



انتشارات
گوناگون

موج ۲۰

مرحله‌ای
و جامع

ویژه آمادگی شرکت در امتحان‌های نهایی و نیم‌سال

ریاضی یازدهم

(تجربی)

شیدا شاداب و پریسا طلوعی



امتحان‌های درس به درس	درس‌نامه برای مرور مطالب
امتحان‌های نیم‌سال اول	امتحان‌های فصل به فصل
امتحان‌های نهایی اخیر	امتحان‌های شبیه‌ساز نهایی

پیشگفتار

در ابتدا باید بگوییم درس ریاضی ۲ برای دانش آموزان سال یازدهم تجربی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است؛ زیرا این درس به صورت نهایی و هماهنگ کشوری برگزار می‌شود. بنابراین کسب نمره ۲۰ در این امتحان یکی از اهداف مهم دانش آموزان است. خوشحالیم که این کتاب را انتخاب کرده‌اید و با اطمینان به شما می‌گوییم که با مطالعه آن، کسب نمره ۲۰ برای شما آسان می‌شود.

این کتاب کاملاً در چارچوب کتاب درسی نوشته شده است و دارای ویژگی‌های زیر است:

۱) دارای درس‌نامه‌ای مختصر، کامل و مفید است که به شما کمک می‌کند تمام مطالب کتاب درسی را به آسانی مرور کنید. در درس‌نامه مثال‌های خوب و کاربردی آورده شده است تا بتوانید مفاهیم و نکات را بهتر درک کنید.

۲) آزمون‌محور است، بدین صورت که با آزمون‌های مختلف مطالب کتاب درسی بیان می‌شود؛

۳) پاسخنامه آزمون‌ها بر اساس پاسخنامه‌های امتحانات نهایی بارم‌بندی شده است. شما می‌توانید با مطالعه دقیق آن‌ها به این موضوع پی ببرید که قسمت‌های مهم در نوشتن پاسخ چیست؛

۴) همه مطالب کتاب درسی در آزمون‌ها پوشش داده شده‌اند. در این آزمون‌ها هر مطلب کتاب درسی را در قالب حداقل یک مسئله مشاهده می‌کنید؛

۵) این کتاب برای هر دانش آموز در هر سطحی مناسب است. دانش آموزان توانمند از این کتاب می‌توانند برای بهبود روش نوشتن خود استفاده کنند. همچنین دانش آموزانی که هنوز به هر دلیلی نتوانسته‌اند به مطالب کتاب درسی تسلط پیدا کنند، می‌توانند در زمان کوتاه نمره مناسبی کسب کنند.

این کتاب دارای ۴۲ آزمون، شامل آزمون‌های ۱۰ نمره‌ای و ۲۰ نمره‌ای است. آزمون‌های درس به درس و آزمون‌های فصل ۱۰ نمره‌ای هستند و آزمون‌های نیم‌سال اول، نیم‌سال دوم و جامع (تألیفی و نهایی سال‌های اخیر) ۲۰ نمره‌ای.

نوع آزمون	تعداد آزمون‌ها	توضیحات
درس به درس	۲۰	هر درس ۱ آزمون
آزمون فصل	۷	هر فصل ۱ آزمون
نیم‌سال اول	۴	فصل اول، فصل دوم، فصل سوم و فصل چهارم (درس اول)
نیم‌سال دوم	۲	فصل چهارم (درس دوم و درس سوم)، فصل پنجم، فصل ششم و فصل هفتم
جامع - شبیه‌ساز نهایی	۵	تمام کتاب
نهایی ۱۴۰۲	۲	تمام کتاب
نهایی و شبه‌نهایی ۱۴۰۳	۲	تمام کتاب

آزمون‌های جامع کاملاً تألیفی هستند و بودجه‌بندی آن‌ها بر اساس امتحان نهایی است. اما در سایر آزمون‌ها از سؤالات امتحانات نهایی سال‌های گذشته نیز استفاده شده است. این موضوع به ما و شما کمک می‌کند که به مهم‌ترین هدف کتاب برسیم و آن کسب نمره ۲۰ در امتحان نهایی ریاضی ۲ است. در پایان بر خود لازم می‌دانم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم فهیمه گودرزی برای مطالعه و ویراستاری علمی کتاب، خانم سمیه سارانی برای صفحه‌آرایی، خانم مرضیه کریمی برای رسم شکل‌ها و خانم ستین مختار مسئول واحد ویراستاری و حروف‌چینی تشکر و قدردانی کنم.

شیدا شاداب - پریسا طلوعی

فهرست مطالب

درس نامه

فصل ششم - درس دوم ۳۲

فصل ششم - درس سوم ۳۵

فصل هفتم - درس اول ۳۶

فصل هفتم - درس دوم ۳۸

آزمون های مرحله ای و جامع

آزمون ۱: فصل اول - درس اول ۴۲

آزمون ۲: فصل اول - درس دوم ۴۳

آزمون ۳: فصل اول - درس سوم ۴۴

آزمون ۴: فصل اول ۴۵

آزمون ۵: فصل دوم - درس اول ۴۶

آزمون ۶: فصل دوم - درس دوم ۴۷

آزمون ۷: فصل دوم - درس سوم ۴۸

آزمون ۸: فصل دوم ۴۹

آزمون ۹: فصل سوم - درس اول ۵۰

آزمون ۱۰: فصل سوم - درس دوم ۵۱

آزمون ۱۱: فصل سوم - درس سوم ۵۲

آزمون ۱۲: فصل سوم ۵۳

آزمون ۱۳: فصل چهارم - درس اول ۵۴

فصل اول - درس اول ۲

فصل اول - درس دوم ۴

فصل اول - درس سوم ۸

فصل دوم - درس اول ۱۰

فصل دوم - درس دوم ۱۲

فصل دوم - درس سوم ۱۵

فصل سوم - درس اول ۱۷

فصل سوم - درس دوم ۲۰

فصل سوم - درس سوم ۲۱

فصل چهارم - درس اول ۲۳

فصل چهارم - درس دوم ۲۴

فصل چهارم - درس سوم ۲۶

فصل پنجم - درس اول ۲۷

فصل پنجم - درس دوم ۲۹

فصل پنجم - درس سوم ۳۱

فصل ششم - درس اول ۳۱

آزمون ۲۹: فصل هفتم - درس اول ۷۱

آزمون ۳۰: فصل هفتم - درس دوم ۷۱

آزمون ۳۱: فصل هفتم ۷۲

آزمون ۳۲: نیم‌سال دوم (۱) ۷۳

آزمون ۳۳: نیم‌سال دوم (۲) ۷۵

آزمون ۳۴: جامع (۱) - شبیه‌ساز نهایی ۷۶

آزمون ۳۵: جامع (۲) - شبیه‌ساز نهایی ۷۷

آزمون ۳۶: جامع (۳) - شبیه‌ساز نهایی ۷۸

آزمون ۳۷: جامع (۴) - شبیه‌ساز نهایی ۸۰

آزمون ۳۸: جامع (۵) - شبیه‌ساز نهایی ۸۲

آزمون ۳۹: جامع (۶) - نهایی خرداد ۱۴۰۲ ۸۳

آزمون ۴۰: جامع (۷) - نهایی شهریور ۱۴۰۲ ۸۵

آزمون ۴۱: جامع (۸) - شبه‌نهایی اردیبهشت ۱۴۰۳ ۸۶

آزمون ۴۲: جامع (۹) - نهایی خرداد ۱۴۰۳ ۸۸

پاسخ‌های تشریحی ۹۲

آزمون ۱۴: نیم‌سال اول (۱) ۵۵

آزمون ۱۵: نیم‌سال اول (۲) ۵۶

آزمون ۱۶: نیم‌سال اول (۳) ۵۷

آزمون ۱۷: نیم‌سال اول (۴) ۵۹

آزمون ۱۸: فصل چهارم - درس دوم ۶۰

آزمون ۱۹: فصل چهارم - درس سوم ۶۱

آزمون ۲۰: فصل چهارم ۶۲

آزمون ۲۱: فصل پنجم - درس اول ۶۳

آزمون ۲۲: فصل پنجم - درس دوم ۶۴

آزمون ۲۳: فصل پنجم - درس سوم ۶۵

آزمون ۲۴: فصل پنجم ۶۶

آزمون ۲۵: فصل ششم - درس اول ۶۶

آزمون ۲۶: فصل ششم - درس دوم ۶۸

آزمون ۲۷: فصل ششم - درس سوم ۶۹

آزمون ۲۸: فصل ششم ۷۰

هندسه تحلیلی

فصل اول درس اول

معادله خط راست

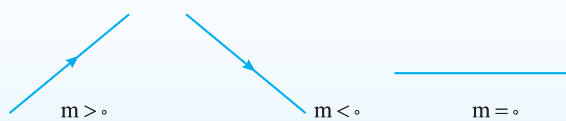
از هر دو نقطه در صفحه مختصات، فقط یک خط راست می‌گذرد.

نکته

شیب خطی که از دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ می‌گذرد برابر است با

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (x_1 \neq x_2)$$

تفاضل عرض‌ها / تفاضل طول‌ها = شیب خط



شیب خط تعریف نشده

شیب خطوط عمودی تعریف نشده است.

معادله خط راستی که از دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ می‌گذرد به صورت $y - y_1 = m(x - x_1)$ است.

شیب خط

یادآوری

فرم کلی معادله هر خط راست به صورت $ax + by + c = 0$ است (a و b با هم صفر نباشد). شیب این خط برابر با $-\frac{a}{b}$ است.

معادله هر خط راست پس از ساده شدن و مرتب شدن به صورت $y = mx + h$ نوشته می‌شود. در این معادله، شیب خط برابر است با ضریب x (m) و عرض از مبدأ (محل برخورد خط با محور y) برابر است با h.

مثال

معادله خط گذرنده از دو نقطه $A(-3, -2)$ و $B(-1, 4)$ را به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - (-2)}{-1 - (-3)} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{معادله خط با داشتن یک نقطه و شیب خط} \quad \frac{A(-3, -2)}{m=3} \rightarrow y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - (-2) = 3(x - (-3))$$

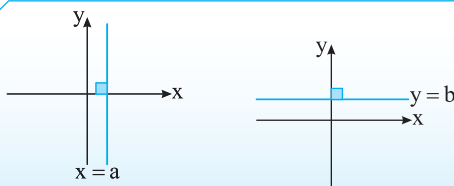
اکنون فرم کلی معادله خط (به صورت $ax + by + c = 0$) و فرم $y = mx + h$ آن را می‌نویسیم:

$$y + 2 = 3x + 9 \Rightarrow 3x + 9 - y - 2 = 0 \Rightarrow 3x - y + 7 = 0 \xrightarrow{\text{به صورت}} y = 3x + 7$$

نکته

معادله هر خط عمودی که از نقطه $A(a, b)$ می‌گذرد به صورت $x = a$ است.

معادله هر خط افقی که از نقطه $A(a, b)$ می‌گذرد به صورت $y = b$ است.



خطوط موازی و خطوط عمود

نکته

دو خط موازی: فرض کنید L_1 و L_2 دو خط راست (غیر موازی با محور y) باشند. در این صورت خطوط L_1 و L_2 با هم موازی‌اند هرگاه دارای شیب برابر باشند. به عبارت دیگر

$$m_{L_1} = m_{L_2} \Rightarrow L_1 \parallel L_2$$

دو خط عمود: فرض کنید L_1 و L_2 دو خط راست (غیر موازی با محورهای مختصات) باشند. در این صورت خطوط L_1 و L_2 بر هم عمودند

هرگاه شیب یکی، قرینه معکوس (عکس و قرینه) شیب دیگری باشد. یعنی

$$m_{L_1} = -\frac{1}{m_{L_2}} \Rightarrow m_{L_1} \cdot m_{L_2} = -1$$

به عبارت دیگر

$$m_{L_1} \cdot m_{L_2} = -1 \Rightarrow L_1 \perp L_2$$

مثال

معادله خط راستی که از نقطه $(2, 1)$ می‌گذرد و با خط $2x - 4y + 7 = 0$ موازی است را به صورت زیر مشخص می‌کنیم. اگر خط مورد نظر را d بنامیم، برای نوشتن معادله خط d ، به یک نقطه از خط d و شیب خط d نیاز داریم. چون خط d با خط $2x - 4y + 7 = 0$ موازی است، پس شیب این دو خط با هم برابر است.

شیب خط $ax + by + c = 0$ برابر $-\frac{a}{b}$ است، در نتیجه

$$2x - 4y + 7 = 0 \Rightarrow m = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

توجه کنید که اگر معادله خط را به صورت $y = mx + h$ مرتب کنیم، در این معادله، شیب خط برابر است با ضریب x .

$$2x - 4y + 7 = 0 \xrightarrow{\text{y را به دست می‌آوریم}} -4y = -2x - 7 \xrightarrow{\div (-4)} y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{4} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

اکنون می‌توانیم معادله خط را بنویسیم:

$$y = mx + h \xrightarrow{m = \frac{1}{2}} y = \frac{1}{2}x + h \xrightarrow{\substack{(2,1) \\ y=1, x=2}} 1 = \frac{1}{2}(2) + h \Rightarrow h = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

مثال

معادله خط d_1 که از نقطه $(2, 1)$ می‌گذرد و بر خط $2x - 4y + 7 = 0$ عمود است به صورت زیر نوشته می‌شود. چون خط d_1 بر خط d_2

عمود است، پس $m_{d_1} \times m_{d_2} = -1$. (از مثال قبل داریم: $m_{d_2} = \frac{1}{2}$)

$$m_{d_1} \times \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow m_{d_1} = -2$$

بنابراین معادله خط عمود بر $2x - 4y + 7 = 0$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y - y_1 = m_{d_1}(x - x_1) \xrightarrow{\substack{y_1=1, x_1=2 \\ m_{d_1}=-2}} y - 1 = -2(x - 2) \xrightarrow{\text{نوشتن به صورت } y=mx+h} y - 1 = -2x + 4 \Rightarrow y = -2x + 5$$

(استفاده از فرمول $y = mx + h$ یا فرمول $y - y_1 = m(x - x_1)$ برای نوشتن معادله خط، دلخواه است.)

فاصله بین دو نقطه

● فرض کنید A و B دو نقطه با طول‌های برابر باشند، در این صورت فاصله نقطه A از نقطه B برابر است با

$|y_A - y_B|$

● فرض کنید A و B دو نقطه با عرض‌های برابر باشند، در این صورت فاصله نقطه A از نقطه B برابر است با

$|x_A - x_B|$

نکته

● فرض کنید $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحه مختصات باشند، در این صورت فاصله نقطه A از نقطه B رابطه زیر به دست می‌آید:

$$AB = \sqrt{(\text{تفاضل عرض‌ها})^2 + (\text{تفاضل طول‌ها})^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

طول پاره خط AB همان فاصله نقطه A از نقطه B است.

● فاصله هر نقطه مانند $A(\alpha, \beta)$ از مبدأ مختصات برابر است با $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

(مبدأ مختصات به صورت $O(0, 0)$ است پس $OA = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (\beta - 0)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$)

مثال

فاصله نقطه‌های $A(1, -2)$ و $B(-2, 2)$ در صفحه مختصات یا طول پاره خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(\text{تفاضل طول‌ها})^2 + (\text{تفاضل عرض‌ها})^2} = \sqrt{(-2-1)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

بررسی وضعیت یک نقطه نسبت به یک دایره

نقطه A داخل دایره است.

نقطه A خارج دایره است.

نقطه A روی محیط دایره است.

فاصله نقطه A تا مرکز دایره

از شعاع دایره کمتر است: $OA < r$

از شعاع دایره بیشتر است: $OA > r$

فاصله نقطه A تا مرکز دایره

با شعاع دایره برابر است: $OA = r$

توجه: برای بررسی وضعیت نقطه و دایره، فاصله نقطه A تا مرکز دایره (نقطه O) را به دست می‌آوریم و آن را با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم.

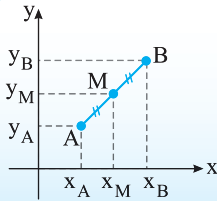
مختصات نقطه وسط پاره‌خط

نکته

فرض کنید $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحه مختصات باشند و نقطه M وسط پاره‌خط AB باشد. در این صورت مختصات نقطه M به صورت زیر است:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

میانگین‌ها



مثال

فرض کنید $A(-1, 4)$ و $B(3, 6)$. مختصات نقطه M ، وسط پاره‌خط AB ، برابر است با:

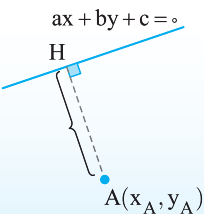
$$x_M = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1, \quad y_M = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow M(1, 5)$$

فاصله نقطه از خط راست

نکته

فاصله نقطه $A(x_A, y_A)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



توجه کنید که ابتدا معادله خط را به صورت $ax + by + c = 0$ بازنویسی می‌کنیم. سپس مختصات نقطه A را در $|ax + by + c|$ جایگذاری می‌کنیم. در آخر حاصل را بر $\sqrt{a^2 + b^2}$ تقسیم می‌کنیم. طول پاره‌خط عمود از نقطه A بر یک خط را می‌توان از رابطه بالا محاسبه کرد (فاصله نقطه A از آن خط را محاسبه می‌کنیم).

مثال

فاصله نقطه $A(1, 1)$ از خط $12(x+4) = 5(y-2)$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم. ابتدا دقت کنید که معادله خط داده شده حتماً باید به فرم $ax + by + c = 0$ باشد.

$$12(x+4) = 5(y-2) \Rightarrow 12x + 48 = 5y - 10 \Rightarrow 12x + 48 - 5y + 10 = 0 \Rightarrow 12x - 5y + 58 = 0$$

$$\xrightarrow{\substack{x=1 \\ y=1}} \text{فاصله نقطه } A \text{ از خط} = \frac{|12(1) - 5(1) + 58|}{\sqrt{(12)^2 + (-5)^2}} = \frac{65}{\sqrt{169}} = \frac{65}{13} = 5$$

فاصله خطوط موازی

• برای به دست آوردن فاصله دو خط موازی، ابتدا نقطه‌ای روی یکی از خطوط به دست می‌آوریم. سپس فاصله این نقطه را از خط دیگر پیدا می‌کنیم.

مثال

فاصله دو خط موازی $d_1: 3x + 4y = 9$ و $d_2: 6x + 8y = 15$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم. (توجه کنید که شیب این دو خط برابر $-\frac{3}{4}$ است و با هم موازی‌اند). ابتدا نقطه‌ای روی یکی از این دو خط به دست می‌آوریم. نقطه $A(3, 0)$ روی خط d_1 قرار دارد. فاصله این نقطه را از خط دیگر (d_2) به دست می‌آوریم.

$$d_2 \text{ فاصله نقطه } A \text{ از} = \frac{|6x_0 + 8y_0 - 15|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} \xrightarrow{x_0=3, y_0=0} \text{فاصله} = \frac{|6 \times 3 + 8 \times 0 - 15|}{\sqrt{100}} = \frac{|18 - 15|}{10} = \frac{3}{10}$$

معادله درجه دوم و تابع درجه ۲



فصل اول درس دوم

فرم کلی معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ است ($a \neq 0$).

تعداد ریشه‌های معادله درجه دوم

فرض کنید در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، $\Delta = b^2 - 4ac$. در این صورت، اگر $\Delta > 0$ ، آن‌گاه معادله دو ریشه حقیقی (جواب) متمایز برابر $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ دارد و اگر $\Delta = 0$ ، آن‌گاه معادله یک ریشه حقیقی (جواب) برابر $x = -\frac{b}{2a}$ دارد. همچنین اگر $\Delta < 0$ ، آن‌گاه معادله ریشه (جواب) ندارد.

صفحات پاسخ

موضوع آزمون

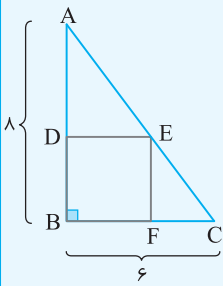
۱

آزمون

۹۲ تا ۹۳

فصل اول - درس اول

امتحان نهایی: ریاضی ۲	رشته: علوم تجربی	تألیفی	مدت امتحان: ۷۰ دقیقه
ردیف	سؤالات	نمره	
۱	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. (الف) فاصله نقطه $A(-2, 6)$ از مبدأ مختصات برابر است. (ب) حاصل ضرب شیب دو خط عمود بر هم برابر است. (پ) نقطه وسط نقاط $A(2, -4)$ و $B(0, 8)$ است. (ت) شرط موازی بودن دو خط آن است که دارای برابر باشند.	۱	
۲	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. (الف) اگر A و B دو نقطه متمایز روی محور y باشند، آنگاه $AB = x_A - x_B $. (ب) دو خط $x = -1$ و $y = 8$ بر هم عمودند. (پ) نقطه $A(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$ وسط نقاط $B(3, 2)$ و $C(-2, 1)$ قرار دارد.	۰/۷۵	
۳	گزینه صحیح را انتخاب کنید. (الف) فاصله نقطه $A(2, -1)$ از خط $3x - 4y = -2$ کدام است؟ (۱) ۲ (۲) $\frac{2}{4}$ (۳) $\frac{2}{6}$ (ب) قرینه نقطه $A(4, -1)$ نسبت به نقطه $B(0, 1)$ کدام است؟ (۱) $(-4, 3)$ (۲) $(-2, -1)$ (۳) $(4, 0)$ (پ) فاصله دو خط $L_1: 3x - y = 5$ و $L_2: 2y = 6x - 1$ کدام است؟ (۱) $\frac{6}{\sqrt{10}}$ (۲) $\frac{4/5}{\sqrt{10}}$ (۳) $\frac{4}{\sqrt{10}}$	۰/۷۵	
۴	وضعیت دو خط $L_1: 3x - 4y = 8$ و $L_2: 8y = 6x$ نسبت به هم چگونه است؟ توضیح دهید.	۱	
۵	اگر $A(2, -3)$ ، $B(-4, 0)$ و $C(1, 1)$ سه رأس متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند، مختصات رأس D را به دست آورید.	۱	
۶	خط $3x - 4y = 1$ بر دایره‌ای به مرکز $(2, -4)$ مماس است. محیط دایره را بیابید.	۱	
۷	نقاط $A(-4, 4)$ و $B(2, 2)$ دو سر قطر یک دایره‌اند. (الف) اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید. (ب) آیا نقطه $C(0, 3)$ بر روی محیط دایره قرار دارد؟ چرا؟	۱/۲۵	
۸	نوع مثلث ABC با رئوس $A(2, 5)$ ، $B(4, 1)$ و $C(1, 2)$ را مشخص کنید.	۱/۷۵	
۹	در مثلثی با رئوس $A(1, 2)$ ، $B(4, 1)$ و $C(2, 5)$ معادله میانه وارد بر ضلع AB را بنویسید.	۱/۵	
	موفق و سربلند باشید.	جمع نمره	۱۰

ردیف	سؤالات	نمره
۱	در جاهای خالی عدد یا عبارت مناسب قرار دهید. الف) اگر A و B دو نقطه هم طول در صفحه باشند، فاصله آنها برابر است با ب) اگر $\frac{a+3b}{b+3a} = \frac{2}{3}$ ، آنگاه مقدار $\frac{a}{b}$ برابر است با پ) حاصل $[\sqrt{10}] + [\sqrt{17}]$ برابر است. ت) هر رادین برابر یک درجه است.	۱
۲	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) تابع $f(x) = x^2 + 6x + 5$ ، دو ریشه حقیقی منفی دارد. (ب) هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع دلخواه همواره متشابه‌اند. پ) نمودار توابع $f(x) = \frac{x}{ x }$ و $g(x) = \frac{ x }{x}$ بر هم منطبق‌اند. (ت) طول کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی برابر 1° برابر شعاع دایره است.	۱
۳	مثلث ABC، با رئوس $A(1, 5)$ ، $B(7, 3)$ ، $C(2, -2)$ مفروض است. مطلوب است: الف) محاسبه طول ارتفاع وارد بر ضلع BC ب) معادله میانه وارد بر ضلع AB	۱/۷۵
۴	ماکزیم یا مینیم تابع با ضابطه $f(x) = (2-x)(3x-1)$ را در صورت وجود بیابید.	۱
۵	معادلات زیر را حل کنید. الف) $\sqrt{x-2} + \sqrt{3-x} = 0$ (ب) $(x^2+x+1)(x^2+x+2) = 20$ (پ) $\frac{x}{x-2} + \frac{3}{x-5} = -1$	۲/۵
۶	معادله درجه دوم بنویسید که ریشه‌های آن از دو برابر ریشه‌های معادله $2x^2 - x = 4$ ، ۳ واحد کمتر باشند.	۱/۲۵
۷	قضیه تالس را بیان و اثبات کنید.	۱ (کتاب درسی)
۸	عکس گزاره زیر را بنویسید. «اگر رأس‌های یک چهارضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، زوایای مقابل آن چهارضلعی مکمل‌اند.»	۰/۵ (کتاب درسی)
۹	در شکل زیر مساحت مربع BDEF را به‌دست آورید.	۱/۲۵
		
۱۰	مثلث با طول اضلاع ۴، ۳ و ۶ واحد را رسم کنید و مراحل رسم را شرح دهید.	۱
۱۱	دو تابع $f(x) = \begin{cases} a & x = -3 \\ \frac{x^2-9}{x+3} & x \neq -3 \end{cases}$ و $g(x) = x - b$ برابرند. مقدار $b - a$ را به‌دست آورید.	۱/۲۵
۱۲	مقدار a و b را طوری بیابید که تابع $f = \{(a, 3), (-2, 2), (2a, b), (-1, 3)\}$ یک‌به‌یک باشد.	۱
۱۳	دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-5x}}{x^2+1}$ را مشخص کنید.	۰/۷۵

امتحان نهایی: ریاضی ۲		رشته: علوم تجربی		تألیفی		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
ردیف	سؤالات						نمره
۱	در جاهای خالی عدد یا عبارت مناسب قرار دهید. الف) وارون تابع $f(x)=4^x$ به صورت است. ب) مقدار تابع سینوس در نقاطی به طول $x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}$ ، $k\in\mathbb{Z}$ رخ می‌دهد. (حداقل - حداکثر) پ) مقدار $\tan(-54^\circ)$ برابر است با						۰/۷۵
۲	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) نمودار تابع $f(x)=(\frac{1}{3})^x$ همواره پایین‌تر از نمودار تابع $f(x)=(\frac{1}{4})^x$ است. ب) تابع $f(x)=[x]+x$ در $x=2$ فقط پیوستگی راست دارد. پ) واریانس یکی از معیارهای گرایش به مرکز است. ت) اگر دامنه تغییرات تعدادی داده برابر صفر باشد، همه آن داده‌ها برابر هستند.						۱
۳	اگر $\cot 2^\circ=\frac{\lambda}{3}$ ، حاصل $\frac{2\sin 25^\circ-\cos 52^\circ}{\sin 16^\circ+3\cos 7^\circ-\cos 11^\circ}$ را بیابید.						۱/۷۵
۴	نمودار توابع زیر را رسم کنید. الف) $f(x)=1-\sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ ب) $g(x)=\frac{x}{ x }\log \frac{1}{x}$						۱/۵
۵	اگر $\log 5=3k$ ، مقدار $\log \sqrt[3]{1/6}$ را به دست آورید.						۱/۵
۶	از معادله لگاریتمی $\log_3(2x^2+1)-\log_3(x+2)=1$ ، مقدار لگاریتم $(2x-1)$ در پایه ۸ را به دست آورید.						۱/۵
۷	اگر بزرگی زلزله‌ای ۴ ریشتر افزایش یابد، انرژی آن چند برابر می‌شود؟						۱
۸	برای هر عدد حقیقی و مثبت a و b که $a\neq 1$ ثابت کنید $a^{\log_a b}=b$.						۰/۷۵
۹	توابع f و g را به گونه‌ای مثال بنویسید که در $x=-1$ حد نداشته باشند، اما تابع $f\times g$ در $x=-1$ حد داشته باشد.						۱
۱۰	تابع $f(x)=[x]$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید و نقاط ناپیوستگی آن را مشخص کنید.						۱/۵
۱۱	حاصل حدود زیر را در صورت وجود به دست آورید. الف) $\lim_{x\rightarrow 4^-}\frac{x^2-9}{x+1}$ ب) $\lim_{x\rightarrow 2^+}\frac{2x^3-16}{x^2-x-2}$ پ) $\lim_{x\rightarrow 3^-}\sqrt{1-x}$						۲
۱۲	a و b را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} x -a & x>1 \\ \sin \frac{\pi}{2}x+b & x=1 \\ \frac{x^2-9x}{x+1} & x<1\end{cases}$ در تمامی نقاط پیوسته باشد.						۱/۲۵
۱۳	احتمال آن که شخصی بیماری کلیوی داشته باشد $\frac{3}{10}$ و احتمال آنکه بیماری قلبی داشته باشد $\frac{2}{10}$ است. احتمال آن را بیابید که این فرد فقط یک نوع از این بیماری‌ها را داشته باشد.						۱/۲۵
۱۴	در پرتاب دو تاس مجموع اعداد رو شده فرد است. احتمال آن را بیابید که حداقل یکی از اعداد مضرب ۳ باشد.						۱
۱۵	اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ برابر ۵ باشد، میانگین داده‌های $(x_1+1), (x_2+2), (x_3+3), \dots, (x_{10}+10)$ را بیابید.						۰/۷۵
۱۶	ساعت‌های مطالعه دو دانش‌آموز طی یک هفته به صورت زیر گزارش شده است. عملکرد کدام دانش‌آموز بهتر است؟ $A: 3, 8, 5, 5, 9, 12$ $B: 8, 9, 11, 8, 4, 2$						۱/۵
۲۰	موفق و سربلند باشید.						جمع نمره

صفحات پاسخ

موضوع آزمون

۳۴

آزمون

۱۵۱ تا ۱۵۳

جامع (۱) - شبیه‌ساز نهایی

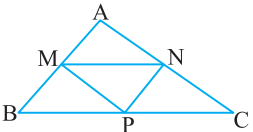
ردیف	سؤالات	رشته: علوم تجربی	تألیفی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
۱	در جاهای خالی عدد یا عبارت مناسب قرار دهید. الف) مکمل زاویه 46° برابر است با ب) حاصل $[1-\pi]+[\pi-1]$ برابر است. پ) فاصله مبدأ از خط $2x-y=2$ برابر است.			۰/۷۵
۲	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر دامنه تغییرات داده‌های آماری گروه A برابر دامنه تغییرات داده‌های آماری گروه B باشد، داده‌های گروه A و گروه B با هم برابرند. ب) اگر $a > b > 0$ آن‌گاه $\log_c a > \log_c b$. پ) تابع $f(x) = \sqrt{1-x}$ در $x=1$ پیوستگی راست ندارد.			۰/۷۵
۳	معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $3-\sqrt{48}$ و $3+\sqrt{48}$ باشند.			۰/۷۵
۴	دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط $2y+x=6$ و $2x-y=7$ و یک رأس آن نقطه $A(8, 5)$ است. مساحت این مستطیل را به دست آورید.			۱/۲۵
۵	در شکل مقابل، محیط چهارضلعی را بیابید.			۱/۵
۶	برای گزاره «مکعب هر عدد از مجذور آن بزرگ‌تر است» مثال نقض ارائه کنید.			۰/۲۵
۷	محیط دو مثلث متشابه ۲۴ و ۳۶ است، اگر مساحت مثلث کوچک‌تر ۱۲ باشد، مساحت مثلث بزرگ‌تر را بیابید.			۰/۷۵
۸	اگر f تابعی خطی باشد به طوری که $f(3)=8$ و $f^{-1}(1)=-6$ ، حاصل $9f(2)+7f^{-1}(0)$ را به دست آورید.			۱
۹	نمودار تابع f رسم شده است. نمودار تابع $y=-3f(x)-2$ را رسم کنید.			۰/۷۵
۱۰	بررسی کنید آیا توابع $f(x)=1$ و $g(x)=\frac{\sqrt{x^2}}{ x }$ با هم برابرند.			۰/۷۵
۱۱	معادلات زیر را حل کنید. الف) $(x+\frac{1}{x})^2-4(x+\frac{1}{x})+3=0$ ب) $1-\log_4 x = \log_{16} x$ پ) $(\frac{1}{16})^{2x-1} = 3^{21-x}$ (نهایی ۱۴۰۳)			۲/۷۵
۱۲	جمعیت یک شهر سالانه ۱ درصد کاهش می‌یابد. پس از گذشت چند سال جمعیت این شهر، نصف جمعیت فعلی می‌شود؟ ($\log 99=1/995$, $\log 2=0/3$)			۱/۲۵
۱۳	اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ ، مقدار $\frac{\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})+\sin(3\pi+\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)+\cos(\alpha-\pi)}$ را بیابید.			۱/۵
۱۴	نمودار تابع $f(x)=\frac{1-\sin x}{3}$ را در بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ رسم کنید و برد آن را بیابید.			۱

ردیف	سؤالات	نمره
۱۵	حاصل حدود زیر را در صورت وجود به دست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x-1}{[x]}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+x-6}{2x^2-8}$	۱/۲۵
۱۶	مقدار a و b را چنان بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < -1 \\ ax+b & x = -1 \\ x^2-3b & x > -1 \end{cases}$ در تمام نقاط پیوسته باشد.	۱/۲۵
۱۷	روی ۱۰ کارت عددهای ۱ تا ۱۰ را نوشته‌ایم و در کیسه‌ای ریخته‌ایم. یک کارت را به تصادف بیرون آورده‌ایم. اگر بدانیم عدد روی این کارت از ۳ بیشتر است، احتمال اینکه این عدد زوج باشد، چقدر است؟	۱
۱۸	واریانس پنج داده آماری صفر است. اگر سه داده ۵، ۸ و ۱۰ را به داده‌ها بیفزاییم، میانگین داده‌ها ۶ می‌شود. واریانس هشت داده را بیابید.	۱/۵
	موفق و سربلند باشید.	جمع نمره ۲۰

۳۵
آزمون

موضوع آزمون
صفحات پاسخ

جامع (۲) - شبیه‌ساز نهایی
۱۵۴ تا ۱۵۶

امتحان نهایی: ریاضی ۲		رشته: علوم تجربی		تألیفی		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
ردیف	سؤالات						نمره
۱	در جاهای خالی عدد یا عبارت مناسب قرار دهید. الف) اگر $\alpha + \beta$ برابر باشد، آن‌گاه $\cos \beta = \sin \alpha$. ب) فاصله نقطه $A(-۲, ۶)$ از خط $x = ۴$ برابر است. پ) استدلالی که در آن از کل به جز می‌رسیم، استدلال است. ت) در تابع $f(x) = \frac{x}{[x]-۳}$ حد راست تابع در $x = ۳$						۱
۲	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر ۲۰ درصد از قیمت کالاهای یک فروشگاه کسر شود، واریانس قیمت‌ها تغییر نمی‌کند. ب) تابع $f(x) = [x]$ در بازه $(۳, ۶)$ پیوسته است. پ) توابع $f(x) = ۲^x$ و $g(x) = ۲^{-x}$ برابرند.						۰/۷۵
۳	در معادله درجه دوم $(m-۳)x^۲ + ۳x = ۵$ ، مقدار m را چنان بیابید که الف) ریشه‌های معادله معکوس هم باشند. ب) مجموع ریشه‌ها برابر ۳ باشد.						۱
۴	استخری دو شیر تخلیه آب دارد. شیر اول به تنهایی استخر را در ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه و شیر دوم به تنهایی استخر را در ۲ ساعت تخلیه می‌کند. اگر هر دو شیر با هم باز شوند، این استخر در چه مدت زمانی تخلیه می‌شود؟						۱
۵	عکس گزاره «اگر در یک مثلث دو ارتفاع نابرابر باشند، ضلع متناظر به ارتفاع بزرگ‌تر، کوچک‌تر از ضلع متناظر به ارتفاع کوچک‌تر است.» را بنویسید.						۰/۵
۶	 اگر نقاط M، N و P مطابق شکل وسط‌های اضلاع مثلث ABC باشند، ثابت کنید مثلث‌های ABC و MNP متشابه‌اند. (کتاب درسی)						۱/۲۵
۷	اگر $f(x) = \sqrt{۴-x^۲}$ و $g(x) = \frac{x+۱}{۲-x}$ ، دامنه و ضابطه تابع $\frac{g}{f}$ را به دست آورید.						۱/۵
۸	به کمک رسم شکل بررسی کنید آیا تابع $f(x) : \begin{cases} x-۱ & x \geq ۰ \\ -x^۲ & x < ۰ \end{cases}$ وارون‌پذیر است؟						۱



پاسخ تشریحی آزمون (۱)

۱ الف) فاصله هر نقطه مانند (α, β) از مبدأ مختصات برابر

است با $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. پس فاصله $A(-2, 6)$ از مبدأ مختصات برابر است با $\sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}$.

ب) ۱- دو خط که بر هم عمودند شیب‌هایشان عکس و قرینه یکدیگر است یعنی اگر شیب یکی برابر m باشد آن‌گاه شیب دیگری برابر $-\frac{1}{m}$ است. در این

صورت حاصل ضرب شیب این دو خط برابر -1 است $(m \times -\frac{1}{m} = -1)$.

پ) $(1, 2)$. مختصات نقطه‌ای که وسط نقاط $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ قرار دارد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$$

پس مختصات نقطه وسط نقاط $A(2, -4)$ و $B(6, 8)$ برابر است با

$$(\frac{2+6}{2}, \frac{-4+8}{2}) = (\frac{8}{2}, \frac{4}{2}) = (4, 2)$$

ت) شیب

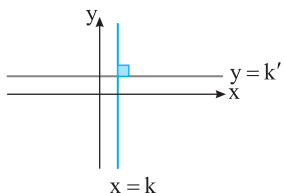
۲ الف) نادرست. فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

از طرف دیگر مختصات نقطه‌ای که روی محور y قرار دارند به صورت $(0, \beta)$

هستند پس $A(0, y_A)$ و $B(0, y_B)$. در این صورت

$$AB = \sqrt{(0-0)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(y_A - y_B)^2} = |y_A - y_B|$$



ب) درست. توجه کنید که خطوط

به فرم $x=k$ و خطوط به فرم $y=k'$ (و k' عددی حقیقی)

بر هم عمودند. (به شکل توجه کنید.)

پ) نادرست. وسط دو نقطه B و C برابر است با

$$M = (\frac{3+(-2)}{2}, \frac{2+1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$$

۳ الف) گزینه (۲). توجه کنید که معادله خط را به فرم $ax + by + c = 0$

$$3x - 4y = -2 \Rightarrow 3x - 4y + 2 = 0$$

می‌نویسیم:

فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با

$$OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad x_0 = 2, y_0 = -1, a = 3, b = -4, c = 2$$

$$OH = \frac{|3(2) - 4(-1) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|6 + 4 + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{12}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5}$$

ب) گزینه (۱). برای پیدا کردن قرینه نقطه A نسبت به نقطه B از A به B وصل می‌کنیم و پاره خط AB را از سمت B به اندازه خودش و در همان راستا امتداد می‌دهیم تا به نقطه A' برسیم. در این صورت A' قرینه نقطه A نسبت به نقطه B است. به شکل زیر دقت کنید.



با توجه به شکل نقطه B وسط نقاط A و A' است. در این صورت اگر $A'(\alpha, \beta)$ ، آن‌گاه

$$B(0, 1) = (\frac{\alpha + 0}{2}, \frac{\beta + 0}{2}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha + 0}{2} = 0 \Rightarrow \alpha + 0 = 0 \Rightarrow \alpha = -4 \\ \frac{\beta + 0}{2} = 1 \Rightarrow -1 + \beta = 2 \Rightarrow \beta = 3 \end{cases}$$

پس $A'(-4, 3)$.

پ) گزینه (۲). این دو خط موازی‌اند:

$$\begin{cases} L_1: 3x - y - 5 = 0 \xrightarrow{\times 2} L_1: 6x - 2y - 10 = 0 \Rightarrow m = -\frac{6}{-2} = 3 \\ L_2: 6x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow m = -\frac{6}{-2} = 3 \end{cases}$$

توجه کنید که نقطه $(0, -5)$ روی L_1 قرار دارد. فاصله این نقطه را از L_2 به دست می‌آوریم. در نتیجه فاصله این دو خط برابر است با

$$h = \frac{|6(0) - 2(-5) - 1|}{\sqrt{6^2 + (-2)^2}} \Rightarrow h = \frac{9}{\sqrt{40}} = \frac{9}{2\sqrt{10}}$$

۴ برای فهمیدن وضعیت دو خط (که موازی محورها مختصات نیستند) نسبت به هم باید شیب آن‌ها را مقایسه کنیم. اگر شیب خطوط با هم برابر باشند، آن‌گاه دو خط موازی هستند، اگر شیب خطوط عکس و قرینه یکدیگر باشند، آن‌گاه آن دو خط عمود هستند و در غیر این دو حالت دو خط متقاطع غیرعمود هستند. اکنون شیب خطوط داده شده را به دست می‌آوریم:

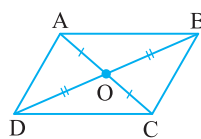
$$L_1: 3x - 4y = 8 \xrightarrow{\text{y را به دست می‌آوریم}} -4y = 8 - 3x \xrightarrow{\div (-4)} y = -2 + \frac{3}{4}x \Rightarrow \text{شیب } L_1 = \frac{3}{4}$$

$$y = -2 + \frac{3}{4}x \Rightarrow \text{شیب } L_1 = \frac{3}{4}$$

$$L_2: 8y = 6x \xrightarrow{\div 8} y = \frac{6}{8}x \Rightarrow \text{شیب } L_2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

چون شیب این دو خط با هم برابر است پس دو خط با هم موازی‌اند.

توجه کنید که برای به دست آوردن شیب خط $ax + by + c = 0$ می‌توانیم از $m = -\frac{b}{a}$ نیز استفاده کنیم.



۵ توجه کنید که در هر متوازی‌الاضلاع قطرهای منصف یکدیگرند. یعنی مطابق شکل روبه‌رو، نقطه O وسط پاره‌های AC و BD است. بنابراین

$$\Rightarrow O(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}) \text{ نقطه } O \text{ وسط پاره خط } AC \text{ است.}$$

$$\Rightarrow O(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2}) \text{ نقطه } O \text{ وسط پاره خط } BD \text{ است.}$$

دقت کنید که مختصات دو نقطه زمانی با هم برابر هستند که طول دو نقطه با هم و عرض دو نقطه نیز با هم برابر باشند. پس

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow x_A + x_C = x_B + x_D \\ 2 + 1 = -4 + x_D \Rightarrow x_D = 7 \\ \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow y_A + y_C = y_B + y_D \\ -3 + 1 = 0 + y_D \Rightarrow y_D = -2 \end{cases}$$

در نتیجه مختصات رأس D برابر است با $D(7, -2)$.

۸] برای آنکه نوع مثلث مشخص شود طول اضلاع آن را به دست می آوریم.

$$C \text{ فاصله نقطه } A \text{ تا نقطه } C = AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$

$$\xrightarrow{A(2,5) \quad C(1,2)} AC = \sqrt{(2-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$B \text{ فاصله نقطه } A \text{ تا نقطه } B = AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

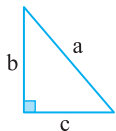
$$\xrightarrow{A(2,5) \quad B(4,1)} AB = \sqrt{(2-4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

$$C \text{ فاصله نقطه } B \text{ تا نقطه } C = BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$$

$$\xrightarrow{B(4,1) \quad C(1,2)} BC = \sqrt{(4-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

توجه کنید که $AC = BC = \sqrt{10}$. پس مثلث ABC متساوی الساقین است. همچنین باید تشخیص داد که آیا مثلث ABC قائم الزویه است یا خیر. پس درستی رابطه فیثاغورس را برای این مثلث بررسی می کنیم.



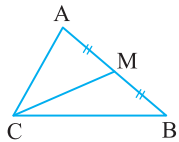
$$\xrightarrow{\text{رابطه فیثاغورس}} a^2 = b^2 + c^2$$

بزرگ ترین ضلع مثلث را وتر مثلث در نظر می گیریم.

$$BC^2 + AC^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 = 10 + 10 = 20 \xrightarrow{AB^2 = 20}$$

$$BC^2 + AC^2 = AB^2$$

بنابراین رابطه فیثاغورس در این مثلث برقرار است. پس مثلث ABC قائم الزویه متساوی الساقین است.



۹] میانه وارد بر ضلع AB ، از وسط نقاط A و B و نقطه C می گذرد (شکل را ببینید). بنابراین ابتدا باید مختصات نقطه M را به دست آوریم:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{2+1}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

برای نوشتن معادله میانه وارد بر ضلع AB اکنون شیب این خط را پیدا می کنیم:

$$\text{شیب پاره خط } CM = \frac{y_M - y_C}{x_M - x_C} = \frac{\frac{3}{2} - 5}{\frac{5}{2} - 1} = \frac{\frac{3-10}{2}}{\frac{5-2}{2}} = \frac{-7}{3} = -\frac{7}{3}$$

$$y = mx + h \xrightarrow{m = -\frac{7}{3}} y = -\frac{7}{3}x + h \xrightarrow{C(2,5)}$$

$$5 = -\frac{7}{3} \times 2 + h \Rightarrow h = 5 + \frac{14}{3} = \frac{29}{3}$$

پس معادله میانه وارد بر AB به صورت $y = -\frac{7}{3}x + \frac{29}{3}$ است.

پاسخ تشریحی آزمون (۲)

۱ الف) مثبت. اگر a و c هم علامت نباشند، آن گاه $ac < 0$ پس

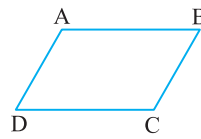
$$\Delta = b^2 - 4ac = \text{منفی} + \text{منفی} = \text{منفی}$$

پس Δ مثبت است.

ب) $x^2 + 2x - 1 = 0$. اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم باشند، آن گاه

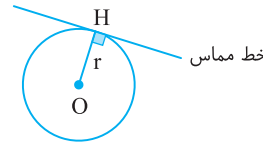
این معادله می تواند به فرم زیر باشد:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$



توجه کنید که در حالت کلی بین رئوس متوازی الاضلاع $ABCD$ رابطه زیر برقرار است.

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$



۶] می دانیم محیط دایره برابر است با $2\pi r$ که در آن شعاع دایره است. پس ابتدا شعاع دایره را به دست می آوریم. به شکل روبه رو دقت کنید. پاره خط

OH فاصله مرکز دایره تا خط مماس است که با شعاع دایره برابر است. پس برای پیدا کردن شعاع دایره باید فاصله نقطه $(2, -4)$ را از خط $3x - 4y = 1$ به دست آوریم (توجه کنید که در پیدا کردن فاصله نقطه از خط، معادله خط باید به صورت $ax + by + c = 0$ باشد).

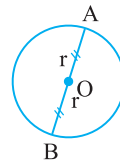
$$3x - 4y = 1 \xrightarrow{\text{مرتب سازی}} 3x - 4y - 1 = 0$$

فاصله نقطه $M(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با

$$OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \xrightarrow{a=3, b=-4, c=-1} OH = \frac{|3x_0 - 4y_0 - 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$\xrightarrow{x_0=2, y_0=-4} OH = \frac{|3(2) - 4(-4) - 1|}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} = \frac{|6 + 16 - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|21|}{\sqrt{25}} = \frac{21}{5} = 4.2$$

بنابراین محیط دایره برابر است با $2\pi r = 2\pi \times 4.2 = 8.4\pi$.



۷ الف) با توجه به شکل، نقطه وسط A و B ، مرکز دایره است. از طرفی طول پاره خط AB با اندازه قطر $(2r)$ دایره برابر است. پس

$$O = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{-4+2}{2}, \frac{4+2}{2} \right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{6}{2} \right) = (-1, 3)$$

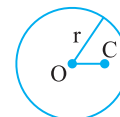
$$2r = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$= \sqrt{(-4-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$2\sqrt{10} = 2r \Rightarrow r = \sqrt{10}$$

توجه کنید که برای به دست آوردن r ، می توانستیم فاصله نقطه O را از هر کدام از نقاط A یا B به دست آوریم که برابر $\sqrt{10}$ است.

ب) خیر. برای تشخیص وضعیت نقطه C نسبت به دایره مورد نظر، باید اندازه شعاع دایره (r) را با فاصله نقطه C از مرکز دایره (OC) مقایسه کرد.



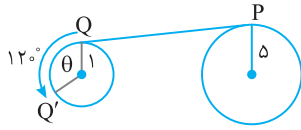
$$OC = \sqrt{(x_O - x_C)^2 + (y_O - y_C)^2}$$

$$= \sqrt{(-1-0)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$$

$$\begin{cases} OC = 1 \\ r = \sqrt{10} \end{cases} \xrightarrow{1 < \sqrt{10}} OC < r$$

بنابراین نقطه C درون دایره قرار دارد.

۸ ابتدا مسافتی را که نقطه Q طی کرده (روی قرقره کوچک) به دست می آوریم:



$$\theta = 120^\circ \xrightarrow{\frac{D=R}{180^\circ \pi}} \frac{120^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{120^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{2\pi}{3} \text{ رادیان}$$

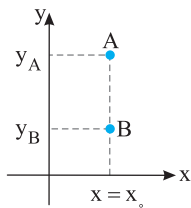
$$QQ' = \ell = r\theta \Rightarrow \ell = 1 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ cm}$$

چون هر دو قرقره با یک تسمه به هم متصل هستند، پس قرقره بزرگتر نیز $\frac{2\pi}{3}$

سانتی متر حرکت کرده است. برای قرقره بزرگتر داریم

$$\theta = \frac{\ell}{r} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{5} = \frac{2\pi}{15} \text{ رادیان}$$

پاسخ تشریحی آزمون (۱۴)



۱ الف) $|y_A - y_B|$ یا تفاضل عرض‌ها یا

فاصله عرض‌ها. (۵/۷۵) توجه کنید که دو نقطه

هم‌طول $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ در

حقیقت دو نقطه روی خط $x = x_0$ هستند، پس

فاصله آن‌ها برابر است با $|y_A - y_B|$.

ب) $\frac{y}{3}$. (۵/۷۵) توجه کنید که

$$\frac{a+3b}{b+3a} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3(a+3b) = 2(b+3a)$$

$$3a+9b=2b+6a \Rightarrow 7b=3a \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{7}{3}$$

پ) ۷. (۵/۷۵) توجه کنید که

$$9 < 10 < 16 \Rightarrow 3 < \sqrt{10} < 4 \Rightarrow [\sqrt{10}] = 3$$

$$16 < 17 < 25 \Rightarrow 4 < \sqrt{17} < 5 \Rightarrow [\sqrt{17}] = 4$$

پس $[\sqrt{10}] + [\sqrt{17}] = 3 + 4 = 7$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{1}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ (ت) } \frac{\pi}{180^\circ} \text{ (۵/۷۵) توجه کنید که}$$

۲ الف) درست. (۵/۷۵) روش اول: ابتدا دلتا را به دست می آوریم

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(1)(5) = 36 - 20 = 16 > 0$$

بنابراین این معادله دو ریشه دارد. از طرف دیگر

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \xrightarrow{\text{حاصل ضرب ریشه‌ها}} P = \frac{c}{a} = \frac{5}{1} = 5 > 0$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ریشه‌ها}} S = \frac{-b}{a} = \frac{-6}{1} = -6$$

در نتیجه این معادله دو ریشه منفی دارد.

روش دوم:

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x+5)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -5, \quad x = -1$$

ب) درست. (۵/۷۵) زاویه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع برابر 60° هستند، پس

دو مثلث متساوی‌الاضلاع به حالت (زز) متشابه‌اند.

۴ از رابطه $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ استفاده می کنیم:

$$\frac{-22^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{-22^\circ \pi}{180^\circ} = -\frac{11}{90} \pi \text{ رادیان}$$

توجه کنید که ربع چهارم $-90^\circ < -22^\circ < 0^\circ$

اکنون 325° را به رادیان تبدیل می کنیم:

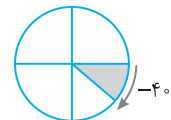
$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{325^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{325^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{65}{36} \pi \text{ رادیان}$$

از طرف دیگر ربع چهارم $27^\circ < 325^\circ < 36^\circ$

۵ از رابطه $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ استفاده می کنیم. توجه کنید

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{-2\pi}{9} \Rightarrow D = 180^\circ \left(\frac{-2}{9} \right) = -40^\circ$$

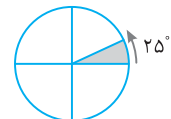
-40° روی دایره مثلثاتی به صورت مقابل است:



اکنون $\frac{5\pi}{36}$ را به درجه تبدیل می کنیم

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{5\pi}{36} \Rightarrow D = \frac{5}{36} \times 180^\circ = 25^\circ$$

در دایره مثلثاتی به صورت روبه‌رو است:



۶ با توجه به شکل صورت سؤال، مسیر حرکت به صورت زیر است:

کمان روبه‌رو به $\widehat{AOBA} = \widehat{AO} + \widehat{OB} + \widehat{BA} = \text{شعاع} + \text{شعاع} + \widehat{AOB}$

طول کمان $\widehat{AB}$ را به دست می آوریم. برای محاسبه طول کمان (ℓ) از رابطه

$\ell = r\theta$ استفاده می کنیم. توجه داشته باشید که در این رابطه زاویه θ بر

حساب رادیان است. پس ابتدا زاویه 120° را از رابطه $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ به رادیان

$$\frac{120^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{120^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3} \text{ رادیان تبدیل می کنیم:}$$

$$\ell = r\theta \Rightarrow \ell = 1 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ km}$$

$$1 + 1 + \frac{2\pi}{3} = 2 + \frac{2\pi}{3} = \frac{6+2\pi}{3} \text{ (km) پس مسافت طی شده برابر است با}$$

۷ دو زاویه مورد نظر را α و β در نظر می گیریم ($\alpha > \beta$). توجه داشته

باشید که واحد اندازه‌گیری دو زاویه باید یکسان باشد. پس ابتدا با توجه به

رابطه $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ زاویه 72° را به رادیان تبدیل می کنیم:

$$\frac{72^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{72^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{5} \text{ رادیان}$$

در این صورت کافی است دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{2\pi}{5} \\ \alpha - \beta = \frac{\pi}{10} \end{cases} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} 2\alpha = \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}$$

$$2\alpha = \frac{4\pi}{10} + \frac{\pi}{10} = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ رادیان}$$

پس

اکنون معادله CM را با داشتن دو نقطه از آن می نویسیم:

$$\begin{cases} C(2, -2) \\ M(4, 4) \end{cases} \xrightarrow{y=ax+b} a = \frac{4 - (-2)}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y = 3x + b \xrightarrow{M(4, 4)} 4 = 3 \times 4 + b \Rightarrow b = -8$$

$$y = 3x - 8 \quad (CM \text{ معادله}) \quad (0/5)$$

۴ روش اول: با توجه به ضابطه داده شده $x = 2$ و $x = \frac{1}{3}$ ریشه های این

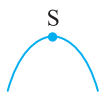
$$معادله هستند. $x_S = \frac{2 + \frac{1}{3}}{2}$ ، طول رأس سهمی است (وسط $x = 2$ و $x = \frac{1}{3}$):$$

$$x_S = \frac{1}{6} \quad (0/5) \Rightarrow y_S = (2 - \frac{1}{6})(3(\frac{1}{6}) - 1) \quad (0/5) = (\frac{5}{6})(\frac{1}{6})$$

$$= (\frac{5}{6})(\frac{5}{6}) = \frac{25}{36} \quad (0/5) \text{ ماکزیمم}$$

روش دوم: توجه کنید که

$$f(x) = (2-x)(3x-1) = 6x - 2 - 3x^2 + x \Rightarrow f(x) = -3x^2 + 7x - 2$$



f تابعی درجه دوم است و چون در این معادله $a = -3 < 0$ ، بنابراین نمودار تابع f به صورت مقابل و تابع دارای ماکزیمم است. (0/5) مقدار y_S را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\text{Max} = y_S = \frac{-\Delta}{4a} \quad (0/5) = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$= \frac{-(7^2 - 4 \times (-3) \times (-2))}{4 \times (-3)} \quad (0/5) = \frac{-25}{-12} = \frac{25}{12} \quad (0/5)$$

۵ روش اول:

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{3-x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} = -\sqrt{3-x} \xrightarrow{\text{توان ۲}}$$

$$x-2 = 3-x \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

بررسی درستی جواب
جایگذاری در معادله

$$\sqrt{\frac{5}{2}-2} = -\sqrt{3-\frac{5}{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

نادرست

در نتیجه جواب قابل قبول نیست و این معادله جواب ندارد. (0/5)

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{3-x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} = -\sqrt{3-x}$$

روش دوم:

معادله ریشه حقیقی ندارد. زیرا حاصل یک رادیکال، برابر مقداری منفی

نمی تواند باشد. (0/5)

ب) از تغییر متغیر استفاده می کنیم:

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 2 \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \frac{x^2 + x + 1 = t}{}$$

$$(x^2 + x + 1)((x^2 + x + 1) + 1) = 2 \Rightarrow$$

$$t(t+1) = 2 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow (t+2)(t-1) = 0 \quad (0/5)$$

$$\begin{cases} t = -2 \xrightarrow{t = x^2 + x + 1} x^2 + x + 1 = -2 \Rightarrow x^2 + x + 3 = 0 \\ \Delta = (1)^2 - 4(1)(3) = -11 < 0 \end{cases}$$

(0/5) معادله ریشه حقیقی ندارد.

$$\begin{cases} t = 1 \xrightarrow{t = x^2 + x + 1} x^2 + x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + x - 3 = 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(-3) = 13 > 0 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(-3) = 13 > 0 \xrightarrow{\Delta > 0}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \quad (0/5)$$

پ) درست. (0/5) نمودار دو تابع زمانی بر هم منطبق است که دو تابع با هم برابر باشند. برابری دو تابع f و g را بررسی می کنیم.

۱) برابری دامنه ها:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{|x|} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ g(x) = \frac{|x|}{x} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$$

دامنه ها برابرند. $D_f = D_g$

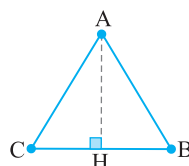
۲) برابری ضابطه ها:

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ \frac{x}{-x} = -1 & x < 0 \end{cases}, g(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین دو تابع f و g برابرند ($D_f = D_g, f(x) = g(x)$) و در نتیجه نمودار

این دو تابع بر هم منطبق است.

ت) نادرست. (0/5) طول کمان روبه رو به زاویه مرکزی به اندازه ۱ رادیان با شعاع دایره برابر است.



۳ الف) اگر ارتفاع AH وارد بر ضلع BC باشد، طول ارتفاع AH برابر است با فاصله نقطه A از پاره خط BC. بنابراین ابتدا معادله خط BC را با داشتن دو نقطه از این خط به دست می آوریم.

$$\begin{cases} B(7, 2) \\ C(2, -2) \end{cases} \xrightarrow{y=ax+b} a = \frac{2 - (-2)}{7 - 2} = \frac{4}{5} \Rightarrow y = \frac{4}{5}x + b$$

$$\xrightarrow{(2, -2)} -2 = \frac{4}{5}(2) + b \Rightarrow b = -\frac{18}{5}$$

$$y = \frac{4}{5}x - \frac{18}{5} \quad (BC \text{ خط معادله}) \quad (0/5)$$

$$y = x - 4 \xrightarrow{\text{مرتب کردن به صورت } ax+by+c=0} x - y - 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ضرایب معادله}} \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -4 \end{cases}$$

اکنون با استفاده از رابطه فاصله نقطه از خط می توان نوشت:

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \xrightarrow{x_A=1, y_A=5} \frac{|(1) + (-1)(5) + (-4)|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{|-8|}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \quad (0/5)$$

ب) اگر CM میانه وارد بر ضلع AB باشد، آن گاه CM ضلع AB را نصف می کند. یعنی نقطه M وسط پاره خط AB قرار می گیرد. بنابراین مختصات نقطه M برابر است با

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 7}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5 + 3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow M(4, 4) \quad (0/5)$$

از طرفی DE قاعده مشترک دو مثلث DBE و DEC است و چون ارتفاع‌های این دو مثلث برابرند (ارتفاعی که از رأس B بر امتداد DE رسم می‌شود مساوی ارتفاعی است که از رأس C بر امتداد DE رسم می‌شود، چون $DE \parallel BC$). پس $S_{DEC} = S_{DBE}$ (۲)

$$\xrightarrow{(۱),(۲),(۳)} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad (۰/۷۵)$$

۸ در یک گزاره، اگر جای فرض و حکم را با هم عوض کنیم، عکس گزاره به دست می‌آید.

گزاره: اگر رأس‌های یک چهارضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، (فرض) زوایای مقابل آن چهارضلعی مکمل اند (حکم).

عکس گزاره: اگر زوایای مقابل یک چهارضلعی مکمل هم باشند آن‌گاه رأس‌های آن چهارضلعی روی یک دایره قرار دارند. (۰/۵)

۹ به شکل مقابل توجه کنید. چهارضلعی BDEF مربع و اندازه هر ضلع آن برابر x است. چون اضلاع مربع مساوی و موازی یکدیگرند، بنابراین در مثلث ABC، DE با BC موازی است و بنابر تعمیم قضیه تالس

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \quad (۰/۷۵) \Rightarrow \frac{\lambda - x}{\lambda} = \frac{x}{6} \quad (۰/۵)$$

$$\lambda x = 6(\lambda - x) \Rightarrow \lambda x = 4\lambda - 6x \Rightarrow 14x = 4\lambda \Rightarrow x = \frac{2\lambda}{7} \quad (۰/۷۵)$$

$$\text{مساحت مربع} = x^2 = \left(\frac{2\lambda}{7}\right)^2 \quad (۰/۷۵)$$

۱۰ ابتدا به وسیله خط کش، بزرگ‌ترین ضلع مثلث (ضلع به طول ۶ واحد) را رسم می‌کنیم. (۰/۷۵)

سپس دهانه پراگار را به اندازه ۴ واحد باز می‌کنیم و از نقطه انتهایی پاره‌خط یک کمان می‌زنیم. (۰/۷۵)

اکنون دهانه پراگار را به اندازه ۳ واحد باز و از نقطه انتهایی دیگر پاره‌خط، یک کمان دیگر می‌زنیم. (۰/۷۵)

دو طرف پاره‌خط ۶ واحدی را به محل برخورد دو کمان، یعنی نقطه M وصل می‌کنیم. واضح است شکل حاصل، یک مثلث است.

۱۱ توابع f و g برابرند هرگاه اولاً دامنه و دوماً ضابطه آن‌ها با هم برابر باشند. واضح است که $D_f = D_g = \mathbb{R}$. برابری ضابطه‌ها را نیز بررسی می‌کنیم. مقدار

تابع f به ازای $x = -3$ برابر a است (یعنی $f(-3) = a$). بنابراین مقدار تابع g نیز به ازای $x = -3$ باید برابر a باشد. در نتیجه $g(-3) = a$.

$$g(x) = x - b \Rightarrow g(-3) = -3 - b \xrightarrow{g(-3)=a} a = -3 - b$$

$$a + b = -3 \quad (۱)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = x - 3 \quad (۰/۷۵), \quad g(x) = x - b$$

$$\xrightarrow{\substack{f(x)=g(x) \\ x \neq -3}} x - 3 = x - b \quad (۰/۷۵) \Rightarrow b = 3 \quad (۰/۷۵)$$

$$\xrightarrow{(۱)} a + b = -3 \Rightarrow a = -6 \quad (۰/۷۵) \Rightarrow b - a = 9 \quad (۰/۷۵)$$

$$\frac{x}{x-2} + \frac{3}{x-5} = -1 \Rightarrow \frac{x}{x-2} + \frac{3}{x-5} + 1 = 0$$

(پ)

$$\xrightarrow{\text{م.م.م. مخرج‌ها}} (x-2)(x-5) \left(\frac{x}{x-2} + \frac{3}{x-5} + 1 \right) = 0$$

$$x(x-5) + 3(x-2) + (x-2)(x-5) = 0 \quad (۰/۷۵)$$

$$x^2 - 5x + 3x - 6 + x^2 - 7x + 10 = 0 \quad (۰/۷۵)$$

$$2x^2 - 9x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (-9)^2 - 4(2)(4) = 49 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{9-7}{2} = \frac{1}{2} \quad (۰/۷۵), \quad x = \frac{9+7}{2} = 4 \quad (۰/۷۵)$$

جواب‌ها مخرج هیچ یک از کسرهای صفر نمی‌کنند. بنابراین هر دو جواب قابل قبول هستند.

۶ فرض کنید α' و β' ریشه‌های معادله جدید باشند. اگر حاصل جمع ریشه‌ها را S' و حاصل ضرب ریشه‌ها را P' بنامیم، آن‌گاه معادله جدید می‌تواند به صورت $x^2 - S'x + P' = 0$ باشد. همچنین اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - x - 4 = 0$ باشند، آن‌گاه

$$\begin{cases} \text{مجموع ریشه‌ها: } S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2} \quad (۰/۷۵) \\ \text{حاصل ضرب ریشه‌ها: } P = \frac{c}{a} = \frac{-4}{2} = -2 \quad (۰/۷۵) \end{cases}$$

اکنون بنابر فرض می‌توان نوشت:

$$\alpha' = 2\alpha - 3, \quad \beta' = 2\beta - 3$$

$$S' = \alpha' + \beta' = 2\alpha - 3 + 2\beta - 3 = 2\alpha + 2\beta - 6 = 2(\alpha + \beta) - 6 = 2S - 6$$

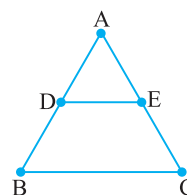
$$\xrightarrow{S=\frac{1}{2}} 2\left(\frac{1}{2}\right) - 6 = 1 - 6 = -5 \quad (۰/۷۵)$$

$$P' = \alpha'\beta' = (2\alpha - 3)(2\beta - 3) = 4\alpha\beta - 6\alpha - 6\beta + 9 = 4P - 6S + 9$$

$$\xrightarrow{P=-2, S=\frac{1}{2}} 4(-2) - 6\left(\frac{1}{2}\right) + 9 = -8 - 3 + 9 = -2 \quad (۰/۷۵)$$

$$\text{معادله جدید: } x^2 - S'x + P' = 0 \xrightarrow{S'=-5, P'=-2} x^2 - (-5)x + (-2) = 0$$

$$x^2 + 5x - 2 = 0 \quad (۰/۷۵)$$



۷ قضیه تالس: اگر خطی به موازات یک ضلع مثلثی رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند، بر روی آن دو ضلع پاره‌خط‌هایی متناسب ایجاد می‌شود. به عبارت دیگر در مثلث زیر

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad (۰/۷۵)$$

اثبات: به شکل زیر توجه کنید. EH' هم ارتفاع مثلث ADE و هم ارتفاع مثلث DBE است، پس

$$\frac{S_{ADE}}{S_{DBE}} = \frac{\frac{1}{2} \times EH' \times AD}{\frac{1}{2} \times EH' \times DB} = \frac{AD}{DB} \quad (۱) \quad (۰/۷۵)$$

همچنین، DH هم ارتفاع مثلث ADE و هم ارتفاع مثلث DEC است، بنابراین

$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} = \frac{\frac{1}{2} \times DH \times AE}{\frac{1}{2} \times DH \times EC} = \frac{AE}{EC} \quad (۲) \quad (۰/۷۵)$$