

انتشارات
آگاه



تمرین امتحان

ریاضیات گسسته دوازدهم

محمد شاه محمدی و عبدالمجید عزیزی



درس نامه
سؤال محور

تمرین های
تشریحی

سؤالات
امتحانی

آزمون نیم سال
و پایان سال

پاسخ های
تشریحی

پیشگفتار

به نام خدا

اگر کسی سؤال کند ریاضیات چه کاربردی در زندگی ما دارد، احتمالاً نمی‌توانیم در زمانی کوتاه و با چند جمله او را قانع کنیم که ریاضیات واقعاً مفید است.

همان‌طور که احتمالاً سوّمی‌ها نمی‌توانستند تصور کنند که عددبازی‌های دانشمندانشان، هزاران سال بعد، در رمزگذاری‌های رایانه‌ای، چه اندازه مفید خواهد بود!

احتمالاً نیوتن هم، هنگام ارائه و حل بسیاری از مسائل ریاضی، صرفاً لذت می‌برده و خیلی به این فکر نمی‌کرده که حل این مسائل، صدها سال بعد، چه کمکی به فناوری و زندگی پیشرفته انسان‌ها خواهد کرد.

امروز هم ریاضی‌دانان، در زندگی به اصطلاح مدرن خود، در حال ارائه و حل مسائلی هستند که شاید در آینده‌ای دور یا نزدیک، باعث پیشرفتی شود که زندگی امروز ما را دیگر مدرن معرفی نکند!

به نظر می‌رسد بعضی لذت‌های زندگی روزمره، مثل حل مسئله ریاضی، پله‌های پیشرفت بشر را می‌سازند و خواجه‌نصیرالدین طوسی هنگام حل مسئله، درست می‌گفت که «پادشاهان کجا هستند تا لذت مرا دریابند؟»

بگذریم ... چند سالی است که در سال دوازدهم، امتحانات نهایی برگزار می‌شود و تأثیر نسبتاً زیادی بر قبولی در دانشگاه دارد. به همین خاطر کتاب ریاضیات گسسته «۲۰ تمام» را نوشته‌ایم تا به شما کمک کند که مطالب و مفاهیم کتاب درسی را بهتر و راحت‌تر درک کنید.

در این کتاب علاوه بر بیان واضح و کامل همه مفاهیم کتاب درسی و حل مسائل و تمرین کتاب درسی، سؤالات امتحانات نهایی برگزارشده و تمرین متنوع و مشابه آن امتحانات نیز آورده شده و فکر می‌کنیم تمام نیازهای دانش‌آموزان را، برای یادگیری و تسلط بر درس ریاضیات گسسته و همچنین کسب نمره کامل در امتحانات، برآورده می‌کند.

این کتاب شامل موارد زیر است:

درس‌نامه

امتحان نهایی در درس ریاضیات گسسته معمولاً شامل دو بخش است، یک بخش با سؤال‌های جای خالی، درست و نادرست و ... و بخش دیگر مسئله‌های محاسباتی و گاهی اثباتی.

الف) برای بخش نخست، در درس‌نامه تمام قسمت‌های حفظی و مهم متن کتاب درسی را آورده‌ایم.
ب) برای بخش مسئله‌ها، در درس‌نامه مثال‌های متعددی آورده‌ایم تا با تیپ‌های مختلف مسئله‌ها و روش‌های حل آن‌ها آشنا شوید.

تمرین‌های تشریحی

در هر درس، بعد از درس‌نامه کامل، تعدادی تمرین تشریحی قرار داده‌ایم تا با حل آن‌ها قدرت حل مسئله و آزمون دادن شما بالا برود. این تمرین‌ها شامل تیپ‌های مختلف سؤال‌هایی هستند که در امتحانات مطرح می‌شوند تا هم شما و هم همکار عزیز ما، یعنی معلم‌تان خیالتان راحت باشد که این نمونه سؤال‌ها را یاد گرفته‌اید.

پاسخ‌های تشریحی

حل تمام مسائل و تمرین‌ها به طور کاملاً تشریحی در این قسمت آورده شده است.

گام نهایی

یک کتاب مستقل شامل:

الف) خلاصه هر فصل شامل تمام تعریف‌ها و مفاهیم مهم

ب) آزمون‌هایی شامل مسائل و پرسش‌های امتحان‌های نهایی و مشابه آن‌ها با بارم‌بندی

پ) پاسخ‌نامه کاملاً تشریحی شامل هر چیزی که باید در برگه امتحان بنویسید، بارم‌بندی شده و دارای توضیحات کامل، برای آموزش شما از نحوه نوشتن راه‌حل برای گرفتن نمره کامل

در آخر باید بگیم این کتاب

«تمام آن چیزی است که شما برای ۲۰ گرفتن لازم دارید»

از انتشارات خوشنام الگو، به خصوص از خانم مختار، به خاطر پیگیری‌های مفیدشان، سپاس‌گزاریم.

از خانم گودرزی، به خاطر دقت کم‌نظیر در ویراستاری کتاب و خستگی‌ناپذیری‌شان بسیار بسیار متشکریم و قدردان زحمات‌شان هستیم.

محمد شاه‌محمدی - عبدالمجید عزیزی

فهرست مطالب

فصل اول: آشنایی با نظریه اعداد

- درس اول: استدلال ریاضی ۲
- تمرین‌های تشریحی ۱۱
- درس دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح ۱۵
- تمرین‌های تشریحی ۲۵
- درس سوم: هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها ۲۹
- تمرین‌های تشریحی ۴۰

فصل دوم: گراف و مدل‌سازی

- درس اول: معرفی گراف ۴۶
- تمرین‌های تشریحی ۵۸
- درس دوم: مدل‌سازی با گراف ۶۶
- تمرین‌های تشریحی ۷۳

فصل سوم: ترکیبیات (شمارش)

- درس اول: مباحثی در ترکیبیات ۸۰
- تمرین‌های تشریحی ۹۰
- درس دوم: روش‌هایی برای شمارش ۹۴
- تمرین‌های تشریحی ۱۰۳

فصل چهارم: پاسخ تمرین‌های تشریحی

● فصل اول

- پاسخ‌های تشریحی درس اول ۱۰۸
- پاسخ‌های تشریحی درس دوم ۱۱۲
- پاسخ‌های تشریحی درس سوم ۱۱۹

● فصل دوم

- پاسخ‌های تشریحی درس اول ۱۳۰
- پاسخ‌های تشریحی درس دوم ۱۳۹

● فصل سوم

- پاسخ‌های تشریحی درس اول ۱۴۵
- پاسخ‌های تشریحی درس دوم ۱۵۴

فصل پنجم: گام نهایی

- خلاصه فصل اول ۱۶۲
- خلاصه فصل دوم ۱۶۴
- خلاصه فصل سوم ۱۶۷

۱۹۶..... پاسخنامهٔ امتحان فصل اول.....	۱۷۰..... امتحان فصل اول.....
۱۹۸..... پاسخنامهٔ امتحان فصل دوم.....	۱۷۱..... امتحان فصل دوم.....
۱۹۹..... پاسخنامهٔ امتحان فصل سوم.....	۱۷۲..... امتحان فصل سوم.....
۲۰۲..... پاسخنامهٔ امتحان میان سال (۱).....	۱۷۴..... امتحان میان سال (۱).....
۲۰۳..... پاسخنامهٔ امتحان میان سال (۲).....	۱۷۵..... امتحان میان سال (۲).....
۲۰۵..... پاسخنامهٔ امتحان میان سال (۳).....	۱۷۶..... امتحان میان سال (۳).....
۲۰۷..... پاسخنامهٔ امتحان جامع (۱).....	۱۷۸..... امتحان جامع (۱).....
۲۰۹..... پاسخنامهٔ امتحان جامع (۲).....	۱۷۹..... امتحان جامع (۲).....
۲۱۱..... پاسخنامهٔ امتحان جامع (۳).....	۱۸۰..... امتحان جامع (۳).....
۲۱۳..... پاسخنامهٔ امتحان جامع (۴).....	۱۸۲..... امتحان جامع (۴).....
۲۱۴..... پاسخنامهٔ امتحان جامع (۵).....	۱۸۳..... امتحان جامع (۵).....
۲۱۵..... پاسخنامهٔ امتحان جامع (۶).....	۱۸۴..... امتحان جامع (۶).....
۲۱۷..... پاسخنامهٔ امتحان جامع (۷).....	۱۸۶..... امتحان جامع (۷).....
۲۱۸..... پاسخنامهٔ امتحان جامع (۸).....	۱۸۸..... امتحان جامع (۸).....
۲۲۰..... پاسخنامهٔ امتحان جامع (۹).....	۱۸۹..... امتحان جامع (۹).....
۲۲۳..... پاسخنامهٔ امتحان جامع (۱۰).....	۱۹۱..... امتحان جامع (۱۰).....
۲۲۵..... پاسخنامهٔ امتحان جامع (۱۱).....	۱۹۲..... امتحان جامع (۱۱).....
۲۲۶..... پاسخنامهٔ امتحان جامع (۱۲).....	۱۹۴..... امتحان جامع (۱۲).....
۲۲۹..... امتحان جامع (۱۳) (امتحان نهایی تیر ۱۴۰۵).....	

بخش پذیری در اعداد صحیح

در این درس ابتدا مفهوم بخش پذیری در مجموعه اعداد صحیح و سپس مفاهیم آشنای «بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک» و «کوچک‌ترین مضرب مشترک» را (بیشتر به صورت پارامتری)، بررسی می‌کنیم. همچنین قضیه تقسیم را مرور کرده و به کمک آن مجموعه اعداد صحیح را به شکل‌های مختلف افراز می‌کنیم.

بخش پذیری در اعداد صحیح

می‌دانیم که ۶ بر ۲ بخش پذیر است. می‌توانیم این بخش پذیری را این طور بیان کنیم که «۲، ۶ را می‌شمارد.» و معنای آن این است که ۲، در سه گام، ۶ را طی می‌کند: $6 = 2 + 2 + 2$ یا $6 = 2 \times 3$.

مفهوم عاد کردن یا شمردن

فرض کنید a و b دو عدد صحیح باشند و $a \neq 0$. می‌گوییم a شمارنده b است، به شرطی که عددی صحیح مانند q وجود داشته باشد که $b = aq$. در این صورت می‌نویسیم $a | b$ و می‌خوانیم a ، b را می‌شمارد یا a ، b را عاد می‌کند یا a یک شمارنده b است.

مثال

۲/۶ و می‌گوییم ۲، ۶ را می‌شمارد (۲، ۶ را عاد می‌کند). همین طور ۶/۲- و می‌گوییم ۲-، ۶ را می‌شمارد (۲-، ۶ را عاد می‌کند).

نکته

اگر b بر a بخش پذیر نباشد، می‌نویسیم $a \nmid b$ و می‌خوانیم a ، b را نمی‌شمارد یا a ، b را عاد نمی‌کند.

مثال

۶ بر ۴ بخش پذیر نیست، پس ۴/۶- همچنین ۲ بر ۲ بخش پذیر نیست، پس ۲/۱-.

نکته

می‌توان رابطه شمردن را این طور تعریف کرد: $a | b \Leftrightarrow b = aq, \quad a \neq 0, \quad a, b, q \in \mathbb{Z}$

نکته

- عدد ۱ هر عدد صحیح دلخواهی مانند a را می‌شمارد، زیرا $a = 1 \times a \Rightarrow 1 | a$.
- عدد -۱ هر عدد صحیح دلخواهی مانند a را می‌شمارد، زیرا $a = (-1)(-a) \Rightarrow -1 | a$.
- قرار داد: عدد صفر، صفر را می‌شمارد: $0 | 0$.
- هر عدد صحیح دلخواه غیر صفر، مانند a ، صفر را می‌شمارد: زیرا $0 = a \times 0 \Rightarrow a | 0$.
- هر عدد صحیح دلخواه، خودش و قرینه خودش را می‌شمارد، زیرا: $-a = a(-1) \Rightarrow a | -a$ ، $a = a \times 1 \Rightarrow a | a$.

مسئله ۱

کار در کلاس صفحه (۱۰) کتاب درسی

با توجه به تعریف عاد کردن، جاهای خالی را پر کنید.

الف) $7 | 63 \Leftrightarrow 63 = \dots \times \dots$

ب) $91 = 7 \times 13 \Leftrightarrow \dots | \dots$

پ) $-6 | 54 \Leftrightarrow \dots = \dots \times (-6)$

ت) $5 | -35 \Leftrightarrow \dots = 5 \times \dots$

ث) $0 = 18 \times \dots \Leftrightarrow 18 | \dots$

ج) $a | 1 \Leftrightarrow a = \dots$ یا $a = \dots$

چ) $26 = 2 \times 13 \Rightarrow 2 | \dots, 13 | \dots$

راه حل

الف) $7 | 63 \Leftrightarrow 63 = 7 \times 9$

ب) $91 = 7 \times 13 \Leftrightarrow 7 | 91$

پ) $-6 | 54 \Leftrightarrow 54 = (-9) \times (-6)$

ت) $5 | -35 \Leftrightarrow -35 = 5 \times (-7)$

ث) $0 = 18 \times 0 \Leftrightarrow 18 | 0$

ج) $a | 1 \Leftrightarrow a = 1$ یا $a = -1$

چ) $26 = 2 \times 13 \Rightarrow 2 | 26, 13 | 26$

مسئله ۲

کار در کلاس صفحه (۱۰) کتاب درسی

با استفاده از تعریف عاد کردن و قوانین ضرب و تقسیم اعداد توان دار با پایه های برابر، ابتدا نشان دهید که $3^5 | 3^9$ و سپس ثابت کنید:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n \Rightarrow a^m | a^n$$

راه حل ابتدا نشان می دهیم $3^5 | 3^9$. می دانیم اگر $b = aq$ آن گاه $a | b$. توجه کنید که $3^9 = 3^4 \times 3^5 \xrightarrow{b=3^9, a=3^5, q=3^4} 3^5 | 3^9$

اکنون ثابت می کنیم: $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n \Rightarrow a^m | a^n$

اگر $m \leq n$ آن گاه می توان n را به صورت مجموع m و عدد نامنفی r نوشت: $n = m + r$. بنابراین:

$$a^n = a^{m+r} \Rightarrow a^n = a^m \times a^r \xrightarrow{a^r=q} a^n = a^m q \Rightarrow a^m | a^n$$

ویژگی های رابطه عاد کردن (رابطه شمردن)

ویژگی ۱ رابطه عاد کردن

اگر عدد a عدد b را بشمارد، آن گاه هر مضرب صحیح عدد b را نیز می شمارد. یعنی: $m \in \mathbb{Z}, a | b \Rightarrow a | mb$

$$a | b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{\times m} mb = a(mq) \Rightarrow a | mb$$

اثبات:

مثال

از $6 | 12$ نتیجه می شود $6 | 5 \times 12$. همچنین از $7 | 35$ نتیجه می شود $7 | 10 \times 35$ ، چون $10 \times 35 = 350$.

نکته

اگر $a | b$ ، آن گاه $a | b^n$ (که $n \in \mathbb{N}$).

اثبات: طبق ویژگی (۱)، داریم $a | b \Rightarrow a | mb$ ، اگر فرض کنیم $m = b^{n-1}$ ، به دست می آید $a | b^{n-1} \times b \Rightarrow a | b^n$.

نتیجه اگر $a | b$ آن گاه $a | b^2, a | b^3, \dots$

مثال

از $3 | 6$ نتیجه می شود $3 | 36, 3 | 216, \dots$ چون $36 = 6^2$ و $216 = 6^3$.

نکته

اگر $a | bc$ آن گاه نمی توان گفت لزوماً $a | b$ یا $a | c$.

مثال

توجه کنید که $4 \times 6 = 24$ و $12 | 24$ ، $12 | 4$ ، $12 | 6$ ، همچنین $8 \times 2 = 16$ و $4 | 16$ ، $4 | 8$ ، $4 | 2$ ، اما $5 | 25$ و $5 | 5$ ، $5 | 125$ و $5 \nmid 125$.

نکته

فرض کنید $k \in \mathbb{Z}$. اگر $a | b$ ، آن گاه $ka | kb$.

$$a | b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{\times k} kb = (ka)q \Rightarrow ka | kb$$

اثبات:

مثال

از $10 | 100$ نتیجه می شود $7 \times 10 | 7 \times 100$ یا همان $70 | 700$. همچنین از $11 | 121$ نتیجه می شود $55 | 605$ چون $55 = 5 \times 11$ و $55 \nmid 605$.

نکته

فرض کنید $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. اگر $ka | kb$ آن گاه $a | b$.

$$ka | kb \Rightarrow kb = kaq \xrightarrow{\div k, k \neq 0} b = aq \Rightarrow a | b$$

اثبات:

مثال

از $75 | 300$ نتیجه می شود که $25 | 100$ (دو طرف را بر ۳ تقسیم کرده ایم). همچنین از $96 | 192$ می توان نتیجه گرفت $48 | 96$. دو طرف را بر ۲ تقسیم کردیم.

نکته

اگر $a | b$ آن گاه $\pm a | \pm b, a | b, |a| | |b|$.

ویژگی ۲ رابطه عاد کردن (خاصیت تعدی برای رابطه عاد کردن)

اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد آن گاه عدد a عدد c را می‌شمارد: $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$

$$\begin{cases} a|b \Rightarrow b=aq_1 & (۱) \\ b|c \Rightarrow c=bq_2 \xrightarrow{(۱)} c=aq_1q_2 \xrightarrow{q_1q_2=q} c=aq \Rightarrow a|c \end{cases}$$

اثبات:

مثال

از $۵|۲۵$ و $۲۵|۱۰۰$ ، می‌توان نتیجه گرفت که $۵|۱۰۰$. همچنین از $۴|۱۲$ و $۱۲|۱۳۲$ ، $(۱۳۲=۱۲ \times ۱۱)$ نتیجه می‌گیریم $۴|۱۳۲$.

نتیجه: برای هر عدد طبیعی n : $a|b \Rightarrow a|b^n$

$$a|b, \quad b|b^n \Rightarrow a|b^n$$

اثبات: از خاصیت تعدی رابطه عاد کردن استفاده می‌کنیم:

ویژگی ۳ رابطه عاد کردن

هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آن گاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد: $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$

$$\begin{cases} a|b \Rightarrow b=aq_1 \\ a|c \Rightarrow c=aq_2 \end{cases} \xrightarrow{\pm} b \pm c = aq_1 \pm aq_2 = a(q_1 \pm q_2) \xrightarrow{q_1 \pm q_2=q} b \pm c = aq \Rightarrow a|b \pm c$$

اثبات:

مثال

$$۴|۱۲, ۴|۱۶ \Rightarrow \begin{cases} ۴|۱۲+۱۶ \Rightarrow ۴|۲۸ \\ ۴|۱۲-۱۶ \Rightarrow ۴|-۴ \end{cases} \quad ۷|۱۴a, ۷|۴۲b \Rightarrow \begin{cases} ۷|۱۴a+۴۲b \\ ۷|۱۴a-۴۲b \end{cases}$$

با توجه به ویژگی (۳) رابطه عاد کردن داریم:

نکته

اگر $a|b \pm c$ آن گاه لزوماً نمی‌توان گفت $a|b$ یا $a|c$.

مثال

$$\text{الف) } ۱۲|۴۸=۱۷+۳۱ \text{ اما } ۱۲ \nmid ۱۷, ۱۲ \nmid ۳۱ \quad \text{ب) } ۸|۱۵=۱۵-۷ \text{ اما } ۸ \nmid ۱۵, ۸ \nmid ۷$$

نکته

اگر $a|b \pm c$ و $a|b$ ، آن گاه $a|c$.

اثبات:

$$\begin{cases} a|b \pm c \Rightarrow b \pm c = aq_1 \\ a|b \Rightarrow b = aq_2 \end{cases} \Rightarrow aq_2 \pm c = aq_1 \Rightarrow \pm c = aq_1 - aq_2 \Rightarrow \pm c = a(q_1 - q_2)$$

$$c = a[\pm(q_1 - q_2)] \xrightarrow{\pm(q_1 - q_2)=q} c = aq \Rightarrow a|c$$

(دقت کنید که اگر $a|b \pm c$ و $a|b$ ، آن گاه $a|c$).

مثال

از $۱۴|۲۸ \pm c$ ، نتیجه می‌گیریم که c عددی است که حتماً بر ۱۴ بخش پذیر است، زیرا $۱۴|۲۸$ ، پس $۱۴|\pm c$.

ویژگی ۴ رابطه عاد کردن:

اگر $a|b$ و $b \neq 0$ ، در این صورت $|a| \leq |b|$.

$$\begin{aligned} a|b \Rightarrow b=aq & \xrightarrow{b \neq 0} q \neq 0 \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} q \in \mathbb{Z} - \{0\} \Rightarrow |q| \geq 1 \xrightarrow{\times |a|} \\ |a||q| \geq |a| \Rightarrow |aq| \geq |a| & \xrightarrow{b=aq} |b| \geq |a| \end{aligned}$$

اثبات:

نتیجه: اگر $a|b$ و $b|a$ آن گاه $a = \pm b$.

$$\begin{cases} a|b \xrightarrow{\text{ویژگی ۴ رابطه عاد کردن}} |a| \leq |b| \\ b|a \xrightarrow{\text{ویژگی ۴ رابطه عاد کردن}} |b| \leq |a| \end{cases} \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$$

اثبات:

مسئله ۳

کار در کلاس صفحه (۱۱) کتاب درسی

اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $6m+5$ و $7m+6$ بر a بخش پذیر باشند ثابت کنید $a = \pm 1$.

راه حل

وقتی عددی بر a بخش پذیر است، یعنی a آن عدد را می شمارد: $a | 7m+6 \Rightarrow a | 6(7m+6) \Rightarrow a | 42m+36$ ویژگی ۱ رابطه عادی کردن

$$a | 6m+5 \xrightarrow{\text{ویژگی ۱ رابطه عادی کردن}} a | 7(6m+5) \Rightarrow a | 42m+35$$

توجه کنید که بنا بر ویژگی ۳ رابطه عادی کردن می توان سمت راست دو رابطه بالا را از هم کم کرد. وقتی عددی a را می شمارد آن عدد فقط می تواند ۱ یا -1 باشد؛ زیرا عدد ۱ فقط بر ۱ یا -1 بخش پذیر است؛ بنابراین $a = +1$ یا $a = -1$.

مسئله ۴

کار در کلاس صفحه (۱۱) کتاب درسی

اگر $a | b$ نشان دهید که $a^n | b^n$.

راه حل

$$a | b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{\text{توان } n} b^n = a^n q^n \xrightarrow{q^n = q'} b^n = a^n q' \Rightarrow a^n | b^n$$

مسئله ۵

کار در کلاس صفحه (۱۱) کتاب درسی

اگر $a | b$ و $c | d$ نشان دهید که $ac | bd$.

راه حل

$$\begin{cases} a | b \Rightarrow b = aq_1 \\ c | d \Rightarrow d = cq_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{دو طرف تساوی ها را در هم ضرب می کنیم}} bd = acq_1q_2 \xrightarrow{q_1q_2 = q} bd = (ac)q \Rightarrow ac | bd$$

مسئله ۶

کار در کلاس صفحه (۱۱) کتاب درسی

اگر $a | b$ و $a | c$ نشان دهید که $a | mb \pm nc$.

راه حل

$$\begin{cases} a | b \xrightarrow{\text{ویژگی ۱ رابطه عادی کردن}} a | mb \\ a | c \xrightarrow{\text{ویژگی ۱ رابطه عادی کردن}} a | nc \end{cases} \xrightarrow{\text{ویژگی ۳ رابطه عادی کردن}} a | mb \pm nc$$

عدد اول

عدد اول عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ است که به جز خودش و ۱، هیچ شمارنده مثبتی ندارد.

نکته

• مجموعه اعداد اول، $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ نامتناهی است، عدد اول را معمولاً با p نمایش می دهیم.• اگر p عددی اول و a عددی طبیعی باشد: $a | p \Rightarrow a = 1$ یا $a = p$ • اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشد: $a | p \Rightarrow a = \pm 1$ یا $a = \pm p$

مسئله ۷

اگر عدد طبیعی a ، دو عدد $9k+7$ و $7k+6$ را عاد کند، ثابت کنید $a = 1$ یا $a = 5$.

راه حل

$$\begin{cases} a | 9k+7 \Rightarrow a | 7(9k+7) \Rightarrow a | 63k+49 \\ a | 7k+6 \Rightarrow a | 9(7k+6) \Rightarrow a | 63k+54 \end{cases} \xrightarrow[\text{عاد کردن}]{\text{ویژگی (۳) رابطه}} a | 63k+54 - (63k+49) \Rightarrow a | 5 \xrightarrow[\text{اول است.}]{\text{عدد ۵}} a = 1 \text{ یا } a = 5$$

مسئله ۸

دی ۹۷ - شهریور ۱۴۰۰

اگر $a > 1$ ، $a | 9k+4$ و $a | 5k+3$ ثابت کنید a عددی اول است.

راه حل

$$\begin{cases} a | 5k+3 \Rightarrow a | 9(5k+3) \Rightarrow a | 45k+27 \\ a | 9k+4 \Rightarrow a | 5(9k+4) \Rightarrow a | 45k+20 \end{cases} \xrightarrow[\text{عاد کردن}]{\text{ویژگی (۳) رابطه}} a | 45k+27 - (45k+20) \Rightarrow a | 7$$

a عددی اول است. $a = 7 \Rightarrow$ عددی اول است
 $a > 1 \Rightarrow a \neq 1$

مسئله ۹

ثابت کنید اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b \mid a+2$ ، آنگاه $a^2 + b^2 - 2$ بر ۸ بخش پذیر است.

راه حل

$a \Rightarrow a = 2k+1 \Rightarrow a+2 = 2k+1+2 \Rightarrow a+2 = 2(k+1)+1$

$\xrightarrow{k+1=m} a+2 = 2m+1 \Rightarrow$ $a+2$ عددی فرد است.

از طرفی $b \mid a+2$ ، یعنی $a+2 = bq$ ، پس bq مساوی عددی فرد است، بنابراین b و q نمی توانند زوج باشند و فرد هستند.

$$\left. \begin{aligned} b &\xrightarrow{b=2k'+1} b^2 = (2k'+1)^2 = 4k'^2 + 4k' + 1 = 4(k'^2 + k') + 1 = 4(\underbrace{k'(k'+1)}_{2t'}) + 1 = 8t' + 1 \\ a &\xrightarrow{a=2k+1} a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1 = 4(\underbrace{k(k+1)}_{2t}) + 1 = 8t + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 = 8t + 8t' + 2 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2 = 8(t+t') \xrightarrow{t+t'=k} a^2 + b^2 - 2 = 8k \Rightarrow 8 \mid a^2 + b^2 - 2$$

نکته

$n!$ برابر است با حاصل ضرب اعداد طبیعی ۱ تا n ؛ پس هر عدد طبیعی کوچک تر از یا مساوی n شمارنده $n!$ است: $k \leq n, (k \in \mathbb{N}): k \mid n!$

مسئله ۱۰

نشان دهید هیچ یک از ۹۹ عدد متوالی مقابل اول نیست.

$$100!+2, 100!+3, \dots, 100!+99, 100!+100$$

راه حل

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \mid 100! \\ 2 \mid 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2 \mid 100!+2, \left\{ \begin{matrix} 3 \mid 100! \\ 3 \mid 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 3 \mid 100!+3, \dots, \left\{ \begin{matrix} 100 \mid 100! \\ 100 \mid 100 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 100 \mid 100!+100$$

در نتیجه هر یک از عددهای مورد نظر مقسوم علیه بزرگتر از ۱ به جز خودش دارد، پس عددی اول نیست.

نتیجه در حالت کلی می توانیم بازه های شامل n عدد طبیعی متوالی غیراول معرفی کنیم و این بازه عبارت است از $[(n+1)!+2, (n+1)!+n+1]$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک

مقسوم علیه یک عدد

هر مقسوم علیه عددی مانند b ، عددی است مانند a که $a \mid b$.

مثال

۱۲ مقسوم علیه ۳۶ است؛ زیرا $36 = 3 \times 12$ و $12 \mid 36$. همچنین ۴۹ مقسوم علیه ۱۹۶ است، چون $196 = 4 \times 49$ و $49 \mid 196$.

نکته

دو عدد صحیح ممکن است یک یا چند مقسوم علیه مشترک داشته باشند.

مثال

دو عدد ۳۶ و ۲۴ را در نظر بگیرید. مقسوم علیه های این دو عدد را می نویسیم:

$$36: \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36$$

$$24: \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$$

همان طور که می بینید این دو عدد، دارای مقسوم علیه های مشترک $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ هستند و بزرگترین آنها $+12$ است.

بزرگترین مقسوم علیه مشترک

عدد طبیعی d را ب.م.م. دو عدد صحیح a و b (که هر دو با هم صفر نیستند) می نامیم و می نویسیم $(a, b) = d$ ، هرگاه

$$d \mid a, d \mid b \quad \forall m > 0: m \mid a, m \mid b \Rightarrow m \leq d \quad \text{ب)}$$

مثال

به نمونه های مقابل توجه کنید. $(24, 36) = 12$, $(8, 16) = 8$, $(6, 6) = 6$, $(4, -6) = 2$, $(4, 9) = 1$

نکته

• اگر $(a, b) = 1$ ، می گوییم a و b نسبت به هم اول هستند.

• $(0, 0)$ تعریف نمی شود.

مثال

۱۷ و ۱۲ نسبت به هم اول اند، چون $(17, 12) = 1$. همچنین ۲۱ و ۵۵ نسبت به هم اول اند. چون $(55, 21) = 1$. در حقیقت ۵۵ و ۲۱ عامل مشترک بزرگ‌تر از ۱ ندارند.

نکته

توجه کنید که علامت و ترتیب قرار گرفتن دو عدد در مقدار ب.م.م. تأثیری ندارد، یعنی $(a, b) = (b, a) = (a, -b) = (b, -a) = (-b, -a)$

مثال

مشاهده می‌کنید که علامت و ترتیب قرار گرفتن دو عدد ۲۴ و ۳۶ در مقدار ب.م.م. آن‌ها اثری ندارد.
 $(24, 36) = (36, 24) = (-36, -24) = (24, -36) = (-24, 36) = 12$

مسئله ۱۱

کار در کلاس صفحه (۱۳) کتاب درسی

با توجه به تعریف ب.م.م. ثابت کنید $a|b \Rightarrow (a, b) = |a|$

راه‌حل اولاً باید ثابت کنیم $|a| |a|$ و $|a| |b|$ ، **ثانیاً** باید ثابت کنیم $|a|$ از بقیه مقسوم‌علیه‌های مثبت a و b بزرگ‌تر یا مساوی است. یعنی

$$m|a, m|b \Rightarrow m \leq |a|$$

اولاً: هر عدد خودش را عاد می‌کند. همچنین طبق فرض داریم $a|b$. از طرف دیگر اگر $a|b$ آن‌گاه $|a| |b|$ ، پس داریم:

$$a|a \Rightarrow |a| |a|, \text{ فرض: } a|b \Rightarrow |a| |b|$$

ثانیاً: فرض کنید m یک مقسوم‌علیه مثبت a و b باشد، در این صورت $m|a$ و $m|b$ ، همچنین می‌دانیم اگر $m|a$ آن‌گاه، $|a|$ از $|a|$ کوچک‌تر

$$m|a \xrightarrow{a \neq 0} |m| \leq |a| \xrightarrow{m > 0} m \leq |a|$$

یا مساوی با آن است ($a \neq 0$). پس داریم

$$\forall m > 0: m|a, m|b \Rightarrow m \leq d$$

پس هر دو بخش تعریف ب.م.م. در این‌جا برقرارند:

بنابراین با شرط $a|b$ ، ب.م.م. دو عدد a و b برابر $|a|$ است.

مسئله ۱۲

کار در کلاس صفحه (۱۴) کتاب درسی

اگر p عددی اول باشد، $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$ ، ثابت کنید $(p, a) = 1$.

راه‌حل فرض می‌کنیم $(p, a) = d$. چون ب.م.م. p و a برابر d است، پس p و a بر d بخش‌پذیرند. از طرف دیگر چون p اول است جز خودش و ۱ بر

عدد دیگری بخش‌پذیر نیست. پس $d = 1$ یا $d = p$. آنچه گفتیم معادل است با $(p, a) = d \Rightarrow \begin{cases} d|p \\ d|a \end{cases} \xrightarrow{\text{اول } p} d = 1 \text{ یا } d = p$

اما اگر $d = p$ چون $d|a$ ، پس یعنی $p|a$ که مخالف فرض سؤال است، پس باید $d = 1$. توجه کنید که معادل ریاضی این جمله به صورت زیر است:

$$d = p \xrightarrow{d|a} p|a \text{ (نادرست است چون مخالف فرض } p \nmid a \text{ است.)}$$

بنابراین: $d = 1 \Rightarrow (p, a) = 1$.

نکته

حکم این مسئله در حالت کلی (که p عددی اول نباشد) لزوماً درست نیست.

مثال

اگر $p = 4$ و $a = 6$ داریم: $4 \nmid 6, (4, 6) \neq 1$. یعنی حکم مسئله قبل اگر p اول نباشد لزوماً درست نیست.

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد

مضارب یک عدد صحیح

مضارب یک عدد صحیح مانند a عبارتند از $\pm a, \pm 2a, \pm 3a, \dots$ در حالت کلی ma مضرب a است ($m \in \mathbb{Z}$).

مثال

مضارب غیرصفر ۴ عبارت هستند از $\pm 4, \pm 8, \pm 12, \dots$.

مثال

دو عدد ۶ و ۴ را در نظر بگیرید. بعضی از مضارب مثبت این دو عدد را می‌نویسیم:
 $4: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, \dots$
 $6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, \dots$
 همان‌طور که می‌بینید بعضی از مضارب این دو عدد، مشترک‌اند، مانند ۱۲، ۲۴، ۳۶ و همچنین کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها ۱۲ است.

کوچک‌ترین مضرب مشترک

عدد طبیعی c را ک.م.م. دو عدد صحیح و ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a, b] = c$ ، هرگاه:
 الف) $a|c, b|c$ ب) $\forall m > 0, a|m, b|m \Rightarrow c \leq m$

مثال

به نمونه‌های مقابل توجه کنید.
 $[4, -16] = 16, [3, 4] = 12, [1, 8] = 8, [-4, 6] = 12, [4, 6] = 12$

نکته

- $[0, a]$ تعریف نمی‌شود.
- علامت و ترتیب قرار گرفتن a و b در مقدار ک.م.م. تأثیری ندارد، یعنی
 $[a, b] = [b, a] = [-a, -b] = [-a, b] = [a, -b] = [-b, -a]$

مثال

توجه کنید که علامت و ترتیب قرار گرفتن دو عدد ۸ و ۱۲ اثری در مقدار ک.م.م. این دو عدد ندارد. $[8, 12] = [12, 8] = [8, -12] = [-8, -12] = \dots = 24$

مسئله ۱۳

کار در کلاس صفحه (۱۳) کتاب درسی

با توجه به تعریف ک.م.م. ثابت کنید $a|b \Rightarrow [a, b] = |b|$.
راه‌حل اولاً باید ثابت کنیم a و b ، هر دو $|b|$ را می‌شمارند؛ یعنی $a||b|$ و $b||b|$ و **ثانیاً** باید ثابت کنیم $|b|$ از بقیه مضارب مثبت a و b ، کوچک‌تر یا مساوی است، یعنی: $\forall m > 0, a|m, b|m \Rightarrow |b| \leq m$
اولاً: هر عدد خودش را عاد می‌کند و طبق فرض داریم $a|b$ ، از طرف دیگر می‌دانیم اگر $a|b$ آن‌گاه $a||b|$ ، پس داریم:
 $b|b \Rightarrow b||b|$ ، فرض $a|b \Rightarrow a||b|$
ثانیاً: فرض می‌کنیم m یک مضرب مشترک مثبت a و b باشد، در این صورت $a|m$ و $b|m$. همچنین می‌دانیم اگر $b|m$ ، آن‌گاه $|b|$ از $|m|$ کوچک‌تر یا مساوی با آن است ($m \neq 0$).
 پس اولاً $|b|$ مضرب a و b است یعنی $a||b|$ و $b||b|$ و **ثانیاً** از هر مضرب مثبت دیگری از a و b ، کوچک‌تر یا مساوی است، یعنی $|b| \leq m$.
 نتیجه می‌گیریم اگر $a|b$ ، آن‌گاه ک.م.م. a و b برابر $|b|$ است.

نکته

اگر a و b عدد صحیح و $k \neq 0$ ، آن‌گاه:
 $[ka, kb] = k[a, b], (ka, kb) = k(a, b)$

مثال

الف) $(-12, 8) = 4(-3, 2) = 4 \times 1 = 4$ ب) $[-12, 8] = 4[-3, 2] = 4 \times 6 = 24$

نکته

توجه کنید که $a, b = |ab|$. در حالت خاص اگر a و b نسبت به هم اول باشند $((a, b) = 1)$ ، آن‌گاه $[a, b] = |ab|$.

مثال

دو عدد $a = 2$ و $b = 3$ نسبت به هم اول‌اند و $[2, 3] = 2 \times 3 = 6$.
 برای دو عدد $a = 6$ و $b = 15$ داریم $(a, b) = (6, 15) = (2 \times 3, 3 \times 5) = 3$ ، در نتیجه $[a, b] = \frac{6 \times 15}{3} = \frac{6 \times 15}{(6, 15)} = 30$.

● **یادآوری:** برای محاسبه ب.م.م. دو عدد صحیح a و b ، قدر مطلق آن‌ها را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم و ب.م.م. برابر می‌شود با حاصل ضرب عوامل مشترک با توان کمتر.

مثال

$$(24, 36) = ? \Rightarrow \begin{cases} 24 = 2^3 \times 3 \\ 36 = 2^2 \times 3^2 \end{cases} \Rightarrow (24, 36) = 2^2 \times 3^1 = 12$$

● یادآوری: برای محاسبه ک.م.م. دو عدد صحیح a و b ، قدر مطلق آن‌ها را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم. در این صورت ک.م.م برابر می‌شود با حاصل ضرب عوامل غیرمشترک در عوامل مشترک با توان بیشتر.

مثال

$$[-120, 36] = ? \Rightarrow \begin{cases} 120 = 2^3 \times 3 \times 5 \\ 36 = 2^2 \times 3^2 \end{cases} \Rightarrow [-120, 36] = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$$

مسئله ۱۴

دی ۹۸

فرض کنید a عددی طبیعی باشد، حاصل $[21a^2, 35a^3]$ را به دست آورید.

راه حل

ابتدا توجه کنید که اکنون دو حالت در نظر می‌گیریم. توجه کنید که اگر $a|b$ ، آن‌گاه $[a, b] = |b|$:

$$3|a \Rightarrow 3|5a \xrightarrow{a>0} [3, 5a] = 5a \xrightarrow{(1)} [21a^2, 35a^3] = 21a^2 \times 5a = 105a^3$$

$$3 \nmid a \Rightarrow (3, 5a) = 1 \xrightarrow{a>0} [3, 5a] = 3 \times 5a = 15a \xrightarrow{(1)} [21a^2, 35a^3] = 21a^2 \times 15a = 315a^3$$

توجه کنید که در حالتی که $a \nmid 3$ و $5a \nmid 3$ ، عامل مشترک بزرگ‌تر از ۱ ندارند. پس $(3, 5a) = 1$. همچنین می‌دانیم اگر $(a, b) = 1$ ، آن‌گاه $[a, b] = |ab|$.

مسئله ۱۵

دی ۹۹

اگر a عددی طبیعی باشد، حاصل $(5a+4, 2a+3)$ را به دست آورید.

راه حل

فرض می‌کنیم حاصل این ب.م.م برابر d باشد:

$$(5a+4, 2a+3) = d \Rightarrow \begin{cases} d|5a+4 \\ d|2a+3 \end{cases} \xrightarrow[\text{عاد کردن}]{\text{ویژگی (۱) رابطه}} \begin{cases} d|2(5a+4) \\ d|5(2a+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|10a+8 \\ d|10a+15 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{را از هم کم می‌کنیم (ویژگی ۳)}]{\text{سمت راست دو رابطه}} d|10a+15-10a-8 \Rightarrow d|7 \Rightarrow d=1 \text{ یا } d=7$$

مسئله ۱۶

m و n اعدادی صحیح و غیرصفر هستند. حاصل (n^2m^3, n^3m^4) را به دست آورید.

راه حل

می‌دانیم اگر $a|b$ آن‌گاه $(a, b) = |a|$ ، پس $n^2m^3|n^3m^4 \Rightarrow (n^2m^3, n^3m^4) = |n^2m^3|$

قضیه تقسیم و کاربردها

● یادآوری: در سال‌های گذشته با عملیات تقسیم آشنا شده‌اید، مثلاً

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 72} \\ \underline{5} \\ 22 \\ \underline{20} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array} \Rightarrow 72 = 5 \times 14 + 2$$

باقی‌مانده = ۲، خارج قسمت = ۱۴، مقسوم‌علیه = ۵، مقسوم = ۷۲.

باقی‌مانده باید کوچک‌تر از مقسوم‌علیه و بزرگ‌تر از یا مساوی صفر باشد.

همچنین می‌گویند برای امتحان کردن عملیات تقسیم، خارج قسمت را در مقسوم‌علیه ضرب کرده، حاصل را با باقی‌مانده جمع کنید، اگر عدد به دست آمده برابر مقسوم شد، عملیات درست انجام شده است. در مثال قبل این کار را انجام می‌دهیم.

$$\begin{array}{r} a \overline{) b} \\ \vdots \\ q \\ r \end{array}$$

همین عملیات را پارامتری می‌نویسیم:

a را مقسوم، b را مقسوم‌علیه، q را خارج قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم و امتحان عملیات، بررسی تساوی $a = bq + r$ است و باید $0 \leq r < a$.

قضیه تقسیم

قضیه

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، در این صورت، اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می‌شوند به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.

مثال

- در تقسیم ۲۷ بر ۴ داریم: $27 = 4 \times 6 + 3$
- در تقسیم ۱۸ بر ۷ داریم (دقت کنید که باقی‌مانده باید بزرگ‌تر از یا مساوی صفر باشد) $18 = 7 \times (-3) + 3$ ، یعنی خارج قسمت برابر ۳- و باقی‌مانده برابر ۳ است.
- توجه کنید که چون $18 = 7 \times 2 + 4$ داریم $18 = 7 \times (-2) - 4$ و چون باقی‌مانده نباید منفی باشد، می‌نویسیم: $18 = 7 \times (-2) - 7 + 7 - 4$ که به صورت $18 = 7 \times (-3) + 3$ قابل نوشتن است.

نکته

در قضیه تقسیم که $a = bq + r$ ، می‌توان گفت $q = \left[\frac{a}{b} \right]$ ([] نماد جزء صحیح است).

مثال

در مثال قبل که ۱۸- را بر ۷ تقسیم کردیم، $a = -18$ و $b = 7$ ، بنابراین $q = \left[\frac{-18}{7} \right] = -3$ و $18 = 7(-3) + 3$ که باقی‌مانده برابر ۳ است.

مسئله ۱۷

اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب برابر ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $2m - 5n$ بر ۱۷ را به دست آورید. دی ۹۹ و شهریور ۹۹

راه‌حل

قضیه تقسیم را برای تقسیم m و n بر ۱۷ می‌نویسیم:

$$\begin{cases} m = 17q_1 + 5 \\ n = 17q_2 + 3 \end{cases} \xrightarrow[\text{از هم کم می‌کنیم}]{\text{دو طرف تساوی‌ها را}} \begin{cases} 2m = 2 \times 17q_1 + 10 \\ 5n = 5 \times 17q_2 + 15 \end{cases}$$

$$2m - 5n = 2 \times 17q_1 + 10 - 5 \times 17q_2 - 15 \Rightarrow 2m - 5n = 17(2q_1 - 5q_2) - 5 \xrightarrow{2q_1 - 5q_2 = q_3} (2m - 5n) = 17q_3 - 5$$

ولی اینجا نمی‌توانیم بگوییم باقی‌مانده ۵- است، چون باقی‌مانده باید نامنفی باشد. برای آنکه باقی‌مانده نامنفی شود به این ترتیب عمل می‌کنیم:

q_3 عددی صحیح است و می‌توان آن را به صورت مجموع عددی دیگر به علاوه ۱ نوشت؛ یعنی $q_3 = q + 1$ (این کار برای هر عدد صحیح درست است، مثلاً $15 = 14 + 1$ یا $-2 = -3 + 1$). پس

$$(2m - 5n) = 17q + 17 - 5 \Rightarrow (2m - 5n) = 17q + 12$$

بنابراین باقی‌مانده برابر ۱۲ است. توجه کنید باقی‌مانده باید از مقسوم‌علیه کمتر باشد: $12 < 17$.

افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم

طبق قضیه تقسیم، در تقسیم هر عدد صحیح دلخواه، مانند a بر ۲ داریم $a = 2q + r$ که $0 \leq r < 2$ پس $r = 0$ یا $r = 1$ ؛ بنابراین هر عدد صحیح دلخواه را می‌توان به یکی از دو صورت $a = 2q$ یا $a = 2q + 1$ نوشت. یعنی تمام اعداد صحیح به دو مجموعه تقسیم شدند که این دو مجموعه، هیچ کدام تهی نیستند و همچنین هیچ اشتراکی ندارند. همان‌طور که می‌دانید به این تقسیم‌بندی یک مجموعه، افراز می‌گویند. به عبارت دیگر مجموعه اعداد صحیح، به دو مجموعه افراز شده است.

$A_0 = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$: اعداد زوج به صورت $2q$

$A_1 = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$: اعداد فرد به صورت $2q + 1$

و واضح است که $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ و $\mathbb{Z} = A_0 \cup A_1$.

به همین ترتیب در تقسیم هر عدد صحیح دلخواه بر ۳، باقی‌مانده برابر ۰ یا ۱ یا ۲ است. پس می‌توان گفت هر عدد صحیح دلخواه به یکی از صورت‌های $3q$ یا $3q + 1$ یا $3q + 2$ است. پس این بار مجموعه اعداد صحیح به سه مجموعه افراز می‌شود:

$A_0 = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$: اعداد به صورت $3q$

$A_1 = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$: اعداد به صورت $3q + 1$

$A_2 = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$: اعداد به صورت $3q + 2$

که هیچ دوتایی از آن‌ها اشتراک ندارند و $\mathbb{Z} = A_0 \cup A_1 \cup A_2$.

در حالت کلی در تقسیم بر m ، مجموعه اعداد صحیح به m مجموعه افراز می‌شود (مجموعه اعداد به صورت‌های mq ، $mq + 1$ ، $mq + 2$ ، ... و $(mq + (m - 1))$ که هیچ دوتایی از آن‌ها اشتراک ندارند و اجتماع آن‌ها برابر مجموعه اعداد صحیح است).

گاهی برای معرفی این مجموعه‌ها، از هر کدام یک نماینده (معمولاً باقی‌مانده) را انتخاب می‌کنیم و آن را به صورت $[r]_m$ می‌نویسیم که در اینجا r یکی

از باقی‌مانده‌های تقسیم بر m است؛ پس می‌توان گفت در تقسیم بر m :

$$\mathbb{Z} = [0]_m \cup [1]_m \cup \dots \cup [m-1]_m$$

مسئله ۱۸

ثابت کنید اگر p عددی اول باشد و $p > 3$ ، آنگاه این عدد اول، به یکی از صورت‌های $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ نوشته می‌شود. شهریور ۹۹

راه‌حل

از صورت سؤال حدس می‌زنیم که بهتر است عدد صحیح دلخواه a را بر ۶ تقسیم کنیم و می‌دانیم در تقسیم بر ۶ اعداد صحیح به یکی از فرم‌های $6k$ ، $6k+1$ ، $6k+2$ ، $6k+3$ ، $6k+4$ و $6k+5$ نوشته می‌شود. این ۶ دسته را، از نظر اول بودن یا غیراول بودن بررسی می‌کنیم:

$6k$: عددی غیراول است، زیرا $6k = 2 \times 3k$ و غیر از ۱ و خودش بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر است.

$6k+1$: می‌تواند اول باشد، مثلاً به‌ازای $k=1$ برابر ۷ است که عددی اول است.

$6k+2$: به‌ازای $k \neq 0$ غیراول است، چون $6k+2 = 2(3k+1)$ که حاصل ضرب دو عدد نامساوی ۱ است. توجه کنید که اگر $k=0$ ، آنگاه $6k+2=2$ ، که اول است، ولی در صورت سؤال گفته شده است $p > 3$.

$6k+3$: به‌ازای $k \neq 0$ غیراول است، چون $6k+3 = 3(2k+1)$ که حاصل ضرب دو عدد نامساوی ۱ است. توجه کنید که اگر $k=0$ ، $6k+3=3$ ، که اول است، ولی در صورت سؤال گفته شده است $p > 3$.

$6k+4$: عددی غیراول است، زیرا $6k+4 = 2(3k+2)$ ، که حاصل ضرب دو عدد نامساوی ۱ است.

$6k+5$: می‌تواند اول باشد، مثلاً به‌ازای $k=0$ ، برابر ۵ است که عددی اول است.

بنابراین تنها دو فرم $6k+1$ یا $6k+5$ می‌توانند اعداد اول بزرگتر از ۳ را معرفی کنند.

نکته

هر عدد اول بزرگتر از ۳ به یکی از فرم‌های $6k+1$ یا $6k+5$ است. اما هر عدد به فرم $6k+1$ یا $6k+5$ لزوماً اول نیست.

مثال

- اعداد اول ۱۹ و ۱۱ را به یکی از فرم‌های $6k+1$ و $6k+5$ می‌نویسیم:
- دو عدد ۴۹ و ۳۵ به یکی از فرم‌های $6k+1$ و $6k+5$ نوشته می‌شوند ولی اول نیستند.

مسئله ۱۹

ابتدا ثابت کنید که هر عدد صحیح و فرد، مانند a ، به یکی از دو صورت $4k+1$ یا $4k+3$ نوشته می‌شود. سپس نشان دهید که مربع هر عدد فرد به شکل $4t+1$ نوشته می‌شود (باقی‌مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸ مساوی ۱ است).

راه‌حل

هر عدد صحیح دلخواه در تقسیم بر ۴ به یکی از فرم‌های $4k$ یا $4k+1$ یا $4k+2$ یا $4k+3$ است. هر کدام را از نظر زوج یا فرد بودن بررسی می‌کنیم:

عدد فرد $4k+1 = 2(2k) + 1 = 2q + 1$ ، عدد زوج $4k = 2(2k) = 2q$

عدد فرد $4k+3 = 2(2k+1) + 1 = 2q + 1$ ، عدد زوج $4k+2 = 2(2k+1) = 2q$

یعنی در بین همه اعداد صحیح، فقط اعداد به فرم $4k+1$ یا $4k+3$ عددهایی فرد هستند. حالا مربع این عددها را بررسی می‌کنیم:

$$(4k+1)^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8(2k^2 + k) + 1 = 8t + 1$$

$$(4k+3)^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8(2k^2 + 3k + 1) + 1 = 8t + 1$$

پس مربع هر عدد فرد به شکل $8t+1$ است.

مسئله ۲۰

اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b | a+2$ در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $a^2 + b^2 + 3$ را بر ۱۶ بیابید.

راه‌حل

$$a \Rightarrow a = 2k+1 \Rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1 = 8t_1 + 1$$

$$b | a+2 \Rightarrow a+2 = bq \xrightarrow[a=2k+1]{a \text{ عددی فرد است.}} 2k+1+2 = bq$$

$$2(k+1) + 1 = bq \Rightarrow 2n + 1 = bq \Rightarrow bq \text{ عددی فرد است.} \Rightarrow b \text{ نمی‌تواند زوج باشد.}$$

چون b عددی فرد است، $b^2 = 8t_2 + 1$ ، پس

$$a^2 + b^2 + 3 = 8t_1 + 1 + 8t_2 + 1 + 3 = 8(t_1 + t_2) + 5 = 8t + 5 \Rightarrow \begin{cases} t = 2q \Rightarrow a^2 + b^2 + 3 = 16q + 5 \\ t = 2q + 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + 3 = 16q + 13 \end{cases}$$

در نتیجه باقی‌مانده برابر ۵ یا ۱۳ است.

• جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

۶۵- در تقسیم عدد $۱۲۷-۱۵$ بر ۱۵ ، باقی‌مانده برابر و خارج قسمت برابر است.

۶۶- باقی‌مانده تقسیم مربع هر عدد فرد، بر ۸ برابر است.

۶۷- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد n و $n+۱$ برابر است.

۶۸- اگر $a|b+c$ و $a|b-c$ ، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت $(a|2b, a|b)$

۶۹- حاصل ضرب ۳ عدد صحیح متوالی همواره بر بخش‌پذیر است.

۷۰- اگر $a|۱$ آن‌گاه، a برابر یا است.

۷۱- a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a|b$ ، آن‌گاه عدد شمارنده عدد است.

۷۲- اگر $a|a$ آن‌گاه a برابر است.

۷۳- اگر a عددی طبیعی، $a|p$ و p عدد اول باشد، در این صورت a برابر یا است.

۷۴- اگر $a|b$ و $|a|>|b|$ ، آن‌گاه است.

۷۵- اگر p عددی اول و a و b دو عدد صحیح باشند به‌طوری‌که $p|ab$ ، آن‌گاه یا است.

۷۶- اگر برای دو عدد صحیح a و b داشته باشیم $a|b$ برای هر $m \in \mathbb{Z}$ داریم $(a|mb, ma|b)$

۷۷- هر دو عدد اول متمایز، نسبت به هم هستند.

۷۸- اگر دو عدد صحیح بر ۳۰۰ م.م. خودشان تقسیم شوند آن‌گاه دو عدد به‌دست آمده هستند.

۷۹- اگر $(a, b)=۱$ ، آن‌گاه (a^5, b^5) برابر است.

۸۰- اگر $a|bc$ و $(a, b)=۱$ ، آن‌گاه $(c|a, a|c, a|b)$

۸۱- حاصل $[۶۹, ۴۶]$ برابر است.

۸۲- اگر a, b و c اعداد طبیعی باشند که $a|b$ و $b|c$. در این صورت حاصل عبارت $([a, b], [a, c])$ برابر است.

۸۳- اگر k عددی صحیح باشد، باقی‌مانده تقسیم $۱۹k-۳۰۰$ بر ۱۹ برابر است.

۸۴- فرض کنید k عددی طبیعی باشد، حاصل $(m^{2k}, m^{2k+1}), m^{2k+3}$ برابر با است.

۸۵- m عددی صحیح است. حاصل $(2m, 6m^3)$ برابر با است.

۸۶- $[a, b]=c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند.

۱) $a|c, b|c$ ۲) $\forall m > 0, \dots\dots\dots$

۸۷- اگر $a|b$ آن‌گاه ب.م.م. دو عدد a و b برابر است. $(|a|, a)$

۸۸- ک.م.م. دو عدد ۷۲۰ و ۵۰۴ برابر است.

۸۹- اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$. $a \nmid p$ $(p, a)=\dots\dots\dots$

۹۰- اگر a و b دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک باشند، $۲۷|b$ و $۹a|b$ آن‌گاه $a= \dots\dots\dots$ است.

• در سؤال‌های ۹۱ تا ۱۱۹ درستی یا نادرستی هر گزاره را مشخص کنید.

۹۱- اگر $(a, b)=d$ ، آن‌گاه $(a^n, b^n)=d$.

۹۲- اگر $(a, b)=۱$ ، $c|a$ و $d|b$ آن‌گاه $(c, d)=۱$.

خرداد ۱۴۰۰

دی ۱۴۰۰

دی ۱۴۰۲

دی ۱۴۰۲

خرداد ۱۴۰۰

شهریور ۹۸

خرداد ۱۴۰۳

دی ۱۴۰۳

۹۳- اگر عددی نسبت به دو عدد صحیح اول باشد، آن گاه نسبت به ضرب آنها نیز اول است و برعکس.

۹۴- اگر $[a, b] = c$ و $n \in \mathbb{N}$ ، آن گاه $[a^n, b^n] = c^n$.

شهریور ۱۴۰۲

۹۵- اگر داشته باشیم $(a, b) = 1$ ، آن گاه می‌گوییم a و b نسبت به هم اول‌اند.

شهریور ۱۴۰۰

۹۶- اگر $a | b$ ، آن گاه $(a, b) = a$.

دی ۹۸ و ۹۹

۹۷- برای دو عدد طبیعی a و b ، اگر $a | b$ آن گاه $[a, b] = |b|$.

۹۸- برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b و عدد طبیعی c اگر $(a | c, b | c)$ و $(\forall m > 0, a | m, b | m \Rightarrow c | m)$ آن گاه $[a, b] = c$.

خرداد ۱۴۰۱

۹۹- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۴ و ۲- برابر ۲- است.

خرداد ۱۴۰۱

۱۰۰- تفاضل هر دو عدد دلخواه از مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Z} | x = 4k + 3\}$ مضرب ۴ است.

خرداد ۱۴۰۳

۱۰۱- حاصل $(30, [-12, -18])$ برابر ۶- است.

شهریور ۱۴۰۳

۱۰۲- اگر $m \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}$ آن گاه $[m^4, (m^3, m^5)] = m^4$.

۱۰۳- فرض می‌کنیم $ab = cd$ ، a, b, c, d اعداد صحیح و ناصفرند. در این صورت پنج رابطه عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

تمرین کتاب درسی

۱۰۴- ثابت کنید اگر $a | b$ آن گاه $a | -b$ ، $a | -a$ و $-a | -b$.

تمرین کتاب درسی

۱۰۵- آیا از اینکه $a | b$ و $c | d$ همواره می‌توان نتیجه گرفت $a + c | b + d$ ؟

تمرین کتاب درسی

۱۰۶- اگر $m, n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید: $a^m | b^n \Rightarrow a | b$ و $m \leq n$.

تمرین کتاب درسی - شهریور ۱۴۰۰

۱۰۷- اگر $a | 95$ آن گاه $a | 19$.

۱۰۸- اگر $a | 23$ آن گاه $a | 161$.

۱۰۹- اگر $a | 36$ آن گاه $a | 18$ یا $a | 16$.

۱۱۰- اگر $a, b \in \mathbb{Z}$ و $a | 4$ و $a | 6$ آن گاه $ab | 36$.

۱۱۱- اگر $a, b \in \mathbb{Z}$ و $a | 4$ و $a | 6$ آن گاه $10 | a + b$.

۱۱۲- اگر $a, b \neq 0$ دو عدد صحیح باشند، آن گاه $a | a - b \Rightarrow a | a + b$.

دی ۱۴۰۱ و شهریور ۱۴۰۲

۱۱۳- برای اعداد صحیح a, b و $c \neq 0$ که $a \neq 0$ اگر $a | b + c$ آن گاه $a | b$ یا $a | c$.

خرداد ۱۴۰۱

۱۱۴- اگر $a | b$ و $b \neq 0$ ، در این صورت $|a| > |b|$.

۱۱۵- اگر $a | 12$ و $a | 36$ ، آن گاه برای a چهار مقدار صحیح وجود دارد.

۱۱۶- اگر $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ و c عدد صحیح باشند و $a^3 | b$ و $a^3 | c^2$ آن گاه $2b | c^2$.

۱۱۷- اگر $a^3 | b^4$ ، آن گاه $a^2 | b^5$.

۱۱۸- اگر a عددی صحیح و فرد و b عددی صحیح باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $3 + a^2 + b^2$ بر ۸ برابر است با ۵.

۱۱۹- اگر $a^2 | b^4$ آن گاه $a | b$.

• در سؤال‌های ۱۲۰ تا ۱۲۵ گزینه صحیح را مشخص کنید.

۱۲۰- کدام عبارت همواره درست نیست؟ $(a, b, n \in \mathbb{Z})$

الف) $3 | 6a + 15b$ ب) $2 | a(a+1) + 4$ ج) $3 | a(a+1)(a+2) + 6$ د) $3 | 27n + 5$

۱۲۱- به ازای چند مقدار a ، تساوی $a = (3a, 49)$ برقرار است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

۱۲۲- فرض کنید n عددی صحیح باشد، حاصل $(\Delta n + 9, 30)$ کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

- الف) ۲ (ب) ۶ (ج) ۵ (د) ۱

۱۲۳- فرض کنید p عددی اول باشد، حاصل $(\Delta p + 7, p)$ برابر کدام مورد می‌تواند باشد؟

- الف) ۵ (ب) ۷ (ج) ۱۱ (د) ۳

۱۲۴- فرض کنید a عددی طبیعی باشد، حاصل $[\Delta a, 36]$ برابر کدام عدد می‌تواند باشد؟

- الف) ۱۰۸ (ب) ۱۸۰ (ج) ۱۴۴ (د) ۱۹۲

۱۲۵- فرض کنید m و n عددهایی طبیعی باشند و $[nm, n^2] = nm^2$ ، کدام گزینه همواره درست است؟

- الف) $n \mid 5$ (ب) $5 \mid m$ (ج) $n \mid m^2$ (د) $m \mid n^2$

۱۲۶- اگر عدد طبیعی $a > 1$ ، در دو شرط $a \mid 4k + 9$ و $a \mid 6k + 14$ صدق کند مقدار a را بیابید.

دی ۹۸

۱۲۷- فرض کنید a و n دو عدد طبیعی باشند، به‌طوری که $a \mid 3n + 4$ و $a \mid 2n + 3$ نشان دهید $a = 1$.

شهریور ۹۹

۱۲۸- اگر عدد طبیعی a ، دو عدد $8k + 13$ و $5k + 9$ را عاد کند ثابت کنید $a = 1$ یا $a = 7$.

شهریور ۱۴۰۱

۱۲۹- اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $5m + 4$ و $6m + 5$ بر a بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید $a = \pm 1$.

خرداد ۱۴۰۲

۱۳۰- اگر $a \mid m + 7$ و $a \mid 2m + 3$ ، در این صورت چند مقدار صحیح و نامنفی برای a وجود دارد.

خرداد ۱۴۰۳

۱۳۱- اگر a عددی طبیعی باشد و $a \mid 7k + 1$ و $a \mid 4k + 3$ ، ثابت کنید $a = 1$ یا $a = 17$.

۱۳۲- فرض کنید a و m عددهای صحیح باشند و $a \mid 5m + 7$ و $a \mid 3m - 1$ ، ثابت کنید $a \mid 26$.

۱۳۳- اگر $a \mid 4n^3 + 6$ و $a \mid 2n + 1$ ، آن‌گاه a را به‌دست آورید.

۱۳۴- برای چند عدد طبیعی n ، رابطه $2n^2 - 3n + 3 \mid 2n + 1$ برقرار است.

۱۳۵- اعداد طبیعی را که در رابطه $n^4 - 2n^3 + n - 9 \mid n^2 - 2$ صدق می‌کنند به‌دست آورید.

تمرین کتاب درسی - خرداد ۱۴۰۱

۱۳۶- اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به‌طوری که $5 \mid 4k + 1$ ثابت کنید $25 \mid 16k^2 + 28k + 6$.

شهریور ۱۴۰۲

۱۳۷- اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد، به‌طوری که $7 \mid 2k + 1$ ثابت کنید $49 \mid 4k^2 - 10k - 6$.

۱۳۸- اگر $7 \mid 6k + 1$ ، ثابت کنید $49 \mid 36k^2 + 54k + 8$.

۱۳۹- به‌ازای بعضی از مقادیر $n \in \mathbb{N}$ و α ، اگر $\alpha \mid 13n + 3$ و $\alpha \mid 7n + 4$ ، $\alpha \neq 1$ ، آن‌گاه مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد n ، چند است؟

۱۴۰- چند نقطه با مختصات صحیح روی تابع $y = \frac{x+3}{2x-1}$ قرار دارد؟

۱۴۱- نقاط (a, b) روی منحنی $y = \frac{3x-1}{x+2}$ قرار دارند، اگر $a, b \in \mathbb{Z}$ ، چند نقطه با این ویژگی روی منحنی قرار دارد.

۱۴۲- تمام n های طبیعی را بیابید که به‌ازای آنها حاصل کسر $\frac{2n^2 + 3n + 7}{n-3}$ عددی صحیح باشد.

۱۴۳- روی منحنی $xy - y - 2x - 1 = 0$ چند نقطه با مختصات صحیح وجود دارد.

تمرین کتاب درسی

۱۴۴- ثابت کنید

الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند. (راهنمایی: فرض کنید $(m, m+1) = d$ و ثابت کنید $d \mid 1$ و نتیجه بگیرید $d = 1$).

ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.

تمرین کتاب درسی

۱۴۵- اگر $p \neq q$ ، p و q هر دو اول باشند، ثابت کنید $(p, q) = 1$.

۱۴۶- ب.م.م. دو عدد $12n + 7$ و $5n - 2$ را بیابید.

۱۴۷- اگر $d = (a - 5, a^2 - 6a + 3)$ و $a \in \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه d را محاسبه کنید.

فصل اول درس دوم

پاسخ تمرین‌های تشریحی

۶۵. ۸، ۹- . توجه کنید که

$$-127 = -15 \times 8 - 7 \Rightarrow -127 = 15(-8) - 7$$

$$-127 = 15(-8) - 15 + 15 - 7 \Rightarrow -127 = 15(-9) + 8$$

بنابراین باقی‌مانده برابر ۸ و خارج قسمت برابر ۹- است.

۶۶. ۱. مربع هر عدد فرد را می‌توان به صورت $8k+1$ نوشت. پس باقی‌مانده

این تقسیم برابر ۱ است.

۶۷. ۱. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد متوالی برابر یک است. پس

$$(n, n+1) = 1$$

۶۸. $a \mid 2b$. می‌توان نوشت:

$$a \mid b+c, a \mid b-c \Rightarrow a \mid (b+c) + (b-c) \Rightarrow a \mid 2b$$

۶۹. $3! = 6$. حاصل ضرب دو عدد متوالی بر ۲ بخش‌پذیر است، پس

حاصل ضرب سه عدد متوالی هم بر ۲ بخش‌پذیر است. از طرف دیگر از بین سه عدد متوالی حتماً یکی به صورت $3k$ نوشته می‌شود. پس حاصل ضرب سه عدد متوالی هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش‌پذیر است.

۷۰. $+1, -1$. اگر $a \mid 1$ آن‌گاه a برابر $+1$ یا -1 است.

۷۱. a, b . اگر $a \mid b$ آن‌گاه عدد a شمارنده عدد b است.

۷۲. صفر. اینکه صفر عدد صفر را می‌شمارد به عنوان یک قرارداد پذیرفته می‌شود.

۷۳. ۱. $a \mid p$. p که عددی اول است، پس a برابر است با p یا ۱.

۷۴. $b=0$. اگر $a \mid b$ و $a \mid |b|$ آن‌گاه $b=0$.

۷۵. $p \mid a, p \mid b$. اگر $p \mid ab$ (عدد اول باشد) آن‌گاه $p \mid a$ یا $p \mid b$.

۷۶. $a \mid mb$. اگر برای دو عدد صحیح a و b داشته باشیم $a \mid b$ برای هر

$$m \in \mathbb{Z} \text{ داریم } a \mid mb$$

۷۷. اول. هر دو عدد اول متمایز نسبت به هم اول هستند.

۷۸. نسبت به هم اول. توجه کنید که

$$(a, b) = d \Rightarrow \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$$

۷۹. ۱. توجه کنید که $(a^m, b^n) = 1 \xrightarrow{\forall m, n \in \mathbb{N}} (a, b) = 1$

$$(a, b) = 1 \Rightarrow (a^5, b^5) = 1$$

۸۰. $a \mid c$. اگر عددی حاصل ضرب دو عدد صحیح را بشمارد و نسبت به

یکی از آن‌ها اول باشد، آن‌گاه دیگری را می‌شمارد.

$$a \mid bc \xrightarrow{(a, b) = 1} a \mid c$$

۸۱. ۱۳۸. برای به‌دست آوردن ک.م.م. دو عدد ابتدا آن دو عدد را تجزیه، سپس

حاصل ضرب پایه‌های غیرمشترک و پایه‌های مشترک با توان بیشتر را می‌نویسیم.

$$[69, 46] = [2^3 \times 3, 2^2 \times 23] = 2^3 \times 3 \times 23 = 138$$

۸۲. b . توجه کنید که چون a, b و c اعداد طبیعی هستند، داریم

$$\left. \begin{aligned} a \mid b &\Rightarrow [a, b] = b \\ a \mid b, b \mid c &\Rightarrow a \mid c \Rightarrow [a, c] = c \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$([a, b], [a, c]) = (b, c) \xrightarrow{bc} (b, c) = b$$

$$x^2 + y^2 \geq x^2 y + xy^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x^2 y - xy^2 \geq 0 \quad [61]$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-y) + y^2(y-x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-y) - y^2(x-y) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 - y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x-y)(x^2 + xy + y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2(x^2 + xy + y^2) \geq 0$$

چون $x, y \geq 0$ ، پس رابطه فوق همواره درست است. در نتیجه تمام گزاره‌های قبل از آن هم همواره درست هستند، پس حکم مسئله اثبات می‌شود.

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3}{a^2 b^2} \geq \frac{a+b}{ab} \quad [62]$$

$$\xleftarrow{a, b > 0} a^3 + b^3 \geq ab(a+b) \Leftrightarrow a^3 + b^3 - a^2 b - ab^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2(a-b) + b^2(b-a) \geq 0 \Leftrightarrow a^2(a-b) - b^2(a-b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 - b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)(a-b)(a+b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \geq 0$$

$a, b \in \mathbb{R}^+$ ، بنابراین رابطه آخر همواره درست است. و چون رابطه‌ها برگشت‌پذیر هستند، حکم مسئله نیز درست است.

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} \sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad [63]$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 4\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b + 2\sqrt{ab} \geq 4\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

گزاره همواره درست. و چون رابطه‌ها برگشت‌پذیر هستند، حکم مسئله نیز درست است.

$$x^3 \geq y^3 + xy(y-x) \Leftrightarrow x^3 - y^3 - xy(y-x) \geq 0 \quad [64] \text{ الف}$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2 + xy) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + 2xy + y^2) \geq 0$$

$$\xleftarrow{x-y \geq 0} (x^2 + 2xy + y^2) \geq 0 \Rightarrow (x+y)^2 \geq 0$$

توجه کنید که چون حکم مسئله با یک گزاره همواره درست، هم‌ارز است، خودش هم درست است.

$$|a| - |b| \leq |a - b| \xleftarrow{\text{به توان ۲}} (|a| - |b|)^2 \leq (|a - b|)^2 \quad \text{ب)}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2|ab| \leq a^2 + b^2 - 2ab$$

$$\Leftrightarrow 2ab \leq 2|ab| \Leftrightarrow ab \leq |ab|$$

گزاره همواره درست است. پس خودش هم همواره درست است.

$$(x-y)(z-t)(x+y)(z+t) \leq (xz-yt)^2 \quad \text{پ)}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2)(z^2 - t^2) \leq (xz - yt)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 z^2 - x^2 t^2 - y^2 z^2 + y^2 t^2 \leq x^2 z^2 + y^2 t^2 - 2xyzt$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 t^2 + y^2 z^2 - 2xyzt \Leftrightarrow (xt - yz)^2 \geq 0$$

گزاره آخر همواره درست است، پس تمام گزاره‌های قبل از آن هم همواره درست هستند.

$$\frac{1}{a^f} + \frac{1}{b^f} \geq \frac{4}{a^f + b^f} \Leftrightarrow \frac{a^f + b^f}{a^f b^f} \geq \frac{4}{a^f + b^f} \quad \text{ت)}$$

$$\Leftrightarrow (a^f + b^f)^2 \geq 4a^f b^f \Leftrightarrow a^f + b^f + 2a^f b^f \geq 4a^f b^f$$

$$\Leftrightarrow a^f + b^f - 2a^f b^f \geq 0 \Leftrightarrow (a^f - b^f)^2 \geq 0$$

گزاره آخر همواره درست است، پس تمام گزاره‌های قبل از آن هم درست هستند.

۹۴] درست. فرض کنید $(a, b) = d$ ، در این صورت اگر a و b بر d تقسیم کنیم نسبت به هم اول می‌شوند، داریم:

$$q = \frac{a}{d}, \quad q' = \frac{b}{d} \Rightarrow (q, q') = 1$$

$$[a, b] = [dq, dq'] = d[q, q'] = dq q' \Rightarrow c = dq q'$$

اکنون می‌توان نوشت

$$[a^n, b^n] = [d^n q^n, d^n q'^n] = d^n [q^n, q'^n] = d^n q^n q'^n = c^n$$

۹۵] درست.

۹۶] نادرست. زیرا $a|b$ آن‌گاه $(a, b) = |a|$.

۹۷] درست. $a|b \Rightarrow [a, b] = |b|$

۹۸] درست. بنابر تعریف ک.م.م. درست است.

۹۹] نادرست. زیرا بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک همواره مثبت است.

۱۰۰] درست.

$$x_1 = 4k_1 + 3 \Rightarrow x_1 - x_2 = 4(k_1 - k_2) + (3 - 3) = 4k'$$

$$x_2 = 4k_2 + 3$$

یعنی تفاضل هر دو عدد از مجموعه A مضرب ۴ است.

۱۰۱] نادرست. چون $(36, 30) = 6 \Rightarrow (-12, -18) = 36$

۱۰۲] درست.

$$[m^x, (m^y, m^z)] = [m^x, m^z] = m^y$$

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}} [m^y, (m^x, m^z)] = m^y$$

$$ab = cd \Rightarrow a|cd, b|cd, c|ab, d|ab, ab|cd$$

۱۰۳]

۱۰۴] الف

$$a|b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{(-1) \times} -b = -aq \Rightarrow -b = a(-q)$$

$$-b = aq' \Rightarrow a|-b$$

$$a|b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{q = -q'} b = a(-q') \Rightarrow b = -aq' \Rightarrow -a|b$$

ب

$$a|b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{(-1) \times} -b = -aq \Rightarrow -a|-b$$

پ

۱۰۵] خیر. مثلاً فرض کنید $a = 3, b = 6, c = 2, d = 8$. در این صورت

$$c|d, a|b \text{ و } a+c|b+d \text{ توجه کنید که } 3+2|6+8 \text{ (چون } 5|14).$$

۱۰۶]

$$a|b \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} b = aq \xrightarrow{\text{به توان } n} b^n = a^n q^n$$

$$b^n = a^m \cdot a^{n-m} q^n \Rightarrow b^n = a^m (a^{n-m} q^n) \Rightarrow b^n = a^m q'$$

$$\Rightarrow a^m | b^n$$

۱۰۷] درست. زیرا اگر a عددی را بشمارد هر مضربی از آن را می‌شمارد.

$$a|b \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} a|mb, \quad a|19 \Rightarrow a|5 \times 19 \Rightarrow a|95$$

$$: a|b \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} ma|mb \text{ زیرا}$$

۱۰۸]

$$a|23 \xrightarrow{\times 7} 7a|23 \times 7 \Rightarrow 7a|161$$

۱۰۹] نادرست. به عنوان مثال نقض فرض کنید $a = 12$ ، در این صورت

$$12|36 \text{ ولی } 12|18 \text{ و } 12|16.$$

۸۳] ۴. می‌توان نوشت

$$a = 19k - 30 \Rightarrow a = 19k - (19 \times 15 + 15) = 19(k - 15) - 15 = 19k' - 15$$

$$= 19k' - 15 + 19 - 19 = 19k' - 19 + 4 = 19(k' - 1) + 4 = 19k'' + 4$$

باقی‌مانده برابر ۴ است.

۸۴] $|m^{2k+1}|$. توجه کنید که

$$2k < 2k+1 \Rightarrow m^{2k} | m^{2k+1}$$

$$[m^{2k}, m^{2k+1}] = |m^{2k+1}|$$

از طرف دیگر، چون $2k+1 < 2k+3$ ، داریم:

$$[m^{2k+1}, m^{2k+3}] = |m^{2k+3}|$$

۸۵] $|2m|$. توجه کنید که چون $2m, 6m^3$ را می‌شمارد حاصل عبارت

مورد نظر برابر است با $|2m|$.

۸۶] عبارت به صورت زیر کامل می‌شود:

$$1) a|c, b|c, \quad 2) \forall m > 0, a|m, b|m \Rightarrow c|m$$

۸۷] $|a|$. اگر a, b را عادی آن‌گاه ب.م.م. دو عدد a و b برابر $|a|$ است.

۸۸] ۵۰۴۰. توجه کنید که دو عدد را تجزیه می‌کنیم، سپس حاصل ضرب

پایه‌های غیرمشترک و پایه‌های مشترک با توان بیشتر را می‌نویسیم:

$$[720, 504] = [2^4 \times 3^2 \times 5, 2^3 \times 3^2 \times 7] = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 5040$$

۸۹] ۱.

۹۰] ۳. توجه کنید که

$$\begin{cases} 27 = bq \\ b = 9aq' \end{cases} \Rightarrow 27 = 9aqq' \Rightarrow 3 = aqq' \Rightarrow 3 = ak$$

$$a|3 \xrightarrow{a>1} a=3$$

۹۱] نادرست. مثال نقض:

$$(4, 6) = 2 \Rightarrow (4^2, 6^2) = (16, 36) = 4$$

۹۲] درست. اگر دو عدد صحیح نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه شمارنده‌های

آن‌ها نیز نسبت به هم اول‌اند.

$$(a, b) = 1 \xrightarrow{\frac{c|a}{d|b}} (c, d) = 1$$

می‌توانیم گزاره بالا را با برهان خلف ثابت کنیم. فرض کنید

$$(c, d) = m, m \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} m|c \Rightarrow m|a \\ m|d \Rightarrow m|b \end{cases} \Rightarrow m|a, m|b, m \neq 1$$

که خلاف فرض $(a, b) = 1$ است. زیرا a و b دارای مقسوم‌علیه مشترک مخالف یک (m) نیستند.

۹۳] درست. $(a, b) = 1, (a, c) = 1 \Leftrightarrow (a, bc) = 1$

برای اثبات ابتدا فرض کنید $(a, b) = 1, (a, c) = 1$ و $(a, bc) = d$. پس داریم

$$\begin{cases} d|a \\ d|bc \Rightarrow (d|b \vee d|c) \end{cases} \Rightarrow d|(a, b) \text{ یا } d|(a, c) \Rightarrow d|1$$

در نتیجه $d = 1$. اکنون فرض می‌کنیم $(a, bc) = 1$. از آنجا که اگر

$(a, b) = d$ ، آن‌گاه $a|d$ و $d|b$ پس باید $d|bc$. پس باید $d = 1$ ، به همین

صورت $(a, c) = 1$ نیز ثابت می‌شود.

۱۲۱ گزینۀ (ج) یا ۳. چون ب. م. م. دو عدد ۳a و ۴۹ برابر a شده است،

$$\begin{cases} a|3a \\ a|49 \Rightarrow a=1, 7, 49 \end{cases}$$

پس a مثبت است و

۱۲۲ گزینۀ (ج) یا ۵. فرض کنید $d = (\Delta n + 9, 30) = (\Delta n + 9, 30)$ ، در این صورت

$$d|30, \quad d|\Delta n + 9$$

توجه کنید که $\Delta n + 9$ بر ۵ بخش پذیر نیست چون اگر $\Delta n + 9$ ، چون Δn باید ۵|۹ که تناقض است. البته $(\Delta n + 9, 30)$ برابر هر یک از موارد دیگر می تواند باشد.

گزینۀ (الف) $n=1: (\Delta n + 9, 30) = (14, 30) = 2$

گزینۀ (د) $n=2: (\Delta n + 9, 30) = (19, 30) = 1$

گزینۀ (ب) $n=3: (\Delta n + 9, 30) = (24, 30) = 6$

۱۲۳ گزینۀ (ب) یا ۷. فرض کنید $d = (\Delta p + 7, p)$ ، در این صورت

$$\begin{cases} d|p \Rightarrow d|\Delta p \\ d|\Delta p + 7 \Rightarrow d|\Delta p + 7 - \Delta p \Rightarrow d|7 \Rightarrow d=1 \text{ یا } d=7 \end{cases}$$

۱۲۴ گزینۀ (ب) یا ۱۸۰. می دانیم ک. م. م. دو عدد بر هر دو عدد بخش پذیر است. بنابراین اگر $C = [5a, 36]$ ، آن گاه باید C بر ۳۶ و ۵a بخش پذیر باشد:

$$36|c, \quad 5a|c \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} c = 5aq \Rightarrow 5|c$$

از میان موارد داده شده فقط مورد (ب) یعنی ۱۸۰ هم بر ۳۶ و هم بر ۵ بخش پذیر است.

۱۲۵ گزینۀ (ج) یا $n|m^2$. چون ک. م. م. دو عدد بر آن دو عدد بخش پذیر است.

$$\begin{cases} 5m|nm^2 \xrightarrow{m \neq 0} 5|nm \Rightarrow 5|n \text{ یا } 5|m \\ n^2|nm^2 \xrightarrow{n \neq 0} n|m^2 \end{cases}$$

توجه کنید که $5|m$ یا $5|n$ به معنی این نیست که لزوماً $5|m$.

توجه کنید که $5|m$ یا $5|n$ به معنی این نیست که لزوماً $5|n$.

۱۲۶ روش اول: توجه کنید که

$$\begin{cases} a|6k+14 \xrightarrow{\times 2} a|2(6k+14) \Rightarrow a|12k+28 \\ a|4k+9 \xrightarrow{\times 3} a|3(4k+9) \Rightarrow a|12k+27 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{عاد کردن}]{\text{ویژگی (۳) رابطه}} a|(12k+28) - (12k+27) \Rightarrow a|1$$

اکنون توجه کنید که چون $a > 1$ این رابطه نمی تواند درست باشد (توجه کنید که چون $a|1$ ، پس $a=1$ یا $a=-1$)، بنابراین عددی طبیعی مانند a با ویژگی های مورد نظر وجود ندارد.

روش دوم: در روش اول، $6k+14$ را در ۲ و $4k+9$ را در ۳ ضرب کردیم؛ یعنی هر کدام را در کوچک ترین عددی ضرب کردیم که ضرایب k در $6k+14$ و $4k+9$ مساوی شود. اگر به صورت زیر عمل کنیم به دست می آید:

$$\begin{cases} a|6k+14 \xrightarrow{\times 4} a|24k+56 \\ a|4k+9 \xrightarrow{\times 6} a|24k+54 \end{cases} \Rightarrow a|2 \xrightarrow{a>1} a=2$$

اما توجه کنید که اگر $a=2$ ، چون $a|4k+9$ ، پس:

$$2|4k+9 \xrightarrow{2|4k} 2|9$$

که درست نیست، پس عددی طبیعی مانند a با ویژگی مورد نظر وجود ندارد.

۱۱۰ درست. توجه کنید که دو طرف در رابطه عاد کردن را می توان نظیر به نظیر در یکدیگر ضرب کرد.

$$\begin{cases} a|b \Rightarrow ac|bd, \quad ab|c \Rightarrow (a|c \wedge b|c) \\ c|d \Rightarrow 24|ab \Rightarrow 2 \times 12|ab \Rightarrow (2|ab \wedge 12|ab) \\ 6|a \end{cases}$$

$$12|ab \xrightarrow{\times 3} 36|3ab$$

۱۱۱ نادرست. به عنوان مثال نقض $b=12$ و $a=30$ (توجه کنید که $4|12$ و $30|30$)، ولی $10|30+12$ چون 10 شمارنده ۴۲ نیست.

۱۱۲ نادرست. مثال نقض: اگر $a=2$ و $b=8$ آن گاه $a|a-b$ و $a|b$ ولی $(2|2-8) \wedge a|b$ و $a|b$ ولی $(2+8|2) \wedge a|b$.

۱۱۳ نادرست. مثال نقض: فرض کنید $a=10$ ، $b=6$ و $c=14$ ، در این صورت $(10|6+14) \wedge a|b$ ولی $a|c$ و $a|b$ و $(10|6) \wedge (10|14)$.

۱۱۴ نادرست. زیرا طبق ویژگی عاد کردن اگر $a|b$ و $b \neq 0$ ، آن گاه $|a| \leq |b|$.

۱۱۵ درست.

$$12|a \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} a = 12q, \quad a|36 \Rightarrow 12q|36$$

بنابراین برای q چهار مقدار صحیح وجود دارد. $q = \pm 1, \quad q = \pm 3$

در نتیجه برای a نیز چهار مقدار صحیح وجود دارد.

۱۱۶ درست. زیرا

$$a^3|b \Rightarrow a^3|2b, \quad 2b|c^2 \Rightarrow a^3|c^2$$

۱۱۷ درست. فرض می کنیم $a^3|b^4$ ، در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} a^3|b^4 &\xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} b^4 = qa^3 \Rightarrow b^4 = (qa)a^3 \\ b^4 = q_1 a^2 &\xrightarrow{\times b} b^5 = (q_1 b)a^2 \Rightarrow b^5 = q_2 a^2 \Rightarrow a^2|b^5 \end{aligned}$$

۱۱۸ نادرست. توجه کنید که اگر b نیز فرد باشد این جمله درست است، اما در حالت کلی درست نیست. مثلاً فرض کنید $a=1$ و $b=0$ ، در این صورت $a^2 + b^2 + 3 = 4$ و باقی مانده ۴ بر ۸ برابر ۴ است نه ۵.

۱۱۹ نادرست. به عنوان مثال نقض فرض کنید $a=8$ و $b=12$ ، در این صورت a^2 ، b^4 را می شمارد ولی a، b را نمی شمارد.

۱۲۰ گزینۀ (د). گزینۀ (الف) درست است، زیرا

$$\begin{cases} 3|6 \Rightarrow 3|6a \\ 3|15 \Rightarrow 3|15b \end{cases} \Rightarrow 3|6a+15b$$

گزینۀ (ب) درست است، زیرا حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی مضرب ۲ است، پس داریم

$$\begin{cases} 2|a(a+1) \\ 2|4 \end{cases} \Rightarrow 2|a(a+1)+4$$

گزینۀ (ج) درست است، زیرا حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی مضرب ۳ است، پس

$$\begin{cases} 3|a(a+1)(a+2) \\ 3|6 \end{cases} \Rightarrow 3|a(a+1)(a+2)+6$$

گزینۀ (د) نادرست است. به عنوان مثال نقض فرض کنید $n=1$ ، در این صورت به دست می آید $3|32$ که نادرست است.

خلاصه فصل اول

درس اول:

استدلال مستقیم: در این استدلال، مستقیماً از فرض به حکم می‌رسیم.

مثلاً با استدلال مستقیم ثابت می‌کنیم مجموع سه عدد متوالی، عددی است مضرب ۳:

$$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1) = 3k$$

مضرب ۳ است. k

مثال نقض: وقتی با یک مثال، یک حکم کلی را رد می‌کنیم. به آن مثال،

مثال نقض می‌گوییم. مثلاً حکم کلی «برای هر دو عدد حقیقی x و y ،

$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ » با مثال نقض $x=1$ و $y=4$ رد می‌شود.

$$\sqrt{1+4} \neq \sqrt{1} + \sqrt{4}$$

چون

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌های ممکن: در این نوع اثبات

همه موارد ممکن (همه فرض‌های مسئله) را در نظر می‌گیریم و با هر

کدام از آن‌ها به حکم می‌رسیم. توضیح منطقی این مطلب چنین است:

اگر حکم مسئله گزاره r باشد و همه فرض‌های مسئله p و q باشند،

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$$

مثلاً برای اثبات فرد بودن $n^2 - 5n + 7$ ، که n عددی طبیعی است،

همه فرض‌های ممکن عبارت است از $n = 2k$ یا $n = 2k+1$ (زوج یا

فرد بودن n) و با هر کدام، فرد بودن $n^2 - 5n + 7$ را اثبات می‌کنیم:

$$n = 2k \Rightarrow n^2 - 5n + 7 = 4k^2 - 10k + 7$$

$$= 2(\underbrace{2k^2 - 5k + 3}_q) + 1 = 2q + 1$$

عددی فرد $2q + 1$

$$n = 2k+1 \Rightarrow n^2 - 5n + 7 = 4k^2 + 4k + 1 - 10k - 5 + 7$$

$$= 4k^2 - 6k + 3 = 2(\underbrace{2k^2 - 3k + 1}_q) + 1 = 2q + 1$$

عددی فرد $2q + 1$

$$n = 2k+1 \Rightarrow n^2 - 5n + 7 = 4k^2 + 4k + 1 - 10k - 5 + 7$$

$$= 4k^2 - 6k + 3 = 2(\underbrace{2k^2 - 3k + 1}_q) + 1 = 2q + 1$$

عددی فرد $2q + 1$

$$n = 2k+1 \Rightarrow n^2 - 5n + 7 = 4k^2 + 4k + 1 - 10k - 5 + 7$$

$$= 4k^2 - 6k + 3 = 2(\underbrace{2k^2 - 3k + 1}_q) + 1 = 2q + 1$$

عددی فرد $2q + 1$

اثبات غیرمستقیم (برهان خلف): در اثبات بعضی مسائل، فرض

می‌کنیم، حکم برقرار نباشد (نقیض حکم برقرار باشد) و با این فرض

و با استدلال درست، به نتیجه‌ای غیرممکن یا نتیجه‌ای متناقض با

فرض مسئله می‌رسیم و از این‌جا نتیجه می‌گیریم که فرض برقرار نبودن

حکم (فرض خلف)، باطل و حکم برقرار است! **مثلاً** با برهان خلف ثابت

می‌کنیم جمع یک عدد گویا با عددی گنگ، عددی گنگ است:

عددی گویا r ، عددی گنگ x

$$\xrightarrow{\text{با برهان خلف ثابت می‌کنیم}} x + r = \text{عددی گنگ}$$

$$\Rightarrow x = a - r$$

(عددی گویا) $x + r = a$: فرض خلف

$$\xrightarrow{\text{عددی گویا} = \text{عددی گویا} - \text{عددی گویا}} x = \text{عددی گویا}$$

که این، با فرض گنگ بودن x در تناقض است؛ پس فرض خلف باطل و حکم

درست است، یعنی $x + r$ ، عددی گویا نیست، بلکه عددی گنگ است!

اثبات‌های بازگشتی / گزاره‌های هم‌ارز: با استفاده از این روش، حکم

را یک یا چند مرحله ساده می‌کنیم و در روند ساده کردن از ترکیب‌های

دوشرطی استفاده می‌کنیم تا به یک گزاره همواره درست برسیم. **مثلاً**

برای اثبات نامساوی $a + \frac{1}{a} \geq 2$ به ازای $a > 0$ ، داریم:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \xleftrightarrow{a \neq 0} a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 + 1 - 2a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

که این گزاره آخر همواره درست است؛ بنابراین چون تمام روابط دوطرفه

هستند، تمام گزاره‌های قبل از آن هم همواره درست هستند. پس اگر

$a > 0$ آن‌گاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$ همواره درست است.

درس دوم:

رابطه عاد کردن: $a|b$ ، نمادی است که خوانده می‌شود a عاد می‌کند

(می‌شمارد) b را؛ با این شرط که a و b اعداد صحیح هستند و $a \neq 0$.

همچنین داریم: $a|b \xleftrightarrow{k \in \mathbb{Z}} b = ka$. **مثلاً** چون $6 = 2 \times 3$ ،

پس می‌توان نتیجه گرفت $2|6$ و $3|6$. همچنین چون $6 = 1 \times 6$

نتیجه‌گیری $1|6$ و $6|6$ نیز درست است.

توجه: هر عدد دلخواهی صفر را می‌شمارد و صفر فقط صفر را می‌شمارد.

ویژگی‌ها:

$$1) a|b \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} a|mb$$

$$2) a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c \text{ (خاصیت تعدی)}$$

$$3) a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$$

$$4) a|b \xrightarrow{b \neq 0} |a| \leq |b|$$

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م.): ب.م.م. دو عدد a و b را

(که a و b هر دو با هم صفر نیستند)، با نماد (a, b) نمایش می‌دهیم و با

فرض $(a, b) = d$ (عددی طبیعی) داریم:

$$d|a, \quad d|b$$

الف)

$$\forall m > 0: m|a, \quad m|b \Rightarrow m \leq d$$

$$a|b \Rightarrow (a, b) = |a|, \quad (0, a) = |a|$$

توجه:

کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م.): ک.م.م. دو عدد a و b را

(که a و b هیچ‌کدام صفر نیستند)، با نماد $[a, b]$ نمایش می‌دهیم و با

فرض $[a, b] = c$ (عددی طبیعی) داریم:

$$a|c, \quad b|c$$

الف)

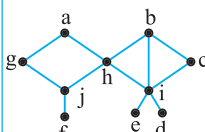
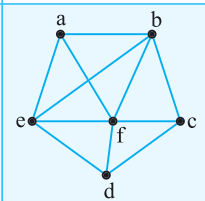
$$\forall m > 0: a|m, \quad b|m \Rightarrow c \leq m$$

$$a|b \Rightarrow [a, b] = |b|$$

توجه: به خاطر داشته باشیم که d و c (ب.م.م. و ک.م.م.) اعدادی طبیعی

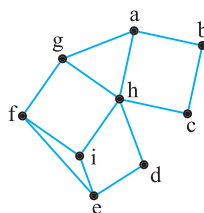
(مثبت) هستند.

امتحان میان سال (۱)

امتحان: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی و فیزیک	تألیفی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
ردیف	سؤالات		
۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. (الف) یک گراف کامل ۱۰ رأسی یال دارد. (ب) مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ باقی مانده ای برابر دارد.	۰/۵	
۲	درست یا نادرست بودن گزاره های زیر را تعیین کنید. (الف) برای هر دو عدد حقیقی و غیر صفر x داریم: $x + \frac{1}{x} \geq 2$. (ب) اگر a و b اعداد صحیح باشند و $(a, b) = 1$ ، آن گاه $[a, b] = ab$. (پ) حاصل ضرب هر عدد حقیقی در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (ت) معادله هم نهشتی $3x \equiv 4 \pmod{9}$ دارای جواب نیست.	۱	
۳	اگر α و β دو عدد گنگ باشند، ولی $\alpha + 2\beta$ گویا باشد، به کمک برهان خلف ثابت کنید $\alpha - 2\beta$ عددی گنگ است.	۱/۵	
۴	ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آن گاه $2a^2 + ab + 3b^2$ همواره نامنفی است.	۱/۵	
۵	اگر a عددی صحیح باشد، $a \mid 15k + 4$ و $a \mid 25k + 7$ ، آن گاه تمام مقادیر ممکن برای a را به دست آورید.	۱/۵	
۶	اگر باقی مانده تقسیم a و b بر ۱۵ برابر ۱۳ باشد، آن گاه باقی مانده تقسیم $2a - 3b$ را بر ۵ محاسبه کنید.	۱/۵	
۷	اگر $(a, b) = 1$ ، آن گاه مطلوب است محاسبه $(a+b, a-b)$.	۱/۵	
۸	به چند طریق می توان با ۳۵۰۰۰۰ تومان، تعدادی کالای ۷۰۰۰۰ تومانی و تعدادی کالای ۸۰۰۰۰ تومانی خریداری کرد؟	۱/۷۵	
۹	معادله هم نهشتی $12x \equiv 386 \pmod{7}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.	۱/۵	
۱۰	اگر ۲۵ آبان، روز پنجشنبه باشد، ۱۴ اسفند همان سال چه روزی از هفته است؟	۱/۲۵	
۱۱	معادله $mx + 4y = 14$ ، به ازای چند عدد طبیعی یک رقمی m جواب ندارد؟	۱/۵	
۱۲	گراف G را مطابق شکل، در نظر بگیرید. (الف) مجموعه های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید. (ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. (پ) $N_G(a)$ و $N_G[i]$ را بنویسید. (ت) اگر $N_G(x) = \{a, b, i, j\}$ ، آن گاه x کدام رأس است؟ (ث) تعداد یال های گراف $\bar{G}$ را مشخص کنید.		
۱۳	در گراف رسم شده G : (الف) یک مسیر به طول ۴ مشخص کنید. (ب) یک دور به طول ۳ مشخص کنید. (پ) درجه رأس f در گراف $\bar{G}$ را مشخص کنید.		
۱۴	در گراف G با اندازه ۱۰، سه رأس تنها داریم. (الف) گرافی رسم کنید که حداکثر تعداد رأس را داشته باشد. (ب) گرافی رسم کنید که حداقل تعداد رأس را داشته باشد.	۱	
۱۵	حاصل ضرب مرتبه و اندازه گراف P_n برابر ۳۰ است. n را به دست آورید.	۰/۵	
جمع نمره	موفق و سربلند باشید.	۲۰	

امتحان جامع (۲)

ردیف	سؤالات	نمره	امتحان: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی و فیزیک	تألیفی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. (الف) عدد احاطه‌گری گرافی ۶ رأسی با $\Delta=3$ ، بزرگ‌تر یا مساوی است. (ب) در بین ۲۲ نفر، حداقل نفر در یک روز هفته متولد شده‌اند. (پ) تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعه‌ای ۴ عضوی به مجموعه‌ای ۸ عضوی برابر است با (ت) در بین ۴ عدد طبیعی دلخواه، حداقل عدد یافت می‌شود که به پیمانه ۳ هم‌نهیست هستند.	۱				
۲	درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. (الف) ک.م.م. دو عدد طبیعی نسبت به هم اول، برابر است با حاصل‌ضرب آن دو عدد. (ب) عدد احاطه‌گری C_n برابر است با $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$. (پ) دو مربع لاتین متعامد دو در دو وجود ندارد. (ت) تعداد توابع از مجموعه‌ای ۳ عضوی به مجموعه‌ای ۴ عضوی برابر با 3^4 است.	۱				
۳	به کمک گزاره‌های هم‌ارز ثابت کنید اگر x و y اعدادی حقیقی باشند آن‌گاه: $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz - 4yz \geq 0$.	۱				
۴	به کمک برهان خلف ثابت کنید، اگر $\sqrt{3}$ عددی گنگ باشد آن‌گاه $\sqrt{\sqrt{3}+1}$ نیز عددی گنگ است.	۱				
۵	اگر باقی‌مانده تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b برابر ۱ باشد، ثابت کنید: $(a, b) = 1$.	۱				
۶	معادلات هم‌نهشتی زیر را در صورت امکان حل کنید. (الف) $3x \equiv 7201 \pmod{17}$ (ب) $-x \equiv 16 - 4x \pmod{7}$	۲				
۷	اگر دو عدد $5x-11$ و $7x+1$ رقم یکسان داشته باشند، رقم یکان x چه عددی می‌تواند باشد؟	۱				
۸	گراف G با مجموعه رؤوس $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ مفروض است. اگر $N_G(a) = \{b, c\}$ ، $N_G(b) = \{a, c\}$ ، $N_G(c) = \{a, b, d\}$ ، $N_G(d) = \{c, e, f\}$ و $N_G(e) = \{d, f\}$ ، آن‌گاه (الف) گراف G را رسم کنید. (ب) اندازه گراف G را به دست آورید. (پ) $N_G[f]$ را بنویسید.	۱				
۹	گرافی ۷ رأسی، غیرتهی و k -منتظم بکشید که k کمترین مقدار ممکن باشد. (گراف را همبند در نظر بگیرید)	۵/۰				
۱۰	برای گراف G (گراف زیر)، عدد احاطه‌گری را به دست آورید. (با ذکر دلیل)	۱				



ردیف	سؤالات	نمره
۱۱	برای گراف رسم شده. الف) دو مجموعه احاطه‌گر مینیمال غیرمینیمم معرفی کنید. ب) یک γ-مجموعه مشخص کنید.	۱/۲۵
۱۲	در گراف همبند G رأسی 6 ، $\gamma(G)=2$ ، کمترین و بیشترین مقدار برای اندازه گراف را به دست آورید.	۱/۵
۱۳	فرض کنید G گراف P_7 باشد. الف) $q(\bar{G})$ را به دست آورید. ب) مجموع درجه‌های گراف $\bar{G}$ را به دست آورید.	۱
۱۴	۱۱ نفر را به چند طریق می‌توان در اتاق‌های ۵، ۲ و ۴ نفره اسکان داد؟	۱
۱۵	معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 14$ ، چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آنکه $x_1 > 1$ و $x_3 > 3$ ؟	۱/۵
۱۶	قرار است ۵ مدرس $T_1, T_2, \dots, T_5$ در پنج جلسه متوالی، در پنج کلاس $C_1, C_2, \dots, C_5$ به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.	۰/۷۵
۱۷	در بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ ($1 \leq n \leq 100$)، چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۵ بخش‌پذیر باشند، ولی بر ۲۰ بخش‌پذیر نباشند؟	۱/۵
۱۸	نشان دهید در بین ۷۳۳ نفر حداقل ۳ نفر، تاریخ تولدشان یکسان است.	۱
	موفق و سربلند باشید.	جمع نمره ۲۰

امتحان جامع (۳)

ردیف	سؤالات	رشته: ریاضی و فیزیک	تألیفی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) اگر $k.m$ دو عدد برابر قدرمطلق حاصل ضرب آنها باشد، آن‌گاه $b.m$ آن دو عدد برابر است با ب) تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعه 4 عضو به مجموعه 4 عضو برابر است با پ) اگر نقطه درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع 2 واحد بگذاریم، فاصله حداقل دو تا از آن‌ها کمتر از 1 واحد است. ت) اگر A و B دو مجموعه جدا از هم در مجموعه S باشند؛ تعداد اعضای $A \cup B$ برابر است با			۱
۲	درستی یا نادرستی جملات زیر را تعیین کنید. الف) از $a b$ و $c d$، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c b+d$. ب) معادله $16x - 1 \equiv 6$ دارای جواب نیست. پ) هر مربع لاتین دلخواه، حداقل یک مربع لاتین متعامد دارد. ت) اگر مربع‌های لاتین A و B متعامد باشند، با جابه‌جایی دو سطر از B، مربع جدید A باز هم متعامدند.			۱

۱۵

پایه
 $m = ?$ تعداد کبوترها ، $n = 3 \times 3 = 9$ (۵/۵) تعداد لانه‌ها
 فوتبال/والیبال/هیج کدام

$$k+1=3 \Rightarrow k=2 \quad (۵/۵)$$

بنا بر تعمیم اصل لانه کبوتری، m حداقل باید برابر $kn+1$ باشد، پس
 $m = kn+1 \Rightarrow m = 29 \times 9 + 1 \Rightarrow m = 262$ (۵/۵)
 پس باید حداقل ۲۶۲ دانش آموز وجود داشته باشد.

پاسخنامه امتحان جامع (۲)

۱ الف ۲. (۵/۵) $\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6}{3+1} \right\rfloor = 2$

ب (۵/۵) ۴. بنا بر تعمیم اصل لانه کبوتری، تعداد کبوترها حداقل می‌بایست $nk+1$ باشد، پس

$$m = nk+1 \xrightarrow[n=7]{m=22} 22 = 7k+1 \Rightarrow k=3 \Rightarrow k+1=4$$

در نتیجه حداقل ۴ نفر در یک روز هفته به دنیا آمده‌اند.

پ (۵/۵) ۸! = ۸ × ۷ × ۶ × ۵ × ۴! توجه کنید که تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعه m عضو به مجموعه k عضو ($m \leq k$) برابر است با:

$$(k)_m = \frac{k!}{(k-m)!}$$

ت (۵/۵) ۲. هر عدد به پیمانه ۳ یا هم‌نهیست صفر است یا هم‌نهیست ۱ و یا هم‌نهیست ۲، بنابراین تعداد لانه‌ها را $n=3$ در نظر می‌گیریم. بنابر اصل لانه کبوتری داریم: $m = nk+1 \xrightarrow[m=4]{n=3} 4 = 3k+1 \Rightarrow k=1 \Rightarrow k+1=2$
 الف (۵/۵) درست. ب (۵/۵) درست. پ (۵/۵) درست. ت (۵/۵) نادرست. توجه کنید که تعداد توابع از یک مجموعه ۳ عضو به یک مجموعه ۴ عضو برابر است با ۴.
 ۳

$$x^2 + 2xy^2 + 2xz^2 + 2xy - 2xz - 4yz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz \geq 0 \quad (۵/۵)$$

$$\Leftrightarrow (x+y-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0 \quad (۵/۵)$$

پس گزاره اولیه هم، همواره درست است.

۴ فرض می‌کنیم $\sqrt{\sqrt{3}+1}$ عددی گویا باشد:
 $\sqrt{3}+1=r^2 \rightarrow$ توان ۲ (۵/۵) عددی گویا $\sqrt{\sqrt{3}+1}=r$ فرض خلف
 (توان دوم عدد گویا (r^2) گویاست). (۵/۵) عددی گویا $\sqrt{3}=r^2-1$
 که با فرض گنگ بودن $\sqrt{3}$ در تناقض است. (۵/۵) پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود. (۵/۵)

۵ توجه کنید که $a = bq+1$ (۵/۵)

$$(a, b) = d \Rightarrow \begin{cases} d|a \Rightarrow d|bq+1 \\ d|b \Rightarrow d|bq \end{cases} \Rightarrow d|bq+1-bq$$

$$d|1 \Rightarrow d=1 \quad (۵/۵)$$

۶ الف

معادله جواب دارد. $(3, 17) = 1 | 720$

$$\begin{array}{r} 720 \cdot 1 \\ - 68 \\ \hline 40 \\ - 34 \\ \hline 61 \\ - 51 \\ \hline 10 \end{array} \Rightarrow 720 \cdot 1 \equiv 10 \pmod{423}$$

در نتیجه

$$3x \equiv 720 \cdot 1 \Rightarrow 3x \equiv 10 \pmod{423} \Rightarrow 3x \equiv 17+1 \pmod{423} \Rightarrow 3x \equiv 27$$

$$\xrightarrow[\div 3]{(3, 17)=1} x \equiv 9 \pmod{141} \Rightarrow x = 17k + 9 \pmod{141}$$

ب ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$-x \equiv 16 - 4x \Rightarrow 4x - x \equiv 16 \Rightarrow 3x \equiv 16 \pmod{141}$$

چون $(3, 141) = 1$ و $16 | 141$ ، این معادله دارای جواب است. بنابراین

$$3x \equiv 16 \xrightarrow{-16 \cdot 5} 3x \equiv 2 \Rightarrow 3x \equiv 7+2 \pmod{141}$$

$$3x \equiv 9 \xrightarrow[\div 3]{(3, 141)=1} x \equiv 3 \pmod{141}$$

$$x = 7x + 3 \pmod{141}$$

۷ دو عدد زمانی رقم یکان یکسان دارند که به پیمانه ۱۰ با هم هم‌نهیست باشند: بنابراین

$$\Delta x - 11 \equiv 7x + 1 \pmod{141} \Rightarrow 2x \equiv -12 \xrightarrow[\div 2]{(2, 141)=1} x \equiv -6$$

$$\xrightarrow[\div 2]{10} x \equiv -6 \xrightarrow{-6 \cdot 5} x \equiv 4 \pmod{141} \Rightarrow x = 5k + 4$$

k می‌تواند زوج یا فرد باشد. بنابراین دو حالت در نظر می‌گیریم:

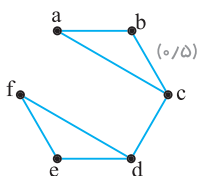
$$k = 2q \Rightarrow x = 5(2q) + 4 \Rightarrow x = 10q + 4 \Rightarrow x \equiv 4 \pmod{141}$$

رقم یکان x می‌تواند ۴ باشد.

$$k = 2q+1 \Rightarrow x = 5(2q+1) + 4 \Rightarrow x = 10q+9 \Rightarrow x \equiv 9 \pmod{141}$$

رقم یکان x می‌تواند ۹ باشد.

توجه کنید که اگر $5k+4$ را به ازای $k=1$ ، $k=2$ و ... به دست آورید باز هم به همین نتیجه می‌رسید.



۸ الف $N_G(a) = \{b, c\}$ ، یعنی از a

به b و c یال وجود دارد. $N_G(b) = \{a, c\}$

یعنی از b به a و c یال وجود دارد. به همین صورت ادامه می‌دهیم و گراف به صورت مقابل رسم می‌شود.

$$q = 7 = \text{تعداد یال} = \text{اندازه}$$

ب

$$N_G[f] = \{f, e, d\} \quad (۵/۵)$$

پ