

انتہرالگو

تہمام
تمرین امتحان

ریاضے دہم

علی سلامت، حامد معنوی

پاسخ‌های
تشریحی

سؤالات
امتحانی

سؤالات
تکمیلی

سؤالات
تالیفی

درس‌نامه
سؤال محور

پیشگفتار

به نام خدا

هدف از نوشتن این کتاب آموزش دقیق و اصولی مطالب و مفاهیم کتاب درسی ریاضی پایهٔ دهم برای تسلط کامل دانش‌آموزان بر تمام موضوعات کتاب درسی و آماده‌سازی ایشان برای شرکت در امتحانات نهایی بوده است.

فصل‌ها و درس‌های این کتاب کاملاً منطبق بر کتاب درسی ریاضی (۱) هستند. در ابتدای هر درس درسنامه‌ای کامل، شامل تعاریف و مفاهیم مورد نظر، به همراه چند مثال برای درک بهتر موضوع قرار داده‌ایم. در ادامه برای پوشش کامل تمرین‌ها، کار در کلاس‌ها، فعالیت‌ها و مثال‌های حل شدهٔ کتاب درسی تعدادی مسئله با راه‌حل‌های کاملاً تشریحی آورده‌ایم و تمام قسمت‌های حل مسئله را به طور کامل شرح داده‌ایم. همچنین در پایان هر درس، متناسب با حجم موضوع و تنوع سؤال‌های آن، تعدادی تمرین تشریحی با رعایت میزان سختی در چیدمان آن‌ها به همراه پاسخ آورده شده است. این تمرین‌ها مطالب مطرح شده در درسنامه را به طور کامل پوشش می‌دهند. در پایان هر فصل نیز پنج مسئله با درجهٔ سختی بیشتر با عنوان مسائل تکمیلی برای تسلط بیشتر بر موضوعات آورده شده است و بعد از آن سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده با پاسخ را قرار داده‌ایم که شما به راحتی بتوانید تمام مطالب فصل را یک‌بار به طور کامل مرور کنید. علاوه بر این‌ها، برای آشنایی بیشتر با سؤال‌های مطرح شده در امتحان‌های نوبت اول و نوبت دوم، به ترتیب در انتهای فصل چهارم و فصل هفتم نمونه‌هایی همراه با بارم‌بندی و پاسخ آمده است.

از همکاران عزیزمان در نشر الگو، دکتر ابوالفضل علی‌بمانی و خانم عاطفه ربیعی برای ویراستاری علمی، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی کتاب و خانم سکینه مختار مدیر واحد ویراستاری و حروفچینی تشکر و قدردانی می‌کنیم.

علی سلامت - حامد معنوی

فهرست مطالب

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

- درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ۲
- تمرین‌های تشریحی ۸
- درس دوم: متمم یک مجموعه ۱۰
- تمرین‌های تشریحی ۱۴
- درس سوم: الگو و دنباله ۱۵
- تمرین‌های تشریحی ۲۰
- درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی ۲۲
- تمرین‌های تشریحی ۲۸
- مسائل تکمیلی ۳۰
- سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده ۳۱

فصل دوم: مثلثات

- درس اول: نسبت‌های مثلثاتی ۳۴
- تمرین‌های تشریحی ۳۸
- درس دوم: دایره مثلثاتی ۴۱
- تمرین‌های تشریحی ۴۸
- درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۵۰
- تمرین‌های تشریحی ۵۲
- مسائل تکمیلی ۵۳
- سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده ۵۴

فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

- درس اول: ریشه و توان ۵۸
- تمرین‌های تشریحی ۶۱
- درس دوم: ریشه n ام ۶۳
- تمرین‌های تشریحی ۶۵
- درس سوم: توان‌های گویا ۶۶
- تمرین‌های تشریحی ۶۹
- درس چهارم: عبارت‌های جبری ۷۰
- تمرین‌های تشریحی ۷۸
- مسائل تکمیلی ۸۰
- سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده ۸۱

فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها

- درس اول: معادلهٔ درجهٔ دوم و روش‌های مختلف حل آن .. ۸۴
- تمرین‌های تشریحی ۹۱
- درس دوم: سهمی ۹۲
- تمرین‌های تشریحی ۹۶
- درس سوم: تعیین علامت ۹۷
- تمرین‌های تشریحی ۱۰۷
- مسائل تکمیلی ۱۰۹
- سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده ۱۱۰
- امتحان نوبت اول (۱) ۱۱۳
- امتحان نوبت اول (۲) ۱۱۵
- امتحان نوبت اول (۳) ۱۱۷

فصل پنجم: تابع

۱۸۶	مسائل تکمیلی
۱۸۷	سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده
۱۸۹	امتحان نوبت دوم (۱)
۱۹۱	امتحان نوبت دوم (۲)
۱۹۳	امتحان نوبت دوم (۳)

فصل هشتم: پاسخ‌های تشریحی

فصل اول

۱۹۶	پاسخ تمرین‌های تشریحی
۲۰۴	پاسخ مسائل تکمیلی
۲۰۵	پاسخنامه سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده

فصل دوم

۲۰۷	پاسخ تمرین‌های تشریحی
۲۱۴	پاسخ مسائل تکمیلی
۲۱۵	پاسخنامه سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده

فصل سوم

۲۱۸	پاسخ تمرین‌های تشریحی
۲۲۳	پاسخ مسائل تکمیلی
۲۲۴	پاسخنامه سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده

فصل چهارم

۲۲۶	پاسخ تمرین‌های تشریحی
۲۳۶	پاسخ مسائل تکمیلی
۲۳۷	پاسخنامه سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده
۲۴۲	پاسخنامه امتحان نوبت اول (۱)
۲۴۴	پاسخنامه امتحان نوبت اول (۲)
۲۴۵	پاسخنامه امتحان نوبت اول (۳)

۱۲۰	درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن
۱۲۴	تمرین‌های تشریحی
۱۲۶	درس دوم: دامنه و برد توابع
۱۳۲	تمرین‌های تشریحی
۱۳۵	درس سوم: انواع تابع
۱۴۶	تمرین‌های تشریحی
۱۴۸	مسائل تکمیلی
۱۴۹	سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده

فصل ششم: شمارش، بدون شمردن

۱۵۴	درس اول: شمارش
۱۵۷	تمرین‌های تشریحی
۱۵۹	درس دوم: جایگشت
۱۶۳	تمرین‌های تشریحی
۱۶۴	درس سوم: ترکیب
۱۶۸	تمرین‌های تشریحی
۱۷۰	مسائل تکمیلی
۱۷۱	سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده

فصل هفتم: آمار و احتمال

۱۷۴	درس اول: احتمال یا اندازه‌گیری شانس
۱۸۰	تمرین‌های تشریحی
۱۸۲	درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه
۱۸۳	تمرین‌های تشریحی
۱۸۴	درس سوم: متغیر و انواع آن
۱۸۵	تمرین‌های تشریحی

فصل پنجم

۲۴۷..... پاسخ تمرین‌های تشریحی

۲۵۸..... پاسخ مسائل تکمیلی

۲۵۹..... پاسخنامهٔ سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده

فصل ششم

۲۶۲..... پاسخ تمرین‌های تشریحی

۲۶۹..... پاسخ مسائل تکمیلی

۲۷۰..... پاسخنامهٔ سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده

فصل هفتم

۲۷۱..... پاسخ تمرین‌های تشریحی

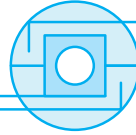
۲۷۵..... پاسخ مسائل تکمیلی

۲۷۶..... پاسخنامهٔ سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده

۲۷۸..... پاسخنامهٔ امتحان نوبت دوم (۱)

۲۷۹..... پاسخنامهٔ امتحان نوبت دوم (۲)

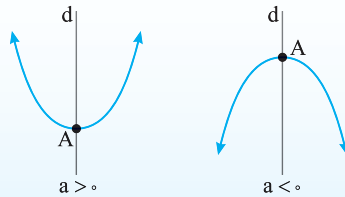
۲۸۰..... پاسخنامهٔ امتحان نوبت دوم (۳)



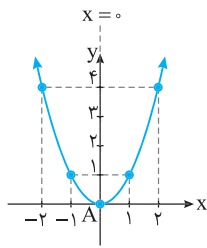
سهمی

سهمی

نمودار هر معادله به صورت $y = ax^2 + bx + c$ که در آن a, b و c اعداد حقیقی‌اند و $a \neq 0$ سهمی می‌گویند. سهمی برحسب علامت a در معادله $y = ax^2 + bx + c$ ، به یکی از دو شکل زیر است.



در هر دو نمودار نقطه A را رأس سهمی می‌نامند. اگر $a > 0$ ، آن‌گاه A پایین‌ترین نقطه سهمی است و اگر $a < 0$ ، آن‌گاه A بالاترین نقطه سهمی است. همچنین خط d که از رأس سهمی عبور می‌کند و موازی محور y است، محور تقارن سهمی است.



x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

سهمی به معادله $y = x^2$ را با استفاده از نقطه‌یابی به صورت مقابل رسم می‌کنیم:

توجه کنید که نقطه $A(0, 0)$ رأس سهمی و خط $x = 0$ محور تقارن سهمی است.

مثال

مختصات رأس سهمی

برای به‌دست آوردن مختصات رأس سهمی می‌توانیم از روش‌های زیر استفاده کنیم:

• در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ ، طول رأس سهمی از رابطه $x = \frac{-b}{2a}$ به‌دست می‌آید. برای محاسبه عرض رأس سهمی کافی است طول رأس سهمی را در معادله $y = ax^2 + bx + c$ جایگذاری کنیم یا اینکه از رابطه $y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$ استفاده کنیم.

مثال

در سهمی به معادله $y = x^2 - 6x + 11$ ، $a = 1$ و $b = -6$. بنابراین طول رأس سهمی به صورت مقابل به‌دست می‌آید:

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-6)}{2(1)} = 3$$

همچنین عرض رأس سهمی با جایگذاری $x = 3$ در معادله $y = x^2 - 6x + 11$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y = x^2 - 6x + 11 \xrightarrow{x=3} y = (3)^2 - 6(3) + 11 \Rightarrow y = 2$$

بنابراین رأس این سهمی نقطه $A(3, 2)$ است.

• معادله هر سهمی را می‌توان به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ نیز نوشت ($a \neq 0$). در این صورت رأس سهمی نقطه $A(h, k)$ است.

مثال

در سهمی به معادله $y = -2(x-4)^2 + 1$ ، $h = 4$ و $k = 1$. بنابراین نقطه $A(4, 1)$ رأس سهمی است.

مسئله ۱۲

مختصات رأس هریک از سهمی‌های زیر را به دست آورید.

الف) $y = -3x^2 - 12x + 4$ ب) $y = \frac{1}{2}x^2 - 5x$ پ) $y = \frac{1}{3}(x+2)^2 + 4$ ت) $y = -\frac{2}{5}(x-7)^2 - 1$

راه‌حل الف) چون طول رأس سهمی از رابطه $x = \frac{-b}{2a}$ محاسبه می‌شود، می‌نویسیم

$$y = -3x^2 - 12x + 4 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2(-3)} = -\frac{12}{6} \Rightarrow x = -2$$

همچنین عرض رأس سهمی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = -3x^2 - 12x + 4 \xrightarrow{x=-2} y = -3(-2)^2 - 12(-2) + 4 \Rightarrow y = 16$$

بنابراین رأس این سهمی نقطه $A(-2, 16)$ است.

ب) توجه کنید که

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 5x \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2(\frac{1}{2})} \Rightarrow x = 5$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 5x \xrightarrow{x=5} y = \frac{1}{2}(5)^2 - 5(5) \Rightarrow y = -\frac{25}{2}$$

پس رأس این سهمی نقطه $A(5, -\frac{25}{2})$ است.

پ) دقت کنید که رأس سهمی به معادله $y = a(x-h)^2 + k$ ، نقطه $A(h, k)$ است. بنابراین $y = \frac{1}{3}(x+2)^2 + 4 = \frac{1}{3}(x-(-2))^2 + 4$

واضح است که مختصات رأس این سهمی به صورت $A(-2, 4)$ است.

ت) مختصات رأس سهمی $y = -\frac{2}{5}(x-7)^2 - 1$ برابر با $A(7, -1)$ است.

مسئله ۱۳

ابتدا سهمی به معادله $y = x^2 - 10x$ را به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ بنویسید و سپس مختصات رأس آن را مشخص کنید.

راه‌حل دقت کنید که ضریب x در معادله $y = x^2 - 10x$ ، برابر با -10 است. پس برای آنکه معادله داده شده را به صورت مربع کامل بنویسیم، کافی

است عدد $\frac{(-10)^2}{4} = 25$ را در سمت راست معادله اضافه و کم کنیم:

$$y = x^2 - 10x \Rightarrow y = \underbrace{x^2 - 10x + 25}_{(x-5)^2} - 25 \Rightarrow y = (x-5)^2 - 25$$

واضح است که رأس این سهمی نقطه $A(5, -25)$ است.

رسم سهمی

برای رسم سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

(۱) مختصات رأس سهمی را مشخص می‌کنیم.

(۲) محل برخورد سهمی با محور y را مشخص می‌کنیم. برای این کار کافی است در معادله سهمی به جای x ، صفر قرار دهیم.

(۳) محل برخورد سهمی با محور x را در صورت وجود مشخص می‌کنیم. برای این کار کافی است در معادله $y = ax^2 + bx + c$ به جای y ، صفر قرار

دهیم و جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را در صورت وجود به دست آوریم.

(۴) به کمک نقاط به دست آمده و علامت a سهمی را رسم می‌کنیم.

مثال

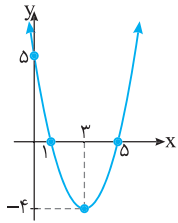
برای رسم سهمی به معادله $y = x^2 - 6x + 5$ ، ابتدا مختصات رأس سهمی را مشخص می‌کنیم:

$$y = x^2 - 6x + 5 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(1)} = 3, \quad y = x^2 - 6x + 5 \xrightarrow{x=3} y = (3)^2 - 6(3) + 5 = -4$$

بنابراین رأس این سهمی نقطه $A(3, -4)$ است. برای یافتن محل برخورد سهمی با محور y ، در معادله $y = x^2 - 6x + 5$ به جای x صفر قرار می‌دهیم:

$$y = x^2 - 6x + 5 \xrightarrow{x=0} y = (0)^2 - 6(0) + 5 \Rightarrow y = 5$$

پس محل برخورد سهمی با محور y ، نقطه $(0, 5)$ است. همچنین برای پیدا کردن محل برخورد این سهمی با محور x در معادله سهمی به جای y صفر قرار دهیم:



$$y = x^2 - 6x + 5 \xrightarrow{y=0} x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x-5=0 \Rightarrow x=5 \end{cases}$$

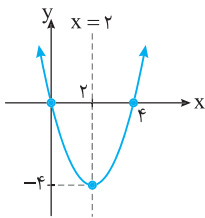
در نتیجه نقاط برخورد سهمی با محور x نقاط $(1, 0)$ و $(5, 0)$ هستند. با توجه به نقاط به دست آمده و اینکه $a = 1 > 0$ ، سهمی را به صورت مقابل رسم می‌کنیم.

مسئله ۱۴

هر یک از سهمی‌های زیر را رسم کنید و معادله محور تقارن آن‌ها را مشخص کنید.

الف) $y = x^2 - 4x$

ب) $y = 2(x-1)^2 - 4$ پ) $y = -x^2 + 3$



$$y = x^2 - 4x \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2 \Rightarrow y = (2)^2 - 4(2) = -4$$


راه‌حل الف) توجه کنید که

رأس سهمی نقطه $(2, -4)$ است. در نتیجه محور تقارن آن خط $x = 2$ است.

$$y = x^2 - 4x \xrightarrow{x=0} y = 0^2 - 4(0) \Rightarrow y = 0$$

محل برخورد سهمی با محور y نقطه $(0, 0)$ است.

$$y = x^2 - 4x \xrightarrow{y=0} x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$


سهمی در نقاط $(0, 0)$ و $(4, 0)$ با محور x برخورد می‌کند. همچنین چون $a = 1 > 0$ ، پس سهمی به شکل  است.

ب) رأس سهمی به معادله $y = 2(x-1)^2 - 4$ ، نقطه $(1, -4)$ است. در نتیجه محور تقارن این سهمی خط $x = 1$ است.

$$y = 2(x-1)^2 - 4 \xrightarrow{x=0} y = 2(0-1)^2 - 4 \Rightarrow y = -2$$

بنابراین محل برخورد سهمی با محور y نقطه $(0, -2)$ است.

$$y = 2(x-1)^2 - 4 \xrightarrow{y=0} 2(x-1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{2} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{2} \\ x-1 = -\sqrt{2} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

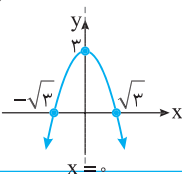
نقاط $(1 - \sqrt{2}, 0)$ و $(1 + \sqrt{2}, 0)$ محل برخورد سهمی با محور x هستند. چون $a = 2 > 0$ ، پس سهمی به شکل  است.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2(-1)} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -(0)^2 + 3 \Rightarrow y = 3$$

پ) توجه کنید که در سهمی به معادله $y = -x^2 + 3$ ، $b = 0$. در نتیجه

بنابراین رأس سهمی نقطه $(0, 3)$ و محور تقارن سهمی خط $x = 0$ است. همچنین محل برخورد سهمی با محور y ، نقطه $(0, 3)$ است.

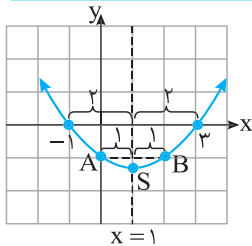
$$y = -x^2 + 3 \xrightarrow{y=0} -x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$$



سهمی در نقاط $(\sqrt{3}, 0)$ و $(-\sqrt{3}, 0)$ با محور x برخورد می‌کند. چون $a = -1 < 0$ ، پس سهمی به شکل  است.

نکته

هر دو نقطه روی نمودار سهمی که عرض‌های آن‌ها برابر هستند، از محور تقارن آن به یک فاصله‌اند. با توجه به اینکه محور تقارن سهمی از رأس آن عبور می‌کند، بنابراین طول رأس سهمی برابر با میانگین طول‌های آن دو نقطه است.



نمودار سهمی به معادله $y = x^2 - 2x - 3$ در دستگاه مختصات مقابل رسم شده است. نقاط $A(0, -1)$ و $B(2, -1)$ از محور تقارن این سهمی یعنی خط $x = 1$ به یک فاصله‌اند. دقت کنید که میانگین طول‌های دو نقطه A و B برابر با طول رأس سهمی است:

$$\begin{cases} A(0, -1) \\ B(2, -1) \end{cases} \Rightarrow \text{طول رأس سهمی} = \frac{0+2}{2} = 1$$

مثال

مسئله ۱۵

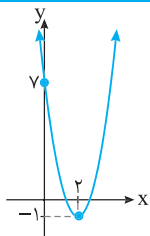
اگر $A(-4, 1)$ و $B(6, 1)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادله محور تقارن این سهمی را به دست آورید.

راه‌حل

چون عرض نقاط A و B با هم برابرند، پس از محور تقارن سهمی به یک فاصله هستند. بنابراین طول رأس سهمی برابر با میانگین طول دو نقطه A و B یعنی $\frac{6+(-4)}{2} = 1$ است. بنابراین معادله محور تقارن این سهمی خط $x = 1$ است.

مسئله ۱۶

نمودار سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ به صورت شکل مقابل است. مقادیر a ، b و c را به دست آورید.



راه‌حل

چون رأس سهمی نقطه $A(2, -1)$ است، پس معادله این سهمی به صورت $y = a(x-2)^2 - 1$ است. همچنین سهمی از نقطه $(0, 7)$ عبور کرده است، در نتیجه مختصات این نقطه در معادله سهمی صدق می‌کند:

$$y = a(x-2)^2 - 1 \xrightarrow{(0, 7)} 7 = a(0-2)^2 - 1 \Rightarrow 4a - 1 = 7 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

پس معادله سهمی به صورت مقابل است: $y = 2x^2 - 8x + 7$. با توجه به معادله به دست آمده $a = 2$ ، $b = -8$ و $c = 7$.

مسئله ۱۷

نمودار سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ محور y را در نقطه‌ای به عرض -1 و محور x را در نقاط به طول -2 و 4 قطع کرده است. معادله این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.

راه‌حل

چون سهمی محور y را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع کرده است، پس مختصات نقطه $(0, -1)$ در معادله سهمی صدق می‌کنند. بنابراین $y = ax^2 + bx + c \xrightarrow{(0, -1)} -1 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = -1$

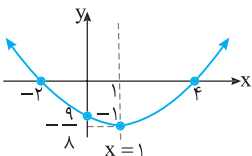
همچنین سهمی محور x را در نقاط به طول -2 و 4 قطع کرده است، پس مختصات نقاط $(-2, 0)$ و $(4, 0)$ نیز در معادله سهمی صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx - 1 \xrightarrow{(4, 0)} 16a + 4b - 1 = 0 \\ y = ax^2 + bx - 1 \xrightarrow{(-2, 0)} 4a - 2b - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a + 4b = 1 \\ 4a - 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{8}, b = -\frac{1}{4}$$

بنابراین معادله سهمی به صورت $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x - 1$ است. برای رسم سهمی ابتدا مختصات رأس آن را به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-\frac{1}{4})}{2(\frac{1}{8})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1$$

$$y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x - 1 \xrightarrow{x=1} y = \frac{1}{8}(1)^2 - \frac{1}{4}(1) - 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}$$



بنابراین رأس سهمی نقطه $(1, -\frac{9}{8})$ است. اکنون با توجه به اطلاعات مسئله نقطه $(0, -1)$ محل برخورد سهمی با محور y و نقاط $(-2, 0)$ و $(4, 0)$ محل برخورد سهمی با محور x است. از طرف دیگر چون $a = \frac{1}{8} > 0$ ، پس سهمی به شکل است.

تمرین‌های تشریحی

۱۶۱] درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) طول رأس سهمی به معادله $y = -4x^2 - 4x + 1$ برابر با -1 است.

ب) رأس سهمی به معادله $y = -3(x+5)^2 + 1$ نقطه $A(5, 1)$ است.

پ) سهمی به معادله $y = x^2 + 4x$ از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند.

ت) خط $x = 0$ محور تقارن سهمی به معادله $y = x^2 + 3$ است.

۱۶۲] جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

الف) عرض رأس سهمی به معادله $y = -2(x-3)^2 - 4$ برابر با است.

ب) سهمی به معادله $y = 5(x-3)^2 - 1$ محور y را در نقطه‌ای به عرض قطع می‌کند.

پ) سهمی به معادله $y = x^2 + 2x + 3$ از ناحیه‌های و عبور می‌کند.

۱۶۳] مختصات رأس هریک از سهمی‌های زیر را به دست آورید.

الف) $y = -2x^2 + 8x - 1$

ب) $y = 7(x+5)^2$

۱۶۴] ابتدا سهمی به معادله $y = x^2 - 4x + 3$ را به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ بنویسید و سپس مختصات رأس آن را مشخص کنید.

۱۶۵] محل برخورد هریک از سهمی‌های زیر با محورهای مختصات را مشخص کنید.

الف) $y = -3x^2 + 8x + 11$

ب) $y = -(x+4)^2 + 1$

۱۶۶] نقاط برخورد سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + 2$ با محور x نقاط $x = -2$ و $x = 5$ هستند. مقادیر a و b را به دست آورید.

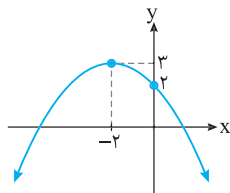
۱۶۷] هریک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = 3x^2 - 1$

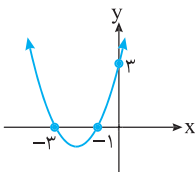
ب) $y = -2(x+3)^2 + 8$

پ) $y = x^2 - x - 1$

۱۶۸] اگر $A(m, 2)$ و $B(-4, 2)$ دو نقطه از یک سهمی باشند و طول رأس سهمی برابر با -8 باشد، مقدار m را به دست آورید.



۱۶۹] نمودار سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ به صورت شکل مقابل است. مقادیر a ، b و c را به دست آورید.



۱۷۰] اگر نمودار سهمی به معادله $y = a(x-h)^2 + k$ به صورت شکل مقابل باشد، مختصات رأس سهمی را

به دست آورید.

۱۷۱] نمودار سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ ، محور y را در نقطه‌ای به عرض 10 و محور x را در نقاط به طول 5 و -1 قطع می‌کند. مقادیر

a ، b و c را به دست آورید.

مسائل تکمیلی
صفحه پاسخ: ۲۳۶

۱- سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ از نقاط $(1, -9)$ ، $(4, -12)$ و $(2, -12)$ عبور می کند. مقادیر a ، b و c را به دست آورید.

۲- مجموعه جواب های نامعادله $x^2 - 8x + 7 < 0$ و نامعادله $|x - a| < b$ برابر است. مقادیر a و b را به دست آورید.

۳- اگر جدول تعیین علامت عبارت $y = (m^2 - 1)x^2 + 3mx + n$ به صورت زیر باشد، مقادیر m و n را به دست آورید.

x	$-\infty$	۲	$+\infty$
y		-	+

۴- اگر جدول تعیین علامت عبارت $y = x^2 - (m+1)x + (2m-1)$ به صورت زیر باشد، مقادیر ممکن برای a را به دست آورید.

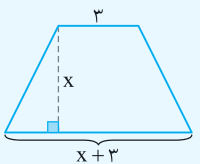
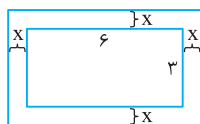
x	$-\infty$	a	$+\infty$
y		+	+

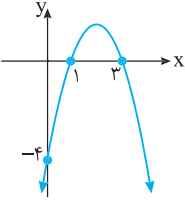
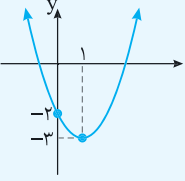
۵- اگر $x+1$ ، $x+4$ ، $5x+2$ جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقادیر ممکن برای قدرنسبت این دنباله را به دست آورید.

سوالات امتحانی بارمبندی شده

صفحات پاسخ: ۲۳۷ تا ۲۴۲

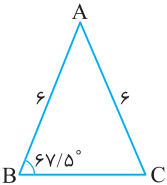
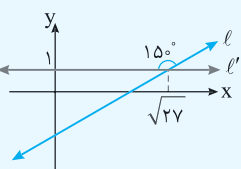
بارم	سوالات	ردیف
۲	معادله‌های زیر را به روش تجزیه حل کنید. الف) $\frac{1}{2}x^2 - 4x = 0$ ب) $x^2 - 11x + 18 = 0$	۱
۲	جواب هریک از معادله‌های زیر را در صورت وجود به روش ریشه‌گیری به دست آورید. الف) $(x-7)^2 = 49$ ب) $(3x-4)^2 = 4$	۲
۱/۵	هریک از معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید. الف) $x^2 - 8x = -15$	۳
۲	جواب هریک از معادله‌های زیر را در صورت وجود به روش Δ به دست آورید. الف) $x^2 - 4x + \frac{7}{4} = 0$ ب) $\frac{1}{5}x^2 - x + \frac{5}{4} = 0$	۴
۱	به ازای چه مقادیری از a ، معادله $3x^2 - 2ax + 1 = 0$ یک جواب حقیقی دارد؟	۵
۱	به ازای چه مقادیری از m ، معادله $x^2 - 2x + m = 0$ دو جواب حقیقی دارد؟	۶
۱	به ازای چه مقادیری از m ، معادله $mx^2 + (m-2)x - m = 0$ جواب حقیقی ندارد؟	۷
۱/۵	اگر $x = -2$ یکی از جواب‌های معادله $2x^2 + ax - 2 = 0$ باشد، جواب دیگر معادله را به دست آورید.	۸
۰/۵	در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، فرض کنید $\Delta > 0$. اگر $x = -3$ یکی از جواب‌های معادله باشد، نشان دهید $9a + c = 3b$.	۹
۱	سه برابر مربع یک عدد حقیقی منفی از دو برابر آن ۲۱ واحد بیشتر است. این عدد را پیدا کنید.	۱۰
۱/۵	مطابق شکل یک عکس به ابعاد ۳ در ۶ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۴۰ سانتی‌متر مربع قرار دارد. اگر فاصله همه لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب را به دست آورید.	۱۱
۱/۵	مساحت ذوزنقه شکل مقابل برابر با ۲۰ سانتی‌متر مربع است. اندازه ارتفاع ذوزنقه را به دست آورید.	۱۲
۲	مختصات رأس هریک از سهمی‌های زیر را به دست آورید. الف) $y = -5x^2 + 10x - 1$ ب) $y = x^2 - 7$ پ) $y = 2x^2 - 2x + 3$ ت) $y = -\frac{1}{4}(x+5)^2 - 3$	۱۳

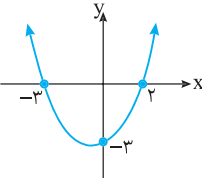


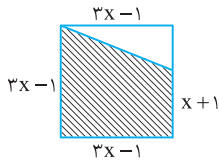
۲/۲۵	هریک از سهمی‌های زیر را رسم کنید و معادلهٔ محور تقارن آن‌ها را مشخص کنید.	۱۴										
	الف) $y = x^2 - 6x$ ب) $y = x^2 + x - 6$ پ) $y = 2(x-1)^2 + 3$											
۲	نمودار سهمی به معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ به صورت شکل مقابل است. مقادیر a ، b و c را به دست آورید.	۱۵										
												
۱/۵	نمودار سهمی به معادلهٔ $y = a(x-h)^2 + k$ به صورت شکل مقابل است. مقادیر a ، h و k را به دست آورید.	۱۶										
												
۲	نمودار سهمی به معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ ، محور y را در نقطه‌ای به عرض -6 و محور x را در نقاط به طول -1 و 6 قطع می‌کند. مقادیر a ، b و c را به دست آورید.	۱۷										
۲	هریک از عبارتهای زیر را تعیین علامت کنید.	۱۸										
	الف) $y = 2x - 12$ ب) $y = \frac{5x-3}{4}$ پ) $y = -\frac{4}{3}x + 8$ ت) $y = -\sqrt{6x} + \sqrt{24}$											
۱	جدول تعیین علامت عبارت $y = (2-a)x + 1$ به صورت زیر است. مقدار a را به دست آورید.	۱۹										
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">-4</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">y</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">-</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">+</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	-4	$+\infty$	y		-	+			
x	$-\infty$	-4	$+\infty$									
y		-	+									
۱/۵	جدول تعیین علامت عبارت $y = 3ax + a^2 - 7$ به صورت زیر است. مقدار a را به دست آورید.	۲۰										
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">-2</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">y</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">-</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">+</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	-2	$+\infty$	y		-	+			
x	$-\infty$	-2	$+\infty$									
y		-	+									
۲	هریک از عبارتهای زیر را تعیین علامت کنید.	۲۱										
	الف) $y = 3x^2 + 4x + 5$ ب) $y = \sqrt{5}x^2 - x - \sqrt{8}$ پ) $y = 4x^2 - 10$ ت) $y = -2x^2 + x + 3$											
۱/۵	جدول تعیین علامت عبارت $y = 3x^2 + ax - b$ به صورت زیر است. مقادیر a و b را به دست آورید.	۲۲										
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">-4</td> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">y</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">+</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">-</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">+</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$	y		+	-	+	
x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$								
y		+	-	+								
۳	هریک از عبارتهای زیر را تعیین علامت کنید.	۲۳										
	الف) $y = (-x+5)(3x-1)$ ب) $y = (25x^2-1)(x^2-4x+4)$ پ) $y = \frac{x^2+x-1}{x^2-9}$ ت) $y = \frac{4x^2-25}{x^2-8x+7}$											

امتحان نوبت اول (۲)

صفحات پاسخ: ۲۴۴ تا ۲۴۵

ردیف	سؤالات	بارم
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) اشتراک یک مجموعه نامتناهی و یک مجموعه متناهی، یک مجموعه نامتناهی است. ب) حاصل ضرب $\tan 52^\circ \times \cot 52^\circ$ برابر با یک است.	۰/۵
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) گویا شده عبارت $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ برابر با است. ب) حاصل ضرب جوابهای معادله $2x^2 - 20x + 18 = 0$ برابر با است.	۰/۵
۳	با نمایش مجموعه $A = [-3, \frac{5}{4}) \cap (-\frac{3}{4}, 3)$ روی محور اعداد، حاصل آن را به صورت یک بازه بنویسید.	۱
۴	اگر مجموعه اعداد صحیح مجموعه مرجع باشد، متمم مجموعه $A = \{4, 5, 6, \dots\}$ را مشخص کنید.	۰/۵
۵	یک شرکت ۳۲ محصول تولید می کند به طوری که ۱۷ محصول این شرکت دارای استاندارد نوع A و ۱۳ محصول دارای استاندارد نوع B هستند. اگر ۵ محصول این شرکت هیچ کدام از استانداردهای A و B را نداشته باشند، مشخص کنید چند محصول این شرکت هر دو نوع استاندارد A و B را دارند.	۰/۷۵
۶	در یک الگوی خطی مجموع جمله های اول و دوم برابر با 3^n و جمله پنجم برابر با ۱ است. جمله عمومی این الگو را بنویسید.	۰/۷۵
۷	جمله عمومی دنباله درجه دوم $3, 5, 8, 12, \dots$ را به دست آورید.	۱
۸	در یک دنباله هندسی جمله دوم برابر با $-\frac{1}{3}$ و جمله پنجم برابر با -32 است. قدرنسبت و جمله اول این دنباله را به دست آورید.	۰/۷۵
۹	مساحت مثلث ABC در شکل مقابل را به دست آورید.	۱
		
۱۰	با توجه به شکل مقابل معادله خط l را بنویسید.	۱/۵
		
۱۱	با استفاده از دایره مثلثاتی، سینوس و کسینوس زاویه 31° را با هم مقایسه کنید.	۰/۷۵
۱۲	اگر $\tan \alpha = -5$ و انتهای کمان روبه رو به زاویه α در ناحیه دوم قرار داشته باشد، سایر نسبت های مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.	۱/۵
۱۳	در جاهای خالی علامت $<$ یا $>$ قرار دهید. الف) $\sqrt[3]{0/03} \bigcirc \sqrt[4]{0/03}$ ب) $\sqrt[3]{-\frac{1}{15}} \bigcirc \sqrt[5]{-\frac{1}{15}}$ پ) $\sqrt[5]{-0/2} \bigcirc \sqrt[5]{-0/4}$ ت) $\sqrt[6]{43} \bigcirc \sqrt[4]{43}$	۱

۱/۷۵	<p>حاصل هریک از عبارتهای زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.</p> <p>الف) $A = \sqrt[6]{(2\sqrt{3} - \sqrt{27})^6} - \sqrt[3]{(\sqrt{3} - 2)^3}$</p> <p>ب) $B = \sqrt{\sqrt[3]{9}} \times 3^{12}$</p>	۱۴
۰/۵	<p>حاصل عبارت زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.</p> <p>$C = (\sqrt{x^6 + 1} - x^3)(\sqrt{x^6 + 1} + x^3)$</p>	۱۵
۰/۷۵	<p>عبارت مقابل را تجزیه کنید.</p> <p>$D = x^2 y^3 - 125x^2$</p>	۱۶
۰/۷۵	<p>مخرج کسر زیر را گویا کنید.</p> <p>$\frac{2}{\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{5}}$</p>	۱۷
۱/۵	<p>به ازای چه مقادیری از m، معادله $x^2 - mx - m = 0$ دو جواب حقیقی دارد؟</p>	۱۸
۱/۵	<p>نمودار سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ به صورت شکل زیر است. عرض نقطه به طول ۴ روی سهمی چقدر است؟</p> 	۱۹
۱/۷۵	<p>عبارت زیر را تعیین علامت کنید.</p> <p>$y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 1}$</p>	۲۰
۲۰	جمع بارم	موفق و پیروز باشید



۱۶۰ شکل هاشورخورده یک ذوزنقه است که مساحت آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{ارتفاع } x \text{ (مجموع دو قاعده)} = \frac{\text{مساحت ذوزنقه}}{2}$$

$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{(3x-1+x+1)(3x-1)}{2} = 20 \Rightarrow \frac{4x(3x-1)}{2} = 20$$

$$x(3x-1) = 10 \Rightarrow 3x^2 - x - 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(3)(-10) = 1 + 120 = 121$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{121}}{6} = \frac{1 + 11}{6} = 2 \text{ (ق.ق.)}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{121}}{6} = \frac{1 - 11}{6} = -\frac{5}{3} \text{ (غ.ق.)}$$

دقت کنید که به ازای $x = -\frac{5}{3}$ ضلع مربع برابر با یک عدد منفی است.

بنابراین فقط $x = 2$ قابل قبول است. در نتیجه طول ضلع مربع برابر است با

$$3(2) - 1 = 5 = \text{طول ضلع مربع} \xrightarrow{x=2} 3x - 1 = \text{طول ضلع مربع}$$

۱۶۱ الف) نادرست است. طول رأس سهمی به معادله $y = -4x^2 - 4x + 1$

برابر با $-\frac{1}{4}$ است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = -\frac{(-4)}{2(-4)} = -\frac{1}{2}$$

ب) نادرست است. رأس سهمی به معادله $y = a(x-h)^2 + k$ نقطه

$A(h, k)$ است. بنابراین رأس سهمی به معادله $y = -3(x+5)^2 + 1$ نقطه

$A(-5, 1)$ است.

پ) درست است. برای رسم سهمی به معادله $y = x^2 + 4x$ ابتدا مختصات

رأس سهمی را مشخص می‌کنیم:

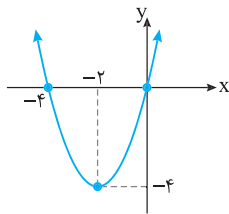
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(1)} = -2$$

$$y = x^2 + 4x \xrightarrow{x=-2} y = (-2)^2 + 4(-2) = -4$$

بنابراین رأس این سهمی نقطه $A(-2, -4)$ است. محل برخورد سهمی با

محور x به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = x^2 + 4x \xrightarrow{y=0} x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$



در نتیجه نقاط برخورد سهمی با محور x نقاط $(-4, 0)$ و $(0, 0)$ هستند. با توجه به نقاط به دست آمده و اینکه $a = 1 > 0$ سهمی را به صورت مقابل رسم می‌کنیم. بنابراین این سهمی از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند.

ت) درست است. محور تقارن سهمی به معادله $y = x^2 + 3$ به صورت زیر

به دست می‌آید:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2(1)} \Rightarrow x = 0 \text{ (معادله محور تقارن)}$$

۱۵۷ الف) چون $x = -1$ جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند.

بنابراین

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{x=-1} a(-1)^2 + b(-1) + c = 0$$

$$a - b + c = 0 \Rightarrow a + c = b$$

ب) برای اینکه $x = \frac{-c}{a}$ جواب دیگر این معادله باشد باید در معادله صدق کند.

یعنی مقدار $y = ax^2 + bx + c$ به ازای $x = \frac{-c}{a}$ برابر با صفر شود:

$$y = ax^2 + bx + c \xrightarrow{x=\frac{-c}{a}}$$

$$y = a\left(\frac{-c}{a}\right)^2 + b\left(\frac{-c}{a}\right) + c = \frac{ac^2}{a^2} - \frac{bc}{a} + c = \frac{c^2}{a} - \frac{bc}{a} + c$$

$$= \frac{c^2 - bc + ac}{a} = \frac{c(c-b+a)}{a} = \frac{c(a+c-b)}{a}$$

توجه کنید که با توجه به قسمت الف)، $a+c=b$ ، بنابراین

$$y = \frac{c(a+c-b)}{a} = \frac{c(b-b)}{a} = \frac{c \cdot 0}{a} = 0$$

در نتیجه $x = \frac{-c}{a}$ ، جواب دیگر این معادله است.

۱۵۸ اگر این عدد حقیقی مثبت را x فرض کنیم، مربع آن x^2 و هفت برابر

آن $7x$ است. بنابراین

$$x^2 = 7x + 8 \Rightarrow x^2 - 7x - 8 = 0 \Rightarrow (x-8)(x+1) = 0$$

$$\begin{cases} x-8=0 \Rightarrow x=8 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

چون x یک عدد حقیقی مثبت است، بنابراین فقط $x=8$ قابل قبول است.

۱۵۹ با توجه به شکل، طول قاب برابر با $7+2x$ و عرض آن برابر با $6+2x$ است.

بنابراین می‌نویسیم:

عرض \times طول = مساحت

$$90 = (7+2x)(6+2x) \Rightarrow 90 = 4x^2 + 26x + 42$$

$$4x^2 + 26x - 48 = 0$$

با تقسیم طرفین معادله به دست آمده بر ۲ و استفاده از روش Δ جواب‌های آن را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$4x^2 + 26x - 48 = 0 \xrightarrow{\div 2} 2x^2 + 13x - 24 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (13)^2 - 4(2)(-24) = 169 + 192 = 361$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-13 + \sqrt{361}}{2(2)} = \frac{-13 + 19}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{-13 - \sqrt{361}}{2(2)} = \frac{-13 - 19}{4} = \frac{-32}{4} = -8 \end{cases}$$

با توجه به اینکه x مقداری مثبت است، بنابراین فقط $x = \frac{3}{2}$ قابل قبول است.

پس ابعاد این قاب به صورت زیر هستند:

$$\text{طول قاب} = 7 + 2x = 7 + 2\left(\frac{3}{2}\right) = 10$$

$$\text{عرض قاب} = 6 + 2x = 6 + 2\left(\frac{3}{2}\right) = 9$$

۱۶۵ الف) برای پیدا کردن محل برخورد سهمی به معادله $y = -3x^2 + 8x + 11$ با محور y در معادله سهمی به جای x ، صفر قرار می‌دهیم:

$$y = -3x^2 + 8x + 11 \xrightarrow{x=0} y = -3(0)^2 + 8(0) + 11 \Rightarrow y = 11$$

بنابراین محل برخورد سهمی با محور y نقطه $A(0, 11)$ است. همچنین برای پیدا کردن محل برخورد سهمی با محور x در معادله سهمی به جای y ، صفر قرار می‌دهیم:

$$y = -3x^2 + 8x + 11 \xrightarrow{y=0} -3x^2 + 8x + 11 = 0$$

برای حل این معادله از روش Δ استفاده می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4(-3)(11) = 64 + 132 \Rightarrow \Delta = 196$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{196}}{-6} \Rightarrow x_1 = -1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{196}}{-6} \Rightarrow x_2 = \frac{11}{3}$$

بنابراین سهمی محور x را در نقاط $(-1, 0)$ و $(\frac{11}{3}, 0)$ قطع می‌کند.

ب) محل برخورد سهمی با محور y به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = -(x+4)^2 + 1 \xrightarrow{x=0} y = -(0+4)^2 + 1 \Rightarrow y = -15$$

بنابراین سهمی در نقطه $A(0, -15)$ با محور y برخورد می‌کند. همچنین محل برخورد سهمی با محور x به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = -(x+4)^2 + 1 \xrightarrow{y=0} -(x+4)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (x+4)^2 = 1$$

$$\begin{cases} x+4=1 \Rightarrow x=-3 \\ x+4=-1 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$$

در نتیجه محل برخورد سهمی با محور x نقاط $(-3, 0)$ و $(-5, 0)$ است.

۱۶۶ با توجه به اینکه سهمی محور x را در نقاطی به طول -2 و 5 قطع می‌کند، بنابراین از نقاط $(-2, 0)$ و $(5, 0)$ عبور می‌کند. در نتیجه مختصات این نقاط باید در معادله آن صدق کنند. پس می‌نویسیم:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + 2 \xrightarrow{(-2, 0)} 4a - 2b + 2 = 0 \\ y = ax^2 + bx + 2 \xrightarrow{(5, 0)} 25a + 5b + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\Delta}{2} \times \begin{cases} 4a - 2b = -2 \\ 25a + 5b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot a - 5b = -5 \\ 25a + 5b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{5}, b = \frac{3}{5}$$

۱۶۷ الف) ابتدا مختصات رأس سهمی $y = 3x^2 - 1$ را مشخص می‌کنیم:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2(3)} \Rightarrow x = 0$$

$$y = 3x^2 - 1 \xrightarrow{x=0} y = 3(0)^2 - 1 \Rightarrow y = -1$$

بنابراین رأس این سهمی نقطه $A(0, -1)$ است. برای پیدا کردن محل برخورد سهمی با محور x در معادله سهمی به جای y ، صفر قرار می‌دهیم:

$$y = 3x^2 - 1 \xrightarrow{y=0} 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

۱۶۲ الف) عرض رأس سهمی به معادله $y = a(x-h)^2 + k$ برابر با k است.

بنابراین عرض رأس سهمی $y = -2(x-3)^2 - 4$ برابر با -4 است.

ب) برای پیدا کردن محل برخورد سهمی به معادله $y = 5(x-3)^2 - 1$ با محور y در معادله آن به جای x ، صفر قرار می‌دهیم:

$$y = 5(x-3)^2 - 1 \xrightarrow{x=0} y = 5(0-3)^2 - 1 \Rightarrow y = 44$$

بنابراین سهمی به معادله $y = 5(x-3)^2 - 1$ محور y را در نقطه‌ای به عرض 44 قطع می‌کند.

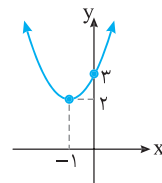
پ) برای رسم سهمی به معادله $y = x^2 + 2x + 3$ ، ابتدا مختصات رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = -\frac{2}{2(1)} = -1$$

$$y = x^2 + 2x + 3 \xrightarrow{x=-1} y = (-1)^2 + 2(-1) + 3 \Rightarrow y = 2$$

بنابراین رأس سهمی نقطه $A(-1, 2)$ است. برای به دست آوردن محل برخورد سهمی با محور y در معادله سهمی به جای x ، صفر قرار می‌دهیم:

$$y = x^2 + 2x + 3 \xrightarrow{x=0} y = (0)^2 + 2(0) + 3 \Rightarrow y = 3$$



بنابراین سهمی در نقطه $(0, 3)$ با محور y برخورد می‌کند. اکنون با توجه به نقاط به دست آمده و اینکه $a = 1 > 0$ ، سهمی $y = x^2 + 2x + 3$ را به صورت مقابل رسم می‌کنیم. بنابراین سهمی به معادله $y = x^2 + 2x + 3$ از ناحیه‌های اول و دوم عبور می‌کند.

۱۶۳ الف) در سهمی به معادله $y = -2x^2 + 8x - 1$ ، $a = -2$ و $b = 8$.

بنابراین طول رأس سهمی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2(-2)} \Rightarrow x = 2$$

همچنین عرض رأس سهمی با جایگذاری $x = 2$ در معادله سهمی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = -2x^2 + 8x - 1 \xrightarrow{x=2} y = -2(2)^2 + 8(2) - 1 \Rightarrow y = 7$$

بنابراین رأس این سهمی نقطه $A(2, 7)$ است.

ب) رأس سهمی به معادله $y = a(x-h)^2 + k$ نقطه $A(h, k)$ است.

بنابراین رأس سهمی $y = 7(x+5)^2$ نقطه $(-5, 0)$ است.

۱۶۴ دقت کنید که ضریب x در معادله $y = x^2 - 4x + 3$ برابر با -4 است.

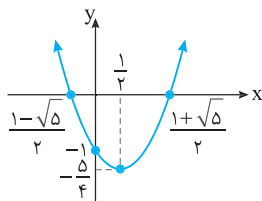
پس برای آنکه معادله داده شده را به صورت مربع کامل بنویسیم، کافی است عدد $4 = \frac{(-4)^2}{4}$ را در سمت راست معادله اضافه و کم کنیم:

$$y = x^2 - 4x + 3 = \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} - 4 + 3 \Rightarrow y = (x-2)^2 - 1$$

واضح است که رأس این سهمی نقطه $A(2, -1)$ است.

بنابراین سهمی محور x را در نقاط $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0)$ و $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0)$ قطع می‌کند.

اکنون با توجه به اینکه $a=1 > 0$ ، این سهمی را به صورت زیر رسم می‌کنیم:



۱۶۸] دقت کنید که طول رأس سهمی برابر با -8 است. بنابراین معادله محور

تقارن این سهمی $x = -8$ است. از طرف دیگر چون عرض دو نقطه $A(m, 2)$ و $B(-4, 2)$ با هم برابر است، بنابراین این دو نقطه از محور تقارن سهمی به یک فاصله هستند. در نتیجه میانگین طول‌های دو نقطه A و B برابر با -8 است. پس

$$\frac{m+(-4)}{2} = -8 \Rightarrow m-4 = -16 \Rightarrow m = -12$$

۱۶۹] چون رأس سهمی نقطه $A(-2, 3)$ است، پس معادله این سهمی به صورت

$y = a(x+2)^2 + 3$ است. همچنین سهمی از نقطه $(0, 2)$ عبور کرده است. در نتیجه مختصات این نقطه در معادله سهمی صدق می‌کنند:

$$y = a(x+2)^2 + 3 \xrightarrow{(0,2)} 2 = a(0+2)^2 + 3 \Rightarrow 4a + 3 = 2$$

$$4a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

پس معادله سهمی به صورت زیر است:

$$y = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}(x^2 + 4x + 4) + 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 2$$

با توجه به معادله به دست آمده $a = -\frac{1}{4}$ ، $b = -1$ و $c = 2$.

۱۷۰] دقت کنید که سهمی از نقاط $(-3, 0)$ و $(-1, 0)$ عبور کرده است.

چون عرض این دو نقطه برابر است، بنابراین طول رأس سهمی برابر با میانگین طول‌های این دو نقطه است. پس

$$x = \frac{-3+(-1)}{2} = \frac{-4}{2} \Rightarrow x = -2$$

بنابراین معادله سهمی به صورت $y = a(x+2)^2 + k$ است. اکنون با توجه به

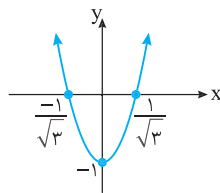
اینکه سهمی از نقاط $(-1, 0)$ و $(0, 3)$ عبور کرده است، مقادیر a و k را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = a(x+2)^2 + k \xrightarrow{(-1,0)} 0 = a(-1+2)^2 + k \Rightarrow a+k=0 & (1) \\ y = a(x+2)^2 + k \xrightarrow{(0,3)} 3 = a(0+2)^2 + k \Rightarrow 4a+k=3 & (2) \end{cases}$$

با توجه به معادله‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید:


$$\begin{cases} a+k=0 \\ 4a+k=3 \end{cases} \Rightarrow a=1, k=-1$$

در نتیجه معادله سهمی به صورت $y = (x+2)^2 - 1$ و رأس سهمی نقطه $A(-2, -1)$ است.



پس این سهمی در نقاط $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ و

$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ با محور x برخورد می‌کند.

اکنون با توجه به اینکه $a=3 > 0$ ، سهمی به شکل  است.

(ب) رأس سهمی $y = -2(x+3)^2 + 8$ نقطه

$A(-3, 8)$ است. همچنین محل برخورد

سهمی با محور y به صورت زیر به دست می‌آید:

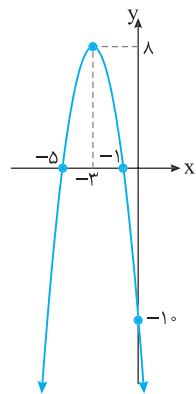
$$y = -2(x+3)^2 + 8 \xrightarrow{x=0}$$

$$y = -2(0+3)^2 + 8 \Rightarrow y = -10$$

بنابراین نقطه برخورد سهمی با محور y نقطه

$(0, -10)$ است. دقت کنید که محل برخورد

سهمی با محور x به صورت زیر به دست می‌آید:



$$y = -2(x+3)^2 + 8 \xrightarrow{y=0} -2(x+3)^2 + 8 = 0 \Rightarrow 2(x+3)^2 = 8$$

$$(x+3)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x+3=2 \Rightarrow x=-1 \\ x+3=-2 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$$

بنابراین سهمی در نقاط $(-5, 0)$ و $(-1, 0)$ با محور x برخورد می‌کند.

دقت کنید که $a = -2 < 0$ ، بنابراین سهمی به شکل  است.

(پ) ابتدا رأس سهمی $y = x^2 - x - 1$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2(1)} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$y = x^2 - x - 1 \xrightarrow{x=\frac{1}{2}}$$

$$y = (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow y = -\frac{5}{4}$$

بنابراین رأس این سهمی نقطه $A(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4})$ است. برای پیدا کردن محل

برخورد سهمی با محور y در معادله سهمی به جای x ، صفر قرار می‌دهیم:

$$y = x^2 - x - 1 \xrightarrow{x=0} y = (0)^2 - 0 - 1 \Rightarrow y = -1$$

بنابراین سهمی در نقطه $A(0, -1)$ با محور y برخورد می‌کند. همچنین برای پیدا

کردن محل برخورد سهمی با محور x در معادله سهمی به جای y ، صفر قرار می‌دهیم:

$$y = x^2 - x - 1 \xrightarrow{y=0} x^2 - x - 1 = 0$$

برای حل این معادله از روش Δ استفاده می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-1) \Rightarrow \Delta = 5$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

پاسخ مسائل تکمیلی

۱ ابتدا توجه کنید که نقاط $(4, -12)$ و $(2, -12)$ دارای عرض‌های برابرند. بنابراین از محور تقارن سهمی به یک فاصله هستند. در نتیجه طول رأس این سهمی برابر با میانگین طول‌های این دو نقطه است:

$$x = \frac{2+4}{2} = 3$$

دقت کنید که چون طول رأس سهمی برابر با ۳ است، پس می‌توان معادله آن را به صورت $y = a(x-3)^2 + h$ نوشت و مقادیر a و h را به صورت زیر حساب کرد:

$$y = a(x-3)^2 + h \xrightarrow{(4, -12)} a(4-3)^2 + h = -12 \Rightarrow a+h = -12$$

$$y = a(x-3)^2 + h \xrightarrow{(2, -9)} a(2-3)^2 + h = -9 \Rightarrow a+h = -9$$

$$\begin{cases} a+h = -12 \\ 4a+h = -9 \end{cases} \Rightarrow a=1, h=-13$$

با توجه به مقادیر a و h معادله این سهمی به صورت زیر خواهد بود:

$$y = 1(x-3)^2 - 13 \Rightarrow y = x^2 - 6x + 9 - 13 \Rightarrow y = x^2 - 6x - 4$$

بنابراین $a=1$ ، $b=-6$ و $c=-4$.

۲ ابتدا برای مشخص کردن مجموعه جواب‌های نامعادله $x^2 - 8x + 7 < 0$

عبارت $y = x^2 - 8x + 7$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x-7=0 \Rightarrow x=7 \end{cases}$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر واضح است که مجموعه جواب‌های نامعادله بازه $(1, 7)$ است.

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$
$x^2 - 8x + 7$		+	-	+

اکنون باید نامعادله‌ای به صورت $|x-a| < b$ بنویسیم که مجموعه جواب‌های آن بازه $(1, 7)$ باشد. توجه کنید که مجموعه جواب‌های نامعادله $|x-a| < b$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$|x-a| < b \Rightarrow -b < x-a < b \Rightarrow a-b < x < a+b$$

با توجه به اینکه $1 < x < 7$ ، مقادیر a و b به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$$

۳ با توجه به جدول تعیین علامت واضح است که عبارت

$$y = (m^2-1)x^2 + 3mx + n$$

عبارت فقط به ازای $x=2$ برابر با صفر است و در دو طرف $x=2$ علامت این عبارت یکسان نیست. بنابراین با توجه به اینکه چندجمله‌ای

$$(m^2-1)x^2 + 3mx + n$$

$$m^2-1=0 \Rightarrow m^2=1 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-1 \end{cases}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده برای m عبارت داده شده به صورت زیر خواهد بود:

$$y = (m^2-1)x^2 + 3mx + n \xrightarrow{m=1} y = 3x + n \quad (\text{ق.ق.})$$

$$y = (m^2-1)x^2 + 3mx + n \xrightarrow{m=-1} y = -3x + n \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

با توجه به اینکه در جدول تعیین علامت برای $x > 2$ علامت عبارت مثبت است، پس باید ضریب x مثبت باشد. بنابراین فقط $y = 3x + n$ قابل قبول است. از طرف دیگر چون مقدار y به ازای $x=2$ برابر صفر است، می‌نویسیم:

$$y = 3x + n \xrightarrow{\substack{x=2 \\ y=0}} 0 = 3(2) + n \Rightarrow n = -6 \Rightarrow y = 3x - 6$$

۴ با توجه به جدول تعیین علامت واضح است که معادله

$$(m+1)x^2 - (m+1)x + (2m-1) = 0$$

است. بنابراین باید Δ برابر با صفر باشد.

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (m+1)^2 - 4(1)(2m-1) = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 - 8m + 4 = 0 \Rightarrow m^2 - 6m + 5 = 0$$

$$(m-1)(m-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=5 \end{cases}$$

دقت کنید که $x=a$ جواب معادله $x^2 - (m+1)x + (2m-1) = 0$ است. بنابراین برای پیدا کردن مقدار a کافی است مقادیر به دست آمده برای m را در معادله جایگذاری کنیم و جواب معادله را به دست آوریم.

$$x^2 - (m+1)x + (2m-1) = 0 \xrightarrow{m=1} x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0$$

$$x=1 \Rightarrow a=1$$

$$x^2 - (m+1)x + (2m-1) = 0 \xrightarrow{m=5} x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0$$

$$x=3 \Rightarrow a=3$$

۵ اگر a, b, c به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه

بین آن‌ها رابطه $b^2 = ac$ برقرار است. بنابراین اگر $x+1, x+4, 5x+2$ جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه

$$(x+4)^2 = (x+1)(5x+2) \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 5x^2 + 2x + 5x + 2$$

$$4x^2 - x - 14 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(4)(-14) = 225$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{225}}{8} = \frac{1+15}{8} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{225}}{8} = \frac{1-15}{8} = -\frac{7}{4}$$

دقت کنید که به ازای $x=2$ دنباله هندسی $x+1, x+4, 5x+2$ به صورت $3, 6, 12$ خواهد بود که قدرنسبت آن برابر با ۲ است. همچنین به ازای

$$x = -\frac{7}{4} \text{ دنباله هندسی } x+1, x+4, 5x+2 \text{ به صورت } -\frac{3}{4}, \frac{9}{4}, -\frac{27}{4}$$

خواهد بود که قدرنسبت آن برابر با -3 است.

۴ الف

$$x^2 - 4x + \frac{y}{f} = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)\left(\frac{y}{f}\right) = 16 - 4\frac{y}{f} = 9$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{9}}{2} = \frac{y}{2} \quad (o/v\Delta)$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{9}}{2} = \frac{1}{2} \quad (o/v\Delta)$$

ب

$$-2x^2 - 10x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(-2)(5) = 100 + 40 = 140$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 + \sqrt{140}}{-4} = \frac{10 + 2\sqrt{35}}{-4} = \frac{-5 - \sqrt{35}}{2} \quad (o/v\Delta)$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 - \sqrt{140}}{-4} = \frac{10 - 2\sqrt{35}}{-4} = \frac{-5 + \sqrt{35}}{2} \quad (o/v\Delta)$$

ب

$$\frac{1}{\Delta} x^2 - x + \frac{\Delta}{f} = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\left(\frac{1}{\Delta}\right)\left(\frac{\Delta}{f}\right) = 1 - 1 = 0$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2\left(\frac{1}{\Delta}\right)} = \frac{1}{2} = \frac{\Delta}{2} \quad (o/v\Delta)$$

ت

$$x^2 - 2x + 7 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(7) = 4 - 28 = -24 < 0$$

(معادله جواب ندارد) (o/v\Delta)

$$3x^2 - 2a + 1 = 0$$

۵

(o/v\Delta)

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = (-2a)^2 - 4(3)(1) = 0 \Rightarrow 4a^2 - 12 = 0 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3} \quad (o/v\Delta)$$

$$4a^2 = 12 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3} \quad (o/v\Delta)$$

۶

$$x^2 - 2x + m = 0$$

(o/v\Delta)

$$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(m) > 0 \Rightarrow 4 - 4m > 0 \Rightarrow -4m > -4 \Rightarrow m < 1 \quad (o/v\Delta)$$

$$4 - 4m > 0 \Rightarrow -4m > -4 \Rightarrow m < 1 \quad (o/v\Delta)$$

۷

$$mx^2 + (m-2)x - m = 0$$

(o/v\Delta)

$$\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = (m-2)^2 - 4(m)(-m) < 0$$

$$m^2 - 4m + 4 + 4m^2 < 0 \Rightarrow 5m^2 - 4m + 4 < 0 \quad (o/v\Delta)$$

برای حل نامعادله فوق جدول تعیین علامت عبارت را تشکیل می‌دهیم:

$$5m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(5)(4) = 16 - 80 = -64 < 0$$

(معادله جواب ندارد)

m	-∞	+∞
5m ² - 4m + 4	+	+

با توجه به جدول تعیین علامت عبارت $5m^2 - 4m + 4$ واضح است که

مجموعه جواب‌های نامعادله $5m^2 - 4m + 4 < 0$ تهی است. بنابراین هیچ

مقداری برای m وجود ندارد که به ازای آن معادله $mx^2 + (m-2)x - m = 0$

جواب حقیقی نداشته باشد. (o/v\Delta)

پاسخنامه سؤالات امتحانی بarmبندی شده

۱ الف

$$\frac{1}{2}x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x\left(\frac{1}{2}x - 4\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \frac{1}{2}x - 4 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 4 \Rightarrow x = 8 \end{cases} \quad (o/v\Delta)$$

ب

$$2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0$$

$$\begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases} \quad (o/v\Delta)$$

ب

$$x^2 - 11x + 18 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x-9=0 \Rightarrow x=9 \end{cases} \quad (o/v\Delta)$$

ت

$$2x^2 + 2x - 84 = 0 \Rightarrow 2(x^2 + x - 42) = 0 \Rightarrow (x+7)(x-6) = 0$$

$$\begin{cases} x+7=0 \Rightarrow x=-7 \\ x-6=0 \Rightarrow x=6 \end{cases} \quad (o/v\Delta)$$

$$(x-7)^2 = 49 \Rightarrow \begin{cases} x-7=7 \Rightarrow x=14 \\ x-7=-7 \Rightarrow x=0 \end{cases} \quad (o/v\Delta)$$

۲ الف

$$(2x-5)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (2x-5)^2 = -1 \quad (o/v\Delta) \text{ (معادله جواب ندارد)}$$

ب

ب

$$(3x-4)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} 3x-4=2 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2 \\ 3x-4=-2 \Rightarrow 3x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{3} \end{cases} \quad (o/v\Delta)$$

ت

$$(4x-1)^2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} 4x-1=\sqrt{5} \Rightarrow 4x=1+\sqrt{5} \Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \\ 4x-1=-\sqrt{5} \Rightarrow 4x=1-\sqrt{5} \Rightarrow x=\frac{1-\sqrt{5}}{4} \end{cases} \quad (o/v\Delta)$$

$$x^2 - 8x = -15 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = -15 + 16 = 1$$

۳ الف

$$(x-4)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-4=1 \Rightarrow x=5 \\ x-4=-1 \Rightarrow x=3 \end{cases} \quad (o/v\Delta)$$

ب

$$3x^2 - 9x - 1 = 0 \xrightarrow{+1} x^2 - 3x - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = \frac{1}{3}$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{31}{12} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{31}{12}} \\ x - \frac{3}{2} = -\sqrt{\frac{31}{12}} \end{cases}$$

$$x = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{31}{12}}, \quad x = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{31}{12}} \quad (o/v\Delta)$$

جایگشت

فکتوریل

اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل ضرب $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ را با $n!$ نشان می‌دهیم (بخوانید n فکتوریل). قرارداد می‌کنیم که $0! = 1$.

مثال

الف) $3! = 3 \times 2 \times 1$

ب) $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

پ) $10! = 10 \times 9 \times 8 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$

نکته

$n!$ را می‌توانیم به صورت $n \times (n-1)!$ بنویسیم.

مثال

الف) $6! = 6 \times 5!$

ب) $5! = 5 \times 4!$

مسئله ۹

هریک از عددهای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{8!}{7!}$

ب) $\frac{6!}{4!}$

پ) $\frac{9!}{7! \cdot 2!}$

ت) $\frac{4! \times 0!}{2! \times 1!}$

$$\frac{8!}{7!} = \frac{8 \times 7!}{7!} = 8$$

$$\frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!} = 6 \times 5 = 30$$

$$\frac{9!}{7! \cdot 2!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7! \times 2 \times 1} = \frac{9 \times 8}{2} = 9 \times 4 = 36$$

$$\frac{4! \times 0!}{2! \times 1!} = \frac{4! \times 1}{2! \times 1} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 4 \times 3 = 12$$

راه‌حل الف) توجه کنید که $8! = 8 \times 7!$ ، بنابراین

ب) با توجه به اینکه $6! = 6 \times 5! = 6 \times 5 \times 4!$ ، پس

پ) توجه کنید که $2! = 2 \times 1$ و $9! = 9 \times 8! = 9 \times 8 \times 7!$ ، پس

ت) چون $0! = 1$ و $1! = 1$ ، پس

مسئله ۱۰

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{n!}{(n-1)!}$

ب) $\frac{n!}{(n-3)!}$

پ) $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$\frac{n!}{(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2)$$

$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = (n+3)(n+2)$$

راه‌حل الف) چون $n! = n(n-1)!$ ، پس

ب) توجه کنید که

پ) می‌توان نوشت

مسئله ۱۱

حاصل ضرب‌های زیر را با استفاده از نماد فاکتوریل بنویسید.

الف) 5×4 ب) $10 \times 9 \times 8$ پ) $n(n-1)$

راه‌حل الف) برای اینکه حاصل ضرب 5×4 را به صورت فاکتوریل بنویسیم، کافی است آن را در $3 \times 2 \times 1$ ضرب و تقسیم کنیم:

$$5 \times 4 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{5!}{3!}$$

ب) روش اول: حاصل ضرب $10 \times 9 \times 8$ را در $7 \times 6 \times \dots \times 1$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$10 \times 9 \times 8 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times \dots \times 1}{7 \times 6 \times \dots \times 1} = \frac{10!}{7!}$$

روش دوم: می‌توان نوشت

$$10 \times 9 \times 8 = (2 \times 5) \times (3 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2) = 2 \times 5 \times 3 \times 2 \times 2 = 6!$$

پ) باید عبارت $n(n-1)$ را در $(n-2)(n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ ضرب و تقسیم کنیم:

$$n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{(n-2)(n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{n!}{(n-2)!}$$

مسئله ۱۲

در هر قسمت، مقدار n را به دست آورید.

الف) $\frac{(n+2)!}{n!} = 12$ ب) $\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = 10$ پ) $\frac{(n-4)!}{20} = 3!$

راه‌حل الف) چون $(n+2)! = (n+2)(n+1)n!$ ، پس

$$\frac{(n+2)!}{n!} = 12 \Rightarrow \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = 12 \Rightarrow (n+2)(n+1) = 12$$

$$n^2 + 3n + 2 = 12 \Rightarrow n^2 + 3n - 10 = 0 \Rightarrow (n+5)(n-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n+5=0 \Rightarrow n=-5 \\ n-2=0 \Rightarrow n=2 \end{cases}$$

دقت کنید که n عددی طبیعی است، پس فقط $n=2$ قابل قبول است.

ب) دقت کنید که $n! = n(n-1)(n-2)!$ ، پس

$$\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = 10 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \times 2 \times 1} = 10 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 10$$

$$n(n-1) = 20 \Rightarrow n^2 - n = 20 \Rightarrow n^2 - n - 20 = 0 \Rightarrow (n-5)(n+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n-5=0 \Rightarrow n=5 \text{ (ق.ق.)} \\ n+4=0 \Rightarrow n=-4 \text{ (غ.ق.ق.)} \end{cases}$$

پ) چون $20 = 5 \times 4$ ، بنابراین

$$\frac{(n-4)!}{20} = 3! \Rightarrow \frac{(n-4)!}{5 \times 4} = 3! \Rightarrow (n-4)! = 5 \times 4 \times 3! \Rightarrow (n-4)! = 5! \Rightarrow n-4 = 5 \Rightarrow n = 9$$

جایگشت‌های n شیء متمایز

به هر حالت چیدن n شیء متمایز در یک ردیف کنار هم یک جایگشت از این اشیا می‌گوییم. تعداد این جایگشت‌ها برابر با $n!$ است.

مثال

حروف A ، B و C را در نظر بگیرید. به هر حالت کنار هم قرار گرفتن این حروف یک جایگشت می‌گوییم که این جایگشت‌ها عبارت‌اند از ABC ، ACB ، BAC ، BCA ، CAB ، CBA

تعداد این جایگشت‌ها برابر با $3! = 6$ است.

جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز

به هر حالت قرار گرفتن r شیء از n شیء متمایز در کنار یکدیگر در یک ردیف یک جایگشت r تایی از n شیء متمایز می‌گوییم. توجه کنید که ترتیب قرار گرفتن این اشیا کنار هم اهمیت دارد.

مثال

فرض کنید می‌خواهیم با حروف کلمه math یک کلمه دوحرفی بدون تکرار حروف بسازیم. برای این کار کافی است جایگشت‌های دوتایی از چهار حرف a, m, h و t را بنویسیم. این جایگشت‌ها به صورت زیر هستند:

$ma, mt, mh, am, at, ah, tm, ta, th, hm, ha, ht$

ملاحظه می‌کنید که با هر دو حرف متمایز، دو کلمه ساخته شده است. مانند am و ma . در نتیجه در جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز ترتیب کنار هم قرار گرفتن اشیا اهمیت دارد.

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز را که با $P(n, r)$ نشان می‌دهیم برابر است با

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

مثال

تعداد کلمات دوحرفی با حروف متمایز که با ۴ حرف کلمه math می‌توانیم بسازیم، همان تعداد جایگشت‌های ۲ تایی از ۴ شیء متمایز است که برابر است با

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \xrightarrow{n=4, r=2} P(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 4 \times 3 = 12$$

مسئله ۱۷

از بین ۶ نفر اعضای هیئت رئیسه یک شرکت می‌خواهیم ۳ نفر را به ترتیب به عنوان رئیس هیئت مدیره، مدیر عامل و معاون انتخاب کنیم. چند حالت برای انتخاب این اعضا وجود دارد؟

راه‌حل چون ترتیب قرار گرفتن افراد در این سمت‌ها اهمیت دارد، بنابراین باید تعداد جایگشت‌های ۳ تایی از ۶ شیء متمایز را به دست آوریم.

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \xrightarrow{n=6, r=3} P(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$$

مسئله ۱۸

با حروف کلمه «نشر الگو» و بدون تکرار حروف،

الف) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان ساخت؟

ب) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان ساخت که با حروف «ل» شروع شود؟

پ) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان ساخت که شامل حرف «ل» باشد؟

راه‌حل الف) توجه کنید که کلمه «نشر الگو» از هفت حرف تشکیل شده است. پس کافی است تعداد جایگشت‌های ۴ تایی این ۷ حرف را به دست آوریم.

$$P(7, 4) = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 840$$

ب) حرف «ل» را در ابتدای کلمه قرار می‌دهیم. سپس باید سه حرف از شش حرف باقی‌مانده را بعد از حرف «ل» قرار دهیم. تعداد حالت‌های انجام این کار برابر با تعداد جایگشت‌های ۳ تایی از ۶ شیء متمایز است. بنابراین

$$P(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$$

پ) حرف «ل» می‌تواند حرف اول، دوم، سوم یا چهارم باشد. پس برای قرار دادن حرف «ل» در کلمه مورد نظر ۴ حالت داریم. سپس باید سه حرف از شش حرف باقی‌مانده را کنار حرف «ل» قرار دهیم. تعداد حالت‌های انجام این کار برابر با تعداد جایگشت‌های ۳ تایی از ۶ شیء متمایز است. بنابراین طبق اصل ضرب می‌نویسیم:

$$4 \times P(6, 3) = 4 \times \frac{6!}{(6-3)!} = 4 \times \frac{6!}{3!} = 4 \times \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 4 \times 120 = 480$$

تمرین‌های تشریحی



۲۶۳- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $3! + 2!$ برابر با $5!$ است.
 ب) $6!$ متمایز را به 720 حالت می‌توان کنار یکدیگر قرار داد.
 پ) تعداد جایگشت‌های 3 تایی از 7 شیء متمایز برابر با 210 است. ت) حاصل $P(5, 4)$ دو برابر $P(5, 3)$ است.

۲۶۴- جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

الف) حاصل $\frac{(n+1)!}{n!}$ برابر با است.
 ب) تعداد جایگشت‌های شیء متمایز برابر با 120 است.

پ) با حروف کلمه *sheyda*، کلمه 5 حرفی با حروف متمایز می‌توان ساخت به طوری که حروف s و h کنار هم باشند.
 ت) تعداد کلمه‌های 3 حرفی بدون تکرار حروف که می‌توان با حروف کلمه «کولرگازی» ساخت برابر با است.

۲۶۵- هریک از عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{5! \cdot 0!}{3!}$ ب) $\frac{10!}{4! \cdot 7!}$ پ) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$
 ت) $\frac{(n-3)!}{n!}$ ث) $\frac{n!}{(n-m)!} (n \geq m)$

۲۶۶- حاصل ضرب‌های زیر را با استفاده از نماد فاکتوریل بنویسید.

الف) 20×19 ب) $13 \times 12 \times 11 \times 10$ پ) $(n+1)(n)$ ت) $(n-2)(n-3)(n-4)$

۲۶۷- در هریک از تساوی‌های زیر، مقدار n را به دست آورید.

الف) $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{7}$ ب) $\frac{(n+5)!}{(n+3)!} = 110$ پ) $\frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!} = 36$ ت) $\frac{n!}{(n-3)!} = 210$

۲۶۸- اگر $P(n, 2) = 30$ ، مقدار n را به دست آورید.

۲۶۹- اگر $P(8, k) = 56$ ، مقدار k را به دست آورید.

۲۷۰- 15 دانش‌آموز یک کلاس به چند طریق می‌توانند در یک صف کنار هم بایستند؟

۲۷۱- 7 نفر که 3 نفر از آن‌ها برادرند،

الف) به چند طریق می‌توانند کنار یکدیگر بایستند؟

ب) به چند طریق می‌توانند کنار یکدیگر بایستند به طوری که 3 برادر کنار هم باشند؟

پ) به چند طریق می‌توانند کنار یکدیگر بایستند به طوری که 3 برادر کنار هم و 4 نفر دیگر نیز کنار هم باشند؟

ت) به چند طریق می‌توانند کنار یکدیگر بایستند به طوری که 3 برادر و 4 نفر دیگر یکی در میان باشند؟

۲۷۲- در یک همایش علمی 4 مهندس برق، 3 مهندس مکانیک و 2 مهندس عمران به چند طریق می‌توانند سخنرانی کنند، به طوری که

الف) هیچ محدودیتی وجود نداشته باشد؟

ب) ابتدا مهندسان برق، سپس مهندسان مکانیک و در انتها مهندسان عمران سخنرانی کنند؟

پ) مهندسان هم‌رشته، پشت سر هم سخنرانی کنند؟

۲۷۳- در یک مسابقه شطرنج با 10 شرکت‌کننده، نفرات اول، دوم و سوم به چند حالت مختلف می‌توانند مشخص شوند؟

۲۷۴- صفحه کلید یک رمز کامپیوتری به صورت مقابل است. با این کلیدها چند رمز مختلف 4 رقمی می‌توان ساخت، به طوری که

در ساخت این رمز از هر کلید حداکثر یک بار استفاده کنیم؟

1	2	3
4	5	6
7	8	9
#	0	*

۲۷۵- با حروف کلمه «چیستان» و بدون تکرار حروف چند کلمه 4 حرفی می‌توان نوشت به طوری که

الف) هیچ محدودیتی نداشته باشیم؟
 ب) با حرف «چ» شروع شود و به حرف «ن» ختم شود؟

۲۷۶- با حروف کلمه «خوشه گندم» و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمه 5 حرفی می‌توان ساخت؟
 ب) چند کلمه 7 حرفی می‌توان ساخت که به «گندم» ختم شود؟

پ) چند کلمه 6 حرفی می‌توان ساخت که با حرف نقطه‌دار شروع شود؟

۲۶۲] دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: همه رقم‌ها زوج باشند. برای ساختن عدد سه‌رقمی که تمام رقم‌های آن زوج باشند، باید از رقم‌های ۰، ۲، ۴، ۶ و ۸ استفاده کنیم. دقت کنید که رقم صفر نمی‌تواند در جایگاه صدگان قرار گیرد. همچنین تکرار رقم‌ها مجاز نیست. بنابراین تعداد اعداد سه‌رقمی که در این حالت می‌توان ساخت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{4} \times \boxed{4} \times \boxed{3} = 48$$

۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸

حالت دوم: همه رقم‌ها فرد باشند. برای ساختن عدد سه‌رقمی که تمام رقم‌های آن فرد باشند باید از رقم‌های ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ استفاده کنیم. دقت کنید که تکرار رقم‌ها مجاز نیست. بنابراین تعداد اعداد سه‌رقمی که در این حالت می‌توان ساخت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{3} = 60$$

۱ یا ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹

بنابراین طبق اصل جمع تعداد عددهای سه‌رقمی با رقم‌های غیرتکراری که همه رقم‌های آن زوج یا همه رقم‌های آن فرد باشد برابر با $48 + 60 = 108$ است.

۲۶۳] الف) نادرست است. دقت کنید که $2! + 3! = 2 \times 1 + 3 \times 2 \times 1 = 4 + 6 = 10$ از طرف دیگر $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. بنابراین واضح است که $2! + 3! \neq 5!$.
ب) درست است. ۶ شیء متمایز را به $7! = 5040$ حالت می‌توان کنار یکدیگر قرار داد.

پ) درست است. تعداد جایگشت‌های ۳ تایی از ۷ شیء متمایز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 210$$

ت) درست است. توجه کنید که

$$P(5, 4) = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 60$$

۲۶۴] الف) عبارت $\frac{(n+1)!}{n!}$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \times n!}{n!} = n+1$$

بنابراین حاصل $\frac{(n+1)!}{n!}$ برابر با $n+1$ است.

ب) تعداد جایگشت‌های ۵ شیء متمایز برابر با $5! = 120$ است.

پ) ابتدا دو حرف s و h را در یک جایگاه کنار هم قرار داده و برای هر کدام از حروف e، y، d و a نیز یک جایگاه در نظر می‌گیریم. بنابراین ۵ جایگاه داریم که تعداد جایگشت‌های آن‌ها برابر با $5!$ است. همچنین دو حرف h و s نیز به ۲! حالت می‌توانند کنار یکدیگر قرار گیرند.

$$\frac{2!}{5!} \times \underbrace{\overbrace{e \quad sh}^2! \quad y \quad d \quad a}^5!}$$

بنابراین با حروف کلمه sheyda، $24 \times 5! = 120 \times 2 = 240$ تعداد جایگشت‌ها

به طوری که حروف s و h کنار هم باشند.

ت) کلمه «کولرگازی» ۸ حرف متمایز دارد. بنابراین تعداد کلمه‌های سه‌حرفی که می‌توان با این ۸ حرف ساخت برابر است با تعداد جایگشت‌های ۳ تایی از ۸ شیء متمایز که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

بنابراین تعداد کلمه‌های ۳ حرفی بدون تکرار حروف که می‌توان با حروف کلمه «کولرگازی» ساخت برابر با ۳۳۶ است.

۲۵۹] الف) چون محدودیتی نداریم، برای هر گزینه ۱۲ انتخاب داریم. بنابراین طبق اصل ضرب با اعداد و حروف داده شده می‌توان

ب) دقت کنید که تعداد حروف فارسی ۴ تا، تعداد حروف انگلیسی ۳ تا و تعداد رقم‌ها ۵ تا است. بنابراین برای گزینه اول، دوم و سوم به ترتیب ۳، ۴ و ۵ انتخاب داریم. پس تعداد رمزهای سه‌گزینه‌ای که در این حالت می‌توان ساخت برابر است با

$$\boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{5} = 60$$

پ) دقت کنید که از حروف انگلیسی فقط در گزینه اول یا فقط در گزینه دوم یا فقط در گزینه سوم می‌توان استفاده کرد. همچنین در هر یک از این حالت‌ها برای دو گزینه دیگر ۹ انتخاب داریم. در نتیجه

$$\boxed{3} \times \boxed{9} \times \boxed{9} = 243$$

حالت اول: A یا B یا C

$$\boxed{9} \times \boxed{3} \times \boxed{9} = 243$$

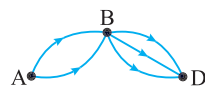
حالت دوم: A یا B یا C

$$\boxed{9} \times \boxed{9} \times \boxed{3} = 243$$

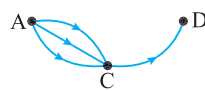
حالت سوم: A یا B یا C

دقت کنید که در این حالت با توجه به اصل جمع به $243 + 243 + 243 = 729$ طریق می‌توان رمز سه‌گزینه‌ای ساخت.

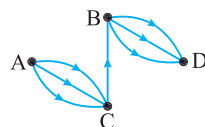
۲۶۰] برای رفتن از شهر A به شهر D سه حالت وجود دارد.



حالت اول: از شهر A به شهر B و سپس از شهر B به شهر D برویم. با توجه به تعداد جاده‌ها انجام این کار به $2 \times 3 = 6$ طریق امکان‌پذیر است.



حالت دوم: از شهر A به شهر C و سپس از شهر C به شهر D برویم. با توجه به تعداد جاده‌ها انجام این کار به $3 \times 1 = 3$ طریق امکان‌پذیر است.



حالت سوم: از شهر A به شهر C و سپس از شهر C به شهر B و در انتها از شهر B به شهر D برویم. با توجه به تعداد جاده‌ها انجام این کار به $3 \times 1 \times 3 = 9$ طریق امکان‌پذیر است.

در نتیجه طبق اصل جمع به $6 + 3 + 9 = 18$ طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت.

۲۶۱] دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: همه رقم‌ها زوج باشند. دقت کنید که از ۵ رقم داده شده فقط دو رقم ۶ و ۸ زوج هستند. بنابراین برای هر کدام از جایگاه‌های یکان، دهگان و صدگان ۲ انتخاب داریم. پس

$$\boxed{2} \times \boxed{2} \times \boxed{2} = 8$$

۶ یا ۸ یا ۶ یا ۸ یا ۶ یا ۸

حالت دوم: همه رقم‌ها فرد باشند. دقت کنید که از ۵ رقم داده شده فقط سه رقم ۱، ۳ و ۵ فرد هستند. بنابراین برای هر کدام از جایگاه‌های یکان، دهگان و صدگان ۳ انتخاب داریم. پس

$$\boxed{3} \times \boxed{3} \times \boxed{3} = 27$$

۱ یا ۳ یا ۵ یا ۱ یا ۳ یا ۵ یا ۱ یا ۳ یا ۵

در نتیجه طبق اصل جمع تعداد عددهای سه‌رقمی که می‌توان ساخت به طوری که همه رقم‌های آن زوج یا همه رقم‌های آن فرد باشد برابر با $8 + 27 = 35$ است.

(ب) دقت کنید که $(n-2)! = (n-2)(n-3)(n-4)!$ ، بنابراین

$$\frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!} = 36 \Rightarrow \frac{(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)! \cdot 2 \times 1} = 36$$

$$(n-2)(n-3) = 72 \Rightarrow n^2 - 5n + 6 = 72 \Rightarrow n^2 - 5n - 66 = 0$$

$$(n-1)(n+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 11 \\ n = -6 \text{ (غ.ق.)} \end{cases}$$

با توجه به اینکه n عددی طبیعی است، بنابراین فقط $n = 11$ قابل قبول است.
 (ت) توجه کنید که $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)!$ پس

$$\frac{n!}{(n-3)!} = 210 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 210$$

$$n(n-1)(n-2) = 210$$

دقت کنید که n ، $n-1$ و $n-2$ سه عدد طبیعی متوالی هستند. در نتیجه برای پیدا کردن n عدد 210 را نیز به صورت حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی می‌نویسیم.
 $n(n-1)(n-2) = 210 \Rightarrow 7 \times 6 \times 5 = 210 \Rightarrow n = 7$ پس

۲۶۸ دقت کنید که $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ ، بنابراین

$$P(n, 2) = 30 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 30 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 30 \Rightarrow n^2 - n - 30 = 0$$

$$n^2 - n - 30 = 0 \Rightarrow (n+5)(n-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -5 \text{ (غ.ق.)} \\ n = 6 \text{ (ق.ق.)} \end{cases}$$

۲۶۹ توجه کنید که $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ ، بنابراین

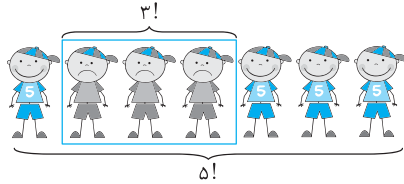
$$P(8, k) = 56 \Rightarrow \frac{8!}{(8-k)!} = 56 \Rightarrow 56(8-k)! = 8!$$

$$8 \times 7 \times (8-k)! = 8 \times 7 \times 6! \Rightarrow (8-k)! = 6! \Rightarrow 8-k = 6 \Rightarrow k = 2$$

۲۷۰ تعداد حالت‌های قرار گرفتن ۱۵ دانش‌آموز در یک صف همان تعداد جایگشت‌های آن‌ها است که برابر با $15!$ است.

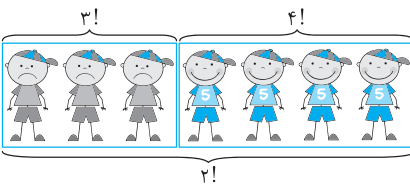
۲۷۱ الف) تعداد حالت‌های کنار هم قرار گرفتن این ۷ نفر، همان تعداد جایگشت‌های آن‌ها است که برابر با $7! = 5040$ است.

ب) ابتدا ۳ برادر را در یک جایگاه کنار هم قرار داده و برای هر کدام از ۴ نفر دیگر نیز ۴ جایگاه در نظر می‌گیریم. بنابراین ۵ جایگاه داریم که تعداد جایگشت‌های آن‌ها برابر با $5!$ است. همچنین ۳ برادر نیز ۳ حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند.



$$\text{تعداد جایگشت‌ها} = 5! \times 3! = 120 \times 6 = 720$$

پ) ۳ برادر را در یک جایگاه کنار هم و ۴ نفر دیگر را نیز در یک جایگاه کنار هم قرار می‌دهیم. بنابراین ۲ جایگاه داریم که تعداد جایگشت‌های آن‌ها برابر با $2!$ است. همچنین ۳ برادر به ۳ حالت و ۴ نفر دیگر به ۴ حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند.



$$\text{تعداد جایگشت‌ها} = 2! \times 3! \times 4! = 288$$

۲۶۵ الف) دقت کنید که $5! = 1$ ، بنابراین $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 20$

ب) توجه کنید که $\frac{10!}{4! \cdot 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 7!} = 30$

پ) دقت کنید که $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!} = (n+1)(n) = n^2 + n$

ت) توجه کنید که

$$\frac{(n-3)!}{n!} = \frac{(n-3)!}{(n)(n-1)(n-2)(n-3)!} = \frac{1}{(n)(n-1)(n-2)}$$

$$= \frac{1}{n^3 - 3n^2 + 2n}$$

ث) دقت کنید که

$$\frac{n!}{(n-m)!} = \frac{(n)(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)(n-m)!}{(n-m)!}$$

$$= (n)(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)!$$

۲۶۶ الف) برای اینکه حاصل ضرب 20×19 را به صورت فاکتوریل بنویسیم، کافی است آن را در $18 \times 17 \times \dots \times 2 \times 1$ ضرب و تقسیم کنیم:

$$20 \times 19 = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times \dots \times 2 \times 1}{18 \times 17 \times \dots \times 2 \times 1} = \frac{20!}{18!}$$

ب) برای اینکه حاصل ضرب $13 \times 12 \times 11 \times 10$ را به صورت فاکتوریل بنویسیم، کافی است آن را در $9 \times 8 \times \dots \times 2 \times 1$ ضرب و تقسیم کنیم:

$$13 \times 12 \times 11 \times 10 = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times \dots \times 2 \times 1}{9 \times 8 \times \dots \times 2 \times 1} = \frac{13!}{9!}$$

پ) برای اینکه حاصل ضرب $(n+1)(n)$ را به صورت فاکتوریل بنویسیم، کافی است آن را در $(n-1)(n-2)\dots \times 2 \times 1$ ضرب و تقسیم کنیم:

$$(n+1)(n) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\dots \times 2 \times 1}{(n-1)(n-2)\dots \times 2 \times 1} = \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$$

ت) برای اینکه حاصل ضرب $(n-2)(n-3)(n-4)$ را به صورت فاکتوریل بنویسیم، کافی است آن را در $(n-5)(n-6)\dots \times 2 \times 1$ ضرب و تقسیم کنیم:

$$(n-2)(n-3)(n-4) = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)\dots \times 2 \times 1}{(n-5)(n-6)\dots \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{(n-2)!}{(n-5)!}$$

۲۶۷ الف) دقت کنید که $n! = n(n-1)!$ ، بنابراین

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{n(n-1)!} = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \Rightarrow n = 7$$

ب) توجه کنید که $(n+5)! = (n+5)(n+4)(n+3)!$ ، پس

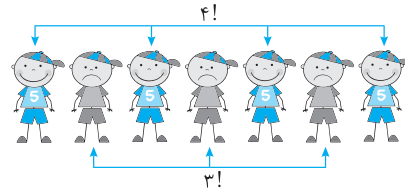
$$\frac{(n+5)!}{(n+3)!} = 110 \Rightarrow \frac{(n+5)(n+4)(n+3)!}{(n+3)!} = 110$$

$$(n+5)(n+4) = 110 \Rightarrow n^2 + 9n + 20 = 110 \Rightarrow n^2 + 9n - 90 = 0$$

$$(n+15)(n-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -15 \\ n = 6 \end{cases}$$

دقت کنید که n عددی طبیعی است. پس فقط $n = 6$ قابل قبول است.

ت) توجه کنید که برای یکی در میان ایستادن ۳ برادر و ۴ نفر دیگر لازم است که ۳ برادر در ابتدا و انتهای ردیف نباشند.



تعداد جایگشت‌ها $= 3! \times 4! = 144$

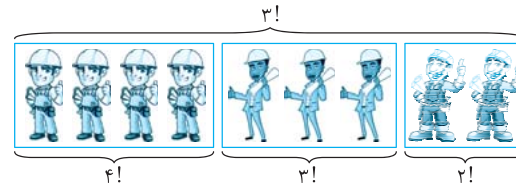
۲۷۲ الف) تعداد مهندسان برابر با ۹ نفر است. بنابراین آن‌ها می‌توانند به ۹! حالت در این همایش سخنرانی کنند.

ب) برای مهندسان هر رشته یک جایگاه در نظر می‌گیریم و این ۳ جایگاه را به ترتیب سخنرانی آن‌ها از چپ به راست قرار می‌دهیم. واضح است که مهندسان برق به ۴! حالت، مهندسان مکانیک به ۳! حالت و مهندسان عمران به ۲! حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند.



تعداد جایگشت‌ها $= 2! \times 3! \times 4! = 288$

ب) برای مهندسان هر رشته یک جایگاه در نظر می‌گیریم. توجه کنید که این ۳ جایگاه می‌توانند به ۳! حالت کنار هم قرار گیرند. همچنین مهندسان برق به ۴! حالت، مهندسان مکانیک به ۳! حالت و مهندسان عمران به ۲! حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند.



تعداد جایگشت‌ها $= 3! \times 4! \times 3! \times 2! = 1728$

۲۷۳ چون ترتیب قرار گرفتن نفرات در رتبه‌های اول، دوم و سوم اهمیت دارد، بنابراین باید تعداد جایگشت‌های ۱۰ تایی از ۱۰ شیء متمایز را به دست آوریم:

$$P(10, 3) = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

۲۷۴ چون ترتیب انتخاب کلیدها اهمیت دارد و از هر کلید حداکثر یک بار می‌توانیم استفاده کنیم، بنابراین باید تعداد جایگشت‌های ۴ تایی از ۱۲ شیء متمایز را به دست آوریم:

$$P(12, 4) = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8!} = 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 11880$$

۲۷۵ الف) چون کلمه «چیستان» شش حرف متمایز دارد، بنابراین تعداد کلمات ۴ حرفی که می‌توان با حروف آن ساخت برابر با تعداد جایگشت‌های ۴ تایی از ۶ شیء متمایز است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

ب) حرف «ج» را در ابتدای کلمه و حرف «ن» را در انتهای آن قرار می‌دهیم. سپس باید دو حرف از چهار حرف باقی‌مانده را بین «ج» و «ن» قرار دهیم. تعداد حالت‌های انجام این کار برابر با تعداد جایگشت‌های ۲ تایی از ۴ شیء متمایز است. بنابراین

$$P(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 4 \times 3 = 12$$

۲۷۶ الف) چون کلمه «خوشه گندم» هشت حرف متمایز دارد، بنابراین تعداد کلمات پنج‌حرفی که می‌توان با حروف آن ساخت برابر با تعداد جایگشت‌های ۵ تایی از ۸ شیء متمایز است. بنابراین می‌نویسیم:

$$P(8, 5) = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$$

ب) کافی است کلمه «گندم» را در انتها قرار داده و سپس از چهار حرف باقی‌مانده سه حرف را قبل از آن قرار دهیم. تعداد حالت‌های انجام این کار برابر با تعداد جایگشت‌های ۳ تایی از ۴ شیء متمایز است. بنابراین

$$P(4, 3) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$$

پ) حرف اول می‌تواند یکی از حروف «خ» یا «ش» یا «ن» باشد، بنابراین برای قرار دادن حرف نقطه‌دار در ابتدای این کلمه ۳ حالت داریم. دقت کنید که بعد از قرار دادن حرف اول باید پنج حرف از هفت حرف باقی‌مانده را بعد از حرف نقطه‌دار قرار دهیم. تعداد حالت‌های انجام این کار برابر با تعداد جایگشت‌های ۵ تایی از ۷ شیء متمایز است. بنابراین طبق اصل ضرب می‌نویسیم:

$$3 \times P(7, 5) = 3 \times \frac{7!}{(7-5)!} = 3 \times \frac{7!}{2!} = 3 \times \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 7560$$

۲۷۷ الف) نادرست است. تعداد انتخاب‌های ۲ شیء از n شیء متمایز که در آن‌ها ترتیب انتخاب مهم نیست، برابر با $\frac{n!}{(n-r)!r!}$ است.

ب) درست است. توجه کنید که

$$P(8, 3) - C(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)!} - \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{5!} - \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} - \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3 \times 2 \times 1 \times 5!} = 336 - 56 = 280$$

ب) نادرست است. دقت کنید که چون ترتیب انتخاب افراد اهمیت ندارد، بنابراین باید تعداد ترکیب‌های ۲ تایی از ۱۰ شیء متمایز را به دست آوریم:

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{2 \times 8!} = 45$$

ت) درست است. با توجه به رابطه $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ ، رابطه داده شده برقرار است.

۲۷۸ الف) چون در ساختن یک مجموعه ترتیب انتخاب اعضا اهمیت ندارد، بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعه ۶ عضوی برابر است با تعداد ترکیب‌های ۳ تایی از ۶ شیء متمایز. پس می‌نویسیم:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3 \times 2 \times 1 \times 3!} = 20$$

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعه ۶ عضوی برابر با ۲۰ است.