

۴ ۲۶۹۶

$$x=1 \Rightarrow f(1)=k, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)=k, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)=2 \Rightarrow k=2$$

$$x=-1 \Rightarrow f(-1)=k, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)=k, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)=2 \Rightarrow k=2$$

پس f پیوسته است. حال برای $n=2$ بررسی می‌کنیم.

$$x=2 \Rightarrow f(2)=4, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)=\Delta, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)=k+1$$

که مشاهده می‌شود به ازای هیچ مقداری از k پیوسته نیست.

۳ ۲۷۰۱

$$g(x) = \frac{f(x)-1}{x} = \frac{\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^2 - 1}{x}$$

$$= \frac{1+\sin^2 x - 2\sin x - 1 - \sin^2 x}{x(1+\sin x)^2} = \frac{-2\sin x}{x(1+\sin x)^2}$$

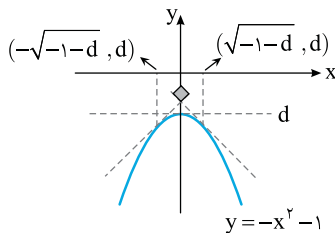
$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin x}{x(1+\sin x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin x}{x} = -2$$

۱ ۲۷۰۲

$$\begin{cases} y = -x^2 - 1 \\ y = d \end{cases} \Rightarrow d = -x^2 - 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-1-d}$$

$$y' = -2x \Rightarrow (-2\sqrt{-1-d})(2\sqrt{-1-d}) = -4$$

$$f(-1-d) = 1 \Rightarrow d+1 = -\frac{1}{f} \Rightarrow d = -\frac{\Delta}{f} = -1/2\Delta$$



۴ ۲۷۰۳

$$y' = 3kx^2 + 2(k+1)x \Rightarrow y'' = 6kx + 2(k+1) = 0$$

$$\frac{k < 0}{x} \Rightarrow x = \frac{-2(k+1)}{6k} = \frac{-(k+1)}{3k}$$

برای اینکه نقطه عطف در ناحیه دوم قرار بگیرد باید داشته باشیم $x < 0$ و $y > 0$.

k	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$-(k+1)$	+	0	-	-
$\frac{-(k+1)}{3k}$	-	-	0	+
$\frac{-(k+1)}{3k}$	-	+	0	-

$$k < -1 \quad (1)$$

بنابراین

$$y = kx^2 + (k+1)x = k\left(\frac{-(k+1)}{3k}\right)^2 + (k+1)\left(\frac{-(k+1)}{3k}\right)$$

$$= \frac{-(k+1)^2}{9k} + \frac{-(k+1)^2}{3k} = \frac{2(k+1)^2}{3k}$$

$$y > 0 \Rightarrow k+1 > 0 \Rightarrow k \in (-1, \infty) - \{0\} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \emptyset$$

$$f(x) = a + \frac{b}{2} \sin(2cx - \frac{3\pi}{2}) = a + \frac{b}{2} \cos(2cx)$$

$$T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|2c|} = \pi \Rightarrow |2c| = 2 \Rightarrow c = \pm 1 \Rightarrow c = 1$$

$$x=0 \Rightarrow a + \frac{b}{2} = -1, \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a - \frac{b}{2} = 3$$

$$\begin{cases} a + \frac{b}{2} = -1 \\ a - \frac{b}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 1 - 2 \cos(2x) = 0$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} \\ x_2 = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{3}$$

۳ ۲۶۹۷

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos x - \sin x = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow (\cos x - \sin x)^2 = 1 - \sin 2x = \frac{2}{3}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{3}$$

$$m\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) - 3\sqrt{6} \sin 2x = \sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{6}\left(\frac{m}{3} - 3 \sin 2x\right) = \sqrt{6}$$

$$\frac{m}{3} - 3 \sin 2x = 1 \Rightarrow \frac{m}{3} - 3 \times \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \frac{m}{3} = 2 \Rightarrow m = 6$$

۱ ۲۶۹۸

$$f \text{ اکیدا نزولی} \Rightarrow f(m^2 - m - 5) < f(-3 + 2m - m^2)$$

$$m^2 - m - 5 > -3 + 2m - m^2 \Rightarrow 2m^2 - 3m - 2 > 0 \Rightarrow (m-2)(m+1) > 0$$

m	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$2m^2 - 3m - 2$	+	0	-	+

$$m < -\frac{1}{2} \quad (I) \quad m^2 - m - 5 < 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{21}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{21}}{2} \quad (II)$$

$$-3 + 2m - m^2 < 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 3 > 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

$$(I), (II) \Rightarrow m = -1$$

۳ ۲۶۹۹

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$g(x) = \frac{cx+d}{ax+b} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{-bx+d}{ax-c}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g^{-1}(x)} = \frac{\frac{a}{c}}{-\frac{b}{a}} = -\frac{a^2}{bc}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g^{-1}(x)}{g(x)} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$$

$$-\frac{a^2}{bc} = -\frac{b}{c} \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a = \pm b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm} f^{-1}(x) = -\frac{b}{a} = \pm 1$$

با مثال عددی برای n مسئله را حل می‌کنیم. اگر $n=1$ ، آن‌گاه می‌بایست پیوستگی را در نقاط $x = \pm 1$ بررسی کنیم.

۲ ۲۷۰۰

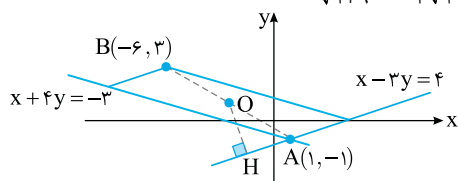
$$\begin{cases} t = x(x-1) = \frac{6}{5} \Rightarrow x^2 - x - \frac{6}{5} = 0 \Rightarrow S_1 = 1 \\ t = x(x-1) = -\frac{3}{4} \Rightarrow x^2 - x + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow S_2 = 1 \end{cases}$$

بنابراین مجموع چهار ریشه برابر ۲ است.

۱ ۲۷۰۹

$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ x + 4y = -3 \end{cases} \Rightarrow A(1, -1)$$

$$O = \frac{A+B}{2} \Rightarrow O(-\frac{5}{2}, 1) \Rightarrow OH = \frac{|-\frac{5}{2} - 3 - 4|}{\sqrt{1+9}} = \frac{19}{2\sqrt{10}}$$



۲ ۲۷۱۰

$$\Delta y - 1 \cdot x = 12 \xrightarrow{y=v/r} x = 2/r \Rightarrow A'(2/r, v/r) \in f^{-1}$$

$$A(v/2, 2/r) \in f \Rightarrow 2/r = \sqrt{v/2} \sqrt{v/2m-1}$$

$$2/r \times 2/r = v/2(\sqrt{v/2} \sqrt{v/2m-1}) \Rightarrow 0/\lambda = v/2m-1 \Rightarrow m = \frac{1}{4}$$

$$f(\frac{r}{m}) = f(16) = \sqrt{16} \sqrt{\frac{1}{4} \times 16 - 1} = 4\sqrt{3}$$

۳ ۲۷۱۱

$$\log_r \lambda = \frac{1}{\log_\lambda r} = \frac{1}{\frac{1}{3} \times \log_r 3} = \frac{3}{\log_r 3} \Rightarrow \log_r \lambda = \frac{3}{\log_r 3}$$

۱۲/۵ درصد برابر $\frac{12/5}{100} = \frac{1}{\lambda}$ است. اگر جرم اولیه را M فرض کنیم، داریم

$$\text{جرم باقی مانده} = (1 - \frac{1}{\lambda})^t \times M = (\frac{Y}{\lambda})^t \times M$$

$$(\frac{Y}{\lambda})^t \times M = \frac{1}{Y} M \Rightarrow (\frac{Y}{\lambda})^t = \frac{1}{Y} \xrightarrow{\log_r} t \log_r \frac{Y}{\lambda} = \log_r Y^{-1}$$

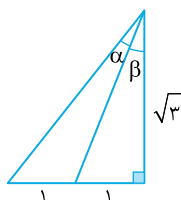
$$\frac{t}{Y} (\log_r Y - \log_r \lambda) = -\log_r Y$$

$$\frac{t}{Y} (\frac{1}{6} - \frac{1}{\lambda}) = -\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{t}{Y} (-\frac{1}{4\lambda}) = -\frac{1}{6} \Rightarrow t = 56$$

۴ ۲۷۱۲

$$\tan \alpha = \tan((\alpha + \beta) - \beta) = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan \beta}{1 + \tan(\alpha + \beta) \tan \beta}$$

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{5}{3}} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$$



۲ ۲۷۰۴

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0 \Rightarrow y = \sqrt{x}$$

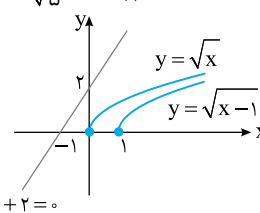
$$1 \leq x < \sqrt{2} \Rightarrow 1 \leq x^2 < 2 \Rightarrow [x^2] = 1 \Rightarrow y = \sqrt{x-1}$$

با توجه به شکل نمودارها مشخص است نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ کمترین فاصله را تا خط داده شده خواهد داشت.

$$d = \frac{|2x - \sqrt{x} + 2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{2x - \sqrt{x} + 2}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{مشتق}} d' = \frac{2 - \frac{1}{2}\sqrt{x}}{\sqrt{5}} = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{16}$$

$$y = \sqrt{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow d = \frac{2 - \frac{1}{4} + 2}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$$



۳ ۲۷۰۵

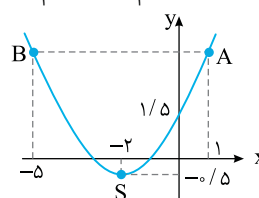
دنباله‌ای که هم حسابی و هم هندسی باشد، دنباله ثابت $a, a, a, \dots$ است که در آن $d=0$ و $r=1$ و داریم $r+d=1$.

۱ ۲۷۰۶

$$\text{طول رأس سهمی } x = \frac{-5+1}{2} = -2 \Rightarrow f(x) = a(x+2)^2 - \frac{1}{2}$$

$$(0, \frac{3}{2}) \in f \Rightarrow \frac{3}{2} = a(0+2)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$(1, \beta) \in f \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}(1+2)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 4$$



۲ ۲۷۰۷

$$\alpha + \beta = \frac{-(-12)}{3} = 4 \Rightarrow \beta = 4 - \alpha \quad (1)$$

$$2\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha = 7 \xrightarrow{(1)} 2\alpha^2 + (4-\alpha)^2 - 4\alpha = 7$$

$$3\alpha^2 - 12\alpha + 9 = 0 \Rightarrow \alpha = 1, \quad \alpha = 3$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \Rightarrow \beta = 3, & \alpha = 3 \Rightarrow \beta = 1 \\ P = 3 \Rightarrow \frac{-a}{3} = 3 \Rightarrow a = -9 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{\alpha_{\max}} = \frac{-9}{3} = -3$$

۱ ۲۷۰۸

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2-x)^2} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{2x^2 - 4x + 4}{x^2(2-x)^2} = \frac{4}{9}$$

$$4 \cdot x^2(x-2)^2 - 18x(x-2) - 36 = 0 \xrightarrow{x(x-2)=t}$$

$$4 \cdot t^2 - 18t - 36 = 0 \Rightarrow t = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 + 36 \times 16}}{8}$$

۳ ۲۷۱۷

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{ax+b}{cx+d}}{\frac{dx-b}{-cx+a}} = \frac{-ac}{cd} = -\frac{a}{d}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{dx-b}{-cx+a}}{\frac{ax+b}{cx+d}} = \frac{-dc}{ac} = -\frac{d}{a}$$

$$-\frac{a}{d} = -\frac{d}{a} \Rightarrow a^2 = d^2$$

$$x = -\frac{d}{c}, y = \frac{a}{c} \xrightarrow{a=d} W\left(-\frac{d}{c}, \frac{d}{c}\right)$$

$$x = -\frac{d}{c}, y = \frac{a}{c} \xrightarrow{a=-d} W\left(\frac{d}{c}, \frac{d}{c}\right)$$

با توجه به نقطه تلاقی مجانب‌های به دست آمده، نقطه‌ای قبول است که با طول و عرض برابر داشته باشند یا طول و عرض قرینه که فقط گزینه (۳) چنین شرایطی دارد.

۴ ۲۷۱۸

$$n \Rightarrow [n^+] = n, \quad [n^-] = n-1$$

$$[-n^+] = -n, \quad [-n^-] = -n-1$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow n^+} |[-x] - x| = |(-n-1) - n| = 2n+1 \\ \lim_{x \rightarrow n^-} (k-x+[x]) = k-n+(n-1) = k-1 \end{cases} \Rightarrow k = 2n+2$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow n^+} |[-x] - x| = |(n-1) + n| = 2n-1 \\ \lim_{x \rightarrow n^-} (k-x+[x]) = k+n+(-n-1) = k-1 \end{cases} \Rightarrow k = 2n$$

با توجه به مقادیر مختلف که برای k به دست آمد، تابع برای n های فرد پیوسته نیست.

$$n \Rightarrow [n^+] = n, \quad [n^-] = n-1,$$

$$[-n^+] = -n-1, \quad [-n^-] = -n$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow n^-} |[-x] - x| = |-n-n| = 2n \\ \lim_{x \rightarrow n^+} (k-x+[x]) = k-n+n = k \end{cases} \Rightarrow k = 2n$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow n^+} (k-x+[x]) = k+n+(-n) = k \\ \lim_{x \rightarrow n^-} |[-x] - x| = |n+n| = 2n \end{cases} \Rightarrow k = 2n$$

با توجه به مقادیر مساوی که برای k به دست آمد، تابع برای n های زوج پیوسته است.

۲ ۲۷۱۹

$$f(x) = xg(x) - 2x + 5 \Rightarrow g(x) = \frac{1 - \sin x}{x}$$

$$g(x) = \frac{\Delta \cos x + 2x - 5 - 2x \sin x + \Delta \sin x}{x(1 - \sin x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta \cos x + 2x - 5 - 2x \sin x + \Delta \sin x}{x(1 - \sin x)} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\Delta \sin x + 2 - 2(\sin x + x \cos x) + \Delta \cos x}{1 - (\sin x + x \cos x)} = 4$$

۱ ۲۷۱۳

$$S = 15 = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 \times \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_1 = 15^\circ, \quad \alpha_2 = 3^\circ$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 12^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

با استفاده از روابط مثلثاتی $\frac{1}{1 + \tan^2 x} = \cos^2 x$

۲ ۲۷۱۴

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$f(x) = \frac{2}{a} - \frac{b}{1 + \tan^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{2}{a} - b \cos^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{2}{a} - b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$f(x) = -\frac{b}{2} \sin 2cx + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{b}{2} \sin(-2cx) + \frac{2}{a} - \frac{b}{2}$$

$$\begin{cases} b > 0 \\ -2c > 0 \Rightarrow c < 0 \end{cases}$$

$$T = \frac{2\pi}{|2c|} = 9\pi \Rightarrow |c| = \frac{1}{9} \xrightarrow{c < 0} c = -\frac{1}{9}$$

$$y_{\max} = \left| -\frac{b}{2} \right| + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} = 6 \xrightarrow{b > 0} \frac{2}{a} = 6 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$y_{\min} = \left| -\frac{b}{2} \right| + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} = 0 \xrightarrow{b > 0} -b + \frac{2}{a} = 0 \xrightarrow{(1)} b = 6$$

$$f(x) = 3 \sin\left(\frac{2}{9}x\right) + 3 \Rightarrow f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3 \sin\left(\frac{2}{9} \times \frac{3\pi}{4}\right) + 3 \Rightarrow f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 4/5$$

۴ ۲۷۱۵

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\times 2\sqrt{3}} 3 \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \quad (1)$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$3 \sin x - \sqrt{3} \cos x + m \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} 2 + m \times \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow m = -3$$

۱ ۲۷۱۶

$$2m^2 - 9m - 2 > 0 \Rightarrow m < \frac{9 - \sqrt{97}}{4} \quad \text{یا} \quad m > \frac{9 + \sqrt{97}}{4} \quad (1)$$

$$m^2 - 4m + 4 > 0 \Rightarrow (m-2)^2 > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R} - \{2\} \quad (2)$$

$$f(2m^2 - 9m - 2) < f(m^2 - 4m + 4) \xrightarrow{\text{صعودی اکید}}$$

$$2m^2 - 9m - 2 < m^2 - 4m + 4 \Rightarrow m^2 - 5m - 6 < 0$$

$$(m+1)(m-6) < 0 \Rightarrow m \in (-1, 6) \quad (3)$$

$$(1) \cap (2) \cap (3) \Rightarrow m \in \left(-1, \frac{9 - \sqrt{97}}{4}\right) \cup \left(\frac{9 + \sqrt{97}}{4}, 6\right) \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 5$$

در بازه به دست آمده، فقط عدد ۵ عددی صحیح است.

۱ ۲۷۲۴

$$x_S = \frac{3-1/5}{2} = \frac{3}{4} = -\frac{b}{2a}, \quad \text{مجموع صفرها} = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$$

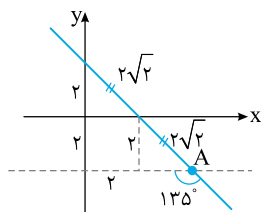
۴ ۲۷۲۵

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{4k^2 - 2^0}}{1} = \sqrt{4k^2 - 2^0} = \frac{4}{3}k$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 4k^2 - 2^0 = \frac{16}{9}k^2 \Rightarrow \frac{4}{9}k^2 = 2^0 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow \left[\frac{k^2}{2}\right] = \left[\frac{9}{2}\right] = 4$$

۴ ۲۷۲۶

$$A(4, -2) \Rightarrow \text{فاصله } A \text{ تا مبدأ } d = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$



۲ ۲۷۲۷

$$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 - [\sqrt{5}] = 5 - 2 = 3 \Rightarrow f(3a) = 2$$

$$(3a)^2 - [3a] = 2 \Rightarrow 9a^2 - [3a] = 2 \xrightarrow{\text{بررسی گزینه ها}} a = -\frac{1}{3}$$

۳ ۲۷۲۸

$$\sqrt{x-a} = a - \sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان } 2} x - a = a^2 + x - 2a\sqrt{x}$$

$$a^2 - 2a\sqrt{x} + a = 0 \Rightarrow a(a + (1 - 2\sqrt{x})) = 0$$

$$a = 0, \quad a = 2\sqrt{x} - 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{a+1}{2} \Rightarrow a = 1, 3, 5, 7, 9$$

۲ ۲۷۲۹

$$1 \cdot y - x = -1 \xrightarrow{y=1} x = 2 \Rightarrow (2, 1) \in f^{-1} \Rightarrow (1, 2) \in f$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow 1 + 6 + a + 1 = 2 \Rightarrow a = 12$$

۴ ۲۷۳۰

$$\log_7(x^2 + 2x + 4)(x - 2) = 3 \Rightarrow x^2 - 4 = 8 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12}$$

$$\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{16} = \log_2 16 = 4$$

۱ ۲۷۳۱

$$(0, 2) \in f \Rightarrow 2 = c + \log_{\delta} b \quad (1)$$

$$(2/4, 0) \in f \Rightarrow 0 = c + \log_{\delta} (2/4a + b) \quad (2)$$

$$(2) \text{ و } (1) \Rightarrow \text{اختلاف دو رابطه} \Rightarrow \log_{\delta} b - \log_{\delta} (2/4a + b) = 2$$

$$\log_{\delta} \frac{b}{2/4a + b} = 2 \Rightarrow \frac{b}{2/4a + b} = 2\delta \Rightarrow b = 6 \cdot a + 2\delta b$$

$$2\delta b = -6 \cdot a \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{2\delta}{6} = -\frac{\delta}{3}$$

۳ ۲۷۳۲

$$\tan(180^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{y}}{2} = -\tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{\sqrt{y}}{2}$$

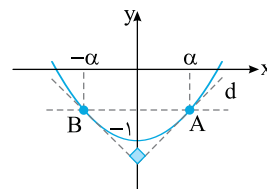
۱ ۲۷۲۰ مشتق تابع $f'(x) = 2x$ است. نقاط تماس را

$A(\alpha, \alpha^2 - 1)$ و $B(-\alpha, \alpha^2 - 1)$ فرض می‌کنیم. چون مماس‌های رسم

شده در این نقاط بر هم عمود هستند. داریم

$$f'(\alpha) \times f'(-\alpha) = -1 \Rightarrow (2\alpha) \times (-2\alpha) = -1 \Rightarrow 4\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{2}$$



۳ ۲۷۲۱

$$y = \frac{k}{2}x^2 - (k+2)x^2 \Rightarrow y' = \frac{rk}{2}x^2 - 2(k+2)x$$

$$y'' = rkx - 2(k+2) = 0 \Rightarrow x = \frac{2(k+2)}{rk} < 0 \Rightarrow k \in (-2, 0) \quad (1)$$

$$y < 0 \Rightarrow f\left(\frac{2(k+2)}{rk}\right) < 0 \Rightarrow k\left(\frac{2(k+2)}{rk}\right)^2 - (k+2)\left(\frac{2(k+2)}{rk}\right)^2 < 0$$

$$\left(\frac{2(k+2)}{rk}\right)^2 (k - (k+2)) < 0 \Rightarrow \left(\frac{2(k+2)}{rk}\right)^2 (k - (k+2)) < 0$$

$$\frac{-(k+2)}{3} < 0 \Rightarrow k+2 > 0 \Rightarrow k > -2 \quad (2), \quad (1) \cap (2) = (-2, 0)$$

فقط ۱- در بازه نهایی عددی صحیح است.

۴ ۲۷۲۲

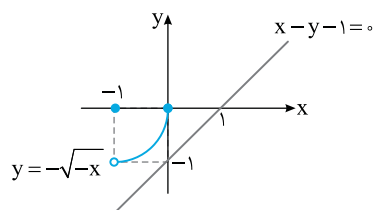
$$-x - [x^2] \geq 0 \Rightarrow -x \geq [x^2] \Rightarrow D_f = [-1, 0]$$

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & x \in (-1, 0) \\ 0 & x = -1, 0 \end{cases}$$

$$A(x, -\sqrt{-x}) \xrightarrow{x-y-1=0} d = AH = \frac{|x + \sqrt{-x} - 1|}{\sqrt{x+1}}$$

$$d' = \frac{|1 + \frac{-1}{2\sqrt{-x}}|}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2\sqrt{-x}} \Rightarrow \sqrt{-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

$$AH = \frac{|(-\frac{1}{4}) + \sqrt{\frac{1}{4}} - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$



۴ ۲۷۲۳

$$a, 1+2a, 5-a \Rightarrow 2(1+2a) = a+5-a \Rightarrow 2+4a = 5 \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\text{دنباله حسابی: } \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \Rightarrow d = \frac{y}{x} \Rightarrow a_1 = a_1 + \lambda d = \frac{3}{4} + 14 = 14 \frac{3}{4}$$

$$(۲), (۳) \Rightarrow -6a^2 - a + 3 = 1 - 3a^2 \Rightarrow 3a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$a = -1 \xrightarrow{(۱)} b \sin(-\pi) = -2 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{1}{2}$$

$$a = \frac{2}{3} \xrightarrow{(۱)} b \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

۱ ۲۷۳۹

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(l) = \frac{f'(l)g(l) - g'(l)f(l)}{g^2(l)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = (\sqrt{x+\lambda} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\lambda} + \sqrt{x}) = x + \lambda - x = \lambda$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(l) = 0 \Rightarrow f'(l)g(l) - g'(l)f(l) = 0$$

۲ ۲۷۴۰

$$\text{مشتق: } y' = \frac{m^2 - m - 2}{(x-1+m)^2} \leq 0 \Rightarrow (m-2)(m+1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq m \leq 2 \quad (۱)$$

$$\text{ریشهٔ مخرج: } 1 - m \leq 1 \Rightarrow m \geq 0 \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \xrightarrow{\cap} 0 \leq m \leq 2 \Rightarrow m = 0, 1$$

۴ ۲۷۴۱

$$\text{پیوستگی: } f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \Rightarrow \frac{1}{a} = ba + c \quad (۱)$$

$$\text{مشتق: } f'(x) = \begin{cases} b & x < a \\ -\frac{1}{x^2} & x > a \end{cases} \Rightarrow f'_+(a) = f'_-(a) \Rightarrow b = -\frac{1}{a^2} \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2} \times a + c \Rightarrow \frac{2}{a} = c \Rightarrow ac = 2$$

۳ ۲۷۴۲

$$f(-1) = -4 \Rightarrow -1 + a - b - 1 = -4 \Rightarrow a - b = -2 \quad (۱)$$

$$f''(-1) = 0 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2a \xrightarrow{x=-1} -6 + 2a = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$(۱) \Rightarrow b = 5 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{5} = 0.6$$

۲ ۲۷۴۳

$$r = \frac{a_\delta}{a_\varphi} = \frac{a_\lambda}{a_\varphi} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{x}{2x+1} \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = x^2 + x \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{x-1}{x+1} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \times \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4-2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{حاصل ضرب قدرنسبت ها} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \times \frac{-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{-2}{4-2} = -1$$

فرض کنید S رأس سهمی است. ۳ ۲۷۴۴

$$x_S = \frac{-a}{-1} = 2/5 \Rightarrow a = 2/5 \Rightarrow y = -5x^2 + 2.5x - 1$$

$$y_S = -5\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 2.5\left(\frac{2}{5}\right) - 1 = -\frac{12.5}{5} + \frac{12.5}{5} - 1 = \frac{12.5}{5} - 1 = \frac{9}{5} = 2.2/2.5$$

۲ ۲۷۳۳

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x \Rightarrow \sin x - \cos x = \pm \sqrt{1 - \sin 2x}$$

$$x = \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos x > \sin x \Rightarrow \sin x - \cos x < 0$$

$$\left(3 \cos \frac{\pi}{3} + \sqrt{2} \left(-\sqrt{1 - \sin \frac{\pi}{6}}\right)\right) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

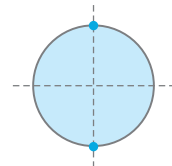
۳ ۲۷۳۴

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^4 \alpha + 4(1 - \sin^2 \alpha)}{2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\cos^4 \alpha + 4(1 - \cos^2 \alpha)}{2 - \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{\sin^4 \alpha - 4 \sin^2 \alpha + 4}{2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\cos^4 \alpha - 4 \cos^2 \alpha + 4}{2 - \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{(\sin^2 \alpha - 2)^2}{2 - \sin^2 \alpha} - \frac{(\cos^2 \alpha - 2)^2}{2 - \cos^2 \alpha} = (2 - \sin^2 \alpha) - (2 - \cos^2 \alpha) \\ &= \cos 2\alpha \end{aligned}$$

۴ ۲۷۳۵

$$1 - 2 \sin^2 x + \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \pm 1$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{مجموع جواب ها} = -4\pi$$



۱ ۲۷۳۶

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x^2 - [x^2]} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{x^2 - [x^2]} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{x^2 - 3} = 0$$

$$0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

۲ ۲۷۳۷

$$(f-g)(x) = \frac{4}{(x+3)(x-1)} - \frac{1}{x-1} = \frac{4 - (x+3)}{(x+3)(x-1)} = \frac{-x+1}{(x+3)(x-1)}$$

$$\text{مجاانب قائم: } x = -3$$

$$\text{مجاانب افقی: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x^2} = 0$$

پیوستگی را در نقطه‌ای مانند $x=1$ بررسی می‌کنیم. ۳ ۲۷۳۸

$$f(1) = b \sin \frac{\pi}{a} \quad (۱)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ((1-a)[x] + (3a^2 - 1)[-x])$$

$$= (1-a) - 2(3a^2 - 1) = 6a^2 - a + 3 \quad (۲)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ((1-a)[x] + (3a^2 - 1)[-x])$$

$$= 0 - (3a^2 - 1) = 1 - 3a^2 \quad (۳)$$

حالت دوم:

$$1-|a| < 1 \Rightarrow |a| > 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$2(1-|a|)-1 = (2+|a|)^2 - (2+|a|)-7$$

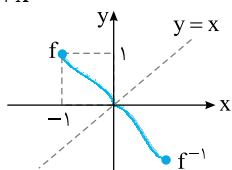
$$1-2|a| = |a|^2 + 2+2|a| - 2-|a|-7$$

$$|a|^2 + 5|a| - 6 = 0 \Rightarrow (|a|-1)(|a|+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |a|=1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ |a| = -6 \text{ غ قق} \end{cases}$$

۴ ۲۷۵۰

$$\begin{cases} 1+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \\ 1-\sqrt{1+x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1+x} \leq 1 \Rightarrow 1+x \leq 1 \Rightarrow x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = [-1, 0]$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{2\sqrt{1-\sqrt{1+x}}} < 0 \text{ نزولی اکید}$$



۲ ۲۷۵۱

$$\log(2-x) + \log(x-2)^2 = 2 \Rightarrow \log(2-x) + \log(2-x)^2 = 2$$

$$\log(2-x) = t$$

$$t + 2t = 2 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \log(2-x) = 1 \Rightarrow 2-x = 10 \Rightarrow x = -8$$

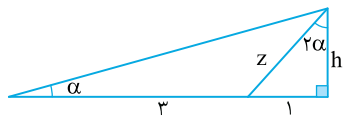
$$\log_{\sqrt{2}}(-x) = \log_{\sqrt{2}} 1 = \log_{\sqrt{2}} 2^r = r$$

۴ ۲۷۵۲

$$\tan \alpha = \frac{h}{f}, \quad \tan 2\alpha = \frac{1}{h} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\frac{1}{h} = \frac{2}{1 - \frac{h^2}{f^2}} \Rightarrow 1 - \frac{h^2}{f^2} = \frac{2h^2}{f^2} \Rightarrow \frac{f^2}{f^2} = \frac{3h^2}{f^2} \Rightarrow h^2 = \frac{f^2}{3} \Rightarrow h = \frac{f}{\sqrt{3}}$$

$$z^2 = h^2 + 1 \Rightarrow z^2 = \frac{f^2}{3} + 1 = \frac{f^2 + 3}{3} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{f^2 + 3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{h}{z} = \frac{f}{\sqrt{f^2 + 3}}$$



۱ ۲۷۵۳

$$3 \sin^2 x + a(1 - \sin^2 x) = 4 \Rightarrow (3-a) \sin^2 x = 4-a$$

$$\sin^2 x = \frac{4-a}{3-a} \Rightarrow 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\cot^2 x = \frac{3-a}{4-a} - 1 = \frac{-1}{4-a} = \frac{1}{a-4}$$

۴ ۲۷۵۴

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A}, \quad \hat{B} - \hat{C} = 60^\circ$$

$$\hat{B} = 90^\circ, \quad \hat{C} = 30^\circ, \quad \hat{A} = 60^\circ$$

$$\frac{1-2 \cos 120^\circ}{f \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^\circ = \tan \hat{C}$$

۴ ۲۷۴۵

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -(x+1)$$

$$x^{14} = ((x^2)^7) \times x^2 = ((-(x+1))^7) \times (-(x+1))$$

$$= (x^2 + 2x + 1)^7 \times (-x-1) = (-x-1+2x+1)^7 (-x-1)$$

$$= -x^7(x+1) = -x^7 \times x(x+1) = -(x+1)^7 x = (x^2 + 2x + 1)^7 x$$

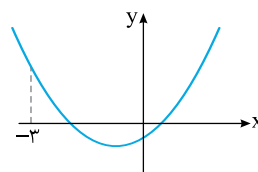
$$= x^2 = -x-1$$

$$2-x^{14} = 2+x+1 = 3+x \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}} 4$$

۲ ۲۷۴۶

$$f(-3) > 0 \Rightarrow 18 - 21 + m > 0 \Rightarrow m > 3$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow 49 - 4(2)(m) > 0 \Rightarrow m < \frac{49}{8} \Rightarrow m = 4, 5, 6$$



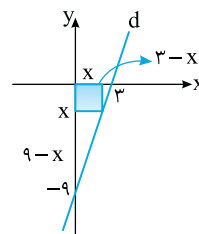
۳ ۲۷۴۷

$$d \text{ معادله خط: } y = 3x - 9$$

$$S = \frac{3 \times 9}{2} = x^2 + \frac{(3-x)x}{2} + \frac{(9-x)x}{2}$$

$$27 = 2x^2 + 3x - x^2 + 9x - x^2 \Rightarrow 12x = 27 \Rightarrow x = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$$

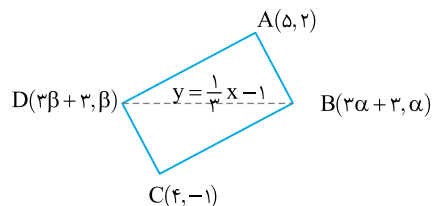
$$\text{قطر مربع} = \frac{9}{4} \sqrt{2} = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$



۱ ۲۷۴۸

$$\frac{\alpha-2}{3\alpha-2} \times \frac{\alpha+1}{3\alpha-1} = -1 \Rightarrow \alpha^2 - \alpha - 2 = -9\alpha^2 + 9\alpha - 2 \Rightarrow \alpha = 0, \quad \alpha = 1$$

$$\begin{cases} 5 + 4 = 3 + x_B \Rightarrow x_B = 6 \\ 9 = 6 + x_D \Rightarrow x_D = 3 \end{cases} \Rightarrow x_B - x_D = 3$$



۳ ۲۷۴۹

می‌دانیم همواره $2 + |a| \geq 2$

حالت اول:

$$1-|a| \geq 1 \Rightarrow |a| \leq 0 \Rightarrow a = 0 \xrightarrow{a=0} f(1) = f(2) \Rightarrow \text{برقرار نیست}$$

۳ ۲۷۵۵

چون f در $x=2$ پیوسته است، پس

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow 1 = 4a + 2b + 2 \Rightarrow 4a + 2b = -1$$

$$\begin{cases} a+b=-2 \\ 4a+2b=-1 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{3}{2}, \quad b=-\frac{7}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{3}{7} \Rightarrow \left[\frac{a}{b}\right] = -1$$

۲ ۲۷۵۹

$$f(x) = \frac{(1+\cos x)(1+\cos^2 x - 2\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$$

$$(f-2g)(x) = \frac{1+\cos^2 x - 2\cos x}{1-\cos x} - \frac{2}{1-\cos x}$$

$$= \frac{\cos x(\cos x - 2)}{(1-\cos x)} = -\cos x$$

$$(f-2g)'(x) = \sin x \xrightarrow{x=\frac{7\pi}{6}} \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

۴ ۲۷۶۰

$$f'(x) = \begin{cases} 0 \\ m(x-a)^{m-1} \Rightarrow m=1 \end{cases}$$

۲ ۲۷۶۱

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x(1-x)} & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x(1+x)} & x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}} & 0 < x < 1 \\ \frac{1+2x}{2\sqrt{x(1+x)}} & x < -1 \end{cases}$$

$$x=0, \quad x=1, \quad x=-1, \quad x=\frac{1}{2}$$

$$m=1, \quad n=0, \quad k=4 \Rightarrow m+n+k=1+0+4=5$$

۱ ۲۷۶۲

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_2}{t_1} \Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{2-x}{x-1} \Rightarrow 2x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

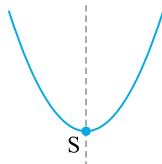
$$r = \frac{x}{x+1} \Rightarrow r_1 = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1} = \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}, \quad r_2 = \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1} = \frac{1-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$$

$$r_1 + r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} + \frac{1-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{(3-\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5) + (3-3\sqrt{5}+\sqrt{5}-5)}{9-5} = -\frac{4}{4} = -1$$

۱ ۲۷۶۳

$$x_S = -\frac{y}{2a} = -\frac{y}{2a} \Rightarrow -\frac{y}{2a} = -\frac{y}{10} \Rightarrow a=5$$

$$y_S = 5(-\frac{1}{5})^2 + 7(-\frac{1}{5}) - 1 = \frac{2}{5} - \frac{4}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$$



$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = -\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\pi - (x + \frac{\pi}{4})) = \cos(\frac{3\pi}{4} - x)$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm (\frac{3\pi}{4} - x) \Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} + x \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$		
k	°	$\frac{\pi}{3}$
x	-1	$-\frac{\pi}{3}$

$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$		
k	°	
x		$-\frac{\pi}{2}$

چون حد مخرج برابر صفر است، پس حد صورت نیز باید

صفر باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (a + \sqrt{(bx+1)(cx+1)}) = 0 \Rightarrow a+1=0 \Rightarrow a=-1$$

$$\text{Hop: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2bcx + (b+c)}{2\sqrt{bcx^2 + (b+c)x + 1}} = \frac{b+c}{2} = 2 \Rightarrow b+c=4$$

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = -b - c = -4$$

۳ ۲۷۵۷

$$3x^2 - 8x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 64 - 4(3)(-3) = 100 \Rightarrow x = \frac{8 \pm 10}{6} = 3, -\frac{1}{3}$$

حالت اول: مخرج ریشه مضاعف دارد.

$$\Delta_{\text{مخرج}} = 0 \Rightarrow (1-a)^2 - 4a(a+1) = 1 + a^2 - 2a - 4a^2 - 4a = -3a^2 - 6a + 1 = 0$$

$$-3a^2 - 6a + 1 = 0$$

$$\Delta = 36 + 12 = 48 \Rightarrow a = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{-6} = -1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

حالت دوم: مخرج درجه اول است.

حالت سوم: مخرج دو ریشه دارد که یکی از آنها ریشه صورت است.

$$\Delta = (1-a)^2 - 4a(a+1) > 0 \Rightarrow -3a^2 - 6a + 1 > 0$$

$$x=3 \Rightarrow 9a + 3 - 3a + a + 1 = 0 \Rightarrow 7a = -4 \Rightarrow a = -\frac{4}{7}$$

$$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{9}a - \frac{1}{3} + \frac{a}{3} + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow 4a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

۱ ۲۷۵۸

مجهول داریم، پس دو مقدار برای C در نظر می‌گیریم:

$$c=1 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} |x-1| & -1 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 2 & x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$$

چون f در $x=1$ پیوسته است، پس

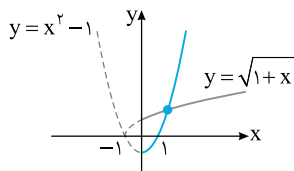
$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow 0 = a + b + 2 \Rightarrow a + b = -2$$

$$c=2 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} |x-1| & -2 \leq x \leq 2 \\ ax^2 + bx + 2 & x < -2 \text{ یا } x > 2 \end{cases}$$

۲۷۶۹ ۴ یک تابع وارون خود را روی خط $y=x$ قطع می‌کند.

$$1+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -1, \quad 1+\sqrt{1+x} \geq 0 \text{ همیشه}$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}}=x \xrightarrow{x \geq 0} 1+\sqrt{1+x}=x^2 \Rightarrow \sqrt{1+x}=x^2-1$$



۲۷۷۰ ۱

$$\log(x^2 - 2x + 1) + 3 \log(1-x) = 5 \Rightarrow \log(1-x)^2 + \log(1-x)^3 = 5$$

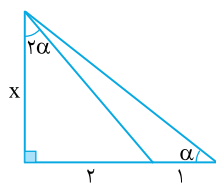
$$\log(1-x)^2 (1-x)^3 = 5 \Rightarrow (1-x)^5 = 10^5 \Rightarrow 1-x = 10 \Rightarrow -x = 9$$

$$\log_3(-x) = \log_3 9 = 2$$

۲۷۷۱ ۲

$$\begin{cases} \tan 2\alpha = \frac{2}{x} \\ \tan \alpha = \frac{x}{3} \end{cases} \xrightarrow{\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}} \frac{2}{x} = \frac{2(\frac{x}{3})}{1 - \frac{x^2}{9}} \Rightarrow 1 - \frac{x^2}{9} = \frac{x^2}{3}$$

$$1 = \frac{4}{9}x^2 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2$$



۲۷۷۲ ۴ صورت و مخرج را بر $\sin x$ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{3 \cot x - 1}{\cot x + 1} = \frac{3(\frac{1}{\sin x}) - 1}{\frac{1}{\sin x} + 1} = \frac{11}{5} = 2/2$$

۲۷۷۳ ۳ اختلاف $\hat{C}$ و $\hat{B}$ باید 6° درجه باشد. با فرض $\hat{B} = 6^\circ$ و داریم $\hat{C} = 0^\circ$

$$\cot(\hat{B} - \hat{C}) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot 6^\circ \Rightarrow \frac{2 \cos(6^\circ + 0^\circ) + 1}{4 \sin 6^\circ \cos 0^\circ} = \frac{2(\frac{1}{2}) + 1}{4(\frac{\sqrt{3}}{2})(1)}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot 6^\circ = \cot \hat{B}$$

۲۷۷۴ ۲

$$\cos(x - \frac{\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{6} - x) = \cos(\pi - \frac{\pi}{6} + x) = \cos(\frac{5\pi}{6} + x)$$

$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{5\pi}{6} - x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} + x \Rightarrow -\frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \text{ (غ ق)} \end{cases}$$

$$\text{جمع} = 3\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

۲۷۶۴ ۲

$$x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

طرفین را در $x+1$ ضرب می‌کنیم.

$$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 \\ x^2 = x - 1 \end{cases}$$

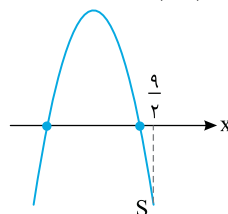
$$x^{14} - 5 = (x^2)^5 \times x^2 - 5 = (-1)^5 (x-1) - 5 = -x + 1 - 5 = -x - 4$$

$$r(x) = -x - 4 \Rightarrow \text{حاصل ضرب ضرایب} = (-1)(-4) = 4$$

۲۷۶۵ ۳

$$\begin{cases} f(\frac{9}{4}) < 0 \Rightarrow -(\frac{9}{4})^2 + 5(\frac{9}{4}) + m < 0 \Rightarrow -\frac{81}{16} + \frac{45}{4} + m < 0 \\ m < -\frac{9}{4} = -2.25 \\ \Delta > 0 \Rightarrow 25 + 4m > 0 \Rightarrow m > -\frac{25}{4} = -6.25 \end{cases}$$

$$-6.25 < m < -2.25 \Rightarrow m = -6, -5, -4, -3$$



۲۷۶۶ ۲ ابتدا معادله خط را می‌نویسیم و سپس مختصات نقطه

$(-x, -x)$ را در آن قرار می‌دهیم.

$$y = -8x - 6 \Rightarrow -x = -8(-x) - 6 \Rightarrow 9x = 6 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\text{قطر} = \sqrt{2}x = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

۲۷۶۷ ۳

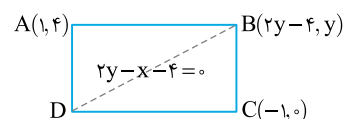
$$\text{شرط } x = 2y - 4 > 0 \Rightarrow y > 2$$

$$m_{AB} \times m_{BC} = -1 \Rightarrow \frac{y-f}{2y-5} \times \frac{y}{2y-3} = -1$$

$$-y^2 + 4y = 4y^2 - 16y + 15 \Rightarrow y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$x = 2 \Rightarrow B(2, 3) \xrightarrow{C(-1, 0)} |BC| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \text{ طول}$$

$$B(2, 3), A(1, 4) \Rightarrow |AB| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ عرض}$$



۲۷۶۸ ۲

ابتدا توجه کنید که

$$|1+a^2| = 1+a^2 > 1 \Rightarrow f(1+a^2) = 7-3(1+a^2)$$

$$\left| \frac{-a^2}{1+a^2} \right| = \frac{a^2}{1+a^2} < 1 \Rightarrow f\left(\frac{-a^2}{1+a^2}\right) = -2\left(\frac{-a^2}{1+a^2}\right)$$

$$f(1+a^2) = f\left(\frac{-a^2}{1+a^2}\right) \Rightarrow 7-3(1+a^2) = -2\left(\frac{-a^2}{1+a^2}\right) \Rightarrow 4-3a^2 = \frac{2a^2}{1+a^2}$$

$$\xrightarrow{a^2=t>0} 3t^2 + t - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

۴ ۲۷۷۵

$x = 0$ ریشهٔ مخرج است، اما چون حد وجود دارد، پس $x = 0$ ریشهٔ صورت نیز هست.

$$a + \sqrt{c} = 0 \Rightarrow a = -\sqrt{c}$$

$$\text{Hop: } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{c}}} \frac{b}{\sqrt{bx+c}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{c}}} \Rightarrow \frac{b}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{c}}} \Rightarrow b = \sqrt{c} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{c}}{2}$$

$$\frac{ab}{c} = \frac{-\sqrt{c} \times \frac{\sqrt{c}}{2}}{c} = \frac{-\frac{1}{2}c}{c} = -\frac{1}{2}$$

۱ ۲۷۷۶

سه حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: مخرج خط باشد. در این حالت $a = 0$ و یک جواب داریم.

حالت دوم: مخرج ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

$$\Delta = (a-2)^2 - 16a = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 4 - 16a = 0$$

$$a^2 - 20a + 4 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \text{دو جواب}$$

حالت سوم: یکی از ریشه‌های صورت ریشهٔ مخرج هم باشد.

$$2x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}, a = -2 \Rightarrow \text{دو جواب}$$

۲ ۲۷۷۷

ابتدا ضابطهٔ تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} |x-2| & -c+2 \leq x \leq c+2 \\ a(x-2)^2 + b(x-2) & x > c+2 \text{ یا } x < -c+2 \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{cases} x = c+2 \Rightarrow c = ac^2 + bc \Rightarrow 1 = ac + b \\ x = -c+2 \Rightarrow c = ac^2 - bc \xrightarrow{c \neq 0} 1 = ac - b \end{cases} \Rightarrow ac = 1 \Rightarrow [ac] = 1$$

از سوی دیگر، اگر $c = 0$ ، آن‌گاه $ac = 0$ و در نتیجه $[ac] = 0$. بنابراین $[ac]$ دو مقدار صفر و ۱ را دارد.

۳ ۲۷۷۸

$$(3g-f)(x) = \frac{9}{3+\sin x} - \frac{(3-\sin x)(9+3\sin x + \sin^2 x)}{(3-\sin x)(3+\sin x)}$$

$$= \frac{-\sin x(3+\sin x)}{(3+\sin x)} = -\sin x$$

$$(3g-f)'(\frac{5\pi}{3}) = -\cos(\frac{5\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

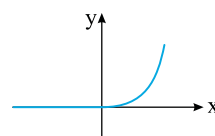
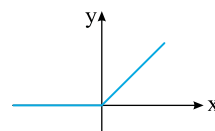
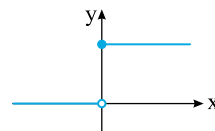
۱ ۲۷۷۹

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^m & x \geq 0 \end{cases}$$

$$m = 0 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$m = 1 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

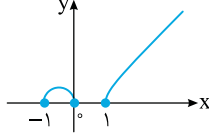
$$m = 2 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$



۴ ۲۷۸۰

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-x} & x \geq 0 \Rightarrow D: x \geq 1 \\ \sqrt{-x^2-x} & x < 0 \Rightarrow D: -1 \leq x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = [-1, 0] \cup [1, \infty)$$

$$m=1, n=0, k=4 \Rightarrow \frac{km+n}{k-n} = \frac{4}{4} = 1$$



۲ ۲۷۸۱

$$S_q = \gamma^3 S_r, \frac{a_r}{a_1} = r^2 = ?$$

$$\frac{S_q}{S_r} = \frac{\frac{a_1(1-r^4)}{1-r}}{\frac{a_1(1-r^3)}{1-r}} = \frac{1-r^4}{1-r^3} \xrightarrow{r^2=t} \frac{1-t^2}{1-t} = t^2+t+1 = \gamma^3$$

$$t^2+t-72=0 \Rightarrow (t-8)(t+9)=0 \Rightarrow t=8, t=-9$$

$$t=8 \Rightarrow r^2=8 \Rightarrow r=2\sqrt{2} \notin \mathbb{Z} \checkmark, t=-9 \Rightarrow r^2=-9 \Rightarrow r=\sqrt{-9} \notin \mathbb{Z} \times$$

$$\frac{a_r}{a_1} = r^2 = 4$$

بنابراین

۴ ۲۷۸۲

$$x^2 + \frac{1}{x^2+1} = 9 \Rightarrow (x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} = 10 \xrightarrow{\text{توان 2}} (x^2+1)^2 + 2(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} = 10^2$$

$$(x^2+1)^2 + 2(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} = 10^2$$

$$(x^2+1)^2 + \frac{100}{(x^2+1)^2} + 20 = 100 \Rightarrow (x^2+1)^2 + \frac{100}{(x^2+1)^2} = 80$$

۳ ۲۷۸۳

ابتدا توجه کنید که

$$S = \alpha + \beta = 5 \Rightarrow \alpha = 5 - \beta$$

$$\beta^2 - 5\beta + 2 = 0 \Rightarrow \beta^2 = 5\beta - 2 \Rightarrow 5\beta^2 = 25\beta - 10$$

$$\beta^4 = (5\beta - 2)^2 = 25\beta^2 - 20\beta + 4$$

$$= 25(5\beta - 2) - 20\beta + 4 = 125\beta - 50 - 20\beta + 4 = 105\beta - 46$$

$$\beta^5 = 105\beta^2 - 46\beta = 105(5\beta - 2) - 46\beta = 479\beta - 210$$

بنابراین

$$\frac{4\alpha + \beta^5}{5\beta^2} = \frac{(20-4\beta) + (479\beta - 210)}{25\beta - 10} = \frac{459\beta - 190}{25\beta - 10} = \frac{19(25\beta - 10)}{25\beta - 10} = 19$$

۳ ۲۷۸۴

برای اینکه تابع داده شده بیشترین مقدار را اختیار کند، باید مقدار عبارت زیر رادیکال کمترین مقدار ممکن باشد.

$$mx^2 - 8x + 39 \xrightarrow{\text{رأس}} x_S = -\frac{-8}{2m} = \frac{4}{m}$$

پس کمترین مقدار عبارت زیر رادیکال به ازای $x = \frac{4}{m}$ رخ می‌دهد.

$$f\left(\frac{4}{m}\right) = 1 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{m\left(\frac{16}{m^2}\right) - 8\left(\frac{4}{m}\right) + 39}} = 1$$

$$\frac{16}{m} - \frac{32}{m} + 39 = 25 \Rightarrow -\frac{16}{m} = -14 \Rightarrow m = \frac{14}{9} \Rightarrow [m] = 1$$

۲۷۹۱

$$a = \sqrt{(2\sqrt{y})^2 - (\sqrt{y})^2} = \sqrt{2y - y} = \sqrt{y}$$

$$h = \sqrt{(2\sqrt{y})^2 - 4^2} = \sqrt{2y - 16} = \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{y} = \frac{\sqrt{21}}{2x+8} \Rightarrow 4\sqrt{3}x + 16\sqrt{3} = \sqrt{21}y$$

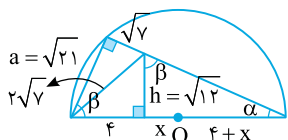
$$\tan \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{2x+4} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{y+y}} \Rightarrow 2\sqrt{21} + 2\sqrt{3}y = 2\sqrt{21}x + 4\sqrt{21}$$

$$2\sqrt{21} = 2\sqrt{3}y - 2\sqrt{21}x \xrightarrow{\times \sqrt{y}} 14\sqrt{3} = 2\sqrt{21}y - 14\sqrt{3}x$$

$$14\sqrt{3} = 2(4\sqrt{3}x + 16\sqrt{3}) - 14\sqrt{3}x = 8\sqrt{3}x + 32\sqrt{3} - 14\sqrt{3}x$$

$$= 32\sqrt{3} - 6\sqrt{3}x \Rightarrow 6\sqrt{3}x = 32\sqrt{3} - 14\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \Rightarrow x = 3$$

$$\tan \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{2x+4} = \frac{2\sqrt{3}}{6+4} = \frac{2}{5}$$



چون مقدار حد وجود دارد و $X=0$ ریشه مخرج است، پس

$$k + \cos 0 = 0 \Rightarrow k = -1 \quad \text{بنابراین}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos(\sqrt{ax})}{-x^2} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{a} \sin(\sqrt{ax})}{-2x}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \cos(\sqrt{ax})}{-2} = \frac{-a}{-2} = 3 \Rightarrow a = 6$$

$$\frac{a}{k} = \frac{6}{-1} = -6$$

بنابراین

چون $\lim_{x \rightarrow -a} f(x) = -\infty$ پس $x = -a$ ریشه مضاعف

مخرج است، یعنی $x = -a$ ریشه $mx^2 - 2$ نیز هست.

$$m(-a) - 2 = 0 \Rightarrow ma = -2 \Rightarrow m = -\frac{2}{a}, \quad a \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^2 x^2 - 2x + 1}{(x+a)(mx^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^2 x^2}{mx^2} = \frac{a^2}{m} = -4$$

$$\frac{a^2}{-\frac{2}{a}} = -4 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

ابتدا توجه کنید که

$$x \rightarrow \pi^- \Rightarrow x - \pi \rightarrow 0^- \Rightarrow [x - \pi] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cot x}{[x - \pi]} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} (-\cot x) = +\infty$$

بنابراین

چون $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود و تابع روی $\mathbb{R} - \{a\}$ پیوسته

است، پس $x = a$ ریشه صورت و مخرج است:

$$\sqrt{3}|a^2 + a| = 0 \Rightarrow a^2 + a = 0 \Rightarrow a = -1, a = 0$$

توجه کنید که اگر $a = 0$ ، آن گاه $f(x) = 0$ پس $a = -1$ قابل قبول است و داریم

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x^2 + (m-2)x + 1|}$$

$$x = -1 \Rightarrow |(-1)^2 - (m-2)(-1) + 1| = 0 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x^2 + 1|}$$

۲۷۸۵

$$p(x) = x^5 + ax^2 = x^2(x^3 + a)$$

$$q(x) = x^5 + 3x^2 + 2x^2 = x^2(x^3 + 3x + 2) = x^2(x+1)(x+2)$$

$$x^n + x^2 = (p(x), q(x)) = \begin{cases} x^2(x+1) = x^3 + x^2 \quad \checkmark \\ x^2(x+2) = x^3 + 2x^2 \quad \times \end{cases}$$

$$a = -1, n = 2 \Rightarrow na = -2$$

بنابراین

۲۷۸۶

بر حسب محدوده X ، چهار حالت در نظر می گیریم:

$$x \in [-2, -1] \Rightarrow f(x) = x + 1 \in [-1, 0] \Rightarrow (f \circ f)(x) = (x+1) + 1$$

$$= x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \quad \checkmark$$

$$x \in (-1, 0) \Rightarrow f(x) = x + 1 \in [0, 1] \Rightarrow (f \circ f)(x) = (x+1) - 1 = x = 0 \quad \times$$

$$x \in [0, 1] \Rightarrow f(x) = x - 1 \in [-1, 0] \Rightarrow (f \circ f)(x) = (x-1) + 1 = x = 0 \quad \checkmark$$

$$x \in [1, 2] \Rightarrow f(x) = x - 1 \in [0, 1] \Rightarrow (f \circ f)(x) = (x-1) - 1$$

$$= x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \checkmark$$

پس معادله $(f \circ f)(x) = 0$ سه جواب دارد.

۲۷۸۷

یک تابع وارون خود را روی خط $y = x$ قطع می کند. پس

$$f(a) = a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = \frac{f(a)}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

۲۷۸۸

$$\log(3x+1) = (\log 5)^2 - (\log 2)^2 = (\log 5 + \log 2)(\log 5 - \log 2)$$

$$= (\log 10)(\log \frac{5}{2}) = \log \frac{5}{2}$$

$$3x+1 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \log \sqrt{\frac{1}{2}} = \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \log 2 = -\frac{1}{2} \times 2 \log 2 = -2$$

۲۷۸۹

$$\frac{\cot \alpha}{\sin \alpha} > 0 \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} > 0 \Rightarrow 0 < \cos \alpha < 1 \Rightarrow \text{ناحیه اول یا چهارم}$$

$$2 \sin \alpha < \sin 2\alpha \Rightarrow 2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha < 0$$

$$2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha) < 0 \Rightarrow \sin \alpha < 0 \Rightarrow \text{ناحیه سوم یا چهارم}$$

بنابراین انتهای کمان α در ناحیه چهارم قرار دارد.

۲۷۹۰

$$\frac{\sin(-285^\circ) + 2 \cos(-105^\circ)}{2 \sin(165^\circ) + 3 \sin(375^\circ)} = \frac{-\sin(270^\circ + 15^\circ) + 2 \cos(90^\circ + 15^\circ)}{2 \sin(180^\circ - 15^\circ) + 3 \sin(360^\circ + 15^\circ)}$$

$$= \frac{\cos 15^\circ - 2 \sin 15^\circ}{2 \sin 15^\circ + 3 \sin 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - 2 \sin 15^\circ}{5 \sin 15^\circ} = \frac{\cot 15^\circ - 2}{5}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{3} - 2}{5} = \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

توجه:

$$\tan 30^\circ = \frac{2 \tan 15^\circ}{1 - \tan^2 15^\circ} \xrightarrow{\text{ضرب و تقسیم در}} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cot 15^\circ}{\cot^2 15^\circ - 1}$$

$$\cot^2 15^\circ - 2\sqrt{3} \cot 15^\circ - 1 = 0$$

$$\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4(1)(-1) = 12 + 4 = 16 \Rightarrow \cot 15^\circ = \frac{2\sqrt{3} + 4}{2} = \sqrt{3} + 2$$

2 2796

၁ ၃၈၀၃

۴ ۲۷۹۷

1 ۲۷۹۸

چون $X \in [0, a]$ ، پس

$$\sqrt{\frac{(\gamma a)}{\Delta}} \times \sqrt{a} = \frac{\Delta}{\gamma} \Rightarrow \sqrt{\frac{fa^{\Delta}}{\gamma \Delta}} = \frac{\Delta}{\gamma} \Rightarrow \frac{fa^{\Delta}}{\gamma \Delta} = \frac{1 \gamma \Delta}{\Delta} \Rightarrow a^{\Delta} = \left(\frac{\Delta}{\gamma}\right)^{\Delta} \Rightarrow a = \gamma / \Delta$$

۲۸۱۰

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{3} \cos(21^\circ) \sin(243^\circ) - \sqrt{2} \sin(135^\circ) \cos(153^\circ) \\ &= \sqrt{3} \cos(18^\circ + 3^\circ) \sin(270^\circ - 27^\circ) \\ &\quad - \sqrt{2} \sin(90^\circ + 45^\circ) \cos(180^\circ - 27^\circ) \\ &= \sqrt{3} (-\cos 3^\circ) (-\cos 27^\circ) - \sqrt{2} \sin 45^\circ (-\cos 27^\circ) \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cos 27^\circ + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cos 27^\circ = \frac{5}{2} \cos 27^\circ \end{aligned}$$

۲۸۱۱

$$\tan 2x + \tan 3x = \tan 5\pi \Rightarrow \tan 3x = -\tan 2x = \tan(-2x)$$

$$3x = -2x + k\pi \Rightarrow 5x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5}$$

k	۱	۲	۳	۴
x	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$

۲۸۱۲

باید عامل $x = 3a$ از صورت و مخرج ساده شود:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{2\sqrt{x-3a} + 3\sqrt{x} - \sqrt{27a}}{\sqrt{x^2-9a^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{2\sqrt{x-3a} + 3(\sqrt{x} - \sqrt{3a})}{\sqrt{(x+3a)(x-3a)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3a^+} \left(\frac{2\sqrt{x-3a}}{\sqrt{(x+3a)(x-3a)}} + \frac{3(\sqrt{x} - \sqrt{3a})}{\sqrt{x^2-9a^2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3a^+} \left(\frac{2}{\sqrt{x+3a}} + \frac{3(\sqrt{x} - \sqrt{3a})}{\sqrt{x^2-9a^2}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3a}}{\sqrt{x} + \sqrt{3a}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3a^+} \left(\frac{2}{\sqrt{x+3a}} + \frac{3(x-3a)}{(\sqrt{x} + \sqrt{3a})\sqrt{x+3a}\sqrt{x-3a}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3a^+} \left(\frac{2}{\sqrt{x+3a}} + \frac{3\sqrt{x-3a}}{(\sqrt{x} + \sqrt{3a})\sqrt{x+3a}} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3a+3a}} + \frac{3\sqrt{3a-3a}}{(\sqrt{3a} + \sqrt{3a})\sqrt{3a+3a}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{6a+3a}} + 0 = \frac{2}{\sqrt{9a}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9a}} = \sqrt{\frac{4}{9a}} = \sqrt{\frac{2}{3a}} \end{aligned}$$

چون مقدار حد برابر $+\infty$ شده است، پس $\sqrt[3]{4}$ ریشه مضاعف مخرج است.

$$(x - \sqrt[3]{4})^2 = x^2 - 2\sqrt[3]{4}x + 2\sqrt[3]{4} = x^2 + ax + b \Rightarrow a = -2\sqrt[3]{4}, b = 2\sqrt[3]{4}$$

$$\left[\frac{b}{a}\right] = \left[\frac{2\sqrt[3]{4}}{-2\sqrt[3]{4}}\right] = \left[-\frac{2\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[3]{4}}\right] = \left[-\frac{1}{1}\right] = \left[-\left(\frac{1}{1}\right)\right] = \left[-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right] = -1$$

$$f(x) = -\frac{a}{2}x + a \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{2}{a}x + 2$$

۲۸۱۴

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(x)}{|2f(x) - af^{-1}(x)|} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{2}{a}x + 2}{|2(-\frac{a}{2}x + a) - a(-\frac{2}{a}x + 2)|} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{2}{a}x + 2}{|(-ax + 2a) + (2x - 2a)|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{2}{a}x + 2}{|(2-a)x|} = \frac{-\frac{2}{a}}{2-a} \end{aligned}$$

۲۸۰۵ ابتدا توجه کنید که

• به ازای $x > 2$ ، $f(x) = x + 1$ که همواره مثبت است.

• به ازای $x \leq 2$ ، $f(x) = -3x + 7$ که همواره مثبت است.

پس همواره $f(x) > 0$. بنابراین ضابطه دوم تابع g اصلاً اتفاق نمی‌افتد و داریم

$$\forall x \in \mathbb{R}: g(x) = -x + 4 \Rightarrow f(g(-4)) = f(4 + 4) = f(8) = 8 + 1 = 9$$

۲۸۰۶

$$f(x) = 6x - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 1 = 6x - (x+2)\sqrt{x} + 1$$

چون $f(a) = (f \circ f)(a) = a$ و f در یک همسایگی a وارون پذیر است، پس

$$f(a) = f^{-1}(a) = a \Rightarrow f(a) = 6a - (a+2)\sqrt{a} + 1 = a$$

$$5a + 1 - (a+2)\sqrt{a} = 0 \Rightarrow 5(a+2) - (a+2)\sqrt{a} = 0$$

$$(a+2)(5 - \sqrt{a}) = 0 \Rightarrow a = -2 \text{ یا } a = 25$$

$a = 25$ قابل قبول است چون -2 در دامنه تابع f نیست.

$$f(25 - 9) = f(16) = 96 - 4(18) + 1 = 34$$

۲۸۰۷

مجاناب قائم عبارت جلوی لگاریتم را صفر می‌کند. پس

$$a(-\frac{1}{2}) + b = 0 \Rightarrow 2b = a$$

$$f(4) = \log_2(4a + b) = 2 \Rightarrow 4a + b = 9 \Rightarrow 4b + b = 9 \Rightarrow b = 1, a = 2$$

$$f(x) = \log_2(2x + 1) = -2 \Rightarrow 2x + 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{3}{8} \Rightarrow f^{-1}(-2) = -\frac{3}{8}$$

۲۸۰۸

$$\begin{aligned} (1 + \cos \alpha) \left(\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha} \right) &= (1 + \cos \alpha) \left(\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\tan^2 \alpha}} \right) \\ &= (1 + \cos \alpha) \left(\left| \frac{1}{\sin \alpha} \right| + \frac{1}{\tan \alpha} \right) = (1 + \cos \alpha) \left(-\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \\ &= (1 + \cos \alpha) \left(\frac{-1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{(\cos \alpha - 1)(\cos \alpha + 1)}{\sin \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin \alpha} = \frac{-\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = -\sin \alpha \end{aligned}$$

۲۸۰۹

توجه کنید که $12^\circ + 18^\circ = 30^\circ$ پس

$$\tan(\alpha + 12^\circ) = \tan(\alpha + 12^\circ + 18^\circ - 18^\circ) = \tan((\alpha - 18^\circ) + 30^\circ)$$

$$= \frac{\tan(\alpha - 18^\circ) + \tan 30^\circ}{1 - \tan(\alpha - 18^\circ) \tan 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

فرض کنید $\tan(\alpha - 18^\circ) = A$. در این صورت

$$\frac{A + \frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{4}A} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 4A + \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} - A \Rightarrow 5A = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A = \tan(\alpha - 18^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{15}$$

$$\cot(18^\circ - \alpha) = -\cot(\alpha - 18^\circ) = \frac{-1}{\tan(\alpha - 18^\circ)}$$

$$= \frac{-1}{-\frac{\sqrt{3}}{15}} = \frac{15}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$$

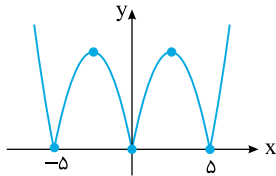
$$\text{مشتق پذیری: } \begin{cases} f'_+(1) = \frac{2b}{3} \\ f'_-(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{2b}{3} = 1 \Rightarrow b = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$a + b = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \text{ در نتیجه}$$

۱ ۲۸۱۸

$$f(x) = x^2 - \delta|x| = \begin{cases} x^2 - \delta x & x \geq 0 \\ x^2 + \delta x & x \leq 0 \end{cases}$$

$$n=3, \quad m=2 \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{3}{2}$$



۴ ۲۸۱۹

۲ ۲۸۲۰

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(1)(1) = 5 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{8x^3 - 36x^2 + 54x - 27}{8x^2 - 24x + 18} = \frac{(2x-3)^3}{2(4x^2 - 12x + 9)} = \frac{(2x-3)^3}{2(2x-3)^2} = \frac{2x-3}{2}$$

$$= \frac{2(\frac{3+\sqrt{5}}{2}) - 3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

۳ ۲۸۲۱

$$y = m(x - (\alpha - 1))^2 + (\alpha + 1) \Rightarrow S(\alpha - 1, \alpha + 1) \text{ رأس}$$

نقاط A و B هم عرض هستند، پس میانگین طول‌های آن‌ها برابر طول رأس سهمی است:

$$x_S = \frac{(2b-1) + (2b-1)}{2} = 2b - 1 \Rightarrow \alpha = 2b + 1$$

$$2b - 1 > 0 \Rightarrow b > \frac{1}{2}, \quad 2b + 1 > 0 \Rightarrow b > -\frac{1}{2}, \quad 2b - b^2 > 0 \Rightarrow 0 < b < 2$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} b = 1 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow A(3, 1)$$

$$y = m(x-2)^2 + 4 \xrightarrow{A(3,1)} 1 = m(3-2)^2 + 4 \Rightarrow m = -3$$

۲ ۲۸۲۲

$$(a \log 2)x^2 + ax + b \log 2 = 0 \xrightarrow{x=-1} a \log 2 - a + b \log 2 = 0$$

$$a(1 - \log 2) = b \log 2 \Rightarrow a \log 5 = b \log 2 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\log 5}{\log 2} = \log_2 5$$

$$(\sqrt{2})^{\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

۴ ۲۸۲۳ معادله داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$4|x - \frac{1}{2}| = (x - \frac{1}{2})^2 + (a - \frac{1}{4}) \Rightarrow |x - \frac{1}{2}|^2 - 4|x - \frac{1}{2}| + (a - \frac{1}{4}) = 0$$

اگر $t = |x - \frac{1}{2}|$ ، آن‌گاه معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$t^2 - 4t + (a - \frac{1}{4}) = 0$$

$$\frac{-2}{a-2} = \frac{-2}{a(a-2)} = 2 \Rightarrow a(a-2) = -1 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{2}{a-2} = \frac{2}{a(a-2)} = 2 \Rightarrow a(a-2) = 1 \Rightarrow a^2 - 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$$

۴ ۲۸۱۵

$$\lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{x^2 + |x|}{x^2 + a|x|} = \lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{x^2 + x}{x^2 + ax} = \lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{2x+1}{2x+a} = \frac{1}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{x^2 + |x|}{x^2 + a|x|} = \lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{x^2 - x}{x^2 - ax} = \lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{2x-1}{2x-a} = \frac{1}{a}$$

$$f(0) = \frac{2a-1}{2a+2} = \frac{1}{a} \Rightarrow 2a^2 - a = 2a + 2 \Rightarrow 2a^2 - 3a - 2 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-2) = 25 \Rightarrow a = \frac{3 \pm 5}{4} = 2, -\frac{1}{2}$$

با $a=2$ همواره مخرج $f(x)$ ناصفر و تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. پس این مقدار قابل قبول است.

$$a=2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x^2 + x}{x^2 + 2x} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$$

۳ ۲۸۱۶

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cot(\frac{\pi-x}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \tan \frac{x}{2}}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{x - \frac{\pi}{2}} \times \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{x - \frac{\pi}{2}} \times 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos 2x}{1} = 2 \cos 2(\frac{\pi}{2}) = 2 \cos \pi = -2$$

۴ ۲۸۱۷ ضابطه تابع f را بازنویسی کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} a+|x| & x < 1 \\ \frac{2}{bx^2} & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} a-x & x \leq 0 \\ a+x & 0 < x \leq 1 \\ \frac{2}{bx^2} & x \geq 1 \end{cases}$$

نقطه $x=0$ تنها نقطه مشتق‌ناپذیری تابع f است و تابع f در نقطه $x=1$ مشتق دارد.

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \\ \frac{2b}{3\sqrt{x}} & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} bx^{\frac{2}{3}} = b \Rightarrow a+1=b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (a+x) = a+1$$

۲ ۲۸۲۹

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{2} \cos(135^\circ) \cos(297^\circ) + \sqrt{3} \cos(63^\circ) \sin(12^\circ) \\ &= \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cos(270^\circ + 27^\circ) + \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cos(90^\circ - 27^\circ) \\ &= -\sin 27^\circ + \frac{3}{2} \sin 27^\circ = \frac{\sin 27^\circ}{2} \\ 2A &= 2 \left(\frac{\sin 27^\circ}{2}\right) = \sin 27^\circ \end{aligned}$$

۲ ۲۸۳۰

$$\begin{aligned} \tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \tan(2x - \pi) &= \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \tan(2x) &= 0 \Rightarrow \tan(2x) = \tan\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) \\ 2x &= \frac{\pi}{3} - 3x + k\pi \Rightarrow 5x = \frac{(3k+1)\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(3k+1)\pi}{15} \end{aligned}$$

k	۰	۱	۲	۳	۴
x	$\frac{\pi}{15}$	$\frac{4\pi}{15}$	$\frac{7\pi}{15}$	$\frac{10\pi}{15}$	$\frac{13\pi}{15}$

۴ ۲۸۳۱

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{r}{a}\right)^+} \frac{\sqrt{x - \frac{r}{a}} + \sqrt{x - \frac{r}{a}} \sqrt{\frac{r}{a}}}{\sqrt{(x - \frac{r}{a})(x + \frac{r}{a})}} &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{r}{a}\right)^+} \frac{\sqrt{x - \frac{r}{a}} + \sqrt{x - \frac{r}{a}} \sqrt{\frac{r}{a}}}{\sqrt{x - \frac{r}{a}} \sqrt{x + \frac{r}{a}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{r}{a}\right)^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x + \frac{r}{a}}} + \frac{\sqrt{\frac{r}{a}}}{\sqrt{x + \frac{r}{a}}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{r}{a}\right)^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x + \frac{r}{a}}} + 0 \right) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{r}{a}\right)^+} \frac{1}{\sqrt{x + \frac{r}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{a} + \frac{r}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2r}{a}}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} = \frac{\sqrt{2a}}{2} \end{aligned}$$

توجه کنید که

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{r}{a}\right)^+} \frac{\sqrt{x - \frac{r}{a}}}{\sqrt{(x - \frac{r}{a})(x + \frac{r}{a})}} &\times \frac{(\sqrt{x + \frac{r}{a}})}{(\sqrt{x + \frac{r}{a}})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{r}{a}\right)^+} \frac{\sqrt{x - \frac{r}{a}}}{(\sqrt{x - \frac{r}{a}})(\sqrt{x + \frac{r}{a}})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{r}{a}\right)^+} \frac{1}{\sqrt{x + \frac{r}{a}}} = 0 \end{aligned}$$

۱ ۲۸۳۲

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^+} \frac{[-x] + a}{\sqrt{r}x + a} &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^+} \frac{a - 1}{\sqrt{r}x + a} = \frac{a - 1}{\frac{1}{\sqrt{r}} + a} \\ &= \frac{a - 1}{0^+} = -\infty \\ |a + \frac{1}{\sqrt{r}}| + a &= 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{\sqrt{r}} \Rightarrow [a] = -1 \end{aligned}$$

اگر این معادله دو جواب مثبت داشته باشد، معادله اولیه چهار جواب حقیقی خواهد داشت.

$$\Delta = 16 - 4(1)\left(a - \frac{1}{4}\right) = 16 - 4a + 1 = 17 - 4a > 0 \Rightarrow a < \frac{17}{4}$$

$$S = 4 > 0, \quad P = a - \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow a > \frac{1}{4}$$

بنابراین مقادیر صحیح a عبارتند از ۱، ۲، ۳ و ۴.

۱ ۲۸۲۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x > 3 \\ -2x+1 & x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow f(-x) = \begin{cases} -x+2 & x < 3 \\ 2x+1 & x \geq 3 \end{cases}$$

به ازای $x < 3$ ، $f(-x) = -x+2$ همواره منفی است. به ازای $x \geq 3$ ، $f(-x) = 2x+1$ همواره مثبت است.

$$g(x) = \begin{cases} x+3 & x \geq 3 \\ x-3 & x < 3 \end{cases}$$

$$(f \circ g)\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(g\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{2} - 3\right) = f\left(-\frac{7}{2}\right) = -2\left(-\frac{7}{2}\right) + 1 = 8$$

۱ ۲۸۲۵

$$f(x) = 4x - x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 9$$

چون $(f \circ f)(a) = a$ و f در یک همسایگی a وارون پذیر است، پس

$$f(a) = f^{-1}(a) = a \Rightarrow f(a) = 4a - a\sqrt{a} - 3\sqrt{a} + 9 = a$$

$$3(a+3) - (a+3)\sqrt{a} = 0 \Rightarrow (a+3)(3 - \sqrt{a}) = 0 \Rightarrow a = -3 \text{ یا } a = 9$$

$a = 9$ قابل قبول است چون -3 در دامنه تابع f است.

$$f(a-5) = f(9-5) = f(4) = 16 - 8 - 6 + 9 = 11$$

۴ ۲۸۲۶

مجانبت قائم عبارت جلوی لگاریتم را صفر می کند:

$$\frac{a}{4} + b = 0$$

$$\log_7(va+b) = 3 \Rightarrow va+b = 27 \Rightarrow a=4, b=-1$$

$$f(x) = \log_7(4x-1) \Rightarrow \log_7(4x-1) = -1 \Rightarrow x = f^{-1}(-1) = \frac{1}{3}$$

۲ ۲۸۲۷

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} \times \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1+\sin \alpha}} &= \sqrt{\frac{(1+\sin \alpha)^2}{1-\sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{(1+\sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha}} \\ &= \frac{1+\sin \alpha}{-\cos \alpha} \\ \sqrt{1+\tan^2 \alpha} &= \sqrt{1+\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{1}{-\cos \alpha} \\ \frac{1+\sin \alpha}{-\cos \alpha} \cdot \frac{1}{-\cos \alpha} &= \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\tan \alpha \end{aligned}$$

۳ ۲۸۲۸

$$\cot(35^\circ - \alpha) = \cot(60^\circ - 25^\circ - \alpha) = \cot(60^\circ - (\alpha + 25^\circ))$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 + \tan 60^\circ \tan(\alpha + 25^\circ)}{\tan 60^\circ - \tan(\alpha + 25^\circ)} = \frac{1 + (\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

۲۸۳۳

نقطه $x=0$ تنها نقطه مشتق ناپذیری تابع f است و تابع f در $x=1$ مشتق دارد.

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} & x \geq 1 \\ b+cx & 0 \leq x < 1 \\ b-cx & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{2\sqrt{x}} & x \geq 1 \\ c & 0 \leq x < 1 \\ -c & x < 0 \end{cases}$$

از پیوستگی و مشتق پذیری تابع f در نقطه $x=1$ استفاده می کنیم:

$$\text{پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (b+cx) = b+c \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} a\sqrt{x} = a \end{cases} \Rightarrow a = b+c$$

$$\text{مشتق پذیری: } f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow \frac{a}{2} = c \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{2}{2}$$

بنابراین

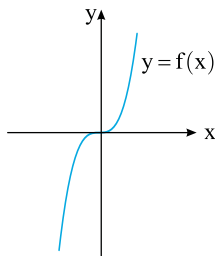
$$\frac{ab}{c^2} = \frac{a(a-c)}{c^2} = \frac{a^2-ac}{c^2} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 - \frac{a}{c} = \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \frac{2}{2} = \frac{2}{2}$$

۲۸۳۷

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & x \geq 0 \\ -x^2 + 3x & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'_+(0) = f'_-(0) = 0$$

تابع f در همه نقاط مشتق پذیر است. بنابراین طبق نمودار زیر تابع

$y = |f(x)|$ در $x=0$ مینیمم دارد.



$$f(x) = -\frac{2}{3}x + 2a, \quad f^{-1}(x) = -\frac{2}{3}x + 3a$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{|f^{-1}(x)|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-\frac{2}{3}x + 2a)^2}{x|-\frac{2}{3}x + 3a|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-\frac{2}{3}x + 2a)^2}{x(-\frac{2}{3}x + 3a)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4}{9}x^2}{-\frac{2}{3}x^2} = -\frac{2}{3}$$

ابتدا ضابطه بالایی تابع را به شکل زیر ساده می کنیم:

$$f(x) = \frac{|x^2 + mx - (m+1)|}{|x-1|(m|x+1|+1)} = \frac{|x-1||x+(m+1)|}{|x-1|(m|x+1|+1)} = \frac{|x(m+1)|}{m|x+1|+1}$$

چون تابع f در $x=1$ پیوسته است، پس

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow \frac{|m+2|}{2m+1} = \frac{m}{m+2} \Rightarrow (m+2)|m+2| = 2m^2 + m$$

$$m \geq -2 \Rightarrow m^2 + 4m + 4 = 2m^2 + m$$

$$m^2 - 3m - 4 = 0 \Rightarrow m = -1, m = 4$$

$m = -1$ قابل قبول نیست چون به ازای آن مخرج تابع f ریشه دارد و این تابع نمی تواند روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

$$m < -2 \Rightarrow -m^2 - 4m - 4 = 2m^2 + m \Rightarrow 3m^2 + 5m + 4 = 0$$

جواب ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{|x+\delta|}{\frac{1}{4}|x+1|+1} = \frac{|\frac{1}{4}+\delta|}{\frac{1}{4}|\frac{1}{4}+1|+1} = \frac{\gamma}{8}$$

پس

۲۸۳۵

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \tan(\frac{\pi}{2}-x)}{2x-\pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cot x}{2x-\pi}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{2} = -\frac{1}{2}$$