

۲۸۴۴ ۳ فرض می‌کنیم جواب‌های معادله $2x^2 - ax + b = 0$ برابر α و β

باشند. در این صورت $\alpha - \frac{1}{\alpha}$ و $\beta - \frac{1}{\beta}$ جواب‌های معادله $2ax^2 + ax - 6 = 0$ هستند. توجه کنید که

$$\alpha + \beta = \frac{a}{2} \quad (۱), \quad \alpha\beta = \frac{b}{2} \quad (۲)$$

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) + \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right) = -\frac{a}{2a} = -\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right) = -\frac{6}{2a} = -\frac{3}{a} \quad (۴)$$

بنابراین از تساوی (۳) نتیجه می‌شود $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$. در نتیجه از تساوی (۱) به دست

می‌آید $\frac{a}{2} = \frac{1}{2}$. پس $a = 1$. اکنون توجه کنید که از تساوی (۴) نتیجه می‌شود

$$\alpha\beta - \frac{1}{\alpha}(\alpha + \beta) + \frac{1}{\alpha\beta} = -\frac{3}{a} = -3$$

$$\alpha\beta - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha\beta} = -3 \Rightarrow \alpha\beta = -3$$

بنابراین از تساوی (۲) به دست می‌آید

$$-3 = \frac{b}{2} \Rightarrow b = -6$$

به این ترتیب، $\left[\frac{ab}{4}\right] = \left[\frac{-6}{4}\right] = -2$.

۲۸۴۵ ۲ تذکر سؤال به صورت زیر اصلاح می‌شود:

اگر $f(x) = (1+x+\log x)^5$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $(f \circ f)(x) < f((1 \circ x)^5)$ کدام است؟

ابتدا توجه کنید که $D_f = (0, +\infty)$. بنابراین

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x > 0 \mid (1+x+\log x)^5 > 0\}$$

اکنون توجه کنید که

$$(1+x+\log x)^5 > 0 \Rightarrow 1+x+\log x > 0$$

$$\log x > -1-x \quad (۱)$$

چون $\log \frac{1}{10} = -1$ و $-1 \times \frac{1}{10} = -0.1$ ، بنابراین از روی نمودار زیر معلوم می‌شود که

مجموعه جواب‌های نامعادله (۱) بازه $\left(\frac{1}{10}, +\infty\right)$ است. بنابراین باید نامعادله

$(f \circ f)(x) < f((1 \circ x)^5)$ را با شرط $x \in \left(\frac{1}{10}, +\infty\right)$ حل کنیم. اکنون توجه کنید که

تابع‌های $y = \log x$ و $y = 1-x$ صعودی اکیدند. پس مجموع آن‌ها نیز صعودی اکید

است. همچنین چون تابع $y = x^5$ صعودی اکید است، پس تابع $f(x) = (1+x+\log x)^5$

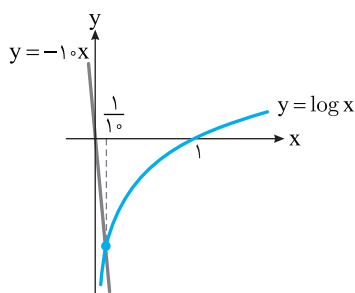
نیز صعودی اکید است. بنابراین

$$(f \circ f)(x) < f((1 \circ x)^5) \Rightarrow f(f(x)) < f((1 \circ x)^5) \Rightarrow f(x) < (1 \circ x)^5$$

$$(1+x+\log x)^5 < (1 \circ x)^5 \Rightarrow 1+x+\log x < 1 \circ x \Rightarrow \log x < 0 \Rightarrow x \in (0, 1)$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر برابر است با

$$(0, 1) \cap \left(\frac{1}{10}, +\infty\right) = \left(\frac{1}{10}, 1\right)$$



۲۸۴۱ ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f = \mathbb{R}$ و

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{f(x)}{f(x+2)} \geq 0\}$$

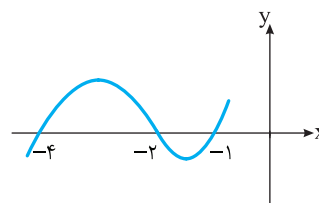
از روی نمودار تابع f معلوم می‌شود که

$$f(x) = 0 \Rightarrow x \in \{-2, 0, 1\}$$

$$f(x) > 0 \Rightarrow x \in (-2, 0) \cup (1, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1)$$

همچنین، نمودار تابع $y = f(x+2)$ به صورت زیر است:



بنابراین

$$f(x+2) = 0 \Rightarrow x \in \{-4, -2, -1\}$$

$$f(x+2) > 0 \Rightarrow x \in (-4, -2) \cup (-1, +\infty)$$

$$f(x+2) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -4) \cup (-2, -1)$$

در نتیجه جدول تعیین علامت عبارت $y = -\frac{f(x)}{f(x+2)}$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$	-4	-2	-1	0	1	$+\infty$
f(x)	-	-	+	+	-	+	
f(x+2)	-	+	-	+	+	+	+
y	-	+	-	+	-	+	-

پس $D_g = (-4, -2) \cup (-2, -1) \cup [0, 1]$. بنابراین عددهای صحیح دامنه g عددهای

-3، -2، -1، 0، 1 هستند.

۲۸۴۲ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = 2\left[-\frac{5}{3}\right] - \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{10}{3} + \frac{5}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$(g \circ f)\left(-\frac{5}{3}\right) = g\left(f\left(-\frac{5}{3}\right)\right) = g\left(-\frac{5}{3}\right) = f\left(-\frac{5}{3} + f\left(-\frac{5}{3}\right)\right)$$

از طرف دیگر،

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = 2\left[-\frac{5}{3}\right] - \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{10}{3} + \frac{5}{3} = -\frac{5}{3}$$

پس

$$(g \circ f)\left(-\frac{5}{3}\right) = f\left(-\frac{5}{3} - \frac{5}{3}\right) = f\left(-\frac{10}{3}\right) = 2\left[-\frac{10}{3}\right] - \left(-\frac{10}{3}\right) = -\frac{20}{3} + \frac{10}{3} = -\frac{10}{3}$$

۲۸۴۳ ۴ فرض کنید طول مستطیل اولیه برابر x باشد. پس عرض آن $\frac{4}{5}x$

است. اکنون فرض می‌کنیم طول مستطیل را به اندازه a افزایش می‌دهیم. در این

صورت، چون یک مستطیل طلایی به دست می‌آید، پس

$$x+a = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\frac{4}{5}x\right) \Rightarrow \frac{x+a}{x} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{10}$$

چون عرض مستطیل ثابت می‌ماند، پس نسبت مساحت مستطیل‌ها برابر نسبت

طول‌های آن‌هاست، یعنی برابر است با

$$\frac{x+a}{x} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{10}$$

۲۸۴۶ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = 2x^2 - (m+2)x + m = 0 \Rightarrow f(x) = (2x-m)(x-1) = 0$$

بنابراین صفرهای تابع f برابرند با $x=1$ و $x=\frac{m}{2}$. از طرف دیگر، نقطه تقاطع نمودار تابع f با محور عرض‌ها نقطه $(0, m)$ است. باید مساحت مثلث با رأس‌های $A(0, m)$ ، $B(1, 0)$ و $C(\frac{m}{2}, 0)$ را پیدا کنیم. معادله خطی که از نقطه‌های A و B می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y - 0 = \frac{0-m}{1-0}(x-1) \Rightarrow mx + y - m = 0$$

فاصله نقطه C از این خط برابر طول ارتفاع وارد بر قاعده AB در مثلث ABC است که برابر است با

$$\frac{|m(\frac{m}{2}) + 0 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|m^2 - 2m|}{2\sqrt{m^2 + 1}}$$

از طرف دیگر، $AB = \sqrt{1+m^2}$ ، در نتیجه

$$S_{ABC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{|m^2 - 2m|}{2\sqrt{m^2 + 1}} \times \sqrt{1+m^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow |m^2 - 2m| = 3$$

اکنون توجه کنید که

$$m^2 - 2m = 3 \Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m-3)(m+1) = 0$$

$$m = 3, m = -1$$

$$m^2 - 2m = -3 \Rightarrow m^2 - 2m + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ (جواب ندارد)}$$

طول رأس سهمی $y = x^2 - mx + 1$ برابر است با

$$-\frac{-m}{2 \times 1} = \frac{m}{2}$$

$$\text{اگر } m = 3, \text{ طول رأس سهمی برابر می‌شود با } \frac{m}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{اگر } m = -1, \text{ طول رأس سهمی برابر می‌شود با } \frac{m}{2} = -\frac{1}{2}$$

۲۸۴۷ فرض کنید $f^{-1}(-19) = a$. در این صورت $f(a) = -19$ توجه

کنید که

$$f(x) = \begin{cases} 2-3x & x \leq -\frac{3}{2} \\ 2+2mx-x^2 & x > -\frac{3}{2} \end{cases}$$

چون f وارون پذیر است، پس یک به یک است. در نتیجه باید طول رأس سهمی $y = 2+2mx-x^2$ از $-\frac{3}{2}$ بزرگتر نباشد. طول رأس این سهمی برابر m است. بنابراین $m \leq -\frac{3}{2}$. از طرف دیگر، برد تابع $y = 2-3x$ با دامنه $(-\infty, -\frac{3}{2}]$ باید با برد تابع $y = 2+2mx-x^2$ با دامنه $(-\frac{3}{2}, +\infty)$ اشتراک نداشته باشد. بنابراین

$$2-3(-\frac{3}{2}) \geq 2+2m(-\frac{3}{2}) - (-\frac{3}{2})^2 \Rightarrow m \geq -\frac{27}{12}$$

در نتیجه $-\frac{27}{12} \leq m \leq -\frac{3}{2}$ و چون m عددی صحیح است، پس $m = -2$. پس

$$a \leq -\frac{3}{2} \Rightarrow f(a) = 2-3a = -19 \Rightarrow a = 7 \text{ (غ.ق.)}$$

$$a > -\frac{3}{2} \Rightarrow f(a) = 2-4a-a^2 = -19$$

$$a^2 + 4a - 21 = 0 \Rightarrow (a+7)(a-3) = 0 \Rightarrow a = 3, a = -7 \text{ (غ.ق.)}$$

۲۸۴۸ ابتدا توجه کنید که

$$\log 30 = \log(10 \times 3) = \log 10 + \log 3 = 1 + 0/4 = 1/4$$

$$\log 6 = \log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3 = 0/3 + 0/4 = 0/7$$

$$\log \frac{5}{6} = \log 5 - \log 6 = \log \frac{10}{2} - \log 6 = \log 10 - \log 2 - \log 6 = 1 - 0/3 - 0/7 = 1 - 0/3 - 0/7 = 0$$

بنابراین معادله مورد نظر می‌شود $1/4x^2 + 1/4x = 0$ ، که جواب‌هایش صفر و -1 هستند که اختلاف آن‌ها برابر ۱ است.

۲۸۴۹ ابتدا توجه کنید که

$$\tan x + \cot x = -3 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -3$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = -3 \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{1}{3}$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ در نتیجه}$$

چون $3\pi < 4\pi$ ، پس $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$. بنابراین $\sin x + \cos x < 0$ ، در نتیجه

$$\sin x + \cos x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}(1 + \frac{1}{3}) = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x + \sin^2 x} = -\frac{3\sqrt{3}}{4} = -\frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{1} \text{ پس}$$

۲۸۵۰ ابتدا توجه کنید که

همچنین مثلث BOA متساوی الساقین است، پس OM هم عمود منصف است هم

نیمساز. در نتیجه $\hat{MOA} = \frac{\hat{AOB}}{2} = 60^\circ$. همین‌طور، در مثلث متساوی الساقین

AOD پاره خط OH هم عمود منصف است هم نیمساز. پس $\hat{AOC} = \frac{\hat{AOD}}{2} = 30^\circ$.

بنابراین در مثلث قائم الزاویه AHO ،

$$\sin 30^\circ = \frac{AH}{OA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{1} \Rightarrow AH = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{OH}{OA} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OH}{1} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

پس محیط مثلث AHO برابر است با $1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$. از طرف دیگر، طول

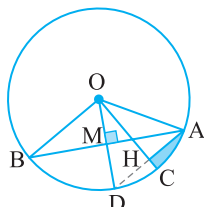
کمان AC برابر است با $\frac{\pi}{6} \times 1 = \frac{\pi}{6}$. همچنین

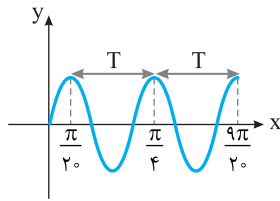
$$HC = OC - OH = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

پس محیط شکل رنگی برابر است با $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}$. به این ترتیب، اختلاف محیط‌ها

برابر است با

$$\frac{3+\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} - (\frac{2-\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$$





چون در یک همسایگی راست نقطه صفر تابع f اکیداً صعودی است، پس a و b هم علامت اند. بنابراین در هر صورت $ab=15$.

۲۸۵۳ معادله را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\frac{1}{\sin(\frac{\pi+fx}{2})} + \frac{1}{\cos(\frac{\pi+fx}{2})} = 0$$

$$\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}+fx)} = -\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}+fx)}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}+fx) = -\cos(\frac{\pi}{2}+fx) \Rightarrow \cos 2x = \sin 4x$$

$$\cos 2x = 2 \sin 2x \cos 2x \Rightarrow \cos 2x(1-2 \sin 2x) = 0$$

توجه کنید که چون $\cos 2x$ برابر $\sin(\frac{\pi+fx}{2})$ است و این عبارت در مخرج است،

پس باید $\cos 2x \neq 0$ ، در نتیجه

$$1-2 \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

جواب های واقع در بازه $[0, \pi]$ عبارت اند از $\frac{\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$ ، که اختلاف آن ها $\frac{\pi}{3}$ است.

بنابراین $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ، پس $\tan(2\alpha) = \tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

۲۸۵۴ چون حد صورت کسر داده شده برابر صفر است و حد کسر برابر صفر نیست،

پس حد مخرج کسر نیز باید صفر باشد. بنابراین $\lim_{x \rightarrow \infty} (ax-b) = 0 \Rightarrow \lambda a = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b\sqrt{2+\sqrt{x}}-2b}{ax-b} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda a\sqrt{2+\sqrt{x}}-16a}{ax-\lambda a}$$

در نتیجه

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda(\sqrt{2+\sqrt{x}}-4)}{x-\lambda} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda(\sqrt{2+\sqrt{x}}-2)}{x-\lambda} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}+2}{\sqrt{2+\sqrt{x}}+2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda(2+\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}^2+2\sqrt{x}+4)} \times \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{x}}+2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{x}^2+2\sqrt{x}+4} \times \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{x}}+2} \right) = \frac{\lambda}{4+4+4} \times \frac{1}{2+2} = \frac{1}{6}$$

۲۸۵۵ ضابطه تابع های f و g را به دست آوریم. نمودار تابع f خطی است که از

نقطه های $(m, 0)$ و $(0, 3m)$ می گذرد. معادله این خط به صورت زیر است:

$$y-0 = \frac{3m-0}{0-m}(x-m) \Rightarrow y = -3(x-m)$$

بنابراین $f(x) = -3x + 3m$. همین طور، نمودار تابع g خطی است که از نقطه های

$(4, 0)$ و $(0, -3)$ می گذرد. معادله این خط به صورت زیر است:

$$y-0 = \frac{0-(-3)}{4-0}(x-4) \Rightarrow y = \frac{3}{4}(x-4)$$

بنابراین $g(x) = \frac{3}{4}x - 3$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|-3x+3m|}{\frac{3}{4}x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{\frac{3}{4}x} = -4$$

بنابراین

۲۸۵۱ مختصات نقطه A جواب های دستگاه معادله های زیر هستند:

$$\begin{cases} 3y+x=-9 \\ ax-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$$

مختصات نقطه های برخورد این خط ها با خط $y-x=0$ به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} 3y+x=-9 \\ y-x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{9}{4} \\ y=-\frac{9}{4} \end{cases}, \begin{cases} ax-y=3 \\ y-x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{a-1} \\ y=\frac{3}{a-1} \end{cases}$$

بنابراین رأس های مثلث مورد نظر $A(0, -3)$ ، $B(-\frac{9}{4}, -\frac{9}{4})$ و $C(\frac{3}{a-1}, \frac{3}{a-1})$

هستند. چون مرکز دایره ای که از رأس های مثلث ABC می گذرد روی ضلع BC است، پس زاویه A در این مثلث زاویه ای محاطی و روبه رو به قطر است، یعنی $\hat{A} = 90^\circ$. بنابراین

پس $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$

$$\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} \Rightarrow \hat{B} - \hat{C} = 2\hat{B} - 90^\circ$$

$$\tan(\hat{B} - \hat{C}) = \tan(2\hat{B} - 90^\circ) = -\cot 2\hat{B} = \frac{-1}{\tan 2\hat{B}} = \frac{-1 + \tan^2 \hat{B}}{2 \tan \hat{B}}$$

از طرف دیگر،

$$AH = \frac{|0-(-3)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$AB = \sqrt{\left(0 + \frac{9}{4}\right)^2 + \left(-3 + \frac{9}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{45}{8}}$$

در نتیجه، بنابر قضیه فیثاغورس،

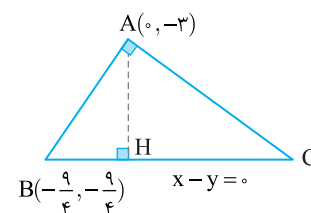
$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow \frac{45}{8} = \frac{9}{2} + BH^2 \Rightarrow BH = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{AH}{BH} = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{2\sqrt{2}}} = 2$$

بنابراین

$$\tan(\hat{B} - \hat{C}) = \frac{-1 + \tan^2 \hat{B}}{2 \tan \hat{B}} = \frac{-1 + 4}{4} = \frac{3}{4}$$

در نتیجه



۲۸۵۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = a \cos^2\left(bx - \frac{\pi}{4}\right) + c = a \times \frac{1 + \cos\left(2\left(bx - \frac{\pi}{4}\right)\right)}{2} + c$$

$$= \frac{a}{2} + c + \frac{a}{2} \cos\left(2bx - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a}{2} + c + \frac{a}{2} \sin(2bx)$$

چون ماکزیمم و مینیمم تابع f به ترتیب ۱ و -۲ است. پس

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + c + \frac{a}{2} = 1 \\ \frac{a}{2} + c - \frac{a}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow |a| = 3 \Rightarrow \begin{cases} a=3, c=-2 \\ a=-3, c=1 \end{cases}$$

از طرف دیگر، چون دوره تناوب تابع f برابر است با $\frac{9\pi}{20}$ ، پس

$$\frac{2\pi}{|2b|} = \frac{\pi}{20} \Rightarrow |b| = 5 \Rightarrow b = 5 \text{ یا } b = -5$$

اکنون توجه کنید که چون دوره تناوب تابع f برابر $\frac{\pi}{5}$ است و $\frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$ ، پس نمودار تابع f

به شکل زیر است:

۲۸۵۶ ۱

ابتدا توجه کنید که اگر عبارت $x^3 + ((m-7)x+a)^2$ ریشه‌ای مانند x_0 به‌جز $x=a$ داشته باشد، آن‌گاه تابع f در نقطه $x=x_0$ ناپیوسته می‌شود. در نتیجه $x=a$ باید تنها ریشه عبارت $x^3 + ((m-7)x+a)^2$ باشد. بنابراین

$$a^3 + ((m-7)a+a)^2 = 0 \Rightarrow a^3 + a^2(m-6)^2 = 0$$

$$a^2(a + (m-6)^2) = 0 \Rightarrow a=0, a=-(m-6)^2$$

از طرف دیگر، $x=a$ باید ریشه مضاعف عبارت $3x^2 + (m-1)x + m-4$ باشد. زیرا در غیر این صورت حد تابع f در نقطه $x=a$ نامتناهی می‌شود. بنابراین

$$\Delta = 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 12(m-4) = 0 \Rightarrow (m-7)^2 = 0 \Rightarrow m=7$$

بنابراین یا $a=0$ یا $a=-(7-6)^2 = -1$ توجه کنید که

$$a=0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{3(x+1)^2}}{|x^3|} = +\infty$$

بنابراین $a=-1$ پس

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3(x+1)^2}}{|x^3+1|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x^3+1|} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3}}{|x^2-x+1|} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$f(a) = f(-1) = \frac{2 \sin b}{3\sqrt{-1+2}} = \frac{2}{3} \sin b \quad \text{بنابراین}$$

$$\frac{2}{3} \sin b = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin b = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{در نتیجه}$$

بنابراین b می‌تواند برابر $\frac{\pi}{3}$ باشد.

۲۸۵۷ ۳

راحل اول ابتدا توجه کنید که اگر $x < 0$ ، آن‌گاه

$$g(x) = \frac{1}{x^3 - (-x^3)} = \frac{1}{2x^3}$$

بنابراین

$$g'(x) = \frac{-6x^2}{(2x^3)^2} = \frac{-3}{2x^4} \Rightarrow g'(-\sqrt[3]{2}) = \frac{-3}{2(-\sqrt[3]{2})^4} = -\frac{3}{2\sqrt[3]{16}}$$

$$g(-\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{2(-\sqrt[3]{2})^3} = -\frac{1}{4} \quad \text{از طرف دیگر.}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-(-x)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2x}} \quad \text{همچنین، اگر } x < 0 \text{، آن‌گاه}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\frac{2}{3}\sqrt[3]{4x^2}}{\sqrt[3]{4x^2}^2} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{16x^4}} \\ f'(g(-\sqrt[3]{2})) &= f'(-\frac{1}{4}) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{16 \times (-\frac{1}{4})^4}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}} = -\frac{2\sqrt[3]{16}}{3} \end{aligned}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$-\frac{3}{2\sqrt[3]{16}} \times (-\frac{2\sqrt[3]{16}}{3}) = 1$$

راحل دوم ابتدا توجه کنید که

$$g'(-\sqrt[3]{2})f'(g(-\sqrt[3]{2})) = (fog)'(-\sqrt[3]{2})$$

بنابراین باید مشتق تابع $f \circ g$ را حساب کنیم. توجه کنید که اگر $x < 0$ ، آن‌گاه

$$(fog)(x) = f\left(\frac{1}{x^3 - |x^3|}\right) = f\left(\frac{1}{2x^3}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2x^3} - \left|-\frac{1}{2x^3}\right|}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2}{2x^3}}} = x$$

بنابراین $(fog)'(x) = 1$ ، پس $(fog)'(-\sqrt[3]{2}) = 1$.

۲۸۵۸ ۲ راهحل اول فرض می‌کنیم $A(a, 0)$ و $B(0, b)$ باشد. در

$$\text{این صورت } AB = \sqrt{a^2 + b^2} \text{، از طرف دیگر، } \text{شیب } CD = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}} = -\frac{5}{1}$$

و چون $AB \parallel CD$ ، پس شیب خط AB هم برابر $-\frac{5}{3}$ است. بنابراین

$$\frac{b-0}{0-a} = -\frac{5}{3} \Rightarrow a=3b$$

در نتیجه $AB = \sqrt{(3b)^2 + b^2} = \sqrt{10}b$. توجه کنید که معادله خط CD به صورت

$$y = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{3} \text{ یا } x+3y-5=0 \text{ است. پس}$$

$$AD = \frac{|a+3 \times 0 - 5|}{\sqrt{1+9}} = \frac{|a-5|}{\sqrt{10}} = \frac{|3b-5|}{\sqrt{10}}$$

$$S_{ABCD} = AD \times AB = \frac{|3b-5|}{\sqrt{10}} \times \sqrt{10}b = -(3b-5)b = -3b^2 + 5b \quad \text{بنابراین}$$

چون مساحت مستطیل $ABCD$ برحسب b تابعی درجه دوم است، پس مساحت آن به ازای $b = -\frac{5}{-6} = \frac{5}{6}$ ماکزیمم می‌شود. در نتیجه باید $a=3b = \frac{5}{2}$. بنابراین

$$AD = \frac{|a-5|}{\sqrt{10}} = \frac{5}{2\sqrt{10}} \text{ اکنون توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس، در مثلث } ADM,$$

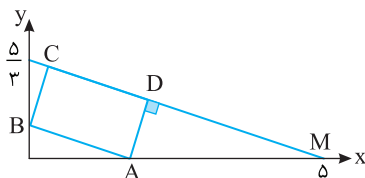
$$AM^2 = AD^2 + DM^2$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2\sqrt{10}}\right)^2 + DM^2$$

$$\frac{25}{4} - \frac{25}{40} = DM^2$$

$$\frac{225}{40} = DM^2 \Rightarrow DM = \frac{15}{2\sqrt{10}}$$

$$S_{ADM} = \frac{1}{2} AD \times DM = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2\sqrt{10}} \times \frac{15}{2\sqrt{10}} = \frac{15}{16} \quad \text{در نتیجه}$$



$$\tan \alpha = \frac{ON}{OM} = \frac{3}{5} \quad \text{راحل دوم ابتدا توجه کنید که}$$

بنابراین اگر $AD=x$ ، آن‌گاه

$$\triangle ADM: \tan \alpha = \frac{AD}{DM} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{DM} \Rightarrow DM=3x$$

همین‌طور،

$$\triangle BCN: \cot \beta = \frac{NC}{BC} \Rightarrow \cot(90^\circ - \alpha) = \frac{NC}{x} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{NC}{x}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{NC}{x} \Rightarrow NC = \frac{x}{3}$$

$$NM^2 = OM^2 + ON^2 = 5^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^2 = 10 + \frac{x^2}{9} \Rightarrow NM = \frac{5}{3}\sqrt{10} \text{، از طرف دیگر،}$$

$$CD = \frac{5}{3}\sqrt{10} - \frac{x}{3} - 3x = \frac{5}{3}\sqrt{10} - \frac{10}{3}x \quad \text{بنابراین}$$

$$S_{ABCD} = x\left(\frac{5}{3}\sqrt{10} - \frac{10}{3}x\right) = -\frac{10}{3}x^2 + \frac{5}{3}\sqrt{10}x \quad \text{در نتیجه}$$

مساحت مستطیل $ABCD$ برحسب x تابعی درجه دوم است که ماکزیمم آن به ازای

$$x = \frac{-\frac{5}{3}\sqrt{10}}{-\frac{20}{3}} = \frac{\sqrt{10}}{4} \text{ به‌دست می‌آید. در این صورت مساحت مثلث } ADM \text{ برابر است با}$$

$$\frac{1}{2} x(3x) = \frac{3}{2} x^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$$

۲۸۶۲ ۴ بنابر فرمول احتمال کل، احتمال قبولی امیر در رشته پزشکی برابر است با

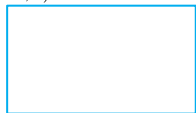
$$\frac{0/4 \times 0/25}{0/4 \times 0/25 + 0/35 \times 0/3 + 0/25 \times 0/35} = \frac{0}{0/4 \times 0/25 + 0/35 \times 0/3 + 0/25 \times 0/35} = \frac{0}{0/4 \times 0/25 + 0/35 \times 0/3 + 0/25 \times 0/35}$$

قبولی دانشگاه C قبولی دانشگاه B قبولی دانشگاه A

بنابراین ۲۹/۲۵ درصد احتمال قبولی امیر است.

۲۸۶۳ ۳ چون ABCD مستطیل (متوازی الاضلاع) است، پس

$$A(-1, 4) \quad B(3, 1)$$



$$D(-1-x, y+3) \quad C(x, y)$$

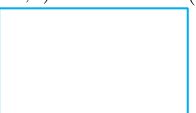
$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow -1 + x = 3 - 1 - x \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

اکنون توجه کنید که

$$AB \text{ شیب خط } = \frac{1-4}{3-(-1)} = -\frac{3}{4}$$

$$AD \text{ شیب خط } = \frac{y+3-4}{-1-x-(-1)} = \frac{y-1}{-x} = -\frac{2(y-1)}{3}$$

$$A(-1, 4) \quad B(3, 1)$$



$$D(-\frac{5}{2}, y+3) \quad C(\frac{3}{2}, y)$$

چون خط‌های AB و AD بر هم عمودند، حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -۱ است، پس

$$(-\frac{3}{4}) \times (-\frac{2(y-1)}{3}) = -1 \Rightarrow y-1 = -2 \Rightarrow y = -1$$

اکنون توجه کنید که

$$AB = \sqrt{(3+1)^2 + (1-4)^2} = 5$$

$$BC = \sqrt{(3-\frac{3}{2})^2 + (1+1)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{5}{2}$$

بنابراین محیط مستطیل ABCD برابر است با $2(5 + \frac{5}{2}) = 15$.

۲۸۶۴ ۱ راه‌حل اول اگر فرض کنیم $AE = x$ ، آن‌گاه $DE = 2x$. در نتیجه،

چون ABCD مربع است، پس $AB = BC = 3x$. فرض می‌کنیم $EF = y$ و

$AF = z$. در این صورت از قضیه فیثاغورس نتیجه می‌شود

$$\triangle ABE: BE^2 = AB^2 + AE^2 = 9x^2 + x^2 = 10x^2 \Rightarrow BE = \sqrt{10}x$$

بنابراین $BF = \sqrt{10}x - y$. همین‌طور، $AC = 3\sqrt{2}x$ ، پس $FC = 3\sqrt{2}x - z$.

اکنون توجه کنید که مثلث‌های AEF و CBF متشابه‌اند (زز)، پس

$$\frac{AF}{CF} = \frac{AE}{CB} \Rightarrow \frac{z}{3\sqrt{2}x - z} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

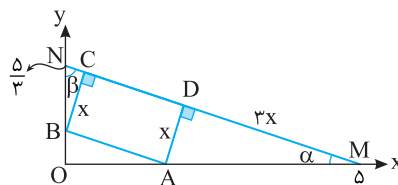
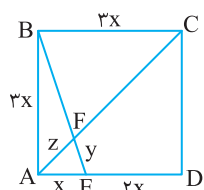
اگر این تناسب را ترکیب در مخرج کنیم به دست می‌آید $\frac{z}{3\sqrt{2}x} = \frac{1}{4}$. همین‌طور،

$$\frac{EF}{BF} = \frac{AE}{CB} \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{10}x - y} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

اگر این تناسب را ترکیب در مخرج کنیم به دست

$$\text{می‌آید } \frac{y}{\sqrt{10}x} = \frac{1}{4} \text{، بنابراین}$$

$$\frac{z}{3\sqrt{2}x} = \frac{y}{\sqrt{10}x} \Rightarrow \frac{z}{3\sqrt{2}} = \frac{y}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$



۲۸۵۹ ۲ فرض می‌کنیم عددهای دسته اول به صورت زیر باشند:

$$a, a+2, \dots, a+12$$

در این صورت $\bar{x} = \frac{7a+42}{13} = a+6$ پس

$$\sigma^2 = \frac{1}{13} \sum_{i=1}^{13} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{13} \sum_{i=1}^{13} (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \frac{1}{13} (\sum_{i=1}^{13} x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^{13} x_i + 13\bar{x}^2)$$

$$\frac{1}{13} (2 \times 56) = (a+6)^2 \Rightarrow (a+6)^2 = 64 \Rightarrow a+6 = \pm 8 \Rightarrow a = 2 \text{ یا } a = -14$$

فرض کنید داده‌های دسته آخر به صورت مقابل باشند: $b, b+2, \dots, b+12$

در این صورت $\bar{x} = b+6$ پس $\sigma^2 = \frac{1}{13} \sum_{i=1}^{13} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{13} \sum_{i=1}^{13} (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \frac{1}{13} (\sum_{i=1}^{13} x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^{13} x_i + 13\bar{x}^2)$

اگر $a = -14$ ، عدد آخر دسته اول برابر ۲- و عدد آخر دسته آخر برابر ۲۲ است که اختلاف آن‌ها ۲۴ است.

اگر $a = 2$ ، عدد آخر دسته اول برابر ۱۴ و عدد آخر دسته آخر برابر ۲۲ است که اختلاف آن‌ها ۸ است.

۲۸۶۰ ۳ عددی که مضرب ۶ است، زوج است، پس یکان آن باید ۲ باشد. فرض

می‌کنیم در ده رقم باقی‌مانده n رقم برابر ۲ باشند. در این صورت $10-n$ رقم برابر ۱ هستند.

چون عدد مورد نظر باید بر ۳ هم بخش‌پذیر باشد، پس مجموع رقم‌های آن بر ۳ بخش‌پذیر است. مجموع رقم‌های این عدد برابر است با

$$n \times 2 + (10-n) \times 1 + 2 = 12 + n$$

چون ۱۲ بر ۳ بخش‌پذیر است، پس n باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد. چون $0 \leq n \leq 10$

است، پس n یکی از عددهای ۰، ۳، ۶ یا ۹ است. توجه کنید که اگر جای رقم‌های ۲

باقی‌مانده را مشخص کنیم، جای رقم‌های ۱ خود به خود مشخص می‌شود. تعداد راه‌های

انتخاب جای رقم‌های ۲ برابر است با

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{3} + \binom{10}{6} + \binom{10}{9} = 341$$

۲۸۶۱ ۲ برای اینکه در n بار پرتاب سکه، پرتاب n ام k امین بار باشد که سکه

رو آمده است، باید در $n-1$ پرتاب قبلی $k-1$ بار رو و $n-(k-1)$ بار پشت آمده

باشد. در نتیجه، احتمال پیشامد مورد نظر برابر است با

$$\frac{\binom{n-1}{k-1}}{2^n}$$

از طرف دیگر، احتمال اینکه در n پرتاب سکه k بار رو بیاید برابر است با $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$. در نتیجه

$$\frac{\binom{n-1}{k-1}}{2^n} = \frac{k}{n} \times \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{2^n (k-1)! (n-k)!} = \frac{k}{n} \times \frac{n!}{2^n k! (n-k)!}$$

$$1 = \frac{k}{k+\delta} \times \frac{n}{k} \Rightarrow k+\delta = n$$

$$n+k = (k+\delta) + k = 2k+\delta$$

اگر $k=2$ ، آن‌گاه $n+k=9$.

از طرف دیگر، مثلث‌های CEJ و DFJ متشابه‌اند (زز). بنابراین

$$\frac{CE}{DF} = \frac{EJ}{FJ} \Rightarrow \frac{CE}{DF} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow CE = 2DF$$

اکنون توجه کنید که مثلث JCF متساوی‌الساقین است (CJ=CF). بنابراین ارتفاع

وارد بر قاعده آن، میانه نیز هست. در نتیجه، اگر این ارتفاع CH باشد، آن گاه JH=1.

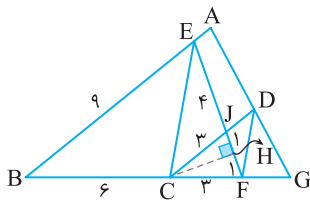
در نتیجه، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث CHJ،

$$CJ^2 = CH^2 + JH^2 \Rightarrow 9 = CH^2 + 1 \Rightarrow CH = 2\sqrt{2}$$

همین‌طور، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث CHE،

$$CE^2 = CH^2 + EH^2 = 8 + 25 = 33 \Rightarrow CE = \sqrt{33}$$

$$\text{در نتیجه } DF = \frac{1}{2} CE = \frac{\sqrt{33}}{2}$$



ابتدا معادله دایره را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 - 3x - 5y + \frac{1}{2} = 0$$

بنابراین مرکز دایره نقطه $O(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ و شعاع آن برابر است با

$$\frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} - 4 \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{2}$$

کوتاه‌ترین وتری که از نقطه $H(-1, 2/5)$ می‌گذرد، وتری است که در این نقطه بر

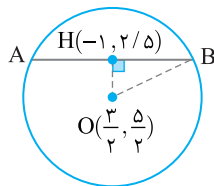
قطر گذرنده از این نقطه عمود است. فاصله این نقطه از مرکز دایره برابر است با

$$\sqrt{(\frac{3}{2} + 1)^2 + (\frac{5}{2} - 2/5)^2} = \frac{5}{2}$$

در مثلث OHB، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow 8 = \frac{25}{4} + HB^2 \Rightarrow HB = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{پس } AB = 2HB = \sqrt{7}$$



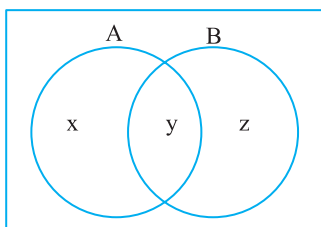
با توجه به شکل زیر $x+y=m$ و $y+z=k$ در نتیجه

$$m-k = x+y-(y+z) = x-z$$

بنابراین $x-z=14$. همچنین، $n(A \cap B) = y$ و $n(A \cup B) = x+y+z$

پس $x+y+z-y = x+z=20$. اکنون توجه کنید که

$$\begin{cases} x-z=14 \\ x+z=20 \end{cases} \Rightarrow z=3$$



راحل دوم اگر طول ضلع مربع را ۳a بگیریم، می‌توانیم مربع را مانند شکل مقابل روی

صفحه مختصات طوری رسم کنیم که رأس A بر مبدأ مختصات منطبق باشد و ضلع‌های

AB و AD روی محورهای مختصات باشند. در این صورت معادله خط AC به صورت

$y=x$ و معادله خط BE به صورت $y=-3x+3a$ است. بنابراین نقطه F محل تلاقی

این دو خط است که مختصات آن از حل دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} y=x \\ y=-3x+3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{4}a \\ y=\frac{3}{4}a \end{cases}$$

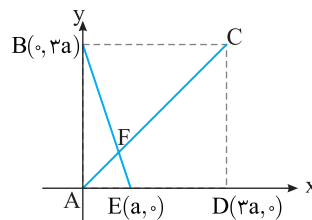
بنابراین

$$EF = \sqrt{(\frac{3}{4}a - a)^2 + (\frac{3}{4}a - 0)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}a$$

$$AF = \sqrt{(\frac{3}{4}a)^2 + (\frac{3}{4}a)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$$

پس

$$\frac{EF}{AF} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{4}a}{\frac{3\sqrt{2}}{4}a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$



راحل اول چون $CJ \parallel BE$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث BFE،

$$\frac{FC}{CB} = \frac{FJ}{JE} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{FJ}{4} \Rightarrow FJ = 2$$

اکنون توجه کنید که مثلث‌های CEJ و DFJ متشابه‌اند (زز). بنابراین

$$\frac{CE}{DF} = \frac{EJ}{FJ} \Rightarrow \frac{CE}{DF} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow CE = 2DF$$

از طرف دیگر، بنابر قضیه کسینوس‌ها در مثلث BEF،

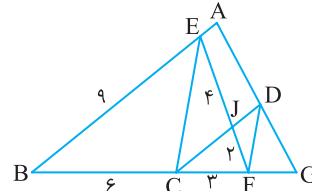
$$BE^2 = EF^2 + BF^2 - 2EF \times BF \times \cos \hat{F}$$

$$81 = 36 + 81 - 2 \times 6 \times 9 \times \cos \hat{F} \Rightarrow \cos \hat{F} = \frac{1}{3}$$

در نتیجه، باز هم بنابر قضیه کسینوس‌ها در مثلث CEF،

$$CE^2 = CF^2 + EF^2 - 2CF \times EF \times \cos \hat{F} = 9 + 36 - 2 \times 3 \times 6 \times \frac{1}{3} = 33$$

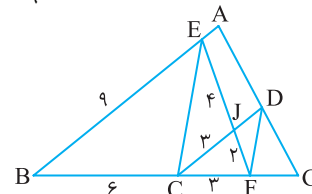
$$\text{پس } CE = \sqrt{33} \text{ و در نتیجه } DF = \frac{1}{2} CE = \frac{\sqrt{33}}{2}$$



راحل دوم چون $CJ \parallel BE$ ، بنابر قضیه تالس در مثلث BFE،

$$\frac{FC}{CB} = \frac{FJ}{JE} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{FJ}{4} \Rightarrow FJ = 2$$

در همین مثلث، بنابر تعمیم قضیه تالس، $\frac{CJ}{BE} = \frac{CF}{BF} \Rightarrow \frac{CJ}{9} = \frac{3}{9} \Rightarrow CJ = 3$



۲۸۷۱ نمودار ون مجموعه های A و B به صورت زیر است. توجه کنید که

$$m = x + z \quad k = y + z \quad \text{چون } x + y + z = 11 \quad \text{پس}$$

$$m + k = x + z + y + z = 11 + z \quad (1)$$

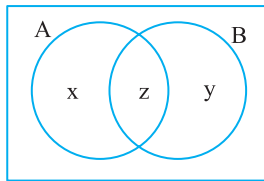
از طرف دیگر،

$$m - k = 5 \quad (2)$$

با توجه به تساوی های (۱) و (۲) می نویسیم

$$\begin{cases} m + k = 11 + z \\ m - k = 5 \end{cases} \xrightarrow{+} 2m = 16 + z \Rightarrow m = 8 + \frac{z}{2}$$

بنابراین کمترین مقدار m برابر با ۸ است.



۲۸۷۲ قدرنسبت دنباله هندسی را برابر r می گیریم. در این صورت

$$\frac{a_6}{a_7} + \frac{a_7}{a_7} = 2 \Rightarrow \frac{ar^5}{(ar)^7} + \frac{ar}{a^7} = 2$$

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{r}{a} = 2$$

اگر فرض کنیم $\frac{r}{a} = t$ ، آن گاه

$$t^2 + t = 2 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1, \quad t = -2$$

در نتیجه نسبت مورد نظر برابر است با

$$\frac{a_7}{a_6} = \frac{a_7}{ar} = \frac{a}{r} = \frac{1}{t}$$

پس نسبت مورد نظر می تواند برابر $-\frac{1}{2}$ باشد.

۲۸۷۳ اگر فرض کنیم $\log_7 x = t$ ، آن گاه چون $x > 1$ ، پس $t > 0$ و

$$\log_8 x + 4 \log_{x^2} 2 = \frac{1}{3} \log_7 x + \frac{4}{3} \log_x 2 = \frac{1}{3} t + \frac{4}{3} \times \frac{1}{t} = \frac{1}{3} \left(t + \frac{4}{t} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\left(\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} \right)^2 + 4 \right) = \frac{1}{3} \left(\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} \right)^2 + \frac{4}{3} \geq \frac{4}{3}$$

پس کمترین مقدار عبارت $\log_8 x + 4 \log_{x^2} 2$ برابر $\frac{4}{3}$ است که به ازای $t = 2$ به

دست می آید. در نتیجه بزرگترین عضو مجموعه A برابر است با

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۲۸۷۴ ابتدا توجه کنید که

$$x = \frac{3^0}{1+|y|} \Rightarrow 1+|y| = \frac{3^0}{x} \Rightarrow |y| = \frac{3^0}{x} - 1 \Rightarrow y = \pm \left(\frac{3^0}{x} - 1 \right)$$

توجه کنید که اگر $\frac{3^0}{x} - 1$ عددی صحیح و غیر صفر باشد، به ازای یک مقدار صحیح x

دو مقدار صحیح برای y به دست می آید. اگر $x = 3^0$ ، آن گاه $y = 0$. مقسوم علیه های

صحیح 3^0 عددهای $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$ هستند.

توجه کنید که لازم نیست 3^0 و -3^0 را حذف کنیم، و از هر جفت از عددهای دیگر باید

یکی را حذف کنیم. بنابراین باید دست کم هفت عدد را حذف کنیم.

۲۸۶۸ توجه کنید که $a_7 = a + 7d$ و $a_7 = a + d$ بنابراین

$$6a_7^2 = 5a_7 a + 3a_7 a \Rightarrow 6(a+d)^2 = 5(a+7d)a + 3(a+d)a$$

$$6a^2 + 6d^2 + 12ad = 8a^2 + 13ad \Rightarrow 2a^2 + ad - 6d^2 = 0$$

$$(2a - 3d)(a + 2d) = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}d \quad \text{یا} \quad a = -2d$$

بنابراین اگر $a = \frac{3}{2}d$ ، آن گاه

$$\frac{a_6}{d} = \frac{a+5d}{d} = \frac{\frac{3}{2}d+5d}{d} = \frac{9}{2}$$

اگر $a = -2d$ ، آن گاه

$$\frac{a_6}{d} = \frac{a+5d}{d} = \frac{-2d+5d}{d} = 3$$

بنابراین $\frac{a_6}{d}$ می تواند ۱ باشد.

۲۸۶۹ فرض می کنیم $\log_3 x = t$. در این صورت

$$x > 1 \Rightarrow \log_3 x > 0 \Rightarrow t > 0$$

همچنین

$$\log_9 x + 3 \log_{x^2} 3 = \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{3}{2} \log_x 3$$

$$= \frac{1}{2} t + \frac{3}{2} \times \frac{1}{t} = \frac{1}{2} \left(t + \frac{3}{t} \right) = \frac{1}{2} \left(\left(\sqrt{t} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{t}} \right)^2 + 2\sqrt{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{t} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{t}} \right)^2 + \sqrt{3}$$

چون کمترین مقدار $\frac{1}{2} \left(\sqrt{t} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{t}} \right)^2$ برابر صفر است، که به ازای $t = \sqrt{3}$ به دست

می آید، پس کمترین مقدار عبارت مورد نظر برابر $\sqrt{3}$ است.

۲۸۷۰ ابتدا توجه کنید که

$$x = \frac{y^2}{y^2-1} \Rightarrow y^2 - 1 = \frac{y^2}{x} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{y^2}{x} + 1}$$

توجه کنید که اگر $\sqrt{\frac{y^2}{x} + 1}$ عددی صحیح و غیر صفر باشد، به ازای یک مقدار صحیح

x دو مقدار صحیح برای y به دست می آید، که باید یکی از آن ها حذف شود. برای اینکه

عدد صحیح شود، باید x عددی صحیح باشد که مقسوم علیه ۷۲ است و

$\frac{72}{x} + 1$ مربع کامل باشد. پس باید $\frac{72}{x} + 1$ یکی از عددهای صفر، ۱، ۴، ۹، ۲۵، ۳۶،

۴۹ یا ۶۴ باشد. معادله های زیر جواب صحیح ندارند:

$$\frac{72}{x} + 1 = 1, \quad \frac{72}{x} + 1 = 36, \quad \frac{72}{x} + 1 = 49, \quad \frac{72}{x} + 1 = 64$$

از طرف دیگر،

$$\frac{72}{x} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{72}{x} = -1 \Rightarrow x = -72 \Rightarrow y = 0$$

$$\frac{72}{x} + 1 = 4 \Rightarrow \frac{72}{x} = 3 \Rightarrow x = \frac{72}{3} = 24 \Rightarrow y = \pm 2$$

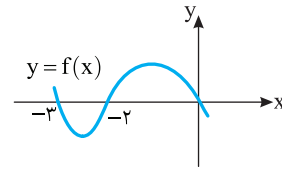
$$\frac{72}{x} + 1 = 9 \Rightarrow \frac{72}{x} = 8 \Rightarrow x = \frac{72}{8} = 9 \Rightarrow y = \pm 3$$

$$\frac{72}{x} + 1 = 25 \Rightarrow \frac{72}{x} = 24 \Rightarrow x = \frac{72}{24} = 3 \Rightarrow y = \pm 5$$

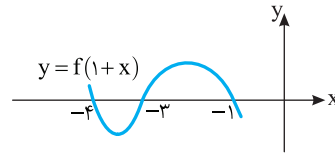
بنابراین باید حداقل سه عضو از مجموعه مورد نظر را حذف کنیم.

۲۸۷۵ ۱

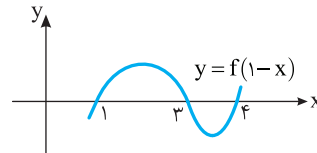
ابتدا نمودار تابع $y=f(x-2)$ را دو واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x)$ به دست بیاید:



برای رسم نمودار تابع $y=f(1+x)$ کافی است نمودار تابع f را یک واحد به چپ منتقل کنیم:



برای رسم نمودار تابع $y=f(1-x)$ کافی است نمودار تابع $y=f(1+x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم:



اکنون توجه کنید که برای پیدا کردن دامنهٔ تابع $g(x)=\frac{f(1-x)}{f(1+x)}$ باید نامعادله $\frac{f(1-x)}{f(1+x)} \geq 0$ را حل کنیم. جدول تعیین علامت این عبارت به صورت زیر است:

x	$-\infty$	-4	-3	-1	1	3	4	$+\infty$
$f(1+x)$		+	-	+	-	-	-	-
$f(1-x)$		-	-	-	-	+	-	+
$\frac{f(1-x)}{f(1+x)}$		-	+	-	+	-	+	-

بنابراین $D_g = (-4, -3) \cup (-1, 1] \cup [3, 4]$. پس فقط عددهای صحیح صفر، ۳، ۴ و ۴ در دامنهٔ تابع g هستند.

۲۸۷۶ ۴

توجه کنید که $(fog)(-\frac{1}{3}) = f(g(-\frac{1}{3}))$. از طرف دیگر،

$$g(-\frac{1}{3}) = f(-\frac{1}{3} - f(-\frac{1}{3})) = f(-\frac{1}{3} - (-\frac{1}{3} + [-\frac{1}{3}])) = f(-[-\frac{1}{3}]) = f(-(-1)) = f(1) = 1 + [1] = 2$$

پس

$$(fog)(-\frac{1}{3}) = f(2) = 2 + [2] = 4$$

۲۸۷۷ ۳ اگر طول مستطیل را a و عرض آن را b بگیریم، اندازهٔ قطر مستطیل

برابر $\sqrt{a^2 + b^2}$ است. بنابراین

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{5+1}}{2} \quad (1)$$

فرض می‌کنیم $\frac{a}{b} = x$. در این صورت $a = bx$. پس تساوی (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{b^2 x^2 + b^2}}{bx} &= \frac{\sqrt{5+1}}{2} \Rightarrow \frac{b\sqrt{x^2 + 1}}{bx} = \frac{\sqrt{5+1}}{2} \\ \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} &= \frac{\sqrt{5+1}}{2} \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x^2} = \left(\frac{\sqrt{5+1}}{2}\right)^2 \Rightarrow 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} \\ \frac{1}{x^2} &= \frac{6+2\sqrt{5}}{4} - 1 = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{2}{\sqrt{5+1}} \end{aligned}$$

۲۸۷۸ ۲ ابتدا توجه کنید که مجموع ضرایب‌های معادلهٔ $x^2 - (a+1)x + a = 0$

برابر صفر است، پس یکی از جواب‌های آن $x=1$ است. در نتیجه، طبق فرض مسئله، جواب دیگر این معادله $x=3$ است. پس $x=3$ در معادله صدق می‌کند:

$$9 - (a+1)3 + a = 0 \Rightarrow a = 3$$

بنابراین معادلهٔ دوم به صورت $x^2 - 10x + b = 0$ درمی‌آید. چون جواب‌های این معادله دو عدد زوج متوالی‌اند، پس اختلاف آن‌ها برابر ۲ است. در نتیجه

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|1|} = 2 \Rightarrow \sqrt{100 - 4b} = 2 \Rightarrow b = 24$$

توجه کنید که حاصل ضرب جواب‌های معادلهٔ اول برابر ۳ و حاصل ضرب جواب‌های معادلهٔ دوم برابر ۲۴ است. در نتیجه، اختلاف آن‌ها برابر ۲۱ است.

۲۸۷۹ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f = (0, +\infty)$ ، بنابراین

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x > 0 \mid (f(\frac{1}{4})^x + \log_{5/4} x)^3 > 0\}$$

اکنون توجه کنید که

$$(f(\frac{1}{4})^x + \log_{5/4} x)^3 > 0 \Rightarrow f(\frac{1}{4})^x + \log_{5/4} x > 0$$

$$\log_{5/4} x > -f(\frac{1}{4})^x \Rightarrow -\log_4 x > -2^{2-x} \Rightarrow \log_4 x < 2^{2-x} \quad (1)$$

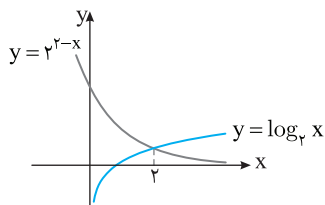
از روی نمودار تابع‌های $y = \log_4 x$ و $y = 2^{2-x}$ معلوم است که $x=2$ تنها جواب معادلهٔ $\log_4 x = 2^{2-x}$ است و مجموعهٔ جواب‌های نامعادله (۱) بازهٔ $(0, 2)$ است. بنابراین باید نامعادلهٔ $(f \circ f)(x) < f(2^{2-x})$ را با شرط $x \in (0, 2)$ حل کنیم. اکنون توجه کنید که تابع‌های $y = \log_{5/4} x$ و $y = f(\frac{1}{4})^x$ نزولی‌اند، پس مجموع آن‌ها نزولی‌اند. همچنین چون تابع $y = x^3$ صعودی‌اند، پس تابع $f(x) = (f(\frac{1}{4})^x + \log_{5/4} x)^3$ نیز نزولی‌اند. بنابراین

$$(f \circ f)(x) < f(2^{2-x}) \Rightarrow f(x) > 2^{2-x}$$

$$(f(\frac{1}{4})^x + \log_{5/4} x)^3 > 2^{2-x} \Rightarrow f(\frac{1}{4})^x + \log_{5/4} x > 2^{2-x}$$

$$2^{2-x} + \log_{5/4} x > 2^{2-x} \Rightarrow \log_{5/4} x > 0$$

پس $x < 1$. بنابراین جواب نامعادله مورد نظر بازهٔ $(0, 1)$ است.



۲۸۸۰ ۳ ابتدا توجه کنید که $x = \frac{m+f}{m}$ و $x = -1$ صفرهای تابع

$y = mx^2 - 4x - (m+4)$ هستند و $(0, -m-4)$ نقطهٔ تقاطع نمودار تابع f با محور y

است. مساحت مثلثی که رأس‌های آن $(-\frac{m+f}{m}, 0)$ ، $(-1, 0)$ ، $(0, -m-4)$ برابر است با

$$\frac{1}{2} \left| \frac{m+f}{m} - (-1) \right| \cdot |-m-4| = \frac{m+2}{m} |m+4|$$

چون مساحت این مثلث برابر ۳ است، پس

$$\left| \frac{(m+2)(m+4)}{m} \right| = 3$$

$$\frac{(m+2)(m+4)}{m} = 3 \Rightarrow m^2 + 3m + 8 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \quad (\text{جواب ندارد})$$

$$\frac{(m+2)(m+4)}{m} = -3 \Rightarrow m^2 + 9m + 8 = 0 \Rightarrow m = -1, m = -8$$

طول رأس سهمی $y = mx^2 - 4x - (m+4)$ برابر است با $-\frac{4}{2m} = \frac{2}{m}$. اگر

$m = -1$ ، آن‌گاه طول رأس سهمی برابر ۲ است و اگر $m = -8$ ، آن‌گاه طول رأس

سهمی برابر $-\frac{1}{4}$ است، که اختلاف آن‌ها برابر است با $-\frac{1}{4} + 2 = \frac{7}{4}$.

۲۸۸۴ ۴ چون محیط دایره برابر 2π است، پس شعاع آن برابر است با

$$r = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \quad \text{از } OH = BH = \frac{1}{2} \text{ پس } OB \text{ عمود منصف } AH \text{ است.}$$

طرف دیگر، در مثلث OAH از قضیه فیثاغورس نتیجه می‌شود

$$OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow 1 = \frac{1}{4} + AH^2 \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

همچنین، در مثلث قائم الزاویه OHA،

$$\sin \hat{O} = \frac{AH}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{O} = \frac{\pi}{3}$$

بنابراین طول کمان AB برابر است با

$$\widehat{AB} = OA \times \hat{O} = 1 \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

در نتیجه محیط ناحیه رنگی برابر است با

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$$

و محیط مثلث OAH برابر است با

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

پس اختلاف مورد نظر برابر است با $\frac{\pi}{3} - 1 = \frac{\pi - 3}{3}$

۲۸۸۵ ۲ ابتدا رأس‌های مثلث ABC را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + ay = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (3, 0)$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow B = (-3, 3)$$

$$\begin{cases} 2x + ay = 6 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{6}{a-2} \\ y = \frac{6}{a-2} \end{cases} \Rightarrow C = \left(-\frac{6}{a-2}, \frac{6}{a-2}\right)$$

چون مرکز دایره گفته شده روی نیمساز ناحیه دوم است، پس نقطه‌های B و C دو سر قطر این دایره‌اند و O، مرکز دایره، وسط پاره خط BC است. در نتیجه

$$x_O = \frac{-3 + \frac{6}{a-2}}{2} = \frac{3a}{4-2a}$$

$$y_O = -x_O = -\frac{3a}{4-2a}$$

اکنون توجه کنید که

$$OA = \frac{1}{2} BC \Rightarrow OA^2 = \frac{1}{4} BC^2$$

از طرف دیگر،

$$OA^2 = \left(\frac{3a}{4-2a} - 3\right)^2 + \left(-\frac{3a}{4-2a} - 0\right)^2 = \left(\frac{9a-12}{4-2a}\right)^2 + \frac{9a^2}{(4-2a)^2}$$

$$= \frac{90a^2 - 216a + 144}{4(a-2)^2}$$

$$BC^2 = \left(-\frac{6}{a-2} + 3\right)^2 + \left(-\frac{6}{a-2} - 3\right)^2 = 2\left(\frac{3a-12}{a-2}\right)^2 = \frac{18a^2 - 144a + 288}{(a-2)^2}$$

در نتیجه

$$OA^2 = \frac{1}{4} BC^2 \Rightarrow \frac{90a^2 - 216a + 144}{4(a-2)^2} = \frac{1}{4} \times \frac{18a^2 - 144a + 288}{(a-2)^2}$$

$$90a^2 - 216a + 144 = 18a^2 - 144a + 288$$

$$a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1, a = 2 \text{ (غ.ق.)}$$

۲۸۸۱ ۱ برای اینکه تابع f وارون پذیر باشد، باید تابع‌های $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ با

دامنه $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$ و $h(x) = -2x^2 + ax - 21$ با دامنه $(-\infty, \frac{5}{2})$ یک به یک باشند و برد این توابع اشتراکی نداشته باشند. تابع g تابعی خطی است، پس یک به یک است.

برای اینکه تابع h روی بازه $(-\infty, \frac{5}{2})$ یک به یک باشد، باید طول رأس نمودار تابع h

(سه‌می) در بازه $(-\infty, \frac{5}{2})$ نباشد. طول رأس این سهمی $\frac{a}{4}$ است. بنابراین $\frac{a}{4} \geq \frac{5}{2}$.

پس $a \geq 10$. برای اینکه برد تابع‌های g و h اشتراک نداشته باشد، باید

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{5}{2})^-} h(x) \leq g\left(\frac{5}{2}\right) \Rightarrow -2\left(\frac{5}{2}\right)^2 + a\left(\frac{5}{2}\right) - 21 \leq -\frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{2}a \leq \frac{10}{3} \Rightarrow a \leq \frac{4}{3}$$

بنابراین $10 \leq a \leq \frac{4}{3}$ ، که بیشترین مقدار ممکن صحیح a برابر ۱۳ است. اگر $a = 13$ ، آن‌گاه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} & x \geq \frac{5}{2} \\ -2x^2 + 13x - 21 & x < \frac{5}{2} \end{cases}$$

اکنون فرض کنید $f^{-1}(-3) = m$. بنابراین $f(m) = -3$. توجه کنید که

$$m \geq \frac{5}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}m - \frac{3}{2} = -3 \Rightarrow m = -3 \text{ (غ.ق.)}$$

$$m < \frac{5}{2} \Rightarrow f(m) = -2m^2 + 13m - 21 = -3 \Rightarrow m = 2, m = \frac{9}{2} \text{ (غ.ق.)}$$

۲۸۸۲ ۲ اختلاف ریشه‌های معادله مورد نظر برابر است با

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{(\log 9)^2 + 4 \log \frac{5}{3} \times \log 15}}{\log \frac{5}{3}}$$

اکنون توجه کنید که $\log 9 = 2 \log 3 = 2 \times 0.4 = 0.8$

$$\log \frac{5}{3} = \log 5 - \log 3 = \log \frac{10}{6} - \log 3$$

$$= \log 10 - \log 2 - \log 3 = 1 - 0.3 - 0.4 = 0.3$$

$$\log 15 = \log(3 \times 5) = \log 3 + \log 5$$

$$= \log 3 + 1 - \log 2 = 0.4 + 1 - 0.3 = 1.1$$

بنابراین اختلاف مورد نظر برابر است با

$$\frac{\sqrt{(0.8)^2 + 4 \times 0.3 \times 1.1}}{0.3} = \frac{\sqrt{1.96}}{0.3} = \frac{1.4}{0.3} = \frac{14}{3}$$

۲۸۸۳ ۱ توجه کنید که

$$\tan x + \cot x = 4 \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = 4 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{4}$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x = 1 - 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$|\sin x - \cos x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

از طرف دیگر، $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$

پس $\sin x - \cos x < 0$. در نتیجه

$$-(\sin x - \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x - \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

اکنون توجه کنید که

$$\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{1}{4}\right) = -\frac{5\sqrt{2}}{8}$$

$$\frac{1}{\sin^3 x - \cos^3 x} = \frac{1}{-\frac{5\sqrt{2}}{8}} = -\frac{8}{5\sqrt{2}}$$

پس

۲۸۸۸ ۴ چون حد صورت کسر وقتی که $x \rightarrow 1$ برابر با صفر است، پس باید حد

مخرج کسر هم صفر باشد، تا حد کسر مورد نظر غیر صفر باشد. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1} (ax+b) = a+b=0 \Rightarrow a=-b$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{b\sqrt{2-\sqrt{x}}-b}{ax+b} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{b\sqrt{2-\sqrt{x}}-b}{-bx+b} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-\sqrt{x}}-1}{-x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{x}-1}{(1-x)(\sqrt{2-\sqrt{x}}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}+\sqrt{x^2})(\sqrt{2-\sqrt{x}}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1+\sqrt{x}+\sqrt{x^2})(\sqrt{2-\sqrt{x}}+1)} = \frac{1}{3 \times 2 \times 6} \end{aligned}$$

۲۸۸۹ ۳ نمودار تابع f خطی راست است که از نقطه‌های $(0, 2a)$ و $(3a, 0)$ گذشته است. معادله این خط به صورت زیر است

$$y-0 = \frac{0-2a}{3a-0}(x-3a) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2a$$

بنابراین $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2a$. نمودار تابع g خطی راست است که از نقطه‌های $(0, 2m)$ و $(-m, 0)$ گذشته است. معادله این خط به صورت زیر است

$$y-0 = \frac{0-2m}{-m-0}(x+m) \Rightarrow y = 2x + 2m$$

بنابراین $g(x) = 2x + 2m$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{|f(x)|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+2m}{|-\frac{2}{3}x+2a|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+2m}{-\frac{2}{3}x+2a} = \frac{2}{-\frac{2}{3}} = -3$$

۲۸۹۰ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر عبارت $2x^2 + (m-3)x^2 + a^2$ ریشه‌ای

مانند x_0 به جز $x=a$ داشته باشد، آن‌گاه تابع f در نقطه $x=X_0$ ناپیوسته می‌شود.

در نتیجه $x=a$ باید تنها ریشه عبارت $2x^2 + (m-3)x^2 + a^2$ باشد. بنابراین

$$2a^2 + (m-3)a^2 + a^2 = 0 \Rightarrow 2a^2 + (m-2)a^2 = 0$$

$$a^2(2a+m-2) = 0 \Rightarrow a=0, a=\frac{2-m}{2}$$

اگر $a=0$ ، آن‌گاه ضابطه تابع f به ازای $x=0$ به صورت $\frac{2 \tan b}{\sqrt{-x}}$ است که ممکن نیست.

بنابراین $a=\frac{2-m}{2}$. از طرف دیگر، $x=a$ باید ریشه مضاعف عبارت $2x^2 + (m+3)x + \frac{m}{2}$ باشد، زیرا در غیر این صورت حد تابع f در نقطه $x=a$ نامتناهی می‌شود. بنابراین

$$\Delta=0 \Rightarrow (m+3)^2 - 2 \cdot 2 \left(\frac{m}{2}\right) = 0 \Rightarrow (m-3)^2 = 0 \Rightarrow m=3$$

پس $a=\frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}$. بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{6(x+\frac{1}{2})^2}}{|2x^2+\frac{1}{2}|} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{6}|x+\frac{1}{2}|}{2|x^2+\frac{1}{4}|} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{6}|x+\frac{1}{2}|}{2|x^2+\frac{1}{4}|} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{6}}{2|x^2+\frac{1}{4}|} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}|} = \frac{\sqrt{6}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{1} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$f(a) = f(-\frac{1}{2}) = \frac{2 \tan b}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{2} \tan b$$

بنابراین

$$2\sqrt{2} \tan b = \frac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \tan b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

در نتیجه

بنابراین b می‌تواند $\frac{\pi}{3}$ باشد.

بنابراین C نقطه $(2, -2)$ است. اکنون توجه کنید که چون A زاویه محاطی روبه‌رو به

قطر BC است، پس $\hat{A}=90^\circ \Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=90^\circ \Rightarrow \hat{B}=90^\circ-\hat{C}$

بنابراین

$$\begin{aligned} \cot(\hat{B}-\hat{C}) &= \cot(90^\circ-\hat{C}) = \tan \hat{C} = \frac{\sin \hat{C}}{\cos \hat{C}} \\ &= \frac{2 \sin \hat{C} \cos \hat{C}}{\cos^2 \hat{C} - \sin^2 \hat{C}} = \frac{2 \sin \hat{C} \cos \hat{C}}{\cos^2 \hat{C} - \sin^2 \hat{C}} = \frac{2 \tan \hat{C}}{1 - \tan^2 \hat{C}} \end{aligned}$$

$$\tan \hat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{(3+2)^2 + (3-0)^2}}{\sqrt{(3-2)^2 + (0+2)^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 3$$

از طرف دیگر،

$$\cot(\hat{B}-\hat{C}) = \frac{2 \times 3}{1-9} = -\frac{3}{4}$$

پس

۲۸۸۶ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned} f(x) &= a \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - bx\right) + c = a \left(\frac{1 - \cos 2\left(\frac{\pi}{4} - bx\right)}{2}\right) + c \\ &= \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2bx\right) + c = -\frac{a}{2} \sin 2bx + \frac{a}{2} + c \end{aligned}$$

پس دوره تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{|2b|}$. بنابراین

$$\frac{2\pi}{2|b|} = \frac{15\pi}{4} - \left(-\frac{5\pi}{4}\right) = 5\pi$$

پس $|b| = \frac{1}{5}$. از طرف دیگر، ماکزیمم و مینیمم تابع f به ترتیب برابر $\frac{a}{2} + c + \left|\frac{a}{2}\right|$ و

$\frac{a}{2} + c - \left|\frac{a}{2}\right|$ است. در نتیجه

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + c + \left|\frac{a}{2}\right| = 1 \\ \frac{a}{2} + c - \left|\frac{a}{2}\right| = -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} 2\left|\frac{a}{2}\right| = 3 \Rightarrow |a| = 3$$

بنابراین $|ab| = |a||b| = \frac{3}{5}$. از روی نمودار تابع f معلوم می‌شود که چون تابع در

همسایگی راست نقطه $x=0$ صعودی است، پس $-\frac{a}{2}(2b) > 0$ یعنی $ab < 0$.

در نتیجه $ab = -\frac{3}{5} = -0.6$.

۲۸۸۷ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\cot\left(\frac{\pi+4x}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = -\tan 2x$$

$$\cos\left(\frac{\pi+8x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) = -\sin 4x$$

بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$\tan 2x = \sin 4x \Rightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 2 \sin 2x \cos 2x$$

$$\sin 2x = 2 \sin 2x \cos^2 2x \Rightarrow \sin 2x(2 \cos^2 2x - 1) = 0$$

$$\sin 2x \cos 4x = 0$$

در نتیجه

$$\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

چون جواب‌های غیر صفر در بازه $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ را می‌خواهیم، پس در دسته اول هیچ جوابی

قابل قبول نیست و جواب‌های قابل قبول در دسته دوم $\frac{\pi}{8}$ و $-\frac{\pi}{8}$ هستند، که اختلاف

آن‌ها $\frac{\pi}{4}$ است، پس $\alpha = \frac{\pi}{4}$ و $\cos 3\alpha = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

۲۸۹۴ ۱ چون عدد مورد نظر بر ۶ بخش پذیر است، پس زوج است، یعنی یکان آن باید برابر ۸ باشد. چون عدد مورد نظر از دو طرف یکسان خوانده می شود، پس اگر هفت رقم سمت راست را مشخص کنیم، هفت رقم سمت چپ نیز مشخص می شوند. توجه کنید که چون عدد مورد نظر بر ۶ بخش پذیر است، پس بر ۳ هم بخش پذیر است. بنابراین مجموع رقم هایش بر ۳ بخش پذیر است. یعنی دو برابر مجموع هفت رقم سمت راست بر ۳ بخش پذیر است، پس مجموع هفت رقم سمت راست بر ۳ بخش پذیر است. فرض کنید n تا از این هفت رقم برابر ۷ باشند، در این صورت $6-n$ تا از رقم ها برابر ۸ هستند (توجه کنید که رقم آخر حتماً ۸ است). بنابراین مجموع هفت رقم سمت راست برابر است با

چون $57-(n+1)$ بر ۳ بخش پذیر است و خود ۵۷ نیز بر ۳ بخش پذیر است، پس $n+1$ بر ۳ بخش پذیر است. چون مقدار n حداکثر ۶ است، پس مقدار n یا ۲ است یا ۵. اگر $n=2$ ، باید از میان شش جا دو جا برای رقم های ۷ مشخص کنیم تعداد راه های این کار برابر است با $\binom{6}{2}=15$.

اگر $n=5$ ، باید از میان شش جا پنج جا برای رقم های ۷ مشخص کنیم. تعداد راه های این کار برابر است با $\binom{6}{5}=6$.

بنابراین تعداد عددهای مورد نظر برابر است با $15+6=21$.

۲۸۹۵ ۳ برای اینکه در n بار پرتاب سکه، پرتاب m امین بار باشد که سکه رو آمده است، باید در $n-1$ پرتاب قبلی $m-1$ بار رو و $n-(m-1)$ بار پشت آمده باشد، در نتیجه، احتمال پیشامد مورد نظر برابر است با

از طرف دیگر، احتمال این که در n پرتاب سکه m بار رو بیاید برابر است با $\frac{\binom{n}{m}}{2^n}$.

در نتیجه

$$\frac{\binom{n-1}{m-1}}{2^{n-1}} = \frac{m}{m+3} \times \frac{\binom{n}{m}}{2^n}$$

$$\frac{(n-1)!}{2^n (m-1)! (n-m)!} = \frac{m}{m+3} \times \frac{n!}{2^n m! (n-m)!}$$

$$1 = \frac{m}{m+3} \times \frac{n}{m} \Rightarrow m+3=n \Rightarrow mn=m(m+3)$$

اگر $m=5$ ، آن گاه $mn=40$.

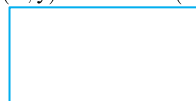
۲۸۹۶ ۱ بنابر فرمول احتمال کل، احتمال پذیرفته شدن پارسا در رشته مورد علاقه اش برابر است با

$$\frac{0/45 \times 0/2}{0/25 \times 0/25} + \frac{0/35 \times 0/3}{0/25 \times 0/3} = 0/245$$

قبولی در رشته C قبولی در رشته B قبولی در رشته A

۲۸۹۷ ۳ چون ABCD مستطیل (متوازی الاضلاع) است، پس

$$A(x, y) \quad B(-1-x, y-3)$$



$$D(-4, 0) \quad C(0, -3)$$

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow x + 0 = -1 - x - 4$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

۲۸۹۱ ۳ ابتدا توجه کنید که

بنابراین باید مشتق تابع fog را حساب کنیم. توجه کنید که اگر $x > 0$ ، آن گاه

$$(fog)(x) = f\left(\frac{1}{x^5 + |x^5|}\right) = f\left(\frac{1}{2x^5}\right) = -\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{2x^5} + \left|\frac{1}{2x^5}\right|}} = -\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}}} = -x$$

بنابراین $(fog)'(x) = -1$ ، پس $(fog)'(\sqrt[5]{3}) = -1$.

۲۸۹۲ ۴ فرض می کنیم $BC=y$ و $CD=x$ طول ضلع کوچک تر مثلث

قائم الزاویه برابر a باشد. در این صورت طول ضلع دیگر این مثلث برابر $2a$ است. در نتیجه، طول وتر این مثلث برابر با $\sqrt{5}a$ است. از یک طرف مساحت مثلث برابر است با $\frac{1}{2}(2a)(a) = a^2$. از طرف دیگر، اگر طول ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم الزاویه برابر h باشد، مساحت آن برابر است با $\frac{1}{2}h \times \sqrt{5}a$. بنابراین $\frac{1}{2}h \times \sqrt{5}a = a^2 \Rightarrow h = \frac{2}{\sqrt{5}}a$.

اکنون توجه کنید که مثلث های MNP و MCD متشابه اند. پس نسبت ارتفاع های آنها برابر نسبت اضلاع آنها است. یعنی

$$\frac{h-y}{h} = \frac{x}{\sqrt{5}a} \Rightarrow \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}a - y}{\frac{2}{\sqrt{5}}a} = \frac{x}{\sqrt{5}a} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}(\frac{2}{\sqrt{5}}a - y)}{2} = \frac{x}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{2a - \sqrt{5}y}{2} = \frac{x}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{2}(2a - \sqrt{5}y) = \sqrt{5}a - \frac{5}{2}y$$

بنابراین مساحت مستطیل برابر است با

$$S = xy = (\sqrt{5}a - \frac{5}{2}y)y = -\frac{5}{2}y^2 + \sqrt{5}ay$$

مساحت مستطیل ABCD برحسب y تابعی درجه دوم است، که ماکزیمم آن وقتی به

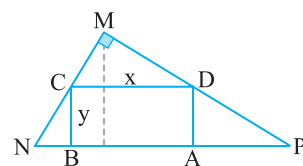
دست می آید که

$$x = \sqrt{5}a - \frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}a\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

در این صورت

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}a}{\frac{\sqrt{5}}{5}a} = \frac{5}{2}$$

بنابراین



۲۸۹۳ ۲ فرض می کنیم عددهای دسته اول به صورت زیر باشند

$$a, a+1, \dots, a+6$$

در این صورت $\bar{x} = \frac{7a+21}{7} = a+3$ پس

$$\sigma^2 = \frac{1}{7}\bar{x} \Rightarrow 4\sigma^2 = \bar{x}^2 \Rightarrow \frac{4(3^2+2^2+1^2+0^2+1^2+2^2+3^2)}{7} = (a+3)^2$$

$$\frac{4(2 \times 14)}{7} = (a+3)^2 \Rightarrow (a+3)^2 = 16 \Rightarrow a+3 = \pm 4 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } a = -7 \text{ (غ.ق.)}$$

فرض کنید داده های دسته آخر به صورت مقابل باشند

$$b, b+1, \dots, b+6$$

در این صورت $\bar{x} = b+3$ پس

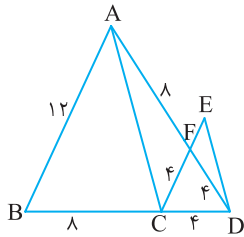
$$\sigma^2 = \bar{x} \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{2 \times 14}{7}}\right)^2 = b+3 \Rightarrow 4 = b+3 \Rightarrow b=1$$

پس اختلاف مورد نظر برابر است با $b-a = 1-1 = 0$.

از طرف دیگر، از قضیه اساسی تشابه معلوم می‌شود که مثلث‌های CFA و EFD

متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{ED}{CA} = \frac{FD}{FA} \Rightarrow \frac{ED}{CA} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow ED = \frac{1}{2} CA$$



اکنون توجه کنید که مثلث FCD متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه اگر ارتفاع وارد بر ضلع FD را رسم کنیم، آن‌گاه آن ارتفاع میانه هم هست. در نتیجه $FH = \frac{FD}{2} = 2$.

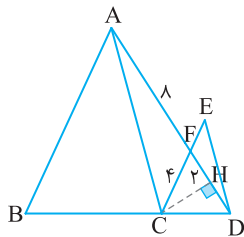
اکنون توجه کنید که بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث FHC.

$$FC^2 = FH^2 + CH^2 \Rightarrow 16 = 4 + CH^2 \Rightarrow CH^2 = 12$$

همین‌طور، در مثلث قائم‌الزاویه AHC از قضیه فیثاغورس نتیجه می‌شود

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 = 100 + 12 = 112 \Rightarrow AC = 4\sqrt{7}$$

$$ED = \frac{1}{2} AC = 2\sqrt{7} \quad \text{بنابراین}$$



مرکز دایره $x^2 + y^2 - 2x + 2y - a = 0$ نقطه $(1, -1)$ و شعاع آن

برابر است با $\frac{1}{2}\sqrt{4+4+4a} = \sqrt{2+a}$. مرکز دایره $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 6a = 0$

نقطه $(-2, 3)$ و شعاع آن برابر است با $\sqrt{13-6a}$. بنابراین $\frac{1}{2}\sqrt{16+36-24a} = \sqrt{13-6a}$

فاصله مرکزهای دو دایره برابر است با

$$\sqrt{(1+2)^2 + (-1-3)^2} = 5$$

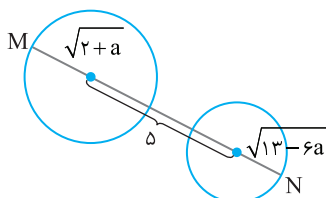
فاصله نقطه‌های M و N وقتی بیشترین مقدار ممکن است که مانند شکل زیر نقطه‌های M و N روی خطی باشند که مرکزهای دایره‌ها را به هم وصل می‌کند. در نتیجه باید

$$\sqrt{2+a} + \sqrt{13-6a} + 5 = 8 \Rightarrow \sqrt{2+a} + \sqrt{13-6a} = 3$$

$$\sqrt{13-6a} = 3 - \sqrt{2+a} \Rightarrow 13-6a = 9 + 2+a - 6\sqrt{2+a}$$

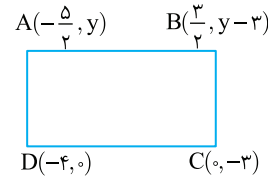
$$2-7a = -6\sqrt{2+a} \Rightarrow 49a^2 - 64a - 8 = 0$$

$$(49a+34)(a-2) = 0 \Rightarrow a = 2, a = -\frac{34}{49} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$



اکنون توجه کنید که

$$\text{شیب خط } AB = \frac{y-3-y}{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}} = -\frac{3}{4}, \quad \text{شیب خط } AD = \frac{-y}{-4+\frac{5}{2}} = \frac{2y}{3}$$



چون خط‌های AB و AD بر هم عمودند، حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -۱

$$\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2y}{3}\right) = -1 \Rightarrow y = 2$$

است. پس

اکنون توجه کنید که

$$AD = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}+4\right)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+4} = \frac{5}{2}$$

$$CD = \sqrt{(-4-0)^2 + (0+3)^2} = 5$$

بنابراین محیط مستطیل ABCD برابر است با $2\left(5+\frac{5}{2}\right) = 15$.

طول قطر‌ها را $2x$ و $2y$ در نظر می‌گیریم. در این صورت بنابر قضیه

فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه AOB.

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = x^2 + 9x^2 = 10x^2$$

$$AB = \sqrt{10}x$$

پس

اگر فرض کنیم $OF = z$ ، از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه AOF به دست می‌آید

$$AF^2 = AO^2 + FO^2 = x^2 + z^2 \Rightarrow AF = \sqrt{x^2 + z^2}$$

همچنین، توجه کنید که $DF = 3x - z$. فرض می‌کنیم $EF = t$. از قضیه اساسی

تشابه معلوم می‌شود که مثلث‌های EFD و AFB متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{BF}{DF} = \frac{AB}{ED} \Rightarrow \frac{3x+z}{3x-z} = 2 \Rightarrow 3x+z = 6x-2z \Rightarrow x = z$$

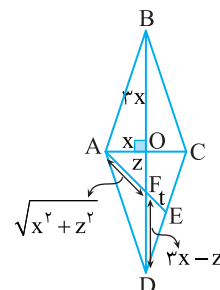
همچنین

$$\frac{EF}{AF} = \frac{ED}{AB} \Rightarrow \frac{t}{\sqrt{x^2+z^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{t}{\sqrt{x^2+x^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{t}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

$$\frac{EF}{AB} = \frac{t}{\sqrt{10}x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x}{\sqrt{10}x} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

بنابراین



چون $FC \parallel AB$ ، از قضیه تالس در مثلث ADB.

$$\frac{DF}{FA} = \frac{DC}{CB} \Rightarrow \frac{DF}{4} = \frac{4}{4} \Rightarrow DF = 4$$

در همین مثلث از تعمیم قضیه تالس نتیجه می‌شود که

$$\frac{FC}{AB} = \frac{DC}{DB} \Rightarrow \frac{FC}{12} = \frac{4}{12} \Rightarrow FC = 4$$

۱ ۲۹۱۱

$$\frac{2\pi}{|a|} = \pi \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|a|} = \pi$$

۳ ۲۹۱۲

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1^+} [(f+g)(x) + (f-g)(x)] = \frac{1}{2} (0 + \Delta) = \Delta/2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1^-} [(f+g)(x) + (f-g)(x)] = \frac{1}{2} (2 + \Delta) = 1 + \Delta/2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \Delta/2$$

۴ ۲۹۱۳

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{a + 3[-x]}{1 - 2x} = \frac{a - 3}{-1} = -\infty \Rightarrow a - 3 > 0 \Rightarrow a > 3$$

$$\frac{x}{a} - x = x \left(\frac{1}{a} - 1 \right) \in (-1, 0)$$

بنابراین

توجه کنید که عبارت بالا حاصل ضرب عددی در همسایگی $\frac{1}{2}$ و عددی از بازه $(-1, 0)$ است. بنابراین خود عددی در بازه $(-1, 0)$ خواهد بود در نتیجه مقدار حد خواسته شده برابر است با -1 .

۱ ۲۹۱۴ تابع $y = [x^2 - ax]$ به ازای مقادیر مختلف a که که $x^2 - ax$ عدد

صحیح می‌شود، ناپیوسته است مگر اینکه $b = 0$. بنابراین

$$\frac{a}{f(b)} = \frac{a}{f(0)} = \frac{a}{-2a} = -\frac{1}{2}$$

۲ ۲۹۱۵

$$y = \frac{x+\Delta}{2}, \quad \frac{ax-1}{3x+1} = \frac{x+\Delta}{2} \Rightarrow 2ax - 2 = 3x^2 + 16x + \Delta$$

$$3x^2 + (16-2a)x + 12 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (16-2a)^2 - 4 \times 3 \times 12 = 0 \Rightarrow (2a-16)^2 = 144 \Rightarrow |2a-16| = 12$$

$$2a-16 = 12 \Rightarrow 2a = 28, \quad 2a-16 = -12 \Rightarrow 2a = 4$$

۳ ۲۹۱۶

$$f(0) - f(-1) = 1 - \lambda(1-a) = -1 \Rightarrow \lambda(1-a) = 12 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$x = -2a = 1 \Rightarrow f'(x) = 2(2x)(x^2+1)^2 \left(-\frac{1}{2}x+1 \right) - \frac{1}{2}(x^2+1)^2 \Rightarrow f'(1) = 8$$

۱ ۲۹۱۷

$$y' = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
y'		+	-	+
y		↗	↘	↗

max min

بنابراین $x=2$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع است و مقدار آن برابر است با

$$f(2) = 2^3 - 12 \times 2 + 12 = -14$$

۴ ۲۹۱۸ فرض کنید $f(x) = \sqrt{4-x}$ و $g(x) = \sqrt{x+4}$. مطابق شکل داریم

$$f(a) = g(b) \Rightarrow \sqrt{4-a} = \sqrt{b+4} \Rightarrow 4-a = b+4 \Rightarrow b = -a$$

اکنون مساحت مستطیل از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$S(a) = a \sqrt{4-a} \Rightarrow S'(a) = \sqrt{4-a} + a \times \frac{-1}{2\sqrt{4-a}} = 0$$

$$\sqrt{4-a} = \frac{a}{2\sqrt{4-a}} \Rightarrow 2(4-a) = a \Rightarrow a = 3$$

۴ ۲۹۰۱

$$-mx^2 + mx + 1 = -m - x \Rightarrow mx^2 - (m+1)x - 1 = 0$$

$$\Delta m^2 + 6m + 1 = 0 \Rightarrow -1 < m < -\frac{1}{6} \Rightarrow \Delta$$

۳ ۲۹۰۲

$$(f \circ g^{-1})(a) = -3 \Rightarrow g^{-1}(a) = \frac{1}{f} \Rightarrow g\left(\frac{1}{f}\right) = a \Rightarrow a = -\frac{1}{\lambda}$$

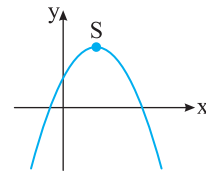
۱ ۲۹۰۳

$$\alpha\beta = \frac{\beta}{2\Delta\alpha} \Rightarrow 2\Delta\alpha^2 = 1 \quad (1)$$

$$\alpha + \beta = -\frac{f}{2\Delta\alpha} \Rightarrow 2\Delta\alpha^2 + 2\Delta\alpha\beta = -f \xrightarrow{(1)} 2\Delta\alpha\beta = -\Delta \Rightarrow \alpha\beta < 0$$

$$\alpha < 0, \beta > 0 \Rightarrow y = \underbrace{2\Delta\alpha}_{\text{منفی}} x^2 + \underbrace{fx}_{\text{مثبت}} + \underbrace{\beta}_{\text{مثبت}}$$

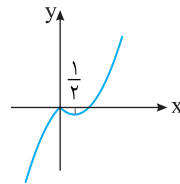
بنابراین رأس این سهمی در ناحیهٔ اول قرار دارد.



۳ ۲۹۰۴

$$y = -\frac{1}{2-x} = \frac{1}{x-2}, \quad -4 < \frac{1}{x-2} < 0 \Rightarrow x-2 < 0 \Rightarrow x < 2, \quad x \neq 2$$

۲ ۲۹۰۵



$$y = (x-1)|x| = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 0 \\ -x^2 + x & x < 0 \end{cases}$$

$$(a, b) = (0, \frac{1}{2}) \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}$$

۲ ۲۹۰۶

$$f(0) = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 + c \times 3^a = \frac{2}{3} \Rightarrow c \times 3^a = -\frac{1}{3}, \quad f(1) = 0 \Rightarrow c \times 3^{a+b} = -1$$

$$\frac{c \times 3^a}{c \times 3^{a+b}} = \frac{1}{3} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow f(-1) = 1 + c \times 3^a \times 3^{-b} = 1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$$

۳ ۲۹۰۷

$$f(x) = ax + a\sqrt{x}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{f} - \frac{\sqrt{x+1}}{2} \xrightarrow{x=3} f^{-1}(3) = \frac{1}{f} \Rightarrow f\left(\frac{1}{f}\right) = 3$$

$$\frac{a}{f} + \frac{a}{2} = 3 \Rightarrow a = f$$

۴ ۲۹۰۸

$$-\tan \alpha = \frac{1/\Delta}{2} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{2}{f} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{f}{2}$$

۴ ۲۹۰۹

$$\frac{2 \cos(18^\circ + 68^\circ) - 2 \sin(9^\circ + 68^\circ)}{\sin(18^\circ + 22^\circ) - \cos(27^\circ + 22^\circ)} = \frac{-2 \cos 86^\circ - 2 \cos 77^\circ}{-\sin 40^\circ - \sin 49^\circ}$$

$$= \frac{-2 \cos 86^\circ}{-2 \sin 44^\circ} = 2/\Delta$$

۲ ۲۹۱۰

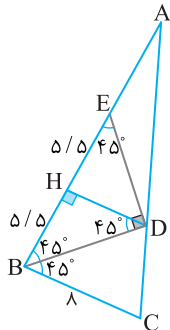
$$2 \sin x \cos x - f \sin^2 x \cos x = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x (1 - \frac{f}{2} \sin x) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \quad \cos x = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \quad \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

بنابراین دو مثلث قائم الزاویه ABF و CEF به دلیل داشتن دوزاویه حاده مساوی متشابه‌اند.
در نتیجه

$$\frac{EF}{BF} = \frac{CF}{AF} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{\lambda}{x+\lambda} \Rightarrow x^2 + \lambda x - 4\lambda = 0$$

$$(x+12)(x-4) = 0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow AF=12$$



۱ ۲۹۲۵

$$\hat{H}=90^\circ \Rightarrow DH \parallel BC \Rightarrow \hat{B}=90^\circ$$

$$\triangle ABC: DH \parallel BC \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{DH}{BC}$$

$$\frac{x+5/5}{11+x} = \frac{5/5}{\lambda} \Rightarrow x=6/6$$

۲ ۲۹۲۶

$$B = \frac{2+\sqrt{2}\lambda}{\lambda+\sqrt{2}\lambda} = \frac{2+2\sqrt{2}}{\lambda+2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\lambda+\sqrt{2}} \times \frac{\lambda-\sqrt{2}}{\lambda-\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2})}{\lambda^2-2}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}-3}{9} = \frac{\sqrt{2}-1}{3} \Rightarrow 3B+1=\sqrt{2}$$

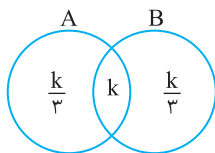
۴ ۲۹۲۷ فرض کنید $n(A \cap B) = k$. در این صورت طبق فرض

$$n(A-B) = \frac{k}{3}, \quad n(B-A) = \frac{k}{4}$$

بنابراین نمودار ون زیر را داریم و می‌توان نوشت

$$n(A \cup B) = k + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} = 57 \Rightarrow \frac{19k}{12} = 57 \Rightarrow k = 36$$

$$n(A) = k + \frac{k}{3} = \frac{4}{3}k = 48$$



۱ ۲۹۲۸

$$\begin{cases} a, a+d, a+2d, \dots \Rightarrow t_n = a + (n-1)d \\ a+f, a+f+d, \dots \Rightarrow t'_n = a+f + (n-1)d \end{cases} \Rightarrow t'_n - t_n = f$$

۲ ۲۹۲۹

$$f(1) = \sqrt{f} + 2a = a + 5 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow f(3) = 3(3^2) + 5 = 32$$

۴ ۲۹۳۰

$$x^2 + y^2 + 3x + ay = c \Rightarrow O(-\frac{3}{2}, -\frac{a}{2})$$

$$A(0, 3) \Rightarrow m_{OA} = \frac{3 - (-\frac{a}{2})}{0 - (-\frac{3}{2})} = \frac{6+a}{3}$$

چون شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، پس شیب OA و شیب $3y+2x=9$ قرینه معکوس هم هستند.

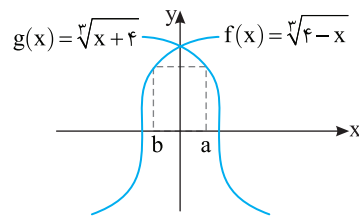
$$\frac{6+a}{3} = \frac{3}{2} \Rightarrow 12+2a=9 \Rightarrow a=-1/2$$

۴ ۲۹۳۱

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}\sqrt{2} \times \frac{2}{\lambda}} = \frac{\sqrt{2 \times 2 \times \sqrt{2}}}{\sqrt{2}\sqrt{2} \times (\frac{2}{\lambda})} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2} \times 2 \times \frac{1}{\lambda}} = \lambda \sqrt{2}$$

$$S_{\max} = S(r) = 2 \times 3 \sqrt{4-3} = 6$$

در نتیجه



۴ ۲۹۱۹

داده‌ها به صورت زیر مرتب می‌شوند:

$$1, 3, 9 \downarrow Q_1$$

$$a, a, 18, 23, 23 \downarrow$$

$$39, 2a+1, 42$$

مرتب نیست

$$\frac{a+a+18+23+23}{5} = 26 \Rightarrow a=33 \Rightarrow 42, 67 \text{ سوم}$$

$$\frac{42+67}{2} = 54.5$$

۳ ۲۹۲۰

$$4! \times 3! = 144 \quad \text{آری گن هـ}$$

۲ ۲۹۲۱

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$A' = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (5,6), (6,5)\}$$

$$n(A') = 16 \Rightarrow P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = \frac{5}{9}$$

توجه کنید که در این تست، منظور طراح از «متوالی و برابر نیستند» این است که «نه متوالی هستند و نه برابر».

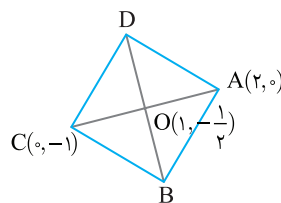
۱ ۲۹۲۲

$$\frac{6}{15} \times \frac{6}{15} + \frac{4}{15} \times \frac{5}{15} + \frac{5}{15} \times \frac{5}{15} = \frac{81}{225} = 0.36$$

خارج شدن سبز خارج شدن آبی
از جعبه A از جعبه A

۲ ۲۹۲۳

با توجه به اطلاعات سؤال، شکل روبه‌رو را داریم. معادله قطر BD را می‌نویسیم:



$$m_{AC} = \frac{0-(-1)}{2-0} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{BD} = -2, \quad O = \frac{A+C}{2} = (1, -\frac{1}{2})$$

$$BD: y + \frac{1}{2} = -2(x-1) \Rightarrow y = -2x + \frac{3}{2}$$

در بین گزینه‌ها دو نقطه $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ و $(0, \frac{3}{2})$ روی این خط قرار دارند. اکنون توجه کنید که

$$AC = \sqrt{(2-0)^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{5}$$

بنابراین نقطه‌ای جواب است که فاصله‌اش از O برابر $\frac{\sqrt{5}}{2}$ باشد:

$$(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}): \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \quad (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}): \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \checkmark$$

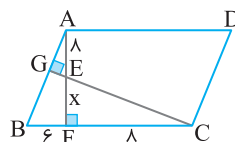
۳ ۲۹۲۴

ابتدا توجه کنید که

$$\hat{B}\hat{A}\hat{F} = \hat{B}\hat{A}\hat{D} - \hat{F}\hat{A}\hat{D} = \hat{B}\hat{A}\hat{D} - 90^\circ$$

$$\hat{F}\hat{C}\hat{E} = \hat{B}\hat{C}\hat{G} = \hat{B}\hat{C}\hat{D} - \hat{G}\hat{C}\hat{D}$$

$$= \hat{B}\hat{C}\hat{D} - 90^\circ \quad \hat{B}\hat{A}\hat{F} = \hat{F}\hat{C}\hat{E}$$



۱ ۲۹۳۹

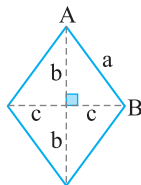
$$a = \sqrt{rbc} \Rightarrow a^r = rbc \quad (1)$$

$$a^r = b^r + c^r \xrightarrow{(1)} b^r + c^r - rbc = 0 \xrightarrow{\div c^r}$$

$$\left(\frac{b}{c}\right)^r - r\left(\frac{b}{c}\right) + 1 = 0 \Rightarrow \frac{b}{c} = r \pm \sqrt{r}$$

$$\tan \frac{\hat{A}}{r} = \frac{c}{b} = r + \sqrt{r}, \quad \tan \frac{\hat{B}}{r} = \frac{b}{c} = r - \sqrt{r}$$

$$\tan\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{r}\right) = \frac{\tan \frac{\hat{A}}{r} - \tan \frac{\hat{B}}{r}}{1 + \tan \frac{\hat{A}}{r} \tan \frac{\hat{B}}{r}} = \frac{(r + \sqrt{r}) - (r - \sqrt{r})}{1 + 1} = \sqrt{r}$$

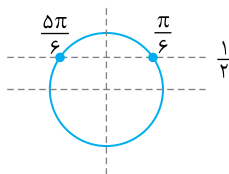


۴ ۲۹۴۰

$$\cos 2x = 3 \sin x = -1 \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x = 3 \sin x - 1$$

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$$

$$(\sin x + 2)(2 \sin x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{\Delta\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$



۳ ۲۹۴۱

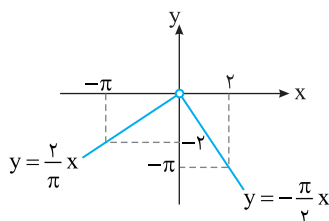
$$f(x) = \frac{1}{r} - \sin \frac{rx}{a} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{a} = \frac{\pi}{r} \Rightarrow |a| = \frac{1}{r}$$

$$y = \cos ax \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{r}} = 4\pi$$

۲ ۲۹۴۲

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{r})^-} \frac{\sin x}{|f(x)|} = \frac{1}{|-\frac{\pi}{r} \times \frac{\pi}{r}|} = \frac{r}{\pi^2}, \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{r})^+} \frac{|f(x)|}{\sin x} = \frac{|\frac{r}{\pi} \times (-\frac{\pi}{r})|}{-1} = -1$$

بنابراین مقدار خواسته شده در سؤال برابر است با $\frac{r}{\pi^2} - 1$.



۳ ۲۹۳۲

$$(1, 2, 3) (4, 5, \dots, 12) (13, \dots, 39) (40, \dots, 120) \underbrace{(121, \dots, 363)}_{\text{دسته ۵}}$$

$$\text{مجموع اعداد دسته پنجم} = \frac{363 - 121 + 1}{2} (121 + 363) = 588.6$$

$$\bar{x} = \frac{588.6}{243} = 2.42$$

۴ ۲۹۳۳

$$a_r = \sqrt{a_f} \Rightarrow a_1 r^r = \sqrt{a_1 r^r} \Rightarrow a_1^r r^r = a_1 r^r \Rightarrow a_1 r = 1 \quad (1)$$

$$a_\delta = a_1 r^f = r^2 \Rightarrow \frac{a_1 r^f}{a_1 r} = r^r = r^2 \Rightarrow r = 3 \xrightarrow{(1)} a_1 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} - a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

۴ ۲۹۳۴

$$(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-f}) (\sqrt{x+a} + \sqrt{x-f}) = (x+a) - (x-f) = a+f$$

$$rt = a+f \Rightarrow t = \frac{a+f}{r} = \frac{a}{r} + r \Rightarrow \sqrt{x+a} + \sqrt{x-f} - r = \frac{a}{r}$$

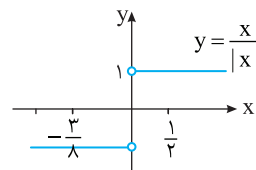
۳ ۲۹۳۵

$$y = rx^r + \frac{r}{r} x + c \Rightarrow x_S = -\frac{r}{f} = -\frac{r}{\lambda}$$

برای اینکه سهمی در بازه $(0, \frac{1}{r})$ پایین‌تر از خط $y=1$ باشد، باید داشته باشیم

$$y(\frac{1}{r}) = 1 \Rightarrow r(\frac{1}{r})^r + \frac{r}{r}(\frac{1}{r}) + c = 1 \Rightarrow \frac{1}{r} + \frac{r}{f} + c = 1 \Rightarrow c = -\frac{1}{f}$$

$$y(0) < 1 \Rightarrow c < 1$$



۲ ۲۹۳۶

نمودار تابع از دو نقطه $(0, 2)$ و $(-1/5, 0)$ می‌گذرد، پس

$$(0, 2): r = 1 - \log_c(-b) \Rightarrow \log_c(-b) = -1 \Rightarrow -b = c^{-1} \Rightarrow bc = -1$$

$$(-1/5, 0): 0 = 1 - \log_c(-1/5a - b) \Rightarrow \log_c(-1/5a - b) = 1 \Rightarrow -1/5a - b = c$$

$$\begin{cases} bc = -1 \\ b + c = -\frac{r}{f} \end{cases} \xrightarrow{c > 0} \begin{cases} c = \frac{1}{r} \\ b = -r \end{cases}$$

$$-1/5a - b = c \Rightarrow -1/5a + r = \frac{1}{r} \Rightarrow 1/5a = 1/5 \Rightarrow a = 1$$

$$(a+c)b = (1 + \frac{1}{r})(-r) = -r$$

۳ ۲۹۳۷

$$(-\frac{1}{\lambda}, -\frac{r}{\delta}) \in f^{-1} \Rightarrow (-\frac{r}{\delta}, -\frac{1}{\lambda}) \in f \Rightarrow \frac{-r}{a + \frac{r}{a}} = -\frac{1}{\lambda} \Rightarrow -\frac{r}{\lambda a} = -\frac{1}{\lambda} \Rightarrow a = r$$

۲ ۲۹۳۸

$$\frac{1}{|\cos \alpha|} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{|\cos \alpha|}$$

$$\frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{|\cos \alpha|} - \frac{1}{|\cos \alpha|} = \frac{\sin \alpha}{|\cos \alpha|} \Rightarrow \cos \alpha < 0. \quad (1)$$

$$\frac{|\sin \alpha|}{\cos \alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha < 0. \quad (2)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت انتهای کمان α در ناحیه سوم مثلثاتی است.

۳ ۲۹۴۸

$$D_f = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}, \quad R_f = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

برای دامنه باید از بین ۹ عدد، ۴ عدد را انتخاب کنیم:

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 9 \times 14$$

چون تابع ثابت است، پس برای برد باید از بین ۵ عدد، ۱ عدد را انتخاب کنیم:

$$\binom{5}{1} = 5 \Rightarrow 9 \times 14 \times 5 = 630$$

۴ ۲۹۴۹ از روش متمم استفاده می‌کنیم. می‌دانیم $n(S) = 36$. اگر A پیشامد

مطلوب باشد، آن‌گاه

$$A' = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

$$n(A') = 6 \Rightarrow n(A) = 30 \Rightarrow P(A) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

۱ ۲۹۵۰ فرض کنید A و B به ترتیب پیشامدهای کسب مدال توسط

ورزشکارهای اول و دوم باشند. در این صورت A و B مستقل هستند و پیشامد مطلوب

$(A \cup B) - (A \cap B)$ است. اکنون می‌توان نوشت

$$P(A) = 0/6, \quad P(B) = 0/4$$

$$P((A \cup B) - (A \cap B)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

$$= 0/6 + 0/4 - 2 \times 0/6 \times 0/4 = 0/52$$

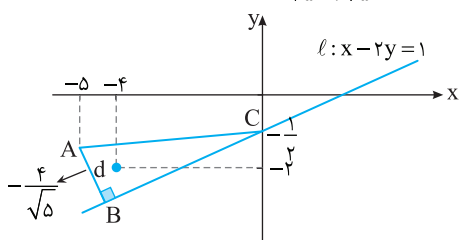
۲ ۲۹۵۱

$$\begin{cases} d \text{ خط: } y + 2x + 11 = 0 \\ \ell \text{ خط: } x - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow B(-4/2, -2/6) \quad C(0, -1/2)$$

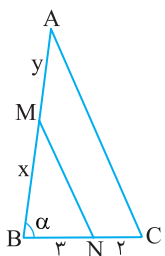
$$AB = \ell \text{ فاصله نقطه } A \text{ تا خط } \ell = \frac{|-5 + 2 - 11|}{\sqrt{5}} = \frac{14}{\sqrt{5}}$$

$$BC = d \text{ فاصله نقطه } C \text{ تا خط } \ell = \frac{|-1/2 + 0 + 11|}{\sqrt{5}} = \frac{21/2}{\sqrt{5}} = \frac{21}{2\sqrt{5}}$$

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{14}{\sqrt{5}} \times \frac{21}{2\sqrt{5}} = \frac{21}{5} = 4/2$$



۳ ۲۹۵۲



$$\begin{cases} S_{ABC} = \frac{\Delta(x+y) \sin \alpha}{2} \\ S_{BMN} = \frac{rx \sin \alpha}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{rx}{\Delta(x+y)} = \frac{1}{3}$$

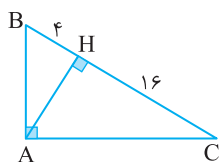
$$9x = \Delta x + \Delta y \Rightarrow 4x = \Delta y$$

$$\frac{BM}{AM} = \frac{x}{y} = \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta}{1/2\Delta} = 1/2$$

۱ ۲۹۵۳ با استفاده از روابط طولی در مثلث

قائم‌الزاویه می‌توان نوشت

$$\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{CH \times BC}{BH \times BC} = \frac{16 \times 20}{4 \times 20} = 4 \Rightarrow \frac{AC}{AB} = 2$$



۴ ۲۹۴۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x)}{\sin x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin x = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) < 0$$

اکنون گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(\left[\frac{2x}{\pi} \right] - 1 \right) = 1 - 1 = 0 \quad \times \text{ گزینه (۱)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(\left[\frac{3x}{\pi} \right] + 1 \right) = 0 + 1 = 1 \quad \times \text{ گزینه (۲)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(\left[\frac{4x}{\pi} \right] + 3 \right) = 0 + 3 = 3 \quad \times \text{ گزینه (۳)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(\left[\frac{5x}{\pi} \right] - 3 \right) = 2 - 3 = -1 \quad \checkmark \text{ گزینه (۴)}$$

۲ ۲۹۴۴

$$f(x) = a[x] + b[x] + b \Rightarrow f(x) = (a+b)[x] + b \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow a=-b$$

$$f(x) = b \Rightarrow \frac{f(a)}{a} = \frac{b}{a} = \frac{-a}{a} = -1$$

۱ ۲۹۴۵

$$f(x) = \sqrt{ax-1} \Rightarrow \text{شیب خط مماس} = f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax-1}}$$

$$\text{شیب خط گذرنده از دو نقطه} = m = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a}{2\sqrt{ax-1}} = \frac{1}{3}$$

$$3a = 2\sqrt{ax-1} \quad (1)$$

$$(2) \Rightarrow 4/\Delta a - 4 + 4 = 3\sqrt{a(4/\Delta a - 4)} - 1 \Rightarrow 9a^2 - 16a - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=-2/9 \end{cases}$$

$$(1), (2) \Rightarrow x + 4 = 3\left(\frac{3a}{2}\right) = \frac{9a}{2} \Rightarrow x = 4/\Delta a - 4$$

$$(2) \Rightarrow 4/\Delta a - 4 + 4 = 3\sqrt{a(4/\Delta a - 4)} - 1 \Rightarrow 9a^2 - 16a - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=-2/9 \end{cases}$$

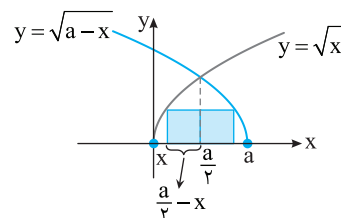
$$f(\Delta) = \sqrt{2 \times 5 - 1} = \sqrt{9} = 3$$

۳ ۲۹۴۶

$$\text{نصف مساحت مستطیل} S = \left(\frac{a}{2} - x \right) \sqrt{x} = \frac{a}{2} \sqrt{x} - x \sqrt{x}$$

$$S' = \frac{a}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2} x^{1/2} = \frac{a}{4\sqrt{x}} - \frac{3}{2} x^{1/2} = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{6}$$

$$S_{\max} = S\left(\frac{a}{6}\right) = \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{6}\right) \sqrt{\frac{a}{6}} = \frac{a}{3} \sqrt{\frac{a}{6}} = \frac{a}{3} \sqrt{\frac{a}{6}} = \frac{\sqrt{a}}{2} \Rightarrow a = 3$$



۲ ۲۹۴۷

$$\bar{x} = \frac{a+2a+3}{3} = a+1$$

$$\sigma^2 = \frac{(a-a-1)^2 + (2a-a-1)^2 + (3-a-1)^2}{3} = 14$$

$$\frac{1+(a-1)^2 + (2-a)^2}{3} = 14 \Rightarrow a^2 - 3a - 18 = 0$$

$$(a+3)(a-6) = 0 \xrightarrow{a>0} a=6 \Rightarrow \frac{a}{3} = 2$$

۲ ۲۹۵۸

$$y = 2ax^2 - 5x + 18a = x \Rightarrow 2ax^2 - 6x + 18a = 0 \Rightarrow ax^2 - 3x + 9a = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(a)(9a) = 0 \Rightarrow 4a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \text{ قق } \frac{1}{2}$$

چون بر اثر انبساط افقی دامنه تغییر نکرده است، پس

$$k = 1 \Rightarrow 2a^2 - a - 5 = 1 \Rightarrow 2a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow a = \frac{-6}{2} = -3$$

۴ ۲۹۶۰

$$x_S = -\frac{1}{2a}, \quad y_S = a\left(-\frac{1}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2a}\right) + 2a = \frac{1}{4a} - \frac{1}{2a} + 2a = -\frac{1}{2}$$

$$8a^2 + 2a - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \text{ قق } \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{4} \text{ غ قق } \frac{1}{4} \end{cases}$$

۲ ۲۹۶۱

$$\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{27} \times 3^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt[3]{\sqrt{3} \times 81}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[3]{3 \times 3^{\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt[3]{3^{\frac{1}{2}} \times (3^4)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{\sqrt[3]{3^2 \times 3^2}}{\sqrt[3]{3^{\frac{1}{2}} \times 3^2}} = \frac{\sqrt[3]{3^4}}{\sqrt[3]{3^{\frac{5}{2}}}} = \frac{3^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{5}{6}}} = 3^{\frac{8}{6} - \frac{5}{6}} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

۴ ۲۹۶۲ با توجه به اینکه اعداد طبیعی متوالی قرار است دسته‌بندی شوند و ما در

هر دسته‌بندی اعداد طبیعی متوالی داریم، پس

= اختلاف میانه و میانگین $\Rightarrow$ میانه = میانگین

۱ ۲۹۶۳

$$a = (ar)^2 \Rightarrow a = a^2 r^2 \Rightarrow ar^2 = 1$$

$$ar^3 = 5 \xrightarrow{ar^2=1} r = 5 \Rightarrow a = \frac{1}{25}$$

۲ ۲۹۶۴

$$(\sqrt{x-a} + \sqrt{x-4})(\sqrt{x-a} - \sqrt{x-4}) = 4(\sqrt{x-a} - \sqrt{x-4})$$

$$(x-a-x+4) = 4(\sqrt{x-a} - \sqrt{x-4}) \Rightarrow \frac{4-a}{4} = \sqrt{x-a} - \sqrt{x-4}$$

$$1 - (\sqrt{x-a} - \sqrt{x-4}) = 1 - \frac{4-a}{4} = \frac{a}{4}$$

۳ ۲۹۶۵

$$(r, 3n^2 - 1) = (r, 2n)$$

$$3n^2 - 1 = 2n \Rightarrow 3n^2 - 2n - 1 = 0 \Rightarrow n = 1 \text{ قق } n = -\frac{1}{3}$$

$$f = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 1)\} \Rightarrow f(3) = 1$$

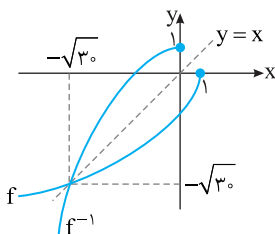
۲ ۲۹۶۶ توجه کنید که همواره $f(x) \leq 0$ پس

$$\frac{f(x)}{-x + f^{-1}(x)} \geq 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ یا } -x + f^{-1}(x) < 0$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$-x + f^{-1}(x) < 0 \Rightarrow f^{-1}(x) < x \Rightarrow x < -\sqrt{3} \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = -6, -7, \dots$$

پس نامتناهی مقدار صحیح برای x وجود دارد.



۲ ۲۹۵۴ چون $\hat{A} = 90^\circ$ ، پس متوازی‌الاضلاع ABMD مستطیل است و داریم

$$BM = AD = 3, \quad DM = AB = 4$$

از طرف دیگر

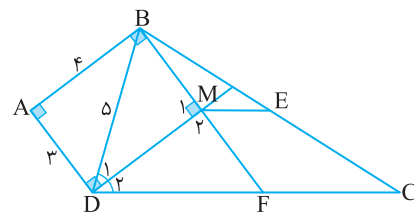
$$\begin{cases} \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \\ MD = MD \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{(قضی)}} \triangle MDB \cong \triangle MDF \Rightarrow \begin{cases} MF = MB = 3 \\ DF = DB = 5 \end{cases}$$

$$FC = DC - DF = 9 - 5 = 4$$

بنابراین

در نهایت در مثلث BFC، پاره‌خط ME وسط‌های دو ضلع را به هم وصل می‌کند. پس

$$ME = \frac{FC}{2} = 2$$



۴ ۲۹۵۵

طول قطر بزرگ بیضی $2a'$

$$F(0, 0), F'(a, 0) \Rightarrow FF' = |a| = 2c \Rightarrow c = \frac{|a|}{2} \quad (1)$$

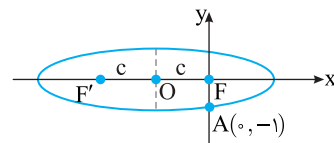
$$AF + AF' = 2a' \Rightarrow \sqrt{0^2 + 0^2} + \sqrt{a^2 + 0^2} = 2a' \Rightarrow a' = \frac{1 + \sqrt{a^2 + 1}}{2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow e = \frac{c}{a'} = \frac{\frac{|a|}{2}}{\frac{1 + \sqrt{a^2 + 1}}{2}} = \frac{|a|}{1 + \sqrt{a^2 + 1}}$$

$$\frac{|a|}{1 + \sqrt{a^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sqrt{5}|a| - 2 = 2\sqrt{a^2 + 1} \xrightarrow{\text{توان}} \sqrt{5}|a| - 2 = 2\sqrt{a^2 + 1}$$

$$5a^2 + 4 - 4\sqrt{5}|a| = 4a^2 + 4$$

$$a^2 - 4\sqrt{5}|a| = 0 \Rightarrow |a|(|a| - 4\sqrt{5}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ قق } \frac{1}{2} \\ |a| = 4\sqrt{5} \Rightarrow a = \pm 4\sqrt{5} \end{cases}$$



۱ ۲۹۵۶

$$1 - 3n^2 = -2n \Rightarrow 3n^2 - 2n - 1 = 0 \Rightarrow n = 1, \quad n = -\frac{1}{3}$$

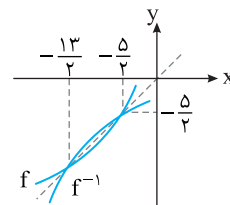
$$n = 1 \Rightarrow f = \{(y, -2), (1, -1), (2, 1), (y, -2), (1, 2)\} \times$$

$$n = -\frac{1}{3} \Rightarrow f = \{(y, \frac{1}{3}), (1, -1), (2, -\frac{1}{3}), (y, \frac{1}{3}), (-3, 2)\} \Rightarrow f(2) = -\frac{1}{3}$$

۳ ۲۹۵۷

$$\frac{f^{-1}(x)}{x - f^{-1}(x)} \geq 0 \xrightarrow{f^{-1}(x) < 0} x - f^{-1}(x) < 0$$

$$f^{-1}(x) > x \Rightarrow x \in (-\frac{13}{2}, -\frac{5}{2}) \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = -6, -5, -4, -3$$



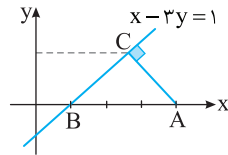
و داریم $\frac{a[a]}{f(a)} = -1$

1 ۲۹۶۹

1 ۲۹۷۱

1 ۲۹۷۳

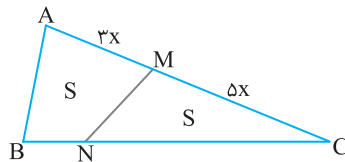
بنابراین انتهای کمان مربوط به زاویه α در ناحیه چهارم مثلثاتی قرار دارد.



۱ ۲۹۸۷

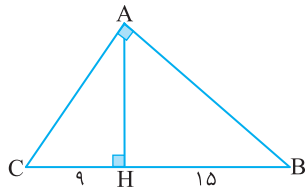
$$\frac{S_{ABC}}{S_{CMN}} = \frac{\frac{1}{2} AC \times CB \sin \hat{C}}{\frac{1}{2} CM \times CN \sin \hat{C}} = \frac{AC \times CB}{CM \times CN} = \frac{CB}{CN} = \frac{1}{4} = \frac{\Delta}{4}$$

$$\frac{BC - NC}{CN} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{BN}{CN} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2.5}$$



۲ ۲۹۸۸

$$\begin{cases} AB^2 = BH \times BC = 1.5 BC \\ AC^2 = CH \times BC = 9 BC \end{cases} \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{1.5}{9} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{1.5}}{3}$$



۳ ۲۹۸۹ چون $\hat{A} = 90^\circ$ ، پس متوازی الاضلاع ABED مستطیل است و داریم $DE = AB = \sqrt{3}$ ، $BE = AD = 1$

از طرف دیگر

$$\angle DEF : \angle F = 60^\circ \Rightarrow DE = \frac{\sqrt{3}}{2} DF \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} DF \Rightarrow DF = 2$$

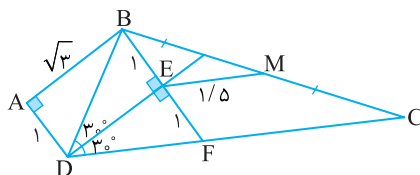
$$\hat{D} = 30^\circ \Rightarrow EF = \frac{1}{2} DF = 1$$

چون پاره خط EM وسطهای دو ضلع مثلث BFC را به هم وصل می کند، پس

$$EM \parallel CF, \quad EM = \frac{1}{2} CF \Rightarrow CF = 3$$

$$DC = DF + FC = 2 + 3 = 5$$

در نتیجه



۲ ۲۹۹۰ بدون از دست رفتن کلیت، فرض کنید $a > 0$ ، در این صورت

$$FF' = a \Rightarrow rc = a \Rightarrow c = \frac{a}{r}$$

از طرف دیگر، مجموع فواصل نقطه $A(-3, 0)$ از دو کانون بیضی برابر طول قطر بزرگ بیضی است. پس

$$ra' = AF + AF' = \sqrt{9 + a^2} + 3 \Rightarrow ra' - 3 = \sqrt{9 + a^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}}$$

$$4a'^2 - 12a' + 9 = 9 + a^2 \Rightarrow 4a'^2 - 12a' = a^2 \quad (1)$$

همچنین

$$e = \frac{c}{a'} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{r}{a'} \Rightarrow a = \sqrt{ra'} \xrightarrow{(1)} 4a'^2 - 12a' = ra'$$

$$ra' - 12a' = 0 \Rightarrow a' = 6 \Rightarrow a = 6\sqrt{r} \Rightarrow c = 3\sqrt{r}$$

$$b^2 = a'^2 - c^2 = 36 - 18 = 18 \Rightarrow b = 3\sqrt{2} \Rightarrow 2b = 6\sqrt{2}$$

در نتیجه

۱ ۲۹۸۰

$$\text{خط مماس } y + 12 = 6(x + 0/5) \Rightarrow y = 6x - 9$$

$$6x - 9 = \frac{a}{2x - 1} \Rightarrow 12x^2 - 24x + 9 - a = 0, \quad \Delta = 0 \Rightarrow a = -3$$

$$f(x) = \frac{-3}{2x - 1} \Rightarrow f(5) = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

۴ ۲۹۸۱ فرض $g(x) = \sqrt{2-x}$ و $f(x) = \sqrt{x+1}$ مطابق شکل زیر داریم

$$g(a) = f(b) \Rightarrow \sqrt{2-a} = \sqrt{b+1} \Rightarrow 2-a = b+1 \Rightarrow b = 1-a$$

اکنون مساحت مستطیل از رابطه زیر به دست می آید:

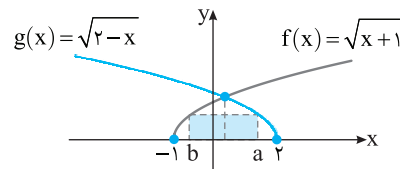
$$S(a) = (a - (1-a))g(a) = (2a-1)\sqrt{2-a}$$

$$S'(a) = 2\sqrt{2-a} + (2a-1) \times \frac{-1}{2\sqrt{2-a}} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{2-a} = \frac{2a-1}{2\sqrt{2-a}}$$

$$4(2-a) = 2a-1 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$S_{\max} = S\left(\frac{3}{2}\right) = \left(2 \times \frac{3}{2} - 1\right) \sqrt{2 - \frac{3}{2}} = 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

در نتیجه



۱ ۲۹۸۲

$$\bar{x} = \frac{1+5+3a}{3} = 2+a$$

$$\sigma^2 = \frac{(2+a-5)^2 + (2+a-1)^2 + (2+a-3a)^2}{3} = \frac{\Delta}{3}$$

$$\frac{(a-3)^2 + (a+1)^2 + (2-2a)^2}{3} = \frac{\Delta}{3}$$

$$a^2 - 6a + 9 + a^2 + 2a + 1 + 4 - 8a + 4a^2 = \Delta \Rightarrow 6a^2 - 12a + 6 = \Delta$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \bar{x} = 3$$

۲ ۲۹۸۳

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \longrightarrow \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

$$\binom{9}{5} \times 5 = \frac{9!}{4!5!} \times 5 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} = 630$$

۴ ۲۹۸۴

$$P(A) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

۳ ۲۹۸۵ فرض کنید A و B به ترتیب پیشامدهای برد نمایندگان اول و دوم باشند.

در این صورت A و B مستقل هستند و پیشامد مطلوب $(A-B) \cup (B-A)$ است. اکنون

$$P(A-B) + P(B-A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{\Delta}{10} + \frac{3}{10} - 2 \times \frac{\Delta}{10} = \frac{\Delta}{10} + \frac{3}{10} - \frac{4\Delta}{10} = \frac{62}{100}$$

۴ ۲۹۸۶ با توجه به شکل زیر، مثلث ABC در رأس C قائم الزاویه است و داریم

$$AC = \frac{|4-0-1|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

مساحت چنین مثلثی زمانی بیشترین مقدار ممکن است که B روی محور X باشد، یعنی $B(1, 0)$.

بنابراین $AB = 3$. اکنون از قضیه فیثاغورس داریم

$$BC^2 = AB^2 - AC^2 = 9 - \frac{9}{10} = \frac{81}{10} \Rightarrow BC = \frac{9}{\sqrt{10}}$$

$$S_{\max} = \frac{1}{2} AC \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{3}{\sqrt{10}} \times \frac{9}{\sqrt{10}} = \frac{27}{20} = 1.35$$

در نتیجه

۲ ۳۰۰۱

$$f(-2) = 0 \Rightarrow -32 + 24 - 2a + 5 = 0 \Rightarrow a = -1/5$$

۲ ۳۰۰۲

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \sin \theta = \frac{7}{2} \sin \theta$$

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} AD \times AE \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 7 \times 4 \times \sin \theta = 14 \sin \theta$$

$$S_{ABC} - S_{ADE} = 1/5 \Rightarrow \frac{7}{2} \sin \theta = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{7} \Rightarrow \theta = 3^\circ$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

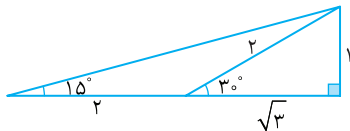
۴ ۳۰۰۳

$$\sin(\pi - \frac{\pi}{12}) = \sin \frac{\pi}{12}, \quad \cos(\pi - \frac{\pi}{12}) = -\cos \frac{\pi}{12}$$

$$\tan \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\frac{\sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}} = \frac{\tan \frac{\pi}{12} - 1}{\tan \frac{\pi}{12} + 1} = \frac{2 - \sqrt{3} - 1}{2 - \sqrt{3} + 1} = \frac{1 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \times \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{3 + \sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3}{9 - 3} = \frac{-2\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$



۳ ۳۰۰۴

$$\cos 2x = \sin(\frac{2\pi}{3} - x) = -\cos x = \cos(\pi - x) \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm (\pi - x)$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi + \pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow x = 2k\pi - \pi \end{cases}$$

۲ ۳۰۰۵

$$f^{|x|} = (\frac{1}{f})^{x^2 - x} = f^{x - x^2} \Rightarrow |x| = x - x^2$$

$$x \geq 0 \Rightarrow x = x - x^2 \Rightarrow -x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x < 0 \Rightarrow -x = x - x^2 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, 2 \text{ غ قق}$$

۴ ۳۰۰۶

$$\bar{x} = \frac{a+b+c+d}{4} = 3$$

$$\sigma^2 = 1/5 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4} - 9 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 42$$

$$\sigma_{\text{جدید}}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\delta}{4} - (\frac{17}{4})^2 = \frac{42}{4} - (\frac{17}{4})^2 = \frac{42}{4} - \frac{289}{16} = 1/16$$

۱ ۳۰۰۷

a	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$1-a$	+	0	-	-
$9-3a$	+	+	0	-
$\frac{1-a}{9-3a}$	+	0	-	+

$\frac{1-a}{9-3a} \leq 0 \Rightarrow 1 \leq a < 3 \Rightarrow a = 1, 2$

۴ ۲۹۹۱

$$A = \frac{\sqrt{1+\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{3}-1}}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} \Rightarrow A^2 = \frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{3}-1+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \times \sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$$

$$A = \sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \Rightarrow A-2 = 2+\sqrt{6}-2 = \sqrt{6}$$

۱ ۲۹۹۲

$$(\frac{3-n}{2}, \frac{n+3}{2}) = (\frac{3}{2} - \frac{n}{2}, 1 + \frac{3}{2} - \frac{n}{2}) \Rightarrow 1 < 1 + \frac{3}{2} - \frac{n}{2} \leq 2 \Rightarrow 1 < -\frac{1}{2} + \frac{n+3}{2} \leq 2$$

$$\frac{3}{2} < \frac{n+3}{2} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow 3 < n+3 \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} 3 < \frac{n+3}{2} \Rightarrow n^2 - 2n + 6 > 0 \Rightarrow \Delta < 0 \\ \frac{n+3}{2} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow n^2 - 4n + 6 \leq 0 \Rightarrow 2 \leq n \leq 3 \end{cases}$$

$$n=2 \Rightarrow (\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) \times \quad n=3 \Rightarrow (0, 2) \checkmark$$

۴ ۲۹۹۳

$$\frac{1}{2}a + 2b + \frac{3}{2}c + a - \frac{1}{2}b = \frac{3}{2}(a+b+c) = \frac{3}{2} \times 18 = 27$$

۳ ۲۹۹۴

$$2a+3=0 \Rightarrow a=-\frac{3}{2}, \quad 4b-5<0 \Rightarrow b<\frac{5}{4} \Rightarrow b=1$$

$$-x+4c+1<0 \Rightarrow x>4c+1 \Rightarrow 4c+1=a=-\frac{3}{2} \Rightarrow 4c=-\frac{5}{2} \Rightarrow c=-\frac{5}{8}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{5}{8}} = \frac{12}{5} = 2/4$$

۳ ۲۹۹۵

$$y = 3 - \sqrt{2x} \xrightarrow{\text{واحد چپ}} y = 3 - \sqrt{2(x+1)} = 3 - \sqrt{2x+2}$$

$$\xrightarrow{\text{واحد بالا}} y = -3 + \sqrt{2x+2} + 5 = \sqrt{2x+2} + 2$$

$$\sqrt{2x+2} + 2 = \frac{9}{2} \Rightarrow \sqrt{2x+2} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2x+2 = \frac{25}{4} \Rightarrow 2x = \frac{17}{4} \Rightarrow x = \frac{17}{8}$$

۲ ۲۹۹۶

$$x_S = m > 0, \quad y_S = m^2 - m^2 + 2 - m > 0 \Rightarrow m < 2 \Rightarrow 0 < m < 2 \Rightarrow m = 1$$

۱ ۲۹۹۷

$$g(f(x)) = g(x\sqrt{x}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \\ x\sqrt{x} = 2\sqrt{2} \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

۲ ۲۹۹۸

$$\alpha + \beta = -1, \quad \alpha\beta = -1 - m^2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1 + 2(1 + m^2) = 2m^2 + 3$$

بنابراین کمترین مقدار عبارت $2m^2 + 3$ برابر با ۳ است.

۳ ۲۹۹۹

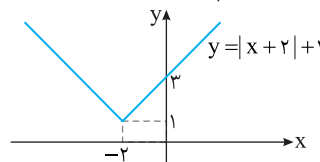
$$y = x - 4 \xrightarrow{(a,-1)} -1 = a - 4 \Rightarrow a = 3$$

$$(3, -1) \in f^{-1} \Rightarrow (-1, 3) \in f$$

$$1 + \sqrt{b+a} = 3 \xrightarrow{a=2} \sqrt{b+2} = 2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a - b = 3 - 1 = 2$$

۴ ۳۰۰۰

$$m \geq 0 \Rightarrow \delta m + 2m \leq 1 \Rightarrow 7m \leq 1 \Rightarrow m \leq \frac{1}{7} \Rightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{7} \Rightarrow a = 0, b = \frac{1}{7}$$



۲ ۳۰۱۶ فرض کنید A پیشامد قبولی نیلوفر و B پیشامد قبولی دوست نیلوفر در

درس ریاضی باشند. در این صورت A و B مستقل هستند و می توان نوشت

$$P(A) = \frac{2}{3} P(B)$$

$$P(B-A) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(B) - P(A)P(B) = \frac{2}{3}$$

$$P(B)(1-P(A)) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} P(A)(1-P(A)) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{P(A)-x}{1} \Rightarrow 4x - 4x^2 = 1$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)^2 = 0 \Rightarrow P(A) = x = \frac{1}{2} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{3}$$

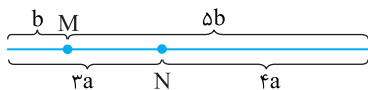
$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

۳ ۳۰۱۷ با توجه به شکل می توان نوشت

$$va = 6b \Rightarrow b = \frac{va}{6}, \quad 3a - b = 22 \Rightarrow 3a - \frac{va}{6} = 22 \Rightarrow a = 12$$

$$|AB| = va = 84 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 8 + 4 = 12$$



۱ ۳۰۱۸

$$\triangle ABC: AC^2 = AB^2 + BC^2 = 16^2 + 12^2 = 400 \Rightarrow AC = 20$$

$$BC^2 = CH \times AC \Rightarrow 12^2 = CH \times 20 \Rightarrow CH = 7.2$$

$$AE = EH = \frac{AH}{2} = \frac{20 - 7.2}{2} = 6.4$$

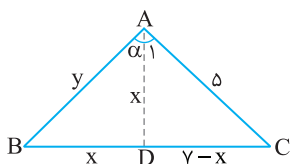
$$DE \parallel BC \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{تعمیم قضیه}} \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{6.4}{20} = \frac{DE}{12} \Rightarrow DE = 3.84$$

۴ ۳۰۱۹

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B} \\ \hat{C} = \hat{C} \end{cases} \xrightarrow{\text{(ز)}} \triangle ACD \sim \triangle BCA \Rightarrow \frac{CD}{CA} = \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BA}$$

$$\frac{CD}{CA} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{y-x}{\delta} = \frac{\delta}{y} \Rightarrow y-x = \frac{\delta^2}{y} \Rightarrow x = \frac{24}{y}$$

$$\frac{AD}{BA} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\delta}{y} \Rightarrow y = \frac{y}{\delta} \times x = \frac{y}{\delta} \times \frac{24}{y} = \frac{24}{\delta} = 4/8$$



۲ ۳۰۲۰

$$m_{\ell'} = m_{\ell''} = \frac{4}{3}, \quad m_{\ell} = -\frac{3}{4}$$

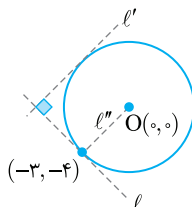
$$\ell: y = -\frac{3}{4}x + b \xrightarrow{(-3, -4)} \frac{9}{4} + b = -4 \Rightarrow b = -\frac{25}{4}$$

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{25}{4} \quad (1)$$

$$r = \sqrt{9+16} = 5, \quad \ell': y = \frac{4}{3}x + \frac{25}{3} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{4}{3}x + \frac{25}{3} = -\frac{3}{4}x - \frac{25}{4} \Rightarrow 16x + 100 = -9x - 75$$

$$25x = -175 \Rightarrow x = -7, y = -1 \Rightarrow xy = 7$$



۲ ۳۰۰۸

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} [\lambda x^2 - x] = [\lambda(-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}] = [-\frac{1}{2}] = -1$$

۴ ۳۰۰۹

$$\lim_{x \rightarrow (-2\pi)^+} \frac{f+k[\frac{x}{\pi}]}{\sin x} = \frac{f+k[-2^+]}{0^+} = \frac{f-2k}{0^+} = +\infty \Rightarrow f-2k > 0 \Rightarrow k < \frac{f}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2\pi)^-} \frac{f+k[\frac{x}{\pi}]}{\sin x} = \frac{f+k[-2^-]}{0^-} = \frac{f-2k}{0^-} = +\infty \Rightarrow f-2k < 0 \Rightarrow k > \frac{f}{2}$$

$$\frac{f}{2} < k < \frac{f}{2} \Rightarrow -2 < -k < -\frac{f}{2} \Rightarrow [-k] = -1$$

۱ ۳۰۱۰

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{3}{x+a} = \frac{3}{2a} \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{a-1}{x-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2a} = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

اما این مقدار قابل قبول نیست، چون اگر $a = \frac{3}{2}$ ، آن گاه تابع f نمی تواند روی $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{2x+3} & x \geq \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2(x-1)} & x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

پیوسته باشد.

نقاط $x=1$ و $x=\frac{3}{2}$ نقاط ناپیوستگی تابع f هستند.

۲ ۳۰۱۱

$$\text{آهنگ تغییر متوسط: } \frac{f(2)-f(1)}{2} = \frac{1-\frac{a}{2} - 1 + \frac{a}{2}}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{2} = \frac{a}{4}$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه ای: } f'(x) = \frac{a}{x^2} = \frac{a}{3} = \frac{a}{x^2} \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

۱ ۳۰۱۲ توجه کنید که $f'(x) = 2x^2 + a$ پس

$$f(2) = 0 \Rightarrow 8 + 2a - b = 0 \Rightarrow b - 2a = 8$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 12 + a = 0 \Rightarrow a = -12 \Rightarrow b = -16$$

$$b - a = -16 + 12 = -4$$

۳ ۳۰۱۳

$$x=0 \Rightarrow y=\sqrt{2} \Rightarrow A(0, \sqrt{2}), \quad d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-\sqrt{2})^2}$$

$$y = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad d = \sqrt{x^2 + (2x - \sqrt{2})^2} \Rightarrow d' = \frac{2x + 2(2x - \sqrt{2}) \times 2}{2\sqrt{x^2 + (2x - \sqrt{2})^2}} = 0$$

$$1 \times x = 4\sqrt{2} \Rightarrow x = 0/4\sqrt{2}$$

$$d = \sqrt{(0/4\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{0/32 + 0/8} = \sqrt{0/4} = \sqrt{0/4 \times 10} = 0/2\sqrt{10}$$

۴ ۳۰۱۴

$$\frac{1}{9} \times \dots \times \dots \Rightarrow \left(\frac{6}{2} \right) = 15$$

$$\frac{1}{7} \times \dots \times \dots \Rightarrow \left(\frac{4}{2} \right) = 6$$

$$\frac{1}{8} \times \dots \times \dots \Rightarrow \left(\frac{5}{2} \right) = 10$$

$$\frac{1}{5} \times \dots \times \dots \Rightarrow \left(\frac{3}{2} \right) = 3$$

$$\frac{1}{3} \times \dots \times \dots \Rightarrow \left(\frac{2}{2} \right) = 1$$

$$15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35$$

۳ ۳۰۱۵ توجه کنید که $n(S) = 6 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$. اگر A پیشامد مطلوب باشد،

$$A = \{(1, 1, 1, 1)\} \Rightarrow n(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{48}$$

آن گاه

۱ ۳۰۲۵

$$a_1 = a, \quad h_1 = h, \quad h = 3a + 2$$

$$a_r = a + r, \quad h_r = h + r$$

$$S_r = \frac{1}{2} a_r h_r = \frac{(a+r)(h+r)}{2} = \frac{(a+r)(3a+r+2)}{2} = \frac{(a+r)(3a+2)}{2}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} a_1 h_1 = \frac{ah}{2} = \frac{a(3a+2)}{2} = \frac{3a^2+2a}{2}$$

$$\frac{3(a+r)(a+r)}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{a^2+6a+8}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow 3(3a^2+2a) = 2(a^2+6a+8)$$

$$9a^2+6a-2a^2-12a-16=0 \Rightarrow a=2, a=-\frac{8}{7} \Rightarrow a=2, \quad h=8 \Rightarrow S_1=8$$

۲ ۳۰۲۶ $f(x)=x$ یعنی تابع همانی است، یعنی $g(x)=c$ یعنی تابع ثابت است،

$$g(3x) + 2f(3+x) = 3+2x \Rightarrow c+2(3+x) = 3+2x$$

$$c+6+2x = 3+2x \Rightarrow c = -3 \Rightarrow \frac{f(-1)}{g(f)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

۳ ۳۰۲۷ چون f و g روی محور y ها متقاطع اند، پس

$$f(0) = g(f(0)) \Rightarrow \sqrt{a} = g(\sqrt{a}) \Rightarrow \sqrt{a} = 3 - \sqrt{a}$$

$$2\sqrt{a} = 3 \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{9}{4} = 2.25$$

۱ ۳۰۲۸

$$\sqrt{\frac{1}{\alpha}} + \sqrt{\frac{1}{\beta}} = 5 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = 5 \Rightarrow \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} = 5 \xrightarrow{\text{توان ۲}}$$

$$\frac{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta} = 25 \Rightarrow \frac{m+14+2(\frac{1}{6})}{\frac{1}{36}} = 25 \Rightarrow m+14+12 = 25$$

$$m+26 = 25 \Rightarrow m = -1$$

حالا حاصل ضرب جوابهای معادله جدید را به دست می آوریم.

$$mx^2 + 3x + 2 = 0 \xrightarrow{m=-1} -x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{2}{-1} = -2$$

۴ ۳۰۲۹

$$(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) \Rightarrow -\sqrt{a + \frac{9}{25}b} = -\frac{4}{5} \xrightarrow{\text{توان ۲}} a + \frac{9}{25}b = \frac{16}{25} \quad (1)$$

$$(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) \Rightarrow -\sqrt{a + \frac{16}{25}b} = -\frac{3}{5} \xrightarrow{\text{توان ۲}} a + \frac{16}{25}b = \frac{9}{25} \quad (2)$$

$$(1)-(2) \Rightarrow -\frac{7}{25}b = \frac{7}{25} \Rightarrow b = -1 \xrightarrow{(1)} a = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = -1$$

۳ ۳۰۳۰

$$4-m \geq 2m+3 \Rightarrow m \leq \frac{1}{3}$$

$$4-m \geq 2m+3 \geq m-2 \geq -1 \Rightarrow \begin{cases} 2m+3 \geq m-2 \Rightarrow m \geq -5 \\ m-2 \geq -1 \Rightarrow m \geq -8 \end{cases}$$

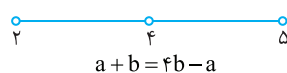
$$5 \leq m \leq \frac{1}{3} \Rightarrow m = 0, -1, \dots, -5$$

۱ ۳۰۳۱ اجتماع دو بازه داده شده همسایگی محذوف ۴ است. پس

$$(r, a+b) \cup (fb-a, 5) = (r, 5) - \{4\}$$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ fb-a=4 \end{cases} \xrightarrow{+} 5b=8 \Rightarrow b=\frac{8}{5} \Rightarrow a=\frac{12}{5}$$

$$b-a = \frac{8}{5} - \frac{12}{5} = -\frac{4}{5}$$



۳ ۳۰۲۱ ابتدا هر کدام از رادیکالها را ساده می کنیم:

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^8}} = \sqrt[3]{2^{\frac{8}{3}}} = 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}, \quad \sqrt[3]{162} = \sqrt[3]{81 \times 2} = \sqrt[3]{81} \times \sqrt[3]{2} = 3 \times 2^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[3]{4^6} \sqrt[3]{2} = 2 \times 2^{\frac{1}{3}}$$

حالا هر ۳ را در هم ضرب می کنیم:

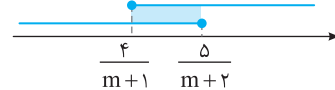
$$2^{\frac{2}{3}} \times 3 \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2 \times 2^{\frac{1}{3}} = 6 \times 2^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 6 \times 2^{\frac{4}{3}} = 6 \times 2^{\frac{1}{3}} = 6 \times 2^{\frac{1}{3}} = 12$$

در نتیجه

$$\frac{12}{\sqrt[3]{6}} = \frac{12}{\sqrt[3]{6}} \times \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{6}} = \frac{12\sqrt[3]{6}}{6} = 2\sqrt[3]{6}$$

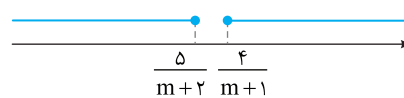
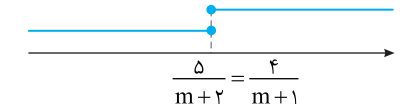
۲ ۳۰۲۲ اگر دو مجموعه به صورت زیر باشند، اشتراکشان یک بازه است که

مجموعه ای نامتناهی است. پس غیرقابل قبول است.



اما اگر مجموعه ها به یک از دو صورت زیر باشند، اشتراکشان یک عدد یا تهی است (تهی مجموعه ای متناهی است).

$$\frac{5}{m+2} \leq \frac{4}{m+1} \xrightarrow{\text{مخرجها مثبت اند}} 5m+5 \leq 4m+4 \Rightarrow m \leq -1$$



اعداد طبیعی ای که کوچکتر از یا مساوی ۳ باشند، عبارت اند از

۴ ۳۰۲۳

$$a, b, c \Rightarrow \text{دنباله حسابی} \Rightarrow 2b = a + c$$

$$b, \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}c \Rightarrow \text{دنباله هندسی} \Rightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{bc}{4} \Rightarrow a^2 = bc$$

$$a^2 = (a+d)(a+2d) = a^2 + 3ad + 2d^2 \Rightarrow 3ad + 2d^2 = 0$$

$$3a + 2d = 0 \Rightarrow d = -\frac{3}{2}a$$

$$2r = 2(\frac{1}{2}a) = \frac{a}{b} = \frac{a}{a+d} = \frac{a}{a-\frac{3}{2}a} = \frac{a}{-\frac{1}{2}a} = -2$$

۳ ۳۰۲۴ نامعادله را به شکل زیر می نویسیم:

$$(\delta - 2m)x^2 - (2m + n - \delta)x - n < 0$$

اگر بخواهیم جواب نامعادله بالا بازه $(-1, m-2)$ باشد، باید سهمی به شکل زیر باشد، یعنی دهانه سهمی رو به بالا باشد. پس

$$\delta - 2m > 0 \Rightarrow 2m < \delta \Rightarrow m < \frac{\delta}{2}$$

m عددی طبیعی است پس $m=1$ یا $m=2$. اگر $m=1$ آن گاه

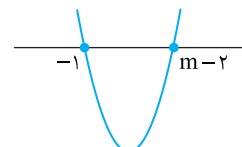
$$(-1, m-2) = (-1, -1)$$

اگر $m=2$ آن گاه $(-1, m-2) = (-1, 0)$. بنابراین نامعادله می شود

$$x^2 - (n-1)x - n < 0$$

ریشه های عبارت سمت چپ عبارت اند از صفر و -1 . پس

$$P = 0 \Rightarrow -n = 0 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow m + n = 2$$



۳۰۳۸ تابع f در نقطه $x = -2$ حد دارد. پس باید حد چپ و حد راست تابع در این نقطه با هم برابر باشند.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) \\ f(x) &= 2\left[1 - \frac{x}{2}\right] + a\left[\frac{x+2}{3}\right] = 2\left[1 - \frac{-2}{2}\right] + a\left[\frac{-2+2}{3}\right] \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \left(2\left[1 - \frac{x}{2}\right] + a\left[\frac{x+2}{3}\right]\right) &= 2\left[1 - \frac{(-2)^+}{2}\right] + a\left[\frac{(-2)^+ + 2}{3}\right] \\ &= 2\left[1 - (-1)^+\right] + a\left[\frac{0^+}{3}\right] = 2\left[2^-\right] = 2 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \left(2\left[1 - \frac{x}{2}\right] + a\left[\frac{x+2}{3}\right]\right) &= 2\left[1 - (-1)^-\right] + a\left[\frac{(-2)^- + 2}{3}\right] \\ &= 2\left[2^+\right] + a\left[\frac{0^-}{3}\right] = 4 - a \Rightarrow 4 - a = 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \left[\frac{a}{3}\right] = \left[\frac{2}{3}\right] = 0\end{aligned}$$

۳۰۳۹

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1-k[x]}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1+k}{x^2-1} = \frac{1+k}{0^-} = -\infty \Rightarrow 1+k > 0 \Rightarrow k > -1 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{1-k[x]}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{1+2k}{x^2-1} = \frac{1+2k}{0^+} = +\infty \Rightarrow 1+2k < 0 \Rightarrow k < -\frac{1}{2} \\ -1 < k < -\frac{1}{2} &\Rightarrow -\pi < k\pi < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow -1 < \cos k\pi < 0\end{aligned}$$

مؤلفه اول و دوم همواره منفی هستند، پس این نقاط در ناحیه سوم هستند.

۳۰۴۰ $f(2a)$ برابر صفر است. پس صورت کسر باید عامل $(x-2a)$ را داشته باشد. از طرفی تابع در $x=a$ پیوسته است و حد کسر باید در نقطه $x=a$ برابر ۲ باشد. با توجه به کسر داده شده صورت کسر باید عامل $(x-a)$ را نیز داشته باشد. یعنی

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-a)(x-2a)}{a-x} & x \neq a \\ 2 & x = a \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (-(x-2a)) = -(a) = a = 2$$

صورت کسر برابر است با $(x-2)(x-4) = x^2 - 6x + 8$. پس $m = -6$ و $n = 8$. بنابراین $n-m = 8 - (-6) = 14$

۳۰۴۱

$$y = -ax + 2 \Rightarrow \begin{cases} \text{مقدار تابع در } x=4 \rightarrow f(4) = -4a + 2 \\ \text{مشق تابع در } x=4 \rightarrow f'(4) = -a \end{cases}$$

$$f(4) + f'(4) = -1 \Rightarrow -4a + 2 - a = -1 \Rightarrow -5a = -3 \Rightarrow a = \frac{3}{5}$$

پس $f'(4) = -a = -\frac{3}{5} = -0.6$

۳۰۴۲ $d: y = mx$ خط d از مبدأ مختصات می‌گذرد. پس $y = mx$ بر تابع $f(x) = 2\sqrt{x}(4x^2 + 3)$ مماس است. پس

$$f(x) = 2\sqrt{x}(4x^2 + 3) = 8x^2\sqrt{x} + 6\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

نقطه (a, ma) را محل تماس خط و تابع در نظر می‌گیریم:

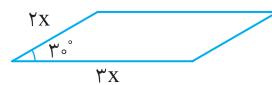
$$\begin{aligned}f(a) &= 8a^2\sqrt{a} + 6\sqrt{a} = ma \\ f'(a) &= 2 \cdot a \sqrt{a} + \frac{3}{\sqrt{a}} = m \xrightarrow{\times a} 2 \cdot a^2\sqrt{a} + 3\sqrt{a} = ma \\ ma &= 2 \cdot a^2\sqrt{a} + 3\sqrt{a} = 8a^2\sqrt{a} + 6\sqrt{a} \\ 1 \cdot a^2\sqrt{a} &= 3\sqrt{a} \xrightarrow{\div \sqrt{a}} 1 \cdot a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

فقط $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ را می‌پذیریم چون $a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ در دامنه تابع نیست.

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 8\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{3}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}}} = \frac{m}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{m}{\sqrt{3}} \Rightarrow m = \frac{8}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$$

۳۰۳۲

$$\begin{aligned}S &= (2x)(3x)(\sin 30^\circ) = 54 \Rightarrow 3x^2 = 54 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2} \\ 2(3x + 2x) &= 10 \cdot x = 10 \cdot (3\sqrt{2}) = 30\sqrt{2} \quad \text{اکنون محیط متوازی الاضلاع می‌شود:}\end{aligned}$$



۳۰۳۳ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned}A &= -1 + \tan(7 \times 22/5^\circ) = -1 + \tan(154^\circ - 1 \times 22/5^\circ) \\ &= -1 + \tan(180^\circ - 22/5^\circ) = -1 - \tan 22/5^\circ\end{aligned}$$

با فرض $\alpha = 22/5^\circ$ و طبق رابطه $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ داریم

$$\begin{aligned}\tan 45^\circ &= \frac{2 \tan 22/5^\circ}{1 - \tan^2 22/5^\circ} \xrightarrow{\tan 22/5^\circ = t} 1 = \frac{2t}{1-t^2} \Rightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \\ t &= \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} \xrightarrow{t = \tan 22/5^\circ > 0} t = \sqrt{2} - 1 \\ A &= -1 - (\sqrt{2} - 1) = -\sqrt{2}\end{aligned}$$

۳۰۳۴ دو طرف را برحسب یک نسبت مثلثاتی می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\sin 2x &= \cos 3x \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos 3x \\ 3x &= 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \Rightarrow x = \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{5\pi}{10} \\ 3x &= 2k\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

۳۰۳۵ ابتدا توجه کنید که $\log_7 5 = \frac{1}{\log_5 7} = \frac{1}{0.63} = 1.58$

بنابراین

$$\begin{aligned}\log_{14} 10 &= \frac{\log_7 10}{\log_7 14} = \frac{\log_7 5 + \log_7 2}{\log_7 7 + \log_7 2} = \frac{\log_7 5 + 1}{\log_7 7 + 1} = \frac{2.58}{2.58 + 1} \\ &= \frac{2}{3.58} = \frac{30}{128} = \frac{15}{64}\end{aligned}$$

۳۰۳۶ ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{1+10+8+1/2+1/16+1/16}{5} = \frac{5/6}{5} = 1/12$$

حالا واریانس را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{(1-1/12)^2 + (10-1/12)^2 + (8-1/12)^2 + (1/2-1/12)^2 + (1/16-1/12)^2 + (1/16-1/12)^2}{5} \\ &= \frac{0.0144 + 0.0016 + 0.0064 + 0.0016 + 0.0016 + 0.0016}{5} = \frac{0.0256}{5} \\ \sigma &= \sqrt{\frac{0.0256}{5}} = \frac{0.16}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

انحراف معیار جذر واریانس است. پس

در نهایت ضریب تغییرات برابر است با

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{10 \times \sqrt{5}}{112} = \frac{16}{112 \times \sqrt{5}} = \frac{1}{7\sqrt{5}}$$

۳۰۳۷ در $x = 2/5$ حفره داریم، پس ریشه صورت و مخرج است.

$$4x - c = 0 \xrightarrow{x=2/5} 10 - c = 0 \Rightarrow c = 10$$

تابع در $x=1$ پیوسته است، پس

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow \frac{2+a+b}{4-1} = 4-5 \Rightarrow a+b=4$$

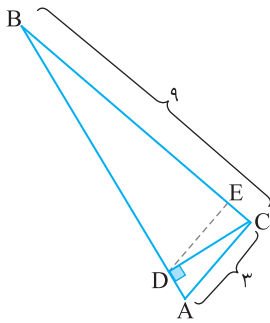
۱ ۳۰۴۹ در مثلث قائم الزاویه ABC به کمک روابط طولی داریم

$$BA = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

$$AC^2 = AD \times AB \Rightarrow 9 = AD \times 3\sqrt{10} \Rightarrow AD = \frac{9}{3\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$BD = 3\sqrt{10} - \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{27\sqrt{10}}{10}$$

$$DE \parallel AC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA} \Rightarrow \frac{BE}{9} = \frac{\frac{27\sqrt{10}}{10}}{3\sqrt{10}} \Rightarrow BE = \frac{81}{10} = 8.1$$



۱ ۳۰۵۰

$$m_A = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{b-a}{-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow 6(b-a) = \sqrt{3} \Rightarrow b-a = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{طول ضلع} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)^2 + (b-a)^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{3}{36}} = \sqrt{\frac{4}{36}} = \frac{1}{3}$$

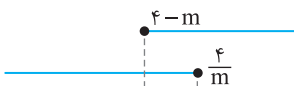
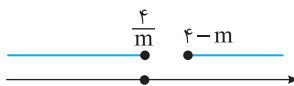
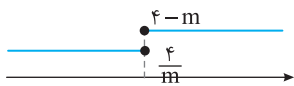
$$\text{قطر} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

۱ ۳۰۵۱

$$\frac{\sqrt[4]{49\sqrt{3}}}{\sqrt[4]{343\sqrt{3}\sqrt{3}^{-1}}} = \frac{\sqrt[4]{49^2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}}{\sqrt[4]{49^3 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}} = \frac{\sqrt[4]{\frac{49^2}{\sqrt{3}}}}{\sqrt[4]{\frac{49^3}{\sqrt{3}}}} = \frac{\sqrt[4]{49^2}}{\sqrt[4]{49^3}} = \frac{49^{\frac{1}{2}}}{49^{\frac{3}{4}}} = 49^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{49^{\frac{1}{4}}}$$

۳ ۳۰۵۲ طبق این شکل، برای این که اشتراک این دو بازه متناهی شود باید:

$$f-m \geq \frac{f}{m} \Rightarrow \frac{-(m-2)^2}{m} \geq 0 \Rightarrow m=2$$



هندسی: $b^2 = ac$

$$\text{حسابی: } fa = c + 3b \Rightarrow b = \frac{fa-c}{3} \xrightarrow{\text{توان}} b^2 = \frac{16a^2 - 8ac + c^2}{9} = ac$$

$$16a^2 - 8ac + c^2 = 0 \Rightarrow (4a-c)^2 = 0$$

$$a=c, a=\frac{c}{16}, b=\frac{4(\frac{c}{16})-c}{3} = \frac{\frac{c}{4}-c}{3} = \frac{-\frac{3c}{4}}{3} = -\frac{c}{4}$$

$$\frac{a_9}{a_6} = r^3 = \left(\frac{b}{a}\right)^3 = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1}{64} \Rightarrow r = -\frac{1}{4}$$

۲ ۳۰۴۳ دو نقطه A و B روی خطی موازی محور yها هستند، یعنی هم طول

هستند. برای پیدا کردن طول پاره خط AB کافی است عرض آنها را از هم کم کنیم. پس

$$AB = (x^3 + x^2 + 1) - (x^3 - 2x - 3) = x^2 + 2x + 4$$

کمترین مقدار طول پاره خط AB عرض رأس سهمی بالا است.

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1 \Rightarrow y_S = 1 - 2 + 4 = 3$$

۳ ۳۰۴۴

$$\begin{cases} \frac{3}{1,3,5} \times \frac{6}{1,3,5} \times \frac{5}{1,3,5} = 9 \\ \frac{1}{7} \times \frac{4}{1,3,5} \times \frac{5}{1,3,5} = 20 \rightarrow 90 + 20 + 1 = 111 \\ \frac{1}{7} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{10} = 1 \end{cases}$$

۱ ۳۰۴۵ ۳ کارت از ۸ کارت انتخاب می کنیم، پس

$$n(S) = \binom{8}{3} = 56$$

حالت مطلوب آن است که یکی از کارت ها ۱ و دوتای دیگر ۲، ۳، ۴ یا یکی از

کارت ها ۲ و دوتای دیگر از اعداد ۴، ۵ یا ۸ باشند. پس

$$n(A) = \binom{1}{1} \binom{7}{2} + \binom{1}{1} \binom{3}{2} = 21 + 3 = 24 \Rightarrow P(A) = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

۴ ۳۰۴۶ تعداد مهره های سبز را x در نظر می گیریم:

$$\frac{\binom{5}{1} \binom{x}{1} + \binom{5}{2}}{\binom{x+5}{2}} = \frac{5x+10}{(x+5)(x+4)} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{2(x+2)}{(x+5)(x+4)} = \frac{1}{6}$$

$$(x+5)(x+4) = 12(x+2) \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

۳ ۳۰۴۷ علاوه بر نسبت اضلاع متناظر، نامساوی مثلث را نیز بررسی می کنیم:

$$\frac{4}{3} = \frac{x}{3} = \frac{5}{y} \Rightarrow x = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}, y = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} \times$$

$$\frac{4}{7} = \frac{x}{3} = \frac{5}{y} \Rightarrow x = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}, y = \frac{35}{4} = 8\frac{3}{4} \checkmark$$

$$\frac{5}{3} = \frac{x}{3} = \frac{4}{y} \Rightarrow x = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}, y = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5} \times$$

$$\frac{5}{7} = \frac{x}{3} = \frac{4}{y} \Rightarrow x = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}, y = \frac{28}{5} = 5\frac{3}{5} \checkmark$$

$$\frac{35}{4} - \frac{28}{5} = \frac{175-112}{20} = \frac{63}{20} = 3\frac{3}{20}$$

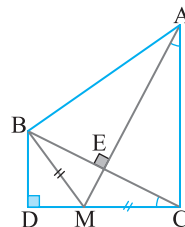
۳ ۳۰۴۸ ابتدا توجه کنید که

$$\triangle BDC: BC^2 = BD^2 + CD^2$$

$$= 2^2 + 4^2 = 20 \Rightarrow BC = 2\sqrt{5}$$

چون مثلث BMC متساوی الساقین است، پس

$$BE = CE = \frac{BC}{2} = \sqrt{5}$$



از طرف دیگر

$$\begin{cases} \hat{E} = \hat{D} = 90^\circ \\ \hat{A} = \hat{C} \end{cases} \xrightarrow{(ز)} \triangle AEC \sim \triangle CDB$$

$$\frac{BD}{CE} = \frac{CD}{AE} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{AE} \Rightarrow AE = 2\sqrt{5}$$

(توجه کنید که اضلاع دو زاویه A و C بر هم عمودند. پس این دو زاویه هم اندازه اند.)

در نتیجه

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} AE \times BE = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$$

۱ ۳۰۷۰

$x=a$ ریشه صورت و مخرج است. تجزیه می‌کنیم تا عامل صفرشونده ساده شود:

$$\begin{aligned} \frac{m(x^r + \frac{n}{m})}{-(x-a)} &= \frac{-m(x^r - (-\frac{n}{m}))}{x-a} \\ &= \frac{-m(x - \sqrt{-\frac{n}{m}})(x + \sqrt{-\frac{n}{m}})}{x-a} = -m(x+a) \\ a &= \sqrt{-\frac{n}{m}} \Rightarrow -ma^r = n \end{aligned}$$

تابع را بازنویسی کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} -m(x+a) & x \neq a \\ 1 & x = a \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -ma = 1 \Rightarrow ma = -\frac{1}{a}$$

$$\frac{a}{n} = \frac{-\frac{1}{ma}}{-ma^r} = \frac{1}{r(ma)^r} = \frac{1}{r(-\frac{1}{a})^r} = r$$

۲ ۳۰۷۱

$$f(r) = y(r) = -ra - \delta, \quad f'(r) = -a$$

$$f'(r) - f(r) = r \Rightarrow (-a) - (-ra - \delta) = r \Rightarrow a = -\frac{r}{r}$$

$$\frac{f(r)}{f'(r)} = \frac{-ra - \delta}{-a} = \frac{-r(-\frac{r}{r}) - \delta}{-(-\frac{r}{r})} = -\frac{1}{r}$$

۳ ۳۰۷۲ این نقطه را $A(\alpha, c\alpha)$ می‌نامیم.

$$d: y = cx$$

$$f(\alpha) = \frac{\sqrt{\alpha}}{-2\alpha^r + \alpha + 1} = c\alpha \Rightarrow \frac{1}{-2\alpha^r + \alpha + 1} = c\sqrt{\alpha}$$

$$c\sqrt{\alpha}(-2\alpha^r + \alpha + 1) = 1 \Rightarrow -2c\alpha^{\frac{r}{2}} + c\alpha^{\frac{r}{2} + 1} + c\alpha^{\frac{r}{2}} = 1 \xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$-2\alpha^{\frac{r}{2}} + \frac{r}{2}\alpha^{\frac{r}{2}-1} + \frac{1}{2}\alpha^{\frac{r}{2}-1} = 0 \Rightarrow -2\alpha\sqrt{\alpha} + \frac{r}{2}\sqrt{\alpha} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha} = 0$$

$$-10\alpha^r + 3\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{\delta}, \alpha = \frac{1}{r}$$

$$f(\alpha) = \frac{\sqrt{\frac{1}{r}}}{-2(\frac{1}{r})^r + \frac{1}{r} + 1} = \frac{1}{\sqrt{r}}$$

۳ ۳۰۷۳

$$|NM| = |(x^r - 2x^{r+1}) - (x^r + 3x - 3)| = |-2x^r - 2x + 4| = -2(x^r + x - 2)$$

بیشترین مقدار عبارت بالا $4/5$ است.

$$6 \times 6 \times 5 = 180$$

$$1 \times 6 \times 5 = 30$$

$$1 \times 1 \times 5 = 5$$

$$1 \times 1 \times 5 = 5$$

$$1 \times 1 \times 5 = 5$$

ارقام سه‌رقمی بدون تکرار با شروع ۲۵: $1 \times 1 \times 5 = 5$ جز ۲۵۸ که بزرگ‌تر از ۲۵۷ است.

پس ۴ تا.

$$180 - (30 + 5 + 5 + 5 + 4) = 180 - 49 = 131$$

۲ ۳۰۷۵

کل حالت‌های بیرون آوردن دو کارت: $n(S) = \binom{8}{2} = 28$

اگر یکی ۱ باشد، دیگری باید یکی از ۲ تا ۸ باشد. اگر یکی ۲ باشد، دیگری باید یکی از ۳ تا ۸ باشد. اگر یکی ۳ باشد، دیگری باید ۴ باشد. اگر یکی ۴ باشد، دیگری باید ۵ باشد. اگر یکی ۵ باشد، دیگری باید ۶ باشد. اگر یکی ۶ باشد، دیگری باید ۷ باشد. اگر یکی ۷ باشد، دیگری باید ۸ باشد. پس

$$n(A) = 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28 \Rightarrow P(A) = \frac{28}{28} = 1$$

۳ ۳۰۷۶ اهمیت‌ی ندارد کدام رنگ دو برابر کد است. فرض کنید یک رنگ به

تعداد x و دیگری به تعداد $2x$ باشد و در مجموع $3x$ مهره داریم:

$$\frac{\binom{x}{1} \binom{2x}{1}}{\binom{3x}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2x}{\frac{3x(3x-1)}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4x}{9x^2 - 3x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 8x = 9x^2 - 3x \Rightarrow 9x^2 - 11x = 0 \Rightarrow x(9x - 11) = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{9}$$

$$9x^2 - 3x = 8x^2 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow 3x = 9$$

۱ ۳۰۷۷ علاوه بر نسبت اضلاع متناظر، نامساوی مثلث هم باید بررسی شود:

$$\frac{\delta}{b} = \frac{6}{4} = \frac{a}{9} \Rightarrow a = \frac{27}{2} = 13.5, \quad b = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.333 \dots$$

$$\frac{\delta}{b} = \frac{6}{9} = \frac{a}{4} \Rightarrow a = \frac{8}{3} \approx 2.666 \dots, \quad b = \frac{1}{2} = 0.5 \checkmark$$

$$\frac{\delta}{4} = \frac{6}{b} = \frac{a}{9} \Rightarrow a = \frac{4\delta}{6} = 11/2\delta, \quad b = \frac{24}{\delta} = 4/8$$

$$\frac{\delta}{9} = \frac{6}{b} = \frac{a}{4} \Rightarrow a = \frac{2}{9}, \quad b = \frac{5\delta}{4} = 10/8 \checkmark$$

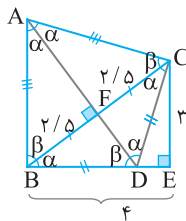
$$\frac{5\delta}{4} \times \frac{1}{2} = 81$$

۴ ۳۰۷۸ $BC = \delta$ و مثلث BCD متساوی الساقین است. چون $FD \perp BC$.

پس FD میانه است، بنابراین $FC = \frac{\delta}{2}$.

$$\triangle BCE \sim \triangle AFC \Rightarrow \frac{S_{AFC}}{S_{BCE}} = \left(\frac{FC}{CE}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\frac{S_{AFC}}{6} = \frac{2\delta}{36} \Rightarrow S_{AFC} = \frac{2\delta}{6}$$

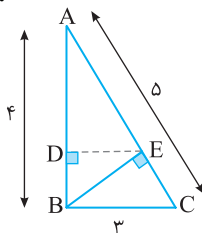


۱ ۳۰۷۹

$$BE \times \delta = 3 \times 4, \quad BE = \frac{12}{\delta} = 2/4$$

$$BE^2 = BD \times AD \Rightarrow \frac{12 \times 12}{\delta \times \delta} = BD \times 4$$

$$BD = \frac{36}{2\delta} = 1/4\delta, \quad AD = 4 - 1/4\delta = 2/5\delta$$



۳ ۳۰۸۰

$$\frac{m-k}{4+r} = -\frac{1}{r} \Rightarrow m-k = -3$$

$$S = AB^2 = (4+r)^2 + (m-k)^2 = 36 + 9 = 45$$