

انتگرالگو

موج؟ ۲۰

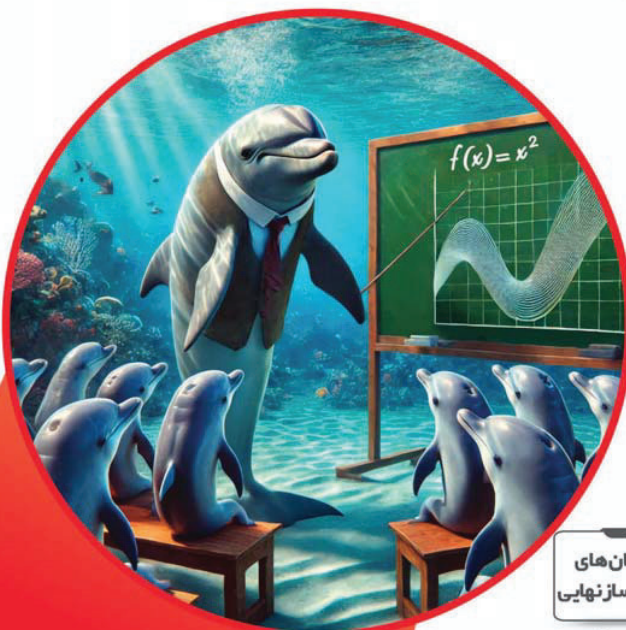
مرحله‌ای
و جامع

ویژه آمادگی شرکت در امتحان‌های نهایی و نیم‌سال

ریاضی دوازدهم

(تجربی)

شیدا شاداب



امتحان‌های
شبیه‌ساز نهایی

امتحان‌های
نیم‌سال اول و
دوم

امتحان‌های
درس به درس

کلید تصحیح
امتحان‌های
نهایی

پاسخ‌های
تشریحی

امتحان‌های
نهایی اخیر

پیشگفتار

در ابتدا باید یک خدایوت جانانه به شما دانش آموزان عزیز دوازدهمی بگویم که در حال عبور از یکی از سال‌های پرچالش زندگی‌تان هستید. در این مسیر، یکی از اهداف مهم شما کسب نمره مناسب در امتحان نهایی است. خوشحالم که این کتاب را انتخاب کرده‌اید و با اطمینان به شما می‌گویم که با مطالعه آن، کسب نمره ۲۰ برای شما آسان می‌شود.

این کتاب کاملاً در چارچوب کتاب درسی نوشته شده است و دارای ویژگی‌های زیر است:

۱) آزمون‌محور است، بدین صورت که فقط با آزمون‌های مختلف و بدون درس‌نامه مطالب کتاب درسی بیان می‌شود؛

۲) پاسخنامه آزمون‌ها بر اساس پاسخنامه‌های امتحانات نهایی بارم‌بندی شده است. شما می‌توانید با مطالعه دقیق آن‌ها به این موضوع پی ببرید که قسمت‌های مهم در نوشتن پاسخ چیست؛

۳) همه مطالب کتاب درسی در آزمون‌ها پوشش داده شده‌اند. در این آزمون‌ها هر مطلب کتاب درسی را در قالب حداقل یک مسئله مشاهده می‌کنید؛

۴) این کتاب برای هر دانش آموز در هر سطحی مناسب است. دانش آموزان توانمند از این کتاب می‌توانند برای بهبود روش نوشتن خود استفاده کنند. همچنین دانش‌آموزانی که هنوز به هر دلیلی نتوانسته‌اند به مطالب کتاب درسی تسلط پیدا کنند، می‌توانند در زمان کوتاه نمره مناسبی کسب کنند.

این کتاب دارای ۳۶ آزمون، شامل آزمون‌های ۱۰ نمره‌ای و ۲۰ نمره‌ای است. آزمون‌های درس به درس ۱۰ نمره‌ای هستند و آزمون‌های نیم‌سال اول، نیم‌سال دوم و جامع (تألیفی و نهایی سال‌های اخیر) ۲۰ نمره‌ای.

نوع آزمون	تعداد آزمون‌ها	سرفصل
درس به درس	۱۵	هر درس ۱ آزمون
نیم‌سال اول	۴	فصل اول، فصل دوم، فصل سوم و فصل چهارم (درس اول)
نیم‌سال دوم	۲	فصل چهارم (درس‌های دوم و سوم)، فصل پنجم، فصل ششم و فصل هفتم
جامع - شبیه‌ساز نهایی	۵	تمام کتاب
نهایی ۱۴۰۲	۳	تمام کتاب
نهایی ۱۴۰۳	۳	تمام کتاب
نهایی ۱۴۰۴	۳	تمام کتاب
نهایی ۱۴۰۵	۱	تمام کتاب

آزمون‌های جامع کاملاً تألیفی هستند و بودجه‌بندی آن‌ها بر اساس امتحان نهایی است. اما در سایر آزمون‌ها از سؤالات امتحانات نهایی سال‌های گذشته نیز استفاده شده است. این موضوع به ما و شما کمک می‌کند که به مهم‌ترین هدف کتاب برسیم و آن کسب نمره ۲۰ در امتحان نهایی ریاضی ۳ است. در پایان هر خود لازم می‌دانم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم فهیمه گودرزی برای مطالعه و ویراستاری علمی کتاب، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی، خانم مرضیه کریمی برای رسم شکل‌ها و خانم ستین مختار مسئول واحد ویراستاری و حروف‌چینی تشکر و قدردانی کنم.

شیدا شاداب

فهرست مطالب

آزمون ۱۹: فصل هفتم ۲۶	آزمون‌های مرحله‌ای و جامع
آزمون ۲۰: نیم‌سال دوم (۱) ۲۷	آزمون ۱: فصل اول - درس اول ۲
آزمون ۲۱: نیم‌سال دوم (۲) ۲۹	آزمون ۲: فصل اول - درس دوم ۳
آزمون ۲۲: جامع (۱) - شبیه‌ساز نهایی ۳۱	آزمون ۳: فصل اول - درس سوم ۴
آزمون ۲۳: جامع (۲) - شبیه‌ساز نهایی ۳۳	آزمون ۴: فصل دوم - درس اول ۵
آزمون ۲۴: جامع (۳) - شبیه‌ساز نهایی ۳۵	آزمون ۵: فصل دوم - درس دوم ۶
آزمون ۲۵: جامع (۴) - شبیه‌ساز نهایی ۳۷	آزمون ۶: فصل سوم - درس اول ۷
آزمون ۲۶: جامع (۵) - شبیه‌ساز نهایی ۳۹	آزمون ۷: فصل سوم - درس دوم ۸
آزمون ۲۷: جامع (۶) - نهایی خرداد ۱۴۰۲ ۴۱	آزمون ۸: فصل چهارم - درس اول ۱۰
آزمون ۲۸: جامع (۷) - نهایی شهریور ۱۴۰۲ ۴۳	آزمون ۹: نیم‌سال اول (۱) ۱۲
آزمون ۲۹: جامع (۸) - نهایی دی ۱۴۰۲ ۴۵	آزمون ۱۰: نیم‌سال اول (۲) ۱۴
آزمون ۳۰: جامع (۹) - نهایی خرداد ۱۴۰۳ ۴۷	آزمون ۱۱: نیم‌سال اول (۳) ۱۶
آزمون ۳۱: جامع (۱۰) - نهایی شهریور ۱۴۰۳ ۴۹	آزمون ۱۲: نیم‌سال اول (۴) ۱۸
آزمون ۳۲: جامع (۱۱) - نهایی دی ۱۴۰۳ ۵۱	آزمون ۱۳: فصل چهارم - درس دوم ۲۰
۵۴ پاسخ‌های تشریحی	آزمون ۱۴: فصل چهارم - درس سوم ۲۱
آزمون ۳۳: جامع (۱۲) - نهایی خرداد ۱۴۰۴ ۱۰۵	آزمون ۱۵: فصل پنجم - درس اول ۲۲
آزمون ۳۴: جامع (۱۳) - نهایی شهریور ۱۴۰۴ ۱۰۷	آزمون ۱۶: فصل پنجم - درس دوم ۲۳
آزمون ۳۵: جامع (۱۴) - نهایی دی ۱۴۰۴ ۱۱۴	آزمون ۱۷: فصل ششم - درس اول ۲۴
آزمون ۳۶: جامع (۱۵) - نهایی تیر ۱۴۰۵ ۱۱۵	آزمون ۱۸: فصل ششم - درس دوم ۲۵

ردیف	سؤالات	رشته: علوم تجربی	تألیفی	مدت امتحان: ۷۰ دقیقه
۱	در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. الف) در بازه $(1, 2)$ ، نمودار تابع $y = x^3$ از نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد. (بالتر - پایین‌تر) ب) تابع $y = x^3 + 1$ در دامنه تعریف خود است. (صعودی - نزولی) پ) توابع اکیداً یکنوا، حتماً یکنوا (نیستند - هستند) ت) تابع $y = x^2 x $ در بازه $(-\infty, a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a برابر است. ث) تابع $y = 2x^2 + 4x - 1$ در بازه $[-2, 5]$ است. (یکنوا - غیر یکنوا)			۱/۲۵
۲	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) تابع $y = 2x^5 - 4x^3 + \sqrt{x}$ یک تابع چندجمله‌ای نیست. ب) تابع f در شکل مقابل اکیداً صعودی است. پ) بی‌شمار تابع وجود دارند که هم صعودی و هم نزولی هستند. ت) تابع $y = \frac{1}{x}$ در دامنه‌اش اکیداً یکنوا است.			۱
۳	تابع f در شکل مقابل در چه بازه‌هایی نزولی، در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی ثابت است؟			۱/۲۵
۴	نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی، در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی و در چه بازه‌هایی ثابت است. الف) $y = x + x + 1 $ ب) $y = \begin{cases} -x - 3 & x < -3 \\ 2 & -3 \leq x < 3 \\ 2x - 1 & x \geq 3 \end{cases}$			۱/۷۵
۵	نمودار تابع $f(x) = \cos(\frac{\pi}{3} - x)$ را روی بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید و مشخص کنید تابع روی کدام بازه‌ها اکیداً نزولی و روی کدام بازه‌ها اکیداً صعودی است.			۱/۵
۶	الف) تابع نمایی $f(x) = (3^k + 1)^x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است. حدود k را مشخص کنید. ب) تابع $f(x) = 2x^2 - 10x$ روی بازه $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a را بیابید. پ) تابع لگاریتمی $f(x) = -\log_2(x + 1) - 1$ روی بازه $(a, +\infty)$ اکیداً نزولی است. کمترین مقدار a را بیابید.			۱/۵
۷	نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x + 1}$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x) = -(x - 1)^3 - 1$ را قطع می‌کند؟ (نمودار هر دو تابع را رسم کنید.)			۰/۷۵
۸	الف) تابعی مانند f با دامنه $[0, +\infty)$ مثال بزنید که $f(2) = 3$ و تابع روی بازه $[0, 2]$ اکیداً نزولی و روی بازه $[2, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد. ب) نمودار تابعی با دامنه $\mathbb{R}$ را رسم کنید که در هریک از بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی باشد، اما روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی نباشد.			۱
	موفق و سربلند باشید			جمع نمره ۱۰

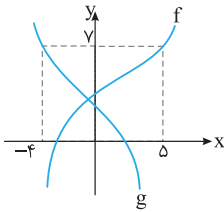
صفحات پاسخ
۶۵ تا ۶۸

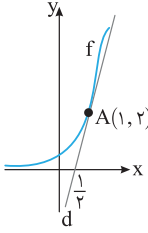
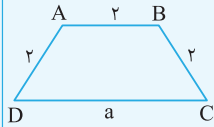
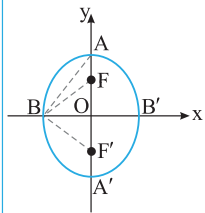
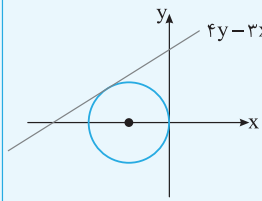
موضوع آزمون
نیمسال اول (۱)

آزمون
۹

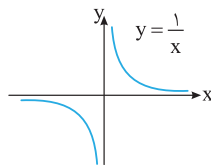
ردیف	سؤالات	تألیفی	رشته: علوم تجربی	امتحان نهایی: ریاضی ۳	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) تابع $y = 2x(1 - 3x^2) + 1$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه سوم است. ب) تابع تانژانت در بازه $(-\pi, \pi)$ تابعی صعودی است. پ) هر همسایگی نقطه $x = 0$ شامل عددی منفی است.	(دی ۱۴۰۱) (دی ۱۴۰۲)			۰/۷۵
۲	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف) نقطه $(-8, 6)$ روی نمودار $y = f(x)$ با نقطه روی نمودار تابع $g(x) = \frac{1}{4}f(x)$ متناظر است. ب) مقدار عددی $\cos 22/5^\circ$ برابر است. پ) فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. در این صورت اگر $L < 0$ و تابع $y = g(x)$ در همسایگی محذوفی از a باشد آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$. ت) اگر $f'(4) = 2$ و $f(4) = -1$، خط مماس بر نمودار تابع f در $x = 4$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض قطع می‌کند.	(دی ۱۴۰۱) (دی ۹۹)			۱
۳	الف) نمودار تابع $f(x) = x - x$ را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای نزولی یا ثابت است. ب) نمودار تابعی با دامنه $\mathbb{R}$ را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد، ولی در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی نباشد.				۱/۵
۴	الف) به کمک نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ نمودار تابع $y = -2f(-x) + 3$ را رسم کنید. ب) اگر دامنه تابع $y = f(x)$ برابر $[-1, 3]$ و برد آن $(0, 2]$ باشد، دامنه و برد تابع $y = f(\frac{x}{4})$ را بیابید.	(دی ۱۴۰۱)			۱/۲۵
۵	اگر $f(x) = \sqrt{x-3}$ و $g = \{(0, 4), (3, 2), (5, 6)\}$، تابع $g \circ f$ و دامنه آن را بیابید.	(خرداد ۹۸)			۱/۵
۶	الف) با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 - 2x + 2$، یک تابع یک‌به‌یک به دست آورده و ضابطه، دامنه و برد تابع وارون آن را مشخص کنید. ب) اگر $f(x) = \frac{1}{x-3}$ و $g(x) = x^3$، مقدار $(f \circ g)^{-1}(5)$ را بیابید.	(خرداد ۱۴۰۰) (شهریور ۹۸)			۲/۲۵

ردیف	سؤالات	نمره
۷	اگر در یک تابع مثلثاتی دوره تناوب 4π ، مقدار ماکزیمم -۱ و مقدار مینیمم -۷ باشد، تابع سینوسی آن را بنویسید. (خرداد ۹۹)	۱
۸	الف) اگر انتهای کمان α در ربع دوم باشد و $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ ، حاصل $\sin 2\alpha - \cos 2\alpha$ را به دست آورید. ب) نمودار تابع $f(x) = \sin^2 x - \frac{1}{2}$ را در یک دوره تناوب رسم کنید.	۱/۷۵
۹	الف) نمودار تابع $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ در بازه $(-\frac{\pi}{4}, \pi)$ چند بار محور طولها را قطع می کند؟ ب) جوابهای کلی معادله $\cos 3x = \cos 2x$ را به دست آورید.	۱/۷۵
۱۰	حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بیابید. الف) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - 3}{1 + \cos x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - (2 - \frac{1}{x})^2}{\frac{1}{x}}$	۲/۷۵
۱۱	الف) با توجه به نمودار داده شده، حاصل حدهای خواسته شده را مشخص کنید. ۱) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ۲) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ۳) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ب) اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2+ax+b} = -\infty$ ، مقدار a و b را به دست آورید.	۱/۷۵
۱۲	الف) معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^2 + 1$ را در نقطه $A(1, 2)$ واقع بر آن بنویسید. ب) نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی باشد و ۱) مشتق آن در یک نقطه برابر صفر شود. ۲) مشتق آن در $x=2$ عددی مثبت باشد. ۳) مشتق آن در تمام نقاط منفی باشد.	۱/۷۵
۱۳	برای تابع f در شکل مقابل داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 24$. با توجه به شکل، مختصات نقاط A ، B و C را به دست آورید. (دی ۹۷)	۱
جمع نمره	موفق و سربلند باشید	۲۰

ردیف	سؤالات	تألیفی	رشته: علوم تجربی	امتحان نهایی: ریاضی ۳	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) بیشترین مقدار تابع $y = \sin 2x$ همان جاهایی به دست می‌آید که بیشترین مقدار تابع $y = \sin x$ به دست می‌آید. ب) اگر نمودار تابع در نقطه $x = a$ مماس قائم داشته باشد، آن‌گاه تابع f در نقطه $x = a$ مشتق‌پذیر نیست. پ) اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، تابع f روی بازه‌ای مانند $(a, +\infty)$ اکیداً صعودی است.				۰/۷۵
۲	جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. الف) مقدار $1 - \cos^2 75^\circ$ برابر با است. ب) اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3}{x^m - 5} = +\infty$ ، مقدار m برابر با است. (m عددی طبیعی است). پ) اگر طول‌های قطر بزرگ و قطر کوچک یک بیضی به ترتیب ۷ و ۵ باشند، فاصلهٔ کانونی این بیضی برابر با است.				۰/۷۵
۳	نمودار تابع $y = \sqrt{2x} - 1 $ را رسم کنید.				۰/۷۵
۴	الف) در شکل مقابل مقدار $(f^{-1} \circ g)(-4)$ را به دست آورید. ب) اگر $f(x) = 1 - 2x$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ ، مقدار $(f^{-1} \circ g)'(3)$ چند است؟ 				۱/۷۵
۵	اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x) = 2 \sin(bx) + c$ برابر 6π و بیشترین مقدار آن برابر ۳- باشد: الف) مقادیر $ b $ و c را به دست آورید. ب) کمترین مقدار تابع f را به دست آورید.				۰/۷۵
۶	الف) مقدار $\cos^4 \frac{5\pi}{8} - \sin^4 \frac{5\pi}{8}$ را به دست آورید. ب) معادلهٔ $1 + 2 \sin x = 2 \sin 2x + 2 \cos x$ را حل کنید.				۲
۷	حدود زیر را محاسبه کنید. (نماد $[]$ علامت جزء صحیح است). الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - x - x^3}{(x-1)^3}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - [\sin x]}{x}$ پ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}$ ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^4 + 3x^2 - 1}{5x^4 - 6x + 1}$				۲/۷۵

ردیف	سؤالات	نمره
۸	در شکل مقابل خط d در نقطه $A(1, 2)$ بر نمودار تابع f مماس است. اگر $g(x) = x^2 - xf(x)$، مقدار $g'(1)$ را به دست آورید. 	۱
۹	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x) = \sqrt{2}x^2 - x + \frac{1}{x} - 4$ ب) $g(x) = (\sqrt{x} - x)^2$ پ) $h(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1}$	۱/۷۵
۱۰	فرض کنید $f(x) = x^3 - ax^2$. حدود a را طوری تعیین کنید که آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطه $x = 2$ از آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[-2, 1]$ کمتر باشد.	۱
۱۱	عددهای a و b را طوری پیدا کنید که نقطه $(1, 4)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x + 4$ باشد.	۱/۲۵
۱۲	اگر تابع $f(x) = \frac{a}{3}x^3 - (a+2)x^2 - x + 1$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، حدود a را به دست آورید.	۱
۱۳	در شکل مقابل ABCD دوزنقه‌ای متساوی‌الساقین است. مقدار a را طوری تعیین کنید که مساحت این دوزنقه بیشترین مقدار ممکن باشد. 	۱/۲۵
۱۴	در شکل مقابل نقطه‌های $F(0, 3)$ و $F'(0, -3)$ کانون‌های بیضی هستند. اگر محیط مثلث FBF' برابر ۱۶ باشد، مساحت مثلث ABF' را به دست آورید. 	۱
۱۵	در شکل مقابل مرکز دایره روی محور x است و دایره در مبدأ مختصات بر محور y مماس است. اگر خط $4y - 3x = 48$ بر دایره مماس باشد، معادله دایره را بنویسید. 	۱
۱۶	در یک کشور ۴۵٪ جمعیت مرد و ۵۵٪ جمعیت زن هستند. احتمال اینکه کسی در این کشور بالای ۷۰ سال سن داشته باشد، در میان مردان ۴٪ و در میان زنان ۶٪ است. اگر فردی به تصادف از جمعیت این کشور انتخاب شود، احتمال اینکه بالای ۷۰ سال سن داشته باشد چقدر است؟	۱/۲۵
	موفق و سربلند باشید	جمع نمره ۲۰

ت) نادرست. به نمودار تابع توجه کنید.



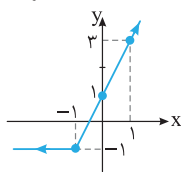
۳) با توجه به نمودار

صعودی: $[-1, 1]$ ، نزولی: $(-\infty, -3]$ ، $(1, +\infty)$ ؛ ثابت: $[-1, 1]$

۴) الف)

$$y = x + |x+1| = \begin{cases} x + (x+1) & x+1 \geq 0 \\ x + (-(x+1)) & x+1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x+1 & x \geq -1 \\ -1 & x < -1 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} x & -1 \\ \hline y & -1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \circ \\ 1 \end{array}$$



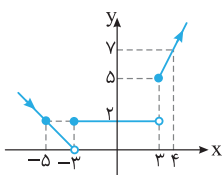
اکیداً صعودی: $[-1, +\infty)$

ثابت: $(-\infty, -1]$

اکیداً نزولی: -

ب)

$$y = \begin{cases} -x-3 & x < -3 \\ 2 & -3 \leq x < 3 \\ 2x-1 & x \geq 3 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} x & -3 \\ \hline y & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} -5 \\ 2 \end{array}$$



اکیداً صعودی: $[3, +\infty)$

ثابت: $[-3, 3)$

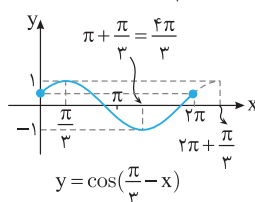
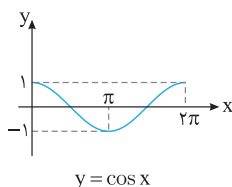
اکیداً نزولی: $(-\infty, -3)$

۵) توجه کنید که

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

برای رسم نمودار تابع $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ، کافی است نمودار تابع $y = \cos x$

را به اندازه $\frac{\pi}{3}$ به سمت راست انتقال دهیم.



دقت کنید آن قسمتی از نمودار را که خارج از بازه $[0, 2\pi]$ است، حذف می‌کنیم. بنابراین رفتار تابع در بازه‌های مختلف به صورت زیر است:

اکیداً صعودی: $[\frac{4\pi}{3}, 2\pi]$ و $[0, \frac{\pi}{3}]$

اکیداً نزولی: $[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$

پاسخ تشریحی آزمون (۱)

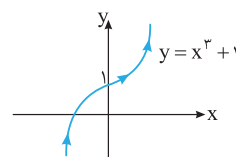
۱) الف) دقت کنید که در بازه $(1, 2)$ مقادیر تابع $y = x^3$ بیشتر

از مقادیر تابع $y = x^2$ است. بنابراین در این بازه نمودار تابع $y = x^3$ بالاتر از

نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد.

x	1/25	1/5
y = x ³	1/95	3/37
y = x ²	1/56	2/25

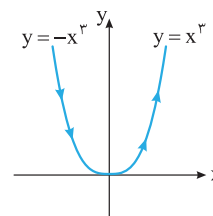
ب) صعودی. به نمودار تابع دقت کنید.



پ) هستند (با توجه به تعریف یکنوایی و یکنوایی اکید).

ت) صفر. با توجه به تعریف قدرمطلق، ضابطه تابع به صورت $y = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$

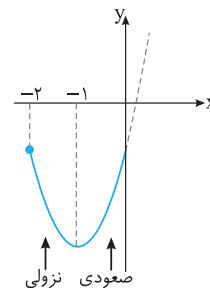
و نمودار آن به صورت زیر است. از روی نمودار واضح است که تابع در بازه $(-\infty, 0]$ نزولی (اکیداً نزولی) است. بنابراین بیشترین مقدار a در این بازه برابر صفر است.



ث) غیریکنوا. توجه کنید که طول رأس این سهمی برابر است با

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times 2} = -1$$

روی بازه $[-2, 5]$ غیریکنواست.



۲) الف) نادرست. تابع مورد نظر تابعی چندجمله‌ای از درجه ۵ است.

ب) نادرست. توجه کنید که $f(a) = f(b) = k$ اما $a < b$ و این با تعریف تابع اکیداً صعودی در تناقض است.

پ) درست. تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت است و بی‌نهایت تابع ثابت وجود دارد.

پاسخ تشریحی آزمون (۲)

۱ الف) $[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$. باید $2x \in [-3, 1]$ ، پس $-3 \leq 2x < 1$ ، یعنی

$$x \in [-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$$

ب) $\frac{1}{3}$. توجه کنید که

$$\begin{cases} (f \circ f)(-1) = f(f(-1)) \\ f(-1) = \frac{-1}{1+|-1|} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(f(-1)) = f(\frac{1}{2}) = \frac{|\frac{1}{2}|}{1+|\frac{1}{2}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

ب) x^3 .

ت) $(2, 6)$. برای به دست آوردن نمودار تابع $y = 3f(-\frac{x}{2})$ ابتدا طول نقاط

روی نمودار تابع $y = f(x)$ را دو برابر و قرینه می کنیم تا نمودار تابع $y = f(-\frac{x}{2})$

به دست آید. سپس عرض نقاط نمودار حاصل را سه برابر می کنیم تا نمودار تابع

$$y = 3f(-\frac{x}{2}) \text{ حاصل شود. بنابراین } (-1, 2) \rightarrow (2, 6)$$

ث) $[1, 7]$. برای به دست آوردن برد تابع $y = -2f(\frac{x}{2} + 1) + 3$ هر نقطه در

برد تابع f را -2 برابر می کنیم، سپس 3 واحد به آن اضافه می کنیم:

$$(-2, 1) \xrightarrow{\times(-2)} (-2, 4) \xrightarrow{+3} (1, 7)$$

۲ الف) نادرست. به مثال زیر دقت کنید:

$$\begin{cases} f(x) = 3x \\ g(x) = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3(2x) = 6x \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(3x) = 6x \end{cases}$$

$$f(x) \neq g(x), (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$$

ب) درست. توجه کنید که $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(6) = \frac{1}{6}$.

پ) نادرست. برای رسم نمودار تابع $y = f(\frac{x}{2})$ باید طول نقاط روی نمودار

تابع $y = f(x)$ را دو برابر کنیم. بنابراین نمودار تابع از انبساط افقی نمودار تابع

$$y = f(x) \text{ به دست می آید.}$$

۳ الف) توجه کنید که

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = (\sqrt{4-2x})^2 + 2(\sqrt{4-2x}) - 1 \\ &= 4 - 2x + 2\sqrt{4-2x} - 1 = 2\sqrt{4-2x} - 2x + 3 \end{aligned}$$

ب) توجه کنید که $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

ابتدا دامنه توابع f و g را به دست می آوریم.

$$4 - 2x \geq 0 \Rightarrow 4 \geq 2x \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_f = (-\infty, 2]$$

$$g(x) = x^2 + 2x - 1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 1 \leq 2\}$$

بنابراین

اکنون نامعادله $x^2 + 2x - 1 \leq 2$ را حل می کنیم:

$$x^2 + 2x - 1 \leq 2 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$x^2 + 2x - 3$		+	-	+

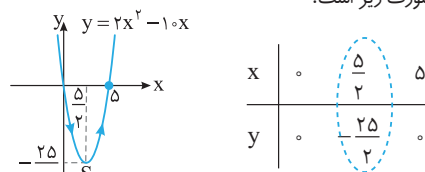
$$D_{f \circ g} = [-3, 1]$$

۶ الف) توجه کنید که تابع نمایی $y = a^x$ با شرط $a > 1$ اکیداً صعودی

$$3k+1 > 1 \Rightarrow 3k > 0 \Rightarrow k > 0$$

است. بنابراین

ب) نمودار تابع به صورت زیر است.



با توجه به نمودار واضح است که تابع f در بازه $(-\infty, \frac{5}{2}]$ اکیداً نزولی است.

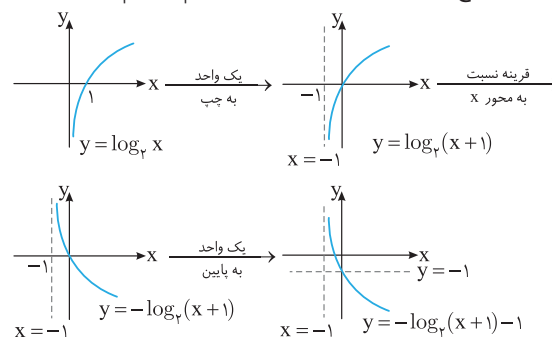
بنابراین حداکثر مقدار a برابر $\frac{5}{2}$ است.

توجه کنید که اگر $f(x) = ax^2 + bx + c$ و $a > 0$ ، آن گاه تابع f در بازه

$$(-\infty, -\frac{b}{2a}]$$
 یا هر زیرمجموعه از آن، اکیداً نزولی و در بازه $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$

هر زیرمجموعه از آن اکیداً صعودی است.

پ) نمودار تابع f را در چند مرحله به صورت زیر رسم می کنیم.



با توجه به نمودار واضح است که تابع در بازه $(-1, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

بنابراین کمترین مقدار a برابر -1 است.

۷ الف) برای رسم نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x+1}$ ، نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را یک

واحد به چپ انتقال می دهیم. برای رسم نمودار تابع g ، نمودار تابع $y = x^3$ را

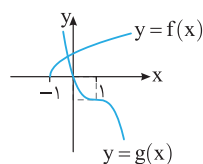
یک واحد به سمت راست انتقال می دهیم تا $y = (x-1)^3$ به دست آید، سپس

نمودار به دست آمده را نسبت به محور x قرینه می کنیم تا نمودار

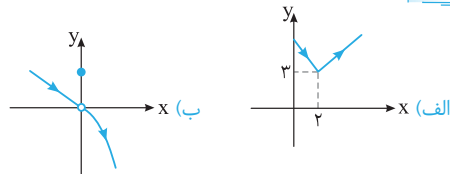
$y = -(x-1)^3$ به دست آید. در نهایت نمودار حاصل را به اندازه یک واحد به

سمت پایین انتقال می دهیم تا نمودار $y = -(x-1)^3 - 1$ به دست آید. با توجه

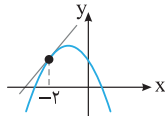
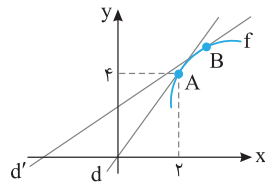
به نمودارها، دو تابع یکدیگر را فقط در یک نقطه قطع می کنند.



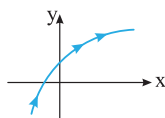
۸



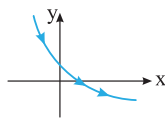
چون زاویه‌ای که خط d با جهت مثبت محور x می‌سازد بزرگ‌تر از زاویه‌ای است که خط d' با جهت مثبت محور x می‌سازد، بنابراین $m_A > m_B$. در نتیجه مقدار مشتق در نقطه A بیشتر از مقدار مشتق در نقطه B است.



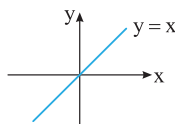
۱۲ الف) شیب خط مماس بر منحنی در نقطه $x = -2$ مثبت و در نتیجه مشتق تابع در این نقطه نیز مثبت است.



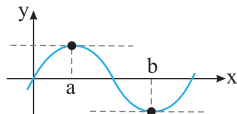
ب) در تمام نقاط، شیب خطوط مماس رسم شده بر منحنی، مثبت است.



پ) در تمام نقاط، شیب خطوط مماس رسم شده بر منحنی، منفی است.



ت) شیب خط، در تمام نقاط با هم برابر است.



ث) شیب خط مماس در دو نقطه $x = a$ و $x = b$ برابر صفر است. بنابراین مشتق تابع در این دو نقطه برابر صفر است.

پاسخ تشریحی آزمون (۹)

۱ الف) درست. (۵/۷۵) زیرا $y = -6x^3 + 2x + 1$.

ب) نادرست. (۵/۷۵) زیرا تابع تنازنت فقط در بازه‌هایی به صورت

$$(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}) \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{اکیداً صعودی (صعودی) است.}$$

پ) درست. (۵/۷۵)

۲ الف) $(-8, 3)$. (۵/۷۵) توجه کنید که

$$(-8, 6) \in f \xrightarrow[g(x)=\frac{1}{2}f(x)]{g(x)=\frac{1}{2}f(x)} (-8, 3) \in g$$

عرض نقاط نصف می‌شوند

ب) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$. (۵/۷۵) چون $22/5^\circ$ نصف 45° است، پس:

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \quad \alpha = 22/5^\circ \rightarrow$$

$$\cos(2 \times 22/5^\circ) = 2 \cos^2 22/5^\circ - 1$$

$$2 \cos^2(22/5^\circ) = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \Rightarrow \cos 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$$

پ) مثبت. (۵/۷۵)

۶ تعریف مشتق تابع f در نقطه $x = 5$ را می‌نویسیم:

$$f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-1)(x-2) \cdots (x-5) - 0}{x - 5} \\ = \lim_{x \rightarrow 5} ((x-1)(x-2)(x-3)(x-4)) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

توجه کنید که $f(5) = (5-1)(5-2) \cdots (5-5) = 0$.

۷ با توجه به تعریف مشتق تابع f در نقطه $x = 1$:

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - 3}{h} = \frac{1}{3} f'(1) = \frac{1}{3} \times 3 = 1$$

۸ با توجه به نمودار، $f(2) = 3$ و

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\Delta f(x) - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\Delta(f(x) - 3)}{x - 2} = \Delta \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 1 \\ \Delta f'(2) = 1 \Rightarrow f'(2) = 2 \Rightarrow d \text{ شیب خط } = 2$$

معادله خط d به کمک نقطه $(2, 3)$ واقع بر آن و شیب 2 به صورت زیر است:

$$y - 3 = 2(x - 2) \Rightarrow y - 3 = 2x - 4 \Rightarrow y = 2x - 1$$

۹ توجه کنید که

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5 \Rightarrow f(2) = -(2)^2 + 6(2) - 5 = 3$$

بنابراین مختصات نقطه تماس برابر $(2, 3)$ است. همچنین

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 6x - 5 - 3}{x - 2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)(x-4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (-(x-4)) = 2$$

شیب خط مماس $m = 2$

اکنون دقت کنید خط مماس (خط d) محور x را در نقطه $(a, 0)$ قطع کرده است. شیب این خط را به کمک دو نقطه $(2, 3)$ و $(a, 0)$ به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{0 - 3}{a - 2} = \frac{-3}{a - 2}$$

دو شیب به دست آمده با هم برابرند. پس

$$\frac{-3}{a - 2} = 2 \Rightarrow 2a - 4 = -3 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۱۰ ابتدا توجه کنید که $f(2) = 3$. همچنین

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)(f(x) - 3)}{x - 2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ = 5 \times f'(2)$$

بنابراین عبارت موردنظر 5 برابر $f'(2)$ است.

۱۱ الف) حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ برابر $f'(2)$ است که با شیب خط مماس بر منحنی در نقطه $x = 2$ برابر است. شیب خط مماس را با دو نقطه

$(0, 0)$ و $(2, 4)$ واقع بر این خط به دست می‌آوریم.

$$\text{شیب خط مماس} = \frac{0 - 4}{0 - 2} = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow f'(2) = 2$$

ب) مشتق در دو نقطه A و B ، به ترتیب شیب خط مماس بر منحنی در این دو نقطه است. به شکل زیر توجه کنید (خط d' مماس بر منحنی در نقطه B است).

توجه کنید که

$$\sqrt{x-3}=0 \Rightarrow x=3, \quad \sqrt{x-3}=3 \Rightarrow x-3=9 \Rightarrow x=12$$

$$\sqrt{x-3}=5 \Rightarrow x-3=25 \Rightarrow x=28$$

$$\text{بنابراین } D_{\text{gof}} = \{3, 12, 28\} \quad (0/5)$$

اکنون تابع gof به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$(\text{gof})(3) = g(f(3)) = g(0) = 4$$

$$(\text{gof})(12) = g(f(12)) = g(3) = 2$$

$$(\text{gof})(28) = g(f(28)) = g(5) = 6$$

$$\text{gof} = \{(3, 4), (12, 2), (28, 6)\} \quad (0/5)$$

در نتیجه:

۶ الف) توجه کنید که اگر دامنه سهمی $y = ax^2 + bx + c$ را به

$$(-\infty, -\frac{b}{2a}) \quad \text{یا} \quad [-\frac{b}{2a}, +\infty)$$

محدود کنیم تابع یک به یک و در نتیجه وارون پذیر می‌شود. توجه کنید که چون

$$\frac{-b}{2a} = 1, \quad \text{دامنه را به } [1, +\infty) \quad (0/5) \quad \text{یا} \quad (-\infty, 1] \quad \text{محدود می‌کنیم:}$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 2 \xrightarrow{\text{وارون}} y = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1$$

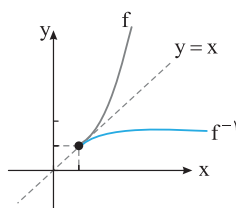
$$\xrightarrow{\substack{x \text{ را بر حسب } y \\ \text{به دست می‌آوریم}}} y - 1 = (x-1)^2 \quad (0/5)$$

$$\sqrt{y-1} = \sqrt{(x-1)^2} \xrightarrow{x \geq 1} \sqrt{y-1} = x-1 \quad (0/5)$$

$$\sqrt{y-1} + 1 = x \xrightarrow{\substack{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را} \\ \text{عوض می‌کنیم}}} f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 1 \quad (0/5)$$

$$R_{f^{-1}} = D_f = [1, +\infty) \quad (0/5)$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = [1, +\infty) \quad (0/5)$$



ب) اگر $(f \circ g)^{-1}(\alpha) = \alpha$ ، آن گاه $(f \circ g)(\alpha) = \alpha$ ، توجه کنید که

$$(f \circ g)(\alpha) = f(g(\alpha)) = f(\alpha^3) = \frac{1}{\alpha} \alpha^3 - 3$$

$$\frac{1}{\alpha} \alpha^3 - 3 = \alpha \quad (0/5) \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \alpha^3 = \alpha + 3 \Rightarrow \alpha^2 = \alpha + 3 \Rightarrow \alpha^2 - \alpha - 3 = 0 \Rightarrow \alpha = 4 \quad (0/5)$$

پس $(f \circ g)^{-1}(\alpha) = 4$.

۷ فرض کنید $y = a \sin(bx) + c$. در این صورت

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2} \quad (0/5)$$

$$\begin{cases} \max = -1 \\ \min = -7 \end{cases} \xrightarrow{\substack{\max = |a| + c \\ \min = -|a| + c}} c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{-1 - 7}{2} = -4 \quad (0/5)$$

$$|a| = \frac{\max - \min}{2} = \frac{-1 + 7}{2} = 3 \Rightarrow a = \pm 3 \quad (0/5)$$

$$y = -3 \sin \frac{x}{2} - 4, \quad y = -3 \sin(-\frac{x}{2}) - 4$$

$$y = 3 \sin \frac{x}{2} - 4, \quad y = 3 \sin(-\frac{x}{2}) - 4$$

نوشتن یکی از توابع بالا کافی است. (0/5)

ت) ۹- (0/5) اگر معادله این خط $y = ax + b$ باشد، آن گاه a (شیب خط) برابر $f'(4)$ است.

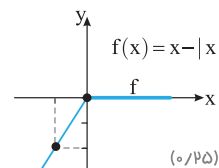
$$y = ax + b \xrightarrow{a=f'(4)=2} y = 2x + b \xrightarrow{\substack{(4, -1) \\ \text{روی خط}}} b = -9$$

بنابراین معادله خط مماس بر نمودار تابع f در $x = 4$ ، به صورت $y = 2x - 9$ است که محور y ها را در نقطه $(0, -9)$ قطع می‌کند.

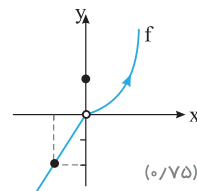
۳ الف) توجه کنید که

$$f(x) = x - |x| = \begin{cases} x - x & x \geq 0 \\ x - (-x) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$$

ثابت (نزولی): $(0, +\infty)$ (0/5) اکیدا صعودی: $(-\infty, 0]$ (0/5)



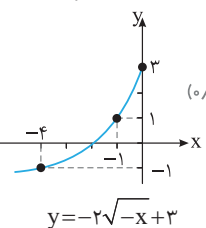
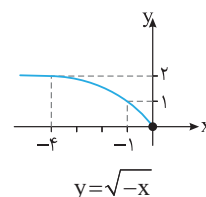
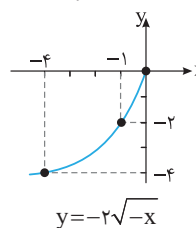
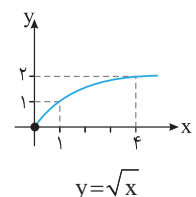
ب)



۴ الف)

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\substack{\text{قرینه نسبت} \\ \text{به محور } x}} y = \sqrt{-x} \xrightarrow{\substack{\text{قرینه نسبت} \\ \text{به محور } x}} y = -\sqrt{-x}$$

$$y = -2\sqrt{-x} \xrightarrow{\text{واحد به سمت بالا}} y = -2\sqrt{-x} + 3$$



ب) برای به دست آوردن دامنه تابع $y = f(\frac{x}{p})$ کافی است دامنه تابع f را p برابر کنیم. پس $D = (-2, 6]$ (0/5)، اما برد تابع $y = f(\frac{x}{p})$ با برد تابع f

برابر است، یعنی $R = (0, 2]$ (0/5)

۵ ابتدا دامنه تابع gof را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} D_f: x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \\ D_g = \{0, 3, 5\} \end{cases} \Rightarrow D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \quad (0/5)$$

$$= \{x \geq 3 \mid \sqrt{x-3} = 0, \sqrt{x-3} = 3, \sqrt{x-3} = 5\} \quad (0/5)$$

(ب) جواب‌های کلی معادله $\cos \frac{3}{2}x = \cos \frac{1}{2}x$ به صورت زیر هستند:

$$\frac{3}{2}x = \frac{1}{2}x + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \quad (o/v\Delta), \quad \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}x - 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{\Delta} \quad (o/v\Delta)$$

توجه کنید که جواب‌های به صورت $x = \frac{2k\pi}{\Delta}$ شامل جواب‌های به صورت

$2k\pi$ هم هستند. پس جواب‌های کلی معادله به صورت $x = \frac{2k\pi}{\Delta}$ هستند.

(الف) توجه کنید که وقتی $x \rightarrow \pi$ ، $1 + \cos x$ با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - 3}{1 + \cos x} = \frac{\pi^2 - 3}{0^+} = +\infty \quad (o/v\Delta)$$

(ب) حد صورت و مخرج برابر صفر است، پس

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \frac{0}{0} \quad \text{عامل صفر شونده} \quad \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)} \rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{x - \sqrt{x}}^{\text{مزدوج}} \times \overbrace{\sqrt{x} + 1}^{\text{مزدوج}}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - \sqrt{x})(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \quad (o/v\Delta)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - \sqrt{x})(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x+\sqrt{x})} \quad (o/v\Delta)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(\sqrt{x}+1)}{(x+\sqrt{x})} = \frac{1(\sqrt{1}+1)}{1+\sqrt{1}} = 1 \quad (o/v\Delta)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - (2 - \frac{1}{x})^2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - (\frac{2x-1}{x})^2}{\frac{1}{x}} \quad (o/v\Delta)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - (2x-1)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - (4x^2 - 4x + 1)}{x} \quad (o/v\Delta)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^2 - 4x^2 + 4x - 1)}{x} \quad (o/v\Delta)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x} = 4 \quad (o/v\Delta)$$

(الف) توجه کنید که

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \quad (o/v\Delta), \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1 \quad (o/v\Delta)$$

$$3) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \text{تابع } y = f(x) \text{ در } x=1 \text{ حد ندارد.} \quad (o/v\Delta)$$

(ب) حد صورت برابر ۱- است، پس باید حد مخرج برابر صفر و علامت آن در

دو طرف $x=2$ مثبت باشد. در نتیجه مخرج به صورت $(x-2)^2$ است.

$$x^2 + ax + b = (x-2)^2 \quad (o/v\Delta) = x^2 - 4x + 4$$

$$a = -4 \quad (o/v\Delta), \quad b = 4 \quad (o/v\Delta)$$

(الف) توجه کنید که

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

ابتدا $\cos \alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \xrightarrow{\sin \alpha = \frac{3}{4}} \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{7}}{4} \xrightarrow[\cos \alpha < 0]{\text{در ربع دوم است}} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4} \quad (o/v\Delta)$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{7}}{8} \quad (o/v\Delta) \\ \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \left(\frac{9}{16}\right) = -\frac{1}{8} \quad (o/v\Delta) \end{cases}$$

$$\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = \frac{-3\sqrt{7}}{8} - \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{-3\sqrt{7}+1}{8} \quad (o/v\Delta)$$

(ب) توجه کنید که $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ پس:

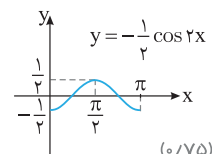
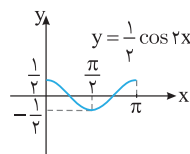
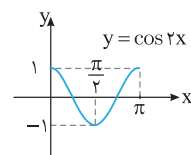
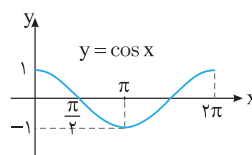
$$f(x) = \sin^2 x - \frac{1}{2} = \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{\cos 2x}{2}$$

بنابراین ابتدا طول هر نقطه روی نمودار تابع $y = \cos x$ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نمودار تابع $y = \cos 2x$ به دست آید. سپس عرض هر نقطه روی این نمودار

را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y = \frac{1}{2} \cos 2x$ به دست آید. در آخر

قرینه این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x$ رسم شود. همچنین دوره تناوب تابع f برابر است با:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$



(الف) اگر نمودار تابع f محور طول‌ها را در نقطه x قطع کند، آن‌گاه $f(x) = 0$ پس:

$$\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = 0 \quad (o/v\Delta) \xrightarrow{\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi} 2x - \frac{\pi}{3} = k\pi \quad (o/v\Delta)$$

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{6} \quad (o/v\Delta)$$

جواب‌های واقع در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \pi)$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{(2k+1)\pi}{6} < \pi \quad (o/v\Delta) \Rightarrow -3 < 2k+1 < 6 \Rightarrow -\frac{4}{2} < k < \frac{5}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

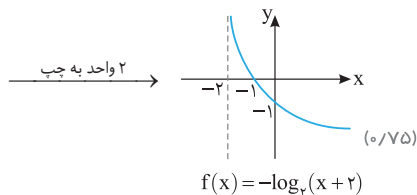
بنابراین به ازای $k = -1$ ، $k = 0$ و $k = 1$ سه مقدار برای x به دست می‌آید که طول نقاط برخورد نمودار تابع f با محور طول‌ها هستند. $(o/v\Delta)$

ب) $\frac{17}{25}$ (۵/۷۵) توجه کنید که

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1 - \frac{8}{25} = \frac{17}{25}$$

ب) -1 (۵/۷۵) اگر $x \rightarrow +\infty$ آن‌گاه $\frac{-1}{1+x} \rightarrow 0^-$ پس $\frac{-1}{1+x} \rightarrow -1$

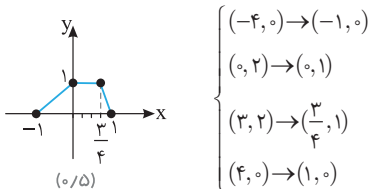
۳



با توجه به نمودار تابع f ، واضح است که این تابع در تمام دامنه خود یعنی در بازه $(-2, +\infty)$ اکیداً نزولی (۵/۷۵) است.

الف) برای رسم نمودار تابع $y = \frac{1}{p} f(px)$ ، طول نقاط نمودار تابع f را

$\frac{1}{p}$ برابر و عرض نقاط را $\frac{1}{p}$ برابر می‌کنیم.



ب) توجه کنید که

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{واحد بایین}} y = (x-1)^2 - 2 \quad (۵/۷۵)$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}} y = (x+1-1)^2 - 2 = x^2 - 2 \quad (۵/۷۵)$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور X}} y = -x^2 + 2 \quad (۵/۷۵)$$

الف) توجه کنید که

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^2 + bx + a, \quad (f \circ g)(x) = x^2 + 4x + 1$$

با مقایسه دو عبارت بالا نتیجه می‌گیریم: $a = 1$ (۵/۷۵)، $b = 4$ (۵/۷۵)

ب) $g(f(1)) \xrightarrow{f(1)=2} g(2) = -2 \Rightarrow (g \circ f)(1) = -2$ (۵/۷۵)

توجه کنید که $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = -1 + 3 = 2$ پس

۲) $f((f+g)(0)) = f(2) = -5 \Rightarrow (f \circ (f+g))(0) = -5$ (۵/۷۵)

الف) ابتدا f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = 2 - \sqrt{x} \xrightarrow{\text{وارون}} y = 2 - \sqrt{x} \xrightarrow{\text{x را بر حسب y به دست می‌آوریم}} x = (2-y)^2$$

$$y - 2 = -\sqrt{x} \Rightarrow (y-2)^2 = (-\sqrt{x})^2 \Rightarrow y^2 - 4y + 4 = x$$

$$\xrightarrow{\text{جای x و y را عوض می‌کنیم}} f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 4 \quad (۵/۷۵)$$

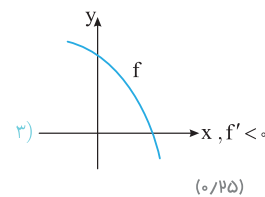
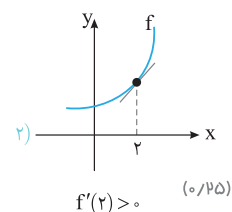
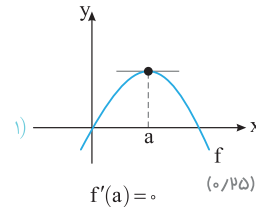
الف) $y - 2 = m(x - 1)$ معادله خط مماس

$$m = f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad (۵/۷۵)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \quad (۵/۷۵)$$

معادله خط: $y - 2 = 2(x - 1) \Rightarrow y - 2 = 2x - 2 \Rightarrow y = 2x$ (۵/۷۵)

ب)



الف) شیب خط مماس بر نمودار تابع در $x=4$ برابر است با $f'(4)$:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow 1/5 = \frac{y_B - 24}{5 - 4} \Rightarrow 1/5 = \frac{y_B - 24}{1} \quad (۵/۷۵)$$

$$1/5 = y_B - 24 \Rightarrow y_B = 24 + 1/5 = 24.2 \Rightarrow B(5, 24.2) \quad (۵/۷۵)$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \Rightarrow 1/5 = \frac{y_C - 24}{3 - 4} \Rightarrow 1/5 = \frac{y_C - 24}{-1} \quad (۵/۷۵)$$

$$-1/5 = y_C - 24 \Rightarrow y_C = 24 - 1/5 = 23.8 \Rightarrow C(3, 23.8) \quad (۵/۷۵)$$

پاسخ تشریحی آزمون (۱۰)

الف) نادرست. (۵/۷۵) توجه کنید که دو تابع f و g وارون یکدیگرند

$$\text{هرگاه } (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -\frac{2(-\frac{y}{2}x - 3) + 7}{6} = -\frac{-yx - 6 + 7}{6} = -\frac{-yx + 1}{6} = \frac{yx - 1}{6}$$

ب) نادرست. (۵/۷۵) برد تابع تانژانت برابر $\mathbb{R}$ است.

پ) درست. (۵/۷۵) چندجمله‌ای $f(x)$ بر عبارت $x+2$ بخش‌پذیر است،

$$\text{هرگاه } f(-2) = 0$$

$$f(-2) = 2(-2)^3 + 5(-2)^2 - 3(-2) - 1 = 0 \Rightarrow f(-2) = 0$$

الف) $[2, 4]$. (۵/۷۵) اگر نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را به اندازه ۳ واحد به

سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y = \sqrt{x-3}$ به دست می‌آید (این عمل

تأثیری در برد تابع ندارد)، و اگر نمودار به دست آمده را ۲ واحد به سمت بالا

انتقال دهیم، نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-3}$ به دست می‌آید. توجه کنید که این

تغییر روی برد تابع تأثیر دارد و آن را به اندازه ۲ واحد افزایش می‌دهد.