$$

از طرف دیگر، اگر $x \rightarrow 9^+$ ، آن‌گاه $\frac{x}{3} \rightarrow 3^+$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 9^+} f\left(\frac{x}{3}\right) = \lim_{t \rightarrow 3^+} f(t) = 1$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۱ است.

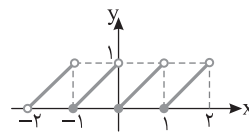
توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطه 1 ، $[x] = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x[x]) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(0) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2$$

با توجه به نمودار، $x \rightarrow (-1)^- \Rightarrow f(x) \rightarrow 2^+$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = -2$$

نمودار تابع به



شکل روبه‌رو است. واضح است که تابع

در نقطه‌های $x=0$ ، $x=-1$ و $x=1$

از بازه $(-2, 2)$ حد ندارد.

توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 2a(5) - 3 = 10a - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 5^2 - a(5) + b = 25 - 5a + b$$

اکنون توجه کنید که چون $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 17$ ، پس هر یک از حدهای بالا برابر

۱۷ است:

$$\begin{cases} 10a - 3 = 17 \\ 25 - 5a + b = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow ab = 4$$

توجه کنید که بنابر قضایای حد، $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ وجود دارد.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+4}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x+4)}{\lim_{x \rightarrow 3} f(x)} = \frac{7}{6} = \frac{7}{6}$$

از طرف دیگر،

۸۰۳- گزینه ۴

در یک همسایگی راست $x=0$ مقادیر تابع f نزدیک ۲ و کمتر از آن هستند، یعنی $f(x) \rightarrow 2^-$ و $f(x)=1$. بنابراین $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)]=1$.

همچنین در یک همسایگی چپ $x=0$ مقادیر تابع f نزدیک ۱- و کمتر از آن هستند، یعنی $f(x) \rightarrow (-1)^-$ و $f(x)=-2$. بنابراین $\lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x)]=-2$.

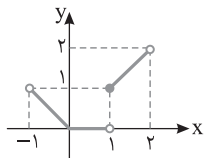
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] - \lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x)] = 2 - (-2) = 4 \quad \text{در نتیجه}$$

۸۰۴- گزینه ۱

ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = -x$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \quad 1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = x$$



پس نمودار تابع به شکل روبه‌رو است و تابع فقط در نقطه $x=1$ از بازه $(-1, 2)$ حد ندارد.

۸۰۵- گزینه ۴

اگر x در یک همسایگی راست ۱ باشد، $x > 1$ ، پس $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(2-x) = \lim_{y \rightarrow 1^-} f(y) = 2a$. در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(2-x)}{f(x)} = \frac{2a}{a} = 2 \quad \text{در نتیجه} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a$$

۸۰۶- گزینه ۱

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - 2g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} 2g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2 \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (2f(x) - 3g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} 2f(x) - \lim_{x \rightarrow a} 3g(x) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow a} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 6 \end{aligned}$$

بنابراین اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ ، آن‌گاه

$$\begin{cases} L_1 - 2L_2 = 2 \\ 2L_1 - 3L_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow L_1 = 6, \quad L_2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \times L_2 = 12 \quad \text{بنابراین}$$

۸۰۷- گزینه ۱

ابتدا حد چپ و حد راست تابع f در نقطه $x=2$ را به‌دست می‌آوریم:

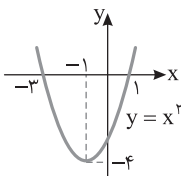
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x[x] + 2a) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 2a) = 4 + 2a \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (b[-x] + 3x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2b + 3x) = -2b + 6 \end{aligned}$$

چون تابع f در نقطه $x=2$ حد دارد، در نتیجه حد چپ و حد راست تابع f در این نقطه برابرند:

$$4 + 2a = -2b + 6 \Rightarrow 2a + 2b = 2 \Rightarrow a + b = 1$$

۸۰۸- گزینه ۱

در شکل زیر نمودار تابع $y = x^2 + 2x - 3$ رسم شده است. توجه کنید $\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 + 2x - 3) = 0$ اما در سمت چپ $x = -3$ ،



مقادیر تابع مثبت هستند. در

نتیجه در سمت چپ $x = -3$ ،

$$[x^2 + 2x - 3] = 0 \quad \text{در نتیجه}$$

حاصل حد نیز صفر می‌شود.

۷۹۷- گزینه ۱

این تابع در تمام نقاط $\mathbb{R}$ حد دارد، پس در $x=2$ و $x=-2$ نیز حد دارد. بنابراین باید حد چپ و حد راست تابع در هر یک از این نقاط برابر باشند:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^3 + x^2) = 8a + 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + b) = 2 + b \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (ax^3 + x^2) = -8a + 4 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (x + b) = -2 + b \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{cases} 8a + 4 = 2 + b \\ -8a + 4 = -2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 8a + 2 \\ b = -8a + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow ab = 1$$

۷۹۸- گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L \quad \text{اگر فرض کنیم} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x)}{x+1} = 3 \Rightarrow \frac{2L}{L+1} = 3 \Rightarrow 2L = 3L + 3 \Rightarrow L = -3$$

$$\text{در نتیجه} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x)-1}{f(x)} = \frac{2 \times (-3) - 1}{-3} = \frac{7}{3}$$

۷۹۹- گزینه ۳

ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطه $x=-2$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (ax[3x] + x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (-6ax + x) \\ &= 12a - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (ax[3x] + x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (-6ax + x) \\ &= 12a - 2 \end{aligned}$$

$$12a - 2 + 12a - 2 = 11 \Rightarrow 24a = 15 \Rightarrow a = \frac{15}{24}$$

بنابراین

۸۰۰- گزینه ۲

ابتدا حد چپ و حد راست تابع را در نقطه $x=1$ حساب می‌کنیم. اگر $x \rightarrow 1^+$ ، آن‌گاه $x \rightarrow (-1)^-$ و $-x \rightarrow 2^+$ و اگر $x \rightarrow 1^-$ ،

آن‌گاه $x \rightarrow (-1)^+$ و $-x \rightarrow 2^-$ در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [2x] + (m+1) \lim_{x \rightarrow 1^-} [-x] = 1 + (m+1)(-1) = -m$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [2x] + (m+1) \lim_{x \rightarrow 1^+} [-x] = 2 + (m+1)(-2) = -2m$$

$$-2m = -m \Rightarrow m = 0$$

در نتیجه

۸۰۱- گزینه ۳

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow x - [x] \neq 0 \Rightarrow x \neq [x] \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$$

بنابراین دامنه تابع به صورت $D_f = (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$ است، پس نقاط $x=0$ و $x=\pm 1$ در دامنه تابع قرار ندارند ولی همسایگی محذوف آن‌ها در دامنه تابع قرار دارد.

۸۰۲- گزینه ۱

توجه کنید اگر $x \rightarrow 3^-$ ، آن‌گاه $t = (x-1) \rightarrow 2^-$. بنابراین $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x-1) = \lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) = -1$. همچنین اگر $x \rightarrow 0^+$ ، آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x+1) = \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = -2 \quad \text{بنابراین} \quad t = (x+1) \rightarrow 1^+$$

مقدار مورد نظر برابر ۳- است.

۸۱۵- گزینه ۱ توجه کنید که $x^3 - x = x(x^2 - 1)$ در نتیجه اگر x از

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\sqrt{t+9}) = 3$$

۸۱۶- گزینه ۲ حد چپ و حد راست تابع در $x=2$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + 3) = 4a + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 3a) = 4 + 3a$$

باید حد چپ و حد راست تابع در $x=2$ برابر باشند، یعنی

$$4 + 3a = 4a + 3 \Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3a) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3) = 12$$

۸۱۷- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{3f(x)}{4f(x)+2} = 1 \Rightarrow \frac{3 \lim_{x \rightarrow a} f(x)}{4 \lim_{x \rightarrow a} f(x)+2} = 1 \Rightarrow \frac{3L}{4L+2} = 1$$

$$4L+2=3L \Rightarrow L=-2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{f(x)-3} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)-3} = \frac{L}{L-3} = \frac{-2}{-2-3} = \frac{2}{5}$$

بنابراین

۸۱۸- گزینه ۲ تابع $y=x$ در تمام نقاط حد دارد. تابع $y=x-[x]$

تمام نقاط غیر صحیح حد دارد. پس ضرب این دو تابع یعنی $f(x)=x(x-[x])$ در تمام نقاط غیر صحیح حد دارد. در نقاط صحیح غیر صفر حد چپ و حد راست تابع $y=x-[x]$ یکسان نیستند پس تابع f نیز در این نقاط حد ندارد. ولی در $x=0$ چون حد تابع $y=x$ برابر صفر است، پس حد تابع f هم برابر صفر است. بنابراین تابع f در نقاط $x=1$ و $x=-1$ از بازه $(-2, 2)$ حد ندارد.

۸۱۹- گزینه ۳ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در $x=2$ را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{fa}{x^2} + x^2 \right) = \frac{fa}{4} + 4 = a + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{3a}{x^2} + x^2 \right) = \frac{3a}{4} + 4$$

$$a + 4 + \frac{3a}{4} + 4 = 10 \Rightarrow \frac{7a}{4} = 2 \Rightarrow a = \frac{8}{7}$$

بنابراین

۸۲۰- گزینه ۴ اگر تابع $y=|x|+f(x)$ در $x=a$ حد داشته باشد،

آن‌گاه تفاضل این تابع و تابع $y=|x|$ باید در $x=a$ حد داشته باشد. تفاضل این دو تابع همان تابع $y=f(x)$ است که باید در $x=a$ حد داشته باشد و این خلاف فرض مسئله است. پس تابع $y=|x|+f(x)$ در $x=a$ حد ندارد.

برای رد گزینه‌های (۱) و (۳)، تابع $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{f(x)} = 0$$

این تابع در $x=0$ حد ندارد، ولی $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{f(x)} = 0$ و برای رد گزینه (۲)، تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0 \\ 3 & x = 0 \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید که در

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

۸۰۹- گزینه ۳ مطابق قضیه‌های محاسبه حد، اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{1+f^2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{1+(\lim_{x \rightarrow a} f(x))^2} = \frac{L}{1+L^2}$$

در بقیه گزینه‌ها ممکن است حد مخرج کسر تابع برابر صفر و حد صورت کسر برابر صفر نباشد و در نتیجه تابع حد نداشته باشد.

۸۱۰- گزینه ۳ در نقطه‌هایی که مقدار $2x$ عددی صحیح نشود، تابع

$$y = [2x]$$

حد ندارد. این نقطه‌ها را به دست می‌آوریم $2x = k, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{k}{2}$

$$0 < \frac{k}{2} < 3 \Rightarrow 0 < k < 6 \Rightarrow k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

پس تابع در پنج نقطه از بازه $(0, 3)$ حد ندارد.

۸۱۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow 1^+$ ، آن‌گاه $(1-x^3) \rightarrow 0^-$

و اگر $x \rightarrow 1^-$ ، آن‌گاه $(1-x^3) \rightarrow 0^+$ بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(1-x^3) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(1-x^3) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 4 + 2 = 6$$

۸۱۲- گزینه ۱ با توجه به نمودار واضح است که $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$

بنابراین $[\lim_{x \rightarrow 1} f(x)] = [3] = 3$. از طرف دیگر در یک همسایگی محذوف

$x=1$ مقادیر تابع f نزدیک ۳ و کمتر از آن هستند، یعنی $f(x) \rightarrow 3^-$

بنابراین در این بازه $[f(x)] = 2$ ، پس $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} 2 = 2$ بنابراین

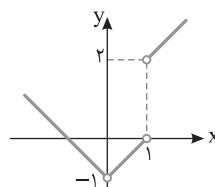
$$\frac{\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]}{[\lim_{x \rightarrow 1} f(x)]} = \frac{2}{3}$$

۸۱۳- گزینه ۱ ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{-x} + \frac{-(x-1)}{x-1} = -x-1$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{-(x-1)}{x-1} = x-1$$

$$x > 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{x-1}{x-1} = x+1$$



بنابراین نمودار تابع به شکل مقابل است.

پس تابع فقط در نقطه $x=1$ حد ندارد.

۸۱۴- گزینه ۱ تابع f فقط در $x=2$ و $x=-2$ ممکن است حد

داشته باشد. حد چپ و حد راست تابع را در این نقاط حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^3 - 2x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (x^3 - 2x) = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} x^2 = 4$$

پس تابع در $x=2$ حد دارد ولی در $x=-2$ حد ندارد.

۸۲۱- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{x+1} = \frac{5}{2}$$

۸۲۲- گزینه ۲ حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ است. توجه کنید که

$$x^2 + 4x^3 + 4x^2 = x^2(x^2 + 4x + 4) = x^2(x+2)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 4x^3 + 4x^2}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2(x+2)^2}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4$$

۸۲۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4), \quad x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x+2} \\ &= \frac{4 + 4 + 4}{2 + 2} = 3 \end{aligned}$$

۸۲۴- گزینه ۳ از روی شکل معلوم می‌شود که $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 4$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^2(x) - 64}{f(x) - 4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^2(x) - 4^2}{f(x) - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(f(x) - 4)(f^2(x) + 4f(x) + 16)}{f(x) - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (f^2(x) + 4f(x) + 16) = 4^2 + 4 \times 4 + 16 = 48 \end{aligned}$$

۸۲۵- گزینه ۳ یک عامل $x-1$ را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + 3x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1 - 3x + 3}{x^3 - 1 + 3x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1) - 3(x-1)}{(x-1)(x^2 + x + 1) + 3(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 2)}{(x-1)(x^2 + x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x + 4} = \frac{0}{6} = 0 \end{aligned}$$

۸۲۶- گزینه ۴ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x^2 - 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x^2 - 3x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{x-1} = -1 \end{aligned}$$

۸۲۷- گزینه ۳ چون حد صورت کسر صفر است، باید حد مخرج آن هم

صفر باشد، زیرا در غیر این صورت حد کسر برابر صفر خواهد شد. که این طور نیست ($b \neq 0$). پس

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + ax + 3) = 9 + 3a + 3 = 12 + 3a = 0 \Rightarrow a = -4$$

بنابراین

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + ax + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x-1} = \frac{3+3}{3-1} = 3 \end{aligned}$$

بنابراین $a + b = -4 + 3 = -1$

۸۲۸- گزینه ۲ از اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 2x^3}}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1 - 2x^3})(1 + \sqrt{1 - 2x^3})}{x^3(1 + \sqrt{1 - 2x^3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2x^3)}{x^3(1 + \sqrt{1 - 2x^3})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x^3(1 + \sqrt{1 - 2x^3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2x^3}} = \frac{2}{1 + 1} = 1 \end{aligned}$$

۸۲۹- گزینه ۴ به کمک اتحاد مزدوج معلوم می‌شود

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-4}}{x^2 - 6x + 5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-4})(\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-4})}{(x^2 - 6x + 5)(\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 1 - 4(x-4)}{(x-1)(x-5)(\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-3(x-5)}{(x-1)(x-5)(\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-3}{(x-1)(\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-4})} = \frac{-3}{4(2+2)} = -\frac{3}{16} \end{aligned}$$

۸۳۰- گزینه ۱ به کمک اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt{x+1} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt{x+1} - 3} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} \times \frac{\sqrt{x+1} + 3}{\sqrt{x+1} + 3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{x-8}{x+1-9} \times \frac{\sqrt{x+1} + 3}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} \right) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1} + 3}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \frac{3+3}{4+4+4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

۸۳۱- گزینه ۳ حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ است. توجه کنید که

$$\begin{aligned} (2x+1)^3 + (2x-1)^3 &= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 + 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 \\ &= 16x^3 + 12x = 4x(4x^2 + 3) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x+1)^3 + (2x-1)^3}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(4x^2 + 3)}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} (4x^2 + 3) = 3$$

۸۳۲- گزینه ۳ حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ است. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{3x^4 - 9x^2}{x - \sqrt{3}} &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{3x^2(x^2 - 3)}{x - \sqrt{3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{3x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} (3x^2(x + \sqrt{3})) \\ &= 3(\sqrt{3})^2(\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 18\sqrt{3} \end{aligned}$$

۸۳۳- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} x^4 - 27x &= x(x^3 - 27) = x(x-3)(x^2 + 3x + 9) \\ x^2 - x - 6 &= (x-3)(x+2) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 27x}{x^2 - x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x-3)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x^2 + 3x + 9)}{x+2} = \frac{3(9+9+9)}{3+2} = \frac{81}{5} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{ax+9}-3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sqrt{ax+9}-3} \times \frac{\sqrt{ax+9}+3}{\sqrt{ax+9}+3} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{ax+9-9} \times \frac{\sqrt{ax+9}+3}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+9}+3}{a} = \frac{6}{a}$$

بنابراین $\frac{6}{a} = \frac{1}{2}$ و در نتیجه $a = 12$. پس $a+b=21$.

۸۴۱- گزینه ۱ در یک همسایگی راست π ، $\sin x < 0$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{|\sin x|} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{-\sin x} = -1$$

۸۴۲- گزینه ۱ راه حل اول با استفاده از اتحاد $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

مقدار حد را به دست می آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cos \pi x}{\sin 2\pi x} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cos \pi x}{2 \sin \pi x \cos \pi x} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2 \sin \pi x} = \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cos \pi x}{\sin 2\pi x} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-\pi \sin \pi x}{2\pi \cos 2\pi x} = \frac{-\pi \times 1}{2\pi \times (-1)} = \frac{1}{2}$$

۸۴۳- گزینه ۱ راه حل اول با استفاده از اتحاد $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

و اتحاد مزدوج مقدار حد را به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sqrt{2} \sin x}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sqrt{2} \sin x}{1-2 \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sqrt{2} \sin x}{(1-\sqrt{2} \sin x)(1+\sqrt{2} \sin x)} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\sqrt{2} \sin x} = \frac{1}{2}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sqrt{2} \sin x}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos x}{-2 \sin 2x} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{-2(-1)} = \frac{1}{2}$$

۸۴۴- گزینه ۲ با استفاده از اتحاد مزدوج می توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}}{\sin(x - \frac{\pi}{4})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}}{\sin(x - \frac{\pi}{4})} \times \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin(x - \frac{\pi}{4})} \times \frac{1}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)} \times \frac{1}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

۸۴۵- گزینه ۳ از تساوی داده شده نتیجه می شود

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} + \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 \Rightarrow \frac{2}{3} + \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

۸۳۴- گزینه ۳ می توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)}{x^2(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = 3$$

۸۳۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $[x]$ در سمت چپ ۳ مساوی ۲

است. پس

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - x[x] - 3}{x[x] - 6} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{2x - 6}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(x+1)}{2(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{2} = 2$$

۸۳۶- گزینه ۱ بنابر اتحاد چاق ولاغر، $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

در نتیجه حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} \times \frac{1}{x^2+2x+4} \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2+2x+4} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} \right) \times \frac{1}{12} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2+\sqrt{x+2}} \right) \times \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{48}$$

۸۳۷- گزینه ۲ به کمک اتحاد مزدوج معلوم می شود که

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x - \sqrt{x+2}}{3x - \sqrt{15x+6}} \times \frac{x + \sqrt{x+2}}{2x + \sqrt{15x+6}} \times \frac{3x + \sqrt{15x+6}}{x + \sqrt{x+2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - x - 2}{9x^2 - 15x - 6} \times \frac{3x + \sqrt{15x+6}}{x + \sqrt{x+2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(9x+3)} \times \frac{3x + \sqrt{15x+6}}{x + \sqrt{x+2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+1}{9x+3} \times \frac{3x + \sqrt{15x+6}}{x + \sqrt{x+2}} \right) = \frac{3}{21} \times \frac{6+6}{2+2} = \frac{3}{7}$$

۸۳۸- گزینه ۴ حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ است. فرض می کنیم $\sqrt{x} = t$.

در این صورت، اگر $x \rightarrow 64$ ، $t \rightarrow 8$ ، $x \rightarrow 2$ ، $t \rightarrow \sqrt{2}$ ، بنابراین $t > 0$. اکنون می توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4} = \lim_{t \rightarrow 8} \frac{t^2 - 8}{t^3 - 4} = \lim_{t \rightarrow 8} \frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{(t-2)(t+2)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 8} \frac{t^2+2t+4}{t+2} = \frac{2^2+2 \times 2+4}{2+2} = 3$$

۸۳۹- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $t = \sqrt[3]{x}$ ، آن گاه $x = t^3$ و $t \rightarrow 1$.

بنابراین $t > 0$ و می توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t^3} - t^3}{\sqrt[3]{t^3} - \sqrt{t^3}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{\frac{3}{2}} - t^3}{t - t^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-t^{\frac{3}{2}}(t^{\frac{3}{2}} - 1)}{t^{\frac{3}{2}}(t - 1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-t^{\frac{3}{2}}(t-1)(t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}} + 1)}{t^{\frac{3}{2}}(t-1)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} (-t^{\frac{3}{2}}(t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}} + 1)) = -6$$

۸۴۰- گزینه ۳ چون حد صورت کسر برابر صفر است و حد مورد نظر صفر

نیست، باید حد مخرج آن هم صفر باشد، تا حد به صورت $\frac{0}{0}$ در بیاید. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{ax+b}-3) = 0 \Rightarrow \sqrt{b} = 3 \Rightarrow b = 9$$

اکنون به کمک اتحاد مزدوج، مقدار حد را به دست می آوریم

۸۴۶- گزینه ۲ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1} \times \frac{1}{x^2+1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2+1} = 1 \times \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

۸۴۷- گزینه ۳ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4x)^2}{(2x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{16x^2}{4x^2} = 4\end{aligned}$$

۸۴۸- گزینه ۳ راه‌حل اول با استفاده از اتحادهای چاق و لاغر و

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^3 4x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos 4x)(1+\cos 4x+\cos^2 4x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 2x(1+\cos 4x+\cos^2 4x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 2x}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0} (1+\cos 4x+\cos^2 4x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 4 \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12\end{aligned}$$

راه‌حل دوم از قاعده هوییتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^3 4x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12\sin 4x \cos^2 4x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} 6\cos^2 4x = 4 \times 6 = 24\end{aligned}$$

۸۴۹- گزینه ۱ راه‌حل اول فرض می‌کنیم $x-2=t$ ، در نتیجه $x=t+2$

و $t \rightarrow 0$ بنابراین

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{x^2-2x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(t+2))}{t(t+2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi t + 2\pi)}{t(t+2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \pi t}{t(t+2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \pi t}{\pi t} \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi}{t+2} = 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

راه‌حل دوم از قاعده هوییتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\pi \cos \pi x}{2x-2} = \frac{\pi \cos 2\pi}{4-2} = \frac{\pi}{2}$$

۸۵۰- گزینه ۲ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

اکنون با فرض $t = x + \frac{\pi}{4}$ معلوم می‌شود $t \rightarrow 0$. بنابراین

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{4x + \pi} &= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{4\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin t}{4t} &= \frac{\sqrt{2}}{4} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

راه‌حل دوم از قاعده هوییتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{4x + \pi} &= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

۸۵۱- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow \pi^-$ آن‌گاه $\sin^2 x \rightarrow 0^+$

و $\cos x \rightarrow (-1)^+$ ، بنابراین $[\sin^2 x] = 0$ و $[\cos x] = -1$ در نتیجه

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin^2 x - [\sin^2 x]}{\cos x - [\cos x]} &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin^2 x}{\cos x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} (1 - \cos x) = 1 - (-1) = 2\end{aligned}$$

۸۵۲- گزینه ۲ راه‌حل اول با استفاده از اتحاد $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

مقدار حد را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin 4x}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{4 \sin x \cos x \cos 2x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 2\pi} (4 \cos x \cos 2x) = 4 \times 1 \times 1 = 4\end{aligned}$$

راه‌حل دوم از قاعده هوییتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin 4x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{4 \cos 4x}{\cos x} = \frac{4 \times 1}{1} = 4$$

۸۵۳- گزینه ۱ با استفاده از اتحاد $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ می‌توان

نوشت:

$$\sqrt{2+2\cos 2x} = \sqrt{2+2(2\cos^2 x-1)} = \sqrt{4\cos^2 x} = 2|\cos x|$$

در یک همسایگی چپ $x = \frac{3\pi}{2}$ مقدار $\cos x$ منفی است. بنابراین

$$|\cos x| = -\cos x$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-} \frac{-2\cos x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-} \frac{-2\cos x}{2\sin x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-} \frac{-1}{\sin x} = 1\end{aligned}$$

۸۵۴- گزینه ۳ راه‌حل اول به کمک اتحادهای چاق و لاغر و مزدوج

مقدار حد را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2 x)^2}{(1-\cos^3 x)^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos^2 x)^2}{(1-\cos x)^2(\cos^2 x + \cos x + 1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x)^2(1+\cos x)^2}{(1-\cos x)^2(\cos^2 x + \cos x + 1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\cos x)^2}{(\cos^2 x + \cos x + 1)^2} = \frac{(1+1)^2}{(1+1+1)^2} = \frac{4}{9}\end{aligned}$$

راه‌حل دوم از قاعده هوییتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{(1-\cos^3 x)^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin^3 x \cos x}{6\sin x \cos^2 x(1-\cos^3 x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{3\cos x - 3\cos^4 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin x \cos x}{-3\sin x + 12\sin x \cos^3 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\cos x}{-3+12\cos^3 x} = \frac{4}{12-3} = \frac{4}{9}\end{aligned}$$

۸۵۵- گزینه ۱ راه‌حل اول به جای $\sin ax$ هم‌ارز آن یعنی ax را قرار

می‌دهیم و مقدار حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin 3x - \sin x}{\sin 4x - 3\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(3x) - x}{4x - 3(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{-2x} = -\frac{5}{2}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan x} - 1}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1 + \tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}}}{-2 \sin 2x} = \frac{1+1}{-2 \times 1} = -\frac{1}{2}$$

۸۶۱- گزینه ۱ با استفاده از اتحادهای $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ، مزدوج و

چاق و لاغر می توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x + \cos^2 x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x + \cos^2 x}{1 - \cos x} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

۸۶۲- گزینه ۳ راه حل اول با استفاده از اتحاد

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

و اتحاد مزدوج مقدار حد را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-(\cos x - \sin x)}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x + \sin x} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{-2 \sin 2x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{-2 \times 1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۸۶۳- گزینه ۲ با توجه به اتحاد $1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ ، می توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \frac{1}{2}}{\sin 4x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{2}}{2 \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\cos 2x}{2(2 \sin 2x \cos 2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{4 \sin 2x} = \frac{-1}{4 \sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

۸۶۴- گزینه ۱ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} \cos^2 x - \frac{1}{2} &= \frac{2 \cos^2 x - 1}{2} = \frac{\cos 2x}{2} \\ \cos^4 x - \frac{1}{2} &= (\cos^2 x - \frac{1}{2})(\cos^2 x + \frac{1}{2}) = \frac{\cos 2x}{2} (\cos^2 x + \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

در نتیجه حد مورد نظر می شود

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x (\cos^2 x + \frac{1}{2})}{2 \sin 4x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x (\cos^2 x + \frac{1}{2})}{4 \sin 2x \cos 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x + \frac{1}{2}}{4 \sin 2x} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{4 \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^3 x - \sin x}{\sin 4x - 3 \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \cos^2 x - \cos x}{4 \cos^2 x - 6 \cos 2x} = \frac{6-1}{4-6} = -\frac{5}{2}$$

۸۵۶- گزینه ۳ فرض می کنیم $t = \cos x$ و در نتیجه

$$t = \cos x \Rightarrow \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(\cos x)}{1 + \cos 2x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{1 + 2t^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 = \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2}$$

۸۵۷- گزینه ۴ راه حل اول توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (2x)^2 - (1 - (4x)^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^2 + 16x^2}{x^2} = 14 \end{aligned}$$

راه حل دوم می توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos 4x}{x^2} - \frac{1 - \cos 2x}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 8 \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 - \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 8 \times 1^2 - 2 \times 1^2 = 6 \end{aligned}$$

۸۵۸- گزینه ۱ اگر صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج صورت

ضرب کنیم، حد مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \sin x - (\cos x - \sin x)}{(\sqrt{\cos x + \sin x} + \sqrt{\cos x - \sin x})x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\cos x + \sin x} + \sqrt{\cos x - \sin x}} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{1+1} + \sqrt{1-1}} = 1 \end{aligned}$$

۸۵۹- گزینه ۱ راه حل اول فرض می کنیم $x = \frac{\pi}{2} + t$ ، در نتیجه

$$x = \frac{\pi}{2} + t \text{ و } t \rightarrow 0 \text{ بنابراین}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{\cos 8x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(2\pi + 4t)}{\cos(\frac{\pi}{2} + 8t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 4t}{-\sin 8t} = -\frac{4}{8}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{\cos 8x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4 \cos 4x}{-8 \sin 8x} = \frac{4 \cos 2\pi}{-8 \sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{8}$$

۸۶۰- گزینه ۳ راه حل اول با استفاده از اتحاد مزدوج می توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan x} - 1}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sqrt{\tan x} - 1}{\cos 2x} \times \frac{\sqrt{\tan x} + 1}{\sqrt{\tan x} + 1} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x} \times \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\tan x} + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos 2x} \times \frac{1}{1+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos x \cos 2x} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x (\cos x + \sin x)} = \frac{-1}{2(-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2})} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^4 x - \frac{1}{4}}{\sin^4 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-4 \sin x \cos^3 x}{4 \cos^4 x} = \frac{-4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^3}{4(-1)} = \frac{1}{4}$$

۸۶۵- گزینه ۳ در یک همسایگی چپ نقطه صفر $|x| = -x$. بنابراین

حد مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + x \sin 6x}{\Delta x^2 - x \sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x + \sin 6x}{\Delta x - \sin 4x}$$

راه حل اول از هم‌ارزی مثلثاتی استفاده می‌کنیم:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x + 6x}{\Delta x - 4x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{8x}{x} = 8$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x + \sin 6x}{\Delta x - \sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 + 6 \cos 6x}{\Delta - 4 \cos 4x} = \frac{2 + 6}{\Delta - 4} = 8$$

۸۶۶- گزینه ۲ راه حل اول می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi x}{3})}{1-x^3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\tan(\frac{\pi}{3}(1-x))}{\frac{\pi}{3}(1-x)} \times \frac{\frac{\pi}{3}}{1+x+x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(\frac{\pi}{3}(1-x))}{\frac{\pi}{3}(1-x)} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{3}}{1+x+x^2} = 1 \times \frac{\frac{\pi}{3}}{1+1+1} = \frac{\pi}{9} \end{aligned}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi x}{3})}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{\pi}{3}(1+\tan^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi x}{3}))}{-3x^2} = \frac{-\frac{\pi}{3}(1+0)}{-3} = \frac{\pi}{9}$$

۸۶۷- گزینه ۴ راه حل اول ابتدا از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos \Delta x}}{\tan^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos \Delta x}}{\tan^2 x} \times \frac{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos \Delta x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos \Delta x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos \Delta x}{\tan^2 x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos \Delta x}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos \Delta x}{\tan^2 x} \end{aligned}$$

اکنون از هم‌ارزی‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos \Delta x}{\tan^2 x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 - (1 - \frac{1}{2}(\Delta x)^2)}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{2x^2}{x^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos \Delta x}}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} + \frac{\Delta \sin \Delta x}{2\sqrt{\cos \Delta x}}}{2 \tan x (1 + \tan^2 x)}$$

اکنون از هم‌ارزی‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x}{2\sqrt{\cos x}} + \frac{\Delta(\Delta x)}{2\sqrt{\cos \Delta x}}}{2x(1+x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{\cos x}} + \frac{2\Delta}{2\sqrt{\cos \Delta x}}}{2(1+x^2)} \\ &= \frac{-\frac{1}{2} + \frac{2}{2}}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

۸۶۸- گزینه ۱ توجه کنید که $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$. بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\sin(1+\cos x)}{1+\cos x} \times \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x} \right) \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} \times \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x} = 1 \times \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1+\cos x}{2 \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1+\cos x}{2(1+\cos x)(1-\cos x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{2(1-\cos x)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

۸۶۹- گزینه ۳ راه حل اول فرض می‌کنیم $x - \frac{\pi}{6} = t$. در نتیجه

$$x = \frac{\pi}{6} + t \text{ و } t \rightarrow 0 \text{ . بنابراین}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\frac{\pi}{6} + t) - 1}{6(\frac{\pi}{6} + t) - \pi} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\pi}{6} \cos t + 2 \cos \frac{\pi}{6} \sin t - 1}{6t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3} \sin t}{6t} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{6t} \end{aligned}$$

اکنون از هم‌ارزی‌های مثلثاتی (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3}t}{6t} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}t^2}{6t} = \frac{\sqrt{3}}{6} - 0 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos x}{6} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

۸۷۰- گزینه ۳ راه حل اول با توجه به اتحاد $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

اگر فرض کنیم $\sqrt[3]{\sin x} = t$. آن‌گاه $\sin x = t^3$ و $t \rightarrow 1$. در نتیجه

$$\begin{aligned} 1 - \cos^4 x &= 2 \sin^2 x = 2 - 2 \cos^2 x = 2 - 2(1 - \sin^2 x) \\ &= 2 - 2(1 - 2t^6) = 2 - 2 + 4t^6 = 4t^6 = 4t^6(1 - t^6) \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sqrt[3]{\sin x}}{1 - \cos^4 x} &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 - t}{4t^6(1 - t^6)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 - t}{4t^6(1 - t)(1 + t + \dots + t^5)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{4t^6(1 + t + \dots + t^5)} = \frac{1}{4 \times 6} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

۸۷۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 - a + 4) = a - a + 4 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}+1)(x+1)}{\sqrt{x}} = 4 \end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر مقدار a تابع f در $x=1$ پیوسته است. زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 4$$

۸۷۷- گزینه ۳

$$\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x + 2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x}{(x-1)(x-2)} \geq 0$$

به جدول تعیین علامت زیر توجه کنید:

x	$-\infty$	0	1	2	4	$+\infty$
$\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x + 2}$		+	-	+	-	+

بنابراین تابع f روی بازه‌های $(-\infty, 0]$ ، $(1, 2)$ و $[4, +\infty)$ پیوسته است و حداکثر مقدار a برابر صفر است.

۸۷۸- گزینه ۱ توجه کنید که اگر $x \geq 0$ ، آن گاه $[x] \geq 0$ و $f(x) = 0$ و

اگر $x < 0$ ، آن گاه $[x] < 0$ و $f(x) = 2[x]$. بنابراین تابع f در نقاط صحیح مثبت پیوسته است ولی در نقاط صحیح نامثبت، یعنی در نقاط $x=0$ ، $x=-1$ ، $x=-2$ و $x=-3$ از بازه $(-4, 4)$ ناپیوسته است.

۸۷۹- گزینه ۲ راه حل اول در نقطه‌هایی که مقدار $\frac{x+1}{4}$ عددی صحیح

شود، تابع $y = [\frac{x+1}{4}]$ ناپیوسته است: $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 4k - 1$ ، پس تابع روی بازه $(-1, 3)$ پیوسته است و در $x=3$ ناپیوسته است. سپس روی بازه $(3, 7)$ پیوسته است، یعنی حداکثر مقدار k برابر ۳ است.

راه حل دوم توجه کنید که

$$-1 < x < k \xrightarrow{+1} 0 < x+1 < k+1 \xrightarrow{\div 4} 0 < \frac{x+1}{4} < \frac{k+1}{4}$$

برای اینکه $[\frac{x+1}{4}]$ در این بازه پیوسته باشد، باید $\frac{k+1}{4} = 1$ ، پس $k=3$.

۸۸۰- گزینه ۳ در نقطه‌هایی که مقدار $\sqrt{x}$ عددی صحیح شود تابع $y = [\sqrt{x}]$ ناپیوسته است.

پس تابع در نقطه‌های $x=0$ ، $x=1$ ، $x=4$ ، $x=9$ و ... ناپیوسته است، یعنی تابع روی بازه $(1, 4)$ پیوسته است، در $x=4$ ناپیوسته است سپس روی بازه $(4, 9)$ پیوسته است. پس حداکثر مقدار k برابر ۹ است.

۸۸۱- گزینه ۴ توجه کنید که $f(4) = [\frac{4}{4}] + [-\frac{4}{4}] = 2 - 2 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 2 - 3 = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1 - 2 = -1$$

بنابراین تابع در $x=4$ نه پیوستگی چپ دارد و نه پیوستگی راست. تابع در این نقطه حد دارد ولی پیوسته نیست.

راه حل دوم از قاعده هوییتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sqrt[3]{\sin x}}{1 - \cos 4x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{-\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}}{4 \sin 4x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{12 \sin 4x \sqrt[3]{\sin^2 x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{24 \sin 2x \cos 2x \sqrt[3]{\sin^2 x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{48 \sin x \cos x \cos 2x \sqrt[3]{\sin^2 x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-1}{48 \sin x \cos 2x \sqrt[3]{\sin^2 x}} = \frac{1}{48} \end{aligned}$$

۸۷۱- گزینه ۱ دامنه تابع f به صورت $(0, 2] \cup [-2, 0]$ است، بنابراین

این تابع در نقطه $x=2$ فقط پیوستگی چپ دارد، در نقطه $x=-2$ فقط پیوستگی راست دارد و در نقطه $x=0$ نه پیوستگی چپ دارد و نه پیوستگی راست. تابع f در نقطه $x=1$ پیوسته است: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \sqrt{3} = f(1)$.

۸۷۲- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f(2) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + x) = 4 + 2 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - x) = 4 - 2 = 2$$

بنابراین مقدار تابع f در نقطه $x=2$ نه با حد چپ آن در این نقطه برابر است نه با حد راست آن. پس این تابع در نقطه $x=2$ نه پیوستگی چپ دارد، نه پیوستگی راست.

۸۷۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (7 - m^2 x^2) = 7 - 9m^2$$

$$\text{همچنین } f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 6) = 3$$

$$7 - 9m^2 = 3 \Rightarrow 9m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm \frac{2}{3}$$

بنابراین حاصل ضرب مقدارهای ممکن m برابر $-\frac{4}{9}$ است.

۸۷۴- گزینه ۱ چون تابع روی $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس در $x=-1$ هم

پیوسته است. بنابراین حدهای چپ و راست تابع و مقدار تابع در این نقطه برابرند:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{a}{x-2} = \frac{a}{-3}$$

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x+2a}{x+2} = \frac{-1+2a}{-1+2} = 2a-1$$

$$2a-1 = -\frac{a}{3} \Rightarrow a = \frac{3}{7}$$

بنابراین

۸۷۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(2) = a, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - [x]) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2b) = 2 + 2b$$

بنابراین $a=5$ و $2+2b=5$ ، پس $b=\frac{3}{2}$ و در نتیجه $ab=\frac{15}{2}$.

۸۸۸- گزینه ۲ این تابع در تمام نقاطی که $2x + \frac{1}{x}$ مقداری صحیح

داشته باشد، ناپیوسته است:

$$2x + \frac{1}{x} = k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x = k - \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{2k-1}{4}$$

پس در تمام نقاطی که به صورت $\frac{2k-1}{4}$ باشند و k عددی صحیح باشد، این

تابع ناپیوسته است. برای اینکه معلوم شود در بازه $(-1, 2)$ چند نقطه به این صورت است، کافی است نامعادله $-1 < x < 2$ را حل کنیم:

$$-1 < \frac{2k-1}{4} < 2 \Rightarrow -4 < 2k-1 < 8 \Rightarrow -\frac{3}{2} < k < \frac{9}{2}$$

$$k \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

بنابراین تابع f در شش نقطه از بازه $(-1, 2)$ ناپیوسته است که این نقاط به صورت زیر هستند:

k	-1	0	1	2	3	4
x	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$

۸۸۹- گزینه ۳ باید $x^2 + kx + 4 \geq 0$ در نتیجه $\Delta \leq 0$ ، یعنی

$$k^2 - 16 \leq 0 \Rightarrow -4 \leq k \leq 4$$

بنابراین اگر k یکی از عددهای صحیح زیر باشد، تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.
 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$

۸۹۰- گزینه ۲ باید

$$7 - |x-2| \geq 0 \Rightarrow |x-2| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq x-2 \leq 7 \Rightarrow -5 \leq x \leq 9$$

بنابراین تابع f روی بازه $[-5, 9]$ پیوسته است.

۸۹۱- گزینه ۲ تابع $f(x) = [\cos(\pi x)]$ در $x=1$ پیوسته است، زیرا

$$f(1) = [\cos \pi] = [-1] = -1$$

در یک همسایگی راست $x=1$ ، $\pi x \rightarrow \pi^+$ و در نتیجه $\cos(\pi x) \rightarrow (-1)^+$

و در یک همسایگی چپ $x=1$ ، $\pi x \rightarrow \pi^-$ و در نتیجه $\cos(\pi x) \rightarrow (-1)^+$

پس

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{t \rightarrow (-1)^+} [t] = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow (-1)^+} [t] = -1$$

بقیه تابع‌ها در $x=1$ ناپیوسته‌اند.

۸۹۲- گزینه ۲ توجه کنید که $D_f = \mathbb{R}$ زیرا ریشهٔ مخرج کسر

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} \text{ در بازه } (-\infty, 2) \text{ قرار ندارد و ریشه‌های مخرج کسر}$$

در بازه $[2, +\infty)$ قرار ندارند. بنابراین تابع f فقط در $x=2$ می‌تواند ناپیوسته

باشد. پیوستگی تابع f را در $x=2$ بررسی می‌کنیم.

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2 + x - 2} = -1$$

بنابراین تابع f فقط در $x=2$ ناپیوسته است.

۸۸۲- گزینه ۲ در $x=4$ ، $x=16$ و $x=64$ مقدار عبارت $\frac{\sqrt{x}}{x}$

عدد صحیح می‌شود. پس تابع $f(x) = \left[\frac{\sqrt{x}}{x}\right]$ در این نقطه‌ها پیوسته نیست.

در نقطه $x=9$ مقدار عبارت $\frac{\sqrt{x}}{x}$ عدد صحیح نیست، پس تابع $y = \left[\frac{\sqrt{x}}{x}\right]$

در این نقطه پیوسته است.

۸۸۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (2-3x) = 5$$

همچنین $f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = |-3-a| = |3+a|$ در نتیجه

$$|3+a| = 5 \Rightarrow 3+a=5 \text{ یا } 3+a=-5 \Rightarrow a=2 \text{ یا } a=-8$$

بنابراین مجموع مقدارهای ممکن a برابر -6 است.

۸۸۴- گزینه ۲ توجه کنید که $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1+ab$ و

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} (\sin 2x - a) = \sin \frac{\pi}{2} - a = 1-a$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^+} (-2 - \sin 2x) = -2 - \sin \frac{\pi}{2} = -3$$

برای اینکه تابع f در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته باشد، باید $-3 = 1-a = 1+ab$.

نتیجه $a=4$ و $1+ab = 1+4b = -3 \Rightarrow b=-1$ ، بنابراین $b=-1$ پس $a+b=3$.

۸۸۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} (3x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (ax-b) \Rightarrow -3 = -a-b \quad (1)$$

همچنین

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax-b) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2-1)$$

$$2a-b=3 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید $a=2$ و $b=1$ پس $\frac{a}{b} = 2$.

۸۸۶- گزینه ۳ مخرج نباید هیچ جا صفر شود، در نتیجه باید دلتای

$$\text{معادله } x^2 - 6x + m + 1 = 0 \text{ منفی باشد:}$$

$$\Delta = 36 - 4(m+1) < 0 \Rightarrow m > 8$$

پس m مقادیر طبیعی ۱ تا ۸ را نمی‌تواند داشته باشد.

۸۸۷- گزینه ۱ مجموعهٔ نقطه‌های ناپیوستگی تابع f مقدارهایی از x

است که مخرج، یعنی $x^2 - ax + b$ ، به ازای آن‌ها صفر است. بنابراین -3 و 4

ریشه‌های مخرج هستند. به این ترتیب

$$a = \text{مجموع ریشه‌ها} = 4 - 3 = 1$$

$$b = \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = 4(-3) = -12$$

بنابراین $a+b = -11$.

برای اینکه تابع f در $x=k$ پیوستگی چپ داشته باشد، باید

$$k^2 - 2k = k^2 - 3k \Rightarrow k = 0.$$

پس در بین نقاط صحیح، فقط در $x=0$ این تابع پیوستگی چپ دارد.

۸۹۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که به ازای $x = -\frac{y}{2}$ ، $2x - 5$ عددی

صحیح است. بنابراین در صورتی تابع $f(x)$ در $x = -\frac{y}{2}$ پیوسته است که

$$x = -\frac{y}{2} \text{ ریشه عبارت } 4x^2 - 2ax - 7 \text{ باشد. در نتیجه}$$

$$4\left(-\frac{y}{2}\right)^2 - 2a\left(-\frac{y}{2}\right) - 7 = 0 \Rightarrow 49 + 7a - 7 = 0 \Rightarrow a = -6$$

۸۹۹- گزینه ۲ دامنه تابع را پیدا می کنیم:

$$4x - x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < 4$$

پس دامنه تابع بازه $(0, 4)$ است. در نقطه های صحیح این بازه تابع ناپیوسته

است، یعنی در نقطه های $x=1$ ، $x=2$ و $x=3$.

۹۰۰- گزینه ۱ ابتدا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ را پیدا می کنیم. توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \lambda x}{\sqrt{b+x} - \sqrt{b-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \lambda x}{\sqrt{b+x} - \sqrt{b-x}} \times \frac{\sqrt{b+x} + \sqrt{b-x}}{\sqrt{b+x} + \sqrt{b-x}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{b+x} + \sqrt{b-x}) \sin \lambda x}{(b+x) - (b-x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{b+x} + \sqrt{b-x}) \sin \lambda x}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{b+x} + \sqrt{b-x}) \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \lambda x}{2x}$$

$$= 2\sqrt{b} \times \frac{\lambda}{2} = \lambda\sqrt{b}$$

بنابراین باید

$$\lambda\sqrt{b} = 16 \Rightarrow b = 4$$

۹۰۱- گزینه ۱ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = 0$ و در یک همسایگی

چپ نقطه -2 مقادیر تابع f منفی هستند. بنابراین $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{f}{f(x)} = -\infty$.

۹۰۲- گزینه ۴ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 3} |x-3| = 0$ ، و چون مقادیر $|x-3|$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{|x-3|} = +\infty \text{ پس } 3 \text{ مثبت اند.}$$

۹۰۳- گزینه ۳ اگر $x \rightarrow 1^-$ ، آن گاه $x \rightarrow (-1)^+$ و در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[-x]}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

۹۰۴- گزینه ۳ توجه کنید که مخرج کسر تابع f سه ریشه دارد:

$$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 2$$

این اعداد ریشه های صورت کسر تابع نیستند. از طرف دیگر، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$. پس تابع f در نقطه $x=0$ حد چپ نامتناهی دارد.

همین طور در نقطه های $x=2$ و $x=-2$ حد چپ تابع f نامتناهی است.

۸۹۳- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x^4 = x^2 \Rightarrow x = \pm 1, x = 0.$$

ضابطه تابع به شکل زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x = 0 \text{ یا } x = \pm 1 \\ x^2 + 2x & x \neq 0, x \neq \pm 1 \end{cases}$$

پس

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x \neq 0, x \neq \pm 1 \\ -1 & x = 1 \\ 0 & x = 0 \\ 3 & x = -1 \end{cases}$$

در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)} (x^2 + 2x) = -1 \neq f(-1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2x) = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x) = 3 \neq f(1) = -1$$

بنابراین تابع در $x=1$ و $x=-1$ ناپیوسته است.

۸۹۴- گزینه ۱ تابع f در نقطه هایی ناپیوسته است که تعریف نشده

باشد، در نتیجه باید ریشه های مخرج کسر را پیدا کنیم:

اگر $x \geq 4$ ، آن گاه

$$x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = 2 + \sqrt{7}, x = 2 - \sqrt{7} \quad (\text{غ.ق.})$$

اگر $x < 4$ ، آن گاه

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$$

بنابراین تابع f در نقاط $x=1$ ، $x=3$ و $x=2+\sqrt{7}$ ناپیوسته است که

مجموع این نقاط برابر $6+\sqrt{7}$ است.

۸۹۵- گزینه ۳ باید مخرج فقط در یک نقطه برابر صفر باشد، یعنی

$$\text{دلتای معادله } x^2 + (2m-1)x + 1 = 0 \text{ برابر صفر است:}$$

$$\Delta = (2m-1)^2 - 4(1) = 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m + 1 - 4 = 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m - 3 = 0.$$

پس حاصل ضرب مقادیر ممکن برای m برابر $-\frac{3}{4}$ است.

۸۹۶- گزینه ۴ برای اینکه تابع f در نقطه $x=1$ پیوسته باشد، باید حد

تابع در این نقطه برابر a باشد، پس

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{x-1} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}^2 - x}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}^3 \sqrt{x-1}}{x-1} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2 \sqrt{(x-1)^2}} = +\infty$$

با توجه به اینکه تابع f در نقطه 1 حد نامتناهی دارد، پس هیچ مقداری برای a پیدا نمی شود.

۸۹۷- گزینه ۱ فرض کنید k عددی صحیح باشد، در این صورت

$$f(k) = k([k]-1) + [-k] = k^2 - k - k = k^2 - 2k$$

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} (x(k-2) - k) = k^2 - 2k - k = k^2 - 3k$$

۹۱۴- گزینه ۱ در ریشه‌های مخرج ممکن است تابع حد چپ نامتناهی داشته باشد. ریشه‌های مخرج $x=1$ و $x=2$ هستند. از طرف دیگر،

$$f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^2}{x-2}, \quad x \neq 1$$

پس $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x-2} = -\infty$ بنابراین تابع فقط در $x=2$ حد چپ نامتناهی دارد.

۹۱۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x \neq 1$ ، آن‌گاه

$$\frac{x^2-3x+2}{-2x^2+4x-2} = \frac{(x-1)(x-2)}{-2(x-1)^2} = \frac{x-2}{-2(x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-3x+2}{-2x^2+4x-2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{-2(x-1)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ اگر $x \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^+$ آن‌گاه

$$\pi x \rightarrow \left(\frac{\pi}{3}\right)^+ \Rightarrow \cos(\pi x) \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^+} \frac{3x+1}{2 \cos(\pi x)-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

۹۱۷- گزینه ۳ چون $\lim_{x \rightarrow 2} (x-3) = -1$ پس باید ax^2+6x+b در

$x=2$ برابر صفر شود و مقدار این عبارت در دو طرف $x=2$ عددی منفی باشد. بنابراین باید $x=2$ ریشه مضاعف معادله $ax^2+6x+b=0$ باشد.

یعنی این عبارت باید به صورت $a(x-2)^2$ باشد. چون $a < 0$ ، پس

$$ax^2-4ax+4a = ax^2+6x+b$$

$$\begin{cases} -4a=6 \Rightarrow a=-\frac{3}{2} \\ b=4a=-6 \end{cases}$$

پس $ab=9$.

۹۱۸- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

۹۱۹- گزینه ۳ می‌توان ضابطه تابع را به شکل زیر نوشت:

$$f(x) = \frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{\cos x}{1-\sin x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x} = \frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x} = \frac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$$

اکنون توجه کنید که عبارت $1+\sin x$ همواره نامنفی است. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

۹۰۵- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x^3-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x(x-1)}$$

از طرف دیگر، $\lim_{x \rightarrow 0^-} x(x-1) = 0$ و اگر $x \rightarrow 0^-$ ، مقادیر $x(x-1)$ مثبت

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2-x^2} = +\infty$$

۹۰۶- گزینه ۴ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \sin x = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin x = 0$ و

اگر $x \rightarrow \pi^+$ ، مقادیر $\sin x$ منفی‌اند و اگر $x \rightarrow \pi^-$ ، مقادیر $\sin x$ مثبت‌اند. بنابراین $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = +\infty$.

۹۰۷- گزینه ۲ اگر $x \rightarrow \pi^+$ ، آن‌گاه $\cos x \rightarrow (-1)^+$ بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{[\cos x]}{\cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-1}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

۹۰۸- گزینه ۱ اگر $x \rightarrow 0^-$ ، آن‌گاه $x = -1$ و در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x[x]}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{\sin x} \times \frac{-1}{\sin x} \right) = 1 \times \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

۹۰۹- گزینه ۳ اگر $x \rightarrow 1^+$ ، آن‌گاه $x = 1$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\tan(\pi(x-1))} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\tan(\pi x - \pi)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\tan(\pi x)} = +\infty \end{aligned}$$

اگر $x \rightarrow 1^-$ ، آن‌گاه $x = 0$ و در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\tan(\pi x)} = -\infty$$

۹۱۰- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4-3}{x-1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{0-3}{x-1} = +\infty$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف خط $x=1$ به صورت مقابل است:



۹۱۱- گزینه ۳ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 0$ و مقادیر f در یک

همسایگی چپ نقطه ۴، منفی هستند. بنابراین $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-2}{f(x)} = +\infty$ بقیه گزینه‌ها نادرست هستند.

۹۱۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (2x+1) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^2+x) = 0$$

از طرف دیگر، وقتی $x \rightarrow (-1)^+$ ، مقادیر x^2+x منفی هستند

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x+1}{x^2+x} = +\infty \text{ پس } (x^2+x = \frac{x}{x+1})$$

مثبت منفی

۹۱۳- گزینه ۱ اگر $x \rightarrow 2^+$ ، آن‌گاه $x = 2$ و در

نتیجه $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ اگر $x \rightarrow 2^-$ ، آن‌گاه $x = 1$ و $f(x) = \frac{-1}{x-2}$

و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$

۹۲۶- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f(x) = \frac{1}{2 \sin x \cos x - 2 \sin x} = \frac{1}{2 \sin x (\cos x - 1)}$$

عبارت $\cos x - 1$ همواره نامثبت است. یعنی $\cos x - 1 \leq 0$. از طرف دیگر اگر $x \rightarrow 0^-$ ، آن گاه $\sin x \rightarrow 0^-$ و اگر $x \rightarrow 0^+$ ، آن گاه $\sin x \rightarrow 0^+$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2 \sin x (\cos x - 1)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2 \sin x (\cos x - 1)} = -\infty$$

۹۲۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} (x) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} (\sin x - \cos x) = 0$$

از طرف دیگر، وقتی $x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-$ مقادیر $\sin x$ از مقادیر $\cos x$

کوچک‌ترند، پس مقادیر $\sin x - \cos x$ منفی‌اند. در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} \frac{x}{\sin x - \cos x} = -\infty$$

۹۲۸- گزینه ۱ اگر $x \rightarrow 1^-$ ، آن گاه $[x] = 0$ و در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x + \tan 0} = \frac{1}{1+0} = 1$$

اگر $x \rightarrow 1^+$ ، آن گاه $[x] = 1$ و در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x + \tan(\frac{\pi x}{2})} = \frac{1}{1+(-\infty)} = 0$$

بنابراین مجموع حد چپ و حد راست تابع f در $x=1$ برابر ۱ است.

۹۲۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \sin 2x} &= \frac{\sin x - \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x} \\ &= \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{1}{\sin x - \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} \frac{1}{\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

۹۳۰- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

پس نمودار تابع f در اطراف خط $x=-2$ به صورت مقابل است.

۹۲۰- گزینه ۴ ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}, x \neq 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

پس نمودار تابع f در اطراف خط $x=1$ به صورت مقابل است:

۹۲۱- گزینه ۲ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - 2) = 0$ و مقادیر $f(x) - 2$

در یک همسایگی محذوف نقطه صفر منفی هستند. زیرا در این همسایگی مقادیر

$$f(x) \text{ کمتر از } 2 \text{ هستند. بنابراین } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x) - 2} = -\infty$$

۹۲۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - 2x^2) = 0$$

از طرف دیگر، چون $x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$ ، وقتی $x \rightarrow 0^-$ ، مقادیر

$$x^3 - 2x^2 \text{ منفی هستند. پس } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x^3 - 2x^2} = +\infty$$

۹۲۳- گزینه ۴ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 5^-} ([x]^2 - 25) = 16 - 25 = -9$

و $\lim_{x \rightarrow 5^-} (x-5) = 0$ و مقادیر $x-5$ در یک همسایگی چپ ۵ منفی‌اند.

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{[x]^2 - 25}{x-5} = +\infty$$

۹۲۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اعداد صحیح، ریشه مخرج کسر

ضابطه تابع f هستند: $x - [x] = 0 \Rightarrow x = [x] \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

اکنون دقت کنید که از اعداد صحیح فقط $x=0$ و $x=1$ ریشه صورت $f(x)$

هستند. حد چپ و حد راست تابع در این نقاط را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-1)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-1)}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$$

بنابراین تابع در نقطه‌های $x=0$ و $x=1$ حد چپ متناهی و حد راست متناهی

دارد. در بقیه اعداد صحیح حد صورت کسر صفر نیست، درحالی که حد راست

مخرج کسر صفر است، پس تابع f در این نقاط حد راست نامتناهی دارد.

۹۲۵- گزینه ۲ فرض می‌کنیم $\sqrt{x} = t$. در این صورت اگر $x \rightarrow 0^+$

آن گاه $t \rightarrow 0^+$ و

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x - \sqrt{x}} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2 - t^3}{t^6 - t^3} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t-1}{t(t^3-1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t(t^2+t+1)} = +\infty \end{aligned}$$

۹۳۱- گزینه ۲) حد مخرج $f(x)$ در $x=2$ و $x=-3$ باید برابر صفر

باشد، یعنی $x=2$ و $x=-3$ جواب‌های معادله $ax^2+bx+2=0$ هستند. با توجه به مجموع و حاصل ضرب جواب‌ها معلوم می‌شود:

$$2 \times (-3) = \frac{2}{a}, \quad 2 + (-3) = -\frac{b}{a}$$

بنابراین $a = -\frac{1}{3}$ و $b = -\frac{1}{3}$ پس

$$f(x) = \frac{x^2+1}{-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x+2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1+1}{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+2} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}$$

۹۳۲- گزینه ۳) باید علامت عبارت $2x - \sqrt{x+3}$ را در اطراف نقطه

$x=1$ مشخص کنیم. ابتدا توجه کنید که $x=1$ تنها جواب معادله $2x - \sqrt{x+3} = 0$

است. (غ.ق.ق.) $2x = \sqrt{x+3} \Rightarrow 4x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x=1, x=-\frac{3}{4}$

بنابراین علامت عبارت $2x - \sqrt{x+3}$ را می‌توانیم با عددگذاری مشخص کنیم. مثلاً اگر $x=2$ ، آن‌گاه مقدار عبارت برابر $4 - \sqrt{5}$ است که عددی مثبت است

و اگر $x=0$ ، آن‌گاه مقدار عبارت برابر $-\sqrt{3}$ است که عددی منفی است.

x	-3	1	$+\infty$
$2x - \sqrt{x+3}$	$-$	0	$+$

در یک همسایگی چپ $x=1$ مقدار عبارت منفی است، پس $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$

در یک همسایگی راست $x=1$ مقدار عبارت مثبت است، پس $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

۹۳۳- گزینه ۴) چون حد مخرج وقتی $x \rightarrow 2$ صفر است و حد مورد نظر

وجود دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد، تا حد به صورت $\frac{0}{0}$ دربیاید.

بنابراین $x-2$ یکی از عامل‌های صورت است و صورت را می‌توان این‌طور نوشت $2x^2+mx+n = (x-2)(2x+k)$ به این ترتیب، حد مورد نظر

برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x+k)}{(x-2)(x+2)} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{2 \times 2 + k}{2+2} = \frac{5}{2} \Rightarrow k=6$$

اکنون می‌توان نوشت $2x^2+mx+n = (x-2)(2x+6) = 2x^2+2x-12$

پس $m=2$ و $n=-12$ و در نتیجه $m-n=14$.

۹۳۴- گزینه ۳) چون حد مخرج وقتی $x \rightarrow 1$ برابر صفر است و حد

مورد نظر وجود دارد، باید حد صورت هم صفر باشد، تا حد به صورت $\frac{0}{0}$

دربیاید. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{2x+a} - \sqrt{x+b}) = 0 \Rightarrow \sqrt{2+a} = \sqrt{1+b} \Rightarrow b=a+1$$

اکنون به کمک اتحاد مزدوج مقدار حد را حساب می‌کنیم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+a} - \sqrt{x+a+1}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{2x+a} - \sqrt{x+a+1}}{x-1} \times \frac{\sqrt{2x+a} + \sqrt{x+a+1}}{\sqrt{2x+a} + \sqrt{x+a+1}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+a-x-a-1}{x-1} \times \frac{1}{\sqrt{2x+a} + \sqrt{x+a+1}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{a+2}} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{a+2}} = \frac{1}{6} \Rightarrow \sqrt{a+2} = 3 \Rightarrow a=7$$

بنابراین

پس $b=8$ و در نتیجه $ab=56$.

۹۳۵- گزینه ۴) ابتدا توجه کنید که

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)(x^2 - 3x + 2)$$

$$= (x-1)(x-1)(x-2) = (x-1)^2(x-2)$$

بنابراین در هر دو حالت $x \rightarrow 1^+$ و $x \rightarrow 1^-$:

$$(x-1)^2 \rightarrow 0^+ \Rightarrow (x-1)^2(x-2) \rightarrow 0^-$$

پس $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

۹۳۶- گزینه ۱) در یک همسایگی راست $x=2$ تساوی $[x]=2$ برقرار

$$\text{است. پس } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x]+k}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{6+k}{x-2} = +\infty$$

چون $(x-2) \rightarrow 0^+$ ، پس $6+k > 0$ و در نتیجه $k > -6$.

در یک همسایگی چپ $x=2$ تساوی $[x]=1$ برقرار است. پس

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]+k}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3+k}{x-2} = +\infty$$

چون $(x-2) \rightarrow 0^-$ ، پس $3+k < 0$ و در نتیجه $k < -3$ ، بنابراین $-6 < k < -3$.

۹۳۷- گزینه ۱) از فرض‌های مسئله نتیجه می‌شود

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{2}{1+f(x)} = 1 \Rightarrow \frac{2}{1+\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = 1 \Rightarrow 1 + \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)-1) = 0$. از طرف دیگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)+1}{f(x)-1} = 2$ اگر

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)+1}{f(x)-1} = 2 \text{ وجود ندارد، چون حد مخرج آن}$$

صفر است. پس $\lim_{x \rightarrow a} (g(x)+1) = 0$ و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -1$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)+1}{g(x)-3} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)+1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)-3} = \frac{1+1}{-1-3} = -\frac{1}{2}$$

۹۳۸- گزینه ۳) ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} x^3 - ax^2 + ax - 1 &= (x^3 - 1) - ax(x-1) = (x-1)(x^2+x+1) - ax(x-1) \\ &= (x-1)(x^2 + (1-a)x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3 - ax^2 + ax - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^2 + (1-a)x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 + (1-a)x + 1} \end{aligned}$$

برای اینکه مقدار حد فوق برابر $+\infty$ شود باید $x=1$ ریشهٔ مخرج (ریشهٔ

مضاعف) باشد. پس $1+(1-a)+1=0 \Rightarrow a=3$

۹۳۹- گزینه ۴) اگر $x \rightarrow 2^-$ ، آن‌گاه $[x]=1$ و در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \tan\left(\frac{\pi}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \tan t = -\infty \quad \left(\begin{array}{l} t \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \end{array} \right)$$

اگر $x \rightarrow 2^+$ ، آن‌گاه $[x]=2$ و در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \tan\left(\frac{\pi}{x}\right) = \tan \pi = 0$$

۹۴۷- گزینه ۴ توجه کنید که

$$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow -2 \leq x - [x] - 2 < -1$$

پس حد مخرج کسر ضابطه تابع f هیچ گاه صفر نمی شود، یعنی نقطه ای وجود ندارد که تابع f در آن حد نامتناهی داشته باشد. پس نمودار تابع f مجانب قائم ندارد.

۹۴۸- گزینه ۲ اگر مخرج کسر ضابطه تابع f ریشه نداشته باشد، نمودار

این تابع مجانب قائم نخواهد داشت (توجه کنید که صورت کسر ۱ است). بنابراین

$$x^2 + mx + 1 = 0, \quad \Delta = m^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < m < 2$$

پس m سه مقدار صحیح ± 1 و 0 را می تواند داشته باشد.

۹۴۹- گزینه ۳ توجه کنید که $x=1$ ریشه مخرج کسر ضابطه تابع f

است و

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-3}{1-x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-3}{1-x} = -\infty$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف خط $x=1$ به صورت زیر است:



۹۵۰- گزینه ۳ ابتدا ضابطه تابع را ساده می کنیم:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2}, \quad x \neq 1$$

پس $x=2$ مجانب قائم نمودار تابع f است و

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف خط $x=2$ به صورت مقابل است.

۹۵۱- گزینه ۴ مخرج کسر در ضابطه تابع f ریشه ندارد. بنابراین

نمودار تابع f مجانب قائم ندارد. $x^2 - x + 1 = 0, \quad \Delta = 1 - 4 < 0$.

۹۵۲- گزینه ۲ ابتدا ضابطه تابع را ساده می کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 4x^2 + 3x} = \frac{(x-2)(x-3)}{x(x^2 - 4x + 3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{x(x-1)(x-3)} = \frac{x-2}{x(x-1)}, \quad x \neq 3$$

بنابراین خطوط $x=0$ و $x=1$ مجانب های قائم نمودار تابع f هستند.

۹۵۳- گزینه ۳ ابتدا ریشه های مخرج کسر ضابطه تابع f را به دست می آوریم:

$$x - |x^2 - 2x| = 0 \Rightarrow |x^2 - 2x| = x, \quad x \geq 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x = x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3 \\ x^2 - 2x = -x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f سه مجانب قائم به معادلات $x=0, x=1, x=3$ دارد.

۹۵۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$x^2 - 4x > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - [0, 4], \quad 1 - x^2 > 0 \Rightarrow -1 < x < 1$$

بنابراین $D_f = (-1, 0)$. پس نمودار تابع، دو خط مجانب قائم به معادلات

$x=0$ و $x=-1$ دارد:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty$$

۹۴۰- گزینه ۱ برای اینکه حد مورد نظر $+\infty$ شود باید $x = \frac{\pi}{4}$ ریشه

مخرج کسر باشد:

$$a \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow a = -1$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \frac{bx+1}{\cos x - \sin x} = +\infty$. اکنون توجه کنید که وقتی

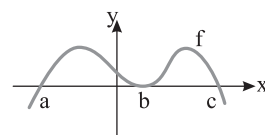
$x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+$ مقدار مخرج کسر منفی است و باید مقدار صورت کسر هم منفی

باشد تا حد مورد نظر برابر $+\infty$ شود. پس $\frac{b\pi}{4} + 1 < 0 \Rightarrow b < -\frac{4}{\pi}$

۹۴۱- گزینه ۳ مطابق شکل زیر در نقاط $x=a, x=b, x=c$ حد

تابع f برابر صفر است، بنابراین حد تابع $\frac{1}{f}$ در این نقاط نامتناهی است و نمودار

تابع $\frac{1}{f}$ در این نقاط مجانب قائم دارد.



۹۴۲- گزینه ۱ ابتدا ضابطه تابع را ساده می کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 5x - 6} = \frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)(x-6)} = \frac{x-4}{x-6}, \quad x \neq -1$$

بنابراین $x=6$ تنها مجانب قائم نمودار تابع f است.

۹۴۳- گزینه ۱ ابتدا ضابطه تابع f را ساده می کنیم:

$$f(x) = \frac{x-2}{(x^2+1)(x^2-4)} = \frac{x-2}{(x^2+1)(x-2)(x+2)} = \frac{1}{(x^2+1)(x+2)}, \quad x \neq 2$$

بنابراین $x=-2$ تنها ریشه مخرج است و خط $x=-2$ تنها مجانب قائم نمودار تابع f است.

۹۴۴- گزینه ۳ ریشه های مخرج را پیدا می کنیم:

$$|x-1| - 2 = 0 \Rightarrow |x-1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ x-1=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}$$

بنابراین خط های $x=3$ و $x=-1$ مجانب های قائم نمودار تابع f هستند که فاصله آن ها برابر ۴ است.

۹۴۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x}{x - \sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}, \quad D_f = (0, +\infty) - \{1\}$$

پس نمودار تابع f فقط یک مجانب قائم به معادله $x=1$ دارد.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

۹۴۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z}), \quad -\frac{3\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = -\pi, 0, \pi$$

بنابراین نمودار تابع f سه مجانب قائم به معادلات $x=-\pi, x=0, x=\pi$

در بازه $(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ دارد.

۹۵۵- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$0 < x < 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

بنابراین نمودار تابع f در بازه $(0, 2\pi)$ دو مجانب قائم به معادلات $x = \frac{\pi}{3}$ و

$$x = \frac{5\pi}{3} \text{ دارد. توجه کنید که هیچ یک از این دو مقدار صورت کسر ضابطه تابع}$$

را صفر نمی‌کنند.

۹۵۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که ریشه‌های مخرج کسر ضابطه تابع f

$$\text{در بازه } \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ به صورت زیر هستند:}$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad -\frac{3\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = -\pi, 0, \pi$$

از بین این ریشه‌ها $x = 0$ ریشه صورت کسر هم است. همچنین

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

بنابراین $x = 0$ مجانب قائم نمودار تابع f نیست ولی $x = \pi$ و $x = -\pi$ مجانب قائم هستند. زیرا تابع در این نقاط حد نامتناهی دارد.

۹۵۷- گزینه ۲ ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \\ &= \frac{(\sin x - \cos x)^2}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \quad (\cos x \neq \sin x) \end{aligned}$$

اکنون ریشه‌های مخرج را که در بازه $(0, 2\pi)$ واقع هستند مشخص می‌کنیم:

$$\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -\cos x \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{7\pi}{4}$$

بنابراین نمودار تابع f در بازه $(0, 2\pi)$ دو مجانب قائم به معادلات $x = \frac{3\pi}{4}$ و $x = \frac{7\pi}{4}$

$$x = \frac{7\pi}{4} \text{ دارد. توجه کنید که هیچ یک از این دو مقدار صورت کسر ضابطه تابع}$$

را صفر نمی‌کنند.

۹۵۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow 1 \leq x - [x] + 1 < 2$ پس حد مخرج کسر ضابطه تابع f هیچ‌گاه صفر نمی‌شود. یعنی نقطه‌ای وجود ندارد که تابع f در آن حد نامتناهی داشته باشد. پس نمودار تابع f مجانب قائم ندارد.

۹۵۹- گزینه ۲ در دو حالت زیر نمودار تابع f فقط یک مجانب قائم دارد:

حالت اول مخرج ریشه مضاعف داشته باشد:

$$x^2 - mx + 9 = 0, \quad \Delta = m^2 - 36 = 0 \Rightarrow m = \pm 6$$

حالت دوم مخرج دو ریشه داشته باشد که یکی ریشه صورت کسر یعنی $x = 4$ است:

$$16 - 4m + 9 = 0 \Rightarrow m = \frac{25}{4}$$

پس به ازای سه مقدار m نمودار تابع f فقط یک مجانب قائم دارد.

۹۶۰- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad D_f = (0, +\infty) - \{1\}$$

بنابراین $x = 0$ ریشه مخرج است و خط $x = 0$ مجانب قائم نمودار تابع f است:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف خط $x = 0$ به صورت روبه‌رو است.

۹۶۱- گزینه ۱ مخرج کسر در ضابطه تابع ریشه مضاعف دارد:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$$

چون $x = 3$ ریشه صورت کسر در ضابطه تابع f نیست، پس تابع f در $x = 3$ حد نامتناهی دارد و $x = 3$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - 6x + 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x + 2}{(x-3)^2} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

۹۶۲- گزینه ۱ ریشه‌های مخرج کسر ضابطه تابع f را به دست می‌آوریم:

$$x^3 + x - 2 = 0 \Rightarrow x^3 - 1 + x - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) + x - 1 = 0$$

$$(x-1)(x^2 + x + 2) = 0$$

معادله $x^2 + x + 2 = 0$ جواب ندارد ($\Delta < 0$), بنابراین $x = 1$ تنها ریشه مخرج

است و چون این عدد ریشه صورت نیست، پس خط $x = 1$ تنها مجانب قائم نمودار تابع f است.

۹۶۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x(x+2)(x-2)}, \quad D_f = [1, +\infty) - \{2\}$$

بنابراین $x = 2$ تنها مجانب قائم نمودار تابع f است.

۹۶۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$$

$$x^2 - 5x + 4 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$$

بنابراین $D_f = (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$, پس تابع f دو مجانب قائم به معادلات

$$x = 0 \text{ و } x = 4 \text{ دارد:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \text{ در تابع } y = \tan x \text{ خطوط}$$

مجانب‌های قائم نمودار تابع اند. بنابراین معادله مجانب‌های تابع f به صورت زیر است:

$$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 3k\pi + \pi = (3k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

مجانب‌های قائم نمودار تابع f در بازه $(-\pi, \pi)$ عبارت‌اند از $x = \pi$,

$$x = -\pi, x = 4\pi, x = -2\pi \text{ و } x = -5\pi.$$

۹۶۶- گزینه ۱ $x = 2$ باید جواب معادله $3ax - 4 = 0$ باشد. پس

$$6a - 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

۹۷۳- گزینه ۴) توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + \frac{1}{x} + x^2}{2x - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2(x-1) + x - 1 + x^3}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 3x^2 + x - 1}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

۹۷۴- گزینه ۴) ابتدا توجه کنید که وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، مقادیر $1-3x$ مثبت اند. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |1-3x|}{\Delta x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - (1-3x)}{\Delta x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 1}{\Delta x - 3} = 1$$

۹۷۵- گزینه ۲) توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x-2)^4 (4x^2+1)^2}{(6x^4-2x^3+1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3^4 x^4 - \dots)(4^2 x^4 + \dots)}{6^2 x^8 + \dots} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^4 \times 4^2 x^8 - \dots}{6^2 x^8 + \dots} = \frac{3^4 \times 4^2}{6^2} = 36$$

۹۷۶- گزینه ۱) توجه کنید که اگر n عددی طبیعی باشد، $3n+4$ و $2n+6$ از ۱ بیشترند، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3n+4} + x + 1}{x^{2n+6} - x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3n+4} - (2n+6)}{x^{2n+6} - (2n+6)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-2}$$

اگر این حد صفر باشد، باید $n-2 < 0$ ، یعنی $n < 2$ ، بنابراین فقط $n=1$ ویژگی مورد نظر را دارد.

۹۷۷- گزینه ۲) اگر m عددی مثبت باشد، وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر $1-mx$ منفی اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(mx-1)+2x-1}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(m+2)x-2}{3x+1} = \frac{m+2}{3}$$

بنابراین $\frac{m+2}{3} = 3$ ، پس $m=7$. اگر m عددی منفی باشد، وقتی

$x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر $1-mx$ مثبت اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-mx)+2x-1}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-m)x}{3x+1} = \frac{2-m}{3}$$

بنابراین $\frac{2-m}{3} = 3$ ، پس $m=-7$. اگر $m=0$ ، حد مورد نظر برابر $\frac{2}{3}$ می شود که درست نیست. بنابراین مقادیر m عددهای ۷ و -۷ هستند و حاصل ضرب آنها -۴۹ است.

۹۷۸- گزینه ۴) چون حد مورد نظر برابر $-\infty$ شده است، پس باید

درجه مخرج از درجه صورت کمتر باشد و ضریب بزرگترین جمله در صورت باید منفی باشد. برای اینکه درجه مخرج از درجه صورت کمتر باشد، باید $a=5$ ، یعنی $a=5$. توجه کنید که اگر $a=5$ ، بزرگترین جمله صورت $-x^2$ می شود، بنابراین حد مورد نظر برابر $-\infty$ است.

۹۷۹- گزینه ۳) چون درجه مخرج کسر داده شده برابر ۲ است، اگر در صورت

این کسر جمله شامل x^3 وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می شود. بنابراین ضریب x^3 در صورت کسر داده شده صفر است، یعنی $a=3$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(b+2)x^2 - 3x + 4}{3x^2 - 1} = \frac{b+2}{3}$$

بنابراین $\frac{b+2}{3} = 5$ ، پس $b=13$. به این ترتیب $a+b=16$.

۹۶۷- گزینه ۳) باید $x=-3$ ریشه مخرج کسر ضابطه تابع f باشد:

$$x^3 + mx - 3 = 0 \xrightarrow{x=-3} -27 - 3m - 3 = 0 \Rightarrow m = -10$$

بنابراین $f(x) = \frac{x}{x^3 - 10x - 3} = \frac{x}{(x+3)(x^2 - 3x - 1)}$

$$x^3 - 10x - 3 = x^3 - 9x - x - 3 = x(x^2 - 9) - (x+3)$$

$$= x(x-3)(x+3) - (x+3) = (x+3)(x^2 - 3x - 1)$$

پس مجانب های قائم دیگر نمودار تابع f جواب های معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$

$$x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \text{ و } x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

۹۶۸- گزینه ۳) ابتدا توجه کنید که

$$(m-1)x^2 + x + 1 - m = 0, \Delta = 1 - 4(m-1)(1-m) = 1 + 4(m-1)^2 > 0$$

بنابراین اگر $m \neq 1$ ، آن گاه مخرج کسر ضابطه تابع f همواره دو ریشه دارد. برای اینکه نمودار تابع فقط یک مجانب قائم داشته باشد، باید یکی از ریشه های مخرج، ریشه صورت کسر هم باشد. پس $x=2$ ریشه مخرج است.

$$(m-1)x^2 + x + 1 - m = 0 \xrightarrow{x=2} 4(m-1) + 2 + 1 - m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

اما اگر $m=1$ ، آن گاه مخرج کسر از درجه اول است و ضابطه تابع به صورت

$$f(x) = \frac{x-2}{x}$$

حاصل جمع مقادیر ممکن برای m برابر $\frac{4}{3}$ است.

۹۶۹- گزینه ۳) ابتدا توجه کنید که

$$2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}, \quad x - x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$

بنابراین $D_f = [\frac{1}{2}, 1)$ و تنها مجانب قائم نمودار تابع f خط $x=1$

است. از طرف دیگر $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$ ، بنابراین نمودار تابع

f در اطراف خط $x=1$ به صورت مقابل است.

۹۷۰- گزینه ۲) ابتدا توجه کنید که $x = \frac{3\pi}{2}$ تنها ریشه مخرج کسر

ضابطه تابع f در بازه $(\pi, 2\pi)$ است. همچنین در همسایگی $x = \frac{3\pi}{2}$ مقدار

عبارت $\sin x$ نزدیک -۱ و بیشتر از آن است. یعنی

$$\sin x \rightarrow (-1)^+ \Rightarrow [\sin x] = -1$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{-1}{\cos^2 x} = -\infty$ ، پس نمودار تابع f در



اطراف خط $x = \frac{\pi}{2}$ به صورت روبه رو است.

۹۷۱- گزینه ۳) از روی شکل معلوم است که $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ و

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۲ است.

۹۷۲- گزینه ۴) ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -2$$

باید صفر باشد، یعنی $a+1=0$ ، پس $a=-1$. در این صورت، حد مورد نظر برابر است با $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x+4}{(b-2)x-1} = \frac{-5}{b-2}$. بنابراین $\frac{-5}{b-2} = \frac{1}{2}$ ، در نتیجه $b=-8$. به این ترتیب، $ab=8$.

۹۸۸- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که اگر در صورت کسر داده شده جمله شامل x^3 وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضرب x^3 در صورت کسر داده شده صفر است، در نتیجه $2a-1=0$ ، پس $a=\frac{1}{2}$. به این ترتیب حد مسئله می‌شود $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2-1}{2x^2+x+1} = \frac{4}{2} = 2$.

در نتیجه $b=2$ و $a+b=\frac{5}{2}$.

۹۸۹- گزینه ۱ اگر فرض کنیم $t=\frac{1}{x}$ ، آن‌گاه $t \rightarrow 0^+$ و در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\tan \frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{\tan t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{\frac{\sin t}{\cos t}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \cos t = 1$$

۹۹۰- گزینه ۲ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$. از طرف دیگر اگر

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1} > 2$ ، آن‌گاه $x \rightarrow +\infty$ ، بنابراین اگر

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x+1}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2 \text{ و در نتیجه } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x+1}{x-1} \right] = 2$$

۹۹۱- گزینه ۴ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-f(x)) = 0$ (گزینه ۱)

و اگر $x \rightarrow -\infty$ ، مقادیر $1-f(x)$ مثبت‌اند. بنابراین $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{1-f(x)} = +\infty$

گزینه (۲) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

گزینه (۳) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} ((x+2)f(x)) = -\infty$

گزینه (۴) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-f(x)) = 0$

و اگر $x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر $1-f(x)$ منفی‌اند. بنابراین $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{1-f(x)} = +\infty$

پس گزینه (۴) درست نیست.

۹۹۲- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

اگر $x \rightarrow -\infty$ ، آن‌گاه $f(x) < -2$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow (-2)^-} f(t) = -\infty$$

از طرف دیگر اگر $x \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه $f(x) > 2$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = +\infty$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \circ f)(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ f)(x) = (-\infty) - (+\infty) = -\infty$$

۹۸۰- گزینه ۴ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

از طرف دیگر $f(x) = \frac{x-1}{x+3} = 1 - \frac{4}{x+3}$. اگر $x \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه

$\frac{4}{x+3} \rightarrow 0^+$ ، پس $f(x) < 1$. اگر $x \rightarrow -\infty$ ، آن‌گاه $\frac{4}{x+3} \rightarrow 0^-$ ، پس

$f(x) > 1$. پس در $+\infty$ نمودار تابع f پایین‌تر از خط $y=1$ قرار دارد و در $-\infty$ نمودار تابع f بالاتر از خط $y=1$ قرار دارد.



۹۸۱- گزینه ۳ فرض می‌کنیم $t=1-x$. در این صورت اگر $x \rightarrow +\infty$ ،

آن‌گاه $t \rightarrow -\infty$. اکنون از روی شکل معلوم است که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(1-x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -2$$

۹۸۲- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. از طرف دیگر

اگر $x \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه $f(x) > 2$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = +\infty$$

۹۸۳- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ و

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$. همچنین اگر $x \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه $f(x) > 1$ و

$[f(x)] = 1$ و اگر $x \rightarrow -\infty$ ، آن‌گاه $f(x) < -2$ و $[f(x)] = -3$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = -3$$

پس $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] - \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = -3 - 1 = -4$.

۹۸۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه $\frac{1}{x} \rightarrow 0^+$ و

در نتیجه $\left[\frac{1}{x} \right] = 0$ ، بنابراین $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$.

در واقع در $+\infty$ تابع $f(x) = x \left[\frac{1}{x} \right] = 0$ مساوی‌اند و حد آن‌ها

برابر صفر است.

۹۸۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow -\infty$ ، مقادیر $2x$ ، x و

$x-1$ همگی منفی‌اند. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x|+|x|}{|3x-1|-|2x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x-x}{1-3x-(-2x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{-x+1} = 3$$

۹۸۶- گزینه ۴ توجه کنید که اگر $n=1$ ، آن‌گاه مقدار حد برابر صفر

است که وجود دارد. اگر $n > 1$ ، آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^{n-1}-2x}{x^4-x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^{n-1-4}) = 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-5}$$

برای اینکه این حد وجود نداشته باشد، باید $n-5 \geq 1$ ، یعنی $n \geq 6$. بنابراین

کوچک‌ترین عددی که ویژگی مورد نظر را دارد، ۶ است.

۹۸۷- گزینه ۲ اگر در صورت کسر داده شده جمله شامل x^2 وجود

داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب x^2

از طرف دیگر وقتی $x \rightarrow +\infty$ ،

$$\frac{x}{2x+1} + \frac{x}{2x-1} = \frac{4x^2}{4x^2-1} = 1 + \frac{1}{4x^2-1} > 1$$

بنابراین $\left[\frac{x}{2x+1} + \frac{x}{2x-1}\right] = 1$ و در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{2x+1} + \frac{x}{2x-1}\right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

بنابراین خط $y=0$ مجانب افقی نمودار تابع f است.

ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-x}{-x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -1$$

بنابراین خطوط $y=3$ و $y=-1$ مجانب‌های افقی نمودار تابع f هستند و فاصله آن‌ها برابر ۴ است.

ابتدا توجه کنید که خطوط $y=3$ و $x=4$ به ترتیب

مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع f هستند. پس نقطه $A(4, 3)$ محل تلاقی مجانب‌هاست و فاصله آن تا مبدأ برابر است با $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

ابتدا توجه کنید که $y = \frac{a}{a-1}$ مجانب افقی نمودار تابع f

$$\frac{a}{a-1} = 2 \Rightarrow 2a - 2 = a \Rightarrow a = 2$$

است. پس همچنین خط $x = \frac{-2a}{a-1}$ مجانب قائم نمودار تابع است. پس معادله مجانب قائم $x = -4$ است.

خطوط $y = \frac{2}{a-1}$ و $x = \frac{a}{a-1}$ به ترتیب مجانب‌های

قائم و افقی نمودار تابع f هستند. بنابراین نقطه $\left(\frac{a}{a-1}, \frac{2}{a-1}\right)$ روی خط

$$\frac{2}{a-1} = \frac{a}{a-1} + 1 \Rightarrow 2 = a + a - 1 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

قرار دارد. پس

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

است. بنابراین باید نقاط تلاقی خط $y=0$ و نمودار تابع f را مشخص کنیم:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

پس نمودار تابع f در دو نقطه $(1, 0)$ و $(-1, 0)$ مجانب افقی خود را قطع می‌کند.

ابتدا توجه کنید که خط $y=0$ مجانب افقی نمودار تابع f

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

است. بنابراین باید خط $y=0$ و نمودار تابع f تلاقی داشته باشند، یعنی باید معادله $f(x)=0$ جواب داشته

$$x^2 - 2x + m = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + m = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4m \geq 0 \Rightarrow m \leq 1$$

باشد:

۹۹۳- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه $-\frac{1}{x} \rightarrow 0^-$

و در نتیجه $\left[-\frac{1}{x}\right] = -1$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left[-\frac{1}{x}\right] - 1}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 1}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

۹۹۴- گزینه ۴ توجه کنید که جمله دارای بزرگ‌ترین توان در صورت

کسر برابر $23x^6 - (3x^2)^3 = 23x^6 - 27x^6 = -4x^6$ است و جمله دارای بزرگ‌ترین توان در مخرج کسر برابر $9x^6$ است. پس حد مورد نظر برابر

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-23x^6}{9x^6} = -\frac{23}{9}$$

۹۹۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow -\infty$ ، مقادیر $3x^2 - 1$ ،

$2x^2 - 3$ و $5x^2 - x$ مثبت‌اند، پس

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|3x^2 - 1| - |2x^2 - 3|}{|5x^2 - x| - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 1 - 2x^2 + 3}{5x^2 - x - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{4x^2 - x} = \frac{1}{4}$$

۹۹۶- گزینه ۴ توجه کنید که باید $m \neq 0$ و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+1)^5 (mx+2)^y}{(2mx-1)^4 (6x-1)^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2^5 x^5 + \dots)(m^y x^y + \dots)}{(2^4 m^4 x^4 + \dots)(6^4 x^4 + \dots)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^5 m^y x^{5+y} + \dots}{2^4 \times 6^4 m^4 x^{4+4} + \dots} = \frac{2^5 m^y}{2^4 \times 6^4 m^4} = \frac{m^y}{12^4 \times 3^4}$$

بنابراین $\frac{m^y}{12^4 \times 3^4} = -1$ ، پس $m = -48$.

۹۹۷- گزینه ۳ اگر $n > 3$ ، آن‌گاه $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{x^n} = 1$ ، اگر $n = 3$ ،

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 4x^3 - 1}{x^3 - 2x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 1}{-x^3} = -5$$

آن‌گاه $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{-2x^3} = -2$ ، پس سه مقدار مختلف برای L وجود دارد.

۹۹۸- گزینه ۴ توجه کنید که اگر $f(x) = ax + b$ ، آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}}{ax + b} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^3}$$

بنابراین $\frac{1}{a^3} = 16$ ، چون a منفی است، پس $a = -\frac{1}{4}$ ، به این ترتیب

$$f(3) = 3 \text{ و } f(x) = -\frac{1}{4}x + b \text{، پس } -\frac{3}{4} + b = 3 \Rightarrow b = \frac{15}{4}$$

$$\text{بنابراین } f(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{15}{4} \text{، پس } f(-1) = 4$$

۹۹۹- گزینه ۲ اگر فرض کنیم $t = \tan x$ ، آن‌گاه $t \rightarrow -\infty$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{1 + \tan x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t}{1 - t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t}{-t} = -1$$

۱۰۰۰- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2} \text{، } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x-1} = \frac{1}{2}$$

۱۰۰۸-گزینه ۲ خط $y=2$ مجانب افقی نمودار تابع f در $+\infty$ است.

پس $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - 2f(3-x)) = 1 - 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(3-x)$$

از طرف دیگر اگر $x \rightarrow -\infty$ ، آن‌گاه $(3-x) \rightarrow +\infty$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1 - 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1 - 2 \times 2 = -3$$

پس خط $y = -3$ مجانب افقی نمودار تابع g در $-\infty$ است.

۱۰۰۹-گزینه ۴ خط $y=2$ مجانب افقی نمودار تابع f است. از طرف دیگر

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+3} = 2 - \frac{7}{x+3}$$

اگر $x \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه $\frac{7}{x+3} \rightarrow 0^+$ ، پس $f(x) < 2$.

اگر $x \rightarrow -\infty$ ، آن‌گاه $\frac{7}{x+3} \rightarrow 0^-$ ، پس $f(x) > 2$.

پس در $+\infty$ نمودار تابع f پایین‌تر از خط مجانب افقی آن قرار دارد و در $-\infty$ نمودار تابع f بالاتر از خط مجانب افقی آن قرار دارد.



۱۰۱۰-گزینه ۱ توجه کنید که خطوط $y=2$ و $y=-2$ مجانب‌های

افقی نمودار تابع f هستند. از طرف دیگر، اگر $x \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه

$$f(x) = \frac{2x}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1} > 2$$

و اگر $x \rightarrow -\infty$ ، آن‌گاه

$$f(x) = \frac{2x}{x-1} = -2 + \frac{2}{x+1} < -2$$

بنابراین نمودار تابع f در $+\infty$ بالای خط مجانب آن و در $-\infty$ پایین خط مجانب آن است.



۱۰۱۱-گزینه ۳ تابع $f(x) = \frac{x^2-1}{x-2}$ در بی‌نهایت حد ندارد:

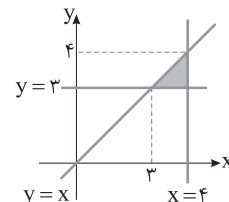
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$$

توجه کنید که در ضابطه تابع f درجه صورت کسر بیشتر از درجه مخرج آن است ولی در بقیه گزینه‌ها چنین نیست.

۱۰۱۲-گزینه ۱ خط‌های $x=4$ و $y=3$ به ترتیب مجانب‌های قائم و

افقی نمودار تابع f هستند. بنابراین مساحت مثلث رنگی در شکل زیر مورد سؤال

است که برابر $\frac{1}{2}$ است.



۱۰۱۳-گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $x=4$ باید ریشهٔ مخرج کسر

ضابطهٔ تابع f باشد: $2x-a+2=0 \xrightarrow{x=4} 8-a+2=0 \Rightarrow a=10$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(a+4)x}{2x} = \frac{a+4}{2} = 7 \quad \text{از طرف دیگر}$$

بنابراین $y=7$ مجانب افقی نمودار تابع f است.

۱۰۱۴-گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x(x-1)}{x^2-3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-2x(x-1)}{x^2-3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

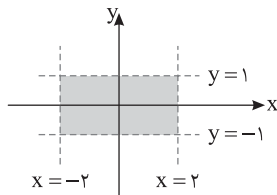
بنابراین خط‌های $y=3$ و $y=-1$ مجانب‌های افقی نمودار تابع f هستند و فاصلهٔ آن‌ها ۴ واحد است.

۱۰۱۵-گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که خطوط $x=2$ و $x=-2$

مجانب‌های قائم نمودار تابع f هستند و خطوط $y=1$ و $y=-1$ مجانب‌های افقی آن هستند.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^2-4} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2+1}{x^2-4} = -1$$

بنابراین باید مساحت مستطیل شکل زیر را به دست آوریم که برابر ۸ است.



۱۰۱۶-گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $y=1$ مجانب افقی نمودار تابع f

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-4}{x^2+3x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{است زیرا}$$

بنابراین باید طول نقطه برخورد خط $y=1$ با نمودار تابع f را به دست آوریم:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \frac{x^2-4}{x^2+3x+2} = 1 \Rightarrow x^2-4 = x^2+3x+2 \Rightarrow x = -2$$

۱۰۱۷-گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که خط $y=1$ مجانب افقی نمودار تابع f

است. بنابراین باید معادلهٔ $f(x)=1$ جواب نداشته باشد تا نمودار تابع f خط $y=1$ را قطع نکند:

$$\frac{x^3+x^2+mx+4}{x^3+2} = 1 \Rightarrow x^3+x^2+mx+4 = x^3+2 \Rightarrow x^2+mx+2=0$$

$$\Delta = m^2 - 8 < 0 \Rightarrow -\sqrt{8} < m < \sqrt{8}$$

۱۰۱۸-گزینه ۴ خط $y=3$ مجانب افقی نمودار تابع f است:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

بنابراین نمودار تابع f باید دو مجانب قائم داشته باشد، یعنی مخرج کسر تابع f باید دو ریشه داشته باشد:

$$x^2+mx+m+1=0$$

$$\Delta = m^2 - 4(m+1) > 0 \Rightarrow m^2 - 4m - 4 > 0 \Rightarrow (m-2)^2 > 8$$

پس $m-2 > \sqrt{8}$ یا $m-2 < -\sqrt{8}$. بنابراین $m > 2+\sqrt{8}$ یا $m < 2-\sqrt{8}$.

بنابراین

$$b = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax - 3a}{x^2 + ax + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-4x + 12}{x^2 - 4x + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-4(x-3)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-4}{x-1} = -2$$

 بنابراین $a+b=-6$

۱۰۲۶- گزینه ۴) راه حل اول با استفاده از اتحادهای مثلثاتی و اتحاد

مزدوج نتیجه می شود

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1+\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{\cos^2 x (\cos x - \sin x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x (\cos x - \sin x)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2})} = 1$$

 راه حل دوم از اتحاد $\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2 \alpha}{1+\tan^2 \alpha}$ استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan x}{\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan x}{1-\tan x} = \frac{2}{-2} = -1$$

راه حل سوم از قاعده هوییتال استفاده می کنیم: (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 x}{-2 \sin 2x} = \frac{2}{-2(-1)} = 1$$

 ۱۰۲۷- گزینه ۴) توجه کنید که $D_f = \mathbb{R}$ ، بنابراین تابع f فقط در نقطه

 $x=1$ ممکن است ناپیوسته باشد. در این نقطه حد چپ، حد راست و مقدار تابع را به دست می آوریم:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{2x^2+1} = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4-1}{(x-1)(x^3+x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}$$

 بنابراین تابع f در $x=1$ پیوسته است و نقطه ناپیوستگی ندارد.

 ۱۰۲۸- گزینه ۱) ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=3$ ، بنابراین

 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = [3] = 3$ ، از طرف دیگر اگر $x \rightarrow -\infty$ ، آن گاه $f(x) < 3$ ،

 بنابراین $[f(x)] = 2$ و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2$ پس

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] - 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 - 2 \times 3 = -4$$

 ۱۰۱۹- گزینه ۱) ابتدا توجه کنید که خطهای $y=1$ و $y=-1$

 مجانبهای افقی نمودار تابع f هستند. از طرف دیگر اگر $x \rightarrow +\infty$ ، آن گاه

$$f(x) = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1} > 1$$

 و اگر $x \rightarrow -\infty$ ، آن گاه $f(x) = \frac{-x}{x-1} = -1 + \frac{-1}{x-1} > -1$ پس نمودار تابع

 در $+\infty$ و $-\infty$ بالای مجانب افقی آن قرار دارد.

 ۱۰۲۰- گزینه ۳) خط $y=0$ مجانب افقی نمودار تابع f است. همچنین

 مقادیر تابع همواره مثبت هستند. بنابراین نمودار تابع در $+\infty$ و $-\infty$ بالای خط مجانب آن قرار دارد.

 ۱۰۲۱- گزینه ۱) اگر $x \rightarrow 2^+$ ، آن گاه $f(x) \rightarrow (-1)^-$ و در نتیجه

 $f(f(x)) \rightarrow 2^-$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [(f \circ f)(x)] = \lim_{x \rightarrow 2^+} [f(f(x))] = \lim_{t \rightarrow 2^-} [t] = 1$$

۱۰۲۲- گزینه ۴) توجه کنید که

$$f(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) - c, \quad f(3x) = 9ax^2 + 3bx - c$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x+1) = a(0+1)^2 + b(0+1) - c = a+b-c$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(3x) = 9a \times 1^2 + 3b \times 1 - c = 9a+3b-c$$

 بنابراین از شرط مسئله نتیجه می شود $a+b-c=9a+3b-c$ ، یعنی

$$\frac{a}{b} = -\frac{1}{4}, \quad 8a = -2b$$

 ۱۰۲۳- گزینه ۴) ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow 3^-$ ، آن گاه

 $x \rightarrow (-3)^+$ و در نتیجه $[x]=2$ و $[-x]=-3$ ، پس

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x^2}{[x]} - \frac{[-x]}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{-3}{x} \right) = \frac{9}{2} + \frac{3}{3} = \frac{11}{2} = 5.5$$

 ۱۰۲۴- گزینه ۳) حد چپ و حد راست تابع در $x=1$ را حساب می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2-4) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a}{x-2} = -a$$

 چون حد تابع در $x=1$ وجود دارد، پس حد چپ و حد راست آن در این نقطه برابرند: $-a = -3 \Rightarrow a = 3$

 ۱۰۲۵- گزینه ۳) چون حد صورت کسر وقتی $x \rightarrow 3$ صفر است، باید حد

مخرج آن هم صفر باشد، زیرا در غیر این صورت حد کسر برابر صفر خواهد شد.

پس

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + ax + 3) = 9 + 3a + 3 = 12 + 3a = 0 \Rightarrow a = -4$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-1} - \frac{\sqrt{x-2}}{x-1} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-1} \times \frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt{x+1}+3} \right) - \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x-2}}{x-1} \times \frac{\sqrt{x^2+2\sqrt{x}+4}}{\sqrt{x^2+2\sqrt{x}+4}} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1-9}{x-1} \times \frac{1}{\sqrt{x+1}+3} \right) - \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x-1} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+2\sqrt{x}+4}} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+3} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+2\sqrt{x}+4}} \\&= \frac{1}{3+3} - \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

راه حل سوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{1} = \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{2 \times 4} = \frac{1}{12}$$

راه حل اول با استفاده از اتحاد مزدوج می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} &= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x} \\&= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\cos x + \sin x} \\&= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم: (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} &= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x \cos^3 x - \cos x \sin^3 x}{-\sin x + \cos x} \\&= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x \cos x (\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos x - \sin x} = \frac{-\frac{1}{2} \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - (-\frac{\sqrt{2}}{2})} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

توجه کنید که

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = ab - 1, \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^+} (a \sin x) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} (\cos 2x + b) = -1 + b$$

برای اینکه تابع f در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته باشد باید

$$\begin{cases} ab - 1 = a \\ a = b - 1 \end{cases}$$

بنابراین

$$ab - 1 = a \xrightarrow{b=a+1} a(a+1) - 1 = a$$

$$a^2 + a - 1 = a \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

اگر $a = 1$ ، آن‌گاه $b = 2$ و $a + b = 3$

اگر $a = -1$ ، آن‌گاه $b = 0$ و $a + b = -1$

توجه کنید که

$$f(2x) - 1 = 3(2x)^2 - 2x - 1 = 12x^2 - 2x - 1$$

$$f(x) + 2x^2 - 1 = 3x^2 - x + 2x^2 - 1 = 6x^2 - x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^2 - 2x - 1}{6x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^2}{6x^2} = 2$$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با ۲

ابتدا توجه کنید که

$$4x - x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < 4$$

پس $D_f = (0, 4)$ و منحنی $f(x)$ همواره مثبت است. در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = +\infty$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف مجانب‌های قائم آن به صورت گزینۀ (۳) است.

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{5\pi}{4}\right)^+} \sqrt{2} \sin x = \lim_{t \rightarrow (-1)^-} [t] = -2$$

پس $\sqrt{2} \sin x \rightarrow (-1)^-$ اگر $x \rightarrow \left(\frac{5\pi}{4}\right)^+$ ، آن‌گاه $x \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^-$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{5\pi}{4}\right)^+} [\sqrt{2} \sin x] = \lim_{t \rightarrow (-1)^-} [t] = -2$$

راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} - 2}{x^2 - 25} &= \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-25} - \frac{\sqrt{x-4}-1}{x^2-25} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-25} - \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-4}-1}{x^2-25}\end{aligned}$$

اکنون از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-25} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x+4}-3)(\sqrt{x+4}+3)}{(x^2-25)(\sqrt{x+4}+3)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+4-9}{(x-5)(x+5)(\sqrt{x+4}+3)} \\&= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{(x-5)(x+5)(\sqrt{x+4}+3)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x+5)(\sqrt{x+4}+3)} = \frac{1}{60} \\&= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(\sqrt{x+4}+3)(x+5)} - \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(\sqrt{x-4}+1)(x+5)} = \frac{1}{60} - \frac{1}{20} = -\frac{1}{30}\end{aligned}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} - 2}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+4}} - \frac{1}{2\sqrt{x-4}}}{2x} = \frac{\frac{1}{20} - \frac{1}{10}}{10} = -\frac{1}{30}$$

راه حل اول فرض می‌کنیم $\sqrt[3]{x} = t$. در این صورت

وقتی $x \rightarrow 8$ ، $t = 2$ ، بنابراین

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}{x-8} &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{\sqrt{t^3+1} - t}{t^3 - 8} \\&= \lim_{t \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{t^3+1} - (t+1)}{t^3 - 8} \times \frac{\sqrt{t^3+1} + (t+1)}{\sqrt{t^3+1} + (t+1)} \right) \\&= \lim_{t \rightarrow 2} \left(\frac{t^3+1 - t^2 - 2t - 1}{t^3 - 8} \times \frac{1}{\sqrt{t^3+1} + t + 1} \right) \\&= \lim_{t \rightarrow 2} \left(\frac{t(t-2)(t+1)}{(t-2)(t^2+2t+4)} \times \frac{1}{\sqrt{t^3+1} + t + 1} \right) = \frac{2 \times (2+1)}{4+4+4} \times \frac{1}{3+2+1} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

۱۰۴۱-گزینه ۱) وقتی که x از سمت چپ به ۲ نزدیک می‌شود، $f(x)$ از

سمت راست به ۲ نزدیک می‌شود. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = -1$$

۱۰۴۲-گزینه ۱) با فرض $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = L_2$ معلوم

می‌شود که

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x)) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3 \Rightarrow L_1 + L_2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f^2(x) - g^2(x)) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f^2(x) - \lim_{x \rightarrow 2} g^2(x) = 2 \Rightarrow L_1^2 - L_2^2 = 2$$

$$L_1^2 - L_2^2 = 2 \Rightarrow (L_1 - L_2)(L_1 + L_2) = 2$$

$$3(L_1 - L_2) = 2 \Rightarrow L_1 - L_2 = \frac{2}{3}$$

از حل دستگاه معادله‌های $\begin{cases} L_1 - L_2 = \frac{2}{3} \\ L_1 + L_2 = 3 \end{cases}$ به دست می‌آید $L_1 = \frac{11}{6}$ و $L_2 = \frac{17}{6}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x^2)}{g(x+1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(2x^2)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x+1)} = \frac{\lim_{t \rightarrow 2} f(t)}{\lim_{k \rightarrow 2} g(k)} = \frac{5}{-2}$$

۱۰۴۳-گزینه ۲) ابتدا توجه که در یک همسایگی چپ نقطه $x=1$

تساوی‌های $[2x]=1$ ، $[x]=-1$ و $|1-x|=1-x$ برقرار هستند. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[2x](x+2)}{x[-x]+|1-x|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{-x+1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{-2x+1} = -3$$

۱۰۴۴-گزینه ۴) راه حل اول چون حد مخرج صفر است و حد مورد نظر

وجود دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد، تا حد به صورت $\frac{0}{0}$ در بیاید.

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x^2 + x + a - 2}) = 0 \Rightarrow \sqrt{2^2 + 2 + a - 2} = 0 \Rightarrow a = -2$$

اگر $a = -2$ ، حد مورد نظر می‌شود

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2} - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 + x - 2} - 2)(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2)}{(x+2)(x-2)(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 4}{(x-2)} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x^2 + x - 2} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{(x-2)} \times \frac{1}{16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \lim_{x \rightarrow 2} (x+3) = \frac{5}{16}$$

در نتیجه $b = \frac{5}{16}$

راه حل دوم چون حد مخرج صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس حد

صورت هم باید صفر باشد، تا حد به صورت $\frac{0}{0}$ در بیاید. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x^2 + x + a - 2}) = 0 \Rightarrow \sqrt{2^2 + 2 + a - 2} = 0 \Rightarrow a = -2$$

اکنون برای به دست آوردن مقدار حد می‌توانیم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2} - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x - 2}}}{2x} = \frac{5}{4}$$

۱۰۳۶-گزینه ۴) توجه کنید که $(f+2g)-(f-g)=3g$ ، پس تابع g

در نقطه $x=a$ پیوسته است. به این ترتیب چون $(f-g)+g=f$ ، پس تابع f

هم در نقطه $x=a$ پیوسته است. چون برد تابع‌های f و g مجموعه اعداد

حقیقی مثبت است، پس مخرج کسره‌های $\frac{1}{f}$ ، $\frac{1}{g}$ و $\frac{1}{f+g}$ هیچ‌گاه صفر

نمی‌شود و دامنه این توابع مجموعه اعداد حقیقی است و چون f و g در $x=a$

پیوسته‌اند، این توابع هم در $x=a$ پیوسته‌اند. ولی دامنه تابع $\frac{1}{f-g}$ ممکن

است $\mathbb{R}$ نباشد و این تابع ممکن است در $x=a$ تعریف نشود. (کافی است $f(a)=g(a)$ ، پس تابع $\frac{1}{f-g}$ ممکن است در $x=a$ پیوسته نباشد.)

۱۰۳۷-گزینه ۳) ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$$

همچنین مقادیر $f(x)$ در مثبت بی‌نهایت بزرگ‌تر از یک هستند، پس

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{1 - (f \circ f)(x)} = -\infty$$

۱۰۳۸-گزینه ۳) ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

پس نمودار تابع f در اطراف خط $x=1$ به صورت مقابل است.

۱۰۳۹-گزینه ۲) اگر m عددی مثبت باشد، وقتی که $x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر

$3-mx$ منفی‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(mx-3)+x-1}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(m+1)x-4}{3x+1} = \frac{m+1}{3}$$

بنابراین $\frac{m+1}{3} = \frac{2}{3}$ ، پس $m=1$. اگر m عددی منفی باشد، وقتی که

$x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر $3-mx$ مثبت‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-mx)+x-1}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-m)x+2}{3x+1} = \frac{1-m}{3}$$

بنابراین $\frac{1-m}{3} = \frac{2}{3}$ ، پس $m=-1$. اگر $m=0$ ، حد مورد نظر برابر $\frac{1}{3}$

می‌شود و قابل قبول نیست. بنابراین مقادیر m عددهای ۱ و -۱ هستند. پس

m دو مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد.

۱۰۴۰-گزینه ۳) صورت کسر ضابطه تابع f ریشه ندارد. پس اگر مخرج

این کسر ریشه نداشته باشد، نمودار تابع مجانب قائم نخواهد داشت، در غیر

این صورت مجانب قائم دارد. پس

$$x^2 - 6x + 2m = 0, \quad \Delta = 36 - 8m < 0 \Rightarrow m > \frac{9}{2}$$

بنابراین m مقادیر طبیعی ۱، ۲، ۳ و ۴ را نمی‌تواند داشته باشد.

۱۰۵۱- گزینه ۱ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطه $x=\pi$ را پیدا

می‌کنیم. توجه کنید که اگر $x \rightarrow \pi^-$ ، آن‌گاه $\frac{x}{2} \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-$ ، بنابراین

$\cos \frac{x}{2} \rightarrow \cos (\frac{\pi}{2})^+ = 0$ ، پس $\lim_{x \rightarrow \pi^-} [\cos \frac{x}{2}] = 0$ و $2x \rightarrow (2\pi)^-$ ، بنابراین

$\sin 2x \rightarrow \sin (2\pi)^- = 0$ ، پس $\lim_{x \rightarrow \pi^-} [\sin 2x] = 0$ در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} (\sin \frac{x}{2} \times 0 - \cos x \times (-1)) = \cos \pi = -1$$

از طرف دیگر، اگر $x \rightarrow \pi^+$ ، آن‌گاه $\frac{x}{2} \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+$ ، بنابراین $\cos \frac{x}{2} \rightarrow \cos (\frac{\pi}{2})^- = 0$ ،

پس $\lim_{x \rightarrow \pi^+} [\cos \frac{x}{2}] = 0$ و $2x \rightarrow (2\pi)^+$ ، بنابراین $\sin 2x \rightarrow \sin (2\pi)^+ = 0$ ، پس

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} [\sin 2x] = 0$$

در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} (\sin \frac{x}{2} \times (-1) - \cos x \times 0) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$$

پس $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = -1$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۱۰۵۲- گزینه ۱ چون حد مخرج کسر صفر است و حد مورد نظر وجود

دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد تا حد به صورت $\frac{0}{0}$ دربیاید. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{ax+b}-2) = 0 \Rightarrow \sqrt{a+b}=2 \Rightarrow a+b=4 \Rightarrow b=4-a$$

اکنون با استفاده از اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} \times \frac{\sqrt{ax+b}+2}{\sqrt{ax+b}+2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax+b-4}{(x-1)(x+1)(\sqrt{ax+b}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax-a}{(x-1)(x+1)} \times \frac{1}{2+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a}{x+1} \times \frac{1}{4} = \frac{a}{4}$$

بنابراین $\frac{a}{4} = \frac{3}{2}$ و در نتیجه $a=12$ ، پس $b=-8$. خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۱۰۵۳- گزینه ۳ چون $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{2x^2+ax+b} = -\infty$ ، بنابراین باید مخرج

کسر به صفر میل کند. همچنین چون حد چپ و راست برابر $-\infty$ است، پس

$x=3$ باید ریشه مضاعف مخرج کسر باشد. بنابراین

$$2x^2+ax+b=2(x-3)^2 \Rightarrow 2x^2+ax+b=2x^2-12x+18$$

$$a=-12, b=18 \Rightarrow a+b=6$$

ریاضی - ۹۳

۱۰۵۴- گزینه ۱ باید تعداد نقاطی را پیدا کنیم که به ازای آن‌ها

$$0 < x < 9 \Rightarrow 0 < \frac{1}{3}x < 3 \Rightarrow -1 < \frac{1}{3}x - 1 < 2 : (\frac{1}{3}x - 1) \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{(\frac{1}{3}x - 1) \in \mathbb{Z}}{\frac{1}{3}x - 1 \in \mathbb{Z}} \Rightarrow (\frac{1}{3}x - 1) \in \{0, 1\}$$

ولی در نقطه $x=3$ که به ازای آن $\frac{1}{3}x - 1 = 0$ ، عامل صفر کننده $x-3$

موجب پیوستگی می‌شود. پس تابع f فقط در یک نقطه از بازه $(0, 9)$ ناپیوسته

ریاضی - ۸۵

است.

۱۰۴۵- گزینه ۳ راه حل اول فرض می‌کنیم $x = \frac{\pi}{2} - t$ ، در نتیجه

$x = \frac{\pi}{2} + t$ و $t \rightarrow 0$ ، پس می‌توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \Delta x}{\pi - 2x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\Delta \pi}{2} + \Delta t)}{\pi - (\pi + 2t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin \Delta t}{-2t} = \frac{\Delta}{2}$$

راه حل دوم از قاعده هسپیتال استفاده می‌کنیم: (به درس آخر فصل چهارم

مراجعه کنید): $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \Delta x}{\pi - 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\Delta \sin \Delta x}{-2} = \frac{(-\Delta)(1)}{-2} = \frac{\Delta}{2}$

۱۰۴۶- گزینه ۴ ابتدا حد تابع در $x=0$ را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\sqrt{x+27} - 3) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+27} - 3}{x}$$

فرض می‌کنیم $\sqrt{x+27} = t$ ، پس $x+27=t^2$ ، در نتیجه $x=t^2-27$

همچنین اگر $x \rightarrow 0$ ، آن‌گاه $t \rightarrow 3$ ، بنابراین حد مورد نظر می‌شود

$$\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t-3}{t^2-27} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{t-3}{(t-3)(t^2+27+9)} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{1}{t^2+3t+9} = \frac{1}{27}$$

در نتیجه $a=27$.

۱۰۴۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$2x^2-50=2(x^2-25)=2(x-5)(x+5)$$

$$x^3-10x^2+25x=x(x^2-10x+25)=x(x-5)^2$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x^2-50}{x^3-10x^2+25x} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2(x-5)(x+5)}{x(x-5)^2} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2(x+5)}{x(x-5)} = -\infty$$

۱۰۴۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه $\frac{1}{x} \rightarrow 0^-$ و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2-1}{4x^2+x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{4x^2} = -\frac{1}{4}$$
، بنابراین $[-\frac{1}{4}] = -1$

۱۰۴۹- گزینه ۴ توجه کنید که اگر $f(x)=ax+b$ ، آن‌گاه

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+b}{\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}} = \frac{a}{\frac{1}{a}} = a^2$$

بنابراین $a^2=9$ ، و چون شیب خط مثبت است، بنابراین a مثبت است، پس

$a=3$. به این ترتیب $f(x)=3x+b$ و $f(3)=10 \Rightarrow 9+b=10 \Rightarrow b=1$

بنابراین $f(x)=3x+1$ ، پس $f(1)=4$.

۱۰۵۰- گزینه ۴ خط $y=4$ مجانب افقی نمودار تابع f در $+\infty$ است، پس

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+ax+3}{3x-x+1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a+4)x}{2x} = 4 \Rightarrow \frac{a+4}{2} = 4 \Rightarrow a=4$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-4x+3}{3x+x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{4x} = 0$

پس $y=0$ مجانب افقی نمودار تابع f در $-\infty$ است.

۱۰۶۰-گزینه ۱ چون تابع در بازه $[0, 2\pi]$ پیوسته است، پس در $x = \frac{\pi}{2}$

هم پیوسته است. پس ابتدا حد تابع را در $x = \frac{\pi}{2}$ پیدا می کنیم

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\pi - 2x)}{-(\pi - 2x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{-t} = -1$$

بنابراین برای اینکه تابع در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد، باید

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \Rightarrow a = -1$$

خارج از کشور تجربی - ۹۲

۱۰۶۱-گزینه ۲ چون حد مورد نظر برابر عددی غیر صفر و حد صورت

برابر صفر است، باید حد مخرج هم صفر باشد. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} (ax + b) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a$$

اگر از اتحاد مزدوج استفاده کنیم، حد مورد نظر می شود

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax - 2a} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 1)}{a(x - 2)} = \frac{1}{a} = \frac{1}{4a}$$

$$\frac{1}{4a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

بنابراین

خارج از کشور تجربی - ۹۵

چون $b = -2a$ ، پس $b = -1$.

۱۰۶۲-گزینه ۲ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2||x + 1|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{|x - 2||x + 1|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} \times \frac{2x + \sqrt{x^2 + 12}}{2x + \sqrt{x^2 + 12}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2||x + 1|(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{3(x^2 - 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(x + 1)(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{3(x - 2)(x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x + 1)(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{3(x + 2)} = \frac{-(3) \times 8}{3 \times 4} = -2 \end{aligned}$$

ریاضی - ۹۰

۱۰۶۳-گزینه ۴ از فرض سؤال نتیجه می شود $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x^2|}{ax^2} = -1$

پس $a = -1$. برای محاسبه حد راست عبارت در $x = -2$ دقت کنید که به ازای $-2 < x < 2$ ، عبارت $x^2 - 4$ منفی است، بنابراین باید حاصل حد زیر را حساب کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{4 - x^2}{-x^2 - x + 2} &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{(2 - x)(2 + x)}{(x + 2)(-x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{2 - x}{-x + 1} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۰

۱۰۵۵-گزینه ۲ برای آنکه تابع روی دامنه اش پیوسته باشد، باید در

$x = a$ پیوسته باشد. پس

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Rightarrow \frac{1}{a} = 1 - \frac{a}{4} \Rightarrow 4 = 4a - a^2 \\ a^2 - 4a + 4 &= 0 \Rightarrow (a - 2)^2 = 0 \Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۱۰۵۶-گزینه ۳ حد چپ و حد راست تابع در نقطه $x = 2$ باید برابر

مقدار تابع در این نقطه باشند، بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + bx - 1) = 5 \Rightarrow 4 + 2b - 1 = 5 \Rightarrow b = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax + b) = 5 \Rightarrow 2a + b = 5 \end{aligned}$$

چون $b = 1$ ، در نتیجه $2a + 1 = 5$ ، یعنی $a = 2$.

۱۰۵۷-گزینه ۲ برای برقراری شرط پیوستگی تابع روی $\mathbb{R}$ ، پیوستگی آن

در نقاط $x = \pm 1$ را بررسی می کنیم:

$$\begin{aligned} f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 1 \times [1^-] = 0 \\ f(-1) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -a + b \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) &= (-1) \times [(-1)^+] = 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = 1 \end{cases}$$

بنابراین $a = -\frac{1}{2}$ و $b = \frac{1}{2}$. در نتیجه به ازای $|x| \geq 1$ ، $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

ریاضی - ۹۰

پس $f(3) = -1$.

۱۰۵۸-گزینه ۱ توجه کنید که اگر $x \notin \mathbb{Z}$ ، آن گاه $[x] + [-x] = -1$.

بنابراین تابع به صورت $f(x) = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ a & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ است و به ازای $a = -1$

ریاضی - ۹۶

روی مجموعه عددهای حقیقی پیوسته است.

۱۰۵۹-گزینه ۴ باید حدهای چپ و راست تابع با مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{2}$

برابر باشند:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\cos 3x}{\cos x} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\cos 3(t + \frac{\pi}{2})}{\cos(t + \frac{\pi}{2})} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sin 3t}{-\sin t} = -3 \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} (\sin 5x - a) = 1 - a$$

بنابراین $1 - a = -3$ ، در نتیجه $a = 4$.

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۱۰۶۷- گزینه ۴

ابتدا از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos \Delta x}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos \Delta x}}{x^2} \times \frac{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos \Delta x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos \Delta x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos \Delta x}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos \Delta x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 - (1 - \frac{1}{2}(\Delta x)^2)}{x^2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۱۰۶۸- گزینه ۴

ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطه $x=3$ را

حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (ax - 3a - \frac{3}{a}) = 3a - 3a - \frac{3}{a} = -\frac{3}{a} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{1 - \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}{x - 3} \times \frac{1 + \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}{1 + \sqrt{x - \sqrt{x+1}}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - x + \sqrt{x+1}}{x - 3} \times \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{1 + \sqrt{x - \sqrt{x+1}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{1 - x + \sqrt{x+1}}{x - 3} \times \frac{1 - x - \sqrt{x+1}}{1 - x - \sqrt{x+1}} \right) \times \frac{1}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(1-x)^2 - (x+1)}{x - 3} \times \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{1 - x - \sqrt{x+1}} \times \frac{1}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x(x-3)}{x - 3} \times \frac{1}{-4} \times \frac{1}{2} = 3 \times \frac{1}{-4} \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

از طرف دیگر $f(3) = -\frac{3}{8}$ ، بنابراین تابع به‌ازای هر مقدار a در نقطه $x=3$

پیوسته است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۴

۱۰۶۹- گزینه ۴

برای اینکه تابع f در نقطه $x=1$ پیوسته باشد، باید حدتابع در این نقطه برابر a باشد، پس

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{x-1} \times \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{2}(1-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-\sqrt{2}\sqrt{1-x}} = -\infty \end{aligned}$$

با توجه به اینکه تابع f در نقطه $x=1$ حد نامتناهی دارد، پس هیچ مقداری برای a پیدا نمی‌شود.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۰۶۴- گزینه ۱

وقتی $x \rightarrow (\frac{1}{e})^+$ ، $\cos \pi x$ با مقدارهای کوچک‌تر ازبه $\frac{\sqrt{3}}{2}$ نزدیک می‌شود، پس

$$\cos \pi x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^- \Rightarrow f \cos^2 \pi x \rightarrow 3^- \Rightarrow [f \cos^2 \pi x] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} \frac{[f \cos^2 \pi x] - 1}{ax + b} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} \frac{2 - 1}{ax + b} = \frac{1}{2}$$

بنابراین

چون حد صورت برابر صفر است، حد مخرج کسر نیز باید صفر شود تا حد به صورت $\frac{0}{0}$ دربیاید، زیرا در غیر این صورت حاصل حد برابر صفر می‌شود.

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} (ax + b) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -6b$$

در نتیجه

اکنون باید حد زیر را حساب کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} \frac{2 - 1}{ax + b} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} \frac{2 - 1}{-6bx + b} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} \frac{2(1 - 6x)}{b(1 - 6x)} = \frac{2}{b}$$

بنابراین $\frac{2}{b} = \frac{1}{2}$ ، یعنی $b=4$ ، چون $a = -6b$ ، پس $a = -24$.در نتیجه $a+b = -20$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۰۶۵- گزینه ۱

ابتدا از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{1 - \tan(\pi x)}{2x - \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \left(\frac{1 - \tan(\pi x)}{2x - \sqrt{x}} \times \frac{2x + \sqrt{x}}{2x + \sqrt{x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{1 - \tan(\pi x)}{4x^2 - x} \times \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{2x + \sqrt{x}}{x(4x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{4x - 1} \times \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{1}{x \cos(\pi x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos(\pi x + \frac{\pi}{4})}{4(x - \frac{1}{4})} \times \frac{1}{\frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\cos(\pi x + \frac{\pi}{4})}{x - \frac{1}{4}} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \pi x - \frac{\pi}{4})}{x - \frac{1}{4}} = 2 \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\pi \sin(\frac{\pi}{4} - \pi x)}{-(\frac{\pi}{4} - \pi x)} = 2(-\pi) = -2\pi \end{aligned}$$

ریاضی - ۹۱

۱۰۶۶- گزینه ۲

از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos^2 x - \sqrt{\cos x}}{x^2} \times \frac{\cos^2 x + \sqrt{\cos x}}{\cos^2 x + \sqrt{\cos x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^4 x - \cos x}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 x + \sqrt{\cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x^2} \times \frac{1}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0} (-\cos x(1 + \cos x + \cos^2 x)) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times (-3) \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

ریاضی - ۹۳

۱۰۷۳- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} ([2x] + [-2x]) = -1 + 0 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} ([2x] + [-2x]) = 0 - 1 = -1$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow 0} ([2x] + [-2x]) = -1$ از طرف دیگر،

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sqrt{1+x^2}} \times \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{1 + \sqrt{1+x^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - 1 - x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{1+x^2})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{-x^2} \times 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 x}{x^2} \times 2 \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x + \cos^2 x)$$

$$= -\frac{2}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times 2(1+1+1) = -\frac{1}{2} \times 1 \times 6 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} ([2x] + [-2x]) \left(\frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sqrt{1+x^2}} \right) = -3 \quad \text{بنابراین}$$

ریاضی - ۹۴

۱۰۷۴- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - a + 2) = a - a + 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 2 \quad \text{بنابراین به ازای هر مقدار } a$$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۱۰۷۵- گزینه ۴ با توجه به رابطه

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

تابع g همان تابع ثابت $g(x) = -1$ است که نقطه ناپیوستگی ندارد.

ریاضی - ۹۲

۱۰۷۶- گزینه ۲ در نقطه $x = -1$ ، باید حد چپ و حد راست تابع با هم

برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2 - \sqrt{3-x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2\sqrt{3-x}}{1} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -a + 1$$

$$\frac{1}{4} = -a + 1 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

بنابراین

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۰۷۰- گزینه ۳ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطه $x = 2$ را

به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 - a = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{a(1 + \sqrt[3]{1-x})}{x^2 - 2x} \times \frac{1 - \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2}}{1 - \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a(1+1-x)}{x(x-2)(1 - \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2})} = \frac{-a}{6}$$

برای اینکه تابع f همواره پیوسته باشد، باید حد چپ و حد راست تابع در نقطه

$x = 2$ برابر باشند، بنابراین

$$\frac{-a}{6} = 2 - a \Rightarrow 12 - 6a = -a \Rightarrow 12 = 5a \Rightarrow a = \frac{12}{5}$$

ریاضی - ۹۴

۱۰۷۱- گزینه ۴ می توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \times 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3 \cos x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \times \frac{1}{\cos x} \right)$$

$$= 2 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱۰۷۲- گزینه ۲ با استفاده از اتحادهای مزدوج و

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

می توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \times \frac{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \times \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

بنابراین

$$2^a = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

ریاضی - ۹۲

۱۰۷۷- گزینه ۴ در نقطه $x=0$ ، باید حد تابع با مقدار تابع برابر باشد.

توجه کنید که

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-1+x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+\sqrt{1-x}) = 2\end{aligned}$$

بنابراین اگر $f(0)=a=2$ ، تابع در نقطه $x=0$ پیوسته است. تجربی - ۹۶

۱۰۷۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned}-1 \leq x < 0 &\Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = -\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ 0 \leq x < 1 &\Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ 1 \leq x < 2 &\Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = -\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\end{aligned}$$

پیوستگی تابع در نقطه‌های $x=0$ و $x=1$ را بررسی می‌کنیم تا گزینه درست مشخص شود:

$$\begin{aligned}f(0) &= 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0 \\ f(1) &= -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) = -1\end{aligned}$$

پس تابع در $x=0$ پیوسته و در $x=1$ ناپیوسته است. به همین ترتیب این تابع در تمام نقطه‌های زوج پیوسته و در تمام نقطه‌های فرد ناپیوسته است.

ریاضی - ۹۳

۱۰۷۹- گزینه ۳ نشان می‌دهیم تابع gof در $x=0$ پیوسته است. حد

چپ و حد راست تابع gof در نقطه $x=0$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}x \rightarrow 0^-: f(x) = -\frac{1}{2} &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow (-\frac{1}{2})} g(t) = -2 \times \frac{-1}{2} = 1 \\ x \rightarrow 0^+: f(x) = 2x &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 1\end{aligned}$$

با توجه به اینکه $g(f(0))=1$ ، تابع gof در نقطه $x=0$ پیوسته است.

ناپیوستگی توابع دیگر نیز به همین ترتیب ثابت می‌شود. (بررسی سایر گزینه‌ها

بر عهده خواننده)

خارج از کشور ریاضی - ۸۶

۱۰۸۰- گزینه ۲ با توجه به آنکه $f(x) = [x^2] - 3$ ، باید

$$y = [x^2] \text{ روی این بازه پیوسته باشد. تابع مورد نظر در نقاط } x = \pm\sqrt{n}$$

(که $n \in \mathbb{N}$) ناپیوسته است. پس در نقاط $x=2$ و $x=\sqrt{5}$ ناپیوسته است و

در نتیجه بازه مورد نظر $[2, \sqrt{5}]$ است، بنابراین $k = \sqrt{5} - 2$. ریاضی - ۸۸



۱۰۸۶- گزینه ۲ اگر $-h^2 = k$ و $h \rightarrow 0$ ، آن گاه $k \rightarrow 0^-$ و در نتیجه

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h^2) - f(1)}{h^2} = \lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{f(1+k) - f(1)}{-k} \\ = - \lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{f(1+k) - f(1)}{k} = -f'(1) = -2$$

۱۰۸۷- گزینه ۴ می توان نوشت

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)^2}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} ((x+1)^2(x^2+1)^2) = (1+1)^2(1+1)^2 = 16$$

۱۰۸۸- گزینه ۱ مشتق تابع f در نقطه $x=0$ را به کمک تعریف به دست

می آوریم:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| + 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x| + 1} = 1$$

بنابراین تابع f در نقطه $x=0$ مشتق پذیر است.

۱۰۸۹- گزینه ۴ با استفاده از تعریف، مشتق چپ و مشتق راست تابع در

$x=2$ را به دست می آوریم:

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} = +\infty$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt[3]{(2-x)^2} - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{-\sqrt[3]{x-2}} = -\infty$$

۱۰۹۰- گزینه ۱ مشتق چپ و مشتق راست تابع f در $x=0$ را به دست

می آوریم:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sqrt[3]{x}) = 0$$

بنابراین $f'(0) = 0$ و نمودار تابع در این نقطه، خط مماس موازی محور طول ها دارد.

۱۰۹۱- گزینه ۲ شیب خطی که از نقطه های $A(-1, 3)$ و $B(4, 4)$

می گذرد، برابر است با $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1}{5}$. از طرف دیگر، مشتق تابع f در نقطه -1

با شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه A برابر است. بنابراین $f'(-1) = \frac{1}{5}$

۱۰۹۲- گزینه ۲ اگر $x \rightarrow 3$ ، آن گاه شیب خطی که نقطه های A و B را

به هم وصل می کند، به شیب خط مماس بر نمودار تابع f در $x=3$ نزدیک و نزدیک تر می شود. بنابراین

$$2 = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{k}{x} \Rightarrow 2 = \frac{k}{3} \Rightarrow k = 6$$

۱۰۸۱- گزینه ۱ در نقاط $x=b$ و $x=c$ شیب خط مماس بر نمودار

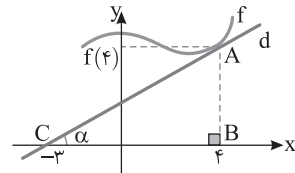
تابع f صفر است. در نقطه $x=d$ شیب خط مماس بر نمودار تابع f مثبت و در نقطه $x=a$ شیب خط مماس بر نمودار تابع f منفی است. بنابراین مشتق تابع f در $x=a$ از بقیه کوچک تر است.

۱۰۸۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که شیب خط d برابر است با $f'(4)$. از

طرف دیگر، شیب خط d برابر با $\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{f(4)}{4}$ است. به این ترتیب

$$\text{پس } f'(4) = \frac{f(4)}{4}$$

$$f(4) + f'(4) = 2 \Rightarrow f(4) + \frac{f(4)}{4} = 2 \Rightarrow f(4) = \frac{8}{5}$$



۱۰۸۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - 2f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(f(x) - f(2))}{x - 2} = 2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ = 2f'(2) = 6$$

۱۰۸۴- گزینه ۱ راه حل اول اگر به جای ۲ در صورت کسر داده شده،

$\sqrt{f(2)}$ را قرار دهیم، نتیجه می شود

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(2)}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(2)}}{x(x-2)} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(2)}}{x(x-2)} \times \frac{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(2)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(2)}} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x(x-2)} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(2)})x} \\ = f'(2) \times \frac{1}{2(\sqrt{f(2)} + \sqrt{f(2)})} = f'(2) \times \frac{1}{4\sqrt{f(2)}} = \frac{2 \times 2}{2-1} \times \frac{1}{4\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می کنیم. (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(2)}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}}{\frac{f'(2)}{2\sqrt{f(2)}}} = \frac{f'(2)}{2\sqrt{f(2)}(f(2)-2)} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

۱۰۸۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h^2 + 3h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(3+h) - f(3)}{h} \times \frac{1}{3+h} \right) \\ = f'(3) \times \frac{1}{3+0} = \frac{6}{3} = 2$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + |x| \sqrt[3]{x+8} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - x \sqrt[3]{x+8}}{x}$$

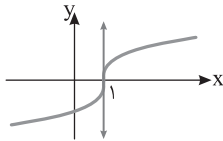
$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - \sqrt[3]{x+8}) = 1 - 2 = -1$$

بنابراین $f'_+(0) - f'_-(0) = 4$

۱۰۹۹- گزینه ۴ تابع $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ در نقطه $x=1$ مشتق ندارد، زیرا

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = +\infty$$

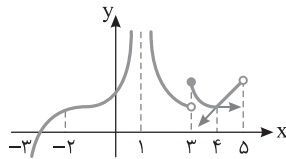
ولی خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه وجود دارد و موازی محور عرض‌ها است.



۱۱۰۰- گزینه ۳ تابع f در نقطه ۳ پیوسته نیست، پس در این نقطه

مشتق پذیر نیست. تابع در نقطه ۴ نیز مشتق پذیر نیست، زیرا مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه با هم برابر نیستند. در بقیه نقاط، دامنه تابع مشتق وجود دارد. بنابراین مجموع مورد نظر برابر ۷ است.

توجه کنید که نقطه $x=1$ در دامنه تابع قرار ندارد.



۱۱۰۱- گزینه ۱ نمودار تابع f روی بازه $[0, 2]$ پاره‌خطی است که

نقطه‌های $(0, 0)$ و $(2, 1)$ را به هم وصل می‌کند، پس شیب آن برابر $\frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$

است. در نتیجه $f'(1) = \frac{1}{2}$. نمودار تابع f روی بازه $[2, 4]$ پاره‌خطی است که

شیب آن صفر است، پس $f'(3) = 0$. نمودار تابع f روی بازه $[4, +\infty)$ نیم‌خطی است که از نقطه‌های $(4, 1)$ و $(6, 5)$ می‌گذرد، پس شیب آن برابر

$$\frac{5-1}{6-4} = 2$$

است. در نتیجه $f'(5) = 2$. بنابراین $\frac{f'(1) + f'(3)}{f'(5)} = \frac{\frac{1}{2} + 0}{2} = \frac{1}{4}$

۱۱۰۲- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = 3$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 9}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x) - 3)(f(x) + 3)}{(x - 2)(x + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 3}{x + 2} = f'(2) \times \frac{f(2) + 3}{2 + 2}$$

$$= 3 \times \frac{3 + 3}{4} = \frac{9}{2}$$

۱۰۹۳- گزینه ۳ اگر به جای ۴ مقدار $f(1)$ را قرار دهیم، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{f(x) - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{f(x) - f(1)} = \frac{2}{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}} = \frac{2}{f'(1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۱۰۹۴- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3f(x) - 3f(3)}{x^2 - 9} = 3 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$= 3 \left(\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x + 3} \right) = 3 \times f'(3) \times \frac{1}{3 + 3} = 3 \times 4 \times \frac{1}{6} = 2$$

۱۰۹۵- گزینه ۴ اگر فرض کنیم $x = 2 - h$ ، آنگاه $h \rightarrow 0$ و در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{f(x) - f(2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - h - 2}{f(2 - h) - f(2)} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(2 - h) - f(2)}$$

$$= - \frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 - h) - f(2)}{h}} = - \frac{1}{4}$$

۱۰۹۶- گزینه ۴ راه حل اول به جای ۸ قرار می‌دهیم $f^3(1)$ و از تعریف

مشتق در نقطه $x=1$ استفاده کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(1+h) - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(1+h) - f^3(1)}{h}$$

توجه کنید که به کمک اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(1+h) - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(1+h) - f^3(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(1+h) - f(1))(f^2(1+h) + f(1)f(1+h) + f^2(1))}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} (f^2(1+h) + 2f(1)f(1+h) + 4)$$

$$= f'(1) \times (f^2(1) + 2f(1)f(1) + 4) = (\sqrt[3]{1+1})(4 + 4 + 4) = 24$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم. (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(1+h) - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f^2(1+h)f'(1+h)}{1} = 3f^2(1)f'(1)$$

$$= 3 \times (\sqrt[3]{1+1}) \times 2^2 = 24$$

۱۰۹۷- گزینه ۳ توجه کنید که $f(2) = 0$. اکنون با استفاده از تعریف

مشتق در نقطه $x=2$ مقدار $f'(2)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x+7} - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} ((x-1)\sqrt{x+7})$$

$$= (2-1)\sqrt{4} = \frac{2}{3}$$

۱۰۹۸- گزینه ۳ مقدار مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطه $x=0$

را به کمک تعریف به دست می‌آوریم:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + |x| \sqrt[3]{x+8} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + x \sqrt[3]{x+8}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sqrt[3]{x+8}) = 1 + 2 = 3$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x - 2|[x]}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x - 2)}{x - 2} = 2$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2|[x]}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)}{x - 2} = -1$$

بنابراین $f'_+(2) - f'_-(2) = 3$.

۱۱۰۹- گزینۀ ۲ برای تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ تساوی‌های داده‌شده برقرار هستند:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$$

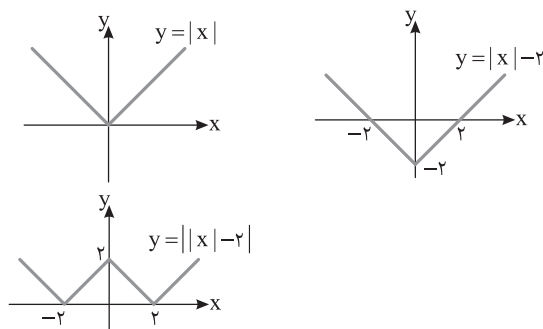
برای توابع دیگر توجه کنید که

۱) گزینۀ ۱: $f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'_+(0) = f'_-(0) = +\infty$

۳) گزینۀ ۳: $f(x) = -\sqrt[3]{|x|} \Rightarrow f'_+(0) = -\infty, f'_-(0) = +\infty$

۴) گزینۀ ۴: $f(x) = -\sqrt[3]{x} \Rightarrow f'_+(0) = f'_-(0) = -\infty$

۱۱۱۰- گزینۀ ۳ نمودار تابع به شکل زیر است.



بنابراین تابع در نقاط $x = -2$ و $x = 2$ ، $x = 0$ مشتق‌ناپذیر است.

۱۱۱۱- گزینۀ ۲ می‌توان نوشت

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h} = (1 - (-1))f'(2) = 2 \times (-2) = -4$$

۱۱۱۲- گزینۀ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+3h) - f(1-4h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+3h) - f(1) + f(1) - f(1-4h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+3h) - f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1-4h) - f(1)}{h}$$

از طرف دیگر.

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+3h) - f(1)}{h} = \lim_{H \rightarrow 0^-} \frac{f(1+H) - f(1)}{\frac{H}{3}} = 3f'_-(1) = -12$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1-4h) - f(1)}{h} = \lim_{H \rightarrow 0^+} \frac{f(1+H) - f(1)}{-\frac{H}{4}} = -4f'_+(1) = -16$$

بنابراین

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+3h) - f(1-4h)}{h} = -12 + 16 = 4$$

۱۱۰۳- گزینۀ ۲ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1} = 6$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 27}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x) - 3)(f^2(x) + 3f(x) + 9)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} ((f^2(x) + 3f(x) + 9)(\sqrt{x} + 1))$$

$$= f'(1) \times (f^2(1) + 3f(1) + 9)(1 + 1) = 6 \times (3^2 + 3 \times 3 + 9) \times 2 = 324$$

راه‌حل دوم از قاعده هویتنال استفاده می‌کنیم: (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 27}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f'(x)f^2(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{3 \times 3 \times \sqrt{1+3} \times 3^2}{2 \times 1} = 324$$

۱۱۰۴- گزینۀ ۴ راه‌حل اول اگر فرض کنیم $x = 2 - h$ ، آن‌گاه $h \rightarrow 0$ و

در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{f(x) - f(2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2-h)^3 - 8}{f(2-h) - f(2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-12+6h-h^2)}{f(2-h) - f(2)}$$

$$= \frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{h}} \times \lim_{h \rightarrow 0} (-12+6h-h^2) = \frac{1}{4} \times (-12) = -3$$

راه‌حل دوم از قاعده هویتنال استفاده می‌کنیم: (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f'(2-h)}{1} = -f'(2) = 4 \Rightarrow f'(2) = -4$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{f(x) - f(2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2}{f'(x)} = \frac{12}{-4} = -3$$

۱۱۰۵- گزینۀ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h) - f(3-h)}{h} = (2 - (-1))f'(3)$$

بنابراین $3f'(3) = 12$ ، در نتیجه

$$f'(3) = 4$$

۱۱۰۶- گزینۀ ۴ توجه کنید که حد خواسته شده برابر مشتق چپ تابع در

نقطه $x = 1$ است، ولی چون تابع در این نقطه پیوستگی چپ ندارد، پس مشتق چپ

هم ندارد و این حد وجود ندارد. به صورت مستقیم هم می‌توان حاصل این حد

را به دست آورد:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2(1+h) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2h - 3}{h} = +\infty$$

۱۱۰۷- گزینۀ ۳ توجه کنید که $g(0) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$ پس

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x - 2f(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - 2f(x)} = \frac{1}{4}$$

۱۱۰۸- گزینۀ ۳ مشتق راست و مشتق چپ تابع f در نقطه $x = 2$ را به

کمک تعریف به دست می‌آوریم:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x^2 - 1) \sin |x| - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x^2 - 1) \sin(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-(x^2 - 1) \sin x}{x} = 1$$

بنابراین $f'_+(0) - f'_-(0) = -1 - 1 = -2$

۱۱۱۸- گزینه ۱ راه حل اول با استفاده از تعریف مشتق در نقطه $x=2$ مقدار $f'(2)$ را به دست می‌آوریم:

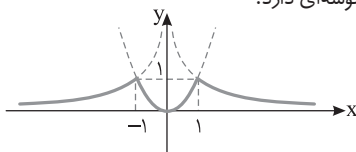
$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cos^3(\pi x)}{1 + \tan(\frac{\pi x}{\lambda})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos^3(\pi x)}{1 + \tan(\frac{\pi x}{\lambda})} = \frac{\cos^3(2\pi)}{1 + \tan \frac{\pi}{\lambda}} = \frac{1}{1 + \tan \frac{\pi}{\lambda}}$$

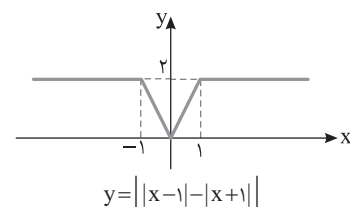
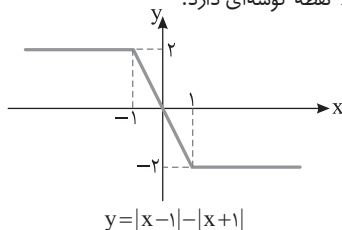
راه حل دوم چون مقدار $x-2$ در $x=2$ برابر صفر است و مشتق این عبارت برابر یک است، پس فقط کافی است مقدار عبارت $\frac{\cos^3(\pi x)}{1 + \tan(\frac{\pi x}{\lambda})}$ را در $x=2$

حساب کنیم که این مقدار برابر $\frac{1}{\lambda}$ است. (درس دوم همین فصل را ببینید.)

۱۱۱۹- گزینه ۲ نمودار تابع به شکل زیر است و تابع در نقاط $x=1$ و $x=-1$ نقطه گوشه‌ای دارد.



۱۱۲۰- گزینه ۳ نمودار تابع به شکل زیر است و تابع در نقاط $x=0$ ، $x=1$ و $x=-1$ نقطه گوشه‌ای دارد.



۱۱۲۱- گزینه ۲ توجه کنید که $f'(x) = 3x^2 - 3$ ، پس

$$f'(\frac{1}{3}) = 3 \times \frac{1}{9} - 3 = \frac{1}{3} - 3 = -\frac{8}{3}$$

۱۱۲۲- گزینه ۲ بنابر قاعده ضرب،

$$f'(x) = a(x-3) + ax + 1 = 2ax - 3a + 1$$

$$\begin{cases} f'(1) = -a + 1 \\ f'(1) = 5 \end{cases} \Rightarrow a = -4$$

در نتیجه

۱۱۱۳- گزینه ۴ مشتق چپ تابع در نقطه $x=0$ را با استفاده از تعریف به دست می‌آوریم:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{6 - \sqrt{4 - |x|}} - 2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{6 - \sqrt{4 + x}} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sqrt{6 - \sqrt{4 + x}} - 2}{x} \times \frac{\sqrt{6 - \sqrt{4 + x}} + 2}{\sqrt{6 - \sqrt{4 + x}} + 2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{6 - \sqrt{4 + x} - 4}{x(\sqrt{6 - \sqrt{4 + x}} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 - \sqrt{4 + x}}{x(\sqrt{6 - \sqrt{4 + x}} + 2)} \times \frac{2 + \sqrt{4 + x}}{2 + \sqrt{4 + x}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4 - (4 + x)}{x(2 + \sqrt{4 + x})(\sqrt{6 - \sqrt{4 + x}} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{(2 + \sqrt{4 + x})(\sqrt{6 - \sqrt{4 + x}} + 2)} = \frac{-1}{(2 + 2)(2 + 2)} = -\frac{1}{16}$$

۱۱۱۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow 1^+$ ، آن گاه $[x] = 1$ ، پس

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x] - x^2}{\sqrt{x^2 + 3} [x]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x^2}{(x-1)\sqrt{x^2 + 3}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x+1)}{\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{-2}{2} = -1$$

۱۱۱۵- گزینه ۳ توجه کنید که در یک همسایگی چپ $x=2$ تساوی‌های $|x|=x$ و $[-x]=-2$ برقرار است. پس در این همسایگی

$$f(x) = (x-2)\sqrt[3]{4x^3 - 5}$$

و در نتیجه

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)\sqrt[3]{4x^3 - 5}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt[3]{4x^3 - 5} = \sqrt[3]{32 - 5} = 3$$

۱۱۱۶- گزینه ۲ تابع f در نقطه $x=0$ پیوسته است، بنابراین مشتق چپ و مشتق راست تابع در این نقطه را حساب می‌کنیم:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|[\sin x] - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x[\sin x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin x] = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|[\sin x] - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x[\sin x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-[\sin x]) = 1$$

بنابراین تابع f در نقطه $x=0$ مشتق چپ و مشتق راست دارد ولی چون برابر نیستند، تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست.

۱۱۱۷- گزینه ۲ مشتق چپ و مشتق راست تابع در نقطه $x=0$ را به دست می‌آوریم:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2 - 1) \sin |x| - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2 - 1) \sin x}{x} = -1$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می کنیم (درس هشتم همین فصل را ببینید).

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(\pi+h) - f^2(\pi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f'(\pi+h)f(\pi+h)}{1} = 2f'(\pi)f(\pi) = 2 \times (-2) \times 3 = -12$$

توجه کنید که $f(\pi) = 3$ و $f'(x) = 2 \cos x + 3 \sin x$ پس $f'(\pi) = -2$.

۱۱۳۱- گزینه ۲) توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})(2x) + 2 = x^2 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})x + 2$$

بنابراین $f'(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{2} + 2 = 2 + 2\sqrt{6} - 4 + 2 = 2\sqrt{6}$

۱۱۳۲- گزینه ۲) توجه کنید که $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ در نتیجه

$$f'(x) = \frac{(1)(x^2+1) - (x-1)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

در نتیجه، $f'(-1) = \frac{2-4}{4} = -\frac{1}{2}$

۱۱۳۳- گزینه ۳) ابتدا مشتق تابع g را به دست می آوریم:

$$g'(x) = \frac{2xf(x) - x^2 f'(x)}{f^2(x)}$$

بنابراین $g'(2) = \frac{2f(2) - 4f'(2)}{f^2(2)} = \frac{12 - (-8)}{9} = \frac{20}{9}$

۱۱۳۴- گزینه ۳) بنابر قاعده تقسیم،

$$f'(x) = \frac{(1)(x+a) - (1)(x)}{(x+a)^2} = \frac{a}{(x+a)^2}$$

در نتیجه $f'(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a}{a^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 3$

۱۱۳۵- گزینه ۴) بنابر قاعده ضرب،

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+1) + (\sqrt{x}-1)(2x)$$

بنابراین $f'(4) = \frac{1}{2 \times 2}(17) + (2-1)(8) = \frac{49}{4}$

۱۱۳۶- گزینه ۴) بنابر قاعده تقسیم،

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x}) - (-\frac{1}{2\sqrt{x}})(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})^2}$$

در نتیجه $f'(\frac{1}{4}) = \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})}{(1-\frac{1}{2})^2} = 8$

۱۱۳۷- گزینه ۱) ضابطه تابع را به صورت زیر می نویسیم:

$$f(x) = xx^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+2) = x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}}$$

بنابراین $f'(x) = \frac{11}{6}x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(1) = \frac{11}{6} + 3 = \frac{29}{6}$

۱۱۳۸- گزینه ۲) چون $x^3 - 2x = x(x^2 - 2)$ ، در یک همسایگی نقطه ۲

علامت عبارت $x^3 - 2x$ مثبت است، بنابراین

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} + (x^3 - 2x) = x^{\frac{1}{2}} + x^3 - 2x$$

در نتیجه $f'(2) = 14$ و $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 3x^2 - 2$

۱۱۳۳- گزینه ۳) بنابر قاعده تقسیم،

$$f'(x) = \frac{(x-4+x-2)x^2 - 2x(x-2)(x-4)}{x^4} = \frac{(2x-6)x^2 - 2x(x-2)(x-4)}{x^4}$$

در نتیجه $f'(-2) = \frac{(-10)4 + 4(-4)(-6)}{16} = \frac{7}{2}$

۱۱۳۴- گزینه ۳) توجه کنید که $f'(x) = \frac{3x^2(x^2+k) - (2x)(x^2)}{(x^2+k)^2}$

در نتیجه

$$f'(-1) = \frac{\Delta}{\Lambda} \Rightarrow \frac{3(1+k)-2}{(1+k)^2} = \frac{\Delta}{\Lambda} \Rightarrow k=3, k=-\frac{1}{5} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

۱۱۳۵- گزینه ۲) توجه کنید که

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 \times \frac{1}{3\sqrt{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^2}}$$

در نتیجه $f'(2^{-6}) = \frac{1}{\sqrt{2^{-6}}} + \frac{1}{\sqrt{2^{-12}}} = 2^3 + 2^6 = 24$

۱۱۳۶- گزینه ۴) بنابر قاعده تقسیم، $(\frac{f}{g})'(1) = \frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{g^2(1)}$

از طرف دیگر، $f(1) = 1$ ، $g(1) = -\frac{1}{2}$ و

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}, \quad g'(x) = \frac{1}{2}(2x) = x \Rightarrow g'(1) = 1$$

بنابراین $(\frac{f}{g})'(1) = \frac{\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}) - 1 \times 1}{\frac{1}{4}} = -5$

۱۱۳۷- گزینه ۳) توجه کنید که

$$f(x) = \frac{6\sqrt{x}-24}{\sqrt{x}} = \frac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{24}{\sqrt{x}} = 6x^{\frac{1}{2}} - 24x^{-\frac{1}{2}} = 6x^{\frac{1}{2}} - 24x^{-\frac{1}{2}}$$

بنابراین $f'(1) = 1 + 8 = 9$ پس $f'(x) = \frac{6}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{24}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

۱۱۳۸- گزینه ۱) توجه کنید که در یک همسایگی نقطه ۳ علامت عبارت $x-4$

منفی است، بنابراین در یک همسایگی نقطه ۳، $f(x) = -(x-4) + 2x = x+4$

در نتیجه $f'(3) = 1$ و $f'(x) = 1$

۱۱۳۹- گزینه ۳) توجه کنید که در یک همسایگی نقطه $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2} < \frac{x}{2} + 1 < 2$

پس در یک همسایگی نقطه $\frac{1}{2}$ ، مقدار $[\frac{x}{2} + 1]$ برابر ۱ است، و در نتیجه

$$f(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 6x \Rightarrow f'(\frac{1}{2}) = 3$$

۱۱۳۰- گزینه ۲) راه حل اول توجه کنید که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(\pi+h) - f^2(\pi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} (f(\pi+h) + f(\pi)) = f'(\pi) \times 2f(\pi)$$

از طرف دیگر، $f(\pi) = 3$ و $f'(x) = 2 \cos x + 3 \sin x$ پس $f'(\pi) = -2$

بنابراین مقدار حد مورد نظر برابر -12 است.

۱۱۴۶- گزینه ۴ توجه کنید که $\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$ به ازای $x=1$ برابر صفر است، پس عامل صفر کننده است. از طرف دیگر،

$$y = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow y'(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

در نتیجه

$$f'(1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1+1} = \frac{1}{12}$$

۱۱۴۷- گزینه ۱ ضابطه تابع را به صورت زیر می نویسیم:

$$f(x) = xx^3 (xx^2 + 1) = x^6 + x^3$$

بنابراین

$$f'(x) = \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{3}x^2 \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

۱۱۴۸- گزینه ۲ اگر در تساوی $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2-1}{2x}$ قرار دهیم $x=-1$ ،

چون $f(-1)=1$ ، به دست می آید $g(-1)=0$. اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به دست می آید

$$\frac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{f^2(x)} = \frac{(2x)(2x) - 2(x^2-1)}{4x^2}$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=-1$ ، به دست می آید $\frac{g'(-1)-0}{1} = 1$ ، بنابراین

$$g'(-1)=1$$

۱۱۴۹- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{\cos x \times x - (1) \sin x}{x^2}$$

بنابراین

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{f}{\pi^2}$$

۱۱۵۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{\cos x(1-\cos x) - (-\sin x)\sin x}{(1-\cos x)^2} = \frac{\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(1-\cos x)^2} = \frac{\cos x - 1}{(1-\cos x)^2} = \frac{1}{\cos x - 1}$$

۱۱۵۱- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f'(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots + 49x^{48} - 50x^{49}$$

بنابراین $f'(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 49 + 50 = 1275$

۱۱۵۲- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که چون مقدار $x+1$ به ازای $x=-1$

صفر است، پس مشتق عبارت $(x+1)(x+2)(x+3)(ax+4)$ به ازای $x=-1$ برابر است با $(-1+2)(-1+3)(-a+4) = 8-2a$ ، بنابراین

$$8-2a=2 \Rightarrow a=3$$

۱۱۵۳- گزینه ۳ فرض می کنیم $f(x) = ax+b$ در این صورت

$$f'(x) = a \Rightarrow f'(x)f(x) = a^2x + ab = 4x - 8$$

بنابراین

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2, \quad f'(3) = a \Rightarrow f'(3) = \pm 2$$

۱۱۳۹- گزینه ۳ توجه کنید که در یک همسایگی نقطه $\frac{3}{2}$ مقدار $[x]$

برابر ۱ است و در نتیجه

$$f(x) = \frac{x^3}{x+5} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x+5) - x^3}{(x+5)^2} = \frac{2x^2 + 15x^2}{(x+5)^2} \Rightarrow f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{162}{169}$$

۱۱۴۰- گزینه ۲ مشتق تابع را به دست می آوریم:

$$f'(x) = \frac{(1+2\sin x)'(1+3\cos x) - (1+3\cos x)'(1+2\sin x)}{(1+3\cos x)^2} = \frac{2\cos x(1+3\cos x) + 3\sin x(1+2\sin x)}{(1+3\cos x)^2}$$

$$f'(\pi) = \frac{2(-1)(1-3) + 0}{(1-3)^2} = 1 \quad \text{در نتیجه}$$

۱۱۴۱- گزینه ۱ توجه کنید که $f'(x) = 3ax^2 - 2ax + 4$ ، بنابراین

$$f'(-2) = 12 \Rightarrow 12a + 4a + 4 = 12 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

در نتیجه $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + 4$ ، پس $f'(1) = \frac{9}{2}$

۱۱۴۲- گزینه ۲ ابتدا ضابطه تابع را ساده می کنیم و مشتق آن را

به دست می آوریم:

$$f(x) = x(x^2-1)(x^2-2) = x^5 - 3x^3 + 2x \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 9x^2 + 2$$

بنابراین

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 5x^4 - 9x^2 + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{9+\sqrt{41}}{10} \\ x^2 = \frac{9-\sqrt{41}}{10} \end{cases}$$

پس در نقاط $x = \pm\sqrt{\frac{9-\sqrt{41}}{10}}$ و $x = \pm\sqrt{\frac{9+\sqrt{41}}{10}}$ مشتق تابع f برابر صفر

است. حاصل ضرب این اعداد برابر است با $-\frac{2}{5}$.

۱۱۴۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f(x) = x^{-10} + x^{-9} + \dots + x^{-1} + 1 + x + x^2 + \dots + x^{10}$$

بنابراین $f'(x) = -10x^{-11} - 9x^{-10} - \dots - x^{-2} + 1 + 2x + \dots + 10x^9$ در نتیجه $f'(1) = -10 - 9 - \dots - 1 + 1 + 2 + \dots + 10 = 0$

۱۱۴۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f(x) = \frac{(x^5+x^2)-(x^3+1)}{x^3+1} = \frac{x^2(x^3+1)-(x^3+1)}{x^3+1} = x^2-1 \quad (x \neq -1)$$

در نتیجه برای هر $x \neq -1$ مشتق تابع f برابر $2x$ است و $f'\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) = \sqrt{2}-1$

۱۱۴۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{(2x-m)(x^2+5x+3) - (2x+5)(x^2-mx+4)}{(x^2+5x+3)^2}$$

در نتیجه

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow (-2-m)(1-5+3) - (-2+5)(1+m+4) = 0 \Rightarrow m = -\frac{13}{2}$$

۱۱۵۹- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{\cos x (\cos x - 1) - (-\sin x)(a + \sin x)}{(\cos x - 1)^2}$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow \frac{a+1}{1} = 1 \Rightarrow a = 0$$

۱۱۶۰- گزینه ۲ مشتق تابع را حساب می‌کنیم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = m - 2 \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{m}{2}$$

چون $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، پس

$$-1 \leq \frac{m}{2} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq m \leq 2$$

۱۱۶۱- گزینه ۲ توجه کنید که $\sqrt{x} - 8$ به ازای $x = 64$ برابر با صفر

است. پس عامل صفر کننده است و مشتق آن به ازای $x = 64$ برابر $\frac{1}{16}$ است:

$$y = \sqrt{x} - 8 \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y'(64) = \frac{1}{16}$$

بنابراین مشتق تابع f در نقطه $x = 64$ برابر است با

$$\frac{1}{16} \times (\sqrt[3]{64} + 4)(\sqrt[4]{64}) = \frac{1}{16} \times 8 \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

۱۱۶۲- گزینه ۲ در نزدیکی نقطه $\frac{f}{5}$ ، علامت عبارت $x^2 - 1$ منفی است

و $1 < 2x < 2$ ، پس در نزدیکی نقطه $\frac{f}{5}$ ، $[2x] = 1$. بنابراین

$$f(x) = \frac{-(x^2 - 1)}{x + 1} = -(x - 1)$$

در نتیجه $f'(x) = -1$ و $f'(\frac{f}{5}) = -1$

۱۱۶۳- گزینه ۳ در یک همسایگی $x = 2$ مقدار عبارت $x^2 - 3x$ منفی

است و مقدار عبارت $x^2 + 3x$ مثبت است. بنابراین ضابطه تابع در این

همسایگی به صورت $f(x) = -x^2 + 3x - x^2 - 3x = -2x^2$ است. بنابراین

$$f'(x) = -4x \Rightarrow f'(2) = -8$$

۱۱۶۴- گزینه ۴ در یک همسایگی نقطه $x = 1$ علامت عبارت $2x - x^2\sqrt{x}$

مثبت است و در یک همسایگی نقطه $x = 4$ علامت این عبارت منفی است.

بنابراین در یک همسایگی نقطه ۱،

$$f(x) = 2x - x^2\sqrt{x} = 2x - x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(1) = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$$

و در یک همسایگی نقطه ۴،

$$f(x) = -2x + x^2\sqrt{x} = -2x + x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow f'(x) = -2 + \frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

پس

$$f'(4) = -2 + \frac{5}{2} \times 2 = 1$$

بنابراین

$$f'(1)f'(4) = -9$$

۱۱۵۴- گزینه ۳ ابتدا مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + mx + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+mx+1) - (x^2-x+1)(2x+m)}{(x^2+mx+1)^2}$$

$$\text{بنابراین } f'(0) = \frac{(-1)(1) - (m)(1)}{1^2} = -1 - m \text{ در نتیجه}$$

$$-1 - m = 2m \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

۱۱۵۵- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f(x) = \frac{g(x)-1}{x^2+1} \Rightarrow (x^2+1)f(x) = g(x)-1$$

اگر از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم و قرار دهیم $x = 1$ ، به دست می‌آید

$$(2x)f(x) + (x^2+1)f'(x) = g'(x) \Rightarrow 2f(1) + 2f'(1) = g'(1) \Rightarrow g'(1) = 12$$

۱۱۵۶- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h) - f(2)}{2h} = \frac{2}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h) - f(2)}{2h} = \frac{2}{2} f'(2)$$

از طرف دیگر، $f(x) = 2x^2 + 8x - 2$ ، پس

$$f'(x) = 4x + 8(-2)x^{-3} = 4x - \frac{16}{x^3}$$

بنابراین $f'(2) = 8 - 2 = 6$ و مقدار حد مورد نظر برابر است با $\frac{2}{3} \times 6 = 4$.

۱۱۵۷- گزینه ۲ ابتدا مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x^3 + \sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + \sqrt{x})'(x^3 + \sqrt[3]{x}) - (x^3 + \sqrt[3]{x})'(x^2 + \sqrt{x})}{(x^3 + \sqrt[3]{x})^2} = \frac{(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}})(x^3 + \sqrt[3]{x}) - (3x^2 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})(x^2 + \sqrt{x})}{(x^3 + \sqrt[3]{x})^2}$$

اگر در تساوی فوق قرار دهیم $x = 1$ ، نتیجه می‌شود

$$f'(1) = \frac{(2 + \frac{1}{2})(1+1) - (3 + \frac{1}{3})(1+1)}{(1+1)^2} = -\frac{5}{12}$$

۱۱۵۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$(f \times g)'(1) = f'(1)g(1) + g'(1)f(1)$$

ابتدا ضابطه تابع $f \times g$ را به دست می‌آوریم:

$$(f \times g)(x) = f(x)g(x) = (x^2 + \sqrt{x^4 + x^2})^9 (x^2 - \sqrt{x^4 + x^2})^9 = ((x^2 + \sqrt{x^4 + x^2})(x^2 - \sqrt{x^4 + x^2}))^9 = (x^4 - x^4 - x^2)^9 = -x^{18}$$

بنابراین

$$(f \times g)'(x) = (-x^{18})' = -18x^{17} \Rightarrow (f \times g)'(1) = -18 \times 1^{17} = -18$$

۱۱۶۵- گزینه ۳ اگر ضابطه تابع را به صورت

$$f(x) = (x^2 - 49) \underbrace{(x^2 - 50)(x^2 - 20)(x^2 - 21) \dots (x^2 - 48)}_{g(x)}$$

بنویسیم، در این صورت

$$f(x) = (x^2 - 49)g(x) \Rightarrow f'(x) = 2xg(x) + (x^2 - 49)g'(x)$$

واضح است که اگر $f'(x)$ را حساب کنیم، مقدار عبارت $(x^2 - 49)g'(x)$ صفر می‌شود و کافی است مقدار عبارت $2xg(x)$ را حساب کنیم:

$$f'(x) = 2xg(x) = 2x \times (49-50)(49-20)(49-21) \dots (49-48) = -14 \times 29!$$

۱۱۶۶- گزینه ۱ توجه کنید که در یک همسایگی نقطه $\frac{21}{2}$ مقدار

عبارت‌های x ، $x-1$ ، $x-2$ و ... و $x-10$ مثبت و مقدار عبارت‌های $x-11$ ، $x-12$ ، $x-20$ ، ... منفی است. بنابراین ضابطه تابع در همسایگی

این نقطه به شکل زیر است:

$$f(x) = x + (x-1) + (x-2) + \dots + (x-10) - (x-11) - (x-12) - \dots - (x-20)$$

در نتیجه $f(x) = x + k$ ، که k مقداری ثابت است. بنابراین $f'(\frac{21}{2}) = 1$.

۱۱۶۷- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{(\sin x + x \cos x)(1 - x \sin x) - (-\sin x - x \cos x)(1 + x \sin x)}{(1 - x \sin x)^2}$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{(1+0)(1-\frac{\pi}{2}) - (-1)(1+\frac{\pi}{2})}{(1-\frac{\pi}{2})^2} = \frac{2}{(1-\frac{\pi}{2})^2}$$

۱۱۶۸- گزینه ۲ ابتدا مشتق تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{(1 + \sin x)'(1 + 2 \cos x) - (1 + 2 \cos x)'(1 + \sin x)}{(1 + 2 \cos x)^2} = \frac{\cos x(1 + 2 \cos x) + 2 \sin x(1 + \sin x)}{(1 + 2 \cos x)^2}$$

$$f'(0) = \frac{1(1+2) + 0}{(1+2)^2} = \frac{1}{3}$$

۱۱۶۹- گزینه ۲ مشتق تابع به صورت $y' = a \cos x - 2 \sin x$ است.

بنابراین

$$y^2 = a^2 \sin^2 x + 4 \cos^2 x + 4a \sin x \cos x$$

$$y'^2 = a^2 \cos^2 x + 4 \sin^2 x - 4a \sin x \cos x$$

$$y^2 + y'^2 = a^2(\sin^2 x + \cos^2 x) + 4(\cos^2 x + \sin^2 x) = a^2 + 4$$

پس $a^2 + 4 = 8$ و در نتیجه $a^2 = 4$.

۱۱۷۰- گزینه ۳ مشتق دو تابع را حساب می‌کنیم و باهم برابر قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = m + 2 \cos x, \quad g'(x) = 4$$

$$f'(x) = g'(x) \Rightarrow m + 2 \cos x = 4 \Rightarrow \cos x = \frac{4-m}{2}$$

چون $-1 \leq \cos x \leq 1$ ، پس $-1 \leq \frac{4-m}{2} \leq 1$ ، در نتیجه

$$-2 \leq 4-m \leq 2 \Rightarrow -6 \leq -m \leq -2 \Rightarrow 2 \leq m \leq 6$$

۱۱۷۱- گزینه ۲ توجه کنید که $(g^n)' = ng'g^{n-1}$ ، بنابراین

$$f'(x) = 3(3x-2)'(3x-2)^{3-1} - 4(2x-3)'(2x-3)^{4-1} \\ = 3(3)(3x-2)^2 - 4(2)(2x-3)^3$$

در نتیجه $f'(-1) = 9(-3-2)^2 - 8(-2-3)^3 = 9 \times 5^2 + 8 \times 5^3 = 49 \times 5^2$.۱۱۷۲- گزینه ۱ بنابر قاعده ضرب و اینکه $(g^n)' = ng'g^{n-1}$

$$f'(x) = ((x^2-1)^2)'(x+2)^4 + (x^2-1)^2((x+2)^4)' \\ = (2(x^2-1)(x^2-1)')(x+2)^4 + (x^2-1)^2(4(x+2)^3) \\ = 4x(x^2-1)(x+2)^4 + 4(x^2-1)^2(x+2)^3$$

$$\text{بنابراین } f'(0) = 0 + 4(1)(2)^3 = 32$$

۱۱۷۳- گزینه ۳ بنابر قاعده زنجیری، $(g \circ f)'(1) = f'(1)g'(f(1))$.

طرف دیگر، $f(x) = x^3 - x + 1$ ، در نتیجه $f'(x) = 3x^2 - 1$ ، بنابراین $f'(1) = 2$ و $f(1) = 1$ همچنین

$$g(x) = 2 - x^2 \Rightarrow g'(x) = -2x \Rightarrow g'(f(1)) = g'(1) = -2$$

$$\text{بنابراین } (g \circ f)'(1) = 2 \times (-2) = -4$$

۱۱۷۴- گزینه ۱ توجه کنید که $(g^n)' = ng'g^{n-1}$ ، بنابراین

$$f'(x) = (-3)(3 - \frac{1}{x^2})(3x + \frac{1}{x})^{-4}$$

$$\text{در نتیجه، } 128f'(1) = -3 \Rightarrow f'(1) = (-3)(2)(4)^{-4} = \frac{-3}{128}$$

۱۱۷۵- گزینه ۴ توجه کنید که $(\sqrt[3]{g})' = \frac{g'}{3\sqrt[3]{g^2}}$ ، بنابراین

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+2)^2}} \Rightarrow f'(5) = \frac{10}{27}$$

۱۱۷۶- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{4}{\sqrt{7}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{13}{12}$$

۱۱۷۷- گزینه ۳ اگر از دو طرف تساوی $f(2x) = -x^2 + 3x + 4$ طبق

قاعده زنجیری مشتق بگیریم، به دست می‌آید

$$(2x)'f'(2x) = -2x + 3 \Rightarrow 2f'(2x) = -2x + 3$$

$$\xrightarrow{x=2} 2f'(4) = -4 + 3 \Rightarrow f'(4) = -\frac{1}{2}$$

۱۱۷۸- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} \cos(\frac{2}{x}) - 2 \cos(\frac{1}{x}) - 2x(-\frac{1}{x^2}(-\sin(\frac{1}{x}))) \\ = -\frac{2}{x^2} \cos(\frac{2}{x}) - 2 \cos(\frac{1}{x}) - \frac{2}{x} \sin(\frac{1}{x})$$

در نتیجه

$$f'(\frac{2}{\pi}) = -\frac{2}{\frac{4}{\pi^2}} \cos(\pi) - 2 \cos(\frac{\pi}{2}) - \pi \sin(\frac{\pi}{2}) \\ = \frac{\pi^2}{2} + 0 - \pi = \frac{\pi^2 - 2\pi}{2}$$

۱۱۸۸- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f(x) = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos 2x$$

$$f'(x) = -2 \sin 2x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = -2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1$$

۱۱۸۹- گزینه ۳ اگر از دو طرف تساوی

$$f(x + \sin x + 2) = \sin(kx) \quad \text{مشتق بگیریم، به دست می آید:}$$

$$(1 + \cos x)f'(x + \sin x + 2) = k \cos(kx)$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x = 0$ ، به دست می آید:

$$2f'(2) = k \xrightarrow{f'(2)=2} k = 4$$

۱۱۹۰- گزینه ۳ با استفاده از قواعد مشتق گیری، مشتق تابع را حساب می کنیم:

$$f'(x) = 4 \times 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{8}\right) \times \left(-\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{8}\right)\right) \times \left(-\frac{1}{8}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{8}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{8}\right) \xrightarrow{\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \sin\left(2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{8}\right)\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right)$$

بنابراین

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۱۱۹۱- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = 2 \left(\frac{3x^2(x^2-1) - 2x(x^2-1)}{(x^2-1)^2} \right) \left(\frac{x^2-1}{x^2-1} \right) \Rightarrow f'(-2) = 0$$

۱۱۹۲- گزینه ۱ چون نقطه $(2, 3)$ روی نمودار تابع f است، پس

$f(2) = 3$. چون خط d از نقطه های $(2, 3)$ و $(5, 0)$ گذشته است، شیب آن

برابر است با -1 . بنابراین $f'(2) = -1$. اکنون توجه کنید که

$$g'(x) = f(3x-4) + x(3f'(3x-4))$$

$$g'(2) = f(2) + 6f'(2) = 3 - 6 = -3$$

۱۱۹۳- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f(x) = ((x^3 + 2)(\sqrt{x} + 2x))^2 \quad \text{بنابراین } (g^n)' = ng^n g^{n-1}$$

$$f'(x) = 2((3x^2)(\sqrt{x} + 2x) + (x^3 + 2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\right))(x^3 + 2)(\sqrt{x} + 2x)$$

در نتیجه $f'(1) = 2(3(3) + 3(\frac{1}{2} + 2))(3)(3) = 297$

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 3a}{3\sqrt[3]{(x^3 + 3ax)^2}} \quad \text{توجه کنید که}$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 3 \times 2^2 + 3a = 0 \Rightarrow a = -4$$

۱۱۹۵- گزینه ۴ توجه کنید که

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \sqrt[3]{(\sqrt{x^2-1})^3 + 1} = \sqrt{x^2-1+1} = \sqrt{x^2} = |x|$$

$$g'(x)f'(g(x)) = (fog)'(x) = (|x|)' = \frac{x}{|x|} \quad \text{بنابراین}$$

۱۱۷۹- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = a \cos x + \frac{1}{4} (2(\cos 2x))' \cos 2x$$

$$= a \cos x + (-\sin 2x) \cos 2x = a \cos x - \frac{1}{4} \sin 4x$$

در نتیجه

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۱۱۸۰- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(x) = (\sin x \cos x) \cos 2x \cos 4x$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 4x\right) \cos 4x$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \sin 8x\right) = \frac{1}{8} \sin 8x$$

$$f'(x) = \frac{1}{8} \times 8 \cos 8x = \cos 8x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos(\pi) = -1 \quad \text{بنابراین}$$

۱۱۸۱- گزینه ۱ بنابر قاعده زنجیری،

$$(fog)'(-1) = g'(-1)f'(g(-1))$$

$$g(x) = x^3 - 3x \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow g'(-1) = 0$$

بنابراین $(fog)'(-1) = 0$.

۱۱۸۲- گزینه ۳ توجه کنید که $(g^n)' = ng'g^{n-1}$ ، بنابراین

$$f'(x) = 3(1 + (2+x^2)^2)'(1 + (2+x^2)^2)^{2-1}$$

$$= 3(2(2x)(2+x^2)^{2-1})(1 + (2+x^2)^2)^2 = 12x(2+x^2)(1 + (2+x^2)^2)^2$$

$$f'(1) = 12 \times 1 \times 3 \times 10^2 = 3600 \quad \text{بنابراین}$$

۱۱۸۳- گزینه ۳ توجه کنید که $(g^n)' = ng'g^{n-1}$ ، بنابراین

$$f'(x) = 3\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} + 1\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + x\right)^2$$

در نتیجه $f'(1) = 9$.

۱۱۸۴- گزینه ۴ توجه کنید که $(\sqrt[3]{g})' = \frac{g'}{3\sqrt[3]{g^2}}$ ، بنابراین

$$f'(x) = \frac{2x-3}{3\sqrt[3]{(x^2-3x+1)^2}} \Rightarrow f'(1) = \frac{-1}{3(1)} = -\frac{1}{3}$$

۱۱۸۵- گزینه ۲ بنابر قاعده ضرب،

$$f'(x) = (2x+3)\sqrt{x^2+3} + (x^2+3x) \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}$$

بنابراین $f'(1) = 5 \times 2 + 4 \times \frac{1}{2} = 12$

۱۱۸۶- گزینه ۱ اگر از دو طرف تساوی $f(x) = g(x^2 + 2x)$ مشتق

بگیریم، به دست می آید $f'(x) = (2x+2)g'(x^2+2x)$. اگر در این تساوی

قرار دهیم $x = 3$ ، به دست می آید $f'(3) = 8g'(15)$ ، پس $g'(15) = 9$.

۱۱۸۷- گزینه ۳ ابتدا مشتق تابع را به دست می آوریم:

$$f'(x) = 2mx + f \tan 2x(1 + \tan^2 2x)$$

بنابراین

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2m\left(\frac{\pi}{8}\right) + f \tan \frac{\pi}{4} \left(1 + \tan^2 \frac{\pi}{4}\right) = \frac{m\pi}{4} + 8 = 8 + 2\pi \Rightarrow m = 8$$

$$2f'(x)f(x) = \frac{(2)(x+2)-(1)(2x+1)}{(x+2)^2} \Rightarrow 2f'(1)f(1) = \frac{6-3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$f(1)f'(1) = \frac{1}{6} \quad \text{بنابراین}$$

۱۲۰۲- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{(2ax)\sqrt{3x+1} - \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}}{3x+1} (ax^2+a)$$

بنابراین

$$f'(1) = \frac{21}{8} \Rightarrow \frac{(2a)(2) - \frac{3}{2\sqrt{3}}(a+a)}{4} = \frac{21}{8} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{21}{8} \Rightarrow a = \frac{21}{5}$$

۱۲۰۳- گزینه ۴ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به دست می‌آید

$$\left(\frac{1}{3x-1}\right)' f'\left(\frac{1}{3x-1}\right) = 6x \Rightarrow \frac{-3}{(3x-1)^2} f'\left(\frac{1}{3x-1}\right) = 6x$$

$$-\frac{3}{4} f'\left(\frac{1}{4}\right) = 6 \quad \text{اگر در این تساوی قرار دهیم } x=1, \text{ به دست می‌آید}$$

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = -8 \quad \text{پس}$$

۱۲۰۴- گزینه ۱ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$ از طرف دیگر، اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به دست می‌آید

$$-f'(1-x) = 6x+1 \xrightarrow{x=1} -f'(2) = -5 \Rightarrow f'(2) = 5$$

بنابراین مقدار حد مورد نظر برابر ۵ است.

۱۲۰۵- گزینه ۴ اگر از دو طرف تساوی داده شده طبق قاعده زنجیری

مشتق بگیریم، به دست می‌آید $4xf'(2x^2-4) = 3f'(x-3)+5$ اگر در

این تساوی قرار دهیم $x=1$ ، به دست می‌آید

$$4f'(-2) = 3f'(-2)+5 \Rightarrow f'(-2) = 5$$

۱۲۰۶- گزینه ۲ طبق قاعده مشتق تابع مرکب:

$$y = f(x + \sqrt{1+x^2}) \Rightarrow y' = (x + \sqrt{1+x^2})' f'(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$= \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \times \frac{-1}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{-1}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$$

۱۲۰۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f'(x) = (\tan 4x)' (1 + \tan^2(\tan 4x))$$

$$= 4(1 + \tan^2 4x)(1 + \tan^2(\tan 4x))$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4(1 + \tan^2 \pi)(1 + \tan^2(\tan \pi)) = 4(1+0)(1+0) = 4 \quad \text{بنابراین}$$

۱۲۰۸- گزینه ۳ توجه کنید که $(g^n)' = ng'g^{n-1}$ ، بنابراین

$$f'(x) = 3(\cos x + 2 \sin x)(\sin x - 2 \cos x)^2$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{9\sqrt{2}}{4} \quad \text{در نتیجه}$$

۱۲۰۹- گزینه ۴ توجه کنید که $(g^n)' = ng'g^{n-1}$ ، بنابراین

$$f'(x) = 3(\cos(4x^2))' \cos^2(4x^2) = 3(8x(-\sin(4x^2))) \cos^2(4x^2)$$

$$= -24x \sin(4x^2) \cos^2(4x^2)$$

۱۱۹۶- گزینه ۱ ابتدا از دو طرف تساوی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$g(x^2) = \frac{x}{f(x^2)} \Rightarrow 2x^2 g'(x^2) = \frac{f(x^2) - 2x^2 f'(x^2)}{f^2(x^2)}$$

$$g'(x^2) = \frac{f(x^2) - 2x^2 f'(x^2)}{2x^2 f^2(x^2)}$$

اکنون در تساوی فوق قرار می‌دهیم $x=2$ و نتیجه می‌شود

$$g'(\lambda) = \frac{f(4) - 8f'(4)}{12f^2(4)} = \frac{1-8 \times \frac{1}{3}}{12 \times 1} = -1$$

۱۱۹۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f'(x) = (\pi \sin 2x)'(-\sin(\pi \sin 2x)) = -2\pi(\cos 2x) \sin(\pi \sin 2x)$$

بنابراین

$$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = -2\pi \cos \frac{\pi}{6} \sin\left(\pi \sin \frac{\pi}{6}\right) = -2\pi \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi\sqrt{3}$$

۱۱۹۸- گزینه ۲ با استفاده از اتحادهای $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{و} \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

شکل زیر ساده می‌شود:

$$f(x) = \frac{(1 - \sin 2x)(\sin x + \cos x)}{\cos 2x}$$

$$= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)}$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x)^2 (\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)}$$

$$= \cos x - \sin x \quad \left(x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right)$$

بنابراین

$$f'(x) = -\sin x - \cos x$$

$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

۱۱۹۹- گزینه ۲ مشتق تابع به صورت زیر است

$$y' = 2a \cos 2x - 4 \sin 2x$$

بنابراین

$$y^2 = a^2 \sin^2 2x + 4 \cos^2 2x + 4a \sin 2x \cos 2x$$

$$4y^2 = 4a^2 \sin^2 2x + 16 \cos^2 2x + 16a \sin 2x \cos 2x$$

$$y'^2 = 4a^2 \cos^2 2x + 16 \sin^2 2x - 16a \sin 2x \cos 2x$$

$$4y^2 + y'^2 = 4a^2(\sin^2 2x + \cos^2 2x) + 16(\cos^2 2x + \sin^2 2x)$$

$$= 4a^2 + 16$$

$$a^2 = \frac{1}{2} \quad \text{پس } 4a^2 + 16 = 18 \quad \text{و در نتیجه}$$

۱۲۰۰- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = 12 \tan^2 4x (1 + \tan^2 4x)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 12 \tan^2 \frac{\pi}{3} (1 + \tan^2 \frac{\pi}{3}) = 12 \times 3 (1+3) = 144 \quad \text{بنابراین}$$

۱۲۰۱- گزینه ۴ توجه کنید که $f^2(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ اگر از دو طرف این

تساوی مشتق بگیریم و قرار دهیم $x=1$ ، به دست می‌آید

۱۲۱۵- گزینه ۳ اگر از دو طرف تساوی $f\left(\frac{2x-3}{x+2}\right)=ax^2+x+4$

طبق قاعده زنجیری مشتق بگیریم، به دست می آید:

$$\frac{2}{(x+2)^2} f'\left(\frac{2x-3}{x+2}\right) = 2ax+1$$

اگر در تساوی بالا قرار دهیم $x=-1$ ، مقدار $f'(-5)$ به دست می آید.

$$2f'(-5) = -2a+1 \Rightarrow f'(-5) = \frac{1-2a}{2}$$

پس

$$\frac{1-2a}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -1$$

۱۲۱۶- گزینه ۳ اگر از دو طرف تساوی $g(x)=f(x^2-f(x))$ مشتق

بگیریم، به دست می آید:

$$g'(x) = (2x-f'(x))f'(x^2-f(x))$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=1$ ، به دست می آید:

$$g'(1) = (2-f'(1))f'(1-f(1)) = (2-3)f'(1) = -f'(1) = -3$$

۱۲۱۷- گزینه ۴ توجه کنید که $(\sqrt{g})' = \frac{g'}{2\sqrt{g}}$ ، بنابراین

$$f'(x) = \frac{3 \cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{-3}{2\sqrt{2}} = -3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس $a = -\frac{5}{4}$

۱۲۱۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f(x) = x\left(\frac{1}{x} \sin \lambda x\right) = \sin \lambda x$$

بنابراین $f'(x) = \frac{1}{x} \sin \lambda x + \frac{x}{x} (\lambda \cos \lambda x)$

$$f'\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{16}} \times 1 + 0 = \frac{16}{\pi}$$

۱۲۱۹- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f'(x) = 2(4 - \sin 4x) \cos(\cos 4x) \sin(\cos 4x)$$

$$= -8 \sin 4x \cos(\cos 4x) \sin(\cos 4x)$$

بنابراین $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$

۱۲۲۰- گزینه ۳ توجه کنید که مقدار عبارت $\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ به ازای $x=1$

برابر صفر است. پس کافی است از این عبارت مشتق بگیریم و مقدار مشتق آن

در $x=1$ را در مقدار عبارت $\sin\left(\frac{\pi\sqrt{x}}{x+3}\right)$ در این نقطه ضرب کنیم:

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) \Rightarrow y' = -\frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) \Rightarrow y'(1) = -\frac{\pi}{3}$$

$$y = \sin\left(\frac{\pi\sqrt{x}}{x+3}\right) \Rightarrow y(1) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین $f'(1) = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

۱۲۱۰- گزینه ۱ توجه کنید که $(\sqrt{g})' = \frac{g'}{2\sqrt{g}}$ ، بنابراین

$$f'(x) = \frac{(\sin \sqrt{x})'}{2\sqrt{\sin \sqrt{x}}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x}}{2\sqrt{\sin \sqrt{x}}}$$

بنابراین $f'\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = 0$

۱۲۱۱- گزینه ۴ اگر از دو طرف تساوی $g(x)=f^2(x^3)$ مشتق

بگیریم، به دست می آید

$$g'(x) = 2(f(x^3))'f'(x^3) = 2(3x^2)f'(x^3)f'(x^3) = 6x^2f'(x^3)f'(x^3)$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=2$ ، به دست می آید

$$g'(2) = 6 \times 4 \times f'(8)f'(8) = 6 \times 4 \times \frac{1}{6} = 4$$

۱۲۱۲- گزینه ۲ توجه کنید که چون $g(-1)=2$ ، پس $f(2)=f(g(-1))$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(g(x))-f(2)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(g(x))-f(g(-1))}{x-(-1)}$$

$$= (f \circ g)'(-1) = g'(-1)f'(g(-1)) = 5 \times f'(2) = 5 \times (-3) = -15$$

۱۲۱۳- گزینه ۱ توجه کنید که $g(4) = \frac{2+1}{3} = 1$ و

$$(f \circ g)'(4) = g'(4)f'(g(4)) = g'(4)f'(1)$$

از طرف دیگر

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2+1)-2x(x^2+x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}, \quad f'(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \sqrt{x^2-7} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-7}} (\sqrt{x}+1)}{x^2-7}$$

$$g'(4) = \frac{\frac{1}{2} \times 3 - \frac{8}{2} \times 3}{9} = -\frac{13}{36}$$

بنابراین $(f \circ g)'(4) = \frac{1}{2} \times -\frac{13}{36} = -\frac{13}{72}$

۱۲۱۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x+k}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2-k}{(x+2)^2}$$

بنابراین

$$g(x) = (f \circ f)(x) \Rightarrow g'(x) = f'(x)f'(f(x))$$

$$g'(0) = f'(0)f'(f(0)) = f'(0)f'\left(\frac{k}{2}\right)$$

در نتیجه

$$\frac{2-k}{4} \times \frac{2-k}{\left(\frac{k}{2}+2\right)^2} = 4 \Rightarrow (2-k)^2 = 16\left(\frac{k}{2}+2\right)^2$$

$$\begin{cases} 2-k = 4\left(\frac{k}{2}+2\right) \\ 2-k = -4\left(\frac{k}{2}+2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = -10 \end{cases}$$

پس حاصل ضرب مقادیر ممکن برای k برابر ۲۰ است.

۱۲۲۵- گزینه ۲ توجه کنید که $f(1)=2$ و

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 + x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 4x = 4$$

پس تابع در $x=1$ پیوستگی چپ ندارد و $f'_-(1)$ وجود ندارد، از طرف دیگر

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & x > 1 \\ 4 & x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2 + 1) = 4 \text{ بنابراین}$$

۱۲۲۶- گزینه ۳ توجه کنید که تابع f در $x=2$ پیوستگی چپ ندارد،

پس مشتق چپ هم ندارد. از طرف دیگر

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2[x] - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)(x+2)}{x-2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2(x+2) = 8$$

$$2 < x < 3 \Rightarrow f(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = 8$$

$$1 < x < 2 \Rightarrow f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = 4$$

۱۲۲۷- گزینه ۴ اگر $g(x) = (x+1)(x-2)^2$ ، آن‌گاه $g(2) = g'(2) = 0$.

بنابراین تابع $f(x) = |g(x)|$ در نقطه $x=2$ مشتق پذیر است.

۱۲۲۸- گزینه ۲ چند جمله‌ای داخل قدرمطلق یعنی $x^2 + 4x + m^2$ باید

دو ریشه متمایز داشته باشد. پس

$$\Delta = 16 - 4m^2 > 0 \Rightarrow m^2 < 4 \Rightarrow -2 < m < 2$$

۱۲۲۹- گزینه ۲ تابع را به صورت $f(x) = (x-2)|(x-2)(x-3)|$

می‌نویسیم. تابع $y = |(x-2)(x-3)|$ در نقاط $x=2$ و $x=3$ مشتق ندارد،

ولی عامل صفرکننده $(x-2)$ در پشت قدرمطلق باعث می‌شود که تابع f در

نقطه $x=2$ مشتق پذیر باشد. پس تابع f فقط در نقطه $x=3$ مشتق ندارد.

۱۲۳۰- گزینه ۱ عبارت داخل قدرمطلق $(x^2 - 4 = (x-2)(x+2))$ دو

ریشه ساده ۲ و -۲ دارد. برای آنکه تابع مورد نظر مشتق پذیر باشد، باید

$$x^2 + ax + b \text{ به ازای } x = -2 \text{ و } x = 2 \text{ برابر صفر شود:}$$

$$\begin{cases} x = 2 \Rightarrow 2^2 + a \cdot 2 + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -4 \\ x = -2 \Rightarrow (-2)^2 + a(-2) + b = 0 \Rightarrow -2a + b = -4 \end{cases}$$

پس $a = 0$ و $b = -4$ ، بنابراین $3a + b = -4$.

۱۲۳۱- گزینه ۳ توجه کنید که $f'(x) = \begin{cases} 4x-3 & x < 3 \\ 9 & x > 3 \end{cases}$ چون

تابع f روی بازه $(-\infty, 3]$ پیوسته و روی بازه $(3, +\infty)$ مشتق پذیر است،

همین‌طور روی بازه $[3, +\infty)$ پیوسته و روی بازه $(3, +\infty)$ مشتق پذیر است و

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (4x - 3) = 9 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 9 = 9 \quad (2)$$

پس مقدار حد (۱) برابر $f'_-(3)$ و مقدار حد (۲) برابر $f'_+(3)$ است، و چون

این دو مقدار برابرند، پس $f'(3) = 9$.

۱۲۲۱- گزینه ۴ توابع گزینه‌های (۱) و (۳) در نقطه $x=1$ پیوسته

نیستند، پس مشتق پذیر نیستند.

در گزینه (۲)، ابتدا توجه کنید که تابع در $x=1$ پیوسته است:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

$$\text{بنابراین} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ x^3 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ 3x^2 & x < 1 \end{cases}$$

همچنین $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2) = 3$ و $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x) = 2$ چون

$$f'_-(1) \neq f'_+(1), \text{ پس این تابع هم در نقطه } x=1 \text{ مشتق ندارد.}$$

در گزینه (۴) تابع در نقطه $x=1$ پیوسته است و

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & x \geq 1 \\ 2x^3 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 6x & x > 1 \\ 6x^2 & x < 1 \end{cases}$$

همچنین $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (6x^2) = 6$ و $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (6x) = 6$ چون

$$f'_-(1) = f'_+(1), \text{ پس تابع گزینه (۴) در نقطه } x=1 \text{ مشتق پذیر است.}$$

۱۲۲۲- گزینه ۴ توجه کنید $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'_+(-1)$

چون تابع f در نقطه $x=-1$ پیوستگی راست ندارد، پس مشتق راست هم

ندارد. بنابراین حد فوق وجود ندارد. دقت کنید که می‌توانیم بدون استفاده از

مفهوم مشتق هم نشان دهیم این حد وجود ندارد:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2(-1+h)^2 - 3}{h} = -\infty$$

۱۲۲۳- گزینه ۳ چون تابع در نقطه $x=-1$ مشتق پذیر است، پس در

این نقطه پیوسته است. یعنی

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$$

$$-a + 2 = -a + 2 = 1 - b \Rightarrow a - b = 1$$

$$\text{از طرف دیگر} \quad f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 & x > -1 \\ 2x + b & x < -1 \end{cases} \text{، بنابراین}$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (3ax^2) = 3a, \quad f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (2x + b) = -2 + b$$

$$f'_+(-1) = f'_-(-1) \Rightarrow 3a = b - 2$$

$$\text{از حل دستگاه معادلات} \quad \begin{cases} a - b = 1 \\ 3a - b = -2 \end{cases} \text{ نتیجه می‌شود} \quad \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

و در نتیجه $a + b = -4$.

۱۲۲۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که تابع در نقطه $x=1$ پیوسته و

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \text{ مشتق پذیر است:}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x > 1 \\ 2x + 1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2) = 3 \\ f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 1) = 3 \end{cases}$$

بنابراین $f'(1) = 3$ از طرف دیگر

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = f'(1) \times \frac{1}{2} = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

۱۲۳۲- گزینه ۳ تابع در نقطه $x=1$ مشتق چپ و مشتق راست نابرابر دارد:

$$x \geq 1 \Rightarrow f(x) = x(x^2 - x) = x^3 - x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x \Rightarrow f'_+(1) = 3 - 2 = 1$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) = x(x - x^2) = x^2 - x^3$$

$$f'(x) = 2x - 3x^2 \Rightarrow f'_-(1) = 2 - 3 = -1$$

ولی در نقطه $x=0$ مشتق پذیر است:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x^2 - x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x^2 - x| = 0$$

توجه کنید که تابع $y = |g(x)|$ در ریشه‌های ساده $g(x) = 0$ مشتق ندارد.

پس $y = |x^2 - x|$ در $x=0$ و $x=1$ مشتق ندارد ولی تابع $y = x|x^2 - x|$

به دلیل وجود عامل صفرکننده x که در قدم‌مطلق ضرب شده است در $x=0$

مشتق پذیر است.

۱۲۳۸- گزینه ۱ توجه کنید که ضابطه تابع به صورت زیر است:

$$f(x) = |x^3 - x^2| = |x^2(x-1)| = x^2|x-1|$$

بنابراین تابع فقط در $x=1$ مشتق پذیر نیست، زیرا عبارت داخل قدم‌مطلق فقط

یک ریشه ساده $x=1$ دارد.

۱۲۳۹- گزینه ۱ برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد، باید

چند جمله‌ای $y = x^2 - 2x + m$ ریشه نداشته باشد یا ریشه مضاعف داشته

باشد. زیرا اگر این تابع دو ریشه متمایز داشته باشد، آن‌گاه تابع f در این دو

ریشه مشتق پذیر نیست. بنابراین

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 4 - 4m \leq 0 \Rightarrow m \geq 1$$

۱۲۴۰- گزینه ۲ برای اینکه تابع f در نقطه $x=1$ مشتق پذیر باشد، باید

دو عامل $x-1$ در آن وجود داشته باشد. یعنی باید

$$x^2 + ax + b = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow a = -2$$

۱۲۴۱- گزینه ۱ تابع f در $x = \frac{\pi}{4}$ مشتق پذیر است، پس در این نقطه

پیوسته است.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} a \sin x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} (b \cos 2x + b \cos x + 1) \Rightarrow a = -b + 1$$

از طرف دیگر باید مشتق چپ و مشتق راست تابع f در $x = \frac{\pi}{4}$ برابر باشند.

$$x > \frac{\pi}{4} \Rightarrow f'(x) = a \cos x \Rightarrow f'_+\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow f'(x) = -2b \sin 2x - b \sin x \Rightarrow f'_-\left(\frac{\pi}{4}\right) = -b$$

پس $b=0$ و چون $a = -b + 1$ ، در نتیجه $a=1$.

۱۲۳۲- گزینه ۱ توجه کنید که $f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases}$ بنابراین

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x+2) = 4+2=6$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x^2) = 3 \times 4 = 12$$

در نتیجه $f'_+(2) - f'_-(2) = 6 - 12 = -6$.

۱۲۳۳- گزینه ۴ توجه کنید که $f(2) = 3$ و

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 1) = 5, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 7$$

پس تابع f در نقطه $x=2$ نه پیوستگی چپ دارد و نه پیوستگی راست. بنابراین

مشتق چپ و مشتق راست تابع در این نقطه وجود ندارند.

۱۲۳۴- گزینه ۴ چون تابع f در نقطه $x=2$ مشتق پذیر است، پس در

این نقطه پیوسته است. یعنی

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (cx^2 + c) \Rightarrow b = 8 + 2a = 5c \quad (I)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + a & x > 2 \\ 2cx & x < 2 \end{cases} \quad \text{از طرف دیگر}$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x^2 + a) = 12 + a$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2cx) = 4c$$

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow 12 + a = 4c \Rightarrow a = 4c - 12$$

پس

$$\xrightarrow{(I)} 8 + 2(4c - 12) = 5c \Rightarrow c = \frac{16}{3}$$

بنابراین $f(2) = 5c = \frac{80}{3}$.

۱۲۳۵- گزینه ۳ توجه کنید که $f'(x) = \begin{cases} 2x + 4a & x > 2 \\ 3ax^2 + 2 & x < 2 \end{cases}$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 4a) = 4 + 4a$$

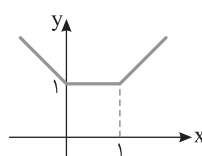
پس

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3ax^2 + 2) = 12a + 2$$

چون تابع در $x=2$ مشتق پذیر است، پس

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow 4 + 4a = 12a + 2 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

بنابراین $f'(4a) = f'(1) = 3a + 2 = \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$.



۱۲۳۶- گزینه ۴ نمودار تابع به شکل

مقابل است و در نقاط $x=0$ و $x=1$ نقطه

گوشه‌ای دارد. پس $D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$. توجه

کنید که $x=0$ و $x=1$ ریشه‌های ساده

عبارت‌های داخل قدم‌مطلق هستند.

۱۲۴۷- گزینه ۳ چون تابع f در نقطه $x=3$ مشتق پذیر نیست، پس

مقدار $x^2+ax-12$ به ازای $x=3$ صفر است:

$$9+3a-12=0 \Rightarrow a=1$$

بنابراین $f(x)=|x^2+x-12|$ در نزدیکی نقطه -2 علامت عبارت

x^2+x-12 منفی است، بنابراین

$$f(x)=-(x^2+x-12) \Rightarrow f'(x)=-2x-1 \Rightarrow f'(-2)=3$$

۱۲۴۸- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که تابع $y=x^3+ax^2-ax$ حداقل

یک ریشه $x=0$ دارد:

$$y=x(x^2+ax-a)=xg(x)$$

برای اینکه تابع f در سه نقطه مشتق نداشته باشد، باید تابع g دو ریشه غیر صفر

داشته باشد. پس $a < -4$ یا $a > 0$ و $a \neq 0 \Rightarrow a > 0$ و $a^2+4a > 0$

۱۲۴۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که تابع $y=x^3+ax^2-ax$ حداقل

یک ریشه $x=0$ دارد: $y=x(x^2+ax-a)=xg(x)$ برای اینکه تابع f

فقط در یک نقطه مشتق نداشته باشد، باید تابع g ریشه نداشته باشد یا ریشه

مضاعف داشته باشد. پس

$$\Delta=a^2+4a \leq 0 \Rightarrow -4 \leq a < 0$$

۱۲۵۰- گزینه ۲ توجه کنید که عبارت $1-\sin x$ همواره نامنفی است. پس

$$f(x)=|\sin x||1-\sin x|=(1-\sin x)|\sin x|$$

فقط در $x=\pi$ عبارت داخل قدرمطلق یعنی $\sin x$ برابر صفر است، پس تابع

در این نقطه مشتق پذیر نیست.

۱۲۵۱- گزینه ۱ شیب خط مماس برابر $f'(2)$ است.

$$f'(x)=1+\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(2)=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

خط مورد نظر از نقطه $(2, f(2))$ می‌گذرد. پس معادله خطی را می‌خواهیم که

از نقطه $(2, \frac{3}{4})$ عبور کرده و شیب آن برابر $\frac{5}{4}$ باشد، یعنی

$$y-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}(x-2) \Rightarrow 5x-4y-4=0$$

۱۲۵۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=2 \Rightarrow \sqrt{x-1}=2 \Rightarrow x=5$$

بنابراین معادله خط مماس در نقطه $(5, 2)$ را می‌خواهیم:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'(5)=\frac{1}{4}$$

بنابراین شیب خط مماس مورد نظر برابر $\frac{1}{4}$ است و معادله آن به صورت زیر است:

$$y-2=\frac{1}{4}(x-5) \Rightarrow 4y-x=3$$

۱۲۵۳- گزینه ۲ در نقاطی که خط مماس بر نمودار موازی محور

طول‌هاست، مقدار مشتق تابع برابر صفر است. بنابراین

$$f'(x)=3x^2-\frac{1}{x^2}=0 \Rightarrow x^4=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$

پس معادله فوق دو جواب دارد و در دو نقطه، خط مماس بر نمودار تابع موازی

محور طول‌هاست.

۱۲۴۲- گزینه ۳ اولاً تابع در $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته است، زیرا

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x)=\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)=0$$

ثانیاً در یک همسایگی راست نقطه $\frac{\pi}{2}$ مقدار $[\cos x]$ برابر -1 است و تابع f

با تابع $y=-\sin 2x$ برابر است. پس

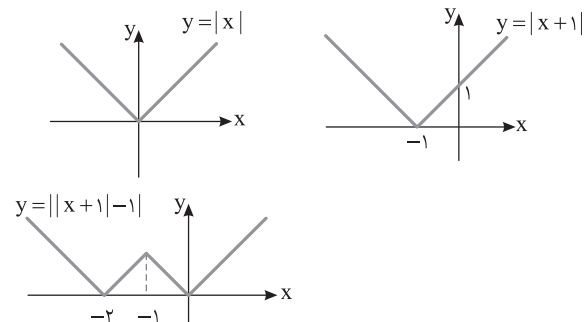
$$f'_+\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} (-\sin 2x)'=\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} -2\cos 2x=2$$

همچنین در یک همسایگی چپ نقطه $\frac{\pi}{2}$ مقدار $[\cos x]$ برابر صفر است و تابع f

با تابع ثابت صفر برابر است. پس $f'_-\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. بنابراین تابع f در $x=\frac{\pi}{2}$ مشتق

چپ و راست نابرابر دارد.

۱۲۴۳- گزینه ۴ نمودار تابع f به صورت زیر رسم می‌شود:



در نقاط $x=0$ ، $x=-1$ و $x=-2$ نمودار تابع نقطه گوشه‌ای دارد و تابع در

این نقاط مشتق ندارد. پس $D_{f'}=\mathbb{R}-\{0, -1, -2\}$.

۱۲۴۴- گزینه ۳ توجه کنید که $x=0$ و $x=1$ ریشه‌های ساده

عبارت‌های داخل قدرمطلق هستند. بنابراین تابع f در این نقطه‌ها مشتق پذیر

نیست. در $x=-1$ تابع f تعریف نمی‌شود، بنابراین تابع f' هم تعریف

نمی‌شود. پس $D_{f'}=\mathbb{R}-\{0, \pm 1\}$. بنابراین سه عدد صحیح در دامنه تابع

f' قرار ندارند.

۱۲۴۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که تابع f در $x=-1$ ناپیوسته است و

در نتیجه مشتق پذیر نیست. در $x=1$ تابع پیوسته است، مشتق پذیری تابع در

این نقطه را بررسی می‌کنیم:

$$|x|<1 \Rightarrow f'(x)=2x, \quad |x|>1 \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{x^2}$$

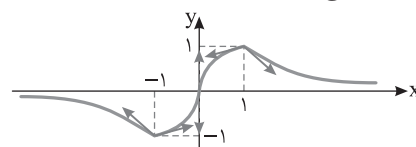
$$f'_-(1)=\lim_{x \rightarrow 1^-} 2x=2, \quad f'_+(1)=\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x^2}=2$$

بنابراین تابع در $x=1$ مشتق پذیر است و در نتیجه $D_{f'}=\mathbb{R}-\{-1\}$.

۱۲۴۶- گزینه ۴ نمودار تابع به صورت زیر است. تابع در $x=1$ و

$x=-1$ نقطه گوشه‌ای دارد و در $x=0$ مماس موازی محور عرض‌ها دارد.

پس در این سه نقطه تابع مشتق ندارد و در نتیجه $D_{f'}=\mathbb{R}-\{0, \pm 1\}$.



۱۲۶۱- گزینه ۲ وقتی خط مماس بر نمودار در یک نقطه موازی محور

طول‌هاست، مقدار مشتق تابع در آن نقطه برابر صفر است. پس

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x (1 + \sin x) - \cos x \sin x}{(1 + \sin x)^2}$$

$$= \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$$

بنابراین

پس در نقطه $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})$ خط مماس بر نمودار تابع موازی محور طول‌هاست.

۱۲۶۲- گزینه ۴ با توجه به شکل معلوم می‌شود که $f'(2) = \frac{3}{4}$ و $f(2) = \frac{3}{4}$

برابر است با شیب خطی که از نقاط $(0, 3)$ و $(4, 0)$ می‌گذرد، پس

$$f'(2) = \frac{3-0}{0-4} = -\frac{3}{4}$$

به طول ۲ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$g(x) = 4f^2(x) + x \Rightarrow g'(x) = 8f'(x)f(x) + 1 \Rightarrow g'(2) = 8f'(2)f(2) + 1$$

$$= 8 \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + 1 = -8$$

همچنین $11 = 4f^2(2) + 2 = 4(\frac{3}{4})^2 + 2 = 11$ بنابراین می‌خواهیم معادله

خطی با شیب -۸ را بنویسیم که از نقطه $(2, 11)$ می‌گذرد:

$$y - 11 = -8(x - 2) \Rightarrow y = -8x + 27$$

۱۲۶۳- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $f(1) = 3$ و $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$

بنابراین $f'(1) = -1$ و در نتیجه معادله خط مماس در نقطه $(1, 3)$ به صورت

زیر است:

$$y - 3 = -(x - 1) \Rightarrow y = -x + 4$$

این خط محورهای مختصات را در نقاط $A(0, 4)$ و $B(4, 0)$ قطع می‌کند. بنابراین مساحت مثلث OAB برابر است با $\frac{4 \times 4}{2} = 8$.

۱۲۶۴- گزینه ۱ چون A نقطه‌ای به طول صفر روی سهمی به معادله

$$y = -x^2 + bx + 2$$

نقطه‌های $(0, 2)$ و $(3, 0)$ گذشته است، پس شیب آن برابر است با

$$\frac{2-0}{0-3} = -\frac{2}{3}$$

مقدار y' به ازای $x = 0$ برابر با شیب خط d است:

$$y = -x^2 + bx + 2 \Rightarrow y' = -2x + b \xrightarrow{x=0} b = -\frac{2}{3}$$

۱۲۶۵- گزینه ۳ باید شیب خط بتواند با مشتق تابع برابر شود. بنابراین

$$y' = \frac{2}{3} (1 + \tan^2(\frac{x}{3})) = a \Rightarrow 1 + \tan^2 \frac{x}{3} = \frac{3a}{2} \Rightarrow \tan^2 \frac{x}{3} = \frac{3a}{2} - 1$$

$$\tan^2 \frac{x}{3} \geq 0 \Rightarrow \frac{3a}{2} \geq 1 \Rightarrow 3a \geq 2 \Rightarrow a \geq \frac{2}{3}$$

۱۲۵۴- گزینه ۴ شیب خط $y = 9x - 1$ برابر ۹ است، پس مشتق تابع f

در نقطه مورد نظر باید برابر ۹ باشد:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 15 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x = 9$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ (غ.ق.)}, x = 3$$

مقدار تابع در نقطه‌ای با طول مثبت مد نظر است، پس

$$f(3) = 27 - 27 + 15 = 15$$

۱۲۵۵- گزینه ۴ در نقطه‌ای که نمودار تابع بر محور طول‌ها مماس است،

مقدار تابع و مقدار مشتق آن صفر است. بنابراین:

$$f'(x) = 3x^2 + m = 0 \Rightarrow m = -3x^2$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + (-3x^2)x - 54 = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 = 54 \Rightarrow x = -3$$

بنابراین $m = -27$.

۱۲۵۶- گزینه ۲ شیب خط $y = -x + b$ برابر -۱ است، بنابراین مقدار

مشتق تابع f به ازای $x = 2$ برابر با -۱ است:

$$f'(x) = \frac{a(x+1) - (ax+3)}{(x+1)^2} = \frac{a-3}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{a-3}{(2+1)^2} = -1 \Rightarrow a = -6$$

۱۲۵۷- گزینه ۱ شیب خط $y = \frac{2}{9}x + 1$ برابر $\frac{2}{9}$ است. بنابراین مقدار

مشتق تابع f به ازای $x = 1$ برابر $\frac{2}{9}$ است.

$$f'(x) = \frac{(2x-m)(x+2) - (x^2 - mx + 1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(1) = \frac{(2-m)(3) - (1-m)}{(1+2)^2} = \frac{2(2-m)}{9}$$

$$\frac{2(2-m)}{9} = \frac{2}{9} \Rightarrow 2-m = 1 \Rightarrow m = 1$$

بنابراین

۱۲۵۸- گزینه ۳ ابتدا نقطه‌ای با طول منفی روی نمودار تابع

$$f(x) = x^3 - x^2$$

پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه

برابر شیب خط $y = x + k$ یعنی ۱ باشد:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = 1 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (غ.ق.)} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

بنابراین خط $y = x + k$ در نقطه $A(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{27})$ بر نمودار تابع مماس می‌شود

$$-\frac{4}{27} = -\frac{1}{3} + k \Rightarrow k = \frac{5}{27}$$

و نقطه A روی این خط قرار دارد. یعنی

۱۲۵۹- گزینه ۳ باید شیب خط یعنی a بتواند با مشتق تابع برابر شود.

بنابراین $f'(x) = 3x^2 - 1 = a$ ، واضح است که $-1 \leq 3x^2 - 1$ بنابراین $a \geq -1$.

۱۲۶۰- گزینه ۳ اگر نمودار تابع $y = -x^2$ را k واحد به بالا انتقال دهیم، به

نمودار تابع $f(x) = -x^2 + k$ تبدیل می‌شود ($k > 0$). می‌خواهیم خط

$y = 2x + 3$ بر نمودار تابع f مماس شود. ابتدا نقطه‌ای از نمودار تابع f را پیدا

می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه برابر شیب این خط یعنی ۲ باشد:

$$f'(x) = -2x = 2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 1$$

پس نقطه $A(-1, 1)$ نقطه مورد نظر است که باید روی نمودار تابع

$$-1 + k = 1 \Rightarrow k = 2$$

باشد. پس $f(x) = -x^2 + k$

بنابراین

$$\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-4} = \frac{2\alpha-\alpha^2-1}{\alpha-4} = \frac{2-2\alpha}{\alpha-4}$$

$$2\alpha-\alpha^2-1=2\alpha-8-2\alpha+8\alpha \Rightarrow \alpha^2-8\alpha+7=0$$

$$(\alpha-1)(\alpha-7)=0 \Rightarrow \alpha=1, \alpha=7$$

اگر $\alpha=1$ ، آن‌گاه $f'(\alpha)=0$ و اگر $\alpha=7$ ، آن‌گاه $f'(\alpha)=-12$. بنابراین مجموع شیب‌های خطوط مماس برابر -12 است.

۱۲۷۰- گزینه ۳ راه حل اول اگر مختصات نقطه تماس را $(\alpha, \frac{\Delta\alpha+1}{\alpha-1})$

در نظر بگیریم، معادله خط مماس به صورت زیر است:

$$y - \frac{\Delta\alpha+1}{\alpha-1} = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

چون $f'(\alpha) = \frac{-6}{(\alpha-1)^2}$ ، پس $y - \frac{\Delta\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{-6}{(\alpha-1)^2}(x - \alpha)$

نقطه $(0, 2)$ در معادله فوق صدق می‌کند. پس

$$2 - \frac{\Delta\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{-6}{(\alpha-1)^2}(0 - \alpha) \Rightarrow \frac{2(\alpha-1) - (\Delta\alpha+1)}{\alpha-1} = \frac{-6(-\alpha)}{(\alpha-1)^2}$$

$$\frac{2\alpha-2-\Delta\alpha-1}{\alpha-1} = \frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} \Rightarrow -3\alpha-3 = \frac{6\alpha}{\alpha-1} \Rightarrow -3\alpha^2-6\alpha+3=0$$

مقادیر α که از معادله فوق حاصل می‌شوند، طول نقاط تماس هستند که مجموع آن‌ها -2 است.

راه حل دوم فرض کنید این خط‌ها در نقطه $B(\alpha, f(\alpha))$ بر نمودار تابع مماس شوند. در این صورت شیب این خط‌ها برابر $f'(\alpha)$ خواهد بود. بنابراین

$$f(x) = \frac{\Delta x + 1}{x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-6}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(\alpha) = \frac{-6}{(\alpha-1)^2}$$

از طرف دیگر، شیب این خط‌ها که از دو نقطه $A(0, 2)$ و $B(\alpha, f(\alpha))$

می‌گذرند برابر است با $\frac{f(\alpha)-2}{\alpha-0}$. بنابراین

$$\frac{f(\alpha)-2}{\alpha} = \frac{-6}{(\alpha-1)^2} \Rightarrow \frac{\frac{\Delta\alpha+1}{\alpha-1}-2}{\alpha} = \frac{-6}{(\alpha-1)^2}$$

$$\frac{3\alpha+3}{\alpha(\alpha-1)} = \frac{-6}{(\alpha-1)^2} \Rightarrow 3(\alpha+1)(\alpha-1) = -6\alpha \Rightarrow \alpha^2+2\alpha-1=0$$

مقادیر α که از معادله فوق به دست می‌آیند، طول نقاط تماس هستند که مجموع آن‌ها -2 است.

۱۲۷۱- گزینه ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[-1, 2]$ برابر است با

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{0 - (-\frac{3}{2})}{3} = \frac{1}{2}$$

۱۲۷۲- گزینه ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[1, a]$ برابر

$$\frac{f(a)-f(1)}{a-1} = \frac{\frac{1}{a}-1}{a-1} = \frac{1-a}{a(a-1)} = -\frac{1}{a}$$

$$-\frac{1}{a} = -\frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

۱۲۶۶- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 3x + 1 \end{cases} \Rightarrow y = -2$$

$$f(-1) = -2 \Rightarrow -a + b = -2 \quad (1)$$

بنابراین

از طرف دیگر، شیب خط $y = 3x + 1$ برابر 3 است و چون نمودار تابع f در نقطه $x = -1$ بر این خط مماس است، پس $f'(-1) = 3$. در نتیجه

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 2 \Rightarrow f'(-1) = 3a - 2b + 2 = 3 \Rightarrow 3a - 2b = 1 \quad (2)$$

از حل دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a = -3$ و $b = -5$. بنابراین $a + b = -8$.

۱۲۶۷- گزینه ۳ شیب خط $2x + y = 3$ برابر -2 است. پس شیب خط

مماس بر نمودار تابع f برابر $\frac{1}{4}$ است. بنابراین باید نقاطی را پیدا کنیم که مقدار

مشتق تابع در آن‌ها برابر $\frac{1}{4}$ است. پس

$$f'(x) = \frac{\Delta(x+2) - (\Delta x + 2)}{(x+2)^2} = \frac{8}{(x+2)^2} = \frac{1}{4}$$

$$(x+2)^2 = 16 \Rightarrow x = 2, x = -6$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{\Delta \times 2 + 2}{2+2} = 3, \quad x = -6 \Rightarrow f(-6) = \frac{\Delta \times (-6) + 2}{-6+2} = 7$$

پس نقاط مورد نظر $A(2, 3)$ و $B(-6, 7)$ هستند که فاصله آن‌ها برابر است

$$AB = \sqrt{(-6-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{80}$$

۱۲۶۸- گزینه ۴ معادله خطی که نقاط $(1, 0)$ و $(-1, 0)$ را به هم وصل

می‌کند، به صورت $y = 0$ است. یعنی می‌خواهیم بدانیم تابع در چه نقطه‌ای بر محور طول‌ها مماس است. بنابراین

$$f'(x) = 4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, x^2 = \frac{1}{2}$$

اگر $x = 0$ ، آن‌گاه $f(x) = 0$ ، پس نمودار تابع در $(0, 0)$ بر محور طول‌ها مماس است. اگر $x^2 = \frac{1}{2}$ ، آن‌گاه $f(x) = -\frac{1}{4}$ ، پس نمودار تابع در این نقاط

بر محور طول‌ها مماس نیست. توجه کنید که شرط‌های $f'(x) = 0$ و $f(x) = 0$ برای نقاطی که در آن‌ها نمودار تابع f بر محور طول‌ها مماس است، برقرار است.

۱۲۶۹- گزینه ۴ راه حل اول اگر مختصات نقطه تماس را $(\alpha, 2\alpha - \alpha^2)$

در نظر بگیریم، معادله خط مماس به صورت $y - (2\alpha - \alpha^2) = f'(\alpha)(x - \alpha)$

است. چون $f'(\alpha) = 2 - 2\alpha$ ، پس $y - (2\alpha - \alpha^2) = (2 - 2\alpha)(x - \alpha)$

نقطه $(4, 1)$ در معادله فوق صدق می‌کند. پس

$$1 - (2\alpha - \alpha^2) = (2 - 2\alpha)(4 - \alpha) \Rightarrow 1 - 2\alpha + \alpha^2 = 8 - 2\alpha - 8\alpha + 2\alpha^2$$

$$\alpha^2 - 8\alpha + 7 = 0 \Rightarrow (\alpha - 1)(\alpha - 7) = 0 \Rightarrow \alpha = 1, \alpha = 7$$

اگر $\alpha = 1$ ، آن‌گاه $f'(\alpha) = 0$ و اگر $\alpha = 7$ ، آن‌گاه $f'(\alpha) = -12$. بنابراین مجموع شیب‌های خطوط مماس برابر -12 است.

راه حل دوم فرض کنید خطی که از نقطه $A(4, 1)$ می‌گذرد در نقطه $B(\alpha, f(\alpha))$ بر نمودار تابع مماس شود. در این صورت شیب این خط برابر

با $\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-4}$ است. از طرف دیگر، شیب این خط برابر $f'(\alpha)$ است. پس

مقدار $f'(\alpha)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = 2x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - 2x \Rightarrow f'(\alpha) = 2 - 2\alpha$$

۱۲۷۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$S = x(6-x) \Rightarrow S(x) = 6x - x^2 \Rightarrow S'(x) = 6 - 2x$$

مقدار $S'(2)$ خواسته شده که برابر ۲ است.

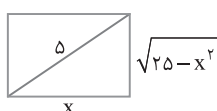
۱۲۸۰- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که با استفاده از قضیه فیثاغورس عرض

مستطیل برابر است با $\sqrt{25-x^2}$. پس

$$P(x) = 2(x + \sqrt{25-x^2})$$

$$P'(x) = 2(1 - \frac{2x}{2\sqrt{25-x^2}}) = 2 - \frac{2x}{\sqrt{25-x^2}}$$

مقدار $P'(4) = 2 - \frac{8}{\sqrt{25-16}} = -\frac{2}{3}$ خواسته شده که برابر است با $-\frac{2}{3}$.



۱۲۸۱- گزینه ۲ ابتدا مشتق اول و دوم تابع را به دست می آوریم:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x - 2$$

بنابراین باید تعداد جواب های معادله $3x^2 - 2x + 1 = 6x^2 - 2x + 1$ را مشخص کنیم:

$$3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

پس در دو نقطه تساوی $f'(x) = xf''(x)$ برقرار است.

۱۲۸۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\begin{cases} f'(x) = 4x^3 + 2ax + b \xrightarrow{x=1} 14 = 4 + 2a + b \\ f''(x) = 12x^2 + 2a \xrightarrow{x=1} 16 = 12 + 2a \end{cases}$$

از این دستگاه معادلات نتیجه می شود $a=2$ و $b=6$ ، پس $a+b=8$.

۱۲۸۳- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(x) = (x+k)^2(x-1)$$

$$f'(x) = 2(x+k)(x-1) + (x+k)^2$$

$$f''(x) = 2(x-1) + 2(x+k) + 2(x+k)$$

$$f''(2) = 2 + 4(2+k) \xrightarrow{f''(2)=2} 2 + 4(2+k) = 2 \Rightarrow k = -2$$

۱۲۸۴- گزینه ۳ مشتق دوم تابع را به دست می آوریم:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+4} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+4) - 4x(x^2+4)(-x^2+4)}{(x^2+4)^4} = \frac{-2x(x^2+4) - 4x(-x^2+4)}{(x^2+4)^3} = \frac{-2x^3 - 24x}{(x^2+4)^3}$$

بنابراین

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -2x^3 - 24x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{12}$$

پس در سه نقطه مشتق دوم تابع f برابر صفر است.

۱۲۷۳- گزینه ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[4, a]$ برابر

$$\frac{f(a)-f(4)}{a-4} = \frac{\sqrt{a}-2}{a-4}$$

$$\frac{\sqrt{a}-2}{a-4} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6\sqrt{a}-12 = a-4 \Rightarrow 6\sqrt{a} = a+8 \Rightarrow 36a = a^2+16a+64$$

$$a^2-20a+64=0 \Rightarrow (a-16)(a-4)=0 \Rightarrow a=16, a=4 \text{ (غ.ق.)}$$

۱۲۷۴- گزینه ۳ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \frac{1}{x-4}$ در بازه

$$[-a, a] \text{ برابر } \frac{f(a)-f(-a)}{2a} \text{ است:}$$

$$\frac{f(a)-f(-a)}{2a} = \frac{\frac{1}{a-4} - \frac{1}{-a-4}}{2a} = \frac{-a-4-a+4}{2a(16-a^2)} = \frac{1}{a^2-16}$$

بنابراین

$$\frac{1}{a^2-16} = \frac{-1}{7} \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow a=3, a=-3 \text{ (غ.ق.)}$$

۱۲۷۵- گزینه ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a-1, a]$ برابر

$$\frac{f(a)-f(a-1)}{a-a+1} \text{ است:}$$

$$\frac{f(a)-f(a-1)}{1} = \frac{a - \frac{1}{a} - (a-1 - \frac{1}{a-1})}{1} = \frac{-1}{a} + \frac{1}{a-1} + 1 = 1 + \frac{1}{a^2-a}$$

$$1 + \frac{1}{a^2-a} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{a^2-a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2-a=2 \Rightarrow a^2-a-2=0$$

$$(a-2)(a+1)=0 \Rightarrow a=-1, 2$$

۱۲۷۶- گزینه ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[-3, 0]$ برابر است با

$$\frac{f(0)-f(-3)}{0-(-3)} = \frac{0-(-3^3)}{3} = 1$$

آهنگ تغییر لحظه ای تابع f در نقطه $x=a$ برابر است با $f'(a)$.

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(a) = 3a^2 + 1$$

بنابراین

$$3a^2 + 1 = 10 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}, a = -\sqrt{3} \text{ (غ.ق.)}$$

۱۲۷۷- گزینه ۳ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[0, 1]$ برابر است با

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1-k \text{ آهنگ تغییر لحظه ای تابع } f \text{ در نقطه } x=1 \text{ برابر است با}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2kx \xrightarrow{x=1} f'(1) = 3-2k$$

$$3-2k = 1-k \Rightarrow k=2$$

بنابراین

۱۲۷۸- گزینه ۱ اگر S مساحت و P محیط دایره ای به شعاع r باشد، آن گاه

$$S = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}, P = 2\pi r = 2\pi \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 2\sqrt{\pi} \sqrt{S}$$

بنابراین

$$P(S) = 2\sqrt{\pi} \sqrt{S} \Rightarrow P'(S) = 2\sqrt{\pi} \times \frac{1}{2\sqrt{S}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S}}$$

مقدار $P'(4\pi)$ خواسته شده که برابر $\frac{1}{4}$ است.

۱۲۸۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x^6}{x^2} + \frac{x^4}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} = x^4 + x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$$

بنابراین

$$f'(x) = 4x^3 + 2x - \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(x) = 12x^2 + 2 + \frac{6}{x^4}$$

$$f''(1) = 12 + 2 + 6 = 20$$

۱۲۸۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^4 + x^2 - x^2 - 1$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^4 + x^2 - x^2 - 1) = 4x^3 + 2x - 2x = 4x^3$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(4x^3) = 12x^2$$

$$f''(1) = 12$$

۱۲۸۷- گزینه ۴ مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x \cdot \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f''(\sqrt{3}) = \frac{1}{(3+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{8}$$

۱۲۸۸- گزینه ۱ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به دست

می‌آید $f'(x) = 2x^2 + 2ax + b$. اگر باز هم از دو طرف این تساویمشتق بگیریم، به دست می‌آید $f''(x) = 4x + 2a$. اگر در این تساویقرار دهیم $x=1$ ، به دست می‌آید

$$4f''(-1) = 6 + 2a \Rightarrow 4 \times 4 = 6 + 2a \Rightarrow a = 5$$

۱۲۸۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}, \quad f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

چون تابع در نقطه $x=0$ مشتق اول ندارد، پس مشتق دوم هم ندارد.

۱۲۹۰- گزینه ۲ مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 4x^3 + 6ax^2 + 12x$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12ax + 12 = 12(x^2 + ax + 1)$$

پس معادله $x^2 + ax + 1 = 0$ نباید جواب داشته باشد:

$$\Delta = a^2 - 4 < 0 \Rightarrow |a| < 2$$

۱۲۹۱- گزینه ۳ اگر از دو طرف تساوی

$$f(3x-2) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

دو بار پشت سرهم مشتق بگیریم به دست می‌آید:

$$3f'(3x-2) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow 9f''(3x-2) = 6x + 2a$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=-1$ به دست می‌آید:

$$9f''(-5) = -6 + 2a \Rightarrow 18 = -6 + 2a \Rightarrow a = 12$$

۱۲۹۲- گزینه ۴ اگر از دو طرف تساوی $(g \circ f)(x) = x^4 + 2x^2$ مشتق

$$f'(x)g'(f(x)) = 4x^3 + 4x$$

بگیریم به دست می‌آید:

اگر از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم به دست می‌آید:

$$f''(x)g'(f(x)) + f'(x)f''(x)g'(f(x)) = 12x^2 + 4$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=0$ به دست می‌آید:

$$0 + (f'(0))^2 g''(f(0)) = 4 \Rightarrow g''(1) = 4$$

۱۲۹۳- گزینه ۴ اولاً تابع باید در نقطه $x=1$ پیوسته باشد و مشتق اول

داشته باشد. پس

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow a + b + 1 = c \quad (I)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & x < 1 \\ -\frac{c}{x^2} & x > 1 \end{cases}, \quad f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow 2a + b = -c \quad (II)$$

ثانیاً باید مشتق دوم چپ و مشتق دوم راست تابع با هم برابر باشند:

$$f''(x) = \begin{cases} 2a & x < 1 \\ \frac{2c}{x^3} & x > 1 \end{cases}, \quad f''_-(1) = f''_+(1) \Rightarrow 2a = 2c \Rightarrow a = c$$

اگر در تساوی‌های (I) و (II) به جای c ، a را قرار دهیم نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} a + b + 1 = a \\ 2a + b = -a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1 \\ 3a + b = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$a + b = -\frac{2}{3}$$

۱۲۹۴- گزینه ۱ ابتدا مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم

$$f'(x) = \cos x - x \sin x + k \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x - \sin x - x \cos x - k \sin x$$

$$= -(k+2) \sin x - x \cos x$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -(k+2) = -4 \Rightarrow k = 2$$

بنابراین

۱۲۹۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \sin^2 x \Rightarrow f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x \Rightarrow f''(x) = 2 \cos 2x$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = (f'(x))' = f''(x) = 2 \cos 2x$$

بنابراین

۱۲۹۶- گزینه ۲ مشتق دوم تابع f را به دست می‌آوریم

$$f(x) = \sin ax \Rightarrow f'(x) = a \cos ax \Rightarrow f''(x) = -a^2 \sin ax$$

بنابراین از $f''(x) = -64f(x)$ نتیجه می‌شود

$$-a^2 \sin ax = -64 \sin ax \Rightarrow a^2 = 64 \Rightarrow a = \pm 8$$

۱۲۹۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x} = \frac{\sin x \cos^2 x}{1 + \sin^2 x}$$

بنابراین

$$f'(x) = \cos 2x \Rightarrow f''(x) = -2 \sin 2x \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \sin \frac{\pi}{2} = -2$$

۱۳۰۵- گزینۀ ۲) از قاعدۀ هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-8}-2}{\sqrt{5x+10}-5} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{4}{2\sqrt{4x-8}}}{\frac{5}{2\sqrt{5x+10}}} = \frac{4}{5}$$

۱۳۰۶- گزینۀ ۱) از قاعدۀ هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^2-8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+6)^2}}}{2x} = \frac{1}{3 \times 2 \times 144} = \frac{1}{144}$$

۱۳۰۷- گزینۀ ۱) با استفاده از قاعدۀ هوییتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos^2 x - \cos 2x}{x^2 - x} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin 2x}{2x-1} = \frac{2 \sin 2}{2-1} = 2 \sin 2$$

۱۳۰۸- گزینۀ ۳) وقتی $x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-$ ، داریم: $3x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-$ و طبق

دایرۀ مثلثاتی: $\cos 3x < 0$. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{|\cos 3x|}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{-\cos 3x}{\cot x} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{3 \sin 3x}{-1 - \cot^2 x} = \frac{3 \times (-1)}{-1} = 3$$

۱۳۰۹- گزینۀ ۴) وقتی $x \rightarrow (-1)^+$ ، داریم: $x > -1$ ، بنابراین $x^2 - 1 < 0$

و در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\tan \pi x}{|x^2 - 1|} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\tan \pi x}{1 - x^2} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\pi(1 + \tan^2(\pi x))}{-2x} = \frac{\pi \times 1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

۱۳۱۰- گزینۀ ۲) با استفاده از قاعدۀ هوییتال مقدار حد مورد نظر برابر

است با:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{2(x-a)}{-\frac{\pi}{a} \sin(\frac{\pi x}{a})} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow a} \frac{2}{-\frac{\pi^2}{a^2} \cos(\frac{\pi x}{a})} = \frac{2a^2}{\pi^2}$$

با مقایسۀ نتیجۀ به‌دست آمده و فرض سؤال داریم: $\frac{2a^2}{\pi^2} = \frac{2}{\pi^2}$ ، بنابراین $a = \pm 1$.

۱۳۱۱- گزینۀ ۲) از قاعدۀ هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+14}-2x}{\sqrt[3]{x+25}-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+14}}-2}{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+25)^2}}-3} = \frac{\frac{1}{8}-2}{\frac{1}{3 \times 9}-3} = -\frac{4 \times 5}{8} = -\frac{5}{2}$$

۱۳۱۲- گزینۀ ۳) از قاعدۀ هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x+3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}{1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2 \times 2} = \frac{5}{12}$$

۱۳۱۳- گزینۀ ۴) از قاعدۀ هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-x}}}{\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}}{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}} = \frac{6}{5}$$

۱۲۹۸- گزینۀ ۴) ابتدا توجه کنید که

$$y = \sin kx - \cos kx$$

$$y' = k \cos kx + k \sin kx$$

$$y'' = -k^2 \sin kx + k^2 \cos kx$$

بنابراین

$$\frac{y''}{y} = \frac{-k^2 \sin kx + k^2 \cos kx}{\sin kx - \cos kx} = \frac{-k^2 (\sin kx - \cos kx)}{\sin kx - \cos kx} = -k^2$$

$$-k^2 = -16 \Rightarrow |k| = 4$$

پس

۱۲۹۹- گزینۀ ۳) مشتق اول و دوم تابع در نقطۀ $x = \frac{\pi}{4}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 2a \cos 2x - 2b \sin 2x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = -2b$$

$$f''(x) = -4a \sin 2x - 4b \cos 2x \Rightarrow f''(\frac{\pi}{4}) = -4a$$

بنابراین

$$f'(\frac{\pi}{4}) = -2b = 24 \Rightarrow b = -12, \quad f''(\frac{\pi}{4}) = -4a = 12 \Rightarrow a = -3$$

در نتیجۀ $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$.

۱۳۰۰- گزینۀ ۳) راه‌حل اول

$$f'(x) = 4 \sin^3 x \cos x - 4 \sin x \cos^3 x$$

$$-4 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = -2 \sin 2x \cos 2x = -\sin 4x$$

$$f''(\frac{\pi}{12}) = -4 \cos \frac{\pi}{3} = -2 \text{ پس } f''(x) = -4 \cos 4x \text{ بنابراین}$$

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \text{ که ابتدا توجه کنید}$$

$$f'(x) = -\sin 4x \Rightarrow f''(x) = -4 \cos 4x$$

بنابراین

$$f''(\frac{\pi}{12}) = -4 \cos \frac{\pi}{3} = -2$$

۱۳۰۱- گزینۀ ۴) از قاعدۀ هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^6 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^4}{6x^5} = \frac{5}{6}$$

۱۳۰۲- گزینۀ ۲) از قاعدۀ هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^4 + x^3 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{4x^3 + 3x^2 + 1} = \frac{1}{8}$$

توجه کنید که این حد هم حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است. بنابراین باز هم از قاعدۀ

هوییتال نتیجه می‌شود

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{4x^3 + 3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x + 2}{12x^2 + 6x} = \frac{-6 + 2}{12 - 6} = -\frac{2}{3}$$

۱۳۰۳- گزینۀ ۳) از قاعدۀ هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^4 - (2x-3)^4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-1)^3 - 8(2x-3)^3}{2x} = \frac{4-8}{4} = -1$$

۱۳۰۴- گزینۀ ۲) از قاعدۀ هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{nx^{n-1}}{2x} = \frac{n}{2} = 1 \Rightarrow n = 2$$

۱۳۱۹- گزینه ۳ با استفاده از قاعده هوییتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 3 \sin 3x}{-2x} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-x+9x)\sqrt{4-x^2}}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{-2\sqrt{4-x^2}} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

۱۳۲۰- گزینه ۳ با استفاده از قاعده هوییتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi(1+\tan^2(\pi x))}{2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{\pi}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{3}$$

۱۳۲۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2f(x)-6}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(f(x)-3)}{x+2} = 2 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = 2f'(-2)$$

از طرف دیگر، مقدار $f'(-2)$ برابر شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $A(-2, 3)$ ، یعنی شیب خط d است. اکنون توجه کنید که چون خط d از

نقطه‌های $A(-2, 3)$ و $(1, 0)$ می‌گذرد، شیب آن برابر است با $\frac{0-3}{1-(-2)} = -1$.

بنابراین $f'(-2) = -1$ و حد مورد نظر برابر است با $2f'(-2) = -2$.

۱۳۲۲- گزینه ۱ راه حل اول توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^3(x)-f^3(-2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^3(x)-f^3(-2)}{x-(-2)} \\ = (f^3)'(-2) = 3f'(-2)f^2(-2)$$

از طرف دیگر، $f(-2) = 3$ و $f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+3}}$ ، پس

$$f'(-2) = \frac{-5}{2\sqrt{9}} = -\frac{5}{6}$$

به این ترتیب، مقدار حد مورد نظر برابر است با $3(-\frac{5}{6}) \times 3^2 = -\frac{45}{2}$.

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر این فصل مراجعه کنید):

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^3(x)-f^3(-2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3f'(x)f^2(x)}{1}$$

از طرف دیگر، $f(-2) = 3$ و $f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+3}}$ ، پس

$$f'(-2) = \frac{-5}{2\sqrt{9}} = -\frac{5}{6}$$

پس $\lim_{x \rightarrow -2} (3f'(x)f^2(x)) = 3f'(-2)f^2(-2) = -\frac{45}{2}$.

۱۳۲۳- گزینه ۴ راه حل اول اگر فرض کنیم $H = -h^2$ ، آن‌گاه $H \rightarrow 0^-$

و در نتیجه

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2-h^2)-f(2)}{h^2-h^4} = \lim_{H \rightarrow 0^-} \frac{f(2+H)-f(2)}{-H-H^2} \\ = \lim_{H \rightarrow 0^-} \frac{f(2+H)-f(2)}{H} \times \lim_{H \rightarrow 0^-} \frac{-1}{1+H} = -f'(2) = 6$$

۱۳۱۴- گزینه ۴ با استفاده از قاعده هوییتال مقدار حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+9}-3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+9}}}{1} = \frac{a}{2\sqrt{9}} = \frac{a}{6}$$

پس $\frac{a}{6} = 4$ و در نتیجه $a = 24$.

۱۳۱۵- گزینه ۴ از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{n\sqrt[n]{(\cos x)^{n-1}}} \times (-\sin x)}{2x} = \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2n} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow n = 4$$

۱۳۱۶- گزینه ۴ با توجه به آنکه $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$ ، ضابطه تابع

را به صورت $f(x) = \frac{\sqrt{2}|\cos x|}{\sqrt{\pi} - \sqrt{2}x}$ می‌توان نوشت. بنابراین باید حاصل

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2} \cos x}{\sqrt{\pi} - \sqrt{2}x}$$

پیدا شوند.

داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2} \cos x}{\sqrt{\pi} - \sqrt{2}x} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sqrt{2} \sin x}{-\frac{1}{\sqrt{2}x}} = \sqrt{2}\pi$$

بنابراین اختلاف حدهای راست و چپ برابر است با:

$$|\sqrt{2}\pi - (-\sqrt{2}\pi)| = 2\sqrt{2}\pi$$

۱۳۱۷- گزینه ۴ با استفاده از اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\frac{\sqrt{1-\sin 2x}}{\tan x - 1} = \frac{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x}}{\tan x - 1} \\ = \frac{\sqrt{(\sin x - \cos x)^2}}{\tan x - 1} = \frac{|\sin x - \cos x|}{\tan x - 1}$$

وقتی $x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-$ طبق دایره مثلثاتی داریم: $\sin x < \cos x$ ، پس:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} \frac{|\sin x - \cos x|}{\tan x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\tan x - 1}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x - \cos x}{1 + \tan^2 x} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

۱۳۱۸- گزینه ۴ با استفاده از قاعده هوییتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \sin 3x + 3 \cos^3 x \sin x}{2x} \\ = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin 3x + (1 - \sin^2 x) \sin x}{x} \\ = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin 3x + \sin x - \sin^3 x}{x} \\ \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x + x - x^3}{x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x - x^3}{x} \\ = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} (-2 - x) = \frac{3}{2} \times (-2) = -3$$

۱۳۲۸- گزینه ۳) توجه کنید که

$$f(x^3+x)=g\left(\frac{f}{x}\right) \Rightarrow (3x^2+1)f'(x^3+x)=-\frac{f}{x^2}g'\left(\frac{f}{x}\right)$$

اگر در تساوی فوق قرار دهیم $x=1$ ، نتیجه می‌شود

$$4f'(2)=-4g'(4) \Rightarrow f'(2)=-g'(4)=4$$

۱۳۲۹- گزینه ۳) ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{a(x^2+1)-2x(ax-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-ax^2+2x+a}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(-2ax+2)(x^2+1)^2-4x(x^2+1)(-ax^2+2x+a)}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{(-2ax+2)(x^2+1)-4x(-ax^2+2x+a)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(1)=\frac{(-2a+2)(2)-4(-a+2+a)}{2^3}=\frac{-a-1}{2}=4 \Rightarrow a=-9 \quad \text{بنابراین}$$

۱۳۳۰- گزینه ۲) آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a, 0]$ برابر است با

$$\frac{f(0)-f(a)}{0-a}=\frac{a^2-2a}{-a}=-a+2$$

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[0, a+1]$ برابر است با

$$\frac{f(a+1)-f(0)}{a+1-0}=\frac{-(a+1)^2+2(a+1)}{a+1}=\frac{-a^2+1}{a+1}=-a+1$$

$$(-a+2)+(-a+1)=4 \Rightarrow -2a=1 \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \quad \text{بنابراین}$$

۱۳۳۱- گزینه ۳) راه حل اول توجه کنید که $f(1)=0$ پس

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x(2x-1)(2x-2) \cdots (2x-12)-0}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (4x(2x-1)(2x-3)(2x-4) \cdots (2x-12)) \\ &= 4 \times 1(1)(-1)(-2)(-3) \cdots (-10) = 4 \times 10! \end{aligned}$$

راه حل دوم با توجه به اینکه مقدار $2x-2$ به ازای $x=1$ برابر صفر است، کافی است مشتق این عبارت یعنی ۲ را در مقدار عبارت $2x(2x-1)(2x-3)(2x-4) \cdots (2x-12)$ به ازای $x=1$ ضرب کنیم.

$$f'(1)=2 \times 2 \times 1 \times (-1)(-2) \cdots (-10)=4 \times 10!$$

۱۳۳۲- گزینه ۳) ابتدا مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x^3+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x)=\frac{(x^3+\sqrt{x})'(x^2+\sqrt[3]{x})-(x^2+\sqrt[3]{x})'(x^3+\sqrt{x})}{(x^2+\sqrt[3]{x})^2}$$

$$=\frac{(3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}})(x^2+\sqrt[3]{x})-(2x+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})(x^3+\sqrt{x})}{(x^2+\sqrt[3]{x})^2}$$

اگر در تساوی فوق قرار دهیم $x=1$ ، نتیجه می‌شود:

$$f'(1)=\frac{(3+\frac{1}{2})(1+1)-(2+\frac{1}{3})(1+1)}{(1+1)^2}=\frac{1}{12}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر این فصل مراجعه کنید):

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h^2)-f(2)}{h^2-h^4} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2hf'(2-h^2)}{2h-4h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-f'(2-h^2))}{1-2h^2} \\ &= \lim_{H \rightarrow 0^+} \frac{(-f'(2-H))}{1-2H} = -f'_-(2) = 6 \end{aligned}$$

توجه کنید که $H=h^2$.

۱۳۲۴- گزینه ۱) توجه کنید که $f'(x)=\begin{cases} 2x+4 & x>2 \\ 3x^2+2x & x<2 \end{cases}$ بنابراین

$$f'_+(2)=\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x)=\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x+4)=4+4=8$$

$$f'_-(2)=\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x)=\lim_{x \rightarrow 2^-} (3x^2+2x)=12+4=16$$

و در نتیجه $f'_+(2)-f'_-(2)=8-16=-8$.

۱۳۲۵- گزینه ۱) ابتدا توجه کنید که

$$g(0)=0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x)=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}=2$$

بنابراین

$$g'(0)=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2-2x}{x}}{x}=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{f(x)}=\frac{-2}{2}=-1$$

۱۳۲۶- گزینه ۱) توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(2ax)\sqrt{3x+1}-\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(ax^2+2)}{3x+1}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{2}{16} \Rightarrow \frac{(2a)(2)-\frac{3}{2\sqrt{3}}(a+2)}{4} = \frac{2}{16} \\ 16a-3(a+2) &= 2 \Rightarrow 13a=13 \Rightarrow a=1 \end{aligned}$$

۱۳۲۷- گزینه ۴) ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}x}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{g^2(x)} \end{aligned}$$

$$.g'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=-f(x) \quad \text{از طرف دیگر}$$

بنابراین

$$f''(x)g'(x)=\left(\frac{1}{g^2(x)}\right)(-f(x))=-\frac{f(x)}{g^2(x)}$$

۱۳۳۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \tan x \quad (x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z})$$

بنابراین

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x \Rightarrow f''(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times 1 \times (1 + 1) = 4$$

۱۳۳۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $y = 4x + 2$ در نقطه $A(1, 6)$ بر

نمودار تابع f مماس است. از طرف دیگر $f'(x) = 3x^2 - 3a$ ، بنابراین $f'(1) = 4$ و $f(1) = 6$ پس

$$\begin{cases} 1 - 3a + b = 6 \\ 3 - 3a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = 4 \end{cases}$$

۱۳۴۰- گزینه ۳ خط d از نقطه‌های $(2, 0)$ و $(0, 4)$ گذشته است، پس

معادله آن به صورت $y = -2x + 4$ است. چون خط d در نقطه‌ای به طول ۱ بر سهمی مماس است، پس مقدار $f'(x)$ به ازای $x = 1$ برابر با شیب خط d است:

$$f(x) = ax^2 + c \Rightarrow f'(x) = 2ax \Rightarrow f'(1) = 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

چون نقطه A روی خط $y = -2x + 4$ است، پس عرض آن برابر است با $y = 2$. چون نقطه $A(1, 2)$ روی سهمی $f(x) = -x^2 + c$ است، پس $f(1) = 2$ ، بنابراین $2 = -1 + c$ ، یعنی $c = 3$.

۱۳۴۱- گزینه ۱ مقدار حد خواسته شده، همان $f'(2)$ است. پس ابتدا

$f'(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = \left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} \left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{-3-4}{(2x-3)^2}$$

تجربی - ۹۵

$$\text{بنابراین } f'(2) = \frac{3}{2} \times \sqrt{4} \times (-7) = -21$$

۱۳۴۲- گزینه ۲ تابع f باید در نقطه $x = -2$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = f(-2)$$

$$4a - 2b + 4 = -8 + 2 \Rightarrow 2a - b = -5$$

از طرف دیگر چون تابع f در نقطه $x = -2$ مشتق پذیر است، پس مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه با هم برابرند:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & x \geq -2 \\ 3x^2 - 1 & x \leq -2 \end{cases} \Rightarrow f'_+(-2) = f'_-(-2) \Rightarrow -4a + b = 11$$

بنابراین از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} 2a - b = -5 \\ -4a + b = 11 \end{cases}$ نتیجه می‌شود $a = -3$ و $b = -1$

تجربی - ۹۷

$$f(1) = a + b + 4 = 0$$

۱۳۴۳- گزینه ۱ تابع f در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته است، پس

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} f(x) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} f(x) = a + b \end{cases} \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}$$

۱۳۳۳- گزینه ۲ در نزدیکی نقطه $\frac{1}{2}$ ، علامت عبارت $x^2 - x$ منفی

است و $0 < x^2 - x < 1$ ، پس در نزدیکی نقطه $\frac{1}{2}$ تساوی‌های $|x^2 - x| = x - x^2$

و $[3x] = 1$ برقرارند و

$$f(x) = \frac{x - x^2}{x^3 - 1} = \frac{-x(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{-x}{x^2+x+1} \quad (x \neq 1)$$

در نتیجه

$$f'(x) = -\frac{x^2+x+1-(2x+1)x}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\frac{1}{4}-1}{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1\right)^2} = -\frac{12}{49}$$

۱۳۳۴- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که تابع در نقطه $x = 1$ پیوسته و

مشتق پذیر است:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3 & x > 1 \\ 6x & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2 + 3) = 6 \\ f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (6x) = 6 \end{cases}$$

بنابراین $f'(1) = 6$ ، از طرف دیگر

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 4}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x(x+1)} = f'(1) \times \frac{1}{2} = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

۱۳۳۵- گزینه ۳ به کمک تعریف مشتق می‌دانیم:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = f'(4)$$

پس

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 5}{x - 4} = 5 \Rightarrow f(4) = -5, f'(4) = 5$$

از طرف دیگر،

$$g(x) = \frac{x}{f(2x)} \Rightarrow g'(x) = \frac{f(2x) - 2xf'(2x)}{f^2(2x)}$$

$$g'(2) = \frac{f(4) - 4f'(4)}{f^2(4)} = \frac{-5 - 4 \times 5}{(-5)^2} = -1$$

۱۳۳۶- گزینه ۳ ضابطه تابع $g \circ f$ را به دست می‌آوریم. اگر $x \geq 0$ ، آن‌گاه

$$f(x) = 4x + x = 5x$$

$$(g \circ f)(x) = g(5x) = 4(5x) - |5x| = 20x - 5x = 15x$$

اگر $x < 0$ ، آن‌گاه $f(x) = 4x - x = 3x$ و

$$(g \circ f)(x) = g(3x) = 4(3x) - |3x| = 12x + 3x = 15x$$

بنابراین $(g \circ f)(x) = 15x$ و در نتیجه $(g \circ f)'(x) = 15$ و $(g \circ f)'(0) = 15$.

۱۳۳۷- گزینه ۳ برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد، باید تابع

$y = x^2 - 6x + m$ ریشه نداشته باشد یا ریشه مضاعف داشته باشد، زیرا اگر

این تابع دو ریشه متمایز داشته باشد، آن‌گاه تابع f در این دو ریشه مشتق پذیر نیست. بنابراین

$$\Delta = 36 - 4m \leq 0 \Rightarrow m \geq 9$$

پس m مقادیر طبیعی ۱ تا ۸ را نمی‌تواند داشته باشد.

۱۳۴۷- گزینه ۱ از قاعده زنجیری استفاده می کنیم:

$$f(x) = \left(\frac{16}{x} - \sqrt[3]{x^2}\right)^2 \Rightarrow f'(x) = 2\left(\frac{16}{x} - \sqrt[3]{x^2}\right) \left(-\frac{16}{x^2} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$f'(-8) = 2(-2-4)\left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{6}\right) = -1$$

ریاضی - ۸۸

۱۳۴۸- گزینه ۲ به جای اینکه حاصل $f'(x) \times g'(f(x))$ را بیابیم،

مشتق تابع gof را به دست می آوریم:

$$(\text{gof})(x) = g(f(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

بنابراین $(\text{gof})'(x) = 1$.

۱۳۴۹- گزینه ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[4, 6/25]$ برابر

است با

$$\frac{f(6/25) - f(4)}{6/25 - 4} = \frac{\sqrt{6/25} - \sqrt{4}}{6/25 - 4} = \frac{2/5 - 2}{2/25 - 4} = \frac{2}{9} = \frac{2}{9}$$

اما آهنگ تغییر لحظه ای تابع در نقطه $x=4$ برابر $f'(4)$ است:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{9-8}{36} = \frac{1}{36}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۳۵۰- گزینه ۲ باید معادله برخورد خط و نمودار ریشه مضاعف داشته باشد:

$$(m+3)x^2 + mx = 2x - 4 \Rightarrow (m+3)x^2 + (m-2)x + 4 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (m-2)^2 - 16(m+3) = 0$$

$$m^2 - 20m - 44 = 0 \Rightarrow (m-22)(m+2) = 0 \Rightarrow m_1 = 22, m_2 = -2$$

ریاضی - ۹۰

۱۳۵۱- گزینه ۳ به کمک تعریف مشتق می دانیم:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = f'(4)$$

پس

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 7}{x - 4} = -\frac{3}{2} \Rightarrow f(4) = -7, f'(4) = -\frac{3}{2}$$

بنابراین

$$y = \frac{1}{x} f(2x) \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} f(2x) + 2f'(2x) \times \frac{1}{x}$$

$$y'(2) = -\frac{1}{4} f(4) + 2f'(4) \times \frac{1}{2} = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

ریاضی - ۹۶

اکنون مشتق چپ و مشتق راست تابع f در این نقطه را با هم برابر قرار می دهیم:

$$f'(x) = \begin{cases} \sin 2x + 2 \sin x & 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ a(1 + \tan^2 x) + 2b \cos x & \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_-\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \\ f'_+\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2a \end{cases} \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

تجربی - ۹۳

بنابراین $b = -1$.

۱۳۴۴- گزینه ۱ راه حل اول ابتدا مشتق تابع را به دست می آوریم:

$$y' = \frac{(-\sin x - \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x + \sin x)^2} - \frac{(-\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)^2}$$

$$= \frac{-(\sin x + \cos x)^2 - (\cos x - \sin x)^2}{(\cos x + \sin x)^2} = \frac{-2}{(\cos x + \sin x)^2}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{-2}{2} = -1$$

راه حل دوم عبارت $\cos x - \sin x$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ برابر صفر است. پس

کافی است فقط از عامل صفرکننده مشتق بگیریم:

$$y = \frac{(\cos x - \sin x) \times 1}{f(x) \times g(x)}, \quad f'(x) = -\sin x - \cos x$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = -1$$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۱۳۴۵- گزینه ۱ ضابطه تابع را می توانیم به صورت $f(x) = x|x|$ نشان

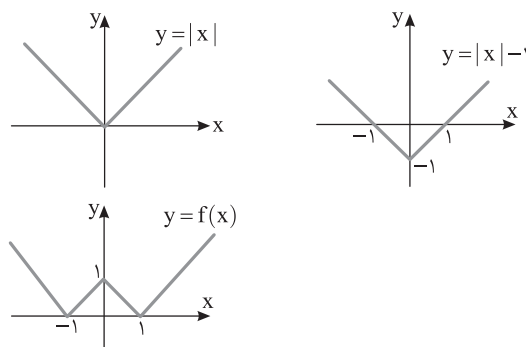
دهیم که به وضوح در $x=0$ پیوسته است. همچنین تابع در این نقطه

مشتق پذیر است، زیرا

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 0, \quad f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = 0$$

ریاضی - ۸۷

۱۳۴۶- گزینه ۴ نمودار تابع را رسم می کنیم:



از نمودار تابع مشخص است که سه نقطه گوشه ای (و بنابراین مشتق ناپذیر) وجود دارد.

ریاضی - ۸۶

۱۳۵۲- گزینه ۳

تابع f در نقطه $x=1$ باید پیوسته باشد و مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه برابر باشند:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a+b+1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a+b+1=0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} & x > 1 \\ 2x+a & x < 1 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) \Rightarrow 2 = 2+a$$

از دو شرط $2=2+a$ و $a+b+1=0$ نتیجه می‌شود $a=0$ و $b=-1$. پس

$$f(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2})^2 + a(1-\sqrt{2}) + b = 3 - 2\sqrt{2} - 1 = 2 - 2\sqrt{2}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۳۵۳- گزینه ۳

ابتدا مشتق تابع را به دست می‌آوریم:

$$y' = (2 \sin^2(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}))' = 2 \times 2 \times \frac{-1}{4} \sin(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}) \cos(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4})$$

$$= -\frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2})$$

پس به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ مقدار مشتق تابع برابر است با $-\frac{1}{4}$.
تجربی - ۹۳

۱۳۵۴- گزینه ۴

ابتدا توجه کنید که

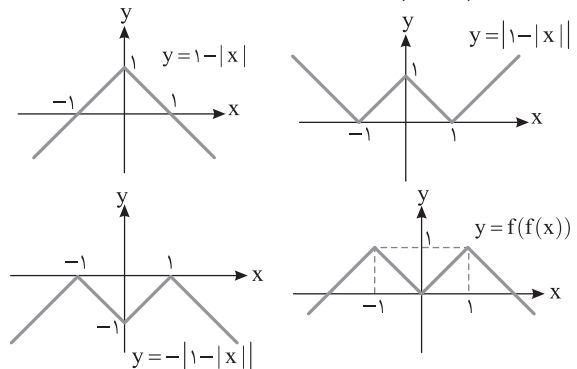
$$f(x) = \tan^2 2x \Rightarrow f'(x) = 2 \tan 2x (1 + \tan^2 2x)$$

$$f'(\frac{\pi}{6}) = 2 \tan^2 \frac{\pi}{3} (1 + \tan^2 \frac{\pi}{3}) = 2 \times 3 (1 + 3) = 24$$

خارج از کشور تجربی - ۹۷

۱۳۵۵- گزینه ۳

توجه کنید که $f(f(x)) = 1 - |1 - |x||$. اکنون نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، $y = 1 - |1 - |x||$ در سه نقطه $x=0$ و $x=\pm 1$ مشتق ناپذیر است.
خارج از کشور ریاضی - ۸۸

۱۳۵۶- گزینه ۲

ابتدا تابع‌های f و g را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} 3x & x \geq 0 \\ 5 & x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \Delta x & x \geq 0 \\ 3x & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{بنابراین } (fog)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f(\Delta x) & x \geq 0 \\ f(3x) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x & x \geq 0 \\ 3x & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{نتیجه } (fog)'(x) = 3$$

تجربی - ۹۴

۱۳۵۷- گزینه ۲

ابتدا از دو طرف تساوی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = x+1+(g(x))^5 \Rightarrow f'(x) = 1+\Delta g'(x)g^4(x) \quad (1)$$

$$\xrightarrow{x=0} f'(0) = 1+\Delta g'(0)g^4(0) \Rightarrow 1 = 1+\Delta g'(0) \Rightarrow g'(0) = 0$$

اکنون از دو طرف تساوی (۱) مشتق می‌گیریم:

$$f''(x) = 0 + \Delta g''(x)g^4(x) + 2 \cdot g'(x)g^3(x)$$

$$\xrightarrow{x=0} f''(0) = \Delta g''(0) \times 1^4 + 2 \cdot 0 \times 1 = \Delta g''(0)$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱۳۵۸- گزینه ۴

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[1, 1/44]$ برابر است

$$\text{با } \frac{f(1/44) - f(1)}{1/44 - 1} = \frac{1/2 - 0}{1/44 - 1} = \frac{1/2}{-43/44} = -\frac{22}{43}$$

این گونه به دست می‌آید:

$$f'(x) = (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

خارج از کشور تجربی - ۹۴ با کمی تغییر

اختلاف این دو مقدار $\frac{1}{6}$ است.

۱۳۵۹- گزینه ۴

معادله خط مماس گذرنده از $(\alpha, \frac{2\alpha-1}{\alpha+1})$ را می‌نویسیم

و مختصات $A(-1, 0)$ را در آن قرار می‌دهیم:

$$y' = \frac{2+1}{(x+1)^2} \Rightarrow m = \frac{3}{(\alpha+1)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله مماس}} y - \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{3}{(\alpha+1)^2} (x - \alpha)$$

$$\xrightarrow{A(-1, 0)} -\frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{3}{(\alpha+1)^2} (-1 - \alpha) \Rightarrow 2\alpha - 1 = 3 \Rightarrow \alpha = 2$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۳۶۰- گزینه ۱

شیب خط $(m+2)y = mx$ برابر $\frac{m}{m+2}$ است. پس باید

مشتق تابع $y = \sqrt{1+x^2}$ در نقطه x_0 واقع بر منحنی برابر $\frac{m}{m+2}$ باشد. یعنی

$$y'(x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} = \frac{m}{m+2} \Rightarrow \frac{x_0^2}{1+x_0^2} = \frac{m^2}{(m+2)^2}$$

$$m^2 x_0^2 + m^2 = (m+2)^2 x_0^2 \Rightarrow x_0^2 = \frac{m^2}{4(m+1)} \geq 0$$

ریاضی - ۹۵

بنابراین $m+1 > 0$ پس $m > -1$.

۱۳۶۱- گزینه ۱

توجه کنید که $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ همان تعریف

مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول یک است. پس ابتدا $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{4x+5}{(x+3)^2} \times \frac{4 \times 3 - 5 \times 1}{(x+3)^2}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{16} \times \frac{7}{64} = \frac{7}{128}$$

بنابراین

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۱۳۶۷- گزینه ۴ توجه کنید که

$$(fog)'(r) = f'(g(r)) \times g'(r) = f'\left(\frac{1}{f}\right)g'(r)$$

با توجه به اینکه $f'(x) = \pi \sin 2\pi x$ و $g'(x) = \frac{5}{8\sqrt{5x-9}}$ پس

$$f'\left(\frac{1}{f}\right) = \pi \quad \text{و} \quad g'(r) = \frac{5}{8} \quad \text{بنابراین} \quad (fog)'(r) = \frac{5\pi}{8}$$

ریاضی - ۹۱

۱۳۶۸- گزینه ۳ توجه کنید که

$$y = \sin^3 u \Rightarrow y' = 3 \sin^2 u \times \cos u \times u'$$

پس

$$y = \sin^3 \sqrt{2x}, \quad y' = 3 \sin^2 \sqrt{2x} \times \cos \sqrt{2x} \times \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

$$\text{بنابراین} \quad y'\left(\frac{\pi^2}{18}\right) = 3 \sin^2 \frac{\pi}{3} \times \cos \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{\frac{\pi}{3}} = 3 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{\pi} = \frac{27}{8\pi}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۳۶۹- گزینه ۲ شیب خط $y = 5x + a$ برابر ۵ است. پس ابتدا نقطه‌ای

از تابع $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$ را مشخص می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه (یعنی مشتق تابع) برابر ۵ باشد:

$$f'(x) = 4x - 3 = 5 \Rightarrow x = 2$$

پس خط در نقطه $(2, f(2))$ بر نمودار تابع مماس است. این نقطه متعلق به خط هم هست، پس در معادله خط صدق می‌کند:

$$f(2) = 5 \times 2 + a \Rightarrow 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 6 = 10 + a \Rightarrow 8 = 10 + a \Rightarrow a = -2$$

خارج از کشور تجربی - ۹۷

۱۳۷۰- گزینه ۱ دو نقطه عبارت‌اند از $A(1, 3+a)$ و $B(-1, -3+a)$

معادله خط گذرنده از A و B را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{3+a - (-3+a)}{1 - (-1)} = 3$$

$$\text{معادله } AB: y - (3+a) = 3(x-1) \Rightarrow y = 3x + a$$

فرض کنید $f(x) = 3x + a$ و $g(x) = x^3 + ax^2 + 2x$. برای آنکه خط بر منحنی مماس باشد باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$g'(x) = f'(x) \Rightarrow 3x^2 + 2ax + 2 = 3$$

$$g(x) = f(x) \Rightarrow x^3 + ax^2 + 2x = 3x + a$$

$$x^2(x+a) - (x+a) = 0 \Rightarrow (x+a)(x^2-1) = 0$$

از شرط دوم نتیجه می‌گیریم $x = -a$ یا $x = \pm 1$ که با جای گذاری این نتایج در معادله اول مقدار a به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x = \pm 1 \Rightarrow 3 \pm 2a = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ x = -a \Rightarrow 3a^2 - 2a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \end{cases}$$

ریاضی - ۹۰

۱۳۶۲- گزینه ۲ برای آنکه تابع f در نقطه $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، ابتدا

لازم است در این نقطه پیوسته باشد و همچنین، مشتق چپ و مشتق راست تابع در این نقطه برابر باشند:

$$3 - 5 = 1 + a + b \Rightarrow a + b = -3 \quad \text{شرط پیوستگی}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{3}{x^2} & x > 1 \\ 2x + a & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = -3 \\ f'_-(1) = 2 + a \end{cases}$$

$$2 + a = -3 \Rightarrow a = -5, b = 2$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۳۶۳- گزینه ۴ در یک همسایگی راست $\sqrt{2}$ ، $f(x) = x^3 - 4x$ ، پس

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \Rightarrow f'_+(\sqrt{2}) = 3 \times 2 - 4 = 2 \quad \text{در این همسایگی،}$$

خارج از کشور تجربی با کمی تغییر - ۹۴

۱۳۶۴- گزینه ۳ با فرض $g(x) = f(x + \sqrt{1+x^2})$ طبق قاعده زنجیری

نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x + \sqrt{1+x^2}) \times (1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \times \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۵

۱۳۶۵- گزینه ۲ حاصل مورد نظر همان مشتق تابع $y = f(g(x))$

است. پس،

$$y = f(g(x)) = \frac{x-1-2}{1+x-1} = \frac{x-3}{x} \Rightarrow y' = \frac{3}{x^2}$$

ریاضی - ۹۲

۱۳۶۶- گزینه ۱ ابتدا ضابطه تابع‌های f و g را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 4x & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} (a + \frac{3}{4})x & x \geq 0 \\ (\frac{3}{4} - a)x & x < 0 \end{cases}$$

اکنون تابع $g \circ f$ را به دست می‌آوریم:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} (a + \frac{3}{4}) \times 4x & x \geq 0 \\ (\frac{3}{4} - a) \times 2x & x < 0 \end{cases}$$

در نهایت از تابع به دست آمده مشتق می‌گیریم:

$$(g \circ f)'(x) = \begin{cases} 4a + 3 & x \geq 0 \\ \frac{3}{2} - 2a & x < 0 \end{cases}$$

از برابری مشتق چپ و مشتق راست تابع $g \circ f$ در نقطه $x=0$ نتیجه می‌شود:

$$4a + 3 = \frac{3}{2} - 2a \Rightarrow 6a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۱۳۷۶- گزینه ۴ چون حد مخرج کسر صفر است، حد صورت نیز باید

صفر باشد تا حد به صورت $\frac{0}{0}$ دربیاید. یعنی باید

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(-2+h)+3) = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(-2+h) = -3 \Rightarrow f(-2) = -3$$

پس حد داده شده همان تعریف مشتق تابع f در نقطه $x = -2$ است:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h)+3}{h} = f'(-2) = \frac{1}{2}$$

پس

$$g(x) = x^2 f(x) \Rightarrow g'(x) = (x^2 f(x))' = 2xf(x) + x^2 f'(x)$$

$$g'(-2) = -4f(-2) + 4f'(-2) = 12 + 2 = 14$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۱۳۷۷- گزینه ۴ شرط لازم برای مشتق پذیری تابع در یک نقطه پیوستگی

آن است:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (1+a \cos \pi x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (bx^2 + x)$$

$$1-a=b+1 \Rightarrow b=-a$$

همچنین باید مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطه $x=1$ با هم برابر باشند:

$$f'(x) = \begin{cases} -a\pi \sin \pi x & x \geq 1 \\ 2bx+1 & x \leq 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 0, \quad f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 2b+1$$

$$2b+1=0 \Rightarrow b=-\frac{1}{2}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

همچنین چون $b=-a$ ، بنابراین $a=\frac{1}{2}$.

۱۳۷۸- گزینه ۴ از هر دو ضابطه مشتق می‌گیریم و با جای گذاری $x=0$

در آنها، مشتق چپ و مشتق راست تابع را حساب می‌کنیم:

$$x > 0: f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x(1+\cos x) + \sin x(\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$f'_+(0) = \frac{1 \times 2 + 0}{(1+1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$x \leq 0: f(x) = \sin 2x \Rightarrow f'(x) = 2 \cos 2x \Rightarrow f'_-(0) = 2$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

$$\text{پس } f'_-(0) - f'_+(0) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

۱۳۷۹- گزینه ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در بازه

$$[1, 1/21] \text{ محاسبه می‌کنیم: } \frac{\sqrt{1/21} - \sqrt{1}}{1/21 - 1} = \frac{1/21 - 1}{1/21 - 1} = \frac{1/21 - 1}{1/21 - 1} = \frac{1}{21}$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای f را در نقطه $x=1$ حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=1} f'(1) = \frac{1}{2}$$

بنابراین اختلاف آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای برابر است با

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{21} = \frac{21-2}{42} = \frac{1}{42}$$

تجربی - ۹۴ با کمی تغییر

۱۳۷۱- گزینه ۱ با توجه به تعریف مشتق، مشتق تابع f در $x=-1$

مورد نظر است. برای به دست آوردن مشتق تابع f در نقطه $x=-1$ از تعریف

مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)\sqrt{x^2-7x}}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} ((x-2)\sqrt{x^2-7x}) = -6$$

ریاضی - ۹۲

۱۳۷۲- گزینه ۲ تابع f در نقطه $x=1$ پیوسته و مشتق پذیر است. پس

می‌توان نوشت:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow a+b=2$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 + b & x \leq 1 \\ \frac{4}{\sqrt{4x-3}} & x \geq 1 \end{cases}, \quad f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow 4 = 3a+b$$

از حل دستگاه معادلات بالا نتیجه می‌شود $a=1$ و $b=1$. ریاضی - ۹۲

۱۳۷۳- گزینه ۳ با توجه به ضابطه، نقطه مشتق ناپذیری تابع $x=0$

است. توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x} & x > 0 \\ \sqrt{1-x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} & x > 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(0) = \frac{1}{2} \\ f'_-(0) = -\frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{x=0 \text{ در } f \text{ مشتق پذیر}} f'_+(0) - f'_-(0) = 1$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۵

۱۳۷۴- گزینه ۴ اگر $x < -1$ ، آن‌گاه $-\frac{1}{x} > 1$ ، بنابراین $[\frac{1}{x}] = -1$.

پس تابع f روی بازه $(-1, -\infty)$ تابعی ثابت و مشتق پذیر است. گزینه‌های

(۱) و (۲) به راحتی رد می‌شوند، زیرا $\frac{1}{x}$ در نامتناهی نقطه از آن‌ها مقدار صحیح

می‌شود. همچنین در گزینه (۳)، $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty$.

ریاضی - ۹۱

پس تابع f روی بازه $(1, +\infty)$ مشتق پذیر نیست.

۱۳۷۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$D_f = \mathbb{R} - \{-3\}, \quad D_g = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} - \{4\} \mid \frac{x+2}{x-4} \in \mathbb{R} - \{-3\}\}$$

$$\frac{x+2}{x-4} = -3 \Rightarrow x+2 = -3x+12 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

بنابراین $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{4, \frac{5}{2}\}$. پس تابع $f \circ g$ در نقاط $x=4$ و $x=\frac{5}{2}$

ریاضی - ۸۴

مشتق پذیر نیست.

۱۳۸۳- گزینه ۳ چون $f(0)=0$ ، پس

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{-\sqrt{x^2}}$$

دقت کنید که چون $x < 0$ ، به جای x می‌توانیم $-\sqrt{x^2}$ قرار دهیم. بنابراین

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\frac{1-1+x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}} = - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

ریاضی - ۸۹

۱۳۸۴- گزینه ۴ به دلیل حضور جزء صحیح‌ها در هر نقطه‌ای که تابع

ناپیوسته باشد، مشتق ناپذیر است. یعنی باید نقاطی را بیابیم که $x \in \mathbb{Z}$ یا

$x + \frac{1}{3} \in \mathbb{Z}$. در هر یک از این نقاط یکی از دو تابع $[x]$ و $[x + \frac{1}{3}]$ پیوسته و

دیگری ناپیوسته است، بنابراین مجموع آن دو نیز ناپیوسته است. در بازه

$(0, 3)$ این نقاط عبارت‌اند از: $\{\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3}, 2, \frac{8}{3}\}$ خارج از کشور ریاضی - ۸۶

۱۳۸۵- گزینه ۲ با توجه به فرض سؤال $f'(2) = -\frac{1}{3}$. همچنین اگر

فرض کنیم $g(x) = f(\sqrt{|x|+3})$ ، در یک همسایگی $x = -1$ ،

$$g(x) = f(\sqrt{3-x}) \Rightarrow g'(x) = f'(\sqrt{3-x}) \times \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$

$$\xrightarrow{x=-1} g'(-1) = -\frac{1}{4} f'(2) = -\frac{1}{12}$$

ریاضی - ۸۷

۱۳۸۶- گزینه ۲ اگر $g(x) = f(xf(x))$ ، آن‌گاه طبق قاعده زنجیری،

$$g'(x) = f'(xf(x)) \times (f(x) + xf'(x))$$

$$\xrightarrow{x=2} g'(2) = f'(2f(2)) \times (f(2) + 2f'(2))$$

چون $f(2) = -\frac{1}{2}$ و $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ پس $f'(2) = -\frac{1}{4}$ پس

$$f'(2f(2)) = f'(-1) = -\frac{1}{2\sqrt{-1+2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow g'(2) =$$

$$= -\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2} + 2 \times -\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$$

ریاضی - ۸۹

۱۳۸۷- گزینه ۲ ابتدا آهنگ تغییر متوسط در بازه $[4, 12]$ و سپس آهنگ

تغییر لحظه‌ای در نقطه $x = 4$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \frac{f(12)-f(4)}{12-4} = \frac{1-1}{8} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4} \\ f'(x) = -(2x+1)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(4) = -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{4} - (-\frac{1}{2\sqrt{2}}) = \frac{11}{56}$$

تجربی - ۹۳

۱۳۸۰- گزینه ۱ راه حل اول شیب نیمساز ناحیه اول برابر ۱ است. پس

ابتدا نقطه‌ای از نمودار تابع $f(x) = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ را پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه (مشتق) برابر یک باشد:

$$f'(x) = 1 \Rightarrow 4x + m + 1 = 1 \Rightarrow x = -\frac{m}{4}$$

بنابراین خط $y = x$ در نقطه $(-\frac{m}{4}, -\frac{m}{4})$ بر نمودار تابع f مماس شده

است. این نقطه روی نمودار تابع f است، پس مختصات آن در معادله تابع صدق می‌کند:

$$-\frac{m}{4} = 2(-\frac{m}{4})^2 + (m+1)(-\frac{m}{4}) + m + 6$$

$$m^2 - 8m - 48 = 0 \Rightarrow (m-12)(m+4) = 0 \Rightarrow m = 12, m = -4$$

$m = 12$ قابل قبول نیست، چون در این صورت نقطه تماس $(-3, -3)$

می‌شود که در ناحیه اول قرار ندارد.

راه حل دوم شرط آنکه یک تابع بر یک خط مماس باشد آن است که معادله حاصل از تلاقی آن‌ها ریشه مضاعف داشته باشد. پس

$$\begin{cases} y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x$$

$$2x^2 + mx + m + 6 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} m^2 - 8(m+6) = 0$$

$$m^2 - 8m - 48 = 0 \Rightarrow (m-12)(m+4) = 0 \Rightarrow m = 12, m = -4$$

$$\begin{cases} m = 12 \Rightarrow 2x^2 + 13x + 18 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ (غ.ق.)} \\ m = -4 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

چون نمودار تابع بر نیمساز ناحیه اول مماس است، پس باید طول نقطه تماس مثبت باشد. پس $x = 1$ و در نتیجه $m = -4$ قابل قبول است.

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۳۸۱- گزینه ۴ تابع باید در $x = 1$ پیوسته باشد، بنابراین $a + b = 2$ از

طرف دیگر مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه باید برابر باشند:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2x^2} & x \geq 1 \\ ax^2 + bx & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -x^{-3} & x > 1 \\ 2ax + b & x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(1) = -1 \\ f'_-(1) = 2a + b \end{cases} \Rightarrow 2a + b = -1$$

از حل دستگاه $\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$ نتیجه می‌شود $a = -3$ و $b = 5$. ریاضی - ۹۳

۱۳۸۲- گزینه ۲ ابتدا مقدار جزء صحیح و علامت تابع قدرمطلق را در یک

همسایگی راست نقطه $x = -3$ مشخص می‌کنیم:

$$x \rightarrow (-3)^+ \Rightarrow [x] = -3, |x| = -x \Rightarrow f(x) = (x-3)\sqrt[3]{9x}$$

$$\text{بنابراین } f'(x) = \sqrt[3]{9x} + \frac{9}{3\sqrt[3]{(9x)^2}}(x-3) \text{ پس}$$

$$f'_+(-3) = -3 + \frac{9}{3 \times 9}(-6) = -5$$

ریاضی - ۹۳

۱۳۸۸- گزینه ۲ ابتدا معادله خط گذرنده از دو نقطه $(۱, ۲)$ و $(-۱, ۳)$

را می‌نویسیم:

$$y-2 = \frac{3-2}{-1-1}(x-1) \Rightarrow y-2 = -\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

این خط در نقطه $x=3$ بر نمودار تابع f مماس است، پس در این نقطه با تابع مشترک است و شیب این خط، همان مشتق تابع در این نقطه است:

$$f(3) = -\frac{1}{2} \times 3 + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1, \quad f'(3) = -\frac{1}{2}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3-x} &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{f(x)-1}{x-3} \times \frac{f(x)+5}{-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} \times \lim_{x \rightarrow 3} (-f(x)-5) \\ &= f'(3) \times (-f(3)-5) = -\frac{1}{2}(-1-5) = 3 \end{aligned}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۳۸۹- گزینه ۳ از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+\cos \pi x}{x^3-x^2-x+1} &\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sin \pi x \times \pi}{3x^2-2x-1} \\ &\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi^2 \cos \pi x}{6x-2} = \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۵

۱۳۹۰- گزینه ۴ مخرج کسر را می‌توانیم به صورت $(\sqrt{x}-2)^2$

بنویسیم. حال از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1-\cos \pi x}{(\sqrt{x}-2)^2} &\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\pi \sin \pi x}{2(\sqrt{x}-2) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}} \\ &= \pi \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x}-2} \times \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2\pi \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x}-2} \\ &\xrightarrow{\text{HOP}} 2\pi \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\pi \cos \pi x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 8\pi^2 \end{aligned}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۳۹۱- گزینه ۱) توجه کنید که

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2) = 3(x-2)(x+1)$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+

بنابراین تابع f روی بازه $(3, 4)$ اکیداً صعودی است و روی دیگر بازه‌ها اکیداً صعودی نیست.

۱۳۹۲- گزینه ۱) تابع مشتق تابع f را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x) = -9x^2 + 9x - 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}, x = \frac{2}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-

بنابراین تابع f روی بازه $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ صعودی است و بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{1}{3}$ است.

۱۳۹۳- گزینه ۴) برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ صعودی باشد باید $f'(x) \geq 0$.

مشتق توابع گزینه‌ها را پیدا می‌کنیم:

گزینه (۱) $y = x^3 - x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 1 \Rightarrow \Delta = 1 > 0$

گزینه (۲) $y = x^3 + x^2 + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 2x \Rightarrow \Delta = 4 > 0$

گزینه (۳) $y = x^3 + x^2 - x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 2x - 1 \Rightarrow \Delta = 16 > 0$

گزینه (۴) $y = x^3 + x^2 + x - 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \Delta = -8 < 0$

واضح است که مشتق تابع گزینه (۴) یعنی عبارت $3x^2 + 2x + 1$ همواره مثبت است و تابع صعودی است.

۱۳۹۴- گزینه ۴) توجه کنید که

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow f''(x) = 2x - 4$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$		-	+

بنابراین تابع f' روی بازه $(3, 5)$ اکیداً صعودی است و روی دیگر بازه‌ها اکیداً صعودی نیست.

۱۳۹۵- گزینه ۲) توجه کنید که همواره $3x^2 - x + 1 > 0$ پس $D_f = \mathbb{R}$.

از طرف دیگر. $f'(x) = \frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2-x+1}}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{6}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+

پس تابع f روی بازه $(-\infty, \frac{1}{6})$ اکیداً نزولی است.

۱۳۹۶- گزینه ۲) ابتدا توجه کنید که $D_f = (0, +\infty)$ و

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 2\sqrt{2x}}{2x^2\sqrt{2x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 2\sqrt{2x} \Rightarrow x^4 = 8x \Rightarrow x = 0, x = 2$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به صورت زیر است:

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+

بنابراین تابع f روی بازه $(0, 2]$ نزولی و روی بازه $[2, +\infty)$ صعودی است و حداکثر مقدار a برابر ۲ است.

۱۳۹۷- گزینه ۳) ابتدا توجه کنید که $D_f = [-1, 2]$ و

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{2-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{2-x} = \sqrt{x+1} \Rightarrow 2-x = x+1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به صورت زیر است:

x	-1	$\frac{1}{2}$	2
$f'(x)$		+	-

(برای تعیین علامت می‌توانید از عددگذاری استفاده کنید. مثلاً $f'(0) > 0$)

پس تابع f روی بازه $[-1, \frac{1}{2}]$ صعودی و روی بازه $[\frac{1}{2}, 2]$ نزولی است. در

نتیجه حداکثر مقدار $b-a$ برابر $\frac{3}{2}$ است.

۱۳۹۸- گزینه ۱) مشتق تابع به صورت زیر است:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

پس $f'(x) > 0$ و در نتیجه تابع همواره صعودی است.

۱۳۹۹- گزینه ۳) توجه کنید که

$$f'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x$$

روی بازه $(\frac{3\pi}{4}, 2\pi)$

$$x > 0, \sin x < 0 \Rightarrow -x \sin x > 0$$

پس تابع f' در این بازه مثبت است و تابع f روی این بازه صعودی است.

۱۴۰۰- گزینه ۲) مشتق تابع به صورت $f'(x) = 3x^2 - 2ax + 3$ است.

برای اینکه تابع اکیداً صعودی باشد باید مشتق آن همواره نامنفی باشد. پس

$$\Delta = 4a^2 - 36 \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq a \leq 3$$

۱۴۰۱-گزینه ۲ به جدول تعیین علامت تابع f' توجه کنید:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-

بنابراین تابع f روی بازه $[-1, 1]$ صعودی است و حداکثر مقدار $b-a$ برابر ۲ است.

۱۴۰۲-گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 5x - 2 &= x^2(x-1) - 3x^2 + 5x - 2 = x^2(x-1) - (3x-2)(x-1) \\ &= (x-1)(x^2 - 3x + 2) = (x-1)(x-1)(x-2) = (x-1)^2(x-2) \end{aligned}$$

بنابراین $D_f = [2, +\infty)$ از طرف دیگر،

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 8x + 5}{2\sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}} = \frac{(3x-5)(x-1)}{2\sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}}$$

بنابراین f' ریشه‌های در بازه $(2, +\infty)$ ندارد و روی این بازه همواره مثبت است. بنابراین f روی بازه $(2, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

۱۴۰۳-گزینه ۴ توجه کنید که $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ و

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt{x^2}} - \frac{1}{x^2} = \frac{\sqrt{x^4} - 3}{3x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^4} = 3 \Rightarrow x^4 = 27 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{27}$$

پس جدول تعیین علامت تابع f' به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$-\sqrt[4]{27}$	0	$\sqrt[4]{27}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+	-

پس تابع f روی بازه‌های $(-\infty, -\sqrt[4]{27})$ و $(\sqrt[4]{27}, +\infty)$ صعودی است و روی بازه‌های $(-\sqrt[4]{27}, 0)$ و $(0, \sqrt[4]{27})$ نزولی است. بنابراین کمترین مقدار a برابر $\sqrt[4]{27}$ است.

۱۴۰۴-گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f = [-3, +\infty)$ و

$$f'(x) = 2x - \frac{8}{2\sqrt{x+3}} = \frac{2x\sqrt{x+3} - 4}{\sqrt{x+3}}$$

مخرج کسر فوق مثبت است، پس باید صورت آن را تعیین علامت کنیم تا علامت $f'(x)$ معلوم شود. بدین منظور ابتدا ریشه‌های صورت کسر فوق را به دست می‌آوریم:

$$2x\sqrt{x+3} - 4 = 0 \Rightarrow x\sqrt{x+3} = 2 \xrightarrow{x>0} x^2(x+3) = 4$$

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^3 - 1 + 3x^2 - 3 = 0$$

$$(x-1)(x^2 + x + 1) + 3(x-1)(x+1) = 0$$

$$(x-1)(x^2 + 4x + 4) = 0 \Rightarrow (x-1)(x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2 \text{ (غ.ق.)}$$

بنابراین جدول تعیین علامت تابع f' به صورت زیر است:

x	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+

پس تابع f روی بازه $[1, +\infty)$ صعودی است و کمترین مقدار a برابر ۱ است.

۱۴۰۵-گزینه ۱ توجه کنید که $D_f = [0, +\infty)$ و برای هر $x > 0$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$3^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{6}} = 2^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به صورت زیر است.

x	0	$\left(\frac{2}{3}\right)^6$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+

(برای تعیین علامت می‌توانید عددگذاری کنید، مثلاً $f'(1) > 0$) بنابراین تابع

روی بازه $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^6, +\infty\right)$ اکیداً نزولی است و حداکثر مقدار a برابر $\left(\frac{2}{3}\right)^6$ است.

۱۴۰۶-گزینه ۲ مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x} - x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 = \frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

پس جدول تعیین علامت $f'(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-	+

(برای تعیین علامت می‌توانید از عددگذاری استفاده کنید، مثلاً $f'(\sqrt{8}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$)

پس تابع f روی بازه‌های $(-\infty, -1]$ و $[1, +\infty)$ نزولی و روی بازه $[-1, 1]$ صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار a برابر ۱ است.

۱۴۰۷-گزینه ۳ تابع مشتق تابع f را به دست می‌آوریم و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

با توجه به مثبت بودن مخرج کسر فوق، جدول تعیین علامت $f'(x)$ به صورت زیر است:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

بنابراین ابتدا تابع در بازه $[0, 1]$ صعودی، سپس در بازه $[1, +\infty)$ نزولی است.

۱۴۰۸-گزینه ۴ از روی شکل معلوم است که تابع f روی بازه $(1, 3)$

مشتق‌پذیر و اکیداً صعودی است، بنابراین $f'(x) > 0$. همچنین، مقادیر تابع f

منفی‌اند، بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) درست‌اند. در مورد گزینه (۴) توجه

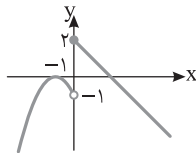
کنید که $(f^2)'(x) = 2f'(x)f(x) < 0$ پس گزینه (۴) درست نیست.

۱۴۱۴-گزینه ۱) نمودار تابع f به صورت زیر است. تابع f در $x=0$

پیوسته نیست، پس مشتق پذیر نیست و $f'(-1)=0$. بنابراین $(0, 2)$ و

$(-1, 0)$ نقاط بحرانی تابع f هستند که فاصله آن‌ها برابر است با

$$\sqrt{(-1-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5}$$



۱۴۱۵-گزینه ۳) تابع در $x=0$ مشتق پذیر نیست (نقطه گوشه‌ای دارد).

عرض نقطه بحرانی برابر است با $f(0)=3$.

۱۴۱۶-گزینه ۲) راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x \geq 1 \\ -x & 0 < x < 1 \\ x^2+2x & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ -1 & 0 < x < 1 \\ 2x+2 & x < 0 \end{cases}$$

تابع f در نقاط $x=0$ و $x=1$ مشتق پذیر نیست. زیرا

$$\begin{cases} f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1) = -1 \\ f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x+2) = 2 \end{cases} \Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

$$\begin{cases} f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1 \\ f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1) = -1 \end{cases} \Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1)$$

از طرف دیگر

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow x=-1$$

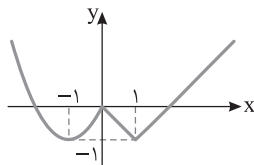
بنابراین نقطه‌های $(-1, -1)$ و $(0, 0)$ و $(1, -1)$ نقطه‌های بحرانی تابع f

هستند که مجموع عرض‌هایشان برابر ۲- است.

راه حل دوم نمودار تابع f به صورت زیر است و این تابع در نقطه‌های $x=0$ و

$x=1$ مشتق پذیر نیست و $f'(-1)=0$. پس $(0, 0)$ ، $(-1, -1)$ و $(1, -1)$

نقاط بحرانی تابع هستند. که مجموع عرض‌های آن‌ها برابر ۲- است.



۱۴۱۷-گزینه ۴) تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \sqrt{x+1}-2=0 \Rightarrow x+1=4 \Rightarrow x=3$$

پس $x=3$ طول تنها نقطه بحرانی تابع است که عرض آن برابر است با ۵-.

۱۴۱۸-گزینه ۳) توجه کنید که $D_f = \mathbb{R}$ و $f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt{(x^2-1)^2}}$

تابع f در $x=1$ و $x=-1$ مشتق پذیر نیست و $f'(0)=0$. پس تابع سه

نقطه بحرانی دارد.

۱۴۰۹-گزینه ۲) مشتق تابع f را به دست می‌آوریم و آن را در بازه $[0, 2\pi]$

تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x) = \cos 2x - \cos x = 2 \cos^2 x - 1 - \cos x = (\cos x - 1)(2 \cos x + 1)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 0, x = 2\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, x = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π
$f'(x)$	-	-	+	-

بنابراین تابع f روی بازه $(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ صعودی است.

۱۴۱۰-گزینه ۲) توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{x^2 + a^2 - 2x(x+a)}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{-x^2 - 2ax + a^2}{(x^2 + a^2)^2}$$

اگر مشتق تابع f نامنفی باشد، آن‌گاه تابع f اکیداً صعودی است. پس باید

عبارت $-x^2 - 2ax + a^2$ نامنفی باشد:

$$-x^2 - 2ax + a^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2ax - a^2 \leq 0 \Rightarrow (x+a)^2 \leq 2a^2$$

$$-\sqrt{2}a \leq x+a \leq \sqrt{2}a \Rightarrow -(\sqrt{2}+1)a \leq x \leq (\sqrt{2}-1)a$$

پس باید $-(\sqrt{2}+1)a \leq 0$ و $(\sqrt{2}-1)a \geq 1$ تا تابع f روی بازه $[0, 1]$

اکیداً صعودی باشد که چون a عددی مثبت است، پس $-(\sqrt{2}+1)a \leq 0$

برقرار است و در نتیجه

$$(\sqrt{2}-1)a \geq 1 \Rightarrow a \geq \frac{1}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow a \geq \sqrt{2}+1$$

۱۴۱۱-گزینه ۱) ابتدا توجه کنید که f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 4x^2(x-3)=0 \Rightarrow x=0, x=3$$

بنابراین تابع f در $x=0$ و $x=3$ نقطه بحرانی دارد و مجموع مقادیر تابع f در

این نقاط را باید حساب کنیم:

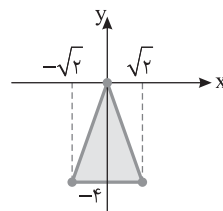
$$f(0)=1, f(3)=-26, f(0)+f(3)=-25$$

۱۴۱۲-گزینه ۲) تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2-2)=0 \Rightarrow x=0, x=\pm\sqrt{2}$$

بنابراین $(0, 0)$ ، $(\sqrt{2}, -4)$ و $(-\sqrt{2}, -4)$ نقاط بحرانی تابع هستند و مساحت

مثلثی که تشکیل می‌دهند برابر است با $\frac{2\sqrt{2} \times 4}{2} = 4\sqrt{2}$.



۱۴۱۳-گزینه ۲) توجه کنید که تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق پذیر

است و

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{(2+\sin x)^2}, f'(x)=0 \Rightarrow \cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}, x=\frac{3\pi}{2}$$

پس این تابع دو نقطه بحرانی در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.

۱۴۱۹- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(x) = |x^2(x-3)| = |x^2||x-3| = x^2|x-3|$$

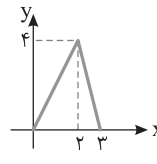
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x^2 & x \geq 3 \\ -x^2 + 3x^2 & x \leq 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & x > 3 \\ -3x^2 + 6x & x < 3 \end{cases}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

همچنین تابع f در $x=3$ مشتق پذیر نیست. پس

$(0,0)$ ، $(2,4)$ و $(3,0)$ نقاط بحرانی تابع اند و

مساحت مثلثی که تشکیل می دهند برابر است با



$$\frac{3 \times 4}{2} = 6$$

۱۴۲۰- گزینه ۳ تابع f در نقطه های $x=0$ ، $x=-1$ و $x=1$ مشتق پذیر

نیست. از طرف دیگر،

$$f(x) = \begin{cases} -x + x^2 - 1 & x \leq -1 \\ -x - x^2 + 1 & -1 < x \leq 0 \\ x - x^2 + 1 & 0 < x \leq 1 \\ x + x^2 - 1 & x > 1 \end{cases}$$

بنابراین

$$f'(x) = \begin{cases} -1 + 2x & x < -1 \\ -1 - 2x & -1 < x < 0 \\ 1 - 2x & 0 < x < 1 \\ 1 + 2x & x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$$

در نتیجه

بنابراین تابع f پنج نقطه بحرانی دارد.

۱۴۲۱- گزینه ۱ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

پس نقاط بحرانی تابع نقاط $(1, -1)$ و $(-1, 3)$ هستند که مجموع عرض های آنها برابر ۲ است.

۱۴۲۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که چون تابع f همه جا مشتق پذیر است،

طول نقاط بحرانی آن ریشه های معادله $f'(x) = 0$ هستند. از طرف دیگر

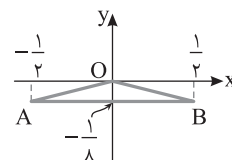
$$f'(x) = 8x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1) \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$$

بنابراین نقطه های بحرانی تابع f نقطه های $O(0,0)$ ، $A(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$ و $B(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$ هستند. از روی شکل زیر معلوم است که

$$AB = \frac{1}{2}, \quad OA = OB = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{64}} = \frac{\sqrt{17}}{8}$$

$$AB = 1, \quad OA = OB = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

بنابراین محیط مثلث OAB برابر است با $1 + 2 \times \frac{\sqrt{17}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{17}}{2}$

۱۴۲۳- گزینه ۲ تابع f در تمام نقاط دامنه اش مشتق پذیر است و

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین تابع دو نقطه بحرانی به طول های $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ دارد.

۱۴۲۴- گزینه ۴ توجه کنید $D_f = (2, +\infty)$ و اگر $x \in D_f$ آن گاه

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$$

بنابراین

$$f'(x) = \frac{-(2x-3)}{2\sqrt{x^2-3x+2}} = -\frac{2x-3}{2(x^2-3x+2)^{3/2}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

و چون $\frac{3}{2}$ در دامنه تابع f نیست و تابع f در همه نقاط دامنه اش مشتق پذیر

است، پس تابع f نقطه بحرانی ندارد.

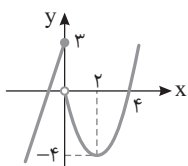
۱۴۲۵- گزینه ۳ توجه کنید که $f'(x) = \frac{4-2x}{3\sqrt{(4x-x^2)^2}}$ تابع f در

$x=0$ و $x=4$ مشتق پذیر نیست و $f'(2)=0$. پس این تابع سه نقطه بحرانی دارد.

۱۴۲۶- گزینه ۳ توجه کنید که $f'(x) = 2x + \frac{2x}{3\sqrt{(x^2-1)^2}}$ تابع f در

نقطه های $x=1$ و $x=-1$ مشتق پذیر نیست و $f'(0)=0$. پس تابع f سه

نقطه بحرانی دارد.

۱۴۲۷- گزینه ۱ نمودار تابع f به صورت

مقابل است و این تابع در نقطه $x=0$ مشتق پذیر

نیست و $f'(2)=0$. پس $(0,3)$ و $(2,-4)$

نقاط بحرانی تابع هستند، که مجموع عرض های

آنها برابر ۱- است.

۱۴۲۸- گزینه ۳ توجه کنید که $f'(x) = \frac{\cos x}{3\sqrt{\sin^2 x}}$ تابع f در $x=0$

مشتق ندارد (مشتق نامتناهی دارد). و در $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = -\frac{\pi}{2}$ مشتق برابر

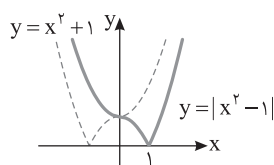
صفر دارد. پس این تابع سه نقطه بحرانی در بازه $(-\pi, \pi)$ دارد.

۱۴۲۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x \geq 0$ ، آن گاه $f(x) = |x^2 - 1|$ و

اگر $x < 0$ ، آن گاه $f(x) = |-x^2 - 1| = x^2 + 1$ بنابراین نمودار تابع f به صورت

زیر است. پس تابع f در نقطه $x=1$ مشتق ندارد (نقطه گوشه ای) و در نقطه

$x=0$ مشتق تابع f برابر صفر است. پس این تابع دو نقطه بحرانی دارد.



۱۴۳۷- گزینه ۳ توجه کنید که $D_f = [-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$ و

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 3}{2\sqrt{x^3 - 3x}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ (غ.ق.ی)} \\ x=-1 \end{cases}$$

پس $x=-1$ طول اکسترمم نسبی تابع f است که با توجه به صورت مسئله طول ماکزیمم نسبی است. بنابراین $f(-1) = \sqrt{2}$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع است.

۱۴۳۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f = [0, +\infty)$ و

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

پس $x=4$ طول اکسترمم (مینیمم) نسبی تابع است و مقدار تابع در این نقطه مورد سؤال است که برابر است با $f(4) = -4$.

۱۴۳۹- گزینه ۱ تابع f مشتق پذیر است، پس در هر نقطه اکسترمم نسبی

آن باید مشتق تابع برابر صفر باشد:

$$f'(x) = -2 \sin x \cos x - 2 \cos x = -2 \cos x (1 + \sin x)$$

$$f'(\frac{\pi}{6}) \neq 0, \quad f'(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad f'(-\frac{\pi}{2}) = 0, \quad f'(\frac{3\pi}{2}) = 0.$$

پس $x = \frac{\pi}{6}$ طول نقطه اکسترمم نسبی تابع f نیست.

۱۴۴۰- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x + \sin x = \sin x (2 \cos x + 1)$$

بنابراین

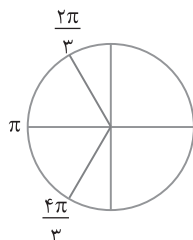
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow{x \in (0, 2\pi)} x = \pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x \in (0, 2\pi)} x = \frac{2\pi}{3}, x = \frac{4\pi}{3}$$

از طرف دیگر،

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	2π
$f'(x)$	+	-	+	-	+

بنابراین تابع f در نقاط به طول $\frac{2\pi}{3}$ و π اکسترمم نسبی دارد، که مجموع آنها برابر 3π است.



۱۴۴۱- گزینه ۴ توجه کنید که

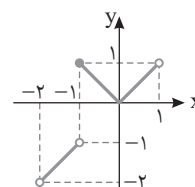
x	$-\infty$	-2	-1	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-	+	+	-

تابع f' در نقطه‌های -2 ، -1 و صفر برابر صفر است و در این نقطه‌ها تغییر علامت می‌دهد. بنابراین تابع f در نقطه‌های -2 ، -1 و صفر اکسترمم نسبی دارد. مجموع طول این نقطه‌ها -3 است.

۱۴۳۰- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x & -2 < x < -1 \\ -x & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است و تابع f در $x=0$ و $x=-1$ نقطه بحرانی دارد، زیرا در نقطه $x=-1$ پیوسته نیست و مشتق پذیر هم نیست و در نقطه $x=0$ مشتق چپ و مشتق راست نابرابر دارد، پس مشتق پذیر نیست.



۱۴۳۱- گزینه ۱ تابع f در نقطه‌های $x=2$ و $x=0$ به ترتیب

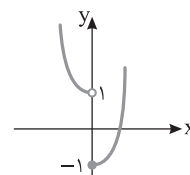
ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی دارد. بنابراین f دو نقطه اکسترمم نسبی دارد.

۱۴۳۲- گزینه ۳ تابع f' در نقطه‌های -4 ، -1 ، 2 و 5 برابر صفر است

و در نقطه‌های -4 ، -1 و 2 تغییر علامت می‌دهد. در نتیجه، این نقطه‌ها، نقطه‌های اکسترمم نسبی تابع f هستند و حاصل ضرب آنها برابر 8 است.

۱۴۳۳- گزینه ۱ نمودار تابع f به صورت زیر است. واضح است که تابع

فقط در نقطه $x=0$ مینیمم نسبی دارد و در هیچ نقطه‌ای ماکزیمم نسبی ندارد.



۱۴۳۴- گزینه ۱ توجه کنید که

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	-	+	+	+

چون $f'(3) = 0$ و تغییر علامت تابع f' در نقطه $x=3$ از منفی به مثبت

است، پس تابع f در نقطه $x=3$ مینیمم نسبی دارد.

۱۴۳۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = x^5 - 5x^3 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2(x^2 - 3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{3}$$

عبارت $f'(x)$ در $x=0$ تغییر علامت نمی‌دهد ولی در $x=\sqrt{3}$ و $x=-\sqrt{3}$ تغییر علامت می‌دهد. پس تابع f دو نقطه اکسترمم نسبی به طول‌های $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ دارد و حاصل ضرب طول آنها برابر -3 است.

۱۴۳۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2+1)^2}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	-

پس تابع f در $x=0$ ماکزیمم نسبی دارد و این ماکزیمم برابر $f(0) = -1$ است.

۱۴۴۹- گزینه ۲ چون $(-1, -1)$ نقطه اکسترم نسبی تابع f است و تابع f

در نقطه -1 مشتق پذیر است، پس $f(-1) = -1$ و $f'(-1) = 0$. از طرف

$$\text{دیگر، } f'(x) = \frac{a(x^2+1) - 2x(ax+b)}{(x^2+1)^2}$$

بنابراین

$$\begin{cases} f(-1) = -1 \\ f'(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-a+b}{2} = -1 \\ \frac{2a+2(-a+b)}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow a=2, b=0$$

پس $a+b=2$

۱۴۵۰- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f = (0, +\infty)$. از طرف دیگر،

$$f'(x) = \frac{k\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(kx+1)}{x} = \frac{2kx - (kx+1)}{2x\sqrt{x}} = \frac{kx-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow kx = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{k}$$

پس طول نقطه مینیمم نسبی تابع f برابر $\frac{1}{k}$ است.

اکنون توجه کنید که

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = 4 \Rightarrow \frac{k \times \frac{1}{k} + 1}{\sqrt{\frac{1}{k}}} = 4 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{k}}} = 4 \Rightarrow 2\sqrt{k} = 4 \Rightarrow k = 4$$

۱۴۵۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2), \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2$$

چون f' در نقطه‌های $x = 2$ و $x = -1$ تغییر علامت می‌دهد، پس نقاط $(-1, -1)$ و $(2, -28)$ نقاط اکسترم نسبی تابع f هستند و فاصله آن‌ها برابر

$$\text{است با } \sqrt{(2+1)^2 + (-28+1)^2} = \sqrt{738}$$

۱۴۵۲- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-x+1) - (2x-1)(x^2+1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2-x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

پس تابع در نقاط $x = 1$ و $x = -1$ اکسترم نسبی دارد. حاصل جمع مقادیر $f(1)$ و $f(-1)$ را می‌خواهیم:

$$f(1) = 2, f(-1) = \frac{2}{3} \Rightarrow f(1) + f(-1) = \frac{8}{3}$$

۱۴۵۳- گزینه ۲ مختصات نقطه اکسترم نسبی در ضابطه تابع صدق می‌کنند:

$$1 = \frac{1+a}{1+b} \Rightarrow a=b, \quad f(x) = \frac{x+a}{x^2+a}$$

از طرف دیگر چون تابع f در دامنه‌اش مشتق پذیر است، پس مشتق آن در نقطه اکسترم نسبی برابر صفر است:

$$f'(x) = \frac{x^2+a-2x(x+a)}{(x^2+a)^2} = \frac{-x^2-2ax+a}{(x^2+a)^2}$$

$$f'(1) = \frac{-1-a}{(a+1)^2} = 0 \Rightarrow a = -1$$

بنابراین $a=b=-1$ و در نتیجه $a+b=-2$.

۱۴۴۲- گزینه ۱ ابتدا طول نقاط ماکزیمم نسبی تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x^2 - 3x + 2) = 4x(x-1)(x-2)$$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$	$+$

پس تابع f در نقطه‌های $x=0$ و $x=2$ مینیمم نسبی و در نقطه $x=1$ ماکزیمم نسبی دارد. مقدار ماکزیمم نسبی تابع برابر است با $f(1) = -1$.

۱۴۴۳- گزینه ۴ ابتدا طول نقاط اکسترم نسبی تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{x^2+3-2x(x+1)}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 1$$

پس تابع f در نقاط $x = -3$ و $x = 1$ اکسترم نسبی دارد.

$$f(-3)f(1) = -\frac{2}{12} \times \frac{2}{4} = -\frac{1}{12}$$

۱۴۴۴- گزینه ۴ توجه کنید که $D_f = [0, +\infty)$ و

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x-3}{2\sqrt{x}} = \frac{2x+x-3}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

پس $x=1$ طول نقطه اکسترم (مینیمم) نسبی تابع f است و مقدار تابع در این نقطه مورد سؤال است که برابر است با $f(1) = -2$.

۱۴۴۵- گزینه ۴ تابع f مشتق پذیر است، پس در هر نقطه اکسترم نسبی

آن، مشتق تابع برابر صفر است:

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x - \cos x = \cos x (2 \sin x - 1)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 0, \quad f'(\pi) \neq 0$$

۱۴۴۶- گزینه ۲ مشتق تابع را به دست می‌آوریم و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x) = -2 \sin x \cos x + \sin x = \sin x (1 - 2 \cos x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \text{ (غ.ق.ق.)} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$		$-$	$+$

(برای تعیین علامت می‌توانید از عددگذاری استفاده کنید. مثلاً $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$)

پس تابع f در نقطه $x = \frac{\pi}{3}$ مینیمم نسبی دارد و مقدار مینیمم نسبی برابر

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4} \text{ است.}$$

۱۴۴۷- گزینه ۱ توجه کنید که $f'(x) = x^2 + 2ax + 1$ ضریب x^2 در

$f'(x)$ مثبت است، پس این عبارت نمی‌تواند همواره منفی باشد، بنابراین برای

اینکه تابع f اکسترم نسبی نداشته باشد، باید $f'(x) \geq 0$ ، یعنی

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 4a^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq a \leq 1$$

۱۴۴۸- گزینه ۴ توجه کنید که تابع f در نقطه $x=7$ مشتق پذیر است و

برای اینکه تابع در این نقطه اکسترم نسبی داشته باشد باید $f'(7) = 0$ ، پس

$$f'(x) = a - \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^4}} \Rightarrow f'(7) = 0 \Rightarrow a - \frac{1}{3\sqrt[3]{8^4}} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{48}$$

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	-	+

بنابراین $x = -3$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است و مقدار ماکزیمم نسبی تابع برابر $f(-3) = 0$ است.

۱۴۵۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که تابع f در تمام نقاط مشتق پذیر است و

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

پس جدول تعیین علامت $f'(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	۰	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	+	-	+	-	+

توجه کنید که مقدار $\cos x$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ مثبت و در بازه‌های

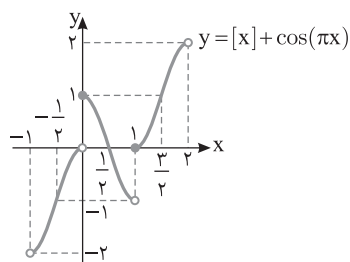
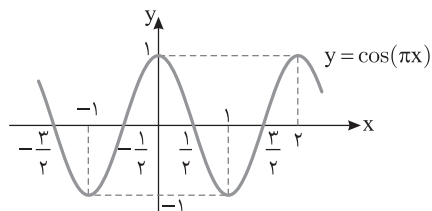
$(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ و $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ منفی است. پس تابع f در نقاط $x = -\frac{\pi}{2}$ و

$x = \frac{\pi}{2}$ ماکزیمم نسبی دارد و در نقطهٔ $x = 0$ مینیمم نسبی دارد.

۱۴۶۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \cos(\pi x) & -1 < x < 0 \\ \cos(\pi x) & 0 \leq x < 1 \\ 1 + \cos(\pi x) & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

اکنون نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y = \cos(\pi x)$ رسم می‌کنیم:



بنابراین تابع f در نقطهٔ $x = 0$ ماکزیمم نسبی دارد و مینیمم نسبی ندارد.

۱۴۶۱- گزینهٔ ۲ چون تابع f همه جا مشتق پذیر است، پس نقاط

اکسترمم نسبی تابع f جواب‌های معادلهٔ $f'(x) = 0$ هستند. توجه کنید که

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

x	$-\infty$	۱	۳	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	+

بنابراین تابع f در نقطهٔ ۱ ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ ۳ مینیمم نسبی دارد.

یعنی $a = 3$ و $b = 1$ ، پس $a - b = 2$.

۱۴۵۴- گزینهٔ ۳ ابتدا طول نقاط اکسترمم‌های نسبی تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{5x}{x^2 + k^2}$$

$$f'(x) = \frac{5(x^2 + k^2 - 2x^2)}{(x^2 + k^2)^2} = \frac{5(k^2 - x^2)}{(x^2 + k^2)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm k$$

پس نقاط $A(k, \frac{5}{2k})$ و $B(-k, \frac{-5}{2k})$ نقاط اکسترمم نسبی تابع هستند.

اختلاف مقدار ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع برابر است با $|\frac{5}{2k} - \frac{-5}{2k}|$. بنابراین

$$|\frac{5}{k}| = 1 \Rightarrow |k| = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \pm \frac{1}{2}$$

۱۴۵۵- گزینهٔ ۳ چون تابع f همه جا مشتق پذیر است، پس مشتق آن در

نقطهٔ اکسترمم نسبی‌اش برابر صفر است:

$$f'(x) = 3ax^2 - b \Rightarrow f'(-1) = 3a - b = 0$$

از طرف دیگر مختصات نقطهٔ اکسترمم نسبی در معادلهٔ تابع صدق می‌کنند:

$$f(-1) = 4 \Rightarrow -a + b + 2 = 4 \Rightarrow -a + b = 2$$

بنابراین $a = 1$ و $b = 3$ ، در نتیجه $ab = 3$.

۱۴۵۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $f'(x) = 3a^2x^2 + 4ax + 1$ و چون

تابع f در نقطه‌ای به طول $x = -1$ ماکزیمم نسبی دارد و در این نقطه

مشتق پذیر است، پس $f'(-1) = 0$. در نتیجه

$$3a^2 - 4a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1, \quad a = \frac{1}{3}$$

اگر $a = 1$ ، آن‌گاه $f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	+

پس تابع f در نقطه‌ای به طول $x = -1$ ماکزیمم نسبی دارد. اگر $a = \frac{1}{3}$ ، آن‌گاه

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$$

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	+

پس تابع f در نقطه‌ای به طول $x = -1$ مینیمم نسبی دارد. بنابراین $a = 1$ تنها

مقدار ممکن برای a است.

۱۴۵۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $D_f = [3, +\infty)$ و

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x-3} = \sqrt{x} \Rightarrow 4(x-3) = x \Rightarrow x = 4$$

پس $x = 4$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع است و مقدار تابع در این نقطه برابر

است با $f(4) = 3$.

۱۴۵۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} = \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2} - 3}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 1 \Rightarrow x = -1, \quad x = -3$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به شکل داده شده است.

از طرف دیگر، مقدار مشتق تابع در نقطه اکسترمم نسبی در صورت وجود برابر صفر است:

$$f'(x) = 2a \cos 2x + b \sin x$$

$$f'(\frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow 2a \cos \frac{2\pi}{3} + b \sin \frac{\pi}{3} = 0$$

$$-a + \frac{b\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow b = \frac{2}{\sqrt{3}}a \quad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=3$ و $b=2\sqrt{3}$

۱۴۶۸- گزینۀ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = 1 - 4 \sin x \cos x = 1 - 2 \sin 2x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

x	۰	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{17\pi}{12}$	2π
$f'(x)$	+	۰	-	۰	+	+
		max	min	max	min	

بنابراین تابع f در بازه $(0, 2\pi)$ دو نقطه ماکزیمم نسبی و دو نقطه مینیمم نسبی دارد.

۱۴۶۹- گزینۀ ۳ ابتدا طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f را به دست

می‌آوریم:

$$f(x) = \cos^2 x - \cos x + 1$$

$$f'(x) = -2 \sin x \cos x + \sin x = \sin x (1 - 2 \cos x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{4}$
$f'(x)$	-	۰	+	-
$f(x)$		↘	↗	↘
		min نسبی	max نسبی	

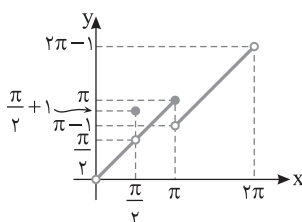
پس تابع f در نقطه $x = \pi$ ماکزیمم نسبی دارد و مقدار ماکزیمم نسبی آن برابر $f(\pi)$ ، یعنی ۳ است.

۱۴۷۰- گزینۀ ۲ ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$x \in (0, \pi) - \{\frac{\pi}{2}\} \Rightarrow 0 \leq \sin x < 1 \Rightarrow [\sin x] = 0 \Rightarrow f(x) = x$$

$$x \in (\pi, 2\pi) \Rightarrow -1 \leq \sin x < 0 \Rightarrow [\sin x] = -1 \Rightarrow f(x) = x - 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2} + 1$$



پس نمودار تابع f به صورت مقابل است. واضح است که این

تابع در نقاط $x = \pi$ و $x = \frac{\pi}{2}$

ماکزیمم نسبی دارد ولی مینیمم نسبی ندارد.

۱۴۶۲- گزینۀ ۱ چون تابع f روی دامنه‌اش مشتق پذیر است، پس نقطه‌های اکسترمم نسبی آن جواب‌های معادله $f'(x) = 0$ هستند. بنابراین $f'(1) = 0$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{(2x-a)(x+1) - (x^2 - ax)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - a}{(x+1)^2}$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow \frac{1+2-a}{4} = 0 \Rightarrow a=3$$

۱۴۶۳- گزینۀ ۱ توجه کنید که $D_f = [0, +\infty)$ و

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x=1$$

پس $x=1$ طول نقطه اکسترمم نسبی تابع f است.

۱۴۶۴- گزینۀ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f = [-\frac{1}{2}, +\infty)$ و

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{2x-1} = 1 \Rightarrow 2x-1=1 \Rightarrow x=1$$

پس $x=1$ طول نقطه اکسترمم (مینیمم) نسبی تابع است و مقدار تابع در این نقطه برابر است با $f(1) = 0$.

x	$\frac{1}{2}$	۱	$+\infty$
$f'(x)$	-	۰	+
$f(x)$		↘	↗
		min نسبی	

۱۴۶۵- گزینۀ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 36x = x(4x^2 + 3ax + 36)$$

برای اینکه تابع f سه نقطه اکسترمم نسبی داشته باشد باید علامت $f'(x)$ سه نقطه تغییر کند. بنابراین باید معادله $f'(x) = 0$ سه جواب داشته باشد.

چون $x=0$ یک جواب این معادله است، پس باید معادله $4x^2 + 3ax + 36 = 0$ دو جواب غیر صفر داشته باشد. پس

$$\Delta = 9a^2 - 16 \times 36 > 0 \Rightarrow a^2 > \frac{36 \times 16}{9} \Rightarrow |a| > 8$$

۱۴۶۶- گزینۀ ۴ نمودار تابع f به صورت زیر است که نقطه $(0, k-1)$

هرجایی روی محور y می‌تواند باشد. چون تابع مینیمم نسبی دارد، پس این نقطه باید پایین‌تر از نقطه $(0, 1)$ باشد چون

در غیر این صورت تابع در نقطه $x=0$

ماکزیمم نسبی دارد و مینیمم نسبی ندارد.

بنابراین

$$k-1 < 1 \Rightarrow k < 2$$

۱۴۶۷- گزینۀ ۴ ابتدا توجه کنید که مختصات نقطه اکسترمم نسبی در

معادله تابع صدق می‌کند:

$$f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a \sin \frac{2\pi}{3} - b \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = a\sqrt{3} - \sqrt{3} \quad (1)$$

۱۴۷۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4) = 0 \Rightarrow x=0, x=4 \text{ (غ.ق.)}$$

پس برای مشخص کردن مقدار مینیمم مطلق باید مقادیر $f(0)$ ، $f(3)$ و $f(-1)$ را مقایسه کنیم: $f(0)=0$ ، $f(-1)=-7$ و $f(3)=-27$. پس مقدار مینیمم مطلق تابع برابر -27 است.

۱۴۷۲- گزینه ۲ توجه کنید که تابع f همه جا مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

بنابراین باید مقادیر $f(1)$ ، $f(-1)$ و $f(2)$ را مقایسه کنیم تا اکسترم‌های مطلق تابع مشخص شوند: $f(1)=k-2$ ، $f(-1)=k+2$ و $f(2)=k+2$. پس $k+2$ ماکزیمم مطلق و $k-2$ مینیمم مطلق تابع f در بازه $[-1, 2]$ هستند. بنابراین

$$k+2+k-2=4 \Rightarrow k=2$$

۱۴۷۳- گزینه ۱ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است و

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1-2x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

پس باید مقادیر $f(2)$ ، $f(1)$ و $f(-1)$ را مقایسه کنیم تا اکسترم‌های مطلق تابع مشخص شوند: $f(1)=1$ ، $f(-1)=-1$ و $f(2)=\frac{4}{5}$. پس ماکزیمم مطلق تابع برابر ۱ و مینیمم مطلق آن برابر -1 است و حاصل ضرب آن‌ها برابر -1 است.

۱۴۷۴- گزینه ۴ تابع f مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 5x^4 - 4x^3 - 9x^2 = x^2(5x^2 - 4x - 9)$$

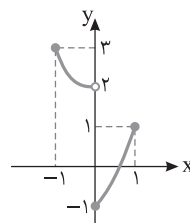
$$f'(x)=0 \Rightarrow x=0, x=-1, x=\frac{9}{5} \text{ (غ.ق.)}$$

بنابراین باید مقادیر $f(-2)$ ، $f(-1)$ و $f(1)$ را مقایسه کنیم تا مقدار ماکزیمم مطلق تابع معلوم شود (توجه کنید که چون f' در نقطه $x=0$ تغییر علامت نمی‌دهد، مقدار $f(0)$ را حساب نمی‌کنیم):

$$f(-2)=-15, \quad f(-1)=10, \quad f(1)=6$$

بنابراین $(-1, 10)$ نقطه ماکزیمم مطلق تابع f روی بازه $[-2, 1]$ است. بنابراین $a+b=9$ و $b=10$ ، $a=-1$.

۱۴۷۵- گزینه ۲ راه حل اول نمودار تابع f



به صورت مقابل است. از روی این شکل معلوم است که ماکزیمم مطلق تابع f برابر ۳ و مینیمم مطلق تابع f برابر -1 است. پس مجموع آن‌ها برابر ۲ است.

راه حل دوم تابع $y=2-x^3$ روی بازه $[-1, 0]$ اکیداً نزولی است. $(y' = -3x^2 < 0)$ و مقادیرش در بازه $[f(0), f(-1)]$ یعنی $(2, 3]$ هستند. تابع $y=x^2+x-1$ روی بازه $[0, 1]$ اکیداً صعودی است $(y' = 2x+1 > 0)$ و مقادیرش در بازه $[f(0), f(1)]$ یعنی $[-1, 1]$ هستند. بنابراین ماکزیمم مطلق تابع f برابر ۳ و مینیمم مطلق آن برابر -1 است، که مجموعشان می‌شود ۲.

۱۴۷۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 + 3x & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & 0 < x < 1 \\ 3x^2 + 3 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

پس تابع f در $x=0$ مشتق پذیر نیست. بنابراین باید مقادیر $f(1)$ ، $f(-1)$ و $f(0)$ را مقایسه کنیم تا اکسترم‌های مطلق تابع مشخص شوند:

$$f(0)=0, \quad f(1)=-2, \quad f(-1)=-4$$

پس ماکزیمم مطلق تابع برابر صفر و مینیمم مطلق آن برابر -4 است و مجموع این دو مقدار برابر -4 است.

۱۴۷۷- گزینه ۲ توجه کنید که تابع f در نقطه $x=0$ مشتق پذیر نیست. از طرف دیگر،

$$f(x) = \begin{cases} -(x^2 + 4x) & -1 \leq x < 0 \\ -(x^2 - 4x) & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

بنابراین

$$f'(x) = \begin{cases} -(2x+4) & -1 < x < 0 \\ -(2x-4) & 0 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=2$$

اکنون توجه کنید که $f(-1)=3$ ، $f(0)=0$ ، $f(2)=4$ و $f(3)=3$. بنابراین ماکزیمم مطلق تابع f برابر ۴ است.

۱۴۷۸- گزینه ۳ توجه کنید که $D_f = [0, 8]$ و تابع f روی بازه $(0, 8)$ مشتق پذیر است و

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{8-x}} = \frac{\sqrt{8-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{8-x}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \sqrt{8-x} = \sqrt{x} \Rightarrow 8-x=x \Rightarrow x=4$$

پس باید مقادیر $f(0)$ ، $f(4)$ و $f(8)$ را مقایسه کنیم تا کمترین و بیشترین مقدار تابع معین شوند:

$$f(0)=\sqrt{8}, \quad f(4)=\sqrt{8}, \quad f(8)=4$$

بنابراین ۴ و $\sqrt{8}$ به ترتیب بیشترین و کمترین مقدار تابع هستند و حاصل ضرب آن‌ها برابر $8\sqrt{2}$ است.

۱۴۷۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f = [-2, 2]$ و تابع f روی بازه $(-2, 2)$ مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} + x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = -x$$

$$\xrightarrow{x \leq 0} 4-x^2 = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \text{ (غ.ق.)} \\ x=-\sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین باید $f(-2)$ ، $f(2)$ و $f(-\sqrt{2})$ را مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع در بازه $[-2, 2]$ مشخص شوند: $f(2)=-2$ ، $f(-2)=-2$ و $f(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$. بنابراین کمترین مقدار ۲ و بیشترین مقدار تابع است و نسبت آن‌ها برابر $-\sqrt{2}$ است.

۱۴۸۵- گزینه ۲) توجه کنید که $f'(x) = 3mx^2 + 6mx$ چون

$$f''(x) = 6mx + 6m, \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1$$

پس تنها نقطه بحرانی تابع f' نقطه $x = -1$ است و بیشترین مقدار تابع f' به ازای $x = -1 \Rightarrow 3m - 6m = 12 \Rightarrow m = -4$ به دست می‌آید.

۱۴۸۶- گزینه ۳) ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & 2 \leq x \leq 3 \\ -x^2 + 3x - 2 & 0 \leq x < 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & 2 < x < 3 \\ -2x + 3 & 0 < x < 2 \end{cases}$$

بنابراین تابع f در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر نیست و $f'(\frac{3}{2}) = 0$ پس باید

مقادیر $f(0), f(2), f(3)$ و $f(\frac{3}{2})$ را مقایسه کنیم تا مقادیر اکسترم‌های مطلق

تابع به دست آیند: $f(0) = -2, f(2) = 0, f(3) = 2, f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}$ بنابراین

مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر ۲ و مقدار مینیمم مطلق آن برابر -۲ است و اختلاف این دو مقدار برابر ۴ است.

۱۴۸۷- گزینه ۴) توجه کنید که $D_f = [0, 5]$ و تابع f روی بازه $(0, 5)$

مشتق پذیر است و

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{2\sqrt{5-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{5-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{5-x} = \sqrt{x} \Rightarrow 4(5-x) = x \Rightarrow x = 4$$

پس باید مقادیر $f(0), f(4), f(5)$ را با هم مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار و

کمترین مقدار تابع به دست آیند:

$$f(0) = \sqrt{5}, \quad f(4) = 5, \quad f(5) = 2\sqrt{5}$$

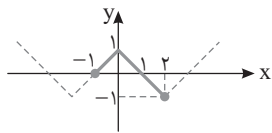
پس بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع به ترتیب برابر است با ۵ و $\sqrt{5}$. بنابراین حاصل ضرب بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع f برابر $5\sqrt{5}$ است.

۱۴۸۸- گزینه ۲) توجه کنید که $f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2}$ پس

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

چون تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

پس کمترین مقدار تابع f روی بازه $(0, +\infty)$ به ازای $x = 2$ به دست می‌آید و برابر است با $f(2) = 12$.



۱۴۸۹- گزینه ۱) نمودار تابع f

به صورت مقابل است و حداکثر مقدار تابع در بازه $[-1, 2]$ برابر ۱ است.

۱۴۹۰- گزینه ۴) تابع f مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x + \cos x = \cos x (1 + 2 \sin x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x (2 \sin x + 1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}$$

پس باید مقادیر $f(-\frac{\pi}{6}), f(0), f(\frac{\pi}{2})$ را مقایسه کنیم تا کمترین مقدار

تابع معین شود: $f(0) = 0, f(-\frac{\pi}{6}) = 0, f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{4}$

پس $-\frac{1}{4}$ کمترین مقدار تابع f در بازه $[-\frac{\pi}{6}, 0]$ است.

۱۴۸۰- گزینه ۱) تابعی مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 2 \cos 2x + 2 \cos x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos 2x + \cos x = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \text{ (ق. ق. غ)} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

پس باید مقادیر $f(0), f(-\frac{\pi}{3}), f(-\frac{\pi}{2})$ را مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار

تابع f در بازه $[-\frac{\pi}{3}, 0]$ مشخص شود:

$$f(0) = 0, \quad f(-\frac{\pi}{3}) = -2, \quad f(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

پس بیشترین مقدار تابع f روی بازه $[-\frac{\pi}{3}, 0]$ برابر صفر است.

۱۴۸۱- گزینه ۲) تابع f در تمام نقاط مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 4x^3 + 32x, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 4x(x^2 + 8) = 0 \Rightarrow x = 0$$

پس باید مقادیر $f(0), f(1), f(-1)$ را مقایسه کنیم تا اکسترم‌های مطلق

تابع را معین کنیم: $f(0) = 1, f(1) = 18, f(-1) = 18$ پس ماکزیمم مطلق

تابع ۱۸ و مینیمم مطلق آن ۱ است که اختلاف آن‌ها برابر ۱۷ است.

۱۴۸۲- گزینه ۴) توجه کنید که $f(x) = 2 + \frac{x^2}{x+1}$ بنابراین

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2 \text{ (ق. ق. غ)}$$

بنابراین باید مقادیر $f(-\frac{1}{2}), f(0), f(2)$ را حساب کنیم:

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}, \quad f(0) = 2, \quad f(2) = \frac{10}{3}$$

در نتیجه، کمترین مقدار تابع f روی بازه $[-\frac{1}{2}, 2]$ برابر ۲ است.

۱۴۸۳- گزینه ۳) ابتدا توجه کنید که $f'(x) = 3x^2 - 6x$ پس

$$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

پس برای پیدا کردن مقدار مینیمم مطلق تابع f روی بازه $[-1, 2]$ باید مقادیر

$f(0), f(2), f(-1)$ را مقایسه کنیم. چون $f(0) = a, f(-1) = a - 4$ و

$f(2) = a - 4$ بنابراین مقدار مینیمم مطلق تابع f روی بازه $[-1, 2]$ برابر

$a - 4$ است. پس $a - 4 = 4 \Rightarrow a = 8$

۱۴۸۴- گزینه ۲) تابع f مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 10x^9 - 10 = 10(x^9 - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین باید مقادیر $f(1), f(-1), f(2)$ را مقایسه کنیم تا مقدار

مینیمم مطلق تابع معلوم شود: $f(1) = -8, f(-1) = 12, f(2) = 1005$

پس $(1, -8)$ نقطه مینیمم مطلق تابع f روی بازه $[-1, 2]$ است. بنابراین

$$a = 1, \quad b = -8, \quad a + b = -7$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2x^3 + x - 3 = 0 \Rightarrow 2(x^3 - 1) + (x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(2x^2 + 2x + 3) = 0 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین کمترین مقدار تابع y به ازای $x = 1$ به دست می‌آید. به این ترتیب، B نقطه $(1, 1)$ است.

۱۴۹۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که خط d از نقطه‌های $(0, 4)$ و $(4, 0)$ گذشته است، پس معادله‌اش به صورت $y = 4 - x$ است. در نتیجه

$$x^2 + y^2 = x^2 + (4 - x)^2 = 2(x^2 - 4x + 8)$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x) = 2(x^2 - 4x + 8)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = 4x - 8 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f به ازای $x = 2$ به دست می‌آید و برابر است با ۸.

۱۴۹۷- گزینه ۲ فرض کنید طول نقطه C برابر $-x$ باشد. در این صورت طول نقطه B هم برابر $-x$ است. نقطه B روی خطی است که از

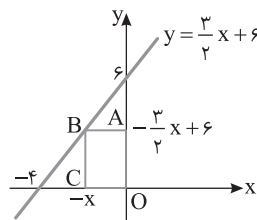
نقطه‌های $(-4, 0)$ و $(0, 6)$ می‌گذرد. معادله این خط $y = \frac{3}{2}x + 6$ است.

بنابراین عرض نقطه B برابر $-\frac{3}{2}x + 6$ است. به این ترتیب،

$$OABC = x(-\frac{3}{2}x + 6)$$

پس باید بیشترین مقدار تابع $y = x(-\frac{3}{2}x + 6)$ را پیدا کنیم. چون

$y' = -3x + 6$ ، اگر $y' = 0$ ، آن‌گاه $x = 2$. بنابراین بیشترین مقدار تابع y ،



یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل $OABC$ به ازای $x = 2$ به دست می‌آید و برابر است با $2 \times 3 = 6$.

۱۴۹۸- گزینه ۴ تابع هزینه را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$C = 100(xl) + 60(2xh + 2lh) = 100xl + 120h(x + l)$$

$$= 100x(2x) + 120h(x + 2x) = 200x^2 + 360xh \quad (1)$$

اکنون توجه کنید که

$$100 \Rightarrow x \times l \times h = 100 \Rightarrow x(2x)h = 100 \Rightarrow h = \frac{50}{x^2} \quad (2)$$

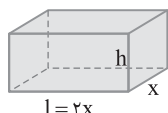
با جای گذاری رابطه (۲) در رابطه (۱) به دست می‌آید

$$C(x) = 200x^2 + 360x \left(\frac{50}{x^2} \right) = 200x^2 + \frac{18000}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

نقطه بحرانی تابع C را به دست می‌آوریم:

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 400x - \frac{18000}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{400x^3 - 18000}{x^2} = 0$$

$$400x^3 - 18000 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$$



پس کمترین مقدار تابع C به ازای

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \text{ به دست می‌آید.}$$

۱۴۹۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $y = 4 - x$ و در نتیجه

$$xy = x(4 - x)$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع $f(x) = 4x - x^2$ روی بازه $[0, 1]$ را می‌خواهیم:

$$f'(x) = 4 - 2x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \quad (\text{غ.ق.})$$

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 3 = f_{\max}$$

بنابراین بیشترین مقدار ممکن xy برابر ۳ است.

۱۴۹۲- گزینه ۲ فرض کنید طول ضلع‌های باغچه x و y باشند (شکل را ببینید). در این صورت، طبق فرض $x + y + \frac{x}{y} = 120$ ، یعنی $\frac{3}{y}x + y = 120$.

بنابراین $xy = x(120 - \frac{3}{y}x) = 120x - \frac{3}{2}x^2$ مساحت باغچه. بنابراین باید بیشترین مقدار

تابع $f(x) = x(120 - \frac{3}{2}x)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = 120 - 3x, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 40$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f ، یعنی بیشترین مقدار مساحت باغچه به ازای $x = 40$ به دست می‌آید و برابر است با $40 \times 60 = 2400$ مساحت باغچه.

۱۴۹۳- گزینه ۳ فرض کنید شعاع‌های دایره‌ها r_1 و r_2 باشد. در این صورت

$$2\pi r_1 + 2\pi r_2 = \pi \Rightarrow r_1 + r_2 = \frac{1}{2}$$

از طرف دیگر،

$$\text{مجموع مساحت‌ها} = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi(r_1^2 + (\frac{1}{2} - r_1)^2) = \pi(r_1^2 - r_1 + \frac{1}{4})$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(r_1) = r_1^2 - r_1 + \frac{1}{4}$ را پیدا کنیم. چون

$$f'(r_1) = 2r_1 - 1, \quad f'(r_1) = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f وقتی به دست می‌آید که $r_1 = \frac{1}{2}$ و برابر است با

$$\frac{25\pi}{4}. \text{ در نتیجه مجموع مساحت‌های دایره‌ها حداقل } \frac{25\pi}{4} \text{ است.}$$

۱۴۹۴- گزینه ۳ فاصله نقطه‌های مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{(3x - x)^2 + (x + 6 - 3)^2} = \sqrt{4x^2 + 6x + 9}$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x) = \sqrt{4x^2 + 6x + 9}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که همواره $4x^2 + 6x + 9 > 0$ و

$$f'(x) = \frac{4x + 3}{\sqrt{4x^2 + 6x + 9}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$$

چون تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد، پس کمترین مقدار آن به ازای $x = -\frac{3}{4}$ به دست می‌آید.

۱۴۹۵- گزینه ۲ مختصات نقطه B به صورت (x, x^2) است. بنابراین

$$AB = \sqrt{(x - 3)^2 + (x^2 - 0)^2} = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}$$

اگر $y = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}$ ، آن‌گاه $y' = \frac{2x^3 + x - 3}{\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}}$ و در نتیجه

۱۵۰۴- گزینه ۱ توجه کنید که $x_1 + x_2 = -1$ و

$$x_1 x_2 = -(m^2 + m + 1)$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2) \quad \text{بنابراین}$$

$$= -(1 + 3(m^2 + m + 1)) = -3m^2 - 3m - 4$$

بنابراین باید بیشترین مقدار ممکن تابع $f(m) = -3m^2 - 3m - 4$ را پیدا

$$\text{کنیم. توجه کنید که } f'(m) = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \quad f'(m) = -6m - 3$$

چون تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد و

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} f(m) = \lim_{m \rightarrow +\infty} f(m) = -\infty$$

پس بیشترین مقدار تابع f به ازای $m = -\frac{1}{2}$ به دست می‌آید و برابر است با

$$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{13}{4}$$

۱۵۰۵- گزینه ۴ فرض کنید $OB = BC = x$. توجه کنید که با

نمادگذاری شکل زیر $s = \alpha + t$ ، در نتیجه

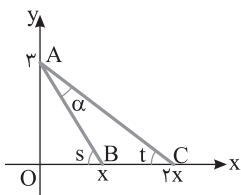
$$\tan s = \tan(\alpha + t) = \frac{\tan \alpha + \tan t}{1 - \tan \alpha \tan t} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{\tan \alpha + \frac{3}{2x}}{1 - \tan \alpha \times \frac{3}{2x}}$$

بنابراین اگر فرض کنیم $y = \frac{3}{2x}$ ، به دست می‌آید

$$2y = \frac{\tan \alpha + y}{1 - \tan \alpha y} \Rightarrow 2y - 2y^2 \tan \alpha = \tan \alpha + y \Rightarrow \tan \alpha = \frac{y}{1 + 2y^2}$$

اگر فرض کنیم $f(y) = \frac{y}{1 + 2y^2}$ ، آن‌گاه $f'(y) = \frac{1 - 2y^2}{(1 + 2y^2)^2}$ ، بنابراین

$$f'(y) = 0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$



پس بیشترین مقدار تابع f ، یعنی بیشترین

مقدار $\tan \alpha$ به ازای $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ به دست می‌آید.

۱۵۰۶- گزینه ۱ با نمادگذاری شکل زیر معلوم می‌شود که بنابر قضیه

پیتاگورس $y^2 + x^2 = 1$ ، پس $y = \sqrt{1 - x^2}$. در نتیجه مساحت ذوزنقه مورد نظر

برابر است با $\frac{1}{2}y(1 + 2x) = y(1 + x) = \sqrt{1 - x^2}(1 + x)$ ، بنابراین باید

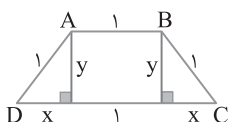
بیشترین مقدار تابع $f(x) = \sqrt{1 - x^2}(1 + x)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{-x(1+x)}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} = \frac{-2x^2 - x + 1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, \quad x = -1 \quad (\text{غ.ق.})$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f به ازای

$x = \frac{1}{2}$ به دست می‌آید و در این صورت



$$CD = 2$$

۱۴۹۹- گزینه ۴ اگر قطار با سرعت ثابت ۷ کیلومتر بر ساعت حرکت

کند، آن‌گاه

$$C = 2000t + (4v^2)t$$

$$C = 2000(\frac{x}{v}) + 4v^2(\frac{x}{v})$$

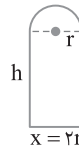
$$C(v) = \frac{2000}{v} + 4v \quad \text{هزینه ۱ کیلومتر حرکت}$$

بنابراین

$$C'(v) = -\frac{2000}{v^2} + 4, \quad C'(v) = 0 \Rightarrow v^2 = 500 \Rightarrow v = 10\sqrt{5}$$

۱۵۰۰- گزینه ۴ باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد.

$$9 = 2h + x + \frac{1}{2}(2\pi r) = 9 \Rightarrow 2h + 2r + \pi r = 9$$



$$h = \frac{9}{2} - r - \frac{\pi r}{2}$$

مساحت نیم دایره + مساحت مستطیل: $S =$ مساحت پنجره

$$S(r) = 2r(\frac{9}{2} - r - \frac{\pi r}{2}) + \frac{1}{2}\pi r^2 = -(\frac{\pi+4}{2})r^2 + 9r$$

$$S'(r) = -(\pi+4)r + 9, \quad S'(r) = 0 \Rightarrow r = \frac{9}{\pi+4}$$

۱۵۰۱- گزینه ۴ توجه کنید که $y = \frac{f}{x}$ و در نتیجه $x + y = x + \frac{f}{x}$

بنابراین کمترین مقدار تابع $f(x) = x + \frac{f}{x}$ با دامنه $[\frac{1}{2}, 3]$ را می‌خواهیم:

$$f'(x) = 1 - \frac{f}{x^2}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = f \Rightarrow x = 2, \quad x = -2 \quad (\text{غ.ق.})$$

پس برای پیدا کردن مینیمم مطلق تابع f روی بازه $[\frac{1}{2}, 3]$ باید مقادیر $f(\frac{1}{2})$ ،

$f(2)$ و $f(3)$ را مقایسه کنیم: $f(\frac{1}{2}) = \frac{17}{2}$ ، $f(3) = \frac{13}{3}$ و $f(2) = 4 = f_{\min}$

پس کمترین مقدار $x + y$ برابر ۴ است.

۱۵۰۲- گزینه ۲ چون $x - y = 2$ ، پس $y = x - 2$ ، در نتیجه

$$x^3 - y^3 = x^3 - (x-2)^3 \Rightarrow f(x) = 6x^2 - 12x + 8 \Rightarrow f'(x) = 12x - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x - 12 = 0 \Rightarrow x = 1$$

چون تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

پس کمترین مقدار تابع f به ازای $x = 1$ به دست می‌آید و برابر است با

$$f(1) = 2$$

۱۵۰۳- گزینه ۱ فرض می‌کنیم طول ضلع زمین در امتداد شمال - جنوب

برابر x و در امتداد شرق - غرب برابر y باشد. در این صورت، $xy = 10000$

و هزینه نرده کشی برابر است با

$$S = 15000(2x) + 60000(2y) = 30000x + 120000y = 3 \times 10^4 x + \frac{12 \times 10^4}{x}$$

بنابراین $S' = 3 \times 10^4 - \frac{12 \times 10^4}{x^2}$ و اگر $S' = 0$ ، $x = 200$ ، بنابراین کمترین

مقدار تابع S به ازای $x = 200$ به دست می‌آید. در این حالت، طول یک ضلع

زمین برابر ۲۰۰ است و طول ضلع دیگر زمین برابر است با $\frac{10000}{200} = 50$

بنابراین محیط زمین برابر است با $2(200 + 50) = 500$.

۱۵۱۱- گزینه ۳ توجه کنید که $y = 4 - x$ و چون $y < 0$ ، پس $x > 4$ و

باید بیشترین مقدار تابع

$$f(x) = x^2 + (4-x)^2, \quad x \in (4, +\infty)$$

را پیدا کنیم. از طرف دیگر،

$$f'(x) = 2x - 2(4-x) = 2x - 8 + 2x = 4x - 8$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2, x = \frac{4}{3} \text{ (غ.ق.)}$$

بنابراین تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد و چون

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 16, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad f(2) = 28$$

پس بیشترین مقدار ممکن تابع f برابر ۲۸ است.

۱۵۱۲- گزینه ۳ چون $2x + y = 8$ ، پس $y = 8 - 2x$ و

$$xy^3 = x(8-2x)^3 = 8x(4-x)^3$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x) = 8x(4-x)^3$ را پیدا کنیم. توجه

$$f'(x) = 8(4-x)^3 - 24x(4-x)^2 = 32(4-x)^2(1-x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 4, x = 1$$

چون تابع f' در $x = 4$ تغییر علامت نمی‌دهد، پس تابع f فقط در نقطه $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{، همچنین،}$$

پس بیشترین مقدار تابع f به ازای $x = 1$ به دست می‌آید و برابر است با

$$f(1) = 216$$

۱۵۱۳- گزینه ۳ فرض کنید P نقطه (x, y)

باشد. چون نقطه P روی سهمی به معادله $y = x^2 - 5x$

است، پس نقطه P نقطه $(x, x^2 - 5x)$ است و مجموع

$$x + x^2 - 5x = x^2 - 4x \text{ با } x + x^2 - 5x = x^2 - 4x$$

البته چون P نقطه‌ای زیر محور x است، پس $0 < x < 5$.

به این ترتیب، باید کمترین مقدار تابع $f(x) = x^2 - 4x$ را روی بازه $(0, 5)$

$$f'(x) = 2x - 4, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

پیدا کنیم. توجه کنید که

چون تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد، پس کمترین مقدار آن به ازای $x = 2$

به دست می‌آید و برابر است با $4 - 8 = -4$.

۱۵۱۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\frac{1}{2}(\Delta x)(12 + x^2 + 8x + 4) = \frac{1}{2}(\Delta x)(x^2 + 8x + 16)$$

$$\text{بنابراین باید بیشترین مقدار تابع } f(x) = \frac{1}{2}(\Delta x)(x^2 + 8x + 16)$$

کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 8x + 16) + (\Delta x)(x + 4) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x + 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -4 \text{ (غ.ق.)}$$

توجه کنید که به ازای $x = -4$ ، طول قاعده بزرگ دوزنقه عددی منفی می‌شود،

بنابراین قابل قبول نیست. بنابراین بیشترین مقدار تابع f ، یعنی بیشترین

مقدار مساحت دوزنقه مورد نظر به ازای $x = 2$ به دست می‌آید و برابر است با

$$\frac{1}{2}(3)(36) = 54$$

۱۵۰۷- گزینه ۳ توجه کنید که

$$2\text{lit} = 2000\text{cm}^3 \Rightarrow \pi r^2 h = 2000 \Rightarrow h = \frac{2000}{\pi r^2}$$

سطح جانبی + مساحت قاعده $S =$ مساحت کل استوانه

$$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{2000}{\pi r^2}\right) = \pi r^2 + \frac{4000}{r}$$

پس

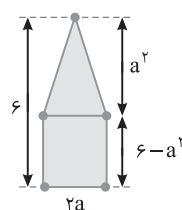
$$S'(r) = 2\pi r - \frac{4000}{r^2}, \quad S'(r) = 0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2000}{\pi}}$$

۱۵۰۸- گزینه ۳ این پنج ضلعی از یک مستطیل به ابعاد $2a$ ، $6 - a^2$ و

یک مثلث به ارتفاع a^2 و قاعده $2a$ تشکیل شده است. بنابراین مساحت آن

$$\text{برابر است با } S(a) = 2a(6 - a^2) + \frac{1}{2}a^2(2a) = 12a - a^3$$

$$S'(a) = 12 - 3a^2, \quad S'(a) = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2, \quad a = -2 \text{ (غ.ق.)}$$



پس نقطه $(2, 16)$ ، نقطه ماکزیمم تابع S

است و در نتیجه بیشترین مقدار مساحت

پنج ضلعی برابر ۱۶ است.

۱۵۰۹- گزینه ۱ فرض کنید طول نقطه D برابر x باشد. در این

صورت، چون نقطه D روی نمودار تابع $y = x^2$ است، پس عرض آن برابر

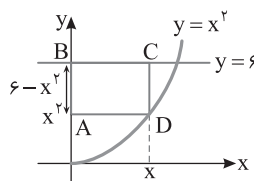
x^2 است. به این ترتیب عرض نقطه A هم برابر x^2 است و در نتیجه

$AB = 6 - x^2$. بنابراین $2(x + 6 - x^2) =$ محیط مستطیل $ABCD$. اگر

$$y = 2(x + 6 - x^2), \quad \text{آن گاه } y' = 2 - 4x \text{ و در نتیجه } y' = 0, \text{ پس } x = \frac{1}{2}.$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع y ، یعنی بیشترین مقدار محیط مستطیل $ABCD$

$$\text{به ازای } x = \frac{1}{2} \text{ به دست می‌آید و برابر است با } \frac{25}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + 6 - \frac{1}{4}\right) = \frac{25}{2}.$$



۱۵۱۰- گزینه ۲ فرض کنید طول نقطه D برابر x باشد. در این صورت

طول نقطه C هم برابر x است و چون نقطه C روی خط $y = -x + 3$ است،

پس عرض آن برابر $-x + 3$ است. بنابراین عرض نقطه B هم برابر $-x + 3$

است و چون این نقطه روی خط $y = x + 5$ است، پس طول نقطه B برابر است با

$$5 - (-x + 3) = x + 2, \text{ یعنی } -x - 2. \text{ به این ترتیب، } BC = x - (-x - 2) = 2x + 2.$$

در نتیجه

$$ABCD \text{ مساحت مستطیل } = BC \times CD = (2x + 2)(-x + 3)$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $y = (2x + 2)(-x + 3)$ را پیدا کنیم. توجه

کنید که

$$y' = 2(-x + 3) + (-1)(2x + 2) = -4x + 4, \quad y' = 0 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین بیشترین مقدار ممکن تابع y ، یعنی بیشترین مقدار مساحت

مستطیل $ABCD$ به ازای $x = 1$ به دست می‌آید و برابر است با $4 \times 2 = 8$.

۱۵۱۸- گزینه ۲) فرض کنید (x, y) نقطه‌ای روی خط $y = 4x + 2$

باشد. فاصله این نقطه از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (4x + 2)^2} = \sqrt{17x^2 + 16x + 4}$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x) = \sqrt{17x^2 + 16x + 4}$ را پیدا کنیم.

$$f'(x) = \frac{34x + 16}{2\sqrt{17x^2 + 16x + 4}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{\lambda}{17}$$

پس $y = 4x + 2 = \frac{2}{17}$ ، یعنی نقطه مورد نظر $(-\frac{\lambda}{17}, \frac{2}{17})$ است.

۱۵۱۹- گزینه ۲) فرض کنید طول نقطه B برابر $-x$ باشد. در این

صورت طول نقطه A هم برابر $-x$ است و چون نقطه A روی نمودار تابع

$y = x^3 + 8$ است، پس عرض نقطه A برابر است با $8 - x^3$. بنابراین

$$\text{مساحت مثلث OAB} = \frac{1}{2}x(8 - x^3)$$

اگر $f(x) = \frac{1}{2}x(8 - x^3)$ ، آن‌گاه $f(x) = 4x - \frac{x^4}{2}$ ، پس $f'(x) = 4 - 2x^3$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

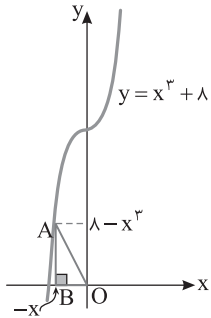
در نتیجه

بنابراین بیشترین مقدار تابع f ، یعنی

بیشترین مقدار مساحت مثلث OAB وقتی

به دست می‌آید که $x = \sqrt[3]{2}$ و برابر است با

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}(6) = 3\sqrt[3]{2}$$



۱۵۲۰- گزینه ۳) از روی شکل معلوم است که زاویه‌های EAB و

CBF هر دو متمم زاویه ABE هستند، پس با هم برابرند: $\angle EAB = \alpha$.

اکنون توجه کنید که

$$\triangle AEB: \sin \alpha = \frac{EB}{AB} \Rightarrow AB = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\triangle BFC: \cos \alpha = \frac{BF}{BC} \Rightarrow BC = \frac{\lambda}{\cos \alpha}$$

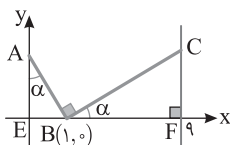
بنابراین $AB + BC = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\lambda}{\cos \alpha}$ باید مشخص کنیم که وقتی

تابع $f(x) = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\lambda}{\cos \alpha}$ کمترین مقدار ممکن است، مقدار $\tan \alpha$

چقدر است. توجه کنید که

$$f'(x) = -\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\lambda \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\lambda \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\lambda}$$



۱۵۱۵- گزینه ۲) فرض کنید طول نقطه C برابر x باشد. در این صورت،

طول نقطه A هم برابر x است و چون نقطه A روی نمودار تابع $y = \sqrt{6-x}$

است، پس عرض نقطه A برابر با $\sqrt{6-x}$ است. بنابراین $AC = \sqrt{6-x}$.

از طرف دیگر، $BC = x + 2$. به این ترتیب

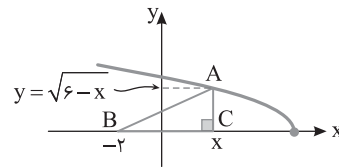
$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{1}{2}(x+2)\sqrt{6-x}$$

بنابراین باید x ای را پیدا کنیم که تابع $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)\sqrt{6-x}$ به ازای آن

بیشترین مقدار ممکن است. توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{6-x} + \frac{1}{2}(x+2)\frac{-1}{2\sqrt{6-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{6-x} = \frac{x+2}{4\sqrt{6-x}} \Rightarrow 6-x = \frac{x+2}{2} \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$



۱۵۱۶- گزینه ۳) فرض کنید طول نقطه D برابر x باشد. چون نقطه D

روی نمودار تابع $y = x^2$ است، پس عرض نقطه D برابر x^2 است.

در نتیجه، عرض نقطه A نیز برابر x^2 است. از طرف دیگر عرض نقطه B

برابر عرض نقطه C است، پس عرض نقطه B برابر ۹ است. به این ترتیب،

بنابراین $BA = 9 - x^2$

$$\text{مساحت دوزنقه ABCD} = \frac{1}{2}AB(BC + AD) = \frac{1}{2}(9 - x^2)(3 + x)$$

اگر $f(x) = \frac{1}{2}(9 - x^2)(3 + x)$ ، آن‌گاه $f'(x) = \frac{3}{2}(3 + x)(1 - x)$ ، پس

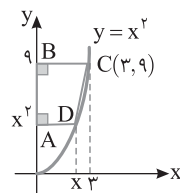
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \quad (x > 0)$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f ، یعنی بیشترین

مقدار مساحت دوزنقه ABCD به ازای $x = 1$

به دست می‌آید و برابر است با

$$\frac{1}{2}(9 - 1)(3 + 1) = 16$$



۱۵۱۷- گزینه ۱) فرض کنید طول ضلع‌های نظیر رأس قائمه در این مثلث

x و y باشند. در این صورت $x^2 + y^2 = 4$. از طرف دیگر،

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}$ را پیدا کنیم

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{4-x^2}} \quad (0 < x < 2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow 4-x^2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$ ، پس بیشترین مقدار تابع f ، یعنی

بیشترین مقدار مساحت مثلث مورد نظر به ازای $x = \sqrt{2}$ به دست می‌آید و

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1$$

۱۵۲۸- گزینه ۳ توجه کنید که $f''(x) = -\cos x$ برای آنکه جهت تقعر

نمودار تابع f روبه بالا باشد، باید $f''(x) > 0$ ، بنابراین

$$-\cos x > 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$$

در نتیجه جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ رو به بالاست.

۱۵۲۹- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = 4x + 3 \cos x \Rightarrow f''(x) = 4 - 3 \sin x$$

با توجه به اینکه $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، می توان نوشت:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq -3 \sin x \leq 3 \Rightarrow 1 \leq 4 - 3 \sin x \leq 7$$

بنابراین علامت $f''(x)$ همواره مثبت است و جهت تقعر نمودار تابع f همواره

رو به بالاست و تغییر نمی کند.

۱۵۳۰- گزینه ۱ توجه کنید که $f'(x) = -\sin x - \cos x$ پس

$f''(x) = -\cos x + \sin x$ اکنون توجه کنید که در بازه $(0, \frac{\pi}{4})$ مقدار

$\sin x$ از $\cos x$ کمتر است، پس $f''(x) < 0$

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه $(0, \frac{\pi}{4})$ رو به پایین است.

(خودتان نادرستی سایر گزینه ها را بررسی کنید.)

۱۵۳۱- گزینه ۲ اگر روی بازه ای $f''(x) > 0$ ، جهت تقعر نمودار تابع f

روی این بازه رو به بالاست. بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه

$(3, +\infty)$ رو به بالاست.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f''(x)$		-	-	+
f		∪	∩	∪

۱۵۳۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f''(x) = 6x^2 - 7x + 2 = (2x-1)(3x-2)$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$		+	-	+
f		∪	∩	∪

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ رو به بالاست.

۱۵۳۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f''(x) = x^2 - 4x - 12 = (x-6)(x+2)$$

x	$-\infty$	-2	6	$+\infty$
$f''(x)$		+	-	+
f		∪	∩	∪

از روی این جدول معلوم می شود که کمترین مقدار a برابر -2 و بیشترین

مقدار b برابر 6 است. بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ برابر 8 است.

۱۵۳۴- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & x \geq 0 \\ 3x^2 + 2x & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 6x - 2 & x > 0 \\ 6x + 2 & x < 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$		-	+	-	+
f		∩	∪	∩	∪

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f سه بار عوض می شود.

۱۵۲۱- گزینه ۴ توجه کنید که

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
f'		↗	↘	↗
f		∪	∩	∪

بنابراین تابع f' روی بازه $(-2, 1)$ اکیداً نزولی است، در نتیجه جهت تقعر

نمودار تابع f روی بازه $(-2, 1)$ رو به پایین است. روی بقیه بازه ها چنین نیست.

۱۵۲۲- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{x-2-x+1}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{2}{(x-2)^3}$$

پس جدول تعیین علامت $f''(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$		-	+
f		∩	∪

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه $(-\infty, 2)$ رو به پایین و روی بازه

$(2, +\infty)$ رو به بالاست.

۱۵۲۳- گزینه ۳ توجه کنید که $f''(x) = 6(x^2 + 2x - 3) = 6(x-1)(x+3)$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f''(x)$		+	-	+
f		∪	∩	∪

از روی این جدول معلوم می شود که بیشترین مقدار a برابر -3 است.

۱۵۲۴- گزینه ۱ توجه کنید که $f''(x) = 12x^2 - 12x + 2m$ برای

اینکه همواره $f''(x) \geq 0$ باید $\Delta \leq 0 \Rightarrow 12^2 - 4(2m)(12) \leq 0 \Rightarrow m \geq \frac{3}{2}$

۱۵۲۵- گزینه ۴ توجه کنید که $f''(x) = \frac{-18(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$ بنابراین

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f''(x)$		-	+	-
f		∩	∪	∩

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه $(-1, 1)$ رو به بالاست.

۱۵۲۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{(4x-1)(x-1) - (2x^2 - x + m)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x + 1 - m}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(4x-4)(x-1)^2 - 2(x-1)(2x^2 - 4x + 1 - m)}{(x-1)^4} = \frac{2m+2}{(x-1)^3}$$

عبارت $(x-1)^3$ به ازای هر $x > 1$ مقداری مثبت دارد. پس کافی است صورت

کسر $f''(x)$ مثبت باشد تا $f''(x) > 0$ برای هر $x > 1$ مقداری مثبت داشته باشد

و جهت تقعر نمودار تابع f به سمت بالا باشد: $2m+2 > 0 \Rightarrow m > -1$

۱۵۲۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f(x) = x^2 - 2x \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$$

$$f''(x) = 2 + \frac{1}{x^2} = 2 + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

پس به ازای هر x در بازه $(0, +\infty)$ مقدار $f''(x)$ عددی مثبت است و

جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه $(0, +\infty)$ رو به بالاست.

۱۵۳۵- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{ax+a^2-ax+1}{(x+a)^2} = \frac{a^2+1}{(x+a)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(a^2+1)(x+a)}{(x+a)^4} = \frac{-2(a^2+1)}{(x+a)^3}$$

علامت $f''(x)$ در $x=-a$ (ریشهٔ مخرج) تغییر می‌کند، پس جهت تقعر نمودار تابع f نیز در این نقطه تغییر می‌کند. بنابراین

$$-\frac{1}{a} = -a \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

توجه کنید که در هر دو حالت $a=1$ و $a=-1$ جهت تقعر نمودار تابع f همان چیزی است که در صورت سؤال آمده است.

$a=1 \Rightarrow$	x	$-\infty$	-1	$+\infty$
	$f''(x)$		$\downarrow$	
		+	-	

$a=-1 \Rightarrow$	x	$-\infty$	1	$+\infty$
	$f''(x)$		$\downarrow$	
		+	-	

۱۵۳۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = x + x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{4x^2\sqrt{x}}$$

بنابراین مقدار مشتق دوم تابع f روی دامنه‌اش، یعنی $(0, +\infty)$ مثبت است و جهت تقعر نمودار تابع f روی این بازه رو به بالاست.

۱۵۳۷- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f = [-1, 1]$ و

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{-\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)}$$

واضح است که مشتق دوم تابع f روی بازه $(-1, 1)$ منفی است و جهت تقعر

نمودار تابع f در این بازه رو به پایین است.

۱۵۳۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f = [0, 2]$ و

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2-x}} \Rightarrow f''(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{2(2-x)\sqrt{2-x}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{(2-x)(\sqrt{2-x})} \right)$$

بنابراین مقدار $f''(x)$ به ازای هر x در بازه $(0, 2)$ عددی منفی است و

جهت تقعر نمودار تابع f روی این بازه رو به پایین است.

۱۵۳۹- گزینه ۳ مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \cos x = \sin 2x + 2 \cos x$$

$$f''(x) = 2 \cos 2x - 2 \sin x = 2(1 - 2 \sin^2 x) - 2 \sin x$$

$$= -4 \sin^2 x - 2 \sin x + 2 = (\sin x + 1)(-4 \sin x + 2)$$

$$= 2(1 + \sin x)(1 - 2 \sin x)$$

چون عبارت $2(1 + \sin x)$ نامنفی است، پس کافی است عبارت $1 - 2 \sin x$

را روی بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ تعیین علامت کنیم تا علامت $f''(x)$ معین شود:

$$1 - 2 \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$\downarrow$	
	+	-	

بنابراین روی بازه $(0, \frac{\pi}{6})$ جهت تقعر نمودار f رو به بالاست و روی بازه

$(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ جهت تقعر نمودار f رو به پایین است.

۱۵۴۰- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f'(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$$

$$f''(x) = 2(1 + \tan^2 x)^2 + 4 \tan^2 x (1 + \tan^2 x)$$

$$= 2(1 + \tan^2 x)(1 + \tan^2 x + 2 \tan^2 x) = 2(1 + \tan^2 x)(1 + 3 \tan^2 x)$$

واضح است که مشتق دوم تابع f (هرجا که تعریف شده باشد) مقداری مثبت است و جهت تقعر نمودار تابع f رو به بالاست.

چون $f'(x) > 0$ ، پس تابع اکیداً صعودی است و چون

$f''(x) > 0$ ، پس جهت تقعر نمودار تابع f رو به بالاست. بنابراین نمودار تابع f ممکن است به شکل گزینه (۳) باشد.

۱۵۴۲- گزینه ۲ توجه کنید که $f''(x) = 2 \cdot x^2(x-3)$. بنابراین

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f''(x)$		$\downarrow$	$\downarrow$	
	-	-	+	

f		$\cap$	$\cap$	$\cup$
-----	--	--------	--------	--------

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه $(-\infty, 3)$ رو به پایین است.

۱۵۴۳- گزینه ۲ مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 8x^3 - 3mx^2 + 6x + 1 \Rightarrow f''(x) = 24x^2 - 6mx + 6$$

برای اینکه جهت تقعر نمودار تابع همواره به سمت بالا باشد باید مشتق دوم تابع همواره نامنفی باشد:

$$6(4x^2 - mx + 1) \geq 0 \xrightarrow{\Delta \leq 0} \Delta = m^2 - 16 \leq 0 \Rightarrow m^2 \leq 16 \Rightarrow -4 \leq m \leq 4$$

۱۵۴۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & x > 0 \\ 3x^2 - 1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 6x & x > 0 \\ 6x & x < 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$		$\downarrow$	
	-	+	

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه $(-\infty, 0)$ رو به پایین و روی بازه

$(0, +\infty)$ رو به بالاست. پس جهت تقعر نمودار تابع f فقط یک بار عوض می‌شود.

۱۵۴۵- گزینه ۲ مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(x) = -\frac{6}{x^4}$$

بنابراین به ازای هر $x \neq 0$ ، مقدار مشتق دوم تابع f عددی منفی است و جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ رو به پایین است.

به ازای هر $x \in (0, \pi)$ مقدار $\sin x$ عددی مثبت و مقدار $-x$ عددی منفی است. پس $f''(x)$ روی این بازه منفی است و جهت تقعر نمودار تابع f روی این بازه رو به پایین است.

۱۵۵۱- گزینه ۳ توجه کنید که

x	$-\infty$	-۱	۰	۱	$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	-	+
$f''(x)$		-	-	+	+

بنابراین

$$f''(-2)f'(0) > 0, f''(2)f'(\frac{1}{2}) < 0$$

$$f''(-2)f'(2) < 0, f''(-4)f'(4) < 0$$

پس فقط گزینه (۳) درست نیست.

۱۵۵۲- گزینه ۱ چون تابع f همه جا مشتق پذیر است، پس نقطه‌های عطف نمودار تابع f نقطه‌هایی هستند که جهت تقعر نمودار تابع f در آن‌ها عوض می‌شود. به جدول زیر توجه کنید:

x	$-\infty$	-۲	۲	$+\infty$
f'		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
f		$\cap$	$\cup$	$\cap$

بنابراین طول نقطه‌های عطف نمودار تابع f برابر -۲ و ۲ است، که مجموع آن‌ها صفر است.

۱۵۵۳- گزینه ۲ جدول تعیین علامت $f''(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$	-۱	۰	۲	$+\infty$
$f''(x)$		+	+	-	+
f		$\cup$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

نقطه عطف نقطه عطف

پس جهت تقعر نمودار تابع f در نقطه‌های $x=۰$ و $x=۲$ تغییر می‌کند و چون $f''(۰)$ و $f''(۲)$ وجود دارند، پس $f'(۰)$ و $f'(۲)$ نیز وجود دارند، در نتیجه خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌های به طول $x=۰$ و $x=۲$ وجود دارد. بنابراین $x=۰$ و $x=۲$ طول نقاط عطف نمودار تابع f هستند و این نمودار دو نقطه عطف دارد.

۱۵۵۴- گزینه ۳ چون تابع f همه جا دوبار مشتق پذیر است، طول نقطه‌های عطف نمودار آن جواب‌های معادله $f''(x)=۰$ هستند (به شرطی که f'' در این جواب‌ها تغییر علامت بدهد). توجه کنید که

$$f'(x)=2x^2-4x+6 \Rightarrow f''(x)=4x-4, f''(x)=0 \Rightarrow x=1$$

چون f'' در نقطه $x=1$ تغییر علامت می‌دهد، پس طول نقطه عطف نمودار تابع f برابر ۱ است و چون نقطه عطف روی نمودار تابع است، پس عرض آن برابر است با $\frac{11}{3}$. $f(1)=\frac{11}{3}$

۱۵۵۵- گزینه ۳ چون تابع f همه جا دوبار مشتق پذیر است، طول نقطه عطف نمودار آن جواب معادله $f''(x)=۰$ است. توجه کنید که

$$f'(x)=3ax^2-8x+4 \Rightarrow f''(x)=6ax-8$$

$$f''(-2)=0 \Rightarrow 6a(-2)-8=0 \Rightarrow a=-\frac{2}{3}$$

۱۵۴۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(x)=3x^2-\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=6x+\frac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x)=6-\frac{3}{16}x^{-\frac{5}{2}}=3\left(\frac{32\sqrt{x^5}-1}{16\sqrt{x^5}}\right)$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \sqrt{x^5}=\frac{1}{32} \Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

x	۰	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f''(x)$		-	+
f		$\cap$	$\cup$

پس جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه $(\frac{1}{4}, +\infty)$ رو به بالاست و کمترین

مقدار a برابر $\frac{1}{4}$ است.

۱۵۴۷- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید

$$f(x)=x^2+(3x)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x)=2x+(3x)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f''(x)=2-2(3x)^{-\frac{5}{3}}=2\left(\frac{\sqrt[3]{(3x)^5}-1}{\sqrt[3]{(3x)^5}}\right)$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow (3x)^{\frac{5}{3}}=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

بنابراین علامت $f''(x)$ روی $\mathbb{R}-\{0\}$ مطابق جدول زیر است:

x	$-\infty$	۰	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$		+	-	+

پس جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه $(0, \frac{1}{3})$ رو به پایین است و بیشترین

مقدار $b-a$ برابر $\frac{1}{3}$ است.

۱۵۴۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=3x^2-x^2 \Rightarrow f'(x)=x^2-2x$$

$$f''(x)=2-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{2}}=2-\frac{2}{3\sqrt{x}}=2\left(1+\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)$$

بنابراین به ازای هر x در بازه $(0, +\infty)$ مقدار $f''(x)$ عددی منفی است و جهت تقعر نمودار تابع f روی این بازه رو به پایین است.

۱۵۴۹- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=2x-2\cos x \Rightarrow f''(x)=2+2\sin x$$

با توجه به اینکه $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، می‌توان نوشت:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2\sin x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2+2\sin x \leq 4$$

بنابراین مشتق دوم تابع f همواره نامنفی است و جهت تقعر نمودار تابع f همواره رو به بالاست و تغییر نمی‌کند.

۱۵۵۰- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x=x\cos x-\sin x$$

$$f''(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$$

۱۵۶۱- گزینه ۳ توجه کنید که

x	-۶	-۳	۰	۳	۶
f'(x)		+	۰	-	+
f''(x)		-	۰	+	+

بنابراین جواب‌های صحیح نامعادله $f'(x)f''(x) < 0$ در بازه $(-۶, ۶)$ ،
عددهای صحیح در بازه‌های $(-۶, -۳)$ و $(۰, ۳)$ هستند. این عددها -۵ ،
 -۴ ، ۱ و ۲ هستند و تعدادشان چهارتا است.

۱۵۶۲- گزینه ۳

چون تابع f همه‌جا دوبار مشتق پذیر است، طول نقطه‌های
عطف نمودار آن جواب‌های معادله $f''(x) = 0$ هستند که f'' در آن‌ها تغییر
علامت می‌دهد. توجه کنید که

x	$-\infty$	-۵	۰	۱	$+\infty$
f''(x)		-	+	-	+
f		نقطه عطف	نقطه عطف	نقطه عطف	

بنابراین f'' فقط در نقطه‌های $x = -۵$ ، $x = ۰$ و $x = ۱$ تغییر علامت
می‌دهد، پس نمودار تابع f سه نقطه عطف دارد.

۱۵۶۳- گزینه ۴

از روی نمودار f'' معلوم است که $f''(۰) = ۴$. از
طرف دیگر، $f''(۰) = ۴ \Rightarrow -۲a = ۴ \Rightarrow a = -۲$
 $f''(x) = ۱۲x - ۲a$ ، بنابراین $f''(x) = ۱۲x + ۴$ و
 $f''(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

چون f'' در نقطه $x = -\frac{1}{3}$ تغییر علامت می‌دهد، پس طول نقطه عطف
نمودار تابع f برابر $-\frac{1}{3}$ است.

۱۵۶۴- گزینه ۱

چون تابع f همه‌جا دوبار مشتق پذیر است، طول نقطه‌های
عطف نمودار آن جواب‌های معادله $f''(x) = 0$ هستند (به شرطی که f'' در
این جواب‌ها تغییر علامت بدهد). توجه کنید که

$$f'(x) = 7(x-3)^6 \Rightarrow f''(x) = 42(x-3)^5, \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = 3$$

چون f'' در نقطه $x = 3$ تغییر علامت می‌دهد، طول نقطه عطف نمودار تابع f
برابر ۳ است. چون نقطه عطف روی نمودار تابع است، پس عرض آن برابر
است با $f(3) = -۶$. یعنی نقطه عطف نمودار تابع f نقطه $(۳, -۶)$ است و
مجموع مختصاتش برابر ۳- است.

۱۵۶۵- گزینه ۲

چون تابع f همه‌جا دوبار مشتق پذیر است، پس طول
نقطه عطف نمودار تابع جواب معادله $f''(x) = 0$ است. توجه کنید که

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 4 \Rightarrow f''(x) = 6x - 12$$

$$f''(a) = 0 \Rightarrow 6a - 12 = 0 \Rightarrow a = 2$$

پس نقطه عطف نمودار تابع f نقطه $(۲, -۴)$ است و چون این نقطه روی نمودار
تابع f است، پس $f(2) = -۴$ ، در نتیجه $۸ - 24 + 8 + d = -۴ \Rightarrow d = ۴$
بنابراین $a + d = ۶$.

۱۵۶۶- گزینه ۱

طول نقطه عطف نمودار تابع جوابی از معادله $f''(x) = 0$
است که f'' در آن جواب تغییر علامت می‌دهد. توجه کنید که

$$f'(x) = 6x^2 + 12x + 1 \Rightarrow f''(x) = 12x + 12, \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = -۱$$

چون f'' در نقطه $x = -۱$ تغییر علامت می‌دهد، پس طول نقطه عطف
نمودار تابع برابر ۱- است. اکنون توجه کنید که شیب خط مماس بر نمودار
تابع f در نقطه‌ای به طول ۱- روی نمودار برابر است با $f'(-۱) = -۵$. چون
شیب خط $y = -ax + 7 = 0$ برابر a است، پس $a = -۵$.

۱۵۵۶- گزینه ۲

چون تابع f همه‌جا دوبار مشتق پذیر است، پس طول
نقطه‌های عطف نمودار آن جواب‌هایی از معادله $f''(x) = 0$ هستند که f'' در
آن‌ها تغییر علامت می‌دهد. اکنون توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 + x \Rightarrow f''(x) = x + 1, \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = -۱$$

چون f'' در نقطه ۱- تغییر علامت می‌دهد، پس طول نقطه عطف نمودار
تابع f برابر ۱- است. چون نقطه عطف نمودار تابع روی خط $2x - 3y + 6 = 0$
است، پس عرض آن برابر با $\frac{4}{3}$ است. بنابراین نقطه عطف نمودار تابع f نقطه

$$\left(-۱, \frac{4}{3}\right) \text{ است. چون این نقطه روی نمودار تابع } f \text{ است، پس } f(-۱) = \frac{4}{3}$$

$$-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + a = \frac{4}{3} \Rightarrow a = 1 \quad \text{نتیجه}$$

۱۵۵۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & x \leq -۱ \\ -2x-2 & x > -۱ \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 2 & x < -۱ \\ -2 & x > -۱ \end{cases}$$

چون تابع f'' فقط در نقطه $x = -۱$ تغییر علامت می‌دهد و نمودار تابع f در
این نقطه خط مماس دارد ($f'(-۱) = 0$)، پس طول تنها نقطه عطف نمودار
تابع f برابر ۱- است.

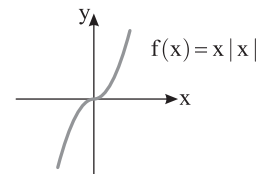
۱۵۵۸- گزینه ۱

تابع f به صورت زیر است و $x = 0$ طول تنها نقطه عطف
آن است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

توجه کنید که تابع f در $x = 0$ مشتق پذیر است و جهت تقعر نمودار تابع f در
این نقطه عوض می‌شود.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases}$$



۱۵۵۹- گزینه ۴

چون تابع f همه‌جا دوبار مشتق پذیر است، طول نقطه‌های
عطف نمودار f ، آن جواب‌های معادله $f''(x) = 0$ هستند که f'' در آن‌ها
تغییر علامت می‌دهد. توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

به این ترتیب، f'' سه جواب دارد که در هر سه تای آن‌ها تغییر علامت
می‌دهد. بنابراین نمودار تابع f سه نقطه عطف دارد.

۱۵۶۰- گزینه ۳

توجه کنید که $D_f = [0, +\infty)$ و

$$f(x) = x^2 + 2x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 2x + x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(x) = 2 - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 2 = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow 4 = \frac{1}{\sqrt{x^3}} \Rightarrow x^3 = \frac{1}{16} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{16}}$$

پس طول نقطه عطف نمودار تابع f است.

۱۵۷۲- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f''(x) = 3x^2(x-1)^2 + 2x^3(x-1) \\ = x^2(x-1)(3(x-1) + 2x) = x^2(x-1)(5x-3)$$

پس جدول تعیین علامت $f''(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$	۰	$\frac{3}{5}$	۱	$+\infty$
$f''(x)$	+	+	+	-	+
f		U	U	∩	U

نقطه عطف

جهت تقعر نمودار تابع f در $x=1$ و $x=\frac{3}{5}$ تغییر می کند و تابع f در این نقاط

مشتق پذیر است، پس نمودار تابع f دو نقطه عطف دارد.

۱۵۷۳- گزینه ۱ چون تابع f همه جا دوبار مشتق پذیر است، طول نقطه

عطف نمودار آن جواب معادله $f''(x)=0$ است. توجه کنید که

$$f'(x) = 2(x-2)(x+a) + (x-2)^2$$

$$f''(x) = 2(x+a) + 2(x-2) + 2(x-2)$$

$$f''(1) = 0 \Rightarrow 2(1+a) + 2(-1) + 2(-1) = 0 \Rightarrow a = 1$$

۱۵۷۴- گزینه ۳ چون تابع f همه جا دوبار مشتق پذیر است، پس طول

نقطه عطف نمودار آن جواب معادله $f''(x)=0$ است (به شرطی که f'' در

این جواب تغییر علامت دهد.) توجه کنید که

$$f'(x) = 4x^3 - 3ax^2 + a \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 6ax$$

$$f''(2) = 0 \Rightarrow 48 - 12a = 0 \Rightarrow a = 4$$

بنابراین $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 7 - b$ از طرف دیگر، چون نقطه عطف

روی نمودار تابع است، پس $f(2)=1$ ، در نتیجه

$$16 - 32 + 8 + 7 - b = 1 \Rightarrow b = -2$$

بنابراین $ab = -8$.

۱۵۷۵- گزینه ۴ طول نقطه عطف نمودار تابع f جوابی ای از معادله

$f''(x)=0$ است که f'' در آن نقطه تغییر علامت می دهد. توجه کنید که

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + a + 2 \Rightarrow f''(x) = 6x - 12$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

چون f'' در نقطه ای به طول $x=2$ تغییر علامت می دهد، پس طول نقطه

عطف نمودار تابع f برابر ۲ است. از طرف دیگر، شیب خط $4x - y + 12 = 0$

برابر ۴ است، در نتیجه شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطه عطف آن برابر

با ۴ است، یعنی $f'(2)=4$ ، در نتیجه

$$12 - 24 + a + 2 = 4 \Rightarrow a = 14$$

۱۵۷۶- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2ax \Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 6x + 2a$$

برای اینکه نمودار تابع f نقطه عطف داشته باشد باید مشتق دوم آن تغییر

علامت دهد. پس $f''(x)$ باید دو جواب داشته باشد، یعنی معادله زیر دو

جواب دارد:

$$3x^2 - 6x + 2a = 0$$

پس

$$\Delta = 36 - 24a > 0 \Rightarrow a < \frac{3}{2}$$

۱۵۶۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 12x & x > 0 \\ 2x + 6 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 6x - 12 & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	۰	۲	$+\infty$
$f''(x)$		+	-	+

جهت تقعر نمودار تابع f در نقطه به طول $x=2$ تغییر می کند و نمودار تابع f

در این نقطه خط مماس دارد. پس نمودار این تابع یک نقطه عطف دارد.

۱۵۶۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & x > 1 \\ -2x & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 2 & x > 1 \\ -2 & x < 1 \end{cases}$$

پس فقط در $x=1$ جهت تقعر نمودار تابع f تغییر می کند. برای اینکه تابع f

نقطه عطف داشته باشد، باید در $x=1$ مشتق پذیر باشد تا $x=1$ طول نقطه

عطف باشد. برای مشتق پذیری لازم است که تابع پیوسته باشد. پس

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow 1 + a = -1 + b \Rightarrow b = a + 2 \quad (1)$$

همچنین در نقطه $x=1$ باید مشتق چپ و مشتق راست تابع با هم برابر باشند:

$$f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow 2 + a = -2 \Rightarrow a = -4 \xrightarrow{(1)} b = -2$$

پس $a+b = -6$.

۱۵۶۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 - x & x \geq 0 \\ x^3 + 2x^2 + x & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4x - 1 & x > 0 \\ 3x^2 + 4x + 1 & x < 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 6x + 4 & x > 0 \\ 6x + 4 & x < 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	۰	$+\infty$
$f''(x)$		-	+	+

پس $x = -\frac{2}{3}$ طول نقطه عطف نمودار تابع f است و عرض آن برابر است با

$$f(-\frac{2}{3}) = -\frac{2}{27}$$

۱۵۷۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که مختصات نقطه عطف در معادله تابع

صدق می کنند. پس $4 = a + b$. از طرف دیگر تابع f در $x=1$ مشتق دوم

دارد، پس مشتق دوم آن در $x=1$ باید صفر باشد.

$$f(x) = ax^2 + bx^3 \Rightarrow f'(x) = 2ax + \frac{b}{3}x^2 \Rightarrow f''(x) = 2a + \frac{2b}{3}x \xrightarrow{x=1} 2a + \frac{2b}{3} = 0$$

$$f''(1) = 2a + \frac{2b}{3} = 0 \Rightarrow a = -\frac{b}{3} \xrightarrow{4=a+b} \frac{10b}{9} = 4 \Rightarrow b = \frac{36}{10}$$

پس $a = \frac{b}{3} = \frac{12}{10}$ و در نتیجه $a - b = -\frac{32}{10} = -\frac{16}{5}$.

۱۵۷۱- گزینه ۴ طول نقطه های عطف آن جواب هایی از معادله

$f''(x)=0$ هستند که f'' در آن ها تغییر علامت می دهد. جواب های f''

نقطه های -۳، صفر و ۲ هستند، ولی f'' در نقطه $x=2$ تغییر علامت

نمی دهد. بنابراین طول نقطه های عطف نمودار تابع f برابر صفر و -۳ و

مجموعشان -۳ است.

x	۰	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	2π
$f''(x)$		-	-	+	-

چون f'' فقط در دو جوابش تغییر علامت می‌دهد، پس نمودار تابع f دو نقطهٔ عطف دارد.

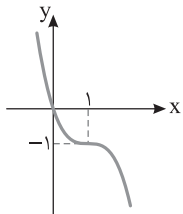
۱۵۸۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x) = 3x^2 - 4$ و $f''(x) = 6x$. بنابراین علامت $f'(x)$ و $f''(x)$ در اطراف نقطهٔ $x = 3$ به صورت زیر است:

x		۳	
$f'(x)$	-	+	+
$f''(x)$	-	+	+

پس تابع در اطراف $x = 3$ صعودی با تقعر رو به بالاست.

۱۵۸۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که مشتق تابع f همواره نامثبت است و این تابع نزولی است:

$$f'(x) = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x^2 - 2x + 1) = -3(x-1)^2$$



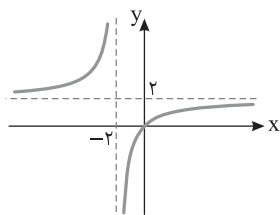
اکنون با توجه به $f(0) = 0$ می‌توانیم نمودار تقریبی تابع را رسم کنیم. توجه کنید که $f'(1) = 0$ ، پس نمودار تابع از ناحیه‌های دوم و چهارم عبور می‌کند و از ناحیه‌های اول و سوم عبور نمی‌کند. توجه کنید که

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x = -(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = -(x-1)^3 - 1$$

بنابراین می‌توان نمودار تابع f را با انتقال نمودار تابع $y = x^3$ نیز رسم کرد.

۱۵۸۳- گزینهٔ ۴ مجانب‌های نمودار تابع خطوط $x = -2$ و $y = 2$ هستند و تابع روی بازه‌های $(-\infty, -2)$ و $(-2, +\infty)$ اکیداً صعودی است، زیرا

$$f'(x) = \frac{2(x+2) - 2x}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}$$



واضح است که مشتق تابع روی بازه‌های بالا مثبت است. پس نمودار تابع به صورت مقابل است و از ناحیهٔ چهارم عبور نمی‌کند.

۱۵۸۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$(x-a)(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = a, x = \pm 1$$

چون $x = 3$ یک جواب معادلهٔ $f(x) = 0$ است، پس $a = 3$ و در نتیجه $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{x-b}$. با توجه به اینکه یک حفره در نمودار تابع وجود دارد، پس b باید یکی از اعداد ۱، -۱، ۳ باشد. چون طول یکی از

نقطه‌های برخورد نمودار با محور طول‌ها منفی و طول یکی از نقطه‌های برخورد ۳ است، پس باید $b = 1$. در واقع ضابطهٔ تابع f به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{x-1} = (x+1)(x-3), \quad x \neq 1$$

پس $a+b=4$.

۱۵۷۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6 & x > 0 \\ 3x^2 + 6 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 6x & x > 0 \\ 6x & x < 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
$f''(x)$	-	۰	+

جهت تقعر نمودار تابع f در $x = 0$ تغییر می‌کند ولی چون $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ پس خط مماس بر نمودار تابع f در این نقطه وجود ندارد و $x = 0$ طول نقطهٔ عطف نیست. بنابراین نمودار تابع f نقطهٔ عطف ندارد.

۱۵۷۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} -x^4 + x^2 & x \leq -1 \\ x^4 - x^2 & -1 < x \leq 0 \\ -x^4 + x^2 & 0 < x \leq 1 \\ x^4 - x^2 & x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -4x^3 + 2x & x < -1 \\ 4x^3 - 2x & -1 < x < 0 \\ -4x^3 + 2x & 0 < x < 1 \\ 4x^3 - 2x & x > 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -12x^2 + 2 & x < -1 \\ 12x^2 - 2 & -1 < x < 0 \\ -12x^2 + 2 & 0 < x < 1 \\ 12x^2 - 2 & x > 1 \end{cases}, \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	۰	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	-	+	-	+	-	+

بنابراین f'' در نقطه‌های به طول $-\frac{1}{\sqrt{6}}$ ، $-\frac{1}{\sqrt{6}}$ ، 0 ، $\frac{1}{\sqrt{6}}$ تغییر علامت می‌دهد، ولی فقط در نقطه‌های به طول $-\frac{1}{\sqrt{6}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ، 0 ، $\frac{1}{\sqrt{6}}$ مماس بر نمودار تابع f وجود دارد. بنابراین نمودار تابع f سه نقطهٔ عطف دارد.

۱۵۷۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = 2x + 4 \sin x \Rightarrow f''(x) = 2 + 4 \cos x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

مشتق دوم تابع در $x = \frac{2\pi}{3}$ صفر است و $f''(x)$ در این نقطه تغییر علامت می‌دهد.

همچنین $f'(\frac{2\pi}{3}) = 0$ موجود است، پس خط مماس بر نمودار تابع f در این نقطه وجود دارد.

بنابراین $x = \frac{2\pi}{3}$ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f در بازهٔ $(0, \pi)$ است.

۱۵۸۰- گزینهٔ ۳ چون تابع f روی بازهٔ $(0, 2\pi)$ دوبار مشتق‌پذیر است،

پس طول نقطه‌های عطف نمودار تابع f آن جواب‌هایی از معادلهٔ $f''(x) = 0$ هستند که f'' در آن‌ها تغییر علامت می‌دهد. اکنون توجه کنید که $f'(x) = -2 \sin x \cos x + 2 \cos x = -\sin 2x + 2 \cos x$
 $f''(x) = -2 \cos 2x - 2 \sin x = -2(\cos 2x + \sin x)$
 $= -2(1 - 2 \sin^2 x + \sin x) = 2(2 \sin^2 x - \sin x - 1)$
 $= 2(\sin x - 1)(\sin x + 1)$
 ≤ 0

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$$

بنابراین در یک همسایگی نقطه $x = \frac{\pi}{6}$ مشتق اول و مشتق دوم تابع مثبت

هستند. پس در یک همسایگی نقطه $x = \frac{\pi}{6}$ تابع f صعودی و جهت تفرع

نمودار آن به سمت بالاست. توجه کنید که در محاسبه مشتق اول و مشتق دوم تابع از اتحادهای $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ و $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ استفاده شده است.

۱۵۹۱- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = x^2 - 2x, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

x	$-\infty$	۰	۲	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

بنابراین $(0, 0)$ نقطه ماکزیمم نسبی تابع f و $(2, -\frac{4}{3})$ نقطه مینیمم نسبی آن

است و نمودار تابع به صورت گزینه (۳) است.

راه حل دوم توجه کنید که $f(x) = x^2(\frac{1}{3}x - 1)$. بنابراین صفرهای تابع f ,

$x = 0$ و $x = 3$ هستند. پس گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند. از طرف دیگر مقادیر تابع f در یک همسایگی $x = 0$ منفی هستند. پس گزینه (۴) هم رد می‌شود.

۱۵۹۲- گزینه ۲ با توجه به نمودار معلوم است که $x = 0$ طول نقطه

عطف تابع است. پس گزینه‌های (۳) و (۴) جواب نیستند زیرا طول نقطه عطف تابع گزینه (۳)، $-\frac{b}{3a} = \frac{1}{3}$ و طول نقطه عطف تابع گزینه (۴)، $-\frac{b}{3a} = -\frac{1}{3}$

است. همچنین تابع همواره نزولی است و نقطه اکسترمم نسبی ندارد. پس گزینه (۱) هم جواب نیست زیرا تابع مشتق آن $y' = -3x^2 + 1$ است. پس تابع گزینه (۱)، دو نقطه اکسترمم نسبی دارد. در تابع گزینه (۲) هر دو شرط $y = -x^3 - x + 2 \Rightarrow y' = -3x^2 - 1$ بالا وجود دارد.

۱۵۹۳- گزینه ۲ تابع $g(x) = x^3 - 3x + 1$ را در نظر می‌گیریم و نمودار

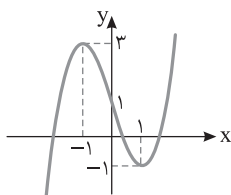
تقریبی آن را رسم می‌کنیم (شکل (۱) را ببینید):

$$g'(x) = 3x^2 - 3, \quad g'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

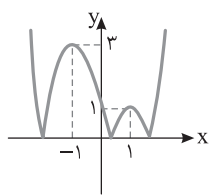
x	$-\infty$	-۱	۱	$+\infty$
$g'(x)$		+	-	+
g	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

نسبی
max
نسبی
min

پس نمودار تابع f به صورت شکل (۲) است.



شکل (۱)



شکل (۲)

۱۵۸۵- گزینه ۱ نقطه $(-2, 5)$ نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است. پس

$$f(-2) = 5 \text{ و } f'(-2) = 0. \text{ همچنین } f'(x) = 3ax^2 + 2bx.$$

$$f(-2) = -8a + 4b + 1 = 5 \Rightarrow 2a - b + 1 = 0$$

$$f'(-2) = 12a - 4b = 0 \Rightarrow b = 3a$$

از حل دستگاه معادلات بالا نتیجه می‌شود $a = 1$ و $b = 3$ و $b - a = 2$.

۱۵۸۶- گزینه ۲ ضریب x^4 مثبت است. پس نمودار تابع از ناحیه دوم

شروع و در ناحیه اول پایان می‌یابد. بنابراین گزینه (۴) نادرست است:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (4x^4 + 3x^3 - 2) = +\infty$$

برای تشخیص درستی گزینه‌های (۱)، (۲) یا (۳) به روش زیر می‌توانیم عمل کنیم:

نقطه اکسترمم نسبی تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = 16x^3 + 9x^2 = x^2(16x + 9)$$

با توجه به اینکه $x = 0$ ریشه مضاعف f' است، پس تنها نقطه اکسترمم نسبی

تابع در $x = -\frac{9}{16}$ اتفاق می‌افتد که در گزینه (۲) دیده می‌شود.

۱۵۸۷- گزینه ۴ با توجه به نمودار معلوم است که $(2, -3)$ نقطه برخورد

مجانبات آن است. پس $x = 2$ و $y = -3$ به ترتیب مجانب‌های قائم و افقی

نمودار تابع هستند. از طرف دیگر مجانب قائم نمودار تابع $f(x) = \frac{ax+3}{2x-b}$

خط $x = \frac{b}{2}$ و مجانب افقی آن خط $y = \frac{a}{2}$ است. پس

$$\frac{b}{2} = 2 \Rightarrow b = 4, \quad \frac{a}{2} = -3 \Rightarrow a = -6$$

در نتیجه $ab = -24$.

۱۵۸۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = -\sqrt{3-x} + \frac{x}{2\sqrt{3-x}} = \frac{3x-6}{2\sqrt{3-x}}$$

$$f''(x) = \frac{6\sqrt{3-x} + \frac{3x-6}{\sqrt{3-x}}}{(2\sqrt{3-x})^2} = \frac{12-3x}{4(3-x)\sqrt{3-x}}$$

در همسایگی نقطه $x = 0$ علامت $f'(x)$ منفی و علامت $f''(x)$ مثبت

است. پس نمودار تابع اکیداً نزولی و جهت تفرع آن رو به بالا است.

۱۵۸۹- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{2x(1-x) + x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2} = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$$

بنابراین علامت $f'(x)$ در همسایگی $x = 2$ به صورت زیر است و $x = 2$

طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است.

x	۲
$f'(x)$	+

پس نمودار تابع f در همسایگی $x = 2$ به صورت است.

۱۵۹۰- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \sin x = \sin 2x + 2 \sin x$$

$$f''(x) = 2 \cos 2x + 2 \cos x = 4 \cos^2 x - 2 + 2 \cos x$$

$$= 2(2 \cos^2 x + \cos x - 1) = 2(2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$$

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x^2-x+3)-(2x-1)(x^2+ax+\frac{a^2}{4})}{(x^2-x+3)^2}$$

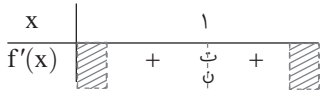
$$f'(-1) = 0 \Rightarrow (-2+a)(5)-(-3)(1-a+\frac{a^2}{4}) = 0 \Rightarrow 3a^2+8a-28=0$$

$$(3a+14)(a-2) = 0 \Rightarrow a = -\frac{14}{3}, a=2$$

اگر $a=2$ ، آن گاه $b=1$ و $f(0)=\frac{1}{3}$ که قابل قبول نیست. زیرا مطابق شکل $f(0)$ باید بزرگ‌تر از ۱ باشد. چون محل برخورد نمودار با محور عرض‌ها بالاتر از مجانب افقی تابع است. پس $a=-\frac{14}{3}$. توجه کنید که در این حالت $f(0)=\frac{49}{27} > 1$.

۱۵۹۸- گزینه ۱ توجه کنید که تابع f در نقطه $x=1$ مشتق‌پذیر نیست و

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, x \neq \pm 1, f'(1) = +\infty$$



بنابراین تابع f در هر دو همسایگی چپ و راست $x=1$ صعودی است. بنابراین نمودار آن در همسایگی $x=1$ به صورت  به صورت است.

۱۵۹۹- گزینه ۱ توجه کنید که

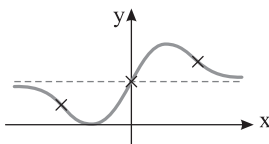
$$f'(x) = -\sin x + \sin x + x \cos x = x \cos x$$

بنابراین علامت $f'(x)$ در همسایگی نقطه $x=0$ به صورت زیر است و تابع f در $x=0$ مینیمم نسبی دارد.



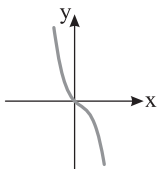
این ویژگی در نمودار گزینه (۱) وجود دارد.

۱۶۰۰- گزینه ۴ با توجه به نمودار تابع f ، این تابع سه نقطه عطف دارد (که مکان تقریبی آن‌ها را در شکل زیر با علامت $\times$ مشخص کرده‌ایم)، پس تابع f' سه نقطه اکسترمم نسبی دارد. پس گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند. همچنین با افزایش x از $-\infty$ به $+\infty$ ، تابع f ابتدا اکیداً نزولی، سپس اکیداً صعودی و سرانجام اکیداً نزولی است، پس f' باید ابتدا منفی، سپس مثبت و سرانجام منفی باشد که این شرایط در گزینه (۴) برقرار است.



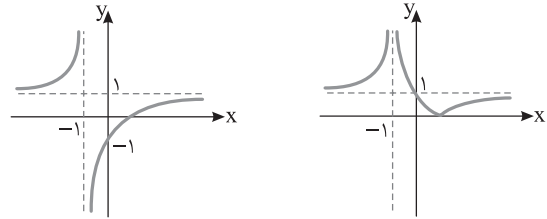
۱۶۰۱- گزینه ۲ توجه کنید که $f'(x) = -3x^2 + 2x - 1$. مشتق تابع

همواره منفی است. زیرا در عبارت $-3x^2 + 2x - 1$ ضریب x^2 منفی و Δ منفی است. از طرف دیگر $f(0)=0$. بنابراین نمودار تابع تقریباً به صورت مقابل است. پس نمودار تابع فقط از دو ناحیه دوم و چهارم عبور می‌کند.

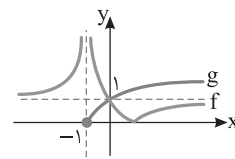


۱۵۹۴- گزینه ۱ نمودار تابع $f(x) = \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$ با استفاده از نمودار تابع

$y = \frac{x-1}{x+1}$ قابل رسم است. توجه کنید که تابع $y = \frac{x-1}{x+1}$ در دو طرف مجانب قائم آن اکیداً صعودی است و خطوط $x=-1$ و $y=1$ مجانب‌های نمودار آن هستند.



پس مطابق شکل زیر نمودار تابع‌های f و g در یک نقطه متقاطع‌اند.



۱۵۹۵- گزینه ۲ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که $x=a$ و $y=a$

مجانب‌های نمودار تابع هستند و با توجه به نمودار تابع معلوم است که $a > 0$. همچنین از روی نمودار تابع معلوم است که تابع در دو طرف مجانب قائم آن اکیداً صعودی است. پس روی بازه‌های $(-\infty, a)$ و $(a, +\infty)$ مشتق تابع f

$$f'(x) = \frac{-a^2+1}{(x-a)^2} > 0 \Rightarrow a^2 < 1 \Rightarrow -1 < a < 1$$

مثبت است. پس

چون $a > 0$ ، پس $0 < a < 1$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(0)=\frac{1}{a}$. با توجه به نمودار $f(0) > 0$ ، پس $a > 0$.

از طرف دیگر خط $y=a$ مجانب افقی نمودار تابع است و نقطه $(0, \frac{1}{a})$ بالای

مجانب افقی قرار دارد. بنابراین

$$\frac{1}{a} > a \Rightarrow \frac{1}{a} - a > 0 \Rightarrow \frac{1-a^2}{a} > 0 \xrightarrow{a > 0} 1 - a^2 < 0$$

$$-1 < a < 1 \xrightarrow{a > 0} 0 < a < 1$$

۱۵۹۶- گزینه ۳ توجه کنید که محل برخورد مجانب‌های نمودار تابع

$$f(x) = \frac{ax-2}{bx-4}$$

نقطه $(\frac{4}{b}, \frac{a}{b})$ است و نقطه عطف نمودار تابع

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + b$$

نقطه $(1, g(1))$ ، یعنی $(1, b)$ است. پس

$$\frac{4}{b} = 1 \Rightarrow b = 4, \quad \frac{a}{b} = b \Rightarrow a = b^2 \Rightarrow a = 16$$

بنابراین $a+b=20$.

۱۵۹۷- گزینه ۲ چون نمودار تابع بر محور طول‌ها مماس است، پس

$$f(x) = 0 \text{ ریشه مضاعف دارد:}$$

$$x^2 + ax + b = 0, \quad \Delta = a^2 - 4b = 0 \Rightarrow b = \frac{a^2}{4}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + \frac{a^2}{4}}{x^2 - x + 3}$$

بنابراین $f(x)$ از طرف دیگر $x=-1$ طول نقطه اکسترمم

نسبی تابع است. پس $f'(-1)=0$. بنابراین

۱۶۰۷-گزینه ۴) راه حل اول توجه کنید که

$$f'(x) = (2x-1)\sqrt[3]{x} + \frac{x^2-x}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{yx^2-4x}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x(yx-4)}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{(x^2-x)\sqrt[3]{x-\circ}}{x-\circ} = \lim_{x \rightarrow \circ} ((x-1)\sqrt[3]{x}) = \circ$$

بنابراین علامت $f'(x)$ در همسایگی $x=\circ$ به صورت زیر است:

x	$\circ$
$f'(x)$	$+$ $-$

یعنی $x=\circ$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است و نمودار تابع در همسایگی

این نقطه به صورت  است.

راه حل دوم توجه کنید که $f(\circ)=\circ$ و $f(x)=x(x-1)\sqrt[3]{x}$ پس همهٔ مقادیر

تابع f در همسایگی $x=\circ$ منفی هستند و $x=\circ$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع است.

۱۶۰۸-گزینه ۱) با بررسی گزینه‌ها مشخص است که نمودارها در تعداد و

نوع نقاط اکسترمم نسبی متفاوت هستند. پس نقاط اکسترمم نسبی تابع را

بررسی می‌کنیم: $f'(x) = \frac{2 \sin x}{(2 \cos x - 1)^2}$. واضح است که همهٔ مقادیر تابع

f' به ازای $x \in (\circ, \frac{\pi}{2}) - \{\frac{\pi}{3}\}$ مثبت هستند و تابع f نقطهٔ اکسترمم نسبی

ندارد. فقط نمودار گزینهٔ (۱) این ویژگی را دارد.

۱۶۰۹-گزینه ۱) مقدار تابع f' در نقطه‌های به طول صفر، ۱ و ۲ برابر

صفر است، پس خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌های به طول صفر، ۱ و ۲ موازی محور x است. روی بازه‌های $(-\infty, \circ)$ و $(1, 2)$ علامت f' مثبت

است، پس تابع f روی این بازه‌ها اکیداً صعودی است. روی بازه‌های $(\circ, 1)$ و

$(2, +\infty)$ علامت f' منفی است، پس تابع f روی این بازه‌ها اکیداً نزولی

است. توجه کنید که فقط نمودار گزینهٔ (۱) این ویژگی‌ها را دارد.

۱۶۱۰-گزینه ۳) جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه‌ای شامل نقطهٔ صفر رو

به بالا است و در بقیهٔ جاها رو به پایین است. بنابراین مقادیر تابع f'' روی

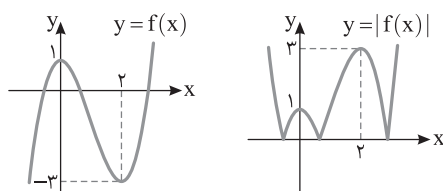
بازه‌ای شامل نقطهٔ صفر مثبت‌اند و در بقیهٔ جاها منفی‌اند. توجه کنید که فقط

نمودار گزینهٔ (۳) این ویژگی‌ها را دارد.

۱۶۱۱-گزینه ۲) ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ را رسم می‌کنیم.

x	$-\infty$	$\circ$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$
f	$-\infty$	1	-3	$+\infty$

بنابراین نمودار تابع f و نمودار تابع $y=|f(x)|$ به صورت زیر است.



۱۶۰۲-گزینه ۴) توجه کنید که اگر $x > \circ$ ، آن‌گاه $f(x) = x^3 - 3x^2$.

بنابراین

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f''(x) = 6x - 6, \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$\circ$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(\circ, 1)$ به سمت پایین و روی بازهٔ $(1, +\infty)$ به سمت بالاست. این شرایط فقط در نمودار گزینهٔ (۴) وجود دارد.

۱۶۰۳-گزینه ۱) توجه کنید که نمودار تابع f دارای یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی

و یک نقطهٔ مینیمم نسبی است. پس مشتق تابع باید در دو نقطه تغییر علامت

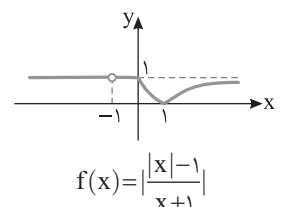
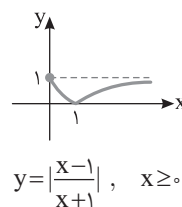
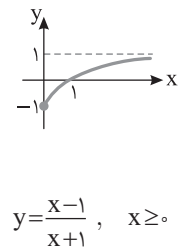
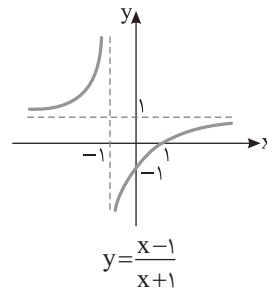
دهد. پس معادلهٔ $f'(x) = 0$ باید دو جواب داشته باشد:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + a, \quad \Delta = 4 - 12a > 0 \Rightarrow a < \frac{1}{3}$$

۱۶۰۴-گزینه ۱) ابتدا توجه کنید که اگر $x \geq \circ$ ، آن‌گاه $f(x) = \frac{|x-1|}{x+1}$ و

اگر $x < \circ$ و $x \neq -1$ ، آن‌گاه $f(x) = \frac{-x-1}{x+1}$. بنابراین به کمک نمودار

تابع $y = \frac{x-1}{x+1}$ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم.



۱۶۰۵-گزینه ۳) از روی نمودار تابع f مشخص است که تابع f در دو

طرف مجانب قائم‌آن، یعنی روی بازه‌های $(-\infty, 3)$ و $(3, +\infty)$

اکیداً صعودی است. بنابراین

$$f'(x) = \frac{m(x-3)-(mx+1)}{(x-3)^2} = \frac{-3m-1}{(x-3)^2} \Rightarrow -3m-1 > 0 \Rightarrow m < -\frac{1}{3}$$

۱۶۰۶-گزینه ۳) ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 6x + 8} = \frac{(x-3)(x-4)}{(x-4)(x-2)} = \frac{x-3}{x-2}, \quad x \neq 4$$

بنابراین نمودار تابع یک مجانب قائم به معادلهٔ $x=2$ و یک مجانب افقی به معادلهٔ $y=1$ دارد. پس گزینه‌های (۲) و (۴) جواب نیستند. از طرف دیگر،

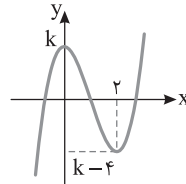
$f'(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$. بنابراین تابع f روی بازهٔ $(-\infty, 2)$ صعودی است. پس

گزینهٔ (۱) نیز جواب نیست و گزینهٔ (۳) جواب است.

۱۶۱۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

x	$-\infty$	۰	۲	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		max نسبی	min نسبی	
		k	k-4	



بنابراین نمودار تابع f به صورت مقابل است. برای اینکه نمودار تابع از ناحیه چهارم عبور نکند، باید عرض نقطه مینیمم نسبی آن منفی نباشد. یعنی $k - 4 \geq 0$ و در نتیجه $k \geq 4$. پس حداقل مقدار k برابر ۴ است.

۱۶۱۳- گزینه ۱ معادله را به صورت $2x^3 + 3x = -k$ می نویسیم.

اکنون نمودار تابع $f(x) = 2x^3 + 3x$ را رسم می کنیم و شرطی را پیدا می کنیم که با وجود آن شرط، خط $y = -k$ نمودار تابع f را فقط در یک نقطه با طول منفی قطع کند. تابع f اکیداً صعودی است. زیرا

با توجه به $f(0) = 0$ نمودار تابع f به صورت زیر است. واضح است که اگر $-k < 0$ طول نقطه برخورد خط $y = -k$ با نمودار تابع f عددی منفی است، پس $k > 0$.

۱۶۱۴- گزینه ۱ عرض نقطه عطف نمودار تابع f برابر ۸ است و خط مماس بر نمودار تابع در نقطه عطف، افقی است. پس مشتق اول و مشتق دوم تابع در این نقطه برابر صفر است.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 6x + 2a, \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{3}$$

$$\text{بنابراین } f(-\frac{a}{3}) = 8 \text{ و } f'(-\frac{a}{3}) = 0 \text{ پس}$$

$$f'(-\frac{a}{3}) = 3(-\frac{a}{3})^2 + 2a(-\frac{a}{3}) + b = 0 \Rightarrow b = \frac{a^2}{3}$$

$$f(-\frac{a}{3}) = (-\frac{a}{3})^3 + a(-\frac{a}{3})^2 + b(-\frac{a}{3}) = 8$$

$$-\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{a^3}{9} = 8 \Rightarrow a^3 = -8 \times 27 \Rightarrow a = -6$$

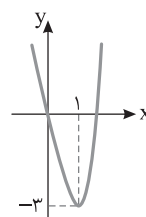
$$\text{بنابراین } b = 12 \text{ و در نتیجه } a + b = 6$$

۱۶۱۵- گزینه ۳ نمودار تقریبی تابع را به کمک تعیین نقاط اکسترمم

$$f'(x) = 4x^3 - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$$

نسبی رسم می کنیم.

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$
		-3	



با توجه به نمودار تابع f برد این تابع بازه $(-3, +\infty)$ است.

۱۶۱۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $x = -3$ تنها مجانب قائم نمودار

تابع f است. بنابراین پس از ساده کردن ضابطه تابع f باید مخرج $f(x)$ فقط یک ریشه داشته باشد و آن هم $x = -3$ باشد:

$$x^2 - b = 0 \xrightarrow{x = -3} 9 - b = 0 \Rightarrow b = 9$$

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + 3}{x^2 - 9} = \frac{x^2 + ax + 3}{(x-3)(x+3)}$$

بنابراین باید $x = 3$ ریشه صورت کسر بالا باشد. پس $9 + 3a + 3 = 0 \Rightarrow a = -4$

$$\text{پس } ab = -36$$

۱۶۱۷- گزینه ۲ ضابطه تابع به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{3ax^2 - ax - x^2 - a}{3x - 1} = \frac{(3a-1)x^2 - ax - a}{3x - 1}$$

ضابطه تابع هموگرافیک از تقسیم دو تابع چندجمله‌ای درجه اول به دست می آید. بنابراین صورت کسر ضابطه تابع نباید عبارت درجه دوم داشته باشد. پس

$$3a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت $f(x) = \frac{-\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}x - 1} = \frac{-x - 1}{3x - 3}$ است. پس نقطه

برخورد مجانب‌های نمودار تابع $A(\frac{1}{3}, -\frac{1}{9})$ است که فاصله آن تا مبدأ

$$\text{مختصات برابر است با } OA = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (-\frac{1}{9})^2} = \frac{\sqrt{10}}{9}$$

۱۶۱۸- گزینه ۴ توجه کنید که نمودار تابع f فقط در یک نقطه با طول مثبت محور طول‌ها را قطع کرده است. از طرف دیگر

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1$$

پس $x = -1$ باید جواب معادله $x^2 + ax + 3 = 0$ هم باشد. بنابراین $1 - a + 3 = 0 \Rightarrow a = 4$. در نتیجه ضابطه تابع f به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x-1}{x+3}, x \neq -1$$

پس $x = -3$ مجانب قائم نمودار تابع f است و در نتیجه $c = -3$. از طرف دیگر b عرض نقطه‌ای است که تابع f در آن تعریف نشده ولی مجانب قائم نیز

$$b = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+3} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \text{ ندارد. یعنی}$$

$$\text{پس } a + b + c = 0$$

۱۶۱۹- گزینه ۱ توجه کنید که $1 - \sin x \geq 0$ ، بنابراین مقادیر تابع

$$f(x) = \frac{1}{1 - \sin x}$$

همگی مثبت هستند. فقط نمودار گزینه (۱) این ویژگی را دارد.

۱۶۲۰- گزینه ۳ نمودار تابع f' دو بار محور طول‌ها را قطع می کند، یعنی

در این نقاط مشتق برابر صفر است و تغییر علامت می دهد. پس f دو نقطه اکسترمم نسبی دارد. همچنین نمودار تابع f' در سه نقطه از حالت صعودی به حالت نزولی (یا برعکس) درمی آید. بنابراین تابع f سه نقطه عطف دارد.

۱۶۲۱- گزینه ۱ توجه کنید که اگر $x > 0$ ، آن گاه

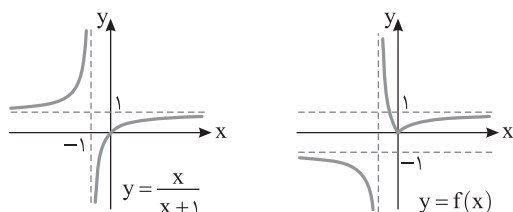
$$f(x) = -x^3 + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = -6x + 6$$

x	۰	۱	$+\infty$
$f''(x)$		+	-

بنابراین جهت تغییر نمودار تابع f روی بازه $(0, 1)$ به سمت بالا و روی بازه $(1, +\infty)$ به سمت پایین است. این شرایط فقط در نمودار تابع گزینه (۱) وجود دارد.

۱۶۲۶- گزینه ۴) راه حل اول چون $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & x \geq 0 \\ \frac{-x}{x+1} & x < 0 \end{cases}$ پس

نمودار تابع f را به صورت زیر رسم می کنیم. ابتدا نمودار تابع $y = \frac{x}{x+1}$ را رسم می کنیم. سپس روی بازه $(-\infty, 0)$ نمودار این تابع را نسبت به محور x قرینه می کنیم تا نمودار تابع $y = \frac{-x}{x+1}$ رسم شود. بدین ترتیب نمودار تابع f رسم می شود. بنابراین $R_f = \mathbb{R} - [-1, 0)$.



راه حل دوم فرض کنید $f(x) = -\frac{1}{x}$ در این صورت

$$\frac{|x|}{x+1} = -\frac{1}{x} \Rightarrow 2|x| = -x-1 \Rightarrow 2|x|+x = -1$$

واضح است که اگر $x \geq 0$ ، معادله بالا جواب ندارد. اگر $x < 0$ ، آن گاه $-2x+x = -1 \Rightarrow x = 1$ (غ.ق.ق.)

پس $-\frac{1}{x}$ در برد تابع قرار ندارد و فقط گزینه ۴) به این صورت است.

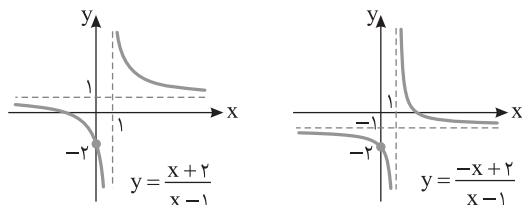
۱۶۲۷- گزینه ۱) نمودار تابع f را رسم می کنیم. توجه کنید که اگر $x \geq 0$

و $x \neq 1$ ، آن گاه $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ و اگر $x < 0$ ، آن گاه $f(x) = \frac{-x+2}{x-1}$. بنابراین

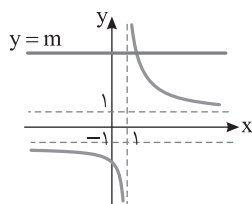
ابتدا نمودار تابع $y = \frac{x+2}{x-1}$ را رسم می کنیم و قسمتی از آن را که سمت راست

محور عرض ها قرار دارد انتخاب می کنیم. سپس نمودار تابع $y = \frac{-x+2}{x-1}$ را رسم

می کنیم و قسمتی از آن را که سمت چپ محور عرض ها قرار دارد انتخاب می کنیم.



پس نمودار تابع f به صورت زیر است. اگر $-1 \leq m \leq 1$ ، آن گاه خط $y = m$ نمودار تابع f را قطع نمی کند.

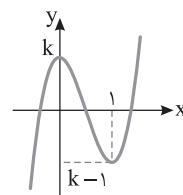


۱۶۲۲- گزینه ۲) ابتدا توجه کنید که

$$f'(x) = 6x^2 - 6x, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		max نسبی	min نسبی	

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است. برای اینکه نمودار از چهار ناحیه عبور کند باید عرض نقطه ماکزیمم نسبی تابع مثبت باشد و عرض نقطه مینیمم نسبی تابع منفی باشد. یعنی $k > 0$ و $k-1 < 0$. بنابراین $0 < k < 1$.



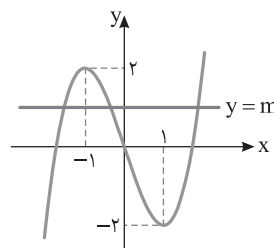
۱۶۲۳- گزینه ۲) ابتدا نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع را مشخص

می کنیم، سپس نمودار تابع را رسم می کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		max نسبی	min نسبی	

با توجه به نمودار تابع f ، اگر $m \geq 2$ یا $m \leq -2$ ، آن گاه خط $y = m$ نمودار تابع f را در سه نقطه قطع نمی کند. پس m نمی تواند مقادیر صحیح صفر و ± 1 باشد.



۱۶۲۴- گزینه ۲) توجه کنید که $(1, -1)$ نقطه مینیمم نسبی تابع f

است. پس $f(1) = -1$ و $f'(1) = 0$.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx \Rightarrow f(1) = 1 + a + b = -1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(1) = 3 + 2a + b = 0$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} a+b = -2 \\ 2a+b = -3 \end{cases}$ نتیجه می شود $a = -1$ و $b = -1$.

طول نقطه عطف تابع برابر $\frac{-a}{3}$ است. پس $x = \frac{1}{3}$ طول نقطه عطف است.

۱۶۲۵- گزینه ۴) توجه کنید که جهت تقعر نمودار تابع f همواره به سمت بالاست. بنابراین مشتق دوم آن همواره نامنفی است:

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 1 \Rightarrow f''(x) = 12x^2 + 6ax = 6x(2x+a)$$

اگر $a \neq 0$ ، آن گاه $x = 0$ و $x = -\frac{a}{2}$ جواب های معادله $f''(x) = 0$ هستند و

جهت تقعر نمودار تابع f در دو نقطه عوض می شود. اگر $a = 0$ ، آن گاه $f''(x) = 12x^2$ و مشتق دوم تابع f همواره نامنفی است.

۱۶۳۴- گزینه ۱ چون تابع f همه جا مشتق پذیر است، پس نقاط اکسترمم نسبی آن جواب‌های معادله $f'(x)=0$ هستند. از طرف دیگر،

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

چون $f'(1)=0$ و $f'(3)=0$ در نقطه $x=1$ از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد، پس تابع f در نقطه $x=1$ ماکزیمم نسبی دارد. طبق فرض $f(1)=-4$ ، پس

$$1-6+9+a=-4 \Rightarrow a=-8$$

x	$-\infty$		۱		۳		$+\infty$
$f'(x)$		+	+	-	-	+	
$f(x)$		↗	max	↘	min	↗	

۱۶۳۵- گزینه ۲ توجه کنید که $D_f = (-5, +\infty)$ و

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x+5} - \frac{x^2-17}{2\sqrt{x+5}}}{x+5} = \frac{2x^2 + 20x + 17}{2(x+5)\sqrt{x+5}}$$

تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق پذیر است. پس نقاط اکسترمم نسبی آن جواب‌های معادله $f'(x)=0$ است. پس

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2 + 20x + 17 = 0 \Rightarrow x = -1, \quad x = -\frac{17}{3} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

پس $x=-1$ طول تنها نقطه بحرانی تابع f است و عرض این نقطه برابر است با $f(-1)=-8$.

۱۶۳۶- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = 3(x-2)^2(x+2) + (x-2)^2 = (x-2)^2(4x+4)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=2, \quad x=-1$$

اکنون مقادیر $f(-1)$ ، $f(2)$ و $f(-2)$ را مقایسه می‌کنیم:

$$f(-1)=-27, \quad f(2)=0, \quad f(-2)=0$$

بنابراین -27 مقدار مینیمم مطلق تابع f در بازه $[-2, 2]$ است.

۱۶۳۷- گزینه ۳ توجه کنید که $x=4-2y$ و باید کمترین مقدار ممکن

تابع $f(y)=4-2y+y^2$ را پیدا کنیم. از طرف دیگر،

$$f'(y) = -2+2y, \quad f'(y)=0 \Rightarrow y=1$$

چون تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد و

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty$$

پس کمترین مقدار تابع f به ازای $y=1$ به دست می‌آید و برابر است با $f(1)=3$.

۱۶۳۸- گزینه ۲ فرض کنید طول نقطه C برابر x باشد. در این صورت،

طول نقطه A هم برابر x است و چون نقطه A روی نمودار تابع $y=\sqrt{5-x}$

است، پس عرض نقطه A برابر با $\sqrt{5-x}$ است. بنابراین $AC=\sqrt{5-x}$.

از طرف دیگر $BC=x+4$. به این ترتیب

$$ABC \text{ مساحت مثلث } = \frac{1}{2}(x+4)\sqrt{5-x}$$

۱۶۳۸- گزینه ۴ توجه کنید که حد تابع f در $x=1$ برابر $-\infty$ است.

پس $x=1$ ریشه مضاعف معادله $x^2+bx+c=0$ است. یعنی

$$x^2+bx+c=(x-1)^2=x^2-2x+1$$

پس $b=-2$ ، $c=1$ و $f(x)=\frac{x^2+ax}{(x-1)^2}$. از طرف دیگر $x=-2$ طول نقطه

ماکزیمم نسبی تابع f است، پس $f'(-2)=0$. بنابراین

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2+ax)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(2x+a)(x-1) - 2(x^2+ax)}{(x-1)^3}$$

$$f'(-2)=0 \Rightarrow (-4+a)(-3) - 2(4-2a)=0 \Rightarrow a=-4$$

۱۶۳۹- گزینه ۳ توجه کنید که $x=\frac{7\pi}{4}$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f

است و $f'(\frac{7\pi}{4})=0$. پس

$$f'(x) = -\sin x + a \cos x$$

$$f'(\frac{7\pi}{4}) = -(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow a=-1$$

۱۶۳۰- گزینه ۳ جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه‌ای شامل نقطه صفر

رو به پایین است و در بقیه جاها رو به بالاست. بنابراین مقادیر تابع f'' روی بازه‌ای شامل نقطه صفر منفی‌اند و در بقیه جاها مثبت‌اند. توجه کنید که فقط نمودار گزینه (۳) این ویژگی‌ها را دارد.

۱۶۳۱- گزینه ۲ چون تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر و صعودی است، پس مشتق

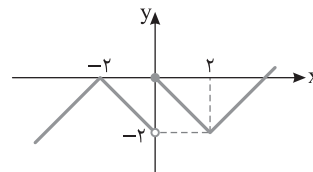
آن همه جا نامنفی است. بنابراین $f'(x)=3ax^2-18x+3a \geq 0$. در نتیجه

$$ax^2-6x+a \geq 0 \Rightarrow a > 0, \quad \Delta = 6^2 - 4a^2 \leq 0 \Rightarrow a \geq 3 \text{ یا } a \leq -3$$

پس $a \geq 3$.

۱۶۳۲- گزینه ۳ نمودار تابع f به شکل زیر است. این تابع در نقطه‌های

$x=-2$ و $x=0$ ماکزیمم نسبی دارد و در نقطه $x=2$ مینیمم نسبی دارد.



۱۶۳۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f'(x) = x(x^2+5x+4) = x(x+1)(x+4)$$

x	$-\infty$		-۴		-۱		۰		$+\infty$
$f'(x)$		-	-	+	+	-	-	+	
$f(x)$		↘	min	↗	max	↘	min	↗	

پس تابع f در نقطه‌های $x=-4$ و $x=0$ مینیمم نسبی دارد و در نقطه

$x=-1$ ماکزیمم نسبی دارد.

۱۶۴۱- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ و

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x(x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$$

به جدول زیر توجه کنید:

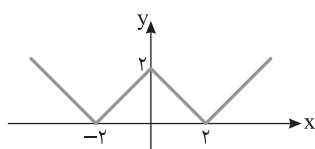
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	-	-
f		$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

همچنین

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

بنابراین جدول تعیین جدول تغییرات تابع f به شکل بالاست و این تابع روی بازه‌های $(-\infty, -1)$ ، $(-1, 1)$ و $(1, +\infty)$ نزولی است ولی روی دامنه‌اش غیر یکنواست.



۱۶۴۲- گزینه ۲ نمودار

تابع f به شکل مقابل است. از روی این شکل معلوم است که تابع f دو نقطه مینیمم نسبی و یک نقطه ماکزیمم نسبی دارد.

۱۶۴۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 1 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 20x^3 = 5x^3(x - 4)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$$

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
f		$\nearrow$	max	$\searrow$

بنابراین تابع f در نقطه $x = 0$ ماکزیمم نسبی و در نقطه $x = 4$ مینیمم نسبی دارد.

۱۶۴۴- گزینه ۳ چون تابع f همه جا مشتق پذیر است، پس مشتق آن در

نقطه اکسترم نسبی‌اش برابر صفر است:

$$f(x) = \frac{a}{3}x^3 + 2bx^2 + 4x - \frac{f}{3} \Rightarrow f'(x) = ax^2 + 4bx + 4$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow a - 4b + 4 = 0$$

از طرف دیگر، مختصات نقطه اکسترم نسبی در معادله تابع صدق می‌کنند:

$$f(-1) = 2 \Rightarrow -\frac{a}{3} + 2b - 4 - \frac{f}{3} = 2 \Rightarrow -a + 6b = 22$$

$$\begin{cases} a - 4b = -4 \\ -a + 6b = 22 \end{cases} \quad \text{نتیجه می‌شود } a = 32 \text{ و } b = 9$$

در نتیجه $a - b = 23$.

۱۶۴۵- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = 2x\sqrt{x^2} + \frac{2(x^2 - 1)}{3\sqrt{x}} = \frac{8x^2 - 2}{3\sqrt{x}}$$

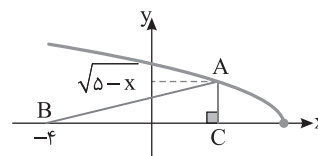
تابع f در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر نیست و $f'(-\frac{1}{2}) = 0$ و $f'(\frac{1}{2}) = 0$. پس تابع f سه نقطه بحرانی دارد.

بنابراین باید x ای را پیدا کنیم که تابع $f(x) = \frac{1}{2}(x+4)\sqrt{5-x}$ به ازای آن

بیشترین مقدار ممکن است. توجه کنید که

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5-x} + \frac{1}{2}(x+4)\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{5-x} = \frac{1}{4}\frac{x+4}{\sqrt{5-x}} \Rightarrow 10 - 2x = x + 4 \Rightarrow x = 2$$



۱۶۳۹- گزینه ۴ چون تابع f همه جا دوبار مشتق پذیر است، پس طول

نقطه‌های عطف آن جواب‌های معادله $f''(x) = 0$ هستند. (به شرطی که f''

در آن‌ها تغییر علامت بدهد.) توجه کنید که

$$f'(x) = 8x^3 + 3ax^2 + 2bx$$

$$f''(x) = 24x^2 + 6ax + 2b$$

$$\begin{cases} f''(1) = 0 \\ f''(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24 + 6a + 2b = 0 \\ 24 - 6a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -12 \end{cases}$$

بنابراین $f'(x) = 8x^3 - 24x$ و طول نقاط اکسترم نسبی جواب‌های معادله

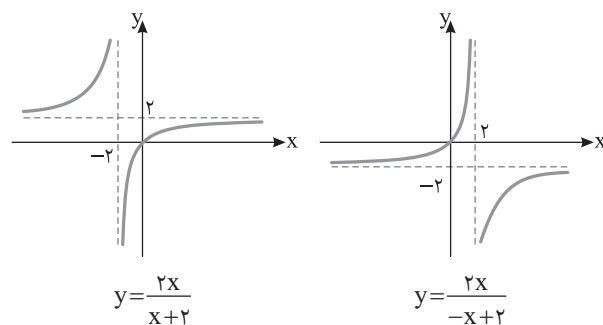
$8x^3 - 24x = 0$ هستند. جواب‌های این معادله $x = \sqrt{3}$ ، $x = 0$ و

$x = -\sqrt{3}$ هستند که مجموع آن‌ها برابر صفر است.

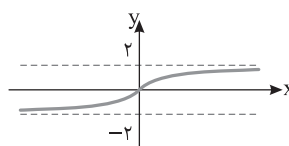
۱۶۴۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x+2} & x \geq 0 \\ \frac{2x}{-x+2} & x \leq 0 \end{cases}$$

نمودار توابع $y = \frac{2x}{-x+2}$ و $y = \frac{2x}{x+2}$ به صورت زیر است.



بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است.



برای اینکه خط $y = m$ نمودار تابع f را قطع نکند، لازم است که $|m| \geq 2$.

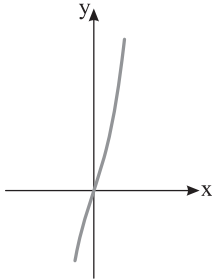
۱۶۴۹-گزینه ۲ توجه کنید که $f''(x) = 6ax - 12$. طبق فرض مسئله، جدول تغییر علامت f'' به صورت زیر است:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$		+	-
f		∪	∩

بنابراین -2 ریشه f'' است. $6a(-2) - 12 = 0 \Rightarrow a = -1$

۱۶۵۰-گزینه ۲ تابع g اکیداً صعودی

است، زیرا $g'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ ، از طرف دیگر، $g(0) = 0$ و نمودار تقریبی این تابع به صورت روبرو است.

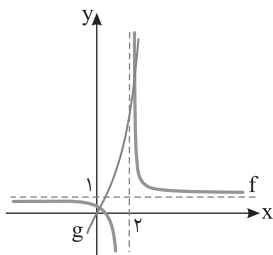


تابع $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ دو مجانب به معادله‌های

$x=2$ و $y=1$ دارد و روی بازه‌های $(-\infty, 2)$ و $(2, +\infty)$ نزولی است، زیرا

$$f'(x) = \frac{x-2-x+1}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0.$$

پس نمودار تابع f به صورت زیر است و دو نمودار یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.



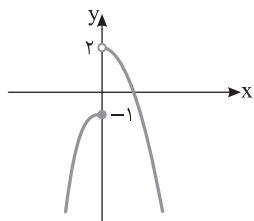
۱۶۵۱-گزینه ۴ از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازه $(-3, -1)$ مشتق‌پذیر و اکیداً نزولی است. بنابراین $f'(x) < 0$. اکنون توجه

کنید که چون مقادیر تابع f منفی‌اند، پس

$$y = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow y' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} > 0, \quad x \in (-3, -1)$$

بنابراین تابع گزینه (۴) اکیداً صعودی است.

مثال نقض برای گزینه‌های دیگر تابع $f(x) = -x^3 - 100$ است.



۱۶۵۲-گزینه ۴ نمودار تابع f

به صورت مقابل است. این تابع نه ماکزیمم نسبی دارد و نه مینیمم نسبی.

۱۶۵۳-گزینه ۴ توجه کنید که $f'(x) = \frac{3-3x^2}{3\sqrt{(3x-x^3)^2}}$ تابع f در

نقطه‌های $x=0$ و $x=\pm\sqrt{3}$ مشتق ندارد و در نقطه‌های $x=1$ و $x=-1$ مشتق آن صفر است. جدول تغییرات تابع f به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	∩	-	+	+	-	-
f(x)		↘	↘	↗	↗	↘	↘
			min		max		

پس $x=1$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع است و عرض این نقطه برابر $\sqrt[3]{2}$ است.

۱۶۴۶-گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}(x+a)}{2\sqrt{x}} = \frac{x-a}{2x\sqrt{x}}, \quad f'(x)=0 \Rightarrow x=a \notin [1, 4] \text{ (غ.ق.)}$$

پس باید بین مقادیر $f(1)$ و $f(4)$ دنبال ماکزیمم مطلق تابع بگردیم: $f(1)=1+a$ و $f(4)=2+\frac{a}{4}$. چون a عددی از بازه $(0, 1)$ است، مقدار

$2+\frac{a}{4}$ از مقدار $1+a$ بزرگ‌تر است، پس مقدار ماکزیمم مطلق تابع $2+\frac{a}{4}$ است. بنابراین $2+\frac{a}{4} = \frac{9}{4}$ ، در نتیجه $a = \frac{1}{4}$.

۱۶۴۷-گزینه ۳ فرض کنید طول نقطه A برابر $-x$ باشد. چون نقطه A روی نمودار تابع $y=x^2+1$ است، پس عرض نقطه A برابر x^2+1 است. به

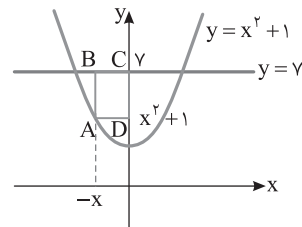
این ترتیب، عرض نقطه D هم برابر x^2+1 است و در نتیجه

$$CD = y - (x^2+1) = 6 - x^2$$

بنابراین $x(6-x^2)$ مساحت مستطیل $ABCD$.

اگر $f(x) = x(6-x^2)$ ، آن‌گاه $f(x) = 6x - x^3$ ، در نتیجه $f'(x) = 6 - 3x^2$.
پس (توجه کنید که $x > 0$) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f ، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل $ABCD$ به ازای $x = \sqrt{2}$ به دست می‌آید و برابر است با $\sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2}$.



۱۶۴۸-گزینه ۱ فرض کنید (x, x^3) نقطه‌ای روی نمودار تابع

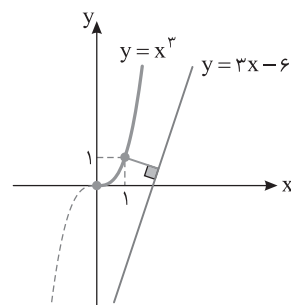
$y=x^3$ باشد. فاصله این نقطه تا خط $y-3x+6=0$ برابر است با

$$\frac{|x^3-3x+6|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{|x^3-3x+6|}{\sqrt{10}} = \frac{x^3-3x+6}{\sqrt{10}}$$

بنابراین طول نقطه مورد نظر جایی است که کمترین مقدار تابع $d = x^3 - 3x + 6$ به دست می‌آید. توجه کنید که

$$d' = 3x^2 - 3, \quad d' = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1 \text{ (غ.ق.)}$$

پس باید مقادیر $d(1)$ و $d(-1)$ را مقایسه کنیم: $d(1) = 4$ و $d(-1) = 6$. بنابراین طول نزدیک‌ترین نقطه برابر ۱ است.



۱۶۵۸- گزینه ۴ ارتفاع مکعب حاصل مساوی x است. طول و عرض

قاعده آن را با l نمایش می‌دهیم. در این صورت $xl = \text{حجم}$. توجه کنید که

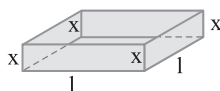
$$2x + l = 30 \Rightarrow l = 30 - 2x \Rightarrow \text{حجم} = x(30 - 2x)^2$$

بنابراین باید ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = x(30 - 2x)^2$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f(x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x \Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 240x + 900$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 240x + 900 = 0 \Rightarrow x^2 - 20x + 75 = 0$$

$$(x-5)(x-15) = 0 \Rightarrow x = 5, x = 15$$



توجه کنید که به ازای $x = 15$ حجم جعبه

برابر صفر می‌شود. در نتیجه بیشترین مقدار

تابع f به ازای $x = 5$ به دست می‌آید.

۱۶۵۹- گزینه ۱ توجه کنید که $f(x) = x + (x-1)^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} \text{ و } f''(x) = -\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}}$$

از طرف دیگر.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = +\infty$$

بنابراین نمودار تابع f در نقطه به طول ۱ خط مماس قائم دارد و چون f'' در

$x = 1$ تغییر علامت می‌دهد. پس طول نقطه عطف نمودار تابع f برابر ۱ و

عرض آن نیز برابر است با $f(1) = 1$.

۱۶۶۰- گزینه ۱ چون مقادیر f'' همه جا مثبت اند. پس جهت تقعر تابع f

روی $\mathbb{R}$ رو به بالا است. توجه کنید که نمودارهای گزینه‌های (۲) و (۳) این

ویژگی را ندارد. گزینه (۴) نیز درست نیست چون مشتق دوم تابع خطی برابر

صفر است. بنابراین گزینه (۱) درست است.

۱۶۶۱- گزینه ۱ از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 8 = 4(x-1)(x^2 + x - 2) = 4(x-1)^2(x+2)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$+$
f		$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

با توجه به جدول بالا تابع فقط یک مینیمم نسبی دارد. خارج از کشور ریاضی - ۹۰

۱۶۶۲- گزینه ۲ نقطه $(1, -2)$ روی نمودار تابع است. پس $f(1) = -2$.

در نتیجه $a + b = -2$. همچنین

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} + 2bx \xrightarrow{f'(1)=0} -a + 2b = 0 \xrightarrow{a+b=-2} a = -\frac{4}{3}, b = -\frac{2}{3}$$

$$3b = -2 \Rightarrow b = -\frac{2}{3}, a = -\frac{4}{3}$$

$$f(x) = \frac{4}{3}\left(\frac{1-x^3}{x^2}\right) \text{ بنابراین}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
f		$\nearrow$	$\searrow$

پس نقطه $(1, -2)$ نقطه ماکزیمم نسبی است.

۱۶۵۴- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f = [-2, 2]$ و تابع f روی بازه

$(-2, 2)$ مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = x$$

$$\xrightarrow{x \geq 0} 4-x^2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}, \quad x = -\sqrt{2} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

بنابراین باید $f(-2)$ ، $f(\sqrt{2})$ و $f(2)$ را مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار و کمترین

مقدار تابع f روی بازه $[-2, 2]$ پیدا شود: $f(-2) = -2$ ، $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ و

$f(2) = 2$. بنابراین بیشترین مقدار تابع برابر $2\sqrt{2}$ و کمترین مقدار آن برابر -2

است و نسبت بیشترین مقدار به کمترین مقدار تابع برابر $-\sqrt{2}$ است.

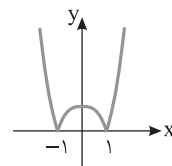
۱۶۵۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x \geq 0$ ، آن گاه $f(x) = |x^3 - 1|$

و اگر $x < 0$.

آن گاه $f(x) = |-x^3 - 1| = |x^3 + 1|$. بنابراین نمودار تابع f به صورت مقابل

است. پس در نقطه‌های $x = 1$ و $x = -1$ تابع f مشتق ندارد (نقطه گوشه‌ای) و

در نقطه $x = 0$ مشتق تابع f برابر صفر است. پس این تابع سه نقطه بحرانی دارد.



۱۶۵۶- گزینه ۲ چون $x + y = 2$ ، پس $y = 2 - x$ ، در نتیجه

$$x^3 + y^3 = x^3 + (2-x)^3 = 2(3x^2 - 6x + 4)$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x) = 2(3x^2 - 6x + 4)$ را پیدا کنیم. توجه

کنید که

$$f'(x) = 2(6x - 6) = 12(x - 1), \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

چون تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

پس کمترین مقدار تابع f به ازای $x = 1$ به دست می‌آید و برابر است با $f(1) = 2$.

۱۶۵۷- گزینه ۳ فاصله نقطه‌های مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{(3x-x)^2 + (x+6-4)^2} = \sqrt{4x^2 + 4x + 4}$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 4}$ را پیدا کنیم.

توجه کنید که $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{10x+4}{2\sqrt{4x^2+4x+4}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

چون تابع f فقط یک نقطه بحرانی دارد. پس کمترین مقدار آن به ازای $x = -\frac{1}{2}$

به دست می‌آید که برابر است با

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 4} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

بنابراین جهت یکنوایی و تقعر نمودار f به صورت زیر است:

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	+	-
$f''(x)$		-	+	-	-
f		$\nearrow \cap$	$\nearrow \cup$	$\nearrow \cap$	$\searrow \cap$

روی بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(2, 3)$ نمودار تابع f صعودی و تقعر آن رو به پایین است.

تجربی - ۹۱

۱۶۶۷- گزینه ۳ مشتق اول و دوم تابع f را به دست می‌آوریم و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \Rightarrow f'(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow f''(x) = 2x - 2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 3, \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

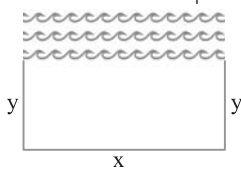
x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	-	+
$f''(x)$		-	-	+	+
f		$\nearrow \cap$	$\searrow \cap$	$\searrow \cup$	$\nearrow \cup$

پس روی بازه $(1, 3)$ نمودار تابع f نزولی و تقعر آن رو به بالاست.

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱۶۶۸- گزینه ۲ با توجه به شکل زیر، $x + 2y = 88 \Rightarrow x = 88 - 2y$

می‌خواهیم مساحت مستطیل یعنی $S = xy$ ماکزیمم باشد:



$$S(y) = (88 - 2y)y = -2y^2 + 88y$$

$$S'(y) = -4y + 88 = 0 \Rightarrow y = 22$$

$$S_{\max} = 968 \text{ m}^2$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱۶۶۹- گزینه ۴ توجه کنید که

$$y = \begin{cases} x^3 - 4x^2 & x \geq 4 \text{ یا } x \leq 0 \\ -x^3 + 4x^2 & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 3x^2 - 8x & x > 4 \text{ یا } x < 0 \\ -3x^2 + 8x & 0 \leq x < 4 \end{cases}$$

$$y'' = \begin{cases} 6x - 8 & x > 4 \text{ یا } x < 0 \\ -6x + 8 & 0 < x < 4 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{4}{3}$	4	$+\infty$		
y''		-	0	+	-	0	+

جهت تقعر نمودار تابع در $x = \frac{4}{3}$ ، $x = 0$ و $x = 4$ تغییر می‌کند ولی فقط در

$x = 0$ و $x = \frac{4}{3}$ تابع مشتق‌پذیر است و خط مماس دارد. پس این دو طول

ریاضی - ۹۲

نقاط عطف نمودار تابع هستند.

۱۶۶۳- گزینه ۱ ابتدا مشتق تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-1)^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1)^2 + 2(x-1)x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x}} + 2(x-1)\sqrt[3]{x^2} = \frac{2(x-1)^2 + 6x(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}$$

اکنون معادله $f'(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x-1+3x)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{2(x-1)(4x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow x = 1, x = \frac{1}{4}$$

تابع مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	o	$\frac{1}{4}$	1	$+\infty$
$\varphi(x-1)(\varphi x-1)$	+	+	-	+	
$\sqrt[3]{x}$	-	+	+	+	
$f'(x)$	-	+	-	+	
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$ min $\nearrow$

با توجه به جدول، $x = \frac{1}{4}$ طول نقطه ماکزیمم نسبی است. خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۱۶۶۴- گزینه ۴ توجه کنید که تابع f در ابتدا و انتهای بازه $[-1, 2]$

مشتق‌پذیر نیست، پس این نقطه‌ها، نقطه‌های بحرانی هستند. همچنین،

$f(x) = |x||x|^2 - 1$. بنابراین نقطه‌های $x = 0$ و $x = 1$ نیز نقطه‌های بحرانی

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & -1 \leq x \leq 0 \\ -x^3 + x & 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

تابع f هستند. از طرف دیگر، $f(x) = -x^3 + x$ ، بنابراین

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \quad f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & -1 < x < 0 \\ -3x^2 + 1 & 0 < x < 1 \\ 3x^2 - 1 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

در نتیجه

ریاضی - ۹۵

پس تابع f شش نقطه بحرانی دارد.

۱۶۶۵- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow 3(x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -1, x = 3 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

اکنون مقادیر $f(-2)$ ، $f(2)$ و $f(-1)$ را پیدا می‌کنیم تا بیشترین مقدار تابع f

در بازه $[-2, 2]$ مشخص شود: $f(-2) = 3$ ، $f(2) = -17$ و $f(-1) = 10$.

تجربی - ۹۲

پس بیشترین مقدار تابع f در این بازه برابر ۱۰ است.

۱۶۶۶- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 \Rightarrow f''(x) = -12x^2 + 24x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

۱۶۷۴- گزینه ۴ تابع f در ابتدا و انتهای بازه $[-2, 2]$ مشتق پذیر نیست،

پس این نقطه‌ها، نقطه‌های بحرانی هستند. همچنین تابع f در نقطه‌های $x = -1$ و $x = 1$ مشتق پذیر نیست، پس این نقطه‌ها نیز نقطه‌های بحرانی

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & -2 \leq x < -1 \\ -x^3 + x & -1 \leq x \leq 1 \\ x^3 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

هستند. از طرف دیگر، بنابراین

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & -2 < x < -1 \\ -3x^2 + 1 & -1 < x < 1 \\ 3x^2 - 1 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

در نتیجه

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

پس تابع f شش نقطه بحرانی دارد.

۱۶۷۵- گزینه ۲ طول نقاط بحرانی تابع روی بازه $(-4, 3)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x \Rightarrow f'(x) = x^2 - 2x - 15$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x-5)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 5$$

$x = 5$ در بازه مورد نظر نیست. برای یافتن مقادیر ماکزیمم و مینیمم، مقدار تابع را در نقاط زیر با هم مقایسه می‌کنیم:

$$f(-4) = -\frac{64}{3} - 16 + 60 = -\frac{64}{3} + 44 = \frac{68}{3} = 22\frac{2}{3}$$

$$f(-3) = -\frac{27}{3} - 9 + 45 = -18 + 45 = 27$$

$$f(3) = \frac{27}{3} - 9 - 45 = -45$$

پس $f(-3) = 27$ مقدار ماکزیمم مطلق و $f(3) = -45$ مینیمم مطلق تابع

تجربی - ۹۵

داده شده در بازه مورد نظر است.

۱۶۷۶- گزینه ۲ باید مشتق دوم تابع را تعیین علامت کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2+9}{x^2+12} \Rightarrow f'(x) = \frac{12-9}{(x^2+12)^2} \times 2x = \frac{6x}{(x^2+12)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6(x^2+12)^2 - 2(x^2+12)2x \times 6x}{(x^2+12)^4} = \frac{18(4-x^2)}{(x^2+12)^3}$$

برای آنکه $f''(x) > 0$ ، باید $4 - x^2 > 0$ ، یعنی $-2 < x < 2$. بنابراین بیشترین

ریاضی - ۸۸

مقدار $b-a$ برابر است با $4 - (-2) = 6$.

۱۶۷۷- گزینه ۱ مشتق دوم تابع f را پیدا می‌کنیم و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x) = (x+3)\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = \frac{3(x-1)}{4x\sqrt{x}}$$

x	۰	۱	$+\infty$
$f''(x)$		-	+
f		∩	∪

پس جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه $(0, 1)$ رو به پایین است و بیشترین

خارج از کشور تجربی - ۹۲

مقدار $b-a$ برابر ۱ است.

۱۶۷۰- گزینه ۲ با توجه به نمودار تابع f مشخص است که تابع فقط

یک نقطه اکسترمم نسبی به طول ۳ دارد. بنابراین $x = 3$ جواب معادله $f'(x) = 0$ است و $f'(x)$ در این نقطه تغییر علامت می‌دهد:

$$f(x) = ax^4 + 2x^3 + bx^2$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 6x^2 + 2bx = 2x(2ax^2 + 3x + b)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad 2ax^2 + 3x + b = 0$$

پس $x = 3$ باید جواب معادله $2ax^2 + 3x + b = 0$ باشد و این معادله نباید جواب دیگری غیر از $x = 0$ داشته باشد. بنابراین

$$x = 0 \Rightarrow 0 + 0 + b = 0 \Rightarrow b = 0, \quad x = 3 \Rightarrow 18a + 9 + 0 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

تجربی - ۹۲

۱۶۷۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f'(x) = 2x - \frac{a}{x^2} = \frac{2x^3 - a}{x^2} \xrightarrow{f'(x)=0} x_0 = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$$

$x = 0$ جزء دامنه تابع نیست و تنها باید $x = x_0$ را بررسی کنیم. در همسایگی این

نقطه، علامت f' از منفی به مثبت تغییر می‌کند (به ازای همه مقادیر a). بنابراین

همواره $x = x_0$ نقطه مینیمم نسبی تابع است و تابع ماکزیمم نسبی ندارد.

خارج از کشور ریاضی - ۸۹

۱۶۷۲- گزینه ۲ چون $0 \leq x - [x] < 1$ ، پس $-1 < f(x) \leq 0$ ، بنابراین از

اینکه تابع $g(x) = 2^x$ اکیداً صعودی است، نتیجه می‌شود

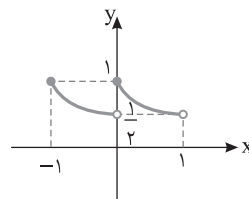
$$g(-1) < g(f(x)) \leq g(0) \Rightarrow \frac{1}{2} < (g \circ f)(x) \leq 1$$

پس تابع $g \circ f$ مقدار ماکزیمم نسبی دارد و مقدار مینیمم نسبی ندارد. به نمودار تابع

در بازه $[-1, 1]$ توجه کنید.

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = -1 - x \Rightarrow (g \circ f)(x) = 2^{-x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}-x}$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = -x \Rightarrow (g \circ f)(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



ریاضی - ۹۱

۱۶۷۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = 2x\sqrt[3]{x} + \frac{x^2-28}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{6x^2 + x^2 - 28}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{7x^2 - 28}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

تابع f در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر نیست و در نقطه‌های $x = 2$ و $x = -2$

مشتق آن صفر است. پس مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع f به صورت

$\{-2, 0, 2\}$ است.

تجربی - ۸۳

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & x < -\sqrt{3} \\ -3x^2 + 3 & -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ 3x^2 - 3 & x > \sqrt{3} \end{cases}$$

پس $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

اکنون توجه کنید که

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+	-	+
f		↗	↘	↗	↘	↗

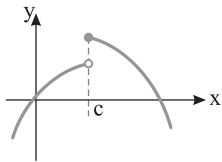
پس تابع f در چهار نقطه اکسترمم نسبی دارد.

۱۶۸۳- گزینه ۱ مشتق تابع را به دست می آوریم:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2 - (x^2+1)}{x^2\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

پس تابع f' ریشه ندارد و در همه نقاط دامنه f' تابع مشتق پذیر است.

بنابراین تابع f نقطه بحرانی ندارد.



۱۶۸۴- گزینه ۴ با توجه به شکل

مقابل هر سه گزینه (۱)، (۲) و (۳) نادرست

هستند. گزینه (۴) درست است. زیرا با

توجه به اینکه تابع f در همسایگی

نقطه $x=c$ تعریف شده است. در این نقطه مقدار تابع f در تعریف اکسترمم

نسبی صدق می کند.

۱۶۸۵- گزینه ۱ مشتق دوم تابع را به دست می آوریم:

$$f(x) = -\frac{2}{x^2+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{4(x^2+3)^2 - 2(x^2+3) \times 2x \times 4x}{(x^2+3)^4} = \frac{12(1-x^2)}{(x^2+3)^3}$$

به ازای $-1 < x < 1$ ، $f''(x) > 0$ ، پس تقعر نمودار تابع رو به بالا است.

ریاضی - ۹۰

۱۶۸۶- گزینه ۳ راه حل اول مشتق دوم تابع را پیدا می کنیم و محدوده‌ای

را تعیین می کنیم که علامت آن منفی است:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & x \geq 3 \\ -x^3 + 3x^2 & x \leq 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & x > 3 \\ -3x^2 + 6x & x < 3 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 6x - 6 & x > 3 \\ -6x + 6 & x < 3 \end{cases}$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow \begin{cases} 6x - 6 < 0 \Rightarrow x < 1 \xrightarrow{x > 3} \text{ غیر ممکن} \\ -6x + 6 < 0 \Rightarrow x > 1 \xrightarrow{x < 3} 1 < x < 3 \end{cases}$$

پس $\max(b-a) = 3-1 = 2$.

۱۶۷۸- گزینه ۳ چون طول نقطه عطف برابر ۱ است، پس

$$\frac{-(-1)}{3a} = 1 \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

در ضمن، مختصات نقطه عطف در ضابطه تابع صدق می کنند:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + b \xrightarrow{(1, -3)} -3 = \frac{1}{3} - 1 - 3 + b \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{2}{3}$ است. برای یافتن

نقطه ماکزیمم نسبی تابع، مشتق تابع را برابر صفر قرار می دهیم:

$$y' = x^2 - 2x - 3 \xrightarrow{y'=0} (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1, 3$$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
y'		+	-	+
y		↗	↘	↗

بنابراین نقطه‌ای به طول ۱- نقطه ماکزیمم نسبی تابع است. مقدار تابع در این نقطه برابر است با

$$y(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$

تجربی - ۹۶

۱۶۷۹- گزینه ۱ با توجه به نمودار می توان گفت تابع در نقطه $x = -1$

مماس افقی دارد، پس $f'(-1) = 0$. همچنین جهت تقعر نمودار در این نقطه

تغییر کرده است، پس $f''(-1) = 0$. بنابراین

$$f(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + bx \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2ax + b \\ f''(x) = 12x^2 - 6x + 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(-1) = -4 - 3 - 2a + b = 0 \\ f''(-1) = 12 + 6 + 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + b = 7 \\ 2a + 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -9 \\ b = -11 \end{cases}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۴

۱۶۸۰- گزینه ۲ تابع روی بازه $(-\infty, 0)$ نزولی است، پس روی این بازه

$f'(x) < 0$ و روی بازه $(0, +\infty)$ صعودی است، پس روی این بازه $f'(x) > 0$.

در ضمن تابع دو نقطه عطف دارد، پس f' دو نقطه اکسترمم نسبی دارد. در

نهایت $y = 0$ مجانب افقی f' است. تنها گزینه‌ای که تمام این شرایط را دارد

گزینه (۲) است.

۱۶۸۱- گزینه ۳ اگر تابع f در نقطه c مشتق پذیر باشد، مشتق آن در این

نقطه برابر صفر است، پس مشتق راست تابع نیز در این نقطه برابر صفر است. اگر

تابع f در نقطه c مشتق پذیر نباشد، مشتق راست آن در این نقطه مثبت است.



خارج از کشور ریاضی - ۹۰

۱۶۸۲- گزینه ۴ توجه کنید که تابع f در نقطه‌های $x = \pm\sqrt{3}$ مشتق پذیر

نیست، بنابراین این نقطه‌ها، نقطه‌های بحرانی تابع f هستند. از طرف دیگر،

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & x \leq -\sqrt{3} \\ -x^3 + 3x & -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \\ x^3 - 3x & x \geq \sqrt{3} \end{cases}$$

۱۶۹۱- گزینه ۳ عبارات گزینه‌های (۲) و (۴) درست هستند. همچنین می‌دانیم اگر f' در نقطه اکسترمم نسبی c موجود باشد، آن‌گاه $f'(c)=0$ ، پس گزینه (۱) نیز عبارتی درست است. گزینه (۳) نادرست است، زیرا هر نقطه بحرانی لزوماً اکسترمم نسبی نیست، مانند $x=0$ در $f(x)=x^3$.

ریاضی - ۹۰

۱۶۹۲- گزینه ۳ در تابع $f(x)=(x-1)|(x-1)(x+2)|$ ، $x=-2$ ریشه ساده عبارت داخل قدرمطلق است، پس تابع f در نقطه $x=-2$ مشتق‌پذیر نیست.

در $x=1$ نیز مشتق تابع برابر صفر است و به همین دلیل این نقطه نیز جزء نقاط بحرانی تابع است. اکنون توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases} (x-1)^2(x+2) & (x-1)(x+2)\geq 0 \\ -(x-1)^2(x+2) & (x-1)(x+2)< 0 \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow ((x-1)^2(x+2))'=0$$

$$2(x-1)(x+2)+(x-1)^2=(x-1)(3x+3)=0 \Rightarrow x=1, -1$$

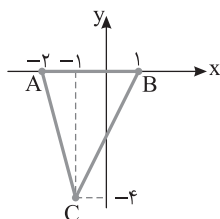
پس نقطه بحرانی سوم، نقطه‌ای به طول $x=-1$ است. بنابراین

$A(-2, 0)$: نقاط بحرانی

$B(1, 0)$, $C(-1, -4)$

در نتیجه

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}=\frac{4\times 3}{2}=6$$



خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۶۹۳- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f(x)=x+\sqrt[3]{x^2-x^3}=\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{x^3-x^3}$$

واضح است که برای هر x حقیقی $x^3-x^2\leq x^3$ ، پس $\sqrt[3]{x^3-x^2}\leq\sqrt[3]{x^3}$ و در نتیجه $f(x)\geq 0$. از طرف دیگر $f(0)=0$. پس کمترین مقدار تابع برابر صفر است.

ریاضی - ۹۲

۱۶۹۴- گزینه ۴ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه به طول x

$$\text{برابر با } f'(x) \text{ است. بنابراین } m=f'(x)=-x^2+4x-1.$$

بیشترین مقدار $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$m'=-2x+4 \xrightarrow{m'=0} x=2 \Rightarrow m=3$$

بنابراین خطی با شیب ۳ مورد نظر است که در نقطه‌ای به طول ۲ بر نمودار تابع f مماس شده است. معادله این خط را می‌نویسیم:

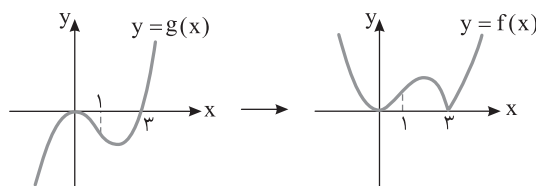
$$y-f(2)=3(x-2) \Rightarrow y-\frac{1}{3}=3x-6$$

این خط محور y را در نقطه‌ای به طول صفر قطع می‌کند:

$$x=0 \Rightarrow y-\frac{1}{3}=0-6 \Rightarrow y=-\frac{17}{3}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۷

راه حل دوم اگر $g(x)=x^3-3x^2$ ، برای رسم نمودار تابع مورد نظر کافی است نمودار g را در محدوده $x<3$ نسبت به محور x قرینه کنیم.



چون طول نقطه عطف تابع g برابر ۱ است، پس روی بازه $(1, +\infty)$ تقعر نمودار تابع g رو به بالا است. به این ترتیب روی بازه $(1, 3)$ تقعر نمودار تابع f رو به پایین است.

خارج از کشور ریاضی - ۸۶

۱۶۸۷- گزینه ۱ مشتق اول باید مثبت و مشتق دوم باید منفی باشد:

$$f'(x)=2\sin x \cos x - 2\cos x = 2\cos x(\sin x - 1) > 0$$

$$\cos x < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$$

$$f''(x)=2\cos 2x + 2\sin x = 2(-2\sin^2 x + \sin x + 1)$$

$$=2(\sin x - 1)(-\sin x - 1)$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow -2\sin x - 1 > 0 \Rightarrow \sin x < -\frac{1}{2}$$

پس در بازه $(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2})$ هر دو شرط برقرار است. خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۱۶۸۸- گزینه ۳ ابتدا شرط صعودی بودن تابع را بررسی می‌کنیم:

$$f'(x)=3x^2-2(m+2)x+3 \xrightarrow{\Delta \leq 0} 4(m+2)^2-36 \leq 0$$

$$-3 \leq m+2 \leq 3 \Rightarrow -5 \leq m \leq 1$$

اکنون طول نقطه عطف را پیدا می‌کنیم:

$$f''(x)=6x-2(m+2)=0 \Rightarrow x=\frac{m+2}{3}$$

از شرط $-5 \leq m \leq 1$ به دست می‌آید $-\frac{1}{3} \leq \frac{m+2}{3} \leq 1$. تجربی - ۹۴

۱۶۸۹- گزینه ۳ از تابع دو بار مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2 & x \geq -1 \\ -13-\frac{9}{x} & x \leq -1 \end{cases}, \quad f'(x)=\begin{cases} 3x^2-6x & x \geq -1 \\ \frac{9}{x^2} & x \leq -1 \end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} 6x-6 & x > -1 \\ -\frac{18}{x^3} & x < -1 \end{cases}$$

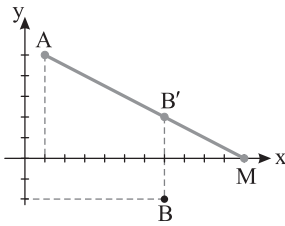
توابع f و f' روی $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند. تابع f'' در دو نقطه تغییر علامت می‌دهد: $x=-1$ و $x=1$ (در نقطه $x=1$ ضابطه اول تابع f'' صفر می‌شود و در همسایگی راست نقطه $x=-1$ علامت f'' منفی و در همسایگی چپ، علامت آن مثبت است). چون در هر دو نقطه f' وجود دارد، پس دو نقطه عطف داریم. ریاضی - ۸۹

۱۶۹۰- گزینه ۴ با توجه به گزینه‌ها و اینکه مجانب قائم نمودار در سمت

راست محور y است، می‌توان نتیجه گرفت $b=-4$. چون $f(0)=\frac{a}{4}$ و نمودار

تابع، محور y را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع کرده است، پس $a>0 \Rightarrow \frac{a}{4}>0$

تجربی - ۹۳



ریاضی - ۹۳

۱۶۹۹- گزینه ۳) مجانب افقی تابع $y=a$ است. طبق شکل، نمودار از

نقطه برخورد مجانب و محور y عبور می‌کند. بنابراین $f(0)=a$ ، در نتیجه

$\frac{2}{1}=a$ ، پس $a=2$. اکنون از اینکه نمودار در قسمت مثبت محور x بر آن

مماس است، نتیجه می‌گیریم معادله $f(x)=0$ ریشه مضاعف مثبت دارد. پس

$$2x^2+bx+2=0 \xrightarrow{\Delta=0} b^2=16 \xrightarrow{\substack{\text{ریشه مضاعف مثبت} \\ b<0}} b=-4$$

ریاضی - ۹۱

۱۷۰۰- گزینه ۳) به ازای ریشه‌های مخرج، تابع حفره دارد. بنابراین در

این نقاط حد تابع موجود است. در نتیجه صورت و مخرج باید به صفر میل

$$\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \quad \text{کنند. بنابراین}$$

$$a(-1)+b=0 \Rightarrow a=b \quad \text{پس}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a \sin 2x + a}{\sin x + \cos x} = \frac{a(1 + \sin 2x)}{\sin x + \cos x} \\ &= \frac{a(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x} = a(\sin x + \cos x) \\ f'(x) &= a(\cos x - \sin x) = 0 \end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

با توجه به نمودار مشخص است که مقدار تابع در اولین نقطه اکسترمم نسبی

سمت راست محور عرض‌ها برابر ۲ است. پس

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2 \Rightarrow a\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2 \Rightarrow a=\sqrt{2}$$

ریاضی - ۹۳

۱۶۹۵- گزینه ۱) مشتق دوم تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x\sqrt{x^2+2}$$

$$f'(x) = \sqrt{x^2+2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+2}} = \frac{2x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$f''(x) = \frac{4x\sqrt{x^2+2} - 2x(2x^2+2)}{2\sqrt{x^2+2}^2} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$$

پس جدول تعیین علامت $f''(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$		-	+
f		$\cap$	$\cup$

جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه $(0, +\infty)$ رو به بالاست. پس کمترین مقدار a

تجربی - ۹۲

برابر صفر است.

۱۶۹۶- گزینه ۲) مشتق اول و مشتق دوم تابع باید منفی باشند:

$$f'(x) < 0, f''(x) < 0, f(x) = (\cos x - 1)^2 - 1$$

$$f'(x) = -2 \sin x (\cos x - 1) = 2 \sin x - \sin 2x$$

$$f''(x) = 2 \cos x - 2 \cos 2x = -2(2 \cos^2 x - \cos x - 1)$$

$$= -2(2 \cos x + 1)(\cos x - 1)$$

$$f'(x) < 0, f''(x) < 0$$

$$\begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x < -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \pi < x < \frac{4\pi}{3}$$

ریاضی - ۹۶

۱۶۹۷- گزینه ۱) از تابع داده شده دوبار مشتق می‌گیریم:

$$y = \frac{2}{5}x^3 - x^{\frac{5}{3}} \Rightarrow y' = \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

$$y'' = \frac{-1}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{-1}{9}x^{\frac{2}{3}}(1+x)$$

با حل معادله $y''=0$ به دست می‌آید $x=-1$. از طرف دیگر علامت y'' در

این نقطه تغییر می‌کند، پس $x=-1$ طول نقطه عطف است. ریاضی - ۹۵

۱۶۹۸- گزینه ۴) راه حل اول فرض می‌کنیم نقطه مورد نظر $M(x, 0)$

باشد. می‌خواهیم $|AM-BM|$ بیشترین مقدار شود. پس

$$d = AM - BM = \sqrt{(x-1)^2 + 25} - \sqrt{(x-7)^2 + 4}$$

$$d' = \frac{2(x-1)}{2\sqrt{(x-1)^2 + 25}} - \frac{2(x-7)}{2\sqrt{(x-7)^2 + 4}} = 0$$

پس از حل معادله بالا به دست می‌آید $x=11$. توجه کنید که در نقطه $x=11$

مقدار d چه ماکزیمم باشد چه مینیمم، مقدار $|AM-BM|$ ماکزیمم است.

راه حل دوم نقطه مورد نظر را $M(x, 0)$ می‌گیریم. چون فاصله نقطه M از

نقطه $B(7, -2)$ دقیقاً به اندازه فاصله آن از نقطه $B'(7, 2)$ است، با توجه به

شکل، تفاضل فواصل مورد نظر سؤال زمانی بیشترین است که نقطه M روی

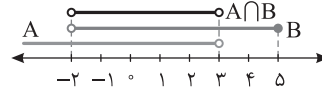
خط $B'A$ باشد. بنابراین

$$\frac{5-2}{1-7} = \frac{2-0}{7-x} \Rightarrow 21-3x = -12 \Rightarrow 3x = 33 \Rightarrow x = 11$$

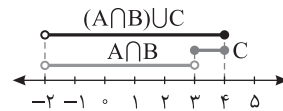
فصل ششم



۱۷۰۱- گزینه ۴ مجموعه $A \cap B$ به کمک شکل زیر پیدا می‌شود:



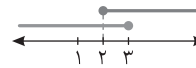
پس $A \cap B = (-2, 3)$. اجتماع دو مجموعه $A \cap B$ و C به شکل زیر است:



یعنی $(A \cap B) \cup C = (-2, 5)$.

۱۷۰۲- گزینه ۲ با توجه به شکل زیر $(-\infty, 3) \cup [2, +\infty) = \mathbb{R}$ ، بنابراین

می‌خواهیم $\mathbb{R} - (1, 4)$ را پیدا کنیم که حاصل آن $(-\infty, 1] \cup (4, +\infty)$ است.



۱۷۰۳- گزینه ۲ عدد $\frac{1}{4}$ باید از $\frac{1}{n+3}$ بزرگ‌تر باشد، یعنی

$$\frac{1}{n+3} < \frac{1}{4} \Rightarrow n+3 > 4 \Rightarrow n > 1$$

عدد $\frac{1}{4}$ نباید از $\frac{1}{n+1}$ بیشتر باشد، یعنی

$$\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{4} \Rightarrow n+1 \leq 4 \Rightarrow n \leq 3$$

بنابراین عدد طبیعی n می‌تواند برابر ۲ یا ۳ باشد.

۱۷۰۴- گزینه ۳ نقطه وسط پاره خط، متناظر با میانگین ابتدا و انتهای بازه

است، یعنی

$$\frac{2a^2 + 1 + (-a^2)}{2} = \frac{a^2 + 1}{2} = 5 \Rightarrow a^2 = 9$$

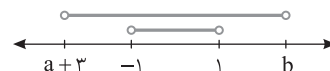
بنابراین بازه مورد نظر $[-9, 19]$ است و طول این بازه برابر است با

$$19 - (-9) = 28$$

۱۷۰۵- گزینه ۳ از روی شکل زیر معلوم است که باید

$$\begin{cases} a+3 \leq -1 \\ b \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq -4 \\ b \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a \geq 4 \\ b \geq 1 \end{cases}$$

بنابراین $b - a \geq 1 + 4 = 5$. در ضمن اگر $a = -4$ و $b = 1$ ، شرط داده شده در مسئله برقرار است.



۱۷۰۶- گزینه ۱ طول بازه $(a, b+2)$ برابر است با $b+2-a$

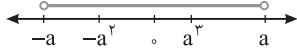
و طول بازه $(2a-1, 2b+3)$ برابر است با

$$2b+3 - (2a-1) = 2(b-a+2)$$

بنابراین طول بازه $(a, b+2)$ نصف طول بازه $(2a-1, 2b+3)$ است.

۱۷۰۷- گزینه ۳ چون $0 < a < 1$ ، پس $a^3 < a^2$ و $-a < -a^2$ ، بنابراین

$$(-a, a) \cap (-a^2, a^3) = (-a^2, a^3)$$



۱۷۰۸- گزینه ۲ مجموعه‌های $A_1, A_2, \dots, A_3, A_4$ به شکل زیر هستند:

$$A_4 = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], A_3 = [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}], \dots, A_1 = [\frac{9}{10}, \frac{11}{10}]$$

واضح است که مجموعه A_4 شامل همه مجموعه‌های دیگر است. یعنی همه مجموعه‌های دیگر زیرمجموعه مجموعه A_4 هستند. پس اجتماع همه این مجموعه‌ها همان A_4 است.

۱۷۰۹- گزینه ۴ از تساوی $(-1, 1] \cap [a, b) = [0, 1]$ معلوم می‌شود $a = 0$

و $b \geq 1$. از تساوی $(-1, 1] \cup [a, b) = (-1, 4)$ معلوم می‌شود $b = 4$. بنابراین

$$a + b = 4$$

۱۷۱۰- گزینه ۴ اشتراک این دو بازه فقط زمانی تک‌عضوی است که ابتدای

بازه $[-2a+1, +\infty)$ بر انتهای بازه $(-\infty, a+4]$ منطبق باشد. در نتیجه

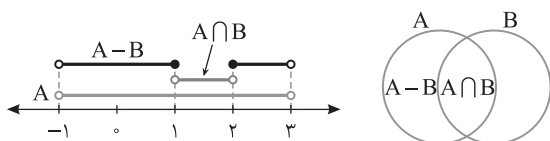
$$-2a+1 = a+4 \Rightarrow a = -1$$

۱۷۱۱- گزینه ۳ می‌دانیم عضوهای A کوچک‌تر از یا مساوی ۲ هستند

و مجموعه مورد نظر شامل اعضای A نیست، بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) رد می‌شوند. اکنون دقت کنید که $B - A = (0, 4) - [-2, 2] = (2, 4)$.

۱۷۱۲- گزینه ۴ توجه کنید که

$$A - B = A - (A \cap B) = (-1, 3) - (1, 2) = (-1, 1] \cup [2, 3)$$



۱۷۱۳- گزینه ۲ چون a عضو بازه است، پس $2a-1 < a < 3-3a$. از

نابرابری $2a-1 < a$ نتیجه می‌شود $a < 1$ و از نابرابری $a < 3-3a$ نتیجه می‌شود

$$a < \frac{3}{4}. \text{ بنابراین باید } a < \frac{3}{4}. \text{ اکنون توجه کنید که شرط اینکه } (2a-1, 3-3a)$$

بازه باشد این است که $2a-1 < 3-3a$ ، یعنی $a < \frac{4}{5}$ ، که اگر $a < \frac{3}{4}$ ، این شرط

هم برقرار است. بنابراین مجموعه مقادیر ممکن a بازه $(-\infty, \frac{3}{4})$ است.

۱۷۱۴- گزینه ۱ توجه کنید که طول بازه $(a-5, 2a+1)$ برابر است با

$$(2a+1) - (a-5) = a+6$$

از طرف دیگر طول بازه $(a-6, 3a-1)$ برابر است با

$$(3a-1) - (a-6) = 2a+5$$

چون $a \leq -2$ ، پس $2a \leq -4$ و در نتیجه $2a+5 \leq 1$. پس حداکثر طول بازه

مورد نظر برابر ۱ است.

حالت (۳)	حالت (۲)	حالت (۱)
$\emptyset$	$(2a-1, a+2]$	$(0, a+2]$
$A \cap B$		

حالت (۱) قابل قبول نیست، زیرا در این حالت $A \cap B \subseteq (1, 3]$ در حالت (۲) باید $2a-1 \leq 3$ و $a+2 \leq 3$ از نابرابری اول به دست می‌آید $a \geq 1$ و از نابرابری دوم به دست می‌آید $a \leq 1$ پس $a=1$ در حالت (۳) باید $2a-1 \geq a+2$ و در نتیجه $a \geq 3$ در این حالت اشتراک A و B برابر تهی است که زیرمجموعه $(1, 3]$ است. پس $a \in [3, +\infty) \cup \{1\}$.

گزینه ۴ - ۱۷۲۱ چون A نامتناهی است و $A \subseteq B$ ، پس B هم نامتناهی است و اجتماع آن با هر مجموعه دیگری نامتناهی است. یعنی $A' \cup B$ نامتناهی است.

گزینه ۱ - ۱۷۲۲ B نامتناهی است، پس B' می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد، ولی چون A متناهی است، پس $A \cap B'$ متناهی است. همچنین چون B نامتناهی است، اجتماع آن با هر مجموعه‌ای نامتناهی است. یعنی $A' \cup B$ و $A \cup B$ نامتناهی هستند. توجه کنید که چون B نامتناهی است، پس مجموعه مرجع هم نامتناهی است. در نتیجه A' نامتناهی است. پس متناهی یا نامتناهی بودن $A' \cap B$ مشخص نیست.

گزینه ۲ - ۱۷۲۳ توجه کنید که

$$B = \{3, 4, 6, 8, 9, 10, \dots\}, \quad C = \{1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, \dots\}$$

بنابراین $B \cap C = \{3, 4, 6, 8, 9, \dots\}$ و در نتیجه $A - (B \cap C) = \{1, 5\}$.

گزینه ۱ - ۱۷۲۴ راه حل اول توجه کنید که

$$|x-5| > 3 \Rightarrow \begin{cases} x-5 > 3 \\ x-5 < -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 8 \\ x < 2 \end{cases}$$

بنابراین $A = \{\dots, 0, 1, 9, 10, \dots\}$. در نتیجه $A' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. یعنی $n(A') = 7$.

راه حل دوم چون $A = \{x \mid |x-5| > 3\}$ ، پس $A' = \{x \mid |x-5| \leq 3\}$.

از نابرابری $|x-5| \leq 3$ نتیجه می‌شود

$$-3 \leq x-5 \leq 3 \Rightarrow 2 \leq x \leq 8$$

مجموعه مرجع $\mathbb{Z}$ است، پس $A' = \{2, 3, \dots, 8\}$ ، بنابراین $n(A') = 7$.

گزینه ۴ - ۱۷۲۵ توجه کنید که

$$\begin{cases} n(A) + n(B') = 17 \\ n(B) + n(A') = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n(A) + n(A') + n(B) + n(B') = 30 \\ n(U) + n(U) = 30 \Rightarrow n(U) = 15 \end{cases}$$

بنابراین $n(C) + n(C') = n(U) = 15$.

گزینه ۳ - ۱۷۲۶ توجه کنید که

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

بنابراین

$$n(A \cup B) + n(A \cap B) = 2n(B) + n(B) \Rightarrow 24 = 3n(B) \Rightarrow n(B) = 8$$

گزینه ۱ - ۱۷۲۷ توجه کنید که

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

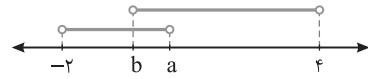
$$16 = 24 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 8$$

از طرف دیگر،

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$

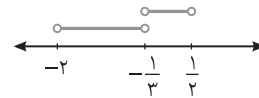
$$16 = n(A - B) + 8 + 3 \Rightarrow n(A - B) = 16 - 11 = 5$$

گزینه ۴ - ۱۷۱۵ با توجه به فرض مسئله و شکل زیر، نتیجه می‌شود $(b, 4) \cap [-2, a) = (b, a)$



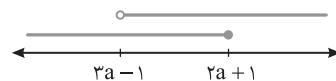
بنابراین $a = \frac{1}{3}$ و $b = -\frac{1}{3}$ اکنون می‌توان نوشت

$$(b, a) \cup (-2a-1, b) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \cup (-2, -\frac{1}{3}) = (-2, \frac{1}{3}) - \{-\frac{1}{3}\}$$

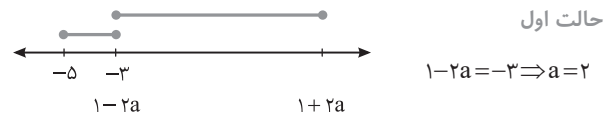


گزینه ۱ - ۱۷۱۶ چون اشتراک دو بازه از عدد -2 شروع می‌شود و $a < a+2$ ، پس $a+2 = -2$ ، یعنی $a = -4$. بنابراین تساوی داده شده به صورت $[-4, 2] \cap [-2, b] = [-2, 1]$ است. چون اشتراک در سمت چپ به عدد 1 ختم شده است و $1 < 2$ ، پس $b = 1$. در نتیجه $a - b = -5$.

گزینه ۳ - ۱۷۱۷ از روی شکل زیر معلوم می‌شود که $(-\infty, 2a+1] \cup (3a-1, +\infty) = \mathbb{R}$ وقتی برقرار است که $3a-1 \leq 2a+1$ ، یعنی $a \leq 2$.

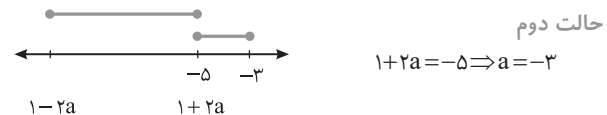


گزینه ۳ - ۱۷۱۸ در دو حالت زیر، اشتراک دو بازه مجموعه‌ای تک‌عضوی می‌شود.



حالت اول

$$1-2a = -3 \Rightarrow a = 2$$



حالت دوم

$$1+2a = -5 \Rightarrow a = -3$$

اکنون توجه کنید شرط اینکه $[1-2a, 1+2a]$ بازه باشد این است که $1-2a < 1+2a$ ، یعنی $a > 0$. بنابراین تنها مقدار قابل قبول برای a برابر 2 است.

گزینه ۱ - ۱۷۱۹ فرض می‌کنیم $I = (\frac{1}{n}, \frac{n+2}{2})$ ، بنابراین به ازای $n=1$

$$I = (1, \frac{3}{2}) \Rightarrow \text{شامل هیچ عدد طبیعی‌ای نیست.}$$

به ازای $n=2$

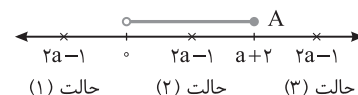
$$I = (\frac{1}{2}, 2) \Rightarrow 1 \in I$$

به ازای $n=3$

$$I = (\frac{1}{3}, \frac{5}{2}) \Rightarrow 1, 2 \in I$$

به این ترتیب به ازای $n \geq 3$ ، بازه I حداقل شامل اعداد طبیعی 1 و 2 است. پس فقط به ازای $n=2$ ، بازه داده شده فقط شامل یک عدد طبیعی است.

گزینه ۳ - ۱۷۲۰ اگر به بازه A دقت کنید معلوم می‌شود که $a+2 > 0$ ، پس $a > -2$. از روی محور زیر، برحسب اینکه $2a-1$ در کدام ناحیه باشد، حاصل $A \cap B$ را به دست آورده‌ایم و در جدول زیر آن نوشته‌ایم.



۱۷۳۶- گزینه ۱ توجه کنید که

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

پس

$$n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B) = 24$$

به این ترتیب

$$\begin{cases} n(A) + n(B) = 24 \\ n(A) - n(B) = 4 \end{cases} \Rightarrow n(B) = 10$$

۱۷۳۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow n(A \cup B) = n(B)$$

طبق فرض $n(A \cup B) = 9$ ، پس $n(B) = 9$ ، از طرف دیگر،

$$n(A) + n(A') = n(B) + n(B') \Rightarrow n(A) + 14 = 9 + 10 \Rightarrow n(A) = 5$$

۱۷۳۸- گزینه ۲ فرض کنید A مجموعه علاقه‌مندان به ریاضی و

B مجموعه علاقه‌مندان به فیزیک باشد. اگر تعداد کسانی که به هیچ کدام از

این دو درس علاقه‌مند نیستند x باشد، آن‌گاه

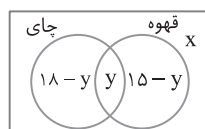
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$100 - x = 85 + 70 - n(A \cap B)$$

پس $n(A \cap B) = 55 + x$ ، برای اینکه $n(A \cap B)$ حداقل باشد، باید $x = 0$ ،

بنابراین حداقل مقدار ممکن $n(A \cap B)$ برابر با ۵۵ است.

۱۷۳۹- گزینه ۲ راه‌حل اول فرض کنید



x نفر نه چای دوست دارند، نه قهوه، بنابراین $x - 3$ نفر یا چای دوست دارند یا قهوه و y نفر هم چای و هم قهوه دوست دارند. تعداد کسانی را که چای یا قهوه یا هر دو را دوست دارند در نمودار ون مقابل مشخص کرده‌ایم.

$$x + 18 - y + y + 15 - y = 30 \Rightarrow x = y - 3$$

با توجه به اینکه تعداد افراد هیچ گروهی منفی نیست، می‌توان نوشت

$$x \geq 0, y \geq 0, 15 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 15 \Rightarrow 0 \leq y \leq 15$$

پس

$$0 \leq y - 3 \leq 12 \Rightarrow 3 \leq x \leq 12$$

پس حداکثر ۱۲ نفر نه چای دوست دارند نه قهوه.

راه‌حل دوم فرض کنید A مجموعه دانش‌آموزانی باشد که چای دوست ندارند

و B مجموعه دانش‌آموزانی باشد که قهوه دوست ندارند. در این صورت

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 12 + 15 - n(A \cup B) = 27 - n(A \cup B)$$

از طرف دیگر، $n(A \cup B) \geq n(B) = 15$ ، بنابراین

$$n(A \cap B) = 27 - n(A \cup B) \leq 27 - 15 = 12$$

بنابراین حداکثر ۱۲ دانش‌آموز ممکن است که نه چای دوست داشته باشند نه

قهوه (توجه کنید که اگر $A \subseteq B$ ، این وضعیت پیش می‌آید).

۱۷۴۰- گزینه ۳ چون $A \subseteq B$ ، پس $A \cup B = B$ ، از طرف دیگر،

$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B)$$

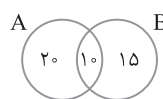
اکنون توجه کنید که $14 = n(A) + 2n(B) \leq n(B) + 2n(B) = 3n(B)$

و چون $n(B)$ عددی طبیعی است، پس $n(B) \geq 5$ ، بنابراین

$$n(A \cup B) = n(B) \geq 5$$

۱۷۲۸- گزینه ۲ تعداد محصولاتی که هر دو عیب را دارند برابر است با

$30 - 20 = 10$ ، یعنی ۱۰ محصول. تعداد محصولاتی که عیب B را دارند برابر $45 - 20 = 25$ است، که ۱۰ تا از آن‌ها عیب A را نیز دارند. پس ۱۵ محصول



فقط عیب B را دارند و ۲۰ تا از آن‌ها فقط عیب A را دارند. پس ۳۵ تا از محصولات فقط یک عیب دارند.

۱۷۲۹- گزینه ۱ مجموعه بینندگان شبکه ۱ را با A و مجموعه بینندگان

شبکه ۲ را با B نشان می‌دهیم:

$$n(A) = 65, n(B) = 45, n(A \cap B) = 20$$

در نتیجه $n(A \cup B) = 65 + 45 - 20 = 90$ ، یعنی ۹۰ نفر حداقل یکی از

شبکه‌ها را تماشا می‌کنند. پس ۱۰ نفر هیچ‌یک از این دو شبکه را تماشا نمی‌کنند.

۱۷۳۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 2k - 1 + 3 - (k - 2) = 2k + 4$$

از طرف دیگر،

$$n(A \cap B) \leq n(B) \Rightarrow k - 2 \leq 3 \Rightarrow k \leq 5$$

$$n(A \cup B) = 2k + 4 \leq 2 \times 5 + 4 = 14$$

۱۷۳۱- گزینه ۳ گزینه (۳) ممکن است نادرست باشد. برای مثال،

$A = \{0, 1\}$ و $B = [1, 2]$ نامتناهی هستند، اما $A \cap B = \{1\}$ متناهی است.

۱۷۳۲- گزینه ۲ توجه کنید که $A \cap B = \{3, 5\}$ ، پس

$$(A \cap B)' = \{1, 2, 4, 6\}, C \cap (A \cap B)' = \{1, 2\}$$

۱۷۳۳- گزینه ۴ ابتدا مجموعه‌های A' و B' را پیدا می‌کنیم:

$$A' = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty), B' = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty), C' = [0, +\infty)$$

$$A' - B' = (-1, 1] \text{ و در نتیجه } (A' - B') - C' = (-1, 0)$$

۱۷۳۴- گزینه ۴ راه‌حل اول مجموعه مرجع $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ است،

$$B' = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\} \text{ و } C = \{2, 3, 7, 8, 9\} \text{ در نتیجه}$$

$$A \cap B' = \{1, 6\} \Rightarrow (A \cap B') \cup C = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$$

$$n((A \cap B') \cup C) = 7 \text{، بنابراین مجموعه } (A \cap B') \cup C \text{ هفت عضو دارد.}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$A \cap B' = A - B = \{1, 6\}, C = \{2, 3, 7, 8, 9\}$$

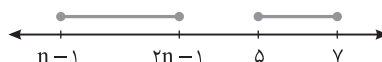
$$(A \cap B') \cup C = \{1, 6\} \cup \{2, 3, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$$

بنابراین پس مجموعه $(A \cap B') \cup C$ هفت عضو دارد.

۱۷۳۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید برای اینکه $[n-1, 2n-1]$ بازه باشد،

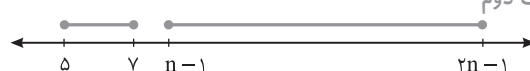
باید $n > 0$. اگر این دو مجموعه جدا از هم باشند، دو حالت زیر پیش می‌آید:

حالت اول



$$2n - 1 < 5 \Rightarrow n < 3$$

حالت دوم

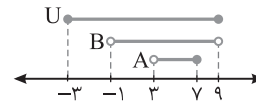


$$n - 1 < 5 \Rightarrow n > 6$$

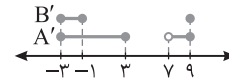
بنابراین n اعداد طبیعی ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ نمی‌تواند باشد.

۱۷۴۱- گزینه ۲ از روی شکل زیر معلوم می‌شود که

$$A' = [-3, 3] \cup (7, 9], \quad B' = [-3, -1] \cup \{9\}$$



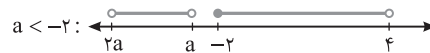
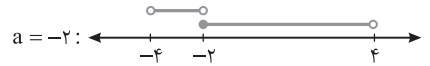
بنابراین از روی شکل زیر معلوم می‌شود که $A' - B' = (-1, 3] \cup (7, 9)$.



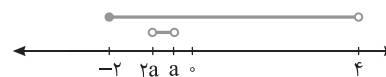
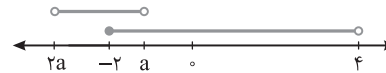
بنابراین، عددهای صحیح در مجموعه $A' - B'$ عبارت‌اند از صفر، ۱، ۲، ۳ و ۸، که مجموعشان می‌شود ۱۴.

۱۷۴۲- گزینه ۲ چون $(2a, a)$ یک بازه است، پس $2a < a$ و در نتیجه

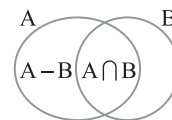
$a < 0$. از روی شکل‌های زیر معلوم است که اگر $a \leq -2$ اشتراک بازه‌های $[-2, 4]$ و $(2a, a)$ تهی است:



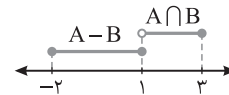
بنابراین $a > -2$. از روی شکل‌های زیر معلوم است که اگر $-2 < a < 0$ ، اشتراک بازه‌های $[-2, 4]$ و $(2a, a)$ تهی نیست.



۱۷۴۳- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ (شکل زیر را ببینید).



از روی شکل زیر معلوم می‌شود که $A = [-2, 3]$.



۱۷۴۴- گزینه ۳ اگر از مجموعه‌ای نامتناهی تعدادی متناهی عضو حذف

کنیم، مجموعه‌ای که به دست می‌آید نامتناهی است. پس $B - A$ نامتناهی است. بقیه گزینه‌ها ممکن است متناهی باشند.

گزینه ۱) اگر $U = \mathbb{N}$ و $A = \{1\}$ و $B = \{2, 3, 4, \dots\}$ ، آن‌گاه

$$A' - B = \emptyset$$

گزینه ۲) چون A متناهی است، پس $A - B'$ نیز متناهی است.

گزینه ۴) اگر $U = \mathbb{N}$ و $A = \{1\}$ و $B = \mathbb{N}$ ، آن‌گاه $B' - A' = \emptyset$.

۱۷۴۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{cases} n(A) = 3n(A') \\ n(A) = 12 \end{cases} \Rightarrow n(A') = 4$$

در نتیجه، $n(U) = n(A) + n(A') = 12 + 4 = 16$.

اکنون توجه کنید که

$$n(U) = n(B) + n(B') \Rightarrow 16 = n(B) + 7 \Rightarrow n(B) = 9$$

۱۷۴۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$n(A) + n(A') = n(U) \xrightarrow{n(A) = n(A')} 2n(A) = 26 \Rightarrow n(A) = 13$$

از طرف دیگر،

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 14 = 13 + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(B) - n(A \cap B) = 1 \Rightarrow n(B - A) = 1$$

۱۷۴۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$n(A - B) = 2n(B - A) \Rightarrow n(A) - n(A \cap B) = 2n(B) - 2n(A \cap B)$$

$$n(A) = 2n(B) - n(A \cap B) = 2n(B) - 5$$

بنابراین

$$\begin{cases} n(A) = 2n(B) - 5 \\ n(A) = n(B) + 3 \end{cases} \Rightarrow n(A) = 11, \quad n(B) = 8$$

در نتیجه $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 11 + 8 - 5 = 14$.

۱۷۴۸- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$n(A') = n(U) - n(A) = 23 - 10 = 13$$

$$n(B') = n(U) - n(B) = 23 - 7 = 16$$

اکنون توجه کنید که $n(A' \cap B') \leq n(A') = 13$.

۱۷۴۹- گزینه ۳ فرض می‌کنیم تعداد دانش‌آموزان کلاس برابر x باشد.

همچنین، فرض می‌کنیم A و B به ترتیب مجموعه کسانی باشند که به فیزیک و ریاضیات علاقه دارند. در این صورت $n(A) = \frac{5}{6}x$ و $n(B) = \frac{5}{7}x$. از طرف دیگر، چون هر دانش‌آموز کلاس حداقل به یکی از درس‌های فیزیک یا ریاضی علاقه‌مند است، پس مجموعه دانش‌آموزان کلاس برابر $A \cup B$ است،

در نتیجه، $n(A \cup B) = x$. به این ترتیب،

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$x = \frac{5}{6}x + \frac{5}{7}x - 6 \Rightarrow x = 20$$

۱۷۵۰- گزینه ۳ فرض کنید A مجموعه علاقه‌مندان به ریاضی و

B مجموعه علاقه‌مندان به فیزیک باشد. اگر تعداد کسانی که به این دو درس علاقه‌مند نیستند x باشد، آن‌گاه

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$120 - x = 105 + 95 - n(A \cap B) \Rightarrow 120 - x = 200 - n(A \cap B)$$

پس $n(A \cap B) = 80 + x$. برای اینکه $n(A \cap B)$ حداقل باشد و با توجه به

اینکه $x \geq 0$ است، باید $x = 0$ ؛ پس حداقل مقدار $n(A \cap B)$ برابر با ۸۰ است.



۱۷۶۰- گزینه ۱ عدد آخر دسته اول ۵، عدد آخر دسته دوم ۳×۵، عدد آخر دسته سوم ۵×۵ و عدد آخر دسته ۴م برابر ۵(۲۱-۱) است. پس عدد آخر دسته چهارم و پنجم ۴۸۵=۵(۹۹-۱)×۲ است. پس عدد اول دسته پنجم، برابر ۴۸۷ خواهد بود.

۱۷۶۱- گزینه ۳ شکل اول ۴ چوب کبریت دارد و برای ساختن هر شکل، ۹ چوب کبریت به شکل قبلی اضافه می‌شود. پس در شکل ۴م، ۴+۹(۱-۱) یعنی ۹۱ چوب کبریت وجود دارد. بنابراین در شکل چهاردهم ۱۲۱ چوب کبریت وجود دارد.

۱۷۶۲- گزینه ۳ راه حل اول تعداد نقاط شکل‌ها را در جدول زیر ملاحظه می‌کنید:

شماره شکل	۱	۲	۳	...	n
تعداد نقاط	۱+۳+۱	۲+۴+۲	۳+۵+۳	...	n+(n+۲)+n

بنابراین در شکل ۴م، ۳n+۲ نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم. راه حل دوم اگر ۴ نقطه به چهار گوشه شکل‌ها اضافه کنیم، تعداد نقاط شکل ۴م برابر ۳(n+۲) خواهد بود. پس در شکل ۴م، ۴-۳(n+۲) نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

۱۷۶۳- گزینه ۳ تعداد مربع‌های رنگ‌شده در شکل ۴م برابر است با

$$1+2+3+\dots+n$$

تعداد مربع‌های رنگ‌نشده در شکل ۴م برابر است با ۱+۲+۳+...+(n-1). بنابراین تعداد مربع‌های رنگ‌شده در شکل ۴م، n تا بیشتر از تعداد مربع‌های رنگ‌نشده آن است. پس در شکل سی‌ام، اختلاف مربع‌های رنگ‌شده و رنگ‌نشده برابر ۳۰ تا است.

۱۷۶۴- گزینه ۲ تعداد کل گوی‌ها در شکل ۴م برابر است با

$$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$$

تعداد گوی‌های رنگی در شکل ۴م برابر است با

$$1+2+3+\dots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

بنابراین نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها در شکل ۴م برابر

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2} = \frac{n-1}{2n} \text{ به این ترتیب } \frac{n-1}{2n} = \frac{17}{17} \text{ پس } n=17.$$

۱۷۶۵- گزینه ۲ با توجه به الگو، در شکل‌هایی که شماره آن‌ها زوج است،

نصف تعداد گوی‌ها یعنی $\frac{n^2}{2}$ رنگ می‌شود. در شکل‌هایی که شماره آن‌ها فرد

است، تعداد گوی‌ها نیز فرد است. اگر گوی وسطی را کنار بگذاریم تعداد گوی‌ها n^2-1 خواهد بود که نصف آن‌ها را رنگ می‌کنیم و سپس گوی وسطی

را نیز رنگ می‌کنیم. پس $1+\frac{n^2-1}{2}$ گوی رنگ می‌شود. توجه کنید که اگر

n عددی زوج باشد، نیز عددی زوج است. پس در شکل‌های با شماره

زوج، تعداد گوی‌های رنگ‌شده زوج است و در شکل‌هایی با شماره فرد، تعداد گوی‌های رنگ‌شده فرد است. چون ۱۱۳ گوی رنگی در شکل ۴م وجود دارد،

پس n باید فرد باشد. بنابراین

$$\frac{n^2-1}{2}+1=113 \Rightarrow n^2-1=224 \Rightarrow n^2=225 \Rightarrow n=15$$

۱۷۵۱- گزینه ۳ شکل اول دارای ۴ چوب کبریت است و هر شکل ۳ چوب کبریت بیشتر از قبلی دارد. پس شکل ۴م دارای ۴+۳(n-1) چوب کبریت است. یعنی ۳n+۱ چوب کبریت دارد. پس شکل بیستم ۶۱ چوب کبریت دارد.

۱۷۵۲- گزینه ۳ شکل اول دارای ۵ چوب کبریت است و در هر مرحله ۴ چوب کبریت به شکل مرحله قبل اضافه می‌شود. پس در شکل ۴م ۵+۴(n-1) چوب کبریت وجود دارد. یعنی ۴n+۱ چوب کبریت در شکل ۴م وجود دارد. پس در شکل پانزدهم، ۶۱ چوب کبریت وجود دارد.

۱۷۵۳- گزینه ۲ تعداد نقاط روی شکل (۱) برابر ۵ است و در هر مرحله ۴ نقطه به نقاط شکل قبل اضافه می‌شود. پس در مرحله ۴م به تعداد ۴(n-1) نقطه به ۵ نقطه شکل (۱) اضافه شده است: ۴(n-1)+۵=۴n+۱، یعنی شکل ۴م، ۴n+۱ نقطه دارد. پس شکل دهم ۴۱ نقطه دارد.

۱۷۵۴- گزینه ۱ در شکل ۴م تعداد مثلث‌های رنگ شده برابر است با

$$\frac{n(n-1)}{2} = 1+2+\dots+(n-1)$$

برای اینکه بدانیم در کدام شکل ۳۶ مثلث رنگ شده وجود دارد، معادله زیر را حل می‌کنیم: $\frac{n(n-1)}{2} = 36 \Rightarrow n^2-n-72=0 \Rightarrow (n-9)(n+8)=0$ چون n عددی طبیعی است، پس n=9، یعنی در شکل نهم ۳۶ مثلث رنگ شده وجود دارد.

۱۷۵۵- گزینه ۴ در شکل ۴م، $(n+1)^2$ دایره وجود دارد که (n+1) تایی آن رنگ نشده است. پس تعداد دایره‌های رنگی $(n+1)^2-(n+1)$ است که برابر است با n^2+n .

۱۷۵۶- گزینه ۴ توجه کنید که

$$a_n = 3n^2 - n + 2a_1 \xrightarrow{n=1} a_1 = 3 - 1 + 2a_1 \Rightarrow a_1 = -2$$

بنابراین $a_4 = 3 \times 16 - 4 + 2(-2) = 40$.

۱۷۵۷- گزینه ۳ با حل معادله $a_n = \frac{1}{80}$ مقدار n را که شماره جمله مورد نظر است، می‌یابیم:

$$\frac{n^2+1}{80n^2-1} = \frac{1}{80} \Rightarrow 80n^2+80=80n^2-1 \Rightarrow n^2=81 \Rightarrow n=9$$

بنابراین a_9 برابر $\frac{1}{80}$ است.

۱۷۵۸- گزینه ۲ باید ببینیم نامعادله $a_n < \frac{3}{9}$ برای کدام مقادیر n درست است:

$$\frac{4n-1}{n+6} < \frac{3}{9} \Rightarrow 40n-10 < 39n+39 \times 6 \Rightarrow n < 244$$

بنابراین $n \leq 243$ ، یعنی ۲۴۳ جمله اول دنباله کمتر از $\frac{3}{9}$ هستند.

۱۷۵۹- گزینه ۱ توجه کنید که

$$72 < a_n < 160 \Rightarrow 72 < n^2 + 2n - 8 < 160$$

بنابراین

$$n^2 + 2n - 8 < 160 \Rightarrow (n-12)(n+14) < 0 \Rightarrow 1 \leq n < 12 \Rightarrow 1 \leq n \leq 11$$

$$n^2 + 2n - 8 > 72 \Rightarrow (n-8)(n+10) > 0 \Rightarrow n > 8 \Rightarrow n \geq 9$$

در نتیجه n می‌تواند عددهای ۹، ۱۰ و ۱۱ باشد.

۱۷۷۵- گزینه ۲ چون $a_1 = 2$ و $d = 4$ ، پس جمله عمومی دنباله به صورت $a_n = 2 + 4(n-1) = 4n - 2$ است. برای اینکه جمله‌ها کوچک‌تر از ۵۰۰ باشند، باید $a_n < 500$ باشد. یعنی

$$4n - 2 < 500 \Rightarrow n < \frac{502}{4} \Rightarrow n \leq 125$$

پس ۱۲۵ جمله اول دنباله کمتر از ۵۰۰ هستند.

۱۷۷۶- گزینه ۲ اندازه زاویه‌های مثلث را به صورت $a-d, a, a+d$

در نظر می‌گیریم. مجموع اندازه زاویه‌های مثلث برابر 180° است. پس

$$a-d+a+a+d=180^\circ \Rightarrow a=60^\circ$$

میانگین اندازه بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویه مثلث همان a است که برابر 60° است.

۱۷۷۷- گزینه ۴ زاویه‌های پنج‌ضلعی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$$

در نتیجه، چون مجموع اندازه زاویه‌های پنج‌ضلعی برابر 540° است، پس

$$a-2d+a-d+a+a+d+a+2d=540^\circ$$

بنابراین $5a = 540^\circ$ و در نتیجه $a = 108^\circ$. اندازه کوچک‌ترین زاویه 86° است، پس

$a-2d = 86^\circ$ و در نتیجه $d = 11^\circ$. پس اندازه بزرگ‌ترین زاویه

یعنی $a+2d$ برابر است با $108^\circ + 2 \times 11^\circ = 130^\circ$.

۱۷۷۸- گزینه ۲ راه حل اول چون $a_1 = \sqrt{3} - 5$ و $a_5 = \sqrt{3} + 5$ ، پس

$$a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow \sqrt{3} + 5 = \sqrt{3} - 5 + 4d \Rightarrow d = 2$$

بنابراین کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم، عدد $\sqrt{3} - 5 + 2$ یا همان $\sqrt{3} - 3$ است.

راه حل دوم قدرنسبت دنباله حسابی مورد نظر برابر است با

$$d = \frac{(\sqrt{3}+5) - (\sqrt{3}-5)}{4-1} = \frac{10}{3} = 2$$

بنابراین کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم، برابر است با

$$(\sqrt{3}-5)+2=\sqrt{3}-3$$

۱۷۷۹- گزینه ۴ سه جمله متوالی دنباله را به صورت $a-d, a, a+d$

در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$a-d+a+a+d=15 \Rightarrow 3a=15 \Rightarrow a=5$$

از طرف دیگر،

$$(a-d) \times a \times (a+d) = 45 \Rightarrow a(a^2 - d^2) = 45$$

چون $a = 5$ ، پس

$$5(25 - d^2) = 45 \Rightarrow d^2 = 16 \Rightarrow d = \pm 4$$

۱۷۸۰- گزینه ۲ فرض کنید قدرنسبت دنباله حسابی مورد نظر برابر d

باشد. در این صورت

$$a_1 = d, \quad a_n = a_1 + (n-1)d = d + (n-1)d = nd$$

به این ترتیب

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_9 = 10^8 \times 10^9 \Rightarrow d(2d)(3d) \dots (9d) = 10^8 \times 10^9$$

$$d^9 \times 9! = 10^9 \times 9! \Rightarrow d = 10$$

بنابراین $a_{10} = 10d = 100$.

۱۷۶۶- گزینه ۳ چون همه جمله‌های دنباله با هم برابرند، پس جمله‌های اول و دوم آن نیز با هم برابرند:

$$a_1 = a_2 \Rightarrow \frac{2-k}{8} = \frac{4-k}{13} \Rightarrow 26-13k = 32-8k \Rightarrow 5k = -6 \Rightarrow k = -\frac{6}{5}$$

توجه کنید که اگر $k = -\frac{6}{5}$ ، آن‌گاه $a_n = \frac{2}{5}$.

۱۷۶۷- گزینه ۲ چند جمله اول هر کدام از دنباله‌ها به شکل زیر است:

گزینه (۱) $2, 3, 4, 5, \dots$ گزینه (۲) $2, 3, 10, 15, \dots$

گزینه (۳) $2, 3, 10, 23, \dots$ گزینه (۴) $2, 3, 8, 17, \dots$

بنابراین فقط $n^2 - (-1)^n$ می‌تواند جمله عمومی دنباله باشد.

۱۷۶۸- گزینه ۲ به چند جمله اول دنباله توجه کنید:

$$a_2 = \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{2}{3} a_2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{3}{4} a_3 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

بنابراین با توجه به الگوی جملات می‌توان گفت $a_n = \frac{1}{n}$ ، پس $a_{100} = \frac{1}{100}$.

۱۷۶۹- گزینه ۴ بیشترین مقدار تابع درجه دوم $y = -3x^2 + 12x + c$

به‌ازای $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{-6} = 2$ به‌دست می‌آید. بنابراین بزرگ‌ترین جمله

دنباله مورد نظر برابر a_2 است. در نتیجه

$$a_2 = 8 \Rightarrow -3 \times 4 + 12 \times 2 + c = 8 \Rightarrow c = -4$$

۱۷۷۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$a_1 = \log_2 \frac{1}{2}, \quad a_2 = \log_2 \frac{2}{3}, \quad a_3 = \log_2 \frac{3}{4}, \quad \dots$$

بنابراین مجموع n جمله اول دنباله به‌صورت زیر است:

$$S_n = \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{3}{4} + \dots + \log_2 \frac{n-1}{n} + \log_2 \frac{n}{n+1}$$

$$= \log_2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} \right) = \log_2 \frac{1}{n+1} = -\log_2 (n+1)$$

بنابراین

$$-\log_2 (n+1) = -3 \Rightarrow n+1 = 2^3 = 8 \Rightarrow n = 7$$

۱۷۷۱- گزینه ۳ چون $a_{n+1} - a_n = -2$ ، پس دنباله مورد نظر دنباله‌ای

حسابی است که قدرنسبت آن -2 است. چون جمله اول برابر 3 است، پس

$$a_{10} = a_1 + 9d = 3 + 9(-2) = -15, \quad a_5 = a_1 + 4d = 3 + 4(-2) = -5$$

بنابراین $\frac{a_{10}}{a_5} = \frac{-15}{-5} = 3$.

۱۷۷۲- گزینه ۲ از رابطه داده شده به‌دست می‌آید

$$3(a_1 + 3d) + 4(a_1 + 4d) - 7(a_1 + 8d) = 124$$

پس $31d = 124$ و در نتیجه $d = -4$.

۱۷۷۳- گزینه ۴ قدرنسبت این دنباله برابر است با

$$3x - 4 - (3x - 1) = -3$$

بنابراین

$$4x - 2 = (3x - 4) - 3 \Rightarrow x = -5$$

بنابراین جمله سوم دنباله برابر است با $4(-5) - 2 = -22$ و جمله چهارم برابر است با $-22 - 3 = -25$.

۱۷۷۴- گزینه ۲ چون $a_1 = -1$ و $d = 2 - (-1) = 3$ ، پس

$$a_n = -1 + 3(n-1)$$

یعنی $a_n = 3n - 4$. بنابراین $a_k = 3k - 4 = 218$ ، پس $k = 74$.

۱۷۸۷- گزینه ۲ چون $(x-2)(x-6) = x^2 - 8x + 12$ پس جواب‌های معادله مورد نظر a ، ۲ و ۶ هستند. حالت‌های مختلفی که این سه عدد دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند، در زیر آمده است (توجه کنید که عدد وسط میانگین حسابی دو عدد دیگر است):

$$\begin{aligned} 6, 2, a &\Rightarrow \frac{6+a}{2} = 2 \Rightarrow a = -2, & 2, 6, a &\Rightarrow \frac{2+a}{2} = 6 \Rightarrow a = 10 \\ 6, a, 2 &\Rightarrow \frac{6+2}{2} = a \Rightarrow a = 4, & 2, a, 6 &\Rightarrow \frac{2+6}{2} = a \Rightarrow a = 4 \\ a, 6, 2 &\Rightarrow \frac{a+2}{2} = 6 \Rightarrow a = 10, & a, 2, 6 &\Rightarrow \frac{a+6}{2} = 2 \Rightarrow a = -2 \end{aligned}$$

بنابراین a ممکن است سه مقدار مختلف داشته باشد.

۱۷۸۸- گزینه ۳ اضلاع مثلث را $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم. طبق قضیه فیثاغورس،

$$(a-d)^2 + a^2 = (a+d)^2 \Rightarrow a^2 + d^2 - 2ad + a^2 = a^2 + d^2 + 2ad$$

$$a^2 = 4ad \Rightarrow a = 4d$$

چون وتر بلندترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه است، پس طول ضلع‌های زاویه قائمه a و $a-d$ است، در نتیجه نسبت مورد نظر برابر است با

$$\frac{a}{a-d} = \frac{4d}{4d-d} = \frac{4d}{3d} = \frac{4}{3}$$

۱۷۸۹- گزینه ۳ چهار جمله متوالی دنباله را به صورت

$$a-3d, a-d, a+d, a+3d$$

$$a-3d+a-d+a+d+a+3d=0 \Rightarrow 4a=0 \Rightarrow a=0$$

پس دنباله به صورت $-3d, -d, d, 3d$ است و

$$9d^2 + d^2 + d^2 + 9d^2 = 80 \Rightarrow d^2 = 4$$

بنابراین، حاصل ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اعداد برابر است با

$$(3d)(-3d) = -9d^2 = -36$$

۱۷۹۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که m باید عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ باشد. پس $m^2 + 4 < m^2 + 3m + 4$.

اگر $m-1$ عدد بین عددهای داده شده درج کنیم، آن‌گاه قدرنسبت دنباله حاصل، برابر است با

$$d = \frac{m^2 + 3m + 4 - m^2 - 4}{(m-1)+1} = \frac{3m}{m} = 3$$

۱۷۹۱- گزینه ۱ دنباله a_n ، دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\frac{3}{2}$ است.

در نتیجه

$$a_3 = a_1 r^2 \Rightarrow a_3 = a_1 \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{4}{3}$$

$$\text{بنابراین } a_{29} = a_1 \left(\frac{3}{2}\right)^{28} = \frac{4}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{28} = \frac{3^{27}}{2^{26}}$$

۱۷۹۲- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $\sqrt[4]{2}$ واسطه هندسی $\sqrt{a}$ و $\sqrt[3]{2}$ است، پس

$$(\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt{a} \sqrt[3]{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{a} \sqrt[3]{2} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$$

از طرف دیگر، قدرنسبت این دنباله برابر است با $r = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}}$ ، در نتیجه

$$a_{13} = a_1 r^{12} = \sqrt{a} \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}}\right)^{12} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} \times 2 = \frac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2^2}} = \frac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2^2}} = \sqrt[6]{2}$$

۱۷۸۱- گزینه ۴ راه حل اول با قرار دادن $n=1$ در جمله عمومی به دست

می‌آید $a_1 = 1$. با قرار دادن $n=2$ در جمله عمومی به دست می‌آید $a_2 = \frac{1}{3}$.

$$\text{بنابراین } d = a_2 - a_1 = -\frac{2}{3} \text{ پس } a_1 - d = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

راه حل دوم جمله عمومی دنباله حسابی با قدرنسبت d و جمله اول a_1 به صورت

$$a_n = a_1 + (n-1)d \text{ است، بنابراین } a_n = dn + (a_1 - d) = -\frac{2}{3}n + \frac{5}{3} \text{ پس}$$

$$a_1 - d = \frac{5}{3}$$

۱۷۸۲- گزینه ۲ از $a_1 + a_3 = 16$ نتیجه می‌شود

$$a_1 + a_1 + 2d = 16 \Rightarrow a_1 + d = 8$$

چون $a_4 + a_8 + a_{12} = 51$ ، پس

$$a_1 + d + a_1 + 4d + a_1 + 7d = 51 \Rightarrow 3a_1 + 12d = 51$$

$$\text{از حل دستگاه } \begin{cases} a_1 + d = 8 \\ 3a_1 + 12d = 51 \end{cases} \text{ به دست می‌آید } d = 3$$

۱۷۸۳- گزینه ۱ چون دنباله حسابی است، پس

$$2a - 1 = \frac{a+1-3a}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

بنابراین $d = (2a-1) - a = a-1 = -\frac{1}{2}$ پس جمله عمومی دنباله به شکل

زیر است:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(n-1) = 1 - \frac{n}{2}$$

۱۷۸۴- گزینه ۴ راه حل اول چون $a+b, a+c, b+c$ دنباله‌ای حسابی

است، پس

$$a+c-(a+b) = (b+c)-(a+c) \Rightarrow c-b = b-a$$

در نتیجه a, b, c دنباله‌ای حسابی است.

راه حل دوم چون $a+b, a+c, b+c$ دنباله‌ای حسابی است، پس

$$a+c = \frac{a+b+b+c}{2} \Rightarrow 2(a+c) = a+2b+c \Rightarrow a+c = 2b$$

در نتیجه a, b, c دنباله‌ای حسابی است.

۱۷۸۵- گزینه ۳ جمله عمومی دنباله به صورت زیر است

$$a_n = 196 - 4(n-1) = 200 - 4n$$

بنابراین $a_{50} = 0$ ، در نتیجه، چون قدرنسبت دنباله برابر -4 است، پس

$$a_{47} = 12, \quad a_{48} = 8, \quad a_{49} = 4, \quad a_{50} = 0$$

۱۷۸۶- گزینه ۲ ابتدا قدرنسبت دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$d = \frac{a_{10} - a_2}{10-2} = -\frac{32}{8} = -4$$

بنابراین $a_1 = 27$ و در نتیجه $a_4 = a_1 + 3d = a_1 - 12 = 15$.

عمومی دنباله می‌شود $a_n = 27 - 4(n-1) = 31 - 4n$. اکنون توجه کنید که

$$a_n > 0 \Rightarrow 31 - 4n > 0 \Rightarrow n \leq 7$$

بنابراین هفت جمله نخست دنباله مثبت هستند.

در نتیجه جمله هشتادونهم این دنباله برابر است با
 $a_{80} = -12 + \frac{1}{8} \times (80-1) = -1$
 دهیم. آن‌گاه $(3r)^5 = 243r^5 = (3r)^5$ جمله ششم دنباله هندسی. بنابراین

$$(3r)^5 = -1 \Rightarrow 3r = -1 \Rightarrow r = -\frac{1}{3}$$

۱۷۹۹- گزینه ۱ چون ۸ واسطه حسابی عددهای a و b است، پس

$$a+b=16 \Rightarrow b=16-a$$

اگر ۴ واحد به b اضافه کنیم، ۸ واسطه هندسی عددهای a و $b+4$ می‌شود.
 بنابراین $64 = a(b+4) = a(16-a+4) = 20a - a^2$.

پس $a^2 - 20a + 64 = 0$ و مجموع مقادیر ممکن a برابر مجموع جواب‌های این معادله، یعنی برابر ۲۰ است (توجه کنید در این معادله $\Delta > 0$).

۱۸۰۰- گزینه ۴ جملات دوم، ششم و چهاردهم دنباله حسابی را به ترتیب به صورت $a+d$ ، $a+5d$ و $a+13d$ در نظر می‌گیریم. چون این اعداد دنباله هندسی تشکیل می‌دهند، پس

$$(a+5d)^2 = (a+d)(a+13d) \Rightarrow 12d^2 = 4ad \Rightarrow a=3d$$

بنابراین قدرنسبت دنباله هندسی برابر است با $\frac{a+d}{a} = \frac{3d+d}{3d} = \frac{4d}{3d} = \frac{4}{3}$

۱۸۰۱- گزینه ۲ چون $\frac{a_8}{a_5} = \sqrt{2}$ ، پس $\frac{a_1 r^7}{a_1 r^4} = \sqrt{2}$. در نتیجه

$$\frac{a_7}{a_4} = \frac{a_1 r^6}{a_1 r^3} = r^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2} \Rightarrow r^2 = 2$$

۱۸۰۲- گزینه ۳ چون 4^{2x} واسطه هندسی 2^{x-4} و 2^{x-3} است، پس
 $(4^{2x})^2 = 2^{x-4} \times 8^{2-3x} \Rightarrow 2^{4x} = 2^{x-4} \times 2^{6-9x} \Rightarrow 2^{4x} = 2^{2-8x}$
 بنابراین $12x = 2 - 8x$ ، یعنی $x = \frac{1}{10}$.

۱۸۰۳- گزینه ۲ قدرنسبت دنباله هندسی مورد نظر برابر است با

$$r = \frac{\log a}{\log_4 a} = \frac{\log 16}{\log a} = \frac{\log 4}{\log 16} = \frac{\log 4}{2 \log 4} = \frac{1}{2}$$

بنابراین

$$a_7 = a_1 r^6 \Rightarrow \frac{1}{32} = \log_4 a \times \frac{1}{64} \Rightarrow \log_4 a = 2 \Rightarrow a = 4^2 = 16$$

۱۸۰۴- گزینه ۴ توجه کنید که

$$a_8 - a_1 = 130 \Rightarrow a_1 r^7 - a_1 = 130 \Rightarrow a_1(r^7 - 1) = 130$$

$$a_8 - a_7 = 25 \Rightarrow a_1 r^7 - a_1 r = 25 \Rightarrow a_1 r(r^6 - 1) = 25$$

اگر این دو تساوی را بر هم تقسیم کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{r^6 - 1}{r(r^6 - 1)} = \frac{130}{25} \Rightarrow \frac{(r^2 - 1)(r^4 + r^2 + 1)}{r(r^2 - 1)} = \frac{26}{5} \Rightarrow \frac{r^2 + 1}{r} = \frac{26}{5}$$

$$5(r^2 + 1) = 26r \Rightarrow 5r^2 - 26r + 5 = 0 \Rightarrow r = 5, r = \frac{1}{5} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

به این ترتیب، $a_1 r(r^2 - 1) = 25 \Rightarrow a_1 \times 5 \times 24 = 25 \Rightarrow a_1 = \frac{5}{24}$

در نتیجه $a_7 = a_1 r = \frac{25}{24}$

۱۷۹۳- گزینه ۱ فرض می‌کنیم جواب‌های معادله x_1 و x_2 باشند. در این صورت

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 4/5 \Rightarrow x_1 + x_2 = 9, \quad \sqrt{x_1 x_2} = 1/5 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{9}{4}$$

بنابراین معادله مورد نظر به شکل $x^2 - 9x + \frac{9}{4} = 0$ است که اگر طرفین آن را

در ۴ ضرب کنیم، می‌شود $4x^2 - 36x + 9 = 0$.

۱۷۹۴- گزینه ۳ از تساوی $a_1 a_7 = 27$ نتیجه می‌شود

$$a_1 \times a_1 r^6 = 27 \Rightarrow a_1^2 r^6 = 27$$

از تساوی $a_7 a_7 = 9$ به دست می‌آید

$$a_1 r \times a_1 r^7 = 9 \Rightarrow a_1^2 r^8 = 9$$

از تقسیم طرفین دو تساوی به دست آمده نتیجه می‌شود

$$\frac{a_1^2 r^6}{a_1^2 r^8} = \frac{27}{9} \Rightarrow r = 3$$

با جای گذاری $r = 3$ در یکی از رابطه‌ها نتیجه می‌شود $a_1 = \pm \frac{1}{3}$. چون جملات

دنباله مثبت هستند، پس $a_1 = \frac{1}{3}$ و در نتیجه $a_8 = a_1 r^7 = \frac{1}{3} \times 3^7 = 27$.

۱۷۹۵- گزینه ۲ مجموع جملات پنجم و هشتم برابر است با

$$a_5 + a_8 = a_1 r^4 + a_1 r^7 = a_1 r^4 (1 + r^3)$$

مجموع جملات هفتم و هشتم برابر است با

$$a_7 + a_8 = a_1 r^6 + a_1 r^7 = a_1 r^6 (1 + r)$$

بنابراین $\frac{a_5 + a_8}{a_7 + a_8} = \frac{a_1 r^4 (1 + r^3)}{a_1 r^6 (1 + r)} = \frac{1 + r^3}{r^2 (1 + r)} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r} (1 + \frac{1}{r})} = 7$

۱۷۹۶- گزینه ۳ این جملات را به صورت $a, ar, ar^2, \frac{a}{r}, \frac{a}{r^2}$ در نظر

می‌گیریم. بنابراین

$$\frac{a}{r^2} \times \frac{a}{r} \times a \times ar \times ar^2 = 1024 \Rightarrow a^5 = 2^{10} \Rightarrow a = 2^2 = 4$$

در نتیجه جمله وسط برابر ۴ است.

۱۷۹۷- گزینه ۱ راه حل اول این اعداد به شکل زیر هستند:

$$\sqrt{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 16\sqrt{2}$$

پس $a_1 = \sqrt{2}$ و $a_9 = 16\sqrt{2}$. بنابراین

$$a_1 r^8 = 16\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} r^8 = 16\sqrt{2} \Rightarrow r^8 = 16 \Rightarrow (r^2)^4 = 2^4 \Rightarrow r^2 = 2$$

در نتیجه $a_7 = a_1 r^6 = 2\sqrt{2}$.

راه حل دوم ابتدا قدرنسبت دنباله هندسی حاصل را به دست می‌آوریم:

$$r^{7+1} = \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow r^8 = 16 \Rightarrow r^2 = 2 \Rightarrow r = \pm\sqrt{2}$$

$$a_7 = a_1 r^6 = \sqrt{2} \times (\pm\sqrt{2})^6 = 2\sqrt{2}$$

۱۷۹۸- گزینه ۲ قدرنسبت دنباله حسابی برابر است با

بنابراین جمله عمومی دنباله حسابی به صورت $-\frac{95}{8} - (n-1) \times \frac{1}{8}$

است. $a_n = -12 + \frac{1}{8}(n-1)$

۱۸۱۱- گزینۀ ۴ توجه کنید که

$$a_4 + 4 = 3a_7 \Rightarrow a_1 + 4d + 4 = 3(a_1 + 6d) \Rightarrow 4 = 2a_1 + 10d$$

چون $d = -3$ ، پس $a_1 = 17$ ، بنابراین

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{17} = \frac{17}{2}(2 \times 17 + 11 \times (-3)) = 6$$

۱۸۱۲- گزینۀ ۱ راه حل اول مجموع شش جمله نخست دنباله مورد نظر

برابر است با $3(200 + 5d)$. شش جمله بعدی، یعنی جمله‌های $a_7, a_8, \dots$

و a_{17} دنباله‌ای حسابی با جمله اول a_7 و قدرنسبت d تشکیل می‌دهند.

بنابراین مجموع آن‌ها برابر است با

$$3(2a_7 + 5d) = 3(200 + 12d + 5d) = 3(200 + 17d)$$

به این ترتیب، با توجه به فرض،

$$3(200 + 5d) = 3(200 + 17d) \Rightarrow 200 + 5d = 200 + 17d \Rightarrow d = -10$$

راه حل دوم مجموع شش جمله دوم برابر اختلاف مجموع دوازده جمله اول و

شش جمله اول است. طبق فرض،

$$S_6 = 5(S_{17} - S_6) = 5S_{17} - 5S_6 \Rightarrow 6S_6 = 5S_{17}$$

بنابراین

$$6 \times 3 \times (2a_1 + 5d) = 5 \times 6 \times (2a_1 + 17d) \Rightarrow 6a_1 + 15d = 10a_1 + 55d$$

$$-4a_1 = 40d \Rightarrow d = -\frac{1}{10}a_1 = -\frac{1}{10}(100) = -10$$

۱۸۱۳- گزینۀ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$d = \frac{a_{21} - a_{15}}{a_{17} - a_{19}} = \frac{a_1 + 20d - (a_1 + 14d)}{a_1 + 16d - (a_1 + 18d)} = \frac{6d}{-2d} = -3$$

بنابراین قدرنسبت دنباله برابر $\frac{3}{4}$ است. از طرف دیگر،

$$a_8 = 13 \Rightarrow a_1 + 7d = 13 \Rightarrow a_1 = 13 - 4 \times \frac{3}{4} = 13 - 3 = 10$$

$$\text{به این ترتیب } S_{17} = \frac{17}{2}(2 \times 10 + 16 \times \frac{3}{4}) = 272$$

۱۸۱۴- گزینۀ ۴

$$S_1 = a_1 = 4 - 3 = 1$$

$$S_7 = a_1 + a_7 = 4 \times 2^2 - 3 \times 2 = 10 \xrightarrow{a_1=1} a_7 = 9$$

پس

$$d = a_7 - a_1 = 9 - 1 = 8$$

بنابراین جمله عمومی این دنباله برابر است با

$$a_n = 1 + (n-1) \times 8 = 8n - 7$$

۱۸۱۵- گزینۀ ۱ فرض کنید بین عددهای a و b تعداد $2n$ واسطه حسابی

درج کرده‌ایم. به این ترتیب، دنباله‌ای حسابی با $2n+2$ جمله داریم که

جمله‌های اول و آخر آن a و b هستند و مجموع جمله‌های آن برابر است با

$$\frac{2n+2}{2}(a+b) = \frac{13}{6}(n+1)$$

درج کرده‌ایم برابر است با $\frac{13}{6}(n+1) - (a+b)$ ، که بنابر فرض برابر است با

$2n+1$ ، یعنی

$$\frac{13}{6}(n+1) - \frac{13}{6} = 2n+1 \Rightarrow 13n+13-13=12n+6 \Rightarrow n=6$$

۱۸۰۵- گزینۀ ۳ در حالتی که پنج واسطه هندسی درج می‌کنیم، $r^6 = \frac{b}{a}$

در حالتی که چهار واسطه هندسی درج می‌کنیم، $r^5 = \frac{b}{a} = (2r)^5$ ، بنابراین

$$r^6 = (2r)^5 \Rightarrow r^6 = 32r^5 \Rightarrow r = 32$$

۱۸۰۶- گزینۀ ۳ این سه عدد را به صورت $\frac{a}{r}, a, ar$ در نظر می‌گیریم.

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = 64 \Rightarrow a^3 = 64 \Rightarrow a = 4$$

پس

از طرف دیگر،

$$\frac{a}{r} + a + ar = 14 \Rightarrow a(\frac{1}{r} + 1 + r) = 14$$

$$4(\frac{1}{r} + 1 + r) = 14 \Rightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}, r = 2$$

بنابراین سه جمله مورد نظر به ازای $r = \frac{1}{2}$ ، به صورت $8, 4, 2$ و به ازای $r = 2$ ،

به صورت $2, 4, 8$ هستند. در هر دو حالت اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین

این اعداد برابر ۶ است.

۱۸۰۷- گزینۀ ۲ طول اضلاع مثلث را a, ar, ar^2 در نظر می‌گیریم.

طبق قضیه فیثاغورس، $a^2 + (ar)^2 = (ar^2)^2$ ، بنابراین

$$a^2(1+r^2) = a^2r^4 \Rightarrow r^4 - r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

۱۸۰۸- گزینۀ ۱ تنها دنباله‌ای که هم حسابی است و هم هندسی، دنباله

ثابت است. بنابراین

$$\begin{cases} 2y+x=2x+y \Rightarrow y=x \\ 2y+x=x+4 \Rightarrow 2y=4 \Rightarrow y=2 \end{cases}$$

پس $x=y=2$ ، بنابراین $x+2y=6$

۱۸۰۹- گزینۀ ۲ توجه کنید که

$$a_3 = a - 3, \quad a_8 = a - 5, \quad a_6 = a - 6$$

بنابر فرض، $(a-5)^2 = (a-3)(a-6)$ ، بنابراین

$$a^2 - 10a + 25 = a^2 - 9a + 18 \Rightarrow a = 7$$

در نتیجه $a_{10} = 7 - 10 = -3$

۱۸۱۰- گزینۀ ۳ جملات سوم، پنجم و هشتم دنباله حسابی را به ترتیب

$a+2d, a+4d$ و $a+7d$ در نظر می‌گیریم. چون این جملات یک دنباله

هندسی تشکیل می‌دهند، پس

$$(a+4d)^2 = (a+2d)(a+7d) \Rightarrow 2d^2 = ad \Rightarrow a = 2d$$

بنابراین دنباله هندسی به صورت $2d, 4d, 6d, \dots$ است که جمله چهارم آن

$$\frac{27}{2}d \text{ است زیرا } r = \frac{3}{2} \text{ و } 9d \times \frac{3}{2} = \frac{27}{2}d$$

حسابی به صورت زیر است:

$$a_n = a + (n-1)d = 2d + (n-1)d = (n+1)d$$

به این ترتیب $a_{13} = 13d$ و نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{\frac{27}{2}d}{13d} = \frac{27}{26}$

راه حل دوم به ازای $n=1$ ، سه جمله اول دنباله $-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}$ هستند.

مجموع n جمله نخست دنباله همان جمله اول، یعنی $-\frac{1}{2}$ است. فقط مقدار

گزینه (۳) به ازای $n=1$ برابر $-\frac{1}{2}$ است.

گزینه ۱۸۲۳- مجموعه n جمله نخست دنباله برابر است با

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

چون $a_1 = 50$ و $d = -4$ ، پس

$$S_n = \frac{n}{2}(100 - 4(n-1)) = 52n - 2n^2$$

حداکثر مقدار عبارت درجه دوم $-2n^2 + 52n - 2n^2$ به ازای $n = \frac{52}{4} = 13$ به دست

می آید، پس بیشترین مقدار بین S_n ها برابر است با

$$S_{13} = 338$$

گزینه ۱۸۲۴- اگر جمله اول دنباله a_1 و قدرنسبت آن d باشد، آن گاه

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) = 10a_1 + 45d$$

اگر ۲ واحد از قدرنسبت کم کنیم و k واحد به جمله اول اضافه کنیم، مجموع ده جمله اول می شود

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2(a_1 + k) + 9(d - 2)) = 10a_1 + 10k + 45d - 90$$

چون قرار است مجموع ده جمله اول ثابت بماند، پس باید

$$10k - 90 = 0 \Rightarrow k = 9$$

گزینه ۱۸۲۵- مجموعه سمت چپ معادله، مجموع جملات دنباله ای

حسابی با جمله اول ۱ و قدرنسبت ۳ است. فرض کنید تعداد عدهای سمت چپ معادله n باشد. در این صورت

$$\frac{n}{2}(2 + 3(n-1)) = 145 \Rightarrow 3n^2 - n - 290 = 0$$

$$(n-10)(3n+29) = 0 \Rightarrow n = 10, n = -\frac{29}{3} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

بنابراین جمله دهم دنباله برابر x است و $x = a_{10} = a_1 + 9d = 1 + 27 = 28$

گزینه ۱۸۲۶- مجموعه n جمله نخست برابر است با

$$S_n = \frac{a_1(2^n - 1)}{2 - 1} = a_1(2^n - 1) = a_1 2^n - a_1 = 2(a_1 2^{n-1}) - a_1 = 2a_n - a_1$$

گزینه ۱۸۲۷- توجه کنید که

$$a_7 = 3 \Rightarrow a_1 q^6 = 3, \quad a_7 = 96 \Rightarrow a_1 q^6 = 96$$

در نتیجه

$$\frac{a_1 q}{a_1 q^6} = \frac{3}{96} \Rightarrow q^5 = 32 \Rightarrow q = 2$$

بنابراین $a_1 = \frac{3}{q} = \frac{3}{2}$ پس

$$S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{3}{2} \times 2^{10} - 1}{2 - 1} = \frac{3 \times 2^9 - 1}{2} = \frac{3069}{2}$$

گزینه ۱۸۱۶- جمله اول دنباله $a_1 = \sqrt{2}$ و قدرنسبت دنباله $q = 2$

$$S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{\sqrt{2}(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 1023\sqrt{2}$$

گزینه ۱۸۱۷- توجه کنید که

$$S_3 = \frac{a_1(1 - q^3)}{1 - q} = a_1(1 + q + q^2)$$

بنابراین

$$104 = 8(1 + q + q^2) \Rightarrow q^2 + q - 12 = 0$$

$$(q + 4)(q - 3) = 0 \Rightarrow q = -4, q = 3 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

گزینه ۱۸۱۸- مجموعه سمت چپ معادله را حساب می کنیم:

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + \dots + 2^{x+5} = 2^x(1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^5)$$

$$= 2^x \left(\frac{2^6 - 1}{2 - 1} \right) = 2^x \times 63$$

بنابراین معادله به صورت $2^x \times 63 = 504$ است و در نتیجه

$$2^x = \frac{504}{63} = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

گزینه ۱۸۱۹- جمله اول دنباله ۶ و قدرنسبت آن $\frac{1}{2}$ است. بنابراین

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 12\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

در نتیجه

$$S_n > \frac{248}{21} \Rightarrow 12\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) > \frac{248}{21} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{63} \Rightarrow n \geq 6$$

گزینه ۱۸۲۰- اگر مساحت مثلث اولیه برابر S باشد، در مرحله اول

$\frac{3}{4}S$ و در مرحله دوم $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}S$ رنگ می شود و همین طور ادامه می یابد.

بنابراین مساحت قسمت های رنگ شده دنباله ای هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{4}$

است. بنابراین

$$\frac{3}{4}S + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}S\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}S\right) + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{3}{4}S\right) > \frac{999}{1000}S$$

$$\frac{3}{4}S \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \right) > \frac{999}{1000}S \Rightarrow 1 - \frac{1}{4^n} > \frac{999}{1000} \Rightarrow \frac{1}{4^n} < \frac{1}{1000} \Rightarrow n \geq 5$$

گزینه ۱۸۲۱- توجه کنید که

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow 120 = \frac{n}{2}(-6 + 30) \Rightarrow n = 10$$

گزینه ۱۸۲۲- راه حل اول قدرنسبت دنباله مورد نظر برابر است با

$$\frac{n-3}{2n} - \frac{n-2}{2n} = -\frac{1}{2n}$$

بنابراین مجموع n جمله نخست دنباله مورد نظر برابر است با

$$S_n = \frac{n}{2} \left(\frac{n-2}{n} - \frac{1}{2n}(n-1) \right) = \frac{n}{2} \left(\frac{n-3}{2n} \right) = \frac{n-3}{4}$$

۱۸۳۳- گزینه ۴) راه حل اول قدرنسبت دنباله مورد نظر برابر است با
 $a_7 - a_1 = 4$ از طرف دیگر،

$$S_n - a_n = 56 \Rightarrow \frac{n}{2}(-14 + 4(n-1)) - (-7 + 4(n-1)) = 56$$

$$-7n + 2n(n-1) + 7 - 4(n-1) = 56$$

$$2n^2 - 13n - 45 = 0 \Rightarrow (2n+5)(n-9) = 0 \Rightarrow n=9$$

راه حل دوم توجه کنید که $d = a_7 - a_1 = 4$ از طرف دیگر،

$$S_n - a_n = S_{n-1} = 56$$

بنابراین

$$\frac{n-1}{2}(2a_1 + (n-2)d) = 56 \Rightarrow \frac{n-1}{2}(2(-7) + 4(n-2)) = 56$$

$$(n-1)(2n-11) = 56 \Rightarrow 2n^2 - 13n - 45 = 0$$

$$(2n+5)(n-9) = 0 \Rightarrow n=9$$

۱۸۳۴- گزینه ۱) مجموع سه جمله اول و سه جمله آخر را حساب می کنیم:

$$a_1 + a_7 + a_8 + a_{n-7} + a_{n-1} + a_n = 10 + 80$$

$$(a_1 + a_n) + (a_7 + a_{n-7}) + (a_8 + a_{n-8}) = 90$$

با توجه به تساوی $a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + a_n$ به دست می آید

$$(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) = 90$$

$$3(a_1 + a_n) = 90 \Rightarrow a_1 + a_n = 30$$

از طرف دیگر،

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = 300 \Rightarrow 30 \times \frac{n}{2} = 300 \Rightarrow n=20$$

۱۸۳۵- گزینه ۴) راه حل اول توجه کنید که مجموع $k+1$ جمله با ردیف

فرد برابر است با $\frac{(k+1)(a_1 + a_{2k+1})}{2}$. همچنین مجموع k جمله با ردیف

زوج برابر است با $\frac{k(a_2 + a_{2k})}{2}$. توجه کنید $\frac{a_2 + a_{2k}}{2} = \frac{a_1 + a_{2k+1}}{2}$ ،

بنابراین نسبت مورد نظر برابر با $\frac{k+1}{k}$ است.

راه حل دوم فرض می کنیم دنباله سه جمله ای باشد ($k=1$) و جملات آن به

صورت a_1, a_7, a_8 باشند. در این صورت نسبت مورد نظر برابر است با

$$\frac{a_1 + a_8}{a_7} = \frac{2a_7}{a_7} = 2 \text{ فقط گزینه (۴) به ازای } k=1 \text{ برابر ۲ می شود.}$$

۱۸۳۶- گزینه ۲) اگر از مجموع پنج جمله اول دنباله، مجموع چهار جمله

اول را کم کنیم، جمله پنجم به دست می آید:

$$a_5 = S_5 - S_4 = \frac{4}{3}(3^5 - 1) - \frac{4}{3}(3^4 - 1) = \frac{4}{3}(3^5 - 3^4) = 216$$

۱۸۳۷- گزینه ۳) ابتدا توجه کنید که $q = \sqrt[3]{3}$. مجموع شش جمله دوم

برابر اختلاف مجموع دوازده جمله اول و شش جمله اول است. پس

$$\frac{S_{12} - S_6}{S_6} = \frac{S_{12}}{S_6} - 1 = \frac{\frac{1 \times (q^{12} - 1)}{q - 1}}{\frac{1 \times (q^6 - 1)}{q - 1}} - 1 = \frac{q^{12} - 1}{q^6 - 1} - 1 = q^6 = (\sqrt[3]{3})^6 = 9$$

۱۸۲۸- گزینه ۲) راه حل اول مجموع n جمله اول دنباله هندسی

$a, aq, aq^2, \dots$ برابر است با $S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$. مجموع n جمله اول

دنباله هندسی $a, \frac{a}{q}, \frac{a}{q^2}, \dots$ برابر است با

$$S'_n = \frac{a(\frac{1}{q} - \frac{1}{q^n})}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{aq(1 - q^n)}{(1 - q)q^n} = \frac{a(q^n - 1)}{q^{n-1}(q - 1)}$$

بنابراین

$$\frac{S_n}{S'_n} = \frac{\frac{a(q^n - 1)}{q - 1}}{\frac{a(q^n - 1)}{q^{n-1}(q - 1)}} = q^{n-1}$$

راه حل دوم کافی است $n=1$ را در نظر بگیریم و نسبت جمله اول دنباله اول

به جمله اول دنباله دوم را به دست آوریم که ۱ می شود. فقط مقدار گزینه (۲) به ازای $n=1$ برابر ۱ است.

۱۸۲۹- گزینه ۱) ابتدا توجه کنید که چون دنباله مورد نظر غیر ثابت است،

پس $q \neq 1$ و چون جمله های آن مثبت اند، پس q مثبت است. از طرف دیگر،

$$S_6 = 21S_7 \Rightarrow \frac{a_1(1 - q^6)}{1 - q} = 21 \times \frac{a_1(1 - q^7)}{1 - q} \Rightarrow 1 - q^6 = 21(1 - q^7)$$

$$(1 - q^7)(1 + q^7 + q^{14}) = 21(1 - q^7) \Rightarrow q^7 + q^{14} - 20 = 0$$

$$(q^7 - 4)(q^7 + 5) = 0 \Rightarrow q^7 = 4 \Rightarrow q = 2$$

۱۸۳۰- گزینه ۳) توجه کنید که

$$\begin{cases} S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} \\ S_5 = \frac{a_1(q^5 - 1)}{q - 1} \end{cases} \Rightarrow \frac{S_{10}}{S_5} = \frac{\frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1}}{\frac{a_1(q^5 - 1)}{q - 1}} = 33$$

$$33 = \frac{q^{10} - 1}{q^5 - 1} = q^5 + 1 \Rightarrow q^5 = 32 \Rightarrow q = 2$$

در نتیجه

$$\frac{a_5}{a_1} = \frac{a_1 q^4}{a_1} = q^4 = 16$$

۱۸۳۱- گزینه ۱) راه حل اول توجه کنید که

$$a_7 + a_{14} = a_1 + 6d + a_1 + 13d = 2a_1 + 19d = 60$$

$$S_{19} = \frac{19}{2}(2a_1 + 19d) = \frac{19}{2} \times 60 = 570$$

راه حل دوم چون $7 + 14 = 1 + 20$ ، پس $a_7 + a_{14} = a_1 + a_{20}$ ، بنابراین

$$S_{19} = \frac{19}{2}(a_1 + a_{20}) = 10 \times 60 = 600$$

۱۸۳۲- گزینه ۳) قدرنسبت دنباله برابر ۴ و جمله اول آن ۳ است. پس

مجموع n جمله اول آن برابر است با

$$S_n = \frac{n}{2}(2 \times 3 + 4(n-1)) = n(2n+1) = 2n^2 + n$$

$$2n^2 + n > 3000 \Rightarrow 2n^2 + n - 3000 > 0$$

بنابراین

می توان نامعادله فوق را حل کرد که جواب آن به صورت $n > \frac{-1 + \sqrt{2401}}{4} = 12$

می شود، یعنی $n \geq 13$.

۱۸۳۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) = 2^{n-1}$$

در نتیجه $a_n^2 = 2^{2n-2} = 4^{n-1}$ بنابراین

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 = 4^0 + 4^1 + \dots + 4^{n-1} = \frac{4^n - 1}{4 - 1} = \frac{4^n - 1}{3}$$

۱۸۳۹- گزینه ۲ راه حل اول فرض می‌کنیم جمله‌های دنباله به صورت

 $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ باشند. در این صورت مجموع تمام جمله‌ها برابر است با

$$S_{2n} = \frac{a_1(q^{2n} - 1)}{q - 1}$$

 $a_2, a_4, \dots, a_{2n}$ هستند که دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q^2 و جمله اول a_2 تشکیل می‌دهند. بنابراین مجموع آن‌ها برابر با $\frac{a_2(1 - (q^2)^n)}{1 - q^2}$ است. پس

$$\frac{a_1(1 - q^{2n})}{1 - q} = 3 \times \frac{a_2(1 - q^{2n})}{(1 - q)(1 + q)} \Rightarrow a_1 = 3 \times \frac{a_2 q}{1 + q} \Rightarrow 3q = 1 + q \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

راه حل دوم فرض می‌کنیم تعداد جمله‌های دنباله ۲ تا باشد، یعنی دنباله به

صورت a_1, a_2 باشد. طبق فرض $a_1 + a_2 = 3a_2 \Rightarrow a_1 = 2a_2$ بنابراین

$$a_1 = 2a_2 \Rightarrow a_1 = 2a_1 q \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

۱۸۴۰- گزینه ۲ صورت کسر مجموع دوازده جمله نخست دنباله‌ای

هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت t و مخرج کسر مجموع چهار جمله نخستدنباله‌ای هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت t^3 است. بنابراین عبارت مورد

نظر برابر است با

$$\frac{1 \times \frac{1 - t^{12}}{1 - t}}{1 \times \frac{1 - t^{12}}{1 - t^3}} = \frac{1 - t^3}{1 - t} = 1 + t + t^2$$

و حاصل آن به ازای $t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ می‌شود

$$1 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{4 + 2 - 2\sqrt{5} + 6 - 2\sqrt{5}}{4} = 3 - \sqrt{5}$$

۱۸۴۱- گزینه ۳ توجه کنید که $a_1 = 8$ و $S_{13} = -52$ بنابراین

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow -52 = \frac{13}{2}(2(8) + (13-1)d) \Rightarrow d = -2$$

۱۸۴۲- گزینه ۳ قدرنسبت دنباله مورد نظر برابر است با $-3 = -18 - 15$.بنابراین اگر مجموع n جمله نخست این دنباله برابر با ۴۵ باشد،

$$\frac{n}{2}(2 \times 18 - 3(n-1)) = 45 \Rightarrow 3n^2 - 39n + 90 = 0$$

$$(n-3)(n-10) = 0 \Rightarrow n = 3, n = 10$$

بنابراین مجموع سه جمله نخست و همین‌طور مجموع ده جمله نخست دنباله

مورد نظر برابر ۴۵ است. در نتیجه حداکثر ده جمله از ابتدای دنباله را می‌توان

جمع کرد تا مجموعشان برابر ۴۵ شود.

۱۸۴۳- گزینه ۲ توجه کنید که

$$S_{17} - S_{16} = a_{17} \Rightarrow a_{17} = 26, \quad S_{30} - S_{29} = a_{30} \Rightarrow a_{30} = 0$$

از طرف دیگر،

$$a_{30} = a_{17} + 13d \Rightarrow 0 = 26 + 13d \Rightarrow d = -2$$

۱۸۴۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$$a_7 = a_1 + 6d = 16 \quad (1)$$

$$S_{17} = \frac{17}{2}(2a_1 + 16d) = 17a_1 + 66d = 174 \quad (2)$$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم، معلوم می‌شود که $a_1 = -2$ و $d = 3$. اکنون دقت کنید که $a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, a_{12}, a_{14}, a_{16}$ دنباله‌ای حسابی با جملهنخست a_2 و قدرنسبت ۲ است. بنابراین مجموع جملات آن برابر می‌شود

با

$$a_2 + a_4 + \dots + a_{16} = \frac{8}{2}(2(a_2 + d) + 4 \times 2d) = 4(a_2 + 3d) = 4(-2 + 9) = 20$$

۱۸۴۵- گزینه ۱ چون تعداد جمله‌های هر دسته برابر شماره آن دسته

است، برای نوشتن بیست و چهار دسته نخست از $1 + 2 + 3 + \dots + 24$ عددطبیعی استفاده شده است. چون $\frac{24 \times 25}{2} = 300$ پس برای

نوشتن بیست و چهار دسته نخست، از ۳۰۰ عدد طبیعی نخست استفاده شده

است. در نتیجه، جمله نخست دسته بیست و پنجم برابر با ۳۰۱ است. بنابراین

عددهای دسته بیست و پنجم، دنباله‌ای حسابی با جمله نخست ۳۰۱ و

قدرنسبت ۱ تشکیل می‌دهند و تعداد آن‌ها ۲۵ تا است. به این ترتیب مجموع

آن‌ها برابر است با $\frac{25}{2}(2 \times 301 + (25-1) \times 1) = 7825$.

۱۸۴۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$(\sqrt{a^2 + 1})^2 = a(a+1) \Rightarrow a^2 + 1 = a(a+1) \Rightarrow a = 1$$

بنابراین دنباله هندسی مورد نظر به صورت $1, \sqrt{2}, 2, \dots$ است. قدرنسبت ایندنباله $\sqrt{2}$ و جمله نخست آن ۱ است. بنابراین

$$S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{(\sqrt{2})^{10} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{31}{\sqrt{2} - 1} = 31(1 + \sqrt{2})$$

۱۸۴۷- گزینه ۴ راه حل اول توجه کنید که

$$S_{99} - S_{90} = 81 \Rightarrow \frac{a_1(3^{99} - 1)}{3 - 1} - \frac{a_1(3^{90} - 1)}{3 - 1} = 81$$

$$\frac{a_1 \times 3^{99} - a_1 - a_1 \times 3^{90} + a_1}{3 - 1} = 81$$

$$\frac{a_1 \times 3^{90}(3^9 - 1)}{3 - 1} = 81 \Rightarrow \frac{a_1(3^9 - 1)}{3 - 1} = \frac{81}{3^{90}}$$

$$S_9 = \frac{81}{3^{90}} = \frac{3^4}{3^{90}} = 3^{-86}$$

راه حل دوم توجه کنید که $S_{99} - S_{90} = a_{91} + a_{92} + \dots + a_{99}$ بنابراین

$$a_1 q^{90} + a_1 q^{91} + \dots + a_1 q^{98} = 81$$

$$q^{90}(a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^8) = 81$$

$$q^{90}(a_1 + a_2 + \dots + a_9) = 81$$

در نتیجه

$$S_9 = a_1 + \dots + a_9 = \frac{81}{q^{90}} = \frac{81}{3^{90}} = 3^{-86}$$

۱۸۵۵- گزینه ۳ جمله‌های اول و دوم دنباله $a_n = 2 - 3n$ به ترتیب برابر

۱- و ۴- است. پس قدرنسبت آن برابر $3 - (-1) = 4$ است. اگر جمله اول را ۴ واحد کاهش دهیم، به ۵- تبدیل می‌شود و اگر قدرنسبت را ۶ واحد افزایش دهیم، به ۳ تبدیل می‌شود. پس دنباله حسابی جدید $1, -2, -5, \dots$ است که جمله عمومی آن به صورت $b_n = 3 - 5(n-1) = 3n - 8$ است. پس جمله بیست و یکم دنباله جدید $b_{21} = 3 \times 21 - 8 = 55$ است.

۱۸۵۶- گزینه ۴ چون $a_1 = \frac{1}{p}$ و $r = 1 \div \frac{1}{p} = p$ حاصل ضرب پانزده

جمله اول دنباله برابر است با

$$P = a_1 \times a_1 r \times \dots \times a_1 r^{14} = a_1^{15} \times r^{1+2+\dots+14} \\ = a_1^{15} r^{\frac{14 \times 15}{2}} = a_1^{15} r^{105} \\ = \left(\frac{1}{p}\right)^{15} p^{105} = \left(\frac{1}{p}\right)^{15} \times p^{105} = p^{90}$$

۱۸۵۷- گزینه ۴ می‌دانیم اگر دنباله‌ای هم حسابی و هم هندسی باشد

جمله‌های آن با هم برابرند، پس هر سه جمله باید برابر باشند. در نتیجه $y - 9 = 2x + 3 = 3x - 1$

بنابراین

$$x = 4, \quad y = 2.$$

پس

$$x + y = 24$$

۱۸۵۸- گزینه ۳ توجه کنید که اگر قدرنسبت دنباله r و جمله اول آن a_1

باشد، آن‌گاه

$$a_5 - a_3 = 96 \Rightarrow a_1 r^4 - a_1 r^2 = 96 \Rightarrow a_1 r^2 (r^2 - 1) = 96 \quad (1)$$

$$a_8 - a_6 = 12 \Rightarrow a_1 r^7 - a_1 r^5 = 12 \Rightarrow a_1 r^5 (r^2 - 1) = 12 \quad (2)$$

طرفین تساوی (۲) را بر طرفین تساوی (۱) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a_1 r^5 (r^2 - 1)}{a_1 r^2 (r^2 - 1)} = \frac{12}{96} \Rightarrow r^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

پس

$$a_1 r^2 (r^2 - 1) = 96 \Rightarrow a_1 \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4} - 1\right) = 96 \Rightarrow a_1 = -512$$

بنابراین

$$a_8 = a_1 r^7 = -512 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = -32$$

۱۸۵۹- گزینه ۳ چون تعداد جمله‌های هر دسته برابر شماره آن دسته

است، برای نوشتن ۲۹ دسته نخست از $1 + 2 + 3 + \dots + 29$ عدد استفاده شده است. چون $\frac{29 \times 30}{2} = 435$ پس برای نوشتن ۲۹ دسته

نخست، از نخستین ۴۳۵ عدد فرد استفاده شده است. پس جمله اول دسته سی‌ام، ۴۳۶امین عدد فرد و جمله آخر آن $(436 + 29)$ امین عدد فرد است. از

طرف دیگر، جمله عمومی عددهای فرد به صورت $a_n = 2n - 1$ است، پس

$$a_{435} + a_{436} = 2(465) - 1 + 2(436) - 1 = 2(465 + 436 - 1) = 2(900) = 1800$$

۱۸۴۸- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\begin{cases} a_3 - a_1 = a_1 q^2 - a_1 = a_1 (q^2 - 1) = 32 \\ a_4 - a_2 = a_1 q^3 - a_1 q = a_1 q (q^2 - 1) = 96 \end{cases} \Rightarrow q = 3$$

بنابراین $a_1 (3^2 - 1) = 32$. $a_1 = 4$ اکنون توجه کنید که

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{4(3^n - 1)}{2} = 2(3^n - 1) = 16$$

$$3^n - 1 = 8 \Rightarrow 3^n = 9 \Rightarrow n = 2$$

در نتیجه

۱۸۴۹- گزینه ۲ توجه کنید که

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1} = 3, \quad S_{3n} = \frac{a_1 (q^{3n} - 1)}{q - 1} = 39$$

در نتیجه

$$\frac{S_{3n}}{S_n} = \frac{1 + q^n + q^{2n}}{1} = \frac{13}{3} \Rightarrow q^{2n} + q^n - 12 = 0 \Rightarrow (q^n - 3)(q^n + 4) = 0$$

پس $q^n = -4$ یا $q^n = 3$ ، که چون جمله‌های دنباله مثبت‌اند، پس $q^n = 3$.

اکنون توجه کنید که

$$S_{fn} = \frac{a_1 (q^{fn} - 1)}{q - 1}, \quad \frac{S_{fn}}{S_n} = \frac{q^{fn} - 1}{q^n - 1} = q^{3n} + q^{2n} + q^n + 1$$

بنابراین $S_{fn} = S_n (q^{3n} + q^{2n} + q^n + 1) = 3(27 + 9 + 3 + 1) = 120$.

۱۸۵۰- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\frac{S_n}{a_{n+1} - a_1} = \frac{a_1 (q^n - 1)}{a_1 q^n - a_1} = \frac{1}{q - 1}$$

$$-1 \leq q \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow -2 \leq q - 1 \leq -\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq \frac{1}{q - 1} \leq -\frac{1}{2}$$

بنابراین مجموع بیشترین و کمترین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$-\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{7}{6}$$

۱۸۵۱- گزینه ۲ تعداد نقاط روی شکل (۱) برابر ۵ است و در هر مرحله ۴

نقطه به نقاط شکل قبل اضافه می‌شود. پس در مرحله n م به تعداد $(n-1) \times 4$

نقطه به ۵ نقطه شکل (۱) اضافه شده است: $4(n-1) + 5 = 4n + 1$ ، یعنی شکل n م $4n + 1$ نقطه دارد. پس شکل پانزدهم ۶۱ نقطه دارد.

۱۸۵۲- گزینه ۲ از شرط $a_n > 0$ مقادیری از n را پیدا می‌کنیم که به ازای

آن‌ها a_n مثبت است: $a_n > 0 \Rightarrow 95n - n^2 > 0 \Rightarrow n(95 - n) > 0$

چون $n > 0$ ، پس $95 - n > 0$ ، در نتیجه $n < 95$ ، یعنی $n \leq 94$. بنابراین ۹۴

جمله دنباله مثبت هستند.

۱۸۵۳- گزینه ۴ فرض کنید قدرنسبت این دنباله d باشد. بنابراین

$$a_5 = 2a_1 \Rightarrow a_1 + 4d = 2(a_1 + d) \Rightarrow a_1 + 4d = 0 \Rightarrow a_1 = -4d$$

۱۸۵۴- گزینه ۳ جمله وسط، واسطه حسابی دو جمله دیگر است:

$$\log_7 a + \log_7 (16a) = 2 \log_7 (3a + 4) \Rightarrow \log_7 (a(16a)) = \log_7 (3a + 4)^2$$

$$16a^2 = (3a + 4)^2 \Rightarrow 16a^2 = 9a^2 + 24a + 16$$

$$7a^2 - 24a - 16 = 0 \Rightarrow a = 4, a = -\frac{4}{7} \text{ (غ.ق.)}$$

۱۸۶۶- گزینه ۳) بنابر فرض‌های مسئله،

$$a_1 + a_p = 1 \Rightarrow a_1 + a_1 q^r = 1 \Rightarrow a_1(1 + q^r) = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{q^r + 1}$$

$$S_f = \frac{a_1(q^f - 1)}{q - 1} = \frac{q^f - 1}{(q^r + 1)(q - 1)} = \frac{(q^r + 1)(q - 1)(q + 1)}{(q^r + 1)(q - 1)} = q + 1 = 3$$

$$q = 2, a_1 = \frac{1}{5}$$

بنابراین

$$S_f = \frac{a_1(q^f - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{5}(2^6 - 1)}{2 - 1} = \frac{63}{5} = 12\frac{3}{5}$$

ریاضی - ۸۸

۱۸۶۷- گزینه ۲) بنابر فرض مسئله،

$$S_p = 3S_{1/2} \Rightarrow \frac{r}{2}(2a_1 + 19d) = 3 \times \frac{1}{2}(2a_1 + 19d)$$

$$20a_1 + 190d = 36a_1 + 198d \Rightarrow 16a_1 = -18d \Rightarrow d = -\frac{8}{9}a_1$$

از طرف دیگر،

$$a_p = 6 \Rightarrow a_1 + 2d = 6 \Rightarrow a_1 - \frac{16}{9}a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = -\frac{54}{7}, d = \frac{8}{7}$$

بنابراین

$$a_{10} = a_1 + 9d = -\frac{54}{7} + 9 \times \frac{8}{7} = \frac{36}{7}$$

ریاضی - ۹۰

۱۸۶۸- گزینه ۳) راه حل اول مجموع پنج جمله دوم برابر اختلاف مجموع

ده جمله اول و مجموع پنج جمله اول است. پس

$$S_5 = \frac{1}{3}(S_{10} - S_5) \Rightarrow \frac{1}{3}S_5 = \frac{1}{3}S_{10} \Rightarrow S_{10} = 4S_5$$

$$\frac{1}{2}(2a_1 + 9d) = 4 \times \frac{1}{2}(2a_1 + 4d) \Rightarrow 2a_1 + 9d = 4a_1 + 8d \Rightarrow d = 2a_1$$

$$\frac{a_p}{a_1} = \frac{a_1 + d}{a_1} = \frac{3a_1}{a_1} = 3 \text{ بنابراین}$$

راه حل دوم با توجه به فرض مسئله می‌توان نوشت

$$3(a_1 + a_p + \dots + a_5) = a_6 + a_7 + \dots + a_{10}$$

$$2(a_1 + a_p + \dots + a_5) = (a_6 - a_1) + (a_7 - a_2) + \dots + (a_{10} - a_5)$$

$$2\left(\frac{5}{2}(2a_1 + 4d)\right) = 5d + 5d + 5d + 5d + 5d$$

$$10a_1 + 20d = 25d \Rightarrow 5d = 10a_1 \Rightarrow d = 2a_1$$

خارج از کشور تجربی - ۹۱

$$\frac{a_p}{a_1} = \frac{a_1 + d}{a_1} = \frac{3a_1}{a_1} = 3 \text{ بنابراین}$$

۱۸۶۹- گزینه ۱) چون تعداد جمله‌های هر دسته برابر شماره آن دسته

است، برای نوشتن نوزده دسته نخست از $1 + 2 + 3 + \dots + 19$ عدد استفاده شده است. چون

پس برای نوشتن نوزده دسته نخست، از 190 عدد طبیعی نخست استفاده شده

است. در نتیجه، جمله نخست دسته بیستم برابر با 191 است. بنابراین

عددهای دسته بیستم، دنباله‌ای حسابی با جمله نخست 191 و قدرنسبت 1

تشکیل می‌دهند و تعداد آن‌ها 20 تا است. به این ترتیب مجموع آن‌ها برابر

است با $\frac{20}{2}(2 \times 191 + (20 - 1)) = 10 \times 401 = 4010$

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۱۸۶۰- گزینه ۴) اگر جمله اول دنباله را a_1 و قدرنسبت را q فرض کنیم، آن‌گاه

$$S_5 = \frac{a_1(q^5 - 1)}{q - 1} = 8, \quad S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = 264$$

$$\frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{264}{8} \Rightarrow \frac{q^{10} - 1}{q^5 - 1} = 33 \Rightarrow \frac{(q^5 - 1)(q^5 + 1)}{q^5 - 1} = 33$$

$$q^5 = 32 \Rightarrow q = 2$$

$$S_5 = \frac{a_1(q^5 - 1)}{q - 1} = 8 \Rightarrow \frac{a_1(32 - 1)}{2 - 1} = 8 \Rightarrow a_1 = \frac{8}{31}$$

بنابراین

$$در نتیجه \quad a_p = a_1 q^6 = \frac{8}{31} \times 2^6 = \frac{512}{31}$$

۱۸۶۱- گزینه ۴) با استفاده از رابطه $a_n = 2a_{n-1} + 1$ و جمله اول $a_1 = 1$ ،

جمله هشتم را محاسبه می‌کنیم:

$$a_2 = 2 \times 1 + 1 = 3, \quad a_3 = 2 \times 3 + 1 = 7, \quad a_4 = 2 \times 7 + 1 = 15$$

$$a_5 = 2 \times 15 + 1 = 31, \quad a_6 = 2 \times 31 + 1 = 63$$

$$a_7 = 2 \times 63 + 1 = 127, \quad a_8 = 2 \times 127 + 1 = 255$$

تجربی - ۹۵

۱۸۶۲- گزینه ۱) عدد $4\sqrt{2}$ واسطه هندسی 2^a و 2^b است، پس

$$(4\sqrt{2})^2 = 2^a \times 2^b \Rightarrow 2^5 = 2^{a+b} \Rightarrow a + b = 5$$

واسطه حسابی دو عدد a و b برابر $\frac{a+b}{2}$ ، یعنی $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ است. ریاضی - ۸۷

۱۸۶۳- گزینه ۳) طبق فرض،

$$\begin{cases} a_{12} - a_{10} = 5 \\ a_{12} + a_{10} = 25 \end{cases} \Rightarrow a_{12} = 15, a_{10} = 10 \Rightarrow d = \frac{a_{12} - a_{10}}{12 - 10} = \frac{5}{2}$$

از طرف دیگر،

$$d = \frac{a_{21} - a_{10}}{21 - 10} \Rightarrow a_{21} = a_{10} + 11d = 10 + 11\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{75}{2} = 37\frac{1}{2}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۴

۱۸۶۴- گزینه ۴) جملات را به صورت $a, a + 3d, a + 10d$ در نظر

می‌گیریم. در این صورت

$$(a + 3d)^2 = a(a + 10d) \Rightarrow a^2 + 9d^2 + 6ad = a^2 + 10ad$$

$$9d^2 = 4ad \Rightarrow d = \frac{4}{9}a$$

بنابراین جملات دنباله هندسی $a, \frac{4}{9}a, \frac{16}{9}a$ هستند و قدرنسبت این دنباله

$$\frac{\frac{16}{9}a}{\frac{4}{9}a} = \frac{4}{1} = 4 \text{ برابر است با}$$

تجربی - ۹۲

۱۸۶۵- گزینه ۱) جملات a_f, a_e و a_{12} از دنباله حسابی، دنباله هندسی

تشکیل می‌دهند، پس جمله ششم واسطه هندسی جملات چهارم و دوازدهم است:

$$a_6^2 = a_4 \times a_{12} \Rightarrow (a_1 + 5d)^2 = (a_1 + 3d)(a_1 + 11d)$$

$$a_1^2 + 10a_1d + 25d^2 = a_1^2 + 14a_1d + 33d^2$$

$$8a_1d = -8d^2 \Rightarrow a_1 = -d$$

$$\text{بنابراین} \quad r = \frac{a_f}{a_e} = \frac{a_1 + 5d}{a_1 + 3d} = \frac{-2d + 5d}{-2d + 3d} = 3$$

ریاضی - ۸۱

۱۸۷۵- گزینه ۲) فرض کنید t_p, t_v و t_q جملات دنباله حسابی و

a_p, a_v, a_q جملات متوالی دنباله هندسی باشند. در این صورت

$$a_p^2 = a_q a_v \Rightarrow t_p^2 = t_q t_v \Rightarrow (t_1 + 6d)^2 = (t_1 + 2d)(t_1 + 8d)$$

$$t_1^2 + 12t_1 d + 36d^2 = t_1^2 + 8dt_1 + 24d^2 + 16d^2$$

$$24d^2 + 20d^2 = 0 \Rightarrow 2d(t_1 + 10d) = 0 \xrightarrow{d \neq 0} t_1 + 10d = 0$$

تجربی - ۸۸

بنابراین جمله یازدهم دنباله حسابی برابر صفر است.

۱۸۷۶- گزینه ۴) بنابر فرض مسئله،

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{153}{136} \Rightarrow 136S_6 = 153S_3$$

$$136a_1 \left(\frac{q^6 - 1}{q - 1} \right) = 153a_1 \left(\frac{q^3 - 1}{q - 1} \right) \Rightarrow 136(q^3 - 1)(q^3 + 1) = 153(q^3 - 1)$$

$$136(q^3 + 1) = 153 \Rightarrow q^3 = \frac{153}{136} - 1 = \frac{17}{136} = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$a_8 = a_1 q^7 = \frac{1}{16} a_1 \Rightarrow a_1 = 16a_8$$

بنابراین

ریاضی - ۸۹

۱۸۷۷- گزینه ۱) راه حل اول به بیست جمله اول دنباله توجه کنید:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots, a_1 + 18d, a_1 + 19d$$

جملات ردیف فرد یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت $2d$ تشکیل

می دهند و جملات ردیف زوج یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 + d$ و

قدرنسبت $2d$ تشکیل می دهند. پس

$$\begin{cases} \text{فردها } S = \frac{1}{2} (a_1 + a_1 + 18d) = 135 \\ \text{زوجها } S = \frac{1}{2} (a_1 + d + a_1 + 19d) = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 18d = 270 \\ a_1 + 10d = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ d = \frac{3}{2} \end{cases}$$

راه حل دوم طبق فرض،

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + \dots + a_{19} = 150 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_{19} = 135 \end{cases}$$

اگر طرفین معادلات فوق را از هم کم کنیم، نتیجه می شود

$$(a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_{19} - a_{18}) = 15 \Rightarrow 10d = 15 \Rightarrow d = \frac{3}{2}$$

اگر طرفین معادلات فوق را با هم جمع کنیم، نتیجه می شود

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{19} = 285$$

$$\frac{20}{2} (2a_1 + 19d) = 285 \Rightarrow 10(2a_1 + \frac{57}{2}) = 285 \Rightarrow a_1 = 0$$

خارج از کشور تجربی - ۸۵

۱۸۷۸- گزینه ۳) چون تعداد جمله های هر دسته برابر شماره آن دسته

است، برای نوشتن ۲۹ دسته نخست از $1 + 2 + 3 + \dots + 29$ عدد استفاده شده

$$1 + 2 + 3 + \dots + 29 = \frac{29 \times 30}{2} = 435 \quad \text{است. چون}$$

پس برای نوشتن ۲۹ دسته نخست، از نخستین ۴۳۵ عدد فرد استفاده شده است. پس

جمله اول دسته سی ام، ۴۳۶ امین عدد فرد و جمله آخر آن $(436 + 29)$ امین عدد فرد

است. از طرف دیگر، جمله عمومی عددهای فرد به صورت $a_n = 2n - 1$ است، پس

$$a_{436} + a_{437} = 2(436) - 1 + 2(437) - 1 = 2(436 + 437 - 1) = 2(872) = 1744$$

تجربی - ۹۴

۱۸۷۰- گزینه ۳) صورت کسر مجموع جمله های دنباله ای هندسی با

جمله اول ۱ و قدرنسبت $-t$ و مخرج کسر مجموع جمله های دنباله ای هندسی

با جمله اول ۱ و قدرنسبت $-t^3$ است. بنابراین

$$1 - t + t^2 - t^3 + \dots + t^8 = \frac{a_1(q^9 - 1)}{q - 1} = \frac{1 - (-t)^9}{1 - (-t)} = \frac{1 + t^9}{1 + t}$$

$$1 - t^3 + t^6 = \frac{1 - (-t^3)^3}{1 + t^3} = \frac{1 + t^9}{1 + t^3}$$

در نتیجه

$$\frac{t^8 - t^7 + t^6 - \dots - t + 1}{t^6 - t^3 + 1} = \frac{1 + t^9}{1 + t} = \frac{1 + t^3}{1 + t} = \frac{(1 + t)(1 - t + t^2)}{1 + t} = 1 - t + t^2$$

پس حاصل عبارت مورد نظر به ازای $t = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ برابر است با

$$1 - \frac{1 + \sqrt{17}}{2} + \frac{1 + 2\sqrt{17} + 17}{4} = \frac{4 - 2 - 2\sqrt{17} + 18 + 2\sqrt{17}}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۱۸۷۱- گزینه ۴) در این دنباله، هر جمله از دو برابر جمله قبل، دو واحد

کمتر است، پس هشت جمله اول برابر است با

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 2 \times 3 - 2 = 4, \quad a_3 = 2 \times 4 - 2 = 6$$

$$a_4 = 2 \times 6 - 2 = 10, \quad a_5 = 2 \times 10 - 2 = 18, \quad a_6 = 2 \times 18 - 2 = 34$$

$$a_7 = 2 \times 34 - 2 = 66, \quad a_8 = 2 \times 66 - 2 = 130$$

خارج از کشور تجربی - ۹۵

بنابراین $a_8 - a_7 = 130 - 66 = 64$.

۱۸۷۲- گزینه ۴) شرط اینکه سه عدد a, b و c سه جمله متوالی یک دنباله

حسابی باشند این است که $2b = a + c$. بنابراین

$$2(3p + 4) = (2p + 3) + (5p - 1) \Rightarrow p = 6$$

$$d = 3p + 4 - 2p - 3 = p + 1 \xrightarrow{p=6} d = 7$$

ریاضی - ۸۴

۱۸۷۳- گزینه ۲) سه جمله را به صورت $\frac{a}{r}, a, ar$ فرض می کنیم، در

این صورت

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = 216 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$$

$$\frac{a}{r} + a + ar = 19 \Rightarrow \frac{6}{r} + 6 + 6r = 19 \Rightarrow 6r^2 - 13r + 6 = 0$$

$$(3r - 2)(2r - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{سه جمله متوالی } 9, 6, 4 \\ r = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{سه جمله متوالی } 4, 6, 9 \end{cases}$$

در هر دو صورت تفاضل بزرگ ترین و کوچک ترین جمله برابر ۵ است.

تجربی - ۹۰

۱۸۷۴- گزینه ۴) توجه کنید که

$$a_8^2 = a_1 a_{11} \Rightarrow (a_1 + 4d)^2 = a_1(a_1 + 10d)$$

$$a_1^2 + 8a_1 d + 16d^2 = a_1^2 + 10a_1 d \Rightarrow 16d^2 = 2a_1 d \Rightarrow a_1 = 8d$$

$$a_8 = a_1 + 4d = 12d, a_{11} = a_1 + 10d = 18d \Rightarrow r = \frac{a_{11}}{a_8} = \frac{18d}{12d} = \frac{3}{2}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۸۷۹- گزینه ۳

فرض می‌کنیم جمله‌های دنباله به صورت

 $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ باشند. در این صورت مجموع تمام جمله‌ها برابر است با

$$S_{2n} = \frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}$$

از طرف دیگر جمله‌های یارذیف فرد به صورت $a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}$ هستندکه دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q^2 و جمله اول a_1 است. بنابراین مجموع

$$\text{آنها برابر با } \frac{a_1(1-(q^2)^n)}{1-q^2} \text{ است. بنابراین}$$

$$\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q} = 3 \times \frac{a_1(1-q^{2n})}{(1-q)(1+q)} \Rightarrow \frac{3}{1+q} = 1 \Rightarrow q=2$$

ریاضی - ۹۴

۱۸۸۰- گزینه ۱

صورت کسر مجموع جمله‌های دنباله‌ای هندسی با

جمله اول ۱ و قدرنسبت t و مخرج کسر مجموع جمله‌های دنباله‌ای هندسی باجمله اول ۱ و قدرنسبت t^3 است. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{1 \times \frac{1-t^{12}}{1-t}}{1-t^3} = \frac{1-t^{12}}{1-t} = \frac{(1-t)(1+t+t^2)}{1-t} = 1+t+t^2$$

و حاصل آن به ازای $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ می‌شود

$$1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{4-2+2\sqrt{5}+6-2\sqrt{5}}{4} = 2$$

ریاضی - ۹۳



توجه کنید که **گزینه ۳** - ۱۸۸۸

$$x^{\frac{5}{2}} = 32 \Rightarrow (x^{\frac{5}{2}})^{\frac{2}{5}} = (32)^{\frac{2}{5}} \Rightarrow x = 2^2$$

بنابراین

$$x^{\frac{2}{3}} = (2^2)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} = 2^{1+\frac{1}{3}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{2}$$

ابتدا x, y, z را ساده‌تر می‌کنیم: **گزینه ۳** - ۱۸۸۹

$$x = a^{\frac{3}{4}}, \quad y = a^{\frac{4}{3}}, \quad z = a^{12} = a^{\frac{5}{6}}$$

از طرف دیگر، $\frac{4}{3} > \frac{5}{6} > \frac{3}{4}$ و چون $0 < a < 1$ ، پس

$$a^{\frac{4}{3}} < a^{\frac{5}{6}} < a^{\frac{3}{4}} \Rightarrow y < z < x$$

گزینه ۴ - ۱۸۹۰ راه حل اول اولاً واضح است که $\sqrt[4]{0} = 0$ و ریشه چهارم

عدد صفر در بازه مورد نظر قرار دارد. اکنون فرض می‌کنیم a عددی مثبت باشد که ریشه چهارم مثبت آن در بازه $(0, 4)$ قرار دارد. یعنی

$$0 < \sqrt[4]{a} < 4 \Rightarrow 0 < (\sqrt[4]{a})^4 < 4^4 \Rightarrow 0 < a < 256$$

همچنین فرض می‌کنیم b عددی مثبت باشد که ریشه چهارم منفی آن در بازه $(-3, 0)$ قرار دارد. یعنی

$$-3 < -\sqrt[4]{b} < 0 \Rightarrow 0 < \sqrt[4]{b} < 3 \Rightarrow 0 < (\sqrt[4]{b})^4 < 3^4 \Rightarrow 0 < b < 81$$

بنابراین a می‌تواند اعداد صحیح ۱ تا ۲۵۵ و b می‌تواند اعداد صحیح ۱ تا ۸۰ باشد. اگر عدد صفر را هم در نظر بگیریم، می‌توان گفت اعداد صحیح ۰، ۱، ۲، ... و ۲۵۵ حداقل یک ریشه چهارم در بازه $(-3, 4)$ دارند. تعداد این اعداد صحیح ۲۵۶ تاست.

راه حل دوم توجه کنید که

$$-3 < \sqrt[4]{x} < 4 \Rightarrow -\sqrt[4]{81} < \sqrt[4]{x} < \sqrt[4]{256} \Rightarrow -3 \leq x < 256$$

پس تعداد این اعداد صحیح ۲۵۶ تاست.

راه حل اول ابتدا توجه کنید که $x < 0$. **گزینه ۳** - ۱۸۹۱

$$\sqrt{-x^5} = \sqrt[4]{(-x)x^4} = \sqrt[4]{-x} \times \sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{-x} \times |x| = -x \sqrt[4]{-x}$$

راه حل دوم چون $x < 0$ ، حاصل عبارت مورد نظر را به ازای $x = -1$ می‌یابیم:

$$\sqrt[4]{-x^5} = \sqrt[4]{1} = 1$$

فقط مقدار گزینه (۳) به ازای $x = -1$ برابر ۱ است.

توجه کنید که **گزینه ۳** - ۱۸۹۲

$$\sqrt[4]{\sqrt[5]{81}} = \sqrt[4]{\sqrt[5]{3^4}} = \sqrt[4]{3^{\frac{4}{5}}} = \sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[4]{96} = \sqrt[4]{2^5 \times 3} = \sqrt[4]{2^4 \times 2 \times 3} = 2\sqrt[4]{6}$$

$$\frac{3}{\sqrt[4]{81}} = \frac{3}{\sqrt[4]{3^4}} \times \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{3 \times \sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3^5}} = \frac{3\sqrt[4]{3}}{3} = \sqrt[4]{3}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3} = -2\sqrt[4]{3}$.

گزینه ۲ - ۱۸۸۱ توجه کنید که اگر $0 < a < b$ ، آن‌گاه $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

بنابراین

$$5 < 9 \Rightarrow \sqrt{5} < \sqrt{9} \Rightarrow \sqrt{5} < 3 \Rightarrow \sqrt{5} - 3 < 0$$

در نتیجه $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} = |\sqrt{5}-3| = -(\sqrt{5}-3) = 3-\sqrt{5}$ از طرف

دیگر، $\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3} = \sqrt{3}-2$ همین‌طور

$$4 < 5 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{5} \Rightarrow 2 < \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{5}-2 > 0$$

بنابراین $\sqrt[4]{(\sqrt{5}-2)^4} = |\sqrt{5}-2| = \sqrt{5}-2$ به این ترتیب عبارت مورد نظر

برابر است با $3 - \sqrt{5} + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{5} - 2 = \sqrt{3} - 1$.

گزینه ۱ - ۱۸۸۲ توجه کنید که

$$\sqrt[4]{8\sqrt[4]{4}} = \sqrt[4]{2^3 \sqrt[4]{2^2}} = \sqrt[4]{2^3 \times 2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{2^7} = \sqrt[8]{128}$$

به کمک مخرج مشترک گیری عبارت ساده می‌شود:

$$\frac{\sqrt[4]{9}}{\sqrt[4]{27}} - \frac{\sqrt[4]{9}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{9 \times 3}} - \frac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{9 \times 27}} = \frac{\sqrt[4]{27} - \sqrt[4]{3^5}}{\sqrt[4]{27 \times 3}} = \frac{3-3}{\sqrt[4]{27 \times 3}} = 0$$

گزینه ۳ - ۱۸۸۴ صورت و مخرج کسر را به شکل اعداد توان‌دار با نمای

گویا می‌نویسیم:

$$3\sqrt[4]{2\sqrt[4]{3\sqrt[4]{2}}} = 3^1 \times 2^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{8}} = 3^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{8}}$$

$$2\sqrt[4]{3\sqrt[4]{2\sqrt[4]{3}}} = 2^1 \times 3^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{5}{4}} \times 3^{\frac{3}{8}}$$

$$A = \frac{3^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{3}{8}}}{2^{\frac{5}{4}} \times 3^{\frac{3}{8}}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5}{4}-\frac{3}{8}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{\left(\frac{3}{2}\right)^5}$$

گزینه ۳ - ۱۸۸۵ توجه کنید که

$$\sqrt{x\sqrt[3]{x}} \times \sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}} \times \sqrt[4]{x\sqrt[5]{x}} = x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{6}} \times x^{\frac{1}{12}} \times x^{\frac{1}{20}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}} = x^{\frac{17}{60}}$$

$$= x^{\frac{30+10+20+5+3}{60}} = x^{\frac{68}{60}} = x^{\frac{17}{15}} = x^{\frac{1}{60} \times 17} = x^{\frac{17}{60}}$$

گزینه ۱ - ۱۸۸۶ توجه کنید که

$$\sqrt[4]{9} \times \sqrt[4]{3} = 9^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{2}{4}} \times 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}$$

پس

$$\frac{5}{2n} = \frac{1}{2} \Rightarrow n = 5$$

در نتیجه $\sqrt[4]{27-n} = \sqrt[4]{27-5} = \sqrt[4]{22} = 2$.

گزینه ۴ - ۱۸۸۷ چون x عددی مثبت است، تساوی داده شده را به شکل

زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt[4]{x\sqrt{x}} = 3 \Rightarrow \sqrt[4]{x^2 \times x} = 3 \Rightarrow \sqrt[4]{x^3} = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 3$$

بنابراین $x = 9$ و در نتیجه

$$\sqrt{x\sqrt{x}} = \sqrt{9\sqrt{9}} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3} = 3\sqrt[4]{3^2} = 3\sqrt[4]{9}$$

۱۸۹۹- گزینه ۱) راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{b}\sqrt{a}=b^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\sqrt{a}\sqrt{b}\times\sqrt{b}\sqrt{a}&=a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{1}{2}})^2\times(b^{\frac{1}{2}})^2 \\ &=(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})^2=(27)^2=3^6=3^2\times3^2=3^2=\sqrt{3}\end{aligned}$$

راه حل دوم فرض کنید $a=1$ و $b=3$. در این صورت

$$\sqrt{a}\sqrt{b}\times\sqrt{b}\sqrt{a}=\sqrt{1}\sqrt{3}\times\sqrt{3}\sqrt{1}=3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{2}}=3^1=3$$

۱۹۰۰- گزینه ۳) راه حل اول چون $\sqrt[3]{a}>\sqrt{a}$ پس $a<1$ و در

نتیجه واضح است که $\sqrt{a}>\sqrt{a}$ و $\sqrt[3]{a}>\sqrt{a}$. همچنین از فرض $a<1$ نتیجه می‌شود $a^8>a^9$ و در نتیجه $\sqrt[3]{a^8}>\sqrt[3]{a^9}$ ، یعنی $\sqrt[3]{a^8}>\sqrt[3]{a^9}$.

ولی $\sqrt[3]{a^8}>\sqrt[3]{a^9}$ درست نیست، زیرا

$$a<1\Rightarrow a^8<a^9\Rightarrow\sqrt[3]{a^8}<\sqrt[3]{a^9}\Rightarrow\sqrt[3]{a^8}<\sqrt[3]{a^9}$$

راه حل دوم چون $\sqrt[3]{a}>\sqrt{a}$ پس $a^{\frac{1}{3}}>a^{\frac{1}{2}}$ و چون $\frac{1}{3}>\frac{1}{2}$ پس $a<1$.

بررسی گزینه‌ها به صورت زیر است:

$$\frac{1}{4}<1\Rightarrow a^{\frac{1}{4}}>a\Rightarrow\sqrt[4]{a}>a \quad \text{گزینه (۱)}$$

$$\frac{1}{4}<1\Rightarrow a^{\frac{1}{4}}>a\Rightarrow\sqrt{a}>a \quad \text{گزینه (۲)}$$

$$\frac{3}{2}>\frac{2}{3}\Rightarrow a^{\frac{3}{2}}<a^{\frac{2}{3}}\Rightarrow\sqrt{a^3}<\sqrt[3]{a^2} \quad \text{گزینه (۳)}$$

$$\frac{2}{3}<\frac{3}{4}\Rightarrow a^{\frac{2}{3}}>a^{\frac{3}{4}}\Rightarrow\sqrt[3]{a^2}>\sqrt[4]{a^3} \quad \text{گزینه (۴)}$$

بنابراین گزینه (۳) نادرست است.

۱۹۰۱- گزینه ۴) طرفین رابطه $x+y=4$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^2+y^2+2xy=16$$

چون $xy=2$ پس

$$x^2+y^2+4=16\Rightarrow x^2+y^2=12$$

حال، طرفین رابطه اخیر را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^4+y^4+2x^2y^2=144\Rightarrow x^4+y^4+2(xy)^2=144$$

$$x^4+y^4+2\times4=144\Rightarrow x^4+y^4=136$$

۱۹۰۲- گزینه ۳) اعداد $14+6\sqrt{5}$ و $14-6\sqrt{5}$ مربع کامل هستند.

زیرا $(14+6\sqrt{5})^2=9+5+2\times3\sqrt{5}=3^2+\sqrt{5}^2+2(3\sqrt{5})=(3+\sqrt{5})^2$

به همین ترتیب $14-6\sqrt{5}=(3-\sqrt{5})^2$ بنابراین

$$\sqrt{14+6\sqrt{5}}-\sqrt{14-6\sqrt{5}}=3+\sqrt{5}-(3-\sqrt{5})=2\sqrt{5}$$

۱۹۰۳- گزینه ۲) توجه کنید که بنابر اتحاد مزدوج،

$$(\sqrt{x+11}-\sqrt{x+3})(\sqrt{x+11}+\sqrt{x+3})=(x+11)-(x+3)=8$$

بنابراین

$$\sqrt{2}(\sqrt{x+11}+\sqrt{x+3})=8\Rightarrow\sqrt{x+11}+\sqrt{x+3}=4\sqrt{2}$$

۱۸۹۳- گزینه ۲) راه حل اول فرض کنید $\sqrt[6]{2}=a$ ، در این صورت

$$\sqrt[6]{2}=a\Rightarrow 2^{\frac{1}{6}}=a\Rightarrow(2^{\frac{1}{6}})^3=a^3\Rightarrow 2^{\frac{1}{2}}=a^3\Rightarrow\sqrt{2}=a^3$$

9

$$\sqrt[6]{2}=a\Rightarrow 2^{\frac{1}{6}}=a\Rightarrow(2^{\frac{1}{6}})^2=a^2\Rightarrow 2^{\frac{1}{3}}=a^2\Rightarrow\sqrt[3]{2}=a^2$$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[6]{2}}=\frac{a^3+a^2}{1+a}=\frac{a^2(a+1)}{1+a}=a^2=\sqrt[3]{2}$$

بنابراین

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[6]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt[6]{2}+1)}{1+\sqrt[6]{2}}=\sqrt[3]{2}$$

۱۸۹۴- گزینه ۴) راه حل اول توجه کنید که

$$x(\sqrt{\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5}})=\sqrt{x^4(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5})}=\sqrt{\frac{x^4}{x^4}-\frac{x^4}{x^5}}=\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

در نتیجه $\sqrt{\frac{x-1}{x}}=\frac{1}{x}$ پس

$$\frac{1}{x}-1=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1+1}{x}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{2}{x}\Rightarrow x=\frac{128}{129}$$

راه حل دوم از تساوی داده شده نتیجه می‌شود

$$x\sqrt{\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5}}=\frac{1}{x}\Rightarrow x(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5})=\frac{1}{x^2}\Rightarrow\frac{x}{x^4}-\frac{x}{x^5}=\frac{1}{x^2}\Rightarrow\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}=\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{x}-1=(\frac{1}{x})^2\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1+1}{x}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{2}{x}\Rightarrow x=\frac{128}{129}$$

۱۸۹۵- گزینه ۳) ابتدا توجه کنید که x مثبت است. می‌توان نوشت

$$\sqrt[3]{\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\sqrt{3}\sqrt{x}}\Rightarrow\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{\sqrt{3}\sqrt{x}}\Rightarrow\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{\sqrt{3}\sqrt{x}}\Rightarrow(\sqrt[3]{3})^3=(\sqrt[3]{\sqrt{3}\sqrt{x}})^3$$

$$3^3=(9x)^2\Rightarrow 3\sqrt{3}=9x\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۸۹۶- گزینه ۴) ابتدا توجه کنید که $x>0$. می‌توان نوشت

$$\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x^3\sqrt{x^2}}=\sqrt[4]{x^3x}=\sqrt[4]{x^4}=x$$

$$\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{x^{12}}\times\frac{1}{x^{24}}=\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{x^{36}}\times(\frac{1}{x^2})^{24}\Rightarrow\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{x^{36}}\times\frac{1}{x^{48}}=\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{x^{84}}=\frac{1}{x^{82}}$$

$$\frac{9}{x^{24}}=\frac{9}{x^{12}}\Rightarrow\frac{1}{x^{12}}=\frac{1}{x^{12}}\Rightarrow(x^2)^{12}=3^{12}\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=9$$

۱۸۹۷- گزینه ۱) توجه کنید که

$$\sqrt[6]{9^{3x-6}}=\sqrt[6]{(3^2)^3(x-2)}=3^{\frac{6(x-2)}{6}}=3^{x-2}$$

$$\sqrt[3]{27^{4x-2}}=\sqrt[3]{3^{12(x-2)}}=3^{\frac{12(x-2)}{3}}=3^{4x-8}$$

بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$\frac{3^{x-2}}{3^{4x-8}}=27\Rightarrow 3^{x-2-(4x-8)}=3^3\Rightarrow 3^{-3x+6}=3^3\Rightarrow -3x+6=3\Rightarrow x=-1$$

۱۸۹۸- گزینه ۲) ابتدا توجه کنید که $a>0$. در تساوی داده شده اعداد را

با نمای گویا می‌نویسیم و ساده می‌کنیم:

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{5}}\times a^{\frac{1}{20}}}=\frac{a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}}}=\frac{a^1}{a^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}\Rightarrow(a^{\frac{1}{2}})^2=a^1$$

بنابراین $a=9$.

۱۹۱۰- گزینه ۳ به کمک اتحاد جمله مشترک عبارت را به صورت

زیر می نویسیم:

$$A = x(x-1)(x+1)(x-2)+1 = (x^2-x)(x^2-x-2)+1 \\ = (x^2-x)((x^2-x)-2)+1 = (x^2-x)^2 - 2(x^2-x) + 1$$

اکنون به کمک اتحاد مربع مجموع دو جمله عبارت را به صورت زیر می نویسیم:

$$A = (x^2 - x - 1)^2$$

۱۹۱۱- گزینه ۱ توجه کنید که

$$x^2 + \frac{4}{9x^2} = (x + \frac{2}{3x})^2 - 2(x)(\frac{2}{3x}) \\ = (x + \frac{2}{3x})^2 - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$3x^2 + \frac{4}{3x^2} = 3(x^2 + \frac{4}{9x^2}) = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

۱۹۱۲- گزینه ۳ توجه کنید که $\frac{1}{a} = 2 + |a| > 0$ ، در نتیجه $a > 0$.

بنابراین، فرض مسئله به شکل $\frac{1}{a} - a = 2$ درمی آید. اکنون توجه کنید که

$$a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} + |a| = \frac{1}{a} + a > 0. \text{ از طرف دیگر، } (a + \frac{1}{a})^2 - (a - \frac{1}{a})^2 = 4$$

$$(a + \frac{1}{a})^2 = 4 + 4 = 8 \xrightarrow{a + \frac{1}{a} > 0} a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{2}$$

۱۹۱۳- گزینه ۱ توجه کنید که $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$. بنابراین

$$(\sqrt{2}-1)(3-2\sqrt{2}) = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)^2 = (\sqrt{2}-1)^3$$

و در نتیجه

$$\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)(3-2\sqrt{2})} = \sqrt{2}-1$$

۱۹۱۴- گزینه ۲ فرض کنید $A = (\frac{1}{3^8} + 1)(\frac{1}{3^4} + 1)(\frac{1}{3^2} + 1)$

دو طرف این تساوی را در $3^8 - 1$ ، که همان a است، ضرب می کنیم:

$$(\frac{1}{3^8} - 1)A = (\frac{1}{3^8} - 1)(\frac{1}{3^8} + 1)(\frac{1}{3^4} + 1)(\frac{1}{3^2} + 1)$$

$$= ((\frac{1}{3^8})^2 - 1)(\frac{1}{3^4} + 1)(\frac{1}{3^2} + 1) = (\frac{1}{3^4} - 1)(\frac{1}{3^4} + 1)(\frac{1}{3^2} + 1)$$

$$= (\frac{1}{3^2} - 1)(\frac{1}{3^2} + 1) = 3 - 1 = 2$$

$$A = \frac{2}{\frac{1}{3^8} - 1} = \frac{2}{3^8 - 1}$$

۱۹۱۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac$$

بنابراین

$$10^2 = 66 - 2(ab+bc-ca) \Rightarrow 34 = -2(ab+bc-ca)$$

$$ab+bc-ca = -17$$

۱۹۱۶- گزینه ۴ بنابر اتحاد مکعب مجموع دو جمله،

$$(a-b)^3 - a^3 + b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a^3 + b^3$$

$$= -3ab(a-b) = -3ab(\frac{3}{ab}) = -9$$

۱۹۰۴- گزینه ۱ ابتدا عبارت را به صورت $\frac{\sqrt{\sqrt{24}-4}}{\sqrt{\sqrt{24}+4}} - \frac{\sqrt{\sqrt{24}+4}}{\sqrt{\sqrt{24}-4}}$

می نویسیم. اکنون با مخرج مشترک گیری و استفاده از اتحاد مزدوج نتیجه می شود که عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(\sqrt{24}-4) - (\sqrt{24}+4)}{\sqrt{\sqrt{24}+4}\sqrt{\sqrt{24}-4}} = \frac{-8}{\sqrt{(\sqrt{24})^2 - 4^2}} = \frac{-8}{\sqrt{8}} = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$$

۱۹۰۵- گزینه ۴ به کمک اتحاد مربع مجموع سه جمله عبارت را ساده می کنیم:

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

بنابراین

$$A = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc - 3a^2 - 3b^2 - 3c^2$$

$$+ 6ab - 6ac + 6bc + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$$

$$= 8ab - 8ac + 4bc = 4(2ab - 2ac + bc)$$

۱۹۰۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$(x^2 - 2x)^3 - 2x^4 = x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 8x^3 - 2x^4 \\ = x^6 - 6x^5 + 10x^4 - 8x^3$$

بنابراین ضریب x^4 برابر ۱۰ است.

۱۹۰۷- گزینه ۲ اگر دو طرف تساوی $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{4}$ را به توان سه

برسانیم، از اتحاد مکعب تفاضل دو جمله نتیجه می شود

$$a - b - 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) = 4 \Rightarrow a - b - 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{4}) = 4$$

$$a - b - 3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4} = 4 \Rightarrow a - b - 3(2) = 4 \Rightarrow a - b = 10$$

۱۹۰۸- گزینه ۴ راه حل اول بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} = (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2}) = 4(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2}) \quad (1)$$

از طرف دیگر، $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})^2 + \frac{2}{ab} = 4^2 + \frac{2}{3}$. بنابراین از تساوی (۱)

نتیجه می شود

$$\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} = 4(16 + \frac{2}{3}) = 68$$

راه حل دوم توجه کنید که اگر طرفین رابطه $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 4$ را به توان سه برسانیم.

$$(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})^3 = 4^3 \Rightarrow \frac{1}{a^3} - \frac{3}{a^2b} + \frac{3}{ab^2} - \frac{1}{b^3} = 64$$

$$\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} - \frac{3}{ab}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) = 64$$

$$ab = 3, \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 4 \Rightarrow \frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} = 64 + \frac{3}{3} \times 4 = 68$$

۱۹۰۹- گزینه ۴ اگر از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنیم، عبارت مورد نظر

برابر است با

$$\frac{5}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3}^2 - \sqrt{3} \times \sqrt{2} + \sqrt{2}^2)} = \frac{5}{\sqrt{3}^3 + \sqrt{2}^3} = \frac{5}{3+2} = 1$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$a = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1$$

$$b = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$$

$$\text{پس } (a-b)^6 = (\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1)^6 = (-2)^6 = 64$$

۱۹۲۴- گزینه ۳ طرفین تساوی‌های داده شده را در هم ضرب می‌کنیم

$$(\sqrt{x-a} + \sqrt{x})(\sqrt{x-a} - \sqrt{x}) = a+1$$

$$x-a-x = a+1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

۱۹۲۵- گزینه ۴ توجه کنید که

$$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(bc-ab-ac)$$

$$\text{پس } a-b-c = \pm 6. \text{ بنابراین } (a-b-c)^2 = 28+2(4) = 36$$

۱۹۲۶- گزینه ۴ توجه کنید که $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

دو طرف تساوی داده شده را به توان سه می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} x^3 &= (\sqrt[3]{\sqrt{3}-2})^3 + (\sqrt[3]{\sqrt{3}+2})^3 \\ &+ 3\sqrt[3]{\sqrt{3}-2} \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} (\sqrt[3]{\sqrt{3}-2} + \sqrt[3]{\sqrt{3}+2}) \\ &= \sqrt{3}-2 + \sqrt{3}+2 + 3\sqrt[3]{\sqrt{3}-2} \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} (x) = 2\sqrt{3}-3x \end{aligned}$$

$$\text{بنابراین } x^3 + 3x = 2\sqrt{3}$$

۱۹۲۷- گزینه ۲ اگر تساوی دوم را یک بار با تساوی اول جمع و بار دیگر

از آن کم کنیم، به دست می‌آید

$$a^3 + 3ab^2 + b^3 + 3a^2b = 125 \Rightarrow (a+b)^3 = 125 \Rightarrow a+b=5$$

$$a^3 + 3ab^2 - b^3 - 3a^2b = 27 \Rightarrow (a-b)^3 = 27 \Rightarrow a-b=3$$

$$\text{بنابراین } \frac{a+b}{a-b} = \frac{5}{3}$$

۱۹۲۸- گزینه ۳ بنابر فرض،

$$\frac{a-1}{\sqrt{a}} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{2}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید

$$a + \frac{1}{a} - 2 = 2 \Rightarrow a + \frac{1}{a} = 4$$

و اگر دو طرف این تساوی را به توان سه برسانیم، به دست می‌آید

$$a^3 + \frac{1}{a^3} + 3a + \frac{3}{a} = 64$$

$$\text{به این ترتیب } a^3 + \frac{1}{a^3} = 64 - 3(4) = 52$$

۱۹۲۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$a = \sqrt{2 \times 9} + \sqrt{2 \times 15} + \sqrt{2 \times 25} = \sqrt{2}(\sqrt{9} + \sqrt{15} + \sqrt{25})$$

$$= \sqrt{2}((\sqrt{3})^2 + \sqrt{3} \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2)$$

در نتیجه، از اتحاد چاق و لاغر نتیجه می‌شود:

$$ab = (\sqrt{3} - \sqrt{5})((\sqrt{3})^2 + \sqrt{3}\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2)(\sqrt{2})$$

$$= ((\sqrt{3})^3 - (\sqrt{5})^3)(\sqrt{2}) = (3-5)\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

۱۹۱۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$a^3 + b^3 = (a+b)((a+b)^2 - 3ab)$$

از طرف دیگر،

$$a+b = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{3}}{3-2} = 2\sqrt{3}$$

$$ab = \frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{1}{3-2} = 1$$

$$\text{بنابراین } a^3 + b^3 = 2\sqrt{3}(4 \times 3 - 3) = 18\sqrt{3}$$

۱۹۱۸- گزینه ۲ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \Rightarrow 25 = 17 - 2ab \Rightarrow ab = -4$$

بنابراین، طبق اتحاد چاق و لاغر،

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab) = 5(17-4) = 65$$

راه حل دوم توجه کنید که $a=4$ و $b=-1$ در تساوی‌های داده شده صدق

می‌کنند، در این صورت $a^3 - b^3 = 65$

۱۹۱۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 7 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = 7 \xrightarrow{ab=1} a^2 + b^2 = 7$$

از طرف دیگر،

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 7+2=9$$

چون a و b عددهایی منفی‌اند، پس $a+b$ نیز منفی است، در نتیجه

$$a+b = -3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) = (-3)(7-1) = -18$$

۱۹۲۰- گزینه ۲ توجه کنید که

$$(a-1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(a^{10} + a^5 + 1) = (a^5 - 1)(a^{10} + a^5 + 1)$$

$$= (a^5 - 1)((a^5)^2 + a^5 \times 1 + 1) = (a^5)^3 - 1 = a^{15} - 1$$

$$= (\sqrt[5]{3})^{15} - 1 = 3^3 - 1 = 26$$

۱۹۲۱- گزینه ۴ می‌توان نوشت

$$\frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2 + 2 \times \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 8^2 + 2 = 66$$

۱۹۲۲- گزینه ۳ ابتدا دو طرف تساوی داده شده را با ۱ جمع می‌کنیم:

$$a + \frac{1}{a+1} = 4 \Rightarrow a + 1 + \frac{1}{a+1} = 5$$

اکنون دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$(a+1+\frac{1}{a+1})^2 = 5^2 \Rightarrow (a+1)^2 + \frac{1}{(a+1)^2} + 2(a+1) \times \frac{1}{a+1} = 25$$

$$(a+1)^2 + \frac{1}{(a+1)^2} + 2 = 25 \Rightarrow (a+1)^2 + \frac{1}{(a+1)^2} = 25-2=23$$

۱۹۲۳- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا مقدار $(a-b)^2$ را حساب می‌کنیم:

$$(a-b)^2 = (\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}})^2$$

$$= 3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}-2\sqrt{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} = 6-2=4$$

بنابراین

$$(a-b)^6 = ((a-b)^2)^3 = 4^3 = 64$$

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$$

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$$

$$\sqrt{2}\sqrt{2}=\sqrt{4}=\sqrt{2}$$

$$\text{پس } (\sqrt{3+\sqrt{8}}+\sqrt{3-\sqrt{8}})\sqrt{2}\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1)\sqrt{2}=4$$

۱۹۳۵- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

از طرف دیگر،

$$a+b+c=6abc \Rightarrow \frac{a+b+c}{abc}=\frac{6}{1} \Rightarrow \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{6}{abc}$$

$$\text{بنابراین } \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=\frac{6}{abc} \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{6}{abc}-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

۱۹۳۶- گزینه ۴ ابتدا دو طرف تساوی را به توان سه می‌رسانیم و از

اتحاد مکعب تفاضل دو جمله استفاده می‌کنیم:

$$1=(\sqrt[3]{a+5}-\sqrt[3]{a-5})^3=a+5-(a-5)-3\sqrt[3]{a^2-25}(\sqrt[3]{a+5}+\sqrt[3]{a-5})$$

$$\text{در نتیجه } \sqrt[3]{a^2-25}=3 \Rightarrow a^2-25=27$$

۱۹۳۷- گزینه ۲ ابتدا به کمک اتحاد $a^2+\frac{1}{a^2}-2=(a-\frac{1}{a})^2$ مقدار

$a-\frac{1}{a}$ را حساب می‌کنیم:

$$(a-\frac{1}{a})^2=18-2=16 \Rightarrow a-\frac{1}{a}=\pm 4$$

از $a < 1$ نتیجه می‌شود $a < \frac{1}{a}$. بنابراین $a-\frac{1}{a}=-4$ درست است. اکنون

با استفاده از اتحاد $(a-\frac{1}{a})^3=a^3-\frac{1}{a^3}-3(a-\frac{1}{a})$ مقدار $a^3-\frac{1}{a^3}$ را

حساب می‌کنیم:

$$(-4)^3=a^3-\frac{1}{a^3}-3(-4) \Rightarrow a^3-\frac{1}{a^3}=-76$$

۱۹۳۸- گزینه ۳ طبق اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3})\underbrace{((\sqrt[3]{5})^2-\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{5}+(\sqrt[3]{3})^2)}_a=(\sqrt[3]{5})^3+(\sqrt[3]{3})^3=5+3=8$$

$$\text{بنابراین } \sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}=\frac{8}{a}$$

۱۹۳۹- گزینه ۱ توجه کنید که

$$(a^2-2ab+b^2)(a^2+ab+b^2)^2=(a-b)^2(a^2+ab+b^2)^2$$

$$=((a-b)(a^2+ab+b^2))^2=(a^3-b^3)^2$$

اگر تساوی‌های داده شده را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید

$$5a^3-5b^3=15 \Rightarrow a^3-b^3=3$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر ۹ است.

۱۹۳۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$A=(x-2y)(x^5+2x^4y+4x^3y^2+8x^2y^3+16xy^4+y^5)$$

$$=(x-2y)(x^5+x^3(2y)+x^2(2y)^2+x(2y)^3+(2y)^4)$$

$$=x^5-(2y)^5=x^5-32y^5$$

بنابراین به ازای $x=2\sqrt[5]{4}$ و $y=\sqrt[5]{4}$ مقدار A برابر است با

$$A=(2\sqrt[5]{4})^5-32(\sqrt[5]{4})^5=32\times 2-32\times 4=-64$$

۱۹۳۱- گزینه ۲ مقدار عبارت $\frac{a+b}{a-b}$ مثبت است، بنابراین این عبارت را

می‌توان به صورت $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ نوشت. به این ترتیب

$$\frac{a+b}{a-b}=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab}}=\sqrt{\frac{8ab+2ab}{8ab-2ab}}=\sqrt{\frac{10ab}{6ab}}=\sqrt{\frac{5}{3}}$$

۱۹۳۲- گزینه ۱ راه حل اول با توجه به اینکه $x \neq 0$ ، دو طرف تساوی

داده شده را معکوس می‌کنیم و مقدار $x+\frac{1}{x}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x^2+1}{x}=4 \Rightarrow \frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}=4 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=4$$

برای محاسبه مقدار $\frac{x^2}{x^4+1}$ ، ابتدا مقدار معکوس آن را حساب می‌کنیم:

$$\frac{x^2+1}{x^2}=\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=4^2-2=14$$

$$\text{بنابراین } \frac{x^2}{x^4+1}=\frac{1}{14}$$

راه حل دوم از تساوی $\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{4}$ نتیجه می‌شود

$$x^2+1=4x \Rightarrow x^2=4x-1$$

دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم: $x^4=16x^2-8x+1$. به جای x^2 قرار می‌دهیم $4x-1$:

$$x^4=16(4x-1)-8x+1=64x-16-8x+1=56x-15$$

$$\text{بنابراین } \frac{x^2}{x^4+1}=\frac{4x-1}{56x-15}=\frac{4x-1}{14(4x-1)}=\frac{1}{14}$$

۱۹۳۳- گزینه ۴ می‌توان نوشت

$$\sqrt{\sqrt{5}+2}\times\sqrt{\sqrt{5}-2}\times\sqrt{\sqrt{5}-2}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{5}+2)^3}\times\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}\times\sqrt{\sqrt{5}-2}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{5}+2)^3(\sqrt{5}-2)^2(\sqrt{5}-2)}=\sqrt{(\sqrt{5}+2)^3(\sqrt{5}-2)^3}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-2^2}=\sqrt{5-4}=1$$

۱۹۳۴- گزینه ۳ راه حل اول فرض کنید

$$\sqrt{3+\sqrt{8}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}=a$$

طرفین این تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$a^2=3+\sqrt{8}+3-\sqrt{8}+2\sqrt{(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8})}=6+2\sqrt{9-8}=8$$

بنابراین $a=\sqrt{8}$. از طرف دیگر، می‌دانیم

$$\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{2}$$

پس مقدار عبارت داده شده برابر $\sqrt{8}\times\sqrt[3]{2}$ یا همان ۴ است.

۱۹۴۶- گزینه ۱ صورت و مخرج کسر دوم را تجزیه می‌کنیم:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$2x^2 + 3x - 5 = 2x^2 + 5x - 2x - 5 = x(2x+5) - (2x+5) = (2x+5)(x-1)$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x(2x+5)} \times \frac{(2x+5)(x-1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{x}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{1}{x}$

۱۹۴۷- گزینه ۱ به کمک مخرج مشترک گیری عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^3+x} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{x^2+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x}$$

۱۹۴۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\frac{a^6 - a^4 + a^2 - 1}{-a^2 + a^4} = \frac{a^4(a - \frac{1}{a}) + a(a - \frac{1}{a})}{a^3(a - \frac{1}{a})} = \frac{a^5 + a}{a^3} = \frac{a^2 + \frac{1}{a^2}}{a^2} = \frac{a^2 + 1}{a^2}$$

$$= a^2 + \frac{1}{a^2} = (a - \frac{1}{a})^2 + 2 = 3^2 + 2 = 11$$

۱۹۴۹- گزینه ۲ ابتدا صورت و مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$a^6 - a^4 - a^2 + 1 = a^4(a^2 - 1) - (a^2 - 1) = (a^2 - 1)(a^4 - 1)$$

$$a^2 - a^2 - a + 1 = a^2(a - 1) - (a - 1) = (a - 1)(a^2 - 1)$$

$$\frac{(a^4 - 1)(a^2 - 1)}{(a - 1)(a^2 - 1)} = \frac{a^4 - 1}{a - 1}$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{a^4 - 1}{a - 1}$ چون

$$a^4 = (\sqrt[4]{a})^4 = 4$$

پس عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{4-1}{\sqrt[4]{4}-1} = \frac{3}{\sqrt[4]{4}-1} = \frac{3}{\sqrt[4]{2}-1} \times \frac{\sqrt[4]{2}+1}{\sqrt[4]{2}+1} = 3\sqrt[4]{2}+3$$

۱۹۵۰- گزینه ۲ فرض می‌کنیم $A = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$. در این صورت، بنابر

اتحاد مکعب تفاضل دو جمله،

$$A^3 = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^3 = a - b - 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})$$

$$= 76 - 3\sqrt[3]{ab}(A) = 76 - 3A$$

بنابراین

$$A^3 + 3A - 76 = 0 \Rightarrow A^3 - 64 - 12 + 3A = 0 \Rightarrow A^3 - 4^3 + 3(A - 4) = 0$$

$$(A - 4)(A^2 + 4A + 16) + 3(A - 4) = 0 \Rightarrow (A - 4)(A^2 + 4A + 19) = 0$$

چون $A = 4$ در نتیجه $A - 4 = 0$ پس $A^2 + 4A + 19 = (A + 2)^2 + 15 \neq 0$

۱۹۵۱- گزینه ۳ عبارت را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$2a^2 - 3ab - 2b^2 = (2a^2 - 4ab) + (ab - 2b^2) = 2a(a - 2b) + b(a - 2b) = (a - 2b)(2a + b)$$

بنابراین در تجزیه عبارت، عامل $a - 2b$ وجود دارد.

۱۹۵۲- گزینه ۲ راه حل اول فرض کنید $x^2 - x = A$. در این صورت

$$(x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24 = A^2 - 14A + 24 = (A - 2)(A - 12)$$

اکنون توجه کنید که

$$A - 2 = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$$

$$A - 12 = x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$$

۱۹۴۰- گزینه ۲ با توجه به اینکه $x \neq \pm 1$ ، دو طرف معادله داده شده را

در $x^2 - 1$ ضرب می‌کنیم و نتیجه می‌شود

$$(x^2 - 1)(1 + x + \dots + x^5) = x^6 + x^5 - x^2 + 1$$

$$(x + 1)(x - 1)(1 + x + \dots + x^5) = x^6 + x^5 - x^2 + 1$$

$$(x + 1)(x^6 - 1) = x^6 + x^5 - x^2 + 1$$

$$x^5 + x^6 - x - 1 = x^6 + x^5 - x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -1 \text{ (غ.ق.ی.)}$$

پس معادله مورد نظر فقط یک جواب دارد.

۱۹۴۱- گزینه ۲ راه حل اول عبارت مورد نظر را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$6x^2 + 7x - 3 = 6x^2 - 2x + 9x - 3 = 2x(3x - 1) + 3(3x - 1) = (3x - 1)(2x + 3)$$

پس عامل $3x - 1$ در تجزیه عبارت وجود دارد.

راه حل دوم عبارت مورد نظر را A می‌نامیم و آن را به کمک اتحاد جمله مشترک به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$A = 6x^2 + 7x - 3 \Rightarrow 6A = 36x^2 + 42x - 18 = (6x - 2)(6x + 9) = 2 \times 3(3x - 1)(2x + 3)$$

بنابراین $A = (3x - 1)(2x + 3)$ و عامل $3x - 1$ در تجزیه وجود دارد.

۱۹۴۲- گزینه ۱ توجه کنید که

$$x^2 - 2x + 4y - y^2 - 3 = x^2 - 2x + 1 - (y^2 - 4y + 4) = (x - 1)^2 - (y - 2)^2 = (x - 1 - (y - 2))(x - 1 + (y - 2)) = (x - y + 1)(x + y - 3)$$

بنابراین $x - y + 1$ عاملی از عبارت است.

۱۹۴۳- گزینه ۲ توجه کنید که

$$x^4 + 16x^2 + 100 = (x^4 + 20x^2 + 100) - 4x^2 = (x^2 + 10)^2 - 4x^2$$

$$= (x^2 + 10 - 2x)(x^2 + 10 + 2x)$$

بنابراین $x^2 - 2x + 10$ عامل $x^4 + 16x^2 + 100$ است.

۱۹۴۴- گزینه ۳ راه حل اول توجه کنید که

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^3 + 1) + 2x^2 + 2x$$

$$= (x + 1)(x^2 - x + 1) + 2x(x + 1)$$

$$= (x + 1)(x^2 - x + 1 + 2x) = (x + 1)(x^2 + x + 1)$$

بنابراین $x^2 + x + 1$ عامل $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ است.

راه حل دوم توجه کنید که

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^3 + x^2) + (x^2 + 2x + 1)$$

$$= x^2(x + 1) + (x + 1)^2 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$$

بنابراین $x^2 + x + 1$ عامل $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ است.

۱۹۴۵- گزینه ۳ ابتدا به کمک اتحاد مربع مجموع دو جمله، عبارت را

به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A = x^4 + y^4 + x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$$

اکنون به کمک اتحاد مزدوج، عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$A = (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)$$

بنابراین در تجزیه عبارت، عامل $x^2 + y^2 - xy$ وجود دارد.

۱۹۵۸- گزینه ۱ به کمک مخرج مشترک گیری عبارت را ساده می کنیم:

$$\frac{2}{\sqrt{x}-2} - \frac{2}{\sqrt{x}+2} - \frac{2x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{2(\sqrt{x}+2) - 2(\sqrt{x}-2) - 2x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{4 - 2x}{x-4} = -\frac{2(x-4)}{x-4} = -2$$

۱۹۵۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{a}{b^2} - \frac{b}{a^2} = \frac{a^3 - b^3}{a^2 b^2}, \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 = \frac{a^2 + b^2 + ab}{ab}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 b^2} \div \frac{a^2 + b^2 + ab}{ab} = \frac{a^3 - b^3}{(a^2 + b^2 + ab)ab} = \frac{(a-b)(a^2 + b^2 + ab)}{(a^2 + b^2 + ab)ab}$$

$$= \frac{a-b}{ab} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = -2\sqrt{2}$$

۱۹۶۰- گزینه ۴ راه حل اول توجه کنید که

$$a^6 + a^2 + 1 = a^6 + 2a^2 + 1 - a^2 = (a^2 + 1)^2 - a^2$$

$$= (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(a-1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1} = a^3 - 1 = 5 - 1 = 4$$

راه حل دوم اگر صورت و مخرج عبارت داده شده را در $(a+1)$ ضرب کنیم، می توان نوشت

$$\frac{(a+1)(a-1)(a^6 + a^2 + 1)}{(a+1)(a^2 - a + 1)} = \frac{(a^2 - 1)(a^6 + a^2 + 1)}{a^3 + 1}$$

$$= \frac{a^6 - 1}{a^3 + 1} = \frac{(a^3 - 1)(a^3 + 1)}{(a^3 + 1)} = a^3 - 1$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر به ازای $a = \sqrt[3]{5}$ برابر است با $a^3 - 1 = 5 - 1 = 4$.

۱۹۶۱- گزینه ۲ می توان نوشت

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}-2}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-2}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{2} = \frac{\sqrt{2}(2-2)}{2} = 0$$

۱۹۶۲- گزینه ۲ راه حل اول ابتدا مخرج کسرها را گویا می کنیم، سپس عبارت را ساده می کنیم:

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}} + \frac{7}{3-\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} + \frac{7(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}}{1-2} + \frac{7(3+\sqrt{2})}{9-2} = -1-\sqrt{2} + 3+\sqrt{2} = 2$$

راه حل دوم ابتدا مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}} + \frac{7}{3-\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}+7-\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{10-2\sqrt{2}}{5-4\sqrt{2}} = \frac{2(5-\sqrt{2})}{5-4\sqrt{2}}$$

بنابراین $x+1$ ، $x-2$ ، $x-4$ و $x+3$ عامل های عبارت مورد نظر هستند. اکنون توجه کنید که

$$x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3), \quad x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3), \quad x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$$

بنابراین $x^2 - 2x - 3$ عامل عبارت مورد نظر نیست.

راه حل دوم با توجه به عامل های عبارت های ذکر شده در گزینه ها، که در راه حل اول نوشته ایم، کافی است بررسی کنیم که کدام یک از عبارت های $x+3$ ، $x+1$ ، $x-3$ ، $x-2$ و $x-4$ عامل عبارت داده شده در صورت سؤال نیست.

فرض کنید $P(x) = (x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24$. در این صورت

$$P(-1) = 4 - 28 + 24 = 0, \quad P(-3) = 144 - 168 + 24 = 0$$

$$P(3) = 36 - 84 + 24 = -24 \neq 0$$

پس $x-3$ عامل عبارت مورد نظر نیست. در نتیجه گزینه (۲) عامل عبارت مورد نظر نیست.

۱۹۵۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$4x^4 + 3x^2 + 1 = (4x^4 + 4x^2 + 1) - x^2 = (2x^2 + 1)^2 - x^2$$

$$= (2x^2 + 1 - x)(2x^2 + 1 + x)$$

بنابراین عامل های $4x^4 + 3x^2 + 1$ عبارت های $2x^2 - x + 1$ و $2x^2 + x + 1$ هستند، یعنی مقادیر ممکن a عددهای -1 و 1 هستند که حاصل ضرب آنها برابر -1 است.

۱۹۵۴- گزینه ۴ توجه کنید که با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله می توان نوشت

$$4x^4 - 16x^2 y^2 + 9y^4 = 4x^4 - 12x^2 y^2 + 9y^4 - 4x^2 y^2$$

$$= (2x^2 - 3y^2)^2 - 4x^2 y^2$$

طبق اتحاد مزدوج این عبارت به صورت زیر تجزیه می شود:

$$(2x^2 - 2xy - 3y^2)(2x^2 + 2xy - 3y^2)$$

بنابراین در تجزیه عبارت، عامل $2x^2 - 2xy - 3y^2$ وجود دارد.

۱۹۵۵- گزینه ۱ عبارت را ابتدا به کمک فاکتورگیری و سپس به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می کنیم:

$$3a^3 - 3ab^2 - 2a^2 b + 2b^3 = 3a(a^2 - b^2) - 2b(a^2 - b^2)$$

$$= (a^2 - b^2)(3a - 2b) = (a-b)(a+b)(3a - 2b)$$

بنابراین در تجزیه عبارت، عامل $3a - 2b$ وجود دارد.

۱۹۵۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1), \quad x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x-1)(x+1)} \times \frac{(x+3)(x-1)}{x^2 - x + 1} = x+3$$

۱۹۵۷- گزینه ۳ به کمک مخرج مشترک گیری عبارت را ساده می کنیم:

$$\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{2-(x-1)-(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{2-2x}{(x-1)(x+1)} = -\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = -\frac{2}{x+1}$$

۱۹۶۳- گزینه ۱ راه حل اول توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=1$.

راه حل دوم با مخرج مشترک گیری می‌توان نوشت:

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \frac{-2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

۱۹۶۴- گزینه ۲ صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{2}+1$ ضرب

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$$

بنابراین می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

۱۹۶۵- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\frac{8\sqrt{5}-8}{\sqrt{5}+1} = 8 \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = 8 \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{8(\sqrt{5}-1)^2}{5-1} = 2(\sqrt{5}-1)^2$$

$$\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} \times \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} = \frac{(\sqrt{5}-2)^2}{5-4} = (\sqrt{5}-2)^2$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$2(\sqrt{5}-1)^2 - (\sqrt{5}-2)^2 = 2(6-2\sqrt{5}) - (9-4\sqrt{5}) = 3$$

۱۹۶۶- گزینه ۲ ابتدا مخرج کسر را گویا می‌کنیم. برای

این کار صورت و مخرج را در $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{8}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{8}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{8}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

بنابراین $x=1+\sqrt{2}$ و در نتیجه $(x-1)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$.

۱۹۶۷- گزینه ۲ برای گویا کردن مخرج کسر، صورت و مخرج آن را در

مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$A = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})^2}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 - (\sqrt{2-\sqrt{3}})^2}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}{2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{4+2\sqrt{4-3}}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

۱۹۶۸- گزینه ۳ چون در مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ریشه سوم وجود دارد.

برای گویا کردن مخرج این کسر از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم.

به این ترتیب، صورت و مخرج این کسر را در

$$\sqrt{3}^2 + \sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = \sqrt{9} + \sqrt{6} + \sqrt{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{9}+\sqrt{6}+\sqrt{4}}{\sqrt{9}+\sqrt{6}+\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{9}+\sqrt{6}+\sqrt{4}}{(\sqrt{3})^3 - (\sqrt{2})^3}$$

$$= \frac{\sqrt{9}+\sqrt{6}+\sqrt{4}}{3-2} = \sqrt{9}+\sqrt{6}+\sqrt{4}$$

به این ترتیب، عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{9}+\sqrt{6}+\sqrt{4} - (\sqrt{9}+\sqrt{6}-\sqrt{4}) = 2\sqrt{4}$$

۱۹۶۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$2-\sqrt{4}+\sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{4}-\sqrt{2}+1)$$

بنابراین

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{4}-\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{3}{\sqrt{4}-\sqrt{2}+1}$$

اکنون با استفاده از اتحاد چاق و لاغر مخرج کسرها را گویا کرده و عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A = \frac{\sqrt{4}+\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{4}+\sqrt{2}+1)} - \frac{3(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{4}-\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{4}+\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^3-1} - \frac{3(\sqrt{2}+1)}{2-1} = \frac{\sqrt{4}+\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^3-1} - \frac{3(\sqrt{2}+1)}{2+1}$$

$$= \sqrt{4}+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}-1 = \sqrt{4}$$

۱۹۷۰- گزینه ۳ چون $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1 = \sqrt[3]{3}^3 + 1 \times \sqrt[3]{3} + 1^2$ برای اینکه

مخرج کسر اول را گویا کنیم (با استفاده از اتحاد چاق و لاغر)، صورت و مخرج

آن را در $\sqrt[3]{3}-1$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1} = \frac{2}{\sqrt[3]{3}^2+\sqrt[3]{3}+1^2} \times \frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}-1}$$

$$= \frac{2(\sqrt[3]{3}-1)}{\sqrt[3]{3}^3-1^3} = \frac{2(\sqrt[3]{3}-1)}{3-1} = \sqrt[3]{3}-1$$

به همین ترتیب،

$$\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}^2-\sqrt[3]{2}+1^2} \times \frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}+1} = \frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{\sqrt[3]{2}^3+1^3} = \sqrt[3]{2}+1$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$ با $\sqrt[3]{3}-1+\sqrt[3]{2}+1 = \sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$.

۱۹۷۱- گزینه ۲ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+3$ برابر

$$\text{است با } 8 = (-3)^4 + 9(-3)^3 + (-3)^2 - 1 = P(-3).$$

۱۹۷۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $P(x) = (x-1)^3 + 7$ در نتیجه،

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-\sqrt[3]{3}-1$ برابر است با

$$P(\sqrt[3]{3}+1) = (\sqrt[3]{3}+1-1)^3 + 7 = 3+7 = 10.$$

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P^2(x)$ بر $x+3$ برابر است با

$$P^2(-3)=9^2=81$$

۱۹۸۱- گزینه ۳ اگر چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+1$ بخش‌پذیر باشد، $P(-1)=0$ بنابراین

$$P(x)=2x^{14}-ax^5-3 \Rightarrow P(-1)=2(-1)^{14}-a(-1)^5-3=0 \Rightarrow a=1$$

۱۹۸۲- گزینه ۴ چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x+2)^2$ بخش‌پذیر است، پس بر $x+2$ نیز بخش‌پذیر است، بنابراین

$$P(-2)=0 \Rightarrow -32+48+2a+16=0 \Rightarrow a=-16$$

۱۹۸۳- گزینه ۱ چون ۱، ۲ و ۳ ریشه‌های $P(x)$ هستند، پس $x-1$ ، $x-2$ و $x-3$ عامل‌های $P(x)$ هستند. از طرف دیگر، چون $P(x)$ درجه سوم است، پس عامل دیگری ندارد. بنابراین می‌توان نوشت

$$P(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=-1$ ، چون $P(-1)=24$ ، به دست می‌آید

$$24=a(-2)(-3)(1) \Rightarrow a=4$$

به این ترتیب، $P(x)=4(x-1)(x-2)(x+2)$ و باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+3$ برابر است با

$$P(-3)=4(-3-1)(-3-2)(-3+2)=-80$$

۱۹۸۴- گزینه ۴ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x-3)$ بر $x-5$ برابر است با $P(2)=P(5-3)$. بنابراین $P(2)=-3$. اگر در تساوی

$$P(x+3)=x^3-mx^2+mx+2$$

$$P(2)=(-1)^3-m(-1)^2+m(-1)+2=-3 \Rightarrow m=2$$

۱۹۸۵- گزینه ۱ چون باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x-1)$ بر $x-2$ برابر ۱۲ است، پس $P(2-1)=12$ ، یعنی $P(1)=12$. در نتیجه

$$P(1)=1+a+6+b+1=12 \Rightarrow a+b=-5$$

از طرف دیگر، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x+2)$ بر $x+3$ برابر است با $P(-1)=P(-3+2)=P(-1)$. اکنون توجه کنید که

$$P(-1)=1-a+6-b+1=17-(a+b)$$

$$\xrightarrow{a+b=-5} P(-1)=17-(-5)=22$$

بنابراین باقی‌مانده مورد نظر برابر ۲۲ است.

۱۹۸۶- گزینه ۱ چون باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای‌های $P(x+1)$ و $Q(x+1)$ بر $x-2$ به ترتیب برابر ۳ و ۵ است، پس

$$P(2+1)=3 \Rightarrow P(3)=3, \quad Q(2+1)=5 \Rightarrow Q(3)=5$$

بنابراین، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x-1)Q(x-1)$ بر $x-4$ برابر است با $P(3)Q(3)=3 \times 5=15$.

۱۹۸۷- گزینه ۴ چون باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-3$ و $x+3$ به ترتیب برابر a و b است، پس $P(3)=a$ و $P(-3)=b$. از طرف

دیگر، بنابر فرض مسئله، $P(x)=(x^2-9)Q(x)+3x-1$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=3$ و $x=-3$ ، به دست می‌آید

$$\begin{cases} P(3)=3 \times 3-1 \\ P(-3)=3(-3)-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=-10 \end{cases}$$

بنابراین $a-b=18$.

۱۹۷۳- گزینه ۲ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-4$ برابر با $P(4)$ است. و چون بنابر فرض این باقی‌مانده ۱۶ است، پس $P(4)=16$. در نتیجه

$$P(x)=ax^{13}+bx^{97}-5 \Rightarrow P(4)=a(4)^{13}+b(4)^{97}-5$$

$$16=4^{13}a+4^{97}b-5 \Rightarrow 4^{13}a+4^{97}b=21 \quad (1)$$

از طرف دیگر، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+4$ برابر با $P(-4)$ است. اکنون توجه کنید که

$$P(-4)=-4^{13}a-4^{97}b-5 \xrightarrow{\text{بنابر تساوی (۱)}} P(-4)=-21-5=-26$$

بنابراین باقی‌مانده مورد نظر برابر ۲۶ است.

۱۹۷۴- گزینه ۴ چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+3$ بخش‌پذیر است، پس $P(-3)=0$. در نتیجه $0=P(-3)=(-3)^9+a(-3)^2-9=0$.

بنابراین $9a-9=0$ و $a=1$ و $9=x^9+3x^2+x^2-9$. از طرف دیگر، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x-1)$ بر $x-2$ برابر است با $P(1)=P(2-1)$. اکنون توجه کنید که $P(1)=1+3+1-9=-4$.

۱۹۷۵- گزینه ۴ چون باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ برابر ۴ است، پس $P(2)=4$. در نتیجه، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای

$$P(6x) \text{ بر } 1-3x \text{ برابر است با } P(2)=4 \text{ با } P(6 \times \frac{1}{3})=P(2)=4.$$

۱۹۷۶- گزینه ۴ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x+1)$ بر $x-3$ برابر است با $P(3+1)=P(4)$. از طرف دیگر،

$$P(x-2)=x^2-3x+2 \xrightarrow{x=6} P(4)=(6)^2-3(6)+2=20.$$

۱۹۷۷- گزینه ۳ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+4$ برابر است با $P(-4)$. اکنون اگر در تساوی $P^2(x)-8xP(x)=-16x^2$ قرار دهیم $x=-4$ ، به دست می‌آید

$$P^2(-4)+32P(-4)+16^2=0 \Rightarrow (P(-4)+16)^2=0 \Rightarrow P(-4)=-16$$

۱۹۷۸- گزینه ۲ بنابر فرض مسئله،

$$x^4-3x^3+4x^2+1=(x-1)Q(x)+3 \quad (1)$$

از طرف دیگر، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x-3$ برابر با $Q(3)$ است. اکنون توجه کنید که اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=3$ ، به دست می‌آید $3^4-3(3)^3+4(3)^2+1=(3-1)Q(3)+3$. در نتیجه

$$81-81+36+1=2Q(3)+3 \Rightarrow Q(3)=17$$

۱۹۷۹- گزینه ۳ توجه کنید که

$$P(x)=(x+3)^3Q(x)+2x-5 \quad (1)$$

از طرف دیگر، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+3$ برابر است با $P(-3)$. اکنون اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=-3$ ، به دست می‌آید

$$P(-3)=2(-3)-5=-11$$

بنابراین باقی‌مانده مورد نظر برابر ۱۱ است.

۱۹۸۰- گزینه ۱ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P^2(x)$ بر $x+3$ برابر است با $P^2(-3)$. از طرف دیگر، چون باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x+3)^3$ برابر x^2-x-3 است، از قضیه تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها

نتیجه می‌شود $P(x)=(x+3)^3Q(x)+x^2-x-3$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=-3$ ، به دست می‌آید $P(-3)=(-3)^2-(-3)-3=9$. بنابراین

راه حل دوم توجه کنید که

$$a = 2^{\frac{1}{2}}, \quad b = 4^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}, \quad c = (2\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}$$

هر سه عدد را به توان شش می‌رسانیم (مخرج مشترک توان‌ها):

$$a^6 = (2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^3 = 8, \quad b^6 = (2^{\frac{2}{3}})^6 = 2^4 = 16$$

$$c^6 = ((2\sqrt{3})^{\frac{1}{3}})^6 = (2\sqrt{3})^2 = 12$$

پس $a^6 < c^6 < b^6$ و چون a, b, c مثبت هستند، پس $a < c < b$.

۱۹۹۳- گزینه ۲) راه حل اول توجه کنید که

$$a^2 + ab + bc + ca = a^2 + a(b+c) + bc = (a+b)(a+c)$$

از طرف دیگر،

$$\begin{cases} a+b=8 \\ b-c=11 \end{cases} \Rightarrow (a+b)-(b-c)=8-11 \Rightarrow a+c=-3$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $8 \times (-3) = -24$.

راه حل دوم فرض کنید $b=0$. در این صورت

$$\begin{cases} a+b=8 \Rightarrow a=8 \\ b-c=11 \Rightarrow c=-11 \end{cases}$$

بنابراین $a^2 + ab + bc + ca = 64 - 88 = -24$.

۱۹۹۴- گزینه ۳) راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$a - b + \sqrt{c} = 6 \Rightarrow a - (b - \sqrt{c}) = 6$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b - \sqrt{c}})(\sqrt{a} + \sqrt{b - \sqrt{c}}) = 6$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b - \sqrt{c}})(3) = 6 \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b - \sqrt{c}} = 2$$

به این ترتیب

$$\begin{cases} \sqrt{a} + \sqrt{b - \sqrt{c}} = 3 \\ \sqrt{a} - \sqrt{b - \sqrt{c}} = 2 \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{a} = 5 \Rightarrow a = \frac{25}{4}$$

راه حل دوم توجه کنید که $a - b + \sqrt{c} = 6 \Rightarrow b - \sqrt{c} = a - 6$

به جای $b - \sqrt{c}$ در معادله دوم قرار می‌دهیم $a - 6$:

$$\sqrt{a} + \sqrt{a - 6} = 3 \Rightarrow \sqrt{a - 6} = 3 - \sqrt{a}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} a - 6 = 9 - 6\sqrt{a} + a$$

$$6\sqrt{a} = 15 \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \frac{25}{4}$$

۱۹۹۵- گزینه ۳) توجه کنید که

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = (a + \frac{1}{a})^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = (a + \frac{1}{a})^3 - 3a(\frac{1}{a}) = 27 - 3 \times 3 = 18$$

اکنون می‌توان نوشت

$$(a^2 + \frac{1}{a^2})(a^3 + \frac{1}{a^3}) = a^5 + \frac{1}{a} + a + \frac{1}{a^5}$$

$$7 \times 18 = a^5 + 3 + \frac{1}{a^5} \Rightarrow a^5 + \frac{1}{a^5} = 123$$

۱۹۸۸- گزینه ۳) چون باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x-2)$ بر

$x-3$ برابر ۵ است، پس $P(3-2)=5$ ، یعنی $P(1)=5$. چون باقی‌مانده

تقسیم چندجمله‌ای $P(x-1)$ بر x برابر ۳ است، پس $P(0-1)=3$ ، یعنی

$P(-1)=3$. از طرف دیگر، چون درجه x^2-1 برابر ۲ است، بنابر قضیه

تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها، درجه باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر

x^2-1 حداکثر برابر ۱ است. فرض کنید این باقی‌مانده $ax+b$ باشد. در این

صورت $P(x) = (x^2-1)Q(x) + ax+b$. اگر در این تساوی قرار دهیم

$x=1$ و $x=-1$ ، به دست می‌آید

$$\begin{cases} P(1)=a+b \\ P(-1)=-a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5=a+b \\ 3=-a+b \end{cases} \Rightarrow a=1, \quad b=4$$

بنابراین باقی‌مانده مورد نظر $x+4$ است.

۱۹۸۹- گزینه ۲) بنا بر فرض‌های مسئله،

$$P(x) = (x-2)Q(x) - 3 \quad (1)$$

$$Q(x) = (x+1)S(x) + 5 \quad (2)$$

اگر در تساوی (۱) به جای $Q(x)$ مقدار به دست آمده از تساوی (۲) را قرار

دهیم، به دست می‌آید

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)((x+1)S(x) + 5) - 3 \\ &= (x-2)(x+1)S(x) + 5(x-2) - 3 \\ &= (x^2 - x - 2)S(x) + 5x - 13 \end{aligned}$$

بنابراین، از قضیه تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها نتیجه می‌شود که باقی‌مانده مورد نظر

برابر $5x - 13$ است.

۱۹۹۰- گزینه ۲) چندجمله‌ای $P(x)$ را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^3 + 4x^2 + 14x + 10 + a = a(x^3 + 1) + 4x^2 + 14x + 10 \\ &= a(x+1)(x^2 - x + 1) + (x+1)(4x + 10) \\ &= (x+1)(ax^2 + (4-a)x + a + 10) \end{aligned}$$

برای اینکه چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x+1)^2$ بخش پذیر باشد، باید چندجمله‌ای

$Q(x) = ax^2 + (4-a)x + a + 10$ بر $x+1$ بخش پذیر باشد. پس

$$Q(-1) = 0 \Rightarrow a - (4-a) + a + 10 = 0 \Rightarrow a = -2$$

۱۹۹۱- گزینه ۱) توجه کنید که $\sqrt{\sqrt{5}+2} = \sqrt[4]{(\sqrt{5}+2)^2}$. بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} \times \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}}{\sqrt[4]{\sqrt{5}+2}} &= \frac{\sqrt[4]{(\sqrt{5}+2)^2} \times \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}}{\sqrt[4]{\sqrt{5}+2}} \\ &= \sqrt[4]{(\sqrt{5}+2)^2} \times \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \times \sqrt[4]{\sqrt{5}-2} \\ &= \sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \sqrt[3]{5-4} = 1 \end{aligned}$$

۱۹۹۲- گزینه ۳) راه حل اول توجه کنید که

$$a = 2^{\frac{1}{2}}, \quad b = 4^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}, \quad c = 2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}}$$

اکنون توجه کنید که $b = 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{1}{6}} < 2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} = c$. از طرف

دیگر، $b > a$ ، بنابراین باید a و c را مقایسه کنیم. توجه کنید که

$$c = 2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} > 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = a$$

بنابراین $a < c < b$.

۱۹۹۶- گزینۀ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} = 23 \Rightarrow \left(\frac{a}{2} + \frac{2}{a}\right)^2 - 2 = 23$$

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{2}{a}\right)^2 = 25 \xrightarrow{a>0} \frac{a}{2} + \frac{2}{a} = 5$$

اکنون اگر دو طرف این تساوی را به توان سه برسانیم، به دست می‌آید

$$\frac{a^3}{8} + \frac{8}{a^3} + 3\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{2}{a}\right)\left(\frac{a}{2} + \frac{2}{a}\right) = 5^3$$

$$\frac{a^3}{8} + \frac{8}{a^3} + 3 \times 5 = 125 \Rightarrow \frac{a^3}{8} + \frac{8}{a^3} = 110$$

۱۹۹۷- گزینۀ ۱ اگر فرض کنیم $y = x^2 + x + 1$ ، آن‌گاه

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12 = y(y + 1) - 12 = y^2 + y - 12 = (y - 3)(y + 4)$$

از طرف دیگر،

$$y - 3 = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2), \quad y + 4 = x^2 + x + 5$$

چون $y + 4$ درجۀ دوم است و ریشه‌ای ندارد، پس تجزیه نمی‌شود. بنابراین

عامل‌های عبارت مورد نظر $x - 1$ ، $x + 2$ و $x^2 + x + 5$ هستند.

۱۹۹۸- گزینۀ ۳ فرض می‌کنیم $A = \frac{1}{3}(\sqrt{y} - 1)\sqrt{4 + \sqrt{y}}$ در این صورت،

$$A^2 = \frac{1}{9}(\sqrt{y} - 1)^2(4 + \sqrt{y}) = \frac{1}{9}(y + 1 - 2\sqrt{y})(4 + \sqrt{y})$$

$$= \frac{2}{9}(4 - \sqrt{y})(4 + \sqrt{y}) = \frac{2}{9}(16 - y) = 2$$

چون A عددی مثبت است، $A = \sqrt{2}$.

۱۹۹۹- گزینۀ ۴ توجه کنید که

$$\frac{2}{1 - \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{6}} = \frac{2}{1 - \sqrt{3} + \sqrt{2}(1 - \sqrt{3})} = \frac{2}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{2(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{2})}{(1 - 3)(1 - 2)} = \frac{2(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{2})}{(1 - 3)(1 - 2)}$$

۲۰۰۰- گزینۀ ۱ چون باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x - 1)$ بر $x - 2$

برابر ۱۲ است، پس $P(2) = 12$ ، یعنی $P(1) = 12$ در نتیجه

$$P(1) = 1 + a + 6 + b + 10 = 12 \Rightarrow a + b = -5$$

از طرف دیگر، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x + 1)$ بر $x + 2$ برابر است

با $P(-2 + 1) = P(-1)$ اکنون توجه کنید که

$$P(-1) = 1 - a + 6 - b + 10 = 17 - (a + b) = 17 - (-5) = 22$$

بنابراین باقی‌مانده مورد نظر برابر ۲۲ است.

۲۰۰۱- گزینۀ ۱ توجه کنید که $x = \sqrt[3]{3\sqrt{3}} = 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

بنابراین

$$\sqrt[4]{x^{21}} = x^{\frac{21}{4}} = (3^{\frac{1}{2}})^{\frac{21}{4}} = 3^{\frac{21}{8}}$$

۲۰۰۲- گزینۀ ۴ توجه کنید که

$$\sqrt[3]{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}} = 2^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{1}{12}} \times 4^{\frac{1}{36}} = 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{1}{9}} = 2^{\frac{5}{9}}$$

بنابراین

$$\sqrt[3]{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}} \times \sqrt[5]{16} = 2^{\frac{5}{9}} \times 2^{\frac{4}{9}} = 2$$

۲۰۰۳- گزینۀ ۴ توجه کنید که

$$\sqrt{\frac{a}{b^3}} = \sqrt{ab^{-3}} = a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^5}} = \sqrt[3]{b^2a^{-5}} = b^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{5}{3}}$$

$$\sqrt[12]{a^{14}b^{10}} = a^{\frac{14}{12}}b^{\frac{10}{12}} = a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{5}{6}}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{1}{2} - \frac{5}{3} + \frac{7}{6}}b^{-\frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6}} = a^0b^0 = 1$$

۲۰۰۴- گزینۀ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$3^{x-1} + 3^{-x-1} = 2 \Rightarrow \frac{3^x}{3} + \frac{3^{-x}}{3} = 2 \Rightarrow 3^x + 3^{-x} = 6$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید

$$3^{2x} + 3^{-2x} + 2 \times 3^x \times 3^{-x} = 36 \Rightarrow 9^x + 9^{-x} + 2 = 36$$

$$9^x + 9^{-x} = 34$$

۲۰۰۵- گزینۀ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$b = (a + b) - a = \sqrt{17} - \frac{\sqrt{17} + 3}{2} = \frac{\sqrt{17} - 3}{2}$$

بنابراین $a - b = 3$ و $ab = 2$ به این ترتیب،

$$a^3 - b^3 + 9ab = (a - b)((a - b)^2 + 3ab) + 9ab = 3(9 + 6) + 18 = 63$$

۲۰۰۶- گزینۀ ۲ اگر دو طرف تساوی داده شده را در $1 - \sqrt[4]{2}$ ضرب

کنیم، به دست می‌آید

$$(1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt[4]{2})(1 + \sqrt[4]{2})(1 - \sqrt[4]{2}) = \frac{1 - \sqrt[4]{2}}{x^3 - 1}$$

$$(1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt[4]{2})(1 - \sqrt[4]{2}) = \frac{1 - \sqrt[4]{2}}{x^3 - 1}$$

$$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = \frac{1 - \sqrt[4]{2}}{x^3 - 1} \Rightarrow 1 - 2 = \frac{1 - \sqrt[4]{2}}{x^3 - 1}$$

$$-1 = \frac{1 - \sqrt[4]{2}}{x^3 - 1} \Rightarrow x^3 - 1 = \sqrt[4]{2} - 1 \Rightarrow x^3 = \sqrt[4]{2}$$

$$(x^3)^{16} = (\sqrt[4]{2})^{16} \Rightarrow x^{48} = 2^4 = 16$$

۲۰۰۷- گزینۀ ۱ ابتدا همه ریشه‌ها را به ریشه ششم تبدیل می‌کنیم:

$$\sqrt{\sqrt{2} + 1} \times \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1} \times \sqrt[6]{\sqrt{2} - 1} = \sqrt[6]{(\sqrt{2} + 1)^3 \times (\sqrt{2} - 1)^2 \times \sqrt[6]{2} - 1}$$

$$= \sqrt[6]{(\sqrt{2} + 1)^3 (\sqrt{2} - 1)^2 (\sqrt{2} - 1)}$$

$$= \sqrt[6]{(\sqrt{2} + 1)^3 (\sqrt{2} - 1)^3}$$

$$= \sqrt[6]{((\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1))^3}$$

$$= \sqrt[6]{(2 - 1)^3} = \sqrt[6]{1} = 1$$

۲۰۰۸-گزینۀ ۲ ابتدا مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$ را گویا می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1} &= \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-1} \\ &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{3+2+2\sqrt{6}-1} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2(\sqrt{6}+2)} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2(\sqrt{6}+2)} \times \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}-2} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{6}-2)}{2(6-4)} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{6}-2)}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+2}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{4}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{4} - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = \frac{1}{2}$$

۲۰۰۹-گزینۀ ۳ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}x^2y^2 - x^2 - y^2 - 4xy + 1 &= x^2y^2 - 2xy + 1 - (x^2 + y^2 + 2xy) \\ &= (xy-1)^2 - (x+y)^2 = (xy-1-x-y)(xy-1+x+y)\end{aligned}$$

۲۰۱۰-گزینۀ ۳ چون چندجمله‌ای $P(x+1)$ بر $x-2$ بخش‌پذیر است،

پس $P(2+1)=P(3)=0$. اکنون اگر در تساوی $P(1-x)=ax^2-x+2a$ قرار دهیم $x=-2$ ، به دست می‌آید

$$P(3)=a(-2)^2-(-2)+2a=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

فصل نهم



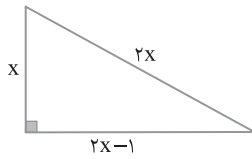
۲۰۱۹- گزینه ۳ با توجه به شکل زیر و بنابر قضیه فیثاغورس، معادله

$$(2x)^2 = x^2 + (2x-1)^2$$

بنابراین $4x^2 = x^2 + 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2 - \sqrt{3}, x = 2 + \sqrt{3}$ چون $2x-1 > 0$ پس $2x-1 > 0$ ، یعنی $x > \frac{1}{2}$ ، بنابراین $x = 2 - \sqrt{3}$ قابل قبول نیست و در نتیجه $x = 2 + \sqrt{3}$ از

طرف دیگر محیط مثلث برابر است با

$$P = x + 2x + 2x - 1 = 5x - 1 = 5(2 + \sqrt{3}) - 1 = 9 + 5\sqrt{3}$$



۲۰۲۰- گزینه ۲ این دو عدد را x و $x+2$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$x^3 - (x+2)^3 = 488 \text{ برقرار است. پس}$$

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 = 488 \Rightarrow 6x^2 + 12x - 480 = 0$$

$$x^2 + 2x - 80 = 0 \Rightarrow (x-8)(x+10) = 0 \Rightarrow x = 8, x = -10$$

چون عددها طبیعی و زوج هستند، پس $x = -10$ قابل قبول نیست. بنابراین $x = 8$ و دو عدد مورد نظر ۸ و ۱۰ هستند و تفاضل مربعات آنها برابر $10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$ ، یعنی ۳۶ است.

۲۰۲۱- گزینه ۲ دلتای معادله باید برابر با صفر باشد:

$$\Delta = 4(m+1)^2 - 4m(m+1) = 4(m+1)(m+1-m) = 4(m+1) = 0$$

بنابراین $m = -1$.

۲۰۲۲- گزینه ۲ اگر معادله حداکثر یک جواب حقیقی داشته باشد، باید

$$\Delta \leq 0 \text{ پس}$$

$$\Delta = 36 - 4 \times 4(k-2) \leq 0 \Rightarrow 68 - 16k \leq 0 \Rightarrow k \geq \frac{17}{4}$$

پس حداقل مقدار k برابر $\frac{17}{4}$ است.

۲۰۲۳- گزینه ۲ چون معادله $x^2 + 2x + b = 0$ دو جواب حقیقی دارد، پس

$$\Delta = 4 - 4b > 0 \text{ اکنون دلتای معادله } x^2 - 6x + b + 8 = 0 \text{ را حساب می‌کنیم}$$

$$\Delta = 36 - 4(b+8) = 4 - 4b > 0 \text{ بنابراین، معادله اخیر نیز دو جواب دارد.}$$

۲۰۲۴- گزینه ۲ راه حل اول

$$x^2 + (m-1)x + m - 2m^2 = 0$$

$$\Delta = (m-1)^2 - 4(m-2m^2) = m^2 - 2m + 1 - 4m + 8m^2 = 9m^2 - 6m + 1 = (3m-1)^2$$

$$x = \frac{(1-m) \pm \sqrt{(3m-1)^2}}{2} = \frac{(1-m) \pm (3m-1)}{2} \Rightarrow x_1 = 1-2m, x_2 = m$$

حالت اول

$$x_1 = 1-2m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{2}, x_2 = m < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < m < 2$$

۲۰۱۱- گزینه ۳ چون معادله ریشه مضاعف دارد، پس $\Delta = 0$. در نتیجه

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 2^2 - 4 \times 2 \times (k-2) = 0 \Rightarrow 4 - 8(k-2) = 0 \Rightarrow k = \frac{5}{2}$$

۲۰۱۲- گزینه ۴ دلتای معادله باید مثبت باشد:

$$\Delta = 4k^2 - k = k(4k-1) > 0 \Rightarrow k > \frac{1}{4} \text{ یا } k < 0$$

بنابراین k متعلق به مجموعه $\mathbb{R} - [\frac{1}{4}, 0]$ است.

۲۰۱۳- گزینه ۳ چون معادله $x^2 - 4x + k - 1 = 0$ جواب حقیقی ندارد، پس

$$\Delta = 16 - 4(k-1) < 0 \Rightarrow k-1 > 4 \Rightarrow k > 5$$

در معادله $x^2 + 2x - k + 6 = 0$ مقدار Δ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta = 4 - 4(-k+6) = 4k - 20 = 4(k-5)$$

چون $k > 5$ ، پس $4(k-5) > 0$ و در نتیجه این معادله دو جواب حقیقی دارد.

۲۰۱۴- گزینه ۱ معادله را به روش تجزیه حل می‌کنیم:

$$(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{5}) = 0 \xrightarrow{x_1 < x_2} x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{5}$$

$$\text{بنابراین } x_1^2 + x_2^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5})^2 = 2 + 5 = 7$$

۲۰۱۵- گزینه ۱ چون مجموع ضرایب معادله برابر صفر است، پس یکی از

جواب‌های معادله برابر ۱ است و دیگری $-\frac{\sqrt{12}}{3}$. چون $x_1 < x_2$ ، بنابراین

$$x_1 = -\frac{\sqrt{12}}{3}, x_2 = 1 \Rightarrow 3x_1 + x_2 = 1 - \sqrt{12}$$

۲۰۱۶- گزینه ۳ چون a جواب معادله $x^2 - x - 5 = 0$ است، پس در این

معادله صدق می‌کند، یعنی

$$a^2 - a - 5 = 0 \Rightarrow a^2 - a = 5$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود $b^2 - b = 5$. بنابراین

$$(a^2 - a - 2)(b^2 - b + 2) = (5 - 2)(5 + 2) = 21$$

۲۰۱۷- گزینه ۱ اگر اندازه طول مستطیل را y و اندازه عرض آن را x

فرض کنیم، اندازه قطر آن می‌شود $\sqrt{x^2 + y^2}$. پس $y = 4 + x$ و $x^2 + y^2 = 3$ در نتیجه

$$x^2 + (4+x)^2 = 3 \Rightarrow x^2 + 16 + 8x + x^2 = 3$$

$$x^2 + 4x - 7 = 0 \Rightarrow x = -2 + \sqrt{11}, x = -2 - \sqrt{11}$$

اگر $x = -2 - \sqrt{11}$ ، عددی منفی می‌شود، بنابراین قابل قبول نیست. پس

$x = -2 + \sqrt{11}$ و در نتیجه $y = 4 + (-2 + \sqrt{11}) = 2 + \sqrt{11}$. بنابراین

مساحت مستطیل برابر است با

$$S = xy = (\sqrt{11}-2)(\sqrt{11}+2) = 11 - 4 = 7$$

۲۰۱۸- گزینه ۱ دو عدد را x و y می‌نامیم. پس $\frac{y}{x} = 4$ و

$$xy = x + y + 6 \text{ بنابراین } xy = 4x + x + 6 = 5x + 6$$

$$x(4x) = x + 4x + 6 \Rightarrow 4x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\Delta = 25 + 96 = 121 \Rightarrow x = \frac{5 \pm 11}{8} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -\frac{3}{4}$$

بنابراین $y = 8$ و در نتیجه $y - x = 6$.

حالت دوم

$$x_1 = 1 - 2m < 2 \Rightarrow m > -\frac{1}{2}, x_2 = m < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < m < 0$$

پس می‌توان گفت $m \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (\frac{1}{2}, 2)$.

راه‌حل دوم اگر معادله را به صورت $x^2 + (m-1)x - m(2m-1) = 0$ بنویسیم، به کمک تجزیه می‌توانیم آن را حل کنیم. در واقع به دنبال دو عدد هستیم که حاصل ضربشان $-m(2m-1)$ و حاصل جمعشان $m-1$ باشد. پس یکی از این دو عدد $2m-1$ و دیگر $-m$ است. بنابراین $(x-m)(x+2m-1) = 0$. پس جواب‌های معادله $x_1 = 1-2m$ و $x_2 = m$ هستند. دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

$$\text{حالت اول} \quad x_1 = 1-2m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{2}, x_2 = m < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < m < 2$$

$$\text{حالت دوم} \quad x_1 = 1-2m < 2 \Rightarrow m > -\frac{1}{2}, x_2 = m < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < m < 0$$

بنابراین $m \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (\frac{1}{2}, 2)$.

۲۰۲۵- گزینه ۱ مجموع ضرایب معادله برابر است با $2-m+m-2=0$. پس یکی از جواب‌های معادله برابر ۱ است.

۲۰۲۶- گزینه ۲ در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a-b+c=0$ ، آن‌گاه جواب‌های معادله $x = -\frac{c}{a}$ و $x = -1$ هستند.

$$\text{در معادله } (\sin^2 \alpha)x^2 + x + \cos^2 \alpha = 0,$$

$$a = \sin^2 \alpha, b = 1, c = \cos^2 \alpha \Rightarrow a-b+c = \cos^2 \alpha - 1 + \sin^2 \alpha = 0$$

بنابراین $x_1 = -1$ و $x_2 = -\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = -\cot^2 \alpha$ توجه کنید که چون

$$0^\circ < \alpha < 45^\circ, \text{ پس } \cot \alpha > 1 \text{ و در نتیجه } -\cot^2 \alpha < -1 \text{ بنابراین}$$

$$x_2^2 - x_1 = (-1)^2 - (-\cot^2 \alpha) = 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

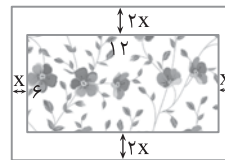
۲۰۲۷- گزینه ۲ با توجه به شکل واضح است که ابعاد قاب $12+2x$ و $6+4x$ است. بنابراین مساحت قاب برابر است با $(6+4x)(12+2x)$. پس

$$(6+4x)(12+2x) = 104 \Rightarrow 2x^2 + 15x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = -8$$

$$x = -8 \text{ قابل قبول نیست. پس } x = \frac{1}{2} \text{ و}$$

محیط قاب برابر است با

$$P = 2(6+4x+12+2x) = 2(6x+18) = 42 \text{ cm}$$



۲۰۲۸- گزینه ۱ سن کنونی مریم را x و سن کنونی برادرش را y در نظر می‌گیریم. در این صورت $x-2=7(y-2)$ و $x=y^2$. اگر در معادله اول به جای x قرار دهیم y^2 ، به دست می‌آید:

$$y^2 - 2 = 7(y-2) \Rightarrow y^2 - 7y + 12 = 0 \Rightarrow (y-3)(y-4) = 0 \Rightarrow y = 3, 4$$

اگر $y = 3$ ، آن‌گاه $x = 9$ یعنی مریم و برادرش در مجموع ۱۲ سال دارند که در گزینه‌ها نیست. اگر $y = 4$ ، آن‌گاه $x = 16$ یعنی مریم و برادرش در مجموع ۲۰ سال دارند که در گزینه (۱) آمده است.

۲۰۲۹- گزینه ۳ اگر طول ضلع مربع x باشد، اندازه مساحت آن x^2 و طول قطر آن $\sqrt{2}x$ است. بنابراین طول ضلع مربع را از معادله زیر به دست می‌آوریم:

$$x^2 + \sqrt{2}x = \frac{y}{2} \Rightarrow x^2 + \sqrt{2}x - \frac{y}{2} = 0$$

$$x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, x = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (غ.ق.ی.)}$$

محیط مربع $4x$ است که می‌شود $8-2\sqrt{2}$.

۲۰۳۰- گزینه ۳ طول یک تکه را x بگیرد. در این صورت طول تکه دیگر $20-x$ است. بنابراین طول هر ضلع مربع نظیر تکه اول $\frac{x}{4}$ و طول هر ضلع مربع نظیر تکه دوم $\frac{20-x}{4}$ است. در نتیجه، مساحت این مربع‌ها $(\frac{x}{4})^2$ و

$$(\frac{20-x}{4})^2 \text{ است. به این ترتیب،}$$

$$(\frac{x}{4})^2 + (\frac{20-x}{4})^2 = 13 \Rightarrow x^2 - 20x + 96 = 0 \Rightarrow x = 12, x = 8$$

چون $20 = 12 + 8$ ، پس، طول یکی از تکه‌ها ۱۲ سانتی‌متر و طول تکه دیگر ۸ سانتی‌متر و اختلاف اندازه‌های آن‌ها برابر ۴ سانتی‌متر است.

۲۰۳۱- گزینه ۲ اگر α و β جواب‌های معادله مورد نظر باشند، آن‌گاه

$$\alpha + \beta = m + 1 = 5 \Rightarrow m = 4$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر است با $\alpha\beta = -2m - 1 = -9$.

۲۰۳۲- گزینه ۳ توجه کنید که $x_1 x_2 = -5$ و $x_1 + x_2 = 3$. در نتیجه

$$x_1(x_2 - 2) + x_2(x_1 - 2) = 2x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = 2(-5) - 2(3) = -16$$

۲۰۳۳- گزینه ۴ جواب‌های معادله $x^2 - 2x - 5 = 0$ را با α و β نشان می‌دهیم. در نتیجه باید حاصل $(\alpha-2)(\beta-2) = (2-\alpha)(2-\beta)$ را بیابیم.

برای این کار می‌توانیم یکی از روش‌های زیر را به کار ببریم.

راه‌حل اول دقت کنید که $(\alpha-2)(\beta-2) = \alpha\beta - 2(\alpha+\beta) + 4$. از طرف دیگر، $\alpha+\beta=2$ و $\alpha\beta=-5$. بنابراین $(\alpha-2)(\beta-2) = -5 - 4 + 4 = -5$.

پس حاصل ضرب جواب‌ها تغییر نکرده است.

راه‌حل دوم می‌دانیم $x^2 - 2x - 5 = (x-\alpha)(x-\beta)$. اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم ۲، به دست می‌آید $-5 = (2-\alpha)(2-\beta)$. چون $\alpha\beta=-5$ ، پس حاصل ضرب جواب‌ها تغییر نکرده است.

۲۰۳۴- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$x_1 + x_2 = -(k+1) = -1-k, x_1 x_2 = 8$$

بنابراین

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{-1-k}{8} = -\frac{3}{4}$$

بنابراین $k=5$.

۲۰۳۵- گزینه ۳ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha = \frac{2}{\beta}$ و

در نتیجه $\alpha\beta=2$. بنابراین

$$\frac{m-1}{2} = 2 \Rightarrow m-1=4 \Rightarrow m=5$$

۲۰۴۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که مجموع جواب‌های معادله برابر $\frac{3}{2}$

و حاصل ضرب آن‌ها برابر $-\frac{5}{4}$ است. بنابراین

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = -\frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = -\frac{15}{8}$$

۲۰۴۳- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$ و $\alpha\beta = -\frac{5}{4}$. بنابراین

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{1}{4} - 2(-\frac{5}{4})}{-\frac{5}{4}} = \frac{\frac{11}{4}}{-\frac{5}{4}} = -\frac{11}{5}$$

۲۰۴۴- گزینه ۳ توجه کنید که $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$. بنابراین

$$3 = \frac{\sqrt{5^2 - 4(k+1)(-2)}}{|-2|} \Rightarrow 6 = \sqrt{4k + 33}$$

$$6^2 = 4k + 33 \Rightarrow 4k = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

۲۰۴۵- گزینه ۳ توجه کنید که $x_1 + x_2 = 1$ و

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{1 - 4(2k - 3)} = \sqrt{13 - 8k}$$

از طرف دیگر.

$$x_1^2 - x_2^2 = 6 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 6 \Rightarrow x_1 - x_2 = 6$$

پس $x_1 - x_2 > 0$. در نتیجه

$$\sqrt{13 - 8k} = 6 \Rightarrow 13 - 8k = 36 \Rightarrow k = -\frac{23}{8}$$

۲۰۴۶- گزینه ۳ توجه کنید که $x_1 + x_2 = 15$ و $x_1 x_2 = 9$. بنابراین

$x_1, x_2 > 0$

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} + \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} = \frac{\sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2}}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{15}{\sqrt{9}} = 5$$

۲۰۴۷- گزینه ۴ توجه کنید که $x_1 + x_2 = -(\frac{-6}{3}) = 2$ و $x_1 x_2 = -\frac{4}{3}$.

از طرف دیگر.

$$S = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 = 4$$

$$P = (x_1^2 + x_1 x_2)(x_2^2 + x_1 x_2) = (x_1(x_1 + x_2))(x_2(x_1 + x_2))$$

$$= x_1 x_2 (x_1 + x_2)^2 = -\frac{4}{3} \times 4 = -\frac{16}{3}$$

بنابراین معادله مورد نظر $x^2 - 4x - \frac{16}{3} = 0$ یا $3x^2 - 12x - 16 = 0$ است.

۲۰۴۸- گزینه ۱ اگر جواب‌های معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ را α و β

بنامیم. آن‌گاه $\alpha + \beta = 3$ و $\alpha\beta = -5$. جواب‌های معادله مورد نظر α^3 و

β^3 هستند. بنابراین

$$S = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 27 - 3 \times (-5) \times 3 = 72$$

$$P = \alpha^3 \beta^3 = (\alpha\beta)^3 = (-5)^3 = -125$$

بنابراین معادله مورد نظر به شکل زیر است

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 72x - 125 = 0$$

۲۰۳۶- گزینه ۲ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha = \beta^2$. از طرف دیگر.

$$\alpha\beta = -\frac{27}{8} \Rightarrow \beta^3 = -\frac{27}{8} \Rightarrow \beta = -\frac{3}{2}$$

پس $\alpha = \frac{9}{4}$. همچنین $\alpha + \beta = -\frac{m}{8}$. بنابراین $\frac{9}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{m}{8} \Rightarrow m = -6$

۲۰۳۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) \quad (1)$$

از طرف دیگر. $x_1 + x_2 = 2$ و $x_1 x_2 = k$. در نتیجه، از تساوی (۱) و اینکه

$$x_1^3 + x_2^3 = 6 \quad k = \frac{1}{3} \text{ بنابراین } 8 = 6 + 6k$$

۲۰۳۸- گزینه ۴ توجه کنید که $x_1 + x_2 = 3k$ و $x_1 x_2 = 9$. از طرف

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 6 \Rightarrow (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = 6^2$$

دیگر.

$$x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} = 36 \Rightarrow 3k - 2\sqrt{9} = 36 \Rightarrow k = 14$$

۲۰۳۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\alpha + \beta = 3 \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 = 9, \quad |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{13} \Rightarrow (\alpha - \beta)^2 = 13$$

پس معادله‌ای مورد نظر است که جواب‌های آن ۹ و ۱۳ باشند. چون مجموع این

جواب‌ها برابر ۲۲ و حاصل ضرب آن‌ها برابر ۱۱۷ است، پس معادله مورد نظر

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 22x + 117 = 0$$

به صورت زیر است

۲۰۴۰- گزینه ۲ راه حل اول ابتدا جواب‌های معادله $2x^2 + 3x - 9 = 0$

را می‌یابیم:

$$2x^2 + 3x - 9 = 0 \Rightarrow (2x - 3)(x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -3$$

بنابراین جواب‌های معادله $9x^2 - ax + b = 0$ به صورت زیر هستند:

$$\alpha = \frac{1}{x_1^2} = \frac{4}{9}, \quad \beta = \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{9}$$

از طرف دیگر. $\alpha + \beta = \frac{a}{9}$. بنابراین

$$\frac{a}{9} = -\frac{49}{9} \Rightarrow a = -49$$

راه حل دوم جواب‌های معادله $2x^2 + 3x - 9 = 0$ را با α و β نشان

می‌دهیم. اگر جواب‌های معادله $9x^2 - ax + b = 0$ را با t و z نشان دهیم.

$$\text{آن‌گاه } t = \frac{1}{\beta^2} = 9 \text{ و } z = \frac{1}{\alpha^2} = 9$$

توجه کنید که $\alpha + \beta = -\frac{3}{2}$. چون $z + t = \frac{a}{9} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\beta)^2}$

و $\alpha\beta = -\frac{9}{4}$. پس $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{9}{4} + 9 = \frac{45}{4}$

$$\frac{a}{9} = \frac{\frac{45}{4}}{\frac{81}{16}} = \frac{5}{9} \Rightarrow a = -49$$

۲۰۴۱- گزینه ۴ β جواب معادله است. پس در معادله صدق می‌کند:

$$2\beta^2 - \beta - 7 = 0 \Rightarrow 2\beta^2 = \beta + 7$$

از طرف دیگر. $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$. بنابراین $\alpha + 2\beta^2 = \alpha + \beta + 7 = \frac{1}{2} + 7 = \frac{15}{2}$

۲۰۴۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $\alpha + \beta = -1$ و $\alpha\beta = -3$ ، بنابراین

مجموع و حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر به شکل زیر است:

$$S = \alpha^2 + \frac{1}{\beta} + \beta^2 + \frac{1}{\alpha} = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 1 + 6 + \frac{-1}{-3} = \frac{22}{3}$$

$$P = (\alpha^2 + \frac{1}{\beta})(\beta^2 + \frac{1}{\alpha}) = (\alpha\beta)^2 + \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha\beta} = 9 - 1 - \frac{1}{-3} = \frac{23}{3}$$

بنابراین معادله مورد نظر به شکل زیر است:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{23}{3} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 22x + 23 = 0$$

۲۰۵۰- گزینه ۳ اگر دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} (x_1 + x_2) + x_1x_2 = -1 \\ (x_1 + x_2) - x_1x_2 = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S + P = -1 \\ S - P = -11 \end{cases}$$

را حل کنیم، به دست می‌آید $S = -6$ و $P = 5$. بنابراین x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2 + 6x + 5 = 0$ هستند.

۲۰۵۱- گزینه ۲ کافی است در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ نابرابری

$\frac{c}{a} < 0$ برقرار باشد تا معادله دو جواب داشته باشد که یکی مثبت و یکی منفی

است. پس $\frac{m-4}{m+2} < 0$ در نتیجه $-2 < m < 4$. پس m می‌تواند مقادیر صحیح $-1, 0, 1, 2, 3$ باشد.

۲۰۵۲- گزینه ۲ اگر $a = 0$ ، آن‌گاه معادله فقط یک جواب دارد که قابل

قبول نیست. اگر $a \neq 0$ ، آن‌گاه حاصل ضرب جواب‌ها برابر است با $\frac{1-a^2}{a^2}$ که

باید منفی باشد. پس $\frac{1-a^2}{a^2} < 0 \Rightarrow 1 - a^2 < 0 \Rightarrow a^2 > 1 \Rightarrow |a| > 1$

۲۰۵۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\Delta = 4m^2 + 4m + 4 = (2m+1)^2 + 3 > 0$$

پس معادله حتماً دو جواب دارد. برای اینکه جواب‌ها هم علامت باشند، کافی است حاصل ضرب آن‌ها مثبت باشد، پس $\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow -m-1 > 0 \Rightarrow m < -1$

۲۰۵۴- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $a = 0$ ، آن‌گاه معادله به صورت

$-8x + 9 = 0$ درمی‌آید که فقط یک جواب دارد. با شرط $a \neq 0$ باید دلتای معادله مثبت باشد:

$$\Delta = 16(a+2)^2 - 16a \times 9 = 16((a+2)^2 - 9a) = 16(a^2 - 5a + 4) = 16(a-1)(a-4) > 0$$

بنابراین $a \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (4, +\infty)$. همچنین مجموع و حاصل ضرب

جواب‌ها باید مثبت باشند: $\frac{a+2}{a} > 0$ و $\frac{9}{4a} > 0$. پس $a > 0$ ، در نتیجه $a \in (0, 1) \cup (4, +\infty)$ ، یعنی a مقادیر طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴ را نمی‌تواند داشته باشند.

۲۰۵۵- گزینه ۱ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، باید شرط‌های

$\Delta > 0$ ، $\alpha\beta > 0$ و $\alpha + \beta < 0$ برقرار باشند تا معادله دو جواب منفی داشته

باشد. در نتیجه

$$\Delta = m^2 - 8(m-2) > 0 \Rightarrow m^2 - 8m + 16 > 0 \Rightarrow (m-4)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 4$$

$$\alpha + \beta < 0 \Rightarrow \frac{-m}{2} < 0 \Rightarrow m > 0, \quad \alpha\beta > 0 \Rightarrow \frac{m-2}{2} > 0 \Rightarrow m > 2$$

بنابراین $m \in (2, +\infty) - \{4\}$.

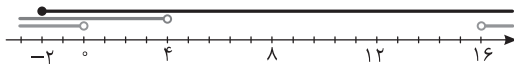
۲۰۵۶- گزینه ۲ برای اینکه معادله دو جواب داشته باشد باید

$$m > 16 \text{ یا } m < 0 \Rightarrow m^2 - 16m > 0 \Rightarrow m^2 - 4(4m+4) > 0 \Rightarrow (m-4)^2 - 4(2m+4) > 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

برای اینکه دو جواب معادله نامنفی باشند، باید مجموع آن‌ها مثبت و حاصل ضربشان نامنفی باشد:

$$\frac{c}{a} \geq 0 \Rightarrow 2m+4 \geq 0 \Rightarrow m \geq -2, \quad -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow 4-m > 0 \Rightarrow m < 4$$

با توجه به شکل زیر، اشتراک جواب‌های به دست آمده برای m به صورت $0 < m < 4$ است و در نتیجه m می‌تواند مقادیر صحیح -2 و -1 را نداشته باشد.



۲۰۵۷- گزینه ۳ معادله مورد نظر همواره دو جواب دارد $(\Delta = m^2 + 8 > 0)$.

اگر معادله دو جواب منفی داشته باشد، باید مجموع آن‌ها منفی و حاصل ضرب آن‌ها مثبت باشد. بنابراین

$$m-2 < 0 \Rightarrow m < 2, \quad -(m+1) > 0 \Rightarrow m < -1$$

پس $m < -1$.

۲۰۵۸- گزینه ۳ توجه کنید که $\Delta = (2m+1)^2$. چون معادله دو جواب

دارد، باید $m \neq -\frac{1}{2}$. چون قدرمطلق جواب منفی از جواب مثبت کوچک‌تر

است، پس مجموع جواب‌ها مثبت است و چون جواب‌ها مختلف‌العلامت هستند، پس حاصل ضرب آن‌ها منفی است. بنابراین

$$x_1 + x_2 = -\frac{2m-1}{m} > 0 \Rightarrow 0 < m < \frac{1}{2}, \quad x_1x_2 = -\frac{2}{m} < 0 \Rightarrow m > 0$$

بنابراین $0 < m < \frac{1}{2}$.

۲۰۵۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که باید $\Delta \geq 0$ ، پس

$$4-4m+8 \geq 0 \Rightarrow m \leq 3$$

از طرف دیگر، اگر معادله دو جواب مختلف‌العلامت داشته باشد، آن‌گاه

$$\frac{c}{a} \leq 0 \Rightarrow m-2 \leq 0 \Rightarrow m \leq 2$$

همچنین، ممکن است معادله دو جواب نامثبت داشته باشد، که در این صورت

باید مجموع آن‌ها نامثبت باشد، یعنی $-\frac{b}{a} \leq 0$ ، که ممکن نیست، زیرا $-\frac{b}{a} = 2$.

بنابراین حداکثر مقدار m برابر ۲ است.

۲۰۶۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\Delta = 4m^2 + 4m + 8 = (2m+1)^2 + 7 > 0$$

بنابراین معادله حتماً دو جواب دارد. از طرف دیگر، برای اینکه معادله دو جواب منفی داشته باشد، باید مجموع جواب‌ها منفی و حاصل ضرب آن‌ها مثبت باشد.

یعنی باید

$$-\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow 2m < 0 \Rightarrow m < 0, \quad \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow -m-2 > 0 \Rightarrow m < -2$$

پس اگر $m < -2$ ، معادله دو جواب منفی دارد. اکنون توجه کنید که اگر

$m = -2$ ، معادله به صورت $x^2 + 4x = 0$ درمی‌آید که یک جواب آن $x = 0$

و جواب دیگر $x = -4$ است. پس در این حالت نیز معادله جواب مثبت ندارد.

بنابراین اگر $m > -2$ ، معادله یا دو جواب مثبت، یا دو جواب مختلف‌العلامت

دارد، که در هر صورت یکی از جواب‌ها مثبت است.

۲۰۶۵- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $x^2 = t$ ، معادله مورد نظر می‌شود

$$t^2 - 4t - 12 = 0$$

$$t^2 - 4t - 12 = 0 \Rightarrow (t-6)(t+2) = 0$$

$$t = -2 \quad (\text{غ.ق.ق.}), \quad t = 6 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر ۶- است.

۲۰۶۶- گزینه ۱ فرض می‌کنیم $x^2 = t$. در این صورت معادله مورد

نظر می‌شود $t^2 + (2m-1)t - 2m = 0$. چون معادله اصلی چهار جواب دارد،

پس این معادله درجه دوم دو جواب مثبت دارد. بنابراین

$$\Delta > 0 \Rightarrow (2m-1)^2 + 8m > 0 \Rightarrow (2m+1)^2 > 0 \Rightarrow m \neq -\frac{1}{2}$$

$$\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow -2m > 0 \Rightarrow m < 0$$

$$-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -(2m-1) > 0 \Rightarrow 2m-1 < 0 \Rightarrow m < \frac{1}{2}$$

بنابراین مجموعه مقادیر m به صورت $\{-\frac{1}{2}, 0, \infty\}$ است.

۲۰۶۷- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $x^2 = t$ ، به معادله $t^2 - kt + \frac{3-2k}{4} = 0$

می‌رسیم. اگر این معادله فقط یک جواب مثبت مانند t_1 داشته باشد، معادله

اصلی دو جواب به صورت $x = \pm\sqrt{t_1}$ دارد:

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ t_1 = -\frac{b}{2a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2 - (3-2k) = 0 \\ \frac{k}{2} > 0 \Rightarrow k > 0 \end{cases}$$

$$k^2 + 2k - 3 = 0 \Rightarrow k = -3 \quad (\text{غ.ق.ق.}), \quad k = 1$$

همچنین اگر معادله درجه دوم یک جواب منفی و یک جواب مثبت داشته باشد،

جواب منفی قابل قبول نیست، چون x^2 نمی‌تواند منفی باشد. بنابراین معادله

اصلی دو جواب به صورت $x = \pm\sqrt{t}$ دارد، پس

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{3-2k}{4} < 0 \Rightarrow 3-2k < 0 \Rightarrow k > \frac{3}{2}$$

بنابراین $k > \frac{3}{2}$ یا $k = 1$ جواب مسئله است.

۲۰۶۸- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $x^2 = t$ ، آن‌گاه $x = \pm\sqrt{t}$ ، $t \geq 0$ و

معادله به شکل زیر در می‌آید

$$t^2 - 2mt + m^2 - 4 = 0 \quad (*)$$

در این معادله $\Delta = 4m^2 - 4(m^2 - 4) = 16 > 0$. بنابراین معادله (*) به ازای

هر مقدار m دو جواب حقیقی دارد. اگر هر دو جواب این معادله منفی باشند،

آن‌گاه معادله اولیه جواب حقیقی نخواهد داشت. بنابراین اگر t_1 و t_2

جواب‌های معادله (*) باشند، باید

$$t_1 + t_2 < 0 \Rightarrow 2m < 0 \Rightarrow m < 0$$

$$t_1 t_2 > 0 \Rightarrow m^2 - 4 > 0 \Rightarrow m < -2 \quad \text{یا} \quad m > 2$$

بنابراین کافی است $m < -2$ تا معادله اولیه جواب حقیقی نداشته باشد.

۲۰۶۱- گزینه ۳ چون $x = \frac{1}{3}$ و $x = -1$ جواب‌های معادله هستند، پس

$$\begin{cases} 6(\frac{1}{27}) - 5(\frac{1}{9}) + a(\frac{1}{3}) + b = 0 \\ 6(-1) - 5 \times 1 - a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 3b = 1 \\ a - b = -11 \end{cases}$$

بنابراین $a = -8$ و $b = 3$. پس معادله به شکل $6x^3 - 5x^2 - 8x + 3 = 0$

در می‌آید که چون $\frac{1}{3}$ و -1 جواب‌های آن هستند، پس $3x-1$ و $x+1$

عامل‌های عبارت سمت چپ معادله هستند و به کمک تقسیم می‌توان نوشت

$$(3x-1)(x+1)(2x-3) = 0 \quad \text{بنابراین جواب دیگر معادله} \quad x = \frac{3}{2} \quad \text{است. در}$$

$$\text{نتیجه} \quad k = \frac{3}{2} \quad \text{و} \quad \frac{ab}{k} = \frac{(-8) \times 3}{\frac{3}{2}} = -16$$

۲۰۶۲- گزینه ۴ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^3 + 8 + x^2 - 5x - 14 = 0 \Rightarrow (x+2)(x^2 - 2x + 4) + (x+2)(x-7) = 0$$

$$(x+2)(x^2 - 2x + 4 + x - 7) = 0 \Rightarrow (x+2)(x^2 - x - 3) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2, \quad x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

پس حاصل ضرب جواب‌های منفی معادله برابر است با

$$\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)(-2) = \sqrt{13} - 1$$

۲۰۶۳- گزینه ۴ واضح است که $x = -1$ جواب معادله است. پس

$x+1$ عامل عبارت سمت چپ معادله است

$$x^3 + x^2 + x^2 - mx - m - 1 = 0 \Rightarrow x^2(x+1) + (x+1)(x-m-1) = 0$$

$$(x+1)(x^2 + x - (m+1)) = 0$$

برای اینکه معادله سه جواب داشته باشد، باید معادله $x^2 + x - (m+1) = 0$

دو جواب داشته باشد و هیچ یک از این جواب‌ها برابر -1 نباشند. بنابراین

$$\Delta = 1 + 4(m+1) > 0 \Rightarrow 5 + 4m > 0 \Rightarrow m > -\frac{5}{4}$$

$$(-1)^2 - 1 - (m+1) \neq 0 \Rightarrow m \neq -1$$

پس $m \in (-\frac{5}{4}, +\infty) - \{-1\}$.

۲۰۶۴- گزینه ۲ راه حل اول اگر فرض کنیم $t = x^2 \geq 0$ ، معادله

به صورت $t^2 - 5t - 3 = 0$ در می‌آید که جواب‌های آن $t = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$ هستند.

جواب $\frac{5 - \sqrt{37}}{2}$ قابل قبول نیست چون عددی منفی است. بنابراین

$$x^2 = \frac{5 + \sqrt{37}}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5 + \sqrt{37}}{2}}$$

یعنی معادله دو جواب دارد.

راه حل دوم اگر فرض کنیم $t = x^2 \geq 0$ ، معادله به صورت $t^2 - 5t - 3 = 0$ در

می‌آید، که در آن $\frac{c}{a} < 0$ است. پس معادله دو جواب مختلف علامت دارد.

که با توجه به فرض $t \geq 0$ ، جواب منفی غیرقابل قبول و جواب مثبت قابل قبول

خواهد بود و $x = \pm\sqrt{t}$. پس معادله داده شده دو جواب دارد.

حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر $\frac{-1 \cdot a - 3}{4}$ است. پس

$$\frac{-1 \cdot a - 3}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow -1 \cdot a = 10 \Rightarrow a = -1$$

۲۰۷۶- گزینه ۲ دو طرف معادله را در $x^2 - 1$ ضرب می‌کنیم:

$$x - 1 - 2 = a(x^2 - 1) \Rightarrow ax^2 - x + 3 - a = 0 \quad (1)$$

اگر در معادله (۱) شرط $\Delta < 0$ برقرار باشد، معادله جواب ندارد. بنابراین

$$\Delta = 1 - 4a(3 - a) < 0 \Rightarrow 4a^2 - 12a + 1 < 0 \Rightarrow \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} < a < \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}$$

پس به ازای اعداد طبیعی $a = 1$ و $a = 2$ معادله جواب ندارد.

توجه کنید که در حالت‌های زیر هم معادله اصلی جواب ندارد ولی این حالت‌ها در این مسئله اتفاق نمی‌افتند.

(۱) $x = 1$ ریشه مضاعف معادله (۱) باشد.

(۲) $x = -1$ ریشه مضاعف معادله (۲) باشد.

(۳) $x = 1$ و $x = -1$ هر دو جواب‌های معادله (۱) باشند.

۲۰۷۷- گزینه ۴ فرض می‌کنیم $\frac{2x+1}{x} = t$. در این صورت معادله مورد

نظر به معادله زیر تبدیل می‌شود

$$t + \frac{-6}{t} = 5 \Rightarrow t^2 - 5t - 6 = 0 \Rightarrow t = -1, t = 6$$

بنابراین

$$t = -1 \Rightarrow \frac{2x+1}{x} = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$t = 6 \Rightarrow \frac{2x+1}{x} = 6 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

از آنجایی که هیچ کدام از این دو مقدار باعث صفر شدن مخرج‌ها در معادله اصلی نمی‌شوند، هر دو قابل قبول هستند. بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر برابر است با $-\frac{1}{12}$.

۲۰۷۸- گزینه ۱ اگر این عدد x باشد، آن‌گاه $x + \frac{1}{x} = 4$. بنابراین

$$x^2 + 1 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$$

بنابراین دو عدد $2 + \sqrt{3}$ و $2 - \sqrt{3}$ شرط مورد نظر را دارند که $2 - \sqrt{3}$ کوچک‌ترین عددی است که این شرط را دارد.

۲۰۷۹- گزینه ۲ فرض کنید زمان رفت برابر t و سرعت رفت برابر v

باشد. در این صورت زمان برگشت برابر $t + \frac{4}{q}$ و سرعت برگشت برابر $v - 5$

است. چون فاصله دو شهر برابر ۲۰۰ کیلومتر است، پس تساوی‌های $200 = vt$

$$\text{و } 200 = (v - 5)\left(t + \frac{4}{q}\right) \text{ برقرارند. بنابراین}$$

$$v = \frac{200}{t} \Rightarrow 200 = \left(\frac{200}{t} - 5\right)\left(t + \frac{4}{q}\right) \Rightarrow 200 = 200 + \frac{800}{qt} - 5t - \frac{200}{q}$$

$$800 - 45t^2 - 20t = 0 \Rightarrow 9t^2 + 4t - 160 = 0$$

$$(9t + 40)(t - 4) = 0 \Rightarrow t = 4 \text{ ساعت}$$

بنابراین زمان رفت ۴ ساعت است.

۲۰۶۹- گزینه ۲ فرض می‌کنیم $x^2 + x = t$. در این صورت

$$t^2 - 18t + 72 = 0 \Rightarrow (t - 6)(t - 12) = 0$$

$$t = 6 \Rightarrow x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x - 2)(x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -3$$

$$t = 12 \Rightarrow x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x - 3)(x + 4) = 0 \Rightarrow x_3 = 3, x_4 = -4$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله مورد نظر برابر است با

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2$$

۲۰۷۰- گزینه ۱ فرض می‌کنیم $x^2 - 7x + 11 = t$. در نتیجه $t^2 = 3t + 4$.

بنابراین $t = -1, 4$ ، پس به معادله‌های زیر می‌رسیم

$$x^2 - 7x + 11 = -1 \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x = 3, 4$$

$$x^2 - 7x + 11 = 4 \Rightarrow x^2 - 7x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{21}}{2}$$

پس معادله مورد نظر چهار جواب دارد.

۲۰۷۱- گزینه ۱ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$x^2 + 1 = 2(x + 1) \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

جواب‌های معادله بالا $x = 1 + \sqrt{2}$ و $x = 1 - \sqrt{2}$ هستند. پس جواب بزرگ‌تر معادله $1 + \sqrt{2}$ است.

۲۰۷۲- گزینه ۲ معادله را به شکل $\frac{x}{x^4 - x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{x^3 - 1}$

می‌نویسیم. بنابراین

$$x^4 - x = x^4 - x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = -1$$

۲۰۷۳- گزینه ۳ طرفین معادله را در $(x + 1)(x - 1)$ ضرب و آن را ساده

می‌کنیم:

$$x + 1 + 2(x - 1) = 2(x - 1)(x + 1) \Rightarrow 3x - 1 = 2x^2 - 2 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 1 = 0$$

معادله بالا دو جواب دارد که ۱ و -۱ از آن‌ها نیستند و مجموع آن‌ها برابر $\frac{3}{2}$ است.

۲۰۷۴- گزینه ۳ فرض کنید x_1 جواب دیگر معادله باشد. ابتدا معادله

داده شده را این‌طور می‌نویسیم:

$$\frac{5x - 2 - 4a}{x^2 - (a + 2)x + 2a} = 1 \Rightarrow x^2 - (a + 7)x + 6a + 2 = 0 \quad (1)$$

چون $x = 5$ جواب معادله است، پس

$$25 - 5(a + 7) + 6a + 2 = 0 \Rightarrow a = 8$$

چون مجموع جواب‌های معادله (۱) برابر $a + 7$ است، پس

$$a + 7 = 5 + x_1 \Rightarrow 15 = 5 + x_1 \Rightarrow x_1 = 10$$

یعنی جواب دیگر معادله ۱۰ است که مخرج هیچ یک از کسرها را صفر نمی‌کند و قابل قبول است.

۲۰۷۵- گزینه ۲ معادله مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\frac{2x - 2a + x + 3}{(x + 3)(x - a)} = 4 \Rightarrow \frac{3x - 2a + 3}{(x + 3)(x - a)} = 4$$

$$3x - 2a + 3 = 4x^2 + (12 - 4a)x - 12a \Rightarrow 4x^2 + (9 - 4a)x - 10a - 3 = 0$$

۲۰۸۵- گزینه ۲) معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{5}{(x-1)(x+4)} - \frac{3}{(x+1)(x+4)} = k$$

$$\frac{5(x+1) - 3(x-1)}{(x-1)(x+1)(x+4)} = k \Rightarrow \frac{2(x+4)}{(x-1)(x+1)(x+4)} = k$$

$$k(x^2-1) = 2 \Rightarrow kx^2 - k - 2 = 0$$

حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر $\frac{-k-2}{k}$ است. پس

$$\frac{-k-2}{k} = -4 \Rightarrow 4k = k+2 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

۲۰۸۶- گزینه ۲) اگر فرض کنیم $(x + \frac{2}{x})^2 = t$ ، معادله به شکل زیر درمی‌آید

$$t^2 - 9t - 10 = 0 \Rightarrow t = -1, t = 10$$

چون $t > 0$ ، پس $t = -1$ غیرقابل قبول است. اگر $t = 10$ ، آن‌گاه

$$\begin{cases} x + \frac{2}{x} = \sqrt{10} \Rightarrow x^2 - \sqrt{10}x + 2 = 0, & \Delta = 2 \\ x + \frac{2}{x} = -\sqrt{10} \Rightarrow x^2 + \sqrt{10}x + 2 = 0, & \Delta = 2 \end{cases}$$

هر کدام از معادله‌های بالا دو جواب غیرصفر دارند و جواب‌های معادله اول گزینه جواب‌های معادله دوم هستند. پس معادله اصلی چهار جواب دارد.

۲۰۸۷- گزینه ۴) معادله مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\frac{21}{x^2 + 4x + 10} - (x^2 + 4x + 10) + 10 = 6$$

اگر فرض کنیم $x^2 + 4x + 10 = t$ ، این معادله می‌شود

$$\frac{21}{t} - t + 4 = 0 \xrightarrow{\text{ضرب در } t} 21 - t^2 + 4t = 0$$

$$t^2 - 4t - 21 = 0 \Rightarrow (t-7)(t+3) = 0 \Rightarrow t = -3, t = 7$$

بنابراین

$$t = -3 \Rightarrow x^2 + 4x + 10 = -3 \Rightarrow x^2 + 4x + 13 = 0 \quad (\Delta < 0) \text{ جواب ندارد.}$$

$$t = 7 \Rightarrow x^2 + 4x + 10 = 7 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(x+1)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -1, x = -3$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله مورد نظر برابر -4 است.

۲۰۸۸- گزینه ۲) اگر طول ضلع‌های زاویه قائمه مثلث را a و b و طول وتر

آن را c فرض کنیم، آن‌گاه

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \frac{4}{3}a$$

بنابراین طول وتر برابر است با

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + \frac{16}{9}a^2} = \sqrt{\frac{25}{9}a^2} = \frac{5}{3}a$$

بنابراین

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{47}{30} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{\frac{4}{3}a} + \frac{1}{\frac{5}{3}a} = \frac{47}{30} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{3}{4a} + \frac{3}{5a} = \frac{47}{30}$$

دو طرف معادله را در $60a$ ضرب می‌کنیم

$$60 + 45 + 36 = 94a \Rightarrow a = \frac{141}{94} = \frac{3}{2} \quad b = \frac{4}{3}a = 2$$

بنابراین مساحت مثلث برابر است با $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 2 = \frac{3}{2}$

۲۰۸۰- گزینه ۱) نسبت طول به عرض در مستطیل طلایی برابر $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

است. اگر طول این مستطیل برابر x و عرض آن برابر y باشد، آن‌گاه

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)y$$

از طرف دیگر نسبت محیط به مساحت مستطیل برابر $3 - \sqrt{5}$ است. بنابراین

$$\frac{2(x+y)}{xy} = 3 - \sqrt{5} \Rightarrow 2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)y + y = (3 - \sqrt{5})xy$$

$$2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1\right) = (3 - \sqrt{5})x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}+3}{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+3}{3-\sqrt{5}} \times \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(3+\sqrt{5})^2}{9-5} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

۲۰۸۱- گزینه ۴) معادله مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$(x-1)\left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-5}\right) = 0 \Rightarrow (x-1)\left(\frac{x-5+x-3}{(x-3)(x-5)}\right) = 0$$

$$(x-1)\left(\frac{2x-8}{(x-3)(x-5)}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2(x-1)(x-4)}{(x-3)(x-5)} = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله مورد نظر ۱ و ۴ هستند و مجموع آن‌ها ۵ است.

۲۰۸۲- گزینه ۱) معادله داده شده را این‌طور می‌نویسیم:

$$\frac{x-12}{x^2+3x} = \frac{2}{x} + \frac{5}{x+3} = \frac{2x+6+5x}{x^2+3x} = \frac{7x+6}{x^2+3x}$$

در نتیجه، با فرض $x \neq 0, -3$

$$x-12 = 7x+6 \Rightarrow 6x = -18 \Rightarrow x = -3$$

که قابل قبول نیست. بنابراین معادله جواب ندارد.

۲۰۸۳- گزینه ۳) معادله داده شده را این‌طور می‌نویسیم

$$\frac{3x-2-2a}{x^2-(a+2)x+2a} = 1 \Rightarrow x^2 - (a+5)x + 4a+2 = 0 \quad (1)$$

چون $x=6$ جواب معادله است، پس

$$36 - 6(a+5) + 4a + 2 = 0 \Rightarrow -2a + 8 = 0 \Rightarrow a = 4$$

چون مجموع جواب‌های معادله (۱) برابر $a+5=9$ است، پس جواب دیگر معادله مورد نظر برابر ۳ است.

۲۰۸۴- گزینه ۴) راه حل اول دو طرف معادله داده شده را در

$$(x-1)(x^2-x+1)$$

ضرب می‌کنیم:

$$(x-1)(x^2+x+1) = \frac{a}{a+1}(x+1)(x^2-x+1)$$

$$x^3 - 1 = \frac{a}{a+1}(x^3 + 1) \Rightarrow (a+1)x^3 - a - 1 = ax^3 + a$$

$$x^3 = 2a+1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2a+1}$$

اگر $\sqrt[3]{2a+1}$ ریشه مخرج کسر در معادله اصلی باشد، قابل قبول نیست. در

غیر این صورت قابل قبول است و معادله یک جواب دارد. ریشه مخرج کسر

$$\sqrt[3]{2a+1} = 1 \Rightarrow 2a+1 = 1 \Rightarrow a = 0$$

$x=1$ است، پس

توجه کنید که اگر $a=0$ ، آن‌گاه معادله به صورت $x^2+x+1=0$ درمی‌آید که

جواب ندارد. همچنین اگر $a=-1$ ، آن‌گاه سمت راست معادله تعریف

نمی‌شود. بنابراین برای $a \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$ معادله همواره یک جواب دارد.

راه حل دوم چون $a+1$ در مخرج کسر است، پس $a \neq -1$. بنابراین گزینه‌های

(۱) و (۲) رد می‌شوند. برای یافتن گزینه صحیح کافی است $a=0$ را امتحان کنیم.

به ازای $a=0$ معادله می‌شود $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = 0$ که جواب ندارد. پس $a \neq 0$.

۲۰۹۴- گزینه ۱ راه حل اول ابتدا نامعادله‌ها را به صورت‌های زیر

بازنویسی می‌کنیم:

$$x - x^3 > 0 \Rightarrow x(1-x)(1+x) > 0, \quad x - x^2 < 0 \Rightarrow x(1-x) < 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 0 \end{cases}$$

در نتیجه مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر، با فرض $x > 1$ یا $x < 0$ با مجموعه جواب‌های نامعادله $1+x < 0$ که بازه $(-\infty, -1)$ است، برابر است. اشتراک مجموعه‌های $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ و $(-\infty, -1)$ برابر $(-\infty, -1)$ است که مجموعه جواب نامعادله مورد نظر مسئله است.

راه حل دوم عدد $-\frac{1}{2}$ در نامعادله صدق نمی‌کند ولی عدد -2 در آن صدق

می‌کند پس گزینه (۱) جواب است.

۲۰۹۵- گزینه ۴ توجه کنید که می‌خواهیم نامعادله زیر را حل کنیم:

$$x(x^2 - 4x - 5)^2(x^2 - 1) < 0$$

$$x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1), \quad x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

در نتیجه طرف چپ نامعادله بالا به صورت زیر درمی‌آید:

$$y = x(x+1)^3(x-5)^2(x-1)$$

با تشکیل جدول تعیین علامت، نامعادله را حل می‌کنیم:

x	$-\infty$	-1	0	1	5	$+\infty$
y		-	+	-	+	+

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله برابر است با $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$. پس

$$a = -1, \quad b = 0 \quad \text{و در نتیجه} \quad a+b = -1$$

۲۰۹۶- گزینه ۳ توجه کنید که $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$. دلتای

عبارت $x^2 - x + 1$ منفی است ($\Delta = -3$). در نتیجه همواره $x^2 - x + 1 > 0$.

بنابراین مسئله به یافتن مجموعه جواب‌های نامعادله $y = \frac{x+1}{(x-2)(x-4)} \leq 0$

تبدیل می‌شود. جدول تعیین علامت y به شکل زیر است:

x	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$
y		-	+	-	+

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر $(2, 4) \cup (-1, -\infty)$ است.

$$\text{پس } a = -1 \text{ و } b = 4 \text{ و در نتیجه } a+b = 3$$

۲۰۹۷- گزینه ۲ نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^4 - x^2 - 2 < 0 \Rightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 2) < 0$$

چون مقدار عبارت $x^2 + 1$ همواره مثبت است، پس

$$x^2 - 2 < 0 \Rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

پس مجموعه جواب‌های نامعادله به صورت $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ است. در نتیجه

$$a = -\sqrt{2}, \quad b = \sqrt{2} \Rightarrow ab = -2$$

۲۰۹۸- گزینه ۲ راه حل اول توجه کنید که اگر فرض کنیم

$P(x) = x^2 + (a-1)x + 2a - 6$ جدول تعیین علامت باید به صورت زیر باشد

x	$-\infty$	x_1	-3	x_2	$+\infty$
P(x)		+	-	+	

پس باید $P(x)$ به ازای $x = -3$ منفی باشد. بنابراین

$$P(-3) = (-3)^2 - 3(a-1) + 2a - 6 < 0 \Rightarrow a > 6$$

۲۰۸۹- گزینه ۱ فرض می‌کنیم تعداد افراد کلاس، n نفر باشند، در نتیجه

هزینه سرانه اولیه برابر $\frac{Y_{00}}{n}$ (برحسب هزار تومان) است. با افزودن پنج نفر از

دانش‌آموزان کلاس دیگر هزینه سرانه برابر با $\frac{Y_{00}}{n} - 7$ می‌شود. در نتیجه

$$(n+5)(\frac{Y_{00}}{n} - 7) = Y_{00} \quad \text{بنابراین}$$

$$(\frac{Y_{00} - 7n}{n})(n+5) = Y_{00} \Rightarrow (Y_{00} - 7n)(n+5) = Y_{00}n$$

$$n^2 + 5n - 500 = 0 \Rightarrow (n+25)(n-20) = 0 \Rightarrow n = -25, n = 20$$

فقط جواب $n = 20$ قابل قبول است.

۲۰۹۰- گزینه ۱ ۲۰ کیلوگرم از محلول اولیه شکر و ۸۰ کیلوگرم آن آب

است. اگر نیمی از آب را تبخیر کنیم، ۴۰ کیلوگرم آب باقی می‌ماند. اگر x کیلوگرم

شکر به آن اضافه کنیم، جرم شکر $20+x$ و جرم محلول $60+x$ می‌شود. پس

$$\frac{20+x}{60+x} = \frac{40}{100} \Rightarrow \frac{20+x}{60+x} = \frac{2}{5} \Rightarrow 100+5x = 120+2x \Rightarrow 3x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{3}$$

۲۰۹۱- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$y = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2)$$

بنابراین جدول تعیین علامت عبارت y به صورت زیر است.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y		-	+	-	+

۲۰۹۲- گزینه ۱ چون عبارت یک ریشه دارد و در دو طرف ریشه علامت آن

متفاوت است، پس باید عبارت از درجه اول باشد. یعنی ضریب x^2 باید صفر باشد:

$$m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2$$

اگر $m = 2$ ، عبارت به صورت $y = 2nx + 2$ است. چون $x = 4$ ریشه عبارت

است، پس

$$0 = 2n \times 4 + 2 \Rightarrow n = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + 2$$

در این صورت جدول تعیین علامت عبارت به صورت زیر است و این حالت

قابل قبول نیست.

x	$-\infty$	4	$+\infty$
y		+	-

اگر $m = -2$ ، عبارت به صورت $y = -2nx - 2$ است. چون $x = 4$ ریشه

عبارت است، پس $-2 = -2n \times 4 - 2 \Rightarrow n = -\frac{1}{4}$. بنابراین $mn = \frac{1}{4}$.

۲۰۹۳- گزینه ۱ با توجه به جدول، $x = 2$ و $x = 1$ ریشه‌های عبارت هستند:

$$x = 1 \Rightarrow m + 2 - (m+2)^2 + n = 0 \quad (*)$$

$$x = 2 \Rightarrow 4(m+2) - 2(m+2)^2 + n = 0$$

دو طرف تساوی‌های بالا را از هم کم می‌کنیم:

$$(m+2)^2 - 3(m+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m+2=0 \Rightarrow m=-2 \\ m+2=3 \Rightarrow m=1 \end{cases}$$

به ازای $m = -2$ نتیجه می‌شود $y = n$ که در این صورت علامت y ثابت

است و به ازای $m = 1$ از معادله (*) مقدار n به دست می‌آید

$$3 - 9 + n = 0 \Rightarrow n = 6$$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{4}{3}$	0	2	$+\infty$
y		+	-	+	-	+

با توجه به جدول تعیین علامت بالا، مجموعه جواب‌های نامعادله به صورت $[-2, -\frac{4}{3}] \cup [0, 2]$ است که اعداد صحیح ۰، ۱، ۲ و -۲ را شامل می‌شود.

عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-3}{x+2}, \quad x \neq 2$$

بنابراین جدول تعیین علامت عبارت به شکل زیر است:

x	$-\infty$	-2	2	3	$+\infty$
y		+	-	-	+

بنابراین y به ازای هر x که در مجموعه $\{2, 3\} - (-2, 3)$ باشد، منفی است. پس

$$\frac{a+b}{c} = \frac{1}{2} \text{ در نتیجه } c=2 \text{ و } b=3, a=-2$$

مجموعه جواب‌های نامعادله $ax-b > 0$ به یکی از دو

صورت $(-\infty, \frac{b}{a})$ یا $(\frac{b}{a}, +\infty)$ است. با توجه به فرض مسئله،

$$a > 0, \frac{b}{a} = 2 \Rightarrow 2a = b$$

بنابراین $\frac{ax+b}{x-2} = a(\frac{x+2}{x-2})$. چون $a > 0$ ، کافی است مجموعه جواب‌های

نامعادله $\frac{x+2}{x-2} < 0$ را بیابیم که بازه $(-2, 2)$ است.

نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{9}{x+3} + 5 - x < 0 \Rightarrow \frac{9 + (5-x)(x+3)}{x+3} < 0$$

$$\frac{-x^2 + 2x + 24}{x+3} < 0 \Rightarrow \frac{(x-6)(x+4)}{x+3} > 0$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر، مجموعه جواب‌های نامعادله به صورت $(-4, -3) \cup (6, +\infty)$ است.

x	$-\infty$	-4	-3	6	$+\infty$
y		-	+	-	+

پس $a = -4$ و $b = 6$ و در نتیجه $a+b=2$.

اولاً باید ضریب x^2 منفی باشد. پس $m < 0$ ، ثانیاً باید $\Delta < 0$.

$$1 - 4m^2 < 0 \Rightarrow m^2 > \frac{1}{4} \Rightarrow |m| > \frac{1}{2} \Rightarrow m > \frac{1}{2} \text{ یا } m < -\frac{1}{2}$$

بنابراین نتیجه می‌شود $m < -\frac{1}{2}$.

می‌خواهیم به ازای هر مقدار x نابرابری

$-2 < mx^2 - 2mx + 4 > 0$ برقرار باشد، یعنی $mx^2 - 2mx + 4 > 0$. بنابراین اگر $m \neq 0$ ، باید $m > 0$ و $\Delta < 0$. پس

$$\Delta = (-2m)^2 - 16m < 0 \Rightarrow m(m-4) < 0$$

با توجه به جدول زیر، باید $0 < m < 4$.

m	$-\infty$	0	4	$+\infty$
m(m-4)		+	-	+

از طرف دیگر، اگر $m = 0$ آن‌گاه عبارت به صورت $y = 2$ است که از -۲ بزرگ‌تر است. بنابراین $0 \leq m < 4$.

راه حل دوم ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^2 + (a-1)x + 2(a-3) = (x+a-3)(x+2) = 0$$

$$\begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x+a-3=0 \Rightarrow x=3-a \end{cases}$$

$$x_1 < -3 < x_2 \Rightarrow x_1 = 3-a, x_2 = -2$$

$$x_1 = 3-a < -3 \Rightarrow a > 6$$

توجه کنید که اگر $m = 0$ ، آن‌گاه عبارت برابر $-2x$

خواهد بود که همواره مثبت نیست. اگر $m \neq 0$ ، آن‌گاه باید ضریب x^2 مثبت و Δ منفی باشد. پس

می‌خواهیم به ازای هر مقدار x نابرابری

$-6 < mx^2 - 2mx + 2 > 0$ برقرار باشد، یعنی $mx^2 - 2mx + 8 > 0$. بنابراین اگر $m \neq 0$ ، باید $m > 0$ و $\Delta < 0$. پس

$$\Delta = (-2m)^2 - 32m < 0 \Rightarrow m(m-8) < 0$$

با توجه به جدول زیر، باید $0 < m < 8$.

m	$-\infty$	0	8	$+\infty$
m(m-8)		+	-	+

از طرف دیگر، اگر $m = 0$ ، آن‌گاه عبارت به صورت $y = 2$ است که از -۶ بزرگ‌تر

است. بنابراین $0 \leq m < 8$. پس m می‌تواند هشت مقدار صحیح داشته باشد.

عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$y = x^2 - 3x^2 - 4 = (x^2 + 1)(x^2 - 4)$$

چون $x^2 + 1$ همواره مثبت است، پس کافی است $x^2 - 4$ را تعیین علامت کنیم:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
y		+	-	+

ریشه عبارت را به دست می‌آوریم:

$$m^2 x + |m| = 0 \Rightarrow x = \frac{-|m|}{m^2} = \frac{-1}{|m|}$$

ضریب x عددی مثبت است، پس جدول تعیین علامت به شکل زیر است:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{ m }$	$+\infty$
y		-	+

باید نامعادله‌های $x^2 - 3x^2 \leq -4$ و $x^2 - 3x^2 \geq -4$

را حل کنیم و بین مجموعه جواب‌های آن‌ها اشتراک بگیریم:

$$x^2 - 3x^2 \leq -4 \Rightarrow x^2(x-3) \leq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

$$x^2 - 3x^2 + 4 \geq 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4) \geq 0$$

$$(x+1)(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

بنابراین $-1 \leq x \leq 3$ مجموعه جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر است. پس

$a = -1$ و $b = 3$ و در نتیجه $a+b=2$. توجه کنید که

$$x^3 - 3x^2 + 4 = x^3 + 1 - 3x^2 + 3 = (x^3 + 1) - 3(x^2 - 1)$$

$$= (x+1)(x^2 - x + 1) - 3(x-1)(x+1) = (x+1)(x^2 - 4x + 4)$$

نامعادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(x^2 - 2x - 4)^2 - 4(x^2 - 2)^2 \geq 0$$

$$(x^2 - 2x - 4 + 2x^2 - 4)(x^2 - 2x - 4 - 2x^2 + 4) \geq 0$$

$$(3x^2 - 2x - 8)(-x^2 - 2x) \geq 0 \Rightarrow -x(3x+4)(x-2)(x+2) \geq 0$$

$$y = x(3x+4)(x-2)(x+2) \leq 0$$

۲۱۱۰- گزینه ۳ نابرابری را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x^2 + mx + m}{x^2 - x + 1} - 3 \leq 0 \Rightarrow \frac{-2x^2 + (m+3)x + m - 3}{x^2 - x + 1} \leq 0$$

چون به ازای هر x نابرابری $x^2 - x + 1 > 0$ برقرار است، پس کافی است نامعادله $-2x^2 + (m+3)x + m - 3 \leq 0$ برای هر x برقرار باشد. بنابراین

$$\Delta = (m+3)^2 + 8(m-3) \leq 0 \Rightarrow m^2 + 14m - 15 \leq 0$$

$$(m-1)(m+15) \leq 0 \Rightarrow -15 \leq m \leq 1$$

پس حداقل مقدار m برابر -15 است.

۲۱۱۱- گزینه ۱ دو طرف معادله را به توان چهار می‌رسانیم:

$$2x+1 = (2x-1)^2 \Rightarrow 2x+1 = 4x^2 + 1 - 4x$$

$$4x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{3}{2}$$

واضح است که $x = 0$ قابل قبول نیست، زیرا در معادله اصلی صدق نمی‌کند ولی $x = \frac{3}{2}$ در معادله اولیه صدق می‌کند. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۲۱۱۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که باید $\frac{1}{p}x + 1 \geq 0$ و در نتیجه

$x \geq -2$. همچنین باید $4 - x^2 \geq 0$ و در نتیجه $-2 \leq x \leq 2$. اکنون دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$4 - x^2 = \left(\frac{1}{p}x + 1\right)^2 \Rightarrow 4 - x^2 = \frac{1}{p^2}x^2 + x + 1$$

$$5x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x+2)(5x-6) = 0 \Rightarrow x = -2, x = \frac{6}{5}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند. پس مجموع جواب‌های معادله برابر $-\frac{4}{5}$ است.

۲۱۱۳- گزینه ۲ اگر دو طرف معادله مورد نظر را به توان دو برسانیم،

نتیجه می‌شود

$$4 - 3x - x^2 = x^2 + 8x + 16 \Rightarrow 2x^2 + 11x + 12 = 0 \Rightarrow x = -4, x = -\frac{3}{2}$$

هر دو جواب در معادله اصلی صدق می‌کنند، پس حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر ۶ است.

۲۱۱۴- گزینه ۲ دو طرف معادله داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^4 + 2x - 5 = (1+x)^2 \Rightarrow x^4 - x^2 - 6 = 0 \Rightarrow (x^2 - 3)(x^2 + 2) = 0$$

چون $x^2 + 2 \neq 0$ ، پس $x^2 - 3 = 0$ بنابراین $x = \pm\sqrt{3}$.

$x = \sqrt{3}$ در معادله صدق می‌کند، اما $x = -\sqrt{3}$ در معادله صدق نمی‌کند، زیرا به ازای $x = -\sqrt{3}$ سمت راست معادله منفی است و سمت چپ آن مثبت است. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۲۱۱۵- گزینه ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{2x-1} = 2 - 2\sqrt{x} \quad (*)$$

سپس دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$2x - 1 = 4 + 4x - 8\sqrt{x} \Rightarrow 2x + 5 = 8\sqrt{x}$$

مجدداً دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$4x^2 + 20x + 25 = 64x \Rightarrow 4x^2 - 44x + 25 = 0$$

$$x = \frac{11-4\sqrt{6}}{2}, x = \frac{11+4\sqrt{6}}{2}$$

در معادله (*) طرف راست باید نامنفی باشد، پس

$$2 - 2\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

بنابراین جواب $\frac{11+4\sqrt{6}}{2}$ قابل قبول نیست و $\frac{11-4\sqrt{6}}{2}$ جواب معادله است.

۲۱۱۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $x = 8$ در معادله صدق می‌کند:

$$\sqrt{8-4a} + \sqrt{8+a} = \sqrt{24+a} \quad (1)$$

دو طرف معادله بالا را به توان دو می‌رسانیم:

$$8 - 4a + 8 + a + 2\sqrt{(8-4a)(8+a)} = 24 + a$$

$$2\sqrt{64 - 24a - 4a^2} = 4a + 8 \Rightarrow \sqrt{64 - 24a - 4a^2} = 2a + 4$$

مجدداً دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$64 - 24a - 4a^2 = 4a^2 + 16a + 16a$$

$$8a^2 + 40a - 48 = 0 \Rightarrow a^2 + 5a - 6 = 0 \Rightarrow a = 1, a = -6$$

جواب $a = -6$ قابل قبول نیست چون در معادله (۱) صدق نمی‌کند. پس a فقط یک مقدار می‌تواند داشته باشد.

۲۱۱۷- گزینه ۱ معادله را به صورت $(\sqrt[3]{x})^4 - 5(\sqrt[3]{x})^2 + 4 = 0$

می‌نویسیم و فرض می‌کنیم $a = (\sqrt[3]{x})^2$. در این صورت

$$a^2 - 5a + 4 = 0 \Rightarrow (a-4)(a-1) = 0$$

$$\begin{cases} a=1 \Rightarrow (\sqrt[3]{x})^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ a=4 \Rightarrow (\sqrt[3]{x})^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm 8 \end{cases}$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر ۶۴ است.

۲۱۱۸- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $t = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ ، معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$t + \frac{1}{t} = 2 \Rightarrow t^2 + 1 = 2t \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0$$

تنها جواب معادله بالا $t = 1$ است. بنابراین

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = 1 \Rightarrow x = \sqrt{x+1} \Rightarrow x - 1 = \sqrt{x} \quad (1)$$

$$x^2 - 2x + 1 = x \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad (\text{غ.ق.})$$

با توجه به معادله (۱) باید $x > 1$ و در نتیجه $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ جواب معادله نیست.

پس فقط $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ جواب معادله است.

۲۱۱۹- گزینه ۳ اگر این عدد x باشد، آن‌گاه $\sqrt{x} = \frac{4}{x}$. بنابراین

$$x = \frac{16}{x^2} \Rightarrow x^3 = 16 \Rightarrow x = \sqrt[3]{16}$$

۲۱۲۰- گزینه ۴ زمانی را که محسن روی خشکی مسیر AD را طی می‌کرده با t_1 و زمان طی کردن مسیر DB روی آب را با t_2 نشان می‌دهیم.

در نتیجه اگر $CD = x$ ، آن‌گاه

$$t_1 = \frac{AD}{v_1} = \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{5}, t_2 = \frac{DB}{v_2} = \frac{8-x}{3}$$

$$\text{در نتیجه } t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{5} + \frac{8-x}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 16}}{5} = \frac{x}{3} \Rightarrow 3\sqrt{x^2 + 16} = 5x \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}}$$

$$9(x^2 + 16) = 25x^2 \Rightarrow 16x^2 = 9 \times 16 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$$

پس $CD = 3 \text{ km}$.

۲۱۲۷- گزینه ۲ یک جواب معادله $x=2$ است، پس $x=2$ باید در

معادله صدق کند

$$\sqrt{2-1}+\sqrt{a-2}=3 \Rightarrow \sqrt{a-2}=2 \Rightarrow a-2=4 \Rightarrow a=6$$

بنابراین معادله به صورت $\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}=3$ است و در نتیجه

$$\sqrt{x-1}-3=-\sqrt{6-x} \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}} x-1+9-6\sqrt{x-1}=6-x$$

$$x+1=3\sqrt{x-1} \Rightarrow x^2+2x+1=9x-9 \Rightarrow x^2-7x+10=0$$

$$(x-2)(x-5)=0 \Rightarrow x=2, x=5$$

هر دو جواب در معادله اصلی صدق می‌کنند، پس معادله دو جواب دارد.

۲۱۲۸- گزینه ۳ معادله را به صورت $x^2+1+6=5\sqrt{x^2+1}$ می‌نویسیم.

اگر فرض کنیم $t=\sqrt{x^2+1}$ ، معادله به صورت $t^2+6=5t$ درمی‌آید که اگر

آن را به صورت $t^2-5t+6=(t-2)(t-3)=0$ بنویسیم، جواب‌های آن

$t=2$ و $t=3$ هستند. بنابراین

$$\sqrt{x^2+1}=2 \Rightarrow x^2+1=4 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

$$\sqrt{x^2+1}=3 \Rightarrow x^2+1=9 \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow x=\pm\sqrt{8}$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر ۲۴ است.

۲۱۲۹- گزینه ۱ اگر فرض کنیم $t=x+\sqrt{x}$ ، معادله به صورت

$$t^2+t-2=(t-1)(t+2)=0$$
 درمی‌آید که اگر آن را به صورت

بنویسیم، $t=1$ و $t=-2$ جواب‌های آن هستند. بنابراین

$$x+\sqrt{x}=-2 \quad (\text{غ.ق.})$$

$$x+\sqrt{x}=1 \Rightarrow \sqrt{x}=1-x \quad (1)$$

$$x=x^2+1-2x \Rightarrow x^2-3x+1=0$$

$$x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad x=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad (\text{غ.ق.})$$

توجه کنید که معادله $x+\sqrt{x}=-2$ جواب ندارد، زیرا عبارت $x+\sqrt{x}$

همواره نامنفی است. همچنین $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ جواب معادله نیست زیرا در

معادله (۱) باید $0 \leq x \leq 1$ ، ولی $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ بزرگ‌تر از ۱ است.

۲۱۳۰- گزینه ۳ طرفین معادله را به توان سه می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$x^3+k=x^3-3x^2+3x-1 \Rightarrow 3x^2-3x+k+1=0$$

برای اینکه معادله بالا دو جواب داشته باشد، باید

$$\Delta > 0 \Rightarrow 9-12(k+1) > 0 \Rightarrow k < -\frac{1}{4}$$

۲۱۳۱- گزینه ۴ چون دو سهمی نقطه مشترک ندارند، معادله

$-x^2+kx=x^2-k$ جواب ندارد. یعنی معادله $2x^2-kx-k=0$ جواب

ندارد. پس

$$\Delta=k^2+8k < 0 \Rightarrow k(k+8) < 0$$

با تعیین علامت عبارت $k(k+8)$ مشخص می‌شود که $-8 < k < 0$.

۲۱۲۱- گزینه ۱ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$x^2+7=(x+2)^2 \Rightarrow x^2+7=x^2+4x+4$$

$$4x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{4}$$

با توجه به اینکه $x=\frac{3}{4}$ در معادله اصلی صدق می‌کند، پس جواب معادله در

بازه $(\frac{1}{4}, 1)$ قرار دارد.

۲۱۲۲- گزینه ۱ برای حل معادله $x^2+1=\sqrt{11x-2}$ ، دو طرف تساوی

را به توان دو می‌رسانیم:

$$(2x+1)^2=(\sqrt{11x-2})^2 \Rightarrow 4x^2+4x+1=11x-2$$

$$4x^2-7x+3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{4}, x=1$$

که هر دو جواب قابل قبول هستند. پس قدرمطلق تفاضل دو جواب برابر $\frac{1}{4}$ است.

۲۱۲۳- گزینه ۲ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را ساده می‌کنیم:

$$1+3x-x^2=1-6x-x^2+x^3 \Rightarrow x^3=9x \Rightarrow x(x^2-9)=0$$

$$x=0, x=3, x=-3$$

جواب $x=-3$ غیر قابل قبول است، زیرا در معادله اولیه صدق نمی‌کند.

بنابراین معادله دو جواب دارد.

۲۱۲۴- گزینه ۱ طرفین معادله را به توان سه می‌رسانیم و آن را ساده می‌کنیم:

$$x^3+2=x^3+3x^2+3x+1 \Rightarrow 3x^2+3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{-3 \pm \sqrt{21}}{6}$$

پس جواب کوچک‌تر معادله $\frac{-3-\sqrt{21}}{6}$ است.

۲۱۲۵- گزینه ۱ معادله را به شکل $\sqrt{x-2}=\sqrt{x+1}-1$ می‌نویسیم و

دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$x-2=x+1+1-2\sqrt{x+1} \Rightarrow \sqrt{x+1}=2 \Rightarrow x+1=4 \Rightarrow x=3$$

$x=3$ در معادله اصلی صدق می‌کند. بنابراین معادله یک جواب دارد.

۲۱۲۶- گزینه ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\sqrt{3x-2}=2-2\sqrt{x} \quad (*)$$

و دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم

$$3x-2=4+4x-8\sqrt{x} \Rightarrow x+6=8\sqrt{x}$$

مجدداً دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$x^2+36+12x=64x \Rightarrow x^2-52x+36=0$$

$$x=26-8\sqrt{10}, x=26+8\sqrt{10}$$

در معادله (*) طرف چپ معادله نامنفی است، پس طرف راست آن نیز نامنفی

است، بنابراین

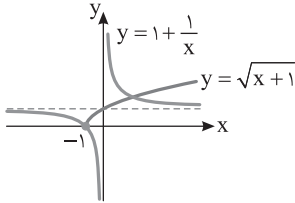
$$3x-2 \geq 0, 2-2\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq 1$$

بنابراین جواب $26+8\sqrt{10}$ قابل قبول نیست و $x=26-8\sqrt{10}$ جواب

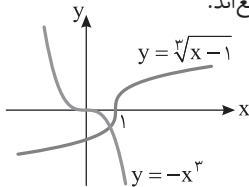
معادله است.

اگر $0 < k < 1$ ، آنگاه خط $y=k$ نمودار تابع $y=1+\frac{1}{|x|}$ را در چهار نقطه قطع می‌کند و معادله مورد نظر چهار جواب دارد.

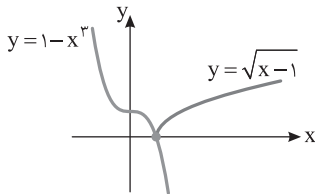
۲۱۳۶- گزینه ۲ به نمودار تابع‌های $y=\sqrt{x+1}$ و $y=1+\frac{1}{x}$ توجه کنید. نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند، بنابراین معادله مورد نظر دو جواب دارد.



۲۱۳۷- گزینه ۱ معادله را به صورت $\sqrt[3]{x-1} = -x^3$ می‌نویسیم. برای رسم نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x-1}$ کافی است نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x}$ را یک واحد به راست منتقل کنیم و برای رسم نمودار تابع $y=-x^3$ کافی است نمودار تابع $y=x^3$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم. با توجه به شکل زیر نمودار دو تابع در یک نقطه متقاطع‌اند.

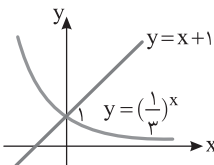


۲۱۳۸- گزینه ۱ راه حل اول معادله را به صورت $\sqrt{x-1} = 1-x^3$ می‌نویسیم. برای رسم نمودار تابع $y=\sqrt{x-1}$ کافی است نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به راست منتقل کنیم و برای رسم نمودار تابع $y=1-x^3$ کافی است نمودار تابع $y=x^3$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم و یک واحد به بالا انتقال دهیم. با توجه به شکل زیر نمودار دو تابع در یک نقطه متقاطع‌اند.

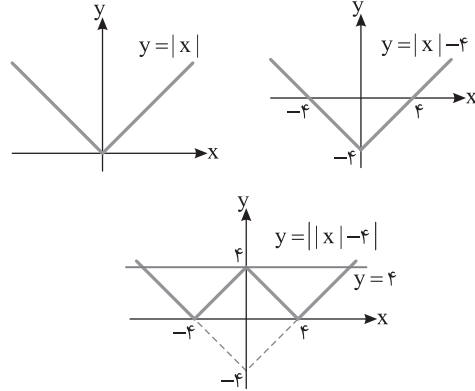


راه حل دوم معادله را به صورت $\sqrt{x-1} = 1-x^3$ می‌نویسیم. برای اینکه عبارت $\sqrt{x-1}$ بامعنی باشد باید $x \geq 1$. از طرف دیگر باید $1-x^3 \geq 0$ و در نتیجه $x^3 \leq 1$. پس $x \leq 1$. بنابراین فقط $x=1$ می‌تواند جواب معادله باشد. واضح است که $x=1$ در معادله صدق می‌کند و جواب معادله است. پس معادله فقط یک جواب دارد.

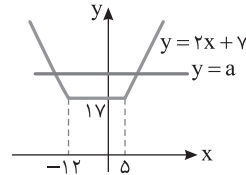
۲۱۳۹- گزینه ۱ معلوم است که $x=0$ جواب معادله مورد نظر است. اکنون اگر نمودار تابع‌های $y=x+1$ و $y=(\frac{1}{3})^x$ را رسم کنیم معلوم می‌شود که معادله مورد نظر فقط یک جواب دارد: $x=0$.



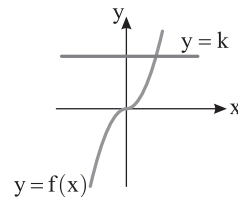
۲۱۳۲- گزینه ۴ تعداد جواب‌های معادله مورد نظر، تعداد نقطه‌های برخورد نمودار تابع‌های $y=|x|-4$ و $y=4$ است. برای رسم نمودار $y=|x|-4$ ابتدا نمودار $y=|x|$ را رسم می‌کنیم. بعد آن را ۴ واحد پایین می‌آوریم تا نمودار $y=|x|-4$ به دست بیاید و در نهایت تصویر قسمتی از آن را که زیر محور x است رسم می‌کنیم و قسمت زیر محور x را حذف می‌کنیم تا نمودار $y=|x|-4$ به دست بیاید.



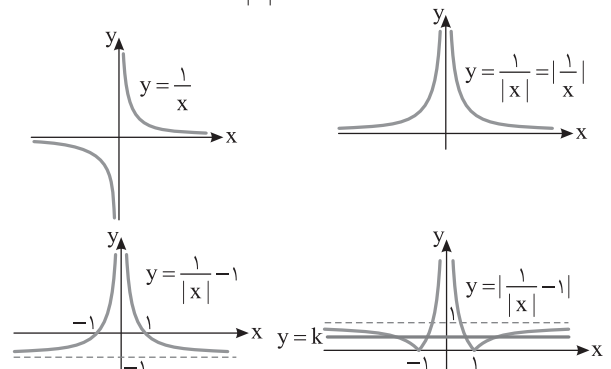
از روی شکل معلوم است که تعداد جواب‌های معادله مورد نظر سه تا است. **۲۱۳۳- گزینه ۳** به نمودار تابع $f(x)=|x+12|+|x-5|$ توجه کنید. اگر $a=17$ ، خط $y=a$ بر قسمتی از نمودار تابع f که یک پاره خط افقی است، منطبق می‌شود و مجموعه جواب‌های معادله $f(x)=a$ نامتناهی می‌شود.



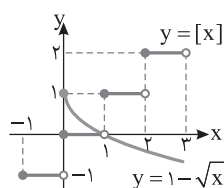
۲۱۳۴- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $f(x)=x|x|=\begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$. نمودار توابع $y=f(x)$ و $y=k$ را رسم می‌کنیم. واضح است که هر چه k باشد، دو نمودار یک نقطه مشترک دارند و معادله $f(x)=k$ یک جواب دارد.



۲۱۳۵- گزینه ۳ ابتدا نمودار تابع $y=|\frac{1}{x}|-1$ را رسم می‌کنیم.



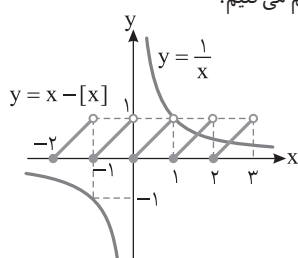
۲۱۴۵- گزینه ۴ معادله را به صورت $[x] = 1 - \sqrt{x}$ می نویسیم و نمودار دو تابع $y = [x]$ و $y = 1 - \sqrt{x}$ را رسم می کنیم.



نمودارها تقاطع ندارند، پس معادله جواب ندارد.

۲۱۴۶- گزینه ۳ با توجه به اینکه $x = 0$ جواب معادله نیست، طرفین

معادله را بر x تقسیم می کنیم: $x - [x] = \frac{1}{x}$. نمودار تابع های $y = \frac{1}{x}$ و $y = x - [x]$ را رسم می کنیم.

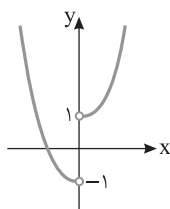


نمودار دو تابع در هیچ نقطه ای با طول منفی تقاطع ندارند ولی در هر یک از بازه های $(1, 2)$ ، $(2, 3)$ ، $(3, 4)$ ، ... و $[k, k+1)$ که $k \in \mathbb{N}$ یک بار تقاطع دارند. پس معادله جواب منفی ندارد ولی مجموعه جواب های مثبت معادله، نامتناهی است.

۲۱۴۷- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

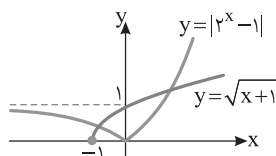
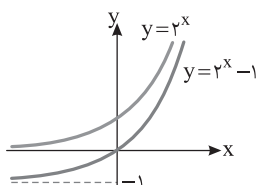
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x}(x^3+1) & x > 0 \\ \frac{x}{-x}(x^3+1) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^3+1 & x > 0 \\ -x^3-1 & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است. از روی این نمودار معلوم می شود که اگر نمودار تابع f خط $y = k$ را در یک نقطه قطع کند، آن گاه $-1 < k \leq 1$.



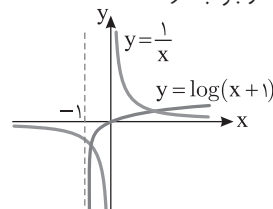
۲۱۴۸- گزینه ۳ نمودار توابع $y = \sqrt{x+1}$ و $y = |2^x - 1|$ را رسم می کنیم.

نمودار دو تابع در دو نقطه متقاطع اند که طول یکی از نقاط مثبت و طول دیگری منفی است. پس معادله یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.



۲۱۴۰- گزینه ۲ معادله را به صورت $\log(x+1) = \frac{1}{x}$ می نویسیم. نمودار

دو تابع $y = \log(x+1)$ و $y = \frac{1}{x}$ را رسم می کنیم. نمودارها در دو نقطه متقاطع اند، پس معادله دو جواب دارد.



۲۱۴۱- گزینه ۳ طول این نقطه مشترک جواب معادله زیر است:

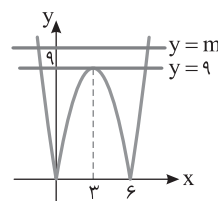
$$x^2 + 2ax + 6b = x^2 + 2bx + 6a$$

$$2(a-b)x = 6(a-b) \Rightarrow x = \frac{6(a-b)}{2(a-b)} = 3$$

توجه کنید که $a \neq b$ ، زیرا اگر $a = b$ ، دو سهمی برهم منطبق می شوند و مجموعه نقطه های مشترک آن ها نامتناهی است.

۲۱۴۲- گزینه ۴ به نمودار تابع های $y = |x^2 - 6x|$ و $y = m$ توجه کنید.

واضح است که اگر $m = 9$ ، خط $y = m$ و نمودار تابع $y = |x^2 - 6x|$ سه نقطه مشترک دارند و مجموعه جواب های معادله $|x^2 - 6x| = m$ سه عضوی است.



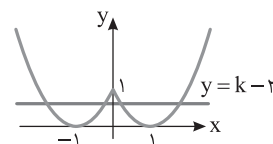
۲۱۴۳- گزینه ۲ معادله را به صورت $x^2 - 2|x| + 1 = k - 2$ می نویسیم.

کافی است نمودار $y = x^2 - 2|x| + 1$ را رسم کنیم و با خط $y = k - 2$ قطع دهیم:

$$x^2 - 2|x| + 1 = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

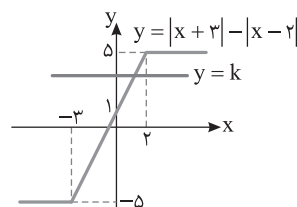
در نتیجه نمودار $y = x^2 - 2|x| + 1$ به شکل زیر است. از روی شکل نتیجه می گیریم معادله مورد نظر فقط وقتی چهار جواب دارد که

$$0 < k - 2 < 1 \Rightarrow 2 < k < 3$$



۲۱۴۴- گزینه ۱ نمودار تابع های $y = |x+3| - |x-2|$ و $y = k$ را رسم

می کنیم. با توجه به شکل زیر اگر $1 < k < 5$ ، آن گاه معادله دقیقاً یک جواب مثبت دارد. بنابراین k می تواند ۲، ۳ و ۴ باشد.



۲۱۵۶- گزینه ۲ ۲۵ کیلوگرم از محلول اولیه شکر و ۷۵ کیلوگرم آن آب است. اگر یک سوم از آب را تبخیر کنیم، ۵۰ کیلوگرم آب باقی می‌ماند. اگر x کیلوگرم شکر به آن اضافه کنیم، وزن شکر $۲۵+x$ و وزن محلول $۷۵+x$ می‌شود. پس

$$\frac{۲۵+x}{۷۵+x} = \frac{۵۰}{۱۰۰} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۵۰+۲x=۷۵+x \Rightarrow x=۲۵$$

یعنی باید ۲۵ کیلوگرم شکر به آن اضافه کنیم.

۲۱۵۷- گزینه ۲ معادله را به صورت $۲\sqrt{x-1}=2+\sqrt{x-2}$ می‌نویسیم و دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$4x-4=4+x-2+4\sqrt{x-2} \Rightarrow 3x-6=4\sqrt{x-2}$$

دوباره دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$9x^2+36-36x=16x-32 \Rightarrow 9x^2-52x+68=0$$

$$(x-2)(9x-34)=0 \Rightarrow x=2, x=\frac{34}{9}$$

هر دو جواب به دست آمده در معادله اصلی صدق می‌کنند. پس معادله دو جواب دارد.

۲۱۵۸- گزینه ۱ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$2x-1+x^2+2x\sqrt{2x-1}=3x-1 \Rightarrow 2x\sqrt{2x-1}=x-x^2$$

چون $x=0$ جواب معادله اصلی نیست، پس (۱) $2\sqrt{2x-1}=1-x$ دوباره طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$4(2x-1)=1+x^2-2x \Rightarrow x^2-10x+5=0 \Rightarrow x=5+2\sqrt{5}, x=5-2\sqrt{5}$$

با توجه به تساوی (۱) باید $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ تا هم عبارت زیر رادیکال منفی نشود و هم حاصل عبارت رادیکالی منفی نشود. بنابراین $x=5+2\sqrt{5}$ قابل قبول نیست و $x=5-2\sqrt{5}$ تنها جواب معادله است.

۲۱۵۹- گزینه ۲ با توجه به اینکه در $x=1$ و $x=3$ ، $P(x)=0$ ، پس

$$P(1)=0 \Rightarrow m+(m^2-12)-m-2n=0 \Rightarrow m^2-2n-12=0$$

$$P(3)=0 \Rightarrow 9m+3(m^2-12)-m-2n=0 \Rightarrow 3m^2+8m-2n-36=0$$

اگر طرفین معادله (۱) را از معادله (۲) کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$2m^2+8m-24=0 \Rightarrow m^2+4m-12=0$$

$$(m+6)(m-2)=0 \Rightarrow m=2, m=-6$$

اگر $m=2$ ، آن‌گاه ضریب x^2 در $P(x)$ مثبت است و جدول تعیین علامت آن نمی‌تواند به صورت داده شده باشد. اگر $m=-6$ ، آن‌گاه

$$m^2-2n-12=0 \Rightarrow 36-2n-12=0 \Rightarrow n=12$$

۲۱۶۰- گزینه ۴ نامعادله داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x^2-mx-m}{x^2-x+1} \leq \frac{x^2-mx-m-3x^2+3x-3}{x^2-x+1}$$

$$\frac{2x^2+(m-3)x+m+3}{x^2-x+1} \geq 0$$

برای عبارت x^2-x+1 مقدار Δ منفی است و مقدار عبارت همواره مثبت است. پس برای اینکه مقدار کسر بالا همواره نامنفی باشد، کافی است صورت آن همواره نامنفی باشد. یعنی برای عبارت $2x^2+(m-3)x+m+3$ ضریب

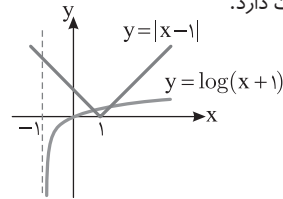
x^2 مثبت باشد (که هست) و Δ نامثبت باشد. پس

$$\Delta=(m-3)^2-8(m+3) \leq 0 \Rightarrow m^2-6m+9-8m-24 \leq 0$$

$$m^2-14m-15 \leq 0 \Rightarrow (m-15)(m+1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq m \leq 15$$

بنابراین حداکثر مقدار m برابر ۱۵ است.

۲۱۴۹- گزینه ۴ نمودار توابع $y=|x-1|$ و $y=\log(x+1)$ را رسم می‌کنیم. نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند که طول آن‌ها مثبت است. پس معادله دو جواب مثبت دارد.

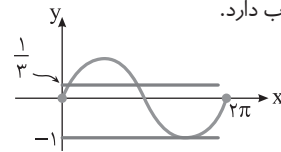


۲۱۵۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$3\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0 \Rightarrow (3\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله مورد نظر جواب‌های معادله $\sin x = \frac{1}{3}$ و $\sin x = -1$ هستند. براساس نمودار زیر معلوم است که معادله مورد نظر روی

بازه $[0, 2\pi)$ سه جواب دارد.



۲۱۵۱- گزینه ۳ اگر $m=0$ ، معادله به صورت $-2x=0$ در می‌آید که یک جواب دارد. اگر $m \neq 0$ ، باید مقدار دلتای معادله برابر صفر باشد، یعنی

$$\Delta=4-16m^2=0 \Rightarrow m^2=\frac{1}{4} \Rightarrow m=\pm\frac{1}{2}$$

بنابراین به ازای سه مقدار m ، معادله فقط یک جواب دارد.

۲۱۵۲- گزینه ۳ فرض کنید α عدد بزرگ‌تر و β عدد کوچک‌تر باشد.

در این صورت $\alpha+\beta=4$ و $\alpha\beta=-2$. بنابراین α و β جواب‌های معادله $x^2-4x-2=0$ هستند. در نتیجه $\alpha=2+\sqrt{6}$ و $\beta=2-\sqrt{6}$.

بنابراین $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2+\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}} = \frac{(2+\sqrt{6})^2}{(2-\sqrt{6})(2+\sqrt{6})} = \frac{10+4\sqrt{6}}{4-6} = -5-2\sqrt{6}$

۲۱۵۳- گزینه ۲ توجه کنید که $x_1+x_2=-8$ و $x_1x_2=-13$. پس

$$\frac{1}{x_1+2} + \frac{1}{x_2+2} = \frac{(x_1+x_2)+4}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4} = \frac{-8+4}{-13-16+4} = \frac{4}{25}$$

۲۱۵۴- گزینه ۲ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha+\beta=8$ و $\alpha=2\beta+4$. از حل دستگاه معادله‌های به دست آمده نتیجه می‌شود

$$\alpha=\frac{20}{3} \text{ و } \beta=\frac{4}{3}. \text{ پس } \alpha\beta=m$$

۲۱۵۵- گزینه ۱ اگر فرض کنیم $x^2-4=t$ ، آن‌گاه معادله مورد نظر می‌شود $\frac{4}{t} + \frac{5}{t+1} = 2$. اگر دو طرف این معادله را در $t(t+1)$ ضرب کنیم، آن‌گاه

$$4(t+1)+5t=2t(t+1) \Rightarrow 4t+4+5t=2t^2+2t$$

$$2t^2-7t-4=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{2}, t=4$$

اگر $t=-\frac{1}{2}$ ، آن‌گاه

$$x^2-4=-\frac{1}{2} \Rightarrow x^2=\frac{7}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$$

اگر $t=4$ ، آن‌گاه

$$x^2-4=4 \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow x=\pm\sqrt{8}$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر ۲۸ است.

۲۱۶۷- گزینه ۱) برای آنکه، معادله دو جواب مختلف‌العلامت داشته

$$\frac{c}{a} = \frac{1-m}{m+2} < 0 \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > 1 \text{ باشد، باید } \frac{c}{a} < 0 \text{، پس}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۲۱۶۸- گزینه ۳) در مخلوط اول که ۱۱ کیلوگرم است، $\frac{4}{100} \times 11 = 4/4$

کیلوگرم رنگ و در مخلوط دوم که ۴ کیلوگرم است، $\frac{4}{100} \times 4 = 2/8$ کیلوگرم رنگ موجود است.

فرض می‌کنیم که با تبخیر، x کیلوگرم از مواد غیر از رنگ تبخیر شود. در این صورت

$$\frac{4/4 + 2/8}{11 + 4 - x} = \frac{5}{100} \Rightarrow \frac{7/2}{15 - x} = \frac{1}{20} \Rightarrow 7/2 \times 20 = 15 - x \Rightarrow x = 0/6$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۲۱۶۹- گزینه ۲) اگر فرض کنیم $x^2 + 4x + 5 = A$ ، آن‌گاه

$$A - 2 = \sqrt{A} \xrightarrow{A \geq 2} A^2 - 4A + 4 = A \Rightarrow A^2 - 5A + 4 = 0$$

$$\begin{cases} A = 1 \text{ (غ.ق.ق.)} \\ A = 4 \Rightarrow x^2 + 4x + 5 = 4 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \xrightarrow{\frac{c}{a} = 1} x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

ریاضی - ۹۴

۲۱۷۰- گزینه ۴) از $f(x) > \frac{y}{x}$ نتیجه می‌شود:

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 > \frac{y}{x} \Rightarrow x^2 - 4x - 5 < 0 \Rightarrow -1 < x < 5$$

بنابراین بزرگ‌ترین بازه (a, b) ، همان بازه $(-1, 5)$ است. پس بیشترین

مقدار $b - a$ برابر است با $5 - (-1) = 6$. تجزیه - ۸۹

۲۱۷۱- گزینه ۲) اگر فرض کنیم $t = x^2 + x$ ، آن‌گاه به‌دست می‌آید:

$$t^2 - 18t + 72 = 0 \Rightarrow (t - 6)(t - 12) = 0$$

$$t = 6 \Rightarrow x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -1$$

$$t = 12 \Rightarrow x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x_3 + x_4 = -1$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله مورد نظر برابر است با

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2$$

تجزیه - ۹۰

۲۱۷۲- گزینه ۳) راه‌حل اول ابتدا مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های

معادله اول را حساب می‌کنیم:

$$5x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{-3}{5}, \alpha\beta = -\frac{2}{5}$$

اکنون مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادله دوم را به‌دست می‌آوریم:

$$S = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = \frac{\frac{9}{25} + \frac{4}{5}}{\frac{4}{25}} = \frac{29}{4}$$

$$P = \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{25}{4}$$

بنابراین معادله به‌صورت زیر است:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{29}{4}x + \frac{25}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 29x + 25 = 0 \Rightarrow k = 29$$

۲۱۶۱- گزینه ۲) دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{17}{3} \\ x_1 = 3x_2 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{2}{3} \\ x_1 = 5 \end{cases} \xrightarrow{x_1 x_2 = \frac{m}{3}} \frac{10}{3} = \frac{m}{3} \Rightarrow m = 10$$

ریاضی - ۸۷

۲۱۶۲- گزینه ۲) اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه

$$\alpha + \beta = 8, \quad \alpha = \frac{\beta}{2} + 5$$

از حل دستگاه معادله‌های به‌دست آمده نتیجه می‌شود $\alpha = 6$ و $\beta = 2$. از $\alpha\beta = m \Rightarrow m = 12$ طرف دیگر.

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۲۱۶۳- گزینه ۴) فرض می‌کنیم x_1 و x_2 جواب‌های معادله مورد نظر

باشند. در این صورت $x_1 + x_2 = \frac{m+1}{2}$ و $x_1 x_2 = \frac{1}{16}$. از طرف دیگر،

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2 \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = 4$$

$$\frac{m+1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{16}} = 4 \Rightarrow \frac{m+1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow m = 6$$

ریاضی - ۹۶

۲۱۶۴- گزینه ۳) ابتدا توجه کنید که $\alpha + \beta = \frac{3}{2}$ و $\alpha\beta = -2$. بنابراین

مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادله مورد نظر به شکل زیر است:

$$S = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{3}{-2} + 2 = \frac{1}{2}$$

$$P = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1}{-2} + \frac{3}{-2} + 1 = -\frac{1}{4}$$

بنابراین معادله مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 2x - 1 = 0$$

ریاضی - ۹۲

۲۱۶۵- گزینه ۴) برای اینکه معادله دو جواب مثبت باشد، باید

$$\Delta > 0, \quad -\frac{b}{a} > 0, \quad \frac{c}{a} > 0$$

$$\Delta = 4(a-2)^2 - 4(14-a) = 4a^2 - 12a - 40 = 4(a-5)(a+2)$$

از شرط $\Delta > 0$ نتیجه می‌شود $a < -2$ یا $a > 5$. از طرف دیگر،

$$-\frac{b}{a} = 2(a-2) > 0 \Rightarrow a > 2, \quad \frac{c}{a} = 14 - a > 0 \Rightarrow a < 14$$

اشتراک ناحیه‌های به‌دست آمده جواب مسئله است که به‌صورت $5 < a < 14$ است.

ریاضی - ۹۶

۲۱۶۶- گزینه ۳) حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر با

$$\alpha\beta = \frac{1}{4} \text{ و } \alpha + \beta = -\frac{12}{4} = -3 \text{ بنابراین}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} &= \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2}}{\sqrt{\alpha\beta}} \\ &= \frac{\sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{\frac{1}{4}}}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{3+1}}{\frac{1}{2}} = 4 \end{aligned}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۵

۲۱۷۸- گزینه ۴ ابتدا مقدار a را طوری می‌یابیم که $x=4$ جواب معادله باشد:

$$4+a=\sqrt{20-16} \Rightarrow 4+a=2 \Rightarrow a=-2$$

به ازای $a=-2$ ، معادله مورد نظر را حل می‌کنیم:

$$x-2=\sqrt{5x-x^2} \Rightarrow x^2-4x+4=5x-x^2$$

$$2x^2-9x+4=0 \Rightarrow x=4, \frac{1}{2}$$

چون $x=\frac{1}{2}$ در معادله $x-2=\sqrt{5x-x^2}$ صدق نمی‌کند، این معادله

جواب دیگری ندارد.

تجربی - ۸۷

۲۱۷۹- گزینه ۲ باید $f(x) < 2$ ، بنابراین

$$\frac{3x^2-2x}{x^2+4} < 2 \Rightarrow 3x^2-2x < 2x^2+8 \Rightarrow x^2-2x-8 < 0 \Rightarrow -2 < x < 4$$

پس $a=-2$ و $b=4$ و در نتیجه $b-a=6$.

خارج از کشور ریاضی - ۸۸

۲۱۸۰- گزینه ۲ به‌ازای مقادیری از x ، نمودار تابع زیر محور x است که

داشته باشیم $f(x) < 0$ ، پس

$$f(x)=x^3-4x^2-x+4=x^2(x-4)-x+4=(x-4)(x^2-1)$$

$$=(x-4)(x-1)(x+1) \xrightarrow{f(x)<0} (x-1)(x+1)(x-4)<0$$

x	-1	1	4	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

بزرگ‌ترین بازه به‌صورت (a, b) که در آن $f(x)$ منفی است، بازه $(1, 4)$

ریاضی - ۸۸

است، پس $b-a=4-1=3$.

راه حل دوم یکی از جواب‌های معادله اول برابر -1 است:

$$5x^2+3x-2=0 \Rightarrow \alpha=-1$$

بنابراین یکی از جواب‌های معادله دوم 1 است:

$$\alpha=-1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2}=1 \Rightarrow 4 \times 1^2 - k \times 1 + 25 = 0 \Rightarrow k=29$$

ریاضی - ۹۰

۲۱۷۳- گزینه ۳ فرض می‌کنیم x_1 و x_2 جواب‌های معادله

$$x^2-2x-8=0 \text{ و } \alpha \text{ و } \beta \text{ جواب‌های معادله } 8x^2-mx-8=0 \text{ باشند.}$$

در این صورت

$$x_1+x_2=\frac{1}{2}, \quad x_1x_2=-1$$

$$\alpha+\beta=\frac{m}{8}, \quad \alpha\beta=-1$$

$$\alpha=x_1^3, \quad \beta=x_2^3$$

دو طرف تساوی $x_1+x_2=\frac{1}{2}$ را به توان سه می‌رسانیم:

$$x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2)=\frac{1}{8}$$

$$\alpha+\beta-3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8} \Rightarrow \frac{m}{8}=\frac{1}{8}+\frac{3}{2} \Rightarrow m=13$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۲۱۷۴- گزینه ۲ $x=2$ در معادله صدق می‌کند، پس

$$2(4a-2-5)=2 \Rightarrow a=2$$

بنابراین معادله به صورت $2x^3-x^2-5x-2=0$ است. با تقسیم عبارت

سمت چپ معادله بر $x-2$ به‌دست می‌آید:

$$2x^3-x^2-5x-2=(x-2)(2x^2+3x+1)=0$$

بنابراین دو جواب دیگر از معادله $2x^2+3x+1=0$ به‌دست می‌آیند که

مجموع آن‌ها برابر $-\frac{3}{2}$ است.

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۲۱۷۵- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $t=\sqrt{x}$ ، آن‌گاه $t^2-2t+m-1=0$.

برای آنکه دو جواب برای x به‌دست آید، باید این معادله دو جواب نامنفی

داشته باشد:

$$\left. \begin{aligned} \Delta > 0 &\Rightarrow 4-4(m-1) > 0 \Rightarrow m < 2 \\ \frac{c}{a} \geq 0 &\Rightarrow \frac{m-1}{1} \geq 0 \Rightarrow m-1 \geq 0 \Rightarrow m \geq 1 \\ -\frac{b}{a} > 0 &\Rightarrow -\frac{-2}{1} > 0 \Rightarrow 2 > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\cap} 1 \leq m < 2$$

خارج از کشور تجربی - ۸۸

۲۱۷۶- گزینه ۲ برای اینکه همه مقادیر عبارت مورد نظر مثبت باشد، باید

$$1-a > 0 \Rightarrow a < 1$$

$$\Delta = 24+4a(1-a) < 0 \Rightarrow -a^2+a+6 < 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 3$$

از اشتراک این ناحیه‌ها به‌دست می‌آید $a < -2$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۲۱۷۷- گزینه ۴ برای اینکه معادله $\sqrt{4x-3}=2-3x$ جواب داشته

باشد، باید

$$4x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{4}, \quad 2-3x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{2}{3}$$

با اشتراک دو محدوده به‌دست آمده، نتیجه می‌گیریم که معادله جوابی

نمی‌تواند داشته باشد.

خارج از کشور تجربی - ۸۷

فصل دهم



۲۱۸۷- گزینه ۲ چون $x < y$ پس $x - y < 0$ و $2y - x > 0$ پس

عبارت مورد نظر برابر است با $-(2x - y) - (2y - x) - x + 2y = -2x + y$

۲۱۸۸- گزینه ۴ توجه کنید که $a - 1 < 0$ و $b + 2 > 0$ و $a + b < 1 - 1 = 0$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر با $-1 - 1 = -3$

۲۱۸۹- گزینه ۱ چون $a < 0$ پس $|a| = -a$ در نتیجه

$$|a|b \leq a \xrightarrow{a \neq 0} b \leq \frac{a}{|a|} \xrightarrow{a < 0} b \leq -1$$

بنابراین هر یک از عددهای $2b - 6$ و $b - 2$ هم منفی هستند، پس

$$|2b - 6| - |b - 2| = -(2b - 6) - (b - 2) = -2$$

۲۱۹۰- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $\frac{|a|}{a} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$

اکنون به جدول زیر توجه کنید:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 - 1$		+	+	-	+	+
$x^2 - 2$		+	-	-	-	+
y		۲	۰	-۲	۰	۲

بنابراین y سه مقدار مختلف (۰ و ۲ و -۲) دارد.

۲۱۹۱- گزینه ۴ معادله را به صورت $x^2 - 5x = \pm 6$ می‌نویسیم. بنابراین

$$x^2 - 5x = 6 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x - 6) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 6$$

$$x^2 - 5x = -6 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 3$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر ۳۶- است.

۲۱۹۲- گزینه ۲ توجه کنید که $|3x - 18| = |3(x - 6)| = 3|x - 6|$ و

$$|24 - 4x| = |4x - 24| = |4(x - 6)| = 4|x - 6|$$

$$7|x - 6| = 28 \Rightarrow |x - 6| = 4 \Rightarrow x = 2, x = 10$$

پس مجموع جواب‌های معادله مورد نظر برابر ۱۲ است.

۲۱۹۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $|a| = |b|$ ، آن‌گاه $a = b$ یا

$$a = -b$$

$$\text{یا } x^2 - 2x = -x^2 - 2x + 4$$

$$x^2 - 2x = x^2 + 2x - 4 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

$$x^2 - 2x = -x^2 - 2x + 4 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر ۲- است.

۲۱۹۴- گزینه ۳ دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول اگر $x \geq 0$ ، آن‌گاه $|x| = x$ و معادله مورد نظر می‌شود

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$$

حالت دوم اگر $x < 0$ ، آن‌گاه $|x| = -x$ و معادله مورد نظر می‌شود

$$x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = 2 + \sqrt{7}, x = 2 - \sqrt{7}$$

بنابراین معادله مورد نظر سه جواب دارد.

۲۱۸۱- گزینه ۲ اگر $a < -2$ ، آن‌گاه $1 + a < -1 < 0$ پس $|1 + a| = -1 - a$

در نتیجه $|2 + a| = |1 + 1 + a| = |1 + a| = -1 - a$ از طرف دیگر، چون $a < -2$ پس

$$a + 2 < 0 \text{ در نتیجه } |2 + a| = -2 - a$$

۲۱۸۲- گزینه ۴ راه حل اول چون $-1 < x < 2$ پس

$$\frac{|x - 2|}{x - 2} = \frac{2 - x}{x - 2} = -1, \quad \frac{x + 1}{|x + 1|} = \frac{x + 1}{x + 1} = 1$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-1 - 1 = -2$

راه حل دوم کافی است حاصل عبارت را به ازای $x = 0$ حساب کنیم:

$$A = \frac{|x - 2|}{x - 2} - \frac{x + 1}{|x + 1|} \xrightarrow{x = 0} A = -1 - 1 = -2$$

۲۱۸۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$-3 < x < -2 \Rightarrow -18 < 6x < -12 \Rightarrow 0 < 14 < 6x + 32 < 20$$

در نتیجه $|6x + 32| = 6x + 32$ از طرف دیگر،

$$-3 < x < -2 \Rightarrow 3 > -x > 2 \Rightarrow 11 > 8 - x > 10$$

در نتیجه $|8 - x| = 8 - x$ بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{6x + 32 - 4(8 - x)}{3x} = \frac{6x + 4x - 8}{3x} = \frac{10}{3}$$

۲۱۸۴- گزینه ۱ توجه کنید که

$$1 < x < 2 \Rightarrow 3 < 3x < 6 \Rightarrow 0 < 3x - 3 < 3 \Rightarrow |3x - 3| = 3x - 3$$

$$\sqrt{4x^2 - 16x + 16} = \sqrt{4(x - 2)^2} = 2|x - 2| = -2x + 4$$

منفی

$$\text{بنابراین } A = 3x - 3 - (-2x + 4) = 5x - 7$$

۲۱۸۵- گزینه ۴ راه حل اول چون x منفی است، عبارت $x + \frac{4}{x}$ منفی

است، پس $|x + \frac{4}{x}| = -x - \frac{4}{x}$ از طرف دیگر،

$$|x - \frac{4}{x}| = \left| \frac{x^2 - 4}{x} \right| = \left| \frac{(x - 2)(x + 2)}{x} \right|$$

چون $-2 < x < 0$ ، پس $x - 2 < 0$ و $x + 2 > 0$ و چون x منفی است، پس

$$x - \frac{4}{x} > 0 \text{ مثبت است، پس } |x - \frac{4}{x}| = x - \frac{4}{x}$$

$$f(x) = -x - \frac{4}{x} + x - \frac{4}{x} = \frac{-8}{x}$$

راه حل دوم حاصل عبارت مورد نظر را به ازای $x = -1$ حساب می‌کنیم:

$$f(x) = |x + \frac{4}{x}| + |x - \frac{4}{x}| \xrightarrow{x = -1} f(-1) = |-5| + |3| = 8$$

فقط مقدار گزینه (۴) به ازای $x = -1$ برابر ۸ می‌شود.

۲۱۸۶- گزینه ۳ چون $a - 6 < 0$ ، پس $|a - 6| = -a + 6$ بنابراین

$$A = |6 - a| + |3 + a - 6| = |6 - a| + |-3 - a + 6| = |6 - a| + |3 - a|$$

$$\xrightarrow{9 - a > 0} A = |6 - a - (9 - a)| = |-3| = 3$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله به صورت $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ است که شامل عددهای صحیح ۰، ۱، ۲ و ۳ نیست.

۲۲۰۰- گزینه ۳ راه حل اول می‌دانیم $x^2 = |x|^2$ بنابراین نامعادله به

شکل $|x|^2 - 5|x| + 4 \leq 0$ نوشته می‌شود. اگر فرض کنیم $t = |x|$ ، نامعادله به صورت $t^2 - 5t + 4 \leq 0$ درمی‌آید.

با توجه به جدول زیر، محدوده $1 \leq t \leq 4$ جواب نامعادله است. یعنی

$$1 \leq |x| \leq 4$$

t	$-\infty$	۱	۴	$+\infty$
$t^2 - 5t + 4$		+	-	+

راه حل دوم عدد صفر در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینه (۱) جواب نیست. عدد ۵ هم در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینه‌های (۲) و (۴) هم جواب نیستند. پس گزینه (۳) جواب است.

۲۲۰۱- گزینه ۲ می‌دانیم اگر $a \geq 0$ ، آن‌گاه جواب‌های معادله $|x| = a$

برابرند با $x = \pm a$. بنابراین

$$||x-4|-1|=3 \Rightarrow \begin{cases} |x-4|-1=3 \Rightarrow |x-4|=4 \\ |x-4|-1=-3 \Rightarrow |x-4|=-2 \end{cases}$$

معادله $|x-4|=-2$ جواب ندارد. پس

$$|x-4|=4 \Rightarrow \begin{cases} x-4=4 \\ x-4=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ x=0 \end{cases}$$

بنابراین معادله مورد نظر دو جواب دارد.

۲۲۰۲- گزینه ۳ توجه کنید که $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$|x-1||x-3|-5|x-1|=0 \Rightarrow |x-1|(|x-3|-5)=0$$

$$\begin{cases} |x-1|=0 \Rightarrow x=1 \\ |x-3|=5 \Rightarrow x-3=\pm 5 \Rightarrow x=-2, x=8 \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر است با ۷.

۲۲۰۳- گزینه ۲ راه حل اول ابتدا توجه کنید که چون سمت چپ معادله

نامنفی است، پس سمت راست آن هم نامنفی است، بنابراین $x \geq 0$. طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$|x^2 - 4| = 3x \Rightarrow (x^2 - 4)^2 = (3x)^2 \Rightarrow x^4 - 8x^2 + 16 = 9x^2$$

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 16) = 0$$

بنابراین

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = \pm 4$$

چون $x \geq 0$ ، پس فقط جواب‌های $x=1$ و $x=4$ قابل قبول هستند که مجموعه آن‌ها برابر است با ۵.

راه حل دوم اگر $x < 0$ ، آن‌گاه معادله جواب ندارد، زیرا سمت راست تساوی منفی و سمت چپ آن نامنفی است. اگر $x \geq 0$ ، آن‌گاه معادله را به شکل زیر حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 3x \\ x^2 - 4 = -3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 4 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -4 \end{cases}$$

۲۱۹۵- گزینه ۲ راه حل اول معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$x^2 - 2x + 1 - |x-1| - 2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - |x-1| - 2 = 0$$

$$|x-1|=t \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - t - 2 = 0 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t+1)(t-2)=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow |x-1|=-1 \quad (\text{غ.ق.})$$

$$t=2 \Rightarrow |x-1|=2 \Rightarrow \begin{cases} x-1=2 \Rightarrow x=3 \\ x-1=-2 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر ۲ است.

راه حل دوم دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول اگر $x \geq 1$ ، آن‌گاه $|x-1|=x-1$ و معادله مورد نظر می‌شود

$$x^2 - 2x - x + 1 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3 \quad (\text{غ.ق.})$$

حالت دوم اگر $x < 1$ ، آن‌گاه $|x-1|=1-x$ و معادله مورد نظر می‌شود

$$x^2 - 2x + x - 1 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2 \quad (\text{غ.ق.})$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله مورد نظر برابر است با $3 - 1 = 2$.

۲۱۹۶- گزینه ۴ نامعادله را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$3x - 2 \geq 7 \text{ یا } 3x - 2 \leq -7 \Rightarrow x \geq 3 \text{ یا } x \leq -\frac{5}{3}$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله به صورت $(-\infty, -\frac{5}{3}] \cup [3, +\infty)$

است. $\mathbb{R} - (-\frac{5}{3}, 3)$ پس $a = -\frac{5}{3}$ و $b = 3$ و در نتیجه $ab = -5$.

۲۱۹۷- گزینه ۱ راه حل اول نابرابری $|x| \leq |y|$ با نابرابری

$(x-y)(x+y) \leq 0$ معادل است، زیرا

$$|x| \leq |y| \Rightarrow x^2 \leq y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 \leq 0 \Rightarrow (x-y)(x+y) \leq 0$$

در نتیجه نابرابری را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(a+5-a+5)(a+5+a-5) \leq 0$$

نابرابری بالا به صورت $(2a)(2a) \leq 0$ یا $2a \leq 0$ درمی‌آید که مجموعه جواب‌های آن $(-\infty, 0]$ است.

راه حل دوم دو طرف نامعادله را به توان دو می‌رسانیم تا به نامعادله زیر برسیم:

$$a^2 + 10a + 25 \leq a^2 - 10a + 25 \Rightarrow 20a \leq 0$$

پس مجموعه جواب‌های آن $(-\infty, 0]$ است.

۲۱۹۸- گزینه ۱ نامعادله را به صورت $|\frac{x-6}{x-2}| > 3$ می‌نویسیم. چون

$x \neq 2$ ، دو طرف این نامعادله را در عبارت مثبت $|x-2|$ ضرب می‌کنیم:

$$|x-6| > 3|x-2|$$

چون دو طرف نامعادله نامنفی هستند، پس می‌توانیم دو طرف را به توان دو برسانیم:

$$x^2 - 12x + 36 > 9(x^2 - 4x + 4) \Rightarrow 8(x^2 - 3x) < 0 \Rightarrow 0 < x < 3$$

عددهای صحیح ۱ و ۲ در بازه $(0, 3)$ هستند. اما $x=2$ قابل قبول نیست، پس تنها جواب صحیح نامعادله مورد نظر ۱ است.

۲۱۹۹- گزینه ۳ اگر $x < 0$ ، نامعادله برقرار است و عددهای منفی در آن

صدق می‌کنند. همچنین $x=0$ جواب نامعادله نیست. اگر $x > 0$ ، آن‌گاه

$$\begin{cases} x^2 - x > 2x \Rightarrow x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x-3) > 0 \Rightarrow x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \\ \text{یا} \\ x^2 - x < -2x \Rightarrow x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \xrightarrow{x>0} x+1 < 0 \\ \text{غ.ق.} \end{cases}$$

۲۲۰۹- گزینه ۱) راه حل اول توجه کنید که اگر $x \geq 0$ ، آن گاه $x = |x|$.

بنابراین

$$x < |x| \Rightarrow x < 0$$

در نتیجه

$$|x| < x^2 \xrightarrow{x < 0} -x < x^2 \Rightarrow x(x+1) > 0 \xrightarrow{x < 0} x+1 < 0$$

به این ترتیب، $|x+1| = -x-1$ ، $|x| = -x$ و $|1-x| = 1-x$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-3x$.

راه حل دوم $x = -2$ در نابرابری های $x < |x|$ صدق می کند. بنابراین کافی است حاصل عبارت مورد نظر را به ازای $x = -2$ به دست آوریم:

$$A = |x+1| + |1-x| + |x| \xrightarrow{x=-2} A = 1+3+2=6$$

فقط مقدار گزینه (۱) به ازای $x = -2$ برابر ۶ است.

۲۲۱۰- گزینه ۴) راه حل اول اگر $x \geq 0$ ، آن گاه $x+1 > 0$ و نامعادله به شکل $(x+1)x < x(x+1)$ درمی آید که جواب ندارد. اگر $-1 < x < 0$ ، آن گاه $x+1 > 0$ و نامعادله به شکل $(x+1)x < x(x+1)$ درمی آید، یعنی $2x(x+1) > 0$ که درست نیست. اگر $x \leq -1$ ، آن گاه $x+1 \leq 0$ و نامعادله به شکل $(x+1)x < -x(x+1)$ درمی آید که جواب ندارد. پس مجموعه جواب های نامعادله تهی است.

راه حل دوم معلوم است که $x = 0$ و $x = -1$ جواب های نامعادله نیستند، پس می توانیم نامعادله را به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{x+1}{|x+1|} < \frac{x}{|x|} \quad (۱)$$

می دانیم برای هر $a \neq 0$ ، $\frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$. بنابراین تنها حالتی که

نامعادله (۱) می تواند جواب داشته باشد به صورت زیر است:

$$\frac{x+1}{|x+1|} = -1, \quad \frac{x}{|x|} = 1$$

از معادله اول نتیجه می شود $x+1 < 0$ ، یعنی $x < -1$ و از معادله دوم نتیجه می شود $x > 0$. دو محدوده به دست آمده اشتراک ندارند، پس مجموعه جواب های نامعادله مورد نظر تهی است.

۲۲۱۱- گزینه ۴) چون از $|A| = -A$ ، نتیجه می شود $A \leq 0$ ، پس از $|x^2 - x - 6| = -(x^2 - x - 6)$ نتیجه می شود $x^2 - x - 6 \leq 0$. بنابراین $(x+2)(x-3) \leq 0$ و با توجه به جدول تعیین علامت زیر بازه $[-2, 3]$ مجموعه جواب های نامعادله است، که شامل شش عدد صحیح $(0, \pm 1, \pm 2, 3)$ است.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x^2 - x - 6$		+	-	+

۲۲۱۲- گزینه ۳) توجه کنید که

$$||x^2 - 5| - 2| = 1 \Rightarrow |x^2 - 5| - 2 = \pm 1$$

حالت اول

$$|x^2 - 5| - 2 = -1 \Rightarrow |x^2 - 5| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5 = -1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 - 5 = 1 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm \sqrt{6} \end{cases}$$

حالت دوم

$$|x^2 - 5| - 2 = 1 \Rightarrow |x^2 - 5| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5 = -3 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2} \\ x^2 - 5 = 3 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm \sqrt{8} \end{cases}$$

بنابراین معادله هشت جواب دارد.

جواب های $x = -1$ و $x = -4$ قابل قبول نیستند، زیرا با شرط $x \geq 0$ معادله را حل کرده ایم. پس جواب های معادله $x = 1$ و $x = 4$ هستند که مجموع آن ها برابر ۵ است.

۲۲۰۴- گزینه ۴) اگر $x \leq -3$ ، آن گاه $|x+3| = -(x+3)$ و معادله می شود

$$x^2 + 2(x+3) - 18 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$x = -1 - \sqrt{13}, \quad x = -1 + \sqrt{13} \quad (\text{غ.ق.})$$

اگر $x > -3$ ، آن گاه $|x+3| = x+3$ و معادله می شود

$$x^2 - 2(x+3) - 18 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$x = 6, \quad x = -4 \quad (\text{غ.ق.}) \Rightarrow x = -4 \Rightarrow (x-6)(x+4) = 0$$

بنابراین مجموع جواب های معادله مورد نظر برابر است با $5 - \sqrt{13}$.

۲۲۰۵- گزینه ۴) با توجه به فرض سؤال، هر یک از معادله های $x^2 - 6x - a = 0$ و $x^2 - 6x + a = 0$ باید دو جواب داشته باشد. در نتیجه $36 + 4a > 0$ و $36 - 4a > 0$ می دانیم $a > 0$ (زیرا اگر $a < 0$ ، معادله $|x^2 - 6x| = a$ جواب ندارد). در نتیجه $36 + 4a > 0$. بنابراین کافی است $36 - 4a > 0 \Rightarrow a < 9$.
بنابراین $0 < a < 9$.

۲۲۰۶- گزینه ۴) ابتدا باید مجموعه جواب های نامعادله های $|x-3| \geq 2$ و $|2x+1| \leq 5$ را بیابیم. توجه کنید که

$$|x-3| \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} x-3 \geq 2 \Rightarrow x \geq 5 \\ x-3 \leq -2 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

$$|2x+1| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq 2x+1 \leq 5 \Rightarrow -6 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow -3 \leq x \leq 2$$

پس مجموعه جواب های اولی برابر با $A = (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$ و مجموعه جواب های دومی $B = [-3, 2]$ است. بنابراین $A \cap B = [-3, 1]$.

۲۲۰۷- گزینه ۲) راه حل اول برای حل این نامعادله دو طرف آن را به توان دو می رسانیم تا به نامعادله زیر برسیم:

$$(x+1)^2 \geq (2x-1)^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 4x^2 - 4x + 1$$

در نتیجه به نامعادله زیر می رسیم:

$$3x^2 - 6x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

بنابراین $a = 0$ و $b = 2$. در نتیجه $b - a = 2$.

راه حل دوم اگر دو طرف نابرابری $|A| \geq |B|$ را به توان دو برسانیم، نتیجه می شود:

$$A^2 \geq B^2 \Rightarrow A^2 - B^2 \geq 0 \Rightarrow (A-B)(A+B) \geq 0$$

و برعکس. در نتیجه نامعادله مورد نظر معادل است با

$$(x+1-2x+1)(x+1+2x-1) \geq 0 \Rightarrow (-x+2)(3x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

بنابراین $a = 0$ و $b = 2$. در نتیجه $b - a = 2$.

۲۲۰۸- گزینه ۴) ابتدا نامعادله را به صورت $|\frac{x-3}{2-x}| \leq 1$ می نویسیم.

بنابراین

$$\frac{|x-3|}{|2-x|} \leq 1 \Rightarrow |x-3| \leq |2-x|, \quad x \neq 2$$

$$|x-3|^2 \leq |2-x|^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 \leq 4 - 4x + x^2 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2}$$

بنابراین $[\frac{5}{2}, +\infty)$ مجموعه جواب های نامعادله است و در نتیجه $a = 5$.

$b = 2$. پس $a + b = 7$.

راه حل دوم

۲۲۱۳- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$|x(x^2-3)|=|x| \Rightarrow |x||x^2-3|=|x|$$

واضح است که $x=0$ یک جواب معادله است. با شرط $x \neq 0$ دو طرف معادله را بر $|x|$ تقسیم می‌کنیم:

$$|x^2-3|=1 \Rightarrow \begin{cases} x^2-3=-1 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ x^2-3=1 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$

بنابراین معادله پنج جواب دارد.

۲۲۱۴- گزینه ۴ با توجه به ریشه عبارت‌های داخل قدرمطلق، سه حالت

زیر را بررسی می‌کنیم

$$x \leq -2 \Rightarrow -2(x-1)-(x+2)=5 \Rightarrow -3x=5 \Rightarrow x=-\frac{5}{3} \text{ (غ.ق.)}$$

$$-2 < x \leq 1 \Rightarrow -2(x-1)+x+2=5 \Rightarrow -x+4=5 \Rightarrow x=-1$$

$$x > 1 \Rightarrow 2(x-1)+x+2=5 \Rightarrow 3x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

بنابراین مجموعه جواب‌های معادله مورد نظر $\{-1, \frac{5}{3}\}$ است، پس مجموع جواب‌ها برابر $\frac{2}{3}$ است.

۲۲۱۵- گزینه ۴ چون صفر جواب معادله مورد نظر نیست، پس $a \neq 0$.همچنین، سمت چپ معادله نامنفی است، پس $a > 0$. اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{x^2}{x+1}=a \Rightarrow x^2-ax-a=0 \quad \text{یا} \quad \frac{x^2}{x+1}=-a \Rightarrow x^2+ax+a=0$$

توجه کنید که معادله $x^2-ax-a=0$ همیشه دو جواب غیرصفر دارد ($\Delta=a^2+4a>0$). بنابراین برای اینکه معادله اصلی دو جواب غیرصفر

داشته باشد، باید معادله $x^2+ax+a=0$ جواب نداشته باشد:

$$\Delta=a^2-4a<0 \Rightarrow 0<a<4$$

بنابراین اگر $0<a<4$ ، معادله مورد نظر دو جواب غیرصفر دارد. توجه کنید که $x=-1$ (ریشهٔ مخرج کسر)، جواب معادله $x^2-ax-a=0$ نیست.

۲۲۱۶- گزینه ۲ نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$|x|-4>1 \quad \text{یا} \quad |x|-4<-1$$

پس $|x|<3$ یا $|x|>5$. از نامعادله $|x|<3$ نتیجه می‌شود $-3<x<3$.

از نامعادله $|x|>5$ نتیجه می‌شود $x>5$ یا $x<-5$. بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله به صورت زیر است:

$$(-\infty, -5) \cup (-3, 3) \cup (5, +\infty)$$

که شامل اعداد صحیح ± 4 ، ± 5 و ± 3 نیست. تعداد این اعداد ۶ تاست.

۲۲۱۷- گزینه ۱ راه حل اول نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$|(x-5)(x-2)| < |(x-2)(x-3)| \Rightarrow |x-2||x-5| < |x-2||x-3|$$

معلوم است که $x \neq 2$. بنابراین $|x-5| < |x-3|$. چون دو طرف این

نامعادله نامنفی هستند، پس می‌توان آن‌ها را به توان دو رساند:

$$x^2-10x+25 < x^2-6x+9 \Rightarrow 4x > 16 \Rightarrow x > 4$$

$$|x^2-7x+10| < |x^2-5x+6|$$

$$x^2-7x+10 < x^2-5x+6 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2$$

$$x^2-7x+10 > -x^2+5x-6 \Rightarrow 2x^2-12x+16 > 0 \Rightarrow x^2-6x+8 > 0$$

$$(x-2)(x-4) > 0 \Rightarrow x > 4 \quad \text{یا} \quad x < 2$$

مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر برابر با اشتراک این جواب‌ها است، که برابر $x > 4$ است.

۲۲۱۸- گزینه ۲ نامعادله را به صورت $|x-1| < 2+2x-x^2$ می‌نویسیم.

بنابراین

$$(x-1)^2 < 2+|x-1| \Rightarrow |x-1|^2 < 2+|x-1|$$

اگر فرض کنیم $t=|x-1|$ ، آن‌گاه

$$t^2-t-2 < 0 \Rightarrow (t+1)(t-2) < 0$$

چون $t \geq 0$ ، بنابراین $t+1 \geq 1$ و در نتیجه باید نامعادله $t-2 < 0$ را حل کنیم که $t < 2$ جواب است. پس $|x-1| < 2$ و در نتیجه

$$-2 < x-1 < 2 \Rightarrow -1 < x < 3$$

پس اعداد صحیح صفر، ۱ و ۲ در مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر قرار دارند.

۲۲۱۹- گزینه ۲ ابتدا نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$-a^2-2 < |x|-3a < a^2+2 \Rightarrow -a^2+3a-2 < |x| < a^2+3a+2$$

واضح است که اگر $a^2+3a+2 \leq 0$ ، آن‌گاه نامعادله جواب ندارد. پس

$$a^2+3a+2=(a+1)(a+2) > 0$$

a	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
a^2+3a+2		+	-	+

با توجه به جدول فوق باید $-2 \leq a \leq -1$.۲۲۲۰- گزینه ۲ اگر $x < 1$ ، آن‌گاه سمت چپ نامعادله منفی وسمت راست آن نامنفی است. پس $x < 1$ جواب نامعادله است. اگر $x > 1$ ،آن‌گاه $|x+1|=x+1$ و در نتیجه

$$\frac{3}{x-1} \leq x+1 \Rightarrow 3 \leq x^2-1 \Rightarrow x^2 \geq 4 \xrightarrow{x>1} x \geq 2$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله $\mathbb{R}-[1, 2)$ است و در نتیجه

$$a=1, b=2 \Rightarrow a+b=3$$

۲۲۲۱- گزینه ۴ با جای گذاری $x=\sqrt{2}-1$ در ضابطه تابع به دست می‌آید

$$f(\sqrt{2}-1)=5|3\sqrt{2}-3-1|+3|5\sqrt{2}-5-4|$$

$$=5(3\sqrt{2}-4)-3(5\sqrt{2}-9)=7$$

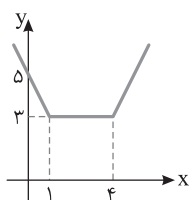
با جای گذاری $x=\sqrt{3}-1$ در ضابطه تابع به دست می‌آید

$$f(\sqrt{3}-1)=5|3\sqrt{3}-3-1|+3|5\sqrt{3}-5-4|$$

$$=5(3\sqrt{3}-4)-3(5\sqrt{3}-9)=7$$

پس

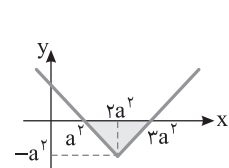
$$f(\sqrt{2}-1)+f(\sqrt{3}-1)=14$$



آوریم. نمودار تابع f در شکل رسم شده است. با توجه به شکل، کمترین مقدار تابع f برابر ۳ است، بنابراین بیشترین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{15}{3} = 5$.

۲۲۲۸- گزینه ۲ اگر نمودار تابع $y = |x|$ را $2a^2$ واحد به سمت راست

منتقل کنیم، نمودار تابع $y = |x - 2a^2|$ به دست می‌آید و اگر این نمودار را a^2 واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $y = |x - 2a^2| - a^2$ به دست می‌آید.

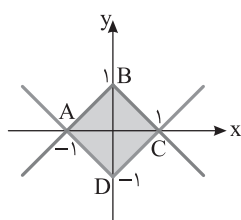


با توجه به نمودار این تابع، مساحت ناحیه مورد نظر برابر است با

$$S = \frac{1}{2} a^2 (2a^2) = a^4$$

بنابراین

$$a^4 = 4 \Rightarrow a = \pm \sqrt{2}$$

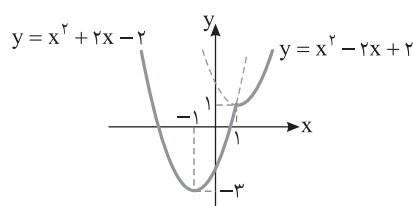


۲۲۲۹- گزینه ۳ نمودار دو تابع را

رسم می‌کنیم. مساحت چهارضلعی ABCD مطلوب است. در واقع مساحت مورد نظر از چهار مثلث قائم‌الزاویه به قاعده یک واحد و ارتفاع یک واحد تشکیل شده است. پس مساحت ABCD برابر است با $4 \times (\frac{1 \times 1}{2}) = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & x \geq 1 \\ x^2 + 2x - 2 & x < 1 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است و برد آن بازه $[-3, +\infty)$ است.

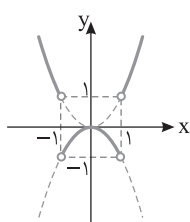


۲۲۳۱- گزینه ۱ ابتدا مقادیر $f(2+|a|)$ و $f(2-|a|)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(2-|a|) = |2-|a|| - 2 + 1 = |-|a|| + 1 = |a| + 1$$

$$f(2+|a|) = |2+|a|| - 2 + 1 = |a| + 1 = |a| + 1$$

$$f(2-|a|) - 2f(2+|a|) + 1 = |a| + 1 - 2|a| - 2 + 1 = -|a|$$



۲۲۳۲- گزینه ۱ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| > 1 \\ -x^2 & |x| < 1 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به صورت روبه‌رو است و برد تابع f برابر با $a = 1$ است. پس $a \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$

$$a - b = 1 \text{ و در نتیجه } b = 0$$

۲۲۲۲- گزینه ۳ برای $x > 1$ ضابطه تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$x - 1 > 0, x + 1 > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1-x}{x-1} = 2$$

به طریق مشابه برای $-1 < x < 1$ به دست می‌آید

$$x - 1 < 0, x + 1 > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1-x}{-(x-1)} = 0$$

همچنین برای $x < -1$

$$x - 1 < 0, x + 1 < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{-(x+1)}{x+1} - \frac{1-x}{-(x-1)} = -2$$

بنابراین $R_f = \{-2, 0, 2\}$ و برد تابع ۳ عضو دارد.

۲۲۲۳- گزینه ۳ راه حل اول اگر $x \geq 0$ ، آن گاه

$$|x| = x \Rightarrow |x - |x|| = |x - x| = 0$$

بنابراین $f(x) = |2x - 0| = |2x| = 2x$ اگر $x < 0$ ، آن گاه

$$|x| = -x \Rightarrow |x - |x|| = |x + x| = |2x| = -2x$$

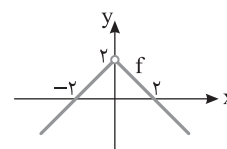
بنابراین $f(x) = |2x - (-2x)| = |4x| = -4x$ در نتیجه

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -4x & x < 0 \end{cases}$$

راه حل دوم توجه کنید که $f(1) = 2$ فقط در تابع گزینه (۳) این شرایط برقرار است.

۲۲۲۴- گزینه ۲ توجه کنید که

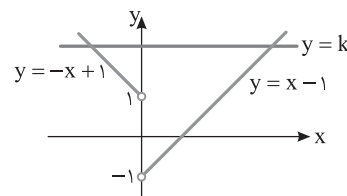
$$f(x) = \frac{2|x| - x^2}{|x|} = \begin{cases} \frac{2x - x^2}{x} & x > 0 \\ \frac{-2x - x^2}{-x} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 - x & x > 0 \\ 2 + x & x < 0 \end{cases}$$



۲۲۲۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} -x(1 - \frac{1}{x}) & x < 0 \\ x(1 - \frac{1}{x}) & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -x + 1 & x < 0 \\ x - 1 & x > 0 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است. واضح است که اگر $k > 1$ ، آن گاه خط $y = k$ و نمودار تابع f در دو نقطه متقاطع‌اند.



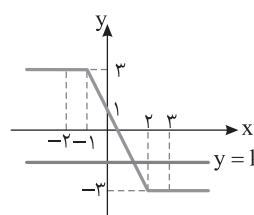
۲۲۲۶- گزینه ۱ نمودار تابع f را

به کمک نقاط $(-1, 3)$ ، $(2, -3)$ ، $(3, -3)$ و $(-2, 3)$ رسم می‌کنیم.

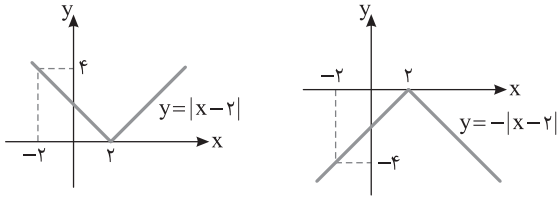
واضح است که اگر خط $y = k$ این

نمودار را در یک نقطه با طول مثبت

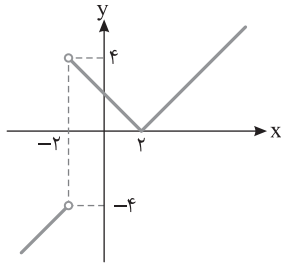
قطع کند، باید $-3 < k < 1$.



ابتدا نمودار توابع $y = |x-2|$ و $y = -|x-2|$ را رسم می‌کنیم.



پس نمودار تابع f به صورت زیر است.



گزینه ۲ - ۲۲۳۷ توجه کنید که با توجه به ریشه‌های عبارت‌های داخل

قدرمطلق چهار حالت زیر برای ضابطه تابع وجود دارد:

$$x \leq -1 \Rightarrow f(x) = -x + x - 2 + 2(x+1) = 2x$$

$$-1 < x \leq 0 \Rightarrow f(x) = -x + x - 2 - 2(x+1) = -2x - 4$$

$$0 < x \leq 2 \Rightarrow f(x) = x + x - 2 - 2(x+1) = -4$$

$$x > 2 \Rightarrow f(x) = x - (x-2) - 2(x+1) = -2x$$

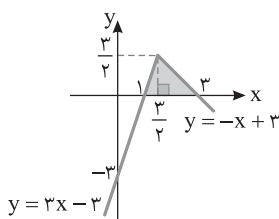
بنابراین روی بازه $[0, 2]$ نمودار تابع یک پاره‌خط افقی است که طول آن برابر

است با ۲.

گزینه ۴ - ۲۲۳۸ ضابطه تابع را بدون قدرمطلق می‌نویسیم و نمودار تابع را

رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = x - (2x-3) = -x+3 \\ x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = x + 2x - 3 = 3x-3 \end{cases}$$



مطابق شکل روبه‌رو، مساحت مثلثی

به ارتفاع $\frac{3}{2}$ و قاعده ۲ مد نظر

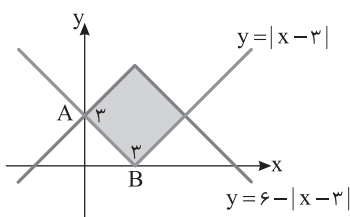
است که برابر است با $\frac{3}{2}$.

گزینه ۳ - ۲۲۳۹ در شکل زیر نمودارها را رسم کرده‌ایم. با توجه به اینکه

شکل حاصل مربع است، کافی است طول ضلع مربع را به دست آوریم:

$$A(0, 3), B(3, 0) \Rightarrow AB = \sqrt{(3-0)^2 + (0-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با $(3\sqrt{2})^2 = 18$.



گزینه ۲ - ۲۲۳۳ اگر $0 \leq x \leq 2$ ، آن‌گاه $x+2 > 0$ و $x-2 \leq 0$ ، پس

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \leq 0$$

$$x^2 - 2x = x(x-2) \leq 0$$

بنابراین $f(x) = -x^2 + 4 + (x^2 - 2x) = -2x + 4$ ، پس

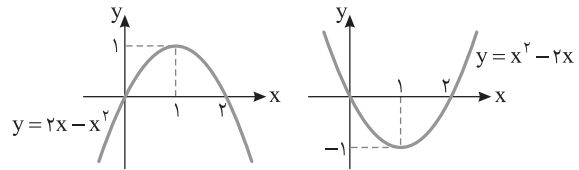
$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow -4 \leq -2x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -2x + 4 \leq 4$$

پس حداکثر مقدار تابع برابر ۴ است.

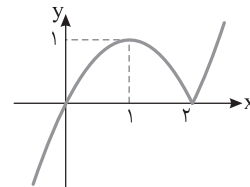
گزینه ۲ - ۲۲۳۴ ضابطه تابع به شکل

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & x \leq 2 \\ x^2 - 2x & x > 2 \end{cases}$$

است. نمودار توابع $y = x^2 - 2x$ و $y = 2x - x^2$ به صورت زیر است.



بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است.



گزینه ۳ - ۲۲۳۵ راه حل اول ضابطه تابع به صورت زیر است:

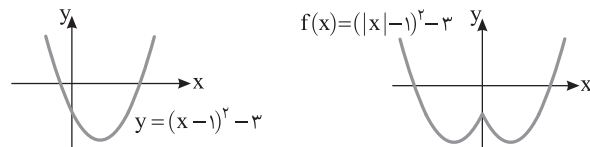
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \leq 0 \\ x^2 - 2x - 2 & x > 0 \end{cases}$$

هر یک از قطعه‌ها بخشی از یک سهمی است (اولی به رأس $(-1, -3)$ و دومی به رأس $(1, -3)$). پس نمودار تابع به صورت گزینه (۳) است.

راه حل دوم توجه کنید که

$$f(x) = |x|^2 - 2|x| - 2 = (|x| - 1)^2 - 3$$

بنابراین کافی است ابتدا نمودار تابع $y = (x-1)^2 - 3$ را رسم کنیم. سپس قسمتی از نمودار را که سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد حذف کنیم و قرینه قسمتی را که سمت راست این محور قرار دارد نسبت به این محور رسم کنیم.



راه حل سوم چون $f(-x) = f(x)$ ، بنابراین نمودار تابع f نسبت به محور y

متقارن است (توجه کنید که نمودار $y = f(-x)$ از قرینه کردن نمودار تابع f نسبت به محور y به دست می‌آید). بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شوند.

از طرف دیگر، $f(0) = -2$ ، پس گزینه (۱) هم رد می‌شود.

گزینه ۳ - ۲۲۳۶ توجه کنید که

$$f(x) = \frac{|x-2||x+2|}{x+2} = \begin{cases} |x-2| & x > -2 \\ -|x-2| & x < -2 \end{cases}$$

راه حل دوم فرض کنید $n=2$. در این صورت $[\sqrt{4n^2-2n+1}]=[\sqrt{3}]=3$. فقط مقدار گزینه (۲) به ازای $n=2$ برابر ۳ می شود.

۲۲۴۷- گزینه (۲) اگر $[\frac{5-x}{2}]=-4$ ، آن گاه $-4 \leq \frac{5-x}{2} < -3$ ، بنابراین $-8 \leq 5-x < -6 \Rightarrow -13 \leq -x < -11$

در نتیجه $11 < x \leq 13$. بنابراین $a=11$ ، $b=13$ و $b-a=2$.

۲۲۴۸- گزینه (۲) ابتدا توجه کنید که $[x+2]=[x]+2$ و $[x-1]=[x]-1$ بنابراین

$$2[x+2]-[x-1]=7 \Rightarrow 2[x]+4-[x]+1=7 \Rightarrow [x]=2 \Rightarrow 2 \leq x < 3$$

۲۲۴۹- گزینه (۱) اگر k عددی صحیح باشد، آن گاه $[x+k]=[x]+k$ بنابراین

$$[x+[x-3]]=3 \Rightarrow [x]+[x-3]=3 \Rightarrow [x]+[x]-3=3 \Rightarrow [x]=3$$

در نتیجه $3 \leq x < 4$. بنابراین $a=3$ ، $b=4$ و $a+b=7$.

۲۲۵۰- گزینه (۳) توجه کنید که $3 \leq [x] \leq 4$ معادل است با $[x]=3$ یا $[x]=4$. پس

$$[x]=3 \Rightarrow 3 \leq x < 4, [x]=4 \Rightarrow 4 \leq x < 5$$

پس مجموعه جواب های نامعادله بازه $[3, 5)$ است.

در نتیجه $a=3$ ، $b=5$ و $a+b=8$.

۲۲۵۱- گزینه (۱) ابتدا توجه کنید که

$$[\sqrt[3]{2}]=[\sqrt[3]{3}]=\dots=[\sqrt[3]{7}]=1, [\sqrt[3]{8}]=[\sqrt[3]{9}]=\dots=[\sqrt[3]{26}]=2$$

$$[\sqrt[3]{27}]=[\sqrt[3]{28}]=\dots=[\sqrt[3]{63}]=3$$

بنابراین

$$A = \underbrace{1+1+\dots+1}_{6} + \underbrace{2+2+\dots+2}_{19} + \underbrace{3+3+\dots+3}_{37} = 6+38+111=155$$

۲۲۵۲- گزینه (۳)

$$A = [-\sqrt{10}] + [-\sqrt{9}] + [-\sqrt{8}] + \dots + [\sqrt{10}] \\ = ([-\sqrt{10}] + [\sqrt{10}]) + ([-\sqrt{9}] + [\sqrt{9}]) + \dots + ([-\sqrt{1}] + [\sqrt{1}])$$

اگر $x \in \mathbb{Z}$ آن گاه $[x]+[-x]=0$ و اگر $x \notin \mathbb{Z}$ آن گاه $[x]+[-x]=-1$. از $\sqrt{0}$ تا $\sqrt{10}$ اعداد $\sqrt{0}$ ، $\sqrt{1}$ ، $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{9}$ صحیح هستند و اعداد $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{6}$ ، $\sqrt{7}$ ، $\sqrt{8}$ و $\sqrt{10}$ غیر صحیح هستند. بنابراین

$$A = \underbrace{0+0+\dots+0}_{6} + \underbrace{(-1)+(-1)+\dots+(-1)}_{7} = -7$$

۲۲۵۳- گزینه (۴) از $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ نتیجه می شود

$$1 < 3x < 2 \Rightarrow [3x]=1, \frac{3}{2} < \frac{1}{x} < 3 \Rightarrow 3 < \frac{2}{x} < 6 \Rightarrow 1 < \frac{2}{3x} < 2 \Rightarrow [\frac{2}{3x}]=1$$

$$[3x] - [\frac{2}{3x}] = 1 - 1 = 0 \text{ بنابراین}$$

۲۲۵۴- گزینه (۲) از فرض مسئله نتیجه می شود

$$2 \leq x < 3 \xrightarrow{\times 2} 4 \leq 2x < 6, 2 \leq y < 3 \xrightarrow{\times 3} 6 \leq 3y < 9$$

در نتیجه با جمع کردن این دو نابرابری معلوم می شود که

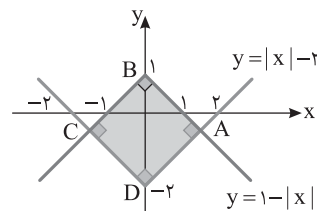
$$10 \leq 2x+3y < 15 \xrightarrow{\div 5} 2 \leq \frac{2x+3y}{5} < 3$$

$$\text{پس } [\frac{2x+3y}{5}] = 2$$

۲۲۴۰- گزینه (۴) نمودار دو تابع را رسم می کنیم. مساحت ABCD مطلوب مسئله است. ابتدا طول نقطه های A و C را مشخص می کنیم:

$$|x|-2=1-|x| \Rightarrow |x|=\frac{3}{2} \Rightarrow x=\pm \frac{3}{2}$$

بنابراین $AC=3$ و $BD=3$. پس چهارضلعی ABCD یک مربع است که مساحت آن برابر است با $S=\frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{9}{2}$.



۲۲۴۱- گزینه (۱) توجه کنید که

$$x^3 = -20 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{20}$$

همچنین $5 < 2\sqrt[3]{20} < 6$ ، بنابراین

$$-6 < -2\sqrt[3]{20} < -5 \Rightarrow -6 < 2x < -5 \Rightarrow [2x] = -6$$

توجه کنید که $2\sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{160}$ و چون $\sqrt[3]{125} < \sqrt[3]{160} < \sqrt[3]{216}$ ، پس $5 < 2\sqrt[3]{20} < 6$

۲۲۴۲- گزینه (۲) توجه کنید که

$$1 \leq x < 4 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x} < 2 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 1$$

$$4 \leq x < 9 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x} < 3 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 2$$

$$9 \leq x < 16 \Rightarrow 3 \leq \sqrt{x} < 4 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 3$$

$$16 \leq x < 25 \Rightarrow 4 \leq \sqrt{x} < 5 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 4$$

$$x=25 \Rightarrow \sqrt{25}=5$$

بنابراین

$$A = 1+1+1+\underbrace{2+2+\dots+2}_{6} + \underbrace{3+3+\dots+3}_{7} + \underbrace{4+4+\dots+4}_{9} + 5 \\ = 3+10+21+36+5=75$$

۲۲۴۳- گزینه (۱) توجه کنید که

$$[x]=2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \Rightarrow 6 \leq 3x < 9 \Rightarrow 1 \leq 3x-5 < 4$$

بنابراین $[3x-5]$ می تواند مقادیر ۱، ۲ و ۳ را داشته باشد.

۲۲۴۴- گزینه (۱) اگر $[\frac{5-x}{2}]=-3$ ، آن گاه $-3 \leq \frac{5-x}{2} < -2$. بنابراین

$$-6 \leq 5-x < -4 \Rightarrow -11 \leq -x < -9$$

در نتیجه $9 < x \leq 11$.

۲۲۴۵- گزینه (۱) ابتدا توجه کنید که

$$[3x-2]=1 \Rightarrow 1 \leq 3x-2 < 2 \Rightarrow 3 \leq 3x < 4 \Rightarrow 1 \leq x < \frac{4}{3}$$

بنابراین

$$2 \leq 2x < \frac{8}{3} \Rightarrow -1 \leq 2x-3 < -\frac{1}{3} \Rightarrow [2x-3] = -1$$

۲۲۴۶- گزینه (۲) راه حل اول توجه کنید که

$$4n^2-4n+1 < 4n^2-2n+1 < (2n)^2 \Rightarrow (2n-1)^2 < 4n^2-2n+1 < (2n)^2$$

$$2n-1 < \sqrt{4n^2-2n+1} < 2n$$

بنابراین $[\sqrt{4n^2-2n+1}] = 2n-1$.

۲۲۶۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه
 بنابراین $[x+k]=[x]+k$

$$\begin{aligned} f(x+3) &= \left[\frac{x+3}{2}\right] - \left[\frac{x+4}{2}\right] = \left[\frac{x+1}{2} + \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{x}{2} + \frac{2}{2}\right] \\ &= \left[\frac{x+1}{2}\right] + 1 - \left[\frac{x}{2}\right] - 2 = -f(x) - 1 \end{aligned}$$

در نتیجه $f(x+3)+f(x)=-1$

۲۲۶۲- گزینه ۲ راه حل اول اگر $x \in [1, 2]$ ، آن‌گاه $-2 \leq x-3 < -1$

بنابراین $|x-3|=-x+3$ همچنین

$$-1 \leq x-2 < 0 \Rightarrow [x-2]=-1$$

در نتیجه $f(x)=-1+(-x+3)=-x+2$

راه حل دوم $f(1)=-1+|-2|=1$ فقط در گزینه (۲) برقرار است.

۲۲۶۳- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که باید $9-x^2 \geq 0$ و در نتیجه
 $-3 \leq x \leq 3$ از طرف دیگر،

$$\left[\frac{x}{2}\right]-1=0 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right]=1 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \Rightarrow 2 \leq x < 4$$

بنابراین عددهای بازه $[2, 4]$ در دامنه تابع نیستند و دامنه تابع به صورت
 $a+b=-1$ و $b=2$ ، $a=-3$ است. پس $[-3, 2]$

۲۲۶۴- گزینه ۲ باید نامعادله‌های $[x]+2 \geq 0$ و $3-[x] \geq 0$ را حل کنیم
 و اشتراک مجموعه جواب‌های آن‌ها را به دست آوریم:

$$[x]+2 \geq 0 \Rightarrow [x] \geq -2 \Rightarrow x \geq -2, \quad 3-[x] \geq 0 \Rightarrow [x] \leq 3 \Rightarrow x < 4$$

بنابراین $D_f = [-2, 4]$ پس $a=-2$ ، $b=4$ و $a+b=2$

۲۲۶۵- گزینه ۱ اگر $-1 \leq x < 0$ ،

$$[x]=-1, |x|=-x \Rightarrow f(x)=-1+x$$

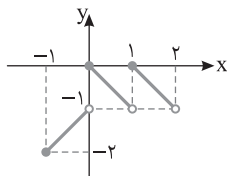
اگر $0 \leq x < 1$ ،

$$[x]=0, |x|=x \Rightarrow f(x)=-x$$

اگر $1 \leq x < 2$ ،

$$[x]=1, |x|=x \Rightarrow f(x)=1-x$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است و برد تابع به صورت $\{-1\}-[-2, 0]$ است.



۲۲۶۶- گزینه ۴ توجه کنید که $D_f = \{x \mid ||x+1|-2| > 0\}$ از طرف

دیگر، چون $||x+1|-2|$ عددی صحیح است، پس اگر مثبت باشد، بزرگ‌تر یا مساوی ۱ است: $||x+1|-2| \geq 1$ در نتیجه

$$|x+1|-2 \geq 1 \Rightarrow |x+1| \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} x+1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 2 \\ x+1 \leq -3 \Rightarrow x \leq -4 \end{cases}$$

بنابراین $D_f = (-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$

۲۲۵۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $x^2-4x=(x-2)^2-4$ ، پس

$$[x]=2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \Rightarrow 0 \leq x-2 < 1 \Rightarrow 0 \leq (x-2)^2 < 1$$

$$-4 \leq (x-2)^2-4 < -3 \Rightarrow [(x-2)^2-4]=-4$$

بنابراین $[x^2-4x]$ فقط می‌تواند مقدار -4 را داشته باشد.

۲۲۵۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$[x^2+x]=-1 \Rightarrow -1 \leq x^2+x < 0$$

$$-1 \leq (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} < 0 \Rightarrow -\frac{3}{4} \leq (x+\frac{1}{2})^2 < \frac{1}{4}$$

$$(x+\frac{1}{2})^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow |x+\frac{1}{2}| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x+\frac{1}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow -1 < x < 0$$

بنابراین $0 < x^1 < 1$ و در نتیجه $[x^1]=0$

۲۲۵۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$n^3 < n^3 + 3n^2 + 1 < n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$$n^3 < n^3 + 3n^2 + 1 < (n+1)^3 \Rightarrow n < \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1} < n+1$$

بنابراین $[\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1}] = n$

۲۲۵۸- گزینه ۳ اگر $-2 < x < -1$ ، آن‌گاه $[x]=-2$ و $|x|=-x$ ،

بنابراین معادله به شکل زیر است

$$-3x-4=1 \Rightarrow x=-\frac{5}{3}$$

اگر $-1 \leq x < 0$ ، آن‌گاه $[x]=-1$ و $|x|=-x$ ، پس معادله به شکل زیر است

$$-3x-2=1 \Rightarrow x=-1$$

اگر $0 \leq x < 1$ ، آن‌گاه $[x]=0$ و $|x|=x$ ، بنابراین معادله به شکل زیر است

$$3x+0=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

بنابراین مجموع جواب‌های واقع در بازه $(-2, 1)$ برابر است با

$$-\frac{5}{3} - 1 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}$$

۲۲۵۹- گزینه ۲ توجه کنید که $[x-1]=[x]-1$ ، بنابراین معادله

مورد نظر می‌شود

$$[x]^2 + 5[x] + 6 = 0 \Rightarrow ([x]+2)([x]+3) = 0$$

اکنون توجه کنید که

$$[x]+2=0 \Rightarrow [x]=-2 \Rightarrow -2 \leq x < -1$$

$$[x]+3=0 \Rightarrow [x]=-3 \Rightarrow -3 \leq x < -2$$

بنابراین مجموعه جواب‌های معادله مورد نظر می‌شود

$$[-3, -2) \cup [-2, -1) = [-3, -1)$$

در نتیجه $a=-3$ ، $b=-1$ و $b-a=2$

۲۲۶۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\left[\frac{2[x]+1}{5}\right]=3 \Rightarrow 3 \leq \frac{2[x]+1}{5} < 4 \Rightarrow 7 \leq [x] < \frac{19}{2}$$

چون $[x]$ عددی صحیح است، پس

$$[x]=7 \Rightarrow 7 \leq x < 8, \quad [x]=8 \Rightarrow 8 \leq x < 9, \quad [x]=9 \Rightarrow 9 \leq x < 10$$

بنابراین مجموعه جواب‌های معادله مورد نظر می‌شود

$$[7, 8) \cup [8, 9) \cup [9, 10) = [7, 10)$$

در نتیجه $a=7$ ، $b=10$ و $b-a=3$

۲۲۷۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(f(x)) = f(x) - [3f(x)]$$

اکنون حاصل $[3f(x)]$ را پیدا می‌کنیم. اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه

$$[x+k] = [x] + k$$

در نتیجه

$$[3f(x)] = [3x - 3[3x]] = [3x] - 3[3x] = -2[3x]$$

زیرا $(3[3x]) \in \mathbb{Z}$ بنابراین

$$f(f(x)) = f(x) - (-2[3x]) = x - [3x] + 2[3x] = x + [3x]$$

در نتیجه $f(f(x)) - x = [3x]$

۲۲۷۲- گزینه ۲ راه حل اول ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم:

$$[4-x] + [x-3] = 0 \Rightarrow 4 + [-x] + [x] - 3 = 0$$

$$[x] + [-x] = -1 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$$

پس عددهای غیر صحیح مخرج کسر را صفر می‌کنند و در دامنه تابع نیستند. بنابراین دامنه تابع $\mathbb{Z}$ است.

راه حل دوم توجه کنید که $f(0) = f(1) = 1$. بنابراین عددهای صفر و ۱ در دامنه تابع هستند و گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) رد می‌شوند.

۲۲۷۳- گزینه ۱ اگر x عددی صحیح باشد که در دامنه f نیست، آن‌گاه

$$[|x+1|-2]-5=0 \quad (1)$$

و چون x صحیح است، پس $|x+1|-2$ نیز صحیح است، در نتیجه

$$[|x+1|-2] = |x+1|-2$$

بنابراین معادله (۱) می‌شود

$$|x+1|-2-5=0 \Rightarrow |x+1|=7 \Rightarrow x+1=\pm 7 \Rightarrow x=\pm 7-1$$

بنابراین مجموع عددهای صحیح مورد نظر برابر -2 است.

۲۲۷۴- گزینه ۳ برای تعیین دامنه تابع f باید نامعادله $\frac{4-[x]}{[x]-1} \geq 0$ را حل

کنیم. اگر فرض کنیم $t = [x]$ ، نامعادله به صورت $\frac{4-t}{t-1} \geq 0$ درمی‌آید که

جواب آن به صورت $1 < t \leq 4$ است.

بنابراین

$$1 < [x] \leq 4 \Rightarrow 2 \leq x < 5$$

بنابراین $D_f = [2, 5)$ و در نتیجه $a=2$ ، $b=5$ و $a+b=7$.

۲۲۷۵- گزینه ۲ باید نامعادله $4[x] - [x]^2 \geq 0$ را حل کنیم. فرض

می‌کنیم $[x] = t$ و در نتیجه

$$4t - t^2 \geq 0 \Rightarrow t(4-t) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq t \leq 4$$

بنابراین $0 \leq [x] \leq 4$. در نتیجه $0 \leq x < 5$. پس $D_f = [0, 5)$ و دامنه تابع

شامل ۵ عدد صحیح است.

۲۲۷۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که نابرابری $0 \leq x - [x] < 1$ برای هر

مقدار x برقرار است.

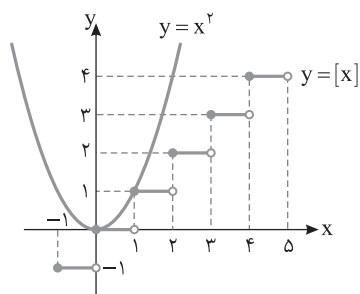
پس

$$-1 < [x] - x \leq 0 \Rightarrow -2 < 2[x] - 2x \leq 0 \Rightarrow -2 < f(x) \leq 0$$

بنابراین $R_f = (-2, 0]$.

۲۲۶۷- گزینه ۲ نمودار این تابع‌ها را در شکل زیر رسم کرده‌ایم. از روی

شکل معلوم است که نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند.

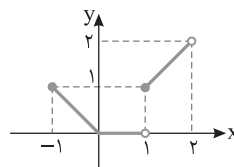


۲۲۶۸- گزینه ۳ ضابطه تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = -x, \quad 0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = x$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



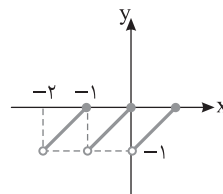
۲۲۶۹- گزینه ۲ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$-2 < x \leq -1 \Rightarrow 1 \leq -x < 2 \Rightarrow [-x] = 1 \Rightarrow f(x) = x+1$$

$$-1 < x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -x < 1 \Rightarrow [-x] = 0 \Rightarrow f(x) = x$$

$$0 < x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x < 0 \Rightarrow [-x] = -1 \Rightarrow f(x) = x-1$$

پس نمودار تابع f به شکل زیر است:



راه حل دوم می‌دانیم برای هر عدد حقیقی a ، $[a] \leq a$. بنابراین

$$[-x] \leq -x \Rightarrow x + [-x] \leq 0$$

چون $f(x) = x + [-x]$ ، پس مقادیر تابع f همواره نامثبت هستند، بنابراین گزینه‌های

(۳) و (۴) رد می‌شوند. از طرف دیگر $f(0) = 0$ ، پس گزینه (۱) نیز رد می‌شود.

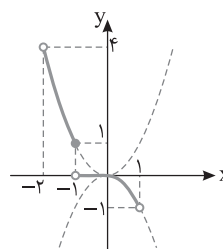
۲۲۷۰- گزینه ۲ ضابطه تابع به شکل زیر است:

$$-2 < x \leq -1 \Rightarrow 1 \leq -x < 2 \Rightarrow [-x] = 1 \Rightarrow f(x) = x^2$$

$$-1 < x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -x < 1 \Rightarrow [-x] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow -1 < -x < 0 \Rightarrow [-x] = -1 \Rightarrow f(x) = -x^2$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است:



۲۲۸۲- گزینه ۱ معادله مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$x^2 - 3 = \pm(x-1)$$

بنابراین

$$x^2 - 3 = x - 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - 3 = -(x-1) \Rightarrow x^2 + x - 4 = 0 \quad (2)$$

هر دو معادله دو جواب دارند و دو معادله جواب یکسان ندارند. مجموع جواب‌های معادله (۱) برابر ۱ و مجموع جواب‌های معادله (۲) برابر -۱ است. بنابراین مجموع جواب‌های معادله اصلی برابر صفر است.

۲۲۸۳- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$|4x - \sqrt{x^2 - 8x + 16}| = |4x - \sqrt{(x-4)^2}| = |4x - |x-4||$$

از طرف دیگر،

$$|2x-5| < 3 \Rightarrow -3 < 2x-5 < 3 \Rightarrow 2 < 2x < 8 \Rightarrow 1 < x < 4 \quad (1)$$

بنابراین $x-4 < 0$ ، در نتیجه $|x-4| = -(x-4)$. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $|4x + x - 4| = |5x - 4|$. از طرف دیگر، بنابر نابرابری‌های (۱)،

$$x > 1 \Rightarrow 5x > 5 \Rightarrow 5x - 4 > 1$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $5x - 4$.

راه حل دوم توجه کنید که $x=2$ در نامعادله $|2x-5| < 3$ صدق می‌کند.

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر را به ازای $x=2$ به دست می‌آوریم:

$$A = |4x - \sqrt{x^2 - 8x + 16}| \Big|_{x=2} \Rightarrow A = |8 - \sqrt{4 - 16 + 16}| = 6$$

فقط مقدار گزینه (۳) به ازای $x=2$ برابر ۶ است.

۲۲۸۴- گزینه ۴ نامعادله مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$|x^2 - 3x| < 2x \Rightarrow |x(x-3)| < 2x \Rightarrow |x||x-3| < 2x$$

معلوم است که $x=0$ جواب این نامعادله نیست و x نمی‌تواند منفی باشد.

بنابراین $x > 0$ و

$$x|x-3| < 2x \Rightarrow x(|x-3|-2) < 0 \Rightarrow |x-3|-2 < 0 \Rightarrow |x-3| < 2$$

$$-2 < x-3 < 2 \Rightarrow 1 < x < 5$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر بازه $(1, 5)$ است، یعنی $a=1$ ،

$$b=5 \text{ و } b-a=4$$

۲۲۸۵- گزینه ۲ راه حل اول از $-3 \leq x \leq 6$ ، نتیجه می‌شود

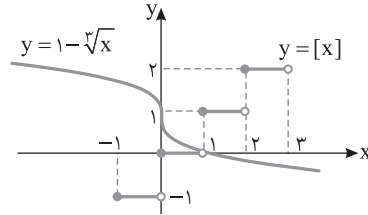
$$-4 \leq x-1 \leq 5$$

پس $|x-1| \leq 5$. بنابراین

$$-8 \leq |x-1| - 8 \leq -3 \Rightarrow 3 \leq ||x-1|-8| \leq 8 \Rightarrow 3 \leq f(x) \leq 8$$

پس حداقل مقدار تابع برابر ۳ و حداکثر مقدار آن ۸ است و مجموع آن‌ها ۱۱ است.

۲۲۷۷- گزینه ۴ نمودار دو تابع $y=1-\sqrt[3]{x}$ و $y=[x]$ را رسم می‌کنیم. از روی شکل معلوم است که نمودارها در هیچ نقطه‌ای یکدیگر را قطع نمی‌کنند.



۲۲۷۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

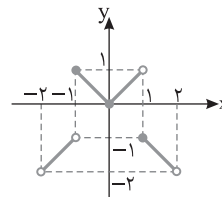
اگر $[x]$ عددی زوج باشد، آن‌گاه

$$f(x) = x \text{ و در نتیجه } (-1)^{[x]} = 1$$

همچنین اگر $[x]$ عددی فرد باشد، آن‌گاه

$$f(x) = -x \text{ و در نتیجه } (-1)^{[x]} = -1$$

بنابراین نمودار تابع به شکل روبه‌رو است.



۲۲۷۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که ضابطه تابع به شکل زیر است:

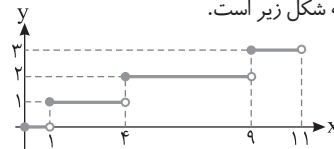
$$0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} < 1 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$1 \leq x < 4 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x} < 2 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 1 \Rightarrow f(x) = 1$$

$$4 \leq x < 9 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x} < 3 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 2 \Rightarrow f(x) = 2$$

$$9 \leq x < 11 \Rightarrow 3 \leq \sqrt{x} < \sqrt{11} \Rightarrow [\sqrt{x}] = 3 \Rightarrow f(x) = 3$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است.



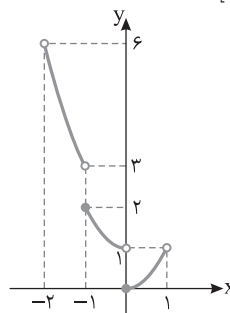
۲۲۸۰- گزینه ۱ توجه کنید که

$$-2 < x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = x^2 + 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = x^2$$

پس نمودار تابع f به شکل مقابل است:



۲۲۸۱- گزینه ۲ توجه کنید که $2x^2 + 5x - 3 = (2x-1)(x+3)$

بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$|(2x-1)(x+3)| = 2|x+3| \Rightarrow |2x-1||x+3| = 2|x+3|$$

$$|x+3|(|2x-1|-2) = 0$$

به این ترتیب

$$|x+3| = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$|2x-1|-2 = 0 \Rightarrow 2x-1 = \pm 2 \Rightarrow -\frac{1}{2}, x = \frac{3}{2}$$

در نتیجه، مجموع جواب‌ها برابر با -۲ است.

راه حل دوم می دانیم $[x] \leq x$ ، بنابراین تابع $f(x) = x^2 - [x]$ همواره نامثبت است. بنابراین گزینه های (۳) و (۴) رد می شوند. از طرف دیگر $f(0) = 0$ ، پس گزینه (۲) هم رد می شود.

۲۲۹۰- گزینه ۱ به جای x در ضابطه f قرار می دهیم $x-1$:

$$f(x-1) = 4(x-1) - [x-1] - [3(x-1)] = 4x - 4 - [x] + 1 - [3x] + 3 = 4x - [x] - [3x] = f(x)$$

۲۲۹۱- گزینه ۴ معادله $(x-4)|x| < 2x-5$ را برای $x \geq 0$ و $x < 0$ جداگانه حل می کنیم:

$$x \geq 0 \Rightarrow (x-4)x < 2x-5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0 \Rightarrow 1 < x < 5$$

$$x < 0 \Rightarrow (x-4)(-x) < 2x-5 \Rightarrow x^2 - 2x - 5 > 0$$

$$x < -1 - \sqrt{6}, x > 1 + \sqrt{6} \xrightarrow{x < 0} x < -1 - \sqrt{6}$$

پس مجموعه جواب های معادله به صورت $(-\infty, -1-\sqrt{6}) \cup (1, 5)$ است.

ریاضی - ۹۲

۲۲۹۲- گزینه ۴ راه حل اول واضح است که اگر $x < 0$ ، نامعادله جواب ندارد. زیرا در این صورت باید $|x^2 - 2x| < 0$ غیرممکن است. بنابراین باید با شرط $x \geq 0$ نامعادله را حل کنیم. اکنون توجه کنید که نامعادله به صورت زیر ساده می شود:

$$|x^2 - 2x| < x \Rightarrow |x(x-2)| < x \Rightarrow |x||x-2| < x$$

$$x|x-2| < x \Rightarrow |x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

بنابراین مجموعه جواب های نامعادله بازه $(1, 3)$ است.

راه حل دوم به کمک دو مقدار $x=1$ و $x=2$ گزینه صحیح مشخص می شود. $x=1$ در نامعادله صدق نمی کند ولی $x=2$ در آن صدق می کند. تنها گزینه ای که عدد ۲ در آن قرار دارد ولی عدد ۱ در آن قرار ندارد، گزینه (۴) است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۲۲۹۳- گزینه ۳ راه حل اول اگر $|x+1| - 1 < 0$ ، آن گاه نامعادله جواب ندارد. زیرا در این صورت باید $|x^2 - 2| < 0$ که غیرممکن است. بنابراین باید

$$|x+1| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x+1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 0 \\ x+1 \leq -1 \Rightarrow x \leq -2 \end{cases} \text{ و در نتیجه}$$

اگر $x \leq -2$ ، آن گاه $x+1 < 0$ و $x^2 - 2 > 0$ ، پس نامعادله به صورت زیر خواهد بود:

$$(غ.ق.ق.) \quad x^2 - 2 < -x - 1 - 1 \Rightarrow x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 0$$

بنابراین نامعادله در بازه $(-\infty, -2]$ جواب ندارد. پس باید با فرض $x \geq 0$

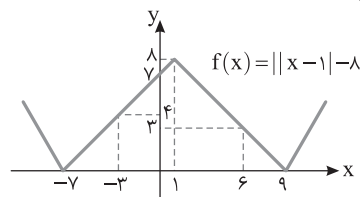
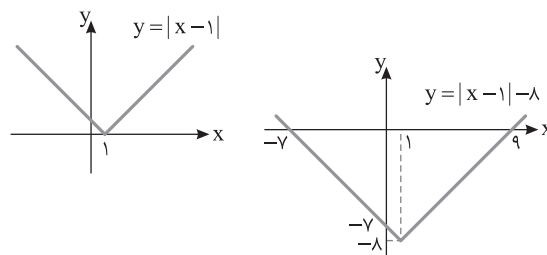
آن را حل کنیم. در این حالت $x+1 > 0$ و نامعادله به صورت زیر درمی آید:

$$|x^2 - 2| < x + 1 - 1 \Rightarrow |x^2 - 2| < x \Rightarrow -x < x^2 - 2 < x$$

پس باید دستگاه نامعادله های (۱) $x^2 - x - 2 < 0$ (۲) $x^2 + x - 2 > 0$ را حل کنیم. مجموعه

جواب های نامعادله (۱) با شرط $x \geq 0$ به صورت $0 \leq x < 2$ و مجموعه جواب های نامعادله (۲) با شرط $x \geq 0$ به صورت $x > 1$ است. اشتراک این مجموعه جواب ها بازه $(1, 2)$ است که وسط بازه نقطه ای به طول $1/5$ است.

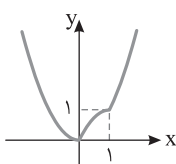
راه حل دوم نمودار تابع را رسم می کنیم. با توجه به شکل تابع، واضح است که وقتی $-3 \leq x \leq 6$ ، $3 \leq f(x) \leq 8$.



پس حداقل مقدار تابع برابر ۳ و حداکثر مقدار آن ۸ است و مجموع آن ها ۱۱ است.

۲۲۸۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + x & x \leq 0 \\ -(x^2 - x) + x & 0 < x \leq 1 \\ x^2 - x + x & x > 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x & 0 < x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$$



بنابراین نمودار تابع f به شکل روبه رو است.

۲۲۸۷- گزینه ۳ توجه کنید که $f(120) = [\frac{120}{11}] - [-\frac{120}{17}]$.

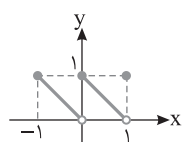
از طرف دیگر،

$$10 < \frac{120}{11} < 11 \Rightarrow [\frac{120}{11}] = 10, \quad -8 < -\frac{120}{17} < -7 \Rightarrow [-\frac{120}{17}] = -8$$

$$\text{بنابراین } f(120) = 10 - (-8) = 18$$

۲۲۸۸- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} -1 - (x-1) & -1 \leq x < 0 \\ 0 - (x-1) & 0 \leq x < 1 \\ 1 + 0 & x = 1 \end{cases} = \begin{cases} -x & -1 \leq x < 0 \\ -x + 1 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$



بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است:

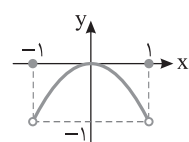
۲۲۸۹- گزینه ۱ راه حل اول اگر k عددی صحیح باشد، آن گاه

$$[x] \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = x^2([x] + [-x]) \quad \text{بنابراین} \quad [x+k] = [x] + k$$

$$[-x] = \begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -[x] - 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{از طرف دیگر،}$$

$$\text{پس می توان نوشت } f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -x^2 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{و}$$

نمودار تابع f به صورت مقابل است:



۲۲۹۶- گزینه ۳ ابتدا ضابطه تابع g را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(2x-3) - 2f(x) = 2x-3 - [2x-3] - 2x+2[x] \\ &= 2x-3 - [2x] + 3 - 2x+2[x] \Rightarrow g(x) = 2[x] - [2x] \end{aligned}$$

با توجه به اینکه حاصل $g(x) = 2[x] - [2x]$ همواره عددی صحیح است، گزینه (۳) یعنی $\{-1, 0\}$ یا گزینه (۴) یعنی $\{0, 1\}$ پاسخ صحیح هستند که با قرار دادن چند مقدار خواهیم داشت:

$$x = \frac{1}{10} \Rightarrow y = 0, \quad x = \frac{9}{10} \Rightarrow y = -1$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۲۲۹۷- گزینه ۲ ابتدا از $[x^2 + x] = -1$ مقادیر x را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} -1 \leq x^2 + x < 0 &\Rightarrow \begin{cases} x^2 + x < 0 \Rightarrow -1 < x < 0 \\ x^2 + x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \end{cases} \\ \text{اشتراک} &\rightarrow -1 < x < 0 \end{aligned}$$

تجربی - ۸۸

پس $0 < x^2 < 1$ و حاصل $[x^2] = 0$ برابر صفر است.

۲۲۹۸- گزینه ۳ راه حل اول از آنجا که به ازای هر عدد طبیعی $n > 2$

حاصل، عددی منحصر به فرد است به ازای $n = 3$ این عدد را به دست می‌آوریم:

$$n = 3: [\sqrt{3^2 - 9 + 1}] - 2[\sqrt{9 - 6}] = [\sqrt{28}] - 2[\sqrt{3}] = 5 - 2 = 3$$

راه حل دوم به ازای $n > 2$

$$\begin{cases} 4n^2 - 4n + 1 < 4n^2 - 3n + 1 < 4n^2 \Rightarrow (2n-1)^2 < 4n^2 - 3n + 1 < (2n)^2 \\ 2n-1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n \Rightarrow [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] = 2n-1 \\ n^2 - 4n + 4 < n^2 - 2n < n^2 - 2n + 1 \Rightarrow (n-2)^2 < n^2 - 2n < (n-1)^2 \\ n-2 < \sqrt{n^2 - 2n} < n-1 \Rightarrow [\sqrt{n^2 - 2n}] = n-2 \end{cases}$$

پس $[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] = 2n-1 - 2(n-2) = 4-1 = 3$

تجربی - ۹۱

۲۲۹۹- گزینه ۱ ضابطه $f(x-f(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = [x] \Rightarrow f(x-f(x)) = f(x-[x])$$

از طرف دیگر $x-[x]$ همواره در فاصله $[0, 1)$ است، بنابراین $f(x-[x])$ یعنی جزء صحیح آن برابر صفر است، یعنی $f(x-[x]) = 0$.

خارج از کشور تجربی - ۸۵

۲۳۰۰- گزینه ۱ از نامعادله $x^2 + x < 0$ نتیجه می‌گیریم $-1 < x < 0$

پس به ازای $-1 < x < 0$:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1, \quad 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0$$

$$-1 < x^3 < 0 \Rightarrow [x^3] = -1, \quad 0 < x^4 < 1 \Rightarrow [x^4] = 0$$

$$[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4] = -1 + 0 - 1 + 0 = -2$$

خارج از کشور تجربی - ۸۸

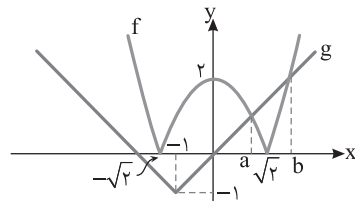
راه حل دوم ابتدا نمودار توابع $f(x) = |x^2 - 2|$ و $g(x) = |x+1| - 1$ را رسم

می‌کنیم. توجه کنید جاهایی که $f(x) < g(x)$ بازه (a, b) است. از روی نمودارها معلوم می‌شود که در این بازه $x > 0$. بنابراین در این بازه، ضابطه g به صورت $g(x) = x+1-1 = x$ ساده می‌شود. اکنون توجه کنید که نامعادله مورد نظر می‌شود:

$$|x^2 - 2| < x \Rightarrow x^4 - 4x^2 + 4 < x^2 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 < 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 - 1) < 0 \xrightarrow{x > 0} 1 < x < 2$$

بنابراین $a=1$ و $b=2$ ، پس بازه مورد نظر به صورت $(1, 2)$ است و وسط بازه نقطه‌ای به طول $1/5$ است.



خارج از کشور ریاضی - ۹۵

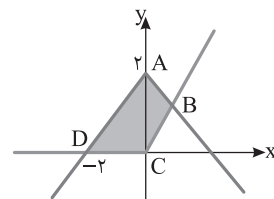
۲۲۹۴- گزینه ۳ با تعیین ضابطه، دو تابع مورد نظر را رسم می‌کنیم:

$$y = 2 - |x| = \begin{cases} 2-x & x \geq 0 \\ 2+x & x < 0 \end{cases}, \quad y = x + |x| = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

ابتدا مختصات نقطه B را محاسبه می‌کنیم:

$$2 - x_B = 2x_B \Rightarrow 3x_B = 2 \Rightarrow x_B = \frac{2}{3}$$

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{\frac{2}{3} \times 2}{2} + \frac{2 \times 2}{2} = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$$



تجربی - ۹۵

۲۲۹۵- گزینه ۴ عبارت $x^2 + 1$ همواره مثبت است، پس

$$|x^2 + 1| = x^2 + 1$$

بنابراین

$$2x+1-|x-2| > x^2+1 \Rightarrow -x^2+2x > |x-2| \Rightarrow -x(x-2) > |x-2|$$

$$x \geq 2: -x(x-2) > (x-2) \Rightarrow (x-2)(-x-1) > 0$$

$$-x > 1 \Rightarrow x < -1 \quad (\text{غ.ق.})$$

$$x < 2: -x(x-2) > -(x-2) \Rightarrow (x-2)(-x+1) > 0$$

$$-x < -1 \Rightarrow x > 1$$

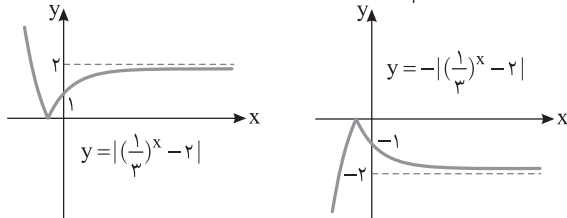
بنابراین $1 < x < 2$.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

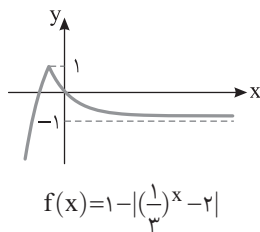
فصل یازدهم



اکنون نمودار تابع $y = |(\frac{1}{3})^x - 2|$ را رسم می‌کنیم. سپس آن را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم:



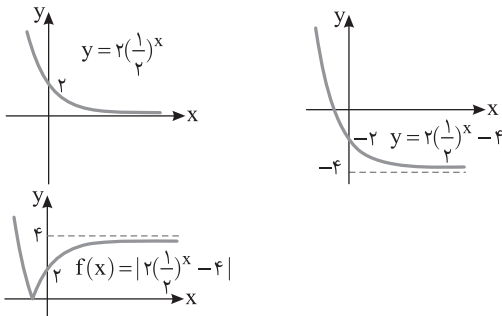
در نهایت، نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



۲۳۰۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که ضابطه تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$f(x) = \frac{|2^{x+1} - 1|}{2^{x-1}} = \frac{|2^{x+1} - 1|}{|2^{x-1}|} = \frac{|2^{x+1} - 1|}{2^{x-1}} = \frac{2^{x+1} - 1}{2^{x-1}} = 4 - \frac{2}{2^x} = 4 - 2(\frac{1}{2})^x = |2(\frac{1}{2})^x - 4|$$

بنابراین نمودار تابع f به ترتیب زیر رسم می‌شود:



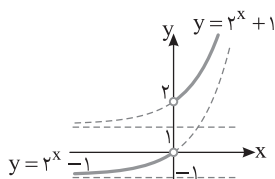
۲۳۰۷- گزینه ۲ می‌توان نوشت $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3^{g(x)-2} = 3^{x+2-2} = 3^x$

$$f(x) = 3^{x-2} = \frac{1}{9} \times 3^x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{9} \times (f \circ g)(x) \Rightarrow (f \circ g)(x) = 9f(x)$$

۲۳۰۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + 1 & x > 0 \\ 2^x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است.



پس برد تابع به صورت $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$ است.

۲۳۰۱- گزینه ۳ نقاط A و B را معین می‌کنیم

$$y = 0 \Rightarrow 2^{x-1} - 2 = 0 \Rightarrow 2^{x-1} = 2^1 \Rightarrow x-1=1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow A = (2, 0)$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 2^{-1} - 2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow B = (0, -\frac{3}{2})$$

$$AB = \sqrt{(2-0)^2 + (0-(-\frac{3}{2}))^2} = \frac{5}{2}$$

۲۳۰۲- گزینه ۱ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(-\frac{3}{2}) = 0 \Rightarrow 9^{-\frac{3}{2}+a} - 2b = 0 \Rightarrow 2b = 9^{-\frac{3}{2}+a}$$

$$f(0) = 26 \Rightarrow 9^a - 2b = 26 \Rightarrow 2b = 9^a - 26$$

بنابراین

$$9^{-\frac{3}{2}+a} = 9^a - 26 \Rightarrow 9^{-\frac{3}{2}+a} = 26 \Rightarrow 9^a (1 - 9^{-\frac{3}{2}}) = 26$$

$$9^a (1 - \frac{1}{\sqrt{27}}) = 26 \Rightarrow 9^a = 27 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

در نتیجه $a+b=2$. به این ترتیب، $b = \frac{1}{2}$ ، یعنی $2b = 9^a - 26 = 1$

۲۳۰۳- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(-1) = 9 \Rightarrow a^{-1} + 1 = 9 \Rightarrow a^{-1} = 8 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$$

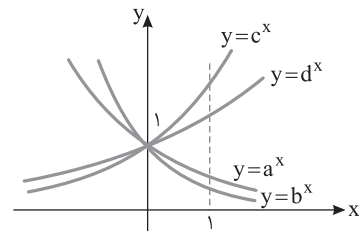
بنابراین $f(x) = (\frac{1}{8})^x + 1$. از طرف دیگر

$$f(0) = b \Rightarrow (\frac{1}{8})^0 + 1 = b \Rightarrow b = 1 + 1 = 2$$

در نتیجه $ab = \frac{1}{4}$

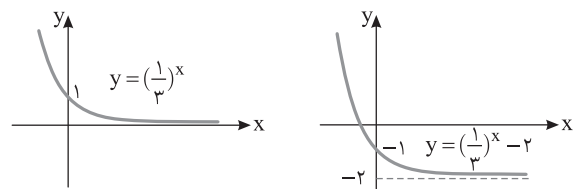
۲۳۰۴- گزینه ۴ چون عرض نقطه برخورد تابع‌ها با خط $x=1$ به صورت

a, b, c, d است، با توجه به نمودار چهار تابع و مقایسه عرض نقطه برخورد تابع‌ها با خط $x=1$ معلوم می‌شود $c > d > a > b$.

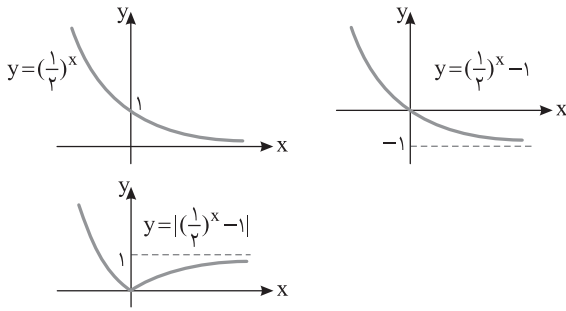


۲۳۰۵- گزینه ۱ توجه کنید که $f(x) = 1 - |(\frac{1}{3})^x - 2|$. ابتدا نمودار

$y = (\frac{1}{3})^x$ را رسم می‌کنیم و سپس آن را دو واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



بنابراین نمودار تابع به ترتیب زیر رسم می‌شود:



۲۳۱۵- گزینه ۱ فرض می‌کنیم $s = 2^{m-2} + 1$. چون $f^{-1}(s) = 26$.

پس $f(26) = s$. در نتیجه $5(26) - 1 = 129$. اکنون می‌توان نوشت

$$s = 2^{m-2} + 1 = 129 \Rightarrow 2^{m-2} = 128 = 2^7$$

بنابراین $m - 2 = 7$ ، پس $m = 9$.

۲۳۱۶- گزینه ۴ توجه کنید که $g(x+2) = 2^{x+2-1} = 2^{x+1}$ ، بنابراین

$$f(2^{x+1}) = 2^x + 1$$

$$f(2^{x+1}) = 2^x + 1 \Rightarrow f^{-1}(2^x + 1) = 2^{x+1}$$

$$2^x + 1 = 9 \Rightarrow 2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین $f^{-1}(9) = 2^{3+1} = 16$.

۲۳۱۷- گزینه ۲ می‌توان نوشت

$$f\left(\frac{x}{3}\right) = 8^{\frac{x}{3}} = 2^x, \quad g(x-2) = 2^{2(x-2)+5} = 2^{2x+1}$$

بنابراین

$$f\left(\frac{x}{3}\right)g(x-2) = 2^x \times 2^{2x+1} = 2^{3x+1} = 2^{3x} \times 2 = 2 \times 8^x = 2f(x)$$

۲۳۱۸- گزینه ۳ ضابطه تابع را به شکل زیر می‌نویسیم

$$f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x + 2} = \frac{2^x + 2}{2^x + 2} - \frac{1}{2^x + 2} = 1 - \frac{1}{2^x + 2}$$

اکنون توجه کنید که برای هر x حقیقی، $2^x > 0$. بنابراین

$$2^x + 2 > 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2^x + 2} < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{1}{2^x + 2} < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{2^x + 2} < 1$$

در نتیجه $\frac{1}{2} < f(x) < 1$.

۲۳۱۹- گزینه ۴ می‌دانیم تابع‌های نمایی به شکل $f(x) = ka^x$

$y = 4^{5-x}$ و $y = 3^{1+2x}$ یک‌به‌یک هستند. در نتیجه تابع‌های

یک‌به‌یک هستند. تابع $f(x) = 2^{3-|x|}$ ، یک‌به‌یک نیست، زیرا برای هر x حقیقی،

$y = 9^x + 2 \times 3^{x+1}$ اکنون ثابت می‌کنیم تابع $f(x) = f(-x) = 2^{3-|x|}$

یک‌به‌یک است. دقت کنید که $9^x + 2 \times 3^{x+1} = (3^x + 3)^2 - 9$.

فرض می‌کنیم $f(x_1) = f(x_2)$. در نتیجه $9^{x_1} + 2 \times 3^{x_1+1} = 9^{x_2} + 2 \times 3^{x_2+1}$.

بنابراین $(3^{x_1} + 3)^2 = (3^{x_2} + 3)^2$ ، چون $3^{x_1} + 3, 3^{x_2} + 3 > 0$ ، پس

$$3^{x_1} + 3 = 3^{x_2} + 3 \Rightarrow 3^{x_1} = 3^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

۲۳۰۹- گزینه ۴ در تابع $f(x) = 2^{x^2} + 1$ برای $x = -1$ و $x = 1$ مقدار

تابع برابر ۳ است. پس تابع یک‌به‌یک نیست.

۲۳۱۰- گزینه ۲ توجه کنید که باید $k > 0$ و

$$f(x) = 2 \times 2^x \times \left(\frac{1}{k}\right)^x = 2 \times \left(\frac{2}{k}\right)^x$$

بنابراین، چون تابع f اکیداً صعودی است، پس

$$\frac{2}{k} > 1 \xrightarrow{k > 0} k < 2$$

بنابراین $0 < k < 2$.

۲۳۱۱- گزینه ۳ با توجه به فرض مسئله،

$$f(0) = -\frac{21}{4} \Rightarrow a\left(\frac{1}{2}\right)^b - 6 = -\frac{21}{4} \Rightarrow a\left(\frac{1}{2}\right)^b = \frac{3}{4}$$

$$a\left(\frac{1}{2}\right)^{b-2} = 3 \Rightarrow a\left(\frac{1}{2}\right)^{b-3} = 6 \Rightarrow a\left(\frac{1}{2}\right)^{b-3} - 6 = 0 \Rightarrow f(-3) = 0$$

بنابراین نمودار تابع f محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع می‌کند.

۲۳۱۲- گزینه ۲ چون نمودار تابع‌های f و g در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع اند، پس

$$f(-1) = g(-1) \Rightarrow 2^{-a+b} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1-b} = 2^{-2(-1-b)} = 2^{2(1+b)}$$

بنابراین

$$-a + b = 2(1+b) \Rightarrow a + b = -2 \quad (1)$$

از طرف دیگر،

$$f(1)g(1) = 4 \Rightarrow 2^{a+b} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{1-b} = 4 \Rightarrow 2^{a+b} \times 2^{-2(1-b)} = 2^2$$

$$2^{a+3b-2} = 2^2 \Rightarrow a+3b=4 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a = -5$ و $b = 3$. بنابراین

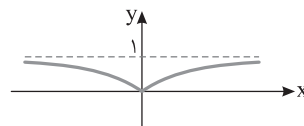
$f(x) = 2^{-5x+3}$. اکنون فرض کنید $f^{-1}\left(\frac{1}{128}\right) = m$. در این صورت

$$f(m) = \frac{1}{128} \Rightarrow 2^{-5m+3} = \frac{1}{128} = 2^{-7} \Rightarrow -5m+3 = -7 \Rightarrow m = 2$$

۲۳۱۳- گزینه ۴ راه‌حل اول توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} 1-2^x & x \leq 0 \\ 1-2^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



راه‌حل دوم توجه کنید که

$$f(1) = f(-1) = \frac{1}{2}$$

فقط گزینه (۴) این شرط را دارد.

۲۳۱۴- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که ضابطه تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$y = \frac{|1-2^x|}{2^x} = \frac{|1-2^x|}{|2^x|} = \left| \frac{1-2^x}{2^x} \right| = \left| \frac{1}{2^x} - 1 \right| = \left| \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 \right|$$

۲۳۲۰- گزینه ۱ توجه کنید که

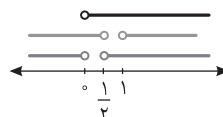
$$f(x) = k \times k^x \times \left(\frac{1}{2k-1}\right)^x = k \left(\frac{k}{2k-1}\right)^x$$

تابع f اکیداً نزولی است، پس باید

$$0 < \frac{k}{2k-1} < 1$$

$$\frac{k}{2k-1} > 0 \Rightarrow k > \frac{1}{2} \text{ یا } k < 0$$

$$\frac{k}{2k-1} < 1 \Rightarrow \frac{k}{2k-1} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{-k+1}{2k-1} < 0 \Rightarrow k > 1 \text{ یا } k < \frac{1}{2}$$



پس $k > 1$.

۲۳۲۱- گزینه ۱ با فاکتورگیری از 3^x معادله را حل می کنیم

$$3^x(3+1) = 10 \Rightarrow 3^x \times 4 = 10 \Rightarrow 3^x = 2.5 = 3^{\log_3 2.5} \Rightarrow x = \log_3 2.5$$

پس معادله مورد نظر فقط یک جواب دارد.

۲۳۲۲- گزینه ۲ معادله را به شکل زیر می نویسیم

$$5^{x-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} \Rightarrow 5^{x-3} = 5^{-x^2}$$

$$x-3 = -x^2 \Rightarrow x^2 + x - 3 = 0$$

پس مجموع جواب های معادله برابر ۱- است.

۲۳۲۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f^{-1}(a) = a \Rightarrow f(a) = a$$

$$2 + 3^{a-2} = 5 \Rightarrow 3^{a-2} = 3 \Rightarrow a-2 = 1 \Rightarrow a = 3$$

۲۳۲۴- گزینه ۲ اگر فرض کنیم $2^x = t$ ، معادله مورد نظر می شود:

$$t - \frac{2}{t} + 15 = 0 \Rightarrow t^2 + 15t - 2 = 0$$

این معادله یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد. از طرف دیگر، معلوم است که معادله $2^x = a$ فقط وقتی جواب دارد که a مثبت باشد و البته اگر a مثبت باشد، این معادله فقط یک جواب دارد (که $\log_2 a$ است). بنابراین معادله اصلی فقط یک جواب دارد.

۲۳۲۵- گزینه ۱ معادله مورد نظر را می توان به شکل

$$3 \times 3^{2x} - 9 \times 3^x + 5 = 0 \text{ نوشت. اگر فرض کنیم } 3^x = t, \text{ این معادله}$$

می شود $3t^2 - 9t + 5 = 0$. هر دو جواب این معادله مثبت اند و مجموع آنها

$$\text{برابر است با } \frac{9}{3} = 3. \text{ به این ترتیب } 3 = t_1 + t_2 = 3^{\alpha} + 3^{\beta}$$

۲۳۲۶- گزینه ۲ از معادله $x+y=5$ به دست می آید $y=5-x$ با

جای گذاری $5-x$ به جای y در معادله $2^x - 2^y = 4$ ، به دست می آید

$$2^x - 2^{5-x} = 4 \Rightarrow 2^x - \frac{2^5}{2^x} = 4 \Rightarrow (2^x)^2 - 4(2^x) - 32 = 0$$

$$(2^x - 8)(2^x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 4 = 0 \Rightarrow 2^x = -4 \text{ (غ.ق.ق.)} \\ 2^x - 8 = 0 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$y = 5 - x \xrightarrow{x=3} y = 2$$

بنابراین $x-y=1$.

۲۳۲۷- گزینه ۲ عددهایی که مخرج کسر را صفر کنند، در دامنه تابع قرار

ندارند. پس

$$|2^x - 4| - 3 = 0 \Rightarrow 2^x - 4 = \pm 3 \Rightarrow 2^x = 7, 2^x = 1$$

هر یک از معادله های بالا فقط یک جواب دارند و این دو جواب متمایز هستند پس دامنه تابع شامل دو عدد نیست.

۲۳۲۸- گزینه ۴ چون $\frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$ ، پس نامعادله مورد نظر می شود:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1-2^x} < \left(\frac{3}{2}\right)^{-(3+x)}$$

اکنون توجه کنید که چون $\frac{3}{2} > 1$ ، پس $1-3^x < -(3+x)$ ، بنابراین $x > 2$.

بنابراین مجموعه جواب های نامعادله مورد نظر بازه $(2, +\infty)$ است.

۲۳۲۹- گزینه ۳ باید نامعادله های $2^x - 8 \geq 0$ و $81 - 3^x > 0$ را حل

کنیم و اشتراک مجموعه جواب های آنها را به دست آوریم

$$2^x - 8 \geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 2^3 \Rightarrow x \geq 3, \quad 81 - 3^x > 0 \Rightarrow 3^x < 3^4 \Rightarrow x < 4$$

بنابراین $D_f = [3, 4)$. در نتیجه $a=3$ ، $b=4$ و $a+b=7$.

۲۳۳۰- گزینه ۱ دامنه تابع f برابر است با

$$D_f = \{x | -3^{2x+1} + 4 \times 3^x - 1 > 0\}$$

فرض می کنیم $3^x = t$ ، در نتیجه باید نامعادله زیر را حل کنیم:

$$-3t^2 + 4t - 1 > 0 \Rightarrow -(t-1)(3t-1) > 0$$

جواب نامعادله بالا به صورت $\frac{1}{3} < t < 1$ است. در نتیجه $\frac{1}{3} < 3^x < 1$. بنابراین

$$-1 < x < 0$$

۲۳۳۱- گزینه ۱ می توان نوشت

$$2^x(1+2+2^2) = 5^x(2+5) \Rightarrow 2^x \times 7 = 5^x \times 7$$

$$2^x = 5^x \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

پس معادله فقط یک جواب دارد.

۲۳۳۲- گزینه ۲ معادله را به شکل $|x| = (2^{-1})^{x-x^2} = 2^{x^2-x}$

می نویسیم. بنابراین

$$|x| = x^2 - x \quad (1)$$

اگر $x \geq 0$ ، این معادله می شود:

$$x = x^2 - x \Rightarrow 2x = x^2 \Rightarrow x = 2, x = 0$$

اگر $x < 0$ ، معادله (۱) می شود:

$$-x = x^2 - x \Rightarrow x^2 = 0$$

که چون $x < 0$ ، جواب ندارد. بنابراین معادله مورد نظر دو جواب دارد: $x=2$ و $x=0$.

۲۳۳۳- گزینه ۳ ابتدا x ای را پیدا می کنیم که $3^x - 1 = 8$ ، یعنی

$3^x = 9$ ، پس $x=2$. به این ترتیب، اگر در تساوی داده شده به جای x قرار

دهیم، ۲ به دست می آید $f(2) = 2^3 + 1 = 9$. از طرف دیگر،

$$f^{-1}(2) = a \Rightarrow f(a) = 2$$

$$3^x + 1 = 2 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

پس

$$f(3^1 - 1) = 1^3 + 1 \Rightarrow f(2) = 2$$

در نتیجه $f^{-1}(2) = 2$. بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با $9+2=11$.

۲۳۳۹- گزینه ۳ باید نامعادله $2^{x+1} - 4^x \geq 0$ را حل کنیم تا دامنه تابع

به دست آید

$$2^{x+1} - 4^x \geq 0 \Rightarrow 2 \times 2^x - (2^x)^2 \geq 0 \Rightarrow 2^x(2 - 2^x) \geq 0.$$

با توجه به اینکه $2^x > 0$ نتیجه می‌شود

$$2 - 2^x \geq 0 \Rightarrow 2^x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1$$

بنابراین $a=1$.

۲۳۴۰- گزینه ۳ دامنه تابع f مجموعه x هایی است که

$$\frac{(\frac{1}{2})^x - 4}{27 - 3^x} \geq 0$$

$$(\frac{1}{2})^x - 4 = 0 \Rightarrow (\frac{1}{2})^x = 4 = 2^2 \Rightarrow x = -2$$

$$27 - 3^x = 0 \Rightarrow 3^x = 27 = 3^3 \Rightarrow x = 3$$

اکنون توجه کنید که

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$(\frac{1}{2})^x - 4$		+	-	-
$27 - 3^x$		+	+	-
$\frac{(\frac{1}{2})^x - 4}{27 - 3^x}$		+	-	+

بنابراین

$$D_f = (-\infty, -2] \cup (3, +\infty) = \mathbb{R} - (-2, 3]$$

در نتیجه $a=-2$ ، $b=3$ و $a+b=1$.

۲۳۴۱- گزینه ۱ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log 90 = \log(9 \times 10) = \log 9 + \log 10 = \log 3^2 + 1 = 2 \log 3 + 1 = 2a + 1$$

۲۳۴۲- گزینه ۱ با استفاده از ویژگی $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$ می‌توان نوشت

$$\log 6 - \log 2 \times \log_3 3 = \log 6 - \log 2 \times \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$= \log 6 - \log 3 = \log \frac{6}{3} = \log 2$$

۲۳۴۳- گزینه ۱ توجه کنید که $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=1$. بنابراین

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \quad \text{در نتیجه}$$

$$\log(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = \log(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \left(\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \right) = -1$$

۲۳۴۴- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\sqrt[4]{3\sqrt{27}\sqrt{81}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{4}}} \times \frac{1}{27^{\frac{1}{4}}} \times \frac{1}{81^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{3}{4}} \times 3^{\frac{4}{4}}} = \frac{1}{3^{\frac{1+3+4}{4}}} = \frac{1}{3^{\frac{8}{4}}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

بنابراین

$$\log_3 \sqrt[4]{3\sqrt{27}\sqrt{81}} = \log_3 3^{-2} = -2 \log_3 3 = -2$$

۲۳۳۴- گزینه ۲ توجه کنید که $\sqrt{5}-2 = \frac{1}{\sqrt{5}+2}$. بنابراین اگر فرض

کنیم $(\sqrt{5}+2)^x = t$ معادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$t + \frac{1}{t} = 18 \Rightarrow t^2 - 18t + 1 = 0 \Rightarrow t = 9 + 4\sqrt{5} = (\sqrt{5}+2)^x \Rightarrow x = 2$$

$$t = 9 - 4\sqrt{5} = (\sqrt{5}+2)^x \Rightarrow x = -2$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر برابر -4 است.

۲۳۳۵- گزینه ۱ معادله مورد نظر را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2^{2x} + 2^x \times 3^x = 2 \times 3^{2x}$$

اگر فرض کنیم $2^x = a$ و $3^x = b$ این معادله می‌شود:

$$a^2 + ab = 2b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = b^2 - ab \Rightarrow (a-b)(a+b) = b(b-a)$$

$$(a-b)(a+b+b) = 0 \Rightarrow (a-b)(a+2b) = 0$$

بنابراین

$$a-b=0 \Rightarrow 2^x = 3^x \Rightarrow (\frac{2}{3})^x = 1 \Rightarrow x=0$$

$$a+2b=0 \Rightarrow 2^x + 2 \times 3^x = 0.$$

در نتیجه، معادله مورد نظر فقط یک جواب دارد: $x=0$.

۲۳۳۶- گزینه ۲ فرض می‌کنیم $a=2^x$ و $b=3^y$ ، در نتیجه

$$\begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -7 \\ ab = \frac{1}{18} \Rightarrow b = \frac{1}{18a} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{\frac{1}{18a}} = -7 \Rightarrow \frac{1}{a} - 18a = -7$$

$$18a^2 - 7a - 1 = 0 \Rightarrow (9a+1)(2a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{9} = 2^x \\ a = \frac{1}{2} = 2^x \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

۲۳۳۷- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1}$$

بنابراین نامعادله مورد نظر می‌شود:

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1-2x} > (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-x-3}$$

چون $0 < \sqrt{3}-\sqrt{2} < 1$ پس

$$1-2x < -x-3 \Rightarrow x > 4$$

۲۳۳۸- گزینه ۴ نامعادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$8(2^x)^2 - 6(2^x) + 1 \geq 0.$$

اگر فرض کنیم $2^x = t$ ، نامعادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$8t^2 - 6t + 1 \geq 0 \Rightarrow (2t-1)(4t-1) \geq 0 \Rightarrow t \geq \frac{1}{2} \text{ یا } t \leq \frac{1}{4}$$

$$t \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x \geq 2^{-1} \Rightarrow x \geq -1$$

$$t \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 2^x \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 2^x \leq 2^{-2} \Rightarrow x \leq -2$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله $(-\infty, -2] \cup [-1, +\infty)$ است که همان

$\mathbb{R} - (-2, -1)$ است. پس $a=-2$ ، $b=-1$ و در نتیجه $a+b=-3$.

۲۳۶۷- گزینه ۲ چون $\log_a x \cdot b = \frac{1}{x} \log_a b$ پس

$$\log_a 1 = a \Rightarrow \log_{\sqrt{3}}(2 \times 5) = a \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \log_{\sqrt{3}}(2 \times 5) = a$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} (\log_{\sqrt{3}} 2 + \log_{\sqrt{3}} 5) = a \Rightarrow 1 + \log_{\sqrt{3}} 5 = 3a \Rightarrow \log_{\sqrt{3}} 5 = 3a - 1$$

بنابراین

$$\log_{\sqrt{3}} 5 = \frac{\log_{\sqrt{3}} 5}{\log_{\sqrt{3}} 4} = \frac{\log_{\sqrt{3}}(2 \times 5)}{\log_{\sqrt{3}}(2^2 \times 5)} = \frac{\log_{\sqrt{3}} 2 + \log_{\sqrt{3}} 5}{\log_{\sqrt{3}} 2^2 + \log_{\sqrt{3}} 5}$$

$$= \frac{1 + \log_{\sqrt{3}} 5}{2 + \log_{\sqrt{3}} 5} = \frac{1 + 2(3a - 1)}{2 + 3a - 1} = \frac{6a - 1}{3a + 1}$$

۲۳۶۸- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}, \quad \log_{ab} x = \frac{\log x}{\log(ab)}$$

بنابراین

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 3 \Rightarrow \frac{\frac{\log x}{\log a}}{\frac{\log x}{\log(ab)}} = 3 \Rightarrow \frac{\log(ab)}{\log a} = 3$$

$$\frac{\log a + \log b}{\log a} = 3 \Rightarrow 1 + \frac{\log b}{\log a} = 3 \Rightarrow \log_a b = 2$$

بنابراین $\log_a b + \log_b a = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. در نتیجه $\log_b a = \frac{1}{\log_a b} = \frac{1}{2}$

۲۳۶۹- گزینه ۴ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(2^x)^2 - 8 \times 2^x + 15 = 0$$

بنابراین $(2^x - 5)(2^x - 3) = 0$ ، پس

$$\begin{cases} 2^x - 3 = 0 \Rightarrow 2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3 \\ 2^x - 5 = 0 \Rightarrow 2^x = 5 \Rightarrow x = \log_2 5 \end{cases}$$

چون $\log_2 5 > \log_2 3$ پس $f(x) = \log_2 x$ تابعی اکیداً صعودی است. در نتیجه بزرگ‌ترین جواب معادله مورد نظر $\log_2 5$ است.

۲۳۷۰- گزینه ۱ راه‌حل اول از دو طرف معادله $2^x = 3^y$ در پایه ۳

لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_3 2^x = \log_3 3^y \Rightarrow x \log_3 2 = y \log_3 3 \Rightarrow y = x \log_3 2$$

در معادله $x + y = 1$ به جای y قرار می‌دهیم $x \log_3 2$ ، در نتیجه

$$x + x \log_3 2 = 1 \Rightarrow x(1 + \log_3 2) = 1$$

$$x(\log_3 3 + \log_3 2) = 1 \Rightarrow x \log_3 6 = 1$$

$$x = \frac{1}{\log_3 6} \Rightarrow x = \log_6 3$$

راه‌حل دوم

$$x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$$

$$2^x = 3^{1-x} \Rightarrow 2^x = \frac{3}{3^x} \Rightarrow 6^x = 3 \Rightarrow x = \log_6 3$$

۲۳۶۰- گزینه ۱ معادله را به صورت $(3^x)^2 - 3^x - 2 = 0$ می‌نویسیم.

در نتیجه $(3^x - 2)(3^x + 1) = 0$ ، چون عبارت $3^x + 1$ همواره مثبت است، نتیجه می‌شود

$$3^x - 2 = 0 \Rightarrow 3^x = 2 \Rightarrow x = \log_3 2$$

۲۳۶۱- گزینه ۱ راه‌حل اول با توجه به اینکه

$$\log_c a + \log_c b = \log_c(ab)$$

داریم

$$A = \log_5 \left(\frac{5}{6} \times \frac{6}{7} \times \frac{7}{8} \times \dots \times \frac{124}{125} \right) = \log_5 \frac{5}{125} = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$$

راه‌حل دوم با توجه به تساوی $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$ می‌توان نوشت

$$A = \log_5 5 - \log_5 6 + \log_5 6 - \log_5 7 + \log_5 7 - \log_5 8 + \dots + \log_5 124 - \log_5 125 = \log_5 5 - \log_5 125 = 1 - 3 = -2$$

۲۳۶۲- گزینه ۱ چون $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$ پس

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{\log_2 3}} = \frac{1}{1 + \log_2 2} = \frac{1}{\log_2 3 + \log_2 2} = \frac{1}{\log_2(3 \times 2)} = \frac{1}{\log_2 6} = \log_6 2$$

۲۳۶۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$2 \log(3 + \sqrt{5}) = \log(3 + \sqrt{5})^2 = \log(9 + 5 + 6\sqrt{5}) = \log(14 + 6\sqrt{5})$$

بنابراین

$$\log(28 + 12\sqrt{5}) - 2 \log(3 + \sqrt{5}) = \log(28 + 12\sqrt{5}) - \log(14 + 6\sqrt{5})$$

$$= \log \frac{28 + 12\sqrt{5}}{14 + 6\sqrt{5}} = \log 2 = k$$

۲۳۶۴- گزینه ۲ به کمک تساوی $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$ می‌توان نوشت

$$\log_2 3 \times \log_3 5 \times \log_5 8 = \frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{\log 5}{\log 3} \times \frac{\log 8}{\log 5} = \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{3 \log 2}{\log 2} = 3$$

۲۳۶۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$a = 5^{\log 2} = 5^{\log 10 + \log 2} = 5^{1 + \log 2} = 5 \times 5^{\log 2} = 5 \times 1^{\log 5}$$

$$b = 2^{\log 5} = 2^{\log 10 + \log 5} = 2^{1 + \log 5} = 2 \times 2^{\log 5}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{5 \times 1^{\log 5}}{2 \times 2^{\log 5}} = \frac{5}{2}$$

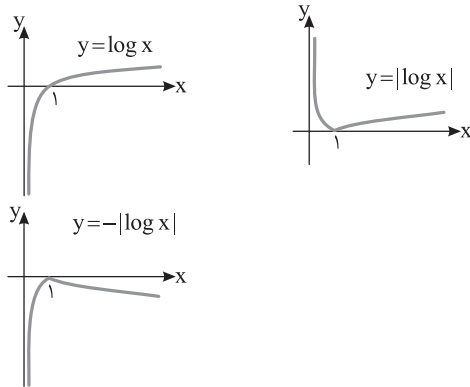
۲۳۶۶- گزینه ۲ توجه کنید که $\log_3 15 = \frac{\log_3 15}{\log_3 10}$ از طرف دیگر

$$\log_3 15 = \log_3(3 \times 5) = \log_3 3 + \log_3 5 = 1 + b$$

$$\log_3 10 = \log_3(2 \times 5) = \log_3 2 + \log_3 5$$

$$= \frac{1}{\log_3 2} + \log_3 5 = \frac{1}{a} + b = \frac{1+b}{a}$$

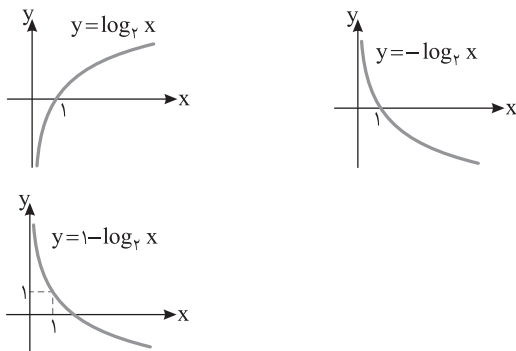
$$\log_3 15 = \frac{1+b}{\frac{1+b}{a}} = \frac{a(1+b)}{1+b}$$



۲۳۷۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{x} = \log_{\frac{1}{2}} 2 - \log_{\frac{1}{2}} x = 1 - \log_{\frac{1}{2}} x$$

بنابراین نمودار تابع به ترتیب زیر رسم می‌شود:



۲۳۷۷- گزینه ۲ شرایط زیر باید برقرار باشند:

$$10 - x > 0 \Rightarrow x < 10, \quad x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2, \quad x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3$$

پس دامنه تابع $\{3\} - (2, 10)$ است که شامل شش عدد صحیح ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ است.

۲۳۷۸- گزینه ۳ باید همواره $x^2 - 2mx + 4 > 0$ ، چون ضریب x^2

مثبت است، باید $\Delta < 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow (-2m)^2 - 4 \times (1) \times 4 < 0$$

$$4m^2 - 16 < 0 \Rightarrow 4(m^2 - 4) < 0 \Rightarrow |m| < 2 \Rightarrow -2 < m < 2$$

۲۳۷۹- گزینه ۳ با تغییرات دو مرحله اول به تابع $f(x) = 2^{x-1} + 1$

می‌رسیم. با قرینه کردن نمودار تابع نسبت به خط $y = x$ ، به تابع وارون f می‌رسیم. ضابطه تابع وارون f به صورت زیر پیدا می‌شود:

$$y = 1 + 2^{x-1} \Rightarrow 2^{x-1} = y - 1 \Rightarrow x - 1 = \log_2(y - 1) \Rightarrow x = \log_2(y - 1) + 1$$

$$\text{در نتیجه } f^{-1}(x) = \log_2(x - 1) + 1$$

۲۳۸۰- گزینه ۳ راه حل اول فرض می‌کنیم $y = -\log_2(x - 1) + 2$

در نتیجه

$$2 - y = \log_2(x - 1) \Rightarrow 2^{2-y} = x - 1$$

بنابراین $x = 2^{2-y} + 1$ ، پس $f^{-1}(x) = 2^{2-x} + 1$

راه حل دوم توجه کنید که $f(3) = -\log_2 2 + 2 = 1$ ، بنابراین $f^{-1}(1) = 3$

فقط گزینه (۳) در این شرط صدق می‌کند.

۲۳۷۱- گزینه ۴ اگر $f^{-1}(8) = t$ ، آن‌گاه $f(t) = 8$ ، بنابراین

$$3 + 5 \log(2t - 3) = 8 \Rightarrow \log(2t - 3) = 1 \Rightarrow 2t - 3 = 10 \Rightarrow t = \frac{13}{2}$$

۲۳۷۲- گزینه ۲ چون نمودار تابع f از نقطه‌های $(2, 3)$ و $(3, 4)$

می‌گذرد، پس

$$f(2) = 3 \Rightarrow a + \log_{\frac{1}{2}}(2b + 1) = 3 \quad (1)$$

$$f(3) = 4 \Rightarrow a + \log_{\frac{1}{2}}(3b + 1) = 4 \quad (2)$$

اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، به دست می‌آید:

$$\log_{\frac{1}{2}}(2b + 1) - \log_{\frac{1}{2}}(3b + 1) = -1$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{2b + 1}{3b + 1} = -1 \Rightarrow \frac{2b + 1}{3b + 1} = 2 \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$$

در نتیجه از تساوی (۱) به دست می‌آید:

$$a = 3 - \log_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{4} + 1\right) = 3 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 3 - 1 = 2$$

۲۳۷۳- گزینه ۴ با توجه به شکل دامنه تابع به صورت $(-3, +\infty)$

است. پس دامنه تابع باید به شکل $(-\frac{b}{a}, +\infty)$ باشد. بنابراین

$$-\frac{b}{a} = -3 \Rightarrow b = 3a$$

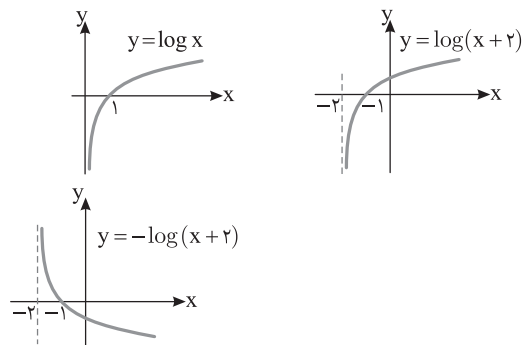
همچنین، نمودار تابع از نقطه $(0, -2)$ می‌گذرد. بنابراین

$$f(0) = \log_{\frac{1}{3}} b = -2 \Rightarrow b = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$$

در نتیجه $a = 3$ ، بنابراین $ab = 27$.

۲۳۷۴- گزینه ۲ ابتدا نمودار تابع $y = \log x$ را دو واحد به چپ انتقال

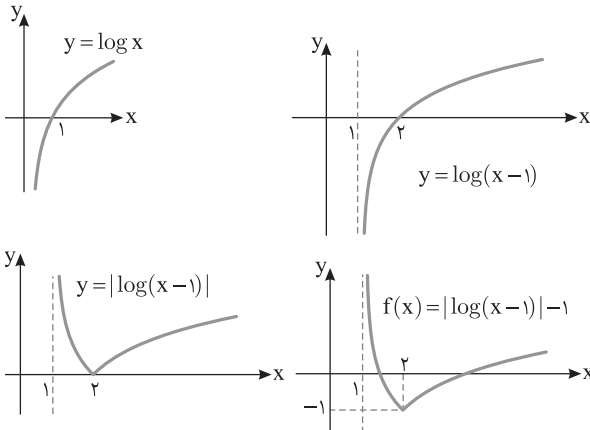
می‌دهیم تا نمودار تابع $y = \log(x + 2)$ به دست آید. سپس نمودار به دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -\log(x + 2)$ به دست آید.



۲۳۷۵- گزینه ۱ ابتدا نمودار $y = \log x$ را رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی

از نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم و قسمت‌های پایین محور طول‌ها را حذف می‌کنیم. تا نمودار $y = |\log x|$ به دست آید. سپس نمودار اخیر را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -|\log x|$ رسم شود.

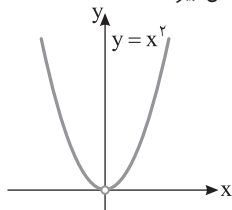
۲۳۸۶- گزینه ۱ ابتدا نمودار تابع $y = \log x$ را رسم می‌کنیم و آن را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = \log(x-1)$ به دست بیاید. سپس قسمت‌هایی از نمودار را که زیر محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y = |\log(x-1)|$ به دست آید و آن قسمت‌ها را حذف می‌کنیم. در آخر نمودار به دست آمده را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع f به دست آید.



۲۳۸۷- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که دامنه تابع مجموعه عددهای حقیقی مخالف صفر است و با توجه به اینکه $a^{\log_a g(x)} = g(x)$

$$f(x) = 2^{\log_2 x^2} = x^2, \quad x \neq 0$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



۲۳۸۸- گزینه ۳ برای اینکه عبارت $\log_{(x-1)}(16-x^2)$ معنادار باشد، باید

$16-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 16 \Rightarrow -4 < x < 4, x-1 > 0 \Rightarrow x > 1, x-1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$
بنابراین دامنه تابع به صورت $D_f = (1, 4) - \{2\}$ است، پس $a=1, b=4$ و $c=2$ و در نتیجه $a+b+c=7$.

۲۳۸۹- گزینه ۴ توجه کنید که

$$y = \frac{4-2^{x+1}}{2^x-1} \Rightarrow y \times 2^x - y = 4 - 2^{x+1}$$

$$2^x(y+2) = 4+y \Rightarrow 2^x = \frac{4+y}{y+2} \Rightarrow x = \log_2\left(\frac{4+y}{y+2}\right)$$

$$\text{بنابراین } f^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{4+x}{x+2}\right)$$

۲۳۹۰- گزینه ۲ برای محاسبه ضابطه تابع وارون تابع داده شده، x را بر حسب y حساب می‌کنیم:

$$y = \frac{\log x}{1+\log x} \Rightarrow y + y \log x = \log x \Rightarrow (y-1) \log x = -y$$

$$\log x = \frac{-y}{y-1} \Rightarrow x = 10^{\frac{-y}{y-1}}$$

$$\text{بنابراین } f^{-1}(x) = 10^{\frac{x}{1-x}}$$

۲۳۸۱- گزینه ۴ چون $f^{-1}(3) = 29$ ، پس $f(29) = 3$ در نتیجه

$$\log_3(2 \times 29 - k) = 3 \Rightarrow 58 - k = 3^3 = 27 \Rightarrow k = 31$$

۲۳۸۲- گزینه ۲ نمودار تابع f نیمساز ناحیه اول را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند، پس از نقطه $(2, 2)$ می‌گذرد. همچنین نمودار تابع f نیمساز ناحیه دوم را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، پس از نقطه $(-1, 1)$ می‌گذرد. به این ترتیب

$$f(2) = 2 \Rightarrow \log_2(2a+b) = 2 \Rightarrow 2a+b=4 \quad (1)$$

$$f(-1) = 1 \Rightarrow \log_2(-a+b) = 1 \Rightarrow -a+b=2 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a = \frac{2}{3}$ و $b = \frac{4}{3}$.

۲۳۸۳- گزینه ۴ توجه کنید که $D_f = (-2, +\infty)$ ، پس $x = -2$ باید

ریشه عبارت $bx+c$ باشد. بنابراین

$$-2b+c=0 \quad (1)$$

از طرف دیگر $f(0) = -1$ و $f(-1) = 0$ ، پس

$$f(0) = \log_a c = -1 \Rightarrow c = \frac{1}{a} \quad (2)$$

$$f(-1) = \log_a(-b+c) = 0 \Rightarrow -b+c=1 \quad (3)$$

از معادلات (۱) و (۳) نتیجه می‌شود $b=1$ و $c=2$. همچنین از معادله (۲)

نتیجه می‌شود $a = \frac{1}{2}$ و در نتیجه $a+b+c = \frac{3}{2}$.

۲۳۸۴- گزینه ۲ نقطه برخورد نمودار تابع f با محور طول‌ها از معادله $f(x) = 0$ به دست می‌آید:

$$f(x) = \log_2(3x-5) = 0 \Rightarrow 3x-5=1 \Rightarrow x=2$$

پس نقطه برخورد نمودار f با محور طول‌ها $A(2, 0)$ است. بنابراین نقطه برخورد

نمودار تابع وارون f با محور عرض‌ها $B(0, 2)$ است. بنابراین

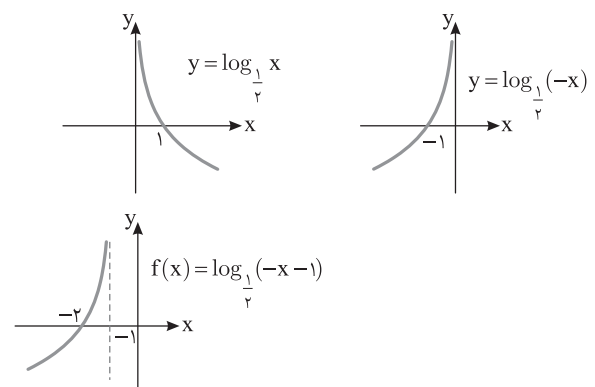
$$AB = \sqrt{(2-0)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

۲۳۸۵- گزینه ۳ ابتدا نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ را رسم می‌کنیم، سپس

آن را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$ به دست

بیاید. سپس آن را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-(x+1)) = \log_{\frac{1}{2}}(-x-1)$ به دست آید. مراحل رسم نمودار

تابع f را در شکل‌های زیر نشان داده‌ایم:



۲۳۹۷- گزینه ۳ دامنه توابع f و g به شکل زیر هستند:

$$x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}, \quad x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

بنابراین دامنه تابع $g \circ f$ طبق تعریف به شکل زیر است:

$$D_{g \circ f} = \{x | x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{x | x \neq 0, \log x^2 \neq 1\} \\ = \{x | x \neq 0, x \neq \pm \sqrt{10}\} = \mathbb{R} - \{0, \pm \sqrt{10}\}$$

بنابراین ۳ عدد در دامنه تابع $g \circ f$ قرار ندارند.

۲۳۹۸- گزینه ۲ از نامعادله $\log(x+1) > \log 3$ نتیجه می‌شود

$x+1 > 3$ و در نتیجه $x > 2$. واضح است که عبارت $\log(x+1)$ به ازای $x > -1$ با معنا است. پس مجموعه جواب‌های نامعادله بازه $(2, +\infty)$ است.

۲۳۹۹- گزینه ۴ برای اینکه $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ با معنا باشد، باید $x-1 > 0$.

یعنی $x > 1$. از طرف دیگر،

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 1 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \Rightarrow x-1 < \frac{1}{2} \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$

بنابراین $1 < x < \frac{3}{2}$.

۲۴۰۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که باید $16-x^2 > 0$ تا عبارت

$\log(16-x^2)$ معنادار باشد. بنابراین

$$x^2 < 16 \Rightarrow -4 < x < 4$$

از طرف دیگر،

$$\log(16-x^2) < \log 15 \Rightarrow 16-x^2 < 15 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله $(-4, -1) \cup (1, 4)$ است که چهار عدد صحیح ± 2 و ± 3 در آن قرار دارند.

۲۴۰۱- گزینه ۱ معادله مورد نظر را می‌توان این طور نوشت

$$\log_4(2x+1) - \log_4(x-1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_4\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2x+1}{x-1} = 4^{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow 2x+1 = 2x-3 \Rightarrow x=4$$

۲۴۰۲- گزینه ۱ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\log\left(\frac{x}{x+1}\right) = \log(\log 2)$$

در نتیجه

$$\frac{x}{x+1} = \log 2 \Rightarrow x = x \log 2 + \log 2$$

$$x(1 - \log 2) = \log 2 \Rightarrow x(\log 10 - \log 2) = \log 2 \Rightarrow x \log 5 = \log 2$$

$$x = \frac{\log 2}{\log 5} \Rightarrow x = \log_5 2$$

۲۴۰۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\log_7(14 + \log_7(x-1)) = 4 \Rightarrow 14 + \log_7(x-1) = 7^4 = 16$$

$$\log_7(x-1) = 2 \Rightarrow x-1 = 7^2 = 49 \Rightarrow x = 50$$

۲۳۹۱- گزینه ۳ کافی است معادله $x^2 - 3x = x$ را حل کنیم:

$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$$

واضح است که $x=0$ قابل قبول نیست چون لگاریتم صفر تعریف نمی‌شود.

پس معادله فقط یک جواب دارد.

۲۳۹۲- گزینه ۱ معادله را می‌توان این طور نوشت

$$\log_7(12b-21) - \log_7(b^2-3) = \log_7\left(\frac{12b-21}{b^2-3}\right) = 2$$

در نتیجه

$$\frac{12b-21}{b^2-3} = 7^2 = 49 \Rightarrow 4b^2 - 12 = 12b - 21$$

بنابراین

$$4b^2 - 12b + 9 = (2b-3)^2 = 0$$

بنابراین $b = \frac{3}{2}$. اما به ازای $b = \frac{3}{2}$ هیچ یک از عبارت‌های $\log_7(12b-21)$

و $\log_7(b^2-3)$ معنادار نیست، بنابراین معادله جواب ندارد.

۲۳۹۳- گزینه ۱ طبق تعریف لگاریتم

$$\log_7(\log_7(x-1)) = 5 \Rightarrow \log_7(x-1) = 7^5 = 32$$

$$x-1 = 3^{32} \Rightarrow x = 3^{32} + 1$$

۲۳۹۴- گزینه ۴ چون $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$ پس معادله مورد نظر

می‌شود

$$\log_{7^2} x + \log_{7^4} x^2 + \log_{7^6} x^3 = 9$$

$$\frac{1}{2} \log_7 x + \frac{2}{4} \log_7 x + \frac{3}{6} \log_7 x = 9$$

$$\frac{3}{2} \log_7 x = 9 \Rightarrow \log_7 x = 6 \Rightarrow x = 7^6 = 64$$

۲۳۹۵- گزینه ۱ فرض می‌کنیم $\log_3 x = t$ ، در نتیجه $\log_x 3 = \frac{1}{t}$.

بنابراین به معادله زیر می‌رسیم:

$$t - \frac{6}{t} + 1 = 0 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t-2)(t+3) = 0 \Rightarrow t = -3, t = 2$$

پس

$$\log_7 x = -3 \Rightarrow x = 7^{-3}$$

$$\log_7 x = 2 \Rightarrow x = 7^2$$

بنابراین حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر برابر $\frac{1}{3}$ است.

۲۳۹۶- گزینه ۱ باید هر دو عبارت $\log(3-x)$ و $\log(x+2)$ با معنا

باشند و نیز $\log(3-x) \neq 0$ ، پس

$$D_f = \{x | x+2 > 0, 3-x > 0, \log(3-x) \neq 0\}$$

اگر $\log(3-x) = 0$ ، آن گاه $x=2$. بنابراین دامنه تابع f به صورت

$$\{2\} - (-2, 3)$$

اکنون توجه کنید که

$$\log_3 9 = 2 \leq \log_3 (2x-1) \leq 3 = \log_3 27$$

$$9 \leq 2x-1 \leq 27 \xrightarrow{+1} 10 \leq 2x \leq 28 \xrightarrow{\div 2} 5 \leq x \leq 14$$

بنابراین $5 \leq x \leq 14$ (توجه کنید که در این محدوده $(2x-1) > 0$). تعداد عددهای صحیح در این محدوده ده تا $(5, 6, 7, \dots, 14)$ است.

گزینه ۴ - ۲۴۰۹ توجه کنید که

$$\log_7 (1+3x) < \log_7 (x+7) \Rightarrow 1+3x < x+7 \Rightarrow x < 3$$

از طرف دیگر، باید $1+3x > 0$ و $x+7 > 0$. در نتیجه $x > -\frac{1}{3}$. بنابراین

مجموعه جواب‌های معادله مورد نظر برابر $(-\frac{1}{3}, 3)$ است.

گزینه ۲ - ۲۴۱۰ برای اینکه $\log_3 (x+2)$ بامعنا باشد، باید $x+2 > 0$.

یعنی $x > -2$. از طرف دیگر، باید

$$1 - \log_3 (x+2) \geq 0 \Rightarrow \log_3 (x+2) \leq 1 = \log_3 3 \Rightarrow x+2 \leq 3 \Rightarrow x \leq 1$$

پس دامنه f بازه $[-2, 1]$ است.

گزینه ۴ - ۲۴۱۱ توجه کنید که $\log_5 25 = 2$. در نتیجه معادله داده

شده به صورت زیر درمی‌آید

$$\log_5 (28x-6) - \log_5 (x-1) = 2 \Rightarrow \log_5 \left(\frac{28x-6}{x-1} \right) = 2$$

در نتیجه

$$\frac{28x-6}{x-1} = 4^2 = 16 \Rightarrow 28x-6 = 16x-16 \Rightarrow 12x = -10 \Rightarrow x = \frac{-10}{12} = \frac{-5}{6}$$

اما به ازای $x = \frac{-5}{6}$ هیچ یک از دو عبارت $\log_5 (28x-6)$ و $\log_5 (x-1)$

معنادار نیست. بنابراین معادله جواب ندارد.

گزینه ۱ - ۲۴۱۲ توجه کنید که

$$2 \log_x (2x-1) = 1 \Rightarrow \log_x (2x-1)^2 = 1$$

بنابراین

$$(2x-1)^2 = x \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = x$$

$$4x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow (4x-1)(x-1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}, x = 1$$

اکنون توجه کنید که اگر $x = 1$ ، پایه لگاریتم داده شده در صورت مسئله برابر ۱

می‌شود که ممکن نیست و اگر $x = \frac{1}{4}$ ، آن‌گاه $2x-1 = -\frac{1}{2}$ ، که باز هم ممکن

نیست، زیرا لگاریتم عددهای منفی تعریف نمی‌شود. بنابراین هیچ یک از مقادیرهای به دست آمده برای x قابل قبول نیستند و معادله مورد نظر جواب ندارد.

گزینه ۱ - ۲۴۱۳ توجه کنید که

$$\log_4 (x^2 - 6x + 9) = \log_4 (x-3)^2 = \frac{2}{4} \log_4 |x-3| = \log_4 |x-3|$$

در نتیجه مسئله به حل معادله زیر منجر می‌شود

$$\log_4 (x+3) + \log_4 |x-3| = \log_4 (x+3) |x-3| = 4$$

بنابراین $(x+3)|x-3| = 2^4 = 16$. اکنون می‌توان گفت

$$x > 3 \Rightarrow (x+3)(x-3) = 16 \Rightarrow x^2 - 9 = 16$$

$$x^2 = 25 \Rightarrow x = 5, x = -5 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

$$x < 3 \Rightarrow (x+3)(3-x) = 16 \Rightarrow 9 - x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = -7 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

بنابراین معادله مورد نظر فقط یک جواب دارد.

گزینه ۲ - ۲۴۰۴ چون $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$ ، پس معادله مورد نظر

می‌شود

$$\log_{3^2} x + \log_{3^4} x + \log_{3^6} x = \frac{11}{3}$$

$$\frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{4} \log_3 x + \frac{1}{6} \log_3 x = \frac{11}{3}$$

$$\frac{11}{12} \log_3 x = \frac{11}{3} \Rightarrow \log_3 x = 4 \Rightarrow x = 3^4 = 81$$

گزینه ۲ - ۲۴۰۵ فرض می‌کنیم $\log_3 x = t$. در این صورت

$\log_x 3 = \frac{1}{t}$. در نتیجه $\frac{1}{\log_x 3} = \log_3 x = t$. بنابراین، معادله داده شده

به صورت زیر درمی‌آید

$$t - \frac{12}{t} = 1 \Rightarrow t^2 - 12 = t \Rightarrow t^2 - t - 12 = 0$$

$$(t-4)(t+3) = 0 \Rightarrow t = 4, t = -3$$

در نتیجه

$$\log_3 x = 4 \Rightarrow x = 3^4 = 81, \log_3 x = -3 \Rightarrow x = 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

گزینه ۲ - ۲۴۰۶ اگر فرض کنیم $\log_3 x = t$ ، آن‌گاه

$$\log_8 x = \log_{3^2} x = \frac{1}{2} \log_3 x = \frac{1}{2} t$$

$$\log_{\frac{1}{8}} x = \log_{8^{-1}} x = -\log_8 x = -\frac{1}{2} t$$

بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$t \left(\frac{1}{3} t \right) - t + \frac{1}{3} t - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} t^2 - \frac{2}{3} t - 1 = 0$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t-3)(t+1) = 0 \Rightarrow t = -1, t = 3$$

بنابراین

$$t = -1 \Rightarrow \log_3 x = -1 \Rightarrow x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$t = 3 \Rightarrow \log_3 x = 3 \Rightarrow x = 3^3 = 27$$

در نتیجه، حاصل ضرب جواب‌های معادله مورد نظر برابر ۴ است.

گزینه ۱ - ۲۴۰۷ دستگاه به شکل
$$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2 \log x - 3 \log y = 1 \end{cases}$$
 است. طرفین

معادله اول را در ۳ ضرب می‌کنیم، سپس طرفین دو معادله را جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases} 3 \log x + 3 \log y = 9 \\ 2 \log x - 3 \log y = 1 \end{cases} \Rightarrow 5 \log x = 10 \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 100$$

بنابراین

$$\log x + \log y = 3 \Rightarrow 2 + \log y = 3 \Rightarrow \log y = 1 \Rightarrow y = 10$$

در نتیجه $x - 2y = 100 - 20 = 80$.

گزینه ۲ - ۲۴۰۸ ابتدا توجه کنید که

$$\log_{\frac{1}{3}} (2x-1) = \log_{3^{-1}} (2x-1) = -\log_3 (2x-1)$$

بنابراین نامعادله‌های مورد نظر را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$-3 \leq -\log_3 (2x-1) \leq -2 \Rightarrow 2 \leq \log_3 (2x-1) \leq 3$$

۲۴۱۹- گزینه ۴ نامعادله مورد نظر را می توان این طور نوشت

$$\frac{1-\log x+1+\log x}{(1-\log x)(1+\log x)} > 2 \Rightarrow \frac{2}{1-(\log x)^2} > 2 \Rightarrow \frac{1}{1-(\log x)^2} > 1$$

$$\frac{1}{1-(\log x)^2} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{1+1+(\log x)^2}{1-(\log x)^2} > 0 \Rightarrow \frac{(\log x)^2}{1-(\log x)^2} > 0$$

بنابراین باید $(\log x)^2 \neq 0$ و $1-(\log x)^2 > 0$:

$$(\log x)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1, \quad (\log x)^2 < 1 \Rightarrow |\log x| < 1$$

$$-1 < \log x < 1 \Rightarrow \frac{1}{10} < x < 10$$

پس مجموعه جواب های نامعادله مورد نظر $\left(\frac{1}{10}, 10\right) - \{1\}$ است.

۲۴۲۰- گزینه ۴ توجه کنید که

$$D_f = \left\{ x \mid x \neq -3, \frac{3x-1}{x+3} > 0, \log\left(\frac{3x-1}{x+3}\right) \geq 0 \right\}$$

اکنون توجه کنید که

$$\frac{3x-1}{x+3} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

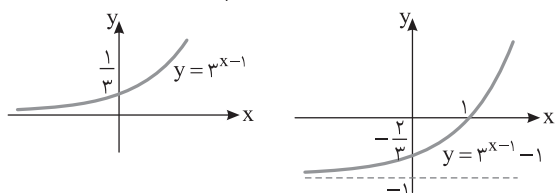
$$\log\left(\frac{3x-1}{x+3}\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{3x-1}{x+3} \geq 1 \Rightarrow \frac{2(x-2)}{x+3} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup [2, +\infty)$$

بنابراین $D_f = (-\infty, -3) \cup [2, +\infty)$. در نتیجه عدهای صحیحی که در

دامنه تابع f نیستند، -3 ، -2 ، -1 ، 0 و 1 هستند.

۲۴۲۱- گزینه ۱ ابتدا نمودار تابع $y = 3^x$ را یک واحد به سمت راست

انتقال می دهیم تا نمودار تابع $y = 3^{x-1}$ به دست بیاید. سپس این نمودار را یک واحد به پایین انتقال می دهیم تا نمودار تابع $y = 3^{x-1} - 1$ به دست بیاید. سپس قرینه قسمتی از این نمودار را که پایین محور x است، نسبت به محور x رسم و قسمتی را که زیر محور x است، حذف می کنیم تا نمودار تابع f به دست بیاید.



۲۴۲۲- گزینه ۴ فرض می کنیم $2^x = t$. در این صورت معادله مورد نظر

$$4^x - 3 \times 2^{x+2} + 27 = (2^x)^2 - 12 \times 2^x + 27$$

می شود

$$= t^2 - 12t + 27 = (t-3)(t-9) = 0$$

$$t=3 \Rightarrow 2^{x_1} = 3 \quad (1), \quad t=9 \Rightarrow 2^{x_2} = 9 \quad (2) \quad \text{بنابراین}$$

اگر تساوی های (۱) و (۲) را در هم ضرب کنیم، به دست می آید $2^{x_1+x_2} = 27$.

بنابراین $2^4 < 2^{x_1+x_2} < 2^5$. در نتیجه $4 < x_1 + x_2 < 5$.

۲۴۱۴- گزینه ۲ به کمک ویژگی های لگاریتم می توان نوشت

$$\log_5 x + \log_{\frac{1}{5}} x - 2 \log_2 x = \log_2 5^2$$

$$\log_5 x + 2 \log_5 x - 2 \times \frac{1}{2} \log_5 x = 2 \log_2 5$$

$$\log_5 x = \log_2 5 \Rightarrow x = 5^{\log_2 5}$$

۲۴۱۵- گزینه ۲ اگر فرض کنیم $\log_2 x = t$ ، آنگاه $\log_2 x^2 = 2t$ و

معادله مورد نظر می شود

$$\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+2t} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1+2t-(1+t)}{(1+t)(1+2t)} = \frac{1}{6}$$

$$6t = 1 + 3t + 2t^2 \Rightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1, t = \frac{1}{2}$$

اکنون توجه کنید که

$$t=1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$$

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

بنابراین مجموع مربع های جواب های معادله مورد نظر برابر $2^2 + \sqrt{2}^2 = 6$ است.

۲۴۱۶- گزینه ۲ راه حل اول از دو طرف معادله لگاریتم می گیریم:

$$\log x^{(\lambda - \log x)} = \log\left(\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow (\lambda - \log x) \log x = -2 \log x$$

$$\begin{cases} \log x = 0 \Rightarrow x = 10^0 = 1 \\ \lambda - \log x = -2 \Rightarrow \log x = 10^0 \Rightarrow x = 10^1 \end{cases}$$

راه حل دوم معادله را به صورت $x^{\lambda - \log x} = x^2 \times x^{\lambda - \log x} = 1$ یا $x^{10 - \log x} = 1$ می نویسیم. با توجه به اینکه x عددی مثبت است، دو حالت وجود دارد: پایه در عبارت سمت چپ ۱ باشد، یعنی $x = 1$ یا توان در عبارت سمت چپ صفر باشد، یعنی $\log x = 10^0$ ، پس $x = 10^1$.

۲۴۱۷- گزینه ۲ از معادله $\log_2 x + \log_2 y = 4$ به دست می آید

$$\log_2(xy) = 4 \Rightarrow xy = 2^4 = 16$$

از معادله $x + y = 10$ به دست می آید

$$y = 10 - x$$

با جای گذاری $10 - x$ به جای y در معادله $xy = 16$ نتیجه می شود

$$x(10-x) = 16 \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-8) = 0$$

$$x=2 \Rightarrow y=8, \quad x=8 \Rightarrow y=2$$

در هر صورت $x^2 + y^2 = 68$.

۲۴۱۸- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) > \log_{\frac{1}{2}}(x+1) \Rightarrow 2x-1 < x+1 \Rightarrow x < 2$$

از طرف دیگر، عبارت $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$ به ازای $x > \frac{1}{2}$ و عبارت $\log(x+1)$ به ازای $x > -1$ معنادار است. بنابراین مجموعه جواب های نامعادله مورد نظر

بازه $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ است.

۲۴۲۳- گزینه ۳ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(1)=1 \Rightarrow a+b=1, \quad f(2)=7 \Rightarrow a^2+b=7$$

اگر تساوی اول را از تساوی دوم کم کنیم، به دست می‌آید:

$$a^2-a-6=0 \Rightarrow a=3, \quad a=-2$$

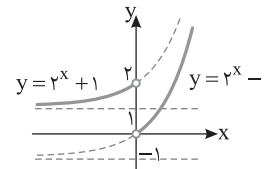
چون a باید مثبت باشد، پس $a=3$. در نتیجه $b=1-a=-2$. به این ترتیب

$$f(x)=3^x-2. \text{ اکنون توجه کنید که اگر } f^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right)=m \text{ آن گاه}$$

$$f(m)=-\frac{5}{3} \Rightarrow 3^m-2=-\frac{5}{3} \Rightarrow 3^m=-\frac{5}{3}+2=\frac{1}{3} \Rightarrow m=-1$$

۲۴۲۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $f(x)=\begin{cases} 2^x+1 & x<0 \\ 2^x-1 & x>0 \end{cases}$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است.



پس برد تابع به صورت $(0, +\infty)$ است.

۲۴۲۵- گزینه ۳ نمودار تابع از نقطه $(5, 0)$ می‌گذرد، پس

$$f(5)=0 \Rightarrow \log_a(\delta b-3)=0 \Rightarrow \delta b-3=1 \Rightarrow b=\frac{4}{\delta}$$

به این ترتیب $f(x)=\log_a\left(\frac{4}{\delta}x-3\right)$. نمودار تابع از نقطه $(15, 2)$ می‌گذرد، پس

$$f(15)=2 \Rightarrow \log_a\left(\frac{4}{\delta} \times 15-3\right)=2 \Rightarrow \log_a 9=2 \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow a=3$$

$$ab=\frac{12}{\delta}$$

۲۴۲۶- گزینه ۱ با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \log \sqrt[4]{72} &= \log 72^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log 72 = \frac{1}{4} \log (2^3 \times 3^2) \\ &= \frac{1}{4} (\log 2^3 + \log 3^2) = \frac{1}{4} (3 \log 2 + 2 \log 3) = \frac{1}{4} (3b+2a) \end{aligned}$$

۲۴۲۷- گزینه ۱ چون $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$ ، پس

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_3 2} + \frac{1}{\log_6 3} &= \log_3 2 + \log_2 3 + \log_6 3 \\ &= \log_6 (2 \times 3 \times 3) = \log_6 9 = 1 \end{aligned}$$

۲۴۲۸- گزینه ۱ معادله را به صورت $\log \frac{x-1}{x} = \log (\log 2)$ می‌نویسیم.

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x} &= \log 2 \Rightarrow x-1 = x \log 2 \Rightarrow x = \frac{1}{1-\log 2} = \frac{1}{\log 10 - \log 2} \\ &= \frac{1}{\log \frac{10}{2}} = \frac{1}{\log 5} = \frac{\log 10}{\log 5} = \frac{\log 2 + \log 5}{\log 5} = \frac{\log 2}{\log 5} + 1 = \log_5 2 + 1 \end{aligned}$$

۲۴۲۹- گزینه ۱ راه حل اول از دو طرف معادله مورد نظر در مبنای ۱۰

لگاریتم می‌گیریم:

$$(x+1) \log 2 = (x-1) \log 5 \Rightarrow x(\log 5 - \log 2) = \log 2 + \log 5$$

$$x \log \frac{5}{2} = \log 10 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\log \frac{5}{2}} = \frac{1}{\log 5 - \log 2} = \frac{1}{1 - 2 \log 2}$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$2^{x+1} = 5^{x-1} \Rightarrow 2^x \times 2 = 5^x \times 5^{-1} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = 1$$

از دو طرف این معادله در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم:

$$\begin{aligned} x \log \frac{5}{2} &= \log 10 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\log \frac{5}{2}} = \frac{1}{\log 5 - \log 2} \\ &= \frac{1}{\log 10 - \log 4} = \frac{1}{1 - 2 \log 2} \end{aligned}$$

۲۴۳۰- گزینه ۱ باید هر دو عبارت $\log(x+3)$ و $\log(2-x)$ بامعنی

باشند و نیز $\log(2-x) \neq 0$:

$$D_f = \{x | x+3 > 0, 2-x > 0, \log(2-x) \neq 0\}$$

از $x+3 > 0$ نتیجه می‌شود $x > -3$ و از $2-x > 0$ نتیجه می‌شود $x < 2$. از طرف دیگر اگر $\log(2-x) = 0$ ، آن گاه $2-x=1$ ، در نتیجه $x=1$. بنابراین دامنه تابع f به صورت $\{1\} - (-3, 2)$ است.

۲۴۳۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{3^x}$

اکنون نقطه تقاطع نمودارها را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} 3^x + \frac{1}{3^x} &= \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x} \Rightarrow 3^x + \frac{1}{3^x} = \frac{1}{3^x} \xrightarrow{t=3^x} t + \frac{1}{3^x} = \frac{1}{3^x} \\ \xrightarrow{\times 3^x} 3^x t + 1 &= 1 \Rightarrow 3^x t = 0 \Rightarrow 3^x t^2 + 8t - 3 = 0 \end{aligned}$$

$$(3^x t - 1)(t + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3^x} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 3 \\ t = -3 \text{ (غ.ق.ق)} \end{cases}$$

$A(-1, 3)$ نقطه مورد نظر است. بنابراین باید فاصله نقاط $A(-1, 3)$

$$AB = \sqrt{(-1+1)^2 + (3-1)^2} = 2$$

ریاضی - ۹۶

۲۴۳۲- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \frac{1}{2^{2x}} = \frac{1}{4^x}$. اکنون نقطه A

را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} 4^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \frac{3}{2} &= 4^x + \frac{1}{4^x} + \frac{3}{2} \xrightarrow{t=4^x} t + \frac{1}{t} + \frac{3}{2} \\ \xrightarrow{\times 2t} 2t^2 + 1 + 3t &= 2t^2 + 3t - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$(2t+1)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \text{ (غ.ق.ق)} \\ t = 2 \Rightarrow 4^x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

$A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ نقطه مورد نظر است. بنابراین باید فاصله نقاط $A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ و $B\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

$$AB = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۲۴۳۸- گزینه ۳ برای اینکه لگاریتم‌ها بامعنی باشند باید $x > \frac{5}{3}$ از

معادله داده شده مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$\log_5(2x-1) + \log_5(3x-5) = 1 \Rightarrow \log_5((2x-1)(3x-5)) = 1$$

$$(2x-1)(3x-5) = 5 \Rightarrow 6x^2 - 13x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (غ.ق.)}, x = \frac{13}{6}$$

بنابراین $\log_7(6x+3) = \log_7(13+3) = \log_7 2^4 = 4$ ریاضی - ۸۶

۲۴۳۹- گزینه ۳ مقدار x را از معادله داده شده به دست می‌آوریم:

$$\log_3(x^2-1) = 1 + \log_3(x+3) \Rightarrow \log_3(x^2-1) - \log_3(x+3) = 1$$

$$\log_3\left(\frac{x^2-1}{x+3}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x+3} = 3 \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

اگر $x = -2$ ، آن‌گاه $x-3 < 0$ و $\log_4(x-3)$ تعریف نمی‌شود و اگر

$x = 5$ ، آن‌گاه $\log_4(x-3) = \log_4 2 = \frac{1}{2}$ ریاضی - ۸۸

۲۴۴۰- گزینه ۳ از معادله $\log y = 2 \log 3 + \log x$ به دست می‌آید

$$\log y - \log x = \log 9 \Rightarrow \log \frac{y}{x} = \log 9 \Rightarrow \frac{y}{x} = 9 \Rightarrow y = 9x$$

در معادله $2^{x-y} \times 4^{x+y} = 1$ به جای y قرار می‌دهیم $9x$ ، در نتیجه

$$2^{x-9x} \times 4^{x+9x} = 1 \Rightarrow 2^{x-9x} \times 2^{2x+18x} = 1 \Rightarrow 2^{11x-7} = 1$$

$$11x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3$$

تجربی - ۹۶

۲۴۴۱- گزینه ۲ دو نمودار در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع هستند، پس

$$f(-1) = g(-1) \Rightarrow 3^{b-a} = 9 = 3^2 \Rightarrow b-a = 2 \quad (1)$$

از طرف دیگر $f(2) = \frac{1}{3}$ پس

$$3^{2a+b} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \Rightarrow 2a+b = -1 \quad (2)$$

با توجه به تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a = -1$ و $b = 1$ پس

$$f(x) = 3^{-x+1}. f^{-1}(27) = m \text{ اکنون فرض می‌کنیم}$$

در این صورت

$$f(m) = 27 \Rightarrow 3^{-m+1} = 27 \Rightarrow -m+1 = 3 \Rightarrow m = -2$$
 ریاضی - ۹۵

۲۴۴۲- گزینه ۳ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow ab^0 = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{3}{2} b^{-2} = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{3}{2b^2} = \frac{3}{32} \Rightarrow b^2 = 16$$

چون مقدار مثبت b مورد نظر است، پس $b = 4$ و $f(x) = \frac{3}{2} \times 4^x$

بنابراین

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times 4^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times (2^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times 8 = 12$$

تجربی - ۹۱

۲۴۳۳- گزینه ۳ با توجه به اینکه نمودار تابع از نقاط $(2, 6)$ و $(12, 10)$

می‌گذرد، پس $f(2) = 6$ و $f(12) = 10$ بنابراین

$$f(2) = a + \log_7(2b-4) = 6 \Rightarrow \log_7(2b-4) = 6-a$$

$$f(12) = a + \log_7(12b-4) = 10 \Rightarrow \log_7(12b-4) = 10-a$$

تساوی اول را از تساوی دوم کم می‌کنیم:

$$\log_7(12b-4) - \log_7(2b-4) = 4 \Rightarrow \log_7\left(\frac{12b-4}{2b-4}\right) = 4$$

$$\frac{12b-4}{2b-4} = 16 \Rightarrow 12b-4 = 32b-64 \Rightarrow 20b = 60 \Rightarrow b = 3$$

بنابراین $\log_7(2b-4) = \log_7(2 \times 3 - 4) = 1 = 6-a \Rightarrow a = 5$ ریاضی - ۹۶

ریاضی - ۹۶

۲۴۳۴- گزینه ۱ دامنه تابع به صورت $\{x | ax+b > 0\}$ است. جواب

نامعادله اخیر به صورت $(-\frac{b}{a}, +\infty)$ یا $(-\infty, -\frac{b}{a})$ است. چون تابع فقط در

بازه $(-\frac{b}{a}, +\infty)$ تعریف شده است، پس

$$-\frac{b}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b \quad (1)$$

از طرف دیگر،

$$f(4) = 2 \Rightarrow \log_7(4a+b) = 2 \Rightarrow 4a+b = 9 \quad (2)$$

با توجه به تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a = 2$ و $b = 1$. به این ترتیب

$$f(x) = \log_7(2x+1)$$

ریاضی - ۹۴

و در نتیجه $f(-\frac{4}{9}) = \log_7(-\frac{4}{9} + 1) = \log_7 \frac{1}{9} = -2$

۲۴۳۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt[3]{\frac{5}{25}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{10}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2^{-\frac{2}{3}}$$

از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$A = \log_8(\sqrt[3]{\frac{5}{25}}) = \log_{2^3}(2^{\frac{2}{3}}) = \log_2(2^{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}) = \log_2 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \log_2 2 = \frac{1}{9}$$

بنابراین $\log_4\left(\frac{1}{A} - 1\right) = \log_4(9 - 1) = \log_4 8 = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_2 2 = \frac{3}{2}$

ریاضی - ۹۰

۲۴۳۶- گزینه ۲ عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\log(6-2\sqrt{5}) + 2 \log(1+\sqrt{5}) = \log(6-2\sqrt{5}) + \log(1+\sqrt{5})^2$$

$$= \log(6-2\sqrt{5}) + \log(6+2\sqrt{5}) = \log((6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5}))$$

$$= \log(36-20) = \log 16 = 4 \log 2 = 4k$$

تجربی - ۹۰

۲۴۳۷- گزینه ۴ برای اینکه لگاریتم‌ها بامعنی باشند باید $x > 2$ معادله

را ساده می‌کنیم:

$$2 \log(x-2) = \log(x+10) \Rightarrow \log(x-2)^2 = \log(x+10)$$

$$(x-2)^2 = x+10 \Rightarrow x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ (غ.ق.)}, x = 6$$

بنابراین $\log_4(x+2) = \log_4 8 = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_2 2 = \frac{3}{2}$

ریاضی - ۸۵

گزینه ۳ - ۲۴۴۷

به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log_x (3x+8) = 2 - \log_x (x-6) \Rightarrow \log_x (3x+8) + \log_x (x-6) = 2$$

$$\log_x ((3x+8)(x-6)) = 2 \Rightarrow (3x+8)(x-6) = x^2$$

$$3x^2 - 10x - 48 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0$$

$$(x-8)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 8$$

به ازای $x = -3$ عبارت‌های $\log_x (3x+8)$ و $\log_x (x-6)$ بی‌معنیهستند، بنابراین $x = 8$ و مقدار لگاریتم x در پایه ۴ برابر است با

$$\log_4 x = \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2} \log_{2^2} 2 = \frac{3}{2}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

گزینه ۴ - ۲۴۴۸

با توجه به ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log_3 (2x^2+1) - \log_3 (x+2) = 1 \Rightarrow \log_3 \frac{2x^2+1}{x+2} = 1 \Rightarrow \frac{2x^2+1}{x+2} = 3$$

$$2x^2+1 = 3x+6 \Rightarrow 2x^2-3x-5 = 0 \Rightarrow x = -1, x = \frac{5}{2}$$

اکنون به محاسبه مقدار $\log_3 (2x-1)$ می‌پردازیم. با توجه به محدودهتعریف این لگاریتم $(x > \frac{1}{2})$ ، تنها $x = \frac{5}{2}$ قابل قبول است، پس

$$\log_3 (2x-1) = \log_3 (2 \times \frac{5}{2} - 1) = \log_3 4 = \log_{3^{\frac{2}{3}}} 2^2 = \frac{2}{3} \log_{3^{\frac{2}{3}}} 2 = \frac{2}{3}$$

تجربی - ۹۵

گزینه ۲ - ۲۴۴۹

با توجه به ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5)$$

$$\log\left(\frac{x^2 - x - 6}{x - 3}\right) = \log(2x - 5) \Rightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = 2x - 5$$

$$\frac{x+2}{1} = 2x - 5 \Rightarrow x = 7$$

$$\log_4 \sqrt[3]{x+1} = \log_4 \sqrt[3]{8} = \log_{4^{\frac{1}{3}}} 2 = \frac{1}{3} \log_{4^{\frac{1}{3}}} 2 = \frac{1}{3}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۵

گزینه ۱ - ۲۴۵۰

برای اینکه لگاریتم‌ها با معنی باشند باید $x > 0$ و $y > 0$.

توجه کنید که

$$\log_3 x + \log_3 y = 2 \Rightarrow \log_3 xy = 2 \Rightarrow xy = 9$$

$$x^2 + y^2 = 46 \Rightarrow (x+y)^2 - 2xy = 46 \Rightarrow (x+y)^2 - 18 = 46$$

$$(x+y)^2 = 64 \xrightarrow{x>0, y>0} x+y = 8$$

بنابراین

$$\log_4 (x+y) = \log_4 8 = \log_{4^{\frac{1}{2}}} 2^3 = \frac{3}{2} \log_{4^{\frac{1}{2}}} 2 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

تجربی - ۸۹

با توجه به اینکه نمودار تابع از دو نقطه $(5, 11)$ و $(21, 15)$ می‌گذرد، پس $f(5) = 11$ و $f(21) = 15$ ، بنابراین

$$f(5) = a + \log_7 (15+b) = 11 \Rightarrow a + 2 \log_7 (15+b) = 11$$

$$\log_7 (15+b) = \frac{11-a}{2}$$

$$f(21) = a + \log_7 (63+b) = 15 \Rightarrow a + 2 \log_7 (63+b) = 15$$

$$\log_7 (63+b) = \frac{15-a}{2}$$

تساوی اول را از تساوی دوم کم می‌کنیم:

$$\log_7 (63+b) - \log_7 (15+b) = 2 \Rightarrow \log_7 \left(\frac{63+b}{15+b}\right) = 2$$

$$\frac{63+b}{15+b} = 49 \Rightarrow 63+b = 60+49b \Rightarrow 3b = 3 \Rightarrow b = 1$$

بنابراین

$$a + \log_7 (15+1) = 11 \Rightarrow a = 3$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

گزینه ۱ - ۲۴۴۴

نمودار تابع محور x را در نقطه‌ای به طول ۱ - قطع می‌کند،پس از نقطه $(-1, 0)$ عبور می‌کند. همچنین نمودار تابع نیمساز ناحیه چهارم را درنقطه‌ای به عرض ۱ - قطع می‌کند، پس از نقطه $(1, -1)$ عبور می‌کند. در نتیجه

$$f(-1) = 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} (-a+b) = 0 \Rightarrow -a+b = 1 \quad (1)$$

$$f(1) = -1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} (a+b) = -1 \Rightarrow a+b = 2 \quad (2)$$

بنابراین از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a = \frac{1}{2}$ و $b = \frac{3}{2}$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۴

گزینه ۴ - ۲۴۴۵

از معادله داده شده مقدار x را می‌یابیم:

$$\log(x-2) = 2 \log 2 - \log(x-4) \Rightarrow \log(x-2) + \log(x-4) = \log 4$$

$$\log((x-2)(x-4)) = \log 4 \Rightarrow (x-2)(x-4) = 4$$

$$x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow x = 3 - \sqrt{5} \text{ (غ.ق.)}, x = 3 + \sqrt{5}$$

$$\log_5 (x-3) = \log_5 (3 + \sqrt{5} - 3) = \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$$

ریاضی - ۸۷

گزینه ۱ - ۲۴۴۶

راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که $A^2 = (3^a)^2 = 3^{2a}$

بنابراین

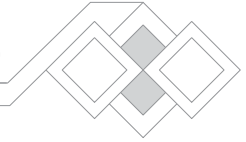
$$\log_3 (9A^2) = \log_3 (3^2 \times 3^{2a}) = \log_3 3^{(2+2a)} \\ = (2+2a) \log_3 3 = 2+2a$$

راه‌حل دوم از فرض مسئله نتیجه می‌شود $\log_3 A = a$ ، پس

$$\log_3 (9A^2) = \log_3 (3^2 A^2) = \log_3 (3A)^2 = 2 \log_3 (3A) \\ = 2(\log_3 3 + \log_3 A) = 2(1+a) = 2+2a$$

ریاضی - ۹۱

فصل دوازدهم



$$PA=PB \Rightarrow \sqrt{(4m+3)^2 + (2m-1-1)^2} = \sqrt{(4m+9)^2 + (2m-1+2)^2}$$

$$(4m+3)^2 + (2m-1)^2 = (4m+9)^2 + (2m+1)^2$$

$$16m^2 + 24m + 9 + 4m^2 - 44m + 12 = 16m^2 + 72m + 81 + 4m^2 + 4m + 1$$

$$96m = 48 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

۲۴۵۷- گزینه ۲ شیب خط $2y+x=1$ برابر $-\frac{1}{2}$ است. شیب خط عمود بر این خط ۲ است. پس معادله خطی را که شیب آن ۲ باشد و از نقطه $(-1, 2)$ بگذرد می‌نویسیم:

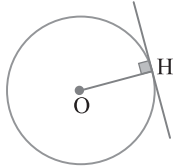
$$y-2=2(x+1) \Rightarrow y=2x+4 \Rightarrow 2x-y+4=0$$

فاصله مبدأ مختصات از این خط، مطلوب مسئله است که برابر است با

$$\frac{|0-0+4|}{\sqrt{4+1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

۲۴۵۸- گزینه ۴ شعاع دایره برابر فاصله نقطه O از خط $6x+8y+1=0$

است: $R = \frac{|6-8+1|}{\sqrt{36+64}} = \frac{1}{10}$. بنابراین مساحت دایره برابر است با



$$S = \pi R^2 = \frac{\pi}{100}$$

۲۴۵۹- گزینه ۲ چون مختصات نقطه A در معادله خط داده شده صدق

نمی‌کنند، پس $y=2x-1$ معادله AD و AB نیست. پس یا معادله BC

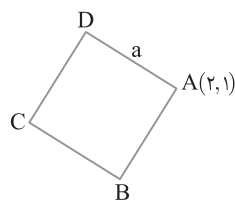
است یا DC. هر کدام که باشد، اگر فاصله نقطه $A(2, 1)$ تا خط $y=2x-1$

را حساب کنیم، طول ضلع مربع به دست می‌آید:

$$2x-y-1=0, \quad a = \frac{|4-1-1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

بنابراین مساحت مربع ABCD برابر

$$S = a^2 = \frac{4}{5}$$



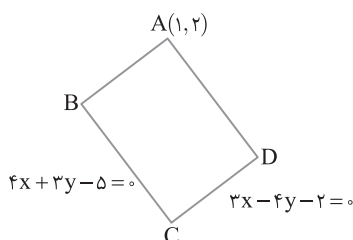
۲۴۶۰- گزینه ۳ رأس A روی هیچ کدام از خط‌های داده شده قرار ندارد، زیرا

مختصات آن در معادله‌های داده شده صدق نمی‌کنند. پس برای محاسبه طول و

عرض مستطیل کافی است فاصله A از دو خط داده شده را به دست آوریم:

$$AB = \frac{|4+6-5|}{\sqrt{16+9}} = \frac{5}{5} = 1, \quad AD = \frac{|3-8-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{7}{5}$$

بنابراین مساحت مستطیل برابر است با $S = 1 \times \frac{7}{5} = \frac{7}{5}$



۲۴۵۱- گزینه ۲ طول پاره خط AB برابر است با $(2a+1)-(a-1)$. بنابراین

$$AB = 2a+1-a+1=5 \Rightarrow a=3$$

پس طول پاره خط BC برابر است با

$$BC = (5a-2)-(2a+1) = 3a-3 = 6$$

۲۴۵۲- گزینه ۲ فاصله نقطه $(a, a\sqrt{3})$ از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = \sqrt{4a^2} = 2|a| = 6$$

بنابراین $a = \pm 3$.

۲۴۵۳- گزینه ۲ مختصات M را حساب می‌کنیم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+m}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3m+1}{2}$$

چون M روی خط $2y+3x-1=0$ است، پس

$$2\left(\frac{-3m+1}{2}\right) + 3\left(\frac{2+m}{2}\right) - 1 = 0 \Rightarrow -3m+1+3+\frac{3m}{2}-1=0$$

$$-\frac{3m}{2} = -3 \Rightarrow m=2$$

بنابراین M نقطه $\left(\frac{2+2}{2}, \frac{-3 \times 2 + 1}{2}\right)$ ، یعنی $\left(2, -\frac{5}{2}\right)$ است.

۲۴۵۴- گزینه ۴ حاصل ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر -۱

است. در نتیجه

$$\frac{3}{k} \times \frac{-(k-5)}{2} = -1 \Rightarrow 3(k-5) = 2k \Rightarrow k=15$$

۲۴۵۵- گزینه ۳ اگر رأس B قائمه باشد، آن‌گاه AB بر BC عمود است،

یعنی حاصل ضرب شیب‌های خط‌های AB و BC برابر -۱ است:

$$m_{AB} = \frac{6-4}{7-4} = \frac{2}{3}, \quad m_{BC} = \frac{4-a^2}{4-2a}$$

توجه کنید که اگر $a=2$ ، نقطه‌های B و C بر هم منطبق می‌شوند که درست

نیست. بنابراین $a \neq 2$ و در نتیجه $m_{BC} = \frac{2+a}{2}$. به این ترتیب

$$m_{AB} \times m_{BC} = -1 \Rightarrow \frac{2}{3} \times \left(\frac{2+a}{2}\right) = -1 \Rightarrow a = -5$$

۲۴۵۶- گزینه ۴ راه حل اول وسط پاره خط واصل نقطه‌های $(-3, 10)$ و

$(-9, -2)$ نقطه $\left(\frac{-3-9}{2}, \frac{10-2}{2}\right)$ ، یعنی $(-6, 4)$ است. چون نقطه

$(4m, 2m-1)$ روی عمود منصف پاره خط مورد نظر است، پس حاصل ضرب

شیب خطی که از نقطه‌های $(4m, 2m-1)$ و $(-6, 4)$ می‌گذرد و شیب خطی

که از نقطه‌های $(-3, 10)$ و $(-9, -2)$ می‌گذرد برابر -۱ است:

$$\frac{2m-1-4}{4m+6} \times \frac{10+2}{-3+9} = -1 \Rightarrow \frac{2m-5}{4m+6} \times 2 = -1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

راه حل دوم چون نقطه $P(4m, 2m-1)$ روی عمود منصف پاره خط واصل

نقاط $A(-3, 10)$ و $B(-9, -2)$ است، پس

۲۴۶۱- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$AB = |x_B - x_A| = |2m - (m-1)| = |m+1|$$

$$BC = |x_C - x_B| = |3m+1-2m| = |m+1|$$

بنابراین

$$2|m+1| - |m+1| = 3 \Rightarrow |m+1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} m+1=3 \Rightarrow m=2 \\ m+1=-3 \Rightarrow m=-4 \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای m برابر است با ۲-.

۲۴۶۲- گزینه ۱ توجه کنید که

$$AB = \sqrt{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + (2a+3)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + (2a+3)^2 = \frac{13}{4}$$

$$a^2 - a + \frac{1}{4} + 4a^2 + 12a + 9 = \frac{13}{4} \Rightarrow 5a^2 + 11a + 6 = 0$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن a برابر است با مجموع جواب‌های این معادله.یعنی $-\frac{11}{5}$. توجه کنید که این معادله دو جواب دارد.۲۴۶۳- گزینه ۴ راه حل اول در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین نقطه وسط پاره خط AC همان نقطه وسط پاره خط BD است.

$$\text{بنابراین } \left(\frac{-2+x}{2}, \frac{-3+y}{2}\right) = \left(\frac{7-x-1}{2}, \frac{2-y+3}{2}\right) \text{ در نتیجه}$$

$$-2+x=6-x \Rightarrow x=4, \quad -3+y=5-y \Rightarrow y=4$$

یعنی نقطه $C(4, 4)$ است.

راه حل دوم در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند. پس

$$AB \parallel CD \Rightarrow m_{AB} = m_{CD} \Rightarrow \frac{-3-2+y}{-2-7+x} = \frac{y-3}{x+1} \Rightarrow \frac{-5+y}{-9+x} = \frac{y-3}{x+1}$$

$$-5x - 5 + yx + y = -9y + 27 + xy - 3x \Rightarrow -x + 5y = 16$$

به همین ترتیب،

$$AD \parallel BC \Rightarrow m_{AD} = m_{BC} \Rightarrow \frac{-3-3}{-2+1} = \frac{2-y-y}{7-x-x}$$

$$6 = \frac{2-2y}{7-2x} \Rightarrow 42 - 12x = 2 - 2y \Rightarrow 6x - y = 20$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} -x+5y=16 \\ 6x-y=20 \end{cases}$ به دست می‌آید $x=4$ و $y=4$.بنابراین نقطه $C(4, 4)$ است.۲۴۶۴- گزینه ۱ شیب خط راستی که از نقطه‌های $(-1, 6)$ و $(-2, -3)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{6+3}{-1+2} = 9$. بنابراین شیب خط راستی که بر این خطعمود است برابر است با $-\frac{1}{9}$. معادله خط راستی که شیب آن $-\frac{1}{9}$ است و ازنقطه $(0, -5)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y - (-5) = -\frac{1}{9}(x - 0) \Rightarrow x + 9y + 45 = 0$$

۲۴۶۵- گزینه ۳ شیب خطی را که از نقطه‌های A و B می‌گذرد حسابمی‌کنیم $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-2}{-1-1} = 1$. پس شیب ارتفاع CH برابر ۱-است، زیرا $CH \perp AB$. اکنون معادله خطی را که از رأس C با شیب ۱- می‌گذرد می‌نویسیم:

$$y - y_C = m_{CH}(x - x_C) \Rightarrow y + 1 = -(x - 3) \Rightarrow y = -x + 2$$

۲۴۶۶- گزینه ۲ راه حل اول می‌دانیم عمودمنصف AB از وسط اینپاره خط یعنی نقطه $M(-1, 3)$ می‌گذرد. شیب خط گذرنده از A و B برابر ۱

است. بنابراین شیب عمودمنصف برابر ۱- است. در نتیجه معادله این خط

به صورت $y - 3 = -1(x + 1)$ یا به طور ساده‌تر $x + y = 2$ است.

راه حل دوم می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط از دوسر آن به یک

فاصله است. فرض می‌کنیم نقطه $P(x, y)$ روی عمودمنصف پاره خط AB

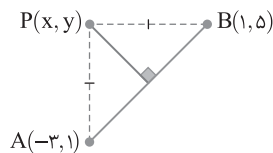
باشد. در این صورت

$$PA = PB \Rightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2}$$

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + (y-5)^2$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25$$

$$8x + 8y = 16 \Rightarrow x + y = 2$$

۲۴۶۷- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید شیب خطی که BC روی آن قرار دارد،برابر $\frac{1}{2}$ است، پس شیب خطی که AH روی آن قرار دارد برابر ۲- است.

بنابراین معادله این خط به صورت زیر است:

$$y - y_A = m_{AH}(x - x_A)$$

$$y - 2 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 4$$

بنابراین برای پیدا کردن مختصات نقطه H کافی است محل تقاطع دو خط $y = -2x + 4$ و $2x - 4y + 1 = 0$ را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ 2x - 4y + 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{y = -2x + 4} 2x - 4(-2x + 4) + 1 = 0$$

$$10x = 15 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -2\left(\frac{3}{2}\right) + 4 \Rightarrow y = 1$$

پس نقطه $H\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ است.۲۴۶۸- گزینه ۳ با توجه به شکل زیر، اندازه AH را حساب می‌کنیم:

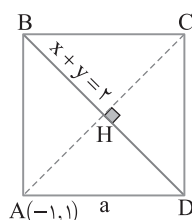
$$AH = \frac{|-1+1-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

بنابراین طول قطر مربع برابر $2\sqrt{2}$ است. طول ضلع مربع را حساب می‌کنیم:

$$a^2 + a^2 = (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2a^2 = 8$$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین محیط مربع برابر ۸ است.



۲۴۷۳- گزینه ۳) مختصات نقطه M وسط ضلع AC را حساب می‌کنیم:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{4+2}{2} = 3, \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1-1}{2} = 0.$$

بنابراین طول میانه BM برابر است با

$$BM = \sqrt{(m-3)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{(m-3)^2 + 4}$$

چون $BM=2$ ، پس

$$\sqrt{(m-3)^2 + 4} = 2 \Rightarrow (m-3)^2 + 4 = 4 \Rightarrow (m-3)^2 = 0 \Rightarrow m=3$$

۲۴۷۴- گزینه ۲) خط $3x+y=4$ بر خط $x-ay=7$ عمود است. پس

حاصل ضرب شیب این خط‌ها -1 است:

$$-3 \times \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a=3$$

خط $x-3y=7$ بر خط $bx+2y=-5$ عمود است. پس حاصل ضرب

شیب این خط‌ها نیز -1 است:

$$\frac{1}{3} \times \left(-\frac{b}{2}\right) = -1 \Rightarrow b=6$$

بنابراین $a+b=9$.

۲۴۷۵- گزینه ۱) اگر نقطه H وسط پاره خط AA' باشد، آن‌گاه

$$x_H = \frac{1-3}{2} = -1, \quad y_H = \frac{2+4}{2} = 3$$

با توجه به شکل زیر مختصات نقطه H در معادله خط $y=ax+b$ صدق

می‌کنند. پس

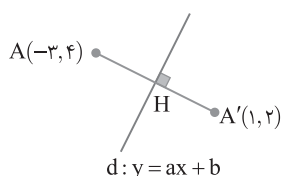
$$3 = a(-1) + b \Rightarrow b = a + 3$$

از طرف دیگر عکس و قرینه شیب خطی که از A و A' می‌گذرد، برابر a ،

شیب خط $y=ax+b$ است، پس

$$m_{AA'} = \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} = \frac{2-4}{1-(-3)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a=2$$

بنابراین $b=5$ و در نتیجه $ab=10$.



۲۴۷۶- گزینه ۲) ابتدا طول ضلع‌های مثلث ABC را به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(5-1)^2 + (-5-2)^2} = \sqrt{10}, \quad AC = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(-1-5)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{105}$$

واضح است که تساوی $BC^2 = AB^2 + AC^2$ بین طول ضلع‌های مثلث

برقرار است، پس مثلث قائم‌الزاویه است و مساحت آن برابر است با

$$\frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} \sqrt{10} \times \sqrt{5} = 1.$$

۲۴۷۷- گزینه ۳) ابتدا خط‌ها را به صورت $2x-y+k=0$ و $x-2y-1=0$

می‌نویسیم. اکنون اگر فاصله A از دو خط به ترتیب برابر AH' و AH باشد، آن‌گاه

$$AH = \frac{|2k+1+k|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|3k+1|}{\sqrt{5}}, \quad AH' = \frac{|k+2-1|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|k+1|}{\sqrt{5}}$$

$$AH = 2AH' \Rightarrow |3k+1| = 2|k+1| \Rightarrow \begin{cases} 3k+1 = 2k+2 \Rightarrow k=1 \\ 3k+1 = -2k-2 \Rightarrow k = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

۲۴۶۹- گزینه ۴) چون خط‌های داده شده موازی‌اند، پس شیب‌های آن‌ها

برابر است. در نتیجه $-\frac{a}{2} = -3$. پس $a=6$. اگر دو طرف معادله خط دوم

را در ۲ ضرب کنیم، به شکل $6x+2y+2k=0$ درمی‌آید. چون فاصله این دو

خط $\sqrt{10}$ است، پس

$$\frac{|2k+6|}{\sqrt{6^2+2^2}} = \sqrt{10} \xrightarrow{k>0} \frac{2k+6}{\sqrt{40}} = \sqrt{10} \Rightarrow k=7$$

بنابراین $a+k=13$.

۲۴۷۰- گزینه ۱) ابتدا معادله خط دوم را به صورت $2x-y-\frac{3}{2}=0$

می‌نویسیم. اکنون فرض می‌کنیم نقطه (x_0, y_0) روی خط مورد نظر باشد.

فاصله این نقطه از دو خط باید برابر باشد

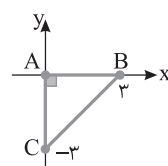
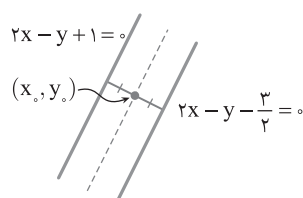
$$\frac{|2x_0 - y_0 + 1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|2x_0 - y_0 - \frac{3}{2}|}{\sqrt{4+1}} \Rightarrow |2x_0 - y_0 + 1| = |2x_0 - y_0 - \frac{3}{2}|$$

$$\begin{cases} 2x_0 - y_0 + 1 = 2x_0 - y_0 - \frac{3}{2} \Rightarrow 1 = -\frac{3}{2} \text{ (غ.ق.)} \\ 2x_0 - y_0 + 1 = -2x_0 + y_0 + \frac{3}{2} \Rightarrow 4x_0 - 2y_0 - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

پس مختصات تمام نقطه‌هایی که از دو خط داده شده به یک فاصله باشند، در

معادله $4x-2y-\frac{1}{2}=0$ صدق می‌کنند، یعنی معادله خط مورد نظر

$$4x-2y-\frac{1}{2}=0 \text{ است.}$$



۲۴۷۱- گزینه ۴) با توجه به شکل مقابل واضح

است که $\hat{A} = 90^\circ$ و $AB=AC=3$. بنابراین

مثلث ABC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

۲۴۷۲- گزینه ۱) چون خط‌های MN و BC موازی هستند، پس شیب

آن‌ها برابر است. شیب خط MN را به دست می‌آوریم:

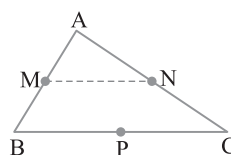
$$m_{MN} = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{-1-4}{-2-5} = \frac{5}{7}$$

معادله خطی را که از نقطه $P(-3, -4)$ با شیب $\frac{5}{7}$ می‌گذرد می‌نویسیم:

$$y+4 = \frac{5}{7}(x+3) \Rightarrow 7y = 5x-13$$

پس معادله خطی که BC روی آن قرار

دارد، $7y=5x-13$ است.



۲۴۷۸- گزینه ۲ خط راست گذرنده از B و C از نقاط (۰، ۱) و (۲، ۰) نیز

می‌گذرد. بنابراین معادله آن $y - 0 = \frac{0-1}{2-0}(x-2)$ یا $y - 0 = -\frac{1}{2}(x-2)$ است. طول

ارتفاع وارد بر BC برابر با فاصله A از BC است: $\frac{|2 \times 4 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با $\frac{1}{2} \times 4 \times \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

۲۴۷۹- گزینه ۲ طول ضلع BC برابر است با

$$BC = \sqrt{(5-3)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{5}$$

معادله خط گذرنده از نقاط B و C به صورت $y - 3 = \frac{4-3}{5-3}(x-3)$ یا

$2y - x - 3 = 0$ است. بنابراین طول ارتفاع وارد بر BC یا همان فاصله A از

خط گذرنده از نقاط B و C برابر است با $\frac{|2(1) - (-7) - 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$. بنابراین

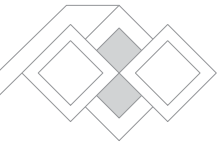
مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با $\frac{6}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} = 6$

۲۴۸۰- گزینه ۴ فاصله خطهای موازی $3x + 4y + 6 = 0$ و

$3x + 4y - 6 = 0$ برابر است با $\frac{|6+6|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{12}{5}$. در نتیجه، چون مساحت

مستطیل ۱۲ است، پس طول ضلع دیگرش برابر با ۵ است. بنابراین طول ضلع بزرگ‌تر این مستطیل برابر ۵ است.

فصل سیزدهم



۲۴۸۶- گزینه ۳ اولاً نمودار از نقطه $(m, 0)$ می‌گذرد و با توجه به شکل

m عددی مثبت است. با این شرایط حاصل ضرب صفرهای تابع منفی است که در نمودار همین وضعیت وجود دارد. ثانیاً طول رأس سهمی عددی منفی است.

بنابراین

$$-\frac{2m-1}{2(-1)} < 0 \Rightarrow m < \frac{1}{2}$$

بنابراین اگر $0 < m < \frac{1}{2}$ ، نمودار تابع f به صورت رسم شده است.

۲۴۸۷- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $\alpha + \beta = 6$ و $\alpha\beta = 2$. اگر x_1 و

x_2 جوابهای معادله مورد نظر باشند، آن‌گاه

$$S = x_1 + x_2 = \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha + \beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 6 + \frac{6}{2} = 9$$

$$P = x_1 x_2 = \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha\beta + 2 + \frac{1}{\alpha\beta} = 2 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

پس معادله مورد نظر به صورت زیر است

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 9x + \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 18x + 9 = 0$$

۲۴۸۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) = -\cos x, \quad \cos\left(\frac{5\pi}{4} - x\right) = \sin x$$

بنابراین

$$-2 \cos x = 3 \sin x \Rightarrow \tan x = -\frac{2}{3}$$

از طرف دیگر،

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \frac{4}{9} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{9}{13}$$

چون انتهای کمان نظیر زاویه x در ناحیه دوم قرار دارد، پس $\cos x = -\frac{3}{\sqrt{13}}$.

بنابراین

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

۲۴۸۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\cos 67^\circ = \cos(90^\circ - 23^\circ) = \sin 23^\circ$$

$$\sin 53^\circ = \sin(90^\circ - 37^\circ) = \cos 37^\circ$$

در نتیجه

$$\sin 37^\circ \cos 23^\circ + \cos 67^\circ \sin 53^\circ$$

$$= \sin 37^\circ \cos 23^\circ + \sin 23^\circ \cos 37^\circ$$

$$= \sin(37^\circ + 23^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۲۴۸۱- گزینه ۲ اگر اشتراک دو بازه $(-1, 3)$ و $[a, a+1]$ تهی باشد،

یکی از دو حالت زیر پیش می‌آید:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ a \quad a+1 \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \\ -1 \quad 3 \end{array} \\ a+1 \leq -1 \Rightarrow a \leq -2 & a \geq 3 \end{array}$$

بنابراین اگر اشتراک دو بازه، تهی نباشد باید $-2 < a < 3$. پس به ازای مقادیر صحیح $-1, 0, 1, 2$ برای a اشتراک دو بازه تهی نیست.

۲۴۸۲- گزینه ۴ جمله دهم دنباله هندسی مورد نظر برابر $2^{10} = 1024$

است و جمله n ام دنباله حسابی مورد نظر برابر $8 + 4(n-1)$ است. بنابراین

$$8 + 4n - 4 = 1024 \Rightarrow 4n = 1020 \Rightarrow n = 255$$

پس جمله دویست و پنجاه و پنجم دنباله حسابی $8, 12, 16, \dots$ با جمله دهم دنباله هندسی $2, 4, 8, \dots$ برابر است.

۲۴۸۳- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a} \sqrt{a} &= 2 \Rightarrow a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow a^{\frac{5}{6}} = 2 \Rightarrow a^{\frac{2}{3}} = 2 \\ &\Rightarrow a^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{3}{2}} = 8 \Rightarrow a = \sqrt{8} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\sqrt[3]{a} \sqrt{a} = a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt{8} = \sqrt{\sqrt{8}} = \sqrt[4]{8}$$

۲۴۸۴- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$a - \frac{1}{a} = 2 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 = 4 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 6$$

بنابراین

$$a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = 8 \Rightarrow \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 8 \Rightarrow \left|a + \frac{1}{a}\right| = \sqrt{8}$$

با توجه به اینکه a عددی منفی است، پس $a + \frac{1}{a} = -\sqrt{8}$. در نتیجه

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) = 2(-\sqrt{8}) \Rightarrow a^2 - \frac{1}{a^2} = -4\sqrt{2}$$

۲۴۸۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2}+1+\sqrt[3]{4})} + \frac{5}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{16}+1-\sqrt[3]{4})} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1} + \frac{5}{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}+1} \right) \end{aligned}$$

اکنون مخرج هر یک از کسرها را به کمک اتحاد چاق و لاغر گویا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2}-1)+\sqrt[3]{4}-1} + \frac{5(\sqrt[3]{4}+1)}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4}+1)+\sqrt[3]{16}-1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} (\sqrt[3]{2}-1+\sqrt[3]{4}+1) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} (\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}) = 1+\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

۲۴۹۴- گزینه ۲ ابتدا طرفین تساوی‌های داده شده را در هم ضرب می‌کنیم

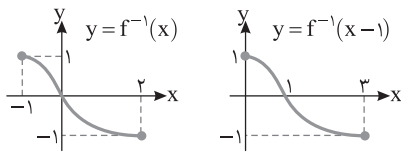
$$2^a 2^b + 1 = 3^a 3^b \Rightarrow 2^{a+b+1} = 3^{a+b}$$

بنابراین

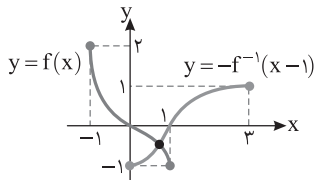
$$2 \times 2^{a+b} = 3^{a+b} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{a+b} = 2 \Rightarrow a+b = \log_{\frac{3}{2}} 2$$

۲۴۹۵- گزینه ۱ اگر نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم،

نمودار تابع f^{-1} به دست می‌آید. اگر نمودار به دست آمده را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f^{-1}(x-1)$ به دست می‌آید و اگر نمودار اخیر را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f^{-1}(x-1)$ به دست می‌آید.



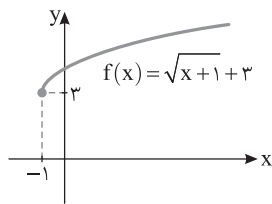
مطابق شکل زیر دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.



۲۴۹۶- گزینه ۱ برای هر $x \in R_f$ تساوی $(fof^{-1})(x)=x$ برقرار

است. با توجه به نمودار تابع f ، $R_f = [3, +\infty)$. پس برای هر $x \geq 3$ ،
بنابراین $g(x)=x-2$

$$x \geq 3 \Rightarrow x-2 \geq 1 \Rightarrow g(x) \geq 1 \Rightarrow R_g = [1, +\infty)$$



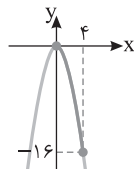
۲۴۹۷- گزینه ۳ ابتدا دامنه تابع‌های f و g را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(4-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g = [0, 4]$$

بنابراین $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = [0, 4]$ از طرف دیگر،

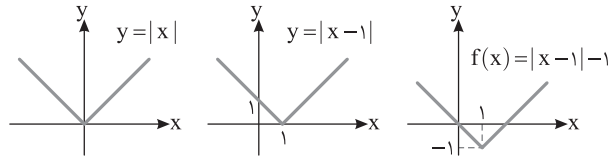
$$\begin{aligned} (f \times g)(x) &= f(x)g(x) = (\sqrt{4x-x^2} - 2\sqrt{x})(\sqrt{4x-x^2} + 2\sqrt{x}) \\ &= 4x - x^2 - 4x = -x^2 \end{aligned}$$

بنابراین نمودار تابع $f \times g$ به صورت زیر است و برد آن بازه $[-16, 0]$ است.

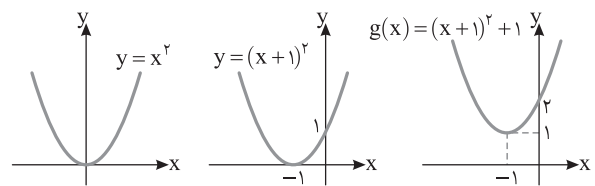


۲۴۹۰- گزینه ۲ اگر نمودار تابع $y=|x|$ را یک واحد به راست منتقل

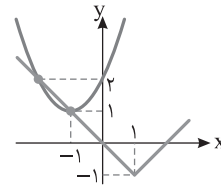
کنیم، نمودار تابع $y=|x-1|$ به دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به پایین منتقل کنیم نمودار تابع $f(x)=|x-1|-1$ به دست می‌آید.



اگر نمودار تابع $y=x^2$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=(x+1)^2$ به دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به بالا منتقل کنیم نمودار تابع $y=(x+1)^2+1$ به دست می‌آید.



اگر نمودار توابع f و g را در یک دستگاه رسم کنیم، ملاحظه می‌کنیم که در دو نقطه متقاطع‌اند.



۲۴۹۱- گزینه ۳ توجه کنید که $x^2 = |x|^2$. اکنون نامعادله را به صورت

زیر می‌نویسیم:

$$|x|^2 \leq 4|x| \Rightarrow |x|^2 - 4|x| \leq 0 \Rightarrow |x|(|x| - 4) \leq 0$$

چون $|x| \geq 0$ پس $|x| - 4 \leq 0 \Rightarrow |x| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$

بنابراین نه عدد صحیح $\pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1$ و 0 در نامعادله صدق می‌کنند.

۲۴۹۲- گزینه ۲ برای اینکه عبارت $\sqrt{4x+1}$ بامعنی باشد باید

$x \geq -\frac{1}{4}$ بنابرین $x+1$ مثبت است و $|x+1|=x+1$. پس معادله به صورت

$$\sqrt{4x+1} = 2x + x + 1 \Rightarrow \sqrt{4x+1} = 3x + 1$$

زیر درمی‌آید:

اکنون طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را حل می‌کنیم:

$$4x+1 = 9x^2 + 6x + 1 \Rightarrow 9x^2 + 2x = 0$$

$$x(9x+2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -\frac{2}{9}$$

هر دو جواب در معادله اصلی صدق می‌کنند و معادله دو جواب دارد.

۲۴۹۳- گزینه ۳ توجه کنید که $f(0) = -2$ و $f(\log_8 3) = 0$. بنابراین

$$f(0) = 1 - b = -2 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow f(x) = a^{3x} - 3$$

$$f(\log_8 3) = a^{3 \log_8 3} - 3 = 0 \Rightarrow a^{\log_2 3} = 3$$

$$\log_2 3 = \log_a 3 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین $a=2$ و $b=3$ پس $ab=6$.

۲۵۰۲- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A = ((x-2)(x^2+2x+4))(x^3+8)+64 = (x^3-8)(x^3+8)+64 \\ = x^6 - 64 + 64 = x^6$$

بنابراین مقدار A به ازای $x = \sqrt{2}$ برابر است با $A = (\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8$

۲۵۰۳- گزینه ۳ چون معادله جواب دارد، پس

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow 4k^2 - 4(k^2 + 1 \cdot k + 2) \geq 0 \Rightarrow 4 \cdot 0 \cdot k + 8 \leq 0 \Rightarrow k \leq -2$$

اگر α و β جوابهای معادله باشند، آن گاه $\alpha + \beta = 2k$

$$\alpha\beta = k^2 + 1 \cdot k + 2 \quad \text{و در نتیجه}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4k^2 - 2k^2 - 2 \cdot k - 4 = 2k^2 - 2k - 4$$

$$= 2k^2 - 2k - 4 = 2(k-1)^2 - 6$$

بنابراین

$$k \leq -2 \Rightarrow k-1 \leq -3 \Rightarrow (k-1)^2 \geq 9$$

$$2(k-1)^2 \geq 18 \Rightarrow 2(k-1)^2 - 6 \geq 6$$

بنابراین کمترین مقدار مجموع مربعات جوابها برابر ۸ است.

۲۵۰۴- گزینه ۳ نمودار تابع f محور طولها را در $x=4$ و $x=-1$ قطع

کرده است. پس $f(x) = a(x+1)(x-4)$. نمودار تابع f محور عرضها را در

$y=2$ قطع کرده است. پس

$$f(0) = 2 \Rightarrow a(0+1)(0-4) = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

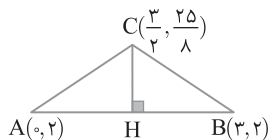
$$f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-4) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$$

بنابراین نقطه $C(\frac{3}{2}, \frac{25}{8})$ رأس سهمی است و

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{0 + x_B}{2} \Rightarrow x_B = 3$$

$$\text{پس } CH = \frac{25}{8} - 2 = \frac{9}{8} \quad \text{و} \quad AB = 3 \quad \text{در نتیجه}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \times CH}{2} = \frac{3 \times \frac{9}{8}}{2} = \frac{27}{16}$$



۲۵۰۵- گزینه ۴ باید با شرط $x > 0$ نامعادله $f(x) < 0$ را حل کنیم:

$$x + \frac{1}{x+2} - 5 < 0 \Rightarrow x(x+2) + 1 - 5(x+2) < 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 9 < 0$$

ریشههای چندجمله‌ای $x^2 - 3x - 9$ به صورت $\frac{3-3\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$

هستند. پس $\frac{3-3\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+3\sqrt{5}}{2}$

از طرف دیگر $x > 0$ ، پس $0 < x < \frac{3+3\sqrt{5}}{2}$. بنابراین حداکثر مقدار a برابر

$$\frac{3+3\sqrt{5}}{2} \quad \text{است.}$$

۲۴۹۸- گزینه ۱ حد چپ و حد راست تابع f را در نقطه $x = -2$ به دست

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (-2a - 1 \cdot 2x) = -2a + 2 \quad \text{می‌آوریم:}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (-3a - 1 \cdot 2x) = -3a + 3$$

برای اینکه تابع f در $x = -2$ حد داشته باشد، باید حد چپ و حد راست آن در این نقطه با هم برابر باشند. پس

$$-2a + 2 = -3a + 3 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین $f(x) = 6[x] + 3x[2x] \Rightarrow f(-2) = 6(-2) + 3(-2)(-4) = 12$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = L_1 L_2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = L_1 - L_2 = \frac{5}{2} \Rightarrow L_1 = L_2 + \frac{5}{2}$$

$$(L_2 + \frac{5}{2})L_2 = 2 \Rightarrow L_2^2 + \frac{5}{2}L_2 - 2 = 0 \Rightarrow 2L_2^2 + 5L_2 - 4 = 0$$

$$(L_2 + 4)(2L_2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} L_2 = -4 \Rightarrow L_1 = -\frac{1}{2} \\ L_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow L_1 = 4 \end{cases}$$

$$\text{پس } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{8} \quad \text{یا } 8$$

۲۵۰۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $f(2) = bc$ و

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + b) = 2a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{32(x-2)}{(x-a)(x+a)}$$

چون a و b مثبت‌اند، پس حد چپ تابع f در نقطه $x = 2$ برابر صفر نیست و در نتیجه حد راست آن هم برابر صفر نیست. پس حد مخرج عبارت

$$\frac{32(x-2)}{(x-a)(x+a)} \quad \text{در } x = 2 \quad \text{باید صفر باشد. در غیر این صورت حد راست}$$

تابع f در $x = 2$ برابر صفر می‌شود. پس

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} ((x-a)(x+a)) = 0 \Rightarrow (2-a)(2+a) = 0 \Rightarrow a = 2, a = -2 \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{32(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{32}{x+2} = 8$$

چون f در $x = 2$ پیوسته است، پس باید حد چپ، حد راست و مقدار تابع f در این نقطه با هم برابر باشند:

$$2a + b = 8 \xrightarrow{a=2} 4 + b = 8 \Rightarrow b = 4, \quad bc = 8 \xrightarrow{b=4} c = 2$$

۲۵۰۱- گزینه ۲ فرض می‌کنیم جمله‌های دنباله به صورت $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ باشند. در این صورت مجموع تمام جمله‌ها برابر است با

$$S_{2n} = \frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}$$

از طرف دیگر جمله‌های با ردیف زوج به صورت $a_2, a_4, \dots, a_{2n}$ هستند

که دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q^2 و جمله اول $a_1 q$ تشکیل می‌دهند.

$$\text{بنابراین مجموع آنها برابر با } \frac{a_1 q(1-(q^2)^n)}{1-q^2} \quad \text{است. طبق فرض}$$

$$\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q} = 3 \times \frac{a_1 q(1-q^{2n})}{(1-q)(1+q)} \Rightarrow \frac{3q}{1+q} = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

۲۵۱۰- گزینه ۴ چون α و β حاده هستند، پس $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$.

بنابراین $0 < \alpha + \beta < \pi$ در نتیجه $\sin(\alpha + \beta) > 0$ ، اکنون توجه کنید که

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{3}{5}, \quad \sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \frac{4}{5}$$

بنابراین

$$\cos \beta = \cos((\alpha + \beta) - \alpha) = \cos(\alpha + \beta) \cos \alpha + \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

۲۵۱۱- گزینه ۳ اگر فرض کنیم $t = 2^x$ ، معادله به صورت زیر درمی آید

$$t^2 + (k-3)t + k - 4 = 0$$

بنابراین $t^2 + (k-3)t + k - 4 = (t+k-4)(t+1)$ پس جواب‌های این

معادله $t = -1$ و $t = 4 - k$ هستند. بنابراین

$$2^x = -1 \quad (\text{غ.ق.})$$

$$2^x = 4 - k \Rightarrow x = \log_2(4 - k), \quad k < 4$$

چون جواب معادله نباید مثبت باشد، پس

$$\log_2(4 - k) \leq 0 \Rightarrow \log_2(4 - k) \leq \log_2 1 \Rightarrow 4 - k \leq 1 \Rightarrow k \geq 3$$

در نتیجه $3 \leq k < 4$.

۲۵۱۲- گزینه ۱ نمودار تابع از نقطه $(3, 0)$ می‌گذرد، پس

$$f(3) = 0 \Rightarrow \log_a(3b + 7) = 0 \Rightarrow 3b + 7 = 1 \Rightarrow b = -2$$

به این ترتیب $f(x) = \log_a(-2x + 7)$. نمودار تابع از نقطه $(b, 1)$ عبور

می‌کند، پس

$$f(b) = 1 \Rightarrow f(-2) = 1 \Rightarrow \log_a(4 + 7) = 1 \Rightarrow a = 11$$

بنابراین $ab = -22$.

۲۵۱۳- گزینه ۴ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\log_2 x \left(\frac{1}{2} \log_2 x \right) = \frac{1}{3} \log_2 x \Rightarrow \log_2 x \left(\frac{1}{2} \log_2 x - \frac{1}{3} \right) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\begin{cases} \log_2 x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \log_2 x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4} \end{cases}$$

پس جواب بزرگ‌تر معادله برابر $\sqrt[3]{4}$ است.

۲۵۱۴- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$. بنابراین $x = 2$

باید تنها ریشهٔ مخرج $g(x)$ باشد. یعنی مخرج $g(x)$ باید به صورت

$(x-2)^2$ باشد که در این صورت $b = -4$. از طرف دیگر

$$g(x) = \frac{ax - b}{x^2 + bx + 4} = \frac{ax + 4}{(x-2)^2}$$

$$g(x) = f(x) \Rightarrow \frac{ax + 4}{(x-2)^2} = \frac{-2}{x-2} \Rightarrow ax + 4 = -2(x-2)$$

$$ax + 4 = -2x + 4$$

پس $a = -2$ ، $b = -4$ و در نتیجه $ab = 8$.

۲۵۰۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که باید $2x - x^2 \geq 0$ تا عبارت

$\sqrt{2x - x^2}$ در معادله بامعنی باشد. پس $0 \leq x \leq 2$.

اگر $x = 2$ ، آن‌گاه سمت چپ معادله برابر صفر و سمت راست آن برابر ۲ است. پس $x = 2$ جواب معادله نیست.

اگر $0 \leq x < 1$ ، آن‌گاه $[x] = 0$ و معادله به صورت $2\sqrt{2x - x^2} = 0$ در می‌آید که $x = 0$ جواب آن است ولی مدنظر مسئله نیست.

اگر $1 \leq x < 2$ ، آن‌گاه $[x] = 1$ و معادله به صورت $2\sqrt{2x - x^2} = 1$ در می‌آید که به صورت زیر آن را حل می‌کنیم:

$$4(2x - x^2) = 1 \Rightarrow 4x^2 - 8x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}, x = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \quad (\text{غ.ق.})$$

توجه کنید که $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$ در بازه $[1, 2]$ قرار ندارد بنابراین قابل قبول نیست.

پس جواب مثبت معادله $x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ است.

۲۵۰۷- گزینه ۳ اگر $x \neq 5$ ، نامعادله مورد نظر را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{|3|}{|5 - x|} < \frac{1}{2} \Rightarrow |x - 5| > 6$$

بنابراین $(x \neq 5)$.

$$\begin{cases} x - 5 > 6 \\ x - 5 < -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 11 \\ x < -1 \end{cases}$$

به این ترتیب، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر برابر است با

$$(-\infty, -1) \cup (11, +\infty)$$

در نتیجه $a = -1$ و $b = 11$ ، پس $b - a = 12$.

۲۵۰۸- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin \frac{\pi}{5}$$

$$\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin \frac{\pi}{5}$$

$$\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\sin \frac{\pi}{5}$$

بنابراین

$$\frac{2 \sin \frac{\pi}{5} + \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)}{3 \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) - 2 \sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5}}{-3 \sin \frac{\pi}{5} + 2 \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{3 \sin \frac{\pi}{5}}{-\sin \frac{\pi}{5}} = -3$$

۲۵۰۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{2}{3} \Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{2}{3}$$

$$1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{6}$$

بنابراین

$$\sin^6 x + \cos^6 x$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 3 \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{1}{2}$$

۲۵۱۹- گزینه ۲) حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ است. اگر صورت و مخرج

کسر داده شده را در مزدوج صورت و چاق مخرج ضرب کنیم، معلوم می‌شود که حد مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2}-x)(\sqrt{x+2}+x)(\sqrt[3]{x-1}^2+\sqrt[3]{x-1}+1)}{(\sqrt[3]{x-1}-1)(\sqrt[3]{x-1}^2+\sqrt[3]{x-1}+1)(\sqrt{x+2}+x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2-x^2)(\sqrt[3]{x-1}^2+\sqrt[3]{x-1}+1)}{(x-1-1)(\sqrt{x+2}+x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(x+1)(\sqrt[3]{x-1}^2+\sqrt[3]{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x+1)(\sqrt[3]{x-1}^2+\sqrt[3]{x-1}+1)}{\sqrt{x+2}+x} \\ = \frac{-3 \times 3}{4} = -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

۲۵۲۰- گزینه ۲) راه حل اول توجه کنید که

$$\sin \pi x = -\sin(\pi + \pi x) = -\sin(\pi(1+x))$$

بنابراین

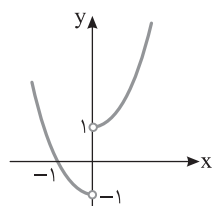
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x \sin \pi x}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x \sin(\pi(1+x))}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{-x}{x-1} \times \frac{\sin \pi(1+x)}{\pi(1+x)} \times \pi \right) = \frac{1}{-2} \times 1 \times \pi = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x \sin \pi x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin \pi x + \pi x \cos \pi x}{2x} = \frac{0 + \pi}{-2} = -\frac{\pi}{2}$$

۲۵۲۱- گزینه ۴) ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} (x^3 + 1) & x > 0 \\ \frac{x}{-x} (x^3 + 1) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^3 + 1 & x > 0 \\ -x^3 - 1 & x < 0 \end{cases}$$



پس نمودار تابع f به صورت زیر است.

بنابراین اگر نمودار تابع f ، خط $y=k$ را در

دو نقطه قطع کند، حدود k ، به صورت $k > 1$ است.

۲۵۲۲- گزینه ۲) با توجه به زوج مرتب‌های $(0, x^3)$ ، $(-1, x^2 - x)$

می‌توان نوشت: $0 > -1 \Rightarrow x^3 \geq x^2 - x$

$$x^3 - x^2 + x \geq 0 \Rightarrow x(x^2 - x + 1) \geq 0$$

چون در چندجمله‌ای درجه دوم $x^2 - x + 1$ ، $\Delta < 0$ و $a > 0$ ، پس همواره

$x^2 - x + 1 > 0$ ، بنابراین $x \geq 0$. با توجه به زوج مرتب‌های $(x^2, 1)$ و

$(x^2, 0)$ می‌توان نوشت: $x^2 > 0 \Rightarrow 1 \geq x^3 \Rightarrow 2 \geq x$

با توجه به اینکه x باید عددی صحیح باشد، از اشتراک شرایط به دست آمده نتیجه می‌شود $x \in \{1, 2\}$ ، پس دو مقدار صحیح برای x وجود دارد.

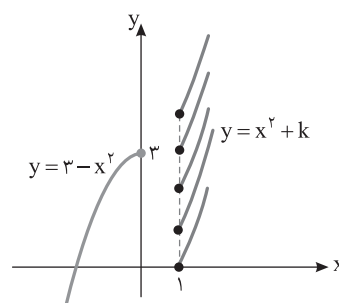
توجه کنید که $x=0$ قابل قبول نیست چرا که در این صورت $f = \{(-1, 0), (0, 0), (0, 1)\}$ ، که تابع نیست.

۲۵۱۵- گزینه ۱) نمودار تابع به ازای چند مقدار مختلف k در شکل زیر

رسم شده است. واضح است که اگر $f(1) > 3$ ، آن‌گاه تابع f یک‌به‌یک خواهد

بود. پس

$$1+k > 3 \Rightarrow k > 2$$



۲۵۱۶- گزینه ۴) ابتدا توجه کنید که

$$x \leq 0 \text{ یا } x \geq 4 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 6x - x^2 = 2x$$

$$0 \leq x \leq 4 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 4x + 6x - x^2 = -2x^2 + 10x$$

بنابراین دامنه تابع f باید $[4, +\infty)$ و برد آن $[8, +\infty)$ باشد. پس

$$f(x) = y = 2x \Rightarrow x = \frac{y}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{2}, D_{f^{-1}} = [8, +\infty)$$

۲۵۱۷- گزینه ۴) ابتدا توجه کنید که حد صورت کسر $\frac{x^3 - a^3}{2x - 8}$ در نقطه

$x=a$ ، صفر است. پس باید حد مخرج آن نیز صفر باشد. در غیر این صورت

حاصل حد کسر برابر صفر خواهد بود که چنین نیست. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow a} (2x - 8) = 0 \Rightarrow 2a - 8 = 0 \Rightarrow a = 4$$

پس مقدار حد مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{2x - 8} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x^2 + 4x + 16)}{2(x-4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 4x + 16}{2} = \frac{16 + 16 + 16}{2} = 24 \end{aligned}$$

در نتیجه $a+b=28$.

۲۵۱۸- گزینه ۱) ابتدا توجه کنید که اگر $1 < x < 2$ ، آن‌گاه $[x] = 1$ و در

نتیجه $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-b}{x} = -b$ ، از طرف دیگر حد صورت کسر

$$\frac{x^2 - 1}{ax + b} \text{ در } x=1 \text{ برابر صفر است. پس باید حد مخرج آن نیز در این نقطه}$$

صفر باشد. در غیر این صورت حد چپ تابع f در $x=1$ برابر صفر می‌شود که در نتیجه برای پیوستگی تابع در $x=1$ باید حد راست آن یعنی $-b$ هم برابر

صفر شود که مخالف فرض سؤال است. پس

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b) = a + b = 0 \Rightarrow a = -b$$

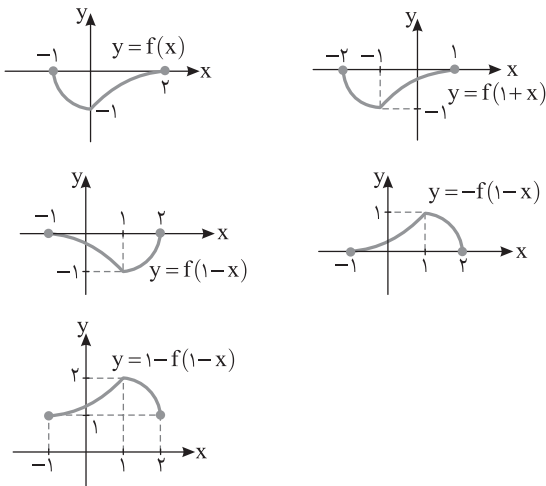
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{-bx + b} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{-b(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{-b} = -\frac{2}{b}$$

برای اینکه تابع f در $x=1$ حد داشته باشد باید

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow -\frac{2}{b} = -b \Rightarrow b^2 = 2 \Rightarrow b = \pm \sqrt{2}$$

برای اینکه تابع f در $x=1$ پیوسته باشد، باید

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow c = -b = \pm \sqrt{2}$$



گزینه ۲ - ۲۵۲۷ اگر نمودار تابع $g(x) = 3f(2x)$ را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y = 3f(2(x+1)) = 3f(2x+2)$ به دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را سه واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y = 3f(2x+2) + 3$ به دست می‌آید. در نهایت اگر طول نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y = 3f(2(\frac{1}{2}x) + 2) + 3 = 3f(x+2) + 3$ به دست می‌آید و اگر عرض نقاط این نمودار را یک سوم کنیم، نمودار تابع $y = \frac{1}{3} \times (3f(x+2) + 3) = f(x+2) + 1$ به دست می‌آید.

گزینه ۴ - ۲۵۲۸ دوره تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|a\pi|}$ است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{|a\pi|} = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 4$$

کمترین مقدار تابع f برابر $a^2 - |b|$ است. بنابراین

$$a^2 - |b| = -4 \Rightarrow 16 - |b| = -4 \Rightarrow |b| = 20.$$

بیشترین مقدار تابع f برابر $a^2 + |b|$ است که برابر است با $16 + 20 = 36$.

گزینه ۱ - ۲۵۲۹ تابع $y = \tan x$ روی بازه $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ اکیداً صعودی

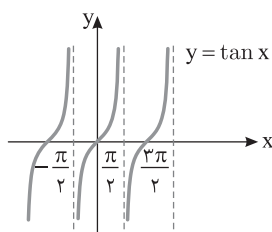
است. پس $\tan x \geq \tan(-\frac{\pi}{4})$ و در نتیجه $\tan x \geq -1$. بنابراین

$$2m^2 - 5 \geq -1 \Rightarrow 2m^2 \geq 4 \Rightarrow m^2 \geq 2 \Rightarrow |m| \geq \sqrt{2}$$

پس حداقل مقدار $|m|$ برابر $\sqrt{2}$ است.

گزینه ۲ - ۲۵۳۰ برای رسم نمودار تابع f ابتدا نمودار تابع $y = \tan x$ را

رسم می‌کنیم، سپس طول نقاط روی این نمودار را در $\frac{A}{\pi}$ ضرب می‌کنیم. نمودار تابع به شکل زیر است. پس حداقل مقدار a برای اینکه تابع f روی دامنه‌اش یعنی بازه $(a, 12)$ اکیداً صعودی باشد برابر ۴ است.



گزینه ۱ - ۲۵۳۳ با توجه به اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است، پس

$$\begin{cases} x > 3 \Rightarrow f(x) < f(3) \Rightarrow f(x) < 0 \\ x < 3 \Rightarrow f(x) > f(3) \Rightarrow f(x) > 0 \end{cases}$$

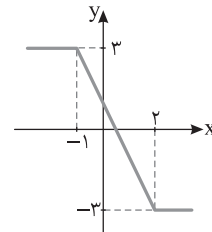
اکنون باید دامنه تابع g را مشخص کنیم. برای این کار نامعادله $(x^2 - 9)f(x) \geq 0$ را حل می‌کنیم.

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$x^2 - 9$		+	-	+
$f(x)$		+	+	-
$(x^2 - 9)f(x)$		+	-	-

مجموعه جواب‌های نامعادله فوق $\{3\} \cup (-\infty, -3]$ است. بنابراین تنها یک

عدد طبیعی (عدد ۳) جزء دامنه تابع g است.

گزینه ۳ - ۲۵۳۴ نمودار تابع f به صورت زیر است. از روی نمودار مشخص است که تابع روی بازه $[-1, 2]$ و هر بازه‌ای به صورت $[c, d]$ که در آن $-1 \leq c \leq d \leq 2$ اکیداً نزولی است. بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ وقتی به دست می‌آید که $a = -1$ و $b = 2$ ، در این صورت $b-a = 2 - (-1) = 3$.



گزینه ۲ - ۲۵۲۵ تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ با شرط $a < 0$ روی بازه

$(-\infty, \frac{-b}{2a}]$ صعودی و روی بازه $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$ نزولی است. بنابراین باید

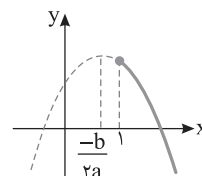
شرایط زیر برقرار باشد تا تابع f روی بازه $[1, +\infty)$ نزولی باشد (به شکل زیر توجه کنید):

$$k - 1 < 0 \Rightarrow k < 1$$

$$\frac{-1}{2(k-1)} \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{2(k-1)} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{-1-2k+2}{2(k-1)} \leq 0$$

$$\frac{-2k+1}{2(k-1)} \leq 0 \Rightarrow k \leq \frac{1}{2} \text{ یا } k > 1$$

از اشتراک شرط‌های به دست آمده نتیجه می‌شود $k \leq \frac{1}{2}$.



گزینه ۴ - ۲۵۲۶ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ منتقل

می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f(1+x)$ رسم شود. اکنون نمودار این تابع را نسبت

به محور y قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f(1-x)$ حاصل شود. سپس

نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y = -f(1-x)$

به دست آید و در نهایت نمودار را یک واحد به سمت بالا جابه‌جا می‌کنیم تا

نمودار تابع $y = 1 - f(1-x)$ به دست آید.

۲۵۳۵- گزینه ۳) طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را به صورت

زیر می‌نویسیم:

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 1 \xrightarrow{2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha} \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin x = 1$$

$$1 - \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = 0$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازه $[0, 4\pi]$ عبارت‌اند از $x=0$ ، $x=\pi$ ، $x=2\pi$ و $x=3\pi$ و $x=4\pi$. ولی توجه کنید که جواب‌های $x=\pi$ و $x=2\pi$ و $x=3\pi$ در معادله اصلی صدق نمی‌کنند و قابل قبول نیستند. این جواب‌ها به دلیل اینکه طرفین معادله را به توان دو رسانده‌ایم تولید شده‌اند. بنابراین معادله در بازه $[0, 4\pi]$ دو جواب دارد که مجموع آن‌ها برابر 3π است.

۲۵۳۶- گزینه ۱) اگر $x \rightarrow 3^+$ ، آن‌گاه $[x]=3$ و $f(x)=\frac{1}{x-3}$ در

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$$

۲۵۳۷- گزینه ۲) چون حد صورت در نقطه $x=2$ برابر ۳ است. باید حد

مخرج کسر در این نقطه برابر صفر باشد، تا حد مورد نظر نامتناهی شود.

همچنین، چون حد چپ و حد راست کسر هر دو $+\infty$ شده‌اند، پس باید مقادیر

$3x^2 + ax - b$ در یک همسایگی محذوف نقطه $x=2$ مثبت باشند. در

نتیجه $x=2$ ریشه مضاعف معادله $3x^2 + ax - b = 0$ است، یعنی

$$3x^2 + ax - b = 3(x-2)^2 \text{ باید به صورت } 3(x-2)^2 \text{ باشد. در نتیجه}$$

$$3x^2 + ax - b = 3(x^2 - 4x + 4) = 3x^2 - 12x + 12$$

$$\text{پس } a = -12, b = -12, \text{ یعنی } a + b = -24$$

۲۵۳۸- گزینه ۳) ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ از طرف

دیگر اگر $x \rightarrow -\infty$ ، آن‌گاه $f(x) < -3$ ، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow (-3)^-} f(t) = -\infty$$

۲۵۳۹- گزینه ۴) ابتدا توجه کنید که اگر در صورت کسر داده شده

جمله‌ای شامل x^4 وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$

می‌شود. بنابراین ضریب x^4 در صورت کسر داده شده صفر است، در نتیجه

$$2a - 4 = 0 \text{ پس } a = 2 \text{ به این ترتیب}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 1}{12x^3 + x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{12x^3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{در نتیجه } ab = \frac{2}{3}$$

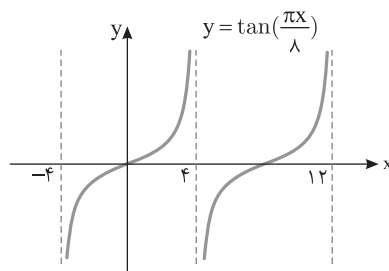
۲۵۴۰- گزینه ۴) خطوط $y = \frac{2a}{a-1}$ و $x = -\frac{3b}{a-1}$ به ترتیب مجانب‌های

قائم و افقی نمودار تابع f هستند. بنابراین

$$\frac{2a}{a-1} = 3 \Rightarrow 2a = 3a - 3 \Rightarrow a = 3$$

$$-\frac{3b}{a-1} = 2 \Rightarrow -\frac{3b}{2} = 2 \Rightarrow b = -\frac{4}{3}$$

$$\text{در نتیجه } ab = -4$$



۲۵۴۱- گزینه ۲) ابتدا توجه کنید که کمترین مقدار تابع برابر $3a - 2$

است که با توجه به نمودار تابع برابر -1 است. پس

$$3a - 2 = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

از طرف دیگر با توجه به نمودار، دوره تناوب تابع برابر $\frac{4\pi}{3}$ است. پس

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{2}$$

اگر $b = -\frac{3}{2}$ ، آن‌گاه $f(x) = 1 + 2 \sin(-\frac{2\pi}{3}x + \frac{\pi}{3})$ که در این صورت تابع

باید در همسایگی راست $x=0$ نزولی باشد که این طور نیست. پس $b = \frac{3}{2}$ و

$$\text{در نتیجه } ab = 2$$

۲۵۴۲- گزینه ۳) با نمادگذاری شکل زیر، $\alpha + x + y = 90^\circ$ ، پس

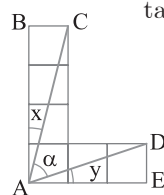
$$\alpha = 90^\circ - (x + y) \text{ از طرف دیگر } \tan x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ و } \triangle ABC: \tan x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{بنابراین } \triangle ADE: \tan y = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\tan \alpha = \tan(90^\circ - (x + y)) = \cot(x + y) = \frac{1}{\tan(x + y)}$$

$$= \frac{1 - \tan x \tan y}{\tan x + \tan y} = \frac{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{11}{5}$$

$$\text{پس } \cot \alpha = \frac{5}{11}$$



۲۵۴۳- گزینه ۳) معادله را به صورت $\cos x = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ می‌نویسیم.

بنابراین جواب‌ها به صورت زیر هستند: $(k \in \mathbb{Z})$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow k = -\frac{1}{4} \text{ (غ.ق.ی)} \\ x = 2k\pi - x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

۲۵۴۴- گزینه ۱) ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2(1 - \sin^2 x) + 5 \sin x - 5 = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 x - 5 \sin x + 3 = 0$$

اگر فرض کنیم $t = \sin x$ ، معادله به صورت $2t^2 - 5t + 3 = 0$ در می‌آید. از

حل این معادله نتیجه می‌شود $t_1 = \frac{3}{2}$ و $t_2 = 1$. چون $\sin x = \frac{3}{2}$ قابل قبول

$$\text{نیست، پس } \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{x \in (0, 2\pi)} x = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین معادله داده شده تنها یک جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.

۲۵۴۱- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - k}{x + 2}$$

از طرف دیگر

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^2(x) - kf(x)}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)(f(x) - k)}{(x - 2)(x + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - k}{x + 2} \times \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x - 2} = f'(-2) \times \frac{f(-2)}{-4} = \frac{k^2}{-4}$$

بنابراین $\frac{k^2}{-4} = -2$ ، در نتیجه $k^2 = 8$.۲۵۴۲- گزینه ۳ مقدار مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطه $x = 0$ را به کمک تعریف به دست می‌آوریم:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| \sqrt[3]{x^2 + 1} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt[3]{x^2 + 1}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x^2 + 1} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| \sqrt[3]{x^2 + 1} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x \sqrt[3]{x^2 + 1}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sqrt[3]{x^2 + 1}) = -1$$

بنابراین $f'_+(0) - f'_-(0) = 3$.

۲۵۴۳- گزینه ۳ توجه کنید که

$$f'(x) = (\lambda x^3 + 10x)(ax^2 + 1) + (2ax)(2x^2 + 5x^2 - 3)$$

بنابراین

$$f'(1) = (\lambda + 10)(a + 1) + (2a)(2 + 5 - 3) = 18a + 18 + 8a = 26a + 18$$

چون $f'(1) = -8$ ، پس $26a + 18 = -8 \Rightarrow 26a = -26 \Rightarrow a = -1$ ۲۵۴۴- گزینه ۳ چون تابع در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر است، پس در این

نقطه پیوسته است. یعنی

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$8a + 4 = 4 + 2b \Rightarrow 4a - b = 0$$

از طرف دیگر $f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 + 2 & x > 2 \\ 2x + b & x < 2 \end{cases}$ ، بنابراین

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3ax^2 + 2) = 12a + 2$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x + b) = 4 + b$$

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow 12a + 2 = 4 + b \Rightarrow 12a - b = 2$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} 4a - b = 0 \\ 12a - b = 2 \end{cases}$ نتیجه می‌شود $a = \frac{1}{4}$ و $b = 1$.پس $a + b = \frac{5}{4}$.

۲۵۴۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$g(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \Rightarrow g'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$g'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-1}{2 \times \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{4}}} f'\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\right) = -4f'(2)$$

از طرف دیگر $g'\left(\frac{1}{4}\right) = (-4)(-5) = 20$ ، در نتیجه $f'(2) = \frac{4+1}{2-3} = -5$.

۲۵۴۶- گزینه ۲ مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 2x^3 + 3ax^2 + 6x, \quad f''(x) = 6x^2 + 6ax + 6$$

پس معادله $6x^2 + 6ax + 6 = 0$ نباید جواب داشته باشد:

$$\Delta = 36a^2 - 144 < 0 \Rightarrow a^2 < 4 \Rightarrow |a| < 2$$

۲۵۴۷- گزینه ۳ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a, 1]$ برابر است با

$$\frac{f(1) - f(a)}{1 - a} = \frac{0 - (a - 2)\sqrt{1 - a}}{1 - a} = \frac{2 - a}{\sqrt{1 - a}}$$

بنابراین

$$\frac{2 - a}{\sqrt{1 - a}} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{(2 - a)^2}{1 - a} = \frac{25}{4} \Rightarrow \frac{4 + a^2 - 4a}{1 - a} = \frac{25}{4}$$

$$4a^2 - 16a + 16 = 25 - 25a$$

$$4a^2 + 9a - 9 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4}, a = -3$$

با توجه به گزینه‌های داده شده جواب ۳- است.

۲۵۴۸- گزینه ۴ فرض کنید خط مورد نظر در نقطه (x_0, y_0) بر نمودارتابع f مماس باشد. در این صورت، مقدار مشتق تابع f به ازای $x = x_0$ برابر باشیب خط $y = 2x + 4$ یعنی ۲ است. بنابراین

$$f'(x) = 6x^2 - 4 \Rightarrow f'(x_0) = 2 \Rightarrow 6x_0^2 - 4 = 2$$

$$x_0^2 = 1 \Rightarrow x_0 = 1 \text{ یا } x_0 = -1$$

چون نقطه (x_0, y_0) روی نمودار تابع f است، پس

$$y_0 = f(1) = 2 - 4 + 6 = 4 \text{ یا } y_0 = f(-1) = -2 + 4 + 6 = 8$$

بنابراین خط‌های مورد نظر از نقطه $(1, 4)$ یا نقطه $(-1, 8)$ می‌گذرند و شیب آن‌ها۲ است. پس معادله این دو خط به صورت $y = 2x + 2$ یا $y = 2x + 10$ است.۲۵۴۹- گزینه ۴ خط $y = 4x + 2$ در نقطه $A(1, 6)$ بر نمودار تابع f مماس است. بنابراین $f(1) = 6$ و $f'(1) = 4$. در نتیجه چون

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax, \quad f'(1) = 4$$

$$\begin{cases} f(1) = 1 - a + b = 6 \\ f'(1) = 3 - 2a = 4 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = \frac{9}{2} \Rightarrow a + b = 4$$

۲۵۵۰- گزینه ۱ باید تابع مشتق تابع f را تعیین علامت کنیم:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+

بنابراین تابع f روی بازه $[0, 1]$ نزولی است. می‌دانیم در صورتی که $c \geq 0$ و $d \leq 1$ ، تابع f روی بازه $[c, d]$ نزولی است اما بیشترین مقدار $b - a$ زمانیاست که $a = 0$ و $b = 1$ پس $b - a = 1 - 0 = 1$.۲۵۵۱- گزینه ۱ مشتق تابع f برابر است با $f'(x) = -6x^2 + 2ax - 6$.برای آنکه تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد باید همواره $f' \leq 0$ ، پس

$$a < 0, \Delta \leq 0 \Rightarrow -6 < 0, \Delta = 4a^2 - 144 \leq 0 \Rightarrow -6 \leq a \leq 6$$

۲۵۵۷- گزینه ۱ اگر $f'(x) > 0$ و $f''(x) < 0$ ، آن گاه تابع f صعودی و

جهت تفرع آن رو به پایین است:

$$f'(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

$$f''(x) = 3x^2 + 3x - 6 < 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) < 0$$

$$-2 < x < 1$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x(x^2 + \frac{3}{2}x - 6) > 0$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x - 6 = 0, \Delta = \frac{9}{4} + 24 = \frac{105}{4}$$

$$x = \frac{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{105}{4}}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{105}}{4}$$

x	$-\infty$	$\frac{-3-\sqrt{105}}{4}$	۰	$\frac{-3+\sqrt{105}}{4}$	$+\infty$
x	-	-	۰	+	+
$x^2 + \frac{3}{2}x - 6$	+	۰	-	-	+
$f'(x)$	-	۰	+	-	+

از اشتراک ناحیه‌هایی که در آنها $f'(x) > 0$ با $-2 < x < 1$ ، بازه $(-2, 0)$ حاصل می‌شود.

۲۵۵۸- گزینه ۴ فرض کنید نقطه B روی سهمی به معادله $y = 2x^2$

باشد. بنابراین مختصات آن به صورت $B(x, 2x^2)$ است. پس

$$AB = \sqrt{(x-9)^2 + (2x^2-0)^2} = \sqrt{x^2 - 18x + 81 + 4x^4}$$

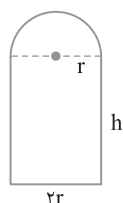
اگر $f(x) = \sqrt{4x^4 + x^2 - 18x + 81}$ ، آن گاه

$$f'(x) = \frac{4x^3 + x - 9}{\sqrt{4x^4 + x^2 - 18x + 81}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 + x - 9 = 0 \Rightarrow (4x^3 - 4) + (x - 1) = 0$$

$$4(x-1)(x^2 + x + 1) + (x-1) = (x-1)(4x^2 + 4x + 9) = 0 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f به ازای $x = 1$ به دست می‌آید. پس B نقطه $(1, 2)$ و عرض آن برابر ۲ است.



۲۵۵۹- گزینه ۴ در واقع باید مساحت پنجره

بیشترین مقدار ممکن باشد. پس

$$\text{محیط} = \Delta \Rightarrow 2h + 2r + \left(\frac{2\pi r}{2}\right) = 2h + 2r + r\pi = \Delta$$

$$h = \frac{\Delta - 2r - r\pi}{2} = \frac{\Delta}{2} - r - \frac{r\pi}{2}$$

نیم دایره $S_{\text{مستطیل}} + S_{\text{مستطیل}} = \text{مساحت پنجره}$

$$S(r) = (h \times 2r) + \left(\frac{r \times r \times \pi}{2}\right) = \left(\frac{\Delta}{2} - r - \frac{r\pi}{2}\right) \times 2r + \frac{r^2 \pi}{2}$$

$$= -2r^2 - \frac{r^2 \pi}{2} + \Delta r$$

$$S'(r) = -4r - r\pi + \Delta, S'(r) = 0 \Rightarrow -4r - r\pi + \Delta = 0$$

$$r = \frac{\Delta}{4 + \pi}$$

۲۵۵۲- گزینه ۳ توجه کنید که $f'(x) = x^2 - 2x - 8$ و

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 4, x = -2$$

با توجه به آنکه $f(-2) = \frac{25}{3}$ و $f(4) = -\frac{83}{3}$ ، پس نقاط $(-2, \frac{25}{3})$ و

$(4, -\frac{83}{3})$ نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند. بنابراین فاصله آن‌ها برابر است با

$$\sqrt{(4 - (-2))^2 + (-\frac{83}{3} - \frac{25}{3})^2} = \sqrt{6^2 + 36^2} = 6\sqrt{37}$$

۲۵۵۳- گزینه ۲ تابع f در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر است. برای آنکه تابع

در این نقطه اکسترمم نسبی داشته باشد باید $f'(2) = 0$. پس

$$f'(x) = \sqrt[3]{x+a} + \frac{x+1}{3\sqrt[3]{(x+a)^2}}, f'(2) = 0$$

$$f'(2) = \sqrt[3]{2+a} + \frac{3}{3\sqrt[3]{(2+a)^2}} = \frac{2(2+a)+3}{3\sqrt[3]{(2+a)^2}} = 0 \Rightarrow 9+3a = 0 \Rightarrow a = -3$$

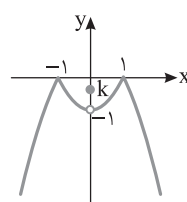
۲۵۵۴- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^3 & x \leq -\sqrt{2} \text{ یا } 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ x^3 - 2x & -\sqrt{2} \leq x \leq 0 \text{ یا } x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - 3x^2 & x < -\sqrt{2} \text{ یا } 0 < x < \sqrt{2} \\ 3x^2 - 2 & -\sqrt{2} < x < 0 \text{ یا } x > \sqrt{2} \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

همچنین در نقاط $x = -\sqrt{2}$ و $x = \sqrt{2}$ ، $x = 0$ ، تابع برابر نیستند. پس تابع در این نقطه‌ها مشتق پذیر نیست. بنابراین تابع f ، پنج نقطه بحرانی دارد.



۲۵۵۵- گزینه ۴ به نمودار تابع f توجه

کنید. واضح است که اگر تابع f در نقطه $x = 0$

ماکزیمم نسبی داشته باشد، اما ماکزیمم مطلق نداشته باشد، باید $-1 < k < 0$. توجه کنید که

اگر $k \geq 0$ ، آن گاه تابع f در نقطه $x = 0$ ماکزیمم مطلق تابع f دارد و اگر $k \leq -1$ ، در

نقطه $x = 0$ مینیمم نسبی دارد.

۲۵۵۶- گزینه ۱ تابع f در تمام نقطه‌های دامنه‌اش مشتق پذیر است و

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+a)}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{1-a}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

اگر $f'(x) = 0$ ، آن گاه $a = 1$ که در این صورت $f(x) = 1$. چون کمترین مقدار

تابع f روی بازه $[0, 4]$ برابر $\frac{4}{3}$ است، پس $a = 1$ قابل قبول نیست. پس

$f'(x) \neq 0$ ، بنابراین نقاط ابتدا و انتهای بازه را بررسی می‌کنیم: $f(0) = a$ و

$f(4) = \frac{2+a}{3}$. اگر $f(0) = a = \frac{4}{3}$ ، آن گاه $a = \frac{4}{3}$ و اگر $a = \frac{4}{3}$ ، $f(4) = \frac{2+a}{3} = \frac{4}{3}$

آن گاه $a = 2$. بنابراین حاصل ضرب مقادیر ممکن برای a برابر $\frac{4}{3} \times 2 = \frac{8}{3}$ است.

۲۵۶۵- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x - \sin x} = \frac{1}{f} \Rightarrow f \sin x + 8 \cos x = \cos x - \sin x$$

$$5 \sin x = -7 \cos x \Rightarrow \tan x = -\frac{7}{5}$$

بنابراین

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(-\frac{7}{5})}{1 - (-\frac{7}{5})^2} = \frac{35}{12}$$

۲۵۶۶- گزینه ۲ در نقاطی نمودار تابع f محور طول‌ها را قطع می‌کند که

$$f(x) = 0$$

$$\cos 3x = 0, \quad 3x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

چون جواب‌های واقع در بازه $(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ را می‌خواهیم، پس

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{(2k+1)\pi}{6} < \frac{7\pi}{2} \\ 3 < 2k+1 < 21 \Rightarrow 1 < k < 10$$

بنابراین به ازای $k=2, k=3, \dots, k=9$ برای x هشت مقدار به دست می‌آید که طول نقاط برخورد نمودار تابع با محور طول‌هاست.۲۵۶۷- گزینه ۲ اگر $x < 0$ ، نامعادله برقرار است و عددهای منفی در آنصدق می‌کنند. اگر $x > 0$ ، آن‌گاه

$$\begin{cases} x^2 - x > 2x \Rightarrow x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x-3) > 0 \Rightarrow x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \\ \text{یا} \\ x^2 - x < -2x \Rightarrow x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \Rightarrow x+1 < 0 \Rightarrow x < -1 \end{cases}$$

واضح است که $x=0$ نیز جواب نامعادله نیست. بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله به صورت $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ است که می‌توانیم آن را به صورت $\mathbb{R} - [0, 3]$ بنویسیم. پس $a=0$ و $b=3$ و در نتیجه $a+b=3$.

۲۵۶۸- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(4-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow D_f = [0, 4]$$

بنابراین

$$D_{\text{fof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq \sqrt{4x-x^2} + 3 \leq 4\}$$

از طرف دیگر

$$-3 \leq \sqrt{4x-x^2} \leq 1 \Rightarrow 4x-x^2 \leq 1$$

$$x^2 - 4x + 4 \geq 3 \Rightarrow (x-2)^2 \geq 3$$

$$\begin{cases} x-2 \geq \sqrt{3} \\ x-2 \leq -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2+\sqrt{3} \\ x \leq 2-\sqrt{3} \end{cases}$$

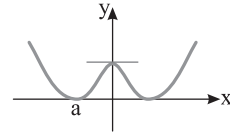
بنابراین

$$D_{\text{fof}} = \{x \mid 0 \leq x \leq 4, x \geq 2+\sqrt{3} \text{ یا } x \leq 2-\sqrt{3}\}$$

$$= [0, 2-\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{3}, 4]$$

پس $a=2-\sqrt{3}$ ، $b=2+\sqrt{3}$ و $ab=4-3=1$.

۲۵۶۰- گزینه ۱ مشتق تابع f در سه نقطه صفر است. پس نمودار

گزینه‌های (۳) و (۴) جواب نیستند. تابع f روی بازه $(-\infty, a]$ نزولی است.پس در این بازه باید f' منفی باشد. پس نمودار گزینه (۲) هم جواب نیست و نمودار گزینه (۱) جواب است.

۲۵۶۱- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\sqrt[4]{5^4 \sqrt[3]{5^3}} = 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{12+3+4}{24}} = 5^{\frac{19}{24}}$$

9

$$\sqrt[4]{5^4 \sqrt[3]{5^3}} = 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{6+1}{24}} = 5^{\frac{12+3+7}{24}} = 5^{\frac{22}{24}}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{5^{\frac{19}{24}}}{5^{\frac{22}{24}}} = 5^{\frac{19}{24} - \frac{22}{24}} = 5^{-\frac{3}{24}} = 5^{-\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt[8]{5}}$$

۲۵۶۲- گزینه ۱ طول رأس سهمی برابر $\frac{5}{2}$ است، پس

$$-\frac{a}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = -5$$

مقدار $f(0)$ مساوی ۴ است. پس

$$f(0) = -b \Rightarrow -b = 4 \Rightarrow b = -4$$

بنابراین $f(x) = x^2 - 5x + 4$. مجموع و حاصل ضرب جواب‌های معادله $f(x) = 0$ به ترتیب برابر ۵ و ۴ هستند، پس مجموع جواب‌ها یک واحد بیشتر از حاصل ضرب آن‌هاست.۲۵۶۳- گزینه ۲ معادله را به صورت $\sqrt{3-x} = 2 - \sqrt{x}$ می‌نویسیم و

طرفین آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$3-x = 4+x-4\sqrt{x} \Rightarrow 4\sqrt{x} = 1+2x$$

مجدداً طرفین را به توان دو می‌رسانیم:

$$16x = 1+4x^2+4x \Rightarrow 4x^2-12x+1=0$$

مجموع جواب‌های معادله بالا مورد نظر است که برابر ۳ است. (توجه کنید که معادله درجه دوم فوق دو جواب دارد که در معادله اصلی صدق می‌کنند.)

۲۵۶۴- گزینه ۳ ابتدا تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) - 2 \sin(2\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) - 2 \cos(3\pi - \alpha)} = 3$$

$$\frac{\cos \alpha - 2 \sin \alpha}{-\sin \alpha + 2 \cos \alpha} = 3$$

$$\cos \alpha - 2 \sin \alpha = -3 \sin \alpha + 6 \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = 5 \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 5$$

بنابراین $\tan(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha = \frac{1}{5}$.

۲۵۷۳- گزینه ۴ اگر $x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+$ ، آن گاه $\cos x \rightarrow 0^-$ و در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{-1}{\sin x - \sin^2 x} = -1$$

آوریم. حد مخرج کسر صفر است و مقدار عبارت مخرج مثبت است، زیرا در یک همسایگی راست $\frac{\pi}{2}$ ، نابرابری $0 < \sin x < 1$ برقرار است. بنابراین

$$\sin x - \sin^2 x = \sin x (1 - \sin x)$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{-1}{\sin x - \sin^2 x} = -\infty$$

۲۵۷۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که خطوط $y=1$ و $y=-1$ مجانب‌های

افقی نمودار تابع f هستند. بنابراین باید نقاط تلاقی نمودار تابع f و این خطوط را مشخص کنیم:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \frac{x}{|x|-2} = 1 \Rightarrow |x|-2 = x$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow x-2 = x \Rightarrow -2 = 0 \quad (\text{غ.ق.}) \\ x < 0 \Rightarrow -x-2 = x \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$f(x) = -1 \Rightarrow \frac{x}{|x|-2} = -1 \Rightarrow |x|-2 = -x$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow x-2 = -x \Rightarrow x = 1 \\ x < 0 \Rightarrow -x-2 = -x \Rightarrow -2 = 0 \quad (\text{غ.ق.}) \end{cases}$$

بنابراین $A(-1, 1)$ و $B(1, -1)$ نقاط تلاقی نمودار تابع f با خطوط مجانب آن است.

۲۵۷۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(2) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - [x]) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+2) = 4$$

پس به ازای هیچ مقدار a حد چپ و حد راست تابع نمی‌توانند با مقدار تابع در $x=2$ برابر باشند.

۲۵۷۶- گزینه ۴ شرط لازم برای مشتق‌پذیری تابع در یک نقطه پیوستگی

آن است:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (1 + a \cos \pi x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (bx^2 + x)$$

$$1 - a = b + 1 \Rightarrow b = -a$$

همچنین باید مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطه $x=1$ با هم برابر باشند:

$$f'(x) = \begin{cases} -a\pi \sin \pi x & x > 1 \\ 2bx + 1 & x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 0$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 2b + 1$$

$$2b + 1 = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

بنابراین $a = \frac{1}{2}$

۲۵۶۹- گزینه ۴ ابتدا ضابطه تابع وارون تابع f را پیدا می‌کنیم

$$y = 2 - \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \leq x \leq 0$$

$$\sqrt{4 - x^2} = 2 - y \Rightarrow 4 - x^2 = (2 - y)^2$$

$$x^2 = 4 - (2 - y)^2 \Rightarrow |x| = \sqrt{4 - (2 - y)^2} = \sqrt{4y - y^2}$$

چون $-2 \leq x \leq 0$ ، پس $x = -\sqrt{4y - y^2}$ و در نتیجه $f^{-1}(x) = -\sqrt{4x - x^2}$

بنابراین $a = -1$ و $b = 0$ و در نتیجه $a + b = -1$

۲۵۷۰- گزینه ۳ اگر نمودار تابع $y = 4f(2x)$ را یک واحد به سمت

راست منتقل کنیم، نمودار تابع زیر به دست می‌آید:

$$y = 4f(2(x-1)) = 4f(2x-2)$$

اگر این نمودار را دو واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y = 4f(2x-2) + 2$

به دست می‌آید. اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y = 4f(2(2x)-2) + 2 = 4f(4x-2) + 2$ رسم می‌شود و اگر عرض نقاط این نمودار را نصف کنیم،

نمودار تابع $y = \frac{1}{4}(4f(4x-2) + 2)$ رسم می‌شود. بنابراین ضابطه تابعی که

نمودار آن رسم شده است به صورت $y = 2f(4x-2) + 1$ است.

۲۵۷۱- گزینه ۴ شرایط زیر باید برقرار باشند:

$$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

$$\log_{5/4}(x-3) \geq 1$$

$$\log_{5/4}(x-3) \geq \log_{5/4} 5/4$$

$$x - 3 \leq 5/4 \Rightarrow x \leq 17/4$$

بنابراین دامنه تابع $[3, 17/4]$ است. پس $a = 3$ و $b = 17/4$ و در نتیجه

$$b - a = \frac{1}{4}$$

۲۵۷۲- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^2+1)$$

اکنون اگر صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج مخرج ضرب کنیم،

معلوم می‌شود که حد مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{(2x-\sqrt{3x^2+1})(2x+\sqrt{3x^2+1})} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{4x^2-3x^2-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{(x-1)(x+1)} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{x+1} = \frac{2(2+2)}{2} = 4 \end{aligned}$$

راه حل دوم از قاعده هویتنال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{2x - \sqrt{3x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2 - \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 + 1}}} = \frac{2}{2} = 1$$

۲۵۸۲- گزینه ۲ توجه کنید که $a-c=(a-b)+(b-c)=\lambda$ ، همچنین،

$$\frac{ab-ac+bc-b^2}{a-c} = \frac{-ac+b(a+c)-b^2}{a-c} = \frac{-(b-a)(b-c)}{a-c} = \frac{-(-\lambda)(\lambda)}{\lambda} = \lambda$$

۲۵۸۳- گزینه ۳ توجه کنید که $x_1+x_2=3$ و $x_1x_2=2m+1$ ، بنابراین

$$\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ 3x_1-x_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \end{cases}$$

$$x_1x_2=2 \Rightarrow 2m+1=2 \Rightarrow m=\frac{1}{2} \quad \text{در نتیجه}$$

۲۵۸۴- گزینه ۱ نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{1}{x+3} < \frac{x-5}{9} \Rightarrow \frac{9}{x+3} + 5 - x < 0 \Rightarrow \frac{9+(5-x)(x+3)}{x+3} < 0$$

$$\frac{-x^2+2x+24}{x+3} < 0 \Rightarrow \frac{(x-6)(x+4)}{x+3} > 0$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر، مجموعه جواب نامعادله به صورت $(-4, -3) \cup (6, +\infty)$ است.

x	$-\infty$	-4	-3	6	$+\infty$
$\frac{(x-6)(x+4)}{x+3}$		-	+	-	+

پس $a=-4$ ، $b=6$ و $ab=-24$.

۲۵۸۵- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} \quad \text{بنابراین}$$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ عبارتند از صفر، 2π و $\frac{3\pi}{2}$.

راه حل دوم معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin x + 1 - \cos x = 0 \Rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2\pi \\ \sin \frac{x}{2} = -\cos \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

۲۵۸۶- گزینه ۱ توجه کنید که اگر $a > 0$ ، آن‌گاه معادله جواب ندارد.

$$|x-1|-a = -a \quad \text{اگر } a \leq 0, \text{ آن‌گاه}$$

$$\begin{cases} |x-1|-a = -a \\ |x-1|-a = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-1| = 0 \Rightarrow x = 1 \\ |x-1| = 2a \quad (*) \end{cases}$$

اگر $a < 0$ ، آن‌گاه معادله (*) جواب ندارد. اگر $a = 0$ ، آن‌گاه

$$|x-1| = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین در حالتی که $a \leq 0$ معادله یک جواب دارد.

۲۵۷۷- گزینه ۳ با توجه به تعریف مشتق، از $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-9}{h} = \frac{3}{2}$

نتیجه می‌شود $f'(2) = \frac{3}{2}$ و $f(2) = 9$ ، از طرف دیگر،

$$g'(x) = \sqrt{f(x)} + \frac{xf'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$g'(2) = \sqrt{f(2)} + \frac{2f'(2)}{2\sqrt{f(2)}} = 3 + \frac{3}{6} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

۲۵۷۸- گزینه ۲ ابتدا مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+4) - 3x^4}{(x^2+4)^2} = \frac{x(8-x^3)}{(x^2+4)^2}$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{4}$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-	

بنابراین تابع f روی بازه $[0, 2]$ صعودی است و حداکثر مقدار a برابر ۲ است.

۲۵۷۹- گزینه ۲ توجه کنید که $f''(x) = 12x(x-2)$ ، بنابراین

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$		+	-	+
f		∪	∩	∪

از روی این جدول معلوم می‌شود که کمترین مقدار a برابر صفر و بیشترین مقدار b برابر ۲ است.

۲۵۸۰- گزینه ۳ نمودار تابع f در مبدأ مختصات بر محور x مماس است.

$$f'(0) = 0 \Rightarrow b = 0 \quad \text{پس } f'(0) = 0: f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + b$$

همچنین -4 ریشه تابع است، پس

$$f(x) = x^4 + ax^3 = x^3(x+a) \xrightarrow{f(-4)=0} (-4)^3(-4+a) = 0 \Rightarrow a = 4$$

بنابراین $f(x) = x^4 + 4x^3$ ، اکنون ریشه‌های تابع مشتق را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 + 12x^2 = 0 \Rightarrow x^2(4x+12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

مشخص است که $x = -3$ طول نقطهٔ مینیمم مطلق تابع است. مقدار مینیمم مطلق

$$f(-3) = (-3)^4 + 4(-3)^3 = 81 - 108 = -27$$

۲۵۸۱- گزینه ۲ اگر از دستور $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ استفاده کنیم،

$$S_7 = 84 \Rightarrow 84 = \frac{7}{2}(2a_1 + (7-1)d)$$

$$S_{18} = 711 \Rightarrow 711 = \frac{18}{2}(2a_1 + (18-1)d)$$

$$\begin{cases} a_1 + 3d = 12 \\ 2a_1 + 17d = 79 \end{cases}$$

بنابراین

اگر این دستگاه معادلات را حل کنیم، معلوم می‌شود که $a_1 = -3$ و $d = 5$.

بنابراین

$$S_{11} = \frac{11}{2}(2a_1 + (11-1)d) = \frac{11}{2}(2(-3) + 10 \times 5) = 242$$

۲۵۹۱- گزینه ۲ چون حد مخرج صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد تا حد مورد نظر به صورت $\frac{0}{0}$ در بیاید. در

نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - ax + b) = 0 \Rightarrow 1 - a + b = 0 \Rightarrow b = a - 1$$

اکنون باید حد زیر را حساب کنیم

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax + a - 1}{2x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-a+1)}{(x-1)(2x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-a+1}{2x-1} = 2 - a$$

بنابراین

$$2 - a = a - 4 \Rightarrow a = 3$$

پس $b = 2$ و در نتیجه $a + b = 5$.

۲۵۹۲- گزینه ۳ اگر در صورت کسر داده شده جمله شامل x^3 وجود داشته باشد، مقدار حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ است. بنابراین باید ضریب x^3 در صورت کسر داده شده صفر باشد، یعنی $a + 1 = 0$ ، پس $a = -1$. در این صورت حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 + x}{(b+1)x^2 - 4} = \frac{-2}{b+1}$$

بنابراین $\frac{-2}{b+1} = 2$ ، یعنی $b = -2$. به این ترتیب $a + b = -3$.

۲۵۹۳- گزینه ۳ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $x = 1$ همان $f'(1)$ است. پس،

$$f'(x) = 4x^2 + 2mx + 1 \Rightarrow f'(1) = 4 + 2m + 1 = 2 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$$

۲۵۹۴- گزینه ۲ تابع در $x = 3$ پیوسته است و

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} & x > 3 \\ 1 & x < 3 \end{cases}$$

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{4}, \quad f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 1 = 1$$

بنابراین

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3-h) - f(3)}{-h}$$

$$= f'_+(3) + f'_-(3) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

توجه کنید که می‌توانیم از قاعده هوییتال نیز استفاده کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(3+h) + f'(3-h)}{1}$$

$$= f'_+(3) + f'_-(3) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

۲۵۸۷- گزینه ۲ توجه کنید که $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$ و $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

بنابراین

$$D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x | x \neq -2, \frac{2x-3}{x+2} \neq 1\}$$

از طرف دیگر

$$\frac{2x-3}{x+2} \neq 1 \Rightarrow 2x-3 \neq x+2 \Rightarrow x \neq 5$$

پس $D_{f \circ g} = \{x | x \neq -2, x \neq 5\} = \mathbb{R} - \{-2, 5\}$

بنابراین -2 و 5 در دامنه تابع $f \circ g$ قرار ندارند که مجموع آن‌ها برابر ۳ است.

۲۵۸۸- گزینه ۳ چون این دو منحنی در نقطه $(1, 2)$ برخورد می‌کنند، پس

$$(1, 2) \in f \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{a+b} = 2 \Rightarrow a+b = 8$$

$$(1, 2) \in f^{-1} \Rightarrow (2, 1) \in f \Rightarrow f(2) = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{2a+b} = 1 \Rightarrow 2a+b = 1$$

در نتیجه

$$\begin{cases} a+b=8 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow a=-7, b=15$$

بنابراین $3a+b = -6$.

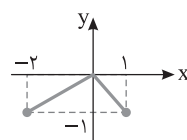
۲۵۸۹- گزینه ۲ راه حل اول اگر نمودار تابع f را نسبت به محور عرض‌ها

قرینه کنیم، نمودار تابع $y = f(-x)$ به دست می‌آید. اگر عرض نقاط نمودار

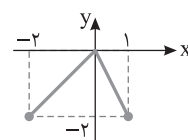
به دست آمده را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y = 2f(-x)$ به دست می‌آید.

نمودار اخیر را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = 1 + 2f(-x)$

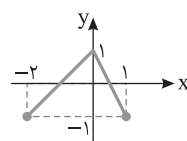
به دست آید که به صورت شکل (۲) خواهد بود.



$y = f(-x)$



$y = 2f(-x)$



$y = 1 + 2f(-x)$

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که $f(-1) = f(2) = -1$. اگر شکل (۲) مربوط به

تابع g باشد، آن‌گاه $g(-2) = g(1) = -1$. از طرف دیگر،

$$g(x) = 1 + 2f(-x)$$

$$g(-2) = 1 + 2f(2) = 1 - 2 = -1, \quad g(1) = 1 + 2f(-1) = 1 - 2 = -1$$

بنابراین شکل (۲) متعلق به تابع $g(x) = 1 + 2f(-x)$ است.

۲۵۹۰- گزینه ۳ از تساوی $\log \sqrt{a} = a$ نتیجه می‌شود

$$\log 2^{\frac{2}{3}} = a \Rightarrow \frac{2}{3} \log 2 = a \Rightarrow \log 2 = \frac{3a}{2}$$

بنابراین

$$\log 125 = \log 5^3 = 3 \log 5 = 3 \log \frac{1}{2}$$

$$= 3(\log 10 - \log 2) = 3(1 - \frac{3a}{2}) = 3 - \frac{9a}{2}$$

۲۵۹۵- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = x^3 x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{7}{2} x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow f''(x) = \frac{35}{4} x^{\frac{3}{2}} = \frac{35}{4} x \sqrt{x}$$

بنابراین $f''(4) = \frac{35}{4} \times 4 \times 2 = 70$.

۲۵۹۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که $f'(x) = x^2 + 2x + k$ ، برای اینکه تابع اکیداً صعودی باشد باید مشتق آن به ازای هر x نامنفی باشد:

$$x^2 + 2x + k \geq 0$$

بنابراین

$$\Delta = 4 - 4k \leq 0 \Rightarrow k \geq 1$$

۲۵۹۷- گزینه ۴ به ازای تمام مقادیر x ، باید مشتق دوم تابع نامنفی باشد:

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 3x$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6ax + 3$$

برای اینکه این عبارت درجه دوم همواره مثبت باشد، باید

$$\Delta = 36a^2 - 144 = 36(a^2 - 4) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq a \leq 2$$

۲۵۹۸- گزینه ۴ می‌دانیم در تابع درجه سوم

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

نقطه عطف به صورت $(\frac{-b}{3a}, f(\frac{-b}{3a}))$ است. پس

$$\frac{-b}{3a} = 1 \Rightarrow b = -3a$$

$$-2 = f(1) \Rightarrow a + b - 3 - 1 = -2 \Rightarrow a + b = 2$$

در نتیجه $a = -1$ و $b = 3$ ، بنابراین تابع به صورت $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x - 1$ است؛ برای یافتن نقطه ماکزیمم نسبی این تابع ابتدا مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x^2 - 2x + 1) = -3(x-1)^2$$

مشخص است که همواره $f'(x) \leq 0$ ، پس تابع اکیداً نزولی است و اکسترمم نسبی ندارد.

۲۵۹۹- گزینه ۲ با توجه به ضابطه داده شده می‌توان نتیجه گرفت که

تابع از نقطه $(0, 2)$ می‌گذرد، پس مجانب افقی تابع خط $y = 2$ است. بنابراین

$$2 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a \Rightarrow a = 2$$

همچنین تابع $f(x) = \frac{2x^2 + bx + 8}{x^2 + 4}$ بر محور x مماس است، پس معادله $f(x) = 0$ ریشه مضاعف دارد:

$$2x^2 + bx + 8 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} b^2 - 64 = 0 \Rightarrow b = \pm 8$$

چون نمودار تابع در نقطه‌ای به طول مثبت بر محور x مماس است، می‌توان نتیجه گرفت $b < 0$ ، پس مقدار $b = -8$ قابل قبول است. بنابراین $a + b = -6$.

۲۶۰۰- گزینه ۱ مقدار تابع f' در نقطه‌های -1 و 5 برابر صفر است،

پس خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌های به طول -1 و 5 موازی محور x است. روی بازه‌های $(-\infty, -1)$ و $(5, +\infty)$ علامت f' منفی است، پس

تابع f روی این بازه‌ها اکیداً نزولی است. روی بازه $(-1, 5)$ علامت f'

مثبت است، پس تابع f روی این بازه اکیداً صعودی است. توجه کنید که فقط نمودار گزینه (۱) این ویژگی‌ها را دارد.

۲۶۰۱- گزینه ۲ توجه کنید که

$$S_{20} = 3S_{10} \Rightarrow \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 3 \times \frac{10}{2}(2a_1 + 9d)$$

$$20a_1 + 190d = 36a_1 + 198d \Rightarrow 16a_1 = -8d \Rightarrow d = -2a_1$$

$$a_{10} = 6 \Rightarrow a_1 + 9d = 6 \Rightarrow a_1 - 4a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = -2$$

از طرف دیگر،

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ d = 4 \end{cases} \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9d = -2 + 9 \times 4 = 34$$

پس

۲۶۰۲- گزینه ۲ ابتدا مخارج کسرها را با استفاده از اتحادهای چاق و لاغر

گویا می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{(\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)} = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt[3]{2} - 1$$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1} = \frac{3(\sqrt[3]{2} + 1)}{(\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)} = \frac{3(\sqrt[3]{2} + 1)}{2 + 1} = \sqrt[3]{2} + 1$$

$$A = \sqrt[3]{2} - 1 + \sqrt[3]{2} + 1 = 2\sqrt[3]{2}$$

بنابراین

۲۶۰۳- گزینه ۳ اگر α و β جواب‌های معادله زیر باشند،

$$x^2 - (2m-3)x + 2n+2 = 0$$

$$\alpha + \beta = 2m - 3, \quad \alpha\beta = 2n + 2$$

آن‌گاه

همچنین اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2 - nx + m + 1 = 0$ باشند، آن‌گاه

$$x_1 + x_2 = n, \quad x_1 x_2 = m + 1$$

با توجه به $\alpha = x_1 + 1$ و $\beta = x_2 + 1$ نتیجه می‌شود

$$\alpha + \beta = x_1 + x_2 + 2$$

$$\alpha\beta = (x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1$$

$$\begin{cases} 2m - 3 = n + 2 \\ 2n + 2 = m + 1 + n + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m - 5 = n \\ m = n \end{cases}$$

بنابراین

$$2m - 5 = m \Rightarrow m = 5, \quad n = 5$$

$$m + n = 10$$

بنابراین

۲۶۰۴- گزینه ۱ اگر فرض کنیم $x^2 = t$ ، آن‌گاه $x = \pm\sqrt{t}$ ، $t \geq 0$ و معادله به شکل زیر درمی‌آید

$$t^2 + 2mt + m^2 - 1 = 0 \quad (*)$$

در این معادله

$$\Delta = 4m^2 - 4(m^2 - 1) = 4 > 0$$

بنابراین معادله (*) به ازای هر مقدار m دو جواب حقیقی دارد. اگر هر دو جواب این معادله منفی باشند، آن‌گاه معادله اولیه جواب حقیقی نخواهد داشت.

بنابراین اگر t_1 و t_2 جواب‌های معادله (*) باشند، باید

$$t_1 + t_2 < 0 \Rightarrow -2m < 0 \Rightarrow m > 0$$

$$t_1 t_2 > 0 \Rightarrow m^2 - 1 > 0 \Rightarrow m < -1 \text{ یا } m > 1$$

بنابراین اگر $m > 1$ ، آن‌گاه معادله اولیه جواب حقیقی ندارد.

۲۶۰۵- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\cos^2 x - \cos^4 x = \cos^2 x (1 - \cos^2 x) = \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8}$$

بنابراین

$$\tan^2 x + \cot^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

صورت کسر بالا را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x \\ = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \end{aligned}$$

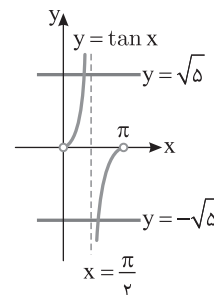
در نتیجه

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1 - \frac{1}{8}}{\frac{1}{8}} = 6$$

۲۶۰۶- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر ساده می کنیم

$$\begin{aligned} \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan x} + \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan x} &= -3 \\ \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} &= -3 \\ (1 + \tan x)^2 + (1 - \tan x)^2 &= -3(1 - \tan^2 x) \\ 2 + 2 \tan^2 x &= -3 + 3 \tan^2 x \\ \tan^2 x &= 5 \Rightarrow \tan x = \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به نمودار تابع $y = \tan x$ معادله دو جواب در بازه $(0, \pi)$ دارد.



۲۶۰۷- گزینه ۴ می دانیم اگر $-1 \leq a \leq 1$ ، آن گاه $|a| \leq 1$ ، بنابراین

نامعادله را به صورت $|\frac{x-2}{x-3}| \leq 1$ می نویسیم. بنابراین

$$\frac{|x-2|}{|x-3|} \leq 1 \Rightarrow |x-2| \leq |x-3|, \quad x \neq 3$$

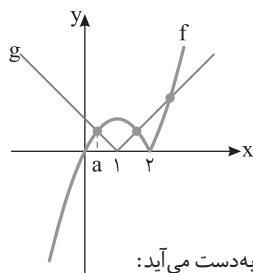
$$|x-2|^2 \leq |x-3|^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 \leq x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x \leq \frac{5}{2}$$

بنابراین $(-\infty, \frac{5}{2}]$ مجموعه جواب های نامعادله است و در نتیجه $a = 5$.

$b = 2$ پس $a + b = 7$.

۲۶۰۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & x \leq 2 \end{cases}$$



پس نمودار تابع های f و g به صورت مقابل است. کمترین طول نقطه های برخورد برابر a است. چون $a < 1$ ، پس

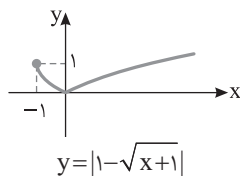
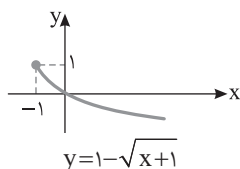
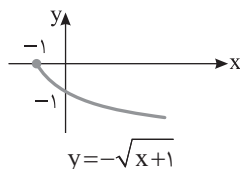
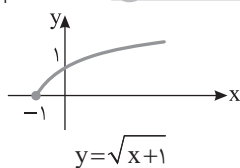
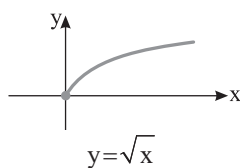
$$f(x) = -x^2 + 2x$$

$$g(x) = -x + 1$$

مقدار a از حل معادله $-x^2 + 2x = -x + 1$ به دست می آید:

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (\text{غ.ق.ق.}), \quad x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

۲۶۰۹- گزینه ۱ مراحل رسم نمودار به صورت زیر است.



۲۶۱۰- گزینه ۱ چون تابع f اکیداً صعودی است، پس از

$$f^{-1}(4x-3) > f^{-1}(x^2)$$

$$4x-3 > x^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$$

$$(x-1)(x-3) < 0 \Rightarrow 1 < x < 3$$

بنابراین مجموعه جواب های نامعادله شامل عدد صحیح ۲ است.

۲۶۱۱- گزینه ۳ اگر $x < 0$ ، باید وارون تابع $g(x) = \frac{2x+x}{3}$ را پیدا کنیم:

$$g(x) = \frac{3x}{3} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2x}{3}, \quad x < 0$$

اگر $x \geq 0$ ، باید وارون تابع $h(x) = \frac{2x-x}{3}$ را پیدا کنیم:

$$h(x) = \frac{x}{3} \Rightarrow h^{-1}(x) = 2x, \quad x \geq 0$$

بنابراین وارون تابع به صورت زیر است:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3} & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$$

که همان $f^{-1}(x) = \frac{4x+2|x|}{3}$ است. بنابراین $a = 4$ ، $b = 3$ و $a + b = 7$.

۲۶۱۹- گزینه ۴ توجه کنید که $D_f = [3, 5]$ و

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x-3} = \sqrt{5-x} \Rightarrow x-3 = 5-x \Rightarrow x=4$$

پس $(4, 2)$ نقطه بحرانی تابع f است و مجموع طول و عرض آن برابر ۶ است.

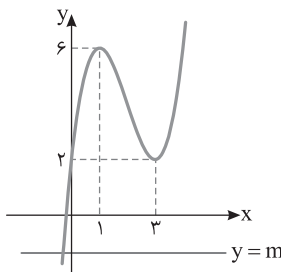
۲۶۲۰- گزینه ۴ ابتدا نقاط اکسترمم نسبی تابع را مشخص می‌کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x=1, x=3$$

جدول تغییرات تابع f به صورت زیر است:

x	$-\infty$	۱	۳	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
f		↗ max نسبی	↘ min نسبی	↗



پس نمودار تقریبی تابع f به صورت

رو به رو است. واضح است که اگر

معادله $f(x) = m$ یک ریشه

داشته باشد، باید m کمتر از مقدار

مینیمم نسبی تابع یا بیشتر از مقدار

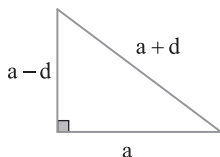
ماکزیمم نسبی آن باشد، یعنی

$$m > 6 \text{ یا } m < 2$$

۲۶۲۱- گزینه ۲ طول ضلع‌های مثلث را مطابق شکل $a-d, a, a+d$

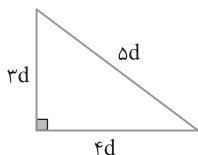
در نظر می‌گیریم. بنابر قضیه فیثاغورس،

$$(a+d)^2 = a^2 + (a-d)^2 \Rightarrow a = 4d$$



بنابراین طول ضلع‌های مثلث $3d, 4d, 5d$ هستند. پس مساحت مثلث

$$S = \frac{1}{2} \times 3d \times 4d = 6d^2 \text{ و محیط آن } P = 12d \text{ است.}$$



مساحت مثلث، واسطه هندسی بین وتر و محیط است. پس

$$S^2 = P \times (\Delta d) \Rightarrow 36d^4 = 12d \times 5d \Rightarrow d = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

بنابراین مساحت مثلث برابر است با $S = 6d^2 = 10$.

۲۶۲۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$\sqrt{5^4 \cdot 3} = \sqrt{5^4} \sqrt{3} \Rightarrow 5^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 5^4 \cdot 3^{\frac{1}{8}}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان ۸ برسانیم، معلوم می‌شود که

$$5^4 \times 3 = 5^2 \times 3 \Rightarrow x = 5^2 \times 3 = 75$$

۲۶۱۲- گزینه ۴ معادله داده شده را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\log_{\sqrt{2}}(xy) + \log_{\sqrt{3}} \frac{x}{y} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(xy) + \frac{1}{3} \log_{\sqrt{3}} \frac{x}{y} = 0$$

$$3 \log_{\sqrt{2}}(xy) + 2 \log_{\sqrt{3}} \frac{x}{y} = 0 \Rightarrow \log_{\sqrt{2}}(xy)^3 + \log_{\sqrt{3}} \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 0$$

$$\log_{\sqrt{2}}((x^3 y^3)^{\frac{2}{3}}) = 0 \Rightarrow x^2 y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

بنابراین

$$\log_x y = \log_x x^{-2} = -2 \log_x x = -2$$

۲۶۱۳- گزینه ۳ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ و حد مورد نظر

به صورت $\frac{0}{0}$ است. اکنون توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^2(x) - 1}{2f^2(x) - 3f(x) + 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(f(x)-1)(f(x)+1)}{(f(x)-1)(2f(x)-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)+1}{2f(x)-1} = \frac{1+1}{2-1} = 2 \end{aligned}$$

۲۶۱۴- گزینه ۲ از اتحاد $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2kx)}{1 - \cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(kx)}{2 \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin kx}{kx} \right)^2 \times \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \times k^2 = 1^2 \times 1^2 \times k^2 = k^2 \end{aligned}$$

بنابراین $k^2 = 2k$ و در نتیجه $k=0$ یا $k=2$. پس مجموع مقادیر ممکن برای k برابر ۲ است.

۲۶۱۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2 - 3x + 2)} = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$$

پس

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = +\infty$$

۲۶۱۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که شیب خط d برابر است با -1 .

بنابراین شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $x=2$ برابر -1 است.

یعنی $f'(2) = -1$ در نتیجه

$$g(x) = f^2(x) \Rightarrow g'(x) = 2f(x)f'(x)$$

$$g'(2) = 2f(2)f'(2) = 2 \times 3 \times (-1) = -6$$

۲۶۱۷- گزینه ۴ توجه کنید که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{\Delta h} = \frac{3}{\Delta} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{3h} = \frac{3}{\Delta} f'(2)$$

از طرف دیگر، $f'(2) = 10$. پس $f'(x) = 3x^2 - 2$ ، بنابراین مقدار مورد نظر

$$\frac{3}{5} \times 10 = 6$$

۲۶۱۸- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$g'(x) = f(x) + xf'(x)$$

$$g''(x) = f'(x) + f'(x) + xf''(x) = 2f'(x) + xf''(x)$$

$$g''(2) = 2f'(2) + 2f''(2) = 4 + 4 = 8$$

۲۶۲۷- گزینه ۳) معادله را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$2 \sin^2 x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2 - 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow (\cos x - 1)(2 \cos x + 1) = 0$$

بنابراین جواب های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت زیر هستند

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0, \quad x = 2\pi$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \quad x = \frac{4\pi}{3}$$

پس مجموع جواب های بالا برابر است با 4π .

۲۶۲۸- گزینه ۲) توجه کنید که

$$f(g(x)) = \frac{3x-2}{2x-1} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2x}\right) = \frac{3x-2}{2x-1}$$

اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم $\frac{3}{2x}$ ، به دست می آید

$$f(x) = \frac{3 \times \frac{3}{2x} - 2}{2 \times \frac{3}{2x} - 1} = \frac{9-4x}{6-2x}$$

در نتیجه

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{9-4x}{6-2x} + \frac{3}{2x} = \frac{4x^2-6x-9}{2x^2-6x}$$

۲۶۲۹- گزینه ۲) اگر نمودار تابع $y = \sqrt{-x}$ را دو واحد به چپ منتقل

کنیم، نمودار تابع $y = \sqrt{-(x+2)} = \sqrt{-x-2}$ به دست می آید، اگر نمودار

به دست آمده را نسبت به محور عرض ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = \sqrt{x-2}$

به دست می آید و اگر این نمودار را مجدداً دو واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار

تابع $y = \sqrt{(x+2)-2} = \sqrt{x}$ به دست می آید.

۲۶۳۰- گزینه ۲) قرینه نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ نمودار تابع f^{-1}

است. پس باید f و f^{-1} برابر باشند. ضابطه f^{-1} را به دست می آوریم:

$$y = \sqrt[3]{a+bx^3} \Rightarrow y^3 = a+bx^3 \Rightarrow x^3 = \frac{y^3-a}{b}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{b}y^3 - \frac{a}{b}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{b}x^3 - \frac{a}{b}}$$

از تساوی $f(x) = f^{-1}(x)$ نتیجه می شود $\sqrt[3]{a+bx^3} = \sqrt[3]{-\frac{a}{b} + \frac{1}{b}x^3}$.

پس $a = -\frac{a}{b}$ و $\frac{1}{b} = b$ و در نتیجه $b = \pm 1$. اگر $b = 1$ ، آن گاه $a = 0$ که

قابل قبول نیست. پس $b = -1$.

۲۶۳۱- گزینه ۳) ابتدا توجه کنید که

$$2^a = 3 \Rightarrow a = \log_2 3 \Rightarrow \frac{1}{a} = \log_3 2$$

$$2^b = 8 \Rightarrow b = \log_2 8$$

بنابراین $b + \frac{1}{a} = \log_2 8 + \log_3 2 = \log_3 16$ و در نتیجه

$$3^{b+\frac{1}{a}} = 3^{\log_3 16} = 16$$

۲۶۲۳- گزینه ۴) ابتدا توجه کنید که $x_1 + x_2 = -6$ و $x_1 x_2 = -3$.

بنابراین

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{x_2} + x_2\right)\left(\frac{x_2}{x_1} + x_1\right) &= 1 + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} + x_1 x_2 \\ &= 1 + \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 x_2} + x_1 x_2 = 1 + \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{x_1 x_2} + x_1 x_2 \\ &= 1 + \frac{(-6)^3 - 3(-3)(-6)}{-3} - 3 = 88 \end{aligned}$$

۲۶۲۴- گزینه ۲) ابتدا دقت کنید که اگر x جواب معادله باشد، آن گاه

$x > 0$. اکنون دو طرف معادله داده شده را به توان دو می رسانیم:

$$x^2 + \frac{x^2}{x^2-1} + 2 \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = 8 \Rightarrow \frac{x^4}{x^2-1} + 2 \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = 8$$

بنابراین اگر $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = y$ ، آن گاه

$$y^2 + 2y = 8 \Rightarrow (y+1)^2 = 9 \xrightarrow{y>0} y+1=3 \Rightarrow y=2$$

در نتیجه

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = 2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^4 = 4(x^2-1)$$

$$x^4 - 4x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x^2-2)^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{2}$$

پس معادله مورد نظر فقط یک جواب دارد.

۲۶۲۵- گزینه ۲) راه حل اول چندجمله ای $P(x)$ را به شکل زیر

می نویسیم:

$$P(x) = ax^3 + 4x^2 - 14x + 10 - a = a(x^3 - 1) + 4x^2 - 14x + 10$$

$$= a(x-1)(x^2+x+1) + (x-1)(4x-10)$$

$$= (x-1)(ax^2 + (a+4)x + a-10)$$

برای اینکه چندجمله ای $P(x)$ بر $(x-1)^2$ بخش پذیر باشد، باید چندجمله ای

$Q(x) = ax^2 + (a+4)x + a-10$ بر $x-1$ بخش پذیر باشد. پس

$$Q(1) = 0 \Rightarrow a + a + 4 + a - 10 = 0 \Rightarrow a = 2$$

راه حل دوم باید $P(1) = 0$ و $P'(1) = 0$ ، بنابراین

$$P'(x) = 3ax^2 + 8x - 14$$

$$P'(1) = 3a + 8 - 14 = 0 \Rightarrow a = 2$$

۲۶۲۶- گزینه ۴) می توان نوشت

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = 1 \Rightarrow \frac{\cos x \sin 2x + \sin x \cos 3x}{\sin x \cos x} = 1$$

$$\frac{\sin(x+3x)}{\frac{1}{2} \sin 2x} = 1 \Rightarrow \frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}$$

بنابراین $\cos 2x = \frac{1}{4}$. اکنون توجه کنید که $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$.

پس $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{3}{8}$

پس نمودار تابع f در $+\infty$ بالای مجانب افقی آن قرار دارد و در $-\infty$ پایین مجانب افقی آن قرار دارد.



گزینه ۴ - ۲۶۳۶ برای آنکه تابع f در نقطه $x=0$ پیوسته باشد، می‌بایست $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ برابر a باشد. با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، حد مورد نظر را

محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x - \sin x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (2 \cos x - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 1}{x}\end{aligned}$$

اکنون دقت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cos x - 1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \cos x - 1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

پس $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 1}{x}$ وجود ندارد، بنابراین هیچ مقداری برای a پیدا

نمی‌شود. توجه کنید که حد تابع f در $x=0$ را می‌توانیم به کمک هم‌ارزی‌های مثلثاتی به‌طور ساده‌تری به‌دست آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

به همین ترتیب

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

گزینه ۲ - ۲۶۳۷ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[-1, 2]$ برابر

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{f(2) - f(-1)}{3} = \frac{6 - 0}{3} = 2$$

در نقطه a برابر $f'(a)$ است.

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(a) = 3a^2 - 1$$

بنابراین

$$3a^2 - 1 = 2 \Rightarrow 3a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm 1$$

پس نقطه $x=1$ جواب مسئله است.

گزینه ۳ - ۲۶۳۸ با استفاده از قواعد مشتق‌گیری، مشتق تابع را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2 \times 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) \times \left(-\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)\right) \times \left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right)\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

بنابراین

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

گزینه ۱ - ۲۶۳۲ با استفاده از خاصیت $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ معادله را

حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{\log x}{\log 2} + \frac{\log x}{\log 5} &= 2 \Rightarrow \log x \left(\frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 5} \right) = 2 \\ \log x \left(\frac{\log 5 + \log 2}{\log 2 \times \log 5} \right) &= 2 \Rightarrow \log x \left(\frac{1}{\log 2 \times \log 5} \right) = 2 \\ \log x &= 2 \log 2 \times \log 5 = \log 4 \times \log 5 \\ x &= 10^{\log 4 \times \log 5} = (10^{\log 4})^{\log 5} = 4^{\log 5}\end{aligned}$$

گزینه ۳ - ۲۶۳۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2}{(a+2)x^2} = \frac{a}{a+2}$$

پس

$$\frac{a}{a+2} = 3 \Rightarrow a = -3$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x^2 + x + 4}{-x^2 - 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(-3x+4)}{(x+1)(-x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x+4}{-x-2} = -7\end{aligned}$$

گزینه ۲ - ۲۶۳۴ راه‌حل اول با توجه به تساوی‌های $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$ و

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1 \text{ می‌توان نوشت}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \tan 5x}{\sin 2x + \tan 4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{x} + \frac{\tan 5x}{x}}{\frac{\sin 2x}{x} + \frac{\tan 4x}{x}} \\ &= \frac{3 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right) + 5 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 5x}{5x} \right)}{2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right) + 4 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 4x}{4x} \right)} = \frac{3+5}{2+4} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

راه‌حل دوم از هم‌ارزی‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \tan 5x}{\sin 2x + \tan 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 5x}{2x + 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{6x} = \frac{4}{3}$$

راه‌حل سوم از قاعده هسپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \tan 5x}{\sin 2x + \tan 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos 3x + 5(1 + \tan^2 5x)}{2 \cos 2x + 4(1 + \tan^2 4x)} = \frac{3+5}{2+4} = \frac{4}{3}$$

گزینه ۳ - ۲۶۳۵ ابتدا توجه کنید که خط‌های $y=1$ و $y=-1$

مجانب‌های افقی نمودار تابع f هستند. از طرف دیگر اگر $x \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه

$$f(x) = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1} > 1$$

و اگر $x \rightarrow -\infty$ ، آن‌گاه

$$f(x) = \frac{x}{-x-1} = -1 + \frac{1}{x+1} < -1$$

۲۶۴۳- گزینه ۳ خط $(\delta-k)y+2x=3$ محور x را در نقطه $(\frac{3}{2}, 0)$

قطع می‌کند. این نقطه روی خط $mx-y=-2$ نیز هست. پس

$$m(\frac{3}{2})-0=-2 \Rightarrow m=-\frac{4}{3}$$

چون دو خط بر هم عمودند، حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها -1 است. پس

$$m \times (\frac{-2}{\delta-k}) = -1 \Rightarrow -\frac{4}{3} \times \frac{-2}{\delta-k} = -1 \Rightarrow k = \frac{23}{3}$$

بنابراین $k-m=9$.

۲۶۴۴- گزینه ۴ واضح است که $x=1$ جواب معادله است. پس $x-1$

عامل معادله است

$$(x^3-1)+(mx-m)=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)+m(x-1)=0 \\ (x-1)(x^2+x+1+m)=0$$

برای اینکه معادله سه جواب متمایز داشته باشد، باید معادله $x^2+x+m+1=0$ دو جواب داشته باشد که برابر ۱ نباشند. بنابراین

$$\Delta = 1-4(m+1) > 0 \Rightarrow -4m-3 > 0 \Rightarrow m < -\frac{3}{4}$$

$$1^2+1+m+1 \neq 0 \Rightarrow m \neq -3$$

$$\text{پس } m \in (-\infty, -\frac{3}{4}) - \{-3\}$$

۲۶۴۵- گزینه ۲ برای حل این مسئله باید نامعادله زیر را حل کنیم:

$$\frac{2}{x} + x > 3 \Rightarrow \frac{2}{x} + x - 3 > 0$$

این نامعادله به صورت $\frac{x^2-3x+2}{x} > 0$ درمی‌آید. چون

$$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$$

پس جدول تعیین علامت به شکل زیر است:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$\frac{x^2-3x+2}{x}$		-	+	-	+

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر $(2, +\infty) \cup (0, 1)$ است. در

نتیجه $a+b=2$ و $b=2$, $a=0$.

۲۶۴۶- گزینه ۲ با نمادگذاری شکل زیر، $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$. بنابراین

$$\alpha = 90^\circ - (\beta + \gamma)$$

$$\cos \alpha = \cos(90^\circ - (\beta + \gamma)) = \sin(\beta + \gamma) = \sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \beta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$



۲۶۴۷- گزینه ۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\tan(2x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan(-\frac{\pi}{6})$$

بنابراین جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$2x + \frac{\pi}{4} = k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{5\pi}{24} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۲۶۳۹- گزینه ۲ ابتدا نقاط بحرانی تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1, x = 4$$

بنابراین کمترین مقدار تابع بین مقادیر زیر است:

$$f(0) = 0, \quad f(-1) = -\frac{3}{4}, \quad f(4) = -32$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

پس کمترین مقدار تابع برابر -32 است.

۲۶۴۰- گزینه ۳ چون تابع f همه جا دو بار مشتق‌پذیر است، طول نقطه

عطف آن ریشه معادله $f''(x) = 0$ است. توجه کنید که

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = 6ax + 6$$

$$f''(-1) = 0 \Rightarrow -6a + 6 = 0 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$. چون نقطه عطف روی نمودار تابع است،

پس عرض آن برابر است با $f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4$.

۲۶۴۱- گزینه ۱ اگر دو عدد a و b بنامیم، واسطه حسابی آن‌ها $\frac{a+b}{2}$

و واسطه هندسی آن‌ها $\pm\sqrt{ab}$ است. چون دو عدد مثبت هستند، پس

$$\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} = \frac{3}{\sqrt{8}} \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4ab} = \frac{9}{8} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{3}{2}$$

$$2a^2 + 2b^2 - 5ab = 0 \Rightarrow (2a-b)(a-2b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b=2a \Rightarrow \frac{b}{a}=2 \\ a=2b \Rightarrow \frac{a}{b}=2 \end{cases}$$

بنابراین نسبت عدد بزرگ‌تر به عدد کوچک‌تر برابر ۲ است.

۲۶۴۲- گزینه ۱ راه حل اول فرض می‌کنیم $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

و طرفین تساوی را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$x^3 = (\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})^3 + (\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})^3 \\ + 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}) \\ x^3 = 2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}x \\ = 4 + 3x$$

بنابراین

$$x^3 = 4 + 3x \Rightarrow x^3 + 3x - 4 = 0$$

از حل این معادله مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$x^3 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x^3 - 1 + 3x - 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+4) + 3(x-1) = 0$$

$$= (x-1)(x^2+x+4+3) = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x=1$$

راه حل دوم می‌دانیم اگر $a+b+c=0$ ، آن‌گاه، $a^3+b^3+c^3=3abc$. بنابراین

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \Rightarrow \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + (-x) = 0$$

$$2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}-x^3 = 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}(-x)$$

پس از ساده کردن مجدداً به معادله $x^3 + 3x - 4 = 0$ می‌رسیم که در راه حل

اول آن را حل کرده‌ایم.

۲۶۵۳- گزینه ۱ راه حل اول ابتدا توجه کنید که اگر $f(x) = \sin x$ و

$$g(x) = \cos x, \text{ آن گاه}$$

$$f'(\frac{\pi}{6}) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{6}}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$$

$$g'(\frac{\pi}{6}) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{6}}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$$

بنابراین

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\frac{\sin x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}}{\frac{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}} = \frac{f'(\frac{\pi}{6})}{g'(\frac{\pi}{6})}$$

از طرف دیگر

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$g'(x) = -\sin x \Rightarrow g'(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$$

$$L = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \text{ پس}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{-\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

۲۶۵۴- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 2x + 1}{3x - x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{2x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) - 2x + 1}{3x + x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$$

بنابراین خطوط $y = \frac{1}{2}$ و $y = 3$ مجانب‌های افقی نمودار تابع f هستند و فاصله

آنها از یکدیگر برابر $\frac{5}{2}$ است.

۲۶۵۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - a + 3) = a - a + 3 = 3$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 2 \end{aligned}$$

بنابراین تابع f به ازای هیچ مقدار a ، در نقطه $x = 1$ پیوسته نیست.

۲۶۴۸- گزینه ۳ اگر $|x+1| \leq 7$ ، آن گاه $-7 \leq x+1 \leq 7$ ، یعنی

$-8 \leq x \leq 6$. اگر $-8 \leq x \leq 6$ ، آن گاه عبارت مورد نظر برابر است با $A = x^2 - 4x$ که حدود آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$A = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$$

بنابراین

$$-4 \leq A \leq 12 \Rightarrow -4 \leq (x-2)^2 - 4 \leq 12 \Rightarrow 0 \leq (x-2)^2 \leq 16 \Rightarrow -4 \leq x \leq 8$$

اگر $-8 \leq x \leq 0$ ، آن گاه عبارت مورد نظر برابر است با $A = -x^2 - 4x$ که حدود آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$A = -x^2 - 4x = -(x+2)^2 + 4$$

$$-8 \leq x \leq 0 \Rightarrow -6 \leq x+2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq (x+2)^2 \leq 36$$

$$-36 \leq -(x+2)^2 \leq 0 \Rightarrow -32 \leq A \leq 4$$

پس بیشترین مقدار A برابر ۱۲ و کمترین مقدار آن برابر -۳۲ است و مجموع این دو مقدار برابر -۲۰ است.

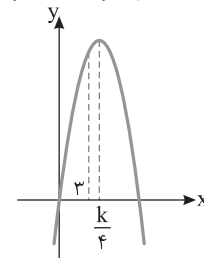
۲۶۴۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x^2-4)+(3ax+6a)}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)+3a(x+2)}{x+2} \\ &= \frac{(x+2)(x-2+3a)}{x+2} = x+3a-2, \quad x \neq -2 \end{aligned}$$

برای اینکه تابع همانی باشد، باید $f(x) = x$ ، پس $3a-2=0$ و در نتیجه

$$a = \frac{2}{3}. \text{ بنابراین } f(3a) = 3a = 2$$

۲۶۵۰- گزینه ۳ نمودار تابع $y = -2x^2 + kx$ به شکل زیر است. اگر



$x = 3$ قبل از طول رأس سهمی قرار گیرد یا بر آن منطبق شود، تابع یک‌به‌یک است. بنابراین

$$k \geq 12 \text{ پس } \frac{k}{4} \geq 3$$

۲۶۵۱- گزینه ۳ می‌توان نوشت

$$\frac{2-x}{2} - 1 \Rightarrow y+1 = \frac{2-x}{2}$$

$$\log_3(y+1) = \frac{2-x}{2} \Rightarrow x = 2 - 2 \log_3(y+1)$$

$$= \log_3 3^2 - \log_3 (y+1)^2 = \log_3 \left(\frac{3}{y+1} \right)^2$$

$$f^{-1}(x) = \log_3 \left(\frac{3}{x+1} \right)^2 \text{ بنابراین}$$

۲۶۵۲- گزینه ۲ از طرفین معادله در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log 2^{x+1} = \log 5^{x-1} \Rightarrow (x+1) \log 2 = (x-1) \log 5$$

$$x \log 2 - x \log 5 = -\log 2 - \log 5$$

$$x(\log 2 - \log 5) = -(\log 2 + \log 5) = -\log 10 = -1$$

از طرف دیگر $\log 5 = \log \frac{1}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$ پس

$$x(\log 2 - 1 + \log 2) = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{2 \log 2 - 1} = \frac{-1}{\log 4 - 1} = \frac{1}{1 - \log 4}$$

۲۶۶۲- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$A = \sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{4}{3}} = 2^{\frac{2}{5} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3}} = 2^{\frac{32}{45}} = 2^{\frac{4}{9}}$$

$$(2A)^{-\frac{1}{3}} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2^0/5}$$

بنابراین

۲۶۶۳- گزینه ۶ ابتدا توجه کنید که معادله

$$(2m-1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$$

به ازای $m = \frac{1}{2}$ درجه دوم نیست و به صورت $6x - \frac{3}{2} = 0$ درمی آید که تنها

جواب آن $\frac{1}{4}$ است. چون $\frac{1}{4}$ در هر چهار گزینه وجود دارد، پس هیچ کدام از

گزینه‌ها جواب نیستند ولی منظور طراح سؤال حالتی بوده که دلتای معادله مثبت است. در این صورت

$$\Delta = 36 - 4(2m-1)(m-2) > 0 \Rightarrow (m+1)(2m-7) < 0 \Rightarrow -1 < m < \frac{7}{2}$$

یعنی منظور طراح، گزینه (۳) بوده است.

۲۶۶۴- گزینه ۱ راه حل اول اگر نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را سه

واحد به طرف x های مثبت سپس دو واحد به طرف y های منفی انتقال

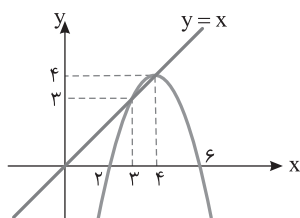
دهیم، نمودار تابع $y = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5 - 2$ به دست می آید.

ساده شده ضابطه این تابع به صورت $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ است. بنابراین

می خواهیم بازه ای را معین کنیم که در آن بازه نمودار تابع f بالای خط $y = x$

قرار دارد. به نمودار این تابع و خط $y = x$ توجه کنید. در بازه $(3, 4)$ نمودار

تابع f بالای این خط قرار دارد.



راه حل دوم برای اینکه بدانیم در چه بازه ای نمودار تابع f بالای خط $y = x$

قرار دارد، کافی است نامعادله $f(x) > x$ را حل کنیم:

$$-x^2 + 8x - 12 > x \Rightarrow -x^2 - 7x + 12 < 0$$

$$(x-3)(x-4) < 0 \Rightarrow 3 < x < 4$$

راه حل سوم در تابع $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ مقادیر $f(3)$ و $f(4)$ را به

دست می آوریم: $f(3) = -9 + 24 - 12 = 3$, $f(4) = -16 + 32 - 12 = 4$

بنابراین در نقاط $x = 3$ و $x = 4$ نمودار تابع f بالای خط $y = x$ قرار ندارد،

بلکه منطبق بر این خط است. پس گزینه های (۲)، (۳) و (۴) که شامل عدد ۳

یا ۴ هستند، جواب نیستند و گزینه (۱) جواب است.

۲۶۶۵- گزینه ۲ مجموع اعداد طبیعی دو رقمی مضرب هفت به صورت

$S = 14 + 21 + \dots + 98$ است. به راحتی می توانید این اعداد را جمع بزنید و به

عدد ۷۲۸ برسید. البته می توانید از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی

استفاده کنید. در این مجموع جمله اول برابر ۱۴، جمله آخر برابر ۹۸ و تعداد

$$S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{13}{2}(14 + 98) = 728 \text{ پس } 13 \text{ جملات برابر } 13 \text{ است.}$$

۲۶۵۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $g'(x) = 1 + 3x^2 f'(x^3)$

$$\text{بنابراین } g'(2) = 1 + 3 \times 4 f'(8) = 1 + 12 \times 2 = 25$$

۲۶۵۷- گزینه ۱ در $x = 0$ تابع مشتق دارد، زیرا

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} = 0$$

اگر $x \neq 0$ ، آن گاه مشتق تابع به صورت $f'(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{x}{3\sqrt[3]{x^2}}$ محاسبه می شود.

بنابراین مشتق تابع به ازای هر x حقیقی تعریف می شود و در نتیجه $D_f = \mathbb{R}$.

۲۶۵۸- گزینه ۴ طول نقطه عطف تابع f جواب معادله $f''(x) = 0$ است.

به شرطی که f'' در اطراف آن تغییر علامت دهد. توجه کنید که

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 6x + 2a$$

$$f''(-2) = 0 \Rightarrow -12 + 2a = 0 \Rightarrow a = 6$$

چون $x = 1$ طول نقطه اکسترم نسبی تابع f است، پس $f'(1) = 0$ ، در نتیجه

$$3 + 12 + b = 0 \Rightarrow b = -15$$

به این ترتیب $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 2$ و مقدار اکسترم نسبی مورد نظر

$$\text{برابر است با } f(1) = -6$$

۲۶۵۹- گزینه ۲ نقاط اکسترم نسبی تابع f را پیدا می کنیم و با توجه به

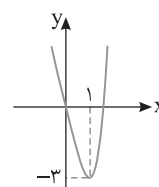
اینکه نمودار تابع f از مبدأ می گذرد، این نمودار را رسم می کنیم.

$$f'(x) = 4x^3 - 4, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-
f	$\searrow$	$\swarrow$	$\nearrow$

min

پس برد تابع f بازه $[-3, +\infty)$ است.



۲۶۶۰- گزینه ۱ طبق نمودار $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ، پس گزینه های (۲) و (۴)

رد می شوند. همچنین طبق نمودار، تابع یک ریشه ساده ($x = 0$) و یک ریشه

مکرر دارد، پس گزینه (۳) نیز رد می شود (تابع گزینه (۳) دو ریشه ساده $x = 0$

و $x = 1$ را دارد).

۲۶۶۱- گزینه ۴ اگر گروه ورزش را با A و گروه روزنامه دیواری را با B

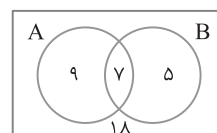
نمایش دهیم، آن گاه $n(A) = 16$ ، $n(B) = 12$ و $n(A - B) = 9$ ، بنابراین

$$n(A \cap B) = n(A) - n(A - B) = 16 - 9 = 7$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 16 + 12 - 7 = 21$$

بنابراین $39 - 21 = 18$ نفر عضو هیچ یک از دو گروه نیستند. نمودار زیر تعداد

افراد هر گروه را نشان می دهد.



۲۶۷۰- گزینه ۳ راه حل اول

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin a \cos x + \cos a \sin x - \sin a}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin a (\cos x - 1)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos a \sin x}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin a \sin^2 \frac{x}{2}}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos a \sin x}{x} \\
 &= -\sin a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} + \cos a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \\
 &= -\sin a \times 0 + \cos a \times 1 = \cos a
 \end{aligned}$$

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin a \cos x + \cos a \sin x - \sin a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+a) - \sin a}{x}$$

اکنون اگر فرض کنیم $f(x) = \sin x$ ، مقدار حد فوق برابر مقدار مشتق تابع f در نقطه $x=a$ یعنی $\cos a$ است.

راه حل سوم اگر قرار دهیم $a=0$ ، حد مورد نظر به صورت زیر در می آید

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 0 \cos x + \cos 0 \sin x - \sin 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

اکنون در گزینه‌ها $a=0$ را قرار می‌دهیم و فقط گزینه (۳) به صورت $\cos 0 = 1$ در می‌آید.

راه حل چهارم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin a \cos x + \cos a \sin x - \sin a}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin a \sin x + \cos a \cos x - 0}{1} = \cos a
 \end{aligned}$$

۲۶۷۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(2) = 2a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax - 1) = 2a - 1$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x - 6}{x - \sqrt{x+2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})}
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{x^2 - x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x+\sqrt{x+2})}{x+1} = \frac{3(2+2)}{2+1} = 4$$

بنابراین برای اینکه تابع f در $x=2$ پیوسته باشد باید تساوی $2a-1=4$ برقرار

باشد که نتیجه می‌شود $a = \frac{5}{2}$. توجه کنید که حد راست تابع را می‌توانید به

کمک قاعده هوییتال نیز به دست آورید:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x - 6}{x - \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}} = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = 4$$

۲۶۶۶- گزینه ۴ فرض کنید بهروز به تنهایی در t ساعت این کار را انجام

می‌دهد. بنابراین فرهاد در $t+9$ ساعت این کار را انجام می‌دهد. پس بهروز در

هر ساعت $\frac{1}{t}$ از این کار و فرهاد در هر ساعت $\frac{1}{t+9}$ از این کار را انجام

می‌دهند. اگر هر دو با هم کار کنند، در هر ساعت به مقدار $\frac{1}{t} + \frac{1}{t+9}$ از این کار

را انجام می‌دهند. چون با هم در ۲۰ ساعت کار را تمام می‌کنند، پس در یک

ساعت $\frac{1}{20}$ کار را با هم انجام می‌دهند. بنابراین

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow 20(t+9) + 20t = t(t+9) \Rightarrow t^2 - 31t - 180 = 0$$

$$(t-36)(t+5) = 0 \Rightarrow t = 36, t = -5 \text{ (غ.ق.)}$$

۲۶۶۷- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (4, 3), (6, 4)\}$$

بنابراین

$$(g \circ f^{-1})(2) = g(1) = 3 \text{، تعریف نشده، } (g \circ f^{-1})(5) = g(2) = 3$$

$$(g \circ f^{-1})(4) = g(3) = 1, \quad (g \circ f^{-1})(6) = g(4) = 2$$

بنابراین $D_{g \circ f^{-1}} = \{5, 4, 6\}$ ، در نتیجه

$$D_{\frac{g}{g \circ f^{-1}}} = D_g \cap D_{g \circ f^{-1}} - \{x | (g \circ f^{-1})(x) = 0\} = \{4, 5\}$$

در توابع داده شده در گزینه‌ها فقط تابع گزینه (۱) دامنه‌اش $\{4, 5\}$ است.

۲۶۶۸- گزینه ۴ توجه کنید که اگر $g(x) = x^2 - x$ ، آن‌گاه $g(1) = 0$ و

$$g(2) = 2$$

$$f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{Ax+B}, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 2$$

بنابراین

$$f(1) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{A+B} = 0 \Rightarrow 2^{-A-B} = 2$$

$$-A-B=1 \Rightarrow A+B=-1$$

$$f(2) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B} = 2 \Rightarrow 2^{-2A-B} = 4$$

$$-2A-B=2 \Rightarrow 2A+B=-2$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} A+B=-1 \\ 2A+B=-2 \end{cases}$ نتیجه می‌شود $A=-1$ و $B=0$. در نتیجه

$$f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} \Rightarrow f(3) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 6$$

۲۶۶۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan \frac{11\pi}{4} = \tan \left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin \frac{15\pi}{4} = \sin \left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{13\pi}{4} = \cos \left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین

$$\tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4} = -1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

۲۶۷۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطه $x=2$ علامت عبارت x^2-2x منفی است، بنابراین $|x^2-2x|=2x-x^2$ در

واقع تابع f به صورت زیر است

$$f'(x) = \begin{cases} x^2-2x & x \leq 0 \\ 2x-2 & 0 < x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2+ax+b & x \geq 2 \end{cases}$$

چون تابع f در نقطه $x=2$ مشتق پذیر است، پس $f'_+(2)=f'_-(2)$ ، بنابراین $2+a=2-4 \Rightarrow a=-4$

از طرف دیگر تابع f در نقطه $x=2$ پیوسته است، پس

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

$$2+2a+b=4-4 \Rightarrow b=-2a-2=6$$

بنابراین

$$a+b=2$$

در نتیجه

۲۶۷۷- گزینه ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[0, 2]$ برابر است با

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{12-2}{2} = 5$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=\frac{3}{4}$ برابر است با $f'(\frac{3}{4})$:

$$f'(x) = \sqrt{4x+1} + \frac{4(x+2)}{2\sqrt{4x+1}} \Rightarrow f'(\frac{3}{4}) = 2 + \frac{11}{4} = \frac{19}{4}$$

بنابراین آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[0, 2]$ از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\frac{3}{4}$ به اندازه $\frac{1}{4}$ بیشتر است.

۲۶۷۸- گزینه ۱ با توجه به نمودار تابع f ، در نقطه $x=1$ جهت تقعر نمودار

تغییر می‌کند و خط مماس بر نمودار افقی است، بنابراین $f'(1)=f''(1)=0$ ، پس

$$f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx, \quad f'(x) = 12x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 36x^2 + 6ax + 2b, \quad f'(1) = 0 \Rightarrow 12 + 3a + 2b + c = 0$$

$$f''(1) = 0 \Rightarrow 36 + 6a + 2b = 0$$

چون طبق نمودار، $f'(0)=0$ ، پس $f'(0)=0$ ، بنابراین از حل دستگاه معادلات به دست آمده نتیجه می‌شود $a=-8$ و $b=6$.

۲۶۷۹- گزینه ۳ خط $x=1$ مجانب قائم نمودار تابع f است. اکنون توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2+2x)}{(x-1)^4}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(x-1)(x^2-1-x^2-2x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, x=1 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

بنابراین $x = -\frac{1}{2}$ طول تنها نقطه بحرانی تابع f است:

$$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

بنابراین مینیمم مطلق تابع f روی هر دو بازه $(-\infty, 1)$ و $(1, +\infty)$ برابر $-\frac{1}{3}$ است.

فاصله نقطه $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$ از مجانب قائم نمودار تابع f برابر $\frac{3}{4}$ است.

۲۶۷۲- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x) = 1 + \frac{a}{2} \sin 2bx$ ، بنابراین

دوره تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|2b|}$ و حداکثر مقدار تابع برابر $1 + \frac{a}{2}$ است. با توجه

به نمودار تابع f دوره تناوب برابر $\frac{3\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \pi$ و حداکثر مقدار تابع برابر $\frac{3}{2}$ است، بنابراین

$$\frac{2\pi}{|2b|} = \pi \Rightarrow |b| = 1, \quad 1 + \frac{a}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 1$$

با توجه به اینکه نمودار تابع f در اطراف نقطه $x=0$ صعودی است، مقادیر a و b هم علامت‌اند. بنابراین $a=1$ و $b=1$ یا $a=-1$ و $b=-1$ ، پس $a+b$ می‌تواند برابر ۲ یا -۲ باشد که فقط حالت $a+b=2$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۲۶۷۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که مطابق اتحاد چاق و لاغر $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x)$

$$= (\sin x + \cos x)(1 - \frac{1}{2} \sin 2x)$$

بنابراین معادله مورد نظر به صورت زیر است:

$$(\sin x + \cos x)(1 - \frac{1}{2} \sin 2x) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$(\sin x + \cos x - 1)(1 - \frac{1}{2} \sin 2x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos x - 1 = 0 \\ 1 - \frac{1}{2} \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 2 \text{ (غ.ق.ق.)} \end{cases}$$

معادله $\sin x + \cos x - 1 = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ جواب‌های $x=0$ و $x=\frac{\pi}{2}$ را دارد که مجموع آن‌ها برابر $\frac{5\pi}{2}$ است.

۲۶۷۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 2} (2x-5) = -1$ ، بنابراین اولاً

باید $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2+ax+b)$ برابر صفر باشد ثانیاً باید علامت عبارت

x^2+ax+b در یک همسایگی نقطه $x=2$ مثبت باشد. پس x^2+ax+b باید برابر $(x-2)^2$ باشد، در نتیجه

$$x^2+ax+b = x^2-4x+4 \Rightarrow a=-4, b=4$$

پس $a+b=0$.

۲۶۷۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$g(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} g(1) = 2 \\ g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow g'(1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{4}{3} \Rightarrow f'(2) = \frac{4}{3}$$

بنابراین

$$(f \circ g)'(1) = g'(1)f'(g(1)) = g'(1)f'(2) = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$$

۲۶۸۰- گزینه ۱ بازه $(x+1, 2x-1)$ یک همسایگی عدد ۳ است.

بنابراین بایستی $x+1 < 3 < 2x-1$. مجموعه جواب‌های نامعادله‌های $x+1 < 3$ و $3 < 2x-1$ را به دست می‌آوریم:

$$x+1 < 3 \Rightarrow x < 2 \quad (1)$$

$$3 < 2x-1 \Rightarrow x > 2 \quad (2)$$

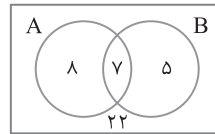
اشتراک مجموعه جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) برابر تهی است.

۲۶۸۱- گزینه ۴ اگر گروه آزمایشگاهی را A و گروه فوتبال را B بنامیم.

آن‌گاه $n(A)=15$, $n(B)=12$, $n(A \cap B)=7$. بنابراین

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 15 + 12 - 7 = 20$$

بنابراین $20 - 2 = 18$ نفر عضو هیچ یک از دو گروه نیستند. نمودار زیر تعداد افراد هر گروه را نشان می‌دهد.



۲۶۸۲- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A = \sqrt[5]{9\sqrt{3}}(12)^{-1/5} = 3^{2/5} \times 3^{1/5} \times 3^{-3/5} = 3^{-1} \times 3^{-3} = \frac{1}{24}$$

$$\text{بنابراین } (1+A^{-1})^{1/2} = (1+24)^{1/2} = \sqrt{25} = 5$$

۲۶۸۳- گزینه ۲ برای اینکه سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ همواره

پایین محور X قرار بگیرد، باید $a < 0$ و $b^2 - 4ac < 0$. بنابراین در سهمی به معادله $y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$ باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$1-m < 0 \Rightarrow m > 1, \quad 4(m-3)^2 + 4(1-m) < 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0$$

$$(m-2)(m-5) < 0 \Rightarrow 2 < m < 5$$

بنابراین اگر $2 < m < 5$ ، آن‌گاه سهمی مورد نظر همواره پایین محور X قرار دارد.

۲۶۸۴- گزینه ۱ اگر نمودار تابع $y = x^2 - x - 3$ را دو واحد به طرف

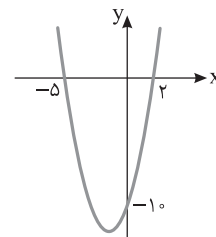
X های منفی سپس ۲ واحد به طرف Y های منفی انتقال دهیم، نمودار تابع

$f(x) = (x+2)^2 - (x+2) - 3 - 9$ به دست می‌آید. ساده شده ضابطه تابع f

به صورت $f(x) = x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$ است. نمودار تابع f به

صورت زیر است و واضح است که در بازه $(-5, 2)$ نمودار تابع f زیر محور X ها

قرار دارد. توجه کنید که اگر نمودار تابع f زیر محور X ها قرار داشته باشد، آن‌گاه $f(x) < 0$. بنابراین $(x+5)(x-2) < 0 \Rightarrow -5 < x < 2$



۲۶۸۵- گزینه ۱ مجموع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \dots + \frac{1}{17 \times 20}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{17} - \frac{1}{20} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{20} \right) = \frac{3}{20} = 0.15$$

۲۶۸۶- گزینه ۲ اگر $x \geq \frac{1}{3}$ ، آن‌گاه معادله به صورت $2x - 1 + x + 2 = 3$

در می‌آید که جواب آن $x = \frac{2}{3}$ است. اگر $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ ، آن‌گاه معادله به

صورت $-2x + 1 + x + 2 = 3$ در می‌آید که $x = 0$ جواب آن است. اگر

$x \leq -\frac{1}{3}$ ، آن‌گاه معادله به صورت $-2x + 1 - x - 2 = 3$ در می‌آید که

$x = -\frac{4}{3}$ جواب آن است ولی قابل قبول نیست. بنابراین جواب‌های معادله

$$x = -\frac{4}{3} \text{ و } x = \frac{2}{3} \text{ هستند که مجموع آن‌ها برابر } \frac{2}{3} \text{ است.}$$

۲۶۸۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$g^{-1} = \{(3, 2), (2, 4), (6, 5), (1, 3)\}$$

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$$

بنابراین

$$g^{-1} \circ f = \{(1, 4), (4, 5)\} \Rightarrow (g^{-1} \circ f) - f = \{(1, 2), (4, -1)\}$$

بنابراین برد تابع $(g^{-1} \circ f) - f$ مجموعه $\{2, -1\}$ است.

۲۶۸۸- گزینه ۳ نمودار تابع $f(x) = 3^{Ax+B}$ نمودار تابع $y = x^2$ را در

دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند. پس نمودار تابع f از نقاط $(1, 1)$ و

$(3, 9)$ عبور می‌کند.

بنابراین

$$f(1) = 1 \Rightarrow 3^{A+B} = 1 \Rightarrow A+B = 0$$

$$f(3) = 9 \Rightarrow 3^{3A+B} = 9 \Rightarrow 3A+B = 2$$

از حل دستگاه معادلات بالا نتیجه می‌شود $A=1$ و $B=-1$ و در نتیجه

$f(x) = 3^{x-1}$. پس عرض نقطه تلاقی نمودار تابع f با محور Y ها برابر

$$\frac{1}{3} \text{ است.}$$

۲۶۸۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan \frac{17\pi}{6} = \tan(3\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin \frac{11\pi}{3} = \sin(4\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{10\pi}{3} = \cos(3\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین

$$\tan \frac{17\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{3} + \cos \frac{10\pi}{3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{3}{6} - \frac{1}{2} = 0$$

۲۶۹۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که در یک همسایگی راست $x=1$ تابع

$y = [x]$ با تابع $y = 1$ برابر است. پس

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \cos^2 \pi x}{1 + \cos \pi x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - \cos \pi x)(1 + \cos \pi x)}{1 + \cos \pi x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - \cos \pi x) = 1 - \cos \pi = 2$$

۲۶۹۵- گزینه ۴ خط $y=3x-5$ در نقطه $(2,1)$ بر نمودار تابع y

مماس است. پس $g(2)=1$ و $g'(2)=3$. از طرف دیگر،

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{2x-2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2} f'(1) = \frac{2}{3} \Rightarrow f'(1) = \frac{4}{3}$$

بنابراین

$$(fog)'(2) = g'(2)f'(g(2)) = g'(2)f'(1) = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

۲۶۹۶- گزینه ۳ راه حل اول تابع f در $x=0$ تعریف نشده پس در این

نقطه مشتق پذیر نیست. عبارت x^3-2x در ضابطه f داخل قدرمطلق قرار

دارد و این عبارت در $x=0$ و $x=\pm\sqrt{2}$ برابر صفر می شود و در نتیجه تابع f

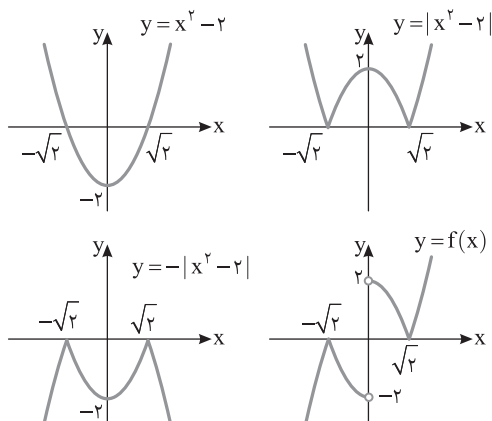
در این نقاط مشتق پذیر نیست. بنابراین در سه نقطه تابع f مشتق ندارد.

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{|x^3-2x|}{x} = \frac{|x||x^2-2|}{x} = \begin{cases} |x^2-2| & x > 0 \\ -|x^2-2| & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است. واضح است که در $x=\sqrt{2}$ ، $x=0$ ،

و $x=-\sqrt{2}$ تابع f مشتق پذیر نیست.



۲۶۹۷- گزینه ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[0,4]$ برابر است با

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{(3+\frac{1}{4})-(1+1)}{4} = \frac{3}{10}$$

آهنگ تغییر لحظه ای تابع f در $x=\frac{3}{2}$ برابر $f'(\frac{3}{2})$ است:

$$f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f'(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = \frac{17}{50}$$

بنابراین اختلاف $\frac{3}{10}$ و $\frac{17}{50}$ مورد سؤال است که برابر 4% است.

۲۶۹۱- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(1)=a+b, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax+b) = a+b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x[x] = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0$$

تابع f در $x=1$ پیوسته است، پس $a+b=0$. از طرف دیگر

$$f(-1)=-a+b, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (ax+b) = -a+b$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x[x] = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (-x) = 1$$

تابع f در $x=-1$ پیوسته است، پس $-a+b=1$. از حل دستگاه معادلات

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -a+b=1 \end{cases} \quad \text{نتیجه می شود} \quad a=-\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad b=\frac{1}{2}$$

۲۶۹۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید

$$f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$$

$$= \frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)} - \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{\sin^2(\pi x) - \cos^2(\pi x)}{\sin(\pi x) \cos(\pi x)}$$

$$= \frac{-\cos(2\pi x)}{\frac{1}{2} \sin(2\pi x)} = -2 \cot(2\pi x) = -2 \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi x\right)$$

پس دوره تناوب تابع برابر $\frac{1}{2}$ است.

۲۶۹۳- گزینه ۴ معادله را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \pm 1$$

بنابراین جواب های معادله به صورت زیر هستند

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ عبارتند از $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$

که مجموع آنها برابر 4π است.

۲۶۹۴- گزینه ۱ خط $y=2$ مجانب افقی نمودار تابع f است. زیرا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

از طرف دیگر،

$$f(x) = \frac{2x^2-x-2}{x^2+2x} = 2 - \frac{5x+2}{(x+1)^2-1}$$

اگر $x \rightarrow +\infty$ ، آن گاه علامت عبارت $\frac{5x+2}{(x+1)^2-1}$ مثبت است و در نتیجه

$f(x) < 2$. اگر $x \rightarrow -\infty$ ، آن گاه علامت عبارت $\frac{5x+2}{(x+1)^2-1}$ منفی است و

در نتیجه $f(x) > 2$. بنابراین نمودار تابع f در $+\infty$ پایین مجانب افقی آن و در $-\infty$ بالای مجانب افقی آن قرار دارد.

۲۶۹۸- گزینه ۴

با توجه به نمودار تابع f معلوم است که این تابع فقط در $x=3$ اکسترمم نسبی دارد. از طرف دیگر،

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx = x(4x^2 + 3ax + 2b)$$

علامت $f'(x)$ در $x=0$ نباید تغییر کند و فقط در $x=3$ باید تغییر کند.

بنابراین باید $b=0$ و

$$f'(x) = x(4x^2 + 3ax) = x^3(4x + 3a)$$

$$f'(3) = 0 \Rightarrow a = -4$$

بنابراین

$$f(x) = x^4 - 4x^3 \Rightarrow f(-2) = 48$$

۲۶۹۹- گزینه ۳ خط $y = -1$ مجانب افقی نمودار تابع f است. زیرا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

اکنون نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f را معین می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{2x - x^2}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2-2x)(x+1)^2 - 2(x+1)(2x-x^2)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(x+1)(1-x^2 - 2x + x^2) = 0$$

$$x = \frac{1}{2}, x = -1 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

بنابراین $x = \frac{1}{2}$ طول تنها نقطهٔ بحرانی تابع f است. پس باید طول نقطهٔ

ماکزیمم نسبی تابع هم باشد. فاصلهٔ نقطهٔ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ از خط $y = -1$ مورد سؤال

است که برابر $\frac{4}{3}$ است.

۲۷۰۰- گزینه ۴ ابتدا دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}$ را به دست می‌آوریم:

$$x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1, 9-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$D_f = [-3, 1) \cup (1, 3]$$

برای این که بازهٔ $(k-2, 3k+2)$ زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع f باشد یا باید زیرمجموعهٔ $[-3, 1)$ باشد یا باید زیرمجموعهٔ $(1, 3]$ باشد. پس دو حالت زیر

را در نظر می‌گیریم:

حالت اول $(k-2, 3k+2) \subseteq [-3, 1)$. در این حالت باید $k-2 \geq -3$ و

$$3k+2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq k \leq -\frac{1}{3}$$

حالت دوم $(k-2, 3k+2) \subseteq (1, 3]$. در این حالت باید $k-2 \geq 1$ و

$3k+2 \leq 3$ که ممکن نیست. بنابراین $k \in [-1, -\frac{1}{3}]$ که در گزینهٔ (۴) بازهٔ

$[-1, -\frac{1}{3}]$ آمده است.

۲۷۰۱- گزینه ۴

ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{1+\tan^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|} = \frac{1}{-\cos x} \quad (\pi < x < \frac{3\pi}{2})$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

به این ترتیب،

$$\sqrt{1+\tan^2 x} (2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x) = -\frac{1}{\cos x} (2 \times \frac{1}{2} - \sin^2 x)$$

$$= -\frac{1}{\cos x} (1 - \sin^2 x) = -\frac{1}{\cos x} \times \cos^2 x = -\cos x$$

۲۷۰۲- گزینه ۳ فرض کنید سرعت آب برابر v باشد. در این صورت،

سرعت قایق موتوری در جهت حرکت آب $100+v$ و در جهت مخالف حرکت

آب برابر $100-v$ است. در نتیجه

$$\frac{1200}{100-v} - \frac{1200}{100+v} = 5 \Rightarrow \frac{2400}{100-v} - \frac{2400}{100+v} = 1$$

$$2400 \left(\frac{1}{100-v} - \frac{1}{100+v} \right) = 1 \Rightarrow 2400 \left(\frac{2v}{100^2 - v^2} \right) = 1$$

$$100^2 - v^2 = 4800v \Rightarrow v^2 + 4800v - 100^2 = 0$$

$$(v-20)(v+5000) = 0 \Rightarrow v = 20$$

۲۷۰۳- گزینه ۱

راه حل اول توجه کنید که

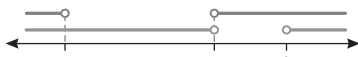
$$\frac{2x-3}{x+1} > 1 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x+1} > 0 \Rightarrow x > 4 \text{ یا } x < -1 \quad (1)$$

$$\frac{2x-3}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{-x-6}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{x+6}{x+1} > 0$$

$$x < -6 \text{ یا } x > -1 \quad (2)$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر اشتراک جواب‌های (۱) و (۲) است که

از روی شکل زیر معلوم می‌شود برابر $\mathbb{R} - [-6, 4]$ است.



راه حل دوم اعداد ۵ و -۷ در نامعادله صدق می‌کنند:

$$1 < \frac{2 \times 5 - 3}{5 + 1} = \frac{7}{6} < 3, \quad 1 < \frac{2 \times (-7) - 3}{-7 + 1} = \frac{17}{6} < 3$$

بنابراین گزینه (۱) جواب نامعادله است.

۲۷۰۴- گزینه ۴

توجه کنید که

$$3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 \Rightarrow \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a \Rightarrow 2a^2 + 4a = 4 - 12a + 9a^2$$

$$7a^2 - 16a + 4 = 0 \Rightarrow (7a-2)(a-2) = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{7}, a = 2$$

توجه کنید که اگر $a=2$ ، تساوی مورد نظر درست نیست (سمت چپ بیشتر

از ۲ است). بنابراین $a = \frac{2}{7}$. در نتیجه $\frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{7}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$.

۲۷۰۵- گزینه ۳

ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{17\pi}{3}) = \sin(\frac{17\pi}{3} - 4\pi) = \sin(\frac{5\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-\frac{17\pi}{6}) = \cos(\frac{17\pi}{6}) = \cos(2\pi + \frac{5\pi}{6}) = \cos(\frac{5\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(\frac{19\pi}{4}) = \tan(\frac{19\pi}{4} - 4\pi) = \tan(\frac{3\pi}{4}) = -\tan(\frac{\pi}{4}) = -1$$

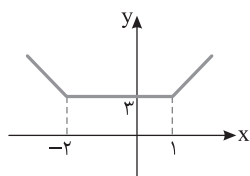
$$\sin(-\frac{11\pi}{6}) = -\sin(\frac{11\pi}{6}) = -\sin(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -(-\sin(\frac{\pi}{6})) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{1}{4}(-\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + (-1)(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.

۲۷۰۹- گزینه ۱ برای اینکه تابع f در نقطه $x = -2$ فقط از چپ پیوسته باشد، باید $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = f(-2)$ و $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) \neq f(-2)$ اکنون توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{\lambda + x^3}{|x+2|} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(2+x)(4-2x+x^2)}{-(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (-(4-2x+x^2)) = -(4-2(-2)+(-2)^2) = -12 \\ \text{چون } f(-2) &= a, \text{ پس باید } a = -12. \end{aligned}$$

توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 12$ و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) \neq f(-2)$.



۲۷۱۰- گزینه ۱ نمودار تابع f به صورت روبه‌رو است. از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازه $(-\infty, -2)$ اکیداً نزولی است.

۲۷۱۱- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x$

بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$4 \sin x (-\cos x) = 1 \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{4} = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله و جواب‌های درون بازه $[0, 2\pi]$ به صورت زیر هستند:

$$2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0 \leq k\pi - \frac{\pi}{12} \leq 2\pi$$

$$\frac{1}{12} \leq k \leq 2 + \frac{1}{12} \Rightarrow k = 1, 2$$

$$x = \pi - \frac{\pi}{12}, x = 2\pi - \frac{\pi}{12} \quad (1)$$

$$2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0 \leq k\pi + \frac{7\pi}{12} \leq 2\pi$$

$$-\frac{7}{12} \leq k < 2 - \frac{7}{12} \Rightarrow k = 0, 1$$

$$x = \frac{7\pi}{12}, x = \pi + \frac{7\pi}{12} \quad (2)$$

$$\text{مجموع جواب‌های (۱) و (۲) برابر است با } 4\pi + \frac{14\pi - 2\pi}{12} = 5\pi$$

۲۷۱۲- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$x^2 + 10x + 16 = (x+2)(x+8)$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+2)(x+8)}{2 + \sqrt[3]{x}}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -8} \left(\frac{(x+2)(x+8)}{2 + \sqrt[3]{x}} \times \frac{4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+2)(x+8)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{2^3 + \sqrt[3]{x^3}}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+2)(x+8)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{\lambda + x}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow -8} ((x+2)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}))$$

$$= \frac{1}{6} (-8+2)(4 - 2(-2) + 2^2) = -12$$

۲۷۰۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که نمودار تابع مورد نظر از روی نمودار

تابع $y = \sin x$ با تبدیلات به دست آمده است. چون نمودار تابع مورد نظر و نمودار تابع سینوس در یک همسایگی راست نقطه صفر بالای محور x هستند،

پس مقدار b مثبت است. بنابراین بیشترین مقدار تابع $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$

برابر $a + b$ است. از روی نمودار معلوم است که این بیشترین مقدار برابر

$\sqrt{3}$ است، پس $a + b = \sqrt{3}$. از طرف دیگر، چون نقطه $(\pi, -\frac{3}{2})$ روی

نمودار تابع مورد نظر است. پس

$$y = a + b \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a - b(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{3}{2}$$

بنابراین

$$\begin{cases} a + b = \sqrt{3} \\ a - \frac{\sqrt{3}}{2}b = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow b + b\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + \frac{3}{2}$$

$$b(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3}(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow b = \sqrt{3}$$

۲۷۰۷- گزینه ۱ توجه کنید که

$$(\frac{1}{4})^{2x-1} = (\frac{125}{8})^{x^2} \Rightarrow (\frac{1}{4})^{2x-1} = ((\frac{5}{2})^3)^{x^2} \Rightarrow (\frac{1}{4})^{2x-1} = (\frac{5}{2})^{-3x^2}$$

بنابراین

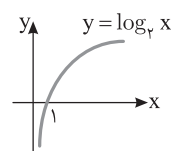
$$2x-1 = -3x^2 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow (3x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}, x = -1$$

به ازای $x = -1$ مقدار $9x+1$ منفی می‌شود که لگاریتم آن در مبنای ۸

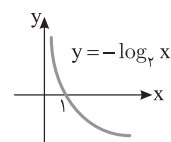
تعریف نمی‌شود. بنابراین $x = \frac{1}{3}$ و

$$\log_8(9x+1) = \log_8(3+1) = \log_8 4 = \log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3} \log_2 2 = \frac{2}{3}$$

۲۷۰۸- گزینه ۲ نمودار تابع $y = \log_p x$ به صورت زیر است:

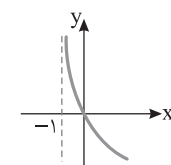


بنابراین نمودار تابع $y = -\log_p x$ به صورت زیر است:



اگر این نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم به نمودار تابع

$y = -\log_p(x+1)$ می‌رسیم که همان نمودار داده شده است:



توجه کنید که $y = -\log_p(x+1) = \log_p(x+1)^{-1}$ ، بنابراین

$$U(x) = (x+1)^{-1}$$

راه حل دوم با استفاده از قاعده هوییتال به دست می‌آید

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 10}{6 \times \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{-16 + 10}{6 \times \frac{1}{\sqrt{-2}}} = \frac{-6}{3 \times (-2)^2} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۴ - ۲۷۱۳ چون تابع در هیچ همسایگی چپ نقطه صفر تعریف نشده است، پس درباره حد چپ آن در نقطه صفر نمی‌توان حرف زد. از طرف دیگر،

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x + x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{2x}$$

چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x) = 0$ و در یک همسایگی راست نقطه صفر مقادیر $2x$ مثبت‌اند، پس $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{2x} = -\infty$

گزینه ۳ - ۲۷۱۴ ابتدا توجه کنید که $f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$

طرف دیگر،

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(5 - 2x) - (-2)(1 + \sqrt{x})}{(5 - 2x)^2} \Rightarrow f'(4) = \frac{\frac{1}{2}(-3) + 2(3)}{(-3)^2} = \frac{5}{12}$$

گزینه ۲ - ۲۷۱۵ چون تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، پس روی $\mathbb{R}$ پیوسته است و در نتیجه در $x = 2$ پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + ax + b) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 1}$$

$$-4 + 2a + b = \frac{1}{2 - 1} = 1 \Rightarrow 2a + b = 5$$

همچنین،

$$f'_-(2) = f'_+(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x + a) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{(x - 1)^2} \Rightarrow -4 + a = -1 \Rightarrow a = 3$$

$$b = 5 - 2a = -1$$

بنابراین

گزینه ۱ - ۲۷۱۶ ابتدا توجه کنید که

$$(f \circ g)'(2) = g'(2) \times f'(g(2)) \quad (1)$$

از طرف دیگر،

$$g'(x) = \frac{2(x - 1) - (1)(2x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{-3}{(x - 1)^2} \Rightarrow g'(2) = -3$$

همچنین، $g(2) = 5$. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $f'(5) = -3$. پس $f'(5) = -2$

گزینه ۲ - ۲۷۱۷ توجه کنید که

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{8 - \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{4})}{3} = \frac{11}{4}$$

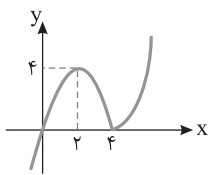
$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} = f'(2)$$

از طرف دیگر، $f'(x) = x + \frac{1}{x^2}$ پس $f'(2) = \frac{9}{4}$. بنابراین اختلاف مورد نظر

$$\frac{11}{4} - \frac{9}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

گزینه ۴ - ۲۷۱۸ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & x \leq 4 \\ x^2 - 4x & x > 4 \end{cases}$$



بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است. از

روی این شکل معلوم می‌شود که $(4, 0)$ نقطه

مینیمم نسبی تابع f و $(2, 4)$ نقطه ماکزیمم

نسبی تابع f است. فاصله این نقطه‌ها برابر

$$\text{است با } \sqrt{(4 - 2)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{2^2 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

گزینه ۳ - ۲۷۱۹ اگر مطابق شکل داده شده، طول یکی از ضلع‌های

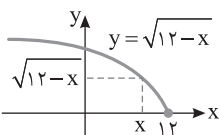
مستطیل برابر x باشد، طول ضلع دیگرش می‌شود $\sqrt{12 - x}$. بنابراین

$$x\sqrt{12 - x} = \text{مساحت مستطیل}$$

در نتیجه، باید بیشترین مقدار تابع $f(x) = x\sqrt{12 - x}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x) = (1)\sqrt{12 - x} + x \left(\frac{-1}{2\sqrt{12 - x}} \right)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{12 - x}(2\sqrt{12 - x}) = x \Rightarrow 2(12 - x) = x \Rightarrow x = 8$$



بنابراین بیشترین مقدار تابع f ، یعنی

بیشترین مقدار مساحت مستطیل مورد نظر

به ازای $x = 8$ به دست می‌آید و برابر است

$$\text{با } 8\sqrt{4} = 16.$$

گزینه ۴ - ۲۷۲۰ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4 \Rightarrow f(x) + 4 = (x - 1)^2$$

$$x = \sqrt{f(x) + 4} + 1$$

بنابراین $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 4} + 1$. در نتیجه طول نقطه تقاطع نمودار تابع‌های

f^{-1} و g جواب معادله زیر است:

$$\sqrt{x + 4} + 1 = \frac{x - 9}{2} \Rightarrow 2\sqrt{x + 4} + 2 = x - 9 \Rightarrow 2\sqrt{x + 4} = x - 11 \quad (1)$$

$$4(x + 4) = x^2 - 22x + 121 \Rightarrow x^2 - 26x + 105 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 21) = 0$$

$$x = 5, x = 21$$

توجه کنید که $x = 5$ جواب نیست، زیرا به ازای $x = 5$ سمت چپ معادله (۱)

مثبت ولی سمت راست آن منفی است. بنابراین $x = 21$.

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که $f(x) = (x - 1)^2 - 4$. طول نقطه برخورد نمودار

تابع‌های f^{-1} و g جواب معادله $f^{-1}(x) = g(x)$ است. اکنون توجه کنید که

$$f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = f(g(x)) \Rightarrow x = f(g(x))$$

$$x = (g(x) - 1)^2 - 4 \Rightarrow x + 4 = (g(x) - 1)^2 \Rightarrow x + 4 = \left(\frac{x - 9}{2} - 1 \right)^2$$

$$4x + 16 = x^2 - 22x + 121 \Rightarrow x^2 - 26x + 105 = 0$$

$$(x - 5)(x - 21) = 0 \Rightarrow x = 5, x = 21$$

اکنون توجه کنید که $R_{f^{-1}} = D_f = [1, +\infty)$. پس مقادیر f^{-1} مثبت‌اند.

اما $g(5) < 0$ ، پس $x = 5$ جواب معادله $f^{-1}(x) = g(x)$ نیست. بنابراین

$$x = 21$$

۲۷۲۵- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $y = a + b \sin x$ از روی نمودار

تابع معلوم می‌شود که b مثبت است، پس بیشترین مقدار تابع برابر $a + b$ است. چون این مقدار برابر ۳ است، پس $a + b = 3$. همچنین، نمودار تابع از

نقطه $(-\frac{5\pi}{6}, 0)$ گذشته است، پس

$$0 = a + b \sin(-\frac{5\pi}{6}) = a + b(-\frac{1}{2}) = a - \frac{b}{2}$$

بنابراین

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ a - \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

بنابراین ضابطه تابع مورد نظر $y = 1 + 2 \sin x$ می‌شود، که مقدار آن به ازای

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ برابر است با } 1 + 2 \sin \frac{\pi}{6} = 2$$

۲۷۲۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که $3^{x^2-2} = 81^x = (3^4)^x = 3^{4x}$

بنابراین

$$x^2 - 2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$x = 2 - \sqrt{6}, x = 2 + \sqrt{6}$$

چون به ازای $x = 2 - \sqrt{6}$ مقدار $x - 2$ منفی می‌شود و $\log_6(x - 2)$ به

ازای آن تعریف نشده است، پس $x = 2 - \sqrt{6}$ قابل قبول نیست. بنابراین

$x = 2 + \sqrt{6}$ و در نتیجه

$$\log_6(x - 2) = \log_6 \sqrt{6} = \frac{1}{2} \log_6 6 = \frac{1}{2}$$

۲۷۲۷- گزینه ۲ چون دامنه تابع بازه $(-\frac{a}{2}, +\infty)$ است و از روی نمودار

تابع معلوم می‌شود که این بازه $(\frac{1}{2}, +\infty)$ است، پس $a = -1$. از طرف دیگر

نمودار تابع از نقطه $(2, 0)$ گذشته است، پس $y(2) = 0$:

$$-1 + \log_b(4 - 1) = 0 \Rightarrow \log_b 3 = 1 \Rightarrow b = 3$$

بنابراین ضابطه تابع $y = -1 + \log_3(2x - 1)$ می‌شود. طول نقطه برخورد

نمودار تابع مورد نظر با خط $y = 1$ جواب معادله زیر است:

$$-1 + \log_3(2x - 1) = 1 \Rightarrow \log_3(2x - 1) = 2 \Rightarrow 2x - 1 = 9 \Rightarrow x = 5$$

۲۷۲۸- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{2|x - 2|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + 2)}{2(-(x - 2))} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 2}{-2} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{2|x - 2|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{2(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 2}{2} = 2 \end{aligned}$$

چون $f(2) = 2$ ، پس تابع f در نقطه $x = 2$ فقط از راست پیوسته است.

۲۷۲۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{1 + \tan^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|} = \frac{1}{-\cos x} \quad (\frac{\pi}{2} < x < \pi)$$

بنابراین

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \frac{\frac{1}{\sin x} - \sin x}{\frac{1}{\cos x}} = \frac{\tan x}{-\frac{1}{\sin x}} = -\tan x \cos x \times \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\sin x \times \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\cos^2 x$$

۲۷۳۰- گزینه ۳ راه حل اول توجه کنید که

$$\frac{7x - 8}{x^2 - x - 2} > \frac{x}{x - 2} \Rightarrow \frac{7x - 8}{(x + 1)(x - 2)} - \frac{x}{x - 2} > 0 \Rightarrow \frac{7x - 8 - x(x + 1)}{(x + 1)(x - 2)} > 0$$

$$\frac{-x^2 + 6x - 8}{(x + 1)(x - 2)} > 0 \Rightarrow \frac{-(x - 2)(x - 4)}{(x + 1)(x - 2)} > 0 \Rightarrow \frac{(x - 2)(x - 4)}{(x + 1)(x - 2)} < 0$$

x	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$
$\frac{(x - 2)(x - 4)}{(x + 1)(x - 2)}$		+	-	-	+

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر $(2, 4) \cup (-1, 2)$ می‌شود.

راه حل دوم توجه کنید که اعداد صفر و ۳ در نامعادله صدق می‌کنند:

$$\frac{-8}{-2} > \frac{0}{-2} \Rightarrow 4 > 0, \quad \frac{2 - 8}{9 - 3 - 2} > \frac{3}{3 - 1} \Rightarrow \frac{13}{4} > \frac{3}{2}$$

بنابراین گزینه (۳) جواب نامعادله است.

۲۷۳۱- گزینه ۱ توجه کنید که

$$2a + \sqrt{3a + 16} = 1 \Rightarrow \sqrt{3a + 16} = 1 - 2a \Rightarrow \sqrt{3a + 16}^2 = (1 - 2a)^2$$

$$3a + 16 = 1 - 4a + 4a^2 \Rightarrow 4a^2 - 7a - 15 = 0$$

$$(4a + 5)(a - 3) = 0 \Rightarrow a = -\frac{5}{4}, a = 3$$

توجه کنید که $a = 3$ در تساوی داده شده صدق نمی‌کند، ولی $a = -\frac{5}{4}$

تساوی داده شده صدق می‌کند. بنابراین $a = -\frac{5}{4}$ و $4a + 9 = 4$.

۲۷۳۲- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{9\pi}{4} + \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(\frac{7\pi}{4} - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(\alpha - \frac{3\pi}{4}) = -\tan(\frac{3\pi}{4} - \alpha) = -\cot \alpha$$

بنابراین (چون α ربع سوم است، $\cos \alpha < 0$)

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha = \frac{4}{3} \times (-\frac{3}{5}) = -\frac{4}{5}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{3}{4}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $(-\frac{3}{5})(\frac{4}{5}) + \frac{3}{4} = \frac{0}{20} = 0$.

۲۷۳۳- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{4}+h) - f(\frac{1}{4})}{h} = f'(\frac{1}{4})$$

از طرف دیگر،

$$f'(x) = \frac{(-1)(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(-x-1)}{(\sqrt{x})^2}$$

پس

$$f'(\frac{1}{4}) = \frac{-\frac{1}{2} + (1)(\frac{1}{4}+1)}{\frac{1}{4}} = 3$$

۲۷۳۴- گزینه ۳ چون تابع f در نقطه $x=2$ مشتق پذیر است، پس در این نقطه پیوسته نیز است. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\lambda}{ax+b} = 4 \Rightarrow \frac{\lambda}{2a+b} = 4 \Rightarrow 2a+b=2$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-\lambda a}{(ax+b)^2} & x > 2 \\ -3x^2 + 6 & x < 2 \end{cases}$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\lambda a}{(ax+b)^2} = \frac{-\lambda a}{(2a+b)^2} = \frac{-\lambda a}{2^2} = -2a$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-3x^2 + 6) = -6$$

بنابراین

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow -2a = -6 \Rightarrow a = 3$$

۲۷۳۵- گزینه ۲ توجه کنید که $f(x) = x(\frac{3x+1}{x+2})^{\frac{1}{3}}$ پس

$$f'(x) = (1)(\frac{3x+1}{x+2})^{\frac{1}{3}} + x \times \frac{1}{3} (\frac{(3)(x+2) - (1)(3x+1)}{(x+2)^2}) (\frac{3x+1}{x+2})^{\frac{1}{3}-1}$$

در نتیجه

$$f'(-3) = (\frac{-8}{-1})^{\frac{1}{3}} + (-3)(\frac{1}{3})(\frac{(3)(-1) - (-8)}{(-1)^2})(\frac{-8}{-1})^{\frac{1}{3}-1} = 2 - 5 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

۲۷۳۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که نقطه‌های ابتدایی و انتهایی نمودار

تابع $(0, f(0))$ و $(8, f(8))$ هستند. شیب خطی که این دو نقطه را به هم

وصل می کند برابر است با $\frac{f(8) - f(0)}{8 - 0} = \frac{3 - (-5)}{8} = 1$. اکنون طول نقطه‌ای

را روی نمودار تابع f پیدا می کنیم که شیب خط مماس در این نقطه بر نمودار تابع برابر ۱ است:

$$f'(x) = \frac{9}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow \frac{9}{(x+1)^2} = 1$$

$$(x+1)^2 = 9 \Rightarrow x = 2, \quad x = -4 \quad (\text{غ.ق.ی.})$$

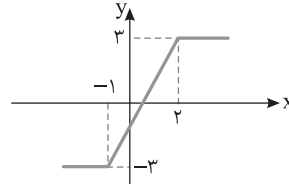
بنابراین طول نقطه مورد نظر برابر ۲ است و عرض آن برابر است با $f(2) = 1$.

معادله خطی که از نقطه $(2, 1)$ می گذرد و شیب آن برابر ۱ است به صورت

$y - 1 = (x - 2)$ یعنی $y = x - 1$ است. عرض نقطه‌ای که این خط محور y

را قطع می کند برابر است با $y = 0 - 1 = -1$.

۲۷۲۹- گزینه ۳ نمودار تابع f



به صورت زیر است. از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازه $(-1, 2)$ اکیداً صعودی است.

۲۷۳۰- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\cos 3x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\cos x = \cos(\pi - x)$$

بنابراین $(k \in \mathbb{Z})$

$$3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$3x = 2k\pi - (\pi - x) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2}$$

چون باید $\cos x \neq 0$ ، پس جواب‌های به شکل $k\pi - \frac{\pi}{2}$ قبول نیستند. در

نتیجه، جواب‌های کلی معادله مورد نظر به صورت $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ هستند $(k \in \mathbb{Z})$.

۲۷۳۱- گزینه ۴ راه حل اول توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2 - \sqrt{3x+2}}{(5x-8)(x-2)} \times \frac{4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2}}{4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\lambda - (3x+2)}{(5x-8)(x-2)(4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(x-2)}{(5x-8)(x-2)(4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{(5x-8)(4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2})} \\ &= \frac{-3}{(2)(4 + 2 \times 2 + 2^2)} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

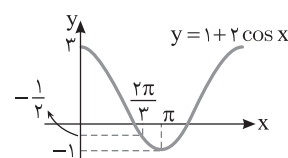
راه حل دوم بنابر قاعده هوییتال،

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}}{10x - 18} = \frac{-\frac{1}{2^2}}{20 - 18} = -\frac{1}{8}$$

۲۷۳۲- گزینه ۱ توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow (\frac{2\pi}{3})^+} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و

$\lim_{x \rightarrow (\frac{2\pi}{3})^+} (1 + 2 \cos x) = 0$ و در یک همسایگی راست نقطه $\frac{2\pi}{3}$ ، مقادیر

$\lim_{x \rightarrow (\frac{2\pi}{3})^+} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = -\infty$ بنابراین



۲۷۴۱- گزینه ۳) باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ برابر ۸ است، پس

$$P(1)=8. \text{ باقی‌مانده تقسیم } P(x) \text{ بر } 2x+1 \text{ برابر } 5 \text{ است، پس } P(-\frac{1}{2})=5.$$

باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $2x^2-x-1$ یک چندجمله‌ای درجه اول به صورت $ax+b$ است. بنابراین

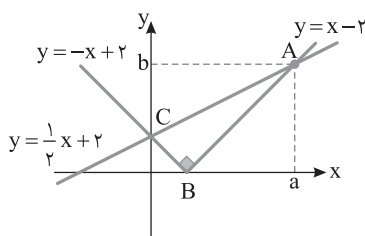
$$P(x)=(2x^2-x-1)Q(x)+ax+b=(x-1)(2x+1)Q(x)+ax+b$$

$$\begin{cases} P(1)=a+b=8 \\ P(-\frac{1}{2})=-\frac{a}{2}+b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=6 \end{cases}$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $2x^2-x-1$ برابر $2x+6$ است.

۲۷۴۲- گزینه ۴) نمودار دو تابع $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}=|x-2|$ و $g(x)=\frac{1}{2}x+2$

به صورت زیر است. مطابق شکل داده شده مساحت مثلث قائم‌الزاویه ABC مد نظر است.



$$x-2=\frac{1}{2}x+2 \Rightarrow x=4 \Rightarrow a=4 \Rightarrow b=4-2=2$$

بنابراین رئوس مثلث نقاط $A(4, -2)$ ، $B(2, 0)$ و $C(0, 2)$ هستند. پس

$$AB=\sqrt{(4-2)^2+(-2-0)^2}=2\sqrt{2}, \quad BC=\sqrt{(2-0)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}$$

پس مساحت مثلث ABC برابر است با

$$S=\frac{1}{2}AB \times BC=\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}=2$$

۲۷۴۳- گزینه ۱) فرض کنید $(g^{-1} \circ f^{-1})(20)=a$ ، بنابراین

$$g^{-1}(f^{-1}(20))=a \Rightarrow g(a)=f^{-1}(20) \Rightarrow f(g(a))=20.$$

واضح است که $f(16)=20$ ، زیرا

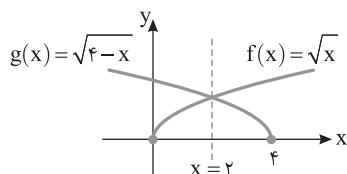
$$f(x)=x+\sqrt{x} \Rightarrow f(16)=16+\sqrt{16}=16+4=20.$$

پس $f^{-1}(20)=16$. بنابراین

$$g(a)=16 \Rightarrow \frac{9a+6}{1-a}=16 \Rightarrow 9a+6=16-16a \Rightarrow a=\frac{2}{5}$$

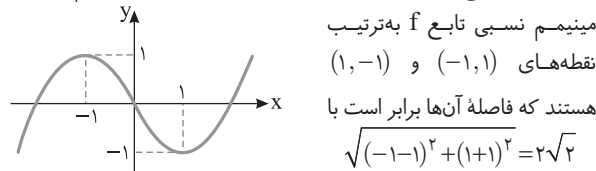
۲۷۴۴- گزینه ۳) اگر قرینه نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نسبت به محور y را رسم

کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-x}$ به دست می‌آید. اگر نمودار جدید را چهار واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-(x-4)}$ به دست می‌آید. بنابراین نمودار دو تابع اولیه و نهایی به صورت زیر است. با توجه به شکل معلوم است که نمودار تابع g قرینه نمودار تابع f نسبت به خط $x=2$ است.



۲۷۳۷- گزینه ۱) ابتدا توجه کنید که $f(x)=\begin{cases} -x^2-2x & x \leq 0 \\ x^2-2x & x > 0 \end{cases}$

پس نمودار تابع f به صورت زیر است. بنابراین نقطه‌های ماکزیمم نسبی و



مینیمم نسبی تابع f به ترتیب

نقطه‌های $(-1, 1)$ و $(1, -1)$

هستند که فاصله آن‌ها برابر است با

$$\sqrt{(-1-1)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{2}$$

۲۷۳۸- گزینه ۴) راه حل اول فرض می‌کنیم مستطیل مورد نظر $ABCD$

باشد و طول نقطه C برابر x باشد (شکل زیر را ببینید). چون نقطه B روی دایره

$x^2+y^2=36$ است، پس عرض نقطه B برابر است با $\sqrt{36-x^2}$. به این

ترتیب، $S_{ABCD}=2x\sqrt{36-x^2}$ باید بیشترین مقدار تابع

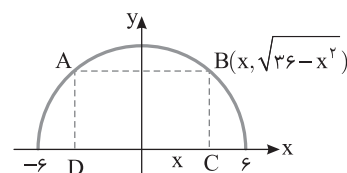
$f(x)=2x\sqrt{36-x^2}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=2\sqrt{36-x^2}-\frac{2x^2}{\sqrt{36-x^2}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 36-x^2=x^2 \Rightarrow x^2=18 \Rightarrow x=3\sqrt{2} \quad (x>0)$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f ، یعنی بیشترین مساحت مستطیل $ABCD$ ، به

ازای $x=3\sqrt{2}$ به دست می‌آید و برابر است با $2(3\sqrt{2})\sqrt{36-18}=36$.

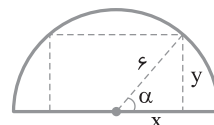


راه حل دوم با نمادگذاری شکل زیر، فرض می‌کنیم طول ضلع‌های مستطیل

$2x$ و y باشند. در این صورت $x=6 \cos \alpha$ و $y=6 \sin \alpha$. بنابراین

$$\text{مساحت مستطیل } = 2xy = 2(6 \cos \alpha)(6 \sin \alpha) = 36 \sin 2\alpha \leq 36$$

توجه کنید که تساوی وقتی به دست می‌آید که $2\alpha=90^\circ$ ، یعنی $\alpha=45^\circ$.



۲۷۳۹- گزینه ۳) توجه کنید که شکل n ام از مستطیلی با $2 \times (n+1)$ دایره

و نواری با n دایره درست شده است. بنابراین تعداد دایره‌های شکل n ام برابر

است با $2(n+1)+n=3n+2$. پس تعداد دایره‌های شکل دوازدهم برابر

است با $3 \times 12 + 2 = 38$.

۲۷۴۰- گزینه ۴) ابتدا توجه کنید که $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)=g^{-1}(f^{-1}(8))$.

اکنون فرض کنید $f^{-1}(8)=a$. در این صورت

$$f(a)=8 \Rightarrow \frac{2}{5}a-4=8 \Rightarrow a=30.$$

اکنون فرض کنید $g^{-1}(30)=b$. در این صورت

$$g(b)=30 \Rightarrow b^3+b=30 \Rightarrow b=3$$

بنابراین $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)=g^{-1}(f^{-1}(8))=g^{-1}(30)=3$.

۲۷۴۸- گزینه ۳ تعداد اعداد واقع در نوزده دسته اول برابر است با:

$$1+2+\dots+19=\frac{19 \times 20}{2}=190$$

بنابراین عدد اول دسته بیستم ۱۹۱ و عدد آخر آن ۲۱۰ است. مجموع این

$$\text{اعداد برابر است با } \frac{20}{2}(191+210)=4010$$

۲۷۴۹- گزینه ۱ مقدار جرم باقی‌مانده در بازه‌های زمانی ۳۰ روزه متوالی

به صورت زیر است.

● در ابتدا $a=24$ گرم موجود است.

● پس از ۳۰ روز مقدار باقی‌مانده برابر است با $a - \frac{1}{10}a = \frac{9}{10}a$

● پس از ۳۰ روز دیگر مقدار باقی‌مانده برابر است با

$$\frac{9}{10}a - \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}a\right) = \frac{81}{100}a = \left(\frac{9}{10}\right)^2 a$$

● پس از ۳۰ روز دیگر مقدار باقی‌مانده برابر $\left(\frac{9}{10}\right)^3 a$ خواهد بود.

بنابراین پس از n بازه زمانی ۳۰ روزه مقدار باقی‌مانده از جرم برابر است با

$$\left(\frac{9}{10}\right)^n a = 24 \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

چون ۸ گرم از ماده قرار است باقی بماند، پس

$$24 \left(\frac{9}{10}\right)^n = 8 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^n = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{10}{9}\right)^n = 3$$

$$n = \log_{\frac{10}{9}} 3 = \frac{1}{\log_3 \left(\frac{10}{9}\right)} = \frac{1}{\log_3 10 - \log_3 9} = \frac{1}{\log_3 10 - 2} = \frac{1}{\frac{100}{48} - 2} = 12$$

پس برای باقی‌ماندن ۸ گرم از این عنصر ۱۲ تا ۳۰ روز طی می‌شود که برابر

۳۶ روز است.

۲۷۵۰- گزینه ۱ این سؤال مربوط به حد دنباله‌هاست که خارج از مباحث

کتاب درسی است ولی تا حد امکان سعی می‌کنیم با کمک مطالب موجود در

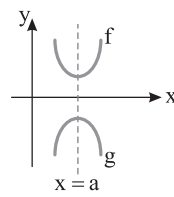
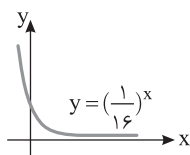
کتاب درسی به آن توضیح دهیم. ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}} &= \frac{2 \times 2^{2n} - 2 \times 2^{-2n}}{2 \times 2^{2n} + 3 \times 2 \times 2^{-2n}} = \frac{2^{2n} - 2^{-2n}}{2^{2n} + 3 \times 2^{-2n}} \\ &= \frac{1 - 2^{-4n}}{1 + 3 \times 2^{-4n}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n}{1 + 3\left(\frac{1}{16}\right)^n} \end{aligned}$$

از طرف دیگر با توجه به نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ واضح است که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^x = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n}{1 + 3\left(\frac{1}{16}\right)^n} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$$



توجه ادبیات سؤال ایراد دارد چون پرسیده شده

است: «منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام

خط متقارن هستند؟» این سؤال یعنی نمودار توابع

f و g هر دو نسبت به خط $x=a$ متقارن هستند

و مقدار a چند است؟ (شکل مقابل را ببینید) در

حالی که مقصود طراح این بوده است که قرینه نمودار تابع f نسبت به خط

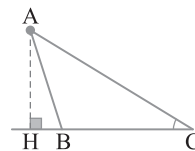
$x=a$ نمودار تابع g می‌شود و a چند است؟ از طرف دیگر سؤال خارج از

مباحث کتاب درسی است. چیزی که سؤال پرسیده مثلاً این طوری می‌شود:

۲۷۴۵- گزینه ۴ ابتدا $\cot \hat{C}$ را با معلوم بودن $\sin \hat{C}$ به دست می‌آوریم:

$$1 + \cot^2 \hat{C} = \frac{1}{\sin^2 \hat{C}} \Rightarrow 1 + \cot^2 \hat{C} = \frac{169}{25}$$

$$\cot^2 \hat{C} = \frac{144}{25} \Rightarrow \cot \hat{C} = \frac{12}{5}$$



بنابراین در مثلث AHC می‌توان نوشت:

$$\cot \hat{C} = \frac{CH}{AH} \Rightarrow \frac{12}{5} = \frac{9}{AH} \Rightarrow AH = 3/4$$

۲۷۴۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A = \cos\left(\frac{1}{4}\pi + \alpha\right) = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\left(\cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)$$

از طرف دیگر، $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$ ، پس

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{2}{100} = \frac{49}{50} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-7}{5\sqrt{2}} = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

توجه کنید که انتهای کمان نظیر زاویه α در ربع دوم قرار دارد و $\cos \alpha$

منفی است. در نتیجه

$$A = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{10} + \frac{7\sqrt{2}}{10} \right) = \frac{3}{5}$$

۲۷۴۷- گزینه ۲ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\tan 3x \tan x = 1 \Rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} = \cot x$$

$$\tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{(2k+1)\pi}{8} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه $[\pi, 2\pi]$ را تعیین می‌کنیم:

$$k=4 \Rightarrow x = \frac{9\pi}{8}, \quad k=5 \Rightarrow x = \frac{11\pi}{8}$$

$$k=6 \Rightarrow x = \frac{13\pi}{8}, \quad k=7 \Rightarrow x = \frac{15\pi}{8}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله در بازه $[\pi, 2\pi]$ برابر 6π است. توجه

کنید که به ازای هیچ‌یک از جواب‌ها، مقدار $\tan x$ برابر صفر نیست.

۲۷۵۵- گزینه ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[۵, ۶]$ برابر است با

$$\frac{f(6)-f(5)}{6-5} = \frac{3-4}{1} = -1$$

از طرف دیگر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع در نقطه x برابر $f'(x)$ است.

$$f(x) = \sqrt{21-x^2} + 4x \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x+4}{2\sqrt{21-x^2}+4x} = \frac{-x+2}{\sqrt{21-x^2}+4x}$$

بنابراین

$$\frac{-x+2}{\sqrt{21-x^2}+4x} = -1 \quad (*) \Rightarrow 21-x^2+4x = (x-2)^2$$

$$21-x^2+4x = x^2+4-4x \Rightarrow 2x^2-8x-17=0$$

$$x = 2 + \frac{5\sqrt{2}}{2}, \quad x = 2 - \frac{5\sqrt{2}}{2} \quad (\text{غ.ق.})$$

توجه کنید که طبق معادله (*) مقدار x باید بیشتر از ۲ باشد.

۲۷۵۶- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{5x-4}{\sqrt{x}} = 5\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(4) = 5 \times 2 - \frac{4}{2} = 8$$

$$f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x\sqrt{x}} \Rightarrow m = f'(4) = \frac{5}{4} + \frac{2}{8} = \frac{3}{2}$$

معادله خطی که از نقطه $(4, 8)$ با شیب $\frac{3}{2}$ می‌گذرد، به صورت زیر است:

$$y-8 = \frac{3}{2}(x-4) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 2$$

اگر قرار دهیم $x=0$ ، عرض نقطه تقاطع با محور y برابر ۲ به دست می‌آید.

۲۷۵۷- گزینه ۴ چون $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ جواب‌های معادله

$2x^2+3x-1=0$ هستند، پس مجموع و حاصل ضرب جواب‌ها معلوم است:

$$\tan \alpha + \tan \beta = -\frac{3}{2}, \quad \tan \alpha \tan \beta = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-\frac{3}{2}}{1 - (-\frac{1}{2})} = -1$$

۲۷۵۸- گزینه ۱ چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ بخش پذیر است. پس

$$P(\frac{1}{2}) = 0$$

$$P(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^4 + a(\frac{1}{2})^3 + 2(\frac{1}{2})^2 - 3(\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow a = 7$$

$$P(x) = 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 3x$$

پس باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x+2$ برابر است با

$$P(-2) = 2(-2)^4 + 7(-2)^3 + 2(-2)^2 - 3(-2) = -1$$

۲۷۵۹- گزینه ۴ طول نقاط تقاطع نمودار تابع‌های

$f(x) = |x-2| + |x+1|$ و $g(x) = x+7$ به دست می‌آید. پس

$$f(x) = g(x) \Rightarrow |x-2| + |x+1| = x+7$$

$$x \geq 2 \Rightarrow x-2+x+1 = x+7 \Rightarrow x = 8$$

$$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -x+2+x+1 = x+7 \Rightarrow x = -4 \quad (\text{غ.ق.})$$

$$x \leq -1 \Rightarrow -x+2-x-1 = x+7 \Rightarrow x = -2$$

بنابراین $A(8, 5)$ و $B(-2, 5)$ نقاط تقاطع هستند که فاصله آن‌ها برابر

$$AB = \sqrt{(8+2)^2 + (5-5)^2} = 10\sqrt{2}$$

است با

۲۷۵۱- گزینه ۲ راه حل اول از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+5)-7\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+1}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+5)^2-49x}{(2x+5)+7\sqrt{x}} \times \frac{2x+\sqrt{3x+1}}{4x^2-(3x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2-29x+25}{4x^2-3x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+\sqrt{3x+1}}{(2x+5)+7\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(4x-25)}{(x-1)(4x+1)} \times \frac{2+2}{2+5+7} = \frac{4}{14} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x-25}{4x+1} = \frac{2}{7} \times (-\frac{21}{5}) = -1/2 \end{aligned}$$

راه حل دوم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+5-7\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\frac{7}{\sqrt{x}}}{2-\frac{3}{\sqrt{3x+1}}} = \frac{2-\frac{7}{\sqrt{1}}}{2-\frac{3}{\sqrt{3+1}}} = -1/2$$

۲۷۵۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که تابع f به صورت زیر است:

$$|x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & 0 < x < 2 \\ x^2+ax+b & x \leq 0 \text{ یا } x \geq 2 \end{cases}$$

چون تابع f در نقاط $x=0$ و $x=2$ پیوسته است، پس

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2+ax+b) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((x-1)[x]) \Rightarrow b = 0$$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$4+2a+b = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2+ax+b) = \lim_{x \rightarrow 2^-} ((x-1)[x])$$

$$4+2a = (2-1) \times 1 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

۲۷۵۳- گزینه ۱ چون خط $y=-1$ مجانب افقی نمودار تابع f است، پس

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2+3x}{ax^2+bx+c} = -1 \Rightarrow \frac{-2}{a} = -1 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین $f(x) = \frac{-2x^2+3x}{2x^2+bx+c}$. چون خطوط $x=1$ و $x=-2$ مجانب‌های

قائم نمودار تابع f هستند، پس $x=1$ و $x=-2$ ریشه‌های چندجمله‌ای

$2x^2+bx+c$ هستند.

$$2x^2+bx+c = 2(x-1)(x+2) = 2x^2+2x-4 \Rightarrow b=2, c=-4$$

$$f(x) = \frac{-2x^2+3x}{2x^2+2x-4} \Rightarrow f(-1) = \frac{-2-3}{2-2-4} = \frac{5}{4} = 1/25 \quad \text{در نتیجه}$$

۲۷۵۴- گزینه ۲ توجه کنید که

$$g(x) = f(\sqrt{1+\tan^2 x}) \Rightarrow g'(x) = (\sqrt{1+\tan^2 x})' f'(\sqrt{1+\tan^2 x})$$

$$g'(x) = \frac{2 \tan x (1+\tan^2 x)}{2\sqrt{1+\tan^2 x}} f'(\sqrt{1+\tan^2 x})$$

بنابراین

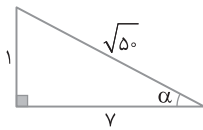
$$g'(\frac{\pi}{3}) = \frac{2\sqrt{3}(1+3)}{2\sqrt{1+3}} f'(\sqrt{1+3}) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} f'(\frac{2}{\sqrt{3}}) \Rightarrow f'(\frac{2}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{4}$$

۲۷۶۳- گزینه ۱ با توجه به مثلث قائم‌الزاویه مقابل که در آن $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ، نتیجه می‌شود

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{13\pi}{4} + \alpha\right) &= \sin\left(3\pi + \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \\ &= -\sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4}{5} \end{aligned}$$



۲۷۶۴- گزینه ۱ ابتدا معادله را ساده می‌کنیم

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x$$

$$\left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \cos x\right) + \left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x\right) + \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x\right) = \cos 2x$$

$$\cos x = \cos 2x$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, \quad x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های به صورت $\frac{2k\pi}{3}$ شامل جواب‌های به صورت $2k\pi$ هستند.

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت $x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ است.

۲۷۶۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که تعداد اعداد نوشته شده در چهل

$$1+2+3+\dots+40 = \frac{40}{2}(1+40) = 820$$

دسته اول برابر است با

بنابراین آخرین عدد واقع در دسته چهارم همان هشتصد و بیست و یک عدد طبیعی فرد است که برابر است با $2 \times 820 - 1 = 1639$.

۲۷۶۶- گزینه ۲ مقدار ماده خالص در محلول در روزهای متوالی به

صورت زیر است (فرض می‌کنیم محلول ۱۰۰ درصد خالص داریم).

روز اول: ۱۰۰ (غلظت ۱۰۰٪)

روز دوم: $100 - 4 = 96$ (غلظت ۹۶٪)

روز سوم: $96 - \frac{96}{100} \times 4 = 96 \left(1 - \frac{4}{100}\right)$ (غلظت: ۹۲/۱۶٪)

روز چهارم: ...

اکنون توجه کنید که همین مقادیر را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$100, 100\left(1 - \frac{4}{100}\right), 100\left(1 - \frac{4}{100}\right)^2, \dots$$

بنابراین در روز $(n+1)$ ام، یعنی پس از گذشت n روز مقدار ماده خالص برابر

$$100\left(1 - \frac{4}{100}\right)^n$$

خواهد بود که باید $\frac{1}{3}$ ماده خالص اولیه، یعنی $\frac{100}{3}$ لیتر باشد.

۲۷۶۰- گزینه ۴ راه حل اول فرض کنید $a = (f^{-1} \circ g^{-1})(-9)$ ، پس

$$f^{-1}(g^{-1}(-9)) = a \Rightarrow f(a) = g^{-1}(-9), \quad a \geq 2$$

$$a^2 - 4a + 9 = g^{-1}(-9) \Rightarrow g(a^2 - 4a + 9) = -9$$

$$\frac{3 - (a^2 - 4a + 9)}{2} = -9 \Rightarrow a^2 - 4a - 12 = 0$$

$$(a-6)(a+2) = 0 \Rightarrow a = 6, \quad a = -2 \text{ (غ.ق.)}$$

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$y = f(x) = x^2 - 4x + 9 \Rightarrow y = (x-2)^2 + 5$$

$$y-5 = (x-2)^2 \mid x-2 = \sqrt{y-5}$$

$$\xrightarrow{x \geq 2} x-2 = \sqrt{y-5}$$

$$x = 2 + \sqrt{y-5} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-5}$$

از طرف دیگر،

$$y = g(x) = \frac{3-x}{2} \Rightarrow 2y = 3-x \Rightarrow x = 3-2y \Rightarrow g^{-1}(x) = 3-2x$$

بنابراین

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(-9) = f^{-1}(g^{-1}(-9)) = f^{-1}(3-2(-9))$$

$$f^{-1}(21) = 2 + \sqrt{21-5} = 6$$

۲۷۶۱- گزینه ۲ اگر بخواهیم قرینه نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را

نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم، ابتدا باید آن را نسبت به محور x سپس

نسبت به محور y قرینه کنیم (یا ابتدا نسبت به محور y سپس نسبت به محور x

قرینه کنیم). ضابطه این تابع به صورت $y = -f(-x)$ خواهد بود. اگر این

نمودار را چهار واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $g(x) = -f(-x) + 4$

رسم می‌شود. طول نقاط تلاقی نمودار تابع‌های f و g از معادله $f(x) = g(x)$

به دست می‌آید:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow (x-1)^2 = -(-x-1)^2 + 4$$

$$x^2 - 2x + 1 = -x^2 - 2x - 1 + 4 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

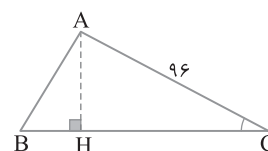
۲۷۶۲- گزینه ۳ ابتدا از $\sin^2 \hat{C} = \frac{1}{1 + \cot^2 \hat{C}}$ مقدار $\sin \hat{C}$ را

به دست می‌آوریم:

$$1 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \hat{C}} \Rightarrow \sin^2 \hat{C} = \frac{4}{9} \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{2}{3}$$

بنابراین

$$\triangle AHC: \sin \hat{C} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{AH}{96} \Rightarrow AH = 64$$



حالت دوم $x=2$ ریشهٔ مخرج $f(x)$ باشد و یکی از ریشه‌های صورت $f(x)$ ریشهٔ دیگر مخرج آن باشد. اگر $a \neq 0$ ، آن‌گاه ریشه‌های صورت $f(x)$ اعداد $x=0$ و $x=-\frac{y}{a}$ هستند. بنابراین $f(x)$ باید به صورت‌های زیر باشد:

● اگر $x=0$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج باشد، آن‌گاه

$$f(x) = \frac{x(ax+y)}{2x^2+bx+c} = \frac{x(ax+y)}{2x(x-2)} \Rightarrow c=0, \quad b=-4 \Rightarrow f(x) = \frac{ax+y}{2(x-2)}$$

چون $f(3)=6$ ، پس

$$\frac{3a+y}{2 \times 1} = 6 \Rightarrow a = \frac{5}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{\frac{5}{3}x+y}{2x-4}$$

در این حالت معادلهٔ مجانب افقی نمودار تابع f به صورت $y = \frac{5}{6}$ است.

● اگر $x=-\frac{y}{a}$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج باشد، آن‌گاه

$$f(x) = \frac{x(ax+y)}{2x^2+bx+c} = \frac{x(ax+y)}{2(x-2)(ax+y)} \Rightarrow a=1, \quad b=10, \quad c=-28$$

$$f(x) = \frac{x(x+y)}{2(x-2)(x+y)} = \frac{x}{2(x-2)}$$

در این حالت $f(3) = \frac{3}{2}$ که مخالف فرض مسئله است.

اگر $a=0$ ، آن‌گاه $f(x) = \frac{yx}{2x^2+bx+c}$ که در این صورت باید داشته باشیم $c=0$

و $b=-4$ ، یعنی $f(x) = \frac{yx}{2x^2-4x}$ که باز هم شرط $f(3)=6$ برقرار

نیست. پس خطوط $y = \frac{1}{2}$ و $y = \frac{5}{3}$ می‌توانند مجانب افقی نمودار تابع f باشند.

● گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$g(x) = f\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) \Rightarrow g'(x) = \left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)' f'\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)$$

$$g'(x) = \frac{-\cos x(1+\sin x) - \cos x(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2} f'\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)$$

$$= \frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2} f'\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)$$

بنابراین

$$g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-2\cos \frac{\pi}{6}}{(1+\sin \frac{\pi}{6})^2} f'\left(\frac{1-\sin \frac{\pi}{6}}{1+\sin \frac{\pi}{6}}\right) = \frac{-2\sqrt{3}}{9} f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{4}$$

● گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع‌های $g(x) = x^2+ax+b$ و $f(x) = x\sqrt{x}$

در نقطهٔ مشترک $x=4$ بر یک خط مماس باشند، آن‌گاه

$$\begin{cases} f(4) = g(4) \Rightarrow 8 = 16 + 4a + b \Rightarrow b = -8 - 4a \\ f'(4) = g'(4) \Rightarrow 3 = 8 + a \Rightarrow a = -5 \Rightarrow b = 12 \end{cases}$$

توجه کنید که

$$f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(4) = \frac{3}{2} \times 2 = 3$$

$$g(x) = x^2 + ax + b \Rightarrow g'(x) = 2x + a \Rightarrow g'(4) = 8 + a$$

پس

$$100 \left(1 - \frac{4}{100}\right)^n = \frac{1}{3} \times 100 \Rightarrow \left(\frac{24}{25}\right)^n = \frac{1}{3}$$

$$n = \log_{\frac{24}{25}}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-\log 3}{\log \frac{24}{25}} = \frac{-\log 3}{\log 24 - \log 25}$$

$$= \frac{-\log 3}{\log 8 + \log 3 - \log\left(\frac{100}{4}\right)} = \frac{-\log 3}{3\log 2 + \log 3 - \log 100 + \log 4}$$

$$= \frac{-\log 3}{5\log 2 + \log 3 - 2} = \frac{-0.477}{5 \times 0.301 + 0.477 - 2} = 24$$

● گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow 0^-$ ، آن‌گاه

$$\sqrt{1-\cos x} = \sqrt{2\sin^2 \frac{x}{2}} = \sqrt{2} \left|\sin \frac{x}{2}\right| = -\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}$$

از طرف دیگر،

$$\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x} = \frac{(\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x})(\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x})}{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}}$$

$$= \frac{2+3x - (2-x)}{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}} = \frac{4x}{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}}$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x}{-\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}}$$

$$= \frac{4}{-\sqrt{2} \times \frac{1}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = -2$$

● گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع بازهٔ $[-2, 2]$ در نظر گرفته شده است، بنابراین

تابع در نقاط $x=2$ و $x=-2$ حد ندارد و پیوسته نیست. در نقاط غیر صحیح

بازهٔ $(-2, 2)$ ، توابع $y = \sin \pi x$ و $y = [x]$ پیوسته‌اند. بنابراین حاصل ضرب

آن‌ها، یعنی تابع $f(x) = [x] \sin \pi x$ نیز پیوسته است. در نقاط صحیح این بازه

(یعنی $x=0$ ، $x=1$ و $x=-1$) تابع $y = [x]$ ناپیوسته است ولی چون تابع

$y = \sin \pi x$ پیوسته است و مقدار آن برابر صفر است، تابع f پیوسته خواهد بود.

بنابراین تابع f فقط در دو نقطهٔ $x=2$ و $x=-2$ ناپیوسته است.

● گزینهٔ ۲ در دو حالت ممکن است تابع $f(x) = \frac{ax^2+7x}{2x^2+bx+c}$

فقط یک مجانب قائم به معادلهٔ $x=2$ داشته باشد.

حالت اول $x=2$ ریشهٔ مضاعف چندجمله‌ای مخرج $f(x)$ باشد، یعنی

$$2x^2+bx+c = 2(x-2)^2 = 2x^2-8x+8 \Rightarrow b=-8$$

$$c=8 \Rightarrow f(x) = \frac{ax^2+7x}{2(x-2)^2}$$

چون $f(3)=6$ ، پس

$$\frac{9a+21}{2 \times 1} = 6 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{-x^2+7x}{2(x-2)^2}$$

پس معادلهٔ مجانب افقی نمودار تابع f به صورت $y = -\frac{1}{2}$ است.

۲۷۷۲- گزینه ۱ ابتدا $f'(2)$ را به دست می‌آوریم:

$$0 \leq x < 4 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 6x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x}} \Rightarrow f'(2) = \frac{5}{4}$$

اکنون توجه کنید که در یک همسایگی نقطه $x=5$ ، تساوی $\left[\frac{x}{4}\right]=1$ برقرار

است. پس در این همسایگی می‌توان نوشت

$$f(x) = x^2 - 9x \Rightarrow f'(x) = 2x - 9 \Rightarrow f'(5) = 10 - 9 = 1$$

$$\text{بنابراین } f'(2) - f'(5) = \frac{1}{4}$$

۲۷۷۳- گزینه ۳ با توجه به شکل زیر.

$$OA = AB = 1, BT = 2 \Rightarrow \begin{cases} \tan(\alpha + \beta) = \frac{AT}{OA} = \frac{1+2}{1} = 3 \\ \tan \beta = \frac{AB}{OA} = \frac{1}{1} = 1 \end{cases}$$

بنابراین

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$3 = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha}$$

$$3 - 3 \tan \alpha = \tan \alpha + 1$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{2}$$

۲۷۷۴- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} &= \frac{(2\sqrt{2} + 3\sqrt{3})(5 + \sqrt{6})}{(5 - \sqrt{6})(5 + \sqrt{6})} = \frac{10\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 15\sqrt{3} + 9\sqrt{2}}{25 - 6} \\ &= \frac{19\sqrt{2} + 19\sqrt{3}}{19} = \sqrt{2} + \sqrt{3} \end{aligned}$$

از طرف دیگر،

$$2(\sqrt{9-1})^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} - (\sqrt{3} + 1) = \sqrt{2} - 1$$

۲۷۷۵- گزینه ۳ اعداد مربع کامل به صورت زیر هستند:

$$1^2, 2^2, 3^2, \dots, 8^2, 9^2, \dots$$

بنابراین آخرین عدد دسته هشتم عدد 8^2 و آخرین عدد دسته نهم عدد 9^2 است. همچنین اولین عدد دسته نهم $8^2 + 1$ است. پس واسطه حسابی بین

$$\frac{8^2 + 1 + 9^2}{2} = 73 \quad \text{با } 9^2 \text{ را باید حساب کنیم که برابر است با}$$

۲۷۷۶- گزینه ۲ چون چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر است،

پس بر $x-1$ و $x+1$ هم بخش پذیر است. یعنی $p(-1) = p(1) = 0$. از طرف

دیگر باقی مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ برابر $Q(2)$ است. بنابراین

$$Q(x) = p(x-1) + p(1-x) \Rightarrow Q(2) = p(1) + p(-1) = 0$$

توجه در صورت سؤال نوشته شده است «حاصل تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ » که

معلوم نیست چیه! ولی احتمالاً منظور همین «باقی مانده» بوده است.

۲۷۷۷- گزینه ۱ مجموع جواب‌ها و حاصل ضرب جواب‌ها در معادله

$$3x^2 + (2m-1)x + 2-m = 0 \quad \text{به ترتیب برابر } \frac{1-2m}{3} \text{ و } \frac{2-m}{3} \text{ هستند. پس}$$

$$\frac{1-2m}{3} = \frac{3}{2-m} \Rightarrow (1-2m)(2-m) = 9 \Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0$$

$$(m+1)(2m-7) = 0 \Rightarrow m = -1, m = \frac{7}{2}$$

به ازای $m = -1$ معادله به صورت $3x^2 - 3x + 3 = 0$ می‌آید که جواب

ندارد. پس فقط $m = \frac{7}{2}$ قابل قبول است.

۲۷۷۸- گزینه ۴ راه حل اول نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$1 < \frac{x+1}{2x-1} < 3 \Rightarrow -1 < \frac{x+1}{2x-1} - 2 < 1 \Rightarrow -1 < \frac{-3x+3}{2x-1} < 1$$

$$\left| \frac{-3x+3}{2x-1} \right| < 1 \Rightarrow |3x-3| < |2x-1|$$

بنابراین نامعادله به صورت زیر حل می‌شود:

$$(3x-3)^2 < (2x-1)^2 \Rightarrow (3x-3)^2 - (2x-1)^2 < 0$$

$$(3x-3+2x-1)(3x-3-2x+1) < 0$$

$$(5x-4)(x-2) < 0 \Rightarrow \frac{4}{5} < x < 2 \Rightarrow x \in (\frac{4}{5}, 2)$$

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که عدد ۱ در نامعادله صدق می‌کند، زیرا $1 < \frac{1+1}{2-1} < 3$

همچنین عدد $\frac{3}{2}$ در نامعادله صدق می‌کند

$$1 < \frac{\frac{3}{2}+1}{2(\frac{3}{2})-1} < 3 \Leftrightarrow 1 < \frac{5}{4} < 3$$

این اعداد فقط عضو بازه گزینه (۴) هستند.

راه حل سوم نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x+1}{2x-1} < 3 \Rightarrow \frac{x+1-6x+3}{2x-1} < 0 \Rightarrow \frac{-5x+4}{2x-1} < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{4}{5}, +\infty)$$

$$\frac{x+1}{2x-1} > 1 \Rightarrow \frac{x+1-2x+1}{2x-1} > 0 \Rightarrow \frac{-x+2}{2x-1} > 0 \Rightarrow x \in (\frac{1}{2}, 2)$$

از اشتراک دو مجموعه جواب به دست آمده نتیجه می‌شود

$$x \in (\frac{4}{5}, 2) = (0, 8, 2)$$

۲۷۷۹- گزینه ۱ راه حل اول مختصات نقاط را در معادله سهمی قرار می‌دهیم:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow 0+0+c=5 \Rightarrow c=5, \quad \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=1 \Rightarrow a+b=6$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow 4a-2b+c=5 \Rightarrow 4a-2b=0 \Rightarrow b=2a$$

$$\text{از حل دستگاه معادلات } \begin{cases} a+b=6 \\ b=2a \end{cases} \text{ نتیجه می‌شود } a=2 \text{ و } b=4. \text{ پس معادله}$$

سهمی به صورت $y = 2x^2 + 4x + 5$ است که از نقطه $(-1, 3)$ می‌گذرد.

۲۷۸۲- گزینه ۲) راه حل اول ابتدا توجه کنید $D_f = D_g = \mathbb{R}$ ، بنابراین

$D_{g \circ f} = \mathbb{R}$ از طرف دیگر،

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -f^2(x) + 4f(x) = 4 - (f(x) - 2)^2$$

$$= 4 - (2x - [2x] - 2)^2$$

اکنون توجه کنید که

$$0 \leq 2x - [2x] < 1 \Rightarrow -2 \leq 2x - [2x] - 2 < -1$$

$$1 < (2x - [2x] - 2)^2 \leq 4 \Rightarrow -4 \leq -(2x - [2x] - 2)^2 < -1$$

$$0 \leq 4 - (2x - [2x] - 2)^2 < 3 \Rightarrow 0 \leq (g \circ f)(x) < 3$$

بنابراین برد تابع $g \circ f$ بازه $[0, 3]$ است.

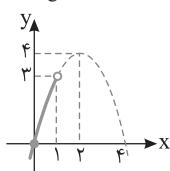
راه حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$0 \leq 2x - [2x] < 1 \Rightarrow 0 \leq f(x) < 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(t) = -t^2 + 4t, \quad 0 \leq t < 1$$

بنابراین نمودار تابع g به صورت زیر است و در نتیجه $0 \leq g(t) < 3$ ، یعنی

$$R_{g \circ f} = [0, 3]$$



۲۷۸۳- گزینه ۳) چون $g(x) = f^{-1}(x)$ ، پس

$$g(6) + g(12) = f^{-1}(6) + f^{-1}(12)$$

از طرف دیگر، $f(9) = 9 + 3 = 12$ ، $f(4) = 4 + 2 = 6$ ، $f(x) = x + \sqrt{x}$

بنابراین $f^{-1}(6) = 4$ و $f^{-1}(12) = 9$ و در نتیجه حاصل عبارت خواسته شده برابر ۱۳ است.

۲۷۸۴- گزینه ۲) راه حل اول فرض می‌کنیم نمودار تابع f^{-1} در نقطه

$(a, -a)$ که $a > 0$ نیمساز ناحیه چهارم را قطع کند. در این صورت

$f^{-1}(a) = -a$ و در نتیجه $f(-a) = a$ ، بنابراین

$$-a - \frac{2}{-a} = a \Rightarrow 2a = \frac{2}{a} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$$

راه حل دوم ابتدا تابع وارون f را به دست می‌آوریم:

$$y = x - \frac{2}{x}, \quad x < 0 \Rightarrow y = \frac{x^2 - 2}{x} \Rightarrow xy = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - yx - 2 = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 8}}{2} > 0 \quad (\text{غ.ق.ق.}) \\ x = \frac{y - \sqrt{y^2 + 8}}{2} \end{cases}$$

بنابراین $f^{-1}(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 8}}{2}$ طول نقطه برخورد نمودار تابع f^{-1} با

نیمساز ناحیه دوم (خط $y = -x$) از حل معادله $f^{-1}(x) = -x$ به دست می‌آید:

$$\frac{x - \sqrt{x^2 + 8}}{2} = -x \Rightarrow \sqrt{x^2 + 8} = 3x \quad (x > 0)$$

$$x^2 + 8 = 9x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, x = -1 \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

راه حل دوم چون سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ از نقاط $(0, 5)$ ،

$(-2, 5)$ و $(1, 1)$ می‌گذرد، پس سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c - 5$

از نقاط $(0, 0)$ ، $(-2, 0)$ و $(1, 6)$ می‌گذرد و معادله سهمی‌ای که از این نقاط

می‌گذرد به صورت $y = a(x - 0)(x + 2) = a(x^2 + 2x)$ است. این سهمی از

$$6 = a(1 + 2) \Rightarrow a = 2$$

نقطه $(1, 6)$ می‌گذرد. پس

بنابراین معادله سهمی اولیه به صورت $y = 2x^2 + 4x + 5$ است که از نقطه

$(-1, 3)$ می‌گذرد.

راه حل سوم چون عرض نقاط $(-2, 5)$ و $(0, 5)$ یکسان است، پس طول رأس

این سهمی برابر ۱- است. بنابراین معادله سهمی به شکل کلی

$y = m(x + 1)^2 + n$ است. این سهمی از نقاط $(0, 5)$ و $(1, 1)$ می‌گذرد. پس

$$(0, 5) \in \text{سهمی} \Rightarrow m + n = 5, \quad (1, 1) \in \text{سهمی} \Rightarrow 4m + n = 1$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} m + n = 5 \\ 4m + n = 1 \end{cases}$ به دست می‌آید $m = -2$ و $n = 7$.

در نتیجه معادله سهمی به صورت $y = 2(x + 1)^2 + 3$ است که از نقطه

$(-1, 3)$ می‌گذرد.

۲۷۸۵- گزینه ۳) اگر نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را دوازده واحد به راست

ببریم، نمودار تابع $y = \sqrt{x - 12}$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را دو واحد به

بالا انتقال دهیم، نمودار تابع $y = \sqrt{x - 12} + 2$ حاصل می‌شود. نقطه برخورد

نمودار توابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{x - 12} + 2$ مد نظر است که طول آن

از حل معادله $f(x) = g(x)$ به دست می‌آید:

$$\sqrt{x} = \sqrt{x - 12} + 2 \Rightarrow \sqrt{x} - 2 = \sqrt{x - 12} \Rightarrow x + 4 - 4\sqrt{x} = x - 12$$

$$16 = 4\sqrt{x} \Rightarrow 4 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 16$$

پس نقطه مورد نظر $A(16, 4)$ است که فاصله آن از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{16^2 + 4^2} = 4\sqrt{17}$$

توجه این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی رشته تجربی است. چون حل

هندسی معادلات در کتاب درسی رشته تجربی وجود ندارد.

۲۷۸۱- گزینه ۱) نمودار تابع‌های $f(x) = |2x^2 - 4| = 2|x^2 - 2|$ و

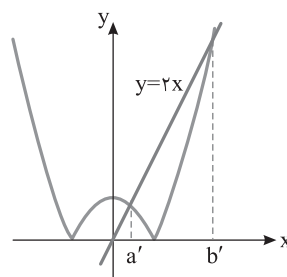
$g(x) = 2x$ به صورت زیر است. واضح است که در بازه (a', b') نمودار تابع f

زیر نمودار تابع g قرار دارد. پس کافی است نقاط a' و b' را معلوم کنیم که

جواب معادله $f(x) = g(x)$ هستند:

$$2|x^2 - 2| = 2x \Rightarrow |x^2 - 2| = x$$

$$x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -1 \quad (\text{غ.ق.ق.}) \\ x^2 - 2 = -x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2 \quad (\text{غ.ق.ق.}) \end{cases}$$



بنابراین بیشترین مقدار $b - a$ وقتی

است که $a = a' = -1$ و $b = b' = 2$

و در نتیجه $b - a = 3$.

توجه این سؤال خارج از مباحث

کتاب درسی رشته تجربی است.

چون حل هندسی معادلات و

نامعادلات در کتاب درسی رشته

تجربی وجود ندارد.

۲۷۸۵- گزینه ۱ راه حل اول توجه کنید که

$$\log_4 3 = \frac{\lambda}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} \log_2 3 = \frac{4}{5} \Rightarrow \log_2 3 = \frac{\lambda}{5}$$

$$\log_{12} 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 12} = \frac{\log_2 3 + \log_2 2}{\log_2 3 + 2 \log_2 2} = \frac{\frac{\lambda}{5} + 1}{\frac{\lambda}{5} + 2} = \frac{13}{18}$$

بنابراین

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\log_4 3 = 0/8 = \frac{4}{5} \Rightarrow 4^{\frac{4}{5}} = 3 \Rightarrow 4^4 = 3^5 \Rightarrow 2^8 = 3^5$$

دقت کنید که این تساوی به صورت تقریبی داده شده است و تساوی درستی نیست. بنابراین

$$\begin{aligned} \log_{12} 6 &= \log_{12} 3 + \log_{12} 2 = \log_{2^2 \times 3} 3 + \log_{2^2 \times 3} 2 \\ &= 4 \log_{(2^4 \times 3^4)} 3 + 5 \log_{(2^5 \times 3^5)} 2 = 4 \log_{(3^5 \times 2^4)} 3 + 5 \log_{(2^5 \times 3^4)} 2 \\ &= 4 \log_{3^4} 3 + 5 \log_{2^4} 2 = \frac{4}{9} \log_3 3 + \frac{5}{18} \log_2 2 = \frac{4}{9} + \frac{5}{18} = \frac{13}{18} \end{aligned}$$

۲۷۸۶- گزینه ۲ از نمودار تابع f معلوم است که $f(-\frac{1}{3}) = 0$ و

بنابراین $f(0) = -2$

$$f(x) = -4 + 2^{ax+b} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = -4 + 2^b = -2 \\ f(-\frac{1}{3}) = -4 + 2^{-\frac{a}{3}+b} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^b = 2 \Rightarrow b = 1 \\ 2^{-\frac{a}{3}+1} = 4 \Rightarrow -\frac{a}{3} + 1 = 2 \Rightarrow a = -3 \end{cases}$$

پس

$$f(x) = -4 + 2^{-3x+1} \Rightarrow f(-\frac{5}{3}) = -4 + 2^6 = 60$$

۲۷۸۷- گزینه ۴ راه حل اول فرض کنید $f^{-1}(2) = a > 0$. در این

$$\frac{2^a + (\frac{1}{2})^a}{2} = 2 \Rightarrow 2^a + \frac{1}{2^a} = 4$$

صورت $f(a) = 2$ و در نتیجهبا فرض $b = 2^a > 0$ معادله به صورت زیر در می آید:

$$b + \frac{1}{b} = 4 \Rightarrow b^2 - 4b + 1 = 0 \Rightarrow b = 2 + \sqrt{3}, b = 2 - \sqrt{3} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

(اگر $b = 2 - \sqrt{3}$ ، آن گاه $a = \log_2(2 - \sqrt{3}) < 0$ که با توجه به دامنه داده

شده قابل قبول نیست.) پس $2^a = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow a = \log_2(2 + \sqrt{3})$

راه حل دوم تابع وارون تابع $f(x) = \frac{2^x + (\frac{1}{2})^x}{2}$ با دامنه $[0, +\infty)$ را

$$y = \frac{2^x + (\frac{1}{2})^x}{2} \Rightarrow 2y = 2^x + \frac{1}{2^x}$$

به دست می آوریم:

اگر فرض کنیم $t = 2^x > 0$ ، آن گاه

$$2y = t + \frac{1}{t} \Rightarrow t^2 - 2yt + 1 = 0 \Rightarrow t = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \Rightarrow 2^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

چون $x \geq 0$ ، پس فقط $y + \sqrt{y^2 - 1}$ قابل قبول است. بنابراین

$$x = \log_2(y + \sqrt{y^2 - 1}) \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

در نتیجه $f^{-1}(2) = \log_2(2 + \sqrt{3})$
۲۷۸۸- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\tan 300^\circ = \tan(360^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 480^\circ = \tan(450^\circ + 30^\circ) = \tan(90^\circ + 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 840^\circ = \sin(720^\circ + 120^\circ) = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین

$$\tan 300^\circ \cos 210^\circ + \tan 480^\circ \sin 840^\circ$$

$$= (-\sqrt{3}) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

۲۷۸۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = a + b \cos x$$

پس ماکزیمم تابع برابر $a + |b|$ است که با توجه به شکل برابر ۳ است. از

طرف دیگر نمودار تابع از نقطه $(\frac{7\pi}{3}, 0)$ عبور می کند. پس

$$a + b \cos \frac{7\pi}{3} = 0 \Rightarrow a + b \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow a + b \cos \frac{\pi}{3} = 0$$

$$a + \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow a = -\frac{b}{2}$$

$$a + |b| = 3 \Rightarrow -\frac{b}{2} + |b| = 3$$

بنابراین

با توجه به نمودار تابع واضح است که b مقداری منفی است. پس

$$-\frac{b}{2} - b = 3 \Rightarrow b = -2$$

۲۷۹۰- گزینه ۴ حداکثر مقدار و حداقل مقدار تابع $y = a \sin(bx) + c$

به ترتیب برابر $|a| + c$ و $-|a| + c$ است که روی شکل برابر ۱ و -3 نشان

$$\begin{cases} |a| + c = 1 \\ -|a| + c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -1 \\ |a| = 2 \end{cases}$$

داده شده است. پس

از طرف دیگر، دوره تناوب تابع برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است که روی شکل برابر

$$\frac{2\pi}{|b|} = 6\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{3}$$

پس نشان داده شده است. پس

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6 \Rightarrow \frac{a}{b} = \pm 6$$

پس

ولی چون نمودار رسم شده در یک همسایگی راست صفر نزولی است، a و b باید

غیرهم علامت باشند. پس $\frac{a}{b} = -6$

۲۷۹۱- گزینه ۴ معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4} - x)$$

بنابراین جواب های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} - x \\ 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi + \pi}{3} \\ x = (2k+1)\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

چون شرط $x \neq k\pi$ قرار داده شده است، پس $x = (2k+1)\pi$ قابل قبول نیست.

۲۷۹۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+2x})^3}{x^2-x} = \frac{x^2+2x}{(x^2-x)^3} = \frac{x(x+2)}{x^3(x-1)^3} = \frac{x+2}{x^2(x-1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x-1)^3 - (2x(x-1)^3 + 3(x-1)^2 x^2)(x+2)}{(x^2(x-1)^3)^2}$$

بنابراین

$$f'(2) = \frac{4 \times 1^3 - (4(1)^3 + 3(1)^2 \times 4)(4)}{(4(1)^3)^2} = -\frac{15}{4}$$

در نتیجه

۲۷۹۶- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = x + \sqrt{4x - x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}} = \frac{\sqrt{4x-x^2} + 2-x}{\sqrt{4x-x^2}}$$

واضح است که $x=0$ و $x=4$ نقاط بحرانی تابع اند ولی چون تابع f در یک همسایگی آن‌ها تعریف نمی‌شود، پس این نقاط اکسترمم نسبی تابع نیستند. بنابراین باید معادله $f'(x)=0$ را حل کنیم تا طول نقاط اکسترمم نسبی به دست آید:

$$\sqrt{4x-x^2} + 2-x = 0 \Rightarrow \sqrt{4x-x^2} = x-2, \quad x > 2$$

$$4x-x^2 = x^2-4x+4 \Rightarrow 2x^2-8x+4=0$$

$$x^2-4x+2=0 \Rightarrow x=2+\sqrt{2}, x=2-\sqrt{2} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

بنابراین نقطه $A(2+\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2})$ نقطه اکسترمم (ماکزیمم) نسبی تابع f است

$$\frac{|2+2\sqrt{2} - (2+\sqrt{2})|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

که فاصله آن از نیمساز ناحیه اول برابر است با ۱

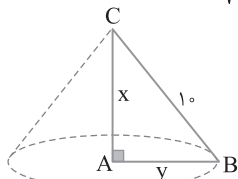
۲۷۹۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $x^2+y^2=1$ پس $y^2=1-x^2$.

اگر مثلث را حول ضلع AC دوران دهیم، مخروطی به دست می‌آید که شعاع قاعده آن برابر y و ارتفاع آن برابر x است، پس حجم حاصل برابر $V = \frac{\pi}{3} y^2 x$ خواهد بود.

بنابراین می‌خواهیم حداکثر مقدار تابع $V(x) = \frac{\pi}{3} x(1-x^2)$ حاصل شود.

$$V(x) = \frac{\pi}{3} (1 \cdot x - x^3) \Rightarrow V'(x) = \frac{\pi}{3} (1-3x^2)$$

$$V'(x)=0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{3} \Rightarrow y = \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{3}}$$



$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{2}$$

بنابراین

۲۷۹۸- گزینه ۴ ابتدا معادله خط BC را به دست می‌آوریم:

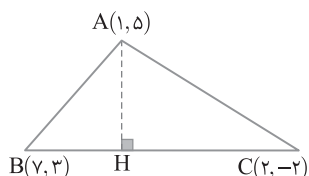
$$m_{BC} = \frac{3-(-2)}{y-2} = 1$$

$$y-y_B = m_{BC}(x-x_B) \Rightarrow y-3 = 1 \times (x-2)$$

پس معادله خط BC به صورت $x-y-1=0$ است. طول ارتفاع AH برابر فاصله

$$\frac{|1-0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

نقطه A از خط BC است که برابر است با $4\sqrt{2}$



۲۷۹۲- گزینه ۳ توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطه $x=-2$ تابع

$y=[x]$ با تابع $y=-3$ برابر است. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{[x]+3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3+3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} 0 = 0$$

۲۷۹۳- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax - \sqrt[3]{x^3-1}}{4x^n - 12} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{4x^n} = \frac{1}{6} \Rightarrow \begin{cases} n=1 \\ a=\frac{1}{3} \end{cases}$$

بنابراین راه حل اول

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[3]{x^3-1}}{4x-12} = \frac{1}{12} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 3\sqrt[3]{x^3-1}}{x-3}$$

$$= \frac{1}{12} \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\lambda x^3 - 27(x^3-1)}{x-3} \right) \times \frac{1}{4x^2 + 6x\sqrt[3]{x^3-1} + 9\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}$$

$$= \frac{1}{12} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\lambda x^2 - 3x - 9)}{x-3}$$

$$\times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{4x^2 + 6x\sqrt[3]{x^3-1} + 9\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}$$

$$= \frac{1}{12} \lim_{x \rightarrow 3} (\lambda x^2 - 3x - 9) \times \frac{1}{36 + 36 + 36}$$

$$= \frac{1}{12} \times (72 - 9 - 9) \times \frac{1}{36 \times 3} = \frac{1}{24}$$

راه حل دوم به کمک قاعده هویتال مقدار حد خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[3]{x^3-1}}{4x-12} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{3} - \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}}{4}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} - \frac{2 \times 3}{3 \times 4}}{4} = \frac{1}{24}$$

توجه این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی رشته تجربی است. چون حد تابع

رادیکالی در بی نهایت در کتاب درسی رشته تجربی وجود ندارد.

۲۷۹۴- گزینه ۳ چون تابع f در نقطه $x=-2$ مشتق پذیر است، پس در

این نقطه پیوسته نیز هست. بنابراین

$$f'_-(-2) = f'_+(-2), \quad f(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-2x} & x \leq -2 \\ -\frac{1}{3}x^2 + bx + c & x > -2 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{5-2x}} & x \leq -2 \\ -x + b & x > -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_-(-2) = -\frac{1}{\sqrt{5+4}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow b+2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = -\frac{7}{3} \\ f'_+(-2) = -(-2) + b = b+2 \end{cases}$$

$$f(-2) = \sqrt{5+4} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \left(-\frac{1}{3}x^2 + bx + c\right) = -2 + 2b + c = c + \frac{\lambda}{3}$$

$$c + \frac{\lambda}{3} = 3 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

۲۸۰۳- گزینه ۳ راه حل اول نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{2x-1}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-1-3x-3}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{x+4}{x+1} > 0$$

$$x \in (-\infty, -4) \cup (-1, +\infty) \quad (1)$$

$$\frac{2x-1}{x+1} > -1 \Rightarrow \frac{2x-1+x+1}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{3x}{x+1} > 0$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \quad (2)$$

از اشتراک (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$x \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} - [-4, 0]$$

راه حل دوم نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$-1 < \frac{2x-1}{x+1} < 3 \Rightarrow -2 < \frac{2x-1}{x+1} - 1 < 2 \Rightarrow -2 < \frac{x-2}{x+1} < 2$$

$$\left| \frac{x-2}{x+1} \right| < 2 \Rightarrow |x-2| < 2|x+1| \Rightarrow x^2 - 4x + 4 < 4x^2 + 8x + 4$$

$$x^2 + 4x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$$

راه حل سوم واضح است که $x=0$ در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینه (۴) جواب نیست. از طرف دیگر، $x=-5$ در نامعادله صدق می‌کند، پس گزینه‌های (۱) و (۲) جواب درست نیستند، بنابراین گزینه (۳) جواب است.

۲۸۰۴- گزینه ۲ چون رأس سهمی نقطه $(-1, 9)$ است، پس معادله آن

به صورت $y = a(x+1)^2 + 9$ است. این سهمی از نقطه $(3, 1)$ می‌گذرد، پس

$$1 = a(3+1)^2 + 9 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

پس معادله سهمی به صورت $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 9$ است که از نقطه $(5, -9)$

می‌گذرد:

$$-\frac{1}{2}(5+1)^2 + 9 = -18 + 9 = -9$$

۲۸۰۵- گزینه ۱ اگر نمودار تابع $y = x^2 - 2x$ ، $(x > 1)$ را نسبت به محور

x قرینه کنیم، نمودار تابع $y = -x^2 + 2x$ به دست می‌آید. اگر نمودار اخیر را

شانزده واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 16$ به دست می‌آید.

نقطه برخورد نمودار تابع اخیر و نمودار تابع اولیه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x^2 - 2x = -x^2 + 2x + 16 \Rightarrow x^2 - 2x - 16 = 0$$

$$(x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 4, x = -2 \quad (\text{غ.ق.})$$

بنابراین باید فاصله نقطه $A(4, 8)$ از مبدأ مختصات را پیدا کنیم که برابر است با

$$OA = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$$

۲۸۰۶- گزینه ۲ در نقاطی که طول آن‌ها عضو مجموعه جواب‌های

نامعادله $4x^4 > (x-1)^2$ باشد، نمودار تابع $y = (x-1)^2$ بالاتر از نمودار تابع

$y = 4x^4$ قرار دارد:

$$4x^4 < (x-1)^2 \Rightarrow (2x)^2 - (x-1)^2 < 0$$

$$(2x^2 + x - 1)(2x^2 - x + 1) < 0$$

عبارت $2x^2 - x + 1$ همواره مثبت است، زیرا $\Delta = 1 - 8 < 0$. بنابراین باید

نامعادله $2x^2 + x - 1 < 0$ را حل کنیم:

$$(x+1)(2x-1) < 0 \Rightarrow -1 < x < \frac{1}{2}$$

۲۷۹۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}-1}{4+\sqrt{3}} \times \frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}-9-4+\sqrt{3}}{16-3} = \frac{13\sqrt{3}-13}{13} = \sqrt{3}-1$$

$$(2-\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} + (2-\sqrt{3})^{-1} = \sqrt{3}-1+2+\sqrt{3} = 2\sqrt{3}+1$$

بنابراین

۲۸۰۰- گزینه ۴ جملات سوم، هفتم و شانزدهم دنباله حسابی را به

ترتیب a ، $a+4d$ و $a+13d$ در نظر می‌گیریم. چون این اعداد جملات

متوالی یک دنباله هندسی‌اند، پس

$$a(a+13d) = (a+4d)^2 \Rightarrow a^2 + 13ad = a^2 + 8ad + 16d^2$$

$$5ad = 16d^2 \Rightarrow a = \frac{16}{5}d$$

(توجه کنید که $d \neq 0$. چون در غیر این صورت، $q=1$ که در گزینه‌ها وجود ندارد.)

بنابراین قدرنسبت دنباله هندسی برابر است با

$$r = \frac{a+4d}{a} = \frac{\frac{16}{5}d+4d}{\frac{16}{5}d} = \frac{36d}{16d} = \frac{9}{4}$$

۲۸۰۱- گزینه ۱ چون باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x-4$ و $x+2$ به

ترتیب ۳ و ۱ است، پس $p(4)=3$ و $p(-2)=1$. باقی‌مانده تقسیم

چندجمله‌ای $A(x) = p(x^2) + 4p(-x)$ بر $x-2$ برابر $A(2)$ است و

برابر است با $A(2) = p(4) + 4p(-2) = 3 + 4 \times 1 = 7$

۲۸۰۲- گزینه ۴ راه حل اول چون معادله دو جواب مثبت دارد، پس

شرایط $\Delta > 0$ ، $\frac{c}{a} > 0$ و $-\frac{b}{a} > 0$ برقرار هستند. در اینجا $a=2$ ، $b=m$ و

$c=m+6$

$$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4 \times 2(m+6) > 0 \Rightarrow m^2 - 8m - 48 > 0$$

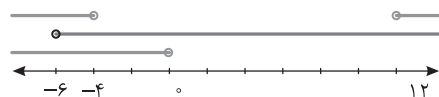
$$(m-12)(m+4) > 0 \Rightarrow m > 12 \text{ یا } m < -4 \quad (1)$$

$$\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m+6}{2} > 0 \Rightarrow m > -6 \quad (2)$$

$$-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{m}{2} > 0 \Rightarrow m < 0 \quad (3)$$

با توجه به شکل زیر، اشتراک مجموعه جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) به صورت

$m \in (-6, -4)$ است.



راه حل دوم توجه کنید که به ازای $m=-5$ معادله به صورت

$$2x^2 - 5x + 1 = 0$$

به وضوح دو جواب مثبت دارد چون $\Delta = 17 > 0$ ، $\frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0$ و $-\frac{b}{a} = \frac{5}{2} > 0$. پس گزینه‌های (۱) و (۲) جواب

نیستند. از طرف دیگر به ازای $m=-1$ معادله به صورت

$$2x^2 - x + 5 = 0$$

در می‌آید که جواب ندارد، زیرا $\Delta = -39 < 0$. پس گزینه (۳) هم جواب

نیست و گزینه (۴) جواب است.

راه حل اول توجه کنید که

$$f(x) = x + 2\sqrt{x} = (\sqrt{x} + 1)^2 - 1$$

بنابراین تابع وارون تابع f به صورت زیر به دست می آید:

$$y = (\sqrt{x} + 1)^2 - 1 \Rightarrow (\sqrt{x} + 1)^2 = y + 1 \quad (y \geq -1)$$

$$\sqrt{x} + 1 = \sqrt{y + 1} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y + 1} - 1$$

$$x = (\sqrt{y + 1} - 1)^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = (\sqrt{x + 1} - 1)^2$$

بنابراین

$$g(x) = f^{-1}(x) = (\sqrt{x + 1} - 1)^2 \quad (x \geq -1)$$

$$g(3) + g(15) = f^{-1}(3) + f^{-1}(15) = 1 + 9 = 10$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$f(x) = x + 2\sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 1 \\ f(9) = 15 \Rightarrow f^{-1}(15) = 9 \end{cases}$$

بنابراین

$$g(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow g(3) + g(15) = f^{-1}(3) + f^{-1}(15) = 1 + 9 = 10$$

راه حل اول ابتدا تابع وارون تابع f را به دست می آوریم:

$$y = x - \frac{1}{2x}, \quad x > 0$$

$$y = \frac{2x^2 - 1}{2x} \Rightarrow 2xy = 2x^2 - 1 \Rightarrow 2x^2 - 2yx - 1 = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{2y + \sqrt{4y^2 + 4}}{4} \\ x = \frac{2y - \sqrt{4y^2 + 4}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 1}}{2} \\ x = \frac{y - \sqrt{y^2 + 1}}{2} < 0 \text{ (غ.ق.ق.)} \end{cases}$$

بنابراین

$$f^{-1}(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2}$$

طول نقطه برخورد نمودار تابع f^{-1} با نیمساز ناحیه دوم (خط $y = -x$) از

حل معادله $f^{-1}(x) = -x$ به دست می آید:

$$\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2} = -x \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = -3x \quad (x < 0)$$

$$x^2 + 1 = 9x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (\text{غ.ق.ق.}), x = -\frac{1}{2}$$

راه حل دوم فرض کنید نقطه $(a, -a)$ نقطه برخورد نمودار تابع f^{-1} با خط

$y = -x$ (نیمساز ناحیه دوم) باشد ($a < 0$). بنابراین

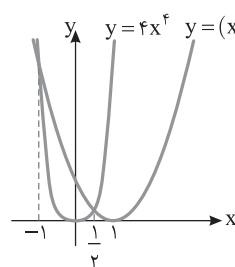
$$f^{-1}(a) = -a \Rightarrow f(-a) = a \Rightarrow -a - \frac{1}{-2a} = a$$

$$2a = \frac{1}{2a} \Rightarrow 4a^2 = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

در بازه $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ چنین اتفاقی می افتد. در نتیجه بیشترین مقدار $b - a$ برابر

$$\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1 \text{ است. توجه کنید که نمودار تابع های } y = (x-1)^2 \text{ و } y = 4x^2$$

به صورت زیر است:



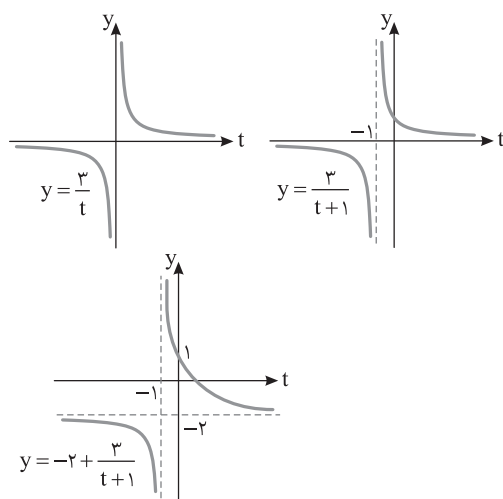
ابتدا توجه کنید که

$$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow -1 < [x] - x \leq 0 \Rightarrow -1 < f(x) \leq 0$$

بنابراین تابع $g \circ f$ با تابع $y = \frac{1-2t}{t+1}$ که دامنه آن بازه $(-1, 0]$ است، برابر است.

برد این تابع را به دست می آوریم:

$$\text{راه حل اول نمودار تابع به صورت زیر رسم می شود: } y = \frac{1-2t}{t+1} = -2 + \frac{3}{t+1}$$



واضح است که برد تابع $g \circ f$ بازه $[1, +\infty)$ است.

راه حل دوم به کمک نابرابری ها برد تابع را به دست می آوریم: $y = -2 + \frac{3}{t+1}$

$$-1 < t \leq 0 \Rightarrow 0 < t+1 \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{t+1} \geq 1 \Rightarrow \frac{3}{t+1} \geq 3 \Rightarrow -2 + \frac{3}{t+1} \geq 1 \Rightarrow y \geq 1$$

بنابراین برد تابع بازه $[1, +\infty)$ است. توجه کنید که به ازای هر $y \geq 1$ مقداری

مانند t وجود دارد که $y = -2 + \frac{3}{t+1}$ این مقدار به صورت زیر به دست می آید:

$$y + 2 = \frac{3}{t+1} \Rightarrow t+1 = \frac{3}{y+2} \Rightarrow t = -1 + \frac{3}{y+2}$$

راه حل سوم تابع $g(t) = \frac{1-2t}{t+1}$ روی بازه $(-1, 0]$ پیوسته و نزولی است.

بنابراین برد آن برابر است با

$$[g(0), \lim_{t \rightarrow (-1)^+} g(t)] = [1, +\infty)$$

اگر فرض کنیم $2^a = b > 0$ ، آن‌گاه

$$b^2 - 4b - 1 = 0 \Rightarrow b = 2 + \sqrt{5}, b = 2 - \sqrt{5} < 0 \quad (\text{غ.ق.})$$

بنابراین

$$2^a = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow a = \log_2(2 + \sqrt{5})$$

ابتدا توجه کنید که **گزینه ۴ - ۲۸۱۳**

$$\tan 285^\circ = \tan(270^\circ + 15^\circ) = -\cot 15^\circ$$

$$\tan(-165^\circ) = \tan(-180^\circ + 15^\circ) = \tan 15^\circ$$

$$\sin 1095^\circ = \sin(1080^\circ + 15^\circ) = \sin(6 \times 180^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ$$

$$\cos 255^\circ = \cos(270^\circ - 15^\circ) = -\sin 15^\circ$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \tan 285^\circ \tan(-165^\circ) - \sin 1095^\circ \cos 255^\circ \\ &= (-\cot 15^\circ)(\tan 15^\circ) - (\sin 15^\circ)(-\sin 15^\circ) \\ &= -1 + \sin^2 15^\circ = -\cos^2 15^\circ \end{aligned}$$

با توجه به شکل معلوم است که نمودار تابع **گزینه ۳ - ۲۸۱۴**

$$f(x) = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3}) \quad \text{از نقطه } (\frac{\pi}{3}, 0) \text{ می‌گذرد و حداکثر مقدار آن برابر}$$

$\frac{3}{2}$ است. پس

$$f(\frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow a + b \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow a + b \cos \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow a + \frac{b}{2} = 0$$

$$a = -\frac{b}{2} \Rightarrow a + |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{b}{2} + |b| = \frac{3}{2}$$

همچنین با توجه به وضعیت نمودار واضح است که b باید منفی باشد. پس

$$-\frac{b}{2} - b = \frac{3}{2} \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

با توجه به نمودار واضح است که کمترین مقدار تابع برابر **گزینه ۱ - ۲۸۱۵**

$$-3 \text{ است، پس } -|a| + c = -3. \text{ از طرف دیگر نمودار تابع از نقطه } (\frac{\pi}{6}, 1)$$

عبور می‌کند، پس $1 = a \sin(\frac{b\pi}{6}) + c$. همچنین دوره تناوب تابع برابر

$$\frac{2\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \text{ است. پس } \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \text{ و در نتیجه } |b| = 3. \text{ با توجه به نمودار}$$

معلوم است که a و b باید هم‌علامت باشند، پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول اگر a و b مثبت باشند، آن‌گاه $b = 3$ و در نتیجه

$$\begin{cases} -a + c = -3 \\ a \sin \frac{\pi}{2} + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + c = -3 \\ a + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

حالت دوم اگر a و b منفی باشند، آن‌گاه $b = -3$ و در نتیجه

$$\begin{cases} a + c = -3 \\ a \sin(-\frac{\pi}{2}) + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = -3 \\ -a + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ c = -1 \end{cases}$$

راه حل اول ابتدا توجه کنید که $\log_3 2 = \frac{5}{8}$ ، پس **گزینه ۲ - ۲۸۱۰**

$$\log_3 3 = \frac{8}{5} \text{ بنابراین}$$

$$\log_{18} 8 = \frac{\log_3 8}{\log_3 18} = \frac{3 \log_3 2}{\log_3 9 + \log_3 2} = \frac{3}{2 \log_3 3 + 1} = \frac{3}{2 \times \frac{8}{5} + 1} = \frac{5}{7}$$

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\log_3 2 = \frac{5}{8} \Rightarrow 3^{\frac{5}{8}} = 2 \Rightarrow 3^5 = 2^8 \Rightarrow 3^{10} = 2^{16}$$

دقت کنید که این تساوی به صورت تقریبی داده شده است و تساوی درستی نیست.

بنابراین

$$\begin{aligned} \log_{18} 8 &= \log_{3^2 \times 2} 2^3 = 3 \log_{3^2 \times 2} 2 = 3 \times 5 \log_{3^{10} \times 2^8} 2 \\ &= 15 \log_{3^{10} \times 2^8} 2 = 15 \log_{3^{10}} 2 = \frac{15}{21} \log_3 2 = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

با توجه به نمودار تابع واضح است که $f(0) = -6$ و **گزینه ۱ - ۲۸۱۱**

$$f(\frac{1}{2}) = 0 \text{ بنابراین}$$

$$f(x) = -9 + (\frac{1}{3})^{ax+b}$$

$$\begin{cases} f(0) = -9 + (\frac{1}{3})^b = -6 \\ f(\frac{1}{2}) = -9 + (\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}a+b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{-b} = 3 \Rightarrow b = -1 \\ 3^{-\frac{a}{2}+1} = 9 \Rightarrow -\frac{a}{2} + 1 = 2 \Rightarrow a = -2 \end{cases}$$

پس

$$f(x) = -9 + (\frac{1}{3})^{-2x-1} \Rightarrow f(2) = -9 + (\frac{1}{3})^{-5} = 234$$

$$2^x - (\frac{1}{2})^x \text{ راه حل اول تابع وارون تابع } f(x) = \frac{2^x - (\frac{1}{2})^x}{2} \text{ **گزینه ۳ - ۲۸۱۲**}$$

به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{2^x - (\frac{1}{2})^x}{2} \Rightarrow 2y = 2^x - \frac{1}{2^x}$$

اگر فرض کنیم $t = 2^x > 0$ ، آن‌گاه

$$2y = t - \frac{1}{t} \Rightarrow t^2 - 2yt - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = y + \sqrt{y^2 + 1} \\ t = y - \sqrt{y^2 + 1} < 0 \end{cases} \quad (\text{غ.ق.})$$

$$2^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Rightarrow x = \log_2(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

بنابراین

$$f^{-1}(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Rightarrow f^{-1}(2) = \log_2(2 + \sqrt{5})$$

راه حل دوم فرض کنید $f^{-1}(2) = a$ پس $f(a) = 2$ و در نتیجه

$$\frac{2^a - (\frac{1}{2})^a}{2} = 2 \Rightarrow 2^a - \frac{1}{2^a} = 4 \Rightarrow (2^a)^2 - 4 \times 2^a - 1 = 0$$

۲۸۱۹- گزینه ۴ سؤال با این ادبیات دارای بی‌شمار جواب است. کافی است

معادله دو خط را که از نقطه $A(2, m)$ می‌گذرند، بنویسیم که هر کدام بر نمودار یکی از تابع‌های داده شده مماس باشند. بی‌شمار نقطه مانند A می‌توان پیدا کرد و بی‌شمار مقدار برای a و b وجود دارد. ولی احتمالاً منظور طراح سؤال این بوده که

نمودار دو تابع $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ و $g(x) = ax^2 + bx$ از نقطه $(2, m)$ بگذرند و

یک خط در این نقطه بر هر دو نمودار مماس باشد. در این صورت

$$f(2) = g(2) \Rightarrow 4 = 4a + 2b \Rightarrow 4a = 4 - 2b$$

$$f'(2) = g'(2) \Rightarrow -3 = 4a + b \Rightarrow 4a = -3 - b$$

$$4 - 2b = -3 - b \Rightarrow b = 7$$

بنابراین

توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$g(x) = ax^2 + bx \Rightarrow g'(x) = 2ax + b$$

۲۸۲۰- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{(2x-x^2)^2}{3x+5}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{2(2x-x^2)'}{3x+5}}{3\sqrt[3]{\frac{2x-x^2}{3x+5}}}$$

از طرف دیگر،

$$y = \frac{2x-x^2}{3x+5} \Rightarrow y' = \frac{(2-2x)(3x+5) - 3(2x-x^2)}{(3x+5)^2}$$

بنابراین

$$f'(x) = \frac{2((2-2x)(3x+5) - 3(2x-x^2))}{3(3x+5)^2 \sqrt[3]{\frac{2x-x^2}{3x+5}}}$$

$$f'(-2) = \frac{2((2+4)(-6+5) - 3(-4-4))}{3(-6+5)^2 \sqrt[3]{\frac{-4-4}{-6+5}}} = 6$$

۲۸۲۱- گزینه ۱ ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+1) - 2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2(x^2 - 4x - 1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = 2 + \sqrt{5}, x = 2 - \sqrt{5}$$

اکنون به جدول تعیین علامت $f'(x)$ توجه کنید:

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{5}$	$2 + \sqrt{5}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-
		min	max	

بنابراین $x = 2 + \sqrt{5}$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است. مقدار ماکزیمم

نسبی تابع f برابر است با

$$f(2 + \sqrt{5}) = \frac{(2 + \sqrt{5})^2 + 2(2 + \sqrt{5}) - 3}{(2 + \sqrt{5})^2 + 1} = \frac{4 + 5 + 4\sqrt{5} + 4 + 2\sqrt{5} - 3}{4 + 5 + 4\sqrt{5} + 1}$$

$$= \frac{6\sqrt{5} + 10}{4\sqrt{5} + 10} = \frac{3\sqrt{5} + 5}{2\sqrt{5} + 5} \times \frac{2\sqrt{5} - 5}{2\sqrt{5} - 5} = \frac{30 - 15\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 25}{20 - 25} = \frac{5 - 5\sqrt{5}}{-5} = \sqrt{5} - 1$$

۲۸۱۶- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$4 \sin 3x \cos 3x = 1 \Rightarrow 2 \sin 6x = 1 \Rightarrow \sin 6x = \sin \frac{\pi}{6}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 6x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{36} \\ x = \frac{k\pi}{3} + \frac{5\pi}{36} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ به ازای $k=0$ و $k=1$ حاصل می‌شوند:

$$x = \frac{\pi}{36}, x = \frac{5\pi}{36}, x = \frac{13\pi}{36}, x = \frac{17\pi}{36}$$

بنابراین معادله در بازه $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ چهار جواب دارد.

۲۸۱۷- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $x \neq \frac{\pi}{4}$ ، آن‌گاه

$$\frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} = \frac{(\sin x - 1)(2 \sin x + 1)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{-2 \sin x - 1}{1 + \sin x}$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-2 \sin x - 1}{1 + \sin x} = \frac{-2 - 1}{1 + 1} = -\frac{3}{2}$$

برای اینکه تابع f در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته باشد، باید

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

۲۸۱۸- گزینه ۲ چون حد تابع f در بی‌نهایت برابر ۲ شده است، پس

درجه چندجمله‌ای صورت کسر $f(x)$ با درجه چندجمله‌ای مخرج آن برابر

است. اکنون دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد.

حالت اول $a=0$ و $n=2$. در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 6x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{\sqrt{x^2}} = -\frac{2}{\sqrt{1}} = -2$$

بنابراین حالت اول قابل قبول نیست.

حالت دوم $n=3$ و $a \neq 0$. در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{ax^3 + \sqrt{x^2 - 2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{ax^3} = \frac{4}{a} = 2 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^3 + \sqrt{x^2 - 2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(2x^2-2x-1)}{(2x-1)(x^2+4x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2 + 4x + 2} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{17}{4}} = -\frac{3}{17}$$

۲۸۲۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{array} \right| &= (\log 5)^2 - (\log 2)^2 \\ &= (\log 5 + \log 2)(\log 5 - \log 2) \\ &= \log 10 \times \log \frac{5}{2} = 1 \times \log \frac{5}{2} = \log_{10} \frac{5}{2} \\ \text{بنابراین معادله مورد نظر به صورت زیر درمی آید:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_{10} \frac{5}{2} \times \log_{\frac{5}{2}} (3x-2) &= 1 \\ \log_{10} (3x-2) &= 1 \Rightarrow 3x-2=10 \Rightarrow 3x=12 \Rightarrow x=4 \end{aligned}$$

۲۸۲۶- گزینه ۴ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} \log_{21} 1323 &= \log_{21} 9 \times 147 = \log_{21} 9 + \log_{21} 147 \\ &= 2 \log_{21} 3 + \log_{21} 147 \end{aligned}$$

بنابراین عبارت مورد نظر به صورت زیر درمی آید:

$$\begin{aligned} &(\log_{21} 3)^2 + \log_{21} 147 (2 \log_{21} 3 + \log_{21} 147) \\ &= (\log_{21} 3)^2 + 2 \log_{21} 3 \log_{21} 147 + (\log_{21} 147)^2 \\ &= (\log_{21} 3 + \log_{21} 147)^2 = (\log_{21} (3 \times 147))^2 = (\log_{21} 441)^2 \\ &= (\log_{21} 21^2)^2 = (2 \log_{21} 21)^2 = (2 \times 1)^2 = 4 \end{aligned}$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$\begin{aligned} \log_{21} 3 &= \log_{21} \frac{21}{7} = \log_{21} 21 - \log_{21} 7 = 1 - \log_{21} 7 \\ \log_{21} 147 &= \log_{21} (21 \times 7) = \log_{21} 21 + \log_{21} 7 = 1 + \log_{21} 7 \\ \log_{21} 1323 &= \log_{21} (21^2 \times 3) = 2 \log_{21} 21 + \log_{21} 3 = 2 + \log_{21} 3 \end{aligned}$$

پس عبارت مورد نظر به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &(1 - \log_{21} 7)^2 + (1 + \log_{21} 7)(2 + \log_{21} 3) \\ &= 1 + (\log_{21} 7)^2 - 2 \log_{21} 7 + 2 + \log_{21} 3 \\ &\quad + 2 \log_{21} 7 + \log_{21} 7 \log_{21} 3 \\ &= 3 + \log_{21} 3 + (\log_{21} 7)(\log_{21} 7 + \log_{21} 3) \\ &= 3 + \log_{21} 3 + \log_{21} 7 \log_{21} 21 \\ &= 3 + \log_{21} 3 + \log_{21} 7 = 3 + \log_{21} 21 = 3 + 1 = 4 \end{aligned}$$

۲۸۲۷- گزینه ۲ توجه کنید که اگر $x > \frac{3}{2}$ ، آن گاه عبارت $2x-3$ مثبت

است و در نتیجه نامعادله مورد نظر به صورت زیر است:

$$((m^2-1)x^2 - 4mx + 4)(x-3\sqrt{x}+2) > 0$$

از طرف دیگر،

$$A = x - 3\sqrt{x} + 2 = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)$$

بنابراین علامت عبارت A با شرط $x > \frac{3}{2}$ به صورت زیر است:

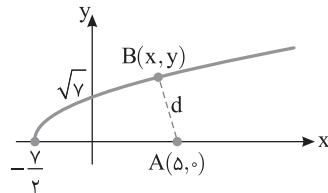
x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	4	$+\infty$
A		-	+	

۲۸۲۲- گزینه ۱ مطابق شکل زیر فاصله نقطه A از نقطه B روی نمودار

تابع $y = \sqrt{2x+7}$ برابر است با

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (\sqrt{2x+7}-0)^2} \\ &= \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 2x + 7} = \sqrt{x^2 - 8x + 32} \end{aligned}$$

کمترین مقدار عبارت $x^2 - 8x + 32$ به ازای $x=4$ به دست می آید که برابر ۱۶ است. پس کمترین مقدار d برابر ۴ است.



۲۸۲۳- گزینه ۲ ابتدا رئوس مثلث را مشخص می کنیم.

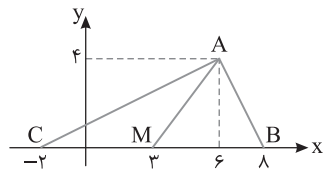
$$\begin{cases} y=0 \\ 2y-x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-2 \end{cases}, \quad \begin{cases} y=0 \\ y+2x=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y-x=2 \\ y+2x=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$$

پس مثلث مورد نظر به صورت زیر است و اندازه میانه AM را می خواهیم.

چون M نقطه $(3,0)$ است، پس

$$AM = \sqrt{(6-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$



۲۸۲۴- گزینه ۴ اگر فرض کنیم $t = x^2 \geq 0$ ، معادله مورد نظر به صورت

$$t^2 - 7t - 5 = 0 \text{ درمی آید. جواب های این معادله به صورت زیر هستند:}$$

$$t = \frac{7 + \sqrt{69}}{2}, \quad t = \frac{7 - \sqrt{69}}{2} < 0 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

چون جواب های معادله بالا باید نامنفی باشند، پس فقط جواب $t = \frac{7 + \sqrt{69}}{2}$

قابل قبول است. پس جواب های معادله اصلی به صورت زیر هستند:

$$x_1 = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}}$$

پس حاصل ضرب و مجموع جواب های معادله مورد نظر برابر است با

$$\begin{aligned} P &= x_1 x_2 = -\left(\sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}}\right)^2 = -\frac{7 + \sqrt{69}}{2} \\ S &= x_1 + x_2 = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}} - \sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}} = 0 \end{aligned}$$

بنابراین مقدار عبارت خواسته شده برابر است با

$$\begin{aligned} 2P^2 - 3SP + 2S &= 2P^2 - 0 + 0 = 2\left(-\frac{7 + \sqrt{69}}{2}\right)^2 \\ &= 2\left(\frac{49 + 69 + 14\sqrt{69}}{4}\right) = 59 + 7\sqrt{69} \end{aligned}$$

۲۸۳- گزینه ۴) معادله را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\begin{aligned}(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)(1+\cos 8\alpha) &= \frac{1}{8} \\ (2\cos^2 \alpha)(2\cos^2 2\alpha)(2\cos^2 4\alpha) &= \frac{1}{8} \\ (\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha)^2 &= \frac{1}{64} \\ \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha}{\sin \alpha}\right)^2 &= \frac{1}{64} \\ \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha\right)^2 &= \frac{1}{64} \sin^2 \alpha \\ \left(\frac{1}{4} \sin 4\alpha \cos 4\alpha\right)^2 &= \frac{1}{64} \sin^2 \alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{8} \sin 8\alpha\right)^2 = \frac{1}{64} \sin^2 \alpha \\ \sin^2 8\alpha &= \sin^2 \alpha \Rightarrow \frac{1-\cos 16\alpha}{2} = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \cos 16\alpha = \cos 2\alpha\end{aligned}$$

بنابراین جواب های معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} 16\alpha = 2k\pi + 2\alpha \\ 16\alpha = 2k\pi - 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{k\pi}{7} \\ \alpha = \frac{k\pi}{9} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین بزرگ ترین جواب معادله که در بازه $[0, \pi]$ قرار دارد، برابر $\frac{8\pi}{9}$ است.

۲۸۳۱- گزینه ۳) فرض کنید $P(x) = ax^2 + bx + c$ در این صورت

$P'(x) = 2ax + b$ اگر $P(x)$ را بر $P'(x)$ تقسیم کنیم و خارج قسمت برابر

$\frac{1}{2}x + 1$ و باقی مانده برابر -2 باشد، آن گاه تساوی زیر همواره برقرار است:

$$P(x) = P'(x)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 2 \Rightarrow ax^2 + bx + c = (2ax + b)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 2$$

این تساوی را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + \left(2a + \frac{b}{2}\right)x + b - 2$$

برای این که تساوی بالا به ازای هر مقدار x برقرار باشد، باید

$$\begin{cases} 2a + \frac{b}{2} = b \Rightarrow b = 4a \\ c = b - 2 \Rightarrow c = 4a - 2 \end{cases}$$

بنابراین چندجمله ای $P(x)$ برابر $ax^2 + 4ax + 4a - 2$ است که مجموع

ضرایب آن برابر است با

$$a + 4a + 4a - 2 = 9a - 2$$

واضح است که کمترین مقدار این مجموع وقتی a عددی طبیعی است، برابر ۷

است که به ازای $a=1$ به دست می آید.

۲۸۳۲- گزینه ۱) ابتدا توجه کنید که

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1 \Rightarrow a_{100} = \frac{1}{a_{99}} + 1 \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{1}{a_{99}} + 1$$

$$\frac{1}{a_{99}} = \frac{k-m}{m} \Rightarrow a_{99} = \frac{m}{k-m}$$

بنابراین

$$a_{99} = \frac{1}{a_{98}} + 1 \Rightarrow \frac{m}{k-m} = \frac{1}{a_{98}} + 1 \Rightarrow \frac{1}{a_{98}} = \frac{m}{k-m} - 1 = \frac{2m-k}{k-m}$$

$$a_{98} = \frac{k-m}{2m-k}$$

چون علامت A روی بازه $(2, 4)$ منفی است و این بازه مجموعه جواب های

نامعادله است، پس علامت عبارت $B = (m^2 - 1)x^2 - 4mx + 4$ در این بازه

باید منفی باشد تا حاصل ضرب AB مثبت شود. همچنین علامت A روی بازه

$(\frac{3}{2}, 2)$ منفی است و این بازه جواب نامعادله نیست. پس علامت B روی این

بازه باید مثبت باشد. بنابراین $x=2$ باید ریشه B باشد. پس

$$(m^2 - 1)4 - 8m + 4 = 0 \Rightarrow m^2 - 2m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 0 \end{cases}$$

اگر $m=2$ ، آن گاه $B = (3x^2 - 8x + 4) = (3x - 2)(x - 2)$

در این صورت علامت B روی بازه $(2, 4)$ مثبت است که قابل قبول نیست.

اگر $m=0$ ، آن گاه $B = -x^2 + 4 = -(x - 2)(x + 2)$

در این صورت علامت B روی بازه $(2, 4)$ منفی است و قابل قبول است.

۲۸۲۸- گزینه ۲) توجه کنید که

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2(\frac{1}{4})}{1 - (\frac{1}{4})^2} = \frac{8}{15}$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2(\frac{1}{4})}{1 + (\frac{1}{4})^2} = \frac{8}{17}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - (\frac{1}{4})^2}{1 + (\frac{1}{4})^2} = \frac{15}{17}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\frac{8}{15} - \frac{8}{17}}{\frac{8}{17} - \frac{15}{17}} = -\frac{16}{105}$$

۲۸۲۹- گزینه ۱) راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned}f(\alpha) &= 4 \sin \alpha \cos 2\alpha + 2 \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha (2 \cos 2\alpha + 1) = 2 \sin \alpha (\cos 2\alpha + 1 + \cos 2\alpha) \\ &= 2 \sin \alpha (\cos 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha) = 2 (\sin \alpha \cos 2\alpha + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha) \\ &= 2 (\sin \alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha) = 2 \sin (\alpha + 2\alpha) = 2 \sin 3\alpha\end{aligned}$$

بنابراین

$$f\left(\frac{4}{9}\pi\right) = 2 \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = 2 \sin\left(1\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -2 \sin \frac{\pi}{3} = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$\begin{aligned}f(\alpha) &= 4 \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha = 4 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha \\ &= 6 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha = 2 (3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) = 2 \sin 3\alpha\end{aligned}$$

بنابراین

$$f\left(\frac{4}{9}\pi\right) = 2 \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -2 \sin \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

۲۸۳۳- گزینه ۱

ده جمله اول دنباله را پیدا می‌کنیم.

$$a_n = \begin{cases} 3^k & n=3k \\ -2k+4 & n=3k+1 \\ \left[\frac{n}{k+2}\right]+a & n=3k+2 \end{cases}$$

$$k=0 \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 2^0 = 1 \\ a_1 = -2 \times 0 + 4 = 4 \\ a_2 = \left[\frac{3 \times 0 + 2}{0+2}\right] + a = 1 + a \end{cases}$$

$$k=1 \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 2^1 = 2 \\ a_4 = -2 \times 1 + 4 = 2 \\ a_5 = \left[\frac{3 \times 1 + 2}{1+2}\right] + a = 1 + a \end{cases}$$

$$k=2 \Rightarrow \begin{cases} a_6 = 2^2 = 4 \\ a_7 = -2 \times 2 + 4 = 0 \\ a_8 = \left[\frac{3 \times 2 + 2}{2+2}\right] + a = 2 + a \end{cases}$$

$$k=3 \Rightarrow a_9 = 2^3 = 8$$

مجموع ده جمله اول دنباله برابر ۱۹ است. پس

$$1+4+1+a+2+2+1+a+4+0+2+a+8=19 \Rightarrow 3a+25=19 \Rightarrow a=-2$$

بنابراین اگر $n=3k+2$ ، آن‌گاه

$$a_n = \left[\frac{n}{k+2}\right] + a = \left[\frac{3k+2}{k+2}\right] - 2 = \left[3 - \frac{4}{k+2}\right] - 2 = 1 + \left[\frac{-4}{k+2}\right]$$

$$a_2 = -1, a_5 = -1, a_8 = a_{11} = a_{14} = a_{17} = a_{20} = a_{23} = a_{26} = a_{29} = 0$$

بنابراین مجموع جملات بالا برابر ۲- است.

۲۸۳۴- گزینه ۴

اگر فرض کنیم $t = \sqrt[3]{9 \cos^2 x - 1}$ ، آن‌گاه ضابطه تابع f

به صورت $y = 2^t - 2^{-t}$ در می‌آید. از طرف دیگر،

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 9 \cos^2 x \leq 9 \Rightarrow -1 \leq 9 \cos^2 x - 1 \leq 8$$

$$-1 \leq \sqrt[3]{9 \cos^2 x - 1} \leq 2 \Rightarrow -1 \leq t \leq 2$$

بنابراین باید برد تابع با ضابطه $f(t) = 2^t - 2^{-t}$ و دامنه $[-1, 2]$ را به دست

بیاوریم. توجه کنید که تابع $y = 2^t$ اکیداً صعودی است. پس تابع $y = 2^{-t}$

اکیداً نزولی است و تابع $y = -2^{-t}$ اکیداً صعودی است. پس تابع

$y = 2^t - 2^{-t}$ نیز اکیداً صعودی است. بنابراین

$$-1 \leq t \leq 2 \Rightarrow f(-1) \leq f(t) \leq f(2) \Rightarrow -\frac{3}{4} \leq f(t) \leq \frac{15}{4} \Rightarrow R_f = \left[-\frac{3}{4}, \frac{15}{4}\right]$$

بنابراین $a = -\frac{3}{4}$ و $b = \frac{15}{4}$ و در نتیجه $b - a = \frac{21}{4}$.

۲۸۳۵- گزینه ۱

راه حل اول دامنه تابع f مجموعه جواب‌های نامعادله

$$\frac{1}{6 + \sqrt{|x|} - |x|} > 0 \text{ است. اگر فرض کنیم } \sqrt{|x|} = t \geq 0, \text{ آن‌گاه نامعادله}$$

به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{6 + t - t^2} > 0 \Rightarrow 6 + t - t^2 > 0 \Rightarrow t^2 - t - 6 < 0 \Rightarrow (t-3)(t+2) < 0$$

مثبت

$$t-3 < 0 \Rightarrow 0 \leq t < 3$$

بنابراین باید نامعادله $0 \leq \sqrt{|x|} < 3$ را حل کنیم. نابرابری $0 \leq \sqrt{|x|}$ به ازای

هر مقدار x برقرار است. پس باید نامعادله $\sqrt{|x|} < 3$ را حل کنیم.

$$\sqrt{|x|} < 3 \Rightarrow |x| < 9 \Rightarrow -9 < x < 9$$

راه حل دوم واضح است که $x = -4$ در دامنه تابع قرار دارد.

$$f(-4) = \log_6 \left(\frac{1}{6 + \sqrt{4} - 4} \right) = \log_6 \frac{1}{4}$$

عدد -4 فقط در بازه $(-9, 9)$ قرار دارد و عضو بازه‌های دیگر گزینه‌ها نیست.

پس گزینه (۱) درست است.

۲۸۳۶- گزینه ۳

اگر نمودار تابع $y = \sqrt{4-x}$ را k واحد در راستای قائم

انتقال دهیم، نمودار تابع $y = \sqrt{4-x} + k$ به دست می‌آید و اگر نمودار

به دست آمده را $k-2$ واحد در راستای افقی انتقال دهیم، نمودار تابع زیر

به دست می‌آید:

$$y = \sqrt{4 - (x - (k-2))} + k = \sqrt{k+2-x} + k = f(x)$$

چون نمودار تابع f نمودار تابع وارونش را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند،

پس اگر طول نقطه تقاطع a باشد، آن‌گاه

$$f(a) = 1 \Rightarrow \sqrt{k+2-a} + k = 1$$

$$\sqrt{k+2-a} = 1-k \xrightarrow{1-k \geq 0} a = k+2 - (1-k)^2$$

$$f^{-1}(a) = 1 \Rightarrow f(1) = a \Rightarrow \sqrt{k+2-1} + k = a \xrightarrow{k \geq -1} a = \sqrt{k+1} + k$$

توجه کنید که تساوی‌های فوق فقط برای $-1 \leq k \leq 1$ می‌توانند برقرار باشند.

$$k+2 - (1-k)^2 = \sqrt{k+1} + k \Rightarrow 1+2k-k^2 = \sqrt{k+1}$$

با شرط $0 \leq 1+2k-k^2$ ، یعنی $1-\sqrt{2} \leq k \leq 1+\sqrt{2}$ ، طرفین را به توان دو

می‌رسانیم و معادله را ساده می‌کنیم:

$$k^4 - 4k^3 + 2k^2 + 3k = 0 \Rightarrow k(k^3 - 4k^2 + 2k + 3) = 0$$

$$k(k-3)(k^2-k-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=3 \\ k=\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

چون $-1 \leq k \leq 1$ و $1-\sqrt{2} \leq k \leq 1+\sqrt{2}$ ، پس $1-\sqrt{2} \leq k \leq 1$ ، پس فقط

$k=0$ قابل قبول است. بنابراین $f(x) = \sqrt{2-x}$ و طول نقطه برخورد نمودار

تابع $y = f(x) - 1$ با محور طول‌ها به صورت زیر است:

$$y = 0 \Rightarrow f(x) - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{2-x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

اکنون توجه کنید که اگر $n > 4$ ، آن گاه حد بالا نامتناهی است و نمی تواند برابر a باشد. اگر $n = 4$ ، آن گاه حد بالا برابر $\frac{1}{4}$ است و در نتیجه $a = \frac{1}{4}$ و $a + n = \frac{17}{4}$. اگر $n < 4$ ، آن گاه حد بالا برابر صفر است و در نتیجه $a = 0$ و $a + n < 4$. پس $a + n$ می تواند تمام مقادیر مجموعه $\{\frac{17}{4}\} \cup (-\infty, 4)$ را داشته باشد.

۲۸۴۰- گزینه ۱ توجه کنید که توابع $y = \frac{3}{x^2}$ و $y = \frac{-2}{x^2}$ روی بازه

$(-\infty, 0)$ به ترتیب اکیدا صعودی و اکیدا نزولی هستند. پس اگر $x \rightarrow (-\frac{1}{4})^-$ ، آن گاه

$$\frac{3}{x^2} \rightarrow 12^-, \quad \frac{-2}{x^2} \rightarrow (-8)^+$$

بنابراین در یک همسایگی چپ $x = -\frac{1}{4}$ ، توابع $y = [\frac{3}{x^2}]$ و $y = [\frac{-2}{x^2}]$

به ترتیب با تابع های $y = 11$ و $y = -8$ برابرند. پس

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{4})^-} \frac{10x - 5 + [\frac{3}{x^2}]}{16x - [-\frac{2}{x^2}]} &= \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{4})^-} \frac{10x - 5 + 11}{16x - (-8)} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{4})^-} \frac{10x + 6}{16x + 8} = -\infty \end{aligned}$$

۲۸۴۱- گزینه ۴ راه حل اول چون تابع f در دو نقطه ناپیوسته است، پس

مخرج $f(x)$ دو ریشه دارد. چون تابع f دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد، پس یا هر دو مجانب آن قائم هستند و مجانب افقی ندارد یا یک مجانب قائم و

یک مجانب افقی دارد. اگر $a = 0$ ، آن گاه $f(x) = \frac{-bx^2 + 2}{-bx + 2}$ که در این صورت

مخرج $f(x)$ فقط یک ریشه دارد و قابل قبول نیست (واضح است که $b \neq 0$).

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^3}{ax^3} = 1 \text{ آن گاه } a \neq 0$$

یعنی خط $y = 1$ مجانب افقی تابع است. پس این تابع فقط یک مجانب قائم دارد،

یعنی یکی از ریشه های مخرج $f(x)$ ریشه صورت آن نیز هست. اگر این ریشه

$x = n$ باشد، آن گاه

$$\begin{cases} an^3 - bn^2 + 2 = 0 \\ an^3 - bn + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow bn^2 - bn = 0 \Rightarrow bn(n-1) = 0$$

چون $b \neq 0$ و $n \neq 0$ ، پس $n = 1$ ، در نتیجه $a - b + 2 = 0 \Rightarrow b = a + 2$

اکنون توجه کنید که مخرج $f(x)$ علاوه بر $x = 1$ یک ریشه مضاعف دارد. پس

$$ax^3 - bx + 2 = ax^3 - (a+2)x + 2 \Rightarrow ax(x^2 - 1) - 2(x-1) = 0$$

$$(x-1)(a(x^2 + x) - 2) = 0 \Rightarrow (x-1)(ax^2 + ax - 2) = 0$$

پس معادله $ax^2 + ax - 2 = 0$ ریشه مضاعف دارد، یعنی

$$\Delta = a^2 + 8a = 0 \xrightarrow{a \neq 0} a = -8, b = -6$$

راه حل دوم مقادیر a و b را از گزینه ها در ضابطه f قرار دهید و درست بودن

شرایط مسئله را بررسی کنید.

۲۸۳۷- گزینه ۳ ابتدا توابع fog و gof را معین می کنیم.

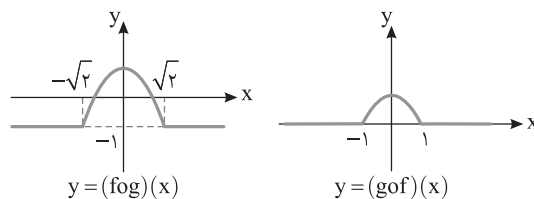
$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(1-x^2) = \begin{cases} -1 & 1-x^2 < -1 \\ 1-x^2 & -1 \leq 1-x^2 \leq 1 \\ 1 & 1-x^2 > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -1 & x^2 > 2 \\ 1-x^2 & 0 \leq x^2 \leq 2 \\ 1 & x^2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & x > \sqrt{2} \text{ یا } x < -\sqrt{2} \\ 1-x^2 & -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ 1 & x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = 1-f^2(x) = \begin{cases} 1-(-1)^2 & x < -1 \\ 1-x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 1-1^2 & x > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & x < -1 \text{ یا } x > 1 \\ 1-x^2 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع های fog و gof به صورت زیر است و هر کدام از آن ها در دو نقطه مشتق پذیر نیستند.

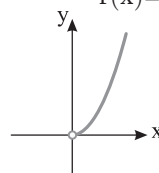


۲۸۳۸- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که ضابطه تابع f به صورت زیر است:

$$f(x) = 9^{\log_3 x} = (3^2)^{\log_3 x} = (3^{\log_3 x})^2 = x^2$$

از طرف دیگر، دامنه تابع f بازه $(0, +\infty)$ است.

پس نمودار تابع f به صورت مقابل است:



۲۸۳۹- گزینه ۶ توجه کنید که اگر $x \rightarrow 0^+$ ، آن گاه $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow 1$

و $\sqrt{2x} \rightarrow 0^+$. بنابراین می توانیم از هم ارزی های زیر استفاده کنیم:

$$\alpha \rightarrow 0: \quad \tan \alpha \sim \alpha, \quad 1 - \cos \alpha \sim \frac{1}{2} \alpha^2$$

در این صورت حد مورد نظر به صورت زیر درمی آید:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1)^2}{(\frac{1}{2}(\sqrt{2x})^2)^n} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}})^2}{x^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1-\sqrt{1-x^2})^2}{x^n} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1-(1-x^2))^2}{x^n} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1+\sqrt{1-x^2})^2} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{n-4}} \times \frac{1}{(1+1)^2} \times \frac{1}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{4x^{n-4}} \end{aligned}$$

۲۸۴۵- گزینه ۱ مشتق تابع f را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^f}{x^3 - 8}, D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$f'(x) = \frac{f x^f (x^3 - 8) - 3x^2 (x^f)}{(x^3 - 8)^2} = \frac{x^3 (x^3 - 32)}{(x^3 - 8)^2}$$

x	$-\infty$	0	2	$\sqrt[3]{32}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	-	+

بنابراین $f'(x)$ روی بازه‌های $[0, 2]$ و $(2, \sqrt[3]{32}]$ و هر زیرمجموعه آن‌ها اکیدا نزولی است. بیشترین مقدار طول این بازه‌ها مربوط به بازه $[0, 2]$ است که برابر ۲ است.

۲۸۴۶- گزینه ۳ ابتدا اکستریم‌های نسبی تابع f را معین می‌کنیم:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -2 - 3 + 12 + 1 = 8 \\ x = 2 \Rightarrow y = 16 - 12 - 24 + 1 = -19 \end{cases}$$

پس نقاط $A(-1, 8)$ و $B(2, -19)$ نقاط اکستریم نسبی تابع f هستند و

$$\frac{-19 - 8}{2 - (-1)} = -9 \quad \text{شیب پاره‌خط } AB \text{ برابر است با}$$

شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول a برابر $f'(a)$ است. پس می‌خواهیم بدانیم به ازای چند مقدار a تساوی $f'(a) = -9$ برقرار است.

$$f'(a) = 6(a+1)(a-2) = -9 \Rightarrow 2a^2 - 2a - 4 = -3 \Rightarrow 2a^2 - 2a - 1 = 0$$

از معادله بالا دو جواب برای a به دست می‌آید. پس دو نقطه روی نمودار تابع f وجود دارد که خط مماس بر نمودار تابع f در آن نقاط موازی پاره‌خط AB است.

۲۸۴۷- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\log_a c + \log_b c = 1 \Rightarrow \frac{1}{\log_c a} + \frac{1}{\log_c b} = 1$$

$$\log_c b + \log_c a = \log_c a \times \log_c b \Rightarrow \log_c(ab) = \log_c a \times \log_c b$$

۲۸۴۸- گزینه ۳ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\log_7(4^x + 15) = x + 3 \Rightarrow 4^x + 15 = 7^{x+3}$$

$$(2^x)^2 - 8 \times 2^x + 15 = 0 \Rightarrow (2^x - 5)(2^x - 3) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} 2^x - 5 = 0 \Rightarrow 2^x = 5 \Rightarrow x = \log_2 5 \\ 2^x - 3 = 0 \Rightarrow 2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3 \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر است با

$$\log_2 5 + \log_2 3 = \log_2 5 \times 3 = \log_2 15$$

۲۸۴۹- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید برای اینکه عبارتهای رادیکالی موجود

در معادله تعریف شده باشند، باید شرایط زیر وجود داشته باشد:

$$-x^2 + 6x - 8 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x-4) \leq 0$$

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$(x-2)(x-4)$		+	-	+

$$2 \leq x \leq 4 \quad (I)$$

۲۸۴۲- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که حد مخرج کسر $\frac{f(x)}{x}$ در $x=0$

برابر صفر است و اگر حد صورت آن در این نقطه برابر صفر نباشد، حد این کسر نامتناهی می‌شود. پس حد صورت کسر، یعنی $f(x)$ هم باید در $x=0$ برابر صفر باشد. پس

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos^3 2x + ax^2 + b) = 1 + 0 + b = 0 \Rightarrow b = -1$$

از طرف دیگر،

$$f(x) = \cos^3 2x + ax^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = -6 \sin 2x \cos^2 2x + 2ax$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{-6 \sin 2x \cos^2 2x + 2ax}{x} \right)$$

$$= -6 \times 2 \times 1^2 + 2a = -12 + 2a = 2 \Rightarrow a = 7$$

بنابراین $a+b=6$

۲۸۴۳- گزینه ۳ توجه کنید که تابع $f(x) = |\sin 2x| + 1$ در نقطه $x=0$

مشتق پذیر نیست:

$$x > 0 \Rightarrow f(x) = \sin 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2 \cos 2x \Rightarrow f'_+(0) = 2$$

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = -\sin 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = -2 \cos 2x \Rightarrow f'_-(0) = -2$$

بنابراین شیب نیم‌مماس‌های راست و چپ که در $x=0$ بر نمودار تابع f رسم می‌شوند، به ترتیب برابر ۲ و -۲ است. معادله این نیم‌مماس‌ها به صورت زیر است:

$$y - f(0) = f'_+(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = 2x \Rightarrow y = 2x + 1$$

$$y - f(0) = f'_-(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = -2x \Rightarrow y = -2x + 1$$

نقاط تلاقی امتداد این نیم‌مماس‌ها و نیمساز ناحیه دوم و ناحیه چهارم را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow 2x + 1 = -x \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow -2x + 1 = -x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -1$$

پس باید فاصله نقاط $A(1, -1)$ و $B(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ را پیدا کنیم:

$$AB = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{2 \times \frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \sqrt{2}$$

۲۸۴۴- گزینه ۲ توجه کنید که $D_f = [0, +\infty) - \{1\}$ و

$$f(x) = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(2x)(x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$$

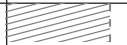
بنابراین $f'(x)$ روی $\{1\} - (0, +\infty)$ مثبت است. از طرف دیگر،

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 - (+\infty) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 - (-\infty) = +\infty$$

بنابراین تابع f روی دامنه‌اش صعودی نیست ولی روی بازه‌های $(0, 1)$ و

$(1, +\infty)$ صعودی است.

و جدول تعیین علامت AB به صورت زیر است:

x	$-\infty$	0	1	$\frac{3}{2}$	4	$+\infty$
AB						

و مجموعه جوابهای نامعادله $AB \geq 0$ بازه $(1, 4)$ است.

اگر $m = \frac{7}{3}$ ، آن گاه $B = \frac{4}{9}x^2 - \frac{28}{3}x + 4 = \frac{4}{9}(5x-3)(2x-3)$

و جدول تعیین علامت AB به صورت زیر است:

x	$-\infty$	0	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{3}{2}$	4	$+\infty$
AB							

در این صورت مجموعه جوابهای نامعادله $AB \geq 0$ یک بازه نیست.

حالت سوم: $x = 4$ ریشه B است.

اگر $m = -\frac{1}{2}$ ، آن گاه $16(m^2-1)-16m+4=0 \Rightarrow 4m^2-4m-3=0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, m = \frac{3}{2}$

اگر $m = -\frac{1}{2}$ ، آن گاه $B = -\frac{3}{4}x^2 + 2x + 4 = (x-4)(-\frac{3}{4}x-1)$

و جدول تعیین علامت AB به صورت زیر است:

x	$-\infty$	0	1	$\frac{3}{2}$	4	$+\infty$
AB						

و مجموعه جوابهای نامعادله $AB \geq 0$ بازه $(1, \frac{3}{2}]$ است.

اگر $m = \frac{3}{2}$ ، آن گاه $B = \frac{5}{4}x^2 - 6x + 4 = (x-4)(\frac{5}{4}x-1)$

و جدول تعیین علامت AB به صورت زیر است:

x	$-\infty$	0	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{3}{2}$	4	$+\infty$
AB							

در این صورت مجموعه جوابهای نامعادله $AB \geq 0$ یک بازه نیست.

اکنون توجه کنید که اگر $m = 1$ یا $m = -1$ ، آن گاه چندجمله‌ای B از درجه اول است. این دو حالت را هم باید بررسی کنیم.

اگر $m = 1$ ، آن گاه $B = -4x + 4$ و جدول تعیین علامت AB به صورت زیر است:

x	$-\infty$	0	1	$\frac{3}{2}$	4	$+\infty$
AB						

و مجموعه جوابهای نامعادله $AB \geq 0$ بازه $[\frac{3}{2}, 4)$ است.

اگر $m = -1$ ، آن گاه $B = 4x + 4$ و جدول تعیین علامت AB به صورت زیر است:

x	$-\infty$	0	1	$\frac{3}{2}$	4	$+\infty$
AB						

در این صورت مجموعه جوابهای نامعادله $AB \geq 0$ یک بازه نیست.

بنابراین به ازای $m = \frac{1}{3}$ ، $m = -\frac{1}{2}$ و $m = 1$ مجموعه جوابهای نامعادله $AB \geq 0$ یک بازه است.

$$-x^3 + 4x^2 + 25x - 100 \geq 0 \Rightarrow x^3 - 4x^2 - 25x + 100 \leq 0$$

$$(x^3 - 25x) - (4x^2 - 100) \leq 0 \Rightarrow x(x^2 - 25) - 4(x^2 - 25) \leq 0$$

$$(x^2 - 25)(x - 4) \leq 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 5)(x - 4) \leq 0$$

x	$-\infty$	-5	4	5	$+\infty$
$(x-5)(x+5)(x-4)$					

$x \leq -5$ یا $4 \leq x \leq 5$ (II)

از (I) و (II) نتیجه می‌شود فقط به ازای $x = 4$ عبارت‌های رادیکالی موجود در معادله تعریف شده هستند. اکنون کافی است مشخص کنیم $x = 4$ جواب معادله هست یا نه.

$$\sqrt{x} + \sqrt{-x^3 + 4x^2 + 25x - 100} + \sqrt{x^2} + \sqrt{-x^2 + 6x - 8} = x + 2$$

$$\sqrt{4+0} + \sqrt{16+0} = 4+2 \Rightarrow 2+4 = 4+2$$

پس $x = 4$ تنها جواب معادله است.

۲۸۵۰- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$x - 3\sqrt{x+2} = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)$$

بنابراین علامت عبارت $A = \frac{2x-3}{x-3\sqrt{x+2}}$ مطابق جدول زیر است:

x	$-\infty$	0	1	$\frac{3}{2}$	4	$+\infty$
A						

اکنون فرض کنید $B = (m^2-1)x^2 - 4mx + 4$ ، می‌خواهیم مجموعه جوابهای نامعادله $AB \geq 0$ یک بازه باشد. اگر B چندجمله‌ای درجه دوم باشد و ریشه نداشته باشد یا ریشه مضاعف داشته باشد، آن گاه با توجه به علامت A مجموعه جوابهای نامعادله $AB \geq 0$ نمی‌تواند یک بازه باشد. پس B دو ریشه دارد و این ریشه‌ها باید از اعداد 1 ، $\frac{3}{2}$ و 4 باشند، بنابراین سه

حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $x = 1$ ریشه B است.

$$m^2 - 1 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Rightarrow m = 3, m = 1 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

$$B = 8x^2 - 12x + 4 = 4(x-1)(2x-1)$$

در این صورت جدول تعیین علامت AB به صورت زیر است:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	4	$+\infty$
AB							

واضح است که مجموعه جوابهای نامعادله $AB \geq 0$ یک بازه نیست.

حالت دوم: $x = \frac{3}{2}$ ریشه B است.

$$(m^2-1)\frac{9}{4} - 4(\frac{3}{2})m + 4 = 0 \Rightarrow 9m^2 - 9 - 24m + 16 = 0$$

$$9m^2 - 24m + 7 = 0 \Rightarrow (3m-1)(3m-7) = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{3}, m = \frac{7}{3}$$

اگر $m = \frac{1}{3}$ ، آن گاه $B = -\frac{8}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 4 = (2x-3)(-\frac{4}{9}x - \frac{4}{3})$

بنابر قضیه تقسیم، تساوی زیر به ازای هر مقدار x برقرار است:

$$P(x) = (x^2 + 2x)Q(x) + 3x + 1$$

از طرفین این تساوی مشتق می‌گیریم.

$$P'(x) = (2x + 2)Q(x) + (x^2 + 2x)Q'(x) + 3$$

در تساوی بالا قرار می‌دهیم $x = -2$ و نتیجه می‌شود

$$P'(-2) = (-4 + 2)Q(-2) + (4 - 4)Q'(-2) + 3$$

$$P'(-2) = -2Q(-2) + 3 = -2 \times 3 + 3 = -3$$

پس باقی‌مانده تقسیم $P'(x)$ بر $x + 2$ برابر -3 است.

ابتدا چند جمله از دنباله را مشخص می‌کنیم.

$$a_1 = -1, \quad a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$$

$$a_2 = 2 - \frac{1}{a_1} = 2 + 1 = 3 \Rightarrow a_2 = \frac{2 \times 2 - 1}{2 \times 2 - 3}$$

$$a_3 = 2 - \frac{1}{a_2} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow a_3 = \frac{2 \times 3 - 1}{2 \times 3 - 3}$$

$$a_4 = 2 - \frac{1}{a_3} = 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5} \Rightarrow a_4 = \frac{2 \times 4 - 1}{2 \times 4 - 3}$$

$$a_5 = 2 - \frac{1}{a_4} = 2 - \frac{5}{7} = \frac{9}{7} \Rightarrow a_5 = \frac{2 \times 5 - 1}{2 \times 5 - 3}$$

بنابراین می‌توان حدس زد که

$$a_{99} = \frac{2 \times 99 - 1}{2 \times 99 - 3} = \frac{197}{195}, \quad a_{100} = \frac{2 \times 100 - 1}{2 \times 100 - 3} = \frac{199}{197}$$

در نتیجه حاصل ضرب صد جمله اول دنباله برابر است با

$$a_1 a_2 \cdots a_{100} = (-1) \left(\frac{3}{1}\right) \left(\frac{5}{3}\right) \left(\frac{7}{5}\right) \cdots \left(\frac{197}{195}\right) \left(\frac{199}{197}\right) = -199$$

ده جمله اول دنباله را پیدا می‌کنیم.

$$a_n = \begin{cases} 2^k & n = 3k \\ -2k + 4 & n = 3k + 1 \\ \left[\frac{n}{k+2}\right] + a & n = 3k + 2 \end{cases}$$

$$k=0 \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 2^0 = 1 \\ a_1 = -2 \times 0 + 4 = 4 \\ a_2 = \left[\frac{2 \times 0 + 2}{0+2}\right] + a = 1 + a \end{cases}$$

$$k=1 \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 2^1 = 2 \\ a_4 = -2 \times 1 + 4 = 2 \\ a_5 = \left[\frac{3 \times 1 + 2}{1+2}\right] + a = 1 + a \end{cases}$$

$$k=2 \Rightarrow \begin{cases} a_6 = 2^2 = 4 \\ a_7 = -2 \times 2 + 4 = 0 \\ a_8 = \left[\frac{3 \times 2 + 2}{2+2}\right] + a = 2 + a \end{cases}$$

$$k=3 \Rightarrow a_9 = 2^3 = 8$$

راه حل اول مخرج مشترک می‌گیریم و ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + 1 - \cos^2 \theta}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} = \frac{2 \sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta) \sin \theta}$$

$$= \frac{2 \sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{2 \times \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}} = 2 \cot \frac{\theta}{2}$$

راه حل دوم ابتدا هریک از کسرها را ساده می‌کنیم، سپس حاصل را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}$$

$$= \cot \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2} = 2 \cot \frac{\theta}{2}$$

راه حل سوم حاصل عبارت را به ازای $\theta = \frac{\pi}{3}$ حساب می‌کنیم:

$$\frac{\sin \frac{\pi}{3}}{1 - \cos \frac{\pi}{3}} + \frac{1 + \cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

اکنون مقدار گزینه‌ها را به ازای $\theta = \frac{\pi}{3}$ حساب می‌کنیم:

$$\text{گزینه (۱): } \cos \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{گزینه (۳): } 2 \cot \frac{\theta}{2} = 2 \cot \frac{\pi}{6} = 2 \cot \frac{\pi}{6} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(1 + \cos \alpha)(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha) = \frac{1}{\lambda}$$

$$(2 \cos^2 \frac{\alpha}{2})(2 \cos^2 \alpha)(2 \cos^2 2\alpha) = \frac{1}{\lambda}$$

$$(\lambda \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \cos 2\alpha)^2 = 1$$

واضح است که $\alpha = 2k\pi$ جواب معادله نیست، پس $\sin \frac{\alpha}{2} \neq 0$ و معادله را

می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left(\frac{\lambda \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \cos 2\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2 = 1$$

$$(4 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha)^2 = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$(2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha)^2 = \sin^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{1 - \cos 4\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos 4\alpha = \cos \alpha$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} \lambda \alpha = 2k\pi + \alpha \\ \lambda \alpha = 2k\pi - \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2k\pi}{\lambda} \\ \alpha = \frac{2k\pi}{\lambda} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

تعداد جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت زیر به دست می‌آید. (توجه

کنید که $\alpha \neq 2k\pi$)

$$0 < \frac{2k\pi}{\lambda} < 2\pi \Rightarrow 0 < k < \lambda \Rightarrow k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$0 < \frac{2k\pi}{9} < 2\pi \Rightarrow 0 < k < 9 \Rightarrow k \in \{1, 2, \dots, 8\}$$

پس معادله ۱۴ جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد.

۲۸۵۹- گزینه ۴ ابتدا توابع fog و gof را معین می‌کنیم.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(1-x^2) = \begin{cases} -1 & 1-x^2 < -1 \\ 1-x^2 & -1 \leq 1-x^2 \leq 1 \\ 1 & 1-x^2 > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -1 & x^2 > 2 \\ 1-x^2 & 0 \leq x^2 \leq 2 \\ 1 & x^2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & x > \sqrt{2} \text{ یا } x < -\sqrt{2} \\ 1-x^2 & -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ 1 & x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = 1-f^2(x) = \begin{cases} 1-(-1)^2 & x < -1 \\ 1-x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 1-1^2 & x > 1 \end{cases}$$

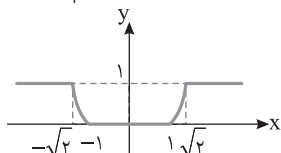
$$= \begin{cases} 0 & x < -1 \text{ یا } x > 1 \\ 1-x^2 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

بنابراین تابع $h = gof - fog$ به صورت زیر است:

$$h(x) = \begin{cases} 0-(-1) & x < -\sqrt{2} \\ 0-(1-x^2) & -\sqrt{2} \leq x < -1 \\ 1-x^2-(1-x^2) & -1 \leq x \leq 1 \\ 0-(1-x^2) & 1 < x \leq \sqrt{2} \\ 0-(-1) & x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x < -\sqrt{2} \text{ یا } x \geq \sqrt{2} \\ x^2-1 & -\sqrt{2} \leq x < -1 \text{ یا } 1 < x \leq \sqrt{2} \\ 0 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

پس نمودار تابع h به صورت زیر است و ماکزیمم مقدار آن برابر ۱ است.



۲۸۶۰- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x \rightarrow 0^+$ ، آن گاه $[x] = 0$ ، پس

$$\tan[x] = \tan 0 = 0$$

از طرف دیگر، $\sqrt{3x} \rightarrow 0^+$ و $(\sqrt{1-x^3}-1) \rightarrow 0^-$ و می‌توان از هم‌ارزی‌های

$$\sin \alpha \sim \alpha \text{ و } 1 - \cos \alpha \sim \frac{1}{2} \alpha^2 \text{ استفاده کرد. پس}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{1-x^3}-1) - 2 \tan[x]}{x^n (1 - \cos \sqrt{3x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x^n (\frac{1}{2} (3x))}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x^3-1}{\frac{3}{2} x^{n+1}} \times \frac{1}{\sqrt{1-x^3}+1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{3x^{n-2}}$$

اکنون توجه کنید که اگر $n > 2$ ، آن گاه حد بالا موجود نیست. اگر $n = 2$ ،

آن گاه حد بالا برابر $-\frac{1}{3}$ است. پس $a = -\frac{1}{3}$ و در نتیجه $a^n = \frac{1}{9}$. اگر

$0 < n < 2$ ، آن گاه حد مورد نظر برابر صفر است و در نتیجه $a^n = 0$. بنابراین

مقدار a^n می‌تواند برابر $\frac{1}{9}$ یا صفر باشد که فقط $\frac{1}{9}$ در گزینه‌ها وجود دارد.

مجموع ده جمله اول دنباله برابر ۱۹ است. پس

$$1+4+1+a+2+2+1+a+4+0+2+a+8=19 \Rightarrow 3a+25=19 \Rightarrow a=-2$$

بنابراین باید میانگین a_{28} و a_{29} را پیدا کنیم.

$$a_{28} = -2 \times 9 + 4 = -14, \quad a_{29} = \left[\frac{29}{9+2} \right] - 2 = 2 - 2 = 0$$

پس میانگین جملات بیست و نهم (a_{28}) و سی‌ام (a_{29}) برابر است با

$$\frac{-14+0}{2} = -7$$

۲۸۵۶- گزینه ۴ توجه کنید که

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sin^2 x \leq 1$$

$$0 \leq \sqrt{\sin^2 x} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sin^2 x \leq 1$$

$$-2 \leq -\sqrt{\sin^2 x} \leq 0 \Rightarrow -2 \leq \sin^2 x \leq 0 \Rightarrow \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$a = \frac{1}{4}, b = 1 \Rightarrow a + b = \frac{5}{4} \quad \text{بنابراین } R_f = \left[\frac{1}{4}, 1 \right] \text{ در نتیجه}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{t} = \log_{\frac{1}{2}} t^{-1} = \log_{\frac{1}{2}} t \quad \text{توجه کنید که}$$

بنابراین اگر فرض کنیم $t = 12 + \sqrt{[x]} - [x]$ ، آن گاه

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{t} - 1 = \log_{\frac{1}{2}} t - 1$$

چون $R_f = \{\log_{\frac{1}{2}} 3, \log_{\frac{1}{2}} 5\}$ ، پس

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} t - 1 = \log_{\frac{1}{2}} 3 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} t = 1 + \log_{\frac{1}{2}} 3 = \log_{\frac{1}{2}} 6 \Rightarrow t = 6 \\ \log_{\frac{1}{2}} t - 1 = \log_{\frac{1}{2}} 5 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} t = 1 + \log_{\frac{1}{2}} 5 = \log_{\frac{1}{2}} 10 \Rightarrow t = 10 \end{cases}$$

بنابراین با فرض $u = \sqrt{[x]} \geq 0$ داریم

$$\begin{cases} 12 + u - u^2 = 6 \Rightarrow u^2 - u - 6 = 0 \Rightarrow u = 3, u = -2 \text{ (غ.ق.)} \\ 12 + u - u^2 = 10 \Rightarrow u^2 - u - 2 = 0 \Rightarrow u = 2, u = -1 \text{ (غ.ق.)} \end{cases}$$

بنابراین

$$\sqrt{[x]} = 2 \Rightarrow [x] = 4 \Rightarrow 4 \leq x < 5, \quad \sqrt{[x]} = 3 \Rightarrow [x] = 9 \Rightarrow 9 \leq x < 10$$

بنابراین حداکثر عددهای صحیح ۴ و ۹ در دامنه تابع f قرار دارند.

۲۸۵۸- گزینه ۳ تابع f اکیدا صعودی است و اگر نمودار آن را k واحد به

بالا یا پایین منتقل کنیم، باز هم تابعی اکیدا صعودی حاصل می‌شود که نمودار

واریانش را روی خط $y = x$ قطع می‌کند. پس نقطه تقاطع نمودار تابع

$$y = f(x) + k \text{ و واریانش نقطه } (1, 1) \text{ است، پس}$$

$$f(1) + k = 1 \Rightarrow \sqrt{1+3} + k = 1 \Rightarrow k = -1$$

اکنون اگر نمودار حاصل را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع

$$y = -(f(x) - 1)$$

سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y = -f(x+4) + 1$ به دست می‌آید. پس

ضابطه تابع مورد نظر به صورت زیر است:

$$y = -\sqrt{x+4} + 3 + 1$$

واضح است که نمودار این تابع از نقطه $(0, 1-\sqrt{5})$ عبور می‌کند.

$$\sqrt{x+2}=x \Rightarrow \sqrt{x}=x-2 \Rightarrow x=x^2-4x+4$$

$$x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=4, x=1 \text{ (غ.ق.)}$$

اکنون شیب خطوط مماس بر نمودار تابع‌های f و f^{-1} را در نقطه $x=4$ پیدای کنیم.

$$f(x)=\sqrt{x+2} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4)=\frac{1}{4}$$

$$f^{-1}(x)=(x-2)^2 \Rightarrow (f^{-1})'(x)=2(x-2) \Rightarrow (f^{-1})'(4)=4$$

تانژانت زاویه بین دو خط با شیب‌های m_1 و m_2 از تساوی

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| \text{ به دست می‌آید. پس}$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{4 - \frac{1}{4}}{1 + 4 \cdot \frac{1}{4}} \right| = \frac{15}{8}, \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{15}{8}}{1 + \left(\frac{15}{8}\right)^2} = \frac{24}{289}$$

۲۸۶۵- گزینه ۱ مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x+|x|} = \begin{cases} 3\sqrt[3]{x+x} & x \geq 0 \\ 3\sqrt[3]{x-x} & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1 & x > 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1 = 0 \text{ (غ.ق.)} \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$+$

بنابراین تابع f روی بازه $[-1, +\infty)$ صعودی است.

۲۸۶۶- گزینه ۴ مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^4 - 3}{x^2 - 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x^3(x^2 - 2) - 2x(x^4 - 3)}{(x^2 - 2)^2} \\ &= \frac{2x^5 - 8x^3 + 6x}{(x^2 - 2)^2} = \frac{2x(x^4 - 4x^2 + 3)}{(x^2 - 2)^2} = \frac{2x(x^2 - 1)(x^2 - 3)}{(x^2 - 2)^2} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	

بنابراین تابع f روی بازه‌های $(-\infty, -2)$ ، $(-1, 0)$ ، $(1, \sqrt{2})$ و

$(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ اکیداً نزولی است و در نقاط $-\sqrt{3}$ ، -1 ، 0 ، 1 و $\sqrt{3}$ (پنج بار)

جهت صعودی و نزولی نمودار تابع f تغییر می‌کند.

۲۸۶۱- گزینه ۲ توجه کنید که اگر $x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+$ ، آن‌گاه

$$(-8)^{-\frac{2}{x^2}} \rightarrow 12^+ \text{ و } (-\frac{2}{x^2})^{-\frac{3}{x^2}} \rightarrow -9 \text{ بنابراین } \frac{3}{x^2} = 12 \text{ و } [-\frac{2}{x^2}] = 12 \text{ پس}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} \frac{16x - (-9)}{24x + 12} = \frac{1}{0^+} = +\infty \text{ حد مورد نظر به صورت مقابل است:}$$

۲۸۶۲- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x + 4}{(x-a)(4x^2 - 4x + 1)} = \frac{(x-1)(x^2 + x - 4)}{(x-a)(2x-1)^2}$$

واضح است که $y = \frac{1}{2}$ مجانب افقی و $x = \frac{1}{2}$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

پس این تابع نباید مجانب قائم دیگری داشته باشد. سه حالت ممکن است:

حالت اول: $x=a$ همان $x = \frac{1}{2}$ باشد، یعنی $a = \frac{1}{2}$.

حالت دوم: $x=a$ همان $x=1$ باشد، یعنی $a=1$.

حالت سوم: $x=a$ ریشه معادله $x^2 + x - 4 = 0$ باشد که در این حالت مجموع مقدارهای ممکن برای a برابر -1 است. پس مجموع تمام مقادیر ممکن a برابر است با

$$\frac{1}{2} + 1 - 1 = \frac{1}{2}$$

۲۸۶۳- گزینه ۳ ابتدا مشتق تابع f را پیدا می‌کنیم.

$$f(x) = \sin^n(x^2) \Rightarrow f'(x) = 2nx \cos(x^2) \sin^{n-1}(x^2)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)f'(x)}{(1-\cos x)^m} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^n(x^2) 2nx \cos(x^2) \sin^{n-1}(x^2)}{(1-\cos x)^m} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2nx \sin^{2n-1}(x^2) \cos(x^2)}{(1-\cos x)^m} = 32\sqrt{2} \end{aligned}$$

اکنون از هم‌ارزی‌های $\sin \alpha \sim \alpha$ و $1 - \cos \alpha \sim \frac{1}{2}\alpha^2$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2nx(x^2)^{2n-1} \cos(x^2)}{(\frac{1}{2}x^2)^m} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{n \times 2^{m+1} x^{4n-1}}{x^{2m}} = 32\sqrt{2}$$

بنابراین

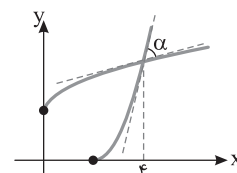
$$\begin{cases} 2m = 4n - 1 \Rightarrow m = 2n - \frac{1}{2} \\ n \times 2^{m+1} = 32\sqrt{2} \Rightarrow n \times 2^{2n + \frac{1}{2}} = 32\sqrt{2} \Rightarrow n = 2 \Rightarrow m = \frac{7}{2} \end{cases}$$

پس $2m + n = 9$.

۲۸۶۴- گزینه ۴ تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ اکیداً صعودی است و محل تقاطع

نمودار آن با نمودار وارونش روی خط $y=x$ است. پس کافی است معادله

$f(x) = x$ را حل کنیم.



اکنون توجه کنید که می‌توانیم سمت چپ معادله را به کمک اتحاد چاق و لاغر ساده کنیم

$$(t^2)^3 - 1^3 = 2t^3 \Rightarrow (t^3)^2 - 2t^3 - 1 = 0 \quad (*)$$

چون $\sqrt[3]{x} = t$ ، پس $x = t^3$ ، در نتیجه معادله (*) می‌شود $x^2 - 2x - 1 = 0$ ، که مجموع جواب‌های آن برابر است با $-\frac{(-2)}{1} = 2$.

۲۸۷۰- گزینۀ ۱ راه‌حل اول توجه کنید که چون x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2 + x - 5 = 0$ هستند، پس $x_1 + x_2 = -1$ و $x_1 x_2 = -5$. اکنون می‌توانیم مجموع جواب‌های معادله جدید را به صورت زیر حساب کنیم:

$$S = \frac{1}{(x_1+1)^3} + \frac{1}{(x_2+1)^3} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} S = \frac{(x_1+1)^3 + (x_2+1)^3}{(x_1+1)^3 (x_2+1)^3}$$

از اتحاد $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ استفاده می‌کنیم و صورت کسر را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} S &= \frac{(x_1+1+x_2+1)^3 - 3(x_1+1)(x_2+1)(x_1+1+x_2+1)}{((x_1+1)(x_2+1))^3} \\ &= \frac{(x_1+x_2+2)^3 - 3(x_1+x_2+x_1 x_2+1)(x_1+x_2+2)}{(x_1+x_2+x_1 x_2+1)^3} \\ &= \frac{(-1+2)^3 - 3(-1-5+1)(-1+2)}{(-1-5+1)^3} = \frac{1-3(-5)(1)}{(-5)^3} = -\frac{16}{125} \end{aligned}$$

همچنین حاصل ضرب جواب‌های معادله جدید به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{(x_1+1)^3} \times \frac{1}{(x_2+1)^3} = \frac{1}{((x_1+1)(x_2+1))^3} \\ &= \frac{1}{(x_1+x_2+x_1 x_2+1)^3} = \frac{1}{(-1-5+1)^3} = -\frac{1}{125} \end{aligned}$$

بنابراین معادله جدید به صورت $x^2 + \frac{16}{125}x - \frac{1}{125} = 0$ است، که اگر دو

طرف آن را در ۱۲۵ ضرب کنیم، می‌شود $125x^2 + 16x - 1 = 0$.
راه‌حل دوم توجه کنید که

$$S = \frac{1}{(x_1+1)^3} + \frac{1}{(x_2+1)^3} = \left(\frac{1}{x_1+1}\right)^3 + \left(\frac{1}{x_2+1}\right)^3 = \frac{x_1^3}{125} + \frac{x_2^3}{125} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{125}$$

اکنون از اتحاد $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ استفاده می‌کنیم. چون

$$x_1 x_2 = -5 \text{ و } x_1 + x_2 = -1$$

$$S = \frac{(x_1+x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1+x_2)}{125} = \frac{(-1)^3 - 3(-5)(-1)}{125} = -\frac{16}{125}$$

از طرف دیگر،

$$P = \frac{1}{(x_1+1)^3} \times \frac{1}{(x_2+1)^3} = \left(\frac{1}{x_1+1}\right)^3 \times \left(\frac{1}{x_2+1}\right)^3 = \frac{x_1^3}{5^3} \times \frac{x_2^3}{5^3} = \frac{(x_1 x_2)^3}{5^3 \times 5^3}$$

چون $x_1 x_2 = -5$ ، پس $P = -\frac{(-5)^3}{5^3 \times 5^3}$ ، یعنی $P = -\frac{1}{125}$. در نتیجه معادله

مورد نظر به صورت $x^2 + \frac{16}{125}x - \frac{1}{125} = 0$ است، که اگر دو طرف آن را در

۱۲۵ ضرب کنیم، می‌شود $125x^2 + 16x - 1 = 0$.

۲۸۶۷- گزینۀ ۱ مشتق اول و مشتق دوم تابع را تعیین علامت می‌کنیم و نقاط مینیمم نسبی و عطف تابع را معین می‌کنیم.

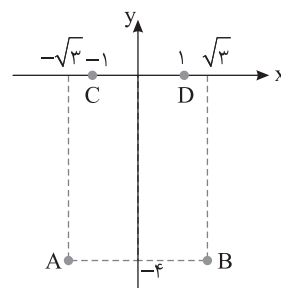
$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 5 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 12x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
f'(x)	-	+	+	-	-	+	+
f''(x)	+	+	-	-	+	+	+
		min	عطف	max	عطف	min	

پس نقاط $A(-\sqrt{3}, -4)$ و $B(\sqrt{3}, -4)$ مینیمم نسبی تابع f هستند و نقاط $C(1, 0)$ و $D(-1, 0)$ نقاط عطف این تابع هستند. شیب پاره‌خط‌های AB و CD برابر صفر است. بنابراین زاویه بین آن‌ها برابر صفر است.



۲۸۶۸- گزینۀ ۴ عبارت مورد نظر را A می‌نامیم. در این صورت

$$\begin{aligned} A &= (a^2 + b^2 - 2ab)^2 (a^2 + b^2 + 2ab)^2 = ((a-b)^2)^2 ((a+b)^2)^2 \\ &= (((a-b)(a+b))^2)^2 \end{aligned}$$

از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

$$A = ((a^2 - b^2)^2)^2 = (a^4 - 2a^2b^2 + b^4)^2$$

اکنون توجه کنید که

$$\begin{aligned} a^4 &= (\sqrt[4]{\sqrt{6}-2})^4 = \sqrt{6}-2, \quad b^4 = (\sqrt[4]{\sqrt{6}+2})^4 = \sqrt{6}+2 \\ a^2 b^2 &= (\sqrt[4]{\sqrt{6}-2})^2 \times (\sqrt[4]{\sqrt{6}+2})^2 = \sqrt{\sqrt{6}-2} \times \sqrt{\sqrt{6}+2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)} = \sqrt{6-4} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} A &= (a^4 - 2a^2 b^2 + b^4)^2 = (\sqrt{6}-2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{6}+2)^2 \\ &= (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})^2 = 4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 = 4(6+2-2\sqrt{12}) \end{aligned}$$

چون $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ، پس

$$A = 4(8 - 4\sqrt{3}) = 16(2 - \sqrt{3})$$

۲۸۶۹- گزینۀ ۴ فرض می‌کنیم $\sqrt[3]{x} = t$. در این صورت معادله مورد نظر به شکل زیر درمی‌آید:

$$(t^2 + \frac{1}{t^2} + 1)(t^2 - 1) = 2t \Rightarrow (\frac{t^4 + 1 + t^2}{t^2})(t^2 - 1) = 2t$$

برای اینکه معادله را ساده کنیم، دو طرف آن را در t^2 ضرب می‌کنیم

$$(t^4 + t^2 + 1)(t^2 - 1) = 2t^3$$

راه حل سوم عبارت $f(x)$ را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x) = (2 \cos^2 3x)(2 \cos^2 6x)(2 \cos^2 12x)(2 \cos^2 24x) \\ = (1 + \cos 6x)(1 + \cos 12x)(1 + \cos 24x)(1 + \cos 48x)$$

بنابراین

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = \left(1 + \cos \frac{6\pi}{36}\right) \left(1 + \cos \frac{12\pi}{36}\right) \left(1 + \cos \frac{24\pi}{36}\right) \left(1 + \cos \frac{48\pi}{36}\right) \\ = \left(1 + \cos \frac{\pi}{6}\right) \left(1 + \cos \frac{\pi}{3}\right) \left(1 + \cos \frac{2\pi}{3}\right) \left(1 + \cos \frac{4\pi}{3}\right) \\ = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{16}$$

توجه کنید که **۲-۲۸۷۲-گزینۀ ۲**

$$\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin 2\alpha, \quad \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot 2\alpha}$. اکنون مقادیر $\cos \alpha$ و $\sin 2\alpha$ را حساب می‌کنیم. چون $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ ، پس می‌توان نوشت

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

چون انتهای کمان α در ناحیه سوم مثلثاتی است، پس $\cos \alpha < 0$ ، یعنی $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ از طرف دیگر،

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2(\frac{3}{4})}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{9}{16}}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{7}{25}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{7}{24}$$

$$\frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot 2\alpha} = \frac{\frac{24}{25} + \frac{4}{5}}{\frac{7}{24}} = \frac{25}{175} = \frac{1056}{175}$$

می‌توان نوشت **۳-۲۸۷۳-گزینۀ ۳**

$$\cos^2 x - \sin^2 x \cos 3x = 1 \Rightarrow 1 - \cos^2 x + \sin^2 x \cos 3x = 0$$

$$\sin^2 x + \sin^2 x \cos 3x = 0 \Rightarrow \sin^2 x (1 + \cos 3x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos 3x = -1 \Rightarrow 3x = (2k+1)\pi \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

برای اینکه جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ را پیدا کنیم، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

k	۰	۱	۲	۳
$k\pi$	۰	π	2π	$\cancel{3\pi}$
$\frac{(2k+1)\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	$\cancel{\frac{7\pi}{3}}$

از این جدول معلوم می‌شود که جواب‌های مورد نظر $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$ هستند، که تعداد آن‌ها پنج‌تاست.

راه حل اول ابتدا توجه کنید که **۴-۲۸۷۱-گزینۀ ۴**

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = 16 \cos^2 \frac{3\pi}{36} \cos^2 \frac{6\pi}{36} \cos^2 \frac{12\pi}{36} \cos^2 \frac{24\pi}{36} \\ = 16 \cos^2 \frac{\pi}{12} \cos^2 \frac{\pi}{6} \cos^2 \frac{\pi}{3} \cos^2 \frac{2\pi}{3} \\ = 16 \cos^2 \frac{\pi}{12} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \cos^2 \frac{\pi}{12}$$

اکنون برای اینکه مقدار $\cos^2 \frac{\pi}{12}$ را حساب کنیم، از اتحاد مثلثاتی

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} (1 + \cos \frac{2\pi}{12}) = \frac{3}{8} (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) \\ = \frac{3}{8} \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right) = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{16}$$

راه حل دوم عبارت داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = 16 (\cos 3x \cos 6x \cos 12x \cos 24x)^2$$

اکنون عبارت داخل پرانتز را در $\sin 3x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$f(x) = 16 \left(\frac{\sin 3x \cos 3x \cos 6x \cos 12x \cos 24x}{\sin 3x} \right)^2$$

از اتحاد مثلثاتی $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ به دست می‌آید

$$\sin 3x \cos 3x = \frac{1}{2} \sin 6x$$

در نتیجه

$$f(x) = 16 \left(\frac{\frac{1}{2} \sin 6x \cos 6x \cos 12x \cos 24x}{\sin 3x} \right)^2$$

به طور مشابه $\sin 6x \cos 6x = \frac{1}{2} \sin 12x$ ، پس

$$f(x) = 16 \left(\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 12x \cos 12x \cos 24x}{\sin 3x} \right)^2$$

به طور مشابه با انجام دو مرحله دیگر عبارت را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم.

$$f(x) = 16 \left(\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 24x \cos 24x}{\sin 3x} \right)^2$$

$$= 16 \left(\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 48x}{\sin 3x} \right)^2 = \frac{\sin^2 48x}{16 \sin^2 3x}$$

بنابراین

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = \frac{\sin^2 \frac{48\pi}{36}}{16 \sin^2 \frac{3\pi}{36}} = \frac{\sin^2 \frac{4\pi}{3}}{16 \sin^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{\sin^2 \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)}{16 \sin^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{\sin^2(\pi + \alpha)}{16 \sin^2 \alpha} = \frac{-\sin^2 \alpha}{16 \sin^2 \alpha} = -\frac{1}{16}$$

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = \frac{(-\sin \frac{\pi}{3})^2}{16(1 - \cos \frac{2\pi}{12})} = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{3}}{16(1 - \cos \frac{\pi}{6})} = \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{16(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{3}{4(2 - \sqrt{3})}$$

در نهایت صورت و مخرج را در مزدوج $2 - \sqrt{3}$ ، یعنی $2 + \sqrt{3}$ ضرب می‌کنیم

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = \frac{3}{16(2 - \sqrt{3})} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{16(4 - 3)} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{16}$$

راه حل دوم توجه کنید که اگر $x \rightarrow 0^-$ ، آن گاه $3x \rightarrow 0^-$ پس $[3x] = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2| [3x] | - 1) = 2|-1| - 1 = 1 \quad \text{در نتیجه}$$

همچنین اگر $x \rightarrow 0^+$ ، آن گاه $3x \rightarrow 0^+$ پس $[3x] = 0$. در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2| [3x] | - 1) = 2|0| - 1 = -1$$

فقط گزینه (۲) این شرایط را دارد.

راه حل اول نقطه برخورد منحنی ها جواب دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} 2y = x^2 \\ x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3} \end{cases}$$

دو طرف معادله دوم را به توان دو می رسانیم و به جای x^2 قرار می دهیم $2y$:

$$x^2 = (\sqrt{y+3} - \sqrt{y-3})^2 \Rightarrow 2y = y+3 + y-3 - 2\sqrt{(y+3)(y-3)}$$

$$2y = 2y - 2\sqrt{y^2 - 9} \Rightarrow -2\sqrt{y^2 - 9} = 0 \Rightarrow y^2 - 9 = 0 \Rightarrow y = \pm 3$$

توجه کنید که چون $2y = x^2 \geq 0$ ، پس فقط $y = 3$ قبول است. در نتیجه

$$x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3} = \sqrt{6} - \sqrt{0} = \sqrt{6}$$

بنابراین نقطه برخورد منحنی ها $(\sqrt{6}, 3)$ است، که فاصله اش از مبدأ برابر است با

$$\sqrt{(\sqrt{6})^2 + 3^2} = \sqrt{6+9} = \sqrt{15}$$

راه حل دوم با توجه به ضابطه منحنی $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$ ، متوجه

می شویم که $y \geq 3$. اکنون اگر در ضابطه های داده شده قرار دهیم $y = 3$ ،

برای هر دو به دست می آید $x = \sqrt{6}$ ، یعنی $(\sqrt{6}, 3)$ نقطه تلاقی دو منحنی

است که فاصله آن از مبدأ مختصات برابر است با $\sqrt{(\sqrt{6})^2 + 3^2} = \sqrt{15}$.

در صورت از 3^x و در مخرج از 2^{x-2} فاکتور می گیریم:

$$\frac{3^x(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5)}{2^{x-2}(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)} = 52 \Rightarrow \frac{3^x \times 364}{2^{x-2} \times 63} = 52$$

$$\frac{3^{x-2} \times 9 \times 52 \times 7}{2^{x-2} \times 9 \times 7} = 52 \Rightarrow \frac{3^{x-2}}{2^{x-2}} = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x-2} = 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Rightarrow x-2 = 0$$

$$x = 2$$

ابتدا توجه کنید که انتقال به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در امتداد محور x

در جهت مثبت معادل $\frac{\pi}{2}$ واحد انتقال به راست و انتقال به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در امتداد

محور y در جهت منفی معادل $\frac{\pi}{2}$ واحد فقط یک فاصله انتقال به پایین است. پس

$$y = 2|\sin x| \xrightarrow{\frac{\pi}{2} \text{ واحد به راست}} y = 2|\sin(x - \frac{\pi}{2})|$$

$$\text{چون که } \sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x \text{، پس}$$

$$y = 2|-\cos x| = 2|\cos x| \xrightarrow{\frac{\pi}{2} \text{ واحد به پایین}} y = 2|\cos x| - \frac{3}{2}$$

۲۸۷۴- گزینه ۱) راه حل اول ابتدا توجه کنید که $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ که در

آن $g(x) = \log_4(x^2 - x - 2)$ و $h(x) = \sqrt{x^2 - 1} + 1$. برای پیدا کردن دامنه تابع f ، دامنه تابع های g و h را به دست می آوریم. از آن ها اشتراک می گیریم و در آخر جواب های معادله $h(x) = 0$ را از آن حذف می کنیم، یعنی

$$D_f = (D_g \cap D_h) - \{x | x \in D_h, h(x) = 0\}$$

برای پیدا کردن دامنه تابع g باید نامعادله $x^2 - x - 2 > 0$ را حل کنیم:

$$x^2 - x - 2 > 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x-2)(x+1) > 0 \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 2$$

پس $D_g = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$. از طرف دیگر، برای پیدا کردن دامنه تابع

h باید نامعادله $x^2 - 1 \geq 0$ را حل کنیم:

$$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1$$

پس $D_h = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. توجه کنید که معادله $h(x) = 0$ جواب

ندارد. زیرا $\sqrt{x^2 - 1} + 1$ همواره مثبت است. بنابراین

$$D_f = ((-\infty, -1) \cup (2, +\infty)) \cap ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)) = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$



راه حل دوم توجه کنید که عدد ۳ در دامنه تابع f است. زیرا

$$f(3) = \frac{\log_4(9-3-2)}{\sqrt{9-1}+1} = \frac{\log_4 4}{\sqrt{8}+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}+1}$$

پس گزینه های (۲) و (۴) حذف می شوند. زیرا ۳ عضو آن ها نیست. از طرف دیگر،

چون ۲ عضو مجموعه گزینه (۱) نیست، ولی عضو مجموعه گزینه (۳) است، پس

کافی است ببینیم ۲ در دامنه تابع f هست یا خیر. توجه کنید که

$$f(2) = \frac{\log_4(4-2-2)}{\sqrt{4-1}+1} = \frac{\log_4 0}{\sqrt{3}+1}$$

چون $\log_4 0$ تعریف نشده است، پس عدد ۲ در دامنه تابع f نیست، یعنی

گزینه (۳) نیز حذف می شود. بنابراین گزینه (۱) دامنه تابع f است.

۲۸۷۵- گزینه ۲) راه حل اول چون $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$ ، پس $-\frac{3}{2} \leq 3x < \frac{3}{2}$.

بنابراین

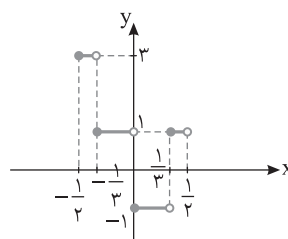
$$-\frac{3}{2} \leq 3x < -1 \Rightarrow [3x] = -2, -\frac{1}{2} \leq x < -\frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = 2|-2|-1 = 3$$

$$-1 \leq 3x < 0 \Rightarrow [3x] = -1, -\frac{1}{3} \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = 2|-1|-1 = 1$$

$$0 \leq 3x < 1 \Rightarrow [3x] = 0, 0 \leq x < \frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = 2|0|-1 = -1$$

$$1 \leq 3x < \frac{3}{2} \Rightarrow [3x] = 1, \frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = 2|1|-1 = 1$$

در نتیجه نمودار تابع f به صورت زیر است:



از روی این نمودار معلوم می‌شود که

$$x \rightarrow \frac{\pi}{6}^- \Rightarrow 0 < 2 \sin x < 1 \Rightarrow [2 \sin x] = 0$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} ([2 \sin x] - 1) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} (0 - 1) = -1$$

۲۸۸۱- گزینه ۳ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که برای به‌دست آوردن

ضابطه تابع وارون، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم

$$f(x) = y = 2 + \sqrt{x-1} \Rightarrow y-2 = \sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{به توان دو}}$$

$$(y-2)^2 = x-1 \Rightarrow x = (y-2)^2 + 1$$

بنابراین $f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1$. اگر این نمودار را ۲ واحد در جهت مثبت

محور x و سپس ۳ واحد در جهت منفی محور y انتقال دهیم، نمودار تابع

$$g(x) = f^{-1}(x-2) - 3 \text{ به‌دست می‌آید. بنابراین}$$

$$g(4) = f^{-1}(4-2) - 3 = f^{-1}(2) - 3 = (2-2)^2 + 1 - 3 = -2$$

راه‌حل دوم قرینه نمودار تابع $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$ نسبت به خط $y=x$

نمودار تابع f^{-1} است. بنابراین $g(x) = f^{-1}(x-2) - 3$. قرار می‌دهیم

$g(4) = a$ و از تعریف تابع معکوس استفاده می‌کنیم. در نتیجه

$$g(4) = f^{-1}(4-2) - 3 = a \Rightarrow f^{-1}(2) = a+3$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف تابع وارون}} f(a+3) = 2$$

$$2 + \sqrt{a+3-1} = 2 \Rightarrow \sqrt{a+2} = 0 \Rightarrow a = -2$$

پس

۲۸۸۲- گزینه ۳ توجه کنید که

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 1 & f(x) > 0 \\ 0 & f(x) = 0 \\ -1 & f(x) < 0 \end{cases}$$

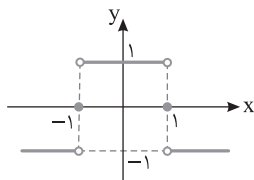
از طرف دیگر، جدول تعیین علامت $f(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1-x^2$		-	+	-

بنابراین

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-1, 1) \\ 0 & x = \pm 1 \\ -1 & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

پس نمودار تابع $g \circ f$ به صورت زیر است، که در نقاط $x = \pm 1$ ناپیوسته است.



بنابراین با انجام انتقال‌های خواسته شده، نمودار تابع با ضابطه

$$y = 2^{| \cos x |} - \frac{3}{2} \text{ به‌دست می‌آید. برای پیدا کردن تعداد نقاط برخورد نمودار}$$

تابع بالا با محور x در فاصله $[0, \pi]$ ، باید تعداد جواب‌های معادله

$$2^{| \cos x |} - \frac{3}{2} = 0 \text{ را در این فاصله پیدا کنیم. اکنون با استفاده از تعریف تابع}$$

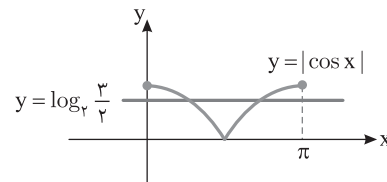
لگاریتم داریم

$$2^{| \cos x |} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 2^{| \cos x |} = \frac{3}{2} \Rightarrow | \cos x | = \log_2 \frac{3}{2}$$

توجه کنید که $\log_2 \frac{3}{2} < \log_2 1 < \log_2 2$ ، پس $0 < \log_2 \frac{3}{2} < 1$. اکنون

تعداد نقاط برخورد خط $y = \log_2 \frac{3}{2}$ و نمودار تابع $y = | \cos x |$ را روی بازه

$[0, \pi]$ از روی شکل زیر پیدا می‌کنیم که دوتا است.



۲۸۷۹- گزینه ۱ اگر فرض کنیم $a = \log_x y$ ، آن‌گاه $\frac{1}{a} = \log_y x$.

بنابراین از تساوی داده شده به‌دست می‌آید

$$a - 2\left(\frac{1}{a}\right) = 1 \xrightarrow{\times a} a^2 - 2 = a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

به کمک اتحاد جمله مشترک عبارت بالا را تجزیه می‌کنیم

$$(a+1)(a-2) = 0 \Rightarrow a = -1, a = 2$$

چون $x, y > 1$ ، پس $a = \log_x y > 0$. در نتیجه فقط $a = 2$ قابل قبول است، پس

$$\log_x y = 2 \Rightarrow y = x^2$$

۲۸۸۰- گزینه ۱ راه‌حل اول اگر $x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-$ ، آن‌گاه $\sin x \rightarrow \frac{1}{2}^-$ و در نتیجه

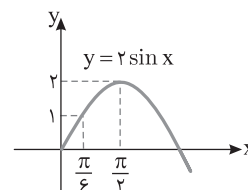
$$2 \sin x \rightarrow 1^- \text{، پس } 2 \sin x - 1 \rightarrow 0^- \text{، بنابراین } [2 \sin x - 1] = -1 \text{، یعنی}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} [2 \sin x - 1] = -1$$

راه‌حل دوم چون به‌ازای هر عدد حقیقی x و هر عدد صحیح k ،

$$[x+k] = [x] + k \text{، پس } [2 \sin x - 1] = [2 \sin x] - 1 \text{، اکنون به نمودار تابع}$$

$y = 2 \sin x$ در شکل زیر توجه کنید.



$$g(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow g'(x) = (-\frac{1}{3})(2x)(x^2 - 1)^{-\frac{4}{3} - 1}$$

$$= -\frac{2}{3}x(x^2 - 1)^{-\frac{4}{3}}$$

$$g'(\frac{3}{\sqrt{8}}) = -\frac{2}{3}(\frac{3}{\sqrt{8}})(\frac{9}{8} - 1)^{-\frac{4}{3}} = -8\sqrt{2}$$

برای پیدا کردن مقدار $f'(2)$ ابتدا ضابطه تابع f را در یک همسایگی نقطه $x=2$ پیدا می‌کنیم. توجه کنید که

$$x \rightarrow 2 \Rightarrow x^2 \rightarrow 4 \Rightarrow 4 < x^2 + \frac{1}{x} < 5 \Rightarrow [x^2 + \frac{1}{x}] = 4$$

در نتیجه $f(x) = (4x)^2 + 1 = 16x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 32x \Rightarrow f'(2) = 64$

بنابراین $(fog)'(\frac{3}{\sqrt{8}}) = (-8\sqrt{2})(64) = 4(-128\sqrt{2})$

توجه کنید که $g'(x) = 2ax + b$ و $g''(x) = 2a$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq k \\ g'(x) & x < k \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} g'(x) & x \geq k \\ g''(x) & x < k \end{cases}$$

چون تابع f در نقطه $x=k$ مشتق پذیر است، پس

$$g(k) = g'(k) \Rightarrow ak^2 + bk + c = 2ak + b$$

$$g'(k) = g''(k) \Rightarrow 2ak + b = 2a \Rightarrow b = 2a - 2ak$$

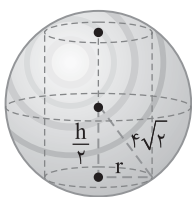
اکنون از تساوی $b = 2a - 2ak$ و شرط $b + c = a$ می‌توان نتیجه گرفت

$$ak^2 + bk + a - b = 2a \Rightarrow ak^2 + (2a - 2ak)k + a - (2a - 2ak) = 2a$$

$$a(k^2 + 2k - 2k^2 + 1 - 2 + 2k) = 2a \xrightarrow{a \neq 0} -k^2 + 4k - 1 = 2$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (k-1)(k-3) = 0 \Rightarrow k=1, k=3$$

پس بیشترین مقدار k برابر با ۳ است.



شکل مقابل را ببینید.

مساحت جانبی استوانه برابر است با $S = 2\pi rh$.

از طرف دیگر، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$r^2 + (\frac{h}{2})^2 = (r\sqrt{2})^2 \Rightarrow r^2 = 3r^2 - \frac{h^2}{4}$$

$$r = \sqrt{3r^2 - \frac{h^2}{4}}$$

$$S = 2\pi\sqrt{3r^2 - \frac{h^2}{4}} \times h = 2\pi\sqrt{\frac{(128 - h^2)h^2}{4}} = \pi\sqrt{-h^4 + 128h^2}$$

برای اینکه S ماکزیمم باشد، باید $-h^4 + 128h^2$ ماکزیمم باشد. توجه کنید که

$$y = -h^4 + 128h^2 \Rightarrow y' = -4h^3 + 256h$$

$$y' = 0 \Rightarrow -4h(h^2 - 64) = 0 \Rightarrow h^2 = 64$$

بنابراین ماکزیمم S به ازای $h^2 = 64$ به دست می‌آید، که برابر است با

$$S = \pi\sqrt{-64^2 + 128 \times 64} = 64\pi$$

۲۸۸۳- گزینه ۲ توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} & x^2 \geq 4 \\ \frac{-x^2(x^2-4)}{x^2-1} & x^2 \leq 4, x \neq \pm 1 \end{cases}$$

از طرف دیگر، اگر $g(x) = \frac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} = \frac{x^4-4x^2}{x^2-1}$ ، آن‌گاه

$$g'(x) = \frac{(4x^3-8x)(x^2-1) - (x^4-4x^2)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x((x^2-1)^2+3)}{(x^2-1)^2}$$

بنابراین

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x) & x > 2 \text{ یا } x < -2 \\ -g'(x) & -2 < x < 2, x \neq \pm 1 \end{cases}$$

توجه کنید که تابع f در نقطه‌های ۲ و -۲ مشتق پذیر نیست، زیرا این عددها ریشه‌های ساده عبارت داخل قدرمطلق هستند. همچنین،

$$f'(x) = 0 \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

پس نقاط بحرانی تابع f نقطه‌های ۲، -۲ و صفر هستند، که مطابق جدول زیر هر سه طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند ($x \neq \pm 1$):

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-	+

۲۸۸۴- گزینه ۳ اگر مختصات نقطه A واقع بر سهمی $f(x) = x^2$

به صورت (x, x^2) باشد، مختصات نقطه A' ، یعنی قرینه A نسبت به

نیسماز نواحی اول و سوم، به صورت (x^2, x) است. بنابراین

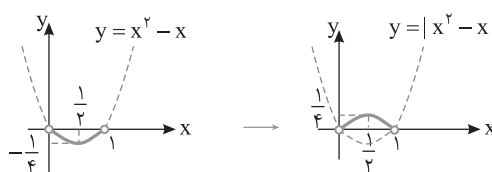
$$AA' = \sqrt{(x-x^2)^2 + (x^2-x)^2} = \sqrt{2(x^2-x)^2} = \sqrt{2}|x^2-x|$$

از طرف دیگر، چون طول نقطه A بین دو طول متوالی از محل برخورد تابع f با خط

نیسماز نواحی اول و سوم (خط $y=x$)، یعنی نقاط $(0,0)$ و $(1,1)$ قرار دارد،

پس باید ماکزیمم AA' را در بازه $(0,1)$ پیدا کنیم. برای پیدا کردن ماکزیمم

تابع $y = |x^2 - x|$ از روش رسم نمودار تابع استفاده می‌کنیم.



بنابراین بیشترین مقدار AA' در بازه $(0,1)$ به ازای $x = \frac{1}{2}$ به دست می‌آید،

$$AA' = \sqrt{2}|\frac{1}{4} - \frac{1}{2}| = \sqrt{2} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

که برابر می‌شود با

۲۸۸۵- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)'(\frac{3}{\sqrt{8}}) = g'(\frac{3}{\sqrt{8}})f'(g(\frac{3}{\sqrt{8}}))$$

توجه کنید که $g(\frac{3}{\sqrt{8}}) = \frac{1}{\sqrt{(\frac{3}{\sqrt{8}})^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{8} - 1}} = 2$ پس باید مقدار

$g'(\frac{3}{\sqrt{8}})f'(2)$ را حساب کنیم. مقدار $g'(\frac{3}{\sqrt{8}})$ را به سادگی می‌توان حساب کرد

از طرف دیگر، شیب خطی که ضلع BC روی آن است، برابر ۳ است. چون AH بر BC عمود است، پس شیب خطی که ارتفاع AH روی آن است، قرینه معکوس ۳، یعنی برابر $-\frac{1}{3}$ است. به این ترتیب،

$$\frac{b-1}{a-2} = -\frac{1}{3} \Rightarrow 3b-3=2-a \Rightarrow a=5-3b$$

بنابراین اگر در تساوی (*) به جای a قرار دهیم $5-3b$ ، به دست می‌آید $|3(5-3b)-b-5|=15$

$$|10-10b|=15 \Rightarrow \begin{cases} 10-10b=15 \\ 10-10b=-15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-\frac{1}{2} \Rightarrow a=\frac{13}{2} \\ b=\frac{5}{2} \Rightarrow a=-\frac{5}{2} \end{cases}$$

در نتیجه A می‌تواند یکی از نقطه‌های $(\frac{13}{2}, -\frac{1}{2})$ و $(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ باشد.

۲۸۹۰- گزینه ۲ راه حل اول با استفاده از اتحاد مزدوج می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} (a+\frac{1}{a}+\sqrt{2})^2 (a+\frac{1}{a}-\sqrt{2})^2 &= ((a+\frac{1}{a})^2 - (\sqrt{2})^2)^2 \\ &= (a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 - 2)^2 = (a^2 + \frac{1}{a^2})^2 = a^4 + \frac{1}{a^4} + 2 \end{aligned}$$

$$a = \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} \Rightarrow a^4 = 7-4\sqrt{3} \quad \text{اکنون توجه کنید که}$$

$$\frac{1}{a^4} = \frac{1}{7-4\sqrt{3}} \times \frac{7+4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}} = \frac{7+4\sqrt{3}}{49-48} = 7+4\sqrt{3}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$a^4 + \frac{1}{a^4} + 2 = (7-4\sqrt{3}) + (7+4\sqrt{3}) + 2 = 16$$

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$a = \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} = \sqrt[4]{(2-\sqrt{3})^2} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \Rightarrow a^2 = 2-\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} (a+\frac{1}{a}+\sqrt{2})^2 (a+\frac{1}{a}-\sqrt{2})^2 &= ((a+\frac{1}{a})^2 - (\sqrt{2})^2)^2 = (a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 - 2)^2 \\ &= (a^2 + \frac{1}{a^2})^2 = (2-\sqrt{3} + 2+\sqrt{3})^2 = 16 \end{aligned}$$

۲۸۹۱- گزینه ۳ فرض می‌کنیم پول اولیه علی X و پول اولیه اکرم Y باشد.

در این صورت

$$\begin{cases} x+y=100 \\ (x-10)(y+10)=475 \end{cases}$$

از معادله اول به دست می‌آید $x=100-y$ و در نتیجه معادله دوم را می‌توان

این‌طور نوشت

$$(100-y-10)(y+10)=475 \Rightarrow (90-y)(y+10)=475$$

$$100(y+10)-(y+10)^2=475 \Rightarrow (y+10)^2-100(y+10)+475=0$$

اگر فرض کنیم $y+10=A$ ، معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$A^2-100A+475=0$$

از اتحاد جمله مشترک استفاده و سمت چپ معادله را تجزیه می‌کنیم.

$$(A-5)(A-95)=0 \quad \begin{cases} A=5 \Rightarrow y+10=5 \Rightarrow y=-5 \text{ (غ.ق.)} \\ A=95 \Rightarrow y+10=95 \Rightarrow y=85 \text{ (تومان)} \end{cases}$$

۲۸۸۸- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا معادله خطی را که ضلع AB روی آن است، می‌نویسیم

$$y-4=3(x-2) \Rightarrow 3x-y-2=0$$

فاصله نقطه C از خط به دست آمده برابر است با

$$CB = \frac{|3(-3)-(-1)-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

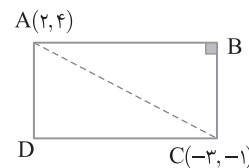
از طرف دیگر،

$$AC = \sqrt{(2+3)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{50}$$

اکنون با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث ABC، طول AB را به دست می‌آوریم

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow AB^2 + 10 = 50 \Rightarrow AB = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

پس محیط مستطیل برابر است با $2(\sqrt{10} + 2\sqrt{10}) = 6\sqrt{10}$



راه حل دوم ابتدا معادلات اضلاع AB و BC را می‌نویسیم

$$AB: 3x-y-2=0$$

$$BC \perp AB \Rightarrow m_{BC} = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow y-(-1) = -\frac{1}{3}(x-(-3))$$

$$BC: x+3y+6=0$$

محل تلاقی اضلاع AB و BC همان نقطه B است.

$$\begin{cases} 3x-y-2=0 \\ x+3y+6=0 \end{cases} \Rightarrow B(0, -2)$$

اکنون طول پاره‌خط‌های AB و BC را به دست می‌آوریم و سپس محیط

مستطیل را محاسبه می‌کنیم.

$$AB = \sqrt{(2-0)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(0+3)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

در نتیجه

$$\text{محیط مستطیل} = 2(AB+BC) = 2(2\sqrt{10} + \sqrt{10}) = 6\sqrt{10}$$

۲۸۸۹- گزینه ۲ توجه کنید که $\frac{\sqrt{3}}{2}a = h$

$$\text{پس } a = \frac{2}{\sqrt{3}}h, \quad 3a = \frac{3 \times 2h}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}h \quad \text{در نتیجه}$$

یعنی $3a = 2\sqrt{3}h$ محیط مثلث. از طرف دیگر،

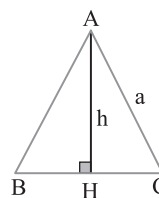
چون محیط مثلث برابر $\sqrt{270}$ است، پس

$$2\sqrt{3}h = \sqrt{270} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{270}}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$$

اگر مختصات نقطه A به صورت (a, b) باشد، آن‌گاه

$$h = AH = \frac{|3a-b-5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{|3a-b-5|}{\sqrt{10}} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$$

$$|3a-b-5| = \frac{3}{2}\sqrt{10} \times \sqrt{10} = 15 \quad (*)$$



اکنون برای اینکه $\cos^2 \frac{\pi}{12}$ را حساب کنیم، از اتحاد مثلثاتی

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \quad \text{بنابراین}$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3}{8} \cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2}(1 + \cos \frac{\pi}{6})\right) = \frac{3}{16} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{32}$$

$$= \frac{6 + \sqrt{27}}{32}$$

راه حل دوم $f(x) = 32(\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \cos 16x)^2$

اکنون عبارت داخل پرانتز را در $\sin x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$f(x) = 32 \left(\frac{\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \cos 16x}{\sin x} \right)^2$$

از اتحاد مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ به دست می‌آید

$$f(x) = 32 \left(\frac{\frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \cos 16x}{\sin x} \right)^2$$

به طور مشابه $\sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x$ پس

$$f(x) = 32 \left(\frac{\frac{1}{4} \sin 4x \cos 4x \cos 8x \cos 16x}{\sin x} \right)^2$$

به طور مشابه با انجام سه مرحله دیگر عبارت را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم.

$$f(x) = 32 \left(\frac{\frac{1}{8} \sin 8x \cos 8x \cos 16x}{\sin x} \right)^2 = 32 \left(\frac{\frac{1}{16} \sin 16x \cos 16x}{\sin x} \right)^2$$

$$= 32 \left(\frac{\frac{1}{32} \sin 32x}{\sin x} \right)^2 = \frac{\sin^2 32x}{32 \sin^2 x}$$

بنابراین

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin^2 \frac{32\pi}{12}}{32 \sin^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{\sin^2 \left(3\pi - \frac{4\pi}{3}\right)}{32 \sin^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{3}}{32 \times \frac{1}{4} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{16(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{3}{32(2 - \sqrt{3})} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{32(4 - 3)} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{32}$$

توجه کنید که (۳) گزینۀ ۲۸۹۴

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha, \quad \sin(\alpha - \pi) = -\sin \alpha$$

از طرف دیگر، $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ چون انتهای کمان α در

ناحیه چهارم مثلثاتی است، پس $\sin \alpha < 0$ ، یعنی $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ در نتیجه

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{|\tan^2 \alpha - 1|} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}}{\left|\frac{5}{4} - 1\right|} = \frac{2 - \sqrt{5}}{\frac{1}{4}} = \frac{4(2 - \sqrt{5})}{1}$$

راه حل اول توجه کنید که چون x_1 و x_2 جواب‌های

معادله $x^2 - x - 4 = 0$ هستند، پس $x_1 + x_2 = 1$ و $x_1 x_2 = -4$. اکنون

می‌توانیم مجموع جواب‌های معادله جدید را به صورت زیر حساب کنیم:

$$S = \left(x_1^3 + \frac{1}{x_2}\right) + \left(x_2^3 + \frac{1}{x_1}\right) = x_1^3 + x_2^3 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

با استفاده از اتحاد $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ و نیز مخرج مشترک

گرفتن، عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$S = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 1 - 3(-4)(1) + \frac{1}{-4} = \frac{51}{-4}$$

همچنین حاصل ضرب جواب‌های معادله جدید به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P = \left(x_1^3 + \frac{1}{x_2}\right) \left(x_2^3 + \frac{1}{x_1}\right) = x_1^3 x_2^3 + x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{x_1 x_2}$$

$$= (x_1 x_2)^3 + (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + \frac{1}{x_1 x_2} = (-4)^3 + 1 - 2(-4) + \frac{1}{-4}$$

$$= -\frac{221}{4}$$

بنابراین معادله جدید به صورت $x^2 - \frac{51}{4}x - \frac{221}{4} = 0$ است، که اگر دو

طرف آن را در ۴ ضرب کنیم، می‌شود $4x^2 - 51x - 221 = 0$.

راه حل دوم توجه کنید که

$$\xrightarrow{xx} x^3 = x^2 + 4x = (x+4) + 4x = 5x + 4$$

$$x = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 = x + 4$$

بنابراین $x_1^3 = 5x_1 + 4$ و $x_2^3 = 5x_2 + 4$ از طرف دیگر،

$$x_1 x_2 = -4 \Rightarrow \frac{1}{x_1} = -\frac{x_2}{4}, \quad \frac{1}{x_2} = -\frac{x_1}{4}$$

اکنون می‌توانیم مجموع و حاصل ضرب جواب‌های معادله جدید را به صورت

زیر به دست آوریم:

$$S = \left(x_1^3 + \frac{1}{x_2}\right) + \left(x_2^3 + \frac{1}{x_1}\right) = (5x_1 + 4 - \frac{x_1}{4}) + (5x_2 + 4 - \frac{x_2}{4})$$

$$= \frac{19}{4}(x_1 + x_2) + 8 = \frac{19}{4}(1) + 8 = \frac{51}{4}$$

$$P = \left(x_1^3 + \frac{1}{x_2}\right) \left(x_2^3 + \frac{1}{x_1}\right) = (5x_1 + 4 - \frac{x_1}{4}) (5x_2 + 4 - \frac{x_2}{4})$$

$$= \left(\frac{19}{4}x_1 + 4\right) \left(\frac{19}{4}x_2 + 4\right) = \left(\frac{19}{4}\right)^2 x_1 x_2 + 19(x_1 + x_2) + 16 = -\frac{221}{4}$$

بنابراین معادله جدید به صورت زیر است:

$$x^2 - \frac{51}{4}x - \frac{221}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 51x - 221 = 0$$

راه حل اول می‌توان نوشت (۱) گزینۀ ۲۸۹۳

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 32 \cos^2 \frac{\pi}{12} \cos^2 \frac{2\pi}{12} \cos^2 \frac{4\pi}{12} \cos^2 \frac{8\pi}{12} \cos^2 \frac{16\pi}{12}$$

$$= 32 \cos^2 \frac{\pi}{12} \cos^2 \frac{\pi}{6} \cos^2 \frac{\pi}{3} \cos^2 \frac{2\pi}{3} \cos^2 \frac{4\pi}{3}$$

$$= 32 \cos^2 \frac{\pi}{12} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} \cos^2 \frac{\pi}{12}$$

۲۸۹۵- گزینه ۲ معادله مثلثاتی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\Delta \sin^2 x + 2 \cos^2 x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta \sin^2 x + 2(\cos^2 x + 1) = 0$$

$$\Delta \sin^2 x + 2\left(2 \cos^2 \frac{3x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \Delta \sin^2 x + 4 \cos^2 \frac{3x}{2} = 0$$

چون $\Delta \sin^2 x$ و $4 \cos^2 \frac{3x}{2}$ غیرمنفی‌اند، پس باید هر دو برابر صفر باشند، بنابراین جواب‌های مشترک معادله‌های مثلثاتی $\sin^2 x = 0$ و $\cos^2 \frac{3x}{2} = 0$ جواب‌های معادله مثلثاتی مورد نظر هستند:

$$\sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos^2 \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \cos \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3x}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

برای اینکه جواب‌های در بازه $[-\pi, \pi]$ را پیدا کنیم، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

k	-۲	-۱	۰	۱	۲
$k\pi$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	۰	$\frac{\pi}{2}$	π
$(2k+1)\frac{\pi}{3}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$

از این جدول معلوم می‌شود که جواب‌های مورد نظر $x = -\pi$ و $x = \pi$ هستند که تعداد آن‌ها دوتا است.

۲۸۹۶- گزینه ۴ راه حل اول باید نامعادله $|x^2 - 2| - x > 0$ را حل کنیم:

$$|x^2 - 2| - x > 0 \Rightarrow |x^2 - 2| > x$$

توجه کنید که همواره $|x^2 - 2| \geq 0$ ، پس تمام x های منفی و نیز $x = 0$ در این نامعادله صدق می‌کنند:

$$x \in (-\infty, 0] \quad (۱)$$

اکنون فرض می‌کنیم x مثبت باشد. در این صورت

$$|x^2 - 2| > x \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2 > x \Rightarrow x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) > 0 \\ x^2 - 2 < -x \Rightarrow x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (2, +\infty) & (۲) \\ x \in (0, 1) & (۳) \end{cases}$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر، یعنی دامنه تابع f برابر اجتماع جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) است:

$$D_f = (-\infty, 0] \cup (0, 1) \cup (2, +\infty) = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

راه حل دوم توجه کنید که عدد ۲ در دامنه تابع f نیست، زیرا $f(2) = \log_4(|4-2|-2) = \log_4 0$.

گزینه‌های (۲) و (۳) حذف می‌شوند، زیرا عدد ۲ عضو آن‌ها هست. همچنین

عدد صفر در دامنه تابع f هست، زیرا $f(0) = \log_4(|0-2|-0) = \log_4 2 = \frac{1}{2}$. بنابراین گزینه (۱) حذف می‌شود، زیرا عدد صفر عضو آن نیست. در نتیجه گزینه (۴) درست است.

۲۸۹۷- گزینه ۲ ابتدا نشان می‌دهیم تابع $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$ با دامنه

$D_f = [-3, +\infty)$ اکیداً صعودی است. می‌توان نوشت

$$x_1, x_2 \geq -3: x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 3 < x_2 + 3 \Rightarrow \sqrt{x_1 + 3} < \sqrt{x_2 + 3} \\ \sqrt{x_1 + 3} - 1 < \sqrt{x_2 + 3} - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

چون تابع f اکیداً صعودی است، پس نمودار تابع f نمودار تابع وارون خود را روی خط $y = x$ قطع می‌کند. در نتیجه باید معادله $\sqrt{x+3} - 1 = x$ را حل کنیم تا طول نقطه M به دست بیاید:

$$\sqrt{x+3} - 1 = x \Rightarrow \sqrt{x+3} = x+1 \xrightarrow{\text{دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم}}$$

$$x+3 = (x+1)^2 \Rightarrow x+3 = x^2 + 2x+1 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2$$

توجه کنید که $x = -2$ در معادله مورد نظر صدق نمی‌کند. بنابراین $x = 1$ و عرض نقطه M برابر است با $f(1) = \sqrt{1+3} - 1 = 2 - 1 = 1$

در نتیجه فاصله نقطه M از مبدأ مختصات برابر است با $OM = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

۲۸۹۸- گزینه ۱ توجه کنید که هر بار که توپ بالا می‌رود، به همان اندازه هم پایین می‌آید. بنابراین مجموع مورد نظر برابر است با

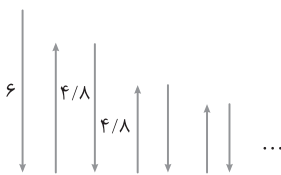
$$S = 6 + 2\left(\frac{0}{8} \times 6 + \left(\frac{0}{8}\right)^2 \times 6 + \dots + \left(\frac{0}{8}\right)^{99} \times 6\right) \\ = 6 + 2 \times 6 \left(\frac{0}{8} + \left(\frac{0}{8}\right)^2 + \dots + \left(\frac{0}{8}\right)^{99}\right)$$

عبارت داخل پرانتز مجموع ۹۹ جمله نخست یک دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = \frac{0}{8}$ و قدرنسبت $q = \frac{0}{8}$ است. بنابراین

$$S = 6 + 12 \times \frac{0}{8} \times \frac{1 - \left(\frac{0}{8}\right)^{99}}{0/8 - 1}$$

توجه کنید که می‌توانیم از $\left(\frac{0}{8}\right)^{99}$ صرف نظر کنیم، زیرا عددی بسیار کوچک

است. بنابراین $S = 6 + 12 \times \frac{0}{8} \times \frac{1}{1 - 0/8} = 54$ متر



۲۸۹۹- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که ۳ واحد انتقال در امتداد محور x در جهت منفی معادل ۳ واحد انتقال به چپ و ۲ واحد انتقال در امتداد محور y در جهت منفی معادل ۲ واحد انتقال به پایین است. اکنون به تبدیلات زیر توجه کنید:

$$y = 2x + |x| \xrightarrow{\text{۳ واحد به چپ}} y = 2x + 3 + |x+3|$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به پایین}} y = 2x + 3 + |x+3| - 2$$

بنابراین با انجام انتقال‌های خواسته شده، نمودار تابع با ضابطه $y = 2x + 3 + |x+3| - 2$ به دست می‌آید. برای یافتن طول نقطه تلاقی نمودار این تابع با محور x باید جواب معادله زیر را پیدا کنیم:

$$2x + 3 + |x+3| - 2 = 0 \Rightarrow 2x + 3 + |x+3| = 2 \Rightarrow x + 3 + |x+3| = 1$$

$$|x+3| = -x-2 \Rightarrow \begin{cases} x+3 = -x-2 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \\ -(x+3) = -x-2 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

از طرف دیگر، سهمی f و خط راست g همه‌جا مشتق‌پذیرند. پس مقدار حد مورد نظر برابر است با $-(f'(4) + g'(4))$. اکنون توجه کنید که

$$f(x) = -\frac{1}{4}x(x-4) = -\frac{1}{4}x^2 + x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow f'(4) = -1$$

$$g'(4) = m = -\frac{1}{4}$$

در نتیجه مقدار حد مورد نظر برابر است با $-\left(-1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$.

۲۹۰۲-گزینه ۱ ابتدا ضابطه تابع f^{-1} را پیدا می‌کنیم. برای این کار x را بر حسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow \sqrt{x+1} = y\sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-y} = y\sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-y} = y\sqrt{x-1}$$

$$\sqrt{x(1-y)} = -(y+1) \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{y+1}{y-1} \Rightarrow x = \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2$$

بنابراین $f^{-1}(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$. به این ترتیب

$$(f^{-1})'(x) = 2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{-2}{(x-1)^2}\right) = \frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{-4(2+1)}{(2-1)^3} = -12$$

شیب خط مماس

۲۹۰۳-گزینه ۱ توجه کنید که

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f(1) = 0 & x > 0 \\ f(0) = 0 & x = 0 \\ f(-1) = 0 & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین $(f \circ g)(x) = 0$. در نتیجه

$$((f \circ g) \circ g)(x) = (f \circ (g \circ g))(x) = f((f \circ g)(x)) = f(0) = 0$$

یعنی $(f \circ g) \circ g$ تابع ثابت صفر است، پس نقطه ناپیوستگی ندارد.

۲۹۰۴-گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که مطابق جدول تعیین علامت زیر، عبارت $3-x^2$ روی بازه $[-1/5, \sqrt{3}]$ نامنفی است.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$-1/5$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$3-x^2$		-	+	+	-

بنابراین $|3-x^2| = 3-x^2$ و در نتیجه $f(x) = x(3-x^2) = 3x-x^3$ چون تابع f در هر نقطه از بازه $(-1/5, \sqrt{3})$ مشتق‌پذیر است، پس طول‌های نقاط بحرانی آن در این بازه از حل معادله $f'(x) = 0$ به‌دست می‌آیند. اکنون توجه کنید که

$$f'(x) = 3-3x^2 = 3(1-x^2), \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

بنابراین باید مقادیر $f(\pm 1)$ ، $f(-1/5)$ و $f(\sqrt{3})$ را با هم مقایسه کنیم:

$$f(1) = 2, \quad f(-1) = -2, \quad f(-1/5) = -\frac{9}{8}, \quad f(\sqrt{3}) = 0$$

در نتیجه مینیمم مطلق تابع f برابر است با $f(-1) = -2$ (توجه کنید که چون مقادیر f به‌ازای عددهای مثبت، مثبت‌اند، پس کافی بود مقادیر تابع f را فقط برای عددهای منفی حساب می‌کردیم).

۲۹۰۵-گزینه ۳ راه‌حل اول مقدار x را برابر ۹ قرار می‌دهیم و معادله را ساده می‌کنیم.

$$2 \log_9 a + \log_a \sqrt{9} = 2 \Rightarrow 2 \log_9 a + \log_a 3 = 2$$

$$2 \times \left(\frac{1}{2} \log_3 a\right) + \log_a 3 = 2 \Rightarrow \log_3 a + \frac{1}{\log_3 a} = 2$$

دو طرف معادله را در $\log_3 a$ ضرب می‌کنیم:

$$(\log_3 a)^2 + 1 = 2 \log_3 a \Rightarrow (\log_3 a)^2 - 2 \log_3 a + 1 = 0$$

اکنون با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله می‌توان نوشت

$$(\log_3 a - 1)^2 = 0 \Rightarrow \log_3 a = 1 \Rightarrow a = 3^1 = 3$$

راه‌حل دوم می‌توان نوشت

$$2 \log_x a + \log_a \sqrt{x} = 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{x^2}} a + \log_a \sqrt{x} = 2$$

$$\log_{\sqrt{x}} a + \log_a \sqrt{x} = 2 \Rightarrow \log_{\sqrt{x}} a + \frac{1}{\log_{\sqrt{x}} a} = 2$$

چون هر عدد حقیقی و معکوسش هم علامت هستند و مجموع $\log_{\sqrt{x}} a$ و معکوسش برابر عددی مثبت است، پس $\log_{\sqrt{x}} a > 0$. همچنین، چون مجموع عدد حقیقی مثبت $\log_{\sqrt{x}} a$ و معکوسش برابر ۲ است، پس این عدد برابر ۱ است. بنابراین

$$\log_{\sqrt{x}} a = 1 \xrightarrow{x=9} \log_{\sqrt{9}} a = 1 \Rightarrow \log_3 a = 1 \Rightarrow a = 3^1 = 3$$

۲۹۰۱-گزینه ۳ راه‌حل اول چون خط $x=2$ محور تقارن سهمی است و سهمی از نقطه $(0,0)$ می‌گذرد، پس سهمی از نقطه $(4,0)$ نیز می‌گذرد. بنابراین معادله سهمی به‌صورت $y = a(x-0)(x-4)$ یا $y = ax(x-4)$ است. چون این سهمی از نقطه $(2,1)$ نیز می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادله سهمی صدق می‌کنند. بنابراین

$$1 = a \times 2(2-4) \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

در نتیجه $f(x) = -\frac{1}{4}x(x-4)$ ، از طرف دیگر، چون خط راست مورد نظر از نقطه‌های $(0,1)$ و $(4,0)$ می‌گذرد، معادله آن به‌صورت زیر است:

$$y - 0 = \frac{0-1}{4-0}(x-4) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}(x-4)$$

بنابراین $g(x) = -\frac{1}{4}(x-4)$. اکنون توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) + g(x)}{4-x} &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-\frac{1}{4}x(x-4) - \frac{1}{4}(x-4)}{4-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-\frac{1}{4}(x-4)(x+1)}{-(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x+1}{4} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

راه‌حل دوم چون $f(4) = g(4) = 0$ ، پس حد مورد نظر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) + g(x)}{4-x} &= - \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(f(x) - f(4)) + (g(x) - g(4))}{x-4} \\ &= - \left(\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x-4} + \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{g(x) - g(4)}{x-4} \right) = -(f'_-(4) + g'_-(4)) \end{aligned}$$

۲۹۰۷- گزینه ۱ توجه کنید که $g'(x) = 2ax + 5$ و $g''(x) = 2a$.

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \leq 2 \\ g'(x) & x > 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} g'(x) & x \leq 2 \\ g''(x) & x > 2 \end{cases}$$

چون تابع f در نقطه $x=2$ مشتق پذیر است، پس

$$\begin{aligned} g(2) &= g'(2) \Rightarrow 4a + 10 + b = 4a + 5 \Rightarrow b = -5 \\ g'(2) &= g''(2) \Rightarrow 4a + 5 = 2a \Rightarrow a = -\frac{5}{2} \Rightarrow a + b = -\frac{15}{2} \end{aligned}$$

۲۹۰۸- گزینه ۳ هر نقطه روی سهمی $y^2 = 4x$ به صورت $A(\frac{t^2}{4}, t)$

است. فاصله نقطه A از نقطه $M(3, 0)$ برابر است با

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(\frac{t^2}{4} - 3)^2 + (t - 0)^2} = \sqrt{\frac{t^4}{16} - \frac{3}{2}t^2 + 9 + t^2} \\ &= \sqrt{\frac{t^4 - 8t^2 + 144}{16}} = \frac{1}{4} \sqrt{(t^2 - 4)^2 + 128} \end{aligned}$$

بنابراین کمترین مقدار AM به ازای $t^2 = 4$ به دست می آید و برابر است با

$$\frac{1}{4} \sqrt{128} = 2\sqrt{2}$$

۲۹۰۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که چون عرض از مبدأ خط مورد نظر

برابر -1 است، پس این خط از نقطه $(0, -1)$ می گذرد. بنابراین معادله این

خط به صورت زیر است:

$$y - (-1) = \frac{0+1}{1-0}(x-1) \Rightarrow y = x - 1$$

طول نقطه‌های برخورد این خط و سهمی داده شده، یعنی A و B جواب‌های

معادله زیر هستند:

$$\begin{aligned} -x^2 + 2x + 1 &= x - 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} \\ (x+1)(x-2) &= 0 \Rightarrow x_A = 2, x_B = -1 \end{aligned}$$

چون این نقطه‌ها روی خط $y = x - 1$ هستند، پس عرض آن‌ها برابر است با

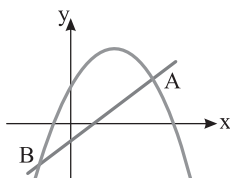
$$A(2, 1) \text{ و } B(-1, -2) \text{ بنابراین نقطه‌های مورد نظر } A(2, 1) \text{ و } B(-1, -2)$$

و $B(-1, -2)$ هستند که نقطه وسط آن‌ها $M(\frac{2-1}{2}, \frac{1-2}{2})$ ، یعنی

$M(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ است. از طرف دیگر، رأس سهمی $y = -x^2 + 2x + 1$ نقطه

$(1, 2)$ است. بنابراین فاصله مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{(1 - \frac{1}{2})^2 + (2 + \frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{26}}{2} \text{ پس این فاصله } \frac{1}{2} \text{ برابر } \sqrt{26} \text{ است.}$$



۲۹۰۵- گزینه ۲ اگر A نقطه $(x, \sqrt[3]{x})$ ، یعنی نقطه $(x, -\sqrt[3]{x})$

باشد، آن گاه A' ، یعنی قرینه A نسبت به نیمساز نواحی دوم و چهارم نقطه

$(\sqrt[3]{x}, -x)$ است. بنابراین

$$AA' = \sqrt{(x - \sqrt[3]{x})^2 + (-\sqrt[3]{x} - x)^2} = \sqrt{2(x - \sqrt[3]{x})^2} = \sqrt{2}|x - \sqrt[3]{x}|$$

چون $x \in [0, 1]$ ، پس $x \leq \sqrt[3]{x}$ و در نتیجه $AA' = \sqrt{2}(\sqrt[3]{x} - x)$. بنابراین

باید ماکزیمم مطلق تابع $g(x) = \sqrt{2}(\sqrt[3]{x} - x)$ را روی بازه $[0, 1]$ پیدا کنیم.

توجه کنید که

$$g'(x) = \sqrt{2}(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 1)$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$$

چون $g(1) = g(0) = 0$ ، پس ماکزیمم مطلق تابع g به ازای $x = \frac{1}{3}$ به دست

می آید و برابر است با (توجه کنید که $\sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{3}$ پس $\sqrt[3]{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$)

$$g(\frac{1}{3}) = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{3}) = \sqrt{2} \times \frac{2}{3\sqrt[3]{3}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{6}}$$

۲۹۰۶- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که وقتی $x \rightarrow (\frac{\sqrt{5}}{2})^-$ ، آن گاه

$g(x) \rightarrow 2^+$ پس در یک همسایگی چپ $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ، ضابطه تابع f به صورت

$f(x) = (2x)^3$ است، اکنون می توان نوشت

$$(f \circ g)'_-(\frac{\sqrt{5}}{2}) = g'(\frac{\sqrt{5}}{2})f'_+(g(\frac{\sqrt{5}}{2})) = g'(\frac{\sqrt{5}}{2})f'_+(2)$$

مقدار $g'(\frac{\sqrt{5}}{2})$ را به سادگی می توان حساب کرد

$$g(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{2}(2x)(x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$$

$$g'(\frac{\sqrt{5}}{2}) = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{2}}{(\frac{1}{2})^3} = -4\sqrt{5}$$

از طرف دیگر،

$$f(x) = (2x)^3 = 8x^3 \Rightarrow f'(x) = 24x^2 \Rightarrow f'_+(2) = 96$$

پس

$$(f \circ g)'_-(\frac{\sqrt{5}}{2}) = (-4\sqrt{5}) \times 96 = (-48\sqrt{5})(\lambda)$$

یعنی $(f \circ g)'_-(\frac{\sqrt{5}}{2})$ هشت برابر $-48\sqrt{5}$ است.

۲۹۱۳- گزینه ۱) راه حل اول جواب‌های معادله $x^2 + 6x + a = 0$ به

صورت زیر هستند:

$$\frac{-6 - \sqrt{36 - 4a}}{2} = -3 - \sqrt{9 - a}, \quad \frac{-6 + \sqrt{36 - 4a}}{2} = -3 + \sqrt{9 - a}$$

چون $\alpha < \beta$ ، پس $\alpha = -3 - \sqrt{9 - a}$ و $\beta = -3 + \sqrt{9 - a}$. در نتیجه

$$r\alpha^2 = 3(-3 - \sqrt{9 - a})^2 = 27 + 27 - 3a + 18\sqrt{9 - a} = 54 - 3a + 18\sqrt{9 - a}$$

$$r\beta^2 = 3(-3 + \sqrt{9 - a})^2 = 18 + 18 - 3a - 12\sqrt{9 - a} = 36 - 3a - 12\sqrt{9 - a}$$

بنابراین

$$r\alpha^2 + r\beta^2 = 90 - 6a + 6\sqrt{9 - a}$$

در نتیجه

$$r\alpha^2 + r\beta^2 = 12\sqrt{2} + 18 \Rightarrow 90 - 6a + 6\sqrt{9 - a} = 12\sqrt{2} + 18$$

$$50 - 6a + 6\sqrt{9 - a} = 12\sqrt{2}$$

توجه کنید که لازم نیست این معادله را حل کنیم و کافی است ببینیم عدد کدام

گزینه در این معادله صدق می‌کند. به این ترتیب معلوم می‌شود که $a = 1$.

راه حل دوم توجه کنید که

$$r\alpha^2 + r\beta^2 = \frac{5}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{5}{4}\beta^2 - \frac{1}{4}\beta^2 = \frac{5}{4}(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{4}(\alpha^2 - \beta^2)$$

از طرف دیگر،

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-6)^2 - 2a = 36 - 2a$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \left(-\frac{\Delta}{1}\right)(-6) = 6\Delta = 6\sqrt{36 - 4a} = 12\sqrt{9 - a}$$

بنابراین

$$r\alpha^2 + r\beta^2 = 12\sqrt{2} + 18 \Rightarrow \frac{5}{4}(36 - 2a) + \frac{1}{4}(12\sqrt{9 - a}) = 12\sqrt{2} + 18$$

$$90 - 6a + 6\sqrt{9 - a} = 12\sqrt{2} + 18 \Rightarrow 50 - 6a + 6\sqrt{9 - a} = 12\sqrt{2}$$

در میان گزینه‌ها فقط $a = 1$ جواب این معادله است.

۲۹۱۴- گزینه ۳) ابتدا توجه کنید که از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{a^3 + 1} + \frac{1}{a^3 - 1} = 2 \Rightarrow \frac{a^3 - 1 + a^3 + 1}{(a^3 + 1)(a^3 - 1)} = 2 \Rightarrow \frac{2a^3}{a^6 - 1} = 2$$

$$a^3 = a^6 - 1 \Rightarrow a^6 = a^3 + 1$$

اکنون توجه کنید که

$$\frac{1}{a^3 - \sqrt{a^3 + 1}} + \frac{1}{a^3 + \sqrt{a^3 + 1}} = \frac{a^3 + \sqrt{a^3 + 1} + a^3 - \sqrt{a^3 + 1}}{(a^3 + 1)^2 - (\sqrt{a^3 + 1})^2}$$

$$= \frac{2a^3 + 2}{a^6 + 2a^3 + 1 - a^3} = \frac{2(a^3 + 1)}{a^3 + 1 + a^3 + 1} = \frac{2(a^3 + 1)}{2(a^3 + 1)} = 1$$

پس

$$\left(\frac{1}{a^3 - \sqrt{a^3 + 1}} + \frac{1}{a^3 + \sqrt{a^3 + 1}}\right)^{1401} = 1$$

۲۹۱۵- گزینه ۲) فرض کنید مختصات نقطه A به صورت (a, b) باشد.

چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس میانه AM ارتفاع نیز هست،

یعنی خط AM بر خط BC عمود است. اما شیب خط BC برابر $m_{BC} = -\frac{1}{4}$

است و شیب خط AM برابر $m_{AM} = \frac{b-2}{a-3}$ است. اکنون می‌توان نوشت

$$BC \perp AM \Rightarrow m_{BC} \times m_{AM} = -1$$

$$-\frac{1}{4} \times \frac{b-2}{a-3} = -1 \Rightarrow b-2 = 4(a-3) \Rightarrow b = 4a-10$$

از طرف دیگر، فاصله نقطه A از خط BC برابر با $5\sqrt{5}$ است. بنابراین

$$\frac{|a+2b-7|}{\sqrt{1^2+2^2}} = 5\sqrt{5} \xrightarrow{b=4a-10} \frac{|a+4a-10-7|}{\sqrt{5}} = 5\sqrt{5}$$

$$|5a-17| = 25 \Rightarrow \begin{cases} 5a-17=25 \\ 5a-17=-25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ a=-2 \end{cases}$$

در نتیجه طول نقطه A هرکدام از دو مقدار ۸ و -۲ می‌تواند باشد که با توجه به گزینه‌ها، $a = -2$ درست است.

۲۹۱۱- گزینه ۴) فرض کنید جمله نخست دنباله برابر a و قدرنسبت آن

برابر r باشد، که $r \geq 2$. چون جمله‌های این دنباله عضو مجموعه

$\{1, 2, \dots, 100\}$ هستند، پس

$$a \geq 1, \quad ar^4 \leq 100$$

اکنون توجه کنید که $r \geq 2$ ، پس

$$r^4 \leq ar^4 \leq 100 \Rightarrow r^4 \leq 100 \Rightarrow r \leq \sqrt[4]{100} < 4$$

چون r عددی طبیعی است و $2 \leq r < 4$ ، پس $r = 2$ یا $r = 3$.

اگر $r = 2$ ، آن‌گاه بزرگ‌ترین جمله دنباله ۱۶a است، که چون $16a \leq 100$ ،

پس $a \leq 6$ ، یعنی a یکی از شش عدد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ است. بنابراین در این

حالت شش دنباله با ویژگی مورد نظر به دست می‌آیند.

اگر $r = 3$ ، آن‌گاه بزرگ‌ترین جمله دنباله ۸۱a است، که چون $81a \leq 100$ ، پس

$a \leq 1$ ، در نتیجه $a = 1$. بنابراین در این حالت یک دنباله با ویژگی مورد نظر

به دست می‌آید.

در کل تعداد دنباله‌های مورد نظر هفت تا است.

۲۹۱۲- گزینه ۱) کمترین مقدار تابع درجه دوم داده شده برابر است با

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{144 - 4m(\Delta m - 1)}{4m} = \frac{m(\Delta m - 1) - 36}{m}$$

بنابراین

$$\frac{m(\Delta m - 1) - 36}{m} = 2 \Rightarrow \Delta m^2 - m - 36 = 2m \Rightarrow \Delta m^2 - 3m - 36 = 0$$

$$(m-3)(\Delta m + 12) = 0 \Rightarrow m = 3, m = -\frac{12}{\Delta}$$

چون تابع درجه دوم داده شده کمترین مقدار دارد، پس ضریب x^2 باید عددی

مثبت باشد، یعنی فقط $m = 3$ قابل قبول است. در نتیجه معادله سهمی به

صورت $y = 3x^2 - 12x + 14$ است، که معادله محور تقارن آن به صورت

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{6} = 2$$

۲۹۲۰- گزینه ۱

ابتدا توجه کنید که چون نمودار تابع f در یک همسایگی راست نقطه $x=0$ نزولی است، پس $a > 0$. همچنین مینیمم تابع f برابر با $-\frac{1}{4}$ است و چون از روی نمودار معلوم می‌شود که این مینیمم برابر $-\frac{1}{4}$

است، پس $a = \frac{1}{4} \Rightarrow -|a| = -\frac{1}{4}$

همچنین، یک‌چهارم دوره تناوب تابع برابر است با $\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$. پس $\frac{1}{4} \times \frac{2\pi}{|b|} = \frac{1}{2}$

پس $|b| = \pi$ و چون $b > 0$ ، پس $b = \pi$. بنابراین $f(x) = \frac{1}{4} \cos(\pi x + c)$ از طرف دیگر،

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \cos\left(\frac{5}{4}\pi + c\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{5}{4}\pi + c\right) = 0$$

$$\frac{5}{4}\pi + c = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = k\pi - \frac{3\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

چون $0 < c < \pi$ ، پس $c = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. در نتیجه $\frac{ac}{b} = \frac{1}{16}$

۲۹۲۱- گزینه ۳ دو طرف معادله را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{12} \\ x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

k	۰	۱	-۱
$2k\pi - \frac{\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{12}$	$2\pi - \frac{\pi}{12}$	$-2\pi - \frac{\pi}{12}$
$2k\pi + \frac{5\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$2\pi + \frac{5\pi}{12}$	$-2\pi + \frac{5\pi}{12}$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله در بازه $[-\pi, 2\pi]$ برابر است با

$$-\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} + 2\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{9\pi}{4}$$

۲۹۲۲- گزینه ۴ راه حل اول با استفاده از اتحادهای مزدوج و جاق و لاغر

رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x+4}}{1+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x+3) - (3x+4)}{1+x} \times \frac{1-\sqrt{x}+\sqrt{x^2}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x-1}{1+x} \times \frac{1-\sqrt{x}+\sqrt{x^2}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4}} = \lim_{x \rightarrow -1} (-1) \times \frac{1-\sqrt{x}+\sqrt{x^2}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4}}$$

$$= (-1) \times \frac{1+1+1}{1+1} = -\frac{3}{2}$$

راه حل دوم با استفاده از قاعده هویتنال می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x+4}}{1+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+3}} - \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}}{\frac{1}{3\sqrt{x^2}}}$$

$$= \frac{\frac{2}{2 \times 1} - \frac{3}{2 \times 1}}{\frac{1}{3 \times 1}} = \frac{1-3}{3} = -\frac{2}{3}$$

۲۹۱۵- گزینه ۴

ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = x^2 \sqrt{x^2} = x^2 |x| = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x \leq 0 \end{cases}$$

تابع $g(x) = -x^3$ روی بازه $(-\infty, 0]$ نزولی است. پس تابع f نیز روی بازه $(-\infty, 0]$ نزولی است. در نتیجه باید وارون تابع $g(x) = -x^3$ با دامنه $(-\infty, 0]$ را به دست بیاوریم. توجه کنید که

$$y = -x^3 \Rightarrow x^3 = -y \Rightarrow x = \sqrt[3]{-y} = -\sqrt[3]{y}$$

در نتیجه $g^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x}$. از طرف دیگر،

$$D_g = (-\infty, 0] \Rightarrow R_g = [0, +\infty) \Rightarrow D_{g^{-1}} = [0, +\infty)$$

۲۹۱۶- گزینه ۱ فرض می‌کنیم A نقطه (x_0, y_0) باشد. چون نقطه A

روی خط $x+y=a$ است، پس $x_0 + y_0 = a$. اکنون توجه کنید که

$$AB = \sqrt{29} \Rightarrow \sqrt{(x_0 - (-3))^2 + (y_0 - 2)^2} = \sqrt{29}$$

$$(x_0 + 3)^2 + (y_0 - 2)^2 = 29 \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 + 6x_0 - 4y_0 = 16 \quad (1)$$

$$AC = 5 \Rightarrow \sqrt{(x_0 - (-1))^2 + (y_0 - 4)^2} = 5$$

$$(x_0 + 1)^2 + (y_0 - 4)^2 = 25 \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 8y_0 = 8 \quad (2)$$

اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، به دست می‌آید

$$4x_0 + 4y_0 = 8 \Rightarrow x_0 + y_0 = 2 \Rightarrow a = 2$$

۲۹۱۷- گزینه ۱

ابتدا توجه کنید که

$$\begin{cases} f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \\ f^{-1}(x) = f(x) \Rightarrow (f \circ f)(x) = x \\ a = -d \end{cases}$$

بنابراین در تابع داده شده

$$(f \circ f)(\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

در نتیجه

۲۹۱۸- گزینه ۳

توجه کنید که

$$2^{f(x)} = 2 \Rightarrow f(x) = \log_2 2 = \log_2 4 + \log_2 5 = 2 + \log_2 5$$

از طرف دیگر $5^x = 1 \Rightarrow x = \log_5 1 = \log_5 2 + \log_5 5 = \log_5 2 + 1$

$$\log_5 2 = x - 1 \Rightarrow \log_2 5 = \frac{1}{x-1}$$

در نتیجه

$$f(x) = 2 + \log_2 5 = 2 + \frac{1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$$

۲۹۱۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})$. در نتیجه

$$\sin \hat{C} = \sin(180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})) = \sin(\hat{A} + \hat{B})$$

$$= \sin \hat{A} \cos \hat{B} + \cos \hat{A} \sin \hat{B}$$

بنابراین

$$2 \cos \hat{A} \sin \hat{B} - \sin \hat{C} = 2 \cos \hat{A} \sin \hat{B} - \sin \hat{A} \cos \hat{B} - \cos \hat{A} \sin \hat{B}$$

$$= \cos \hat{A} \sin \hat{B} - \sin \hat{A} \cos \hat{B} = \sin(\hat{B} - \hat{A})$$

$$= \sin(\hat{B} - (\hat{B} + 45^\circ)) = \sin(-45^\circ)$$

$$= -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۹۲۶- گزینه ۱) مجانب‌های قائم نمودار تابع f خط‌های $x = -b$ و

$x = b$ هستند (یعنی ریشه‌های مخرج تابع f). مجانب‌های افقی نمودار تابع f خط‌های زیر هستند:

$$y = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|ax| + 2x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|a|x + 2x}{x} = |a| + 2$$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|ax| + 2x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-|a|x + 2x}{-x} = |a| - 2$$

توجه کنید که اگر $b = 0$ ، آن‌گاه نمودار تابع f فقط یک مجانب قائم دارد و اگر $b > 0$ ، آن‌گاه نمودار تابع f مجانب قائم ندارد، زیرا مخرج تابع ریشه ندارد.

بنابراین b منفی است و نمی‌تواند با $|a| + 2$ برابر باشد. پس

$$\begin{cases} b = |a| - 2 \\ -b = |a| + 2 \end{cases} \xrightarrow{+} 2|a| = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{|x|-2} = \frac{2+1}{1-2} = -3 \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{2x+1}{|x|-2}$$

۲۹۲۷- گزینه ۲) ابتدا نقطه تلاقی منحنی‌ها را در بازه $[0, \pi]$ پیدا می‌کنیم.

طول این نقطه جواب معادله $f(x) = g(x)$ در بازه $[0, \pi]$ است:

$$\sin x + \frac{1}{2} \cos x = \frac{3}{2} \sin x \Rightarrow \cos x = \sin x$$

$$\tan x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

چون جواب معادله $f(x) = g(x)$ در بازه $[0, \pi]$ است، پس $k = 0$ و در

نتیجه $x = \frac{\pi}{4}$ ، چون $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ ، بنابراین نقطه تلاقی منحنی‌ها نقطه

$(\frac{\pi}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4})$ است. اکنون توجه کنید که

$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{2} \sin x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

پس شیب خط مماس مورد نظر برابر $\frac{\sqrt{2}}{4}$ است و معادله آن به صورت زیر است:

$$y - \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} (x - \frac{\pi}{4})$$

طول نقطه برخورد این خط با محور x به ازای $y = 0$ به دست می‌آید که می‌شود

$$-\frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} (x - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow -3 = x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} - 3$$

۲۹۲۸- گزینه ۳) چون f تابعی متناوب با دوره تناوب δ است، پس

$$f(x+\delta) = f(x) \Rightarrow f'(x+\delta) = f'(x) \quad (1)$$

از طرف دیگر،

$$g(x) = f(x+1) + f(3x+1)$$

$$g'(x) = f'(x+1) + 3f'(3x+1) \Rightarrow g'(-2) = f'(-1) + 3f'(4) \quad (2)$$

چون $f'(-1) = \frac{3}{4}$ ، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$f'(-1+\delta) = f'(-1) \Rightarrow f'(4) = f'(-1) = \frac{3}{4}$$

بنابراین از تساوی (۲) نتیجه می‌شود

$$g'(-2) = \frac{3}{4} + 3(\frac{3}{4}) = 4 \times \frac{3}{4} = 3$$

۲۹۲۳- گزینه ۳) ابتدا شرط‌هایی را که دامنه تابع را مشخص می‌کنند ساده

می‌کنیم:

$$|x^3| < x^2 \Rightarrow |x|^3 < |x|^2 \Rightarrow |x| < 1, x \neq 0 \Rightarrow x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$$

$$|x^3| = x^2 \Rightarrow |x|^3 = |x|^2 \Rightarrow |x| = 1 \quad \text{یا} \quad x = 0 \Rightarrow x \in \{0, -1, 1\}$$

$$|x^3| > x^2 \Rightarrow |x|^3 > |x|^2 \Rightarrow |x| > 1, x \neq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} |x| + [-x] & x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ 1 + \cos \pi x & x \in \{0, -1, 1\} \\ [x^2] - [x] & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

توجه کنید که تابع $y = [x^2]$ در نقاطی که x^2 عددی صحیح (به جز صفر)

است ناپیوسته است. همچنین تابع $y = [x]$ در همه نقاطی که x صحیح است

ناپیوسته است. بنابراین تابع $y = [x^2] - [x]$ در همه نقاطی که x^2 صحیح

است و x صحیح نیست ناپیوسته است، که تعداد این نقطه‌ها در بازه $(1, +\infty)$

یا $(-\infty, -1)$ بی‌شمار است.

۲۹۲۴- گزینه ۴) ابتدا توجه کنید که $p(x)$ به ازای هر عدد طبیعی n بر

$x+2$ بخش‌پذیر است. بنابراین اگر $n=1$ ، آن‌گاه

$$p(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 16a$$

بر $x+2$ بخش‌پذیر است. در نتیجه

$$p(-2) = 0 \Rightarrow 16 - 16 + 64 - 96 + 16a = 0 \Rightarrow -32 + 16a = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$p(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 32$$

بنابراین

چون $x^2 + 2x - 3$ یک چندجمله‌ای درجه دوم است، پس می‌توان باقی‌مانده

تقسیم $p(x)$ بر آن را به صورت $cx+d$ نوشت. اکنون توجه کنید که بنابر

قضیه تقسیم،

$$p(x) = (x^2 + 2x - 3)Q(x) + cx + d = (x-1)(x+3)Q(x) + cx + d$$

اگر در این تساوی به جای x مقادیر 1 و -3 را قرار دهیم، به دست می‌آید

$$\begin{cases} p(1) = c + d \\ p(-3) = -3c + d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 39 = c + d \\ 49 = -3c + d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -5 \\ d = 44 \end{cases}$$

بنابراین برای $n=1$ ، باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x^2 + 2x - 3$ برابر

$$-5x + 44 \quad \text{است.}$$

۲۹۲۵- گزینه ۳) عددهای آخر دسته‌ها به صورت زیر هستند:

$$1, 3, 6, 12, 24, \dots$$

توجه کنید که این عددها به جز عدد اول، دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت 2

تشکیل می‌دهند. بنابراین آخرین عدد دسته دوازدهم برابر 3×2^{10} است. در

نتیجه اولین عدد دسته سیزدهم برابر $3 \times 2^{10} + 1$ است. همچنین، آخرین عدد

دسته سیزدهم برابر 3×2^{11} است. چون عضوهای دسته سیزدهم دنباله‌ای

حسابی تشکیل می‌دهند، پس میانگین آن‌ها برابر است با میانگین جمله‌های اول

و آخر این دنباله حسابی، که می‌شود

$$\frac{3 \times 2^{10} + 1 + 3 \times 2^{11}}{2} = \frac{3 \times 2^{10}(1+2) + 1}{2} = \frac{9 \times 2^{10} + 1}{2} = 460805$$

۲۹۲۹- گزینه ۲ بنابر قاعده هوییتال.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(\delta-h) - 3f(\delta-h) + 2}{h(\delta-h)} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(-1)f(\delta-h)f'(\delta-h) - 3(-1)f'(\delta-h)}{\delta - 2h} \\ = \frac{-2f(\delta)f'(\delta) + 3f'(\delta)}{\delta} \end{aligned}$$

اکنون توجه کنید که $f(\delta) = 2$ و

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{x+3} + \frac{1}{3\sqrt{(x+3)^2}} \times (x-4) \\ f'(\delta) &= \sqrt{4} + \frac{1}{3\sqrt{64}} \times (\delta-4) = 2 + \frac{1}{12} = \frac{25}{12} \end{aligned}$$

بنابراین مقدار حد مورد نظر برابر است با

$$\frac{-2 \times 2 \times \frac{25}{12} + 3 \times \frac{25}{12}}{\delta} = \frac{-\frac{25}{2} + \frac{75}{12}}{\delta} = \frac{-\frac{25}{4}}{\delta}$$

۲۹۳۰- گزینه ۱ چون نقطه $A(-1, 1)$ روی نمودار تابع

$$f(x) = x^2|x| + 3ax^2 + b$$

$$f(-1) = 1 \Rightarrow 1 + 3a + b = 1 \Rightarrow b = -3a \quad (1)$$

همچنین چون نقطه $A(-1, 1)$ نقطه اکسترم نسبی تابع f است، پس

$$f'(-1) = 0. \text{ اکنون توجه کنید که در یک همسایگی } x = -1,$$

$$f(x) = x^2(-x) + 3ax^2 + b = -x^3 + 3ax^2 + b \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6ax$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow -3 - 6a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{در نتیجه } \frac{b}{a} = \frac{3}{-\frac{1}{2}} = -6. \text{ بنابرین } b = -3a = -3(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$$

توجه کنید که بدون اینکه مقدارهای a و b را حساب کنیم، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $\frac{b}{a} = -3$.

۲۹۳۱- گزینه ۴ مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{ax+3}{(a+1)x+a-1}$ خط‌های

$$x = \frac{1-a}{a+1} \text{ و } y = \frac{a}{a+1} \text{ هستند که محل تلاقی آنها نقطه } (\frac{1-a}{a+1}, \frac{a}{a+1})$$

است. از طرف دیگر نقطه مینیمم تابع $g(x) = \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{6}$ نقطه

$$(-\frac{1}{3}, g(-\frac{1}{3})) \text{ است. بنابراین}$$

$$\frac{1-a}{a+1} = -\frac{1}{3} \Rightarrow 3 - 3a = -a - 1 \Rightarrow a = 2$$

به این ترتیب، $f(x) = \frac{2x+3}{3x+1}$. بنابراین طول نقطه برخورد نمودار تابع f با

محور x به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x+3}{3x+1} = 0 \Rightarrow 2x+3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

۲۹۳۲- گزینه ۱ اگر طول ضلع مربع اول برابر a باشد، مساحت آن برابر

a^2 است و مساحت مربع دوم برابر $9a^2$ می‌شود. بنابراین طول ضلع مربع دوم $3a$ است. در نتیجه محیط‌های مربع‌های اول و دوم به ترتیب برابر $4a$ و $12a$

هستند. بنابراین قدرنسبت دنباله هندسی مورد نظر برابر است با $\frac{12a}{4a} = 3$.

۲۹۳۳- گزینه ۳ چون نمودار سهمی بر خط $y = -x$ مماس است، پس معادله

$$3x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3} = -x$$

$$3x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3} + x = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2mx + m + \frac{4}{3} = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 4m^2 - 4 \times 3(m + \frac{4}{3}) = 0 \Rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0$$

$$(m+1)(m-4) = 0 \Rightarrow m = -1, m = 4$$

اکنون باید ببینیم به ازای کدام مقدار m طول نقطه تماس (ریشه مضاعف معادله (۱)) منفی می‌شود تا نقطه تماس در ناحیه دوم واقع شود. توجه کنید که

$$-\frac{2m}{6} = -\frac{m}{3} \text{ طول نقطه تماس}$$

که فقط به ازای $m = 4$ منفی است. بنابراین طول رأس سهمی مورد نظر برابر است با

$$-\frac{2m-1}{6} = -\frac{2 \times 4 - 1}{6} = -\frac{7}{6}$$

۲۹۳۴- گزینه ۴ چون a واسطه هندسی α و β است، پس $a^2 = \alpha\beta$.

از طرف دیگر، چون α و β جواب‌های معادله $x^2 + 2(a+1)x + 2a - 1 = 0$ هستند، پس $\alpha\beta = 2a - 1$. در نتیجه

$$a^2 = 2a - 1 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

۲۹۳۵- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که α و β جواب‌های معادله درجه دوم زیر هستند:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t+1)(t-2) = 0 \Rightarrow t = -1, t = 2$$

بنابراین یکی از عددهای α و β برابر -1 است. در نتیجه، -1 جواب معادله درجه سوم داده شده است، یعنی

$$4(-1)^3 + k(-1)^2 - 9(-1) - 2 = 0 \Rightarrow -4 + k + 9 - 2 = 0 \Rightarrow k = -3$$

۲۹۳۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$y = f(x) = \sqrt{(x+1)^2 - |3x-6|} = |x+1| - 3|x-2|$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1) + 3(x-2) & x \leq -1 \\ x+1 + 3(x-2) & -1 \leq x \leq 2 \\ x+1 - 3(x-2) & x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 2x-7 & x \leq -1 \\ 4x-5 & -1 \leq x \leq 2 \\ -2x+7 & x \geq 2 \end{cases}$$

چون شیب خط $y = -2x + 7$ منفی است، پس تابع f روی بازه $[2, +\infty)$ نزولی است. اکنون توجه کنید که

$$y = -2x + 7 \Rightarrow x = \frac{y-7}{-2} = -\frac{1}{2}y + \frac{7}{2}$$

بنابراین $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ از طرف دیگر

$$x \geq 2 \Rightarrow -2x \leq -4 \Rightarrow -2x + 7 \leq -4 + 7 = 3$$

بنابراین برد تابع f روی بازه $[2, +\infty)$ برابر $(-\infty, 3]$ است، در نتیجه

$$D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 3]$$

۲۹۴۰- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = 4 \Rightarrow 1-\sin x = 4(1+\sin x) \Rightarrow 5\sin x = -3$$

$$\sin x = -\frac{3}{5}$$

در نتیجه

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow -\frac{3}{5} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$-3(1 + \tan^2 \frac{x}{2}) = 10 \tan \frac{x}{2} \Rightarrow 3 \tan^2 \frac{x}{2} + 10 \tan \frac{x}{2} + 3 = 0$$

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2 \times 3} = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{-10 \pm 8}{6}$$

بنابراین $\tan \frac{x}{2} = -3$ یا $\tan \frac{x}{2} = -\frac{1}{3}$. در نتیجه مقدار صحیح $\tan \frac{x}{2}$ برابر -3 است.

۲۹۴۱- گزینه ۱ چون نمودار تابع f در یک همسایگی راست نقطه $x=0$

نزولی است، پس ضریب $\cos x$ ، یعنی a باید مثبت باشد. از طرف دیگر ماکزیمم مقدار تابع f برابر 3 و مینیمم مقدار آن برابر -7 است. در نتیجه

$$\begin{cases} a+b=3 \\ -a+b=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-2 \end{cases}$$

در نتیجه $f(x) = 5 \cos x - 2$ و $f(\frac{\pi}{3}) = 5 \cos \frac{\pi}{3} - 2 = 5 \times \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}$

۲۹۴۲- گزینه ۲ راه حل اول توجه کنید که

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \sin x \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x)$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} = \cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x)$$

بنابراین معادله مورد نظر را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x) \times \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x) = 1 \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = 2$$

$$1 + \sin 2x = 2 \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین جواب های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ برابرند با $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ ، که مجموع آنها می شود $\frac{3\pi}{2}$.

راه حل دوم ابتدا توجه کنید که $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4} - x)$ بنابراین

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) \cos(\frac{\pi}{4} - x) = 1$$

از طرف دیگر زاویه های $x + \frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4} - x$ متمم یکدیگرند، بنابراین

$$\cos(\frac{\pi}{4} - x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

۲۹۳۷- گزینه ۱ نقطه های تقاطع نمودارهای دو تابع را پیدا می کنیم. توجه

کنید که ضابطه تابع دوم به صورت زیر است:

$$3y + x = 17 \Rightarrow y = \frac{17-x}{3}$$

بنابراین طول نقطه های برخورد دو تابع جواب های معادله زیر هستند:

$$|x+2| + |x-1| = \frac{17-x}{3}$$

از طرف دیگر

$$x \geq 1 \Rightarrow x+2+x-1 = \frac{17-x}{3} \Rightarrow x=2$$

$$-2 \leq x \leq 1 \Rightarrow x+2-(x-1) = \frac{17-x}{3} \Rightarrow x=8 \text{ (غ.ق.)}$$

$$x \leq -2 \Rightarrow -(x+2)-(x-1) = \frac{17-x}{3} \Rightarrow x=-4$$

بنابراین طول نقطه های برخورد به صورت زیر به دست می آید:

$$x=2 \Rightarrow y = \frac{17-x}{3} = \frac{17-2}{3} = 5$$

$$x=-4 \Rightarrow y = \frac{17-x}{3} = \frac{17+4}{3} = 7$$

بنابراین نقطه های برخورد $(2, 5)$ و $(-4, 7)$ هستند، که فاصله آنها برابر است با

$$\sqrt{(2-(-4))^2 + (5-7)^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۲۹۳۸- گزینه ۳ تابع های $y = x^3$ و $y = 3x - 12$ اکیدا صعودی اند،

پس مجموع آنها نیز اکیدا صعودی است. در نتیجه تابع $f(x) = x^3 + 3x - 12$

اکیدا صعودی است. بنابراین نقطه های برخورد نمودارهای تابع های f و f^{-1}

روی خط $y=x$ هستند. در نتیجه طول های این نقطه ها جواب های معادله زیر هستند:

$$f(x) = x \Rightarrow x^3 + 3x - 12 = x \Rightarrow x^3 + 2x - 12 = 0 \Rightarrow x^3 - 8 + 2x - 4 = 0$$

$$(x-2)(x^2 + 2x + 4) + 2(x-2) = 0 \Rightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 6) = 0 \quad (1)$$

چون دلتای معادله $x^2 + 2x + 6 = 0$ منفی است، پس این معادله جواب ندارد.

در نتیجه تنها جواب معادله (۱) برابر $x=2$ است. چون نقطه برخورد

نمودارهای تابع های f و f^{-1} روی خط $y=x$ است، پس عرض نقطه برخورد

برابر است با $y=2$ ، یعنی نقطه برخورد نمودارهای تابع های f و f^{-1} نقطه

$(2, 2)$ است، که فاصله آن از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۲۹۳۹- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که

$$a^2 + 9b^2 = 16ab \Rightarrow a^2 + 9b^2 + 6ab = 16ab$$

$$(a+3b)^2 = 16ab \Rightarrow (\frac{a+3b}{4})^2 = ab$$

اگر از دو طرف این تساوی در مبنای ۱۰ لگاریتم بگیریم، به دست می آید

$$\log(\frac{a+3b}{4})^2 = \log(ab) \Rightarrow 2 \log(\frac{a+3b}{4}) = \log a + \log b$$

$$\log(\frac{a+3b}{4}) = \frac{\log a + \log b}{2}$$

بنابراین $\log(\frac{a+3b}{4})$ واسطه حسابی $\log a$ و $\log b$ است.

در نتیجه معادله مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{یا} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ برابر $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ هستند، که مجموع

آن‌ها برابر است با $\frac{3\pi}{2}$.

۲۹۴۳- گزینه ۳ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{2-2\cos x} = \sqrt{2(1-\cos x)} = \sqrt{2\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)} = 2\left|\sin\frac{x}{2}\right|$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-3x} - \sqrt{2-5x}}{\sqrt{2-2\cos x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-3x} - \sqrt{2-5x}}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-3x} - \sqrt{2-5x}}{-2\sin\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2-3x - (2-5x)}{-2\sin\frac{x}{2}(\sqrt{2-3x} + \sqrt{2-5x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{-2x\frac{1}{2}(\sqrt{2-3x} + \sqrt{2-5x})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{\sqrt{2-3x} + \sqrt{2-5x}} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

راه حل دوم از قاعده هسپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-3x} - \sqrt{2-5x}}{\sqrt{2-2\cos x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-3x} - \sqrt{2-5x}}{-2\sin\frac{x}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-3}{2\sqrt{2-3x}} - \frac{-5}{2\sqrt{2-5x}}}{-2 \times \frac{1}{2} \cos\frac{x}{2}} = \frac{\frac{-3}{2\sqrt{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}}}{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad \text{باید} \quad \text{۲۹۴۴- گزینه ۳}$$

از طرف دیگر،

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ([x] - 2a) = -1 - 2a$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{2bx^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2bx^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{bx^2} = \frac{1}{4b} \\ f(0) &= |b - 0| = |b| \end{aligned}$$

اکنون توجه کنید که باید $\frac{1}{4b} = |b|$ ، چون سمت راست این تساوی غیرمنفی

است، پس سمت چپ آن، یعنی $\frac{1}{4b}$ هم غیرمنفی است. بنابراین b غیرمنفی

است. در نتیجه $|b| = b$.

$$\frac{1}{4b} = b \Rightarrow b^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

بنابراین

$$-1 - 2a = \frac{1}{4b} \Rightarrow -1 - 2a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

در نتیجه

$$\text{پس } b - a = \frac{5}{4}$$

۲۹۴۵- گزینه ۴ با توجه به گزینه‌ها خارج قسمت را یک چندجمله‌ای درجه اول به صورت $ax + b$ در نظر می‌گیریم. بنابر قضیه تقسیم،

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)(ax + b) + x + 2$$

در نتیجه

$$\begin{cases} f(1) = (1+4+5)(a+b) + 3 \\ f(-1) = (1-4+5)(-a+b) + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13 = 10(a+b) + 3 \\ 11 = 2(-a+b) + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -a+b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}$$

بنابراین خارج قسمت می‌تواند برابر $-2x + 3$ باشد.

۲۹۴۶- گزینه ۱ بزرگ‌ترین عضو دسته n ام برابر 2^n است. بنابراین

بزرگ‌ترین عضو دسته سیزدهم برابر 2^{13} است. همین‌طور، بزرگ‌ترین عضو دسته دوازدهم برابر 2^{12} است. بنابراین کوچک‌ترین عضو دسته سیزدهم برابر

$2^{12} + 1$ است، چون تعداد عضوهای دسته سیزدهم عددی زوج است، پس میانه این دسته برابر با میانگین دو عدد وسطی این دسته است. از طرف دیگر، چون عضوهای دسته سیزدهم دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند، پس میانگین دو عدد وسطی برابر با میانگین عدد اول و عدد آخر دسته است، که برابر است با $\frac{2^{12} + 1 + 2^{13}}{2} = 6144/5$.

۲۹۴۷- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{bx^2 + \gamma}{4x^2 + ax + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{bx^2}{4x^2} = \frac{b}{4}$$

پس مجانب افقی نمودار تابع خط $y = \frac{b}{4}$ است. چون مجانب‌ها در نقطه

$(-\frac{1}{2}, 3)$ تلاقی می‌کنند، پس $\frac{b}{4} = 3$ ، یعنی $b = 12$. همین‌طور، چون

مجانب قائم از نقطه به طول $-\frac{1}{2}$ می‌گذرد، پس معادله آن $x = -\frac{1}{2}$ است.

یعنی $x = -\frac{1}{2}$ ریشه مخرج تابع است، یعنی

$$4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$\text{پس } \frac{b}{a} = \frac{12}{4} = 3$$

۲۹۴۸- گزینه ۳ شیب خط $6y - 3x = 1$ برابر است با $-\frac{3}{6}$. اگر

نقطه مورد نظر (x_0, y_0) باشد، آن‌گاه $f'(x_0) = -2$ از طرف دیگر

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow f'(x) = 2x - 4$$

$$f'(x_0) = -2 \Rightarrow 2x_0 - 4 = -2 \Rightarrow x_0 = 1$$

پس

چون نقطه مورد نظر روی نمودار تابع f است، پس عرض آن برابر است با $f(1) = 1 - 4 + 5 = 2$. بنابراین نقطه مورد نظر $(1, 2)$ است.

۲۹۵۳- گزینه ۴ طول رأس سهمی $y = kx^2 - 4x - 6$ برابر $-\frac{4}{2k}$ ،

یعنی $\frac{2}{k}$ است. پس عرض آن برابر است با

$$y = k\left(\frac{2}{k}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{k}\right) - 6 = \frac{4}{k} - \frac{8}{k} - 6 = -\frac{4}{k} - 6$$

پس نقطه $\left(\frac{2}{k}, -\frac{4}{k} - 6\right)$ رأس سهمی است که روی خط $y = -4x - 4$ قرار

دارد. پس مختصات آن در معادله این خط صدق می‌کنند:

$$-\frac{4}{k} - 6 = -4\left(\frac{2}{k}\right) - 4 \Rightarrow \frac{4}{k} = 2 \Rightarrow k = 2$$

بنابراین عرض رأس سهمی برابر است با $-\frac{4}{2} - 6 = -8$.

۲۹۵۴- گزینه ۳ فرض کنید α جواب مشترک معادله‌های مورد نظر

باشد. در این صورت α در هر دو معادله صدق می‌کند:

$$\begin{cases} \alpha^2 + 6\alpha + m = 0 \\ \alpha^2 + 2\alpha - 3m = 0 \end{cases} \Rightarrow (\alpha^2 + 6\alpha + m) - (\alpha^2 + 2\alpha - 3m) = 0$$

$$4\alpha + 4m = 0 \Rightarrow m = -\alpha$$

اکنون در معادله اول به جای m مقدار $-\alpha$ را قرار می‌دهیم و آن را حل می‌کنیم.

$$\alpha^2 + 6\alpha + m = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 6\alpha - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 5\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \text{ (غ.ق.)} \\ \alpha = -5 \end{cases}$$

پس $m = 5$. بنابراین معادله‌ها به صورت زیر هستند:

$$x^2 + 6x + m = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+5) = 0$$

$$x^2 + 2x - 3m = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+5) = 0$$

پس جواب‌های غیرمشترک دو معادله $x = -1$ و $x = 3$ هستند که اختلاف آن‌ها برابر ۴ است.

۲۹۵۵- گزینه ۴ باید مقدارهای صحیح x را پیدا کنیم که نابرابری‌های زیر

درست باشند:

$$-2 < \frac{2}{x^2 - 3x + 2} < 0$$

ابتدا نامعادله سمت راست را حل می‌کنیم:

چون صورت کسر $\frac{2}{x^2 - 3x + 2}$ مثبت است، خود کسر وقتی منفی است که

مخرجش منفی باشد.

اکنون توجه کنید که جدول تعیین علامت عبارت $(x-1)(x-2)$

به صورت زیر است:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		+	-	+

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله $x^2 - 3x + 2 < 0$ بازه $(1, 2)$ است، که چون هیچ عدد صحیحی در این بازه قرار ندارد، پس هیچ عدد صحیحی در

نابرابری $\frac{2}{x^2 - 3x + 2} < 0$ صدق نمی‌کند. بنابراین دیگر لازم نیست نامعادله

سمت چپ را حل کنیم.

۲۹۴۹- گزینه ۴ توجه کنید که

$$g(x) = f(\tan^2 x + \sqrt{2} \cos x)$$

$$g'(x) = (\tan^2 x + \sqrt{2} \cos x)' f'(\tan^2 x + \sqrt{2} \cos x)$$

$$= (2 \tan x (1 + \tan^2 x) - \sqrt{2} \sin x) f'(\tan^2 x + \sqrt{2} \cos x)$$

پس

$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = (2 \times 1 \times (1+1) - \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}) f'(1 + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}) = (4-1) f'(1+1) = 3 f'(2)$$

$$\sqrt{3} = 3 f'(2) \Rightarrow f'(2) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

در نتیجه

۲۹۵۰- گزینه ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sin x \cos 2x$ در

بازه $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ برابر است با

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{1 \times (-1) - \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi}$$

همین‌طور، آهنگ تغییر متوسط تابع $g(x) = \sin^4 x - \cos^4 x$ در بازه

$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ برابر است با

$$\frac{g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{(1-0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$$

پس نسبت مورد نظر برابر ۱- است.

۲۹۵۱- گزینه ۲ چون نقطه $(0, 0)$ نقطه اکسترم نسبی تابع

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ است و $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ، پس

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = ax^3 + bx^2, f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

چون نقطه $(1, 1)$ نیز نقطه اکسترم نسبی این تابع است، پس

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$$

پس $ab = -6$.

۲۹۵۲- گزینه ۲ فرض کنید جمله‌های متوالی دنباله هندسی a, ar, ar^2

باشند. در این صورت، طبق فرض مسئله $4a, 8ar, 16ar^2$ دنباله‌ای حسابی است. بنابراین

$$8ar = \frac{4a + 16ar^2}{2} \Rightarrow 4r = 1 + 4r^2 \Rightarrow 4r^2 - 4r + 1 = 0$$

$$(2r-1)^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

از طرف دیگر، چون مجموع مربع‌های جمله‌های دنباله هندسی با مجموع جمله‌های دنباله حسابی برابر است، پس

$$a^2 + a^2 r^2 + a^2 r^4 = 4a + 8ar + 16ar^2 \Rightarrow a(1+r^2+r^4) = 4(1+2r+4r^2)$$

$$a\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) = 4(1+1+1) \Rightarrow a\left(\frac{16+4+1}{16}\right) = 4 \times 3 \Rightarrow a = \frac{64}{7}$$

همین‌طور، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه AHD،

$$AD^2 = AH^2 + HD^2$$

$$(2\sqrt{5})^2 = 2^2 + HD^2$$

$$HD^2 = 20 - 4 = 16 \Rightarrow HD = 4$$

اکنون توجه کنید که در مثلث قائم‌الزاویه ABC،

$$\sin \beta = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos \beta = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

همچنین، در مثلث قائم‌الزاویه AHD،

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{HD}{AD} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{AH}{AD} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

بنابراین

$$\cos \alpha = \cos((\alpha + \beta) - \beta) = \cos(\alpha + \beta) \cos \beta + \sin(\alpha + \beta) \sin \beta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3}{5\sqrt{2}} + \frac{2}{5\sqrt{2}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

از روی نمودار معلوم می‌شود که دوره تناوب تابع برابر است با

$$\frac{2\pi}{|c|} = 2\pi \Rightarrow |c| = 1 \Rightarrow c = \pm 1$$

چون نمودار تابع $f(x) = a + b \cos(cx - \frac{\pi}{3})$ از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس

$$f(0) = 0 \Rightarrow a + b \cos(-\frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow b = -2a$$

اکنون توجه کنید که مقدار ماکزیمم تابع برابر است با $a + |b|$ و از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که این مقدار برابر ۱ است. در نتیجه $a + |b| = 1$. بنابراین

$$\begin{cases} b = -2a \\ a + |b| = 1 \end{cases} \Rightarrow a + 2|a| = 1$$

$$\begin{cases} a > 0 \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow b = -\frac{2}{3} \\ a < 0 \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

اکنون توجه کنید که

$$f(-\frac{2\pi}{3}) < 0 \Rightarrow a + b \cos(-\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) < 0$$

$$f(\frac{4\pi}{3}) < 0 \Rightarrow a + b \cos(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) < 0$$

اگر $c = 1$ ، آن‌گاه

$$a + b \cos(-\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) < 0 \Rightarrow a - b < 0 \Rightarrow a < b$$

$$a + b \cos(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) < 0 \Rightarrow a - b < 0 \Rightarrow a < b$$

پس در این حالت $a = -1$ و $b = 2$ قابل قبول است.

اگر $c = -1$ ، آن‌گاه

$$a + b \cos(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) < 0 \Rightarrow a + \frac{b}{2} < 0$$

ولی می‌دانیم $a + \frac{b}{2} = 0$ ، پس این حالت قابل قبول نیست.

بنابراین $a = -1$ ، $b = 2$ و $c = 1$. پس $b(c - a) = 4$.

شیب خط AB برابر است با $\frac{1+2}{0-4} = -\frac{3}{4}$ و طول

پاره‌خط AB برابر است با $AB = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-1)^2} = 5$. چون خط AD

بر خط AB عمود است، پس شیب آن برابر $\frac{4}{3}$ است. همچنین $AD = AB = 5$.

اکنون اگر D را نقطه (a, b) بگیریم، شیب خط AD برابر است با

$$\frac{b-1}{a-0} = \frac{4}{3} \Rightarrow b-1 = \frac{4}{3}a$$

همچنین

$$AD = 5 \Rightarrow \sqrt{(a-0)^2 + (b-1)^2} = 5 \Rightarrow a^2 + (b-1)^2 = 25$$

$$a^2 + (\frac{4}{3}a)^2 = 25 \Rightarrow \frac{25a^2}{9} = 25 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

چون نقطه D در ربع سوم است، پس طول آن منفی است. در نتیجه $a = -3$.

توجه کنید که طول نقطه برخورد نمودار تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$

با محور Y برابر با صفر و عرض آن برابر α است. بنابراین

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(0) = \alpha \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(0) = \alpha \Rightarrow (f \circ g)(\alpha) = 0$$

$$f(g(\alpha)) = 0 \Rightarrow \log(2g(\alpha) - 5) = 0 \Rightarrow 2g(\alpha) - 5 = 1 \Rightarrow g(\alpha) = 3$$

اکنون توجه کنید که

$$g(\alpha) = 3 \Rightarrow \alpha + \sqrt{2\alpha - 4} = 3 \Rightarrow \sqrt{2\alpha - 4} = 3 - \alpha \quad (1)$$

$$2\alpha - 4 = (3 - \alpha)^2 \Rightarrow 2\alpha - 4 = 9 + \alpha^2 - 6\alpha \Rightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 13 = 0$$

$$\alpha = 4 \pm \sqrt{3}$$

از معادله (۱) نتیجه می‌شود که $2 \leq \alpha \leq 3$. بنابراین $\alpha = 4 - \sqrt{3}$.

جواب معادله $f(x) = g(x)$ است، پس

$$f(1) = g(1) \Rightarrow 2 + 2^{b-a} = -1 - 3 + 8 \Rightarrow 2^{b-a} = 2 \Rightarrow b - a = 1$$

از طرف دیگر،

$$f^{-1}(1) = -1 \Rightarrow f(-1) = 1 \Rightarrow 2 + 2^{b+a} = 1 \Rightarrow 2^{b+a} = -1 \Rightarrow b + a = 3$$

پس

$$\begin{cases} b - a = 1 \\ b + a = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow 2b - a = 2 \times 2 - 1 = 3$$

ابتدا توجه کنید که $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$.

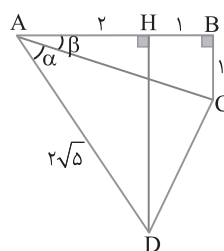
بنابراین اگر دو طرف معادله را در $(x+2)(x^2 - 2x + 4)$ ضرب کنیم،

به‌دست می‌آید

$$x^2 - 2x + 4 - (x^2 - 9x - 2) = 6x(x+2) \Rightarrow 7x + 6 = 6x^2 + 12x$$

$$6x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{12} = \frac{-5 \pm 13}{12} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}, x = \frac{2}{3}$$

بنابراین $x = \frac{2}{3}$ تنها جواب مثبت معادله مورد نظر است.



ابتدا توجه کنید که

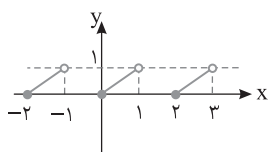
بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه ABC،

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$

$$AC = \sqrt{10}$$

۲۹۶۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که نمودار تابع $y = x - [x]$ با شرط

اینکه $[x]$ زوج باشد به صورت زیر است:



بنابراین نمودار تابع f وقتی که $[x]$ زوج است به همین صورت است. چون تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس در نقطه‌های $x = 0$ و $x = -1$ نیز پیوسته است. از طرف دیگر تابع f روی بازه $[-1, 0]$ خطی است و باید از نقطه‌های $(-1, 1)$ و $(0, 0)$ عبور کند. پس ضابطه تابع f روی این بازه به صورت زیر است:

$$y - 0 = \frac{1 - 0}{-1 - 0}(x - 0) \Rightarrow y = -x$$

در نتیجه باید تساوی $|x - [x - a]| = -x$ به ازای هر x در بازه $[-1, 0]$ درست باشد.

$$x = 0 \Rightarrow |0 - [-a]| = 0 \Rightarrow [-a] = 0 \Rightarrow -a < 1 \Rightarrow -1 < a \leq 0$$

که چون $a < -1$ ، به تناقض رسیده‌ایم، یعنی هیچ مقداری برای a قابل قبول نیست.

۲۹۶۶- گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ و

$$f(x) = \frac{x}{1 - |x|} = \begin{cases} \frac{x}{1 - x^2} & x \geq 0, x \neq 1 \\ \frac{x}{1 + x^2} & x \leq 0 \end{cases}$$

به علاوه، تابع f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته است. اکنون اگر $x \neq 0, 1$ ،

آنگاه ضابطه تابع f' به صورت زیر است:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1 - x^2 + 2x^2}{(1 - x^2)^2} & x > 0, x \neq 1 \\ \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2} & x > 0, x \neq 1 \\ \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} & x < 0 \end{cases}$$

از طرف دیگر،

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2} = 1 \Rightarrow f'_+(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = 1 \Rightarrow f'_-(0) = 1$$

پس $f'(0) = 1$. بنابراین تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق پذیر است.

همچنین

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 1: 1 + x^2 = 0 \\ x < 0: 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

پس تنها نقطه‌ای که مشتق تابع f در آن برابر صفر است، $x = -1$ است و تابع f

فقط یک نقطه بحرانی دارد.

۲۹۶۲- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $\frac{17\pi}{8} + x + \frac{3\pi}{8} - x = \frac{5\pi}{2}$. بنابراین

$$\cos\left(\frac{17\pi}{8} + x\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - \left(\frac{3\pi}{8} - x\right)\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{8} - x\right)$$

در نتیجه معادله مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید

$$\sin\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) \cos\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin\left(2\left(\frac{3\pi}{8} - x\right)\right) = \frac{1}{4}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right) = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

در نتیجه

$$\begin{cases} \frac{3\pi}{4} - 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \frac{3\pi}{4} - 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -k\pi + \frac{7\pi}{24}, k \in \mathbb{Z} \\ x = -k\pi - \frac{\pi}{24}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

پس جواب‌های واقع در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ عبارت‌اند از

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{24}, x = -\frac{\pi}{24}$$

که مجموع آن‌ها برابر است با $\frac{\pi}{4}$.

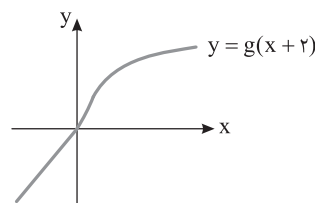
۲۹۶۳- گزینه ۲ توجه کنید که از روی نمودار معلوم می‌شود که فقط

$g(2)$ برابر صفر است. در نتیجه

$$g(f(g(x+2))) = 0 \Rightarrow f(g(x+2)) = 2 \Rightarrow \left|\frac{1}{2}g(x+2) - 1\right| = 2$$

$$|g(x+2) - 2| = 4 \Rightarrow g(x+2) - 2 = \pm 4 \Rightarrow g(x+2) = 6 \text{ یا } g(x+2) = -2$$

اکنون توجه کنید که نمودار تابع $y = g(x+2)$ به صورت زیر است:



پس خط‌های $y = -2$ و $y = 6$ هر کدام نمودار تابع $y = g(x+2)$ را دقیقاً

در یک نقطه قطع می‌کنند. بنابراین معادله مورد نظر دو جواب دارد.

۲۹۶۴- گزینه ۱ چون نمودار تابع خطی f^{-1} از نقطه‌های $(0, \pi)$ و

$(m, 0)$ گذشته است، پس شیب آن برابر است با $-\frac{\pi}{m}$. پس ضابطه

تابع f^{-1} به صورت زیر است:

$$f^{-1}(x) - 0 = -\frac{\pi}{m}(x - m) \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{\pi}{m}x + \pi$$

اکنون ضابطه تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$y = -\frac{\pi}{m}x + \pi \Rightarrow x = \frac{y - \pi}{-\frac{\pi}{m}} = -\frac{m}{\pi}y + m$$

در نتیجه $f(x) = -\frac{m}{\pi}x + m$. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi}{m}x + \pi}{-\frac{m}{\pi}x + m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi}{m}x}{-\frac{m}{\pi}x} = \frac{\pi^2}{m^2}$$

$$\frac{\pi^2}{m^2} = \pi \Rightarrow m^2 = \pi \xrightarrow{m < 0} m = -\sqrt{\pi}$$

در نتیجه

۲۹۶۸- گزینه ۱ توجه کنید که دلتای چندجمله‌ای f مثبت است. در واقع

$$\Delta = (2-m)^2 + 2 \cdot (m^2 + 1) > 0$$

از طرف دیگر $S = \alpha + \beta = \frac{m-2}{m^2+1}$. پس باید m را طوری پیدا کنیم که تابع S

بیشترین مقدار شود. اکنون توجه کنید که

$$S'(m) = \frac{m^2 + 1 - 2m(m-2)}{(m^2 + 1)^2} = \frac{-m^2 + 4m + 1}{(m^2 + 1)^2}$$

$$S'(m) = 0 \Rightarrow m^2 - 4m - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 + \sqrt{5} \\ m = 2 - \sqrt{5} \end{cases}$$

با توجه به جدول تغییرات زیر برای تابع S ، بیشترین مقدار این تابع به ازای

$m = 2 + \sqrt{5}$ رخ می‌دهد.

m	$-\infty$	$2 - \sqrt{5}$	$2 + \sqrt{5}$	$+\infty$
$S'(m)$		-	+	-
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		min	max	

۲۹۶۷- گزینه ۳ به کمک تعریف مشتق، مشتق چپ و مشتق راست تابع f

در نقطه $x = \frac{3}{4}$ را به دست می‌آوریم:

$$f'_+\left(\frac{3}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{3}{4}\right)}{x - \frac{3}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^+} \frac{(4x-3)\sqrt{ax}}{x - \frac{3}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^+} 4\sqrt{ax}$$

$$= 4\sqrt{\frac{3a}{4}} = 2\sqrt{3a}$$

$$f'_-\left(\frac{3}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{3}{4}\right)}{x - \frac{3}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^-} \frac{-(4x-3)\sqrt{ax}}{x - \frac{3}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^-} (-4\sqrt{ax})$$

$$= -4\sqrt{\frac{3a}{4}} = -2\sqrt{3a}$$

پس شیب نیم‌خط مماس راست در نقطه $x = \frac{3}{4}$ برابر $2\sqrt{3a}$ و شیب نیم‌خط

مماس چپ در این نقطه برابر $-2\sqrt{3a}$ است. در نتیجه

$$2\sqrt{3a} - (-2\sqrt{3a}) = 2\sqrt{6} \Rightarrow 4\sqrt{3a} = 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt{3a} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow 3a = \frac{6}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$