



انتشارات
گوناگون

موج؟ ۲۰

مرحله‌ای
و جامع

ویژه آمادگی شرکت در امتحان‌های نهایی و نیم‌سال

هندسه دوازدهم

حمیدرضا ملکی



امتحان‌های
نیم‌سال اول و
دوم

امتحان‌های
فصل به فصل

امتحان‌های
درس به درس

پاسخ‌های
تشریحی +
کلید تصحیح

امتحان‌های
نهایی اخیر

امتحان‌های
شبیه‌ساز نهایی

پیشگفتار

در ابتدا باید یک خدقوت جانانه به شما دانش آموزان عزیز دوازدهمی بگویم که در حال عبور از یکی از سال‌های پرچالش زندگی‌تان هستید. در این مسیر، یکی از اهداف مهم شما کسب نمره مناسب در امتحان نهایی است. خوشحالم که این کتاب را انتخاب کرده‌اید و با اطمینان به شما می‌گویم که با مطالعه آن، کسب نمره ۲۰ برای شما آسان می‌شود.

این کتاب کاملاً در چارچوب کتاب درسی نوشته شده است و دارای ویژگی‌های زیر است:

۱) آزمون‌محور است، بدین صورت که فقط با آزمون‌های مختلف و بدون درس‌نامه مطالب کتاب درسی بیان می‌شود؛

۲) پاسخنامه آزمون‌ها بر اساس پاسخنامه‌های امتحانات نهایی بارم‌بندی شده است. شما می‌توانید با مطالعه دقیق آن‌ها به این موضوع پی ببرید که قسمت‌های مهم در نوشتن پاسخ چیست؛

۳) همه مطالب کتاب درسی در آزمون‌ها پوشش داده شده‌اند. در این آزمون‌ها هر مطلب کتاب درسی را در قالب حداقل یک مسئله مشاهده می‌کنید؛

۴) این کتاب برای هر دانش آموز در هر سطحی مناسب است. دانش آموزان توانمند از این کتاب می‌توانند برای بهبود روش نوشتن خود استفاده کنند. همچنین دانش آموزانی که هنوز به هر دلیلی نتوانسته‌اند به مطالب کتاب درسی تسلط پیدا کنند، می‌توانند در زمان کوتاه نمره مناسبی کسب کنند. این کتاب دارای ۳۵ آزمون، شامل آزمون‌های ۱۰ نمره‌ای و ۲۰ نمره‌ای است. آزمون‌های درس به درس و فصل به فصل ۱۰ نمره‌ای هستند و آزمون‌های نیمسال اول، نیمسال دوم و جامع (تألیفی و نهایی سال‌های اخیر) ۲۰ نمره‌ای.

نوع آزمون	تعداد آزمون‌ها	سرفصل
درس به درس	۷	هر درس ۱ آزمون
فصل به فصل	۶	هر فصل ۲ آزمون
نیمسال اول	۳	فصل اول و فصل دوم (درس‌های اول و دوم)
نیمسال دوم	۳	فصل دوم (درس سوم) و فصل سوم
جامع - شبیه‌ساز نهایی	۶	تمام کتاب
نهایی ۱۴۰۲	۳	تمام کتاب
شبه‌نهایی و نهایی ۱۴۰۳	۴	تمام کتاب
نهایی ۱۴۰۴	۳	تمام کتاب
نهایی ۱۴۰۵	۱	تمام کتاب

آزمون‌های جامع کاملاً تألیفی هستند و بودجه‌بندی آن‌ها بر اساس امتحان نهایی است. اما در سایر آزمون‌ها از سؤالات امتحانات نهایی سال‌های گذشته نیز استفاده شده است. این موضوع به ما و شما کمک می‌کند که به مهم‌ترین هدف کتاب برسیم و آن کسب نمره ۲۰ در امتحان نهایی هندسه ۳ است. در پایان بر خود لازم می‌دانم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، دکتر آریس آقانیانس برای مطالعه و ویراستاری علمی کتاب، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی، خانم مرضیه کریمی برای رسم شکل‌ها و خانم ستین مختار مسئول واحد ویراستاری و حروف‌چینی تشکر و قدردانی کنم.

حمیدرضا ملکی

فهرست مطالب

آزمون‌های درس به درس، فصل به فصل و نیمسال	آزمون‌های جامع (شبیه‌ساز نهایی و نهایی)
آزمون ۱: فصل اول - درس اول ۲	آزمون ۲۰: جامع (۱) - شبیه‌ساز نهایی ۲۷
آزمون ۲: فصل اول - درس دوم ۳	آزمون ۲۱: جامع (۲) - شبیه‌ساز نهایی ۲۹
آزمون ۳: فصل اول (۱) ۴	آزمون ۲۲: جامع (۳) - شبیه‌ساز نهایی ۳۱
آزمون ۴: فصل اول (۲) ۵	آزمون ۲۳: جامع (۴) - شبیه‌ساز نهایی ۳۳
آزمون ۵: فصل دوم - درس اول ۶	آزمون ۲۴: جامع (۵) - شبیه‌ساز نهایی ۳۵
آزمون ۶: فصل دوم - درس دوم ۷	آزمون ۲۵: جامع (۶) - نهایی خرداد ۱۴۰۲ ۳۷
آزمون ۷: نیمسال اول (۱) ۸	آزمون ۲۶: جامع (۷) - نهایی شهریور ۱۴۰۲ ۳۹
آزمون ۸: نیمسال اول (۲) ۱۰	آزمون ۲۷: جامع (۸) - نهایی دی ۱۴۰۲ ۴۱
آزمون ۹: نیمسال اول (۳) ۱۲	آزمون ۲۸: جامع (۹) - شبه‌نهایی اردیبهشت ۱۴۰۳ ۴۳
آزمون ۱۰: فصل دوم - درس سوم ۱۴	آزمون ۲۹: جامع (۱۰) - نهایی خرداد ۱۴۰۳ ۴۴
آزمون ۱۱: فصل دوم (۱) ۱۵	آزمون ۳۰: جامع (۱۱) - نهایی شهریور ۱۴۰۳ ۴۶
آزمون ۱۲: فصل دوم (۲) ۱۶	آزمون ۳۱: جامع (۱۲) - نهایی دی ۱۴۰۳ ۴۸
آزمون ۱۳: فصل سوم - درس اول ۱۷	پاسخ‌های تشریحی آزمون‌های ۱ تا ۳۱ ۵۲
آزمون ۱۴: فصل سوم - درس دوم ۱۸	آزمون ۳۲: جامع (۱۳) - نهایی خرداد ۱۴۰۴ ۸۹
آزمون ۱۵: فصل سوم (۱) ۱۹	آزمون ۳۳: جامع (۱۴) - نهایی شهریور ۱۴۰۴ ۹۰
آزمون ۱۶: فصل سوم (۲) ۲۰	آزمون ۳۴: جامع (۱۵) - نهایی دی ۱۴۰۴ ۹۲
آزمون ۱۷: نیمسال دوم (۱) ۲۱	آزمون ۳۵: جامع (۱۶) - نهایی مرداد ۱۴۰۵ ۹۳
آزمون ۱۸: نیمسال دوم (۲) ۲۳	پاسخ‌های تشریحی آزمون‌های ۳۲ تا ۳۵ ۹۵
آزمون ۱۹: نیمسال دوم (۳) ۲۵	

صفحه پاسخ

۵۲

موضوع آزمون

فصل اول - درس اول

آزمون

۱

ردیف	سؤالات	رشته: ریاضی و فیزیک	تألیفی	مدت امتحان: ۷۰ دقیقه
۱	الف) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه A^5 برابر است. ب) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & z+2 \\ y & x-1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد، حاصل $x+y+z$ برابر است. پ) اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 5}$ و $B = [b_{ij}]_{5 \times 3}$ ، آن گاه AB ماتریسی از مرتبه است. ت) هر ماتریس اسکالر 3×3 با هر ماتریس هم مرتبه با آن، تعویض پذیر است. (درست - نادرست)			نمره
۲	ماتریس های $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x & y+1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر $A - 2B = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ z-1 & 6 \end{bmatrix}$ ، آن گاه مقادیر x, y و z را به دست آورید.			۱/۲۵
۳	اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} i & i \geq j \\ j & i < j \end{cases}$ و $b_{ij} = \begin{cases} i^2 & i > j \\ 0 & i = j \\ i-j & i < j \end{cases}$ باشند، ماتریس $2A - B$ را محاسبه کنید.			۱/۵
۴	دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & m-2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ n+1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & 0 & n \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل AB را محاسبه کنید.			۱
۵	اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ به طوری که $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i > j \\ -1 & i = j \\ j & i < j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، آن گاه حاصل دو ماتریس AB و BA را به دست آورید.			۱/۵
۶	با استفاده از ویژگی های ضرب ماتریس ها و ماتریس همانی I درستی رابطه زیر را ثابت کنید: $(A - 3I)^2 = A^2 - 6A + 9I$			۱ (دی ۱۴۰۱)
۷	اگر دو ماتریس مربعی A و B به صورت $A = [3i - 2j]_{3 \times 3}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، الف) ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. ب) ماتریس های AB و B^T را محاسبه کنید.			۱/۵ (شهریور ۱۴۰۱ با تغییر)
۸	مقدار m را طوری بیابید که دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} m & 2 \\ m+1 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & m \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشند.			۱/۲۵
۱۰	جمع نمره	موفق و سربلند باشید		

صفحات پاسخ

موضوع آزمون

۵۳ تا ۵۴

فصل اول (۱)

۳

آزمون

ردیف	سؤالات	رشته: ریاضی و فیزیک	تألیفی	مدت امتحان: ۷۰ دقیقه
۱	الف) هر دو ماتریس هم مرتبه را می توان در هم ضرب کرد. (درست - نادرست) ب) در معادله ماتریسی $AX=B$ ، اگر A وارون پذیر باشد، آن گاه $X=BA^{-1}$. (درست - نادرست) پ) اگر A و B دو ماتریس 2×2 باشند آن گاه: $ AB = A B $. (درست - نادرست) (دی ۱۴۰۰) ت) اگر در ماتریس قطری همه درایه های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را ماتریس می نامند. (شهریور ۱۴۰۲) ث) اگر A یک ماتریس 3×3 باشد و $ A =2$ ، آن گاه $ 5A $ برابر است. ج) اگر $A_{3 \times 5}$ و $B_{5 \times 3}$ دو ماتریس باشند، آن گاه AB از مرتبه و BA از مرتبه است.			۲
۲	به موارد زیر پاسخ دهید. الف) دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$ را به دست آورید. ب) وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.			۱
۳	ماتریس های $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x+1 & y+2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر $A+B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه مقادیر x و y را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)			۱
۴	اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} i-j & i > j \\ 0 & i = j \\ i+j & i < j \end{cases}$ باشد، ماتریس $A^2 - 2I$ را محاسبه کنید.			۱/۷۵
۵	به ازای چه مقادیری از m دستگاه معادلات $\begin{cases} (m+1)x - 4y = 2 \\ (-2m+1)x + 6y = 3 \end{cases}$ جواب منحصر به فرد دارد.			۱
۶	در تساوی $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ ، مقدار x را بیابید. (شهریور ۱۴۰۲)			۱/۲۵
۷	اگر $A = \begin{bmatrix} A & 0 & 1 \\ 1 & A & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $ A $ را بیابید. (خرداد ۱۴۰۲)			۱
۸	اگر A یک ماتریس 3×3 باشد و $ A = -4$ ، آن گاه مقدار $ 2A^{-1} $ را به دست آورید.			۱
	موفق و سربلند باشید			جمع نمره ۱۰

صفحات پاسخ

موضوع آزمون

۵۹ تا ۶۱

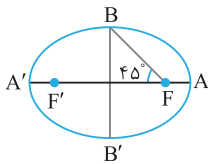
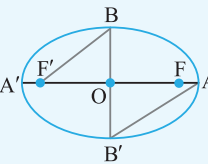
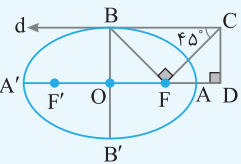
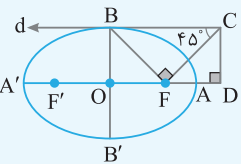
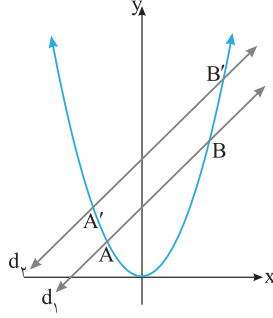
نیمسال اول (۳)

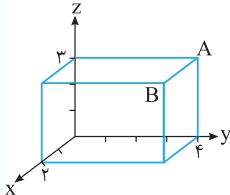
۹

آزمون

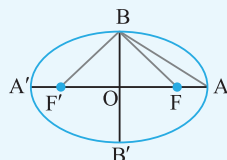
امتحان نهایی: هندسهٔ ۳		رشته: ریاضی و فیزیک		تألیفی		مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه	
ردیف	سؤالات						نمره
سؤالات فصل اول							
۱	الف) اگر $\begin{bmatrix} x+1 & x \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & y-1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$، آن گاه $x+y$ برابر است. ب) اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، آن گاه $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (درست - نادرست) (شهریور ۱۴۰۰ با تغییر) پ) اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبه ۳ باشد و $A =2$، آن گاه $3A$ برابر است. ت) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$، آن گاه $2A$ برابر است.						
۲	اگر ماتریس مربعی A از مرتبهٔ ۳ به صورت $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i+j & i=j \\ j & i>j \\ 0 & i<j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، (خرداد ۱۴۰۱ با تغییر) الف) ماتریس A را به صورت آرایشی مستطیلی بنویسید. ب) دترمینان ماتریس B را محاسبه کنید.						
۳	ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - j & i>j \\ i+j & i \leq j \end{cases}$ داده شده است. ماتریس A^{-1} را به دست آورید. (شهریور ۱۴۰۲)						
۴	اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a & 0 \\ b & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & c \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$، آن گاه مقادیر a، b و c را طوری به دست آورید که حاصل ضرب AB ماتریس قطری باشد.						
۵	در تساوی ماتریسی $A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$، ماتریس A را به دست آورید.						
۶	اگر $3A = \begin{bmatrix} A & -5 \\ 1 & 4 A \end{bmatrix}$ باشد، مقدار A^{-1} را محاسبه کنید. (شهریور ۱۴۰۲)						
۷	مقدار m را طوری بیابید که دستگاه معادلات $\begin{cases} -mx - 12y = 2 \\ 3x + my = -1 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.						
۸	اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و تعویض‌پذیر باشند، نشان دهید: $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$						

ردیف	سؤالات	نمره
سؤالات فصل دوم		
۹	الف) اگر صفحه P با مولد سطح مخروطی موازی باشد، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی است. ب) نقطه $A(1, -2)$ در دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ قرار دارد. پ) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع به یک فاصله‌اند، است. ت) رابطه ضمنی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله یک دایره است اگر و تنها اگر	۱/۵
۱۰	دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).	۱/۵ (شهریور ۱۴۰۱)
۱۱	الف) معادله دایره‌ای گذرنده از دو نقطه $A(1, 2)$ و $B(3, 0)$ را بنویسید که مرکز آن روی خط به معادله $y = 2x - 1$ باشد. ب) معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه $O(-1, -1)$ مرکز آن باشد و روی خط به معادله $x + y = 1$ وتری به طول ۲ ایجاد کند.	۳/۵
۱۲	وضعیت دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 - 2x + 3y = 3$ و $x^2 + y^2 - 2x + y = 11$ را نسبت به هم مشخص کنید.	۱/۷۵
۱۳	در نقطه $A(2, 3)$ روی دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم. معادله این خط مماس را به دست آورید.	۱/۲۵ (شهریور و دی ۱۴۰۰)
	موفق و سربلند باشید	جمع نمره ۲۰

ردیف	سؤالات	رشته: ریاضی و فیزیک	تألیفی	مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه
سؤالات فصل دوم				
۱	الف) در یک بیضی با طول قطرهای بزرگ و کوچک ۸ و ۶، فاصله کانونی برابر است. ب) خروج از مرکز بیضی مقابل برابر است. پ) در هر سهمی بازتاب هر پرتو نور موازی محور سهمی که به بدنه داخلی و آینه‌ای سهمی بتابد، از می‌گذرد. ت) مجموع فاصله‌های هر نقطه دلخواه درون بیضی از کانون‌ها کوچک‌تر از طول قطر بزرگ بیضی است. (درست - نادرست)		۱/۵	
۲	در بیضی مقابل، خروج از مرکز برابر $\frac{4}{5}$ است. نسبت مساحت مثلث OBF' به مساحت مثلث OAB' را بیابید. (دی ۱۴۰۲)		۱	
۳	دو نقطه A و B روی یک بیضی با کانون‌های F و F' قرار دارند. A به کانون F' و B به کانون F نزدیک‌تر است. اگر دو پاره خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند و $AF' = BF$، نشان دهید دو پاره خط AF و BF' موازی‌اند (شکل رسم کنید).		۱/۵	
۴	در بیضی مقابل، خط d در رأس B مماس شده است. در کانون F عمودی بر BF رسم شده است تا d را در نقطه C قطع کند. از C نیز عمودی رسم شده است که امتداد قطر بزرگ را در نقطه D قطع کند. اگر $\angle BCF = 45^\circ$، آن‌گاه مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به دست آورید.		۲	
۵	اگر نقطه $A(2, 3)$ رأس سهمی و $y=7$ معادله خط هادی باشد: الف) معادله سهمی را به دست آورید. ب) مختصات کانون سهمی را بیابید.		۱/۲۵	(خرداد ۱۴۰۰)
۶	یک دیش مخابراتی به شکل سهموی با دهانه دایره‌ای به قطر ۶۰ واحد و گودی (عمق) ۹ واحد مفروض است. فاصله کانونی این دیش را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۰)		۰/۷۵	
۷	مطابق شکل، سهمی $y=x^2$ و دو خط موازی $d_1: y=2x+3$ و $d_2: y=2x+8$ را که با سهمی متقاطع‌اند، در نظر بگیرید. فرض کنید نقطه M وسط AB و نقطه M' وسط $A'B'$ باشد. الف) مختصات M و M' را به دست آورید. ب) معادله خط گذرنده از MM' را بنویسید و بگویید چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟		۲	

ردیف	سؤالات	نمره
سؤالات فصل سوم		
۸	الف) در شکل مقابل معادله یال AB به صورت است.  ب) زاویه بین بردارهای غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$، برابر θ است. در کدام یک از موارد زیر حاصل ضرب داخلی آنها بیشترین مقدار را دارد؟ (خرداد ۱۴۰۲) $\theta = 0^\circ$ (۱) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (۲) $\theta = \frac{\pi}{2}$ (۳) $\theta = \frac{\pi}{3}$ (۴) پ) حجم متوازی السطوحی که روی بردارهای واحد $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بنا می‌شود، برابر است. (دی ۱۴۰۲) ت) اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر است.	۱/۲۵
۹	شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه $-2 \leq x < -1$, $x + y^2 \leq 0$ را در فضای دوبعدی رسم کنید.	۱
۱۰	اگر $\vec{a} = (1, -3, 4)$ و $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ باشند، آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{a} - \vec{b}$ را بیابید. (دی ۱۴۰۲)	۱/۵
۱۱	ثابت کنید دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی‌اند اگر و تنها اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.	۱/۲۵
۱۲	اگر سه بردار $\vec{a} = (m, -1, 1)$، $\vec{b} = (1, -1, 1)$ و $\vec{c} = (1, m, -1)$ در یک صفحه واقع باشند، مقدار m را بیابید. (شهریور ۱۴۰۲)	۱/۲۵
۱۳	اگر برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم $\vec{a} = 4$، $\vec{b} = 6$ و $\vec{a} \times \vec{b} = 12\sqrt{15}$، آنگاه $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ را به دست آورید.	۱/۷۵
۱۴	سه بردار $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$ و $\vec{c} = (0, 2, 1)$ را در نظر بگیرید: الف) طول بردار $2\vec{b} - \vec{c}$ را به دست آورید. ب) مساحت متوازی الاضلاعی که روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b} + \vec{c}$ ایجاد می‌شود را به دست آورید.	۲ (دی ۱۴۰۱)
	موفق و سربلند باشید	جمع نمره
		۲۰

ردیف	سؤالات	رشته: ریاضی و فیزیک	تألیفی	مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه
سؤالات فصل اول				
۱	الف) دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ برابر است. ب) اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ (درست - نادرست)			۰/۷۵
۲	اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به‌طوری که $a_{ij} = \begin{cases} -j & i \geq j \\ j-1 & i < j \end{cases}$ ، آن‌گاه $A^2 + I$ را به‌دست آورید.			۱/۵
۳	اگر $-2A = \begin{bmatrix} A +1 & 1- A \\ A -1 & 14 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه $ 3A^{-1} $ را به‌دست آورید.			۱/۷۵
۴	مقدارهای x را طوری بیابید که تساوی زیر برقرار باشد: $\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$			۱
۵	دستگاه معادلات $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2y - 5x = 9 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.			۱
سؤالات فصل دوم				
۶	الف) اگر صفحه P با مولد سطح مخروطی موازی باشد، سطح مقطع ایجاد شده است. ب) مکان هندسی مراکز همه دایره‌هایی با شعاع ثابت که بر خط d در صفحه مماس‌اند، است. پ) سطح مقطع یک سطح استوانه‌ای می‌تواند مستطیل باشد. (درست - نادرست) ت) هرچه خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک شود، شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر می‌شود. (درست - نادرست) ث) مطابق شکل دو خط موازی، سهمی را قطع کرده‌اند. خط‌گذرنده از وسط‌های AB و $A'B'$ موازی محور تقارن سهمی است. (درست - نادرست)			۱/۵
۷	از نقطه $A(2, 3)$ روی دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ ، خط مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم. معادله این خط مماس را به‌دست آورید.			۱/۲۵
۸	معادله مکان هندسی مراکز دایره‌هایی به شعاع ۱ را بنویسید که بر دایره به معادله $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$ مماس خارج باشند.			۱/۲۵
۹	در بیضی مقابل با کانون‌های F و F' ، قطرهای بزرگ و کوچک به ترتیب AA' و BB' هستند. اگر مساحت مثلث BFF' چهار برابر مساحت مثلث BAF باشد، خروج از مرکز بیضی را به‌دست آورید.			۱



ردیف	سؤالات	نمره
۱۰	نقطه P درون بیضی با طول قطر بزرگ ۲a و کانون‌های F و F' است. نشان دهید $PF + PF' < 2a$.	۰/۷۵
۱۱	سه‌می به معادله $4y^2 - 12y + 24x - 15 = 0$ مفروض است. ابتدا معادله متعارف آن را بنویسید و سپس مختصات رأس و کانون و معادله خط هادی را به دست آورید.	۱/۲۵
۱۲	در شکل روبه‌رو سه‌می با کانون F، رأس A و خط هادی d رسم شده است. از کانون F به نقطه دلخواه M روی سه‌می وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا خط d را در نقطه N قطع کند. از M و F بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$	۱
سؤالات فصل سوم		
۱۳	الف) معادله خط گذرنده از نقطه $A(-1, 2, -3)$ و موازی محور yها به صورت است. ب) صفحه به معادله $x = 2$ بر محور yها عمود است. (درست - نادرست) پ) اگر $A(1, 2, 3)$، $B(2, 3, 4)$ و $C(3, 4, 5)$ و نقطه M وسط BC باشد، آنگاه بردار $\overrightarrow{AM}$ برابر است.	۱/۲۵
۱۴	شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه $x > -1, 1 \geq y^2 + x$ را در فضای دوبعدی رسم کنید.	۰/۷۵
۱۵	ثابت کنید اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ برابر بردار صفر است.	۰/۷۵
۱۶	مقدار m را طوری بیابید که مساحت مثلث ساخته شده توسط بردارهای $\vec{a} = -2\vec{j} + 3\vec{k}$ و $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - m\vec{k}$ برابر $\frac{\sqrt{13}}{2}$ باشد.	۱/۵
۱۷	اندازه زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بین 90° و 180° است. اگر $ \vec{a} = 4$ ، $ \vec{b} = 6$ و $ \vec{a} \times \vec{b} = 6\sqrt{15}$ ، آنگاه حاصل $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}$ را به دست آورید.	۱/۷۵
۲۰	موفق و سربلند باشید	جمع نمره

پاسخ تشریحی آزمون (۲۴)

۱ الف) ۱۵ (۰/۵) ب) نادرست (۰/۵)

۲ ابتدا ماتریس A را نمایش می‌دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (۰/۵)$$

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -7 & -6 \\ 1 & -1 & -12 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \quad (۰/۵)$$

$$A^T + I = \begin{bmatrix} -2 & -7 & -6 \\ 1 & -1 & -12 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -6 \\ 1 & 0 & -12 \\ 6 & 9 & 4 \end{bmatrix} \quad (۰/۵)$$

۳ ابتدا از طرفین تساوی دترمینان می‌گیریم:

$$|-2A| = \begin{vmatrix} |A|+1 & 1-|A| \\ |A|-1 & 14 \end{vmatrix} \Rightarrow (-2)^2 |A| = 14|A| + 14 + (|A|-1)^2$$

$$4|A| = |A|^2 + 12|A| + 15 \Rightarrow |A|^2 + 8|A| + 15 = 0 \quad (۰/۵)$$

$$|A| = -3 \text{ یا } -5 \quad (۰/۵)$$

$$|A^{-1}| = -\frac{1}{3} \text{ یا } -\frac{1}{5} \quad (۰/۵) \text{ پس } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$|2A^{-1}| = 2^2 |A^{-1}| = -3 \text{ یا } -\frac{9}{5} \quad (۰/۵) \quad \text{در نتیجه}$$

۴ ابتدا دو ماتریس اول را در هم ضرب می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 & x^2+2 \end{bmatrix} \quad (۰/۵)$$

$$\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 & x^2+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= -6(x-1) + (x^2+2) = x^2 - 6x + 8 = 0 \quad (۰/۵) \Rightarrow x = 2 \text{ یا } 4 \quad (۰/۵)$$

۵ ماتریس ضرایب به صورت $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ است. پس

$$A^{-1} = \frac{1}{3 \times 2 - 5 \times (-5)} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{31} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad (۰/۵)$$

جواب دستگاه از رابطه $X = A^{-1}B$ محاسبه می‌شود. در نتیجه

$$A^{-1}B = \frac{1}{31} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{31} \begin{bmatrix} -31 \\ 62 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (۰/۵)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (۰/۵) \quad \text{بنابراین}$$

۶ الف) سهمی (۰/۵) ب) دو خط موازی با d (۰/۵) ب) نادرست (۰/۵) ت) درست (۰/۵) ث) درست (۰/۵)

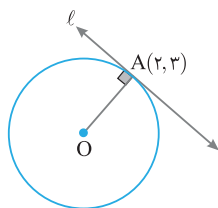
۷ ابتدا مختصات مرکز دایره و شعاع آن را محاسبه می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$$

$$O(1,1), R = \sqrt{5} \quad (۰/۵)$$

(البته می‌توانستیم با استفاده از $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ و $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ نیزآن‌ها را محاسبه کنیم.) شعاع OA بر خط ℓ عمود است. پس

$$m_{OA} = \frac{3-1}{2-1} = 2 \Rightarrow m_{\ell} = -\frac{1}{2} \quad (۰/۵)$$

بنابراین معادله خط ℓ بدین صورت است: $\ell: y-3 = -\frac{1}{2}(x-2) \quad (۰/۵)$ 

۸ ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره داده شده را به دست آوریم.

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

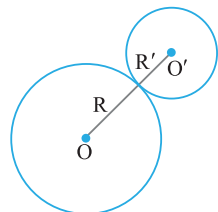
$$O(-1,2), R=3 \quad (۰/۵)$$

اگر دایره $C(O', R')$ بر دایره $C(O, R)$ مماس خارج باشد، آن‌گاه

$$OO' = R + R' \Rightarrow OO' = 3 + 1 = 4$$

پس فاصله O' از نقطه ثابت O برابر ۴ است. در نتیجه مکان هندسی آن دایره به مرکز O و شعاع ۴ است. (۰/۵)

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 16 \quad (۰/۵)$$

۹ ارتفاع دو مثلث برابر $BO = b$ است. همچنین می‌دانیم

$$AF = OA - OF = a - c$$

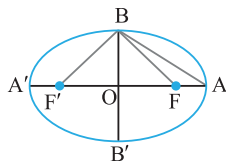
$$S_{BFF'} = \frac{1}{2} BO \times FF' = \frac{1}{2} b(2c) = bc \quad (۰/۵)$$

$$S_{BAF} = \frac{1}{2} BO \times AF = \frac{1}{2} b(a-c) \quad (۰/۵)$$

بنابر فرض $S_{BFF'} = 4 S_{BAF}$ پس

$$bc = 4 \left(\frac{1}{2} b(a-c) \right) \Rightarrow c = 2(a-c) \quad (۰/۵) \Rightarrow 3c = 2a$$

$$\frac{c}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow e = \frac{2}{3} \quad (۰/۵)$$



روش دوم: بنابر قضیه تالس و تعمیم آن در مثلث NHF داریم

$$TM \parallel HF \Rightarrow \begin{cases} \frac{NM}{MF} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{MF=MT} \frac{NM}{MT} = \frac{NT}{TH} \\ \frac{MT}{FH} = \frac{NM}{NF} \xrightarrow{(\circ/\psi\delta)} \frac{NM}{MT} = \frac{NF}{FH} \end{cases}$$

$$\frac{FN}{FH} = \frac{NT}{TH}$$

چون $FH = 2FA$ (○/ψδ) پس

$$\frac{FN}{2FA} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{\times 2} \frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH} \quad (\circ/\psi\delta)$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ z = -3 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{الف) } (\circ/\delta) \\ \text{ب) نادرست } (\circ/\psi\delta) \end{matrix}$$

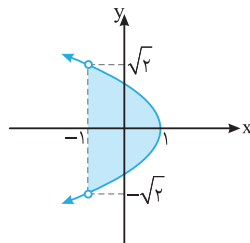
$$\text{پ) } \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right) \quad (\circ/\delta)$$

۱۴] ابتدا نمودار $1 = y^2 + x$ را رسم می‌کنیم. این نمودار مربوط به سهمی

به معادله $y^2 = -(x-1)$ است.

نمودار $y^2 = -(x-1)$ خط چین $x = -1$ (○/ψδ)

قسمت رنگی (○/ψδ)



۱۵] چون $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند، پس $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. تصویر قائم $\vec{a}$ بر

$\vec{b}$ از رابطه روبه‌رو محاسبه می‌شود:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} \quad (\circ/\psi\delta)$$

چون $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ، پس $\vec{a}' = \vec{0}$ (○/ψδ)

۱۶] مساحت مثلث ساخته شده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $\frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$ است.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -m \end{vmatrix} \quad (\circ/\psi\delta) = (2m-9)\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} \quad (\circ/\psi\delta)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(2m-9)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{(2m-9)^2 + 13} \quad (\circ/\psi\delta)$$

چون مساحت مثلث برابر $\frac{\sqrt{13}}{2}$ است، پس

$$\frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{\sqrt{13}}{2} \quad (\circ/\psi\delta) \Rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{(2m-9)^2 + 13} = \frac{\sqrt{13}}{2} \quad (\circ/\psi\delta)$$

$$\sqrt{(2m-9)^2 + 13} = \sqrt{13} \Rightarrow (2m-9)^2 = 0 \Rightarrow 2m-9 = 0 \Rightarrow m = \frac{9}{2} \quad (\circ/\psi\delta)$$

۱۷] فرض کنید اندازه زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر θ باشد.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \quad (\circ/\psi\delta) \Rightarrow 6\sqrt{13} = 4 \times 6 \times \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{13}}{4} \quad (\circ/\psi\delta) \xrightarrow{9^\circ < \theta < 18^\circ} \cos \theta = -\frac{1}{4} \quad (\circ/\psi\delta)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad (\circ/\psi\delta) = 4 \times 6 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -6 \quad (\circ/\psi\delta) \quad \text{پس}$$

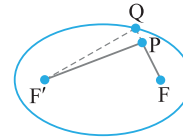
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{a} = 4^2 + (-6) = 10 \quad (\circ/\psi\delta) \quad \text{در نتیجه}$$

۱۰] در مثلث PQF' داریم

$$PF' < PQ + QF' \quad (\circ/\psi\delta)$$

$$PF + PF' < PF + PQ + QF' = QF + QF' = 2a \quad (\circ/\psi\delta)$$

$$PF + PF' < 2a \quad (\circ/\psi\delta)$$



۱۱] ابتدا معادله را به صورت متعارف می‌نویسیم.

$$4y^2 - 12y + 24x - 15 = 0 \Rightarrow y^2 - 3y + 6x - \frac{15}{4} = 0$$

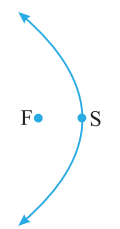
$$(y - \frac{3}{2})^2 = -6x + 6 \Rightarrow (y - \frac{3}{2})^2 = -6(x-1) \quad (\circ/\delta)$$

پس رأس سهمی $S(1, \frac{3}{2})$ است. دهانه سهمی رو به چپ است و داریم

$$4a = 6 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$F(-a+h, k) = (-\frac{3}{2}+1, \frac{3}{2}) = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \quad (\circ/\psi\delta)$$

$$\text{خط هادی: } x = a+h = \frac{3}{2}+1 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \quad (\circ/\psi\delta)$$



۱۲] روش اول: بنابر تعریف سهمی $MF = MT$. پس مثلث MFT

متساوی الساقین است. در نتیجه $\hat{F}_1 = \hat{T}_1$ (○/ψδ). از طرفی بنابر قضیه خطوط

موازی و مورب داریم

$$MT \parallel FH, \text{ مورب } FT \Rightarrow \hat{F}_1 = \hat{T}_1 \quad (\circ/\psi\delta)$$

بنابراین $\hat{F}_1 = \hat{F}_2$ و FT نیمساز زاویه F در مثلث FNH است. (○/ψδ)

قضیه نیمساز در این مثلث داریم

$$\frac{FN}{FH} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{FH=2FA} \frac{FN}{2FA} = \frac{NT}{TH}$$

$$\xrightarrow{\times 2} \frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH} \quad (\circ/\psi\delta)$$

