پاسخ کنکور سراسری ۱۴۰۳

۳۰۷۹ (۴)

$$-mx^۲+mx+۱=-m-x\Rightarrow mx^۲-(m+۱)x-۱-m=۰$$

$$۵m^۲+۶m+۱=۰\Rightarrow -۱<m<-\frac{۱}{۵}\Rightarrow$$ صحیح وجود ندارد. m

۳۰۸۰ (۳)

$$(fog^{-۱})(a)=-۳\Rightarrow g^{-۱}(a)=\frac{۱}{۴}\Rightarrow g(\frac{۱}{۴})=a\Rightarrow a=-\frac{۱}{۸}$$

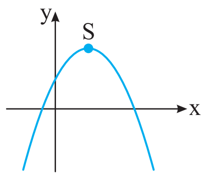
۳۰۸۱ (۱)

$$\alpha\beta=\frac{\beta}{۲۵\alpha}\Rightarrow ۲۵\alpha^۲=۱ \qquad (۱)$$

$$\alpha+\beta=-\frac{۴}{۲۵\alpha}\Rightarrow ۲۵\alpha^۲+۲۵\alpha\beta=-۴\xrightarrow{(۱)}۲۵\alpha\beta=-۵\Rightarrow\alpha\beta<۰$$

$$\alpha<۰,\beta>۰\Rightarrow y=\underbrace{۲۵\alpha}_{\text{منفی}}x^۲+۴x+\underbrace{\beta}_{\text{مثبت}}$$

بنابراین رأس این سهمی در ناحیهٔ اول قرار دارد.



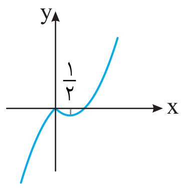
۳۰۸۲ (۳)

$$y=-\frac{۱}{۳-x}=\frac{۱}{x-۳},\quad -۴<\frac{۱}{x-۳}<۰\Rightarrow x-۳<۰\Rightarrow x=۱,۲$$

۳۰۸۳ (۲)

$$y=(x-۱)|x|=\begin{cases}x^۲-x & x\ge ۰\\ -x^۲+x & x<۰\end{cases}$$

$$(a,b)=(۰,\frac{۱}{۲})\Rightarrow a+b=\frac{۱}{۲}$$



۳۰۸۴ (۲)

$$f(۰)=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۱+c\times۳^a=\frac{۲}{۳}\Rightarrow c\times۳^a=-\frac{۱}{۳},\quad f(۱)=۰\Rightarrow c\times۳^{a+b}=-۱$$

$$\frac{c\times۳^a}{c\times۳^{a+b}}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow b=۱\Rightarrow f(-۱)=۱+c\times۳^a\times۳^{-b}=۱-\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۸}{۹}$$

۳۰۸۵ (۳)

$$f(x)=ax+a\sqrt{x}$$

$$f^{-۱}(x)=\frac{x+۲}{۴}-\frac{\sqrt{x+۱}}{۲}\xrightarrow{x=۳}f^{-۱}(۳)=\frac{۱}{۴}\Rightarrow f(\frac{۱}{۴})=۳$$

$$\frac{a}{۴}+\frac{a}{۲}=۳\Rightarrow a=۴$$

۳۰۸۶ (۴)

$$-\tan\alpha=\frac{۱/۵}{۲}\Rightarrow\tan\alpha=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow\cot\alpha=-\frac{۴}{۳}$$

۳۰۸۷ (۴)

$$\frac{۳\cos(۱۸۰^\circ+۶۸^\circ)-۲\sin(۹۰^\circ+۶۸^\circ)}{\sin(۱۸۰^\circ+۲۲^\circ)-\cos(۲۷۰^\circ+۲۲^\circ)}=\frac{-۳\cos۶۸^\circ-۲\cos۶۸^\circ}{-\sin۲۲^\circ-\sin۲۲^\circ}$$

$$=\frac{-۵\cos۶۸^\circ}{-۲\sin۲^\circ}=۲/۵$$

۳۰۸۸ (۲)

$$۲\sin x\cos x-۴\sin^۲x\cos=۰\Rightarrow۲\sin x\cos x(۱-۲\sin x)=۰$$

$$\sin x=۰\Rightarrow x=۰,\quad\cos x=۰\Rightarrow x=-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲},\quad \sin x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶}$$

۳۰۸۹ (۱)

$$\frac{۲\pi}{|a|}=\pi\Rightarrow|a|=۲\Rightarrow\frac{۲\pi}{\frac{۱}{|a|}}=۴\pi$$

۳۰۹۰ (۳)

$$\lim_{x\to۱^+}f(x)=\frac{۱}{۲}\lim_{x\to۱^+}[(f+g)(x)+(f-g)(x)]=\frac{۱}{۲}(۰+۵)=۲/۵$$

$$\lim_{x\to۱^-}f(x)=\frac{۱}{۲}\lim_{x\to۱^-}[(f+g)(x)+(f-g)(x)]=\frac{۱}{۲}(۲+۳)=۲/۵$$

$$\lim_{x\to۱}f(x)=۲/۵$$

۳۰۹۱ (۴)

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}^+}\frac{a+۳[-x]}{۱-۲x}=\frac{a-۳}{۰^-}=-\infty\Rightarrow a-۳>۰\Rightarrow a>۳$$

بنابراین $\frac{x}{a}-x=x(\frac{۱}{a}-۱)\in(-۱,۰)$

توجه کنید که عبارت بالا حاصل‌ضرب عددی در همسایگی $\frac{۱}{۲}$ و عددی از بازهٔ $(-۱,۰)$ است. بنابراین خود عددی در بازهٔ $(-۱,۰)$ خواهد بود در نتیجه مقدار حد خواسته شده برابر است با ۱− .

۳۰۹۲ (۱) تابع $y=[x^۲-ax]$ به‌ازای مقادیر مختلف a که که عدد $x^۲-ax$ صحیح می‌شود، ناپیوسته است مگر اینکه $b=۰$. بنابراین

$$\frac{a}{f(b)}=\frac{a}{f(۰)}=\frac{a}{-۲a}=-\frac{۱}{۲}$$

۳۰۹۳ (۲)

$$y=\frac{x+۵}{۷},\quad\frac{ax-۱}{۳x+۱}=\frac{x+۵}{۷}\Rightarrow۷ax-۷=۳x^۲+۱۶x+۵$$

$$۳x^۲+(۱۶-۷a)x+۱۲=۰$$

$$\Delta=۰\Rightarrow(۱۶-۷a)^۲-۴\times۳۶=۰\Rightarrow(۷a-۱۶)^۲=۱۴۴\Rightarrow|۷a-۱۶|=۱۲$$

$$۷a-۱۶=۱۲\Rightarrow۷a=۲۸,\quad ۷a-۱۶=-۱۲\Rightarrow۷a=۴$$

۳۰۹۴ (۳)

$$f(۰)-f(-۱)=۱-۸(۱-a)=-۱۱\Rightarrow۸(۱-a)=۱۲\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

$$x=-۲a=۱\Rightarrow f'(x)=۳(۲x)(x^۲+۱)^۲(-\frac{۱}{۲}x+۱)-\frac{۱}{۲}(x^۲+۱)^۳\Rightarrow f'(۱)=۸$$

۳۰۹۵ (۱)

$$y'=۳x^۲-۱۲=۰\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=\pm۲$$

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+	
y		↗		↘		↗	
			max		min		

بنابراین $x=۲$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع است و مقدار آن برابر است با

$$f(۲)=۲^۳-۱۲\times۲+۲=-۱۴$$

۳۰۹۶ (۴) فرض کنید $f(x)=\sqrt[۳]{۴-x}$ و $g(x)=\sqrt[۳]{x+۴}$. مطابق شکل داریم

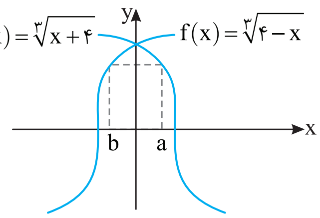
$$f(a)=g(b)\Rightarrow\sqrt[۳]{۴-a}=\sqrt[۳]{b+۴}\Rightarrow۴-a=b+۴\Rightarrow b=-a$$

اکنون مساحت مستطیل از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$S(a)=۲a\sqrt[۳]{۴-a}\Rightarrow S'(a)=۲\sqrt[۳]{۴-a}+۲a\times\frac{-۱}{۳\sqrt[۳]{(۴-a)^۲}}=۰$$

$$\sqrt[۳]{۴-a}=\frac{a}{۳\sqrt[۳]{(۴-a)^۲}}\Rightarrow۳(۴-a)=a\Rightarrow a=۳$$

در نتیجه $S_{max}=S(۳)=۲\times۳\sqrt[۳]{۴-۳}=۶$



۳۰۹۷ (۴) داده‌ها به صورت زیر مرتب می‌شوند:

$$\underbrace{۱,۳,۹}_{Q_۱}\ \boxed{a,a,۱۸,۲۳,۲۳}\ ۳۹,۲a+۱,۴۲$$

مرتب نیست

داده‌های بعد از چارک سوم $\frac{a+a+۱۸+۲۳+۲۳}{۵}=۲۶\Rightarrow a=۳۳\Rightarrow ۴۲,۶۷$

$$\frac{۴۲+۶۷}{۲}=۵۴/۵$$

۳۰۹۸ (۳)

آ ر ی $\boxed{\text{گ ن ه}}$ $\qquad ۴!\times۳!=۱۴۴$

۳۰۹۹ (۲)

$$n(S)=۶\times۶=۳۶$$

$$A'=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶),(۱,۲),(۲,۱),$$
$$(۲,۳),(۳,۲),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۵),(۵,۴),(۵,۶),(۶,۵)\}$$

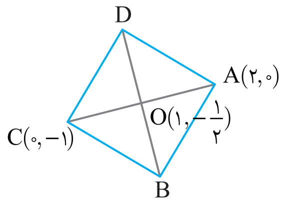
$$n(A')=۱۶\Rightarrow P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۱۶}{۳۶}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow P(A)=۱-P(A')=\frac{۵}{۹}$$

توجه کنید که در این تست، منظور طراح از «متوالی و برابر نیستند» این است که «نه متوالی هستند و نه برابر».

۳۱۰۰ (۱)

$$\underbrace{\frac{۶}{۱۵}}_{\text{خارج شدن آبی از جعبهٔ A}}\times\frac{۶}{۱۵}+\underbrace{\frac{۴}{۱۵}}_{\text{خارج شدن سبز از جعبهٔ A}}\times\frac{۵}{۱۵}+\frac{۵}{۱۵}\times\frac{۵}{۱۵}=\frac{۸۱}{۲۲۵}=۰/۳۶$$

۳۱۰۱ (۲) با توجه به اطلاعات سؤال، شکل روبه‌رو را داریم. معادلهٔ قطر BD را می‌نویسیم:



$$m_{AC}=\frac{۰-(-۱)}{۲-۰}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow m_{BD}=-۲,\quad O=\frac{A+C}{۲}=(۱,-\frac{۱}{۲})$$

$$BD:y+\frac{۱}{۲}=-۲(x-۱)\Rightarrow y=-۲x+\frac{۳}{۲}$$

در بین گزینه‌ها دو نقطهٔ $(۰,\frac{۳}{۲})$ و $(\frac{۳}{۲},-\frac{۳}{۲})$ روی این خط قرار دارند. اکنون توجه کنید که

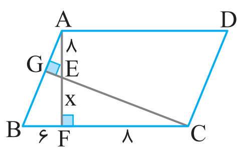
$$AC=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۰-(-۱))^۲}=\sqrt{۵}$$

بنابراین نقطه‌ای جواب است که فاصله‌اش از O برابر $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ باشد:

$$(۰,\frac{۳}{۲}):\sqrt{۱^۲+۲^۲}=\sqrt{۵}\ \times\qquad (\frac{۳}{۲},-\frac{۳}{۲}):\sqrt{(\frac{۱}{۲})^۲+۱^۲}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}\ \checkmark$$

۳۱۰۲ (۳) ابتدا توجه کنید که

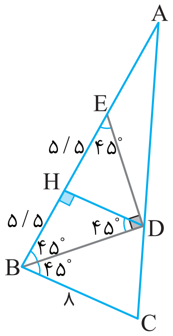
$$B\hat{A}F=B\hat{A}D-F\hat{A}D=B\hat{A}D-۹۰^\circ$$
$$F\hat{C}E=B\hat{C}G=B\hat{C}D-G\hat{C}D$$
$$=B\hat{C}D-۹۰^\circ\qquad B\hat{A}F=F\hat{C}E$$



بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABF و CEF به دلیل داشتن دو زاویهٔ حادهٔ مساوی متشابه‌اند. در نتیجه

$$\frac{EF}{BF}=\frac{CF}{AF}\Rightarrow\frac{x}{۶}=\frac{۸}{x+۸}\Rightarrow x^۲+۸x-۴۸=۰$$
$$(x+۱۲)(x-۴)=۰\Rightarrow x=۴\Rightarrow AF=۱۲$$

۳۱۰۳ (۱)



$$\hat{H}=۹۰^\circ\Rightarrow DH||BC\Rightarrow\hat{B}=۹۰^\circ$$

$$\triangle ABC:DH||BC\Rightarrow\frac{AH}{AB}=\frac{DH}{BC}$$

$$\frac{x+۵/۵}{۱۱+x}=\frac{۵/۵}{۸}\Rightarrow x=۶/۶$$

۳۱۰۴ (۲)

$$B=\frac{۲+\sqrt{۲۸}}{۸+\sqrt{۲۸}}=\frac{۲+۲\sqrt{۷}}{۸+۲\sqrt{۷}}=\frac{۱+\sqrt{۷}}{۴+\sqrt{۷}}\times\frac{۴-\sqrt{۷}}{۴-\sqrt{۷}}=\frac{(۱+\sqrt{۷})(۴-\sqrt{۷})}{۹}$$
$$=\frac{۳\sqrt{۷}-۳}{۹}=\frac{\sqrt{۷}-۱}{۳}\Rightarrow ۳B+۱=\sqrt{۷}$$

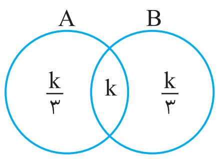
۳۱۰۵ (۴) فرض کنید $n(A\cap B)=k$. در این صورت طبق فرض

$$n(A-B)=\frac{k}{۳},\quad n(B-A)=\frac{k}{۴}$$

بنابراین نمودار ون زیر را داریم و می‌توان نوشت

$$n(A\cup B)=k+\frac{k}{۳}+\frac{k}{۴}=۵۷\Rightarrow\frac{۱۹k}{۱۲}=۵۷\Rightarrow k=۳۶$$

$$n(A)=k+\frac{k}{۳}=\frac{۴}{۳}k=۴۸$$



۳۱۰۶ (۱)

$$\begin{cases}a,a+d,a+۲d,\ldots\Rightarrow t_n=a+(n-۱)d\\ a+۴,a+۴+d,\ldots\Rightarrow t'_n=a+۴+(n-۱)d\end{cases}\Rightarrow t'_n-t_n=۴$$

۳۱۰۷ (۲)

$$f(۱)=\sqrt{۴}+۲a=a+۵\Rightarrow a=۳\Rightarrow f(۳)=۳(۳^۲)+۵=۳۲$$

۳۱۰۸ (۴)

$$x^۲+y^۲+۳x+ay=c\Rightarrow O(-\frac{۳}{۲},-\frac{a}{۲})$$

$$A(۰,۳)\Rightarrow m_{OA}=\frac{۳-(-\frac{a}{۲})}{۰-(-\frac{۳}{۲})}=\frac{۶+a}{۳}$$

چون شعاع دایره در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است، پس شیب OA و شیب $۳y+۲x=۹$ قرینهٔ معکوس هم هستند.

$$\frac{۶+a}{۳}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۱۲+۲a=۹\Rightarrow a=-۱/۵$$

۳۱۰۹ (۴)

$$\frac{\sqrt[۳]{۲\sqrt{۸}}}{\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}\times۱۶^{-\frac{۳}{۴}}}=\frac{\sqrt[۳]{۲\times۲\sqrt{۲}}}{\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}\times(۲^۴)^{-\frac{۳}{۴}}}=\frac{\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}}{\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}\times۲^{-۳}}=۸\sqrt[۳]{۲}$$

۳۱۱۰ ۳

$$(۱,۲,۳)(۴,۵,\dots,۱۲)(۱۳,\dots,۳۹)(۴۰,\dots,۱۲۰)\underbrace{(۱۲۱,\dots,۳۶۳)}_{\text{دسته ۵}}$$

$$\text{مجموع اعداد دسته پنجم}=\frac{۳۶۳-۱۲۱+۱}{۲}(۱۲۱+۳۶۳)=۵۸۸۰۶$$

$$\bar{x}=\frac{۵۸۸۰۶}{۲۴۳}=۲۴۲$$

۳۱۱۱ ۴

$$a_۳=\sqrt{a_۴}\Rightarrow a_۱r^۲=\sqrt{a_۱r^۳}\Rightarrow a_۱^۲r^۴=a_۱r^۳\Rightarrow a_۱r=۱\quad(۱)$$

$$a_۵=a_۱r^۴=۲۷\Rightarrow\frac{a_۱r^۴}{a_۱r}=r^۳=۲۷\Rightarrow r=۳\xrightarrow{(۱)}a_۱=\frac{۱}{۳}$$

$$\frac{۱}{۲}-a_۱=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}$$

۳۱۱۲ ۴

$$(\underbrace{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-۴}}_{۲})(\underbrace{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-۴}}_{t})=(x+a)-(x-۴)=a+۴$$

$$۲t=a+۴\Rightarrow t=\frac{a+۴}{۲}=\frac{a}{۲}+۲\Rightarrow\sqrt{x+a}+\sqrt{x-۴}-۲=\frac{a}{۲}$$

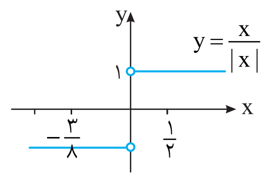
۳۱۱۳ ۳

$$y=۲x^۲+\frac{۳}{۲}x+c\Rightarrow x_S=\frac{-\frac{۳}{۲}}{۴}=-\frac{۳}{۸}$$

برای اینکه سهمی در بازهٔ $(۰,\frac{۱}{۲})$ پایین‌تر از خط $y=۱$ باشد، باید داشته باشیم

$$y(\tfrac{۱}{۲})=۱\Rightarrow ۲(\tfrac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۲}(\tfrac{۱}{۲})+c=۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۴}+c=۱\Rightarrow c=-\frac{۱}{۴}$$

$$y(۰)<۱\Rightarrow c<۱$$



۳۱۱۴ ۲ نمودار تابع از دو نقطهٔ $(۰,۲)$ و $(-۱/۵,۰)$ می‌گذرد، پس

$$(۰,۲):۲=۱-\log_c(-b)\Rightarrow\log_c(-b)=-۱\Rightarrow -b=c^{-۱}=\frac{۱}{c}\Rightarrow bc=-۱$$

$$(-۱/۵,۰):۰=۱-\log_c(-۱/۵a-b)\Rightarrow\log_c(-۱/۵a-b)=۱\Rightarrow -۱/۵a-b=c$$

$$\begin{cases}bc=-۱\\ b+c=-\frac{۳}{۲}\end{cases}\xrightarrow{c>۰}\begin{cases}c=\frac{۱}{۲}\\ b=-۲\end{cases}$$

$$-۱/۵a-b=c\Rightarrow -۱/۵a+۲=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۱/۵a=۱/۵\Rightarrow a=۱$$

$$(a+c)b=(۱+\tfrac{۱}{۲})(-۲)=-۳$$

۳۱۱۵ ۳

$$(-\tfrac{۱}{۸},-\tfrac{۳}{۵})\in f^{-۱}\Rightarrow(-\tfrac{۳}{۵},-\tfrac{۱}{۸})\in f\Rightarrow\frac{-\frac{۳}{۵}}{a+\frac{۳}{۵}a}=-\frac{۱}{۸}\Rightarrow-\frac{۳}{۸a}=-\frac{۱}{۸}\Rightarrow a=۳$$

۳۱۱۶ ۲

$$\frac{۱}{|\cos\alpha|}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{۱+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}$$

$$\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{۱+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}-\frac{۱}{|\cos\alpha|}=\frac{\sin\alpha}{|\cos\alpha|}\Rightarrow\cos\alpha<۰\quad(۱)$$

$$\frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha}=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\sin\alpha<۰\quad(۲)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی است.

۳۱۱۷ ۱

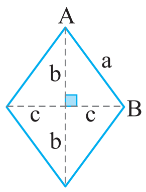
$$a=\sqrt{۲b\times۲c}\Rightarrow a^۲=۴bc\quad(۱)$$

$$a^۲=b^۲+c^۲\xrightarrow{(۱)}b^۲+c^۲-۴bc=۰\xrightarrow{\div c^۲}$$

$$(\tfrac{b}{c})^۲-۴(\tfrac{b}{c})+۱=۰\Rightarrow\frac{b}{c}=۲\pm\sqrt{۳}$$

$$\tan\frac{\hat{A}}{۲}=\frac{c}{b}=۲+\sqrt{۳},\quad\tan\frac{\hat{B}}{۲}=\frac{b}{c}=۲-\sqrt{۳}$$

$$\tan(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{۲})=\frac{\tan\frac{\hat{A}}{۲}-\tan\frac{\hat{B}}{۲}}{۱+\tan\frac{\hat{A}}{۲}\tan\frac{\hat{B}}{۲}}=\frac{(۲+\sqrt{۳})-(۲-\sqrt{۳})}{۱+۱}=\sqrt{۳}$$

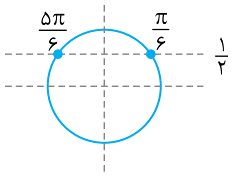


۳۱۱۸ ۴

$$\cos ۲x=۳\sin x=-۱\Rightarrow ۱-۲\sin^۲x=۳\sin x-۱$$

$$۲\sin^۲x+۳\sin x-۲=۰$$

$$(\sin x+۲)(۲\sin x-۱)=۰\Rightarrow\sin x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow\frac{۵\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶}=\frac{۲\pi}{۳}$$



۳۱۱۹ ۳

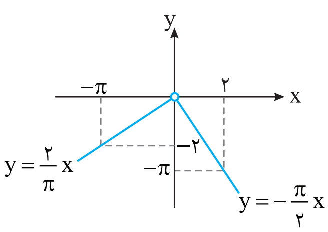
$$f(x)=\frac{۱}{۲}-\sin\frac{۲x}{a}\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|\frac{۲}{a}|}=|a|\pi=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow|a|=\frac{۱}{۳}$$

$$y=\cos ax\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|a|}=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۳}}=۶\pi$$

۳۱۲۰ ۲

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}\frac{\sin x}{|f(x)|}=\frac{۱}{|-\frac{\pi}{۲}\times\frac{\pi}{۲}|}=\frac{۴}{\pi^۲},\quad\lim_{x\to(-\frac{\pi}{۲})^+}\frac{|f(x)|}{\sin x}=\frac{|\frac{۲}{\pi}\times(-\frac{\pi}{۲})|}{-۱}=-۱$$

بنابراین مقدار خواسته شده در سؤال برابر است با $\frac{۴}{\pi^۲}-۱$.



۳۱۲۱ (۴) ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{f(x)}{\sin x}=-\infty,\quad \lim_{x\to\pi^-}\sin x=۰^+\Rightarrow \lim_{x\to\pi^-} f(x)<۰$$

اکنون گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $\lim_{x\to\pi^-}([\frac{۲x}{\pi}]-۱)=۱-۱=۰$ ✗

گزینهٔ (۲): $\lim_{x\to\pi^-}(۳[\frac{x}{\pi}]+۱)=۰+۱=۱$ ✗

گزینهٔ (۳): $\lim_{x\to\pi^-}(۲[\frac{x}{\pi}]+۳)=۰+۳=۳$ ✗

گزینهٔ (۴): $\lim_{x\to\pi^-}([\frac{۳x}{\pi}]-۳)=۲-۳=-۱$ ✓

۳۱۲۲ (۲)

$$f(x)=a[x]+b[x]+b\Rightarrow f(x)=(a+b)[x]+b\Rightarrow a+b=۰\Rightarrow a=-b$$

$$f(x)=b\Rightarrow\frac{f(a)}{a}=\frac{b}{a}=\frac{-a}{a}=-۱$$

۳۱۲۳ (۱)

$$f(x)=\sqrt{ax-۱}\Rightarrow \text{شیب خط مماس}=f'(x)=\frac{a}{۲\sqrt{ax-۱}}$$

$$\text{شیب خط گذرنده از دو نقطه}=m=\frac{۲-۱}{۲+۱}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{a}{۲\sqrt{ax-۱}}=\frac{۱}{۳}$$

$$۳a=۲\sqrt{ax-۱}\quad(۱)$$

$$\text{معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطه } y=\frac{۱}{۳}x+\frac{۴}{۳}\Rightarrow ۳y=x+۴\Rightarrow x+۴=۳\sqrt{ax-۱}\quad(۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow x+۴=۳(\frac{۳a}{۲})=\frac{۹a}{۲}\Rightarrow x=۴/۵a-۴$$

$$(۲)\Rightarrow ۴/۵a-۴+۴=۳\sqrt{a(۴/۵a-۴)-۱}\Rightarrow ۹a^۲-۱۶a-۴=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ a=-\frac{۲}{۹}\end{cases}$$

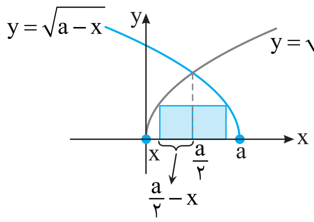
$$f(۵)=\sqrt{۲\times۵-۱}=\sqrt{۹}=۳$$

۳۱۲۴ (۳)

$$\text{نصف مساحت مستطیل } S=(\frac{a}{۲}-x)\sqrt{x}=\frac{a}{۲}\sqrt{x}-x\sqrt{x}$$

$$S'=\frac{a}{۲}\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}-\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{a}{۲}-۳x}{۲\sqrt{x}}=۰\Rightarrow x=\frac{a}{۶}$$

$$S_{max}=S(\frac{a}{۶})=(\frac{a}{۲}-\frac{a}{۶})\sqrt{\frac{a}{۶}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\frac{a}{۳}\sqrt{\frac{a}{۶}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow a=۳$$



۳۱۲۵ (۲)

$$\overline{x}=\frac{a+۲a+۳}{۳}=a+۱$$

$$\sigma^۲=\frac{(a-a-۱)^۲+(۲a-a-۱)^۲+(۳-a-۱)^۲}{۳}=۱۴$$

$$\frac{۱+(a-۱)^۲+(۲-a)^۲}{۳}=۱۴\Rightarrow a^۲-۳a-۱۸=۰$$

$$(a+۳)(a-۶)=۰\xrightarrow{a>۰}a=۶\Rightarrow\frac{a}{۳}=۲$$

۳۱۲۶ (۳)

$$D_f=\{۱,۲,۳,۴,۶,۷,۸,۹\},\quad R_f=\{۰,۲,۴,۶,۸\}$$

برای دامنه باید از بین ۹ عدد، ۴ عدد را انتخاب کنیم:

$$\binom{۹}{۴}=\frac{۹!}{۴!۵!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶}{۴\times۳\times۲\times۱}=۹\times۱۴$$

چون تابع ثابت است، پس برای برد باید از بین ۵ عدد، ۱ عدد را انتخاب کنیم:

$$\binom{۵}{۱}=۵\Rightarrow \text{تعداد توابع مطلوب}=۹\times۱۴\times۵=۶۳۰$$

۳۱۲۷ (۴) از روش متمم استفاده می‌کنیم. می‌دانیم $n(S)=۳۶$. اگر A پیشامد مطلوب باشد، آن‌گاه

$$A'=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\}$$

$$n(A')=۶\Rightarrow n(A)=۳۰\Rightarrow P(A)=\frac{۳۰}{۳۶}=\frac{۵}{۶}$$

۳۱۲۸ (۱) فرض کنید A و B به ترتیب پیشامدهای کسب مدال توسط ورزشکارهای اول و دوم باشند. در این صورت A و B مستقل هستند و پیشامد مطلوب $(A\cup B)-(A\cap B)$ است. اکنون می‌توان نوشت

$$P(A)=۰/۶,\quad P(B)=۰/۴$$

$$P((A\cup B)-(A\cap B))=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)$$

$$=۰/۶+۰/۴-۲\times۰/۶\times۰/۴=۰/۵۲$$

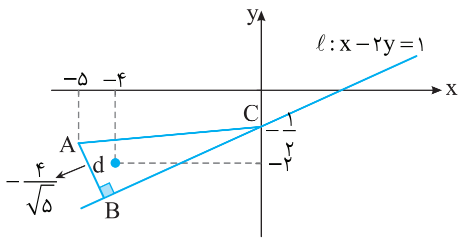
۳۱۲۹ (۲)

$$\begin{cases}d\ \text{خط}: y+۲x+۱۱=۰\\ \ell\ \text{خط}: x-۲y=۱\end{cases}\Rightarrow B(-۴/۲,-۲/۶)\qquad C(۰,-\frac{۱}{۲})$$

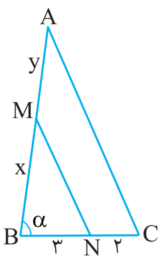
$$AB=\ell\ \text{فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط}=\frac{|-۵+۲-۱|}{\sqrt{۵}}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

$$BC=d\ \text{فاصلهٔ نقطهٔ C تا خط}=\frac{|-\frac{۱}{۲}+۰+۱۱|}{\sqrt{۵}}=\frac{\frac{۲۱}{۲}}{\sqrt{۵}}=\frac{۲۱}{۲\sqrt{۵}}$$

$$\text{مساحت مثلث } S=\frac{۱}{۲}\times AB\times AC=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{\sqrt{۵}}\times\frac{۲۱}{۲\sqrt{۵}}=\frac{۲۱}{۵}=۴/۲$$



۳۱۳۰ (۳)

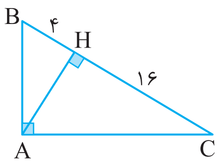


$$\begin{cases}S_{ABC}=\frac{۵(x+y)\sin\alpha}{۲}\\ S_{BMN}=\frac{۳x\sin\alpha}{۲}\end{cases}\Rightarrow\frac{۳x}{۵(x+y)}=\frac{۱}{۳}$$

$$۹x=۵x+۵y\Rightarrow ۴x=۵y$$

$$\frac{BM}{AM}=\frac{x}{y}=\frac{\frac{۵}{۴}y}{y}=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$

۳۱۳۱ (۱) با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌توان نوشت



$$\frac{AC^۲}{AB^۲}=\frac{CH\times BC}{BH\times BC}=\frac{۱۶\times۲۰}{۴\times۲۰}=۴\Rightarrow\frac{AC}{AB}=۲$$

۳۱۳۲ ۲ چون $\hat{A}=۹۰^\circ$، پس متوازی‌الاضلاع ABMD مستطیل است و داریم

$$BM=AD=۳,\quad DM=AB=۴$$

از طرف دیگر

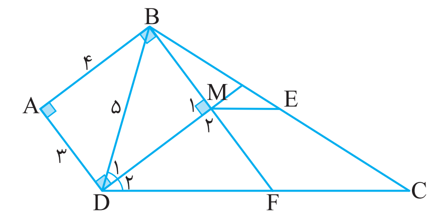
$$\begin{cases}\hat{D}_۱=\hat{D}_۲\\ MD=MD\\ \hat{M}_۱=\hat{M}_۲=۹۰^\circ\end{cases}\xrightarrow{\text{(زضز)}}\triangle MDB\cong\triangle MDF\Rightarrow\begin{cases}MF=MB=۳\\ DF=DB=۵\end{cases}$$

بنابراین

$$FC=DC-DF=۹-۵=۴$$

در نهایت در مثلث BFC، پاره‌خط ME وسط‌های دو ضلع را به هم وصل می‌کند. پس

$$ME=\frac{FC}{۲}=۲$$



۳۱۳۳ ۴

طول قطر بزرگ بیضی $=۲a'$

$$F(۰,۰),F'(a,۰)\Rightarrow FF'=|a|=۲c\Rightarrow c=\frac{|a|}{۲}\quad(۱)$$

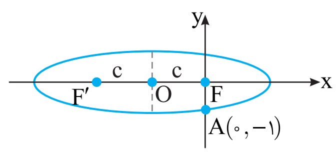
$$AF+AF'=۲a'\Rightarrow\sqrt{۰+۱}+\sqrt{a^۲+۱}=۲a'\Rightarrow a'=\frac{۱+\sqrt{a^۲+۱}}{۲}\quad(۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow e=\frac{c}{a'}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}\Rightarrow\frac{\frac{|a|}{۲}}{\frac{۱+\sqrt{a^۲+۱}}{۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

$$\frac{|a|}{۱+\sqrt{a^۲+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}\Rightarrow\sqrt{۵}|a|-۲=۲\sqrt{a^۲+۱}\xrightarrow{\text{توان ۲}}$$

$$۵a^۲+۴-۴\sqrt{۵}|a|=۴a^۲+۴$$

$$a^۲-۴\sqrt{۵}|a|=۰\Rightarrow|a|(|a|-۴\sqrt{۵})=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۰\ \text{غ‌قق}\\ |a|=۴\sqrt{۵}\Rightarrow a=\pm۴\sqrt{۵}\end{cases}$$



۳۱۳۴ ۱

$$۱-۳n^۲=-۲n\Rightarrow۳n^۲-۲n-۱=۰\Rightarrow n=۱,\quad n=-\frac{۱}{۳}$$

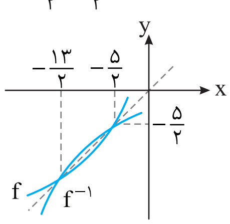
$$n=۱\Rightarrow f=\{(۷,-۲),(۱,-۱),(۲,۱),(۷,-۲),(۱,۲)\}\ \times$$

$$n=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow f=\{(۷,\tfrac{۲}{۳}),(۱,-۱),(۲,-\tfrac{۱}{۳}),(۷,\tfrac{۲}{۳}),(-۳,۲)\}\Rightarrow f(۲)=-\frac{۱}{۳}$$

۳۱۳۵ ۳

$$\frac{f^{-۱}(x)}{x-f^{-۱}(x)}\geq۰\xrightarrow{f^{-۱}(x)<۰}x-f^{-۱}(x)<۰$$

$$f^{-۱}(x)>x\Rightarrow x\in(-\frac{۱۳}{۲},-\frac{۵}{۲})\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}}x=-۶,-۵,-۴,-۳$$



۳۱۳۶ ۲

$$y=۲ax^۲-۵x+۱۸a=x\Rightarrow۲ax^۲-۶x+۱۸a=۰\Rightarrow ax^۲-۳x+۹a=۰$$

$$\Delta=۹-۴(a)(۹a)=۰\Rightarrow۴a^۲=۱\Rightarrow a=\pm\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}\ \text{قق (ناحیهٔ سوم)}$$

۳۱۳۷ ۱ چون بر اثر انبساط افقی دامنه تغییر نکرده است، پس

$$k=۱\Rightarrow۲a^۲-a-۵=۱\Rightarrow۲a^۲-a-۶=۰\Rightarrow\text{حاصل‌ضرب مقادیر }a=\frac{-۶}{۲}=-۳$$

۳۱۳۸ ۴

$$x_S=-\frac{۱}{۲a},\quad y_S=a(-\frac{۱}{۲a})^۲+(-\frac{۱}{۲a})+۲a=\frac{۱}{۴a}-\frac{۱}{۲a}+۲a=-\frac{۱}{۲}$$

$$۸a^۲+۲a-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{۱}{۲}\ \text{قق}\\ a=\frac{۱}{۴}\ \text{غ‌قق}\Rightarrow\text{بیشترین مقدار ندارد}\end{cases}$$

۳۱۳۹ ۲

$$\frac{\sqrt[۳]{۳\sqrt{۲۷}}\times۳^{\frac{۱}{۳}}}{\sqrt{\sqrt[۳]{۳}}\times۸۱^{-\frac{۳}{۴}}}=\frac{\sqrt[۳]{۳\times۳^{\frac{۳}{۲}}}\times۳^{\frac{۱}{۳}}}{\sqrt{۳^{\frac{۱}{۳}}}\times(۳^۴)^{-\frac{۳}{۴}}}=\frac{۳^{\frac{۵}{۶}}\times۳^{\frac{۲}{۶}}}{۳^{\frac{۱}{۶}}\times۳^{-\frac{۱۸}{۶}}}$$

$$=\frac{۳^{\frac{۷}{۶}}}{۳^{-\frac{۱۷}{۶}}}=۳^{\frac{۷}{۶}+\frac{۱۷}{۶}}=۳^{\frac{۲۴}{۶}}=۳^۴=۸۱$$

۳۱۴۰ ۴ با توجه به اینکه اعداد طبیعی متوالی قرار است دسته‌بندی شوند و ما در هر دسته‌بندی اعداد طبیعی متوالی داریم، پس

میانگین = میانه ⇐ اختلاف میانه و میانگین = ۰

۳۱۴۱ ۱

$$a=(ar)^۲\Rightarrow a=a^۲r^۲\Rightarrow ar^۲=۱$$

$$ar^۳=۵\xrightarrow{ar^۲=۱}r=۵\Rightarrow a=\frac{۱}{۲۵}$$

۳۱۴۲ ۲

$$(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-۴})(\sqrt{x-a}-\sqrt{x-۴})=۴(\sqrt{x-a}-\sqrt{x-۴})$$

$$(x-a-x+۴)=۴(\sqrt{x-a}-\sqrt{x-۴})\Rightarrow\frac{۴-a}{۴}=\sqrt{x-a}-\sqrt{x-۴}$$

$$۱-(\sqrt{x-a}-\sqrt{x-۴})=۱-\frac{۴-a}{۴}=\frac{a}{۴}$$

۳۱۴۳ ۳

$$(۲,۳n^۲-۱)=(۲,۲n)$$

$$۳n^۲-۱=۲n\Rightarrow۳n^۲-۲n-۱=۰\Rightarrow n=۱\ \text{غ‌قق},\ n=-\frac{۱}{۳}$$

$$f=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۲),(۳,۱)\}\Rightarrow f(۳)=-۳$$

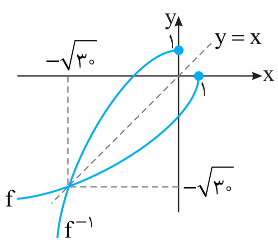
۳۱۴۴ ۲ توجه کنید که همواره $f(x)\leq۰$. پس

$$\frac{f(x)}{-x+f^{-۱}(x)}\geq۰\Rightarrow f(x)=۰\ \text{یا}\ -x+f^{-۱}(x)<۰$$

$$f(x)=۰\Rightarrow x=۱$$

$$-x+f^{-۱}(x)<۰\Rightarrow f^{-۱}(x)\leq x\Rightarrow x<-\sqrt{۳۰}\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}}x=-۶,-۷,\ldots$$

پس نامتناهی مقدار صحیح برای x وجود دارد.



۳۱۴۵ (۴)

$$ax^۲+۷x+۱۶a=-x \Rightarrow ax^۲+۸x+۱۶a=۰$$

$$\Delta=۶۴-۴(a)(۱۶a)=۰ \Rightarrow a=\pm۱ \Rightarrow \begin{cases} a=-۱ \\ a=۱ \ \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

توجه کنید که چون سهمی در ناحیهٔ چهارم بر خط $y=-x$ مماس است، پس سهمی باید رو به پایین باشد، یعنی $a<۰$.

۳۱۴۶ (۱) چون بردهای دو تابع $y=f(x)$ و $y=kf(x)$ برابرند، پس $k=۱$.

$$a^۲-۳a+۳=۱ \Rightarrow a^۲-۳a+۲=۰ \Rightarrow P=۲$$

۳۱۴۷ (۱)

$$x_S=-\frac{۳}{۲a}, \quad y_S=(-\frac{۳}{۲a})^۲+۳(-\frac{۳}{۲a})+a=\frac{۷}{۸} \Rightarrow \frac{۹}{۴a}-\frac{۹}{۲a}+a=\frac{۷}{۸}$$

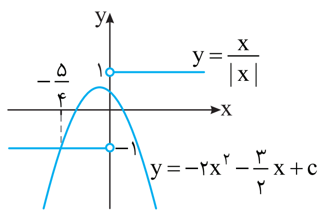
$$\xrightarrow{\times ۸a} ۱۸-۳۶+۸a^۲=۷a \Rightarrow ۸a^۲-۷a-۱۸=۰ \xrightarrow{a>۰} a=۲$$

۳۱۴۸ (۳) با توجه به گزینه‌ها $c\in(۰,۱)$. از طرفی

$$x_S=-\frac{-\frac{۳}{۲}}{۲(-۲)}=-\frac{۳}{۸}<۰$$

$$f(-\frac{۵}{۴})=-۱ \Rightarrow -۲(-\frac{۵}{۴})^۲-\frac{۳}{۲}(-\frac{۵}{۴})+c=-۱$$

$$-\frac{۲۵}{۸}+\frac{۱۵}{۸}+c=-۱ \Rightarrow c=\frac{۱}{۴}$$



۳۱۴۹ (۱)

$$y=-۱+\log_c(ax+b)$$

$$A(\frac{۴}{۳},۰) \Rightarrow ۱=\log_c(\frac{۴}{۳}a+b) \Rightarrow \frac{۴}{۳}a+b=c$$

$$B(۰,-۲) \Rightarrow -۱=\log_c b \Rightarrow b=\frac{۱}{c} \Rightarrow c=\frac{۱}{۳} \Rightarrow b=۳ \Rightarrow a=-۲$$

$$(a+c)b=(-۲+\frac{۱}{۳})(۳)=-۵$$

۳۱۵۰ (۳) نقطهٔ $(-۱,\frac{۱}{۴})$ روی نمودار تابع f قرار دارد. در نتیجه

$$\frac{۱}{۴}=\frac{-a}{۱+|-۱|} \Rightarrow -a=\frac{۲}{۴} \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

۳۱۵۱ (۱)

$$\cot\alpha=-\frac{\cos\alpha}{\sqrt{۱-\cos^۲\alpha}} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\frac{\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$$

$$|\sin\alpha|=-\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha<۰$$

$$\frac{۱}{\sqrt{\cos^۲\alpha}}-\frac{۱}{\cot\alpha}=\frac{۱-\sin\alpha}{|\cos\alpha|} \Rightarrow \frac{۱}{|\cos\alpha|}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{۱}{|\cos\alpha|}-\frac{\sin\alpha}{|\cos\alpha|} \Rightarrow \cos\alpha=|\cos\alpha| \Rightarrow \cos\alpha>۰$$

بنابراین انتهای کمان مربوط به زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی قرار دارد.

۳۱۵۲ (۴)

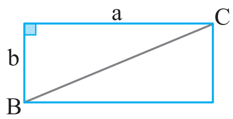
$$\tan\hat{B}=\frac{a}{b}, \quad \tan\hat{C}=\frac{b}{a}$$

فرض: $\sqrt{ab}=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲} \Rightarrow ۴ab=a^۲+b^۲$

$$(a+b)^۲=۶ab \Rightarrow a+b=\sqrt{۶ab}, \quad (a-b)^۲=۲ab \Rightarrow a-b=\sqrt{۲ab}$$

$$\tan(\hat B-\hat C)=\frac{\tan\hat B-\tan\hat C}{۱+\tan\hat B\tan\hat C}=\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{۱+\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}=\frac{\frac{a^۲-b^۲}{ab}}{۱+۱}$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)}{۲ab}=\frac{\sqrt{۶ab}\times\sqrt{۲ab}}{۲ab}=\sqrt{۳}$$



۳۱۵۳ (۲)

$$۲\cos^۲x=\sin x+۱ \Rightarrow ۲(۱-\sin^۲x)=\sin x+۱ \Rightarrow ۲\sin^۲x+\sin x-۱=۰$$

$$\sin x=-۱ \Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۲}, \quad \sin x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=\frac{\pi}{۶}, x=\frac{۵\pi}{۶}$$

۳۱۵۴ (۴)

$$T=\frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{a}|}=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۴=|\frac{\pi}{a}| \Rightarrow |a|=\frac{\pi}{۴}$$

$$-۳f(۲x)=-۳(\frac{۱}{۲}-۳\sin(\frac{۲\pi}{a}x))=-\frac{۳}{۲}+۹\sin(\frac{۲\pi}{a}x) \Rightarrow T=|\frac{۲\pi}{\frac{۲\pi}{a}}|=|a|=\frac{\pi}{۴}$$

۳۱۵۵ (۱) توجه کنید که ضابطهٔ تابع f به شکل زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}-۴x & ۰<x<۱\\ \frac{۲}{۳}x & x<۰\end{cases}$$

$$\lim_{x\to۰^+}\frac{f(x)}{|x|}+\lim_{x\to۰^-}\frac{|x|}{f(x)}=\lim_{x\to۰^+}\frac{-۴x}{x}+\lim_{x\to۰^-}\frac{-x}{\frac{۲}{۳}x}=-۴-\frac{۳}{۲}=\frac{-۸-۳}{۲}$$

$$=\frac{-۱۱}{۲}=-۵/۵$$

۳۱۵۶ (۳) ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{f(x)}{\cos x}=+\infty, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\cos x=۰ \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}f(x)<۰$$

گزینهٔ (۱): $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}(۲[\frac{x}{\pi}]+۱)=۰+۱=۱$

گزینهٔ (۲): $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}([\frac{۲x}{\pi}]-۱)=۱-۱=۰$

گزینهٔ (۳): $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}([\frac{۳x}{\pi}]-۲)=۱-۲=-۱$

گزینهٔ (۴): $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}(۳[\frac{x}{\pi}]+۲)=۰+۲=۲$

۳۱۵۷ (۲) ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=a[x]+a+b[x]+b[a]+b=(a+b)[x]+a+b+b[a]$$

چون f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس $a+b=۰$، یعنی $b=-a$. بنابراین $f(x)=-a[a]$ و داریم $\frac{a[a]}{f(a)}=-۱$.

۳۱۵۸ ۱

خط مماس: $y+12=6(x+0/5)\Rightarrow y=6x-9$

$$6x-9=\frac{a}{2x-1}\Rightarrow 12x^2-24x+9-a=0,\quad \Delta=0\Rightarrow a=-3$$

$$f(x)=\frac{-3}{2x-1}\Rightarrow f(5)=\frac{-3}{9}=-\frac{1}{3}$$

۳۱۵۹ ۴ فرض $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\sqrt{2-x}$. مطابق شکل زیر داریم

$$g(a)=f(b)\Rightarrow\sqrt{2-a}=\sqrt{b+1}\Rightarrow 2-a=b+1\Rightarrow b=1-a$$

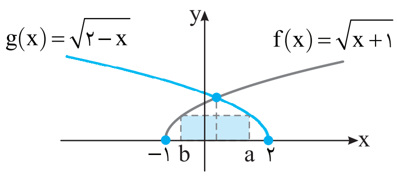
اکنون مساحت مستطیل از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$S(a)=(a-(1-a))g(a)=(2a-1)\sqrt{2-a}$$

$$S'(a)=2\sqrt{2-a}+(2a-1)\times\frac{-1}{2\sqrt{2-a}}=0\Rightarrow 2\sqrt{2-a}=\frac{2a-1}{2\sqrt{2-a}}$$

$$4(2-a)=2a-1\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

در نتیجه $S_{max}=S(\frac{3}{2})=(2\times\frac{3}{2}-1)\sqrt{2-\frac{3}{2}}=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$



۳۱۶۰ ۱

$$\bar{x}=\frac{1+5+3a}{3}=2+a$$

$$\sigma^2=\frac{(2+a-5)^2+(2+a-1)^2+(2+a-3a)^2}{3}=\frac{8}{3}$$

$$\frac{(a-3)^2+(a+1)^2+(2-2a)^2}{3}=\frac{8}{3}$$

$$a^2-6a+9+a^2+2a+1+4-8a+4a^2=8\Rightarrow 6a^2-12a+6=0$$

$$a^2-2a+1=0\Rightarrow(a-1)^2=0\Rightarrow a=1\Rightarrow\bar{x}=3$$

۳۱۶۱ ۲

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\longrightarrow\{0,2,4,6,8\}$$

$$\binom{9}{5}\times5=\frac{9!}{4!5!}\times5=\frac{9\times8\times7\times6\times5}{4\times3\times2}=630$$

۳۱۶۲ ۴

$$P(A)=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$$

۳۱۶۳ ۳ فرض کنید A و B به ترتیب پیشامدهای برد نمایندگان اول و دوم باشند.
در این صورت A و B مستقل هستند و پیشامد مطلوب $(A-B)\cup(B-A)$ است. اکنون

$$P(A-B)+P(B-A)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\frac{8}{10}+\frac{3}{10}-2\times\frac{8}{10}\times\frac{3}{10}$$

$$=\frac{80}{100}+\frac{30}{100}-\frac{48}{100}=\frac{62}{100}$$

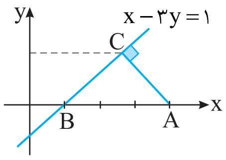
۳۱۶۴ ۴ با توجه به شکل زیر، مثلث ABC در رأس C قائم‌الزاویه است و داریم

$$AC=\frac{|4-0-1|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

مساحت چنین مثلثی زمانی بیشترین مقدار ممکن است که B روی محور x باشد، یعنی $B(1,0)$.
بنابراین $AB=3$. اکنون از قضیهٔ فیثاغورس داریم

$$BC^2=AB^2-AC^2=9-\frac{9}{10}=\frac{81}{10}\Rightarrow BC=\frac{9}{\sqrt{10}}$$

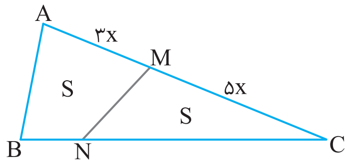
در نتیجه $S_{max}=\frac{1}{2}AC\times BC=\frac{1}{2}\times\frac{3}{\sqrt{10}}\times\frac{9}{\sqrt{10}}=\frac{27}{20}=1/35$



۳۱۶۵ ۱

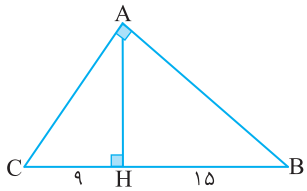
$$\frac{S_{ABC}}{S_{CMN}}=\frac{\frac{1}{2}AC\times CB\sin\hat{C}}{\frac{1}{2}CM\times CN\sin\hat{C}}=\frac{8x\times CB}{5x\times CN}=2\Rightarrow\frac{CB}{CN}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

$$\frac{BC-NC}{CN}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{BN}{CN}=\frac{1}{4}=0/25$$



۳۱۶۶ ۲

$$\begin{cases}AB^2=BH\times BC=15BC\\AC^2=CH\times BC=9BC\end{cases}\Rightarrow\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{15}{9}\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{15}}{3}$$



۳۱۶۷ ۳ چون $\hat{A}=90^\circ$، پس متوازی‌الاضلاع ABED مستطیل است و داریم

$$DE=AB=\sqrt{3},\quad BE=AD=1$$

از طرف دیگر

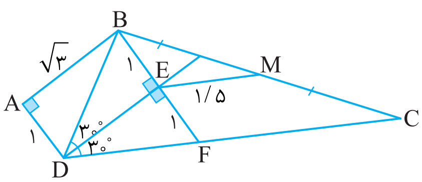
$$DEF: F=60^\circ\Rightarrow DE=\frac{\sqrt{3}}{2}DF\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}DF\Rightarrow DF=2$$

$$\hat{D}=30^\circ\Rightarrow EF=\frac{1}{2}DF=1$$

چون پاره‌خط EM وسط‌های دو ضلع مثلث BFC را به هم وصل می‌کند، پس

$$EM\|CF,\quad EM=\frac{1}{2}CF\Rightarrow CF=3$$

در نتیجه $DC=DF+FC=2+3=5$



۳۱۶۸ ۲ بدون از دست رفتن کلیت، فرض کنید $a>0$. در این صورت

$$FF'=a\Rightarrow 2c=a\Rightarrow c=\frac{a}{2}$$

از طرف دیگر، مجموع فواصل نقطهٔ $A(-3,0)$ از دو کانون بیضی برابر طول قطر بزرگ بیضی است. پس

$$2a'=AF+AF'=\sqrt{9+a^2}+3\Rightarrow 2a'-3=\sqrt{9+a^2}\xrightarrow{\text{توان ۲}}$$

$$4a'^2-12a'+9=9+a^2\Rightarrow 4a'^2-12a'=a^2\qquad(1)$$

همچنین

$$e=\frac{c}{a'}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{a}{2}}{a'}\Rightarrow a=\sqrt{2}a'\xrightarrow{(1)}4a'^2-12a'=2a'$$

$$2a'-12a'=0\Rightarrow a'=6\Rightarrow a=6\sqrt{2}\Rightarrow c=3\sqrt{2}$$

در نتیجه $b^2=a'^2-c^2=36-18=18\Rightarrow b=3\sqrt{2}\Rightarrow 2b=6\sqrt{2}$

پاسخ کنکور سراسری ۱۴۰۴

۳۱۶۹ ۴

$$A=\frac{\sqrt{۱+\sqrt{۳}}+\sqrt{\sqrt{۳}-۱}}{\sqrt{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}}\Rightarrow A^{۲}=\frac{۱+\sqrt{۳}+\sqrt{۳}-۱+۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$$

$$=\frac{۲(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}=۲(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^{۲}$$

$$A=\sqrt{۲}(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})\Rightarrow A-۲=۲+\sqrt{۶}-۲=\sqrt{۶}$$

۳۱۷۰ ۱

$$(\frac{۳-n}{۲},\frac{n+۳}{n})=(\frac{۳}{۲}-\frac{n}{۲},۱+\frac{۳}{n})\Rightarrow ۱<۱+\frac{۳}{n}-\frac{۳}{۲}+\frac{n}{۲}\leq ۲\Rightarrow ۱<-\frac{۱}{۲}+\frac{۶+n^{۲}}{۲n}\leq ۲$$

$$\frac{۳}{۲}<\frac{۶+n^{۲}}{۲n}\leq\frac{۵}{۲}\Rightarrow ۳<\frac{۶+n^{۲}}{n}\leq ۵\Rightarrow\begin{cases}۳<\frac{۶+n^{۲}}{n}\Rightarrow n^{۲}-۳n+۶>۰\Rightarrow\Delta<۰\\ \frac{۶+n^{۲}}{n}\leq ۵\Rightarrow n^{۲}-۵n+۶\leq ۰\Rightarrow ۲\leq n\leq ۳\end{cases}$$

$$n=۲\Rightarrow(\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲})\ \times\qquad n=۳\Rightarrow(۰,۲)\ \checkmark$$

۳۱۷۱ ۴

$$\frac{۱}{۲}a+۲b+\frac{۳}{۲}c+a-\frac{۱}{۲}b=\frac{۳}{۲}(a+b+c)=\frac{۳}{۲}\times ۱۸=۲۷$$

۳۱۷۲ ۳

$$۲a+۳=۰\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲},\quad ۴b-۵<۰\Rightarrow b<\frac{۵}{۴}\Rightarrow b=۱$$

$$-x+۴c+۱<۰\Rightarrow x>۴c+۱\Rightarrow ۴c+۱=a=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۴c=-\frac{۵}{۲}\Rightarrow c=-\frac{۵}{۸}$$

$$\frac{a}{c}=\frac{-\frac{۳}{۲}}{-\frac{۵}{۸}}=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

۳۱۷۳ ۳

$$y=۳-\sqrt{۲x}\xrightarrow{\text{۱ واحد چپ}}y=۳-\sqrt{۲(x+۱)}=۳-\sqrt{۲x+۲}$$

$$\xrightarrow{\text{۵ واحد بالا}}y=-۳+\sqrt{۲x+۲}+۵=\sqrt{۲x+۲}+۲$$

$$\sqrt{۲x+۲}+۲=\frac{۷}{۲}\Rightarrow\sqrt{۲x+۲}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۲x+۲=\frac{۹}{۴}\Rightarrow ۲x=\frac{۱}{۴}\Rightarrow x=\frac{۱}{۸}$$

۳۱۷۴ ۲

$$x_S=m>۰,\quad y_S=m^{۲}-m^{۲}+۲-m>۰\Rightarrow m<۲\Rightarrow ۰<m<۲\Rightarrow m=۱$$

۳۱۷۵ ۱

$$g(f(x))=g(x\sqrt{x})=۰\Rightarrow\begin{cases}x\sqrt{x}=۱\Rightarrow x=۱\\ x\sqrt{x}=۲\sqrt{۲}\Rightarrow x=۲\end{cases}$$

۳۱۷۶ ۲

$$\alpha+\beta=-۱,\quad\alpha\beta=-۱-m^{۲}$$

$$\alpha^{۲}+\beta^{۲}=(\alpha+\beta)^{۲}-۲\alpha\beta=۱+۲(۱+m^{۲})=۲m^{۲}+۳$$

بنابراین کمترین مقدار عبارت $۲m^{۲}+۳$ برابر با ۳ است.

۳۱۷۷ ۳

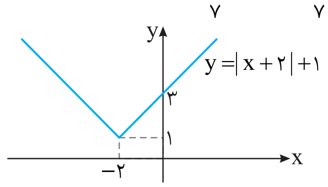
$$y=x-۴\xrightarrow{(a,-۱)}-۱=a-۴\Rightarrow a=۳$$

$$(۳,-۱)\in f^{-۱}\Rightarrow(-۱,۳)\in f$$

$$۱+\sqrt{b+a}=۳\xrightarrow{a=۳}\sqrt{b+۳}=۲\Rightarrow b=۱\Rightarrow a-b=۳-۱=۲$$

۳۱۷۸ ۴

$$m\geq ۰\Rightarrow ۵m+۲m\leq ۱\Rightarrow ۷m\leq ۱\Rightarrow m\leq\frac{۱}{۷}\Rightarrow ۰\leq m\leq\frac{۱}{۷}\Rightarrow a=۰,b=\frac{۱}{۷}$$



۳۱۷۹ ۲

$$f(-۲)=۰\Rightarrow -۳۲+۲۴-۲a+۵=۰\Rightarrow a=-۱/۵$$

۳۱۸۰ ۲

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۷\times\sin\theta=\frac{۳۵}{۲}\sin\theta$$

$$S_{ADE}=\frac{۱}{۲}AD\times AE\times\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}\times ۷\times ۴\times\sin\theta=۱۴\sin\theta$$

$$S_{ABC}-S_{ADE}=۱/۷۵\Rightarrow\frac{۷}{۲}\sin\theta=\frac{۷}{۴}\Rightarrow\sin\theta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=۳۰^\circ$$

$$\tan\theta=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

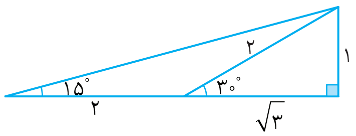
۳۱۸۱ ۴

$$\sin(\pi-\frac{\pi}{۱۲})=\sin\frac{\pi}{۱۲},\quad\cos(\pi-\frac{\pi}{۱۲})=-\cos\frac{\pi}{۱۲}$$

$$\tan\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}=۲-\sqrt{۳}$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{۱۲}-\cos\frac{\pi}{۱۲}}{\sin\frac{\pi}{۱۲}+\cos\frac{\pi}{۱۲}}=\frac{\tan\frac{\pi}{۱۲}-۱}{\tan\frac{\pi}{۱۲}+۱}=\frac{۲-\sqrt{۳}-۱}{۲-\sqrt{۳}+۱}=\frac{۱-\sqrt{۳}}{۳-\sqrt{۳}}\times\frac{۳+\sqrt{۳}}{۳+\sqrt{۳}}$$

$$=\frac{۳+\sqrt{۳}-۳\sqrt{۳}-۳}{۹-۳}=\frac{-۲\sqrt{۳}}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$



۳۱۸۲ ۳

$$\cos ۲x=\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=-\cos x=\cos(\pi-x)\Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm(\pi-x)$$

$$\begin{cases}۲x=۲k\pi+\pi-x\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳}\\ ۲x=۲k\pi-\pi+x\Rightarrow x=۲k\pi-\pi\end{cases}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳}$$

۳۱۸۳ ۲

$$۴^{|x|}=(\frac{۱}{۴})^{x^{۲}-x}=۴^{x-x^{۲}}\Rightarrow|x|=x-x^{۲}$$

$$x\geq ۰\Rightarrow x=x-x^{۲}\Rightarrow -x^{۲}=۰\Rightarrow x=۰$$

$$x<۰\Rightarrow -x=x-x^{۲}\Rightarrow x^{۲}-۲x=۰\Rightarrow x=۰,۲\ \text{غ ق ق}$$

۳۱۸۴ ۴

$$\overline{x}=\frac{a+b=c+d}{۴}=۳$$

$$\sigma^{۲}=۱/۵=\frac{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+d^{۲}}{۴}-۹\Rightarrow a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+d^{۲}=۴۲$$

$$\sigma^{۲}_{\text{جدید}}=\frac{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+d^{۲}+۲۵}{۵}-(\frac{۱۷}{۵})^{۲}=\frac{۶۷}{۵}-(\frac{۱۷}{۵})^{۲}=\frac{۴۶}{۲۵}=۱/۸۴$$

۳۱۸۵ ۱

a	$-\infty$		۱		۳		$+\infty$
$۱-a$		+	۰	−		−	
$۹-۳a$		+		+	۰	−	
$\frac{۱-a}{۹-۳a}$		+	۰	−	ت ن	+	

$$\frac{۱-a}{۹-۳a}\leq ۰\Rightarrow ۱\leq a<۳\Rightarrow a=۱,۲$$

۳۱۸۶ ②

$$\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} [۸x^۲-x]=[۸(-\frac{۱}{۲})^۳+\frac{۱}{۲}]=[-\frac{۱}{۲}]=-۱$$

۳۱۸۷ ④

$$\lim_{x\to(-۲\pi)^+} \frac{۴+k[\frac{x}{\pi}]}{\sin x}=\frac{۴+k[-۲^+]}{۰^+}=\frac{۴-۲k}{۰^+}=+\infty \Rightarrow ۴-۲k>۰ \Rightarrow k<۲$$

$$\lim_{x\to(-۲\pi)^-} \frac{۴+k[\frac{x}{\pi}]}{\sin x}=\frac{۴+k[-۲^-]}{۰^-}=\frac{۴-۳k}{۰^-}=+\infty \Rightarrow ۴-۳k<۰ \Rightarrow k>\frac{۴}{۳}$$

$$\frac{۴}{۳}<k<۲ \Rightarrow -۲<-k<-\frac{۴}{۳} \Rightarrow [-k]=-۱$$

۳۱۸۸ ①

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} \frac{۳}{x+a}=\frac{۳}{۲a} \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} \frac{a-۱}{x-۱}=۱ \end{cases} \Rightarrow \frac{۳}{۲a}=۱ \Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

امـا این مقـدار قابل قبول نیسـت، چون اگـر $a=\frac{۳}{۲}$ ، آن‌گاه تابـع f نمی‌تواند روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{۶}{۲x+۳} & x\geq \frac{۳}{۲} \\ \frac{۱}{۲(x-۱)} & x<\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

نقاط $x=۱$ و $x=\frac{۳}{۲}$ نقاط ناپیوستگی تابع f هستند.

۳۱۸۹ ②

آهنگ تغییر متوسط: $\frac{f(۳)-f(۱)}{۲}=\frac{۱-\frac{a}{۳}-۱+\frac{a}{۱}}{۲}=\frac{\frac{۲a}{۳}}{۲}=\frac{a}{۳}$

آهنگ تغییر لحظه‌ای: $f'(x)=\frac{a}{x^۲} \Rightarrow \frac{a}{۳}=\frac{a}{x^۲} \Rightarrow x^۲=۳ \Rightarrow x=\sqrt{۳}$

۳۱۹۰ ① توجه کنید که $f'(x)=۳x^۲+a$. پس

$$f(۲)=۰ \Rightarrow ۸+۲a-b=۰ \Rightarrow b-۲a=۸$$

$$f'(۲)=۰ \Rightarrow ۱۲+a=۰ \Rightarrow a=-۱۲ \Rightarrow b=-۱۶$$

$$b-a=-۱۶+۱۲=-۴$$

۳۱۹۱ ③

$$x=۰ \Rightarrow y=\sqrt{۲} \Rightarrow A(۰,\sqrt{۲}),\quad d=\sqrt{(x-۰)^۲+(y-\sqrt{۲})^۲}$$

$$y=\begin{cases} ۲x & x\geq ۰ \\ ۰ & x<۰ \end{cases} \quad d=\sqrt{x^۲+(۲x-\sqrt{۲})^۲} \Rightarrow d'=\frac{۲x+۲(۲x-\sqrt{۲})\times ۲}{۲\sqrt{x^۲+(۲x-\sqrt{۲})^۲}}=۰$$

$$۱۰x=۴\sqrt{۲} \Rightarrow x=۰/۴\sqrt{۲}$$

$$d=\sqrt{(۰/۴\sqrt{۲})^۲+(-۰/۲\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{۰/۳۲+۰/۰۸}=\sqrt{۰/۴}=\sqrt{۰/۰۴\times ۱۰}=۰/۲\sqrt{۱۰}$$

۳۱۹۲ ④

$$\underset{\text{رقم ۷}}{۱}\times-\times-\Rightarrow \binom{۴}{۲}=۶ \qquad \underset{\text{رقم ۹}}{۱}\times-\times-\Rightarrow \binom{۶}{۲}=۱۵$$

$$\underset{\text{رقم ۵}}{۱}\times-\times-\Rightarrow \binom{۳}{۲}=۳ \qquad \underset{\text{رقم ۸}}{۱}\times-\times-\Rightarrow \binom{۵}{۲}=۱۰$$

$$۱۵+۱۰+۶+۳+۱=۳۵ \qquad \underset{\text{رقم ۳}}{۱}\times-\times-\Rightarrow \binom{۲}{۲}=۱$$

۳۱۹۳ ③ توجه کنید که $n(S)=۶\times ۲\times ۲\times ۲\times ۲=۴۸$. اگر A پیشامد مطلوب باشد،

آن‌گاه $A=\{(۱,ر,ر,ر,ر)\} \Rightarrow n(A)=۱ \Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۴۸}$

۳۱۹۴ ② فرض کنید A پیشامد قبولی نیلوفر و B پیشامد قبولی دوست نیلوفر در درس ریاضی باشند. در این صورت A و B مستقل هستند و می‌توان نوشت

$$P(A)=\frac{۲}{۳}P(B)$$

$$P(B-A)=\frac{۳}{۸} \Rightarrow P(B)-P(A\cap B)=\frac{۳}{۸} \Rightarrow P(B)-P(A)P(B)=\frac{۳}{۸}$$

$$P(B)(۱-P(A))=\frac{۳}{۸} \Rightarrow \frac{۳}{۲}P(A)(۱-P(A))=\frac{۳}{۸} \xrightarrow{P(A)=x} ۴x-۴x^۲=۱$$

$$۴x^۲-۴x+۱=۰ \Rightarrow (۲x-۱)^۲=۰ \Rightarrow P(A)=x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow P(B)=\frac{۳}{۴}$$

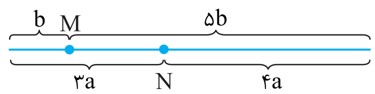
$$P(A'\cap B')=۱-P(A\cup B)=۱-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$$

$$=\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۴}+\frac{۳}{۸}=\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۸}=\frac{۱}{۸}$$

۳۱۹۵ ③ با توجه به شکل می‌توان نوشت

$$۷a=۶b \Rightarrow b=\frac{۷a}{۶}\ ,\quad ۳a-b=۲۲ \Rightarrow ۳a-\frac{۷a}{۶}=۲۲ \Rightarrow a=۱۲$$

$$|AB|=۷a=۸۴ \Rightarrow \text{مجموع ارقام}=۸+۴=۱۲$$



۳۱۹۶ ①

$$\triangle ABC: AC^۲=AB^۲+BC^۲=۱۶^۲+۱۲^۲=۴۰۰ \Rightarrow AC=۲۰$$

$$BC^۲=CH\times AC \Rightarrow ۱۲^۲=CH\times ۲۰ \Rightarrow CH=۷/۲$$

$$AE=EH=\frac{AH}{۲}=\frac{۲۰-۷/۲}{۲}=۶/۴$$

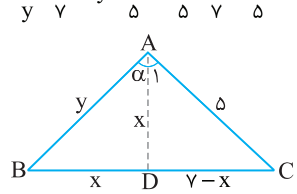
$$DE||BC \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{تعمیم قضیهٔ}} \frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{۶/۴}{۲۰}=\frac{DE}{۱۲} \Rightarrow DE=۳/۸۴$$

۳۱۹۷ ④

$$\begin{cases} \hat{A}_۱=\hat{B} \\ \hat{C}=\hat{C} \end{cases} \xrightarrow{(\text{زز})} \triangle ACD\sim\triangle BCA \Rightarrow \frac{CD}{CA}=\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BA}$$

$$\frac{CD}{CA}=\frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{۷-x}{۵}=\frac{۵}{۷} \Rightarrow ۷-x=\frac{۲۵}{۷} \Rightarrow x=\frac{۲۴}{۷}$$

$$\frac{AD}{BA}=\frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{۵}{۷} \Rightarrow y=\frac{۷}{۵}x=\frac{۷}{۵}\times\frac{۲۴}{۷}=\frac{۲۴}{۵}=۴/۸$$



۳۱۹۸ ②

$$m_{\ell'}=m_{\ell''}=\frac{۴}{۳},\quad m_{\ell}=-\frac{۳}{۴}$$

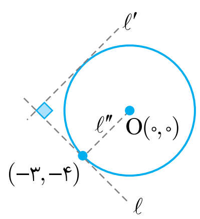
$$\ell: y=-\frac{۳}{۴}x+b \xrightarrow{(-۳,-۴)} \frac{۹}{۴}+b=-۴ \Rightarrow b=-\frac{۲۵}{۴}$$

$$y=-\frac{۳}{۴}x-\frac{۲۵}{۴}\quad (۱)$$

$$r=\sqrt{۹+۱۶}=۵,\quad \ell': y=\frac{۴}{۳}x+\frac{۲۵}{۳}\quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{۴}{۳}x+\frac{۲۵}{۳}=-\frac{۳}{۴}x-\frac{۲۵}{۴} \Rightarrow ۱۶x+۱۰۰=-۹x-۷۵$$

$$۲۵x=-۱۷۵ \Rightarrow x=-۷,\ y=-۱ \Rightarrow xy=۷$$



۳۱۹۹ ③ ابتدا هر کدام از رادیکال‌ها را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{2^8}}=\sqrt[12]{2^8}=2^{\frac{8}{12}}=2^{\frac{2}{3}},\quad \sqrt[4]{162}=\sqrt[4]{81\times 2}=\sqrt[4]{81}\times\sqrt[4]{2}=3\times 2^{\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt{4^6\sqrt{2}}=2\times 2^{\frac{1}{12}}$$

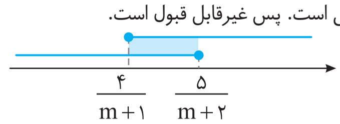
حالا هر ۳ را در هم ضرب می‌کنیم:

$$2^{\frac{2}{3}}\times 3\times 2^{\frac{1}{4}}\times 2\times 2^{\frac{1}{12}}=6\times 2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}}=6\times 2^{\frac{8+3+1}{12}}=6\times 2^1=12$$

در نتیجه

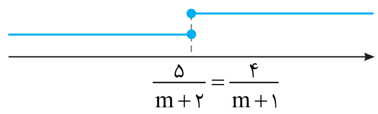
$$\frac{12}{\sqrt{6}}=\frac{12}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{12\sqrt{6}}{6}=2\sqrt{6}$$

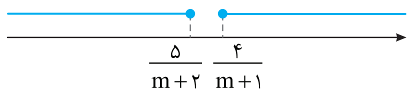
۳۲۰۰ ② اگر دو مجموعه به صورت زیر باشند، اشتراک‌شان یک بازه است که مجموعه‌ای نامتناهی است. پس غیرقابل قبول است.



اما اگر مجموعه‌ها به یک از دو صورت زیر باشند، اشتراک‌شان یک عدد یا تهی است (تهی مجموعه‌ای متناهی است).

$$\frac{5}{m+2}\le\frac{4}{m+1}\xrightarrow[\text{مخرج‌ها مثبت‌اند}]{m\ \text{عدد طبیعی}}5m+5\le 4m+8\Rightarrow m\le 3$$





اعداد طبیعی‌ای که کوچک‌تر از یا مساوی با ۳ باشند، عبارت‌اند از $\quad m=1,2,3$

۳۲۰۱ ④

$$a,b,c\Rightarrow \text{دنبالهٔ حسابی}\Rightarrow 2b=a+c$$

$$b,\frac{1}{2}a,\frac{1}{4}c\Rightarrow \text{دنبالهٔ هندسی}\Rightarrow\frac{a^2}{4}=\frac{bc}{4}\Rightarrow a^2=bc$$

$$a^2=(a+d)(a+2d)=a^2+3ad+2d^2\Rightarrow 3ad+2d^2=0$$

$$3a+2d=0\Rightarrow d=-\frac{3}{2}a$$

$$2r=2\left(\frac{\frac{1}{2}a}{b}\right)=\frac{a}{b}=\frac{a}{a+d}=\frac{a}{a-\frac{3}{2}a}=\frac{a}{-\frac{1}{2}a}=-2$$

۳۲۰۲ ③ نامعادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(5-2m)x^2-(2m+n-5)x-n<0$$

اگر بخواهیم جواب نامعادلهٔ بالا بازهٔ $(-1,m-2)$ باشد، باید سهمی به شکل زیر باشد، یعنی دهانهٔ سهمی رو به بالا باشد. پس

$$5-2m>0\Rightarrow 2m<5\Rightarrow m<\frac{5}{2}$$

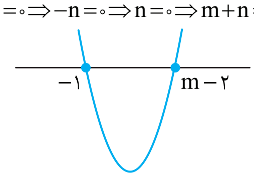
m عددی طبیعی است پس $m=1$ یا $m=2$. اگر $m=1$ ، آن‌گاه $(-1,m-2)=(-1,-1)$ بازه نیست.

اگر $m=2$ ، آن‌گاه $(-1,m-2)=(-1,0)$. بنابراین نامعادله می‌شود

$$x^2-(n-1)x-n<0$$

ریشه‌های عبارت سمت چپ عبارت‌اند از صفر و ۱− . پس

$$P=0\Rightarrow -n=0\Rightarrow n=0\Rightarrow m+n=2$$



۳۲۰۳ ①

$$a_1=a,\quad h_1=h,\quad h=3a+2$$
$$a_2=a+4,\quad h_2=h+4$$

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{1}{2}a_2h_2}{\frac{1}{2}a_1h_1}=\frac{(a+4)(h+4)}{ah}=\frac{(a+4)(3a+2+4)}{a(3a+2)}=\frac{(a+4)(3a+6)}{3a^2+2a}$$

$$=\frac{3(a+4)(a+2)}{3a^2+2a}=\frac{9}{2}\Rightarrow\frac{a^2+6a+8}{3a^2+2a}=\frac{3}{2}\Rightarrow 3(3a^2+2a)=2(a^2+6a+8)$$

$$7a^2-6a-16=0\Rightarrow a=2,a=-\frac{8}{7}\Rightarrow a=2,\quad h=8\Rightarrow S_1=8$$

۳۲۰۴ ② f تابع همانی است، یعنی $f(x)=x$ و g تابع ثابت است، یعنی $g(x)=c$.

$$g(3x)+2f(3+x)=3+2x\Rightarrow c+2(3+x)=3+2x$$

$$c+6+2x=3+2x\Rightarrow c=-3\Rightarrow\frac{f(-1)}{g(4)}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$$

۳۲۰۵ ③ چون f و gof روی محور yها متقاطع‌اند، پس

$$f(0)=g(f(0))\Rightarrow\sqrt{a}=g(\sqrt{a})\Rightarrow\sqrt{a}=3-\sqrt{a}$$

$$2\sqrt{a}=3\Rightarrow\sqrt{a}=\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{9}{4}=2/25$$

۳۲۰۶ ①

$$\sqrt{\frac{1}{\alpha}}+\sqrt{\frac{1}{\beta}}=5\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}=5\Rightarrow\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}=5\xrightarrow{\text{توان ۲}}$$

$$\frac{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta}=25\Rightarrow\frac{\frac{m+14}{36}+2(\frac{1}{6})}{\frac{1}{36}}=25\Rightarrow m+14+12=25$$

$$m+26=25\Rightarrow m=-1$$

حالا حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ جدید را به دست می‌آوریم.

$$mx^2+3x+2=0\xrightarrow{m=-1}-x^2+3x+2=0\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{2}{-1}=-2$$

۳۲۰۷ ④

$$(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})\Rightarrow-\sqrt{a+\frac{9}{25}b}=-\frac{4}{5}\xrightarrow{\text{توان ۲}}a+\frac{9}{25}b=\frac{16}{25}\quad(1)$$

$$(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5})\Rightarrow-\sqrt{a+\frac{16}{25}b}=-\frac{3}{5}\xrightarrow{\text{توان ۲}}a+\frac{16}{25}b=\frac{9}{25}\quad(2)$$

$$(1)-(2)\Rightarrow-\frac{7}{25}b=\frac{7}{25}\Rightarrow b=-1\xrightarrow{(1)}a=1\Rightarrow\frac{a}{b}=-1$$

۳۲۰۸ ③

$$4-m\ge 2m+3\ge m-2\ge -10\Rightarrow\begin{cases}4-m\ge 2m+3\Rightarrow m\le\frac{1}{3}\\ 2m+3\ge m-2\Rightarrow m\ge -5\\ m-2\ge -10\Rightarrow m\ge -8\end{cases}$$

$$\text{اشتراک بازه‌ها}\Rightarrow -5\le m\le\frac{1}{3}\Rightarrow m=0,-1,\dots,-5$$

۳۲۰۹ ① اجتماع دو بازهٔ داده شده همسایگی محذوف ۴ است. پس

$$(2,a+b)\cup(4b-a,5)=(2,5)-\{4\}$$

$$\begin{cases}a+b=4\\ 4b-a=4\end{cases}\xrightarrow{+}5b=8\Rightarrow b=\frac{8}{5}\Rightarrow a=\frac{12}{5}$$

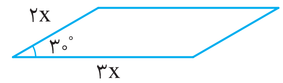
$$b-a=\frac{8}{5}-\frac{12}{5}=-\frac{4}{5}$$

$a+b=4b-a$

۳۲۱۰ (۴)

$$S=(2x)(3x)(\sin 30^\circ)=54\Rightarrow 3x^2=54\Rightarrow x^2=18\Rightarrow x=3\sqrt{2}$$

اکنون محیط متوازی‌الاضلاع می‌شود: $2(3x+2x)=10x=10(3\sqrt{2})=30\sqrt{2}$



۳۲۱۱ (۲) ابتدا توجه کنید که

$$A=-1+\tan(7\times 22.5^\circ)=-1+\tan(8\times 22.5^\circ-1\times 22.5^\circ)$$

$$=-1+\tan(180^\circ-22.5^\circ)=-1-\tan 22.5^\circ$$

با فرض $\alpha=22.5^\circ$ و طبق رابطهٔ $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ داریم

$$\tan 45^\circ=\frac{2\tan 22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}\xrightarrow{\tan 22.5^\circ=t}1=\frac{2t}{1-t^2}\Rightarrow t^2+2t-1=0$$

$$t=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=-1\pm\sqrt{2}\xrightarrow{t=\tan 22.5^\circ>0}t=\sqrt{2}-1$$

$$A=-1-(\sqrt{2}-1)=-\sqrt{2}$$

۳۲۱۲ (۲) دو طرف را برحسب یک نسبت مثلثاتی می‌نویسیم:

$$\sin 2x=\cos 3x\Rightarrow\cos(\frac{\pi}{2}-2x)=\cos 3x$$

$$3x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-2x\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}\Rightarrow x=\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{2},\frac{9\pi}{10}$$

$$3x=2k\pi-\frac{\pi}{2}+2x\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\ \times$$

۳۲۱۳ (۱) ابتدا توجه کنید که $\log_2 5=\dfrac{1}{\log_5 2}=\dfrac{1}{0.5}=2$

بنابراین

$$\log_{14}10=\frac{\log_2 10}{\log_2 14}=\frac{\log_2 5+\log_2 2}{\log_2 7+\log_2 2}=\frac{\log_2 5+1}{\log_2 7+1}=\frac{2+1}{2.8+1}$$

$$=\frac{3}{3.8}=\frac{30}{38}=\frac{15}{19}$$

۳۲۱۴ (۴) ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{1+1.08+1.2+1.16+1.16}{5}=\frac{5.6}{5}=1.12$$

حالا واریانس را محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma^2=\frac{(1-1.12)^2+(1.08-1.12)^2+(1.2-1.12)^2+(1.16-1.12)^2+(1.16-1.12)^2}{5}$$

$$=\frac{0.0144+0.0016+0.0064+0.0016+0.0016}{5}=\frac{0.0256}{5}$$

انحراف معیار جذر واریانس است، پس $\sigma=\sqrt{\dfrac{0.0256}{5}}=\dfrac{0.16}{\sqrt{5}}$

در نهایت ضریب تغییرات برابر است با

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\frac{16}{100\times\sqrt{5}}}{\frac{112}{100}}=\frac{16}{112\times\sqrt{5}}=\frac{1}{7\sqrt{5}}$$

۳۲۱۵ (۱) در $x=2.5$ حفره داریم، پس 2.5 ریشهٔ صورت و مخرج است.

$$4x-c=0\xrightarrow{x=2.5}10-c=0\Rightarrow c=10$$

تابع در $x=1$ پیوسته است، پس

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)\Rightarrow\frac{2+a+b}{4-10}=4-5\Rightarrow a+b=4$$

۳۲۱۶ (۴) تابع f در نقطه $x=-2$ حد دارد. پس باید حد چپ و حد راست تابع در این نقطه با هم برابر باشند.

$$\lim_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}f(x)$$

$$f(x)=2[\frac{2-x}{2}]+a[\frac{x+2}{3}]=2[1-\frac{x}{2}]+a[\frac{x+2}{3}]$$

$$\lim_{x\to(-2)^+}(2[1-\frac{x}{2}]+a[\frac{x+2}{3}])=2[1-\frac{(-2)^+}{2}]+a[\frac{(-2)^++2}{3}]$$

$$=2[1-(-1)^+]+a[\frac{0^+}{3}]=2[2^-]=2$$

$$\lim_{x\to(-2)^-}(2[1-\frac{x}{2}]+a[\frac{x+2}{3}])=2[1-(-1)^-]+a[\frac{(-2)^-+2}{3}]$$

$$=2[2^+]+a[\frac{0^-}{3}]=4-a\Rightarrow 4-a=2\Rightarrow a=2\Rightarrow[\frac{a}{3}]=[\frac{2}{3}]=0$$

۳۲۱۷ (۳)

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1-k[x]}{x^2-1}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1+k}{x^2-1}=\frac{1+k}{0^-}=-\infty\Rightarrow 1+k>0\Rightarrow k>-1$$

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{1-k[x]}{x^2-1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{1+2k}{x^2-1}=\frac{1+2k}{0^+}=-\infty\Rightarrow 1+2k<0\Rightarrow k<-\frac{1}{2}$$

$$-1<k<-\frac{1}{2}\Rightarrow-\pi<k\pi<-\frac{\pi}{2}\Rightarrow-1<\cos k\pi<0$$

مؤلفهٔ اول و دوم همواره منفی هستند، پس این نقاط در ناحیهٔ سوم هستند.

۳۲۱۸ (۴) $f(2a)$ برابر صفر است. پس صورت کسر باید عامل $(x-2a)$ را داشته باشد. از طرفی تابع در $x=a$ پیوسته است و حد کسر باید در نقطهٔ $x=a$ برابر ۲ باشد. با توجه به کسر داده شده صورت کسر باید عامل $(x-a)$ را نیز داشته باشد. یعنی

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-a)(x-2a)}{a-x} & x\neq a\\ 2 & x=a\end{cases}$$

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}(-(x-2a))=-(-a)=a=2$$

صورت کسر برابر است با $(x-2)(x-4)=x^2-6x+8$. پس $n=8$ و $m=-6$.

بنابراین $n-m=8-(-6)=14$

۳۲۱۹ (۳)

$$y=-ax+2\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{\text{مقدار تابع در } x=4}f(4)=-4a+2\\ \xrightarrow{\text{مشتق تابع در } x=4}f'(4)=-a\end{cases}$$

$$f(4)+f'(4)=-1\Rightarrow-4a+2-a=-1\Rightarrow-5a=-3\Rightarrow a=\frac{3}{5}$$

پس $f'(4)=-a=-\dfrac{3}{5}=-0.6$

۳۲۲۰ (۲) خط d از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس $d: y=mx$

خط $y=mx$ بر تابع $f(x)=2\sqrt{x}(4x^2+3)$ مماس است. پس

$$f(x)=2\sqrt{x}(4x^2+3)=8x^2\sqrt{x}+6\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=20x\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}$$

نقطهٔ (a, ma) را محل تماس خط و تابع در نظر می‌گیریم:

$$f(a)=8a^2\sqrt{a}+6\sqrt{a}=ma$$

$$f'(a)=20a\sqrt{a}+\frac{3}{\sqrt{a}}=m\xrightarrow{\times a}20a^2\sqrt{a}+3\sqrt{a}=ma$$

$$ma=20a^2\sqrt{a}+3\sqrt{a}=8a^2\sqrt{a}+6\sqrt{a}$$

$$12a^2\sqrt{a}=3\sqrt{a}\xrightarrow{\div\sqrt{a}}12a^2=3\Rightarrow a=\pm\frac{1}{2}$$

فقط $a=\frac{1}{2}$ را می‌پذیریم چون $a=-\frac{1}{2}$ در دامنهٔ تابع نیست.

$$f'(\frac{1}{2})=8(\frac{1}{2})^2\sqrt{\frac{1}{2}}+6\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{m}{2}\Rightarrow\frac{8}{\sqrt{2}}=\frac{m}{2}\Rightarrow m=\frac{16}{\sqrt{2}}=8\sqrt{2}$$

۳۲۲۱ (۲) دو نقطه A و B روی خطی موازی محور yها هستند، یعنی هم طول هستند. برای پیدا کردن طول پاره‌خط AB کافی است عرض آن‌ها را از هم کم کنیم. پس

$$AB=(x^۳+x^۲+۱)-(x^۳-۲x-۳)=x^۲+۲x+۴$$

کمترین مقدار طول پاره‌خط AB عرض رأس سهمی بالا است.

$$x_S=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۲}{۲}=-۱\Rightarrow y_S=۱-۲+۴=۳$$

۳۲۲۲ (۳)

$$\begin{cases}\underset{۱,۳,۵}{\underline{۳}}\times\underline{۶}\times\underline{۵}=۹۰\\ \underset{۷}{\underline{۱}}\times\underset{۰,۱,۳,۵}{\underline{۴}}\times\underline{۵}=۲۰\xrightarrow{+}۹۰+۲۰+۱=۱۱۱\\ \underset{۷}{\underline{۱}}\times\underset{۸}{\underline{۱}}\times\underset{۰}{\underline{۱}}=۱\end{cases}$$

۳۲۲۳ (۱) ۳ کارت از ۸ کارت انتخاب می‌کنیم، پس

$$n(S)=\binom{۸}{۳}=۵۶$$

حالت مطلوب آن است که یکی از کارت‌ها ۱ و دوتای دیگر ۲، ۳، ...، ۸ یا یکی از کارت‌ها ۲ و دوتای دیگر از اعداد ۴، ۶ یا ۸ باشند. پس

$$n(A)=\binom{۱}{۱}\binom{۷}{۲}+\binom{۱}{۱}\binom{۳}{۲}=۲۱+۳=۲۴\Rightarrow P(A)=\frac{۲۴}{۵۶}=\frac{۳}{۷}$$

۳۲۲۴ (۴) تعداد مهره‌های سبز را x در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\binom{۵}{۱}\binom{x}{۱}+\binom{۵}{۲}}{\binom{x+۵}{۲}}=\frac{۵x+۱۰}{\frac{(x+۵)(x+۴)}{۲}}=\frac{۵}{۶}\Rightarrow\frac{۲(x+۲)}{(x+۵)(x+۴)}=\frac{۱}{۶}$$

$$(x+۵)(x+۴)=۱۲(x+۲)\Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰\Rightarrow x=۴$$

۳۲۲۵ (۳) علاوه بر نسبت اضلاع متناظر، نامساوی مثلث را نیز بررسی می‌کنیم:

$$\frac{۴}{۳}=\frac{x}{۷}=\frac{۵}{y}\Rightarrow x=\frac{۲۸}{۳}=۹/۳,\quad y=\frac{۱۵}{۴}=۳/۷۵\ \times$$

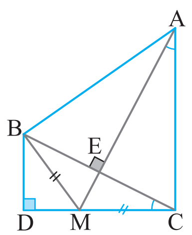
$$\frac{۴}{۷}=\frac{x}{۳}=\frac{۵}{y}\Rightarrow x=\frac{۱۲}{۷}=۱/۷,\quad y=\frac{۳۵}{۴}=۸/۷۵\ \checkmark$$

$$\frac{۵}{۳}=\frac{x}{۷}=\frac{۴}{y}\Rightarrow x=\frac{۳۵}{۳}=۱۱/۶,\quad y=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴\ \times$$

$$\frac{۵}{۷}=\frac{x}{۳}=\frac{۴}{y}\Rightarrow x=\frac{۱۵}{۷}=۲/۱,\quad y=\frac{۲۸}{۵}=۵/۶\ \checkmark$$

$$\frac{۳۵}{۴}-\frac{۲۸}{۵}=\frac{۱۷۵-۱۱۲}{۲۰}=\frac{۶۳}{۲۰}=۳/۱۵$$

۳۲۲۶ (۳) ابتدا توجه کنید که



$$\triangle BDC: BC^۲=BD^۲+CD^۲$$

$$=۲^۲+۴^۲=۲۰\Rightarrow BC=۲\sqrt{۵}$$

چون مثلث BMC متساوی‌الساقین است، پس

$$BE=CE=\frac{BC}{۲}=\sqrt{۵}$$

از طرف دیگر

$$\begin{cases}\hat{E}=\hat{D}=۹۰^\circ\\ \hat{A}=\hat{C}\end{cases}\xrightarrow{(زز)}\triangle AEC\sim CDB$$

$$\frac{BD}{CE}=\frac{CD}{AE}\Rightarrow\frac{۲}{\sqrt{۵}}=\frac{۴}{AE}\Rightarrow AE=۲\sqrt{۵}$$

(توجه کنید که اضلاع دو زاویهٔ A و C بر هم عمودند. پس این دو زاویه هم اندازه‌اند.)

در نتیجه

$$S_{ABE}=\frac{۱}{۲}AE\times BE=\frac{۱}{۲}\times۲\sqrt{۵}\times\sqrt{۵}=۵$$

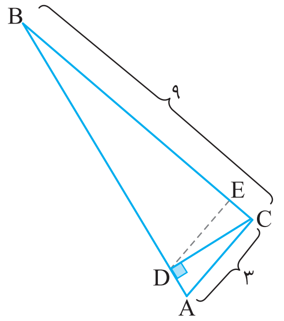
۳۲۲۷ (۱) در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC به کمک روابط طولی داریم

$$BA=\sqrt{BC^۲+AC^۲}=\sqrt{۹^۲+۳^۲}=\sqrt{۹۰}=۳\sqrt{۱۰}$$

$$AC^۲=AD\times AB\Rightarrow ۹=AD\times۳\sqrt{۱۰}\Rightarrow AD=\frac{۹}{۳\sqrt{۱۰}}=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰}$$

$$BD=۳\sqrt{۱۰}-\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰}=\frac{۲۷\sqrt{۱۰}}{۱۰}$$

$$DE\|AC\xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}}\frac{BE}{BC}=\frac{BD}{BA}\Rightarrow\frac{BE}{۹}=\frac{\frac{۲۷\sqrt{۱۰}}{۱۰}}{۳\sqrt{۱۰}}\Rightarrow BE=\frac{۸۱}{۱۰}=۸/۱$$



۳۲۲۸ (۱)

$$m_\Delta=\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{b-a}{-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۳}\Rightarrow۶(b-a)=\sqrt{۳}\Rightarrow b-a=\frac{\sqrt{۳}}{۶}$$

$$\text{طول ضلع}=\sqrt{(-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲})^۲+(b-a)^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۳۶}+\frac{۳}{۳۶}}=\sqrt{\frac{۴}{۳۶}}=\frac{۱}{۳}$$

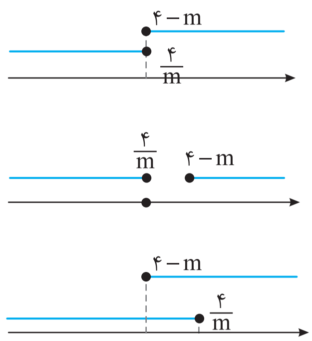
$$\text{قطر}=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

۳۲۲۹ (۱)

$$\frac{\sqrt[۸]{۴۹\sqrt[۳]{۷}}}{۷\sqrt[۴]{۳۴۳\sqrt{۷^{-۱}}}}=\frac{\sqrt[۸]{۷^۲\times۷^{\frac{۱}{۳}}}}{۷\sqrt[۴]{۷^۳\times۷^{-\frac{۱}{۲}}}}=\frac{\sqrt[۸]{۷^{\frac{۷}{۳}}}}{۷\sqrt[۴]{۷^{\frac{۵}{۲}}}}=\frac{۷^{\frac{۷}{۲۴}}}{۷^{\frac{۱۳}{۸}}}=۷^{-\frac{۴}{۳}}\Rightarrow\frac{۷^{-\frac{۴}{۳}}}{۷^{\frac{۲}{۳}}}=۷^{-۲}=\frac{۱}{۴۹}$$

۳۲۳۰ (۳) طبق این شکل، برای این که اشتراک این دو بازه متناهی شود باید:

$$۴-m\geq\frac{۴}{m}\Rightarrow-\frac{(m-۲)^۲}{m}\geq۰\Rightarrow m=۲$$



۳۲۳۱ (۴)

$$\text{هندسی}: b^۲=ac$$

$$\text{حسابی}: ۴a=c+۳b\Rightarrow b=\frac{۴a-c}{۳}\xrightarrow{\text{توان ۲}}b^۲=\frac{۱۶a^۲-۸ac+c^۲}{۹}=ac$$

$$۱۶a^۲-۱۷ac+c^۲=۰\Rightarrow(۱۶a-c)(a-c)=۰$$

$$a=c, a=\frac{c}{۱۶},\quad b=\frac{۴(\frac{c}{۱۶})-c}{۳}=\frac{-\frac{۳c}{۴}}{۳}=-\frac{c}{۴}$$

$$\frac{a_۹}{a_۶}=r^۳=(\frac{b}{a})^۳=(\frac{-\frac{c}{۴}}{\frac{c}{۱۶}})^۳=(-۴)^۳=-۶۴$$

۳۲۳۲ (۱) برای اینکه جواب این نامعادله به فرم آن بازه باشد، باید $m+4>0$، یعنی $m>-4$. یک ریشه $m+1$ و دیگری -1 است و طبق فرم بازه $m+1<-1$، یعنی $m<-2$. چون $m\in\mathbb{Z}$، پس $m=-3$. در معادله $x^2+(1-n)x-n=0$، ریشهٔ $x=m+1=-2$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$(-2)^2+(1-n)(-2)-n=0\Rightarrow n=-2\Rightarrow mn=6$$

۳۲۳۳ (۴)

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{(x+9)(4x+12)}{x(4x+3)}=10\Rightarrow\frac{4(x^2+12x+27)}{4x^2+3x}=10\Rightarrow x=2$$

$$P_1=2(2+1)=26$$

۳۲۳۴ (۳)

$$f(x)=c,\quad g(x)=x$$

$$f(2x)-g(1-x)=4+x\Rightarrow c-(1-x)=4+x\Rightarrow c=5$$

$$g(-1)f(3)=-1\times5=-5$$

۳۲۳۵ (۴)

$$g(x)=\sqrt{3+ax}=g(f(x))=\sqrt{3+a(2-x)}=0$$

$$\sqrt{3+ax}=\sqrt{3+a(2-x)}\Rightarrow3+ax=3+a(2-x)$$

$$ax=2a-ax\Rightarrow2ax=2a\Rightarrow x=1\Rightarrow g(1)=0\Rightarrow\sqrt{3+a}=0\Rightarrow a=-3$$

۳۲۳۶ (۲)

$$\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}=1\Rightarrow\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}=1\Rightarrow S-2\sqrt{P}=1\Rightarrow3m-2\sqrt{m}=1$$

$$3m-2\sqrt{m}-1=0\Rightarrow\sqrt{m}=1,-\frac{1}{3}\Rightarrow m=1\Rightarrow2x^2+x-1=0\Rightarrow P=-\frac{1}{2}$$

۳۲۳۷ (۳)

$$\begin{cases}f(\frac{3}{5})=\sqrt{a+\frac{9}{25}b}=\frac{4}{5}\Rightarrow a+\frac{9}{25}b=\frac{16}{25}\\ f(\frac{4}{5})=\sqrt{a+\frac{16}{25}b}=\frac{3}{5}\Rightarrow a+\frac{16}{25}b=\frac{9}{25}\end{cases}\Rightarrow a=1,\quad b=-1\Rightarrow ab=-1$$

۳۲۳۸ (۲)

$$25\geq4m+13\geq10-m\geq3m-2$$

$$25\geq4m+13\Rightarrow3\geq m,\quad4m+13\geq10-m\Rightarrow m\geq-\frac{3}{5}$$

$$10-m\geq3m-2\Rightarrow3\geq m\Rightarrow m=1,2,3$$

۳۲۳۹ (۴)

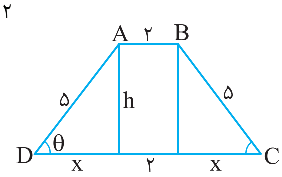
$$7x-9<5<3x+1\Rightarrow\frac{4}{3}<x<2\Rightarrow(a,b)=(\frac{4}{3},2)\Rightarrow ab=\frac{8}{3}$$

۳۲۴۰ (۲)

$$\cos\theta=\frac{6}{10}\Rightarrow\sin\theta=\frac{8}{10}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{5}=\frac{6}{10}\Rightarrow x=3,\quad\sin\theta=\frac{h}{5}=\frac{8}{10}\Rightarrow h=4$$

$$S=\frac{(2+8)\times4}{2}=20$$



۳۲۴۱ (۱)

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\Rightarrow\tan45^\circ=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=1\Rightarrow\tan\alpha=\sqrt{2}-1$$

$$\tan3\alpha=\tan(2\alpha+\alpha)=\frac{\tan2\alpha+\tan\alpha}{1-\tan2\alpha\tan\alpha}$$

$$=\frac{\tan45^\circ+\tan\alpha}{1-\tan45^\circ\tan\alpha}=\frac{1+\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\times\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}+2}{4-2}=\sqrt{2}+1$$

$$A=1-\tan3\alpha=1-(\sqrt{2}+1)=-\sqrt{2}$$

۳۲۴۲ (۲)

$$\cos2x=-\cos3x\Rightarrow\sin(\frac{\pi}{2}-2x)=-\sin(\frac{\pi}{2}-3x)$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-2x)=\sin(3x-\frac{\pi}{2})$$

$$1)\ \frac{\pi}{2}-2x=2k\pi+3x-\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{(2k+1)\pi}{5}\Rightarrow k=0,1,2\Rightarrow x=\frac{\pi}{5},\frac{3\pi}{5},\pi$$

$$2)\ \frac{\pi}{2}-2x=(2k+1)\pi-(3x-\frac{\pi}{2})\Rightarrow x=(2k+1)\pi\Rightarrow k=0\Rightarrow x=\pi$$

۳۲۴۳ (۳)

$$\log_{15}6=\frac{\log_3 6}{\log_3 15}=\frac{\log_3 2+\log_3 3}{\log_3 5+\log_3 3}=\frac{\frac{1}{1.6}+1}{1.5+1}=\frac{\frac{1}{1.6}+1}{2.5}=\frac{\frac{13}{8}}{\frac{5}{2}}=\frac{13}{20}=0.65$$

۳۲۴۴ (۴) داده‌ها مضربی از ۷۳ هستند و با تقسیم بر ۷۳ داریم: ۱، ۱، ۲، ۲، ۴، ۸

$$\bar{x}=\frac{1+1+2+2+4+8}{6}=\frac{18}{6}=3$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{(1-3)^2+(1-3)^2+(2-3)^2+(2-3)^2+(4-3)^2+(8-3)^2}{6}}=\sqrt{6}$$

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{73\times\sqrt{6}}{73\times3}=\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

۳۲۴۵ (۱) $x=-\frac{1}{3}$ ریشهٔ صورت و مخرج است:

$$6(-\frac{1}{3})+c=0\Rightarrow c=2$$

$$3(-\frac{1}{3})^2+a(-\frac{1}{3})+b=0\Rightarrow\frac{1}{3}-\frac{a}{3}+b=0\Rightarrow a-3b=1$$

تابع در $x=2$ پیوسته است:

$$\frac{3(2)^2+a(2)+b}{6(2)+2}=4-2\Rightarrow\frac{12+2a+b}{14}=2\Rightarrow2a+b=16$$

$$a=2,\quad b=7\Rightarrow ab=14$$

۳۲۴۶ (۳)

$$\lim_{x\to(-4)^+}([1-\frac{x}{2}]-a[\frac{x+4}{5}])=[1-\frac{(-4)^+}{2}]-a[\frac{(-4)^++4}{5}]$$

$$=1+[-(-2)^+]-a[0^+]=1+[2^-]=2$$

$$\lim_{x\to(-4)^-}([1-\frac{x}{2}]-a[\frac{x+4}{5}])=[1-\frac{(-4)^-}{2}]-a[\frac{(-4)^-+4}{5}]$$

$$=1+[2^+]-a[0^-]=3+a$$

$$3+a=2\Rightarrow a=-1\Rightarrow[a]=-1$$

۳۲۴۷ (۴)

$$\lim_{x\to2^+}\frac{k[x]-2}{x^2-4}=\lim_{x\to2^+}\frac{2k-2}{x^2-4}=\frac{2k-2}{0^+}\Rightarrow2k-2>0\Rightarrow k>1$$

$$\lim_{x\to2^-}\frac{k[x]-2}{x^2-4}=\lim_{x\to2^-}\frac{k-2}{x^2-4}=\frac{k-2}{0^-}\Rightarrow k-2<0\Rightarrow k<2$$

$$1<k<2\Rightarrow\pi<k\pi<2\pi\Rightarrow-1<\sin k\pi<0$$

مؤلفهٔ اول مثبت و مؤلفهٔ دوم منفی است. پس در ناحیهٔ چهارم قرار دارد.

۳۲۴۸ (۱) $x=a$ ریشهٔ صورت و مخرج است. تجزیه می‌کنیم تا عامل صفرشونده ساده شود:

$$\frac{m(x^2+\frac{n}{m})}{-(x-a)}=\frac{-m(x^2-(-\frac{n}{m}))}{x-a}$$
$$=\frac{-m(x-\sqrt{-\frac{n}{m}})(x+\sqrt{-\frac{n}{m}})}{x-a}=-m(x+a)$$
$$a=\sqrt{-\frac{n}{m}}\Rightarrow -ma^2=n$$

تابع را بازنویسی کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-m(x+a) & x\neq a\\ 1 & x=a\end{cases}$$
$$\lim_{x\to a} f(x)=-2ma=1\Rightarrow ma=-\frac{1}{2}$$
$$\frac{a}{n}=\frac{-\frac{1}{2m}}{-ma^2}=\frac{1}{2(ma)^2}=\frac{1}{2(-\frac{1}{2})^2}=2$$

۳۲۴۹ (۲)

$$f(3)=y(3)=-3a-5,\quad f'(3)=-a$$
$$f'(3)-f(3)=2\Rightarrow(-a)-(-3a-5)=2\Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$
$$\frac{f(3)}{f'(3)}=\frac{-3a-5}{-a}=\frac{-3(-\frac{3}{2})-5}{-(-\frac{3}{2})}=-\frac{1}{3}$$

۳۲۵۰ (۳) این نقطه را $A(\alpha,c\alpha)$ می‌نامیم.

$$d:y=cx$$
$$f(\alpha)=\frac{\sqrt{\alpha}}{-2\alpha^2+\alpha+1}=c\alpha\Rightarrow\frac{1}{-2\alpha^2+\alpha+1}=c\sqrt{\alpha}$$
$$c\sqrt{\alpha}(-2\alpha^2+\alpha+1)=1\Rightarrow-2c\alpha^{\frac{5}{2}}+c\alpha^{\frac{3}{2}}+c\alpha^{\frac{1}{2}}=1\xrightarrow{\text{مشتق}}$$
$$-5\alpha^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}\alpha^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\alpha^{-\frac{1}{2}}=0\Rightarrow-5\alpha\sqrt{\alpha}+\frac{3}{2}\sqrt{\alpha}+\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}=0$$
$$-10\alpha^2+3\alpha+1=0\Rightarrow\alpha=-\frac{1}{5},\alpha=\frac{1}{2}$$
$$f(\alpha)=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{-2(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

۳۲۵۱ (۳)

$$|NM|=|(x^3-2x^2+1)-(x^3+3x-3)|=|-2x^2-2x+4|=|-2(x^2+x-2)|$$

بیشترین مقدار عبارت بالا ۴/۵ است.

۳۲۵۲ (۲) کل ارقام سه‌رقمی بدون تکرار: $6\times6\times5=180$

ارقام سه‌رقمی بدون تکرار با شروع ۱: $1\times6\times5=30$

ارقام سه‌رقمی بدون تکرار با شروع ۲۰: $1\times1\times5=5$

ارقام سه‌رقمی بدون تکرار با شروع ۲۱: $1\times1\times5=5$

ارقام سه‌رقمی بدون تکرار با شروع ۲۳: $1\times1\times5=5$

ارقام سه‌رقمی بدون تکرار با شروع ۲۵: $1\times1\times5=5$ جز ۲۵۸ که بزرگ‌تر از ۲۵۷ است، پس ۴ تا.

$$180-(30+5+5+5+4)=180-49=131$$

۳۲۵۳ (۲) کل حالت‌های بیرون آوردن دو کارت: $n(S)=\binom{8}{2}=28$

اگر یکی ۱ باشد، دیگری باید یکی از ۲ تا ۸ باشد. اگر یکی ۲ باشد، دیگری باید یکی از ۴، ۶ و ۸ باشد. اگر یکی ۳ باشد، دیگری باید ۶ باشد. اگر یکی ۴ باشد، دیگری باید ۸ باشد. پس

$$n(A)=7+3+1+1=12\Rightarrow P(A)=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$$

۳۲۵۴ (۳) اهمیتی ندارد کدام رنگ دو برابر کدام است. فرض کنید یک رنگ به تعداد x و دیگری به تعداد $2x$ باشد و در مجموع $3x$ مهره داریم:

$$\frac{\binom{x}{1}\binom{2x}{1}}{\binom{3x}{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{2x}{\frac{3x(3x-1)}{2}}=\frac{4x^2}{9x^2-3x}=\frac{1}{2}$$
$$9x^2-3x=8x^2\Rightarrow x^2-3x=0\Rightarrow x=3\Rightarrow 3x=9$$

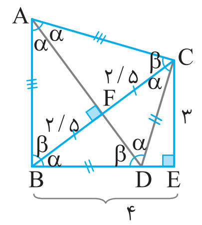
۳۲۵۵ (۱) علاوه بر نسبت اضلاع متناظر، نامساوی مثلث هم باید بررسی شود:

$$\frac{5}{b}=\frac{6}{4}=\frac{a}{9}\Rightarrow a=\frac{27}{2}=13/5,\quad b=\frac{20}{6}=\frac{10}{3}\simeq3/33\cdots$$
$$\frac{5}{b}=\frac{6}{9}=\frac{a}{4}\Rightarrow a=\frac{8}{3}\simeq2/66\cdots,\quad b=\frac{15}{2}=7/5\checkmark$$
$$\frac{5}{4}=\frac{6}{b}=\frac{a}{9}\Rightarrow a=\frac{45}{4}=11/25,\quad b=\frac{24}{5}=4/8$$
$$\frac{5}{9}=\frac{6}{b}=\frac{a}{4}\Rightarrow a=\frac{20}{9},\quad b=\frac{54}{5}=10/8\checkmark$$
$$\frac{54}{5}\times\frac{15}{2}=81$$

۳۲۵۶ (۴) $BC=5$ و مثلث BCD متساوی‌الساقین است. چون $FD\perp BC$.

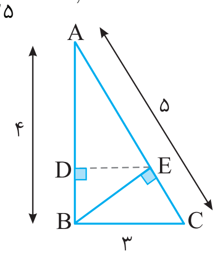
پس FD میانه است، بنابراین $FC=\frac{5}{2}$.

$$\triangle BCE\sim\triangle AFC\Rightarrow\frac{S_{AFC}}{S_{BCE}}=(\frac{FC}{CE})^2=(\frac{\frac{5}{2}}{3})^2$$
$$\frac{S_{AFC}}{6}=\frac{25}{36}\Rightarrow S_{AFC}=\frac{25}{6}$$



۳۲۵۷ (۱)

$$BE\times5=3\times4,\quad BE=\frac{12}{5}=2/4$$
$$BE^2=BD\times AD\Rightarrow\frac{12\times12}{5\times5}=BD\times4$$
$$BD=\frac{36}{25}=1/44,\quad AD=4-1/44=2/56$$



۳۲۵۸ (۳)

$$\frac{m-k}{4+2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow m-k=-3$$
$$S=AB^2=(4+2)^2+(m-k)^2=36+9=45$$