پاسخ کنکور سراسری ۱۴۰۲ - نوبت دوم

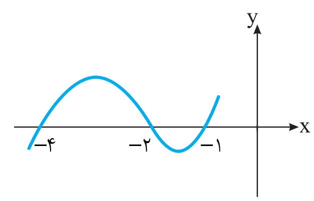
۲۸۴۱ (۱) ابتدا توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}$ و

$$D_g=\{x\in\mathbb{R}|-\frac{f(x)}{f(x+۲)}\geq ۰\}$$

از روی نمودار تابع f معلوم می‌شود که

$$f(x)=۰\Rightarrow x\in\{-۲,۰,۱\}$$
$$f(x)>۰\Rightarrow x\in(-۲,۰)\cup(۱,+\infty)$$
$$f(x)<۰\Rightarrow x\in(-\infty,-۲)\cup(۰,۱)$$

همچنین، نمودار تابع $y=f(x+۲)$ به‌صورت زیر است:



بنابراین

$$f(x+۲)=۰\Rightarrow x\in\{-۴,-۲,-۱\}$$
$$f(x+۲)>۰\Rightarrow x\in(-۴,-۲)\cup(-۱,+\infty)$$
$$f(x+۲)<۰\Rightarrow x\in(-\infty,-۴)\cup(-۲,-۱)$$

در نتیجه جدول تعیین علامت عبارت $y=-\frac{f(x)}{f(x+۲)}$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$ تا -۴	-۴ تا -۲	-۲ تا -۱	-۱ تا ۰	۰ تا ۱	۱ تا $+\infty$
f(x)	−	−	+	+	−	+
f(x+۲)	−	+	−	+	+	+
y	−	+	+	−	+	−

پس $D_g=(-۴,-۲)\cup(-۲,-۱)\cup[۰,۱]$. بنابراین عددهای صحیح دامنهٔ g عددهای ۳-، صفر و ۱ هستند.

۲۸۴۲ (۳) ابتدا توجه کنید که

$$f(-\frac{۵}{۳})=۲[-\frac{۵}{۳}]-(-\frac{۵}{۳})=-۴+\frac{۵}{۳}=-\frac{۷}{۳}$$
$$(gof)(-\frac{۵}{۳})=g(f(-\frac{۵}{۳}))=g(-\frac{۷}{۳})=f([-\frac{۷}{۳}+f(-\frac{۷}{۳})])$$

از طرف دیگر، $f(-\frac{۷}{۳})=۲[-\frac{۷}{۳}]-(-\frac{۷}{۳})=-۶+\frac{۷}{۳}=-\frac{۱۱}{۳}$

پس

$$(gof)(-\frac{۵}{۳})=f([-\frac{۷}{۳}-\frac{۱۱}{۳}])=f(-۶)=۲[-۶]-(-۶)=-۱۲+۶=-۶$$

۲۸۴۳ (۴) فرض کنید طول مستطیل اولیه برابر x باشد. پس عرض آن $\frac{۴}{۵}x$ است. اکنون فرض می‌کنیم طول مستطیل را به اندازهٔ a افزایش می‌دهیم. در این صورت، چون یک مستطیل طلایی به‌دست می‌آید، پس

$$x+a=(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})(\frac{۴}{۵}x)\Rightarrow\frac{x+a}{x}=\frac{۴(\sqrt{۵}+۱)}{۱۰}$$

چون عرض مستطیل ثابت می‌ماند، پس نسبت مساحت مستطیل‌ها برابر نسبت طول‌های آن‌هاست، یعنی برابر است با $\frac{x+a}{x}=۰/۴(\sqrt{۵}+۱)$

۲۸۴۴ (۳) فرض می‌کنیم جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲-ax+b=۰$ برابر α و β باشند. در این صورت $\alpha-\frac{۱}{۲}$ و $\beta-\frac{۱}{۲}$ جواب‌های معادلهٔ $۲ax^۲+ax-۶=۰$ هستند. توجه کنید که

$$\alpha+\beta=\frac{a}{۲}\quad(۱),\quad\alpha\beta=\frac{b}{۲}\quad(۲)$$
$$(\alpha-\frac{۱}{۲})+(\beta-\frac{۱}{۲})=-\frac{a}{۲a}=-\frac{۱}{۲}\quad(۳)$$
$$(\alpha-\frac{۱}{۲})(\beta-\frac{۱}{۲})=-\frac{۶}{۲a}=-\frac{۳}{a}\quad(۴)$$

بنابراین از تساوی (۳) نتیجه می‌شود $\alpha+\beta=\frac{۱}{۲}$. در نتیجه از تساوی (۱) به‌دست می‌آید $\frac{a}{۲}=\frac{۱}{۲}$، پس $a=۱$. اکنون توجه کنید که از تساوی (۴) نتیجه می‌شود

$$\alpha\beta-\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)+\frac{۱}{۴}=-\frac{۳}{a}=-۳$$
$$\alpha\beta-\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲})+\frac{۱}{۴}=-۳\Rightarrow\alpha\beta=-۳$$

بنابراین از تساوی (۲) به‌دست می‌آید $-۳=\frac{b}{۲}\Rightarrow b=-۶$

به این ترتیب، $[\frac{ab}{۴}]=[\frac{-۶}{۴}]=-۲$.

۲۸۴۵ (۲) **تذکر** سؤال به صورت زیر اصلاح می‌شود:

اگر $f(x)=(۱۰x+\log x)^۵$ باشد، مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $(fof)(x)<f((۱۰x)^۵)$ کدام است؟

ابتدا توجه کنید که $D_f=(۰,+\infty)$، بنابراین

$$D_{fof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_f\}=\{x>۰|(۱۰x+\log x)^۵>۰\}$$

اکنون توجه کنید که

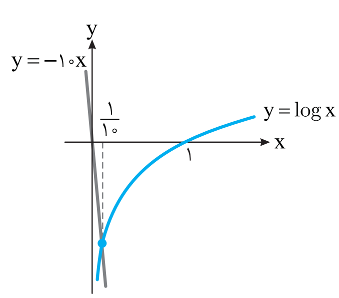
$$(۱۰x+\log x)^۵>۰\Rightarrow ۱۰x+\log x>۰$$
$$\log x>-۱۰x\quad(۱)$$

چون $\log\frac{۱}{۱۰}=-۱$ و $-۱۰\times\frac{۱}{۱۰}=-۱$، بنابراین از روی نمودار زیر معلوم می‌شود که مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۱) بازهٔ $(\frac{۱}{۱۰},+\infty)$ است. بنابراین باید نامعادلهٔ $(fof)(x)<f((۱۰x)^۵)$ را با شرط $x\in(\frac{۱}{۱۰},+\infty)$ حل کنیم. اکنون توجه کنید که تابع‌های $y=۱۰x$ و $y=\log x$ صعودی اکیدند، پس مجموع آن‌ها نیز صعودی اکید است. همچنین چون تابع $y=x^۵$ صعودی اکید است، پس تابع $f(x)=(۱۰x+\log x)^۵$ نیز صعودی اکید است. بنابراین

$$(fof)(x)<f((۱۰x)^۵)\Rightarrow f(f(x))<f((۱۰x)^۵)\Rightarrow f(x)<(۱۰x)^۵$$
$$(۱۰x+\log x)^۵<(۱۰x)^۵\Rightarrow ۱۰x+\log x<۱۰x\Rightarrow\log x<۰\Rightarrow x\in(۰,۱)$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر برابر است با

$$(۰,۱)\cap(\frac{۱}{۱۰},+\infty)=(\frac{۱}{۱۰},۱)$$



۲۸۴۶ (۴) ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=2x^2-(m+2)x+m=0 \Rightarrow f(x)=(2x-m)(x-1)=0$$

بنابراین صفرهای تابع f برابرند با $x=1$ و $x=\frac{m}{2}$. از طرف دیگر، نقطهٔ تقاطع نمودار تابع f با محور عرض‌ها نقطهٔ $(0,m)$ است. باید مساحت مثلث با رأس‌های $A(0,m)$، $B(1,0)$ و $C(\frac{m}{2},0)$ را پیدا کنیم. معادلهٔ خطی که از نقطه‌های A و B می‌گذرد به‌صورت زیر است:

$$y-0=\frac{0-m}{1-0}(x-1) \Rightarrow mx+y-m=0$$

فاصلهٔ نقطهٔ C از این خط برابر طول ارتفاع وارد بر قاعدهٔ AB در مثلث ABC است که برابر است با

$$\frac{|m(\frac{m}{2})+0-m|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|m^2-2m|}{2\sqrt{m^2+1}}$$

از طرف دیگر، $AB=\sqrt{1+m^2}$. در نتیجه

$$S_{ABC}=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{|m^2-2m|}{2\sqrt{m^2+1}}\times\sqrt{1+m^2}=\frac{3}{4} \Rightarrow |m^2-2m|=3$$

اکنون توجه کنید که

$$m^2-2m=3 \Rightarrow m^2-2m-3=0 \Rightarrow (m-3)(m+1)=0$$

$$m=3\ ,\ m=-1$$

$$m^2-2m=-3 \Rightarrow m^2-2m+3=0 \Rightarrow \Delta<0 \text{ (جواب ندارد)}$$

طول رأس سهمی $y=x^2-mx+1$ برابر است با $-\frac{-m}{2\times1}=\frac{m}{2}$

اگر $m=3$، طول رأس سهمی برابر می‌شود با $\frac{m}{2}=\frac{3}{2}$.

اگر $m=-1$، طول رأس سهمی برابر می‌شود با $\frac{m}{2}=-\frac{1}{2}$.

۲۸۴۷ (۱) فرض کنید $f^{-1}(-19)=a$. در این صورت $f(a)=-19$. توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}2-3x & x\leq-\frac{3}{2}\\ 2+2mx-x^2 & x>-\frac{3}{2}\end{cases}$$

چون f وارون‌پذیر است، پس یک‌به‌یک است. در نتیجه باید طول رأس سهمی $y=2+2mx-x^2$ از $-\frac{3}{2}$ بزرگتر نباشد. طول رأس این سهمی برابر m است. بنابراین $m\leq-\frac{3}{2}$. از طرف دیگر، برد تابع $y=2-3x$ با دامنهٔ $(-\infty,-\frac{3}{2}]$ باید با برد تابع $y=2+2mx-x^2$ با دامنهٔ $(-\frac{3}{2},+\infty)$ اشتراک نداشته باشد. بنابراین

$$2-3(-\frac{3}{2})\geq2+2m(-\frac{3}{2})-(-\frac{3}{2})^2 \Rightarrow m\geq-\frac{27}{12}$$

در نتیجه $-\frac{27}{12}\leq m\leq-\frac{3}{2}$ و چون m عددی صحیح است، پس $m=-2$. پس

$$a\leq-\frac{3}{2} \Rightarrow f(a)=2-3a=-19 \Rightarrow a=7 \text{ (غ.ق.ق)}$$

$$a>-\frac{3}{2} \Rightarrow f(a)=2-4a-a^2=-19$$

$$a^2+4a-21=0 \Rightarrow (a+7)(a-3)=0 \Rightarrow a=3, a=-7 \text{ (غ.ق.ق)}$$

۲۸۴۸ (۴) ابتدا توجه کنید که

$$\log 30=\log(10\times3)=\log 10+\log 3=1+0/4=1/4$$

$$\log 6=\log(2\times3)=\log 2+\log 3=0/3+0/4=0/7$$

$$\log\frac{5}{6}=\log 5-\log 6=\log\frac{10}{2}-\log 6=\log 10-\log 2-\log 6$$
$$=1-0/3-0/7=0$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود $1/4x^2+1/4x=0$، که جواب‌هایش صفر و -1 هستند که اختلاف آن‌ها برابر ۱ است.

۲۸۴۹ (۳) ابتدا توجه کنید که

$$\tan x+\cot x=-3 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=-3$$

$$\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=-3 \Rightarrow \sin x\cos x=-\frac{1}{3}$$

در نتیجه $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

چون $3\pi<4x<4\pi$، پس $\frac{3\pi}{4}<x<\pi$. بنابراین $\sin x+\cos x<0$، در نتیجه $\sin x+\cos x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. اکنون توجه کنید که

$$\cos^3 x+\sin^3 x=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}(1+\frac{1}{3})=-\frac{4}{3\sqrt{3}}$$

پس $\frac{1}{\cos^3 x+\sin^3 x}=-\frac{3\sqrt{3}}{4}=-0/75\sqrt{3}$.

۲۸۵۰ (۱) ابتدا توجه کنید که $\text{مساحت دایره}=\pi r^2=\pi \Rightarrow r=1$

همچنین مثلث BOA متساوی‌الساقین است، پس OM هم عمودمنصف است هم نیمساز. در نتیجه $M\hat{O}A=\frac{A\hat{O}B}{2}=60^\circ$. همین‌طور، در مثلث متساوی‌الساقین AOD پاره‌خط OH هم عمودمنصف است هم نیمساز. پس $A\hat{O}C=\frac{A\hat{O}D}{2}=30^\circ$.

بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHO،

$$\sin 30^\circ=\frac{AH}{OA} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{AH}{1} \Rightarrow AH=\frac{1}{2}$$

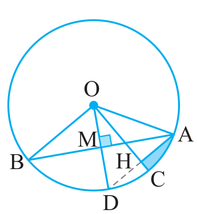
$$\sin 60^\circ=\frac{OH}{OA} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{OH}{1} \Rightarrow OH=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

پس محیط مثلث AOH برابر است با $1+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. از طرف دیگر، طول کمان AC برابر است با $A\hat{O}C\times r=\frac{\pi}{6}\times1=\frac{\pi}{6}$. همچنین

$$HC=OC-OH=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

پس محیط شکل رنگی برابر است با $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}$. به این ترتیب، اختلاف محیط‌ها برابر است با

$$\frac{3+\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}-(\frac{2-\sqrt{3}}{2})=\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$$



۲۸۵۱ (۲) مختصات نقطهٔ A جواب‌های دستگاه معادله‌های زیر هستند:

$$\begin{cases}۳y+x=-۹\\ ax-y=۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ y=-۳\end{cases}$$

مختصات نقطه‌های برخورد این خط‌ها با خط $y-x=۰$ به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}۳y+x=-۹\\ y-x=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{۹}{۴}\\ y=-\frac{۹}{۴}\end{cases},\quad\begin{cases}ax-y=۳\\ y-x=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۳}{a-۱}\\ y=\frac{۳}{a-۱}\end{cases}$$

بنابراین رأس‌های مثلث مورد نظر $A(۰,-۳)$ ، $B(-\frac{۹}{۴},-\frac{۹}{۴})$ و $C(\frac{۳}{a-۱},\frac{۳}{a-۱})$ هستند. چون مرکز دایره‌ای که از رأس‌های مثلث ABC می‌گذرد روی ضلع BC است، پس زاویهٔ A در این مثلث زاویه‌ای محاطی و روبه‌رو به قطر است، یعنی $\hat{A}=۹۰^\circ$. بنابراین $\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ$ ، پس

$$\hat{C}=۹۰^\circ-\hat{B}\Rightarrow\hat{B}-\hat{C}=۲\hat{B}-۹۰^\circ$$

$$\tan(\hat{B}-\hat{C})=\tan(۲\hat{B}-۹۰^\circ)=-\cot ۲\hat{B}=\frac{-۱}{\tan ۲\hat{B}}=\frac{-۱+\tan^۲\hat{B}}{۲\tan\hat{B}}$$

از طرف دیگر،

$$AH=\frac{|۰-(-۳)|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}$$

$$AB=\sqrt{(۰+\frac{۹}{۴})^۲+(-۳+\frac{۹}{۴})^۲}=\sqrt{\frac{۴۵}{۸}}$$

در نتیجه، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

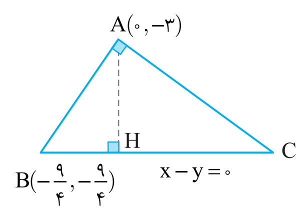
$$AB^۲=AH^۲+BH^۲\Rightarrow\frac{۴۵}{۸}=\frac{۹}{۲}+BH^۲\Rightarrow BH=\frac{۳}{۲\sqrt{۲}}$$

بنابراین

$$\tan\hat{B}=\frac{AH}{BH}=\frac{\frac{۳}{\sqrt{۲}}}{\frac{۳}{۲\sqrt{۲}}}=۲$$

در نتیجه

$$\tan(\hat{B}-\hat{C})=\frac{-۱+\tan^۲\hat{B}}{۲\tan\hat{B}}=\frac{-۱+۴}{۴}=\frac{۳}{۴}$$



۲۸۵۲ (۱) ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=a\cos^۲(bx-\frac{\pi}{۴})+c=a\times\frac{۱+\cos(۲(bx-\frac{\pi}{۴}))}{۲}+c$$

$$=\frac{a}{۲}+c+\frac{a}{۲}\cos(۲bx-\frac{\pi}{۲})=\frac{a}{۲}+c+\frac{a}{۲}\sin(۲bx)$$

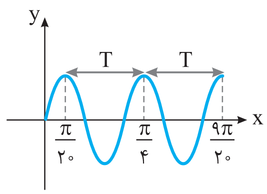
چون ماکزیمم و مینیمم تابع f به‌ترتیب ۱ و −۲ است. پس

$$\begin{cases}\frac{a}{۲}+c+|\frac{a}{۲}|=۱\\ \frac{a}{۲}+c-|\frac{a}{۲}|=-۲\end{cases}\Rightarrow|a|=۳\Rightarrow\begin{cases}a=۳,c=-۲\\ a=-۳,c=۱\end{cases}$$

از طرف دیگر، چون دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{۹\pi}{۲۰}-\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۵}$ ، پس

$$\frac{۲\pi}{|۲b|}=\frac{\pi}{۵}\Rightarrow|b|=۵\Rightarrow b=۵\ \text{یا}\ b=-۵$$

اکنون توجه کنید که چون دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{\pi}{۵}$ است و $\frac{\pi}{۵}<\frac{\pi}{۴}$ ، پس نمودار تابع f به شکل زیر است:



چون در یک همسایگی راست نقطهٔ صفر تابع f اکیداً صعودی است، پس a و b هم‌علامت‌اند. بنابراین در هر صورت $ab=۱۵$.

۲۸۵۳ (۴) معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sin(\frac{\pi+۴x}{۲})}+\frac{۱}{\cos(\frac{\pi+۸x}{۲})}=۰$$

$$\frac{۱}{\sin(\frac{\pi}{۲}+۲x)}=-\frac{۱}{\cos(\frac{\pi}{۲}+۴x)}$$

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+۲x)=-\cos(\frac{\pi}{۲}+۴x)\Rightarrow\cos ۲x=\sin ۴x$$

$$\cos ۲x=۲\sin ۲x\cos ۲x\Rightarrow\cos ۲x(۱-۲\sin ۲x)=۰$$

توجه کنید که چون $\cos ۲x$ برابر $\sin(\frac{\pi+۴x}{۲})$ است و این عبارت در مخرج است، پس باید $\cos ۲x\neq ۰$ ، در نتیجه

$$۱-۲\sin ۲x=۰\Rightarrow\sin ۲x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}$$

$$\begin{cases}۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ ۲x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=k\pi+\frac{\pi}{۱۲}\\ x=k\pi+\frac{۵\pi}{۱۲}\end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۱۲}$ و $\frac{۵\pi}{۱۲}$ ، که اختلاف آن‌ها $\frac{\pi}{۳}$ است.

بنابراین $\alpha=\frac{\pi}{۳}$ ، پس $\tan(۲\alpha)=\tan\frac{۲\pi}{۳}=-\sqrt{۳}$

۲۸۵۴ (۲) چون حد صورت کسر داده شده برابر صفر است و حد کسر برابر صفر نیست، پس حد مخرج کسر نیز باید صفر باشد. بنابراین

$$\lim_{x\to ۸}(ax-b)=۰\Rightarrow ۸a=b$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to ۸}\frac{b\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۲b}{ax-b}=\lim_{x\to ۸}\frac{۸a\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۱۶a}{ax-۸a}$$

$$=\lim_{x\to ۸}\frac{۸\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۱۶}{x-۸}=\lim_{x\to ۸}\left(\frac{۸(\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۲)}{x-۸}\times\frac{\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}+۲}{\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}+۲}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۸}\left(\frac{۸(۲+\sqrt[۳]{x}-۴)}{(\sqrt[۳]{x}-۲)(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴)}\times\frac{۱}{\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}+۲}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۸}\left(\frac{۸}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}\times\frac{۱}{\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}+۲}\right)=\frac{۸}{۴+۴+۴}\times\frac{۱}{۲+۲}=\frac{۱}{۶}$$

۲۸۵۵ (۳) ضابطهٔ تابع‌های f و g را به‌دست آوریم. نمودار تابع f خطی است که از نقطه‌های $(m,۰)$ و $(۰,۳m)$ می‌گذرد. معادلهٔ این خط به‌صورت زیر است:

$$y-۰=\frac{۳m-۰}{۰-m}(x-m)\Rightarrow y=-۳(x-m)$$

بنابراین $f(x)=-۳x+۳m$. همین‌طور، نمودار تابع g خطی است که از نقطه‌های $(۴,۰)$ و $(۰,-۳)$ می‌گذرد. معادلهٔ این خط به‌صورت زیر است:

$$y-۰=\frac{۰-(-۳)}{۴-۰}(x-۴)\Rightarrow y=\frac{۳}{۴}(x-۴)$$

بنابراین $g(x)=\frac{3}{4}x-3$

بنابراین $\lim_{x\to-\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|-3x+3m|}{\frac{3}{4}x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{\frac{3}{4}x}=-4$

۲۸۵۶ (۱) ابتدا توجه کنید که اگر عبارت $x^3+((m-7)x+a)^2$ ریشه‌ای مانند x_0 به‌جز $x=a$ داشته باشد، آن‌گاه تابع f در نقطهٔ $x=x_0$ ناپیوسته می‌شود. در نتیجه $x=a$ باید تنها ریشهٔ عبارت $x^3+((m-7)x+a)^2$ باشد. بنابراین

$$a^3+((m-7)a+a)^2=0\Rightarrow a^3+a^2(m-6)^2=0$$

$$a^2(a+(m-6)^2)=0\Rightarrow a=0\,,\,a=-(m-6)^2$$

از طرف دیگر، $x=a$ باید ریشهٔ مضاعف عبارت $3x^2+(m-1)x+m-4$ باشد، زیرا در غیر این صورت حد تابع f در نقطهٔ $x=a$ نامتناهی می‌شود. بنابراین

$$\Delta=0\Rightarrow(m-1)^2-12(m-4)=0\Rightarrow(m-7)^2=0\Rightarrow m=7$$

بنابراین $a=0$ یا $a=-(7-6)^2=-1$. توجه کنید که

$$a=0\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{3(x+1)^2}}{|x^3|}=+\infty$$

بنابراین $a=-1$، پس

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{3(x+1)^2}}{|x^3+1|}=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x+1||x^2-x+1|}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{3}}{|x^2-x+1|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین $f(a)=f(-1)=\frac{2\sin b}{3\sqrt{-1+2}}=\frac{2}{3}\sin b$

در نتیجه $\frac{2}{3}\sin b=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\sin b=\frac{\sqrt{3}}{2}$

بنابراین b می‌تواند برابر $\frac{\pi}{3}$ باشد.

۲۸۵۷ (۳) **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که اگر $x<0$، آن‌گاه

$$g(x)=\frac{1}{x^3-(-x^3)}=\frac{1}{2x^3}$$

بنابراین

$$g'(x)=\frac{-6x^2}{(2x^3)^2}=\frac{-3}{2x^4}\Rightarrow g'(-\sqrt[3]{2})=\frac{-3}{2(-\sqrt[3]{2})^4}=-\frac{3}{2\sqrt[3]{16}}$$

از طرف دیگر، $g(-\sqrt[3]{2})=\frac{1}{2(-\sqrt[3]{2})^3}=-\frac{1}{4}$

همچنین، اگر $x<0$، آن‌گاه $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x-(-x)}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{-\frac{2}{3\sqrt[3]{4x^2}}}{\sqrt[3]{4x^2}}=-\frac{2}{3\sqrt[3]{16x^4}}$$

$$f'(g(-\sqrt[3]{2}))=f'(-\frac{1}{4})=-\frac{2}{3\sqrt[3]{16\times\frac{1}{256}}}=-\frac{2}{3\sqrt[3]{\frac{1}{16}}}=-\frac{2\sqrt[3]{16}}{3}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$-\frac{3}{2\sqrt[3]{16}}\times(-\frac{2\sqrt[3]{16}}{3})=1$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$g'(-\sqrt[3]{2})f'(g(-\sqrt[3]{2}))=(fog)'(-\sqrt[3]{2})$$

بنابراین باید مشتق تابع fog را حساب کنیم. توجه کنید که اگر $x<0$، آن‌گاه

$$(fog)(x)=f(\frac{1}{x^3-|x^3|})=f(\frac{1}{2x^3})=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2x^3}-|\frac{1}{2x^3}|}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2}{2x^3}}}=x$$

بنابراین $(fog)'(x)=1$، پس $(fog)'(-\sqrt[3]{2})=1$.

۲۸۵۸ (۲) **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم A نقطهٔ $(a,0)$ و B نقطهٔ $(0,b)$ باشد. در این صورت $AB=\sqrt{a^2+b^2}$. از طرف دیگر، $\text{شیب}\,CD=\frac{-\frac{5}{3}}{5}=-\frac{1}{3}$

و چون $AB||CD$، پس شیب خط AB هم برابر $-\frac{1}{3}$ است. بنابراین

$$\frac{b-0}{0-a}=-\frac{1}{3}\Rightarrow a=3b$$

در نتیجه $AB=\sqrt{(3b)^2+b^2}=\sqrt{10}b$. توجه کنید که معادلهٔ خط CD به صورت $y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ یا $x+3y-5=0$ است. پس

$$AD=\frac{|a+3\times0-5|}{\sqrt{1+9}}=\frac{|a-5|}{\sqrt{10}}=\frac{|3b-5|}{\sqrt{10}}$$

بنابراین $S_{ABCD}=AD\times AB=\frac{|3b-5|}{\sqrt{10}}\times\sqrt{10}b=-(3b-5)b=-3b^2+5b$

چون مساحت مستطیل ABCD برحسب b تابعی درجهٔ دوم است، پس مساحت آن به ازای $b=-\frac{5}{-6}=\frac{5}{6}$ ماکزیمم می‌شود. در نتیجه باید $a=3b=\frac{5}{2}$. بنابراین $AD=\frac{|a-5|}{\sqrt{10}}=\frac{5}{2\sqrt{10}}$. اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس، در مثلث ADM،

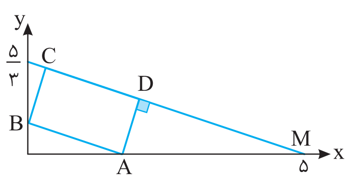
$$AM^2=AD^2+DM^2$$

$$(5-\frac{5}{2})^2=(\frac{5}{2\sqrt{10}})^2+DM^2$$

$$\frac{25}{4}-\frac{25}{40}=DM^2$$

$$\frac{225}{40}=DM^2\Rightarrow DM=\frac{15}{2\sqrt{10}}$$

در نتیجه $S_{ADM}=\frac{1}{2}AD\times DM=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2\sqrt{10}}\times\frac{15}{2\sqrt{10}}=\frac{15}{16}$



راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $\tan\alpha=\frac{ON}{OM}=\frac{\frac{5}{3}}{5}=\frac{1}{3}$

بنابراین اگر $AD=x$، آن‌گاه

$$\triangle ADM:\tan\alpha=\frac{AD}{DM}\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{x}{DM}\Rightarrow DM=3x$$

همین‌طور،

$$\triangle BCN:\cot\beta=\frac{NC}{BC}\Rightarrow\cot(90^\circ-\alpha)=\frac{NC}{x}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{NC}{x}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{NC}{x}\Rightarrow NC=\frac{x}{3}$$

از طرف دیگر،

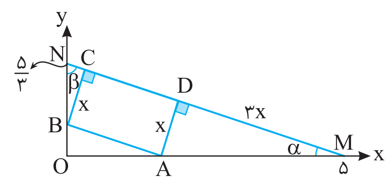
$$NM^2=OM^2+ON^2=5^2+(\frac{5}{3})^2=10\times\frac{25}{9}\Rightarrow NM=\frac{5}{3}\sqrt{10}$$

بنابراین $CD=\frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰}-\frac{x}{۳}-۳x=\frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰}-\frac{۱۰}{۳}x$

در نتیجه $S_{ABCD}=x(\frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰}-\frac{۱۰}{۳}x)=-\frac{۱۰}{۳}x^۲+\frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰}x$

مساحت مستطیل ABCD برحسب x تابعی درجهٔ دوم است که ماکزیمم آن به ازای $x=\frac{-\frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰}}{-\frac{۲۰}{۳}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$ به‌دست می‌آید. در این صورت مساحت مثلث ADM برابر است با

$$\frac{۱}{۲}x(۳x)=\frac{۳}{۲}x^۲=\frac{۳}{۲}(\frac{\sqrt{۱۰}}{۴})^۲=\frac{۱۵}{۱۶}$$



۲۸۵۹ (۲) فرض می‌کنیم عددهای دستهٔ اول به‌صورت زیر باشند:

$$a, a+۲, \dots, a+۱۲$$

در این صورت $\bar{x}=\frac{۷a+۴۲}{۷}=a+۶$. پس

$$\sigma=\frac{۱}{۲}\bar{x}\Rightarrow ۴\sigma^۲=\bar{x}^۲\Rightarrow \frac{۴(۶^۲+۴^۲+۲^۲+۰^۲+۲^۲+۴^۲+۶^۲)}{۷}=(a+۶)^۲$$

$$۴(\frac{۲\times۵۶}{۷})=(a+۶)^۲\Rightarrow(a+۶)^۲=۶۴\Rightarrow a=۲\ ,\ a=-۱۴$$

فرض کنید داده‌های دستهٔ آخر به‌صورت مقابل باشند: $b, b+۲, \dots, b+۱۲$

در این صورت $\bar{x}=b+۶$. پس $\sigma^۲=\bar{x}\Rightarrow\frac{۲\times۵۶}{۷}=b+۶\Rightarrow b=۱۰$

اگر $a=-۱۴$، عدد آخر دستهٔ اول برابر -۲ و عدد آخر دستهٔ آخر برابر ۲۲ است که اختلاف آن‌ها ۲۴ است.

اگر $a=۲$، عدد آخر دستهٔ اول برابر ۱۴ و عدد آخر دستهٔ آخر برابر ۲۲ است که اختلاف آن‌ها ۸ است.

۲۸۶۰ (۳) عددی که مضرب ۶ است، زوج است، پس یکان آن باید ۲ باشد. فرض می‌کنیم در ده رقم باقی‌مانده n رقم برابر ۲ باشند. در این صورت $۱۰-n$ رقم برابر ۱ هستند. چون عدد مورد نظر باید بر ۳ هم بخش‌پذیر باشد، پس مجموع رقم‌های آن بر ۳ بخش‌پذیر است. مجموع رقم‌های این عدد برابر است با $n\times۲+(۱۰-n)\times۱+۲=۱۲+n$

چون ۱۲ بر ۳ بخش‌پذیر است، پس n باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد. چون $۰\le n\le ۱۰$ است، پس n یکی از عددهای ۰، ۳، ۶ یا ۹ است. توجه کنید که اگر جای رقم‌های ۲ باقی‌مانده را مشخص کنیم، جای رقم‌های ۱ خود به خود مشخص می‌شود. تعداد راه‌های انتخاب جای رقم‌های ۲ برابر است با $\binom{۱۰}{۰}+\binom{۱۰}{۳}+\binom{۱۰}{۶}+\binom{۱۰}{۹}=۳۴۱$

۲۸۶۱ (۲) برای اینکه در n بار پرتاب سکه، پرتاب n ام k امین بار باشد که سکه رو آمده است، باید در $n-۱$ پرتاب قبلی $k-۱$ بار رو و $n-(k-۱)$ بار پشت آمده باشد. در نتیجه، احتمال پیشامد مورد نظر برابر است با

$$\frac{\binom{n-۱}{k-۱}}{۲^n}$$

از طرف دیگر، احتمال اینکه در n پرتاب سکه k بار رو بیاید برابر است با $\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$. در نتیجه

$$\frac{\binom{n-۱}{k-۱}}{۲^n}=\frac{k}{k+۵}\times\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}\Rightarrow\frac{(n-۱)!}{۲^n(k-۱)!(n-k)!}=\frac{k}{k+۵}\times\frac{n!}{۲^n k!(n-k)!}$$

$$۱=\frac{k}{k+۵}\times\frac{n}{k}\Rightarrow k+۵=n$$

$$n+k=(k+۵)+k=۲k+۵$$

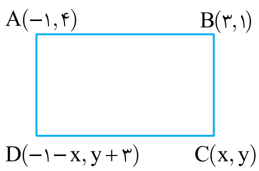
اگر $k=۲$، آن‌گاه $n+k=۹$.

۲۸۶۲ (۴) بنابر فرمول احتمال کل، احتمال قبولی امیر در رشتهٔ پزشکی برابر است با

$$\underbrace{۰/۴\times۰/۲۵}_{\text{قبولی دانشگاه A}}+\underbrace{۰/۳۵\times۰/۳}_{\text{قبولی دانشگاه B}}+\underbrace{۰/۲۵\times۰/۳۵}_{\text{قبولی دانشگاه C}}=۰/۲۹۲۵$$

بنابراین ۲۹/۲۵ درصد احتمال قبولی امیر است.

۲۸۶۳ (۳) چون ABCD مستطیل (متوازی‌الاضلاع) است، پس

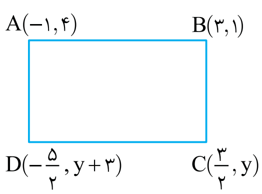


$$x_A+x_C=x_B+x_D\Rightarrow-۱+x=۳-۱-x\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

اکنون توجه کنید که

$$\text{شیب خط AB}=\frac{۱-۴}{۳-(-۱)}=-\frac{۳}{۴}$$

$$\text{شیب خط AD}=\frac{y+۳-۴}{-\frac{۵}{۲}-(-۱)}=\frac{y-۱}{-\frac{۳}{۲}}=-\frac{۲(y-۱)}{۳}$$



چون خط‌های AB و AD بر هم عمودند، حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -۱ است، پس

$$(-\frac{۳}{۴})\times(\frac{-۲(y-۱)}{۳})=-۱\Rightarrow y-۱=-۲\Rightarrow y=-۱$$

اکنون توجه کنید که

$$AB=\sqrt{(۳+۱)^۲+(۱-۴)^۲}=۵$$

$$BC=\sqrt{(۳-\frac{۳}{۲})^۲+(۱+۱)^۲}=\sqrt{\frac{۹}{۴}+۴}=\frac{۵}{۲}$$

بنابراین محیط مستطیل ABCD برابر است با $۲(۵+\frac{۵}{۲})=۱۵$.

۲۸۶۴ (۱) **راه‌حل اول** اگر فرض کنیم $AE=x$، آن‌گاه $DE=۲x$. در نتیجه، چون ABCD مربع است، پس $AB=BC=۳x$. فرض می‌کنیم $EF=y$ و $AF=z$. در این صورت از قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود

$$\triangle ABE: BE^۲=AB^۲+AE^۲=۹x^۲+x^۲=۱۰x^۲\Rightarrow BE=\sqrt{۱۰}x$$

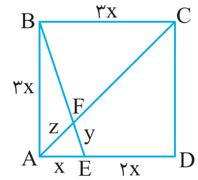
بنابراین $BF=\sqrt{۱۰}x-y$. همین‌طور، $AC=۳\sqrt{۲}x$، پس $FC=۳\sqrt{۲}x-z$.

اکنون توجه کنید که مثلث‌های AEF و CBF متشابه‌اند (زز)، پس

$$\frac{AF}{CF}=\frac{AE}{CB}\Rightarrow\frac{z}{۳\sqrt{۲}x-z}=\frac{x}{۳x}=\frac{۱}{۳}$$

اگر این تناسب را ترکیب در مخرج کنیم به‌دست می‌آید $\frac{z}{۳\sqrt{۲x}}=\frac{۱}{۴}$. همین‌طور،

$$\frac{EF}{BF}=\frac{AE}{CB}\Rightarrow\frac{y}{\sqrt{۱۰x}-y}=\frac{x}{۳x}=\frac{۱}{۳}$$



اگر این تناسب را ترکیب در مخرج کنیم به‌دست می‌آید $\frac{y}{\sqrt{۱۰x}}=\frac{۱}{۴}$. بنابراین

$$\frac{z}{۳\sqrt{۲x}}=\frac{y}{\sqrt{۱۰x}}\Rightarrow\frac{y}{z}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۳\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

راه‌حل دوم اگر طول ضلع مربع را $۳a$ بگیریم، می‌توانیم مربع را مانند شکل مقابل روی صفحهٔ مختصات طوری رسم کنیم که رأس A بر مبدأ مختصات منطبق باشد و ضلع‌های AB و AD روی محورهای مختصات باشند. در این صورت معادلهٔ خط AC به‌صورت $y=x$ و معادلهٔ خط BE به‌صورت $y=-۳x+۳a$ است. بنابراین نقطهٔ F محل تلاقی این دو خط است که مختصات آن از حل دستگاه معادلات زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}y=x\\ y=-۳x+۳a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۳}{۴}a\\ y=\frac{۳}{۴}a\end{cases}$$

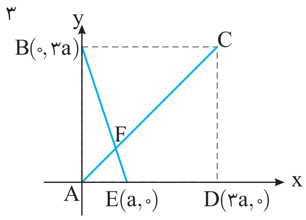
بنابراین

$$EF=\sqrt{(\frac{۳}{۴}a-a)^۲+(\frac{۳}{۴}a-۰)^۲}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}a$$

$$AF=\sqrt{(\frac{۳}{۴}a)^۲+(\frac{۳}{۴}a)^۲}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}a$$

پس

$$\frac{EF}{AF}=\frac{\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}a}{\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}a}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$



۲۸۶۵ **۴** **راه‌حل اول** چون $CJ||BE$، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث BFE،

$$\frac{FC}{CB}=\frac{FJ}{JE}\Rightarrow\frac{۳}{۶}=\frac{FJ}{۴}\Rightarrow FJ=۲$$

اکنون توجه کنید که مثلث‌های CEJ و DFJ متشابه‌اند (زز). بنابراین

$$\frac{CE}{DF}=\frac{EJ}{FJ}\Rightarrow\frac{CE}{DF}=\frac{۴}{۲}=۲\Rightarrow CE=۲DF$$

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث BEF،

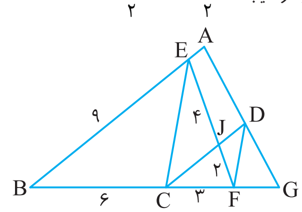
$$BE^۲=EF^۲+BF^۲-۲EF\times BF\times\cos\hat{F}$$

$$۸۱=۳۶+۸۱-۲\times۶\times۹\times\cos\hat{F}\Rightarrow\cos\hat{F}=\frac{۱}{۳}$$

در نتیجه، باز هم بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث CEF،

$$CE^۲=CF^۲+EF^۲-۲CF\times EF\times\cos\hat{F}=۹+۳۶-۲\times۳\times۶\times\frac{۱}{۳}=۳۳$$

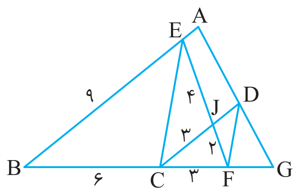
پس $CE=\sqrt{۳۳}$ و در نتیجه $DF=\frac{۱}{۲}CE=\frac{\sqrt{۳۳}}{۲}$.



راه‌حل دوم چون $CJ||BE$، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث BFE،

$$\frac{FC}{CB}=\frac{FJ}{JE}\Rightarrow\frac{۳}{۶}=\frac{FJ}{۴}\Rightarrow FJ=۲$$

در همین مثلث، بنابر تعمیم قضیهٔ تالس، $\frac{CJ}{BE}=\frac{CF}{BF}\Rightarrow\frac{CJ}{۹}=\frac{۳}{۹}\Rightarrow CJ=۳$



از طرف دیگر، مثلث‌های CEJ و DFJ متشابه‌اند (زز). بنابراین

$$\frac{CE}{DF}=\frac{EJ}{FJ}\Rightarrow\frac{CE}{DF}=\frac{۴}{۲}=۲\Rightarrow CE=۲DF$$

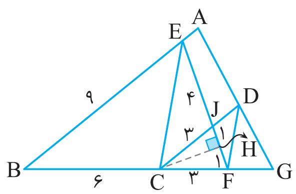
اکنون توجه کنید که مثلث JCF متساوی‌الساقین است $(CJ=CF)$. بنابراین ارتفاع وارد بر قاعدهٔ آن، میانه نیز هست. در نتیجه، اگر این ارتفاع CH باشد، آن‌گاه $JH=۱$. در نتیجه، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث CHJ،

$$CJ^۲=CH^۲+JH^۲\Rightarrow۹=CH^۲+۱\Rightarrow CH=۲\sqrt{۲}$$

همین‌طور، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث CHE،

$$CE^۲=CH^۲+EH^۲=۸+۲۵=۳۳\Rightarrow CE=\sqrt{۳۳}$$

در نتیجه $DF=\frac{۱}{۲}CE=\frac{\sqrt{۳۳}}{۲}$.



۲۸۶۶ **۲** ابتدا معادلهٔ دایره را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲-۳x-۵y+\frac{۱}{۲}=۰$$

بنابراین مرکز دایره نقطهٔ $O(\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲})$ و شعاع آن برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۳)^۲+(-۵)^۲-۴\times\frac{۱}{۲}}=۲\sqrt{۲}$$

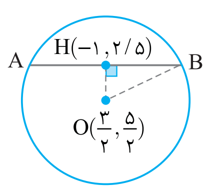
کوتاه‌ترین وتری که از نقطهٔ $H(-۱,۲/۵)$ می‌گذرد، وتری است که در این نقطه بر قطر گذرنده از این نقطه عمود است. فاصلهٔ این نقطه از مرکز دایره برابر است با

$$\sqrt{(\frac{۳}{۲}+۱)^۲+(\frac{۵}{۲}-۲/۵)^۲}=\frac{۵}{۲}$$

در مثلث OHB، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$OB^۲=OH^۲+HB^۲\Rightarrow۸=\frac{۲۵}{۴}+HB^۲\Rightarrow HB=\frac{\sqrt{۷}}{۲}$$

پس $AB=۲HB=\sqrt{۷}$.



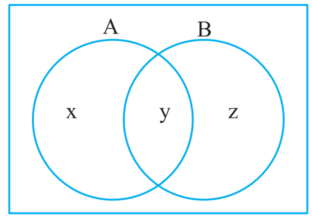
۲۸۶۷ **۴** با توجه به شکل زیر $x+y=m$ و $y+z=k$. در نتیجه

$$m-k=x+y-(y+z)=x-z$$

بنابراین $x-z=۱۴$. همچنین، $n(A\cap B)=y$ و $n(A\cup B)=x+y+z$.

پس $x+y+z-y=x+z=۲۰$. اکنون توجه کنید که

$$\begin{cases} x-z=۱۴\\ x+z=۲۰\end{cases}\Rightarrow z=۳$$



۲۸۶۸ (۱) توجه کنید که $a_۲=a+d$ و $a_۳=a+۲d$. بنابراین

$$۶a_۲^۲=۵a_۳a+۳a_۲a\Rightarrow ۶(a+d)^۲=۵(a+۲d)a+۳(a+d)a$$

$$۶a^۲+۶d^۲+۱۲ad=۸a^۲+۱۳ad\Rightarrow ۲a^۲+ad-۶d^۲=۰$$

$$(۲a-۳d)(a+۲d)=۰\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}d \text{ یا } a=-۲d$$

بنابراین اگر $a=\frac{۳}{۲}d$، آن‌گاه

$$\frac{a_۴}{d}=\frac{a+۳d}{d}=\frac{\frac{۳}{۲}d+۳d}{d}=\frac{۹}{۲}$$

اگر $a=-۲d$، آن‌گاه

$$\frac{a_۴}{d}=\frac{a+۳d}{d}=\frac{-۲d+۳d}{d}=۱$$

بنابراین $\frac{a_۴}{d}$ می‌تواند ۱ باشد.

۲۸۶۹ (۴) فرض می‌کنیم $\log_۳ x=t$. در این صورت

$$x>۱\Rightarrow \log_۳ x>۰\Rightarrow t>۰$$

همچنین

$$\log_۹ x+۳\log_{x^۲}۳=\frac{۱}{۲}\log_۳ x+\frac{۳}{۲}\log_x ۳$$

$$=\frac{۱}{۲}t+\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{t}=\frac{۱}{۲}(t+\frac{۳}{t})=\frac{۱}{۲}((\sqrt{t}-\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{t}})^۲+۲\sqrt{۳})$$

$$=\frac{۱}{۲}(\sqrt{t}-\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{t}})^۲+\sqrt{۳}$$

چون کمترین مقدار $\frac{۱}{۲}(\sqrt{t}-\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{t}})^۲$ برابر صفر است، که به ازای $t=\sqrt{۳}$ به‌دست می‌آید، پس کمترین مقدار عبارت مورد نظر برابر $\sqrt{۳}$ است.

۲۸۷۰ (۲) ابتدا توجه کنید که

$$x=\frac{۷۲}{y^۲-۱}\Rightarrow y^۲-۱=\frac{۷۲}{x}\Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{۷۲}{x}+۱}$$

توجه کنید که اگر $\sqrt{\frac{۷۲}{x}+۱}$ عددی صحیح و غیرصفر باشد، به ازای یک مقدار صحیح x دو مقدار صحیح برای y به‌دست می‌آید، که باید یکی از آن‌ها حذف شود. برای اینکه $\sqrt{\frac{۷۲}{x}+۱}$ عددی صحیح شود، باید x عددی صحیح باشد که مقسوم‌علیه ۷۲ است و $\frac{۷۲}{x}+۱$ مربع کامل باشد. پس باید $\frac{۷۲}{x}+۱$ یکی از عددهای صفر، ۱، ۴، ۹، ۲۵، ۳۶، ۴۹ یا ۶۴ باشد. معادله‌های زیر جواب صحیح ندارند:

$$\frac{۷۲}{x}+۱=۱,\quad \frac{۷۲}{x}+۱=۳۶,\quad \frac{۷۲}{x}+۱=۴۹,\quad \frac{۷۲}{x}+۱=۶۴$$

از طرف دیگر،

$$\frac{۷۲}{x}+۱=۰\Rightarrow\frac{۷۲}{x}=-۱\Rightarrow x=-۷۲\Rightarrow y=۰$$

$$\frac{۷۲}{x}+۱=۴\Rightarrow\frac{۷۲}{x}=۳\Rightarrow x=\frac{۷۲}{۳}=۲۴\Rightarrow y=\pm۲$$

$$\frac{۷۲}{x}+۱=۹\Rightarrow\frac{۷۲}{x}=۸\Rightarrow x=\frac{۷۲}{۸}=۹\Rightarrow y=\pm۳$$

$$\frac{۷۲}{x}+۱=۲۵\Rightarrow\frac{۷۲}{x}=۲۴\Rightarrow x=\frac{۷۲}{۲۴}=۳\Rightarrow y=\pm۵$$

بنابراین باید حداقل سه عضو از مجموعهٔ مورد نظر را حذف کنیم.

۲۸۷۱ (۳) نمودار ون مجموعه‌های A و B به صورت زیر است. توجه کنید که $m=x+z$ و $k=y+z$. چون $x+y+z=۱۱$، پس

$$m+k=x+z+y+z=۱۱+z\quad(۱)$$

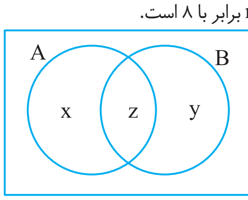
از طرف دیگر،

$$m-k=۵\quad(۲)$$

با توجه به تساوی‌های (۱) و (۲) می‌نویسیم

$$\begin{cases} m+k=۱۱+z\\ m-k=۵\end{cases}\xrightarrow{+}۲m=۱۶+z\Rightarrow m=۸+\frac{z}{۲}$$

بنابراین کمترین مقدار m برابر با ۸ است.



۲۸۷۲ (۴) قدرنسبت دنبالهٔ هندسی را برابر r می‌گیریم. در این صورت

$$\frac{a_۶}{a_۲^۳}+\frac{a_۲}{a^۲}=۲\Rightarrow\frac{ar^۵}{(ar)^۳}+\frac{ar}{a^۲}=۲$$

$$\frac{r^۲}{a^۲}+\frac{r}{a}=۲$$

اگر فرض کنیم $\frac{r}{a}=t$، آن‌گاه

$$t^۲+t=۲\Rightarrow t^۲+t-۲=۰\Rightarrow t=۱,\ t=-۲$$

درنتیجه نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{a^۲}{a_۲}=\frac{a^۲}{ar}=\frac{a}{r}=\frac{۱}{t}$

پس نسبت مورد نظر می‌تواند برابر $-\frac{۱}{۲}$ باشد.

۲۸۷۳ (۲) اگر فرض کنیم $\log_۲ x=t$، آن‌گاه چون $x>۱$، پس $t>۰$ و

$$\log_۸ x+۴\log_{x^۳}۲=\frac{۱}{۳}\log_۲ x+\frac{۴}{۳}\log_x ۲=\frac{۱}{۳}t+\frac{۴}{۳}\times\frac{۱}{t}=\frac{۱}{۳}(t+\frac{۴}{t})$$

$$=\frac{۱}{۳}((\sqrt{t}-\frac{۲}{\sqrt{t}})^۲+۴)=\frac{۱}{۳}(\sqrt{t}-\frac{۲}{\sqrt{t}})^۲+\frac{۴}{۳}\geq\frac{۴}{۳}$$

پس کمترین مقدار عبارت $\log_۸ x+۴\log_{x^۳}۲$ برابر $\frac{۴}{۳}$ است که به ازای $t=۲$ به دست می‌آید. در نتیجه بزرگ‌ترین عضو مجموعه A برابر است با

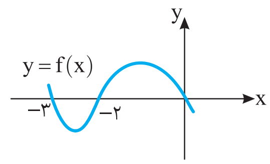
$$\frac{۱}{\sqrt{\frac{۴}{۳}}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۲۸۷۴ (۱) ابتدا توجه کنید که

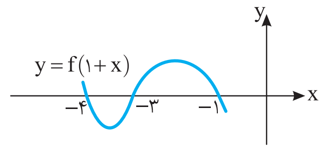
$$x=\frac{۳۰}{۱+|y|}\Rightarrow ۱+|y|=\frac{۳۰}{x}\Rightarrow|y|=\frac{۳۰}{x}-۱\Rightarrow y=\pm(\frac{۳۰}{x}-۱)$$

توجه کنید که اگر $\frac{30}{x}-1$ عددی صحیح و غیر صفر باشد، به ازای یک مقدار صحیح x دو مقدار صحیح برای y به دست می‌آید. اگر $x=30$، آن‌گاه $y=0$. مقسوم‌علیه‌های صحیح ۳۰ عددهای ±1، ±2، ±3، ±5، ±6، ±10، ±15 و ±30 هستند. توجه کنید که لازم نیست ۳۰ و ۳۰- را حذف کنیم، و از هر جفت از عددهای دیگر باید یکی را حذف کنیم. بنابراین باید دست‌کم هفت عدد را حذف کنیم.

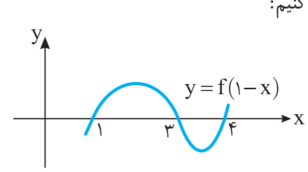
۲۸۷۵ (۱) ابتدا نمودار تابع $y=f(x-2)$ را دو واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x)$ به دست بیاید:



برای رسم نمودار تابع $y=f(1+x)$ کافی است نمودار تابع f را یک واحد به چپ منتقل کنیم:



برای رسم نمودار تابع $y=f(1-x)$ کافی است نمودار تابع $y=f(1+x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم:



اکنون توجه کنید که برای پیدا کردن دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{f(1-x)}{f(1+x)}}$ باید نامعادلهٔ $\frac{f(1-x)}{f(1+x)}\geq0$ را حل کنیم. جدول تعیین علامت این عبارت به صورت زیر است:

x	$-\infty$		-4		-3		-1		1		3		4		$+\infty$
$f(1+x)$		+	0	−	0	+	0	−		−		−		−	
$f(1-x)$		−		−		−		−	0	+	0	−	0	+	
$\frac{f(1-x)}{f(1+x)}$		−		+		−		+	0	−	0	+	0	−	

بنابراین $D_g=(-4,-3)\cup(-1,1]\cup[3,4]$. پس فقط عددهای صحیح صفر، ۱، ۳ و ۴ در دامنهٔ تابع g هستند.

۲۸۷۶ (۴) توجه کنید که $(fog)(-\frac{1}{3})=f(g(-\frac{1}{3}))$. از طرف دیگر،

$$g(-\frac{1}{3})=f([-\frac{1}{3}-f(-\frac{1}{3})])=f([-\frac{1}{3}-(-\frac{1}{3}+[-\frac{1}{3}])])$$

$$=f(-[-\frac{1}{3}])=f(-(-1))=f(1)=1+[1]=2$$

پس

$$(fog)(-\frac{1}{3})=f(2)=2+[2]=4$$

۲۸۷۷ (۳) اگر طول مستطیل را a و عرض آن را b بگیریم، اندازهٔ قطر مستطیل برابر $\sqrt{a^2+b^2}$ است. بنابراین

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\qquad(1)$$

فرض می‌کنیم $\frac{a}{b}=x$. در این صورت $a=bx$. پس تساوی (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\sqrt{b^2x^2+b^2}}{bx}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Rightarrow\frac{b\sqrt{x^2+1}}{bx}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Rightarrow\frac{x^2+1}{x^2}=(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^2\Rightarrow1+\frac{1}{x^2}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{1}{x^2}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}-1=\frac{2+2\sqrt{5}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x^2=\frac{2}{\sqrt{5}+1}$$

۲۸۷۸ (۲) ابتدا توجه کنید که مجموع ضریب‌های معادلهٔ $x^2-(a+1)x+a=0$ برابر صفر است، پس یکی از جواب‌های آن $x=1$ است. درنتیجه، طبق فرض مسئله، جواب دیگر این معادله $x=3$ است. پس $x=3$ در معادله صدق می‌کند:

$$9-(a+1)3+a=0\Rightarrow a=3$$

بنابراین معادلهٔ دوم به صورت $x^2-10x+b=0$ درمی‌آید. چون جواب‌های این معادله دو عدد زوج متوالی‌اند، پس اختلاف آن‌ها برابر ۲ است. در نتیجه

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|1|}=2\Rightarrow\sqrt{100-4b}=2\Rightarrow b=24$$

توجه کنید که حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ اول برابر ۳ و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ دوم برابر ۲۴ است. درنتیجه، اختلاف آن‌ها برابر ۲۱ است.

۲۸۷۹ (۴) ابتدا توجه کنید که $D_f=(0,+\infty)$، بنابراین

$$D_{fof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_f\}=\{x>0|(4(\frac{1}{2})^x+\log_{0/5}x)^3>0\}$$

اکنون توجه کنید که

$$(4(\frac{1}{2})^x+\log_{0/5}x)^3>0\Rightarrow4(\frac{1}{2})^x+\log_{0/5}x>0$$

$$\log_{0/5}x>-4(\frac{1}{2})^x\Rightarrow-\log_2x>-2^{2-x}\Rightarrow\log_2x<2^{2-x}\qquad(1)$$

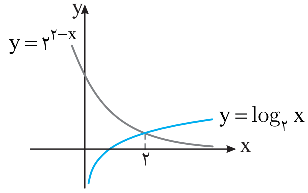
از روی نمودار تابع‌های $y=\log_2x$ و $y=2^{2-x}$ معلوم است که $x=2$ تنها جواب معادلهٔ $\log_2x=2^{2-x}$ است و مجموعهٔ جواب‌های نامعادله (۱) بازهٔ $(0,2)$ است. بنابراین باید نامعادلهٔ $(fof)(x)<f(2^{6-3x})$ را با شرط $x\in(0,2)$ حل کنیم. اکنون توجه کنید که تابع‌های $y=4(\frac{1}{2})^x$ و $y=\log_{0/5}x$ نزولی اکیدند، پس مجموع آن‌ها نزولی اکید است. همچنین چون تابع $y=x^3$ صعودی اکید است، پس تابع $f(x)=(4(\frac{1}{2})^x+\log_{0/5}x)^3$ نیز نزولی اکید است. بنابراین

$$(fof)(x)<f(2^{6-3x})\Rightarrow f(x)>2^{6-3x}$$

$$(4(\frac{1}{2})^x+\log_{0/5}x)^3>2^{6-3x}\Rightarrow4(\frac{1}{2})^x+\log_{0/5}x>2^{2-x}$$

$$2^{2-x}+\log_{0/5}x>2^{2-x}\Rightarrow\log_{0/5}x>0$$

پس $x<1$. بنابراین جواب نامعادلهٔ مورد نظر بازهٔ $(0,1)$ است.



۲۸۸۰ (۳) ابتدا توجه کنید که $x=-1$ و $x=\frac{m+4}{m}$ صفرهای تابع $y=mx^2-4x-(m+4)$ هستند و $(0,-m-4)$ نقطهٔ تقاطع نمودار تابع f با محور y است. مساحت مثلثی که رأس‌های آن $(-1,0)$، $(\frac{m+4}{m},0)$، $(0,-m-4)$ برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\left|\frac{m+۴}{m}-(-۱)\right|\left|-m-۴\right|=\left|\frac{m+۲}{m}\right|\left|m+۴\right|$$

چون مساحت این مثلث برابر ۳ است، پس $\left|\frac{(m+۲)(m+۴)}{m}\right|=۳$

بنابراین باید معادله‌های زیر را حل کنیم

$$\frac{(m+۲)(m+۴)}{m}=۳\Rightarrow m^۲+۳m+۸=۰\Rightarrow \Delta<۰ \text{ (جواب ندارد)}$$

$$\frac{(m+۲)(m+۴)}{m}=-۳\Rightarrow m^۲+۹m+۸=۰\Rightarrow m=-۱, m=-۸$$

طول رأس سهمی $y=mx^۲-۴m-(m+۴)$ برابر است با $-\frac{-۴}{۲m}=\frac{۲}{m}$. اگر $m=-۱$، آن‌گاه طول رأس سهمی برابر -۲ است و اگر $m=-۸$، آن‌گاه طول رأس سهمی برابر $-\frac{۱}{۴}$ است، که اختلاف آن‌ها برابر است با $-\frac{۱}{۴}+۲=\frac{۷}{۴}$.

۲۸۸۱ **۱** برای اینکه تابع f وارون‌پذیر باشد، باید تابع‌های $g(x)=\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}$ با دامنهٔ $[\frac{۵}{۲},+\infty)$ و $h(x)=-۲x^۲+ax-۲۱$ با دامنهٔ $(-\infty,\frac{۵}{۲})$ یک‌به یک باشند و برد این توابع اشتراکی نداشته باشند. تابع g تابعی خطی است، پس یک به یک است.

برای اینکه تابع h روی بازهٔ $(-\infty,\frac{۵}{۲})$ یک‌به‌یک باشد، باید طول رأس نمودار تابع h (سهمی) در بازهٔ $(-\infty,\frac{۵}{۲})$ نباشد. طول رأس این سهمی $\frac{a}{۴}$ است. بنابراین $\frac{a}{۴}\geq\frac{۵}{۲}$. پس $a\geq۱۰$. برای اینکه برد تابع‌های g و h اشتراک نداشته باشد، باید

$$\lim_{x\to(\frac{۵}{۲})^-} h(x)\leq g(\frac{۵}{۲})\Rightarrow -۲(\frac{۵}{۲})^۲+a(\frac{۵}{۲})-۲۱\leq-\frac{۱}{۶}$$

$$\frac{۵}{۲}a\leq\frac{۱۰۰}{۳}\Rightarrow a\leq\frac{۴۰}{۳}$$

بنابراین $۱۰\leq a\leq\frac{۴۰}{۳}$، که بیشترین مقدار ممکن صحیح a برابر ۱۳ است. اگر $a=۱۳$، آن‌گاه

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲} & x\geq\frac{۵}{۲}\\ -۲x^۲+۱۳x-۲۱ & x<\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

اکنون فرض کنید $f^{-1}(-۳)=m$. بنابراین $f(m)=-۳$. توجه کنید که

$$m\geq\frac{۵}{۲}\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲}m-\frac{۳}{۲}=-۳\Rightarrow m=-۳ \text{ (غ.ق.ق)}$$

$$m<\frac{۵}{۲}\Rightarrow f(m)=-۲m^۲+۱۳m-۲۱=-۳\Rightarrow m=۲, m=\frac{۹}{۲} \text{ (غ.ق.ق)}$$

۲۸۸۲ **۲** اختلاف ریشه‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{(\log ۹)^۲+۴\log\frac{۵}{۳}\times\log ۱۵}}{\log\frac{۵}{۳}}$$

اکنون توجه کنید که

$$\log ۹=۲\log ۳=۲\times۰/۴=۰/۸$$

$$\log\frac{۵}{۳}=\log ۵-\log ۳=\log\frac{۱۰}{۲}-\log ۳$$
$$=\log ۱۰-\log ۲-\log ۳=۱-۰/۳-۰/۴=۰/۳$$

$$\log ۱۵=\log(۳\times۵)=\log ۳+\log ۵$$
$$=\log ۳+۱-\log ۲=۰/۴+۱-۰/۳=۱/۱$$

بنابراین اختلاف مورد نظر برابر است با

$$\frac{\sqrt{(۰/۸)^۲+۴\times۰/۳\times۱/۱}}{۰/۳}=\frac{\sqrt{۱/۹۶}}{۰/۳}=\frac{۱/۴}{۰/۳}=\frac{۱۴}{۳}$$

۲۸۸۳ **۱** توجه کنید که

$$\tan x+\cot x=۴\Rightarrow\frac{۱}{\sin x\cos x}=۴\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین

$$(\sin x-\cos x)^۲=۱-۲\sin x\cos x=۱-۲\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$|\sin x-\cos x|=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

از طرف دیگر، $۵\pi<۴x<۶\pi\Rightarrow\frac{۵}{۴}\pi<x<\frac{۳}{۲}\pi$

پس $\sin x-\cos x<۰$. در نتیجه

$$-(\sin x-\cos x)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\sin x-\cos x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

اکنون توجه کنید که

$$\sin^۳ x-\cos^۳ x=(\sin x-\cos x)(۱+\sin x\cos x)$$
$$=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۱+\frac{۱}{۴})=-\frac{۵\sqrt{۲}}{۸}$$

پس

$$\frac{۱}{\sin^۳ x-\cos^۳ x}=\frac{۱}{-\frac{۵\sqrt{۲}}{۸}}=-۰/۸\sqrt{۲}$$

۲۸۸۴ **۴** چون محیط دایره برابر ۲π است، پس شعاع آن برابر است با $r=\frac{۲\pi}{۲\pi}=۱$. در نتیجه، چون OB عمودمنصف AH است، پس $OH=BH=\frac{۱}{۲}$. از طرف دیگر، در مثلث OAH از قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود

$$OA^۲=OH^۲+AH^۲\Rightarrow۱=\frac{۱}{۴}+AH^۲\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

همچنین، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHA،

$$\sin\hat{O}=\frac{AH}{OA}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\hat{O}=\frac{\pi}{۳}$$

بنابراین طول کمان AB برابر است با

$$\widehat{AB}=OA\times\hat{O}=۱\times\frac{\pi}{۳}=\frac{\pi}{۳}$$

درنتیجه محیط ناحیهٔ رنگی برابر است با

$$\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\pi}{۳}$$

و محیط مثلث OAH برابر است با

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

پس اختلاف مورد نظر برابر است با $\frac{\pi}{۳}-۱=\frac{\pi-۳}{۳}$.

۲۸۸۵ **۲** ابتدا رأس‌های مثلث ABC را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases}x+۲y=۳\\ ۲x+ay=۶\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۳\\ y=۰\end{cases}\Rightarrow A=(۳,۰)$$

$$\begin{cases}x+۲y=۳\\ x+y=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-۳\\ y=۳\end{cases}\Rightarrow B=(-۳,۳)$$

$$\begin{cases}۲x+ay=۶\\ x+y=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{۶}{a-۲}\\ y=\frac{۶}{a-۲}\end{cases}\Rightarrow C=(-\frac{۶}{a-۲},\frac{۶}{a-۲})$$

چون مرکز دایرهٔ گفته شده روی نیمساز ناحیهٔ دوم است، پس نقطه‌های B و C دو سر قطر این دایره‌اند و O، مرکز دایره، وسط پاره‌خط BC است. در نتیجه

$$x_O=\frac{-۳+\frac{-۶}{a-۲}}{۲}=\frac{۳a}{۴-۲a}$$

$$y_O=-x_O=-\frac{۳a}{۴-۲a}$$

اکنون توجه کنید که

$$OA=\frac{۱}{۲}BC\Rightarrow OA^۲=\frac{۱}{۴}BC^۲$$

از طرف دیگر،

$$OA^۲=(\frac{۳a}{۴-۲a}-۳)^۲+(-\frac{۳a}{۴-۲a}-۰)^۲=(\frac{۹a-۱۲}{۴-۲a})^۲+\frac{۹a^۲}{(۴-۲a)^۲}=\frac{۹۰a^۲-۲۱۶a+۱۴۴}{۴(a-۲)^۲}$$

$$BC^۲=(-\frac{۶}{a-۲}+۳)^۲+(\frac{۶}{a-۲}-۳)^۲=۲(\frac{۳a-۱۲}{a-۲})^۲=\frac{۱۸a^۲-۱۴۴a+۲۸۸}{(a-۲)^۲}$$

در نتیجه

$$OA^۲=\frac{۱}{۴}BC^۲\Rightarrow\frac{۹۰a^۲-۲۱۶a+۱۴۴}{۴(a-۲)^۲}=\frac{۱}{۴}\times\frac{۱۸a^۲-۱۴۴a+۲۸۸}{(a-۲)^۲}$$

$$۹۰a^۲-۲۱۶a+۱۴۴=۱۸a^۲-۱۴۴a+۲۸۸$$

$$a^۲-a-۲=۰\Rightarrow a=-۱,\ a=۲\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین C نقطهٔ $(۲,-۲)$ است. اکنون توجه کنید که چون A زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر BC است، پس

$$\hat{A}=۹۰^\circ\Rightarrow\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ\Rightarrow\hat{B}=۹۰^\circ-\hat{C}$$

بنابراین

$$\cot(\hat{B}-\hat{C})=\cot(۹۰^\circ-۲\hat{C})=\tan ۲\hat{C}=\frac{\sin ۲\hat{C}}{\cos ۲\hat{C}}$$

$$=\frac{۲\sin\hat{C}\cos\hat{C}}{\cos^۲\hat{C}-\sin^۲\hat{C}}=\frac{\frac{۲\sin\hat{C}\cos\hat{C}}{\cos^۲\hat{C}}}{\frac{\cos^۲\hat{C}}{\cos^۲\hat{C}}-\frac{\sin^۲\hat{C}}{\cos^۲\hat{C}}}=\frac{۲\tan\hat{C}}{۱-\tan^۲\hat{C}}$$

از طرف دیگر،

$$\tan\hat{C}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{(۳+۳)^۲+(۳-۰)^۲}}{\sqrt{(۳-۲)^۲+(۰+۲)^۲}}=\frac{۳\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=۳$$

پس

$$\cot(\hat{B}-\hat{C})=\frac{۲\times۳}{۱-۹}=-\frac{۳}{۴}$$

۲۸۸۶ (۳) ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=a\sin^۲(\frac{\pi}{۴}-bx)+c=a(\frac{۱-\cos ۲(\frac{\pi}{۴}-bx)}{۲})+c$$

$$=\frac{a}{۲}-\frac{a}{۲}\cos(\frac{\pi}{۲}-۲bx)+c=-\frac{a}{۲}\sin ۲bx+\frac{a}{۲}+c$$

پس دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{۲\pi}{|۲b|}$. بنابراین

$$\frac{۲\pi}{۲|b|}=\frac{۱۵\pi}{۴}-(-\frac{۵\pi}{۴})=۵\pi$$

پس $|b|=\frac{۱}{۵}$. از طرف دیگر، ماکزیمم و مینیمم تابع f به ترتیب برابر $\frac{a}{۲}+c+|\frac{a}{۲}|$ و $\frac{a}{۲}+c-|\frac{a}{۲}|$ است. در نتیجه

$$\begin{cases}\frac{a}{۲}+c+|\frac{a}{۲}|=۱\\ \frac{a}{۲}+c-|\frac{a}{۲}|=-۲\end{cases}\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}}۲|\frac{a}{۲}|=۳\Rightarrow|a|=۳$$

بنابراین $|ab|=|a||b|=\frac{۳}{۵}$. از روی نمودار تابع f معلوم می‌شود که چون تابع در همسایگی راست نقطهٔ $x=۰$ صعودی است، پس $-\frac{a}{۲}(۲b)>۰$ یعنی $ab<۰$.

درنتیجه $ab=-\frac{۳}{۵}=-۰/۶$.

۲۸۸۷ (۲) ابتدا توجه کنید که

$$\cot(\frac{\pi+۴x}{۲})=\cot(\frac{\pi}{۲}+۲x)=-\tan ۲x$$

$$\cos(\frac{\pi+۸x}{۲})=\cos(\frac{\pi}{۲}+۴x)=-\sin ۴x$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\tan ۲x=\sin ۴x\Rightarrow\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}=۲\sin ۲x\cos ۲x$$

$$\sin ۲x=۲\sin ۲x\cos^۲ ۲x\Rightarrow\sin ۲x(۲\cos^۲ ۲x-۱)=۰$$

$$\sin ۲x\cos ۴x=۰$$

در نتیجه

$$\sin ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos ۴x=۰\Rightarrow ۴x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۸},k\in\mathbb{Z}$$

چون جواب‌های غیرصفر در بازهٔ $[-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴}]$ را می‌خواهیم، پس در دستهٔ اول هیچ جوابی قابل قبول نیست و جواب‌های قابل قبول در دستهٔ دوم $\frac{\pi}{۸}$ و $-\frac{\pi}{۸}$ هستند، که اختلاف آن‌ها $\frac{\pi}{۴}$ است، پس $\alpha=\frac{\pi}{۴}$ و $\cos ۳\alpha=\cos\frac{۳\pi}{۴}=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$.

۲۸۸۸ (۴) چون حد صورت کسر وقتی که $x\to۱$ برابر با صفر است، پس باید حد مخرج کسر هم صفر باشد، تا حد کسر مورد نظر غیر صفر باشد. بنابراین

$$\lim_{x\to۱}(ax+b)=a+b=۰\Rightarrow a=-b$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to۱}\frac{b\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}-b}{ax+b}=\lim_{x\to۱}\frac{b\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}-b}{-bx+b}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}-۱}{-x+۱}=\lim_{x\to۱}\frac{۲-\sqrt[۳]{x}-۱}{(۱-x)(\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}+۱)}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{۱-\sqrt[۳]{x}}{(۱-\sqrt[۳]{x})(۱+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})(\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}+۱)}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{۱}{(۱+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})(\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}+۱)}=\frac{۱}{۳\times۲}=\frac{۱}{۶}$$

۲۸۸۹ (۳) نمودار تابع f خطی راست است که از نقطه‌های $(۰,۲a)$ و $(۳a,۰)$ گذشته است. معادلهٔ این خط به صورت زیر است

$$y-۰=\frac{۰-۲a}{۳a-۰}(x-۳a)\Rightarrow y=-\frac{۲}{۳}x+۲a$$

بنابراین $f(x)=-\frac{۲}{۳}x+a$. نمودار تابع g خطی راست است که از نقطه‌های $(۰,۲m)$ و $(-m,۰)$ گذشته است. معادلهٔ این خط به صورت زیر است

$$y-۰=\frac{۰-۲m}{-m-۰}(x+m)\Rightarrow y=۲x+۲m$$

بنابراین $g(x)=۲x+۲m$. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{|f(x)|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x+۲m}{|-\frac{۲}{۳}x+۲a|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x+۲m}{-\frac{۲}{۳}x+۲a}=\frac{۲}{-\frac{۲}{۳}}=-۳$$

۲۸۹۰ (۲) ابتدا توجه کنید که اگر عبارت $2x^3+(m-3)x^2+a^2$ ریشه‌ای مانند x_0 به‌جز $x=a$ داشته باشد، آن‌گاه تابع f در نقطهٔ $x=x_0$ ناپیوسته می‌شود. در نتیجه $x=a$ باید تنها ریشهٔ عبارت $2x^3+(m-3)x^2+a^2$ باشد. بنابراین

$$2a^3+(m-3)a^2+a^2=0\Rightarrow 2a^3+(m-2)a^2=0$$

$$a^2(2a+m-2)=0\Rightarrow a=0,\ a=\frac{2-m}{2}$$

اگر $a=0$، آن‌گاه ضابطهٔ تابع f به ازای $x=0$ به صورت $\frac{2\tan b}{\sqrt{-x}}$ است که ممکن نیست. بنابراین $a=\frac{2-m}{2}$. از طرف دیگر، $x=a$ باید ریشهٔ مضاعف عبارت $6x^2+(m+3)x+\frac{m}{2}$ باشد، زیرا در غیر این صورت حد تابع f در نقطهٔ $x=a$ نامتناهی می‌شود. بنابراین

$$\Delta=0\Rightarrow(m+3)^2-24(\frac{m}{2})=0\Rightarrow(m-3)^2=0\Rightarrow m=3$$

پس $a=\frac{2-3}{2}=-\frac{1}{2}$. بنابراین

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{6(x+\frac{1}{2})^2}}{|2x^3+\frac{1}{4}|}=\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{6}|x+\frac{1}{2}|}{2|x^3+\frac{1}{8}|}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{6}|x+\frac{1}{2}|}{2|x+\frac{1}{2}||x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}|}=\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{6}}{2|x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}|}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}|}=\frac{\sqrt{6}}{2\times\frac{3}{4}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

بنابراین

$$f(a)=f(-\frac{1}{2})=\frac{2\tan b}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=2\sqrt{2}\tan b$$

در نتیجه

$$2\sqrt{2}\tan b=\frac{2\sqrt{6}}{3}\Rightarrow\tan b=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین b می‌تواند $\frac{\pi}{3}$ باشد.

۲۸۹۱ (۳) ابتدا توجه کنید که

$$g'(\sqrt[5]{3})f'(g(\sqrt[5]{3}))=(fog)'(\sqrt[5]{3})$$

بنابراین باید مشتق تابع fog را حساب کنیم. توجه کنید که اگر $x>0$، آن‌گاه

$$(fog)(x)=f(\frac{1}{x^5+|x^5|})=f(\frac{1}{2x^5})=-\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{2x^5}+|\frac{1}{2x^5}|}}=-\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}}}=-x$$

بنابراین $(fog)'(x)=-1$، پس $(fog)'(\sqrt[5]{3})=-1$.

۲۸۹۲ (۴) فرض می‌کنیم $CD=x$، $BC=y$ و طول ضلع کوچک‌تر مثلث قائم‌الزاویه برابر a باشد. در این صورت طول ضلع دیگر این مثلث برابر $2a$ است. در نتیجه، طول وتر این مثلث برابر با $\sqrt{5}a$ است. از یک طرف مساحت مثلث برابر است با $\frac{1}{2}(a)(2a)=a^2$. از طرف دیگر، اگر طول ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه برابر h باشد، مساحت آن برابر است با $\frac{1}{2}h\times\sqrt{5}a$. بنابراین

$$\frac{\sqrt{5}}{2}ha=a^2\Rightarrow h=\frac{2}{\sqrt{5}}a$$

اکنون توجه کنید که مثلث‌های MCD و MNP متشابه‌اند. پس نسبت ارتفاع‌های آن‌ها برابر نسبت اضلاع آن‌ها است. یعنی

$$\frac{h-y}{h}=\frac{x}{\sqrt{5}a}\Rightarrow\frac{\frac{2}{\sqrt{5}}a-y}{\frac{2}{\sqrt{5}}a}=\frac{x}{\sqrt{5}a}\Rightarrow\frac{\sqrt{5}(\frac{2}{\sqrt{5}}a-y)}{2}=\frac{x}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{2a-\sqrt{5}y}{2}=\frac{x}{\sqrt{5}}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{5}}{2}(2a-\sqrt{5}y)=\sqrt{5}a-\frac{5}{2}y$$

بنابراین مساحت مستطیل برابر است با

$$S=xy=(\sqrt{5}a-\frac{5}{2}y)y=-\frac{5}{2}y^2+\sqrt{5}ay$$

مساحت مستطیل ABCD برحسب y تابعی درجهٔ دوم است، که ماکزیمم آن وقتی به دست می‌آید که

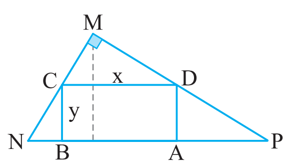
$$y=\frac{-\sqrt{5}a}{2(-\frac{5}{2})}=\frac{\sqrt{5}}{5}a$$

در این صورت

$$x=\sqrt{5}a-\frac{5}{2}(\frac{\sqrt{5}}{5}a)=\frac{\sqrt{5}}{2}a$$

بنابراین

$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}a}{\frac{\sqrt{5}}{5}a}=\frac{5}{2}=2/5$$



۲۸۹۳ (۲) فرض می‌کنیم عددهای دستهٔ اول به صورت زیر باشند

$$a,a+1,\dots,a+6$$

در این صورت $\bar{x}=\frac{7a+21}{7}=a+3$. پس

$$\sigma=\frac{1}{2}\bar{x}\Rightarrow 4\sigma^2=\bar{x}^2\Rightarrow\frac{4(3^2+2^2+1^2+0^2+1^2+2^2+3^2)}{7}=(a+3)^2$$

$$\frac{4(2\times14)}{7}=(a+3)^2\Rightarrow(a+3)^2=16\Rightarrow a=1$$ یا $a=-7$ (غ.ق.ق)

فرض کنید داده‌های دستهٔ آخر به صورت مقابل باشند $b,b+1,\dots,b+6$

در این صورت $\bar{x}=b+3$. پس

$$\sigma^3=\bar{x}\Rightarrow(\sqrt{\frac{2\times14}{7}})^3=b+3\Rightarrow 8=b+3\Rightarrow b=5$$

پس اختلاف مورد نظر برابر است با $b-a=5-1=4$.

۲۸۹۴ (۱) چون عدد مورد نظر بر ۶ بخش‌پذیر است، پس زوج است، یعنی یکان آن باید برابر ۸ باشد. چون عدد مورد نظر از دو طرف یکسان خوانده می‌شود، پس اگر هفت رقم سمت راست را مشخص کنیم، هفت رقم سمت چپ نیز مشخص می‌شوند. توجه کنید که چون عدد مورد نظر بر ۶ بخش‌پذیر است، پس بر ۳ هم بخش‌پذیر است. بنابراین مجموع رقم‌هایش بر ۳ بخش‌پذیر است. یعنی دو برابر مجموع هفت رقم سمت راست بر ۳ بخش‌پذیر است، پس مجموع هفت رقم سمت راست بر ۳ بخش‌پذیر است. فرض کنید n تا از این هفت رقم برابر ۷ باشند، در این صورت $6-n$ تا از رقم‌ها برابر ۸ هستند (توجه کنید که رقم آخر حتماً ۸ است). بنابراین مجموع هفت رقم سمت راست برابر است با $8+7\times n+(6-n)\times 8=56-n=57-(n+1)$

چون $(n+1)-57$ بر ۳ بخش‌پذیر است و خود ۵۷ نیز بر ۳ بخش‌پذیر است، پس $n+1$ بر ۳ بخش‌پذیر است. چون مقدار n حداکثر ۶ است، پس مقدار n یا ۲ است یا ۵.

اگر $n=2$، باید از میان شش جا دو جا برای رقم‌های ۷ مشخص کنیم تعداد راه‌های این کار برابر است با $\binom{6}{2}=15$.

اگر $n=5$، باید از میان شش جا پنج جا برای رقم‌های ۷ مشخص کنیم. تعداد راه‌های این کار برابر است با $\binom{6}{5}=6$.

بنابراین تعداد عددهای مورد نظر برابر است با $15+6=21$.

۲۸۹۵ (۳) برای اینکه در n بار پرتاب سکه، پرتاب n ام m اُمین بار باشد که سکه رو آمده است، باید در $n-1$ پرتاب قبلی $m-1$ بار رو و $n-(m-1)$ بار پشت آمده باشد، در نتیجه، احتمال پیشامد مورد نظر برابر است با

$$\frac{\binom{n-1}{m-1}}{2^n}$$

از طرف دیگر، احتمال این‌که در n پرتاب سکه m بار رو بیاید برابر است با $\frac{\binom{n}{m}}{2^n}$.

در نتیجه

$$\frac{\binom{n-1}{m-1}}{2^n}=\frac{m}{m+3}\times\frac{\binom{n}{m}}{2^n}$$

$$\frac{(n-1)!}{2^n(m-1)!(n-m)!}=\frac{m}{m+3}\times\frac{n!}{2^n m!(n-m)!}$$

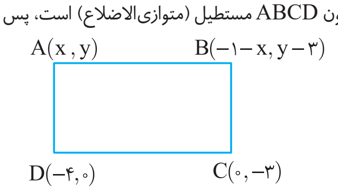
$$1=\frac{m}{m+3}\times\frac{n}{m}\Rightarrow m+3=n\Rightarrow mn=m(m+3)$$

اگر $m=5$، آن‌گاه $mn=40$.

۲۸۹۶ (۱) بنابر فرمول احتمال کل، احتمال پذیرفته شدن پارسا در رشتهٔ مورد علاقه‌اش برابر است با

$$\underbrace{0/45\times 0/2}_{\text{قبولی در رشتهٔ A}}+\underbrace{0/2\times 0/25}_{\text{قبولی در رشتهٔ B}}+\underbrace{0/35\times 0/3}_{\text{قبولی در رشتهٔ C}}=0/245$$

۲۸۹۷ (۳) چون ABCD مستطیل (متوازی‌الاضلاع) است، پس

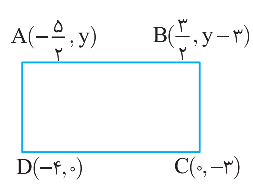


$$x_A+x_C=x_B+x_D\Rightarrow x+0=-1-x-4$$

$$x=-\frac{5}{2}$$

اکنون توجه کنید که

$$\text{شیب خط AB}=\frac{y-3-y}{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}=-\frac{3}{4},\quad \text{شیب خط AD}=\frac{0-y}{-4+\frac{5}{2}}=\frac{2y}{3}$$



چون خط‌های AB و AD بر هم عمودند، حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -1 است. پس $(-\frac{3}{4})(\frac{2y}{3})=-1\Rightarrow y=2$

اکنون توجه کنید که

$$AD=\sqrt{(-\frac{5}{2}+4)^2+(2-0)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{5}{2}$$

$$CD=\sqrt{(-4-0)^2+(0+3)^2}=5$$

بنابراین محیط مستطیل ABCD برابر است با $2(5+\frac{5}{2})=15$.

۲۸۹۸ (۱) طول قطرها را $2x$ و $6x$ در نظر می‌گیریم. در این صورت بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB،

$$AB^2=OA^2+OB^2=x^2+9x^2=10x^2$$

پس $AB=\sqrt{10}x$

اگر فرض کنیم $OF=z$، از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOF به دست می‌آید

$$AF^2=AO^2+FO^2=x^2+z^2\Rightarrow AF=\sqrt{x^2+z^2}$$

همچنین، توجه کنید که $DF=3x-z$. فرض می‌کنیم $EF=t$. از قضیهٔ اساسی تشابه معلوم می‌شود که مثلث‌های AFB و EFD متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{BF}{DF}=\frac{AB}{ED}\Rightarrow\frac{3x+z}{3x-z}=2\Rightarrow 3x+z=6x-2z\Rightarrow x=z$$

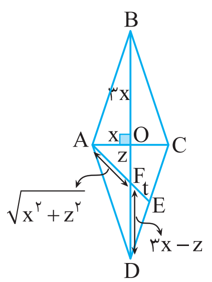
همچنین

$$\frac{EF}{AF}=\frac{ED}{AB}\Rightarrow\frac{t}{\sqrt{x^2+z^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{t}{\sqrt{x^2+x^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{t}{\sqrt{2}x}=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\sqrt{2}}{2}x$$

بنابراین

$$\frac{EF}{AB}=\frac{t}{\sqrt{10}x}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x}{\sqrt{10}x}=\frac{\sqrt{5}}{10}$$



۲۸۹۹ (۳) چون $FC||AB$، از قضیهٔ تالس در مثلث ADB،

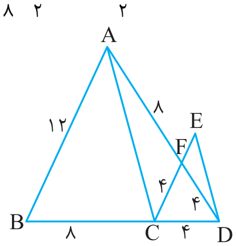
$$\frac{DF}{FA}=\frac{DC}{CB}\Rightarrow\frac{DF}{8}=\frac{4}{8}\Rightarrow DF=4$$

در همین مثلث از تعمیم قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود که

$$\frac{FC}{AB}=\frac{DC}{DB}\Rightarrow\frac{FC}{12}=\frac{4}{12}\Rightarrow FC=4$$

از طرف دیگر، از قضیهٔ اساسی تشابه معلوم می‌شود که مثلث‌های EFD و CFA متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{ED}{CA}=\frac{FD}{FA}\Rightarrow\frac{ED}{CA}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\Rightarrow ED=\frac{1}{2}CA$$



اکنون توجه کنید که مثلث FCD متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه اگر ارتفاع وارد بر ضلع FD را رسم کنیم، آن‌گاه آن ارتفاع میانه هم هست. در نتیجه $FH=\frac{FD}{۲}=۲$.

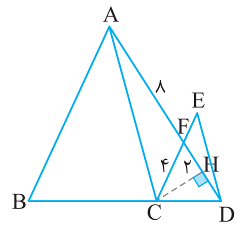
اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث FHC،

$$FC^{۲}=FH^{۲}+CH^{۲}\Rightarrow ۱۶=۴+CH^{۲}\Rightarrow CH^{۲}=۱۲$$

همین‌طور، در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC از قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود

$$AC^{۲}=AH^{۲}+CH^{۲}=۱۰۰+۱۲=۱۱۲\Rightarrow AC=۴\sqrt{۷}$$

بنابراین $ED=\frac{۱}{۲}AC=۲\sqrt{۷}$.



۲۹۰۰ **۲** مرکز دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}-۲x+۲y-a=۰$ نقطهٔ $(۱,-۱)$ و شعاع آن برابر است با $\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴+۴a}=\sqrt{۲+a}$. مرکز دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+۴x-۶y+۶a=۰$ نقطهٔ $(-۲,۳)$ و شعاع آن برابر است با $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۳۶-۲۴a}=\sqrt{۱۳-۶a}$. بنابراین

فاصلهٔ مرکزهای دو دایره برابر است با

$$\sqrt{(۱+۲)^{۲}+(-۱-۳)^{۲}}=۵$$

فاصلهٔ نقطه‌های M و N وقتی بیشترین مقدار ممکن است که مانند شکل زیر نقطه‌های M و N روی خطی باشند که مرکزهای دایره‌ها را به هم وصل می‌کند. در نتیجه باید

$$\sqrt{۲+a}+\sqrt{۱۳-۶a}+۵=۸\Rightarrow\sqrt{۲+a}+\sqrt{۱۳-۶a}=۳$$

$$\sqrt{۱۳-۶a}=۳-\sqrt{۲+a}\Rightarrow ۱۳-۶a=۹+۲+a-۶\sqrt{۲+a}$$

$$۲-۷a=-۶\sqrt{۲+a}\Rightarrow ۴۹a^{۲}-۶۴a-۶۸=۰$$

$$(۴۹a+۳۴)(a-۲)=۰\Rightarrow a=۲,\ a=-\frac{۳۴}{۴۹}\ (\text{غ.ق.ق})$$