



انتشارات
آگاه

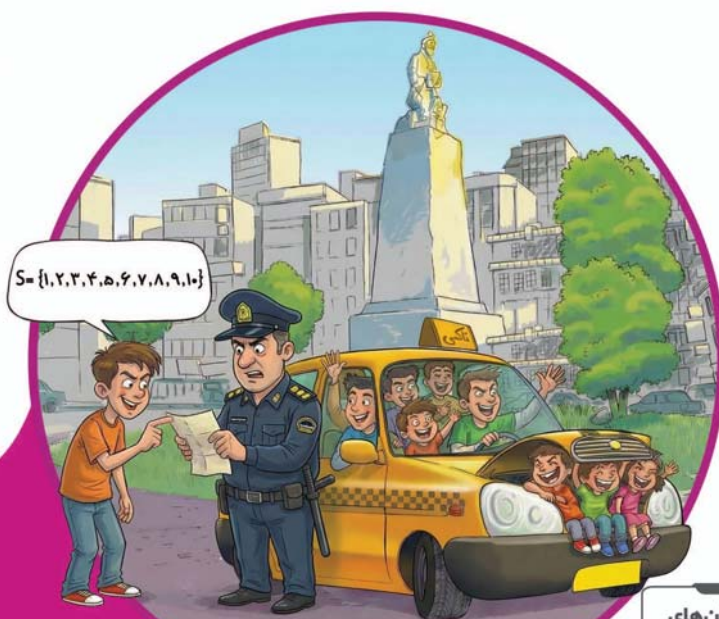
موج ۲۵

مرحله‌ای
و جامع

ویژه آمادگی شرکت در امتحان‌های نهایی و نیم‌سال

آمار و احتمال یازدهم

علیرضا بیگری



امتحان‌های درس به درس	درس‌نامه برای مرور مطالب
امتحان‌های نیم‌سال اول	امتحان‌های فصل به فصل
امتحان‌های نهایی اخیر	امتحان‌های شبیه‌ساز نهایی

پیشگفتار

سلام و درود به شما دانش آموزان پرتلاش؛ همان طور که می دانید، زندگی پر از داده است؛ اما آنچه مسیر آینده ما را تعیین می کند، نحوه تحلیل این داده ها و تصمیم گیری در شرایط عدم قطعیت است. آمار و احتمال فقط مجموعه ای از عددها و فرمول ها نیست؛ بلکه زبان فهم واقعیت ها و ابزاری برای قضاوت منطقی در جهانی است که قطعیت در آن کمیاب است.

درس آمار و احتمال پایه یازدهم، از درس هایی است که در امتحانات نهایی نقشی تعیین کننده برای دانش آموزان رشته ریاضی و فیزیک دارد. با وجود تغییر نظرها و بحث هایی که گاهی درباره ی نهایی بودن یا نبودن دروس پایه یازدهم مطرح می شود، یک حقیقت ثابت باقی می ماند؛ آن هم آشنایی کامل با سبک سؤال های تشریحی آمار و احتمال است که یک ضرورت امکان ناپذیر است.

این کتاب با رویکرد آزمون محور و با هدف آمادگی کامل شما عزیزان برای امتحانات نهایی تألیف شده است. در ابتدای کتاب، یک درس نامه کوتاه قرار داده شده است تا نکات کلیدی، تعاریف مهم و دام های امتحانی به سرعت در ذهن شما مرور شوند. سپس مجموعه ای از آزمون ها طراحی شده اند تا شما را با همه ی قالب های رایج و استاندارد امتحانی آشنا کنند. سؤالات این آزمون ها تنوع بالایی دارند و در سبک های مختلف شامل جای خالی، درست / نادرست، وصل کردنی، تحلیل جدول ها و نمودارهای آماری، محاسباتی، استدلالی و اثباتی هستند.

این کتاب دارای ۴۵ آزمون، شامل آزمون های ۱۰ نمره ای و ۲۰ نمره ای است. آزمون های درس به درس و فصل به فصل ۱۰ نمره ای هستند و آزمون های نیم سال اول، نیم سال دوم و جامع (تألیفی و نهایی سال های اخیر) ۲۰ نمره ای.

نوع آزمون	تعداد آزمون ها	سر فصل
درس به درس	۲۲	هر درس ۲ آزمون
فصل به فصل	۸	هر فصل ۲ آزمون
نیم سال اول	۵	فصل اول و فصل دوم (درس های اول و دوم)
نیم سال دوم	۲	فصل دوم (درس های سوم و چهارم)، فصل سوم و فصل چهارم
جامع - شبیه ساز نهایی	۷	تمام کتاب
نهایی خرداد ۱۴۰۳	۱	تمام کتاب

همه ی این آزمون ها با هدف تثبیت مفاهیم، افزایش تسلط در حل سؤالات تشریحی و آمادگی واقعی برای امتحان نهایی آمار و احتمال طراحی شده اند. آزمون های جامع کاملاً تألیفی هستند و بودجه بندی آن ها بر اساس امتحان نهایی است. اما در سایر آزمون ها از سؤالات امتحانات نهایی سال های اخیر نیز استفاده شده است. این موضوع به شما کمک می کند که به مهم ترین هدف کتاب برسید و آن کسب نمره ۲۰ در امتحان نهایی آمار و احتمال است.

در پایان بر خود لازم می دانم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، دکتر آریس آقانیانس و خانم ها عاطفه ربیعی و زینب آدینه وند برای مطالعه و ویراستاری علمی کتاب، خانم فاطمه احدی برای صفحه آرایی، خانم مرضیه کریمی برای رسم شکل ها، خانم ستین مختار مسئول واحد ویراستاری و حروف چینی و آقای مصطفی داداشی تشکر و قدردانی کنم. امید است این کتاب بتواند همراهی مؤثر در مسیر یادگیری شما باشد و نقش کوچکی در موفقیت تحصیلی و آینده روشن شما ایفا کند.

علیرضا بیگلری

فهرست مطالب

درس نامه

آزمون ۴: فصل اول - درس دوم (۲) ۳۱

آزمون ۵: فصل اول (۱) ۳۲

آزمون ۶: فصل اول (۲) ۳۳

آزمون ۷: فصل دوم - درس اول (۱) ۳۴

آزمون ۸: فصل دوم - درس اول (۲) ۳۵

آزمون ۹: فصل دوم - درس دوم (۱) ۳۶

آزمون ۱۰: فصل دوم - درس دوم (۲) ۳۷

آزمون ۱۱: نیم سال اول (۱) ۳۸

آزمون ۱۲: نیم سال اول (۲) ۳۹

آزمون ۱۳: نیم سال اول (۳) ۴۰

آزمون ۱۴: نیم سال اول (۴) ۴۲

آزمون ۱۵: نیم سال اول (۵) ۴۳

آزمون ۱۶: فصل دوم - درس سوم (۱) ۴۵

آزمون ۱۷: فصل دوم - درس سوم (۲) ۴۶

آزمون ۱۸: فصل دوم - درس چهارم (۱) ۴۷

آزمون ۱۹: فصل دوم - درس چهارم (۲) ۴۸

فصل اول - درس اول ۲

فصل اول - درس دوم ۴

فصل دوم - درس اول ۶

فصل دوم - درس دوم ۷

فصل دوم - درس سوم ۸

فصل دوم - درس چهارم ۱۰

فصل سوم - درس اول ۱۱

فصل سوم - درس دوم ۱۴

فصل سوم - درس سوم ۱۷

فصل چهارم - درس اول ۱۹

فصل چهارم - درس دوم ۲۳

آزمون های مرحله ای و جامع

آزمون ۱: فصل اول - درس اول (۱) ۲۸

آزمون ۲: فصل اول - درس اول (۲) ۲۹

آزمون ۳: فصل اول - درس دوم (۱) ۳۰

آزمون ۳۴: فصل چهارم (۱) ۶۱

آزمون ۳۵: فصل چهارم (۲) ۶۲

آزمون ۳۶: نیم‌سال دوم (۱) ۶۳

آزمون ۳۷: نیم‌سال دوم (۲) ۶۴

آزمون ۳۸: جامع (۱) - شبیه‌ساز نهایی ۶۶

آزمون ۳۹: جامع (۲) - شبیه‌ساز نهایی ۶۸

آزمون ۴۰: جامع (۳) - شبیه‌ساز نهایی ۶۹

آزمون ۴۱: جامع (۴) - شبیه‌ساز نهایی ۷۱

آزمون ۴۲: جامع (۵) - شبیه‌ساز نهایی ۷۳

آزمون ۴۳: جامع (۶) - شبیه‌ساز نهایی ۷۵

آزمون ۴۴: جامع (۷) - شبیه‌ساز نهایی ۷۷

آزمون ۴۵: جامع (۸) - نهایی خرداد ۱۴۰۳ ۷۸

پاسخ‌های تشریحی ۸۲

آزمون ۲۰: فصل دوم (۱) ۴۹

آزمون ۲۱: فصل دوم (۲) ۵۰

آزمون ۲۲: فصل سوم - درس اول (۱) ۵۰

آزمون ۲۳: فصل سوم - درس اول (۲) ۵۲

آزمون ۲۴: فصل سوم - درس دوم (۱) ۵۳

آزمون ۲۵: فصل سوم - درس دوم (۲) ۵۳

آزمون ۲۶: فصل سوم - درس سوم (۱) ۵۴

آزمون ۲۷: فصل سوم - درس سوم (۲) ۵۵

آزمون ۲۸: فصل سوم (۱) ۵۶

آزمون ۲۹: فصل سوم (۲) ۵۷

آزمون ۳۰: فصل چهارم - درس اول (۱) ۵۸

آزمون ۳۱: فصل چهارم - درس اول (۲) ۵۹

آزمون ۳۲: فصل چهارم - درس دوم (۱) ۶۰

آزمون ۳۳: فصل چهارم - درس دوم (۲) ۶۰

فصل اول
درس اول

آشنایی با منطق ریاضی

گزاره و گزاره‌نما

• **گزاره:** جمله‌ای است خبری که یا راست است یا دروغ. به راست (درست) یا دروغ (نادرست) بودن یک گزاره **ارزش گزاره** گویند. جملات امری، عاطفی، احساسی، پرسشی، استفهامی و تعجبی گزاره نیستند و گزاره‌ها را با نمادهای p ، q و r ... نشان می‌دهند.

جدول ارزش گزاره‌ها:

ارزش دو گزاره p و q به صورت جدول مقابل است. بنابراین جدول ارزش دو گزاره دارای ۴ حالت (۴ سطر) است.		هر گزاره مانند p فقط یکی از دو حالت ارزش گزاره را مطابق جدول مقابل دارد که جدول ارزش گزاره نامیده می‌شود.	
p	q	p	
د	د	د	
د	ن	ن	
ن	د		
ن	ن		

نکته

به طور کلی، برای n گزاره، 2^n حالت یا سطر در جدول ارزش گزاره‌ها وجود دارد.

مثال ۵ گزاره داریم. با توجه به توضیحات بالا در جدول ارزش گزاره‌ها $2^5 = 32$ سطر (حالت) داریم.

• **نقیض گزاره:** نقیض گزاره p را به صورت $\sim p$ می‌نویسیم و آن را «چنین نیست که p » می‌خوانیم. به علامت « $\sim$ » **ناقض** گفته می‌شود و «چنین نیست که» خوانده می‌شود.

مثال نقیض گزاره «۳ عددی زوج است» می‌شود «چنین نیست که عدد ۳ زوج باشد» یا «۳ عددی زوج نیست».

• **هم‌ارز منطقی بودن دو گزاره:** در حالت کلی اگر دو گزاره p و q همواره هم‌ارز باشند، می‌نویسیم: $p \equiv q$ و می‌خوانیم **هم‌ارز منطقی** یا **هم‌ارز** است با q .
• **گزاره‌نما:** هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر یا متغیرهایش به یک گزاره تبدیل می‌شود، **گزاره‌نما** نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را بر حسب تعداد متغیرهای به کار رفته در آن‌ها یک‌متغیره، دو‌متغیره یا ... می‌نامیم.

مثال « a عدد اول است» گزاره‌نما است. اگر جای a عدد ۵ را بگذاریم، به گزاره‌ای با ارزش درست و اگر به جای a عدد ۴ را بگذاریم، به گزاره‌ای با ارزش نادرست تبدیل می‌شود.

• **دامنه متغیر گزاره‌نما:** در هر گزاره‌نما، به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا این که گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، **دامنه متغیر** گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف D نشان می‌دهند.

• **مجموعه جواب گزاره‌نما:** در هر گزاره‌نما، به مجموعه عضوهای از دامنه متغیر که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل شود، **مجموعه جواب** گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهند. توجه کنید که همواره داریم $S \subseteq D$.

مثال اگر دامنه متغیر گزاره‌نمای $x^2 + 5x - 6 = 0$ مجموعه اعداد طبیعی باشد، مجموعه جواب آن را بیابید.

پاسخ کافی است معادله را حل کنیم:

$$x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x+6)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -6 \text{ یا } x = 1$$

$1 \in \mathbb{N}$ و $-6 \notin \mathbb{N}$. بنابراین $S = \{1\}$ مجموعه جواب گزاره‌نما است.

ترکیب گزاره‌ها

• از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیله رابط‌های منطقی «و»، «یا»، «اگر ... آن‌گاه ...»، «... اگر و تنها اگر ...» و ... گزاره‌های مرکب به دست می‌آید. ترکیب گزاره‌ها بدین صورت دسته‌بندی می‌شوند.

گزاره‌ها		ترکیب عطفی $p \wedge q$	ترکیب فصلی $p \vee q$	ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ اگر p ، آن‌گاه q	ترکیب دوشروطی $p \Leftrightarrow q$ p اگر و تنها اگر q
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن	د	د

به خاطر بسپارید

- ارزش گزاره $p \wedge q$ فقط زمانی درست است که ارزش هر دو گزاره p و q درست باشد. در بقیه حالت‌ها ارزش $p \wedge q$ نادرست است.
- ارزش گزاره $p \vee q$ فقط زمانی نادرست است که ارزش هر دو گزاره p و q نادرست باشد. در بقیه حالت‌ها ارزش $p \vee q$ درست است.
- ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ فقط زمانی نادرست است که ارزش گزاره p درست و ارزش گزاره q نادرست باشد. در بقیه حالت‌ها ارزش $p \Rightarrow q$ درست است. در ضمن به p مقدم (فرض) و به q تالی (حکم) گویند. چنانچه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، ارزش $p \Rightarrow q$ همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزاره q بستگی ندارد. در این حالت می‌گویند ارزش $p \Rightarrow q$ به انتقای مقدم درست است.
- ارزش گزاره $p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که ارزش دو گزاره p و q یکسان باشد، یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند. در غیر این صورت ارزش $p \Leftrightarrow q$ نادرست است.

مثال ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

- الف) « $(\frac{0}{1})^5 > (\frac{0}{1})^3$ » $\vee$ « 12 مربع کامل است».
- ب) اگر $\sin 18^\circ = 1$ ، آن‌گاه π عددی گویا است.
- ت) $\sqrt{81}$ عددی گنگ است اگر و تنها اگر 3 عددی زوج باشد.
- الف) « $\frac{1}{1000} > \frac{1}{100000}$ » گزاره‌ای درست و « 12 مربع کامل است» گزاره‌ای نادرست است. بنابراین ارزش ترکیب فصلی این دو گزاره درست است.
- ب) می‌دانیم برف سفید است و سنندج مرکز استان کردستان است (مرکز استان لرستان شهر خرم‌آباد است). هر دو گزاره با ارزش نادرست هستند و ارزش ترکیب عطفی آن‌ها نادرست است.
- ب) $\sin 18^\circ = 0$ و چون مقدم نادرست است، کل گزاره شرطی به انتقای مقدم درست است.
- ت) $\sqrt{81}$ برابر 9 است که عددی گویا است و می‌دانیم 3 عددی فرد است. در ترکیب دوشروطی وقتی هر دو گزاره نادرست هستند، ارزش کل گزاره درست است.
- آنچه باید در روابط بین گزاره‌ها بدانیم. همه این قوانین با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها قابل اثبات هستند.

۱) $\begin{cases} p \wedge p \equiv p \\ p \vee p \equiv p \end{cases}$	۲) $\begin{cases} p \wedge \sim p \equiv F \\ p \vee \sim p \equiv T \end{cases}$	۳) $\begin{cases} p \wedge F \equiv F \\ p \vee F \equiv p \end{cases}$	۴) $\begin{cases} p \wedge T \equiv p \\ p \vee T \equiv T \end{cases}$
۵) قوانین جابه‌جایی $\begin{cases} p \vee q \equiv q \vee p \\ p \wedge q \equiv q \wedge p \end{cases}$	۶) قوانین شرکت‌پذیری $\begin{cases} (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \\ (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \end{cases}$	۷) قوانین توزیع‌پذیری $\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$	۸) قوانین دموگان $\begin{cases} \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \end{cases}$
۹) قانون حذف عاطف $(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv T$	۱۰) قانون ادخال فاصل $p \Rightarrow (p \vee q) \equiv T$	۱۱) قوانین جذب یا همپوشانی $\begin{cases} p \vee (p \wedge q) \equiv p \\ p \wedge (p \vee q) \equiv p \end{cases}$	۱۲) قوانین شبه‌جذب $\begin{cases} p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q \\ p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q \end{cases}$
۱۳) فصلی $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$	۱۴) عکس نقیض گزاره شرطی $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$		

سورها

سور وجودی	سور عمومی
$\exists$ (به ازای بعضی مقادیر)	$\forall$ (به ازای هر)

مثال ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0$ (الف) ب) $\forall x \in [0, +\infty); x + \frac{1}{x} \geq 2$ (ب) پ) $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 = 0$ (پ) ت) $\exists x \in \mathbb{N}; x^2 + 3x - 4 = 0$ (ت)

پایه الف) درست. به ازای هر عدد حقیقی، مربع آن بزرگ‌تر از یا مساوی با صفر است.

ب) نادرست. اگر $x = 0$ را در عبارت $x + \frac{1}{x}$ قرار دهیم، مخرج کسر صفر می‌شود که تعریف نشده است.

پ) نادرست. معادله $x^2 + 1 = 0$ جواب حقیقی ندارد.

ت) درست. اگر معادله را حل کنیم، جواب‌های آن به صورت $x = 1$ و $x = -4$ است که $1 \in \mathbb{N}$ قابل قبول است.

روش نقیض کردن گزاره‌های سوری

برای نقیض کردن یک گزاره سوری، ابتدا سور عمومی را به سور وجودی و سور وجودی را به سور عمومی تبدیل می‌کنیم و سپس گزاره جلوی سور را نقیض می‌کنیم.

مثال نقیض گزاره‌های سوری زیر را بنویسید.

ب) وجود دارد عدد اولی که زوج باشد.

الف) هر آسیایی، ایرانی است.

پایه الف) «وجود دارد آسیایی‌ای که ایرانی نیست» یا «بعضی از آسیایی‌ها ایرانی نیستند».

ب) «همه اعداد اول فرد هستند» یا «چنین نیست که وجود داشته باشد عدد اولی که زوج باشد»

روش نقیض کردن گزاره‌ها در یک نگاه

$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$	$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$
$\sim(\forall x \in A; P(x)) \equiv \exists x \in A; \sim P(x)$	$\sim(\exists x \in A; P(x)) \equiv \forall x \in A; \sim P(x)$

جبر مجموعه‌ها

فصل اول
درس دوم

• **زیرمجموعه:** اگر هر عضو A ، عضو B نیز باشد، گوییم A زیرمجموعه B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$. همچنین اگر عضوی در A وجود داشته باشد به طوری که آن عضو در مجموعه B نباشد، آن‌گاه A زیرمجموعه B نیست و می‌نویسیم $A \not\subseteq B$.

نمایش ریاضی زیرمجموعه

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B), \quad A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x; (x \in A \wedge x \notin B)$$

• **مجموعه توانی:** مجموعه همه زیرمجموعه‌های یک مجموعه مانند A را **مجموعه توانی** A گویند و با $P(A)$ نمایش دهند.

نکته

۱) تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر است با 2^n .

۲) تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی که شامل m عضو مشخص و فاقد k عضو مشخص باشند برابر است با 2^{n-m-k} .

۳) تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \times k!}$

۴) اگر $A \subseteq B$ به طوری که $A \neq B$ ، آن‌گاه A را زیرمجموعه **محض** یا **سره** B گویند.

۵) تعداد زیرمجموعه‌های محض (سره) یک مجموعه n عضوی برابر است با $2^n - 1$.

۶) تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه n عضوی که شامل m عضو مشخص و فاقد t عضو مشخص باشند، برابر است با $\binom{n-m-t}{k-m}$.

آزمون

۱

موضوع آزمون

صفحات پاسخ

فصل اول - درس اول (۱)

۸۲

امتحان نهایی: آمار و احتمال		رشته: ریاضی و فیزیک		تألیفی		مدت امتحان: ۶۰ دقیقه												
ردیف	سؤالات						نمره											
۱	جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید. (الف) اگر p یک گزاره دلخواه و F یک گزاره همواره نادرست باشد، آن گاه $p \vee F \equiv \dots\dots\dots$. (ب) گزاره‌ای به صورت «اگر p ، آن گاه q و برعکس» بیان می‌شود. این گزاره دارای ترکیب $\dots\dots\dots$ است. (پ) شرط $\dots\dots\dots$ برای آنکه مثلثی متساوی‌الساقین باشد، آن است که دو ضلع مثلث برابر باشند. (ت) در هر گزاره‌نما به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیر آن قرار داد، تا اینکه گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، $\dots\dots\dots$ گزاره‌نما می‌گویند.						(خرداد ۱۴۰۳)	۱										
۲	درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید. (الف) گزاره $p \vee \sim p$ همیشه درست است. (ب) ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ در صورت نادرست بودن ارزش p ، به انتقای مقدم همواره درست است.						۱											
۳	هر گزاره ستون A را به گزاره هم‌ارز خود از ستون B وصل کنید. (یک گزاره در ستون B اضافی است).						۱											
<table><tr><td>A</td><td>B</td></tr><tr><td>$\sim(\sim p)$ ☐</td><td>☐ T</td></tr><tr><td>$\sim p \vee q$ ☐</td><td>☐ F</td></tr><tr><td>$p \Rightarrow p$ ☐</td><td>☐ $p \Rightarrow q$</td></tr><tr><td>$p \wedge \sim p$ ☐</td><td>☐ p</td></tr><tr><td></td><td>☐ $\sim p \wedge \sim q$</td></tr></table>							A	B	$\sim(\sim p)$ ☐	☐ T	$\sim p \vee q$ ☐	☐ F	$p \Rightarrow p$ ☐	☐ $p \Rightarrow q$	$p \wedge \sim p$ ☐	☐ p		☐ $\sim p \wedge \sim q$
A	B																	
$\sim(\sim p)$ ☐	☐ T																	
$\sim p \vee q$ ☐	☐ F																	
$p \Rightarrow p$ ☐	☐ $p \Rightarrow q$																	
$p \wedge \sim p$ ☐	☐ p																	
	☐ $\sim p \wedge \sim q$																	
۴	گزینه صحیح را انتخاب کنید. (الف) کدام یک از جملات زیر گزاره است؟ (۱) لطفاً در را باز کن. (۲) چه هوای سردی! (۳) شما اهل کجایی؟ (۴) عدد ۷ عددی اول است. (ب) هم‌ارز گزاره $\sim(p \wedge q)$ کدام است؟ (۱) $\sim(p \vee q)$ (۲) $p \vee \sim q$ (۳) $\sim p \vee \sim q$ (۴) $p \wedge \sim q$						۰/۵											
۵	اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$ را مشخص کنید.						۰/۷۵											
۶	با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها درستی هم‌ارزی $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ را نشان دهید.						۱											
۷	عکس نقیض گزاره شرطی «اگر n^2 عددی زوج باشد، آن گاه n عددی زوج است» را بنویسید. ($n \in \mathbb{Z}$)						۱											
۸	گزاره‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید و ارزش هریک را با ذکر دلیل مشخص کنید. (الف) همه اعداد اول فردند. (ب) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم $a^2 < 0$.						۲											
۹	نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید. (الف) $\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2$ (ب) $\exists x \in \mathbb{R}; \frac{1}{x} > \frac{1}{2}$						۱											
۱۰	اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x \leq 5\}$ ، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید. (الف) $\forall x \in A; x + 2 \leq 9$ (ب) $\exists x \in A; x + 1 \geq 6$						۰/۷۵											
۱۰	موفق و سربلند باشید						جمع نمره											

ردیف	سؤالات	رشته: ریاضی و فیزیک	تألیفی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
نمره				
۱	جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید. (الف) نسبت احتمال برخورد گلوله به هدف به احتمال عدم برخورد آن $\frac{3}{4}$ است. احتمال عدم برخورد گلوله به هدف است. (ب) بررسی یک نمونه نامعلوم از یک جامعه معلوم مربوط به علم است. (پ) هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با می‌گوییم. (ت) اگر A مجموعه‌ای با ۵ عضو باشد، تعداد زیرمجموعه‌های محض این مجموعه برابر است.			
۲	به کمک جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید $\sim(p \Rightarrow \sim q) \equiv p \wedge q$.			
۳	اگر ارزش گزاره شرطی $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$ نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره $(q \vee \sim r) \Rightarrow \sim p$ را با ذکر یک دلیل تعیین کنید.			۱/۵
۴	ارزش گزاره‌های سوری زیر را مشخص کنید و سپس نقیض هریک را بنویسید. (الف) $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$ (ب) $\exists x \in \mathbb{R}; \frac{x - 3}{5} = 0$			۱/۵
۵	ثابت کنید هرگاه n عدد صحیح و n^2 مضرب ۲ باشد، آن‌گاه n مضرب ۲ است.			۱/۲۵
۶	اگر ۳ عضو به مجموعه متناهی A اضافه کنیم، به تعداد زیرمجموعه‌های آن ۵۶ واحد اضافه می‌شود. مجموعه A چند عضو دارد؟			۱
۷	اگر A و B دو مجموعه باشند و داشته باشیم $A \subseteq B'$ ، به روش عضوگیری دلخواه ثابت کنید $B \subseteq A'$.			۱
۸	با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: (الف) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$ (ب) $[(A \cup B) = (A \cup C) \wedge (A \cap B) = (A \cap C)] \Rightarrow B = C$			۳
۹	اگر $A = [-1, 6]$ و $B = [-1, 4]$ ، نمودار مختصاتی $A \times B$ را رسم و مساحت $A \times B$ را مشخص کنید.			۱/۵
۱۰	اگر $A \times B = B \times A$ ، $A = \{x - y, 3\}$ و $B = \{x + y, 1\}$ ، مقادیر x و y را بیابید.			۱
۱۱	ثابت کنید اگر $B \subseteq A$ ، آن‌گاه $P(A - B) = P(A) - P(B)$.			۱/۲۵
۱۲	دو سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. اگر هر دو سکه پشت بیاید، آن‌گاه یک تاس را می‌اندازیم، مطلوب است: (الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی. (ب) پیشامد A که در آن دقیقاً هر دو سکه به «پشت» و عدد تاس بزرگ‌تر از ۴ باشد. (پ) پیشامد B که در آن حداقل یک «رو» بیاید.			۱/۵ (خرداد ۹۳)
۱۳	در یک آزمایش تصادفی، $S = \{x, y, z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(\{x, y\}) = \frac{2}{3}$ و $P(\{x, z\}) = \frac{1}{4}$ ، احتمال وقوع هریک از پیشامدهای ساده را به دست آورید.			۱/۵
۱۴	احتمال اینکه علی در المپیاد ریاضی در مرحله اول قبول شود، ۲۳٪ و احتمال اینکه حسین در المپیاد ریاضی در مرحله اول قبول شود، ۲۴٪ است. احتمال اینکه حداقل یکی از آن‌ها در المپیاد ریاضی در مرحله اول قبول شوند، ۳۸٪ است. مطلوب است احتمال اینکه هر دو در المپیاد ریاضی در مرحله اول قبول شوند.			۱
۲۰	موفق و سربلند باشید			جمع نمره

آزمون

۳۸

موضوع آزمون

صفحات پاسخ

جامع (۱) - شبیه‌ساز نهایی

۱۱۸ تا ۱۱۹

امتحان نهایی: آمار و احتمال		رشته: ریاضی و فیزیک		تألیفی		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه										
ردیف	سؤالات						نمره									
۱	جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. (الف) برای ۴ گزاره تعداد حالت ارزش برای آن‌ها در جدول ارزش گزاره‌ها وجود دارد. (ب) مشخصه عددی است که توصیف‌کننده جنبه خاصی از نمونه است و از داده‌های نمونه به‌دست می‌آید. (پ) هرچه جامعه کم شود و اندازه بزرگ‌تر باشد، دقت برآورد میانگین بیشتر است. (ت) فرایند نتیجه‌گیری درباره پارامترهای جامعه بر اساس نمونه را می‌گویند.						۱/۲۵									
۲	درستی یا نادرستی هریک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید. (الف) گزاره $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \wedge q) \Rightarrow r$ هم‌ارز منطقی گزاره $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ است. (ب) ارزش گزاره $\forall x \in \mathbb{R}; \tan x \cot x = 1$ نادرست است. (پ) اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $A' \subseteq B'$. (ت) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن‌گاه $P(A \cap B) = 0$.						۲									
۳	در جدول زیر برای هر موضوع روش مناسب گردآوری داده را توسط آمارگیر با وصل کردن مشخص کنید.						۱									
<table><tr><th>روش</th><th>موضوع</th></tr><tr><td>☐ دادگان</td><td>رضایت مردم از رئیس جمهوری ☐</td></tr><tr><td>☐ مصاحبه</td><td>میزان تصادفات منجر به فوت در سال ۱۳۹۸ ☐</td></tr><tr><td>☐ پرسشنامه کتبی</td><td>تعداد مراجعینی که ماسک زدند ☐</td></tr><tr><td>☐ مشاهده</td><td>بررسی علت کاهش انگیزه دانش‌آموزان یک کلاس در درس شیمی ☐</td></tr></table>							روش	موضوع	☐ دادگان	رضایت مردم از رئیس جمهوری ☐	☐ مصاحبه	میزان تصادفات منجر به فوت در سال ۱۳۹۸ ☐	☐ پرسشنامه کتبی	تعداد مراجعینی که ماسک زدند ☐	☐ مشاهده	بررسی علت کاهش انگیزه دانش‌آموزان یک کلاس در درس شیمی ☐
روش	موضوع															
☐ دادگان	رضایت مردم از رئیس جمهوری ☐															
☐ مصاحبه	میزان تصادفات منجر به فوت در سال ۱۳۹۸ ☐															
☐ پرسشنامه کتبی	تعداد مراجعینی که ماسک زدند ☐															
☐ مشاهده	بررسی علت کاهش انگیزه دانش‌آموزان یک کلاس در درس شیمی ☐															
۴	گزینه درست را انتخاب کنید. (الف) اگر اندازه نمونه‌ای را ۹ برابر کنیم، انحراف معیار برآورد میانگین چند برابر می‌شود؟ ۹ (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) ۳ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) (ب) اگر میانگین داده‌های $\frac{1}{3}x_1 - 1, \dots, \frac{1}{3}x_n - 1$ برابر ۲۲ باشد، میانگین داده‌های $x_1 - 1, \dots, x_n - 1$ برابر کدام است؟ ۶۹ (۱) ۷۰ (۲) ۶۸ (۳) ۶۳ (۴) (پ) بازه‌ای با اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین به‌صورت $[۲۸, ۳۲]$ است. اگر اندازه نمونه ۹ باشد، میانگین و انحراف معیار به‌ترتیب کدام است؟ ۶ و ۳۰ (۱) ۳ و ۳۰ (۲) ۴ و ۲۹ (۳) ۳ و ۲۹ (۴) (ت) گزاره $p \Rightarrow q$ هم‌ارز منطقی کدام گزینه زیر است؟ $\sim p \vee q$ (۱) $\sim p \Rightarrow q$ (۲) $p \wedge \sim q$ (۳) $\sim q \Rightarrow p$ (۴)															

ردیف	سؤالات	نمره												
۵	الف) به روش عضوگیری ثابت کنید $A \times B = B \times A \Rightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$ ب) اگر $A = \{۳, ۴\}$ و $B = (۱, ۵]$ ، نمودار مختصاتی $A \times B$ را رسم کنید.	۱/۷۵												
۶	با استفاده از قوانین بین مجموعه‌ها ثابت کنید $[(A \cup B) = (A \cup C) \wedge (A \cap B) = (A \cap C)] \Rightarrow B = C$	۱/۲۵												
۷	امیر و بابک عضو تیم ملی ۱۱ نفره فوتبال هستند. در این تیم قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر بدانیم امیر از بابک بلندتر است: الف) احتمال اینکه امیر بلندترین عضو تیم باشد، چقدر است؟ ب) احتمال اینکه از امیر از نظر بلندی قد نفر هفتم باشد، چقدر است؟	۱/۲۵												
۸	از یک جعبه که شامل ۳ مهره قرمز، ۲ مهره آبی و ۱ مهره زرد است، دو مهره به تصادف و با جایگذاری بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال آنکه هر دو مهره هم‌رنگ باشند.	۱												
۹	اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به طوری که $P(A \cap B) = ۰/۱$ و $P(A \cap B') = ۰/۴$ ، حاصل $P(A \cup B')$ را بیابید.	۱/۷۵												
۱۰	در جامعه‌ای تعداد مردان ۲ برابر تعداد زنان است. درصد مشارکت مردان در مسابقات ورزشی ۶۰ درصد و زنان ۴۰ درصد است. فردی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. الف) با چه احتمالی این فرد در مسابقات ورزشی شرکت کرده است؟ ب) اگر فرد در مسابقات ورزشی شرکت کرده باشد، با چه احتمالی زن است؟	۱/۵												
۱۱	با توجه به جدول زیر مقادیر X ، Y و Z را بیابید.	۱												
<table border="1"> <thead> <tr> <th>زاویه در نمودار دایره‌ای</th><th>فراوانی</th><th>داده</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Z</td><td>۱۵</td><td>A</td></tr> <tr> <td>۱۲۰°</td><td>x</td><td>B</td></tr> <tr> <td>۶۰°</td><td>y</td><td>C</td></tr> </tbody> </table>			زاویه در نمودار دایره‌ای	فراوانی	داده	Z	۱۵	A	۱۲۰°	x	B	۶۰°	y	C
زاویه در نمودار دایره‌ای	فراوانی	داده												
Z	۱۵	A												
۱۲۰°	x	B												
۶۰°	y	C												
۱۲	الف) اگر ضریب تغییرات ۱۰ داده ۲ و میانگین آن‌ها ۴ باشد، واریانس داده‌ها را بیابید. ب) نمودار جعبه‌ای داده‌های زیر را رسم کنید و مد، میانه، چارک اول و چارک سوم را بیابید. $۵, ۵, ۵, ۱, ۱, ۲, ۴, ۷, ۱۲, ۱۱, ۱۰, ۹$	۱/۵												
۱۳	یک شرکت تولیدی فیلتر روغن، فیلترهایی تولید می‌کند که طول عمر آن‌ها دارای انحراف معیار ۲ ماه است. اگر یک نمونه ۲۵ عضوی از این فیلترها با متوسط طول عمر ۲۵ ماه انتخاب کنیم، بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین جامعه را بیابید.	۰/۵												
۱۴	الف) روش‌های نمونه‌گیری را نام ببرید. ب) می‌خواهیم از بین ۵۰۰ نفر که در یک برنامه پیامک داده‌اند، به روش سامانمند یک نمونه ۲۵ عضوی انتخاب کنیم و به آن‌ها جایزه بدهیم. اگر شماره اولین فرد انتخاب شده در نمونه برابر ۴ باشد، شماره چهارمین عضو انتخاب شده کدام است؟	۱/۵												
۱۵	از اعداد صحیح ۰ تا N ، ۱۰ اعداد به تصادف انتخاب شده است. اگر اعداد انتخابی به صورت زیر باشند، به روش میانگین N را برآورد کنید. $۵, ۸, ۹, ۱۱, ۱۲, ۳, ۷, ۵, ۲, ۹$	۰/۷۵												
	موفق و سربلند باشید	جمع نمره ۲۰												

۶

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	د	ن

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها ثابت شد در تمام حالت‌ها ارزش دو گزاره $p \wedge \sim q$ و $\sim(p \Rightarrow q)$ یکسان است. بنابراین این دو گزاره هم‌ارز منطقی یکدیگرند.

۷ می‌دانیم $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$. برای پاسخ باید جای p و q را عوض کنیم و هر دو را نقیض کنیم. «اگر n عددی زوج نیست، آن‌گاه n^2 عددی زوج نیست» یا «اگر n عددی زوج نباشد، آن‌گاه چنین نیست که n^2 عددی زوج باشد». عوض کردن جای p و q و نقیض کردن p و q (۰/۵)

۸ الف) $\forall x \in P; x \in O$ (۰/۵)

نادرست. (۰/۲۵) زیرا $x=2$ عددی اول است که زوج است. (۰/۲۵)

ب) $\exists a \in \mathbb{W}; a^2 < 0$ (۰/۵)

نادرست. (۰/۲۵) زیرا مربع هر عدد (به ویژه هر عدد حسابی) نامنفی است. (۰/۲۵)

۹ الف)

$\sim(\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2) \equiv \exists x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} > -2$ (۰/۲۵)

برای نقیض کردن یک گزاره سوری، سور عمومی را به سور وجودی و سور وجودی را به سور عمومی تغییر می‌دهیم و گزاره آن را نقیض می‌کنیم.

ب) $\sim(\exists x \in \mathbb{R}; \frac{1}{x} > \frac{1}{2}) \equiv \forall x \in \mathbb{R}; \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ (۰/۲۵)

۱۰ ابتدا مجموعه A را مشخص می‌کنیم.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (۰/۲۵)

الف) درست. (۰/۲۵) $\forall x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}; x+2 \leq 9$

هر کدام از اعضای A را جای x بگذاریم نامساوی $x+2 \leq 9$ برقرار است.

ب) درست. (۰/۲۵) $\exists x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}; x+1 \geq 6$

اگر قرار دهیم $x=5$ ، آن‌گاه داریم $5+1 \geq 6$ که گزاره‌ای درست است.

پاسخ تشریحی آزمون (۲)

۱

ارزش $p \wedge q$	ارزش $p \Rightarrow q$	ارزش q	ارزش p	q	p
ن	(۰/۲۵)	(۰/۲۵)	د	عدد ۴ فرد است. (۰/۲۵)	$5 \in \{5, 6\}$
(۰/۲۵)	د	(۰/۲۵)	ن	عدد $\sqrt{2}$ گویا است. (۰/۲۵)	عدد ۴ اول است.

در سطر اول، گزاره p درست است و زمانی ترکیب عطفی دو گزاره نادرست است که حداقل یکی از آن‌ها نادرست باشد. بنابراین q را باید گزاره‌ای نادرست تعریف کنیم. در این حالت ارزش $p \Rightarrow q$ نادرست خواهد شد.

در سطر دوم، گزاره q نادرست است و زمانی $p \Rightarrow q$ درست است که p نادرست باشد. بنابراین p را باید گزاره‌ای نادرست تعریف کنیم. ترکیب عطفی دو گزاره نادرست گزاره‌ای نادرست است.

پاسخ تشریحی آزمون (۱)

۱ الف) p (۰/۲۵) - اگر گزاره p ارزش درست داشته باشد، ترکیب فصلی $T \vee F$ درست است و اگر گزاره p ارزش نادرست داشته باشد، ترکیب فصلی $F \vee F$ نادرست است. پس بستگی به ارزش گزاره p دارد. بنابراین $p \vee F \equiv p$.
ب) دوشروطی (۰/۲۵) - گزاره دوشروطی به صورت $p \Leftrightarrow q$ نمایش داده می‌شود و خوانده می‌شود «اگر و تنها اگر q ».

پ) لازم و کافی (۰/۲۵) - برای گزاره‌ای که به شکل دوشروطی می‌توان بیان کرد، از عبارت لازم و کافی استفاده می‌کنیم.

ت) دامنه متغیر (۰/۲۵) - در هر گزاره‌نما به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیر آن قرار داد تا اینکه گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره‌نما گویند و با حرف D نمایش می‌دهند.

۲ الف) درست (۰/۲۵) - می‌دانیم اگر ارزش گزاره p درست باشد، ارزش نقیض گزاره p یعنی $\sim p$ نادرست است و برعکس و ترکیب فصلی گزاره‌های درست و نادرست همواره درست است. (۰/۲۵)

ب) درست (۰/۲۵) - اگر در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ ، ارزش p نادرست باشد، گزاره به انتقای مقدم درست است. به جدول ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ دقت کنید.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

(۰/۲۵)

۳ باید بدانیم $\sim(\sim p)$ هم‌ارز p است. همچنین $p \Rightarrow q$ هم‌ارز منطقی $\sim p \vee q$ است. همچنین $p \Rightarrow p$ هم‌ارز T است و $p \wedge \sim p$ ترکیب عطفی درست و نادرست، نادرست است.

A	B
$\sim(\sim p)$	T
$\sim p \vee q$	F
$p \Rightarrow p$	$p \Rightarrow q$
$p \wedge \sim p$	p
	$\sim p \wedge \sim q$

(هر مورد ۰/۲۵)

۴ الف) گزینه (۴) - عدد ۷ عددی اول است. (۰/۲۵) گزاره جمله‌ای خبری است که یا راست است یا دروغ. جملات امری، عاطفی، پرسشی، تعجبی و استفهامی گزاره محسوب نمی‌شوند.

ب) گزینه (۳) - $\sim p \vee \sim q$ (۰/۲۵) - $\sim(p \wedge q)$ هم‌ارز منطقی $\sim p \vee \sim q$ است. این قانون به قانون دمورگان معروف است.

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$, $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

۵ درست (۰/۲۵) - اگر p درست و q نادرست باشد، ارزش گزاره $p \Leftrightarrow q$ نادرست است. (۰/۲۵) بنابراین داریم $F \Rightarrow r$. در گزاره شرطی اگر فرض (مقدم) نادرست باشد، گزاره به انتقای مقدم درست است. (۰/۲۵) بنابراین ارزش گزاره $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$ درست است.

۴ الف) نادرست (۰/۲۵) - اگر $x=2$ را قرار دهیم، مثال نقضی است برای گزارهٔ سوری چون به ازای $x=2$ مخرج صفر می‌شود که غیرقابل قبول است.

$$\neg(\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2-4}{x-2} = x+2) \equiv \exists x \in \mathbb{R}; \frac{x^2-4}{x-2} \neq x+2 \quad (۰/۲۵)$$

ب) درست (۰/۲۵) - کافی است x را ۳ قرار دهیم چون صورت کسر صفر می‌شود. بنابراین حاصل کسر برابر صفر می‌شود.

$$\neg(\exists x \in \mathbb{R}; \frac{x-3}{5} = 0) \equiv \forall x \in \mathbb{R}; \frac{x-3}{5} \neq 0 \quad (۰/۲۵)$$

۵

(n مضرب ۲ است $\Rightarrow n^2$ مضرب ۲ است)

(n^2 مضرب ۲ نیست $\Rightarrow n$ مضرب ۲ نباشد)

$$n \Rightarrow n = 2k \pm 1 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow n^2 = 4k^2 \pm 4k + 1 \quad (۰/۲۵)$$

$$n^2 = 2(2k^2 \pm 2k) + 1 \quad (۰/۲۵) = 2k' + 1 \quad (۰/۲۵)$$

بنابراین n^2 مضرب ۲ نیست (۰/۲۵) و اثبات تکمیل شد.

۶ اگر تعداد عضوهای مجموعه A را n فرض کنیم، آن‌گاه تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر 2^n است. همچنین با اضافه کردن ۳ عضو داریم

$$2^{n+3} - 2^n = 56 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow 2^n \times 2^3 - 2^n = 56 \Rightarrow 2^n(2^3 - 1) = 56 \quad (۰/۲۵)$$

$$2^n(8 - 1) = 56 \Rightarrow 2^n \times 7 = 56 \Rightarrow 2^n = \frac{56}{7} = 8 \quad (۰/۲۵)$$

$$2^n = 2^3 \Rightarrow n = 3 \quad (۰/۲۵)$$

بنابراین مجموعه A دارای ۳ عضو است.

۷ فرض کنید x عضو دلخواهی متعلق به مجموعه B باشد. در این صورت

$$x \in B \quad (۰/۲۵) \Rightarrow x \notin B' \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{A \subseteq B'} x \notin A \Rightarrow x \in A' \quad (۰/۲۵)$$

چون $x \in B$ دلخواه بود، پس $B \subseteq A' \quad (۰/۲۵)$

۸ الف)

$$(A \cup B) - C \xrightarrow[\text{به اشتراک}]{\text{تفاضل}} (A \cup B) \cap C' \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{\text{توزیع پذیری}}$$

$$(A \cap C') \cup (B \cap C') \quad (۰/۲۵) \xrightarrow[\text{به تفاضل}]{\text{اشتراک}} (A - C) \cup (B - C) \quad (۰/۲۵)$$

ب)

$$B = B \cup (A \cap B) \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{A \cap B = A \cap C} B \cup (A \cap C) \quad (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{\text{توزیع پذیری}} (B \cup A) \cap (B \cup C) \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{A \cup B = A \cup C} A \cup B = A \cup C \quad (۰/۲۵)$$

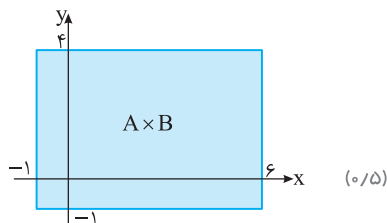
$$(A \cup C) \cap (B \cup C) \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} C \cup (A \cap B) \quad (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{A \cap B = A \cap C} C \cup (A \cap C) \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{\text{جذب}} C \quad (۰/۲۵)$$

۹ طبق تعریف حاصل ضرب دکارتی داریم

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

$$A \times B = \{(x, y) | x \in [-1, 6], y \in [-1, 4]\} \quad (۰/۲۵)$$



$$\begin{cases} \text{طول} = 7 \\ \text{عرض} = 5 \end{cases} \quad (۰/۵) \Rightarrow S = 7 \times 5 = 35 \quad (۰/۲۵)$$

۶ اگر $P(y) = a$ ، آن‌گاه

$$P(x) = a \div \frac{1}{2} = 2a, \quad P(z) = a \times \frac{1}{2} = \frac{a}{2} \quad (۰/۲۵)$$

اکنون می‌توان نوشت

$$P(x) + P(y) + P(z) = 1 \Rightarrow 2a + a + \frac{a}{2} = 1 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \frac{7a}{2} = 1$$

$$a = \frac{2}{7} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow P(y) = \frac{2}{7} \quad (۰/۲۵)$$

$$P(x) = 2a = \frac{4}{7} \quad (۰/۲۵), \quad P(z) = \frac{a}{2} = \frac{1}{7} \quad (۰/۲۵)$$

۷ فرض کنید $x = P(p)$. در این صورت طبق فرض،

$$P(r) = 2P(p) = 2x \quad (۰/۲۵)$$

اکنون می‌توان نوشت

$$P(r) + P(p) = 1 \Rightarrow 2x + x = 1 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \quad (۰/۲۵)$$

$$P(p) = x = \frac{1}{3} \quad (۰/۲۵), \quad P(r) = 2x = \frac{2}{3} \quad (۰/۲۵)$$

بنابراین

پاسخ تشریحی آزمون (۱۱)

۱ الف) $\frac{4}{5} \quad (۰/۲۵)$

$$\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{P(A)}{1 - P(A)} = \frac{3}{4} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} 4P(A) = 3 - 3P(A)$$

$$7P(A) = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{7} \Rightarrow P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

ب) احتمال (۰/۲۵) - بررسی یک نمونه نامعلوم از یک جامعه معلوم مربوط به علم احتمال است.

پ) احتمال غیرهم‌شانس (۰/۲۵) - هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس می‌گوییم.

ت) $2^5 - 1 = 31 \quad (۰/۲۵)$ - تعداد زیرمجموعه‌های محض (سره) یک مجموعه n عضوی برابر $2^n - 1$ است. در اینجا $n = 5$ ، پس داریم $2^5 - 1 = 31$.

۲ ستون‌های $p \wedge q$ و $\sim(p \Rightarrow \sim q)$ در تمامی سطرها دارای ارزش

یکسان هستند. بنابراین هم‌ارزی روبه‌رو برقرار است: $\sim(p \Rightarrow \sim q) \equiv p \wedge q$

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow \sim q$	$\sim(p \Rightarrow \sim q)$	$p \wedge q$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

(۰/۵) (۰/۵) (۰/۵) (۰/۵)

۳ گزارهٔ شرطی $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$ زمانی نادرست است که فرض

درست و حکم (r) نادرست باشد. بنابراین ارزش گزارهٔ r نادرست است.

همچنین ترکیب عطفی $p \wedge \sim q$ زمانی ارزش درست است که هم p و هم $\sim q$ دارای ارزش درست باشند. بنابراین می‌توانیم ارزش گزاره‌ها را مشخص کنیم.

$$p \equiv T \quad (۰/۲۵), \quad \sim q \equiv T \Rightarrow q \equiv F \quad (۰/۲۵), \quad r \equiv F \Rightarrow \sim r \equiv T \quad (۰/۲۵)$$

بنابراین برای تعیین ارزش گزارهٔ $\sim p$ داریم $(q \vee \sim r)$

$$(F \vee T) \Rightarrow F \quad (۰/۲۵) \Rightarrow T \Rightarrow F \equiv F \quad (۰/۲۵)$$

بنابراین ارزش گزارهٔ $(q \vee \sim r) \Rightarrow \sim p$ نادرست است. (۰/۲۵)