فصل اول

حرکت بر خط راست

پنجره ۱

A ۱ ۲

در زندگی روزمره وقتی متحرکی مطابق شکل بر مسیر آبی رنگ از A به B می‌رود، طول مسیر حرکت مهم است که به آن **مسافت** طی شده (l) می‌گویند. اما در فیزیک علاوه بر مسافت که به مسیر حرکت بستگی دارد، فاصلهٔ مستقیم A تا B نیز اهمیت دارد که این فاصله را توسط یک بردار نمایش می‌دهند و به آن **بردار جابه‌جایی** گویند، بنابراین جابه‌جایی کمیت برداری و مسافت کمیت نرده‌ای است و گزینهٔ (۱) نادرست است. مسافت و جابه‌جایی هر دو برحسب یکای متر در SI بیان می‌شوند و گزینهٔ (۲) درست است. مسافت به مسیر حرکت بستگی دارد. به‌طور مثال، اگر متحرک بر مسیر خاکستری از A به B برود، مسافت آن با مسیر آبی رنگ متفاوت است اما جابه‌جایی در هر دو مورد برابر بردار $\overrightarrow{AB}$ است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

A ۲ ۴

خط فکری ابتدا مفهوم مکان، جهت حرکت را باید در ذهن خود یادآوری کنید. بردار مکان، برداری است که از مبدأ مکان $(x=0)$ یا $(y=0)$ به محل متحرک رسم می‌شود. بنابراین اگر این بردار در جهت مثبت محور باشد، مکان متحرک مثبت است. برای مثال مکان متحرک A $(\vec{x}_A=4\vec{i})$ است و اگر در خلاف جهت محور باشد مکان متحرک منفی است همچنین مکان متحرک B $(x_B=-2\vec{i})$ است. اگر متحرک در جهت مثبت محور حرکت کند، جهت حرکت مثبت و اگر در خلاف جهت محور حرکت کند جهت حرکت منفی است.

A: خودروی A در xهای مثبت و در ۶ متری مبدأ قرار دارد، بنابراین بردار مکان آن $+6\vec{i}$ است و گزارهٔ (الف) نادرست است.

از طرفی خودروی A در خلاف جهت محور xها حرکت می‌کند، بنابراین گزارهٔ (ب) درست است.

B: خودروی B در مکان‌های منفی محور yها است و بردار مکان آن $-4\vec{j}$ است و در جهت مثبت محور yها در حال حرکت است بنابراین بردار مکان B و جهت حرکت آن، خلاف جهت هم هستند. در نتیجه گزارهٔ (پ) نادرست و گزارهٔ (ت) درست است.

بازی با سؤال کدام گزینه جهت بردار مکان و جهت حرکت متحرک را درست نشان می‌دهد؟

۱) → و → ۲) → و ←

۳) ← و ← ۴) ← و →

پاسخ خودرو در خلاف جهت محور xها (←) در حرکت است و در لحظهٔ نشان داده شده خودرو در مکان‌های مثبت محور xهاست و بردار مکان آن به سمت راست (→) است.

گزینهٔ ۲

A ۳ ۳

یادآوری معادلهٔ حرکت یا معادلهٔ مکان - زمان به یک رابطهٔ ریاضی بین مکان و زمان گفته می‌شود که به کمک آن می‌توان مکان متحرک را در هر لحظه مشخص کرد. معادلهٔ حرکت به صورت $x=t^2-4t$ است بنابراین کافی است زمان‌های $t_1=3s$ و $t_2=4s$ را در معادله قرار دهیم و مکان‌ها را به‌دست آوریم و روی محور مشخص کنیم.

$$x=t^2-4t \begin{cases} t_1=3s \rightarrow x=9-12=-3m \\ t_2=4s \rightarrow x=16-16=0 \end{cases}$$

A ۴ ۲

خط فکری یک معادلهٔ مکان - زمان (معادلهٔ حرکت) در اختیار داریم که در آن دو مجهول a و b وجود دارد. اما شما در دو لحظهٔ مبدأ زمان یعنی $t_1=0$ و همچنین $t_2=3s$ مکان متحرک را در اختیار دارید و در این دو لحظه متحرک به ترتیب از $x=12m$ و مبدأ مکان یعنی $x=0$ می‌گذرد، بنابراین کافی است شما اعداد زمان را در معادله قرار دهید و یک دستگاه دو معادله دو مجهول حل کنید.

اعداد را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x=t^2+at+b \begin{cases} t_1=0, x=12m \rightarrow 12=0+0+b \Rightarrow b=12m \\ t_2=3s, x=0 \rightarrow 0=9+3a+b \xrightarrow{b=12} \end{cases}$$

$$0=3a+21 \Rightarrow a=-7m/s$$

نکته اما از کجا یکای a را تشخیص داده‌ایم؟ با توجه به بحث سازگاری یکاها در فیزیک دهم باید یکای at با یکای x یعنی متر یکسان باشد بنابراین:

$$\text{متر}=a(\text{ثانیه}) \Rightarrow [\text{a یکای}]=m/s$$

A ۵ ۴

خط فکری به دو عبارت «مبدأ حرکت» و «مبدأ مکان» باید دقت کنید و دو نکته زیر را فرابگیرید.

نکته مبدأ مکان یعنی $x=0$ و مکان متحرک از مبدأ مکان یعنی فاصلهٔ متحرک از $x=0$.

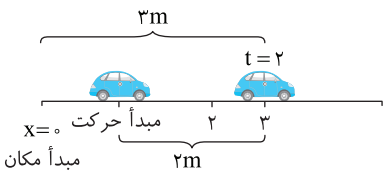
نکته مبدأ حرکت یعنی مکانی که متحرک در لحظهٔ $t=0$ در آن قرار دارد که به آن **مکان اولیه** گویند.

معادلهٔ حرکت به‌صورت $x=t^3-3t+1$ است. در لحظهٔ $t=0\,s$ متحرک در مکان $x=+1\,m$ قرار دارد یعنی مکان اولیهٔ متحرک (مبدأ حرکت) $x=+1\,m$ است.

لحظهٔ $t=2s$ را در معادلهٔ حرکت قرار می‌دهیم و مکان متحرک را به‌دست می‌آوریم.

$$x=t^3-3t+1 \xrightarrow{t=2s} x=2^3-(3\times2)+1=8-6+1 \Rightarrow x=+3m$$

بنابراین وقتی متحرک در $x=+3m$ قرار دارد فاصلهٔ آن از مبدأ حرکت $(x=+1m)$ برابر $3-1=2m$ و از مبدأ مکان $(x=0)$ برابر ۳m است.



B ۶ ۱

یادداشت ریاضی برای تعیین علامت یک تابع درجه ۲ به صورت $y=ax^2+bx+c$ ابتدا ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم و سپس با رسم یک جدول معادله را تعیین علامت می‌کنیم، بین دو ریشه مخالف علامت a (ضریب x^2) و بیرون دو ریشه موافق علامت a.

خط فکری وقتی مسئله به شما می‌گوید بردار مکان منفی باشد یعنی x باید منفی باشد بنابراین شما باید این معادله را تعیین علامت کنید.

۱ ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$x=t^2+t-12=0 \Rightarrow (t+4)(t-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=3s \\ t=-4s \end{cases}$$

۲ ریشه‌ها را در جدول قرار می‌دهیم و معادله را تعیین علامت می‌کنیم.

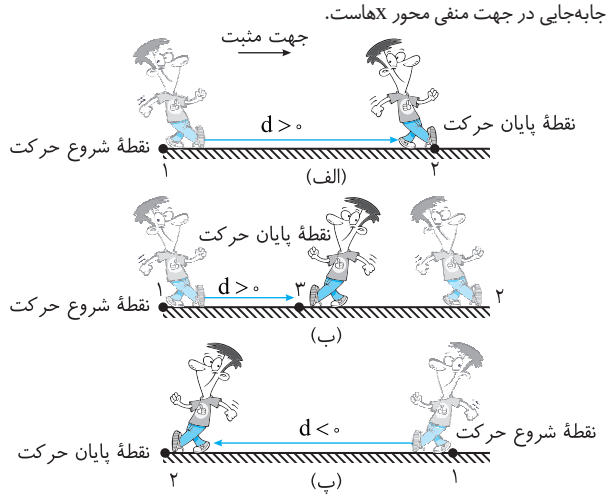
t	$-\infty$		-4		0		3		$+\infty$
x		+		−		−		+	

۳ اما زمان منفی در فیزیک دبیرستان تعریف نمی‌شود بنابراین قسمت $t<0$ را هاشور زده‌ایم بنابراین در بازهٔ $t=0$ تا $t=3s$ مکان منفی است در نتیجه در بازهٔ $t=2s$ تا $t=3s$ $(\Delta t=1s)$ مکان منفی و از $t>3$ مکان مثبت است و گزینهٔ (۱) درست است.

B ۲ ۷

نکته هرگاه حرکت روی خط راست و بدون تغییر جهت صورت گیرد مسافت و بزرگی جابه‌جایی با هم برابر است.

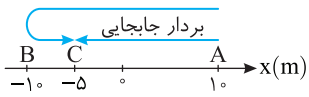
در شکل (الف) و (پ) شخص روی خط راست در حرکت است و تغییر جهت نمی‌دهد و جابه‌جایی و مسافت هم‌اندازه هستند. در شکل (الف) جابه‌جایی در جهت مثبت محور xهاست و در شکل (ب) نیز جابه‌جایی در جهت مثبت محور xهاست. در شکل (پ) جابه‌جایی در جهت منفی محور xهاست.



A ۱ ۸

خط فکری طول مسیر حرکت را با رسم شکل به‌دست بیاورید. سپس بردار جابه‌جایی را از ابتدای مسیر یعنی نقطهٔ A به انتهای مسیر یعنی نقطهٔ C رسم کنید و مقدار آن را حساب کنید و مقدارهای به‌دست آمده را بر هم تقسیم کنید.

۱ مسیر حرکت جسم به صورت روبه‌رو است، بردار جابه‌جایی برابر با برداری است که مکان اولیه را به مکان نهایی وصل می‌کند.



$|\vec{d}|=x_C-x_A \Rightarrow |\vec{d}|=|-۵-۱۰|=۱۵m$

۲ مسافت طی شده برابر طول مسیر حرکت است یعنی متحرک از $A=۱۰m$ به $B=-۱۰m$ رفته و سپس از $B=-۱۰m$ به $C=-۵m$ می‌رود بنابراین مسافت طی شده برابر است با:

$\ell=|d_{AB}|+|d_{BC}|=۲۵m$

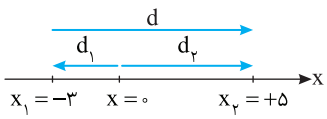
۳ نسبت خواسته شده برابر است با:

$\frac{\ell}{d}=\frac{۲۵}{۱۵}=\frac{۵}{۳}$

A ۲ ۹

نکته هرگاه متحرک از مبدأ مکان عبور کند، بردار مکان تغییر جهت و تغییر علامت می‌دهد.

شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم، به شکل دقت کنید. ابتدا بردار مکان منفی است و سپس مثبت می‌شود و گزارهٔ (الف) نادرست است.

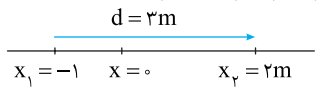


بردار جابه‌جایی $(\vec{d})$ در جهت مثبت و بردار مکان ابتدا منفی $(d_1<0)$ و سپس مثبت $(d_2>0)$ است و بردار جابه‌جایی و بردار مکان در طول مسیر همواره هم‌جهت نیستند و گزارهٔ (ب) نادرست است. مسافت طی‌شده و جابه‌جایی مطابق شکل هم‌اندازه هستند و گزارهٔ (پ) درست است.

A ۳ ۱۰

نکته مسافت طی شده همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازهٔ جابه‌جایی است $(\ell\geq|d|)$.

متحرک از مکان $x_1=-۱m$ به مکان $x_2=۲m$ رفته است. بنابراین قطعاً جابه‌جایی آن مطابق شکل $۳m$ است. اما مسافت طی شده برابر و یا بزرگ‌تر $۳m$ است $(\ell\geq ۳m)$ و تنها گزینهٔ بزرگ‌تر از $۳m$ گزینهٔ (۳) است.



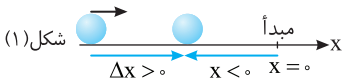
B ۴ ۱۱

یادآوری تغییر جهت بردار مکان هنگام عبور متحرک از مبدأ مکان $(x=۰)$ اتفاق می‌افتد.

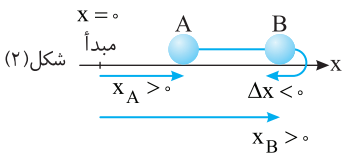
یادآوری تغییر جهت حرکت متحرک یعنی متحرک به یک نقطه برود و از آن برگردد.

برای بررسی گزینه‌های این تست به شکل‌های زیر دقت کنید.

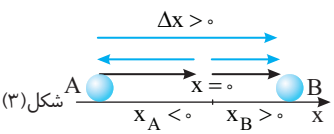
با توجه به شکل (۱) متحرک در جهت مثبت محور جابه‌جا شده اما بردار مکان آن منفی است و گزینهٔ (۱) درست است.



ممکن است مطابق شکل (۲) متحرک در مکان مثبت در جهت مثبت جابه‌جا شده سپس تغییر جهت داده باشد و در جهت منفی جابه‌جا شود اما از مبدأ نگذرد و بردار مکان با آن‌که تغییر می‌کند اما تغییر جهت نمی‌دهد. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.



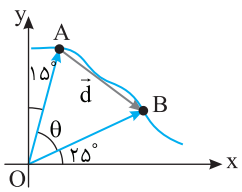
اگر متحرک مطابق شکل (۳) در یک جهت از مبدأ بگذرد بردار مکان تغییر جهت می‌دهد اما جهت حرکت تغییر نمی‌کند و گزینهٔ (۳) درست است. در شکل (۲) در نقطهٔ B متحرک تغییر جهت داده است اما بردار مکان هم‌چنان مثبت است و تغییر جهت نداده است، بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست و پاسخ تست است. (نادرستی آن نیز با توجه به شکل دوم کاملاً مشخص است).



A ۱ ۱۲

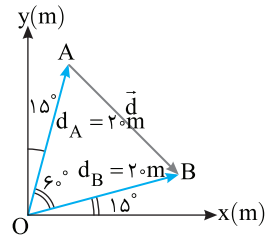
خط فکری بردارهای مکان متحرک را در نقاط A و B از مبدأ مکان رسم کنید. سپس به کمک هندسه زاویهٔ θ را حساب کنید.

زاویهٔ اولیه بردار مکان با محور xها برابر $\theta_1=۹۰-۱۵=۷۵^\circ$ و زاویه نهایی آن $\theta_2=۲۵^\circ$ است یعنی بردار مکان ۵۰° ساعتگرد چرخیده است.



A ۱ ۱۳

بردار جابه‌جایی از نقطهٔ A تا نقطهٔ B را رسم کنید. مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است زیرا طول بردارهای مکان d_A و d_B یکی است مثلث متساوی‌الساقین است و چون زاویه رأس آن ۶۰° است، پس مثلث حاصل متساوی‌الاضلاع است و اندازهٔ بردار جابه‌جایی $d=۲۰m$ است.

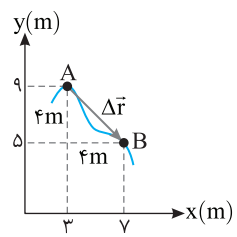


A ۲ ۱۴

یادداشت ریاضی فاصلهٔ دو نقطه در صفحهٔ xoy با مختصات $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

از نقطهٔ A به نقطهٔ B برداری رسم کرده سپس به کمک قضیهٔ فیثاغورس اندازهٔ بردار جابه‌جایی را به‌دست می‌آوریم:



$$\Delta r=\sqrt{(۷-۳)^2+(۵-۹)^2}=۴\sqrt{۲}m$$

B ۱۵ ۲

خط فکری باید به سراغ ریاضی بروید و فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B را در ریاضی از رابطهٔ $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ به‌دست می‌آوریم، بنابراین بردار جابه‌جایی راحت به‌دست می‌آید. اما یادمان باشد که مسافت طی شده (l) همواره بزرگ‌تر یا مساوی جابه‌جایی است. در نتیجه مسئله به راحتی قابل حل است.

۱ بردار جابه‌جایی خواهد شد:

$$\vec{d}=\vec{d}_2-\vec{d}_1\Rightarrow\vec{d}=(1-4)\vec{i}+(-1-3)\vec{j}\Rightarrow d=-3\vec{i}-4\vec{j}$$

۲ بردار جابه‌جایی بین دو نقطهٔ $\vec{d}_1=4\vec{i}+3\vec{j}$ و $\vec{d}_2=\vec{i}-\vec{j}$ خواهد شد:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\Rightarrow d=\sqrt{(1-4)^2+(-1-3)^2}$$

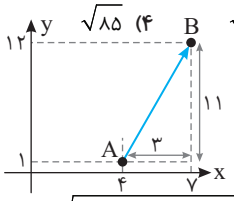
$$\Rightarrow d=\sqrt{9+16}=5m$$

۳ مسافت طی شده باید بزرگ‌تر یا مساوی ۵m بیشتر باشد. بنابراین گزینهٔ (۲) پاسخ مسئله است.

بازی با سؤال **متحرکی در صفحهٔ مختصات از نقطهٔ $A(4m,1m)$ به نقطهٔ $B(7m,12m)$ می‌رود. جابه‌جایی متحرک چند متر است؟**

۱) $\sqrt{130}$ ۲) $\sqrt{65}$ ۳) $\sqrt{170}$ ۴) $\sqrt{85}$

پاسخ **از A تا B بردار جابه‌جایی را رسم می‌کنیم. اندازهٔ فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B همان اندازهٔ جابه‌جایی است. به کمک ریاضی مسئله قابل حل است.**



$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}\Rightarrow d=\sqrt{(7-4)^2+(12-1)^2}$$

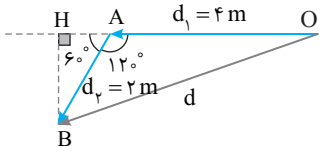
$$=\sqrt{3^2+11^2}\Rightarrow d=\sqrt{9+121}=\sqrt{130}m$$

گزینهٔ ۱

B ۱۶ ۴

خط فکری برای حل این نوع مسائل باید ابتدا شکل ساده‌ای از موضوع مسئله مطابق داده‌های مسئله رسم کنید. سپس اعداد مسئله را روی شکل قرار دهید. برای به‌دست آوردن مسافت کافی است، تمام اعداد مسیر از ابتدا تا انتهای مسیر را با هم جمع کنیم. اما برای به‌دست آوردن بردار جابه‌جایی نیاز به محاسبات مثلثاتی و ریاضی خواهیم داشت.

۱ ابتدا یک شکل ساده از مسئله رسم می‌کنیم. جابه‌جایی برداری است که ابتدای مسیر را به انتهای آن وصل می‌کند. مطابق شکل خط عمودی از B بر خط OA رسم می‌کنیم. در



مثلث AHB ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر است از این رو $AH=\frac{2}{2}=1m$ و ضلع BH خواهد شد:

$$\cos 30^\circ=\frac{BH}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{BH}{2}\Rightarrow BH=\sqrt{3}m$$

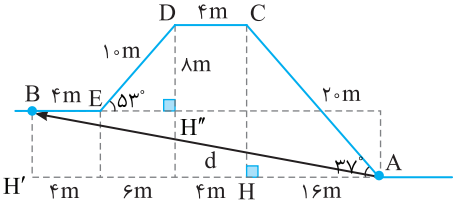
اکنون در مثلث OHB، طول وتر (d) را به دست می‌آوریم.

$$d^2=BH^2+OH^2=(\sqrt{3})^2+(4+1)^2\Rightarrow d^2=3+25=28\Rightarrow d=2\sqrt{7}m$$

۲ مسافت طی‌شده برابر مجموع طول مسیر ۴m و طول مسیر ۲m یعنی ۶m است.

C ۱۷ ۴

خط فکری برای به‌دست آوردن مسافت کافی است اعداد روی شکل را از A تا B با هم جمع کنید اما برای جابه‌جایی باید برداری از A تا B رسم کنید سپس به سراغ هندسه و مثلثات بروید و اندازهٔ جابه‌جایی را حساب کنید.



۱ مسافت طی شده را حساب می‌کنیم.

$$l=20+4+10+4\Rightarrow l=38m$$

۲ فاصلهٔ CH و AH خواهد شد:

$$\triangle AHC:\cos 37^\circ=\frac{AH}{AC}\Rightarrow 0/8=\frac{AH}{20}\Rightarrow AH=16m$$

$$\sin 37^\circ=\frac{CH}{AC}\Rightarrow 0/6=\frac{CH}{20}\Rightarrow CH=12m$$

۳ DH'' و EH'' را به‌دست می‌آوریم:

$$\triangle DEH'':\cos 53^\circ=\frac{EH''}{DE}\Rightarrow 0/6=\frac{EH''}{10}\Rightarrow EH''=6m$$

$$\sin 53^\circ=\frac{DH''}{DE}\Rightarrow 0/8=\frac{DH''}{10}\Rightarrow DH''=8m$$

۴ جابه‌جایی افقی متحرک برابر است با: $AH'=16+4+6+4\Rightarrow AH'=30m$

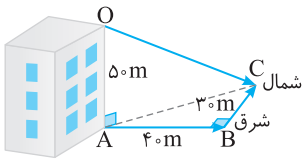
۵ جابه‌جایی قائم متحرک را حساب می‌کنیم: $BH'=CH-DH''=12-8=4m$

۶ اکنون اندازهٔ بردار جابه‌جایی را می‌توان به‌دست آورد.

$$AB=\sqrt{BH'^2+AH'^2}=\sqrt{4^2+30^2}=\sqrt{916}\simeq 30/3m$$

C ۱۸ ۲

خط فکری با یک مسئله سه‌بعدی سر و کار داریم. شما ابتدا باید جابه‌جایی متحرک روی سطح زمین وقتی ابتدا ۴۰m به سمت شرق و سپس ۳۰m به سوی شمال می‌رود را حساب کنید سپس به سراغ جابه‌جایی کل بروید.



۱ شکل مسیر حرکت را رسم می‌کنیم، پرنده از نقطهٔ O به نقطهٔ A روی سطح زمین آمده سپس ۴۰m از A تا B به سمت شرق سپس ۳۰m به سوی شمال رفته است.

۲ جابه‌جایی روی زمین را حساب می‌کنیم.

$$AC^2=AB^2+BC^2=40^2+30^2\Rightarrow AC=50m$$

۳ در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAC، اندازهٔ وتر OC را حساب می‌کنیم که همان اندازهٔ جابه‌جایی است.

$$OC^2=OA^2+AC^2\Rightarrow OC^2=50^2+50^2\Rightarrow OC=50\sqrt{2}m$$

میانبر هرگاه امتداد سه مسیر بر هم عمود باشد مانند محورهای x، y و z جابه‌جایی کل خواهد شد:

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

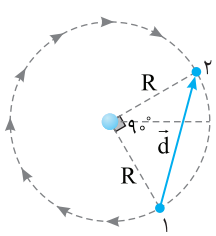
بازی با سؤال **مسافت طی شده توسط پرنده چندمتر است؟**

پاسخ **کافی است اعداد ۵۰m، ۴۰m و ۳۰m را با هم جمع کنیم**

$$l=50+40+30=120m$$

A ۱۹ ۲

دقت کنید که در صورت مسئله بیان شده که ماه در جهت ساعتگرد از مکان (۱) به مکان (۲) می‌رود بنابراین مسیر حرکت مطابق شکل روبه‌روست و ماه، مسافتی که طی کرده است $\frac{3}{4}$ محیط دایرهٔ مسیر حرکت است.



$$l=\frac{3}{4}(2\pi R)\Rightarrow l=\frac{3}{2}\pi R$$

بردار جابه‌جایی از مکان (۱) به مکان (۲) رسم می‌شود و با توجه به شکل و اندازهٔ آن بنا به رابطهٔ فیثاغورس جابه‌جایی را حساب می‌کنیم.

$$d=\sqrt{R^2+R^2}=\sqrt{2}R$$

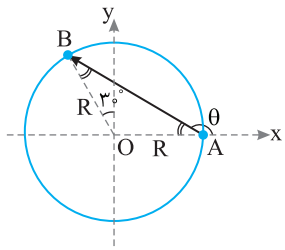
در این صورت:

$$\frac{l}{d}=\frac{\frac{3}{2}\pi R}{\sqrt{2}R}=\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}\pi}{4}$$

B ۲۰ ۲

یادآوری بردار جابه‌جایی برداری است که از ابتدای مسیر به انتهای مسیر رسم می‌شود.

بردار جابه‌جایی را از A تا B رسم می‌کنیم. مثلث OAB یک مثلث متساوی‌الساقین است و زاویهٔ رأس آن مطابق شکل $\hat{O}=90^\circ+30^\circ=120^\circ$ است، بنابراین زاویهٔ دو ساق آن با قاعده (جابه‌جایی) 30° است. یعنی زاویهٔ بین بردار جابه‌جایی و جهت مثبت محور xها خواهد شد:



$\theta=180^\circ-30^\circ=150^\circ$

بازی با سؤال **در این سؤال اگر شعاع حرکت ۱۵cm باشد، مسافت طی شده توسط متحرک چند سانتی‌متر است؟** $(\pi=3/14)$

۱) ۳۱/۴ ۲) ۱۵/۷ ۳) ۱/۵۷ ۴) ۳/۱۴

پاسخ **متحرک از A تا B کمان** 120° **یعنی** $\frac{120}{360}=\frac{1}{3}$ **محیط دایره را طی می‌کند، بنابراین مسافت خواهد شد:**

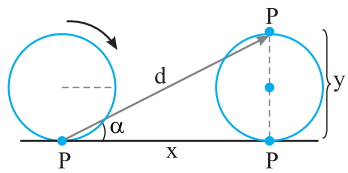
$$\text{مسافت } \ell=\frac{1}{3}(2\pi R)\Rightarrow \ell=\frac{1}{3}\times(2\times3/14\times15)\Rightarrow \ell=31/4\text{cm}$$

گزینهٔ ۱

B ۲۱ ۲

خط فکری به این فکر کنید که اگر چرخ، نیم‌دور بچرخد نقطهٔ P در چه وضعیتی قرار می‌گیرد تا بتوانید جابه‌جایی افقی و قائم نقطهٔ P را مشخص کرده و بزرگی جابه‌جایی را به‌دست بیاورید.

با چرخش نیم دور مطابق شکل، نقطهٔ P از سطح زمین به بالاترین نقطه می‌رود در این حالت نقطهٔ P در امتداد قائم به اندازهٔ قطر لاستیک بالا می‌رود $(y=60\,\text{cm})$ و روی سطح افقی به اندازهٔ نصف محیط جابه‌جا می‌شود $x=\frac{1}{2}(2\pi R)$.



$$x=\frac{1}{2}\pi\times60\Rightarrow x=30\pi\text{ cm}\Rightarrow x=30\times3=90\text{ cm}$$

اندازهٔ جابه‌جایی خواهد شد:

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{90^2+60^2}\Rightarrow d=30\sqrt{3^2+2^2}\Rightarrow d=30\sqrt{13}\text{cm}$$

بازی با سؤال **در این حرکت بردار جابه‌جایی با سطح افقی زاویهٔ** α **می‌سازد. کدام گزینه درست است؟**

۱) $\tan\alpha=\frac{2}{3}$ ۲) $\tan\alpha=\frac{1}{3}$ ۳) $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\tan\alpha=\sqrt{3}$

پاسخ **با توجه به شکل خواهیم داشت:** $\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{60}{90}=\frac{2}{3}$

گزینهٔ ۱

A ۲۲ ۳

سرعت متوسط بنابه تعریف برابر نسبت بردار جابه‌جایی به زمان جابه‌جایی است $(\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{t})$، بنابراین سرعت متوسط کمیت برداری است و همواره بردار سرعت متوسط هم‌جهت بردار جابه‌جایی است. تندی متوسط بنابه تعریف برابر نسبت مسافت به زمان طی مسیر است $s_{av}=\frac{\ell}{t}$. تندی متوسط کمیت نرده‌ای و همواره مثبت بیان می‌شود. در نتیجه گزینهٔ (۳) درست است.

A ۲۳ ۱

سرعت متوسط برابر با $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ بنابراین:

متحرک اول:

$$x_1=-2, x_2=6/4\Rightarrow\Delta x=x_2-x_1=8/4\text{m}\ ,\ v_{av}=\frac{8/4}{4}=2/1\text{m/s}$$

متحرک دوم: با توجه به رابطهٔ سرعت متوسط داریم:

$$-2/8=\frac{\Delta x}{2}\Rightarrow\Delta x=-5/6\text{m}\Rightarrow x_2-x_1=-5/6\Rightarrow-2/5-x_1=-5/6$$
$$\Rightarrow\vec{x}_1=3/1\,\vec{i}$$

متحرک سوم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow3/3=\frac{8/6-2}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t=2\text{s}$$

	مکان آغازین	مکان پایانی	زمان	سرعت متوسط
متحرک (۱)	$-2\vec{i}$	$6/4\vec{i}$	4s	A
متحرک (۲)	B	$-2/5\vec{i}$	2s	$-2/8\vec{i}$
متحرک (۳)	$2\vec{i}$	$8/6\vec{i}$	C	$3/3\vec{i}$

A ۲۴ ۳

یادآوری هرگاه مختصات نقطهٔ ابتدایی و انتهایی مسیر حرکت را داشته باشیم می‌توانیم جابه‌جایی متحرک را حساب کنیم و اما نمی‌توانیم در مورد مسافت اظهارنظر کنیم. مگر آنکه مسیر حرکت از ابتدا تا انتهای مسیر مشخص باشد.

۱ متحرک روی محور xها از مکان $+4\text{m}$ به مکان -6m رفته است یعنی جابه‌جایی آن برابر است با: $d=-6-4=-10\text{m}$

۲ سرعت متوسط متحرک برابر خواهد شد با:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{-10}{6-2}\Rightarrow v_{av}=-2/5\text{m/s}$$

۳ مسیر حرکت مشخص نیست یعنی معلوم نیست که متحرک مستقیم و بدون تغییر جهت از مکان $+4\text{m}$ به مکان -6m رفته است یا نه؟ بنابراین در مورد تندی متوسط نمی‌توان اظهارنظر کرد.

B ۲۵ ۳

خط فکری در بررسی سرعت متوسط، مهم نیست که متحرک چه مسیری را طی کرده است تنها شما باید ببینید متحرک از چه نقطه‌ای به چه نقطه‌ای رفته و فاصلهٔ دو نقطه را حساب کنید و جابه‌جایی را به‌دست آورده تا بتوانید سرعت متوسط را حساب کنید.

متحرک در مبدأ زمان یعنی $t=0$ در مکان -40m و در لحظهٔ آخر یعنی $t_2=10\text{s}$ در مکان $+20\text{m}$ بوده یعنی $d=20-(-40)=60\text{m}$ در جهت مثبت محور xها جابه‌جا شده است، بنابراین سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{d}{t}=\frac{60}{10-0}\Rightarrow v_{av}=6\text{m/s}$

دقت کردید لحظهٔ $t=6\text{s}$ و مکان $x=100\text{m}$ در حل این تست تأثیری ندارد.

بازی با سؤال **متحرکی که روی محور x در حرکت است، در لحظهٔ** $t_1=2/4\text{s}$ **از مکان** $x_1=-4\text{m}$ **و در لحظهٔ** $t_2=4/4\text{s}$ **از مکان** $x_2=2\text{m}$ **می‌گذرد و سپس در لحظهٔ** t_3 **به مکان** $x_3=6\text{m}$ **می‌رسد. اگر در بازهٔ** t_2 **تا** t_3 **سرعت متوسط** 2m/s **باشد، سرعت متوسط در بازهٔ** t_1 **تا** t_3 **چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۲/۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ **با توجه به تعریف سرعت متوسط، لحظهٔ** t_3 **را حساب می‌کنیم.**

$$t_2\to t_3: v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow2=\frac{6-2}{t_3-4/4}\Rightarrow2=\frac{4}{t_3-4/4}\Rightarrow t_3-4/4=2$$
$$\Rightarrow t_3=6/4\text{s}$$

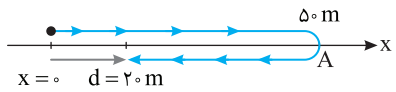
اکنون می‌توانیم سرعت متوسط از $t_1=2/4\text{s}$ **تا** $t_3=6/4\text{s}$ **را به‌دست بیاوریم:**

$$t_1\to t_3: v_{av}=\frac{6-(-4)}{6/4-2/4}=\frac{10}{4}=2/5\text{m/s}$$

گزینهٔ ۱

A ۲۶ ۱

در به‌دست آوردن سرعت متوسط، مسیر حرکت مهم نیست و تنها محل نقطهٔ ابتدایی و محل نقطهٔ انتهایی مسیر مهم است. در این مسئله ذره از مکان $x=0$ شروع کرده و در نهایت به مکان $+20m$ رسیده است بنابراین جابه‌جایی متحرک $d=+20m$ است و سرعت متوسط خواهد شد:



$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{20}{20}\Rightarrow v_{av}=1\,m/s$$

بازی با سؤال ذره‌ای در امتداد محور x ها از مبدأ شروع به حرکت می‌کند و در مدت ۲۰ ثانیه ابتدا تا نقطهٔ A به طول $+50$ می‌رود و بعد به نقطهٔ $+20$ برمی‌گردد. تندی متوسط ذره در این مدت چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) صفر ۴) ۳/۵

پاسخ مسافت طی‌شده برابر است با: $\ell=50+30=80m$

تندی متوسط خواهد شد: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{80}{20}=4m/s$

گزینهٔ ۲

A ۲۷ ۲

خط فکری چرا در هر گزینه دو مکان برای لحظهٔ $t=4s$ بیان شده است؟ چون‌که اندازهٔ سرعت متوسط داده شده بنابراین شما باید در فرمول سرعت متوسط یک بار عدد $+3/5m/s$ و بار دیگر عدد $-3/5m/s$ قرار دهید. به همین دلیل دو جواب به‌دست می‌آوریم.

رابطهٔ سرعت متوسط را نوشته و داده‌های مسئله را در آن جای‌گذاری می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\xrightarrow{x_1=-1/6m}\begin{cases}v_{av}=\frac{x_2-(-1/6)}{4}\Rightarrow\frac{x_2+1/6}{4}=3/5\Rightarrow x_2=12/4m\\ v_{av}=\frac{x_2-(-1/6)}{4}\Rightarrow\frac{x_2+1/6}{4}=-3/5\Rightarrow x_2=-15/6m\end{cases}$$

B ۲۸ ۳

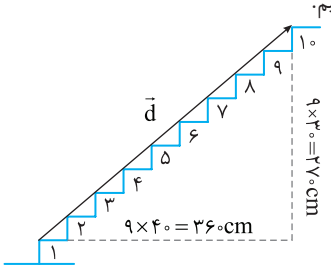
خط فکری اشتباه نکنید فاصلهٔ لبهٔ پلهٔ اول تا لبهٔ پلهٔ دهم، ۱۰ پله نیست. باید شکل رسم کنید و تعداد پله‌ها را بشمرید. سپس از لبهٔ پلهٔ اول تا لبهٔ پلهٔ دهم بردار جابه‌جایی را رسم کرده و اندازهٔ آن را به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست بیاورید.

۱ شمردید؟ تعداد پله‌ها، ۹ پله است.

۲ پهنای هر پله $40\,cm$ است و جابه‌جایی افقی مورچه $9\times40=360\,cm$ می‌شود.

۳ بلندی هر پله $30\,cm$ است و جابه‌جایی قائم مورچه $9\times30=270\,cm$ خواهد شد.

۴ جابه‌جایی مورچه را حساب می‌کنیم.

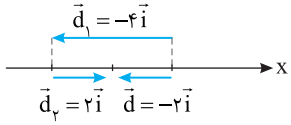


$$|\vec{d}|=\sqrt{(270)^2+(360)^2}$$
$$=\sqrt{9^2\times(30^2+40^2)}$$
$$\Rightarrow|\vec{d}|=450cm=4/5m$$

۵ سرعت متوسط آن را به‌دست می‌آوریم. $v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{4/5}{45}=0/1\,m/s$

B ۲۹ ۱

۱ به صورت مسئله دقت کنید. متحرک ابتدا جابه‌جایی $-4\vec{i}$ را انجام داده یعنی در مدت $2s$ در خلاف جهت محور xها، $4m$ جابه‌جا شده و در دو ثانیهٔ دوم جابه‌جایی $2\vec{i}$ را انجام داده است یعنی از $4m$ که در خلاف جهت محور رفته بود، $2m$ را برگشته و در کل جابه‌جایی آن در مدت $4s$، $-2m$ است. بنابراین بردار سرعت متوسط آن در این چهار ثانیه خواهد شد:



$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}\Rightarrow\vec{v}_{av}=\frac{-2\vec{i}}{4}=-\frac{\vec{i}}{2}$$

۲ مسافت طی شده در مدت $4s$ برابر $l=4+2=6m$ و تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{6}{4}=1/5m/s$$

بازی با سؤال متحرکی روی محور xها در حال حرکت بوده و در بازهٔ زمانی $t_1=2s$ تا $t_2=4s$ بردار جابه‌جایی آن $5\vec{i}$ و در مدت $t_2=4s$ تا $t_3=5s$ بردار جابه‌جایی آن $-3\vec{i}$ خواهد بود. سرعت متوسط در بازهٔ $t=2s$ تا $t=5s$ چند متر بر ثانیه خواهد بود؟

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) $-\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

پاسخ جابه‌جایی متحرک در بازهٔ $2s$ تا $4s$، 5 متر و در جهت مثبت محور xها بوده سپس در مدت $1s$ (بازهٔ $t_2=4s$ تا $t_3=5s$) از این 5 متر، $3m$ را برمی‌گردد. بنابراین جابه‌جایی آن در کل برابر $5-3=2m$ و در جهت مثبت محور xها بوده و سرعت متوسط متحرک خواهد شد: $v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{2}{5-2}=\frac{2}{3}m/s$

گزینهٔ ۳

B ۳۰ ۲

خط فکری فاصلهٔ مستقیم تهران تا اصفهان مشخص نیست بنابراین سرعت متوسط قابل محاسبه نیست. بنابراین شما باید تنها به سراغ تندی متوسط یعنی گزینه‌های (۲) و (۳) بروید.

۱ مدت زمان حرکت از تهران تا قم $t_1=1/5h$ و مدت زمان حرکت از قم تا اصفهان ۸۰٪ بیشتر از $1/5h$ است. بنابراین زمان حرکت قم تا اصفهان خواهد شد:

$$t_2=t_1+\frac{80}{100}t_1\Rightarrow t_2=1/5+\frac{4}{5}(1/5)\Rightarrow t_2=2/7h$$

۲ کل زمان حرکت از تهران تا اصفهان را به‌دست می‌آوریم.

$$t_{کل}=t_1+t_2=1/5+2/7=4/2h$$

۳ مسافت طی شده خودرو را حساب می‌کنیم. $\ell=125+274\Rightarrow\ell=399km$

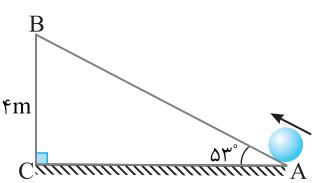
۴ تندی متوسط در کل مسیر خواهد شد.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{399}{4/2}\Rightarrow s_{av}=95km/h$$

A ۳۱ ۲

نکته هرگاه در یک مسیر متحرک به مکان اولیه‌اش بازگردد، جابه‌جایی متحرک صفر و در نتیجه سرعت متوسط متحرک صفر می‌شود.

۱ مسیر حرکت A تا B را حساب می‌کنیم.



$$\sin53^\circ=\frac{BC}{AB}$$
$$\Rightarrow0/8=\frac{4}{AB}\Rightarrow AB=5m$$

۲ مسافت طی شده در کل مسیر رفت و برگشت خواهد شد: $\ell=5+5=10m$

۳ مسافت طی شده را به‌دست می‌آوریم.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t=3+5}s_{av}=\frac{10}{8}\Rightarrow s_{av}=1/25m/s$$

A ۳ ۳۲

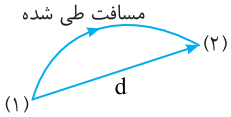
یادآوری تندی متوسط برابر مسافت پیموده شده تقسیم بر زمانِ طی این مسافت و کمیتی نرده‌ای است. (مسافت طی‌شده در یکای زمان)

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}$$

یادآوری سرعت متوسط برابر جابه‌جایی تقسیم بر یکای زمان و کمیتی برداری است.

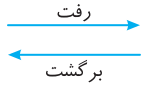
$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}$$

در حرکت بر خط راست بدون تغییر جهت مسافت طی‌شده و اندازهٔ جابه‌جایی برابر بوده و تندی متوسط با اندازهٔ سرعت متوسط برابر است. در مسیرهای خمیده مثل شکل روبه‌رو همواره مسافت طی‌شده از اندازهٔ جابه‌جایی بزرگ‌تر است. از این‌رو: $s_{av}>|\vec{v}_{av}|$



بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) در حالت‌های خاصی درست هستند و عبارت قطعاً نادرست در مورد آن‌ها صدق نمی‌کند. اندازهٔ جابه‌جایی متحرک همواره کوچک‌تر یا برابر مسافت طی شده است $(d\le\ell)$ بنابراین اندازهٔ سرعت متوسط همواره کوچک‌تر یا برابر تندی متوسط بوده و هرگز اندازهٔ سرعت متوسط نمی‌تواند از تندی متوسط بیشتر شود و قطعاً گزینهٔ (۳) نادرست است.

در یک مسیر بسته مثلاً در یک مسیر رفت و برگشت به محل شروع حرکت، جابه‌جایی صفر و سرعت متوسط صفر است. هرچند تندی متوسط صفر نیست و گزینهٔ (۴) درست است.



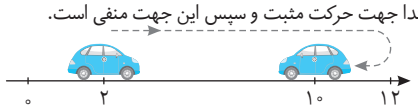
A ۴ ۳۳

برای بررسی گزینه‌های این تست از یک مثال عددی استفاده می‌کنیم. فرض کنید متحرک در مدت ۲s از مکان $2\vec{i}$ به مکان $10\vec{i}$ رفته حال حالت‌های مختلف را بررسی می‌کنیم:

۱ در این حالت مانند گزینهٔ (۱) جهت حرکت متحرک در طول مسیر مثبت بوده است.

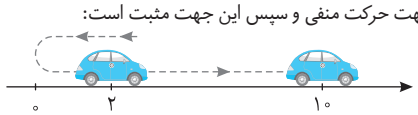
$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{8}{2}=4m/s$$

۲ فرض کنید در مدت ۲s از مکان $2\vec{i}$ ابتدا به مکان $12\vec{i}$ رفته و سپس از $12\vec{i}$ به $10\vec{i}$ بازگشته بنابراین ابتدا جهت حرکت مثبت و سپس این جهت منفی است.



$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{8}{2}=4m/s$$

۳ فرض کنید در مدت ۲s از مکان $2\vec{i}$ ابتدا به مبدأ مکان رفته و سپس از مبدأ به $10\vec{i}$ برود. بنابراین ابتدا جهت حرکت منفی و سپس این جهت مثبت است:



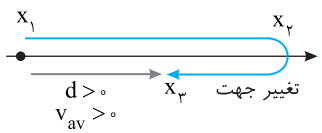
$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{8}{2}=4m/s$$

بنابراین هر سه گزینه می‌تواند حرکت ما را شامل شود و گزینهٔ (۴) درست است.

A ۳ ۳۴

نکته جهت بردار سرعت چگونگی مسیر حرکت را مشخص نمی‌کند.

اگر جهت حرکت مثبت باشد جهت جابه‌جایی و سرعت متوسط نیز مثبت خواهد بود اما عکس این جمله نادرست است یعنی اگر سرعت متوسط متحرک مثبت باشد ممکن است متحرک ابتدا در جهت منفی و سپس در جهت مثبت حرکت کرده باشد و یا ابتدا در جهت مثبت محور جابه‌جا شده و سپس مقدار کمتری در جهت منفی حرکت کرده است، به طوری که جابه‌جایی کل مثبت بوده و سرعت متوسط مثبت باشد اما متحرک همواره در جهت مثبت حرکت نکرده باشد. بنابراین گزارهٔ (الف) درست است. در شکل زیر مشخص است که سرعت متوسط مثبت اما متحرک مدتی در خلاف جهت محور حرکت کرده است و گزارهٔ (ب) نادرست است.

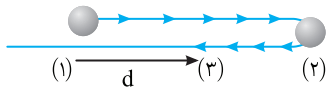


با توجه به رابطهٔ $\vec{v}_{av}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$ جهت سرعت و جابه‌جایی یکسان است بنابراین گزارهٔ (پ) درست است.

B ۳ ۳۵

۱ مسافت طی شده دو برابر اندازهٔ جابه‌جایی است. $\ell=2d$

۲ سرعت متوسط در این حرکت قطعاً از تندی متوسط کوچک‌تر است از این رو بنابه فرض مسئله خواهیم داشت:



$$s_{av}-v_{av}=2\quad (II)$$

۳ در رابطهٔ (II) به جای v_{av} و s_{av} مقدار آن‌ها را براساس فرمول آن‌ها قرار می‌دهیم.

$$s_{av}=\frac{\ell}{t},\ v_{av}=\frac{d}{t}\xrightarrow{(II)}\frac{\ell}{t}-\frac{d}{t}=2\xrightarrow[t=4s]{L=2d}$$

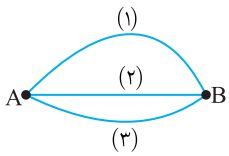
$$\frac{2d}{4}-\frac{d}{4}=2\Rightarrow\frac{d}{4}=2\Rightarrow d=8m,\ \ell=16m$$

۴ تندی متوسط را حساب می‌کنیم

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{16}{4}=4m/s$$

B ۳ ۳۶

خط فکری تندی هر سه متحرک یکسان است، بنابراین هر متحرکی که مسیرش طولانی‌تر است در زمان بیشتری از A به B می‌رود. اما سرعت متوسط به مسیر حرکت بستگی ندارد و برداری است که ابتدای مسیر (نقطهٔ A) را به انتهای مسیر (نقطهٔ B) وصل می‌کند. با توجه به این مطالب و رابطهٔ سرعت متوسط $v_{av}=\frac{d}{\Delta t}$ می‌توانید دربارهٔ پاسخ درست فکر کنید.

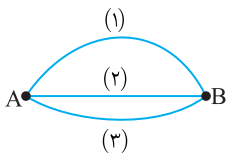


۱ طول مسیر (۱) از هر سه مسیر طولانی‌تر و طول مسیر (۲) از هر سه مسیر کوتاه‌تر است. تندی هر سه متحرک یکسان است بنابراین: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t_1>\Delta t_3>\Delta t_2$

۲ جابه‌جایی هر سه برابر است از این‌رو:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t_1>\Delta t_3>\Delta t_2]{d_1=d_2=d_3}v_{av_1}<v_{av_3}<v_{av_2}$$

بازی با سؤال **مطابق شکل زیر، سه متحرک با بزرگی سرعت متوسط یکسان سه مسیر نشان داده شده را طی می‌کند و تندی متوسط در مسیرهای (۱)، (۲) و (۳) به‌ترتیب s_{av_1}، s_{av_2} و s_{av_3} خواهد بود. کدام گزینه درست است؟**



۱) $s_{av_1}=s_{av_2}=s_{av_3}$

۲) $s_{av_1}<s_{av_2}<s_{av_3}$

۳) $s_{av_1}>s_{av_3}>s_{av_2}$

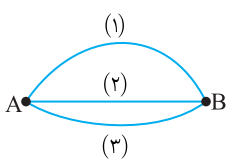
۴) $s_{av_1}>s_{av_2}>s_{av_3}$

پاسخ یادآوری **سرعت متوسط $v_{av}=d/t$ و تندی متوسط $s_{av}=\ell/t$ است که d، جابه‌جایی و L مسافت طی شده است.**

۱ **با توجه فرض مسئله سرعت متوسط هر سه متحرک برابر است از طرفی جابه‌جایی هر سه متحرک از A تا B یکسان و برابر d است.**

$$v_{av_1}=v_{av_2}=v_{av_3}\Rightarrow\frac{d}{\Delta t_1}=\frac{d}{\Delta t_2}=\frac{d}{\Delta t_3}\Rightarrow\Delta t_1=\Delta t_2=\Delta t_3$$

۲ **اکنون در مورد تندی متوسط می‌توان اظهارنظر کرد. مسافت طی شده توسط متحرک (۱) بیشترین و توسط متحرک (۲) کمترین است. از این‌رو می‌توان نوشت:**



$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=\text{ثابت}]{\ell_1>\ell_3>\ell_2}s_{av_1}>s_{av_3}>s_{av_2}$$

گزینهٔ ۳

۳۷ B ۱

۳ جابه‌جایی خودرو در یک مسیر رفت و برگشت صفر است، بنابراین سرعت متوسط آن نیز صفر است. $(v_{av}=0)$

۴ تندی متوسط در کل مسیر را حساب می‌کنیم. اگر طول مسیر رفت و طول مسیر برگشت ℓ باشد طول کل مسیر رفت و برگشت 2ℓ خواهد بود.

۵ زمان حرکت در مسیر رفت خواهد شد: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t_1}\Rightarrow 90=\frac{\ell}{\Delta t_1}\Rightarrow \Delta t_1=\frac{\ell}{90}$

۶ زمان حرکت در مسیر برگشت خواهد شد: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t_2}\Rightarrow 60=\frac{\ell}{\Delta t_2}\Rightarrow \Delta t_2=\frac{\ell}{60}$

۷ تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell_{کل}}{\Delta t_{کل}}=\frac{2\ell}{\frac{\ell}{90}+\frac{\ell}{60}}\Rightarrow s_{av}=\frac{2\ell}{\frac{2+3}{180}\ell}\Rightarrow s_{av}=\frac{2\times 180}{5}=72km/h$$

میانبر در یک مسیر وقتی دو نیمهٔ مسیر توسط خودرو با دو تندی متفاوت s_{av_1} و s_{av_2} طی می‌شود تندی متوسط در کل مسیر خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{2s_{av_1}s_{av_2}}{s_{av_1}+s_{av_2}}$$

بازی با سؤال **متحرکی نصف مسیر مستقیمی را با تندی $40m/s$ و بقیهٔ آن مسیر را در همان سو با تندی v طی کرده است. اگر سرعت متوسط در کل مسیر $48m/s$ باشد، اندازهٔ v چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۵۶ ۲) ۹۰ ۳) ۳۰ ۴) ۶۰

پاسخ با توجه به تعریف سرعت متوسط می‌توان نوشت:

$$v_{av}=\frac{\Delta x_1+\Delta x_2}{\Delta t_1+\Delta t_2}=\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}{\frac{x}{2s_1}+\frac{x}{2s_2}}\Rightarrow v_{av}=\frac{2s_1s_2}{s_1+s_2}\Rightarrow 48=\frac{2\times 40\times v}{40+v}$$

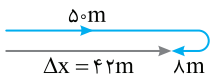
$$\Rightarrow 240+6v=10v\Rightarrow v=60m/s$$

گزینهٔ ۴

۳۸ B ۳

خط فکری باید مدت زمان رفت و مدت زمان برگشت را حساب کنیم و ببینیم که در لحظهٔ $t=14s$، متحرک در چه مکانی است و آیا در مسیر رفت است یا مسیر برگشت؟ در این صورت می‌توانیم سرعت متوسط را به‌دست بیاوریم.

۱ زمان رفت شناگر برابر خواهد شد با:



$$t=\frac{\Delta x}{v_{av}}\Rightarrow t_1=\frac{50}{5}\Rightarrow t_1=10s$$

۲ زمان برگشت شناگر برابر خواهد شد با:

$$t_2=\frac{50}{2}=25s$$

بنابراین در لحظهٔ $t=14s$ شناگر در مسیر برگشت است و با سرعت متوسط $2m/s$ در مدت $4s$، مسافت ۸ متر برگشته است، بنابراین جابه‌جایی شناگر از لحظهٔ شروع تا $t=14s$ برابر $50-8=42m$ است و سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{42}{14}=\frac{6}{2}=3m/s$$

۳۹ A ۳

خط فکری دقت کنید که متحرک زمان کل حرکت خود (t) را در دو بازهٔ زمانی یکسان $(\frac{t}{2})$ طی می‌کند، بنابراین باید بررسی کنید مسافت طی شده در هریک از این بازه‌ها برحسب t چه مقدار است.

۱ مسافت طی شده در بازهٔ $\Delta t_1=\frac{t}{2}$ برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow 10=\frac{\ell_1}{\frac{t}{2}}\Rightarrow \ell_1=5t$$

۲ مسافت طی شده در بازهٔ $\Delta t_2=\frac{t}{2}$ با تندی $40m/s$ خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow 40=\frac{\ell_2}{\frac{t}{2}}\Rightarrow \ell_2=20t$$

۳ تندی متوسط در کل مدت t را به‌دست می‌آوریم.

$$s_{av}=\frac{\ell_1+\ell_2}{\Delta t_1+\Delta t_2}\Rightarrow s_{av}=\frac{5t+20t}{t}=25m/s$$

میانبر هرگاه متحرک کل زمان حرکت را در بازه‌های زمانی یکسان با تندی‌های متفاوت $s_{av_1}, s_{av_2}, \ldots, s_{av_n}$ طی کند آن‌گاه تندی متوسط در کل زمان حرکت خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{s_{av_1}+s_{av_1}+\cdots+s_{av_n}}{n}$$

۴۰ A ۴

۱ طول مسیر حرکت یعنی مسافت طی شده را حساب می‌کنیم ابتدا در مدت $2h$ با تندی متوسط $60km/h$ متحرک حرکت کرده و مسافت طی شده $\ell_1=60\times 2=120km$ و در مدت $30min$ یا $0/5h$ متوقف بوده و سپس با تندی $90km/h$ به مدت $2/5h$ رانندگی کرده یعنی مسافت طی شده آن $\ell_2=90\times 2/5=225km$ است.

۲ کل زمان حرکت متحرک $\Delta t_{کل}=2+0/5+2/5=5h$ و کل مسافت طی شده $\ell=120+225=345km$ است، بنابراین تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{345}{5}\Rightarrow s_{av}=69km/h$$

۴۱ A ۲

۱ جابه‌جایی در مدت t_1 و t_2 را به‌دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{d}{t}\Rightarrow d_1=v_{av_1}t_1=20t_1,\quad d_2=v_{av_2}t_2=40t_2$$

۲ متحرک در یک جهت در حال حرکت است و جابه‌جایی کل آن برابر مجموع d_2 و d_1 است. از این رو بنا به تعریف سرعت متوسط خواهیم داشت:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow 28=\frac{20t_1+40t_2}{t_1+t_2}\Rightarrow 28t_1+28t_2=20t_1+40t_2$$

$$\Rightarrow 8t_1=12t_2\Rightarrow \frac{t_1}{t_2}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

۴۲ B ۳

خط فکری سرعت متوسط کل خلاف جهت محور xها یعنی $-28m/s$ است. شما باید جابه‌جایی در هر قسمت را حساب کنید سپس جابه‌جایی کل را به‌دست بیاورید تا بتوانید به کمک سرعت متوسط کل نسبت $\frac{t_1}{t_2}$ را بیابید.

۱ در مدت t_1 جابه‌جایی متحرک با سرعت متوسط $20m/s$ خواهد شد:

$$d_1=v_{av_1}t_1\Rightarrow d_1=+20t_1$$

۲ در مدت t_2 جابه‌جایی متحرک در خلاف جهت محور xها بوده یعنی سرعت متوسط آن $-40m/s$ است و جابه‌جایی در این مدت خواهد شد:

$$d_2=v_{av_2}t_2\Rightarrow d_2=-40t_2$$

۳ اکنون رابطهٔ سرعت متوسط کل را نوشته، داده‌های به‌دست آمده را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t}\Rightarrow -28=\frac{20t_1-40t_2}{t_1+t_2}\Rightarrow -14=\frac{10t_1-20t_2}{t_1+t_2}$$

$$\Rightarrow -14t_1-14t_2=10t_1-20t_2\Rightarrow -14t_2+20t_2=10t_1+14t_1$$

$$\Rightarrow 6t_2=24t_1\Rightarrow \frac{t_1}{t_2}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$$

۴ ۴۳ C

خط فکری ابتدا باید بررسی کنیم که در مدت ۸s جابه‌جایی متحرک چند متر است. به چه دلیل به این جابه‌جایی نیاز داریم؟ به این دلیل که جابه‌جایی متحرک در بازهٔ ۰ تا ۳s کمتر از این مقدار است.

۱ جابه‌جایی متحرک در مدت ۸s با سرعت متوسط $15m/s$ خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{d}{t}\Rightarrow 15=\frac{d}{8}\Rightarrow d=120m$$

۲ جابه‌جایی متحرک در تمام مدت ۸s در جهت مثبت محور xها بوده بنابراین در بازهٔ ۰ تا ۳s قطعاً جابه‌جایی از $120m$ کمتر است. از این رو سرعت متوسط در بازهٔ ۰ تا ۳s خواهد شد:

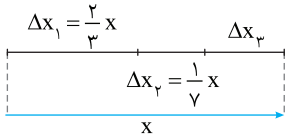
$$v_{av}<\frac{120}{3}\Rightarrow v_{av}<40m/s$$

نتیجه آنکه تمام مقدارهای زیر $40m/s$ می‌تواند جواب مسئله باشد و گزینهٔ (۴) درست است.

۲ ۴۴ B

خط فکری کل مسیر حرکت را x فرض کنید و جابه‌جایی هر سه قسمت را برحسب x به‌دست بیاورید سپس به سراغ بازهٔ زمانی هر قسمت بروید و از فرمول سرعت متوسط بازه‌های زمانی را نیز برحسب x حساب کرده و مسئله را حل کنید.

۱ متحرک ابتدا $\Delta x_1=\frac{2}{3}x$، سپس $\Delta x_2=\frac{x}{7}$ را طی کرده بنابراین باقی مسیر خواهد شد:



$$\Delta x_3=x-\frac{2x}{3}-\frac{x}{7}\Rightarrow \Delta x_3=\frac{4x}{21}$$

۲ بازهٔ زمانی هر قسمت را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{d}{t}\Rightarrow t=\frac{d}{v_{av}}\begin{cases}\Delta x_1=\frac{2}{3}x\rightarrow \Delta t_1=\frac{\Delta x_1}{v_{av_1}}\Rightarrow \Delta t_1=\frac{\frac{2}{3}x}{28}\Rightarrow \Delta t_1=\frac{x}{42}\\ \Delta x_2=\frac{x}{7}\rightarrow \Delta t_2=\frac{\Delta x_2}{v_{av_2}}\Rightarrow \Delta t_2=\frac{\frac{x}{7}}{6}\Rightarrow \Delta t_2=\frac{x}{42}\\ \Delta x_3=\frac{4x}{21}\rightarrow \Delta t_3=\frac{\Delta x_3}{v_{av_3}}\Rightarrow \Delta t_3=\frac{\frac{4x}{21}}{8}\Rightarrow \Delta t_3=\frac{x}{42}\end{cases}$$

۳ اکنون می‌توان سرعت متوسط را به‌دست آورد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3}{\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3}\Rightarrow v_{av}=\frac{x}{\frac{x}{42}+\frac{x}{42}+\frac{x}{42}}$$

$$\Rightarrow v_{av}=14m/s$$

۳ ۴۵ A

۱ بازهٔ زمانی هر قسمت از مسیر را برحسب x و v به‌دست می‌آوریم.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow \Delta t=\frac{\Delta x}{v}\begin{cases}x_1=x,v_1=v\rightarrow \Delta t_1=\frac{x}{v}\\ x_2=2x,v_2=2v\rightarrow \Delta t_2=\frac{2x}{2v}=\frac{x}{v}\\ x_3=3x,v_3=3v\rightarrow \Delta t_3=\frac{3x}{3v}=\frac{x}{v}\end{cases}$$

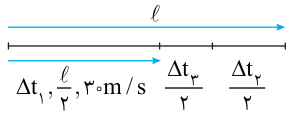
۲ جابه‌جایی کل را حساب می‌کنیم. $\Delta x_{کل}=x+2x+3x=6x$

۳ سرعت متوسط در کل مسیر خواهد شد:

$$v_{av_{کل}}=\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t_{کل}}=\frac{6x}{\frac{x}{v}+\frac{x}{v}+\frac{x}{v}}\Rightarrow v_{av_{کل}}=\frac{6x}{\frac{3x}{v}}=2v$$

۱ ۴۶ B

خط فکری مسئله از دو قسمت تشکیل شده یک بار مسیر حرکت را به دو نیمهٔ مساوی تقسیم کرده و بار دیگر نیمهٔ دوم مسیر را به دو بازهٔ زمانی یکسان تقسیم کرده است، بنابراین شما باید تندی متوسط را در قسمت دوم مسیر (Δt_2) حساب کنید. سپس تندی در قسمت دوم و قسمت اول را برای به‌دست آوردن تندی کل مسیر به‌کار ببریم.



$$\Delta x=\frac{4\Delta t_2}{2}\quad \Delta x=16\frac{\Delta t_2}{2}$$

(۴m/s و ۱۶m/s)

ابتدا تندی متوسط در نیمهٔ دوم مسیر را حساب می‌کنیم:

$$s_{av_2}=\frac{\frac{\ell}{2}}{\Delta t_2}\Rightarrow s_{av_2}=\frac{4\frac{\Delta t_2}{2}+16\frac{\Delta t_2}{2}}{\Delta t_2}=\frac{4+16}{2}=10m/s$$

اکنون تندی متوسط در کل مسیر را به‌دست می‌آوریم:

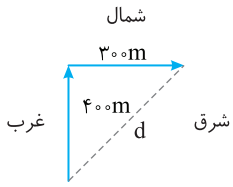
$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{\ell}{\Delta t_1+\Delta t_2}\xrightarrow[\Delta t_2=\frac{\frac{\ell}{2}}{10}=\frac{\ell}{20}]{\Delta t_1=\frac{\frac{\ell}{2}}{30}=\frac{\ell}{60}} s_{av}=\frac{\ell}{\frac{\ell}{60}+\frac{\ell}{20}}=\frac{60}{4}=15m/s$$

میانبر البته می‌توانستیم در قسمت دوم مسیر، مستقیماً از رابطهٔ $v_{av}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$ استفاده کنیم. دقت کنید در اینجا تندی متوسط و سرعت متوسط یکی است زیرا متحرک روی خط راست بدون تغییر جهت حرکت کرده است.

$$v_{av}=\frac{2\times 10\times 30}{10+30}=15m/s$$

۱ ۴۷ B

۱ متحرک با سرعت ثابت $16m/s$، $400m$ به سمت شمال رفته است، مدت زمان طی این مسیر را حساب می‌کنیم.



$$v=v_{av}=\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}\Rightarrow 16=\frac{400}{\Delta t_1}\Rightarrow \Delta t_1=25s$$

۲ سپس متحرک در مدت ۲۵s با سرعت ثابت $12m/s$ به سمت شرق رفته است و مقدار جابه‌جایی آن در این مدت برابر است با:

$$v=v_{av}=\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}\Rightarrow 12=\frac{\Delta x_2}{25}\Rightarrow \Delta x_2=300m$$

۳ جابه‌جایی کل را به‌دست می‌آوریم:

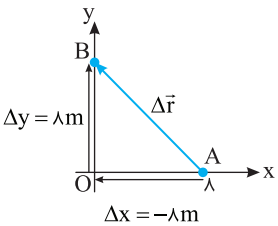
$$|d|=\sqrt{300^2+400^2}=500m$$

۴ سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{|d|}{\Delta t_1+\Delta t_2}=\frac{500}{25+25}=10m/s$$

۲ ۴۸ B

دقت کنید مسئله سرعت متوسط در امتداد محور xها یعنی از A تا O را خواسته است و شما نباید سرعت متوسط از A تا B را حساب کنید. از A تا O متحرک از مکان $+8m$ به مکان $x=0$ رفته یعنی در مدت ۵s جابه‌جایی آن $-8m$ است، بنابراین سرعت متوسط در امتداد محور xها (مولفهٔ x سرعت متوسط) خواهد شد.



$$v_{av,x}=-\frac{8}{5}=-1/6m/s$$

A ۴۹ ۱

ذره در امتداد خط راست از A به B رفته است، بنابراین ابتدا طول مسیر از A تا B را به کمک ریاضی به‌دست می‌آوریم.

$$\ell = AB = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$$
$$= \sqrt{(-3-6)^2 + (8+4)^2} = \sqrt{81+144} \Rightarrow L = 15m$$

تندی متوسط متحرک خواهد شد: $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{15}{5-3} = 7/5 m/s$

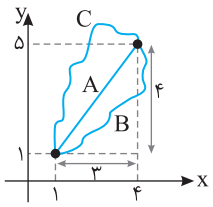
سؤال: آیا در این تست مانند تست اصلی می‌توانستیم تندی متوسط را به دست بیاوریم؟

پاسخ: قطعاً نه، زیرا در تست اصلی مسیر حرکت خط راست بود اما در این تست مسیر حرکت مشخص نیست.

B ۵۰ ۴

خط فکری برای آنکه تندی متوسط جسم را حساب کنیم باید چگونگی مسیر حرکت مشخص باشد تا بتوانیم مسافت و سپس تندی را به‌دست بیاوریم در این مسئله مسیر حرکت مشخص نیست، اما ما می‌دانیم که مسافت طی شده بین دو نقطه همواره بزرگ‌تر یا مساوی جابه‌جایی بین دو نقطه است و جابه‌جایی بین دو نقطه نیز برداری است که نقطهٔ ابتدایی را به نقطهٔ انتهایی وصل کند، بنابراین شما باید ابتدا جابه‌جایی و سپس سرعت متوسط را پیدا کنید در این صورت تندی متوسط باید از عددی که برای سرعت متوسط به‌دست می‌آورید بزرگ‌تر یا با آن مساوی باشد.

مسیر حرکت مشخص نیست اما جابه‌جایی در تمام مسیرهایی که روی شکل نشان داده‌ایم برابر است با:



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$\Rightarrow d = \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2}$$
$$\Rightarrow d = \sqrt{9+16} = 5m$$

سرعت متوسط را حساب می‌کنیم. $v_{av} = \frac{d}{\Delta t} \xrightarrow{t=5s} v_{av} = \frac{5}{5} = 1 m/s$

بنابراین تندی متوسط باید بزرگ‌تر یا مساوی $1 m/s$ باشد، بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

B ۵۱ ۲

خط فکری در بررسی سرعت متوسط به مسیر حرکت کاری نداریم و تنها فاصلهٔ نقطهٔ ابتدایی از نقطهٔ انتهایی که مشخص‌کنندهٔ اندازهٔ جابه‌جایی است مهم است، بنابراین مکان d_2 را از ذهن خود حذف کنید و در مدت $2+3=5s$ جابه‌جایی متحرک را از مکان d_1 تا d_3 حساب کنید.

یادآوری فاصلهٔ بین دو نقطه در صفحهٔ xoy از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

۱ جابه‌جایی از $\vec{d}_1 = 7\vec{i} + 4\vec{j}$ تا $\vec{d}_3 = -5\vec{i} - \vec{j}$ متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$d = \sqrt{(-5-7)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} \Rightarrow d = 13m$$

۲ سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av} = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{13}{5} = 2/6 m/s$

بازی با سؤال **اگر متحرکی مسیر بین d_1 تا d_2 و همچنین d_2 تا d_3 را روی خط راست طی کند، تندی متوسط آن چند متر بر ثانیه خواهد بود؟** $(\sqrt{41} \simeq 6/4)$

۱) ۱۳/۸ ۲) ۱۴/۰۸ ۳) ۲/۸۸ ۴) ۳۶

پاسخ **برای به‌دست آوردن تندی متوسط باید مسافت طی شده در هر قسمت را به‌دست آورد.**

d_1 تا d_2: $\ell_1 = \sqrt{(3-7)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41} \simeq 6/4m$

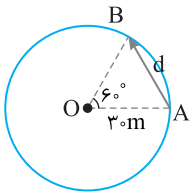
d_3 تا d_2: $\ell_2 = \sqrt{(-5-3)^2 + (-1+1)^2} = 8m$

تندی متوسط خواهد شد: $s_{av} = \frac{(\ell_1 + \ell_2)}{\Delta t} = \frac{6/4+8}{2+3} = \frac{14/4}{5} = 2/88 m/s$

گزینهٔ ۳

A ۵۲ ۴

۱ در شکل روبه‌رو، بردار جابه‌جایی از A تا B رسم شده است با توجه به اینکه زاویهٔ O، 60° بوده و ضلع‌های OA و OB هر دو شعاع دایره بوده و با هم برابر و مقدار آن $30m$ است. مثلث OAB یک مثلث متساوی‌الاضلاع بوده و طول بردار جابه‌جایی AB نیز $30m$ خواهد بود. بنابراین سرعت متوسط خواهد شد:



$$v_{av} = \frac{AB}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{30}{5-2} \Rightarrow v_{av} = 10 m/s$$

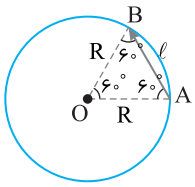
نکته هرگاه متحرک روی مسیر دایره‌ای زاویهٔ θ را طی کند مسافتی که می‌پیماید برابر $\frac{\theta}{360}$ محیط دایره است.

۲ برای تندی متوسط باید طول مسیر AB را حساب کنیم که طول این مسیر $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$ محیط دایره است. $\ell = \frac{1}{6}(2\pi R) \Rightarrow L = \frac{1}{6}(2\pi \times 30) \Rightarrow \ell = 10\pi\ m$

تندی متوسط خواهد شد: $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{10\pi}{5-2} = \frac{10\pi}{3} m/s$

A ۵۳ ۱

ابتدا زمان حرکت از A تا B را به کمک تندی حرکت حساب می‌کنیم.



$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow{\ell = \frac{1}{6}(2\pi R)} 4 = \frac{\frac{1}{6}(2\pi R)}{\Delta t}$$
$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\pi R}{12}$$

مثلث OAB متساوی‌الاضلاع بوده بنابراین جابه‌جایی از A تا B با توجه به شکل برابر شعاع دایره $(d = R)$ است. در این صورت سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{R}{\frac{\pi R}{12}} \Rightarrow v_{av} = \frac{12}{\pi} m/s$$

A ۵۴ ۱

نکته ثانیهٔ nام حرکت یعنی بازهٔ زمانی بین $n-1$ و n به‌طور مثال ثانیهٔ سوم یعنی بازهٔ زمانی بین $t=2s$ تا $t=3s$.

خط فکری برای به‌دست آوردن سرعت متوسط در ثانیهٔ سوم شما باید مکان متحرک در $t=2s$ و $t=3s$ به‌دست بیاورید و سرعت متوسط را به کمک $v_{av} = \Delta x / \Delta t$ حساب کنید. همچنین برای سرعت متوسط در ثانیهٔ دوم باید مکان متحرک در $t=1s$ و $t=2s$ را به کمک معادلهٔ مکان - زمان حساب کرده و سرعت متوسط در این بازه را به‌دست بیاورید.

۱ ثانیهٔ دوم حرکت یعنی بازهٔ زمانی بین $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 2s$ در این صورت:

$$x = t^3 - 2t + 1 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s \Rightarrow x_1 = 1-2+1 = 0 \\ t_2 = 2s \Rightarrow x_2 = 8-4+1 = 5m \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{5-0}{2-1} = 5 m/s$$

۲ ثانیهٔ سوم حرکت یعنی بازهٔ زمانی بین $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 3s$ از این‌رو:

$$\begin{cases} t_1 = 2s \Rightarrow x_1 = 8-4+1 = 5m \\ t_2 = 3s \Rightarrow x_2 = 27-6+1 = 22m \end{cases} \Rightarrow v'_{av} = \frac{22-5}{3-2} = 17 m/s$$

۳ بنابراین خواهیم داشت: $v'_{av} - v_{av} = 17 - 5 = 12 m/s$

بازی با سؤال **معادلهٔ حرکت جسمی که روی محور x‌ها در حرکت است در SI به صورت $x = t^2 - 2t + 1$ است. سرعت متوسط این جسم در بازهٔ زمانی $0/5s$ تا $1/5s$ چند m/s است؟**

۱) ۱/۵ ۲) ۱ ۳) ۰/۵ ۴) صفر

پاسخ مکان جسم در لحظه‌های $t_۱=۰/۵s$ و $t_۲=۱/۵s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$t_۱=۰/۵s\Rightarrow x_۱=۰/۲۵-۱+۱\Rightarrow x_۱=۰/۲۵m$$

$$t_۲=۱/۵s\Rightarrow x_۲=۲/۲۵-۳+۱\Rightarrow x_۲=۰/۲۵m$$

سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow v_{av}=\frac{۰/۲۵-۰/۲۵}{۱/۵-۰/۵}\Rightarrow v_{av}=۰$

گزینهٔ ۴

B ۵۵ ۳

نکته هرگاه متحرک به مکان اولیهٔ خود بازگردد، یعنی جابه‌جایی متحرک در یک بازهٔ مشخص صفر می‌شود قطعاً سرعت متوسط در آن بازه صفر می‌شود.

با توجه به معادلهٔ $x=۳t^۲-۱۵t+۱۲$ در لحظهٔ $t_۱=۰$ مکان اولیه متحرک $x_۰=+۱۲m$ می‌شود و اگر در بازهٔ $t_۱=۰$ تا $t_۲=t'$ سرعت متوسط صفر شده باشد یعنی مکان متحرک مجدداً باید $x=+۱۲m$ شود بنابراین در معادلهٔ حرکت به جای x مقدار ۱۲ را قرار می‌دهیم و t' را حساب می‌کنیم.

$$۱۲=۳t^۲-۱۵t+۱۲\Rightarrow ۳t^۲-۱۵t=۰\Rightarrow ۳t(t-۵)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۰\\t=۵s\end{cases}$$

در نتیجه $t'=۵s$ پاسخ مسئله است.

A ۵۶ ۱

بردار مکان، برداری است که از مبدأ مکان $(x=۰)$ به محل متحرک رسم می‌شود. بنابراین هنگام گذر از مبدأ، بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

اکنون باید مکان را برابر صفر قرار دهیم: $x=۰\Rightarrow t^۲+t+۱=۰\Rightarrow t=\frac{-۱\pm\sqrt{۱-۴}}{۲}$

معادلهٔ بالا بدون پاسخ است یعنی مکان متحرک هرگز صفر $(x=۰)$ نمی‌شود و متحرک از مبدأ مکان نمی‌گذرد و بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

A ۵۷ ۲

خط فکری لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان یعنی لحظه‌ای که متحرک از مکان $(x=۰)$ می‌گذرد بنابراین شما باید در معادلهٔ حرکت مکان را برابر صفر قرار داده و لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان را پیدا کنید تا بتوانید سرعت متوسط را در بازهٔ زمانی $t=۰$ تا لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان به‌دست بیاورید.

۱ در لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان متحرک از مبدأ مکان $(x=۰)$ می‌گذرد، بنابراین:

$$x=t^۲-t-۶\Rightarrow ۰=t^۲-t-۶\Rightarrow (t-۳)(t+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۳s & \checkmark\\ t=-۲s & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۲ سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{۰+۶}{۳}=۲m/s$

A ۵۸ ۲

۱ معادلهٔ حرکت زمان‌های $t=۰$ و $t=۳s$ را قرار می‌دهیم.

$$x=\alpha+\beta t^۳\begin{cases}t_۱=۰\to x_۱=\alpha\\ t_۲=۳s\to x_۲=\alpha+۲۷\beta\end{cases}$$

۲ با توجه به فرض مسئله $v_{av}=۱۸m/s$ می‌توان نوشت:

$$v_{av}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow v_{av}=\frac{\alpha+۲۷\beta-\alpha}{۳-۰}=۱۸\Rightarrow\frac{۲۷\beta}{۳}=۹\beta=۱۸\Rightarrow\beta=۲$$

۳ اکنون با داشتن مقدار β و با توجه به این مکان متحرک در $t=۲s$ برابر $۲۴m$ است. مقدار α را حساب می‌کنیم.

$$x=\alpha+\beta t^۳\Rightarrow ۲۴=\alpha+\beta(۲)^۳\xrightarrow{\beta=۲}۲۴=\alpha+۱۶\Rightarrow\alpha=۸$$

A ۵۹ ۴

خط فکری معادلهٔ مثلثاتی حرکت شما را دچار مشکل نکند روش حل همان است که بود یعنی در لحظه‌های داده شده باید مکان متحرک را به کمک معادلهٔ حرکت به‌دست آورده سپس سرعت متوسط را حساب کنید.

۱ ابتدا مکان متحرک در لحظه‌های $t_۱=\frac{۱}{۶}s$ و $t_۲=\frac{۴}{۳}s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x=۰/۰۲\cos ۱۰\pi t\begin{cases}t_۱=\frac{۱}{۶}s\to x_۱=۰/۰۲\cos\frac{۱۰\pi}{۶}\\ t_۲=\frac{۴}{۳}s\to x_۲=۰/۰۲\cos\frac{۴۰\pi}{۳}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_۱=۰/۰۲\cos\frac{۵\pi}{۳}\Rightarrow x_۱=۰/۰۲\cos(۲\pi-\frac{\pi}{۳})\\ \Rightarrow x_۲=۰/۰۲\cos(۱۲\pi+\pi+\frac{\pi}{۳})\Rightarrow x_۲=-۰/۰۲\cos\frac{\pi}{۳}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_۱=+۰/۰۲\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x_۱=+۰/۰۱m\\ x_۲=-۰/۰۱m\end{cases}$$

۲ سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{-۰/۰۱-۰/۰۱}{\frac{۴}{۳}-\frac{۱}{۶}}=\frac{-۰/۰۲}{\frac{۸-۱}{۶}}\Rightarrow v_{av}=-\frac{۰/۱۲}{۷}$$

$$\Rightarrow v_{av}=-\frac{۱۲}{۷۰۰}=-\frac{۳}{۱۷۵}m/s$$

B ۶۰ ۳

یادآوری جابه‌جایی کمیت برداری $(\vec{d})$ و مسافت کمیت نرده‌ای (ℓ) است.

نکته همواره مسافت برابر یا بزرگ‌تر از اندازهٔ جابه‌جایی است.

با توجه به نکتهٔ بیان شده می‌توان نوشت: $|\vec{d}|\le\ell\Rightarrow\frac{|\vec{d}|}{\ell}\le ۱$

یادداشت ریاضی $|x|\le ۱\Rightarrow -۱\le x\le ۱$

با توجه به یادداشت ریاضی باید $-۱\le\frac{|\vec{d}|}{\ell}\le ۱$ باشد.

A ۶۱ ۳

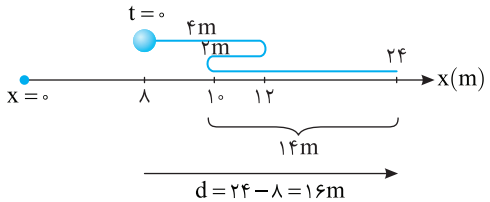
در یک لحظه دو متحرک در یک مکان قرار دارند و مبدأ را هرجا در نظر بگیریم مکان دو متحرک یکسان است.

B ۶۲ ۴

خط فکری برای حل این مسئله قطعاً شما باید مسیر حرکت را رسم کنید از طرفی به کمک تندی متوسط باید مسافت طی شده در مدت ۵s را به‌دست بیاورید تا متوجه شوید متحرک در لحظهٔ $t=۵s$ در چه مکانی است و بتوانید جابه‌جایی و در نتیجه سرعت متوسط را حساب کنید.

۱ مسافت طی شده در مدت ۵s را به‌دست می‌آوریم. $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow ۴=\frac{\ell}{۵}\Rightarrow\ell=۲۰m$

۲ مسیر را از مکان $x_۰=+۸m$ رسم می‌کنیم، متحرک از $+۸m$ به مکان $+۱۲m$ می‌رود یعنی $۴m$ مسافت طی کرده سپس بازمی‌گردد و به مکان $+۱۰m$ می‌رود. یعنی $۲m$ مسافت طی می‌کند تا اینجا $۶m$ مسافت طی کرده و هنوز $۱۴m$ باقی مانده تا مسافت کل $۲۰m$ شود. در نقطهٔ $+۱۰m$ تغییر جهت می‌دهد و در امتداد محور xها به حرکت خود ادامه می‌دهد بنابراین باید از مکان $+۱۰m$، $۱۴m$ جلو برود پس به مکان $۱۰+۱۴=۲۴m$ می‌رسد.



۳ متحرک در مدت ۵s از مکان ۸m+ به مکان ۲۴m+ رفته و جابه‌جایی آن $d=۲۴-۸=۱۶m$ است.

۴ سرعت متوسط در این مدت خواهد شد: $v_{av}=\frac{d}{t}\Rightarrow v_{av}=\frac{۱۶}{۵}=۳/۲m/s$

C ۶۳ ۱

خط فکری نیمهٔ دوم مسیر را مستقل از نیمهٔ اول بررسی کنید. یعنی اگر در نیمهٔ دوم مسافت (یا جابه‌جایی) $L_۲$ و زمان جابه‌جایی $\Delta t_۲$ باشد، $\frac{۱}{۳}\Delta t_۲$ متحرک با تندی $۸m/s$ و $\frac{۲}{۳}\Delta t_۲$ را با تندی $۶m/s$ می‌رود. شما با این اطلاعات تندی متوسط در نیمهٔ دوم مسیر را حساب کنید. سپس به سراغ تندی متوسط در کل مسیر بروید.

۱ جابه‌جایی در مدت $\frac{۱}{۳}\Delta t_۲$ برابر است با: $s=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow \ell'_۲=۸\times\frac{۱}{۳}\Delta t_۲=\frac{۸}{۳}\Delta t_۲$

۲ جابه‌جایی درمدت $\frac{۲}{۳}\Delta t_۲$ خواهدشد: $s=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow \ell''_۲=۶\times\frac{۲}{۳}\Delta t_۲\Rightarrow \ell''_۲=۴\Delta t_۲$

۳ تندی متوسط در نیمهٔ دوم را حساب می‌کنیم.

$$s_۲=\frac{\ell_۲}{\Delta t_۲}=\frac{\frac{۸}{۳}\Delta t_۲+۴\Delta t_۲}{\Delta t_۲}=\frac{۲۰}{۳}m/s$$

اکنون به سراغ کل مسیر می‌رویم

۴ اما باید زمان حرکت در هر نیمه را برحسب L به‌دست بیاوریم.

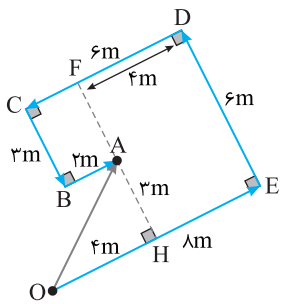
$$s_{av}=\frac{\ell}{t}\Rightarrow\begin{cases}۲۰=\frac{\frac{\ell}{۲}}{t_۱}=t_۱=\frac{\ell}{۴۰}\\ \frac{۲۰}{۳}=\frac{\frac{\ell}{۲}}{t_۲}\Rightarrow t_۲=\frac{\frac{\ell}{۲}}{\frac{۲۰}{۳}}=\frac{۳\ell}{۴۰}\end{cases}$$

$\ell_۱=\frac{\ell}{۲}$ با $s_{av_۱}=۲۰m/s$ — $\ell_۲=\frac{\ell}{۲}$ با $s_{av_۲}=\frac{۲۰}{۳}m/s$

۵ تندی متوسط در کل مسیر خواهد شد: $s_{av}=\frac{\ell}{\frac{\ell}{۴۰}+۳\frac{\ell}{۴۰}}=\frac{۴۰}{۴}=۱۰m/s$

A ۶۴ ۳

جابه‌جایی برداری است که از ابتدای مسیر به انتهای مسیر رسم می‌شود، با توجه به شکل جابه‌جایی برابر طول OA است. بنابراین از نقطهٔ O تا نقطهٔ A بردار جابه‌جایی OA را رسم می‌کنیم در مثلث OAH باید طول وتر OA را به‌دست بیاوریم بنابراین باید طول اضلاع AH و OH را از روی شکل مشخص کنیم:

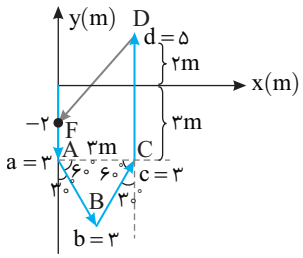


$AH=DE-BC=۶-۳=۳m$, $OH=OE-FD=۸-۴=۴m$

اکنون بردار جابه‌جایی را حساب می‌کنیم. $OA=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵m$

B ۶۵ ۳

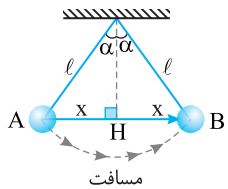
به شکل نگاه کنید. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. بنابراین ضلع $AC=۳m$ است. با توجه به فرض مسئله قرار است ذره خود را از نقطهٔ D به نقطه‌ای روی محور yها در مکان $-۲m$ (نقطهٔ F) برساند. بنابراین ذره باید جابه‌جایی DF را طی کند یعنی از نقطهٔ D به مختصات $D(۳,۲)$ به نقطهٔ $F(۰,-۲)$ برود بنابراین روی محور xها باید $-۳m$ و روی محور yها باید $-۴m$ جابه‌جا شود. بنابراین بردار DF خواهد شد:



$\overrightarrow{DF}=-۳\vec{i}-۴\vec{j}$

C ۶۶ ۱

خط فکری مسیر حرکت را مطابق شکل روبه‌رو رسم کنید. بردار A تا B را بکشید یعنی بردار جابه‌جایی را مشخص کنید. در این صورت مسیر حرکت از A تا B را روی شکل نشان دهید. باید طول AB را به کمک مثلثات به دست بیاورید و طول کمان مسیر AB را نیز به‌دست آورید تا بتوانید α را به کمک فرض مسئله حساب کنید.



۱ اندازهٔ جابه‌جایی AB برابر ۲x است و هر x روی شکل را به کمک سینوس به‌دست می‌آوریم. $\sin\alpha=\frac{x}{\ell}\Rightarrow x=\ell\sin\alpha\Rightarrow AB=۲\ell\sin\alpha$

نکته طول کمانی که زاویهٔ روبه‌روی آن θ است برابر $\frac{\theta}{۳۶۰}(۲\pi R)$ است.

۲ طول کمان AB را حساب می‌کنیم، کمان روبه‌روی AB برابر ۲α است بنابراین مسافت AB خواهد شد: $\text{مسافت}=\frac{۲\alpha}{۳۶۰}(۲\pi R)$

شعاع مسیر همان طول ریسمان آونگ است. $\text{مسافت}=\frac{۲\alpha}{۳۶۰}(۲\pi\ell)\Rightarrow\text{مسافت}=\frac{\alpha\pi\ell}{۹۰}$

۳ با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت:

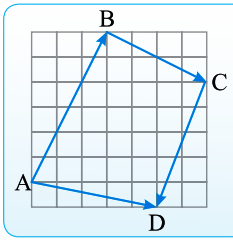
$$\frac{\text{مسافت}}{\text{جابه‌جایی}}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}\pi\Rightarrow\frac{\frac{\alpha\pi\ell}{۹۰}}{۲\ell\sin\alpha}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}\pi\Rightarrow\frac{\alpha}{\sin\alpha}=۴۵\sqrt{۲}$$

۴ اکنون باید گزینه‌ها را در این رابطه قرار داد تا اندازهٔ α مشخص می‌شود. زاویهٔ $\alpha=۴۵^\circ$ را امتحان می‌کنیم. $\frac{۴۵}{\sin۴۵^\circ}=۴۵\sqrt{۲}\Rightarrow\frac{۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\sqrt{۲}\Rightarrow\sqrt{۲}=\sqrt{۲}$

بنابراین $\alpha=۴۵^\circ$ جواب است.

B ۶۷ ۲

یادداشت ریاضی در شکل روبه‌رو که از کتاب ریاضی پایهٔ هشتم آورده شده است مسیر ذره‌ای که به‌ترتیب جابه‌جایی $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CD}$ را طی کرده نشان داده شده است و بردار $\overrightarrow{AD}$ بردار جابه‌جایی کل است. یعنی $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$



خط فکری در صورت مسئله سه جابه‌جایی برحسب بردارهای یکه بیان شده که ذره پشت سر هم آن‌ها را پیموده است بنابراین برای به‌دست آوردن جابه‌جایی کل باید جمع برداری آن‌ها را حساب کنید.

۱ بردار جابه‌جایی در کل مدت حرکت خواهد شد:

$$\vec{d}=\vec{d}_۱+\vec{d}_۲+\vec{d}_۳=(۵\vec{i}-۲\vec{j})+(۳\vec{i}+۷\vec{j})+(۴\vec{i}+۴\vec{j})\Rightarrow\vec{d}=۱۲\vec{i}+۹\vec{j}$$

۲ اندازهٔ جابه‌جایی را حساب می‌کنیم:

$$d=\sqrt{d_x^۲+d_y^۲}=\sqrt{۱۲^۲+۹^۲}\Rightarrow d=\sqrt{۱۴۴+۸۱}=\sqrt{۲۲۵}\Rightarrow d=۱۵m$$

۳ سرعت متوسط را به‌دست می‌آوریم.

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{۱۵}{۳+۵+۴}\Rightarrow v_{av}=\frac{۱۵}{۱۲}\Rightarrow v_{av}=۱/۲۵m/s$$

A ۶۸ ۱

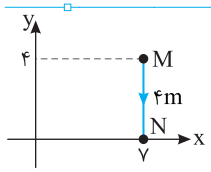
خط فکری همواره یادتان باشد که جابه‌جایی متحرک به مسیر حرکت بستگی ندارد و تنها به مختصات نقطهٔ ابتدایی از نقطهٔ انتهایی بستگی دارد و در حل این مسئله باید از نقطهٔ B چشم‌پوشی کنید و فاصلهٔ بین نقاط A و C را به کمک ریاضی به‌دست بیاورید. فاصلهٔ $A(۱,۱)$ تا $C(۲,۲)$ یعنی اندازهٔ جابه‌جایی خواهد شد:

$$AC=d=\sqrt{(x_C-x_A)^۲+(y_C-y_A)^۲}\Rightarrow|d|=\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}\,m$$

B ۶۹ ۱

برای به‌دست آوردن تندی متوسط نیاز داریم که مسافت طی شده از M تا N و سپس از N تا P را به‌دست بیاوریم.

۱ مسافت طی شده از MN مطابق شکل برابر $\ell_{MN}=۴m$ است.



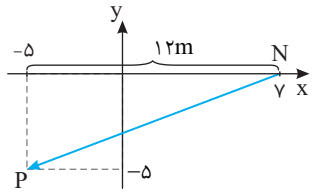
۲ متحرک روی خط راست از N به P رفته و فاصلهٔ N تا P خواهد شد:

$\ell_{NP}=\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}=۱۳m$

۳ مسافت کل برابر است با:

$\ell=\ell_{MN}+\ell_{NP}$

$=۴+۱۳=۱۷m$



۴ زمان کل حرکت برابر $۵+۳=۸s$ می‌شود.

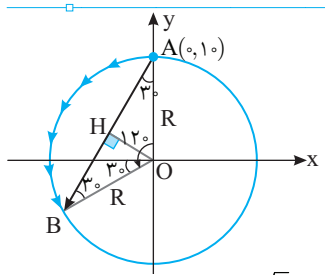
۵ تندی متوسط را به‌دست می‌آوریم.

$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۱۷}{۸}m/s$

B ۷۰ ۴

۱ متحرک روی دایره‌ای به شعاع $R=۱۰m$ از نقطهٔ A به نقطهٔ B رفته است. ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین OAB را رسم می‌کنیم.

۲ طول AH را به کمک $\cos ۳۰^\circ$ حساب می‌کنیم.



$\cos ۳۰^\circ=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{AH}{OA}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{AH}{R}\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}R$

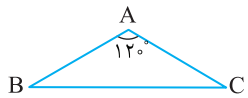
۳ بنابراین جابه‌جایی AB برابر است با:

$d=AB=۲AH=۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}R\Rightarrow d=\sqrt{۳}R\xrightarrow{R=۱۰m}d=۱۰\sqrt{۳}m$

۴ سرعت متوسط را به‌دست می‌آوریم.

$v_{av}=\frac{d}{t}=\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow v_{av}=۵\sqrt{۳}m/s$

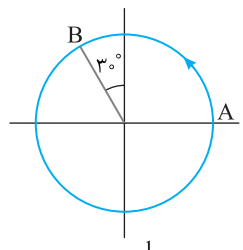
میانبر قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۱۲۰° همواره $\sqrt{۳}$ برابر طول هر ساق آن است. $BC=\sqrt{۳}AB$



بازی با سؤال متحرکی کمان AB را طی کرده است. مسافت طی‌شده توسط متحرک چند برابر اندازهٔ جابه‌جایی آن است؟

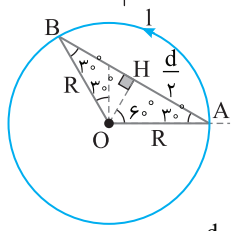
۱) ۱ ۲) ۳

۳) $\sqrt{۳}\pi$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۳}\pi}{۹}$



پاسخ زاویه‌ای که متحرک طی کرده $\frac{۱۲۰}{۳۶۰}=\frac{۱}{۳}$ است که دایره است بنابراین مسافت طی‌شده برابر طول کمان AB بوده که $\frac{۱}{۳}$ محیط دایره است.

$\ell=\frac{۱}{۳}(۲\pi R)\Rightarrow\ell=\frac{۲}{۳}\pi R$



اگر طول وتر AB را d فرض کنیم فاصلهٔ AH برابر $\frac{d}{۲}$ است و با توجه به شکل در مثلث OAH می‌توان نوشت:

$\sin ۶۰^\circ=\frac{\frac{d}{۲}}{R}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{d}{۲R}\Rightarrow d=\sqrt{۳}R$

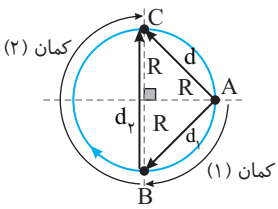
در این صورت نسبت مسافت و اندازهٔ جابه‌جایی خواهد شد:

$\frac{\ell}{d}=\frac{\frac{۲}{۳}\pi R}{\sqrt{۳}R}=\frac{۲\sqrt{۳}\pi}{۹}$

گزینهٔ ۴

C ۷۱ ۲

خط فکری دوباره متن مسئله را بخوانید. مسیر حرکت ذره ساعتگرد است یعنی مطابق شکل ذره از نقطهٔ A به نقطهٔ B سپس از نقطهٔ B به نقطهٔ C می‌رود. سرعت متوسط یعنی جابه‌جایی تقسیم بر زمان بنابراین شما باید جابه‌جایی از A تا B و جابه‌جایی از B تا C را حساب کنید و به کمک سرعت متوسط‌هایی که در مسئله داده شده، زمان حرکت را در هر مرحله به دست بیاورید.



با توجه به شکل متحرک کمان (۱) را با سرعت $۵\sqrt{۲}m/s$ و کمان (۲) را با سرعت متوسط $۴m/s$ طی کرده است. حال زمان کل حرکت را به‌دست می‌آوریم.

۱ جابه‌جایی در قسمت اول:

$d_۱=\sqrt{R^۲+R^۲}=R\sqrt{۲}$

۲ زمان در قسمت اول:

$v_{av}=\frac{d_۱}{\Delta t_۱}\Rightarrow\Delta t_۱=\frac{d_۱}{v_{av}}=\frac{R\sqrt{۲}}{۵\sqrt{۲}}=\frac{R}{۵}$

۳ جابه‌جایی در قسمت دوم:

$d_۲=R+R=۲R$

۴ زمان در قسمت دوم:

$v_{av}=\frac{d_۲}{\Delta t_۲}\Rightarrow\Delta t_۲=\frac{d_۲}{v_{av}}=\frac{۲R}{۴}=\frac{R}{۲}$

۵ کل زمان طی شده برابر است با:

$\Delta t_{کل}=\frac{R}{۵}+\frac{R}{۲}=\frac{۷}{۱۰}R$

۶ جابه‌جایی از ابتدا تا انتهای مسیر برابر بردار AC است که اندازهٔ آن خواهد شد:

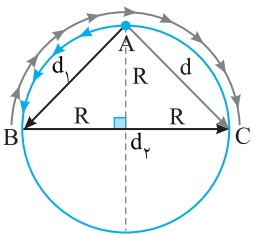
$d=\sqrt{R^۲+R^۲}=R\sqrt{۲}$

۷ سرعت متوسط را حساب می‌کنیم:

$v_{av}=\frac{d}{\Delta t_{کل}}=\frac{R\sqrt{۲}}{\frac{۷}{۱۰}R}=\frac{۱۰\sqrt{۲}}{۷}m/s$

بازی با سؤال ذره‌ای روی یک مسیر دایره‌ای با سرعت متوسط $۵\sqrt{۲}m/s$ پادساعتگرد کمان $\frac{\pi}{۲}$ و سپس خلاف جهت به صورت ساعتگرد با سرعت متوسط $۴m/s$ کمان π را طی می‌کند. بزرگی سرعت متوسط ذره در تمام مسیر حرکت چند متر بر ثانیه است؟

پاسخ فرض کنید که ذره روی محیط دایره از نقطهٔ A پادساعتگرد مطابق شکل به نقطهٔ B برود. در این صورت جابه‌جایی ذره خواهد شد:



$d_۱=AB=\sqrt{R^۲+R^۲}=\sqrt{۲}R$

با توجه به تعریف سرعت متوسط زمان حرکت از A تا B خواهد شد:

$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t_۱=\frac{\sqrt{۲}R}{۵\sqrt{۲}}=\frac{R}{۵}$

ذره ساعتگرد کمان π را طی کرده و از B به C می‌رود و جابه‌جایی ذره خواهد شد:

$d_۲=R+R=۲R$

زمان حرکت را حساب می‌کنیم.

$v_{av}=\frac{d_۲}{\Delta t_۲}\Rightarrow\Delta t_۲=\frac{۲R}{۴}=\frac{R}{۲}$

جابه‌جایی در کل مسیر یعنی بردار AC، اندازهٔ آن را حساب می‌کنیم.

$\sqrt{R^۲+R^۲}=\sqrt{۲}R$

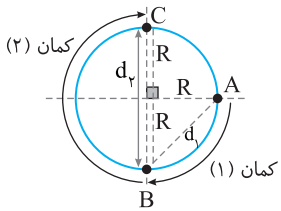
سرعت متوسط خواهد شد:

$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{\sqrt{۲}R}{\frac{R}{۲}+\frac{R}{۵}}\Rightarrow v_a=\frac{۱۰\sqrt{۲}}{۷}m/s$

دقیقاً همان حل تکرار شد.

۷۲ C **۳**

خط فکری به کمک محاسبهٔ جابه‌جایی d_1 و d_2 و با داشتن سرعت متوسط در این جابه‌جایی‌ها یعنی $5\sqrt{2}\,m/s$ و $4\,m/s$ زمان را در هر قسمت حساب کنید تا بتوانید زمان کل حرکت از A تا C را به‌دست بیاورید. سپس مسافت طی شده که مطابق شکل $\frac{3}{4}$ محیط دایره را حساب کرده و تندی متوسط را به‌دست بیاورید.



۱ جابه‌جایی در مرحلهٔ اول از A تا B با سرعت متوسط $5\sqrt{2}\,m/s$:

$$d_1=\sqrt{R^2+R^2}=R\sqrt{2}$$

۲ زمان جابه‌جایی در مرحلهٔ اول از A تا B:

$$v_{av}=\frac{d_1}{\Delta t_1}\Rightarrow \Delta t_1=\frac{d_1}{v_{av}}=\frac{R\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}=\frac{R}{5}\,s$$

۳ جابه‌جایی در مرحلهٔ دوم از B تا C با سرعت متوسط $4\,m/s$ وقتی است که ذره کمان π را ساعتگرد طی کرده و این جابه‌جایی برابر است با: $d_2=R+R=2R$

۴ زمان جابه‌جایی در مرحلهٔ دوم:

$$v_{av}=\frac{d_2}{\Delta t_2}\Rightarrow \Delta t_2=\frac{d_2}{v_{av}}=\frac{2R}{4}=\frac{R}{2}\,s$$

۵ زمان کل حرکت از A تا C خواهد شد.

$$\Delta t_{کل}=\frac{R}{5}+\frac{R}{2}=\frac{7}{10}R$$

۶ مسافت طی شده $\frac{3}{4}$ محیط دایره است.

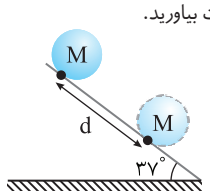
$$\ell=\frac{3}{4}(2\pi R)=\frac{9}{2}R$$

۷ تندی متوسط را به‌دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t_{کل}}=\frac{\frac{9}{2}R}{\frac{7}{10}R}=\frac{45}{7}\,m/s$$

۷۳ A **۴**

خط فکری صورت مسئله شما را نترساند. وقتی استوانه یک دور کامل می‌چرخد روی سطح به اندازهٔ محیط دایرهٔ سطح مقطع استوانه جلو می‌رود یعنی نقطهٔ M محل تماس استوانه با سطح پس از یک دور کامل به اندازهٔ $d=2\pi r$ جلو می‌رود. بنابراین شما کافی است محیط دایرهٔ سطح مقطع استوانه را به‌دست بیاورید.



جابه‌جایی نقطه M خواهد شد:

$$d=2\pi r \xrightarrow{\pi=3\,,\,r=5cm} d=2\times3\times5=30\,cm$$

۷۴ C **۲**

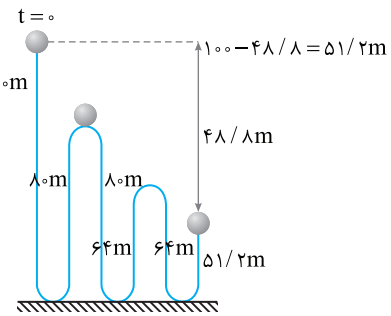
خط فکری متوجه این نکته می‌شوید که وقتی مسئله می‌گوید پس از هر برخورد ۸۰٪ ارتفاع قبلی بالا می‌آید. یعنی در ابتدا که ارتفاع آن ۱۰۰ متر است پس از برخورد اول $\frac{80}{100}\times100=80\,m$ و پس از برخورد دوم $80\times\frac{80}{100}=64\,m$ و پس از برخورد سوم $64\times\frac{80}{100}=51/2\,m$ و ... بالا می‌آید؟ بنابراین شما باید به کمک سرعت متوسط ابتدا مشخص کنید که در لحظهٔ $t=4s$ گلوله در چه مکانی قرار دارد، سپس مسافت طی شده را در کل زمان ۰ تا ۴s به‌دست بیاورید تا بتوانید تندی متوسط را حساب کنید.

۱ جابه‌جایی گلوله در بازهٔ صفر تا ۴s را حساب می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{d}{t}\Rightarrow d=v_{av}t\Rightarrow d=12/2\times4\Rightarrow d=48/8\,m$$

۲ فاصلهٔ گلوله در $t=4s$ از سطح زمین را به‌دست می‌آوریم.

$$100-48/8=51/2\,m$$



۳ مسیر حرکت را رسم کرده و مسافت را حساب می‌کنیم. البته حرکت روی خط راست است. گلوله روی خط راست بالا و پایین می‌شود و ما برای محاسبهٔ مسافت مسیر را این‌گونه رسم کرده‌ایم.

$$\ell=100+80+80+64+64+51/2=439/2\,m$$

۴ تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{t}=\frac{439/2}{4}=109/8$$

۷۵ C **۴**

خط فکری با یک مسئله ریاضی سر و کار داریم. متحرک در هر مرحله خسته شده و مسیر کمتری را با سرعت کوچک‌تری طی کرده است. اگر کل مسیر حرکت x باشد، در مرحلهٔ اول $\frac{x}{2}$ و در مرحلهٔ دوم $\frac{x}{4}$ و مرحلهٔ سوم $\frac{x}{8}$ و ... را طی می‌کند. باید زمان را در هر مرحله به‌دست بیاورید. سپس سرعت متوسط را در کل مسیر x حساب کنید.

زمان در هر مرحله خواهد شد:

$$v_{av_1}=\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}\Rightarrow v=\frac{\frac{x}{2}}{\Delta t_1}\Rightarrow \Delta t_1=\frac{x}{2v}$$

$$v_{av_2}=\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}\Rightarrow \frac{v}{2}=\frac{\frac{x}{4}}{\Delta t_2}\Rightarrow \Delta t_2=\frac{x}{2v}$$

$$v_{av_3}=\frac{\Delta x_3}{\Delta t_3}\Rightarrow \frac{v}{4}=\frac{\frac{x}{8}}{\Delta t_3}\Rightarrow \Delta t_3=\frac{x}{2v}$$

$$\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots$$

سرعت متوسط در کل مسیر را حساب می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{x}{t_{کل}}=\frac{x}{\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3+\cdots}\Rightarrow v_{av}=\frac{x}{\frac{x}{2v}+\frac{x}{2v}+\frac{x}{2v}+\cdots}$$

$$v_{av}=\frac{x}{\frac{x}{2v}\underbrace{(1+1+1+\cdots)}_{\text{بی‌نهایت بار}}}=\frac{2v}{\infty}$$

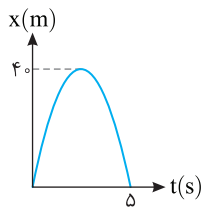
جمع تعداد بی‌نهایت عدد یک در مخرج برابر بی‌نهایت است و تقسیم یک عدد معین بر بی‌نهایت برابر صفر است، بنابراین:

$$v_{av}=\frac{2v}{\infty}=0$$

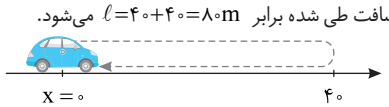
پنجره ۲

۷۶ A **۱**

خط فکری دقت کنید نمودار مکان - زمان مسیر حرکت نیست یعنی اینکه تصور نکنید که متحرک روی این مسیر بالا و پایین می‌رود. در نمودار مکان - زمان، در هر لحظه می‌توان مکان جسم را مشخص کرد و شما به کمک آن می‌توانید مسیر حرکت روی محور xها را رسم کنید. برای سادگی شما روی محور xها مسیر حرکت جسم را رسم کنید تا مسئله حل شود.



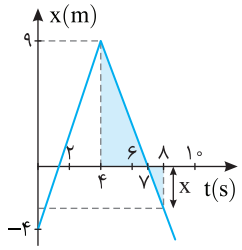
متحرک در $t=0$ در مکان $x=0$ است، سپس به مکان $+40\,m$ می‌رود و از آن نقطه تغییر جهت داده و برمی‌گردد. بنابراین در مدت 5s جابه‌جایی متحرک صفر است. اما در این مدت متحرک از مکان $x=0$ به مکان $x=40\,m$ رفته و سپس به مبدأ برمی‌گردد و مسافت طی شده برابر $\ell=40+40=80\,m$ می‌شود.



B ۷۷ ۱

یادآوری جابه‌جایی برداری است که ابتدای مسیر را به انتهای مسیر وصل می‌کند و نقطهٔ بین راه و مسیر حرکت مهم نیست.

خط فکری جابه‌جایی در مسئله خواسته شده است. در لحظهٔ $t=0$ مکان متحرک $-4m$ است. بنابراین شما باید مکان متحرک را در لحظهٔ $t=8s$ مشخص کنید و به کمک آن اندازهٔ جابه‌جایی را به‌دست بیاورید. معمولاً در نمودارهایی که خط راست هستند از تشابه مثلث استفاده می‌کنیم.



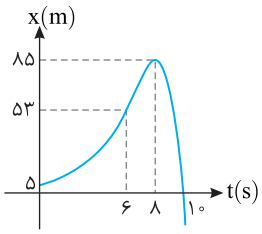
۱ دو مثلث رنگی در شکل با هم متشابه‌اند و نسبت تشابه خواهد شد: $\frac{9}{x}=\frac{3}{1}\Rightarrow x=3m$

البته x زیر محور زمان بوده و منفی است. یعنی در لحظهٔ $t=8s$ متحرک در مکان $-3m$ است.

۲ متحرک در لحظهٔ $t=0$ در مکان $-4m$ و در لحظهٔ $t=8s$ در مکان $-3m$ است. بنابراین در بازهٔ ۰ تا ۸s متحرک $+1m$ جابه‌جا شده است.

A ۷۸ ۴

گزینهٔ (۱): با توجه به نمودار مکان متحرک در لحظه‌های ۸s تا ۱۰s به‌ترتیب ۸۵m و صفر است. بنابراین جابه‌جایی در این بازه زمانی $d=0-85=-85m$ بوده و این گزینه نادرست است.



گزینهٔ (۲): در لحظهٔ $t=6s$ متحرک در مکان $+53$ و در لحظهٔ $t=10s$ متحرک در مکان $x=0$ است، یعنی جابه‌جایی آن $d=0-53=-53m$ بوده و گزینهٔ (۲) نادرست است.

گزینهٔ (۳): برای مسافت طی شده باید مسیر حرکت از $t=8s$ تا $t=10s$ را مرور کنیم. در این مدت حرکت متحرک روی محور xها و در یک جهت بوده و متحرک ۸۵ متر مسافت طی کرده است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

گزینهٔ (۴): در لحظهٔ $t=6s$ مکان متحرک $+53m$ بوده و در $t=8s$ متحرک در مکان ۸۵m تغییر جهت می‌دهد و در $t=10s$ به مبدأ می‌رود، بنابراین مسافتی که در این مدت طی می‌کند برابر است با $\ell=(85-53)+85=117m$.

B ۷۹ ۲

خط فکری مسافت همواره کمیتی مثبت است و هرگاه متحرک تغییر جهت دهد، مسافت همچنان مثبت می‌ماند. بنابراین نموداری می‌تواند نمودار مسافت - زمان این متحرک باشد که از مبدأ شروع شود و تغییر جهت نداشته باشد.

با توجه به آنچه در خط فکری بیان شده، گزینهٔ (۲) می‌تواند نمودار مسافت - زمان این متحرک باشد.

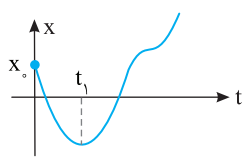
A ۸۰ ۳

۱ مکان اولیهٔ متحرک در لحظهٔ $t=0$، مثبت است.

۲ متحرک از لحظهٔ صفر تا t_1 در خلاف جهت محور در حرکت است.

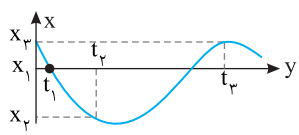
۳ متحرک در لحظهٔ t_1 تغییر جهت داده است.

۴ بعد از لحظهٔ t_1 متحرک تمام مدت در جهت مثبت محور x در حرکت است. بنابراین گزینهٔ (۳) پاسخ درست است.



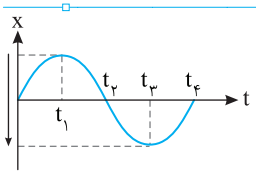
A ۸۱ ۲

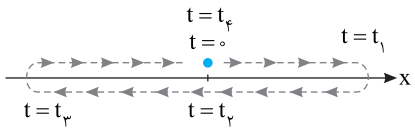
متحرک در لحظهٔ $t_1=0$ در مبدأ مکان است. در لحظهٔ t_2 در مکان x_2 و در لحظهٔ t_3 در مکان x_3 است که با توجه به نمودار فاصلهٔ متحرک از مبدأ در لحظهٔ t_2 از بقیهٔ لحظه‌ها بیشتر است.



A ۸۲ ۳

مسیر حرکت از $t=0$ تا $t=t_4$ مطابق شکل روبه‌روست و در بازهٔ t_1 تا t_3 متحرک در خلاف جهت محور xها یعنی در جهت منفی محور در حرکت است.

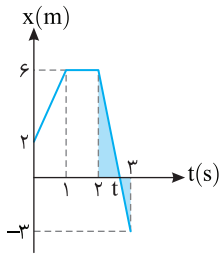




حرکت در خلاف جهت محور

A ۸۳ ۲

خط فکری در مدت ۰ تا ۱s موجه از مکان ۲ متری به مکان ۶ متری رفته یعنی از مبدأ مکان در حال دور شدن است. در بازهٔ ۱s تا ۲s موجه در مکان $+6m$ مبدأ ساکن است و مکانش تغییر نمی‌کند. در لحظهٔ t مکان موجه $x=0$ می‌شود. یعنی در بازهٔ ۲s تا t موجه در خلاف جهت محور xها از مکان $+6m$ در حال نزدیک شدن به مبدأ است، بنابراین شما باید زمان t را به کمک تشابه مثلث به‌دست بیاورید.



دو مثلث رنگی در شکل متشابه هستند، بنابراین نسبت تشابه خواهد شد:

$$\frac{6}{3}=\frac{t-2}{3-t}\Rightarrow 18-6t=3t-6$$

$$\Rightarrow 24=9t\Rightarrow t=\frac{8}{3}s$$

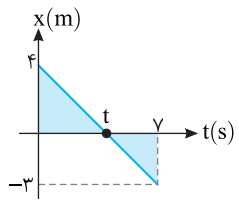
از بازهٔ $t=2s$ تا $t=\frac{8}{3}s$ متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ $(x=0)$ است، بنابراین:

$$\Delta t=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}s$$

البته شما می‌توانستید به کمک شیب خط نیز مقدار t را حساب کنید.

A ۸۴ ۳

خط فکری در حرکت متحرک هنگامی که مکان متحرک منفی است، بردار مکان منفی است و اگر مکان متحرک مثبت باشد بردار مکان مثبت است. بنابراین هنگام عبور از مبدأ مکان $(x=0)$ بردار مکان تغییر جهت می‌دهد. شما باید از تشابه مثلث، t را به دست بیاورید.

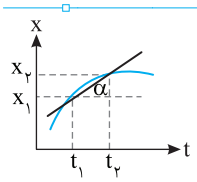


دو مثلث رنگی متشابه هستند و نسبت تشابه خواهد شد:

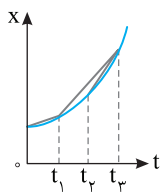
$$\frac{t}{4}=\frac{7-t}{3}\Rightarrow 3t=28-4t\Rightarrow 7t=28\Rightarrow t=4s$$

B ۸۵ ۳

یادآوری در نمودار مکان - زمان شیب خط قاطع بین دو نقطه برابر سرعت متوسط بین آن دو نقطه است. $v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\tan\alpha$



در بازه‌های زمانی بیان شده در گزینه‌ها، خط قاطع را روی نمودار رسم می‌کنیم. در هر گزینه که شیب خط قاطع بیشتر باشد، سرعت متوسط بزرگ‌تر است. در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3 شیب خط قاطع از بقیهٔ بازه‌ها بیشتر است بنابراین سرعت متوسط در این بازه بزرگ‌تر از بقیهٔ بازه‌هاست.

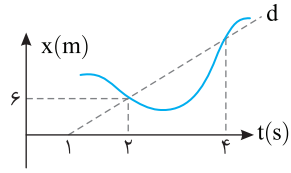


B ۸۶ ۳

خط فکری تندی متوسط به مسافت یعنی مسیر حرکت بستگی دارد که در نمودار چگونگی مسیر یعنی اینکه متحرک از چه نقاطی می‌گذرد مشخص نیست، بنابراین تندی متوسط قابل محاسبه نیست. بنابراین شما باید به سراغ سرعت متوسط بروید و سرعت متوسط را از شیب خط d به‌دست بیاورید.

شیب خط d در همه جای آن قطعاً یکسان است. بنابراین برای به‌دست آوردن سرعت متوسط، کافی است شیب خط d را به کمک دو نقطه که روی نمودار مختصات مشخص دارند به‌دست آوریم.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۶-۰}{۲-۱}=۶m/s$$

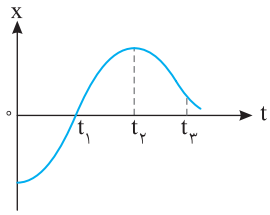


بنابراین سرعت متوسط در بازهٔ ۱s تا ۲s، ۲s تا ۴s یا ۱s تا ۴s برابر ۶m/s است.

A ۸۷ ۱

یادآوری شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر سرعت متحرک است.

با توجه به نمودار در لحظهٔ $t_۱$ شیب خط مماس از لحظه‌های دیگر بیشتر و تندی متحرک نیز بیشتر است.



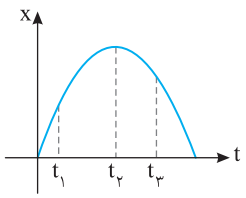
بازی با سؤال نمودار مکان - زمان حرکت متحرکی مطابق شکل روبه‌رو می‌باشد. در کدام لحظه تندی متحرک بیشتر است؟ تجربی - ۱۴۰۰

۱) $t_۱$

۲) $t_۲$

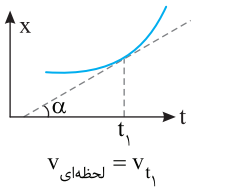
۳) $t_۳$

۴) نمی‌توان اظهارنظر قطعی کرد.

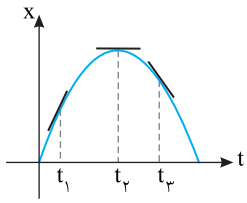


پاسخ یادآوری شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر تندی لحظه‌ای (اندازهٔ سرعت لحظه‌ای) در آن لحظه است.

دقت کنید تندی لحظه‌ای همواره مثبت است، بنابراین شما همواره باید قدرمطلق شیب خط مماس را بررسی کنید. اکنون در لحظه‌های خواسته شده، خط مماس بر نمودار را رسم می‌کنیم. شیب خط مماس در لحظهٔ $t_۱$ از دو لحظهٔ دیگر بزرگ‌تر است. بنابراین تندی در لحظهٔ $t_۱$ از بقیهٔ لحظه‌های بیان شده بیشتر است.



$v_{\text{لحظه‌ای}}=v_{t_۱}$



گزینهٔ ۱

B ۸۸ ۳

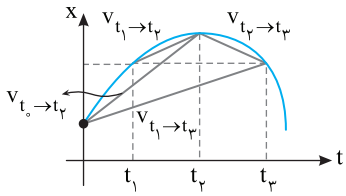
خط فکری مسئلهٔ ساده‌ای است. با رسم خط قاطع در بازه‌های زمانی که در گزینه‌ها بیان شده می‌توان مشخص کرد که شیب کدام خط قاطع منفی است در نتیجه سرعت متوسط منفی است.

برای سادگی روی شکل v_{av} را با حرف v نمایش داده‌ایم. در بازهٔ صفر تا $t_۲$ شیب خط قاطع یعنی سرعت متوسط مثبت است و گزینهٔ (۱) نادرست است.

در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ نیز شیب خط قاطع یعنی سرعت متوسط مثبت است و گزینهٔ (۲) نادرست است.

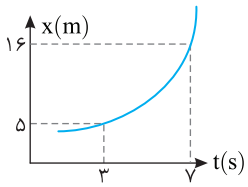
در بازهٔ $t_۲$ تا $t_۳$ شیب خط قاطع منفی و سرعت متوسط منفی بوده و گزینهٔ (۳) درست است.

در بازهٔ صفر تا $t_۳$ شیب خط قاطع مثبت و سرعت متوسط مثبت بوده و گزینهٔ (۴) نادرست است.



A ۸۹ ۲

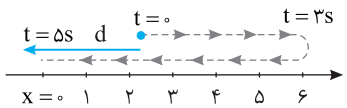
به نمودار دقت کنید. متحرک روی خط راست (محور xها) بدون تغییر جهت از مکان x=۵m به مکان x=۱۶m رفته بنابراین می‌توان نوشت:



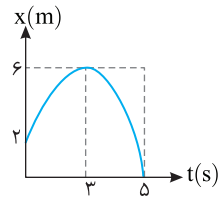
$$s_{av}=v_{av}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{۱۶-۵}{۷-۳}=۲/۷۵m/s$$

A ۹۰ ۲

مسیر حرکت را روی محور xها رسم می‌کنیم. البته می‌توانید این کار را در ذهن خود انجام دهید.



۱ جابه‌جایی متحرک برداری است که از x=۲ باید به x=۰ برسد یعنی از ابتدای مسیر به انتهای مسیر رسم شود. بنابراین d=−۲m و سرعت متوسط برابر است با:



$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{-۲}{۵-۰}\Rightarrow v_{av}=-۰/۴m/s$$

۲ مطابق شکل متحرک از مکان +۲m به مکان +۶m رفته یعنی ۶−۲=۴m مسافت طی کرده سپس از مکان +۶m به مکان x=۰ می‌رود و در این مدت نیز مسافت ۶m را طی می‌کند. بنابراین مسافت طی شده در مدت ۰ تا ۵s برابر ℓ=۴+۶=۱۰m می‌شود. از این‌رو تندی متوسط خواهد شد

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{۱۰}{۵-۰}\Rightarrow s_{av}=۲m/s$$

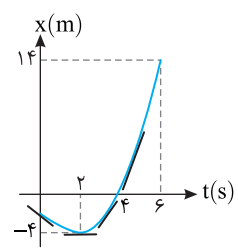
B ۹۱ ۳

یادآوری قدرمطلق شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر تندی لحظه‌ای متحرک است و هرچه خط مماس به حالت قائم نزدیک‌تر شود، تندی لحظه‌ای متحرک بیشتر می‌شود.

نکته حرکت تندشونده یعنی حرکتی که در آن تندی جسم افزایش می‌یابد بنابراین هرگاه قدرمطلق شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان افزایش یابد حرکت تندشونده است.

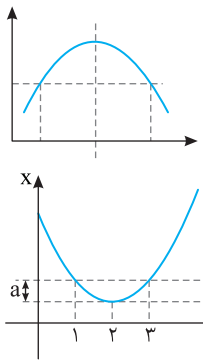
یادآوری در نقاط بیشینه و کمینه نمودار مکان - زمان شیب خط مماس صفر است، یعنی تندی لحظه‌ای متحرک صفر است.

به نمودار نگاه کنید. از لحظهٔ ۰ تا ۲s قدرمطلق شیب خط مماس در حال کاهش بوده و در t=۲s تندی صفر شده و حرکت کندشونده است و از t=۲s تا t=۶s شیب خط مماس در حال افزایش بوده و حرکت تندشونده است. مسافت طی شده از −۴m تا +۱۴m برابر ℓ=۱۸m است و تندی متوسط خواهد شد:



$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۱۸}{۴}=۴/۵m/s$$

۴ ۹۲ B



یادآوری تندی متوسط برابر است با مسافت طی شده در یکای زمان. از طرفی سهمی (نمودار معادلهٔ درجه دوم) نسبت به خط قائم گذرا از رأس سهمی متقارن می‌باشد. $x_{t=1}$ با $x_{t=3}$ با هم برابر است، مسافت طی شده از ۱s تا ۲s و ۲s تا ۳s را روی شکل با حرف a نشان داده‌ایم در این صورت:

در بازهٔ $t=1s$ تا $t=2s$ و در بازهٔ $t=2s$ تا $t=3s$ تندی متوسط خواهد شد:

$$t=1s \text{ تا } t=2s \Rightarrow s_{av}=\frac{a}{1}=a \quad , \quad t=2s \text{ تا } t=3s \Rightarrow v_{av}=\frac{a}{1}=a$$

در بازهٔ ۱s تا ۳s، مسافت طی‌شده $L=a+a=2a$ است و تندی متوسط در این بازه نیز برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{2a}{3-1}=a$$

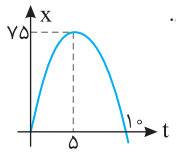
بنابراین در هر سه بازه، تندی یکسان است.

۳ ۹۳ C

یادداشت ریاضی هرگاه ریشه‌های یک معادله درجه ۲ (x_1 و x_2) را داشته باشیم معادلهٔ آن خواهد شد:

$$y=a(x-x_1)(x-x_2)$$

خط فکری در حل این مسئله شما باید ابتدا معادلهٔ حرکت را به‌دست بیاورید. بنابراین باید به سراغ تمام دانسته‌های خود دربارهٔ سهمی بروید.



۱ نمودار سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس سهمی متقارن است. بنابراین مختصات رأس این سهمی خواهد شد $(t=5s, x=75m)$

۲ ریشه‌های معادله روی نمودار مشخص است $(t=10s, t=0)$

۳ معادلهٔ درجه ۲ این سهمی را به کمک ریشه‌های آن می‌نویسیم:

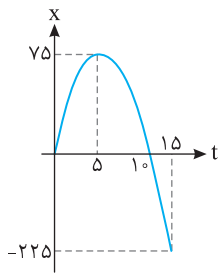
$$x=a(t-0)(t-10) \Rightarrow x=at^2-10at \quad (I)$$

۴ باید مختصات رأس در این معادله صدق کند.

$$75=a(5)^2-10a(5) \Rightarrow 75=25a-50a \Rightarrow a=-3$$

۵ بنابراین معادلهٔ حرکت خواهد شد:

$$\xrightarrow{(I)} x=-3t^2+30t$$



۶ مکان متحرک در $t=15s$ را حساب می‌کنیم

$$x=-3(15)^2+30\times15=-3\times225+450$$

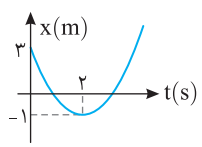
$$\Rightarrow x=-225m$$

۷ مسافت طی شده از ۰ تا ۱۵s را به‌دست می‌آوریم. $\ell=75+75+225=375m$

۸ تندی متوسط در مدت ۱۵s خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{375}{15}=25m/s$$

بازی با سؤال نمودار مکان - زمان متحرکی به صورت سهمی شکل روبه‌رو است. تندی متوسط متحرک در بازهٔ $t_1=1s$ تا $t_2=5s$ چند متر بر ثانیه است؟ از کتاب درسی



۱) ۵ ۲) ۴/۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۱/۵

پاسخ در حل این تست باید به کمک داده‌های روی نمودار معادلهٔ $x=at^2+bt+c$ را کامل کنیم.

۱ در لحظهٔ $t=0$ مکان اولیهٔ متحرک $x_0=3m$ است، از این رو:

$$3=0+0+c \Rightarrow c=3m$$

۲ برای مختصات رأس سهمی می‌توان نوشت:

$$t=-\frac{b}{2a} \xrightarrow{t=2s} 2=\frac{-b}{2a} \Rightarrow b=-4a \quad (I)$$

۳ مختصات رأس باید در معادله صدق کند:

$$(t=2s, x=-1m) \Rightarrow -1=4a+2b+3 \Rightarrow 4a+2b=-4 \Rightarrow 2a+b=-2 \quad (II)$$

از رابطه‌های (I) و (II)، a و b را به‌دست می‌آوریم.

$$2a+b=-2 \Rightarrow 2a-4a=-2 \Rightarrow -2a=-2 \Rightarrow a=1, b=-4a \Rightarrow b=-4$$

معادله کامل شد: $x=t^2-4t+3$

اکنون در لحظه‌های $t=1s$ و $t=5s$، مکان متحرک را حساب می‌کنیم:

$$t=1s \Rightarrow x=1-4+3 \Rightarrow x=0$$

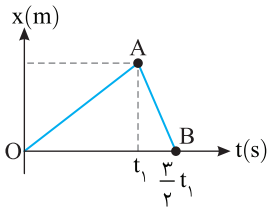
$$t=5s \Rightarrow x=25-20+3 \Rightarrow x=8m$$

مسافت طی شده را به‌دست می‌آوریم. متحرک در لحظهٔ $t=1s$ از مکان $x=0$ به مکان $-1m$ رفته و سپس از مکان $-1m$ به مکان $+8m$ رفته است. بنابراین $\ell=1+1+8=10m$

تندی متوسط برابر است با: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{10}{5-1}=2/5m/s$ گزینهٔ ۳

۲ ۹۴ A

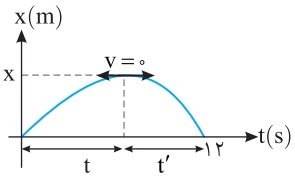
با توجه به تعریف سرعت متوسط $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$، سرعت متوسط را در هر شاخه حساب کرده و بر هم تقسیم می‌کنیم. داده‌های روی نمودار را در رابطهٔ سرعت متوسط قرار می‌دهیم.



$$\frac{v_{av_{OA}}}{v_{av_{AB}}}=\frac{\frac{x_A-0}{t_1}}{\frac{0-x_A}{\frac{3}{2}t_1-t_1}}=-\frac{1}{2}$$

۱ ۹۵ B

خط فکری ابتدا باید برای خودتان مشخص کنید که در کدام بازه حرکت تندشونده است. سپس به سراغ اطلاعات مسئله بروید و زمان حرکت تندشونده را حساب کنید.



۱ در بازهٔ ۰ تا t تندی متحرک به سمت صفر می‌رود و حرکت کندشونده است و در بازهٔ t' متحرک از $v=0$ شروع به حرکت کرده و تندی آن در حال افزایش است. شما با رسم چند خط مماس می‌توانید این مسئله را بررسی کنید. هرچه به سمت ۱۲s بروید خط مماس به حالت قائم نزدیک‌تر شده و قدرمطلق شیب آن در حال افزایش بوده و حرکت تندشونده است.

۲ با توجه به نمودار در بازهٔ ۰ تا t مسافت طی شده $\ell_1=x$ و در بازهٔ ۰ تا ۱۲s مسافت طی شده $\ell_2=2x$ است.

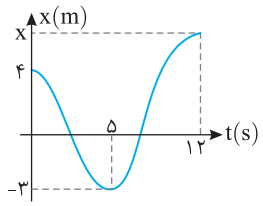
۳ با توجه به فرض مسئله می‌توانیم بنویسیم:

$$s_{av_{0\to t}}=2s_{av_{12}} \xrightarrow{s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}} \frac{x}{t}=2\frac{2x}{12} \Rightarrow t=3s$$

۴ بنابراین مدت زمانی که حرکت تندشونده است برابر خواهد شد با: $t'=12-3=9s$

۱ ۹۶ B

خط فکری دقت کنید: هرگاه در مسئله یک مجهول غیرقابل محاسبه داشته باشیم، معمولاً آن مجهول هنگام محاسبات حذف می‌شود. بنابراین نگران مکان متحرک در لحظهٔ $t=12s$ نباشد و سرعت متوسط و تندی متوسط برحسب x یعنی مکان در $t=12s$ به‌دست بیاورید و از هم کم کنید.



۱ مسافت طی شده در مدت ۱۲s را به کمک نمودار حساب کنید.

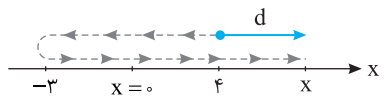
$$\ell=4+3+3+x=10+x$$

۲ تندی متوسط را در این مدت به‌دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow s_{av}=\frac{10+x}{12}$$

۳ در مدت $12s$ متحرک از مکان $x=4m$ به مکان x می‌رود و جابه‌جایی آن خواهد شد:

$$d=x-4$$



۴ سرعت متوسط را حساب می‌کنیم

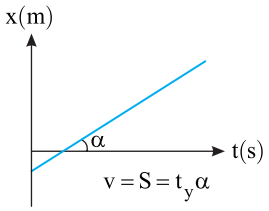
$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{x-4}{12}$$

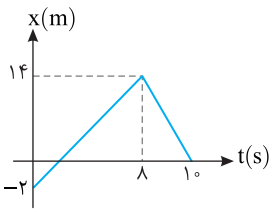
۵ s_{av} و v_{av} را از هم کم می‌کنیم و مسئله را حل می‌کنیم.

$$s_{av}-v_{av}=\frac{10+x}{12}-\frac{x-4}{12}\Rightarrow s_{av}-v_{av}=\frac{10+x-x+4}{12}=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}m/s$$

A ۹۷ ۱

یادآوری در هر بازه‌ای که نمودار مکان - زمان، خط راست مایل باشد، در تمام بازه‌های آن شیب خط یکسان است، یعنی در تمام لحظات سرعت لحظه‌ای و تندی لحظه‌ای برابر و مقدار آن ثابت است. نمودار از دو قسمت در بازهٔ ۰ تا $8s$ و ۸ تا $10s$ تشکیل شده و در هر بازه تندی لحظه‌ای ثابت و برابر شیب نمودار است. بنابراین تندی در لحظهٔ $t=4s$ یعنی شیب نمودار در بازهٔ ۰ تا $8s$ و تندی در لحظهٔ $t=9s$ یعنی شیب نمودار در بازهٔ $8s$ تا $10s$ از این رو خواهیم داشت:





$$v_{t=4s}=\frac{14-(-2)}{8-0}=2m/s\Rightarrow s_{t=4s}=2m/s$$

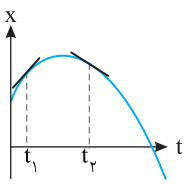
$$v_{t=9s}=\frac{0-14}{10-8}=-7\frac{m}{s}\Rightarrow s_{t=9s}=7m/s$$

در این صورت:

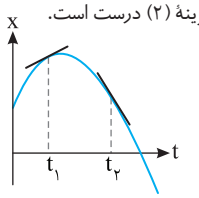
$$\frac{s_{t=4s}}{s_{t=9s}}=\frac{2}{7}$$

B ۹۸ ۲

خط فکری به دو مطلب باید دقت کنید. یکی اینکه در لحظهٔ t_1 سرعت مثبت است $(+10m/s)$ بنابراین شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در این لحظه باید مثبت باشد و در لحظهٔ t_2 سرعت منفی است $(-12m/s)$ و شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان منفی است و دیگر اینکه اندازهٔ سرعت در لحظهٔ t_1 از اندازهٔ سرعت در لحظهٔ t_2 کمتر است $(|-12|>10)$، بنابراین قدرمطلق شیب خط مماس در لحظهٔ t_1 باید از قدرمطلق شیب خط مماس در لحظهٔ t_2 کمتر باشد. اکنون گزینه‌ها را بررسی کنید.



از گزینه‌های (۳) و (۴) شروع می‌کنیم. در گزینهٔ (۳) شیب خط مماس در لحظه‌های t_1 و t_2 هر دو منفی است یعنی سرعت در این لحظه‌ها منفی است و گزینهٔ (۳) نادرست است. در گزینهٔ (۴) شیب خط مماس بر نمودار در لحظه‌های t_1 و t_2 هر دو مثبت است یعنی سرعت در این لحظه‌ها مثبت است و گزینهٔ (۴) نادرست است. اما به سراغ گزینه‌های (۱) و (۲) می‌رویم. شیب خط مماس در نمودار شکل (۱) در لحظهٔ t_1 از قدرمطلق شیب خط مماس در لحظهٔ t_2 بیشتر است و این گزینه نادرست است. در گزینهٔ (۲) قدرمطلق شیب خط مماس در لحظهٔ t_2 بزرگ‌تر بوده و گزینهٔ (۲) درست است.



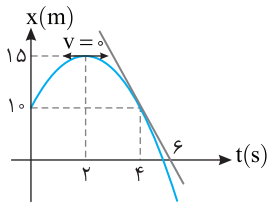
نکته دقت کنید در فیزیک وقتی از بزرگی شیب خط مماس حرف می‌زنیم یعنی هرچه خط مماس به حالت قائم نزدیک‌تر شود بزرگی شیب خط مماس بیشتر می‌شود و تندی لحظه‌ای جسم بیشتر می‌شود.

A ۹۹ ۲

خط فکری از شما در مورد سرعت لحظه‌ای سؤال شده بنابراین شما باید به سراغ شیب خط مماس در لحظه‌های $t=2s$ و $t=4s$ بروید زیرا شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان بر برابر سرعت لحظه‌ای است. البته در نقاط بیشینه و کمینه که خط مماس موازی محور افقی است. شیب صفر و سرعت متحرک صفر است حال با این اطلاعات مسئله را حل کنید.

۱ لحظهٔ $t=2s$، نقطهٔ بیشینه نمودار است و سرعت لحظه‌ای در این لحظه صفر است.

۲ با اطلاعات روی نمودار شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان را در لحظهٔ $t=4s$ به‌دست می‌آوریم



$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{0-10}{6-4}=-5m/s$$

B ۱۰۰ ۱

خط فکری در این سؤال با نمودار $x-t$ سروکار داریم، به دو نکته زیر دقت کنید:

۱ سرعت متوسط برابر $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ (جابه‌جایی) یا شیب خط قاطع بین دو لحظه است و تندی متوسط برابر $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}$ (مسافت) است.

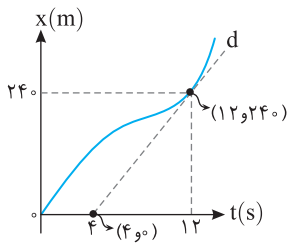
۲ سرعت در هر لحظه برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در آن لحظه و تندی برابر اندازهٔ شیب خط مماس در آن لحظه خواهد بود.

در حل سؤال ابتدا با فرض مسئله یعنی برابری تندی در لحظهٔ $t=12s$ با تندی متوسط در بازهٔ $t_1=2s$ تا $t_2=14s$ شروع می‌کنیم، سپس خواستهٔ سؤال یعنی نسبت سرعت متوسط در دو بازهٔ گفته شده را حساب می‌کنیم.

۳ تندی در لحظهٔ $t=12s$ برابر شیب خط مماس d است.

یادآوری شیب خط برابر نسبت تغییرات محور قائم به تغییرات محور افقی است:

$$\text{شیب خط}=\frac{\text{تغییرات محور قائم}}{\text{تغییرات محور افقی}}=\frac{240-0}{12-4}=\frac{240}{8}=30m/s$$



شیب خط برابر تندی لحظه‌ای است، بنابراین: $s(t=12s)=30m/s$ (I)

۴ مکان متحرک در لحظهٔ $t=14s$ داده نشده و مطابق شکل در بازهٔ $2s$ تا $14s$ متحرک از مکان $60m$ به مکان x می‌رسد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{x-60}{12}\quad (II)$$

با توجه به فرض مسئله تندی در لحظهٔ $12s$ با تندی متوسط در بازهٔ $2s$ تا $14s$ باهم برابر است پس از رابطهٔ (I) و (II) می‌توان نوشت:

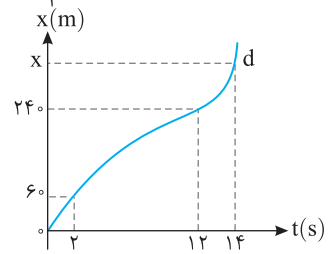
$$\frac{x-60}{12}=30\Rightarrow x-60=360\Rightarrow x=420m$$

یادآوری دو ثانیه اول یعنی $t=0$ تا $t=2s$ و دو ثانیه هفتم یعنی $t=12s$ تا $t=14s$

دو ثانیه هفتم	دو ثانیه ششم	دو ثانیه پنجم	دو ثانیه چهارم	دو ثانیه سوم	دو ثانیه دوم	دو ثانیه اول
۱۲s تا ۱۴s	۱۰s تا ۱۲s	۸s تا ۱۰s	۶s تا ۸s	۴s تا ۶s	۲s تا ۴s	۰ تا ۲s

۵ در دو ثانیه اول (۰ تا ۲s) متحرک از مکان $x=0$ تا $x=60m$ جابه‌جا می‌شود و سرعت متوسط در این بازه برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{60-0}{2}=30m/s$$

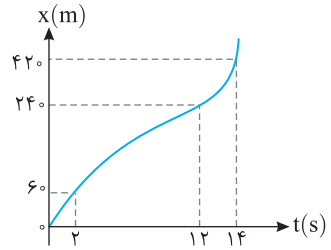


۶ در دو ثانیه هفتم (۱۲s تا ۱۴s) متحرک از مکان $x=240m$ به مکان $x=420m$ می‌رود و سرعت متوسط خواهد شد:

$$v'_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v'_{av}=\frac{420-240}{2}=\frac{180}{2}=90m/s$$

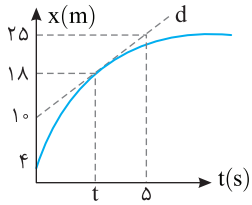
۷ نسبت v_{av} به v'_{av} را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{v_{av}}{v'_{av}}=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$$



B ۱۰۱ ۱

۱ لحظه‌ای که مکان متحرک $+18m$ است را به راحتی به کمک شیب خط d می‌توانید به‌دست بیاورید.



$$\frac{25-10}{5-0}=\frac{18-10}{t-0}\Rightarrow 3=\frac{8}{t}\Rightarrow t=\frac{8}{3}s$$

۲ تندی لحظه‌ای در لحظهٔ t نیز شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان یعنی شیب خط d است.

$$v=\frac{25-10}{5-0}=3m/s$$

B ۱۰۲ ۳

قبل از حل مسئله دقت کنید تقسیم‌بندی روی محور tها ۲s، ۲s بوده و تقسیم‌بندی روی محور xها ۶m، ۶m است.

۱ به نمودار دقت کنید. در $t=0$ نمودار بر محور t مماس شده یعنی شیب خط مماس در $t=0$ صفر بوده و متحرک از حال سکون به راه افتاده است.

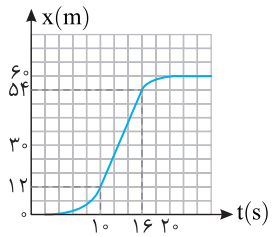
۲ تا لحظهٔ $t=10s$ شیب نمودار در حال افزایش است پس به سرعت متحرک اضافه می‌شود.

۳ از لحظهٔ $t=10s$ تا $t=16s$ شیب نمودار ثابت است و نتیجه می‌گیریم که سرعت در این بازه ثابت مانده و سرعت در این بازه همان تندی در لحظهٔ $t=10s$ است.

۴ از لحظهٔ $t=16s$ شیب خط مماس در حال کاهش است بنابراین سرعت در حال کاهش است.

۵ نتیجه اینکه بیشینه سرعت همان سرعت در بازهٔ ۱۰s تا ۱۶s است.

۶ از نمودار مشخص می‌شود که در لحظهٔ $t=10s$ و $t=16s$ مکان جسم به‌ترتیب ۱۲m و ۵۴m است. بنابراین سرعت خواهد شد:



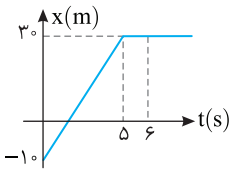
$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{54-12}{16-10}=\frac{42}{6}\Rightarrow v=7m/s$$

A ۱۰۳ ۴

در لحظهٔ t_2 خط مماس، خط افقی و شیب آن صفر است، یعنی در این لحظه سرعت برابر صفر است. بنابراین بازه‌ای را باید انتخاب کنیم که جابه‌جایی در آن بازه صفر باشد تا سرعت متوسط مانند سرعت لحظه‌ای در t_2 صفر شود که با توجه به نمودار از t_1 تا t_4 و همچنین t_3 تا t_5 جابه‌جایی صفر می‌شود که در گزینه‌ها بازه t_1 تا t_3 را داریم.

A ۱۰۴ ۲

۱ در لحظهٔ $t=0$ مکان متحرک $x=-10m$ و در لحظهٔ $t=6s$ مکان متحرک $30m$ است. بنابراین سرعت متوسط در این بازه برابر است با:



$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{30-(-10)}{6}=\frac{40}{6}$$

$$\Rightarrow v_{av}=\frac{20}{3}m/s$$

۲ در بازهٔ ۰ تا ۵s نمودار یک خط راست مایل است و در تمام لحظات تندی (سرعت) یکسان و برابر شیب نمودار است بنابراین خواهیم داشت:

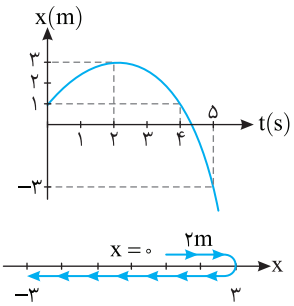
$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v=\frac{30-(-10)}{5}=8m/s\Rightarrow v_{t=4s}=8m/s$$

۳ اکنون نسبت را حساب می‌کنیم:

$$\frac{v_{av}}{v_{t=4s}}=\frac{\frac{20}{3}}{\frac{20}{24}}=\frac{5}{6}$$

A ۱۰۵ ۴

در بازهٔ صفر تا ۴s متحرک از مکان $x=1m$ به مکان $x=1m$ جابه‌جا شده و جابه‌جایی آن صفر است. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.



در بازهٔ صفر تا ۵s مسافت طی شده متحرک برابر است با:

$$L=2+6=8m$$

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{8}{5}=1/6m/s$$

بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

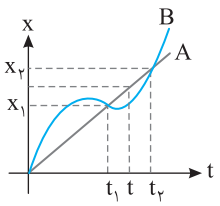
شیب خط مماس در $t=5s$ از شیب خط مماس در $t=4s$ بیشتر است پس تندی لحظه‌ای (اندازهٔ سرعت لحظه‌ای) در $t=5s$ از $t=4s$ بزرگ‌تر است.

بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

در لحظهٔ $t=2s$ مکان متحرک $x=3m$ و در لحظهٔ $t=5s$ مکان متحرک $-3m$ است، یعنی متحرک در خلاف جهت محور جابه‌جا شده و سرعت متوسط منفی است و در تمام بازهٔ ۲s تا ۵s سرعت منفی بوده و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۱۰۶ ۴

خط فکری در تمام گزینه‌ها سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا t_1 و یا t_1 تا t_2 برای دو متحرک A و B مقایسه شده است. بنابراین شما باید با توجه به تعریف سرعت متوسط $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ دربارهٔ مقایسهٔ سرعت متوسط‌ها اظهارنظر کنید.



در بازهٔ ۰ تا t_1 مکان هر دو متحرک از صفر تا x_1 تغییر کرده بنابراین جابه‌جایی متحرک A و B یکسان و برابر $\Delta x=x_1$ بوده و سرعت متوسط A و B در این بازه برابر است. همچنین در بازهٔ t_1 تا t_2 جابه‌جایی دو متحرک A و B یکسان و برابر x_2-x_1 است و در این بازه نیز سرعت متوسط یکی است. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.

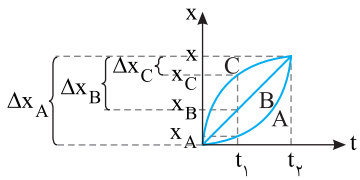
به نمودار نگاه کنید. در بازهٔ ۰ تا t جابه‌جایی A از B بیشتر بوده و سرعت متوسط A از B بیشتر است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

B ۱۰۷ ۳

خط فکری به صورت سؤال دقت کنید، سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا t_2 از شما خواسته نشده است. بلکه سرعت متوسط از لحظهٔ t_1 تا t_2 مورد پرسش است بنابراین شما باید بررسی کنید که در این بازه جابه‌جایی A و B و C چگونه است؟

بـه نمـودار نـگاه کنید. کاملاً قابل تشـخیص که در بـازهٔ زمانی t_1 تـا t_2 جابه‌جایی‌ها به‌صورت $\Delta x_A > \Delta x_B > \Delta x_C$ اسـت و رابطهٔ سـرعت متوسط $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta x})$ A و B و C به‌صورت زیر است:

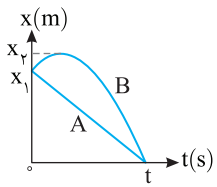
$$v_{av_A} > v_{av_B} > v_{av_C}$$



A ۱۰۸ ۴

به نمودار نگاه می‌کنیم:

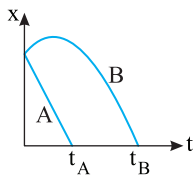
۱ در ابتـدای بـازه $(t=0)$ مـکان هـر دو متحـرک x_1 و در انتهای بـازه (t) مکان صفر است. بنابراین جابه‌جایی در این بازه یکسان و در نتیجه سرعت متوسط A و B با هم برابر است.



۲ مسـافت طی شده توسط A کمتر از مسافت طی شده توسط B است. دقت کنید متحرک B از x_1 به x_2 رفته سپس به مکان $x=0$ می‌رسد. بنابراین تندی متوسط A از تندی متوسط B کمتر است و گزینهٔ (۴) پاسخ تست است.

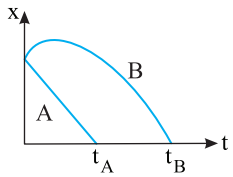
A ۱۰۹ ۴

تندی متوسط به مسیر حرکت و مسافت طی شده بسـتگی دارد. بـا توجه بـه نمـودار جابه‌جایی دو متحـرک یکسـان اسـت اما بـازهٔ زمانـی B از A بزرگ‌تر اسـت و تنها می‌تـوان اظهارنظر کرد که سرعت متوسط B از سرعت متوسط A کوچک‌تر اسـت $(v_{av_B} < v_{av_A})$ اما در مورد تندی متوسـط نمی‌توان اظهارنظر قطعی کرد. زیرا متحرک B دارای مسـافت طی شده بیشـتری، در زمان طولانی‌تری است. به همین دلیل ممکن است تندی متوسط A با تندی متوسط B برابر یا از آن کمتر و یا بیشتر باشد.



A ۱۱۰ ۱

بـا توجـه بـه شـکل، جابه‌جایـی دو متحـرک یکسـان، اما زمـان حرکت متحـرک B از زمان حرکت متحرک A بیشتر است $(t_B > t_A)$ از ایـن‌رو با توجه به تعریف سـرعت متوسـط $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$ سـرعت متوسط متحرک B از سـرعت متوسـط متحرک A کمتر می‌باشـد و گزینهٔ (۱) درست است.

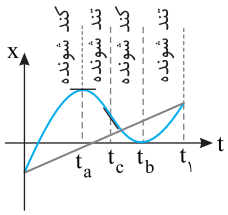


A ۱۱۱ ۴

یادآوری شـیب خط مـماس بر نمودار مکان - زمان برابر سـرعت لحظه‌ای اسـت و شیب خط قاطع بین دو لحظه برابر سرعت متوسط است.

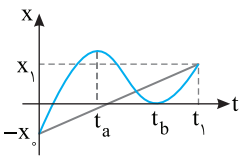
نکته اگر در هر بازهٔ زمانی، چند خط مماس بر نمودار رسـم کنیم و خط مماس به حالت قائم نزدیک شود، حرکت تندشونده و اگر به حالت افقی $(v=0)$ نزدیک شود، حرکت کندشونده است.

۱ از صفر تا t_a شـیب خط مـماس در حال کاهش و سـرعت به سمت صفر می‌رود و حرکت کندشـونده اسـت. از t_a تا t_b ابتدا قدرمطلق شـیب در حال افزایش بوده حرکت تندشـونده و سـپس قدرمطلق شیب در حال کاهش بوده یعنی تندی به سـمت صفر می‌رود و در t_b تندی صفر است. یعنی حرکت کندشونده است و از t_b به بعد شیب در حال افزایش و حرکت تندشونده است. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) هر دو نادرست است.



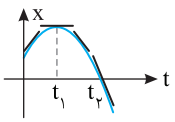
نکته جهت حرکت همان جهت سرعت است.

۲ در بـازهٔ ۰ تـا t_a و در بـازهٔ t_b تا t_1 شـیب خط مـماس مثبت و سـرعت و جهت حرکت مثبت و در بازهٔ t_a تا t_b متحرک در جهت منفـی محور در حرکت اسـت. بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است.



۳ در بازهٔ ۰ تا t_1 متحرک از مکان منفی $(-x_0)$ به مکان مثبت x_1 می‌رود. بنابراین جابه‌جایی و سرعت متوسط $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$ مثبت بوده و گزینهٔ (۴) درست است.

A ۱۱۲ ۴



در هنـگام گـذر از مبدأ مکان $(x=0)$ یعنـی در لحظهٔ t_2 شـیب خط مماس منفی اسـت، پس سـرعت منفی می‌باشـد و گزینهٔ (۱) درست است. در بیشینه و کمینه نمودار $x-t$ به شرط تغییر علامت سرعت، جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند. در این حرکت نیز در t_1 جهت حرکت تغییر کرده است و گزینهٔ (۲) درست است. ابتدا شیب خط مماس در حال کم شدن است تا در لحظهٔ t_1 به صفر می‌رسد پس ابتدا حرکت کندشونده بوده و پس از آن شـیب خط در حال زیاد شـدن اسـت. (خط مماس به حالت قائم نزدیک می‌شود) بنابراین بعد از t_1 حرکت تندشونده می‌شود و گزینهٔ (۳) نیز درست است.

B ۱۱۳ ۳

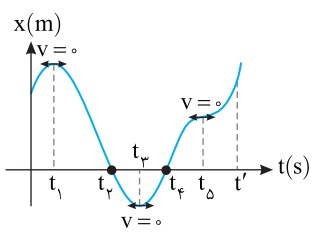
یادآوری ۱ هرگاه خط مماس بر نمودار مکان - زمان موازی محور زمان شـود و شیب آن صفر گردد، متحرک در آن لحظه ساکن است.

یادآوری ۲ هـرگاه نمودار مکان - زمان محـور زمان را قطع کند یعنی متحرک از $x=0$ رد شود، بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

یادآوری ۳ برای تغییر جهت متحرک علاوه بر صفر شـدن سرعت باید علامت سرعت قبل و بعد از آن لحظه تغییر کند.

به نمودار نگاه کنید. در سـه لحظهٔ t_1 و t_3 و t_5 مماس بر نمودار موازی محور زمان بوده و در این لحظات سرعت صفر است. یعنی ۳ بار سرعت صفر می‌شود. در لحظهٔ t_2 و t_4 نمودار محور زمان را قطع کرده یعنی متحرک از مبدأ مکان می‌گذرد. بنابراین ۲ بار بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

در لحظهٔ t_1 و t_3 سرعت صفر شده و در دو طرف این لحظه‌ها علامت سرعت عوض می‌شـود یعنی دو بار متحرک تغییر جهت می‌دهد اما در لحظهٔ t_5 با آنکه سـرعت صفر می‌شود، اما متحرک در جهت مثبت محور به حرکت ادامه می‌دهد و تغییر جهت نداریم.



B ۱۱۴ ۳

۱ شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ t_1 افقی است و شیب آن صفر بوده از این رو در این لحظه سرعت صفر می‌شود و گزینهٔ (۱) درست است.

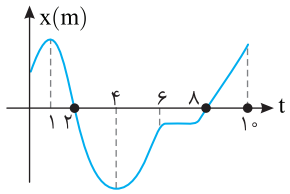
۲ علامت سرعت قبل و بعد از t_1 تغییر کرده پس جهت حرکت در این لحظه تغییر می‌کند و گزینهٔ (۲) درست است.

۳ دقت کنید در این لحظه متحرک به مبدأ مکان می‌رسد. نمودار محور زمان را قطع نمی‌کند یعنی متحرک از مبدأ نمی‌گذرد و بعد از t_1 و قبل از t_1 مکان متحرک مثبت است. بنابراین علامت مکان تغییر نمی‌کند. پس بردار مکان تغییر جهت نداده است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

۴ قبل از t_1 شیب خط مماس کم می‌شود تا در t_1 صفر شود. پس قبل از t_1 حرکت کندشونده بوده و بعد از t_1 شیب خط مماس زیاد می‌شود یعنی حرکت تندشونده شده است. پس در t_1 نوع حرکت تغییر کرده است و گزینهٔ (۴) درست است.

A ۱۱۵ ۱

نکته هرگاه نمودار بالای محور زمان باشد، یعنی $x>0$ باشد، مکان متحرک مثبت و هرگاه نمودار پایین محور زمان قرار داشته باشد یعنی $(x<0)$ و مکان متحرک منفی است.



۱ در بازهٔ ۰ تا ۱s متحرک در جهت مثبت محور و از ۱s تا ۴s در خلاف جهت محور، از ۴s تا ۶s در جهت مثبت محور و از ۶s به بعد تا مدتی متحرک ساکن و در آخر در جهت مثبت محور در حرکت است، بنابراین کل مدتی که متحرک در خلاف جهت محور حرکت می‌کند، $4-1=3s$ است.

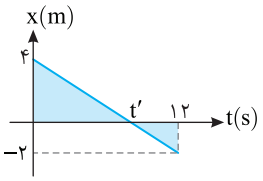
۲ در بازهٔ ۲s تا ۸s نمودار پایین محور زمان بوده و بردار مکان متحرک منفی است. بنابراین در مدت $8-2=6s$ بردار مکان خلاف جهت محور xهاست.

۳ نسبت دو بازهٔ بیان شده خواهد شد:

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

A ۱۱۶ ۱

خط فکری جهت حرکت را علامت سرعت مشخص می‌کند. اگر سرعت مثبت باشد متحرک در جهت مثبت محور x ها در حال حرکت است و اگر سرعت منفی باشد متحرک در جهت منفی محور x ها در حال حرکت است. بنابراین شما باید از روی نمودار علامت سرعت را مشخص کنید و برای مشخص شدن بردار مکان‌های مثبت و منفی، باید مشخص کنید در چه بازه‌ای نمودار بالای محور زمان و در چه بازه‌ای نمودار پایین محور زمان است، یعنی شما باید t' را به‌دست بیاورید.



۱ در تمام مدت ۱۲s متحرک در جهت منفی محور با تندی ثابت از مکان $+4m$ به مکان $-2m$ می‌رود.

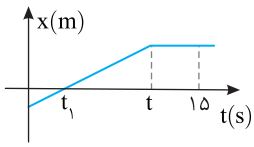
۲ t' را به کمک نوشتن شیب خط به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{4-(-2)}{12-0}=\frac{4-0}{t'-0}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{4}{t'}\Rightarrow t'=8s$$

۳ در بازهٔ ۸s تا ۱۲s نمودار زیر محور زمان بوده و مکان متحرک به مدت $12-8=4s$ منفی است.

A ۱۱۷ ۱

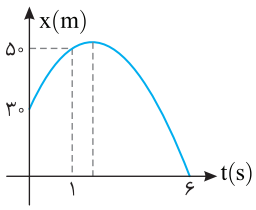
در مدت ۱۵s متحرک ابتدا تا لحظهٔ t در یک جهت در حرکت بوده است و جابه‌جایی و مسافت با هم برابر است و از t تا ۱۵s، جسم ساکن است. بنابراین در مدت ۱۵s جابه‌جایی با مسافت برابر است و گزینهٔ (۱) درست است.



در بازهٔ صفر تا t_1 متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ و سپس تا لحظهٔ t در حال دور شدن از مبدأ است و بعد از t ساکن است و گزینهٔ (۲) نادرست است. در بازهٔ صفر تا t متحرک در جهت مثبت حرکت می‌کند و تغییر جهت نمی‌دهد، یعنی سرعت تغییر علامت نمی‌دهد و گزینهٔ (۳) نادرست است.

C ۱۱۸ ۱

خط فکری وقتی نمودار سهمی است، باید معادلهٔ مکان - زمان تابع درجه ۲ شبیه $x=at^2+bt+c$ باشد و مختصات نقاط روی نمودار باید در معادله صدق کند. با توجه به این مطلب با یک مسئلهٔ ریاضی سروکار دارید و باید معادله را به‌دست بیاورید.



مختصات نقاط $(t=0,x_0=30m)$، $(t=1s,x=50m)$ و $(t=6s,x=0)$ را در معادلهٔ $x=at^2+bt+c$ جای‌گذاری می‌کنیم.

نمودار سهمی می‌باشد پس معادلهٔ حرکت به صورت $x=at^2+bt+c$ می‌باشد.

$$\begin{cases}t=0\\x=30m\end{cases}\Rightarrow 30=a(0)^2+b(0)+c\Rightarrow 30=c$$

$$\begin{cases}t=1s\\x=50m\end{cases}\Rightarrow 50=a(1)^2+b(1)+30\Rightarrow 20=a+b\ \ (I)$$

$$\begin{cases}t=6s\\x=0\end{cases}\Rightarrow 0=a(6)^2+b(6)+30\Rightarrow -30=36a+6b\ (II)$$

از حل دو معادلهٔ (I) و (II) مقدار a و b را به‌دست می‌آوریم:

$$(I),(II)\begin{cases}(a+b=20)\times -6\\36a+6b=-30\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6a-6b=-120\\36a+6b=-30\end{cases}+$$

$$30a=-150\Rightarrow a=-5\Rightarrow b=25$$

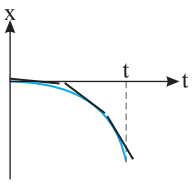
در رأس سهمی شیب خط مماس یعنی تندی صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد.

بنابراین مختصات رأس را حساب می‌کنیم.

$$t=\frac{-b}{2a}\Rightarrow t=\frac{-25}{-10}=2/5s$$

A ۱۱۹ ۴

با توجه به شکل روبه‌رو در لحظهٔ $t=0$ نمودار مکان - زمان بر محور زمان مماس بوده و شیب خط مماس یعنی سرعت لحظه‌ای، صفر است و گزینهٔ (۱) درست است.

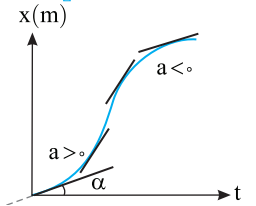


اگر به مماس‌های رسم شده دقت کنید قدرمطلق شیب خط مماس در حال افزایش است، یعنی تندی در حال افزایش است و حرکت تندشونده است و گزینهٔ (۲) درست است

از شروع حرکت، متحرک از مبدأ در جهت منفی محور و در حال دور شدن از مبدأ است بنابراین گزینهٔ (۳) نیز درست است و پاسخ گزینهٔ (۴) است.

A ۱۲۰ ۱

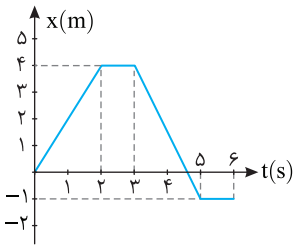
۱ با توجه به شکل روبه‌رو خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t=0$ با محور زمان زاویهٔ α می‌سازد یعنی شیب خط مماس بر نمودار صفر نبوده بنابراین سرعت اولیه مخالف صفر بوده و متحرک دارای سرعت اولیه است $(v_0=\tan\alpha)$.



۲ بار رسم چند خط مماس مشخص است که ابتدا شیب خط مماس در حال افزایش بوده تندی در حال افزایش و حرکت تندشونده و سپس شیب خط مماس در حال کاهش بوده یعنی تندی در حال کاهش و حرکت کندشونده است. بنابراین گزینهٔ (۱) درست و گزینه‌های (۲) و (۳) و (۴) نادرست است.

B ۱۲۱ ۲

۱ متحرک در بازهٔ صفر تا ۲s، چهار متر مسافت طی می‌کند، در بازهٔ ۲s تا ۳s ساکن بوده و در بازهٔ ۳s تا ۵s از مکان ۴m به مکان ۱m− رفته و مسافت ۵m را می‌پیماید و از لحظهٔ t=۵s به بعد ساکن می‌ماند. بنابراین مسافت طی شده از صفر تا ۶s جمعاً l=۴+۵=۹m است و تندی متوسط برابر است با:



$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۹}{۶}=۱/۵m/s$$

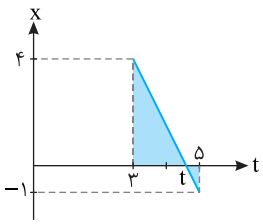
بنابراین گزارهٔ (الف) درست است.

۲ در بازهٔ ۰ تا ۶s متحرک از مکان x=۰ به مکان x=−۱m می‌رود و بردار جابه‌جایی برابر $\vec{d}=-\vec{i}$ است و از این رو سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا ۶s خواهد شد:

$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}=\frac{-\vec{i}}{۶}=-\frac{۱}{۶}\vec{i}$$

بنابراین گزارهٔ (ب) نادرست است.

۳ لحظه‌ای که بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد لحظه‌ای است که متحرک از مبدأ مکان (x=۰) می‌گذرد و نمودار محور زمان را قطع می‌کند. برای به دست آوردن لحظهٔ تغییر جهت از تشابه مثلث استفاده می‌کنیم. دو مثلث رنگی متشابه است، نسبت تشابه را برای دو مثلث می‌نویسیم:



$$\frac{t-۳}{۵-t}=\frac{۴}{۱}\Rightarrow t-۳=۲۰-۴t\Rightarrow ۵t=۲۳\Rightarrow t=۴/۶s$$

بنابراین گزارهٔ (پ) درست است.

۴ متحرک از لحظهٔ ۳s تا لحظهٔ ۵s یعنی به مدت ۲s در خلاف جهت محور در حرکت است و گزارهٔ (ت) درست است.

B ۱۲۲ ۳

خط فکری در فیزیک دبیرستان خبری از زمان منفی نیست و همواره t>۰ است. از طرفی بردار مکان وقتی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان (x=۰) بگذرد. بنابراین در تابع درجهٔ یک باید معادله دارای ریشهٔ مثبت باشد. همچنین در تابع درجهٔ ۲ باید معادله دارای ریشهٔ مثبت بوده در این صورت بردار مکان تغییر جهت می‌دهد. اما اگر معادلهٔ درجهٔ ۲ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، بردار مکان در آن لحظه تغییر جهت نمی‌دهد.

الف) $x=t+۴\Rightarrow ۰=t+۴\Rightarrow t=-۴s$

ریشه منفی شد و متحرک از مبدأ مکان نمی‌گذرد و بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

ب) $x=t^۲-۴t+۵=۰\Rightarrow t=\frac{+۴\pm\sqrt{۱۶-۲۰}}{۲}, t=\frac{۴\pm\sqrt{-۴}}{۲}$

این معادله ریشه ندارد، یعنی متحرک از مبدأ مکان (x=۰) نمی‌گذرد و بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

پ) $x=۲t^۲-۴t-۲=۰\Rightarrow t^۲-۲t-۱=۰\Rightarrow t=\frac{۲\pm\sqrt{۴+۴}}{۲}=۱\pm\sqrt{۲}=\begin{cases}۱+\sqrt{۲}>۰\\ ۱-\sqrt{۲}<۰\end{cases}$

بنابراین متحرک یک بار تغییر جهت می‌دهد.

ت) $x=t^۲-۶t+۹=۰\Rightarrow x=(t-۳)^۲$

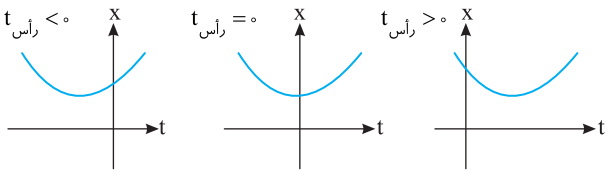
این عبارت همواره مثبت یعنی x تغییر علامت نمی‌دهد. از طرفی این معادله دارای ریشهٔ مضاعف t=۳s و همان‌گونه که گفتیم در ریشهٔ مضاعف بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

بازی با سؤال در چه تعداد از معادله‌های حرکت این مسئله، متحرک تغییر جهت نمی‌دهد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **نکته** هرگاه معادلهٔ حرکت درجه اول باشد نمودار مکان - زمان آن یک خط راست مایل است، یعنی متحرک در یک جهت در حال حرکت است و تغییر جهت نمی‌دهد.

نکته در تابع‌های مکان - زمان درجه ۲، در رأس سهمی متحرک تغییر جهت می‌دهد اگر زمان رأس سهمی مثبت باشد، متحرک تغییر جهت می‌دهد و اگر منفی یا صفر باشد متحرک تغییر جهت نمی‌دهد. (در فیزیک دبیرستان بازهٔ زمانی منفی را در نظر نمی‌گیریم)



الف) $x=t+۴$ تابع درجه اول بوده و متحرک روی خط راست در حرکت است و تغییر جهت نمی‌دهد.

ب) $x=t^۲-۴t+۵\xrightarrow{t=\frac{-b}{۲a}}t=-\frac{-۴}{۲\times۱}=۲s>۰$

متحرک تغییر جهت می‌دهد.

پ) $x=۲t^۲-۴t-۲=۰\xrightarrow{t=\frac{-b}{۲a}}t=\frac{-۴}{۲\times۲}=۱>۰$

متحرک تغییر جهت می‌دهد.

ت) $x=t^۲-۶t+۹=۰\xrightarrow{t=\frac{-b}{۲a}}t=-\frac{-۶}{۲}=۳s>۰$

متحرک تغییر جهت می‌دهد.

گزینهٔ ۱

B ۱۲۳ ۲

یادآوری برای به‌دست آوردن لحظهٔ تغییر جهت باید مختصات رأس سهمی $(t=\frac{-b}{۲a})$ را به‌دست آورد. اگر زمان مثبت به‌دست آمد، متحرک (در $t=\frac{-b}{۲a}$) تغییر جهت می‌دهد.

۱ برای به‌دست آوردن لحظهٔ تغییر جهت کافی است مختصات رأس سهمی را به‌دست بیاوریم.

$$x=۲t^۲-۴t-۶\xrightarrow{t=\frac{-b}{۲a}}t=-\frac{-۴}{۲\times۲}\Rightarrow t=۱s$$

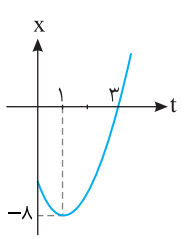
۲ مکان لحظهٔ تغییر جهت را با قرار دادن t=۱s در معادلهٔ حرکت به‌دست می‌آوریم.

$$x=۲(۱)^۲-۴(۱)-۶=۲-۴-۶\Rightarrow x=-۸m$$

۳ برای به‌دست آوردن لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان، در معادلهٔ حرکت x را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x=۲t^۲-۴t-۶=۰\Rightarrow t^۲-۲t-۳=۰\Rightarrow(t-۳)(t+۱)=۰\Rightarrow t=۳s$$

۴ بنابراین در لحظهٔ t=۱s متحرک در مکان −۸m و در لحظهٔ t=۳s متحرک در مکان x=۰ بوده و در این بازهٔ زمانی +۸m جابه‌جا می‌شود.



B ۱۲۴ ۲

خط فکری باید نمودار x−t را رسم کنید، تا مشخص شود آیا نمودار محور زمان را قطع می‌کند یا نه، زیرا اگر محور زمان را قطع کند، کمترین فاصله از مبدأ مکان صفر می‌شود. اما اگر محور زمان را قطع نکند باید به کمک نمودار کمترین فاصله تا مبدأ مکان را مشخص کرد.

۱ مقدار $\Delta=b^2-4ac$ را به‌دست می‌آوریم:

$x=t^2-6t+10\Rightarrow\Delta=(-6)^2-4\times10\Rightarrow\Delta=36-40=-4<0$

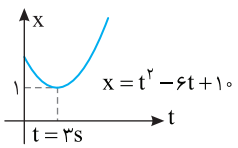
بنابراین این معادله ریشه ندارد.

۲ مختصات رأس سهمی این معادله را حساب می‌کنیم.

$t=-\frac{b}{2a}\Rightarrow t=-\frac{-6}{2}\Rightarrow t=3s$

$x=t^2-6t+10\xrightarrow{t=3s}x=3^2-6\times3+10\Rightarrow x=+1m$

۳ بنابراین شکل نمودار می‌تواند به شکل روبه‌رو باشد و کمترین فاصله از مبدأ زمان در لحظهٔ $t=3s$ بوده و برابر $x=1m$ است.



بازی با سؤال معادلهٔ مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند. در SI به صورت $x=\frac{2}{3}t^2-6t+15$ است. بعد از لحظهٔ $t=0$، کمترین فاصلهٔ متحرک تا مبدأ محور چند متر است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۳ ۳) ۴/۵ ۴) ۶

پاسخ معادلهٔ $x=\frac{2}{3}t^2-6t+15$ ریشه ندارد، زیرا دلتای آن منفی است.

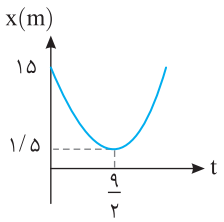
$\Delta=36-40=-4<0$

با توجه به اینکه ضریب t^2 معادله $x-t$ مثبت است، پس دهانه نمودار رو به بالا و شکل آن به صورت U است، بنابراین کمترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ همان نقطهٔ رأس سهمی است. $t_{رأس}=-\frac{b}{2a}\Rightarrow t_{رأس}=-\frac{-6}{2\times\frac{2}{3}}\Rightarrow t_{رأس}=\frac{9}{2}s$

مکان رأس خواهد شد:

$x=\frac{2}{3}(\frac{9}{2})^2-6(\frac{9}{2})+15\Rightarrow x=\frac{2}{3}\times\frac{81}{4}-27+15$

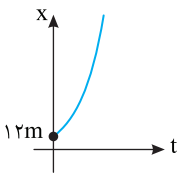
$x=13/5-12\Rightarrow x_{min}=1/5m$



گزینه ۱

B ۱۲۵ ۱

معادلهٔ حرکت به صورت $x=(t+3)(t+4)$ می‌باشد، هر دو ریشهٔ این معادله منفی است و می‌دانیم که زمان نمی‌تواند منفی باشد، پس نمودار $x-t$ تقریباً مشابه شکل مقابل بوده و بالای محور زمان قرار می‌گیرد. از این رو کمترین فاصله از مبدأ در $t=0$ رخ می‌دهد.



B ۱۲۶ ۱

خط فکری ابتدا بررسی کنید که در بازهٔ زمانی داده شده، متحرک تغییر جهت می‌دهد یا نه؟ برای این منظور باید به سراغ مختصات رأس سهمی $t=-\frac{b}{2a}$ بروید.

رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم. $x=2t^2+4t-8\xrightarrow{\text{رأس سهمی}}t=-\frac{4}{2\times2}=-1<0$

بنابراین این متحرک تغییر جهت نداده و همواره در یک جهت روی محور xها در حرکت است و مسافت طی شده برابر اندازهٔ جابه‌جایی متحرک است.

B ۱۲۷ ۲

خط فکری باید مختصات رأس سهمی $(t=-\frac{b}{2a})$ را به‌دست بیاورید تا مشخص شود لحظهٔ تغییر جهت در بازهٔ زمانی ارائه شده در مسئله قرار دارد یا نه؟ اگر لحظهٔ تغییر جهت در بازهٔ بیان شده نبود یعنی متحرک در آن بازهٔ زمانی در یک جهت در حرکت است بنابراین مسافت طی شده و اندازهٔ جابه‌جایی و در نتیجه تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط با هم برابر است.

مختصات رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم. $t=-\frac{b}{2a}\Rightarrow t=-\frac{-1}{2}\Rightarrow t=\frac{1}{2}s$

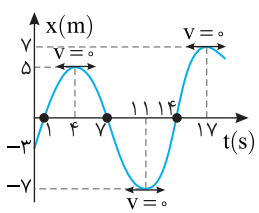
این عدد بین بازهٔ ۱s تا ۴s قرار ندارد. یعنی متحرک در این بازهٔ زمانی همواره در یک جهت در حال حرکت بوده و مسافت طی شده با اندازهٔ جابه‌جایی در آن بازه برابر $(\ell=|\vec{d}|)$ است، در نتیجه تندی متوسط $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}$ با اندازهٔ سرعت متوسط $(v_{av}=\frac{d}{t})$ برابر است.

B ۱۲۸ ۲

برای آنکه در تمام بازه‌های زمانی اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت با هم برابر باشند، باید متحرک در یک جهت در حال حرکت باشد یعنی متحرک تغییر جهت ندهد. برای آنکه متحرک تغییر جهت ندهد باید $t=-\frac{b}{2a}$ یعنی زمان رأس سهمی منفی شود، بنابراین باید a و b هم‌علامت باشند، در این صورت $ab>0$ خواهد بود.

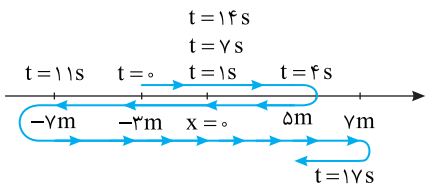
A ۱۲۹ ۲

۱ در نقاط کمینه و بیشینه نمودار مکان - زمان تندی صفر می‌شود. بنابراین در لحظهٔ $t=4s$ و $t=11s$ و $t=17s$ تندی متحرک صفر شده و سوی حرکت آن تغییر کرده است. بنابراین گزاره (الف) درست است.



۲ هرگاه متحرک از مبدأ مکان بگذرد، جهت بردار مکان در آن لحظه تغییر می‌کند. در $t=1s$، $t=7s$ و $t=14s$ متحرک از مبدأ گذر کرده است بنابراین سه بار بردار مکان تغییر جهت داده است و گزارهٔ (ب) نادرست است.

۳ با توجه به نمودار، مسیر حرکت متحرک در بازهٔ صفر تا ۱۷s به شکل زیر است.



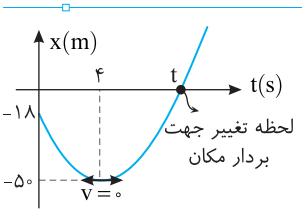
مطابق شکل مسیر، از $t=0$ تا $t=4s$ متحرک در جهت مثبت محور از مکان $-3m$ به مکان $+5m$ می‌رود سپس در بازهٔ $t=4s$ تا $t=11s$ از مکان $+5m$ تا مکان $-7m$ در جهت منفی محور در حرکت است و سرانجام در بازهٔ $t=11s$ تا $t=17s$ یعنی به مدت 6s در جهت مثبت محور از مکان $-7m$ به مکان $+7m$ می‌رود یعنی ابتدا به مبدأ نزدیک و سپس از آن دور می‌شود.

در این صورت جمعاً ۱۰s در جهت مثبت محور در حرکت بوده است و گزارهٔ (پ) درست است.

۴ متحرک در بازهٔ $t=11s$ تا $t=14s$ در حال نزدیک شدن به مبدأ است و گزارهٔ (ت) نادرست است.

C ۱۳۰ ۱

خط فکری چاره‌ای نیست باید معادلهٔ حرکت را به کمک نقاط مشخص شده روی نمودار به‌دست آورده سپس به کمک آن لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان (t) را به‌دست آورد.



۱ شکل نمودار به صورت سهمی است یعنی $x=at^2+bt+c$. مختصات هر نقطه از نمودار باید در معادله صدق کند از این رو:

$\begin{cases}t=0\\x=-18m\end{cases}\Rightarrow x=a(0)^2+b(0)+c\Rightarrow-18=c$

$\begin{cases}t=4\\x=-50m\end{cases}\Rightarrow-50=a(4)^2+b(4)-18\Rightarrow-50=16a+4b-18$

$\Rightarrow-32=16a+4b\quad(1)$

۲ نقطهٔ $t=۴s$ رأس سهمی می‌باشد و می‌دانیم رأس سهمی $t=-\frac{b}{۲a}$ است.

پس: $t=-\frac{b}{۲a}\Rightarrow ۴=-\frac{b}{۲a}\Rightarrow b=-۸a \quad (۲)$

۳ به کمک رابطهٔ (۱) و (۲) مقدار a و b را حساب می‌کنیم.

$(۱),(۲)\Rightarrow ۱۶a+۴(-۸a)=-۳۲\Rightarrow -۱۶a=-۳۲\Rightarrow a=۲ \ , \ b=-۱۶$

۴ پس معادله حرکت به صورت $x=۲t^۲-۱۶t-۱۸$ است. زمانی بردار مکان تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان $(x=۰)$ عبور می‌کند:

$۲t^۲-۱۶t-۱۸=۰\Rightarrow t^۲-۸t-۹=۰\Rightarrow (t-۹)(t+۱)=۰$

$\Rightarrow t=۹s \ , \ t=-۱s$ (غ.ق.ق)

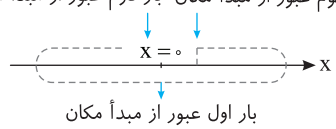
بنابراین در $t=۹s$ بردار مکان تغییر جهت می‌دهد. زمانی متحرک تغییر جهت می‌دهد که سرعت متحرک صفر شود و علامت سرعت قبل و بعد از آن تغییر کند که همان رأس سهمی می‌باشد. $\Delta t=t_۲-t_۱=۹-۴=۵s$

B ۱۳۱ ۴

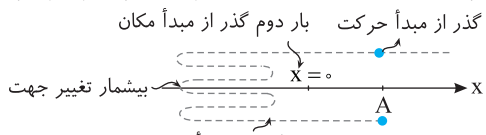
مسیرهای ممکنی که ذره طی می‌کند را بررسی می‌کنیم.

متحرک در مکان‌های مثبت قرار دارد و دو حالت ممکن است پیش بیاید.

۱ متحرک در جهت مثبت شروع به حرکت کند، در این صورت برای آنکه از مبدأ مکان بگذرد باید متوقف شده و برگردد و پس از عبور از مبدأ باید مجدداً متوقف شده و برگردد و برای دومین بار از مبدأ بگذرد، بنابراین حداقل دو بار از مبدأ حرکت می‌گذرد. اما چند بار تغییر جهت می‌دهد. ذره می‌تواند بیشمار بار تغییر جهت داده سپس از مبدأ مکان بگذرد.

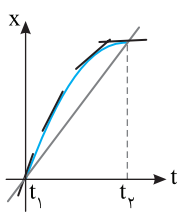


۲ متحرک در جهت منفی محور شروع به حرکت کند در این صورت مطابق شکل می‌تواند بیشمار بار تغییر جهت دهد و دو بار از مبدأ مکان بگذرد اما هنوز از مبدأ حرکت خود عبور نکرده باشد.

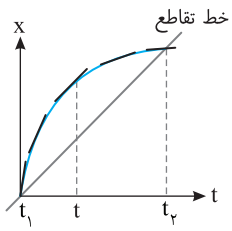


C ۱۳۲ ۴

خط فکری شیب خط قاطع نمودار بین دو لحظه $t_۱$ و $t_۲$ برابر سرعت متوسط و شیب خط مماس بر نمودار در هر لحظه برابر اندازهٔ سرعت لحظه‌ای (تندی لحظه‌ای) در آن لحظه است. بنابراین شما باید خط قاطع بین $t_۱$ و $t_۲$ و چند خط مماس بر نمودار از لحظهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ رسم کرده شیب خطوط مماس را با شیب خط قاطع مقایسه کنید تا متوجه شوید کدام بزرگ‌تر است و گزینه را انتخاب کنید.



به شکل خوب نگاه کنید. در ابتدا شیب خطوط مماس از شیب خط قاطع بیشتر است یعنی سرعت لحظه‌ای از سرعت متوسط بزرگ‌تر است. بعد از لحظهٔ t خط مماس به سمت افقی شدن می‌رود و شیب آن از شیب خط قاطع کمتر می‌شود یعنی سرعت لحظه‌ای از سرعت متوسط کوچک‌تر می‌شود.



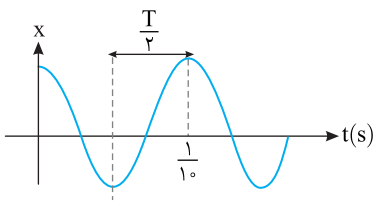
B ۱۳۳ ۱

خط فکری در حل این مسئله چاره‌ای نیست و باید شما رسم توابع مثلثاتی را که از ریاضی فراگرفته‌اید به‌کار ببرید و نقاط بیشینه و کمینهٔ نمودار را مشخص کنید. زیرا در این نقاط سرعت متحرک صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد و تعیین بازه‌های زمانی بین یک کمینه و بیشینهٔ متوالی یعنی حل مسئله.

یادداشت ریاضی در توابع سینوسی و کسینوسی به‌صورت $y=\sin ax$ و $y=\cos ax$ دورهٔ تناوب تابع برابر $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ است.

دورهٔ تناوب تابع $x=۰/۴\cos ۲۰\pi t$ خواهد شد: $T=\frac{۲\pi}{۲۰\pi}=\frac{۱}{۱۰}s$

نمودار تابع به‌صورت زیر است:



بنابراین بازهٔ زمانی بین دو تغییر جهت متوالی خواهد شد:

$\frac{T}{۲}=\frac{\frac{۱}{۱۰}}{۲}=\frac{۱}{۲۰}s\Rightarrow T=۰/۰۵s$

A ۱۳۴ ۳

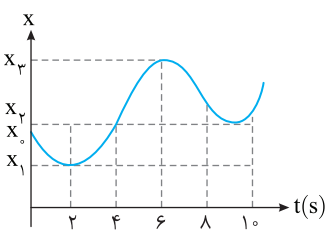
خط فکری تندی متوسط یعنی مقدار مسافت طی شده تقسیم بر مدت زمان طی کردن آن مسافت، بنابراین شما باید در هر بازه زمانی مسافت طی شده را بررسی کرده تا بتوانید تندی متوسط را در بازه‌های مختلف مقایسه کنید.

با توجه به نمودار مسافت طی شده در بازهٔ ۲s تا ۴s از مسافت طی شده در بازه صفر تا ۲s بیشتر است و هم‌چنین در بازهٔ ۴s تا ۶s مسافت طی شده از بازهٔ صفر تا ۲s بیشتر است. یعنی در هر دو ثانیه (از ۲ تا ۶) مسافت طی شده بزرگ‌تر از بازهٔ صفر تا ۲s است بنابراین تندی متوسط در بازهٔ ۲s تا ۶s از ۰ تا ۲s بیشتر می‌شود.

در مدت ۴s بین ۲s تا ۶s مسافت طی شده از مدت ۴s بین ۶s تا ۱۰s بیشتر است و تندی در بازهٔ ۲s تا ۶s از تندی در ۶s تا ۱۰s بیشتر است. اگر بازه بین ۲s تا ۱۰s را به دو قسمت ۴s تقسیم کنیم در ۴s اول تندی از ۴s دوم بیشتر است بنابراین تندی متوسط در بازه ۲s تا ۱۰s قطعاً از ۶s تا ۱۰s بیشتر است.

اما داستان اصلی در مورد بازهٔ صفر تا ۶s و مقایسهٔ آن با ۲s تا ۱۰s است.

بازهٔ ۲s تا ۶s در هر دو مشترک است. اگر بازهٔ ۶s تا ۱۰s را به دو بازهٔ دو ثانیه‌ای ۶ تا ۸ و ۸ تا ۱۰ تقسیم کنیم در هر دو بازه مسافت طی شده با توجه به نمودار از مسافت طی شده در بازه ۰ تا ۲s بیشتر بوده بنابراین در بازه ۶s تا ۸s و ۸s تا ۱۰s تندی از بازهٔ ۰ تا ۲s بیشتر است در نتیجه به‌طور کلی تندی متوسط در بازه ۲s تا ۱۰s از تندی متوسط در بازهٔ صفر تا ۶s بیشتر است.



B ۱۳۵ ۴

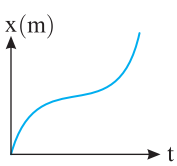
از نمودار مسافت - زمان چیز زیادی به‌دست نمی‌آوریم

۱ مسافت همواره مثبت است بنابراین متحرک می‌تواند از مکان‌های منفی یا مثبت و یا از مبدأ مکان شروع به حرکت کرده باشد.

۲ متحرک ممکن است متوقف شده و در همان جهت ادامهٔ حرکت داده و یا متوقف شده و تغییر جهت دهد.

۳ متحرک ممکن است در جهت مثبت محور و در مکان‌های مثبت و در مکان‌های منفی دارای جابه‌جایی‌ها مثبت یا منفی باشد.

بنابراین هر سه گزینه می‌تواند پاسخ مسئله باشد.



پنجره ۳

A ۱۳۶ ۴

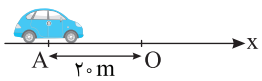
یادآوری حرکت یکنواخت روی خط راست یعنی حرکت با سرعت ثابت که در آن تندی لحظه‌ای ثابت و جهت حرکت تغییر نمی‌کند.

۱ در حرکت یکنواخت تندی ثابت است و جهت حرکت تغییر نمی‌کند و مسافت طی شده برابر اندازهٔ جابه‌جایی است بنابراین در هر بازهٔ دلخواهی مثلاً ۱s تا ۵s یا ۰s تا ۸s اندازهٔ سرعت متوسط با تندی متوسط برابر و همچنین با اندازه سرعت لحظه‌ای و تندی لحظه‌ای برابر است. $(v_{av}=s_{av}=s)$

۲ جهت حرکت ثابت است اما ممکن است در مسیر حرکت متحرک از مبدأ مکان بگذرد و بردار مکان تغییر جهت دهد بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

A ۱۳۷ ۳

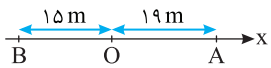
یادآوری معادلهٔ حرکت یکنواخت روی خط راست به صورت $x=vt+x_0$ است که در آن v سرعت لحظه‌ای متحرک و x_0 مکان اولیهٔ متحرک یعنی مکان متحرک در مبدأ زمان $(t=0)$ است.



در مبدأ زمان متحرک در نقطهٔ A بوده یعنی مکان اولیهٔ آن $x_0=-20m$ است. سرعت متحرک در جهت مثبت محور xهاست بنابراین سرعت آن $v=8m/s$ بوده و معادلهٔ مکان - زمان این متحرک در SI خواهد شد: $x=8t-20$

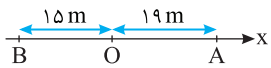
بازی با سؤال **متحرکی با سرعت ثابت مطابق شکل از نقطهٔ A روی محور xها به حرکت درمی‌آید و پس از ۱۷s به نقطهٔ B می‌رسد. معادله حرکت کدام است؟ (O مبدأ است.)**

از کتاب درسی



۱) $x=-2t+19$
۲) $x=3t-19$
۳) $x=2t+19$
۴) $x=5t-15$

پاسخ **خط فکری** **در حرکت یکنواخت روی خط راست سرعت در تمام لحظات ثابت است و مقدار آن را از هر بازهٔ زمانی می‌توان حساب کرد بنابراین شما در بازهٔ زمانی حرکت از A تا B می‌توانید سرعت متحرک را حساب کنید.**



۱ **مکان اولیه متحرک نقطهٔ A یعنی $x_0=+19m$ است.**

۲ **سرعت متحرک خواهد شد:**

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t=17s}v=\frac{-15-19}{17-0}\Rightarrow v=-2m/s$$

۳ **معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم:** $x=-2t+19$

گزینهٔ ۱

A ۱۳۸ ۲

در حرکت با سرعت ثابت، سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای با هم برابرند:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v=\frac{26-8}{10-4}=\frac{18}{6}=3m/s$$

معادلهٔ مکان - زمان حرکت با سرعت ثابت $x=vt+x_0$ است. در این تابع نقطهٔ $t_1=4s$ و $x_1=8m$ را قرار می‌دهیم تا x_0 که مکان اولیه بوده به‌دست آید:

$$x=vt+x_0\xrightarrow{v=3m/s}x=3t+x_0\Rightarrow 8=3\times4+x_0\Rightarrow x_0=-4m$$

بنابراین معادلهٔ حرکت به صورت روبه‌رو است: $x=3t-4$

A ۱۳۹ ۴

خط فکری مسئلهٔ ساده‌ای است، کافی است داده‌های مسئله را در معادلهٔ حرکت قرار داده سپس با حل یک دستگاه دو معادلهٔ دو مجهول x_0 و v را حساب کرده، معادلهٔ حرکت را نوشته و در آخر با قرار دادن $x=-30m$ در معادله، لحظهٔ گذر متحرک از مکان $x=-30m$ را به‌دست بیاوریم.

معادلهٔ حرکت را به دست می‌آوریم:

$$x=vt+x_0\Rightarrow\begin{cases}t_1=2s\Rightarrow -6=2v+x_0\\ t_2=8s\Rightarrow 54=8v+x_0\end{cases}$$

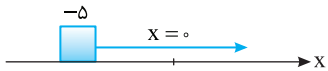
$$\Rightarrow 60=6v\Rightarrow v=10m/s\ ,\ x_0=-26m\ ,\ x=10t-26$$

اکنون $x=-30m$ را در رابطه قرار می‌دهیم. $-30=10t-26\Rightarrow -4=10t\Rightarrow t=-0/4s$

مفهوم زمان منفی این است که متحرک هرگز از مکان $-30m$ نمی‌گذرد.

A ۱۴۰ ۳

۱ به معادلهٔ حرکت نگاه کنید $(x=2t-5)$، مکان اولیهٔ متحرک $x_0=-5m$ و سرعت متحرک مثبت است و مطابق شکل مسیر، متحرک ابتدا به مبدأ نزدیک و سپس از آن دور می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۱) و (۲) نادرست است.



۲ سرعت متحرک ثابت بوده و برابر $2m/s$ است یعنی در هر ثانیه متحرک $2m$ جابه‌جا می‌شود و گزینهٔ (۳) درست است.

۳ در لحظهٔ $t=1s$، مکان متحرک برابر $(x=2\times1-5=-3m)$ بوده و گزینهٔ (۴) نادرست است.

بازی با سؤال **معادلهٔ حرکت متحرکی $x=2t+5$ است. کدام گزینه در مورد حرکت این متحرک درست است؟**

۱) سرعت متحرک در لحظهٔ $t=1s$ برابر $2m/s$ می‌باشد.
۲) سرعت متوسط و تندی متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه باهم برابر می‌باشد.
۳) بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.
۴) هر سه گزینه درست است.

پاسخ ۱ **معادلهٔ حرکت درجه اول است یعنی معادله حرکت مربوط به حرکت با سرعت ثابت می‌باشد و مقدار سرعت با توجه به معادلهٔ حرکت خواهد شد:**

$$x=2t+5,\ x=vt+v_0\Rightarrow v=2m/s$$

بنابراین سرعت در هر لحظه برابر $2m/s$ است و گزینهٔ (۱) درست است.

۲ **سرعت ثابت و حرکت روی خط راست است بنابراین تندی متوسط و سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه باهم برابر می‌باشد و گزینهٔ (۲) درست است.**

۳ **بردار مکان هنگامی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند** $(x=0)$ غ‌ق‌ق $x=2t+5\xrightarrow{x=0}0=2t+5\Rightarrow t=-2/5$

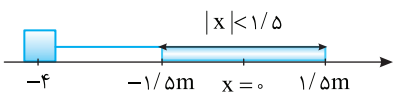
پس بردار مکان تغییر علامت نمی‌دهد. در نتیجه هر سه گزینه درست است.

گزینهٔ ۴

A ۱۴۱ ۲

متحرک با سرعت ثابت $2m/s$ در جهت مثبت محور در حرکت و از مکان $-4m$ می‌گذرد یعنی متحرک ابتدا در مکان‌های منفی بوده و در حال نزدیک شدن به مبدأ است. سؤال شده که چند ثانیه فاصلهٔ متحرک از مبدأ کمتر از $1/5m$ است بنابراین شما باید بازهٔ زمانی حرکت از مکان $-1/5m$ تا $+1/5m$ را حساب کنید.

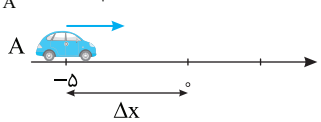
$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow 2=\frac{1/5-(-1/5)}{\Delta t}\Rightarrow \Delta t=1/5s$$



B ۱۴۲ ۲

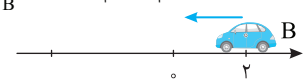
۱ متحرک A از مکان $x=-5m$ در حال نزدیک شدن به مبدأ بوده و در جهت مثبت در حال حرکت می‌باشد و در مدت ۳s به مبدأ می‌رسد بنابراین سرعت حرکت آن خواهد شد:

$$v_A=v_{av_A}=\frac{\Delta x_A}{\Delta t_A}\Rightarrow v_A=\frac{5}{3}m/s$$



۲ متحرک B از مکان مثبت و در جهت منفی در حال نزدیک شدن به مبدأ می‌باشد و در مدت ۴s از مکان x=+۲m به مبدأ می‌رسد و سرعت آن خواهد شد:

$$v_B=v_{av_B}=\frac{\Delta x_B}{\Delta t_B}\Rightarrow v_B=\frac{-۲}{۴}=-\frac{۱}{۲}m/s$$



۳ نسبت v_A/v_B برابر است با:

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{\frac{۵}{۳}}{\frac{-۱}{۲}}=-\frac{۱۰}{۳}$$

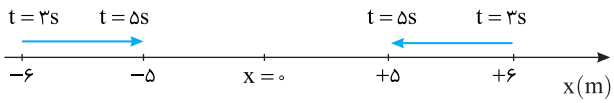
B ۱۴۳ ۴

خط فکری دقت کنید در لحظهٔ $t_۱=۳s$ و $t_۲=۵s$ مکان متحرک داده نشده بلکه فاصلهٔ متحرک از مبدأ به ترتیب ۶ متر و ۵ متر است یعنی متحرک ممکن است از مکان +۶m به مکان +۵m برود و یا از مکان +۶m به مکان −۵m برود البته متحرک می‌تواند از مکان −۶m به مکان −۵m و یا حتی به مکان +۵m برود. بنابراین همهٔ حالت‌ها باید بررسی شود.

لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان یعنی لحظهٔ گذر از مبدأ مختصات.

۱ اگر دو نقطه در یک طرف مبدأ مختصات باشند (از +۶m به +۵m و از −۶m به −۵m) آن‌گاه سرعت ذره برابر خواهد شد با:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{|۵-۶|}{۵-۳}=۰/۵m/s$$



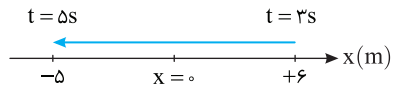
۲ لحظهٔ تغییر جهت یعنی لحظهٔ گذر از x=۰، بنابراین باید زمان حرکت از مکان +۶m (یا −۶m) با مبدأ با سرعت ۰/۵m/s را حساب کنیم:

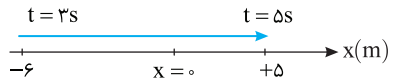
$$\Delta t=\frac{۶}{۰/۵}\Rightarrow\Delta t=۱۲s$$

۳ و لحظه گذر از مبدأ برابر $t=۱۲+۳=۱۵s$ است.

۴ این بار سرعت متحرک از مکان +۶m تا −۵m (و یا −۶m تا +۵m) را حساب می‌کنیم.

$$v=\frac{|\Delta x|}{\Delta t}=\frac{|۶-(-۵)|}{۵-۳}\Rightarrow v=۵/۵m/s$$





۵ زمان رسیدن از مکان +۶m (و یا −۶m) تا مبدأ با سرعت ۵/۵m/s را به‌دست می‌آوریم.

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow ۵/۵=\frac{۶}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t=\frac{۱۲}{۱۱}s$$

۶ لحظهٔ رسیدن به مبدأ خواهد شد:

$$t_۲-t_۱=\frac{۱۲}{۱۱}\Rightarrow t_۲-۳=\frac{۱۲}{۱۱}\Rightarrow t_۲=\frac{۴۵}{۱۱}s$$

بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

A ۱۴۴ ۳

نکته مدت زمان ثانیهٔ nاُم برابر ۱s است و بازهٔ آن از لحظهٔ n−۱ تا لحظهٔ n است. مدت زمان ثانیهٔ پنجم و مدت زمان ثانیهٔ سوم هر دو یک ثانیه است. حرکت با سرعت ثابت است، پس در هر ثانیه جابه‌جایی متحرک مقدار ثابتی است، از این‌رو جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم و ثانیهٔ پنجم یکسان است و نسبت جابه‌جایی‌ها برابر یک است.

A ۱۴۵ ۴

نکته در حرکت با سرعت ثابت روی خط راست در بازه‌های زمانی یکسان، جابه‌جایی متحرک برابر است. مدت زمان دو ثانیهٔ سوم برابر ۲s است و جابه‌جایی در این ۲s با جابه‌جایی در هر دو ثانیهٔ دیگر برابر است. در صورت سؤال گفته شده جابه‌جایی در این مدت نصف جابه‌جایی در مدت n ثانیه است (کلمهٔ پنجم در این مسئله نقشی ندارد) چون سرعت ثابت است بنابراین باید n=۴ ثانیه باشد تا جابه‌جایی در مدت ۲s نصف جابه‌جایی در مدت (n=۴) باشد.

A ۱۴۶ ۲

۱ حرکت با سرعت ثابت می‌باشد، بنابراین سرعت متوسط در هر بازه برابر سرعت جسم می‌باشد، در مدت t=۳s تا t=۱۹s متحرک از x=۲۵m به x=۴۹m منتقل شده است و می‌توان سرعت حرکت را در تمام مسیر به دست آورد.

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۴۹-۲۵}{۱۹-۳}=\frac{۲۴}{۱۶}\Rightarrow v=۱/۵m/s$$

۲ حال در بازهٔ $t_۱=۳s$ تا $t_۱$ نیز سرعت همان ۲m/s است و مقدار $t_۱$ قابل محاسبه است:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow ۱/۵=\frac{۳۴-۲۵}{t_۱-۳}\Rightarrow ۹=۱/۵t_۱-۴/۵\Rightarrow t_۱=۹s$$

۳ در بازهٔ t=۳s تا t=۱۷s متحرک از مکان x=۲۵m به $x_۱=?m$ رسیده بنابراین مجدداً به کمک رابطهٔ سرعت، مقدار $x_۱$ را حساب می‌کنیم:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow ۱/۵=\frac{x_۱-۲۵}{۱۷-۳}\Rightarrow x_۱=۴۶m$$

B ۱۴۷ ۱

خط فکری مسئلهٔ قشنگی است، در بازهٔ ۷s به بعد سرعت $v_۲$ است یعنی از لحظهٔ t=۸s و t=۱۴s سرعت متحرک $v_۲$ است و می‌توانید $v_۲$ را حساب کنید. در بازهٔ t=۷s تا t=۸s متحرک همین سرعت را دارد و می‌توانید جابه‌جایی متحرک در این ۱s را حساب کنید تا مشخص شود که متحرک در بازهٔ ۲s تا ۷s با سرعت $v_۱$ چند متر جابه‌جا شده و $v_۱$ را به‌دست بیاورید.

t(s)	۲	۸	۱۴
x(m)	۳۰	۵۰	۸۶

۱ سرعت ثابت $v_۲$ را حساب می‌کنیم:

$$v_۲=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_۲=\frac{۸۶-۵۰}{۱۴-۸}\Rightarrow v_۲=\frac{۳۶}{۶}=۶m/s$$

۲ درمدت t=۷s تا t=۸s متحرک باسرعت ۶m/s، به‌اندازهٔ $\Delta x=۶\times۱=۶m$ جابه‌جا می‌شود یعنی در لحظهٔ t=۷s متحرک در مکان ۵۰−۶=۴۴m قرار دارد.

۳ سرعت $v_۱$ در بازهٔ ۲s تا ۷s را حساب می‌کنیم. (یادتان باشد سرعت در تمام بازهٔ ۰ تا ۷s ثابت است.)

$$v_۱=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_۱=\frac{۴۴-۳۰}{۷-۲}\Rightarrow v_۱=\frac{۱۴}{۵}=۲/۸m/s$$

۴ نسبت $v_۱/v_۲$ خواهد شد:

$$\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{۲/۸}{۶}=\frac{۲۸}{۶۰}\Rightarrow\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{۷}{۱۵}$$

A ۱۴۸ ۳

در حرکت با سرعت ثابت روی خط راست، مسافت همان اندازهٔ جابه‌جایی است. با توجه به فرض مسئله مسافت (جابه‌جایی) در دو حالت یکسان است بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta x=v\Delta t\xrightarrow{\Delta x_۱=\Delta x_۲}v_۰\times۸=(v_۰+۳)\times۵$$

$$\Rightarrow ۸v_۰=۵v_۰+۱۵\Rightarrow v_۰=۵m/s$$

بازی با سؤال **متحرک A و متحرک B به‌ترتیب با سرعت‌های ثابت ۲۱ و (v−۳۰) متر بر ثانیه جابه‌جایی‌های یکسانی را در مدت t_A و t_B طی می‌کنند، اگر $\frac{t_A}{t_B}=\frac{۳}{۷}$ باشد v چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۴۹ ۲) ۵۱ ۳) ۳۹ ۴) ۳۷

پاسخ **جابه‌جایی دو متحرک یکسان است، بنابراین:**

$$\Delta x_A=\Delta x_B\Rightarrow ۲۱t_A=(v-۳۰)t_B$$

با توجه به فرض مسئله $\frac{t_A}{t_B}=\frac{۳}{۷}$ **از این‌رو:**

$$۲۱\times(\frac{۳}{۷}t_B)=(v-۳۰)t_B\Rightarrow ۹=v-۳۰\Rightarrow v=۳۹m/s$$

گزینهٔ ۳

A ۱۴۹ ۳

زمان حرکت با سرعت $80\,km/h$ و $120\,km/h$ در جابه‌جایی $150\,km$ را حساب کرده و از هم کم می‌کنیم.

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow\begin{cases}\Delta t_1=\frac{150}{80}\times 60=112/5\,min\\ \Delta t_2=\frac{150}{120}\times 60=75\,min\end{cases}\Rightarrow 112/5-75=37/5\,min$$

بازی با سؤال **راننده‌ای که با سرعت $108\,km/h$ حرکت می‌کند، برای یک ثانیه چشم از جاده برمی‌دارد و در آینه نگاه می‌کند. در این یک ثانیه خودروی او چند متر جلوتر رفته است؟** کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۱۰۸ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰ ۴) ۲۰

پاسخ **سرعت $108\,km/h$ را برحسب یکای m/s می‌نویسیم:**

$$v=\frac{108\,km}{h}=108\times\frac{1000\,m}{3600\,s}\Rightarrow v=30\,m/s$$

جابه‌جایی (مسافتی) که متحرک در $1\,s$ طی می‌کند خواهد شد:

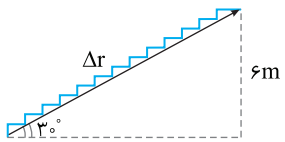
$$\Delta x=v\Delta t=30\times 1=30\,m$$

این تست ساده بیان می‌کند که هنگام رانندگی با سرعت $108\,km/h$، در هر ثانیه ۳۰ متر جلو می‌روید و اگر مانعی در ۳۰ متری مقابل شما باشد، با همان سرعت به آن برخورد می‌کنید.

گزینهٔ ۲

B ۱۵۰ ۲

۱ ارتفاع هر طبقه ۶ متر بوده یعنی فاصلهٔ بین دو طبقه $6\,m$ مطابق شکل است. طول مسیر حرکت (جابه‌جایی) بین دو طبقه را به کمک مثلثات به‌دست می‌آوریم:



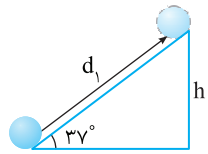
$$\sin 30^\circ=\frac{6}{\Delta r}\Rightarrow\Delta r=12\,m$$

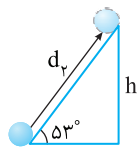
۲ مدت زمان جابه‌جایی ۱۲ متر با سرعت $0/6\,m/s$ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta r=v\Delta t\Rightarrow 12=0/6\Delta t\Rightarrow\Delta t=20\,s$$

B ۱۵۱ ۳

۱ این سؤال بیشتر جنبهٔ ریاضی دارد. طول مسیر (جابه‌جایی) جسم روی دو سطح شیب‌دار را به کمک مثلثات به دست می‌آوریم.





$$\begin{cases}\sin 37^\circ=\frac{h}{d_1}\Rightarrow d_1=\frac{h}{\sin 37^\circ}\\ \sin 53^\circ=\frac{h}{d_2}\Rightarrow d_2=\frac{h}{\sin 53^\circ}\end{cases}$$

۲ نسبت $\frac{d_1}{d_2}$ را حساب می‌کنیم:

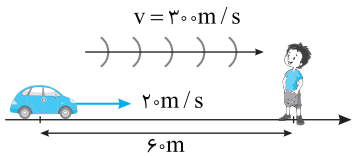
$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{\sin 53^\circ}{\sin 37^\circ}=\frac{0/8}{0/6}=\frac{4}{3}$$

۳ جابه‌جایی d_1 و d_2 را نوشته و دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\Delta x=vt\Rightarrow\begin{cases}d_1=v_1t_1\\ d_2=v_2t_2\end{cases}\Rightarrow\frac{d_1}{d_2}=\frac{\Delta t}{\frac{v}{2}t}\Rightarrow\frac{4}{3}=\frac{10}{v}\Rightarrow v=7/5\,m/s$$

B ۱۵۲ ۳

خط فکری سرعت صوت $300\,m/s$ است، زمانی که طول می‌کشد تا صدای بوق به دانش‌آموز برسد را به‌دست بیاورید سپس مشخص کنید در این مدت خودرو با سرعت $72\,km/h=20\,m/s$ چند متر جلو رفته و در چه فاصله‌ای از دانش‌آموز قرار می‌گیرد.



۱ ابتدا زمان رسیدن صدای بوق به دانش‌آموز را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow 60=300\,\Delta t\Rightarrow\Delta t=0/2\,s$$

۲ حال باید مشخص کرد در این مدت خودرو چند متر جلو آمده است.

$$v=72\,km/h=20\,m/s\ ,\ \Delta x=v\Delta t\Rightarrow\Delta x=20\times 0/2=4\,m$$

۳ بنابراین خودرو در این لحظه در فاصلهٔ $60-4=56\,m$ دانش‌آموز است.

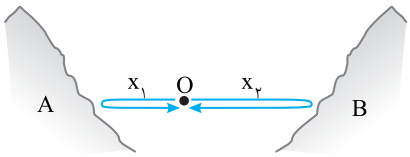
B ۱۵۳ ۲

یکی از نمونه‌های طبیعی حرکت یکنواخت روی خط راست با سرعت ثابت انتشار صوت در یک محیط در یک امتداد و روی خط راست است.

۱ دقت کنید صدا از منبع O به کوه نزدیک (نقطهٔ A) رفته و از روی آن باز می‌گردد. بنابراین مسافتی که صوت در این رفت و برگشت طی می‌کند $2x_1$ است:

$$l_1=vt\Rightarrow 2x_1=v_{صوت}t_1\quad(1)$$

۲ صوت از O تا B می‌رود و صدای پژواک دوم شنیده می‌شود و در این مسیر مسافت طی شده $2x_2$ بوده و خواهیم داشت: $l_2=vt\Rightarrow 2x_2=v_{صوت}t_2\quad(2)$



۳ با توجه به فرض مسئله $t_2-t_1=3\,s$ و سرعت صوت $340\,m/s$ است، بنابراین رابطهٔ (۱) و (۲) را از هم کم کرده و مسئله را حل می‌کنیم:

$$2x_2-2x_1=v(t_2-t_1)\Rightarrow 2(x_2-x_1)=340\times 3$$

$$\Rightarrow x_2-x_1=1/5\times 340\,m$$

بنابراین اختلاف فاصلهٔ O از A تا B، برابر $1/5\times 340\,m$ است.

B ۱۵۴ ۲

خط فکری هر گاه در یک مسئله دربارهٔ دو متحرک از شما سؤال شود که دو متحرک در چه لحظه‌ای و یا در چه مکانی از کنار هم می‌گذرد شما باید معادلهٔ مکان - زمان هر متحرک را بنویسید (خوشبختانه در این مسئله معادله‌ها را در اختیار دارید)، سپس مکان (x) دو متحرک را برابر قرار دهید.

۱ لحظهٔ عبور از کنار هم را حساب می‌کنیم: $x_1=x_2\Rightarrow 2t-4=3t-12\Rightarrow t=8\,s$

۲ با قرار دادن زمان $t=8\,s$ در هر یک از معادله‌ها می‌توانید مکانی که دو متحرک از کنار هم می‌گذرند را به‌دست بیاورید. $x=2t-4\xrightarrow{t=8s}x=2\times 8-4\Rightarrow x=12\,m$

بازی با سؤال **معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک P و Q که هم‌زمان روی محور x ها با سرعت‌های ثابت شروع به حرکت کرده‌اند در SI به‌ترتیب به‌صورت $x_P=vt+12$ و $x_Q=4t-24$ است. اگر هر دو در یک لحظه به مکان $x=+8\,m$ برسند، v چند متر بر ثانیه است؟**

۱) $-0/5$ ۲) $0/5$ ۳) $2/5$ ۴) $-2/5$

پاسخ **با قرار دادن $x=+8\,m$ در معادلهٔ حرکت Q، زمان رسیدن آن به این مکان به دست می‌آوریم:**

$$x_Q=4t-24\Rightarrow 8=4t-24\Rightarrow t=\frac{32}{4}\Rightarrow t=8\,s$$

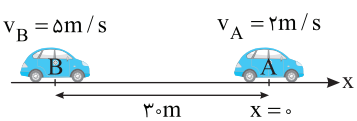
اکنون با قرار دادن $t=8\,s$ و $x=8\,m$ در معادلهٔ حرکت P، سرعت v را به دست می‌آوریم:

$$x_P=vt+12\Rightarrow 8=v(8)+12\Rightarrow v=-0/5\,m/s$$

گزینهٔ ۱

B ۱۵۵ ۱

راه‌حل اول: محل حرکت متحرک A را مبدأ در نظر می‌گیریم، معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته و با هم برابر قرار می‌دهیم:



مکان اولیه متحرک A $(x_{0A}=0)$ و مکان اولیه متحرک B $(x_{0B}=-30m)$ است.

معادله‌های حرکت A و B را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x_A=2t \\ x_B=5t-30 \end{cases} \xrightarrow{x_A=x_B} 2t=5t-30\Rightarrow 3t=30\Rightarrow t=10s$$

مکان رسیدن دو متحرک نسبت به محل آغاز حرکت A خواهد شد: $x=2\times10=20m$

راه‌حل دوم: روش نسبی: در حل این مسائل می‌توان این‌گونه فکر کرد که متحرک A با سرعت $2m/s$ در هر ثانیه ۲ متر جلو می‌رود و متحرک B با سرعت $5m/s$ در هر ثانیه $5m$ حرکت می‌کند یعنی در هر ثانیه $5-2=3m$ عقب ماندگی خود را جبران می‌کند بنابراین با یک تناسب ساده می‌توان نوشت:

$3m$	$1s$
30	Δt

$$\Rightarrow \Delta t=10s$$

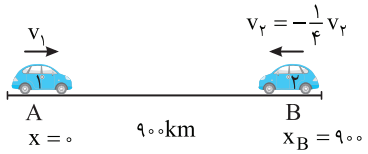
میانبر اگر دو متحرک در یک جهت در حرکت باشند می‌توان فرض کرد یک متحرک (مثلاً A) در حال سکون است و متحرک B با سرعت (v_B-v_A) در حال نزدیک شدن به آن است و می‌نویسیم: $\Delta x=|v_B-v_A|\Delta t$

۴ ۱۵۶ C

راه‌حل اول: روش کلی حل این نوع مسائل به این‌گونه است که معادلهٔ حرکت دو متحرک را نسبت به یک مبدأ اختیاری مثلاً نقطهٔ A می‌نویسیم و معادلهٔ حرکت را باهم برابر قرار می‌دهیم. جهت حرکت v_1 را مثبت می‌گیریم.

$$x=vt+x_0 \begin{cases} x_1=v_1t \\ x_2=-\frac{1}{4}v_1t+900 \end{cases} \xrightarrow{x_1=x_2} v_1t=-\frac{1}{4}v_1t+900$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}vt=900 \xrightarrow{t=4s} v=180km/h$$

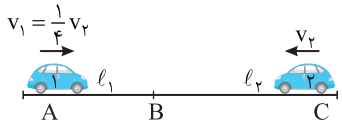


راه‌حل دوم: در حرکت با سرعت ثابت روی خط راست، اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی شده یکسان است. باید مجموع مسافت‌هایی که هر متحرک طی می‌کند تا به هم برسند را به‌دست بیاورید و آن را با فاصلهٔ ابتدایی دو متحرک برابر قرار دهیم.

$$\ell_1=v_1t \ , \ \ell_2=v_2t\Rightarrow \ell_1+\ell_2=(v_1+v_2)t$$

$$\xrightarrow[t=4h]{\ell_1+\ell_2=900km} 900=(v_1+\frac{1}{4}v_1)\times4$$

$$\Rightarrow 900=\frac{5}{4}v_1\times4\Rightarrow v_1=180km/h$$



راه‌حل سوم: روش نسبی: می‌توان چنین استدلال کرد که متحرک (۱) با سرعت v_1 در مدت $1h$ به اندازهٔ v_1 کیلومتر و متحرک (۲) با سرعت v_2 در مدت $1h$ به اندازهٔ v_2 کیلومتر به هم نزدیک می‌شوند یعنی در مدت $1h$ دو متحرک به اندازهٔ v_1+v_2 به هم نزدیک می‌شوند، بنابراین به کمک یک تناسب ساده می‌توان نوشت:

v_1+v_2	$1h$
$900km$	$4h$

$$\Rightarrow v_1+v_2=\frac{900}{4}\Rightarrow v_1+\frac{v_1}{4}=\frac{900}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{5v_1}{4}=\frac{900}{4}\Rightarrow v_1=180km/h$$

میانبر هر گاه دو متحرک خلاف جهت هم حرکت می‌کنند می‌توان نوشت:

$$\Delta x=|v_1+v_2|t$$

۳ ۱۵۷ B

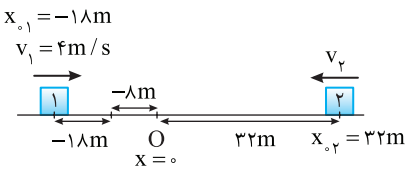
روش اول:

۱ معادلهٔ حرکت متحرک اول را می‌نویسیم:

$$(1)\text{متحرک}: x=v_1t+x_{01}\Rightarrow x=4t-18$$

۲ اکنون زمانی که مکان متحرک $-8m$ می‌شود را به‌دست می‌آوریم.

$$-8=4t-18\Rightarrow 4t=10\Rightarrow t=2/5s$$



۳ اکنون معادلهٔ حرکت متحرک دوم را می‌نویسیم:

$$x_2=v_2t+x_{02}\Rightarrow -8=v_2\times2/5+32\Rightarrow -40=v_2\times2/5$$

$$\Rightarrow v_2=\frac{-40}{2/5}\Rightarrow v_2=-16m/s\Rightarrow |v_2|=16m/s$$

روش دوم:

با توجه به فرض مسئله متحرک (۱) با حرکت از نقطهٔ $-18m$ در $-8m$ به متحرک (۲) می‌رسد، از این‌رو زمان این حرکت برابر است با: $\Delta x=vt\Rightarrow 10=4t\Rightarrow t=2/5s$

متحرک (۲) در این مدت برای رسیدن به نقطهٔ C به اندازهٔ $32+8=40m$ جابه‌جا می‌شود. در این صورت: $|\Delta x|=|v|\Delta t\Rightarrow 40=v_2\times2/5\Rightarrow v_2=16m/s$

۲ ۱۵۸ B

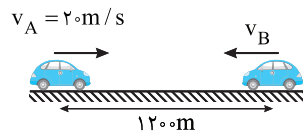
اگر دو متحرک به سمت یکدیگر در حال حرکت باشند با توجه به صورت سؤال بعد از $80s$ به هم می‌رسند، در این مدت متحرک A با سرعت ثابت $20m/s$ به اندازهٔ $\Delta x=vt=1600m$ می‌پیماید که بیشتر از فاصله اولیه بین دو متحرک است. بنابراین این دو متحرک باید قبل از $t=80s$ هم را دیده باشند، پس دو متحرک در حال نزدیک شدن به‌هم نیستند و در یک جهت در حال حرکت می‌باشند. معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

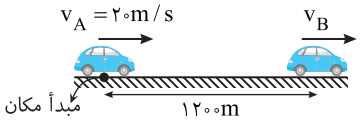
$$x_A=vt=20t \xrightarrow{t=80s} x_A=1600m$$

$$x_B=v_Bt+1200 \xrightarrow{t=80s} x_B=80v_B+1200$$

در $t=80s$ دو متحرک به هم می‌رسند: $x_A=x_B$

$$1600=80v_B+1200\Rightarrow 400=80v_B\Rightarrow v_B=5m/s$$





۴ ۱۵۹ B

خط فکری می‌خواهیم یک مثال ساده و عددی را باهم بررسی کنیم. متحرک A از یک نقطه رأس ساعت ۳ بعدازظهر شروع به حرکت می‌کند و $1h$ بعد (یعنی در ساعت ۴ بعدازظهر) متحرک B از همان نقطه به راه می‌افتد. رأس ساعت ۸ شب متحرک B به متحرک A می‌رسد. در این صورت متحرک A $(8-3=5)$ ساعت و متحرک B $(8-4=4h)$ در حرکت بوده‌اند یعنی زمان حرکت A بزرگ‌تر از زمان حرکت B $(t_A>t_B)$ بوده و اگر مدت زمان حرکت A را t_A بنامیم، مدت زمان حرکت B تا رسیدن به A (t_A-1) خواهد بود. البته بین خودمان بماند که بعضی افراد وقتی زمان حرکت A را t_A در نظر می‌گیرند زمان حرکت B را $(t_B=t_A+1)$ در نظر می‌گیرند که کاملاً غلط است. شما باید رابطه جابه‌جایی $\Delta x=vt$ را برای هر دو متحرک بنویسید و آن‌ها را باهم برابر قرارداده، مسئله را حل کنید.

وقتی دو خودرو به هم می‌رسند، جابه‌جایی آن‌ها یکسان است. متحرک دوم یک ساعت پس از متحرک اول شروع به حرکت کرده بنابراین اگر زمان حرکت متحرک اول را Δt_1 در نظر بگیریم زمان حرکت متحرک دوم $(\Delta t_2 = \Delta t_1 - 1)$ خواهد شد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 \Rightarrow v_1 \Delta t_1 = v_2 \Delta t_2 \Rightarrow 60\Delta t_1 = 80(\Delta t_1 - 1)$$
$$\Rightarrow 60\Delta t_1 = 80\Delta t_1 - 80 \Rightarrow \Delta t_1 = 4h$$

B ۱۶۰ ۱

۱ خودروی اول با سرعت $10m/s$ پس از ۲۰ ثانیه، ۲۰۰ متر به جلو می‌رود و فاصلهٔ دو خودرو از هم $470 - 200 = 270m$ می‌شود.

۲ معادلهٔ حرکت دو متحرک را از این لحظه به بعد نوشته و برای این منظور نقطهٔ B را مبدأ مکان فرض می‌کنیم:

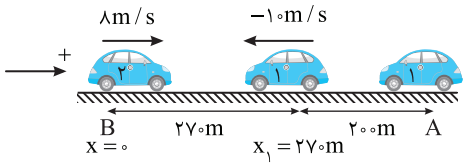
معادلهٔ حرکت خودرو (۱): $x_1 = -10t + 270$

معادلهٔ حرکت خودرو (۲): $x_2 = 8t$

۳ دو معادله را باهم برابر قرار می‌دهیم و زمان رسیدن دو خودرو به هم را حساب می‌کنیم:

$$x_2 = x_1 \Rightarrow 8t = -10t + 270 \Rightarrow 18t = 270 \Rightarrow t = 15s$$

۴ بنابراین متحرک (۲)، ۱۵ ثانیه در حرکت بوده است تا به متحرک (۱) برسد و اندازهٔ جابه‌جایی آن در این مدت خواهد شد: $\Delta x = vt \Rightarrow \Delta x = 8 \times 15 = 120m$



B ۱۶۱ ۱

خط فکری دو متحرک از یک مبدأ به سوی یک مقصد می‌روند یعنی جابه‌جایی آن‌ها باهم برابر است $(\Delta x_1 = \Delta x_2)$. یکی از آن‌ها ۵۰s زودتر به مقصد می‌رسد. یعنی اگر زمان حرکت متحرک کندرو $t_1 (v_1 = 30m/s)$ باشد زمان حرکت متحرک تندرو و $(v_2 = 40m/s)$ برابر $t_1 - 50$ است بنابراین کافی است شما جابه‌جایی‌ها را مساوی قرار داده و مسئله را حل کنید.

۱ جابه‌جایی دو متحرک برابر است. از این‌رو:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 \xrightarrow{\Delta x = vt} 30t_1 = 40t_2 \xrightarrow{t_2 = t_1 - 50}$$
$$30t_1 = 40(t_1 - 50) \Rightarrow 30t_1 = 40t_1 - 2000 \Rightarrow t_1 = 200s$$

۲ فاصلهٔ مبدأ تا مقصد برابر است با: $\Delta x = v_1 t_1 = 30 \times 200 = 6000m$

B ۱۶۲ ۱

خط فکری مسئلهٔ ساده اما قابل فکر کردن است. بیشینه فاصلهٔ دو متحرک در طول مسیر یعنی چه؟

دقت کنید متحرک تندرو با سرعت $8m/s$ از مبدأ به راه می‌افتد و همزمان با آن متحرک کندرو با سرعت $5m/s$ از همان نقطه به راه می‌افتد بنابراین در هر لحظه فاصلهٔ بین دو متحرک در حال افزایش است و در طول مسیر بیشینه فاصلهٔ آن‌ها از هم وقتی که متحرک تندرو به مقصد برسد است. بنابراین شما باید مدت زمان رسیدن متحرک تندرو به مقصد را حساب کرده سپس، معین کنید در این مدت متحرک کندرو چند متر جلو آمده تا مشخص شود فاصلهٔ آن‌ها در این لحظه چند متر است.

۱ زمان رسیدن متحرک تندرو را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x = v\Delta t \xrightarrow{\Delta x = 400m} 400 = 8\Delta t \Rightarrow \Delta t = 50s$$

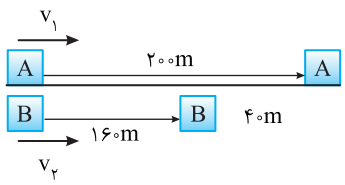
۲ در مدت ۵۰s جابه‌جایی متحرک کندرو خواهد شد:

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow \Delta x_{\text{کندرو}} = 5 \times 50 = 250m$$

۳ بنابراین بیشینه فاصلهٔ دو متحرک در طول مسیر برابر است با: $400 - 250 = 150m$

B ۱۶۳ ۳

خط فکری دونده A و B مسیر ۲۰۰ متر را می‌خواهند بدوند. دوندهٔ A وقتی به مقصد می‌رسد دوندهٔ B به اندازهٔ $40m$ از او عقب‌تر است یعنی در مدتی که دوندهٔ A، ۲۰۰ متر دویده، دوندهٔ B، $160m$ دویده است و شما به کمک این موضوع می‌توانید نسبت سرعت B به سرعت A (v_B / v_A) را پیدا کرده و به کمک آن مسئله را حل کنید.



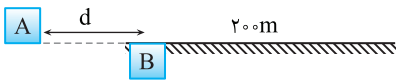
۱ با توجه به رابطهٔ جابه‌جایی زمان خواهیم داشت:

$$\Delta x = vt \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{A} 200 = v_A t \\ \xrightarrow{B} 160 = v_B t \end{cases} \Rightarrow \frac{200}{160} = \frac{v_A t}{v_B t} \Rightarrow v_B = 0/8 v_A$$

۲ اکنون دوندهٔ A به اندازهٔ d از دوندهٔ B عقب‌تر استارت می‌زند و قرار است باهم به مقصد برسند بنابراین:

$$A: d + 200 = v_A t', B: 200 = v_B t' \Rightarrow \frac{d+200}{200} = \frac{v_A}{v_B} \xrightarrow{v_B = 0/8 v_A}$$

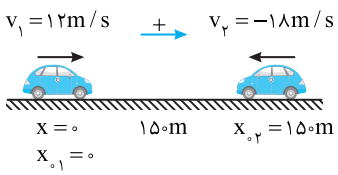
$$\frac{d+200}{200} = \frac{1}{0/8} \Rightarrow d + 200 = 250 \Rightarrow d = 50m$$



A ۱۶۴ ۲

فاصلهٔ دو خودرو از هم $150m$ است، بنابراین برای آنکه فاصلهٔ آن‌ها از هم ۱۸۰ متر شود. ابتدا باید دو خودرو به هم رسیده و از کنار هم بگذرند، از هم دور شوند تا فاصلهٔ آن‌ها از هم ۱۸۰ متر شود. معادلهٔ حرکت دو خودرو را نوشته و از هم کم می‌کنیم.

$$\begin{cases} x_1 = 12t \\ x_2 = -18t + 150 \end{cases} \xrightarrow{|x_1 - x_2| = 180m} 12t + 18t - 150 = 180$$
$$\Rightarrow 30t = 330 \Rightarrow t = 11s$$



اگر تفاضل را برابر -180 قرار دهیم خواهیم داشت:

$$12t + 18t - 150 = -180 \Rightarrow 30t = -30 \Rightarrow t = -1s$$ غ.ق.ق

روش دیگر: می‌توان فرض کرد متحرک (۲) ساکن است و متحرک (۱) با سرعت $12 + 18 = 30m/s$ از فاصلهٔ ۱۵۰ متری به آن نزدیک و سپس ۱۸۰ متر از آن دور می‌شود یعنی متحرک (۱) جمعاً $150 + 180 = 330m$ را با سرعت $30m/s$ طی می‌کند. $\Delta x = vt \Rightarrow 330 = 30t \Rightarrow t = 11s$

B ۱۶۵ ۴

خط فکری یک‌بار هنگام نزدیک شدن دو متحرک به هم، فاصلهٔ آن‌ها از هم ۱۰۰ متر و بار دیگر بعد از رسیدن به هم و دور شدن از هم، فاصلهٔ آن‌ها از هم ۱۰۰ متر می‌شود. بنابراین مسئله دو حالت دارد:

حالت اول: وقتی هنگام نزدیک شدن فاصلهٔ آن‌ها ۱۰۰ متر است، دو متحرک در مجموع باید مسافت $300 - 100 = 200m$ را طی کرده باشند.

$$\begin{cases} |\Delta x_1| = v_1 t \\ |\Delta x_2| = v_2 t \end{cases} \Rightarrow |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = (v_1 + v_2)t \Rightarrow 200 = 50t \Rightarrow t = 4s$$

حالت دوم: هنگامی که از کنار هم می‌گذرند و مجدداً فاصلهٔ آن‌ها از هم ۱۰۰ متر است، باید دو متحرک در مجموع مسافت $300 + 100 = 400m$ را بپیمایند.

$$|\Delta x_1| = v_1 t, |\Delta x_2| = v_2 t \Rightarrow (v_1 + v_2)t = 400 \Rightarrow 50t = 400 \Rightarrow t = 8s$$

بازی با سوال دو متحرک از یک نقطه، هم‌زمان در یک جهت با سرعت $72km/h$ و $108km/h$ بـه حرکـت درمی‌آیند. پس از چنـد دقیقه فاصلهٔ دو متحرک از هم ۳/۶ کیلومتر می‌شود؟

۱) ۱۰ ۲) ۳/۶ ۳) ۶ ۴) ۱۲

پاسخ راه‌حل اول: معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته، از هم کم کرده و برابر $3/6km$ قرار می‌دهیم:

$$x=vt\begin{cases}x_1=72t\\x_2=108t\end{cases}\xrightarrow{x_2-x_1=3/6}108t-72t=3/6\Rightarrow 36t=3/6$$

$$\Rightarrow t=0/1h\Rightarrow t=0/1\times 60=6\,min$$

دقت کردید برای حل مسـئله سرعت‌ها را تبدیل واحد نکردیم و مسئله را با همان یکای km/h حل کردیم.

راه‌حل دوم: هر دو با هم حرکت کرده‌اند، در هر ساعت متحرک (۱) $72km$ و متحـرک (۲) $108km$ طی می‌کند یعنی متحرک (۲) $108-72=36km$ از اولی جلو می‌افتد، مانند این است که متحرک اول را ساکن فرض کنیم و متحرک دوم با سـرعت $108-72=36km/h$ از آن دور شـود، در واقع از سـرعت نسـبی استفاده می‌کنیم: $\Delta x=v_{نسبی}t\Rightarrow 3/6=(108-72)t\Rightarrow t=0/1h=6\,min$

گزینهٔ ۳

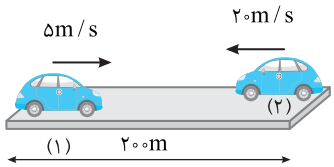
B ۱۶۶ ۳

خط فکری قرار است فاصلهٔ دو متحرک از هم در طول مسیر کمتر از $50m$ باشد یعنی $|x_1-x_2|=250m$ شـود. بنابراین کافی اسـت که معادلـهٔ حرکت هر متحرک را نوشته و از هم کم کرده و قدرمطلق تفاضل را کوچک‌تر از ۵۰ قرار دهید.

یادداشت ریاضی هر گاه $|a|\le b$ و $b>0$ باشد آن‌گاه $-b\le a\le b$.

مکان اولیه متحرک با سـرعت $10m/s$ را به عنوان مبدأ مکان و سـمت راسـت را جهت مثبت در نظر می‌گیریم. در این صورت معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}x_1=5t\\x_2=-20t+200\end{cases}$$



فاصلـهٔ دو متحـرک از هم کمتر از $50m$ باشد یعنی:

$$|x_1-x_2|\le 50\Rightarrow|25t-200|\le 50$$

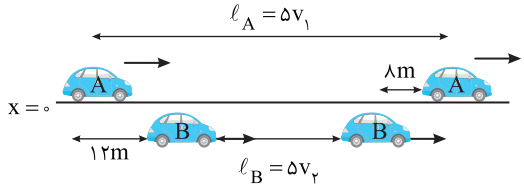
$$\Rightarrow -50\le 25t-200\le 50\Rightarrow 150\le 25t\le 250\Rightarrow 6s\le t\le 10s$$

بنابرایـن در بـازهٔ $t=6s$ تـا $t=10s$ یعنـی در مـدت $\Delta t=10-6=4s$ ، فاصلـهٔ دو متحرک از هم کمتر از ۵۰ متر است.

B ۱۶۷ ۳

با توجه به شـکل و صورت مسـئله در مدت $5s$ متحرک A با سـرعت v_A مسـافت $\ell_A=v_At=5v_A$ و متحرک B مسـافت $\ell_B=v_Bt=5v_B$ را طی می‌کند. اگر به شکل دقت کنید خواهیم داشت:

$$\ell_A=12+\ell_B+8\Rightarrow 5v_A=20+5v_B\Rightarrow v_A-v_B=4m/s\quad (I)$$



اکنون می‌خواهیم فاصلهٔ دو متحرک به جای $8m$ ، $24m$ شود بنابراین:

$$\ell'_A=12+\ell'_B+24\Rightarrow \ell'_A-\ell'_B=36\Rightarrow v_At-v_Bt=36$$

$$\Rightarrow (v_A-v_B)t=36\xrightarrow{(I)}4t=36\Rightarrow t=9s$$

B ۱۶۸ ۴

راه‌حل اول: ابتدا معادلهٔ حرکت دو متحرک را نسبت به نقطهٔ A می‌نویسیم.

$$x=vt+x_0\Rightarrow\begin{cases}x_1=v_1t\\x_2=-4v_1t+AB\end{cases}\Rightarrow v_1t=-4v_1t+AB$$

$$\Rightarrow AB=v_1t+(4v_1t)\Rightarrow AB=5v_1t$$

زمان به هم رسیدن دو متحرک برابر می‌شود با:

$$t=\frac{AB}{5v_1}\quad (I)$$

زمان حرکت متحرک (۱) از A تا B برابر است با:

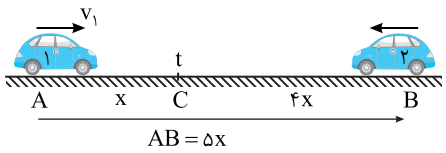
$$\Delta t=\frac{\Delta x}{v}\Rightarrow t_1=\frac{AB}{v_1}\quad (II)$$

اکنون با تقسیم روابط (I) و (II) بر هم می‌توان t_1 را برحسب t به دست آورد:

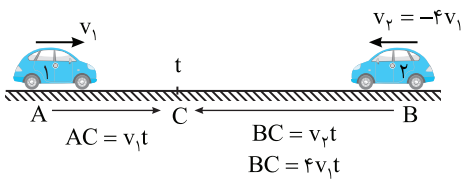
$$\frac{t_1}{t}=\frac{\frac{AB}{v_1}}{\frac{AB}{5v_1}}\Rightarrow\frac{t_1}{t}=5\Rightarrow t_1=5t$$

راه‌حل دوم و سریع:

۱ بنا به فرض مسئله $v_2=-4v_1$ است یعنی در لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند اگر متحرک v_1 به اندازهٔ x جلو آمده باشد متحرک ۲ با سرعت $4v_1$ به اندازه $4x$ جلو می‌آید.



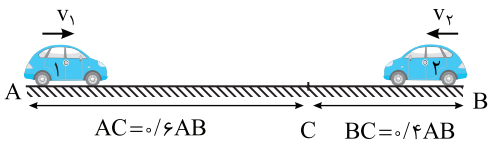
۲ متحـرک کنـدرو (۱) در مدت t مسـافت x را طی کرده اسـت بنابراین کل مدت حرکت از A تا B که برابر $5x$ است را در مدت $5t$ طی می‌کند.



B ۱۶۹ ۱

۱ در گام اول شما باید نسبت سرعت‌های v_1 و v_2 را به کمک جابه‌جایی آن‌ها از لحظهٔ شروع حرکت تا لحظه‌ای که به هم می‌رسند را حساب کنید. دقت کنید که سرعت متحرک (۱) قطعاً از سـرعت متحرک (۲) بیشـتر است زیرا در مدت t که به هم می‌رسند مسیر طولانی‌تری را طی می‌کند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}AC=v_1t\Rightarrow 0/6AB=v_1t\\BC=v_2t\Rightarrow 0/4AB=v_2t\end{cases}\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\frac{3}{2}\quad (I)$$



۲ در ادامهٔ مسیر، متحرک (۱) مسیر BC را در مدت ۴۰s طی کرده است:

$$\Delta x=vt\Rightarrow CB=v_1\times 40\Rightarrow 0/4AB=v_1\times 40\quad (II)$$

۳ در ادامهٔ مسیر، متحرک (۲) مسیر CA را در مدت t_2 طی می‌کند بنابراین:

$$\Delta x=vt\Rightarrow CA=v_2\times t_2\Rightarrow 0/6AB=v_2t_2\quad (III)$$

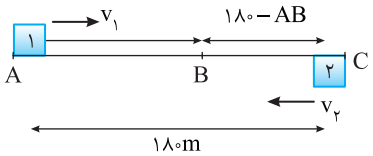
۴ رابطهٔ (II) را بر رابطهٔ (III) تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{0/4AB}{0/6AB}=\frac{v_1\times 40}{v_2\times t_2}\xrightarrow{(I)}\frac{2}{3}=\frac{3}{2}\times\frac{40}{t_2}\Rightarrow t_2=90s$$

B ۲ ۱۷۰

۱ متحرک (۱) مطابق شکل از نقطهٔ A و متحرک (۲) از نقطهٔ C به سوی هم می‌روند و در نقطهٔ B به هم می‌رسند. در این مدت متحرک (۱) مسافت AB و متحرک (۲) مسافت $BC=۱۸۰-AB$ را به ترتیب با تندی‌های $v_۱$ و $v_۲$ طی می‌کنند.

متحرک اول: $AB=v_۱t$ (I) ، متحرک دوم: $(۱۸۰-AB)=v_۲t$ (II)



۲ دو رابطه را برهم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{AB}{۱۸۰-AB} \quad (III)$$

۳ با توجه به فرض مسئله متحرک (۱) در ادامهٔ مسیر، مسافت BC را در مدت ۱۶s طی می‌کند و متحرک ۲، مسافت BA را در مدت ۲۵s طی می‌کند، از این‌رو خواهیم داشت:

$$\ell=vt\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{\text{متحرک اول}} BC=v_۱\times۱۶\Rightarrow ۱۸۰-AB=۱۶v_۱\\ \Rightarrow v_۱=\frac{۱۸۰-AB}{۱۶}\\ \xrightarrow{\text{متحرک دوم}} BA=v_۲\times۲۵\Rightarrow AB=۲۵v_۲\Rightarrow v_۲=\frac{AB}{۲۵}\end{cases}$$

۴ دو رابط را برهم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{\frac{۱۸۰-AB}{۱۶}}{\frac{AB}{۲۵}}\Rightarrow\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{۲۵}{۱۶}\left(\frac{۱۸۰-AB}{AB}\right)$$

۵ طرف چپ رابطهٔ بالا و رابطهٔ (III) یکسان بوده، طرف راست آن‌ها را برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{AB}{۱۸۰-AB}=\frac{۲۵}{۱۶}\left(\frac{۱۸۰-AB}{AB}\right)\Rightarrow\frac{AB^۲}{(۱۸۰-AB)^۲}=\frac{۲۵}{۱۶}$$

$$\Rightarrow\frac{AB}{۱۸۰-AB}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow ۹۰۰-۵AB=۴AB\Rightarrow AB=۱۰۰m$$

$$\Rightarrow BC=۱۸۰-۱۰۰=۸۰m$$

متحرک (۱) $۸۰m$ را با مدت ۱۶s طی کرده بنابراین اندازهٔ سرعت آن (تندی) برابر خواهد شد با:

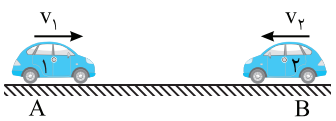
$$v_۱=\frac{BC}{t}=\frac{۸۰}{۱۶}=۵m/s$$

میانبر هر گاه دو متحرک با تندی‌های ثابت $v_۱$ و $v_۲$ به ترتیب از نقاط A و C به سوی هم بروند و در نقطهٔ B از کنار هم بگذرند چنانچه بازهٔ زمانی که متحرک (۱) را در ادامه مسیر از B به C می‌رود $t_۱$ و بازهٔ زمانی که متحرک (۲) در ادامهٔ مسیر از B به A می‌رود $t_۲$ بنامیم خواهیم داشت:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{v_۱}{v_۲}=\sqrt{\frac{t_۱}{t_۲}}\Rightarrow\frac{AB}{۱۸۰-AB}=\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}}\Rightarrow\frac{AB}{۱۸۰-AB}=\frac{۴}{۵}$$

$$\Rightarrow AB=۱۰۰m\Rightarrow BC=۸۰m\Rightarrow v_۱=\frac{BC}{t_۱}=\frac{۸۰}{۱۶}=۵m/s$$

بازی با سوال **مطابق شکل، دو متحرک (۱) و (۲) هم‌زمان از نقاط A و B می‌گذرند و با تندی‌های ثابت به طرف هم حرکت می‌کنند. دو متحرک پس از مدت t در نقطهٔ C از کنار هم عبور می‌نمایند به‌طوری که $AC=\frac{۲}{۵}AB$ است. چه مدت پس از آنکه متحرک (۲) به نقطهٔ A می‌رسد، متحرک (۱) از نقطهٔ B عبور خواهد کرد؟**



۱) $\frac{۴}{۵}t$ ۲) $\frac{۵}{۶}t$ ۳) $\frac{۶}{۵}t$ ۴) $\frac{۵}{۴}t$

پاسخ تندی دو متحرک ثابت است. دو متحرک پس از t ثانیه به هم می‌رسند. متحرک (۲) در این مدت از B به C می‌رود یعنی $\frac{۳}{۵}AB$ را طی می‌کند و در ادامهٔ مسیر از C به A با همان تندی ثابت مسافت $AC=\frac{۲}{۵}AB$ را طی می‌کند بنابراین با یک تناسب ساده زمان حرکت (۲) از C تا A به‌دست می‌آید.

$$\begin{array}{c|c}\frac{۳}{۵}AB & t\\ \hline \frac{۲}{۵}AB & t_۲\end{array}\Rightarrow t_۲=\frac{۲}{۳}t$$

با همین استدلال زمان حرکت متحرک (۱) از A تا C برابر t و از C تا B برابر $t_۲$ است از این‌رو:

$$\begin{array}{c|c}\frac{۲}{۵}AB & t\\ \hline \frac{۳}{۵}AB & t_۱\end{array}\Rightarrow t_۱=\frac{۳}{۲}t$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$t_۱-t_۲=\frac{۳}{۲}t-\frac{۲}{۳}t=\frac{۹-۴}{۶}t\Rightarrow t_۱-t_۲=\frac{۵}{۶}t$$

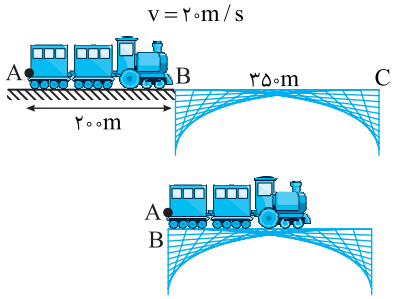
گزینهٔ ۲

B ۲ ۱۷۱

۱ هنگامی که انتهای قطار به ابتدای پل برسد قطار به طور کامل روی پل قرار گرفته که نقطهٔ A به نقطهٔ B برسد. یعنی قطار $۲۰۰m$ جابه‌جا شود. تندی حرکت قطار $۲۰m/s$ است بنابراین پس از مدت زیر قطار به‌طور کامل روی پل قرار می‌گیرد:

$$\Delta x=vt\Rightarrow ۲۰۰=۲۰t\Rightarrow t=۱۰s$$

$v=۲۰m/s$



۲ اما وقتی قطار از ابتدای پل شروع به حرکت کند و به‌طور کامل از پل بگذرد باید نقطهٔ A (انتهای قطار) از انتهای پل (نقطهٔ C) بگذرد یعنی قطار باید به اندازهٔ مجموع طول پل و طول خودش جابه‌جا شود. $\Delta x=۲۰۰+۳۵۰=۵۵۰m$

در این صورت زمان عبور کامل قطار از پل خواهد شد:

$$\ell_۱+\ell_۲=vt\Rightarrow ۵۵۰=۲۰t\Rightarrow t=۲۷/۵s$$

B ۴ ۱۷۲

نکته هر گاه یک قطار از ابتدای یک پل بگذرد جابه‌جایی آن هنگامی که به‌طور کامل از پل می‌گذرد برابر $\Delta x=\ell_{\text{پل}}+\ell_{\text{قطار}}$ خواهد شد.

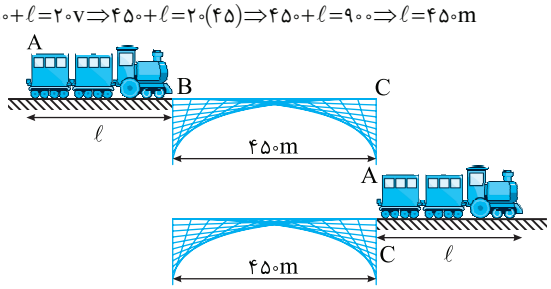
۱ مسافتی که قطار در دو حالت طی می‌کند خواهد شد:

$$\Delta x=vt\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{\text{حالت اول}} ۴۵۰+\ell=۲۰v\\ \xrightarrow{\text{حالت دوم}} ۴۵۰+\ell=۱۵(v+۱۵)\end{cases}$$

۲ مسافت طی شده در دو حالت یکسان است. بنابراین سمت راست روابط بالا را برابر قرار می‌دهیم. $۲۰v=۱۵v+۲۲۵\Rightarrow ۵v=۲۲۵\Rightarrow v=۴۵m/s$

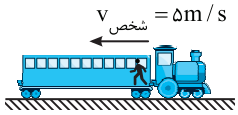
۳ حال با قرار دادن $v=۴۵m/s$ در یکی از معادله‌ها داریم:

$$۴۵۰+\ell=۲۰v\Rightarrow ۴۵۰+\ell=۲۰(۴۵)\Rightarrow ۴۵۰+\ell=۹۰۰\Rightarrow\ell=۴۵۰m$$



۱۷۳ B

مسئلهٔ ساده‌ای است حرکت قطار نقشی در زمان حرکت شخص از ابتدا به انتهای قطار نخواهد داشت. یعنی شخص با سرعت ثابت $5m/s$ می‌خواهد جابه‌جایی ۲۵۰ متری انجام دهد، بنابراین:



$$\Delta x = vt \Rightarrow 250 = 5t \Rightarrow t = 50s$$

۱۷۴ B

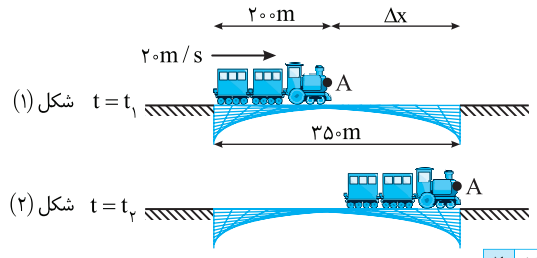
خط فکری وقتی گفته شده «قطار به‌طور کامل روی پل باشد» یعنی تمام طول قطار باید روی پل باشد. بنابراین مطابق شکل ابتدا شما باید قطار را روی پل قرار دهید و انتهای قطار ابتدای پل باشد (شکل ۱) سپس قطار را در ذهن خود حرکت داده تا ابتدای قطار به انتهای پل برسد اما از آن رد نشود. بنابراین جابه‌جایی قطار برابر تفاضل طول پل و طول قطار است. $(\Delta x = \ell_{\text{پل}} - \ell_{\text{قطار}})$

۱ مسافتی که قطار طی می‌کند و در آن مدت تمام طول قطار روی پل است برابر است با:

$$\Delta x = 350 - 200 = 150m$$

۲ مدت زمانی که قطار به‌طور کامل روی پل است خواهد شد:

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow 150 = 20\Delta t \Rightarrow \Delta t = 7/5s$$



۱۷۵ B

خط فکری به جای دو قطار، ذرهٔ A' را در جلوی قطار A و ذرهٔ B' را در انتهای B در نظر می‌گیریم که می‌خواهند از کنار هم بگذرند. بنابراین معادلهٔ حرکت این دو ذره را نوشته باهم برابر قرار دهید.

۱ روی شکل مبدأ مکان اختیاری را نشان داده‌ایم در لحظهٔ $t=0$ مکان ذرهٔ A'، $x_{0A'} = 0$ و مکان ذرهٔ B'، $x_{0B'} = 280 + 200 = 480m$ است.

۲ معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

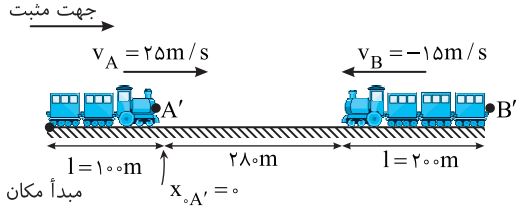
$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{A'} x_{A'} = 25t \\ \xrightarrow{B'} x_{B'} = -15t + 480 \end{cases}$$

۳ دو معادله را برابر قرار می‌دهیم:

$$x_{A'} = x_{B'} \Rightarrow 25t = -15t + 480 \Rightarrow 40t = 480 \Rightarrow t = 12s$$

میانبر دو متحرک به سوی هم می‌روند و برای به‌دست آوردن زمان رسیدن آن‌ها به هم می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد.

$$\Delta x = (v_1 + v_2)t \Rightarrow 480 = (25 + 15)t \Rightarrow t = 12s$$



۱۷۶ B

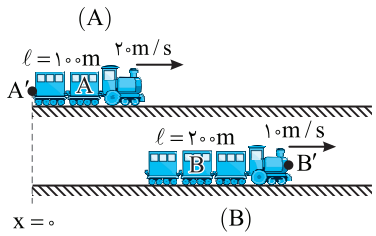
هنگامی قطار A به‌طور کامل از قطار B سبقت می‌گیرد که انتهای قطار A یعنی نقطهٔ A' از ابتدای قطار B یعنی نقطهٔ B' بگذرد. دقت کنید B'، $100 + 200 = 300m$ جلوتر از A' است.

۱ معادلهٔ حرکت نقاط A' و B' را نسبت به مبدأ مکان اختیاری روی شکل می‌نویسیم:

$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 20t \\ x_{B'} = 10t + 300 \end{cases}$$

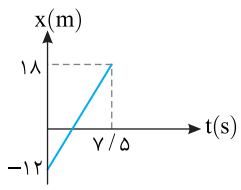
۲ معادله‌ها را برابر قرار می‌دهیم:

$$x_{A'} = x_{B'} \Rightarrow 20t = 10t + 300 \Rightarrow 10t = 300 \Rightarrow t = 30s$$



۱۷۷ A

یادآوری معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت $x = vt + x_0$ یک تابع درجهٔ اول بوده و نمودار آن خط راست مایل است. x_0 مکان اولیه همان عرض از مبدأ و v سرعت متحرک برابر شیب نمودار است.



با توجه به نمودار، مکان متحرک در $t=0$، $-12m$ و در $t=7/5$، ۱۸ متر بوده و تغییر مکان متحرک $\Delta x = x_2 - x_1 = 18 - (-12) = 30m$ می‌شود.

نمودار $x-t$ متحرک به صورت خط راست است پس حرکت با سرعت ثابت است و سرعت در $t=3s$ با سرعت متوسط در بازهٔ دلخواه صفر تا $7/5s$ برابر است.

$$v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{30}{7/5} = 4m/s$$

۱۷۸ A

۱ شیب خط نمودار مکان- زمان بیانگر سرعت متحرک است. بنابراین سرعت خواهد شد:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0-4}{2-0} = -2m/s$$

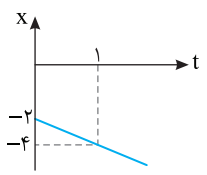
۲ مکان اولیهٔ متحرک $x_0 = 4m$ است.

۳ معادلهٔ حرکت خواهد شد:

$$x = vt + x_0 \Rightarrow x = -2t + 4$$

۱۷۹ A

با توجه به شکل مکان اولیه جسم در فاصلهٔ $2m$ از مبدأ محور xها و در قسمت منفی این محور است، بنابراین $x_0 = -2m$ است. جهت حرکت و جهت سرعت یکی است و با توجه به شکل جهت حرکت منفی است پس سرعت متحرک نیز منفی و برابر $v = -2m/s$ می‌باشد. بنابراین معادلهٔ حرکت خواهد شد:



$$x = vt + x_0 \Rightarrow x = -2t - 2$$

بازی با سوال **گلوله‌ای از ارتفاع ۸۰ متری سطح زمین رها می‌شود. این گلوله ۰/۶ ثانیه قبل از رسیدن به سطح زمین در ارتفاع چند متری است؟ (مقاومت هوا ناچیز و $g = 10\frac{m}{s^2}$)**

۱) ۲۲/۲ ۲) ۳۲/۸ ۳) ۵۷/۸ ۴) ۴۷/۲

پاسخ **جهت رو به بالا را مثبت می‌گیریم و محل پرتاب را مبدأ مکان فرض می‌کنیم ابتدا زمان کل سقوط را به‌دست می‌آوریم.**

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow -80 = \frac{-1}{2} \times 10 \times t^2 \Rightarrow t = 4s$$

۰/۶s قبل از رسیدن به زمین، گلوله $4 - 0/6 = 3/4s$ در حرکت بوده است.

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \times 10 \times (3/4)^2 \Rightarrow y = -57/8m$$

فاصله از زمین:

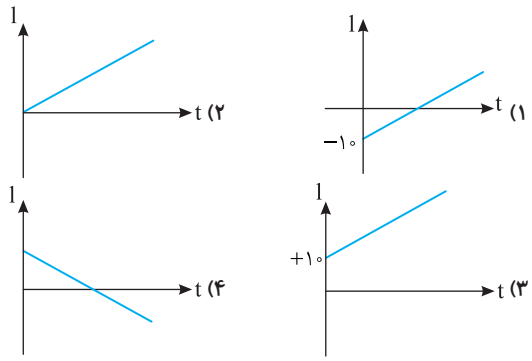
$$-57/8 - (-80) = 22/2m$$

گزینهٔ ۱

A ۱۸۰ | ۱

دقت کنید معادلهٔ مکان - زمان $x=5t-10$ بوده و مکان اولیه (عرض از مبدأ) $x_0=-10m$ است و شیب خط مثبت بنابراین به نظر می‌رسد که شما باید گزینهٔ (۳) را انتخاب کنید اما به کلمهٔ روی محور قائم دقت کنید، روی محور به جای «مکان» «جابه‌جایی» نوشته شده یعنی شما نمودار $\Delta x-t$ را باید مشخص کنید، جابه‌جایی در حرکت با سرعت ثابت برابر $\Delta x=vt$ بوده که در اینجا $\Delta x=5t$ است. بنابراین پاسخ گزینهٔ (۱) است.

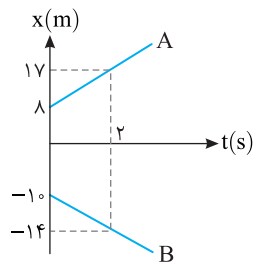
بازی با سؤال **معادلهٔ مکان جسمی در SI به صورت $x=-5t-10$ است. نمودار مسافت - زمان این متحرک کدام است؟**



پاسخ **مسافت کمیت نرده‌ای و همواره مثبت است. معادلهٔ حرکت $x=-5t-10$ یعنی متحرک با سرعت $5m/s$ در خلاف جهت محور در حال حرکت است و در هر ثانیه $+5m$ جابه‌جا می‌شود. بنابراین نمودار مسافت زمان خطی با شیب مثبت است که از مبدأ می‌گذرد.** گزینهٔ ۲

A ۱۸۱ | ۳

خط فکری شیب نمودار مکان - زمان برابر سرعت جسم است. وقتی نمودار خط راست مایل است سرعت در تمام لحظات یکسان است و تندی متحرک همان اندازهٔ سرعت متحرک است بنابراین شما کافی است شیب هر خط را حساب کنید، البته مقدار مثبت شیب را در نظر بگیرید.



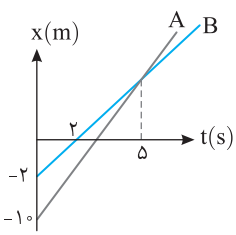
تندی متحرک A: $s_A=v_A=\frac{17-8}{2-0}=4/5m/s$

تندی متحرک B: $s_B=v_B=\frac{|-14-(-10)|}{2}=\frac{4}{2}=2m/s$

B ۱۸۲ | ۱

۱ نمودار $x-t$ هر دو متحرک خط راست مایل است، بنابراین حرکت هر دو یکنواخت است. ابتدا سرعت متحرک B را با توجه به شکل به دست می‌آوریم:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_B=\frac{0-(-2)}{2-0}=1m/s$$



۲ معادلهٔ حرکت B برابر خواهد شد با: $x_B=v_Bt+x_{0B}\Rightarrow x_B=t-2$

۳ مکان متحرک A و B در لحظهٔ $t=5s$ که نمودارها یکدیگر را قطع کرده‌اند باهم برابر است، از این‌رو مکان متحرک B در لحظهٔ $t=5s$ را به دست می‌آوریم: $x_B=5-2=3m$

۴ در $t=5s$ مکان متحرک A نیز $x_A=+3m$ است. به کمک معادلهٔ حرکت A، سرعت A را حساب می‌کنیم:

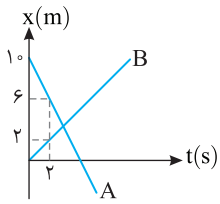
$$x_A=v_At+x_{0A}\Rightarrow 3=v_A\times 5+(-10)\Rightarrow v_A=2/6m/s$$

۵ در لحظهٔ $t=2s$ متحرک B از مبدأ می‌گذرد و در این لحظه متحرک A در مکان $-4/8m$ خواهد بود:

$$x_A=2/6t-10\xrightarrow{t=2s}x_A=-4/8m$$

A ۱۸۳ | ۴

نمودار $x-t$ دو متحرک به صورت خط راست می‌باشد پس حرکت دو متحرک با سرعت ثابت است و شیب هر نمودار برابر سرعت آن‌هاست پس سرعت هر یک را حساب می‌کنیم.



$$v=v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow\begin{cases}v_A=\frac{6-10}{2}=-2m/s\\ v_B=\frac{2-0}{2}=1m/s\end{cases}$$

با توجه به نمودار مکان اولیه متحرک A و B به ترتیب $x_{0A}=10m$ و $x_{0B}=0$ می‌باشد. بنابراین معادلهٔ حرکت آن‌ها خواهد شد:

$$x=vt+x_0\Rightarrow x_A=-2t+10, x_B=t$$

لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند وقتی است که $x_A=x_B$ می‌شود از این‌رو معادلهٔ حرکت دو متحرک را باهم برابر قرار می‌دهیم:

$$t=-2t+10\Rightarrow t=\frac{10}{3}s$$

B ۱۸۴ | ۱

خط فکری معادلهٔ حرکت دو متحرک را به کمک نمودار مکان - زمان نوشته و با هم برابر قرار می‌دهیم. نمودار هر دو خط راست مایل است. بنابراین حرکت هر دو متحرک با سرعت ثابت صورت می‌گیرد.

۱ سرعت متحرک A برابر است با: $v_A=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_A=\frac{0-16}{8-0}=-2m/s$

مکان اولیه A، $x_{0A}=+16m$ بوده و معادلهٔ حرکت A خواهد شد:

$$x=vt+x_0\Rightarrow x_A=-2t+16$$

۲ سرعت متحرک B را حساب می‌کنیم.

$$v_B=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_B=\frac{-25-(-29)}{8-0}\Rightarrow v_B=+\frac{1}{2}m/s$$

مکان اولیهٔ متحرک B، $x_{0B}=-29m$ بوده و معادلهٔ حرکت B خواهد شد:

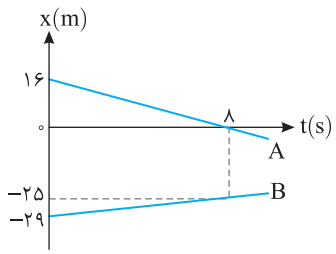
$$x=vt+x_0\Rightarrow x_B=\frac{1}{2}t-29$$

۳ دو معادله را برابر قرار داده و لحظهٔ رسیدن دو متحرک به هم را به‌دست می‌آوریم.

$$x_A=x_B\Rightarrow -2t+16=\frac{1}{2}t-29\Rightarrow 45=2/5t\Rightarrow t=18s$$

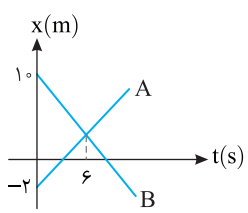
۴ مکان رسیدن دو متحرک به هم خواهد شد:

$$x=-2\times 18+16\Rightarrow x=-36+16\Rightarrow x=-20m$$



B ۱۸۵ | ۲

۱ در صورت مسئله بیان شده که تندی دو متحرک برابر است یعنی بزرگی سرعت دو متحرک یکسان بوده $|v_A|=|v_B|$ است. با توجه به نمودار شیب خط نمودار $x-t$ متحرک B منفی و شیب خط نمودار $x-t$ متحرک A مثبت است بنابراین $v_A=+v$ و $v_B=-v$ است.



۲ معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x_A=v_At+x_0\xrightarrow{x_{0A}=-2m}x_A=vt-2$$

$$x_B=v_Bt+x_0\xrightarrow{x_{0B}=10m}x_B=-vt+10$$

۳ با توجه به نمودار دو متحرک از لحظه‌ای که شروع به حرکت می‌کنند تا لحظه‌ای که به هم می‌رسند در حال نزدیک شدن به هم هستند و از طرفی در صورت سؤال گفته شده ۶s در حال نزدیک شدن به هم هستند، پس دو متحرک در $t=۶s$ به هم می‌رسند. یعنی در $t=۶s$ ، $x_A=x_B$ است از این‌رو می‌توانیم بنویسیم:

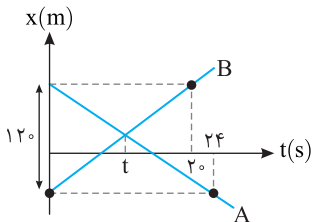
$$\begin{cases} x_A=۶v-۲ \\ x_B=-۶v+۱۰ \end{cases} \Rightarrow ۶v-۲=-۶v+۱۰ \Rightarrow ۱۲v=۱۲ \Rightarrow v=۱\,m/s$$

۴ بنابراین معادلهٔ متحرک A به صورت $x_A=t-۲$ می‌باشد و می‌دانیم هنگام گذر متحرک از مبدأ مکان $x=۰$ بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد.

$$x=۰ \Rightarrow ۰=t-۲ \Rightarrow t=۲s$$

B ۱۸۶ ۱

خط فکری به نمودار باید به خوبی نگاه کنید تا تشخیص دهید متحرک A در مدت ۲۴s مسافت ۱۲۰m و متحرک B نیز در مدت ۲۰s مسافت ۱۲۰m را طی کرده تا بتوانید تندی هر یک را به‌دست بیاورید و در نهایت لحظهٔ t یعنی لحظهٔ رسیدن آن‌ها به یکدیگر را حساب کنید.



۱ تندی متحرک A خواهد شد:

$$s_A=\frac{۱۲۰}{۲۴}=۵m/s$$

۲ تندی متحرک B را حساب می‌کنیم:

$$s_B=\frac{۱۲۰}{۲۰}=۶m/s$$

۳ در مدت t متحرک A مسافت مقابل را طی می‌کند. $\ell_A=s_At=۵t$

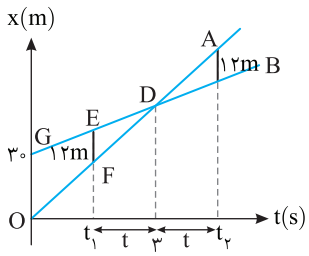
۴ در مدت t متحرک B مسافت مقابل را طی می‌کند. $\ell_B=s_Bt=۶t$

۵ مجموع ℓ_A و ℓ_B باید ۱۲۰m شود تا دو متحرک به هم برسند.

$$\ell_A+\ell_B=۱۲۰ \Rightarrow ۵t+۶t=۱۲۰ \Rightarrow t=\frac{۱۲۰}{۱۱}s$$

B ۱۸۷ ۲

خط فکری در حل این مسئله نباید به سراغ معادلهٔ حرکت بروید بلکه باید به کمک ریاضیات مسئله را حل کنید. به روش حل دقت کنید. روی نمودار دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ را نشان داده‌ایم که در این دو لحظه فاصلهٔ دو متحرک از هم ۱۲m است.



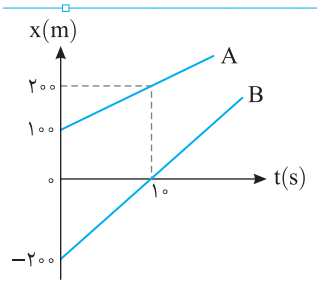
برای مثلث DEF△ و DGO△ نسبت تشابه را می‌نویسیم: $\frac{۳۰}{۱۲}=\frac{۳}{t} \Rightarrow t=۱/۲s$

بنابراین ۱/۲s قبل از $t=۳s$ یعنی $t_۱=۳-۱/۲=۱/۸s$ و ۱/۲s بعد از $t=۳s$ یعنی $t_۲=۳+۱/۲=۴/۲s$ فاصلهٔ دو متحرک از هم ۱۲ متر است.

B ۱۸۸ ۳

خط فکری معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم. فاصلهٔ دو متحرک برابر $|x_A-x_B|$ بوده که باید کمتر یا مساوی ۲۰ متر باشد.

۱ شیب خط نمودار x−t برابر سرعت متحرک است:



$$v_A=\frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=۱۰s]{x_۰=۱۰۰m,\ x_۱=۲۰۰m} v_A=\frac{۱۰۰}{۱۰}=۱۰m/s$$

$$v_B=\frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=۱۰s]{x_۰=-۲۰۰m,\ x_۱=۰} v_B=\frac{۲۰۰}{۱۰}=۲۰m/s$$

۲ معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x_A=v_At+x_۰ \Rightarrow x_A=۱۰t+۱۰۰$$

$$x_B=v_Bt+x_۰ \Rightarrow x_B=۲۰t-۲۰۰$$

۳ خواستهٔ سؤال این است که فاصلهٔ دو متحرک از هم کمتر یا مساوی ۲۰ متر باشد:

$$|x_B-x_A| \le ۲۰m \Rightarrow |۲۰t-۲۰۰-۱۰t-۱۰۰| \le ۲۰$$

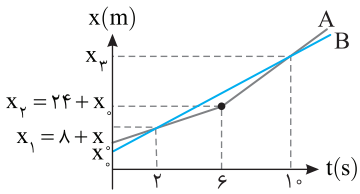
$$\Rightarrow |۱۰t-۳۰۰| \le ۲۰ \Rightarrow -۲۰ \le ۱۰t-۳۰۰ \le ۲۰$$

$$\Rightarrow ۲۸۰ \le ۱۰t \le ۳۲۰ \Rightarrow ۲۸ \le t \le ۳۲$$

بنابراین بازهٔ زمانی برابر $۳۲-۲۸=۴s$ است.

B ۱۸۹ ۱

خط فکری نمودار متحرک B خط راست است یعنی متحرک B با سرعت ثابت روی محور xها در حرکت است بنابراین تندی متحرک B همان سرعت آن بوده و برای یافتن سرعت B باید مکان متحرک B در لحظه‌های $t=۲s$ و $t=۱۰s$ را به کمک نمودار و تندی متحرک A به‌دست بیاورید.



۱ تندی متحرک A در بازهٔ ۰ تا ۶s ، $۴m/s$ است، مکان اولیهٔ A را با $x_۰$ نمایش می‌دهیم. در لحظهٔ $t=۲s$ و $t=۶s$ مکان متحرک A خواهد شد:

$$x_A=۴t+x_۰ \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{t=۲s} x_۱=۴\times۲+x_۰=۸+x_۰ \\ \xrightarrow{t=۶s} x_۲=۴\times۶+x_۰=۲۴+x_۰ \end{cases}$$

۲ از مکان $x_۲=۲۴+x_۰$ متحرک A تندی‌اش از $۴m/s$ به $۸m/s$ تبدیل می‌شود. در بازهٔ ۶s تا ۱۰s جابه‌جایی آن خواهد شد:

$$x_۳-x_۲=۸(۱۰-۶) \Rightarrow x_۳-۲۴-x_۰=۳۲ \Rightarrow x_۳=۵۶+x_۰$$

۳ اکنون سرعت متحرک B قابل محاسبه است:

$$v_B=\frac{x_۳-x_۱}{۱۰-۲}=\frac{۵۶+x_۰-۸-x_۰}{۸}=\frac{۴۸}{۸}=۶m/s$$

C ۱۹۰ ۱

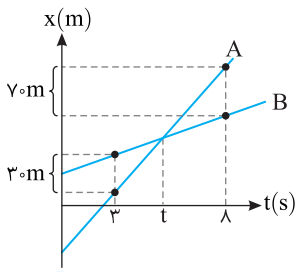
۱ در $t=۳s$ فاصلهٔ دو متحرک از هم ۳۰m است و A، ۳۰m از B عقب‌تر است.

۲ در لحظهٔ t دو متحرک به هم می‌رسند.

۳ در $t=۸s$ فاصلهٔ دو متحرک از هم ۷۰m و متحرک A، ۷۰m از B جلوتر است.

۴ در مدت $۸-۳=۵s$ ، دو متحرک نسبت به هم $۳۰+۷۰=۱۰۰m$ جابه‌جا شده‌اند. بنابراین مانند این است که اگر B ساکن باشد A با سرعت $\frac{۱۰۰}{۵}=۲۰m/s$ از ۳۰ متری آن به سوی B رفته و از آن ۷۰m فاصله گرفته است.

۵ در بازهٔ $۸-۱۶=۸s$ فاصلهٔ دو متحرک به اندازهٔ $۲۰\times۸=۱۶۰m$ افزایش می‌یابد یعنی فاصلهٔ آن‌ها از هم $۷۰+۱۶۰=۲۳۰m$ می‌شود.



B ۱۹۱ ۳

خط فکری شیب نمودار مکان - زمان برابر سرعت جسم است. وقتی نمودار x−t به صورت خط راست باشد شیب نمودار ثابت بوده یعنی سرعت متحرک ثابت است. فاصلهٔ دو متحرک برابر بزرگی تفاضل مکان دو متحرک در آن لحظه است. سرعت متحرک A مثبت بوده چون شیب خط آن مثبت است و شیب خط B منفی است پس سرعت این متحرک منفی است. در صورت سؤال گفته شده تندی یعنی بزرگی سرعت A دو برابر بزرگی سرعت B است:

$$|v_A|=۲|v_B| \xrightarrow[v_B<۰]{v_A>۰} v_A=-۲v_B$$

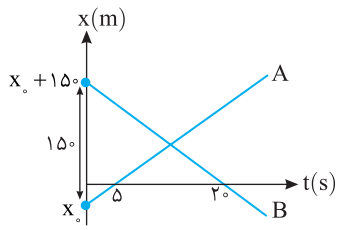
نکته معادلهٔ حرکت سرعت ثابت به صورت $x=vt+x_0$ است.
(v: سرعت متحرک، x_0: مکان اولیه)

روش اول: معادلهٔ حرکت هر متحرک را نوشته و از روی نمودار، داده‌های مسئله را در آن‌ها جایگذاری می‌کنیم.

$$x_A=v_At+x_0 \xrightarrow[x_A=0]{t=5s} 0=5v_A+x_0 \Rightarrow v_A=\frac{-x_0}{5} \quad (1)$$

$$x_B=v_Bt+x_0+150 \xrightarrow[x_B=0]{t=20s} 0=20v_B+x_0+150$$

$$\Rightarrow v_B=\frac{-x_0-150}{20} \quad (2)$$



با توجه به سؤال $v_A=-2v_B$ است:

$$v_A=-2v_B \xrightarrow[v_B=\frac{-x_0-150}{20}]{v_A=\frac{-x_0}{5}} \frac{-x_0}{5}=-2\left(\frac{-x_0-150}{20}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{-x_0}{5}=\frac{x_0+150}{10} \Rightarrow -x_0=\frac{x_0+150}{2} \Rightarrow -2x_0=x_0+150$$

$$\Rightarrow -3x_0=150 \Rightarrow x_0=-50m$$

حال $x_0=-50m$ را در معادله‌های (۱) و (۲) قرار می‌دهیم تا سرعت‌ها به‌دست آید:

$$v_A=\frac{-x_0}{5}=\frac{50}{5}=10m/s \ , \ v_B=\frac{-x_0-150}{20}=\frac{-100}{20}=-5m/s$$

با توجه به نمودار در لحظهٔ $t=20s$ متحرک B از مبدأ مکان می‌گذرد $(x_B=0)$. معادلهٔ حرکت متحرک A را نوشته و در لحظهٔ $t=20s$ مکان متحرک A را به‌دست می‌آوریم:

$$x_A=v_At+x_0 \xrightarrow[x_0=-50m]{v_A=10m/s} x_A=+10t-50$$

$$\xrightarrow{t=20s} x_A=200-50=150m$$

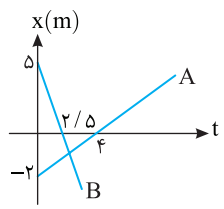
فاصله دو متحرک را حساب می‌کنیم: $r=|x_A-x_B| \Rightarrow r=|150-0|=150m$

روش دوم: سرعت متحرک A برابر $10m/s$ است یعنی متحرک A در هر ثانیه $10m$ در جهت مثبت جابه‌جا می‌شود و سرعت متحرک B، $-5m/s$ بوده یعنی متحرک B در هر ثانیه $5m$ خلاف جهت محور x جابه‌جا می‌شود یعنی در هر ثانیه جمعاً دو متحرک A و B، $15m=10+5$ متر به هم نزدیک می‌شوند. در ابتدا فاصلهٔ A از B، ۱۵۰ متر است بنابراین این دو متحرک در مدت $\frac{150}{15}=10s$ به هم می‌رسند و بعد از به هم رسیدن در هر ثانیه $15m$ از هم دور می‌شوند در مدت $(20-10=10s)$ فاصلهٔ آن‌ها از هم $150m=15\times10$ می‌شود.

۲ ۱۹۲ C

خط فکری وقتی بیان می‌شود که فاصلهٔ دو متحرک A و B از $6m$ کمتر باشد یعنی باید $|x_B-x_A|<6$ باشد بنابراین شما باید از روی نمودار سرعت هر متحرک را به‌دست آورده معادلهٔ حرکت هر یک را نوشته و قدر مطلق تفاضل آن‌ها را کوچک‌تر از $6m$ قرار داده تا مسئله حل شود.

۱ سرعت حرکت هر متحرک را به دست می‌آوریم:



$$v_A=\frac{0-(-2)}{4-0} \Rightarrow v_A=0/5m/s$$

$$v_B=\frac{0-5}{2/5-0} \Rightarrow v_B=-2m/s$$

۲ معادله حرکت هر متحرک را می‌نویسیم: $x_A=0/5t-2$, $x_B=-2t+5$

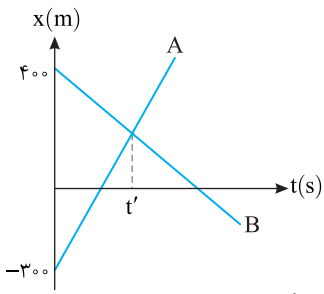
۳ با توجه به صورت مسئله:

$$|x_A-x_B|<6 \Rightarrow |0/5t-2+2t-5|<6 \Rightarrow |2/5t-7|<6$$

$$\Rightarrow -6<2/5t-7<6 \Rightarrow 1<2/5t<13 \Rightarrow 0/4<t<5/2$$

۳ ۱۹۳ C

با توجه به شکل فاصلهٔ ابتدایی A و B از هم $400+300=700m$ است. در لحظهٔ t' دو متحرک به هم می‌رسند سپس از هم دور می‌شوند و فاصلهٔ آن‌ها از هم در $t=30s$، $350m$ می‌شود. یعنی مجموع مسافت طی شده توسط دو متحرک در بازهٔ ۰ تا ۳۰s باید $700+350=1050m$ باشد. در این صورت:



$$\ell_A+\ell_B=1050 \xrightarrow{\ell=st} s_At+s_Bt=1050$$

$$(s_A+s_B)30=1050 \Rightarrow s_A+s_B=35m/s$$

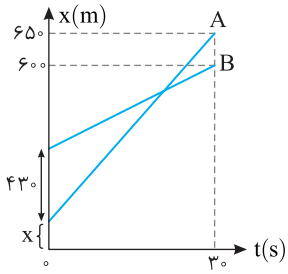
با توجه به فرض مسئله $s_B=s_A-5$ بنابراین:

$$s_A+s_A-5=35 \Rightarrow 2s_A=40 \Rightarrow s_A=20m/s$$

۳ ۱۹۴ B

خط فکری در صورت مسئله از شما خواسته شده v_A-v_B را به‌دست بیاورید بنابراین شما باید شیب نمودار A و شیب نمودار B را به کمک داده‌های روی نمودار به‌دست آورده از هم کم کنید.

۱ سرعت هر متحرک برابر شیب نمودار $x-t$ است، از این‌رو با توجه به نمودار داریم:



$$v_A=\frac{650-x}{30}$$

$$v_B=\frac{600-(430+x)}{30}$$

۲ تفاضل سرعت‌ها را به دست می‌آوریم:

$$v_A-v_B=\frac{650-x}{30}-\frac{170-x}{30}=\frac{480}{30} \Rightarrow v_A-v_B=16m/s$$

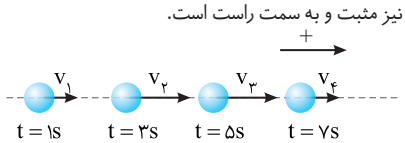
۲ ۱۹۵ A

یادآوری نسبت تغییرات بردار سرعت به زمان تغییر را شتاب متوسط گویند $\vec{a}_{av}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$. شتاب متوسط کمیت برداری است و همواره در جهت بردار تغییر سرعت است.

با توجه به تعریف شتاب متوسط، وقتی تغییرات سرعت منفی باشد شتاب متوسط الزاماً منفی است.

۴ ۱۹۶ A

۱ در لحظه‌های $t_1=1s$ و $t_2=3s$ سرعت‌ها به‌ترتیب v_1 و v_2 بوده و $v_2>v_1$ است، بنابراین تغییرات سرعت $(\Delta v=v_2-v_1>0)$ مثبت بوده و بردار شتاب متوسط نیز مثبت و به سمت راست است.



۲ در لحظه‌های $t=5s$ و $t=7s$ سرعت متحرک v_3 و v_4 بوده و $v_4<v_3$ است یعنی تغییرات سرعت منفی $(\Delta v=v_4-v_3<0)$ و بردار شتاب متوسط منفی و به سمت چپ است.

A ۱۹۷ ۳

یک جای‌گذاری ساده در رابطهٔ شتاب متوسط و حل مسئله و تمام.

$$a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow a_{av}=\frac{۹-۵}{۳-۱}=۲m/s^۲$$

B ۱۹۸ ۴

خط فکری در صورت مسئله تندی در لحظهٔ $t_۱=۱s$ و $t_۲=۳s$ داده شده است. تندی کمیت نرده‌ای است و جهت ندارد در حرکت روی خط راست تندی لحظه‌ای برابر اندازهٔ سرعت است و سرعت کمیت برداری است، بنابراین وقتی گفته می‌شود تندی $۹m/s$ است یعنی سرعت می‌تواند $+۹m/s$ و یا $-۹m/s$ باشد بنابراین این مسئله چهار حالت خواهد داشت. البته در صورت مسئله اندازهٔ شتاب متوسط خواسته شده است.

تندی حرکت در لحظهٔ $t_۱=۲s$ برابر $s_۱=۵m/s$ است. بنابراین سرعت $v_۱=\pm ۵m/s$ است و در لحظهٔ $t_۲=۳s$ تندی برابر $s_۲=۹m/s$ است پس $v_۲=\pm ۹m/s$ است:

$$|a_{av}|=\frac{|\Delta v|}{\Delta t}=\frac{|v_۲-v_۱|}{\Delta t}\xrightarrow{v_۱=+۵m/s,v_۲=+۹m/s}a_{av}=\frac{۹-۵}{۲}=+۲m/s^۲$$

$$|a_{av}|=\frac{|\Delta v|}{\Delta t}=\frac{|v_۲-v_۱|}{\Delta t}\xrightarrow{v_۱=+۵m/s,v_۲=-۹m/s}a_{av}=\frac{|-۹-۵|}{۲}=+۷m/s^۲$$

$$|a_{av}|=\frac{|\Delta v|}{\Delta t}=\frac{|v_۲-v_۱|}{\Delta t}\xrightarrow{v_۱=-۵m/s,v_۲=۹m/s}a_{av}=\frac{۹-(-۵)}{۲}=+۷m/s^۲$$

$$|a_{av}|=\frac{|\Delta v|}{\Delta t}=\frac{|v_۲-v_۱|}{\Delta t}\xrightarrow{v_۱=-۵m/s,v_۲=-۹m/s}a_{av}=\frac{|-۹-(-۵)|}{۲}=۲m/s^۲$$

A ۱۹۹ ۱

خط فکری برای به‌دست آوردن شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ تنها باید بردار سرعت در لحظهٔ $t_۱$ (v_i) و لحظهٔ $t_۲$ (v_f) را در رابطهٔ شتاب متوسط قرار داد و در این مدت سرعت چه مقدارهایی داشته مهم نیست.

شتاب متوسط برابر آهنگ تغییرات سرعت v_f-v_i می‌باشد، بنابراین:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_f-v_i}{\Delta t}=\frac{۵-۲}{۲+۳}=\frac{۳}{۵}=۰/۶m/s^۲$$

B ۲۰۰ ۲

خط فکری شتاب متوسط برابر $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ است. با توجه به این رابطه و مقدار شتاب متوسط داده شده در دو بازهٔ زمانی حل سؤال را شروع می‌کنیم.

۱ با توجه به تعریف شتاب متوسط برای هر مرحله رابطهٔ شتاب متوسط را می‌نویسیم.

$$\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\xrightarrow[\vec{a}=-۴\vec{i}]{t_۱=۵s\text{ تا }t_۲=۱۰s}-۴\vec{i}=\frac{\vec{v}_{۱۰}-\vec{v}_۵}{۱۰-۵}\Rightarrow\vec{v}_{۱۰}-\vec{v}_۵=-۲۰\vec{i}\quad(۱)$$

$$\xrightarrow[t_۲=۱۰s\text{ و }t_۳=۱۲s]{\vec{a}=۲\vec{i}}۲\vec{i}=\frac{\vec{v}_{۱۲}-\vec{v}_{۱۰}}{۱۲-۱۰}\Rightarrow\vec{v}_{۱۲}-\vec{v}_{۱۰}=۴\vec{i}\quad(۲)$$

۲ برای رسیدن به بررسی بازهٔ $t_۱=۵s$ تا $t_۳=۱۲s$ سرعت $\vec{v}_{۱۰}$ مزاحم است پس رابطهٔ (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم تا $\vec{v}_{۱۰}$ از دو معادله حذف شود:

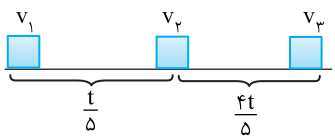
$$\begin{cases}\vec{v}_{۱۰}-\vec{v}_۵=-۲۰\vec{i}\\ \vec{v}_{۱۲}-\vec{v}_{۱۰}=۴\vec{i}\end{cases}\xrightarrow{+}\vec{v}_{۱۲}-\vec{v}_۵=-۲۰\vec{i}+۴\vec{i}\Rightarrow\vec{v}_{۱۲}-\vec{v}_۵=-۱۶\vec{i}$$

۳ شتاب متوسط در بازهٔ $t=۵s$ تا $t=۱۲s$ خواهد شد.

$$\vec{a}_{av}=\frac{\vec{v}_{۱۲}-\vec{v}_۵}{۱۲-۵}\xrightarrow{\vec{v}_{۱۲}-\vec{v}_۵=-۱۶\vec{i}}a_{av}=\frac{-۱۶\vec{i}}{۷}=\frac{-۱۶}{۷}\vec{i}$$

B ۲۰۱ ۱

خط فکری رابطهٔ شتاب متوسط را در بازهٔ $\frac{۱}{۵}t$ و $\frac{۴}{۵}t$ بنویسید و رابطه‌ای بین $v_۱$ و $v_۲$ و $v_۳$ به‌دست بیاورید سپس به سراغ شتاب متوسط در کل مدت t بروید.



۱ **شتاب متوسط در $\frac{۱}{۵}t$:**

$$a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{\Delta t}\Rightarrow ۲=\frac{v_۲-v_۱}{\frac{۱}{۵}t}\Rightarrow v_۲-v_۱=\frac{۲}{۵}t\Rightarrow v_۱=v_۲-\frac{۲}{۵}t\quad(I)$$

۲ **شتاب متوسط در مابقی زمان یعنی $\frac{۴}{۵}t$:**

$$-۴=\frac{v_۳-v_۲}{\frac{۴}{۵}t}\Rightarrow v_۳-v_۲=\frac{۱۶}{۵}t\Rightarrow v_۳=v_۲-\frac{۱۶}{۵}t\qquad(II)$$

۳ **شتاب متوسط در کل مدت حرکت خواهد شد.**

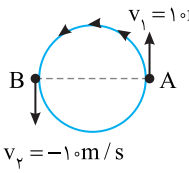
$$a_{av}=\frac{v_۳-v_۱}{t}\xrightarrow{(I),(II)}a_{av}=\frac{v_۲-\frac{۱۶}{۵}t-(v_۲-\frac{۲}{۵}t)}{t}=\frac{-\frac{۱۶}{۵}t+\frac{۲}{۵}t}{t}$$

$$a_{av}=\frac{-۱۴}{۵}m/s^۲=-۲/۸m/s^۲$$

B ۲۰۲ ۳

نکته بردار سرعت در هر نقطه از مسیر بر مسیر حرکت مماس است.

خط فکری دقت کنید در هر ۱۶s، ذره، یک بار محیط دایره را طی می‌کند، بنابراین در مدت ۸s، نصف محیط را طی خواهد کرد و به‌طور مثال مطابق شکل در مدت ۸s ذره از نقطهٔ A در سوی نشان داده شده به نقطهٔ B می‌رود، بنابراین شما با رسم بردارهای سرعت در نقطهٔ A و B علامت سرعت‌ها را مشخص کرده و شتاب متوسط را به‌دست بیاورید.



در نقطهٔ A بردار سرعت $v_۱=+۱۰\frac{m}{s}$ و در نقطهٔ B که بردار سرعت در خلاف جهت A است $v_۲=-۱۰m/s$ خواهد بود بنابراین اندازهٔ شتاب متوسط خواهد شد.

$$|a_{av}|=\frac{|v_۲-v_۱|}{t_۲-t_۱}=\frac{|-۱۰-۱۰|}{۸}=\frac{۲۰}{۸}\Rightarrow|a_{av}|=۲/۵m/s$$

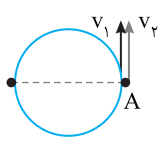
A ۲۰۳ ۱

۱ در هر ۲۰s ذره، چهار بار محیط دایره را طی می‌کند بنابراین زمان طی یک بار محیط دایره خواهد شد:

۴ بار	۲۰s
۱ بار	t

$$\Rightarrow t=۵s$$

۲ در بازهٔ ۵s ذره از هر نقطه‌ای که شروع به حرکت کرده (مثلاً نقطهٔ A) به همان نقطه برمی‌گردد و بردار سرعت‌های $v_۱$ و $v_۲$ برابر شده و تغییرات سرعت برابر صفر شده $(\Delta v=۰)$ و در نتیجه شتاب متوسط نیز صفر می‌شود $(a_{av}=۰)$.



A ۲۰۴ ۲

یادآوری معادله سرعت - زمان یک رابطهٔ ریاضی بین سرعت متحرک و زمان است که با قراردادن زمان می‌توان سرعت متحرک را در هر لحظه به‌دست آورد.

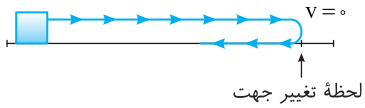
خط فکری در صورت مسئله خواسته شده لحظه‌ای که تندی $۳m/s$ است را حساب کنیم. تندی کمیت نرده‌ای است و برابر اندازهٔ سرعت است از این‌رو سرعت می‌تواند $+۳m/s$ و $-۳m/s$ باشد. یک‌بار $v=+۳m/s$ و بار دیگر $v=-۳m/s$

را در معادله سرعت زمان قرار بدهید.

$$v=-۴t+۱\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{v=۳m/s}۳=-۴t+۱\Rightarrow۲=-۴t\Rightarrow t=-۰/۵\ \text{غیرقابل قبول}\\ \xrightarrow{v=-۳m/s}-۳=-۴t+۱\Rightarrow-۴=-۴t\Rightarrow t=۱s\end{cases}$$

۲۰۵ B ۳

خط فکری برای آنکه متحرکی که روی خط راست در حرکت است تغییر جهت بدهد باید ابتدا سرعتش صفر شده سپس تغییر جهت بدهد. بنابراین باید در معادلهٔ سرعت - زمان، سرعت را برابر صفر قرار دهید اما دقت کنید که آیا علامت سرعت تغییر می‌کند یا نه؟



نکته هرگاه معادلهٔ سرعت زمان درجه ۲ باشد و با قراردادن $v=۰$ در معادله اگر زمان منفی به‌دست بیاید و یا معادله ریشه مضاعف داشته باشد تغییر جهتی رخ نمی‌دهد و تنها وقتی که زمان مثبت به‌دست بیاید تغییر جهت اتفاق افتاده است. معادلهٔ سرعت را مساوی صفر قرار می‌دهیم: $v=t^۲-۶t+۹=(t-۳)^۲\geq۰$

دقت کنید سرعت تغییر علامت نمی‌دهد و همواره $v\geq۰$ است و متحرک تغییر جهت نخواهد داد.

۲۰۶ B ۱

خط فکری اول باید مشخص کنید که ۲ ثانیهٔ دوم یعنی چه؟ یعنی بازهٔ زمانی بین $t=۲s$ تا $t=۴s$.

$$۰\xrightarrow{\text{۲ ثانیه اول}}۲s\xrightarrow{\text{۲ ثانیه دوم}}۴s\xrightarrow{\text{۲ ثانیه سوم}}۶s\ldots$$

شتاب متوسط یعنی آهنگ تغییر سرعت بنابراین باید سرعت را در لحظه‌های $t=۲s$ و $t=۴s$ حساب کنید سپس شتاب متوسط را به‌دست بیاورید.

با توجه به معادلهٔ سرعت، سرعت در لحظه‌های $t=۲s$ و $t=۴s$ برابر است با

$$v_۱=۳\times(۲)^۲-۸\Rightarrow v_۱=۴m/s\ ,\ v_۲=۳\times(۴)^۲-۸\Rightarrow v_۲=۴۰m/s$$

حال شتاب متوسط را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow a_{av}=\frac{۴۰-۴}{۲}\Rightarrow a_{av}=۱۸m/s^۲$$

بازی با سؤال **متحرکی در مسیر مستقیم حرکت می‌کند و معادلهٔ سرعت - زمان آن در SI به‌صورت $V=۲t^۲-۴t-۲$ است. شتاب متوسط آن در ۲ ثانیهٔ دوم چند متر بر مجذور ثانیه است؟** خارج تجربی - ۹۸

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ **۱** از معادلهٔ سرعت زمان سرعت‌ها را به‌دست می‌آوریم.

$$v=۲t^۲-۴t-۲$$

$$\begin{cases}\xrightarrow{t=۲s}v=۲(۲)^۲-۴(۲)-۲\Rightarrow v_۱=-۲m/s\\ \xrightarrow{t=۴s}v=۲(۴)^۲-۴(۴)-۲=+۱۴m/s\end{cases}$$

۲ شتاب متوسط خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{۱۴-(-۲)}{۲}\Rightarrow a_{av}=۸m/s^۲$$

گزینهٔ ۴

۲۰۷ B ۱

یادآوری ریاضی $\sin\frac{\pi}{۲}=۱\ ,\ \sin\frac{۳\pi}{۲}=-۱$

۱ سرعت در لحظه‌های $t=\frac{۱}{۸}s$ و $t=\frac{۳}{۸}s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$v_۱=۲\sin(۴\pi\times\frac{۱}{۸})+۰/۵=۲\sin(\frac{\pi}{۲})+۰/۵$$

$$\Rightarrow v_۱=۲\times۱+۰/۵\Rightarrow v_۱=۲/۵m/s$$

$$v_۲=۲\sin(۴\pi\times\frac{۳}{۸})+۰/۵=۲\sin(\frac{۳\pi}{۲})+۰/۵$$

$$\Rightarrow v_۲=۲\times(-۱)+۰/۵\Rightarrow v_۲=-۱/۵m/s$$

۲ بنابراین شتاب متوسط در این بازه برابر است با:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_۲-v_۱}{\Delta t}=\frac{-۱/۵-۲/۵}{\frac{۳}{۸}-\frac{۱}{۸}}=\frac{-۴}{\frac{۱}{۴}}=-۱۶m/s^۲$$

۲۰۸ B ۴

۱ سرعت در لحظهٔ $t_۱=۱s$ و $t_۲=۴s$ را حساب می‌کنیم:

$$v=t^۲-bt+۱\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t=۱s}v_۱=۱-b\times۱+۱\Rightarrow v_۱=۲-b\\ \xrightarrow{t_۲=۴s}v_۲=۱۶-۴b+۱\Rightarrow v_۲=۱۷-۴b\end{cases}$$

۲ شتاب متوسط صفر است بنابراین:

$$v_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow۰=\frac{۱۷-۴b-(۲-b)}{۴-۱}\Rightarrow۱۵-۳b=۰\Rightarrow b=۵$$

۳ معادلهٔ سرعت را کامل می‌کنیم. $v=t^۲-۵t+۱$

۴ سرعت را مساوی $-۵m/s$ قرار می‌دهیم.

$$v=-۵m/s\Rightarrow t^۲-۵t+۱=-۵\Rightarrow t^۲-۵t+۶=۰$$

$$\Rightarrow(t-۲)(t-۳)=۰\Rightarrow t=۲s, t=۳s$$

۲۰۹ B ۲

۱ متحرک از مکان $x_۱=۲m$ به مکان $x_۲=-۲m$ رفته است. حال به کمک معادلهٔ سرعت - مکان سرعت متحرک را در این دو مکان به‌دست می‌آوریم:

$$v=۴x+۲\Rightarrow v_۱=۴(۲)+۲=۱۰m/s\ ,\ v_۲=۴(-۲)+۲=-۶m/s$$

۲ شتاب متوسط در این مدت برابر است با:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_۲-v_۱}{\Delta t}=\frac{-۶-۱۰}{۲}=-۸m/s^۲$$

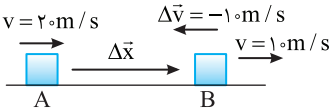
۲۱۰ A ۴

۱ با توجه به تعریف سرعت متوسط $\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}$ بردار سرعت متوسط همواره در جهت بردار جابه‌جایی است و گزینهٔ (۱) درست است.

۲ سرعت در هر نقطه از مسیر حرکت بر مسیر مماس است و گزینهٔ (۲) درست است.

۳ هرگاه حرکت روی خط راست (مثلاً محور x ها) باشد در این صورت بردار سرعت متحرک در امتداد محور xهاست (یا در جهت مثبت و یا در جهت منفی آن. وقتی بردار سرعت در امتداد محور xهاست بردار تغییر سرعت $(\Delta\vec{v})$ نیز در امتداد محور xها بوده در نتیجه بردار شتاب $\vec{a}=\Delta\vec{v}/\Delta t$ نیز در امتداد محور xهاست یعنی بردار سرعت و بردار شتاب لحظه‌ای همواره در یک امتداد و هم‌راستا هستند و گزینهٔ (۳) نیز درست است.

۴ بردار شتاب متوسط با تغییر سرعت هم‌جهت است $\vec{a}_{av}=\Delta\vec{v}/\Delta t$ و بردار سرعت متوسط با بردار جابه‌جایی $(\vec{v}_{av}=\Delta\vec{x}/\Delta t)$ هم‌جهت است. به شکل زیر دقت کنید متحرک از A به B رفته و جابه‌جایی آن نیز مثبت بوده اما به دلیل کاهش سرعت، بردار تغییر سرعت منفی و خلاف جهت جابه‌جایی است یعنی بردار شتاب متوسط و بردار سرعت متوسط در این مثال هم‌جهت نبوده و گزینهٔ (۴) نادرست است.



۲۱۱ A ۲

خط فکری حرکت تندشونده حرکتی است که در آن تندی متحرک در حال افزایش است برای این منظور در حرکت روی خط راست باید بردار سرعت و بردار شتاب هم‌جهت و هم‌علامت باشند، یعنی هر دو مثبت و یا هر دو منفی باشند. حرکت کندشونده حرکتی است که در آن تندی متحرک در حال کاهش است از این‌رو در حرکت روی خط راست باید بردار سرعت و بردار شتاب در خلاف جهت هم باشند یعنی اگر بردار سرعت مثبت باشد باید بردار شتاب منفی و یا اگر بردار سرعت منفی باشد باید بردار شتاب مثبت باشد.

به شکل‌ها نگاه کنید و ببینید که در کدام شکل‌ها بردار سرعت و شتاب در خلاف هم هستند.

(الف) هر دو بردار شتاب و سرعت هم‌جهت بوده و حرکت تندشونده است.

(ب) بردار شتاب منفی و بردار سرعت مثبت بوده و حرکت کندشونده است.

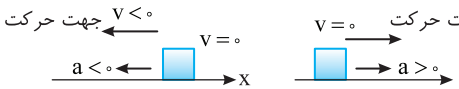
(پ) بردار شتاب مثبت و بردار سرعت منفی بوده و حرکت کندشونده است.

(ت) بردار شتاب و سرعت هر دو منفی بوده و حرکت تندشونده است.

بنابراین در دو مورد حرکت کندشونده است.

A ۲۱۲ ۳

نکته هرگاه جسم از حال سکون روی خط راست به حرکت درآید، شتاب شروع حرکت جسم قطعاً در جهت حرکت جسم است.



در گزینهٔ (۱) جسم از حال سکون در جهت منفی روی محور شروع به حرکت کرده بنابراین شتاب حرکت نیز در جهت منفی محور بوده و گزینهٔ (۱) درست است.

وقتی حرکت روی خط راست تندشونده باشد یعنی سرعت متحرک در یک جهت در حال افزایش بوده و متحرک تغییر جهت نمی‌دهد بنابراین جابه‌جایی و مسافت طی شده یکسان است $(d=\ell)$ و گزینهٔ (۲) درست است.

در حرکت کندشونده روی خط راست باید بردار سرعت و بردار شتاب در خلاف جهت هم باشند و لزومی ندارد شتاب منفی باشد بلکه کافی است اگر بردار سرعت منفی است بردار شتاب مثبت باشد بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

در هر حرکتی طول مسیر حرکت (مسافت) همواره برابر یا بزرگ‌تر از اندازهٔ بردار جابه‌جایی است و گزینهٔ (۴) درست است.

B ۲۱۳ ۳

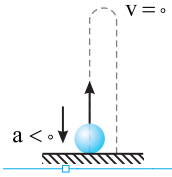
در حرکت تندشونده بردار سرعت و شتاب هم‌جهت و هم‌علامت هستند یعنی اگر $a<0$ باشد بردار سرعت نیز منفی است و تا زمانی که شتاب منفی است سرعت در حال افزایش است و حرکت تندشونده است و هرگز کندشونده نمی‌شود مگر آنکه علامت شتاب تغییر کند که در این مسئله بیان شده a منفی است و علامت آن تغییر نمی‌کند بنابراین هرگز گزینهٔ (۳) اتفاق نمی‌افتد. اما گزینه‌های دیگر را بررسی می‌کنیم.

اگر متحرک با سرعت منفی در جهت منفی محور با شتاب $a<0$ در حرکت باشد، حرکت تندشونده است و گزینهٔ (۱) می‌تواند درست باشد.

اگر سرعت متحرک مثبت اما شتاب منفی $(a<0)$ باشد حرکت کندشونده است در این‌صورت دو حالت ممکن است اتفاق بیافتد.

حالت اول: تندی متحرک کاهش یافته، سرعت صفر شود و متحرک ساکن بماند در این حالت گزینهٔ (۲) درست است.

حالت دوم: متحرک پس از آنکه سرعتش صفر شد با همان شتاب بازگردد مانند گلوله‌ای که در شرایط خلأ رو به بالا پرتاب می‌کنیم گلوله متوقف شده و برمی‌گردد و گزینهٔ (۴) درست است.

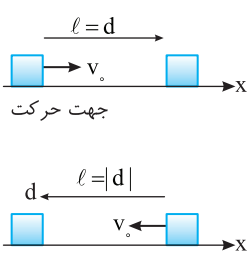


B ۲۱۴ ۱

خط فکری هرگاه مسافت طی شده و بزرگی جابه‌جایی برابر باشد حرکت الزاماً روی خط راست است. اما دو حالت وجود دارد یک حالت آنکه جابه‌جایی مثبت بوده و حالت دیگر آن که جابه‌جایی منفی باشد. بنابراین شما باید دو حالت را بررسی کرده تا بتوانید نوع حرکت را بیان کنید.

حالت اول: متحرک در جهت مثبت در حرکت است و با توجه به اینکه شتاب متوسط در جهت سرعت اولیه است باید سرعت در حال افزایش و حرکت تندشونده باشد.

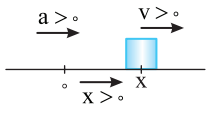
حالت دوم: متحرک در جهت منفی در حرکت باشد در این حالت نیز با توجه به فرض مسئله بردار شتاب متوسط هم‌جهت بردار سرعت اولیه بوده و حرکت تندشونده است، بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.



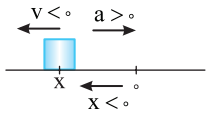
B ۲۱۵ ۴

۱ تست جالبی‌ست. حاصل‌ضرب مکان و سرعت مثبت شده است یعنی وقتی مکان مثبت است، سرعت نیز مثبت است مانند شکل (۱) و وقتی مکان منفی بوده، سرعت نیز منفی است مانند شکل (۲)، بنابراین در هر دو شکل متحرک در حال دور شدن از مبدأ است و گزینهٔ (۱) و (۲) نادرست است.

۲ شتاب حرکت مثبت بیان شده $(a>0)$ بنابراین در شکل (۱) بردار شتاب و سرعت هم‌جهت حرکت بوده و حرکت تندشونده است و در شکل (۲)، بردار شتاب و سرعت خلاف جهت بوده و حرکت کندشونده است در نتیجه ممکن است حرکت کندشونده یا تندشونده باشد از این‌رو گزینهٔ (۳) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.



شکل (۱)



شکل (۲)

نکته هرگاه حاصل‌ضرب سرعت در مکان مثبت باشد $(vx>0)$ متحرک در حال دور شدن از مبدأ و اگر منفی باشد $(vx<0)$ متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است.

B ۲۱۶ ۱

شتاب حرکت از رابطهٔ $a=2t+1$ پیروی می‌کند و با توجه به اینکه زمان همواره مثبت در نظر گرفته می‌شود. با گذشت زمان شتاب افزایش می‌یابد اما جهت آن تغییر نمی‌کند. جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده بنابراین سرعت و جهت حرکت جسم همان جهت بردار شتاب است و حرکت تندشونده است و چون شتاب تغییر جهت نمی‌دهد، حرکت کندشونده نخواهد شد.

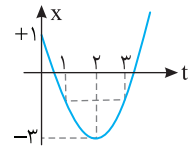
B ۲۱۷ ۱

خط فکری معادله $x=t^2-4t+1$ یک تابع درجه ۲ بوده و نمودار آن سهمی است. سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس آن متقارن است رأس سهمی نقطه بیشینه یا کمینه سهمی است و در این نقطه خط مماس بر نمودار موازی محور افقی بوده و شیب آن صفر است. شیب خط مماس بر منحنی مکان - زمان برابر سرعت لحظه‌ای بنابراین در رأس سهمی سرعت لحظه‌ای صفر است بنابراین اولین کاری که شما باید انجام بدهید به‌دست آوردن مختصات رأس سهمی است تا بتوانید در مورد سرعت متوسط و شتاب متوسط اظهارنظر کنید.

۱ معادلهٔ حرکت به‌صورت $x=t^2-4t+1$ است و مختصات رأس آن خواهد شد:

$$t=\frac{-b}{2a}\Rightarrow t=\frac{-(-4)}{2\times1}\Rightarrow t=2s\Rightarrow x=4-8+1=-3m$$

۲ نمودار مکان - زمان را رسم می‌کنیم. در دو لحظهٔ $t=1s$ و $t=3s$ مکان متحرک یکی است و جابه‌جایی و در نتیجه سرعت متوسط صفر است و گزینهٔ (۱) درست است.

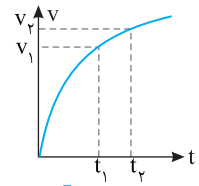


۳ در لحظه‌های $t=1s$ و $t=3s$ شیب خط مماس (سرعت لحظه‌ای متحرک) قرینه است بنابراین تغییر سرعت $(\Delta v\neq0)$ صفر نبوده و شتاب متوسط حرکت $(a_{av}=\Delta v/\Delta t)$ نیز صفر نمی‌شود و گزینهٔ (۲) نادرست است.

۴ در لحظهٔ $t=2s$ یعنی رأس سهمی سرعت لحظه‌ای صفر می‌شود اما شتاب لحظه‌ای صفر نیست و گزینهٔ (۳) نادرست است.

A ۲۱۸ ۴

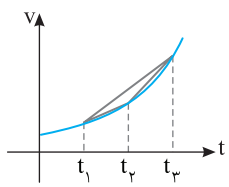
شیب خط قاطع در لحظه‌های t_1 و t_2 روی نمودار سرعت - زمان، برابر شتاب متوسط است.



$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$$

B ۲۱۹ ۳

خط فکری شیب خط واصل بین دو لحظه در نمودار $v-t$ برابر شتاب متوسط در آن بازه است. از این‌رو برای بررسی شتاب متوسط شما باید خط قاطع بر نمودار را در هر بازه رسم کنید. شتاب متوسط در بازهٔ صفر تا t_1، t_1 تا t_2، t_2 تا t_3 و t_1 تا t_3 برابر شیب خط واصل مشخص شده در نمودار است و با توجه به نمودار $v-t$، شیب خط قاطع در بازهٔ t_2 تا t_3 بیشتر است. از این‌رو شتاب متوسط در این بازه بزرگ‌تر است.

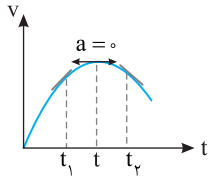


B ۲۲۰ ۴

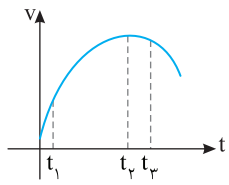
یادآوری بنا به قانون دوم نیوتون نیروی خالص وارد بر جسم برابر $F=ma$ است.

خط فکری برای بررسی تغییرات نیرو باید تغییرات شتاب را بررسی کنیم و برای بررسی تغییرات شتاب باید تغییرات شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ را بررسی کنیم.

از لحظهٔ t_1 تا t شیب خط مماس یعنی شتاب و در نتیجه نیرو در حال کاهش بوده تا به صفر برسد از t به بعد قدرمطلق شیب خط مماس بر نمودار در حال افزایش است (خط مماس به حالت قائم نزدیک می‌شود) بنابراین بزرگی شتاب در حال افزایش یعنی بزرگی نیرو در حال افزایش است.



بازی با سؤال **نمودار $v-t$ متحرکی به صورت شکل روبه‌رو است. نیروی وارد بر متحرک در کدام لحظه بزرگ‌تر است؟**

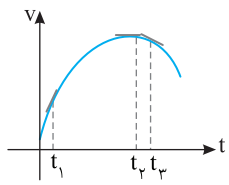


۱) t_1

۲) t_2

۳) t_3

۴) نیروی وارد بر متحرک ثابت است.



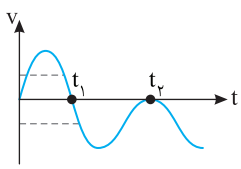
پاسخ **با توجه به قانون دوم نیوتون $F=ma$ است، پس هرچه شتاب بزرگ‌تر باشد نیرو هم بزرگ‌تر است و می‌دانیم شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ در هر لحظه برابر شتاب در آن لحظه است.**

با توجه به شکل اندازهٔ شیب خط مماس در t_1 بزرگ‌تر از اندازهٔ شیب خط مماس در دو لحظهٔ دیگر است پس در t_1 نیروی بزرگ‌تری به جسم وارد می‌شود.

گزینهٔ ۱

A ۲۲۱ ۳

محل برخورد نمودار سرعت - زمان با محور زمان به مفهوم توقف جسم است. بنابراین در لحظه‌های t_1 و t_2 سرعت صفر است. اما متحرک در لحظهٔ t_1 تغییر جهت می‌دهد. زیرا سرعت آن قبل از t_1 مثبت و بعد از t_1 منفی است. یعنی سرعت تغییر علامت و متحرک تغییر جهت داده است. اما در لحظهٔ t_2 سرعت متحرک صفر شده اما تغییر علامت نداده و هم قبل و بعد از t_2 هم‌چنان سرعت منفی است یعنی متحرک تغییر جهت نداده است، بنابراین سرعت دو بار صفر و متحرک یک بار تغییر جهت داده است.



B ۲۲۲ ۳

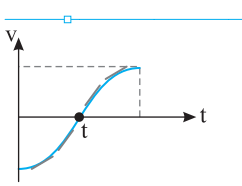
به نمودار دقت کنید.

۱) سرعت در لحظهٔ t صفر شده و تغییر علامت داده بنابراین متحرک یک بار تغییر جهت داده است و گزارهٔ (الف) درست است.

۲) اندازهٔ سرعت از لحظهٔ $t=۰$ تا لحظهٔ t در حال کاهش است و از لحظهٔ t به بعد اندازهٔ سرعت در حال افزایش است و گزارهٔ (ب) نادرست است.

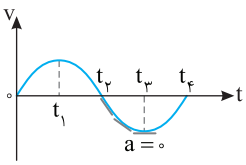
۳) با توجه به شیب مماس‌های روی نمودار ابتدا شیب در حال افزایش (خط مماس در حال نزدیک شدن به حالت قائم) و سپس در حال کاهش (خط مماس در حال افقی شدن) است بنابراین شتاب ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد و گزارهٔ (پ) درست است.

۴) اما در تمام مدت شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان مثبت و شتاب مثبت است و گزارهٔ (ت) نادرست است. در نتیجه گزاره‌های (الف) و (پ) درست می‌باشند.



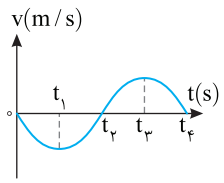
A ۲۲۳ ۳

با توجه به نمودار $v-t$ در لحظهٔ t_2 سرعت صفر است و از این لحظه تا لحظهٔ t_3 اندازهٔ سرعت در حال افزایش و حرکت تندشونده است و گزینهٔ (۱) درست است. اگر در بازهٔ t_2 تا t_3 بر نمودار خط مماس رسم کنیم شیب خط مماس منفی و شتاب منفی است و گزینهٔ (۲) درست است.



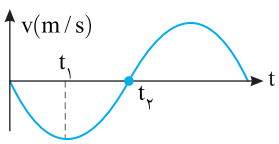
اما با رسم خط‌های مماس بر نمودار در بازهٔ t_2 تا t_3 مشاهده می‌شود که شیب خط مماس در حال کاهش است و در t_3 شیب خط مماس صفر می‌شود. بنابراین شتاب در حال کاهش و در t_3 شتاب صفر می‌شود و گزینهٔ (۳) نادرست است. در بازهٔ t_2 تا t_3 نمودار زیر محور زمان قرار دارد و سرعت در این بازه منفی است و گزینهٔ (۴) درست است.

بازی با سؤال **نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور xها در حرکت است. مطابق شکل روبه‌رو است. در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 حرکت متحرک ..... شونده و علامت شتاب ..... است.**



۱) تند، منفی ۲) تند، مثبت ۳) کند، مثبت ۴) کند، منفی

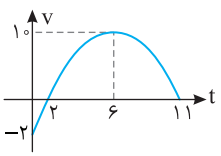
پاسخ **در بازهٔ t_1 تا t_2 اندازهٔ سرعت در حال کاهش است و در t_2 سرعت صفر می‌شود، بنابراین حرکت کندشونده است اما شیب خط مماس بر نمودار در این بازه مثبت و شتاب مثبت است. (علامت سرعت در این بازه منفی و علامت شتاب مثبت است $(av<۰)$ و حرکت کندشونده است.)**



گزینهٔ ۳

A ۲۲۴ ۲

خط فکری هرگاه تندی متحرک (اندازه سرعت) در حال کاهش باشد حرکت کندشونده و هرگاه تندی در حال افزایش باشد حرکت تندشونده است از این‌رو شما باید به تغییر اندازهٔ سرعت دقت کنید.



۱) در بازهٔ صفر تا ۲s اندازهٔ سرعت از ۲m/s به صفر می‌رسد؛ حرکت کندشونده است.

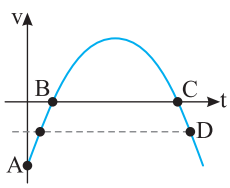
۲) در بازهٔ ۶s تا ۱۱s سرعت از ۱۰m/s به صفر می‌رسد و حرکت کندشونده است.

۳) جمعاً به مدت ۲s+۵s=۷s حرکت کندشونده است.

۴) از ۲s تا ۶s سرعت از صفر به ۱۰m/s رسیده است؛ بنابراین ۴s حرکت تندشونده است.

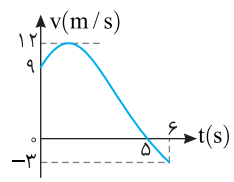
A ۲۲۵ ۴

در لحظات B و C که نمودار سرعت محور زمان را قطع کرده سرعت متحرک صفر شده یعنی متحرک به‌طور لحظه‌ای ساکن است. در لحظهٔ A بزرگی سرعت در حال کوچک‌تر شدن است و سرعت به سمت صفر می‌رود. بنابراین در این لحظه حرکت کندشونده است و در لحظهٔ D بزرگی سرعت در حال افزایش می‌باشد پس حرکت در این لحظه تندشونده است.



A ۲۲۶ ۲

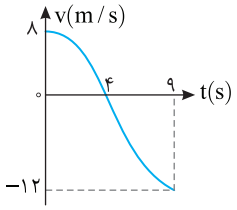
با توجه به تعریف شتاب متوسط، $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$، کافی است در لحظهٔ $t=۰$ و $t=۶s$ از روی نمودار سرعت متحرک را مشخص کرده و در رابطهٔ شتاب متوسط قرار دهیم.



$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{-۳-۹}{۶-۰}=-۲m/s^2$$

۴ ۲۲۷ A

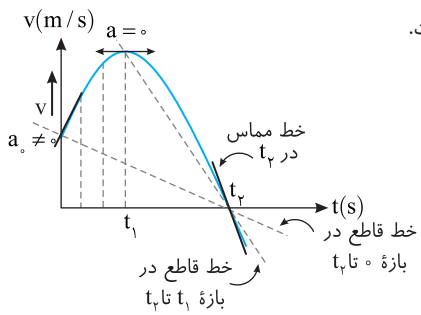
در بازهٔ زمانی که اندازهٔ سرعت در حال کاهش است حرکت کندشونده است بنابراین با توجه به نمودار سرعت - زمان در بازهٔ صفر تا ۴s، حرکت کندشونده است و سرعت از ۸ متر بر ثانیه به صفر متر بر ثانیه کاهش می‌یابد و در بازهٔ ۴s تا ۹s، اندازهٔ سرعت از صفر به ۱۲m/s در خلاف جهت محور می‌رسد یعنی تندی افزایش می‌یابد و حرکت تندشونده است. از این‌رو در بازهٔ صفر تا ۴s و ۴s تا ۹s شتاب متوسط خواهد شد:



$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow\begin{cases}a_{av_{\text{تندشونده}}}=\frac{-۱۲-۰}{۹-۴}=-۲/۴\,m/s^۲\\ a_{av_{\text{کندشونده}}}=\frac{۰-۸}{۴-۰}=-۲m/s^۲\end{cases}\Rightarrow\frac{a_{av_{\text{تندشونده}}}}{a_{av_{\text{کندشونده}}}}=\frac{۶}{۵}$$

۴ ۲۲۸ B

مطابق شکل در بازهٔ صفر تا $t_۱$ سرعت متحرک در حال افزایش است و گزینهٔ (۱) نادرست است.



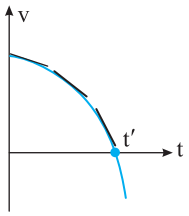
یادآوری شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ برابر شتاب لحظه‌ای است. در لحظهٔ $t=۰$ شیب خط مماس بر نمودار با قدرمطلق شیب خط مماس در لحظهٔ $t_۲$ برابر نیست و گزینهٔ (۲) نادرست است.

در بازهٔ صفر تا $t_۱$ شیب خط مماس بر نمودار مثبت و شتاب مثبت است و در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ شیب خط مماس بر نمودار منفی و شتاب منفی است از این‌رو گزینهٔ (۳) نادرست است.

یادآوری شیب خط قاطع بین دو لحظه در نمودار $v-t$ برابر شتاب متوسط است. با رسم خط قاطع در بازهٔ ۰ تا $t_۲$ و $t_۱$ تا $t_۲$ مشخص است که قدرمطلق شیب خط قاطع در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ بزرگ‌تر از شیب خط قاطع در بازهٔ صفر تا $t_۲$ است، بنابراین شتاب متوسط آن بیشتر و گزینهٔ (۴) درست است.

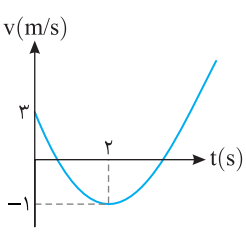
۳ ۲۲۹ A

با توجه به نمودار $v-t$ در بازهٔ صفر تا t' سرعت مثبت است. اما شیب نمودار که معرف شتاب بوده منفی است بنابراین: $a<۰,\quad v>۰$



۱ ۲۳۰ B

خط فکری به نظر می‌رسد راهی به جز به دست آوردن معادله سرعت - زمان به کمک اعداد روی نمودار نداریم. بعد از نوشتن معادله حرکت در لحظهٔ $t=۱s$ و $t_۲=۷s$ سرعت‌ها را به‌دست می‌آوریم و شتاب متوسط را حساب می‌کنیم.



۱ در لحظهٔ $t=۰$، سرعت $+۳m/s$ است بنابراین

$$v=at^۲+bt+c\Rightarrow۳=۰+۰+c\Rightarrow c=۳$$

۲ مختصات رأس سهمی

$$t=-\frac{b}{۲a}\Rightarrow۲=-\frac{b}{۲a}\Rightarrow b=-۴a\quad(۱)$$

۳

$$v=at^۲+bt+۳\xrightarrow{t=۲s,\ v=-۱m/s}-۱=۴a+۲b+۳\Rightarrow۴a+۲b=-۴\quad(۲)$$

از رابطهٔ (۱) در رابطهٔ (۲) جای‌گذاری می‌کنیم.

$$۴a+۲(-۴a)=-۴\Rightarrow-۴a=-۴\Rightarrow a=۱\ ,\ b=-۴\times۱=-۴$$

۴ معادلهٔ سرعت - زمان خواهد شد $v=t^۲-۴t+۳$

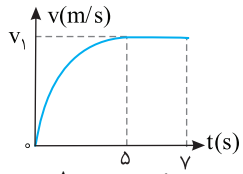
۵ سرعت در لحظه‌های $t_۱=۱s$ و $t_۲=۷s$ را حساب می‌کنیم.

$$t=۱s\Rightarrow v=۰,\ t=۷s\Rightarrow v=۴۹-۲۸+۳\Rightarrow v=۲۴m/s$$

۶ شتاب متوسط برابر است با: $a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow a_{av}=\frac{۲۴-۰}{۷-۱}\Rightarrow a_{av}=۴m/s^۲$

۱ ۲۳۱ B

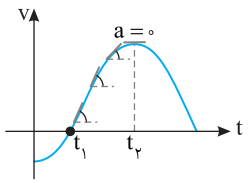
۱ با توجه به نمودار در بازهٔ ۵s تا ۷s سرعت متحرک تغییر نکرده است و بنا به رابطهٔ سرعت ثابت خواهیم داشت:



$$\Delta x=v_۱\Delta t\Rightarrow۱۸=v_۱\times۲\Rightarrow v_۱=۹m/s$$

۲ شتاب متوسط برابر است با: $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{۹-۰}{۵}=۱/۸m/s^۲$

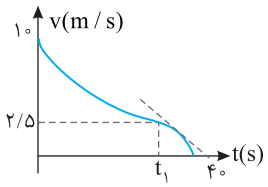
۳ ۲۳۲ A



در بازهٔ صفر تا $t_۱$ تندی جسم در حال کاهش بوده و در لحظهٔ $t_۱$ تندی صفر می‌شود یعنی در این بازه حرکت کندشونده است در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ سرعت در حال افزایش بوده و حرکت تندشونده است در صورت سؤال پرسیده شده در مدتی که حرکت تندشونده است، شتاب چگونه تغییر می‌کند. با توجه به اینکه شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ اندازهٔ شتاب را مشخص می‌کند در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ با رسم چند خط مماس مشخص می‌شود که شیب خط مماس در حال کاهش یعنی شتاب در حال کاهش است.

۱ ۲۳۳ B

۱ شتاب در لحظهٔ $t_۱$ یعنی شیب خط مماس در نمودار در لحظهٔ $t_۱$ شتاب لحظه‌ای را از روی نمودار حساب می‌کنیم.



$$a_{t_۱}=\frac{۰-۲/۵}{۴۰-t_۱}$$

۲ شتاب متوسط در بازهٔ ۰ تا $t_۱$ خواهد شد: $a_{av}=\frac{۲/۵-۱۰}{t_۱-۰}=\frac{-۷/۵}{t_۱}$

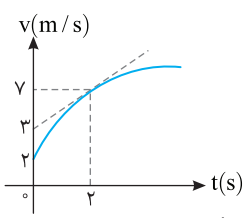
۳ با توجه به فرض مسئله این دو شتاب را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{۰-۲/۵}{۴۰-t_۱}=\frac{۲/۵-۱۰}{t_۱-۰}\Rightarrow\frac{-۲/۵}{۴۰-t_۱}=\frac{-۷/۵}{t_۱-۰}\Rightarrow\frac{۱}{۴۰-t_۱}=\frac{۳}{t_۱}$$

$$\Rightarrow۱۲۰-۳t_۱=t_۱\Rightarrow t_۱=۳۰s$$

۱ ۲۳۴ B

۱ شتاب لحظه‌ای برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان است، بنابراین برای شتاب لحظه‌ای در $t=۲s$ شیب خط مماس را در این لحظه به‌دست می‌آوریم.



$$a=\frac{۷-۳}{۲}=۲m/s^۲$$

۲ شتاب متوسط نیز در بازهٔ صفر تا ۲s برابر است با:

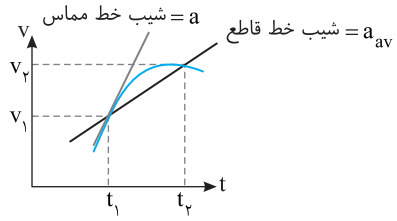
$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۷-۲}{۲}=۲/۵m/s^۲$$

۳ نسبت شتاب‌ها را حساب می‌کنیم.

$$\frac{a}{a_{av}}=\frac{۲}{۲/۵}=۰/۸$$

B ۲ ۲۳۵

یادآوری در نمودار سرعت - زمان، شیب خط قاطع بین دو لحظه برابر شتاب متوسط و شیب خط مماس بر نمودار برابر اندازه شتاب لحظه‌ای است.



خط فکری در نقاط بیشینه و کمینه نمودار سرعت - زمان، خط مماس موازی محور زمان بوده و شیب آن و در نتیجه شتاب حرکت صفر است. از طرفی معادلهٔ $v=t^۲-۸t+۱۲$ تابع درجه ۲ بوده و نمودار آن سهمی است، بنابراین شما تنها کافی است مختصات رأس سهمی $(t=-\frac{b}{۲a})$ را حساب کنید.

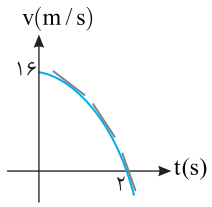
در رأس سهمی شیب خط مماس صفر است، لحظهٔ رأس سهمی را حساب می‌کنیم.

$$v=t^۲-۸t+۱۲\ ,\ t=\frac{-b}{۲a}\Rightarrow t=\frac{۸}{۲}=۴s$$

B ۴ ۲۳۶

خط فکری برای بررسی نوع حرکت شما باید نمودار سرعت - زمان را رسم کنید سپس تمام گزینه‌ها را به کمک نمودار رسم شده بررسی کنید.

۱ معادلهٔ سرعت - زمان $v=۱۶-۴t^۲$ تابع درجه ۲ بوده و نمودار آن سهمی است. نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم:



$$v=۱۶-۴t^۲\Rightarrow v=۴(۴-t^۲)\xrightarrow{v=۰}t=۲s$$

۲ با توجه به شیب خط مماس بر نمودار، در کل مسیر این شیب منفی است. پس شتاب متحرک در طول مسیر در خلاف جهت محور x‌ها است، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.

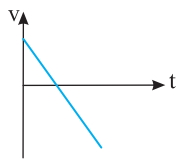
۳ با توجه به نمودار از صفر تا ۲s سرعت متحرک مثبت است یعنی متحرک در جهت مثبت محور x در حرکت است و پس از $t=۲s$ سرعت متحرک منفی می‌شود یعنی متحرک در جهت منفی محور x حرکت می‌کند و به حرکت خود ادامه می‌دهد، بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است.

۴ با توجه به نمودار قبل از $t=۲s$ تندی در حال کاهش و نوع حرکت کندشونده و بعد از $t=۲s$ تندی جسم در حال افزایش و حرکت تندشونده است، بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

۵ نوع حرکت در لحظهٔ $t=۲s$ از کندشونده به تندشونده تغییر می‌کند، اما قبل و بعد از $t=۴s$ حرکت تندشونده است، بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

A ۲ ۲۳۷

نمودار سرعت - زمان خط راست بوده از این‌رو درتمام لحظات شیب آن ثابت بوده یعنی شتاب حرکت در تمام مدت ثابت است از طرفی شیب نمودار منفی است از این‌رو شتاب ثابت و منفی است.



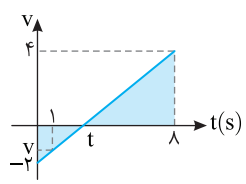
A ۱ ۲۳۸

شیب خط نمودار را نوشته و سرعت در لحظهٔ $t=۱s$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{۴-(-۲)}{۸-۰}=\frac{v-(-۲)}{۱-۰}\Rightarrow\frac{۶}{۸}=\frac{v+۲}{۱}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=v+۲$$

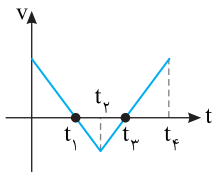
$$\Rightarrow ۴v+۸=۳\Rightarrow v=-\frac{۵}{۴}m/s$$

بنابراین سرعت $-\frac{۵}{۴}m/s$ و به دلیل منفی بودن سرعت متحرک خلاف جهت محور x در حال حرکت است.



A ۳ ۲۳۹

خط فکری هرگاه سرعت مثبت است متحرک در جهت محور x‌ها حرکت کرده و اگر سرعت منفی باشد متحرک خلاف جهت محور x ها حرکت می‌کند. هم‌چنین اگر نمودار به محور افقی نزدیک شود بزرگی سرعت در حال کاهش می‌باشد و حرکت کندشونده و اگر نمودار در حال دور شدن از این محور افقی باشد بزرگی سرعت در حال افزایش می‌باشد و حرکت تندشونده است.



۱ در بازهٔ صفر تا $t_۱$ سرعت مثبت و حرکت در جهت مثبت محور x‌ها بوده و گزینهٔ (۱) نادرست است.

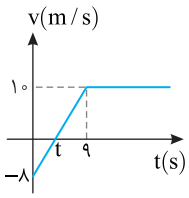
۲ در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ سرعت منفی و متحرک در خلاف جهت محور x‌ها در حال حرکت است از طرفی بزرگی سرعت (تندی متحرک) در حال افزایش یعنی حرکت تندشونده است و گزینهٔ (۲) نادرست است.

۳ در بازهٔ $t_۲$ تا $t_۳$ سرعت منفی و جهت حرکت خلاف جهت محور x‌ها است و تندی (اندازهٔ سرعت) در حال کاهش است به‌طوری که در نقطهٔ $t_۳$ سرعت صفر می‌شود یعنی حرکت کندشونده است و گزینهٔ (۳) درست است.

۴ در بازهٔ $t_۳$ تا $t_۴$ سرعت مثبت بوده و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۴ ۲۴۰

ابتدا لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود (t) را به کمک شیب خط به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{۱۰-(-۸)}{۹-۰}=\frac{۰-(-۸)}{t-۰}\Rightarrow ۲=\frac{۸}{t}\Rightarrow t=۴s$$

اکنون با داشتن لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود می‌توان گزینه‌ها را بررسی کرد.

با توجه به نمودار در لحظهٔ $t=۳s$ بزرگی سرعت متحرک در حال کاهش است و در $t=۴s$ متحرک متوقف می‌شود، بنابراین در $t=۳s$ حرکت کندشونده و گزینهٔ (۱) نادرست است.

در بازهٔ زمانی ۰ تا ۹s شیب خط نمودار $v-t$ تغییر نمی‌کند بنابراین شتاب در این بازهٔ زمانی ثابت است پس در لحظهٔ $t=۴s$ نیز شتاب تغییر نمی‌کند و گزینهٔ (۲) نادرست است.

در $t=۹s$ به بعد بزرگی سرعت ثابت و برابر $۱۰m/s$ باقی می‌ماند، بنابراین حرکت نه تندشونده و نه کندشونده است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

در $t=۷s$ بزرگی سرعت متحرک در حال افزایش است و در $t=۹s$ سرعت متحرک به بیشینه مقدار خود یعنی $v=۱۰m/s$ می‌رسد بنابراین در این لحظه حرکت تندشونده و گزینهٔ (۴) درست است.

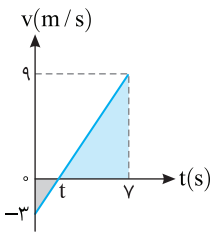
A ۴ ۲۴۱

نکته اگر مکان اولیهٔ متحرکی مشخص نباشد نمودار سرعت - زمان دربارهٔ مکان متحرک و هم‌چنین نزدیک یا دور شدن متحرک به مبدأ مکان اطلاعاتی به ما نمی‌دهد.

با توجه به نکته بیان شده گزینهٔ (۴) درست است.

A ۳ ۲۴۲

لحظهٔ تغییر جهت، لحظه‌ای است که سرعت صفر شده و تغییر علامت می‌دهد. نسبت تشابه را برای دو مثلث رنگی می‌نویسیم و لحظهٔ تغییر جهت را به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{۹}{۳}=\frac{۷-t}{t}\Rightarrow ۳t=۷-t\Rightarrow t=\frac{۷}{۴}s$$

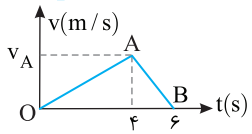
نمودار سرعت - زمان خط راست است و شیب آن ثابت است. از این‌رو شتاب حرکت در تمام بازه‌های زمانی ثابت و یکسان است و خواهد شد:

$$a=a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{۹-(-۳)}{۷}=\frac{۱۲}{۷}m/s^۲$$

A ۲۴۳ ۳

یادآوری شیب نمودار سرعت زمان برابر شتاب متحرک است.

در هر قسمت شتاب را حساب می‌کنیم.



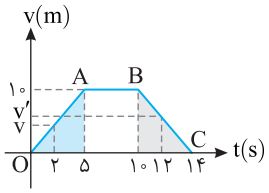
$$a_{av_{OA}}=\frac{v_A-0}{4-0}=\frac{v_A}{4},\quad a_{av_{AB}}=\frac{0-v_A}{6-4}=\frac{-v_A}{2}$$

نسبت اندازهٔ شتاب‌ها خواهد شد:

$$\frac{|a_{av_{OA}}|}{|a_{av_{OB}}|}=\frac{\frac{v_A}{4}}{\frac{v_A}{2}}=\frac{1}{2}$$

B ۲۴۴ ۱

خط فکری باید به کمک شیب خط‌های OA و BC سرعت را در لحظه‌های $t=2s$ و $t=12s$ حساب کرده سپس به کمک تعریف شتاب متوسط مسئله را حل کنید. $a_{av}=\Delta v/\Delta t$



۱ به کمک شیب خط OA سرعت در لحظهٔ $t=2s$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{10-0}{5-0}=\frac{v-0}{2-0}\Rightarrow 2=\frac{v}{2}\Rightarrow v=4m/s$$

۲ شیب خط BC را نوشته سرعت در لحظهٔ $t=12s$ را به‌دست می‌آوریم.

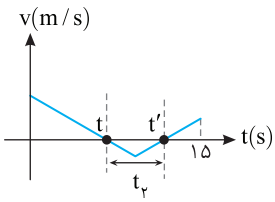
$$\frac{0-10}{14-10}=\frac{0-v'}{14-12}\Rightarrow\frac{-10}{4}=\frac{-v'}{2}\Rightarrow v'=5m/s$$

۳ شتاب متوسط خواهد شد.

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v'-v}{\Delta t}=\frac{5-4}{12-2}=\frac{1}{10}m/s^2$$

C ۲۴۵ ۳

خط فکری هرگاه سرعت مثبت باشد متحرک در جهت محور xها در حرکت است و هرگاه سرعت منفی باشد متحرک در خلاف جهت محور xها حرکت می‌کند. از طرفی متحرک وقتی تغییر جهت می‌دهد که سرعت آن صفر می‌شود. یعنی نمودار محور زمان را قطع می‌کند بنابراین بازهٔ زمانی بین دو تغییر جهت با توجه به شکل بازهٔ زمانی بین t تا t' $(t'-t)$ است. دقت کنید در این بازه سرعت منفی است و در واقع طراح از شما می‌خواهد که $t_2=t'-t$ را از روی نمودار به‌دست آورید.



در بازهٔ صفر تا t و t' تا ۱۵s متحرک در جهت مثبت محور xها و در بازهٔ t تا t' متحرک در خلاف جهت محور xها در حرکت بوده است.

$$t_1=(t-0)+(15-t')=15+(t-t')\Rightarrow t_1=15-t_2\ ,\ t_2=t'-t$$

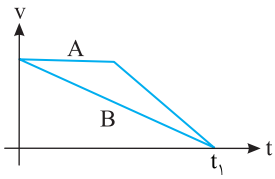
حال با توجه به نسبت داده شده در سؤال:

$$\frac{t_1}{t_2}=\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{15-t_2}{t_2}=\frac{5}{4}\Rightarrow 60-4t_2=5t_2\Rightarrow 60=9t_2\Rightarrow t_2=\frac{20}{3}s$$

مدت زمان بین دو لحظهٔ توقف همان $t'-t$ است که برابر با t_2 یعنی $\frac{20}{3}s$ است.

B ۲۴۶ ۱

در بازهٔ زمانی ۰ تا t_1 تغییر سرعت دو متحرک A و B یکسان است و با توجه به تعریف شتاب متوسط $(a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t})$ شتاب متوسط دو متحرک در این بازه با هم برابر است.

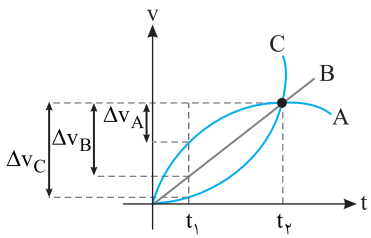


B ۲۴۷ ۱

می‌خواهیم شتاب متوسط سه متحرک A، B و C را در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 با هم مقایسه کنیم. با توجه به تعریف شتاب متوسط $(a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t})$ ما باید تغییرات سرعت این سه متحرک را با هم مقایسه کنیم.

با توجه به شکل در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 تغییر سرعت متحرک A از متحرک B کمتر و تغییر سرعت متحرک B از تغییر سرعت متحرک C کمتر است.

$$\Delta v_A<\Delta v_B<\Delta v_C\Rightarrow a_{av_A}<a_{av_B}<a_{av_C}$$



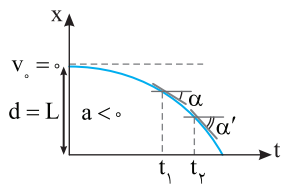
A ۲۴۸ ۴

۱ متحرک روی محور xها در خلاف جهت محور از حال سکون $(|v_0|=0)$ شروع به حرکت کرده است.

۲ دقت کنید در لحظهٔ $t=0$ خط مماس بر نمودار موازی محور xها است و شیب خط مماس صفر و در نتیجه سرعت اولیه صفر است. (گزینهٔ (۳) درست است.)

۳ متحرک روی محور xها تغییر جهت نداده بنابراین جابه‌جایی و مسافت طی شده یکسان است. در نتیجه تندی متوسط و بزرگی سرعت متوسط برابر است. (گزینهٔ (۱) درست است.)

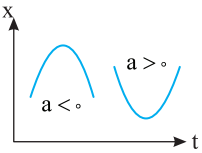
۴ به شکل دقت کنید در بازهٔ t_1 تا t_2 شیب خط مماس بر نمودار بیشتر می‌شود بنابراین اندازهٔ سرعت در لحظهٔ t_2 از اندازهٔ سرعت در لحظهٔ t_1 بیشتر (منفی‌تر) است.



در نتیجه: $\Delta v=v_2-v_1\xrightarrow[v_2<0,\ v_1<0]{|v_2|>|v_1|}\Delta v<0\Rightarrow a<0$

هر دو لحظه دلخواه دیگری را که در نظر بگیرید، به همین نتیجه می‌رسید که شتاب منفی است و گزینهٔ (۲) درست است.

میانبر برای تعیین علامت شتاب از روی نمودار مکان - زمان کافی است به جهت تقعر (دهانهٔ نمودار) دقت کنید اگر دهانه رو به بالا باشد شتاب مثبت و اگر رو به پایین باشد شتاب منفی است.

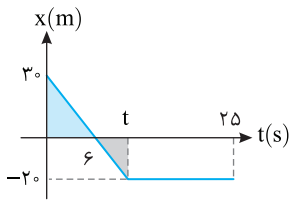


B ۲۴۹ ۴

۱ به کمک شیب نمودار لحظهٔ t را حساب می‌کنیم.

$$\frac{-20-30}{t-0}=\frac{0-30}{6-0}\Rightarrow t=10s$$

۲ سرعت متوسط در مدت ۲۵s خواهد شد:



$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-20-30}{25}=-2m/s$$

۳ سرعت در بازهٔ صفر تا ۶s ثابت است، بنابراین:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v=\frac{0-30}{6}=-5m/s\Rightarrow v_0=-5m/s$$

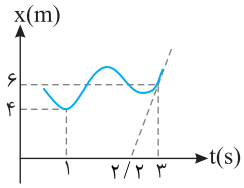
شیب خط مماس بر نمودار در بازهٔ $t=10s$ تا $t=25s$، صفر است بنابراین: $v_{25}=0$

در نتیجه شتاب متوسط در مدت ۲۵s خواهد شد: $a_{av}=\frac{0-(-5)}{25}=0/2m/s^2$

B ۲۵۰ ۱

برای به‌دست آوردن شتاب متوسط در بازهٔ $t=۱s$ تا $t=۳s$ باید سرعت را در این دو لحظه به‌دست بیاوریم.

۱ در $t=۱s$ شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان موازی محور زمان بوده و سرعت لحظه‌ای صفر است $(v_۱=۰)$



۲ در $t=۳s$ شیب خط مماس برابر است با: $v_۲=\frac{۶-۰}{۳-۲/۲}=\frac{۶}{۰/۸}=\frac{۶۰}{۸}=۷/۵m/s$

۳ در این صورت شتاب متوسط برابر است با:

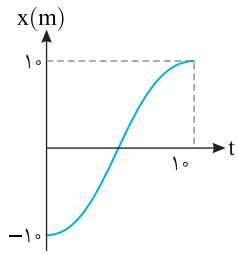
$$a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{۷/۵-۰}{۳-۱}=\frac{۷/۵}{۲}\Rightarrow a_{av}=۳/۷۵\,m/s^۲$$

A ۲۵۱ ۲

در لحظهٔ $t=۰$، مکان متحرک $x_۱=-۱۰m$ و در لحظهٔ $t=۱۰s$ مکان متحرک $x_۲=+۱۰m$ بوده بنابراین سرعت متوسط خواهد شد.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{۱۰-(-۱۰)}{۱۰-۰}=۲m/s$$

برای به‌دست آوردن شتاب متوسط باید سرعت متحرک را در لحظه‌های $t=۰$ و $t=۱۰s$ از روی نمودار مشخص کنیم. در این دو لحظه خط مماس بر نمودار موازی محور زمان بوده و شیب خط مماس و در نتیجه سرعت در این لحظات صفر است، بنابراین شتاب متوسط برابر است با: $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=۰$



A ۲۵۲ ۱

نکته هرگاه جهت دهانهٔ (تقعر) نمودار مکان - زمان به سمت بالا باشد (گنبدی شکل) شتاب حرکت مثبت و هرگاه جهت دهانه (تقعر) نمودار رو به پایین باشد، شتاب منفی است.

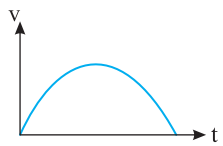
یادآوری هرگاه شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان مثبت باشد سرعت مثبت و متحرک در جهت مثبت محور در حال حرکت است و هرگاه شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان منفی باشد، سرعت منفی و متحرک در جهت منفی محور در حال حرکت است.

در صورت مسئله بیان شده که سرعت اولیه مثبت باشد یعنی در لحظهٔ $t=۰$ شیب خط مماس بر نمودار مثبت باشد که در گزینهٔ (۱) و (۳) این چنین است. از طرفی خواسته شده که در خلاف جهت محور x یعنی منفی باشد بنابراین دهانه (تقعر) نمودار باید رو به پایین باشد و گزینهٔ (۱) درست است.

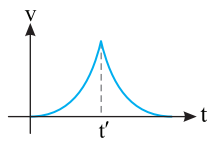
B ۲۵۳ ۲

ابتدا دقت کنید که نمودارهای داده شده، نمودار سرعت - زمان است. سپس به حل مسئله بپردازید.

متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده و در نهایت نیز متوقف شده است پس در ابتدا و انتهای حرکت سرعت صفر است و گزینهٔ (۱) نمی‌تواند جواب باشد.



در نمودار گزینهٔ (۲)، در تمام مدت نمودار بالای محور زمان بوده و سرعت متحرک مثبت است از طرفی در $t=۰$، سرعت صفر است بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.



چون متحرک در جهت مثبت محور xها در حرکت است پس سرعت باید مثبت باشد بنابراین گزینهٔ (۳) نیز نادرست است. در لحظهٔ t' در نمودار گزینهٔ (۴) خط مماس قائم است پس شیب خط مماس در این نقطه که برابر شتاب می‌باشد ∞ است و این ناممکن است بنابراین گزینهٔ (۴) نیز نادرست است اگرچه سرعت در ابتدا و انتها صفر است.

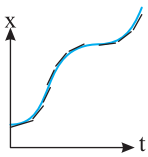
A ۲۵۴ ۴

متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده یعنی نمودار در لحظهٔ $t=۰$ باید بر محور زمان مماس باشد بنابراین گزینهٔ (۱) و (۳) نادرست هستند.

متحرک پس از مدتی متوقف شده و سپس در جهت مثبت محور به حرکت خود ادامه می‌دهد یعنی شیب خط مماس بر نمودار پس از تغییر جهت باید مثبت باشد بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.

B ۲۵۵ ۳

در ابتدا با گذر زمان، در بازه‌های زمانی یکسان جابه‌جایی خودرو در حال افزایش است بنابراین سرعت در حال افزایش است یعنی شیب خط مماس بر نمودار باید در حال افزایش باشد.



در ادامهٔ مسیر در بازه‌های زمانی یکسان، جابه‌جایی‌ها کاهش یافته یعنی سرعت در حال کاهش است و مجدداً جابه‌جایی‌ها افزایش می‌یابد یعنی سرعت افزایش می‌یابد. در گزینهٔ (۳) ابتدا شیب خط مماس افزایش، سپس کاهش و سرانجام افزایش می‌یابد.

B ۲۵۶ ۲

۱ بردار مکان متحرک زمانی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان $(x=۰)$ عبور می‌کند، بنابراین مکان را مساوی صفر $(x=۰)$ قرار می‌دهیم:

$$x=t^۳-۳t^۲+۲t\Rightarrow ۰=t^۳-۳t^۲+۲t\Rightarrow ۰=t(t-۱)(t-۲)$$

$$\Rightarrow t=۰,\ t=۱s,\ t=۲s$$

۲ دقت کنید در $t=۰$ متحرک شروع به حرکت می‌کند پس در $t=۰$ از مبدأ مکان متحرک عبور نمی‌کند، بنابراین در لحظه‌های $t=۱s$ و $t=۲s$ تغییر بردار مکان رخ داده است، اکنون در این دو لحظه سرعت را به کمک معادلهٔ سرعت - زمان داده شده حساب می‌کنیم:

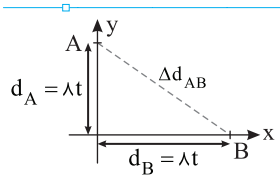
$$v_{t=۱s}=۳(۱)^۲-۶(۱)+۲\Rightarrow v_{t=۱}=-۱\,m/s$$

$$v_{t=۲s}=۳(۲)^۲-۶(۲)+۲\Rightarrow v_{t=۲}=۲m/s$$

۳ شتاب متوسط حرکت را به‌دست می‌آوریم: $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۲-(-۱)}{۲-۱}=۳m/s^۲$

B ۲۵۷ ۲

۱ مسئلهٔ ساده‌ای است. در مدت t ثانیه جابه‌جایی هر متحرک را حساب می‌کنیم. سرعت هر متحرک $۸m/s$ است. بنابراین:



$$d_A=d_B=vt\Rightarrow d_A=d_B=۸t$$

۲ فاصلهٔ A تا B را به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست آورده و برابر $۳۲\sqrt{۲}m$ قرار می‌دهیم.

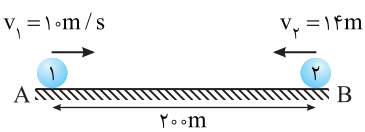
$$AB=\sqrt{d_A^۲+d_B^۲}\Rightarrow ۳۲\sqrt{۲}=\sqrt{(۸t)^۲+(۸t)^۲}\Rightarrow ۳۲\sqrt{۲}=\sqrt{۲}(۸t)\Rightarrow t=۴s$$

B ۲۵۸ ۳

خط فکری آنچه مسلم است دیدار این دو متحرک برای اولین بار هنگامی است که به سوی هم می‌روند و در بین راه یکدیگر ملاقات می‌کنند اما ملاقات دوم آن‌ها وقتی است که دو متحرک به انتهای مسیر می‌رسند و برمی‌گردند و مجدداً بین راه یکدیگر را ملاقات می‌کنند، بنابراین شما باید ابتدا زمان حرکت متحرک کندرو (۱) را از A تا B حساب کنید. در این مدت متحرک تندرو (۲) قطعاً از B به A رسیده و در حال برگشت است و مقدار مسافتی که در برگشت طی می‌کند را به‌دست بیاورید، بنابراین به مراحل زیر با دقت توجه کنید.

۱ مدت زمان حرکت متحرک کندرو از A تا B خواهد شد:

$$d=vt=۲۰۰=۱۰t_۱\Rightarrow t_۱=۲۰s$$

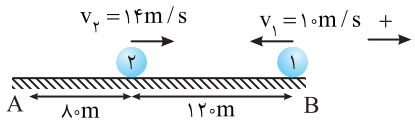


۲ جابه‌جایی متحرک (۲) با تندی $۱۴m/s$ در مدت $۲۰s$ را حساب می‌کنیم.

$\ell_۲ = vt_۰ = ۱۴\times ۲۰ = ۲۸۰m$

۳ یعنی متحرک (۲)، ۲۰۰ متر رفته و $۸۰m$ برگشته و در این لحظه متحرک (۱) از نقطهٔ B در حال برگشت است. یعنی فاصلهٔ دو متحرک از هم $۲۰۰-۸۰=۱۲۰m$ است.

۴ اگر نقطهٔ B را در این لحظه مبدأ مکان فرض کنیم با نوشتن معادلهٔ حرکت دو متحرک و برابر قرار دادن معادله‌ها لحظه‌ای که به هم می‌رسند را به‌دست می‌آوریم.



$$\begin{cases} x_۱ = -۱۰t \\ x_۲ = ۱۴t - ۱۲۰ \end{cases} \xrightarrow{x_۱ = x_۲} -۱۰t = ۱۴t - ۱۲۰ \Rightarrow ۲۴t = ۱۲۰ \Rightarrow t_۲ = ۵s$$

ملاقات دوم پس از $۲۰+۵=۲۵s$ صورت می‌گیرد.

میانبر در قسمت آخر می‌توانستیم سرعت‌ها را با هم جمع کرده $۱۴+۱۰=۲۴m/s$ سپس زمانی که $۱۲۰m$ با این سرعت طی می‌شود را حساب کرد.

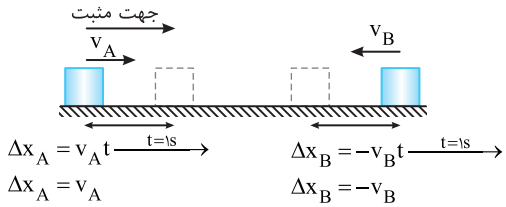
$\Delta x = (v_۱ + v_۲)t \Rightarrow ۱۲۰ = ۲۴t \Rightarrow t = ۵s$

$t_{کل} = ۲۰+۵ = ۲۵s$

B ۲۵۹ ۲

فرض اول: دو جسم با سرعت ثابت به سمت هم حرکت می‌کنند و در هر $۱۰s$، ۱۶ متر به‌هم نزدیک می‌شوند، یعنی در هر ثانیه $۱/۶m$ به‌هم نزدیک‌تر می‌شوند با توجه به شکل در هر ثانیه متحرک A به اندازهٔ v_A در جهت مثبت و متحرک B، به اندازهٔ v_B در جهت منفی به‌هم نزدیک می‌شوند بنابراین:

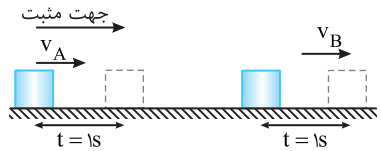
$\Delta x_{AB} = v_A - (-v_B) = ۱/۶ \Rightarrow v_A + v_B = ۱/۶ m/s \quad (۱)$: در یک ثانیه



فرض دوم: دو جسم با سرعت ثابت در یک جهت حرکت می‌کنند. متحرک A به اندازهٔ v_A و متحرک B به اندازهٔ v_B در هر ثانیه جابه‌جا می‌شوند و چون در هر $۵s$ فاصلهٔ دو متحرک ۳ متر اضافه می‌شود باید سرعت $v_B > v_A$ باشد. پس این دو متحرک در هر ثانیه $۰/۶$ متر از هم دورتر خواهند شد:

$\Delta x_{AB} = v_B - v_A \Rightarrow v_B - v_A = ۰/۶ \quad (۲)$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \begin{cases} v_A + v_B = ۱/۶ \\ v_B - v_A = ۰/۶ \end{cases} \Rightarrow ۲v_B = ۲/۲ \Rightarrow \begin{cases} v_B = ۱/۱ m/s \\ v_A = ۰/۵ m/s \end{cases}$$



میانبر اگر دو متحرک در یک جهت در حال حرکت باشند می‌توان یکی از آن‌ها را ساکن فرض کرد که دیگری با تندی $|v_A - v_B|$ نسبت به آن در حرکت است.

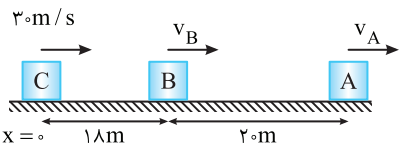
$\Delta x = |v_A - v_B| t$

و اگر دو متحرک در خلاف جهت هم در حال حرکت باشند آن‌گاه: $\Delta x = (v_A + v_B)t$

C ۲۶۰ ۲

خط فکری شکل مسئله را رسم کنید و داده‌های مسئله را روی شکل به‌طور کامل نمایش دهید. سپس معادلهٔ حرکت هریک از سه متحرک را بنویسید آن‌گاه مرحله به مرحله مسئله را حل کنید.

۱ اگر مکان C را مبدأ مکان و سمت راست را جهت مثبت در نظر بگیریم، معادلهٔ حرکت هر متحرک خواهد شد: $x_A = v_A t + ۳۸$ ، $x_B = v_B t + ۱۸$ ، $x_C = ۳۰t$



۲ در لحظهٔ $t=۳s$ متحرک‌های B و C به هم رسیده‌اند بنابراین معادله‌های حرکت B و C را برابر قرار داده و v_B را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x_C = ۳۰(۳) \\ x_B = ۳v_B + ۱۸ \end{cases} \xrightarrow{x_C = x_B} ۹۰ = ۳v_B + ۱۸ \Rightarrow ۳v_B = ۷۲$$

$\Rightarrow v_B = ۲۴m/s$

۳ دو ثانیه پس از $t=۳s$ یعنی در لحظهٔ $t=۵s$ متحرک‌های A و C به هم رسیده‌اند از این رو x_A را برابر x_C قرار داده و سرعت A (v_A) را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_C = ۳۰(۵) \\ x_A = ۵v_A + ۳۸ \end{cases} \xrightarrow{x_C = x_A} ۱۵۰ = ۵v_A + ۳۸ \Rightarrow ۵v_A = ۱۱۲$$

$\Rightarrow v_A = ۲۲/۴ m/s$

۴ اکنون با برابر قرار دادن معادلهٔ A و B زمان رسیدن B به A را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x_B = ۲۴t + ۱۸ \\ x_A = ۲۲/۴t + ۳۸ \end{cases} \xrightarrow{x_A = x_B} ۲۴t + ۱۸ = ۲۲/۴t + ۳۸ \Rightarrow ۱/۶t = ۲۰$$

$\Rightarrow t = \frac{۲۰۰}{۱۶} = ۱۲/۵s$

۵ پس در لحظهٔ $t=۱۲/۵s$ متحرک B به A می‌رسد یعنی $\Delta t = ۱۲/۵ - ۵ = ۷/۵s$ بعد از سبقت C از A این اتفاق می‌افتد.

B ۲۶۱ ۳

۱ متحرک A از نقطهٔ P شروع به حرکت کرده، $۴s$ بعد متحرک B از نقطهٔ O به راه می‌افتد و بعد از $۴s$ با متحرک A، از نقطهٔ Q می‌گذرد. بنابراین مدت زمان حرکت A از P تا Q به اندازهٔ $۴+۴=۸s$ طول کشیده است.

۲ سرعت A ثابت و برابر $۵m/s$ است. بنابراین فاصلهٔ P تا Q خواهد شد.

$\Delta x = vt \Rightarrow PQ = ۵\times ۸ = ۴۰m$

۳ متحرک B مسیر OQ را در مدت $۴s$ طی کرده است. بنابراین OQ را حساب می‌کنیم. با توجه به شکل:

$OQ = OP + PQ = ۱۸ + ۴۰ \Rightarrow OQ = ۵۸m$

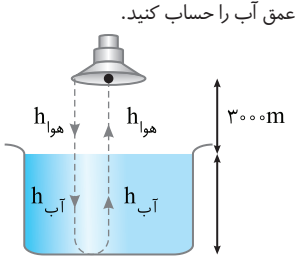
۴ سرعت B خواهد شد:

$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_B = \frac{۵۸}{۴} \Rightarrow v_B = ۱۴/۵ m/s$

B ۲۶۲ ۱

خط فکری صوت از فرستنده به سمت آب می‌رود سپس وارد آب شده به کف اقیانوس برخورد کرده و به سطح آب بازمی‌گردد و وارد هوا شده و به محل گیرنده می‌رسد. یعنی در طول مسیر حرکت صوت از دو بخش $۲h_{هوا}$ و $۲h_{آب}$ تشکیل شده است، بنابراین شما ابتدا باید مدت زمان حرکت صوت در هوا را به‌دست آورده و این زمان را از $۴۰s$ کل حرکت کم کنید تا بتوانید عمق آب را حساب کنید.

۱ تندی صوت در هوا ثابت و برابر $۳۰۰m/s$ است و مسافتی که صوت در هوا طی می‌کند برابر $۲h = ۶۰۰۰m$ است بنابراین زمان حرکت صوت در هوا را می‌توان به‌دست آورد.



$\ell = vt \Rightarrow ۲h_{هوا} = v_{هوا} \times t_{هوا}$

$\Rightarrow ۶۰۰۰ = ۳۰۰ \times t_{هوا} \Rightarrow t_{هوا} = ۲۰s$

۲ صوت $۲۰s$ در هوا در حال حرکت است و بنابراین مدت $۴۰-۲۰=۲۰s$ نیز در آب طی کرده است.

۳ اکنون عمق آب را حساب می‌کنیم.

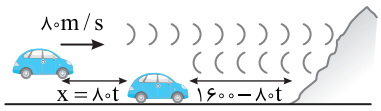
$\ell = vt \Rightarrow ۲h_{آب} = ۱۲۰۰ \times ۲۰ \Rightarrow ۲h_{آب} = ۲۴۰۰۰ \Rightarrow h_{آب} = ۱۲۰۰۰m = ۱۲km$

۱ ۲۶۳ C

اگر زمانی که طول می‌کشد تا راننده صدای پژواک را بشنود برابر t فرض کنیم در این مدت خودرو با تندی ۸۰m/s مسافت $x=۸۰t$ جلو می‌آید و صوت نیز مسافت $۱۶۰۰+۱۶۰۰-x$ یعنی $۳۲۰۰-x$ را طی می‌کند بنابراین می‌توان نوشت:

$$\ell_{\text{صوت}}=v_{\text{صوت}}t\Rightarrow ۳۲۰۰-x=۳۲۰t\xrightarrow{x=۸۰t}۳۲۰۰-۸۰t=۳۲۰t$$

$$\Rightarrow ۳۲۰۰=۴۰۰t\Rightarrow t=۸s$$



۴ ۲۶۴ B

خط فکری اگر شما از یک پله برقی که در حال بالا رفتن است بالا بروید قطعاً زمان رسیدن شما به انتهای پله کمتر از زمانی است که روی پله برقی بایستید. در واقع در حالت اول تندی حرکت شما با تندی حرکت پله جمع می‌شود و اگر زمان حرکت پله $t_۱$، زمانی که شما از پلکان ساکن بالا می‌روید $t_۲$ و زمان حرکت پله و شما با هم t فرض شود. به کمک جمع تندی‌ها مسئله قابل حل است.

$$v=v_۱+v_۲\xrightarrow[\text{طول پلکان}=L]{v=\frac{\ell}{t}}\frac{\ell}{t}=\frac{\ell}{t_۱}+\frac{\ell}{t_۲}\xrightarrow{t_۱=۱min\,,t_۲=۳min}$$

$$\frac{۱}{t}=\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow t=\frac{۳}{۴}min\Rightarrow t=۴۵s$$

۳ ۲۶۵ B

خط فکری مجدداً با مسئله‌ای سروکار داریم که در آن از شما مقایسهٔ مسافت طی شده و جابه‌جایی خواسته شده است. ابتدا شما باید مدت زمان حرکت دو قطار از لحظه‌ای که فاصلهٔ آن‌ها از هم ۸۰km بوده تا لحظه‌ای که به هم برخورد می‌کنند را بیابید سپس مسافت و جابه‌جایی در این مدت را به‌دست بیاورید.

۱ سرعت حرکت هر قطار ۴۰km/h است یعنی در هر ساعت هر قطار ۴۰km جابه‌جا می‌شود که جمعاً ۸۰km شده در نتیجه دو قطار پس از ۱h به هم برخورد می‌کنند.

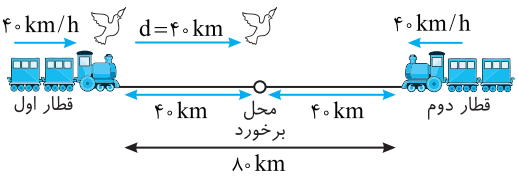
۲ در مدت ۱h پرنده با تندی ۶۰km/h مسافتی که طی می‌کند برابر است با:

$$\ell=vt\Rightarrow\ell=۶۰\times۱=۶۰km$$

۳ به شکل دقت کنید. جابه‌جایی پرنده از محل شروع پرواز تا محل برخورد برابر $d=۴۰km$ است.

۴ نسبت ℓ به d خواهد شد:

$$\frac{\ell}{d}=\frac{۶۰}{۴۰}=\frac{۳}{۲}$$



۲ ۲۶۶ B

این نوع پرسش‌ها به مبحث جمع سرعت‌ها مربوط است.

وقتی شناگر در جهت جریان آب شنا می‌کند، سرعت شناگر نسبت به ساحل برابر جمع اندازهٔ سرعت‌ها می‌شود (v_S+v_W) و هنگامی که در خلاف جهت جریان آب شنا می‌کند، سرعت شناگر نسبت به ساحل برابر تفاضل اندازهٔ سرعت‌ها می‌شود (v_S-v_W)، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow\begin{cases}۹۰۰=(v_S+v_W)(۹۰)\Rightarrow v_S+v_W=۱۰\\ ۹۰۰=(v_S-v_W)(۱۵۰)\Rightarrow v_S-v_W=۶\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{v_S+v_W}{v_S-v_W}=\frac{۱۰}{۶}=\frac{۵}{۳}\Rightarrow ۳v_S+۳v_W=۵v_S-۵v_W\Rightarrow ۸v_W=۲v_S$$

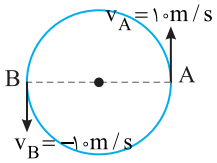
$$\Rightarrow\frac{v_S}{v_W}=۴$$

۲ ۲۶۷ B

۱ مدت زمان بازهٔ زمانی $t_۱=\frac{۱}{۴}s$ تا $t_۲=\frac{۵}{۴}s$ برابر $\frac{۵}{۴}-\frac{۱}{۴}=۱s$ است.

۲ ذره در هر ۲s یک دور کامل می‌چرخد، بنابراین در مدت ۱s، ذره نیم دور می‌چرخد. به‌طور مثال از نقطهٔ A با تندی ثابت ۱۰m/s به نقطهٔ B می‌رود.

۳ بردار سرعت در هر نقطه بر مسیر حرکت مماس است، بردارهای سرعت دو نقطهٔ A و B را رسم می‌کنیم.



۴ اگر اندازه سرعت در نقطهٔ A، ۱۰m/s باشد در نقطهٔ B سرعت $-۱۰m/s$ بوده و تغییرات سرعت خواهد شد:

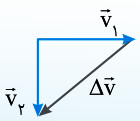
$$|\Delta v|=|-۱۰-۱۰|=۲۰m/s$$

۵ شتاب متوسط را حساب می‌کنیم.

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۲۰}{۱}\Rightarrow a_{av}=۲۰m/s^۲$$

۲ ۲۶۸ C

یادداشت ریاضی برای نشان دادن بردار تفاضل دو بردار $(\vec{v}_۲-\vec{v}_۱)$، دو بردار را مطابق شکل از یک نقطه رسم کرده سپس از انتهای بردار اول $(\vec{v}_۱)$ برداری به انتهای بردار دوم $(\vec{v}_۲)$ رسم می‌کنیم.



۱ ابتدا محیط دایره را به‌دست می‌آوریم.

$$\ell=۲\pi r\xrightarrow{r=۲۰m}\ell=۲\pi\times۲۰=۴۰\pi\ m$$

۲ زمان یک دور زدن متحرک که با تندی $۱۰\pi\ m/s$ محیط دایره را طی می‌کند، خواهد شد:

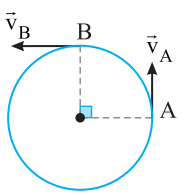
$$s=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow ۱۰\pi=\frac{۴۰\pi}{t}\Rightarrow t=۴s$$

۳ اکنون باید مشخص کنیم که در هر ثانیه متحرک روی دایره چه مقدار می‌چرخد؟ از یک تناسب ساده کمک می‌گیریم.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline ۴s & ۱\text{ دور}\\ \hline ۱s & ?\\ \hline\end{array}\Rightarrow ?=\frac{۱}{۴}\text{ دور}$$

۴ $\frac{۱}{۴}$ محیط دایره یعنی متحرک کمان $\frac{\pi}{۲}(۹۰^\circ)$ طی می‌کند و به‌طور مثال از نقطهٔ A در سوی نشان داده شده به نقطهٔ B می‌رود.

۵ بردار سرعت در نقطهٔ A و B را مماس بر دایره رسم می‌کنیم.



۶ تغییر بردار سرعت را به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta v=\sqrt{v_A^۲+v_B^۲}=\sqrt{(۱۰\pi)^۲+(۱۰\pi)^۲}$$

$$\Rightarrow\Delta v=۱۰\sqrt{۲}\pi\ m/s$$

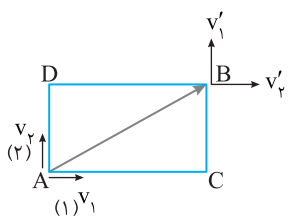
۷ شتاب متوسط خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{۱۰\sqrt{۲}\pi}{۱}=۱۰\sqrt{۲}\pi\ m/s^۲$$

۱ ۲۶۹ C

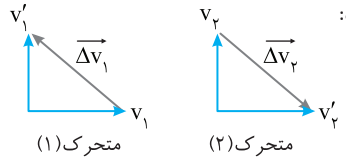
گزارهٔ (الف): طول مسیر و تندی حرکت دو متحرک یکسان است بنابراین زمان حرکت از A تا B روی دو مسیر برابر است. از طرفی جابه‌جایی هر دو متحرک برابر $\overrightarrow{AB}$ است.

بنابراین $\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}$ یکسان بوده و بردار سرعت متوسط یکی است و گزارهٔ (الف) درست است.



گزارهٔ (ب): همان‌گونه که در بالا بیان کردیم طول مسیر، تندی حرکت دو متحرک و زمان حرکت یکسان بوده و در نتیجه تندی متوسط در کل مسیر $(s_{av}=L/\Delta t)$ برابر است و گزارهٔ (ب) درست است.

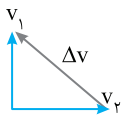
گزارهٔ (پ): به شکل دقت کنید. بردار تغییر سرعت متحرک (۱) و متحرک (۲) به‌صورت زیر است:



بردار شتاب متوسط $(\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t})$ هم‌جهت بردار تغییرات سرعت است، بردار تغییرات سرعت قرینهٔ هم بوده بنابراین بردار شتاب متوسط دو متحرک نیز قرینهٔ هم بوده و گزارهٔ (پ) نادرست است.

B ۲۷۰ ۲

یادآوری ریاضی بردار تغییر سرعت $(\Delta\vec{v}=\vec{v}_2-\vec{v}_1)$ برداری است که از انتهای v_1 به انتهای v_2 مطابق شکل رسم می‌شود.

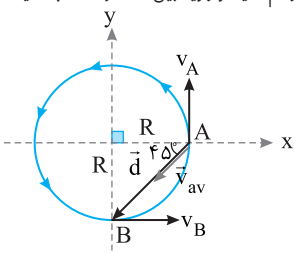


یادآوری بردار سرعت متوسط در جهت بردار جابه‌جایی است و بردار شتاب متوسط در جهت بردار تغییر سرعت است.

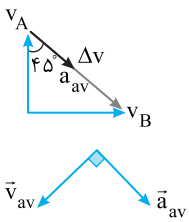
نکته سرعت در هر نقطه بر مسیر مماس است.

خط فکری باید بردار جابه‌جایی و بردار سرعت در نقاط A و B را رسم کرده سپس بردار سرعت متوسط و بردار شتاب متوسط را رسم کنید و زاویهٔ بین آن‌ها را حساب کنید.

۱ بردار جابه‌جایی از A تا B را رسم می‌کنیم $\vec{d}=\overrightarrow{AB}$. این بردار با امتداد افقی مطابق شکل زاویهٔ ۴۵° می‌سازد.



۲ بردارهای $\vec{v}_A$ و $\vec{v}_B$ را از یک نقطه مطابق شکل رسم می‌کنیم. سپس بردار تغییر سرعت را از انتهای $\vec{v}_A$ به انتهای $\vec{v}_B$ می‌کشیم. این بردار با امتداد قائم زاویهٔ ۴۵° می‌سازد.

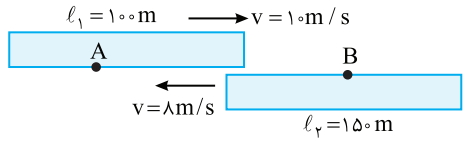


۳ از این‌رو زاویهٔ بین بردار $\vec{d}$ و $\Delta\vec{v}$ یعنی همان زاویهٔ بین بردار سرعت متوسط و بردار شتاب متوسط ۹۰° می‌شود.

A ۲۷۱ ۱

به شکل زیر به دقت نگاه کنید. حال خود را به جای ناظر A قرار دهید که از پنجره به بیرون نگاه می‌کند. این ناظر قطار ۱۵۰ متری را می‌بیند که از جلوی چشمانش می‌گذرد. خود را ساکن فرض کنید قطار ۱۵۰ متری با سرعت $\vec{v}_1+\vec{v}_2=10+8=18\,m/s$ از مقابل دیدگان شما می‌گذرد و زمان عبور آن از مقابل شما خواهد شد:

$$v=\frac{\ell}{t}\Rightarrow t_1=\frac{\ell}{v}=\frac{150}{18}$$



اکنون خود را جای ناظر B قرار دهید چه طولی از قطار از مقابل شما می‌گذرد؟ حق با شماست ۱۰۰ متر از جلوی شما با سرعت $18\,m/s$ نسبت به شما می‌گذرد، بنابراین زمان عبور قطار از مقابل ناظر B برابر خواهد شد با:

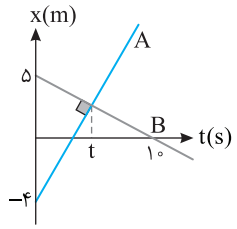
$$t_2=\frac{\ell}{v}\Rightarrow t_2=\frac{100}{18}$$

نسبت $\frac{t_1}{t_2}$ برابر است با:

$$\frac{t_1}{t_2}=\frac{\frac{150}{18}}{\frac{100}{18}}\Rightarrow\frac{t_1}{t_2}=1/5$$

B ۲۷۲ ۴

یادآوری ریاضی هرگاه دو خط A و B با شیب‌های m_A و m_B بر هم عمود باشند، آن‌گاه $m_A m_B=-1$ است.



۱ شیب نمودار مکان-زمان برابر سرعت متحرک است. با توجه به نمودار، شیب خط B را به‌دست می‌آوریم:

$$m_B=\frac{0-5}{10}=-\frac{1}{2}\Rightarrow v_B=-\frac{1}{2}\,m/s$$

۲ شیب نمودار A یعنی سرعت A خواهد شد:

$$m_A=-\frac{1}{m_B}\Rightarrow m_A=2\Rightarrow v_A=2m/s$$

۳ معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته و مکان‌ها را مساوی قرار می‌دهیم تا زمان رسیدن دو متحرک را به‌دست آوریم.

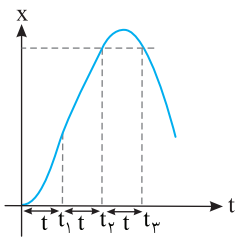
$$\begin{cases}x_A=2t-4\\ x_B=-\frac{1}{2}t+5\end{cases}\xrightarrow{x_A=x_B}2t-4=-\frac{1}{2}t+5\Rightarrow\frac{5}{2}t=9\Rightarrow t=3/6s$$

۴ مکان به هم رسیدن دو متحرک برابر خواهد شد با:

$$x=2t-4\Rightarrow x=7/2-4=3/2m$$

B ۲۷۳ ۱

۱ نمودار از ۰ تا t_1 سهمی است و در لحظهٔ $t=0$ نمودار بر محور زمان مماس بوده و سرعت اولیه صفر است و سرعت در لحظهٔ t_1 شیب خط مماس بر نمودار بوده و آن را v فرض می‌کنیم شتاب متوسط خواهد شد:



$$a_{av}=\frac{v-0}{t_1-0}\Rightarrow a_{av_1}=\frac{v}{t}$$

۲ نمودار از t_1 تا t_2 خط راست است و سرعت در این بازه برابر شیب خط است و شتاب متوسط در این بازه صفر است. $a_{av_2}=0$

۳ نکتهٔ مهم این است که سرعت در بازهٔ t_1 تا t_2 با سرعت در لحظهٔ t_1 و سرعت در لحظهٔ t_2 برابر است. $v_{t_1}=v=v_{t_2}$

۴ نمودار در بازهٔ t_2 تا t_3 سهمی است و در لحظهٔ t_2 و t_3 مکان متحرک یکسان بوده و با توجه به اینکه سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس سهمی متقارن است شیب خط مماس در لحظهٔ t_2 و t_3 هم‌اندازه و قرینهٔ هم است. یعنی در لحظهٔ t_2 سرعت v و در لحظهٔ t_3 سرعت $-v$ است و شتاب در این بازه خواهد شد:

$$|a_{av_3}|=\frac{|v_{t_3}-v_{t_2}|}{t_3-t_2}=\frac{|-v-v|}{t}=\frac{2v}{t}$$

۵ اندازهٔ شتاب در بازهٔ صفر تا t_2 نیز خواهد شد:

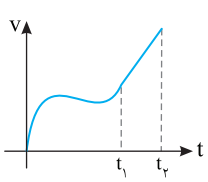
$$|a_{av_4}|=\frac{|v-0|}{t_2-0}=\frac{v}{2t}$$

بنابراین در بازهٔ t_2 تا t_3 شتاب متوسط از بقیهٔ بازه‌ها بیشتر است.

B ۲۷۴ ۲

خط فکری دقت کنید با نمودار سرعت - زمان سروکار داریم، از طرفی اگر در یک بازهٔ زمانی در هر لحظه سرعت لحظه‌ای از سرعت لحظه‌ای تمام لحظات بازهٔ زمانی دیگر بیشتر باشد قطعاً سرعت متوسط در بازهٔ زمانی اول از سرعت متوسط در بازهٔ زمانی دوم بیشتر است.

به نمودار نگاه کنید. در تمام لحظه‌های صفر تا t_1 سرعت لحظه‌ای از سرعت در تمام لحظه‌های t_1 تا t_2 کمتر است، بنابراین قطعاً سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا t_1 از سرعت متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2 کمتر است و گزینهٔ (۲) درست است.

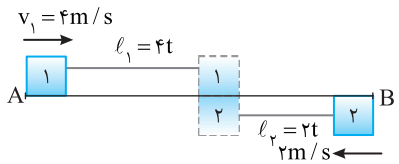


۲۷۵ B **۱**

۱ مسافتی که هر متحرک درمدت t می‌پیماید تا دو متحرک به هم برسند خواهد شد:

متحرک (۱): $\ell=vt\Rightarrow\ell_1=4t$

متحرک (۲): $\ell_2=v_2t\Rightarrow\ell_2=2t$



۲ طول مسیر حرکت برابر است با: $AB=\ell_1+\ell_2=4t+2t\Rightarrow AB=6t$

۳ مدت زمانی که متحرک (۱) مسیر AB را طی می‌کند حساب می‌کنیم:

$AB=v_1t_1\Rightarrow 6t=4t_1\Rightarrow t_1=1/5t$

۴ مدت زمانی که متحرک (۲) از B به A می‌رود خواهد شد:

$AB=v_2t_2\Rightarrow 6t=2t_2\Rightarrow t_2=3t$

۵ بنابر فرض مسئله اختلاف زمانی t_1 و t_2، برابر t' است. از این‌رو:

$t'=t_2-t_1=3t-1/5t=1/5t\Rightarrow\frac{t'}{t}=1/5$

گزینهٔ ۱

پنجره ۴

۲۷۶ A **۲**

یادآوری در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، معادلهٔ مکان-زمان یک تابع درجه ۲ به‌صورت $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ است.

مکان اولیهٔ متحرک $x_0=0$ و سرعت اولیهٔ متحرک $v_0=3m/s$ بوده و در لحظهٔ $t=2s$، مکان متحرک $+12m/s$ است. با قرار دادن این داده‌ها در معادله، شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$12=\frac{1}{2}a(2)^2+3\times2+0\Rightarrow a=3m/s^2$

اکنون می‌توانیم معادلهٔ حرکت را بنویسیم. $x=\frac{3}{2}t^2+3t$

۲۷۷ A **۳**

با توجه به معادلهٔ جابه‌جایی - زمان حرکت با شتاب ثابت داریم:

$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 20=\frac{1}{2}\times4\times(2)^2+v_0\times2\Rightarrow v_0=6m/s$

۲۷۸ A **۱**

با توجه به فرض مسئله مکان اولیهٔ متحرک $x_0=0$ است. اندازهٔ سرعت اولیهٔ متحرک $8m/s$ و اندازهٔ شتاب آن $-3m/s^2$ است. بنابراین به کمک معادلهٔ مکان - زمان می‌توانیم مکان متحرک را در لحظهٔ $t=4s$ حساب کنیم.

$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x=\frac{1}{2}(-3)(4)^2+8\times4+0\Rightarrow x=-24+32\Rightarrow x=8m$

بردار مکان خواهد شد: $\vec{x}=8\vec{i}$

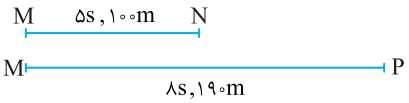
۲۷۹ A **۴**

در معادلهٔ مکان - زمان در بازهٔ زمانی $47-2=45s$ متحرک با شتاب ثابت $a=2m/s^2$ جابه‌جایی ۲۱۱۵ متر را طی کرده است بنابراین:

$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+vt\Rightarrow 2115=\frac{1}{2}\times2\times(45)^2+v\times45\Rightarrow 90=v\times45\Rightarrow v=2m/s$

۲۸۰ B **۳**

خط فکری متحرک در مدت $5s$ جابه‌جایی $MN=100m$ و در مدت $3s$ جابه‌جایی $NP=90m$ طی کرده است و در بازهٔ زمانی $5+3=8s$ جابه‌جایی کل $MP=100+90=190m$ را طی می‌کند. بنابراین شما کافی است به کمک معادلهٔ جابه‌جایی زمان حرکت با شتاب ثابت یک دستگاه دو معادله دو مجهول بنویسید و آن را حل کنید.



$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow\begin{cases}100=\frac{1}{2}a(25)+5v_0\\190=\frac{1}{2}a(64)+8v_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5a+2v_0=40\\4a+v_0=23/75\end{cases}$

$\Rightarrow -3a=-7/5\Rightarrow a=2/5m/s^2$

بازی با سوال **متحرکی با شتاب ثابت روی خط راست، در ۳ ثانیه آغازین حرکت، جابه‌جایی ۱۵ متر و ۲ ثانیه بعد جابه‌جایی ۲۵ متر را می‌پیماید. سرعت اولیه متحرک چند m/s است؟**

۱) $+0/5$ ۲) $-0/5$ ۳) $+1$ ۴) -1

پاسخ **۱** **متحرک در مدت $3s$، $15m$ طی کرده بنابراین می‌توانیم بنویسیم:**

$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow[x=15m]{t=3s}15=\frac{1}{2}\times a\times9+3v_0\Rightarrow 30=9a+6v_0$

$\Rightarrow 10=3a+2v_0\quad (I)$

۲ **متحرک در کل مدت $5s$ جمعاً $3s+2s=5s$ $15+25=40m$ جابه‌جا شده است.**

از این رو: $40=\frac{1}{2}\times a\times25+5v_0\Rightarrow 40=12/5a+5v_0\Rightarrow 8=2/5a+v_0\quad (II)$

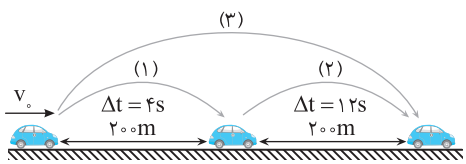
۳ **با حل دو معادلهٔ (I) و (II) داریم:** $a=3m/s^2, v_0=0/5m/s$

گزینهٔ ۱

۲۸۱ B **۴**

خط فکری بازهٔ زمانی t_1 تا $t_2=t_1+16(s)$ یعنی کل مدت مورد بررسی $16s$ است و در این $16s$، متحرک $400m$ جابه‌جا شده است و بنابر فرض مسئله نصف این مسیر یعنی $200m$ را در $4s$ و 200 متر بعدی را در 12 $16-4=12$ طی کرده است. از این رو کافی است شما از معادلهٔ جابه‌جایی - زمان در حرکت با شتاب ثابت یک بار در $4s$ و بار دیگر در کل مدت $16s$ استفاده کنید.

مسیر حرکت را رسم می‌کنیم و با توجه به اینکه جابه‌جایی متحرک در زمان‌های مختلف داده شده است، برای مسیرهای (۱) و (۳) معادلهٔ $\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t$ را می‌نویسیم.



(۱) $\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 200=\frac{1}{2}a(4)^2+4v_0\Rightarrow 200=8a+4v_0\quad (I)$

(۳) $\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 400=\frac{1}{2}a\times(16)^2+16v_0\Rightarrow 400=128a+16v_0\quad (II)$

حال با حل دستگاه دو معادله دو مجهول شتاب حرکت را حساب می‌کنیم

$\begin{cases}-4(8a+4v_0=200)\\128a+16v_0=400\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-32a-16v_0=-800\\128a+16v_0=400\end{cases}\xrightarrow{+}96a=-400$

$\Rightarrow a=\frac{-400}{96}\Rightarrow a=\frac{-25}{6}m/s^2$

بزرگی شتاب خواسته شده است از این‌رو: $|a|=\frac{25}{6}m/s^2$

۲۸۲ A **۱**

با توجه به تعریف شتاب خواهیم داشت:

$\vec{a}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t_2-t_1}\xrightarrow[t_2=5s,t_1=3s]{\vec{a}=-4\vec{i},\vec{v}_1=8\vec{i}}-4\vec{i}=\frac{\vec{v}_2-8\vec{i}}{5-3}\Rightarrow -8\vec{i}=\vec{v}_2-8\vec{i}\Rightarrow\vec{v}_2=0$

A ۲۸۳ ۴

۱ با توجه به معادله سرعت - زمان خواهیم داشت:

$$v=at+v_0 \xrightarrow{t_1=2s} 5=2a+v_0 \xrightarrow{t_2=6s} 12=6a+v_0 \Rightarrow 7=4a \Rightarrow a=1/75 m/s^2$$

$$5=2\times 1/75+v_0 \Rightarrow v_0=1/5 m/s$$

۲ در این صورت سرعت در لحظه $t=3s$ خواهد شد:

$$v=1/75t+1/5 \Rightarrow v=1/75\times 3+1/5 \Rightarrow v=6/75 m/s$$

B ۲۸۴ ۴

معادلهٔ سرعت زمان را می‌نویسیم و مقادیر t و ۲t را در آن قرار می‌دهیم. البته حواسمان هست که متحرک دارای سرعت اولیه (v_0) بوده و حرکت آن تندشونده است، یعنی شتاب a و سرعت هم‌علامت بوده و با گذشت زمان سرعت در حال افزایش است بنابراین:

$$v=at+v_0 \Rightarrow \begin{cases} v_1=at+v_0 \\ v_2=a(2t)+v_0=2at+v_0 \end{cases} \Rightarrow v_1<v_2<2v_1$$

البته شاید یک مثال عددی کار را برای شما راحت‌تر کند فرض کنید: $at=3$ و $v_0=2$ است از این‌رو:

$$v_1=3+2=5, v_2=6+2=8 \Rightarrow 5<8<10 \Rightarrow 5<8<2\times 5$$

B ۲۸۵ ۱

یادآوری دو ثانیهٔ سوم یعنی بازهٔ زمانی بین $t=4s$ تا $t=6s$.

۱ معادلهٔ سرعت زمان در حرکت با شتاب ثابت به‌صورت $v=at+v_0$ است.

معادلهٔ داده شده در مسئله را با این معادله مقایسه کرده، شتاب و سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_0, v=-2t+4 \Rightarrow a=-2m/s^2, v_0=4m/s$$

۲ در لحظهٔ $t=4s$ و $t=6s$ مکان‌ها را به‌دست آورده از هم کم می‌کنیم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1}{2}(-2)(4)^2+4\times 4+x_0 \Rightarrow x_1=x_0 \\ x_2=\frac{1}{2}(-2)(6)^2+4\times 6+x_0 \Rightarrow x_2=-12+x_0 \end{cases}$$

۳ بزرگی جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ سوم خواهد شد: $|\Delta x|=|-12|=12m$

بازی با سوال **معادله سرعت - زمان متحرکی (در SI) به صورت $v=4t+3$ است. شتاب و جابه‌جایی متحرک در $0/5s$ آغازین حرکت به ترتیب از راست به چپ چند m/s^2 و چند متر است؟**

۱) ۴، ۲ ۲) ۴، ۶ ۳) ۲، −۶ ۴) ۲، ۴

پاسخ **ابتدا با مقایسه معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت با معادله سرعت - زمان مسئله، شتاب و سرعت اولیه را مشخص می‌کنیم.**

$$\begin{cases} v=at+v_0 \\ v=4t+3 \end{cases} \Rightarrow a=4m/s^2, v_0=3m/s$$

جابه‌جایی متحرک را در مدت $0/5s$ به دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \Rightarrow \Delta x=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{2} \Rightarrow \Delta x=2m$$

گزینهٔ ۱

A ۲۸۶ ۲

۱ ابتدا به کمک معادلهٔ جابه‌جایی زمان، سرعت اولیهٔ متحرک را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \Rightarrow 24=\frac{1}{2}\times 2\times(4)^2+4v_0 \Rightarrow 24=16+4v_0 \Rightarrow v_0=2m/s$$

۲ سرعت در پایان این مدت خواهد شد:

$$v=at+v_0 \Rightarrow v=2\times 4+2=10m/s$$

میانبر سرعت در پایان مدت t را می‌توان از رابطهٔ زیر نیز به‌دست آورد.

$$\Delta x=-\frac{1}{2}at^2+vt$$

A ۲۸۷ ۲

خط فکری اگر مشتق‌گیری بلد بودید و می‌دانستید که مشتق معادلهٔ مکان - زمان برابر سرعت لحظه‌ای است، مسئله را راحت حل می‌کردید. اما اکنون باید معادلهٔ مکان - زمان داده شده را با معادلهٔ حرکت کلاسیک حرکت با شتاب ثابت مقایسه کرده و معادلهٔ سرعت زمان را به‌دست آورد.

۱ با مقایسهٔ معادلهٔ مکان - زمان خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \\ x=5t^2-3t+1 \end{cases} \xrightarrow[v=at+v_0]{x_0=1m, v_0=-3m/s, \frac{1}{2}a=5\Rightarrow a=10m/s^2} v=10t-3$$

۲ لحظه‌ای را که در آن سرعت $6m/s$ است، به‌دست می‌آوریم:

$$6=10t-3 \Rightarrow t=0/9s$$

۳ زمان به‌دست آمده را در معادلهٔ مکان - زمان قرار می‌دهیم.

$$x=5t^2-3t+1 \xrightarrow{t=0/9s} x=5(0/9)^2-3(0/9)+1 \Rightarrow x=2/35m$$

A ۲۸۸ ۲

۱ در مبدأ زمان متحرک در مکان $+2m$ است، یعنی مکان اولیهٔ متحرک $x_0=+2m$ است.

۲ با مقایسه معادله سرعت - زمان حرکت با شتاب ثابت با معادله سرعت - زمان مسئله، شتاب و سرعت اولیه مشخص می‌شود.

$$\begin{cases} v=at+v_0 \\ v=3t-6 \end{cases} \Rightarrow a=3m/s^2, v_0=-6m/s$$

۳ اکنون به کمک معادلهٔ مکان - زمان، مکان را در $t=3s$ حساب می‌کنیم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\times 3\times 9+3\times(-6)+2 \Rightarrow x=13/5-18+2$$

$$\Rightarrow x=-2/5m$$

A ۲۸۹ ۲

بردار مکان، برداری است که از مبدأ مکان $(x=0)$ به محل متحرک رسم می‌شود و هرگاه متحرک از مبدأ می‌گذرد، بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

اکنون باید مکان را برابر صفر قرار دهیم:

$$x=0 \Rightarrow t^2+3t-4=0 \Rightarrow (t+4)(t-1)=0 \Rightarrow t=1s, t=-4s$$ غ ق ق

یکی از ریشه‌ها مثبت $(t=1s)$ و یکی از آن‌ها منفی $(t=-4)$ است. از این‌رو بردار مکان یک بار تغییر جهت می‌دهد.

A ۲۹۰ ۴

۱ ابتدا با مقایسه معادله داده شده با معادله مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت، مقدار شتاب، سرعت اولیه و مکان اولیه را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \\ x=t^2-6t+10 \end{cases} \Rightarrow x_0=+10m, \frac{1}{2}a=1 \Rightarrow a=2m/s^2, v_0=-6m/s$$

۲ معادلهٔ سرعت - زمان خواهد شد: $v=at+v_0 \Rightarrow v=2t-6$

۳ در حرکت با شتاب ثابت لحظه تغییر جهت حرکت لحظه صفر شدن سرعت است. بنابراین می‌توان نوشت: $v=0 \Rightarrow 2t-6=0 \Rightarrow t=3s$

۴ اکنون مکان تغییر جهت حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$x=t^2-6t+10 \xrightarrow{t=3s} x=(3)^2-6(3)+10=1m$$

پس متحرک در یک متری مبدأ تغییر جهت می‌دهد.

B ۲۹۱ ۴

یادآوری بردار مکان وقتی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ می‌گذرد.

۱ ابتدا با استفاده از معادلهٔ مکان - زمان، شتاب حرکت جسم را به‌دست می‌آوریم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow -10=\frac{1}{2}a(4)^2+4\times 4+(-2) \Rightarrow a=-3m/s^2$$

۲ معادلهٔ مکان - زمان را نوشته و در آن مکان را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$x=\frac{۱}{۲}\times(-۳)\times t^۲+۴t+(-۲)\Rightarrow x=-\frac{۳}{۲}t^۲+۴t-۲$$

$$x=۰\Rightarrow -\frac{۳}{۲}t^۲+۴t-۲=۰\Rightarrow ۳t^۲-۸t+۴=۰\Rightarrow t=\frac{۴\pm\sqrt{۱۶-۱۲}}{۳}=\frac{۴\pm۲}{۳}$$

$$\Rightarrow t=۲s\ ,\ t=\frac{۲}{۳}s$$

۳ هر دو مقدار زمان به‌دست آمده مثبت است، بنابراین در دو لحظهٔ $t=۲s$ و $t=\frac{۲}{۳}s$ متحرک تغییر جهت می‌دهد.

B ۲۹۲ ۲

لحظات تغییر بردار مکان $(x=۰)$ را حساب می‌کنیم.

$$x=-۲t^۲+۱۰t-۸\Rightarrow t^۲-۵t+۴=۰\Rightarrow(t-۱)(t-۴)=۰$$

$$t=۱s,\quad t=۴s$$

ابتدا معادلهٔ سرعت - زمان و سپس لحظهٔ تغییر سرعت را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}x=-۲t^۲+۱۰t-۸\\ x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\end{cases}\Rightarrow\frac{۱}{۲}a=-۲\Rightarrow a=-۴m/s^۲,\quad v_۰=۱۰m/s$$

لحظهٔ تغییر سرعت، لحظه‌ای است که سرعت صفر می‌شود:

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=-۴t+۱۰\Rightarrow t=۲/۵s$$

سرعت در دومین لحظهٔ تغییر بردار مکان $(t=۴s)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=-۴\times۴+۱۰\Rightarrow v=-۶m/s$$

سرعت متوسط در بازهٔ ۲/۵s تا ۴s خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}=\frac{۰+(-۶)}{۲}\Rightarrow\vec{v}_{av}=-۳\vec{i}$$

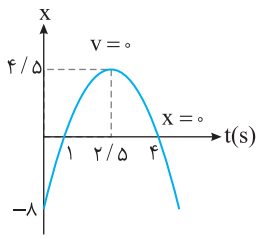
روش دیگر: ریشه‌های معادله مکان - زمان را به دست آوردیم $t=۴s$ و $t=۱s$. مختصات رأس سهمی را حساب می‌کنیم. (لحظه‌ای که متحرک تغییر جهت می‌دهد.)

$$t=\frac{-b}{۲a}\Rightarrow t=\frac{-۱۰}{۲\times(-۲)}\Rightarrow t_{\text{راس}}=۲/۵s$$

$$x_{\text{رأس}}=-۲(۲/۵)^۲+۱۰\times۲/۵-۸\Rightarrow x=۴/۵m$$

بنابراین در بازهٔ ۲/۵s تا ۴s متحرک جابه‌جایی $-۴/۵m$ را انجام می‌دهد.

$$\vec{v}_{av}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}\Rightarrow\vec{v}_{av}=\frac{-۴/۵\vec{i}}{۴-۲/۵}=-۳\vec{i}$$



B ۲۹۳ ۴

۱ متحرک از مکان اولیهٔ $x_۰=+۲۰m$ با سرعت اولیهٔ $-۴m/s$ گذشته و در لحظهٔ $t=۲s$ به مکان $x=+۲m$ رسیده است. این داده‌ها را در معادلهٔ مکان - زمان قرار داده و شتاب را حساب می‌کنیم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow ۲=\frac{۱}{۲}\times a\times۴+۲\times(-۴)+۲۰\Rightarrow a=-۵m/s^۲$$

۲ متحرک لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد که سرعتش صفر شود و تغییر علامت بدهد. در حرکت با شتاب ثابت کافی است در معادلهٔ سرعت - زمان، مقدار v را برابر صفر قرار داده تا لحظهٔ تغییر جهت را به‌دست بیاوریم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=-۵t-۴\xrightarrow{v=۰}-۵t-۴=۰\Rightarrow t=-۰/۸s$$

زمان منفی به‌دست آمده است، از این رو متحرک هرگز تغییر جهت نمی‌دهد.

میانبر سرعت اولیه و شتاب حرکت هر دو منفی هستند یعنی هم‌علامت هستند و حرکت تندشونده است. از این رو سرعت متحرک صفر نخواهد شد و متحرک تغییر جهت نمی‌دهد.

A ۲۹۴ ۳

معادلهٔ سرعت - زمان را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\\ x=-۴t^۲+۲۴t-۳۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{۱}{۲}a=-۴\Rightarrow a=-۸\frac{m}{s^۲}\\ v_۰=۲۴\frac{m}{s}\end{cases}$$

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=-۸t+۲۴$$

لحظهٔ صفر شدن سرعت خواهد شد:

$$۰=-۸t+۲۴\Rightarrow t=۳s$$

مکان در لحظهٔ توقف را به‌دست می‌آوریم.

$$x=-۴(۳)^۲+۲۴\times۳-۳۰\Rightarrow x=-۳۶+۷۲-۳۰\Rightarrow x=۶m$$

B ۲۹۵ ۴

خط فکری از ما خواسته شده بازهٔ زمانی‌ای که متحرک خلاف جهت محور x در حرکت است را مشخص کنیم. وقتی متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند یعنی سرعت آن منفی است. بنابراین شما باید معادلهٔ سرعت - زمان را از روی معادلهٔ مکان - زمان بنویسید، سپس آن را تعیین علامت کنید.

یادداشت ریاضی در معادلهٔ درجهٔ اول $y=ax+b$ سمت چپ ریشه مخالف علامت a و سمت راست ریشه موافق علامت a است.

۱ با مقایسهٔ معادلهٔ حرکت مسئله و معادلهٔ مکان - زمان، حرکت با شتاب ثابت، سرعت اولیه و شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$x=t^۲-۶t+۵,\ x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow a=۲m/s^۲,\ v_۰=-۶m/s$$

۲ معادلهٔ سرعت - زمان را نوشته و تعیین علامت می‌کنیم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=۲t-۶\xrightarrow{v=۰}۲t-۶=۰\Rightarrow t=۳s$$

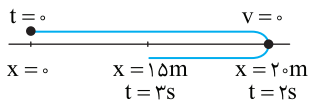
۳ با رسم جدول، علامت سرعت را تعیین می‌کنیم.

t	$-\infty$		۰		۳	$+\infty$
v	−		−	۰	+	
	زمان منفی نداریم.					

۴ بنابراین در بازهٔ زمانی ۱s تا ۵s، در مدت ۱s تا ۳s سرعت منفی است یعنی به مدت ۲s متحرک در خلاف جهت محور در حال حرکت است.

A ۲۹۶ ۲

خط فکری متحرک از مبدأ مکان $(x_۰=۰)$ در جهت مثبت محور با سرعت اولیه $+۲۰m/s$ و شتاب $a=-۱۰m/s^۲$ می‌گذرد. بنابراین در ابتدا که بردار سرعت و شتاب خلاف جهت هم هستند حرکت کندشونده است و متحرک پس از مدتی می‌ایستد و برمی‌گردد. در لحظهٔ تغییر جهت فاصلهٔ متحرک از مبدأ را باید به‌دست بیاورید. همچنین در انتهای بازه صفر تا ۳s یعنی $t=۳s$ مکان را حساب کرده تا مشخص شود بیشترین فاصله از مبدأ چند متر است؟



۱ در معادلهٔ $v=-۱۰t+۲۰$، سرعت را برابر صفر قرار می‌دهیم تا لحظهٔ تغییر جهت مشخص شود.

$$-۱۰t+۲۰=۰\Rightarrow t=۲s$$

۲ به کمک معادلهٔ مکان - زمان، مکان متحرک در لحظهٔ تغییر جهت و لحظهٔ انتهای بازه را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=۲s\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\times(-۱۰)\times(۲)^۲+۲۰\times۲+۰\Rightarrow x=-۲۰+۴۰=۲۰m\\ t=۳s\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\times(-۱۰)\times(۳)^۲+۲۰\times۳+۰\Rightarrow x=-۴۵+۶۰=۱۵m\end{cases}$$

۳ بنابراین بیشترین فاصله از مبدأ در بازهٔ صفر تا ۳s، ۲۰m است.

بازی با سوال اگر در این تست بازهٔ زمانی $t=0$ تا $t=6s$ بیان شده بود، بیشترین فاصله از مبدأ چند متر می‌شد؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰ ۴) ۴۰

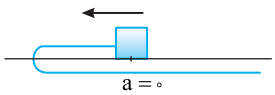
پاسخ تمام حل شبیه مسئلهٔ قبلی است، فقط در انتها باید مکان در لحظهٔ $t=6s$ را به‌دست آوریم

$$x=\frac{1}{2}\times(-10)(6)^2+20\times6\Rightarrow x=-180+120=-60m$$

گزینهٔ ۳

B ۲۹۷ ۳

با توجه به معادلهٔ $v=4t-6$، سرعت اولیهٔ متحرک $v_0=-6m/s$ است. یعنی متحرک در جهت منفی محور شروع به حرکت کرده است و چون شتاب آن $+4m/s^2$ است و بردار شتاب و سرعت هم‌علامت نیستند. ابتدا حرکت کندشونده است و متحرک متوقف شده برمی‌گردد و برای آنکه تنها یک بار از مبدأ مکان بگذرد کافی است که از ابتدا مکان اولیهٔ آن صفر یا منفی باشد. $(x_0=a\le0)$ و مسئله نیازی به هیچ‌گونه محاسبهٔ عددی ندارد.



B ۲۹۸ ۴

یادآوری الف) حرکتی که تندی متحرک در آن در حال کاهش باشد را حرکت کندشونده گویند. در این حرکت $av<0$ است.

ب) حرکتی که تندی متحرک در آن در حال افزایش باشد را حرکت تندشونده گویند. در این حرکت $av>0$ است.

۱) با توجه به معادلهٔ سرعت - زمان متحرک و معادلهٔ سرعت - زمان حرکت با شتاب ثابت خواهیم داشت: $v=4t-12, v=at+v_0\Rightarrow v_0=-12m/s, a=4m/s^2$

۲) در ابتدا شتاب و سرعت مختلف‌العلامت بوده و $av<0$ است پس حرکت در ابتدا کندشونده است.

۳) در لحظهٔ $t=3s$ با توجه به معادلهٔ $v=4t-12$ سرعت متحرک صفر می‌شود و پس از این لحظه سرعت متحرک مثبت و شتاب نیز ثابت و مثبت است پس بعد از $t=3s$، $av>0$ بوده و حرکت تندشونده است.

B ۲۹۹ ۳

۱) معادلهٔ $x-t$ متحرک درجه دوم است پس حرکت با شتاب ثابت است. با مقایسهٔ معادلهٔ مکان - زمان مسئله با معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت v_0 و a را مشخص می‌کنیم:

$$x=t^2-6t+5, x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow a=2m/s^2, v_0=-6m/s$$

۲) معادلهٔ سرعت - زمان را می‌نویسیم: $v=at+v_0\Rightarrow v=2t-6$

۳) حال در لحظات $t=2s$ و $t=5s$ سرعت را حساب می‌کنیم.

$$t=2s\Rightarrow v=2\times2-6=-2m/s\ ,\ t=5s\Rightarrow v=2\times5-6=4m/s$$

۴) در لحظهٔ $t=2s$ شتاب مثبت و سرعت منفی است پس در این لحظه $av<0$ و حرکت کندشونده است.

۵) در لحظهٔ $t=5s$ شتاب مثبت و سرعت مثبت است پس در این لحظه $av>0$ و حرکت تندشونده است.

A ۳۰۰ ۴

۱) ابتدا به کمک معادلهٔ جابه‌جایی - زمان، سرعت اولیه را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow{t=4s,x=16m,a=3m/s^2}$$

$$16=\frac{1}{2}\times3\times(4)^2+v_0\times(4)\Rightarrow v_0=-2m/s$$

۲) بنابراین در ابتدا سرعت منفی و شتاب مثبت بوده یعنی شتاب و سرعت در خلاف جهت هم هستند و حرکت کندشونده است.

۳) معادلهٔ سرعت - زمان را نوشته و لحظهٔ تغییر جهت را به‌دست می‌آوریم.

$$v=3t-2\xrightarrow{v=0}3t-2=0\Rightarrow t=\frac{2}{3}s$$

۴) بازهٔ زمانی خواسته شده صفر تا $4s$ است. بنابراین از صفر تا $\frac{2}{3}s$ حرکت کندشونده و از $\frac{2}{3}s$ تا $4s$ حرکت تندشونده است.

B ۳۰۱ ۲

۱) معادلهٔ مکان - زمان $x=t^2-4t+8$ را با معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ مقایسه می‌کنیم و شتاب و سرعت اولیه را به دست آورده و معادلهٔ سرعت زمان را می‌نویسیم.

$$x=t^2-4t+8\ ,\ x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow a=2m/s^2, v_0=-4m/s\ ,\ x_0=+8m$$

۲) معادلهٔ سرعت - زمان خواهد شد: $v=2t-4$

۳) لحظهٔ تغییر جهت را یعنی لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود را حساب می‌کنیم.

$$2t-4=0\Rightarrow t=2s$$

۴) بنابراین در ابتدا که سرعت اولیه منفی است متحرک تا لحظهٔ $t=2s$ در خلاف جهت محور در حرکت است و گزینهٔ (۱) نادرست است.

۵) در بازهٔ ۰ تا ۲s حرکت کندشونده است و در لحظهٔ $t=2s$ متحرک متوقف شده و برمی‌گردد و در جهت مثبت محور دارای حرکت تندشونده می‌شود و گزینهٔ (۲) درست و گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست هستند.

بازی با سوال معادلهٔ مکان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x=-5t^2+6t+12$ است. در مورد جهت حرکت و نوع آن کدام مطلب درست است؟

۱) همواره در جهت محور و کندشونده ۲) ابتدا در جهت محور و کندشونده

۳) ابتدا درخلاف جهت محور و کندشونده ۴) همواره در خلاف جهت محور و کندشونده

پاسخ معادلهٔ $x=-5t^2+6t+12$ را با معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت یعنی $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ مقایسه می‌کنیم و سرعت اولیه و شتاب را مشخص می‌کنیم.

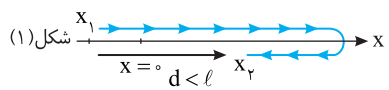
$$\frac{1}{2}a=-5\Rightarrow a=-10m/s^2\ ,\ v_0=6m/s\ ,\ x_0=12m$$

سرعت اولیه $+6m/s$ است، پس متحرک ابتدا در جهت مثبت محور در حرکت است. سرعت اولیه مثبت و شتاب منفی است، بنابراین در ابتدا حرکت کندشونده است.

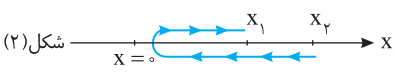
نتیجه: در حرکت با شتاب ثابت هرگاه در معادلهٔ مکان - زمان ضریب t^2 و ضریب t هم‌علامت باشند، حرکت همواره تندشونده است و اگر دارای علامت مخالف باشند حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است. گزینهٔ ۲

B ۳۰۲ ۳

در مسیر زیر جابه‌جایی و مسافت هم‌اندازه نیستند اما جابه‌جایی مثبت و در نتیجه سرعت متوسط مثبت است و لزومی ندارد که سرعت متوسط منفی باشد و گزینهٔ (۱) نادرست است.



در مسیر زیر متحرک با شتاب ثابت از نقطهٔ x_1 گذشته، متوقف شده و برمی‌گردد و از مبدأ نمی‌گذرد بنابراین لزومی ندارد که بردار مکان تغییر جهت دهد و گزینهٔ (۲) نادرست است.



در یک بازهٔ زمانی معین سرعت متوسط $(v_{av}=d/t)$ و تندی متوسط $(s_{av}=\ell/t)$ با هم برابر نیستند. بنابراین جابه‌جایی و مسافت هم‌اندازه نخواهند بود. در این صورت باید متحرک روی خط راست حداقل یک بار تغییر جهت بدهد یعنی حرکت ابتدا کندشونده بوده و پس از توقف و تغییر جهت متحرک با همان شتاب ثابت برمی‌گردد و با حرکت تندشونده به حرکت خود ادامه می‌دهد و گزینهٔ (۳) درست است.

دوباره به شکل (۲) نگاه کنید دقیقاً متوجه می‌شوید که لزومی ندارد که متحرک ابتدا در جهت مثبت حرکت کند و گزینهٔ (۴) نادرست است.

۳۰۳ A ۲

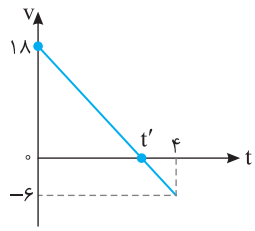
در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی برابر میانگین سرعت در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی $(\frac{v+v_0}{2})$ است، بنابراین:

$$v_{av}=\frac{0+20}{2}=10\,m/s$$

۳۰۴ B ۲

خط فکری برای به‌دست آوردن تندی متوسط و یا مسافت طی شده بهتر است نمودار سرعت - زمان $(v-t)$ متحرک را رسم کرده و از مساحت سطح زیر نمودار کمک گرفت.

۱ نمودار $v-t$ در بازهٔ صفر تا $4s$ را رسم می کنیم

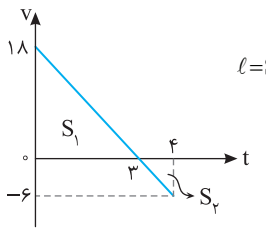


$$v=-6t+18\begin{cases}\xrightarrow{t=0} v=18\,m/s\\ \xrightarrow{t=4s} v=-6\,m/s\end{cases}$$

۲ لحظهٔ t' لحظهٔ تغییر جهت حرکت متحرک یعنی لحظه‌ای که $v=0$ است:

$$v=-6t+18\xrightarrow{v=0}-6t'+18=0\Rightarrow t'=3s$$

۳ مسافت طی شده را حساب می کنیم:



$$\ell=S_1+S_2\Rightarrow\ell=\frac{3\times18}{2}+\frac{1\times6}{2}=27+3=30m$$

۴ تندی متوسط برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s'_{av}=\frac{30}{4}=7/5\,m/s$$

۳۰۵ A ۱

سرعت در لحظهٔ $t=3s$ را به‌دست می‌آوریم: $v=2t+v_0\xrightarrow{t=3s}v=6+v_0$

سرعت متوسط در بازهٔ ۰ تا $3s$ برابر $8m/s$ شده است. از طرفی در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط از رابطهٔ $v_{av}=\frac{v+v_0}{2}$ به‌دست می‌آید، بنابراین:

$$8=\frac{6+v_0+v_0}{2}\Rightarrow16=6+2v_0\Rightarrow v_0=5m/s$$

۳۰۶ A ۱

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست در بازهٔ زمانی ۰ تا t ثانیه سرعت متوسط متحرک از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید. $v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0$

۱ متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده و سرعت اولیهٔ آن $v_0=0$ است.

۲ در بازهٔ صفر تا $2/5\,s$ سرعت متوسط برابر $8m/s$ است. به کمک رابطهٔ بالا شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0\Rightarrow8=\frac{1}{2}a\times2/5+0\Rightarrow a=6/4\,m/s^2$$

۳ سرعت در لحظهٔ $t=3s$ خواهد شد:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=6/4\times3+0\Rightarrow v=19/2\,m/s$$

بازی با سؤال **متحرکی روی خط راست با شتاب ثابت $2m/s^2$ و با سرعت اولیهٔ $5m/s$ تندشونده در حرکت است. اگر در بازهٔ صفر تا t ثانیه سرعت متوسط ۱/۵ برابر سرعت اولیه باشد، t چند ثانیه است؟**

۱) ۱/۵ ۲) ۴ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

پاسخ با توجه به فرض مسئله:

$$v_{av}=1/5v_0\Rightarrow\frac{1}{2}at+v_0=1/5v_0\Rightarrow\frac{1}{2}\times2t+5=1/5\times5\Rightarrow t+5=7/5$$

$$\Rightarrow t=2/5s$$

گزینهٔ ۳

۳۰۷ A ۱

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی برابر میانگین سرعت ابتدای بازه (v_1) و سرعت انتهای بازه (v_2) است.

$$(v_{av}=\frac{v_2+v_1}{2})$$

۱ با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}\xrightarrow{v_{av}=5/5\,m/s}5/5=\frac{v_1+v_2}{2}\Rightarrow v_1+v_2=11\ (I)$$

۲ تغییرات سرعت برابر $9\,m/s$ است. از این‌رو:

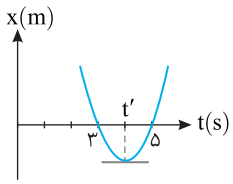
$$v_2-v_1=9\ (II)$$

۳ دستگاه دو معادله دو مجهول (I) و (II) را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases}v_1+v_2=11\\ v_2-v_1=9\end{cases}\xrightarrow[\text{از هم کم می‌کنیم}]{\text{دو معادله را}}2v_1=2\Rightarrow v_1=1\,m/s$$

۳۰۸ B ۳

در لحظهٔ $t_1=2s$ و $t_2=6s$ مکان متحرک را به‌دست می‌آوریم:



$$x(2)=2^2-8(2)+15=3m$$

$$x(6)=6^2-8(6)+15=3m$$

بنابراین جابه‌جایی در این بازه صفر شده و سرعت متوسط در این بازه صفر است. در این صورت سرعت لحظه‌ای خواسته شده نیز باید صفر شود، یعنی شیب خط مماس بر نمودار صفر باشد. می‌دانیم در تابع درجه دوم در رأس سهمی $(t'=-\frac{b}{2a})$ شیب خط مماس صفر می‌شود.

$$t'=\frac{8}{2}=4s$$

میانبر در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط با سرعت در وسط بازهٔ زمانی برابر است.

۳۰۹ B ۱

معادلهٔ مکان - زمان متحرک $(x=t^2-4t+5)$ تابع درجه دوم می‌باشد، یعنی متحرک دارای شتاب ثابت بوده، بنابراین شتاب در هر لحظه با شتاب متوسط در هر بازه برابر است.

۳۱۰ A ۱

ابتدا به کمک معادله جابه‌جایی - زمان، زمان را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow{\Delta x=24m,\,a=4m/s^2,\,v_0=2m/s}24=\frac{1}{2}\times4\times t^2+2t$$

$$\Rightarrow2t^2+2t=24\Rightarrow t^2+t-12=0\Rightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{-1\pm7}{2}\Rightarrow t=3s$$

سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{24}{3}=8m/s$$

۳۱۱ A ۳

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست در بازهٔ زمانی ۰ تا t ثانیه سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0$

۱ شتاب حرکت را به کمک معادلهٔ سرعت متوسط به دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0\Rightarrow6=\frac{1}{2}a\times5+2\Rightarrow a=1/6\,m/s^2$$

۲ مکان را در لحظهٔ $t=2s$ و $t=4s$ به دست آورده و از هم کم می‌کنیم و جابه‌جایی را حساب می‌کنیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\begin{cases}\xrightarrow{t=2s}x=\frac{1}{2}\times1/6\times4+2\times2+x_0=7/2+x_0\\ \xrightarrow{t=4s}x=\frac{1}{2}\times1/6\times16+2\times4+x_0=20/8+x_0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\Delta x=13/6m$$

B ۳۱۲ ۲

۱ سرعت متوسط در مدت ۵s را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta x=۷۵m}v_{av}=\frac{۷۵}{۵}=۱۵m/s$$

۲ در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{v_۲+v_۱}{۲}\xrightarrow{v_۲=۲۰m/s}۱۵=\frac{۲۰+v_۱}{۲}\Rightarrow v_۱=۱۰m/s$$

۳ شتاب حرکت را حساب می‌کنیم:

$$a=\frac{v_۲-v_۱}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{۲۰-۱۰}{۵}=۲m/s^۲$$

۴ سرعت در ۵s بعدی خواهد شد:

$$v=at+v_۰\Rightarrow v_۳=۲\times۵+۲۰\Rightarrow v_۳=۳۰m/s$$

۵ سرعت متوسط در این ۵s را به‌دست می‌آوریم.

$$v_{av}=\frac{v_۳+v_۲}{۲}=\frac{۲۰+۳۰}{۲}=۲۵m/s$$

A ۳۱۳ ۳

خط فکری سرعت متوسط در کل مسیر برحسب سرعت نهایی (v) در انتهای بازه داده شده است. اگر شما سرعت اولیه را برحسب v به‌دست بیاورید، می‌توانید تشخیص دهید که حرکت کندشونده است یا تندشونده.

۱ در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{v+v_۰}{۲}\Rightarrow\frac{۲}{۳}v=\frac{v+v_۰}{۲}\Rightarrow v_۰=\frac{۱}{۳}v$$

۲ سرعت اولیه برابر با $\frac{v}{۳}$ می‌باشد، بنابراین حرکت تندشونده است، زیرا سرعت از $\frac{۱}{۳}v$ به v رسیده است.

B ۳۱۴ ۲

خط فکری حرکت تندشونده است، یعنی بردار سرعت و بردار شتاب هم‌جهت هستند. اگر جهت حرکت را مثبت بگیریم، سرعت و شتاب نیز مثبت خواهد بود.

۱ در معادلهٔ جابه‌جایی - زمان، داده‌های مسئله را قرار می‌دهیم.

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\xrightarrow{\Delta x=۱۶m,t=۴s}۱۶=\frac{۱}{۲}a(۴)^۲+۴v_۰\Rightarrow ۴=۲a+v_۰$$

$$\Rightarrow v_۰=۴-۲a$$

۲ دقت کنید سرعت و شتاب هر دو مثبت (یا هر دو منفی) اند، البته با توجه به اینکه ما جهت حرکت را مثبت گرفته‌ایم $v_۰$ و a هر دو مثبت هستند. بنابراین

$$v_۰>۰\Rightarrow ۴-۲a>۰\Rightarrow ۴>۲a\Rightarrow a<۲m/s^۲$$

۳ گزینه‌ای که در آن شتاب کمتر از $۲m/s^۲$ است پاسخ تست است یعنی گزینهٔ (۲) درست است.

A ۳۱۵ ۲

یادآوری در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط در t ثانیهٔ آغازین حرکت از رابطهٔ روبه‌رو به‌دست می‌آید $v_{av}=\frac{۱}{۲}at+v_۰$

۱ ابتدا در معادلهٔ داده شده در مسئله $v_{av}=\alpha t+۵$، زمان را $t=۵s$ و سرعت متوسط را $۱۱m/s$ قرار می‌دهیم.

$$۱۱=۵\alpha+۵\Rightarrow\alpha=۱/۲m/s^۲$$

۲ a را در معادلهٔ سرعت متوسط زمان قرار داده و شتاب را حساب می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{۱}{۲}at+v_۰\Rightarrow\alpha=\frac{۱}{۲}a\Rightarrow ۱/۲=\frac{۱}{۲}a\Rightarrow a=۲/۴m/s^۲$$

A ۳۱۶ ۲

مسئلهٔ ساده‌ای است و به کمک معادلهٔ مستقل از زمان که ما به آن فرمول طلایی می‌گوییم قابل حل است.

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}t\Rightarrow ۰/۱=\frac{۳۰+۵۰}{۲}t\Rightarrow t=\frac{۱}{۴۰۰}s$$

بازی با سؤال سرعت متحرکی که با شتاب ثابت در حرکت است، در مدت ۱۵ دقیقه از $۴۰km/h$ به $۶۰km/h$ می‌رسد. در این مدت متحرک چند متر جابه‌جا شده است؟ از کتاب درسی

۱) ۱۲۵۰۰ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۵ ۴) ۱۵۰۰۰

پاسخ نیازی به تبدیل یکای km/h به m/s نیست، بلکه دقیقه را به ساعت تبدیل می‌کنیم، سپس مسئله را حل می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t=\frac{۶۰+۴۰}{۲}\times\frac{۱۵}{۶۰}=\frac{۱۰۰}{۸}=۱۲/۵km=۱۲۵۰۰m$$

گزینهٔ ۱

A ۳۱۷ ۲

۱ ابتدا سرعت را بر حسب m/s به دست می‌آوریم:

$$v=۵۴\frac{km}{h}=\frac{۵۴}{۳/۶}=۱۵m/s$$

۲ سپس به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب خواهیم داشت:

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t\Rightarrow ۲۴۰=\frac{۰+۱۵}{۲}\Delta t\Rightarrow\Delta t=\frac{۴۸۰}{۱۵}=\frac{۱۶۰}{۵}\Rightarrow\Delta t=۳۲s$$

A ۳۱۸ ۴

با یک جای‌گذاری ساده در فرمول طلایی $x=\frac{v+v_۰}{۲}t+x_۰$ مسئله حل می‌شود.

$$(x=-۱۲۲/۵m,t=۵s,v_۰=۰,\ x_۰=۰)\Rightarrow -۱۲۲/۵=\frac{v+۰}{۲}\times۵+۰$$

$$\Rightarrow v=-۴۹m/s$$

بنابراین بزرگی سرعت $|v|=۴۹m/s$ است.

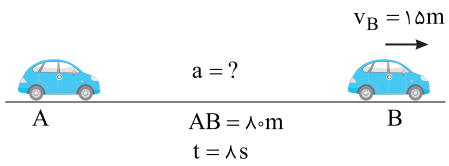
A ۳۱۹ ۴

۱ ابتدا به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب، سرعت در هنگام گذر از نقطهٔ A را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{v_B+v_A}{۲}\Delta t\Rightarrow ۸۰=\frac{۱۵+v_A}{۲}\times۸\Rightarrow v_A=۵m/s$$

۲ اکنون می‌توان شتاب را به دست آورد:

$$a=\frac{v_B-v_A}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{۱۵-۵}{۸}=\frac{۵}{۴}m/s^۲$$



A ۳۲۰ ۳

داده‌های مسئله را در معادلهٔ مستقل از شتاب (فرمول طلایی) قرار می‌دهیم و مقدار v را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t\Rightarrow ۲۴=\frac{\frac{v}{۲}+v}{۲}\times۴\Rightarrow ۲۴=\frac{\frac{۳v}{۲}}{۲}\times۴\Rightarrow ۲۴=۳v\Rightarrow v=۸m/s$$

بازی با سؤال متحرکی با شتاب ثابت و سرعت اولیه $v_۰$ روی خط راست به راه می‌افتد و در مدت ۴s، جابه‌جایی متحرک ۲۰ متر بوده و در پایان این مدت سرعت آن $۳v_۰$ می‌شود، $v_۰$ چند m/s است؟

۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۲/۵

پاسخ با جای‌گذاری در معادلهٔ مستقل از شتاب:

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}t\Rightarrow ۲۰=\frac{۳v_۰+v_۰}{۲}\times۴\Rightarrow v_۰=۲/۵m/s$$

گزینهٔ ۴

A ۳۲۱ ۳

۱ با توجه به تعریف شتاب ثابت:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow 2=\frac{\frac{v}{3}-v}{8}\Rightarrow 16=-\frac{2}{3}v\Rightarrow v=-24m/s$$

۲ اکنون جابه‌جایی را به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب (رابطهٔ طلایی) به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t\Rightarrow \Delta x=\frac{-8+(-24)}{2}\times 8\Rightarrow \Delta x=-128m$$

بنابراین اندازهٔ جابه‌جایی ۱۲۸ متر است. در حل این تست شتاب را $+2m/s$ در نظر گرفتیم و چون اندازهٔ سرعت در حال کاهش بوده، v منفی به دست آمد. شما می‌توانید شتاب را $-2m/s^2$ قرار دهید که در جواب نهایی یعنی اندازهٔ جابه‌جایی تغییری حاصل نخواهد شد.

A ۳۲۲ ۱

۱ معادلهٔ سرعت - زمان، تابع درجهٔ اول از زمان است، بنابراین حرکت دارای شتاب ثابت است:

$$\left.\begin{matrix} v=at+v_0 \\ v=2t-4 \end{matrix}\right\}\Rightarrow a=2m/s^2 \quad , \quad v_0=-4m/s$$

۲ برای حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط $v_{av}=\frac{v_2+v_1}{2}$ است. سرعت در لحظهٔ $t=1s$ و $t=2s$ را حساب می‌کنیم

$$\left.\begin{matrix} t_1=1s\Rightarrow v_1=-2m/s \\ t_2=2s\Rightarrow v_2=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow v_{av}=\frac{-2+0}{2}\Rightarrow v_{av}=-1m/s$$

۳ جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی با توجه به سرعت متوسط خواهد شد.

$$\Delta x=v_{av}\Delta t\Rightarrow \Delta x=-1\times(2-1)=-1m/s$$

A ۳۲۳ ۱

سرعت متحرک در $x_1=10m$ برابر $v_1=4m/s$ و در مکان $x_2=19m$، برابر $v_2=\frac{18}{3/6}=5m/s$ است. داده‌های مسئله ما را به معادلهٔ مستقل از زمان (معادلهٔ سرعت - مکان) هدایت می‌کند.

$$v_2^2-v_1^2=2a\Delta x\Rightarrow 25-16=2a\times(19-10)\Rightarrow a=0/5m/s^2$$

A ۳۲۴ ۴

شتاب حرکت یعنی آهنگ تغییر سرعت در صورت مسئله بیان شده تندی با شتاب $1m/s$ افزایش می‌یابد، بنابراین $a=+1m/s^2$ است و به کمک معادلهٔ مستقل از زمان مسئله قابل حل است. البته ابتدا یکای سرعت را به m/s تبدیل می‌کنیم.

$$v=18km/h\times\frac{10^3m}{1km}\times\frac{1h}{3600s}\Rightarrow v=\frac{18}{3/6}=5m/s$$

$$v^2-v_1^2=2a\Delta x\xrightarrow{\Delta x=300m} v^2-25=2\times1\times300\Rightarrow v^2=625$$

$$\Rightarrow v=25m/s$$

$$v_2=25m/s\times\frac{3600s}{1h}\times\frac{1km}{1000m}=25\times3/6km/h=90km/h$$

A ۳۲۵ ۱

۱ میزان کاهش سرعت در هر ثانیه یعنی آهنگ تغییر سرعت برابر $1/6m/s$ در هر ثانیه است، بنابراین شتاب حرکت $(-1/6m/s^2)$ است (جهت حرکت را مثبت فرض کرده‌ایم).

۲ به کمک معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) خواهیم داشت:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-400=2(-1/6)\Delta x\Rightarrow \Delta x=\frac{2000}{16}=125m$$

A ۳۲۶ ۳

به کمک معادلهٔ مستقل از زمان (معادلهٔ سرعت - مکان) به راحتی این پرسش قابل حل است.

$$v_2^2-v_1^2=2a(x_2-x_1)\xrightarrow{a=2m/s^2,v_1=5m/s,x_1=3m/s,v_2=7m/s}$$

$$49-25=2\times2\times(x_2-3)\Rightarrow x_2=9m$$

A ۳۲۷ ۲

۱ متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده یعنی سرعت اولیه صفر است. به کمک معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\xrightarrow{\Delta x=9m} 81-0=2a\times9\Rightarrow a=4/5m/s^2$$

۲ سرعت متوسط در ۴s آغازین حرکت خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0\Rightarrow v_{av}=\frac{1}{2}\times4/5\times4+0\Rightarrow v_{av}=9m/s$$

A ۳۲۸ ۱

۱ با توجه به معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) برای حرکت با شتاب ثابت خواهیم داشت:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-v_0^2=2(-a)\Delta x\Rightarrow \Delta x_{\text{توقف}}=\frac{v_0^2}{2a}$$

۲ شتاب در دو حالت یکسان است در دو حالت رابطهٔ بالا را نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم سپس داده‌های مسئله $v_{01}=40km/h$ و $v_{02}=80km/h$ را در رابطه قرار می‌دهیم.

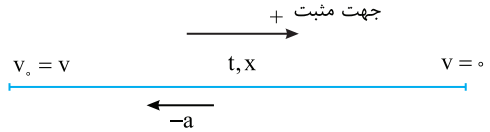
$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}=\frac{v_{02}^2}{v_{01}^2}=\frac{80^2}{40^2}\Rightarrow\frac{\Delta x_2}{50}=4\Rightarrow\Delta x_2=200m$$

A ۳۲۹ ۳

نکته وقتی متحرک، ترمز می‌کند و می‌ایستد، زمان توقف و جابه‌جایی تا توقف برابر خواهد شد با:

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=-at+v\Rightarrow t=\frac{v}{a}$$

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-v^2=2(-a)x\Rightarrow x=\frac{v^2}{2a}$$



سرعت اولیه از v به 2v و شتاب از a به 2a تغییر کرده است. از طرفی متحرک روی خط راست با شتاب ثابت ترمز کرده و می‌ایستد، بنابراین مسافت طی شده همان جابه‌جایی خودرو است. در روابط بالا داده‌ها را قرار داده و مسئله را حل می‌کنیم.

۱ زمان توقف:

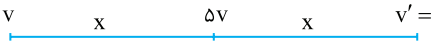
$$t'=\frac{2v}{(2a)}\Rightarrow t'=\frac{v}{a}\Rightarrow t'=t$$

۲ جابه‌جایی توقف:

$$\Delta x'=\frac{(2v)^2}{2(2a)}\Rightarrow\Delta x'=\frac{4v^2}{4a}\Rightarrow\Delta x'=\frac{v^2}{a}\Rightarrow\Delta x'=2x$$

A ۳۳۰ ۲

برای درک بهتر مسئله یک شکل ساده رسم می‌کنیم.



با توجه به شکل و معادلهٔ مستقل از زمان برای حرکت با شتاب ثابت عدد جابه‌جایی حالت اول و جابه‌جایی حالت دوم می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{matrix} (5v)^2-v^2=2ax \\ (v')^2-(5v)^2=2ax \end{matrix}\right\}\Rightarrow 24v^2=v'^2-25v^2\Rightarrow v'^2=49v^2\Rightarrow v'=7v$$

A ۳۳۱ ۳

۱ به کمک معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-400=2a\times40\Rightarrow a=-5m/s^2$$

۲ اکنون سرعت را در جابه‌جایی $\Delta x=30m$ به‌دست می‌آوریم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow v^2-400=2\times(-5)\times30\Rightarrow v^2=100\Rightarrow v=10m/s$$

A ۳۳۲ ۱

جهت حرکت را مثبت می‌گیریم. در این‌صورت شتاب $-4m/s^2$ است به کمک معادلهٔ مستقل از زمان مسئله را حل می‌کنیم:

$$v_1=36km/h\times\frac{10}{36}=10m/s$$

$$v_2^2-v_1^2=2a\Delta x\Rightarrow 0^2-10^2=2\times(-4)\times\Delta x\Rightarrow\Delta x=12/5m$$

گوزن در فاصلهٔ ۱۵ متری اتومبیل بوده و اتومبیل پس از $12/5m$ می‌ایستد، بنابراین فاصلهٔ گوزن تا اتومبیل در هنگام توقف $15-12/5=2/5m$ می‌باشد.

B ۳۳۳ ۱

نکته زمان واکنش یعنی بازهٔ زمانی از لحظه‌ای که راننده مانع را می‌بیند تا لحظه‌ای که ترمز می‌کند.

خط فکری در مدت زمان واکنش، حرکت متحرک تقریباً حرکت با سرعت ثابت روی خط راست است. بنابراین شما باید در مدت ۰/۴s، جابه‌جایی خودرو را به کمک رابطهٔ سرعت ثابت به‌دست آورده سپس جابه‌جایی آن را پس از ترمز تا توقف کامل به کمک روابط شتاب ثابت حساب کنید.

۱ سرعت را برحسب m/s به‌دست می‌آوریم.

$$v=۹۰km/h=\frac{۹۰}{۳/۶}=۲۵m/s$$

۲ جابه‌جایی در مدت زمان واکنش برابر است با:

$$\Delta x=vt\Rightarrow\Delta x_۱=۲۵\times۰/۴\Rightarrow\Delta x_۱=۱۰m$$

۳ از لحظهٔ ترمز تا توقف کامل، جابه‌جایی اتومبیل برابر خواهد شد با:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow۰-۲۵^۲=۲(-۵)\Delta x_۲\Rightarrow\Delta x_۲=۶۲/۵m$$

۴ بنابراین اتومبیل از لحظهٔ مشاهدهٔ مانع تا توقف، جابه‌جایی $\Delta x_۱+\Delta x_۲$ را می‌پیماید:

$$۶۲/۵+۱۰=۷۲/۵m$$

در نتیجه اتومبیل در فاصلهٔ $۸۰-۷۲/۵=۷/۵m$ از مانع می‌ایستد.

B ۳۳۴ ۲

ابتدا سرعت خودرو را بر حسب متر بر ثانیه به‌دست می‌آوریم:

$$v=۱۰۸\frac{km}{h}\times\frac{۱h}{۳۶۰۰s}\times\frac{۱۰۰۰m}{۱km}=\frac{۱۰۸}{۳/۶}=۳۰m/s$$

۱ جابه‌جایی متحرک در مدت t خودرو با سرعت ثابت ۳۰m/s برابر است با:

$$\Delta x=vt\Rightarrow\Delta x_۱=۳۰t$$

۲ جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی که حرکت کندشونده است به کمک معادلهٔ مستقل از زمان (معادلهٔ سرعت - مکان) حساب می‌کنیم.

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x_۲\Rightarrow۰-۳۰^۲=۲\times(-۳)\times\Delta x_۲\Rightarrow\Delta x_۲=۱۵۰m$$

۳ برای آنکه خودرو به مانع برخورد نکند، باید در مدت زمان واکنش جابه‌جایی آن کمتر $۲۰۰-۱۵۰=۵۰m$ باشد، بنابراین

$$\Delta x_۱\le۵۰\Rightarrow۳۰t\le۵۰\Rightarrow t\le\frac{۵}{۳}$$

B ۳۳۵ ۴

۱ ابتدا به کمک معادلهٔ سرعت-مکان (مستقل از زمان) شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a(x-x_۰)\xrightarrow[v_۰=۸m/s,v=۶m/s]{x=۱۸/۵m,x_۰=۱۵m}۳۶-۶۴=۲a(۱۸/۵-۱۵)$$

$$\Rightarrow a=-۴m/s^۲$$

۲ بنابراین معادلهٔ مکان- زمان آن خواهد شد:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}(-۴)t^۲+۸t+۱۵\Rightarrow x=-۲t^۲+۸t+۱۵$$

A ۳۳۶ ۲

۱ ابتدا شتاب را به کمک معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) به‌دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow۱۷^۲-۹^۲=۲a(۳۱-۵)\Rightarrow(۱۷+۹)(۱۷-۹)=۲\times a\times۲۶$$

$$\Rightarrow a=۴m/s^۲$$

۲ سرعت اولیه را به کمک معادلهٔ سرعت- زمان حساب می‌کنیم:

$$v=at+v_۰\Rightarrow۹=۴\times۱+v_۰\Rightarrow v_۰=۵m/s$$

۳ اکنون مکان اولیهٔ متحرک را حساب می‌کنیم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow۵=\frac{۱}{۲}\times۴\times۱+۵\times۱+x_۰\Rightarrow x_۰=-۲m$$

۴ معادله حرکت برابر است با: $x=\frac{۱}{۲}\times۴t^۲+۵t-۲\Rightarrow x=۲t^۲+۵t-۲$

B ۳۳۷ ۲

خط فکری در این پرسش خاص معادلهٔ سرعت - مکان داده شده را با معادلهٔ مستقل از زمان حرکت با شتاب ثابت مقایسه می‌کنیم و ضریب x را برابر ۲a قرار می‌دهیم و شتاب را به‌دست می‌آوریم.

معادله $v=۵\sqrt{x}$ را به توان ۲ رسانده تا شبیه معادلهٔ مستقل از زمان شود.

$$v^۲=۲۵x$$

با توجه به معادلهٔ $v^۲-v_۰^۲=۲ax$، ضریب x در دو معادله را برابر قرار می‌دهیم و شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$۲a=۲۵\Rightarrow a=۱۲/۵m/s^۲$$

A ۳۳۸ ۱

خط فکری معادلهٔ سرعت - مکان داده شده را به توان ۲ برسانید و آن را به‌صورت معادلهٔ مستقل از زمان حرکت با شتاب ثابت $v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x$ مرتب کنید و با مقایسه، مقدار $v_۰$ و a را به‌دست بیاورید، حرکت کندشونده است و باید علامت a و $v_۰$ یکسان نباشد. پس به سراغ حل مسئله برویم.

۱ $v=\pm\sqrt{۷x+۴۹}\Rightarrow v^۲-۴۹=+۷x\xrightarrow{v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x}$

$$v_۰^۲=۴۹\Rightarrow v_۰=\pm۷m/s\ ,۲a=۷\Rightarrow a=\mp۳/۵m/s^۲$$

۲ حرکت کندشونده است از این‌رو اگر شتاب را مثبت $a=+۳/۵m/s^۲$ فرض کنیم، سرعت اولیهٔ آن منفی $(v_۰=-۷m/s)$ است. اکنون به کمک معادلهٔ جابه‌جایی زمان مسئله را حل می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow\Delta x=\frac{۱}{۲}(۳/۵)۱۶+(-۷)\times۴\Rightarrow\Delta x=۲۸-۲۸=۰$$

C ۳۳۹ ۱

خط فکری مهم‌ترین قسمت حل مسئله این است که در لحظهٔ $t=۰$ مکان اولیه $x_۰=\frac{-۲۷}{۸}m$ است. بنابراین با قرار دادن مکان اولیه در معادلهٔ داده شده، سرعت اولیه متحرک را به‌دست می‌آوریم سپس با مرتب کردن معادله و با مقایسهٔ آن با معادلهٔ مستقل از زمان شتاب را حساب کرده سپس به کمک معادلهٔ مکان - زمان لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان یعنی لحظهٔ گذر از $x=۰$ را حساب می‌کنیم.

۱ سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$$\frac{v^۲}{۳۶}-\frac{۲x}{۹}=۱\Rightarrow\frac{v_۰^۲}{۳۶}-\frac{۲(\frac{-۲۷}{۸})}{۹}=۱\Rightarrow\frac{v_۰^۲}{۳۶}+\frac{۳}{۴}=۱\Rightarrow\frac{v_۰^۲+۲۷}{۳۶}=۱$$

$$\Rightarrow v_۰^۲+۲۷=۳۶\Rightarrow v_۰^۲=۹\Rightarrow v_۰=۳m/s$$

۲ متحرک در حال حرکت با شتاب ثابت است بنابراین معادلهٔ سرعت - مکان $v^۲-v_۰^۲=۲ax$ می‌باشد. حال معادلهٔ داده شده را مرتب می‌کنیم

$$\frac{v^۲}{۳۶}-\frac{۲x}{۹}=۱\Rightarrow\frac{v^۲}{۳۶}-\frac{۸x}{۳۶}=۱\xrightarrow{\times۳۶}v^۲-۸x=۳۶\Rightarrow v^۲=۸x+۳۶$$

۳ شتاب را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases}v^۲=۲a(x-x_۰)+v_۰^۲\\v^۲=۸x+۳۶\end{cases}\Rightarrow۲a=۸\Rightarrow a=۴m/s^۲$$

۴ معادلهٔ مکان - زمان متحرک به صورت $x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$ می‌باشد، بنابراین:

$$x=\frac{۱}{۲}\times۴\times t^۲+۳t-\frac{۲۷}{۸}\Rightarrow x=۲t^۲+۳t-\frac{۲۷}{۸}$$

۵ هنگامی که متحرک از $x=۰$ عبور می‌کند بردار مکان متحرک تغییر جهت خواهد داد:

$$۲t^۲+۳t-\frac{۲۷}{۸}=۰\Rightarrow t=\frac{۳}{۴}s,t=-\frac{۹}{۴}s\text{ غ ق ق}$$

بنابراین در لحظهٔ $t=\frac{۳}{۴}s=۰/۷۵s$ بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

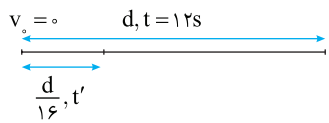
۴ ۳۴۰ B

۱ برای آن‌که معادلهٔ $v=\frac{-\sqrt{-۲x}}{۴}$ پاسخ داشته باشد زیر رادیکال مثبت باشد. از این رو مقدارهای x باید منفی بوده یعنی متحرک در مکان‌های منفی است.

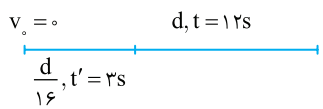
۲ در $x=۰$ ، $v_۰=۰$ است یعنی متحرک از مبدأ مکان از حال سکون در جهت منفی محـور حرکـت کرده اسـت و بـا افزایش مقـدار x، تندی نیـز در حال افزایـش و حرکت تندشونده است.

۳ ۳۴۱ A

خط فکری در حل این نوع مسـائل یک شکل سـاده از مسئله بکشید و طول تمام مسیر مستقیم را d بنامید و معادلهٔ مکان - زمان را برای آن بنویسید همچنین معادلهٔ مکان - زمان را برای قسمت اول مسیر (دقت کنید حتماً قسمت اول که در آن سرعت اولیه صفر است) بنویسید و دو معادله را بر هم تقسیم کنید.



بـا توجـه به معادلـهٔ مـکان - زمان حرکت با شتاب ثابت و سرعت اولیه صفر، برای کل مسـیر (d) و $\frac{d}{۱۶}$ اول مسیر معادله‌ها را می‌نویسیم:



$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲\Rightarrow\begin{cases}d=\frac{۱}{۲}at^۲\\ \frac{d}{۱۶}=\frac{۱}{۲}at'^۲\end{cases}\Rightarrow ۱۶=\frac{t^۲}{t'^۲}\Rightarrow t'=\frac{t}{۴}=\frac{۱۲}{۴}\Rightarrow t'=۳s$$

میانبر وقتی متحرک از حال سـکون با شتاب ثابت روی خط راست شروع به حرکت کرده و در مدت t جابه‌جایی d را انجام می‌دهد، اول مسیر را در مدت $t'=\frac{t}{\sqrt{n}}$ می‌پیماید. $\frac{d}{n}$

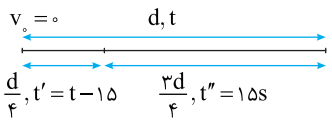
بازی با سؤال **متحرکی روی خط راسـت از حال سـکون با شتاب ثابت جابه‌جایی d را در مدت t طی می‌کند. این متحرک آخر مسـیر را در مدت $\frac{۳d}{۴}$ ۱۵s طی می‌کند. t چند ثانیه است؟**

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

پاسخ **همان‌گونه که بیان شد، باید $d-\frac{۳d}{۴}=\frac{d}{۴}$ اول مسیر را با کل مسیر مقایسه کنیم. اگر زمان کل حرکت t باشد، زمان حرکت $\frac{d}{۴}$ اول مسیر $t'=t-۱۵$ ثانیه است. معادله‌ها را نوشته و مسئله را حل می‌کنیم:**

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲\Rightarrow\begin{cases}\frac{d}{۴}=\frac{۱}{۲}a(t-۱۵)^۲\\ d=\frac{۱}{۲}at^۲\end{cases}\xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{دو رابطه را بر هم}}\frac{۱}{۴}=\frac{(t-۱۵)^۲}{t^۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{t-۱۵}{t}\Rightarrow t=۳۰s$$



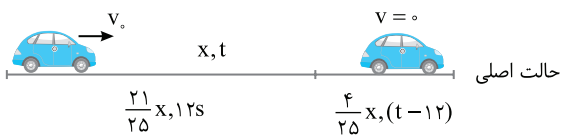
گزینهٔ ۳

۱ ۳۴۲ B

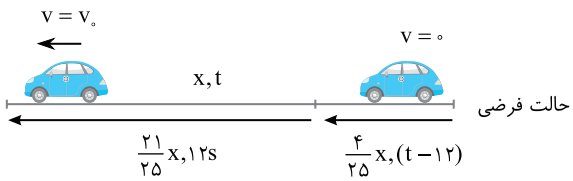
نکته در حرکت کندشـونده با شـتاب ثابت روی خط راست که متحرک متوقف می‌شود، می‌توان حرکت را از مکان توقف یک حرکت تندشونده با همان شتاب فرض کرد.

خط فکری با توجه به نکتهٔ بیان شـده، شـما زمان کل توقف را t و مسـافت طی شده را x فرض کنید. در این صورت، متحرک مسافت طی شدهٔ اول حالت فرضی $(\frac{۴}{۲۵}x)$ را در $t-۱۲s$ طی می‌کند. بنابراین معادلهٔ مکان - زمان را برای x و $\frac{۴}{۲۵}x$ نوشته و بر هم تقسیم کنید.

$$\begin{cases}x=\frac{۱}{۲}at^۲\\ \frac{۴x}{۲۵}=\frac{۱}{۲}a(t-۱۲)^۲\end{cases}\Rightarrow\frac{۲۵}{۴}=\frac{t^۲}{(t-۱۲)^۲}\Rightarrow\frac{۵}{۲}=\frac{t}{t-۱۲}\Rightarrow ۵t-۶۰=۲t\Rightarrow t=۲۰s$$



حالت اصلی



حالت فرضی

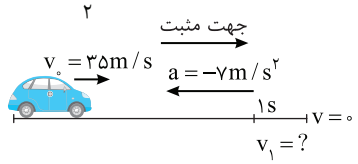
۴ ۳۴۳ A

روش اول: سرعت خودرو با شتاب $۷m/s^۲$ از $۳۵m/s$ به صفر رسیده است از این‌رو سرعت آن یک ثانیه قبل از توقف کامل خواهد شد:

$$v=at+v_۱\Rightarrow ۰=-۷\times ۱+v_۱\Rightarrow v_۱=۷m/s$$

جابه‌جایی در یک ثانیهٔ آخر را به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{v+v_۱}{۲}t\Rightarrow\Delta x=\frac{۰+۷}{۲}\times ۱=۳/۵m$$



روش راحت‌تر: کافی است فرض کنیم متحرک از حال سکون با شتاب $۷m/s^۲$ به راه می‌افتد و جابه‌جایی آن را در $t=۱s$ از شروع حرکتش به‌دست آوریم.

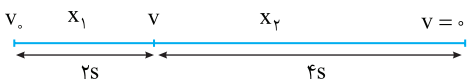
$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲=\frac{۱}{۲}\times ۷\times ۱=۳/۵m$$

۲ ۳۴۴ B

خط فکری ابتدا شـتاب حرکت را برحسـب سـرعت اولیه $v_۰$ به‌دسـت بیاورید، زمان طی مسـیر ۶s اسـت که به دو بازهٔ ۲s اول و ۴s بعدی تقسـیم شـده سرعت را در $t=۲s$ حسـاب کنید و به کمک معادلهٔ مسـتقل از شتاب (فرمول طلایی) جابه‌جایی در هر قسمت را به‌دست آورده بر هم تقسیم می‌کنیم.

۱ شتاب حرکت برابر است با:

$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۰-v_۰}{۶}\Rightarrow a=\frac{-v_۰}{۶}$$



۲ سرعت را در لحظهٔ $t=۲s$ به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=\frac{-v_۰}{۶}\times ۲+v_۰\Rightarrow v=\frac{۲}{۳}v_۰$$

۳ اکنون به کمک معادلهٔ مسـتقل از شـتاب، جابه‌جایی‌های $x_۱$ و $x_۲$ را به‌دسـت می‌آوریم و بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t\Rightarrow\begin{cases}x_۱=\frac{\frac{۲}{۳}v_۰+v_۰}{۲}\times ۲\Rightarrow x_۱=\frac{۵}{۳}v_۰\\ x_۲=\frac{۰+\frac{۲}{۳}v_۰}{۲}\times ۴\Rightarrow x_۲=\frac{۴}{۳}v_۰\end{cases}\Rightarrow\frac{x_۲}{x_۱}=\frac{۴}{۵}$$

A ۳۴۵ ۲

مسئلهٔ ساده‌ای است. در صورت مسئله حرفی از زمان (t) زده نشده بنابراین فرمول مستقل از زمان اولین انتخاب برای حل مسئله است.

رابطهٔ مستقل از زمان را برای کل مسیر (x) و برای ۱۵۰ متر اول که تندی نصف می‌شود را می‌نویسیم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x \begin{cases} \xrightarrow{v=0} 0-v_0^2=2a(x) \\ \xrightarrow{v=\frac{v_0}{2}} \left(\frac{v_0}{2}\right)^2-v_0^2=2a(150)\Rightarrow -\frac{3v_0^2}{4}=2a(150) \end{cases}$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم.

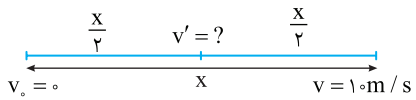
$$\frac{v_0^2}{\frac{3}{4}v_0^2}=\frac{x}{150}\Rightarrow\frac{4}{3}=\frac{x}{150}\Rightarrow x=200m$$

بازی با سؤال متحرکی با شتاب ثابت از حال سکون به راه می‌افتد و در جابه‌جایی x سرعتش به $10m/s$ می‌رسد، سرعت این متحرک در گذر از وسط مسیر چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۵ ۲) $5\sqrt{2}$ ۳) $5\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $5\sqrt{3}$

پاسخ معادلهٔ مستقل از زمان را در دو حالت نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{cases} v'^2-v_0^2=2a(\frac{x}{2}) \\ v^2-v_0^2=2ax \end{cases} \xrightarrow[v=10]{v_0=0} \frac{v'^2}{100}=\frac{1}{2}\Rightarrow v'=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 10\Rightarrow v'=5\sqrt{2}m/s$$



میانبر اگر متحرک از حال سکون با شتاب ثابت a شروع به حرکت کرده و پس از جابه‌جایی x سرعتش v شود سرعت آن پس از جابه‌جایی $\frac{x}{n}$ خواهد شد $v'=\frac{v}{\sqrt{n}}$.

گزینهٔ ۲

A ۳۴۶ ۳

به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، شتاب حرکت را در مدتی که متحرک از مکان $x_1=10/5m$ به مکان $x_2=+16m$ می‌رود به‌دست می‌آوریم:

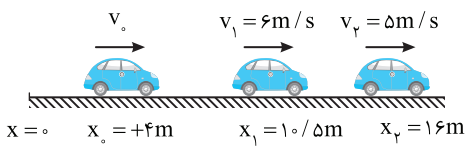
$$v_2^2-v_1^2=2a(x_2-x_1)\Rightarrow 25-36=2a(16-10/5)\Rightarrow a=-1m/s^2$$

اکنون بزرگی سرعت اولیه را در مدتی که متحرک از مکان اولیه $x_0=+4m$ به مکان $x_2=+16m$ می‌رود را حساب می‌کنیم.

$$v^2-v_0^2=2a(x-x_0)\Rightarrow 25-v_0^2=2(-1)(16-4)\Rightarrow v_0^2=25+24$$

$$\Rightarrow v_0=+7m/s$$

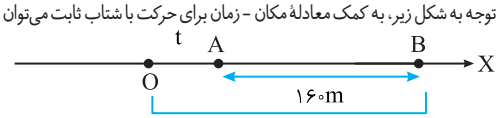
مسیر حرکت در واقع به شکل زیر است:



B ۳۴۷ ۲

خط فکری سرعت متحرک در نقطهٔ O صفر است، بنابراین می‌توانید فرض کنید که متحرک از نقطهٔ O با شتاب $2m/s^2$ از حال سکون روی محور xها شروع به حرکت کرده و ابتدا فاصلهٔ OA را در مدت t ثانیه و فاصلهٔ OB را در مدت $(t+8)$ ثانیه طی کرده است. فاصله OA را با حرف x نشان دهید. در این صورت فاصلهٔ OB برابر $(x+160)$ متر است.

۱ با توجه به شکل زیر، به کمک معادلهٔ مکان - زمان برای حرکت با شتاب ثابت می‌توان نوشت:



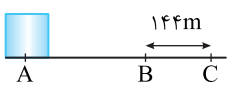
$$OB=x+160$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}at^2=t^2 \\ x+160=\frac{1}{2}a(t+8)^2=(t+8)^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{دو معادله را از هم کم کنیم}}$$

$$160=(t+8)^2-t^2\Rightarrow 160=16t+64\Rightarrow t=6s$$

۲ با داشتن $t=6s$ مقدار OA را حساب می‌کنیم: $x=t^2 \xrightarrow{t=6s} OA=36m$

بازی با سؤال متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت از نقطهٔ A حرکت می‌کند و فاصلهٔ B تا C را در مدت ۴ ثانیه طی می‌کند. اگر سرعت متحرک هنگام عبور از B برابر $16m/s$، فاصلهٔ A و B چند متر است؟



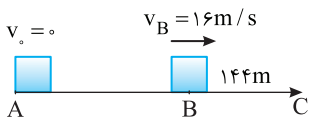
۱) ۱۲/۸ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۵/۶

پاسخ به کمک معادلهٔ جابه‌جایی - زمان در بازهٔ زمانی حرکت متحرک از B تا C شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 144=\frac{1}{2}a\times(4)^2+16\times 4\Rightarrow 80=8a\Rightarrow a=10m/s^2$$

اکنون به کمک معادلهٔ مستقل از زمان فاصلهٔ AB را حساب می کنیم:

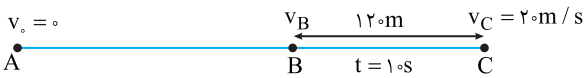
$$v_B^2-v_A^2=2a\Delta x\Rightarrow 16^2-0=2\times 10(AB)\Rightarrow AB=12/8m$$



گزینهٔ ۱

B ۳۴۸ ۲

حرکت دارای شتاب ثابت است.



۱ سرعت در نقطهٔ B را به کمک رابطهٔ مستقل از شتاب به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{v_C+v_B}{2}\Delta t\Rightarrow 120=\frac{20+v_B}{2}\times 10\Rightarrow v_B=4m/s$$

۲ شتاب را حساب می‌کنیم: $a=\frac{v_C-v_B}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{20-4}{10}\Rightarrow a=1/6m/s^2$

۳ اکنون به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، فاصلهٔ A تا B را به دست می‌آوریم:

$$v_B^2-v_A^2=2a\Delta x\Rightarrow 16-0=2\times 1/6\times\Delta x\Rightarrow\Delta x=5m$$

C ۳۴۹ ۳

نکته در یک حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی برابر سرعت لحظه‌ای در وسط بازه است.

خط فکری در بازهٔ زمانی ۲s تا ۴s سرعت متوسط را به‌دست بیاورید. با این کار سرعت در لحظهٔ $t=3s$ حساب کرده‌اید همین کار را برای بازهٔ ۴s تا ۶s انجام دهید تا سرعت در لحظهٔ $t=5s$ را به‌دست بیاورید از آن‌جا شتاب حرکت و ... را به‌دست آورید.

t(s)	۲	۴	۶
x(m)	۲۰	۳۶	۴۴

۱ سرعت متوسط در بازهٔ ۲s تا ۴s برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{36-20}{4-2}\Rightarrow v_{av}=8m/s\Rightarrow v_{t=3s}=8m/s$$

۲ سرعت متوسط در بازهٔ ۴s تا ۶s را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{44-36}{6-4}=4m/s\Rightarrow v_{t=5s}=4m/s$$

۳ شتاب حرکت را حساب می‌کنیم. $a=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{۴-۸}{۵-۳}\Rightarrow a=-۲m/s^۲$

۴ سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم:

$v=at+v_۰ \xrightarrow[a=-۲m/s^۲]{t=۳s\ ,\ v=۸m/s} ۸=-۲\times۳+v_۰\Rightarrow v_۰=۱۴m/s$

۵ معادلهٔ سرعت - زمان را می‌نویسیم: $v=-۲t+۱۴$

۶ در حرکت با شتاب ثابت نوع حرکت در لحظه‌ای تغییر می‌کند که سرعت صفر شود بنابراین $v=۰\Rightarrow -۲t+۱۴=۰\Rightarrow t=۷s$

بازی با سؤال **متحرکی با شتاب ثابت روی خط راست حرکت می‌کند. اگر در زمان‌های $t=۲s$، $t=۶s$ و $t=۸s$ به‌ترتیب از $x=۱۰m$، $x=۵۰m$ و $x=۹۰m$ عبور کند، شتاب حرکت چند متر بر مجذور ثانیه است؟**

۱) ۲/۵ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱۰}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۱۰}$

پاسخ **سرعت متوسط در بازهٔ ۲s تا ۶s با سرعت در لحظهٔ $t=۴s$ برابر است از این‌رو می‌توان نوشت:**

$v_{av}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow v_{av}=\frac{۵۰-۱۰}{۶-۲}\Rightarrow v_{av}=۱۰m/s\Rightarrow v_{t=۴s}=۱۰m/s$

سرعت در لحظهٔ $t=۷s$ با سرعت متوسط در بازهٔ ۶s تا ۸s برابر است از این‌رو:

$v_{av}=\frac{۹۰-۵۰}{۸-۶}\Rightarrow v_{av}=۲۰m/s\Rightarrow v_{t=۷s}=۲۰m/s$

شتاب حرکت خواهد شد: $a=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow a=\frac{۲۰-۱۰}{۷-۴}=\frac{۱۰}{۳}m/s^۲$

گزینهٔ ۳

B ۳۵۰ ۲

خط فکری با مسئله راحتی سروکار داریم. در صورت مسئله صحبتی از زمان نیست بنابراین باید به سراغ معادلهٔ مستقل از زمان برویم و به کمک آن شتاب را در بازهٔ مکانی $-۲۵m$ تا $-۱۰m$ حساب کنیم سپس با همان معادلهٔ $v_۱$ را به‌دست می‌آوریم.

$x(m)$	$x_۱=-۲۲$	$x_۲=-۲۵$	$x_۳=-۱۰$
$v(m/s)$	$v_۱$	$v_۲=۲$	$v_۳=۸$

۱ شتاب حرکت خواهد شد:

$v_۳^۲-v_۲^۲=۲a(x_۳-x_۲)\Rightarrow ۸^۲-۲^۲=۲a[-۱۰-(-۲۵)]$

$\Rightarrow ۶۰=۲a(۱۵)\Rightarrow a=۲m/s^۲$

۲ سرعت $v_۱$ را حساب می‌کنیم:

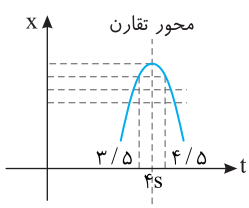
$v_۲^۲-v_۱^۲=۲a(x_۲-x_۱)\Rightarrow ۲^۲-v_۱^۲=۲\times۲[-۲۵-(-۲۲)]$

$۴-v_۱^۲=-۱۲\Rightarrow v_۱^۲=+۱۶\Rightarrow v_۱=\pm۴m/s$

دقت کنید مکان متحرک ابتدا $x_۱=-۲۲m$، سپس $x_۲=-۲۵m$ است یعنی متحرک در جهت منفی محور در حال حرکت بوده است از این‌رو $v_۱=-۴m/s$ خواهد بود.

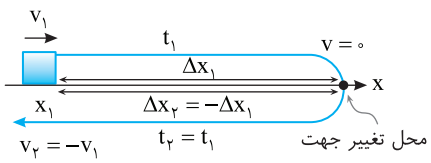
B ۳۵۱ ۳

متحرک دارای شتاب ثابت است و نمودار مکان- زمان آن سهمی است. از طرفی در لحظهٔ $t=۴s$ متحرک در بیشترین فاصلهٔ مثبت از مبدأ مکان است. یعنی متحرک در این لحظه تغییر جهت داده است. به عبارت بهتر متحرک ابتدا در جهت محور x ها در حرکت بوده و در لحظهٔ $t=۴s$ سرعتش در مکان مثبت صفر شده و متحرک تغییر جهت داده و در خلاف جهت محور x ها حرکت کرده است. لحظهٔ $t=۴s$ رأس سهمی مکان- زمان است و نمودار مکان - زمان آن می‌تواند به شکل زیر باشد. در یک سهمی نقاط واقع بر سهمی نسبت به محور قائم گذرنده از رأس تقارن دارد و در نقاطی که فاصلهٔ زمانی یکسانی از محور دارند مکان متحرک یکسان است و در بازهٔ زمانی بین این لحظه‌ها جابه‌جایی صفر است و تنها در گزینهٔ (۳) فاصلهٔ زمانی ۳/۵s و ۴/۵s از ۴s برابر است و جابه‌جایی صفر است.

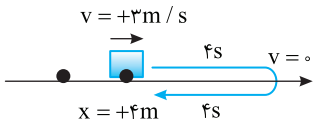


B ۳۵۲ ۱

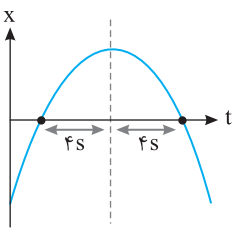
خط فکری در حل این نوع مسائل مطلب بسیار مهم تقارن حرکت متحرک در دو طرف مکان و لحظه‌ای است که متحرک با شتاب ثابت متوقف شده و برمی‌گردد یعنی در هر بازهٔ زمانی و مکانی از یک نقطه به سوی محل تغییر جهت برود در همان بازهٔ زمانی از محل تغییر جهت به محل اولیه بازمی‌گردد و در آن محل سرعتش نیز قرینه می‌شود.



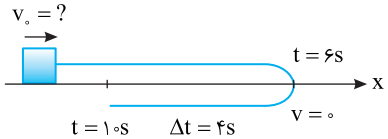
روش اول: نیازی به نوشتن هیچ رابطه و فرمولی نداریم. در مدت ۴s متحرک به بیشینه مکان می‌رسد. مدت زمان ۸s را در ذهن خود به دو بازهٔ زمانی ۴s تقسیم کنید در ۴s اول متحرک از مکان $+۴m$ با سرعت $+۳m/s$ به بیشینه مکان مثبت رفته، متوقف شده و ۴s بعد این مسیر را برگشته و به مکان $x=+۴m$ برمی‌گردد.



روش دوم: معادلهٔ مکان-زمان حرکت با شتاب ثابت یک تابع درجه ۲ $(x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰)$ بوده و نمودار آن سهمی است و خطی که از رأس سهمی می‌گذرد محور تقارن سهمی است و مفهوم آن این است که در فاصلهٔ زمانی یکسان از این محور مکان مقدار یکسانی است.



بازی با سؤال **متحرکی روی محور xها با شتاب ثابت در حرکت است و در لحظهٔ $t_۱=۶s$ در جهت مثبت در بیشترین فاصلهٔ خود از مبدأ مکان است. اگر در لحظهٔ $t_۲=۱۰s$ از مبدأ مکان با سرعت $۸m/s$ خلاف جهت محور x عبور کند، سرعت اولیه متحرک چند متر بر ثانیه است؟**



پاسخ ۱ **متحرک در لحظهٔ $t=۶s$ در محل تغییر جهت حرکت خود است و در لحظهٔ $t=۱۰s$ از مبدأ مکان $x=۰$ با سرعت $۸m/s$ در خلاف جهت محور $(v=-۸m/s)$ می‌گذرد. شتاب حرکت را با توجه به این مطالب حساب می‌کنیم. در بازهٔ ۴s سرعت متحرک از صفر به $-۸m/s$ رسیده از این‌رو،**

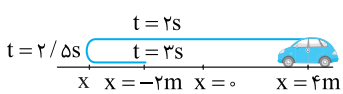
$v=at+v_۰\Rightarrow -۸=a(+۴)+۰\Rightarrow a=-۲m/s^۲$

۲ **سرعت متحرک در مدت ۰ تا ۶s از سرعت اولیه $(v_۰)$ با شتاب $(-۲m/s^۲)$ به صفر رسیده است بنابراین خواهیم داشت:**

$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=-۲\times۶+v_۰\Rightarrow v_۰=۱۲m/s$

B ۳۵۳ ۴

۱ متحرک دارای حرکت با شتاب ثابت است و در لحظه‌های $t=۲s$ و $t=۳s$ از مکان $-۲m$ می‌گذرد، بنابراین در این بازه متحرک تغییر جهت داده است. اما در چه لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد. در واقع متحرک از $t=۲s$، نیم ثانیه رفته در لحظهٔ ۲/۵s متوقف شده و نیم ثانیه برمی‌گردد و در لحظهٔ $t=۳s$ از مکان $-۲m$ مجدداً می‌گذرد. (البته لحظهٔ تغییر جهت، لحظهٔ رأس سهمی است و در دو طرف محور قائم گذرنده از رأس سهمی تقارن دارد با این استدلال نیز مشخص است که $t_{رأس}=\frac{۲+۳}{۲}=۲/۵s$.



۲ با توجه به معادلهٔ سرعت - زمان می‌توان نوشت:

$v=at+v_0 \Rightarrow 0=a(2/5)+v_0 \Rightarrow v_0=-2/5a \quad (I)$

۳ مکان اولیهٔ متحرک $x=+4m$ است. با توجه به معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت خواهیم داشت $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \xrightarrow{t=2s,\ x=-2m} -2=\frac{1}{2}a(4)+2v_0+4$

$\Rightarrow -2=2a+2v_0+4 \Rightarrow 2a+2v_0=-6 \Rightarrow a+v_0=-3 \quad (II)$

۴ از رابطهٔ (I) در رابطهٔ (II) جای‌گذاری کرده شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$a-2/5a=-3 \Rightarrow -1/5\,a=-3 \Rightarrow a=2m/s^2$

B ۳۵۴ ۳

خط فکری در مسئلهٔ گفته شده در بازهٔ ۰ تا ۱۰s، ۶s حرکت تندشونده است یعنی باید از ۰ تا ۴s حرکت کندشونده باشد و در لحظهٔ $t=4s$ متحرک متوقف شده و تغییر جهت داده و ۶s حرکت آن تندشونده است.

۱ معادلهٔ سرعت - زمان را نوشته در $t=4s$، سرعت را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$v=at+v_0 \Rightarrow 0=4a+v_0 \Rightarrow v_0=-4a \quad (I)$

۲ در لحظهٔ $t=0$ مکان اولیه $x_0=-10m$ بوده و در لحظهٔ $t=10s$ مکان آن $x=-30m$ است. معادلهٔ مکان زمان را نوشته یک رابطهٔ دیگر بین v_0 و a به‌دست می‌آوریم:

$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow -30=\frac{1}{2}a(10)^2+v_0(10)+(-10)$

$-30=50a+10v_0-10 \Rightarrow -20=50a+10v_0$

۳ از رابطهٔ (I) جای‌گذاری می‌کنیم:

$-20=50a+10(-4a) \Rightarrow -20=10a \Rightarrow a=-2m/s^2$

$v_0=-4(-2) \Rightarrow v_0=8m/s$

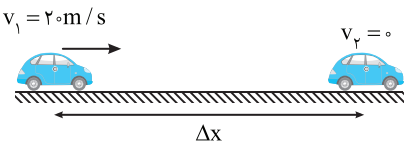
۴ معادلهٔ سرعت را نوشته، $t=16s$ را در آن قرار می‌دهیم.

$v=-2t+8 \Rightarrow v=-2\times16+8 \Rightarrow v=-24m/s \Rightarrow |v|=24m/s$

A ۳۵۵ ۳

سرعت اولیه برابر $v_1=72km/h=\frac{72}{3/6}=20m/s$ است. به کمک رابطهٔ مستقل از شتاب مسئله به‌راحتی قابل حل است.

$\Delta x=\frac{v_1+v_2}{2}\Delta t \Rightarrow \Delta x=\frac{20+0}{2}\times5 \Rightarrow \Delta x=50m$



A ۳۵۶ ۴

با استفاده از فرمول مستقل از زمان، شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$v_2=18km/h=5m/s, v_1=4m/s$

$v_2^2-v_1^2=2a(x_2-x_1) \Rightarrow 25-16=2a(19-10) \Rightarrow a=\frac{1}{2}m/s^2$

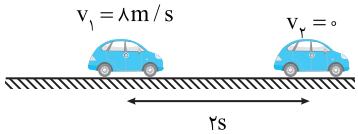
مکان متحرک در لحظهٔ $t=0$، $x_0=-6m$ است:

$v_1^2-v_0^2=2a\Delta x \Rightarrow 16-v_0^2=2(\frac{1}{2})(10-(-6)) \Rightarrow v_0^2=0 \Rightarrow v_0=0$

A ۳۵۷ ۲

متحرک ترمز کرده و در انتهای مسیر متوقف خواهد شد بنابراین در بازهٔ ۰ تا ۲s سرعت متحرک از $8m/s$ با شتاب ثابت به صفر می‌رسد از این‌رو به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب مسئله قابل حل است.

$\Delta x=\frac{v_1+v_2}{2}\Delta t \Rightarrow \Delta x=\frac{8+0}{2}\times2 \Rightarrow \Delta x=8m$



A ۳۵۸ ۳

۱ به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، شتاب حرکت متحرک را حساب می‌کنیم.

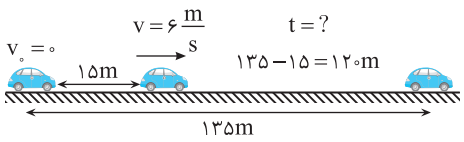
$v^2-v_0^2=2a\Delta x \Rightarrow (6)^2-0=2a\times15 \Rightarrow a=\frac{36}{30} \Rightarrow a=1/2m/s^2$

۲ در قسمت دوم مسیر، متحرک مسافت $135-15=120m$ را طی کرده است. زمان این قسمت را به کمک معادلهٔ جابه‌جایی - زمان به‌دست می‌آوریم. سرعت اولیهٔ این قسمت $6m/s$ است.

$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \Rightarrow 120=\frac{1}{2}\times1/2t^2+6t \Rightarrow 0/6t^2+6t-120=0$

$\xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{دو طرف را به }0/6} t^2+10t-200=0 \Rightarrow (t+20)(t-10)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} t=10s \\ t=-20s \text{ غ ق ق} \end{cases}$



B ۳۵۹ ۳

راه‌حل اول:

۱ مطابق شکل در مدت 2s آخر حرکت سرعت از v_1 به صفر می‌رسد. به کمک رابطهٔ مستقل از شتاب سرعت v_1 را حساب می‌کنیم.

$\Delta x=\frac{v+v_1}{2}\Delta t \Rightarrow 6=\frac{0+v_1}{2}\times2 \Rightarrow v_1=6m/s$

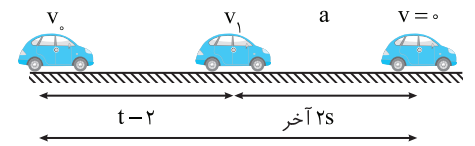
۲ شتاب حرکت خواهد شد: $a=\frac{v-v_1}{t} \Rightarrow a=\frac{0-6}{2}=-3m/s^2$

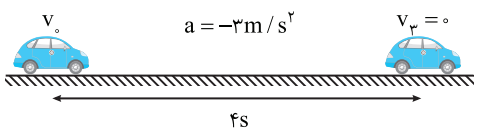
۳ سرعت لحظهٔ ترمز را به‌دست می‌آوریم:

$v=at+v_0 \Rightarrow 0=-3\times4+v_0 \Rightarrow v_0=12m/s$

۴ مسافت طی‌شده از لحظهٔ ترمز تا توقف برابر است با:

$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}t \Rightarrow \Delta x=\frac{0+12}{2}\times4 \Rightarrow \Delta x=24m$





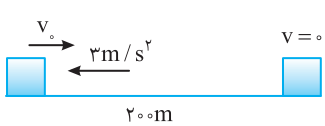
راه‌حل دوم: می‌توان فرض کرد که متحرک از حال سکون با همان شتاب به راه افتاده است و شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم. $\Delta x=\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 6=\frac{1}{2}a(2)^2 \Rightarrow a=3m/s^2$

جابه‌جایی در مدت 4s با شتاب $3m/s^2$ را حساب می‌کنیم:

$\Delta x=\frac{1}{2}at_{کل}^2=\frac{1}{2}\times3\times4^2 \Rightarrow \Delta x=24m$

B ۳۶۰ ۲

به جای آنکه مسیر توقف را بررسی کنیم، فرض می‌کنیم که متحرک از حال سکون با شتاب $3m/s^2$ شروع به حرکت می‌کند. سپس جابه‌جایی متحرک را در مدت این سه ثانیه به‌دست می‌آوریم. $\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \quad , \quad \Delta x=\frac{1}{2}(3)(9)=13/5m$



B ۳۶۱ ۲

خط فکری ۱۰۰m آخر مسیر را که متحرک در ۲s طی می‌کند یک مسیر مستقل فرض کنید که در ابتدای آن سرعت اولیهٔ متحرک v_1 است. سپس سرعت را در انتهای ۱۰۰ متر یعنی سرعت نهایی در (v_f) را به‌دست بیاورید و سرعت متوسط از $v_0=0$ تا v_f را حساب کنید.

۱ ۱۰۰m آخر با سرعت اولیه v_1 و در مدت ۲s با شتاب $2m/s^2$ طی می‌شود. بنابراین:

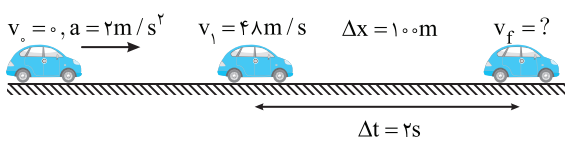
$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_1t\Rightarrow 100=\frac{1}{2}\times 2\times 2^2+2v_1\Rightarrow 100=(2)^2+2v_1\Rightarrow v_1=48m/s$$

۲ سرعت نهایی را از رابطهٔ مستقل از شتاب حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{v_1+v_f}{2}\Delta t\Rightarrow 100=\frac{48+v_f}{2}\times 2\Rightarrow v_f=52m/s$$

۳ متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده پس $v_i=0$ و سرعت نهایی $v_f=52m/s$ می‌باشد:

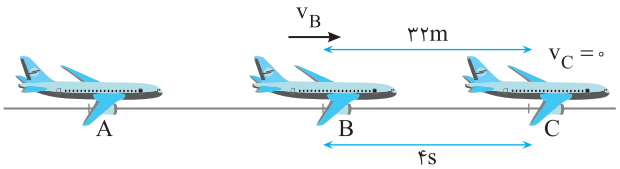
$$v_{av}=\frac{v_i+v_f}{2}=\frac{0+52}{2}=26m/s$$



B ۳۶۲ ۱

۱ ابتدا شکل ساده‌ای از مسأله را می‌کشیم. در قسمت دوم مسیر سرعت نهایی هواپیما صفر، جابه‌جایی آن 32m و مدت زمان حرکت 4s است، با توجه به این اطلاعات سرعت در نقطهٔ B را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{v_C+v_B}{2}\Delta t\Rightarrow 32=\frac{0+v_B}{2}\times 4\Rightarrow v_B=16m/s$$



۲ سرعت در نقاط B و C را داشته و مدت زمان حرکت بین این دو نقطه 4s است، شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{v_C-v_B}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{-16}{4}=-4m/s^2$$

۳ به کمک سرعت در نقاط A و C و شتاب به‌دست آمده و با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان مسافت کل طی‌شده توسط هواپیما را حساب می‌کنیم:

$$v_C^2-v_A^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-3600=2\times(-4)\Delta x\Rightarrow \Delta x=450m$$

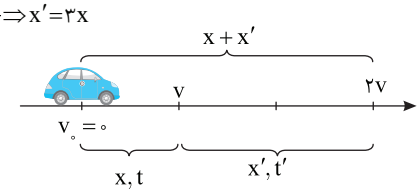
A ۳۶۳ ۲

۱ حرکت دارای شتاب ثابت است بنابراین در بازهٔ زمانی یکسان، تغییر سرعت یکسان است یعنی در مدت t سرعت از صفر به v رسیده است. بنابراین مدتی که سرعت از v به 2v می‌رسد نیز برابر $t'=t$ است.

۲ رابطهٔ مستقل از زمان را برای ۰ تا v و برای ۰ تا 2v را نوشته بر هم تقسیم کرده نسبت $\frac{x'}{x}$ را حساب می‌کنیم

$$\begin{cases} v^2-0=2ax & (1)\\ (2v)^2-0=2a(x+x') & (2)\end{cases}\xrightarrow{\text{دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم}}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{x}{x+x'}\Rightarrow x'=3x$$



B ۳۶۴ ۱

یادآوری سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی در حرکت با شتاب ثابت برابر سرعت لحظه‌ای در وسط آن بازه است.

۱ ابتدا معادله سرعت - زمان را به‌دست می‌آوریم.

$$x=\frac{3}{4}t^2-15t+30, x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow\frac{1}{2}a=\frac{3}{4}\Rightarrow a=\frac{3}{2}m/s^2, v_0=-15m/s$$

$$v=at+v_0\Rightarrow v=\frac{3}{2}t-15$$

۲ سرعت متوسط در ۵ ثانیه اول یعنی سرعت در لحظهٔ $t=2/5s$

$$v_1=\frac{3}{2}\times 2/5-15=\frac{15}{4}-15\Rightarrow v_1=\frac{-3\times 15}{4}m/s$$

۳ ۵ ثانیه سوم یعنی بازهٔ زمانی بین 10s تا 15s و سرعت متوسط در این بازه برابر سرعت لحظه‌ای در لحظهٔ $t=12/5s$ است.

$$v_2=\frac{3}{2}\times 12/5-15=\frac{3\times 25}{4}-15\Rightarrow v_2=\frac{75-60}{4}\Rightarrow v_2=\frac{15}{4}m/s$$

بنابراین $\frac{v_1}{v_2}=\frac{-\frac{3\times 15}{4}}{\frac{15}{4}}=-3$

روش دیگر: می‌توان جابه‌جایی در این دو بازه را به‌دست آورده برهم تقسیم کرد.

B ۳۶۵ ۱

روش اول: با توجه به معادلهٔ مکان - زمان $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ و داده‌های سؤال می‌توان نوشت:

$$x_1=\frac{1}{2}at_1^2+v_0t_1+x_0\xrightarrow{t_1=1s, x_1=3m}3=\frac{1}{2}a+v_0+x_0\quad (I)$$

$$x_2=\frac{1}{2}at_2^2+v_0t_2+x_0\xrightarrow{t_2=3s, x_2=11m}11=\frac{9}{2}a+3v_0+x_0\quad (II)$$

$$x_3=\frac{1}{2}at_3^2+v_0t_3+x_0\xrightarrow{t_3=5s, x_3=35m}35=\frac{25}{2}a+5v_0+x_0\quad (III)$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل دو معادلهٔ (I), (II)}}8=4a+2v_0,\xrightarrow{\text{تفاضل دو معادلهٔ (II), (III)}}24=8a+2v_0$$

حال با توجه به دو معادلهٔ $\begin{cases}8=4a+2v_0\\24=8a+2v_0\end{cases}$ مقدار a و v_0 را به‌دست می‌آوریم:

$$-16=-4a\Rightarrow a=4m/s^2,\ v_0=-4m/s$$

معادلهٔ سرعت - زمان خواهد شد: $v=at+v_0\Rightarrow v=4t-4$

لحظهٔ تغییر جهت، لحظه‌ای است که سرعت صفر شده و تغییر علامت می‌دهد. معادلهٔ سرعت - زمان $v=4t-4$ تابع درجهٔ یک است و در دو طرف ریشه‌اش تغییر علامت می‌دهد.

$$v=0\Rightarrow 4t-4=0\Rightarrow t=1s$$

روش دوم: **نکته** در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی برابر سرعت لحظه‌ای در وسط بازه است.

۱ سرعت متوسط را در بازهٔ زمانی 1s تا 3s که متحرک از مکان $x_1=3m$ تا $x_2=11m$ را طی می‌کند، به‌دست می‌آوریم که برابر سرعت لحظه‌ای در لحظهٔ $t=2s$ است.

$$v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\Rightarrow v_{av}=\frac{11-3}{3-1}\Rightarrow v_{av}=4m/s\Rightarrow v_{t=2s}=4m/s$$

۲ سرعت متوسط در بازهٔ زمانی 3s تا 5s که متحرک از مکان $x_2=11m$ و $x_3=35m$ را طی می‌کند برابر سرعت لحظه‌ای در لحظهٔ $t=4s$ است.

$$v_{av}=\frac{35-11}{5-3}\Rightarrow v_{av}=\frac{24}{2}=12m/s\Rightarrow v_{t=4s}=12m/s$$

۳ شتاب حرکت خواهد شد: $a=\frac{v-v_0}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{12-4}{4-2}\Rightarrow a=4m/s^2$

۴ به کمک معادلهٔ سرعت - زمان، سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

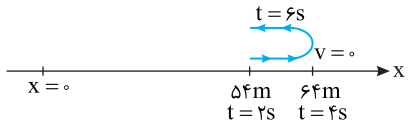
$$v=at+v_0\xrightarrow{t=2s,\ v=4m/s}4=2\times 4+v_0\Rightarrow v_0=-4m/s$$

۵ لحظهٔ تغییر جهت یعنی لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=4t-4\Rightarrow t=1s$$

B ۳۶۶ ۱

۱ مکان متحرکی در لحظه‌های t_1 و t_3 یکسان است، پس جابه‌جایی متحرک در بازهٔ ۲s تا ۶s صفر شده و سرعت متوسط در این بازه صفر است.



یادآوری در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی برابر سرعت متحرک در لحظهٔ وسط آن بازهٔ زمانی است.

وسط بازهٔ زمانی ۲s تا ۶s، لحظهٔ $\frac{۲+۶}{۲}=۴s$ است:

$$v_{av_{۲s\ تا\ ۶s}}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=۰\ ,\ v_{av_{۲s\ تا\ ۶s}}=v_{۴s}\Rightarrow v_{۴s}=۰$$

۲ در بازهٔ ۴s تا ۶s متحرک به اندازهٔ $\Delta x=x_۳-x_۲=-۱۰m$ جابه‌جا شده و سرعت در ابتدای بازه یعنی در لحظهٔ $t=۴s$ صفر است:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_{۰\ اولیه}t\xrightarrow[\Delta t=۶-۴=۲s]{v_{اولیه}=۰}-۱۰=\frac{۱}{۲}a\times(۲)^۲\Rightarrow a=-۵m/s^۲$$

یادآوری در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی برابر میانگین سرعت ابتدایی و انتهایی مسیر است:

$$v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}$$

۳ برای به‌دست آوردن سرعت متوسط در بازهٔ $t_1=۰$ تا $t_2=۱۰s$، ابتدا سرعت را در این دو لحظه حساب می‌کنیم:

$$v=at+v_۰\xrightarrow[v_{۴s}=۰;v_۰=?]{\Delta t=۴s,a=-۵m/s^۲}۰=(-۵)\times۴+v_۰\Rightarrow v_۰=۲۰m/s$$

$$v=at+v_۰\xrightarrow[v_۰=۲۰m/s;v_{۱۰s}=?]{\Delta t=۱۰s,a=-۵m/s}v_{۱۰s}=(-۵)\times۱۰+۲۰\Rightarrow v_{۱۰s}=-۳۰m/s$$

۴ حال سرعت متوسط را در ۱۰ ثانیه اول حرکت، حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{v_۰+v_{۱۰s}}{۲}=\frac{۲۰+(-۳۰)}{۲}=-۵m/s$$

بزرگی سرعت متوسط برابر $|\vec{v}_{av}|=۵m/s$ است.

B ۳۶۷ ۳

در حرکت با شتاب ثابت، سرعت لحظه‌ای در وسط بازه برابر سرعت متوسط در آن بازه است.

سرعت متوسط در بازهٔ ۱s تا ۳s را حساب می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{۲۰}{۲}=۱۰m/s\Rightarrow v_{t=۲s}=۱۰m/s$$

حال شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم. $a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۱۰-۰}{۲}\Rightarrow a=۵m/s^۲$

سرعت را در لحظه‌های ۳s و ۷s حساب کرده از فرمول مستقل از شتاب جابه‌جایی را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow\begin{cases}v_۱=۵\times۳+۰=۱۵m/s\\ v_۲=۵\times۷+۰=۳۵m/s\end{cases}$$

$$\Delta x=\frac{v_۲+v_۱}{۲}t\Rightarrow\Delta x=\frac{۳۵+۱۵}{۲}\times۴\Rightarrow\Delta x=۱۰۰m$$

بعداً یاد می‌گیرید که این تست رو با سطح زیر نمودار $v-t$ حل کنید.

B ۳۶۸ ۳

۱ سرعت اتومبیل پس از ترمز در طی x متر، از v به $\frac{v}{۲}$ رسیده، بنابراین طبق معادلهٔ مستقل از زمان داریم: (۱) $v_۲^۲-v_۱^۲=۲a\Delta x\Rightarrow(\frac{v}{۲})^۲-v^۲=۲ax\Rightarrow\frac{-۳}{۴}v^۲=۲ax$

۲ در کل مسیر ترمز گرفتن سرعت متحرک از v به صفر خواهد رسید بنابراین خواهیم داشت: (۲) $v_۲^۲-v_۱^۲=۲a\Delta x\Rightarrow۰^۲-v^۲=۲ax'\Rightarrow-v^۲=۲ax'$

۳ با تقسیم رابطه (۱) و (۲) دو برهم داریم: $\frac{(۱)}{(۲)}\Rightarrow\frac{\frac{-۳}{۴}v^۲}{-v^۲}=\frac{x}{x'}\Rightarrow x'=\frac{۴}{۳}x$

B ۳۶۹ ۳

جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده است و شتاب ثابت است، بنابراین جسم تغییر جهت نمی‌دهد، یعنی مسافت طی شده توسط جسم با جابه‌جایی جسم، یکسان است:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲\Rightarrow۲۱۶=\frac{۱}{۲}a(۱۲)^۲\Rightarrow a=۳m/s^۲$$

اختلاف زمانی داده شده در گزینه‌ها ۲s است که می‌توان آن‌ها را به صورت n تا n+۲ نوشت: $x_{n+۲}-x_n=۳۶\Rightarrow\frac{۳}{۲}(n+۲)^۲-\frac{۳}{۲}n^۲=۳۶\Rightarrow n=۵$

بنابراین بازهٔ زمانی مورد نظر ۵s تا ۷s است.

روش دیگر: شتاب را مطابق روش اول به‌دست می‌آوریم: $a=۳m/s^۲$

در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی، برابر میانگین سرعت ابتدا و انتهای آن بازه است. $v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}$

بازه‌های زمانی داده شده در گزینه‌ها همگی ۲s هستند، بنابراین سرعت متوسط در بازهٔ زمانی ۲s را به‌دست می‌آوریم (می‌خواهیم جابه‌جایی در این بازه ۳۶m باشد):

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۳۶}{۲}=۱۸\Rightarrow۱۸=\frac{v_۱+v_۲}{۲}$$

v_1 سرعت ابتدای بازه و v_2 سرعت انتهای آن است: $v_۲=a\times۲+v_۱$

$$v_۱+v_۲=۳۶\Rightarrow v_۱+(v_۱+۲a)=۳۶\Rightarrow۲v_۱+۶=۳۶\Rightarrow v_۱=۱۵m/s$$

$$v_۱=at+v_۰\Rightarrow۱۵=۳t+۰\Rightarrow t=۵s$$

بنابراین بازهٔ زمانی مورد نظر ۵s تا ۷s است.

B ۳۷۰ ۳

خط فکری در صورت مسئله، حرفی از زمان نیست بنابراین معادلهٔ مستقل از زمان اولین انتخاب است. برای AB و AC و DB معادلهٔ مستقل از زمان را برحسب a و ℓ بنویسید و مسئله را حل کنید.

۱ سرعت متحرک پس از طی مسافت ℓ با شتاب ثابت از $۵m/s$ به $۱۵m/s$ می‌رسد، بنابراین: $v_B^۲-v_A^۲=۲a\Delta x\Rightarrow۲۲۵-۲۵=۲a\ell\Rightarrow۱۰۰=a\ell$ (I)

۲ حال از A تا C متحرک با همان شتاب و با سرعت $v_A=۵m/s$ پس از مسافت $\frac{\ell}{۴}$ به نقطهٔ C رسیده بنابراین:

$$v_C^۲-v_A^۲=۲a\Delta x\Rightarrow v_C^۲-۲۵=۲a\frac{\ell}{۴}\Rightarrow v_C^۲-۲۵=\frac{a\ell}{۲}\quad(II)$$

۳ رابطهٔ (I) و (II) را بر هم تقسیم کنیم تا v_C را به‌دست بیاوریم.

$$\frac{۱۰۰}{v_C^۲-۲۵}=\frac{a\ell}{\frac{a\ell}{۲}}\Rightarrow v_C^۲=۷۵\Rightarrow v_C=۵\sqrt{۳}m/s$$

۴ متحرک از D تا B مسافت $\frac{\ell}{۴}$ را با همان شتاب طی کرده و در نقطهٔ B سرعتش به $۱۵m/s$ می‌رسد:

$$v_B^۲-v_D^۲=۲a\Delta x\Rightarrow۲۲۵-v_D^۲=۲a\frac{\ell}{۴}\xrightarrow{a\ell=۱۰۰}۲۲۵-v_D^۲=۵۰$$

$$\Rightarrow v_D^۲=۱۷۵\Rightarrow v_D=۵\sqrt{۷}m/s$$

B ۳۷۱ ۲

۱ بعد از این همه تست یاد گرفته‌ایم که در معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت ضریب $t^۲$ نصف شتاب $(\frac{۱}{۲}a)$ و ضریب t، سرعت اولیه است از این‌رو:

$$x=۲t^۲-۱۶t+۵\Rightarrow a=۴m/s^۲\ ,\ v_۰=-۱۶m/s$$

۲ بنابراین معادلهٔ سرعت - زمان و لحظهٔ تغییر جهت خواهد شد:

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=۴t-۱۶\xrightarrow{v=۰}۰=۴t-۱۶\Rightarrow t=۴s$$

۳ حال مکان متحرک را در لحظه تغییر جهت به‌دست می‌آوریم:

$$x'=۲(۴)^۲-۱۶(۴)+۵=-۲۷m$$

۴ بنابراین فاصلهٔ متحرک از $x=-۲m$ برابر است با:

$$|x'-x|=|-۲۷-(-۲)|=۲۵m$$

B ۳۷۲ ۳

در این مسئله شما با یک سؤال صرفاً ریاضی سروکار دارید و باید نامعادلهٔ زیر را حل کنید.

$$|x|\le ۸ \Rightarrow -۸\le ۲t^۲-۱۲t+۸\le ۸ \Rightarrow ۲t^۲-۱۲t\le ۰$$

$$t^۲-۶t\le ۰ \Rightarrow ۰<t<۶s$$

$$-۸\le ۲t^۲-۱۲t+۸ \qquad ۰\le ۲t^۲-۱۲t+۱۶ \Rightarrow t^۲-۶t+۸\ge ۰ \Rightarrow (t-۲)(t-۴)\ge ۰$$

$t\ge ۴s$ و $t\le ۲s$، اشتراک دو بازهٔ صفر تا ۶s و $t\le ۲s$ و $t\ge ۴s$ برابر ۴s می‌شود.

B ۳۷۳ ۲

خط فکری دو ثانیهٔ اول یعنی بازهٔ زمانی بین صفر تا ۲s و ثانیهٔ سوم یعنی بازهٔ زمانی در $t=۲s$ تا $t=۳s$، سرعت در لحظه‌های صفر، ۲s و ۳s را به‌دست بیاورید سپس به کمک رابطهٔ سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت $\left(v_{av}=\frac{v_۲+v_۱}{۲}\right)$، سرعت متوسط در دو ثانیهٔ اول و ثانیهٔ سوم را حساب کنید و تفاضل آن‌ها را برابر $۶m/s$ قرار دهید و مسئله را حل کنید.

۱ سرعت‌ها را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰ \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{t=۰} v_۱=v_۰ \\ \xrightarrow{t=۲s} v_۲=۲a+v_۰ \\ \xrightarrow{t=۳s} v_۳=۳a+v_۰ \end{cases}$$

۲ سرعت متوسط در ۲ ثانیهٔ اول خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}=\frac{v_۰+۲a+v_۰}{۲} \Rightarrow v_{av}=v_۰+a$$

۳ سرعت متوسط در ثانیهٔ سوم را به‌دست می‌آوریم.

$$v'_{av}=\frac{v_۲+v_۳}{۲}=\frac{۲a+v_۰+۳a+v_۰}{۲} \Rightarrow v'_{av}=\frac{۵}{۲}a+v_۰$$

۴ تفاضل دو سرعت متوسط را با توجه به فرض مسئله برابر $۶m/s$ قرار می‌دهیم.

$$v_{av}-v'_{av}=۶ \Rightarrow v_۰+a-\left(\frac{۵}{۲}a+v_۰\right)=۶ \Rightarrow -\frac{۳}{۲}a=۶ \Rightarrow a=-۴m/s^۲$$

B ۳۷۴ ۳

۱ حرکت دارای شتاب ثابت است و معادلهٔ داده شده در واقع رابطه‌ای بین سرعت و مکان، یعنی رابطهٔ مستقل از زمان است. دو طرف آن را به توان ۲ رسانده و با رابطهٔ مستقل از زمان حرکت با شتاب ثابت مقایسه کنیم:

$$|v_x|=\sqrt{۴\Delta x+۳۶} \Rightarrow v_x^۲-۳۶=۴\Delta x \xrightarrow{v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x}$$

$$v_۰^۲=۳۶ \Rightarrow v_۰=۶m/s \ , \ ۲a=۴ \Rightarrow a=۲m/s^۲$$

۲ اکنون با داشتن سرعت اولیه و شتاب، جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ اول خواهد شد:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t \Rightarrow \Delta x=\frac{۱}{۲}\times ۲\times (۲)^۲+۶\times ۲ \Rightarrow \Delta x=۱۶m$$

A ۳۷۵ ۳

یادآوری معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت $\left(x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\right)$ یک تابع درجه ۲ است و نمودار آن سهمی است. اگر ضریب $t^۲$ مثبت باشد یعنی شتاب مثبت باشد، دهانه نمودار رو به بالا و اگر منفی باشد دهانهٔ نمودار رو به پایین است.

با توجه به معادلهٔ $x=t^۲+۳t+۴$ خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}a=۱ \Rightarrow a=+۲m/s^۲ \ , \ v_۰=۳m/s \ , \ x_۰=۴m$$

شتاب مثبت است $a=۲m/s^۲$، بنابراین دهانه نمودار باید رو به بالا باشد، سرعت اولیه $+۳m/s$ است یعنی شیب خط مماس بر نمودار در $t=۰$ باید مثبت باشد و مکان اولیه $x=+۴m$ است، بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

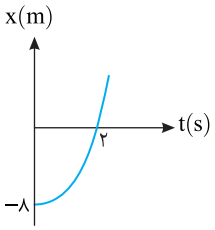
A ۳۷۶ ۳

در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۴s، بردار مکان متحرک در جهت محور x است:

$$v=\left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right|=\frac{۲۸}{۱۴}=۲m/s$$

A ۳۷۷ ۴

خط فکری به نمودار نگاه کنید با توجه به فرض مسئله $v_۰=۰$ بوده و در مدت ۲s متحرک جابه‌جایی $+۸m$ را طی کرده است بنابراین به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب، سرعت در لحظهٔ $t=۲s$ به راحتی به‌دست می‌آید.

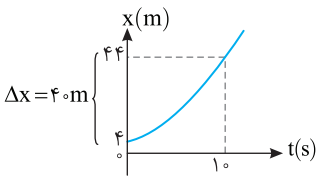


داده‌های روی نمودار را در معادلهٔ مستقل از شتاب جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t \Rightarrow ۸=\frac{v+۰}{۲}\times ۲ \Rightarrow v=۸m/s$$

B ۳۷۸ ۱

۱ نمودار سهمی است، بنابراین حرکت دارای شتاب ثابت است از طرفی شیب خط مماس در $t=۰$ برابر ۲ است یعنی سرعت اولیه جسم برابر $v_۰=۲m/s$ است به کمک معادله طلایی مستقل از شتاب، سرعت در لحظه $t=۱۰s$ را به‌دست می‌آوریم.



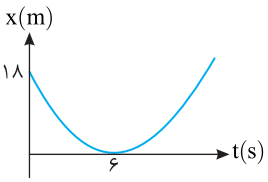
$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}t \Rightarrow ۴۰=\frac{v+۲}{۲}\times ۱۰ \Rightarrow v=۶m/s$$

۲ حرکت دارای شتاب ثابت است و شتاب متوسط در تمام بازه‌های زمانی یکسان است.

$$a_{av}=a=\frac{v-v_۰}{t}=\frac{۶-۲}{۱۰}=۰/۴m/s$$

A ۳۷۹ ۲

۱ در لحظهٔ $t=۶s$ نمودار بر محور زمان مماس شده است یعنی در این لحظه شیب خط مماس بر نمودار صفر بوده و سرعت در این لحظه صفر است.



۲ به کمک معادله مستقل از شتاب (فرمول طلایی) سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}t \Rightarrow -۱۸=\frac{۰+v_۰}{۲}\times ۶ \Rightarrow v_۰=-۶m/s$$

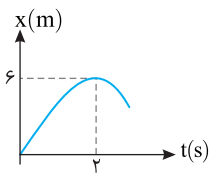
۳ شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$a=\frac{v-v_۰}{t} \Rightarrow a=\frac{۰-(-۶)}{۶} \Rightarrow a=۱m/s^۲$$

A ۳۸۰ ۳

یادآوری در نقاط کمینه و بیشینه نمودار مکان - زمان سرعت لحظه‌ای صفر است.

۱ سرعت در لحظهٔ $t=۲s$ برابر صفر است. به کمک معادله طلایی مستقل از شتاب، سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم.

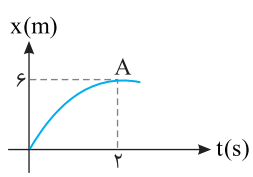


$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t \Rightarrow ۶=\frac{۰+v_۰}{۲}\times ۲ \Rightarrow v_۰=۶m/s$$

۲ شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{v-v_۰}{t} \Rightarrow a=\frac{۰-۶}{۲}=-۳m/s^۲$$

بازی با سؤال **شکل زیر که قسمتی از یک سهمی است، نمودار مکان- زمان یک متحرک را نشان می‌دهد. اگر نقطهٔ A ماکزیمم نمودار باشد، معادلهٔ سرعت- زمان متحرک کدام است؟**



۱) $v=۳-۶t$

۲) $v=۶+۳t$

۳) $v=۳+۶t$

۴) $v=۶-۳t$

پاسخ **نمودار مکان- زمان بخشی از یک سهمی است، بنابراین حرکت دارای شتاب ثابت است و به کمک رابطه‌های حرکت با شتاب ثابت پرسش را حل می‌کنیم. در نقطهٔ بیشینهٔ نمودار مکان- زمان، سرعت صفر است.**

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t\Rightarrow 6=\frac{0+v_0}{2}\times 2\Rightarrow v_0=6m/s$$

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-6}{2}=-3m/s^2$$

معادلهٔ سرعت- زمان خواهد شد: گزینهٔ ۴

$$v=at+v_0\Rightarrow v=-3t+6$$

B ۳۸۱ ۳

ثانیه ششم یعنی بازهٔ زمانی بین $t=5s$ تا $t=6s$، در لحظهٔ $t=4s$ و در مکان $x=8m$ سرعت متحرک صفر است و سرعت متحرک در $t_1=5s$ و $t_2=6s$ به‌ترتیب $v_1=a$ و $v_2=2a$ است. $(v=at+v_1)$ به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$v_2^2-v_1^2=2a\Delta x\Rightarrow 4a^2-a^2=2a\times(-6)$$

$$3a^2=-12a\Rightarrow a=-4m/s^2$$

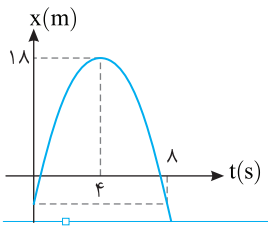
در لحظهٔ $t=4s$، سرعت صفر و مکان $8m$ است، بنابراین سرعت در لحظهٔ عبور از مکان $x=0$ (مبدأ محور) خواهد شد:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-v_0^2=2\times(-4)\times 8\Rightarrow v_0=8m/s$$

B ۳۸۲ ۳

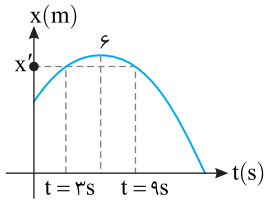
خط فکری شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ برابر سرعت است و می‌دانیم نمودار سهمی نسبت به رأس آن متقارن می‌باشد و در فاصله‌های زمانی یکسان نسبت به رأس اندازهٔ شیب‌ها یکسان است بنابراین شما باید به دنبال نقطه‌ای که با $t=0$ متقارن است بگردید.

به نمودار نگاه کنید رأس سهمی در $t=4s$ اتفاق افتاده و بنابراین لحظهٔ متقارن با صفر $(t=0)$ لحظهٔ $t=8s$ است و در این لحظه شیب خط مماس بر نمودار قرینهٔ شیب خط مماس در لحظهٔ $t=0$ بوده یعنی بزرگی سرعت در $t=8s$ با بزرگی سرعت در $t=0$ برابر است.



B ۳۸۳ ۱

نمودار سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس متقارن است. به نمودار نگاه کنید لحظهٔ رأس سهمی $t=6s$ است و لحظه‌های $t=3s$ و $t=9s$ در دو طرف آن متقارن هستند از این‌رو مکان متحرک در $t=3s$ و $t=9s$ که فاصلهٔ یکسانی از رأس سهمی $t=6s$ دارند با هم برابر است بنابراین جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی صفر است.

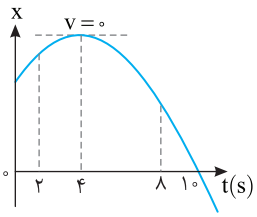


$$\Delta x=x_{(9)}-x_{(3)}=x'-x'=0$$

B ۳۸۴ ۱

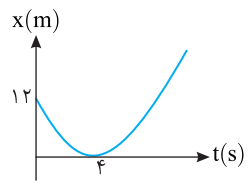
حرکت با شتاب ثابت است و در هر بازهٔ زمانی شتاب یکسان است، بنابراین:

$$a_{2\to 4s}=a_{4\to 8s}\xrightarrow{a=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}}\frac{0-v_1}{4-2}=\frac{v_2-0}{8-4}\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=2\Rightarrow\frac{|v_2|}{|v_1|}=2$$



A ۳۸۵ ۳

۱ در لحظهٔ $t=4s$ که نمودار مماس بر محور زمان است، سرعت لحظه‌ای متحرک صفر است از این‌رو به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب (فرمول طلایی)، سرعت اولیه به راحتی به‌دست می‌آید.



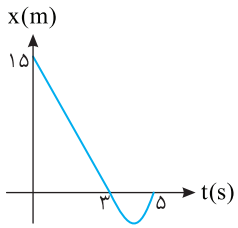
$$x=\frac{v+v_0}{2}t+x_0\Rightarrow 0=\frac{0+v_0}{2}\times 4+12\Rightarrow -2v_0=12\Rightarrow v_0=-6m/s$$

نکته هرگاه نمودار مکان - زمان سهمی باشد در لحظه‌هایی که در فاصلهٔ یکسان از رأس سهمی هستند، سرعت‌ها قرینه هم است.

۲ لحظهٔ $t=8s$ و لحظهٔ $t=0$ در فاصلهٔ یکسان از رأس سهمی قرار دارند و تندی لحظه‌ای در آن‌ها یکسان است بنابراین بدون استفاده از فرمول دیگری، می‌توان گفت سرعت در لحظهٔ $t=8s$ برابر $+6m/s$ است.

A ۳۸۶ ۳

خط فکری محل تقاطع نمودار مکان - زمان با محور قائم برابر مکان اولیه است. از طرفی مختصات هر نقطه روی نمودار باید در معادلهٔ مکان - زمان صدق کند بنابراین معادلهٔ مکان - زمان را بنویسید و مختصات نقاط روی نمودار را در آن قرار داده و مسئله را حل کنید.



با توجه به نمودار مکان اولیه $x_0=15m$ و در لحظه‌های $t=3s$ و $t=5s$ متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ گذشته است و مختصات این نقاط باید در معادله صدق کند از این‌رو:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow\begin{cases}t=3s\Rightarrow 0=\frac{9}{2}a+3v_0+15\\ t=5s\Rightarrow 0=\frac{25}{2}a+5v_0+15\end{cases}$$

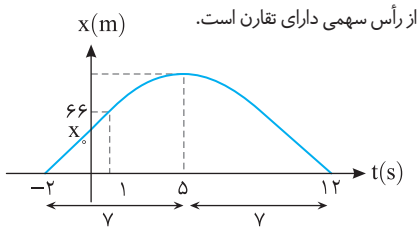
$$\Rightarrow a=2m/s^2, v_0=-8m/s$$

اکنون می‌توانیم معادلهٔ حرکت را بنویسیم:

$$x=\frac{1}{2}\times 2t^2-8t+15\Rightarrow x=t^2-8t+15$$

C ۳۸۷ ۳

نکته نمودار مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت یک سهمی است و سهمی نسبت به محور گذرا از رأس سهمی دارای تقارن است.



با توجه به نمودار ریشه‌های این سهمی $t=-2s$ و $t=12s$ است. بنابراین معادلهٔ آن خواهد شد:

$$x=A(t-12)(t+2)$$

باید مختصات $t=1s$ و $x=66m$ در این معادله صدق کند.

$$66=A(1-12)(1+2)\Rightarrow A=-2$$

معادله را کامل می‌کنیم.

$$x=-2(t-12)(t+2)$$

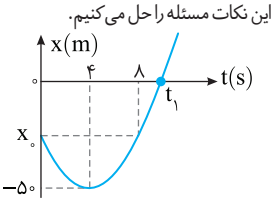
اکنون کافی است که در این معادله $t=0$ را قرار داده و مکان اولیه را حساب کنیم:

$$x_0=-2(0-12)(0+2)\Rightarrow x_0=48m$$

B ۳۸۸ ۱

خط فکری هرگاه سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی صفر شود، یعنی متحرک در ابتدا و انتهای بازه در یک مکان قرار دارد. از طرفی در حرکت با شتاب ثابت نمودار مکان - زمان سهمی است و سهمی نسبت به محور گذرا از رأس آن دارای تقارن است و در بازهٔ زمانی یکسان در دو طرف محور، مکان یکسان است. اکنون با توجه به این نکات مسئله را حل می‌کنیم.

۱ در مدت ۸s اول سرعت متوسط صفر است یعنی مکان متحرک در $t=0$ و $t=8s$ یکسان است و این دو لحظه نسبت به محور دارای تقارن بوده و مختصات رأس سهمی خواهد شد:



$$t=4s, x=-50m$$

۲ تندی در لحظهٔ t_1 برابر $20m/s$ بوده و از طرفی شیب خط مماس در این لحظه مثبت است یعنی سرعت متحرک در این لحظه $+20m/s$ است و در لحظهٔ $t=4s$ سرعت صفر است. در بازهٔ زمانی ۴s تا t_1 متحرک جابه‌جایی $\Delta x=+50m$ را طی

کرده است، بنابراین به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۲۰^۲-۰=۲a(+۵۰)\Rightarrow a=۴m/s^۲$$

۳ سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰\xrightarrow{t=۴s\,,\,v=۰}۰=۴\times۴+v_۰\Rightarrow v_۰=-۱۶m/s$$

یادآوری در حرکت با شتاب ثابت در یک بازهٔ زمانی معین، سرعت متوسط میانگین سرعت ابتدایی و انتهایی متحرک در آن بازه است.

$$v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}$$

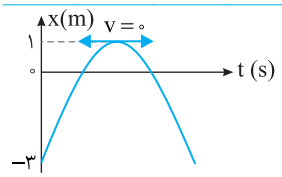
۴ سرعت متوسط در بازهٔ $t=۰$ تا $t=t_۱$ خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{-۱۶+۲۰}{۲}=۲m/s$$

۳۸۹ B **۴**

جهت دهانهٔ نمودار $x-t$ رو به پایین است بنابراین شتاب منفی است.

$$(a=-۲m/s^۲)$$



به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم. $[+۱-(-۳)]$

$$v^۲-v_۰^۲=۲a(x-x_۰)\Rightarrow ۰-v_۰^۲=۲(-۲)[+۱-(-۳)]$$

$$v_۰^۲=۱۶\Rightarrow v_۰=+۴m/s$$

بردار مکان وقتی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان $(x=۰)$ بگذرد.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow ۰=\frac{۱}{۲}(-۲)\times t^۲+۴t-۳\Rightarrow t^۲-۴t+۳=۰$$

$$(t-۱)(t-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۱s\\t=۳s\end{cases}$$

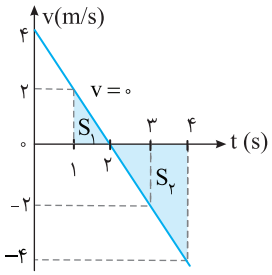
نمودار سرعت زمان را رسم می‌کنیم

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=-۲t+۴$$

$$v=۰\Rightarrow -۲t+۴=۰\Rightarrow t=۲s$$

$$t=۱s\Rightarrow v=-۲+۴=۲m/s$$

$$t=۴s\Rightarrow v=-۲\times۴+۴=-۴m/s$$



مسافت طی شده در بازهٔ $t=۱s$ تا $t=۴s$ را حساب می‌کنیم.

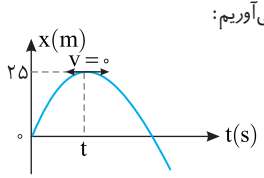
$$\ell=|S_۱|+|S_۲|=\frac{۱\times۲}{۲}+\frac{۲\times۴}{۲}=۵m$$

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۵}{۳}m/s$$

۳۹۰ B **۳**

یادآوری در نمودار مکان - زمان در نقاط کمینه و بیشینه، سرعت متحرک صفر است.

۱ تندی متحرک در مکان $x=۲۵m$ که رأس سهمی بوده برابر صفر است. با توجه به فرض سؤال در مکان $x=-۳۷۵m$ نیز تندی $۴۰m/s$ است، بنابراین به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:

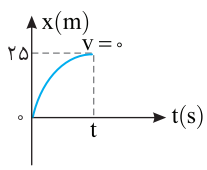


$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۱۶۰۰=۲a(x_۲-x_۱)$$

$$\Rightarrow ۱۶۰۰=۲a(-۳۷۵-۲۵)$$

$$۱۶۰۰=-۸۰۰a\Rightarrow a=-۲m/s^۲$$

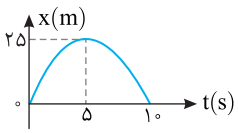
۲ در بازهٔ زمانی ۰ تا t متحرک با شتاب $a=-۲m/s^۲$ به اندازهٔ $\Delta x=۲۵m$ جابه‌جا شده و سرعت نهایی آن صفر شده است. ابتدا با توجه به رابطهٔ $v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x$ سرعت اولیه را حساب کرده و سپس به کمک معادلهٔ سرعت زمان t را به دست می‌آوریم:



$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\xrightarrow[v=۰]{a=-۲m/s^۲}-v_۰^۲=-۴\times۲۵\Rightarrow v_۰^۲=۱۰۰\Rightarrow v_۰=۱۰m/s$$

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=-۲t+۱۰\Rightarrow t=۵s$$

سهمی نسبت به محور قائم گذرا از رأس آن تقارن دارد از این رو متحرک در لحظهٔ $t=۱۰s$ از مکان $x=۰$ عبور کرده و در بازهٔ ۰ تا $۱۰s$ مکان متحرک مثبت بوده و بردار مکان در جهت محور x است.

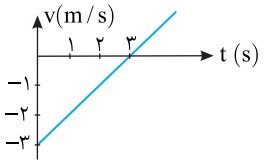


۳۹۱ B **۳**

شیب نمودار سرعت - زمان برابر شتاب است.

$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۰-(-۳)}{۳-۰}=۱m/s^۲$$

سرعت اولیهٔ متحرک $v_۰=-۳m/s$ می‌باشد.



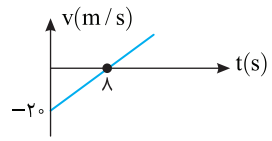
بنابراین معادلهٔ حرکت آن در SI به‌صورت زیر است:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}t^۲-۳t+x_۰$$

که در همهٔ گزینه‌ها مکان اولیه $x_۰=۰$ است و معادله به‌صورت $x=\frac{۱}{۲}t^۲-۳t$ خواهد بود.

۳۹۲ B **۳**

۱ داده‌های روی نمودار را در رابطهٔ شتاب قرار می‌دهیم و شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.



$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۰-(-۲۰)}{۸}$$

$$\Rightarrow a=۲/۵m/s^۲$$

۲ با توجه به فرض مسئله در لحظهٔ $t=۰$ مکان متحرک $x_۰=۰$ و با توجه به نمودار $v_۰=-۲۰m/s$ است بنابراین به کمک معادلهٔ مکان - زمان، مکان متحرک در لحظهٔ $t=۲۰s$ را حساب می‌کنیم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\times۲/۵\times۴۰۰+(-۲۰)\times۲۰+۰\Rightarrow x=۱۰۰m$$

۲۹۳ B **۲**

۱ شتاب حرکت جسم را به‌دست می‌آوریم.

$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{-۹-۱۲}{۲۱}\Rightarrow a=-۱m/s^۲$$

۲ سرعت در لحظهٔ $t=۶s$ و $t=۱۲s$ را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t_۱=۶s}v=-۱\times۶+۱۲\Rightarrow v_۱=+۶m/s\\\xrightarrow{t_۲=۱۲s}v=-۱\times۱۲+۱۲\Rightarrow v_۲=۰\end{cases}$$

۳ جابه‌جایی را به کمک معادله مستقل از شتاب به‌دست می‌آوریم.

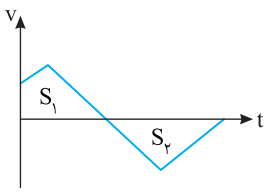
$$\Delta x=\frac{v_۱+v_۲}{۲}t\Rightarrow\Delta x=\frac{۶+۰}{۲}\times(۱۲-۶)\Rightarrow\Delta x=۱۸m$$

روش دیگر:

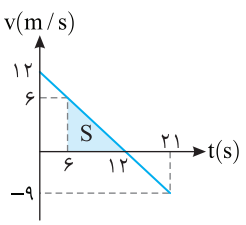
یادآوری سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان به ما جابه‌جایی و مسافت متحرک را می‌دهد.

جابه‌جایی $d=S_۱+S_۲+\cdots$

مسافت $\ell=|S_۱|+|S_۲|+\cdots$



سرعت در لحظهٔ $t=۶s$ و $t=۱۲s$ را به کمک شیب نمودار حساب می‌کنیم.



$$\frac{-۹-۱۲}{۲۱-۰}=\frac{v_۱-۱۲}{۶-۰}$$

$$\Rightarrow -۱=\frac{v_۱-۱۲}{۶}\Rightarrow v_۱=۶m/s$$

$$\frac{-۹-۱۲}{۲۱-۰}=\frac{v-۱۲}{۱۲-۰}$$

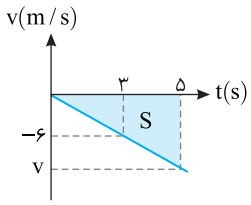
$$\Rightarrow -۱=\frac{v-۱۲}{۱۲}\Rightarrow v_۲=۰$$

سطح زیر نمودار از $t=۶s$ تا $t=۱۲s$ را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=S=\frac{۶\times۶}{۲}=۱۸m$$

B ۳۹۴ ۳

۱ به کمک شیب خط، سرعت در لحظهٔ $t=5s$ را به‌دست می‌آوریم.

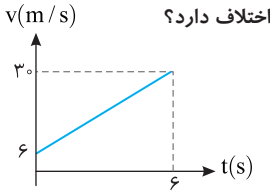


$$\frac{v-0}{5-0}=\frac{-6-0}{3-0}\Rightarrow v=-10m/s$$

۲ مسافت طی شده را به کمک سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان به‌دست می‌آوریم.

$$\ell=|S|=|\frac{-10\times5}{2}|=25m$$

بازی با سؤال نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی خط راست در حرکت است، مطابق شکل زیر است جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیهٔ سوم حرکت چند متر با جابه‌جایی در ۴s آغازین حرکت اختلاف دارد؟

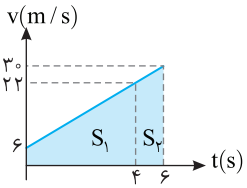


۱) ۲ متر، بیشتر
۲) ۲ متر، کمتر
۳) ۴ متر، بیشتر
۴) ۴ متر، کمتر

پاسخ ۱ ابتدا شتاب را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{30-6}{6}=4m/s^2$$

۲ ثانیهٔ سوم یعنی بازهٔ زمانی بین $t=4s$ تا $t=6s$، بنابراین سرعت در $t=4s$ را به‌دست می‌آوریم.



سرعت در $t=4s$ خواهد شد:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=4\times4+6=22m/s$$

اکنون سطح زیر نمودار در بازهٔ صفر تا ۴s و بازهٔ ۴s تا ۶s را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x_1=S_1=\frac{6+22}{2}\times4=56m\,,\,\Delta x_2=S_2=\frac{30+22}{2}\times2=52m$$

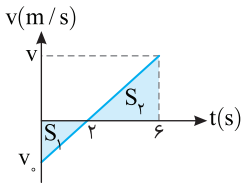
جابه‌جایی در ۲s ثانیهٔ سوم حرکت ۴ متر کمتر است.

$$56-52=4m$$

گزینهٔ ٤

B ۳۹۵ ۱

خط فکری هرگاه تندی در حال افزایش باید حرکت تندشونده و هرگاه تندی در حال کاهش باشد حرکت کندشونده است. از طرفی به کمک سطح زیر نمودار v−t می‌توان مسافت را حساب کرد. البته شما باید بین v_0 و v سرعت در هر لحظهٔ صفر و ۶s رابطه‌ای به‌دست بیاورید.



۱ در بازهٔ ۰ تا ۲s حرکت کندشونده و در بازهٔ ۲s تا ۶s حرکت تندشونده است.

۲ با توجه به شیب نمودار یک رابطهٔ ریاضی بین سرعت اولیه و سرعت در لحظهٔ $t=6s$ به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{v_0-0}{0-2}=\frac{v-0}{6-2}\Rightarrow v=-2v_0$$

۳ سطح S_1 و S_2 را بر حسب v_0 و v به‌دست آورده بر هم تقسیم می‌کنیم.

کندشونده $\ell_1=|S_1|=|\frac{v_0\times2}{2}|=v_0$ تندشونده $\ell_2=|S_2|=|\frac{v\times(6-2)}{2}|=2v$

$$\frac{\ell_2}{\ell_1}=|\frac{2v}{v_0}|=\frac{2\times2v_0}{v_0}=4$$

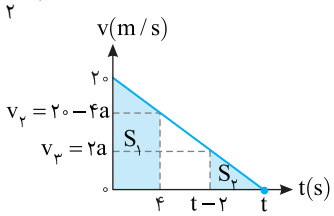
B ۳۹۶ ۲

نمودار سرعت - زمان خط راست است، پس شتاب حرکت ثابت است. اگر شتاب حرکت را a در نظر بگیریم در هر ثانیه سرعت به اندازهٔ a تغییر می‌کند. حال با توجه به شتاب a سرعت در لحظهٔ $t=4s$ و در لحظهٔ ۲s قبل از توقف را حساب می‌کنیم:

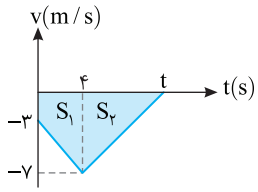
بنابراین بعد از ۴s به اندازهٔ ۴a از سرعت $20m/s$ کاسته شده و $v_2=20-4a$ می‌شود و ۲s قبل از t که سرعت صفر شده است. سرعت ۲a بوده یعنی $v_3=2a$ است.

با توجه به فرض مسئله:

$$\frac{S_1}{S_2}=36\Rightarrow\frac{\frac{20+20-4a}{2}\times4}{\frac{2a}{2}\times2}=36\Rightarrow40-4a=36\Rightarrow a=+1m/s$$



A ۳۹۷ ۲



سطح بین نمودار سرعت زمان و محور زمان برابر جابه‌جایی است، سطح S_1 و S_2 را به‌دست آورده با هم جمع کرده و برابر ۲۷m قرار می‌دهیم.

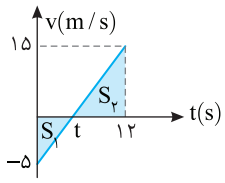
$$|d|=|S|=|S_1|+|S_2|=|\frac{-3+(-7)}{2}\times4|+|\frac{-7\times(t-4)}{2}|$$

$$+20+3/5t-14=27\Rightarrow t=6s$$

دقت کنید که جابه‌جایی منفی $(-27m)$ است.

A ۳۹۸ ۲

خط فکری شتاب برابر شیب نمودار سرعت - زمان است و در بازهٔ صفر تا ۱۲s شیب خط نمودار مثبت بنابراین شتاب مثبت است و باید مسافت طی شده در بازهٔ ۰ تا ۱۲s را به کمک سطح زیر نمودار حساب کنید.



۱ لحظهٔ t را به کمک شیب خط به‌دست می‌آوریم.

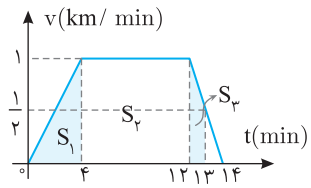
$$\frac{0-(-5)}{t-0}=\frac{15-0}{12-t}\Rightarrow3t=12-t\Rightarrow t=3s$$

۲ اکنون سطح‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$\ell=|S_1|+|S_2|\Rightarrow\ell=\frac{5\times3}{2}+\frac{15\times9}{2}\Rightarrow\ell=7/5+67/5=75m$$

B ۳۹۹ ۲

مسئله، جابه‌جایی را در مدت ۱۳ دقیقه می‌خواهد، بنابراین واحد سرعت را از کیلومتر بر ساعت به کیلومتر بر دقیقه تبدیل می‌کنیم:



$$\frac{60km}{h}=\frac{60km}{60min}=1\frac{km}{min}$$

با توجه به نمودار، سرعت در لحظه $t=13min$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{0-1}{14-12}=\frac{0-v_{t=13min}}{14-13}\Rightarrow\frac{-1}{2}=\frac{-v_{t=13min}}{1}\Rightarrow v_{t=13}=\frac{1}{2}km/min$$

مسافت طی شده برابر سطح زیر نمودار سرعت - زمان است:

$$\Delta x=S_1+S_2+S_3\Rightarrow S=\frac{1\times4}{2}+1\times8+\frac{(\frac{1}{2}+1)\times1}{2}=10/75km$$

B ۴۰۰ ۱

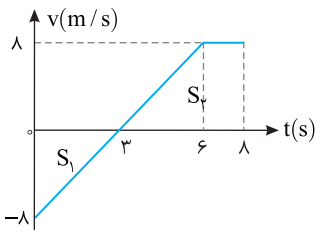
خط فکری بنا به تعریف، سرعت متوسط برابر جابه‌جایی تقسیم بر زمان جابه‌جایی است $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$. از طرفی جابه‌جایی برابر سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان است. شما باید به کمک سطح زیر نمودار جابه‌جایی را پیدا کنید و سرعت متوسط را بیابید.

۱ جابه‌جایی خواهد شد:

$$\Delta x=S=\frac{-8\times3}{2}+\frac{5+2}{2}\times8=-12+28=16m$$

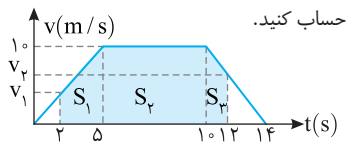
۲ سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{16}{8}=2m/s$$



B ۴۰۱ | ۳

خط فکری باید به کمک شیب خط، سرعت در لحظه‌های $t=۲s$ و $t=۱۲s$ را به‌دست بیاورید سپس به کمک سطح زیر نمودار، جابه‌جایی را حساب کرده و در آخر سرعت متوسط را حساب کنید.



۱ سرعت در لحظهٔ $t=۲s$:

$$\frac{۱۰-۰}{۵-۰}=\frac{۰-v_۱}{۲-۰}\Rightarrow v_۱=۴m/s$$

۲ سرعت در لحظهٔ $t=۱۲s$:

$$\frac{۰-۱۰}{۱۴-۱۰}=\frac{۰-v_۲}{۱۴-۱۲}\Rightarrow v_۲=۵m/s$$

۳ جابه‌جایی در بازه $t=۲s$ تا $t=۱۲s$:

$$\Delta x=S_۱+S_۲+S_۳\Rightarrow \Delta x=\frac{۱۰+۴}{۲}\times ۳+۱۰\times ۵+\frac{۱۰+۵}{۲}\times ۲$$

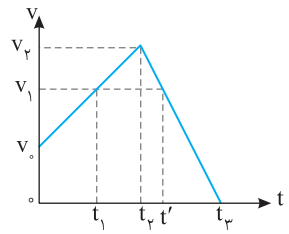
$$\Delta x=۲۱+۵۰+۱۵\Rightarrow \Delta x=۸۶m$$

۴ سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۸۶}{۱۲-۲}\Rightarrow v_{av}=۸/۶m/s$$

B ۴۰۲ | ۲

۱ تندی متوسط در بازهٔ زمانی ۰ تا $t_۱$ و $t_۱$ تا $t_۲$ و $t_۲$ تا $t_۳$ خواهد شد.



$$v_{av_{۰\to t_۱}}=\frac{v_۱+v_۰}{۲} \quad (۱)$$

$$v_{av_{t_۱\to t_۲}}=\frac{v_۱+v_۲}{۲} \quad (۲)$$

$$v_{av}=\frac{۰+v_۲}{۲} \quad (۳)$$

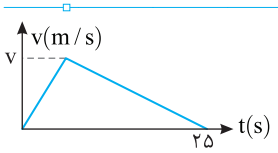
۲ با دقت به روابط (۱)، (۲) و (۳) و با توجه به اینکه $v_۲>v_۱>v_۰$ است. نتیجه می‌شود:

$$v_{av_{t_۱\to t_۲}}>v_{av_{۰\to t_۱}}>v_{av_۳}$$

۳ اما برای مقایسه $v_{av_{۰\to t_۳}}$ با $v_{av_{t_۱\to t_۲}}$ در یک بازهٔ زمانی طولانی $(۰\to t_۱, t'<t_۳)$ تندی متحرک از تندی در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ کوچک‌تر است در نتیجه تندی متوسط در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ بزرگ‌تر است. در نتیجه گزینهٔ (۲) درست است.

A ۴۰۳ | ۱

۱ سطح زیر نمودار برابر جابه‌جایی است از این‌رو:

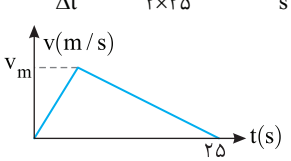


$$\Delta x=S=\frac{v\times ۲۵}{۲}$$

۲ سرعت متوسط $۱۰m/s$ است به کمک تعریف سرعت متوسط، v را حساب می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow ۱۰=\frac{v\times ۲۵}{۲\times ۲۵}\Rightarrow v=۲۰\frac{m}{s}$$

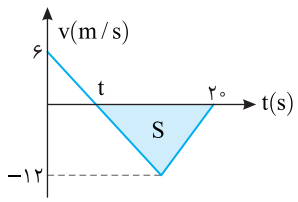
میانبر در نمودارهای سرعت - زمان که به شکل مثلث از مبدأ زمان شروع می‌شوند، همواره بیشینه سرعت دو برابر سرعت متوسط است.



$$v_m=۲v_{av}$$

B ۴۰۴ | ۲

خط فکری مدتی که متحرک در خلاف جهت محور x در حرکت است یعنی مدت زمانی که سرعت متحرک منفی است با توجه به شکل در بازه t تا ۲۰s سرعت منفی است.



شما باید سطح S را به‌دست بیاورید تا بتوانید سرعت متوسط را حساب کنید. نیازی به محاسبه t وجود ندارد و مسئله بسیار ساده است دقت کنید.

سطح S را حساب می‌کنیم.

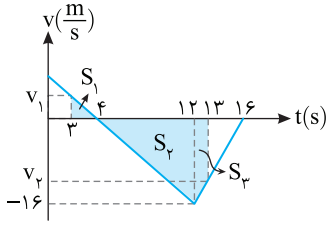
$$\ell=|S|=\frac{۱۲\times(۲۰-t)}{۲}\Rightarrow \ell=۶(۲۰-t)$$

تندی متوسط را به‌دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۶\times(۲۰-t)}{۲۰-t}\Rightarrow s_{av}=۶m/s$$

B ۴۰۵ | ۱

۱ به کمک شیب نمودار سرعت $v_۱$ در لحظه‌ای $t_۱=۳s$ و سرعت $v_۲$ در لحظهٔ $t_۲=۱۳s$ را حساب می‌کنیم.



$$v_۱:\frac{۰-v_۱}{۴-۳}=\frac{-۱۶-۰}{۱۲-۴}\Rightarrow v_۱=۲m/s$$

$$v_۲:\frac{۰+۱۶}{۱۶-۱۲}=\frac{v_۲+۱۶}{۱۳-۱۲}\Rightarrow v_۲=-۱۲m/s$$

۲ مسافت طی شده توسط متحرک در بازهٔ زمانی $t=۳s$ تا $t=۱۳s$ را به کمک سطح زیر نمودار حساب می‌کنیم.

$$\ell=|S_۱|+|S_۲|+|S_۳|\Rightarrow \ell=\frac{۲\times ۱}{۲}+\frac{۸\times ۱۶}{۲}+\frac{۱۶+۱۲}{۲}\times ۱$$

$$\Rightarrow \ell=۱+۶۴+۱۴\Rightarrow \ell=۷۹m$$

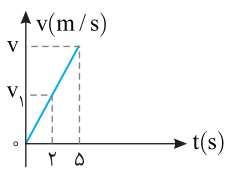
۳ تندی متوسط را به‌دست می‌آوریم:

$$S_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow S_{av}=\frac{۷۹}{۱۳-۳}\Rightarrow s_{av}=۷/۹m/s$$

B ۴۰۶ | ۲

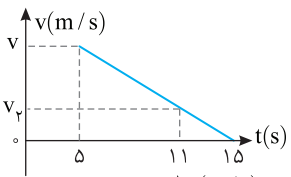
سرعت متحرک در لحظهٔ ۵s را v می‌گیریم.

۱ به کمک شیب نمودار، سرعت در $t=۲s$ و $t=۱۱s$ را حساب می‌کنیم.



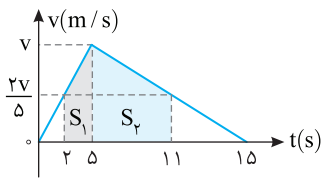
$$\frac{v-v_۱}{۵-۲}=\frac{v-۰}{۵-۰}\Rightarrow v_۱=\frac{۲v}{۵}$$

۲



$$\frac{۰-v}{۱۵-۵}=\frac{۰-v_۲}{۱۵-۱۱}\Rightarrow v_۲=\frac{۲v}{۵}$$

۳ نمودار را رسم می‌کنیم



۴ حال با توجه به سطح زیر نمودار $v-t$ که برابر جابه‌جایی است خواهیم داشت:

$$\Delta x=S_۱+S_۲\Rightarrow ۱۲۶=\frac{۳(\frac{۲v}{۵}+v)}{۲}+\frac{۶(\frac{۲v}{۵}+v)}{۲}$$

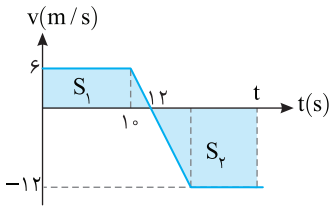
$$\Rightarrow ۱۲۶=۲/۱v+۴/۲v\Rightarrow ۱۲۶=۶/۳v\Rightarrow v=۲۰m/s$$

۵ به کمک شیب نمودار، سرعت در $t=۱۲s$ را به دست می‌آوریم.

$$\frac{۰-۲۰}{۱۵-۵}=\frac{۰-v_{t=۱۲s}}{۱۵-۱۲}\Rightarrow v_{t=۱۲s}=۶m/s$$

B ۴۰۷ ۲

خط فکری هنگامی که متحرک مجدداً از مبدأ حرکتش می‌گذرد، جابه‌جایی آن صفر است. از این‌رو باید لحظه‌ای را به‌دست آورد که سطح زیر نمودار برابر صفر شود در واقع باید در لحظهٔ فرضی t، سطح زیر نمودار S_1 و S_2 برابر و قرینه هم باشند.



قرار است سطح S_1 و S_2 هم‌اندازه باشد از این‌رو مسافت طی شده برابر است با:

$$\ell=|S_1|+|S_2|\Rightarrow|S_1|=|S_2|\Rightarrow\ell=2|S_1|$$

بنابراین کافی است سطح S_1 را به‌دست بیاورید و مقدار آن را دو برابر کنید. یعنی نیازی به یافتن لحظه t نداریم.

$$\ell=2S_1=2\times\frac{10+12}{2}\times6=132m$$

B ۴۰۸ ۴

خط فکری سرعت متوسط برابر جابه‌جایی تقسیم بر زمان جابه‌جایی است. از طرفی سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان با محور زمان برابر جابه‌جایی متحرک است در حالت کلی می‌توانید برای هر گزینه به کمک سطح زیر نمودار سرعت متوسط را به‌دست آورده با هم مقایسه کنید.

گزینهٔ (۱): حرکت با سرعت ثابت است: $v_{av_1}=v_1$

گزینهٔ (۲): $v_{av_2}=\frac{v_1t_1+\frac{3v_1+v_1}{2}t_1}{2t_1}=\frac{3v_1}{2}=1/5v_1$

گزینهٔ (۳): $v_{av_3}=\frac{v_1t_1+2v_1t_1+v_1t_1}{3t_1}=\frac{4}{3}v_1=1/33v_1$

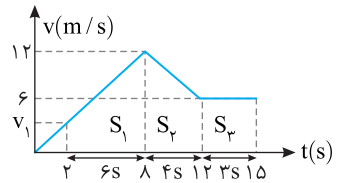
گزینهٔ (۴): $v_{av_4}=\frac{v_1t_1+2v_1t_1+3v_1\times2t_1}{4t_1}=\frac{9}{4}v_1=2/25v_1$

بنابراین گزینهٔ (۴) پاسخ درست است.

B ۴۰۹ ۱

۱ به کمک شیب خط سرعت در لحظهٔ $t=2s$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{12-0}{8-0}=\frac{v_1-0}{2-0}\Rightarrow v_1=3m/s$$



۲ جابه‌جایی متحرک را در بازهٔ $t=2s$ تا $t=15s$ به کمک سطح زیر نمودار به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=S_1+S_2+S_3\Rightarrow\Delta x=\frac{3+12}{2}\times6+(\frac{12+6}{2})\times4+6\times3$$

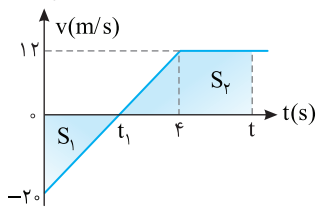
$$\Rightarrow\Delta x=45+36+18\Rightarrow\Delta x=99m$$

۳ اکنون می‌توان مکان متحرک در لحظهٔ $t=15s$ را حساب کرد:

$$\Delta\vec{x}=\vec{x}_2-\vec{x}_1\Rightarrow99\vec{i}=\vec{x}_2+6\vec{i}\Rightarrow x_2=93\vec{i}$$

B ۴۱۰ ۱

۱ به کمک شیب خط لحظهٔ t_1 که سرعت صفر می‌شود را حساب می‌کنیم.



$$\frac{-(-20)}{t_1-0}=\frac{12-0}{4-t_1}$$

$$\Rightarrow\frac{5}{t_1}=\frac{3}{4-t_1}\Rightarrow3t_1=20-5t_1$$

$$8t_1=20\Rightarrow t_1=2/5s$$

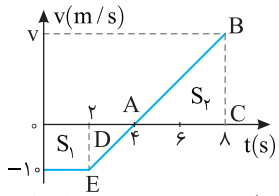
۲ قرار است متحرک به مکان شروع حرکتش برگردد یعنی جابه‌جایی متحرک صفر شود $(\Delta x=0)$، در واقع سطح زیر نمودار باید تا لحظهٔ موردنظر صفر شود. بنابراین مساحت S_1 و S_2 باید هم‌اندازه باشد.

$$|S_1|=|S_2|\Rightarrow|\frac{-20\times2/5}{2}|=|\frac{(t-2/5)+(t-4)}{2}\times12|$$

$$25=12t-39\Rightarrow12t=64\Rightarrow t=\frac{16}{3}$$

C ۴۱۱ ۲

۱ به کمک شیب خط EB سرعت در لحظهٔ $t=8s$ را به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{0-(-10)}{4-2}=\frac{v-0}{8-4}$$

$$\Rightarrow v=20m/s$$

۲ متحرک در مبدأ زمان از مبدأ مکان $x=0$ با سرعت منفی شروع به حرکت کرده و به مدت ۴s در حال دور شدن از مبدأ است. جابه‌جایی متحرک در این ۴s را به کمک سطح زیر نمودار حساب می‌کنیم.

$$S_1=\Delta x_1=(\frac{4+2}{2})(-10)=-30m$$

۳ در لحظهٔ $t=4s$، سرعت صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد و به سوی مبدأ بازمی‌گردد و در بازهٔ 4s تا 8s به اندازهٔ مقدار زیر در جهت مثبت محور حرکت می‌کند.

$$\Delta x_2=S_2=\frac{4\times20}{2}=40m$$

۴ پس متحرک در بازگشت از مبدأ گذشته و در $t=8s$ در مکان $x=-30+40=10m$ مبدأ است، پس در $t=4s$ فاصلهٔ متحرک از مبدأ از بقیهٔ لحظه‌ها بیشتر است.

B ۴۱۲ ۲

۱ به کمک سطح زیر نمودار سرعت زمان، مکان متحرک در بازهٔ اول حرکت یعنی صفر تا 6s را به دست می‌آوریم.

$$\Delta x_{0\to6}=S_1=\frac{18\times6}{2}=54m\Rightarrow x_6=54+10=64m$$

۲ شتاب حرکت در بازهٔ 6s تا 21s را حساب می‌کنیم.

$$a_{t>6s}=\frac{-12-18}{21-6}=\frac{-30}{15}=-2m/s^2$$

۳ در بازهٔ زمانی $t>6s$، سرعت اولیهٔ بازه $18m/s$، مکان اولیه $64m$ و شتاب $-2m/s^2$ است بنابراین به کمک معادلهٔ مکان - زمان خواهیم داشت:

$$x_{t>6s}=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow136=\frac{1}{2}(-2)t^2+18t+64$$

$$\Rightarrow t^2-18t+72=0\Rightarrow(t-6)(t-12)=0\Rightarrow\begin{cases}t=6s\\t=12s\end{cases}$$

این اعداد بعد از 6s است بنابراین زمان‌های اصلی خواهد شد:

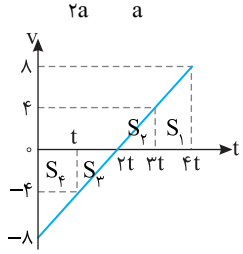
$$t_T=t+6\Rightarrow6+6=12s,12+6=18s$$

A ۴۱۳ ۴

در هر سه گزینه $v_0^2=(\pm4)^2=16$ و $v^2=(\pm8)^2=64$ بوده و با توجه به معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) $v^2-v_0^2=2a\Delta x$، جابه‌جایی در هر سه حالت برابر است با:

$$\Delta x=\frac{64-16}{2a}=\frac{24}{a}$$

روش استفاده از نمودار:



ابتدا دقت کنید که حرکت با شتاب ثابت است و در بازهٔ زمانی یکسان تغییرات سرعت یکسان است یعنی بازه زمانی تغییر سرعت از $-8m/s$ تا $-4m/s$ و از $-4m/s$ تا صفر و ... یکسان و برابر t است.

بزرگی جابه‌جایی برابر سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان است.

سطح S_1 و سطح S_4 با هم برابر است زیرا دو ذوزنقه با قاعده‌های برابر و ارتفاع t هستند و جابه‌جایی در گزینهٔ (۱) و (۳) برابر است.

$$|S_1|=|S_4|=\frac{8+4}{2}t=6t$$

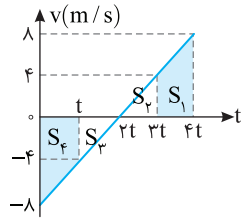
در تغییر سرعت از $-۴m/s$ تا $۸m/s$ سطح زیر نمودار خواهد شد.

$$(S_۱+S_۲)+S_۳=\frac{۸+۴}{۲}t+\frac{۴\times t}{۲}+\frac{-۴\times t}{۲}=۶t$$

بنابراین در سه حالت جابه‌جایی یکسان است. البته روش اول بسیار منطقی و کوتاه‌تر است.

A ۴۱۴ ۲

متحرک دارای شتاب ثابت است و در گزینهٔ (۱) و (۳) تغییر جهت نداده است اما در گزینهٔ (۲) سرعت ابتدا از $-۴m/s$ به صفر رسیده و سپس از صفر به $۸m/s$ می‌رسد. بنابراین مسافت طی شده در گزینهٔ (۱) و (۳) برابر و در گزینهٔ (۲) بیشتر از گزینه‌های (۱) و (۳) است. البته با رسم نمودار سرعت - زمان مسئله را واضح‌تر توضیح می‌دهیم.



۱ مسافت طی شده در بازهٔ زمانی تغییر سرعت از $۴m/s$ تا $۸m/s$ برابر سطح $|S_۱|$ است.

۲ مسافت طی شده در بازهٔ زمانی تغییر سرعت از $-۴m/s$ تا $۸m/s$ برابر مجموع سطح‌ها $|S_۱|+|S_۲|+|S_۳|$ است.

۳ مسافت طی شده در بازهٔ زمانی تغییر سرعت از $-۴m/s$ تا $-۸m/s$ برابر سطح $|S_۴|$ است.

بنابراین مسافت طی شده در گزینهٔ (۲) از بقیه حالت‌ها بیشتر است.

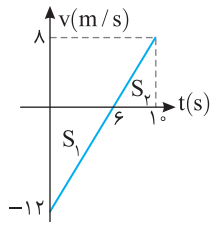
B ۴۱۵ ۴

ابتدا معادلهٔ سرعت زمان را به‌دست می‌آوریم.

$$x=t^۲-۱۲t+۲۰, x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$$

$$\frac{۱}{۲}a=۱\Rightarrow a=۲m/s^۲, v_۰=-۱۲m/s$$

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=۲t-۱۲$$

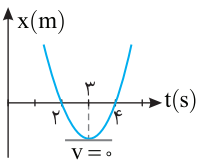


نمودار سرعت - زمان را در بازهٔ ۰ تا ۱۰s رسم می‌کنیم و به کمک سطح زیر نمودار مسافت را حساب می‌کنیم.

$$\ell=|S_۱|+|S_۲|=\frac{۶\times۱۲}{۲}+\frac{۴\times۸}{۲}=۵۲m$$

C ۴۱۶ ۳

معادلهٔ $x=t^۲-۶t+۸$ تابع درجه ۲ است، ریشه‌ها و مختصات رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم و نمودار مکان - زمان را رسم می‌کنیم.



$$x=t^۲-۶t+۸$$

$$\Rightarrow x=(t-۲)(t-۴)\xrightarrow{x=۰}t=۲s, t=۴s$$

رأس سهمی که جهت حرکت تغییر می‌کند برابر است با $t=-\frac{b}{۲a}=\frac{۶}{۲}=۳s$.

قبل از لحظهٔ $t=۳s$ متحرک در جهت منفی محور در حرکت است و در $t>۳s$ متحرک در جهت مثبت محور در حرکت است یعنی در تمام بازه‌های زمانی قبل از ۳s و تمام بازه‌های زمانی بعد از ۳s که تغییر جهت وجود ندارد تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط یکی است.

بازی با سؤال معادلهٔ مکان- زمان متحرکی در SI که روی خط راست حرکت می‌کند به‌صورت $x=t^۲-۳t$ است. مسافت طی شده در ثانیهٔ سوم چند برابر جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم است؟ خارج ریاضی - ۹۸

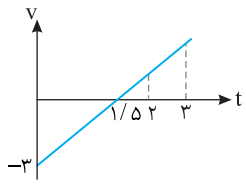
۱) ۱ ۲) −۱ ۳) ۱/۵ ۴) −۱/۰۵

پاسخ ابتدا لحظهٔ تغییر جهت یعنی لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود و علامت سرعت تغییر می‌کند را به‌دست می‌آوریم:

$$x=t^۲-۳t, x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow a=۲m/s^۲, v_۰=-۳m/s$$

$$\xrightarrow{v=at+v_۰}v=۲t-۳\xrightarrow{v=۰}۰=۲t-۳\Rightarrow t=۱/۵s$$

لحظهٔ تغییر جهت $t=۱/۵s$ است. اما ثانیهٔ سوم یعنی $t=۲s$ تا $t=۳s$ و در این بازه متحرک تغییر جهت نمی‌دهد بنابراین جابه‌جایی و مسافت در ثانیهٔ سوم با هم برابر است.



گزینهٔ ۱

B ۴۱۷ ۲

راه‌حل اول: با توجه به معادلهٔ مکان- زمان جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم یعنی جابه‌جایی در بازه $t=۲s$ تا $t=۳s$ برابر است با:

$$\Delta x=x_{t=۳s}-x_{t=۲s}=(۳)^۲-۳(۳)-(۲^۲-۳(۲))=۹-۹-۴+۶=۲m$$

با مقایسهٔ معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت و معادله داده شده در مسئله، سرعت اولیه و شتاب را مشخص می‌کنیم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰, x=t^۲-۳t\Rightarrow\frac{۱}{۲}a=۱\Rightarrow a=۲m/s^۲, v_۰=-۳m/s$$

ثانیه دوم یعنی بازهٔ $t=۱s$ تا $t=۲s$. مکان در این دو لحظه را به‌دست می‌آوریم:

$$t=۱s\Rightarrow x=۱-۳=-۲m\quad,\quad t=۲s\Rightarrow x=۴-۶=-۲m$$

بررسی می‌کنیم که آیا متحرک در این بازه تغییر جهت داده است؟ از این رو معادلهٔ سرعت- زمان را می‌نویسیم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$v=۲t-۳\xrightarrow{v=۰}۲t-۳=۰\Rightarrow t=۱/۵s$$

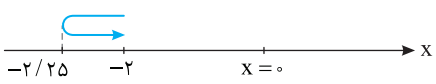
$$x=t^۲-۳t\Rightarrow x=(۱/۵)^۲-۳(۱/۵)=۲/۲۵-۴/۵=-۲/۲۵m$$

اکنون مسیر حرکت را رسم می‌کنیم.

بنابراین:

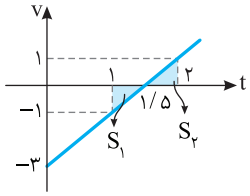
$$\ell=۰/۲۵+۰/۲۵=۰/۵m$$

$$\frac{\ell}{\Delta x}=\frac{۰/۵}{۲}=\frac{۱}{۴}$$



راه‌حل دوم:

بهترین روش برای حل مسائل مربوط به مسافت طی شده رسم نمودار سرعت - زمان است. مسافت طی شده برابر مجموع مساحت‌های زیر نمودار $v-t$ است، بنابراین ابتدا نمودار معادلهٔ $v=۲t-۳$ را رسم می‌کنیم.



در ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ $t=۱s$ تا $t=۲s$، سرعت این دو لحظه را روی نمودار مشخص کرده و مساحت مثلث‌های $S_۱$ و $S_۲$ را به‌دست می‌آوریم و با هم جمع می‌کنیم.

$$v=۲t-۳\begin{cases}\xrightarrow{t=۱s}v_۱=-۱m/s\\ \xrightarrow{t=۲s}v_۲=۱m/s\end{cases}$$

$$\ell=|S_۱|+|S_۲|\Rightarrow\ell=\frac{۱\times۰/۵}{۲}+\frac{۱\times۰/۵}{۲}=۰/۵m$$

بازی با سؤال معادلهٔ مکان - زمان متحرکی در SI به صورت $x=t^۲-۸t+۱۵$ است، مسافت طی شده در مدت صفر تا ۵s چند متر است؟

۱) صفر ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۶

پاسخ ابتدا معادلهٔ سرعت زمان را به‌دست می‌آوریم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰, x=t^۲-۸t+۱۵$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}a=۱\Rightarrow a=۲m/s^۲, v_۰=-۸m/s^۲\Rightarrow v=۲t-۸$$

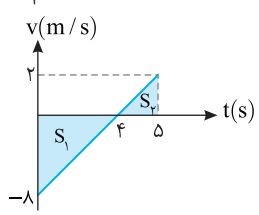
نمودار سرعت زمان را رسم می‌کنیم.

$$v=۲t-۸\xrightarrow{v=۰}t=۴s$$

سرعت در $t=۵s$ برابر است با:

$$v=۲\times۵-۸=۲m/s$$

اکنون قدر مطلق سطح‌ها را با هم جمع می‌کنیم.



$$\ell=S_۱+S_۲=\frac{۸\times۴}{۲}+\frac{۲\times۱}{۲}=۱۶+۱=۱۷m$$

گزینهٔ ۳

B ۴۱۸ ۳

۱ ابتدا لحظهٔ تغییر جهت را حساب می‌کنیم. $v=0\Rightarrow -2t+8=0\Rightarrow t=4s$

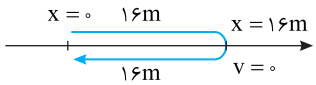
۲ مکان اولیه را به دلخواه مبدأ می‌گیریم و مکان تغییر جهت را به‌دست می‌آوریم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow x=\frac{1}{2}(-2)\times(4)^2+8\times4=16m$$

۳ در لحظهٔ $t=8s$ نیز مکان را به‌دست می‌آوریم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow x=\frac{1}{2}(-2)(8)^2+8\times8=0$$

۴ با توجه به نمودار روبه‌رو مسافت طی شده برابر است با:

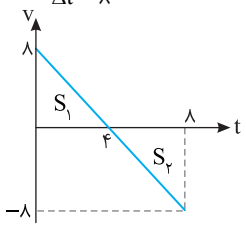


$\ell=16+16=32m$

۵ تندی متوسط خواهد شد: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{32}{8}=4m/s$

روش بهتر رسم نمودار سرعت - زمان:

سرعت در لحظه صفر و $8s$ و لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود را حساب کرده و نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم و به کمک سطح زیر نمودار تندی را به‌دست می‌آوریم.



$$v=-2t+8\begin{cases}t=0\rightarrow v=+8m/s\\ v=0\rightarrow 0=-2t+8\Rightarrow t=4s\\ t=8s\rightarrow v=-2\times8+8=-8m/s\end{cases}$$

مسافت طی شده برابر است با: $\ell=|S_1|+|S_2|=\frac{8\times4}{2}+\frac{8\times4}{2}=32m$

تندی متوسط خواهد شد: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{32}{8}=4m/s$

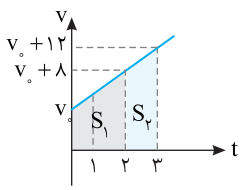
B ۴۱۹ ۲

خط فکری شتاب حرکت مثبت و با توجه به صورت سؤال متحرک در جهت محور x در حال حرکت بوده پس سرعت نیز مثبت است. حرکت تندشونده $(av>0)$ با شتاب ثابت بوده و تغییر جهت نداریم، بنابراین مسافت و جابه‌جایی با هم برابر است.

۱ سرعت در لحظهٔ $t=2s$ و $t=3s$ خواهد شد:

$$v=at+v_0\begin{cases}t=2s\Rightarrow v=8+v_0\\ t=3s\Rightarrow v=12+v_0\end{cases}$$

۲ نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم.



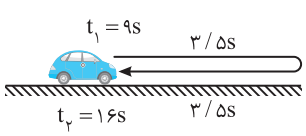
۳ با توجه به فرض مسئله:

$$S_1-S_2=4\Rightarrow\frac{v_0+v_0+8}{2}\times2-\frac{v_0+8+v_0+12}{2}\times1=4$$

$$2v_0+8-2(v_0+10)=4\Rightarrow v_0=6m/s$$

B ۴۲۰ ۲

۱ جابه‌جایی متحرک روی محور xها در بازهٔ $t_1=9s$ تا $t_2=16s$ صفر شده است، یعنی متحرک یک مسیر رفت و برگشت را طی کرده است. از طرفی شتاب ثابت است، بنابراین مسیر رفت و برگشت قرینه هستند و دقیقاً وسط بازهٔ زمانی یعنی $\frac{9+16}{2}=12/5s$ متحرک متوقف شده و برمی‌گردد، یعنی متحرک با شتاب $4m/s^2$ در مدت $12/5-9=3/5s$ متوقف شده و برمی‌گردد.

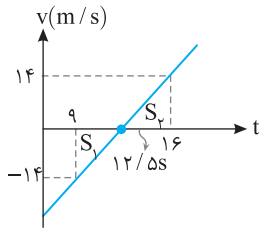


$t_{\text{تغییرجهت}}=\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{25}{2}=12/5s$

۲ سرعت در لحظهٔ $t=9s$ و $t=16s$ هم‌اندازه است. سرعت در این دو لحظه را به‌دست می‌آوریم.

$$v_2=at+v_1\begin{cases}\xrightarrow[v_2=0]{9s\text{ تا }12/5s} 0=4\times3/5+v_1\Rightarrow v_1=-14m/s\\ \xrightarrow[12/5s\text{ تا }16s]{v_2=0} v_3=4\times3/5+v_2\Rightarrow v_3=14m/s\end{cases}$$

۳ نمودار سرعت زمان را رسم می‌کنیم. حال با استفاده از سطح زیر نمودار مسافت را به دست می‌آوریم:



$$S_1=\frac{-14\times(12/5-9)}{2}=-24/5m$$

$$S_2=\frac{14\times(16-12/5)}{2}=24/5m$$

$$\ell=|S_1|+|S_2|\Rightarrow\ell=49m$$

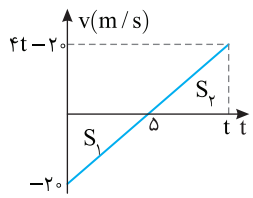
۴ تندی متوسط را به دست می‌آوریم: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{49}{16-9}=\frac{49}{7}=7m/s$

B ۴۲۱ ۳

خط فکری مسافت طی شده متحرک با شتاب ثابت $a=4m/s^2$ در یک بازهٔ زمانی $38/8s$ است. سرعت اولیه که در خلاف جهت محور است برابر $-20m/s$ بوده و متحرک در این لحظه از مبدأ مکان $(x_0=0)$ می‌گذرد. بنابراین به نظر می‌رسد با نوشتن معادله سرعت - زمان و رسم نمودار سرعت - زمان به کمک سطح زیر نمودار می‌توانند لحظه‌ای که مسافت طی شده به $38/8m$ می‌رسد را به‌دست آورد.

۱ معادلهٔ سرعت - زمان را می‌نویسیم: $v=at+v_0\Rightarrow v=4t-20$

۲ نمودار را رسم می‌کنیم.



$v=0\Rightarrow 4t-20=0\Rightarrow t=5s$

۳ با توجه به فرض مسئله، مسافت طی شده برابر است با:

$$\ell=|S_1|+|S_2|\Rightarrow 38/8=\left|\frac{-20\times5}{2}\right|+\left|\frac{(4t-20)(t-5)}{2}\right|$$

$$338=(2t-10)(t-5)\Rightarrow338=2(t-5)(t-5)$$

$$169=(t-5)^2\Rightarrow t-5=13\Rightarrow t=18s$$

۴ تندی در لحظهٔ $t=18s$ خواهد شد: $v=4t-20\Rightarrow v=4\times18-20=52m/s$

B ۴۲۲ ۴

۱ ابتدا به کمک معادله مکان - زمان سرعت اولیه را به دست می‌آوریم.

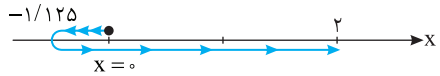
$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow2=\frac{1}{2}\times4\times(2)^2+2v_0\Rightarrow v_0=-3m/s$$

۲ اکنون لحظه و مکان تغییر جهت متحرک را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0\Rightarrow v=4t-3\xrightarrow{v=0}t=\frac{3}{4}s$$

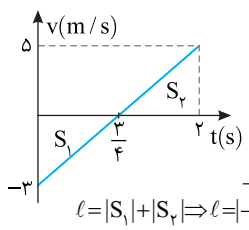
$$x=\frac{1}{2}\times4\times(\frac{3}{4})^2-3(\frac{3}{4})\Rightarrow x=\frac{9}{8}-\frac{9}{4}=-\frac{9}{8}m=-1/125m$$

۳ با توجه به شکل مسافت طی‌شده خواهد شد. $\ell=1/125+1/125+2=4/25m$



روش رسم نمودار:

نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم.



$v=4t-3\xrightarrow{t=1s}v=5m/s$

مسافت طی شده برابر است با:

$$\ell=|S_1|+|S_2|\Rightarrow\ell=\left|\frac{-3\times\frac{3}{4}}{2}\right|+\left|\frac{5\times(2-\frac{3}{4})}{2}\right|\Rightarrow\ell=\frac{9}{8}+\frac{25}{8}\Rightarrow\ell=\frac{34}{8}$$

$$\Rightarrow\ell=4/25m$$

B ۴۲۳ ۱

خط فکری برای به‌دست آوردن تندی متوسط $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}$ باید ابتدا مسافت طی‌شده را حساب کنیم که بهتر است مسافت را به کمک نمودار $v-t$ به‌دست بیاوریم.

۱ معادلهٔ مکان - زمان متحرک به صورت تابع درجهٔ دوم است، پس حرکت متحرک با شتاب ثابت بوده و معادلهٔ آن به صورت $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ است:

$$\begin{cases} x=3t^2-12t+9 \\ x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a=3\Rightarrow a=6m/s^2 \\ v_0=-12m/s \end{cases}$$

۲ معادلهٔ سرعت - زمان متحرک را می‌نویسیم: $v=at+v_0 \Rightarrow v=6t-12$

لحظهٔ صفر شدن سرعت را حساب می‌کنیم. $v=6t-12 \xrightarrow{v=0} 0=6t-12\Rightarrow t=2s$

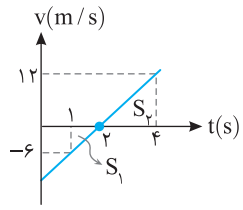
سرعت در لحظات ۱s و ۴s را به‌دست می‌آوریم:

$$v=6t-12\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{t=1s} v=6-12\Rightarrow v=-6m/s \\ \xrightarrow{t=4s} v=24-12\Rightarrow v=12m/s \end{cases}$$

۳ نمودار سرعت زمان را رسم می‌کنیم.

۴ با سطح زیر نمودار $v-t$ مسافت طی‌شده در بازهٔ ۱s تا ۴s را حساب می‌کنیم:

$$\ell=|S_1|+|S_2| \Rightarrow \ell=\frac{6\times1}{2}+\frac{2\times12}{2}=15m$$

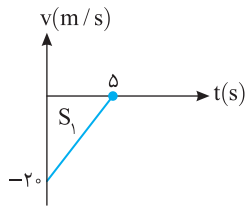


۵ تندی متوسط را حساب می‌کنیم:

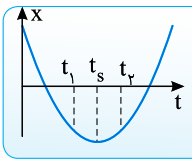
$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{15}{4-1}\Rightarrow s_{av}=\frac{15}{3}=5m/s$$

A ۴۲۴ ۳

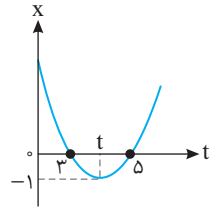
۱ در لحظه‌های $t=3s$ و $t=5s$ متحرک از مبدأ گذشته و در لحظه تغییر جهت (رأس سهمی $x-t$) مکان متحرک منفی بوده پس نمودار $x-t$ حرکت تقریباً به صورت زیر است.



یادداشت ریاضی در نمودارهای سهمی مانند نمودار $x-t$ در حرکت با شتاب ثابت، رأس نمودار محور تقارن است بنابراین: $t_s=\frac{t_1+t_2}{2}$



۲ با توجه به یادداشت ریاضی بالا لحظهٔ t در نمودار $x-t$ برابر است با: $t=\frac{3+5}{2}=4s$



۳ با توجه به نمودار در $t=4s$ سرعت متحرک صفر شده و در بازهٔ $t=4s$ تا $t=5s$ متحرک به اندازهٔ $\Delta x=0-(-1)=1m$ جابه‌جا می‌شود. شتاب متحرک را با توجه به این اطلاعات حساب می‌کنیم:

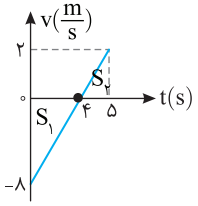
$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_1t \xrightarrow[\Delta t=1s]{v_1=0} 1=\frac{1}{2}a\Rightarrow a=2m/s^2$$

۴ شتاب متحرک $2m/s^2$ و در $t=4s$ سرعت متحرک صفر شده است، با توجه به این اطلاعات سرعت اولیه و سرعت در $t=5s$ را حساب می‌کنیم:

$t_2=4s\ ,t_1=0$: $v_2=at+v_1 \xrightarrow[v_2=0]{\Delta t=4s} 0=2\times4+v_1\Rightarrow v_1=-8m/s$

$t_3=5s\ ,t_2=4s$: $v_3=at+v_2 \xrightarrow[v_2=0]{\Delta t=1s} v_3=2\times1+0\Rightarrow v_3=2m/s$

۵ برای به‌دست آوردن تندی متوسط نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم تا با استفاده از سطح زیر نمودار مسافت به‌دست آید:



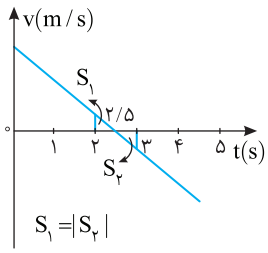
$$\ell=|S_1|+|S_2|$$

$$\Rightarrow \ell=\frac{4\times8}{2}+\frac{1\times2}{2}=16+1=17m$$

۶ تندی متوسط برابر است با: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{17}{5}m/s$

A ۴۲۵ ۳

خط فکری با رسم نمودار $v-t$ متحرک، وضعیت حرکت را بررسی می‌کنیم. برای این منظور با توجه به منفی‌بودن شتاب، شیب نمودار منفی خواهد بود. از طرفی چون جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم (۲s تا ۳s) حرکت صفر است، یعنی در نیمی از آن جابه‌جایی مثبت و در نیمی از آن جابه‌جایی منفی است بنابراین مطابق شکل مقابل باید در لحظهٔ $t=\frac{2+3}{2}=2/5s$ متحرک تغییر جهت داده باشد تا سطح زیر نمودار در بازه‌های ۲s تا ۲/۵s و ۲/۵s تا ۳s برابر باشد، زیرا مجموع جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم صفر است.



$S_1=|S_2|$

نکته در حرکت شتاب ثابت که مسافت و یا تندی خواسته می‌شود باید نمودار $v-t$ را رسم کرده و از روی سطح زیر نمودار مسافت را حساب کنید.

تندی متحرک در $t=2/5s$ صفر شده و شتاب حرکت $a=-4m/s^2$ است. برای رسم نمودار $v-t$ و محاسبهٔ مسافت در بازهٔ $t_1=2s$ تا $t_2=4s$ باید تندی در $t=2s$ و $t=4s$ حساب شود:

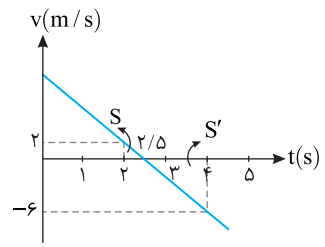
$$\begin{cases} t_1=2/5s, v_1=0 \\ a=-4m/s^2 \\ t_2=4s \end{cases} \Rightarrow v_2=a\Delta t+v_1 \xrightarrow{\Delta t=t_2-t_1=1/5s}$$

$$v_2=-4\times1/5+0\Rightarrow v_2=-6\ m/s$$

$$\begin{cases} t_1=2s, v_1=? \\ a=-4m/s^2 \\ t_2=2/5s, v_2=0 \end{cases} \Rightarrow v_2=a\Delta t+v_1 \xrightarrow{\Delta t=t_2-t_1=0/5s}$$

$$0=-4\times0/5+v_1\Rightarrow v_1=2\ m/s$$

نمودار $v-t$ را رسم کرده و سطح زیر نمودار بین ثانیه‌های 2s تا 2/5s و 2/5s تا 4s را حساب کرده



$$S=\frac{0/5\times2}{2}=0/5m$$

$$|S'|=\frac{1/5\times6}{2}=4/5m$$

مجموع قدر مطلق سطح زیر نمودار $v-t$ برابر مسافت طی‌شده است:

$$\ell=S+|S'|\Rightarrow \ell=0/5+4/5=5m$$

میانبر در حرکت با شتاب ثابت اگر جابه‌جایی یا سرعت متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2 صفر شود، آن‌گاه در لحظهٔ $t=\frac{t_1+t_2}{2}$ متحرک تغییر جهت داده و تندی آن صفر می‌شود.

بازی با سوال **متحرکی با شتاب ثابت در مبدأ زمان با سرعت $18m/s$ روی خط راست، در حرکت بوده و سرعت متوسط متحرک در ثانیهٔ پنجم حرکت برابر با صفر است. تندی متوسط متحرک در بازهٔ $t=0$ تا $t=10s$ چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۱۰/۱ ۲) ۱۰۱ ۳) ۲۰ ۴) ۲۰/۱

پاسخ **نکته** هرگاه در حرکت با شتاب ثابت در یک بازهٔ زمانی جابه‌جایی و یا سرعت متوسط صفر شود، در لحظهٔ وسط بازه زمانی سرعت متحرک صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد.

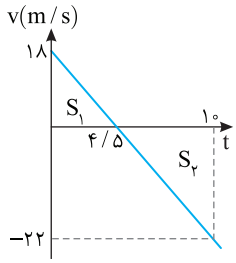
۱ در ثانیهٔ پنجم بین بازهٔ زمانی $t=۴s$ تا $t=۵s$ سرعت متوسط صفر شده است. بنابراین در لحظهٔ $t=۴/۵s$ سرعت متحرک صفر شده و تغییر جهت می‌دهد. سرعت اولیه $v_۰=۱۸m/s$ و شتاب ثابت است. شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰ \Rightarrow ۰=a\times ۴/۵+۱۸ \Rightarrow a=-۴m/s^۲$$

۲ معادلهٔ سرعت - زمان را نوشته، سرعت در لحظهٔ $t=۱۰s$ را حساب کرده نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم:

$$v=-۴t+۱۸ \xrightarrow{t=۱۰s} v=-۴۰+۱۸ \Rightarrow v=-۲۲m/s$$

۳ مسافت طی شده را به‌دست می‌آوریم:



$$\ell=|S_۱|+|S_۲|=\left|\frac{۱۸\times ۴/۵}{۲}\right|+\left|\frac{-۲۲\times ۵/۵}{۲}\right|$$

$$\ell=۹\times ۴/۵+۱۱\times ۵/۵$$

$$\Rightarrow \ell=۴۰/۵+۶۰/۵ \Rightarrow \ell=۱۰۱m$$

۴ تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۱۰۱}{۱۰}=۱۰/۱m/s$$

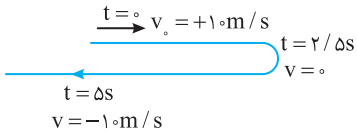
گزینهٔ ۱

۴ ۴۲۶ B

نکته هرگاه در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست در ابتدا و انتهای یک بازهٔ زمانی تندی متحرک یکسان باشد، در وسط بازه، تندی متحرک صفر می‌شود.

$$a=\frac{v-v_۰}{t} \Rightarrow a=\frac{۰-۱۰}{۲/۵} \Rightarrow a=-۴m/s^۲$$

۵ ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ زمانی $t=۱۰s$ تا $t=۵s$ که در این بازه متحرک در یک جهت در حرکت است و تندی متوسط، هم‌اندازهٔ سرعت متوسط است. سرعت در لحظهٔ $t=۱۰s$ را حساب می‌کنیم.

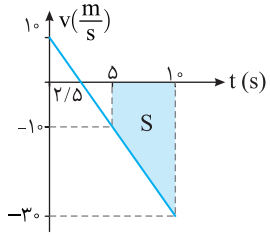


$$v=at+v_۰ \Rightarrow v=-۴\times ۱۰+۱۰ \Rightarrow v=-۳۰m/s$$

اندازهٔ سرعت متوسط (تندی متوسط) خواهد شد:

$$s_{av}=|v_{av}|=\frac{|v_۱+v_۲|}{۲}=\frac{|-۱۰+(-۳۰)|}{۲}=۲۰m/s$$

روش دیگر: رسم نمودار سرعت زمان و یافتن تندی متوسط در بازهٔ بیان شده، البته دقت کنید که برای رسم نمودار تمام محاسبات بالا را باید انجام دهید.

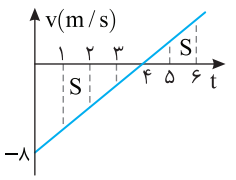


$$s_{av}=\frac{|S|}{\Delta t}=\frac{\frac{۱۰+۳۰}{۲}\times ۵}{۵} \Rightarrow s_{av}=۲۰m/s$$

۲ ۴۲۷ C

نکته هرگاه در یک حرکت با شتاب ثابت مسافت طی شده در دو بازهٔ زمانی با هم برابر شود، آن‌گاه دقیقاً در وسط بازهٔ زمانی از ابتدای بازه اول تا انتهای بازهٔ دوم سرعت متحرک صفرشده و تغییر جهت می‌دهد.

خط فکری ثانیهٔ سوم یعنی از $t=۲s$ تا $t=۳s$ و ثانیهٔ ششم یعنی از $t=۵s$ تا $t=۶s$ مسافت‌ها یکسان است. بنابراین در لحظهٔ $t=\frac{۶+۲}{۲}=۴s$ سرعت متحرک صفر می‌شود و متحرک تغییر جهت می‌دهد. با توجه به صورت مسئله سرعت اولیه $-۸m/s$ است، بنابراین شما باید نمودار سرعت - زمان را رسم کنید و تا لحظهٔ $t=۴s$ سطح زیر نمودار را حساب کنید.



۱ سطح زیر نمودار خواهد شد:

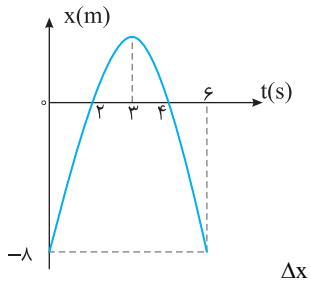
$$\Delta x=S=\frac{-۸\times ۴}{۲}=-۱۶m$$

۲ مکان اولیهٔ متحرک $x_۰=۲۰m$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta x=x-x_۰ \Rightarrow -۱۶=x-۲۰ \Rightarrow x=۴m$$

۳ ۴۲۸ B

با توجه به اطلاعات سؤال نمودار مکان - زمان متحرک مطابق شکل است.



در لحظهٔ $t=۳s$، (رأس سهمی) سرعت صفر می‌شود، بنابراین داریم:

$$v=at+v_۰ \Rightarrow ۰=۳a+v_۰$$

$$\Rightarrow v_۰=-۳a \quad (I)$$

جابه‌جایی در بازهٔ صفر تا ۲s برابر است با:

$$\Delta x=x_{t=۲s}-x_۰ \Rightarrow \Delta x=۰-(-۸)=۸m$$

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲-۳at \Rightarrow ۸=\frac{۱}{۲}a(۲)^۲-۳a(۲) \Rightarrow a=-۲m/s^۲$$

سرعت اولیه:

$$(I) \Rightarrow v_۰=-۳\times(-۲)=۶m/s$$

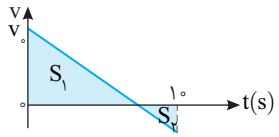
در بازهٔ ۳ ثانیهٔ دوم یعنی $t=۳s$ تا $t=۶s$ حرکت در یک جهت است و به دلیل تقارن سهمی جابه‌جایی در بازهٔ صفر تا ۳s با جابه‌جایی در بازهٔ ۳s تا ۶s هم‌اندازه بوده و تندی در این بازه میانگین سرعت ابتدایی و انتهایی بازه است.

$$s_{av}=\frac{v_۲+v_۱}{۲}=\frac{۶+۰}{۲}=۳m/s$$

۴ ۴۲۹ A

خط فکری هرگاه تندی متوسط بزرگ‌تر از سرعت متوسط باشد، مسافت طی‌شده بزرگ‌تر از جابه‌جایی بوده و به این معنی است که متحرک در حین حرکت تغییر جهت داده است.

برای محاسبهٔ مسافت و تندی بهتر است نمودار $v-t$ کشیده شود که چون سرعت اولیه با توجه به سؤال در جهت محور xها بوده (در جهت مثبت) و تغییر جهت داشته‌ایم، نمودار $v-t$ به صورت روبه‌رو می‌شود:



واضح است که چون سرعت اولیه مثبت است و متحرک تغییر جهت داده، شیب نمودار منفی می‌شود. حال با توجه به تعریف سرعت متوسط و تندی متوسط خواهیم داشت:

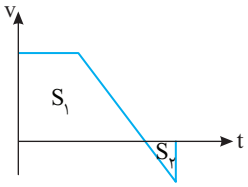
۱ در بازهٔ صفر تا ۱۰s سرعت متوسط ۷/۵ متر بر ثانیه است:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x=۷۵m$$

۲ در بازهٔ صفر تا ۱۰s تندی متوسط ۸/۵ متر بر ثانیه است:

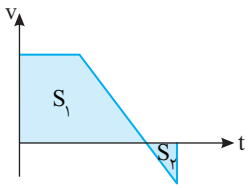
$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow \ell=۸۵m$$

نکته در نمودار $v-t$ مسافت و جابه‌جایی متحرک با استفاده از سطح محصور بین نمودار و محور افقی به‌دست می‌آید:



$$\Delta x=S_۱+S_۲ \quad , \quad \ell=|S_۱|+|S_۲|$$

۳ مسافت و جابه‌جایی را می‌توان به کمک سطح زیر نمودار به‌دست آورد:

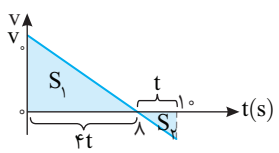


$$\begin{cases} \ell=S_۱+S_۲ \Rightarrow ۸۵=S_۱+S_۲ \\ \Delta x=S_۱-S_۲ \Rightarrow ۷۵=S_۱-S_۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_۱=۸۰m, S_۲=۵m$$

یادداشت ریاضی یکی از ابزارهای ریاضی مفید در محاسبات سطح زیر نمودار استفاده از تشابه مثلث‌ها است که در آن، مجذور نسبت ضلع‌ها برابر با نسبت مساحت‌هاست.

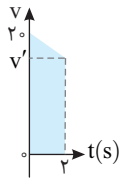
۴ نسبت مساحت سطح زیر نمودار در این دو بخش به صورت $\frac{S_۱}{S_۲}=۱۶$ است، پس نسبت ضلع‌های این دو مثلث متشابه ۱ به ۴ است.



$$\frac{t}{(۱۰-t)}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow ۴t=۱۰-t \Rightarrow t=۲$$

$$S_۱=۸۰m \Rightarrow \frac{v_۰\times ۸}{۲}=۸۰ \Rightarrow v_۰=۲۰m/s$$

برای به‌دست آوردن سطح زیر نمودار در ۲ ثانیه اول نیاز به داشتن سرعت در ثانیه دوم داریم. به این منظور ابتدا شتاب حرکت را با توجه به شیب نمودار $v-t$ به‌دست می‌آوریم:



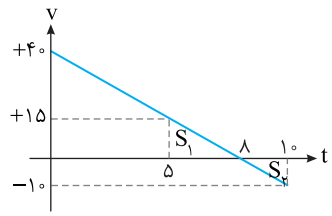
$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-۲۰}{۸}=-۲/۵m/s^۲$$

حال مسافت ۲s اول را حساب می‌کنیم:

$$v'=at+v_۰\Rightarrow v'=-۵+۲۰\Rightarrow v'=۱۵m/s \qquad \ell=\frac{(۲۰+۱۵)۲}{۲}=۳۵m$$

A ۴۳۰ ۲

۵ ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ زمانی بین $t=۵s$ تا $t=۱۰s$. برای به‌دست آوردن تندی در بازهٔ ۵ ثانیهٔ دوم باید مسافت را در این بازه حساب کنیم و بهترین روش رسم نمودار سرعت - زمان است.



$$v=at+v_۰ \xrightarrow{a=-۵m/s^۲,\ v_۰=+۴۰m/s} v=-۵t+۴۰$$

$$v=۰\Rightarrow ۰=-۵t+۴۰\Rightarrow t=۸s$$

$$t=۰\Rightarrow v_۰=۴۰m/s$$

$$t=۵s\Rightarrow v_۱=-۵\times۵+۴۰\Rightarrow v_۱=۱۵m/s$$

$$t=۱۰s\Rightarrow v_۲=-۵\times۱۰+۴۰\Rightarrow v_۲=-۱۰m/s$$

مسافت طی شده در بازهٔ ۵ ثانیهٔ دوم را به کمک سطح زیر نمودار حساب می‌کنیم.

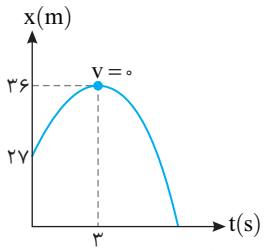
$$\ell=S_۱+S_۲=\frac{۱۵\times۳}{۲}+\frac{۱۰\times۲}{۲} \qquad \ell=۲۲/۵+۱۰=۳۲/۵m$$

تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۳۲/۵}{۵}\Rightarrow s_{av}=۶/۵m/s$$

A ۴۳۱ ۳

خط فکری حرکت متحرک شتاب ثابت است و با توجه به اطلاعات داده شده در بازهٔ زمانی $t=۰$ تا $t=۳s$ شتاب متحرک و سرعت اولیه آن را به‌دست می‌آوریم. دقت کنید در لحظهٔ $t=۳s$ شیب خط مماس بر نمودار افقی شده و سرعت متحرک صفر است (رأس سهمی)، همچنین مسافت طی شده خواسته شده و برای حل از سطح زیر نمودار $v-t$ کمک می‌گیریم.



۱ با توجه به رابطهٔ $\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t$، سرعت اولیه را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=۳۶-۲۷=۹m\ ,\ \Delta t=۳s\ \ ,\ v_۰=?\ \ ,\ v=۰$$

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\times\Delta t\Rightarrow ۹=\frac{۰+v_۰}{۲}\times۳\Rightarrow v_۰=۶m/s$$

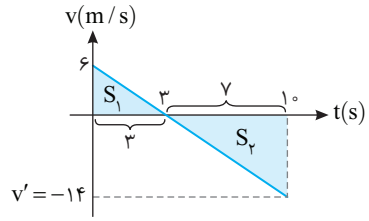
۲ با توجه به معادلهٔ سرعت - زمان، شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=۳a+۶\Rightarrow a=-۲m/s^۲$$

۳ سرعت اولیه $v_۰=۶m/s$ و شتاب $a=-۲m/s^۲$ است، سرعت در لحظهٔ $t=۱۰s$ را نیز به‌دست می‌آوریم:

$$t=۱۰s\Rightarrow v'=at+v_۰\Rightarrow v'=-۲\times۱۰+۶=-۱۴m/s$$

۴ با توجه به اطلاعات به‌دست آمده نمودار $v-t$ متحرک را رسم و از سطح زیر نمودار مسافت را حساب می‌کنیم:

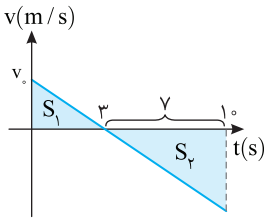


$$S_۱=\frac{۶\times۳}{۲}=۹m$$

$$|S_۲|=\frac{۷\times۱۴}{۲}=۴۹m$$

$$\Rightarrow \ell=S_۱+|S_۲|=۵۸m$$

میانبر از ابتدا با دانستن اینکه سرعت اولیه متحرک مثبت است نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم:



با توجه به اینکه سطح زیر نمودار نشان‌دهنده جابه‌جایی متحرک است، $S_۱$ برابر خواهد بود با:

$$\Delta x_۱=S_۱=۳۶-۲۷=۹m$$

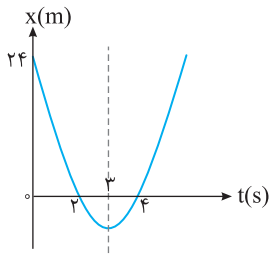
حال با استفاده از تشابه دو مثلث شکل گرفته در نمودار، اندازه جابه‌جایی ۳ ثانیه تا ۱۰ ثانیه را حساب می‌کنیم:

$$\frac{S_۱}{S_۲}=(\frac{۳}{۷})^۲\Rightarrow\frac{۹}{S_۲}=\frac{۹}{۴۹}\Rightarrow S_۲=۴۹m$$

در نتیجه مسافت طی شده از شروع حرکت تا ثانیه ۱۰ ام برابر مجموع جابه‌جایی‌ها یعنی $۴۹+۹=۵۸m$ است.

B ۴۳۲ ۲

نمودار مکان زمان حرکت با شتاب ثابت به صورت یک سهمی است و سهمی نسبت به محور گذرنده از رأسش دارای تقارن است. بنابراین ریشه‌های معادلهٔ مکان - زمان $t=۲s$ و $t=۴s$ است. $x=A(t-۲)(t-۴)$



در $t=۰$، مکان متحرک $x=۲۴$ است. از این‌رو:

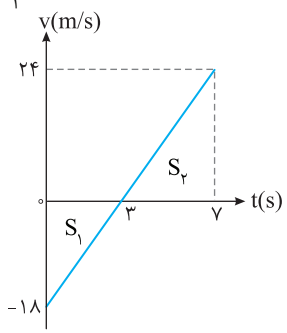
$$۲۴=A(۰-۲)(۰-۴)\Rightarrow A=۳$$

معادلهٔ مکان - زمان خواهد شد:

$$x=۳(t-۲)(t-۴)\Rightarrow x=۳(t^۲-۶t+۸)\Rightarrow x=۳t^۲-۱۸t+۲۴$$

معادلهٔ سرعت - زمان را به‌دست آورده و نمودار آن را رسم می‌کنیم.

$$\frac{۱}{۲}a=۳\Rightarrow a=۶m/s^۲\ ,\quad v_۰=-۱۸m/s\ ,\quad v=۶t-۱۸$$



سرعت در لحظهٔ $t=۷s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$v=۶\times۷-۱۸\Rightarrow v=۲۴m/s$$

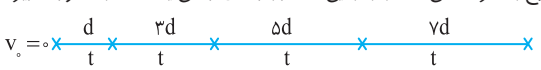
نسبت $\frac{s_{av}}{v_{av}}$ خواهد شد:

$$\frac{s_{av}}{v_{av}}=\frac{\frac{\ell}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}\Rightarrow\frac{s_{av}}{v_{av}}=\frac{|S_۱|+|S_۲|}{S_۱+S_۲}=\frac{|\frac{-۱۸\times۳}{۲}|+|\frac{۲۴\times۴}{۲}|}{\frac{-۱۸\times۳}{۲}+\frac{۲۴\times۴}{۲}}$$

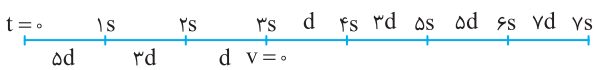
$$\Rightarrow\frac{s_{av}}{v_{av}}=\frac{۲۷+۴۸}{-۲۷+۴۸}=\frac{۷۵}{۲۱}=\frac{۲۵}{۷}$$

روش دیگر:

نکته در یک حرکت با شتاب ثابت روی خط راست وقتی متحرک از حال سکون شروع به حرکت می‌کند، جابه‌جایی آن در بازه‌های زمانی یکسان t به صورت زیر است:



با توجه به نمودار در لحظهٔ $t=۳s$ سرعت صفر است از این‌رو خواهیم داشت:



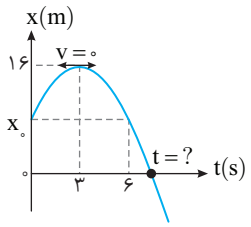
$$\ell=۵d+۳d+d+d+۳d+۵d+۷d=۲۵d$$

$$\Delta x=-۵d-۳d-d+d+۳d+۵d+۷d=۷d$$

$$\frac{s_{av}}{v_{av}}=\frac{\ell}{\Delta x}=\frac{۲۵}{۷}$$

A ۴۳۳ ۳

۱ حرکت با شتاب ثابت بوده و نمودار آن سهمی است. در نمودار سهمی، خط قائم گذرنده از رأس سهمی، محور تقارن آن است، بنابراین مطابق شکل در لحظه‌های $t=0$ و $t=6s$، مکان متحرک یکسان است.



۲ در بازهٔ صفر تا $6s$، تندی متوسط متحرک $3m/s$ است، در این صورت مسافت طی شده در این مدت خواهد شد: $\ell=vt\Rightarrow\ell=3\times6=18m$

۳ متحرک در مدت صفر تا $6s$، $18m$ مسافت طی کرده و مطابق نمودار ابتدا در مدت $3s$ اول $9m$ رفته و سپس از $3s$ تا $6s$، $9m$ برگشته است.

۴ از صفر تا $3s$، $9m$ رفته بنابراین مکان اولیهٔ آن خواهد شد:

$16-x_0=9\Rightarrow x_0=7m$

۵ با توجه به معادلهٔ مستقل از شتاب در بازهٔ صفر تا $3s$ سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t\Rightarrow 9=\frac{0+v_0}{2}\times3\Rightarrow v_0=\frac{18}{3}=6m/s$

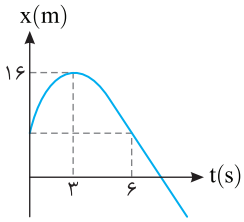
۶ شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم. $a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-6}{3}=-2m/s^2$

۷ در مدت زمانی که نمودار $x-t$ بالای محور زمان است و x مثبت است، بردار مکان مثبت خواهد بود.

$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow 0=\frac{1}{2}(-2)t^2+6t+7$

$\Rightarrow t^2-6t-7=0\Rightarrow t=-1$ غ.ق.ق , $t=7s$

بازی با سوال نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. اگر در بازهٔ زمانی ۰ تا $6s$ تندی متوسط $3m/s$ باشد، در چه لحظه‌ای بردار مکان تغییر جهت می‌دهد؟ $(\sqrt{25}=1/4)$



۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۵

پاسخ ۱ متحرک با تندی متوسط $3m/s$ در مدت $6s$ مسافت زیر را طی می‌کند.

$\ell=s_{av}t\Rightarrow\ell=6\times3=18m$

۲ نمودار سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس تقارن دارد بنابراین در $t=0$ و $t=6s$ مکان متحرک برابر بوده و در این مدت مسافت طی شده $18m$ است. از این‌رو در ۰ تا $3s$ متحرک $\frac{18}{2}=9m$ طی کرده و به مکان $16m$ می‌رسد.

بنابراین مکان اولیهٔ آن $x_0=16-9=7m$ است.

۳ به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم.

$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}t\Rightarrow 9=\frac{0+v_0}{2}\times3\Rightarrow v_0=6m/s$

۴ شتاب حرکت خواهد شد: $a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-6}{3}\Rightarrow a=-2m/s^2$

۵ معادلهٔ حرکت را بنویسید زمان تغییر جهت بردار مکان $(x=0)$ را به‌دست می‌آوریم.

$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x=\frac{1}{2}(-2)t^2+6t+7=0$

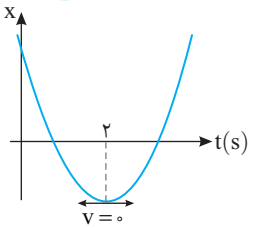
$-t^2+6t+7=0\Rightarrow+t^2-6t-7=0$

$t=\frac{+6\pm8}{2}\Rightarrow t=+3\pm4\Rightarrow t=3-4<0$ غ ق ق

$t=3+4\Rightarrow t=7s$

گزینهٔ ۱

B ۴۳۴ ۳



باید از نمودار به این اطلاعات دست پیدا کنید.

۱ در لحظهٔ $t=2s$ متحرک تغییر جهت داده و سرعت آن صفر شده است.

۲ در نمودار مکان - زمان اگر جهت تقعر رو به بالا شد شتاب مثبت است که در این نمودار جهت تقعر منحنی رو به بالاست و شتاب مثبت است.

۳ در لحظهٔ $t=2s$ سرعت صفر شده است، با توجه به معادلهٔ سرعت زمان درحرکت با شتاب ثابت، سرعت اولیه و سرعت در لحظهٔ $t=1s$ و $t=6s$ را برحسب شتاب حساب می‌کنیم. $v=at+v_0\xrightarrow{t=2s}0=2a+v_0\Rightarrow v_0=-2a$

$t_1=1s\Rightarrow v_1=a\times1+(-2a)\Rightarrow v_1=-a$

$t_2=6s\Rightarrow v_2=a\times6-2a\Rightarrow v_2=4a$

۴ سرعت متوسط در بازهٔ $t=1s$ تا $t=6s$ برابر $3m/s$ است بنابراین جابه‌جایی در این مدت خواهد شد: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow3=\frac{\Delta x}{6-1}\Rightarrow\Delta x=15m$

۵ در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط بین دو لحظهٔ t_1 و t_2 برابر میانگین سرعت‌هاست از این‌رو می‌توان نوشت:

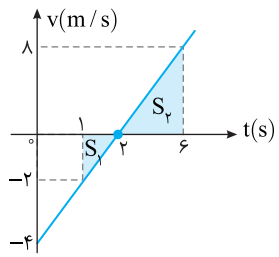
$v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}\xrightarrow{v_1=-a\,,\,v_2=4a}3=\frac{-a+4a}{2}\Rightarrow a=2m/s^2$

۶ در این صورت v_1 و v_2 را می‌توان به دست آورد.

$v_1=-a\Rightarrow v_1=-2m/s\,,\,v_2=4a\Rightarrow v_2=4\times2=8m/s$

۷ نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم.

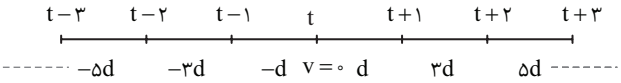
۸ برای یافتن مسافت کافی است S_1+S_2 را حساب کنیم.



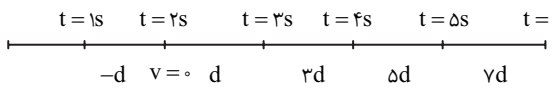
$\ell=|S_1|+|S_2|=\frac{2\times1}{2}+(\frac{8\times4}{2})$

$\Rightarrow\ell=17m$

میانبر در حرکت با شتاب ثابت اگر در لحظه t سرعت جسم صفر شود برای جابه‌جایی‌ها در ثانیه‌های قبل و بعد از t رابطهٔ زیر برقرار است.



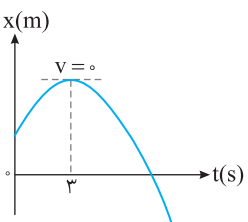
با توجه به نمودار مسئله در لحظهٔ $t=2s$ سرعت صفر شده است بنابراین در بازهٔ $1s$ تا $6s$ که سرعت متوسط $3m/s$ و جابه‌جایی $15m$ است می‌توان نوشت:



$\Delta x=-d+d+3d+5d+7d=15\Rightarrow15d=15\Rightarrow d=1m$

مسافت طی شده خواهد شد: $\ell=|-d|+d+3d+5d+7d=17d\Rightarrow\ell=17m$

B ۴۳۵ ۴



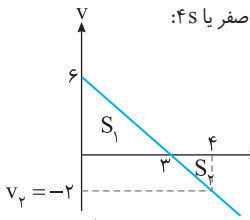
دقت کنید بزرگی شتاب $|a|=2m/s^2$ است، چون دهانهٔ نمودار رو به پایین بوده شتاب منفی و برابر $a=-2m/s^2$ است و در نمودار $v-t$ شیب نمودار نزولی است و در لحظهٔ $t=3s$ که شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ صفر شده، سرعت صفر می‌شود:

به کمک معادلهٔ سرعت زمان سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$v=at+v_0\Rightarrow0=-2\times3+v_0\Rightarrow v_0=6\ m/s$

برای به‌دست آوردن مسافت در حرکت با شتاب ثابت بهتر است نمودار $v-t$ را رسم کنیم و با توجه به سطح زیر نمودار $v-t$ مسافت را حساب کنیم.

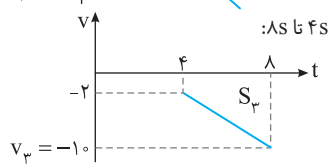
الف) بررسی بازهٔ زمانی ۴ ثانیه اول یعنی بازهٔ زمانی صفر تا ۴s:



$$v_۲=at+v_۱\Rightarrow v_۲=-۲\times۴+۶=-۲m/s$$

$$\ell_۱=|S_۱|+|S_۲|\Rightarrow \ell=\frac{۳\times۶}{۲}+\frac{۱\times۲}{۲}=۱۰m$$

ب) بررسی بازهٔ زمانی ۴ ثانیه دوم یعنی ۴s تا ۸s:



$$v_۳=at+v_۲ \xrightarrow[v_۲=-۲]{\Delta t=۴s} v_۳=-۸-۲=-۱۰m/s$$

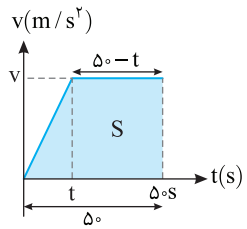
$$\ell_۲=|S_۳|=\frac{۴(۲+۱۰)}{۲}=۲۴m$$

حال نسبت $\frac{\ell_۱}{\ell_۲}$ خواسته شده را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\ell_۱}{\ell_۲}=\frac{۱۰}{۲۴}=\frac{۵}{۱۲}$$

B ۴ ۴۳۶

راه‌حل اول: نمودار سرعت - زمان را با توجه به داده‌های مسئله رسم می‌کنیم.



مساحت زیر نمودار $v-t$ برابر جابه‌جایی می‌باشد بنابراین:

$$\Delta x_{\text{کل}}=۶۰۰+۲۰۰=۸۰۰m$$

$$\Rightarrow \Delta x_{\text{کل}}=S=\frac{v(۵۰+(۵۰-t))}{۲}=۸۰۰m$$

$$\Delta x_{\text{کل}}=S=\frac{۱۰۰v-vt}{۲}=۸۰۰ \qquad (۱)$$

بنا به فرض مسئله سطح زیر نمودار از صفر تا t باید برابر ۲۰۰m باشد از این‌رو:

$$S_۱=\frac{vt}{۲}=۲۰۰\Rightarrow vt=۴۰۰m \qquad (۲)$$

اکنون در رابطهٔ (۱) از رابطهٔ (۲) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{۱۰۰v-۴۰۰}{۲}=۸۰۰\Rightarrow ۱۰۰v-۴۰۰=۱۶۰۰\Rightarrow v=۲۰m/s$$

راه‌حل دوم:

با توجه به صورت سؤال، می‌توان برای سادگی در فهم آن، شکل زیر را رسم کرد. برای قسمت اول از فرمول مستقل از زمان می‌نویسیم:

$$\Delta x_۱=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t_۱\Rightarrow ۲۰۰=\frac{v+۰}{۲}t_۱\Rightarrow vt_۱=۴۰۰ \quad (۱)$$

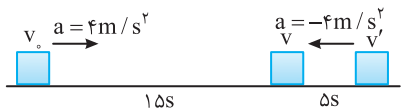
اگر مدت حرکت در ابتدا را $t_۱$ فرض کنیم در مدت $t_۲=۵۰-t_۱$ متحرک دارای حرکت یکنواخت بوده از این‌رو:

$$\Delta x_۲=v\Delta t_۲\Rightarrow ۶۰۰=v(۵۰-t_۱)\Rightarrow ۶۰۰=۵۰v-vt_۱ \qquad (۲)$$

از رابطهٔ (۱) در رابطهٔ (۲) جای‌گذاری می‌کنیم: $۶۰۰=۵۰v-(۴۰۰)\Rightarrow v=۲۰m/s$

B ۳ ۴۳۷

سرعت را در لحظهٔ $t=۱۵s$ حساب می‌کنیم. $v=at+v_۰\Rightarrow v=۶۰+v_۰$



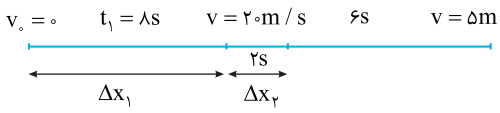
سرعت را در انتهای ۵s با شتاب $-۴m/s^۲$ به‌دست می‌آوریم.

$$v'=a't'+v\Rightarrow v'=-۴\times۵+۶۰+v_۰\Rightarrow v'=۴۰+v_۰$$

شتاب متوسط خواهد شد: $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{۴۰+v_۰-v_۰}{۲۰}\Rightarrow a_{av}=۲m/s^۲$

B ۴ ۴۳۸

جابه‌جایی در قسمت اول مسیر برابر است با:



$$\Delta x_۱=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t_۱\Rightarrow \Delta x_۱=\frac{۲۰+۰}{۲}\times۸\Rightarrow \Delta x_۱=۸۰m$$

در قسمت دوم مسیر که حرکت کندشونده است، ابتدا شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۵-۲۰}{۶}\Rightarrow a=-\frac{۵}{۲}m/s^۲$$

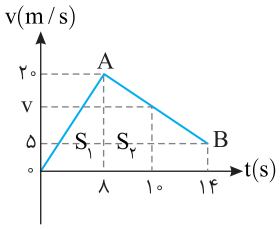
جابه‌جایی در مدت ۲s از لحظهٔ $t=۸s$ تا $t=۱۰s$ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x_۲=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow \Delta x_۲=\frac{۱}{۲}\times(-\frac{۵}{۲})\times۴+(۲۰\times۲)\Rightarrow \Delta x_۲=۳۵m$$

سرعت متوسط برابر جابه‌جایی در یکای زمان است:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{۸۰+۳۵}{۱۰}=۱۱/۵m/s$$

روش رسم نمودار سرعت - زمان:



متحرک از حال سکون $v_۰=۰$ شروع به حرکت کرده و در مدت ۸s سرعتش به ۲۰m/s رسید. سپس در مدت ۶s یعنی بازهٔ زمانی بین (۸s تا ۱۴s) سرعت به ۵m/s رسیده است بنابراین نمودار $v-t$ به‌صورت روبه‌روست.

سرعت در لحظهٔ $t=۱۰s$ را به کمک شیب خط AB حساب می‌کنیم.

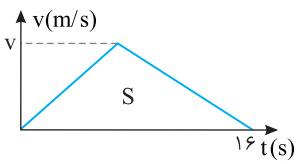
$$\frac{۵-۲۰}{۱۴-۸}=\frac{v-۲۰}{۱۰-۸}\Rightarrow \frac{-۱۵}{۶}=\frac{v-۲۰}{۲}\Rightarrow v=۱۵m/s$$

به کمک سطح زیر نمودار از جابه‌جایی در ۱۰s را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=S_۱+S_۲\Rightarrow \Delta x=\frac{۲۰\times۸}{۲}+\frac{۲۰+۱۵}{۲}\times۲\Rightarrow \Delta x=۸۰+۳۵\Rightarrow \Delta x=۱۱۵m$$

سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۱۱۵}{۱۰}\Rightarrow v_{av}=۱۱/۵m/s$

B ۳ ۴۳۹



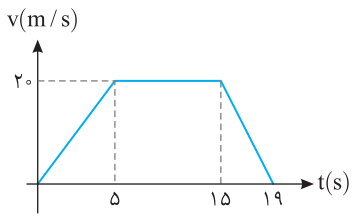
متحرک از حال سکون $(v_۰=۰)$ شروع به حرکت کرده و سرعتش به v رسیده سپس مجدداً سرعت آن به صفر رسیده است. از این‌رو نمودار سرعت-زمان خودرو مطابق شکل روبرو است.

سطح زیر نمودار سرعت- زمان برابر با جابه‌جایی جسم است.

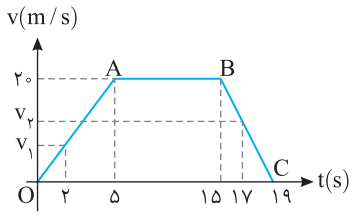
$$\Delta x=S\Rightarrow \Delta x=۱۶۰m\Rightarrow ۱۶۰=\frac{v\times۱۶}{۲}\Rightarrow v=۲۰m/s$$

B ۳ ۴۴۰

۱ نمودار $v-t$ متحرک را رسم کنیم. در مدت ۰ تا ۵s سرعت از صفر به ۲۰m/s رسیده و در مدت ۵s تا ۱۵s سرعت ثابت و در مدت ۱۵s تا ۱۹s سرعت از ۲۰m/s به صفر رسیده است:



۲ حال به کمک خط OA و BC، سرعت در $t_1=2s$ و $t_2=17s$ را به دست می‌آوریم:



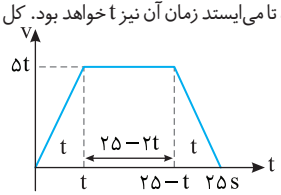
$$\frac{20-0}{5-0}=\frac{v_1-0}{2-0}\Rightarrow v_1=8m/s\ ,\quad \frac{0-20}{19-15}=\frac{0-v_2}{19-17}\Rightarrow v_2=10m/s$$

۳ در نهایت شتاب متوسط را به دست می‌آوریم:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{10-8}{17-2}=\frac{2}{15}m/s^2$$

C ۴۴۱ ۳

خط فکری بهتر بود طراح می‌گفت متحرک از حال سکون $(v_0=0)$ شروع به حرکت کرده است. اما حل مسئله اگر مدت حرکت تندشونده با شتاب $5m/s^2$ را t بنامیم، سرعت متحرک در لحظهٔ t برابر $v=at+v_0=5t$ خواهد شد. از طرفی وقتی متحرک با شتاب $-5m/s^2$ حرکت را کند کرده تا می‌ایستد زمان آن نیز t خواهد بود. کل مدت حرکت 25s است، بنابراین زمان حرکت یکنواخت $25-2t$ می‌شود. اکنون با این داشته‌ها می‌توانید نمودار سرعت - زمان را به شکل روبه‌رو رسم و به کمک سطح زیر نمودار مسئله را حل کنید.



۱ با توجه به فرض مسئله سرعت متوسط در مدت ۲۵، $20m/s$ است بنابراین جابه‌جایی متحرک خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow \Delta x=20\times 25\Rightarrow \Delta x=500m$$

۲ سطح زیر نمودار سرعت - زمان یک ذوزنقه است که مقدار مساحت آن باید ۵۰۰ باشد.

یادآوری ریاضی مساحت ذوزنقه برابر مجموع دو قاعده ضربدر نصف ارتفاع

$$S=\frac{(25-2t)+25}{2}\times 5t=500\Rightarrow \frac{50-2t}{2}\times t=100\Rightarrow (25-t)t=100$$

$$t^2-25t+100=0\Rightarrow (t-5)(t-20)=0\Rightarrow t=5s, t=20s$$

کل مدت حرکت 25s است، بنابراین $t=20s$ نمی‌تواند جواب مسئله باشد. زیرا مدت زمان حرکت یکنواخت خواهد شد: $25-2t=25-2\times 20=-15s$

که غیرقابل قبول است بنابراین $t=5s$ جواب بوده و مدت زمان حرکت یکنواخت برابر است با: $25-2\times 5=15s$

بازی با سوال **متحرکی در یک مسیر مستقیم از حال سکون حرکت می‌کند و پس از ۱۵ ثانیه می‌ایستد. اگر متحرک t_1 ثانیه اول مسیر را با شتاب $2m/s^2$ و مابقی زمان را با شتاب $-1m/s^2$ طی کند تا متوقف شود، سرعت متوسط متحرک در کل مسیر چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۲/۵ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۶

پاسخ متحرک از حال سکون $v_1=0$ حرکت کرده و پس از t_1 ثانیه به سرعت $v_2=v$ می‌رسد:

$$v_2=at+v_1\Rightarrow v=2t_1\quad (1)$$

سپس متحرک پس از t_2 ثانیه با شتاب $a=-1m/s^2$ از سرعت $v_2=v$ به سرعت $v_3=0$ می‌رسد:

$$v_3=at+v_2\Rightarrow -v=-t_2\Rightarrow v=t_2\quad (2)$$

با توجه به معادله‌های (۱) و (۲) داریم:

$$v=2t_1, v=t_2\Rightarrow t_2=2t_1$$

زمان کل حرکت $t_1+t_2=3t_1=15s$ است، بنابراین $t_1=5s$، $t_2=10s$ و $v=2t_1=10m/s$ است. جابه‌جایی در هر بازه را حساب می‌کنیم:

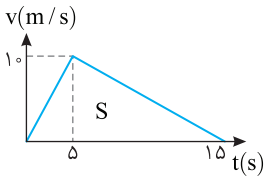
$$\begin{cases}\Delta x_1=\frac{v_1+v_2}{2}t_1\Rightarrow \Delta x_1=\frac{0+10}{2}\times 5=25m\\ \Delta x_2=\frac{v_2+v_3}{2}t_2\Rightarrow \Delta x_2=\frac{10+0}{2}\times 10=50m\end{cases}\Rightarrow \Delta x_{کل}=\Delta x_1+\Delta x_2=75m$$

سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t}=\frac{75}{15}=5m/s$$

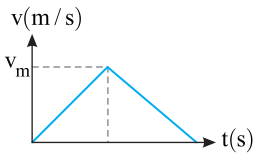
روش حل به کمک نمودار سرعت - زمان

با توجه به اینکه $t_1=5s$ و $t_2=10s$ و سرعت در لحظهٔ t_1 برابر $2\times 5=10m/s$ است نمودار سرعت - زمان را رسم کرده و مسئله را حل می‌کنیم.



$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{S}{\Delta t}=\frac{\frac{10\times 15}{2}}{15}=5m/s$$

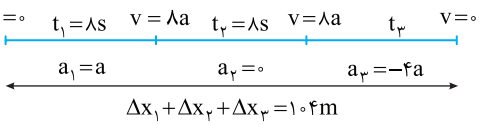
میانبر هرگاه نمودار به‌صورت مثلث شکل روبه‌رو باشد، سرعت متوسط، نصف سرعت بیشینه است:



گزینهٔ ۲ $v_{av}=\frac{1}{2}v_m$

B ۴۴۲ ۱

با توجه به نمودار رسم شده در قسمت اول حرکت: $v=at_1\Rightarrow v=8a$



در قسمت سوم (آخر) حرکت: $v=a_3t_3+v_0\Rightarrow 0=-4at_3+8a\Rightarrow t_3=2s$

اکنون مسئله به راحتی قابل حل است.

$$\Delta x_1=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow \Delta x_1=\frac{1}{2}a\times 64=32a\quad \Delta x_2=vt_2\Rightarrow \Delta x_2=(8a)\times 8=64a$$

$$\Delta x_3=\frac{1}{2}(-4a)(2)^2+(8a)\times 2=8a$$

جمع جابه‌جایی‌ها برابر ۱۰۴ متر است.

$$\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3=104\Rightarrow 32a+64a+8a=104\Rightarrow a=1m/s^2$$

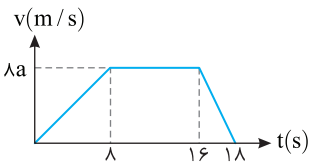
روش رسم نمودار:

نکته هرگاه متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت a_1 شروع به حرکت کند و در مدت t_1 سرعتش به v برسد، سپس با شتاب ثابت a_2 سرعتش از v به صفر برسد آن‌گاه:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{t_1}{t_2}=\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}$$

در صورت مسئله بیان شده که در مدت 8s با شتاب a سرعت به $v=8a$ رسیده و سپس با شتاب $-4a$ متوقف شده است. بنابراین زمان توقف آن خواهد شد: $t_2=\frac{8}{4}=2s$

نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم.



سطح زیر نمودار برابر جابه‌جایی است.

از این‌رو خواهیم داشت:

$$S=\Delta x\Rightarrow \frac{18+8}{2}\times 8a=104$$

$$\Rightarrow a=1m/s^2$$

B ۴۴۳ ۲

با توجه به فرض‌های پرسش، شکل زیر را رسم کرده و سپس به کمک معادلهٔ مستقل از زمان پرسش را حل می‌کنیم.

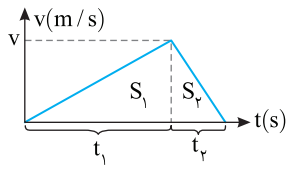
$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow \begin{cases}v^2-0=2a_1\Delta x_1 & \text{برای قسمت اول حرکت}\\ 0-v^2=2(-a_2)\Delta x_2 & \text{برای قسمت دوم حرکت}\end{cases}$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$1=\frac{2a_1(4\Delta x_2)}{2a_2(\Delta x_2)}\Rightarrow a_2=4a_1$$

روش رسم نمودار

با توجه به فرض مسئله:

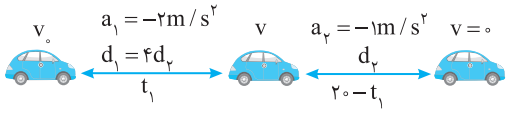


$$\frac{S_1}{S_2}=4\Rightarrow\frac{\frac{vt_1}{2}}{\frac{vt_2}{2}}=4\Rightarrow t_1=4t_2$$

به کمک معادلهٔ سرعت - زمان خواهیم داشت:

$$v=at+v_0\Rightarrow\begin{cases}v=a_1t_1+0\\0=a_2t_2+v\end{cases}\Rightarrow\left|\frac{a_2}{a_1}\right|=\left|\frac{t_1}{t_2}\right|=4$$

B ۴۴۴ ۱



خودرو با دو شتاب متفاوت ترمز گرفته تا متوقف شود. ابتدا سرعت اولیه v_0 است، در t_1 ثانیه اول با شیب خط $a_1=-2m/s^2$ سرعت کم و در ادامه با شیب خط $a_2=-1m/s^2$ سرعت کم شده تا متوقف شود:

به کمک معادلهٔ مستقل از زمان $v^2-v_0^2=2a\Delta x$ یک رابطه بین v_0 و سرعت ابتدایی مرحلهٔ دوم یعنی v_1 به‌دست می‌آوریم.

مسافت طی شده با شتاب $-2m/s^2$، ۴ برابر مسافت طی شده با شتاب $-1m/s^2$ است. $(d_1=4d_2)$

$$v_1^2-v_0^2=2(a_1)(4d_2)\Rightarrow v_1^2-v_0^2=-16d_2$$

$$v_2^2-v_1^2=2(a_2)(d_2)\Rightarrow -v_1^2=-2d_2$$

دو معادله را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{v_1^2-v_0^2}{-v_1^2}=8\Rightarrow v_1^2-v_0^2=-8v_1^2\Rightarrow 9v_1^2=v_0^2\Rightarrow v_1=\frac{v_0}{3}$$

اکنون شتاب در دو مرحله را می‌نویسیم:

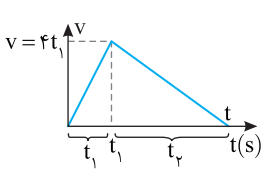
$$\begin{cases}|a_1|=\dfrac{|v_1-v_0|}{t_1}\\|a_2|=\dfrac{|0-v_1|}{20-t_1}\end{cases}\xrightarrow{|a_1|=2|a_2|}\frac{\frac{2}{3}v_0}{t_1}=2\times\frac{\frac{v_0}{3}}{20-t_1}\Rightarrow 20-t_1=t_1\Rightarrow t_1=10s$$

در نتیجه در بازهٔ ۱۰s تا ۲۰s شتاب حرکت $-1m/s^2$ است. پس در ۵s آخر سرعت با شتاب $-1m/s^2$ به صفر می‌رسد. می‌توان فرض کرد متحرک از حال سکون با شتاب $+1m/s$ به راه می‌افتد و جابه‌جایی آن در مدت ۵s خواهد شد:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow\Delta x=\frac{1}{2}(1)\times(5)^2=12/5m$$

B ۴۴۵ ۳

خط فکری شتاب مرحلهٔ اول $4m/s^2$ و شتاب مرحلهٔ دوم $-1m/s^2$ بوده و متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده و سپس متوقف شده است. شتاب حرکت در قسمت اول چهار برابر شتاب مرحلهٔ دوم است. بنابراین شیب نمودار در قسمت اول چهار برابر شیب در قسمت دوم است.



$$|a_1|=4|a_2|\Rightarrow\left|\frac{v}{t_1}\right|=4\left|\frac{v}{t_2}\right|\Rightarrow t_2=4t_1$$

سرعت v بر حسب t_1 خواهد شد:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=4t_1$$

و کل مدت حرکت برابر است با:

$$t=t_1+t_2\Rightarrow t=t_1+4t_1=5t_1$$

سطح زیر نمودار بردار جابه‌جایی $(1km=1000m)$ است. بنابراین:

$$S=\Delta x\Rightarrow\frac{4t_1\times t}{2}=1000\Rightarrow\frac{4t_1\times 5t_1}{2}=1000$$

$$t_1^2=100\Rightarrow t_1=10s\Rightarrow t=50s=\frac{5}{6}min$$

A ۴۴۶ ۴

خط فکری در سؤالات مشابه این تست که حرکت متحرک چندمرحله‌ای است یعنی ابتدا با شتاب تندشونده $3m/s^2$ در حال حرکت بوده و سپس با شتاب $1m/s^2$ حرکت کندشونده دارد بهتر است، سؤال را با استفاده نمودار $v-t$ حل کنیم.

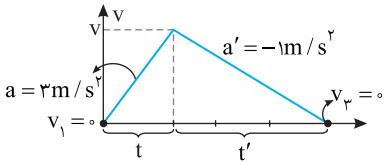
۱ با توجه به نمودار سرعت در لحظهٔ t در هردو قسمت شیب‌دار مشترک است، بنابراین از آن‌جا که شتاب در قسمت کندشونده $\frac{1}{3}$ شتاب در قسمت تندشونده است

بنابراین زمان و مسافت توقف درقسمت کندشونده ۳ برابر زمان و مسافت طی شده در قسمت تندشونده است.

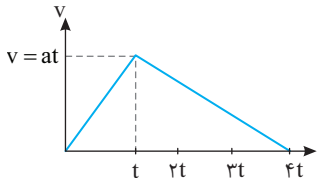
$$v_2=at+v_1\xrightarrow[v_1=0]{v_2=v}v=3t$$

$$\Rightarrow t'=3t$$

$$v_3=a't'+v_2\xrightarrow[v_{3=0}]{v_2=v}v=t'$$



۲ مسافت طی‌شده خواهد شد:

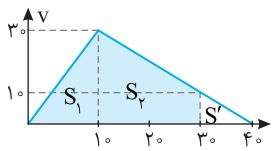


$$S=\frac{v\times 4t}{2}=\frac{at\times 4t}{2}$$

$$\xrightarrow{a=3m/s^2}\frac{3t\times 4t}{2}=600\Rightarrow t=10s$$

$$v=at=3\times 10=30m/s$$

۳ اکنون سطح زیر نمودار را از صفر تا ۳۰s حساب می‌کنیم. ابتدا سرعت را در لحظهٔ $t=30s$ حساب می‌کنیم:



$$v=at+v_0\Rightarrow v=-1\times 20+30\Rightarrow v=10m/s$$

$$\ell=S_1+S_2=\frac{30\times 10}{2}+\frac{30+10}{2}\times 20\Rightarrow\ell=150+400=550m$$

میانبر سرعت در لحظهٔ $t=30s$ را می‌توان با توجه به شیب نمودار از قسمت انتهایی محاسبه کرد:

$$v=at_0+v_0\Rightarrow v=1\times 10+0=10m/s$$

سپس مساحت زیر نمودار بین ثانیه‌های $t=30s$ تا $t=40s$ را حساب می‌کنیم:

$$S'=\frac{10\times 10}{2}=50m$$

با کاستن این مسافت از کل مسافت طی‌شده می‌توان مسافت طی‌شده تا ثانیهٔ ۳۰ را به‌دست آورد:

$$\ell=600-50=550m$$

B ۴۴۷ ۲

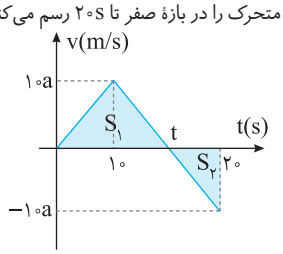
سرعت در لحظهٔ $t=10s$ را برحسب شتاب a به دست می‌آوریم.

$$v=at+v_0\Rightarrow v_1=10a$$

سرعت v_1، سرعت اولیه قسمت بعدی است. سرعت در لحظهٔ $t=20s$ را حساب می‌کنیم.

$$v_2=a_2t+v_1\Rightarrow v_2=-2a\times 10+10a\Rightarrow v_2=-10a_2$$

نمودار سرعت - زمان متحرک را در بازهٔ صفر تا ۲۰s رسم می‌کنیم.



لحظهٔ t که در آن سرعت صفر شده است را به‌دست می‌آوریم:

$$-۲at+۳۰a=۰\Rightarrow ۲t=۳۰\Rightarrow t=۱۵s$$

مسافت طی شده در مدت ۲۰s برابر است با:

$$۲۰۰=|S_۱|+|S_۲|$$

$$\Rightarrow ۲۰۰=\frac{۱۵\times ۱۰a}{۲}+\frac{۵\times ۱۰a}{۲}=۷۵a+۲۵a\Rightarrow ۲۰۰=۱۰۰a\Rightarrow a=۲m/s^۲$$

شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $t_۱=۵s$ تا $t_۲=۱۷s$ را می‌خواهیم سرعت در این دو لحظه را حساب می‌کنیم

$$v_{t=۵s}=۲t\Rightarrow v_{t=۵s}=۱۰m/s$$

$$v_{t=۱۷s}=-۴\times(۱۷-۱۰)+۲۰\Rightarrow v_{t=۱۷s}=-۸m/s$$

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{-۸-(۱۰)}{۱۷-۵}=\frac{-۱۸}{۱۲}=-۱/۵m/s^۲$$

B ۴ ۴۴۸

ابتدا جابه‌جایی خودرو را در مدتی که با شتاب $۳m/s^۲$ و سرعت اولیهٔ $۱۰۸km/h$ با حرکت کندشونده می‌ایستد، به دست می‌آوریم.

$$v_۰=۱۰۸km/h=۱۰۸\times\frac{۱۰۰۰m}{۳۶۰۰s}=۳۰m/s$$

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x_۲\Rightarrow ۰-۹۰۰=۲(-۳)\Delta x_۲\Rightarrow \Delta x_۲=۱۵۰m$$

در بازه‌ای که راننده مانع را می‌بیند تا لحظه‌ای که ترمز می‌کند، جابه‌جایی خودرو برابر است با:

$$\Delta x_۱=۱۶۵-۱۵۰=۱۵m$$

اکنون زمان‌های $t_۱$ و $t_۲$ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x_۱=v_۱\Delta t\Rightarrow ۱۵=۳۰t_۱\Rightarrow t_۱=۰/۵s$$

$$\Delta x_۲=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow ۱۵۰=\frac{۱}{۲}(-۳)(t_۲^۲)+۳۰t_۲$$

$$\Rightarrow ۵۰=-\frac{۱}{۲}t_۲^۲+۱۰t_۲\Rightarrow t_۲^۲-۲۰t_۲+۱۰۰=۰\Rightarrow(t_۲-۱۰)^۲=۰\Rightarrow t_۲=۱۰s$$

البته برای محاسبهٔ $t_۲$ می‌توانستیم حرکت اتومبیل را از حال سکون و تندشونده با شتاب $+۳m/s^۲$ در نظر بگیریم:

$$\Delta x_۲=\frac{۱}{۲}at_۲^۲\Rightarrow ۱۵۰=\frac{۱}{۲}\times ۳t_۲^۲\Rightarrow t_۲=۱۰s$$

در این صورت $\frac{t_۲}{t_۱}=\frac{۱۰}{۰/۵}=۲۰$.

روش رسم نمودار:

سرعت متحرک در مدت $t_۲$ از $۳۰m/s$ با شتاب $۳m/s^۲$ به صفر می‌رسد بنابراین:

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=-۳\times t_۲+۳۰\Rightarrow t_۲=۱۰s$$

با توجه به فرض مسئله اتومبیل دقیقاً جلو مانع می‌ایستد یعنی ۱۶۵m جابه‌جا شده است. بنابراین سطح زیر نمودار $v-t$ باید ۱۶۵ متر باشد.

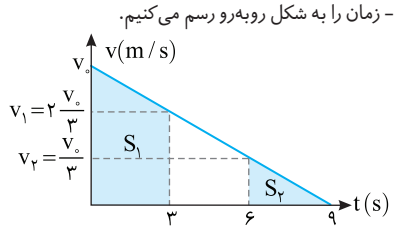
$$S_۱+S_۲=۱۶۵\Rightarrow ۳۰t_۱+\frac{۳۰\times ۱۰}{۲}=۱۶۵\Rightarrow ۳۰t_۱=۱۵\Rightarrow t_۱=۰/۵s$$

بنابراین نسبت $t_۲/t_۱$ خواهد شد:

$$\frac{t_۲}{t_۱}=\frac{۱۰}{۰/۵}=۲۰$$

B ۳ ۴۴۹

نمودار سرعت - زمان را به شکل روبه‌رو رسم می‌کنیم.



به کمک شیب نمودار سرعت - زمان، سرعت در لحظهٔ $t=۳s$ و $t=۶s$ را حساب می‌کنیم. سرعت در $t=۳s$:

$$\frac{۰-v_۰}{۹-۰}=\frac{v_۱-v_۰}{۳-۰}\Rightarrow\frac{-v_۰}{۳}=v_۱-v_۰\Rightarrow v_۱=\frac{۲v_۰}{۳}$$

سرعت در $t=۶s$:

$$\frac{۰-v_۰}{۹-۰}=\frac{v_۲-v_۰}{۶-۰}\Rightarrow\frac{-v_۰}{۳}=\frac{v_۲-v_۰}{۲}\Rightarrow\frac{-۲v_۰}{۳}=v_۲-v_۰\Rightarrow v_۲=\frac{v_۰}{۳}$$

سطح زیر نمودار $S_۱$ و $S_۲$ را به دست آورده بر هم تقسیم می‌کنیم.

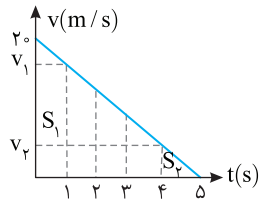
$$\begin{cases}۰\to ۳s:\Delta x_۱=S_۱=\dfrac{v_۰+\frac{۲v_۰}{۳}}{۲}\times ۳=\dfrac{۵v_۰}{۲}\\ ۶s\to ۹s:\Delta x_۲=S_۲=\dfrac{\frac{v_۰}{۳}\times ۳}{۲}=\dfrac{v_۰}{۲}\end{cases}\Rightarrow\frac{\Delta x_۱}{\Delta x_۲}=\frac{\frac{۵v_۰}{۲}}{\frac{v_۰}{۲}}=۵$$

A ۴ ۴۵۰

زمان کل حرکت را به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}t\xrightarrow{\Delta x=۵۰m,\ v=۰,\ v_۰=+۲۰m/s}۵۰=\frac{+۲۰}{۲}t\Rightarrow t=۵s$$

سرعت در ثانیهٔ اول و ثانیهٔ $t=۴s$ را به کمک شیب نمودار حساب کرده سپس سطح $S_۱$ و $S_۲$ را به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{۰-۲۰}{۵-۰}=\frac{۲۰-v_۱}{۰-۱}\Rightarrow v_۱=۱۶m/s$$

$$\frac{۰-۲۰}{۵-۰}=\frac{۲۰-v_۲}{۰-۴}\Rightarrow v_۲=۴m/s$$

سطح $S_۱$:

$$S_۱=\frac{۲۰+۱۶}{۲}\times ۱=۱۸m$$

سطح $S_۲$:

$$S_۲=\frac{۴\times ۱}{۲}=۲m$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{۱۸}{۲}=۹$$

B ۱ ۴۵۱

می‌توان با رابطهٔ $v=\frac{v+v_۰}{۲}$ تست را حل کرد. ابتدا سرعت را در ابتدا و انتهای هر بازه مشخص می‌کنیم.

سرعت در انتهای بازهٔ اول

$$v_{av}=\frac{v_۱+v_۰}{۲}\Rightarrow ۶=\frac{v_۱+۰}{۲}\Rightarrow v_۱=۱۲m/s$$

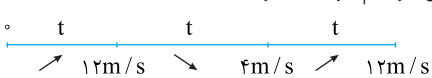
سرعت در انتهای بازهٔ دوم

$$v_{av}=\frac{v_۲+v_۱}{۲}\Rightarrow ۸=\frac{v_۲+۱۲}{۲}\Rightarrow v_۲=۴m/s$$

سرعت در انتهای بازهٔ سوم

$$v_{av}=\frac{v_۳+v_۲}{۲}\Rightarrow ۸=\frac{v_۳+۴}{۲}\Rightarrow v_۳=۱۲m/s$$

دقت کنید، سرعت انتهای هر قسمت، سرعت اولیهٔ قسمت بعدی است. ابتدا سرعت از صفر به $۱۲m/s$ رسیده است. پس حرکت تندشونده است. سپس از $۱۲m/s$ به $۴m/s$ می‌رسد. یعنی حرکت کندشونده است و سرانجام از $۴m/s$ به $۱۲m/s$ می‌رسد. یعنی سرانجام حرکت تندشونده است.



B ۱ ۴۵۲

خط فکری مبدأ و مقصد دو متحرک (۱) و (۲) یکسان است و هر دو هم‌زمان از حال سکون شروع به حرکت کرده‌اند، شتاب متحرک (۱) برابر $a_۱=۲m/s^۲$ و شتاب متحرک (۲) را $a_۲=۸m/s^۲$ بوده بنابراین متحرک (۲) زودتر به مقصد می‌رسد. اگر زمان رسیدن متحرک (۱) به مقصد را $t_۱$ فرض کنیم، زمان رسیدن متحرک (۲) به مقصد برابر $t_۲=t_۱-۳$ خواهد بود. از این رو شما باید معادلهٔ جابه‌جایی - زمان هر دو متحرک را نوشته و با هم مساوی قرار دهید تا زمان رسیدن هر متحرک به مقصد را به‌دست بیاورید و سرانجام طول مسیر AB را حساب کنید.

۱ جابه‌جایی دو متحرک با هم برابر است.

$$\Delta x_1=\Delta x_2\Rightarrow\frac{1}{2}a_1t_1^2=\frac{1}{2}a_2t_2^2\xrightarrow{t_1=t_2+3}\frac{1}{2}\times2(t_2+3)^2=\frac{1}{2}\times8t_2^2$$
$$\Rightarrow|t_2+3|=|2t_2|\Rightarrow t_2=3s$$

۲ اکنون مقدار جابه‌جایی را به دست می‌آوریم: $\Delta x=\frac{1}{2}\times8\times(3)^2\Rightarrow x=36m$

A ۴۵۳ ۳

جابه‌جایی دو متحرک برابر است و متحرکی که دارای شتاب بیشتری است، زمان حرکتش کوتاه‌تر است.

$$\Delta x_1=\Delta x_2\Rightarrow\frac{1}{2}a_1t_1^2=\frac{1}{2}a_2t_2^2\Rightarrow a_1t_1^2=\frac{16}{25}a_1(t_1+5)^2$$
$$t_1=\frac{4}{5}(t_1+5)\Rightarrow5t_1=4t_1+20\Rightarrow t_1=20s$$

بازی با سؤال

دو متحرک روی محور x از حال سکون با شتاب‌های a و $\frac{9}{16}a$ همزمان از یک نقطه به سوی مقصدی معین به حرکت درمی‌آیند و با فاصلهٔ زمانی ۲ ثانیه به مقصد می‌رسند. زمان حرکت جسمی که زودتر به مقصد می‌رسد، چند ثانیه است؟ تجربی - ۹۹

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ یک تست ساده روبه‌روی شماست. دو متحرک از یک نقطه شروع به حرکت کرده‌اند و به سوی یک مقصد می‌روند، پس شما باید جابه‌جایی آن‌ها را برابر قرار دهید. البته متحرکی که شتابش بیشتر است، سریع‌تر (زودتر) به مقصد می‌رسد. یعنی اگر شما زمان حرکت متحرک تندرو را t_1 بگیرید زمان حرکت متحرک کندرو $t_2=t_1+2$ می‌شود و شما می‌توانید مسئله را حل کنید.

۱ جابه‌جایی‌ها یکسان است. $\Delta x_1=\Delta x_2$

۲ معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت را برای دو متحرک می‌نویسیم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow\frac{1}{2}at_1^2=\frac{1}{2}(\frac{9}{16}a)(t_1+2)^2\Rightarrow t_1=\frac{3}{4}(t_1+2)$$
$$\Rightarrow t_1=\frac{3}{4}t_1+\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}t_1=\frac{3}{2}\Rightarrow t_1=6s$$

گزینهٔ ۲

A ۴۵۴ ۲

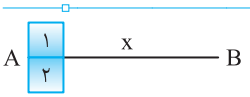
خط فکری سرعت دو متحرک در لحظهٔ t داده شده است. اگر شما معادلهٔ سرعت زمان را برای هریک از دو متحرک بنویسید و مقدار سرعت در لحظهٔ t را در معادله قرار دهید، در این صورت دو معادله دو مجهول به‌دست می‌آورید که با حل آن می‌توانید t را حساب کنید. البته بهتر بود که طراح در صورت مسئله بیان می‌کرد که متحرک از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. یعنی سرعت اولیه صفر است. $(v_0=0)$

با توجه به معادلهٔ سرعت - زمان برای حرکت با شتاب ثابت می‌توان نوشت:

$$v=at+v_0\Rightarrow\begin{cases}10=at+v_0\\22=(a+1/5)t+v_0\end{cases}\xrightarrow{v_0=0}\begin{cases}10=at\\22=at+1/5t\end{cases}$$
$$\Rightarrow22=10+1/5t\Rightarrow t=\frac{12}{1/5}=8s$$

B ۴۵۵ ۲

۱ سرعت متحرک در هر لحظه را با استفاده از معادلهٔ سرعت - زمان به دست می‌آوریم:



$$v_1=a_1t_1+v_0\xrightarrow{\text{از حال سکون}}v_1=a_1t_1$$
$$v_2=a_2t_2+v_0\xrightarrow{\text{از حال سکون}}v_2=a_2t_2$$

۲ در یک لحظه سرعت متحرک اول دو برابر سرعت متحرک دوم است، بنابراین می‌توان نوشت: $\frac{v_1}{v_2}=\frac{a_1t_1}{a_2t_2}=2\xrightarrow[t_1=t_2]{\text{در یک لحظه}}\frac{v_1}{v_2}=\frac{a_1}{a_2}=2\Rightarrow a_1=2a_2$

۳ هر دو متحرک تا انتهای مسیر جابه‌جایی یکسانی را انجام می‌دهند. معادلهٔ مستقل از زمان را برای دو متحرک می‌نویسیم.

$$\begin{cases}v_{f_1}^2-v_0^2=2a_1x\\v_{f_2}^2-v_0^2=2a_2x\end{cases}\xrightarrow[x=AB]{v_0=0}\begin{cases}v_{f_1}^2=2a_1x\Rightarrow v_{f_1}^2=4a_2x&(1)\\v_{f_2}^2=2a_2x&(2)\end{cases}$$
$$\Rightarrow\frac{(1)}{(2)}\Rightarrow(\frac{v_{f_1}}{v_{f_2}})^2=2\Rightarrow\frac{v_{f_1}}{v_{f_2}}=\sqrt{2}\Rightarrow v_{f_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}v_{f_1}\Rightarrow v_{f_2}=10\sqrt{2}m/s$$

B ۴۵۶ ۲

خط فکری دو متحرک A و B بدون سرعت اولیه $(v_0=0)$ شروع به حرکت کرده‌اند. شتاب متحرک A، چهار برابر شتاب متحرک B است $(a_A=4a_B)$. معادلهٔ مکان - زمان را برای دو متحرک A و B بنویسید و جابه‌جایی‌های آن‌ها را برابر قرار دهید تا بتوانید رابطه‌ای بین زمان حرکت دو متحرک به‌دست بیاورید و از آنجا سرعت متوسط را حساب کنید.

۱ جابه‌جایی دو متحرک را برابر قرار می‌دهیم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow{\Delta x_A=\Delta x_B}\frac{1}{2}a_At_A^2=\frac{1}{2}a_Bt_B^2$$
$$\xrightarrow[\text{فرض مسأله}]{a_A=4a_B}4t_A^2=t_B^2\Rightarrow t_B=2t_A$$

۲ اکنون نسبت سرعت متوسط A به سرعت متوسط B را به دست می‌آوریم.

$$\frac{v_{av_A}}{v_{av_B}}=\frac{\frac{\Delta x_A}{t_A}}{\frac{\Delta x_B}{t_B}}=\frac{t_B}{t_A}=2$$

A ۴۵۷ ۲

خط فکری معادلهٔ حرکت دو متحرک را در اختیار دارید، بنابراین کافی است که با مقایسهٔ معادله‌های حرکت با معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت، شتاب و سرعت اولیهٔ هر متحرک را به‌دست آورده و معادلهٔ سرعت - زمان هر متحرک را بنویسید و تفاضل سرعت‌ها را مطابق فرض مسئله برابر $8m/s$ قرار دهید.

با مقایسه معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت با معادلهٔ حرکت دو متحرک داده شده، معادله سرعت زمان را می‌نویسیم:

متحرک (۱):

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\\x_1=2t^2-3t+17\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}a_1=2\Rightarrow a_1=4m/s^2,v_0=-3m/s$$

معادلهٔ سرعت - زمان متحرک (۱): $v_1=4t-3$

متحرک (۲):

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0,x_2=t^2-\alpha t\Rightarrow\frac{1}{2}a_2=1\Rightarrow a_2=2m/s^2,v_0=-\alpha$$

معادلهٔ سرعت - زمان متحرک (۲): $v_2=2t-\alpha$

با توجه به فرض مسئله: $v_1-v_2=8\Rightarrow4t-3-(2t-\alpha)=8\Rightarrow2t-3+\alpha=8$

$$\xrightarrow{t=3s}3+\alpha=8\Rightarrow\alpha=5m/s$$

A ۴۵۸ ۲

خط فکری هرگاه از شما مدت زمان رسیدن دو متحرک به هم خواسته شود، کافی است معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک را نوشته و مکان‌ها را برابر قرار دهید.

خودرو دارای شتاب ثابت بوده و معادلهٔ مکان - زمان آن خواهد شد:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow x_{\text{خودرو}}=t^2$$

کامیون دارای سرعت ثابت بوده و معادلهٔ حرکت آن خواهد شد:

ابتدا سرعت را برحسب m/s به‌دست می‌آوریم:

$$36\frac{km}{h}\times\frac{10}{36}=10\frac{m}{s}\Rightarrow x=vt\Rightarrow x_{\text{کامیون}}=10t$$

هنگامی که دو متحرک به هم می‌رسند $x_{\text{کامیون}}=x_{\text{خودرو}}$ می‌شود پس:

$$t^2=10t\Rightarrow t^2-10t=0\Rightarrow t(t-10)=0\Rightarrow t=10s$$

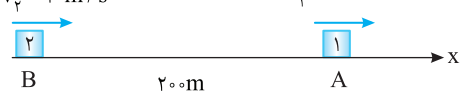
جابه‌جایی کامیون و خودرو در $t=10s$ برابر است با: $\Delta x_{\text{خودرو}}=\Delta x_{\text{کامیون}}=100m$

B ۴۵۹ ۲

خط فکری در صورت مسئله بیان نشده که متحرک (۱) با سرعت ثابت $10m/s$ به دنبال متحرک (۲) در حرکت است یا برعکس؟ اگر متحرک (۱) از نقطهٔ A به دنبال متحرک (۲) حرکت کند هرگز به متحرک (۲) نمی‌رسد زیرا سرعت متحرک (۱) $10m/s$ و سرعت اولیهٔ متحرک (۲) $20m/s$ و حرکت آن شتابدار است. بنابراین شما باید معادلهٔ حرکت هر دو متحرک را در حالتی که متحرک (۲) به دنبال متحرک (۱) است بنویسید و مکان‌ها را برابر قرار دهید.

$a_2 = 2m/s^2$

$v_2 = 20m/s$ $\quad$ $v_1 = +10m/s$

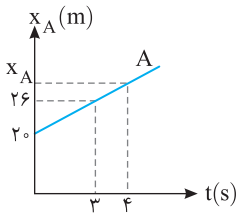


$$\begin{cases} x_1 = vt + x_0 \Rightarrow x_1 = +10t + 200 \\ x_2 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}\times 2t^2 + 20t \end{cases} \Rightarrow +10t + 200 = t^2 + 20t$$

$$\Rightarrow t^2 + 10t - 200 = 0 \Rightarrow (t-10)(t+20) = 0 \Rightarrow t = 10s$$

B ۴۶۰ ۴

ابتدا مشخص می‌کنیم که متحرک A در لحظهٔ $t = 4s$ در چه مکانی است.



$$\frac{26-20}{3} = \frac{x_A - 20}{4} \Rightarrow x_A = 28m$$

در مدت $4s$ متحرک B با سرعت اولیهٔ $12m/s$ از مبدأ مکان به مکان $28m$ می‌رسد، بنابراین:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow 28 = \frac{1}{2}a(4)^2 + 12\times 4 + 0$$

$$28 = 8a + 48 \Rightarrow 8a = -20 \Rightarrow a = -2/5 m/s^2$$

بردار شتاب: $\vec{a} = -2/5\vec{i}$

B ۴۶۱ ۳

۱ جهت حرکت را مثبت و محل شروع حرکت را مبدأ مکان $(x_0 = 0)$ می‌گیریم، سرعت توپ با آهنگ $1m/s$ کم می‌شود، یعنی شتاب حرکت $-1m/s^2$ است و سرعت اولیهٔ توپ $15m/s$ است. معادلهٔ حرکت توپ را می‌نویسیم:

$$a = -1m/s^2 \quad , \quad x_{توپ} = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow x_{توپ} = -\frac{1}{2}t^2 + 15t$$

۲ موتور نیز از همان مکان با شتاب $a = 2m/s^2$ از حال سکون $(v_0 = 0)$ شروع به حرکت می‌کند، بنابراین معادلهٔ حرکت موتور خواهد شد:

$$x_{موتور} = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow x_{موتور} = t^2$$

۳ هنگامی که توپ و موتور به هم می‌رسند مکان آن‌ها یکسان است، از این‌رو معادله‌های حرکت را برابر قرار می‌دهیم:

$$x_{موتور} = x_{توپ} \Rightarrow t^2 = -\frac{1}{2}t^2 + 15t \Rightarrow \frac{3}{2}t^2 - 15t = 0 \Rightarrow t^2 - 10t = 0$$

$$\Rightarrow t(t-10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 10s \end{cases}$$

بنابراین پس از $10s$ موتورسوار و توپ به هم می‌رسند. در این مدت موتورسوار $x_{موتور} = t^2 = 10^2 = 100m$ جابه‌جا شده است.

A ۴۶۲ ۱

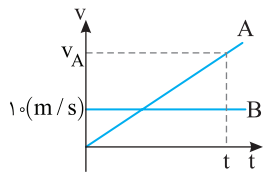
خط فکری مسئلهٔ جالبی است، ابتدا به این فکر می‌افتیم که معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک را نوشته با هم برابر قرار می‌دهیم و مسئله حل می‌شود، اما شتاب حرکت متحرک A را نداریم، بنابراین برای متحرک A از معادلهٔ مستقل از شتاب استفاده می‌کنیم و سرعت متحرک A هنگام رسیدن به متحرک B را حساب می‌کنیم.

با توجه به صورت پرسش می‌توان نوشت:

$$x_A = \frac{v + v_0}{2}t \Rightarrow x_A = \frac{v_A}{2}t \quad , \quad x_B = v_B t \Rightarrow x_B = 10t$$

$$\xrightarrow{x_A = x_B} \frac{v_A}{2}t = 10t \Rightarrow v_A = 20m/s$$

روش دوم: استفاده از نمودار سرعت - زمان



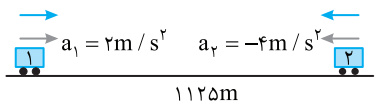
نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B را رسم می‌کنیم. اگر در لحظهٔ t دو متحرک از کنار هم بگذرند، باید سطح زیر نمودار A و B تا لحظهٔ t با هم برابر باشند. از این رو:

$$S_A = S_B \Rightarrow \frac{v_A t}{2} = 10t \Rightarrow v_A = 20m/s$$

B ۴۶۳ ۱

با توجه به شکل رسم شده، معادلهٔ حرکت هر متحرک را می‌نویسیم. به دلخواه خود، مکان متحرک (۱) را مبدأ مختصات گرفته و جهت متحرک اول را جهت مثبت اختیار کرده‌ایم. در هر دو حرکت باید بردار سرعت و بردار شتاب هم‌جهت باشند زیرا هر دو حرکت تندشونده هستند.

$v_1 = 10m/s$ $\quad \xrightarrow{+} \quad$ $v_2 = -20m/s$



$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\times 2t^2 + 10t \\ x_2 = \frac{1}{2}(-4)t^2 - 20t + 1125 \end{cases} \xrightarrow{x_1 = x_2}$$

$$t^2 + 10t = -2t^2 - 20t + 1125 \Rightarrow 3t^2 + 30t - 1125 = 0 \Rightarrow t^2 + 10t - 375 = 0$$

$$t = -5 \pm \sqrt{25 + 375} = -5 \pm 20 \Rightarrow t = 15s \quad , \quad t = -25s \text{ غ ق ق}$$

یادآوری ریاضی در معادلهٔ درجهٔ دو $y = ax^2 + bx + c$، هرگاه b عدد زوج باشد $(b = 2b')$، می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد که محاسبات عددی ساده‌تر شود زیرا اعداد کوچک‌تر هستند.

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

میانبر استفاده از سرعت نسبی و شتاب نسبی.

چون سرعت‌های اولیه خلاف جهت هم هستند: $v_{نسبی} = v_1 + v_2 = 10 + 20 = 30\ m/s$

چون شتاب‌های دو متحرک خلاف جهت هم هستند: $a_{نسبی} = a_1 + a_2 = 2 + 4 = 6\ m/s^2$

$$\Delta x = \frac{1}{2}a_{نسبی}\ t^2 + v_{0\,نسبی}\ t \Rightarrow 1125 = \frac{1}{2}(6)t^2 + 30t \Rightarrow 3t^2 + 30t - 1125 = 0$$

$$\Rightarrow t^2 + 10t - 375 = 0 \Rightarrow t = 15s$$

B ۴۶۴ ۲

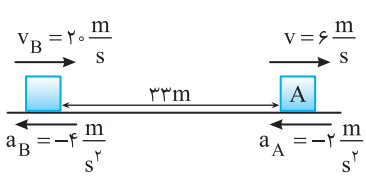
در مدت $1s$، متحرک A با شتاب $-2\frac{m}{s^2}$ به اندازهٔ زیر جابه‌جا می‌شود.

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t = \frac{1}{2}\times(-2)\times 1 + 8 \Rightarrow \Delta x_A = 7m$$

در این لحظه سرعت A برابر است با: $v_A = a_A t + v_0 \Rightarrow v_A = -2\times 1 + 8 = 6\frac{m}{s}$

در مدت $1s$، متحرک B با سرعت $20\frac{m}{s}$ مسافت $20\times 1 = 20m$ را می‌پیماید.

بنابراین در لحظه‌ای که متحرک B از سرعت خود می‌کاهد، فاصلهٔ دو متحرک از هم برابر است با: $46 - 20 + 7 = 33m$



در ایـن لحظـه مکان B را مبدأ می‌گیریم. معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشـته با هم برابر قرار می‌دهیم.

$$x_A=x_B\Rightarrow\frac{1}{2}(-2)t^2+6t+33=\frac{1}{2}(-4)t^2+20t\Rightarrow t^2-14t+33=0$$

$$\Rightarrow t=7\pm\sqrt{49-33}\Rightarrow t=7\pm\sqrt{16}\Rightarrow t=7\pm4\Rightarrow t=3s$$

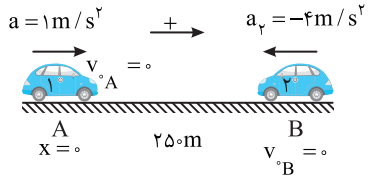
سرعت B در لحظهٔ رسیدن به A خواهد شد: $v_B=at+v_0\Rightarrow v_B=-4\times3+20=8\frac{m}{s}$

B ۴۶۵ ۴

نقطهٔ A را مبدأ مختصات و جهت راست را جهت مثبت فرض می‌کنیم. سپس داده‌های مسئله را با توجه به علامت آن‌ها روی شکل می‌نویسیم تا حل مسئله راحت‌تر شود.

۱ ابتدا معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x_A=\frac{t^2}{2}\quad,\quad x_B=-2t^2+250$$



۲ هنگام رسیدن دو متحرک به هم $x_A=x_B$ است، بنابراین:

$$x_A=x_B\Rightarrow\frac{t^2}{2}=-2t^2+250\Rightarrow\frac{5t^2}{2}=250\Rightarrow t^2=100s\Rightarrow t=10s$$

۳ دو متحـرک پـس از ۱۰s بـه هم می‌رسـند. حال مـدت زمانی که طول می‌کشـد متحرک (۱) از A به B برسد را به دست می‌آوریم:

$$250=\frac{t'^2}{2}\Rightarrow t'^2=500\Rightarrow t'=10\sqrt{5}=10\times2/2=22s$$

۴ متحـرک (۱) $t'-t=22-10=12s$ پس از به هم رسـیدن متحرک (۱) و (۲) به مکان B می‌رسد.

B ۴۶۶ ۴

خط فکری متحرک A از نقطهٔ O شـروع به حرکت کرده و ۵s بعد متحرک B در همان جهت از نقطهٔ O می‌گذرد. وقتی دو متحرک به هم می‌رسند، متحرک A، ۵s بیشتر در حرکت بوده اسـت $(t_A>t_B)$ بنابراین زمان حرکت B، ۵s از زمان حرکت A کمتر است $(t_B=t_A-5)$. معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته با هم برابر قرار می‌دهیم.

معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته و با هم برابر قرار می‌دهیم. (نقطهٔ O را مبدأ در نظر می‌گیریم.)

معادلهٔ حرکت A: $x_A=\frac{1}{2}a_At^2+v_{0A}t\Rightarrow x_A=t_A^2$

معادلهٔ حرکت B: $x_B=vt_B\Rightarrow x_B=30(t_A-5)$

$$x_A=x_B\Rightarrow t_A^2=30t_A-150\Rightarrow t_A^2-30t_A+150=0$$

$$\Rightarrow t_A=+15\pm\sqrt{225-150}\Rightarrow t_A=15\pm\sqrt{75}=15\pm5\sqrt{3}$$

با توجه به فرض پرسش $\sqrt{3}=1/7$: $t_A=15\pm8/5\Rightarrow t_A=6/5s,23/5s$

C ۴۶۷ ۱

خط فکری هرگاه معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک را نوشته و برابر قرار دهیم می‌توان لحظهٔ گذر دو متحرک از کنار یکدیگر را به‌دست آورد. وقتی یکی از متحرک‌ها دارای حرکت با شـتاب ثابت باشـد، معادلهٔ به‌دست آمده یک تابع درجه ۲ اسـت. اگر معادله دارای دو جواب $(\Delta>0)$ باشـد و هر دو جواب مثبت باشـد $(t>0)$، متحرک‌ها دو بار از کنار هم می‌گذرند و اگر معادله دارای یک جواب مثبت $(\Delta=0)$ باشد، دو متحرک یک بار در کنار هم قرار می‌گیرند و اگر $(\Delta<0)$ باشد دو متحرک از کنار هم نمی‌گذرند.

۱ معادلهٔ حرکت کامیون را می‌نویسیم:

$$x_{ک}=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow{a=2m/s^2,v_0=0}x_{ک}=\frac{1}{2}\times2t^2+0\Rightarrow x_{ک}=t^2$$

۲ اگـر مدت حرکـت کامیون t باشـد مدت حرکـت اتومبیل $t-1$ اسـت. بنابراین معادلهٔ حرکت اتومبیل خواهد شد: $x_{اتو}=vt_{اتو}\Rightarrow x_{اتو}=v(t-1)$

۳ معادله‌ها را برابر قرار می‌دهیم. $t^2=vt-v\Rightarrow t^2-vt+v=0$

۴ باید $\Delta=0$ شود تا اتومبیل یک بار در کنار کامیون باشد. $v^2-4v=0\Rightarrow v=4m/s$

B ۴۶۸ ۲

معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسـیم. متحرک B، ۲s دیرتر راه افتاده اسـت. یعنی $t_B=t_A-2$ است. بنابراین:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow\begin{cases}x_A=\frac{1}{2}a(t_A)^2+0+0\\x_B=\frac{1}{2}(a+0/5)(t_A-2)^2+0+0\end{cases}$$

با توجه به فرض مسئله در $t_A=6s$ مکان‌ها برابراند، از این رو:

$$x_A=x_B\Rightarrow\frac{1}{2}a(6)^2=\frac{1}{2}(a+0/5)(6-2)^2$$

$$\Rightarrow36a=16a+8\Rightarrow20a=8\Rightarrow a=0/4\frac{m}{s^2}$$

اکنون مکان هر متحرک را در $t=10s$ به دست آورده از هم کم می‌کنیم.

$$\begin{cases}x_A=\frac{1}{2}\times0/4\times(10)^2\Rightarrow x_A=20m\\x_B=\frac{1}{2}\times(0/4+0/5)\times(8)^2\Rightarrow x_B=28/8m\end{cases}$$

$$\Rightarrow\Delta x_{AB}=28/8-20=8/8m$$

A ۴۶۹ ۲

زمان حرکت کامیون را وقتی $9/9m$ جابه‌جا شده است به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow{a=2/2m/s^2}9/9=\frac{1}{2}(2/2)t^2\Rightarrow t=3s$$

در این لحظه $(t=3s)$ اتومبیل به کامیون می‌رسد و سرعت آن برابر خواهد شد با:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=3/5\times3\Rightarrow v=10/5m/s$$

B ۴۷۰ ۲

خط فکری پـس از جدا شـدن واگـن، قطار با سـرعت ثابت به حرکـت خود ادامه می‌دهـد و واگـن با حرکت کندشـونده متوقف می‌شـود. شـتاب حرکت واگـن را نداریم بنابراین شما باید برای واگن از معادلهٔ مستقل از شتاب (فرمول طلایی) استفاده کنید.

۱ برای واگن می‌نویسیم: $\Delta x_{واگن}=\frac{v+v_0}{2}\Delta t=\frac{v_0}{2}\Delta t$

۲ قطار با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه داده است از این رو: $\Delta x_{قطار}=v_0\Delta t$

۳ اکنون خواهیم داشت: $\frac{\Delta x_{واگن}}{\Delta x_{قطار}}=\frac{\frac{v_0}{2}\Delta t}{v_0\Delta t}=\frac{1}{2}$

B ۴۷۱ ۲

خط فکری از شما خواسته شده فاصلهٔ دو متحرک را پس از توقف متحرک دوم برحسب v و a به‌دست بیاورید. بنابراین شما ابتدا باید زمان توقف و جابه‌جایی متحرک (۲) را حساب کرده سپس مقدار جابه‌جایی متحرک (۱) را در این مدت به‌دست آورده و جابه‌جایی‌ها را از هم کم کنید.

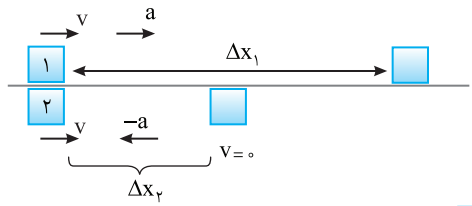
۱ ابتـدا زمان توقـف و جابه‌جایی متحرک (۲) از محل گذر دو متحرک تا محل توقف را به دست می‌آوریم: $v=at+v_0\Rightarrow0=-at_2+v\Rightarrow t_2=\frac{v}{a}$

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow0-v^2=-2a\Delta x_2\Rightarrow\Delta x_2=\frac{v^2}{2a}$$

۲ اکنون جابه‌جایی متحرک (۱) را با شتاب a در مدت t_2 حساب می‌کنیم:

$$\Delta x_1=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow\Delta x_1=\frac{1}{2}a(\frac{v}{a})^2+v(\frac{v}{a})=\frac{3}{2}\frac{v^2}{a}$$

۳ فاصلهٔ دو متحرک از هم خواهد شد: $\Delta x_1-\Delta x_2=\frac{3v^2}{2a}-\frac{v^2}{2a}=\frac{v^2}{a}$



B ۴۷۲ ۱

نکته وقتی دو متحرک در یک جهت در حال حرکت هستند تا لحظه‌ای که سرعت ماشین عقبی کمتر از ماشین جلویی است، فاصله دو متحرک در حال افزایش است. وقتی فاصله کاهش می‌یابد که سرعت ماشین عقبی از ماشین جلویی بیشتر باشد، البته پس از سبقت فاصله زیاد می‌شود.

۱ تا لحظه‌ای که تندی آن‌ها برابر شود، فاصلهٔ بین دو متحرک در حال افزایش است. لحظهٔ برابر شدن تندی دو متحرک را حساب می‌کنیم.

$$v_۱=v_۲\Rightarrow ۰/۵t_۱=۲(t_۱-۳)\Rightarrow ۰/۵t_۱=۲t_۱-۶\Rightarrow t_۱=۴s$$

لحظهٔ رسیدن دو متحرک به هم را با برابر قرار دادن معادلهٔ حرکت آن‌ها به‌دست می‌آوریم:

$$x_۱=x_۲\Rightarrow \frac{۱}{۲}(۰/۵)t'_۱=\frac{۱}{۲}(۲)(t'_۱-۳)^۲$$

$$t'^۲_۱=۴(t'_۱-۳)^۲\Rightarrow t'_۱=۲(t'_۱-۳)\Rightarrow t'_۱=۶s$$

از لحظهٔ $t=۴s$ سرعت متحرک (۲) از سرعت متحرک (۱) بیشتر می‌شود و به آن نزدیک می‌شود تا لحظهٔ $t=۶s$ که به آن می‌رسد، یعنی به مدت ۲s فاصلهٔ دو متحرک در حال کاهش است.

B ۴۷۳ ۴

معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x_۱=vt+x_۰\Rightarrow x_۱=۸t$$

$$x_۲=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰+x_۰\Rightarrow x_۲=\frac{۱}{۲}\times ۲\times t^۲+۰+۷$$

قرار است که تعداد دفعاتی که فاصلهٔ دو متحرک ۵m است را به‌دست بیاوریم. بنابراین می‌توانیم بنویسیم.

$$|x_۲-x_۱|=۵\Rightarrow |t^۲+۷-۸t|=۵\Rightarrow \begin{cases} t^۲-۸t+۷=۵ & (I)\\ t^۲-۸t+۷=-۵ & (II)\end{cases}$$

معادله‌ها را حل می‌کنیم.

$$(I)\Rightarrow t^۲-۸t-۲=۰\Rightarrow t=\pm\sqrt{۱۶-۲}\Rightarrow t=۴\pm\sqrt{۱۴}\Rightarrow \begin{cases} t=۴-\sqrt{۱۴}>۰\\ t=۴+\sqrt{۱۴}>۰\end{cases}$$

$$(II)\Rightarrow t^۲-۸t+۱۲=۰\Rightarrow t=۴\pm\sqrt{۱۶-۱۲}\Rightarrow t=۴\pm۲\Rightarrow \begin{cases} t=۲s\\ t=۶s\end{cases}$$

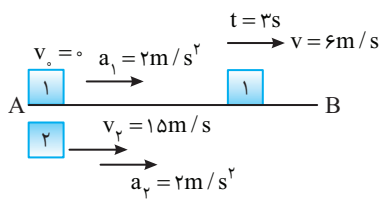
هر چهار زمان به‌دست آمده مثبت هستند بنابراین فاصلهٔ دو متحرک از هم چهار بار ۵m می‌شود.

B ۴۷۴ ۱

دقت کنید سرعت متحرک اول پس از ۳s با شتاب $۲m/s^۲$ خواهد شد:

$$v=at+v_۰\Rightarrow v_۱=۲\times ۳+۰\Rightarrow v_۱=۶m/s$$

در لحظه‌ای که سرعت متحرک اول $۶m/s$ است، سرعت متحرک دوم $۱۵m/s$ و شتاب هر دو متحرک یکسان است. چون سرعت متحرک (۲) بیشتر است. به متحرک (۱) نزدیک شده از آن سبقت می‌گیرد و سپس از متحرک اول دور می‌شود.



C ۴۷۵ ۳

لحظهٔ رسیدن دو متحرک به هم را به‌دست می‌آوریم.

$$x_A=x_B\Rightarrow \frac{۱}{۲}a_At^۲=v_B(t-۳)$$

$$\frac{۱}{۲}\times ۲\times t^۲=۱۶(t-۳)\Rightarrow t^۲-۱۶t+۴۸=۰$$

$$(t-۴)(t-۱۲)=۰\Rightarrow t_۱=۴s, t_۲=۱۲s$$

بنابراین متحرک‌ها در دو لحظهٔ $t_۱=۴s$ و $t_۲=۱۲s$ از کنار هم می‌گذرند. ابتدا B به A می‌رسد. سپس A که سرعتش در حال افزایش است از B سبقت می‌گیرد.

در لحظه‌های $t=۷s$ و $t=۹s$ سرعت A را به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow \begin{cases} v_{۱A}=۲\times ۷=۱۴m/s\\ v_{۲A}=۲\times ۹=۱۸m/s\end{cases}$$

بعد از $t=۴s$، B از A جلو می‌افتد و چون در $t=۷s$ سرعت B از A بیشتر است $(۱۶m/s>۱۴m/s)$ فاصلهٔ بین آنها در حال افزایش است و در $t=۹s$ سرعت A $۱۸m/s$ می‌شود و سرعت A از B بیشتر می‌شود و فاصلهٔ بین آنها کاهش می‌یابد تا در لحظهٔ $t=۱۲s$ A به B می‌رسد.

بنابراین در بازهٔ ۷s تا ۹s ابتدا فاصلهٔ افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

B ۴۷۶ ۲

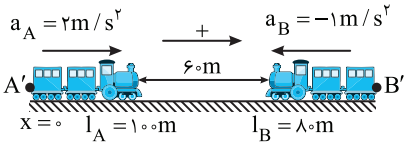
خط فکری ابتدا باید دقت کنید که این دو قطار وقتی به‌طور کامل از کنار هم می‌گذرند که انتهای قطار A به انتهای قطار B برسد. یعنی نقاط A' و B' از کنار هم بگذرند. بنابراین شما باید یک نقطه مثلاً محل ابتدایی A' را مبدأ و جهت راست را جهت مثبت فرض کنید. در این صورت مکان اولیهٔ B' خواهد شد $(x_{۰B'}=۱۰۰+۶۰+۸۰=۲۴۰m)$

معادلهٔ حرکت نقاط A' و B' را نوشته و مسئله را حل کنید.

معادلهٔ مکان زمان نقطهٔ A' و B' را می‌نویسیم و برابر قرار می‌دهیم.

$$x_{A'}=\frac{۱}{۲}a_At^۲\Rightarrow x_{A'}=t^۲\ ,\ x_{B'}=\frac{۱}{۲}a_Bt^۲+d\Rightarrow x_{B'}=-\frac{t^۲}{۲}+۲۴۰$$

$$x_{A'}=x_{B'}\Rightarrow t^۲=-\frac{t^۲}{۲}+۲۴۰\Rightarrow \frac{۳t^۲}{۲}=۲۴۰\Rightarrow t^۲=۱۶۰\Rightarrow t=۴\sqrt{۱۰}s$$



B ۴۷۷ ۲

هنگامی قطار B به‌طور کامل از قطار A سبقت می‌گیرد که انتهای قطار B به ابتدای قطار A برسد، یعنی نقطهٔ B' (انتهای قطار B) به نقطهٔ A' (ابتدای قطار A) برسد. مکان ابتدایی B' را مبدأ مکان و جهت راست را مطابق شکل جهت مثبت در نظر می‌گیریم و برای نقاط B' و A' معادلهٔ حرکت می‌نویسیم:

$$x_{A'}=vt+x_۰\xrightarrow{x_۰=۲۵۰m} x_{A'}=۳۷/۵t+۲۵۰$$

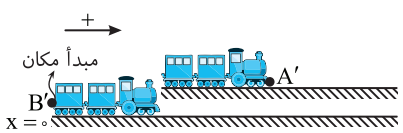
معادلهٔ حرکت A: $x_{A'}=۳۷/۵t+۲۵۰$

معادلهٔ حرکت B: $x_{B'}=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow x_{B'}=۲/۵t^۲$

مکان A' و B' را برابر قرار می‌دهیم:

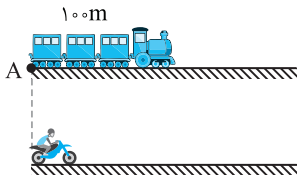
$$x_{A'}=x_{B'}\Rightarrow ۳۷/۵t+۲۵۰=۲/۵t^۲\Rightarrow ۲/۵t^۲-۳۷/۵t-۲۵۰=۰$$

$$\Rightarrow t^۲-۱۵t-۱۰۰=۰\Rightarrow (t-۲۰)(t+۵)=۰\Rightarrow t=۲۰s$$



۴۷۸ B ۲

۱ نقطهٔ A را مبدأ مکان می‌گیریم و جهت حرکت قطار و موتور را جهت مثبت فرض می‌کنیم.



۲ معادلهٔ حرکت موتور که با شتاب $۴m/s^۲$ از حال سکون $(v_۰=۰)$ به راه می‌افتد را می‌نویسیم. $x_م=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow x_م=\frac{۱}{۲}\times۴t^۲+۰\Rightarrow x_م=۲t^۲$

۳ موتور قرار است که از جلوی قطار بگذرد بنابراین معادلهٔ نقطهٔ جلوی قطار را که در فاصلهٔ ۱۰۰ متری نقطهٔ A قرار دارد می‌نویسیم. $x=vt+x_۰\Rightarrow x_{\text{جلوی ق}}=۱۰t+۱۰۰$

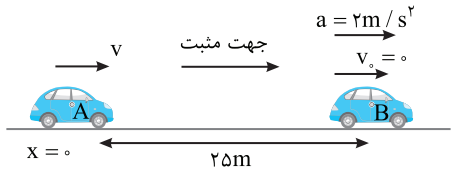
۴ معادله‌های حرکت را برابر قرار می‌دهیم. $x_م=x_{\text{جلوی ق}}\Rightarrow ۲t^۲=۱۰t+۱۰۰$

$$\Rightarrow t^۲-۵t-۵۰=۰\Rightarrow(t+۵)(t-۱۰)=۰\Rightarrow t=۱۰s$$

۴۷۹ B ۱

خط فکری هرگاه قرار باشد که دو متحرک به هم برسند، معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک را می‌نویسیم و برابر قرار می‌دهیم. اگر یکی از متحرک‌ها (و یا هردو) دارای حرکت شتابدار باشد با برابر قرار دادن معادله‌های حرکت، یک معادلهٔ درجه ۲ به‌دست می‌آید و برای آنکه دو متحرک از کنار هم بگذرند باید $\Delta\geq۰$ شود یعنی معادله دارای جواب باشد. از این رو شما معادلهٔ حرکت‌های دو متحرک را نوشته برابر قرار دهید و Δ را بزرگ‌تر و مساوی صفر بگذارید.

محل ابتدایی خودروی A در لحظه‌ای که خودروی B شروع به حرکت می‌کند را مبدأ مکان و مطابق شکل جهت راست را جهت مثبت می‌گیریم.



معادلهٔ حرکت دو متحرک را نسبت به محل ابتدایی خودروی A می‌نویسیم:

$$\begin{cases}x_A=vt+x_۰\Rightarrow x_A=vt\\ x_B=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow x_B=t^۲+۲۵\end{cases}\xrightarrow{x_A=x_B}vt=t^۲+۲۵$$

$$\Rightarrow t^۲-vt+۲۵=۰$$

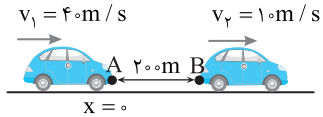
اگر معادلهٔ به دست آمده دارای جواب باشد، دو متحرک به هم می‌رسند. معادلهٔ درجه ۲ وقتی جواب دارد که $\Delta\geq۰$ باشد از این‌رو:

$$\Delta\geq۰\Rightarrow v^۲-۴\times۲۵\geq۰\Rightarrow v^۲\geq۱۰۰\Rightarrow v\geq۱۰m/s$$

بنابراین حداقل سرعت v باید $۱۰m/s$ باشد.

۴۸۰ C ۲

خط فکری وقتی خودروی عقبی به خودروی جلویی برخورد می‌کند که نقطهٔ A به نقطهٔ B برسد (مطابق شکل). در این صورت اگر معادلهٔ حرکت دو خودرو را بنویسیم در آخر به یک معادلهٔ درجهٔ ۲ می‌رسیم. با حل این معادله زمان رسیدن A به B به‌دست می‌آید. اما مسئله می‌خواهد که خودروی عقبی به خودروی جلویی نرسد. یعنی از نظر ریاضی باید معادلهٔ به‌دست آمده بدون جواب باشد $(\Delta<۰)$ معادله‌های حرکت را بنویسید. با هم برابر قرار داده و Δ ی آن را کوچک‌تر از صفر قرار دهید.



معادلهٔ حرکت هر دو متحرک را نوشته و برابر قرار می‌دهیم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow\begin{cases}x_۱=\frac{۱}{۲}at^۲+۴۰t\\ x_۲=v_۲t=۱۰t+۲۰۰\end{cases}$$

$$x_۱=x_۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}at^۲+۴۰t=۱۰t+۲۰۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}at^۲+۳۰t-۲۰۰=۰$$

اگر این معادله جواب نداشته باشد برخوردی صورت نمی‌گیرد. برای این منظور باید $\Delta<۰$ باشد.

$$\Delta<۰\Rightarrow۹۰۰+۴۰۰a<۰\Rightarrow a<-\frac{۹}{۴}\Rightarrow|a|>\frac{۹}{۴}$$

بنابراین کمینه (حداقل) مقدار a باید برابر $\frac{۹}{۴}m/s^۲$ باشد تا متحرک عقبی به متحرک جلویی برخورد نکند.

۴۸۱ B ۳

خط فکری شکل مسئله را کامل کنید. یعنی تمام داده‌های مسئله را روی آن بنویسید. نقطهٔ ۲ را مبدأ مکان و جهت راست را جهت مثبت می‌گیریم. در این صورت شتاب متحرک A که حرکتش تندشونده است $a_A=+۴m/s^۲$ و شتاب متحرک B که حرکتش کندشونده بوده $a_B=-۴m/s^۲$ می‌شود. معادله‌های حرکت را بنویسید و با هم برابر قرار دهید. یک معادلهٔ درجه ۲ به‌دست می‌آورید که ریشه‌های آن، لحظه‌هایی است که دو متحرک به هم می‌رسند اما برای آنکه معادله دارای جواب باشد باید $\Delta\geq۰$ باشد. حل مسئله را شروع کنید.

۱ معادلهٔ متحرک‌های A و B را می‌نویسیم. حرکت متحرک A تندشونده است پس شتاب در جهت حرکت می‌باشد امّا حرکت متحرک B کندشونده است پس شتاب خلاف جهت حرکت می‌باشد.

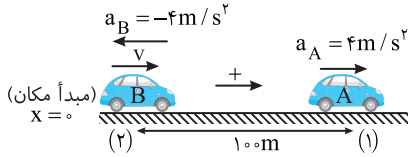
$$\begin{cases}x_A=\frac{۱}{۲}a_At^۲+v_{۰A}t+x_۰\Rightarrow x_A=۲t^۲+۱۰۰\\ x_B=\frac{۱}{۲}a_Bt^۲+v_{۰B}t\Rightarrow x_B=-۲t^۲+vt\end{cases}\xrightarrow{x_A=x_B}$$

$$۲t^۲+۱۰۰=-۲t^۲+vt\Rightarrow۴t^۲-vt+۱۰۰=۰$$

۲ معادلهٔ بالا به ازای $\Delta\geq۰$ جواب خواهد داشت:

$$(-v)^۲-۴(۴۰۰)\geq۰\Rightarrow v^۲\geq۱۶۰۰\Rightarrow v\geq۴۰m/s$$

بنابراین کمینهٔ سرعت متحرک B در لحظهٔ نشان داده شده $v=۴۰m/s$ می‌باشد.

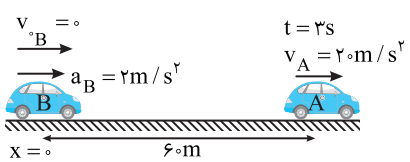


۴۸۲ C ۳

خط فکری سؤال جالبی است. اتومبیل A با سرعت ثابت از کنار اتومبیل ساکن B می‌گذرد، سه ثانیه بعد اتومبیل B با شتاب $۲m/s^۲$ به دنبال A به راه می‌افتد. در این لحظه اتومبیل A به اندازهٔ $(\Delta x=۲۰\times۳=۶۰m)$ جلوتر از اتومبیل B است. اما مهم‌ترین نکته این است که تا لحظه‌ای که سرعت اتومبیل A $(۲۰m/s)$ از سرعت اتومبیل B بیشتر باشد، فاصلهٔ دو اتومبیل زیاد می‌شود و لحظه‌ای که $v_B\geq v_A$ شود فاصلهٔ دو اتومبیل شروع به کم شدن می‌کند. بنابراین در لحظه‌ای که $v_B=۲۰m/s$ می‌شود، فاصلهٔ دو متحرک از هم بیشترین مقدار است. با توجه به این مطلب مسئله را حل می‌کنیم.

۱ مدت زمانی که طول می‌کشد سرعت متحرک B به سرعت $۲۰m/s$ برسد برابر است با:

$$v=a_Bt+v_۰\Rightarrow۲۰=۲t\Rightarrow t=۱۰s$$



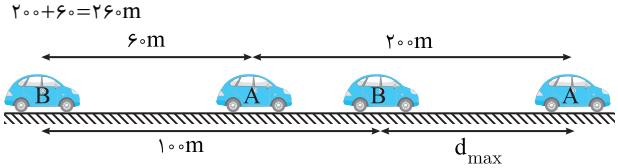
۲ در این مدت جابه‌جایی A و B را به دست می‌آوریم:

$$x_B=\frac{۱}{۲}a_Bt^۲+v_۰t\Rightarrow x_B=\frac{۱}{۲}\times۲\times۱۰^۲=۱۰۰m$$

$$x_A=vt\Rightarrow x_A=۲۰\times۱۰=۲۰۰m$$

۳ بنابراین جابه‌جایی متحرک A از لحظهٔ عبور از متحرک B برابر است با

$$۲۰۰+۶۰=۲۶۰m$$



۴ بیشینه فاصلهٔ A و B خواهد شد: $d=x_A-x_B\Rightarrow d_{max}=۲۶۰-۱۰۰=۱۶۰m$

A ۴۸۳ ۳

تا لحظهٔ $t=3T$ سرعت متحرک ثابت است. با توجه به رابطهٔ $\Delta x=v\Delta t$ و با توجه به شکل‌ها، در $t=0$ تا $t=T$ متحرک A بیشتر از متحرک B جابه‌جا می‌شود:

$$\Delta x_A=v_{0A}T \xrightarrow{\Delta x_A>\Delta x_B} v_{0A}>v_{0B}$$
$$\Delta x_B=v_{0B}T$$

از لحظهٔ $t=3T$ به بعد حرکت‌ها با شتاب ثابت است و با ادامهٔ حرکت از این لحظه به بعد جابه‌جایی‌های متحرک B بیشتر از جابه‌جایی‌های متحرک A شده است بنابراین شتاب متحرک B بیشتر از شتاب متحرک A است. در ثانیهٔ Tام آخر حرکت چون جابه‌جایی B بیشتر از جابه‌جایی A بوده پس سرعت انتهایی متحرک B بزرگ‌تر از سرعت انتهایی متحرک A است.

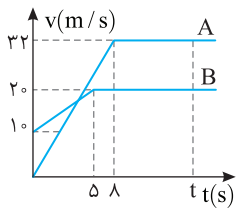
B ۴۸۴ ۴

خط فکری در مسائلی که نوع حرکت متحرک تغییر می‌کند بهتر است که مسئله را به کمک رسم نمودار سرعت - زمان حل کنیم. در لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند باید سطح زیر نمودار سرعت - زمان دو متحرک با هم برابر باشد. از این رو با توجه به داده‌های مسئله، نمودارها را رسم کنید.

۱ زمان رسیدن دو متحرک به سرعت ثابت را به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow 4=\frac{32-0}{t}\Rightarrow t_A=8s \quad , \quad 2=\frac{20-10}{t}\Rightarrow t_B=5s$$

۲ نمودار سرعت - زمان هر دو متحرک را رسم می‌کنیم. لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند (t) سطح زیر نمودار سرعت - زمان آن‌ها یکی است.



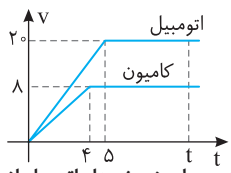
یادآوری ریاضی مساحت ذوزنقه برابر مجموع دو قاعده ضربدر نصف ارتفاع است.

$$\Delta x_A=\Delta x_B\Rightarrow S_A=S_B\Rightarrow\frac{t+t-8}{2}\times 32=\frac{20+10}{2}\times 5+20\times(t-5)\Rightarrow$$
$$(2t-8)\times 16=75+20t-100\Rightarrow 32t-128=20t-25\Rightarrow 12t=103\Rightarrow t=\frac{103}{12}s$$

بازی با سؤال **یک اتومبیل و یک کامیون به طور همزمان از حال سکون و در یک جهت شروع به حرکت می‌کنند. در لحظهٔ شروع حرکت اتومبیل ۲۰۶m عقب‌تر از کامیون است. ابتدا اتومبیل ۵s با شتاب ثابت $4m/s^2$ و کامیون ۴s با شتاب ثابت $2m/s^2$ حرکت می‌کنند. سپس هر یک از آن‌ها با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهند. چند ثانیه پس از شروع حرکت، اتومبیل به کامیون می‌رسد؟**

۱) ۲۰ ۲) ۷ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

پاسخ نمودار سرعت - زمان هر دو متحرک را رسم می‌کنیم:



اتومبیل: $v=at+v_0\Rightarrow v=4\times 5=20m/s$

کامیون: $v=at+v_0\Rightarrow v=2\times 4=8m/s$

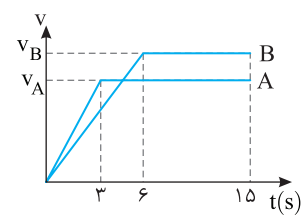
دقت کنید برای آنکه دو متحرک به هم برسند باید سطح زیر نمودار اتومبیل از سطح زیر نمودار کامیون ۲۰۶ متر بیشتر باشد. زیرا اتومبیل ۲۰۶m عقب بودن خود را باید جبران کند.

$$S_{\text{اتومبیل}}=S_{\text{کامیون}}+206\Rightarrow\frac{t+(t-5)}{2}\times 20=\frac{t+(t-4)}{2}\times 8+206\Rightarrow$$
$$20t-50=8t-16+206\Rightarrow 12t=240\Rightarrow t=20s$$

گزینهٔ ۱

B ۴۸۵ ۴

۱ باید نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B را مطابق شکل روبه‌رو رسم کنید. دقت کنید که در ۳s اول نمودار متحرک A خط راست مایل و پس از آن نمودار خط راست افقی است و برای متحرک B نمودار تا لحظهٔ $t=6s$، حرکت با شتاب ثابت و سرعت در حال افزایش تا مقدار v_B است و از آن به بعد سرعت متحرک B ثابت است.



۲ دو متحرک پس از ۱۵s با هم از مبدأ به مقصد می‌رسند بنابراین سطح زیر نمودار دو متحرک در بازهٔ صفر تا ۱۵s باید برابر باشد.

$$S_A=S_B\Rightarrow(15+12)\times\frac{v_A}{2}=(15+9)\times\frac{v_B}{2}\Rightarrow 27v_A=24v_B$$
$$\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\frac{24}{27}\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\frac{8}{9}$$

۳ اکنون نسبت شتاب دو متحرک را حساب می‌کنیم.

$$\frac{a_A}{a_B}=\frac{\frac{v_A-0}{3}}{\frac{v_B-0}{6}}\Rightarrow\frac{a_A}{a_B}=\frac{v_A}{v_B}\times 2\Rightarrow\frac{a_A}{a_B}=\frac{8}{9}\times 2=\frac{16}{9}$$

B ۴۸۶ ۴

متحرک A: سرعت در لحظهٔ $t=4s$ و $t=8s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_0\Rightarrow\begin{cases}t=4s: v_1=2/5\times 4+0\Rightarrow v_1=10m/s\\ v_2=2\times 4+10\Rightarrow v_2=18m/s\end{cases}$$

جابه‌جایی در هر مرحله را به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}t\Rightarrow\begin{cases}\Delta x_1=\frac{10+0}{2}\times 4\Rightarrow\Delta x_1=20m\\ \Delta x_2=\frac{18+10}{2}\times 4\Rightarrow\Delta x_2=56m\end{cases}$$

کل جابه‌جایی A: $\Delta x_A=20+56=76m$

برای متحرک B نیز همین کار را انجام می‌دهیم.

$$v=at+v_0\Rightarrow\begin{cases}v_{1B}=4\times 2=8m/s\\ v_{2B}=2/5\times 4+8=18m/s\end{cases}$$

$$\Delta x_1=\frac{0+8}{2}\times 4=16m\,,\,\Delta x_2=\frac{18+8}{2}\times 4=52m$$
$$\Delta x_B=16+52=68m$$

نسبت سرعت‌های متوسط:

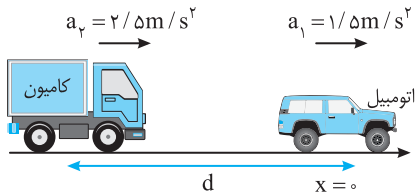
$$\frac{v_{av_B}}{v_{av_A}}=\frac{\frac{\Delta x_B}{\Delta t}}{\frac{\Delta x_A}{\Delta t}}=\frac{\frac{68}{8}}{\frac{76}{8}}\Rightarrow\frac{v_{av_B}}{v_{av_A}}=\frac{17}{19}$$

البته می‌توانستیم با رسم نمودار سرعت زمان برای هر متحرک مسئله را حل کنیم که در این صورت تمام محاسبات بالا را نیز باید انجام می‌دادیم.

B ۴۸۷ ۲

۱ ابتدا مدت زمانی که طول می‌کشد تا اتومبیل مسافت ۷۵ متر را طی کند به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x_1=\frac{1}{2}a_1t^2\Rightarrow 75=\frac{1}{2}\times 1/5t^2\Rightarrow 150=1/5t^2\Rightarrow t=10s$$



۲ در این مدت کامیون باید مسافت $d+75$ متر را طی کرده باشد، بنابراین

$$\Delta x_2=\frac{1}{2}a_2t^2\Rightarrow d+75=\frac{1}{2}\times 2/5\times 10^2\Rightarrow d=50m$$

۳ در لحظهٔ $t=15s$ مکان هر دو را حساب می‌کنیم.

اتومبیل $x=\frac{1}{2}a_1t^2\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}\times 1/5\times 225$

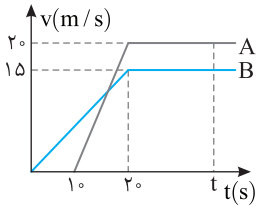
کامیون $x=\frac{1}{2}at^2-d\Rightarrow x_2=\frac{1}{2}\times 2/5\times 225-50$

۴ برای به‌دست آوردن فاصله دو متحرک از هم کافی است x_2-x_1 را حساب کنیم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}(2/5-1/5)\times 225-50\Rightarrow\Delta x=112/5-50\Rightarrow\Delta x=62/5m$$

۴۸۸ C ۲

خط فکری با توجه به نمودار متحرک A، ۱۰s پس از حرکت متحرک B به راه می‌افتد. بنابراین باید مشخص کنیم در این مدت متحرک B چند متر از متحرک A جلو می‌افتد. سپس سطح زیر نمودار را برای هر دو متحرک A و B در لحظهٔ t که به هم می‌رسند حساب کنیم. البته سطح زیر نمودار A باید به مقداری که از متحرک B عقب است از سطح زیر نمودار B بیشتر باشد.



۱ شتاب متحرک B را حساب می‌کنیم. $a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{15-0}{20}\Rightarrow a=\frac{3}{4}m/s^2$

۲ جابه‌جایی متحرک B را در مدت ۱۰s به‌دست می‌آوریم:

$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow \Delta x_B=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times(10)^2+0\Rightarrow \Delta x_B=37/5m$

۳ سطح زیر نمودار دو متحرک را حساب می‌کنیم.

$S_A=(t-10+t-20)\times\frac{20}{2}\Rightarrow S_A=20t-300$

$S_B=(t+t-20)\times\frac{15}{2}\Rightarrow S_B=15t-150$

۴ با توجه به آنچه در خط فکری بیان کردیم، می‌نویسیم:

$S_A=S_B+37/5\Rightarrow 20t-300=15t-150+37/5\Rightarrow 5t=187/5\Rightarrow t=37/5s$

۴۸۹ A ۱

خط فکری ثانیهٔ t ام یعنی بازهٔ زمانی بین $t-1$ تا t بنابراین جابه‌جایی در ثانیهٔ چهارم یعنی جابه‌جایی در بازهٔ $t=3s$ تا $t=4s$. دقت کنید متحرک از حال سکون با شتاب ثابت حرکت کرده است از این رو مسافت طی شده و جابه‌جایی متحرک یکی است. شما باید مکان جسم در لحظه‌های $t=3s$ و $t=4s$ را به‌دست آورده و آن‌ها را از هم کم کنید.

راه‌حل اول: به کمک معادلهٔ مکان - زمان، مکان جسم در لحظهٔ $t=3s$ و $t=4s$ را به‌دست آورده و از هم کم می‌کنیم.

$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ ، $t=3s\rightarrow x=\frac{1}{2}\times10\times9=45m$ ، $t=4s\rightarrow x=\frac{1}{2}\times10\times16=80m$

$\Rightarrow \Delta x_{(4)}=80-45=35m$

میانبر در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام حرکت از رابطهٔ روبه‌رو به‌دست می‌آید: $\Delta x_{(t)}=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0$

راه‌حل دوم: استفاده از رابطهٔ جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام: $\Delta x_{(4)}=\frac{1}{2}\times10(2\times4-1)=35m$

۴۹۰ A ۲

یادآوری سرعت متوسط متحرکی که با شتاب ثابت در حرکت است در بازهٔ زمانی صفر تا t از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید: $v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0$

۱ شتاب حرکت متحرک را به کمک سرعت متوسط آن به‌دست می‌آوریم:

$v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0\xrightarrow{t=3s,v_{av}=12m/s,v_0=0}12=\frac{1}{2}\times a\times3+0\Rightarrow a=8m/s^2$

۲ جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم خواهد شد:

$\Delta x_{(t)}=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0\Rightarrow\frac{1}{2}\times8\times(2\times3-1)+0=20m$

۴۹۱ A ۳

روش اول: متحرک از حال سکون $(v_0=0)$ شروع به حرکت کرده است محل شروع حرکت را مبدأ اختیار می‌کنیم. جابه‌جایی متحرک در مدت ۱s برابر ۲/۵m شده است یعنی مکان در لحظهٔ $t=1s$ برابر $x=2/5m$ است. به کمک معادله حرکت، شتاب را حساب می‌کنیم. $\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 2/5=\frac{1}{2}(a)(1)\Rightarrow a=5m/s^2$

مکان متحرک در مدت ۲s را به‌دست می‌آوریم. $\Delta x'=\frac{1}{2}\times5\times2^2+0\Rightarrow\Delta x'=10m$

جابه‌جایی در ثانیهٔ دوم یعنی جابه‌جایی در بازهٔ $t=1s$ تا $t=2s$ بنابراین مکان در این دو لحظه را از هم کم می‌کنیم. $\Delta x_{(2)}=x'-x=10-2/5=7/5m$

روش دوم: جابه‌جایی یک متحرک که دارای حرکت با شتاب ثابت روی خط راست است، در ثانیهٔ t ام حرکتش از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$\Delta x_{(t)}=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0\Rightarrow\Delta x_{(1)}=\frac{1}{2}a(2\times1-1)+0\Rightarrow2/5=\frac{1}{2}a\Rightarrow a=5m/s^2$

بنابراین جابه‌جایی آن در ثانیهٔ دوم حرکتش برابر است با:

$\Delta x_{(2)}=\frac{1}{2}\times5\times(2\times2-1)+0\Rightarrow\Delta x_{(2)}=7/5m$

تذکر **رابطهٔ جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام در کتاب بیان نشده است اما در حل این‌گونه مسائل، کاربرد مفیدی دارد.**

۴۹۲ B ۳

راه‌حل اول:

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست جابه‌جایی‌ها در ثانیه‌های متوالی تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند که قدرنسبت آن شتاب است. $|\Delta x_{(t)}-\Delta x_{(t-1)}|=a$

۱ جابه‌جایی متحرک در حرکت کندشونده‌اش در ثانیهٔ چهارم، یک متر از جابه‌جایی آن در ثانیهٔ ششم بیشتر بوده است و با توجه به نکتهٔ بیان شده جابه‌جایی در ثانیهٔ چهارم به اندازهٔ $2a$ از جابه‌جایی در ثانیهٔ ششم بیشتر است، بنابراین شتاب حرکت خواهد شد: $|2a|=1\Rightarrow|a|=\frac{1}{2}m/s^2$

۲ سرعت اولیه را حساب می‌کنیم: $v=at+v_0\Rightarrow0=-0/5\times6+v_0\Rightarrow v_0=3m/s$

راه حل دوم: به کمک رابطهٔ جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست می‌توان نوشت:

$\Delta x_{(t)}=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0\Rightarrow\begin{cases}\Delta x_{(4)}=\frac{1}{2}a(2\times4-1)+v_0=\frac{7}{2}a+v_0\\ \Delta x_{(6)}=\frac{1}{2}a(2\times6-1)+v_0=\frac{11}{2}a+v_0\end{cases}$

دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$\Delta x_{(4)}-\Delta x_{(6)}=\frac{7}{2}a-\frac{11}{2}a\Rightarrow1=\frac{-4}{2}a\Rightarrow a=-0/5m/s^2$

$v=at+v_0\Rightarrow0=-0/5\times6+v_0\Rightarrow v_0=3m/s$

۴۹۳ B ۲

جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم برابر ۲۸ متر است، سرعت اولیه را به کمک جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام به‌دست می‌آوریم:

$\Delta x_{(t)}=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0\Rightarrow28=\frac{1}{2}\times6(2\times3-1)+v_0\Rightarrow v_0=13m/s$

اکنون به کمک معادلهٔ مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت، مکان متحرک در ثانیهٔ $t=5s$ را حساب می‌کنیم البته در لحظهٔ $t=0$ مکان اولیهٔ متحرک $x_0=4m$ بوده است.

$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\times6\times25+13\times5+4=75+65+4\Rightarrow x=144m$

۴۹۴ B ۱

نکته ۲ ثانیهٔ سوم یعنی بازه‌های زمانی بین $t=4s$ تا $t=6s$.

یادآوری برای به‌دست آوردن جابه‌جایی در مدت n ثانیهٔ حرکت از معادلهٔ زیر استفاده می‌کنیم: $\Delta x_{(n)}=\frac{n}{2}a(2t-n)+nv_0$

که در آن t کل مدت زمان و n تعداد ثانیه‌های آخر مدت t است اما این به چه معنی است؟ یعنی اگر گفته شود جابه‌جایی در سه ثانیهٔ پنجم شما باید به جای t مقدار $5\times3=15s$ و جای n، ۳s را قرار دهید.

۱ جابه‌جایی در ۲s اول برابر ۱۳m شده است از این‌رو:

$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow13=\frac{1}{2}a(2)^2+2v_0\Rightarrow13=2a+2v_0\quad(I)$

۲ در دو ثانیهٔ سوم یعنی در رابطهٔ بیان شده در یادآوری به جای t مقدار $2\times3=6s$ و به جای n مقدار ۲s را قرار دهید. $25=\frac{2}{2}a(2\times6-2)+2v_0\Rightarrow25=10a+2v_0\quad(II)$

۳ به کمک معادله‌های (I) و (II)، a را به‌دست می‌آوریم:

$\begin{cases}13=2a+2v_0\\ 25=10a+2v_0\end{cases}\xrightarrow{\text{دو رابطه را از هم کم می‌کنیم}}12=8a\Rightarrow a=1/5m/s^2$

B ۴۹۵ ۴

یادآوری در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، جابه‌جایی در بازهٔ زمانی n ثانیه از کل مدت حرکت t ثانیه برابر است با: $\Delta x_{(n)}=\frac{n}{2}a(2t-n)+nv_0$

۱ جابه‌جایی در دو ثانیهٔ اول یعنی در رابطهٔ $n=2s$ و $t=2s$ را قرار دهیم:

$$54=\frac{2}{2}a(2\times2-2)+2v_0\Rightarrow54=2a+2v_0 \quad (1)$$

۲ جابه‌جایی در دو ثانیهٔ سوم یعنی در رابطهٔ $n=2s$ و $t=6s$ را قرار دهیم:

$$38=\frac{2}{2}a(2\times6-2)+2v_0\Rightarrow38=10a+2v_0 \quad (2)$$

۳ رابطه‌های (۱) و (۲) را از هم کم کرده و شتاب را حساب می‌کنیم:

$$54-38=2a+2v_0-10a-2v_0\Rightarrow16=-8a\Rightarrow a=-2m/s^2$$

۴ اکنون v_0 را از رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آوریم:

$$54=2a+2v_0\Rightarrow54=2\times(-2)+2v_0\Rightarrow v_0=29m/s$$

۵ مسافت طی شده تا توقف به کمک رابطهٔ مستقل از زمان خواهد شد:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow0-(29)^2=2\times(-2)\Delta x\Rightarrow\Delta x=210/25m$$

B ۴۹۶ ۱

در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست بدون سرعت اولیه جابه‌جایی‌ها در بازه‌های زمانی یکسان n (یا t) از مقادیر زیر پیروی می‌کنند.

بنابراین: $\frac{\Delta x_{\text{سوم}}}{\Delta x_{\text{دوم}}}=\frac{5}{3}$

روش دیگر: استفاده از رابطهٔ $\Delta x_n=\frac{n}{2}a(2t-n)$ است.

جابه‌جایی در n ثانیهٔ سوم و n ثانیهٔ دوم خواهد شد:

$$\left.\begin{aligned}\Delta x_{\text{سوم}}&=\frac{n}{2}a[2(3n)-n]=\frac{5n^2}{2}a\\ \Delta x_{\text{دوم}}&=\frac{n}{2}a[(2(2n)-n]=\frac{3n^2}{2}a\end{aligned}\right\}\frac{\Delta x_{\text{سوم}}}{\Delta x_{\text{دوم}}}=\frac{5}{3}$$

B ۴۹۷ ۲

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست می‌توان ثابت کرد که جابه‌جایی‌ها در بازه‌های زمانی متوالی یکسان t تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت at^2 می‌دهند.

در صورت مسئله بیان شده که در هر 2s، متحرک 8m کمتر جابه‌جا می‌شود یعنی در بازهٔ زمانی یکسان $t=2s$، قدرنسبت دنبالهٔ حسابی برابر ۸ است از این‌رو می‌توان نوشت: $at^2=8\Rightarrow a(2)^2=8\Rightarrow a=2m/s^2$

متحرک بعد از 400m متوقف شده است. به کمک معادلهٔ مستقل از زمان سرعت اولیهٔ را حساب می‌کنیم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow0-v_0^2=2\times(-2)\times400\Rightarrow v_0^2=1600\Rightarrow v_0=40m/s$$

بازی با سوال **متحرکی روی خط راست با شتاب ثابت در حرکت است و در هر ثانیه، ۲/۵ متر بیشتر از ثانیهٔ قبل جابه‌جا می‌شود. شتاب متحرک چند متر بر مجذور ثانیه است؟**

۱) ۲/۵ ۲) ۵

۳) ۱/۲۵ ۴) قابل محاسبه نیست.

پاسخ **در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، جابه‌جایی‌ها در ثانیه‌های متوالی تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند که قدرنسبت آن شتاب است.**

$$\Delta x_{(t)}-\Delta x_{(t-1)}=a$$

در این پرسش، جابه‌جایی در هر ثانیه، ۲/۵ متر بیشتر از ثانیهٔ قبل است یعنی قدرنسبت این دنباله که همان شتاب است برابر $2/5m/s^2$ است. گزینهٔ ۱

B ۴۹۸ ۲

راه‌حل اول: ۱ معادلهٔ سرعت - زمان $v=-2t+4$ را با معادلهٔ سرعت - زمان حرکت با شتاب ثابت $v=at+v_0$ مقایسه می‌کنیم. مشخص می‌شود که حرکت دارای شتاب ثابت $a=-2m/s^2$ و سرعت اولیهٔ $v_0=4m/s$ است و معادلهٔ مکان - زمان آن به صورت روبه‌رو است: $x=\frac{1}{2}(-2)t^2+4t+x_0\Rightarrow x=-t^2+4t+x_0$

۲ ثانیهٔ سوم حرکت یعنی بازهٔ زمانی بین $t=4s$ و $t=6s$ بنابراین مکان در این دو لحظه را به‌دست آورده از هم کم می‌کنیم تا جابه‌جایی به‌دست آید:

$$\begin{cases}t_1=4s\Rightarrow x_1=-16+16+x_0\Rightarrow x_1=x_0\\ t_2=6s\Rightarrow x_2=-36+24+x_0\Rightarrow x_2=-12+x_0\end{cases}\Rightarrow|\Delta x|=12m$$

راه‌حل دوم: استفاده از رابطهٔ روبه‌رو: $\Delta x_{(n)}=\frac{n}{2}a(2t-n)+nv_0$

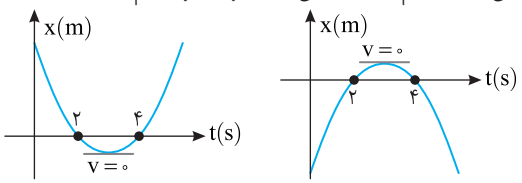
در این رابطه ۲ ثانیهٔ سوم یعنی $n=2$ و $t=6s$ است.

$$\Delta x_{(n)}=\frac{2}{2}\times(-2)(2\times6-2)+2\times4=-20+8=-12m$$

پس بزرگی جابه‌جایی برابر 12m است.

B ۴۹۹ ۴

خط فکری معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت $(x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0)$ یک تابع درجه ۲ است که نمودار آن سهمی است. از طرفی لحظه‌ای بردار مکان متحرک تغییر جهت (علامت) می‌دهد که از مبدأ $(x=0)$ بگذرد. در این صورت لحظه‌های $t=2s$ و $t=4s$ ریشه‌های معادلهٔ مکان زمان هستند و در این لحظه‌ها نمودار مکان - زمان محور زمان را قطع خواهد کرد. بنابراین اگر شما بخواهید نمودار مکان - زمان که یک سهمی است را رسم کنید باید یکی از دو نمودار زیر را رسم کنید.



۱ به نمودارهای رسم شده دقت کنید. لحظهٔ تغییر جهت متحرک یعنی لحظه‌ای که سرعت متحرک صفر می‌شود و این لحظه در لحظه‌های کمینه و بیشینه نمودار (رأس سهمی) اتفاق می‌افتد.

۲ همچنین سهمی نسبت به خط قائم عبوری از رأس سهمی متقارن است بنابراین لحظهٔ تغییر جهت $t_{\text{تغییر جهت}}=\frac{2+4}{2}=3s$ خواهد شد.

B ۵۰۰ ۲

الف) جابه‌جایی بین دو لحظهٔ $t=0$ تا $t=4s$ را به دست می‌آوریم. برای این کار مکان در لحظهٔ $t=0$ و $t=4s$ را به کمک معادلهٔ حرکت $x=t^2+4t+5$ به‌دست آورده از هم کم می‌کنیم.

$$t=0\Rightarrow x=0+4(0)+5\Rightarrow x_1=5m\,,\ t=4s\Rightarrow x=4^2+4(4)+5\Rightarrow x_2=37$$

جابه‌جایی $37-5=32m$ است. بنابراین سرعت متوسط در این بازه خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{32}{4}=8m/s$$

این گزاره نادرست است.

ب) معادلهٔ مکان - زمان مسئله را با معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت مقایسه کرده و شتاب و سرعت اولیه را مشخص می‌کنیم.

$$x=t^2+4t+5\,,\ x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow a=2m/s^2\,,\ v_0=4m/s$$

معادلهٔ سرعت - زمان را می‌نویسیم: $v=at+v_0\Rightarrow v=2t+4$

بعد از $t=0$ همواره یک مقدار مثبت به ۴ اضافه می‌شود پس کمترین سرعت در $t=0$ و $4m/s$ است و این گزاره درست است.

پ) با توجه به معادلهٔ سرعت که در بالا به دست آمده همواره سرعت مثبت است و شتاب نیز ثابت و مثبت می‌باشد پس حرکت تند شونده است و این گزاره درست است.

ت) زمانی بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان $x=0$ عبور می‌کند. Δ را تشکیل می‌دهیم $x=t^2+4t+5\Rightarrow\Delta=b^2-4ac\Rightarrow\Delta=16-4\times5=-4<0$

بنابراین معادله جواب ندارد. یعنی متحرک هیچ‌گاه از مبدأ مکان نمی‌گذرد و گزارهٔ (ت) نادرست است.

B ۵۰۱ **۴**

خط فکری طراح بیان کرده که در لحظهٔ $t=2s$ متحرک در یک متری مبدأ است بنابراین مکان آن می‌تواند $x=+1m$ و یا $x=-1m$ باشد. شما باید در دو حالت مسئله را حل کنید.

حالت اول: اگر متحرک در $t=2s$ در $x=+1m$ باشد، آن‌گاه: $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$

$$\begin{cases}t=2s\Rightarrow1=\frac{1}{2}a\times(2)^2+0+x_0\\ t=4s\Rightarrow13=\frac{1}{2}a\times(4)^2+0+x_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a+x_0=1\\ 8a+x_0=13\end{cases}\Rightarrow6a=12$$

$$\Rightarrow a=2m/s^2\Rightarrow x_0=-3m$$

حالت دوم: اگر متحرک در $t=2s$ در $x=-1m$ باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases}t=2s\Rightarrow-1=\frac{1}{2}a(2)^2+0+x_0\\ t=4s\Rightarrow13=\frac{1}{2}a(4)^2+0+x_0\end{cases}\Rightarrow6a=14\Rightarrow a=\frac{7}{3}m/s^2,x_0=-\frac{17}{3}m$$

C ۵۰۲ **۴**

خط فکری در صورت مسئله اندازهٔ شتاب و اندازهٔ جابه‌جایی در مدت ۲s داده شده است. بنابراین ممکن است شتاب مثبت و جابه‌جایی نیز مثبت باشد یا شتاب و جابه‌جایی هر دو منفی باشند و یا شتاب مثبت و جابه‌جایی منفی و بالعکس باشد. در نتیجه چهار حالت را باید یک به یک بررسی کنیم و با به‌دست آوردن سرعت اولیه و مقایسهٔ آن با شتاب، نوع حرکت را تعیین کنیم.

اگر بردار شتاب و بردار جابه‌جایی هم جهت باشند یعنی اگر شتاب و بردار جابه‌جایی هر دو مثبت و یا هر دو منفی باشند آن‌گاه:

۱ هر دو مثبت باشند.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow+6=\frac{1}{2}\times(+2)\times(2)^2+v_0\times(2)\Rightarrow v_0=+1m/s$$

معادلهٔ سرعت - زمان خواهد شد: $v=at+v_0\Rightarrow v=2t+1$

در معادلهٔ $v=2t+1$، شتاب $+2m/s^2$ و سرعت اولیه $v_0=1m/s$ است و حرکت همواره تندشونده است.

۲ هر دو منفی باشند.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow{\text{هر دو منفی}}-6=\frac{1}{2}(-2)\times(2)^2+v_0\times(2)\Rightarrow v_0=-1m/s$$

معادلهٔ سرعت زمان خواهد شد $v=-2t-1$ و چون سرعت اولیه و شتاب هر دو منفی هستند حرکت همواره تندشونده است و گزینهٔ (۱) درست است.

اکنون حالتی را بررسی می‌کنیم که بردار شتاب و بردار جابه‌جایی در این دو ثانیه هم جهت نباشد.

۳ شتاب $2m/s^2$ و جابه‌جایی $-6m$ باشد.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow[\Delta x<0]{a>0}-6=\frac{1}{2}\times2\times(2)^2+v_0\times2\Rightarrow v_0=-5m/s$$

در این صورت معادلهٔ سرعت زمان خواهد شد: $v=at+v_0\Rightarrow v=2t-5$

بنابراین ابتدا سرعت و شتاب هم‌علامت نبوده حرکت کندشونده است اما پس از توقف جسم در $t=2/5s$، حرکت تندشونده می‌شود.

۴ شتاب منفی $-2m/s^2$ و جابه‌جایی مثبت $+6m$ باشد:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow[\Delta x>0]{a<0}6=\frac{1}{2}\times(-2)\times(2)^2+v_0\times2\Rightarrow v_0=+5m/s$$

در این حالت نیز $v=-2t+5$ بوده و حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده خواهد بود و گزینهٔ (۲) درست است.

B ۵۰۳ **۲**

خط فکری متحرک از حال سکون با شتاب ثابت $+2a$ شروع به حرکت کرده و سرعتش به v می‌رسد. سپس با همان شتاب $(-2a)$ ترمز می‌کند و می‌ایستد. بنابراین اگر در قسمت اول زمان t_1 و جابه‌جایی Δx_1 و در قسمت دوم زمان t_2 و جابه‌جایی Δx_2 باشد، باید رابطه‌ای بین زمان‌ها و جابه‌جایی‌ها به‌دست بیاوریم.

۱ به کمک معادلهٔ سرعت - زمان خواهیم داشت

قسمت اول: $v=at+v_0\Rightarrow v=(2a)t_1\Rightarrow t_1=\frac{v}{2a}$

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow v^2=2(2a)\Delta x_1\Rightarrow\Delta x_1=\frac{v^2}{4a}$$

قسمت دوم: $v=at+v_0\xrightarrow{v=0}0=(-2a)t_2+v\Rightarrow t_2=\frac{v}{2a}$

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow0-v^2=2(-2a)\Delta x_2\Rightarrow\Delta x_2=\frac{v^2}{4a}$$

۲ نتیجه اینکه در این حرکت $t_1=t_2$ و $\Delta x_1=\Delta x_2$ بوده و اگر زمان کل حرکت t و کل جابه‌جایی x باشد آن‌گاه:

$$t_1-t_2=t\Rightarrow t_1+t_1=t\Rightarrow t_1=\frac{t}{2}\quad(I)$$

$$\Delta x_1+\Delta x_2=x\Rightarrow\Delta x_1+\Delta x_1=x\Rightarrow\Delta x_1=\frac{x}{2}\quad(II)$$

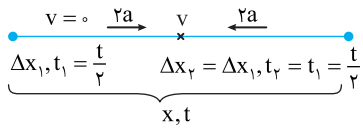
۳ با توجه به معادلهٔ مکان - زمان می‌توان نوشت:

$$\Delta x_1=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow\Delta x_1=\frac{1}{2}(2a)t_1^2\xrightarrow{t_1=\frac{t}{2}}\Delta x_1=a(\frac{t}{2})^2=\frac{at^2}{4}$$

با توجه به رابطهٔ II خواهیم داشت: $\Delta x_1=\frac{x}{2}\Rightarrow\frac{at^2}{4}=\frac{x}{2}\Rightarrow x=\frac{at^2}{2}\Rightarrow t=\sqrt{\frac{2x}{a}}$

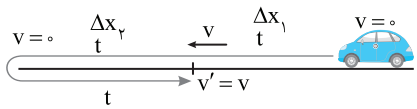
هرگاه متحرک با شتاب a_1 از حال سکون شروع به حرکت کرده و در مدت t_1 جابه‌جایی x_1 را طی کند، سپس با شتاب a_2 ترمز کرده و در مدت t_2 جابه‌جایی x_2 را طی کند تا متوقف شود آن‌گاه:

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{t_2}{t_1}=\frac{a_2}{a_1}$$



B ۵۰۴ **۳**

در قسمت اول حرکت در مدت t سرعت از صفر به v رسیده سپس مطابق شکل در مدت $2t$ سرعت به $-v$ می‌رسد یعنی ابتدا سرعت صفر شده و متحرک تغییر جهت داده تا سرعتش از صفر به $-v$ می‌رسد، از این‌رو:



$$\Delta x_1=\frac{v_1+v_2}{2}\Delta t_1\Rightarrow\Delta x_1=\frac{v}{2}t\ ,\ \Delta x_2=\frac{v_2+v'}{2}\Delta t_2\Rightarrow\Delta x_2=\frac{v}{2}t$$

$$\Delta x_3=\frac{v_3+v'}{2}\Delta t\Rightarrow\Delta x_3=\frac{-v}{2}t$$

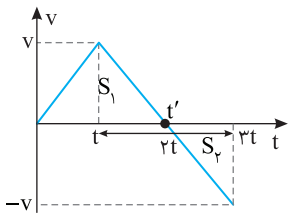
مسافت برابر است با مجموع بزرگی جابه‌جایی‌ها:

$$\ell=|\Delta x_1|+|\Delta x_2|+|\Delta x_3|\Rightarrow\ell=\frac{v}{2}t+\frac{v}{2}t+\frac{v}{2}t\Rightarrow\ell=\frac{3v}{2}t$$

حل به کمک رسم نمودار سرعت - زمان

نمودار سرعت - زمان حرکت متحرک به شکل روبه‌روست و کافی است مساحت S_1 و S_2 را حساب کرده و با هم جمع کنیم.

ابتدا t' محل تقاطع نمودار با محور زمان را به کمک شیب خط به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{-v-v}{3t-t}=\frac{0-v}{t'-t}\Rightarrow\frac{2}{3t-t}=\frac{1}{t'-t}\Rightarrow2t'-2t=2t\Rightarrow t'=2t$$

$$L=|S_1|+|S_2|\Rightarrow L=\frac{v\times2t}{2}+|\frac{-v\times t}{2}|\Rightarrow L=vt+\frac{vt}{2}=\frac{3}{2}vt$$

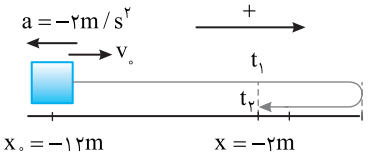
۵۰۵ B ۳

یادآوری ریاضی در معادلهٔ درجهٔ ۲ $(y=ax^2+bx+c)$ برای حاصل‌ضرب دو ریشه حاصل‌جمع دو ریشه و تفاضل دو ریشه داریم:

$$x_1x_2=\frac{c}{a}\ ,\ x_1+x_2=-\frac{b}{a}\ ,\ |x_2-x_1|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

خط فکری دقت کنید در مدت ۳s متحرک از یک مکان $(x=-2m)$ می‌گذرد و چنانچه لحظه‌های گذر از این مکان را حساب کنیم اختلاف آن‌ها $t_2-t_1=3s$ است. معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم و به جای x مقدار $-2m$ را قرار می‌دهیم. اما به جای $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ به‌دست آوردن ریشه‌ها تفاضل آن‌ها را حساب می‌کنیم.

با توجه به شکل، اختلاف زمانی دو بار گذر از مکان $x=-2m$ برابر ۳s است. $(t_2-t_1=3s)$



معادلهٔ مکان - زمان را نوشته، داده‌های مسئله را در آن قرار می‌دهیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow -2=\frac{1}{2}\times -2\times t^2+v_0t-12\Rightarrow t^2-v_0t+10=0$$

تفاضل دو ریشهٔ این معادله برابر ۳ است.

$$\Delta t=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\Rightarrow \Delta t=\frac{\sqrt{v_0^2-40}}{1}\Rightarrow 3=\sqrt{v_0^2-40}\Rightarrow v_0^2=49\Rightarrow v_0=7m/s$$

۵۰۶ B ۴

۱ معادله را به صورت معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت $(x-t)$ در می‌آوریم:

$$t=1+\frac{\sqrt{65-10x}}{5}\Rightarrow \frac{\sqrt{65-10x}}{5}=t-1\Rightarrow \sqrt{65-10x}=5(t-1)$$

$$\Rightarrow 65-10x=25(t-1)^2\Rightarrow 65-10x=25+25t^2-50t$$

$$\Rightarrow 10x=-25t^2+50t+40\Rightarrow x=-2/5t^2+5t+4$$

۲ معادله را با معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت مقایسه کرده a و v_0 را مشخص می‌کنیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x=-2/5t^2+5t+4\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}a=-2/5\Rightarrow a=-5m/s^2\\ v_0=5m/s\\ x_0=+4m\end{cases}$$

۳ معادلهٔ سرعت - زمان خواهد شد. $v=-5t+5,\ v=0\Rightarrow t=1s$

t	۰		۱
v		+	۰ −
$a=-5m/s^2$		−	−
av		−	+
		کندشونده	تندشونده

بنابراین حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

میانبر هرگاه ضریب t^2 (شتاب) و ضریب t (سرعت اولیه) در معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت مختلف‌العلامت باشند حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

۵۰۷ C ۴

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، جابه‌جایی‌ها در بازه‌های زمانی یکسان و متوالی t تشکیل دنبالهٔ حسابی به قدر نسبت at^2 می‌دهند.

با توجه به فرض مسئله در بازه‌های متوالی و یکسان t متحرک به‌ترتیب مسافت ۴۵ متر، ۲۷ متر و ۹ متر طی می‌کند بنابراین تفاضل هر دو مسافت متوالی باید برابر at^2 باشد.

اگر جهت حرکت را مثبت فرض کنیم چون حرکت کندشونده است شتاب حرکت در خلاف جهت حرکت بوده و منفی است.

بنابراین شتاب حرکت $-2m/s^2$ بنابراین:

$$27-45=at^2\Rightarrow -18=-2t^2\Rightarrow t=3s$$

اکنون به کمک معادلهٔ سرعت - زمان، سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0\xrightarrow{t=3\Delta t=9s}0=(-2)(9)+v_0\Rightarrow v_0=18m/s$$

۵۰۸ B ۳

وقتی متحرکی با شتاب ثابت می‌ایستد یعنی شتاب $-a$ و حرکت کندشونده است. می‌توان فرض کرد در همان مدت با شتاب $+a$ از حال سکون شروع به حرکت کرده است. یعنی می‌توان حرکت در ثانیهٔ آخر را از سکون بررسی کرد. بدین ترتیب می‌توان نوشت:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow 3=\frac{1}{2}a\times 1\Rightarrow a=6m/s^2$$

حال برای ۳s اول مسیر کندشونده می‌نویسیم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 33=\frac{1}{2}(-6)\times(3)^2+3v_0\Rightarrow v_0=20m/s$$

روش حل به کمک رسم نمودار سرعت - زمان

نمودار سرعت - زمان را رسم کنید. دقت کنید سطح زیر نمودار در ۱s آخر برابر ۳m است و در ثانیهٔ آخر سرعت از v به صفر می‌رسد. حساب می‌کنیم و در هر ثانیه سرعت به اندازهٔ شتاب a کم می‌شود بنابراین ابتدای ثانیهٔ آخر سرعت برابر a است. از این رو:

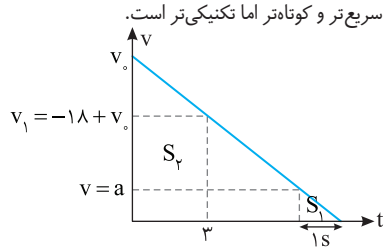
$$S_1=\frac{a\times 1}{2}\Rightarrow 3=\frac{a\times 1}{2}\Rightarrow a=6m/s^2$$

سرعت در لحظهٔ $t=3s$ برابر است با: $v=at+v_0\Rightarrow v_1=-6\times 3+v_0=-18+v_0$

اکنون سطح ذوزنقهٔ S_2 را برابر ۳۳ متر قرار می‌دهیم.

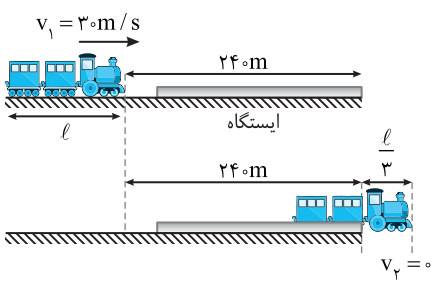
$$(-18+v_0+v_0)\times\frac{3}{2}=33\Rightarrow -18+2v_0=22\Rightarrow v_0=20m/s$$

روش اول بسیار سریع‌تر و کوتاه‌تر اما تکنیکی‌تر است.



۵۰۹ B ۱

خط فکری فاصلهٔ ابتدای قطار تا انتهای ایستگاه ۲۴۰m است و هنگام توقف قطار، $\frac{1}{3}$ آن از ایستگاه عبور کرده یعنی کل مسافت طی‌شده توسط قطار $240+\frac{\ell}{3}$ است، بنابراین شما ابتدا باید مشخص کنید که این قطار با شتاب $-1/5m/s^2$ و سرعت اولیه $30m/s$ پس از طی مسافت چند متر می‌ایستد و این مقدار به‌دست آمده را با $240+\frac{\ell}{3}$ برابر قرار بدهید و طول قطار را به‌دست بیاورید.



۱ به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، مسافت طی شده توسط قطار در مدت توقف را به‌دست می‌آوریم: $v_2^2-v_1^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-900=2\times(-1/5)\Delta x\Rightarrow \Delta x=300m$

۲ بنابراین قطار بعد از ۳۰۰m متوقف می‌شود، در این صورت طول قطار را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=۲۴۰+\frac{\ell}{۳}\Rightarrow ۳۰۰=۲۴۰+\frac{\ell}{۳}\Rightarrow \ell=۱۸۰m$$

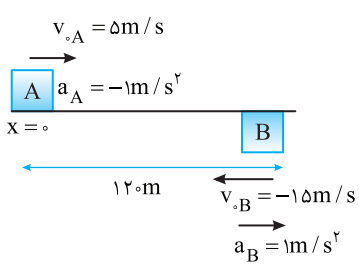
۳ برای آنکه طولی از قطار از انتهای ایستگاه عبور نکند باید سرعت قطار در مسافت ۲۴۰ متر از ۳۰m/s به صفر برسد. از این رو:

$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲a\Delta x \xrightarrow{v_۱=۳۰m/s\,,\,v_۲=۰\,,\,\Delta x=۲۴۰m} -۹۰۰=+۲a\times ۲۴۰$$

$$\Rightarrow a=-\frac{۱۵}{۸}m/s^۲$$

C ۵۱۰ ۱

۱ محل ابتدایی اتومبیل A را مبدأ مکان و جهت مثبت را مطابق شکل به سوی راست می‌گیریم. با توجه به جهت مثبت برای اتومبیل A $v_{۰A}=+۵m/s$ و شتاب $a_A=-۱m/s^۲$ می‌شود و سرعت اولیه B، $v_{۰B}=-۱۵m/s$ و شتاب حرکت B که خلاف جهت $v_{۰B}$ و در جهت مثبت محور است برابر $a_B=+۱m/s^۲$ می‌شود.



۲ معادلهٔ حرکت دو اتومبیل را می‌نویسیم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow\begin{cases}x_A=\frac{۱}{۲}(-۱)t^۲+۵t\\ x_B=\frac{۱}{۲}(۱)t^۲-۱۵t+۱۲۰/۵\end{cases}$$

۳ معادله‌های حرکت را مساوی قرار می‌دهیم.

$$x_A=x_B=\frac{-۱}{۲}t^۲+۵t=\frac{۱}{۲}t^۲-۱۵t+۱۲۰/۵\Rightarrow t^۲-۲۰t+۱۲۰/۵=۰$$

$$\Rightarrow \Delta'=۱۰۰-۱۲۰/۵<۰$$

چرا مسئله جواب ندارد؟ مگر دو متحرک به سوی هم نمی‌روند. در واقع در این حل هر متحرک متوقف شده و برمی‌گردد. در حالی که اتومبیل‌ها وقتی که متوقف می‌شوند برنمی‌گردند. از این رو باید مشخص کنیم که اتومبیل A پس از چند ثانیه می‌ایستد و در این مدت چند متر جلو می‌آید.

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=(-۱)t+۵\Rightarrow t=۵s$$

$$\Delta x_A=\frac{۱}{۲}a_At^۲+v_{۰A}t\Rightarrow \Delta x_A=\frac{۱}{۲}\times(-۱)(۵)^۲+۵\times ۵\Rightarrow \Delta x_A=۱۲/۵m$$

بنابراین اتومبیل A پس از ۵s با طی مسافت ۱۲/۵m می‌ایستد و برای آنکه اتومبیل B به A برسد باید ۱۲۰/۵−۱۲/۵=۱۰۸m مسافت طی کند. اکنون بررسی کنیم B در چه مدتی ۱۰۸/۵m را طی می‌کند.

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow -۱۰۸=\frac{۱}{۲}(۱)t^۲+(-۱۵)t\Rightarrow t^۲-۳۰t+۲۱۶=۰$$

حال با توجه به معادلهٔ درجه دوم، ریشه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$t_{۱,۲}=\frac{۳۰\pm\sqrt{۹۰۰-۸۶۴}}{۲}\Rightarrow t_{۱,۲}=\frac{۳۰\pm\sqrt{۳۶}}{۲}\Rightarrow\begin{cases}t_۱=۱۲s\\ t_۲=۱۸s\end{cases}$$

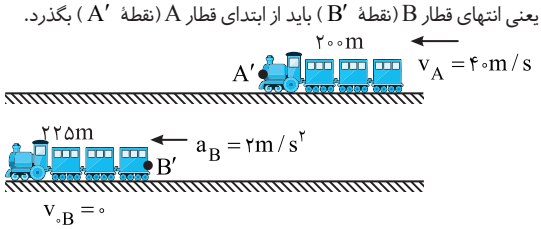
اکنون باید مشخص کنیم اتومبیل B پس از چه مدتی می‌ایستد؟

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=-۱\times t+۱۵\Rightarrow t_B=۱۵s$$

در نتیجه $t_۱=۱۲s$ قابل قبول است و $t_۲=۱۸s$ جواب مسئله نیست. زیرا از ۱۵s بیشتر است.

B ۵۱۱ ۴

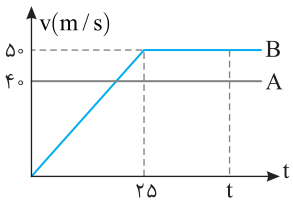
۱ شکل سادهٔ زیر را برای خود رسم کنید. تا متوجه شوید برای سبقت گرفتن از A باید قطار B، ۲۲۵+۲۰۰=۴۲۵ متر بیشتر از قطار A حرکت کند. چرا؟ برای آنکه سبقت B از A یعنی انتهای قطار B (نقطهٔ B′) باید از ابتدای قطار A (نقطهٔ A′) بگذرد.



۲ لحظه‌ای را که سرعت قطار B با شتاب $۲m/s^۲$ به $۵۰m/s$ می‌رسد حساب کنید.

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۵۰=۲t+۰\Rightarrow t=۲۵s$$

۳ نمودار سرعت - زمان دو متحرک را مطابق شکل روبه‌رو رسم کنید.



۴ سطح زیر نمودار B باید ۴۲۵m از سطح زیر نمودار A بیشتر باشد.

$$S_B=S_A+۴۲۵\Rightarrow(t+t-۲۵)\times\frac{۵۰}{۲}=۴۰t+۴۲۵$$

$$\Rightarrow ۵۰t-۶۲۵=۴۰t+۴۲۵\Rightarrow ۱۰t=۱۰۵۰\Rightarrow t=۱۰۵s$$

C ۵۱۲ ۲

خط فکری زمان واکنش یعنی بازهٔ زمانی که راننده مانع را می‌بیند تا لحظه‌ای که پدال ترمز را می‌فشرد. در این بازه زمانی می‌توان حرکت را یکنواخت فرض کرد. مسافتی که خودروی A طی می‌کند ۱۱۰ متر است. شما باید جابه‌جایی در مدت ترمز را حساب کرده از ۱۱۰ متر کم کنید و جابه‌جایی در زمان واکنش را به‌دست بیاورید تا بتوانید زمان واکنش A را حساب کرده به سراغ خودروی B بروید.

۱ جابه‌جایی خودروی A با شتاب $-۲m/s^۲$ و سرعت اولیهٔ $+۲۰m/s$ تا لحظهٔ توقف خواهد شد:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-۲۰^۲=۲\times(-۲)\times\Delta x\Rightarrow \Delta x=۱۰۰m$$

۲ بنابراین راننده پس از طی مسافت ۱۱۰−۱۰۰=۱۰m ترمز می‌گیرد و این ۱۰ متر را با تندی ۲۰m/s می‌رود. زمان واکنش A را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=vt\Rightarrow ۱۰=۲۰t\Rightarrow t_A=۰/۵s$$

۳ زمان واکنش A نصف زمان واکنش B است. از این‌رو زمان واکنش B خواهد شد:

$$t_A=۰/۵t_B\Rightarrow ۰/۵=t_B\Rightarrow t_B=۱s$$

۴ در این مدت خودروی B با تندی ۱۸m/s مسافت زیر را طی می‌کند.

$$\Delta x_B=v_Bt\Rightarrow \Delta x_{B_۱}=۱۸\times ۱\Rightarrow \Delta x_{B_۱}=۱۸m$$

۵ جابه‌جایی B حین ترمز گرفتن خواهد شد:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-(۱۸)^۲=۲(-۲)\Delta x\Rightarrow \Delta x_{B_۲}=۸۱m\Rightarrow \Delta x=۸۱m$$

۶ بنابراین خودروی B پس از طی مسافت ۸۱+۱۸=۹۹m در فاصلهٔ ۱۱۰−۹۹=۱۱ متری مانع می‌ایستد.

C ۵۱۳ ۲

حل با رسم نمودار سرعت - زمان

نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم اما چگونه؟

۱ در مدت ۲۰s سرعت متحرک با شتاب ثابت a از صفر به مقدار v می‌رسد سپس شتاب آن a− می‌شود، بنابراین در همان مدت ۲۰s سرعت متحرک صفر می‌شود، یعنی در لحظهٔ t=۴۰s متوقف شده سرعتش منفی می‌شود.

۲ متحرک می‌خواهد به مبدأ حرکت برگردد یعنی جابه‌جایی آن صفر شود. $\Delta x=۰$

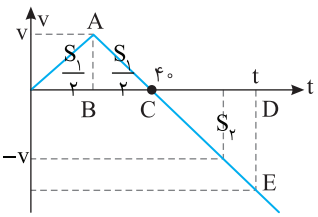
۳ جابه‌جایی برابر سطح زیر نمودار v−t است، بنابراین سطح زیر نمودار در بازهٔ ۰ تا ۴۰s ($S_۱$) باید با سطح زیر نمودار در بازهٔ ۴۰s تا t ($S_۲$) برابر شود.

۴ سطح $S_۱$ به دو قسمت مساوی تقسیم شده است. یعنی $S_۱$ دو برابر سطح مثلث ABC است و برابر با سطح مثلث CDE است ($S_۲=S_۱$). $S_{CDE}=۲S_{ABC}$

۵ دو مثلث ABC و CDE متشابه‌اند و در مثلث‌های متشابه نسبت مساحت‌ها برابر توان ۲ نسبت تشابه است.

$$\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}}=(\frac{CD}{BC})^{۲}\Rightarrow ۲=(\frac{t-۴۰}{۲۰})^{۲}\Rightarrow t-۴۰=۲۰\sqrt{۲}\Rightarrow t=۴۰+۲۰\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{۲}=۱/۴} t=۶۸s$$



روش تحلیلی با معادلات حرکت با شتاب ثابت

۱ ابتدا متحرک با شتاب ثابت a از حال سکون شروع به حرکت کرده و بعد از ۲۰s سرعت آن خواهد شد: $v=at+v_۰\Rightarrow v=a\times ۲۰+۰\Rightarrow v=۲۰a$

برای آنکه مجدد به مکانی برسیم که در ابتدا سرعت ۲۰a بوده باید متحرک مسیر رفت را بازگردد و به همان مکان برسد. چون شتاب حرکت ثابت است بنابراین در لحظهٔ بازگشت به مکان $x_۱$ تندی برابر ۲۰a اما جهت آن قرینه خواهد بود بنابراین حرکت بازگشت قرینهٔ حرکت رفت است.

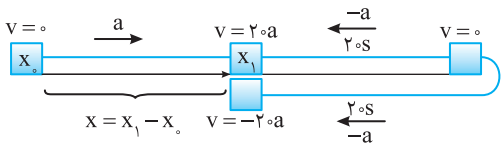
۲ در لحظهٔ t=۲۰s ، شتاب قرینه می‌شود $(a_۲=-a)$ زمان توقف را حساب می‌کنیم. $v=at+v_۰\Rightarrow ۰=-a\times t+۲۰a\Rightarrow t=۲۰s$

۳ بنابراین متحرک در لحظهٔ t=۴۰s سرعتش صفر شده و برمی‌گردد.

۴ لحظه‌ای که سرعتش برابر −۲۰a می‌شود را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow -۲۰a=(-a)t+۰\Rightarrow t=۲۰s$$

بنابراین در لحظهٔ $t=۴۰+۲۰=۶۰s$ سرعت متحرک −۲۰a می‌شود و مسیر حرکت تا این لحظه مطابق شکل زیر است.



۵ از این لحظه $(t=۶۰s)$ متحرک باید جابه‌جایی x را طی کند تا به مبدأ حرکتش برگردد. ابتدا x را حساب می‌کنیم. $x=\frac{۱}{۲}at^{۲}+v_۰t\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}a(۲۰)^{۲}+۰\Rightarrow x=۲۰۰a$

۶ اکنون زمان طی x را در مسیر برگشت حساب می‌کنیم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^{۲}+v_۰t\xrightarrow[a_۲=-a\,,\,v_۰=-۲۰a]{x=-۲۰۰a}-۲۰۰a=\frac{۱}{۲}(-a)t^{۲}+(-۲۰a)t$$

$$۲۰۰=\frac{۱}{۲}t^{۲}+۲۰t\Rightarrow t^{۲}+۴۰t-۴۰۰=۰\Rightarrow t=-۲۰\pm\sqrt{۴۰۰+۴۰۰}$$

$$\Rightarrow t=-۲۰\pm۲۰\sqrt{۲}\xrightarrow{\sqrt{۲}=۱/۴}\begin{cases}t=-۲۰-۲۸=-۴۸s & \text{غ ق ق}\\ t=-۲۰+۲۸=۸s\end{cases}$$

۷ بنابراین متحرک در مدت ۶۰+۸=۶۸s به مبدأ حرکتش برمی‌گردد.

B ۵۱۴ ۱

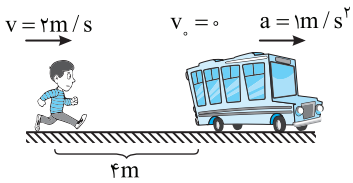
خط فکری از زندگی روزمره می‌توانید درک کنید که اگر اتومبیل B به دنبال اتومبیل A در حرکت باشد تا لحظه‌ای که سرعت اتومبیل B از سرعت اتومبیل A بیشتر باشد، اتومبیل B به اتومبیل A نزدیک می‌شود، اگر $v_B=v_A$ باشد، فاصلهٔ دو اتومبیل تغییر نمی‌کند و اگر سرعت اتومبیل B از اتومبیل A کمتر شود، فاصلهٔ دو اتومبیل افزایش می‌یابد.

در صورت مسئله بیان شده که متحرک A از حال سکون شروع به حرکت کرده و با شتاب ثابت بر سرعت خود می‌افزاید. اتومبیل B، سرعتش ثابت و برابر ۱۵m/s است. تا لحظه‌ای که سرعت اتومبیل A از ۱۵m/s کمتر است، B به آن نزدیک می‌شود و وقتی سرعت A از ۱۵m/s بیشتر شد، فاصلهٔ دو اتومبیل از هم زیاد می‌شود. بنابراین در مدت ۵s با شتاب a نباید سرعت A به ۱۵m/s رسیده باشد. از این رو می‌توان نوشت: $v=at<۱۵\Rightarrow ۵a<۱۵\Rightarrow a<۳m/s^{۲}$

توجه کنید اگر شتاب حرکت بزرگ‌تر از $۳m/s^{۲}$ باشد پس از ۵s تندی متحرک A بزرگ‌تر از ۱۵m/s بوده فاصلهٔ آن از متحرک B دائماً افزایش می‌یابد.

B ۵۱۵ ۳

خط فکری دقت کنید در لحظه‌ای که اتوبوس با شتاب $۱m/s^{۲}$ شروع به حرکت می‌کند، سرعت شخص ۲m/s است و شخص به اتوبوس نزدیک می‌شود اما پس از ۲s، سرعت اتوبوس $v=at=۱\times ۲=۲m/s$ شده و از آن به بعد فاصلهٔ اتوبوس از شخص شروع به افزایش می‌کند. در نتیجه کمینه فاصلهٔ بین شخص و اتوبوس در t=۲s اتفاق می‌افتد، بنابراین شما جابه‌جایی شخص و اتوبوس را در مدت ۲s پیدا کرده و مسئله را حل کنید.



راه‌حل اول:

۱ جابه‌جایی شخص در مدت ۲s خواهد شد $\Delta x_{ش}=vt\Rightarrow \Delta x_{ش}=۲\times ۲=۴m$

۲ جابه‌جایی اتوبوس در مدت ۲s را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x_{اتو}=\frac{۱}{۲}at^{۲}\Rightarrow \Delta x_{اتو}=\frac{۱}{۲}\times ۱\times (۲)^{۲}\Rightarrow \Delta x_{اتو}=۲m$$

۳ فاصلهٔ ابتدایی اتوبوس و شخص ۴ متر بوده است. شخص ۴m جلو آمده و در این مدت اتوبوس نیز دو متر جلو می‌رود و فاصلهٔ شخص تا اتوبوس ۴−۲=۲m می‌شود.

راه‌حل دوم: چون شخص با سرعت ثابت ۲m/s در حال دویدن است، در نتیجه از معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت استفاده می‌کنیم. اگر مبدأ مختصات را مکان شخص، وقتی که در فاصلهٔ ۴ متری از انتهای اتوبوس قرار دارد در نظر بگیریم، داریم:

$$x_{ش}=vt+x_۰\xrightarrow[x_۰=۰]{v=۲m/s}x_{ش}=۲t$$

اتوبوس هم با شتاب ثابت حرکت خود را آغاز می‌کند، بنابراین:

$$x_{اتو}=\frac{۱}{۲}at^{۲}+v_۰t+x_۰\xrightarrow[x_۰=۴m]{a=۱m/s^{۲}\,,\,v_۰=۰}x_{اتو}=\frac{۱}{۲}\times ۱\times t^{۲}+۰\times t+۴$$

$$\Rightarrow x_{اتو}=\frac{t^{۲}}{۲}+۴$$

برای به دست آوردن حداقل فاصلهٔ شخص از اتوبوس، باید از معادلهٔ تفاضل مکان اتوبوس و شخص بهره ببریم: $\Delta x=\frac{t^{۲}}{۲}-۲t+۴$

با توجه به این‌که معادلهٔ به دست آمده تابع درجهٔ ۲ است مقدار کمینه تابع (یعنی رأس سهمی) خواهد شد:

$$t=-\frac{b}{۲a}\Rightarrow t=-(\frac{-۲}{۲\times \frac{۱}{۲}})\Rightarrow t=۲s\ ,\ \Delta x_{min}=۲-۴+۴=۲m$$

B ۵۱۶ ۲

بردار مکان وقتی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ بگذرد، یعنی x=۰ شود. البته باید در این لحظه بردار مکان تغییر علامت دهد. معادلهٔ حرکت را مساوی صفر $(x=۰)$ قرار می‌دهیم. $x=۰\Rightarrow t^{۲}-۶t+۹=۰\Rightarrow (t-۳)^{۲}=۰\Rightarrow t=۳s$

مقدار $(t-۳)^{۲}$ همواره مثبت است یعنی مکان همواره مثبت است و با آنکه در t=۳s مکان صفر می‌شود اما بردار مکان تغییر علامت نمی‌دهد. متحرک در تمام مسیرش در قسمت مثبت محور در حرکت است و در لحظهٔ t=۳s به مبدأ رسیده از آن عبور نکرده و برمی‌گردد. متحرک تغییر جهت می‌دهد، اما بردار مکان آن همواره مثبت است. پس، بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

۲ ۵۱۷ C

خط فکری موتورسوار با تندی ثابت $16m/s$ در حرکت است و حرکت آن یکنواخت است. خودرو دارای سرعت $24m/s$ است و با شتاب $4m/s^2$ از سرعت خود می‌کاهد و تا لحظه‌ای که سرعت آن به $16m/s$ برسد، در حال نزدیک شدن به موتورسوار است. یعنی کمترین فاصلهٔ بین موتورسوار و خودرو لحظه‌ای است که سرعت خودرو $16m/s$ شود.

۱ در مدت $0/5s$ جابه‌جایی خودرو و موتورسوار را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases}\Delta x_{\text{خودرو}} = v_{\text{خودرو}} t \Rightarrow \Delta x_{\text{خودرو}} = 24\times 0/5 = 12m \\ \Delta x_{\text{موتورسوار}} = v_{\text{موتورسوار}} t \Rightarrow \Delta x = 16\times 0/5 = 8m\end{cases} \Rightarrow 12-8 = 4m$$

۲ بنابراین در لحظه‌ای که خودرو ترمز می‌کند، فاصلهٔ آن از موتورسوار برابر است با:

$$50-4 = 46m$$

۳ مدت زمانی که طول می‌کشد تا سرعت خودرو $16m/s$ شود را به‌دست می‌آوریم.

$$v = at + v_0 \Rightarrow 16 = -4\times t + 24 \Rightarrow t = 2s$$

۴ جابه‌جایی موتورسوار و خودرو را در مدت $2s$ حساب می‌کنیم.

$$\Delta x_{\text{موتورسوار}} = v_{\text{موتورسوار}} t = 16\times 2 \Rightarrow \Delta x_{\text{موتورسوار}} = 32m$$

$$\Delta x_{\text{خودرو}} = \frac{v+v_0}{2} t \Rightarrow \frac{16+24}{2}\times 2 \Rightarrow \Delta x_{\text{خودرو}} = 40m$$

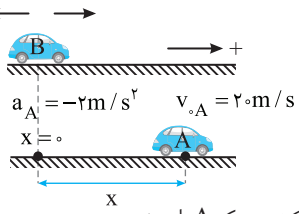
۵ یعنی در این دو ثانیه خودرو $40-32 = 8m$ به موتورسوار نزدیک می‌شود.

بنابراین کمینه فاصلهٔ آن‌ها از هم برابر است با: $\Delta x_{\min} = 46-8 = 38m$

۳ ۵۱۸ B

۱ با توجه به صورت مسئله شکل زیر را رسم می‌کنیم، مکان اولیهٔ متحرک B را مبدأ مکان و سمت راست را جهت مثبت اختیار می‌کنیم.

$$a_B = -4m/s^2 \quad v_{0B} = 40m/s$$



۲ معادلهٔ حرکت متحرک A را می‌نویسیم.

$$x_A = \frac{1}{2}a_A t^2 + v_{0A} t + x_0$$

$$\Rightarrow x_A = \frac{1}{2}\times(-2)t^2 + 20t + x \Rightarrow x_A = -t^2 + 20t + x$$

۳ مکان متحرک A را در مدت $4s$ به‌دست می‌آوریم.

$$t=4s \Rightarrow x_A = -16 + 20\times 4 + x \Rightarrow x_A = 64 + x$$

۴ متحرک B به مدت $1s$ با همان سرعت $40m/s$ به حرکت خود ادامه می‌دهد سپس با شتاب $-4m/s^2$ ترمز می‌گیرد. بنابراین در مدت $4s$ متحرک B، $1s$ دارای حرکت یکنواخت و $3s$ دارای حرکت با شتاب ثابت است. مکان آن در $t=4s$ را حساب می‌کنیم.

$$x_B = vt_{\text{تاخیر}} + \left(\frac{1}{2}at'^2 + v_0 t'\right) \Rightarrow x_B = 40\times 1 + \frac{-1}{2}\times 4\times 3^2 + 40\times 3$$

$$\Rightarrow x_B = 40 - 18 + 120 \Rightarrow x_B = 142m$$

۵ در $t=4s$ مکان دو متحرک یکی است بنابراین:

$$x_A = x_B \Rightarrow 64 + x = 142 \Rightarrow x = 78m$$

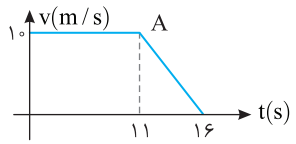
۳ ۵۱۹ B

خط فکری به دلیل اینکه دو متحرک از یک نقطه در مبدأ زمان عبور کرده‌اند، پس زمانی به هم می‌رسند که جابه‌جایی یکسانی داشته باشد، پس نمودار $v-t$ دو متحرک را رسم می‌کنیم و با توجه به سطح زیر نمودار می‌توان جابه‌جایی را به‌دست آورد:

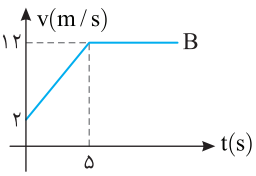
۱ متحرک A در ابتدا تا لحظهٔ $t=11s$ با تندی ثابت $10m/s$ حرکت می‌کند و بعد از آن با شتاب $a=-2m/s^2$ از تندی خود کاسته تا متوقف شود:

$$v_1 = 10m/s \ , \ v_2 = 0 \ , \ \Delta t = (t'-11) \ , \ a = -2m/s^2$$

$$v_2 = a(t'-11) + v_1 \Rightarrow 0 = -2(t'-11) + 10 \Rightarrow t'-11 = 5 \Rightarrow t' = 16s$$



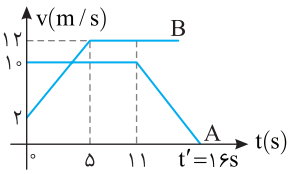
۲ متحرک B از تندی $2m/s$ شروع به حرکت کرده و مدت $5s$ به طور شتابدار حرکت می‌کند و سپس با تندی ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد و با توجه به سؤال و جهت حرکت هر دو یکی است پس علامت تندی هر دو متحرک یکسان است.



$$v'_2 = ? \ , \ v'_1 = 2 \ , \ t = 5s \ , \ a' = 2m/s^2$$

$$v'_2 = a't + v'_1 \Rightarrow v'_2 = 2\times 5 + 2 \Rightarrow v'_2 = 12m/s$$

۳ نمودار $v-t$ دو متحرک به صورت زیر است:



۴ هر دو متحرک از یک نقطه (مبدأ مختصات) شروع به حرکت کرده‌اند، پس برای آنکه دو متحرک به هم برسند باید جابه‌جایی هر دو متحرک یکسان باشد. ابتدا جابه‌جایی دو متحرک تا لحظهٔ $t=5s$ را از سطح زیر نمودار $v-t$ به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x_A = S_A = 10\times 5 = 50m \ , \ \Delta x_B = S_B = \frac{5\times(2+12)}{2} = 35m$$

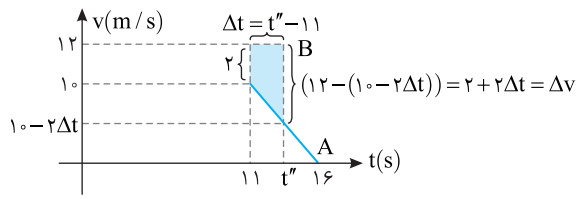
۵ تندی اولیهٔ متحرک A بیشتر از تندی اولیهٔ متحرک B است و در ابتدا A از متحرک B جلو زده و همانطور که در حساب کردن جابه‌جایی مشخص است متحرک A در $5s$ اولیه بیشتر از متحرک B جابه‌جا شده است و این دو در این مدت به هم نمی‌رسند. حال جابه‌جایی در بازهٔ صفر تا $11s$ را حساب می‌کنیم. $\Delta x_A = 11\times 10 = 110m$ ، $\Delta x_B = 35 + (12\times 6) = 107m$

۶ بنابراین تا لحظهٔ $t=11s$ متحرک A به اندازهٔ $110-107 = 3m$ جلوتر از متحرک B است و اگر در لحظهٔ t'' این دو متحرک به هم برسند باید جابه‌جایی متحرک B از $t=11s$ تا t'' به اندازهٔ $3m$ بیشتر از جابه‌جایی متحرک A در این بازه باشد و با توجه به نمودار، سرعت متحرک در لحظهٔ t'' را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x_B - \Delta x_A = 3m \xrightarrow[\text{جابه‌جایی برابر سطح رنگی ذوزنقه شکل زیر نمودار است}]{\text{با توجه به شکل این اختلاف}}$$

$$\frac{(\Delta t)\times((2\Delta t+2)+2)}{2} = 3 \Rightarrow (\Delta t)(2\Delta t+4) = 6$$

$$\Delta t(\Delta t+2) = 3 \Rightarrow \Delta t = 1s \ , \ t'' = 11+1 = 12s$$

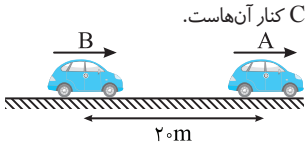


۷ بنابراین دو متحرک در لحظهٔ $t''=12$ به یکدیگر می‌رسند و اختلاف سرعت متحرک یعنی Δv برابر است با: $\Delta v = 2+2\times 1 = 4m/s$

۳ ۵۲۰ B

خط فکری سه متحرک همزمان شروع به حرکت کرده‌اند و در یک لحظه از کنار هم می‌گذرند. بنابراین شما باید ابتدا زمان رسیدن متحرک B به متحرک A را به‌دست بیاورید. سپس معادلهٔ متحرک C و متحرک A را نوشته برابر قرار دهید.

۱ متحرک B با سرعت ثابت حرکت می‌کند و در هر ثانیه ۲ متر به متحرک A نزدیک می‌شود، بنابراین بعد از $10s$ فاصلهٔ $20m$ بین A و B را جبران خواهد کرد و در این لحظه متحرک C کنار آن‌هاست.

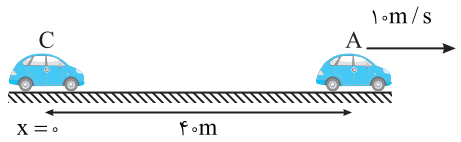


۲ معادلهٔ حرکت A و C را نوشته برابر قرار می‌دهیم.

$$x_C=\frac{1}{2}at^2 \xrightarrow{t=10s} x_{C'}=50a$$

$$x_A=v_At+x_0 \Rightarrow x_A=10t+40 \xrightarrow{t=10s} x_A=140m$$

در لحظهٔ $t=10s$: $x_C=x_A \Rightarrow 50a=140 \Rightarrow a=2/8m/s^2$



C ۵۲۱ ۲

نکته می‌توان ثابت کرد که هرگاه دو متحرک خلاف جهت هم با سرعت‌های v_1 و v_2 حرکت کنند چنانچه یکی از آن‌ها را ساکن فرض کنیم، سرعت دیگری نسبت به آن از جمع اندازهٔ سرعت‌ها به‌دست می‌آید. $v=v_1+v_2$

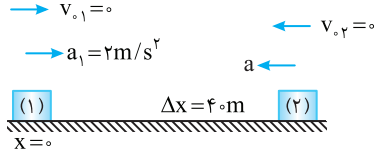
نکته می‌توان ثابت کرد که هرگاه شتاب دو متحرک در خلاف جهت هم باشد می‌توان یکی از آن‌ها را ساکن فرض کرده و شتاب دیگری را نسبت به آن از جمع اندازهٔ شتاب‌ها به‌دست آورد.

با توجه به شکل می‌توان فرض کرد یکی از آن‌ها ساکن است و دیگری پس از طی مسیر ۴۰m به اولی می‌رسد.

چون شتاب‌ها در خلاف جهت هم هستند: $a_{نسبی}=a_1+a_2=2+a$

حال می‌توان روابط نسبی را به کار برد. $v^2_{نسبی}-v^2_{۰\,نسبی}=2a_{نسبی}\Delta x$

$$\Rightarrow 20^2-0=2(2+a)\times 40 \Rightarrow 400=80(2+a) \Rightarrow a=3m/s^2$$

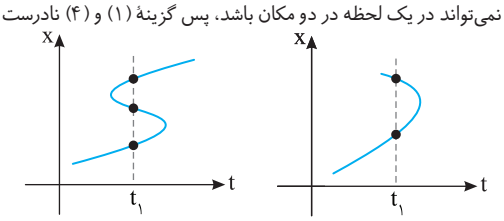


پنجره ۵

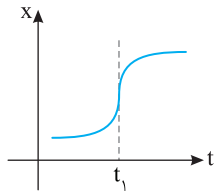
B ۵۲۲ ۳

خط فکری دقت کنید که نمودار مکان - زمان به ما در هر لحظه مکان متحرک را نشان می‌دهد و یک متحرک در یک لحظه نمی‌تواند در دو مکان مختلف باشد از این‌رو یک خط عمود بر محور زمان (t) رسم کنید اگر نمودار را در دو یا چند نقطه قطع کند این نمودار نمی‌تواند نمودار مکان - زمان باشد. از طرفی در هیچ نقطه‌ای خط مماس بر نمودار نباید بر محور زمان عمود شود زیرا در این صورت شیب خط مماس که برابر سرعت لحظه‌ای است بی‌نهایت می‌شود حال با توجه به این نکات گزینهٔ درست را انتخاب کنید.

متحرک نمی‌تواند در یک لحظه در دو مکان باشد، پس گزینهٔ (۱) و (۴) نادرست است.



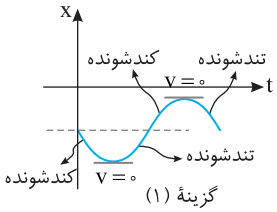
شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ برابر سرعت متحرک است، در لحظهٔ نشان داده شده خط مماس در نمودار گزینهٔ (۲) خط قائم است که شیب آن ∞ می‌باشد، بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است. در نتیجه گزینهٔ (۳) درست است.



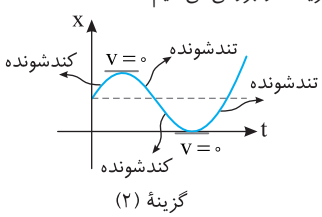
B ۵۲۳ ۴

نکته هرگاه متحرک تغییر جهت بدهد، سرعت آن صفر می‌شود و برای ادامهٔ حرکت باید نوع حرکت آن تغییر کند. یعنی قبل از صفر شدن سرعت، باید حرکت کندشونده و بعد از آن تندشونده باشد.

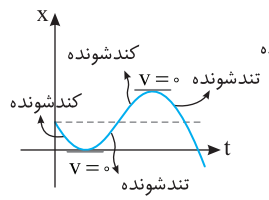
گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



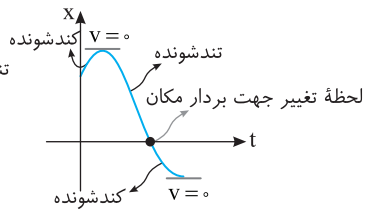
گزینهٔ (۱)



گزینهٔ (۲)



گزینهٔ (۳)



گزینهٔ (۴)

در گزینهٔ (۱) مطابق شکل، متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد و نوع حرکت ۳ بار تغییر کرده و نمودار محور - زمان را قطع نمی‌کند یعنی بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد و گزینهٔ (۱) نادرست است.

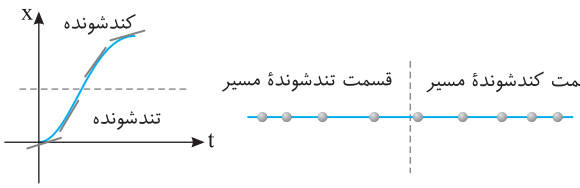
در گزینهٔ (۲) متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد و نوع حرکت ۳ بار تغییر کرده و یک بار مکان آن صفر می‌شود $(x=0)$ اما بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد و گزینهٔ (۲) نادرست است.

در گزینهٔ (۳) نیز متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد و نوع حرکت ۳ بار تغییر کرده اما از مبدأ مکان $(x=0)$ نمی‌گذرد و بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهند و گزینهٔ (۳) نادرست است.

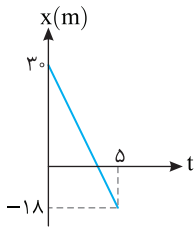
در گزینهٔ (۴) نوع حرکت دو بار تغییر کرده و نمودار یک بار محور زمان را قطع می‌کند، یعنی بردار مکان یک بار تغییر جهت می‌دهد و گزینهٔ (۴) درست است.

B ۵۲۴ ۳

با توجه به نمودار $x-t$ ابتدا حرکت تندشونده و سپس کندشونده است، بنابراین در قسمت اول حرکت در فاصله‌های زمانی یکسان متحرک مسافت بیشتری طی می‌کند و در قسمت دوم حرکت در فاصله‌های زمانی یکسان متحرک مسافت کمتری را طی می‌کند.



A ۵۲۵ ۴



نمودار مکان - زمان خط راست و متحرک دارای سرعت ثابت است. از این‌رو سرعت متحرک برابر شیب نمودار است.

۱ به کمک داده‌های روی نمودار سرعت را به‌دست می‌آوریم.

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v=\frac{-18-30}{5-0}=\frac{-48}{5} \Rightarrow v=-9/6m/s$$

۲ معادله حرکت خواهد شد: $x=vt+x_0 \Rightarrow x=-9/6t+30$

۳ در $t=3s$ مکان را حساب می‌کنیم:

$$x=-9/6\times 3+30=-28/8+30 \Rightarrow x=+1/2m$$

۴ جابه‌جایی در مدت ۳s خواهد شد:

$$\Delta x=v\Delta t \Rightarrow \Delta x=-9/6\times 3=-28/8m$$

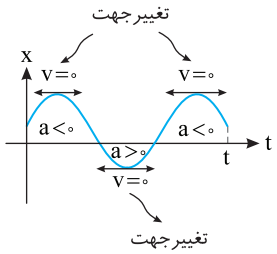
A ۴ ۵۲۶

یادآوری ۱ در نقاط کمینه و بیشینه نمودار مکان - زمان، سرعت صفر بوده و متحرک تغییر جهت می‌دهد (به شرط تغییر علامت شیب خط مماس بر نمودار)

۲ هرگاه دهانهٔ (تقعر) نمودار مکان - زمان رو به بالا باشد، شتاب مثبت و اگر رو به پایین باشد شتاب منفی است.

نمودار دارای سه نقطه بیشینه و کمینه است و سه بار متحرک تغییر جهت می‌دهد و گزینهٔ (۱) درست و گزینهٔ (۳) نادرست است.

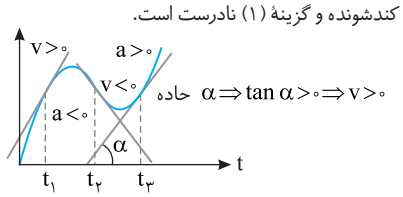
ابتدا شتاب منفی سپس شتاب مثبت و سرانجام شتاب منفی شده است.



بنابراین شتاب دو بار تغییر علامت داده است و گزینهٔ (۲) درست است.

A ۳ ۵۲۷

در لحظهٔ t_1، شیب خط مماس بر نمودار مثبت است، پس سرعت مثبت است. اما جهت تقعر نمودار رو به پایین است، پس شتاب منفی است و در لحظهٔ t_1، $av<0$ است و حرکت کندشونده و گزینهٔ (۱) نادرست است.



در لحظهٔ t_2، سرعت منفی است زیرا شیب خط مماس بر نمودار منفی است (خط مماس در لحظهٔ t_2 با محور زمان زاویهٔ منفرجه می‌سازد) اما در مورد علامت شتاب نمی‌توان اظهارنظر کرد یعنی جایی که جهت تقعر منحنی و در نتیجه علامت شتاب عوض می‌شود، مشخص نیست پس نوع حرکت در لحظهٔ t_2 مشخص نیست و گزینهٔ (۲) نادرست است. در لحظهٔ t_3 جهت تقعر رو به بالا است، پس شتاب مثبت و شیب خط مماس بر نمودار نیز مثبت است و حرکت تندشونده است و گزینهٔ (۳) درست است.

$(av>0)$ در لحظهٔ t_3 حرکت تندشونده $\Rightarrow a_3>0 , v_3>0$

B ۳ ۵۲۸

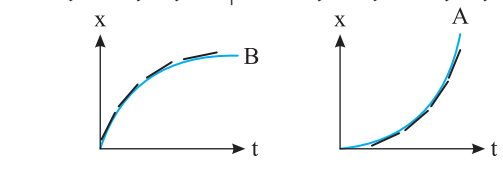
برای بررسی و مقایسه سرعت متوسط دو متحرک در بازهٔ t_1 تا t_2 باید جابه‌جایی دو متحرک را بررسی کنید. در بازهٔ t_1 تا t_2 جابه‌جایی A از B بیشتر بوده و سرعت متوسط A از سرعت متوسط B بزرگ‌تر است و گزینهٔ (۱) و (۴) نادرست است.

برای بررسی نوع حرکت دو راه وجود دارد.

۱ علامت شتاب و سرعت را در بازهٔ زمانی داده شده مشخص کنید. اگر هم‌علامت باشند حرکت تندشونده و اگر مختلف‌العلامت باشند حرکت کندشونده است.

جهت تقعر نمودار A رو به بالا بوده پس شتاب آن مثبت است و اگر در بازهٔ t_1 تا t_2 بر منحنی A مماس رسم شود، شیب خط مماس مثبت بوده در نتیجه سرعت نیز مثبت است. بنابراین حرکت تندشونده $(av>0)$ است. اما جهت تقعر نمودار B رو به پایین بوده پس شتاب آن منفی است و شیب خط مماس بر نمودار B در بازهٔ t_1 تا t_2 مثبت بوده درنتیجه سرعت مثبت است. بنابراین حرکت B کندشونده $(av<0)$ است و گزینهٔ (۲) نادرست و گزینهٔ (۳) درست است.

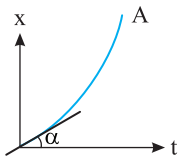
۲ روش دوم این است که تعدادی خط مماس بر نمودار رسم کنید اگر خط مماس به سمت افقی شدن برود حرکت کندشونده و اگر به سمت قائم شدن برود حرکت تندشونده است.



حرکت A تندشونده است — حرکت B کندشونده است

A ۳ ۵۲۹

راه‌حل اول: چون نمودار مکان- زمان بخشی از سهمی است، پس حرکت با شتاب ثابت است. در لحظهٔ $t=0$ منحنی بر محور t مماس نبوده، پس سرعت اولیه صفر نیست بلکه $v_0>0$ است. جهت تقعر منحنی رو به بالا است، پس شتاب مثبت است و چون سرعت اولیه و سرعت در لحظات بعد از آن مثبت است حرکت تندشونده است.



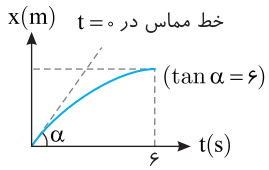
خط مماس بر نمودار در $t=0 \Rightarrow v_0 \neq 0$

راه‌حل دوم: اگر بر منحنی چند مماس در لحظه‌های مختلف رسم کنید، مشاهده می‌کنید که با گذشت زمان، شیب این خط‌های مماس در حال افزایش است، پس سرعت در حال زیاد شدن بوده و حرکت تندشونده است.

A ۱ ۵۳۰

نکته شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان برابر سرعت لحظه‌ای است.

با توجه به نمودار شیب خط مماس بر نمودار در $t=0$ سرعت $(\tan\alpha=6)$ سرعت اولیهٔ متحرک $6m/s$ و در لحظهٔ $t=6s$ که خط مماس بر نمودار موازی محور زمان است سرعت صفر است.

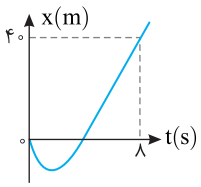


بنابراین به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب (فرمول طلایی) مسئله قابل حل است.

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t \Rightarrow \Delta x=\frac{0+6}{2}\times 6 \Rightarrow \Delta x=18\,m$$

A ۲ ۵۳۱

شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در هر لحظه برابر سرعت در آن لحظه‌ای است در صورت مسئله بیان شده که در لحظهٔ $t=8s$، شیب خط مماس ۲۰ واحد SI است یعنی سرعت $v=20m/s$ است. در بازهٔ صفر تا ۸s جابه‌جایی ۴۰m بوده و به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب، سرعت اولیه را می‌توان حساب کرد.



$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t \Rightarrow 40=\frac{20+v_0}{2}\times 8 \Rightarrow v_0=-10m/s$$

شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$a=\frac{v-v_0}{t} \Rightarrow a=\frac{20-(-10)}{8}=3/75m/s^2$$

B ۴ ۵۳۲

خط فکری ریشه‌های معادلهٔ مکان زمان این حرکت یعنی $t=2s$ و $t=5s$ و مکان اولیه آن را در اختیار داریم بنابراین ابتدا معادلهٔ مکان - زمان را به کمک معادلهٔ سهمی می‌نویسیم. سپس معادلهٔ سرعت زمان را به‌دست آورده و مسئله را حل می‌کنیم.

معادلهٔ سهمی به‌صورت روبه‌رو است. $x=A(t-t_1)(t-t_2)$

که در آن t_1 و t_2 ریشه‌های معادله هستند که در این نمودار $t_1=2s$ و $t_2=5s$ است. در لحظهٔ $t=0$ نیز مکان $+20m$ است. بنابراین:

$$x=A(t-2)(t-5) \xrightarrow{t=0} 20=A(-2)(-5) \Rightarrow A=2$$

معادلهٔ مکان زمان خواهد شد:

$$x=2(t-2)(t-5) \Rightarrow x=2(t^2-7t+10) \Rightarrow x=2t^2-14t+20$$

معادلهٔ سرعت زمان را می‌نویسیم:

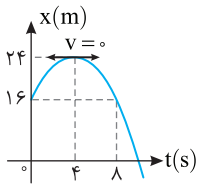
$$\frac{1}{2}a=2 \Rightarrow a=4m/s^2, v_0=-14m/s$$

$$\Rightarrow v=4t-14 \xrightarrow{t=5s} v=4\times 5-14 \Rightarrow v=6m/s$$

B ۵۳۳ ۱

خط فکری نمودار مکان - زمان سهمی است و سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس متقارن است. به نمودار دقت کنید در لحظهٔ $t=0$ و $t=8s$ مکان $x=16m$ است. بنابراین لحظهٔ رأس سهمی $t=4s$ خواهد بود و در این لحظه سرعت صفر است. اکنون می‌توانید با این اطلاعات مسئله را حل کنید.

۱ نمودار مکان - زمان سهمی است و حرکت شتابدار با شتاب ثابت است. در لحظهٔ $t=4s$ سرعت صفر می‌شود بنابراین سرعت اولیه خواهد شد:



$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t$$

$$\Rightarrow(24-16)=\frac{0+v_0}{2}\times 4\Rightarrow v_0=4m/s$$

۲ سرعت در لحظهٔ $t=8s$ به دلیل تقارن سهمی برابر $-4m/s$ است، از این‌رو:

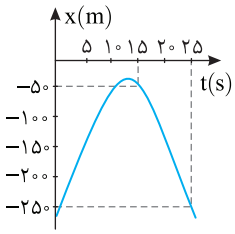
$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow|a_{av}|=\left|\frac{-4-4}{8}\right|=+1\,m/s$$

۳ متحرک در بازهٔ صفر تا $8s$ از مکان $+16m$ به همان مکان برگشته است از این‌رو سرعت متوسط صفر است.

$$\Delta x=0\Rightarrow v_{av}=0$$

C ۵۳۴ ۲

خط فکری نمودار مکان - زمان بخشی از یک سهمی است بنابراین حرکت با شتاب ثابت روی خط راست بوده و معادلهٔ مکان - زمان این نمودار به‌صورت $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ است. می‌دانیم که مختصات هر نقطه روی نمودار باید در معادله صدق کند. سرعت اولیه $(v_0=40m/s)$ داده شده است، بنابراین شما باید به کمک مختصات دو نقطه دیگر روی نمودار دو معادله به‌دست بیاورید تا به کمک آن بتواند شتاب و مکان اولیه را حساب کنید البته مسئله از شما فقط شتاب را خواسته است.



۱ با توجه به نمودار مکان متحرک در لحظهٔ $t_1=15s$ برابر $x_1=-50m$ و در لحظهٔ $t_2=25s$ برابر $x_2=-250m$ است. این مختصات را در معادله مکان - زمان قرار می‌دهیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow -250=\frac{1}{2}a(625)+40\times 25+x_0$$

$$\Rightarrow 312/5a+x_0=-1250 \quad (1)$$

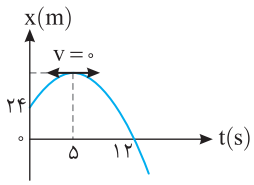
$$-50=\frac{1}{2}a(225)+40\times 15+x_0\Rightarrow 112/5a+x_0=-650 \quad (2)$$

۲ دو رابطهٔ (۱) و (۲) را از هم کم می‌کنیم و شتاب را به دست می‌آوریم:

$$200a=-600\Rightarrow a=-3m/s^2$$

C ۵۳۵ ۱

لحظهٔ تغییر جهت همان رأس سهمی است و در $t=5s$ سرعت صفر است.



۱ سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا $12s$ را حساب می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{0-24}{12-0}=-2m/s$$

سرعت متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2 با سرعت لحظه‌ای در وسط این بازه برابر است، بنابراین سرعت در لحظهٔ $t=\frac{12+0}{2}=6s$ برابر $-2m/s$ است.

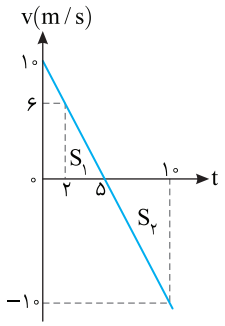
۲ با توجه به نمودار سرعت در $t=5s$، صفر است پس می‌توان شتاب را به‌دست آورد.

$$a=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\Rightarrow a=\frac{-2-0}{6-5}\Rightarrow a=-2m/s^2$$

۳ سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_0\xrightarrow[v=0]{t=5s}0=-2\times 5+v_0\Rightarrow v_0=10m/s$$

۴ نمودار سرعت - زمان را رسم کرده و سطح زیر نمودار را در بازهٔ $2s$ تا $10s$ حساب می‌کنیم.



$$v=-2t+10\Rightarrow\begin{cases}t=2s\Rightarrow v=6m/s\\ t=10s\Rightarrow v=-10m/s\end{cases}$$

$$\ell=|S_1|+|S_2|\Rightarrow\ell=\frac{6\times 3}{2}+\frac{10\times 5}{2}$$

$$\ell=9+25\Rightarrow\ell=34m$$

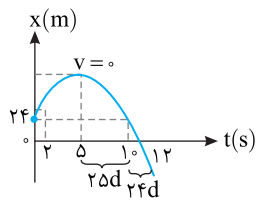
۵ تندی متوسط خواهد شد:

$$S_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{34}{10-2}\Rightarrow S_{av}=\frac{17}{4}m/s$$

روش دیگر:

نکته هرگاه متحرک از حال سکون با شتاب ثابت شروع به حرکت کند در بازه‌های یکسان و متوالی t به ترتیب مسافت‌های d، ۳d، ۵d و ... را طی می‌کند.

به نمودار نگاه کنید. لحظهٔ $t=5s$ سرعت صفر است. اگر در بازه‌های $t=1s$ تا $t=5s$ ($t=6s$ تا $t=10s$) مسافت d باشد، در $1s$ بعدی $3d$ و ... خواهد بود و مسافت در بازهٔ $t=5s$ تا $t=10s$:



$$\ell=d+3d+5d+7d+9d=25d$$

در بازهٔ $10s$ تا $12s$ متحرک از مکان ۲۴ به مکان صفر می‌رود و مسافت طی شده $24m$ است در نتیجه:

$$11d+13d=24\Rightarrow d=1m$$

در بازهٔ $5s$ تا $10s$:

$$\ell=25d=25\times 1=25m$$

در بازهٔ $2s$ تا $5s$ مسافت را حساب می‌کنیم:

$$5s\text{ تا }4s\rightarrow d$$

$$4s\text{ تا }3s\rightarrow 3d\xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{جمع}}9d=9m$$

$$3s\text{ تا }2s\rightarrow 5d$$

مسافت کل از $2s$ تا $10s$ برابر است با:

$$\ell=25+9=34m$$

تندی متوسط را به‌دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{34}{10-2}\Rightarrow s_{av}=\frac{17}{4}m/s$$

B ۵۳۶ ۱

۱ $t=2s$ رأس سهمی است و سرعت در این لحظه صفر است از این‌رو:

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=a\times 2+v_0\Rightarrow v_0=-2a$$

۲ نمودار مکان - زمان است و حرکت دارای شتاب ثابت است مختصات هر نقطه از نمودار باید در معادلهٔ مکان زمان صدق کند از این‌رو در لحظهٔ $t=2s$ مکان $x=-3m$ و در لحظهٔ $t=5s$ مکان $x=+15m$ است.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\begin{cases}t=2s\Rightarrow -3=\frac{1}{2}a\times 4+(-2a)\times 2+x_0\\ \Rightarrow -3=-2a+x_0 \quad (1)\\ t=5s\Rightarrow 15=\frac{1}{2}a\times 25+(-2a)\times 5+x_0\\ \Rightarrow 15=2/5a+x_0 \quad (2)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دو معادله را از هم کم می‌کنیم}}18=4/5a\Rightarrow a=4m/s^2$$

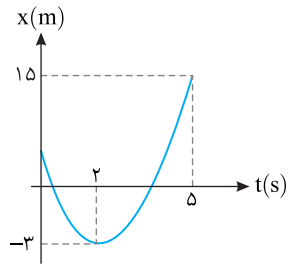
۳ شتاب را در معادلهٔ (۱) جای‌گذاری می‌کنیم: $-3=-2\times 4+x_0\Rightarrow x_0=5m$

راه‌حل پیشنهادی یک دانش‌آموز: در بازهٔ $2s$ تا $5s$ خواهیم داشت:

$$x=\frac{v+v_0}{2}t+x_0\Rightarrow 15=\frac{v+0}{2}\times 3-3\Rightarrow v=12m/s$$

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{12-0}{5-2}=4m/s^2$$

به دلیل تقارن سهمی مکان در $t=0$ و $t=4s$ یکی است از این‌رو برای یافتن x_0 از لحظهٔ $t=2s$ که سرعت صفر و مکان $-3m$ است تا لحظهٔ $t=4s$ می‌توانیم بنویسیم:

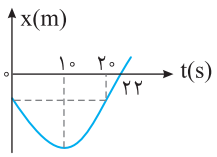


$$x=\frac{1}{2}at^2+x_0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\times 4(4-2)^2-3$$
$$\Rightarrow x=5m \Rightarrow x_0=5m$$

۳ ۵۳۷ B

تست زیبایی است، تمام فرمول‌های حرکت با شتاب ثابت قدم به قدم استفاده می‌شود.

۱ با توجه به صورت مسئله و نمودار در مدت $10s$ جابه‌جایی $\Delta x=-50m$ و در لحظهٔ $t=10s$ سرعت صفر است به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب، سرعت اولیه را به دست می‌آوریم.



$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t \Rightarrow -50=\frac{0+v_0}{2}\times 10 \Rightarrow v_0=-10m/s$$

۲ به کمک تعریف شتاب:
$$a=\frac{v-v_0}{t} \Rightarrow a=\frac{0-(-10)}{10} \Rightarrow a=1m/s^2$$

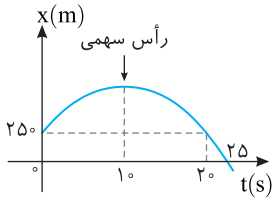
۳ با استفاده از معادلهٔ مکان - زمان، مکان اولیه را حساب می‌کنیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \xrightarrow[x=0]{t=22s} 0=\frac{1}{2}\times 1\times 484-10\times 22+x_0$$
$$x_0=-242+220 \Rightarrow x_0=-22m$$

با توجه به تقارن سهمی نسبت به محور قائم گذرنده از رأس سهمی مکان در لحظهٔ $t=20s$ و $t=0$ با هم برابر است. $x_{t=20s}=x_0=-22m$

۱ ۵۳۸ C

۱ نمودار $x-t$ حرکت با شتاب ثابت به صورت سهمی می‌باشد و می‌دانیم که سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس آن تقارن دارد. بنابراین لحظهٔ رأس سهمی خواهد شد: $t_{رأس}=\frac{0+20}{2}=10s$



۲ در رأس سهمی یعنی در نقطهٔ بیشینه نمودار مکان - زمان سرعت صفر است. به کمک معادلهٔ سرعت - زمان سرعت اولیه را بر حسب a به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_0 \Rightarrow 0=a\times 10+v_0 \Rightarrow v_0=-10a \quad (1)$$

۳ در لحظهٔ $t=25s$ مکان متحرک $x=0$ است که باید در معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت صدق کند.

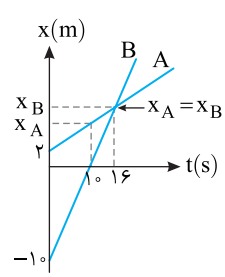
$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \xrightarrow{(1)} 0=\frac{1}{2}a(25)^2+(-10a)\times(25)+250$$
$$\Rightarrow a=-4m/s^2 \Rightarrow v_0=-10a=+40m/s$$

۴ در $t=10s$ سرعت صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد مکان تغییر جهت را به کمک معادلهٔ مکان - زمان به‌دست می‌آوریم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\times(-4)\times(10)^2+40\times 10+250 \Rightarrow x=450m$$

۱ ۵۳۹ B

به نمودار نگاه کنید. متحرک B در لحظهٔ $t=10s$ از مبدأ مکان می‌گذرد و در لحظهٔ $t=16s$ مکان هر دو متحرک یکسان است $(x_A=x_B)$.



۱ به کمک شیب خط B، مکان متحرک B را در لحظهٔ $t=16s$ به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{x_B-(-10)}{16-0}=\frac{0-(-10)}{10-0} \Rightarrow \frac{x_B+10}{16}=1$$
$$\Rightarrow x_B+10=16 \Rightarrow x_B=6m$$

بنابراین در لحظهٔ $t=16s$ مکان متحرک A نیز $x_A=+6m$ است.

۲ به کمک شیب خط A، مکان متحرک A را در لحظهٔ $t=10s$ یعنی لحظهٔ عبور متحرک B از مبدأ مکان را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{6-2}{16-0}=\frac{x_A-2}{10-0} \Rightarrow \frac{4}{8}=\frac{x_A-2}{5} \Rightarrow 20=8x_A-16$$
$$\Rightarrow 36=8x_A \Rightarrow x_A=4/5m$$

۴ ۵۴۰ A

۱ سرعت حرکت هر متحرک را از روی نمودار به کمک شیب خط به‌دست می‌آوریم:

$$v_A=\frac{0-(-5)}{2/5-0} \Rightarrow v_A=2m/s \ , \ v_B=\frac{0-3}{6-0} \Rightarrow v_B=-0/5m/s$$

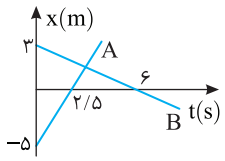
۲ معادلهٔ حرکت هر متحرک را می‌نویسیم:

$$x=vt+x_0 \Rightarrow x_A=2t-5 \ , \ x_B=-0/5t+3$$

۳ با توجه به صورت مسئله قرار است فاصلهٔ دو متحرک از هم $5m$ باشد از این‌رو خواهیم داشت:

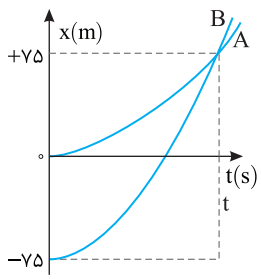
$$|x_A-x_B|=5 \Rightarrow |2t-5+0/5t-3|=5$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2/5t-8=5 \Rightarrow t=\frac{13}{2/5} \Rightarrow t=5/2s \\ 2/5t-8=-5 \Rightarrow t=\frac{3}{2/5} \Rightarrow t=1/2s \end{cases}$$

دقت کنید فاصلهٔ دو متحرک از هم ابتدا $(3+5=8m)$ بوده و دو متحرک در حال نزدیک شدن به هم هستند و برای اولین بار هنگام نزدیک شدن یعنی در لحظهٔ $t=1/2s$ فاصلهٔ آن‌ها از هم $5m$ می‌شود سپس دو متحرک از کنار هم می‌گذرند و از هم دور می‌شوند و دوباره در لحظهٔ $t=5/2s$ فاصلهٔ آن‌ها از هم $5m$ می‌شود.



۲ ۵۴۱ A

خط فکری نمودار داده شده نمودار مکان - زمان است و جابه‌جایی در مدت t برای هر دو متحرک A و B مشخص است از طرفی سرعت اولیه هر دو متحرک صفر است. شتاب متحرک A را در اختیار داریم می‌توانیم به کمک آن زمان t یعنی زمانی که دو متحرک به هم می‌رسند (زمان سبقت) را حساب کرده و سرانجام به کمک معادلهٔ سرعت - زمان، سرعت هر دو متحرک را هنگام سبقت حساب کرد.



۱ جابه‌جایی متحرک A در مدت t، $75m$ و شتاب آن ثابت و برابر $1/5m/s^2$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \xrightarrow{x_{0A}=0,v_{0A}=0} 75=\frac{1}{2}(1/5)t^2 \Rightarrow t=10s$$

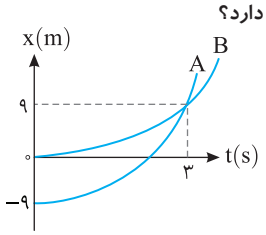
۲ متحرک B در مدت $10s$ از مکان $x_0=-75m$ به مکان $x=75m$ رفته است از این‌رو خواهیم داشت:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \xrightarrow{v_{0B}=0} 75=\frac{1}{2}a(10)^2+0-75 \Rightarrow a=3m/s^2$$

زمان سبقت دو متحرک $t=10s$ است، در این لحظه به کمک معادلهٔ سرعت زمان، سرعت هر یک را حساب می‌کنیم:

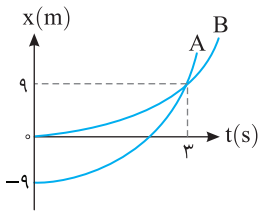
$$v_A=a_At+v_{0A} \Rightarrow v_A=(1/5)(10) \Rightarrow v_A=15m/s$$
$$v_B=a_Bt+v_{0B} \Rightarrow v_B=(3)(10) \Rightarrow v_B=30m/s \Rightarrow \frac{v_B}{v_A}=\frac{30}{15}=2$$

بازی با سؤال نمودار مکان - زمان دو متحرک که از حال سکون و با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کنند، مطابق شکل روبه‌رو است. در لحظهٔ $t=10s$ متحرک A چندمتر جلوتر از B قرار دارد؟



۱) ۹۱
۲) ۱۰۰
۳) ۱۰۹
۴) ۲۰۰

پاسخ حرکت با شتاب ثابت است. به کمک رابطهٔ مستقل از شتاب مسئله را حل می‌کنیم:



$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t\ ,\ B:9=\frac{v_B+0}{2}\times 3$$
$$\Rightarrow v_B=6m/s$$
$$A:9-(-9)=\frac{v_A+0}{2}\times 3$$
$$\Rightarrow v_A=12m/s$$

شتاب را برای هر متحرک به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a_A=\frac{12-0}{3}=4m/s^2\ ,\ a_B=\frac{6-0}{3}=2m/s^2$$

مکان هر متحرک را در $t=10s$ به‌دست می‌آوریم.

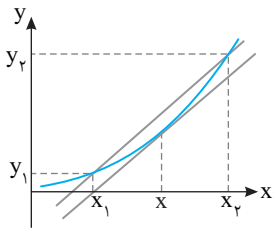
$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\ \Rightarrow\ \begin{cases} x_A=\frac{1}{2}\times 4\times 100+0+(-9)=191m \\ x_B=\frac{1}{2}\times 2\times 100+0+0=100m \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ x_A-x_B=91m$$

گزینهٔ ۱

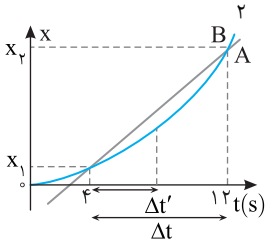
A ۵۴۲ ۲

روش اول: با توجه به آن‌چه در کتاب حسابان برای شکل شبیه نمودار مقابل بیان می‌شود، شیب خط قاطع بین دو نقطهٔ (x_1,y_1) و (x_2,y_2) با شیب خط مماس گذرنده از نقطهٔ $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ برابر است از این‌رو در



نمودارهای A و B نیز شیب خط مماس بر نمودار سهمی (B) در لحظهٔ $t=\frac{t_1+t_2}{2}$ با شیب خط قاطع A برابر می‌شود. بنابراین $t=\frac{4+12}{2}=8s$.

روش دوم: جابه‌جایی متحرک A و B در بازهٔ $t=4s$ و $t=12s$ یکسان است. متحرک A حرکت سرعت ثابت داشته و سرعت لحظه‌ای و متوسط آن همواره با هم برابر است:



$$v_{av_A}=v_A\xrightarrow{v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}}\frac{\Delta x_A}{\Delta t}=v_A$$
$$\xrightarrow{\Delta x_A=\Delta x_B=\frac{1}{2}a(\Delta t)^2+v\Delta t}$$
$$v_A=\frac{\frac{1}{2}a\Delta t^2+v\Delta t}{\Delta t}=\frac{1}{2}a\Delta t+v\Rightarrow v_A=a\frac{\Delta t}{2}+v$$

برای متحرک B معادلهٔ سرعت به صورت $v_B=a\Delta t'+v$ است و چون سرعت A و B با هم برابر است.

$$a\frac{\Delta t}{2}+v=a\Delta t'+v\Rightarrow \Delta t'=\frac{\Delta t}{2}\Rightarrow \Delta t'=\frac{12-4}{2}=4s$$

بنابراین لحظهٔ مورد نظر خواهد شد: $4+4=8s$

روش سوم:

نکته در نمودار $x-t$ شیب خط قاطع بین دو لحظه برابر سرعت متوسط متحرک است.

شیب نمودار A از طرفی برابر سرعت این متحرک است و از طرف دیگر چون خط قاطع بین دو لحظهٔ $t_1=4s$ تا $t_2=12s$ متحرک B بوده برابر سرعت متوسط متحرک B در این بازه خواهد بود:

$$v_{av_B}(4s\text{ تا }12s)=v_A\quad (I)$$

نکته در حرکت شتاب ثابت، سرعت متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2 با سرعت در وسط بازه برابر است:

$$v_{av}(t_1\text{ تا }t_2)=v(\frac{t_1+t_2}{2})$$

سرعت متوسط متحرک B که دارای حرکت شتاب ثابت است (چون نمودار $x-t$ آن به صورت سهمی بوده) برابر سرعت در وسط آن بازه خواهد بود:

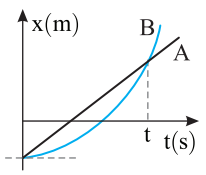
$$v_{av_B}(4s\text{ تا }12s)=v_B(t=\frac{4+12}{2})\Rightarrow v_{av_B}(4s\text{ تا }12s)=v_B(8s)\quad (II)$$

با توجه به روابط (I) و (II) داریم:

$$\begin{cases} v_{av_B}(4s\text{ تا }12s)=v_A \\ v_{av_B}(4s\text{ تا }12s)=v_B(8s) \end{cases}\Rightarrow v_A=v_B(8s)$$

B ۵۴۳ ۲

سرعت اولیهٔ متحرک B، صفر است $(v_{0B}=0)$



نکته در نمودارهایی شبیه نمودار سؤال، شیب خط A (سرعت متحرک A) با شیب خط مماس بر سهمی در لحظهٔ وسط بازهٔ زمانی تقاطع دو نمودار برابر است.

نکته در حرکت با شتاب ثابت در هر بازهٔ زمانی، سرعت در وسط بازه برابر میانگین سرعت‌ها در لحظات ابتدایی و انتهایی بازه است.

$$v=v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}$$

با توجه به نکات بیان شده باید سرعت متحرک A با سرعت B در لحظهٔ $\frac{t+0}{2}=\frac{t}{2}$

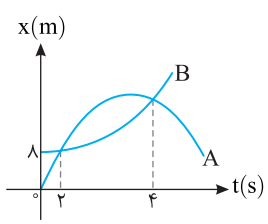
وسط بازه برابر شود از این‌رو:

$$v_A=\frac{v_{Bt}+v_{0B}}{2}\Rightarrow v_A=\frac{v_{Bt}}{2}\Rightarrow v_{Bt}=2v_A$$

C ۵۴۴ ۲

خط فکری دقت کنید در اصل در این مسئله نمی‌توانید سرعت اولیه A (v_{0A}) و سرعت اولیه (v_{0B}) را جداگانه حساب کرده و سپس اختلاف آن‌ها را به دست بیاورید به‌همین دلیل باید به کمک معادلهٔ مکان - زمان و مختصات نقاط روی نمودار مسئله را حل کنید.

۱ شتاب دو متحرک هم‌اندازه است اما دهانهٔ نمودار متحرک B رو به بالاست پس حرکت این متحرک دارای شتاب مثبت است. $a_B>0$



دهانهٔ نمودار متحرک A رو به پایین است پس حرکت این متحرک دارای شتاب منفی است. $a_A<0$

بنابراین اگر شتاب B برابر a باشد شتاب A برابر a- خواهد بود.

۲ معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x_B=\frac{1}{2}at^2+v_{0B}t+8\ ,\ x_A=-\frac{1}{2}at^2+v_{0A}t$$

۳ در دو لحظهٔ $t=۲s$ و $t=۴s$ مکان دو متحرک یکسان است. بنابراین در این دو لحظه مکان متحرک A و B را به‌دست می‌آوریم و برابر قرار می‌دهیم.

$$x_B=x_A\Rightarrow\begin{cases}t=۲s\Rightarrow ۲a+۲v_{۰B}+۸=-۲a+۲v_{۰A}\\ \Rightarrow ۴a+۸=۲(v_{۰A}-v_{۰B})\Rightarrow ۲a+۴=v_{۰A}-v_{۰B}\quad(۱)\\ t=۴s\Rightarrow ۸a+۴v_{۰B}+۸=-۸a+۴v_{۰A}\\ \Rightarrow ۱۶a+۸=۴(v_{۰A}-v_{۰B})\quad(۲)\end{cases}$$

۴ در رابطهٔ (۲) به جای $v_{۰A}-v_{۰B}$ از رابطهٔ (۱) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۱۶a+۸=۸a+۱۶\Rightarrow ۸a=۸\Rightarrow a=۱m/s^۲$$

۵ با جای‌گذاری $a=۱m/s^۲$ در معادلهٔ (۱)، اختلاف سرعت اولیهٔ دو متحرک را به دست می‌آوریم:

$$۲a+۴=v_{۰A}-v_{۰B}\xrightarrow{a=۱m/s^۲}v_{۰A}-v_{۰B}=۶m/s$$

۵۴۵ **B** **۱**

خط فکری حرکت خودروی A شتابدار و با شتاب ثابت و بدون سرعت اولیه است بنابراین نمودار A سهمی بوده که در $t=۰$ بر نمودار t مماس است که ۴۲ متر عقب‌تر از A است. برای آنکه نمودار درست را تشخیص بدهید باید ابتدا لحظه‌ای که دو متحرک از کنار هم می‌گذرند را حساب کنید و اگر محل حرکت خودروی A را مبدأ مکان بگیرید باید مکان اولیهٔ B $(x_{۰B}=-۴۲m)$ شود.

زمان رسیدن دو خودرو به هم را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور، معادلهٔ مکان- زمان هر دو را نوشته و برابر قرار می‌دهیم:

$$x_A=x_B\Rightarrow\frac{۱}{۲}a_At^۲+v_{۰A}t+x_{۰A}=v_Bt+x_{۰B}$$

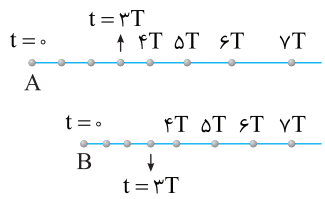
$$\frac{۱}{۲}\times۲\times t^۲+۰+۰=۱۷t-۴۲\Rightarrow t^۲-۱۷t+۴۲=۰$$

$$\Rightarrow(t-۳)(t-۱۴)=۰\Rightarrow t=۳s,t=۱۴s$$

با توجه به این‌که متحرک A از حال سکون شروع به حرکت کرده و این که مکان اولیهٔ B منفی است، گزینهٔ (۱) درست است.

۵۴۶ **A** **۴**

با توجه به شکل مسیر، متحرک A از مکان عقب‌تر از B شروع به حرکت کرده و سرعت ابتدایی A بیشتر از سرعت B است $(v_A>v_B)$، زیرا در مدت ۳T مسیر طولانی‌تری را طی کرده است. جابه‌جایی هر دو در مدت ۳T با تندی ثابت انجام شده زیرا مسافت طی شده در بازه‌های T یکسان است. در ادامهٔ مسیر شتاب A بیشتر از B است و بر تندی A مقدار بیشتری اضافه می‌شود زیرا جابه‌جایی‌ها در بازه‌های ۳T تا ۷T برای A بزرگ‌تر از B بوده و در ۷T دو متحرک کنار یکدیگرند. در این صورت در بازهٔ صفر تا ۳T نمودار A و B خط راست مایل بوده که شیب خط A بیشتر از شیب خط B است و در ادامه نمودار هر دو متحرک خمیده است.



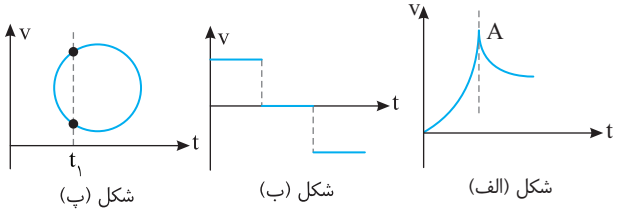
۵۴۷ **A** **۱**

در شکل (الف) اگر در نقطهٔ A خط مماس بر نمودار را رسم کنید این خط بر محور افقی عمود است بنابراین شتاب که برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان است بی‌نهایت (∞) خواهد شد که ممکن نیست و شکل (الف) نادرست است.

نمودار $v-t$ یک نمودار پیوسته است یعنی نمی‌توان در یک لحظه از سرعت $+v$ به صفر رسید، پس نمودار (ب) نیز نادرست است.

در شکل (پ) نمودار یک دایره است در این صورت در یک لحظهٔ مانند $t_۱$ متحرک دو سرعت مختلف دارد که این ممکن نیست و شکل (پ) نادرست است.

بنابراین شکل (ت) تنها شکل درست است.



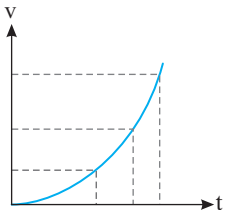
شکل (پ) شکل (ب) شکل (الف)

۵۴۸ **B** **۱**

حرکت تندشونده یعنی حرکتی که در آن بزرگی سرعت (تندی) در حال افزایش است. در نمودار گزینهٔ (۱) در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ بزرگی سرعت در حال افزایش است و حرکت تندشونده است و گزینهٔ (۱) درست است. در نمودار گزینه‌های (۲) و (۴) بزرگی سرعت در حال کاهش است پس در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ حرکت کندشونده است و گزینه‌های (۲) و (۴) نادرست هستند. در نمودار گزینهٔ (۳) ابتدا تندی (اندازهٔ سرعت) در حال کاهش بوده و صفر می‌شود و سپس افزایش می‌یابد، بنابراین حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

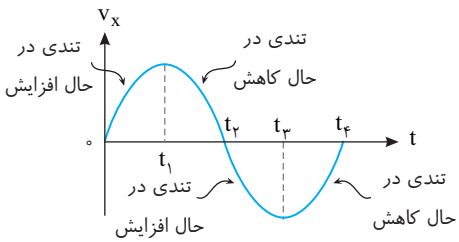
۵۴۹ **A** **۴**

نمودار سرعت - زمان است و در $t=۰$ سرعت صفر است. با گذشت زمان، سرعت در حال افزایش است، پس حرکت تندشونده است. نمودار سهمی بوده و اما شتاب متغیر است زیرا اگر شتاب ثابت بود بنا به معادلهٔ سرعت - زمان حرکت با شتاب ثابت $(v=at+v_۰)$ باید نمودار سرعت - زمان خط راست می‌شد که چنین نیست و گزینهٔ (۴) درست است.



۵۵۰ **B** **۱**

هرگاه تندی متحرک (اندازهٔ سرعت) کاهش یابد حرکت کندشونده است. با توجه به شکل در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ تندی کاهش یافته و در لحظهٔ $t_۲$ صفر می‌شود، بنابراین در این بازه حرکت کندشونده است. از طرفی در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۴$، نمودار بالای محور زمان است. بنابراین سرعت مثبت و حرکت متحرک در جهت محور xها است.



۵۵۱ **A** **۲**

در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۳$ شتاب متوسط صفر است، زیرا در این دو لحظه، سرعت‌ها برابرند $(\Delta v=۰)$ و گزینهٔ (۱) نادرست است.

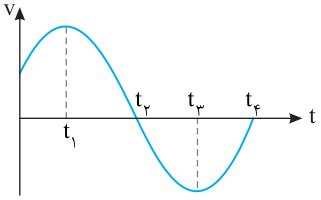
در لحظهٔ $t_۱$ سرعت مثبت و در لحظهٔ $t_۴$ سرعت صفر است، بنابراین $\Delta v<۰$ بوده و شتاب متوسط منفی و خلاف جهت محور xهاست و گزینهٔ (۲) درست است.

در بازهٔ صفر تا $t_۱$ و $t_۱$ تا $t_۲$، شیب نمودار مثبت و ثابت است بنابراین در این دو بازه شتاب‌ها برابر و مثبت هستند و گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست‌اند.

۵۵۲ **B** **۱**

خط فکری در نمودار $v-t$ مطابق شکل زیر به نکات زیر دقت کنید:

الف) در بازهٔ ۰ تا $t_۲$ سرعت متحرک مثبت بوده و متحرک در جهت مثبت محور xها در حال حرکت است و در مدت $t_۲$ تا $t_۴$ سرعت منفی شده و جهت حرکت متحرک تغییر کرده و متحرک در خلاف جهت محور xها در حال حرکت است.



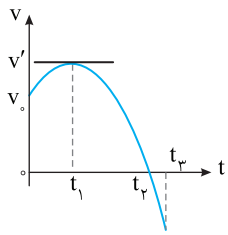
نکته جهت حرکت با جهت سرعت مشخص می‌شود و اگر سرعت مثبت باشد، متحرک در جهت محور xها حرکت می‌کند و بالعکس.

ب) شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ در هر لحظه برابر شتاب حرکت است. در بازهٔ ۰ تا $t_۱$ و $t_۳$ تا $t_۴$ نمودار صعودی با شیب مثبت بوده و شتاب مثبت است و در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۳$ نمودار نزولی بوده و شتاب منفی است.

پ) در بازهٔ t_0 تا t_1 و t_2 تا t_3 نمودار از محور زمان در حال دور شدن بوده و تندی در حال افزایش و حرکت تندشونده است و از طرف دیگر در بازهٔ t_1 تا t_2 و t_3 تا t_4 نمودار به محور زمان در حال نزدیک شدن بوده و تندی در حال کاهش و حرکت کندشونده است.

ت) در لحظهٔ t_2 سرعت صفر شده و پس از آن تغییر علامت می‌دهد، پس در این لحظه متحرک تغییر جهت می‌دهد و در بیشینه و کمینهٔ نمودار یعنی لحظه‌های t_1 و t_3 شیب خط مماس صفر بوده و در نتیجه شتاب صفر می‌شود و علامت شتاب تغییر می‌کند.

با توجه به این نکات به بررسی تک‌تک گزاره‌ها می‌پردازیم:



الف) در لحظهٔ t_1 شیب خط نمودار افقی و صفر شده پس در این لحظه تنها شتاب صفر شده و تغییر علامت می‌دهد اما سرعت v' بوده و تغییر علامت نمی‌دهد، بنابراین گزاره (الف) نادرست است.

ب) در بازهٔ t_1 تا t_2 سرعت مثبت بوده پس متحرک در جهت مثبت محور xها در حال حرکت است و گزارهٔ (ب) درست است.

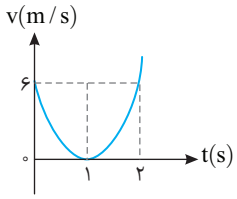
پ) در بازهٔ t_1 تا t_2 نمودار از محور افقی زمان در حال دور شدن است، پس حرکت متحرک تندشونده بوده و تندی آن از v_0 تا v' افزایش می‌یابد و گزارهٔ (پ) نادرست است.

ت) در بازهٔ ۰ تا t_1 نمودار صعودی با شیب مثبت بوده و شتاب آن مثبت است (شتاب در جهت محور x است) و در بازهٔ t_1 تا t_2 نمودار نزولی با شیب منفی بوده و شتاب آن منفی است (شتاب خلاف جهت محور x است) بنابراین گزارهٔ (ت) نادرست است و تنها گزارهٔ (ب) درست است.

نکته البته می‌توانیم کمی حرفه‌ای‌تر باشیم، با توجه به گزینه‌ها گزارهٔ (ب) و (ت) دو بار در گزینه‌ها تکرار شده‌اند، پس تنها همین دو گزاره را بررسی کنیم و چون گزارهٔ (ب) درست و گزارهٔ (ت) نادرست است، پس پاسخ گزینهٔ (۱) می‌شود.

B ۵۵۳ ۲

نمودار سهمی است و سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس دارای تقارن است. لحظهٔ $t=1s$ رأس سهمی است بنابراین سرعت متحرک در لحظهٔ $t=0$ و $t=2s$ یکسان و برابر $6m/s$ است. از طرفی در لحظهٔ $t=1s$ سرعت صفر است بنابراین شتاب متوسط در ثانیهٔ دوم یعنی در بازهٔ $t=1s$ تا $t=2s$ خواهد شد:

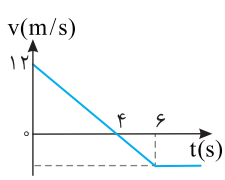


$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\Rightarrow a_{av}=\frac{6-0}{2-1}\Rightarrow a=6m/s^2$$

B ۵۵۴ ۲

یادآوری شیب نمودار سرعت - زمان برابر شتاب متحرک است وقتی نمودار سرعت - زمان خط راست مایل باشد. شیب نمودار ثابت یعنی شتاب حرکت ثابت است.

در بازهٔ صفر تا ۶s حرکت دارای شتاب ثابت است یعنی در تمام بازه‌های زمانی بین صفر تا ۶s شتاب متحرک یکسان و برابر شیب خط است از این رو کافی است شیب نمودار را در بازهٔ صفر تا ۴s از روی نمودار حساب کنیم.



$$a=\frac{v-v_0}{t-t_0}=\frac{0-12}{4-0}=-3m/s^2\Rightarrow|a|=3m/s^2$$

B ۵۵۵ ۱

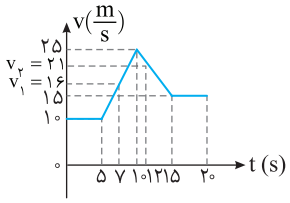
به کمک شیب نمودار، سرعت در لحظه‌های $t=7s$ و $t=12s$ را حساب می‌کنیم.

$$t=7s:\frac{25-10}{10-5}=\frac{v_1-10}{7-5}=3=\frac{v_1-10}{2}=v_1=16m/s$$

$$t=12s:\frac{15-25}{15-10}=\frac{v_2-25}{12-10}\Rightarrow v_2=21m/s$$

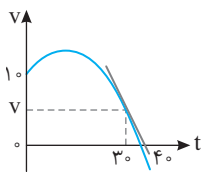
شتاب متوسط را حساب می‌کنیم:

$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{21-16}{12-7}\Rightarrow a_{av}=1m/s^2$$



B ۵۵۶ ۴

۱ در نمودار $v-t$ شیب خط مماس در هر لحظه برابر شتاب لحظه‌ای است بنابراین شتاب متحرک در لحظهٔ $t=30s$ را به کمک شیب خط مماس بر نمودار به‌دست می‌آوریم



$$a_{t=30}=\frac{0-v}{40-30}=\frac{-v}{10}\quad (1)$$

۲ شتاب متوسط در مدت ۳۰s اول یعنی در بازهٔ $t=0$ تا $t=30s$ خواهد شد:

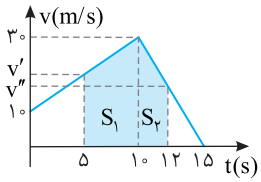
$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{v_{t=30}-v_t}{\Delta t}=\frac{v-10}{30}\quad (2)$$

۳ در صورت مسئله بیان شده شتاب در لحظهٔ $t=30s$ با شتاب متوسط در ۳۰s اول برابر است بنابراین رابطهٔ (۱) و (۲) را برابر قرار می‌دهیم:

$$a_{av}=a_{t=30}\Rightarrow\frac{v-10}{30}=\frac{-v}{10}\Rightarrow v-10=-3v\Rightarrow 4v=10\Rightarrow v=2/5m/s$$

B ۵۵۷ ۲

۱ شتاب حرکت در قسمت اول برابر است با:



$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a_1=\frac{30-10}{10}=2m/s^2$$

۲ سرعت در لحظهٔ $t=5s$ خواهد شد:

$$v=at+v_0\Rightarrow v'=2\times5+10=20m/s$$

۳ شتاب حرکت در قسمت دوم (۱۰s تا ۱۵s) برابر است با:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a_2=\frac{0-30}{15-10}\Rightarrow a_2=-6m/s^2$$

۴ سرعت در لحظهٔ $t=12s$ (لحظهٔ ۲s این قسمت) برابر خواهد شد با:

$$v=at+v_0\Rightarrow v''=-6\times(12-10)+30\Rightarrow v''=18m/s$$

۵ مساحت سطح رنگی را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x=S=S_1+S_2=\frac{20+30}{2}\times5+\frac{18+30}{2}\times2\Rightarrow\Delta x=125+48=173m$$

روش استفاده از شیب نمودار برای یافتن سرعت در لحظهٔ $t=5s$ و $t=12s$:

سرعت در لحظهٔ $t=5s$:

$$\frac{30-10}{10-0}=\frac{v'-10}{5-0}\Rightarrow v'=20m/s$$

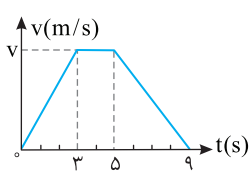
سرعت در لحظهٔ $t=8s$:

$$\frac{0-30}{15-10}=\frac{0-v''}{15-12}\Rightarrow 6=\frac{v''}{3}\Rightarrow v''=18m/s$$

بقیهٔ حل مسئله همان محاسبهٔ سطح S_1 و S_2 است.

A ۵۵۸ ۱

۱ سطح زیر نمودار را در بازهٔ صفر تا ۹s برابر ۱۶۵m قرار می‌دهیم.



$$\Delta x=S\Rightarrow 165=\frac{9+2}{2}\times v$$

$$\Rightarrow v=30m/s$$

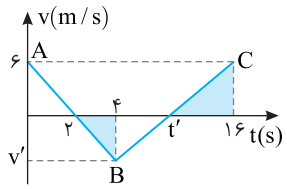
۲ اندازهٔ شتاب در قسمت کندشوندهٔ حرکت خواهد بود:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow|a|=\left|\frac{0-30}{9-5}\right|=7/5m/s^2$$

A ۵۵۹ ۴

خط فکری قرار است مسافت طی شده در بازهٔ زمانی که حرکت تندشونده است را حساب کنیم در این بازهٔ زمانی باید تندی متحرک (اندازهٔ سرعت آن) در حال افزایش باشد. بنابراین شما ابتدا باید این بازه‌های زمانی را شناسایی کرده سپس اندازهٔ سطح زیر نمودار را در این بازه‌ها با هم جمع کنید.

۱ تندی متحرک در بازهٔ ۲s تا ۴s و بازهٔ t' تا $t=16s$ در حال افزایش بوده و حرکت متحرک تندشونده است.



۲ سرعت متحرک در $t=4s$ را به کمک شیب خط AB به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{v'-6}{4-0}=\frac{0-6}{2-0}\Rightarrow v'=-6m/s$$

۳ لحظهٔ t' را به کمک شیب خط BC حساب می‌کنیم.

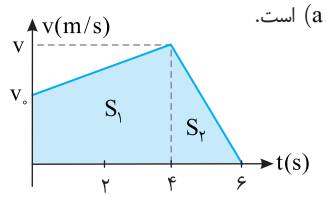
$$\frac{6-(-6)}{16-4}=\frac{6-0}{16-t'}\Rightarrow 16-t'=6\Rightarrow t'=10s$$

۴ حال مساحت زیر نمودار را در این دو بازه که حرکت تندشونده است، به‌دست آورده و با هم جمع می‌کنیم.

$$\begin{cases} t=2s \text{ تا } t=4s & : \ |\ell_1|=\frac{2\times 6}{2}=6m \\ t=10s \text{ تا } t=16s & : \ |\ell_2|=\frac{6\times 6}{2}=18m \end{cases} \Rightarrow \ell=6+18=24m$$

A ۵۶۰ ۳

در بازهٔ صفر تا ۴s شیب نمودار مثبت بنابراین شتاب حرکت مثبت $(a_1=+2/5m/s^2)$ و در بازهٔ زمانی ۴s تا ۶s شیب نمودار منفی و شتاب حرکت نیز منفی $(a_2=-7/5m/s^2)$ است.



۱ ابتدا به کمک شتاب در بازهٔ $t=4s$ تا $t=6s$، سرعت را در لحظهٔ $t=4s$ به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow -7/5=\frac{0-v}{6-4}\Rightarrow v=15m/s$$

۲ سرعت اولیهٔ متحرک را از قسمت اول حساب می‌کنیم:

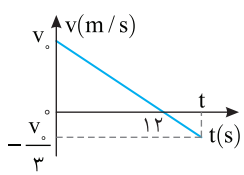
$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow 2/5=\frac{15-v_0}{4-0}\Rightarrow v_0=5m/s$$

۳ جابه‌جایی برابر سطح زیر نمودار است از این رو خواهیم داشت:

$$\Delta x=S_1+S_2=\frac{15+5}{2}\times 4+\frac{15\times 2}{2}\Rightarrow \Delta x=55m$$

B ۵۶۱ ۴

۱ نمودار $v-t$ خط راست است. پس حرکت با شتاب ثابت بوده و در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی برابر $v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}$ است، با توجه



به فرض مسئله سرعت متوسط قرار است $\frac{1}{3}v_0$ باشد از این‌رو:

$$v_{av}=\frac{v_0+v}{2}=\frac{1}{3}v_0\Rightarrow v_0+v=\frac{2}{3}v_0\Rightarrow v=-\frac{1}{3}v_0$$

۲ سرعت متحرک از $t=0$ تا $t=12s$ از v_0 به صفر می‌رسد. شتاب حرکت متحرک را برحسب v_0 به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_0\Rightarrow -v_0=12a\Rightarrow a=\frac{-v_0}{12}$$

۳ اکنون لحظه‌ای که سرعت متحرک به $-\frac{1}{3}v_0$ می‌رسد را حساب می‌کنیم (نگران v_0 نباشید از رابطه حذف می‌شود)

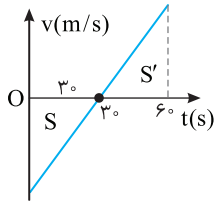
$$v=at+v_0\Rightarrow -\frac{1}{3}v_0=\frac{-v_0}{12}t+v_0\Rightarrow\frac{-4}{3}v_0=\frac{-v_0}{12}t\Rightarrow t=16s$$

روش دیگر استفاده از شیب نمودار $v-t$ که در آن نیازی نیست که شتاب را حساب کنیم.

$$\frac{v_0-0}{0-12}=\frac{\frac{-v_0}{3}-0}{t-12}\Rightarrow t-12=4\Rightarrow t=16s$$

C ۵۶۲ ۱

خط فکری متحرک در مبدأ زمان از مبدأ مکان $(x_0=0)$ گذشته تا لحظهٔ $t=30s$ با سرعت منفی در جهت منفی به حرکت ادامه می‌دهد تا سرعتش صفر شده و با همان شتاب مسیر را برمی‌گردد و از لحظهٔ $t=30s$ تا $t=60s$ در جهت مثبت محور در حال حرکت است و به مبدأ نزدیک می‌شود.

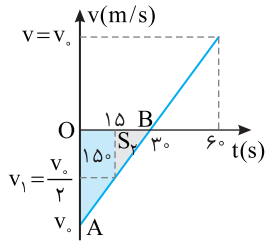


اگر به نمودار دقت کنید. با توجه به اینکه قاعدهٔ دو مثلث در بازهٔ صفر تا ۳۰s برابر قاعدهٔ مثلث در بازهٔ ۳۰s تا ۶۰s است (طول هر دو قاعده ۳۰s) بنابراین این دو مثلث هم‌نهشت بوده و دارای مساحت‌های یکسانی‌اند:

بنابراین جمع جابه‌جایی‌های متحرک در این بازه‌ها برابر $S+S'$ بوده که با هم برابراند اما جابه‌جایی در بازهٔ صفر تا ۳۰s منفی است و جابه‌جایی کل برابر صفر می‌شود، یعنی متحرک در $t=60s$ مجدداً به مبدأ مکان می‌رسد پس نتیجه می‌گیریم بیشترین فاصله از مبدأ در لحظهٔ تغییر جهت $t=30s$ اتفاق می‌افتد و در این مدت شما باید مساحت مثلث OAB را به‌دست بیاورید.

یادداشت ریاضی در تشابه دو مثلث نسبت مساحت‌ها با مربع نسبت تشابه اضلاع برابر است.

در بازهٔ صفر تا ۱۵s متحرک از مکان $x=0$ به $x=-150m$ رسیده است یعنی جابه‌جایی متحرک $-150m$ است. بنابراین اندازهٔ سطح زیر نمودار در بازهٔ صفر تا ۱۵s برابر $150m$ است.



نسبت مساحت‌ها را می‌نویسیم.

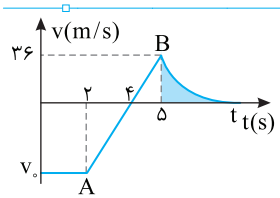
$$\frac{S_{OAB}}{S_2}=\left(\frac{30}{15}\right)^2\Rightarrow\frac{150+S_2}{S_2}=(2)^2\Rightarrow 150+S_2=4S_2\Rightarrow S_2=50m$$

$$\Rightarrow S_{OAB}=150+50=200m$$

بنابراین بیشترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ ۲۰۰ متر است.

B ۵۶۳ ۱

۱ با توجه به شیب خط AB، سرعت اولیهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{36-0}{5-4}=\frac{36-v_0}{5-2}$$

$$\Rightarrow 3\times 36=36-v_0\Rightarrow v_0=-72m/s$$

۲ با توجه به صورت مسئله مساحت قسمت هاشورخورده برابر ۳۰ واحد SI است یعنی متحرک در بازهٔ ۵s تا t جابه‌جایی $+30m$ را در جهت مثبت محور xها می‌پیماید.

۳ جابه‌جایی کل متحرک برابرسطح زیر نمودار سرعت - زمان است بنابراین:

$$\Delta x=S=(4+2)\times\frac{-72}{2}+\frac{36\times 1}{2}+30\Rightarrow\Delta x=-216+48\Rightarrow\Delta x=-168m$$

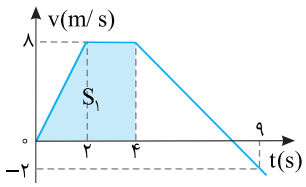
۴ مکان اولیه بنا به فرض مسئله $x_0=+150m$ است بنابراین مکان نهایی خواهد شد:

$$\Delta x=x-x_0\Rightarrow -168=x-(150)\Rightarrow x=-18m$$

C ۵۶۴ ۲

خط فکری متحرک از مکان $x_0=-36m$ شروع به حرکت کرده است و برای اینکه متحرک از مبدأ مکان بگذرد باید جابه‌جایی برابر $+36m$ انجام دهد. سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان برابر با جابه‌جایی متحرک است، بنابراین باید شما لحظه‌ای را به‌دست بیاورید که سطح زیر نمودار برابر ۳۶ واحد SI شود.

۱ ابتدا سطح زیر نمودار را در مدت $4s$ به‌دست می‌آوریم:



$$0\to 4s\Rightarrow S_1=\Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta x=\frac{4+2}{2}\times 8=24m$$

۲ در مدت $4s$ متحرک $24m$ حرکت کرده و به مکان $-36+24=12m$ می‌رسد و هنوز از مبدأ مکان عبور نکرده بنابراین لحظه‌ای که متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ می‌گذرد. بعد از $t=4s$ رخ می‌دهد و از لحظهٔ $t=4s$ باید متحرک $12m$ جابه‌جا شود تا به مبدأ برسد.

۳ شتاب را در بازهٔ $4s$ تا $9s$ به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v-v_0}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{-2-8}{9-4}=-2m/s^2$$

۴ مدت زمانی که طول می‌کشد متحرک با شتاب $-2m/s^2$ و سرعت اولیهٔ $8m/s$ به اندازهٔ $12m$ جابه‌جا شود را به‌دست می‌آوریم.

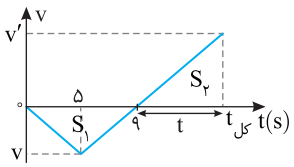
$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 12=\frac{1}{2}(-2)t^2+8t\Rightarrow t^2-8t+12=0$$

$$\Rightarrow (t-2)(t-6)=0\Rightarrow t=2s, t=6s$$

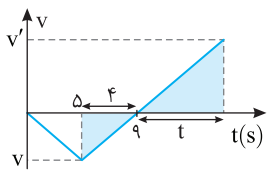
۵ لحظهٔ گذر از مبدأ برای اولین بار $2+4=6s$ است. لحظهٔ $6+4=10s$ مربوط به لحظه‌ای است که متحرک پس از توقف و در برگشت برای دومین بار از مبدأ مکان می‌گذرد.

B ۵۶۵ ۱

خط فکری برای آنکه متحرک به جای اول بازگردد باید جابه‌جایی آن صفر شود، یعنی جمع جبری سطح‌های محصور بین نمودار $v-t$ با محور زمان صفر می‌شود. از این‌رو باید $|S_1|=|S_2|$ باشد.



دو مثلث هاشورخورده در شکل مقابل با هم متشابه‌اند، بنابراین:



$$\frac{v'}{v}=\frac{t}{4}\Rightarrow v'=v\frac{t}{4}$$

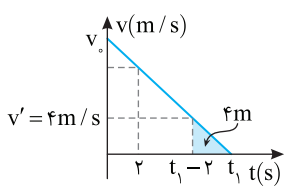
با توجه به خط فکری باید سطح زیر نمودار قسمت اول نمودار (S_1) با سطح زیر نمودار قسمت دوم (S_2) برابر باشد.

$$S_1=S_2\Rightarrow \frac{9\times v}{2}=\frac{v'\times t}{2}\Rightarrow \frac{9\times v}{2}=\frac{vt}{4}\times\frac{t}{2}\Rightarrow t^2=36\Rightarrow t=6s$$

$$t_{کل}=6+9=15s$$

B ۵۶۶ ۲

۱ نمودار $v-t$ به صورت خط راست است پس حرکت با شتاب ثابت است. در $2s$ آخر متحرک با شتاب ثابت جابه‌جایی $4m$ را طی می‌کند و سرعتش از v' به صفر می‌رسد. مقدار v' را به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب (فرمول طلایی) به‌دست می‌آوریم.



$$\Delta x=\frac{v_2+v_1}{2}t\Rightarrow 4=\frac{v'}{2}\times 2\Rightarrow v'=4m/s$$

۲ در $2s$ آخر سرعت از $4m/s$ به صفر رسیده است بنابراین شتاب خواهد شد:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{0-4}{2}=-2m/s^2$$

۳ متحرک در مدت $2s$ آغازین با سرعت اولیه v_0 و شتاب $-2m/s^2$ جابه‌جایی 36 متر را طی می‌کند بنابراین می‌توان به کمک معادلهٔ جابه‌جایی - زمان، سرعت اولیه را حساب کرد.

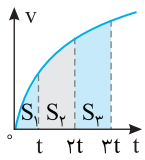
$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 36=\frac{1}{2}(-2)\times(2)^2+v_0\times 2\Rightarrow v_0=20m/s$$

۴ اکنون با معادلهٔ سرعت - زمان، t_1 را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=-2t+20\Rightarrow t=10s$$

B ۵۶۷ ۳

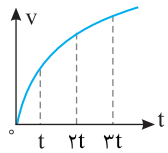
سرعت متوسط برابر $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ است. از طرفی سطح زیر نمودار سرعت - زمان برابر با جابه‌جایی است. بازه‌های زمانی در گزینه‌ها یکسان است از این‌رو باید جابه‌جایی یعنی سطح زیر نمودارها را در این بازه‌های زمانی با هم مقایسه کرد.



$$S_3>S_2>S_1\Rightarrow v_{av_3}>v_{av_2}>v_{av_1}$$

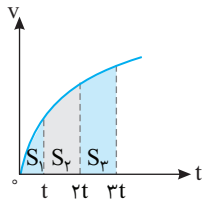
بنابراین در بازهٔ $2t$ تا $3t$، سرعت متوسط از بقیهٔ گزینه‌ها بزرگ‌تر است.

بازی با سؤال **نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی خط راست در حرکت است، مطابق شکل روبه‌رو است، در کدام بازهٔ زمانی سرعت متوسط متحرک بزرگ‌تر است؟**



۱) صفر تا $3t$ ۲) صفر تا $2t$ ۳) $2t$ تا $3t$ ۴) $2t$ تا t

پاسخ **سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا $3t$:**



$$v_{av_1}=\frac{S_1+S_2+S_3}{3t}$$

سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا $2s$:

$$v_{av_2}=\frac{S_1+S_2}{2t}$$

سرعت متوسط در بازهٔ $2t$ تا $3t$:

$$v_{av_3}=\frac{S_3}{t}$$

سرعت متوسط در بازهٔ t تا $2t$:

$$v_{av_4}=\frac{S_2}{t}$$

با توجه به اینکه $S_3>S_2>S_1$ است، داریم:

$$\text{در بازهٔ صفر تا } 3t\Rightarrow v_{av}=\frac{S_1+S_2+S_3}{3t}\xrightarrow{S_1+S_2+S_3<3S_3} v_{av_1}<\frac{3S_3}{3t}$$

$$\Rightarrow v_{av_1}<\frac{S_3}{t}\Rightarrow v_{av_1}<v_{av_3}$$

$$\text{در بازهٔ صفر تا } 2t\Rightarrow v_{av}=\frac{S_1+S_2}{2t}\xrightarrow{S_1+S_2<2S_3} v_{av_2}<v_{av_3}$$

$$\text{در بازهٔ } t \text{ تا } 2t\Rightarrow v_{av_4}=\frac{S_2}{t}\xrightarrow{S_2<S_3} v_{av_4}<v_{av_3}$$

گزینهٔ ۳

B ۵۶۸ ۳

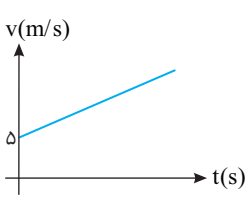
ابتدا سرعت را در لحظه‌های $t_1=4s$ و $t_2=12s$ به‌دست می‌آوریم:

$$v_1=at_1+v_0\Rightarrow v_1=5\times 4+5=25m/s$$

$$v_2=at_2+v_0\Rightarrow v_2=5\times 12+5=65m/s$$

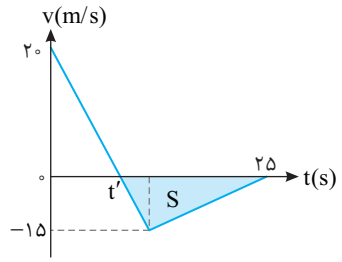
در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی میانگین سرعت ابتدا و انتهای بازه است از این‌رو خواهیم داشت:

$$v_{av}=\frac{v_2+v_1}{2}=\frac{65+25}{2}=45m/s$$



۳ ۵۶۹ A

خط فکری جهت حرکت و جهت سرعت یکی است بنابراین وقتی متحرک در خلاف جهت محور در حرکت است یعنی سرعت آن منفی است. در بازهٔ t' تا ۲۵s سرعت متحرک منفی است در این بازه سطح زیر نمودار (S) را برحسب t' حساب کنید نگران مقدار t' نباشید زیرا در محاسبهٔ سرعت متوسط $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ حذف خواهد شد.



۱ جابه‌جایی یا سطح زیر نمودار را حساب می کنیم. $|\Delta x|=S=\frac{|-۱۵\times(۲۵-t')|}{۲}$

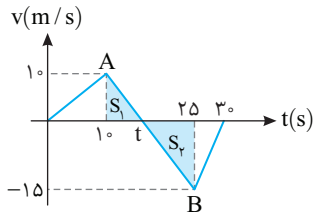
۲ اندازهٔ سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{\frac{۱۵(۲۵-t')}{۲}}{۲۵-t'}=۷/۵m/s$

۲ ۵۷۰ B

نکته شیب نمودار سرعت - زمان برابر شتاب متحرک است، هرگاه شیب منفی باشد شتاب منفی و اگر شیب مثبت باشد شتاب مثبت است.

۱ در بازهٔ $t=۱۰s$ تا $t=۲۵s$ شیب خط نمودار $v-t$ منفی بنابراین در این بازه شتاب منفی است. به کمک شیب خط AB ، لحظهٔ t را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{۱۰-۰}{۱۰-t}=\frac{۰-(-۱۵)}{t-۲۵}\Rightarrow ۲t-۵۰=۳۰-۳t\Rightarrow t=۱۶s$$

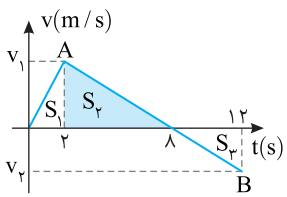


۲ مجموع سطح‌های S_1 و S_2 برابر مسافت طی شده است از این‌رو تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{|S_۱|+|S_۲|}{\Delta t}=\frac{\frac{۱۰\times۶}{۲}+\frac{۹\times۱۵}{۲}}{۲۵-۱۰}\Rightarrow s_{av}=\frac{۳۰+۶۷/۵}{۱۵}\Rightarrow s_{av}=\frac{۹۷/۵}{۱۵}$$
$$\Rightarrow s_{av}=۶/۵m/s$$

۴ ۵۷۱ B

در بازهٔ ۲s تا ۸s تندی جسم در حال کاهش و حرکت کندشونده است و برای به‌دست آوردن شتاب در این بازه شما باید سرعت در لحظهٔ $t=۲s$ (v_1) را حساب کنید.



۱ سرعت در لحظهٔ $t=۲s$ را v_1 و سرعت در لحظهٔ $t=۱۲s$ را v_2 می‌نامیم، حال به کمک شیب خط AB یک رابطهٔ ریاضی بین v_1 و v_2 به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{v_۱-۰}{۲-۸}=\frac{v_۲}{۱۲-۸}\Rightarrow v_۱=-\frac{۳}{۲}v_۲\Rightarrow v_۱=\frac{۳}{۲}(v_۲)$$

۲ تندی متوسط در بازهٔ صفر تا ۱۲s، $\frac{۱۰}{۳}m/s$ بنابراین مسافت طی شده خواهد شد.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow\frac{۱۰}{۳}=\frac{\ell}{۱۲}\Rightarrow\ell=۴۰m$$

۳ با توجه به مسافت طی شده که برابر قدرمطلق مساحت زیر نمودار است داریم:

$$\ell=|S_۱|+|S_۲|+|S_۳|=\frac{۲\times v_۱}{۲}+\frac{۶\times v_۱}{۲}+\frac{۴\times|v_۲|}{۲}=۴v_۱+۲|v_۲|$$

$$\Rightarrow ۴۰=۴v_۱+۲|v_۲|\xrightarrow{v_۱=\frac{۳}{۲}(v_۲)}۸|v_۲|=۴۰\Rightarrow|v_۲|=۵m/s$$

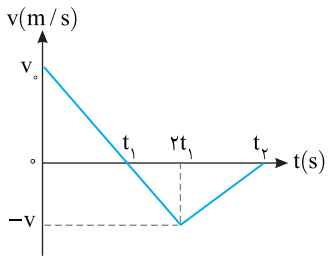
۴ مقدار v_1 خواهد شد: $v_۱=\frac{۳}{۲}|v_۲|=\frac{۳}{۲}\times۵\Rightarrow v_۱=۷/۵m/s$

۵ شتاب در قسمت کندشونده خواهد شد:

$$|a|=|\frac{۰-۷/۵}{۸-۲}|\Rightarrow|a|=۱/۲۵m/s^۲$$

۳ ۵۷۲ B

۱ اول بگوییم که با یک تست سطح دو روبه‌رو هستیم. ابتدا سرعت در لحظهٔ $۲t_1$ را به کمک شیب خط به دست می‌آوریم.



$$\frac{۰-v_۰}{t_۱-۰}=\frac{v-۰}{۲t_۱-t_۱}\Rightarrow|v|=|v_۰|$$

۲ شتاب در قسمت اول و قسمت دوم را نوشته و بنا به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$|a_۱|=۲|a_۲|\Rightarrow|\frac{۰-v_۰}{t_۱-۰}|=۲|\frac{۰-(-v)}{t_۲-۲t_۱}|\xrightarrow{v=v_۰}$$

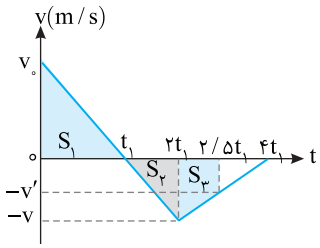
$$\frac{v_۰}{t_۱}=\frac{۲v_۰}{t_۲-۲t_۱}\Rightarrow ۲t_۱=t_۲-۲t_۱\Rightarrow t_۲=۴t_۱$$

بنابراین بازهٔ $۲t_1$ تا t_2 برابر $۴t_۱-۲t_۱=۲t_۱$ است.

۳ به کمک شیب خط در بازهٔ $۲t_1$ تا t_2 سرعت در لحظهٔ $۲/۵t_1$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{۰-(-v)}{t_۲-۲t_۱}=\frac{۰-(-v')}{t_۲-۲/۵t_۱}\Rightarrow\frac{v}{۲t_۱}=\frac{v'}{۱/۵t_۱}\Rightarrow v'=\frac{۳}{۴}v$$

۴ به کمک سطح زیر نمودار مسافت طی شده و تندی متوسط را در بازه‌های زمانی داده شده به دست می‌آوریم.



$$۰\to t_۱\Rightarrow S_۱=\ell_۱=\frac{v_۰t_۱}{۲}\Rightarrow s_{av_۱}=\frac{\ell_۱}{t_۱}=\frac{v_۰}{۲}$$

$$t_۱\to۲/۵t_۱\Rightarrow\ell_۲=|S_۲|+|S_۳|=\frac{v_۰t_۱}{۲}+\frac{|\frac{۳v_۰}{۴}+v_۰|\times۰/۵t_۱}{۲}$$

$$\ell_۲=\frac{v_۰t_۱}{۲}+\frac{۷}{۱۶}v_۰t_۱\Rightarrow\ell_۲=\frac{۱۵}{۱۶}v_۰t_۱,s_{av_۲}=\frac{\frac{۱۵}{۱۶}v_۰t_۱}{\frac{۳}{۲}t_۱}=\frac{۵}{۸}v_۰$$

۵ نسبت $\frac{s_{av_۱}}{s_{av_۲}}$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{s_{av_۱}}{s_{av_۲}}=\frac{\frac{v_۰}{۲}}{\frac{۵v_۰}{۸}}=\frac{۴}{۵}$$

آخیش حلش تموم شد باورتون میشه؟

B ۵۷۳ ۱

خط فکری در حل این مسئله باید سرعت اولیه (سرعت در لحظهٔ $t=0$) را v_0 اختیار کنید. سپس باید به کمک شیب نمودار، سرعت در لحظهٔ $t=10s$ را بر حسب v_0 به‌دست بیاورید، سپس کل مساحت بین نمودار و محور زمان را برابر ۱۳۸m قرار داده و v_0 را حساب کرده و به کمک آن مسئله را حل کنید.

۱ محاسبهٔ v بر حسب v_0

$$\frac{0-v_0}{6-0}=\frac{v-0}{10-6}\Rightarrow v=-\frac{2}{3}v_0$$

۲ مساحت را حساب می‌کنیم:

$$\ell=|S_1|+|S_2|\Rightarrow 138=\frac{6\times v_0}{2}+\frac{(\frac{2}{3}v_0\times 14)}{2}$$

$$138=3v_0+\frac{14v_0}{3}\Rightarrow 138=\frac{9v_0+14v_0}{3}\Rightarrow 138=\frac{23v_0}{3}$$

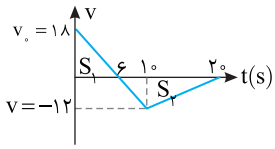
$$v_0=18m/s\Rightarrow v=-18\times\frac{2}{3}\Rightarrow v=-12m/s$$

۳ سرعت در لحظه‌های $t_1=2s$ و $t_2=12s$ به کمک شیب نمودار خواهد شد:

$$\frac{0-18}{6-0}=\frac{v_1-18}{2-0}\Rightarrow v_1=12m/s\ ,\ \frac{0-(-12)}{20-10}=\frac{v_2-(-12)}{12-10}\Rightarrow v_2=-9/6m/s$$

۴ شتاب متوسط را به‌دست می‌آوریم:

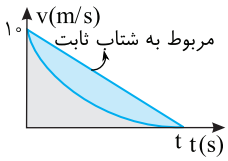
$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\Rightarrow a_{av}=\frac{-9/6-12}{12-2}\Rightarrow a_{av}=-2/16m/s^2\Rightarrow|a_{av}|=2/16m/s^2$$



B ۵۷۴ ۴

خط فکری سرعت متوسط برابر $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ است و جابه‌جایی (Δx) برابر سطح زیر نمودار سرعت - زمان است. اما نمودار $v-t$ داده شده منحنی (خمیده) است و یافتن سطح زیر آن ممکن نیست بنابراین چگونه باید به مسئله پاسخ داده شود. به گزینه‌ها نگاه کنید برای سرعت متوسط محدوده ارائه شده است شما بهتر است در بازهٔ صفر تا t یک خط راست رسم کنید این خط مربوط به حرکت با شتاب ثابت است و مقدار سرعت متوسط این حرکت برابر $\frac{10+0}{2}=5m/s$ است. با مقایسهٔ سطح زیر نمودار منحنی با سطح زیر نمودار خط راست (مربوط به حرکت با شتاب ثابت) می‌تواند در مورد سرعت متوسط اظهارنظر کرد.

سطح زیر نمودار سرعت - زمان برای شتاب ثابت از سطح زیر نمودار سرعت - زمان برای شتاب متغیر بیشتر است.

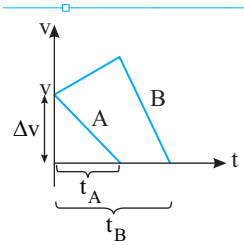


$$S_{\text{منحنی}}<S_{\text{شتاب ثابت}}\Rightarrow\Delta x_{\text{منحنی}}<\Delta x_{\text{شتاب ثابت}}\xrightarrow{v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}}v_{av_{\text{منحنی}}}<v_{av_{\text{ثابت}}}$$

$$\Rightarrow v_{av_{\text{منحنی}}}<\frac{0+10}{2}\Rightarrow v_{av}<5m/s$$

B ۵۷۵ ۱

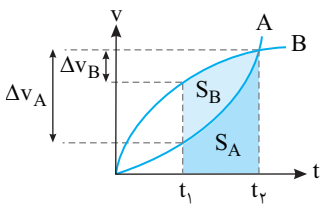
شتاب متوسط برابر $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ است. به نمودار نگاه کنید، تغییر سرعت دو متحرک A و B در بازهٔ صفر تا لحظهٔ توقف آن‌ها یکسان است $\Delta v_A=\Delta v_B$. اما بازهٔ زمانی این تغییر برای متحرک A از متحرک B کمتر در نتیجه شتاب متوسط A از شتاب متوسط B بیشتر است.



$$a_{av_A}=\frac{\Delta v}{\Delta t_A},a_{av_B}=\frac{\Delta v}{\Delta t_B}\xrightarrow{\Delta t_A<\Delta t_B}a_{av_A}>a_{av_B}$$

B ۵۷۶ ۲

به نمودار دقت کنید. در بازهٔ t_1 تا t_2، تغییرات سرعت متحرک A از تغییرات سرعت متحرک B بیشتر است بنابراین شتاب متوسط A از شتاب متوسط B بزرگ‌تر است.



$$\begin{cases}a_{av_A}=\frac{\Delta v_A}{t_2-t_1}\\ a_{av_B}=\frac{\Delta v_B}{t_2-t_1}\end{cases}\xrightarrow{\Delta v_A>\Delta v_B}a_{av_A}>a_{av_B}$$

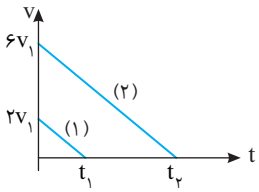
اکنون به سراغ بررسی و مقایسهٔ سرعت متوسط دو متحرک می‌رویم.

در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان برای متحرک A کمتر از متحرک B است، بنابراین سرعت متوسط A کمتر از سرعت متوسط B است.

$$\begin{cases}v_{av_A}=\frac{\Delta x_A}{t_2-t_1}=\frac{S_A}{t_2-t_1}\\ v_{av_B}=\frac{\Delta x_A}{t_2-t_1}=\frac{S_B}{t_2-t_1}\end{cases}\xrightarrow{S_A<S_B}v_{av_A}<v_{av_B}$$

B ۵۷۷ ۳

۱ شیب نمودار سرعت - زمان برابر شتاب متحرک است در صورت مسئله بیان شده که شتاب دو متحرک یکسان است بنابراین شیب این دو نمودار باید با هم برابر باشد. شیب دو نمودار را با هم برابر قرار می‌دهیم و یک رابطهٔ ریاضی بین t_1 و t_2 به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{0-2v_1}{t_1-0}=\frac{0-6v_1}{t_2-0}\Rightarrow t_2=3t_1\qquad(1)$$

۲ سطح زیر نمودار سرعت - زمان برابر جابه‌جایی متحرک است سطح زیر نمودار متحرک اول را به‌دست می‌آوریم.

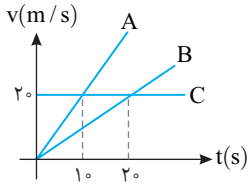
$$\Delta x_1=S_1\Rightarrow\Delta x_1=\frac{2v_1\times t_1}{2}\Rightarrow\Delta x_1=v_1t_1\Rightarrow v_1t_1=10\qquad(2)$$

۳ اکنون سطح زیر نمودار دوم را به‌دست آورده و از رابطهٔ (۱) و (۲) در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$S_2=\Delta x_2=\frac{6v_1\times t_2}{2}=\frac{6v_1\times 3t_1}{2}=9v_1t_1\Rightarrow\Delta x_2=90m$$

A ۵۷۸ ۳

با توجه به نمودار متحرک‌های A و B دارای حرکت با شتاب ثابت و متحرک C دارای حرکت با سرعت ثابت $20m/s$ است.



شتاب متحرک A را به‌دست می‌آوریم.

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a_A=\frac{20-0}{10}=2m/s^2$$

به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، سرعت متحرک A را پس از جابه‌جایی $400m$ حساب می‌کنیم.

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow v_A^2-0=2\times2\times400\Rightarrow v_A=40m/s$$

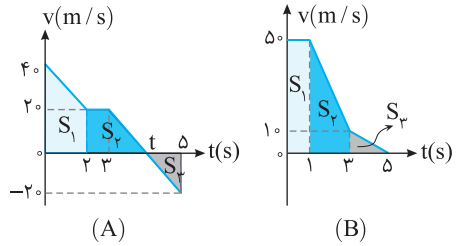
شتاب متحرک B خواهد شد:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a_B=\frac{20-0}{20}=1m/s^2$$

سرعت متحرک B را حساب می‌کنیم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow v_B^2-0=2\times1\times400\Rightarrow v_B=20\sqrt{2}\ m/s$$

۱ ۵۷۹ B



مسافت طی شده متحرک A در مدت ۵s برابر است با: $\ell_A=|S_1|+|S_2|+|S_3|$

ابتدا باید لحظهٔ t را به‌دست آوریم:

شیب نمودار در بازهٔ زمانی ۳ تا ۵ ثانیه را به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v_2-v_1}{\Delta t}=\frac{-20-20}{2}=-20\,m/s^2$$

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=-20(t-3)+20\Rightarrow t-3=1\Rightarrow t=4s$$

$$S_1=\frac{1}{2}(40+20)(2)=60m,\ S_2=\frac{1}{2}(1+2)(20)=30m$$

$$S_3=\frac{1}{2}(1)(20)=10m,\ \ell_A=60+30+10=100m$$

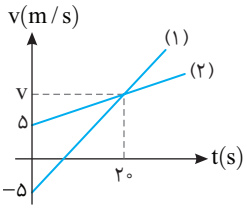
مسافت طی شده متحرک B در مدت ۵s برابر است با:

$$S_1=50\,m,\ S_2=\frac{1}{2}(10+5)(2)=60m,\ S_3=\frac{1}{2}(2)(10)=10m$$

$$\ell_B=S_1+S_2+S_3=50+60+10=120m,\quad \frac{\ell_B}{\ell_A}=\frac{120}{100}=1/2$$

۲ ۵۸۰ B

هر دو متحرک از مبدأ مکان شروع به حرکت کرده‌اند. با توجه به نمودار، سرعت ابتدایی و انتهایی هر دو حرکت را داریم در این مسئله بهترین روش استفاده از معادلهٔ مستقل از شتاب (فرمول طلایی) است.



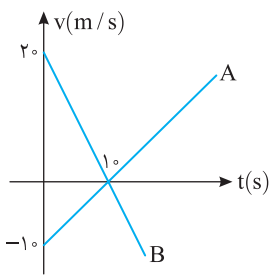
$$x=\frac{v+v_0}{2}t+x_0\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{-5+v}{2}\times 20=10(-5+v)\\ x_2=\frac{5+v}{2}\times 20=10(5+v)\end{cases}$$

فاصلهٔ دو متحرک برابر است با:

$$|x_1-x_2|=10(5+v)-10(-5+v)=50+10v+50-10v\Rightarrow|x_1-x_2|=100m$$

۲ ۵۸۱ B

شتاب حرکت هر متحرک را به‌دست می‌آوریم. سپس معادلهٔ حرکت آن‌ها را می‌نویسیم.



$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow\begin{cases}a_A=\frac{10}{10}=1\,m/s^2\\ a_B=\frac{0-20}{10}=-2m/s^2\end{cases}$$

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow\begin{cases}x_A=\frac{1}{2}t^2-10t\\ x_B=\frac{1}{2}(-2)t^2+20t\Rightarrow x_B=-t^2+20t\end{cases}$$

تفاضل x_A و x_B را برابر ۱۵۰m قرار می‌دهیم.

$$|x_A-x_B|=150\Rightarrow\frac{1}{2}t^2-10t+t^2-20t=\pm 150$$

$$\frac{3}{2}t^2-30t=150\Rightarrow\frac{3}{2}t^2-30t-150=0$$

$$\frac{t^2}{2}-10t-50=0\Rightarrow t^2-20t-100=0$$

$$t=10\pm\sqrt{200}=10\pm 10\sqrt{2}\Rightarrow t=10+10\sqrt{2}$$

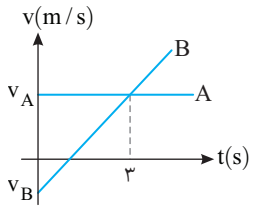
$$\frac{3}{2}t^2-30t=-150\Rightarrow\frac{t^2}{2}-10t+50=0$$

$$t^2-20t+100=0\Rightarrow(t-10)^2=0\Rightarrow t=10s$$

بنابراین دو بار و در لحظه‌های ۱۰s و $(10+10\sqrt{2})s$ فاصلهٔ آن ۱۵۰ متر است.

۲ ۵۸۲ A

۱ سرعت متحرک A ثابت و متحرک B دارای شتاب ثابت است. می‌دانیم شیب خط نمودار v−t برابر شتاب ثابت است پس شتاب متحرک A خواهد شد:



$$a_B=\frac{v_A-v_B}{3}$$

۲ هر دو هم‌زمان از یک نقطه که آن را مبدأ مکان می‌گیریم شروع به حرکت کرده‌اند $(x_{0_A}=x_{0_B})$.

۳ معادلهٔ حرکت هر دو را می‌نویسیم:

معادلهٔ حرکت A: $x=vt+x_0\Rightarrow x_A=v_At$

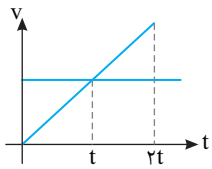
معادلهٔ حرکت B: $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x_B=\frac{1}{2}(\frac{v_A-v_B}{3})t^2+v_Bt$

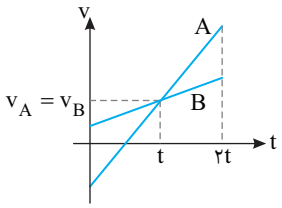
۴ اگر در لحظهٔ t_1 از کنار هم بگذرند. مکان آن‌ها در این لحظه برابر است.

$$x_A=x_B\Rightarrow\frac{1}{2}(\frac{v_A-v_B}{3})t_1^2+v_Bt_1=v_At_1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}(\frac{v_A-v_B}{3})t_1^2=(v_A-v_B)t_1\Rightarrow t_1=6s$$

میانبر **اثر پروانه‌ای:** هرگاه دو متحرک که از یک نقطه شروع به حرکت کنند و در لحظهٔ t دارای سرعت یکسان باشند، دو متحرک در لحظهٔ ۲t از کنار هم می‌گذرند.



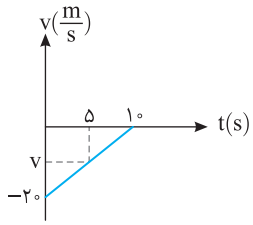


۴ ۵۸۳ B

در لحظهٔ t=۱۵s سرعت متحرک‌های A و B با هم برابر است. به کمک شیب نمودار B، تندی متحرک B در t=۱۵s را حساب می‌کنیم. در واقع تندی متحرک A را نیز به‌دست می‌آوریم.

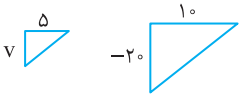
$$\frac{0-(-20)}{10-0}=\frac{v_A-0}{15-10}\Rightarrow v_A=10m/s$$

سرعت متحرک B در لحظهٔ t=۵s را حساب می‌کنیم.



$$\frac{0-(-20)}{10-0}=\frac{0-v}{10-5}\Rightarrow v=-10m/s$$

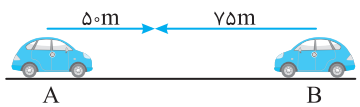
با توجه به فرض مسئله دو متحرک پس از ۵s از کنار هم می‌گذرند. جابه‌جایی متحرک A و B را در مدت ۵s به‌دست می‌آوریم.



$\Delta x_A = v_A \times t \Rightarrow \Delta x_A = ۵ \times ۱۰ = ۵۰m$

$\Delta x_B = \frac{v + v_۰}{۲} \times t \Rightarrow \Delta x_B = \frac{-۱۰ + (-۲۰)}{۲} \times ۵ \Rightarrow \Delta x_B = -۷۵m$

سرعت متحرک A مثبت بوده و متحرک A در جهت محور xها ۵۰m جابه‌جا می‌شود و در همان مدت سرعت متحرک B منفی بوده و متحرک B خلاف جهت محور xها ۷۵m جابه‌جا می‌شود تا دو متحرک به هم برسند.



بنابراین، این دو متحرک در ابتدا در فاصلهٔ $۵۰ + ۷۵ = ۱۲۵m$ هم بوده‌اند.

۳ ۵۸۴ B

۱ دو متحرک هم‌زمان از یک نقطه شروع به حرکت کرده‌اند $(x_{۰A} = x_{۰B})$.

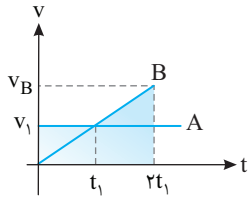
۲ سرعت متحرک B را در لحظهٔ $۲t_۱$ به کمک شیب نمودار B به‌دست می‌آوریم.

$\frac{v_B - ۰}{۲t_۱ - ۰} = \frac{v_۱ - ۰}{t_۱ - ۰} \Rightarrow v_B = ۲v_۱$

۳ برای مقایسهٔ سرعت متوسط دو متحرک $(v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t})$ چون Δt برای هر دو یکسان است باید جابه‌جایی دو متحرک را در بازهٔ صفر تا $۲t_۱$ مقایسه کنیم.

$\Delta x_A = S = v_۱(۲t_۱) = ۲v_۱t_۱ \quad , \quad \Delta x_B = S = \frac{(۲v_۱)(۲t_۱)}{۲} = ۲v_۱t_۱$

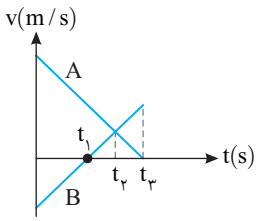
۴ بنابراین جابه‌جایی‌ها در بازه‌های زمانی یکسان برابر بوده و سرعت متوسط آن‌ها یکی است.



۲ ۵۸۵ B

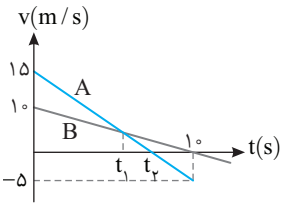
نکته هرگاه متحرک B به دنبال متحرک A در حرکت باشد تا لحظه‌ای که $v_B < v_A$ است، فاصلهٔ دو متحرک در حال افزایش است و اگر $v_B = v_A$ شود فاصلهٔ دو متحرک ثابت می‌ماند اما اگر $v_B > v_A$ شود فاصلهٔ متحرک B از A شروع به کاهش می‌کند.

دو متحرک A و B، A با سرعت مثبت و B با سرعت منفی هم‌زمان به راه می‌افتند و از هم دور می‌شوند. در لحظهٔ $t_۱$ متحرک B سرعتش صفر شده و تغییر جهت می‌دهد و به دنبال متحرک A می‌رود، اما از لحظهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ هم‌چنان سرعت A بیشتر از سرعت B است و تا لحظه‌ای که سرعت دو متحرک برابر شود یعنی تا لحظهٔ $t_۲$ فاصلهٔ دو متحرک، در حال افزایش است، از این لحظه به بعد $(t > t_۲)$، سرعت B از سرعت A بیشتر شده و متحرک B فاصله‌اش از متحرک A شروع به کم شدن می‌کند بنابراین بیشترین فاصلهٔ دو متحرک از هم در لحظهٔ $t_۲$ رخ می‌دهد.



۴ ۵۸۶ C

خط فکری سرعت اولیهٔ متحرک A، $۱۵m/s$ و سرعت اولیهٔ متحرک B، $۱۰m/s$ است از این رو متحرک A از متحرک B جلو می‌افتد و تا لحظه‌ای که سرعت متحرک B از A کمتر است فاصلهٔ A و B در حال افزایش است تا لحظه‌ای که $v_A = v_B$ می‌شود بنابراین بیشترین فاصلهٔ دو متحرک از هم در ۱۰s نخست حرکت لحظه‌ای است که سرعت‌ها برابر می‌شوند، یعنی لحظهٔ $t_۱$. بنابراین شما باید لحظهٔ $t_۱$ را از روی نمودار به‌دست بیاورید. سپس جابه‌جایی A و B را حساب کنید.



۱ شتاب حرکت هر متحرک را به‌دست می‌آوریم.

$a = \frac{v - v_۰}{t} \Rightarrow a_A = \frac{-۵ - ۱۵}{۱۰} = -۲m/s^۲ , a_B = \frac{۰ - ۱۰}{۱۰} = -۱m/s^۲$

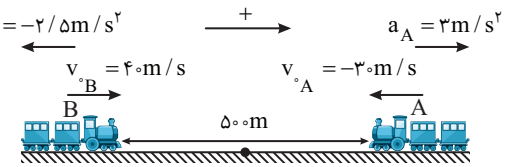
۲ در لحظهٔ $t_۱$، سرعت دو متحرک را برابر قرار می‌دهیم.

$v_A = v_B \xrightarrow{v = at + v_۰} -۲t_۱ + ۱۵ = -t_۱ + ۱۰ \Rightarrow t_۱ = ۵s$

۳ مکان دو متحرک را در این لحظه به‌دست آورده از هم کم می‌کنیم

$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{۱}{۲}(-۲)(۵)^۲ + ۱۵ \times ۵ = ۵۰m \\ x_B = \frac{۱}{۲}(-۱)(۵)^۲ + ۱۰ \times ۵ = ۳۷/۵m \end{cases} \Rightarrow x_A - x_B = ۱۲/۵m$

۲ ۵۸۷ C



۱ نمودار $v-t$ هر دو قطار خط راست و حرکت هر دو با شتاب ثابت می‌باشد. شتاب هر یک را حساب می‌کنیم:

$a = \frac{v - v_۰}{t} \Rightarrow a_A = \frac{۰ - (-۳۰)}{۱۰} = ۳m/s^۲ , a_B = \frac{۰ - ۴۰}{۱۶} = -۲/۵m/s^۲$

۲ محل قطار A را در $t = ۰$ مبدأ اختیار کرده و معادلهٔ حرکت آن را می‌نویسیم و در لحظهٔ $t = ۱۰s$ مکان A را حساب می‌کنیم.

$x_A = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times t^۲ - ۳۰t \xrightarrow{t = ۱۰s} x_A = ۱۵۰ - ۳۰۰ = -۱۵۰m$

۳ معادلهٔ حرکت قطار B را می‌نویسیم و مکان آن را در $t = ۱۰s$ به‌دست می‌آوریم:

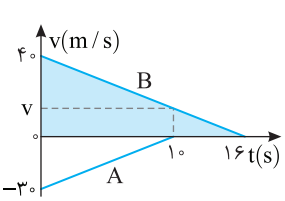
$x_B = \frac{۱}{۲} \times (-۲/۵)t^۲ + ۴۰t - ۵۰۰ \xrightarrow{t = ۱۰s} x_B = -۱۲۵ + ۴۰۰ - ۵۰۰$

$\Rightarrow x_B = -۲۲۵m$

$d = |x_A - x_B| = ۷۵m$

۴ فاصلهٔ دو متحرک از هم خواهد شد:

روش دیگر: در لحظهٔ $t = ۱۰s$ متحرک A می‌ایستد. به کمک شیب خط B سرعت متحرک B را در لحظهٔ $t = ۱۰s$ به‌دست می‌آوریم.



$\frac{۰ - ۴۰}{۱۶ - ۰} = \frac{۰ - v}{۱۶ - ۱۰} \Rightarrow \frac{۱۰}{۴} = \frac{v}{۶}$

$\Rightarrow v = ۱۵m/s$

اکنون سطح زیر دو نمودار را در بازهٔ صفر تا ۱۰s به‌دست می‌آوریم.

$\Delta x_A = \frac{-۳۰ \times ۱۰}{۲} = -۱۵۰m \quad , \quad \Delta x_B = \frac{۴۰ + ۱۵}{۲} \times ۱۰ = ۲۷۵m$

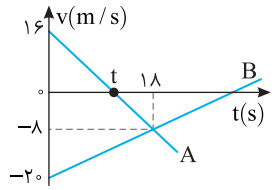
متحرک A، $۱۵۰m$ و متحرک B، ۲۷۵ متر به سمت هم حرکت کرده‌اند و در ابتدا فاصلهٔ آن‌ها از هم $۵۰۰m$ بوده، بنابراین در این لحظه فاصلهٔ آن‌ها از هم خواهد شد:

$۵۰۰ - (۱۵۰ + ۲۷۵) = ۷۵m$

B ۵۸۸ ۲

جهت حرکت همان جهت سرعت متحرک است، بنابراین در مدتی که متحرک A در جهت محور x حرکت می‌کند، سرعت A مثبت است و این بازه زمانی از لحظه صفر تا t (محل برخورد نمودار با محور زمان) است.

۱ لحظهٔ t را به کمک شیب نمودار A به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{۱۶-(-۸)}{۰-۱۸}=\frac{۱۶-۰}{۰-t}$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۳}=\frac{۱۶}{t}\Rightarrow t=۱۲s$$

۲ شتاب حرکت B را حساب می‌کنیم:

$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a_B=\frac{-۸-(-۲۰)}{۱۸}=\frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۲}{۳}m/s^۲$$

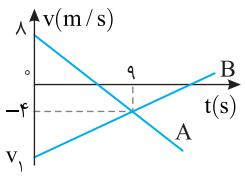
۳ جابه‌جایی B در مدت $t=۱۲s$ خواهد شد:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow \Delta x_B=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times(۱۲)^۲+(-۲۰)\times۱۲\Rightarrow \Delta x_۲=۴۸-۲۴۰$$

$$\Rightarrow \Delta x_۲=-۱۹۲m$$

بنابراین بزرگی جابه‌جایی B برابر ۱۹۲ متر است.

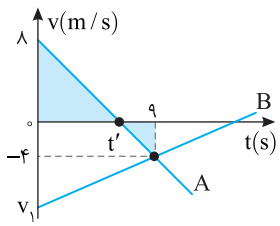
بازی با سؤال نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که روی محور x حرکت می‌کنند مطابق شکل روبه‌رو است. در مدتی که حرکت متحرک A کندشونده است متحرک B به اندازه ۹۶m مسافت طی می‌کند. بزرگی $v_۱$ برابر چند متر بر ثانیه است؟



مشابه ریاضی - ۹۵

۱) ۲۲ ۲) ۱۱ ۳) ۲۰ ۴) ۱۸

پاسخ هنگامی‌که نمودار v−t متحرکی به محور زمان‌ها نزدیک می‌شود حرکت آن کندشونده است. مطابق نمودار از $t=۰$ تا $t=t'$ حرکت متحرک A کندشونده است. با استفاده از تشابه مثلث داریم:



$$\frac{۹-t'}{۴}=\frac{t'}{۸}\Rightarrow ۱۸-۲t'=t'\Rightarrow t'=۶s$$

بنابراین در بازهٔ $t=۰$ تا $t'=۶$ حرکت متحرک A کندشونده است و در این بازه مسافت طی شده توسط متحرک B برابر ۹۶m است، شتاب متحرک B را به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a_B=\frac{-۴-v_۱}{۹}$$

معادلهٔ مکان زمان را برای متحرک B می‌نویسیم. دقت کنید جابه‌جایی متحرک B در بازهٔ صفر تا ۶s که سرعت منفی است برابر −۹۶m است.

$$\Delta x_B=\frac{۱}{۲}a_Bt^۲+v_۱t'\Rightarrow -۹۶=\frac{۱}{۲}\left(\frac{-۴-v_۱}{۹}\right)\times۳۶+۶v_۱$$

$$\Rightarrow -۹۶=-۸-۲v_۱+۶v_۱\Rightarrow -۸۸=۴v_۱\Rightarrow v_۱=-۲۲m/s\Rightarrow |v_۱|=۲۲m/s$$

گزینهٔ ۱

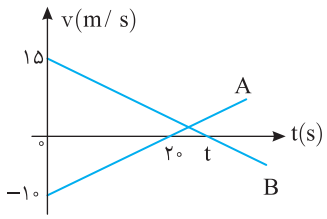
B ۵۸۹ ۲

شتاب حرکت متحرک A را با توجه به نمودار به‌دست می‌آوریم و معادله حرکت آن را می‌نویسیم:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_A=\frac{۰-(-۱۰)}{۲۰}=\frac{۱}{۲}m/s^۲$$

$$x_A=\frac{۱}{۲}a_At^۲+v_{۰A}t+x_{۰A}\Rightarrow x_A=\frac{۱}{۴}t^۲-۱۰t-۱۰۰$$

با توجه به نمودار، لحظهٔ t، لحظه‌ای است که متحرک B تغییر جهت داده است، طبق صورت سؤال در این لحظه متحرک A، در مکان $x_A=-۱۷۵m$ است. به کمک معادله حرکت A، این لحظه را به دست می‌آوریم.



$$x_A=-۱۷۵\Rightarrow \frac{۱}{۴}t^۲-۱۰t-۱۰۰=-۱۷۵\Rightarrow \frac{۱}{۴}t^۲-۱۰t+۷۵=۰\Rightarrow t=۱۰s, t=۳۰s$$

$t=۳۰s$ قابل قبول است زیرا متحرک B در لحظه‌ای پس از ۲۰ ثانیه تغییر جهت داده است.

با داشتن لحظه تغییر جهت $(t=۳۰s)B$ شتاب متحرک B را با استفاده از معادله سرعت - زمان حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=a(۳۰)+۱۵\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}m/s^۲$$

(با استفاده از نمودار نیز می‌توان شتاب را محاسبه کرد: $a_B=\frac{۰-۱۵}{۳۰}=-\frac{۱}{۲}m/s^۲$)

مکان متحرک B را در $t=۳۰s$ حساب می‌کنیم.

$$x_B=-\frac{۱}{۴}(۳۰)^۲+۱۵(۳۰)+۱۰۰=۳۲۵\,m$$

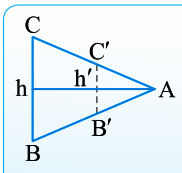
بنابراین فاصلهٔ متحرک‌ها از هم در $t=۳۰s$ برابر است با:

$$x_B-x_A=۳۲۵-(-۱۷۵)=۵۰۰m$$

B ۵۹۰ ۲

با یک مسئله ریاضی در مبحث تشابه مثلث‌ها سروکار داریم.

یادداشت ریاضی در مثلث روبه‌رو نسبت مساحت ABC به مساحت A′B′C′ با مجذور نسبت ارتفاع Ah/Ah′ برابر است.

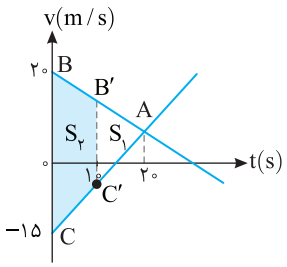


$$\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}}=\left(\frac{Ah'}{Ah}\right)^۲$$

مسئله در واقع مساحت $S_۲$ را می‌خواهد. بنابراین با توجه به یادداشت ریاضی می‌توان نوشت:

$$\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}}=\left(\frac{۱۰}{۲۰}\right)^۲\Rightarrow \frac{S_۱}{S_۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$S_۱=\frac{۱}{۴}S_{ABC}\xrightarrow{S_{ABC}=S_۱+S_۲} S_۲=\frac{۳}{۴}S_{ABC}$$



برای به‌دست آوردن مساحت مثلث ABC دقت کنید که ارتفاع آن ۲۰ و قاعدهٔ آن ۲۰+۱۵=۳۵ است. از این‌رو می‌خواهیم داشت:

$$S_۲=\frac{۳}{۴}\left(\frac{۳۵\times۲۰}{۲}\right)\Rightarrow S_۲=۲۶۲/۵m$$

B ۵۹۱ ۳

شتاب a را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_B=\frac{۰-(-۱۶)}{۸}\Rightarrow a_B=۲\frac{m}{s^۲}$$

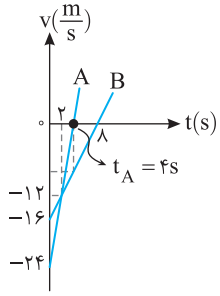
$$v_B=a_Bt+v_۰$$

سرعت B در $t=۲s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$t=۲s\Rightarrow v_B=۲\times۲-۱۶\Rightarrow v_B=-۱۲\frac{m}{s}$$

شتاب A خواهد شد: $a_A=\frac{-۱۲-(-۲۴)}{۲}\Rightarrow a_A=۶\frac{m}{s^۲}$

لحظه‌ای که تندی A صفر می‌شود، برابر است با: $v_A=۰\Rightarrow ۰=۶(t_A)-۲۴\Rightarrow t_A=۴s$



از لحظهٔ $t=۴s$ به بعد سرعت A مثبت می‌شود اما در بازهٔ ۴s تا ۸s سرعت B منفی است. بنابراین از ۴s تا ۸s دو متحرک در خلاف جهت هم در حرکت هستند. (فاصلهٔ بین آنها افزایش می‌یابد.)

جابه‌جایی متحرک A در این بازه (۴s تا ۸s) خواهد شد: $\Delta x_A=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۴^۲=۴۸m$

تندی جسم B را در لحظهٔ $t=۴s$ به دست می‌آوریم. $v_B=۲\times ۴-۱۶=-۸\frac{m}{s}$

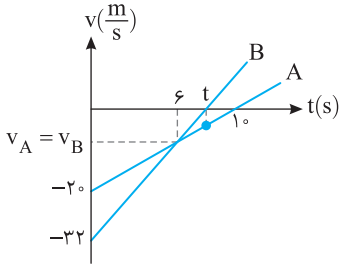
جابه‌جایی متحرک B در این بازه (۴s تا ۸s) را حساب می‌کنیم.

$\Delta x_B=\frac{v_۲+v_۱}{۲}t\Rightarrow \Delta x_B=\frac{۰+(-۸)}{۲}\times ۴=-۱۶m$

بنابراین در بازهٔ ۴s تا ۸s فاصلهٔ A تا B، ۶۴m افزایش می‌یابد. $۴۸+۱۶=۶۴m$

C ۵۹۲ ۴

خط فکری البته باید مشخص کنیم چه مدت دو متحرک خلاف جهت هم در حرکت هستند. در مدت صفر تا t سرعت هر دو متحرکی منفی و در مدت $t>۱۰s$ نیز سرعت هر دو متحرک مثبت



است بنابراین در بازهٔ زمانی t تا ۱۰s دو متحرک خلاف جهت هم در حرکت هستند و شما باید رفتار دو متحرک را در این بازه بررسی کنید.

۱ شتاب A را به‌دست می‌آوریم.

$a_A=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a_A=\frac{۰-(-۲۰)}{۱۰}\Rightarrow a_A=۲m/s^۲$

۲ سرعت متحرک A و B در لحظهٔ $t=۶s$ یکسان و برابر است با:

$v=at+v_۰\Rightarrow v=۲\times ۶-۲۰\Rightarrow v=-۸m/s\Rightarrow v_A=v_B=-۸m/s$

۳ شتاب متحرک B را حساب می‌کنیم. $a_B=\frac{-۸+۳۲}{۶-۰}\Rightarrow a_B=۴m/s^۲$

۴ لحظهٔ t را حساب می‌کنیم. $v_B=a_Bt+v_{۰B}\Rightarrow ۰=۴\times t-۳۲\Rightarrow t=۸s$

۵ معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته فاصلهٔ دو متحرک را در لحظه‌های $t=۸s$ و $t=۱۰s$ به‌دست آورده مقایسه می‌کنیم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow\begin{cases}x_A=\frac{۱}{۲}\times ۲t^۲-۲۰t\Rightarrow x_A=t^۲-۲۰t\\ x_B=\frac{۱}{۲}\times ۴t^۲-۳۲t\Rightarrow x_B=۲t^۲-۳۲t\end{cases}$$

$|x_A-x_B|=|t^۲-۲۰t-۲t^۲+۳۲t|\Rightarrow|x_A-x_B|=|-t^۲-۱۲t|$

$t=۸s\Rightarrow|x_A-x_B|=|-۶۴+۹۶|\Rightarrow|x_A-x_B|=۳۲m$

$t=۱۰s\Rightarrow|x_A-x_B|=|-۱۰۰+۱۲۰|\Rightarrow|x_A-x_B|=۲۰m$

بنابراین فاصلهٔ دو متحرک از ۳۲m در لحظهٔ $t=۸s$ به ۲۰m در لحظهٔ $t=۱s$ رسیده یعنی فاصلهٔ A و B ۱۲m کاهش می‌یابد.

B ۵۹۳ ۳

دو متحرک A و B در مبدأ زمان سرعت مثبت در یک جهت از یک نقطه می‌گذرند. در تمام مدت ۲۸s، سرعت متحرک B از سرعت متحرک A بیشتر است بنابراین فاصلهٔ دو متحرک در تمام مدت ۲۸s در حال افزایش است.

B ۵۹۴ ۳

۱ شتاب حرکت A و B را در اختیار داریم بنابراین سرعت ثابت هر دو متحرک را می‌توانیم به‌دست بیاوریم.

$$v=at+v_۰\begin{cases}\xrightarrow{a_A=۱m/s^۲} v_A=۱\times ۴۵=۴۵m/s\\ \xrightarrow{a_B=۳m/s^۲} v_B=۳\times ۱۲=۳۶m/s\end{cases}$$

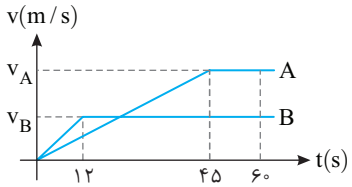
۲ سطح زیر نمودار A از لحظهٔ صفر تا ۶۰s را حساب می‌کنیم.

$\Delta x_A=S_A\Rightarrow \Delta x_A=(۶۰+۱۵)\times\frac{۴۵}{۲}=۱۶۸۷/۵m$

۳ سطح زیر نمودار B از لحظهٔ صفر تا ۶۰s را به‌دست می‌آوریم.

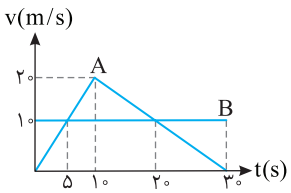
$\Delta x_B=S_B\Rightarrow \Delta x_B=(۶۰+۴۸)\times\frac{۳۶}{۲}=۱۹۴۴m$

۴ فاصلهٔ دو متحرک در $t=۶۰s$ خواهد شد: $۱۹۴۴-۱۶۸۷/۵=۲۵۶/۵m$



B ۵۹۵ ۳

برای حل این پرسش در لحظه‌های بیان شده در گزینه‌ها، سطح زیر نمودارها را با هم مقایسه می‌کنیم. در هر لحظه‌ای که سطح زیر نمودارها یکی شود، دو متحرک از کنار هم می‌گذرند.



$$t=۵s\Rightarrow\begin{cases}x_A=S_A=\frac{۵\times ۱۰}{۲}=۲۵m\\ x_B=S_B=۵\times ۱۰=۵۰m\end{cases}\Rightarrow x_A\neq x_B$$

$$t=۱۰s\Rightarrow\begin{cases}x_A=S_A=\frac{۲۰\times ۱۰}{۲}=۱۰۰m\\ x_B=S_B=۱۰\times ۱۰=۱۰۰m\end{cases}\Rightarrow x_A=x_B$$

$$t=۲۰s\Rightarrow\begin{cases}x_A=S_A=۱۰۰+\frac{۲۰+۱۰}{۲}\times ۱۰=۲۵۰m\\ x_B=S_B=۱۰\times ۲۰=۲۰۰m\end{cases}\Rightarrow x_A\neq x_B$$

$$t=۳۰s\Rightarrow\begin{cases}x_A=S_A=\frac{۳۰\times ۲۰}{۲}=۳۰۰m\\ x_B=S_B=۱۰\times ۳۰=۳۰۰m\end{cases}\Rightarrow x_A=x_B$$

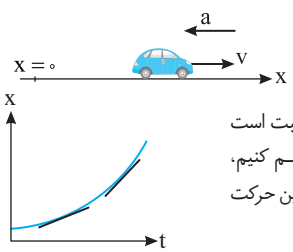
بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

B ۵۹۶ ۱

متحرک B از ابتدا با سرعت ۲۰m/s به راه می‌افتد. به نمودار v−t دقت کنید، سطح زیر نمودار B در تمام لحظات از سطح زیر نمودار A بیشتر است، متحرک‌ها در مبدأ زمان از مبدأ محور گذشته‌اند بنابراین در بازهٔ نشان داده شده متحرک A نمی‌تواند به B برسد.

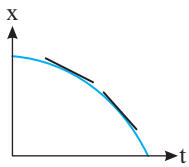
A ۵۹۷ ۴

به شکل نگاه کنید، بردار سرعت و بردار شتاب در خلاف جهت هم هستند، بنابراین حرکت کندشونده است.



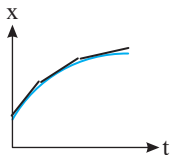
در گزینهٔ (۱)، شتاب مثبت است و سرعت مثبت است و اگر در نمودار مکان - زمان چند مماس رسم کنیم، شیب خط مماس در حال افزایش است بنابراین حرکت تندشونده و این گزینه نادرست است.

گزینهٔ (۲): نمودار مکان - زمان مربوط به حرکت تندشونده است. زیرا با رسم چند مماس مشخص است که خط مماس به حالت قائم نزدیک می‌شود و تندی در حال افزایش است. از طرفی سرعت و شتاب هر دو منفی هستند بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است.



گزینهٔ (۳): با اینکه سرعت مثبت و شتاب منفی است اما نمودار مکان زمان مانند گزینهٔ (۲) مربوط به حرکت تندشونده است و این گزینه نادرست است.

گزینهٔ (۴): در نمودار مکان - زمان اگر چند مماس رسم کنیم خط مماس به حالت افقی نزدیک می‌شود یعنی شیب خط مماس به سمت صفر می‌رود و حرکت کندشونده است. از طرفی سرعت مثبت و شتاب منفی است و این گزینه درست است.



A ۵۹۸ ۳

نکته هرگاه متحرک از حال سکون روی خط راست شروع به حرکت کند، جسم در جهت شتاب حرکت کرده و تا لحظه‌ای که شتاب تغییر جهت ندهد حرکت آن تندشونده است.

در گزینهٔ (۱) شتاب تغییر علامت و تغییر جهت داده است یعنی ابتدا شتاب منفی و سپس شتاب مثبت می‌شود. بنابراین ابتدا حرکت تندشونده و با تغییر جهت بردار شتاب، حرکت کندشونده می‌شود.

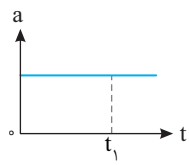
در گزینهٔ (۲) نیز ابتدا شتاب مثبت و سپس منفی است. بنابراین حرکت متحرک که از حال سکون شروع به حرکت کرده ابتدا تندشونده و سپس کندشونده است و گزینهٔ (۲) نادرست است.

متحرک در جهت مثبت از حال سکون شروع به حرکت کرده بنابراین شتاب حرکت آن مثبت است و حرکت همواره تندشونده است یعنی جهت شتاب تغییر نکرده از این رو گزینهٔ (۳) درست است و گزینهٔ (۴) نادرست است. زیرا در گزینهٔ (۴) شتاب منفی است.

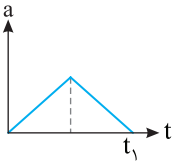
B ۵۹۹ ۴

نکته هرگاه سرعت اولیهٔ متحرک مشخص نباشد و تنها نمودار شتاب زمان را در اختیار داشته باشیم، در مورد چگونگی حرکت نمی‌توانیم اظهارنظر کنیم.

فرض کنید متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده باشد در این صورت چون شتاب ثابت بوده و تغییر جهت نمی‌دهد حرکت همواره تندشونده است و گزینهٔ (۱) می‌تواند درست باشد. اگر از ابتدا سرعت اولیهٔ متحرک منفی باشد چون شتاب مثبت است می‌تواند حرکت کندشونده باشد و متحرک در لحظهٔ t_1 متوقف شود و گزینهٔ (۲) می‌تواند درست باشد. البته ممکن است ابتدا حرکت کندشونده باشد و قبل از t_1 متحرک متوقف شده و برگردد و سپس حرکت تندشونده باشد بنابراین گزینهٔ (۳) نیز می‌تواند درست باشد.



بازی با سؤال **نمودار شتاب - زمان متحرکی که روی محور x‌ها با سرعت اولیهٔ v_0 شروع به حرکت کرده است، مطابق شکل روبه‌رو است. حرکت متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 چگونه است؟**



۱) تندشونده ۲) کندشونده

۳) ابتدا تندشونده و سپس کندشونده ۴) بستگی به v_0 دارد.

پاسخ **نمودار شتاب - زمان نوع حرکت را مشخص نمی‌کند مگر آن‌که سرعت اولیه مشخص باشد.** گزینهٔ ۴

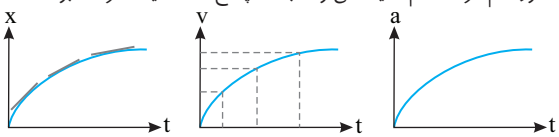
B ۶۰۰ ۳

به کلمهٔ می‌تواند در صورت مسئله دقت کنید. از طرفی قرار است که حرکت تندشونده باشد. نمودار الف نمودار مکان - زمان فرض شده. اگر شما چند خط مماس بر نمودار رسم کنید شیب خط مماس به حالت افقی نزدیک شده یعنی تندی در حال کاهش است و حرکت کندشونده است. بنابراین محور b نمی‌تواند محور مکان باشد و گزینهٔ (۱) نادرست است.

اگر محور b محور سرعت باشد، حرکت قطعاً تندشونده است. (نمودار (ب))

اگر محور b محور شتاب باشد و سرعت اولیه صفر یا مثبت باشد، حرکت تندشونده است و اگر سرعت اولیه منفی باشد، حرکت ابتدا کندشونده است. (نمودار (پ))

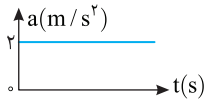
بنابراین محور b می‌تواند سرعت یا شتاب باشد. اما اگر در صورت مسئله بیان می‌کرد که محور قائم الزاماً کدام کمیت می‌تواند باشد، پاسخ فقط کمیت سرعت بود.



(الف) (ب) (پ)

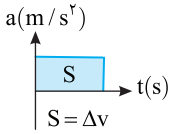
B ۶۰۱ ۳

سرعت اولیه $+5m/s$ و شتاب مثبت است یعنی بردار سرعت و بردار شتاب همواره هم‌جهت بوده و حرکت همواره تندشونده است.



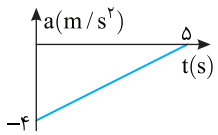
B ۶۰۲ ۳

نکته سطح زیر نمودار شتاب - زمان برابر تغییر سرعت متحرک است.



خط فکری سرعت اولیهٔ متحرک $+14m/s$ به شما داده شده همچنین نمودار شتاب - زمان را در اختیار دارید بنابراین به کمک سطح زیر نمودار شتاب - زمان، تغییر سرعت را به‌دست آورید و به کمک این تغییر سرعت و سرعت اولیه دربارهٔ نوع حرکت اظهارنظر کنید.

۱ ابتدا سطح محصور بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان که بیانگر تغییر سرعت متحرک است را به‌دست می‌آوریم:



$$\Delta v = S \Rightarrow \Delta v = \frac{-4\times 5}{2} \Rightarrow \Delta v = -10 m/s$$

۲ اکنون سرعت نهایی متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta v = v - v_0 \Rightarrow -10 = v - 14 \Rightarrow v = 4 m/s$$

۳ بنابراین در بازهٔ زمانی صفر تا $5s$، سرعت متحرک از $+14m/s$ به $+4m/s$ کاهش یافته است و حرکت کندشونده است.

B ۶۰۳ ۴

خط فکری نکته‌ای که شما باید به آن دقت کنید این است که اگر سرعت جسم مثلاً از $-5m/s$ به $+8m/s$ برسد یعنی تندی متحرک از $-5m/s$ ابتدا به صفر رسیده و حرکت کندشونده و سپس تندی از صفر به $8m/s$ رسیده و حرکت تندشونده است. بنابراین شما باید در به‌دست آوردن سرعت نهایی به این نکته دقت کنید سپس دربارهٔ نوع حرکت اظهارنظر کنید.

۱ ابتدا سطح زیر نمودار شتاب - زمان را که بیانگر تغییر سرعت است به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta v = S \Rightarrow \Delta v = \frac{7\times(-3)}{2} = -10/5 m/s$$

۲ بنابراین سرعت نهایی در لحظهٔ $t=7s$ برابر است با:

$$\Delta v = v - v_0 \Rightarrow -10/5 = v - 4 \Rightarrow v = -6/5 m/s$$

۳ در نتیجه ابتدا تندی از $+4m/s$ به صفر کاهش یافته و حرکت کندشونده بوده سپس تندی از صفر به $6/5m/s$ در جهت منفی محور افزایش یافته است و حرکت تندشونده است.

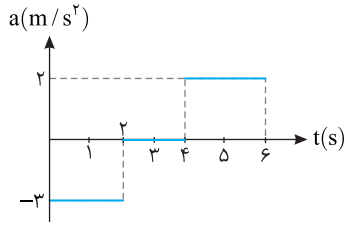
B ۶۰۴ ۲

خط فکری برای آنکه بتوان تشخیص داد در یک لحظه حرکت تندشونده و یا کندشونده است، باید علامت سرعت و علامت شتاب را در آن لحظه تعیین کرد. در لحظهٔ $t=1s$ و $t=4/5s$ علامت سرعت را به‌دست بیاورید و نوع حرکت در این لحظه‌ها مشخص کنید.

۱ سرعت در لحظهٔ $t=1s$ خواهد شد:

$$v = at + v_0 \xrightarrow{t=1s} v = -3\times 1 + 4 \Rightarrow v = +1 m/s$$

۲ در لحظهٔ $t=1s$ سرعت مثبت $(v=+1m/s)$ و شتاب منفی $(a=-3m/s^2)$ بوده و حرکت کندشونده $(av<0)$ است.



۳ سرعت در لحظهٔ $t=2s$ را به‌دست می‌آوریم:

$v=at+v_0=-3\times2+4=-2m/s$

۴ از لحظهٔ $t=2s$ تا $t=4s$، شتاب صفر است و حرکت دارای سرعت ثابت بوده از این‌رو در لحظهٔ $t=4s$ سرعت همچنان برابر $-2m/s$ است.

۵ اکنون سرعت در لحظهٔ $t=4/5s$ را به‌دست می‌آوریم.

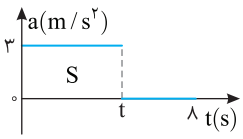
$v=at+v_0\Rightarrow v=2\times(4/5-4)+(-2)\Rightarrow v=-1m/s$

۶ در لحظهٔ $t=4/5s$ سرعت منفی $(-1m/s)$ و شتاب مثبت $(a=2m/s^2)$ است بنابراین حرکت کندشونده $(av<0)$ است.

B ۶۰۵ ۱

یادآوری شتاب متوسط برابر $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ بوده، از طرفی مساحت سطح زیر نمودار شتاب - زمان برابر تغییرات سرعت است.

۱ ابتدا سطح زیر نمودار در بازهٔ ۰ تا $8s$ را به‌دست می‌آوریم.



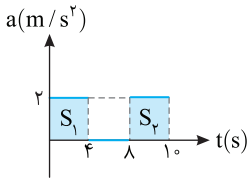
$\Delta v=S=3t$

۲ بنابه فرض مسئله خواهیم داشت:

$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow 1/2=\frac{3t}{8}\Rightarrow t=3/2s$

B ۶۰۶ ۳

شتاب متوسط برابر تغییر سرعت در یکای زمان است و تغییر سرعت برابر سطح زیر نمودار شتاب - زمان است.

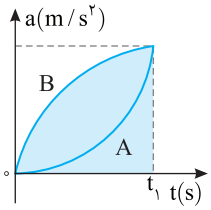


$S=\Delta v=2\times4+2\times2=12m/s$

$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{12}{10}\Rightarrow a_{av}=1/2m/s^2$

A ۶۰۷ ۳

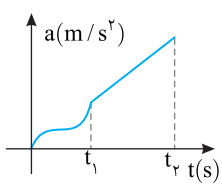
مساحت زیر نمودار $a-t$ برابر تغییر سرعت است. با توجه به نمودار، مساحت زیر نمودار $a-t$، متحرک B بزرگ‌تر از مساحت زیر نمودار $a-t$ متحرک A است بنابراین تغییرات سرعت B بیشتر از A است و در یک مدت زمان یکسان شتاب متوسط B بزرگ‌تر از شتاب متوسط A می‌باشد.



$\Delta v_B>\Delta v_A\Rightarrow\frac{\Delta v_B}{\Delta t}>\frac{\Delta v_A}{\Delta t}\xrightarrow{a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}}a_{av_B}>a_{av_A}$

B ۶۰۸ ۲

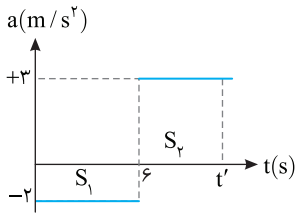
بررسی این مسئله به کمک سطح زیر نمودار راه به جایی نمی‌برد اما می‌توان این گونه استدلال کرد که در بازهٔ t_1 تا t_2 شتاب در تمام لحظات از شتاب در لحظات مختلف بازهٔ صفر تا t_1 بیشتر بوده بنابراین شتاب متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2 بزرگ‌تر از شتاب متوسط در بازهٔ صفر تا t_1 است.



B ۶۰۹ ۳

نکته هرگاه در مسئله خواسته شود که بزرگی سرعت به بزرگی سرعت اولیه برسد یعنی تغییر سرعت صفر شود.

سطح زیر نمودار شتاب - زمان برابر تغییر سرعت متحرک است از این‌رو سطح زیر نمودار را در مدت t' برابر صفر قرار می‌دهیم.



$\Delta v=S\Rightarrow S_1+S_2=0$

$\Rightarrow -2\times6+3\times(t'-6)=0\Rightarrow -30=-3t'\Rightarrow t'=10s$

B ۶۱۰ ۱

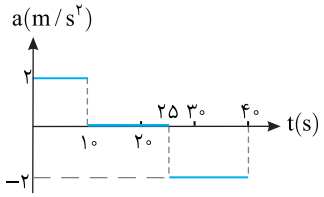
در حل این پرسش کافی است از معادلهٔ سرعت - زمان در هر مرحله استفاده کنیم:

$v=at+v_0$

$0\rightarrow10s$: $v=2\times10+4\Rightarrow v=24m/s$

$10s\rightarrow25s$: $a=0\Rightarrow v=24m/s$

$25s\rightarrow30s$: $v=-2\times(30-25)+24\Rightarrow v=14m/s$



حل به کمک سطح زیر نمودار شتاب - زمان

سطح زیر نمودار را حساب می‌کنیم:

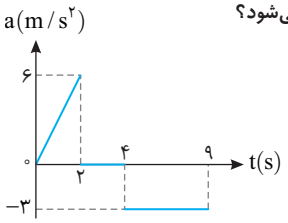
$\Delta v=S=2\times10+(-2)\times(30-25)\Rightarrow\Delta v=+10m/s$

سرعت اولیه $v_0=+4m/s$ است. از این‌رو خواهیم داشت:

$\Delta v=v-v_0\Rightarrow10=v-4\Rightarrow v=14m/s$

دقت کنید که سرعت در لحظهٔ $t=30s$ از شما خواسته شده نه لحظهٔ $t=40s$.

بازی با سؤال سرعت اولیهٔ متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند برابر $3m/s$ و نمودار شتاب - زمان آن به شکل روبه‌رو است. در چه لحظه‌ای سرعت این متحرک برابر $v=-3m/s$ می‌شود؟



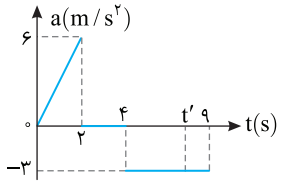
۱) $t=3s$

۲) $t=6s$

۳) $t=8s$

۴) $t=12s$

پاسخ مساحت زیر نمودار $a-t$ برابر تغییرات سرعت می‌باشد. بنابراین:



$\Delta v_{t=0\text{ تا }2s}=\frac{6\times2}{2}=6m/s$

$\Rightarrow\Delta v=v-v_0$

$\Rightarrow6=v-3\Rightarrow v_{t=2s}=9m/s$

در بازهٔ $t=2s$ تا $4s$ شتاب صفر است پس سرعت تغییر نمی‌کند. از بازهٔ $4s$ تا t' که سرعت در t' برابر $-3m/s$ می‌شود، حرکت با شتاب ثابت $-3m/s^2$ است از این‌رو:

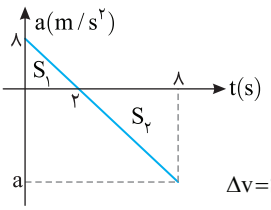
$v=at+v_0\Rightarrow-3=-3(t-4)+9\Rightarrow t=8s$

گزینهٔ ۳

B ۶۱۱ ۲

خط فکری در لحظهٔ $t=8s$ جهت حرکت عوض شده بنابراین در این لحظه قطعاً سرعت صفر شده است. به کمک شیب نمودار شتاب در لحظهٔ ۸s را به‌دست آورده سطح زیر نمودار را حساب کنید تا تغییر سرعت را به‌دست آورده باشید سپس به سراغ سرعت اولیه بروید.

۱ شتاب در لحظهٔ $t=8s$ را به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{0-8}{2-0}=\frac{a-0}{8-2}\Rightarrow a=-24m/s^2$$

۲ سطح زیر نمودار را حساب می‌کنیم:

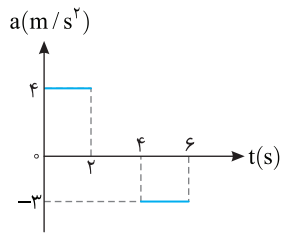
$$\Delta v=S_1+S_2\Rightarrow \Delta v=8+\left(\frac{-24\times 6}{2}\right)=-64m/s$$

۳ در $t=8s$ جهت حرکت تغییر کرده بنابراین $v_{t=8s}=0$ است:

$$\Delta v=v_{t=8s}-v_{t=0}=-64\Rightarrow 0-v_{t=0}=-64m/s\Rightarrow v_{t=0}=64m/s$$

B ۶۱۲ ۳

خط فکری سرعت در لحظه‌های $t=2s$ ، $t=4s$ و $t=6s$ را به‌دست بیاورید. حرکت در بازهٔ ۰ تا ۲s با شتاب ثابت مثبت، در بازهٔ ۲s تا ۴s با سرعت ثابت و در بازهٔ ۳s تا ۶s با شتاب ثابت منفی بوده است. در نمودار سرعت - زمان در هر نقطه‌ای که نمودار محور زمان را قطع کند، متحرک تغییر داده است.



۱ سرعت در لحظهٔ $t=2s$ خواهد شد:

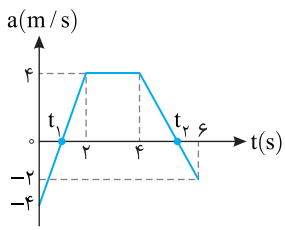
$$v=at+v_0\Rightarrow v=4\times 2+(-4)\Rightarrow v=+4m/s$$

۲ در لحظهٔ $t=4s$ همچنان سرعت $4m/s$ است.

۳ سرعت در لحظهٔ $t=6s$ را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0\Rightarrow v=-3\times 2+4\Rightarrow v=-2m/s$$

۴ نمودار را رسم می‌کنیم، در دو لحظهٔ t_1 و t_2 متحرک تغییر جهت داده است.



A ۶۱۳ ۳

باید نمودار سرعت - زمان را رسم کنیم. در هر قسمت که تندی در حال کاهش باشد حرکت کندشونده و در هر قسمت که تندی در حال افزایش باشد حرکت تندشونده است.

ابتدا سرعت جسم را در لحظهٔ $t_1=20s$ و $t_2=35s$ حساب می‌کنیم. با توجه به نمودار سؤال در بازهٔ صفر تا ۱۰s حرکت دارای شتاب ثابت $-2m/s^2$ است از این‌رو:

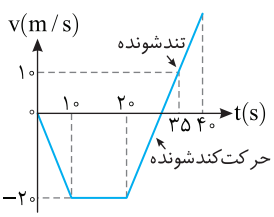
$$v=at+v_0\Rightarrow v=-2\times 10+0\Rightarrow v=-20m/s$$

در بازهٔ ۱۰s تا ۲۰s شتاب صفر و حرکت یکنواخت بوده و سرعت همچنان $-20m/s$ است. در بازهٔ ۲۰s تا ۳۵s حرکت دارای شتاب ثابت $2m/s^2$ است، در نتیجه:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=2(35-20)+(-20)\Rightarrow v=10m/s$$

نمودار را رسم می‌کنیم (متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده و سرعت اولیه صفر است).

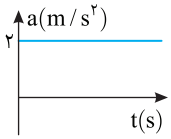
در بازهٔ ۲۰s تا ۳۵s تندی ابتدا در حال کاهش و حرکت کندشونده است و سپس افزایش یافته و به $10m/s$ می‌رسد، پس



گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند. نمودار سرعت - زمان در این بازه محور زمان را قطع کرده و سرعت صفر شده و تغییر علامت داده بنابراین یک بار متحرک تغییر جهت می‌دهد و گزینهٔ (۳) درست است. در ابتدا سرعت منفی بوده یعنی متحرک در ابتدا در جهت منفی محور در حرکت است و گزینهٔ (۴) نادرست است.

B ۶۱۴ ۳

حرکت دارای شتاب ثابت است و معادلهٔ حرکت به صورت زیر است:



$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x=t^2-4t+3$$

معادلهٔ سرعت - زمان را می‌نویسیم تا مشخص کنیم در بازهٔ صفر تا ۳s متحرک تغییر جهت می‌دهد یا نه:

$$v=2t-4\xrightarrow{v=0} t=2s$$

متحرک در $t=2s$ تغییر جهت می‌دهد. حال مکان را در لحظهٔ $t=2s$ و $t=3s$ مشخص می‌کنیم.

$$t=2s\Rightarrow x=4-8+3\Rightarrow x=-1m$$

$$t=3s\Rightarrow x=9-12+3\Rightarrow x=0$$

مسافت طی شده برابر است با:

$$d=3+1+1=5m$$

حل با استفاده از رسم نمودار سرعت - زمان

متحرک از مکان اولیه $x_0=+3m$ با سرعت اولیهٔ $v_0=-4m/s$ با شتاب $+2m/s^2$ می‌گذرد. معادلهٔ سرعت - زمان آن را می‌نویسیم:

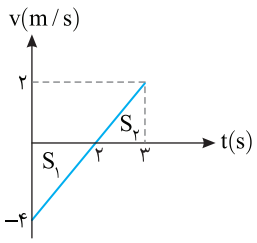
$$v=at+v_0\Rightarrow v=2t-4$$

نمودار سرعت - زمان آن را رسم می‌کنیم.

$$v=0\Rightarrow 2t-4=0\Rightarrow t=2s$$

$$t=3s\Rightarrow v=2\times 3-4=2m/s$$

حال به کمک مجموع مساحت‌های S_1 و S_2 مسافت طی شده را حساب می‌کنیم:

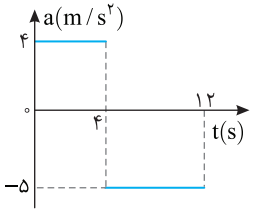


$$\ell=|S_1|+|S_2|=\frac{4\times 2}{2}+\frac{1\times 2}{2}=5m$$

B ۶۱۵ ۳

خط فکری سرعت در $t=0$ برابر $v_0=4m/s$ است. سرعت را در $t=4s$ و $t=12s$ را به‌دست می‌آوریم، نمودار سرعت - زمان را رسم کرده و به کمک سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان مسافت طی شده را حساب می‌کنیم.

۱ در بازهٔ صفر تا ۴s شتاب حرکت $4m/s^2$ است و سرعت در $t=4s$ خواهد شد:



$$v=at+v_0\Rightarrow v=4\times 4+4$$

$$\Rightarrow v=20m/s$$

۲ در بازهٔ ۴s تا ۱۲s شتاب حرکت $-5m/s^2$ بوده و سرعت اولیهٔ این قسمت همان سرعت انتهای بازهٔ قبلی یعنی $20m/s$ است.

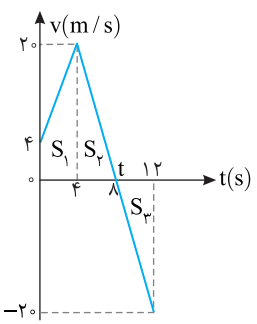
$$v=at+v_0\Rightarrow v=-5(12-4)+20\Rightarrow v=-5\times 8+20\Rightarrow v=-20m/s$$

۳ لحظه‌ای که نمودار محور زمان را قطع می‌کند و سرعت صفر می‌شود را به‌دست می‌آوریم:

$$0=-5(t-4)+20\Rightarrow -5t+20+20=0\Rightarrow t=8s$$

۴ اکنون می‌توانیم نمودار را رسم کنیم.

۵ با محاسبهٔ مساحت‌های S_1 ، S_2 و S_3، مسافت در بازهٔ صفر تا ۱۲s را حساب می‌کنیم:



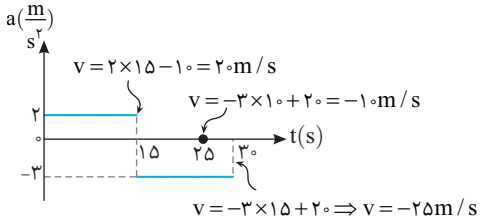
$$d=|S_1|+|S_2|+|S_3|$$

$$d=\frac{20+4}{2}\times 4+\frac{20\times 4}{2}+\frac{20\times 4}{2}$$

$$d=48+40+40=128m$$

B ۶۱۶ ۱

خط فکری نمودار شتاب - زمان به شما اطلاعات زیادی نمی‌دهد. در نمودار شتاب - زمان مسئله، متحرک در بازهٔ صفر تا ۱۵s دارای شتاب ثابت $۲m/s^۲$ و در بازهٔ زمانی ۱۵s تا ۳۰s دارای شتاب ثابت $-۳m/s^۲$ است از این‌رو شما می‌توانید از روابط حرکت با شتاب ثابت استفاده کنید. ابتدا به کمک معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت جابه‌جایی در ۵s اول را حساب کنید. سپس سرعت متحرک را در لحظهٔ $t=۱۵s$ به کمک معادلهٔ سرعت زمان $(v=at+v_۰)$ به‌دست بیاورید و فراموش نکنید سرعت در این لحظه، سرعت اولیهٔ قسمت بعدی حرکت است. اما ۵ ثانیهٔ ششم یعنی چه؟ یعنی بازهٔ زمانی بین $t=۲۵s$ تا $t=۳۰s$ به کمک معادلهٔ سرعت - زمان، سرعت متحرک را در این لحظه‌ها حساب کنید و سپس به کمک فرمول مستقل از شتاب $(\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}t)$ جابه‌جایی در این بازه را به‌دست بیاورید. اکنون به سراغ حل مسئله بروید.



ابتدا در ۵ ثانیهٔ اول جابه‌جایی را حساب می‌کنیم. حرکت دارای شتاب ثابت $۲m/s^۲$ و سرعت اولیه $-۱۰m/s$ است، از این رو در پنج ثانیه اول جابه‌جایی خواهد شد:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow\Delta x_۱=\frac{۱}{۲}\times۲\times۲۵-۱۰\times۵\Rightarrow|\Delta x_۱|=۲۵m$$

برای به‌دست آوردن جابه‌جایی در پنج ثانیهٔ ششم (یعنی بازهٔ ۲۵s تا ۳۰s) مراحل زیر را باید طی کنیم.

۱ سرعت در لحظهٔ $t=۱۵s$ را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=۲\times۱۵-۱۰=۲۰m/s$$

۲ سرعت در لحظه‌های $t=۲۵s$ و $t=۳۰s$ را حساب می‌کنیم.

$$t=۲۵s\ ,\ v_۱=-۳(۲۵-۱۵)+۲۰\Rightarrow v_۱=-۱۰m/s$$

$$t=۳۰s\ ,\ v_۲=-۳(۳۰-۱۵)+۲۰\Rightarrow v_۲=-۲۵m/s$$

۳ اندازه جابه‌جایی در بازه ۵ ثانیهٔ ششم خواهد شد:

$$|\Delta x_۲|=|\frac{v_۱+v_۲}{۲}|\Delta t\Rightarrow|\Delta x_۲|=\frac{|۱۰+۲۵|}{۲}\times۵=۸۷/۵m$$

اکنون نسبت اندازه جابه‌جایی‌ها را به‌دست می‌آوریم. $\frac{|\Delta x_۲|}{|\Delta x_۱|}=\frac{۸۷/۵}{۲۵}=۳/۵$

البته شما می‌توانید این مسئله را به کمک رسم نمودار سرعت زمان نیز حل کنید اما فراموش نکنید برای رسم نمودار $v-t$ نیز باید تمام محاسبات بالا را انجام دهید.

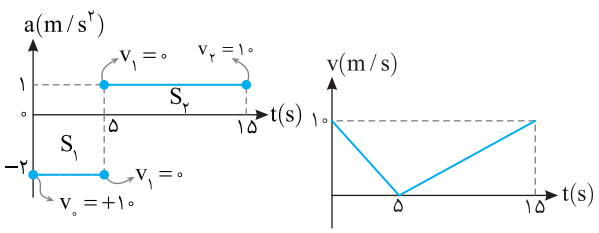
B ۶۱۷ ۲

ابتدا از روی نمودار $a-t$، نمودار $v-t$ متحرک را رسم می‌کنیم:

یادآوری سطح زیر نمودار $a-t$ برابر تغییر سرعت است.

$$S_۱=\Delta v_۱\Rightarrow-۱۰=v_۱-v_۰\Rightarrow-۱۰=v_۱-۱۰\Rightarrow v_۱=۰$$

$$S_۲=\Delta v_۲\Rightarrow۱۰=v_۲-v_۱\Rightarrow۱۰=v_۲-۰\Rightarrow v_۲=۱۰m/s$$



الف) با توجه به نمودار $v-t$، سرعت متحرک در لحظهٔ $t=۵s$ صفر می‌شود اما علامت سرعت تغییر نمی‌کند، یعنی متحرک در این لحظه تغییر جهت نمی‌دهد و گزاره (الف) نادرست است. بنابراین نیازی به بررسی تغییر جهت بردار مکان وجود ندارد.

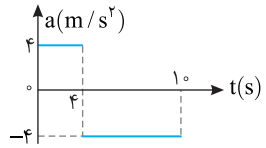
ب) چون متحرک تغییر جهت نمی‌دهد پس جابه‌جایی و مسافت با هم برابر است و گزاره (ب) درست است.

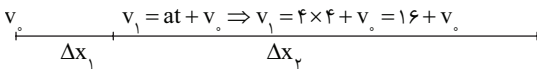
پ) شتاب متوسط برابر $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ است و چون سرعت در $t=۰$ و $t=۱۵s$ یکسان و برابر $۱۰m/s$ بوده پس $\Delta v=۰$ است و شتاب متوسط برابر صفر است و گزارهٔ (پ) درست است.

ت) سطح زیر نمودار $v-t$ برابر جابه‌جایی است و چون نمودار $v-t$ کلاً بالای محور زمان قرار دارد و جابه‌جایی مثبت و مخالف صفر $(\Delta x>۰)$ بوده، پس با توجه به تعریف $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ سرعت متوسط دارای مقداری مثبت خواهد بود و گزارهٔ (ت) نادرست است.

B ۶۱۸ ۳

حرکت از دو مرحلهٔ با شتاب ثابت تشکیل شده است.





۱ جابه‌جایی متحرک در قسمت اول مسیر را برحسب $v_۰$ به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x_۱=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow\Delta x_۱=\frac{۱}{۲}\times۴\times۱۶+۴v_۰\Rightarrow\Delta x_۱=۳۲+۴v_۰$$

۲ سرعت انتهایی مرحلهٔ اول برابر سرعت اولیهٔ مرحلهٔ دوم حرکت است و جابه‌جایی متحرک در این قسمت را حساب می‌کنیم و به جای سرعت اولیه از روی شکل مقدار $۱۶+v_۰$ را قرار می‌دهیم.

$$\Delta x_۲=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۱t\Rightarrow\Delta x_۲=\frac{۱}{۲}(-۴)\times۳۶+۶v_۱\Rightarrow\Delta x_۲=-۷۲+۶(۱۶+v_۰)$$

$$\Rightarrow\Delta x_۲=۲۴+۶v_۰$$

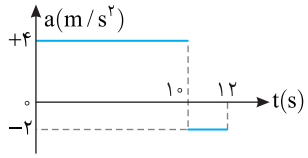
۳ بنا به فرض مسئله باید جمع $\Delta x_۱$ و $\Delta x_۲$ را برابر ۱۵۶m قرار داده و $v_۰$ را حساب کنیم:

جابه‌جایی کل برابر ۱۵۶ متر است از این رو:

$$\Delta x_t=\Delta x_۱+\Delta x_۲\Rightarrow۱۵۶=۳۲+۴v_۰+۲۴+۶v_۰\Rightarrow v_۰=۱۰m/s$$

B ۶۱۹ ۴

۱ جابه‌جایی را در بازه‌ها زمانی صفر تا ۱۰ ثانیه برابر است با:



$$۰\to۱۰s:\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow\Delta x_۱=\frac{۱}{۲}\times۴\times۱۰۰+۵\times۱۰=۲۵۰m$$

۲ سرعت در لحظهٔ $t=۱۰s$ را حساب می‌کنیم:

$$v_۱=at+v_۰\Rightarrow v_۱=۴\times۱۰+۵=۴۵m/s$$

این سرعت، سرعت اولیهٔ قسمت بعدی است، از این رو جابه‌جایی در بازهٔ $t=۱۰s$ تا $t=۱۲s$ برابر است با:

$$۱۰s\to۱۲s:\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۱t\Rightarrow\Delta x_۲=\frac{۱}{۲}\times(-۲)\times۴+۴۵\times۲=۸۶m$$

۳ سرعت متوسط برابر خواهد شد با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x_۱+\Delta x_۲}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}=\frac{۲۵۰+۸۶}{۱۲}=\frac{۳۳۶}{۱۲}=\frac{۱۱۲}{۴}\Rightarrow v_{av}=۲۸m/s$$

حل به کمک رسم نمودار سرعت - زمان:

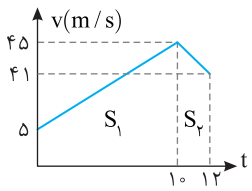
۱ سرعت در لحظهٔ $t=۱۰s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=۴\times۱۰+۵\Rightarrow v=۴۵m/s$$

۲ سرعت در لحظهٔ $t=۱۲s$ را حساب می‌کنیم.

$$v=-۲(۱۲-۱۰)+۴۵\Rightarrow v=۴۱m/s$$

۳ نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم و سطح زیر نمودار را به‌دست می‌آوریم.



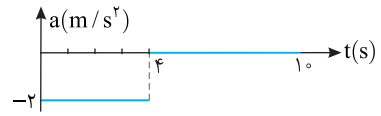
$\Delta x = S_1 + S_2$

$\Rightarrow \Delta x = (۴۵+۵)\times\frac{۱۰}{۲} + (۴۵+۴۱)\times\frac{۲}{۲}$

$\Rightarrow \Delta x = ۲۵۰ + ۸۶ \Rightarrow \Delta x = ۳۳۶m$

۴ سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۳۳۶}{۱۲} = \frac{۱۱۲}{۴} \Rightarrow v_{av} = ۲۸m/s$

بازی با سؤال نمودار شتاب- زمان ذره‌ای که با سرعت اولیهٔ $۴m/s$ در جهت مثبت محور x شروع به حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. سرعت متوسط متحرک تا پایان ثانیهٔ دهم چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۴/۸
۲) -۲/۴
۳) ۲/۴
۴) -۴/۸

پاسخ

۱ جابه‌جایی متحرک در بازهٔ صفر تا ۴s برابر است با:

$\Delta x_1 = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{۱}{۲}\times(-۲)(۴)^۲ + ۴\times۴ \Rightarrow \Delta x_1 = ۰$

۲ در انتهای این بازه سرعت متحرک را به‌دست می‌آوریم:

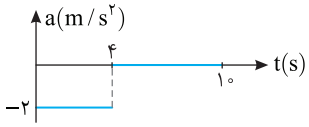
$v = at + v_۰ \Rightarrow v = -۲\times۴ + ۴ \Rightarrow v = -۴m/s$

۳ بعد از $t=۴s$ شتاب صفر و حرکت با سرعت ثابت $-۴m/s$ است، جابه‌جایی در مدت ۴s تا ۱۰s را حساب می‌کنیم.

$\Delta x_2 = vt \Rightarrow \Delta x_2 = -۴\times۶ \Rightarrow \Delta x_2 = -۲۴m$

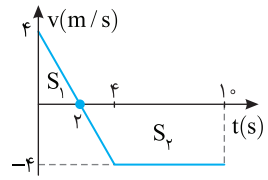
۴ سرعت متوسط خواهد شد:

$v_{av} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{۰+(-۲۴)}{۱۰} \Rightarrow v_{av} = -۲/۴m/s$



حل مسئله به کمک رسم نمودار سرعت - زمان سرعت در لحظهٔ $t=۴s$ برابر است با: $v = at + v_۰$

$\Rightarrow v = -۲\times۴ + ۴ = -۴m/s$



لحظهٔ صفر شدن سرعت را حساب می‌کنیم: $۰ = -۲t + ۴ \Rightarrow t = ۲s$

از لحظهٔ $t=۴s$ به بعد حرکت با سرعت ثابت $-۴m/s$ است. نمودار را رسم کرده، سطح زیر نمودار را حساب می‌کنیم.

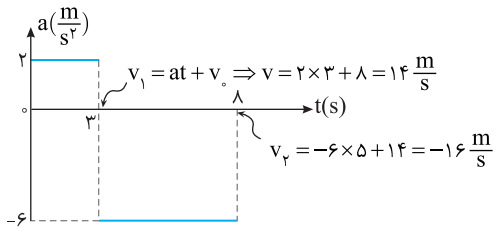
$\Delta x = S = S_1 + S_2 \Rightarrow \Delta x = \frac{۴\times۲}{۲} + (۸+۶)\times(-\frac{۴}{۲}) = ۴ + (-۲۸) \Rightarrow \Delta x = -۲۴m$

سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-۲۴}{۱۰} \Rightarrow v_{av} = -۲/۴m/s$

گزینهٔ ۲

B ۶۲۰ ۴

سرعت در لحظهٔ $t=۳s$ و $t=۸s$ را حساب می‌کنیم و روی نمودار می‌نویسیم.



$v_1 = at + v_۰ \Rightarrow v = ۲\times۳ + ۸ = ۱۴\frac{m}{s}$

$v_2 = -۶\times۵ + ۱۴ = -۱۶\frac{m}{s}$

در بازهٔ زمانی ۳s تا ۸s، سرعت از مقداری مثبت به مقداری منفی رسیده است، بنابراین در این بازهٔ زمانی سرعت صفر می‌شود.

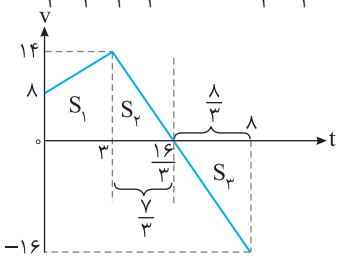
لحظه‌ای که در این بازه سرعت صفر می‌شود را به‌دست می‌آوریم.

$v = at + v_۰ \Rightarrow ۰ = -۶t + ۱۴ \Rightarrow t = \frac{۷}{۳}s$

بنابراین لحظه‌ای که سرعت می‌شود خواهد شد: $۳ + \frac{۷}{۳} = \frac{۱۶}{۳}s$

نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم و سطح زیر نمودار را حساب می‌کنیم و مسافت طی شده را به‌دست می‌آوریم. $\ell = |S_1| + |S_2| + |S_3|$

$\ell = (۸+۱۴)\times\frac{۳}{۲} + (۱۴\times\frac{۷}{۳})\times\frac{۱}{۲} + \frac{۱۶}{۲}\times\frac{۸}{۳} \Rightarrow \ell = ۳۳ + \frac{۴۹}{۳} + \frac{۶۴}{۳} \Rightarrow \ell = \frac{۲۱۲}{۳}m$



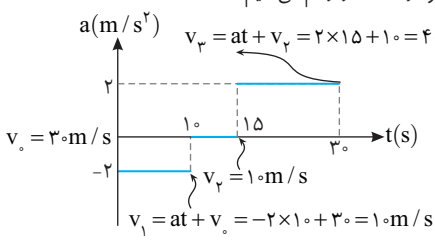
تندی متوسط خواهد شد: $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow s_{av} = \frac{\frac{۲۱۲}{۳}}{۸} \Rightarrow s_{av} = \frac{۲۱۲}{۲۴} \Rightarrow s_{av} = \frac{۵۳}{۶}m/s$

B ۶۲۱ ۳

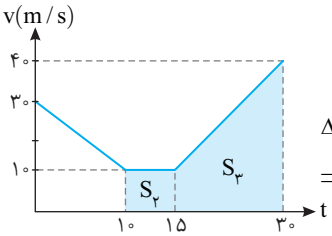
خط فکری نمودار شتاب - زمان اطلاعات زیادی در مورد حرکت به ما نمی‌دهد اما می‌توانیم از روی آن، سرعت در هر لحظه را البته با داشتن سرعت اولیه به‌دست بیاوریم. برای به‌دست آوردن سرعت متوسط در بازهٔ ۱۰s تا ۳۰s باید جابه‌جایی متحرک را حساب کنید. برای این کار می‌توانید نمودار سرعت زمان را رسم کرده و سطح زیر نمودار را حساب کنید و یا از معادلات حرکت با شتاب ثابت و حرکت با سرعت ثابت استفاده کنید. هر دو روش را برای شما به کار می‌بریم.

روش اول:

۱ سرعت در هر لحظه را روی نمودار شتاب زمان به کمک رابطه $v = at + v_۰$ نوشته، سپس نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم.



۲ جابه‌جایی متحرک در بازه ۱۰s تا ۳۰s برابر مجموع S_2 و S_3 است.



$\Delta x = S_2 + S_3 = ۱۰\times۵ + \frac{۴۰+۱۰}{۲}\times۱۵$

$\Rightarrow \Delta x = ۴۲۵m$

۳ سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{۴۲۵}{۳۰-۱۰} = ۲۱/۲۵m$

روش دوم:

نیازی به رسم شکل $v-t$ نیست.

۱ در بازهٔ ۱۰s، ۱۵s حرکت با سرعت ثابت $۱۰m/s$ بوده و جابه‌جایی برابر است با:

$\Delta x_1 = vt = ۱۰\times۵ = ۵۰m$

۲ در بازهٔ ۱۵s تا ۳۰s حرکت با شتاب ثابت، $۲m/s^۲$ و سرعت اولیهٔ $۱۰m/s$ است بنابراین جابه‌جایی خواهد شد:

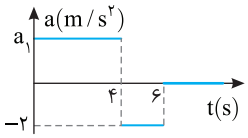
$\Delta x_2 = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{۱}{۲}\times۲\times(۱۵)^۲ + ۱۰\times۱۵$

$= ۲۲۵ + ۱۵۰ \Rightarrow \Delta x_2 = ۳۷۵m$

۳ جابه‌جایی کل و سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av} = \frac{۳۷۵+۵۰}{۳۰-۱۰} = ۲۱/۲۵m/s$

B ۶۲۲ ۳

در بازهٔ $t>6s$ حرکت یکنواخت است $(a=0)$ پس سرعت در لحظهٔ $t=6s$ برابر سرعت در لحظهٔ $t=8s$ یعنی برابر $12m/s$ است. به کمک معادلهٔ سرعت-زمان، سرعت در لحظهٔ $t=4s$ را به‌دست می‌آوریم:



$$v=at+v_1 \Rightarrow 12=-2\times 2+v_1 \Rightarrow v_1=16m/s$$

در بازهٔ ۰ تا $4s$ حرکت دارای شتاب ثابت a_1 بوده و سرعت متوسط در $4s$ نخست برابر $8m/s$ است برای سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت می‌توان نوشت:

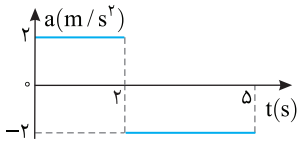
$$v_{av}=\frac{v_1+v_0}{2} \Rightarrow 8=\frac{16+v_0}{2} \Rightarrow v_0=0$$

و شتاب a_1 برابر خواهد شد با:

$$a_1=\frac{v_1-v_0}{t}=\frac{16-0}{4}=4m/s^2$$

B ۶۲۳ ۲

یادآوری سرعت متوسط برابر جابه‌جایی در یکای زمان است $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$.



۱ جابه‌جایی در مدت $5s$ را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{v_{av}=6/4m/s} 6/4=\frac{\Delta x}{5} \Rightarrow \Delta x=32m$$

۲ حرکت این متحرک از دو قسمت با دو شتاب مختلف تشکیل شده است و جابه‌جایی متحرک در مدت ۵ ثانیه برابر مجموع جابه‌جایی در بازهٔ صفر تا $2s$ با شتاب $2m/s^2$ و جابه‌جایی در بازهٔ $2s$ تا $5s$ با شتاب $-2m/s^2$ است. جابه‌جایی در بازهٔ صفر تا $2s$ را برحسب v_0 می‌نویسیم.

$$\Delta x_1=\frac{1}{2}a_1t^2+v_0t \Rightarrow \Delta x_1=\frac{1}{2}(2)(2)^2+2v_0 \Rightarrow \Delta x_1=4+2v_0$$

۳ سرعت در لحظهٔ $t=2s$ را برحسب v_0 به‌دست می‌آوریم:

$$v_1=a_1t_1+v_0 \Rightarrow v_1=4+v_0$$

۴ جابه‌جایی در بازهٔ $2s$ تا $5s$ را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x_2=\frac{1}{2}a_2t_2^2+v_1t_2 \Rightarrow \Delta x_2=\frac{1}{2}\times(-2)\times(3)^2+(4+v_0)\times 3$$

$$\Rightarrow \Delta x_2=-9+12+3v_0 \Rightarrow \Delta x_2=3+3v_0$$

۵ جابه‌جایی متحرک در مدت $5s$ برابر $32m$ است. بنابراین مجموع Δx_1 و Δx_2 را برابر ۳۲ قرار داده مسئله را حل می‌کنیم:

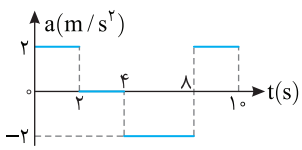
$$\Delta x=\Delta x_1+\Delta x_2 \Rightarrow 32=4+2v_0+3+3v_0 \Rightarrow 25=5v_0 \Rightarrow v_0=5m/s$$

دنبال راه‌حل ساده‌تری نگردید، وجود ندارد!

B ۶۲۴ ۴

خط فکری متحرک از حال سکون با شتاب $2m/s^2$ در جهت مثبت محور xها از مبدأ $(x_0=0)$ شروع به حرکت کرده به کمک نمودار شتاب - زمان، نمودار سرعت - زمان را رسم کنید. تا لحظه‌ای که مجموع سطح‌های زیر نمودار $v-t$ مثبت است، مکان متحرک مثبت بوده یعنی جهت بردار مکان در جهت مثبت محور xها است.

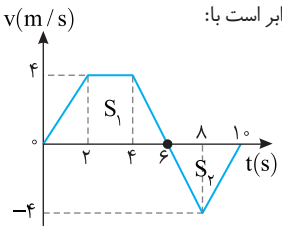
سرعت را در لحظه‌های روی نمودار به‌دست آورده سپس به کمک آن‌ها نمودار سرعت زمان را رسم می‌کنیم: $v=at+v_0$



$$t=2s \Rightarrow v_1=2\times 2=4m/s \ , \ t=4s \Rightarrow v_1=4m/s$$

$$t=8s \Rightarrow v_2=-2\times 4+4=-4m/s \quad t=10s \Rightarrow v_3=2\times 2+(-4)=0$$

در بازهٔ صفر تا $6s$ سطح زیر نمودار مثبت و برابر است با:

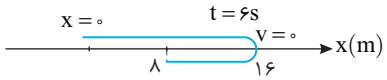


$$\Delta x_1=S_1=(6+2)\times(\frac{4}{2})=16m$$

در بازهٔ $6s$ تا $10s$ سطح زیر نمودار منفی و برابر است با:

$$\Delta x_2=S_2=\frac{-4\times(10-6)}{2}=-8m$$

بنابراین در مدت ۰ تا $6s$ متحرک از مبدأ به مکان $+16m$ رفته و در بازهٔ $6s$ تا $10s$ به اندازهٔ $8m$ برگشته و به مکان $+8m$ رسیده یعنی در تمام مدت $10s$ بردار مکان متحرک مثبت $(x>0)$ بوده است.



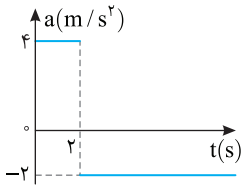
البته با نگاه کردن به نمودار سرعت - زمان می‌توان بدون محاسبه این‌گونه استدلال کرد که در بازهٔ صفر تا $6s$ سطح زیر نمودار مثبت بوده و مکان متحرک که از مبدأ شروع به حرکت کرده مثبت است. با مقایسهٔ سطح زیر نمودار از صفر تا $6s$ و $6s$ تا $10s$ کاملاً مشخص است که متحرک در بازهٔ $6s$ تا $10s$ در خلاف جهت محور جابه‌جا شده است امّا هم‌چنان مکان مثبت است و متحرک به مبدأ برنمی‌گردد پس در مدت $10s$ مکان متحرک مثبت است.

B ۶۲۵ ۲

خط فکری لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان یعنی لحظه‌ای که متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ می‌گذرد. متحرک در مبدأ زمان از مکان $+2m$ شروع به حرکت کرده باید در مرحلهٔ اول مشخص کنید مکان متحرک کجاست. سپس در بازه‌ای که شتاب منفی شده است تعیین کنید در چه لحظه‌ای مکان متحرک صفر می‌شود.

۱ مکان متحرک در لحظهٔ $t=2s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow x_1=\frac{1}{2}\times 4\times 4+0+2 \Rightarrow x=10m$$



۲ سرعت در لحظهٔ $t=2s$ برابر است با: $v=at+v_0 \Rightarrow v=4\times 2=8m/s$

در قسمت دوم سرعت اولیهٔ $8m/s$ است و لحظهٔ تغییر بردار مکان هنگامی است که $x=0$ می‌شود.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow 0=\frac{1}{2}(-2)t^2+8t+10 \Rightarrow t^2-8t-10=0$$

$$\Rightarrow t=4\pm\sqrt{16+10} \Rightarrow t=4\pm\sqrt{26} \Rightarrow t\approx 4+5\approx 9s$$

B ۶۲۶ ۴

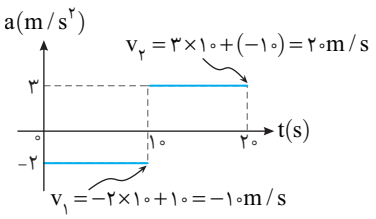
روش اول: **خط فکری** در لحظهٔ $t=0$ متحرک برای اولین بار در جهت مثبت محور با سرعت $10m/s$ از مبدأ می‌گذرد.

شما باید در لحظهٔ $t=10s$ و $t=20s$ سرعت جسم را به کمک رابطه سرعت زمان حرکت با شتاب ثابت $(v=at+v_0)$ به‌دست بیاورید. سرعت در لحظهٔ $t=10s$ که جهت شتاب عوض می‌شود برابر سرعت اولیه قسمت دوم است. لحظه‌هایی که سرعت متحرک صفر می‌شود و تغییر جهت می‌دهد را نیز باید حساب کنید.

۱ سرعت در لحظهٔ $t=10s$ و $t=20s$ خواهد شد:

$$v=at+v_0 \Rightarrow v_1=-2\times 10+10 \Rightarrow v_1=-10m/s$$

$$\Rightarrow v_2=3\times 10+(-10) \Rightarrow v_2=20m/s$$



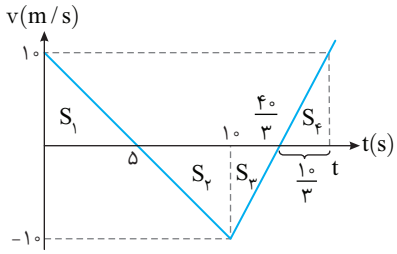
۲ لحظه‌هایی که سرعت صفر می‌شود و متحرک تغییر جهت می‌دهد یک بار در بازهٔ صفر تا ۱۰s و بار دیگر در بازهٔ ۱۰s تا ۲۰s رخ می‌دهد از این‌رو:

$$v=at+v_0 \xrightarrow[a=-2m/s^2]{v=0,v_0=10m/s} 0=-2\times t+10\Rightarrow t_1=5s$$

$$v=at+v_1 \xrightarrow[a=3m/s^2]{v=0,v_1=-10m/s} 0=3t+(-10)\Rightarrow t=\frac{10}{3}s$$

دقت کنید این $\frac{10}{3}s$ بعد از ۱۰s رخ داده یعنی لحظه‌ای که سرعت برای بار دوم صفر می‌شود $10+\frac{10}{3}=\frac{40}{3}s$ است.

۳ نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم.

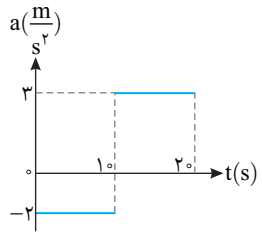


نکته هرگاه متحرک به مکان اولیه‌اش باز گردد یعنی جابه‌جایی آن صفر باشد، باید سطح زیر نمودار سرعت زمان صفر شود.

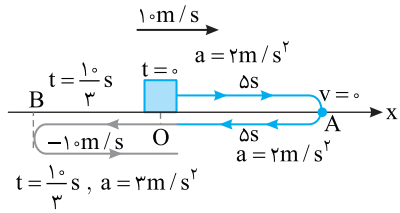
۴ در بازهٔ ۰ تا ۱۰s سطح S_1 و S_2 هم‌اندازه و قرینه هستند و جابه‌جایی صفر است یعنی در لحظه $t=10s$ برای بار دوم متحرک از مبدأ مکان می‌گذرد. (بار اول در $t=0$ از مبدأ مکان گذشته است.)

۵ برای آنکه برای بار سوم از مبدأ بگذرد باید سطح S_3 و S_4 هم‌اندازه و قرینه هم باشند. برای همنهشتی این دو مثلث که شیب وتر آن‌ها یکی است باید ارتفاع هر دو $10m/s$ و قاعدهٔ هر دو $\frac{10}{3}s$ باشد. در این صورت t خواهد شد: $t=\frac{40}{3}+\frac{10}{3}=\frac{50}{3}s$

روش دوم: سؤال سختی برای جلسه کنکور است. اما با توجه به رفتار متحرک در حرکت با شتاب ثابت می‌توان آن را حل کرد. متحرک در لحظهٔ $t=0$ برای اولین بار با سرعت $+10m/s$ از مبدأ می‌گذرد سپس با شتاب $-2m/s^2$ بعد از 5s متوقف می‌شود و در لحظه $t=10s$ یعنی 5s بعد از توقف در نقطهٔ A از نقطه O مبدأ می‌گذرد و در این لحظه سرعتش $-10m/s$ است و با شتاب $3m/s^2$ بعد از مدت $t=\frac{v}{a}=\frac{10}{3}s$ در نقطهٔ B متوقف می‌شود و پس از $\frac{10}{3}s$ برای بار سوم به مبدأ می‌رسد و برای همیشه از آن دور می‌شود.



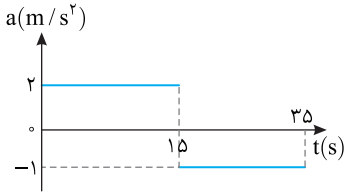
بنابراین در لحظهٔ $t=5+5+\frac{10}{3}+\frac{10}{3}=\frac{50}{3}s$ برای سومین بار از مبدأ می‌گذرد.



B ۶۲۷ | ۱

خط فکری نمودار شتاب - زمان، اطلاعات خاصی از حرکت به ما نمی‌دهد بنابراین از نقاط روی نمودار استفاده کرده و به کمک روابط حرکت با شتاب ثابت مسئله را حل می‌کنیم. سرعت و مکان متحرک در $t=2s$ به ما داده شده است، با استفاده از آن‌ها و با توجه به اینکه در بازهٔ 2s تا 15s، شتاب ثابت و $12m/s^2$ است مکان و سرعت متحرک در $t=15s$ را حساب کرده سپس در بازهٔ 15s تا 35s نیز به کمک معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت مکان در $t=35s$ را به دست می‌آوریم.

۱ در لحظهٔ $t=2s$، مکان $-16m$ و سرعت $-6m/s$ و شتاب ثابت $2m/s^2$ است بنابراین مکان در لحظهٔ $t=15s$ خواهد شد:



$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}\times2\times(13)^2+(-6)\times13+(-16)$$

$$x_1=169+(-78)-16\Rightarrow x_1=75m$$

۲ سرعت در لحظهٔ $t=15s$ را حساب می‌کنیم

$$v_1=at+v_0\Rightarrow v_1=2\times13-6\Rightarrow v_1=20m/s$$

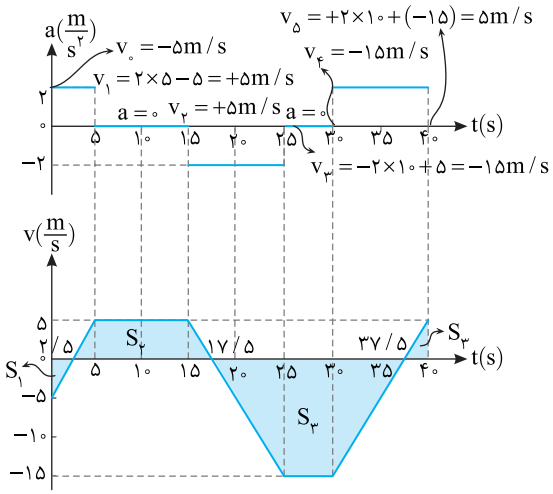
۳ سرعت $v_1=20m/s$ سرعت اولیهٔ قسمت دوم حرکت و مکان $x_1=75m$ مکان اولیهٔ این قسمت است بنابراین می‌توان به کمک معادلهٔ مکان - زمان مکان در $t=35s$ را حساب کرد.

$$x_2=\frac{1}{2}a_2t_2^2+v_1t+x_1\Rightarrow x_2=\frac{1}{2}\times(-1)\times(20)^4+20\times20+75$$

$$x_2=-200+400+75\Rightarrow x_2=275m\Rightarrow\vec{x}_2=275\vec{i}$$

C ۶۲۸ | ۴

این مسئله، یک مسئلهٔ با راه حل محاسباتی طولانی است، اما حل آن چندان مشکل نیست. ابتدا نمودار سرعت زمان را رسم می‌کنیم و به کمک آن هر چهار گزینه (۱) را بررسی کرده و گزینهٔ درست را به دست می‌آوریم.



سرعت را در لحظه‌های نشان داده شده روی نمودار به دست می‌آوریم.

گزینهٔ (۱):

در بازهٔ 2/5s تا 5s شتاب و سرعت مثبت هستند. (2/5s)

در بازهٔ 17/5s تا 25s شتاب و سرعت منفی هستند. (25-17/5=7/5s)

در بازهٔ 37/5s تا 40s شتاب و سرعت مثبت هستند. (40-37/5=2/5s)

بنابراین به مدت 2/5+7/5+2/5=12/5s شتاب و سرعت هم‌جهت بوده و گزینهٔ (۱) نادرست است.

گزینهٔ (۲): سطح زیر نمودار را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=S_1+S_2+S_3+S_4$$

$$\Rightarrow\Delta x=\frac{-5\times2/5}{2}+\frac{15+10}{2}\times5+\frac{(20+5)\times(-15)}{2}+\frac{2/5\times5}{2}$$

$$\Delta x=-6/25+62/5-187/5+6/25\Rightarrow\Delta x=-125m$$

گزینهٔ(۲)نادرست‌است.

گزینهٔ (۳):

در بازهٔ 2/5s تا 17/5s یعنی 15s و در بازهٔ 37/5s تا 40s یعنی 2/5s جمعاً 15+2=17s متحرک در جهت مثبت محور در حرکت بوده و گزینهٔ (۳) نادرست است.

بنابراین بدون محاسبه، گزینهٔ (۴) درست خواهد بود اما بررسی گزینهٔ (۴):

$$\ell=|S_1|+|S_2|+|S_3|+|S_4|\Rightarrow\ell=6/25+62/5+187/5+6/25\Rightarrow\ell=262/5m$$

B ۶۲۹ | ۴

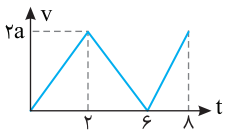
خط فکری متحرک از حال سکون در جهت مثبت محور شروع به حرکت کرده و تا لحظه‌ای که سرعت آن مثبت است متحرک در حال دور شدن از مبدأ بوده و بیشترین فاصله از مبدأ لحظه‌ای که سرعت متحرک صفر شده و علامت سرعت منفی شده و متحرک به سوی مبدأ بازمی‌گردد. بنابراین تکلیف شتاب مشخص است. شما باید لحظه‌ای را بیابید که متحرک بازمی‌گردد.

در لحظهٔ $t=۲s$ سرعت خواهد شد: $v=at+v_۰ \xrightarrow{t=۲s} v_۱=۲a$

در لحظهٔ $t=۶s$ سرعت را حساب می‌کنیم. $v_۲=-\frac{a}{۲}(۴)+۲a=۰$

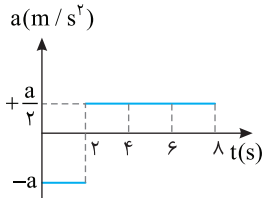
در لحظهٔ $t=۸s$ سرعت برابر است با: $v_۳=a(۲)+۰=۲a$

بنابراین در تمام لحظات سرعت مثبت است و متحرک هرگز بازنمی‌گردد. در نتیجه بیشترین فاصله از مبدأ در لحظهٔ $t=۸s$ اتفاق می‌افتد.



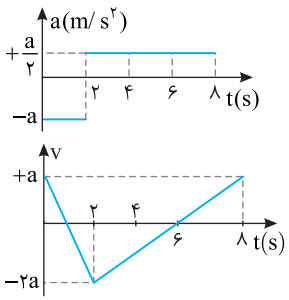
بازی با سوال **متحرکی در مبدأ زمان از مبدأ مکان روی محور xها از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. نمودار شتاب- زمان این متحرک مطابق شکل روبه‌رو است. در کدام لحظه فاصلهٔ متحرک از مبدأ از بقیه لحظه‌ها بیشتر است؟**

۱) $t=۳s$
۲) $t=۴s$
۳) $t=۶s$
۴) $t=۸s$



پاسخ **متحرک از حال سکون $(v_۰=۰)$ از مبدأ مکان $(x=۰)$ در مبدأ زمان $(t=۰)$ شروع به حرکت کرده و شتاب ابتدایی حرکت منفی است، بنابراین متحرک در جهت منفی محور حرکت می‌کند تا سرعتش به $v_۱=-۲a$ می‌رسد. در $t=۲s$ شتاب مثبت می‌شود اما سرعت همچنان منفی بوده و متحرک در حال دور شدن از مبدأ است در لحظهٔ $t=۶s$ سرعت متحرک $v_۲=\frac{a}{۲}(۶-۲)+(-۲a)=۰$ می‌شود.**

در این لحظه متحرک دارای بیشترین فاصله از مبدأ مکان است از این لحظه به بعد سرعت مثبت شده و متحرک به سوی مبدأ باز می‌گردد و فاصلهٔ متحرک از مبدأ کم می‌شود اما در $t=۸s$ به مبدأ نمی‌رسد. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است. گزینهٔ ۳



C ۶۳۰ | ۳

سرعت اولیهٔ متحرک $v_۰=-۱۰m/s$ و در ابتدا شتاب مثبت و متحرک در حال حرکت در جهت منفی محور است، تا لحظه‌ای که سرعت آن صفر می‌شود و تغییر جهت می‌دهد. نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم برای این منظور سرعت در لحظه‌های $t=۱۰s$ و $t=۱۵s$ و $t=۳۵s$ را به‌دست می‌آوریم:

$v_۰=-۱۰m/s \quad , \quad v_۱=a_۱\Delta t_۱+v_۰=۲\times۱۰+(-۱۰)=۱۰m/s$

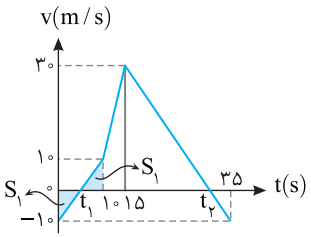
$v_۲=a_۲\Delta t_۲+v_۱=۴\times۵+۱۰=۳۰m/s$

$v_۳=a_۳\Delta t_۳+v_۲=-۲\times۲۰+۳۰=-۱۰m/s$

لحظه‌هایی را که سرعت صفر است را مشخص می‌کنیم:

$v=a_۱t_۱+v_۰ \Rightarrow ۰=۲t_۱+(-۱۰) \Rightarrow t_۱=۵s$

$v=a_۳t_۳+v_۰ \Rightarrow ۰=-۲(t_۲-۱۵)+۳۰ \Rightarrow ۰=-۲t_۲+۳۰+۳۰ \Rightarrow t_۲=۳۰s$



با توجه به نمودار سرعت - زمان، در لحظهٔ $t=۱۰s$ متحرک به مکان اولیه باز می‌گردد $(S_۱=S_۲)$ یعنی در مبدأ است و از این لحظه $(t=۱۰s)$ تا لحظهٔ $t_۲=۳۰s$ متحرک در حال دور شدن از مبدأ است و باید این جابه‌جایی را حساب کرد:

$\Delta x=\frac{۱۰+۳۰}{۲}\times۵+\frac{۳۰\times۱۵}{۲} \Rightarrow \Delta x=۱۰۰+۲۲۵=۳۲۵m$

B ۶۳۱ | ۳

۱ سرعت را در لحظهٔ $t=۲۰s$ حساب می‌کنیم.

$v=at+v_۰ \Rightarrow v_۱=-۲\times۲۰+۲۰ \Rightarrow v_۱=-۲۰m/s$

۲ سرعت $-۲۰m/s$، سرعت اولیهٔ قسمت دوم حرکت در بازهٔ $۲۰s$ تا $۴۰s$ است. لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود و متحرک تغییر جهت می‌دهد را به دست می‌آوریم.

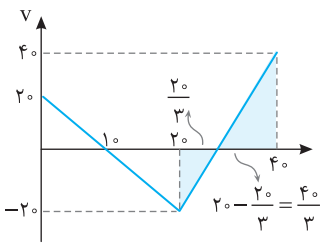
$v=at+v_۱ \Rightarrow ۰=۳t+(-۲۰) \Rightarrow t=\frac{۲۰}{۳}s$

۳ سرعت متحرک در $t=۴۰s$ را حساب می‌کنیم.

$v=at+v_۰ \Rightarrow v=۳\times۲۰-۲۰ \Rightarrow v=۴۰m/s$

۴ حال می‌توانیم نمودار سرعت زمان را رسم کرده و مسافت طی شده در بازهٔ $۲۰s$ تا $۴۰s$ را به دست آوریم.

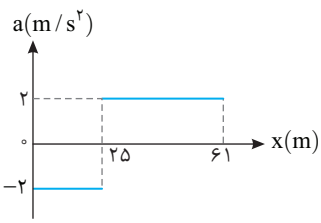
$\ell=|S_۱|+|S_۲| \Rightarrow \ell=\frac{۲۰\times\frac{۲۰}{۳}}{۲}+\frac{۴۰\times\frac{۴۰}{۳}}{۲}=\frac{۲۰۰}{۳}+\frac{۸۰۰}{۳} \Rightarrow \ell=\frac{۱۰۰۰}{۳}m$



A ۶۳۲ | ۲

خط فکری نمودار داده شده نمودار شتاب - مکان است و از زمان خبری نیست، بنابراین استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان در حل مسئله اولین راهی است که باید به ذهن شما برسد.

سرعت متحرک را به کمک معادلهٔ مستقل از زمان در مکان $x=۲۵m$ به‌دست می‌آوریم:



$x=۲۵m: v_۱^۲-v_۰^۲=۲a(x_۱-x_۰) \xrightarrow{x_۰=۰} v_۱^۲-۱۰۰=۲(-۲)(۲۵)$

$\Rightarrow v_۱^۲=۰ \Rightarrow v_۱=۰$

اکنون سرعت در مکان $x=۶۱m$ را به‌دست می‌آوریم:

$x=۶۱m: v_۲^۲-v_۱^۲=۲a(x_۲-x_۱) \Rightarrow v_۲^۲-۰=۲(۲)\times(۶۱-۲۵)$

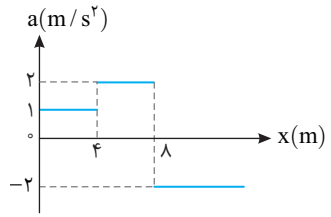
$\Rightarrow v_۲^۲=۴\times۳۶ \Rightarrow v_۲=۲\times۶=۱۲m/s$

B ۶۳۳ ۳

خط فکری نمودار شتاب - مکان بوده بنابراین باید به سراغ معادلهٔ مستقل از زمان برویم. در صورت مسئله بیان شده که متحرک تا چند متری مبدأ در جهت مثبت محور xها می‌رود، بنابراین مکانی را باید به‌دست بیاورید که متحرک متوقف شده و برمی‌گردد.

۱ سرعت در مکان $x=+۴m$ را به کمک رابطهٔ مستقل از زمان به دست می‌آوریم.

$$v_۱^۲-v_۰^۲=۲a(x_۱-x_۰)\Rightarrow v_۱^۲-۰=۲\times۱\times۴\Rightarrow v_۱=۲\sqrt{۲}m/s$$



۲ سرعت در مکان $+۸m$ را حساب می‌کنیم البته سرعت انتهایی هر مرحله سرعت اولیهٔ مرحلهٔ بعدی است.

$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲a_۲\Delta x_۲\Rightarrow v_۲^۲-(۲\sqrt{۲})^۲=۲\times۲\times(۸-۴)$$

$$\Rightarrow v_۲^۲=۲۴\Rightarrow v_۲=۲\sqrt{۶}m/s$$

۳ اکنون متحرک در مکان $x=+۸m$ دارای سرعت $۲\sqrt{۶}m/s$ است و باید بررسی کنیم در چه مکانی با شتاب $-۲m/s^۲$، سرعت صفر می‌شود.

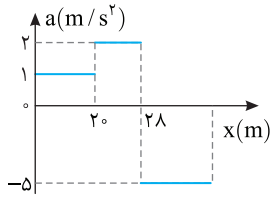
$$v_۳^۲-v_۲^۲=۲a_۳(x_۳-x_۲)\Rightarrow۰-۲۴=۲(-۲)(x_۳-۸)\Rightarrow x_۳=۱۴m$$

در مکان $x=۱۴m$ متحرک تغییر جهت می‌دهد و در خلاف جهت شروع به حرکت می‌کند.

B ۶۳۴ ۱

۱ با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان سرعت در مکان $x=۲۰m$ را به‌دست می‌آوریم:

$$v_۱^۲-v_۰^۲=۲a_۱(x_۱-x_۰)\xrightarrow{v_۰=۳m/s}v_۱^۲-۹=۴۰\Rightarrow v_۱^۲=۴۹\Rightarrow v_۱=۷m/s$$



۲ سرعت در مکان $+۲۸m$ را حساب می‌کنیم. سرعت اولیهٔ این قسمت همان سرعت انتهایی در مکان $+۲۰m$ یعنی $v_۱=۷m/s$ است. بنابراین:

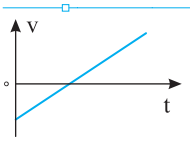
$$v_۲^۲-۴۹=۲a_۲\Delta x_۲\xrightarrow{\Delta x=(x_۲-x_۱)}v_۲^۲-۴۹=۲\times۲\times(۲۸-۲۰)$$

$$\Rightarrow v_۲^۲=۸۱\Rightarrow v_۳=۹m/s$$

۳ در قسمت آخر حرکت شتاب $-۵m/s^۲$ و سرعت ابتدایی آن همان سرعت نهایی قسمت قبل است. در این بازه متحرک تا زمان تغییر جهت $v=۰$ به حرکت خود ادامه می‌دهد.

$$۰-۸۱=۲\times(-۵)(x-۲۸)\Rightarrow ۸/۱=x-۲۸\Rightarrow x=۳۶/۱m$$

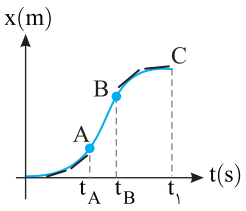
B ۶۳۵ ۱



۱ شیب نمودار سرعت - زمان برابر شتاب متحرک است شیب این نمودار مثبت است. بنابراین شتاب حرکت مثبت است.

۲ اگر جهت تقعر (دهانه) نمودار مکان - زمان رو به بالا باشد، شتاب مثبت است. بنابراین دهانهٔ (تقعر) نمودار مکان - زمان این متحرک باید رو به بالا باشد، در نتیجه گزینهٔ (۱) درست است.

B ۶۳۶ ۳



اتوبوس از ایستگاهی شروع به حرکت کرده و در ایستگاه بعد متوقف می‌شود پس در $t=۰$ و $t=t_۱$ سرعت صفر است. هم‌چنین شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ در بازهٔ ۰ تا t_A مثبت و در حال افزایش و در بازهٔ t_B تا $t_۱$ نیز مثبت اما در حال کاهش است. یعنی در این دو بازه سرعت مثبت است و نمودار باید بالای محور زمان باشد، بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

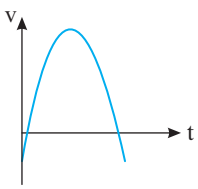
B ۶۳۷ ۱

خط فکری باید این نکات را یادآوری کنید.

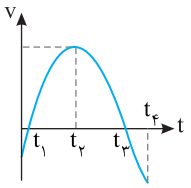
۱ شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان برابر شتاب است و جهت تقعر نمودار مکان - زمان علامت شتاب را مشخص می‌کند.

۲ هرگاه سرعت متحرک منفی باشد شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان باید منفی باشد.

۳ لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود یعنی در نمودار مکان - زمان، در نقاط بیشینه و کمینه نمودار هستیم.



ابتدا سرعت منفی است، بنابراین شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان باید منفی باشد در نتیجه گزینهٔ (۴) نادرست است.

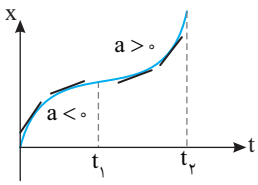


از لحظهٔ صفر تا $t_۲$ شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان داده شده مثبت و پس از آن منفی است، بنابراین دهانه (تقعر) نمودار مکان - زمان باید ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین باشد، گزینه‌های (۲) و (۴) نادرست هستند. در دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۳$ سرعت صفر شده یعنی نمودار مکان - زمان باید دارای دو نقطهٔ بیشینه و کمینه باشد، گزینهٔ (۱) دارای تمام شرایط بیان شده بوده و درست است.

B ۶۳۸ ۳

۱ در بازهٔ صفر تا $t_۱$ دهانهٔ (تقعر) نمودار مکان - زمان رو به پایین است، بنابراین شتاب منفی و در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ که جهت تقعر رو به بالاست شتاب مثبت است.

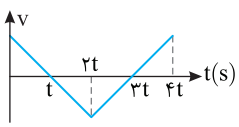
۲ شیب نمودار سرعت - زمان برابر شتاب است. در نمودار گزینه‌های (۱) و (۲) شیب ثابت بوده یعنی این نمودارها مربوط به حرکت با شتاب ثابت است اما در نمودار داده شده شتاب تغییر می‌کند و گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند.



۳ شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر سرعت متحرک است. در تمام بازهٔ صفر تا $t_۲$ شیب خط مماس مثبت است، بنابراین در تمام بازهٔ صفر تا $t_۲$ سرعت مثبت است. از این‌رو گزینهٔ (۳) درست و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۶۳۹ ۲

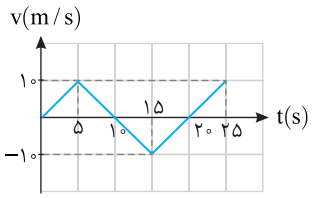
خط فکری نمودار ارائه شده نمودار سرعت زمان است و هر گاه نمودار سرعت - زمان خط راست مایل باشد حرکت دارای شتاب ثابت است و نمودار آن قسمتی از یک سهمی است. از طرفی هر گاه شتاب مثبت باشد جهت تقعر (دهانه) نمودار مکان زمان رو به بالا و هر گاه شتاب منفی باشد تقعر (دهانه) نمودار مکان - زمان رو به پایین است. اکنون شما گزینه‌ها را بررسی کنید تا مشخص شود کدام گزینه دارای شرایط بیان شده است.



در بازهٔ صفر تا $۲t$ نمودار سرعت زمان خط راست بوده و شیب آن یعنی شتاب حرکت منفی است بنابراین نمودار مکان زمان سهمی است که دهانهٔ آن باید رو به پایین باشد در بازهٔ $۲t$ تا $۴t$ شیب نمودار سرعت - زمان مثبت است بنابراین دهانه (تقعر) نمودار مکان زمان نیز باید رو به بالا باشد. در نتیجه گزینهٔ (۲) جواب مسئله است.

A ۶۴۰ ۲

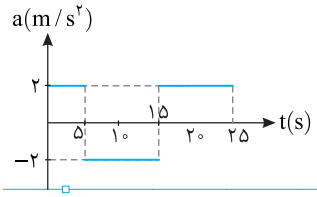
در بازهٔ ۰ تا ۵s شتاب حرکت خواهد شد: $a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a_1=\frac{10-0}{5-0}=2m/s^2$



شتاب در بازهٔ ۵s تا ۱۵s ثابت و برابر است با: $a_2=\frac{-10-10}{15-5}=-2m/s^2$

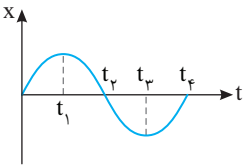
شتاب در بازهٔ ۱۵s تا ۲۵s را به‌دست می‌آوریم: $a_3=\frac{10-(-10)}{25-15}=2m/s^2$

اکنون می‌توان نمودار شتاب - زمان را رسم کرد.



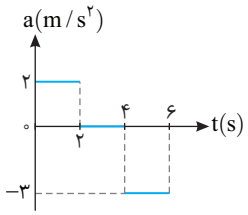
B ۶۴۱ ۲

لحظه‌های t_1 و t_3 نقاط بیشینه و کمینه نمودار است و در نقاط بیشینه و کمینه نمودار مکان - زمان، سرعت لحظه‌ای صفر است. در حالی که در گزینه‌های (۳) و (۴) در این لحظات سرعت صفر نیست و این دو نمودار نادرست هستند. شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در بازهٔ صفر تا t_1 مثبت است یعنی در این بازه سرعت مثبت است، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست و گزینهٔ (۲) درست است.



A ۶۴۲ ۳

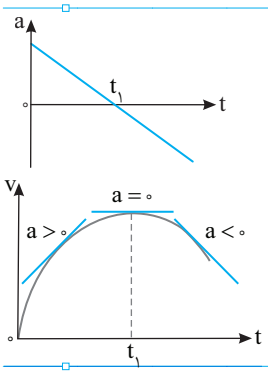
در بازهٔ صفر تا ۲s متحرک با شتاب ثابت از حال سکون شروع به حرکت کرده و سرعتش به $v=2\times2+0=4m/s$ می‌رسد در بازهٔ ۲s تا ۴s شتاب صفر و حرکت یکنواخت با سرعت ثابت $4m/s$ است، پس از آن شتاب $-3m/s^2$ است و سرعت متحرک در $t=6s$ خواهد شد: $v=at+v_0\Rightarrow-3\times(6-4)+4=-2m/s$



بنابراین نمودار گزینهٔ (۳) درست است.

A ۶۴۳ ۲

ابتدا شتاب مثبت بوده و شیب خط مماس بر نمودار سرعت- زمان باید مثبت باشد، سپس شتاب صفر می‌شود و سرانجام شتاب منفی بوده و شیب خط مماس بر نمودار سرعت- زمان باید منفی شود، بنابراین نمودار سرعت- زمان مطابق شکل روبه‌رو یعنی گزینه (۲) است.



A ۶۴۴ ۲

متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده است، بنابراین نمودار مکان- زمان در مبدأ زمان باید به محور زمان مماس شود، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست هستند. باید بین گزینه‌های (۲) و (۴) یکی را انتخاب کنیم. سرعت در لحظه‌های $t=10s$ ، $t=20s$ و $t=30s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_0\begin{cases}t=10s\rightarrow v_1=-1\times10+0=-10m/s\\ t=20s\rightarrow v_2=1\times(20-10)+(-10)=0\\ t=30s\rightarrow v_3=1\times(30-20)+0=10m/s\end{cases}$$

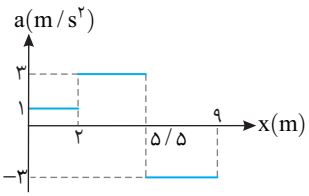
بنابراین ابتدا سرعت به $-10m/s$ می‌رسد سپس در $t=20s$ سرعت صفر شده و تغییر علامت می‌دهد در نتیجه گزینهٔ (۲) پاسخ درست است.

در گزینهٔ (۴) نمودار پس از $v=0$ ادامه پیدا نکرده و این گزینه نادرست است.

B ۶۴۵ ۲

خط فکری می‌خواهیم از روی نمودار شتاب - مکان، نمودار شتاب - زمان را رسم کنیم، بنابراین برای هر بازهٔ مکانی روی نمودار باید بازهٔ زمانی آن را مشخص کرد.

۱ متحرک از حال سکون $(v_0=0)$ شروع به حرکت کرده است. سرعت در مکان $x=+2m$ را به‌دست آوریم. $v_1^2-v_0^2=2ax\Rightarrow v_1^2=4\Rightarrow v_1=2m/s$



۲ بازهٔ زمانی که در آن متحرک $2m$ را طی کرده سرعت متحرک به $2m/s$ رسیده است را به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v_0+v_1}{2}\Delta t_1\Rightarrow2=\frac{2}{2}\Delta t_1\Rightarrow\Delta t_1=2s$$

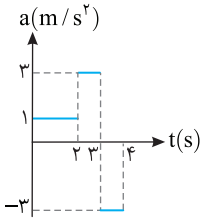
۳ از $2m$ تا $5/5m$ متحرک با شتاب $3m/s^2$ از سرعت $v_1=2m/s$ به سرعت v_2 خواهد رسید بنابراین: $v_2^2-v_1^2=2ax\Rightarrow v_2^2-4=21\Rightarrow v_2=5m/s$

$$\Delta x=\frac{v_1+v_2}{2}\Delta t_2\Rightarrow\Delta t_2=1s$$

۴ از $5/5m$ تا $9m$ متحرک با شتاب $-3m/s^2$ از سرعت v_2 به سرعت v_3 خواهد رسید بنابراین: $v_3^2-v_2^2=2ax\Rightarrow v_3^2-25=-21\Rightarrow v_3=2m/s$

$$\Delta x=\frac{v_3+v_2}{2}\Delta t\Rightarrow3/5=\frac{5+2}{2}\times\Delta t_3\Rightarrow\Delta t_3=1s$$

۵ اکنون نمودار شتاب - زمان را می‌توان رسم کرد.



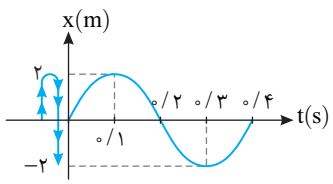
B ۶۴۶ ۳

خط فکری تنها راه حل این مسئله رسم نمودار $x-t$ است.

یادآوری ریاضی در تابع‌های $y=A\sin ax$ و $y=A\cos ax$ دورهٔ تناوب برابر $T=\frac{2\pi}{|a|}$ است و مقدار بیشینه تابع همان ضریب sin (و یا cos) یعنی A است.

۱ دورهٔ تابع $y=2\sin5\pi t$ را به‌دست می‌آوریم. $T=\frac{2\pi}{5\pi}\Rightarrow T=0/4s$

۲ نمودار مکان - زمان را رسم می‌کنیم.



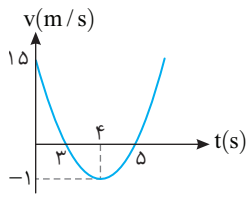
۳ در بازهٔ $t=0$ تا $t=0/3s$ مسافت طی شده را از روی نمودار به‌دست می‌آوریم.

$$\ell=2+2+2=6m$$

۴ تندی متوسط را حساب می‌کنیم. $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{6}{0/3}\Rightarrow s_{av}=20m/s$

C ۶۴۷ ۲

کافی است نمودار سرعت - زمان را رسم کنیم. برای این منظور باید مختصات رأس سهمی و همچنین محل تلاقی نمودار با محور زمان را به‌دست بیاوریم:



$t=-\frac{b}{2a}\Rightarrow t=4s\Rightarrow v=16-32+15$

$\Rightarrow v=-1m/s$

رأس سهمی:

$v=0\Rightarrow t^2-8t+15=0\Rightarrow(t-3)(t-5)=0\Rightarrow t=3s\ ,\ t=5s$

با توجه به نمودار در بازهٔ صفر تا ۳s سرعت از ۱۵m/s تا صفر در حال کاهش و حرکت کندشونده است. همچنین در بازهٔ ۴s تا ۵s به مدت ۱s تندی متحرک از ۱m/s به صفر کاهش می‌یابد و حرکت کندشونده است، بنابراین جمعاً ۴s حرکت کندشونده است.

B ۶۴۸ ۲

یادآوری شتاب متوسط برابر $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ و سطح زیر نمودار شتاب - زمان برابر تغییر سرعت متحرک است.

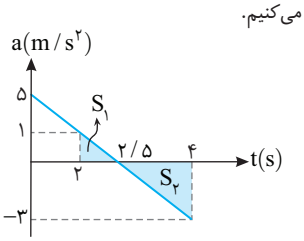
خط فکری باید نمودار شتاب - زمان معادلهٔ $a=-2t+5$ را رسم کنید و در بازهٔ $t=2s$ تا $t=4s$ سطح زیر نمودار را به‌دست بیاورید سپس شتاب متوسط را حساب کنید.

۱ شتاب را در لحظهٔ $t=2s$ و $t=4s$ حساب می‌کنیم.

$$a=-2t+5\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t=2s} a=-2\times2+5=1m/s^2\\ \xrightarrow{t=4s} a=-2\times4+5=-3m/s^2\end{cases}$$

۲ لحظهٔ صفر شدن شتاب را به‌دست می‌آوریم. $a=0\Rightarrow-2t+5=0\Rightarrow t=2/5s$

۳ نمودار را رسم می‌کنیم.



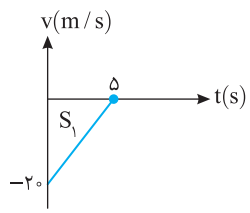
۴ تغییرات سرعت برابر مجموع مساحت‌های S_1 و S_2 است بنابراین:

$\Delta v=S_1+S_2\Rightarrow\Delta v=\frac{0/5\times1}{2}+\frac{-3\times1/5}{2}=0/25-2/25=-2m/s$

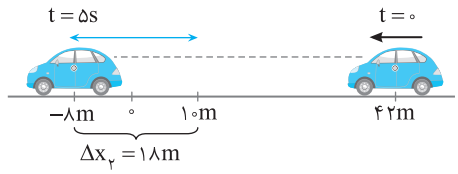
۵ شتاب متوسط برابر است با: $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-2}{2}=-1m/s^2$

B ۶۴۹ ۴

در ابتدا متحرک مثبت اما سرعت آن تا لحظهٔ $t=5s$ منفی است. جابه‌جایی متحرک در مدت ۵s نخست حرکت برابر است با: $\Delta x_1=S_1=-\frac{20\times5}{2}=-50m$

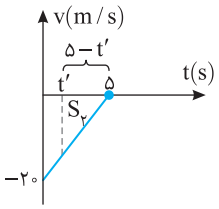


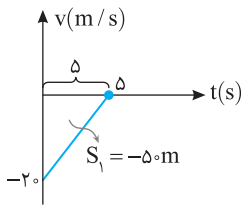
جابه‌جایی متحرک برابر $x_2-x_1=-50m$ شده که $x_1=42m$ است پس $x_2=-8m$ است. مسیر حرکت متحرک به صورت زیر است و در بازه‌ای که با رنگ دیگر مشخص کرده‌ایم در مدت صفر تا ۵s فاصلهٔ متحرک از $x=0$ کمتر از ۱۰m است.



زمان مربوط به مکان $x=10m$ را مشخص می‌کنیم. از لحظهٔ t' که متحرک در مکان $x=10m$ قرار دارد تا لحظهٔ $t=5s$ که مکان آن $-8m$ می‌شود، جابه‌جایی متحرک $-18m$ است. پس داریم:

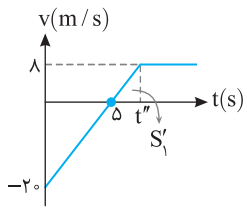
$$\begin{cases}S_2=-18m\\ S_1=-50m\end{cases}\Rightarrow\frac{S_2}{S_1}=\frac{18}{50}=\frac{9}{25}$$





نسبت تشابه برابر است با: $(\frac{5-t'}{5})^2=\frac{9}{25}\Rightarrow t'=2s$

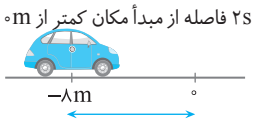
بازهٔ زمانی که متحرک از مکان ۱۰m به $-8m$ رسیده برابر $5-2=3s$ است.



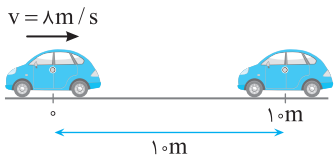
دقت کنید که بعد از ۵s سرعت متحرک مثبت شده و متحرک از مکان $-8m$ در جهت مثبت شروع به حرکت می‌کند و مجدداً به مکان $x=10m$ می‌رسد. اما نمی‌دانیم این لحظه قبل از t'' (به نمودار توجه کنید) است یا بعد از آن. پس ابتدا زمان t'' را حساب کرده و جابه‌جایی در بازهٔ ۵s تا t'' را حساب می‌کنیم:

$\frac{5}{20}=\frac{t''-5}{8}\Rightarrow t''=7s$ $\qquad S'_1=\frac{2\times8}{2}=8m$

بنابراین متحرک در بازهٔ ۵s تا ۷s، ۸m در جهت مثبت‌ها حرکت کرده و به $x=0$ می‌رسد و تمام این مدت ۲s فاصله از مبدأ مکان کمتر از ۱۰m است.



حال متحرک در $x=0$ بوده و تا لحظه‌ای که به مکان $x=10m$ برسد فاصلهٔ آن از مبدأ مکان کمتر از ۱۰m است. این بازهٔ زمانی که پس از $t''=7s$ بوده با سرعت ثابت 8m/s طی می‌شود. $\Delta x=8\Delta t_3\Rightarrow10=8\Delta t_3\Rightarrow\Delta t_3=1/25s$



بنابراین ۳s در قسمت اول مسیر (از $x=10m$ تا $x=-8m$) فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان کمتر از ۱۰m بود، ۲s با شتاب ثابت در بازهٔ زمانی ۵s تا ۷s نیز فاصله کمتر از ۱۰m بوده (از $x=-8m$ تا $x=0$) و در آخر ۱/۲۵s (از $x=0$ تا $x=10m$) این اتفاق افتاد: $\Delta t_{کل}=3+2+1/25=6/25s$

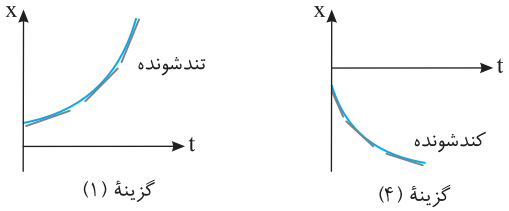
B ۶۵۰ ۱

نکته هرگاه حاصل‌ضرب سرعت در مکان متحرک مثبت $(vx>0)$ باشد، متحرک در حال دور شدن از مبدأ و هرگاه منفی $(vx<0)$ باشد، متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است.

نکته هرگاه $av>0$ باشد، حرکت تندشونده است و تندی یعنی شیب خط مماس بر نمودار مکان زمان در حال افزایش و هرگاه $av<0$ باشد حرکت کندشونده است و تندی یعنی خط مماس بر نمودار مکان - زمان در حال کاهش است.

با توجه به فرض مسئله نموداری که در آن متحرک در حال دور شدن از مبدأ بوده و دارای حرکت تندشونده است را باید پیدا کنیم. در گزینهٔ (۲) و گزینهٔ (۳) در ابتدا متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ $(x=0)$ است و این نمودارها نادرست هستند.

در گزینهٔ (۱) و (۴)، متحرک‌ها در حال دور شدن از مبدأ هستند اما مطابق شکل در گزینهٔ (۴) حرکت کند شونده بوده و نمودار گزینهٔ (۴) نادرست است. اما در نمودار گزینهٔ (۱) متحرک دارای حرکت تند شونده است و این گزینه درست است.

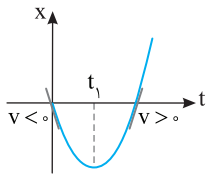


گزینهٔ (۱) گزینهٔ (۴)

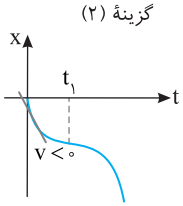
B ۶۵۱ ۳

۱ متحرک در ابتدا دارای سرعت اولیه مثبت است. بنابراین شیب خط مماس بر نمودار باید در لحظهٔ $t=0$ مثبت باشد. (یعنی خط مماس با جهت مثبت محور زمان زاویه حاده بسازد. از این‌رو مطابق شکل گزینهٔ (۲) و (۴) نادرست هستند.

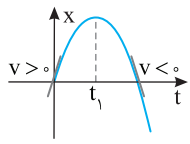
۲ متحرک در t_1 متوقف شده بنابراین سرعت در این لحظه صفر است و شیب خط مماس در نمودار $x-t$ در لحظهٔ t_1 باید افقی باشد. متحرک با اینکه در t_1 متوقف شده اما تغییر جهت نداده یعنی علامت سرعت قبل و بعد از t_1 تغییر نمی‌کند و متحرک در جهت مثبت محور به حرکت خود ادامه می‌دهد. بنابراین گزینهٔ (۳) درست و گزینه (۱) نادرست است.



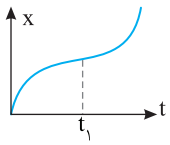
گزینهٔ (۲)



گزینهٔ (۴)



گزینهٔ (۱)

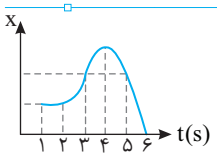


گزینهٔ (۳)

B ۶۵۲ ۲

دقت کنید نمودار از لحظهٔ $t=1s$ شروع شده است.

در بازهٔ $1s$ تا $2s$ متحرک ساکن است، پس سرعت صفر است.



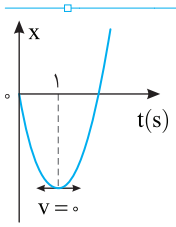
در بازهٔ $2s$ تا $3s$ حرکت با شتاب ثابت و مثبت است، پس نمودار سرعت- زمان خط راستی است که شیب آن مثبت است و با محور زمان زاویهٔ حاده می‌سازد.

در بازهٔ $3s$ تا $5s$ چون منحنی یک سهمی است و جهت تقعر آن رو به پایین است، شتاب ثابت و منفی است و چون شیب نمودار سرعت- زمان، علامت شتاب را نشان می‌دهد، در این بازه باید شیب نمودار سرعت- زمان منفی باشد و با محور زمان زاویهٔ منفرجه بسازد. با توجه به فرض مسئله در بازهٔ $5s$ تا $6s$ نمودار خط راست بوده حرکت دارای سرعت ثابت است.

B ۶۵۳ ۱

۱ شتاب حرکت ثابت و برابر $2m/s^2$ است و در لحظهٔ $t=1s$ سرعت صفر شده است. از این‌رو می‌توان سرعت اولیه را به‌دست آورد.

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow 2=\frac{0-v_0}{1}\Rightarrow v_0=-2m/s$$



یادآوری هر جابه‌جایی در ثانیهٔ nام در حرکت با شتاب ثابت a و سرعت اولیه v_0 از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$\Delta x_{(t)}=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0$$

۲ در رابطه بالا جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\Delta x_{(3)}=\frac{1}{2}\times 2(2\times 3-1)+(-2)\Rightarrow \Delta x_{(3)}=3m$$

B ۶۵۴ ۱

خط فکری اولاً شما باید متوجه باشید که اندازهٔ شتاب دو متحرک یکی است اما چون جهت تقعر نمودار مکان زمان A رو به بالاست، شتاب آن مثبت $(a_A=+a)$ و شتاب متحرک B که جهت تقعر نمودارش رو به پایین است منفی $(a_B=-a)$ است. ثانیاً در $t=2s$ مکان دو متحرک برابر $+4m$ بوده و در این نقطه دو نمودار بر هم مماس هستند. یعنی شیب خط مماس در این لحظه یکسان بوده پس سرعت لحظه‌ای این دو متحرک با هم برابر است. اکنون سرعت در لحظهٔ $t=2s$ و مکان در این لحظه را برای دو متحرک برابر قرار دهید.

۱ سرعت دو متحرک در $t=2s$ برابر است، از این‌رو:

$$v_A=v_B \xrightarrow[t=2s]{v=at+v_0} a\times 2+v_{0A}=(-a)\times 2+v_{0B}\Rightarrow v_{0B}-v_{0A}=4a \quad (I)$$

۲ مکان متحرک در $t=2s$ را برابر قرار می‌دهیم.

$$x_A=x_B \xrightarrow[t=2s]{x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0} \frac{1}{2}a\times 4+2v_{0A}+8=\frac{1}{2}(-a)4+2v_{0B}$$

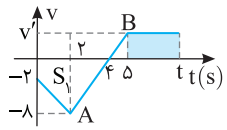
$$\Rightarrow 4a+2(v_{0A}-v_{0B})+8=0 \quad (II)$$

۳ از رابطهٔ (I) در رابطهٔ (II) جایگذاری می‌کنیم.

$$4a-2(4a)+8=0\Rightarrow -4a=-8\Rightarrow a=2m/s^2$$

B ۶۵۵ ۳

خط فکری متحرک از مکان $-5m$ با سرعت $-2m/s$ عبور کرده است. یعنی اولین بار که فاصلهٔ آن از مبدأ ۵ متر است لحظهٔ $t=0$ است. متحرک ابتدا در جهت منفی محور حرکت می‌کند. در لحظهٔ $t=4s$ با توجه به نمودار سرعت صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد. باید بررسی کنیم در چه لحظه‌ای مجدداً از مکان $-5m$ می‌گذرد و در چه لحظه‌ای به مکان $+5m$ می‌رسد.



۱ مساحت سطح زیر نمودار را در بازهٔ ۰ تا $4s$ حساب می‌کنیم. یعنی جابه‌جایی متحرک را در این بازه مشخص می‌کنیم.

$$\Delta x_1=S_1=\frac{-2+(-8)}{2}\times 2+\frac{(-8)\times 2}{2}=-10+(-8)=-18m$$

۲ مکان متحرک در $t=4s$ برابر است با:

$$\Delta x=x_1-x_0\Rightarrow -18=x_1-(-5)\Rightarrow x_1=-23m$$

۳ اگر متحرک به مکان $x=+5m$ برسد، برای سومین بار فاصلهٔ متحرک از مبدأ ۵ متر می‌شود. بنابراین متحرک باید از مکان $-23m$ به مکان $+5m$ برود. یعنی جابه‌جایی متحرک در بازهٔ ۴ تا t ثانیه باید $+28m$ باشد.

۴ به کمک شیب خط AB سرعت در لحظهٔ $t=5s$ را به‌دست می‌آوریم.

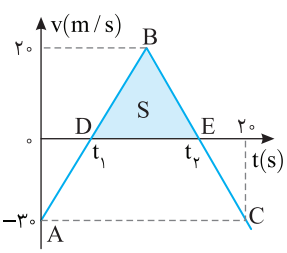
$$\frac{0-(-8)}{4-2}=\frac{v'-0}{5-4}\Rightarrow v'=4m/s$$

۵ اکنون سطح زیر نمودار را از $t=4s$ تا لحظهٔ t حساب کرده و برابر $+28m$ قرار داده و t را به‌دست آورید.

$$\Delta x=S\Rightarrow (t-4+t-5)\times\frac{4}{2}=28\Rightarrow 4t-18=28\Rightarrow 4t=46\Rightarrow t=11/5s$$

B ۶۵۶ ۳

خط فکری مسئله مسافت طی شده در بازهٔ t_1 تا t_2 را از شما خواسته است. یعنی باید سطح S را به‌دست بیاورید، ارتفاع مثلث معلوم و برابر ۲۰ واحد است، اما قاعدهٔ آن یعنی t_2-t_1 را باید حساب کنید. چگونه؟ با تشابه مثلث‌های ABC و DBE. پس حل را شروع کنید.



با توجه به شکل و تشابه دو مثلث رنگی بازهٔ t_1 تا t_2 را به دست می‌آوریم.

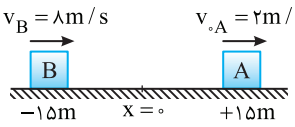
$$\frac{20}{t_2-t_1}=\frac{30+20}{20}\Rightarrow t_2-t_1=\frac{400}{50}=8s$$

مسافت طی شده در بازهٔ t_1 تا t_2 برابر مساحت زیر نمودار در این بازه است و آن را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{۲۰\times ۸}{۲}=۸۰m$$

B ۶۵۷ ۳

خط فکری متحرک A از مکان $+۱۵m$ و متحرک B از مکان $-۱۵m$ در جهت مثبت محور در حرکت هستند. یعنی در $t=۰$ فاصلهٔ آن‌ها از هم ۳۰ متر است. سرعت متحرک B ثابت و برابر $۸m/s$ و سرعت متحرک A $v_{۰A}=۲m/s$ است. بنابراین متحرک B در حال نزدیک شدن به متحرک A است. اما تا کی؟ تا لحظه‌ای که سرعت B از سرعت A بیشتر است و لحظه‌ای که سرعت A از $۸m/s$ بیشتر می‌شود، فاصلهٔ دو متحرک از هم افزایش می‌یابد. لحظه‌ای را که متحرک A سرعتش به $۸m/s$ می‌رسد طبق نمودار $t=۳s$ است، در این لحظه مکان دو متحرک A و B را حساب کرده فاصلهٔ دو متحرک را به‌دست آورید.



۱ شتاب متحرک A برابر است با: $a_A=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a_A=\frac{۸-۲}{۳}=۲m/s^۲$

۲ معادلهٔ حرکت B را نوشته و مکان آن را در $t=۳s$ به‌دست می‌آوریم.

$$x=vt+x_۰\Rightarrow x_B=۸t-۱۵\xrightarrow{t=۳s}x_B=۲۴-۱۵\Rightarrow x_B=۹m$$

۳ معادلهٔ حرکت A را نوشته و مکان آن را در $t=۳s$ به‌دست می‌آوریم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$$

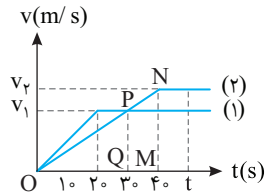
$$\Rightarrow x_A=\frac{۱}{۲}\times ۲t^۲+۲t+۱۵\xrightarrow{t=۳s}x_A=۹+۶+۱۵=۳۰m$$

۴ کمترین فاصلهٔ دو متحرک خواهد شد. $x_A-x_B=۳۰-۹=۲۱m$

B ۶۵۸ ۴

خط فکری دو متحرک از مبدأ شروع به حرکت کرده‌اند. متحرک (۱) جلو می‌افتد. چرا؟ چون زودتر سرعتش افزایش می‌یابد و در لحظهٔ $t=۲۰s$ سرعتش ثابت و برابر v_1 می‌شود متحرک (۲) شتاب کمتری دارد اما در لحظهٔ $t=۳۰s$ سرعتش از v_1 بیشتر می‌شود. بنابراین می‌تواند عقب‌افتادگی خود را جبران کند. وقتی متحرک (۲) به متحرک (۱) می‌رسد که جابه‌جایی دو متحرک یکسان بوده و از این‌رو تا لحظهٔ t که دو متحرک به هم می‌رسند باید سطح زیر نمودار دو متحرک برابر باشد. سطح زیر نمودارها را برابر قرار دهید. البته باید ابتدا یک رابطهٔ ریاضی بین v_1 و v_2 پیدا کنید. مقدار $۶۰۰m$ در حل مسئله نقشی ندارد.

با توجه به تشابه مثلث‌های OPQ و ONM می‌توان نوشت:



$$\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{۴۰}{۳۰}\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{۴}{۳}$$

در لحظهٔ t که دو متحرک به هم می‌رسند، باید سطح زیر نمودارها برابر شود.

$$S_۱=S_۲\Rightarrow\frac{t+t-۲۰}{۲}v_۱=\frac{t+t-۴۰}{۲}v_۲$$

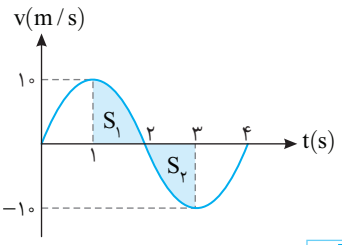
$$\Rightarrow(۲t-۲۰)v_۱=(۲t-۴۰)\times\frac{۴}{۳}v_۱\Rightarrow ۲t-۲۰=\frac{۴}{۳}(۲t-۴۰)\Rightarrow t=۵۰s$$

B ۶۵۹ ۲

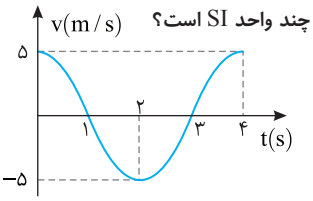
۱ به نمودار نگاه کنید. در لحظهٔ $t_1=۱s$، سرعت متحرک $v_1=۱۰m/s$ و در لحظهٔ $t_2=۳s$ سرعت متحرک $v_2=-۱۰m/s$ است. از این‌رو شتاب متوسط خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow a_{av}=\frac{-۱۰-۱۰}{۳-۱}\Rightarrow a_{av}=-۱۰m/s^۲$$

۲ برای به‌دست آوردن سرعت متوسط باید جابه‌جایی در بازهٔ $۱s$ تا $۳s$ را حساب کرد. البته برای جابه‌جایی باید به سراغ سطح زیر نمودار $v-t$ برویم. دوباره به نمودار نگاه کنید. مساحت سطح زیر نمودار در بازهٔ $۱s$ تا $۳s$ مجموع S_1 و S_2 است که S_1 و S_2 هم‌اندازه و قرینه هم بوده. بنابراین مجموع آن‌ها یعنی جابه‌جایی متحرک صفر است. $(\Delta x=۰)$ بنابراین سرعت متوسط $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$ صفر است.



بازی با سوال **نمودار سرعت - زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است. شتاب متوسط و سرعت متوسط در بازهٔ زمانی ۲ تا ۴ ثانیه به‌ترتیب از راست به چپ چند واحد SI است؟**



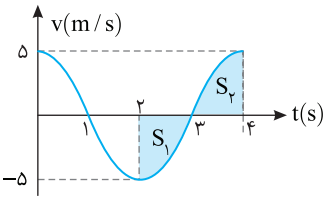
۱) صفر ، صفر
۲) ۵+ ، صفر
۳) صفر، ۵−
۴) ۵ ، ۵−

پاسخ شتاب متوسط خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow a_{av}=\frac{۵-(-۵)}{۴-۲}\Rightarrow a_{av}=۵m/s$$

سطح زیر نمودار سرعت - زمان در بازهٔ ۲s تا ۴s برابر مجموع S_1 و S_2 است.

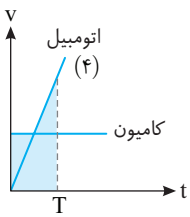
$$\Delta x=S=S_۱+S_۲\xrightarrow{S_۱=-S_۲}\Delta x=۰\Rightarrow v_{av}=۰$$



گزینهٔ ۲

B ۶۶۰ ۴

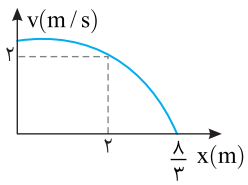
برای آن‌که اتومبیل بتواند به کامیون برسد باید سرعتش از کامیون بیشتر شود. در مدت T در نمودار (۱) و (۲) سرعت اتومبیل از کامیون کمتر است. بنابراین اتومبیل و کامیون به هم نمی‌رسد و این نمودارها نادرست هستند.



از طرفی باید جابه‌جایی اتومبیل و کامیون یکسان شود تا اتومبیل به کامیون برسد. یعنی مساحت سطح زیر نمودار دو متحرک باید یکی شود، سطح زیر نمودار (۳) از سطح زیر نمودار کامیون کمتر است. بنابراین این نمودار نیز درست نیست و مطابق شکل نمودار (۴) جواب مسئله است.

B ۶۶۱ ۳

نمودار داده شده، نمودار سرعت مکان است. آن را با نمودار سرعت زمان اشتباه نگیرید.



۱ در مکان $x_1=۲m$ سرعت متحرک $v_1=۲m/s$ و در مکان $x_2=\frac{۸}{۳}m$ سرعت متحرک صفر $(v_2=۰)$ است.

به کمک معادلهٔ مستقل از زمان شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲a(x_۲-x_۱)\Rightarrow ۰-۴=۲(a)(\frac{۸}{۳}-۲)\Rightarrow -۲=a(\frac{۲}{۳})\Rightarrow a=-۳m/s^۲$$

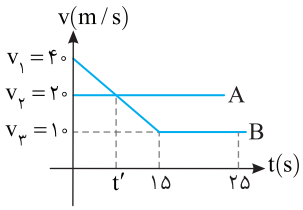
۲ مجدداً معادلهٔ مستقل از زمان را نوشته و سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$$v_۱^۲-v_۰^۲=۲a(x_۱-x_۰)\xrightarrow{x_۰=۰}۲^۲-v_۰^۲=۲(-۳)(۲-۰)$$

$$۴-v_۰^۲=-۱۲\Rightarrow v_۰^۲=۱۶\Rightarrow v_۰=۴m/s$$

B ۶۶۲ ۲

خط فکری سرعت متحرک A ثابت و برابر $۲۰\frac{m}{s}$ است و سرعت اولیهٔ متحرک B برابر $۴۰\frac{m}{s}$ است. بنابراین B از A جلو می‌افتد و تا لحظه‌ای که سرعت B از $۲۰\frac{m}{s}$ بیشتر است، متحرک B در حال دور شدن از A می‌باشد و پس از این لحظه سرعت متحرک A از سرعت متحرک B بیشتر می‌شود و شروع به کم کردن فاصلهٔ خود از متحرک B می‌کند و ممکن است از متحرک B سبقت بگیرد.



۱ لحظه‌ای که سرعت متحرک B، $۲۰\frac{m}{s}$ می‌شود را حساب می‌کنیم.

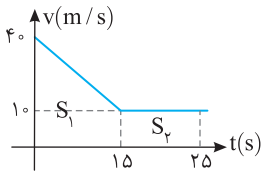
از $t=۰$ تا $t=۱۵s$ شیب خط حرکت ثابت می‌ماند:

$$\frac{v_۱-v_۳}{۱۵s}=\frac{v_۱-v_۲}{t'}\Rightarrow\frac{۴۰-۱۰}{۱۵-۰}=\frac{۴۰-۲۰}{t'-۰}\Rightarrow t'=۱۰s$$

(شیب خط در بازهٔ ۰ تا ۱۵ ثانیه) (شیب خط در بازهٔ ۰ تا t')

۲ سرعت متحرک A ثابت بوده و جابه‌جایی آن برابر $\Delta x_A=v_A t$ است و در این مدت متحرک A به اندازهٔ $\Delta x_A=v_A t=۲۰۰m$ و متحرک B به اندازهٔ $\Delta x_B=\frac{v_۱+v_۲}{۲}\Delta t=\frac{۴۰+۲۰}{۲}\times۱۰=۳۰۰m$ جابه‌جا شده‌اند. بنابراین در این مدت متحرک B، ۱۰۰m جلو می‌افتد.

۳ از $t=۱۰s$ متحرک A به B نزدیک می‌شود و ممکن است از آن جلو بیفتد. اکنون جابه‌جایی دو متحرک از $t=۰$ تا $t=۲۵s$ را حساب می‌کنیم:



$$\Delta x_A=۲۰\times۲۵=۵۰۰m$$

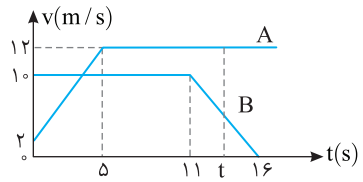
$$\underbrace{\Delta x_B=\frac{۴۰+۱۰}{۲}\times۱۵}_{S_۱}+\underbrace{۱۰\times۱۰}_{S_۲}=۴۷۵m$$

$$\Rightarrow ۵۰۰-۴۷۵=۲۵m$$

۴ یعنی در انتهای زمان، A تنها ۲۵ متر بیشتر از B جابه‌جا شده و در $t=۲۵s$ فاصلهٔ دو متحرک از هم ۲۵ متر است پس بیشترین فاصلهٔ آن‌ها در همان $t=۱۰s$ رخ داده که متحرک B، ۱۰۰m جلوتر از متحرک A است.

B ۶۶۳ ۳

خط فکری این مسئله با روش‌هایی که می‌شناسیم و به آن‌ها عادت کردیم حل نمی‌شود. شما باید مرحله به مرحله جابه‌جایی دو متحرک (یعنی سطح زیر نمودار دو متحرک) را با هم مقایسه کنید تا مشخص شود دو متحرک در چه لحظه‌ای به هم می‌رسند.



۱ ابتدا بررسی می‌کنیم که در لحظه‌های کلیدی مانند $t=۵s$ و $t=۱۱s$ دو متحرک در کنار یکدیگر هستند یا خیر؟ سطح زیر نمودار سرعت- زمان برابر با جابه‌جایی است و هر دو متحرک از مکان $x=۰$ به حرکت درآمده‌اند، بنابراین سطح زیر نمودار در این حالت بیانگر مکان هر متحرک نیز هست.

$$t=۵s\Rightarrow x_A=\frac{۲+۱۲}{۲}\times۵=۳۵m\ ,\ x_B=۱۰\times۵=۵۰m$$

۲ با توجه به عددهای به دست آمده متحرک B، در لحظهٔ $t=۵s$، ۱۵ متر جلوتر از متحرک A است.

۳ مکان دو متحرک در $t=۱۱s$ را حساب می‌کنیم.

$$t=۱۱s\Rightarrow x_A=\frac{۲+۱۲}{۲}\times۵+۱۲\times(۱۱-۵)=۱۰۷m\ ,\ x_B=۱۰\times۱۱=۱۱۰m$$

۴ در لحظهٔ $t=۱۱s$ همچنان متحرک B، ۳ متر از متحرک A جلوتر است و با توجه به سرعت متحرک A در این لحظه $(v_A=۱۲m/s)$ متحرک A پس از زمان $t=۱۱s$ می‌تواند به متحرک B برسد.

۵ معادلهٔ حرکت دو متحرک را پس از $t=۱۱s$ به‌دست می‌آوریم:

$$x_A=۱۲(t-۱۱)+۱۰۷$$

$$x_B=\frac{۱}{۲}a_B t^۲+v_۰t+x_۰=\frac{۰-۱۰}{۱۶-۱۱}(t-۱۱)^۲+۱۰(t-۱۱)+۱۱۰$$

۶ معادله‌های مکان A و B را برابر قرار می‌دهیم.

$$۱۲(t-۱۱)+۱۰۷=-(t-۱۱)^۲+۱۰(t-۱۱)+۱۱۰\Rightarrow(t-۱۱)^۲+۲(t-۱۱)-۳=۰$$

$$\Rightarrow[(t-۱۱)+۳][(t-۱۱)-۱]=۰\Rightarrow(t-۹)(t-۱۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۹s & \text{غ ق ق}\\ t=۱۲s & \text{جواب}\end{cases}$$

C ۶۶۴ ۲

لحظه‌ای که متحرک A از کنار متحرک B می‌گذرد را به کمک سطح زیر نمودار به‌دست می‌آوریم.

$$S_A=S_B+۶۸$$

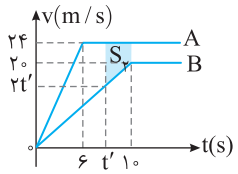
$$\frac{t+t-۶}{۲}\times۲۴=\frac{t+t-۱۰}{۲}\times۲۰+۶۸\Rightarrow۲۴t-۷۲=۲۰t-۱۰۰+۶۸$$

$$۴t=۴۰\Rightarrow t=۱۰s$$

بعد از $t=۱۰s$ متحرک A از متحرک B جلو می‌افتد و بعد از این لحظه نوع حرکت دو متحرک یکنواخت است. $x_A-x_B\le۱۲\Rightarrow۲۴t-۲۰t\le۱۲\Rightarrow۴t\le۱۲\Rightarrow t\le۳s$

سه ثانیه پس از $t=۱۰s$ فاصلهٔ دو متحرک کمتر از ۱۲ متر است اما قبل از $t=۱۰s$ چه مدت فاصلهٔ بین دو متحرک از ۱۲m کمتر یا با آن مساوی است؟

اگر قبل از $t=۱۰s$ در لحظهٔ t' فاصلهٔ دو متحرک ۱۲m شود در این لحظه سرعت متحرک B خواهد شد.



$$\begin{cases}v=at\\ a=\frac{۲۰}{۱۰}=۲\frac{m}{s^۲}\end{cases}\Rightarrow v=۲t'$$

باید قسمت هاشورخورده برابر ۱۲ واحد باشد:

$$(۲۴-۲۰)+(۲۴-۲t')\times(\frac{۱۰-t'}{۲})\le۱۲$$

$$t'^۲-۲۴t'+۱۴۰\le۱۲\Rightarrow t'^۲-۲۴t'+۱۲۸\le۰$$

$$(t'-۸)(t'-۱۶)=۰\Rightarrow t'=۸, t'=۱۶\ \text{غ ق ق}$$

بنابراین در بازهٔ $t=۸s$ تا $t=۱۰s$ یعنی $v_۰$ مدت ۲s قبل $t=۱۰s$ فاصلهٔ دو متحرک مساوی و کمتر از ۱۲m بوده است یعنی جمعاً $۲+۳=۵s$.

عجب تستی بود. بالاخره تموم شد. راه‌حلش بعد از دو روز فکر کردن این شده پس نگران نباشید.

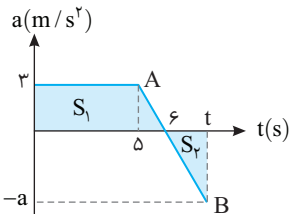
B ۶۶۵ ۳

هر دو متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده‌اند، بنابراین حرکت هر دو تندشونده بوده و متحرک A که دارای شتاب مثبت است در جهت مثبت محور شروع به حرکت کرده و متحرک B که دارای شتاب منفی است، در جهت منفی محور شروع به حرکت کرده است.

نکته هرگاه متحرکی از حال سکون روی خط راست شروع به حرکت کند، جهت حرکت آن در جهت شتاب بوده و تا لحظه‌ای که شتاب تغییر جهت بدهد، متحرک دارای حرکت تندشونده است.

B ۶۶۶ ۲

سطح محصور بین نمودار شتاب- زمان و محور زمان برابر تغییر سرعت است. متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده، پس سرعت اولیه $v_۰=۰$ است. لحظه‌ای که مجدداً متحرک متوقف می‌شود را با حرف t نمایش می‌دهیم.



۱ شتاب حرکت در لحظهٔ t را به کمک شیب خط AB به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{0-3}{6-5}=\frac{-a-0}{t-6}\Rightarrow a=3(t-6) \qquad (I)$$

۲ برای آن‌که سرعت متحرک مجدداً صفر شود، باید تغییرات سرعت در بازهٔ صفر تا t صفر شود. یعنی در این بازه باید سطح زیر نمودار شتاب - زمان صفر شود. بنابراین خواهیم داشت.

$$\Delta v=0\Rightarrow S_1+S_2=0\Rightarrow\frac{5+6}{2}\times 3=\frac{a\times(t-6)}{2}\Rightarrow a(t-6)=33 \qquad (II)$$

۳ شتاب را از رابطهٔ (I) در رابطهٔ (II) قرار می‌دهیم. $3(t-6)(t-6)=33$

$$\Rightarrow(t-6)(t-6)=11\Rightarrow(t-6)^2=11\Rightarrow t-6=\sqrt{11}\Rightarrow t=6+\sqrt{11}\,s$$

۱ B ۶۶۷

در ابتدا با توجه به فرض پرسش، سرعت منفی و برابر $v_0=-8m/s$ است، از طرفی سطح زیر نمودار شتاب- زمان برابر تغییر سرعت متحرک است.

بنابراین به کمک سطح زیر نمودار اندازهٔ سرعت در لحظه‌های $t=2s$ ، $t=4s$ و $t=5s$ را به‌دست می‌آوریم و با هم مقایسه می‌کنیم.

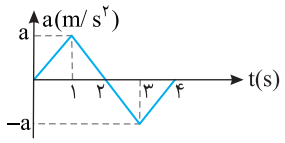
$$0\to 2s\Rightarrow\Delta v=S=\frac{2+1}{2}\times 2=3m/s\xrightarrow{\Delta v=v-v_0}3=v-(-8)$$
$$\Rightarrow v=-5m/s$$

$$2s\to 4s\Rightarrow\Delta v=S=\frac{2+1}{2}\times 2=3m/s\xrightarrow{\Delta v=v'-v}3=v'-(-5)$$
$$\Rightarrow v'=-2m/s$$

$$4s\to 5s\Rightarrow\Delta v=S=(-2\times 1)\times\frac{1}{2}=-1\,m/s\xrightarrow{\Delta v=v''-v'}-1=v''-(-2)$$
$$\Rightarrow v''=-3m/s$$

بنابراین اندازهٔ سرعت اولیه از بقیهٔ لحظه‌های بیان شده بیشتر است.

۱ B ۶۶۸



متحرک از حال سکون با شتاب مثبت شروع به حرکت کرده، پس ابتدا در جهت مثبت محور در حال حرکت بوده است. در مدت ۲ ثانیهٔ اول بر سرعتش افزوده می‌شود زیرا در این مدت شتاب و سرعت هر دو مثبت بوده و حرکت تندشونده است. سپس در بازهٔ ۲ تا ۴ ثانیه شتاب منفی، اما سرعت همچنان مثبت بوده و حرکت در جهت مثبت محور کندشونده است تا لحظهٔ $t=4s$ که متحرک متوقف می‌شود. برای درک بهتر موضوع سرعت‌ها را در لحظهٔ ۱s ، ۲s ، ۳s و ۴s به‌دست می‌آوریم. $t=0\Rightarrow v_0=0$

$$t=1s\Rightarrow\Delta v=S=\frac{a\times 1}{2}\xrightarrow{\Delta v=v-v_0}v_1=\frac{a}{2}$$

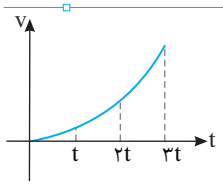
$$t=2s\Rightarrow\Delta v=S=\frac{a\times 1}{2}=\frac{a}{2}\xrightarrow{v_2-v_1=\frac{a}{2}}v_2=a$$

$$t=3s\Rightarrow\Delta v=S=\frac{-a\times 1}{2}=-\frac{a}{2}\xrightarrow{v_3-v_2=-\frac{a}{2}}v_3=\frac{a}{2}$$

$$t=4s\Rightarrow\Delta v=\frac{-a\times 1}{2}=S=-\frac{a}{2}\xrightarrow{v_4-v_3=-\frac{a}{2}}v_4=0$$

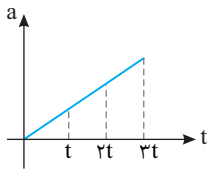
کاملاً مشخص است که در هر لحظه در بازهٔ صفر تا 4s سرعت مثبت است. یعنی در تمام این مدت متحرک در جهت مثبت محور در حال حرکت بوده بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

۳ B ۶۶۹



اندازهٔ شتاب مثبت و در حال افزایش است، پس شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ باید مثبت و در حال افزایش باشد. همچنین متحرک از حال سکون $(v_0=0)$ شروع به حرکت می‌کند بنابراین نمودار سرعت - زمان آن به شکل روبه‌رو است. با توجه به نمودار، سرعت در تمام لحظات 2t تا 3t ، از سرعت در تمام لحظات دو بازهٔ دیگر بیشتر است و سرعت متوسط از 2t تا 3t از بقیه بازه‌ها بزرگ‌تر است.

بازی با سؤال نمودار شتاب - زمان متحرکی که از حال سکون روی خط راست شروع به حرکت کرده است، مطابق شکل روبه‌رو است. سرعت متوسط در کدام بازهٔ زمانی از بقیه بزرگ‌تر است؟

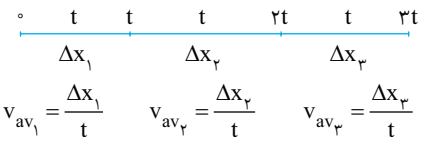


۱) صفر تا t ۲) t تا ۲t

۳) ۲t تا ۳t ۴) اظهار نظر قطعی ممکن نیست.

پاسخ متحرک از حال سکون روی خط راست شروع به حرکت کرده بنابراین حرکت آن تندشونده است. در تمام مدت شتاب در حال افزایش است و علامت آن مثبت است. بنابراین سرعت متحرک در حال افزایش است.

در حرکت تندشونده هرچه زمان می‌گذرد، سرعت بیشتر شده و در بازه‌های زمانی یکسان متحرک جابه‌جایی‌های بزرگ‌تری را طی می‌کند و از این‌رو در بازه 2t تا 3t چون جابه‌جایی بیشتر است، سرعت متوسط $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$ بزرگتر است.



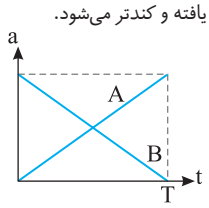
$$v_{av_1}=\frac{\Delta x_1}{t}\qquad v_{av_2}=\frac{\Delta x_2}{t}\qquad v_{av_3}=\frac{\Delta x_3}{t}$$

گزینهٔ ۳

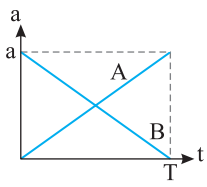
۳ B ۶۷۰

۱ دو متحرک از حال سکون $(v_0=0)$ شروع به حرکت کرده‌اند و در مدت صفر تا T شتاب آن‌ها تغییر علامت نداده. بنابراین تغییرات سرعت برای هر دو متحرک مثبت است و چون $v_0=0$ بوده پس تندی در حال افزایش بوده و حرکت آن‌ها در کل مدت T، تندشونده است. البته چون در هر لحظه شتاب A در حال افزایش و شتاب B در حال کاهش است، چنانچه نمودار سرعت زمان این دو متحرک را رسم کنیم در هر لحظه شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ که معرف شتاب متحرک است برای متحرک A رفته‌رفته افزایش می‌یابد اما برای متحرک B رفته‌رفته شیب کاهش یافته و کندتر می‌شود.

۲ سطح زیر نمودار شتاب زمان برابر تغییرات سرعت متحرک است. در این‌جا هر دو متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده‌اند و تغییرات سرعت برابر سرعت نهایی متحرک است و گزینهٔ (۴) نادرست است.



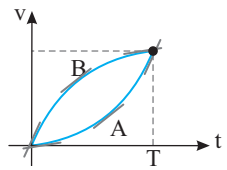
۳ سطح زیر نمودار A و سطح زیر نمودار B برابر است. از این‌رو:



$$\Delta v=S\Rightarrow S_A=\frac{aT}{2}$$

$$S_B=\frac{aT}{2}\Rightarrow\Delta v_A=\Delta v_B=v_A=v_B$$

۴ اگر نمودار سرعت زمان A را رسم کنیم چون شتاب A در حال افزایش است، باید نمودار به‌گونه‌ای باشد که شیب خط مماس بر آن در حال افزایش باشد. اما در مورد نمودار سرعت زمان B برعکس است. بنابراین نمودار سرعت زمان این دو متحرک باید شبیه شکل روبرو باشد.



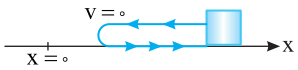
۵ سطح زیر نمودار سرعت زمان برابر جابه‌جایی متحرک است و سطح زیر نمودار B از سطح زیر نمودار A بزرگتر است و گزینهٔ (۱) نادرست است.

۶ جابه‌جایی متحرک B از جابه‌جایی متحرک A در مدت T بیشتر است. بنابراین سرعت متوسط B از سرعت متوسط A بزرگتر بوده و گزینهٔ (۳) درست است.

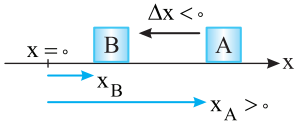
پنجره تو در تو

۴ ۶۷۰ B

۱ مطابق شکل روبه‌رو ممکن است متحرک در مکان‌های مثبت $(x>0)$ در حال حرکت باشد و در همان جا تغییر جهت دهد و علامت بردار مکان هم‌چنان مثبت باشد، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.



در شکل روبه‌رو متحرک از نقطهٔ A به نقطهٔ B رفته، جابه‌جایی منفی $(\Delta x<0)$ است اما بردار مکان در نقاط A و B هر دو مثبت است و گزینهٔ (۲) نادرست است. سرعت متوسط، برابر است با $\vec{v}_{av}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$ بنابراین بردار سرعت متوسط همواره هم‌جهت با بردار جابه‌جایی است، در نتیجه گزینهٔ (۳) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.



نمای ۲

بازی با سؤال بـا تغییر مبدأ مکان، چه تعـداد از پارامترهای حرکتی زیر تغییر می‌کند؟

«بردار جابه‌جایی - سرعت - شتاب متوسط - بردار مکان - مسافت طی‌شده»

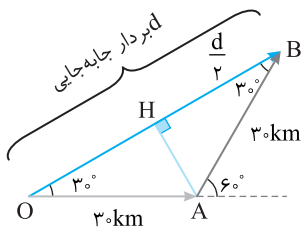
۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ نکته جابه‌جایی، سـرعت، شـتاب و مسـافت طی شده به محـل مبدأ مکان اختیاری بسـتگی ندارد و تنها بردار مـکان تابعی از محل مبدأ مکان است. گزینهٔ ۱

۲ ۶۷۰ B

خط فکری **۲** باید شـکل مسـیر حرکت را رسم کنیم. مطابق شکل متحرک از نقطهٔ O به نقطهٔ A و سـپس به نقطهٔ B می‌رود. جابه‌جایی دوچرخه‌سـوار برداری است که از O به B رسم می‌شود. بنابراین باید به کمک ریاضی طول بردار جابه‌جایی (d) را حساب کنیم. با توجه به شکل روبه‌رو خط عمود AH را رسم می‌کنیم. در مثلث AHB می‌توان نوشت:

$$\cos ۳۰^\circ=\frac{HB}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\frac{d}{۲}}{۳۰}\Rightarrow d=۳۰\sqrt{۳}\,m$$



نمای ۱

۳ ۶۷۰ B

۳ با توجه به معادلهٔ مستقل از زمان سرعت در انتهای هر مرحله را به‌دست آورده و دربارهٔ نوع حرکت اظهار نظر می‌کنیم:

$$\overline{v}=\frac{v+v_\circ}{۲}\Rightarrow ۴=\frac{v+۰}{۲}\Rightarrow v=۸m/s$$

بنابراین در t ثانیهٔ اول، سرعت از صفر به $۸m/s$ رسیده و حرکت تندشونده است.

در t ثانیهٔ دوم:

$$v_{av}=\frac{v'+v}{۲}\Rightarrow ۶=\frac{v'+۸}{۲}\Rightarrow v'=۴m/s$$

در این مرحله سرعت از $۸m/s$ به $۴m/s$ رسیده و حرکت کندشونده است.

در t ثانیهٔ سوم:

$$v_{av}=\frac{v''+v'}{۲}\Rightarrow ۶=\frac{v''+۴}{۲}\Rightarrow v''=۸m/s$$

در این مرحله سرعت از $۴m/s$ به $۸m/s$ رسیده و حرکت تندشونده است.

$v_\circ=۰$ —t— $v=۸m/s$ —t— $v'=۴m/s$ —t— $v''=۸m/s$

نمای ۲۵

۳ ۶۷۰ A

خط فکری **۴** جهت حرکت همان جهت سرعت متحرک است، بنابراین مدت زمانی که متحرک در جهت منفی محور در حرکت اسـت یعنی مدت زمانی که سـرعت منفی اسـت. بنابراین شما باید ریشه‌های معادله سرعت - زمان $v=t^۲-۲t-۳$ را به‌دست آورده، تابع را تعیین علامت کنید.

یادآوری ریاضی در تابـع درجـه دو $y=ax^۲+bx+c$ ، علامت تابـع بین دو ریشه مخالف علامت a و بیرون دو ریشه موافق علامت a است.

ابتدا ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم.

$$t^۲-۲t-۳=۰\Rightarrow(t-۳)(t+۱)=۰\Rightarrow t=-۱\,,\,t=۳s$$

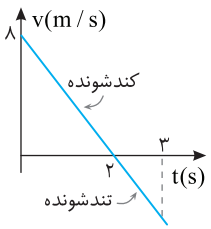
به کمک جدول روبه‌رو علامت سرعت را مشـخص می‌کنیـم. بنابراین در بازهٔ صفر تا ۳s سرعت منفی است. دقت کنیـد قسـمت رنگـی جدول بـه دلیل منفی بودن زمان $(t<0)$ است.

t	$-\infty$	-۱	۰	۳	$+\infty$
v	+	۰	−	۰	+
	غ ق ق		$v<۰$		$v>۰$
			تغییر جهت		

نمای ۱۶

۱ ۶۷۰ A

۵ راه‌حل اول: با اسـتفاده از معادلهٔ مکان - زمان، معادلهٔ سرعت - زمان و شتاب - زمان را به‌دست آورده، تعیین علامت می‌کنیم.



$$\begin{cases}x=-۲t^۲+۸t+۱۰\\ x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_\circ t+x_\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-۴m/s^۲\,,\,v_\circ=۸m/s\Rightarrow v=at+v_\circ$$

$$\Rightarrow v=-۴t+۸\xrightarrow{v=۰}t=۲s$$

سـرعت در بازهٔ زمانی صفر تا ۲s مثبت و در بازهٔ ۲s تا ۳s منفی اسـت، بنابراین ابتدا حرکت کندشونده $(av>0)$ و سپس حرکت تندشونده $(av<0)$ است.

راه‌حل دوم: کافی اسـت نمودار سـرعت - زمان را رسم کنیم. مشخص است که در بازهٔ صفر تا ۲s سرعت کاهش یافته و صفر شده سپس از ۲s تا ۳s بزرگی سرعت افزایش می‌یابد و گزینهٔ (۱) درست است.

میانبر هر گاه در معادلهٔ مکان زمان حرکت با شتاب ثابت روی خط راست ضریب $t^۲$ و ضریب t ناهمنام باشند، حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است. نمای ۲۴

بازی با سؤال معادلهٔ حرکت جسمی که روی خط راست در حرکت است در SI به صورت $x=۲t^۲-۳t-۸$ می‌باشد. کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) متحرک همواره در جهت مثبت محور در حرکت است.

۲) بردار مکان حتماً تغییر جهت می‌دهد.

۳) متحرک در ابتدا در حال حرکت به سمت مبدأ است.

۴) متحرک در مکان‌های مثبت تغییر جهت می‌دهد.

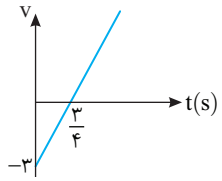
پاسخ معادلهٔ حرکت $x=۲t^۲-۳t-۸$ را با معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت $x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_\circ t+x_\circ$ مقایسـه کرده و شتاب a و سـرعت اولیه $v_\circ$ را به‌دست آورده و معادله سرعت زمان را می‌نویسیم.

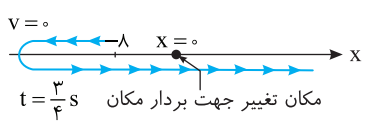
شتاب حرکت $a=+۴m/s^۲$ سرعت اولیه $-۳m/s$ و مکان اولیه $-۸m$ است.

معادلهٔ سرعت - زمان و لحظهٔ تغییر جهت حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$v=۴t-۳=۰\Rightarrow t=\frac{۳}{۴}s$$

بنابراین مطابق نمودار سرعت زمان رسم شده متحرک ابتدا در جهت منفی محور در حرکت است و در لحظهٔ $t=\frac{۳}{۴}s$ متوقف شده و در جهت مثبت محور حرکت می‌کند سپس از مبدأ می‌گذرد پس بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.





گزینهٔ ۲

۶۷۰ B ۴

خط فکری در حرکت با شتاب ثابت بهترین روش برای به‌دست آوردن مسافت طی شده از روی معادلهٔ حرکت این است که ابتدا معادلهٔ سرعت - زمان را به‌دست آورده سپس نمودار را رسم کرده و سرانجام در بازهٔ زمانی بیان شده مسافت را به کمک سطح زیر نمودار $v-t$ حساب کنید.

۱ معادلهٔ حرکت $x=-t^2+4t+5$ را با معادلهٔ مکان زمان حرکت با شتاب ثابت مقایسه می‌کنیم.

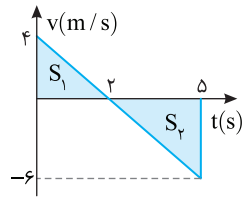
$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\ ,\ x=-t^2+4t+5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a=-1\Rightarrow a=-2m/s^2, v_0=4m/s\ \ ,\ \ x_0=5m$$

۲ معادلهٔ سرعت - زمان را می‌نویسیم.

$$v=at+v_0\Rightarrow v=-2t+4$$

۳ نمودار سرعت زمان را رسم می‌کنیم.



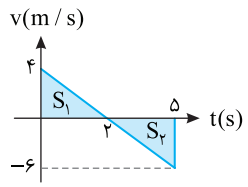
البته باید بعضی از نقاط را مشخص کرد.

$$t=0\Rightarrow v_0=4m/s\ ,$$

$$v=0\Rightarrow -2t+4=0\Rightarrow t=2s$$

$$t=5s\Rightarrow v=-2\times5+4\Rightarrow v=-6m/s$$

۴ قدرمطلق سطح‌های محصور بین نمودار و محور زمان را جمع کنیم.



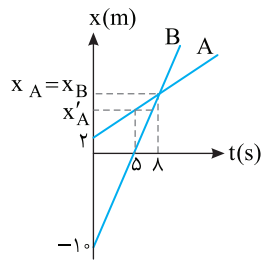
$$L=|S_1|+|S_2|$$

$$L=\left|\frac{4\times2}{2}\right|+\left|\frac{-6\times3}{2}\right|=13m$$

نمای ۳۲

۶۷۰ B ۱ ۷

۱ به کمک شیب نمودار B مکان متحرک A و B را در لحظهٔ $t=8s$ به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{x_B-(-10)}{8-0}=\frac{0-(-10)}{5-0}$$

$$\Rightarrow \frac{x_B+10}{8}=2\Rightarrow x_B=6m$$

در این لحظه x_A نیز $x_A=x_B=6$ است.

۲ لحظهٔ گذر B از مبدأ $t=5s$ است. به کمک شیب نمودار A در این لحظه مکان متحرک A را که روی شکل با x'_A نشان داده‌ایم حساب می‌کنیم.

$$\frac{6-2}{8-0}=\frac{x'_A-2}{5-0}\Rightarrow\frac{4}{8}=\frac{x'_A-2}{5}\Rightarrow 2/5=x'_A-2\Rightarrow x'_A=4/5m$$

نمای ۱۴

۶۷۰ A ۱ ۸

متحرک از حال سکون ۴s با شتاب ثابت حرکت کرده و سرعتش در حال افزایش است یعنی در هر ثانیه جابه‌جایی آن از ثانیهٔ قبلی باید بیشتر باشد. از لحظه $t=4s$ تا لحظهٔ $t=7s$ باید جابه‌جایی یکسان باشند زیرا سرعت ثابت است بعد از $t=7s$، با شتاب ثابت قرینهٔ شتاب قسمت اول از سرعت خود می‌کاهد بنابراین در هر ثانیه جابه‌جایی آن کوچک‌تر از ثانیهٔ قبل است این مشخصات با گزینه (۱) هماهنگی دارد. نمای ۳۵

۶۷۰ A ۲ ۹

کافی است لحظهٔ گذر از مکان $x_0=-3m$ با تندی $v_0=1/5m/s$ را مبدأ زمان $(t=0)$ بگیریم و سپس به کمک معادلهٔ حرکت مکان متحرک را در $t=4s$ به‌دست بیاوریم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$$

$$x=\frac{1}{2}\times2\times(4)^2+1/5\times4+(-3)=16+6-3\Rightarrow x=19m$$

نمای ۲۲

۶۷۰ B ۲ ۱۰

راه‌حل اول: استفاده از معادلهٔ مستقل از شتاب:

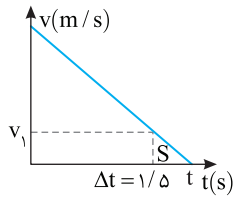
$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}t\Rightarrow 9=\frac{0+v_0}{2}\times1/5\Rightarrow v_0=12m/s$$

بنابراین شتاب خواهد شد: $a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-12}{1/5}\Rightarrow a=-8m/s^2\Rightarrow|a|=8m/s^2$

راه‌حل دوم: کافی است متحرکی را فرض کنیم که از حال سکون با شتاب ثابت به حرکت در آمده است و در مدت ۱/۵s جابه‌جایی ۹ متر را طی کرده است.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow 9=\frac{1}{2}a(1/5)^2\Rightarrow a=8m/s^2$$

راه‌حل سوم: نمودار سرعت زمان با توجه به صورت مسئله سطح S برابر ۹ واحد است از این‌رو می‌توان نوشت:



$$S=\Delta x=\frac{v_1\Delta t}{2}\Rightarrow 9=\frac{v_1\times1/5}{2}$$

$$\Rightarrow v_1=12m/s$$

شتاب ثابت را از هر قسمت از حرکت می‌توان حساب کرد. از این‌رو:

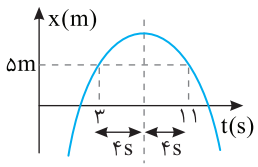
$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{0-12}{1/5}=-8m/s^2\Rightarrow|a|=8m/s^2$$

نمای ۲۶

۶۷۰ A ۲ ۱۱

متحرک دارای شتاب ثابت است و در حال حرکت در جهت مثبت حرکت بود و در لحظهٔ $t=7s$ بیشترین فاصله مثبت از مبدأ را داشته یعنی در این لحظه سرعت متحرک صفر شده و جهت حرکت متحرک تغییر کرده است.

در حرکت با شتاب ثابت معادلهٔ مکان- زمان تابع درجه ۲ است $\left(x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\right)$



و نمودار سهمی است و خط گذرنده از رأس سهمی خط تقارن سهمی است.

در $t=7s$ مکان بیشینه است یعنی $t=7s$ رأس سهمی است و در فاصله‌های زمانی یکسان از $t=7s$ مکان‌ها یکسان است، پس در $t=3s$ و $t=11s$ مکان $+5m$ است (به شکل سهمی دقت کنید).

نمای ۲۶

۶۷۰ B ۳ ۱۲

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 سرعت متوسط متحرک با سرعت در لحظهٔ وسط بازه زمانی برابر است. $v_{\frac{t_1+t_2}{2}}=\frac{v_1+v_2}{2}$

۱ در ثانیهٔ دوم سرعت متوسط $8m/s$ شده است. ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ زمانی بین ۱s تا ۲s است و لحظه وسط این بازه برابر $t=1/5s$ است و سرعت در این لحظه برابر سرعت متوسط یعنی $v_{1/5s}=8m/s$ است.

۲ در ثانیهٔ چهارم یعنی بازهٔ زمانی $t=3s$ تا $t=4s$، سرعت متوسط $16m/s$ شده است یعنی سرعت در لحظهٔ $\frac{3+4}{2}=3/5s$ برابر $16m/s$ است.

۳ شتاب حرکت را در بازهٔ ۱/۵s تا ۳/۵s حساب می‌کنیم که شتاب کل مسیر حرکت است.

$$a=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{16-8}{3/5-1/5}=4m/s^2$$

نمای ۲۵ و ۳۷

۶۷۰ B ۲ ۱۳

در قسمت اول حرکت متحرک با شتاب ثابت $2m/s^2$ به سرعت $10m/s$ می‌رسد. مدت زمان حرکت با این شتاب و جابه‌جایی در این مدت را حساب می‌کنیم.

$$v_1=at+v_0\xrightarrow{v_0=0}10=2t_1\Rightarrow t_1=5s\ ,\ \Delta x_1=\frac{1}{2}at_1^2+v_0t_1$$

$$\xrightarrow{t_1=5s}\Delta x_1=\frac{1}{2}\times2\times(5)^2\Rightarrow\Delta x_1=25m$$

۲ در قسمت دوم متحرک ۳s با سرعت ثابت ۱۰m/s حرکت می‌کند و جابه‌جایی آن خواهد شد:

$$\Delta x_۲ = vt_۲ \Rightarrow \Delta x_۲ = ۱۰(۳) \Rightarrow \Delta x_۲ = ۳۰m$$

۳ در قسمت سوم متحرک با شتاب $a=-۲m/s^۲$ سرعتش از ۱۰m/s کاهش می‌یابد تا به صفر برسد

$$v = at_۳ + v_۰ \Rightarrow ۰ = -۲t + ۱۰ \Rightarrow t_۳ = ۵s$$

مدت زمان و جابه‌جایی در قسمت کندشونده را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x_۳ = \frac{۱}{۲}at_۳^۲ + v_۰t_۳ \Rightarrow \Delta x_۳ = \frac{۱}{۲}(-۲)(۵)^۲ + ۱۰(۵) \Rightarrow \Delta x_۳ = ۲۵m$$

۴ اکنون می‌توان تندی متوسط را به دست آورد.

$$s_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{\Delta x_۱ + \Delta x_۲ + \Delta x_۳}{\Delta t_۱ + \Delta t_۲ + \Delta t_۳} = \frac{۲۵+۳۰+۲۵}{۵+۳+۵} = \frac{۸۰}{۱۳} m/s$$

نمای ۳۵

B ۶۷۰ ۳

۱۴ **متحرک اول** دارای حرکت با شتاب ثابت $۲m/s^۲$ است و بدون سرعت اولیه به راه می‌افتد.

معادلهٔ حرکت آن را می‌نویسیم: $x_۱ = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \Rightarrow x_۱ = \frac{۱}{۲}\times ۲t_۱^۲ \Rightarrow x_۱ = t_۱^۲$

متحرک دوم ۵s بعد از متحرک اول به راه می‌افتد، یعنی اگر مدت زمان حرکت متحرک اول $t_۱$ باشد مدت زمان حرکت متحرک دوم $t_۲ = t_۱ - ۵$ خواهد بود. از این‌رو معادلهٔ حرکت متحرک دوم خواهد شد: $x_۲ = vt_۲ \Rightarrow x_۲ = ۵(t_۱ - ۵)$

معادلهٔ دو متحرک را با هم قرار می‌دهیم:

$$x_۱ = x_۲ \Rightarrow t_۱^۲ = ۵t_۱ - ۲۵ \Rightarrow t_۱^۲ - ۵t_۱ + ۲۵ = ۰ \Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = ۲۵ - ۱۰۰ < ۰$$

معادله بدون جواب است یعنی دو متحرک هرگز به هم نمی‌رسند. نمای ۳۴

بازی با سوال **متحرک A با شتاب ثابت $۱m/s^۲$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کند، هم‌زمان با آن متحرک B از ۱۰۰ متر عقب‌تر در همان جهت با سرعت ثابت ۵۴km/h به دنبال A به راه می‌افتد. دو متحرک در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه از کنار هم می‌گذرند؟**

۱) ۱۰ و ۲۰ ۲) ۱۰ و ۳۰ ۳) ۲۰ و ۳۰ ۴) ۱۵ و ۲۵

پاسخ **معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته و برابر قرار می‌دهیم:**

معادلهٔ حرکت متحرک A را می‌نویسیم محل شروع حرکت متحرک A مبدأ مکان فرض می‌کنیم.

$$x_A = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow x_A = \frac{۱}{۲}t^۲$$

متحرک B از ۱۰۰ متر عقب‌تر هم‌زمان با سرعت ۵۴km/h به راه می‌افتد. سرعت B را بر حسب m/s به‌دست می‌آوریم.

$$v_B = ۵۴km/h = ۵۴\times\frac{۱۰۰۰m}{۳۶۰۰s} \Rightarrow v_B = ۱۵m/s$$

معادلهٔ حرکت B را نوشته و با معادلهٔ حرکت A برابر قرار می‌دهیم.

$$x_B = vt + x_۰ \Rightarrow x_B = ۱۵t - ۱۰۰ \ , \ x_A = x_B \Rightarrow \frac{۱}{۲}t^۲ = ۱۵t - ۱۰۰$$

$$t^۲ - ۳۰t + ۲۰۰ = ۰ \Rightarrow (t-۱۰)(t-۲۰) = ۰ \Rightarrow t = ۱۰s \ , \ t = ۲۰s$$

گزینهٔ ۱

B ۶۷۰ ۳

۱۵ **خط فکری** شتاب حرکت متحرک اول داده نشده، زمان رسیدن دو متحرک به هم از شما خواسته نشده بلکه سرعت متحرک اول در لحظهٔ رسیدن به متحرک دوم از شما خواسته شده بنابراین برای متحرک اول از معادلهٔ مستقل از شتاب و برای متحرک دوم معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت را بنویسید و برابر قرار دهید.

جابه‌جایی دو متحرک یکسان است. متحرک اول دارای حرکت با شتاب ثابت با تندی اولیهٔ $\frac{v}{۲}$ و متحرک دوم دارای حرکت با تندی ثابت v است. بنابراین:

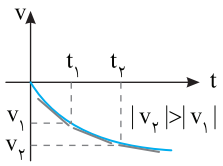
$$\Delta x_۱ = \frac{v_۲ + v_۱}{۲}\Delta t \Rightarrow \Delta x_۱ = \frac{v' + \frac{v}{۲}}{۲}\Delta t \ , \ \Delta x_۲ = v\Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta x_۱ = \Delta x_۲ \Rightarrow v\Delta t = \frac{v' + \frac{v}{۲}}{۲}\Delta t \Rightarrow v' = \frac{۳v}{۲}$$

نمای ۳۴

B ۶۷۰ ۲

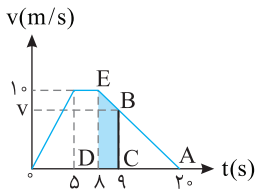
۱۶ **به نمودار دقت کنید.** تندی متحرک در حال افزایش است و حرکت تندشونده است. از طرفی نمودار سرعت زمان سهمی است بنابراین قطعاً حرکت دارای شتاب ثابت نیست زیرا نمودار $v-t$ حرکت با شتاب ثابت خط راست مایل است بنابراین شتاب این متحرک متغیر است.



نمای ۱۸

B ۶۷۰ ۳

۱۷ **باید مساحت سطح رنگی را به‌دست آورید.** قاعدهٔ بزرگ این ذوزنقه ED=۱۰ است. باید قاعدهٔ کوچک آن (BC) یعنی سرعت v را به کمک شیب خط AE به‌دست آورد.



$$\frac{۰-۱۰}{۲۰-۸} = \frac{۰-v}{۲۰-۹} \Rightarrow v = \frac{۱۱۰}{۱۲} m/s$$

اکنون جابه‌جایی را حساب می‌کنیم: $\Delta x = S \Rightarrow S = \frac{۱۰+\frac{۱۱۰}{۱۲}}{۲}\times ۱ = \frac{۲۳۰}{۲\times ۱۲} = \frac{۱۱۵}{۱۲} m$

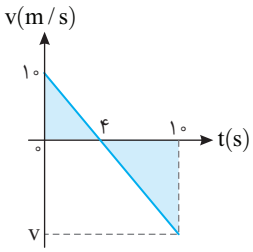
نمای ۴۰

B ۶۷۰ ۲

۱۸ **شتاب حرکت** را به‌دست می‌آوریم: $a = \frac{v-v_۰}{t} \Rightarrow a = \frac{۰-۱۰}{۴} = -۲/۵m/s^۲$

مکان را حساب می‌کنیم: $x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰$

$$x = \frac{۱}{۲}(-۲/۵)(۱۰۰) + ۱۰\times ۱۰ + ۲ \Rightarrow x = -۱۲۵ + ۱۰۰ + ۲ \Rightarrow x = -۲۳m$$



روش استفاده از سطح زیر نمودار:

۱ ابتدا سرعت در لحظهٔ $t=۱۰s$ را به کمک شیب خط حساب می‌کنیم:

$$\frac{v-۱۰}{۱۰-۰} = \frac{۰-۱۰}{۴-۰} \Rightarrow v = -۱۵m/s$$

۲ سطح زیر نمودار را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x = S \Rightarrow x - x_۰ = \frac{۱۰\times ۴}{۲} + \left(\frac{-۱۵\times ۶}{۲}\right) \xrightarrow{x_۰ = ۲m} x - ۲ = ۲۰ + (-۴۵) \Rightarrow x = -۲۳m$$

نمای ۴۰

B ۶۷۰ ۳

۱۹ **۱** **سرعت** از صفر در مدت $t_۱$ با شتاب $۲m/s^۲$ به v می‌رسد، سپس در مدت $t_۲$ با شتاب $-۳m/s^۲$، از v به صفر می‌رسد. بنابراین شما می‌توانید به کمک معادلهٔ سرعت زمان رابطهٔ بین $t_۱$ و $t_۲$ به‌دست بیاورید.

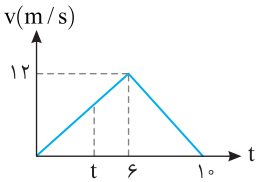
$$v = at + v_۰ \begin{cases} \xrightarrow{a=۲m/s^۲} v = ۲t_۱ \Rightarrow t_۱ = \frac{v}{۲} \\ \xrightarrow{a=-۳m/s^۲} ۰ = -۳t_۲ + v \Rightarrow t_۲ = \frac{v}{۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{t_۱}{t_۲} = \frac{۳}{۲} \quad (۱)$$

۲ کل مدت حرکت ۱۰s است بنابراین:

$$t_۱ + t_۲ = ۱۰ \xrightarrow{(۱)} \frac{۳}{۲}t_۲ + t_۲ = ۱۰ \Rightarrow t_۲ = ۴s \ , \ t_۱ = ۶s$$

۳ سرعت در لحظهٔ $t_1=۶s$ خواهد شد: $v=at+v_۰\Rightarrow v=۲\times۶=۱۲m/s$

۴ جابه‌جایی کل برابر سطح زیر نمودار سرعت زمان شکل روبه‌روست:



$\Delta x=\frac{۱۲\times۱۰}{۲}\Rightarrow\Delta x=۶۰m$

۵ بنا به فرض مسئله جابه‌جایی در $\frac{۵}{۱۲}$ اول مسیر برابر است با: $\Delta x_۱=\frac{۵}{۱۲}\times۶۰=۲۵m$

۶ نسبت مساحت‌ها با مربع نسبت تشابه مثلث برابر است، از این‌رو:

$\frac{۲۵}{۳۶}=(\frac{t}{۶})^۲\Rightarrow\frac{۵}{۶}=\frac{t}{۶}\Rightarrow t=۵s$

۷ سرعت متوسط برابر است با: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۲۵}{۵}\Rightarrow v_{av}=۵m/s$

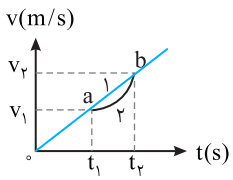
میانبر هر گاه متحرک با شتاب $a_۱$ از حال سکون به راه بیافتد و در مدت $t_۱$ جابه‌جایی $\Delta x_۱$ را طی کند سپس ترمز کرده با شتاب $a_۲$ در مدت $t_۲$ و جابه‌جایی $\Delta x_۲$ متوقف شود خواهیم داشت:

$\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{t_۱}{t_۲}=\frac{\Delta x_۱}{\Delta x_۲}$

بنابراین نسبت $\frac{t_۱}{t_۲}=\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{۳}{۲}$ خواهد بود. نمای ۳۵

B ۶۷۰ ۲

۲۰ چون نمودار منحنی است، پس حرکت با شتاب متغیر می‌باشد. بنابراین $v_{av}\neq\frac{v_۱+v_۲}{۲}$ خواهد بود. زیرا فقط در حرکت با شتاب ثابت که نمودار سرعت - زمان آن خط راست بوده سرعت متوسط برابر $v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}$ است. از طرفی



سطح زیر نمودار سرعت - زمان برابر تغییر مکان متحرک است و سطح زیر نمودار (۲) در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ از سطح زیر نمودار یک حرکت فرضی با شتاب ثابت مانند نمودار (۱) کمتر است، پس سرعت متوسط در نمودار (۲) از سرعت متوسط در نمودار (۱) کمتر خواهد بود.

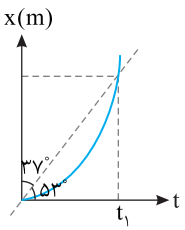
$S_۲<S_۱\Rightarrow\Delta x_۲<\Delta x_۱\Rightarrow v_{av,۲}<v_{av,۱}\Rightarrow v_{av}<\frac{v_۱+v_۲}{۲}$ نمای ۴۰

A ۶۷۰ ۲

۲۱ **شیب خط قاطع** نمودار x-t برابر سرعت متوسط است

$v_{av}=\tan\alpha=\tan۵۳^\circ$

از این‌رو: $\Rightarrow v_{av}=\frac{۰/۸}{۰/۶}=\frac{۴}{۳}m/s$

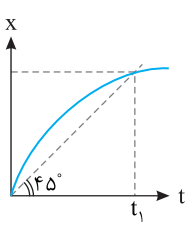


از طرفی نمودار مکان - زمان سهمی است، یعنی حرکت دارای شتاب ثابت است، از این‌رو: $v_{av}=\frac{v+v_۰}{۲}$

در لحظهٔ $t=۰$ سرعت اولیه صفر است. بنابراین سرعت در لحظهٔ $t_۱$ خواهد شد:

$\frac{۴}{۳}=\frac{v+۰}{۲}\Rightarrow v=\frac{۸}{۳}m/s$ نمای ۳۸

بازی با سؤال در شکل روبه‌رو نمودار مکان - زمان متحرکی که بخشی از یک سهمی است، رسم شده است. در لحظهٔ $t=\frac{t_۱}{۲}$ سرعت متحرک چند متر بر ثانیه است؟ (مقیاس روی هر محور معادل یکای کمیت است.)



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

پاسخ شیب خط قاطع نمودار مکان - زمان برابر سرعت متوسط در آن بازهٔ زمانی است. پس سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا $t_۱$ را به کمک شیب خط قاطع به‌دست می‌آوریم.

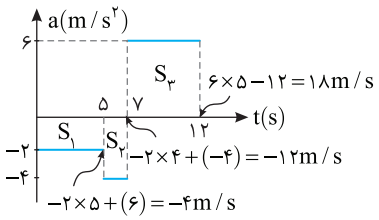
$v_{av}=\tan۴۵^\circ\Rightarrow v_{av}=۱m/s$

نمودار سهمی است و حرکت دارای شتاب ثابت است و سرعت متوسط برابر $v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}$ بوده و در واقع سرعت متوسط میانگین سرعت ابتدایی و انتهایی بوده و برابر سرعت در وسط بازهٔ زمانی است. بنابراین در لحظهٔ $t=\frac{t_۱}{۲}$ سرعت برابر است با: $v=۱m/s$

گزینهٔ ۱

B ۶۷۰ ۴

۲۲ **خط فکری** یک مسئله محاسباتی ریاضی در اختیار داریم. باید نمودار سرعت - زمان را با دقت رسم کنید و جابه‌جایی و مکان متحرک را از سطح زیر نمودار حساب کرده و مشخص کنید که دورترین فاصله متحرک از مبدأ چند متر است.



۱ سرعت در لحظه‌های $t=۵s$ ، $t=۷s$ و $t=۱۲s$ را حساب می‌کنیم.

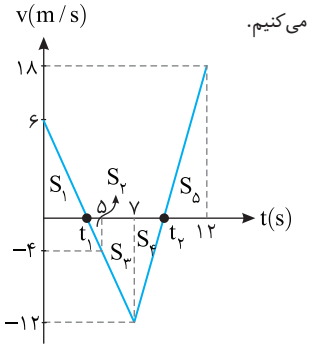
$t=۵s:S_۱=\Delta v\Rightarrow-۲\times۵=v_۱-۶\Rightarrow v_۱=-۴m/s$

$t=۷s:S_۲=\Delta v_۲\Rightarrow-۴\times(۷-۵)=v_۲-(-۴)$

$\Rightarrow-۸=v_۲+۴\Rightarrow v_۲=-۱۲m/s$

$t=۱۲s:S_۳=\Delta v_۳\Rightarrow۶\times(۱۲-۷)=v_۳-(-۱۲)\Rightarrow v_۳=۳۰-۱۲\Rightarrow v_۳=۱۸m/s$

۲ نمودار را رسم می‌کنیم.



۳ لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ را به کمک شیب خط مشخص می‌کنیم.

$\frac{۶-(-۴)}{۵-۰}=\frac{۶-۰}{t_۱-۰}\Rightarrow t_۱=۳s$ ، $\frac{۱۸-(-۱۲)}{۱۲-۷}=\frac{۱۸-۰}{۱۲-t_۲}\Rightarrow۱۲-t_۲=۳\Rightarrow t_۲=۹s$

۴ مکان در لحظه‌های ۳s، ۵s، ۷s، ۹s و ۱۲s را به‌دست می‌آوریم.

$t=۳s:S_۱=\Delta x_۱\Rightarrow\frac{۶\times۳}{۲}=x_۱-۴\Rightarrow x_۱=۱۳m$

$t=۵s:S_۲=\Delta x_۲\Rightarrow\frac{(۵-۳)\times(-۴)}{۲}=x_۲-۱۳\Rightarrow x_۲=۹m$

$t=۷s:S_۳=\Delta x_۳\Rightarrow\frac{-۴+(-۱۲)}{۲}\times۲=x_۳-۹\Rightarrow x_۳=-۷m$

$t=۹s:S_۴=\Delta x_۴\Rightarrow\frac{-۱۲\times(۹-۷)}{۲}=x_۴-(-۷)\Rightarrow x_۴=-۱۹m$

$t=۱۲s:S_۵=\Delta x_۵\Rightarrow\frac{۱۸\times(۱۲-۹)}{۲}=x_۵-(-۱۹)\Rightarrow x_۵=+۸m$

۵ بنابراین در لحظهٔ $t=۹s$ دورترین فاصله از مبدأ ۱۹m است. نمای ۴۲

۲۳ **B** **۲** **۶۷۰**

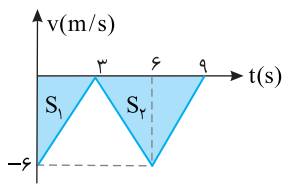
تندی در لحظه‌های $t=0$ ، $t=3s$ ، $t=6s$ و $t=9s$ را به‌دست آورده و نمودار سرعت- زمان را رسم می‌کنیم:

$t=0 \Rightarrow v_0=-6m/s$

$t=3s \Rightarrow v=a_1t_1+v_0 \Rightarrow v=2\times3+(-6)=0$

$t=6s \Rightarrow v=(-2\times3)+0=-6m/s$

$t=9s \Rightarrow v=(2\times3)+(-6)=0$

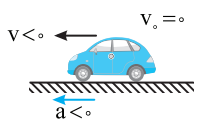


مسافت طی شده برابر است با:

$d=|S_1|+|S_2| \Rightarrow d=|\frac{(-6)\times3}{2}|+|\frac{6\times(-6)}{2}| \Rightarrow d=9+18=27m$ نمای ۴۲

۲۴ **C** **۳** **۶۷۰**

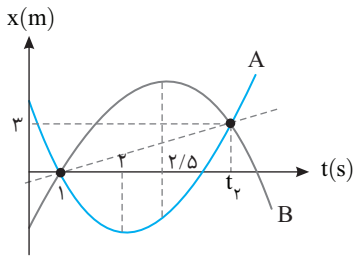
متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده است. در بازهٔ زمانی صفر تا $2s$ در جهت منفی محور، با شتاب منفی بر تندی آن افزوده می‌شود. دقت کنید شتاب منفی به معنی حرکت کندشونده نیست. اگر مطابق شکل، متحرک از مبدأ و خلاف جهت محور، شروع به حرکت کند، با شتاب منفی دارای حرکت تندشونده است زیرا بردار سرعت و شتاب هم‌جهت است. در لحظهٔ $t=2s$ ، شتاب تغییر جهت (علامت) داده است یعنی شتاب مثبت است اما همچنان سرعت منفی است و حرکت بعد از $t=2s$ کندشونده است، پس بیشترین سرعت در $t=2s$ است.



نمای ۴۲

۲۵ **C** **۳** **۶۷۰**

نکته هرگاه دو متحرک دارای حرکت با شتاب ثابت، یکبار در لحظهٔ t_1 از کنار هم بگذرند و مجدداً در لحظهٔ t_2 نیز از کنار هم بگذرند در لحظهٔ $t=\frac{t_1+t_2}{2}$ ، سرعت آن‌ها با هم برابر است.



به نمودار نگاه کنید در لحظهٔ $t_1=1s$ و در لحظهٔ t_2 دو متحرک از کنار هم می‌گذرند و در لحظهٔ $t=2/5s$ سرعت آن‌ها با هم برابر است. از این‌رو لحظهٔ t_2 خواهد شد:

$t=\frac{t_1+t_2}{2} \Rightarrow 2/5=\frac{1+t_2}{2} \Rightarrow t_2=4s$

با توجه به نمودار متحرک A باید نقاط $(1,0)$ و $(4,3)$ در معادلهٔ حرکت صدق کند.

$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \xrightarrow{t=1s} 0=\frac{1}{2}a+v_0+x_0 \quad (1)$

$\xrightarrow{t=4s} 3=\frac{1}{2}a\times4^2+4v_0+x_0 \Rightarrow 3=8a+4v_0+x_0 \quad (2)$

برای رأس سهمی $t=2s$ می‌توان نوشت:

$t=\frac{-b}{2a} \Rightarrow 2=\frac{-v_0}{2(\frac{1}{2}a)} \Rightarrow v_0=-2a \quad (3)$

دو رابطه (۱) و (۲) را از هم کم می‌کنیم:

$3=8a+4v_0+x_0$

$0=\frac{1}{2}a+v_0+x_0$

$3=7/5a+3v_0$

از رابطهٔ (۳) در رابطهٔ بالا جای‌گذاری می‌کنیم:

$3=7/5a+3(-2a) \Rightarrow 3=1/5a \Rightarrow a=2m/s^2$

نمای ۳۹

فصل دوم

دینامیک

پنجره ۱

A ۶۷۱ ۴

اثر نیرو بر یک جسم به شکل‌های مختلف مانند شروع به حرکت، توقف، کم و زیاد شدن تندی، تغییر جهت سرعت و تغییر شکل جسم، خود را نشان می‌دهد. به‌طور خلاصه «نیروی وارد بر جسم می‌تواند سبب تغییر سرعت جسم یا تغییر شکل آن شود» بنابراین هر سه گزینه درست است.

A ۶۷۲ ۱

یادآوری «یک جسم، حالت سکون یا حرکت با سرعت ثابت خود را حفظ می‌کند مگر آنکه نیروی خالصی (غیرصفر) به آن وارد شود.» (قانون اول نیوتون)

به عبارت بهتر وقتی نیروهای وارد بر جسمی متوازن باشند وقتی که جسم در حال حرکت باشد سرعت جسم تغییر نمی‌کند و ثابت می‌ماند.

بازی با سوال **هنگامی که برایند نیروهای وارد بر جسم صفر است، کدام گزارهٔ زیر درست است؟**

۱) جسم الزاماً ساکن است.

۲) جسم الزاماً در حال حرکت است.

۳) جسم ممکن است ساکن یا متحرک باشد.

۴) جسم الزاماً دارای حرکت با سرعت ثابت است.

پاسخ **بنابر قانون اول نیوتون، هرگاه بر جسمی نیرو وارد نشود، اگر جسم ساکن است، ساکن می‌ماند (تعادل ایستا)، اگر در حال حرکت است، به حرکت با سرعت ثابت ادامه می‌دهد (تعادل جنبشی).** گزینهٔ ۳

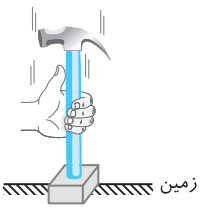
A ۶۷۳ ۱

آزمایش گالیله بیانگر قانون اول نیوتون می‌باشد که هرگاه جسمی در حال حرکت با سرعت ثابت باشد و به آن نیروی خالصی وارد نشود به حرکت با همان سرعت ادامه خواهد داد.

A ۶۷۴ ۳

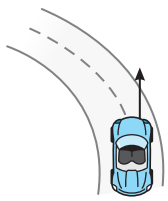
با توجه به قانون اول جسم درون واگن قطار تمایل دارد حرکت خود را حفظ کند. بنابراین می‌توان گفت هنگامی که شخص درون واگن قرار دارد همواره از تغییر حرکت لحظه‌ای قطار جا می‌ماند. یعنی هنگامی که قطار ترمز می‌کند شخص با همان سرعت قبلی در حال حرکت می‌باشد، پس به سمت جلو منحرف می‌شود و هنگامی که حرکت قطار تندشونده می‌شود و ناگهان سرعت قطار افزایش یابد، شخص با همان سرعت کم در حال حرکت است پس شخص به سمت عقب منحرف می‌شود. در پاسخ این تست‌ها همواره به زندگی روزمرهٔ خود دقت کنید. اگر در اتوبوس ایستاده باشید و اتوبوس ناگهان ترمز کند رو به جلو منحرف می‌شود و اگر از حال سکون ناگهان به راه بیفتد به سمت عقب منحرف می‌شوید.

A ۶۷۵ ۲



بناهای ساختمانی وقتی سر چکش آن‌ها مقداری شُل می‌شود، دستهٔ آن را محکم به سطح زمین می‌کوبند. زیرا آن‌ها به‌طور تجربی می‌دانند با این حرکت، دسته چکش که رو به پایین در حرکت است ناگهان متوقف می‌شود. اما سرچکش به حرکت خود رو به پایین (بنا به قانون اول) ادامه می‌دهد. در چکش‌ها معمولاً ضخامت دستهٔ چکش از سر تا ته آن افزایش می‌یابد. بنابراین با پایین رفتن سر چکش، درگیری سر چکش با دسته بیشتر می‌شود و دسته در سر چکش سفت می‌شود.

B ۶۷۶ ۴



تمایل اجسام به حفظ وضع موجود را لختی جسم می‌گوییم. در واقع وقتی خودرو با سرعت v روی خط راست در حرکت است، شما نیز روی خط راست با سرعت v در حرکت هستید. وقتی خودرو دور می‌زند، شما بنابر قانون اول نیوتون تمایل دارید بر مسیر مستقیم حرکت کنید و به سمت خارج پیچ متمایل می‌شوید. قانون اول نیوتون را اصل اینرسی (لختی) نیز می‌گویند.

B ۶۷۷ ۴

در پاسخ به این پرسش باید به مفهوم لختی بپردازیم. جسم بنا به قانون اول نیوتون در مقابل تغییر سرعت از خود مقاومت نشان می‌دهد، یعنی جسم تمایل دارد وضع موجود خود را حفظ کند. به این مقاومت، لختی گویند.

اگر نخ پایینی را به سرعت بکشیم، لختی وزنه مانع حرکت کردن وزنه شده و نخ از پایین وزنه پاره می‌شود. اما اگر نخ پایینی را به آرامی پایین بکشیم، نیروی F و وزن وزنه با هم جمع شده و نخ از قسمت بین وزنه و سقف یعنی از قسمت بالایی پاره می‌شود.

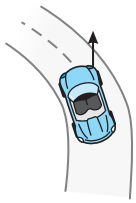
A ۶۷۸ ۲

اتومبیل B ساکن است و می‌خواهد حالت خود را حفظ کند هنگامی که A ناگهان شروع به حرکت کند مقاومت اتومبیل B در مقابل تغییر حالت (لختی B) سبب پاره‌شدن سیم بکسل می‌شود.

به‌طور مثال: اگر یک کیسهٔ دسته‌دار را پر از سیب‌زمینی کرده و شما دسته کیسه را بگیرید و بخواهید ناگهان آن را از سطح زمین بلند کنید، به دلیل لختی، امکان دارد دستهٔ کیسه پاره شود.

A ۶۷۹ ۲

نکته اگر در خودرو نشسته باشید و خودرو با تندی ثابت دور میدانی به سمت چپ بچرخد شما به سمت خارج پیچ (به سمت راست) منحرف می‌شوید که این پدیده شاهدی بر قانون اول نیوتون است.



عروسکی که از نخ آویزان است اگر اتومبیل ترمز کند، عروسک به حرکت خودرو به جلو ادامه می‌دهد و گزینهٔ (۱) نادرست است.

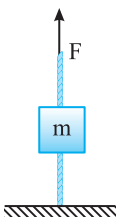
اگر اتومبیل به سمت چپ در حال پیچیدن باشد از دید شخص درون اتومبیل عروسک به سمت راست منحرف می‌شود. زیرا می‌خواهد مطابق شکل بنا به قانون اول نیوتون به حرکت خود ادامه دهد و گزینهٔ (۲) درست و گزینهٔ (۳) نادرست است.

وقتی تندی اتومبیل (بزرگی سرعت آن) ثابت باشد، ممکن است جهت سرعت آن تغییر کند و گزینهٔ (۴) نادرست است.

B ۶۸۰ ۴

بنا به خاصیت لختی اگر خودرو شتاب رو به جلو داشته باشد، آونگ روبه عقب منحرف می‌شود و در حرکت دایره‌ای همواره آونگ به سمت خارج پیچ (به‌سمت بیرون دایره) منحرف می‌شود.

B ۶۸۱ ۲



نکتهٔ مهم در حل این مسئله این است که آیا وزن وزنهٔ m در کشیدگی و پاره شدن ریسمان پایینی مؤثر است؟

فرض کنید که وزنهٔ m روی سطح زمین قرار دارد و ریسمان پایینی به آن متصل است اگر نیروی F را به تدریج و یا ناگهانی به ریسمان وارد کنیم در هر دو حالت نیرو ریسمان بالایی را می‌کشد و می‌تواند آن را پاره کند.

اگر مطابق شکل نیروی F وزنه را از سطح زمین بلند کند و ریسمان پایینی را بکشد همواره کشیدگی ریسمان پایینی از کشیدگی ریسمان بالایی کمتر بوده و احتمال پاره شدن ریسمان بالایی بیشتر است.

A ۶۸۲ ۴

یادآوری قانون دوم نیوتون: هرگاه بر جسمی نیرو وارد شود، جسم در جهت نیرو، شتابی می‌گیرد که با نیرو متناسب و با جرم جسم نسبت وارون دارد. $\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}$

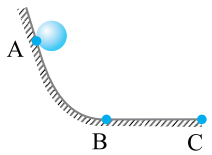
ممکن است نیروی خالص وارد بر جسم در خلاف جهت حرکت جسم باشد و باعث توقف جسم شود بنابراین گزینهٔ (۱) و (۳) نادرست است.

اگر نیروی خالص وارد بر جسم ثابت باشد، شتاب جسم نیز ثابت است و گزینهٔ (۲) نادرست است.

وقتی بر جسم نیروی خارجی خالصی وارد شود، بنابه قانون دوم نیوتون $(\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m})$، جسم شتاب می‌گیرد و گزینهٔ (۴) درست است.

A ۶۸۳ ۳

جسم در نقطهٔ A رها شده و شروع به حرکت کرده بنابراین حرکتش شتاب‌دار است و نیروی خالص وارد بر جسم قطعاً صفر نیست. $F_{net_1} \neq 0$



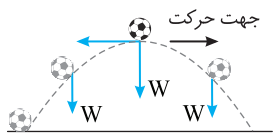
جسم در مسیر BC روی سطح افقی کاملاً صیقلی قرار دارد و نیرویی در جهت حرکت و یا در خلاف جهت حرکت بر آن وارد نمی‌شود و با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد بنابراین نیروهای وارد بر آن متوازن بوده و $F_{net_2} = 0$ است.

B ۶۸۴ ۴

نکته چگونگی حرکت جسم پس از وارد آمدن نیرو، به سرعت اولیهٔ جسم و زاویه‌ای که نیرو با راستای سرعت اولیه می‌سازد، بستگی دارد.

اگر جسم ساکن باشد و بر آن یک نیرو وارد شود، جسم در راستای نیرو شروع به حرکت می‌کند و اگر نیرو تغییر جهت ندهد، حرکت جسم روی خط راست است. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

اگر جسم دارای سرعت اولیه باشد، مثلاً گلوله‌ای که در شرایط خلأ مطابق شکل، پرتاب شود، در تمام مسیر نیروی وارد بر جسم نیروی گرانشی و رو به پایین است، اما مسیر حرکت خمیده است. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.



اگر یک اتوبوس دور یک میدان با تندی ثابت در حال حرکت باشد چون مسیر آن خمیده است حرکت آن شتابدار است و نیروی خالص وارد بر آن صفر نیست بنابراین ممکن است که بر جسم نیرو وارد شود و بزرگی سرعت (تندی) آن ثابت بماند. پس گزینهٔ (۳) نیز درست است.

A ۶۸۵ ۴

نکته برایند نیروهای وارد بر جسم، تنها شتاب حرکت را مشخص می‌کند و در مورد جهت حرکت جسم به تنهایی اطلاعاتی نمی‌دهد. $\vec{F}=m\vec{a}$

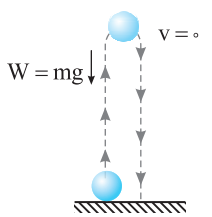
نیروی خاص وارد بر جسم رو به شمال است، بنابراین شتاب حرکت بنا به قانون دوم نیوتون $(\vec{F}=m\vec{a})$ رو به شمال است. حرکت متحرک کندشونده باشد، جهت سرعت در خلاف جهت شتاب و رو به جنوب است و گزینهٔ (۱) درست است.

اگر حرکت تندشونده باشد، جهت سرعت باید در جهت شتاب باشد یعنی متحرک رو به شمال در حرکت است و گزینهٔ (۲) درست است.

اگر مسیر خمیده باشد، نیروی وارد بر جسم و سرعت جسم با هم زاویه می‌سازند، بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

B ۶۸۶ ۲

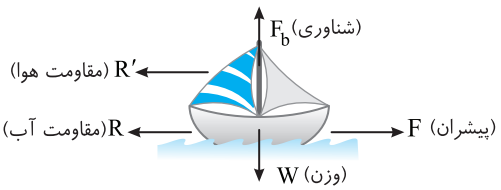
اگر نیروهای وارد بر جسم در بالاترین نقطه مسیر متوازن باشند بنا به قانون اول نیوتون جسم باید ساکن باقی بماند اما جسم به سوی پایین برمی‌گردد بنابراین در بالاترین نقطهٔ مسیر نیروها متوازن نیستند و در طول مسیر رفت و برگشت به جسم نیروی وزن رو به پایین وارد می‌شود. بنابراین جسم در بالاترین نقطهٔ مسیر به‌طور لحظه‌ای ساکن است اما در تعادل نیست. $(F_{net} \neq 0)$



B ۶۸۷ ۴

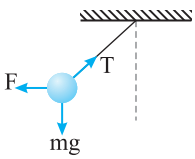
یادآوری اگر جسمی درون مایعی قرار گیرد از طرف مایع بر آن نیرویی رو به بالا وارد می‌شود که منشأ این نیرو اختلاف فشار مایع در عمق‌های مختلف است و همین نیرو است که کشتی‌ها را بر سطح آب شناور نگه می‌دارد که به آن نیروی شناوری (F_b) گویند. منظور از نیروی پیشران نیز همان نیروی موتور قایق یا نیرویی که باد بر بادبان‌ها وارد می‌کند یا نیرویی است که در اثر پارو زدن باعث پیشروی قایق می‌شود. قایق با سرعت ثابت در حال حرکت روی سطح دریاچه آرام است. بنابراین نیروهای وارد بر آن متوازن هستند و بر آن چهار نیرو وارد می‌شود:

۱ نیروی شناوری ۲ نیروی وزن ۳ نیروی پیشران (F)
۴ نیروی مقاومت آب (R) و هوا (R′)



A ۶۸۸ ۳

برای آن که یک گلولهٔ متصل به نخ را از راستای قائم منحرف کرده و ثابت نگه دارید قطعاً باید بر آن نیرویی مانند F وارد کنید. بنابراین حداقل تعداد نیروهای وارد بر گلوله که باعث می‌شود گلوله در این وضعیت ساکن بماند، سه نیروی نشان داده شده در شکل است.



B ۶۸۹ ۱

گلوله در حال سقوط آزاد است و به آن نیروی وزن mg وارد می‌شود. برای آن‌که حرکت آن کندشونده شود و متوقف گردد باید نیروی F رو به بالا بر آن وارد شود که این نیرو باید از W بزرگ‌تر باشد تا نیروی خالص وارد بر گلوله رو به بالا و خلاف جهت حرکت بوده سبب کاهش سرعت شده و گلوله متوقف شود.

A ۶۹۰ ۴

بنابر قانون سوم نیوتون، هرگاه جسم A بر جسم B نیروی F را وارد کند، جسم B نیز بر جسم A نیروی $-F$ را وارد می‌کند. بنابراین نقطهٔ اثر نیروهای کنش و واکنش متفاوت است، به همین علت بررسی برایند آن‌ها اصولاً مفهوم فیزیکی ندارد.

دقت کنید در گزینهٔ (۳) بیان شده است که برایند نیروی کنش و واکنش صفر نیست درحالی که این دو نیرو، بر دو جسم وارد می‌شود و برایند فیزیکی ندارند که صفر و یا غیرصفر باشد.

A ۶۹۱ ۳

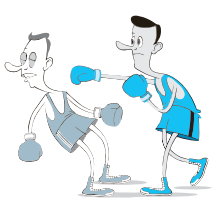
اندازهٔ نیروی کنش و واکنش یکسان است و گزارهٔ (الف) درست است.

نیروهای کنش و واکنش در خلاف جهت هم بوده و جهت آن‌ها یکسان نیست پس گزارهٔ (ب) نادرست است. نیروهای کنش و واکنش همواره به دو جسم وارد می‌شوند و هم نوع‌اند، جنس نیروهای کنش و واکنش یکسان است و گزارهٔ (پ) درست است.

A ۶۹۲ ۳

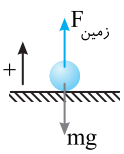
بنابر قانون سوم نیوتون نیروهای کنش و واکنش بین دو جسم یکسان و در خلاف جهت یکدیگر است.

از این‌رو نیرویی که صورت شما بر دست تایسون وارد می‌کند با نیرویی که تایسون به صورت شما وارد می‌کند دقیقاً هم‌اندازه و در خلاف جهت هم هستند.



B ۶۹۳ ۲

هنگام برخورد توپ با زمین ابتدا توپ با سرعت v به سمت پایین به زمین برخورد می‌کند تا به طور لحظه‌ای متوقف شود یعنی در این حالت حرکت متحرک کندشونده است و سرعت و شتاب خلاف جهت هم‌اند پس جهت شتاب به سمت بالا است. می‌دانیم شتاب در جهت نیروی برایند قرار دارد پس نیروی برایند وارد بر جسم به سمت بالا می‌باشد.

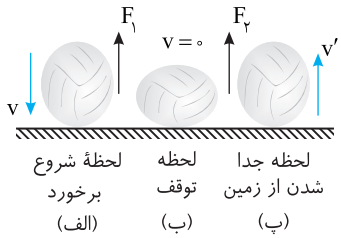


$$F_{net}=ma \xrightarrow{a>0} F_{net}>0 \Rightarrow F_{زمین}-mg>0 \Rightarrow F_{زمین}>mg$$

هنگام بلند شدن توپ از زمین سرعت از $v=0$ به سرعت v' به سمت بالا خواهد رسید، پس حرکت تندشونده و جهت شتاب و سرعت یکسان است، پس شتاب به سمت بالا و برایند نیروها مجدداً به سمت بالا است که مشابه محاسبات بالا $F_{زمین}>mg$ است.

B ۶۹۴ ۴

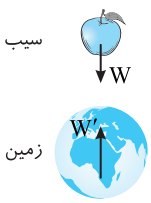
به جمله‌ها و عبارت‌های تست دقت کنید. «در تماس توپ با زمین» نه قبل و نه بعد از تماس توپ با زمین و «نیروی وارد بر توپ» نه نیروی وارد بر سطح. بنابراین از لحظهٔ شروع تماس توپ با زمین (شکل الف) بر توپ نیرویی رو به بالا وارد شده و آن‌را از حرکت می‌اندازد (شکل ب) و سپس این نیروی رو به بالا، توپ را مجدداً رو به بالا هُل می‌دهد (شکل پ).



بنابراین F_1 و F_2 هر دو رو به بالا هستند.

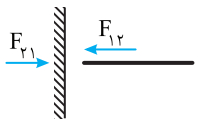
B ۶۹۵ ۴

خط فکری در بررسی نیروی واکنش باید شما مشخص کنید که بر جسم از طرف کدام جسم نیرو وارد می‌شود تا بتوانید دربارهٔ نیروی واکنش اظهارنظر کنید. بنا به قانون سوم نیوتون، اگر جسم A بر جسم B نیروی F را وارد کند، جسم B نیز به جسم A نیروی $-F$ را وارد می‌کند. نیروی وزن نیرویی است که کرهٔ زمین بر جسم وارد می‌کند پس واکنش آن نیرویی است که جسم بر مرکز کرهٔ زمین وارد می‌کند.



A ۶۹۶ ۳

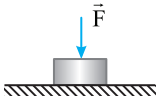
خط فکری در بررسی نیروی واکنش ابتدا باید دو جسمی که به هم نیرو وارد می‌کنند و مورد پرسش است را مشخص کنید. در این تست، یک جسم، دست شخص و جسم دیگر طناب است بنابراین نیروی کنش بر یکی و واکنش بر دیگری وارد می‌شود و نیرویی که دیوار به طناب وارد می‌کند و بالعکس نقشی در کنش و واکنش بین دست و طناب ندارد.



نیرویی که طناب بر دیوار وارد می‌کند واکنش نیرویی است که دیوار بر طناب وارد می‌کند و گزینهٔ (۱) و (۲) نادرست است.

واکنش نیرویی که دست بر طناب وارد می‌کند توسط طناب بر دست وارد می‌شود. گزینهٔ (۳) درست و گزینهٔ (۴) نادرست است.

بازی با سوال **جسمی به وزن W روی یک سطح افقی (تکیه‌گاه) قرار دارد و نیروی عمودی F رو به پایین بر آن وارد می‌شود. کدام گزینه واکنش نیروی F است؟**



۱) نیروی عمودی تکیه‌گاه F_N

۲) نیرویی که توسط سطح بر جسم وارد می‌شود.

۳) نیروی وزن جسم منهای نیروی عمودی تکیه‌گاه

۴) نیرویی که توسط جسم بر عامل به‌وجود آورندهٔ F وارد می‌شود.

پاسخ **گزینهٔ (۴) دقیقاً تعریف قانون سوم نیوتون در مورد نیروهای کنش و واکنش است.** گزینهٔ ٤

B ۶۹۷ ۱

با توجه به قانون سوم نیوتون واکنش نیروی F بر عامل به‌وجود آورنده‌اش وارد می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

نیروی W نیرویی است که توسط کرهٔ زمین بر جسم وارد می‌شود و واکنش آن توسط جسم بر کرهٔ زمین وارد می‌شود و گزینهٔ (۲) نادرست است.

نیروی عمودی تکیه‌گاه (F_N) نیرویی است که توسط سطح بر جسم وارد می‌شود و واکنش آن توسط جسم بر سطح وارد می‌شود بنابراین F_N و W واکنش یکدیگر نیستند و گزینه (۳) نادرست است.

نیروی F نیرویی است که سبب حرکت جسم می‌شود و واکنش آن بر عاملی که F را وارد می‌کند وارد می‌شود و نیروی f نیروی اصطکاکی است که از طرف سطح بر جسم وارد می‌شود و واکنش آن نیرویی است که از طرف جسم بر سطح وارد می‌شود یعنی F و f ارتباط به هم نداشته و واکنش هم نیستند و گزینهٔ (۴) نادرست است.

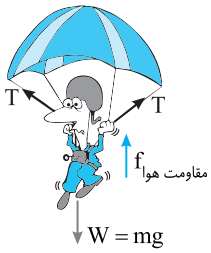
A ۶۹۸ ۲

یادآوری قانون سوم نیوتون: هرگاه جسم A بر جسم B نیروی F را وارد کند، جسم B نیز بر جسم A نیروی $-F$ را وارد می‌کند.

هنگام پرتاب موشک، موشک بر گازهای خروجی‌اش نیرویی رو به عقب (رو به پایین) وارد می‌کند. بنابه قانون سوم نیوتون گازهای خروجی به موشک نیرویی رو به جلو (رو به بالا) وارد می‌کنند که سبب حرکت موشک می‌شود.

A ۶۹۹ ۲

خط فکری واکنش نیروهای وارد بر چترباز از شما خواسته شده است بنابراین ابتدا شما باید مشخص کنید چه اجسامی، چه نیروهایی به چترباز وارد می‌کنند. آن‌گاه می‌توانید بگویید که واکنش نیروها به چه اجسامی وارد می‌شود.



نیروهای وارد بر چترباز عبارتند از:

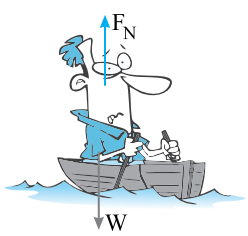
۱ نیروی وزن که توسط کره زمین بر شخص وارد می‌شود.

۲ نیرویی که طناب‌های چترنجات بر شخص وارد می‌کنند.

۳ نیروی مقاومت هوا که توسط هوا بر چترباز وارد می‌شود بنابراین واکنش این نیروها بر کرهٔ زمین، طناب‌ها و هوا وارد می‌شود.

A ۷۰۰ ۳

مطابق شکل شخص درون قایق نشسته و از طرف کرهٔ زمین نیروی وزن بر شخص وارد می‌شود که واکنش آن توسط شخص بر کره زمین وارد می‌شود. از طرفی کف قایق بر شخص نیروی F_N رو به بالا وارد می‌کند که



واکنش آن توسط شخص بر کف قایق رو به پایین وارد می‌شود. نیرویی که شخص بر پارو و پارو بر شخص وارد می‌کند نیز نیروی کنش و واکنش یکدیگرند، بنابراین واکنش نیروهای وارد به شخص توسط شخص به قایق، پارو و زمین وارد می‌شود.

A ۷۰۱ ۲

قانون دوم نیوتون را برای هر جسم به‌طور جداگانه نوشته و طرفین روابط را با هم مساوی قرار می‌دهیم:

$$F=m_1a_1\ ,\ F=m_2a_2 \xrightarrow{F=F} m_1a_1=m_2a_2 \Rightarrow 6a_1=9a_2 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{3}{2}$$

A ۷۰۲ ۱

رابطهٔ $F=ma$ را یک بار برای حالت اول و بار دیگر برای حالت دوم می‌نویسیم و سپس طرفین تساوی‌ها را با هم مساوی قرار می‌دهیم.

$$F=m\times 2 \quad (1)\ ,\ F=(m+5)1/8 \quad (2) \Rightarrow 2m=1/8m+9 \Rightarrow m=45kg$$

$$\xrightarrow{\text{در (۱) قرار می‌دهیم}} F=m\times 2 \Rightarrow F=90N$$

A ۷۰۳ ۱

۱ با توجه به شتاب و جرم واگن‌ها نیروی پیشران لوکوموتیو را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{\text{پیشران}}=m_1a \Rightarrow F_{\text{پیشران}}=5(200)\times 2=2000N$$

۲ در حالت دوم یک واگن از لوکوموتیو جدا شده و جرم کل قطار کاهش پیدا کرده و چون نیروی پیشران تغییر نکرده شتاب حرکت افزایش یافته و برابر خواهد شد با:

$$F_{\text{پیشران}}=m_2a' \Rightarrow 2000=4(200)a' \Rightarrow a'=2/5m/s^2$$

۳ بنابراین شتاب از $a=2m/s^2$ به $a'=2/5m/s^2$ رسیده است:

$$\text{درصد تغییرات}=\frac{\Delta a}{a}\times 100 \Rightarrow \text{درصد تغییرات}=\frac{2/5-2}{2}\times 100=0/25\times 100=25\%$$

A ۷۰۴ ۳

به نیروی وارد بر جسم ۲۰٪ افزوده شده پس نیروی وارد بر جسم خواهد شد:

$$F_۲=F_۱+۰/۲F_۱\Rightarrow F_۲=۱/۲F_۱$$

بنا به قانون دوم نیوتون $F=ma$ خواهیم داشت:

$$F_۲=۱/۲F_۱\Rightarrow ma_۲=۱/۲ma_۱\Rightarrow a_۲=۱/۲a_۱$$

B ۷۰۵ ۱

جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$ را بر حسب F به دست می‌آوریم:

$$F=ma\Rightarrow\begin{cases}F=m_۱\times ۱۲\Rightarrow m_۱=\frac{F}{۱۲}\\ F=m_۲\times ۴\Rightarrow m_۲=\frac{F}{۴}\end{cases}$$

اکنون شتاب حرکت جسمی به جرم $m_۲-m_۱$ را حساب می‌کنیم:

$$F=ma\Rightarrow F=(m_۲-m_۱)a$$

$$F=(\frac{F}{۴}-\frac{F}{۱۲})a\Rightarrow F=\frac{۳F-F}{۱۲}a\Rightarrow a=\frac{۱۲}{۲}=۶m/s^۲$$

A ۷۰۶ ۲

خط فکری به کمک قانون دوم نیوتون $F=ma$ با توجه به ثابت بودن F، جرم $m_۱$ و $m_۲$ را برحسب F به‌دست بیاورید سپس شتاب حرکت را برای جسمی به جرم $m_۲-m_۱$ و $m_۲+m_۱$ حساب کرده بر هم تقسیم کنید.

۱ با توجه به شتابی که نیروی F به جسم $m_۱$ و $m_۲$ می‌دهد داریم:

$$\begin{cases}F=m_۱a_۱\xrightarrow{a_۱=۱۰m/s^۲}F=۱۰m_۱\Rightarrow m_۱=\frac{F}{۱۰}\\ F=m_۲a_۲\xrightarrow{a_۲=۶m/s^۲}F=۶m_۲\Rightarrow m_۲=\frac{F}{۶}\end{cases}$$

۲ حال شتاب داده شده به جسمی به جرم $m_۲-m_۱$ و $m_۲+m_۱$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}F=(m_۲-m_۱)a'\Rightarrow F=(\frac{F}{۶}-\frac{F}{۱۰})a'\Rightarrow F=(\frac{۵F-۳F}{۳۰})a'\\ \Rightarrow a'=\frac{۳۰}{۲}=۱۵m/s^۲\\ F=(m_۲+m_۱)a''\Rightarrow F=(\frac{F}{۶}+\frac{F}{۱۰})a'\Rightarrow F=(\frac{۵F+۳F}{۳۰})a''\\ \Rightarrow F=\frac{۸F}{۳۰}a''\Rightarrow a''=\frac{۳۰}{۸}=\frac{۱۵}{۴}m/s^۲\end{cases}$$

۳ نسبت شتاب‌ها خواهد شد:

$$\frac{a'}{a''}=\frac{۱۵}{\frac{۱۵}{۴}}=۴$$

A ۷۰۷ ۱

نکته هرگاه دو نیرو هم‌جهت باشند، اندازه نیروی خالص از جمع اندازهٔ دو نیرو به‌دست می‌آید: $F_{net}=F_۱+F_۲$

شتاب وقتی دو نیرو هم‌جهت هستند خواهد شد:

$$F_{net}=ma\Rightarrow ۳+۴=۲a_۱\Rightarrow a_۱=۳/۵m/s^۲$$

نکته هرگاه دو نیرو در خلاف جهت هم باشند، اندازه نیروی خالص از تفاضل اندازهٔ دو نیرو به‌دست می‌آید. $F_{net}=|F_۱|-|F_۲|$

شتاب وقتی دو نیرو خلاف جهت هم هستند خواهد شد

$$F_{net}=ma\Rightarrow ۴-۳=۲a\Rightarrow a_۲=۰/۵m/s^۲$$

نیروی خالص وقتی دو نیرو عمود بر هم هستند از رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آید.

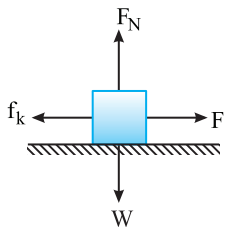
$$F_{net}=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵N$$

شتاب حرکت خواهد شد: $F_{net}=ma\Rightarrow ۵=۲a_۳\Rightarrow a_۳=۲/۵m/s^۲$

بنابراین $a_۱=۷a_۲=\frac{۵}{۷}a_۳$.

A ۷۰۸ ۴

خط فکری وقتی که جسم روی خط راست با سرعت ثابت در حرکت است نیروهای وارد بر آن متوازن است. نیروهای وارد بر جسم را به شکل ساده‌ای رسم کنید. به کمک متوازن بودن نیروها نیروی اصطکاک را حساب کنید سپس شتاب حرکت در حال جدید را به‌دست بیاورید.



۱ نیروی $F=۵۰N$ و نیروی اصطکاک متوازن هستند از این‌رو:

$$f_k=F\xrightarrow{F=۵۰N}f_k=۵۰N$$

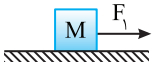
۲ وقتی نیروی $F=۶۰N$ می‌شود، بنا به قانون دوم نیوتون:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow ۶۰-۵۰=۱۰a\Rightarrow a=۱m/s^۲$$

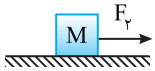
A ۷۰۹ ۲

خط فکری ابتدا به کمک قانون دوم نیوتون نیروهای $F_۱$ و $F_۲$ را برحسب M به‌دست می‌آوریم. در حالت دوم این نیروها بر هم عمود هستند و نیروی خالص را می‌توان به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست آورده و شتاب را در حالت جدید حساب کرد.

۱ با توجه به قانون دوم نیوتون:



$$F_۱=Ma_۱\xrightarrow{a_۱=۴m/s^۲}F_۱=۴M$$



$$F_۲=Ma_۲\xrightarrow{a_۲=۳m/s^۲}F_۲=۳M$$

۲ نیروی خالص را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=\sqrt{F_۱^۲+F_۲^۲}=\sqrt{۱۶M^۲+۹M^۲}=۵M$$

۳ شتاب حرکت خواهد شد: $F_{net}=۲Ma\Rightarrow ۵M=۲Ma\Rightarrow a=۲/۵m/s^۲$

A ۷۱۰ ۱

یادآوری ریاضی جمع برداری دو بردار $\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}$ و $\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}$ خواهد شد:

$$\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\vec{i}+(A_y+B_y)\vec{j}$$

۱ نیروی خالص وارد بر جسم را به کمک قانون دوم نیوتون حساب می‌کنیم.

$$\vec{F}_{net}=m\vec{a}\Rightarrow F_{net}=۳(۲\vec{i}+۴\vec{j})\Rightarrow\vec{F}_{net}=۶\vec{i}+۱۲\vec{j}\quad (I)$$

۲ نیروی خالص را از جمع دو بردار $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۲$ به‌دست می‌آوریم.

$$\vec{F}_{net}=\vec{F}_۱+\vec{F}_۲\Rightarrow\vec{F}_{net}=۱۳\vec{i}+\alpha\vec{j}+\beta\vec{i}+۵\vec{j}$$

$$\Rightarrow\vec{F}_{net}=(۱۳+\beta)\vec{i}+(۵+\alpha)\vec{j}\quad (II)$$

۳ F_{net} در رابطهٔ (I) و (II) با هم برابرند از این‌رو می‌توان نوشت:

$$۱۳+\beta=۶\Rightarrow\beta=-۷\ ,\ ۵+\alpha=۱۲\Rightarrow\alpha=۷,\frac{\alpha}{\beta}=-۱$$

بازی با سؤال فرض کنید بر جسمی به جرم $۰/۵kg$ دو نیروی $\vec{F}_۲=-\frac{\vec{F}_۱}{۲}$ و $\vec{F}_۱=-۶\vec{i}+۸\vec{j}$ اثر می‌کند. بزرگی شتاب حرکت این جسم چقدر است؟ (تمام مقادیر در SI هستند.) مشابه کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۷/۵ ۴) ۲/۵

پاسخ ابتدا بردار نیروی $F_۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{F}_۲=-\frac{\vec{F}_۱}{۲}=۳\vec{i}-۴\vec{j}$$

برایند نیروها خواهد شد:

$$\vec{F}_{net}=\vec{F}_۱+\vec{F}_۲=-۶\vec{i}+۸\vec{j}+۳\vec{i}-۴\vec{j}=-۳\vec{i}+۴\vec{j}$$

اندازهٔ نیروی وارد بر جسم برابر است با:

$$F_{net}=\sqrt{F_x^۲+F_y^۲}=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵N$$

$$F_{net}=ma\Rightarrow ۵=۰/۵a\Rightarrow a=۱۰m/s^۲$$

گزینهٔ ۲

A ۷۱۱ ۴

هرگاه سرعت جسم ثابت باشد نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند و نیروی خالص وارد بر جسم صفر است از این‌رو می‌توان نوشت:

$$\vec{F}_{net}=ma\Rightarrow\vec{F}_{net}=0$$
$$\Rightarrow\vec{F}_1+\vec{F}_2=0\xrightarrow{\vec{F}_1=2\vec{i}-6\vec{j}}\vec{F}_2=-\vec{F}_1\Rightarrow\vec{F}_2=-2\vec{i}+6\vec{j}$$

A ۷۱۲ ۳

۱ ابتدا نیروی خالص جسم را از جمع بردارهای نیرو به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{F}_{net}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=(20\vec{i}-50\vec{j})+(10\vec{i}+20\vec{j})+(-10\vec{j})=30\vec{i}-40\vec{j}$$
$$\Rightarrow\vec{F}_{net}=30\vec{i}-40\vec{j}$$

۲ اندازهٔ نیروی خالص وارد بر جسم را حساب می‌کنیم.

$$F_{net}=\sqrt{F_x^2+F_y^2}\Rightarrow F_{net}=\sqrt{30^2+40^2}\Rightarrow F_{net}=50N$$

۳ شتاب حرکت جسم خواهد شد: $F_{net}=ma\Rightarrow a=\frac{F_T}{m}=\frac{50}{5}=10m/s^2$

بازی با سوال **جسمی به جرم 5kg تحت تأثیر سه نیروی $\vec{F}_1=-15\vec{i}+8\vec{j}$، $\vec{F}_2=-21\vec{i}+19\vec{j}$ و $\vec{F}_3$ قرار گرفته و شتاب $\vec{a}=-4\vec{i}+3\vec{j}$ را پیدا کرده است. اندازهٔ نیروی $\vec{F}_3$ کدام است؟** ریاضی - ۸۹

۱) ۴ ۲) ۲۰ ۳) ۲۸ ۴) ۴۸

پاسخ با توجه به قانون دوم نیوتون:

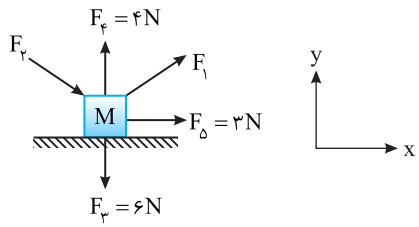
$$\vec{F}_T=m\vec{a}\Rightarrow\vec{F}_T=5(-4\vec{i}+3\vec{j})\Rightarrow\vec{F}_T=-20\vec{i}+15\vec{j}$$
$$\vec{F}_T=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3\Rightarrow-20\vec{i}+15\vec{j}=-15\vec{i}+8\vec{j}-21\vec{i}+19\vec{j}+\vec{F}_3$$
$$\Rightarrow\vec{F}_3=16\vec{i}-12\vec{j}\Rightarrow F_3=\sqrt{16^2+12^2}=4\sqrt{4^2+3^2}\Rightarrow F_3=4\times5=20N$$

گزینهٔ ۲

A ۷۱۳ ۳

جسم در تعادل است و نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند و برایند آن‌ها صفر است.

با توجه به شکل نیروی $\vec{F}_4=4\vec{j}$، نیروی $\vec{F}_3=-6\vec{j}$ و نیروی $\vec{F}_5=3\vec{i}$ است.

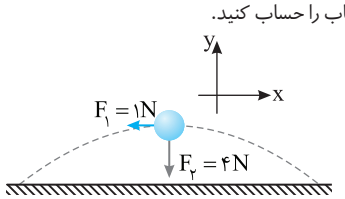


برایند نیروها را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4+\vec{F}_5=0\Rightarrow\vec{F}_1+\vec{F}_2+3\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{j}=0\Rightarrow\vec{F}_1+\vec{F}_2=-3\vec{i}+2\vec{j}$$

A ۷۱۴ ۲

خط فکری به شکل نگاه کنید. بر جسم دو نیرو یکی نیروی $F_1=1N$ در خلاف جهت محور x $(\vec{F}_1=-\vec{i})$ و دیگری نیروی وزن $F_2=4N$ در خلاف جهت محور yها $(\vec{F}_2=-4\vec{j})$ وارد می‌شود بنابراین کافی است نیروی خالص را برحسب i و j به‌دست بیاورید سپس، شتاب را حساب کنید.



۱ ابتدا بردار نیروها را برحسب بردارهای یکه می‌نویسیم: $\vec{F}=-\vec{i}-4\vec{j}$

۲ با توجه به قانون دوم نیوتون $\vec{F}=m\vec{a}$ داریم:

$$\vec{F}=m\vec{a}\Rightarrow-\vec{i}-4\vec{j}=0/4\vec{a}\Rightarrow\vec{a}=-2/5\vec{i}-10\vec{j}$$

A ۷۱۵ ۴

نکته برایند دو نیرو وقتی بیشینه است که دو نیرو هم‌جهت باشند.

$$F_{max}=F_1+F_2$$

نکته برایند دو نیرو وقتی کمینه است که دو نیرو در خلاف جهت هم باشند.

$$F_{min}=F_1-F_2$$

بیشینه شتاب را حساب می‌کنیم:

$$F_{max}=F_1+F_2=10N\quad,\quad F_{max}=ma\Rightarrow10=4a\Rightarrow a_{max}=2/5m/s^2$$

کمینه شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{min}=F_2-F_1=6-4=2N\quad,\quad F_{min}=ma\Rightarrow2=4a\Rightarrow a_{min}=0/5m/s^2$$

شتاب جسم می‌تواند بین این دو مقدار باشد. $a_{min}\le a\le a_{max}\Rightarrow0/5\le a\le2/5$

تنها گزینهٔ (۴) که در آن $a=1m/s^2$ است در این بازه قرار دارد.

A ۷۱۶ ۱

نکته اندازه برایند دو بردار عمود بر هم همواره از اندازهٔ تک‌تک آن‌ها بیشتر است.

اگر برایند نیروهای وارد بر جسم را F_{net} بگیریم:

$$F_{net}=\sqrt{F_1^2+F_2^2}\Rightarrow F_{net}>F_1\quad,\quad F_{net}>F_2$$

بنابراین اگر یکی از نیروها حذف شود تنها یک نیرو باقی می‌ماند که با توجه به اینکه مقدار این نیرو از F_{net} کمتر است پس شتاب جسم از $4m/s^2$ کمتر خواهد شد. فقط گزینهٔ (۱) مقداری کمتر از ۴ دارد.

A ۷۱۷ ۲

خط فکری نکته مهمی که در حل این‌گونه مسایل وجود دارد این است که وقتی n نیرو متوازن هستند یعنی برایند آن‌ها صفر است همواره برایند $n-1$ بردار دلخواه از این بردارها هم‌اندازهٔ بردار nاُم است.

در صورت مسئله برایند سه نیروی 8N، 6N و 12N صفر است و مفهوم آن این است در این مسئله سه نیرو به گونه‌ای قرار دارند که اندازه برایند 8N و 6N برابر 12N و اندازه برایند 8N و 12N برابر 6N و برایند 6N و 12N برابر 8N است. یعنی هرگاه نیروی 6N حذف شود، برایند دو نیروی 8N و 12N که باقی می‌مانند همان $F_{net}=6N$ خواهد بود. با توجه به این مفهوم مسئله به راحتی قابل حل است و کافی است بعد از حذف نیروی 6N شما نیروی خالص را برابر 6N قرار دهید. سه نیرو متوازن می‌باشد. بنابراین:

$$\begin{cases}|\vec{F}_1|=8N\\|\vec{F}_2|=6N\\|\vec{F}_3|=12N\end{cases}\xrightarrow{\text{نیرو متوازن}}\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=0\Rightarrow\vec{F}_1+\vec{F}_3=-\vec{F}_2\quad(1)$$

هنگامی که نیروی $\vec{F}_2$ حذف می‌شود به جسم تنها دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_3$ وارد خواهد شد:

$$\vec{F}_1+\vec{F}_3=m\vec{a}\Rightarrow|\vec{F}_1+\vec{F}_3|=m|\vec{a}|\xrightarrow{|\vec{F}_1+\vec{F}_3|=|\vec{F}_2|=6N}6=4a$$
$$\Rightarrow a=1/5m/s^2$$

بازی با سوال **به یک جسم ۲ کیلوگرمی، هم‌زمان چهار نیرو به اندازه‌های ۲۰، ۱۵، ۱۰، ۸ نیوتون وارد می‌شود و جسم به حالت تعادل قرار می‌گیرد. اگر فقط نیروی ۱۵ نیوتونی حذف شود و دیگر نیروها با همان اندازه و جهت اثرگذار باشند، تغییر سرعت جسم بعد از ۲ ثانیه، چند متر بر ثانیه خواهد شد؟** خارج تجربی - ۸۵

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

پاسخ **جسم در تعادل است و برایند چهار نیروی 20N، 15N، 10N و 8N صفر است. از این‌رو هر نیرو هم‌اندازهٔ برایند سه نیروی دیگر است. با حذف نیروی 15N، سه نیروی 20N، 10N و 8N باقی می‌مانند که برایند آن‌ها 15N است. بنابراین:** $F_{خالص}=ma\Rightarrow15=2a\Rightarrow a=7/5m/s^2$

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow7/5=\frac{\Delta v}{2}\Rightarrow\Delta v=15m/s$$

گزینهٔ ۳

۴ ۷۱۸ B

خط فکری دقت کنید سه نیرو در حال تعادل هستند یعنی برایند آن‌ها صفر است. حال اگر هر نیرویی اضافه شود نیروی برایند دقیقاً برابر همان مقدار اضافه شده است. وقتی جسم در تعادل است برایند نیروهای ۵، ۷ و ۱۰ نیوتونی صفر است. وقتی به نیروی ۷ نیوتونی، ۳ نیوتون اضافه شود، یعنی برایند نیروها برابر ۳N می‌شود. بنابراین:

$F=ma\Rightarrow 3=2a\Rightarrow a=1/5 m/s^2$

۳ ۷۱۹ A

خط فکری هرگاه در مسئله زمان داده شود یا از شما زمان خواسته شود یعنی شما باید به سراغ روابط حرکت‌شناسی بروید. بنابراین شتاب را به کمک قانون دوم نیوتون به‌دست بیاورید سپس به کمک معادل سرعت زمان حرکت با شتاب ثابت، زمانی که سرعت $15 m/s$ می‌شود را به‌دست بیاورید.

۱ ابتدا با توجه به قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$F=ma \xrightarrow{m=400kg, F=800N} 800=400a\Rightarrow a=2 m/s^2$

۲ زمان را حساب می‌کنیم. $v=at+v_0\Rightarrow 15=2t+0\Rightarrow t=7/5 s$

۱ ۷۲۰ B

یکای سرعت را به m/s تبدیل می‌کنیم.

$v_0=72 km/h=\frac{72}{3/6} m/s\Rightarrow v_0=20 m/s$

شتاب حرکت را حساب می‌کنیم. $a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-20}{5}\Rightarrow a=-4 m/s^2$

اندازهٔ نیروی خالص وارد بر راننده برابر است با:

$|F_{net}|=m|a|\Rightarrow |F_{net}|=80\times 4=320 N$

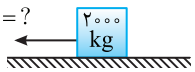
۴ ۷۲۱ B

۱ سرعت خودرو را برحسب m/s می‌نویسیم.

$v=36\frac{km}{h}\times\frac{1h}{3600s}\times\frac{10^3 m}{1km}\Rightarrow v=\frac{36}{3/6}\Rightarrow v=10 m/s$

۲ شتاب توقف جسم را به کمک حرکت‌شناسی از رابطهٔ مستقل از زمان به‌دست می‌آوریم. $v^2-v_0^2=2a\Delta x \xrightarrow{v=0,\ \Delta x=4m} 0-10^2=2a\times 4\Rightarrow a=-12/5 m/s^2$

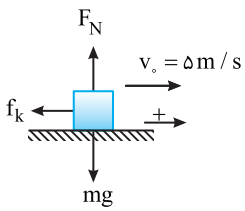
۳ نیروی خالصی که سبب توقف خودرو شده نیروی اصطکاک است و بنا به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:



$F_{net}=ma\Rightarrow 0-f_k=2000\times -12/5\Rightarrow f_k=25000 N$

۴ ۷۲۲ A

۱ نیروی وارد بر جسم که مانع حرکت می‌شود و به جسم شتاب کندشونده می‌دهد، نیروی اصطکاک است. با توجه به قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.



$F_{\text{خالص}}=ma\Rightarrow -f_k=ma$

$\Rightarrow -0/5=0/2a\Rightarrow a=-2/5 m/s^2$

۲ اکنون جابه‌جایی را در ثانیهٔ اول به کمک معادله حرکت با شتاب ثابت حساب می‌کنیم:

$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow \Delta x=\frac{1}{2}(-2/5)(1)+5(1)=3/75 m$

بازی با سوال **اتومبیلی به جرم ۴ تُن با سرعت $20 m/s$ روی سطح افقی در مسیر مستقیم حرکت می‌کند. این اتومبیل در اثر ترمز با شتاب ثابت در مدت ۴s متوقف می‌شود. نیروی ترمز چند نیوتون است؟** کنکور دهه‌های گذشته

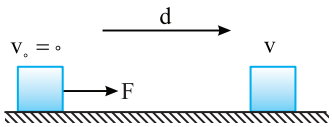
۱) ۲۰۰۰۰ ۲) ۱۰۰۰۰ ۳) ۸۰۰۰ ۴) ۴۰۰۰

پاسخ ابتدا شتاب ترمز اتومبیل را محاسبه می‌کنیم:

$v_2=at+v_1\Rightarrow a=-5 m/s^2 \xrightarrow{F_{net}=ma} F_{\text{ترمز}}=ma$

$\Rightarrow 4\times 10^3\times 5=20\times 10^3=20000 N$ گزینه ۱

۱ ۷۲۳ B



نیروی خالص وارد بر جسم نیروی افقی F است.

۱ بنا به قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را حساب می‌کنیم:

$F=ma\Rightarrow a=\frac{F}{m}$

۲ به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، v را به‌دست می‌آوریم:

$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow v^2-0=2(\frac{F}{m})d\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2Fd}{m}}$

۱ ۷۲۴ A

نیروی وارد بر جسم ثابت است بنابراین شتاب حرکت نیز ثابت است. جسم از حال سکون $v_0=0$ در مدت t سرعتش به v رسیده است. چون شتاب ثابت است پس تغییر سرعت در بازه‌های زمانی یکسان t ثابت است، بنابراین همین مدت طول می‌کشد تا سرعت از v به 2v برسد.

$F_{\text{ثابت}}=ma_{\text{ثابت}}\begin{cases} v=at+0\Rightarrow t=\frac{v}{a} \\ 2v=at'+v\Rightarrow t'=\frac{v}{a}\end{cases}\Rightarrow t'=t$

۳ ۷۲۵ A

۱ ابتدا با توجه به مسافت طی شده و تندی نهایی شتاب حرکت را به دست می‌آوریم: $v_1^2-v_0^2=2a\Delta x_1\Rightarrow 100-0=2a\times(10)\Rightarrow a=5 m/s^2$

۲ چون نیرو ثابت است، با توجه به رابطهٔ $F=ma$ شتاب نیز همان $a=5 m/s^2$ خواهد شد. بنابراین: $v_2^2-v_1^2=2a\Delta x_2\Rightarrow 400-100=2\times 5\times\Delta x_2\Rightarrow \Delta x_2=30 m$

۲ ۷۲۶ A

خط فکری تندی اولیه هر دو هنگام ترمز v است و قرار است هر دو متحرک در جابه‌جایی یکسان d متوقف شوند. با توجه به معادلهٔ مستقل از زمان $(v^2-v_0^2=2a\Delta x)$ باید شتاب توقف موتور و خودرو یکسان باشد.

بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$\begin{cases} F_{\text{خودرو}}=m_{\text{خودرو}}a \\ F_{\text{موتور}}=m_{\text{موتور}}a\end{cases}\Rightarrow \frac{F_{\text{موتور}}}{F_{\text{خودرو}}}=\frac{m_{\text{موتور}}}{m_{\text{خودرو}}} \xrightarrow{m_{\text{خودرو}}=3/5 m_{\text{موتور}}}$

$\frac{F_{\text{موتور}}}{F}=\frac{1}{3/5}\Rightarrow F_{\text{موتور}}=\frac{F}{3/5}\Rightarrow F_{\text{موتور}}=\frac{2F}{7}$

۲ ۷۲۷ B

۱ سرعت خودرو را بر حسب $\frac{m}{s}$ به‌دست می‌آوریم.

$108 km/h=\frac{108}{3/6}\Rightarrow v_{\text{خودرو}}=30 m/s$

۲ نیروی خالص وارد بر دو متحرک هنگام توقف نیروی اصطکاک جنبشی است. بنابراین:

$\frac{F_{netA}}{F_{netB}}=\frac{m_Aa_A}{m_Ba_B} \xrightarrow{F_{net}=f_k} \frac{f_{k_A}}{f_{k_B}}=\frac{m_A\times\frac{\Delta v_A}{t}}{m_B\times\frac{\Delta v_B}{t}}$

$\Rightarrow\frac{f_{k_A}}{f_{k_B}}=\frac{1800}{1600}\times\frac{0-20}{0-30}\Rightarrow\frac{f_{k_A}}{f_{k_B}}=7/5$

۴ ۷۲۸ A

خط فکری دقت کنید در مسئله t_1 و t_2 داده شده است، بنابراین باید به سراغ فرمول‌های حرکت‌شناسی در حرکت با شتاب ثابت برویم. شتاب حرکت را در هر حالت برحسب Δx و t حساب کنید و نیرو را برحسب قانون دوم بنویسید.

۱ شتاب حرکت هر متحرک را حساب می‌کنیم.

$\Delta x=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow a_1=\frac{2\Delta x_1}{t_1^2}\ ,\ a_2=\frac{2\Delta x_2}{t_2^2}$

۲ اکنون شتاب‌ها را در قانون دوم نیوتون قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} F_۱=m_۱a_۱\Rightarrow F_۱=m_۱\dfrac{۲\Delta x}{t_۱^۲} \\ F_۲=m_۲a_۲\Rightarrow F_۲=m_۲\dfrac{۲\Delta x}{t_۲^۲} \end{cases}\Rightarrow \frac{F_۱}{F_۲}=\frac{m_۱t_۲^۲}{m_۲t_۱^۲}$$

A ۷۲۹ ۲

۱ جرم میخ نسبت به چکش کم است. وقتی با چکش به میخ ضربه می‌زنیم و میخ ۵mm در چوب فرو می‌رود یعنی سرعت چکش طی مسافت ۵mm از ۴m/s به صفر می‌رسد. بنابراین شتاب توقف چکش خواهد شد:

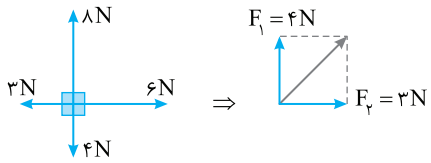
$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-۱۶=۲a(۵\times ۱۰^{-۳})\Rightarrow a=-۱۶۰۰m/s^۲$$

۲ نیرویی که سبب توقف چکش شده همان نیروی مقاومت متوسط چوب در مقابل حرکت میخ و چکش است. از این‌رو می‌توان نوشت:

$$F_{net}=ma\xrightarrow{m=۰/۲۵kg}|F|=۰/۲۵\times|-۱۶۰۰|\Rightarrow F_{net}=۴۰۰N$$

A ۷۳۰ ۲

۱ ابتدا برایند نیروها را مشخص می‌کنیم: $F_T=\sqrt{F_۱^۲+F_۲^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵N$



۲ حال با توجه به نیروی برایند، شتاب جسم را به‌دست می‌آوریم:

$$F_T=ma\Rightarrow ۵=۲a\Rightarrow a=۲/۵m/s^۲$$

۳ جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده از این‌رو:

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=۲/۵\times ۵+۰\Rightarrow v=۱۲/۵m/s$$

نکته جسمی که از حال سکون تحت تأثیر نیروی خالص و ثابتی شروع به حرکت کند همواره حرکت آن روی خط راست با شتاب ثابت و در جهت نیروی خالص وارد بر جسم است. جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده و جهت حرکت (سرعت) در جهت نیرو است و می‌دانیم جهت شتاب نیز در جهت برایند نیروها قرار دارد بنابراین جهت سرعت، ↗ است.

B ۷۳۱ ۱

خط فکری وقتی نیروهای وارد بر جسم متوازن باشد $(F_{net}=۰)$ در این صورت شتاب جسم نیز صفر است. بنابراین کافی است معادلهٔ شتاب زمان را برابر صفر قرار دهید و اولین باری که شتاب بعد از $t=۰$ صفر می‌شود را به کمک حل معادلهٔ مثلثاتی به‌دست بیاورید.

ریشهٔ معادلهٔ شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$F_{net}=ma\xrightarrow{F_{net}=۰}a=۰\xrightarrow{a=-۱۶\pi^۲\sin ۴\pi t}۰=-۱۶\pi^۲\sin ۴\pi t$$

$$\Rightarrow ۴\pi t=k\pi\Rightarrow t=\frac{k}{۴}\qquad k=۱,۲,\cdots$$

بنابراین اولین لحظه بعد از $t=۰$ برابر است با $t=\frac{۱}{۴}s$.

A ۷۳۲ ۳

یادآوری در حرکت روی خط راست، لحظه‌ای جهت سرعت تغییر می‌کند که سرعت به‌طور لحظه‌ای صفر شده و تغییر علامت دهد.

خط فکری معادله مکان زمان درجه ۲ یعنی حرکت با شتاب ثابت بنابراین وقتی شتاب ثابت باشد، نیروی خالص وارد بر جسم در همهٔ نقاط مسیر از جمله در لحظهٔ تغییر جهت سرعت ثابت است. با مقایسه معادلهٔ حرکت داده شده با معادلهٔ مکان زمان حرکت با شتاب ثابت، شتاب را حساب کرده و نیروی خالص وارد بر جسم را به‌دست بیاورید.

معادلهٔ مکان - زمان متحرک درجهٔ دوم می‌باشد یعنی حرکت با شتاب ثابت می‌باشد.

شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

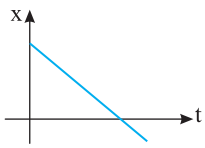
$$x=t^۲-۶t+۸,\ x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow \frac{۱}{۲}a=۱\Rightarrow a=۲m/s^۲$$

نیروی خالص وارد بر جسم خواهد شد: $F_{net}=ma\xrightarrow{m=۴kg}F_{net}=۴\times ۲=۸N$

A ۷۳۳ ۲

نمودار $x-t$ به صورت خطی می‌باشد بنابراین حرکت متحرک با سرعت ثابت و شتاب صفر است.

با توجه به قانون دوم نیوتون $F_{net}=ma$، برایند نیروها صفر می‌باشد و نیروها متوازن هستند.

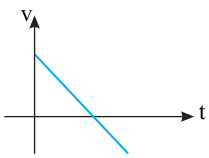


B ۷۳۴ ۱

یادآوری شیب نمودار سرعت - زمان برابر است با شتاب متحرک.

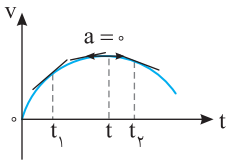
شیب نمودار ثابت است بنابراین این حرکت دارای شتاب ثابت بوده و نیروی خالص $(F_{net}=ma)$ وارد بر آن نیز ثابت است.

دقت کنید که در لحظهٔ قطع نمودار علامت (یا جهت) سرعت عوض شده است ولی شتاب و نیرو تغییر نکرده است.



B ۷۳۵ ۴

خط فکری هرگاه به شما نمودار مکان - زمان، سرعت - زمان و ... داده شود و از شما دربارهٔ چگونگی تغییر نیرو سؤال شود شما باید به سراغ چگونگی تغییر شتاب بروید.

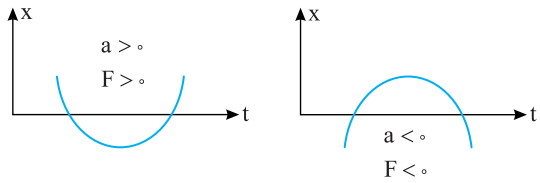


نکته در نمودار سرعت - زمان شیب خط مماس بر نمودار برابر شتاب لحظه‌ای است.

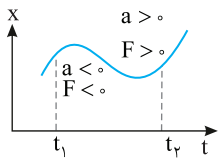
شیب خط مماس بر نمودار از لحظهٔ $t_۱$ تا t در حال کاهش و از لحظهٔ t تا $t_۲$ اندازهٔ شیب خط مماس در حال افزایش است و بنا به قانون دوم نیوتون $(F=ma)$ بزرگی نیروی خالص وارد بر جسم ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

A ۷۳۶ ۱

یادآوری بنا به قانون دوم نیوتون $F=ma$، همواره نیرو و شتاب حاصل از آن هم‌جهت هستند. از طرفی دهانهٔ منحنی مکان - زمان بیان‌گر علامت شتاب (مشتق دوم مکان) است. اگر جهت دهانه منحنی مکان - زمان رو به بالا باشد شتاب جسم و در نتیجه نیروی وارد بر جسم مثبت است و اگر جهت دهانه منحنی مکان - زمان رو به پایین باشد شتاب جسم و در نتیجه نیروی وارد بر جسم منفی است.



اکنون به نمودار مکان - زمان تست دقت کنید. ابتدا دهانه رو به پایین بوده و بنابراین شتاب و درنتیجه نیروی وارد بر جسم منفی است و سپس دهانه (تقعر) نمودار رو به بالا بوده، شتاب و در نتیجه نیرو مثبت می‌شود، بنابراین نیروی وارد بر جسم یک بار تغییر جهت داده است.



B ۷۳۷ ۲

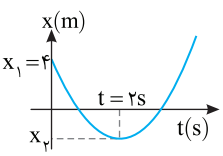
۱ ابتدا با توجه به قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$F=ma\xrightarrow{F=۱۲N,m=۴kg}۱۲=۴a\Rightarrow a=۳m/s^۲$$

نکته در نقاط بیشینه و کمینه نمودار مکان زمان سرعت صفر است.

۲ در لحظهٔ $t=۲s$ سرعت متحرک صفر می‌شود (خط مماس بر نمودار $x-t$ به‌صورت افقی می‌باشد).

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=۳\times ۲+v_۰\Rightarrow v_۰=-۶m/s$$

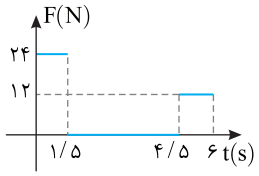


حال با توجه به سرعت اولیه مکان، x را به‌دست می‌آوریم:

$$x_۲=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۱\Rightarrow x_۲=\frac{۱}{۲}\times ۳\times(۲)^۲-۶(۲)+۴\Rightarrow x_۲=-۲m$$

۷۳۸ A ۴

خط فکری به نمودار دقت کنید. در بازهٔ صفر تا ۱/۵s نیروی وارد بر جسم ۲۴N است و از ۱/۵s تا ۴/۵s نیروی خالص وارد بر جسم صفر است. یعنی از ۱/۵s تا ۴/۵s سرعت متحرک ثابت و برابر سرعت در لحظهٔ t=۱/۵s است. بنابراین کافی است شما سرعت را در t=۱/۵s حساب کنید.



۱ شتاب حرکت جسم را در بازه صفر تا ۱/۵s به‌دست می‌آوریم.

$$F=ma \xrightarrow{m=3kg} 24=3a \Rightarrow a=8m/s^2$$

۲ سرعت در لحظهٔ t=۱/۵s را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0 \xrightarrow{v_0=0} v=8\times 1/5+0 \Rightarrow v=12m/s$$

بنابراین در لحظهٔ t=۳s سرعت ۱۲m/s است.

۷۳۹ B ۱

خط فکری برای آن‌که نمودار نیرو - زمان را از روی نمودار سرعت - زمان رسم کنید کافی است شتاب در هر بازه را حساب کرده و با ضرب جرم در شتاب، نیرو را به‌دست آورده (F=ma) نمودار نیرو زمان را رسم کنید.

۱ در بازهٔ زمانی صفر تا ۳ ثانیه شتاب ثابت است، پس نیرو ثابت و برابر است با:

$$F=ma=m\frac{v-v_0}{t}=2\times\frac{3-(-6)}{3}=6N$$

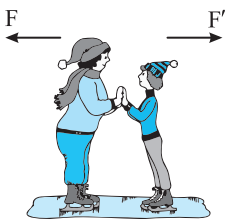
۲ در بازهٔ زمانی ۳ تا ۵ ثانیه حرکت یکنواخت پس نیرو صفر است. (F=0)

۳ در بازهٔ زمانی ۵ تا ۷ ثانیه نیز شتاب ثابت پس نیرو ثابت و برابر است با:

$$F=ma=2\times\frac{0-3}{7-5}=-3N$$

بنابرین گزینهٔ (۱) پاسخ تست است.

۷۴۰ A ۴



نیروهای $\vec{F}$ و $\vec{F}'$ کنش و واکنش یکدیگراند، پس این دو نیرو هم‌اندازه و خلاف جهت‌اند.

$$\vec{F}=-\vec{F}'$$

شتاب از رابطهٔ $F=ma\Rightarrow a=\frac{F}{m}$ به دست می‌آید. دو نیرو هم‌اندازه‌اند، بنابراین با توجه به رابطهٔ شتاب، هرچه جرم شخصی بیشتر باشد شتاب حرکت او کمتر است: بنابراین

$$m_2>m_1 \xrightarrow[F=F']{a=\frac{F}{m}} a_2<a_1$$

۷۴۱ A ۳

نیرویی که شخص اول بر دوم وارد می‌کند به شخص دوم شتابی در جهت محور x ها می‌دهد:

$$\vec{F}_{12}=m_2\vec{a}_2 \Rightarrow 100\vec{i}=50\vec{a}_2 \Rightarrow \vec{a}_2=2\vec{i}$$

بنا به قانون سوم نیوتون همین مقدار نیرو توسط شخص دوم بر شخص اول در خلاف جهت محور x ها وارد می‌شود و به شخص اول شتابی در خلاف جهت محور x ها خواهد داد:

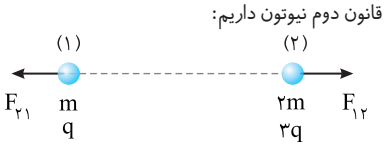
$$\vec{F}_{21}=m_1\vec{a}_1 \Rightarrow -100\vec{i}=75\vec{a}_1 \Rightarrow \vec{a}_1=-\frac{4}{3}\vec{i}$$

۷۴۲ A ۳

با توجه به قانون سوم نیوتون نیروی الکتریکی که ذرهٔ m با بار الکتریکی q به ذرهٔ 2m با بار الکتریکی 3q وارد می‌کند برابر نیرویی است که بار 3q به بار q وارد کرده است. بنابراین:

$$|\vec{F}_{12}|=|\vec{F}_{21}|=F$$

حال با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:



$$\begin{cases}(1)\ \text{جسم} \Rightarrow F=ma_1 \Rightarrow a_1=\frac{F}{m}\\ (2)\ \text{جسم} \Rightarrow F=2ma_2 \Rightarrow a_2=\frac{F}{2m}\end{cases} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=2$$

۷۴۳ A ۳

خط فکری بنا به قانون سوم نیوتون نیرویی که شخص (۱) بر شخص (۲) وارد می‌کند هم‌اندازه و در خلاف جهت نیرویی است که شخص (۲) بر شخص (۱) وارد می‌کند. نیروها یکسان است بنابراین شخصی که دارای جرم کمتری است بنا به قانون دوم نیوتون شتاب بیشتری خواهد داشت و زودتر به نقطهٔ O می‌رسد و از آن عبور می‌کند. حال به حل مسئله دقت کنید.

نیرویی که توسط طناب به هر دو شخص وارد می‌شود یکسان است:

$$\begin{cases}F_1=m_1a_1 \Rightarrow a_1=\frac{F_1}{m_1}\\ F_2=m_2a_2 \Rightarrow a_2=\frac{F_2}{m_2}\end{cases} \xrightarrow[F_1=F_2]{m_1>m_2} a_1<a_2$$

دو جسم در ابتدا ساکن هستند و $a_1<a_2$ است پس متحرک (۲) سریع‌تر حرکت می‌کند و هنگام رسیدن دو متحرک به هم متحرک (۲) جابه‌جایی بیشتری انجام می‌دهد بنابراین دو متحرک بین O و A به یکدیگر می‌رسند.

بازی با سؤال **دو شخص A و B هم‌قد با کفش‌های چرخ‌دار در حالت ایستاده در یک سالن مسطح و صاف دو سر طنابی را گرفته و هر یک دیگری را به سوی خود می‌کشد. کدام‌یک زودتر به خط پایان که وسط فاصلهٔ میان آن‌ها است می‌رسد؟ (جرم شخص A بیشتر از جرم شخص B است.)**

۱) شخص A ۲) شخص B

۳) هر دو با هم می‌رسند. ۴) نمی‌توان اظهارنظر قطعی کرد.

پاسخ **با توجه به قانون سوم نیوتون نیرویی که شخص A به B وارد می‌کند برابر نیرویی است که شخص B به A وارد می‌کند. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:**

$$\vec{F}_{AB}=-\vec{F}_{BA}$$

حال با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:

$$a=\frac{F}{m} \xrightarrow[|F_{AB}|=|F_{BA}|\ ,\ m_A>m_B]{} a_B>a_A$$

پس شتاب B از شتاب A بیشتر است. بنابراین شخص B زودتر از شخص A به وسط طناب می‌رسد. گزینهٔ ۲

۷۴۴ B ۴

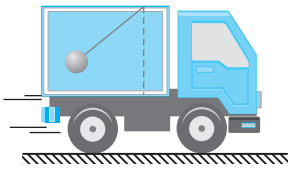
هرگاه جسم ساکن و یا دارای حرکت با سرعت ثابت باشد، نیروهای وارد بر جسم متوازن بوده ($F_{net}=0$) یعنی جسم در حال تعادل به سر می‌برد. بنابراین از نگاه قانون اول نیوتون حالت سکون و یا حرکت با سرعت ثابت هم‌ارز هستند و گزینهٔ (۱) درست است. بنا به قانون اول نیوتون اگر نیروی خالصی بر جسم وارد نشود اگر جسم ساکن است ساکن می‌ماند و اگر در حال حرکت است به حرکت روی خط راست با سرعت ثابت ادامه می‌دهد یعنی جسم تمایل دارد وضع موجود را حفظ کند. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) نیز درست است.

۷۴۵ A ۱

در قانون اول نیوتون بیان می‌شود که اگر جسم در حال حرکت است برای ادامه حرکت نیاز به نیرو ندارد و اگر بر آن نیرو وارد نشود، جسم به حرکت خود ادامه می‌دهد و برای ادامهٔ حرکتش به ارائهٔ دلیل نیازی نیست. اما اگر حرکتش تغییر کند، باید برای این تغییر به دنبال علت بود و گزینهٔ (۱) درست است.

بنابر قانون دوم نیوتون، نیرو با آهنگ تغییر سرعت یعنی شتاب متناسب است نه با خود تغییر سرعت $(\vec{F}=m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t})$ و گزینهٔ (۲) نادرست است. بنابر قانون سوم نیوتون نیروهای کنش و واکنش بر دو جسم وارد شده، بنابراین نمی‌توان گفت یکدیگر را خنثی می‌کنند و گزینهٔ (۳) نیز نادرست است.

A ۷۴۶ ۱



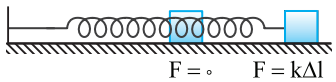
طبق قانون اول اجسام تمایل دارند که وضعیت حرکت خود را حفظ کنند. بنابراین می‌توان گفت هنگامی جسم درون کامیون قرار دارد همواره از تغییر حرکت لحظه‌ای کامیون جا می‌ماند. یعنی اگر کامیون ترمز کند (حرکت کندشونده) آونگ طبق سرعت قبلی به حرکت خود ادامه می‌دهد، پس به جلو پرتاب می‌شود و اگر کامیون تندشونده به سمت جلو حرکت کند آونگ با همان سرعت کمتر قبلی در حال حرکت است، پس از حرکت کامیون عقب می‌ماند و به سمت عقب پرتاب می‌شود و با توجه به شکل که در آن آونگ به سمت عقب منحرف شده است نتیجه می‌گیریم که کامیون با حرکت تندشونده رو به جلو در حرکت است.

C ۷۴۷ ۳

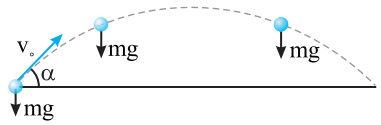
گزینهٔ (۱): اگر جسمی را در راستای قائم رو به بالا پرتاب کنیم، سرعت گلوله در اوج، صفر است و جسم به‌طور لحظه‌ای در حال سکون است، اما نیروی وزن همچنان به جسم وارد می‌شود و شتاب حرکت برابر g است، پس گزینهٔ (۱) نادرست است.

گزینهٔ (۲): هرگاه قطاری با سرعت ثابت یک مسیر خمیده را دور بزند، چون جهت بردار سرعت در حال تغییر است، حرکت شتابدار است و برایند نیروی وارد بر جسم صفر نیست. در این صورت گزینهٔ (۲) نادرست است، زیرا کلمهٔ الزاماً را به‌کار برده است.

گزینهٔ (۳): به وزنه و فنر روبه‌رو دقت کنید، اگر وزنه را به راست بکشیم و رها کنیم، هرچه وزنه به محل اولیه (تعادلش) نزدیک می‌شود تغییر طول فنر کمتر شده و نیروی کشسانی فنر کمتر می‌شود، در حالی که تا رسیدن وزنه به محل تعادل، سرعت آن در حال افزایش است، بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.



در مورد گزینهٔ (۴): اگر گلوله‌ای را در شرایط خلأ تحت زاویهٔ α مطابق شکل پرتاب کنیم، نیروی وارد بر جسم در تمام مسیر ثابت و برابر mg است. اما حرکت روی مسیر خمیده است، بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است، زیرا کلمهٔ الزاماً در آن به‌کار رفته است.



A ۷۴۸ ۳

یادآوری در سال دهم در کتاب فیزیک (۱) خوانده‌اید که یکاها باید در دو طرف یک رابطهٔ فیزیکی دارای سازگاری باشند یعنی در دو طرف یکاها باید یکسان باشند.

در رابطه $v=\alpha Ft$، یکای سرعت m/s، یکای نیرو نیوتون (N) و یکای t، ثانیه است. اما در گزینه‌ها خبری از نیوتون (N) نیست. بنابراین باید یکای فرعی نیرو یعنی kgm/s^2 را در بررسی خود استفاده کنید.

$$v=\alpha Ft\Rightarrow[m/s]=\alpha[kg\,m/s^2][s]\Rightarrow\alpha=[\frac{1}{kg}]$$

A ۷۴۹ ۲

۱ جرم هر جسم را بر حسب نیرو و شتاب به‌دست می‌آوریم.

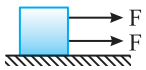
جسم (۱): $F=m_1a_1\Rightarrow m_1=\frac{F}{a_1}$

جسم (۲): $F=m_2a_2\Rightarrow m_2=\frac{F}{a_2}$

۲ شتاب نیروی F وارد بر جسمی به جرم (m_1+m_2) خواهد شد:

$$F=(m_1+m_2)a'\Rightarrow F=(\frac{F}{a_1}+\frac{F}{a_2})a'\Rightarrow F=F(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})a'\Rightarrow a'=\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}$$

A ۷۵۰ ۱



در حالت اول دو نیرو هم‌جهت و مساوی هستند، آن‌ها را با حرف F نمایش می‌دهیم. نیروی خالص خواهد شد:

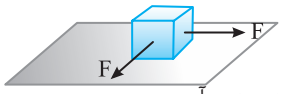
$$F_{net}=F+F\Rightarrow F_{net}=2F$$

بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_{net}=ma\Rightarrow 2F=ma\xrightarrow{a=6m/s^2}2F=m\times 6\Rightarrow F=3m\quad(I)$$

در حالت دوم دو نیروی افقی بر هم عمودند و نیروی خالص را از رابطهٔ فیثاغورس حساب می‌کنیم.

$$F'_{net}=\sqrt{F^2+F^2}=\sqrt{2}F\xrightarrow{(I)}F'_{net}=3\sqrt{2}m$$

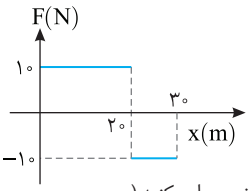


شتاب در این حالت را به‌دست می‌آوریم.

$$F'_{net}=ma'\Rightarrow 3\sqrt{2}m=ma'\Rightarrow a'=3\sqrt{2}m/s^2$$

B ۷۵۱ ۲

خط فکری نمودار داده شده، نمودار نیرو - مکان است. در صورت مسئله نیز از زمان حرفی زده نشده بنابراین فرمولی که از حرکت‌شناسی برای حل این مسئله باید کاندید کنیم رابطهٔ مستقل از زمان است.



شتاب را در هر قسمت به کمک قانون دوم نیوتون حساب کنید (برحسب جرم جسم m) سپس به کمک رابطهٔ مستقل از زمان مسئله را حل کنید.

۱ طبق قانون دوم نیوتون $F=ma$ است. پس شتاب در قسمت اول حرکت برابر $a_1=\frac{10}{m}$ و در قسمت دوم حرکت $a_2=-\frac{10}{m}$ است.

۲ برای قسمت اول حرکت به کمک معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) خواهیم داشت:

$$v_1^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow v_1^2-0^2=2\times\frac{10}{m}\times 20\Rightarrow v_1^2=\frac{400}{m}$$

۳ برای قسمت دوم حرکت نیز می‌توان نوشت:

$$v_2^2-v_1^2=2a_2\,\Delta x\Rightarrow 100-\frac{400}{m}=2\times(-\frac{10}{m})\times 10\Rightarrow 100-\frac{400}{m}=-\frac{200}{m}$$

$$\Rightarrow 100=\frac{200}{m}\Rightarrow m=2kg$$

B ۷۵۲ ۳

بنا به قانون سوم هنگام شلیک، نیرویی که گلوله و ارابهٔ توپ بر هم وارد می‌کنند برابر و در خلاف جهت هم است، برای نیروهای وارد بر ارابهٔ توپ و گلوله می‌توان نوشت:

$$F_1=-F_2\xrightarrow{F=ma}m_1a_1=-m_2a_2\Rightarrow a=\frac{v-v_0}{t}$$

$$\Rightarrow m_1(\frac{v_1-0}{t})=-m_2(\frac{v_2-0}{t})\Rightarrow m_1v_1=-m_2v_2$$

$$\Rightarrow|0/5\times 2000|=|-80\times v_2|\Rightarrow v_2=12/5m/s$$

B ۷۵۳ ۱

خط فکری در قانون سوم نیوتون برای بررسی نیروی واکنش شما باید ابتدا مشخص کنید نیروی وارد بر جسم توسط کدام جسم بر جسم مورد نظر اعمال می‌شود به‌طور مثال برای یافتن واکنش نیروی وزن ابتدا باید از خود بپرسید نیروی وزن توسط چه جسمی بر جسم مورد نظر وارد شده تا بتوانید واکنش نیروی وزن را بیان کنید.

نیروی وزن (mg) نیرویی است که کرهٔ زمین بر جسم وارد می‌کند و واکنش آن توسط جسم بر کرهٔ زمین وارد می‌شود از این رو گزارهٔ (الف) نادرست است.

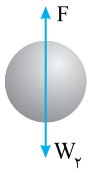
در شکل T_2 نیروی کشش نخ است که توسط نخ بر m_2 وارد می‌شود در نتیجه واکنش T_2 نیرویی است که جسم m_2 بر نخ وارد می‌کند، بنابراین گزارهٔ (ب) نادرست است.

در شکل T_4 نیروی کششی است که نخ بر دیوار وارد می‌کند، واکنش آن توسط دیوار بر نخ وارد می‌شود و گزارهٔ (پ) درست است.

T_3 بر m_2 و T_4 بر دیوار وارد می‌شوند و نمی‌توانند واکنش هم باشند و گزارهٔ (ت) نادرست است.

C ۷۵۴ ۲

اکنون باید به ذهن خود فشار آورید تا قانون سوم را بهتر درک کنید.



نیروهای وارد بر جسم را بررسی می‌کنیم.

۱ نیروی وزن W_2 که توسط کرهٔ زمین بر جسم رو به پایین وارد می‌شود.

۲ نیرویی که توسط مایع بر جسم رو به بالا وارد می‌شود که آن را حرف F نمایش داده‌ایم.

قطعاً نیروی F از W_2 کوچک‌تر است $(F<W_2)$ زیرا جسم با شتاب ثابت رو به پایین در حرکت است یعنی نیروی خالص وارد بر جسم رو به پایین است.

۳ بنا به قانون سوم نیوتون وقتی مایع به جسم نیروی F را رو به بالا وارد می‌کند جسم همان نیروی F را رو به پایین بر مایع وارد می‌کند.

۴ به مایع درون ظرف دو نیرو یکی وزن $W_{\text{مایع}}$ و دیگری F رو به پایین وارد می‌شود.

۵ عددی که نیروسنج نشان می‌دهد مجموع نیروی وزن مایع و ظرف (W_1) و نیروی واکنش F است از این‌رو خواهیم داشت.

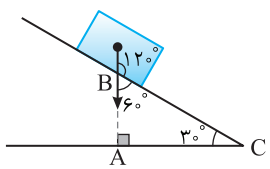
$$W_3=W_1+F \xrightarrow{F<W_2} W_3<W_1+W_2 \Rightarrow W_1+W_2>W_3$$

پنجره ۲

A ۷۵۵ ۲

یادآوری نیروی وزن، نیرویی است که توسط کرهٔ زمین بر جسم وارد می‌شود. این نیرو همواره در امتداد قائم و رو به پایین است.

نیروی وزن را رسم می‌کنیم و آن را امتداد می‌دهیم تا خط افقی را قطع کند و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را تشکیل می‌دهیم. در این صورت اندازهٔ $\hat{B}$، زاویهٔ بین نیروی وزن و امتداد سطح شیبدار مطابق شکل 60° است.



A ۷۵۶ ۴

جرم از ویژگی‌های ذاتی جسم بوده و در مکان‌های مختلف تغییر نمی‌کند بنابراین اختلاف جرم ثابت می‌ماند و برابر ۴kg است. اما نیروی وزن برابر $W=mg$ است یعنی نیروی وزن وارد بر جسم به شتاب گرانش سیاره‌ای که جسم روی سطح آن قرار دارد بستگی دارد. از این‌رو اختلاف وزن آن بر سطح سیاره برابر است با:

$$\Delta W_{\text{سیاره}}=|m_A-m_B|g_{\text{سیاره}} \xrightarrow{g_{\text{سیاره}}=\frac{3}{4}\times 10=7/5\,m/s^2}$$
$$\Delta W_{\text{سیاره}}=4\times 7/5=30\,N$$

A ۷۵۷ ۴

۱ جرم جسم ثابت است بنابراین تغییر وزن مربوط به شتاب گرانش است، از این رو تغییر وزن را حساب می‌کنیم:

$$W_{\text{مریخ}}-W_{\text{ماه}}=mg_{\text{مریخ}}-mg_{\text{ماه}} \xrightarrow{(g_{\text{ماه}}=1/6\,N/kg,\ g_{\text{مریخ}}=3/6\,N/kg)}$$
$$\Delta W=3/6m-1/6m=2m$$

۲ درصد تغییرات برابر است با: $\frac{W_{\text{مریخ}}-W_{\text{ماه}}}{W_{\text{ماه}}}\times 100=\frac{2m}{1/6m}\times 100=125\%$

بنابراین نیروی وزن ۱۲۵٪ افزایش می‌یابد.

A ۷۵۸ ۲

یادآوری بنا به تعریف چگالی یک جسم برابر $\rho=\frac{m}{V}$ است. حجم مکعب برابر طول یک ضلع به توان ۳ است. $V=a^3$

۱ حجم مکعب برابر است با: $V=20^3 \Rightarrow V=8\times 10^3\,cm^3$

۲ جرم جسم را به کمک چگالی حساب می‌کنیم.

$$\rho=\frac{m}{V} \Rightarrow 5=\frac{m}{8\times 10^3} \Rightarrow m=40\times 10^3\,g \Rightarrow m=40\,kg$$

۳ وزن جسم خواهد شد: $W=mg \Rightarrow W=40\times 10=4\times 10^2\,N$

A ۷۵۹ ۲

به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

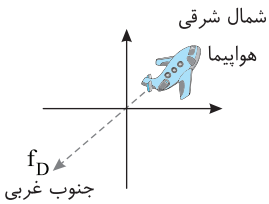
$$v^2-v_0^2=2a\Delta y \xrightarrow[\Delta y=20\,m]{v=15\,m/s} 225-0=2a\times 20 \Rightarrow a=5/625\,m/s^2$$

اگر جسم تنها تحت تأثیر نیروی وزن سقوط می‌کرد شتاب حرکت آن برابر شتاب گرانش $(g\sim 10\,m/s^2)$ بود اما اکنون شتاب از شتاب گرانش کمتر است $(a<g)$ بنابراین حداقل یک نیرو روبه بالا در خلاف جهت حرکت جسم مطابق شکل باید بر جسم وارد شده باشد. در نتیجه تعداد نیروهای وارد بر جسم حداقل دو نیرو است.

A ۷۶۰ ۳

نکته نیروی مقاومت هوا همواره خلاف جهت حرکت بر جسم وارد می‌شود.

هواپیما در حال حرکت به سمت شمال شرقی است، نیروی مقاومت هوا در خلاف جهت حرکت هواپیما بر آن وارد می‌شود. از این‌رو جهت نیروی مقاومت هوا در جهت جنوب غربی است.



B ۷۶۱ ۲

نکته نیروی مقاومت شاره (هوا) به تندی جسم و ابعاد و شکل جسم بستگی دارد.

۱ مساحت وجهی از جسم که مقاومت هوا بر آن وارد می‌شود را حساب می‌کنیم.

$$A_A=\frac{2}{3}a\times\frac{3}{2}a=a^2\ ,\ A_B=2a\times a=2a^2$$

سطح $A_B>A_A$ است از این رو نیروی مقاومت شاره وارد بر جسم B بزرگتر است.

$$f_{D_B}>f_{D_A}$$

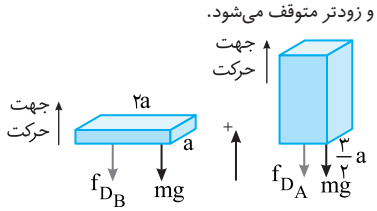
۲ جرم دو جسم یکسان است، بنابراین نیروی وزن وارد بر دو جسم یکی است.

$$W_A=W_B$$

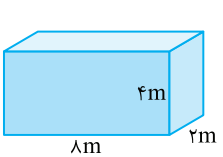
۳ نیروی خالص وارد بر هر جسم $(F_{net}=-(W+f_D))$ است.

$$-(mg+f_{D_B})=ma_B \Rightarrow a_B=-g-\frac{f_{D_B}}{m}$$
$$-(mg+f_{D_A})=ma_A \Rightarrow a_A=-g-\frac{f_{D_A}}{m}$$

نیروی مقاومت f_{D_B} بیشتر از f_{D_A} است، بنابراین شتاب کندشوندهٔ جسم B بیشتر از جسم A بوده و زودتر متوقف می‌شود.



بازی یا سؤال مکعب مستطیل روبه‌رو را از ارتفاعی مشخص در هوا به سمت زمین رها می‌کنیم. اگر فرض شود در طول سقوط مکعب‌مستطیل در هوا نمی‌چرخد، آن را از طرف کدام وجه رها کنیم که با سرعت کمتری به زمین برسد؟



۱) 2×8 ۲) 4×8

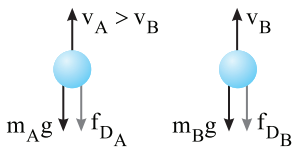
۳) 2×4 ۴) سرعت رسیدن به زمین در هر سه حالت یکسان است.

پاسخ هرچه مساحت سطح جلوی جسم بیشتر باشد برخورد مولکول‌های هوا با جسم بیشتر می‌شود پس نیروی مقاومت بیشتری به جسم وارد شده و سرعت رسیدن آن به زمین کمتر است. بنابراین کمترین تندی برای زمانی است که مکعب را از وجه 8×4 به سمت پایین رها کنیم. گزینهٔ ۲

۷۶۲ B ۲

نکته هر چه تندی جسم بیشتر باشد نیروی مقاومت شاره (هوا) وارد بر آن بیشتر است.

خط فکری ابتدا نیروی وارد بر هر جسم را در یک شکل ساده نشان دهید سپس برایند نیروهای وارد بر هر جسم را بررسی کنید.



۱ در لحظه‌ای که $v_A > v_B$ است نیروی مقاومت هوا وارد بر A از نیروی مقاومت هوا وارد بر B بزرگتر است. $f_{D_A} > f_{D_B}$

۲ قانون دوم نیوتون را برای هر جسم می نویسیم و شتاب هریک را به‌دست می‌آوریم و به کمک نیروی خالص وارد بر آن‌ها شتاب‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم.

$$f_{net}=ma \begin{cases} \xrightarrow{A} |m_Ag+f_{D_A}|=m|a_A| \Rightarrow |a_A|=|g+\frac{f_{D_A}}{m}| \\ \xrightarrow{B} |m_Bg+f_{D_B}|=m|a_B| \Rightarrow |a_B|=|g+\frac{f_{D_B}}{m}| \end{cases}$$

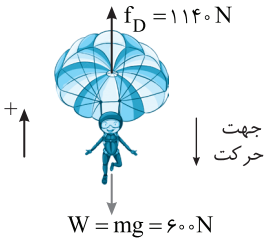
۳ $f_{D_A} > f_{D_B}$ است بنابراین $|a_A| > |a_B|$ خواهد بود.

۷۶۳ A ۴

۱ نیروی وزن چترباز را حساب می‌کنیم:

$$W=mg \xrightarrow{m=60kg} W=60\times 10=600N$$

۲ در لحظهٔ مورد نظر نیروی مقاومت هوا $f_D=1140N$ رو به بالا است. این نیرو از نیروی وزن بزرگتر است. $(f_D > W)$ و نیروی خالص رو به بالا خواهد بود در حالی که جهت حرکت رو به پایین است بنابراین حرکت در این لحظه کندشونده است.



۳ اندازهٔ شتاب را به کمک قانون دوم به‌دست می‌آوریم.

$$f_{net}=ma \Rightarrow f_D-mg=ma \Rightarrow 1140-600=60a \Rightarrow a=9m/s^2$$

۷۶۴ A ۳

۱ به جسم دو نیروی W و f_D عمود بر هم وارد می‌شود بنابراین نیروی خالص وارد بر جسم برابر است با: $F_{net}=\sqrt{f_D^2+W^2} \Rightarrow F_{net}=\sqrt{f_D^2+(4/8)^2}$ (I)

۲ با توجه به وزن داده‌شده و شتاب گرانش، جرم را به‌دست می‌آوریم:

$$W=mg \xrightarrow[W=4/8N]{g=10m/s^2} 4/8=m\times 10 \Rightarrow m=0/48kg$$

۳ با توجه به قانون دوم نیوتون،نیروی خالص برابر است:

$$F_{net}=ma \Rightarrow F_{net}=0/48\times\frac{65}{6}=5/2N \quad (II)$$

۴ با توجه به دو معادلهٔ (I) و (II) خواهیم داشت:

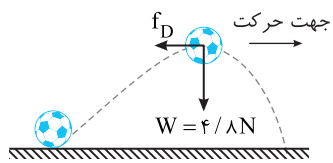
$$5/2=\sqrt{f_D^2+(4/8)^2} \Rightarrow (5/2)^2=f_D^2+(4/8)^2$$

$$\Rightarrow f_D^2=(5/2)^2-(4/8)^2$$

یادداشت ریاضی یک اتحاد پرکاربرد که محاسبات را برای ما ساده می‌کند، اتحاد مزدوج است: $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$

۵ با توجه به اتحاد مزدوج معادله را حل می‌کنیم:

$$f_D^2=(5/2-4/8)(5/2+4/8) \Rightarrow f_D^2=0/4\times 10 \Rightarrow f_D^2=4 \Rightarrow f_D=2N$$



میانبر بهتر است اعداد فیثاغورسی «۵ و ۴ و ۳» و «۱۳ و ۱۲ و ۵» را به خاطر بسپارید.

$$5/2=\sqrt{f_D^2+(4/8)^2} \Rightarrow f_D=5\times 0/4=2N$$

$13\times 0/4 \quad 5\times 0/4 \quad 12\times 0/4$

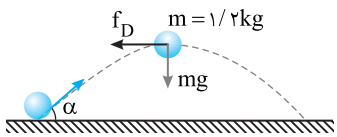
بازی با سؤال توپی به جرم $1/2kg$ را تحت زاویهٔ α به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اگر در بیشینهٔ ارتفاع توپ از زمین اندازهٔ شتاب حرکت توپ $12/5m/s^2$ باشد، در این نقطه نیروی مقاومت هوای وارد بر توپ چند نیوتون است؟ $(g=10N/kg)$ از کتاب درسی

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۱۵

پاسخ در نقطهٔ بیشینه مطابق شکل دو نیروی وزن (رو به پایین) و مقاومت هوا (خلاف جهت حرکت) به جسم وارد می‌شوند.

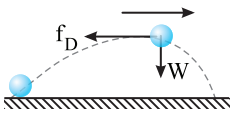
$$|\vec{F}_{net}|=|m\vec{a}| \Rightarrow F_{net}=\sqrt{f_D^2+mg^2}=ma \Rightarrow \sqrt{f_D^2+(12)^2}=12/5\times 1/2=15$$

$$f_D^2+144=225 \Rightarrow f_D=9N$$



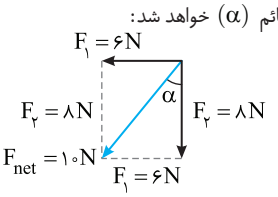
گزینهٔ ۱

۷۶۵ A ۲



نیروی مقاومت هوا، خلاف جهت حرکت است و نیروی وزن رو به پایین وارد می‌شود، بنابراین بنا به قانون دوم نیوتون همواره جهت بردار شتاب جسم در جهت نیروی خالص وارد بر جسم $(\vec{F}=m\vec{a})$ است. بنابراین کافی است شما نیروی برایند را رسم کنید و زاویهٔ این نیرو با راستای قائم را به‌دست بیاورید.

مطابق شکل زاویهٔ بین نیروی خالص و محور قائم (α) خواهد شد:



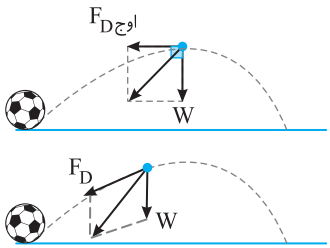
$$\tan\alpha=\frac{F_1}{F_2} \Rightarrow \tan\alpha=\frac{6}{8}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha=\frac{3}{4} \Rightarrow \alpha=37^\circ$$

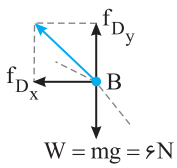
۷۶۶ B ۱

نیروی مقاومت شاره با افزایش تندی، افزایش می‌یابد. اندکی قبل از اوج تندی توپ از تندی آن در اوج بیشتر است. بنابراین نیروی مقاومت هوا نیز بیشتر است. $(f_D > f_{D_{اوج}})$ و مطابق شکل نیروی برایند f_D و W در قبل اوج بزرگ‌تر از نیروی برایند در نقطهٔ اوج خواهد شد، بنابراین

$$F_{net_{قبل\ از\ اوج}} > F_{net_{اوج}} > W \Rightarrow a > a_{اوج} > g$$



۷۶۷ C ۳



نیروی وزن در امتداد قائم و رو به پایین است. مؤلفهٔ قائم نیروی مقاومت هوا در امتداد قائم و رو به بالا است. بنابراین:

$$F_{net_y}=f_{D_y}-W \Rightarrow -1=f_{D_y}-6 \Rightarrow f_{D_y}=5N$$

نیروی وزن مؤلفهٔ افقی ندارد، در نتیجه مؤلفهٔ افقی نیروی خالص برابر مؤلفهٔ افقی نیروی مقاومت هواست.

$$F_{net_x}=F_{D_x}=-12N$$

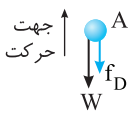
نیروی مقاومت هوا برابر است با:

$$f_D=\sqrt{(12)^2+(5)^2}=13N$$

A ۷۶۸ ۱

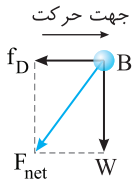
خط فکری سؤال زیبایی است. مهم‌ترین نکتهٔ آن عبارت «اثر مقاومت هوا قابل ملاحظه باشد» بنابراین شما برای هر گلوله باید نیروهای وارد بر آن یعنی نیروی وزن را رو به پایین و نیروی مقاومت هوا را در خلاف جهت حرکت رسم کنید. نیروی خالص را به دست بیاورید و به کمک آن شتاب گلوله‌ها را با هم مقایسه کنید.

۱ جسم A: نیروی وزن و مقاومت شاره (هوا) وارد بر A هر دو رو به پایین است از این‌رو:



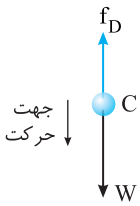
$$F_{net}=ma\Rightarrow|a|=\frac{|F_{net}|}{m}\Rightarrow|a|=\frac{|f_D+W|}{m}$$

۲ جسم B:



$$F_{net}=ma\Rightarrow a_B=\frac{\sqrt{f_D^2+W^2}}{m}$$

۳ جسم C:



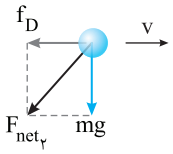
$$F_{net}=ma\Rightarrow a_C=\frac{W-f_D}{m}$$

۴ بنابراین بزرگی شتاب A از بزرگی شتاب‌های B و C بزرگتر است.

$$|a_A|>|a_B|>|a_C|$$

B ۷۶۹ ۴

نکته نیروی مقاومت شاره (هوا) در خلاف جهت حرکت جسم است.



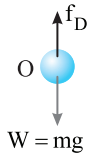
۱ نیروهای وارد بر گلوله (۲) را رسم می‌کنیم.

۲ نیروی خالص وارد بر گلوله (۲) را به کمک رابطهٔ فیثاغورس می‌نویسیم:

$$F_{net}=\sqrt{f_D^2+mg^2}\xrightarrow[F_{net_2}=4\sqrt{41}N]{m=2kg}4\sqrt{41}=\sqrt{f_D^2+20^2}$$

$$\Rightarrow 16\times 41=f_D^2+400\Rightarrow f_D^2=656-400=256\Rightarrow f_D=16N$$

۳ نیروهای وارد بر گلولهٔ (۱) را رسم می‌کنیم و به کمک قانون دوم نیوتون شتاب حرکت جسم را حساب می‌کنیم:

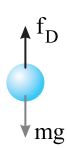


$$F_{net_1}=ma\Rightarrow W-f_D=ma\Rightarrow 20-16=2a\Rightarrow a=2m/s^2$$

B ۷۷۰ ۲

نکته نیروی مقاومت هوا (f_D) به تندی جسم بستگی دارد و هرچه تندی بیشتر شود، نیروی مقاومت هوا افزایش می‌یابد.

هنگامی که چتربار سقوط می‌کند، تندی آن افزایش می‌یابد. یعنی در ابتدا سرعت ثابت نیست و گزینهٔ (۳) نادرست است. با افزایش تندی، نیروی مقاومت هوای وارد بر چتربار نیز افزایش می‌یابد. بنابراین نیروی خالص وارد بر چتربار $(F_{net}=W-f_D)$ متغیر است و شتاب



متغیر ثابت متغیر

حاصل از آن نیز متغیر است. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۴) نادرست است. هنگامی که جسم به تندی حدی خود می‌رسد نیروی مقاومت هوا و نیروی وزن هم‌اندازه می‌شوند و چون در خلاف جهت هم هستند برایند نیروهای وارد بر چتربار صفر می‌شود و حرکت با سرعت ثابت ادامه پیدا می‌کند. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

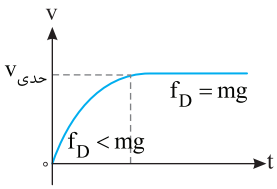
A ۷۷۱ ۲

وقتی یک چتربار بلافاصله بعد از سقوط چترش را باز می‌کند، ابتدا تندی‌اش افزایش می‌یابد پس در ابتدا حرکت تندشونده است در نتیجه نیروی مقاومت هوا نیز افزایش می‌یابد تا لحظه‌ای که نیروی مقاومت هوا با وزن چتربار هم‌اندازه شود، در این هنگام نیروی خالص صفر شده و چتربار با تندی ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد.

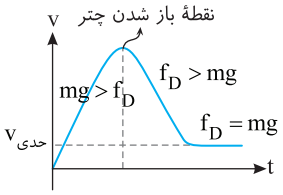
B ۷۷۲ ۲

خط فکری در موضوع مقاومت شاره و حرکت چتربار به دو حالت زیر دقت کنید:

الف) اگر چتربار در همان ابتدا با چتر باز پریده باشد، رفته‌رفته تندی آن افزایش یافته تا به تندی حدی برسد و پس از آن با تندی ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد:



ب) اگر چتربار بپرد و پس از مدتی چتر خود را باز کند، در لحظهٔ باز شدن چتر تندی حرکت متحرک بیشینه بوده و با باز شدن چتر تندی چتربار شروع به کم شدن می‌کند تا به تندی حدی برسد:

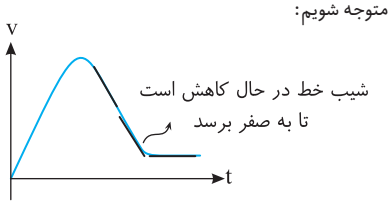


نکته مقاومت هوا به تندی جسم بستگی دارد و با افزایش و یا کاهش تندی جسم مقاومت هوا به ترتیب افزایش و یا کاهش می‌یابد.

با توجه به سؤال چتربار بعد از مدتی چتر خود را باز کرده یعنی حرکت چتربار مانند حالت (ب) خط فکری است. بعد از باز شدن چتر تندی چتربار شروع به کاهش می‌کند بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) و (۴) که در آن‌ها بیان شده تندی جسم افزایش می‌یابد نادرست بوده و تنها گزینهٔ (۲) درست است.

اما بررسی شتاب حرکت: جهت حرکت چتربار به سمت پایین است و پس از باز کردن چتر حرکت چتربار کندشونده بوده و نیروی مقاومت هوا (f_D) به سمت بالا و بزرگ‌تر از W است و نیروی خالص وارد بر چتربار f_D-W، خواهد شد. در اصل $F_{net}=ma\Rightarrow f_D-W=ma$ است و با کم شدن تندی جسم f_D کاهش می‌یابد در نتیجه شتاب کاهش می‌یابد و در تندی حدی که $f_D=mg$ می‌شود شتاب صفر است یعنی شتاب بعد از باز شدن چتر در حال کاهش است.

البته می‌توانستیم از روی نمودار $v-t$ و شیب خط مماس که شتاب را به ما می‌دهد نیز این موضوع را متوجه شویم:

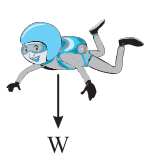


A ۷۷۳ ۴

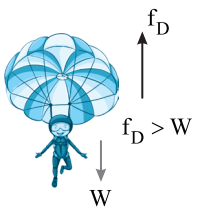
چتربار از ارتفاع نسبتاً زیادی به بیرون می‌پرد و چتر خود را باز می‌کند. بنابراین در ابتدا تندی چتربار افزایش می‌یابد. با افزایش تندی مقاومت هوا نیز زیاد شده تا وقتی که نیروی مقاومت هوا با نیروی وزن برابر می‌شود $(W=f_D)$ بعد از این لحظه نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند $(F_{net}=0)$ و حرکت جسم با سرعت ثابت ادامه پیدا می‌کند، بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

A ۷۷۴ ۴

۱ چتربار بعد از پریدن از بالگرد تا مدتی با چتر بسته سقوط می‌کند و تقریباً با شتاب گرانشی ناشی از نیروی وزن پایین می‌آید $(g=10m/s^2)$ و در هر ثانیه تقریباً به اندازهٔ $10m/s$ بر سرعتش افزوده می‌شود و نمودار سرعت - زمان باید با گذشت زمان صعودی باشد.



۲ هنگامی که چتربار چتر خود را باز می‌کند، به دلیل ابعاد بزرگ چتر، نیروی مقاومت هوا (f_D) به شدت افزایش می‌یابد به‌گونه‌ای که f_D از نیروی وزن (W) چتربار بزرگتر است $(f_D>W)$ و مانند ترمز، سرعت چتربار را کاهش می‌دهد. بنابراین نمودار سرعت - زمان، نزولی می‌شود.



۳ هرچه از سرعت چترباز کاسته می‌شود، نیروی مقاومت هوا کاهش می‌یابد تا لحظه‌ای فرا می‌رسد که نیروی مقاومت هوا با نیروی وزن برابر می‌شود $(f_D = W)$ و نیروهای وارد بر چترباز متوازن شده و چترباز با سرعت ثابت پایین می‌آید بنابراین سرعت چترباز ثابت می‌ماند و نمودار سرعت - زمان خط راست افقی می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

A ۷۷۵ ۳

یادآوری هرگاه هنگام سقوط جسم در هوا، نیروی وزن برابر نیروی مقاومت هوا شود نیروهای وارد بر جسم متوازن شده و جسم با تندی ثابت که به آن تندی حدی می‌گویند پایین می‌آید.

نیروی وزن را با نیروی مقاومت هوا برابر قرار می‌دهیم و تندی جسم را به دست می‌آوریم.

$$f_D = W \xrightarrow{f_D = ۱۵۰v} ۱۵۰v = mg \xrightarrow{m=۶۰kg} ۱۵۰v = ۶۰\times ۱۰$$

$$\Rightarrow v = ۴m/s$$

بازی با سوال **قطعه سنگی به جرم $۷/۵kg$ از ارتفاع زیادی رها می‌شود و پس از طی مسافتی با تندی حدی $۲/۵m/s$ به زمین می‌رسد. اگر رابطهٔ بین اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر سنگ برحسب تندی در SI به‌صورت $f_D = bv^۲$ باشد، b کدام است؟ $(g = ۱۰m/s^۲)$**

۱) $۱/۲$ ۲) ۶ ۳) $۰/۶$ ۴) ۱۲

پاسخ در تندی حدی، نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا با هم برابر است:

$$f_D = mg \Rightarrow f_D = ۷۵N$$

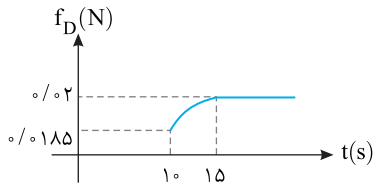
$$f_D = bv^۲ \xrightarrow[v=۲/۵m/s]{f_D=۷۵N} ۷۵ = b(۲/۵)^۲ \Rightarrow b = ۱۲$$

گزینهٔ ٤

B ۷۷۶ ۱

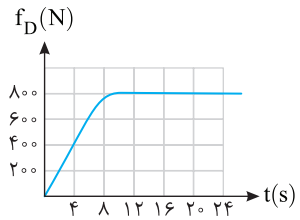
با توجه به نمودار نیز از لحظهٔ $t = ۱۵s$ به بعد نیروی مقاومت هوا ثابت شده پس از $t = ۱۵s$ به بعد قطره به تندی حدی خود رسیده است و نیروی وزن و مقاومت آن باهم برابر است.

$$mg = f_D = ۰/۰۲N \Rightarrow m = ۰/۰۰۲kg \Rightarrow m = ۲g$$



B ۷۷۷ ۲

۱) در لحظه‌ای که نیروی مقاومت هوا $f_D = ۸۰۰N$ شده است، این نیرو ثابت مانده است یعنی در این لحظه تندی چترباز به تندی حدی رسیده است و نیروی وزن با نیروی مقاومت هوا برابر شده است.



$$F_{net} = ۰ = f_D = ۸۰۰N$$

۲) جرم جسم را حساب می‌کنیم.

$$W = mg \Rightarrow ۸۰۰ = m\times ۱۰ \Rightarrow m = ۸۰kg$$

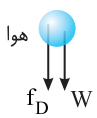
۳) در لحظهٔ $t = ۴s$ نیروی مقاومت هوا وارد بر جسم برابر $۴۰۰N$ است از این رو شتاب حرکت خواهد شد:

$$F_{net} = ma \Rightarrow W - f_D = ma \Rightarrow ۸۰۰ - ۴۰۰ = ۸۰a \Rightarrow a = ۵m/s^۲$$

B ۷۷۸ ۴

۱) هنگامی که جسم در خلأ پرتاب می‌شود تنها نیروی وزن رو به پایین به آن وارد می‌شود $-mg = ma \Rightarrow |a| = g$. بنابراین با شتاب g از تندی جسم کاسته می‌شود تا گلوله متوقف شود.

۲) اما در هوا علاوه بر نیروی وزن، نیروی مقاومت هوا نیز خلاف جهت حرکت یعنی رو به پایین به جسم وارد می‌شود و بزرگی شتاب حرکت جسم خواهد شد:



$$F_{net} = ma \Rightarrow |mg + f_D| = ma' \Rightarrow a' = g + \frac{f_D}{m} > g$$

۳ شتاب توقف جسم وقتی در هوا رو به بالا پرتاب می‌شود بیشتر از g است. بنابراین گلوله سریع‌تر متوقف می‌شود در نتیجه، زمان توقف و ارتفاع اوج گلوله هنگام پرتاب در هوا کوچکتر از پرتاب در شرایط خلأ است. $t' < t \quad , \quad H' < H$

۴ به محاسبات زیر دقت کنید.

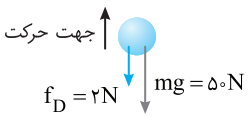
$$v = at + v_۰ \begin{cases} \xrightarrow{v=۰ \text{ خلأ}} ۰ = -gt + v_۰ \Rightarrow t = \frac{v_۰}{g} \\ \xrightarrow{v=۰ \text{ هوا}} ۰ = (-g - \frac{f_D}{m})t' + v_۰ \Rightarrow t' = \frac{v_۰}{g + \frac{f_D}{m}} \end{cases} \Rightarrow t' < t$$

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \begin{cases} \xrightarrow{\text{خلأ}} ۰ - v_۰^۲ = ۲(-g)H \Rightarrow H = \frac{v_۰^۲}{۲g} \\ \xrightarrow{\text{هوا}} ۰ - v_۰^۲ = ۲(-g - \frac{f_D}{m})H' \Rightarrow H' = \frac{v_۰^۲}{۲(g + \frac{f_D}{m})} \end{cases} \Rightarrow H' < H$$

A ۷۷۹ ۲

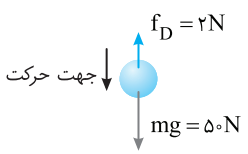
خط فکری شکل ساده‌ای از مسئله در دو حالت رسم می‌کنیم نیروهای وارد بر جسم را روی شکل نمایش می دهیم سپس به کمک قانون دوم نیوتون شتاب جسم را در مسیر رفت و در مسیر برگشت حساب می‌کنیم.

۱) هنگام پرتاب توپ به سمت بالا نیروی مقاومت هوا که مخالف جهت حرکت است، به سمت پایین است. نیروی وزن نیز به سمت پایین است. بنابراین شتاب حرکت خواهد شد.



$$F_{net} = ma \Rightarrow -۵۰ - ۲ = ۵a \Rightarrow a = -۱۰/۴m/s^۲ \Rightarrow |a| = ۱۰/۴m/s^۲$$

۲) در مسیر برگشت، جهت حرکت رو به پایین و نیروی مقاومت هوا رو به بالا است. نیروی وزن نیز به سمت پایین است.



$$F_{net} = ma' \Rightarrow -۵۰ + ۲ = ۵a'$$

$$\Rightarrow a' = -۹/۶m/s^۲ \Rightarrow |a'| = ۹/۶m/s^۲$$

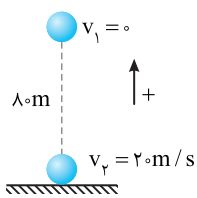
بنابراین:

$$\frac{|a|}{|a'|} = \frac{۱۰/۴}{۹/۶} = \frac{۱۳}{۱۲}$$

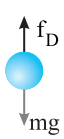
B ۷۸۰ ۳

۱) جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده $(v_۰ = ۰)$ و بعد از جابه‌جایی $d = ۸۰m$ سرعت آن به $v = ۲۰m/s$ رسیده است بنابراین می‌توانیم که به کمک رابطهٔ مستقل از زمان برای حرکت با شتاب ثابت، شتاب را حساب کنیم.

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲ad \Rightarrow ۲۰^۲ - ۰ = ۲a(۸۰) \Rightarrow a = ۲/۵m/s^۲$$



۲) نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و برایند نیروها را مساوی ma قرار می‌دهیم.



$$f_{net} = ma \xrightarrow{m=۲kg} mg - f_D = ma \Rightarrow ۲۰ - f_D = ۲\times ۲/۵$$

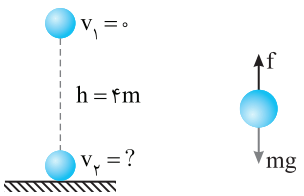
$$\Rightarrow f_D = ۱۵N$$

بازی با سوال **جسمی به جرم $۲kg$ از ارتفاع $۴m$ سطح زمین رها می‌شود. اگر نیروی مقاومت هوای وارد بر جسم ثابت و برابر $f_D = ۱۲N$ فرض شود، سرعت جسم هنگام رسیدن به زمین چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

پاسخ ابتدا با توجه به نیروهای وارد بر جسم شتاب جسم را محاسبه می‌کنیم:

$$mg-f=ma\Rightarrow ۲۰-۱۲=۲a\Rightarrow a=۴m/s^۲$$



جسم با شتاب $۴m/s^۲$ از حال سکون رو به پایین شروع به حرکت کرده و در جابه‌جایی $d=۴m$ سرعت آن خواهد شد:

گزینهٔ ۳ $v^۲-v_۰^۲=۲ad\Rightarrow v^۲-۰=۲\times۴\times۴\Rightarrow v=۴\sqrt{۲}\ m/s$

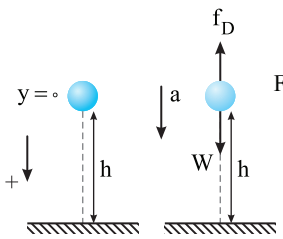
B ۷۸۱ ۲

خط فکری به گزینه‌ها این گونه با تعجب نگاه نکنید مسئله ساده‌تر از این حرف‌هاست. شکل ساده‌ای رسم کنید. نیروهای وارد بر جسم را روی آن نشان دهید. نیروی خالص را به دست بیاورید تا بتوانید شتاب را حساب کنید. در مسئله از شما زمان خواسته شده بنابراین باید به سراغ حرکت‌شناسی بروید و زمان را حساب کنید.

۱ ابتدا با توجه به نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-f_D=ma\Rightarrow a=g-\frac{f_D}{m}$$

۲ با استفاده از معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت، زمان را حساب می‌کنیم:



$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow -h=\frac{۱}{۲}(-(g-\frac{f_D}{m}))t^۲\Rightarrow h=\frac{۱}{۲}(g-\frac{f_D}{m})t^۲$$

$$\Rightarrow t^۲=\frac{۲hm}{mg-f_D}\Rightarrow t=\sqrt{\frac{۲hm}{mg-f_D}}$$

B ۷۸۲ ۲

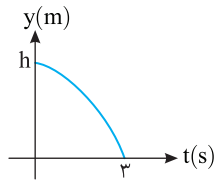
۱ نیروهای وارد بر جسم نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا هستند. نیروها را روی یک شکل ساده نمایش می‌دهیم. در نمودار جهت مثبت رو به بالا اختیار شده بنابراین f_D مثبت و W منفی شده و نیروی خالص وارد بر جسم $F_{net}=-mg+f_D$ خواهد شد. با توجه به قانون دوم نیوتون شتاب را به‌دست می‌آوریم:

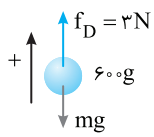
$$F_{net}=ma\Rightarrow -mg+f_D=ma\Rightarrow -۶+۳=۰/۶a\Rightarrow -۳=۰/۶a$$

$$\Rightarrow a=-۵m/s^۲$$

۲ حال با توجه به معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$\Delta y=-\frac{۱}{۲}at^۲\Rightarrow -h=-\frac{۱}{۲}\times۵\times۹\Rightarrow h=۲۲/۵m$$

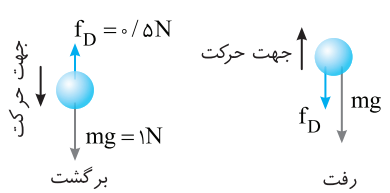




B ۷۸۳ ۳

هم در مسیر رفت و هم در مسیر برگشت با توجه به ثابت بودن نیروها (نیروی وزن و مقاومت هوا) شتاب حرکت ثابت است. به کمک قانون دوم نیوتون در مسیر رفت که نیروی وزن و مقاومت هوا هم‌جهت‌اند f_D را حساب می‌کنیم. (جهت مثبت رو به بالا انتخاب شده است.)

$$F_{net}=ma\Rightarrow -mg-f_D=ma\Rightarrow -۱-f_D=-۱/۵\Rightarrow f_D=۰/۵N$$



اکنون در مسیر برگشت با توجه به این‌که نیروی وزن و نیروی f_D خلاف جهت هستند، شتاب را به دست می‌آوریم.

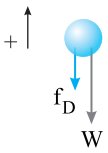
$$F_{net}=ma\Rightarrow -mg+f_D=ma'\Rightarrow -۱+۰/۵=۰/۱a'\Rightarrow a'=-۵m/s^۲$$

B ۷۸۴ ۳

در ابتدا نمودار (۲) و (۴) را کنار می‌گذاریم زیرا در صورت مسئله جهت رو به بالا مثبت در نظر گرفته شده بنابراین سرعت اولیه در لحظهٔ پرتاب رو به بالا باید مثبت باشد که در نمودار گزینه‌های (۲) و (۴) منفی است.

یادآوری شیب نمودار سرعت - زمان برابر شتاب متحرک است.

۱ در مسیر رفت نیروهای وارد بر جسم یعنی نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا رو به پایین است و با هم جمع می‌شوند و اندازهٔ نیروی خالص وارد بر جسم از جمع W و f_D به دست می‌آید و شتاب حرکت خواهد شد:



$$|F_{net}|=ma\Rightarrow f_D+W=ma\Rightarrow a_{رفت}=\frac{W+f_D}{m}$$

۲ در مسیر برگشت نیروی وزن رو به پایین و نیروی مقاومت هوا رو به بالا و شتاب حرکت خواهد شد:

$$|F_{net}|=ma'\Rightarrow W-f_D=ma'\Rightarrow a'=\frac{W-f_D}{m}$$

شیب a و a' هر دو رو به پایین هستند پس منفی هستند. بنابراین شیب نمودار $v-t$ باید منفی باشد از طرفی بزرگی شتاب در مسیر رفت از بزرگی شتاب در مسیر برگشت بزرگتر و اندازهٔ شیب در مسیر رفت از اندازهٔ شیب در مسیر برگشت بیشتر بوده و گزینهٔ (۳) درست است.

B ۷۸۵ ۱

خط فکری برای هر جسم نیروها را رسم کرده و برایند نیروها را مشخص کرده، سپس شتاب حرکت هر جسم را به دست بیاورید و سرانجام به کمک رابطهٔ مستقل از زمان نسبت تندی دو متحرک را در برخورد به زمین حساب کنید.

۱ شتاب حرکت هر جسم را به‌دست می‌آوریم:

$$A\ \text{جسم}: m_Ag-f_{D_A}=m_Aa_A \xrightarrow{f_{D_A}=\frac{۱}{۳}m_Ag}$$

$$m_Ag-\frac{۱}{۳}m_Ag=m_Aa_A\Rightarrow a_A=\frac{۲}{۳}g$$

$$B\ \text{جسم}: m_Bg-f_{D_B}=m_Ba_B \xrightarrow{f_{D_B}=\frac{۱}{۶}m_Bg}$$

$$m_Bg-\frac{۱}{۶}m_Bg=m_Ba_B\Rightarrow a_B=\frac{۵}{۶}g$$

۲ باتوجه به رابطهٔ مستقل از زمان:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta y\Rightarrow \begin{cases} v_A^۲=۲a_Ah \\ v_B^۲=۲a_Bh \end{cases}\Rightarrow \frac{v_A}{v_B}=\sqrt{\frac{a_A}{a_B}}=\sqrt{\frac{\frac{۲}{۳}g}{\frac{۵}{۶}g}}=\sqrt{\frac{۱۲}{۱۵}}=\sqrt{\frac{۴}{۵}}$$

$$\Rightarrow \frac{v_A}{v_B}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

B ۷۸۶ ۲

نیروهای وارد بر دو گوی به ترتیب نیروی وزن و نیروی مقاومت هواست.

$$A\ \text{جسم}: m_Ag-f_D=m_Aa_A\Rightarrow a_A=g-\frac{f_D}{m_A}$$

$$B\ \text{جسم}: m_Bg-f_D=m_Ba_B\Rightarrow a_B=g-\frac{f_D}{m_B}$$

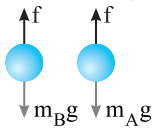
با توجه به اینکه $m_A=۲m_B$ است،

$$\frac{f_D}{m_A}<\frac{f_D}{m_B}\Rightarrow a_A>a_B$$

شتاب A بیشتر از شتاب B است. بنابراین A زودتر به زمین می‌رسد و تندی A در برخورد به زمین بیشتر از تندی B است.

B ۷۸۷ ۳

۱ ابتدا با توجه به قانون دوم نیوتون شتاب‌ها را به‌دست می‌آوریم:



$$F_{\text{خالص}}=ma\Rightarrow\begin{cases}m_Bg-f=m_Ba_B\Rightarrow a_B=g-\dfrac{f}{m_B}\\ m_Ag-f=m_Aa_A\Rightarrow a_A=g-\dfrac{f}{m_A}\end{cases}$$

۲ جرم دو جسم یکسان بوده $(m_A=m_B)$ بنابراین شتاب a_A و a_B با هم برابر است.

۳ به کمک رابطهٔ شتاب ثابت $\Delta y=\frac{1}{2}at^2+v_0t$ زمان سقوط هر گوی را حساب می‌کنیم:

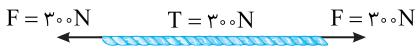
$$\Delta y=\frac{1}{2}at^2\begin{cases}\xrightarrow{A:} h_A=\frac{1}{2}a_At_A^2\Rightarrow t_A=\sqrt{\frac{2h_A}{a_A}}\\ \xrightarrow{B:} h_B=\frac{1}{2}a_Bt_B^2\Rightarrow t_B=\sqrt{\frac{2h_B}{a_B}}\end{cases}$$

اکنون نسبت زمان‌ها را به دست می‌آوریم.

$$\frac{t_A}{t_B}=\sqrt{\frac{h_Aa_B}{h_Ba_A}}\xrightarrow[a_A=a_B]{h_A=2h_B}\frac{t_A}{t_B}=\sqrt{\frac{2h_B}{h_B}}=\sqrt{2}$$

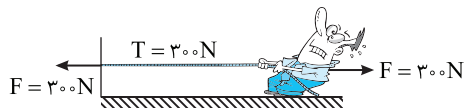
A ۷۸۸ ۳

نکته هرگاه دو سر طناب سبکی را با نیروهای یکسان F در خلاف جهت هم بکشیم نیروی کشش طناب برابر F خواهد بود.



برای توجیه نکتهٔ بالا به جای دو نفر، یک نفر را در نظر بگیرید که با نیروی $F=300N$ طناب متصل به دیواری را می‌کشد. اگر در این حالت از شما پرسیده شود نیروی کشش طناب چند نیوتون است شما به راحتی پاسخ خواهید داد « ۳۰۰N ».

اما به شکل دقت کنید طناب ساکن است بنابراین باید نیروهای وارد بر آن متوازن باشند یعنی دیوار نیروی ۳۰۰N به سمت چپ به طناب وارد می‌کند و این حالت با حالتی که دو نفر دو سر طناب را با ۳۰۰N می‌کشند فرقی نمی‌کند.

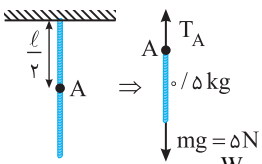


در این مسئله نیروی کشش نخ ۳۰۰N است که از بیشینهٔ نیروی قابل تحمل طناب (۴۰۰N) کمتر است و طناب پاره نمی‌شود.

B ۷۸۹ ۱

نکته هرگاه یک طناب سنگین از سقف آویزان شود، هر نقطه از طناب وزن قسمت پایینی طناب را تحمل می‌کند.

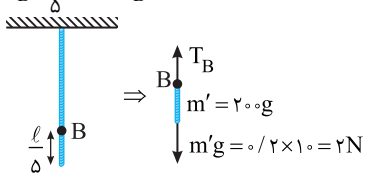
۱ در نقطهٔ A، کشش نخ برابر وزن قسمت پایین طناب یعنی برابر وزن یک نیمهٔ طناب است.



$$T_A=\frac{W}{2}=\frac{mg}{2}\xrightarrow{m=1kg}T_A=5N$$

۲ در نقطهٔ B، کشش نخ وزن $\frac{1}{5}$ طناب یعنی $\frac{W}{5}$ را تحمل می‌کند، از این‌رو:

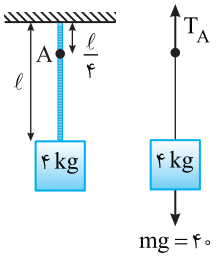
$$T_B=\frac{1}{5}W\Rightarrow T_B=\frac{1}{5}\times10\Rightarrow T_B=2N$$



۳ تفاضل دو نیروی کشش خواهد شد: $T_A-T_B=5-2\Rightarrow T_A-T_B=3N$

A ۷۹۰ ۴

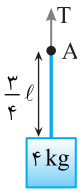
نکته هرگاه جرم ریسمان ناچیز باشد، نیروی کشش در تمام طول آن یکسان است. فواصل داده شده روی شکل مهم نیست و کشش در نقطهٔ A یا هر نقطه از ریسمان برابر وزن جسم متصل به ریسمان است.



$$T_A=mg\Rightarrow T_A=40N$$

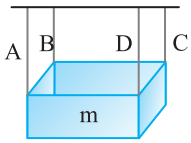
A ۷۹۱ ۲

خط فکری هرگاه طناب دارای جرم باشد و در امتداد قائم به سقف آویزان شود، کشش از نقاط بالا به پایین کاهش می‌یابد و هر نقطه از طناب وزن قسمت زیرین خود را تحمل می‌کند. کشش در نقطهٔ A برابر وزن قسمت زیر نقطه A است.

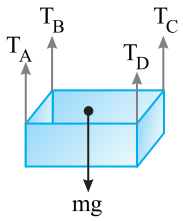


$$T_A=m_{\text{جسم}}g+\frac{3}{4}m_{\text{طناب}}g\Rightarrow T_A=40+3/75=43/75N$$

B ۷۹۲ ۱



نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. نیروی وزن به‌طور یکنواخت بین چهار ریسمان تقسیم شده است و هر ریسمان $\frac{1}{4}$ وزن جسم را تحمل می‌کند. برای آنکه هیچ‌یک از ریسمان‌ها پاره نشود نیروی کشش هریک از آن‌ها باید برابر کمینهٔ نیروی کشش ریسمان‌ها یعنی ۱۰N باشد. در این صورت: $T_A=T_B=T_C=T_D=10N$



جسم در تعادل است بنابراین:

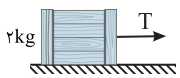
$$W=T_A+T_B+T_C+T_D=10+10+10+10$$
$$\Rightarrow W=40N$$

جرم جسم خواهد شد:

$$W=mg\Rightarrow 40=m\times10\Rightarrow m=4kg$$

A ۷۹۳ ۱

نکته در یک طناب سبک و همگن با جرم ناچیز کشش در تمام نقاط طناب یکسان است.



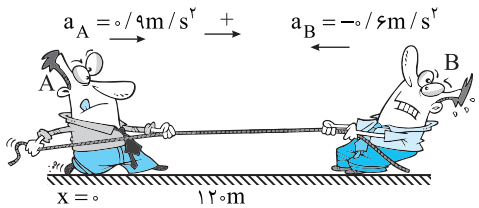
به جای نیروی کشش در محل M، نیروی کشش در محل اتصال طناب به جعبه را حساب می‌کنیم، سطح بدون اصطکاک است بنابراین نیروی خالص وارد بر جعبه همان نیروی کشش طناب است.

$$F_{net}=ma\Rightarrow T=2\times2=4N$$

B ۷۹۴ ۲

۱ اندازهٔ نیروی وارد بر شخص A و شخص B برابر نیروی کشش طناب $F_A=F_B=36N$ است. شتاب هر یک را به دست می‌آوریم:

$$A:F=ma\Rightarrow36=40a_A\Rightarrow a_A=0/9m/s^2$$
$$B:F=ma\Rightarrow36=60a_B\Rightarrow a_B=0/6m/s^2$$



۲ سرعت A و B را به کمک معادلهٔ سرعت - زمان حرکت با شتاب ثابت به دست می‌آوریم.

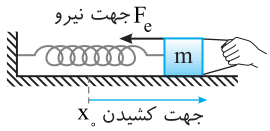
$$v=at+v_0\Rightarrow\begin{cases}v_A=0/9t\\ v_B=0/6t\end{cases}\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\frac{0/9}{0/6}=\frac{3}{2}$$

A ۷۹۵ ۳

یادآوری نیروی کشسانی فنر از رابطهٔ $F=kx$ $(F=k\Delta\ell)$ به دست می‌آید که در آن x تغییر طول فنر از حالت طبیعی آن است و k ثابت فنر بوده و به ویژگی‌های ساختمانی فنر بستگی دارد.

نکته نیروی کشسانی فنر همواره به سمت حالت طبیعی فنر است.

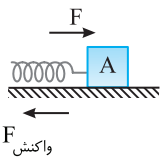
نیروی کشسانی فنر با تغییر طول فنر رابطهٔ خطی دارد نه با طول فنر مثلاً اگر طول اولیه فنری $15cm$ باشد یک‌بار طول آن را $17cm$ و بار دیگر $34cm$ کنیم، با اینکه طول فنر دو برابر شده (از $17cm$ به $34cm$) رسیده اما نیروی کشسانی دو برابر نمی‌شود $(F_1=k\times\frac{17-15}{100}, F_2=k\times\frac{34-15}{100})$، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است. ثابت فنر از ویژگی‌های ساختمانی فنر است و به جرم متصل آن بستگی ندارد، بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است. جهت نیروی فنر همواره خلاف جهت تغییر طول فنر است. به شکل روبه‌رو دقت کنید:

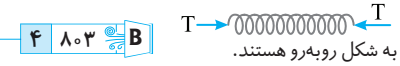


بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

B ۷۹۶ ۳

به شکل باید دقت کنید. نیرویی که وزنهٔ A را هُل می‌دهد و به سمت راست می‌راند نیروی کشسانی فنر است. بنا به قانون سوم نیوتون جسم A همان نیرو را به فنر رو به چپ وارد می‌کند. وقتی با نیروی F جسم B را به سمت راست هُل می‌دهیم، فنر به وزنهٔ B به سمت چپ نیرو وارد می‌کند و بنا به قانون سوم نیوتون توسط وزنهٔ B نیرویی به سمت راست به فنر وارد می‌شود. بنابراین نیروهای وارد بر فنر به شکل روبه‌رو هستند.





A ۷۹۷ ۳

نکته هرگاه فنری را از دو طرف با نیروی یکسان F بکشیم و یا فشرده کنیم نیروی کشسانی برابر F خواهد بود.

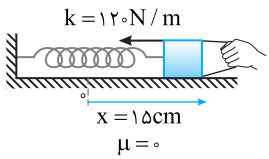
نیرویی که فنر بر هر یک از دست‌های ورزشکار وارد می‌کنند برابر نیروی کشسانی فنر است بنابراین می‌توان نوشت:

$$F=F_e=kx \xrightarrow{k=250N/m, x=0/4m} F_e=250\times0/4\Rightarrow F=100N$$

A ۷۹۸ ۴

نکته نیروی کشسانی فنر همواره در خلاف جهت تغییر طول فنر از طول طبیعی است.

در لحظهٔ رها شدن جسم تنها نیروی مؤثر وارد بر آن نیروی کشسانی فنر است.



$$F_e=kx\Rightarrow F_e=120\times\frac{15}{100}\Rightarrow F_e=18N$$

فنر از طول طبیعی به سمت راست کشیده شده بنابراین نیروی کشسانی فنر به سمت چپ و در خلاف جهت محور xها است. نیروی کشسانی فنر در لحظهٔ رها شدن خواهد شد:

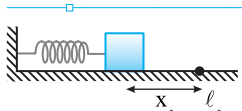
$$\vec{F}_e=-18\vec{i}$$

با توجه به قانون دوم نیوتون شتاب را حساب می‌کنیم:

$$\vec{F}=m\vec{a}\Rightarrow-18\vec{i}=2\vec{a}\Rightarrow\vec{a}=-9\vec{i}$$

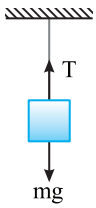
B ۷۹۹ ۲

از لحظهٔ رها شدن جعبه $(v_0=0)$ تا لحظهٔ گذر از طول طبیعی نیروی کشسانی فنر به سمت راست بر جسم وارد می‌شود و سبب می‌گردد تندی جسم همواره در حال افزایش باشد یعنی حرکت پیوسته تندشونده است و گزارهٔ (الف) نادرست است.



هرچه جعبه به ℓ_0 نزدیک می‌شود طول طبیعی فنر به حالت طبیعی خود نزدیک شده و نیروی کشسانی فنر کاهش می‌یابد، از این‌رو بزرگی شتاب آن نیز کاهش می‌یابد و گزارهٔ (ب) درست است. تا لحظهٔ گذر از طول طبیعی حرکت پیوسته تندشونده است یعنی در لحظهٔ گذر از طول طبیعی تندی بیشینه است و گزارهٔ (پ) نادرست است.

A ۸۰۰ ۲

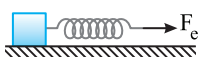


در حالت اول جسم ساکن است و نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند، بنابراین نیروی وزن جسم با نیروی کشسانی طناب برابر است. $W=T=30N$

در حالت دوم اگر به جای طناب، فنر هم قرار دهیم باید فنر وزن جسم را تحمل کند یعنی نیروی وارد بر فنر نیز $30N$ است.

$$F_e=kx\Rightarrow30=750x\Rightarrow x=\frac{1}{25}m=4cm$$

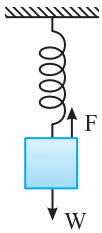
A ۸۰۱ ۳



نیروی خالص وارد بر جسم نیروی کشسانی فنر است و بنا به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:

$$F=ma\Rightarrow kx=ma\Rightarrow350x=2\times1/75\Rightarrow350x=3/5\Rightarrow x=\frac{1}{100}m=1cm$$

A ۸۰۲ ۴



نیروهای وزن و کشسانی فنر در دو حالت متوازن هستند.

$(F=W)$

حالت اول: $k(L-L_0)=m_1g\Rightarrow k(0/12-L_0)=40N$

حالت دوم: $k(L'-L_0)=m_2g\Rightarrow k(0/13-L_0)=50N$

دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$k(0/13)-kL_0-k(0/12)+kL_0=50-40$$

$$k(0/01)=10\Rightarrow k=1000N/m=10N/cm$$

B ۸۰۳ ۴

۱ طول فنر در حالت دوم $\frac{4}{3}$ برابر طول فنر در حالت اول است یعنی طول اولیه که با وزنهٔ ۱۰۰ گرمی، $15cm$ بوده است با وزنهٔ $500g$ خواهد شد:

$$x'_2=\frac{4}{3}\times15=20cm$$

۲ در هر دو حالت نیروی وزن برابر نیروی کشسانی فنر است، از این‌رو خواهیم داشت:

$$F_e=k\Delta x\begin{cases}x_2=15cm, F=mg\xrightarrow{m=0/1kg}k(\frac{15}{100}-x_0)=0/1\times10\\ \Rightarrow k(\frac{15}{100}-x_0)=1\Rightarrow1=\frac{15}{100}k-kx_0 \quad (1)\\ x'_2=20cm, F=m'g\xrightarrow{m_2=0/5kg}k(\frac{20}{100}-x_0)=0/5\times10\\ \Rightarrow5=\frac{20}{100}k-kx_0 \quad (2)\end{cases}$$

۳ دو رابطهٔ (۱) و (۲) را از هم کم می‌کنیم و ثابت فنر را به‌دست می‌آوریم.

$$5-1=\frac{20}{100}k-kx_0-\frac{15}{100}k+kx_0\Rightarrow4=\frac{5k}{100}\Rightarrow k=80N/m$$

میانبر به ازای افزایش $400g=500-100$ بر جرم وزنه طول فنر به اندازهٔ $x=\frac{1}{3}\times15=5cm$ افزایش یافته از این‌رو:

$$F_e=k\Delta\ell\Rightarrow0/4\times10=k(0/05)\Rightarrow k=80N/m$$

بازی با سؤال **اگر به انتهای فنر قائم با جرم ناچیز، وزنهٔ ۲۰ نیوتونی آویزان کنیم، طول آن به $10cm$ می‌رسد. اگر وزنه را دو برابر کنیم، طول آن به $11cm$ می‌رسد، ضریب ثابت این فنر در SI کدام است؟**

۱) ۲۰۰ ۲) ۱۵۰۰ ۳) ۲۰۰۰ ۴) ۴۰۰۰

پاسخ با استفاده از میانبر:

$$k=\frac{W_2-W_1}{\ell_2-\ell_1}\xrightarrow{W_2=2W_1}k=\frac{40-20}{0/11-0/10}\Rightarrow k=\frac{20}{0/01}$$

$$\Rightarrow k=2000N/m$$

گزینهٔ ۳

A ۸۰۴ ۴

خط فکری دقت کنید که کفه دارای جرم است و وقتی روی کفه وزنه قرار می‌دهیم جرم متصل به فنر مجموع جرم وزنه و کفه است. در دو حالت مسئله نیروی کشسانی فنر را با نیروی وزن برابر قرار دهید و یک دستگاه دو معادله و دو مجهول به دست بیاورید و با حل آن جرم کفه را معین کنید.

۱ حالت اول: $F_{net}=۰\Rightarrow(m+m_۱)g=k(\Delta\ell)\Rightarrow(m+۰/۱)\times g=k(\frac{۶}{۱۰۰})$

۲ حالت دوم: $F_{net}=۰\Rightarrow(m+m_۲)g=k(\Delta\ell')\Rightarrow(m+۰/۲)\times g=k(\frac{۱۰}{۱۰۰})$

۳ دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{m+۰/۱}{m+۰/۲}=\frac{۶}{۱۰}\Rightarrow ۱۰m+۱=۶m+۱/۲\Rightarrow ۴m=۰/۲\Rightarrow m=\frac{۰/۲}{۴}kg=\frac{۲۰۰}{۴}g$$
$$\Rightarrow m=۵۰g$$

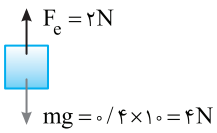
A ۸۰۵ ۳

۱ نیروی وزن وارد بر جسم را حساب می‌کنیم.

$W=mg\xrightarrow{m=۰/۴kg}W=۰/۴\times۱۰=۴N$

۲ نیروی کشسانی فنر وقتی که طول آن ۱cm افزایش می‌یابد را به دست می‌آوریم.

$F_e=kx\xrightarrow{k=۲N/cm=۲۰۰N/m}F_e=۲۰۰\times\frac{۱}{۱۰۰}=۲N$



۳ نیروی خالص وارد بر وزنه را برابر ma قرار داده، شتاب حرکت را به دست می‌آوریم.

$F_{net}=ma\Rightarrow W-F_e=ma\Rightarrow ۴-۲=۰/۴a\Rightarrow a=۵m/s^۲$

۴ شتاب در جهت نیروی برایند است و در این سؤال چون در لحظهٔ مورد نظر $mg>F_e$ پس شتاب در جهت mg به سمت پایین است.

C ۸۰۶ ۲

در حالت اول دو نیروی وزن و کشسانی فنر بر جسم وارد می‌شود که چون جسم ساکن است این نیروها متوازن هستند. $W=F_{e_۱}\Rightarrow W=k(\ell_۱-\ell_۰)\quad(I)$

در حالت دوم سه نیرو بر جسم وارد می‌شوند. نیروی وزن، نیروی کشسانی فنر و نیروی شناوری توسط مایع و این نیرو نیز متوازن هستند. $W=F_{e_۲}+F_b=k(\ell_۲-\ell_۰)+F_b\quad(II)$

دو رابطهٔ (I) و (II) را با هم برابر قرار می‌دهیم.

$$k(\ell_۱-\ell_۰)=k(\ell_۲-\ell_۰)+F_b\Rightarrow k\ell_۱=k\ell_۲+F_b\Rightarrow F_b=k(\ell_۱-\ell_۲)$$

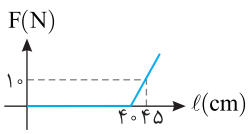
با توجه به صورت مسئله، فاصلهٔ جسم تا کف ظرف از ۴cm به ۶cm افزایش یافته یعنی تغییر طول فنر $|\ell_۱-\ell_۲|=۲cm$ است، بنابراین: $F_b=۱۰۰\times\frac{۲}{۱۰۰}=۲N$

میانبر نیروی شناوری برابر تغییر نیروی کشسانی فنر است.

$F_b=k(\ell_۱-\ell_۲)$

A ۸۰۷ ۳

۱ وقتی طول فنر ۴۰cm است نیروی کشسانی آن صفر است بنابراین طول طبیعی فنر $\ell_۰=۴۰cm$ است.

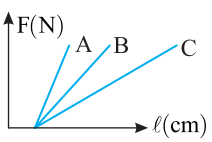


۲ با توجه به نمودار با تغییر طول از ۴۰cm به ۴۵cm نیروی فنر ۱۰N می‌شود، بنابراین:

$F_e=kx\Rightarrow ۱۰=k\times\frac{۵}{۱۰۰}\Rightarrow k=۲۰۰N/m$

A ۸۰۸ ۱

نمودار $F-\ell$ خطی هستند، شیب این خطها با توجه به رابطهٔ $F=k\Delta\ell=k\ell-k\ell_۰$ برابر ثابت فنر است. $k_A>k_B>k_C$



B ۸۰۹ ۴

با توجه به شکل نسبت ثابت فنرها را به‌دست می‌آوریم:

(۱) فنر: $F=k_۱(۳x)\Rightarrow k_۱=\frac{F}{۳x}$ (۲) فنر: $۳F=k_۲(۴x)\Rightarrow k_۲=\frac{۳F}{۴x}$

(۳) فنر: $۴F=k_۳(۴x)\Rightarrow k_۳=\frac{F}{x}$

بنابراین $\frac{k_۳}{k_۲}=\frac{\frac{F}{x}}{\frac{۳F}{۴x}}=\frac{۴}{۳}$, $\frac{k_۱}{k_۲}=\frac{\frac{F}{۳x}}{\frac{۳F}{۴x}}=\frac{۴}{۹}$ است. در سؤال گفته شده نیروی ۳۰N طول فنر $S_۲$ را ۴cm تغییر داده.

$$F_e=k\Delta x\Rightarrow\begin{cases}۳۰=k_۲\times\frac{۴}{۱۰۰}\Rightarrow k_۲=۷۵۰\frac{N}{m}\\ ۳۰=k_۱\times\Delta x_۱\xrightarrow{k_۱=\frac{۴}{۹}k_۲=\frac{۱۰۰۰}{۳}\frac{N}{m}}\\ ۳۰=\frac{۱۰۰۰}{۳}\times\Delta x_۱\Rightarrow\Delta x_۱=۰/۰۹m=۹cm\\ ۳۰=k_۳\times\Delta x_۳\xrightarrow{k_۳=\frac{۴}{۳}k_۲=۱۰۰۰\frac{N}{m}}\\ ۳۰=۱۰۰۰\times\Delta x_۳\Rightarrow\Delta x_۳=۰/۰۳m=۳cm\end{cases}$$

B ۸۱۰ ۲

تابع نیرو برحسب طول فنر به صورت $F_e=۱۰۰x-۲۰$ است. وقتی فنر دارای طول طبیعی است نیروی کشسانی فنر صفر است بنابراین اگر به جای F_e صفر قرار دهیم باید به جای x، $\ell_۰$ را قرار داده و طول طبیعی فنر را به دست بیاوریم. $۰=۱۰۰\ell_۰-۲۰\Rightarrow\ell_۰=۰/۲m$

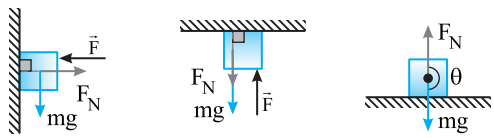
با توجه به رابطهٔ $F=k(x-x_۰)$ ضریب x همان ثابت است بنابراین $k=۱۰۰N/m$ است.

A ۸۱۱ ۴

خط فکری نیرویی که یک سطح بدون اصطکاک بر جسمی که به آن تکیه داده وارد می‌کند بر سطح عمود است که به آن نیروی عمودی تکیه‌گاه (سطح) گویند. گزینهٔ (۴) نیروهایی که دو سطح بر چوب وارد می‌کنند را درست نمایش می‌دهد.

A ۸۱۲ ۴

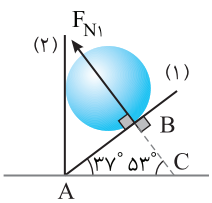
نیروی عمودی سطح و نیروی وزن را در هر سه شکل رسم می‌کنیم (دقت کنید که نیروی عمودی سطح همواره بر تکیه‌گاه عمود می‌باشد). بنابراین در هر سه شکل θ به درستی بیان شده است.



(پ) $\theta=۹۰^\circ$ (ب) $\theta=۰$ (الف) $\theta=۱۸۰^\circ$

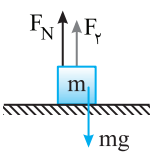
A ۸۱۳ ۲

نیروی عمودی سطح همواره بر دیواری که جسم بر آن تکیه دارد عمود می‌باشد. نیرویی که سطح (۱) بر گوی وارد می‌کند را رسم کرده امتداد می‌دهیم تا سطح افقی را قطع کند، در این صورت در مثلث ABC زاویهٔ بین امتداد افق AC با امتداد نیروی F_N، یعنی ضلع BC برابر ۵۳° است.



A ۸۱۴ ۱

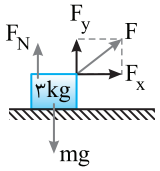
نیروهای وارد بر جسم در امتداد قائم عبارتند از نیروی وزن، $F_۲$ و نیروی عمودی تکیه‌گاه. هر سه نیرو را رسم می‌کنیم.



نیروهای وارد بر جسم در امتداد قائم متوازن هستند بنابراین: $F_۲+F_N=mg\Rightarrow F_N=mg-F_۲$

A ۸۱۵ ۳

با توجه به نیروی F، به جسم در راستای y علاوه بر نیروی وزن و نیروی عمودی سطح، نیرویی دیگر به سمت بالا وارد می‌شود. بنابراین:



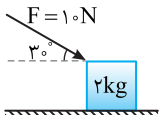
$$F_N+F_y=mg\Rightarrow F_N+F_y=۳۰\Rightarrow F_N<۳۰N$$

در واقع مؤلفهٔ قائم نیروی F سبب کاهش نیروی عمودی سطح شده است.

بازی با سوال در شکل روبه‌رو نیروی عمودی سطح چند نیوتون است؟*

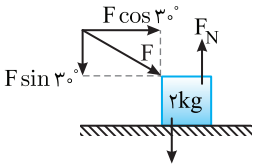
۱) ۲۰ ۲) ۲۵

۳) ۱۵ ۴) ۳۵



پاسخ به کمک تجزیه نیروها که در فیزیک (۱) در سال دهم خوانده‌اید مسئله را حل می‌کنیم.

ابتدا تمام نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و نیروی F را تجزیه می‌کنیم.

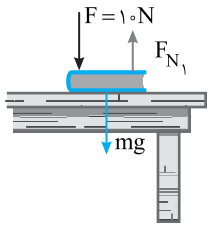


گزینهٔ ۲ $F_{y_{net}}=۰\Rightarrow F_N=F\sin ۳۰^\circ+W\Rightarrow F_N=۱۰\times\frac{۱}{۲}+۲۰=۲۵N$

A ۸۱۶ ۳

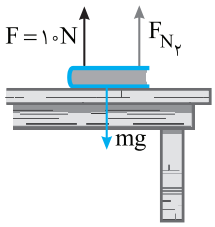
نیروهای وارد بر کتاب را در دو حالت رسم می‌کنیم و نیروی خالص در امتداد قائم را برابر صفر قرار می‌دهیم و نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم.

حالت اول:



$$F_{net}=۰\Rightarrow F+mg=F_{N_۱}$$
$$\Rightarrow F_{N_۱}=۱۰+۲\times۱۰\Rightarrow F_{N_۱}=۳۰N$$

حالت دوم:



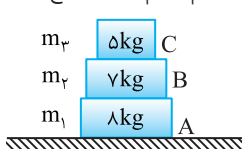
$$F_{net}=۰\Rightarrow F+F_{N_۲}=mg$$
$$\Rightarrow F_{N_۲}=mg-F=۲۰-۱۰\Rightarrow F_{N_۲}=۱۰N$$

بنابراین: $\frac{F_{N_۱}}{F_{N_۲}}=\frac{۳۰}{۱۰}=۳$

A ۸۱۷ ۳

نکته هرگاه چند جسم روی سطح افقی روی هم قرار داشته باشند، نیرویی که بین سطح مشترک هر دو جسم است هم‌اندازهٔ مجموع نیروی وزن تمام اجسام بالای آن سطح است.

نیرویی که سطح افقی تحمل می‌کند برابر وزن سه جسم است:



$$F_{N_A}=W_۱+W_۲+W_۳$$
$$=۸۰+۷۰+۵۰=۲۰۰N$$

نیرویی که سطح مشترک B تحمل می‌کند (نیروی عمودی سطح B) برابر مجموع وزن $m_۲$ و $m_۳$ است.

$$F_{N_B}=W_۲+W_۳=۷۰+۵۰=۱۲۰N$$

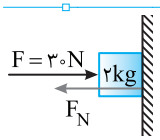
نیرویی که سطح C تحمل می‌کند (نیروی عمودی سطح C) برابر وزن $m_۳$ است.

$$F_{N_C}=W_۳=۵۰N$$

* این نوع مسائل در برنامه رسمی کتاب درسی نیست اما یادگیری این مسئله ساده برای شما که به دانشگاه می‌روید بسیار مفید است.

A ۸۱۸ ۲

جسم بر دیوار تکیه داده شده است پس برایند نیروها در راستای افقی صفر است و نیروهای خلاف جهت با هم برابر هستند.

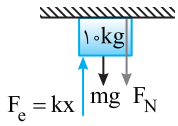


$$F_N=F=۳۰N$$

A ۸۱۹ ۳

خط فکری باید تمام نیروهای وارد بر وزنه را رسم کنید (نیروی وزن، نیروی عمودی سقف و نیروی کشسانی فنر) نیروهای W و F_N رو به پایین است بنابراین F_e رو به بالا بوده و باید اندازهٔ آن با مجموع نیروی W و F_N برابر باشد تا جسم ساکن بماند. بنابراین کافی است F_e را با $W+F_N$ برابر قرار داده و مسئله را حل کنید.

جسم در حال تعادل است پس نیروهای وارد بر جسم متوازن می‌باشد:



$$mg+F_N=F_e\Rightarrow ۱۰۰+۵۰=۳۰۰x$$
$$\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}m\Rightarrow x=۵۰cm$$

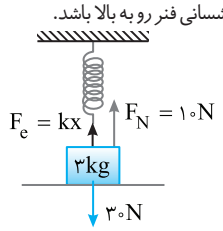
B ۸۲۰ ۱

۱ نیروی وزن جسم را حساب می‌کنیم:

$$W=mg\Rightarrow W=۳\times۱۰=۳۰N$$

۲ نیروی عمودی سطح رو به بالا و برابر ۱۰N است و نیروی وزن ۳۰N رو به پایین. از طرفی جسم روی سطح ساکن است بنابراین باید نیروی کشسانی فنر رو به بالا باشد.

۳ اندازهٔ تغییر طول فنر را حساب می‌کنیم.



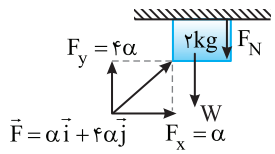
$$F_e+F_N=mg\Rightarrow F_e=۳۰-۱۰=۲۰N$$
$$\Rightarrow kx=۲۰N\Rightarrow ۲۰۰\times x=۲۰\Rightarrow x=۰/۱m$$

۴ نیروی کشسانی فنر همواره به سمت طول طبیعی فنر است، از طرفی F_e رو به بالاست یعنی باید فنر کشیده شده و از حالت طبیعی طولش بیشتر شده باشد.

B ۸۲۱ ۱

۱ نیروهای وارد بر جسم در امتداد قائم را رسم کرده و بررسی می‌کنیم.

۲ در امتداد افقی جسم تحت تأثیر F_x شتاب $۴m/s^۲$ دارد بنابراین به کمک قانون دوم نیوتون می‌توان F_x را به دست آورد (سقف بدون اصطکاک است.)



$$F_{net_x}=ma_x\xrightarrow{F_x=\alpha}\alpha=۲\times۴\Rightarrow\alpha=۸N$$

۳ مؤلفهٔ قائم نیروی F خواهد شد:

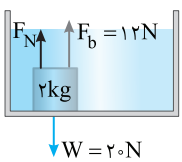
$$F_y=۴\alpha=۴\times۸=۳۲N$$

۴ در امتداد قائم جسم حرکتی ندارد و نیروها در این امتداد متوازن هستند از این‌رو خواهیم داشت:

$$F_{net_y}=۰\Rightarrow F_N+W=F_y\Rightarrow F_N+۲۰=۳۲\Rightarrow F_N=۱۲N$$

A ۸۲۲ ۳

نیروهای وارد بر جسم عبارتند از:



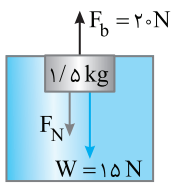
نیروی وزن رو به پایین، نیروی عمودی تکیه‌گاه رو به بالا، نیروی شناوری رو به بالا

جسم ساکن است نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و نیروی خالص را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$F_{net}=۰\Rightarrow F_N+F_b=W\Rightarrow F_N+۱۲=۲۰\Rightarrow F_N=۸N$$

A ۸۲۳ ۲

هرگاه جسم در شاره‌ای قرار گیرد به اندازهٔ وزن شارهٔ جابه‌جاشده به آن نیرویی رو به بالا وارد می‌شود که به آن نیروی شناوری (F_b) می‌گویند. نیروهای وارد بر جسم مطابق شکل روبه‌رو است:



۱ نیروی وزن جسم را حساب می‌کنیم:

$$W=mg\xrightarrow{m=۱/۵kg}W=۱/۵\times۱۰=۱۵N$$

۲ نیروی شناوری رو به بالا بر جسم وارد می‌شود. این نیرو بنا به فرض مسئله $F_b=۲۰N$ است. بنابراین خواهیم داشت: $F_N+W=F_b\Rightarrow F_N+۱۵=۲۰\Rightarrow F_N=۵N$

۳ نیرویی که دیواره به جسم وارد می‌کند $F_N=۵N$ است که برابر نیرویی است که جسم به دیواره رو به بالا وارد می‌کند.

بازی با سؤال مطابق شکل جسمی به جرم ۲kg درون ظرف حاوی آب روی کفه‌ای قرار گرفته است. اگر از طرف آب به جسم نیروی شناوری ۱۰N وارد شود نیروی عمودی سطح از طرف کفه که به جسم وارد می‌شود چند نیوتون است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲

پاسخ نیروهای وارد بر جسم عبارت است از:

$F_N+F_b=mg\Rightarrow F_N=۲۰-۱۰=۱۰N$

گزینهٔ ۱

۳ ۸۲۴ B

شخصی به میز نیروی ۲۵N رو به بالا وارد می‌کند و بنا به قانون سوم نیوتون میز نیز نیرویی برابر ۲۵N رو به پایین بر شخص وارد می‌کند. برای آنکه شخص ساکن بماند نیروسنج باید به شخص مجموع نیروی وزن شخص و نیروی ۲۵N را نشان دهد.

$F_N=mg+F\Rightarrow F_N=۷۵۰+۲۵\Rightarrow F_N=۷۷۵N$

۲ ۸۲۵ B

شخص نیروی ۲۵N به سمت پایین به میز وارد کرده پس میز نیروی ۲۵ نیوتونی به سمت بالا به شخص وارد خواهد کرد و سبب می‌گردد که ترازوی فنری عدد کمتری را نشان دهد. نیروهای وارد بر شخص عبارتند از: F_N ، W و F'

بنابراین می‌توان نوشت: $mg=F'+F_N\Rightarrow ۷۵۰=۲۵+F_N\Rightarrow F_N=۷۲۵N$

۱ ۸۲۶ A

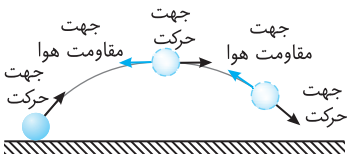
نیروها در راستای قائم متوازن است و ترازوی فنری مقدار F_N را نشان می‌دهد که برابر وزن جسم است.

$F_N=mg\Rightarrow F_N=۴۰N$

۲ ۸۲۷ A

نکته مقاومت شاره (هوا) به تندی جسم بستگی دارد و با افزایش تندی جسم افزایش می‌یابد و با کاهش تندی، مقاومت هوا کاهش می‌یابد.

با گذشت زمان تا رسیدن به نقطهٔ اوج تندی جسم در حال کاهش و پس از اوج تندی در حال افزایش است پس اندازهٔ مقاومت هوا نیز ابتدا در حال کاهش و سپس در حال افزایش است و گزارهٔ (الف) نادرست است. در هر لحظه مقاومت هوا خلاف جهت حرکت است و چون جهت حرکت در حال تغییر است پس جهت مقاومت هوا نیز تغییر می‌کند. بنابراین گزارهٔ (ب) نادرست است. اندازهٔ نیروی وزن همواره برابر mg و جهت آن همواره در امتداد قائم به سمت پایین است در نزدیکی سطح زمین مقدار آن ثابت است. پس گزارهٔ (پ) درست است.



۴ ۸۲۸ B

چترباز بلافاصله بعد از پرش آزاد چتر خود را باز کرده پس حرکت چترباز ابتدا تندشونده است تا به تندی حدی برسد و سپس ادامهٔ حرکت را با همین تندی طی می‌کند. در تندی حدی، نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا باهم برابر می‌شوند:

$f_D=mg\xrightarrow{m=۷۰kg}f_D=۷۰۰N\xrightarrow{f_D=۱۴۰v}۷۰۰=۱۴۰v$

$\Rightarrow v=۵m/s$

بنابراین در این حرکت بیشینهٔ تندی چترباز همان $۵m/s$ می‌باشد و تندی نمی‌تواند از $۵m/s$ بیشتر شود. بنابراین سرعت چتر باز نمی‌تواند برابر $۶m/s$ باشد.

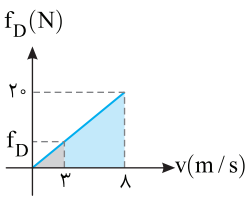
یادآوری با افزایش تندی سقوط چترباز لحظه‌ای فرا می‌رسد که نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا برابر شده و سرعت چترباز ثابت می‌ماند که به آن تندی حدی گویند.

۲ ۸۲۹ B

۱ آخرین سرعتی که جسم در طول مسیر به آن رسیده $۸m/s$ است یعنی تندی حدی این جسم $۸m/s$ است و در این تندی نیروی وزن و مقاومت هوا با هم برابر است، بنابراین:

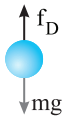
$f=mg\Rightarrow ۲۰=m\times ۱۰\Rightarrow m=۲kg$

۲ برای به‌دست آوردن شتاب در تندی $۳m/s$ ابتدا نیروی مقاومت هوا را به کمک شیب نمودار در این لحظه به‌دست می‌آوریم.



$\frac{۲۰-۰}{۸-۰}=\frac{f_D-۰}{۳-۰}\Rightarrow f_D=۷/۵N$

۳ به کمک قانون دوم نیوتون، شتاب را در این لحظه حساب می‌کنیم.



$f_{net}=ma\Rightarrow mg-f_D=ma\Rightarrow ۲۰-۷/۵=۲a\Rightarrow a=\frac{۱۲/۵}{۲}$

$\Rightarrow a=۶/۲۵m/s^۲$

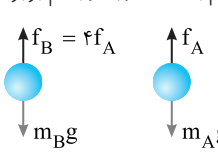
۴ ۸۳۰ B

خط فکری نیروی مقاومت هوا ثابت فرض شده. نیروی وزن هم ثابت است. بنابراین نیروی خالص وارد بر گوی A و گوی B ثابت است و نوع حرکت آن‌ها حرکت با شتاب ثابت است و می‌توان از روابط حرکت با شتاب ثابت استفاده کرد. برای هر گوی یک شکل ساده شامل نیروهای وارد بر آن را رسم کنیم و به کمک قانون دوم نیوتون شتاب آن‌ها را به دست بیاوریم.

۱ دو گوی از ارتفاع یکسان $(h_A=h_B)$ رها شده $(v_۰=۰)$ و با تندی یکسان $(v_A=v_B)$ به زمین برخورد کرده‌اند. با توجه به رابطهٔ مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت خواهیم داشت:

$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow\begin{cases}v_A^۲=۲a_Ah_A\\v_B^۲=۲a_Bh_B\end{cases}\xrightarrow[h_A=h_B]{v_A=v_B}a_A=a_B$

۲ شتاب‌ها را به کمک قانون دوم به دست آورده و با هم برابر قرار می‌دهیم:



$F_{\text{خالص}}=ma\Rightarrow\begin{cases}m_Bg-۴f_A=m_Ba_B\Rightarrow a_B=g-\frac{۴f_A}{m_B}\\nm_Bg-f_A=nm_Ba_A\Rightarrow a_A=g-\frac{f_A}{nm_B}\end{cases}$

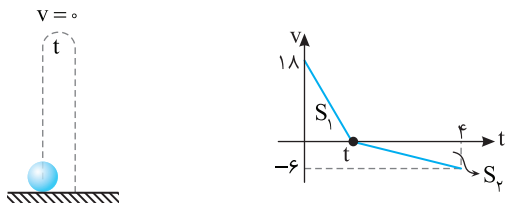
$a_B=a_A\Rightarrow g-\frac{۴f_A}{m_B}=g-\frac{f_A}{nm_B}\Rightarrow n=\frac{۱}{۴}$

۸۳۱ C ۲

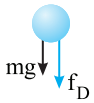
خط فکری طول مسیر رفت و برگشت جسم برابر است. از طرفی سطح زیر نمودار سرعت - زمان برابر جابه‌جایی جسم است. از این‌رو سطح زیر نمودار در بازهٔ صفر تا t و t تا ۴s باید برابر باشند، S_1 و S_2 را با هم برابر قرار دهید و t را حساب کنید سپس به کمک t، شتاب در مسیر رفت و یا برگشت را به دست آورده تا بتوانید f_D را حساب کنید.

۱ اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در مسیر رفت و برگشت با هم برابر است و می‌دانیم جابه‌جایی برابر است با مساحت زیر نمودار $v-t$ بنابراین:

$$S_1=S_2\Rightarrow\frac{18\times t}{2}=\frac{6(4-t)}{2}\Rightarrow 3t=4-t\Rightarrow 4t=4\Rightarrow t=1s$$



۲ شیب خط در نمودار $v-t$ برابر شتاب است. شتاب در مسیر رفت خواهد شد:



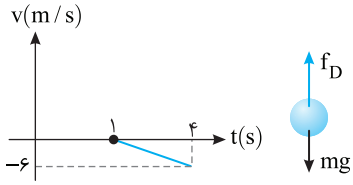
$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=-\frac{18}{1}=-18\frac{m}{s^2}$$

۳ نیروهای وارد بر جسم در مسیر رفت را در یک شکل ساده نمایش داده و به کمک قانون دوم f_D را حساب می‌کنیم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow -mg-f_D=m(-18)\Rightarrow -2-f_D=-3/6\Rightarrow f_D=1/6N$$

البته می‌توان در مسیر برگشت نیز f_D را با توجه به معادلات مسیر برگشت به دست آورد:

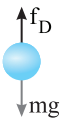
$$a=-\frac{6}{3}=-2m/s^2$$
$$-mg+f_D=ma$$
$$\Rightarrow -2+f_D=-0/4$$
$$\Rightarrow f_D=1/6N$$



۸۳۲ C ۴

خط فکری وقتی چترباز، چتر خود را باز می‌کند، تندی‌اش ۴۰m/s است و قرار است با باز کردن چتر تندی آن به ۵m/s برسد. با توجه به فرض مسئله مقدار متوسط نیروی مقاومت هوا ۱۰۰۰N است بنابراین شما می‌توانید شتاب کند شدن حرکت را بیابید سپس به کمک رابطهٔ مستقل از زمان حداقل ارتفاعی که باید چتر باز شود را حساب کنید.

۱ ابتدا شتاب حرکت چترباز پس از بازشدن چتر را به‌دست می‌آوریم. دقت کنید که مقدار متوسط نیروی مقاومت هوا در بازهٔ تغییر سرعت ۱۰۰۰N فرض شده است.



$$mg-f_D=ma\Rightarrow 800-1000=80a\Rightarrow a=-\frac{200}{80}=-2/5m/s^2$$

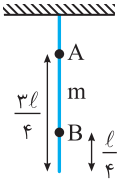
۲ اکنون جابه‌جایی برای رسیدن سرعت از ۴۰m/s تا ۵m/s را به‌دست می‌آوریم.

$$v^2-v_0^2=2a\Delta y\Rightarrow 25-1600=2(-2/5)h\Rightarrow h=\frac{1575}{5}=315m$$

۸۳۳ B ۳

نکته هرگاه یک طناب دارای جرم از سقف آویزان کنیم، هر نقطه از طناب باید وزن قسمت زیرین خود را تحمل کند و در نقطهٔ آویز کشش بیشترین و در انتهای طناب کشش صفر است.

با فاصله گرفتن از انتهای آزاد، هر نقطه از طناب باید وزن بیشتری را تحمل کند. به طور مثال در نقاط A و B کشش طناب برابر است با:



$$T_B=\frac{mg}{4},\ T_A=\frac{3mg}{4}$$

یعنی کشش طناب با فاصله از انتهای آزاد رابطهٔ مستقیم و خطی دارد و نمودار آن خط راست مایل با شیب ثابت است و گزینهٔ (۳) درست است.

۸۳۴ A ۱

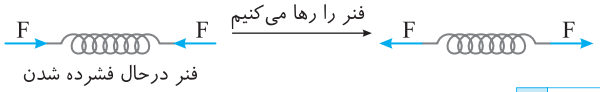
نکته در یک طناب سبک (با جرم ناچیز) کشش در تمام نقاط یکسان است. در این مسئله طناب سبک بوده بنابراین T ثابت است و گزینهٔ (۱) نمودار درست است.

۸۳۵ A ۳

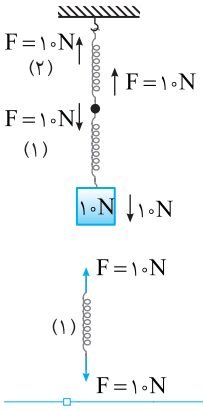
خط فکری سؤال زیبایی است، اگر خاطرتان باشد یک فنر نیرویی که به اجسام دو طرف خود وارد می‌کند یکسان است. با رها کردن فنر نیروی وارد بر گلولهٔ A و B یکسان بوده و این مطلب، نکتهٔ حل مسئله است.

هنگام باز شدن فنر نیرویی که فنر به دو طرف خود وارد می‌کند با هم برابر است، بنابراین نیروی وارد بر هر دو گوی یکسان می‌باشد.

$$F=m_Aa_A\Rightarrow F=2a_A\xrightarrow{a_A=\frac{1}{3}a_B}2\times\frac{a_B}{3}=m_Ba_B$$
$$F=m_Ba_B\Rightarrow F=m_Ba_B$$
$$\Rightarrow m_B=\frac{2}{3}kg\approx 666g$$



۸۳۶ A ۲

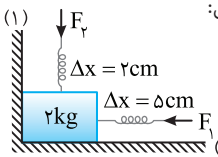


هنگامی که نیروسنج بدون جرم فرض شود، نیروی کشسانی در طول فنر هر دو نیروسنج یکسان و برابر ۱۰N است، پس هر نیروسنج ۱۰N را نشان می‌دهد. اما برای توضیح بیشتر به فنر (۱) نگاه کنید که ساکن است و چه نیروهایی به آن وارد می‌شود: نیروی ۱۰N توسط وزنه اما چرا فنر ثابت مانده است؟ قطعاً در محل اتصال دو فنر، فنر (۲) به فنر (۱) نیروی ۱۰N وارد کرده تا نیروها متوازن شده و فنر ثابت بماند یعنی فنری داریم که بر دو سرش نیروی یکسان ۱۰N وارد می‌شود. بنابراین کشش آن نیز ۱۰N است. همین مطلب در مورد فنر (۲)، نیز صدق می‌کند.

۸۳۷ B ۳

۱ نیروهای وارد بر جسم را کامل می‌کنیم.

۲ نیروهای F_1 و F_2 از طرف فنر وارد می‌شود، پس:



$$F_1=k\Delta x_1\Rightarrow F_1=2\frac{N}{cm}\times 5cm\Rightarrow F_1=10N$$
$$F_2=k\Delta x_2\Rightarrow F_2=2\frac{N}{cm}\times 2cm\Rightarrow F_2=4N$$

۳ نیروهای وارد بر جسم متوازن است، پس اندازه نیروهای در خلاف جهت باید با هم برابر باشند.

$$F_{x_{net}}=0\Rightarrow F_1=F_{N_1}\Rightarrow F_{N_1}=10N$$
$$F_{y_{net}}=0\Rightarrow F_2+mg=F_{N_2}\Rightarrow F_{N_2}=24N$$

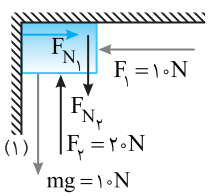
نیروی خالصی که دیواره‌ها بر جسم وارد می‌کنند را به کمک رابطهٔ فیثاغورس حساب می‌کنیم.

$$F_{N_{net}}=\sqrt{F_{N_1}^2+F_{N_2}^2}=\sqrt{10^2+24^2}$$
$$=2\sqrt{5^2+12^2}=2\sqrt{25+144}=2\sqrt{169}=26N$$

۸۳۸ A ۱

۱ در حل مسائل دینامیک گام اول رسم تمام نیروهای وارد بر جسم است تا بتوانیم به راحتی مسئله را حل کنیم. نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.

۲ جسم ساکن است بنابراین نیروهای وارد بر جسم متوازن بوده از این‌رو در امتداد افقی و قائم می‌توان نوشت:



$$F_{x_{net}}=0\Rightarrow F_1=F_{N_1}\Rightarrow F_{N_1}=10N$$
$$F_{y_{net}}=0\Rightarrow F_{N_2}+mg=F_2\Rightarrow F_{N_2}+10=20$$
$$\Rightarrow F_{N_2}=10N$$

۳ نسبت نیروهای دو دیواره وارد بر جسم خواهد شد:

$$\frac{F_{N_2}}{F_{N_1}}=\frac{10}{10}=1$$

A ۸۳۹ ۱

اگر شما روی یک نیروسنج بایستید، نیروسنج وزن شما را نشان می‌دهد حال اگر یک قطعه سنگ را در دست بگیرید و روی نیروسنج بایستید، نیروسنج مجموع وزن شما و قطعه سنگ را نشان می دهد. به طور کلی یک نیروسنج، همواره مجموع وزن اجسام ساکن که روی نیروسنج قرار دارند را نشان می‌دهد و به نحوهٔ قرار گرفتن آن‌ها بستگی ندارد. بنابراین هر دو ترازوی فنری یک عدد را نشان خواهند داد و اختلاف عددهای نشان داده شده صفر است.

پنجره ۳

A ۸۴۰ ۴

هنگامی که ما راه می‌رویم، عامل حرکت رو به جلوی ما، اصطکاک بین کف کفش ما و سطح زمین است یعنی ما زمین را رو به عقب هل می‌دهیم و زمین همان نیرو را رو به جلو به ما وارد می‌کند. همچنین هنگام به راه افتادن و حرکت اتومبیل، اصطکاک بین لاستیک و جاده سبب حرکت اتومبیل می‌شود.

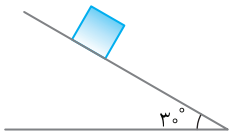
هنگامی که بین لاستیک و جاده اصطکاک وجود نداشته باشد، اتومبیل تغییر مکان نمی‌دهد. به‌طور مثال روی یخ، چرخ خودرو بکسوات می‌کند (یعنی درجا می‌چرخد) و خودرو جلو نمی‌رود.

A ۸۴۱ ۱

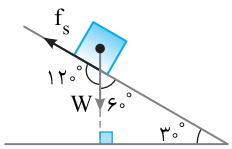
نیروهای وارد بر جسم به ترتیب: ۱) نیروی وزن در امتداد قائم رو به پایین، ۲) نیروی عمودی سطح در امتداد عمود بر سطح، ۳) نیروی اصطکاک که با حرکت جسم رو به پایین مخالف است.

بازی با سؤال **در شکل روبه‌رو جسم در حال سکون است. زاویه‌ای که نیروی اصطکاک با نیروی وزن می‌سازد چند درجه است؟**

۱) ۳۰
۲) ۶۰
۳) ۱۲۰
۴) ۱۵۰



پاسخ **نیروی اصطکاک همواره مماس بر مسیر حرکت بوده و در خلاف جهت لغزش است، همچنین نیروی وزن نیز همواره در امتداد قائم به سمت پایین است. از این‌رو مطابق شکل زاویهٔ بین نیروی اصطکاک ایستایی و نیروی وزن ۱۲۰° می‌شود.**



گزینهٔ ۳

A ۸۴۲ ۴

تمام داده‌های مسئله بیهوده است. چرا؟ چون جسم ساکن است و در راستای افقی به آن نیرویی وارد نمی‌شود، پس نیروی اصطکاکی بین جسم و سطح ایجاد نمی‌شود و اصطکاک صفر است.

B ۸۴۳ ۳

خط فکری در حل مسائل اصطکاک، که در آن جسم ساکنی تحت تأثیر نیرویی قرار می‌گیرد، در گام اول باید با به‌دست آوردن نیروی اصطکاک ایستایی در آستانهٔ حرکت $(f_{s\,max})$ مشخص کنید که جسم شروع به حرکت می‌کند یا نه؟ اگر $F<f_{s\,max}$ باشد، جسم ساکن می‌ماند و اصطکاک بین جسم و سطح اصطکاک ایستایی است که همواره با نیرویی که می‌خواهد جسم را در امتداد اصطکاک حرکت دهد برابر است.

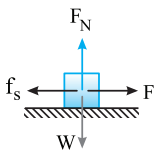
۱ ابتدا اصطکاک ایستایی جسم در آستانهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$f_{s\,max}=\mu_s F_N \Rightarrow f_{s\,max}=۰/۴\times۵\times۱۰=۲۰N$$

۲ چون نیروی افقی $F=۱۵N$ از اصطکاک ایستایی بیشینه، کمتر است، جسم روی سطح افقی ساکن می‌ماند.

۳ برایند نیروهای وارد بر جسم در این حالت صفر است و نیروی اصطکاک ایستایی با نیروی F برابر است.

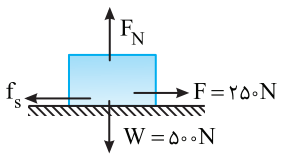
$$F_{net}=۰\Rightarrow f_s=F=۱۵N$$



A ۸۴۴ ۱

خط فکری هر گاه در صورت مسئله با اعمال نیرو، جسم همچنان ساکن باشد شما باید بالای کلمه ساکن بنویسید $(F_{net}=۰)$. از طرفی در آستانهٔ حرکت همچنان نیروی خالص وارد بر جسم صفر است $(F_{net}=۰)$ شما باید نیروهای وارد بر جسم را در هر دو حالت رسم کنید و برایند نیروها را مساوی صفر قرار دهید.

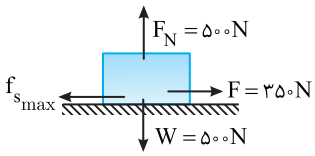
در حالت اول، جسم ساکن است بنابراین اصطکاک ایستایی جسم با نیروی افقی وارد بر آن برابر می‌شود. $F_{net}=۰\Rightarrow F-f_s=۰\Rightarrow F=f_s\Rightarrow f_s=۲۵۰N$



حالت دوم در آستانهٔ حرکت نیروی اصطکاک وارد بر جسم بیشینه است اما چون جسم همچنان ساکن است خواهیم داشت: $F_{net}=۰\Rightarrow F-f_{s\,max}=۰\Rightarrow f_{s\,max}=۳۵۰N$

اکنون ضریب اصطکاک ایستایی را حساب می‌کنیم:

$$f_{s\,max}=\mu_s F_N \xrightarrow{F_N=W=۵۰۰N} ۳۵۰=\mu_s\times۵۰۰\Rightarrow\mu_s=۰/۷$$

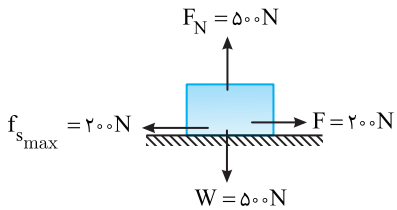


بازی با سؤال **جسمی به جرم ۵۰kg روی سطح افقی با ضریب اصطکاک $\mu_s=۰/۴$ و $\mu_k=۰/۲$ ساکن است، یکبار با نیروی افقی $F=۲۰۰N$ و بار دیگر با نیروی افقی $F=۴۰۰N$ جسم را هُل می‌دهیم، شتاب حرکت جسم در هر حالت به ترتیب از راست به چپ چند m/s^2 است؟**

۱) ۶، ۲ ۲) صفر، ۶ ۳) صفر، ۴ ۴) ۲، ۴

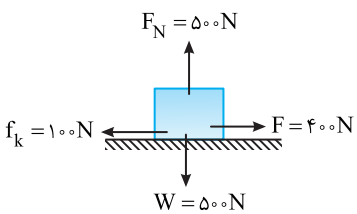
پاسخ **ابتدا باید نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت را به‌دست بیاورید.**

$$f_{s\,max}=\mu_s F_N \xrightarrow{F_N=W=۵۰۰N} f_{s\,max}=۰/۴\times۵۰۰=۲۰۰N$$



ابتدا نیروی افقی $F=۲۰۰N$ بر جسم وارد شده است که این نیرو با اصطکاک آستانهٔ حرکت برابر است بنابراین جسم ساکن می‌ماند و شتاب آن صفر است.

در حالت دوم بر جسم نیروی افقی $F=۴۰۰N$ وارد شده است و جسم شروع به حرکت می‌کند. در این حالت نیروی اصطکاک بین جسم و سطح، اصطکاک جنبشی است از این‌رو می‌توان نوشت: $f_k=\mu_k F_N\Rightarrow f_k=۰/۲\times۵۰۰\Rightarrow f_k=۱۰۰N$



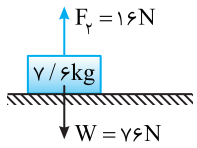
به کمک قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow۴۰۰-۱۰۰=۵۰a\Rightarrow a=۶m/s^2$$

گزینهٔ ۲

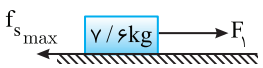
B ۴ ۸۴۵

با توجه به نیروی $F_۲$، نیروی عمودی سطح را به‌دست می‌آوریم.



$$mg-F_۲=F_N\Rightarrow ۷۶-۱۶=F_N$$
$$\Rightarrow F_N=۶۰N$$

وقتی نیروی $F_۱$ برابر ۱۲N شده است با ضربهٔ کوچکی جسم به حرکت درآمده است یعنی در حالتی که $F_۱=۱۲N$ می‌شود جسم در آستانهٔ حرکت قرار می‌گیرد.



بنابراین:

$$F_۱=f_{s\,max}=\mu_s F_N\Rightarrow ۱۲=\mu_s\times ۶۰\Rightarrow \mu_s=\frac{۱}{۵}$$

A ۳ ۸۴۶

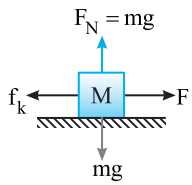
نکته اصطکاک بین دو جسم، به چگونگی سطوح تماس و نیروی عمودی بستگی دارد و به ابعاد ظاهری سطح تماس دو جسم بستگی ندارد.

در دو حالت، جسم به حرکت درآمده است و اصطکاک بین جسم و سطح $f_k=\mu_k mg$ است، بنابراین اصطکاک در دو حالت یکسان بوده و گزینهٔ (۳) درست است.

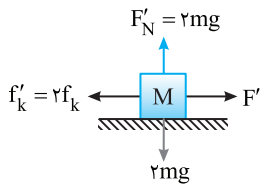
B ۳ ۸۴۷

نکته ضریب اصطکاک بین دو سطح به چگونگی و ویژگی‌های دو سطح بستگی دارد و اگر سطح‌ها تغییر نکنند ضریب اصطکاک ثابت می‌ماند.

۱ جنس قطعه چوب و سطح تغییر نکرده بنابراین ضریب اصطکاک تغییر نمی‌کند $(\mu'_k=\mu_k)$ جسم M با سرعت ثابت در حرکت و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند بنابراین نیروی F با نیروی اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح برابر است. $(F=f_k)$

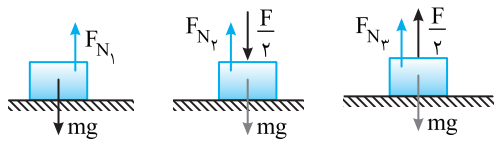


۲ وقتی جرم قطعه چوب دو برابر می‌شود، $(M'=۲M)$ نیروی عمودی تکیه‌گاه $F'_N=۲mg$ می‌شود بنابراین نیروی اصطکاک $f'_k=\mu_k F'_N$ نیز دو برابر می‌شود و اگر بخواهیم جسم با سرعت ثابت حرکت کند باید $F'=۲F$ شود.



B ۲ ۸۴۸

خط فکری جسم‌ها در حال حرکت هستند، بنابراین نیروی اصطکاک وارد بر آن‌ها برابر $f_k=\mu_k N$ می‌باشد و با توجه به صورت مسأله μ_k در تمام سطوح مقایسه یکسان است پس نیروی اصطکاک جسمی بیشتر است که نیروی عمودی سطح بیشتری بر آن وارد شود. بنابراین نیروی عمودی هر سطح را حساب می‌کنیم و با هم مقایسه می‌کنیم، نیروی عمودی سطح‌ها خواهد شد:



$F_{N_۱}=mg$ گزینهٔ (۱)

$F_{N_۲}=mg+\frac{F}{۲}$ گزینهٔ (۲)

$F_{N_۳}=mg-\frac{F}{۲}$ گزینهٔ (۳)

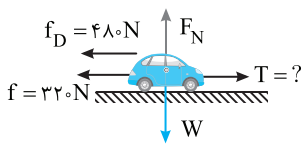
بنابراین $F_{N_۲}$ از همه بیشتر بوده و نیروی اصطکاک جنبشی در گزینهٔ (۲) از سایر گزینه‌ها بیشتر می‌باشد.

A ۳ ۸۴۹

خط فکری در حل مسائل دینامیک، باید نیروهای وارد بر جسمی که در مسئله از آن سؤال شده را رسم کرده سپس به سراغ قانون دوم نیوتون برویم.

به کمک قانون دوم نیوتون، نیروی کشش طناب را به‌دست می‌آوریم.

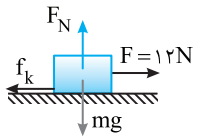
$$F_{net}=ma\Rightarrow T-(f_D+f)=ma \xrightarrow{m=۱۵۰۰kg,a=۲m/s^۲}$$
$$T-(۴۸۰+۳۲۰)=۱۵۰۰\times ۲\Rightarrow T-۸۰۰=۳۰۰۰\Rightarrow T=۳۸۰۰N$$

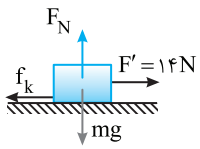


B ۳ ۸۵۰

خط فکری ابتدا برای هر حالتی نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم سپس برای هر حالت قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم تا یک دستگاه دو معادله با دو مجهول m و f_k به‌دست بیاوریم. با حل این دستگاه و یافتن نیروی اصطکاک، ضریب اصطکاک قابل محاسبه است.

در هر دو حالت با توجه به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:





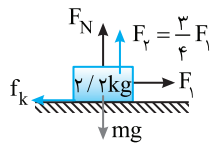
$$\begin{cases} F-f_k=ma_۱\Rightarrow ۱۲-f_k=۰/۴m \\ F'-f_k=ma_۲\Rightarrow ۱۴-f_k=۰/۸m \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} (۱۲-f_k=۰/۴m)\times -۲ \\ ۱۴-f_k=۰/۸m \end{cases}$$
$$\Rightarrow f_k=۱۰N \quad , \quad m=۵kg$$

نیروی اصطکاک $f_k=\mu_k F_N$ می‌باشد:

$$f_k=\mu_k F_N=\mu_k mg=۱۰\Rightarrow \mu_k(۵۰)=۱۰\Rightarrow \mu_k=۰/۲$$

B ۳ ۸۵۱

۱ نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.



۲ نیروی عمودی تکیه‌گاه وارد بر جسم خواهد شد:

$$F_N+F_۲=W\Rightarrow F_N=mg-F_۲$$
$$\Rightarrow F_N=۲۲-F_۲$$

۳ نیروی اصطکاک بین جسم و سطح را حساب می‌کنیم.

$$f_k=\mu_k F_N=\mu_k(۲۲-F_۲) \quad (I)$$

۴ جسم دارای تندی ثابت است و نیروهای وارد بر آن متوازن است از این‌رو باید نیروی $F_۱$ و f_k هم‌اندازه باشند بنابراین:

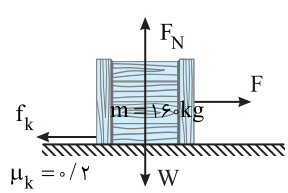
$$F_۱=f_k \xrightarrow{(I)} F_۱=\mu_k(۲۲-F_۲) \xrightarrow[\mu_k=۰/۵]{F_۲=\frac{۳}{۴}F_۱}$$
$$F_۱=۰/۵(۲۲-\frac{۳}{۴}F_۱)\Rightarrow F_۱=۱۱-\frac{۳}{۸}F_۱\Rightarrow \frac{۱۱}{۸}F_۱=۱۱\Rightarrow F_۱=۸N$$

۵ با توجه به $F_۲=\frac{۳}{۴}F_۱$ اندازهٔ $F_۲$ برابر $\frac{۳}{۴}\times ۸=۶N$ است.

$$F=\sqrt{F_۱^۲+F_۲^۲}=\sqrt{۸^۲+۶^۲}=۱۰N$$

A ۱ ۸۵۲

شکل مسئله را مدل‌سازی می‌کنیم و نیروهای وارد بر صندوق را رسم می‌کنیم.



۱ جسم در امتداد قائم حرکتی ندارد، بنابراین نیروهای F_N و W متوازن هستند.

$$F_N=W \xrightarrow{W=mg} F_N=۱۶۰\times ۱۰\Rightarrow F_N=۱۶۰۰N$$

۲ اندازهٔ نیروی اصطکاک جنبشی را در این حالت به‌دست می‌آوریم:

$$f_k=\mu_k F_N \Rightarrow f_k=۰/۲\times ۱۶۰۰ \Rightarrow f_k=۳۲۰N$$

۳ به کمک قانون دوم نیوتون، نیروی F را حساب می‌کنیم:

$$F_{net}=ma \Rightarrow F-f_k=ma \xrightarrow{a=۰/۲۵m/s^۲} F-۳۲۰=۱۶۰\times ۰/۲۵ \Rightarrow F-۳۲۰=۴۰ \Rightarrow F=۳۶۰N$$

۴ قرار است که با برداشتن مقداری از محتویات صندوق شتاب حرکت دو برابر یعنی $۲\times ۰/۲۵=۰/۵m/s^۲$ شود. البته باید دقت کنید که با کاهش محتویات صندوق، نیروی اصطکاک نیز تغییر می‌کند، بنابراین خواهیم داشت:

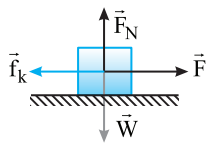
$$F'_{net}=m'a' \Rightarrow F-f'_k=m'a' \xrightarrow{f'_k=\mu_k m'g}$$

$$۳۶۰-۰/۲m'\times ۱۰=m'\times ۰/۵ \Rightarrow ۳۶۰=۲/۵m' \Rightarrow m'=۱۴۴kg$$

۵ جرم محتویات خارج شده از صندوق برابر است با: $\Delta m=۱۶۰-۱۴۴=۱۶kg$

B ۸۵۳ ۳

۱ به کمک قانون دوم نیوتون در هر حالت شکل ساده‌ای از مسئله رسم می‌کنیم و نیروهای وارد بر جسم را روی شکل نمایش می‌دهیم.



۲ به کمک قانون دوم نیوتون شتاب حرکت جعبه را در دو حالت به‌دست می‌آوریم.

$$F_{net}=ma \Rightarrow \begin{cases} F-f_k=ma \Rightarrow a=\dfrac{F-f_k}{m} \\ ۲F-f_k=ma' \Rightarrow a'=\dfrac{۲F-f_k}{m} \end{cases}$$

۳ برای مقایسه a و a' به‌صورت کسر a' مقدار f_k را اضافه و کم می‌کنیم.

$$a'=\frac{۲F-f_k-f_k+f_k}{m}=\frac{۲F-۲f_k}{m}+\frac{f_k}{m} \Rightarrow a'=۲(\overbrace{\frac{F-f_k}{m}}^{a})+\frac{f_k}{m}$$

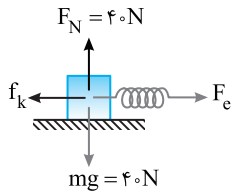
$$\Rightarrow a'=۲a+\frac{f_k}{m} \Rightarrow a'>۲a$$

برای سادگی یک مثال عددی می‌زنیم. فرض کنید $F=۵N$ ، $f_k=۲N$ و جرم m برابر $۱kg$ است، در این صورت:

$$a=\frac{۵-۲}{۱}=۳m/s^۲ \quad , \quad a'=\frac{۲\times ۵-۲}{۱}=۸m/s^۲ \Rightarrow ۸>۲\times ۳$$

A ۸۵۴ ۲

۱ شکل مسئله را با رسم نیروهای وارد بر جسم کامل می‌کنیم.



۲ نیروی عمودی تکیه‌گاه برابر نیروی وزن جسم است. $F_N=W \Rightarrow F_N=۴۰N$

۳ اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح خواهد شد:

$$f_k=\mu_k F_N \xrightarrow{\mu_k=۰/۲۵} f_k=۰/۲۵\times ۴۰=۱۰N$$

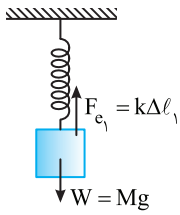
۴ قانون دوم را می‌نویسیم و نیروی کشسانی فنر را به‌دست می‌آوریم.

$$F_{net}=ma \Rightarrow F_e-f_k=ma \xrightarrow{a=۱/۵m/s^۲} F_e-۱۰=۴\times ۱/۵ \Rightarrow F_e=۱۶N$$

۵ افزایش طول فنر را حساب می‌کنیم:

$$F_e=kx \xrightarrow{k=۸۰N/m} ۱۶=۸۰x \Rightarrow x=۰/۲m=۲۰cm$$

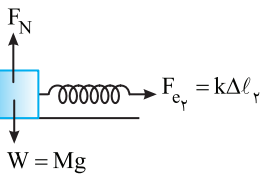
B ۸۵۵ ۳



حالت اول: وزنه از فنر آویزان و در حال تعادل است.

$$F_{net}=۰ \Rightarrow m=k\Delta\ell_۱ \Rightarrow mg=k(۰/۱) \quad (I)$$

حالت دوم: تندی جسم ثابت است، بنابراین نیروی خالص وارد بر وزنه صفر است و وزنه در حالت تعادل است.



$$F_{net}=۰ \Rightarrow f_k=F_{e_۲} \Rightarrow \mu_k Mg=k\Delta\ell_۲$$

$$۰/۲(Mg)=k(۰/۰۲) \Rightarrow Mg=k(۰/۱) \quad (II)$$

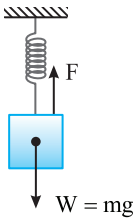
دو رابطه I و II را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{M}{m}=۱$$

بازی با سؤال **افزایش طول یک فنر وقتی وزنه‌ای به جرم m به انتهای آن آویزان است، برابر ۴ سانتی‌متر می‌شود. اگر بخواهیم با همین فنر وزنه‌ای به جرم M را روی یک سطح افقی با ضریب اصطکاک ۰/۲ با سرعت ثابت بکشیم افزایش طول آن ۲ سانتی‌متر می‌شود. M/m کدام است؟**

۱) ۰/۴ ۲) ۲/۵ ۳) ۱۰ ۴) ۴۰

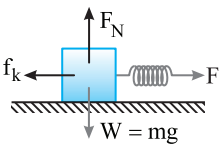
پاسخ **در حالت اول جسم ساکن است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند از این‌رو:**



در حالت اول خواهیم داشت:

$$F=W \Rightarrow k\Delta l=mg \Rightarrow k(\frac{۴}{۱۰۰})=mg \quad (۱)$$

در حالت دوم جسم با سرعت ثابت در حرکت بوده و مجدداً نیروهای وارد بر آن متوازن بوده و خواهیم داشت:



$$F_{net}=۰ \Rightarrow F=f_k \Rightarrow k\Delta x=\mu_k W$$

$$\Rightarrow k(\frac{۲}{۱۰۰})=۰/۲Mg \quad (۲)$$

از تقسیم رابطهٔ (۱) بر رابطهٔ (۲) نسبت جرم‌ها را حساب می‌کنیم:

$$۲=\frac{m}{۰/۲M} \Rightarrow \frac{M}{m}=۲/۵$$

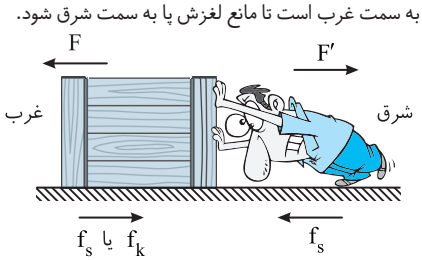
گزینهٔ ۲

B ۸۵۶ ۱

یادآوری هر گاه دو جسم که باهم در تماس هستند بخواهند نسبت به هم حرکت کنند بین آن‌ها یک نیروی تماسی به وجود می‌آید که می‌خواهد مانع لغزش این دو جسم نسبت به هم شود که به آن نیروی اصطکاک گویند بنابراین نیروی اصطکاک در خلاف جهت لغزش جسم است.

به شکل زیر به دقت نگاه کنید. شخصی جعبه را با نیروی F به سمت غرب هُل می‌دهد و جعبه روی سطح افقی به سمت غرب می‌خواهد بلغزد بنابراین نیروی اصطکاکی که زمین به جعبه وارد می‌کند به سمت شرق بوده تا مانع لغزش شود.

اما بنا به قانون سوم نیوتون وقتی که شخص بر جعبه نیروی F را وارد می‌کند جعبه نیز نیروی F' هم‌اندازه F را بر شخص به سوی شرق وارد می‌کند که این نیرو می‌خواهد شخص را به سوی شرق براند. بنابراین اصطکاک ایستایی که سطح زمین بر پای شخص وارد می‌کند، به سمت غرب است تا مانع لغزش پا به سمت شرق شود.



۲ ۸۵۷ B

خط فکری ابتدا نیروی اصطکاک در آستانه حرکت $(f_{s\max})$ را به‌دست می‌آوریم. اگر نیروی F از این اصطکاک کمتر باشد جسم ساکن می‌ماند و نیروی اصطکاک برابر نیروی F است و اگر نیروی F از نیروی اصطکاک در آستانه حرکت بیشتر باشد نیروی اصطکاک برابر نیروی اصطکاک جنبشی $(f_k=\mu_k F_N)$ می‌شود.

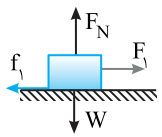
۱ اصطکاک آستانهٔ حرکت برابر است با:

$$f_{s\max}=\mu_s F_N \xrightarrow{F_N=mg} f_{s\max}=\mu_s mg \xrightarrow{\mu_s=0/25,\ m=4kg}$$
$$f_{s\max}=0/25\times 40=10N$$

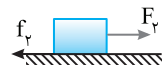
۲ اکنون نیروهای F_1، F_2 و F_3 با $f_{s\max}$ مقایسه می‌کنیم.

$$F_1, F_2 < f_{s\max}$$

جسم ساکن می‌ماند



$$\begin{cases} F_1=4N \rightarrow f_1=F_1=4N \\ F_2=8N \rightarrow f_2=F_2=8N \end{cases}$$



جسم ساکن می‌ماند

۳ نیروی $F_3=12N$ از $f_{s\max}=10$ بزرگ‌تر است بنابراین اصطکاک بین جسم و سطح، اصطکاک جنبشی است.

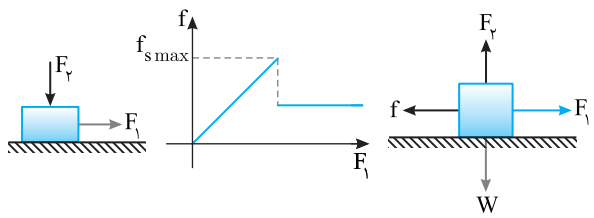
$$f_3=f_k=F_N\mu_k=mg\mu_k=40\times 0/2=8N$$

۴ در نتیجه:

$$f_1<f_2=f_3$$

۴ ۸۵۸ A

جسم ساکن است، نیروی F_1 بر جسم وارد می‌شود و تا لحظه‌ای که جسم ساکن است نیروها متوازن هستند و نیروی اصطکاک ایستایی با نیروی F_1 برابر است $(F_1=f_s)$ با افزایش F_1، نیروی اصطکاک F_s افزایش می‌یابد تا به مقدار پیشینهٔ آستانه حرکت $f_{s\max}$ برسد. از لحظه‌ای که نیروی F_1 از نیروی اصطکاک $f_{s\max}$ بیشتر شده، جسم به حرکت درمی‌آید اصطکاک ناگهان کاهش می‌یابد و برابر اصطکاک جنبشی $f_k=\mu_k F_N$ می‌شود. (معمولاً اصطکاک جنبشی از اصطکاک آستانهٔ حرکت کم‌تر است.) بنابراین ابتدا اصطکاک افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

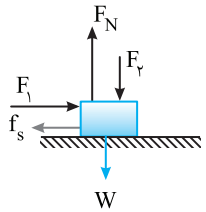


۲ ۸۵۹ B

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. دقت کنید که جسم ساکن است.

با افزایش F_2 نیروی عمودی سطح افزایش می‌یابد

$$F_{net_y}=0 \Rightarrow \uparrow F_N=F_2\uparrow+W$$



و (الف) درست است.

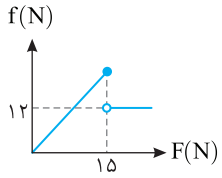
جسم ساکن است و با افزایش نیروی F_2 تغییری در نیروی جلوبر F_1 ایجاد نمی‌شود و جسم هم‌چنان ساکن می‌ماند و نیروی خالص وارد بر جسم صفر می‌ماند و گزاره (ت) نادرست است. نیروهای وارد بر جسم ساکن متوازن هستند و نیروی اصطکاک بین جسم و سطح با نیروی F_1 برابر است. $f_s=F_1=10N$

و هرچه F_2 را افزایش دهیم f_s همچنان ۱۰N باقی می‌ماند و عبارت (ب) نادرست است.

با افزایش نیروی عمودی سطح، نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت یعنی نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه $f_{s\max}=\mu_s F_N\uparrow$ افزایش می‌یابد. بنابراین، گزارهٔ (پ) درست است.

۱ ۸۶۰ B

خط فکری به شکل با دقت نگاه کنید، نیروی اصطکاک جنبشی مقدار ثابت $f_k=12N$ است. وقتی نیروی افقی $F=15N$ است، اصطکاک بیشینه مقدار را دارد یعنی جسم در این لحظه در آستانهٔ حرکت بوده و اصطکاک آستانهٔ حرکت $f_{s\max}=15N$ است. اکنون می‌توانید مسئله را حل کنید.



۱ ضریب اصطکاک جنبشی را به‌دست می‌آوریم.

$$f_k=\mu_k F_N \Rightarrow \mu_k=\frac{12}{F_N}$$

۲ ضریب اصطکاک ایستایی خواهد شد:

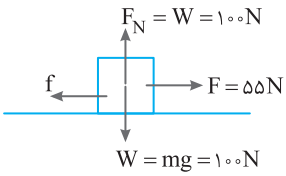
$$f_{s\max}=\mu_s F_N \Rightarrow \mu_s=\frac{15}{F_N}$$

۳ نسبت ضریب اصطکاک‌ها خواهد شد:

$$\frac{\mu_k}{\mu_s}=\frac{\frac{12}{F_N}}{\frac{15}{F_N}}=\frac{4}{5}$$

۳ ۸۶۱ B

ابتدا نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را حساب می‌کنیم تا ببینیم جسم به حرکت در می‌آید یا نه.



$$f_{s\max}=\mu_s F_N$$
$$\Rightarrow F_{s\max}=0/5\times 100$$
$$\Rightarrow f_{s\max}=50N$$

نیروی $F=55N$ از نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت بیشتر است و باعث حرکت جسم می‌شود. بنابراین باید نیروی اصطکاک جنبشی را حساب کرد.

$$f_k=\mu_k F_N \Rightarrow f_k=0/25\times 100 \Rightarrow f_k=25N$$

نیروی خالص وارد بر جسم خواهد شد:

$$F_{net}=F-f_k \Rightarrow F_{net}=55-25 \Rightarrow F_{net}=30N$$

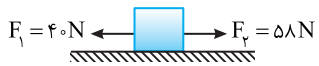
۳ ۸۶۲ B

خط فکری گام اول، یافتن اصطکاک آستانهٔ حرکت جسم $f_{s\max}$ است. گام بعدی، یافتن برایند دو نیروی F_1 و F_2 و مقایسهٔ آن با $f_{s\max}$ است تا بتوانیم تشخیص بدهیم که جسم ساکن می‌ماند یا به حرکت درمی‌آید. آنگاه اصطکاک قابل محاسبه می‌شود.

۱ نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را حساب می‌کنیم.

$$f_{s\max}=\mu_s F_N=\mu_s mg \Rightarrow f_{s\max}=0/4\times 5\times 10=20N$$

۲ برایند دو نیروی $F_1=40N$ و $F_2=58N$ برابر $58-40=18N$ است.



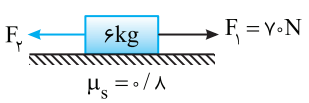
۳ برایند F_1 و F_2 از $f_{s\max}$ کمتر است بنابراین جسم ساکن می‌ماند.

۴ وقتی جسم ساکن می‌ماند نیروی اصطکاک ایستایی با نیرویی که می‌خواهد جسم را به حرکت درآورد برابر است: $f_s=18N$

۴ ۸۶۳ B

خط فکری می‌خواهیم جسم در آستانهٔ حرکت قرار گیرد. بنابراین دو حالت ممکن است اتفاق بیافتد. اگر $F_1>F_2$ باشد و برایند آن‌ها برابر $f_{s\max}=F_1-F_2$ شود جسم در آستانهٔ حرکت به سمت راست قرار می‌گیرد و اگر $F_1<F_2$ و برایند آن‌ها $(F_2-F_1=f_{s\max})$ باشد، جسم در آستانهٔ حرکت به سمت چپ قرار می‌گیرد بنابراین باید دو حالت را بررسی کنید.

اگر $F_1>F_2$ باشد جسم در آستانهٔ حرکت به سمت راست قرار خواهد داشت:



نیروی اصطکاک آستانه حرکت خواهد شد: $f_{s\max}=\mu_s N=۰/۸\times۶۰=۴۸N$

بنابراین: $F_۱-F_۲-f_{s\max}=۰\Rightarrow ۷۰-F_۲-۴۸=۰\Rightarrow F_۲=۲۲N$

اگر $F_۱<F_۲$ باشد جسم در آستانهٔ حرکت به سمت چپ قرار خواهد داشت بنابراین:

$F_۲-F_۱-f_{s\max}=۰\Rightarrow F_۲-۷۰-۴۸=۰\Rightarrow F_۲=۱۱۸N$

B ۸۶۴ ۴

۱ نیروهای وارد بر جسم را کامل رسم می‌کنیم.

۲ نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم.

$F_N=۴F+W\xrightarrow{W=F}F_N=۵F$

۳ نیروی اصطکاک بیشینه $(f_{s\max})$ را به‌دست می‌آوریم.

$f_{s\max}=\mu_s F_N\xrightarrow{\mu_s=۰/۱۸}f_{s\max}=۰/۱۸\times۵F\Rightarrow f_{s\max}=۰/۹F$

۴ نیروی افقی جلوبر F و اصطکاک آستانهٔ حرکت $f_{s\max}=۰/۹F$ بوده یعنی $F>f_{s\max}$ است و جسم شروع به حرکت می‌کند. در این حالت جسم دارای اصطکاک جنبشی است که معمولاً از اصطکاک آستانهٔ حرکت $f_{s\max}=۰/۹F$ کوچک‌تر است و تنها گزینه‌ای که چنین است گزینهٔ (۴) درست است.

B ۸۶۵ ۱

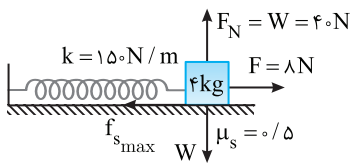
خط فکری دقت کنید که در ابتدا نخ کشیدگی ندارد و نیروی کشش نخ صفر است و اگر نیروی F نتواند سبب حرکت جسم شود، نیروی کشش نخ همچنان صفر است.

نیروی اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح ۱۵N است، بنابراین نیروی اصطکاک ایستایی در آستانهٔ حرکت از ۱۵N نیز بیشتر است و نیروی افقی $F=۱۰N$ نمی‌تواند این جسم ساکن را به حرکت درآورد و باعث کشیدگی نخ شود، به همین علت نیروی کشش نخ صفر است.

B ۸۶۶ ۲

۱ نیروی اصطکاک آستانه حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$f_{s\max}=\mu_s F_N\xrightarrow{F_N=mg=۴۰N}f_{s\max}=۰/۵\times۴۰\Rightarrow f_{s\max}=۲۰N$



۲ جسم در آستانهٔ حرکت به سمت راست است یعنی نیروی اصطکاک $f_{s\max}=۲۰N$ به سمت چپ است.

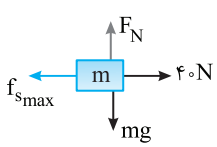
۳ جسم ساکن است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند و برای آن‌که جسم در آستانهٔ حرکت به سمت راست باشد باید نیروی کشسانی فنر برابر $F_e=۲۰-۸=۱۲N$ به سوی راست باشد، بنابراین باید فنر فشرده شده باشد تا نیروی کشسانی آن رو به راست باشد.

۴ اندازه تغییر طول فنر برابر است با:

$F_e=kx\Rightarrow ۱۲=۱۵۰x\Rightarrow x=\frac{۱۲}{۱۵۰}=\frac{۴}{۵۰}=۰/۰۸\Rightarrow x=۸cm$

C ۸۶۷ ۳

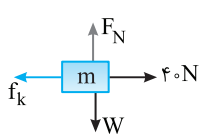
۱ جسم در آستانهٔ حرکت است بنابراین نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند و می‌توان از این مطلب استفاده کرد و جرم جسم را به‌دست آورد.



$F_{net}=۰\Rightarrow ۴۰-f_{s\max}=۰$

$\Rightarrow f_{s\max}=۴۰\Rightarrow \mu_s mg=۴۰$

$\Rightarrow ۰/۴\times m\times ۱۰=۴۰\Rightarrow m=۱۰kg$



۲ جسم در حال حرکت است و نیروی اصطکاک بین جسم و سطح نیروی اصطکاک جنبشی $(f_k=\mu_k F_N)$ است. قانون دوم نیوتون را نوشته شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$F_{net}=ma\Rightarrow ۴۰-f_k=۱۰\times a\Rightarrow ۴۰-\mu_k mg=۱۰a$

$\Rightarrow ۴۰-(۰/۲\times۱۰\times۱۰)=۱۰a\Rightarrow a=۲m/s^۲$

B ۸۶۸ ۱

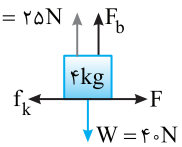
خط فکری با یک مسئله زیبا مربوط به قانون دوم و قانون سوم سروکار دارید. نیرویی که شخص را به جلو می‌راند نیروی اصطکاک ایستایی بین پای شخص و سطح پیست است، در واقع شخص سطح را به عقب می‌راند و بنا به قانون سوم نیوتون، واکنش آن نیرو توسط سطح به شخص وارد می‌شود و شخص را به جلو می‌راند. بیشینه شتاب وقتی است که نیروی اصطکاک بیشینه $(f_{s\max})$ باشد.

برای یافتن شتاب حرکت کافی است از قانون دوم نیوتون استفاده کنیم و به جای نیروی خالص وارد بر شخص نیروی $f_{s\max}$ را قرار دهیم.

$F_{net}=ma\Rightarrow \mu_s mg=ma\Rightarrow a=\mu_s g=۰/۹۵\times۱۰=۹/۵\,m/s^۲$

A ۸۶۹ ۲

۱ شکل ساده‌ای از نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.

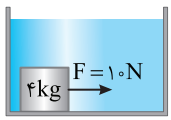


۲ جسم با سرعت ثابت در حال حرکت است بنابراین:

$F_{net}=۰\Rightarrow F=f_k\Rightarrow ۱۰=\mu_k F_N\Rightarrow ۱۰=۰/۴N\Rightarrow F_N=۲۵N$

۳ جسم در امتداد قائم حرکتی ندارد و نیروهای رو به بالا با نیروهای رو به پایین برابر هستند. بر جسم نیروی F_N و نیروی شناوری F_b رو به بالا و نیروی وزن رو به پایین وارد می‌شود بنابراین خواهیم داشت: $F_N+F_b=W\Rightarrow F_b=۴۰-۲۵\Rightarrow F_b=۱۵N$

بازی با سؤال **مطابق شکل جسمی به جرم ۴kg در کف ظرف حاوی مایعی با نیروی $F=۱۰N$ شروع به حرکت می‌کند، نیروی شناوری وارد بر جسم چند نیوتون می‌تواند باشد؟** $(\mu_k=۰/۲,\mu_s=۰/۴,g=۱۰N/kg)$



۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

پاسخ **برای آنکه جسم شروع به حرکت کند، $F>f_{s_{max}}$ باشد.**

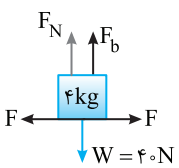
$F>f_{s_{max}}\Rightarrow ۱۰>\mu_s F_N\Rightarrow ۱۰>۰/۴F_N\Rightarrow F_N<۲۵N$

نیروهای در راستای قائم جسم را می‌نویسیم:

$F_N+F_b=W\Rightarrow F_N=W-F_b$

$F_N<۲۵\Rightarrow W-F_b<۲۵$

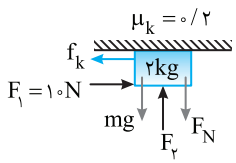
$\Rightarrow ۴۰-F_b<۲۵\Rightarrow F_b>۱۵N$



گزینهٔ ۴

B ۸۷۰ ۳

۱ تمام نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:



۲ جسم با سرعت ثابت در حال حرکت است پس نیروهای وارد بر جسم متوازن می‌باشند و می‌توانیم بنویسیم: (۱) در راستای افقی: $F_۱=f_k\Rightarrow F_۱=\mu_k F_N$

(۲) در راستای قائم: $F_N+mg=F_۲\Rightarrow F_N=F_۲-mg$

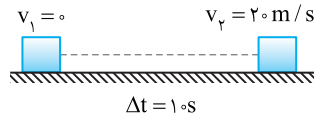
۳ اکنون رابطهٔ (۲) را در رابطهٔ (۱) جایگزین می‌کنیم:

(۱) و (۲) $\Rightarrow F_۱=\mu_k(F_۲-mg)\Rightarrow ۱۰=۰/۲(F_۲-۲۰)\Rightarrow F_۲=۷۰N$

نمونهٔ واقعی این حرکت کشیدن ماله توسط گچ‌کار روی سقف است.

۴ ۸۷۱ B

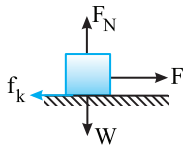
خط فکری حضور زمان در مسئله یعنی رفتن به سراغ روابط حرکت‌شناسی، ابتدا به کمک معادلهٔ سرعت - زمان، شتاب را بیابید، سپس نیروهای وارد بر جسم را رسم کنید و به کمک قانون دوم نیوتون F را به‌دست بیاورید.



۱ در مدت ۱۰s سرعت اتومبیل از صفر به $\frac{72}{3/6}=20m/s$ رسیده است، بنابراین شتاب حرکت خواهد شد:

$$v_2=at+v_1\Rightarrow 20=10a\Rightarrow a=2m/s^2$$

۲ حال با توجه به قانون دوم نیوتون:



$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma$$
$$\xrightarrow{f_k=\mu_k mg} F-\mu_k mg=ma$$
$$\xrightarrow{m=1500kg,\ \mu_k=0/02} F-0/02\times 15000=1500\times 2\Rightarrow F=3300N$$

۴ ۸۷۲ A

ابتدا به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، شتاب حرکت خودرو را به‌دست می‌آوریم.

$$v=36km/h\Rightarrow v=\frac{36}{3/6}\Rightarrow v=10m/s$$
$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\xrightarrow{\Delta x=10m} 0-100=2a\times 10\Rightarrow a=-5m/s^2$$

نیروی خالص وارد بر خودرو همان نیروی اصطکاک است.

$$F_{net}=ma\Rightarrow -f_k=ma\xrightarrow{m=1600kg}-f_k=1600\times(-5)$$
$$\Rightarrow f_k=8000N$$

۱ ۸۷۳ A

۱ سرعت خودرو را برحسب m/s به‌دست می‌آوریم:

$$v=54km/h=54\times\frac{1000m}{3600s}=15m/s$$

۲ نیرویی که باعث توقف جسم می‌شود نیروی اصطکاک است و مقدار آن را حساب می‌کنیم.

$$f_k=\mu_k mg=0/2\times m\times 10=2m$$

۳ شتاب حرکت جسم را به کمک قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آوریم:

$$-f_k=ma\Rightarrow -2m=ma\Rightarrow a=-2m/s^2$$

۴ اکنون به کمک معادلهٔ مستقل از زمان جابه‌جایی تا لحظهٔ توقف را حساب می‌کنیم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-15^2=2\times(-2)\Delta x\Rightarrow \Delta x\approx 56m$$

میانبر اندازهٔ شتاب توقف جسم روی سطح افقی در اثر نیروی اصطکاک برابر است با:

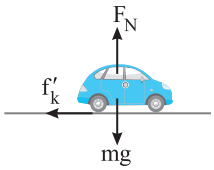
$$a=\mu_k g$$

۲ ۸۷۴ B

ابتدا با توجه به سرعت ابتدایی 54km/h و سرعت انتهایی صفر و طول مسیر 22/5m، شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$v_1=54km/h\div 3/6=15m/s$$
$$v_2^2-v_1^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-225=2a\times 22/5\Rightarrow a=-5m/s^2$$

هنگام ترمز تنها نیروی اصطکاک در راستای حرکت به خودرو وارد می‌شود و خودرو نیروی پیشرانی ندارد:



$$\begin{cases} F_{net}=ma\Rightarrow -f_k=ma & (I)\\ f_k=\mu_k F_N\xrightarrow{F_N=mg} f_k=mg\mu_k & (II)\end{cases}$$

با توجه به دو معادلهٔ بالا:

$$-mg\mu_k=ma\Rightarrow -g\mu_k=a\xrightarrow{a=-5m/s^2}$$
$$-10\mu_k=-5\Rightarrow \mu_k=0/5$$

۳ ۸۷۵ A

یادآوری در مدت‌زمان تأخیر واکنش راننده یعنی در بازهٔ زمانی دیدن مانع و ترمز گرفتن، اتومبیل دارای سرعت ثابت است.

۱ سرعت اتومبیل را برحسب m/s به‌دست می‌آوریم. $72\frac{km}{h}=\frac{72}{3/6}=20m/s$

۲ جابه‌جایی اتومبیل در 0/5s زمان واکنش را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=vt\Rightarrow \Delta x_1=20\times 0/5=10m$$

در این 10m نیروی خالص وارد بر جسم صفر است.

۳ اتومبیل مماس بر مانع متوقف شده یعنی فاصلهٔ 20m اتومبیل تا مانع کاملاً طی شده است. البته 10m اول آن در زمان واکنش و 10m باقی‌مانده با حرکت کندشونده انجام شده. به کمک رابطهٔ مستقل از زمان شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-400=2\times a\times(10)\Rightarrow a=-20m/s^2$$

۴ اندازهٔ نیروی خالص وارد بر اتومبیل خواهد شد:

$$|F_{net}|=m|a|\xrightarrow{m=1500kg} F_{net}=1500\times 20\Rightarrow F_{net}=30000N$$

۲ ۸۷۶ B

خط فکری اول باید بدانیم منظور از حداقل نیروی لازم برای به حرکت درآوردن جسم چیست؟ منظور این است که جسم با نیروی F در آستانهٔ حرکت قرار گیرد و با یک ضربهٔ کوچک به راه بیافتد. بنابراین اصطکاک آستانهٔ حرکت را در دو حالت به‌دست بیاورید و برهم تقسیم کنید.

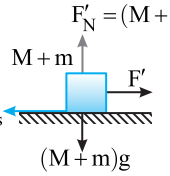
حالت اول: $f_{s_{max}}=Mg\mu_s$

نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه برابر $f_{s_{max}}=\mu_s N$ می‌باشد و دقت کنید که μ_s به جرم جسم بستگی ندارد.

$$F=f_{s\,max}\Rightarrow F=\mu_s Mg\quad ,\quad F'=f'_{s\,max}\Rightarrow F'=\mu_s(M+m)g$$
$$\frac{F'}{F}=\frac{\mu_s(M+m)g}{\mu_s Mg}=\frac{M+m}{M}$$

بنابراین:

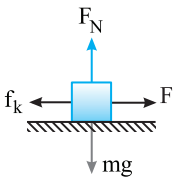
حالت دوم: $f'_{s_{max}}=(M+m)g\mu_s$



بدون حل نیز مشخص است که وقتی جرم از M به $M+m$ افزایش یابد F' به همان نسبت باید زیاد شود.

۴ ۸۷۷ A

خط فکری با دیدن گزینه‌ها نگران نشوید کافی است شکل مسئله را رسم کنید نیروهای وارد بر جسم را روی آن نمایش دهید. به کمک قانون دوم نیوتون شتاب را پارامتری به‌دست بیاورید و با روابط حرکت‌شناسی سرعت جسم را بعد از طی مسافت d حساب کنید و تمام.



۱ ابتدا شتاب حرکت را به کمک قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آوریم:

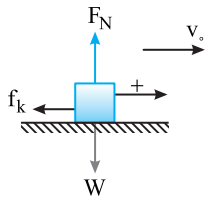
$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow F-\mu_k mg=ma\Rightarrow a=\frac{F-\mu_k mg}{m}$$

۲ اکنون به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، v را به‌دست می‌آوریم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow v^2-0=2\frac{F-\mu_k mg}{m}d\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2(F-\mu_k mg)d}{m}}$$

B ۸۷۸ ۱

نکته هرگاه در مسئله بیان شود که جسم را با سرعت اولیه پرتاب کرده (یا به حرکت درآورده‌ایم) یعنی نیروی جلوبر صفر است و جسم چون دارای سرعت اولیه است بنا به قانون اول نیوتون به حرکت خود ادامه می‌دهد تا در اثر اصطکاک بایستد.



شکل مسئله را رسم می‌کنیم. تمام نیروهای وارد بر جسم را روی جسم نمایش می‌دهیم. نیرویی که مانع حرکت جسم می‌شود اصطکاک است. شتاب حرکت را حساب می‌کنیم. بنابراین شتاب حرکت به جرم جسم بستگی ندارد. از طرفی:

$$F_{net}=ma\Rightarrow -f_k=ma\Rightarrow -\mu_k mg=ma\Rightarrow a=-\mu_k g$$

با توجه به رابطهٔ مستقل از زمان، جابه‌جایی تا توقف خواهد شد:

$$v^2-v_0^2=2(-a)\Delta x\Rightarrow \Delta x=\frac{v_0^2}{2a}$$

بنابراین مسافت طی شده در دو حالت یکی است (برابر x است) و جرم در آن بی‌تأثیر است.

میانبر هر گاه تنها نیروی وارد بر جسم نیروی اصطکاک جنبشی باشد، شتاب حرکت جسم برابر $a=\mu_k g$ خواهد بود.

بازی با سوال **جسمی به جرم ۵kg با سرعت اولیهٔ v_0 روی سطح افقی پرتاب می‌شود و پس از طی مسافت ۲۰m می‌ایستد. اگر جسمی به جرم ۱۵kg را با همان سرعت اولیه روی همان سطح با همان μ_k پرتاب کنیم، پس از طی چند متر می‌ایستد؟ $(g=10N/kg)$**

۱) ۲۰ ۲) ۱۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵

پاسخ **شتاب حرکت در دو حالت برابر $a=-\mu_k g$ است و بنا به رابطهٔ مستقل از زمان جابه‌جایی در دو حالت یکسان و برابر است با:**

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-v_0^2=2(-\mu_k g)\Delta x\Rightarrow \Delta x=\frac{v_0^2}{2\mu_k g}$$

یعنی جابه‌جایی همان ۲۰m خواهد بود. گزینهٔ ۱

B ۸۷۹ ۲

خط فکری تا زمانی که نیروی F، بزرگ‌تر یا مساوی اصطکاک آستانهٔ حرکت نشود جسم شروع به حرکت نمی‌کند. البته اگر $F=f_{s\max}$ باشد با یک ضربهٔ کوچک جسم به راه می‌افتد. بنابراین لحظهٔ شروع حرکت یعنی شما باید نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را به‌دست آورده و آن را به جای F قرار داده لحظهٔ حرکت را حساب کنید.

۱ جسم هنگامی شروع به حرکت می‌کند که حداقل مقدار F برابر نیروی اصطکاک در آستانه حرکت $(f_{s\max})$ باشد: $F=f_{s\max}=\mu_s F_N=\mu_s mg=0/4\times 20=8N$

۲ در معادله $F(t)=t^2+t-4$ می‌توان به جای F، ۸N قرار داد.

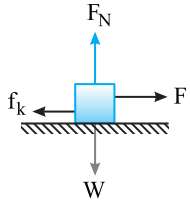
$$F(t)=8\Rightarrow t^2+t-4=8\Rightarrow t^2+t-12=0\Rightarrow (t+4)(t-3)=0$$

$$\Rightarrow t=3, t=-4 \text{ غ ق ق}$$

A ۸۸۰ ۲

با مقایسه معادلهٔ سرعت زمان داده شده در مسئله با معادلهٔ سرعت زمان حرکت با شتاب ثابت، شتاب حرکت را مشخص می‌کنیم.

$$v=4t+3\ ,\ v=at+v_0\Rightarrow a=4m/s^2$$



نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده، به کمک قانون دوم نیوتون اصطکاک را به‌دست می‌آوریم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow 18-f_k=4\times 4$$

$$\Rightarrow f_k=2N$$

A ۸۸۱ ۱

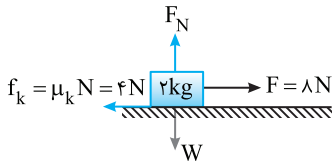
نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. نیروی اصطکاک خواهد شد:

$$f_k=\mu_k F_N=\mu_k mg\Rightarrow f_k=0/2\times 2\times 10\Rightarrow f_k=4N$$

شتاب حرکت جسم را با توجه به نیروهای وارد بر جسم به‌دست می‌آوریم:

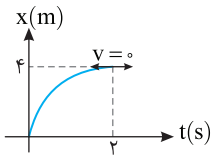
$$F_{net}=ma\Rightarrow -f_k=ma\Rightarrow 8-4=2a\Rightarrow a=2m/s^2$$

شتاب حرکت ثابت و برابر $2m/s^2$ است. معادلهٔ حرکت مسئله $(x=bt^2+4t)$ را با معادله مکان زمان حرکت با شتاب ثابت مقایسه می‌کنیم: $b=\frac{1}{2}a\Rightarrow b=\frac{1}{2}\times 2=1$



B ۸۸۲ ۲

۱ در پرتاب جسم روی سطح افقی، نیروی خالص وارد بر جسم نیروی اصطکاک است. بنابراین شتاب حرکت خواهد شد:



$$-f_k=ma\Rightarrow -\mu_k mg=ma\Rightarrow a=-\mu_k g$$

۲ حال با توجه به ثابت بودن شتاب از رابطهٔ مستقل از شتاب $\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t$، سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم دقت کنید که در لحظهٔ $t=2s$ در مکان $x=4m$ سرعت صفر است.

$$4=\frac{0+v_0}{2}\times 2\Rightarrow v_0=4m/s$$

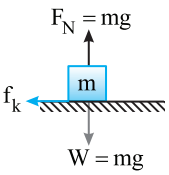
۳ شتاب حرکت خواهد شد: $a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-4}{2}=-2m/s^2$

۴ ضریب اصطکاک را به‌دست می‌آوریم:

$$a=-\mu_k g\Rightarrow -2=-\mu_k(10)\Rightarrow \mu_k=0/2$$

A ۸۸۳ ۱

هرگاه جسمی را روی سطحی با سرعت اولیه پرتاب کنیم (سُر دهیم) نیروی جلوبر آن صفر بوده و روی سطح افقی نیروی خالص وارد بر جسم نیروی اصطکاک جنبشی است. بنابراین شتاب حرکت خواهد شد:



$$F_{net}=ma\Rightarrow 0-f_k=ma$$

$$\xrightarrow{f_k=\mu_k mg} -\mu_k mg=ma\Rightarrow a=-\mu_k g$$

این شتاب به جرم جسم و تندی اولیه جسم بستگی ندارد. بنابراین شتاب حرکت دو جسم یکی است.

$$a_A=a_B$$

B ۸۸۴ ۴

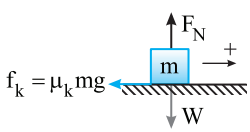
دو جسم روی سطح افقی مماس بر سطح پرتاب شده‌اند، بنابراین نیروی جلوبر صفر است و نیروی خالص وارد بر دو وزنه، نیروی اصطکاک بین وزنه و سطح افقی است. به کمک قانون دوم نیوتون، شتاب حرکت وزنه‌ها در اثر اصطکاک را حساب می‌کنیم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow f_k=ma\Rightarrow\begin{cases}-\mu_{k_A} m_A g=m_A a_A\Rightarrow a_A=-\mu_{k_A} g\\ -\mu_{k_B} m_B g=m_B a_B\Rightarrow a_B=-\mu_{k_B} g\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\mu_{k_A}=2\mu_{k_B}} \frac{a_A}{a_B}=2$$

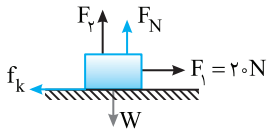
سرعت اولیهٔ هر دو یکسان است. به کمک معادلهٔ مستقل از زمان مسأله را حل می‌کنیم.

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\xrightarrow{v=0}\Delta x=\frac{v_0^2}{-2a}\Rightarrow\frac{\Delta x_A}{\Delta x_B}=\frac{a_B}{a_A}=\frac{1}{2}$$



B ۸۸۵ ۲

نیروهای وارد بر جسم را روی شکل نمایش می‌دهیم.



۱ نیروی عمودی سطح در حالت اول برابر است با:

$$F_N+F_۲=W\Rightarrow F_N=W-F_۲$$

$$\xrightarrow{W=۴۰N} F_N=۴۰-F_۲$$

۲ نیروی اصطکاک در حالت اول را به‌دست می‌آوریم.

$$f_k=\mu_k F_N \xrightarrow{\mu_k=۰/۲} f_k=۰/۲(۴۰-F_۲)$$

۳ نیروی عمودی سطح در حالت دوم برابر است با:

$$F'_N+۲F_۲=W\Rightarrow F'_N=W-۲F_۲\Rightarrow F'_N=۴۰-۲F_۲$$

۴ نیروی اصطکاک در حالت دوم را حساب می‌کنیم.

$$f'_k=\mu_k(۴۰-۲F_۲)\Rightarrow f'_k=۰/۲(۴۰-۲F_۲)$$

در دو حالت طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_۱-f_k=ma\Rightarrow ۲۰-\mu_k(۴۰-F_۲)=ma\Rightarrow ۲۰-۰/۲(۴۰-F_۲)=ma \quad (۱)$$

$$F_۱-f'_k=ma'\Rightarrow ۲۰-\mu_k(۴۰-۲F_۲)=m(\frac{۵}{۴}a)$$

$$\Rightarrow ۲۰-۰/۲(۴۰-۲F_۲)=m(\frac{۵}{۴}a) \quad (۲)$$

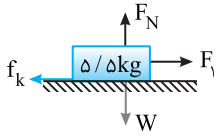
دو رابطهٔ بالا را برهم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۲۰-۸+۰/۲F_۲}{۲۰-۸+۰/۴F_۲}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow\frac{۱۲+۰/۲F_۲}{۱۲+۰/۴F_۲}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow ۶۰+F_۲=۴۸+۱/۶F_۲$$

$$\Rightarrow ۱۲=۰/۶F_۲\Rightarrow F_۲=۲۰N$$

B ۸۸۶ ۲

۱ در حالت اول سرعت ثابت است و نیروهای وارد بر جسم متوازن است بنابراین:



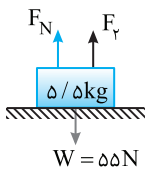
$$F_{net}=۰\Rightarrow F_۱=f_k \xrightarrow{f_k=\mu_k F_N}$$

$$۰/۸F=\mu_k F_N \quad (I)$$

۲ نیروی عمودی سطح در حالت اول را حساب می‌کنیم:

$$F_N+F_۲=W\Rightarrow F_N=W-F_۲\Rightarrow F_N=mg-F_۲\Rightarrow F_N=۵۵-۰/۶F$$

۳ در رابطه (I)، F_N را قرار می‌دهیم و F را به‌دست می‌آوریم.



$$۰/۸F=\mu_k F_N=۰/۵\times(۵۵-۰/۶F)=۲۷/۵-۰/۳F$$

$$\Rightarrow ۱/۱F=۲۷/۵\Rightarrow F=۲۵N$$

۴ نیروی $F_۱$ و $F_۲$ برابر است با:

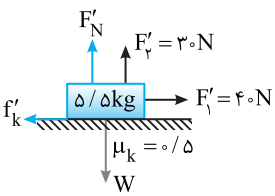
$$F_۱=۰/۸F=۲۰N \quad \text{و} \quad F_۲=۰/۶F=۱۵N$$

۵ نیروی اصطکاک در حالت اول خواهد شد:

$$f_k=\mu_k F_N\Rightarrow f_k=۰/۵(۵۵-۱۵)\Rightarrow f_k=۲۰N$$

۶ نیروهای $F_۱$ و $F_۲$ دو برابر شده‌اند یعنی $F'_۱=۲F_۱=۴۰$ و $F'_۲=۲F_۲=۳۰N$ است.

۷ نیروی عمودی سطح در حالت دوم خواهد شد:



$$F'_N=W-F'_۲\Rightarrow F'_N=۵۵-۳۰=۲۵N$$

۸ نیروی اصطکاک در حالت دوم را حساب می‌کنیم.

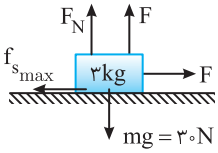
$$f'_k=\mu_k F'_N=۰/۵\times۲۵=۱۲/۵N$$

۹ نسبت نیروی اصطکاک در دو حالت برابر است با:

$$\frac{f'_k}{f_k}=\frac{۱۲/۵}{۲۰}=\frac{۱۲۵}{۲۰۰}\Rightarrow\frac{f'_k}{f_k}=\frac{۵}{۸}$$

B ۸۸۷ ۲

حالت اول: جسم در آستانهٔ حرکت بوده و نیروی اصطکاک وارد بر آن نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه $f_{s_{max}}$ است:



نیروی عمودی سطح را به دست می‌آوریم:

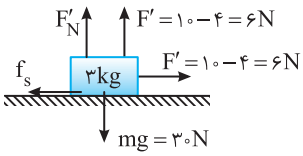
$$F+F_N=mg\Rightarrow F_N=۳۰-F$$ جسم در راستای قائم حرکت نمی‌کند

$$F=f_{s_{max}}$$ در راستای افقی، جسم در آستانهٔ حرکت بوده و هنوز حرکت نکرده

$$\xrightarrow[F_N=۳۰-F]{f_{s_{max}}=\mu_s F_N} F=\mu_s(۳۰-F)\xrightarrow{\mu_s=۰/۵} F=۰/۵(۳۰-F)$$

$$\Rightarrow F+۰/۵F=۱۵\Rightarrow ۱/۵F=۱۵\Rightarrow F=۱۰N$$

حالت دوم: هر کدام از نیروهای F، ۴N کاهش یافته و $F=۱۰N$ به ۶N می‌رسد، دقت کنید که چون نیروی در راستای قائم کاهش یافته پس F_N افزایش می‌یابد و نیروی

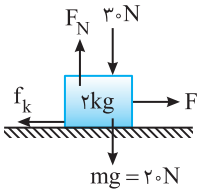


F افقی نیز کاهش یافته، در واقع در قسمت قبلی با نیروی ۱۰N و نیروی عمودی سطح ۳۰−۱۰=۲۰N جسم در آستانهٔ حرکت بوده پس در این حالت که نیروی افقی $F'=۶N$ شده و نیروی عمودی سطح $F'_N=۳۰-۶=۲۴N$ افزایش یافته نتیجه می‌گیریم که جسم همچنان ساکن می‌ماند و نیروی اصطکاک برابر نیروی F' است.

$$F'=f_s\Rightarrow f_s=۶N$$

B ۸۸۸ ۳

در حالت دوم سرعت حرکت ثابت است پس نیروهای وارد بر جسم متوازن بوده و شتاب حرکت صفر است:



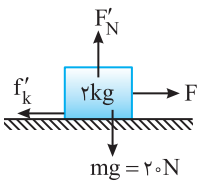
$$۳۰+mg=F_N\Rightarrow F_N=۵۰N$$

$$f_k=\mu_k F_N\Rightarrow f_k=\frac{۱}{۴}\times۵۰\Rightarrow f_k=۱۲/۵N$$

$$F_{net}=ma\xrightarrow{a=۰}F_{Net}=۰$$

$$\Rightarrow F=f_k\Rightarrow F=۱۲/۵N$$

حال با توجه به اینکه در حالت اول نیروی ۳۰N بر جسم وارد نشده و نیروی F برابر ۱۲/۵N جسم را می‌کشد، شتاب حرکت را حساب می‌کنیم:



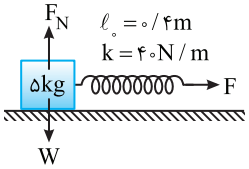
$$F'_N=mg\Rightarrow F'_N=۲۰N$$

$$f'_k=\mu_k F'_N\Rightarrow f'_k=\frac{۱}{۴}\times۲۰=۵N$$

$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow ۱۲/۵-۵=۲a$$

$$\Rightarrow ۷/۵=۲a\Rightarrow a=۳/۷۵m/s^۲$$

B ۸۸۹ ۴



نیروی کشسانی فنر را حساب می‌کنیم.

$$F=k\Delta\ell$$

$$\Rightarrow F_e=۴۰۰\times\frac{(۴۷/۵-۴۰)}{۱۰۰}\Rightarrow F_e=۳۰N$$

در لحظهٔ شروع به حرکت نیروی کشسانی فنر با تقریب خوبی با نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت برابر است، از این‌رو:

$$f_{s\,max}=F_e\Rightarrow\mu_s mg=۳۰\Rightarrow\mu_s\times۵۰=۳۰\Rightarrow\mu_s=۰/۶$$

وقتی جسم در حرکت است آنگاه:

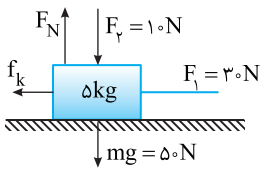
$$F_{net}=ma\Rightarrow F_e-f_k=ma\xrightarrow{a=۲m/s^۲}۳۰-\mu_k(۵۰)=۵\times۲\Rightarrow\mu_k=۰/۴$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\mu_s}{\mu_k}=\frac{۰/۶}{۰/۴}=\frac{۳}{۲}$$

۲ ۸۹۰ B

در حالت اول، شتاب حرکت $۲m/s^۲$ و تندشونده است، یعنی $f_k<F_۱$ است.



$$F_{net}=ma\Rightarrow F_۱-f_k=ma$$
$$\Rightarrow ۳۰-f_k=۱۰\Rightarrow f_k=۲۰N$$

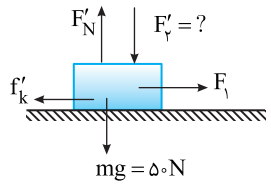
نیروی اصطکاک از رابطهٔ $f_k=\mu_k F_N$ به‌دست می‌آید:

$$F_N=F_۲+mg=۱۰+۵۰\Rightarrow F_N=۶۰N\ ,\ ۲۰=\mu_k F_N\Rightarrow \mu_k=\frac{۲۰}{۶۰}=\frac{۱}{۳}$$

در حالت دوم، شتاب حرکت کندشونده است پس باید $F_۱<f'_k$ باشد:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F_۱-f'_k=m(a')\Rightarrow ۳۰-f'_k=۲\times(-۵)\Rightarrow f'_k=۴۰N$$

$$f'_k=\mu_k F'_N\Rightarrow ۴۰=\frac{۱}{۳}F'_N\Rightarrow F'_N=۱۲۰N$$



نیروها در راستای قائم متوازن‌اند. $F'_۲+mg=F'_N\Rightarrow F'_۲+۵۰=۱۲۰\Rightarrow F'_۲=۷۰N$

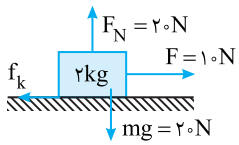
نیروی $F_۲$ از ۱۰N به ۷۰N رسیده و ۶۰N افزایش یافته است.

۴ ۸۹۱ B

ابتدا نیروی اصطکاک بیشینه $(f_{s_{max}})$ را حساب می‌کنیم. اگر نیروی افقی وارد بر جسم $(F=۴۰N)$ بزرگ‌تر از $f_{s_{max}}$ باشد جسم به حرکت در می‌آید:

$$f_{s_{max}}=\mu_s F_N\Rightarrow f_{s_{max}}=۰/۶\times۲۰=۱۲N<F$$

بنابراین جسم به حرکت در می‌آید و پس از ۵s سرعتش به v می‌رسد. حال ۳۰N از F کم شده و مقدار آن به ۱۰N می‌رسد. جسم درحال حرکت بوده پس همچنان به جسم نیروی اصطکاک جنبشی وارد می‌شود.

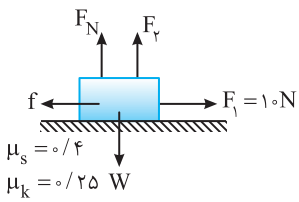


$$f_k=\mu_k F_N\Rightarrow f_k=۰/۵\times۲۰=۱۰N$$
$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow ۱۰-۱۰=۲\times a\Rightarrow a=۰$$

بنابراین جسم با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد.

۴ ۸۹۲ C

خط فکری نیروی $F_۲$ از صفر تا ۲۰N در حال تغییر است بنابراین نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت $(f_{s_{max}})$ در حال تغییر است. شما باید مشخص کنید که ابتدا $f_{s_{max}}$ صفر نیوتون بوده و در نهایت چند نیوتون می‌شود و با مقایسه نیروی جلوبر $F_۱$ با $f_{s_{max}}$ مشخص کنید که جسم در حال سکون می‌ماند و یا اینکه به حرکت درمی‌آید.



۱ نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را وقتی $F_۲=۰$ است حساب می‌کنیم:

$$F_۲=۰\Rightarrow F_N=W\Rightarrow F_{N_۱}=۴۰N$$

نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت: $f_{s\,max_۱}=\mu_s F_N\Rightarrow f_{s\,max_۱}=۰/۴\times۴۰=۱۶N$

۲ نیروی $F_۱=۱۰N$ را با $f_{s\,max}=۱۶N$ مقایسه می‌کنیم $F_۱<f_{s\,max}$ است. به همین دلیل تا لحظه‌ای که $f_{s\,max}\geq۱۰N$ شود، جسم ساکن می‌ماند و نیروی اصطکاک برابر نیروی $F_۱$ بوده و اصطکاک ثابت می‌ماند $(f_s=F_۱=۱۰N)$

۳ با افزایش $F_۲$، نیروی عمودی سطح $(\downarrow F_N=W-F_۲\uparrow)$ کاهش می‌یابد که سبب کاهش $f_{s\,max}$ می‌شود. وقتی $F_۲=۲۰N$ می‌شود، F_N و $f_{s\,max}$ را به دست می‌آوریم.

$$F_N=W-F_۲\xrightarrow{F_۲=۲۰N}F_N=۴۰-۲۰=۲۰N$$
$$f_{s\,max}=\mu_s F_N\Rightarrow f_{s\,max}=۰/۴\times۲۰\Rightarrow f_{s\,max}=۸N$$

۴ در این حالت $F_۱=۱۰N>f_{s\,max}$ بوده یعنی جسم به حرکت درمی‌آید و نیروی اصطکاک، نیروی اصطکاک جنبشی خواهد بود که از $f_{s\,max}$ کمتر است، یعنی اصطکاک کاهش می‌یابد و برابر خواهد شد با: $f_k=\mu_k F_N\Rightarrow f_k=۰/۲۵\times۲۰=۵N$

در نتیجه ابتدا اصطکاک ثابت است و سپس کاهش می‌یابد.

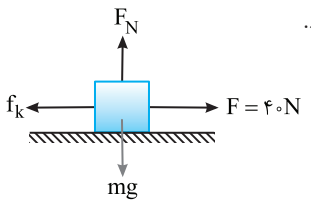
۴ ۸۹۳ C

خط فکری تا لحظه‌ای که نیروی $F\geq f_k$ است بر سرعت جسم افزوده می‌شود. بنابراین باید نیروی اصطکاک جنبشی را حساب کنید. اگر نیروی $F=۴۰N$ را کاهش دهیم تا لحظه‌ای که با نیروی اصطکاک برابر شود از تندی جسم کاسته نخواهد شد.

نیروی اصطکاک جنبشی را به‌دست می‌آوریم:

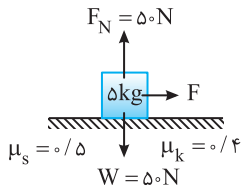
$$f_k=\mu_k mg\xrightarrow{m=۴kg}f_k=\frac{۱}{۴}\times۴۰=۱۰N$$

اگر نیروی F را از ۴۰N تا $f_k=۱۰N$ یعنی ۴۰−۱۰=۳۰N کاهش دهیم، تندی جسم کاهش نمی‌یابد.



۲ ۸۹۴ B

حداقل نیرو تقریباً برابر اصطکاک ایستایی بیشینه است.



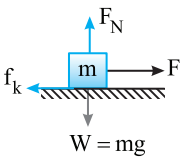
$$F_{min}=f_{s\,max}=\mu_s mg$$
$$F_{min}=۰/۵\times۵۰=۲۵N$$

وقتی جسم به حرکت در می‌آید، نیروی اصطکاک بین جسم و سطح، اصطکاک جنبشی است. برای آنکه جسم متوقف نشود باید مقدار f_k، حداکثر ۲۵N باشد بنابراین:

$$F=f_k\Rightarrow F=\mu_k F'_N$$
$$۲۵=۰/۴(۵۰+m\times۱۰)\Rightarrow ۲۵=۲۰+۴m\Rightarrow m=۱/۲۵kg$$

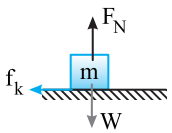
۳ ۸۹۵ A

۱ در حالت اول نیروهای F و f_k در امتداد افقی بر جسم وارد می‌شوند و بنا به قانون دوم خواهیم داشت:



$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\quad(۱)$$

۲ بنا به فرض مسئله پس از حذف F شتاب ۵۰٪ کاهش یافته است.



$$a'=a-\frac{۵۰}{۱۰۰}a=\frac{a}{۲}$$

۳ پس از حذف نیروی F، تنها نیروی مؤثر وارد بر جسم نیروی اصطکاک است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$|f_k|=\frac{m|a|}{۲}\quad(۲)$$

۴ با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

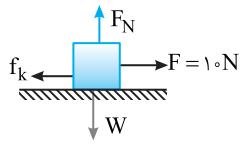
$$F-\frac{m|a|}{۲}=ma\Rightarrow F=\frac{۳}{۲}ma$$

۵ بنابراین:

$$\frac{f_k}{F}=\frac{\frac{ma}{۲}}{\frac{۳}{۲}ma}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow f_k=\frac{F}{۳}$$

۸۹۶ C ۱

خط فکری ابتدا چون جسم در اثر اعمال نیروی F در راستای افقی با سرعت ثابت حرکت می‌کند، طبق قانون دوم نیوتون برایند نیروها در راستای افقی صفر است. بنابراین نیروی F برابر نیروی اصطکاک (f_k) است. بعد از حذف نیروی F تنها نیروی وارد شده به جسم نیروی اصطکاک (f_k) است و جسم در اثر این نیرو حرکت کندشونده‌ای را انجام می‌دهد.



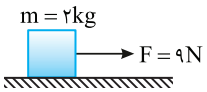
قبل از حذف F:
$F_{net}=۰\Rightarrow f_k=F=۱۰N$

بعد از حذف F تنها نیروی مؤثر اصطکاک است، ازاین‌رو خواهیم داشت:
$F_{net}=ma\Rightarrow -f_k=ma\Rightarrow -۱۰=۵a\Rightarrow a=-۲m/s^۲$

به کمک رابطهٔ مستقل از زمان سرعت در لحظهٔ حذف F را حساب می‌کنیم.
$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\xrightarrow{\Delta x=۹m}۰-v^۲=۲(-۲)\times(۹)\Rightarrow v=۶m/s$

لحظه‌ای که سرعت $۵m/s$ است را به‌دست می‌آوریم.
$v=at+v_۰\Rightarrow ۵=-۲t+۶\Rightarrow t=۰/۵s$

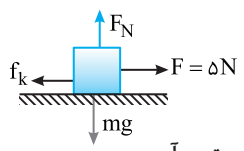
بازی با سؤال **در شکل روبه‌رو، جسم در اثر اعمال نیروی افقی $F=۹N$ با سرعت ثابت v حرکت می‌کند. اگر در یک لحظه نیروی F حذف شود، بعد از آن جسم پس از طی مسافت ۹m متوقف می‌شود. v چند متر بر ثانیه است و در کدام لحظه برحسب ثانیه پس از قطع F سرعت آن به ۵ متر بر ثانیه می‌رسد؟**



۱) ۰/۵ ، ۶ ۲) ۳ ، ۱۰ ۳) ۱ ، ۴ ۴) $\frac{۸}{۹}$ ، ۹

پاسخ سرعت جسم ثابت است بنابراین برایند نیروهای وارد بر جسم صفر است.
$F_{net}=۰\Rightarrow F=f_k\Rightarrow f_k=۹N$

شتاب توقف را به دست می‌آوریم، نیروی موثر اصطکاک جنبشی است.



$-f_k=ma\Rightarrow -۹=۲a\Rightarrow a=-\frac{۹}{۲}m/s^۲$

سرعت v را به کمک رابطهٔ مستقل از زمان به دست می‌آوریم:
$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-v^۲=۲(-\frac{۹}{۲})(۹)\Rightarrow v^۲=۸۱\Rightarrow v=۹m/s$

بنابراین داریم:
$v=at+v_۰\Rightarrow ۵=\frac{-۹}{۲}t+۹\Rightarrow t=\frac{۸}{۹}s$

گزینهٔ ۴

۸۹۷ B ۴

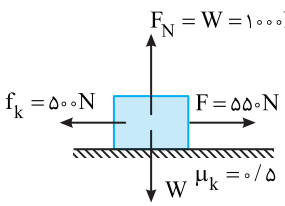
روش اول:

خط فکری در حل مسائل دینامیک اولین گام رسم نیروهای وارد بر جسم روی شکل است و سپس به کار بردن قانون دوم نیوتون $F_{net}=ma$.

مطابق شکل نیروهای وارد بر جسم شامل نیروی افقی $F=۵۵۰N$، نیروی وزن، نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح است، اندازهٔ نیروی عمودی سطح برابر است با:
$F_N=W=mg\Rightarrow F_N=۱۰۰۰N$

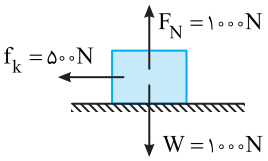
نیروی اصطکاک جنبشی خواهد شد: $f_k=\mu_k F_N\Rightarrow f_k=۰/۵\times ۱۰۰۰=۵۰۰N$

اکنون به سراغ حساب کردن شتاب می‌رویم.
$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow ۵۵۰-۵۰۰=۱۰۰a\Rightarrow a=۰/۵m/s^۲$



جابه‌جایی و سرعت را تا لحظهٔ پاره شدن طناب حساب می‌کنیم.
$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲\xrightarrow{t=۴s}\Delta x=\frac{۱}{۲}\times ۰/۵\times ۱۶\Rightarrow \Delta x=۴m$
$v_۱=at+v_۰\Rightarrow v_۱=۰/۵\times ۴=۲m/s$

اشتباه نکنید پس از پاره شدن طناب جعبه نمی‌ایستد بلکه به دلیل آنکه سرعتش $۲m/s$ است بنا به قانون اول نیوتون به حرکت خود ادامه می‌دهد اما تحت تأثیر نیروی اصطکاک متوقف می‌شود. بنابراین باید شتاب توقف در اثر اصطکاک را حساب کنیم.



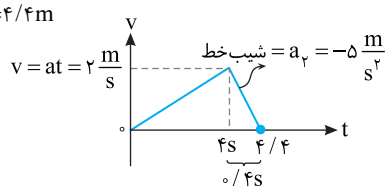
$f_{net}=ma\xrightarrow{f_{net}=f_k}-۵۰۰=۱۰۰a\Rightarrow a=-۵m/s^۲$

اکنون جابه‌جایی از لحظه پاره شدن طناب تا توقف جعبه خواهدشد:
$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-۴=۲(-۵)\Delta x\Rightarrow \Delta x=۰/۴m$

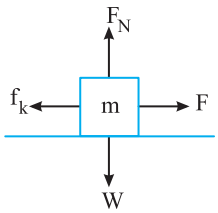
بنابراین کل جابه‌جایی برابر است با: $۴+۰/۴=۴/۴m$

روش دوم: ابتدا با توجه به دینامیک، شتاب حالت اول و حالت دوم را به‌دست می‌آوریم:
$F_{net}=ma\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{(۱)}F-f_k=ma\Rightarrow ۵۵۰-(۱۰۰۰)(۰/۵)=۱۰۰a\\ \Rightarrow a_۱=۰/۵m/s^۲\\ \xrightarrow{(۲)}-f_k=ma\Rightarrow -۵۰۰=۱۰۰a_۲\Rightarrow a_۲=-۵m/s^۲\end{cases}$

حال نمودار v−t را کشیده و سطح زیر نمودار را که برابر مسافت است، به‌دست می‌آوریم:
$S=\frac{۴/۴\times ۲}{۲}=۴/۴m$



۸۹۸ B ۴



۱ نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.

۲ بنا به قانون دوم نیوتون:
$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma_۱\quad (I)$

۳ با قطع نیروی F تنهای نیروی مؤثر وارد بر جسم نیروی اصطکاک است.
$F_{net}=ma_۲\Rightarrow -f_k=ma_۲\quad (II)$

دو رابطهٔ (I) و (II) را بر هم تقسیم می‌کنیم.
$\frac{F-f_k}{-f_k}=\frac{a_۱}{a_۲}\quad (III)$

۴ اکنون باید به کمک معادلهٔ مستقل از زمان نسبت $a_۱$ و $a_۲$ را حساب کرده و در رابطهٔ بالا قرار دهیم.

$\begin{cases}\text{قبل از قطع F}: v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow v^۲=۲a_۱\Delta x\Rightarrow a_۱=\frac{v^۲}{۲\Delta x}\\ \text{بعد از قطع F}: -v^۲=۲a_۲(۴\Delta x)\Rightarrow a_۲=\frac{-v^۲}{۸\Delta x}\end{cases}\Rightarrow\frac{a_۱}{a_۲}=-۴$

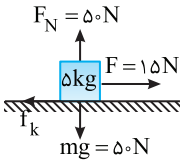
۵ مقداری $\frac{a_۱}{a_۲}$ را در رابطهٔ (III) جای‌گذاری می‌کنیم.
$\frac{F-f_k}{-f_k}=-۴\Rightarrow F-f_k=۴f_k\Rightarrow F=۵f_k$

میانبر هر گاه متحرکی با شتاب $a_۱$ از حال سکون شروع به حرکت کرده و جابه‌جایی $\Delta x_۱$ را طی کند و سپس با شتاب $a_۲$ حرکت خود را کُند کرده و پس از جابه‌جایی $\Delta x_۲$ متوقف شود، خواهیم داشت:
$|\frac{\Delta x_۲}{\Delta x_۱}|=|\frac{a_۱}{a_۲}|$

B ۸۹۹ **۴**

خط فکری حرکت مکعبی چوبی شامل یک قسمت تندشونده قبل از پاره‌شدن نخ و یک قسمت کندشونده بعد از پاره شدن نخ است. در نتیجه شتاب هر قسمت را به‌دست آورده و مسافت‌ها را محاسبه می‌کنیم.

۱ ابتدا برایند نیروها در ۲s اول را حساب کرده و شتاب حرکت در این بازه را به‌دست می‌آوریم:



$$f_k=\mu_k F_N \Rightarrow f_k=۰/۲\times۵۰=۱۰N$$

$$F_{net}=ma \Rightarrow F-f_k=ma$$

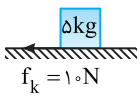
$$\Rightarrow ۱۵-۱۰=۵a \Rightarrow a=۱m/s^۲$$

۲ با استفاده از رابطهٔ سرعت - زمان و جابه‌جایی - زمان، سرعت متحرک در لحظهٔ $t=۲s$ و مسافت طی‌شده در این ۲s را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰ \xrightarrow[v_۰=۰]{a=۱,t=۲s} v=۲m/s$$

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t \Rightarrow \Delta x=\frac{۱}{۲}\times۱\times۴=۲m$$

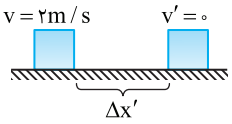
۳ بعد از پاره شدن نخ به جسم تنها نیروی اصطکاک جنبشی وارد می‌شود:



$$F'_{net}=ma' \Rightarrow -۱۰=۵a' \Rightarrow a'=-۲m/s^۲$$

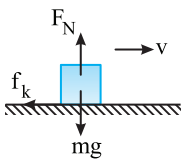
۴ با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان جابه‌جایی در این بازه را حساب می‌کنیم:

$$v'^۲-v^۲=۲a'\Delta x' \Rightarrow ۰-۴=-۴\Delta x' \Rightarrow \Delta x'=۱m$$



۵ جابه‌جایی کل برابر است با: $\Delta x_{کل}=\Delta x+\Delta x' \Rightarrow \Delta x_{کل}=۲+۱=۳m$

میانبر اگر جسمی روی سطحی پرتاب شود و در راستای حرکت تنها نیروی اصطکاک جنبشی به آن وارد شود، خواهیم داشت:



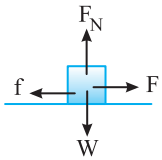
$$F_{net}=ma \Rightarrow -f_k=ma \Rightarrow -\mu_k F_N=ma$$

نیروی عمودی سطح برابر mg است:

$$-\mu_k mg=ma \Rightarrow a=-\mu_k g$$

C ۹۰۰ **۳**

ابتدا نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه را حساب می‌کنیم تا مشخص شود در چه لحظه‌ای جعبه به حرکت در می‌آید.



$$f_{s\,max}=\mu_s \times F_N=۰/۶\times۵۰۰=۳۰۰N$$

$$F=۱۰۰t \Rightarrow ۳۰۰=۱۰۰t \Rightarrow t=۳s$$

بنابراین تا لحظهٔ $t=۳s$ جعبه حرکت نمی‌کند و با توجه به صورت سؤال، حرکت مربوط به بازهٔ ۳s تا ۴s است و اصطکاک در این حالت اصطکاک جنبشی است.

$$f_k=\mu_k F_N=۰/۴\times۵۰۰=۲۰۰N$$

کمترین مقدار شتاب در لحظهٔ $t=۳s$ است که اگر جعبه با این شتاب حرکت کند جابه‌جایی آن خواهد شد:

$$t=۳s \Rightarrow F=۳۰۰N \Rightarrow F_{net}=ma \Rightarrow ۳۰۰-۲۰۰=۵۰a \Rightarrow a_{min}=۲m/s^۲$$

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t \Rightarrow \Delta x_{min}=\frac{۱}{۲}(۲)(۱)^۲=۱m$$

بیشترین مقدار شتاب در لحظهٔ $t=۴s$ است.

$$t=۴s \Rightarrow F=۴۰۰N \Rightarrow ۴۰۰-۲۰۰=۵۰a \Rightarrow a_{max}=۴m/s^۲$$

اگر جعبه در کل مدت ۱s با شتاب $۴m/s^۲$ حرکت کند جابه‌جایی آن خواهد شد:

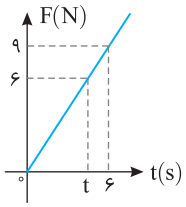
$$\Delta x_{max}=\frac{۱}{۲}(۴)(۱)^۲=۲m$$

بنابراین مقدار جابه‌جایی بین $۱m<d<۲m$ است.

B ۹۰۱ **۱**

نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم

$$f_s=\mu_s F_N \Rightarrow f_s=۰/۲\times۳۰=۶N$$



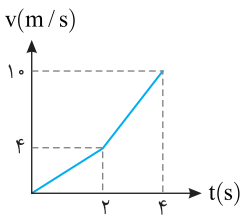
تا لحظه‌ای که نیروی افقی F به ۶ نیوتون نرسیده است، جسم ساکن می‌ماند. با توجه به نمودار لحظه‌ای که نیرو به ۶N می‌رسد را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{۹}{۶}=\frac{۶}{t} \Rightarrow t=۴s$$

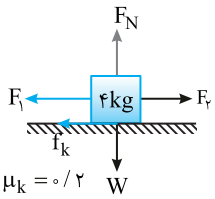
از لحظهٔ $t=۴s$ (چون ضریب اصطکاک جنبشی و ایستایی یکسان است) نیروی اصطکاک ثابت و برابر ۶ نیوتون است.

C ۹۰۲ **۴**

به نمودار دقت کنید. در لحظهٔ $t=۲s$ نیروی $F_۱$ حذف شده و با حذف $F_۱$، شیب نمودار $v-t$ افزایش یافته یعنی شتاب افزایش یافته است. چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟ نیروهای $F_۱$ و $F_۲$ هم‌امتداد هستند. و باید $F_۱$ در خلاف جهت $F_۲$ باشد، که با حذف $F_۱$ نیروی خالص زیاد شده و شتاب حرکت افزایش یافته است.



نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک در دو حالت یکسان و برابر است با:



$$F_N=W \Rightarrow F_N=۴\times۱۰ \Rightarrow F_N=۴۰N$$

$$f_k=\mu_k F_N \Rightarrow f_k=۰/۲\times۴۰ \Rightarrow f_k=۸N$$

حالت اول از لحظهٔ ۰ تا ۲s:

شتاب را حساب می‌کنیم.

$$a_۱=\frac{۴-۰}{۲-۰} \Rightarrow a=۲m/s^۲$$

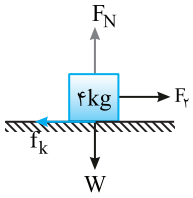
قانون دوم نیوتون را در این حالت می‌نویسیم:

$$F_{net}=ma \Rightarrow F_۲-F_۱-f_k=ma_۱ \Rightarrow F_۲-F_۱-۸=۴\times۲$$

$$\Rightarrow F_۲-F_۱=۱۶N \quad (I)$$

حالت دوم از لحظهٔ ۲s تا ۴s:

شتاب در حالت دوم را به‌دست می‌آوریم:



$$a_۲=\frac{۱۰-۴}{۴-۲} \Rightarrow a_۲=۳m/s^۲$$

بنا به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:

$$F_{net}=ma \Rightarrow F_۲-f_k=ma_۲ \Rightarrow F_۲-۸=۴\times۳ \Rightarrow F_۲=۲۰N$$

با توجه به رابطهٔ (I) خواهیم داشت:

$$F_۲-F_۱=۱۶ \Rightarrow ۲۰-F_۱=۱۶ \Rightarrow F_۱=۴N$$

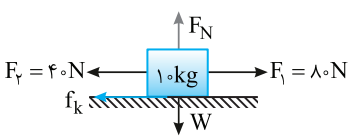
C ۹۰۳ **۳**

حالت اول: ۱ نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را حساب می‌کنیم و آن را با برایند $F_۱-F_۲$ مقایسه می‌کنیم تا مشخص شود که جسم به حرکت درمی‌آید یا نه؟

$$F_N=W \Rightarrow F_N=۱۰\times۱۰=۱۰۰N$$

$$f_{s\,max}=\mu_s F_N \Rightarrow f_{s\,max}=۰/۳\times۱۰۰=۳۰N$$

$$F_۱-F_۲=۸۰-۴۰=۴۰N>۳۰N$$



بنابراین جسم به‌حرکت درمی‌آید و اصطکاک بین جسم و سطح اصطکاک جنبشی است.

۲ اصطکاک جنبشی را حساب می‌کنیم.

$$f_k=\mu_k F_N=۰/۲\times۱۰۰ \Rightarrow f_k=۲۰N$$

۳ با استفاده از قانون دوم نیوتون شتاب حرکت خواهد شد:

$$F_{net}=ma \Rightarrow F_۱-(F_۲+f_k)=ma \Rightarrow ۸۰-(۴۰+۲۰)=۱۰a \Rightarrow a=۲m/s^۲$$

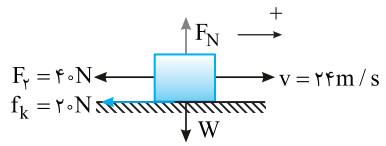
۴ سرعت جسم پس از ۱۲s را به‌دست می‌آوریم.

$v=at+v_0 \Rightarrow v=2\times12+0 \Rightarrow v=24m/s$

حالت حذف F_1:

۵ وقتی نیروی F_1 حذف می‌شود جسم بلافاصله متوقف نخواهد شد بلکه نیروی F_2 و f_k باعث کندشدن حرکت جسم خواهد شد. شتاب حرکت را در این حالت به‌دست می‌آوریم.

$F_{net}=ma \Rightarrow -40-20=10a' \Rightarrow a'=-6m/s^2$



۶ تندی حرکت جسم بعد از ۵s خواهد شد:

$v=at+v_0 \Rightarrow v'=-6\times5+24=-6m/s$

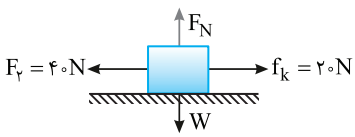
جالب است عدد منفی به‌دست آمد اما مفهوم آن چیست؟ مفهوم آن این است که جسم قبل از ۵s متوقف شده است. چون نیروی $F_2=40N$ از بیشینه نیروی اصطکاک $f_{s\,max}=30N$ بزرگ‌تر است، جسم برمی‌گردد.

حالت برگشت:

۷ زمان توقف جسم را حساب می‌کنیم. $v=at+v_0 \Rightarrow 0=-6t+24 \Rightarrow t=4s$

۸ شتاب برگشت جسم را به‌دست می‌آوریم.

$F_{net}=ma \Rightarrow F-f_k=ma'' \Rightarrow 40-20=10a'' \Rightarrow a''=2m/s^2$



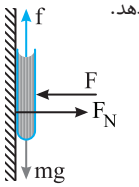
۹ تندی جسم در بازهٔ 4s تا 5s یعنی در مدت 1s خواهد شد:

$v=at+v_0 \Rightarrow v=2\times1=2m/s$

آخیش بالاخره تموم شد.

۲ ۹۰۴ A

خط فکری جسم ساکن است و تا لحظه‌ای که جسم ساکن است، نیروی اصطکاک بین جسم و سطح نیروی اصطکاک ایستایی است و نیروی اصطکاک ایستایی برابر نیرویی است که در راستای اصطکاک بخواهد جسم را حرکت دهد.



در تمام مدتی که کتاب روی سطح دیوار ساکن است نیروهای وارد بر آن متوازن بوده و نیروی اصطکاک بین کتاب و سطح دیوار نیروی اصطکاک ایستایی است که با نیروی وزن جسم برابر است. $f=mg$

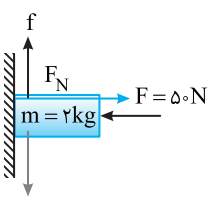
۲ ۹۰۵ B

خط فکری مشخص نیست که جسم در حال حرکت است یا سکون؟ بنابراین شما باید ابتدا نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت $(f_{s\,max})$ را به‌دست بیاورید و آن را با نیروی وزن جسم $W=20N$ مقایسه کنید. اگر جسم ساکن بماند نیروی اصطکاک برابر نیروی وزن جسم است و اگر به حرکت درآید باید نیروی اصطکاک جنبشی را حساب کنید.

در راستای افقی: $F-F_N=0 \Rightarrow F=F_N=50N$

نیروی عمود سطح را حساب می‌کنیم.

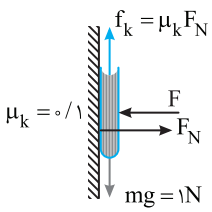
نیروی اصطکاک آستانه حرکت را به‌دست می‌آوریم: $f_{s\,max}=\mu_s F_N=0/5\times50=25N$



عامل حرکت به سمت پایین جسم نیروی وزن $mg=20N$ است که از $f_{s\,max}$ کمتر می‌باشد پس جسم در جای خود ساکن باقی می‌ماند و با توجه به متوازن بودن نیروها نیروی اصطکاک برابر وزن جسم است: $f_s=mg=20N$

۱ ۹۰۶ C

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.



جسم در راستای افقی حرکت نمی‌کند و نیروی عمودی سطح خواهد شد: $F_N=F=4N$

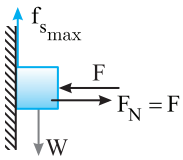
نیروی اصطکاک جنبشی را حساب می‌کنیم. $f_k=\mu_k F_N=0/1\times4=0/4N$

شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$F_{\text{خالص}}=ma \Rightarrow mg-f_k=ma \Rightarrow 1-0/4=0/1a \Rightarrow a=6m/s^2$

۱ ۹۰۷ B

خط فکری شکل سادهٔ مسئله به همراه نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.



می‌خواهیم جسم به سمت پایین نلغزد. بنابراین نیروهای وارد بر جسم باید متوازن باشد و نیروی اصطکاک بین جسم و سطح دیوار باید با وزن جسم برابر باشد $(f_s=W)$

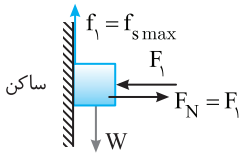
اما یک مطلب مهم این است که می‌خواهیم نیروی افقی F کمترین مقدار باشد، یعنی اگر F از آن کمتر شد جسم به پایین بلغزد بنابراین کمترین مقدار F وقتی است که جسم در آستانهٔ لغزیدن به سمت پایین باشد و در این حالت نیروی اصطکاک برابر $f_{s\,max}$ است. با برابر قرار دادن وزن با نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت مسئله را حل می‌کنیم.

$W=f_{s\,max} \Rightarrow W=\mu_s F_N \Rightarrow W=\mu_s F \Rightarrow F=\dfrac{W}{\mu_s}$

۳ ۹۰۸ B

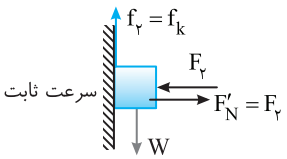
خط فکری مسئلهٔ زیبایی است. زیرا وقتی که جسم در آستانهٔ حرکت قرار دارد و همچنین وقتی که با سرعت ثابت در حرکت است نیروهای وارد بر آن متوازن هستند یعنی در هر دو حالت نیروی اصطکاک با نیروی وزن برابر است. البته یک‌بار با نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت $(W=f_{s\,max})$ و بار دیگر نیروی اصطکاک جنبشی $(W=f_k)$ یعنی اصطکاک در حالت اول (f_1) با اصطکاک در حالت دوم یعنی (f_2) برابر است. F_1 و F_2 را شما باید تعیین کنید.

حالت اول:



$W=f_1=f_{s\,max}$

حالت دوم:



$W=f_2=f_k$

بنابراین می‌توان نوشت:

$f_1=f_2 \Rightarrow f_{s\,max}=f_k \Rightarrow \mu_s F_1=\mu_k F_2$

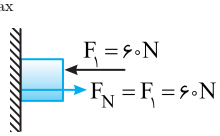
$\Rightarrow \dfrac{F_1}{F_2}=\dfrac{\mu_k}{\mu_s} \xrightarrow{\mu_s>\mu_k} \dfrac{F_1}{F_2}<1 \Rightarrow F_1<F_2$

۱ ۹۰۹ C

خط فکری در حل این مسائل گام اول یافتن نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت $(f_{s\,max})$ است. بعد از یافتن $f_{s\,max}$ آن را با نیروهایی که در امتداد اصطکاک هستند مقایسه می‌کنیم تا بتوانیم تشخیص دهیم جسم به حرکت در می‌آید یا نه. اگر جسم ساکن بماند، اصطکاک برابر برایند نیروهایی است که در امتداد اصطکاک هستند.

۱ نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت جسم را به‌دست می‌آوریم.

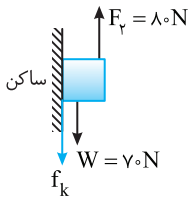
$f_{s\,max}=\mu_s F_N \Rightarrow f_{s\,max}=0/5\times60=30N$



۲ نیروی وزن جسم را حساب می‌کنیم: $W=mg=۷\times۱۰=۷۰N$

نیروی $F_۲=۸۰N$ رو به بالا وارد می‌شود. برایند $F_۲$ و W برابر است با: $۸۰-۷۰=۱۰N$

۳ جسم باید با نیروی $۱۰N$ به بالا برود اما نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت $f_{s_{max}}=۳۰N$ است و نیروی $۱۰N$ نمی‌تواند بر آن غلبه کند و جسم ساکن می‌ماند.



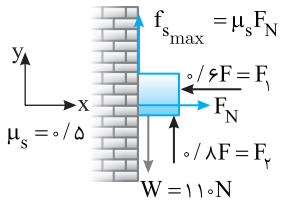
۴ جسم ساکن است بنابراین اصطکاک رو به پایین بوده و با نیروی $۱۰N$ برابر است.

$F_{y_{net}}=۰\Rightarrow F_۲-W-f_s=۰\Rightarrow ۸۰-۷۰=f_s\Rightarrow f_s=۱۰N$

B ۹۱۰ ۴

خط فکری وقتی کمینه مقدار F را می‌خواهیم یعنی $۰/۸F$ نیز حداقل باشد، یعنی نیرو به سمت بالا آنقدر کم باشد تا جسم روی دیوار در آستانه لغزیدن به سمت پایین باشد. جسم در آستانهٔ لغزیدن به پایین است بنابراین اصطکاک بین جسم و سطح رو به بالا بوده و برابر $f_{s_{max}}$ است.

۱ شکل ساده‌ای از مسئله را رسم می‌کنیم و نیروهای وارد بر جسم را روی آن نمایش می‌دهیم.



۲ نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم:

$F_{net_x}=۰\Rightarrow F_N=F_۱\Rightarrow F_N=۰/۶F$

۳ بیشینهٔ نیروی اصطکاک را به‌دست می‌آوریم.

$f_{s_{max}}=\mu_s F_N\Rightarrow f_{s_{max}}=۰/۵(۰/۶F)\Rightarrow f_{s_{max}}=۰/۳F$

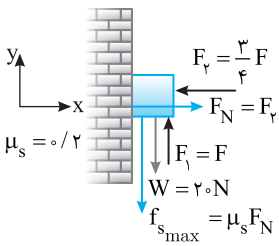
۴ بر جسم در امتداد قائم سه نیروی وزن، رو به پایین و $F_۲$ و $f_{s_{max}}$ رو به بالا وارد می‌شود. جسم ساکن است بنابراین:

$F_{net_y}=۰\Rightarrow F_۲+f_{s_{max}}=W\Rightarrow ۰/۸F+۰/۳F=۱۱۰\Rightarrow F=۱۰۰N$

B ۹۱۱ ۳

خط فکری وقتی در مسئله بیان می‌کند که بیشترین نیروی F چه مقدار باشد تا جسم ساکن باشد یعنی اگر نیروی F کمی بیشتر شود جسم به حرکت در آید. نیروی F رو به بالا است در این صورت بیشترین مقدار F برای حالتی است که جسم رو به بالا در آستانهٔ حرکت قرار گیرد. در این حالت نیروی اصطکاک رو به پایین بوده و به کمک وزن می‌آید تا F نتواند جسم را به بالا حرکت دهد.

۱ نیروهای وارد بر جسم را به‌طور کامل رسم می‌کنیم.



۲ نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم:

$F_{net_x}=۰\Rightarrow F_N=F_۲\Rightarrow F_N=\frac{۳}{۴}F$

۳ نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$f_{s_{max}}=\mu_s F_N\Rightarrow f_{s_{max}}=۰/۲\times\frac{۳}{۴}F\Rightarrow f_{s_{max}}=\frac{۳}{۲۰}F$

۴ نیروهای در امتداد قائم را بررسی می‌کنیم. نیروی وزن و نیروی اصطکاک رو به پایین و $F_۱=F$ رو به بالا. جسم ساکن است بنابراین باید برایند این سه نیرو صفر شود.

$F_{net_y}=۰\Rightarrow F_۱-f_{s_{max}}-W=۰\Rightarrow F=\frac{۳}{۲۰}F+۲۰$

$\Rightarrow\frac{۱۷}{۲۰}F=۲۰\Rightarrow F=\frac{۴۰۰}{۱۷}N$

B ۹۱۲ ۳

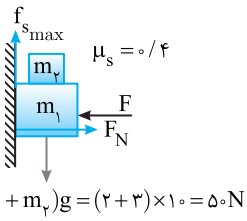
خط فکری کمینه اندازهٔ نیروی افقی F یعنی اگر این نیروی افقی از F کمتر شود جسم رو به پایین شروع به لغزیدن می‌کند. بنابراین کمینه نیروی F زمانی است که وزنه‌ها در آستانهٔ حرکت رو به پایین باشند، در این حالت نیروی اصطکاک $f_{s_{max}}$ رو به بالا نیروی وزن وزنه‌ها را خنثی کرده، جسم ساکن می‌ماند. بنابراین شما باید $f_{s_{max}}$ را حساب کرده آن را برابر نیروی وزن قرار دهید.

۱ نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم: در راستای افقی جسم ساکن می‌ماند. پس: $F_N=F$

۲ جسم ساکن بوده و نیروی خالص وارد بر آن صفر است از این‌رو:

در راستای قائم جسم ساکن می‌ماند $\Rightarrow f_{s_{max}}=(m_۱+m_۲)g$

$\Rightarrow\mu_s F_N=(m_۱+m_۲)g\Rightarrow ۰/۴F=۵۰\Rightarrow F=\frac{۵۰۰}{۴}=۱۲۵N$



$(m_۱+m_۲)g=(۲+۳)\times۱۰=۵۰N$

C ۹۱۳ ۴

۱ در حالت اول جسم با تندی ثابت در حال حرکت است. پس نیروهای وارد بر آن متوازن است. $(m_A+m_B)g=f_k\Rightarrow f_k=\frac{۳m}{۲}g\Rightarrow f_k=\frac{۳mg}{۲}$

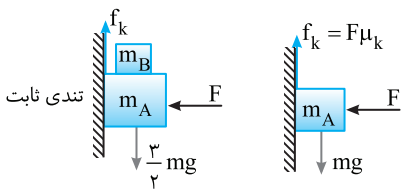
۲ اگر جسم m_B را برداریم نیروی وزن که عامل حرکت به سمت پایین است برابر $m_Ag=mg$ می‌شود. در حالی که نیروی اصطکاک جنبشی همچنان $f_k=\frac{۳}{۲}mg$ است.

۳ نیروی رو به پایین mg پس از حذف m_B، $f_k=\frac{۳}{۲}mg$ رو به بالا خواهد و بنابر قانون دوم نیوتون شتاب خواهد شد:

$F_{net}=ma\Rightarrow mg-\frac{۳}{۲}mg=ma\Rightarrow a=-۵m/s^۲$

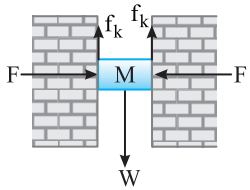
۴ پس با شتاب $۵\ m/s^۲$ از تندی جسم کاسته می‌شود:

$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=-۵t+۴\Rightarrow t=۰/۸s$



B ۹۱۴ ۱

خط فکری جسم M وقتی به پایین می‌لغزد با سطح دو دیواره اصطکاک دارد و از هر دیواره بر جسم نیروی اصطکاک جنبشی رو به بالا وارد می‌شود و می‌خواهد مانع لغزیدن جسم به پایین شود.



۱ نیروهای وارد بر جسم را کامل می‌کنیم.

۲ نیروی عمودی وارد بر هر سطح جسم برابر $F_N=F=۲۰N$ است.

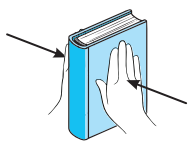
۳ بر جسم نیروی وزن رو به پایین و دو نیروی اصطکاک رو به بالا وارد می‌شود و بنا به قانون دوم نیوتون می‌توانیم بنویسیم:

$F_{net}=Ma\Rightarrow Mg-۲f_k=Ma\xrightarrow{M=۳kg}۳۰-۲f_k=۳\times۲\Rightarrow f_k=۱۲N$

۴ ضریب اصطکاک را حساب می‌کنیم.

$f_k=\mu_k F_N\xrightarrow{F_N=F}۱۲=\mu_k\times۲۰\Rightarrow\mu_k=۰/۶$

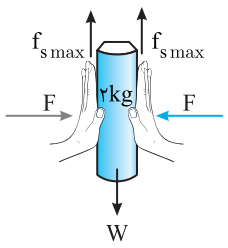
بازی با سؤال مطابق شکل، دانش‌آموزی کتابی به جرم ۲kg را بین دو دست خود، قرار داده است. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین کف هر دست او و کتاب ۰/۴ باشد، حداقل نیروی افقی که کف هر دست به کتاب وارد می‌کند، چند نیوتون باشد تا کتاب در حال تعادل قرار گیرد؟ $(g=9/8N/kg)$



۱) ۱۵/۶ ۲) ۱۲/۷۵ ۳) ۲۴/۵ ۴) ۱۷/۵

پاسخ ۱ کتاب ساکن است و نیروی خالص وارد بر کتاب صفر است. بنابراین دو نیروی افقی F که از دو طرف بر کتاب وارد می‌شوند باید باهم برابر باشند.

۲ حداقل نیروی افقی یعنی اگر نیروی دستان شخص کمتر شود کتاب رو به پایین شروع به لغزیدن کند. یعنی کتاب در آستانهٔ حرکت باشد و اصطکاک بین هر دست و کتاب $f_{s_{max}}$ است. بنابراین می‌توان نوشت:



۳

$$W=2f_{s_{max}} \xrightarrow[m=2kg,\mu_s=0/4]{f_{s_{max}}=\mu_s F,\ g=9/8N/kg} 2\times 9/8=2\times 0/4F$$

$$\Rightarrow F=\frac{9/8}{4}\Rightarrow F=24/5N$$

گزینهٔ ۳

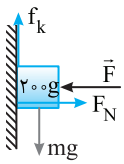
C ۹۱۵ ۳

نکته اگر نیروی عمودی سطح دو برابر شود، نیروی اصطکاک جنبشی دو برابر می‌شود.

۱ در حالت اول جسم با تندی ثابت در حال حرکت است پس نیروهای وارد بر جسم متوازن است. $f_k=W=0/2\times 10=2N$

۲ نیروی F، ۱/۵ برابر شده، پس نیروی عمودی سطح هم ۱/۵ برابر می‌شود و نیروی اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح نیز ۱/۵ برابر می‌شود.

$$f'_k=1/5f_k\Rightarrow f'_k=1/5mg\Rightarrow f'_k=1/5\times 2=3N$$



۳ در این حالت نیروی وزن رو به پایین 2N و اصطکاک بین جسم و دیوار $f'_k=3N$ است که سبب می‌گردد حرکت جسم کندشونده شود. شتاب حرکت را به کمک قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آوریم.

$$f_{net_y}=ma\Rightarrow mg-f'_k=ma\Rightarrow 2-3=0/2a\Rightarrow a=-5m/s^2$$

۴ در مسئله زمان داده شده است یعنی باید به سراغ روابط حرکت‌شناسی برویم به کمک معادلهٔ مکان زمان حرکت با شتاب ثابت جابه‌جایی را حساب می‌کنیم، البته چون حرکت در امتداد قائم است به جای Δx، Δy می‌نویسیم:

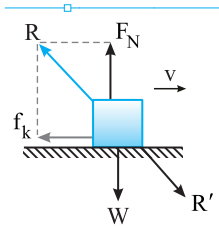
$$\Delta y=\frac{1}{2}at^2+v_0t \xrightarrow[t=3s]{v_0=30m/s} \Delta y=\frac{1}{2}(-5)\times(3)^2+30\times 3$$

$$\Delta y=-22/5+90\Rightarrow \Delta y=67/5m$$

B ۹۱۶ ۱

۱ وقتی به جسم ضربه می‌زنیم تا به حرکت در آید نیروی جلوبر صفر خواهد بود و جسم بنا به قانون اول نیوتون به حرکتش ادامه می‌دهد اما اصطکاک (f_k) سبب می‌گردد که جسم متوقف شود.

۲ نیرویی که جسم به سطح (R') وارد می‌کند بنا به قانون سوم واکنش نیرویی است که سطح بر جسم (R) وارد می‌کند.



۳ نیروی R در واقع حاصل برایند F_N و f_k است بنابراین مطابق شکل جهت R' رو به پایین و به سمت راست است.

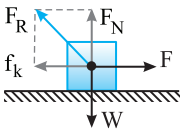
۴ در طول مسیر R تغییر نمی‌کند البته وقتی جسم متوقف می‌شود f_k وجود ندارد و R به صورت قائم و برابر F_N است. در سؤال در مورد R در طول حرکت سؤال شده است.

A ۹۱۷ ۳

یادآوری نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند دارای دو مؤلفه است، یک مؤلفه نیروی اصطکاک است که سطح بر جسم وارد می‌کند و دیگری نیروی عمودی سطح است. بنابراین نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند خواهد شد: $F_R=\sqrt{F_N^2+f^2}$

اگر جسم ساکن باشد $f=f_s$ و اگر در حال حرکت باشد $f=f_k$ است.

شکل ساده‌ای از مسئله رسم می‌کنیم و نیروهای وارد بر جسم را نمایش می‌دهیم.



۱ سرعت ثابت است. بنابراین برایند نیروهای وارد بر جسم صفر است. از این‌رو نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح خواهد شد:

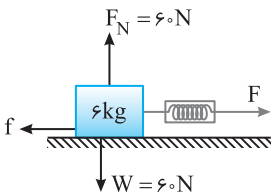
$$F_{net,x}=0\Rightarrow f_k=F=60N\ ,\ F_{net,y}=0\Rightarrow F_N=W=80N$$

۲ نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند را حساب می‌کنیم:

$$F_R=\sqrt{F^2+W^2}=\sqrt{60^2+80^2}=\sqrt{100^2}=100N$$

B ۹۱۸ ۱

۱ ابتدا نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم تا مشخص شود که جسم به حرکت درمی‌آید یا نه؟



$$f_{s\,max}=\mu_s F_N\Rightarrow f_{s\,max}=\mu_s mg$$

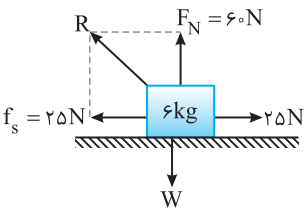
$$\Rightarrow f_{s\,max}=0/75\times 60\Rightarrow f_{s\,max}=45N$$

$\mu_s=0/75, \mu_k=0/4$

۲ نیروی کشسانی نیروسنج 25N بوده و از $f_{s\,max}$ کمتر است بنابراین جسم ساکن می‌ماند و نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر جسم خواهد شد:

$$F_{net}=0\Rightarrow f_s=F_e\Rightarrow f_s=25N$$

۳ بنا به قانون سوم نیوتون نیرویی که جسم بر سطح وارد می‌کند هم‌اندازهٔ نیرویی است که سطح بر جسم وارد می‌کند.

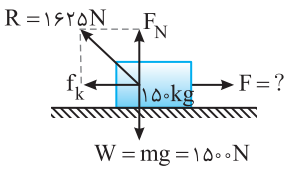


$$R=\sqrt{F_s^2+F_N^2}$$

$$\Rightarrow R=\sqrt{25^2+60^2}\Rightarrow R=65N$$

C ۹۱۹ ۴

یادآوری نیرویی که سطح زمین به جسم وارد می‌کند (R) برایند نیروی اصطکاک (f_k) و نیروی عمودی سطح است $(R=\sqrt{f_k^2+F_N^2})$.



۱ جسم در راستای قائم حرکتی ندارد بنابراین $F_N=W\Rightarrow F_N=1500N$

۲ نیروی اصطکاک جنبشی را به کمک نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند حساب می‌کنیم.

$$1625=\sqrt{f_k^2+(1500)^2}\Rightarrow(1625)^2=f_k^2+(1500)^2$$

$$\Rightarrow f_k^2=(1625)^2-(1500)^2\Rightarrow f_k^2=(1625-1500)(1625+1500)$$

$$f_k^2=125(3125)\Rightarrow f_k^2=125\times(125\times 25)\Rightarrow f_k=125\times 5=625N$$

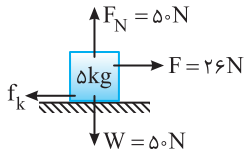
۳ با توجه به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma \xrightarrow{a=2m/s^2} F-625=150\times 2$$

$$\Rightarrow F=925N$$

B ۹۲۰ ۳

نیروی اصطکاک ایستایی را به دست می‌آوریم تا مشخص شود جسم به حرکت درمی‌آید یا نه. البته در صورت مسئله بیان شده «در حین حرکت» یعنی جسم به حرکت درمی‌آید.

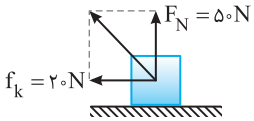


$f_{s\max}=\mu_s F_N=۰/۵\times۵۰=۲۵N<۲۶N$

جسم به حرکت درمی‌آید.

$f_k=\mu_k F_N=۰/۴\times۵۰\Rightarrow f_k=۲۰N$

قانون دوم نیوتون را نوشته و شتاب را حساب می‌کنیم.



$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma$

$\Rightarrow ۲۶-۲۰=۵a\Rightarrow a=۱/۲m/s^۲$

نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند خواهد شد:

$R=\sqrt{F_N^۲+f_k^۲}\Rightarrow R=\sqrt{۲۵۰۰+۴۰۰}\Rightarrow R=\sqrt{۲۹۰۰}=۱۰\sqrt{۲۹}N$

B ۹۲۱ ۱

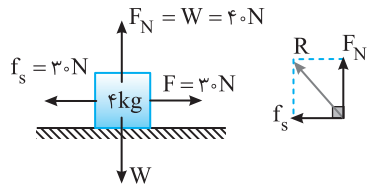
ابتدا بررسی می‌کنیم که جسم با نیرویی که به آن وارد می‌شود، ساکن می‌ماند یا حرکت می‌کند.

$f_{s\max}=\mu_s F_N=\mu_s mg=۰/۸\times۴\times۱۰=۳۲N$

چون $F<f_{s\max}$ است، جسم ساکن می‌ماند. در نتیجه نیروی اصطکاک وارد بر جسم با نیروی افقی F برابر است.

$f_s=F=۳۰N$

$R=\sqrt{f_s^۲+F_N^۲}=\sqrt{۳۰^۲+۴۰^۲}\Rightarrow R=۵۰N$

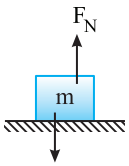


B ۹۲۲ ۴

خط فکری جسم در ابتدا ساکن بوده و باید بررسی کنیم توسط نیروی $F=۲۵۰N$ جسم حرکت کرده یا ساکن می‌ماند. برای این منظور باید F و $f_{s_{max}}$ را با هم مقایسه می‌کنیم.

اگر نیروی F بزرگ‌تر از $f_{s_{max}}$ باشد، متحرک حرکت کرده و نیروی اصطکاک برابر $f_k=\mu_k F_N$ می‌شود و اگر نیروی F کوچک‌تر از $f_{s_{max}}$ باشد متحرک ساکن مانده و نیروی اصطکاک برابر نیروی F است.

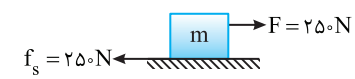
۱ در گام اول $f_{s_{max}}$ را حساب می‌کنیم:



$F_N=mg\Rightarrow F_N=۵۰۰N$

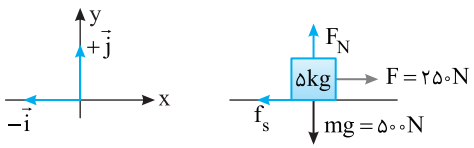
$f_{s_{max}}=\mu_s F_N\Rightarrow f_{s_{max}}=۰/۶\times۵۰۰=۳۰۰N$

۲ $f_{s_{max}}$ بزرگ‌تر از F بوده پس متحرک ساکن باقی مانده و نیروی اصطکاک برابر نیروی F، ۲۵۰N است.



۳ نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک، نیرویی است که سطح به جسم وارد می‌کند:

$R=-f_s\vec{i}+F_N\vec{j}\Rightarrow R=-۲۵۰\vec{i}+۵۰۰\vec{j}$

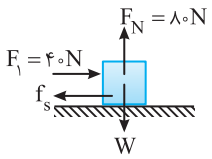


۴ نیرویی که جسم به سطح وارد می‌کند واکنش نیرویی است که سطح به جسم وارد کرده بنابراین:

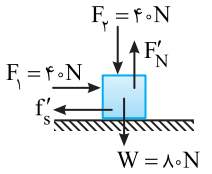
$R'=۲۵۰\vec{i}-۵۰۰\vec{j}$

B ۹۲۳ ۲

در حالت اول، جسم ساکن است و نیروی اصطکاک ایستایی با نیروی افقی $F_۱=۴۰N$ برابر است. $f_s=F_۱=۴۰N$



وقتی نیروی عمودی $F_۲=۴۰N$ به سمت پایین بر جسم وارد می‌شود، اصطکاک همچنان با نیروی $F_۱=۴۰N$ برابر است. (دقت کنید جسم در حال حرکت نیست که با افزایش نیروی عمودی سطح، نیروی اصطکاک افزایش یابد.)



جسم ساکن: $F_۱=f'_s=۴۰N$

$\frac{f'_s}{f_s}=\frac{۴۰}{۴۰}=۱$

نیروی عمودی سطح در حالت اول $F_N=W=۸۰N$ و در حالت دوم:

$F'_N=W+F_۲=۸۰+۴۰\Rightarrow F'_N=۱۲۰N$

نیرویی که سطح افقی بر جسم وارد می‌کند:

$R=\sqrt{F_N^۲+f_s^۲}\Rightarrow\begin{cases}R_۱=\sqrt{۴۰^۲+۸۰^۲}=۴۰\sqrt{۱^۲+۲^۲}=۴۰\sqrt{۵}N\\R_۲=\sqrt{۴۰^۲+(۱۲۰)^۲}=۴۰\sqrt{۱+۳^۲}=۴۰\sqrt{۱۰}N\end{cases}$

بنابراین نسبت $\frac{R_۲}{R_۱}$ خواهد شد:

$\frac{R_۲}{R_۱}=\frac{۴۰\sqrt{۱۰}}{۴۰\sqrt{۵}}\Rightarrow\frac{R_۲}{R_۱}=\sqrt{۲}$

B ۹۲۴ ۲

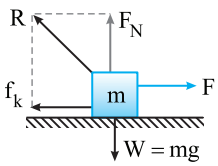
خط فکری هر گاه در مسائل دینامیک، در صورت مسئله، زمان داده شود یعنی شما باید سراغ حرکت‌شناسی بروید زیرا در روابط حرکت‌شناسی، زمان وجود دارد. یعنی به کمک حرکت‌شناسی، شتاب را حساب کنید سپس به کمک قانون دوم نیوتون (البته پس از رسم نیروهای وارد بر جسم) مجهول مسئله را به‌دست بیاورید.

۱ شتاب حرکت جسم را حساب می‌کنیم.

$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۳-۰}{۴}\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}m/s^۲$

۲ به کمک قانون دوم نیوتون نیروی اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح را به‌دست می‌آوریم:

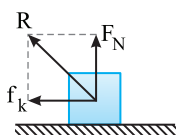
$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow ۱۷۷-f_k=۳۶\times\frac{۳}{۴}\Rightarrow f_k=۱۵۰N$



۳ جسم روی سطح افقی در حال حرکت است پس باید نیروهای قائم متوازن باشند:

$F_N=W\Rightarrow F_N=mg\Rightarrow F_N=۳۶۰N$

نکته نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک از طرف سطح به جسم وارد می‌شود بنابراین نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند برابر برایند دو نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح است که برهم عمودند:



$R=\sqrt{F_N^۲+f_k^۲}$

۴ نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند، برایند نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک است:

$R=\sqrt{F_N^۲+f_k^۲}=\sqrt{۳۶۰^۲+۱۵۰^۲}\Rightarrow R=\sqrt{۳۰^۲(۱۲^۲+۵^۲)}$

$\Rightarrow R=۳۰\sqrt{۱۶۹}\Rightarrow R=۳۰\times۱۳\Rightarrow R=۳۹۰N$

۴ ۹۲۵ B

خط فکری در حل مسائل دینامیک اولین کار، پیدا کردن نیروهایی است که به جسم وارد می‌شود، سپس رسم این نیروهاست. در این مسئله مشخص نیست که جسم پس از اعمال نیروی ۱۰N در حال حرکت خواهد بود یا همچنان ساکن می‌ماند. بنابراین شما باید نیروها را بررسی کنید و نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را حساب کنید تا مشخص شود که جسم با نیروی ۱۰N شروع به حرکت می‌کند یا نه؟

۱ نیروی وزن جسم $W=mg=۲۰N$ است و نیروی $F'=۱۰N$ نیز رو به پایین به جسم وارد می‌شود، بنابراین جسم تحت تأثیر نیروی $۱۰+۲۰=۳۰N$ رو به پایین قرار دارد.

۲ نیروی افقی $F=۶۰N$ به جسم وارد می‌شود و نیروی عمودی سطح دیوار وارد بر جسم نیز برابر $F_N=F=۶۰N$ است.

۳ نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت جسم را حساب می‌کنیم.

$$f_{s\max}=\mu_s F_N \xrightarrow{\mu_s=۰/۶} f_{s\max}=۰/۶\times۶۰\Rightarrow f_{s\max}=۳۶N>۳۰N$$

۴ نیروی ۳۰N نمی‌تواند سبب حرکت جسم رو به پایین شود و جسم همچنان ساکن می‌ماند.

۵ نیروی خالص وارد بر جسم برابر صفر است. از این‌رو می‌توان نوشت:

$$F_{net}=۰\Rightarrow f_s=F'+W\Rightarrow f_s=۱۰+۲۰\Rightarrow f_s=۳۰N$$

یادآوری نیرویی که جسم بر سطح یا سطح بر جسم وارد می‌کند برابر $R=\sqrt{f_s^۲+F_N^۲}$ است.

۶ نیروی که جسم به دیواره وارد می‌کند، خواهد شد:

$$R=\sqrt{۳۰^۲+۶۰^۲}\Rightarrow R=۳۰\sqrt{۵}N$$

بازی با سؤال **در این مسئله اگر نیروی $F'=۲۰N$ روبه پایین بر جسم وارد شود، نیرویی که جسم به دیواره وارد می‌کند چند نیوتون است؟ $(\mu_k=۰/۴)$**

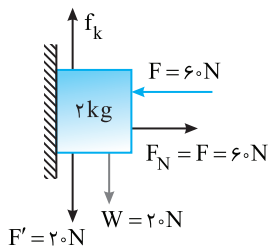
۱) $۱۲\sqrt{۲۹}$ ۲) $۵\sqrt{۲۹}$ ۳) ۱۰ ۴) $۱۵\sqrt{۳}$

پاسخ ۱ **بیشینه اصطکاک ایستایی برابر است با:**

$$f_{s\max}=\mu_s F_N=۰/۶\times۶۰=۳۶N$$

۲ **جمع نیروهای رو به پایین را حساب می‌کنیم.**

$$F'+W=۲۰+۲۰=۴۰N>۳۶$$



۳ **نیروی ۴۰N رو به پایین از اصطکاک آستانهٔ حرکت بیشتر است و جسم شروع به حرکت می‌کند. در این حالت نیروی اصطکاک بین جسم و دیواره برابر f_k است. نیروی اصطکاک جنبشی را به‌دست می‌آوریم.**

$$f_k=\mu_k F_N \xrightarrow{\mu_k=۰/۴} f_k=۰/۴\times۶۰\Rightarrow f_k=۲۴N$$

۴ **نیرویی که جسم بر سطح وارد می‌کند خواهد شد:**

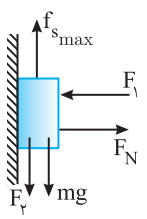
$$R=\sqrt{f_k^۲+F_N^۲}\Rightarrow R=\sqrt{۲۴^۲+۶۰^۲}=\sqrt{۱۲^۲(۲^۲+۵^۲)}$$

$$\Rightarrow R=۱۲\sqrt{۲۹}N$$

گزینهٔ ۱

۱ ۹۲۶ B

۱ ابتدا نیروهای وارد بر قطعه چوب را رسم می‌کنیم، دقت کنید قطعه چوب در آستانهٔ لغزش رو به پایین قرار دارد و در نتیجه نیروی اصطکاک بیشینه $(f_{s_{max}})$ رو به بالا است:



۲ نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را حساب می‌کنیم.

$$F_{net_y}=۰\Rightarrow f_{s_{max}}=F_۲+mg \xrightarrow[m=۰/۲۵kg]{F_۲=۳/۵N} f_{s_{max}}=۳/۵+۲/۵=۶N$$

۳ نیرویی که دیوار به چوب وارد می‌کند از رابطهٔ $R=\sqrt{f_{s_{max}}^۲+F_N^۲}$ به‌دست می‌آید، نیروی عمودی سطح خواهد شد.

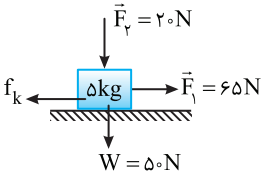
$$R=\sqrt{f_{s_{max}}^۲+F_N^۲}\Rightarrow ۱۰۰=۳۶+F_N^۲\Rightarrow F_N=۸N$$

۴ $f_{s_{max}}$ برابر $\mu_s F_N$ است:

$$f_{s_{max}}=\mu_s F_N\Rightarrow ۶=\mu_s\times۸\Rightarrow\mu_s=\frac{۶}{۸}=۰/۷۵$$

۴ ۹۲۷ B

۱ شتاب حرکت جسم را به کمک رابطهٔ مستقل از زمان به‌دست می‌آوریم.



$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x \xrightarrow[\Delta x=۱۲m]{v_۰=۰,v=۱۲m/s} ۱۲\times۱۲-۰=۲a\times۱۲\Rightarrow a=۶m/s^۲$$

۲ نیروی اصطکاک را به کمک قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F_۱-f_k=ma\Rightarrow۶۵-f_k=۵\times۶\Rightarrow f_k=۳۵N$$

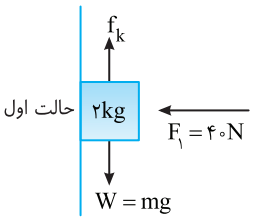
۳ نیروی عمودی سطح برابر است با: $F_N=W+F_۲\Rightarrow F_N=۵۰+۲۰=۷۰N$

۴ نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند را حساب می‌کنیم.

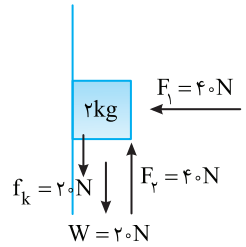
$$R=\sqrt{f_k^۲+F_N^۲}\Rightarrow R=\sqrt{۳۵^۲+۷۰^۲}\Rightarrow R=۳۵\sqrt{۱+۲^۲}\Rightarrow R=۳۵\sqrt{۵}N$$

۱ ۹۲۸ A

خط فکری ابتدا بدون حضور $F_۲$ (چون جسم ساکن است.) باید اصطکاک ایستایی جسم را بررسی کنیم، سپس باید با اعمال نیروی $F_۲$ مشخص کنیم که



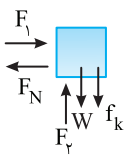
می‌تواند جسم را به بالا حرکت دهد یا نه؟ نیروی وزن $(W=mg=۲۰N)$ می‌خواهد جسم را به پایین بیاورد اما جسم ساکن است بنابراین نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر جسم رو به بالاست و هم‌اندازهٔ نیروی وزن است.



$$F_{net}=۰\Rightarrow f_s=mg\Rightarrow f_s=۲۰N$$

وقتی $F_۲=۴۰N$ بر جسم وارد می‌شود چون این نیرو از وزن بیشتر است و می‌خواهد جسم را رو به بالا حرکت دهد، بنابراین در این حالت به جسم نیروی خالص به اندازهٔ $F_۲-W=۲۰N$ رو به بالا وارد می‌شود که با توجه به حالت قبل نیروی ۲۰N نمی‌تواند جسم را حرکت دهد پس جهت اصطکاک عوض شده و نیروی اصطکاک ۲۰N رو به پایین به کمک وزن می‌آید و جسم همچنان ساکن خواهد بود.

۳ ۹۲۹ B



جسم به حرکت در می‌آید و نیروی اصطکاک جنبشی است.

$$f_k=\mu_k F_N=۰/۴\times۴۰\Rightarrow f_k=۱۶N$$

نیرویی که جسم به دیوار وارد می‌کند.

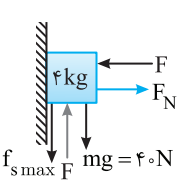
$$R'=\sqrt{F_N^۲+f_k^۲}\Rightarrow R'=\sqrt{(۴۰)^۲+(۱۶)^۲}$$

$$\Rightarrow R'=۸\sqrt{۲۵+۴}\Rightarrow R'=۸\sqrt{۲۹}N$$

۲ ۹۳۰ C

خط فکری مسئله در دو حالت بیان شده است بنابراین شما باید هر حالت را جداگانه بررسی کنید و نیروهای وارد بر جسم را در هر حالت رسم کرده و به کمک قانون دوم نیوتون مسئله را حل کنید.

حالت (۱): در حالت اول جسم در آستانهٔ حرکت به سمت بالا است نیروی اصطکاک باید خلاف جهت لغزش باشد پس نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت $(f_{s\max})$ رو به پایین است.



۱ جسم در راستای افقی ساکن است پس باید F_N و F متوازن باشد: $F_N=F$

۲ اصطکاک در آستانهٔ حرکت را حساب می‌کنیم.

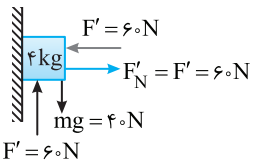
$$f_{s\max}=\mu_s F_N \xrightarrow[\mu_s=۰/۵]{F_N=F} f_{s\max}=۰/۵F$$

۳ جسم ساکن است و نیروها در راستای قائم متوازن بوده بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_{net}=ma \Rightarrow \underbrace{mg+f_{s\,max}}_{\text{نیروهای رو به پایین}}=F \Rightarrow ۴۰+۰/۵F=F$$

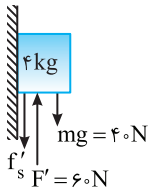
$$\Rightarrow ۴۰=F-۰/۵F \Rightarrow ۴۰=۰/۵F \Rightarrow F=۸۰N$$

حالت (۲): در این حالت نیروی F را $۲۰N$ کاهش داده‌ایم یعنی نیروی F' برابر $۶۰-۲۰=۸۰$ است، ابتدا $f'_{s\,max}$ را به‌دست می‌آوریم تا ببینیم جسم شروع به حرکت می‌کند یا نه؟



$$f'_{s\,max}=\mu_s F' \Rightarrow f'_{s\,max}=۰/۵\times ۶۰=۳۰N$$

نیروی $mg=۴۰N$ می‌خواهد جسم را به سمت پایین بکشد و نیروی $F'=۶۰N$ می‌خواهد جسم را به سمت بالا هل دهد پس در واقع نیروی $۶۰-۴۰=۲۰$ نیوتون می‌خواهد جسم را بالا ببرد که این مقدار از $f'_{s\,max}$ کمتر است در نتیجه جسم در حال سکون باقی می‌ماند و به جسم ساکن نیروی اصطکاک ایستایی وارد می‌شود:



جسم ساکن است: $\underbrace{mg+f'_s}_{\text{نیروهای رو به پایین}}=F'$

$$\Rightarrow ۴۰+f'_s=۶۰ \Rightarrow f'_s=۲۰N$$

نیروی عمودی سطح و اصطکاک در حالت اول برابر شد با:

$$F_N=۸۰N \ , \ f_{s\,max}=\mu_s F_N=۴۰N$$

نیروی عمودی سطح و اصطکاک در حالت دوم برابر شد با: $F'_N=۶۰N \ , \ f'_s=۲۰N$

نکته برایند دو نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح برابر نیرویی است که جسم بر سطح یا سطح بر جسم وارد می‌کند.

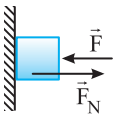
حالت (۲)	حالت (۱)
$R'=\sqrt{f'^{۲}_s+F'^{۲}_N}$	$R=\sqrt{f^{۲}_{s\,max}+F^{۲}_N}$
$R'=\sqrt{۲۰^{۲}+۶۰^{۲}}=۲۰\sqrt{۱^{۲}+۳^{۲}}$	$R=\sqrt{۴۰^{۲}+۸۰^{۲}}=۴۰\sqrt{۱^{۲}+۲^{۲}}$
$R'=۲۰\sqrt{۱۰}$	$R=۴۰\sqrt{۵}N$

حال نسبت $\frac{R'}{R}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{R'}{R}=\frac{۲۰\sqrt{۱۰}}{۴۰\sqrt{۵}}=\frac{۲۰\sqrt{۵}\times\sqrt{۲}}{۴۰\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۳ ۹۳۱ B

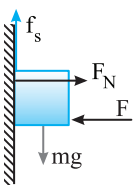
به شکل دقت کنید. جسم ساکن است و نیروهای F و F_N متوازن هستند.



$$F=F_N \xrightarrow{F'=۲F} F'_N=۲F_N$$

۲ ۹۳۲ B

خط فکری سطح بر جسم نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک وارد می‌کند، بنابراین واکنش این نیروها هم‌اندازهٔ آن‌ها و خلاف جهتشان توسط جسم بر سطح وارد خواهد شد. به جای نیرویی که جسم بر سطح وارد می‌کند نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند را بررسی می‌کنیم.



۱ جسم ساکن است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند.

$$f_s=W \ , \ F_N=F$$

۲ نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند خواهد شد:

$$R=\sqrt{F^{۲}_N+f^{۲}_s} \Rightarrow R=\sqrt{F^{۲}+W^{۲}}$$

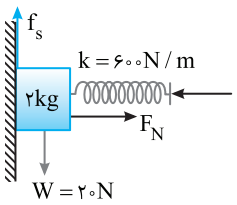
۳ اگر نیروی F دو برابر شود جسم همچنان ساکن می‌ماند. یعنی نیروی اصطکاک f_s همچنان با نیروی وزن (W) برابر است اما با دو برابر شدن F، نیروی F_N نیز دو برابر می‌شود و نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند برابر است با:

$$R'=\sqrt{F'^{۲}_N+f^{۲}_s} \Rightarrow R'=\sqrt{(۲F)^{۲}+f^{۲}_s}$$

برای آن‌که R' دو برابر R باشد باید f_s نیز در دو ضرب شده باشد که چنین نیست و $R<R'<۲R$ است یعنی نیرویی که سطح به جسم (یا جسم به سطح) وارد می‌کند افزایش می‌یابد اما دو برابر نمی‌شود.

۲ ۹۳۳ C

شکل ساده‌ای از موضوع مسئله به همراه نیروهای وارد بر آن رسم می‌کنیم. یادمان باشد نخ پاره شده است و کشش نخی وجود ندارد.



۱ نیروی کشسانی فنر را حساب می‌کنیم:

$$F=kx \xrightarrow{x=۰/۱m} F=۶۰۰\times ۰/۱$$

$$\Rightarrow F=۶۰N$$

۲ نیروی عمودی سطح خواهد شد:

$$F_{net_x}=۰ \Rightarrow F_N=F \Rightarrow F_N=۶۰N$$

۳ نیروی وزن را به‌دست می‌آوریم:

$$W=mg \Rightarrow W=۲\times ۱۰=۲۰N$$

۴ نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را حساب می‌کنیم:

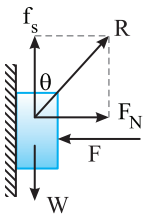
$$f_{s_{max}}=\mu_s F_N \xrightarrow{\mu_s=۰/۴} f_{s_{max}}=۰/۴\times ۶۰ \Rightarrow f_{s_{max}}=۲۴N$$

۵ با مقایسه نیروی وزن با نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت مشخص است که جسم همچنان ساکن می‌ماند و اصطکاک بین جسم و سطح $f_s=W=۲۰N$ است.

۶ نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند خواهد شد:

$$R=\sqrt{F^{۲}_N+f^{۲}_s} \Rightarrow R=\sqrt{۶۰^{۲}+۲۰^{۲}}=۲۰\sqrt{۱۰}N$$

۳ ۹۳۴ B



۱ جسم ساکن است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند بنابراین هر چقدر بر نیروی F بیافزاییم نیروی اصطکاک همچنان برابر نیروی وزن است $f_s=W$ و نیروی اصطکاک تغییر نمی‌کند.

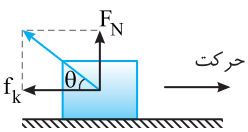
۲ با افزایش F نیروی عمودی سطح افزایش می‌یابد. با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\tan\theta\uparrow=\frac{F_N\uparrow}{f_s}$$

بنابراین با افزایش F_N ، θ افزایش می‌یابد.

۱ ۹۳۵ B

خط فکری ابتدا باید دقت کنید منظور از نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند $R=\sqrt{f^{۲}_k+F^{۲}_N}$ است. یعنی شما ابتدا باید در هر حالت نیروی عمودی سطح F_N و نیروی اصطکاک را حساب کنید سپس به کمک $\tan\theta$ ، زاویهٔ θ را بررسی کنید.



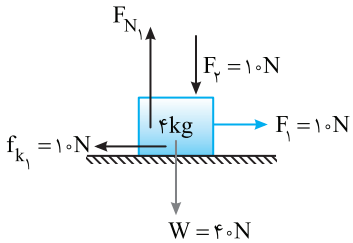
حالت اول: سرعت جسم ثابت است یعنی نیروی اصطکاک $f_{k_۱}$ با نیروی $F_۱=۱۰N$ برابر است.

$$F_{net}=۰ \Rightarrow f_{k_۱}=F_۱=۱۰N$$ سرعت ثابت

نیروی عمودی تکیه‌گاه در این حالت خواهد شد:

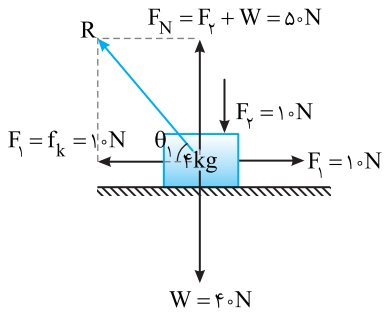
$$F_{N_۱}=F_۲+W=۱۰+۴۰ \Rightarrow F_{N_۱}=۵۰N$$

ضریب اصطکاک را حساب می‌کنیم. $f_{k_۱}=\mu_k F_{N_۱} \Rightarrow ۱۰=\mu_k(۵۰) \Rightarrow \mu_k=۰/۲$



تانژانت زاویهٔ θ_1 خواهد شد:

$$\tan\theta_1=\frac{۵۰}{۱۰}=۵$$



حالت دوم: نیروی عمودی سطح مطابق شکل زیر خواهد شد:

$$F'_N=W-F_۲\Rightarrow F'_N=۴۰-۱۰=۳۰N$$

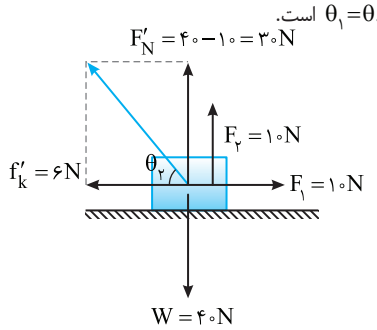
نیروی اصطکاک جدید را حساب می‌کنیم.

$$f'_k=\mu_k F'_N=۰/۲\times۳۰=۶N$$

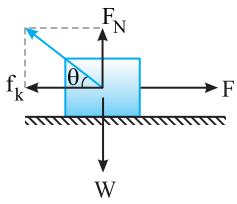
تانژانت زاویهٔ θ_2 خواهد شد:

$$\tan\theta_۲=\frac{۳۰}{۶}=۵$$

بنابراین $\theta_1=\theta_۲<۹۰^\circ$ است.



میانبر به این همه حل نیازی نداریم. با توجه به شکل خواهیم داشت:



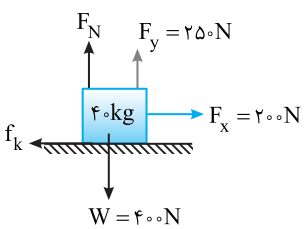
$$\tan\theta=\frac{F_N}{f_k}=\frac{F_N}{\mu_k F_N}\Rightarrow\tan\theta=\frac{۱}{\mu_k}$$

یعنی θ تنها به μ_k بستگی دارد که μ_k تغییر نکرده و $\theta_1=\theta_۲$ است.

B ۹۳۶ | ۲

خط فکری جسم دارای سرعت ثابت است. بنابراین نیروهای وارد بر آن متوازن هستند. نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و برایند نیروهای در امتداد محور x و برایند نیروها در امتداد محور y را برابر صفر قرار می‌دهیم و نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح را به‌دست می‌آوریم. نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند $(R=\sqrt{f_k^۲+F_N^۲})$ را حساب می‌کنیم سپس زاویهٔ بین نیروی R و راستای افق را به کمک مثلثات معین می‌کنیم.

۱ مطابق شکل می‌توان نوشت:

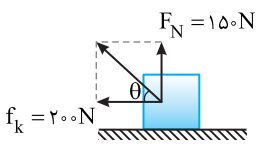


$$F_{net_x}=۰\Rightarrow f_k=F_x$$
$$\Rightarrow f_k=۲۰۰N$$
$$F_{net_y}=۰\Rightarrow F_n+F_y=W$$
$$\Rightarrow F_N=W-F_y=۴۰۰-۲۵۰$$
$$\Rightarrow F_N=۱۵۰N$$

۲ نیروی وارد بر جسم برابر خواهد شد با:

$$R=\sqrt{۲۰۰^۲+۱۵۰^۲}\Rightarrow R=۲۵۰N$$

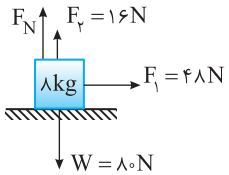
۳ زاویه‌ای که نیرو با راستای حرکت می‌سازد را به‌دست می‌آوریم:



$$\tan\theta=\frac{F_N}{f_k}=\frac{۱۵۰}{۲۰۰}\Rightarrow\theta=۳۷^\circ$$

B ۹۳۷ | ۴

ابتدا به یک راه‌حل کاملاً تشریحی می‌پردازیم و در نهایت یک راه‌حل منطقی و کوتاه را بیان می‌کنیم.

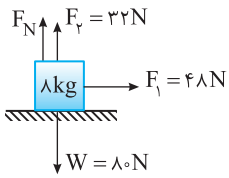


با توجه به داده‌های سؤال، می‌توانیم ضریب اصطکاک جنبشی سطح را به‌دست آوریم.

در حالت اول چون جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند نیروی اصطکاک با نیروی $F_۱=۴۸N$ برابر و در خلاف جهت آن است. نیروی عمودی سطح نیز برابر با $F_N=۸۰-۱۶=۶۴N$ است. ضریب اصطکاک جنبشی برابر است با:

$$f_k=\mu_k F_N\Rightarrow ۴۸=۶۴\mu_k\Rightarrow\mu_k=\frac{۴۸}{۶۴}=\frac{۳}{۴}$$

اگر نیروی $\vec{F}_۲$ را ۱۶N افزایش دهیم، نیروی عمودی سطح $F_N=۸۰-۳۲=۴۸N$ می‌شود و نیروی اصطکاک برابر است با:



$$f_k=\frac{۳}{۴}\times۴۸=۳۶N$$

اندازهٔ نیروی برایند سطح برابر است با:

$$\sqrt{F_N^۲+f_k^۲}$$

در حالت اول نیروی برایند سطح (R) برابر است با:

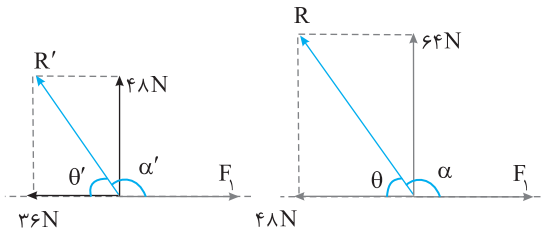
$$R=\sqrt{(۶۴)^۲+(۴۸)^۲}$$

و در حالت دوم نیروی برایند سطح (R') برابر است با:

$$R'=\sqrt{(۴۸)^۲+(۳۶)^۲}$$

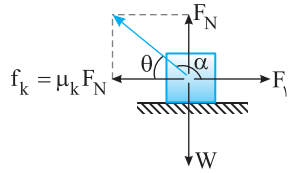
که $R'<R$ است و بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست‌اند. در هر هر دو حالت زاویه‌ای که نیروی برایند با نیروی $F_۱$ می‌سازد $(\alpha$ و $\alpha')$ در شکل مشخص شده است:

$$\tan\theta=\frac{۶۴}{۴۸}=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳},\ \tan\theta'=\frac{۴۸}{۳۶}=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳}$$
$$\Rightarrow\tan\theta=\tan\theta'\Rightarrow\theta=\theta'\Rightarrow\alpha=\alpha'$$



و گزینهٔ (۴) درست است.

حال راه‌حل کوتاه: با توجه به شکل روبه‌رو:



$$|\tan\alpha|=|\tan\theta|=\frac{F_N}{\mu_k F_N}=\frac{۱}{\mu_k}$$

μ_k مقدار ثابتی است بنابراین α و θ ثابت می‌ماند.

C ۹۳۸ | ۳

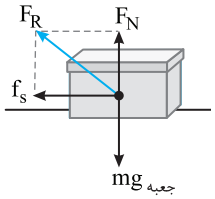
خط فکری بایدابتدا با هم فکر کنیم. وقتی تریلی ترمز می‌کند، عاملی که سبب توقف جعبه به همراه کامیون می‌شود نیروی اصطکاک بین کف تریلی و جعبه است. از خود می‌پرسیم که حداکثر نیروی اصطکاک چند نیوتون است و بیشترین شتاب جعبه در اثر نیروی اصطکاک چند $m/s^۲$ است؟

$$f_{s_{max}}=\mu_s mg=۰/۵\times۲\times۱۰\Rightarrow f_{s_{max}}=۱۰N$$

$$f_{s_{max}}=m_{\text{جعبه}}a\Rightarrow۱۰=۲a_{max}\Rightarrow a_{max}=۵m/s^۲$$

بنابراین حداکثر شتاب توقف این جعبه $۵m/s^۲$ یعنی اگر شتاب کامیون از $۵m/s^۲$ کمتر باشد، جعبه و کامیون باهم متوقف می‌شوند و اگر شتاب ترمز گرفتن کامیون از $۵m/s^۲$ بیشتر باشد، جعبه بر کف تریلی رو به جلو می‌لغزد. در این مسئله خوشبختانه شتاب توقف تریلی $۴m/s^۲$ است و هر دو باهم متوقف می‌شوند. اکنون می‌توان مسئله را حل کرد.

تریلی در حال حرکت است اما جعبه نسبت به تریلی ساکن است، هنگام ترمز نیرویی که جعبه را از حرکت باز می‌دارد نیروی اصطکاک بین کف تریلی و جعبه است. با رسم نیروهای وارد بر جعبه و با توجه به این‌که تریلی با شتاب $4m/s^2$ ترمز می‌کند، داریم:



نیروی عمودی سطح وارد بر جعبه را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net,y}=0\Rightarrow F_N-mg_{جعبه}=0$$
$$\Rightarrow F_N=2\times10=20N$$

نیروی اصطکاک به جعبه شتاب $4m/s^2$ داده است بنابراین نیروی اصطکاک وارد بر جعبه برابر است با:

$$F_{net,x}=ma_{جعبه}\Rightarrow -f_s=2\times(-4)=-8\Rightarrow f_s=8N$$

با توجه به این‌که کف تریلی، دو نیروی F_N و f_s را بر جعبه وارد می‌کند، برایند این دو نیرو را محاسبه می‌کنیم:

نیرویی که کف تریلی بر جعبه وارد می‌کند: $F_R=\sqrt{F_N^2+f_s^2}$

$$\Rightarrow R=\sqrt{20^2+8^2}=4\sqrt{5^2+2^2}=4\sqrt{29}N$$

B ۹۳۹ ۴

خط فکری وقتی کامیون ترمز می‌کند، عاملی که سبب متوقف کردن صندوق به همراه کامیون می‌شود اصطکاک بین صندوق و کامیون است و اگر اصطکاک نبود، صندوق بنا به قانون اول نیوتون به حرکت خودش بر کف کامیون ادامه می‌داد تا به دیوارهٔ اتاقک کامیون برخورد کند. برای آنکه کامیون در کوتاه‌ترین فاصله متوقف شود باید شتاب حرکت کندشونده آن بیشینه باشد و برای آنکه صندوق نیز با این شتاب متوقف شود باید نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر صندوق بیشینه $(f_{s\max})$ باشد، بنابراین شما باید شتاب بیشینهٔ صندوق حاصل از نیروی اصطکاک را حساب کنید. سپس با نوشتن معادلهٔ مستقل از زمان مقدار جابه‌جایی را به‌دست بیاورید.

۱ عامل توقف صندوق، اصطکاک بین کف کامیون و صندوق است که به صندوق شتاب توقف می‌دهد.

$$f_{s\max}=ma\Rightarrow\mu_s mg=ma\Rightarrow a=\mu_s g=0/25\times10=2/5m/s^2$$

۲ شتاب توقف کامیون حداکثر باید $2/5m/s^2$ باشد تا صندوق بر کف کامیون نلغزد

از این‌رو:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-225=2(-2/5)\Delta x\Rightarrow\Delta x=\frac{225}{5}=45m$$

بازی با سؤال **یک محمولهٔ ۱۰۰۰ کیلوگرمی درون کامیونی که با سرعت $72km/h$ روی سطح افقی در حرکت است قرار دارد. فقط نیروی اصطکاک از لغزیدن محموله به جلو و عقب جلوگیری می‌کند. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین محموله و کامیون ۰/۴ باشد، کمترین فاصله‌ای که کامیون می‌تواند بایستد بدون اینکه محموله در اتاقک به جلو بلغزد، چند متر است؟ $(g=10m/s^2)$**

۱) ۵۰ ۲) ۲۵

۳) ۱۰۰ ۴) باید جرم کامیون مشخص باشد.

پاسخ **محمولهٔ کامیون در اثر اصطکاک بین کف کامیون و محموله متوقف می‌شود و حداکثر شتابی که اصطکاک می‌تواند ایجاد کند خواهد شد:**

$$f_{s_{max}}=ma\Rightarrow-\mu_s mg=ma\Rightarrow a_{max}=-\mu_s g$$
$$\Rightarrow a_{max}=-0/4\times10\Rightarrow a_{max}=-4m/s^2$$

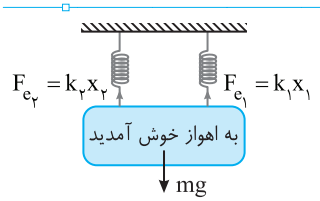
بنابراین حداکثر اندازهٔ شتاب کامیون نیز باید $4m/s^2$ باشد تا محموله کف کامیون نلغزد. به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، کمترین جابه‌جایی کامیون را حساب می‌کنیم:

$$v^2-v_0^2=2a_{max}\Delta x_{min}\xrightarrow{v=0,\,v_0=72km/h=20m/s}$$
$$0-400=2(-4)\Delta x_{min}\Rightarrow\Delta x_{min}=50m$$

گزینهٔ ۱

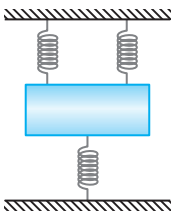
A ۹۴۰ ۲

جسم در حال سکون است. پس نیروهای وارد بر آن متوازن می‌باشد. چون فنرها مشابه‌اند پس کشش آن‌ها با هم برابر است.



بنابراین:

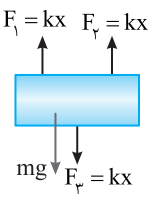
$$F_{net}=0\Rightarrow k_1x_1+k_2x_2=mg\Rightarrow 2000x_1+2000x_2=1200$$
$$\xrightarrow[x_1=x_2=x]{\text{فنرها مشابه}}4000x=1200\Rightarrow x=0/3m=30cm$$



بازی با سؤال **در شکل روبه‌رو هر سه فنر با ثابت $3000N/m$ به اندازهٔ $10cm$ کشیده شده‌اند. جرم تابلو چند کیلوگرم است؟ $(g=10N/kg)$**

۱) ۱۵ ۲) ۲۰

۳) ۲۵ ۴) ۳۰



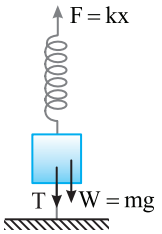
پاسخ **هر سه فنر بنا به فرض مسئله کشیده شده‌اند و می‌خواهند به حالت اول باز گردند بنابراین نیروی کشسانی دو فنر بالایی رو به بالا و نیروی کشسانی فنر پایین رو به پایین و در جهت نیروی وزن است. تابلو ساکن است و نیروهای وارد بر تابلو متوازن هستند. بنابراین:**

گزینهٔ ۴

$$F_{net}=0\Rightarrow F_1+F_2=F_3+W\Rightarrow kx+kx=kx+W$$
$$\Rightarrow kx=W\xrightarrow[x=0/1m]{k=3000N/m}3000\times0/1=m\times10\Rightarrow m=30kg$$

B ۹۴۱ ۴

خط فکری نیروی وزن و نیروی کشش نخ هر دو رو به پایین و نیروی کشسانی فنر رو به بالاست و چون جسم در تعادل است باید نیروها متوازن باشند. نیروها را رسم کنید و مسئله را حل کنید.



۱ ثابت فنر $4N/cm$ یعنی $400N/m$ است.

۲ نیروی F باید با مجموع نیروی وزن و نیروی کشش نخ برابر باشد.

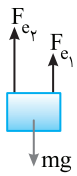
$$F_{net}=0\Rightarrow F=T+W\xrightarrow[W=1\times10=10N]{T=8N}kx=8+10\Rightarrow400x=18$$
$$\Rightarrow x=\frac{4/5}{100}\Rightarrow x=4/5cm$$

۳ طول فنر در این حالت برابر است با:

$$\ell=24+4/5\Rightarrow\ell=28/5cm$$

B ۹۴۲ ۳

نکته نیروی کشسانی فنر همواره در خلاف جهت تغییر طول آن است.



فنر k_1 کشیده شده و نیروی آن خلاف جهت جابه‌جایی یعنی روبه بالا به جسم وارد می‌شود. هم‌چنین k_2 نیز فشرده شده پس نیروی آن خلاف جهت جابه‌جایی یعنی روبه بالا به جسم وارد می‌شود. نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و نیروی کشسانی هر فنر را حساب می‌کنیم:

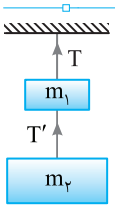
$$F_{e_1}=k_1\Delta x_1=5\times4=20N\quad,\quad F_{e_2}=k_2\Delta x_2=2000\times\frac{2}{100}=40N$$

نیروی خالص وارد بر جسم صفر است از این‌رو می‌توان نوشت:

$$F_{net}=0\Rightarrow mg=F_{e_1}+F_{e_2}\Rightarrow mg=60N\Rightarrow m=6kg$$

A ۹۴۳ ۲

خط فکری دقت کنید نخ بالایی وزن هر دو وزنهٔ $m_1=2kg$ و $m_2=3kg$ را تحمل می‌کند اما نخ بین دو وزنه تنها نیروی وزن m_2 را تحمل می‌کند. حال کشش هر نخ را حساب کرده از هم کم کنید.



۱ نیروی کشش نخ متصل به سقف خواهد شد:

$$T=(m_1+m_2)g\Rightarrow T=(2+3)\times10=50N$$

۲ نیروی کشش نخ بین دو وزنه برابر است با:

$$T'=m_2g\Rightarrow T'=3\times10=30N$$

۳ تفاوت T و T' را به‌دست می‌آوریم:

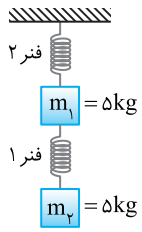
$$T-T'=50-30=20N$$

میانبر از همان ابتدا مشخص است که اختلاف این دو نیروی کشش برابر وزن، وزنهٔ m_1 یعنی $W_1=۲۰N$ است. زیرا T، به همین اندازه وزن بیشتری را تحمل می‌کند.

بازی با سوال در شکل روبه‌رو مجموعه در حال تعادل می‌باشد و دو فنر مشابه‌اند. تغییر طول فنر (۲) چند برابر تغییر طول فنر (۱) است؟ (جرم فنرها ناچیز و $g=۱۰N/kg$ است) خارج ریاضی- ۸۸

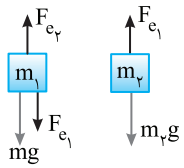
۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۲/۵ ۴) ۱/۵



پاسخ جسم m_2 توسط کشش فنر (۱) در حال تعادل است. $F_{e_1}=m_2g\Rightarrow k\Delta x_1=۵۰N$

به جسم m_1 نیروی وزن و همچنین F_{e_1} به سمت پایین وارد می‌شود:



$$F_{e_2}=mg+F_{e_1}=۵۰+۵۰\Rightarrow F_{e_2}=۱۰۰N\Rightarrow k\Delta x_2=۱۰۰N$$

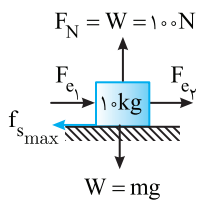
$$\frac{k\Delta x_2}{k\Delta x_1}=\frac{۱۰۰}{۵۰}\Rightarrow\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}=۲$$

البته می‌توان به راحتی گفت که فنر (۲) دو وزنه و فنر (۱) یک وزنه را تحمل می‌کند بنابراین افزایش طول فنر (۲) دو برابر افزایش طول فنر (۱) است. گزینهٔ ۲

B ۹۴۴ ۳

نکته نیروی وارد از طرف فنر همواره خلاف جهت تغییر طول می‌باشد.

فنر k_1 فشرده شده بنابراین نیروی کشسانی آن (F_{e_1}) به سمت راست است. فنر k_2 کشیده شده بنابراین نیروی کشسانی آن (F_{e_2}) به سمت راست است.



بنابراین جسم در آستانهٔ حرکت به سمت راست بوده و نیروی اصطکاک ایستایی $f_{s_{max}}$ به سمت چپ است. نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده برایند آن‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم و ضریب اصطکاک را حساب می‌کنیم:

$$F_{net}=۰\Rightarrow F_{e_1}+F_{e_2}=f_{s_{max}}\Rightarrow k_1\Delta x_1+k_2\Delta x_2=f_{s_{max}}$$

$$۲۰۰\times\frac{۲}{۱۰۰}+۴۰۰\times\frac{۴}{۱۰۰}=\mu_sF_N\xrightarrow{F_N=mg}۲۰=\mu_s\times۱۰۰\Rightarrow\mu_s=۰/۲$$

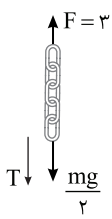
B ۹۴۵ ۲

خط فکری اگر زنجیر و جسم بر کف نیروسنج قرار داده شوند، نیروسنج جمع وزن آن‌ها را نشان خواهد داد $(۴۰+۱۰=۵۰N)$ حال اگر شما زنجیر را گرفته و به آن نیرویی رو به بالا وارد کنید، نیروسنج عدد کمتری را نشان می‌دهد که این کاهش برابر نیرویی است که شما رو به بالا به مجموعه وارد کرده‌اید.

۱ نیروسنج به جای ۵۰N عدد ۲۰N را نشان می‌دهد بنابراین نیروی F برابر است با: $F=۵۰-۲۰\Rightarrow F=۳۰N$

۲ نیروی کشش در وسط زنجیر را باید این‌گونه در نظر گرفت که اگر وزنه را با نصف زنجیر $(۵N)$ روی ترازو قرار دهیم، ترازو عدد $۴۰+۵=۴۵N$ را نشان می‌دهد. اما نیروسنج ۲۰N را نشان می‌دهد یعنی در وسط زنجیر نیروی $۴۵-۲۰=۲۵N$ وارد می‌شود.

روش دیگر: نیروهای وارد بر نیمهٔ بالای زنجیر را رسم می‌کنیم، این نیروها متوازن هستند.

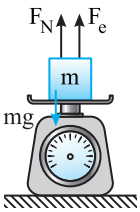


$$F=T+\frac{mg}{۲}\Rightarrow ۳۰=T+\frac{۱۰}{۲}\Rightarrow T=۲۵N$$

B ۹۴۶ ۳

نکته نیروی کشسانی فنر در خلاف جهت تغییر طول آن است.

۱ ابتدا نیروی کشسانی فنر را به‌دست می‌آوریم:



$$F_e=k\Delta l\Rightarrow F_e=۲۰۰\times\frac{۲}{۱۰۰}=۴N$$

۲ فنر کشیده شده است و نیروی کشسانی فنر رو به بالا است بنابراین با توجه به ساکن بودن جسم می توان نوشت:

$$F_T=۰\Rightarrow F_N+F_e=W\quad(۱)$$

نکته عددی که نیروسنج نشان می‌دهد برابر نیروی عمودی است که کف نیروسنج بر جسم وارد می‌کند. (F_N)

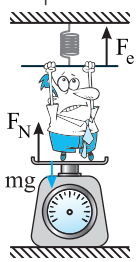
۳ ترازو عدد ۴N را نشان می‌دهد، ترازوی فنری نیروی عمودی سطح را نشان می‌دهد پس $F_N=۴N$ است، از این‌رو داریم:

$$(۱)\Rightarrow ۴+۴=W\Rightarrow W=۸N\Rightarrow mg=۸\Rightarrow m=۰/۸kg$$

B ۹۴۷ ۱

خط فکری شخصی فنر را رو به پایین می‌کشد، بنابراین نیرویی که فنر بر شخص وارد می‌کند رو به بالاست و سبب می‌گردد که نیروسنج عدد کمتری نشان دهد. در واقع عددی که نیروسنج نشان خواهد داد تفاضل نیروی وزن شخص و نیروی کشسانی فنر است. نیروها را رسم کنید و نیروی کشسانی فنر را به‌دست آورید و از وزن کم کنید.

۱ شخص فنر را رو به پایین کشیده است بنابراین نیروی کشسانی فنر رو به بالا است.



$$F_e=k\Delta x\Rightarrow F_e=۱۵۰\times۰/۱=۱۵N$$

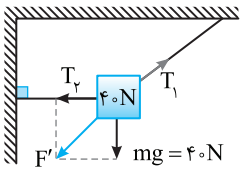
۲ وزن شخص برابر است با: $W=mg\Rightarrow W=۶۰۰N$

ترازوی فنری نیروی عمودی سطح را نمایش می‌دهد از این‌رو:

$$F_N=W-F_e\Rightarrow \text{عدد نیروسنج}=۶۰۰-۱۵=۵۸۵N$$

B ۹۴۸ ۴

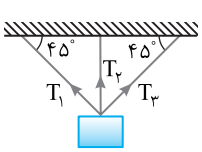
بر وزنه سه نیروی T_1 و T_2 و W وارد می‌شود. جسم در تعادل است و سه نیروی T_1 و T_2 و وزن متوازن‌اند بنابراین برایند T_2 و W که عمود بر هم‌اند باید هم‌اندازه و خلاف جهت T_1 باشد. از این رو به کمک قضیهٔ فیثاغورس می‌توان نوشت:



$$F'=T_1\Rightarrow\sqrt{T_2^2+(mg)^2}=T_1\Rightarrow T_2^2+(mg)^2=T_1^2$$

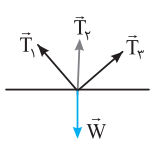
$$\Rightarrow T_2^2+۱۶۰۰=۲۵۰۰\Rightarrow T_2^2=۹۰۰\Rightarrow T_2=۳۰N$$

بازی با سوال در شکل روبه‌رو، وزنهٔ ۲۶ کیلوگرمی توسط سه طناب T_1، T_2 و T_3 از سقف آویخته شده و ساکن است. اگر کشش طناب قائم T_2 برابر ۹۰N باشد، اندازهٔ برایند نیروی کشش دو طناب T_1 و T_3 چند نیوتون است؟ $(g=۱۰N/kg)$



۱) ۳۳۰ ۲) ۱۷۰ ۳) ۱۱۰ ۴) ۸۰

پاسخ چون جسم در تعادل است، بنابراین:



$$F_{net}=۰\Rightarrow\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{T}_3+\vec{W}=۰$$

$$\Rightarrow|\vec{T}_1+\vec{T}_3|=|\vec{T}_2+\vec{W}|$$

$$\Rightarrow|\vec{T}_1+\vec{T}_3|=|۲۶۰-۹۰|=۱۷۰N$$

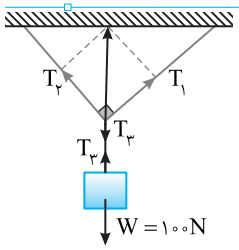
گزینهٔ ۲

B ۹۴۹ ۲

۱ نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. به نخ قائم متصل به وزنه دقت کنید نیروی کشش این نخ برابر وزن جسم است.

$T_۳ = W \Rightarrow T_۳ = ۱۰۰N$

۲ اکنون به نیروهای وارد بر محل اتصال سه نخ دقت کنید. $(T_۱، T_۲ و T_۳)$

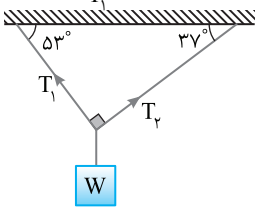


این سه نیرو متوازن هستند و باید اندازهٔ $T_۳$ با اندازهٔ برایند $T_۱$ و $T_۲$ برابر شود.

۳ $T_۱$ و $T_۲$ بر هم عمودند و بنا به رابطهٔ فیثاغورس می‌توان نوشت:

$$\sqrt{T_۱^۲ + T_۲^۲} = T_۳ \xrightarrow{T_۱ = \sqrt{۳}T_۲} \sqrt{۳T_۲^۲ + T_۲^۲} = T_۳ \Rightarrow ۲T_۲ = T_۳ \Rightarrow T_۲ = ۵۰N$$

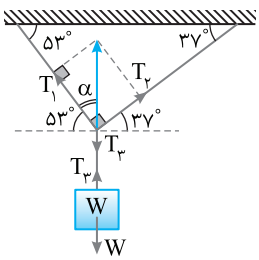
بازی با سؤال در شکل زیر وزنهٔ W در حال تعادل است. $\frac{T_۲}{T_۱}$ برابر کدام گزینه است؟ (جرم ریسمان ناچیز است.)



۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ با توجه به اینکه جسم در حال تعادل است پس کشش $T_۳$ برابر W می‌باشد و باید برایند $T_۱$ و $T_۲$ هم‌اندازهٔ $T_۳$ و خلاف جهت آن باشد. زاویه‌ای که $T_۱$ و $T_۲$ با راستای افقی می‌سازند با توجه به خطوط موازی و مورب به ترتیب ۵۳° و ۳۷° است:



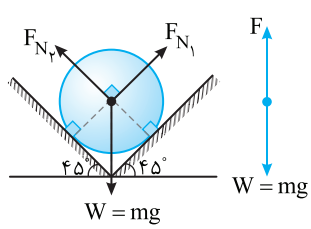
گزینهٔ ۱ $\tan\alpha = \frac{T_۲}{T_۱} \xrightarrow[\alpha = ۳۷^\circ]{\text{با توجه به شکل}} \tan ۳۷^\circ = \frac{T_۲}{T_۱} \Rightarrow \frac{T_۲}{T_۱} = \frac{۳}{۴}$

B ۹۵۰ ۳

خط فکری نیرویی که جسم بر دیواره‌ها وارد می‌کند همان نیروی عمودی سطح F_N است که توسط دیواره‌ها بر جسم وارد می‌شود، بنابراین باید F_N را حساب کنیم.

همچنین چون زاویهٔ دیواره‌ها با سطح یکسان و ۴۵° است پس با توجه به تقارن، نیرویی که هریک از دیواره‌ها وارد می‌کنند، یکسان است.

زاویهٔ دیواره‌ها با سطح یکسان است پس نیروی عمودی سطح دو دیواره یکسان است:



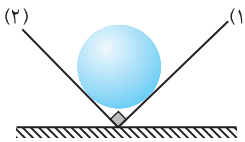
$$F = \sqrt{F_{N_۱}^۲ + F_{N_۲}^۲} \xrightarrow{F_{N_۱} = F_{N_۲}} F = F_{N_۱}\sqrt{۲}$$

جسم در حال تعادل است پس نیروی وزن و نیروی F هم‌اندازه و خلاف جهت هم‌اند:

$$F_{N_۱}\sqrt{۲} = mg \Rightarrow F_{N_۱}\sqrt{۲} = ۵۰$$

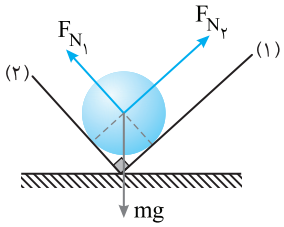
$$\Rightarrow F_{N_۱} = \frac{۵۰}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۵۰\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow F_{N_۱} = ۲۵\sqrt{۲}N$$

بازی با سؤال یک کرهٔ فلزی به وزن ۴۰N درون ناوه‌ای با دیواره‌های صیقلی قرار دارد. اگر نیرویی که دیوارهٔ (۱) به کره وارد می‌کند $\frac{۴}{۳}$ برابر نیرویی باشد که دیوارهٔ (۲) بر کره وارد کرده، نیروی وارد بر کره از طرف دیوار (۲) چند نیوتون است؟ کنکور دهه‌های گذشته



۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۴۰ ۴) ۳۶

پاسخ ابتدا نیروهای وارد بر جسم را مطابق شکل رسم می‌کنیم. $F_{N_۱}$ و $F_{N_۲}$ بر دیواره‌ها عمودند. با توجه به شکل زاویهٔ بین $F_{N_۱}$ و $F_{N_۲}$ مانند زاویهٔ بین دو دیوار ۹۰° است. با توجه به اینکه جسم در حال تعادل می‌باشد و سه نیروی $F_{N_۱}$، $F_{N_۲}$ و mg متوازن هستند و برایند دو نیروی عمود بر هم $F_{N_۱}$ و $F_{N_۲}$ باید هم‌اندازه و در خلاف جهت mg باشد:



$$\begin{cases} \sqrt{F_{N_۱}^۲ + F_{N_۲}^۲} = mg \\ F_{N_۲} = F \text{ و } F_{N_۱} = \frac{۴}{۳}F_{N_۲} = \frac{۴}{۳}F \end{cases} \Rightarrow \sqrt{F^۲ + \frac{۱۶}{۹}F^۲} = ۴۰ \Rightarrow \frac{۵}{۳}F = ۴۰ \Rightarrow F = ۲۴N$$

گزینهٔ ۱

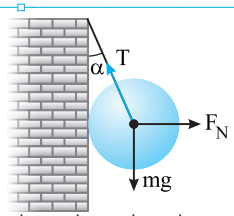
A ۹۵۱ ۳

بر جسم سه نیرو وارد می‌شود:

۱ نیروی وزن

۲ نیروی کشش

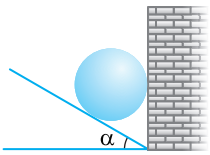
۳ نیروی عمود بر سطح



ابتدا نیروهایی که به جسم وارد می‌شوند را رسم می‌کنیم، جسم در حال تعادل است پس نیروهای متوازن می‌باشند و باید برایند نیروهای F_N و mg با T برابر و خلاف جهت آن می‌باشد.

$$T = \sqrt{F_N^۲ + (mg)^۲} \Rightarrow T = \sqrt{۹۰۰ + ۱۶۰۰} = ۵۰N$$

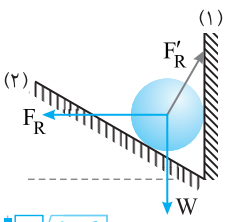
بازی با سؤال در شکل زیر نیروی عمودی سطح شیب‌دار وارد بر جسم کروی برابر ۵۰۰N است. نیروی عمودی سطح از طرف دیوار قائم بر جسم کروی و نیروی وزن کره به ترتیب از راست به چپ کدام گزینه می‌تواند باشد؟ تجربی - ۹۴



۱) ۳۰۰ و ۴۰۰ ۲) صفر و ۳۰۰ ۳) صفر و ۴۰۰ ۴) ۳۰۰ و ۶۰۰

پاسخ نیروهای وارد بر جسم متوازن می‌باشد بنابراین باید برایند دو نیروی عمود بر هم F_R و W برابر F'_R و در خلاف جهت آن باشد. $\sqrt{F_R^۲ + W^۲} = F'_R$

با توجه به معادلهٔ بالا تنها گزینهٔ (۱) می‌تواند درست باشد.



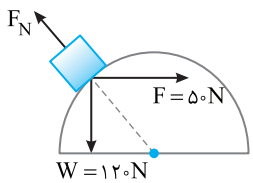
گزینهٔ ۱

B ۹۵۲ ۱

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:

۱ نیروی F_N عمود بر سطح و در امتداد شعاع نیمکره است.

۲ جسم ساکن و در حالت تعادل است و نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند. از این‌رو اندازهٔ برایند نیروی افقی F=۵۰N و نیروی وزن W=۱۲۰N باید هم‌اندازهٔ نیروی F_N باشد. به کمک رابطهٔ فیثاغورس F_N را به‌دست می‌آوریم.

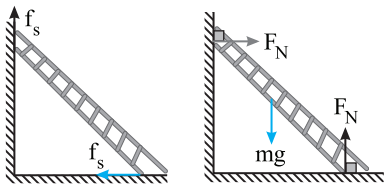


$$F_N = \sqrt{F^۲ + W^۲} \Rightarrow F_N = \sqrt{۵۰^۲ + ۱۲۰^۲} \Rightarrow F_N = ۱۳۰N$$

A ۹۵۳ ۲

دیوار و کف بر نردبان نیروی عمودی F_N وارد می‌کنند در شکل (۱) و (۴) نیروی F_N بر سطح عمود نبوده و این شکل‌ها نادرست هستند. اما در مورد شکل (۲) و (۳)، نیروی اصطکاک خلاف جهت لغزش به نردبان وارد می‌شود. اگر نردبان بخواهد بلغزد به سمت پایین خواهد لغزید پس روی دیوار قائم روبه پایین می‌لغزد و باید اصطکاک به سمت بالا به آن وارد شود و روی سطح افقی نیز به سمت راست می‌لغزد پس نیروی

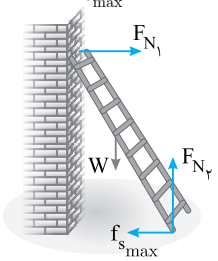
اصطکاک به سمت چپ به آن وارد می‌شود و گزینهٔ (۲) درست است.



B ۹۵۴ ۲

خط فکری نردبان ساکن است. باید نیروهای وارد بر آن را رسم کنیم اما جالبی مسئله این است که این نیروها بر خلاف همهٔ مسائل قبلی بر نقاط مختلف جسم باید رسم شوند. نیروهای وارد بر نردبان عبارتند از نیروی عمودی سطح دیوار بر نردبان (F_{N_1}) که به‌طور افقی بر نردبان وارد می‌شود. نیروی وزن (W) رو به پایین، نیروی عمودی سطح زمین (F_{N_2}) رو به بالا و در آخر نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر نردبان که مانع لیز خوردن آن می‌شود. نردبان در آستانهٔ سر خوردن بوده و نیروی اصطکاک بیشینه مقدار $(f_{s_{max}})$ را دارد.

۱ با توجه به شکل روبه‌رو برایند نیروها در امتداد قائم را برابر صفر قرار داده و نیروی F_{N_2} را حساب می‌کنیم.



$$F_{net,y}=0 \Rightarrow F_{N_2}=W \Rightarrow F_{N_2}=200N$$

۲ اکنون نیروی اصطکاکی که توسط سطح زمین بر نردبان وارد می‌شود را به دست می‌آوریم:

$$f_{s_{max}}=\mu_s F_{N_2}=0/5\times 200=100N$$

۳ در این صورت نیرویی که سطح زمین به نردبان وارد می‌کند برابر است با:

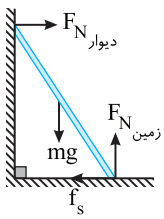
$$\vec{F}_{R,\text{سطح زمین}}=-100\vec{i}+200\vec{j}$$

B ۹۵۵ ۲

نکته برایند نیروی عمودی سطح (F_N) و نیروی اصطکاک (f) که از طرف سطح به جسم وارد می‌شود را نیروی سطح گویند:

$$R=\sqrt{F_N^2+f^2}$$

توسط دیوار قائم تنها نیروی عمودی سطح و توسط سطح زمین دو نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک به نردبان وارد می‌شود. نیروی اصطکاک مانع لیزخوردن نردبان به سمت راست می‌شود بنابراین جهت f_s به سمت چپ است. نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم و نیروهای افقی را برابر هم و نیروهای قائم را نیز برابر هم قرار می‌دهیم:



نردبان در حال تعادل:
$$\begin{cases} f_s=F_{N_{دیوار}}=300N \\ F_{N_{زمین}}=mg=400N \end{cases}$$

هر دو نیروی $F_{N_{زمین}}$ و f_s از زمین به نردبان وارد شده و نیرویی که زمین به نردبان وارد می‌کند برابر است با:

$$R=\sqrt{300^2+400^2}=500N$$

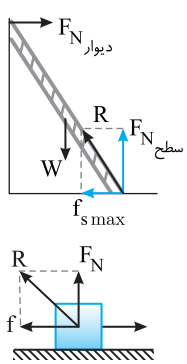
B ۹۵۶ ۱

نکته هر گاه بر جسمی نیرو وارد شود و جسم در آستانهٔ سُر خوردن باشد، یعنی اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح بیشینه $(f_{s_{max}}=\mu_s F_N)$ است.

باید شکل مسئله را رسم کنید و نیروهای وارد بر نردبان را بکشید.

یادآوری نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند، برایند دو نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح است.

$$R=\sqrt{F_N^2+f^2}$$



۱ نردبان ساکن است، از این‌رو نیروهایی که در امتداد قائم هستند، یعنی نیروی وزن (W) و نیروی عمودی سطح (F_N) متوازن بوده بنابراین:

$$F_N=W=mg \xrightarrow{m=16kg} F_N=16\times 10=160N$$

۲ نیروی اصطکاک را حساب می‌کنیم:

$$R=\sqrt{F_N^2+f_{s_{max}}^2} \Rightarrow 200^2=160^2+f_{s_{max}}^2$$

$$\Rightarrow f_{s_{max}}^2=200^2-160^2=(200+160)(200-160)=360\times 40$$

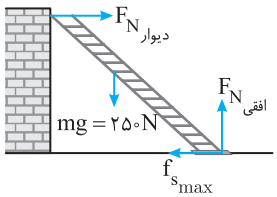
$$f_{s_{max}}^2=360\times 400 \Rightarrow f_{s_{max}}=6\times 20=120N$$

۳ ضریب اصطکاک ایستایی خواهد شد:

$$f_{s_{max}}=\mu_s mg \Rightarrow 120=\mu_s\times 16\times 10 \Rightarrow \mu_s=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$$

B ۹۵۷ ۴

۱ شکل ساده‌ای از صورت سؤال رسم می‌کنیم و نیروهای وارد بر نردبان را می‌کشیم. دقت کنید چون بیشینه نیروی سطح افقی خواسته شده پس باید اصطکاک ایستایی بین نردبان و سطح افقی نیز بیشینه باشد و نردبان در آستانهٔ حرکت $(f_{s_{max}})$ باشد.



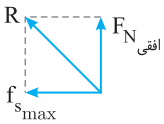
۲ نردبان ساکن است پس $F_{N_{افقی}}$ که به سمت بالا است باید اثر نیروی mg رو به پایین را خنثی کند از این‌رو می‌توان نوشت:

$$F_{N_{افقی}}=mg \Rightarrow F_{N_{افقی}}=250N$$

۳ نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه را به‌دست می‌آوریم:

$$f_{s_{max}}=\mu_s F_{N_{افقی}} \Rightarrow f_{s_{max}}=0/4\times 250=100N$$

۴ نیرویی که سطح افقی بر نردبان وارد می‌کند برایند دو نیروی عمود بر هم $F_{N_{افقی}}$ و $f_{s_{max}}$ است.



بنابراین:

$$R=\sqrt{f_{s_{max}}^2+F_{N_{افقی}}^2} \Rightarrow R=\sqrt{100^2+250^2}$$

عوامل مشترک بین F_N و $f_{s_{max}}$ را فاکتور گرفته و از زیر رادیکال بیرون می‌آوریم

$$R=50\sqrt{2^2+5^2} \Rightarrow R=50\sqrt{29}N$$

B ۹۵۸ ۲

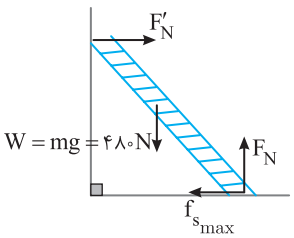
وزن نردبان برابر است با:

$$W=mg$$

$$\Rightarrow W=48\times 10=480N$$

نردبان ساکن است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند. بنابراین:

$$F_N=W \Rightarrow F_N=480N$$



نیرویی که سطح افقی بر نردبان وارد می‌کند، برایند دو نیروی F_N و $f_{s_{max}}$ است.

از این‌رو:

$$R=\sqrt{F_N^2+f_{s_{max}}^2} \Rightarrow 120\sqrt{17}=\sqrt{480^2+f_{s_{max}}^2}$$

$$\Rightarrow 120\times 120\times 17=480^2+f_{s_{max}}^2 \Rightarrow (120)^2\times 17=(120)^2\times 16+f_{s_{max}}^2$$

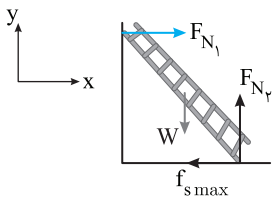
$$f_{x_{max}}^2=17\times(120)^2-16\times(120)^2 \Rightarrow f_{x_{max}}^2=(120)^2 \Rightarrow f_{s_{max}}=120N$$

ضریب اصطکاک ایستایی را به‌دست می‌آوریم.

$$f_{s_{max}}=\mu_s F_N \Rightarrow 120=\mu_s\times 480=\mu_s=0/25$$

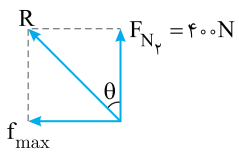
B ۹۵۹ ۱

۱ نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم.



۲ نردبان در آستانهٔ لغزیدن است بنابراین نیروی اصطکاک بین نردبان و سطح برابر $f_{s_{max}}$ است.

۳ با توجه به شکل نیروهای وارد بر نردبان توسط سطح زمین را می‌توان نوشت:

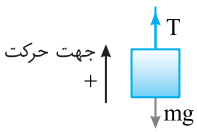


$$\tan\theta=\frac{f_{s_{max}}}{F_{N_2}}=\frac{\mu_s F_{N_2}}{F_{N_2}}=\mu_s$$

$$\tan\theta=\mu_s \xrightarrow{\mu_s=\frac{\sqrt{۳}}{۳}} \tan\theta=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow\theta=۳۰^\circ$$

A ۹۶۰ ۴

حرکت کندشونده است، اگر جهت حرکت را رو به بالا مثبت بگیریم شتاب منفی و برابر $-۲m/s^۲$ می‌شود. نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و برایند نیروها را برابر ma قرار می‌دهیم.

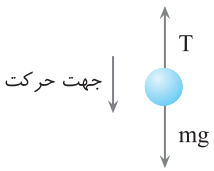


$$F_{net}=ma\Rightarrow T-mg=ma\Rightarrow T-۵۰=۵\times(-۲)\Rightarrow T=۴۰N$$

روش دیگر: جسم دارای حرکت کندشونده رو به بالا است، بنابراین نیروی وزن که رو به پایین است از نیروی کشش نخ که رو به بالاست بزرگ‌تر بوده و سبب کندشدن حرکت می‌شود. بنابراین نیروی کشش نخ را از وزن کم می‌کنیم و شتاب قطعاً مثبت اختیار می‌شود. $mg>T\Rightarrow mg-T=ma\Rightarrow ۵۰-T=۵\times۲\Rightarrow T=۴۰N$

A ۹۶۱ ۴

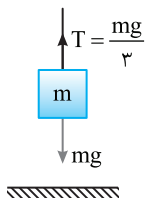
نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و نیروی خالص وارد بر جسم را بنا به قانون دوم نیوتون برابر ma قرار می‌دهیم.



$$mg-T=ma \xrightarrow{a=۰/۸g} mg-T=۰/۸mg\Rightarrow T=۰/۲mg=\frac{۱}{۵}mg$$

A ۹۶۲ ۳

خط فکری نیروهای وزن بر جسم (کشش نخ T و نیروی وزن W) را رسم می‌کنیم. برای سادگی برای به‌دست آوردن نیروی خالص نیروی بزرگ‌تر را منهای نیروی کوچک‌تر می‌کنیم و سپس به کمک قانون دوم نیوتون مسئله را حل می‌کنیم.



در صورت مسئله دقیقاً بیان شده که $T=\frac{۱}{۳}W$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-T=ma \xrightarrow{T=\frac{mg}{۳}} \frac{۲mg}{۳}=ma\Rightarrow a=\frac{۲g}{۳}$$

A ۹۶۳ ۱

خط فکری جسم در راستای قائم جابه‌جا می‌شود اما معلوم نیست که بالا می‌رود و یا پایین می‌آید همچنین نوع حرکت مشخص نیست. البته مسئله از ما خواسته است که حالتی که کشش نخ بیشترین مقدار است را مشخص کنیم. تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینهٔ (۱): حرکت تندشونده رو به بالا: در این حالت باید نیروی کشش طناب از وزن شخص بیشتر باشد. $T>mg\Rightarrow T-mg=ma\Rightarrow T=mg+ma$

گزینهٔ (۲): حرکت کندشونده رو به بالا: برای آنکه حرکت رو به بالا کندشونده باشد باید نیروی وزن رو به پایین از نیروی کشش طناب رو به بالا بزرگ‌تر باشد.

$T'<mg\Rightarrow mg-T'=ma\Rightarrow T'=mg-ma$

گزینهٔ (۳): حرکت تندشونده رو به پایین: در این حرکت نیز $T'<mg$ است و نیروی وزن جسم را به پایین می‌آورد و بر سرعت آن می‌افزاید.

گزینهٔ (۴): حرکت با سرعت ثابت: در این حالت نیروها متوازن بوده و $T''=mg$ است. در نتیجه در حالت اول T از همه حالات بیشتر است.

در این تست قدیمی فرض شده در گزینه‌ها بزرگی شتاب یکسان است.

B ۹۶۴ ۴

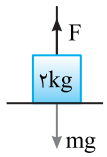
حداکثر تحمل طناب ۴۳۰N و وزن جسم ۴۹۰N و حرکت رو به پایین است. بنابراین: (دقت کنید $g=۹/۸m/s^۲$ است.)

$$mg-T=ma\Rightarrow ۴۹۰-۴۳۰=۵۰a$$

$$a=\frac{۶۰}{۵۰}\Rightarrow a=۱/۲m/s^۲$$

B ۹۶۵ ۲

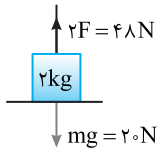
در حالت اول نیرویی که در راستای قائم به طناب وارد می‌شود را F در نظر می‌گیریم.



$$F_{net}=ma\Rightarrow F-mg=ma_۱$$

$$\Rightarrow F-۲۰=۴\Rightarrow F=۲۴N$$

در حالت دوم نیروی F دو برابر شده پس نیروی روبه بالای وارد بر جعبه ۲×۲۴=۴۸N است.



$$F_{net}=ma_۲\Rightarrow ۲F-mg=ma$$

$$\Rightarrow ۴۸-۲۰=۲a_۲\Rightarrow a_۲=۱۴m/s^۲$$

بنابراین شتاب حرکت از $۲m/s^۲$ به $۱۴m/s^۲$ رسیده و $\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{۱۴}{۲}=۷$ برابر شده است.

بازی با سؤال **وزنهٔ m را به‌وسیلهٔ طنابی با شتاب $۲m/s^۲$ به طور قائم با حرکت تندشونده رو به بالا می‌کشیم. اگر نیروی کشش طناب را دو برابر کنیم، شتاب حرکت چند متر بر مجذور ثانیه افزایش می‌یابد؟ $(g=۱۰N/kg)$** کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۲

پاسخ ابتدا شتاب حرکت $۲m/s^۲$ است بنابراین:

$$F_{net}=ma\Rightarrow T-mg=ma\Rightarrow T=۱۰m+۲m=۱۲m$$

اگر نیروی کشش طناب دو برابر شود $T'=۲T=۲۴m$ خواهد شد و داریم:

$$F_{net}=ma'\Rightarrow T'-mg=ma'\Rightarrow ۲۴m-۱۰m=ma'\Rightarrow a'=۱۴m/s^۲$$

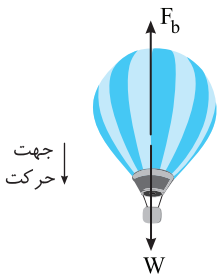
بنابراین شتاب از $a=۲m/s^۲$ به $a'=۱۴m/s^۲$ رسیده و افزایش یافته است:

$$(a'-a)=۱۲m/s^۲$$

گزینهٔ ٤

C ۹۶۶ ۴

خط فکری ابتدا باید نیروی شناوری (F_b) وارد بر بالون را حساب کنید. برای این کار باید نیروهای وارد بر بالون را هنگامی که بالون تندشونده در حال پایین آمدن است را رسم کنید و به کمک قانون دوم نیوتون F_b را حساب کنید. سپس جهت حرکت بالون را رو به بالا در نظر گرفته و نیروی وزن جدید بالون را به‌دست بیاورید.



۱ نیروی شناوری خواهد شد:

$$mg-F_b=ma \xrightarrow{m=۲۰۰kg} ۲۰۰۰-F_b=۲۰۰\times۲\Rightarrow F_b=۱۶۰۰N$$

۲ در حالت دوم بالون با همین شتاب $۲m/s^۲$ با نیروی $F_b=۱۶۰۰N$ تندشونده رو به بالا می‌رود. بنابراین می‌نویسیم:

$$F_b-m'g=m'a\Rightarrow ۱۶۰۰-m'\times۱۰=m'\times۲$$

$$۱۶۰۰=۱۲m'\Rightarrow m'=\frac{۱۶۰۰}{۱۲}\Rightarrow m'=\frac{۴۰۰}{۳}kg$$

۳ کسری از جرم که باید از جرم بالون کاسته شود را حساب می‌کنیم:

$$\frac{m'-m}{m}=\frac{\frac{۴۰۰}{۳}-۲۰۰}{۲۰۰}=\frac{-\frac{۲۰۰}{۳}}{۲۰۰}=-\frac{۱}{۳}$$

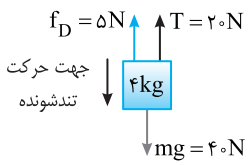
۴ ۹۶۷ B

خط فکری جهت حرکت جسم و نوع حرکت مشخص نشده است.

اگر جسم رو به پایین در حرکت باشد، نیروی مقاومت هوا رو به بالا بوده و هم‌جهت T است و اگر جسم رو به بالا در حرکت باشد، نیروی مقاومت هوا رو به پایین و هم‌جهت W خواهد بود. نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده، یک‌بار جسم را با حرکت تندشونده رو به پایین و بار دیگر با حرکت کندشونده رو به بالا مسئله را حل کنید.

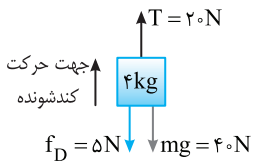
نیروهای در جهت حرکت را منهای نیروهای خلاف جهت حرکت کنید در این صورت اگر حرکت تندشونده باشد شتاب مثبت و اگر حرکت کندشونده باشد، شتاب منفی به‌دست می‌آید.

اگر جسم در حال حرکت رو به پایین باشد مقاومت هوا رو به بالا بر جسم وارد می‌شود بنابراین:



$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-T-f_D=ma$$
$$\Rightarrow ۴۰-۲۰-۵=۴a\Rightarrow ۴a=۱۵$$
$$\Rightarrow a=۳/۷۵m/s^۲$$

همچنین اگر جسم در حال حرکت کندشونده رو به بالا باشد مقاومت هوا رو به پایین به جسم وارد می‌شود بنابراین:



$$F_{net}=ma\Rightarrow T-mg-f_D=ma$$
$$\Rightarrow ۲۰-۴۰-۵=۴a$$
$$\Rightarrow a=-۶/۲۵m/s^۲$$
$$\Rightarrow |a|=۶/۲۵m/s^۲$$

۴ ۹۶۸ B

نکته تا لحظه‌ای که نیروی جلوبر وارد بر یک جسم از نیروهای مقاوم در مقابل حرکت بزرگ‌تر یا مساوی آن باشد، از تندی جسم کاسته نمی‌شود.

تا زمانی که نیروی T از نیروی وزن W بیشتر است تندی در حال افزایش است. با کاهش T نیروی برایند کاهش می‌یابد و تا زمانی که $T=mg=۴۰N$ شود، سرعت در حال افزایش است و در لحظه $T=mg$ سرعت ثابت می‌ماند از این رو اگر نیروی T را از ۸۰N به ۴۰N کاهش دهیم تندی جسم کاهش نمی‌یابد: $\Delta T=۸۰-۴۰=۴۰N$

۱ ۹۶۹ A

در حالت اول که به کمک طناب وزنهٔ ۹۰kg را بالا می‌بریم، نیروی کشش طناب خواهد شد:

$$T>mg\Rightarrow T_{max}-mg=ma\Rightarrow T_{max}-۹۰۰=۹۰a \quad (I)$$

در حالت دوم می‌خواهیم وزنه ۱۱۰kg را پایین ببریم در این حالت حداکثر نیروی کشش طناب با حالت اول برابر است. اما نیروی وزن جسم جدید از نیروی کشش طناب بزرگ‌تر است از این‌رو می‌توانیم بنویسیم:

$$m'g>T\Rightarrow m'g-T_{max}=m'a$$
$$\xrightarrow{m'=۱۱۰kg} ۱۱۰۰-T_{max}=۱۱۰a \quad (II)$$

رابطهٔ (I) و (II) را برهم تقسیم کرده، بیشینه کشش قابل تحمل طناب را حساب می‌کنیم:

$$\frac{T_{max}-۹۰۰}{۱۱۰۰-T_{max}}=\frac{۹}{۱۱}\Rightarrow ۱۱T_{max}-۹۹۰۰=۹۹۰۰-۹T_{max}$$
$$\Rightarrow ۲۰T_{max}=۲\times ۹۹۰۰\Rightarrow T_{max}=۹۹۰N$$

در حالت سوم با این طناب، بار را بکنواخت بالا می‌بریم بنابراین جرم بار خواهد شد:

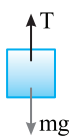
$$F_{net}=ma\Rightarrow T_{max}=m''g\Rightarrow ۹۹۰=m''\times ۱۰\Rightarrow m''=۹۹kg$$

۱ ۹۷۰ A

۱ زمان داده شده بنابراین باید به کمک روابط حرکت‌شناسی شتاب حرکت جسم را حساب کنیم:

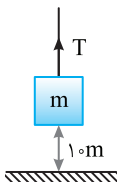
$$a=\frac{v-v_۰}{t}\xrightarrow[v_۰=۰]{t=۴s,v=۱۰m/s}a=\frac{۱۰-۰}{۴}\Rightarrow a=۲/۵m/s^۲$$

۲ نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده سپس به کمک قانون دوم نیوتون نیروی کششی را به‌دست می‌آوریم:



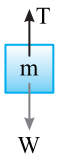
$$F_{net}=ma\Rightarrow T-mg=ma\Rightarrow T-۲۰=۵\Rightarrow T=۲۵N$$

بازی با سوال در شکل روبه‌رو در لحظهٔ نشان داده شده جسم ساکن است، نیروی کشش T را کاهش می‌دهیم تا برابر نصف نیروی وزن شود، تندی جسم هنگام رسیدن به زمین چند m/s است؟ $(g=۱۰N/kg)$



۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

پاسخ **خط فکری** در ابتدا جسم ساکن و نیروی کشش نخ برابر نیروی وزن است $T=mg$ وقتی کشش را کاهش دهیم تا $T'=\frac{mg}{۲}$ جسم شروع به حرکت رو به پایین می‌کند.



ابتدا با توجه به قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

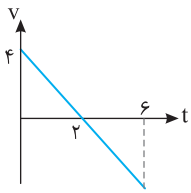
$$F_{net}=ma\Rightarrow T'-mg=ma\Rightarrow \frac{mg}{۲}-mg=ma\Rightarrow a=-\frac{g}{۲}=-۵m/s^۲$$

تندی جسم را هنگام رسیدن به زمین از رابطهٔ مستقل از زمان به دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta y\Rightarrow v^۲=۲\times(۵)(۱۰)\Rightarrow v^۲=۱۰۰\Rightarrow v=۱۰m/s$$

گزینهٔ ۲

۲ ۹۷۱ B

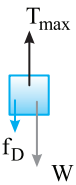


دقت کنید که در تمام مدت حرکت شتاب حرکت ثابت است بنابراین در تمام مدت حرکت نیروی خالص وارد بر جسم ثابت بوده و با توجه به ثابت بودن نیروی وزن، باید نیروی کشش طناب نیز ثابت باشد. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

۳ ۹۷۲ A

خط فکری حداقل زمان وقتی است که شتاب بالا بردن جسم بیشینه مقدار باشد در این صورت باید نیروی کشش نخ بیشترین مقدار یعنی برابر ۱۰N باشد. با توجه به این موضوع شتاب حرکت جسم را به دست آورده سپس به کمک روابط حرکت‌شناسی حداقل زمان را حساب کنید.

نیروهای وارد بر وزنه را رسم می‌کنیم:



۱ جرم جسم را به‌دست می‌آوریم:

$$W=mg\Rightarrow ۵=m\times ۱۰\Rightarrow m=۰/۵kg$$

۲ به کمک قانون دوم نیوتون شتاب را حساب می‌کنیم:

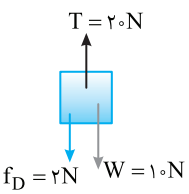
$$F_{net}=ma\Rightarrow T_{max}-W-f_D=ma$$
$$\Rightarrow ۱۰-۵-۱=۰/۵a\Rightarrow a=۸m/s^۲$$

۳
$$\Delta y=\frac{۱}{۲}at^۲\Rightarrow ۱۶=\frac{۱}{۲}\times ۸t^۲\Rightarrow t^۲=۴\Rightarrow t=۲s$$

بازی با سوال به نخی که می‌تواند حداکثر نیروی کشش ۲۰N را تحمل کند، وزنهٔ ۱۰N آویزان است. مقاومت هوا در مقابل حرکت وزنه به طور متوسط ۲ نیوتون است. حداکثر ارتفاعی که در مدت ۱s آغازین حرکت می‌توان وزنه را بالا برد، چند متر است؟ $(g=۱۰N/kg)$

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۱/۵

پاسخ ۱ شکل ساده‌ای از مسئله به همراه نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.



۲ ابتدا جرم وزنه را حساب می‌کنیم:

$$W=mg\Rightarrow ۱۰=m\times ۱۰\Rightarrow m=۱kg$$

۳ به کمک قانون دوم نیوتون شتاب حرکت وزنه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow T-(f_D+W)=ma\Rightarrow ۲۰-(۱۰+۲)=۱a\Rightarrow a=۸m/s^۲$$

۴ در مسئله زمان داده شده بنابراین به سراغ روابط حرکت‌شناسی می‌رویم.

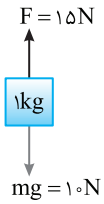
$$\Delta y=\frac{۱}{۲}at^۲\Rightarrow h=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۱\Rightarrow h=۴m$$

گزینهٔ ۲

C ۹۷۳ ۳

خط فکری جسم را با نیروی $F=۱۵N$ رو به بالا برده‌ایم، سپس این نیرو را حذف کرده‌ایم. مشکل خیلی از دانش‌آموزان از اینجا شروع می‌شود. زیرا تصور می‌کنند که با حذف نیروی F جسم دیگر بالا نمی‌رود در حالی که جسم در مدت $۳s$ سرعت پیدا کرده و وقتی F حذف می‌شود، به دلیل قانون اول نیوتون جسم تمایل دارد وضع موجود خود یعنی حرکت رو به بالا را ادامه دهد. به همین دلیل به بالا رفتن ادامه می‌دهد اما تحت تأثیر نیروی وزن از سرعتش کاسته شده و سرانجام متوقف می‌گردد و به سوی زمین بر می‌گردد. شما یک بار جابه‌جایی در حرکت تندشونده اول مسیر و بار دیگر جابه‌جایی پس از حذف F تا لحظهٔ توقف را باید حساب کرده باهم جمع کنید.

۱ شتاب حرکت جسم با حضور نیروی $F=۱۵N$ را حساب می‌کنیم.



$$F_{net}=ma\Rightarrow F-mg=ma\Rightarrow ۱۵-۱۰=a$$
$$\Rightarrow a=۵m/s^۲$$

۲ جابه‌جایی جسم در مدت $۳s$ خواهد شد:

$$\Delta y_۱=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow \Delta y_۱=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۹=۲۲/۵m$$

۳ تندی جسم در پایان این $۳s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=۳\times ۵\Rightarrow v=۱۵m/s$$

۴ با حذف نیروی F تنها نیروی مؤثر وارد بر جسم نیروی وزن است بنابراین شتاب قسمت کندشونده خواهد شد:

$$F_{net}=ma\Rightarrow ۰-mg=ma\Rightarrow a=-۱۰m/s^۲$$

۵ در ابتدای حذف F، سرعت جسم $۱۵m/s$ است بنابراین به کمک رابطهٔ مستقل از زمان مقدار بالا رفتن جسم را به‌دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta y\Rightarrow ۰-۱۵^۲=۲(-۱۰)\Delta y_۲\Rightarrow \Delta y_۲=۱۱/۲۵m$$

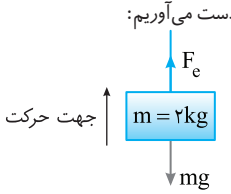
۶ حداکثر ارتفاع بالا رفتن جسم برابر است با:

$$\Delta y_{کل}=\Delta y_۱+\Delta y_۲=۲۲/۵+۱۱/۲۵=۳۳/۷۵m$$

A ۹۷۴ ۳

بر جسم نیروهای وزن $W=mg$ و نیروی کشسانی فنر $F_e=k\Delta x$ وارد می‌شود.

با توجه به قانون دوم نیوتون نیروی کشسانی فنر را به‌دست می‌آوریم:



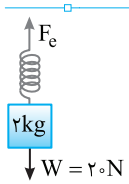
$$F_{net}=ma\Rightarrow F_e-mg=ma$$
$$\Rightarrow F_e-۲۰=۴\Rightarrow F_e=۲۴N$$

تغییر طول فنر را حساب می‌کنیم:

$$F_e=k\Delta x\xrightarrow{k=۴۰۰N/m}۲۴=۴۰۰\Delta x$$
$$\Rightarrow \Delta x=۰/۰۶m\Rightarrow \Delta x=۶cm$$

B ۹۷۵ ۲

۱ دوباره حضور حرکت‌شناسی در مسئله را می‌بینید. باید ابتدا با مقایسهٔ معادلهٔ سرعت زمان مسئله $v=۴t+۲$ با معادلهٔ سرعت زمان حرکت با شتاب ثابت شتاب حرکت را به‌دست بیاورید. $v=at+v_۰$ ، $v=۴t+۲\Rightarrow a=۴m/s^۲$



۲ شکل ساده‌ای به همراه نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.

۳ قانون دوم نیوتون را نوشته و نیروی کشسانی فنر را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F_e-W=ma\xrightarrow{m=۲kg}F_e-۲\times ۱۰=۲\times ۴\Rightarrow F_e=۲۸N$$

۴ تغییر طول فنر را حساب می‌کنیم:

$$F_e=kx\xrightarrow{k=۲N/cm=۲۰۰N/m}۲۸=۲۰۰x\Rightarrow x=۰/۱۴m\Rightarrow x=۱۴cm$$

بازی با سوال **جسمی به جرم $۲kg$ تحت تأثیر نیروی T رو به بالا در حرکت است و معادلهٔ سرعت - زمان آن $v=۴t+۱۰$ است. نیروی T چند نیوتون می‌باشد؟ $(g=۱۰N/kg)$**

۱) ۱۲ ۲) ۲۸ ۳) ۱۵ ۴) ۳۵

پاسخ **معادلهٔ سرعت - زمان حرکت با شتاب ثابت برابر $v=at+v_۰$ است، بنابراین شتاب این حرکت $۴m/s^۲$ می‌باشد.**

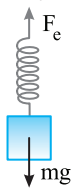
$$F_{net}=ma\Rightarrow T-mg=ma\Rightarrow T-۲۰=۸\Rightarrow T=۲۸N$$

گزینهٔ ۲

B ۹۷۶ ۳

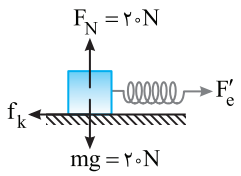
خط فکری ابتدا با نوشتن تعادل در راستای قائم ضریب سختی فنر را به‌دست می‌آوریم. سپس با نوشتن معادلهٔ تعادل افقی مقدار نیروی اصطکاک و درنهایت ضریب اصطکاک جنبشی به دست می‌آید. در مراحل زیر محاسبات لازم را انجام می‌دهیم.

۱ در حالت اول به جسم نیروی کشش فنر به سمت بالا و نیروی وزن به سمت پایین وارد می‌شود:



$$F_{net}=ma\Rightarrow F_e-mg=ma\Rightarrow k\Delta x-mg=ma$$
$$\Rightarrow k\left(\frac{۴۲}{۱۰۰}-\frac{۳۰}{۱۰۰}\right)-۲۰=۲\times ۲\Rightarrow k=۲۰۰N/m$$

۲ در حالت دوم نیروی کشش فنر در جهت حرکت و نیروی اصطکاک خلاف جهت به جسم وارد می‌شود:



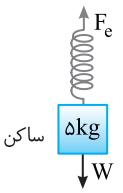
$$F_{net}=ma\Rightarrow F'_e-f_k=ma'$$
$$\Rightarrow k\Delta x'-f_k=ma'$$
$$\Rightarrow ۲۰۰\times\left(\frac{۶}{۱۰۰}\right)-f_k=۲\times ۲\Rightarrow f_k=۸N$$

۳ نیروی اصطکاک برابر است با:

$$f_k=\mu_k F_N\Rightarrow ۸=\mu_k(۲۰)\Rightarrow \mu_k=۰/۴$$

B ۹۷۷ ۳

۱ در حالت اول جسم در حال تعادل است، بنابراین نیروی کشسانی فنر و نیروی وزن وارد بر وزنه متوازن هستند.

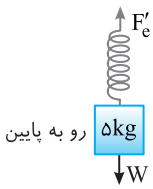


$$F_e=W\Rightarrow F_e=۵\times ۱۰\Rightarrow F_e=۵۰N$$

۲ ثابت فنر را حساب می‌کنیم:

$$F_e=kx\xrightarrow{x=۰/۰۵m}۵۰=k(۰/۰۵)$$
$$\Rightarrow k=۱۰۰۰N/m$$

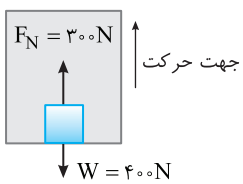
۳ در حالت دوم وزنه را با شتاب $۳m/s^۲$ پایین می‌آوریم، در این حالت $mg>F_e$ است و بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:



$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F'_e=ma$$
$$\Rightarrow ۵۰-kx'=۵\times ۳$$
$$۵۰-۱۰۰۰x'=۱۵\Rightarrow ۱۰۰۰x'=۳۵$$
$$\Rightarrow x'=\frac{۳۵}{۱۰۰۰}m\Rightarrow x'=۳/۵cm$$

A ۹۷۸ ۳

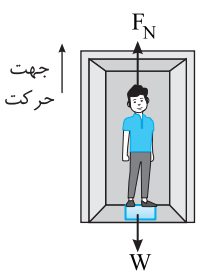
دقت کنید وزن جسم $۴۰۰N$ است اما نیرویی که جسم به کف آسانسور وارد می‌کند $۴۰۰N$ نیست. با توجه به اینکه سطح کف آسانسور بر جسم نیروی $۳۰۰N$ وارد کرده است بنا به قانون سوم نیوتون جسم نیز نیرویی برابر آن و در خلاف جهت به کف آسانسور یعنی نیروی $۳۰۰N$ را وارد می‌کند.



اما چگونه این حالت ممکن است؟ جسم در حال حرکت رو به بالاست و اگر حرکت آسانسور کندشونده باشد، نیروی رو به بالا (F_N) از نیروی رو به پایین (W) کوچک‌تر است.

B ۹۷۹ ۴

بر شخص درون آسانسور دو نیروی وزن W و عمودی سطح F_N وارد می‌شود. نیروی F_N توسط کف آسانسور بر شخص وارد می‌شود، پس بنابر قانون سوم نیوتون، شخص نیز بر کف نیرویی برابر F_N رو به پایین وارد می‌کند. F_N را در حالت‌های مختلف بررسی می‌کنیم. اگر سرعت آسانسور ثابت باشد، $F_N=W$ است. اگر با حرکت تندشونده بالا برود،



$F_N>W$ است و اگر با حرکت کندشونده بالا رود، $F_N<W$ است. بنابراین نیرویی که شخص بر کف وارد می‌کند می‌تواند برابر، کمتر یا بیشتر از وزن مشخص باشد.

بازی با سؤال شخصی به جرم m درون آسانسوری که حرکت شتابدار دارد ایستاده است و آسانسور به طرف بالا حرکت می‌کند، نیرویی که کف آسانسور به شخصی وارد می‌کند را F می‌نامیم. کدام گزینه درست است؟

۱) الزاماً $F=0$

۲) الزاماً $F<mg$

۳) الزاماً $F>mg$

۴) بسته به حرکت آسانسور، هر سه گزینه می‌تواند باشد.

پاسخ جهت حرکت جسم رو به بالا است. اما نوع حرکت مشخص نیست اگر حرکت تندشونده باشد $F>W$ است، اگر حرکت کندشونده باشد $F<W$ است و اگر جسم با حرکت کندشونده با شتاب g رو به بالا حرکت کند، نیروی $F=0$ خواهد بود.

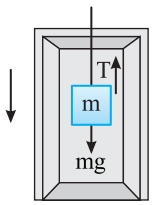
گزینهٔ ۴

۹۸۰ B ۳

خط فکری در حرکت آسانسور، قانون دوم نیوتون به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix}\text{نیروی در}\\ \text{جهت حرکت}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\text{نیروی خلاف}\\ \text{جهت حرکت}\end{bmatrix}=m(\pm a)$$

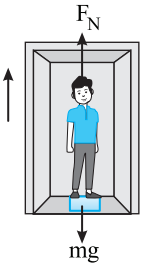
(حرکت تندشونده: $+a$، حرکت کندشونده: $-a$)



به طور مثال اگر آسانسور پایین بیاید: $mg-T=m(\pm a)$

نکته عددی که باسکول نشان می‌دهد برابر نیروی عمودی سطحی است که به شخص وارد می‌شود.

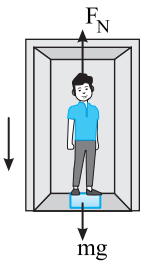
۱ اگر آسانسور به سمت بالا در حال حرکت باشد، نیروی در جهت حرکت F_N و نیرو خلاف جهت حرکت mg است.



$$F_{net}=ma\Rightarrow F_N-mg=m(\pm a)$$
$$\Rightarrow F_N=mg+m(\pm a)$$

برای آن‌که $F_N>mg$ باشد باید a مثبت باشد تا با mg جمع شود پس طبق خط فکری در حرکت به سمت بالا، حرکت تندشونده است.

۲ اگر آسانسور به سمت پایین در حال حرکت باشد، نیرو در خلاف جهت حرکت F_N و نیروی در جهت حرکت mg است:



$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_N=m(\pm a)$$
$$\Rightarrow F_N=mg-m(\pm a)$$

برای آن‌که $F_N>mg$ باشد باید a منفی باشد تا mg از یک عدد منفی کم شود:

$$F_N=mg-m(-a)\xrightarrow{\text{منفی در منفی، مثبت می‌شود}}F_N=mg+ma$$

پس در حرکت به سمت پایین باید حرکت کندشونده $(a<0)$ باشد.

بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

میانبر اگر در آسانسور دو نیرو، یکی در جهت حرکت و دیگری خلاف جهت حرکت به جسم وارد شود:

- حرکت تندشونده روبه بالا یا کندشونده رو به پایین:

نیرو خلاف جهت حرکت > نیرو در جهت حرکت

- حرکت تندشونده روبه پایین یا کندشونده رو به بالا:

نیرو خلاف جهت حرکت < نیرو در جهت حرکت

۹۸۱ B ۴

یادآوری در حرکت شتابدار آسانسور با شتاب ثابت چهار حالت وجود دارد که دو حالت آن‌ها معادل هم هستند.

۱ حرکت تندشونده رو به بالا، با حرکت کندشونده رو به پایین با همان شتاب معادل است. زیرا در این دو حالت نیروی بالابر وارد بر جسم (F_N) از نیروی وزن جسم (W) بزرگتر است و در هر دو حالت می‌توان نوشت: $F_N-W=ma\Rightarrow F_N=mg+ma$

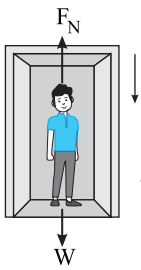
۲ حرکت تندشونده رو به پایین با حرکت کندشونده رو به بالا با همان شتاب معادل است. در این دو حالت یکسان، نیروی F_N از W کوچکتر است و در دو حالت خواهیم داشت: $W-F_N=ma\Rightarrow F_N=mg-ma$

بنابراین حرکت تندشونده رو به بالا با شتاب $3m/s^2$ با حرکت کندشونده رو به پایین با شتاب $3m/s^2$ معادل است و در هر دو حالت نیروی وارد بر جسم توسط کف آسانسور یکسان است و بنا به قانون سوم نیوتون نیرویی که جسم بر تکیه‌گاه وارد می‌کند نیز برابر (F) است.

۹۸۲ A ۴

خط فکری به جای نیروی شخص وارد بر آسانسور ابتدا نیرویی که آسانسور رو به بالا به شخص وارد می‌کند را حساب کنید.

حرکت تندشونده رو به پایین است از این‌رو $F_N<W$ خواهد بود، نیروهای وارد بر شخص را رسم کرده به کمک قانون دوم نیوتون نیرویی که کف آسانسور بر شخص (F_N) وارد می‌کند را حساب می‌کنیم.



$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_N=ma$$
$$\Rightarrow 800-F_N=80\times 2\Rightarrow F_N=640N$$

آسانسور بر شخص نیروی $640N$ را رو به بالا وارد می‌کند. بنا به قانون سوم نیوتون شخص نیز بر کف آسانسور نیروی $640N$ را رو به پایین وارد می‌کند.

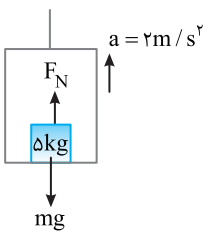
۹۸۳ B ۳

خط فکری در حرکت آسانسور که به جسم دو نیروی عمودی سطح F_N و نیروی وزن mg وارد می‌شود برای محاسبهٔ برایند نیروها (F_{net}) باید نیروی در جهت حرکت را از نیروی خلاف جهت حرکت کم کرد:

$$F_{net}=ma\Rightarrow\begin{cases}a>0 & \text{حرکت تندشونده}\\ a<0 & \text{حرکت کندشونده}\end{cases}$$

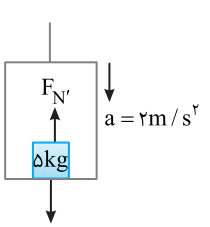
F_{net} ↓ نیروی خلاف جهت حرکت - نیروی در جهت حرکت

در حالت اول داریم:



$$F_{net}=ma\xrightarrow{\text{جسم رو به بالا حرکت می‌کند}}$$
$$F_N-mg=ma\Rightarrow F_N-50=10\Rightarrow F_N=60N$$

در حالت دوم داریم:



$$F_{net}=ma\xrightarrow{\text{جسم رو به پایین حرکت می‌کند}}$$
$$mg-F_{N'}=ma\Rightarrow 50-F_{N'}=10\Rightarrow F_{N'}=40N$$

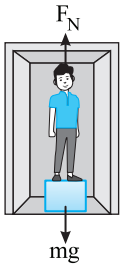
اختلاف نیروی عمودی سطح برابر است با:

$$F_N-F_{N'}=60-40=20N$$

میانبر هرگاه آسانسور یکبار با شتاب a رو به بالا و بار دیگر با همان شتاب رو به پایین حرکت کند اختلاف نیروی عمودی سطح برابر $2mg$ است (البته باید نوع حرکت (تندشونده یا کندشونده در دو حالت یکسان باشد).

B ۹۸۴ ۱

نیرویی که ترازو نشـان می‌دهد همان نیروی عمودی سطح است که توسط ترازو بر شخص وارد می‌شود. شتاب حرکت را با قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آوریم:

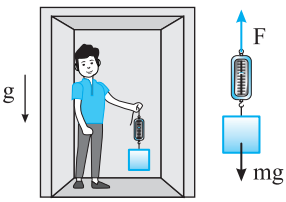


$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_N=ma\Rightarrow ۶۰۰-۴۸۰=۶۰a$$
$$\Rightarrow a=۲m/s^۲$$

بنابرایـن گزینهٔ (۳) و (۴) که در آن‌ها شـتاب $\frac{۱}{۲}m/s^۲$ اسـت نادرست هستند. اما بین گزینهٔ (۱) و (۲) چون نیروی وزن رو به پایین $(۶۰۰N)$ از نیروی عمودی سـطح $(۴۸۰N)$ بزرگتـر بوده بنابراین نیروی خالص وارد بر شخص رو به پایین است. بنا به قانون دوم نیوتون همواره جهت شتاب در جهت نیروی خالص است از این‌رو جهت شتاب نیرو رو به پایین است.

A ۹۸۵ ۴

خط فکری سـؤال زیبایی اسـت. ابتدا فرض کنید که بر جسم دو نیرو یکی وزن و دیگری نیرو کشسانی نیروسنج وارد می‌شود. سپس با توجه به شتاب رو به پایین حرکت آسانسور نیروی نیروسنج را حساب کنید.



با توجه به نیروهای وارد بر جسم:

$$F_{net}=ma\xrightarrow{a=g}$$
$$mg-F=m(g)\Rightarrow F=۰$$

بنابراین نیروسـنج صفر را نشان می‌دهد. این وضعیت را حالت بی‌وزنی گویند. در حالت بی‌وزنی تنها نیروی مؤثر وارد بر جسم نیروی وزن بوده و شـتاب جسم برابر شـتاب گرانش g اسـت. البته به آن حالت بی وزنی می‌گویند زیرا وزن جسم صفر نیست و جسم، شخص و آسانسور تحت تأثیر نیروی وزن در حال حرکت رو به پایین هستند.

A ۹۸۶ ۱

وقتی که کابل پاره می‌شود و تنها نیروی وارد بر شخص نیروی وزن است که در این حالت نیروسنج بر شخص و شخص بر نیروسنج نیرو وارد نمی‌کند و عددی که نیروسنج نمایش می‌دهد عدد صفر است.

A ۹۸۷ ۴

بنابه تعریف فشار:

$$P=\frac{F_N}{A}$$

هنگام سـقوط سـطل، تنها نیروی وارد بر مایع، نیروی وزن اسـت و نیروی عمودی کف ظرف بر مایع صفر است $(F_N=۰)$ در نتیجه فشار در کف سطل صفر است.

B ۹۸۸ ۳

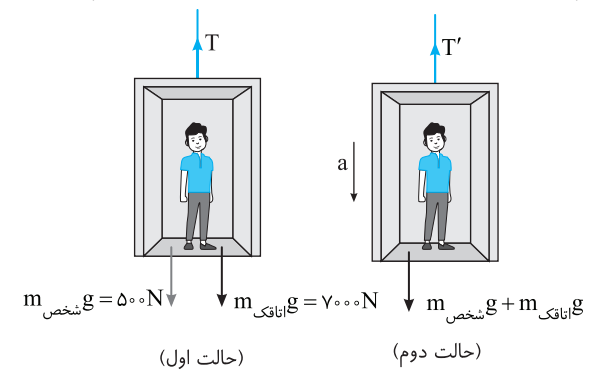
در حالت اول آسانسـور با تندی ثابت در حال حرکت اسـت پس نیروهای وارد بر جسـم متوازن است و نیروی کشش کابل با مجموع نیروی وزن آسانسور و شخص برابر است.

$$T=m_{\text{شخص}}g+m_{\text{اتاقک}}g=۷۵۰۰N$$

در حالت دوم می‌خواهیم آسانسور با شتاب $۲m/s^۲$ کندشونده رو به پایین حرکت کند در این حالت:

$$F_{net}=ma\xrightarrow{T'>W}T'-(m_{\text{شخص}}g+m_{\text{اتاقک}}g)=m_{\text{کل}}a$$
$$T'-۷۵۰۰=۷۵۰\times۲\Rightarrow T'=۹۰۰۰N$$

بنابراین کشش کابل باید به اندازهٔ $T'-T=۹۰۰۰-۷۵۰۰=۱۵۰۰N$ افزایش یابد.

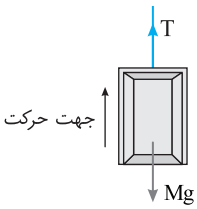


در حل مسـائل آسانسور می‌توان این‌گونه عمل کرد که با توجه به جهت حرکت آسانسور و نوع حرکت آن نیروی بزرگتر را تشخیص داده و نیروی بزرگتر را منهای نیروی کوچکتر کرده و شتاب را به‌دست آورد. در این حالت همواره شتاب مثبت خواهد بود.

روش دیگر این‌گونه اسـت که نیروهـای در جهت حرکت را منهای نیروهای خلاف جهت حرکت می‌کنیم. اگر حرکت تندشونده باشد شتاب را مثبت و اگر حرکت کندشونده باشد شتاب را منفی قرار می‌دهیم. به‌طور مثال در حل این مسئله آسانسور رو به پایین در حرکت است نیرویی در جهت حرکت وزن و خلاف آن کشش کابل است و چون حرکت کندشونده است شتاب نیز منفی است بنابراین می‌توان نوشت: $mg-T'=ma\Rightarrow ۷۵۰۰-T'=۷۵۰(-۲)\Rightarrow T'=۹۰۰۰N$

B ۹۸۹ ۴

۱ در حالت اول آسانسور در حال بالا رفتن است بنابراین:



$$F_{net}=Ma\Rightarrow T-Mg=Ma$$
$$\Rightarrow T=M(a+g)$$

۲ در حالـت دوم آسانسـور در حـال پایین آمدن است بنابراین:

$$F_{net}=ma\Rightarrow Mg-T'=Ma\Rightarrow T'=M(g-a)$$

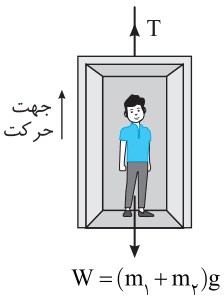
۳ با توجه به صورت سؤال $\frac{T}{T'}=۱/۵$ است:

$$\frac{T}{T'}=\frac{M(a+g)}{M(g-a)}=۱/۵\Rightarrow\frac{a+g}{g-a}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۲a+۲g=۳g-۳a\Rightarrow ۵a=g\Rightarrow a=\frac{g}{۵}$$

B ۹۹۰ ۱

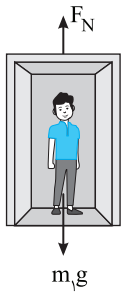
خط فکری ابتدا کل آسانسـور را یک جسـم فرض می‌کنیم که توسط نیروی کشش کابل به حرکت درآمده است و شتاب حرکت را حساب می‌کنیم سپس نیروهای وارد بر شخص را رسم کرده و نیروی F_N که از کف آسانسور به شخص وارد می‌شود را به‌دست می‌آوریم:

۱ شتاب حرکت آسانسور را حساب می‌کنیم:



$$F_{net}=ma$$
$$\Rightarrow T-(m_۱+m_۲)g=(m_۱+m_۲)a$$
$$\xrightarrow{m_۱=۶۰kg\,,m_۲=۱۴۰kg\atop T=۲۲۰۰N}$$
$$۲۲۰۰-(۶۰+۱۴۰)\times۱۰=(۶۰+۱۴۰)\times a$$
$$\Rightarrow a=۱m/s^۲$$

۲ نیرویی که کف آسانسـور بر شـخص وارد می‌کند را به‌دست می‌آوریم:



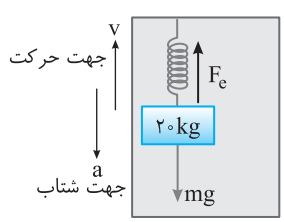
$$F_{net}=ma\Rightarrow F_N-m_۱g=m_۱a$$
$$\Rightarrow F_N-۶۰۰=۶۰\times۱\Rightarrow F_N=۶۶۰N$$

۳ بنا به قانون سوم نیوتون، نیرویی که شخص بر کف آسانسور وارد می‌کند، هم‌اندازه و هم‌جهت با F_N است یعنی $۶۶۰N$ و رو به پایین و خلاف جهت محور yهاست:

$$\vec{F}=-۶۶۰\vec{j}$$

A ۹۹۱ ۲

جسم رو به بالا دارای حرکت کندشونده اسـت بنابراین نیروی کشسانی فنر وارد بر وزنه از نیروی وزن جسم کمتر است.

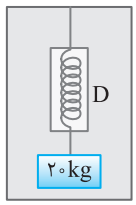


$$F_e<W\Rightarrow mg-F_e=ma$$
$$\Rightarrow ۲۰۰-F_e=۲۰\times۲/۵\Rightarrow F_e=۱۵۰N$$

روش دیگـر: نیروی در جهت حرکت را منهای نیروی خلاف جهت حرکت کرده، نیروی خالص را به‌دست می‌آوریم:

$$F-mg=ma\xrightarrow[a=-۲/۵m/s^۲]{\text{حرکت کندشونده}}F-۲۰\times۱۰=۲۰\times(-۲/۵)\Rightarrow F=۱۵۰N$$

بازی با سؤال شکل روبه‌رو اتاقک آسانسوری را نشان می‌دهد که در یک فاصلهٔ زمانی کوتاه، تندشونده با شتاب $2/5\,m/s^2$ رو به بالا در حال حرکت است. نیروسنج D در این حالت چند نیوتون را نشان می‌دهد؟ $(g=10\,N/kg)$



۱) ۵۰ ۲) ۱۵۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۵۰

پاسخ نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و به کمک قانون دوم نیوتون عددی که نیروسنج نشان می‌دهد را به دست می‌آوریم:

$$F_e-mg=ma\Rightarrow F_e-200=20\times 2/5\Rightarrow F_e=250\,N$$

گزینهٔ ۴

B ۹۹۲ ۳

در حال سکون، نیروسنج وزن وزنه را نشان می‌دهد.

$$W=F_e=8\,N\Rightarrow mg=8\Rightarrow m=0/8\,kg$$

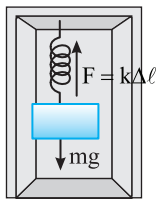
با شروع حرکت آسانسور رو به پایین خواهیم داشت:

$$F_{net}=ma\Rightarrow W-F_e=ma\Rightarrow 8-F_e=0/8\times 2/5\Rightarrow F_e=6\,N$$

A ۹۹۳ ۲

خط فکری نیروهای وارد بر وزنه را رسم کنید. (نیروی وزن و نیروی کشسانی فنر) سپس نیروی خالص وارد بر وزنه را بنا به قانون دوم نیوتون $(F=ma)$ حساب کنید.

۱) هنگام بالا رفتن آسانسور با شتاب تندشونده نیروی کشسانی فنر F_1 از نیروی وزن (mg) بزرگ‌تر است و بنا به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:



$$F_1>mg\Rightarrow F_1-mg=ma\Rightarrow F_1-mg=m\times 2$$
$$\Rightarrow F_1=12m \quad (1)$$

۲) هنگام پایین آمدن آسانسور با شتاب تندشونده نیروی وزن (mg) از نیروی کشسانی فنر F_2 بزرگ‌تر است بنابراین می‌توان نوشت:

$$F_2<mg\Rightarrow mg-F_2=ma\Rightarrow mg-F_2=m\times 2\Rightarrow F_2=8m \quad (2)$$

اکنون نسبت $\frac{F_2}{F_1}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{F_2}{F_1}=\frac{8m}{12m}=\frac{2}{3}$$

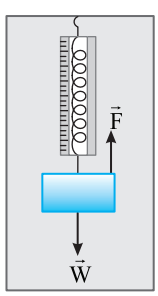
میانبر تغییر البته بدون حل با توجه به اینکه $F_1>mg$ و $F_2<mg$ است قطعاً $F_1>F_2$ بوده و تنها نسبت کوچک‌تر از ۱، گزینهٔ (۲) است و می‌توان گزینهٔ درست را انتخاب کرد.

بازی با سؤال جسمی به انتهای نیروسنجی درون یک آسانسور آویزان است. تفاوت نیروی کشسانی فنر وقتی آسانسور با شتاب $0/4\,m/s^2$ با حرکت تندشونده بالا می‌رود و هنگامی‌که با سرعت ثابت $2\,m/s$ پایین می‌آید، برابر $1\,N$ است. جرم این جسم چند کیلوگرم است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۵ ۴) ۰/۸

پاسخ عددی که نیروسنج نشان می‌دهد برابر نیروی کشسانی فنر نیروسنج است.

۱) هنگامی‌که آسانسور تندشونده بالا می‌رود:



$$F>W\Rightarrow F-mg=ma\Rightarrow F=mg+ma \quad (1)$$

۲) هنگامی‌که آسانسور با سرعت ثابت پایین می‌آید:

$$F_{net}=0\Rightarrow F'=mg \quad (2)$$

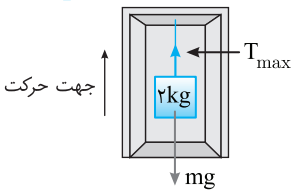
۳) با توجه به رابطهٔ (۱) و (۲):

$$F-F'=1\Rightarrow mg+ma-mg=1\Rightarrow m(0/4)=1\Rightarrow m=2/5\,kg$$

گزینهٔ ۲

A ۹۹۴ ۴

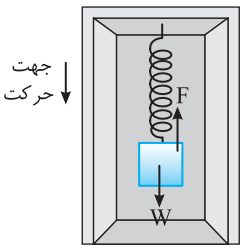
بیشینهٔ شتاب زمانی اتفاق می‌افتد که کشش طناب بیشینه باشد. نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و به کمک قانون دوم نیوتون شتاب را حساب می‌کنیم.



$$T_{max}-mg=ma_{max}\Rightarrow 25-20=2a_{max}\Rightarrow a_{max}=2/5\,m/s^2$$

B ۹۹۵ ۱

آسانسور از حال سکون رو به پایین شروع به حرکت می‌کند. نیروهای وارد بر وزنه را رسم می‌کنیم. بر وزنه دو نیرو وارد می‌شود: (۱) وزن رو به پایین (۲) نیروی کشسانی فنر رو به بالا بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

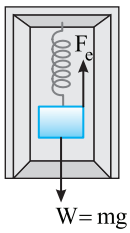


$$F_{net}=ma\Rightarrow W-F=ma\Rightarrow mg-kx=ma$$

$$\xrightarrow[k=200\,N/m\,,\,a=1\,m/s^2]{x=35-26=9\,cm} m\times 10-200\times\frac{9}{100}=m\times 1$$
$$\Rightarrow 10m-m=18\Rightarrow 9m=18\Rightarrow m=2\,kg$$

B ۹۹۶ ۴

۱) مطابق شکل روبه‌رو، در یک شکل ساده نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:

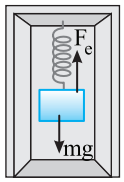


نکته در استفاده از قانون دوم نیوتون به نکات زیر دقت کنید:

$$F_{net}=ma\Rightarrow\begin{cases}a>0: \text{حرکت تندشونده}\\ a<0: \text{حرکت کندشونده}\end{cases}$$

$F_{net}=$ نیرو خلاف جهت حرکت − نیرو در جهت حرکت

۲) آسانسور در حال حرکت به سمت بالا و در حال ترمز بوده $(a=-2\,m/s^2)$ است، با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:



$$F_{net}=ma$$
$$\xrightarrow[a=-2\,m/s^2]{F_{net}=\text{نیرو خلاف جهت حرکت}-\text{نیرو در جهت حرکت}}$$
$$F_e-mg=ma\xrightarrow[m=0/8\,kg]{mg=8\,N}$$
$$F_e-8=0/8\times(-2)\Rightarrow F_e-8=-1/6\Rightarrow F_e=6/4\,N$$

یادآوری نیروی فنر برابر $F_e=k\Delta x$ است:

$$F_e=k\Delta x$$

نکته در رابطهٔ $F_e=k\Delta x$ اگر یکای ثابت فنر N/m باشد، تغییر طول فنر نیز برحسب m قرار می‌گیرد و اگر ثابت فنر برحسب N/cm داده شد می‌توان یکای تغییر طول فنر را نیز cm قرار داد.

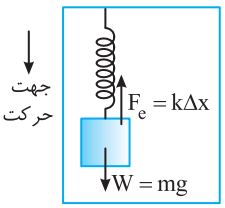
$$6/4=2\times\Delta x\Rightarrow\Delta x=3/2\,cm$$

نیروی وزن (mg) فنر را به سمت پایین می‌کشد و بزرگی شتاب حرکت $2\,m/s^2$ بوده و از $g=10\,m/s^2$ کمتر است پس فنر کشیده خواهد شد:

$$x_2-x_1=3/2\xrightarrow{x_1=20\,cm}x_2-20=3/2\Rightarrow x_2=23/2\,cm$$

B ۹۹۷ ۳

نکته شتاب حرکت رو به پایین است، در این صورت اگر حرکت آسانسور نیز رو به پایین باشد، حرکت تندشونده رو به پایین بوده و اگر حرکت آسانسور رو به بالا باشد، حرکت کندشونده رو به بالا است که در هر دو صورت تحلیل یکسان خواهد بود.



آسانسور با شتاب ثابت $2\,m/s^2$ رو به پایین در حرکت است و با توجه به قانون دوم نیوتون

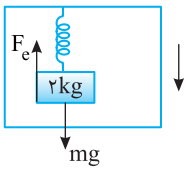
می‌توان نوشت:

$$F_{net}=ma\Rightarrow W-F_e=ma\Rightarrow mg-k\Delta x=ma \xrightarrow[a=2m/s^2]{m=3kg,k=400N/m}$$

$$30-400\times\Delta x=3\times2\Rightarrow24=400\Delta x\Rightarrow\Delta x=0/06m=6cm$$

طول فنر خواهد شد: $\Delta x=x_2-x_1\Rightarrow6=x_2-42\Rightarrow x_2=48cm$

B ۴ ۹۹۸



نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_e=ma\Rightarrow20-F_e=4$$

$$\Rightarrow F_e=16N$$

نیروی فنر از رابطهٔ $F_e=k\Delta x$ به‌دست می‌آید:

$$k\Delta x=16\Rightarrow400\Delta x=16\Rightarrow\Delta x=\frac{4}{100}m=4cm$$

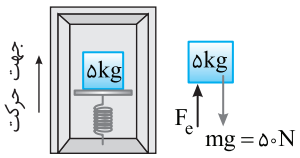
بنابراین طول فنر ۴cm کشیده شده: $x_2=x_1+\Delta x\Rightarrow x_2=30+4=34cm$

B ۴ ۹۹۹

آسانسور در حال حرکت کندشونده رو به بالا است، بنابراین نیروهای رو به پایین یعنی وزن از نیروی رو به بالا یعنی F_e بیشتر است.

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_e=ma\Rightarrow50-F_e=10\Rightarrow F_e=40N$$

$$F_e=k\Delta x\Rightarrow40=200\Delta x\Rightarrow\Delta x=\frac{1}{5}m=20cm$$



روش دیگر: نیروی کشسانی فنر وارد بر جسم (F_e) در جهت حرکت جسم و نیروی وزن (W) در خلاف جهت حرکت جسم است.

$ma=$نیروهای خلاف جهت حرکت$-$نیروهای در جهت حرکت

$$F_e-W=ma \xrightarrow[\text{شتاب منفی}]{\text{حرکت کندشونده}}$$

$$F_e-50=5\times(-2)\Rightarrow F_e=40N$$

بقیه حل شبیه روش اول است.

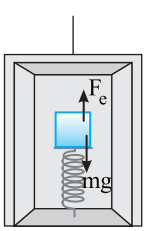
B ۲ ۱۰۰۰

خط فکری ابتدا با توجه به اینکه آسانسور در ابتدا ساکن بوده، با استفاده از متوازن بودن نیروها، طول طبیعی فنر را حساب می‌کنیم و در گام بعدی به کمک قانون دوم نیوتون تغییر طول فنر در حرکت با شتاب $2m/s^2$ را به‌دست می‌آوریم. با داشتن طول طبیعی و تغییر طول در حالت دوم می‌توان طول ثانویه را به‌دست آورد.

نکته در رابطهٔ نیروی فنر $F_e=k\Delta x$:

- اگر k برحسب N/m باشد، تغییر طول فنر را برحسب متر قرار می‌دهیم.
- اگر k برحسب N/cm باشد، می‌توان تغییر طول فنر را برحسب سانتی‌متر قرار داد.

۱ نیروهای وارد بر جسم را رسم کنیم، در ابتدا آسانسور ساکن است:

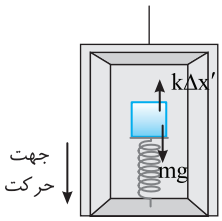


جسم در حال تعادل: $F_{net}=0\Rightarrow F_e=mg\Rightarrow k\Delta x=mg$

$$\Rightarrow10\times\Delta x=100\Rightarrow\Delta x=10cm$$

طول ثانویه نیز در این حالت ۶۰cm باشد و می‌دانیم فنر ۱۰cm فشرده شده چون جسم روی آن قرار گرفته پس طول اولیه باید ۷۰cm باشد.

۲ در حالت دوم آسانسور با شتاب $2m/s^2$ به سمت پایین شروع به حرکت می‌کند، نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و برایند نیروها را با توجه به اینکه نیروها در جهت حرکت از نیروهای خلاف جهت حرکت کم می‌شود به‌دست آورد.



در این حالت چون آسانسور شروع به حرکت کرده و حرکت تندشونده است، در معادله، شتاب را مثبت می‌گیریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-k\Delta x'=ma\Rightarrow100-10\Delta x'=20\Rightarrow10\Delta x'=80$$

$$\Rightarrow\Delta x'=8cm$$

نکته نیروی کشسانی فنر در خلاف جهت تغییر طول آن است. در این مسئله نیروی کشسانی فنر رو به بالا بوده بنابراین تغییر طول فنر از حالت طبیعی رو به پایین است یعنی فنر فشرده شده و طول آن خواهد شد: $70-8=62cm$

میانبر تغییر طول فنر هرگاه حرکت آسانسور تندشوندهٔ رو به بالا و یا کندشوندهٔ رو به پایین باشد از تغییر طول فنر از حالتی که آسانسور ساکن است بیشتر است. تغییر طول فنر هرگاه حرکت آسانسور کندشوندهٔ رو به بالا و یا تندشوندهٔ رو به پایین باشد از تغییر طول فنر از حالتی که آسانسور ساکن است کمتر است.

در این سوال در حالت دوم تغییر طول مجدد فنر به دلیل شتاب حرکت است:

$$k\Delta x=ma\Rightarrow10\times\Delta x=20\Rightarrow\Delta x=2cm$$

در حالت اول نیروی کشسانی فنر برابر نیروی وزن است.

در حالت دوم نیروی کشسانی فنر از نیروی وزن کمتر است.

با کاهش نیروی کشسانی، تغییر طول فنر 2cm کاهش یافته یعنی 2cm فشردگی کمتر شده بنابراین طول آن از 60cm به 62cm افزایش می‌یابد.

B ۲ ۱۰۰۱

خط فکری در سؤالاتی مانند مسائل آسانسور که نیروهای وارد بر جسم هم‌راستای هستند، می‌توان قانون دوم نیوتون را به صورت زیر نوشت:

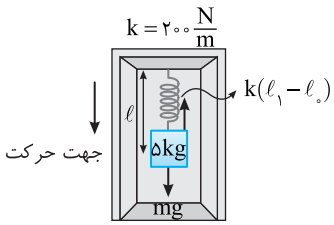
$$F_{net}=ma$$

$$\Rightarrow ma=\text{نیرو در خلاف جهت حرکت}-\text{نیرو در جهت حرکت}\begin{cases}a>0:\text{تندشونده}\\a<0:\text{کندشونده}\end{cases}$$

حالت اول: آسانسور در حال پایین رفتن بوده و mg نیرو در جهت حرکت است. حرکت تندشونده بوده و شتاب $+2m/s^2$ گرفته می‌شود.

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-k(\ell_1-\ell_0)=ma\Rightarrow50-200(\ell_1-\ell_0)=5\times2$$

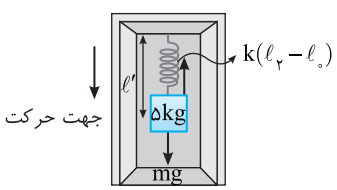
$$\Rightarrow200(\ell_1-\ell_0)=40\Rightarrow\ell_1-\ell_0=0/2m=20cm\quad(I)$$



حالت دوم: آسانسور به سمت پایین در حال حرکت بوده و mg نیرو در جهت است. حرکت کندشونده بوده و شتاب را $-1m/s^2$ در نظر می‌گیریم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-k(\ell_2-\ell_0)=ma\Rightarrow50-200(\ell_2-\ell_0)=5\times(-1)$$

$$\Rightarrow200(\ell_2-\ell_0)=55\Rightarrow\ell_2-\ell_0=\frac{55}{200}m=27/5cm\quad(II)$$



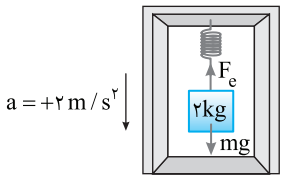
با استفاده از دو معادله (I) و (II) اختلاف ℓ_1 و ℓ_2 به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}\ell_1-\ell_0=20cm\\ \ell_2-\ell_0=27/5cm\end{cases}\Rightarrow \ell_2-\ell_1=7/5cm$$

بازی با سؤال درون آسانسوری ساکن، جسمی به جرم ۲kg که به فنری قائم آویزان است در حال تعادل قرار دارد. وقتی آسانسور از حال سکون با شتاب ثابت $2m/s^2$ به طرف پایین شروع به حرکت می‌کند، طول فنر برابر ۱۴cm و وقتی از حال سکون با شتاب ثابت $2m/s^2$ به طرف بالا شروع به حرکت می‌کند طول فنر ۱۶cm می‌شود. ثابت این فنر چند واحد SI است؟

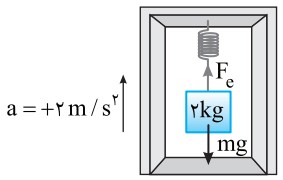
۱) ۲۰ ۲) ۴ ۳) ۲۰۰ ۴) ۴۰۰

پاسخ در هر دو حالت آسانسور از حال سکون شروع به حرکت کرده پس حرکت جسم در هر دو حالت تندشونده و در حالت اول $W>F_e$ است.



$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_e=ma$$
$$\Rightarrow F_e=20-4\Rightarrow k\Delta x_1=16N$$
$$k(\frac{14}{100}-x_0)=16\ (1)$$

در حالت دوم $W<F_e$ است از این‌رو:



$$F_{net}=ma\Rightarrow F_e-mg=ma$$
$$\Rightarrow F_e=20+4\Rightarrow k\Delta x_2=24N$$
$$k(\frac{16}{100}-x_0)=24N\ (2)$$

با تقسیم رابطهٔ (۲) بر رابطهٔ (۱) داریم:

$$\frac{\frac{16}{100}-x_0}{\frac{14}{100}-x_0}=\frac{24}{16}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{32}{100}-2x_0=\frac{42}{100}-3x_0\Rightarrow x_0=\frac{10}{100}m=10cm$$

حال با جای‌گذاری $x_0=10cm$ در رابطهٔ (۱) داریم:

$$k(\frac{14}{100}-\frac{10}{100})=16\Rightarrow k\times\frac{4}{100}=16\Rightarrow k=400N/m$$

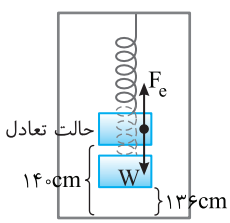
گزینهٔ ۴

B ۱۰۰۲ | ۲

خط فکری در مرحلهٔ اول وقتی آسانسور ساکن است و وزنه به فنر آویزان می‌شود، نیروی خالص وارد بر وزنه صفر است $(F_{net}=0)$ و نیروی کشسانی فنر برابر وزن وزنه است $(W=F_e)$. وقتی آسانسور با شتاب ثابت شروع به حرکت رو به بالا می‌کند دیگر نیروی خالص وارد بر وزنه صفر نیست و شما باید نیروی خالص (برایند F_e و W) را بنا به قانون دوم نیوتون مساوی ma قرار دهید و مسئله را حل کنید.

۱ در حالت تعادل نیروی کشسانی فنر برابر نیروی گرانش وزنه است. $W=F_e$

۲ در حالتی که آسانسور با شتاب $2m/s^2$ رو به بالا شروع به حرکت می‌کند نیروی کشسانی فنر از نیروی گرانشی بیشتر است و بنا بر قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:



$$F'_e-W=ma\xrightarrow{W=F_e}F'_e-F_e=ma$$
$$\xrightarrow{F_e=kx}k(x')-kx=ma\Rightarrow k(x'-x)=ma$$

۳ با حرکت آسانسور رو به بالا فاصلهٔ وزنه از کف آسانسور که ۱۴۰cm بوده به ۱۳۶cm می‌رسد یعنی طول فنر $140-136=4cm$ افزایش می‌یابد. $(x'-x=4cm)$

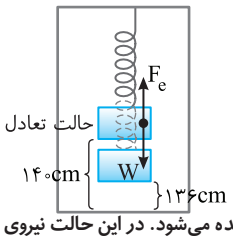
۴ اکنون ثابت فنر را به‌دست می‌آوریم.

$$k(\frac{4}{100})=2\times2\Rightarrow k=100N/m=1N/cm$$

بازی با سؤال وزنه‌ای به جرم ۲kg را به فنر سبکی به طول ۴۰cm که از سقف آسانسور ساکنی آویزان است وصل می‌کنیم. اگر آسانسور با سرعت ثابت رو به پایین در حرکت باشد، فاصلهٔ وزنه از کف آسانسور ۱۴۰cm است. اگر آسانسور با شتاب ثابت $2m/s^2$ شروع به توقف کند، فاصلهٔ وزنه از کف آسانسور ۱۳۶cm می‌شود. ثابت فنر چند N/m است؟ $(g=10N/kg)$

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۵۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۷۵

پاسخ جالب است بدانید، تست شبیه‌سازی شده از نظر دینامیکی هیچ تفاوتی با مسئله اصلی ندارد.



۱ سرعت ثابت یعنی نیروی خالص وارد بر وزنه صفر است. $F_{net}=0\Rightarrow F_e=W\ (I)$

۲ وقتی سرعت آسانسور در حال حرکت رو به پایین است، کاهش می‌یابد، حرکتش کندشونده می‌شود. در این حالت نیروی خالص وارد بر وزنه صفر نیست و نیروی کشسانی فنر از نیروی وزن وزنه بزرگ‌تر است و بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت: $F_{net}=ma\Rightarrow F'_e-W=ma\ (II)$

از رابطهٔ (I) در رابطهٔ (II) جای‌گذاری می‌کنیم.

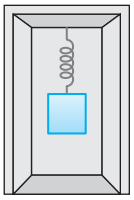
$$F'_e-F_e=ma\Rightarrow kx'-kx=ma\Rightarrow k(x'-x)=ma$$
$$\xrightarrow{x'-x=4cm}k(\frac{4}{100})=2\times2\Rightarrow k=100N/m$$

گزینهٔ ۱

B ۱۰۰۳ | ۱

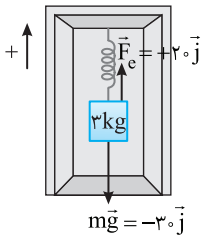
خط فکری هر گاه در صورت مسئله کلمه ساکن و یا سرعت ثابت مشاهده کردید بلافاصله بالای آن عبارت $F_{net}=0$ را قرار دهید. در این مسئله با این کار می‌توانید جرم m را حساب کنید.

۱ وقتی آسانسور ساکن است نیروی کشسانی فنر برابر نیروی وزن جسم است.



$$W=F_e\Rightarrow mg=k\Delta x$$
$$\Rightarrow m\times10=200\times(\frac{65-50}{100})\Rightarrow m=3kg$$

۲ می‌خواهیم طول فنر 60cm شود یعنی نیروی کشسانی فنر برابر شود با:



$$F_e=k\Delta L\Rightarrow F_e=200\times(\frac{60-50}{100})$$
$$\Rightarrow F_e=20N$$

۳ جهت مثبت محور yها را رو به بالا اختیار می‌کنیم.

در صورت تست بیان نشده که جهت مثبت را باید رو به بالا و یا رو به پایین اختیار کنیم اما چون همواره در ریاضی جهت مثبت محور yها رو به بالاست ما نیز این مطلب را رعایت می‌کنیم. در این حالت نیروی کشسانی فنر برابر $\vec{F}_e=+20\vec{j}$ و نیروی وزن برابر $\vec{W}=m\vec{g}=-30\vec{j}$ می‌شود و بنا به قانون دوم نیوتون شتاب برابر است با:

$$\vec{F}_{net}=m\vec{a}\Rightarrow\vec{F}_e+\vec{W}=m\vec{a}\Rightarrow20\vec{j}+(-30\vec{j})=3\vec{a}\Rightarrow\vec{a}=\frac{-10}{3}\vec{j}$$

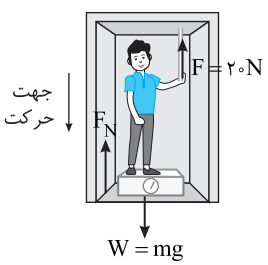
B ۱۰۰۴ | ۱

آسانسور با شتاب $3m/s^2$ شروع به حرکت کرده است، کافی است تمام نیروهای وارد بر شخص را رسم کنیم، این نیروها عبارتند از:

۱ نیروی وزن به شخص رو به پایین وارد می‌شود.

۲ نیروی عمودی سطح توسط کف باسکول بر شخص رو به بالا وارد می‌شود.

۳ شخص با نیروی 20N بر میله رو به پایین نیرو وارد می‌کند و بنا به قانون سوم نیوتون توسط میله نیرویی برابر 20N بر شخص وارد می‌شود. بنا به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:



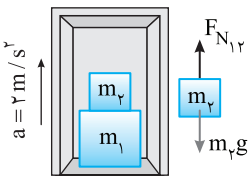
$$W-F-F_N=ma\xrightarrow{m=80kg}$$
$$800-20-F_N=80\times3\Rightarrow F_N=540N$$

نیرویی که باسکول نشان می‌دهد همان نیروی F_N یعنی 540N است.

۳ ۱۰۰۵ C

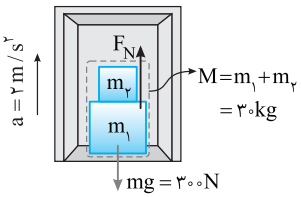
۱ $m_۱$ و $m_۲$ درون آسانسور قرار دارند، پس شتاب $m_۱$ و $m_۲$ نیز برابر $۲\,m/s^۲$ رو به بالا می‌باشد.

۲ نیرویی که $m_۱$ بر $m_۲$ وارد می‌کند همان نیروی عمودی تکیه‌گاه بین $m_۱$ و $m_۲$ و رو به بالاست. نیروهای وارد بر $m_۲$ را رسم کرده و نیروی $F_{N_{۱۲}}$ را به‌دست می‌آوریم:



$$F_{N_{۱۲}}-m_۲g=m_۲a\Rightarrow F_{N_{۱۲}}=m_۲a+m_۲g\Rightarrow F_{N_{۱۲}}=۱۲۰N$$

۳ حال دو جسم را یک جسم در نظر می‌گیریم تا نیرویی که از طرف سطح به مجموعه وارد می‌شود را حساب کنیم:



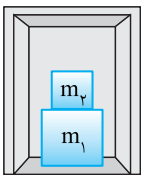
$$F_N-(m_۱+m_۲)g=(m_۱+m_۲)a$$
$$\Rightarrow F_N-۳۰۰=۶۰\Rightarrow F_N=۳۶۰N$$

۴ نسبت $F_{N_{۱۲}}/F_N$ خواهد شد:

$$\frac{F_{N_{۱۲}}}{F_N}=\frac{۱۲۰}{۳۶۰}=\frac{۱}{۳}$$

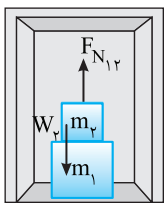
بازی با سؤال

درون یک آسانسور دو جسم به جرم‌های $m_۱=۵kg$ و $m_۲=۳kg$ قرار دارند و آسانسور با سرعت ثابت $۶m/s$ رو به پایین در حرکت است. آسانسور ترمز کرده و پس از جابه‌جایی $۵m$ با شتاب ثابت متوقف می‌شود. در این جابه‌جایی نیرویی که $m_۲$ بر $m_۱$ وارد می‌کند چند نیوتون است؟ $(g=۱۰N/kg)$



۱) ۴۰/۸ ۲) ۱۸/۲ ۳) ۳۰ ۴) ۸۰

پاسخ ابتدا شتاب توقف را به کمک رابطهٔ مستقل از زمان به‌دست می‌آوریم:



$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-۳۶=۲a(۵)\Rightarrow a=-۳/۶m/s^۲$$

نیروهای وارد بر $m_۲$ را بررسی می‌کنیم. آسانسور حرکت کندشونده رو به پایین دارد، بنابراین $F_{N_{۱۲}}>m_۲g$ است از این رو:

$$F_{N_{۱۲}}-m_۲g=m_۲a\Rightarrow F_{N_{۱۲}}=۳۰+(۳\times ۳/۶)\Rightarrow F_{N_{۱۲}}=۳۰+۱۰/۸=۴۰/۸N$$

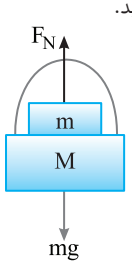
دقت کنید نیروی بزرگ‌تر را منهای نیروی کوچک‌تر کرده‌ایم از این رو شتاب را با علامت مثبت در رابطه قرار داده‌ایم.

نیرویی که $m_۱$ بر $m_۲$ وارد کرده برابر $۴۰/۸N$ رو به بالاست و بنا به قانون سوم نیوتون نیرویی که $m_۲$ بر $m_۱$ وارد می‌کند نیز هم‌اندازهٔ $۴۰/۸N$ اما رو به پایین است.

گزینهٔ ۱

۳ ۱۰۰۶ B

خط فکری دقت کنید که در صورت مسئله نیرویی که M بر m وارد می‌کند را از شما خواسته است بنابراین شما نیروهای وارد بر m را باید بررسی کنید.

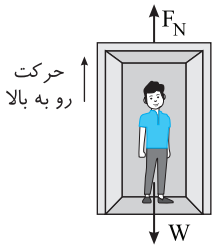


نیروهای وارد بر جسم m را رسم می‌کنیم. دو نیرو بر جسم m وارد می‌شود، یکی نیروی وزن توسط کرهٔ زمین، دیگری نیروی عمودی تکیه‌گاه که توسط M بر جسم m رو به بالا وارد می‌شود.

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_N=ma\Rightarrow F_N=m(g-a)$$
$$F_N=۰/۰۵(۱۰-۲)\Rightarrow F_N=۰/۴N$$

در واقع جرم m مانند جسمی است که در آسانسور قرار دارد.

۳ ۱۰۰۷ A



ابتدا شتاب حرکت را به کمک رابطهٔ سرعت-مکان (مستقل از زمان) به دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-(۴)^۲=۲(a)(۵)$$
$$\Rightarrow a=-۱/۶m/s^۲$$

حرکت آسانسور کندشونده رو به بالا است. بنابراین خواهیم داشت:

$ma=$ نیروهای خلاف جهت حرکت $-$ نیروهای در جهت حرکت

حرکت کندشونده است بنابراین شتاب را در رابطه منفی قرار می‌دهیم.

$$F_N-mg=ma\Rightarrow F_N-۶۰\times ۱۰=۶۰\times(-۱/۶)\Rightarrow F_N=۵۰۴N$$

۳ ۱۰۰۸ B

خط فکری مسئله چند مرحله‌ای است، در هر مرحله نیروهای وارد بر آسانسور را بررسی کرده و کشش کابل متصل به آسانسور را به دست آورده باهم مقایسه می‌کنیم. جهت مثبت را رو به بالا اختیار می‌کنیم.

۱ در قسمت اول حرکت، شتاب برابر است با: $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۴}{۸}=۰/۵m/s^۲$

۲ نیروی کشش کابل را حساب می‌کنیم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow T-mg=ma\Rightarrow T_۱-۷۰۰۰=۳۵۰\Rightarrow T_۱=۷۳۵۰N$$

۳ در قسمت دوم حرکت با سرعت ثابت است و شتاب $a=۰$ بوده و نیروها متوازن هستند بنابراین:

$$F_{net}=۰\Rightarrow T_۲=mg\Rightarrow T_۲=۷۰۰۰N$$

۴ در قسمت سوم حرکت شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-۴}{۴}=-۱\,m/s^۲$$

۵ نیروی کشش کابل در این مرحله خواهد شد:

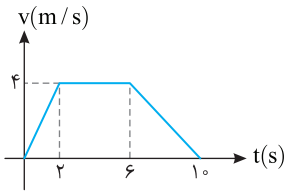
$$F_{net}=۰\Rightarrow T_۳-mg=ma\Rightarrow T_۳-۷۰۰۰=-۷۰۰\Rightarrow T_۳=۶۳۰۰N$$

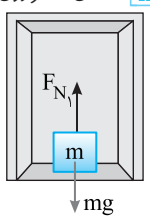
۶ بنابراین اختلاف بیشینه و کمینه کشش کامل برابر است با:

$$T_۱-T_۳=۷۳۵۰-۶۳۰۰=۱۰۵۰N$$

۴ ۱۰۰۹ B

نکته عددی که ترازوی فنری نشان می‌دهد اندازهٔ نیروی عمودی سطح است.

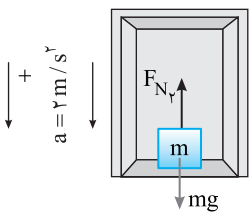




۱ هنگامی که آسانسور با سرعت ثابت حرکت می‌کند نیروی عمودی سطح و نیروی وزن باهم برابرند پس در بازهٔ ۲s تا ۶s داریم:

$$F_{net}=ma_۱\xrightarrow{a_۱=۰}F_{N_۱}=mg=۶۰۰N$$

۲ اما کمترین مقدار F_N وقتی است که جسم تندشونده رو به پایین به حرکت درمی‌آید. در بازهٔ صفر تا ۲s آسانسور با شتاب تندشونده رو به پایین در حال حرکت است و می‌دانیم در نمودار $v-t$ شیب نمودار برابر شتاب است:



$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۴-۰}{۲-۰}=۲m/s^۲$$

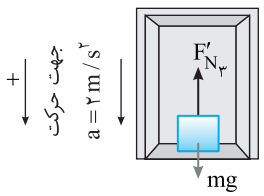
۳ در این بازه، نیروی $F_{N_۲}$ را حساب می‌کنیم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_{N_۲}=ma_۲\Rightarrow ۶۰۰-F_{N_۲}=۱۲۰\Rightarrow F_{N_۲}=۴۸۰N$$

۴ بیشترین مقدار F_N وقتی است که آسانسور در حال متوقف شدن است.

در بازهٔ ۶s تا ۱۰s شتاب حرکت برابر $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{0-4}{10-6}=-1\,m/s^2$ است، بنابراین:

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_{N_3}=ma_3\Rightarrow 600-F_{N_3}=-60\Rightarrow F_{N_3}=660N$$



۵ بنابراین اختلاف بیشینه و کمینه نیرو از طرف سطح برابر است با:

$$F_{N_3}-F_{N_2}=660-480=180N$$

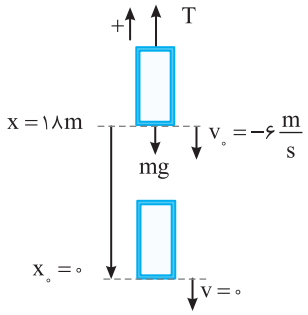
B ۱۰۱۰ **۳**

با استفاده از رابطه مستقل از زمان شتاب را به‌دست می‌آوریم. (جهت مثبت را رو به بالا فرض می‌کنیم.)

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-36=2a(-18)\Rightarrow a=+1\,m/s^2$$

حرکت کندشونده رو به پایین است.

$$T-mg=ma\Rightarrow T=mg+ma\Rightarrow T=1000(10+1)=1/1\times10^4\,N$$



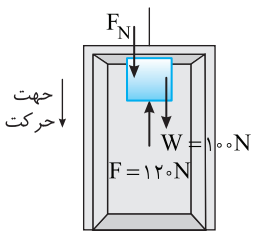
B ۱۰۱۱ **۱**

خط فکری در تمام مسائل دینامیک مراحل زیر باید طی شود.

۱ رسم شکل ساده
۲ رسم نیروهای وارد بر جسم
۳ به‌دست آوردن نیروی خالص
۴ برابر قرار دادن نیروی خالص با ma

۱ نیروهای وارد بر جسم ۱۰ کیلوگرمی را رسم می‌کنیم.

۲ شتاب حرکت جسم را حساب می‌کنیم. $a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-8}{8}\Rightarrow a=-1\,m/s^2$



۳ $ma=$ نیروهای مخالف حرکت $-$ نیروهای در جهت حرکت

$$(W+F_N)-F=ma\xrightarrow{m=10kg}(100+F_N)-120=10\times(-1)$$

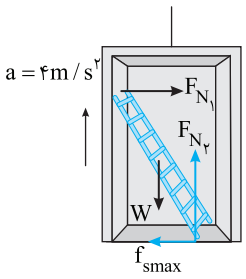
$$\Rightarrow F_N=10N$$

B ۱۰۱۲ **۲**

۱ نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم.

۲ نردبان در امتداد افقی حرکتی ندارد و نیروها در این امتداد متوازن هستند. بنابراین نیروی F_{N_1} که دیواره بر نردبان وارد می‌کند با اصطکاک آستانهٔ حرکت $(f_{s_{max}})$ برابر است:

$$f_{s_{max}}=F_{N_1}\xrightarrow{F_{N_1}=20N}f_{s_{max}}=20N$$



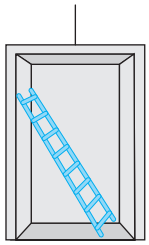
۳ نیروهای عمودی سطح کف آسانسور وارد بر نردبان را حساب می‌کنیم:

$$f_{s_{max}}=\mu_s F_{N_2}\xrightarrow{\mu_s=0/5}20=0/5F_{N_2}\Rightarrow F_{N_2}=40N$$

۴ نیروهای وارد بر نردبان در امتداد قائم به نردبان شتاب $4\,m/s^2$ رو به بالا می‌دهد. بنابراین نیروی F_{N_2} از W بزرگ‌تر است و خواهیم داشت:

$$F_{net_y}=ma\Rightarrow F_{N_2}-W=ma\Rightarrow 40-mg=ma$$

$$40-m\times10=m\times4\Rightarrow m=\frac{40}{14}=\frac{20}{7}kg$$



بازی با سؤال **در شکل روبه‌رو نردبانی به جرم ۴kg درون آسانسور قرار دارد و در آستانهٔ سر خوردن است. اگر ضریب اصطکاک ایستایی تمام سطوح یکسان و برابر ۰/۴ باشد، با پاره شدن کابل آسانسور نیروی خالص وارد بر نردبان چند نیوتون می‌شود؟ $(g=10N/kg)$**

۱) ۴۰ ۲) صفر ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

پاسخ وقتی کابل آسانسور پاره می‌شود مجموعه با شتاب $a=g$ رو به پایین سقوط می‌کند. در این حالت تنها نیروی مؤثر وارد بر نردبان نیروی وزن بوده که برابر $W=4\times10=40N$ است. گزینهٔ ۱

C ۱۰۱۳ **۱**

خط فکری ابتدا آسانسور ساکن است و جسم با تندی ثابت بر کف آسانسور در حرکت است. یعنی نیروهای وارد بر جسم متوازن بوده و شما باید با استفاده از این موضوع ضریب اصطکاک بین جسم و کف آسانسور را حساب کنید. با حرکت آسانسور رو به بالا نیروی عمودی سطح افزایش می‌یابد و سبب افزایش نیروی اصطکاک جنبشی $(\uparrow f_k=\mu_k F_N\uparrow)$ می‌شود. نیروی $F=10N$ ثابت است بنابراین نیروی اصطکاک سبب کندشدن حرکت و توقف جسم می‌شود.

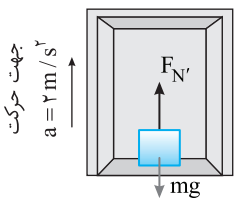
۱ در حالت اول جسم با سرعت ثابت در حال حرکت است پس نیروهای وارد بر جسم متوازن است:

$$F_{\text{خالص}}=ma\Rightarrow F-f_k=0\Rightarrow f_k=10N$$

۲ ضریب اصطکاک را حساب می‌کنیم:

$$f_k=\mu_k F_N\Rightarrow10=\mu_k mg\Rightarrow10=\mu_k 40\Rightarrow\mu_k=0/25$$

۳ در حالت دوم آسانسور با شتاب $2\,m/s^2$ به سمت بالا حرکت می‌کند. نیروی عمودی سطح را در این حالت به دست می‌آوریم:

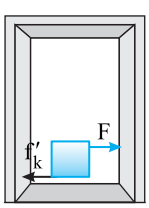


$$F'_N-mg=ma\Rightarrow F'_N-40=4\times2$$

$$\Rightarrow F'_N=48N$$

۴ در این حالت نیروی اصطکاک برابر خواهد شد با:

$$f_k=\mu_k F'_N=12N>10N$$



۵ نیروی اصطکاک از نیروی F بزرگ‌تر شده بنا به قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را حساب می‌کنیم:

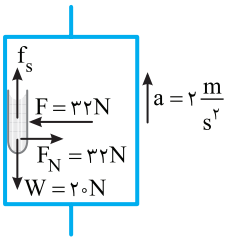
$$F-f_k=ma\Rightarrow10-12=4a\Rightarrow a=-0/5m/s^2$$

۶ به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، جابه‌جایی جسم تا توقف را به دست می‌آوریم:

$$v_2^2-v_1^2=2a\Delta x\Rightarrow0-4=2(-0/5)\Delta x\Rightarrow\Delta x=4m$$

B ۱۰۱۴ **۴**

خط فکری در متن تست بیان شده که کتاب نسبت به آسانسور ساکن است و ممکن است شما بلافاصله بنویسید برای جسم ساکن $F_{net}=0$ و نیروی وزن کتاب با نیروی اصطکاک بین دیوارهٔ آسانسور و کتاب برابر است و $f_s=W=20N$ پاسخ است اما این‌گونه نیست. شما باید این نکته مهم را بدانید که برای کاربرد قوانین نیوتون همواره حرکت جسم مورد نظر را از دید شاهدی بررسی می‌کنیم که روی زمین ساکن است یعنی شما باید خود را خارج آسانسور فرض کنید که به این آسانسور نگاه می‌کنید. در این حالت برای شما مشخص می‌شود که تمام اجسام درون آسانسور با همان شتاب آسانسور $(2m/s^2)$ در حال حرکت روبه بالا هستند. اکنون باید از خود بپرسید، عامل حرکت کتاب روبه بالا به همراه آسانسور چیست؟ که پاسخ مشخص است، عامل آن اصطکاک بین کتاب و دیوارهٔ آسانسور است. بنابراین نیروهای وارد بر کتاب را رسم کنید و به کمک قانون دوم نیوتون مسئله را حل کنید.



عامل حرکت کتاب به همراه آسانسور رو به بالا نیروی اصطکاک ایستایی بین کتاب و دیوارهٔ آسانسور است. نیروهای وارد بر کتاب را رسم می‌کنیم و چون کتاب و آسانسور هر دو با شتاب $a=2m/s^2$ به سمت بالا در حال حرکت‌اند، برایند آن‌ها را مساوی ma قرار می‌دهیم:

$$f_s-W=ma\Rightarrow f_s-20=2\times2\Rightarrow f_s=24N$$

اکنون نیرویی که کتاب به دیواره یا دیواره به کتاب وارد می‌کند برابر است با:

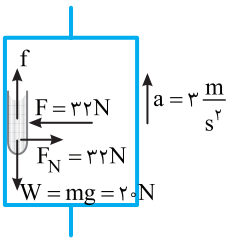
$$R=\sqrt{f_s^2+F_N^2}=\sqrt{24^2+32^2}=8\sqrt{3^2+4^2}=40N$$

بازی با سوال **شخصی درون آسانسور ساکنی با نیروی افقی $F=32N$ کتابی به جرم $2kg$ را روی دیوارهٔ آسانسور ساکن نگاه داشته است. ضریب اصطکاک بین کتاب و دیوارهٔ آسانسور $\mu_s=0/8$ و $\mu_k=0/5$ است. اگر آسانسور با شتاب ثابت $3m/s^2$ رو به بالا شروع به حرکت کند، کتاب نسبت به آسانسور .....**

۱) ساکن می‌ماند. **۲)** به پایین می‌لغزد

۳) به سمت بالا می‌رود. **۴)** هر سه حالت ممکن است.

پاسخ **آسانسور با شتاب $3m/s^2$ رو به بالا شروع به حرکت کرده است. عامل حرکت کتاب به همراه آسانسور رو به بالا، نیروی اصطکاک بین دیوارهٔ آسانسور و کتاب است.**



باید بررسی کنیم بیشینه شتابی که کتاب می‌تواند داشته باشد چند m/s^2 است.

پس بنابر قانون دوم نیوتون می‌توانیم بنویسیم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow f_{s\,max}-mg=ma_{\text{کتاب}}\Rightarrow\mu_sF_N-mg=ma_{\text{کتاب}}$$

$$\xrightarrow{\mu_s=0/8,\,m=2kg}0/8\times32-2\times10=2a_{\text{کتاب}}$$

$$\Rightarrow25/6-20=2a_{\text{کتاب}}\Rightarrow a_{\text{کتاب}}=\frac{5/6}{2}\Rightarrow a_{\text{کتاب}}=2/8m/s^2$$

دقت کنید بیشینه شتاب رو به بالای کتاب در اثر اصطکاک $2/8m/s^2$ است اما شتاب حرکت آسانسور رو به بالا $3m/s^2$ است، بنابراین کتاب نسبت به آسانسور عقب می‌ماند و به پایین می‌لغزد. گزینهٔ ۲

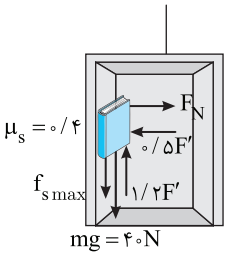
B ۱۰۱۵ **۲**

خط فکری نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. دقت کنید که جسم در آستانهٔ حرکت رو به بالا و نیروی اصطکاک جسم بیشینه و به سمت پایین است. جسم در راستای افقی حرکت نمی‌کند و نیروهای افقی متوازن است، $(F_{net}=0)$ اما در راستای قائم آسانسور در حال حرکت به سمت پایین بوده و باید به کمک قانون دوم نیوتون مسئله را حل کنید:

۱ نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:

۲ نیروها در راستای افقی متوازن‌اند:

$$F_N=0/5F'$$



۳ در راستای قائم آسانسور با شتاب $4m/s^2$ تندشونده پایین می‌آید، نیروی برایند را حساب می‌کنیم و نیروهای در جهت حرکت به سمت پایین را از نیروی خلاف جهت به سمت بالا کم می‌کنیم. در قانون دوم نیوتون چون حرکت تندشونده بوده شتاب $+4m/s^2$ قرار می‌دهیم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg+f_{s\,max}-1/2F'=ma$$

$$\Rightarrow mg+\mu_sF_N-1/2F'=ma$$

$$\xrightarrow[\mu_s=0/4]{F_N=0/5F'}mg+0/4\times(0/5F')-1/2F'=ma$$

$$\Rightarrow40+0/2F'-1/2F'=4\times4\Rightarrow F'=24N$$

مؤلفه‌های F را به‌دست می‌آوریم:

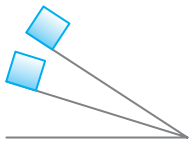
$$F_x=0/5F'=0/5\times24\ ,\ F_y=1/2F'\Rightarrow F_y=1/2\times24$$

اندازه F خواهد شد:

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}\Rightarrow F=\sqrt{(0/5\times24)^2+(1/2\times24)^2}\Rightarrow F=24\sqrt{0/5^2+1/2^2}$$

$$\Rightarrow F=24\times\sqrt{1/69}\Rightarrow F=24\times1/3\Rightarrow F=31/2N$$

B ۱۰۱۶ **۱**

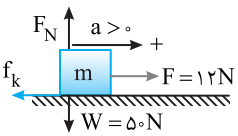


یک پاک‌کن را در کف دستتان قرار دهید و زاویه کف دست را از حالت افقی به طور آهسته زیاد کنید. تمایل جسم به حرکت بیشتر می‌شود، بنابراین نیروی وارد بر جسم که می‌خواهد جسم را به حرکت در آورد با افزایش زاویهٔ کف دست بیشتر می‌شود و چون پاک‌کن حرکت نکرده، پس نیروی اصطکاک وارد بر آن افزایش می‌یابد. تا لحظه‌ای که جسم در آستانهٔ حرکت قرار گیرد اصطکاک در حال افزایش است. البته بعد از آن جسم به حرکت درمی‌آید و اصطکاک از ایستایی به جنبشی تبدیل می‌شود که مورد پرسش نیست و گزینهٔ (۱) درست است.

C ۱۰۱۷ **۴**

خط فکری آخه چطور ممکنه؟ جعبه با شتاب $0/4m/s^2$ در حال حرکت به سمت راست است. در جعبهٔ یک وزنه قرار می‌دهیم، اصطکاک افزایش می‌یابد بنابراین باید شتاب کم شود اما اندازهٔ شتاب همچنان $0/4m/s^2$ است، یعنی ممکن است؟ بله این بار نیروی اصطکاک به خوبی افزایش یافته که نیروی خالص (برآیند اصطکاک و نیروی F) به سمت چپ است و شتاب جعبه $0/4m/s^2$ به سمت چپ است. در نتیجه در حالت اول حرکت تندشونده با شتاب $0/4m/s^2$ و در حالت دوم حرکت کندشونده با شتاب $(-0/4m/s^2)$ است.

حالت اول: نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و جهت به سمت راست را مثبت در نظر می‌گیریم و نیروی خالص وارد بر جسم را برابر ma قرار می‌دهیم و ضریب اصطکاک جنبشی را حساب می‌کنیم.



$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow12-\mu_kmg=0/4m$$

$$\Rightarrow12-50\mu_k=2\Rightarrow\mu_k=0/2$$

حالت دوم:

$$F_{net}=m'a'$$

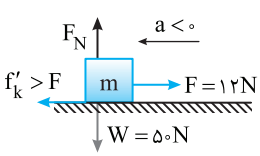
$$F-f_k'=(m+m')a'$$

$$\Rightarrow12-\mu_k(m+m')g=-0/4(m+m')$$

$$\Rightarrow12-(5+m')\times10\times0/2=-0/4(5+m')$$

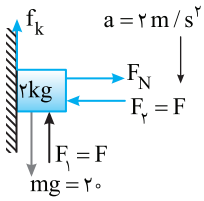
$$\Rightarrow12-10-2m'=-2-0/4m'$$

$$4=1/6m'\Rightarrow m'=\frac{4}{1/6}=2/5kg$$



B ۱۰۱۸ ۳

خط فکری در حالت اول شتاب $2m/s^2$ رو به پایین است. اگر با دو برابر شدن F_1 باز اندازهٔ شتاب $2m/s^2$ باشد باید جهت شتاب تغییر کرده باشد، یعنی در حالت دوم شتاب $2m/s^2$ رو به بالا است. هم‌چنین چون F_2 تغییر نکرده پس اندازهٔ نیروی اصطکاک جسم با سطح ثابت می‌ماند.



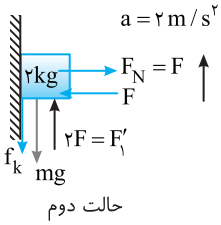
حالت اول

نیروهای وارد بر جسم را در دو حالت رسم کرده و نیروی خالص وارد بر جسم را به‌دست می‌آوریم، البته برای راحتی در هر حالت نیروی بزرگ‌تر در جهت حرکت را منهای نیروی کوچک‌تر می‌کنیم.

حالت اول: جسم از حال سکون رو به پایین حرکت کرده، بنابراین اصطکاک رو به بالاست. نیروی وزن جسم را به پایین می‌آورد و نیروی f_k و F_1 مانع حرکت است. از این‌رو:

$$f_{net}=ma\Rightarrow W-F_1-f_k=ma\Rightarrow 20-F-f_k=2\times 2\Rightarrow F+f_k=16 \quad (I)$$

حالت دوم: نیروی F_1 را دو برابر کرده‌ایم و جسم این بار باید از حال سکون رو به بالا حرکت کرده بنابراین اصطکاک رو به پایین است. نیروی $2F_1$ جسم را بالا می‌برد. نیروی خالص وارد بر جسم خواهد شد:



حالت دوم

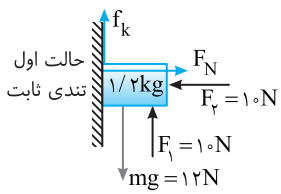
$$F_{net}=ma\Rightarrow 2F-W-f_k=ma$$
$$\Rightarrow 2F-20-f_k=2\times 2\Rightarrow 2F-f_k=24 \quad (II)$$

دقت کنید در دو حالت اندازهٔ نیروی اصطکاک برابر $f_k=\mu_k F_2$ است. رابطهٔ (I) و (II) را با هم جمع می‌کنیم و F را به‌دست می‌آوریم.

$$F+f_k+2F-f_k=16+24\Rightarrow F=\frac{40}{3}N$$

C ۱۰۱۹ ۳

۱ در حالت اول تندی جسم ثابت است و جسم در حال حرکت رو به پایین است بنابراین نیروی اصطکاک جنبشی رو به بالاست. نیروی خالص وارد بر جسم صفر است:

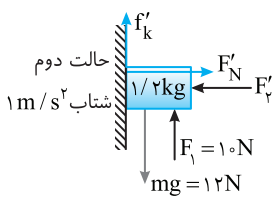


$F_2=F_N\Rightarrow F_N=10N$:در راستای افقی

$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_1-f_k=0\Rightarrow f_k=12-10=2$:در راستای قائم

$\Rightarrow \mu_k N=2\Rightarrow 10\mu_k=2\Rightarrow \mu_k=0/2$

۲ در حالت دوم، اگر جسم با شتاب $1m/s^2$ بخواهد به سمت پایین حرکت کند باید نیروی F_2 کاهش بیابد تا از مقدار اصطکاک کاسته شود. در این حالت خواهیم داشت:



$$\begin{cases}\text{در راستای افقی}: F_N'=F_2'\\ \text{در راستای قائم}: mg-F_1-f_k'=ma\end{cases}\Rightarrow 12-10-f_k'=1/2\times(1)\Rightarrow f_k'=0/8N$$

۳ نیروی عمودی سطح در حالت جدید F_N' را حساب می‌کنیم.

$$f_k'=\mu_k F_N'=\mu_k F_2'\Rightarrow 0/8=0/2F_N'\Rightarrow F_N'=4N\Rightarrow F_2'=F_N'=4N$$

۴ پس نیروی F_2 از $10N$ به $4N$ رسیده و درصد تغییرات نیرو خواهد شد:

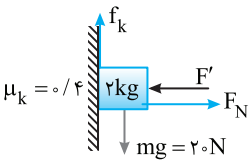
$$\frac{\Delta F}{F_1}\times 100=\frac{-6}{10}\times 100=-60\%$$
کاهش

C ۱۰۲۰ ۳

نکتهٔ مهم تا لحظه‌ای که نیروی وزن رو به پایین (W) از نیروی اصطکاک (f_k) رو به بالا بزرگ‌تر یا با آن مساوی باشد $(W\geq f_k)$ از تندی جسم کاسته نمی‌شود.

خط فکری بیشینه مقدار اصطکاک باید برابر نیروی وزن جسم باشد زیرا اگر اصطکاک از وزن بیشتر شود حرکت جسم کندشونده شده و از سرعت آن کاسته می‌شود. بنابراین باید معادلهٔ $W\geq f_k$ را حل کنیم.

۱ اصطکاک را با نیروی $F=10N$ حساب می‌کنیم.



$$f_k=\mu_k F_N \xrightarrow{F_N=F} f_k=0/4\times 10$$
$$\Rightarrow f_k=4N<W$$

و جسم در حال حرکت تندشونده رو به پایین است.

۲ معادله $mg\geq f_k$ را حل می‌کنیم تا F_{max} را به‌دست بیاوریم:

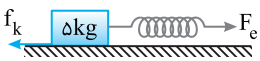
$$mg\geq f_k\Rightarrow 20\geq \mu_k F_{max}\xrightarrow{\mu_k=0/4} 20\geq 0/4F_{max}\Rightarrow F_{max}\geq 50N$$

۳ پس نیروی F را می‌توان از $10N$ به $50N$ رساند، یعنی نیروی F را می‌توان حداکثر به اندازهٔ $50-10=40N$ افزایش داد.

بازی با سؤال **جسمی به جرم $5kg$ روی سطح افقی با ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k=0/2$ توسط فنری کشیده می‌شود. ضریب ثابت فنر $800N/m$ و کشیدگی فنر از طول طبیعی خود ۵ سانتی‌متر است. این طول حداکثر چند سانتی‌متر می‌تواند کاهش یابد، بدون آنکه تندی جسم کاهش یابد؟ $(g=10m/s^2)$**

۱) ۵ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۳/۷۵ ۴) ۴/۲۵

پاسخ نیروی کشسانی فنر برابر است با:



$$F_e=k\Delta\ell=800\times\frac{5}{100}=40N$$

نیروی اصطکاک بین جسم و سطح:

$$f_k=\mu_k F_N=0/2\times 50=10N$$

تا زمانی که $F_e\geq f_k$ تندی جسم کاهش نمی‌یابد، بنابراین باید نیروی کشسانی از $40N$ به $10N$ برسد. یعنی:

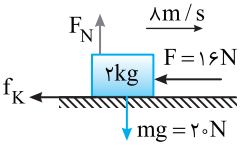
$$F_e'=k\Delta\ell'\Rightarrow 10=800\Delta\ell'\Rightarrow\Delta\ell'=1/25cm$$

بنابراین طول فنر می‌تواند از $5cm$ کشیدگی به $1/25cm$ کشیدگی برسد یعنی طول فنر می‌تواند $5-1/25=3/75cm$ کاهش یابد بدون آنکه تندی جسم کاهش یابد.

گزینهٔ ۳

C ۱۰۲۱ ۱

مرحلهٔ اول: در ابتدا جسم به سمت راست در حال حرکت است پس نیروی اصطکاک نیز مانند نیروی F به سمت چپ به جسم وارد می‌شود:

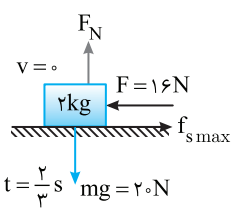


$$f_k=\mu_k F_N\xrightarrow{F_N=20N} f_k=0/4\times 20=8N$$
$$F_{net}=ma\Rightarrow 0-16-f_k=ma\Rightarrow 0-24=2a\Rightarrow a=-12m/s^2$$

این شتاب از سرعت $8m/s$ به سمت راست کاسته تا سرعت صفر شود:

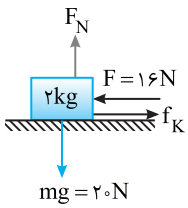
$$v_1=8m/s, v_2=0, a=-12m/s^2, t=?$$
$$\Rightarrow v_2=at+v_1\Rightarrow 0=-12t+8\Rightarrow 12t=8\Rightarrow t=\frac{2}{3}s$$

مرحلهٔ دوم: در این حالت باید بررسی کنیم که در $t=\frac{2}{3}s$ که جسم به‌طور لحظه‌ای متوقف شده آیا مجدد جسم به حرکت درمی‌آید یا نه، برای این کار ابتدا $f_{s_{max}}$ را حساب می‌کنیم. اگر این نیرو، کمتر از $16N$ باشد یعنی نیروی $16N$ جسم را به حرکت درآورده است:



$$f_{s_{max}}=\mu_s F_N\Rightarrow f_{s_{max}}=0/5\times 20\Rightarrow f_{s_{max}}=10N$$

مرحلهٔ سوم: بنابراین جسم پس از توقف با نیروی $F=16N$ به سمت چپ حرکت کرده و نیروی اصطکاک جنبشی f_k خلاف جهت لغزش یعنی به سمت راست آن وارد می‌شود:



$$f_k=\mu_k F_N \Rightarrow f_k=0/4\times 20=8N$$

$$F'_{net}=ma' \Rightarrow 16-8=2a' \Rightarrow a'=4m/s^2$$

مدت زمان باقی‌مانده تا $t=5s$ برابر $5-\frac{2}{3}=\frac{13}{3}s$ است که متحرک از سرعت صفر با شتاب $4m/s^2$ طی می‌کند:

$$v_1=0, v_2=?, a=4, t=\frac{13}{3}s$$

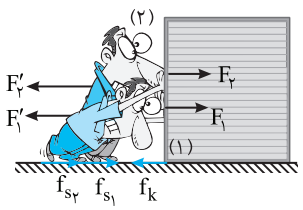
$$\Rightarrow v_2=at+v_1 \Rightarrow v_2=4\times\frac{13}{3}=\frac{52}{3}m/s$$

بازی با سؤال در سؤال قبل اگر ضریب اصطکاک ایستایی $\mu_s=0/85$ باشد، تندی جسم در لحظهٔ $t=5s$ چند m/s می‌شود؟

پاسخ اگر $\mu_s=0/85$ باشد، اصطکاک آستانهٔ حرکت $f_{s_{max}}=0/85\times 20=17N$ شده و نیروی $F=16N$ نمی‌تواند پس از توقف جسم را بازگرداند و تندی آن صفر خواهد شد.

C ۱۰۲۲ **۲**

خط فکری دو نفر به ترتیب با نیروی F_1 و F_2 بسته را هُل می‌دهند بنا به قانون سوم نیوتون نیروی F'_1 و F'_2 به ترتیب توسط بسته به هریک رو به عقب وارد می‌شود اما چرا این دو نفر رو به عقب لیز نمی‌خورند؟ زیرا بین پای آن‌ها و سطح زمین نیروی اصطکاک ایستایی f_{s_1} و f_{s_2} به سمت راست وجود دارد که مانع لیز خوردن این دو شخص می‌شود. اکنون نیروهای وارد بر بسته و هر شخص را رسم کرده و نیروی خالص وارد بر هریک را به‌دست می‌آوریم. دقت کنید عبارت «حداقل ضریب اصطکاک ایستایی» یعنی دو نفر در آستانهٔ لیز خوردن قرار بگیرند، در ضمن بسته با تندی ثابت به جلو بلغزد.



۱ نیروهای وارد بر بسته:

$$\underbrace{F_1+F_2}_{\text{به سمت راست}} = \underbrace{f_k}_{\text{به سمت چپ}} \quad (I)$$

۲ نیروی وارد بر هر شخص:

$$\begin{cases} F'_1=f_{s_1} \xrightarrow{F'_1=F_1} F_1=f_{s_1} \\ F'_2=f_{s_2} \xrightarrow{F'_2=F_2} F_2=f_{s_2} \end{cases} \Rightarrow F_1+F_2=f_{s_1}+f_{s_2} \quad (II)$$

۳ رابطهٔ (I) و (II) را برابر قرار می‌دهیم.

$$f_{s_1}+f_{s_2}=f_k \Rightarrow \mu_s(m_1g+m_2g)=\mu_k Mg$$

$$\Rightarrow \mu_s(400+600)=0/2\times 2000 \Rightarrow \mu_s=0/4$$

B ۱۰۲۳ **۳**

نکته شیب نمودار سرعت - زمان برابر شتاب حرکت است.

خط فکری شما باید شتاب هر قسمت را با توجه به نیروی خالص وارد بر جسم به‌دست بیاورید و با هم مقایسه کنید تا بتوانید به کمک شیب نمودار $v-t$ نمودار درست را تشخیص دهید.

در قسمت اول مسیر نیروی اصطکاک کمتر از F می‌باشد بنابراین:

$$F-f_1=ma \xrightarrow{f_1<F} a_1>0$$

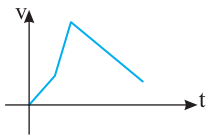
در قسمت دوم مسیر نیروی اصطکاک، صفر است و تنها نیروی مؤثر وارد بر جسم F است:

$$F=ma \Rightarrow a_2>0 \text{ و } a_2>a_1$$

در قسمت سوم مسیر نیروی اصطکاک بیشتر از F می‌باشد، بنابراین:

$$F-f_3=ma \xrightarrow{f_3>F} a_3<0$$

در قسمت (۱) و (۲) شتاب حرکت مثبت شد. البته $a_1>a_2$ بوده بنابراین نمودار $v-t$ باید در این دو قسمت دارای شیب مثبت باشد. البته در قسمت دوم که شتاب بزرگ‌تر است باید بیشینه باشد و در قسمت سوم که شتاب منفی است شیب نمودار باید منفی باشد. در نتیجه نمودار گزینهٔ (۳) درست است.



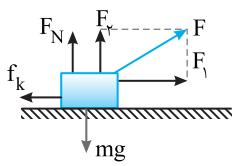
B ۱۰۲۴ **۳**

۱ به کمک آنچه که در ریاضی سال هشتم خوانده‌اید مؤلفه‌های نیروی F را در امتداد افقی و قائم رسم کنید.

۲ نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم.

$$F_{net_y}=0 \Rightarrow W=F_N+F_2 \Rightarrow F_N=mg-F_2$$

۳ نیروی اصطکاک را به‌دست می‌آوریم.

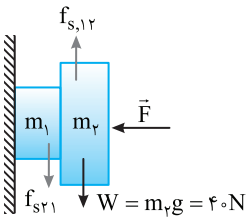


$$f_k=\mu_k F_N \Rightarrow f_k=\mu_k(mg-F_2)$$

$$\Rightarrow f_k=\mu_k mg-\mu_k F_2 \Rightarrow f<\mu_k mg$$

B ۱۰۲۵ **۴**

خط فکری عجب شکلی دارد این سؤاااال! دو جسم ساکن هستند و نیروهای وارد بر هر جسم متوازن هستند. در صورت سؤال نیروی اصطکاکی که وزنهٔ m_2 بر وزنهٔ m_1 وارد می‌کند مورد پرسش است. اما ما ابتدا نیروهای وارد بر وزنهٔ m_2 را بررسی می‌کنیم تا بتوانیم دربارهٔ نیروی اصطکاک بین m_1 و m_2 اظهارنظر کنیم.



به وزنهٔ m_2 در راستای قائم دو نیرو وارد می‌شود.

۱ نیروی وزن $W=m_2g=40N$ رو به پایین

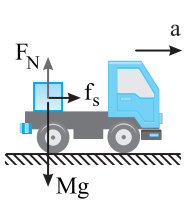
۲ چرا m_2 به پایین نمی‌آید زیرا از طرف جسم m_1 نیروی اصطکاک ایستایی $f_{s_{1,2}}$ بر آن رو به بالا وارد می‌شود که این نیرو با نیروی وزن m_2 برابر است. $f_{s_{1,2}}=W_2=40N$

۳ جسم m_1 بر جسم m_2 نیروی اصطکاک $40N$ را رو به بالا وارد می‌کند و بنا به قانون سوم نیوتون، جسم m_2 نیز نیروی اصطکاکی به اندازهٔ $40N$ و رو به پایین $(f_{s_{2,1}}=40N)$ به m_1 وارد می‌کند.

C ۱۰۲۶ **۲**

خط فکری سؤال مهم این است که عامل حرکت بار روی کف تریلیِ در حال حرکت چه نیرویی است؟ عامل حرکت بار نیروی اصطکاک بین کف تریلی و بار است که به بار شتاب می‌دهد. بیشترین شتاب بار وقتی است که نیروی اصطکاک بیشینه باشد $(f_{s_{max}})$ اگر شتاب حرکت تریلی از بیشینه شتابی که می‌تواند اصطکاک به بار بدهد بیشتر باشد، بار از تریلی جا می‌ماند یعنی نسبت به تریلی رو به عقب لیز می‌خورد اما اگر $(a_{\text{تریلی}} \le a_{max})$ باشد بار و تریلی با یک شتاب حرکت می‌کنند.

۱ بیشینه شتاب حرکت بار در اثر اصطکاک را حساب می‌کنیم.



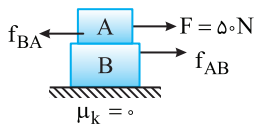
$$F_{net}=Ma \Rightarrow f_{s_{max}}=Ma_{max}$$

$$\Rightarrow \mu_s Mg=Ma_{max} \Rightarrow a_{max}=\mu_s g$$

۲ بنا به فرض مسئله، شتاب حرکت تریلی $a>\mu_s g$ است یعنی شتاب حرکت تریلی از بیشینه شتابی که بار می‌تواند به‌دست بیاورد بیشتر است. بنابراین بار در کف تریلی نسبت به تریلی به عقب لیز می‌خورد.

۱۰۲۷ C ۱

نکته هرگاه دو جسم که با هم در تماس هستند بخواهند نسبت به هم حرکت کنند، بین آن‌ها یک نیروی تماس به نام اصطکاک ایجاد می‌شود که با حرکت دو جسم نسبت به هم مخالفت می‌کند.



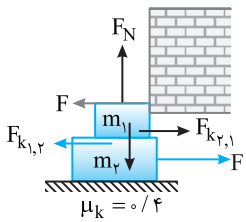
خط فکری یک پارچه روی سطح اتاق بیاندازید و روی آن بنشینید و از شخصی بخواهید که دست شما را بگیرد و شما را بکشد خواهید دید که پارچه به همراه شما رو به جلو حرکت می‌کند. عامل حرکت پارچه به همراه شما، اصطکاک بین شما و پارچه است. در شکل مسئله وقتی A را با نیروی F می‌کشیم عامل حرکت B روی سطح بدون اصطکاک نیروی اصطکاک بین A و B است. اکنون این اصطکاک را باید با نیروی F=۵۰N مقایسه کنید.

نیروی F دو جسم A و B را به حرکت درمی‌آورد اما نیروی اصطکاک بین A و B تنها سبب حرکت جسم B با همان شتاب می‌شود بنابراین $f_1 < ۵۰N$ است. یعنی $F > f_1$ است. به روابط زیر دقت کنید:

$$F=(m_A+m_B)a \ , \ f=m_B a \Rightarrow f<F$$

۱۰۲۸ C ۳

دوباره شکل مسئله باعث نگرانی شما شد. m_1 به دیوار گیر کرده و ساکن است. اگر دیوار نبود، m_1 تحت تأثیر اصطکاک بین m_1 و m_2 به همراه m_2 حرکت می‌کرد.



۱ وقتی m_2 به سمت راست در حرکت است توسط سطح زمین و همچنین سطح m_1 نیروهای اصطکاک به سمت چپ وارد می‌شود. بنا به قانون سوم جسم m_2 نیروی اصطکاک $(f_{k_{2,1}})$ را بر m_1 وارد می‌کند. این نیرو را حساب می‌کنیم.

$$f_{k_{2,1}}=\mu_s F_N=\mu_k m_1 g \xrightarrow{\mu_k=۰/۴ \, , \, m_1=۱۰kg} f_{k_{2,1}}=۰/۴\times ۱۰۰$$
$$\Rightarrow f_{k_{2,1}}=۴۰N$$

۲ جسم m_1 ساکن مانده است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند. بنابراین دیوار نیروی F را بر m_1 وارد می‌کند.

$$F_{net}=۰ \Rightarrow F=f_{k_{2,1}} \Rightarrow F=۴۰N$$

۳ دیوار به جسم m_1 نیروی ۴۰N وارد می‌کند و بنا به قانون سوم نیوتون جسم m_1 نیز نیروی ۴۰N را به دیوار وارد می‌کند.

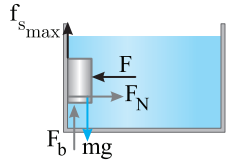
۱۰۲۹ C ۱

ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و با توجه به توازن نیروها داریم (دقت کنید حداقل نیرو یعنی F آن‌قدر کم باشد که جسم در آستانه حرکت به سمت پایین باشد).

در راستای افقی: $F=F_N$

در راستای قائم: $F_b+f_{s_{max}}=mg$

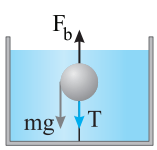
$$\xrightarrow{F_b=۱۰N \, , \, mg=۳۰N} ۱۰+\mu_s F_N=۳۰$$
$$\mu_s F=۲۰ \Rightarrow ۰/۵\times F=۲۰ \Rightarrow F=۴۰N$$



۱۰۳۰ B ۲

نیروهای وارد بر جسم سه نیروی وزن، شناوری و کشش ریسمان است که چون جسم ساکن است این سه نیرو متوازن هستند. نیروی شناوری رو به بالا، نیروی وزن و کشش ریسمان رو به پایین است. از این‌رو می‌توان نوشت:

$$F_{net}=۰ \Rightarrow F_b=mg+T$$



بیشینه نیروی شناوری زمانی است که کشش نخ بیشینه باشد:

$$F_{b_{max}}=mg+T_{max} \Rightarrow F_{b_{max}}=۲۰+۴=۲۴N$$

۱۰۳۱ B ۳

راه‌حل عادی: شخصی روی باسکول ایستاده و ساکن است. بنابراین باسکول وزن شخص را نشان می‌دهد.

$$F_N=W \Rightarrow F_N=۶۰۰N$$

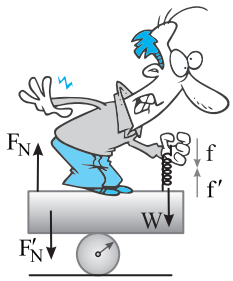
راه‌حل پیچیده:

نیروهای وارد بر شخص:

۱ نیروی وزن که توسط کرهٔ زمین رو به پایین وارد می‌شود.

۲ نیروی عمودی تکیه‌گاه که توسط کف باسکول رو به بالا وارد می‌شود.

۳ نیروی واکنش فنر که بر دست شخص رو به پایین وارد می‌شود.



شخص ساکن است. از این‌رو:

$$F_{net}=۰ \Rightarrow F_N=W+f \quad (۱)$$

نیروهای وارد بر باسکول:

۱ نیروی F'_N واکنش F_N توسط شخص رو به پایین بر کف باسکول وارد می‌شود.

۲ نیروی f′ که برابر f بوده و توسط فنر رو به بالا بر کف باسکول وارد می‌شود.

نیرویی که باسکول تحمل می‌کند و توسط باسکول نمایش داده می‌شود.

$$F=F_N-f \quad (۲)$$

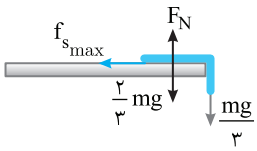
در این صورت:

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} F=(W+f)-f \Rightarrow F=W$$

و باسکول F را که با W برابر است یعنی ۶۰۰N را نشان می‌دهد.

۱۰۳۲ C ۱

خط فکری طناب در آستانهٔ حرکت است و اصطکاک بین طناب و سطح میز $f_{s_{max}}$ است. طناب همگن است. کل طناب ۴/۵m است که ۱/۵m آن یعنی $\frac{۱}{۳}$



طناب آویزان و $\frac{۲}{۳}$ طناب روی سطح میز باقی مانده است. $\frac{۱}{۳}$ طناب آویزان است و وزن آن می‌خواهد طناب را پایین بیاورد اما نیروی اصطکاک ایستایی بین طناب روی میز با سطح میز مانع است. از این‌رو باید اندازهٔ نیروی اصطکاک که مانع حرکت است با اندازهٔ نیروی وزن قسمت آویزان طناب برابر باشد. نیروی وزن قسمت آویزان طناب را با نیروی اصطکاک ایستایی بین قسمت روی میز با سطح میز برابر قرار می‌دهیم.

$$F_{net}=۰ \Rightarrow f_{s_{max}}=W_{\text{قسمت آویزان}} \Rightarrow \mu_s F_N=\frac{۱}{۳}mg$$
$$\xrightarrow{F_N=\frac{۲}{۳}mg} \mu_s(\frac{۲}{۳}mg)=\frac{۱}{۳}mg \Rightarrow \mu_s=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

۱۰۳۳ B ۱

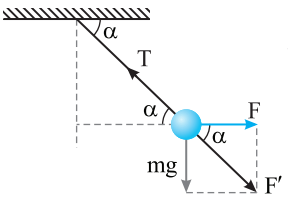
ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:

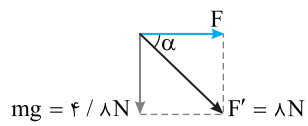
با توجه به اینکه جسم در حال تعادل است پس باید برایند F و W که با F′ نمایش داده‌ایم هم‌اندازه با T و در خلاف جهت آن باشد. $|F'|=۸N$

هم‌چنین با توجه به خطوط موازی و مورب زاویهٔ بین F′ و F نیز برابر α است، α را حساب می‌کنیم.

$$\sin\alpha=\frac{۴/۸}{۸}=۰/۶$$

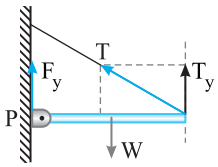
بنابراین $\alpha=۳۷^\circ$ است.





B ۳ ۱۰۳۴

نیروهای وارد بر میله در راستای قائم را رسم می‌کنیم، ۱) نیروی وزن رو به پایین، ۲) مؤلفهٔ قائم نیروی کشش نخ T_y ۳) مؤلفهٔ نیروی قائم لولا رو به بالا

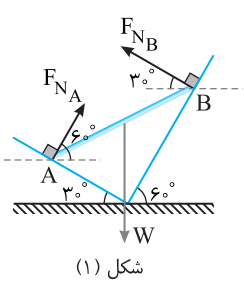


$$F_{net,y}=۰\Rightarrow F_y+T_y=W\Rightarrow F_y=W-T_y\Rightarrow F_{\text{لولا}}<W$$

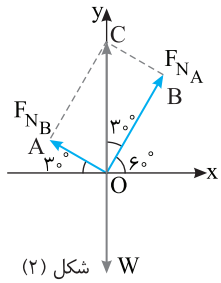
در واقع می‌توان این گونه استدلال کرد که نیروی وزن میله، توسط لولا و نخ تحمل می‌شود بنابراین نیرویی که لولا در نقطهٔ P بر میله وارد می‌کند قطعاً از W کمتر است.

B ۲ ۱۰۳۵

نیرویی که سطح بدون اصطکاک بر جسم وارد می‌کند همان نیروی عمودی سطح است. با توجه به شکل نیروها را رسم می‌کنیم (شکل (۱)). سپس هر سه نیرو را از یک نقطه رسم می‌کنیم (شکل (۲)).



شکل (۱)



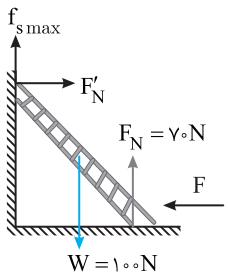
شکل (۲)

میله در تعادل است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند و باید برآیند F_{N_B} و F_{N_A} هم‌اندازه و در خلاف جهت نیروی وزن باشد. با توجه به شکل زاویه‌ای که نیروی F_{N_A} با محور y می‌سازد ۳۰° است. در نتیجه در مثلث OBC می‌توان نوشت:

$$\tan ۳۰^\circ=\frac{OA}{OB}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{F_{N_B}}{F_{N_A}}\Rightarrow F_{N_A}=\sqrt{۳}F_{N_B}$$

B ۲ ۱۰۳۶

خط فکری جملهٔ «کمینه نیرویی که مانع لیز خوردن نردبان شود» یعنی اگر نیروی F از آن کمتر شود نردبان به پایین می‌لغزد. در این حالت نیروی اصطکاک ایستایی بین نردبان و دیوار قائم باید رو به بالا باشد. نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم، نردبان در آستانهٔ حرکت رو به پایین بوده و نیروهای وارد بر آن متوازن است.



۱ برآیند نیروهای وارد بر نردبان در امتداد قائم را برابر صفر قرار می‌دهیم و $f_{s_{max}}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$f_{s_{max}}+F_N=W\Rightarrow f_{s_{max}}+۷۰=۱۰۰\Rightarrow f_{s_{max}}=۳۰N$$

۲ نیروی عمودی سطح که دیوار قائم بر نردبان وارد می‌کند را حساب می‌کنیم.

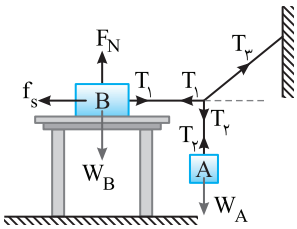
$$f_{s_{max}}=\mu_s F'_N\xrightarrow{\mu_s=۰/۶}۳۰=۰/۶F'_N\Rightarrow F'_N=۵۰N$$

۳ برآیند نیروهای افقی وارد بر نردبان صفر است از این‌رو: $F=F'_N\Rightarrow F=۵۰N$

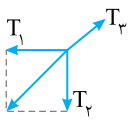
B ۲ ۱۰۳۷

خط فکری قرار است که وزن جسم A بیشینه باشد اما B ساکن بماند یعنی B در آستانهٔ حرکت قرار بگیرد بنابراین نیروی اصطکاک بین جسم B و سطح میز بیشینه $(f_{s_{max}})$ باشد. نیروهای وارد بر جسم B و جسم A را رسم کنید و برای هر جسم نیروی خالص را مساوی صفر قرار داده و کشش نخ متصل بر هریک از آن‌ها را حساب کنید و سرانجام کشش نخ متصل دیوار را به‌دست بیاورید. به مراحل حل مسئله دقت کنید.

۱ جسم B باید ساکن بماند، بنابراین اصطکاک وارد بر آن f_s است و چون وزن جسم A بیشینه است، اصطکاک آستانه حرکت $f_{s_{max}}$ می‌باشد.



$$F_{net}=۰\Rightarrow T_۱=f_{s_{max}}$$
$$\Rightarrow T_۱=\mu_s F_{N_B}$$
$$\Rightarrow T_۱=۰/۵\times۶۰۰=۳۰۰N$$



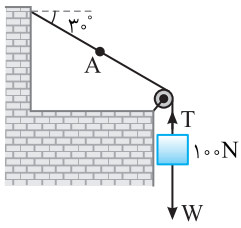
۲ جسم A ساکن است از این‌رو کشش نخ متصل به A $(T_۲)$ با نیروی وزن A برابر است.

$$T_۲=W_A\Rightarrow T_۲=۲۲۵N$$

۳ نیروهای $T_۱$، $T_۲$ و $T_۳$ باید با هم متوازن باشند و برایند $T_۱$ و $T_۲$ باید هم‌اندازهٔ $T_۳$ و در خلاف جهت آن باشد. به کمک رابطهٔ فیثاغورس $T_۳$ را حساب می‌کنیم.

$$T_۳=\sqrt{T_۱^۲+T_۲^۲}=\sqrt{۳۰۰^۲+۲۲۵^۲}=۲۵\sqrt{۱۲^۲+۹^۲}\Rightarrow T_۳=۲۵\times۱۵=۳۷۵N$$

B ۲ ۱۰۳۸



نکته در طول یک نخ همگن با جرم ناچیز نیروی کشش مقدار ثابتی است نیروهای وارد بر وزنه را رسم می‌کنیم. این نیروها متوازن‌هستند. $T=W\Rightarrow T=۱۰۰N$ کشش در تمام نقاط این نخ از جمله نقطهٔ A یکسان و برابر ۱۰۰N است.

B ۳ ۱۰۳۹

بر فضانورد دو نیرو یکی وزن (W) رو به پایین و دیگری نیروی عمودی تکیه‌گاه رو به بالا وارد می‌شود. نیروی خالص وارد بر فضانورد را برابر ma قرار داده، F_N را به‌دست می‌آوریم.

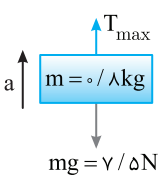
$$F_N-mg=ma\Rightarrow F_N-۷۵\times۱۰=۷۵\times۸۰\Rightarrow F_N=۶۷۵۰N$$

B ۴ ۱۰۴۰

وقتی شخص شروع به بالا رفتن می‌کند، در لحظاتی، یک دست خود را رها کرده و با دست دیگر خود را بالا می‌کشد و سپس دست رها شدهٔ خود را به طناب می‌گیرد و دست دیگر خود را رها می‌کند و با تکرار این عمل بالا می‌رود. وقتی که شخص خود را به بالا می‌کشد ابتدا حرکت او تندشونده $(T>W)$ است اما وقتی که دست دوم خود را به طناب می‌رساند و لحظه‌ای متوقف می‌شود حرکت او کندشونده است $(T<W)$ حتی ممکن است هنگام بالا رفتن وقتی خود را به بالا می‌کشد برای لحظه‌ای هر دو دست او به طناب وصل نباشد و کشش به‌طور لحظه‌ای صفر شود $(T=۰)$ بنابراین با قاطعیت نمی‌توان اظهارنظر کرد.

C ۲ ۱۰۴۱

کشش طناب زمانی بیشترین مقدار است که جسم تندشونده به سمت بالا بیاید یا کندشونده با همان شتاب به سمت پایین در حال حرکت باشد یعنی $T>mg$ باشد. از این‌رو می‌توان شتاب حرکت را در این حالت به‌دست آورد.



$$F_{net}=ma\Rightarrow T_{max}-mg=ma$$
$$\Rightarrow ۱۰-۸=۰/۸a\Rightarrow a=\frac{۲}{۰/۸}=\frac{۲۰}{۸}=\frac{۵}{۲}=۲/۵m/s^۲$$

یعنی شتاب حرکت تندشونده رو به بالا یا حرکت کندشونده رو به پایین نباید از $۲/۵m/s^۲$ بیشتر باشد و گزینهٔ (۲) پاسخ است، یعنی جسم با شتاب $۳m/s^۲$ با حرکت تندشونده نمی‌تواند رو به بالا حرکت کند. حال برای اطمینان گزینهٔ (۴) را نیز بررسی می‌کنیم. حرکت

کندشونده رو به بالا یعنی $T<mg$ از این‌رو:

$$mg-T=ma$$

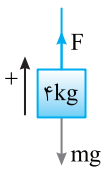
$$۸-T=۰/۸\times۳\Rightarrow T=۵/۶N<۱۰N$$

بنابراین جسم می‌تواند با شتاب $۳m/s^۲$ با حرکت تندشونده رو به پایین حرکت کند در این حالت نیروی کشش نخ $۵/۶N$ است که از بیشینهٔ نیروی کشش $T=۱۰N$ کمتر است و نخ پاره نمی‌شود.

۳ ۱۰۴۲ B

خط فکری در دو حالت ممکن است اندازهٔ شتاب $۲m/s^۲$ باشد یک بار نیروی F رو به بالا بزرگ‌تر از وزن جسم $(F>mg)$ و بار دیگر نیروی F رو به بالا کوچک‌تر از وزن جسم $(F<mg)$ باشد در دو حالت قانون دوم نیوتون را نوشته، F را به‌دست بیاورید.

اندازهٔ شتاب $|a|=۲m/s^۲$ است، بنابراین:



$$F_{net}=m|a|\begin{cases}\xrightarrow{F>mg} F_۱-mg=ma\\ \xrightarrow{F<mg} mg-F_۲=ma\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}F_۱-۴۰=۴\times۲\Rightarrow F_۱=۴۸N\\ F_۲-۴۰=۴\times(-۲)\Rightarrow F_۲=۳۲N\end{cases}$$

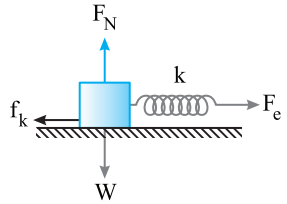
$$|F_۱-F_۲|=۴۸-۳۲=۱۶N$$

اگر در حالت اول $F_۱=۴۸N$ و $F_۲=۳۲N$ باشد با $۱۶N$، نیروی F کاهش یابد که گزینهٔ (۳) چنین است. اما حالت دیگر این است که ابتدا $F<mg$ و برابر $۳۲N$ و سپس $F>mg$ یعنی $۴۸N$ باشد. در این صورت باید F را افزایش داد که در گزینه‌ها نیست.

۲ ۱۰۴۳ C

خط فکری مسئله از شما ضریب اصطکاک را خواسته است یعنی سطح دارای اصطکاک است و نیروی خالص وارد بر جسم برآیند نیروی کشسانی فنر و نیروی اصطکاک جنبشی است.

با توجه به جدول اگر در حالت اول نیروی کشسانی فنر با تغییر طول به اندازهٔ $۲cm$ را F_e بنامیم در حالت دوم که تغییر طول $۳cm$ یعنی تغییر طول $\frac{۳}{۲}=۱/۵$ برابر حالت اول است



نیروی کشسانی فنر $۱/۵F_e$ می‌شود و در حالت سوم تغییر طول $۶cm$ است یعنی تغییر طول فنر $\frac{۶}{۲}=۳$ برابر حالت اول نیروی کشسانی فنر $۳F_e$ می‌شود. اکنون باید برای هر حالت، قانون دوم نیوتون را نوشته و به کمک سه معادله سه مجهول مسئله را حل کنید.

حالت اول: $F_{net}=ma\Rightarrow F_e-f_k=m\times۲/۵\quad (I)$

حالت دوم: $۱/۵F_e-f_k=m\times۵\quad (II)$

حالت سوم: $۳F_e-f_k=m\times۱۲/۵\quad (III)$

رابطهٔ II را بر رابطهٔ I تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{۱/۵F_e-f_k}{F_e-f_k}=۲\Rightarrow ۱/۵f_e-f_k=۲F_e-۲f_k\Rightarrow f_k=۰/۵F_e\quad (۱)$$

به جای f_k در رابطهٔ III مقدار $۰/۵F_e$ را قرار می‌دهیم.

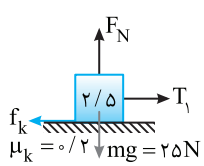
$$۳F_e-۰/۵F_e=۱۲/۵m\Rightarrow ۲/۵F_e=۱۲/۵m\Rightarrow F_e=۵m\quad (۲)$$

به جای F_e در رابطهٔ (۱) مقدار $۵m$ را قرار می‌دهیم.

$$f_k=۰/۵\times۵m\Rightarrow f_k=۲/۵m\xrightarrow{f_k=\mu_k mg}\mu_k mg=۲/۵m\Rightarrow\mu_k=۰/۲۵$$

۳ ۱۰۴۴ C

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.



۱ نیروی اصطکاک را حساب می‌کنیم:

$$f_k=\mu_k F_N=\mu_k mg\Rightarrow f_k=۵N$$

۲ بنابر قانون دوم نیوتون برایند نیروها را برابر ma قرار می‌دهیم، در حالت اول:

$$F_{net}=ma\Rightarrow T_۱-f_k=ma\Rightarrow T_۱-۵=۲/۵a\Rightarrow T_۱=۲/۵a+۵$$

۳ در حالت دوم نیروی $T_۲$ به سمت بالا و mg به سمت پایین است. قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow T_۲-mg=ma\Rightarrow T_۲=۲/۵a+۲۵$$

۴ $\frac{T_۲}{T_۱}$ خواهد شد: $\frac{T_۲}{T_۱}=\frac{۲/۵a+۲۵}{۲/۵a+۵}\Rightarrow\frac{T_۲}{T_۱}=۱+\frac{۲۰}{۲/۵a+۵}$

۵ با توجه به فرض مسأله شتاب $a<۶m/s^۲$ است اگر $a=۶m/s^۲$ باشد نسبت $\frac{T_۲}{T_۱}$ خواهد شد:

$$\frac{T_۲}{T_۱}=۱+\frac{۲۰}{۲/۵\times۶+۵}\Rightarrow\frac{T_۲}{T_۱}=۱+\frac{۲۰}{۲۰}=۲$$

بنابراین اگر شتاب کمتر از $۶\frac{m}{s^۲}$ باشد مقدار کسر از ۱ بیشتر است و $\frac{۲۰}{۲/۵a+۵}>۱$ می‌شود و $\frac{T_۲}{T_۱}<۲$ خواهد بود.

۴ ۱۰۴۵ B

خط فکری مفهوم عبارت (مسافران از کف آسانسور جدا نشوند) این است که نیروی عمودی سطح F_N (نیرویی که سطح بر مسافران وارد می‌کند) در آن بازهٔ زمانی صفر شود. در این صورت تنها نیروی وزن بر آن‌ها وارد شده و شتاب آسانسور $a=g$ باشد.

$$F_N=۰\Rightarrow mg=ma\Rightarrow a=g$$

در واقع آسانسور در حال حرکت رو به بالا حداکثر با شتاب $(a=۱۰N/kg)$ ترمز می‌کند. بنابراین حداقل زمان توقف خواهد شد:

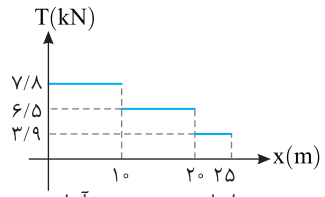
$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=-۱۰t+۸\Rightarrow t=۰/۸s$$

اگر ترمز توقف آسانسور از $g=۱۰N/kg$ بیشتر باشد، مسافران از کف آسانسور برای مدتی جدا می‌شوند زیرا دارای سرعت بوده و طبق قانون اول نیوتون تمایل دارند به حرکت خود ادامه دهند و نیرویی که مانع آن‌ها می‌شود وزن است بنابراین حداکثر شتاب برای توقف مسافران شتاب حاصل از وزن یعنی $a=g$ است و اگر شتاب آسانسور از این بیشتر شود، آسانسور سریع‌تر از مسافران متوقف شده و برای مدت کوتاهی افراد از کف آسانسور جدا می‌شوند.

۲ ۱۰۴۶ C

۱ در $۱۰m$ اول نیروی کشش کابل $T_۱=۷/۸kN=۷۸۰۰N$ است. قانون دوم نیوتون را برای آسانسور نوشته شتاب آن را به‌دست می‌آوریم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow T-W_{کل}=m_{کل}a\Rightarrow ۷۸۰۰-۶۵۰۰=۶۵۰a\Rightarrow a=۲m/s^۲$$



۲ اکنون قانون دوم نیوتون را برای شخص درون آسانسور می‌نویسیم و F_N را حساب می‌کنیم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F_{N_۱}-m_{شخص}g=m_{شخص}a_۱\Rightarrow F_{N_۱}-۵۰۰=۱۰۰\Rightarrow F_{N_۱}=۶۰۰N$$

۳ در بازهٔ $۲۰m$ تا $۲۵m$ نیروی کشش طناب $T_۳=۳/۹kN=۳۹۰۰N$ است. $T_۳<W$ بوده قانون دوم نیوتون را برای آسانسور می‌نویسیم:

$$F_{net}=ma_۳\Rightarrow W_{کل}-T_۳=m_{کل}a'\Rightarrow ۶۵۰۰-۳۹۰۰=۶۵۰a_۳\Rightarrow a_۳=۴m/s^۲$$

۴ با داشتن شتاب نیروی عمودی سطح وارد بر شخص را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{شخص}: F_{net}=ma\Rightarrow m_{شخص}g-F_{N_۳}=m_{شخص}a_۳\Rightarrow ۵۰۰-F_{N_۳}=۵۰\times۴$$

$$\Rightarrow F_{N_۳}=۳۰۰N$$

۵ نسبت $\frac{F_{N_۱}}{F_{N_۲}}$ خواهد شد:

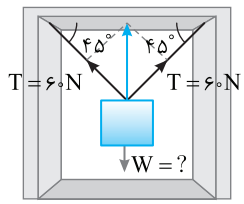
$$\frac{F_{N_۱}}{F_{N_۳}}=\frac{۶۰۰}{۳۰۰}=۲$$

B ۱۰۴۷ ۳

خط فکری مسئلهٔ خاصی نیست، یک وزنه درون آسانسور از دو ریسمان آویزان است و هر ریسمان نیروی کشش ۶۰N بر وزنه وارد می‌کند. چون دو نیروی کشش برابر هستند برآیند آن‌ها در امتداد قائم رو به بالاست. برآیند آن‌ها را به‌دست می‌آوریم، سپس به کمک قانون دوم نیوتون، جرم جسم را حساب می‌کنیم.

۱ نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. برایند دو نیروی کشش ۶۰N که با هم زاویهٔ ۹۰° می‌سازند، را به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آوریم:

$$T_{کل}=\sqrt{T^2+T^2}=\sqrt{2}T\Rightarrow T_{کل}=60\sqrt{2}=60\times 1/4\Rightarrow T_{کل}=84N$$



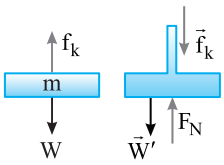
۲ قانون دوم نیوتون را برای جسم می‌نویسیم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow T_{کل}-W=ma\Rightarrow 84-m\times 10=m\times 2\Rightarrow m=\frac{84}{12}=7kg$$

C ۱۰۴۸ ۲

خط فکری با یک مسئله جالب سروکار داریم. اگر مهره را رها کنید با شتاب گرانش $(g=10N/kg)$ سقوط می‌کند اما این مهره وقتی از روی بدنهٔ میله به پایین می‌لغزد، شتابش $2m/s^2$ است. بنابراین حتماً نیرویی رو به بالا مخالف حرکت وجود دارد که قطعاً این نیرو اصطکاک بین مهره و بدنهٔ میله است که شما باید آن را حساب کنید. میله به مهره رو به بالا نیرو وارد می‌کند. بنا به قانون سوم نیوتون مهره هنگام لغزیدن به میله رو به پایین نیرو وارد می‌کند. در این حالت نیروسنج عددی که نشان می‌دهد مجموع وزن پایه و نیرویی است که مهره به میله رو به پایین وارد می‌کند که همان نیروی اصطکاک است.

۱ دو نیرو بر مهره وارد می‌شود اولی نیروی وزن و دومی نیروی اصطکاک است. بنا به قانون دوم خواهیم داشت:



$$F_{net}=ma\Rightarrow W-f_k=ma$$
$$\Rightarrow 0/5\times 10-f_k=0/5\times 2\Rightarrow f_k=4N$$

۲ میله بر مهره نیروی اصطکاک f_k را رو به بالا وارد می‌کند و بنابر قانون سوم نیوتون، مهره نیز بر میله نیروی f_k را رو به پایین وارد می‌کند. چون میله و پایه ساکن هستند، برایند نیروی وارد بر آن‌ها صفر است. نیروهای وارد بر پایه شامل سه نیرو است:

۱) نیروی وزن رو به پایین، ۲) نیروی اصطکاک مهره وارد بر میله رو به پایین، ۳) نیروی عمودی سطح نیروسنج که به پایه رو به بالا وارد می‌کند.

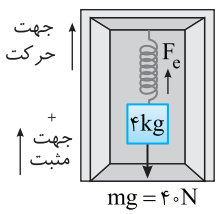
$$F_{net}=0\Rightarrow W'+f_k-F_N=0\Rightarrow F_N=W'+f_k=1/5\times 10+4=19N$$
$$\Rightarrow F_N=19N$$

۳ F_N عددی است که ترازوی فنری نشان می‌دهد. یعنی ترازوی فنری ۱۹N را نشان می‌دهد.

C ۱۰۴۹ ۱

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. ۱) نیروی وزن ۲) نیروی کشسانی فنر

احساس ما این است که باید نیروی کشسانی فنر رو به بالا و نیروی وزن رو به پایین باشد به احساس خود احترام می‌گذاریم و قانون دوم نیوتون را در این حالت می‌نویسیم و F_e را حساب می‌کنیم.

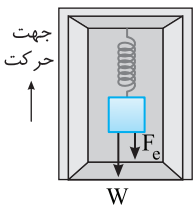


$$F_{net}=ma\Rightarrow F_e-mg=ma$$
$$\xrightarrow[\text{شتاب کندشونده}]{a=-12m/s^2} F_e-40=-48\Rightarrow F_e=-8N$$

اندازهٔ نیروی F_e منفی شده چگونه چنین چیزی ممکن است؟ جهت مثبت را رو به بالا گرفته‌ایم. بنابراین مفهوم این منفی شدن یعنی F_e بار رو به پایین و در جهت نیروی وزن باشد تا به وزنه شتاب $12m/s^2$ رو به پایین بدهد. در نتیجه تغییر طول فنر خلاف جهت نیروی کشسانی یعنی رو به بالا بوده و فنر در این جابه‌جایی فشرده‌تر شده است.

اکنون قانون دوم نیوتون را مجدداً می‌نویسیم و F_e را به‌دست می‌آوریم.

$$-(F_e+W)=ma \xrightarrow{\text{حرکت کندشونده}} -F_e-40=4\times(-12)\Rightarrow F_e=8N$$



تغییر طول فنر را به‌دست می‌آوریم.

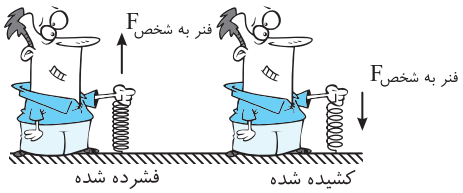
$$F_e=k\Delta x\Rightarrow 8=200\times\Delta x$$
$$\Rightarrow \Delta x=\frac{8}{200}=\frac{4}{100}=4cm$$

فنر فشرده شده : $x_2=x_1-\Delta x=80-4=76cm$

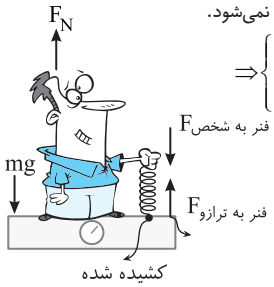
C ۱۰۵۰ ۲

یادآوری ترازوی فنری و باسکول مقدار نیروی عمودی سطح F_N را نمایش می‌دهند.

نکته نیروی کشسانی فنر در خلاف جهت تغییر طول آن است.

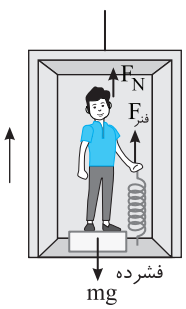


فنر متصل به باسکول را بررسی می‌کنیم. هر نیرویی که رو به بالا به فنر وارد کنیم، فنر همان نیرو را رو به پایین به ما وارد می‌کند. یعنی فنر کف باسکول را بالا می‌کشد و ما آن را به پایین هُل می‌دهیم. بنابراین وقتی فنر متصل به باسکول را تغییر شکل می‌دهیم در عددی که باسکول نشان می‌دهد تغییری حاصل نمی‌شود.



$$\Rightarrow \begin{cases} F_{فنر\ به\ شخص}=F_{فنر\ به\ ترازو} \\ \text{این دو نیرو خلاف جهت هم‌اند} \end{cases} \Rightarrow F_N=mg$$

بنابراین فنر متصل به آسانسور مهم است.



$$F_{net}=ma\Rightarrow F_N+F_{فنر}-mg=ma$$
$$\Rightarrow F_N+k\Delta x-mg=ma$$
$$\Rightarrow F_N+300\times\frac{2}{100}-600=120$$
$$\Rightarrow F_N+6-600=120\Rightarrow F_N=714N$$

پنجره ۴

A ۱۰۵۱ ۱

یادآوری تکانه کمیت برداری است و برابر حاصل‌ضرب جرم در بردار سرعت جسم است.

$$\vec{P}=m\vec{v}$$

تکانه در حالت اول و حالت دوم را به‌دست می‌آوریم:

$$P=mv \xrightarrow{m=2kg} \begin{cases} \vec{v}_1=4\vec{i}\rightarrow P_1=8\vec{i} \\ \vec{v}_2=-8\vec{i}\rightarrow P_2=2\times(-8)\vec{i}=-16\vec{i} \end{cases}$$

تغییر تکانه خواهد شد:

$$\Delta\vec{P}=\vec{P}_2-\vec{P}_1=-16\vec{i}-8\vec{i}\Rightarrow\Delta\vec{P}=-24\vec{i}$$

۱۰۵۲ B ۲

۱ بردار تکانهٔ جسم را در $t=2s$ به‌دست می‌آوریم.

$$\vec{P}=6t\vec{i}+4t^2\vec{j} \xrightarrow{t=2s} \vec{P}=12\vec{i}+16\vec{j}$$

۲ تکانه برابر حاصل‌ضرب جرم جسم در سرعت آن است.

$$\vec{P}=m\vec{v} \xrightarrow{m=0/4kg} 12\vec{i}+16\vec{j}=0/4\vec{v}\Rightarrow\vec{v}=30\vec{i}+40\vec{j}$$

۳ اندازه سرعت جسم خواهد شد:

$$|\vec{v}|=\sqrt{30^2+40^2}=50m/s$$

۱۰۵۳ A ۴

خط فکری در صورت مسئله تندی جسم داده شده و جهت حرکت جسم مشخص نیست. بنابراین v_1 می‌تواند $+3m/s$ یا $-3m/s$ باشد همچنین v_2 می‌تواند $+4m/s$ یا $-4m/s$ باشد، بنابراین باید حالت‌های مختلف را بررسی کنید.

۱ اندازه تغییر سرعت جسم می‌تواند برابر مقدارهای زیر باشد.

$$v_1=\pm3m/s, v_2=\pm4m/s\Rightarrow|\Delta v|=1m/s \text{ یا } 7m/s$$

۲ اندازهٔ تغییر تکانه خواهد شد.

$$|\Delta P|=m|\Delta v|\Rightarrow\begin{cases}|\Delta P|=2\times1=2kgm/s\\|\Delta P|=2\times7=14kgm/s\end{cases}$$

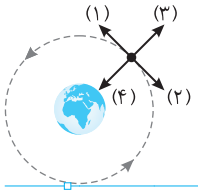
۱۰۵۴ A ۲

دقت کنید تندی افزایش یافته بنابراین بزرگی تکانه نیز افزایش می‌یابد.

تکانه برابر جرم در سرعت جسم می‌باشد، تندی جسم در جهت سرعت $4m/s$ افزایش یافته بنابراین تکانه نیز $12\,kg.m/s$ افزایش می‌یابد.

$$P=mv\Rightarrow P+12=m(v+4)\Rightarrow P+12=mv+4m\Rightarrow12=4m\Rightarrow m=3kg$$

۱۰۵۵ A ۱



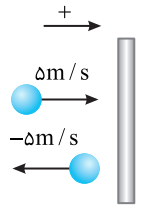
در هر لحظه بردار سرعت بر مسیر حرکت مماس است و جهت آن در سوی چرخش ماهواره است از طرفی تکانه $(\vec{P}=m\vec{v})$ برداری در جهت نیرو است بنابراین جهت درست نشان داده شده روی شکل جهت (۱) است.

۱۰۵۶ A ۲

۱ انرژی جنبشی کمیت نرده‌ای است و با مجذور تندی متناسب است از این‌رو تغییر نمی‌کند.

$$\Delta K=K_2-K_1=\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2)=\frac{1}{2}\times0/5(25-25)=0$$

۲ تکانه کمیتی برداری است و همواره در جهت بردار سرعت است و اگر جهت بردار سرعت عوض شود جهت بردار تکانه تغییر می‌کند.



اگر جهت حرکت به سوی دیوار را مثبت فرض کنیم سرعت برخورد به دیوار $+5m/s$ است و وقتی توپ برمی‌گردد سرعت آن $-5m/s$ خواهد بود. از این رو می‌توان نوشت:

$$|\Delta P|=|m\Delta v|=|0/5(-5-5)|=5kgm/s$$

دقت کنید که هدف طراح یادآوری این نکته است که انرژی جنبشی به جهت حرکت جسم بستگی ندارد اما تکانه بردار بوده و جهت حرکت جسم در مورد تکانه مهم است.

۱۰۵۷ A ۴

ابتدا تندی جسم پس از $5s$ را به‌دست می‌آوریم، سپس به کمک تکانه جرم را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0 \xrightarrow{v_0=0} v=0/5\times5\Rightarrow v=2/5m/s$$

$$P=Mv \xrightarrow{P=10kgm/s} 10=M\times2/5\Rightarrow M=4kg$$

۱۰۵۸ A ۲

۱ سرعت جسم در $t_1=0$ و $t_2=0/5s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$v=2\sin5\pi t\Rightarrow\begin{cases}t_1=0\Rightarrow v_1=2\sin5\pi(0)\Rightarrow v_1=0\\t_2=0/5s\Rightarrow v_2=2\sin5\pi(\frac{1}{2})\\\Rightarrow v_2=2\sin\frac{5\pi}{2}\Rightarrow v_2=2m/s\end{cases}$$

۲ تغییر تکانه خواهد شد:

$$\Delta P=m\Delta v\Rightarrow\Delta P=m(v_2-v_1)\Rightarrow\Delta P=2\times2=4kgm/s$$

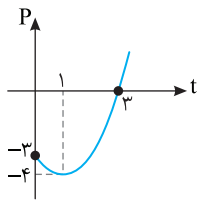
۱۰۵۹ B ۴

نکته هرگاه بزرگی تکانه افزایش یابد یعنی تندی افزایش می‌یابد و حرکت تندشونده است و هرگاه بزرگی تکانه کاهش یابد تندی کاهش می‌یابد و حرکت کندشونده است.

خط فکری برای حل مسئله بهترین روش استفاده از رسم نمودار تکانه - زمان است که یک تابع درجه ۲ است.

ابتدا نمودار $P-t$ را رسم می‌کنیم:

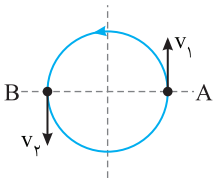
$$P=t^2-2t-3\Rightarrow\begin{cases}t_{\text{رأس}}=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1s\Rightarrow P=1-2-3=-4kg.m/s\\t=0\Rightarrow P=-3kg.m/s\\P=0\Rightarrow t=3s\end{cases}$$



در بازهٔ صفر تا $1s$ اندازهٔ تکانه از $3kg.m/s$ تا $4kg.m/s$ افزایش می‌یابد بنابراین سرعت در حال افزایش و حرکت تندشونده است و از $1s$ تا $3s$، اندازهٔ تکانه از $4kg.m/s$ به صفر می‌رسد و سرعت در حال کاهش و حرکت کندشونده است.

۱۰۶۰ A ۲

نکته سرعت در هر نقطه از مسیر بر مسیر مماس است.



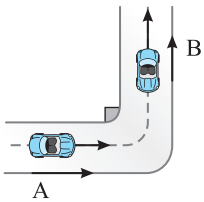
وقتی متحرک مطابق شکل از نقطهٔ A می‌گذرد در مدتی که نصف محیط را طی می‌کند به نقطهٔ B می‌رسد. در این صورت بردار سرعت در نقطهٔ B رو به پایین است، اگر جهت v_1 را مثبت بگیریم $(v_1=v)$ سرعت در نقطهٔ B برابر $v_2=-v$ است. بنابراین تغییر سرعت خواهد شد:

$$|\Delta v|=|v_2-v_1|=|-v-v|=2v$$

تغییر تکانه را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta P=m\Delta v\Rightarrow\Delta P=2mv$$

۱۰۶۱ B ۲



اندازهٔ تکانه در نقطهٔ A و B برابر است مقدار آن را به‌دست می‌آوریم.

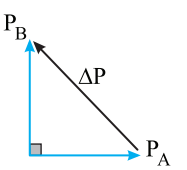
$$P=mv \xrightarrow[v=4m/s]{m=500kg} P=500\times4$$

$$\Rightarrow P=2000kgm/s\Rightarrow P_A=P_B=2000kgm/s$$

نکته اندازه تفاضل دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ که بر هم عمودند از رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آید:

$$|\vec{A}-\vec{B}|=\sqrt{A^2+B^2}$$

بردار P_A و P_B بر هم عمودند و تغییر تکانه خواهد شد:

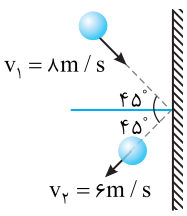


$$\Delta\vec{P}=\vec{P}_B-\vec{P}_A\Rightarrow\Delta P=\sqrt{P_A^2+P_B^2}$$

$$\Rightarrow\Delta P=\sqrt{(2000)^2+(2000)^2}$$

$$\Rightarrow\Delta P=2000\sqrt{2}kgm/s$$

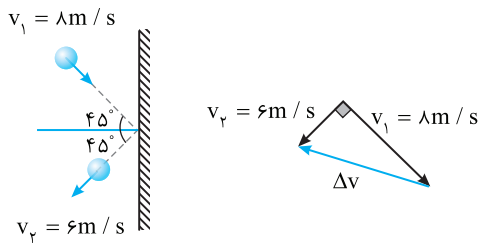
بازی با سوال **در شکل روبه‌رو، گلوله‌ای به جرم $200g$ به مانع برخورد کرده و از آن برمی‌گردد. تغییر تکانهٔ جسم چند کیلوگرم متر بر ثانیه است؟**



۱) ۰/۴ ۲) ۲

۳) ۰/۶ ۴) ۲/۸

پاسخ هم‌سنگ دو بردار را از یک نقطه رسم می‌کنیم:



$$\Delta v=\sqrt{v_1^2+v_2^2}\Rightarrow \Delta v=\sqrt{8^2+6^2}=10m/s$$

تغییر تکانهٔ جسم برابر است با: $\Delta P=m\Delta v\Rightarrow \Delta P=0/2\times 10=2kgm/s$

گزینهٔ ۲

۱۰۶۲ A ۱

حاصل‌ضرب نیرو در زمان اثر نیرو، برابر تغییر تکانه است. $(\Delta P=F\Delta t)$ گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) صحیح هستند و گزینه (۱) نادرست و جواب تست است.

۱۰۶۳ A ۳

۱ تکانهٔ جسم $40kgm/s$ شده است، سرعت جسم را به‌دست می‌آوریم.

$$P=mv\xrightarrow{m=5kg}40=5v\Rightarrow v_2=8m/s$$

۲ سرعت متحرک در جابه‌جایی $10m$ از صفر به $8m/s$ رسیده است به کمک معادله مستقل از شتاب، زمان طی شده را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t\Rightarrow 10=\frac{8+0}{2}\Delta t\Rightarrow \Delta t=2/5s$$

۳ نیروی خالص وارد بر جسم خواهد شد:

$$F_{net}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow F_{net}=\frac{40-0}{2/5}\Rightarrow F_{net}=16N$$

۱۰۶۴ A ۱

با توجه به رابطهٔ $F=\frac{\Delta P}{\Delta t}$ نیروی وارد بر جسم A و B را حساب کرده و بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases} F_A=\frac{\Delta P_A}{\Delta t_A}\xrightarrow{\Delta P=12kgm/s,\ \Delta t=0/05s} F_A=\frac{12}{0/05}=240N \\ F_B=\frac{\Delta P_B}{\Delta t_B}\xrightarrow{\Delta P=6kgm/s,\ \Delta t=0/2s} F_B=\frac{6}{0/2}=300N \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{F_A}{F_B}=\frac{240}{300}\Rightarrow \frac{F_A}{F_B}=\frac{4}{5}$$

۱۰۶۵ A ۲

۱ تکانهٔ جسم ۴۰ درصد افزایش یافته پس $P_2=1/4P_1$ است، بنابراین با توجه به رابطه نیرو، تغییر تکانه می‌توان نوشت:

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\xrightarrow{F=10N,\ \Delta t=4s} 10=\frac{P_2-P_1}{4}$$

$$\Rightarrow 1/4P_1-P_1=(10\times 4)\Rightarrow 0/4P_1=40\Rightarrow P_1=100kg.m/s$$

۲ با توجه به تعریف تکانه، سرعت را حساب می‌کنیم:

$$P_1=mv_1=100kg.m/s\Rightarrow 2\times v_1=100kg.m/s\Rightarrow v_1=50m/s$$

۱۰۶۶ A ۱

دو جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده و تکانهٔ اولیهٔ آن‌ها صفر است. با توجه به رابطهٔ $F=\frac{\Delta P}{\Delta t}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \Delta P_1=Ft\xrightarrow[P_{0_1}=0]{\Delta P_1=P_1-P_{0_1}} P_1=Ft \\ \Delta P_2=\frac{F}{3}(2t)\xrightarrow[P_{0_2}=0]{\Delta P_2=P_2-P_{0_2}} P_2=\frac{2}{3}Ft \end{cases}\Rightarrow \frac{P_2}{P_1}=\frac{\frac{2}{3}Ft}{Ft}=\frac{2}{3}$$

۱۰۶۷ A ۳

۱ با استفاده از رابطهٔ بین نیرو و تکانه، نیروی خالص وارد بر جسم را به‌دست می‌آوریم.

$$F=\frac{\Delta P}{\Delta t}\xrightarrow[P_2=500kgm/s,\ \Delta t=20s]{P_1=300kgm/s} F=\frac{500-300}{20}\Rightarrow F=10N$$

۲ شتاب حرکت را به کمک قانون دوم نیوتون حساب می‌کنیم.

$$F=ma\xrightarrow{m=2kg}10=2a\Rightarrow a=5m/s^2$$

۱۰۶۸ A ۴

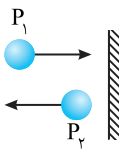
تکانه اولیه چکش برابر است با:

$$P_1=mv_1\xrightarrow{v_1=15m/s}P_1=0/8\times 15\Rightarrow P_1=12kgm/s$$

تکانهٔ نهایی چکش صفر است $(v_2=0\Rightarrow P_2=0)$ بنابراین بزرگی نیروی متوسطی که بر چکش وارد می‌شود خواهد شد:

$$F_{net}=\frac{P_2-P_1}{\Delta t}\xrightarrow{t=3\times 10^{-3}s}F_{net}=\frac{12}{3\times 10^{-3}}\Rightarrow F_{net}=4000N$$

۱۰۶۹ A ۳



نیروی متوسط وارد بر متحرک در هنگام برخورد برابر آهنگ تغییر تکانه است. $F=\frac{\Delta P}{\Delta t}$

نکته مهم این است که اگر P_1 مثبت باشد، P_2 منفی است و تفاضل P_1 و P_2 خواهد شد.

$$|\Delta P|=|P_1-(-P_2)|\Rightarrow|\Delta P|=|P_1+P_2|\Rightarrow|\Delta P|=|P_1|+|P_2|$$

یعنی اندازهٔ تفاضل P_1 و P_2 از اندازهٔ هریک از تکانه‌های P_1 و P_2 بزرگ‌تر است، بنابراین:

$$|F_{av}|=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow|F_{av}|=\frac{|P_1|+|P_2|}{\Delta t}\Rightarrow\begin{cases}|F_{av}|>\frac{|P_1|}{\Delta t}\\ |F_{av}|>\frac{|P_2|}{\Delta t}\end{cases}$$

۱۰۷۰ B ۳

۱ سرعت‌ها را برحسب m/s می‌نویسیم.

$$v_1=54km/h=\frac{54}{3/6}m/s\Rightarrow v_1=15m/s$$

$$v_2=18km/h=\frac{18}{3/6}m/s\Rightarrow v_2=5m/s$$

۲ سرعت برخورد $\vec{v}_1=15\vec{i}$ و سرعت بازگشت $\vec{v}_2=-5\vec{i}$ است.

۳ تکانه قبل و بعد از برخورد را حساب می‌کنیم $(m=1200kg)$.

$$\vec{P}=m\vec{v}\Rightarrow\vec{P}_1=1200\times(15\vec{i})\ ,\ \vec{P}_2=1200\times(-5\vec{i})$$

۴ بردار تغییر تکانه را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta\vec{P}=\vec{P}_2-\vec{P}_1\Rightarrow\Delta\vec{P}=1200(-5\vec{i}-15\vec{i})\Rightarrow\Delta\vec{P}=-24000\vec{i}=-2/4\times 10^4\vec{i}$$

۵ بردار نیروی متوسط وارد بر خودرو خواهد شد:

$$\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t=0/15s}\vec{F}=\frac{-24000\vec{i}}{0/15}\Rightarrow\vec{F}=-1/6\times 10^5\vec{i}$$

۱۰۷۱ A ۲

نیروی متوسطی که به جعبه در مدت $0/2s$ وارد می‌شود به راحتی قابل محاسبه است:

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow F_{av}=\frac{m(\Delta v)}{\Delta t}\Rightarrow F_{av}=\frac{50(10-0)}{0/2}\Rightarrow F_{av}=2500N$$

۱۰۷۲ A ۲

سرعت اتومبیل را برحسب m/s به‌دست می‌آوریم.

$$v_1=54km/h\times\frac{10^3m}{1km}\times\frac{1h}{3600s}\Rightarrow v_1=\frac{54}{3/6}=15m/s$$

سرعت شخص نیز $15m/s$ بوده و هنگام توقف اتومبیل سرعت شخص نیز صفر می‌شود بنابراین نیرویی که کمربند ایمنی باید به شخص در مدت $0/3s$ وارد کند برابر است با:

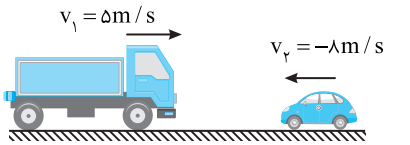
$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow F_{av}=\frac{m(\Delta v)}{\Delta t}\xrightarrow{m=60kg}F_{av}=\frac{60(15-0)}{0/3}$$

$$\Rightarrow F_{av}=\frac{60\times 15}{0/3}=3000N$$

۴ ۱۰۷۳ A

خط فکری با دقت زیاد به صورت مسئله توجه کنید. این مسئله نیرویی که بر کامیون و خودرو وارد می‌شود را از شما نمی‌خواهد بلکه نیروی وارد بر راننده‌ها از شما خواسته شده است. شتاب توقف کامیون و خودرو را حساب می‌کنیم، زیرا شتاب توقف راننده‌ها و شتاب حرکت کامیون و خودرو یکی است.

۱ جهت حرکت کامیون را جهت مثبت فرض می‌کنیم.



۲ شتاب حرکت کامیون یا خودرو را حساب می‌کنیم. $a=\frac{v-v_0}{t}$

اتومبیل: $|a'_{av}|=|\frac{4+8}{0/2}|\Rightarrow|a'_{av}|=\frac{12}{0/2}=60m/s^2$

کامیون: $|a_{av}|=|\frac{4-5}{0/2}|\Rightarrow|\bar{a}|=+5m/s^2$

۳ نیروی وارد بر راننده کامیون برابر است با:

$F_{av}=ma_{av}\Rightarrow F_{av}=100\times5=500N$

۴ نیروی وارد بر راننده اتومبیل برابر است با:

$F'_{av}=ma'_{av}\Rightarrow F'_{av}=100\times60=6000N$

۵ نسبت دو نیرو خواهد شد: $\frac{F'}{F}=\frac{6000}{500}=12$

۳ ۱۰۷۴ B

نیروی متوسط از رابطهٔ $F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}$ به‌دست می‌آید. ابتدا تغییر تکانه را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}\Delta P=m\Delta v, m=60kg\\ v_1=144km/h\div3/6=40m/s\Rightarrow\Delta P=60\times(-10-40)=-3000kgm/s\\ v_2=-36\frac{km}{h}\div3/6=-10m/s\end{cases}$$

مدت برخورد ۰/۵s بوده و بزرگی نیروی متوسط خواسته شده:

$|F_{av}|=\frac{|\Delta P|}{\Delta t}=\frac{3000}{0/5}=6000N$

۳ ۱۰۷۵ A

۱ شتاب حرکت را به کمک قانون دوم نیوتون حساب می‌کنیم.

$F=ma\xrightarrow{F=3N,\ m=2kg}3=2a\Rightarrow a=1/5m/s^2$

۲ سرعت جسم در $t=4s$ را به‌دست می‌آوریم.

$v=at+v_0\xrightarrow{v_0=5m/s}v=1/5\times4+5\Rightarrow v=11m/s$

۳ تکانه جسم خواهد شد: $P=mv\Rightarrow P=2\times11\Rightarrow P=22kgm/s$

۲ ۱۰۷۶ A

یادآوری متحرکی که روی خط راست در حرکت است برای آنکه تغییر جهت بدهد ابتدا باید سرعت آن صفر شده و سرعت تغییر علامت دهد.

اگر جهت سرعت جسم را مثبت در نظر بگیریم $v_1=+10m/s$ و چون نیروی F در خلاف جهت حرکت به جسم وارد می‌شود برابر $F=-5N$ می‌شود بنابراین بازه زمانی که سرعت از $+10m/s$ به صفر می‌رسد خواهد شد:

$F=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow-5=\frac{m(v_2-v_1)}{\Delta t}\xrightarrow{m=2kg}-5=\frac{2(0-10)}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t=4s$

بازی با سوال به جسمی به جرم ۳kg که با سرعت ۵m/s در جهت مثبت محور حرکت می‌کند، نیروی ۶N در خلاف جهت حرکت آن وارد می‌شود. پس از چند ثانیه بزرگی تکانهٔ آن با بزرگی تکانهٔ اولیهٔ آن برابر می‌گردد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

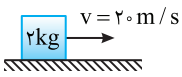
پاسخ **خط فکری** بزرگی تکانه با بزرگی تکانهٔ اولیه برابر شود یعنی اندازهٔ سرعت با حالت اولیه برابر شود، بنابراین اگر $v_1=5m/s$ باشد، $v_2=-5m/s$ می‌شود. با توجه به این مطلب مسئله را حل می‌کنیم. البته نیرو خلاف جهت حرکت $(F=-6N)$ است.

$\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}\Rightarrow F=\frac{m\Delta\vec{v}}{\Delta t}=m(\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{\Delta t})\xrightarrow{m=2kg}-6=3(\frac{-5-5}{\Delta t})\Rightarrow\Delta t=5s$

گزینهٔ ۴

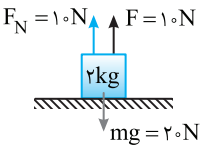
۱ ۱۰۷۷ A

تکانه در راستای افقی برابر است با:



$P_x=mv_x=40kg.m/s$

نیروی F عمود بر مسیر حرکت (در راستای قائم) وارد شده است و تأثیری روی تکانهٔ جسم ندارد و تکانه همچنان 40kgm/s خواهد بود.



۳ ۱۰۷۸ B

با توجه به تعریف تکانه خواهیم داشت: $F=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow-2=\frac{0/8(-5-5)}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t=4s$

۲ ۱۰۷۹ B

یادآوری با توجه به تعریف تکانه و قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:

$F_{net}=ma\xrightarrow{a=\Delta v/\Delta t}F_{net}=\frac{m\Delta v}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta P=m\Delta v}$

$F_{net}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow\Delta P=F_{net}\Delta t$

نیروی خالص وارد بر جسم مطابق شکل مسئله خواهد شد:

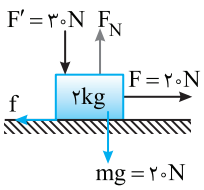
$F_{net}=F-f_k=100-60\Rightarrow F_{net}=40N$

تغییر تکانه در مدت یک ثانیه را حساب می‌کنیم.

$\Delta P=F_{net}\Delta t\Rightarrow\Delta P=40\times1\Rightarrow\Delta P=40kgm/s$

۱ ۱۰۸۰ A

نیروها به جسم ساکن وارد شده پس باید حرکت یا ساکن ماندن جسم بررسی شود. به این منظور لازم است نیروی F را با نیروی اصطکاک بیشینه مقایسه کنیم، اگر $F<f_{s_{max}}$ باشد، جسم ساکن می‌ماند و اگر $F>f_{s_{max}}$ باشد جسم شروع به حرکت می‌کند.



۱ جسم در راستای قائم ساکن است:

$F_N=mg+F'\Rightarrow F_N=20+30\Rightarrow F_N=50N$

۲ بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی را حساب می‌کنیم:

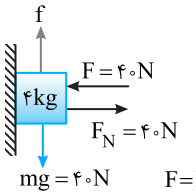
$f_{s_{max}}=\mu_sF_N\Rightarrow f_{s_{max}}=0/5\times50\Rightarrow f_{s_{max}}=25N$

۳ چون نیروی F کوچک‌تر از $f_{s_{max}}$ است پس جسم حرکت نکرده و تغییر تکانه جسم صفر است.

A ۱۰۸۱ ۳

راه‌حل اول:

۱ ابتدا باید بررسی کرد که جسم حرکت می‌کند یا نه، برای این کار نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:



$F=F_N \Rightarrow F_N=۴۰N$

$f_{s\,max}=\mu_s F_N \xrightarrow{\mu_s=۰/۵} f_{s\,max}=۰/۵\times ۴۰=۲۰N$

۲ چون $mg>f_s$ بوده پس جسم رو به پایین شروع به حرکت کرده و به آن نیروی اصطکاک جنبشی وارد می‌شوند. نیروی اصطکاک جنبشی خواهد شد:

$f_k=\mu_k F_N \xrightarrow{\mu_k=۰/۳} f_k=۰/۳\times ۴۰=۱۲N$

نیروی خالص وارد بر جسم را برابر ma قرار می‌دهیم و شتاب را حساب می‌کنیم.

$F_{net}=ma \Rightarrow mg-f_k=ma \Rightarrow ۴۰-۱۲=۴a \Rightarrow a=۷m/s^۲$

۳ سرعت جسم را پس از ۲s به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} v_۱=۰ \\ a=۷m/s^۲ \\ t=۲s \\ v_۲=? \end{cases} \Rightarrow v_۲=at+v_۱ \Rightarrow v_۲=۷\times ۲+۰ \Rightarrow v_۲=۱۴m/s$$

۴ تکانه را حساب می‌کنیم. $P=mv \Rightarrow P=۴\times ۱۴=۵۶kgm/s$

راه‌حل دوم: برایند نیروهای وارد بر جسم در راستای حرکت برابر $F_{net}=mg-f_k=۲۸N$ است پس:

$F_{net}=\frac{\Delta P}{\Delta t} \xrightarrow[P_۱=۰,\Delta t=۲s]{F_{net}=۲۸N} ۲۸=\frac{P_۲-۰}{۲} \Rightarrow P_۲=۵۶kgm/s$

B ۱۰۸۲ ۱

با توجه به قانون دوم نیوتون: $\vec{F}_{av}=\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{F}_{av}=\frac{\vec{P}_۲-\vec{P}_۱}{\Delta t}$ (I)

تکانه را در دو لحظهٔ داده شده به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{P}=(۳t-۶)\vec{i} \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{t=۱s} \vec{P}_۱=-۳\vec{i} \\ \xrightarrow{t=۳s} \vec{P}_۲=۳\vec{i} \end{cases}$$

نیروی خالص متوسط خواهد شد: $\xrightarrow{(I)} \vec{F}_{av}=\frac{۳\vec{i}-(-۳\vec{i})}{۳-۱} \Rightarrow \vec{F}_{av}=۳\vec{i}$

B ۱۰۸۳ ۳

با توجه به رابطهٔ $F_{av}=\Delta P/\Delta t$ کافی است ابتدا تکانه را در لحظه‌های $t_۱=۱s$ و $t=۲/۵s$ حساب کرده سپس F_{av} را به‌دست بیاوریم.

$$\vec{P}=(t^۲-۵t+۶)\vec{i} \Rightarrow \begin{cases} t=۱s \Rightarrow \vec{P}_۱=(۱-۵+۶)\vec{i} \Rightarrow \vec{P}_۱=۲\vec{i} \\ t=۲/۵s \Rightarrow \vec{P}_۲ \Rightarrow (۶/۲۵-۱۲/۵+۶)\vec{i} \Rightarrow \vec{P}_۲=-۰/۲۵\vec{i} \end{cases}$$

$$\vec{F}_{av}=\frac{-۰/۲۵\vec{i}-۲\vec{i}}{۲/۵-۱} \Rightarrow \vec{F}_{av}=\frac{-۲/۲۵\vec{i}}{۱/۵} \Rightarrow \vec{F}_{av}=-۱/۵\vec{i} \Rightarrow F_{av}=۱/۵N=\frac{۳}{۲}N$$

A ۱۰۸۴ ۱

۱ با توجه به رابطهٔ $\vec{F}=\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$ تغییر تکانه را به‌دست می‌آوریم:

$\Delta \vec{P}=\vec{F}\Delta t \Rightarrow \Delta \vec{P}=(۱۶\vec{i}+۱۲\vec{j})\cdot ۰/۵ \Rightarrow \Delta \vec{P}=۸\vec{i}+۶\vec{j}$

۲ جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده پس $P_۱=۰$ بنابراین $\vec{P}_۲$ خواهد شد:

$\vec{P}_۲-\vec{P}_۱=۸\vec{i}+۶\vec{j} \Rightarrow \vec{P}_۲=۸\vec{i}+۶\vec{j}$

۳ اندازهٔ تکانه را حساب می‌کنیم: $|\vec{P}_۲|=\sqrt{۸^۲+۶^۲}=۱۰kg.m/s$

B ۱۰۸۵ ۲

با توجه به رابطهٔ نیرو با تکانهٔ جسم می‌توان نوشت:

$F=\frac{\Delta P}{\Delta t} \Rightarrow F=\frac{P_۲-P_۱}{\Delta t} \xrightarrow{P_۲=۲P_۱}$

$۴=\frac{۲P_۱-P_۱}{\Delta t} \Rightarrow ۴=\frac{mv_۱}{\Delta t} \Rightarrow ۴=\frac{۲۰\times ۵}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t=۲۵s$

A ۱۰۸۶ ۱

نکته دو بردار $\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}$ و $\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}$ وقتی برابرند که مؤلفه‌های آن نظیربه‌نظیر برابر باشد.

۱ با توجه به رابطهٔ $\vec{F}_{net}=\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$ نیروی خالص وارد بر جسم را حساب می‌کنیم:

$\vec{F}_{net}=\frac{\vec{P}_۲-\vec{P}_۱}{\Delta t} \xrightarrow[P_۱=۰ \text{ شروع به حرکت کرده}]{\text{جسم از حال سکون}}$

$\vec{F}_{net}=\frac{\vec{P}_۲}{\Delta t}=\frac{۶\vec{i}-۱۲\vec{j}}{۳} \Rightarrow \vec{F}_{net}=۲\vec{i}-۴\vec{j}$

۲ نیروی برایند برابر است با:

$\vec{F}_۱+\vec{F}_۲=\vec{F}_{net} \Rightarrow (۷\vec{i}+۱۰\vec{j})+(a\vec{i}+b\vec{j})=۲\vec{i}-۴\vec{j}$

$\Rightarrow (۷+a)\vec{i}+(۱۰+b)\vec{j}=۲\vec{i}-۴\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} ۷+a=۲ \Rightarrow a=-۵ \\ ۱۰+b=-۴ \Rightarrow b=-۱۴ \end{cases}$

$\Rightarrow a+b=-۵-۱۴=-۱۹$

B ۱۰۸۷ ۳

۱ شتاب حرکت جسم را به کمک قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آوریم.

$\vec{F}=m\vec{a} \xrightarrow[m=۲kg]{\vec{F}=-۵\vec{i}+۲\vec{j}} -۵\vec{i}+۲\vec{j}=۲\vec{a} \Rightarrow \vec{a}=-۲/۵\vec{i}+\vec{j}$

۲ بنا به فرض مسئله سرعت متحرک را در $t=۱s$ برابر $\vec{v}_۱=۵\vec{i}+۳\vec{j}$ است سرعت متحرک را در $t=۳s$ به کمک تعریف شتاب حساب می‌کنیم.

$\vec{a}=\frac{\vec{v}_۲-\vec{v}_۱}{t_۲-t_۱} \Rightarrow -۲/۵\vec{i}+\vec{j}=\frac{v_۲-۵\vec{i}-۳\vec{j}}{۳-۱}$

$\Rightarrow -۵\vec{i}+۲\vec{j}=\vec{v}_۲-۵\vec{i}-۳\vec{j} \Rightarrow \vec{v}_۲=+۵\vec{j}$

۳ تکانه در لحظهٔ $t=۳s$ خواهد شد:

$\vec{P}=m\vec{v} \Rightarrow \vec{P}=۲\times(+۵\vec{j})=+۱۰\vec{j} \Rightarrow |P|=۱۰ kg.m/s$

A ۱۰۸۸ ۳

از رابطهٔ $P=mv$ ، سرعت را برحسب P و m به‌دست می‌آوریم:

$P=mv \Rightarrow v=\frac{P}{m}$

سرعت را در رابطهٔ انرژی جنبشی قرار می‌دهیم:

$K=\frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow K=\frac{۱}{۲}m(\frac{P}{m})^۲ \Rightarrow K=\frac{P^۲}{۲m}$

A ۱۰۸۹ ۲

۱ تکانهٔ اولیه را به‌دست می‌آوریم.

$P_۱=mv_۱ \xrightarrow[v_۱=۱۰m/s]{m=۴kg} P_۱=۴\times ۱۰ \Rightarrow P_۱=۴۰kg.m/s$

۲ انرژی جنبشی جسم ۹ برابر شده است. $K_۲=۹K_۱$ (I)

۳ به جای انرژی جنبشی مقدار $K=\frac{P^۲}{۲m}$ را در رابطهٔ (I) قرار می‌دهیم.

$\frac{P_۲^۲}{۲m}=۹\frac{P_۱^۲}{۲m} \Rightarrow P_۲=۳P_۱ \Rightarrow P_۲=۳\times ۴۰=۱۲۰kgm/s$

۴ تغییر تکانه خواهد شد: $\Delta P=P_۲-P_۱=۱۲۰-۴۰ \Rightarrow \Delta P=۸۰kg.m/s$

۴ ۱۰۹۰ A

بـا توجه به رابطهٔ بین انرژی جنبشـی و تکانه، انرژی جنبشـی گلولـه و دونده را برابر قرار داده و مسئله را حل می‌کنیم:

$$K=\frac{P^2}{2m}\Rightarrow K_{\text{دونده}}=K_{\text{گلوله}}\Rightarrow\frac{P^2_{\text{دونده}}}{2\times 40}=\frac{P^2_{\text{گلوله}}}{2\times 0/1}$$

$$\Rightarrow P^2_{\text{دونده}}=400P^2_{\text{گلوله}}\Rightarrow P_{\text{دونده}}=20P_{\text{گلوله}}$$

بازی با سؤال تکانهٔ اتومبیلی به جرم یک تن با تکانهٔ کامیونی به جرم پنج تن برابر است. انرژی جنبشی کامیون چند برابر انرژی جنبشی اتومبیل است؟ ریاضی - ۸۹

۱) ۵ ۲) ۲۵ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{25}$

پاسخ تکانهٔ جسم برابر $P=mv$ و انرژی جنبشی آن $K=\frac{1}{2}mv^2$ است،

بنابراین بین تکانه و انرژی جنبشی رابطهٔ روبه‌رو برقرار است. $K=\frac{P^2}{2m}$

اکنون به حل تست می‌پردازیم:

$$P(\text{اتومبیل})=P(\text{کامیون}),\ m(\text{کامیون})=5m(\text{اتومبیل}),\ K=\frac{P^2}{2m}$$

$$\Rightarrow K(\text{کامیون})=\frac{1}{5}K(\text{اتومبیل})$$

گزینهٔ ۳

۲ ۱۰۹۱ A

با توجه به فرض مسئله $P_A=P_B$ و $m_B=3m_A$ است بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}K_A=\frac{P_A^2}{2m_A}\\ K_B=\frac{P_B^2}{2m_B}\end{cases}\Rightarrow\frac{K_A}{K_B}=\frac{m_B}{m_A}\times(\frac{P_A}{P_B})^2$$

$$\xrightarrow{K_A=18J}\frac{18}{K_B}=\frac{3m_A}{m_A}\Rightarrow K_B=6J$$

۱ ۱۰۹۲ A

نکته رابطهٔ بین تکانه و انرژی جنبشی $K=\frac{P^2}{2m}$ است.

با توجه به رابطهٔ انرژی جنبشی و تکانه نسبت خواسته‌شده را حساب می‌کنیم.

$$\frac{K_A}{K_B}=\frac{\frac{P_A^2}{2m_A}}{\frac{P_B^2}{2m_B}}\Rightarrow\frac{K_A}{K_B}=\frac{m_B}{m_A}\times(\frac{P_A}{P_B})^2$$

$$\xrightarrow{m_B=\frac{5}{8}m_A,\ P_A=\frac{4}{3}P_B}\frac{K_A}{K_B}=\frac{\frac{5}{8}m_A}{m_A}\times(\frac{\frac{4}{3}P_B}{P_B})^2=\frac{5}{8}\times\frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow\frac{K_A}{K_B}=\frac{10}{9}$$

۱ ۱۰۹۳ A

یادآوری رابطهٔ تکانه و انرژی جنبشی به‌صورت $K=\frac{P^2}{2m}$ است:

$$\frac{K_A}{K_B}=\frac{\frac{P_A^2}{2m_A}}{\frac{P_B^2}{2m_B}}\Rightarrow\frac{K_A}{K_B}=(\frac{P_A}{P_B})^2\times\frac{m_B}{m_A}$$

$$\xrightarrow[K_A=4K_B]{P_A=P_B}4=\frac{m_B}{m_A}\xrightarrow{m_A=2kg}m_B=8kg$$

۳ ۱۰۹۴ B

۱ انرژی جنبشی ۷۵٪ کاهش یافته است. بنابراین: $K_2=\frac{25}{100}K_1\Rightarrow K_2=\frac{1}{4}K_1$

۲ با توجه به رابطه تکانه و انرژی جنبشی خواهیم داشت:

$$K_1=\frac{P_1^2}{2m_1},K_2=\frac{P_2^2}{2m_2}\Rightarrow\frac{K_2}{K_1}=\frac{P_2^2}{P_1^2}\times\frac{m_1}{m_2}$$

$$\xrightarrow{m_1=m_2}\frac{K_2}{K_1}=\frac{P_2^2}{P_1^2}\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{P_2^2}{P_1^2}\Rightarrow P_2=\frac{1}{2}P_1$$

۳ درصد تغییرات تکانه خواهد شد:

$$\frac{\Delta P}{P_1}\times 100=\frac{P_2-P_1}{P_1}\times 100=\frac{\frac{1}{2}P_1-P_1}{P_1}\times 100\Rightarrow\text{درصد تغییر اندازه تکانه}=-50\%$$

۳ ۱۰۹۵ A

نکته با توجه به رابطهٔ انرژی جنبشـی و رابطهٔ تکانه می‌توانیم K را برحسـب P بنویسیم:

$$P=mv,K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow K=\frac{P^2}{2m}$$

درصد تغییر انرژی جنبشی برابر است با:

$$\frac{K_2-K_1}{K_1}\times 100=\frac{\frac{P_2^2}{2m}-\frac{P_1^2}{2m}}{\frac{P_1^2}{2m}}\times 100=\frac{P_2^2-P_1^2}{P_1^2}\times 100$$

$$\xrightarrow[P_1=20]{P_2=P_1+2}\frac{(P_1+2)^2-P_1^2}{P_1^2}\times 100=\frac{P_1^2+4+4P_1-P_1^2}{P_1^2}\times 100$$

$$=\frac{4+4\times(20)}{(20)^2}\times 100=\frac{84}{4}\%=21\%$$

۴ ۱۰۹۶ A

تکانه کمیت برداری است $(\vec{P}=m\vec{v})$، بنابراین جهت بردار تکانه می‌تواند تغییر کند در حالی که اندازهٔ تکانه ثابت باشـد مثلاً در حرکت یک خودرو با سـرعت $5m/s$ به دور یک میدان، بردار سرعت و در نتیجه بردار تکانه در حال تغییر است و گزینهٔ (۱) نادرست است، اما اندازهٔ سرعت و هم‌چنین انرژی جنبشی این خودرو $(K=\frac{1}{2}mv^2)$ ثابت است و گزینهٔ (۲) و (۳) نادرسـت اسـت، بنابراین با تغییر تکانه قطعاً بردار سرعت تغییر کرده اما انرژی جنبشی ممکن است ثابت یا متغیر باشد و گزینهٔ (۴) درست است.

۲ ۱۰۹۷ B

بـا توجه بـه تعریف تکانه $P=mv$ و انرژی جنبشـی $K=\frac{1}{2}mv^2$ بین تکانه و انرژی جنبشی جسم رابطهٔ زیر برقرار است.

$$K=\frac{P^2}{2m}\Rightarrow\frac{K'}{K}=\frac{P'^2}{P^2}\Rightarrow 4=\frac{P'^2}{P^2}\Rightarrow P'=2P\Rightarrow mv'=2mv\Rightarrow v'=2v$$

از طرفی بنا به فرض مسأله $v'=v+8$ است. پس:

$$v'=2v\ ,v'=v+8\Rightarrow 2v=v+8\Rightarrow v=8m/s$$

$$\xrightarrow{P=mv}P=2\times 8=16kg.m/s$$

۴ ۱۰۹۸ A

۱ ابتدا بردار تکانه در $t=2s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\vec{P}=3t^2\vec{i}+8t\vec{j}\xrightarrow{t=2s}\vec{P}=3(2)^2\vec{i}+8(2)\vec{j}=12\vec{i}+16\vec{j}$$

$$\Rightarrow\vec{P}=12\vec{i}+16\vec{j}$$

۲ بزرگی تکانه را حساب می‌کنیم.

$$P=\sqrt{P_x^2+P_y^2}\Rightarrow P=\sqrt{12^2+16^2}\Rightarrow P=\sqrt{144+256}=\sqrt{400}$$

$$\Rightarrow P=20kgm/s$$

۳ به کمک رابطهٔ انرژی جنبشی و تکانه، انرژی جنبشی را به‌دست می‌آوریم.

$$K=\frac{P^2}{2m}\xrightarrow{m=5kg}K=\frac{20^2}{2\times 5}\Rightarrow K=40J$$

بازی با سؤال بردار تکانهٔ جسمی در SI به صورت $\vec{P}=(۳t^۲)\vec{i}+(۲b-۶)t\vec{j}$ است. اگر اندازهٔ متوسط نیروهای وارد بر جسم در دو ثانیهٔ اول حرکت برابر با ۱۰N باشد، b برابر کدام گزینه است؟

۱) ۷ ۲) ۳

۳) −۱ ۴) گزینهٔ (۱) و گزینهٔ (۳) می‌تواند پاسخ باشد.

پاسخ با توجه به رابطهٔ $\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$ بردار نیرو را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{F}=\frac{\vec{P}_۲-\vec{P}_۱}{\Delta t}\Rightarrow\vec{F}=\frac{۱۲\vec{i}+(۲b-۶)۲\vec{j}-۰}{۲-۰}\Rightarrow\vec{F}=۶\vec{i}+(۲b-۶)\vec{j}$$

بزرگی نیرو برابر است با:

$$|\vec{F}|=\sqrt{F_x^۲+F_y^۲}\Rightarrow|\vec{F}|=۱۰=\sqrt{۶^۲+(۲b-۶)^۲}$$

$$\Rightarrow۱۰۰=۳۶+(۲b-۶)^۲\Rightarrow(۲b-۶)^۲=۶۴\Rightarrow\begin{cases}۲b-۶=۸\Rightarrow b=۷\\ ۲b-۶=-۸\Rightarrow b=-۱\end{cases}$$

گزینهٔ ۴

A ۱۰۹۹ ۲

خط فکری سؤال مفهومی خوبی است. آهنگ تغییر تکانه برابر نیروی خالص وارد بر جسم است $(\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t})$ و بردار نیروی خالص و بردار تغییر تکانه هم‌جهت هستند، بنابراین برای اینکه مشخص کنید که جهت تغییر تکانه کدام است باید جهت نیروی خالص وارد بر جسم را مشخص کنید.

جسم در شرایط خلأ رو به بالا پرتاب شده است و تنها نیروی وارد بر جسم نیروی وزن رو به پایین است یعنی نیروی خالص وارد بر جسم در امتداد قائم و رو به پایین بوده در نتیجه تغییر تکانه نیز رو به پایین می‌باشد.

A ۱۱۰۰ ۴

خط فکری نیروی وارد بر جسم برابر آهنگ تغییر تکانه $(\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t})$ است. یعنی تغییر تکانه در هر ثانیه برابر نیروی وارد بر جسم است بنابراین در بررسی تغییر تکانه باید به سراغ نیروی وارد بر جسم برویم.

جسم در شرایط خلأ رها شده است و تنها نیروی وارد بر آن نیروی وزن $(W=mg)$ است بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$F=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow mg=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow\Delta P=mg\Delta t\xrightarrow{\Delta t=۱s}\Delta P=mg$$

در نتیجه در هر ثانیه تغییر تکانه به اندازهٔ mg است یعنی در هر ثانیه به اندازهٔ mg به اندازهٔ تکانه اضافه می‌شود و گزینهٔ (۱) و (۲) درست است.

A ۱۱۰۱ ۱

۱) تکانهٔ اولیه را حساب می‌کنیم.

$$P=mv\xrightarrow[m=۵\times۱۰^{-۲}kg]{v_۱=۱۴m/s}P_۱=۵\times۱۰^{-۲}\times۱۴\Rightarrow P_۱=۰/۷kgm/s$$

۲) تکانه را یک ثانیه بعد که سرعت برابر ۲۳m/s می‌شود به‌دست می‌آوریم.

$$P_۲=mv_۲\Rightarrow P_۲=۵\times۱۰^{-۲}\times۲۳\Rightarrow P_۲=۱/۱۵kgm/s$$

۳) تغییر تکانه خواهد شد:

$$P_۲-P_۱=۱/۱۵-۰/۷\Rightarrow\Delta P=۰/۴۵kgm/s=\frac{۹}{۲۰}kg.m/s$$

B ۱۱۰۲ ۳

تندی وزنه را پس از جابه‌جایی $(H-h)$ به کمک فرمول مستقل از زمان به‌دست می‌آوریم

$$v^۲-۰=۲g\Delta y\Rightarrow v=۲g\sqrt{H-h}$$

تکانهٔ وزنه را حساب می‌کنیم.

$$P=mv\Rightarrow P=۲mg\sqrt{H-h}$$

A ۱۱۰۳ ۲

نکته هرگاه جسمی به جرم m در شرایط خلأ در مجاورت سطح زمین از ارتفاع h به هر طرفی پرتاب شود، تغییر تکانهٔ آن خواهد شد:

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow\Delta P=F\Delta t\xrightarrow{F=mg}\Delta P=mg\Delta t$$

بازهٔ زمانی ثانیهٔ دوم حرکت برابر $\Delta t=۱s$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\Delta P=mg\Delta t\xrightarrow[m=۰/۲kg]{\Delta t=۱}\Delta P=۲kg.m/s$$

بازی با سؤال پرتابه‌ای به جرم m با سرعت اولیهٔ $v_۰$ تحت زاویهٔ α نسبت به افق پرتاب می‌شود و پس از ۳t ثانیه به زمین می‌رسد. بزرگی تغییر تکانهٔ پرتابه در t ثانیهٔ اول حرکت، کدام است؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر شود.) ریاضی - ۹۷

۱) ۲mgt ۲) mgt ۳) $\frac{mv_۰}{۳}$ ۴) $\frac{۲mv_۰}{۳}$

پاسخ تغییر تکانه برابر است با: $\Delta P=F\Delta t$ ، تنها نیروی وارد بر جسم نیروی وزن است، از این‌رو:

$$\Delta P=mgt$$

گزینهٔ ۲

A ۱۱۰۴ ۱

اگر سرعت رو به بالا را مثبت بگیریم $v_۱=+۵m/s$ ، سرعت آن در برگشت منفی و برابر $v_۲=-۵m/s$ است و تنها نیروی وارد بر گلوله نیروی وزن است بنابراین با توجه به رابطهٔ بین نیروی متوسط و تغییرات تکانه داریم:

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow\Delta P=F_{av}\Delta t\Rightarrow\Delta P=mg\Delta t$$

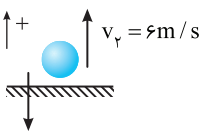
$$\Rightarrow m(\Delta v)=mg\Delta t\Rightarrow m(-۵-(+۵))=m(-۱۰)\times\Delta t\Rightarrow\Delta t=۱s$$

روش دیگر: وقتی تنها نیروی خالص وارد بر جسم وزن است شتاب جسم برابر شتاب گرانش $(a=-g)$ است بنابراین:

$$a=\frac{v_۲-v_۱}{\Delta t}\Rightarrow-۱۰=\frac{-۵-۵}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t=۱s$$

B ۱۱۰۵ ۳

۱) اگر جهت مثبت را رو به بالا در نظر بگیریم سرعت اولیه $v_۱=-۸m/s$ و $v_۲=+۶m/s$ خواهد شد.



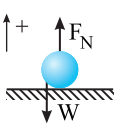
۲) نیروی خالص متوسط وارد بر توپ را به‌دست می‌آوریم.

$$F_{net}=\frac{\Delta P}{\Delta t}=m(\frac{v_۲-v_۱}{\Delta t})$$

$$\xrightarrow[\Delta t=۳۵\times۱۰^{-۲}s]{m=۲kg}F_{net}=۲\times\frac{(۶-(-۸))}{۳۵\times۱۰^{-۲}}=\frac{۲۸\times۱۰^۲}{۳۵}\Rightarrow F_{net}=۸۰N$$

۳) نیروی که سطح زمین به توپ وارد می‌کند را حساب می‌کنیم.

$$F_{net}=F_N-W\Rightarrow۸۰=F_N-۲۰\Rightarrow F_N=۱۰۰N$$



۴) نسبت $\frac{F_{net}}{F_N}$ خواهد شد:

$$\frac{F_{net}}{F_N}=\frac{۸۰}{۱۰۰}=\frac{۴}{۵}$$

B ۱۱۰۶ ۴

۱) جهت مثبت را رو به پایین در نظر می‌گیریم.

سرعت برخورد گلوله به زمین را به کمک معادلهٔ مستقل از زمان حساب می‌کنیم.

$$v^۲=+۲gy\Rightarrow v^۲=۲\times۱۰\times۲۰\Rightarrow v=۲۰m/s$$

۲) تندی برگشت رو به بالا ۱۰m/s است. چون جهت مثبت را رو به پایین در نظر گرفته‌ایم، سرعت برگشت رو به بالا $-۱۰m/s$ می‌شود، بنابراین بزرگی شتاب در بازهٔ زمانی تماس توپ با زمین خواهد شد:

$$|a|=\frac{|\Delta v|}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t=۰/۲s}|a|=\frac{|-۱۰-۲۰|}{۰/۲}\Rightarrow|a|=۱۵۰m/s^۲$$

۳) نیروی متوسط وارد بر گلوله را به کمک قانون دوم نیوتون حساب می‌کنیم.

$$F_{av}=ma\xrightarrow{m=۰/۲kg}F_{av}=۰/۲\times۱۵۰\Rightarrow F_{av}=۳۰N$$

۳ ۱۱۰۷ B

نکته نیروی خالص متوسط به کمک تکانه از رابطهٔ $F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}$ به‌دست می‌آید.

۱ تکانه در $t_1=3s$ را حساب می‌کنیم:

$$P_1=15t_1^2+5t_1\Rightarrow P_1=15(3)^2+5(3)=135+15=150kgm/s$$

۲ تکانه در $t_2=6s$ را حساب می‌کنیم:

$$P_2=15t_2^2+5t_2\Rightarrow P_2=15(6)^2+5(6)=15(36+2)\Rightarrow P_2=570kgm/s$$

۳ در گام آخر با رابطهٔ $F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}$، F_{av} را حساب می‌کنیم:

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow F_{av}=\frac{P_2-P_1}{t_2-t_1}\Rightarrow F_{av}=\frac{570-150}{6-3}=\frac{420}{3}\Rightarrow F_{av}=140N$$

بازی با سؤال معادلهٔ تکانهٔ زمان جسمی به جرم ۲۰۰g در SI به صورت $P=t^2-2t-1$ است. نیروی متوسط وارد بر جسم در بازهٔ $t=1s$ تا $t=3s$ چند نیوتون است؟ خارج تجربی - ۹۳

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰/۵

پاسخ ۱ تکانه را در دو لحظهٔ $t_1=1s$ و $t_2=3s$ به‌دست می‌آوریم.

$$P=t^2-2t-1\begin{cases}\xrightarrow{t_1=1s}P_1=1-2-1\Rightarrow P_1=-2kgm/s\\ \xrightarrow{t_2=3s}P_2=9-6-1\Rightarrow P_2=2kgm/s\end{cases}$$

۲ نیروی متوسط وارد بر جسم خواهد شد:

$$F_{av}=\frac{P_2-P_1}{\Delta t}\Rightarrow {}_{av}=\frac{2-(-2)}{3-1}\Rightarrow F_{av}=2N$$

گزینهٔ ۲

۲ ۱۱۰۸ A

نیروی متوسط وارد بر جسم برابر با $F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}$ است، بنابراین ابتدا تغییر تکانه از $t_1=2s$ تا $t_2=4s$ را به‌دست آوریم:

۱ سرعت جسم را در دو لحظهٔ $t_1=2s$ و $t_2=4s$ به‌دست می‌آوریم.

$$v=t^2-2t+3\Rightarrow\begin{cases}t_1=2s\Rightarrow v_1=4-4+3\Rightarrow v_1=3m/s\\ t_2=4s\Rightarrow v_2=16-8+3\Rightarrow v_2=11m/s\end{cases}$$

۲ تغییر تکانه جسم خواهد شد:

$$\Delta P=P_2-P_1\Rightarrow\Delta P=mv_2-mv_1\Rightarrow\Delta P=m(v_2-v_1)$$

$$\xrightarrow{m=2kg}\Delta P=2(v_2-v_1)=2(11-3)=16kg.m/s$$

۳ نیروی متوسط وارد بر جسم را حساب می‌کنیم.

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow F_{av}=\frac{16}{2}=8N$$

۱ ۱۱۰۹ B

خط فکری کافی است با توجه به جرم $m=4kg$ و رابطهٔ تکانه - زمان $P=8t^2-8$، ابتدا تکانه در لحظهٔ $t_1=0$ و $t_2=2s$ را حساب کرده سپس سرعت جسم را در این لحظات به‌دست آورده و سرانجام به کمک تعریف شتاب، شتاب جسم را حساب کنید.

در لحظه‌های $t=0$ و $t=2s$، تکانهٔ جسم را به‌دست می‌آوریم، سپس به کمک $P=mv$، سرعت‌ها را در این دو لحظه حساب می‌کنیم.

$$t_1=0\Rightarrow P=0-8=-8kg.m/s$$

$$\xrightarrow{P=mv}-8=4v_1\Rightarrow v_1=-2m/s$$

$$t_2=2s\Rightarrow P=32-8=24kg.m/s$$

$$\xrightarrow{P=mv}24=4v_2\Rightarrow v_2=6m/s$$

شتاب متوسط جسم خواهد شد: $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{6-(-2)}{2}=4\,m/s^2$

بازی با سؤال معادلهٔ تکانهٔ جسمی که روی خط راست حرکت می‌کند نسبت به زمان در SI به صورت $P(t)=t^2-5t+6$ است. در چه زمانی برحسب ثانیه جهت شتاب تغییر می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۲/۵

پاسخ تکانه برابر mv می‌باشد از این‌رو:

$$P=mv(t)=t^2-5t+6\Rightarrow v(t)=\frac{1}{m}t^2-\frac{5}{m}t+\frac{6}{m}$$

معادلهٔ v، درجه دوم (سهمی) می‌باشد. می‌دانیم در رأس سهمی شیب خط مماس صفر و شیب خط مماس نمودار $v-t$ برابر شتاب است در نتیجه در رأس سهمی نمودار $v-t$ شتاب صفر شده و تغییر جهت می‌دهد.

$$\text{رأس سهمی}=\frac{-b}{2a}=\frac{-(\frac{-5}{m})}{\frac{2}{m}}=\frac{5}{2}=2/5s$$

گزینهٔ ۴

۴ ۱۱۱۰ B

به سراغ حرکت‌شناسی بروید و با مقایسه معادلهٔ حرکت داده شده با معادلهٔ مکان زمان حرکت با شتاب ثابت، شتاب و سرعت اولیه را تعیین کنید.

۱ معادلهٔ $x-t$ درجه دوم می‌باشد و ضریب t^2 برابر $\frac{1}{2}a$ و ضریب t برابر v_0 است، از این‌رو:

$$\begin{cases}x=2t^2-4t+4\\ x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}a=2\Rightarrow a=4m/s^2, v_0=-4m/s, x_0=4m$$

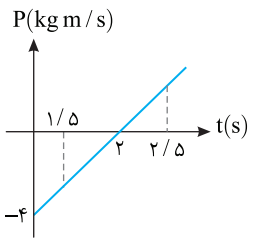
۲ معادلهٔ سرعت - زمان متحرک را می‌نویسیم و سرعت آن را در لحظهٔ $t=3s$ به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=4t-4\xrightarrow{t=3s}v=12-4=8m/s$$

۳ تکانه در لحظهٔ $t=3s$ خواهد شد: $P=mv\Rightarrow P=0/2\times8=1/6kg.m/s$

۴ ۱۱۱۱ B

خط فکری تکانه برابر حاصل‌ضرب جرم جسم در سرعت جسم است $(P=mv)$ هرگاه بزرگی تکانه افزایش یابد یعنی تندی جسم در حال افزایش و حرکت تندشونده است و اگر بزرگی تکانه کاهش یابد یعنی تندی جسم در حال کاهش و حرکت کندشونده است. بنابراین شما باید بررسی کنید که در بازهٔ زمانی $t_1=1/5s$ تا $t_2=2/5s$، بزرگی تکانه در حال افزایش است یا کاهش؟ رسم یک نمودار ساده $(P-t)$ مشکل را حل خواهد کرد.



نمودار $P-t$ به صورت روبه‌رو است. می‌دانیم که $P=mv$ است پس هنگامی که نمودار متحرک به سمت محور t حرکت می‌کند یعنی بزرگی تکانه در حال کاهش بوده و بزرگی سرعت در حال کاهش و حرکت کندشونده است و هنگامی که نمودار متحرک از محور t دور می‌شود و بزرگی تکانه افزایش می‌یابد یعنی بزرگی سرعت در حال افزایش است و حرکت تندشونده می‌باشد. تکانهٔ متحرک در $t=2s$، صفر می‌شود پس در $t=1/5s$ حرکت متحرک کندشونده و در $t=2/5s$ حرکت تندشونده است.

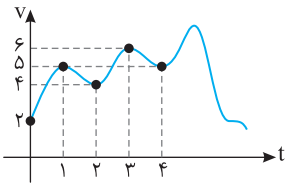
۴ ۱۱۱۲ A

تکانه ثابت یعنی سرعت حرکت ثابت است بنابراین باید به دنبال نمودارهایی بگردیم که در آن‌ها سرعت ثابت است. نمودار a مربوط به نمودار مکان - زمان حرکت با سرعت ثابت است هم‌چنین نمودار c مربوط به حرکت با سرعت ثابت است بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

در نمودار b سرعت در حال افزایش است بنابراین تکانه ثابت نمی‌ماند و b نادرست است.

در نمودار d، جسم ساکن است و حرکت نمی‌کند بنابراین نمودار d نادرست است.

B ۱۱۱۳ ۱



دو ثانیهٔ نخست $t=0$ تا $t=2s$ است که در ثانیه‌های $t=0$ و $t=2s$ سرعت به ترتیب $2m/s$ و $4m/s$ است و تغییر تکانه در این بازه خواهد شد:

$$\Delta P=m\Delta v\Rightarrow \Delta P_1=m(4-2)=2m$$

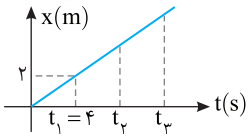
دو ثانیهٔ دوم $t=2s$ تا $t=4s$ است که در این ثانیه‌ها سرعت به ترتیب $4m/s$ و $5m/s$ است از این‌رو:

$$\Delta P_2=m(5-4)=m$$

نسبت تغییر تکانه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta P_1}{\Delta P_2}=\frac{2m}{m}=2$$

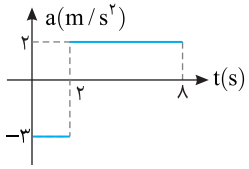
A ۱۱۱۴ ۲



نمودار مکان - زمان خط راست بوده بنابراین حرکت دارای سرعت ثابت است و تکانه تغییر نمی‌کند.

B ۱۱۱۵ ۴

یادآوری سطح محصور بین نمودار شتاب زمان و محور زمان برابر تغییر سرعت است.



۱ برای به‌دست آوردن تغییر تکانه باید تغییر سرعت را حساب کنیم بنابراین سطح زیر نمودار شتاب زمان را در بازهٔ صفر تا $8s$ به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta v=S\Rightarrow \Delta v=-3\times 2+(2\times 6)\Rightarrow \Delta v=6m/s$$

۲ تغییر تکانه جسم خواهد شد:

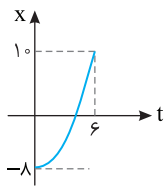
$$\Delta P=m\Delta v\xrightarrow{m=2kg}\Delta P=2\times 6\Rightarrow \Delta P=12kg\,m/s \text{ یا } N.s$$

در مورد یکای ΔP که در صورت مسأله بیان شده توضیح زیر را لازم می‌دانیم:

$$F=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow \Delta P=F\Delta t\Rightarrow kg.m/s\equiv N.s$$

یعنی یکای $kg.m/s$ هم‌ارز $N.s$ است.

B ۱۱۱۶ ۳



۱ به سراغ حرکت‌شناسی می‌رویم. شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر سرعت لحظه‌ای است. در لحظهٔ $t=0$ شیب خط مماس صفر است بنابراین سرعت اولیه $(v_0=0)$ است به کمک معادلهٔ مکان زمان حرکت با شتاب ثابت شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow 10=\frac{1}{2}a\times(6)^2+0-8\Rightarrow 18=\frac{1}{2}a\times 36\Rightarrow a=1m/s^2$$

۲ حال با توجه به معادلهٔ مستقل از زمان، سرعت متحرک هنگام عبور از مبدأ مکان $(x=0)$ را به‌دست می‌آوریم:

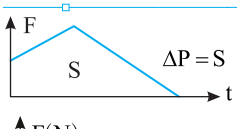
$$v^2-v_0^2=2a(x-x_0)\xrightarrow{x=0}v^2-0=2\times 1\left[0-(-8)\right]\Rightarrow v=\pm 4m/s$$

۳ شیب خط در مبدأ مکان مثبت است پس $v=+4m/s$ می‌باشد و تکانه خواهد شد:

$$P=mv\Rightarrow P=2\times 4=8kg.m/s$$

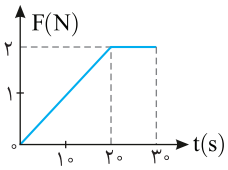
B ۱۱۱۷ ۱

نکته سطح محصور بین نمودار نیرو - زمان با محور زمان برابر تغییر تکانهٔ جسم است.



سطح زیر نمودار $F-t$ را حساب می‌کنیم.

$$\Delta P=S=\frac{2\times 20}{2}\Rightarrow \Delta P=20kgm/s$$



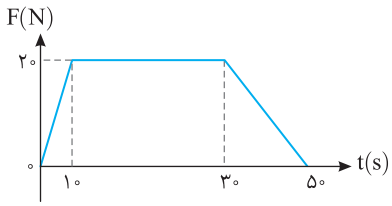
جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده و $P_0=0$ است بنابراین تکانه در لحظهٔ $t=20s$ خواهد شد:

$$\Delta P=P-P_0\Rightarrow 20=P-0\Rightarrow P=20kgm/s$$

B ۱۱۱۸ ۳

به کمک سطح زیر نمودار نیرو - زمان، تغییر تکانه را حساب می‌کنیم:

$$\Delta P=S=(50+20)\times\frac{30}{2}=700kgm/s$$



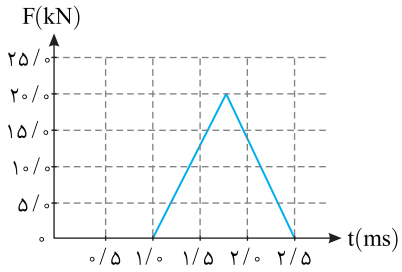
نیروی خالص متوسط وارد بر جسم برابر آهنگ تغییر تکانه است. از این‌رو می‌توان نوشت:

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow F_{av}=\frac{700}{50}\Rightarrow F_{av}=14N$$

B ۱۱۱۹ ۱

نکته سطح محصور بین نمودار نیرو - زمان و محور زمان برابر تغییر تکانه است.

خط فکری نیروی متوسط وارد بر جسم برابر $F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}$ است بنابراین شما باید به کمک سطح زیر نمودار $F-t$، تغییر تکانه را به‌دست آورده سپس F_{av} را حساب کنید.



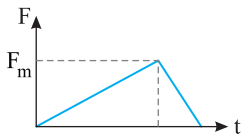
۱ تغییر تکانه خواهد شد:

$$\Delta P=S\Rightarrow \Delta P=\frac{20\times 10^3\times 1/5\times 10^{-3}}{2}\Rightarrow \Delta P=15kgm/s$$

۲ نیروی خالص متوسط وارد بر جسم را حساب می‌کنیم.

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}=\frac{15}{1/5\times 10^{-3}}\Rightarrow F_{av}=10^4N$$

میانبر در نمودارهایی مثلثی‌شکل مانند شکل روبه‌رو نیروی متوسط نصف بیشینه نیروی وارد بر جسم است.

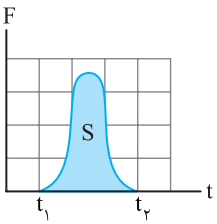


$$F_{av}=\frac{F_{max}}{2}$$

B ۱۱۲۰ ۱

یادآوری ممکن است نیروی وارد بر جسم متغیر باشد اما هم چنان سطح محصور بین نمودار نیرو - زمان و محور زمان برابر تغییر تکانه است.

$$S=\Delta P$$

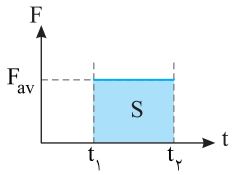


شکل (الف)

با توجه به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت.

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow \Delta P=F_{av}\Delta t$$

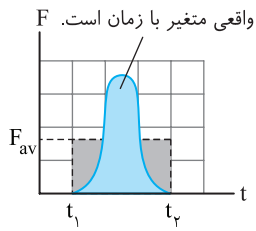
بنابراین نمودار نیروی متوسط بر حسب زمان مطابق شکل روبه‌رو است. در نتیجه سطح این مستطیل نیز برابر تغییر تکانه است.



شکل (ب)

نتیجه مقدار نیروی متوسط (F_{av}) به گونه‌ای که مساحت مستطیل زیر F_{av} با مساحت سطح زیر نمودار نیروی واقعی متغیر شکل (الف) برابر است.

تغییر تکانهٔ ناشی از نیروی متوسط برابر با تغییر تکانهٔ نیروی واقعی متغیر با زمان است.



شکل (پ)

با توجه به یادآوری، ابتدا مساحت مستطیل F_{av} را حساب می‌کنیم.

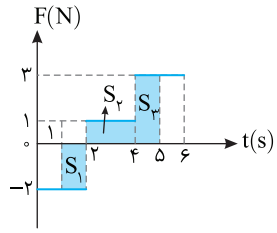
$$S_{F_{av}}=۱۰\times۲=۲۰kgm/s$$

این مساحت با مجموع $S_۱$ و $S_۲$ برابر است از این‌رو:

$$S_{av}=S_۱+S_۲\Rightarrow۲۰=۸+S_۲\Rightarrow S_۲=۱۲kgm/s$$

B ۱۱۲۱ ۱

یادآوری سطح محصور بین نمودار نیرو و زمان و محور زمان برابر تغییر تکانه جسم است. $(\Delta P=S)$



سطح زیر نمودار در بازهٔ زمانی $t_۱=۱s$ تا $t_۲=۵s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta P=S_۱+S_۲+S_۳\Rightarrow\Delta P=(-۲\times۱)+(۱\times۲)+(۳\times۱)$$

$$\Delta P=-۲+۲+۳\Rightarrow\Delta P=۳kgm/s$$

تغییر سرعت را حساب می‌کنیم.

$$\Delta P=m\Delta v\xrightarrow{m=۰/۵kg}۳=۰/۵\Delta v\Rightarrow\Delta v=۶m/s$$

شتاب متوسط خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{۶}{۵-۱}\Rightarrow a_{av}=۱/۵m/s^۲$$

B ۱۱۲۲ ۴

سطح زیر نمودار نیرو - زمان برابر تغییر تکانهٔ جسم است.

$$S=(۵\times۲)+(۸\times۲)+(۶\times۱)\Rightarrow\Delta P=۱۰+۱۶+۶=۳۲\ kg\ m/s$$

تغییر سرعت جسم در این ۵s را حساب می‌کنیم.

$$\Delta P=m\Delta v\Rightarrow۳۲=۴\Delta v\Rightarrow\Delta v=۸\ m/s$$

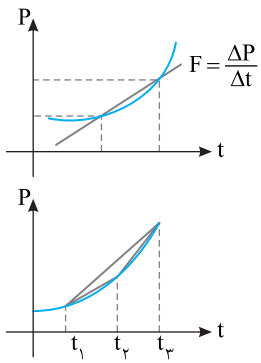
شتاب متوسط خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۸}{۵}=۱/۶\ m/s^۲$$

A ۱۱۲۳ ۳

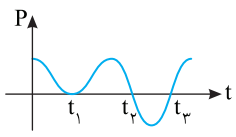
نکته شیب خط قاطع در نمودار تکانه - زمان برابر نیروی متوسط وارد بر جسم است.

خط‌های قاطع نمودار در بازه‌های زمانی $t_۱$ تا $t_۲$، $t_۲$ تا $t_۳$ و $t_۱$ تا $t_۳$ را رسم می‌کنیم، شیب خط قاطع در بازهٔ $t_۲$ تا $t_۳$ از شیب خطوط قاطع دیگر بیشتر است بنابراین نیروی متوسط وارد بر جسم در این بازه بزرگ‌تر است.



A ۱۱۲۴ ۲

خط فکری با توجه به تعریف تکانه $(\vec{P}=m\vec{v})$، چگونگی تغییر تکانه دقیقاً شبیه چگونگی تغییر سرعت است. یعنی اگر سرعت صفر باشد تکانه صفر است و بالعکس. اگر تکانه مثبت باشد سرعت مثبت و اگر تکانه منفی باشد، سرعت منفی است.

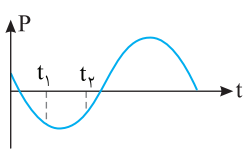


اگر تکانه صفر شده و تغییر علامت دهد، سرعت نیز در همان لحظه صفرشده و تغییر علامت می‌دهد، بنابراین برای اینکه مشخص کنیم متحرک چند بار تغییر جهت داده است باید تعداد دفعاتی که تکانه تغییر علامت می‌دهد را بشماریم.

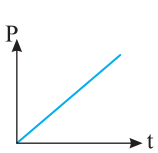
در لحظهٔ $t_۲$ و $t_۳$ نمودار تکانه محور زمان را قطع کرده یعنی تکانه تغییر جهت داده است بنابراین در این دو لحظه متحرک تغییر جهت می‌دهد.

A ۱۱۲۵ ۱

تکانه حاصل ضرب جرم جسم در سرعت جسم است $(\vec{P}=m\vec{v})$ بنابراین، تغییرات تکانه عیناً شبیه تغییرات سرعت است. یعنی هر جا تکانه در حال کاهش است، سرعت در حال کاهش است و هر جا سرعت تغییر جهت دهد، تکانه تغییر جهت می‌دهد و ... در نتیجه در لحظهٔ $t_۱$ بزرگی تکانه در حال افزایش است و حرکت تندشونده است پس گزینهٔ (۱) درست است. دقت کنید در بازهٔ صفر تا $t_۱$ بزرگی تکانه ابتدا در حال کاهش و سپس در حال افزایش است. پس حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است و گزینهٔ (۴) نادرست است. در لحظهٔ $t_۲$ بزرگی تکانه در حال کاهش است و حرکت کندشونده است، پس گزینهٔ (۲) نادرست است. بین $t_۱$ و $t_۲$ تکانه صفر نشده پس سرعت نیز صفر نشده و گزینهٔ (۳) نادرست است.



بازی با سوال **متحرکی به جرم ثابت بر خط راست در حال حرکت است و نمودار تکانه بر حسب زمان آن مطابق شکل روبه‌رو است. کدام گزینه، به ترتیب از راست به چپ، دربارهٔ تغییرات سرعت و تغییرات شتاب این متحرک درست است؟**



۱) سرعت آن در حال افزایش و شتاب آن ثابت است.

۲) سرعت آن ثابت و شتاب آن در حال افزایش است.

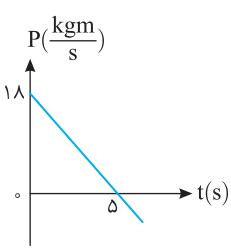
۳) سرعت و شتاب هر دو در حال افزایش هستند.

۴) سرعت و شتاب هر دو ثابت هستند.

پاسخ **نمودار خط راست است و با گذشت زمان تکانه و در نتیجه سرعت افزایش می‌یابد. شیب نمودار ثابت است یعنی نیروی خالص وارد بر جسم و در نتیجه شتاب جسم ثابت است.** گزینهٔ ۱

B ۱۱۲۶ ۱

ابتدا از روی نمودار، نیروی وارد بر جسم را حساب می‌کنیم.



$$F=\frac{\Delta P}{\Delta t}\xrightarrow{\text{در بازهٔ ۰ تا ۵s}}$$

$$F=\frac{۰-۱۸}{۵-۰}\Rightarrow F=-۳/۶N$$

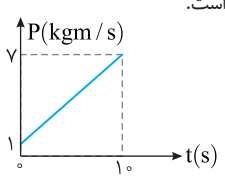
نیروی وارد بر جسم ثابت است. بنابراین، شتاب حرکت جسم نیز ثابت و در تمام لحظات یکسان است.

$$F=ma\Rightarrow-۳/۶=۰/۴۵\,a\Rightarrow a=-۸m/s^۲$$

بزرگی شتاب $۸m/s^۲$ است.

A ۱۱۲۷ ۲

نمودار تکانه - زمان، خط راست است. با توجه به تعریف تکانه $(P=mv)$ نمودار $v-t$ نیز خط راست مایل است و شتاب حرکت ثابت است.



$$P_۱=mv_۱\Rightarrow۱=۰/۲v_۱\Rightarrow v_۱=۵m/s$$

$$P_۲=mv_۲\Rightarrow۷=۰/۲v_۲\Rightarrow v_۲=۳۵m/s$$

$$a=\frac{v_۲-v_۱}{t}=\frac{۳۵-۵}{۱۰}=۳m/s^۲$$

A ۱۱۲۸ ۳

راه‌حل اول: شتاب متوسط برابر است با $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ پس در $t=۲s$ و $t=۴s$

ابتدا سرعت‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$P_۱=mv_۱\Rightarrow ۳=۲\times v_۱\Rightarrow v_۱=۱/۵m/s$

$P_۲=mv_۲\Rightarrow ۰=۲\times v_۲\Rightarrow v_۲=۰$

شتاب را حساب می‌کنیم:

$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-۱/۵}{۲}=-۰/۷۵m/s^۲$

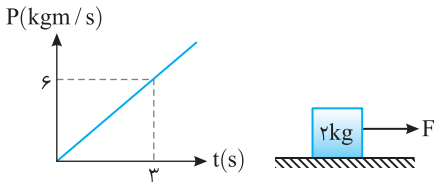
راه‌حل دوم: شیب خط نمودار تکانه زمان برابر نیروی متوسط وارد بر جسم است، شیب نمودار را در بازهٔ $t=۲s$ تا $t=۴s$ به‌دست می‌آوریم. $F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}=\frac{-۳}{۲}=-۱/۵N$

به کمک قانون دوم نیوتون شتاب متوسط را حساب می‌کنیم.

$F_{av}=ma_{av}\Rightarrow -۱/۵=۲\times a_{av}\Rightarrow a_{av}=-۰/۷۵m/s^۲$

B ۱۱۲۹ ۱

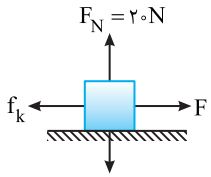
نکته شیب نمودار $P-t$ برابر نیروی خالص وارد بر جسم است.



۱ از روی شیب نمودار نیروی خالص وارد بر جسم را به‌دست می‌آوریم.

$F_{net}=\frac{۶-۰}{۳-۰}\Rightarrow F_{net}=۲N$

۲ نیروی اصطکاک بین سطح و جسم را حساب می‌کنیم.



$f_k=\mu_k F_N \xrightarrow[F_N=W=۲۰N]{\mu_k=۰/۲} f_k=۰/۲\times ۲۰$

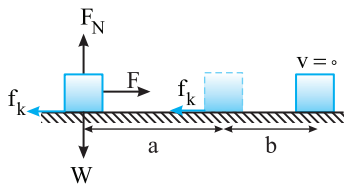
$\Rightarrow f_k=۴N$

۳ نیروی F خواهد شد:

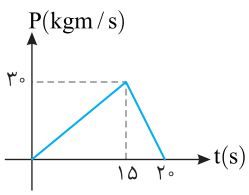
$F_{net}=F-f_k\Rightarrow ۲=F-۴\Rightarrow F=۶N$

C ۱۱۳۰ ۳

خط فکری به نمودار نگاه کنید بنا به فرض مسئله بعد از لحظهٔ $t=۱۵s$ نیروی F حذف شده است و بنا به قانون اول نیوتون باید جسم با همان تکانه $۳۰kgm/s$ به حرکت خود ادامه دهد اما پس از قطع F در مدت $۵s$ جسم متوقف شده است، بنابراین باید سطح افقی دارای اصطکاک باشد و این اصطکاک جسم را متوقف کند. از این‌رو شما ابتدا در بازه $۱۵s$ تا $۲۰s$ نیروی اصطکاک را به‌دست آورید سپس در بازهٔ ۰ تا $۱۵s$ به کمک نمودار نیروی خالص (F_{net}) وارد بر جسم را حساب کنید تا بتوانید نیروی F را به‌دست بیاورید.



نکته شیب نمودار تکانه - زمان برابر نیروی خالص وارد بر جسم است.



۱ در بازهٔ $۱۵s$ تا $۲۰s$ تنها نیروی مؤثر اصطکاک است بنابراین خواهیم داشت:

$f_k=\frac{۰-۳۰}{۲۰-۱۵}\Rightarrow f_k=-۶N$

۲ در بازهٔ صفر تا $۱۵s$ دو نیرو یکی F و دیگری f_k بر جسم وارد می‌شود (W و F_N یکدیگر را خنثی می‌کنند)، نیروی خالص را از روی شیب نمودار $P-t$ به‌دست می‌آوریم.

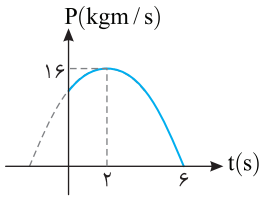
$F_{net}=\frac{۳۰-۰}{۱۵-۰}\Rightarrow F_{net}=۲N$

۳ نیروی F خواهد شد:

$F_{net}=F-f_k\Rightarrow ۲=F-۶\Rightarrow F=۸N$

C ۱۱۳۱ ۱

خط فکری نمودار سهمی است و سهمی نسبت به محور قائم گذرا از رأسش دارای تقارن است و معادلهٔ تکانه - زمان تابع درجه ۲ است. باید از این ویژگی سهمی استفاده کرد.



۱ یکی از ریشه‌های معادلهٔ تکانه - زمان $t=۶s$ است. با توجه به تقارن سهمی باید ریشهٔ دیگر آن $t=-۲$ باشد.

۲ معادلهٔ سهمی را می‌نویسیم و مختصات رأس سهمی را در آن قرار می‌دهیم.

$P=A(t-۶)(t+۲)\xrightarrow[P=۱۶kgm/s]{t=۲s}۱۶=A(۲-۶)(۲+۲)\Rightarrow A=-۱$

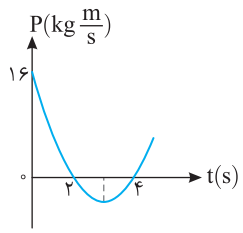
۳ معادلهٔ سهمی کامل شد: $P=-(t-۶)(t+۲)\Rightarrow P=-t^۲+۴t+۱۲$

۴ تکانهٔ اولیهٔ جسم با توجه به معادلهٔ آن $P_۰=۱۲kgm/s$ است بنابراین سرعت اولیهٔ آن خواهد شد.

$P=mv\xrightarrow{m=۲kg}۱۲=۲v\Rightarrow v_۰=۶m/s$

C ۱۱۳۲ ۲

ابتدا به شما بگوییم که این تست چند اشکال اساسی دارد. اولاً در صورت مسئله بیان نشده که نمودار $P-t$ سهمی است، ثانیاً در کتاب درسی وقتی حرکت دارای شتاب ثابت باشد، نمودار سرعت زمان و تکانه زمان متحرک خط راست است. بنابراین این متحرک دارای جرم متغیر است که باز در کتاب درسی خبری از این مسئله وجود ندارد.



۱ معادلهٔ سهمی را به صورت $P=A(t-t')(t-t'')$ می‌نویسیم. t' و t''، ریشه‌های معادله هستند و با توجه به نمودار $t'=۲s$ و $t''=۴s$ است.

$P=A(t-۲)(t-۴)$

۲ در لحظهٔ $t=۰$، $P=۱۶kgm/s$ است بنابراین:

$۱۶=A(۰-۲)(۰-۴)\Rightarrow A=۲$

۳ معادلهٔ $P-t$ خواهد شد: $P=۲(t-۲)(t-۴)$

۴ تکانه در لحظات $t_۱=۳s$ و $t_۲=۵s$ را به‌دست می‌آوریم:

$P_۱=۲(۳-۲)(۳-۴)\Rightarrow P_۱=-۲kgm/s$

$P_۲=۲(۵-۲)(۵-۴)\Rightarrow P_۲=۶kgm/s$

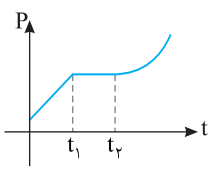
۵ نیروی خالص متوسط را حساب می‌کنیم.

$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow F_{av}=\frac{۶-(-۲)}{۵-۳}\Rightarrow F_{av}=۴N$

B ۱۱۳۳ ۳

نکته شیب نمودار تکانه - زمان برابر نیروی خالص وارد بر جسم است.

باید شیب نمودار را بررسی کنیم.



در بازهٔ صفر تا $t_۱$ نمودار $P-t$ خط راست مایل است بنابراین نیرو مقدار ثابتی است و در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$، تکانه ثابت بوده و نیروی وارد بر جسم صفر است. سرانجام در $t>t_۲$ نمودار $P-t$ منحنی است یعنی شیب خط مماس بر نمودار در حال تغییر است که این توضیحات تنها با شکل (۳) همخوانی دارد.

B ۱۱۳۴ ۳

بنـا به قانون سـوم نیوتون نیرویی که شـخص به زمیـن و زمین به شـخص وارد می‌کند هم‌اندازه و خلاف جهت هم‌اند و زمان اثر این نیروها یکی است، از این‌رو می‌توان نوشت:

$$F_1=-F_2 \xrightarrow{F=ma} m_1a_1=-m_2a_2 \xrightarrow{a=\frac{v-v_0}{t}}$$

$$m_1\frac{v_1-0}{t}=-m_2(\frac{v_2-0}{t})\Rightarrow m_1v_1=-m_2v_2\Rightarrow P_{\text{شخص}}=-P_{\text{زمین}}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) درست است. البته تکانهٔ زمین خلاف جهت تکانهٔ شخص است.

B ۱۱۳۵ ۲

یادآوری قانون اول نیوتون بیان می‌کند که هرگاه نیروی خالص بر جسـم وارد نشود، اگر جسم ساکن باشد ساکن می‌ماند و اگر در حال حرکت باشد به حرکت روی خط راست با سرعت ثابت ادامه می‌دهد.

از دید ناظر، قانون اول نیوتون در مورد جسـم صادق بوده است یعنی نیروی خالص وارد بر جسم صفر است. از این‌رو:

$$\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}\xrightarrow{F=0}\Delta\vec{P}=0$$

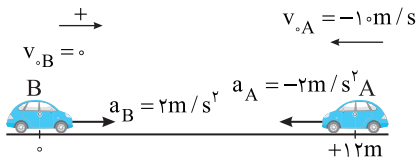
B ۱۱۳۶ ۲

خط فکری دقیقـاً با یک مسـئلهٔ حرکت‌شناسـی سـروکار داریم. بایـد معادله‌های حرکت را نوشـته برابر قرار دهیم و زمان رسـیدن دو خودرو به یکدیگر را بیابیم، سپس به کمک معادلهٔ سرعت - زمان، سرعت هریک را در لحظهٔ برخورد حساب کنیم و سرانجام تکانه دو متحرک را به‌دست بیاوریم.

۱ ابتـدا معادلـهٔ دو متحرک را می‌نویسـیم، مـکان B را مبدأ در نظر گرفته و سـمت راست را جهت مثبت اختیار می‌کنیم (به علامت شتاب‌ها و سرعت دقت کنید):

$$x_B=\frac{1}{2}a_Bt^2+v_{0B}t+x_{0B}\Rightarrow x_B=t^2$$

$$x_A=\frac{1}{2}a_At^2+v_{0A}t+x_{0A}\Rightarrow x_A=-t^2-10t+12$$



۲ هنگام رسیدن دو متحرک به هم $x_A=x_B$ می‌شود بنابراین:

$$t^2=-t^2-10t+12\Rightarrow 2t^2+10t-12=0\Rightarrow t^2+5t-6=0$$

$$\Rightarrow(t+6)(t-1)=0\Rightarrow\begin{cases}t=1s\\ t=-6s \quad (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

۳ حال سرعت متحرک‌ها را با استفاده از رابطهٔ $v=at+v_0$ به‌دست می‌آوریم.

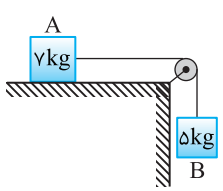
$$\begin{cases}v_A=-2t-10\xrightarrow{t=1s}v_A=-12m/s\\ v_B=2t\xrightarrow{t=1s}v_B=2m/s\end{cases}$$

۴ تکانهٔ هر متحرک خواهد شد:

$$\begin{cases}P_A=mv_A\Rightarrow P_A=-12m\\ P_B=mv_B\Rightarrow P_B=2m\end{cases}\Rightarrow\frac{P_B}{P_A}=\frac{2}{-12}=-\frac{1}{6}$$

A ۱۱۳۷ ۲

خط فکری نکتهٔ مهـم در حل این مسـئله این است که دو جسم با یک ریسمان به هم متصل هستند و بعد از رها شـدن، اگر جسـم B، یک متر پایین بیاید همزمان جسـم A نیز یک متر جابه‌جا می‌شود یعنی در هـر لحظـه تنـدی A بـا تنـدی B برابـر اسـت $(v_A=v_B)$ و این نکته حل مسئله است.



تکانه‌ها را نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases}P_A=m_Av\\ P_B=m_Bv\end{cases}\Rightarrow\frac{P_A}{P_B}=\frac{m_A}{m_B}=\frac{7}{5}\Rightarrow\frac{P_A}{P_B}=1/4$$

B ۱۱۳۸ ۱

نیروی کشسـانی فنر وارد بر دو جسـم برابر اسـت و این نیرو بر هر دو جسـم A و B در مدت زمان یکسانی وارد می‌شود. از این‌رو می‌توانیم بنویسیم:

$$F_A=F_B\Rightarrow\frac{\Delta P_A}{\Delta t}=\frac{\Delta P_B}{\Delta t}\Rightarrow\Delta P_A=\Delta P_B$$

دو جسم از حال سکون رها شده‌اند و تکانهٔ اولیهٔ آن‌ها صفر است $(P_{0A}=P_{0B})$ بنابراین تکانهٔ نهایی آن‌ها با هم برابر است.

$$P_A-P_{0A}=P_B-P_{0B}\Rightarrow P_A=P_B$$

C ۱۱۳۹ ۳

خط فکری در چـه لحظه‌ای متحرک تغییر جهت می‌دهـد؟ یعنی در چه لحظه‌ای سرعت صفر شده و تغییر علامت می‌دهد؟ وقتی که سرعت صفر می‌شود، تکانهٔ متحرک نیز صفر می‌شود؛ بنابراین باید دنبال لحظه‌ای باشیم که تکانه صفر می‌شود.

نکته سطح زیر نمودار نیرو - زمان برابر تغییر تکانه است.

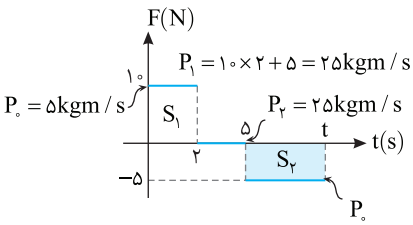
۱ تکانه در لحظهٔ $t=2s$ را حساب می‌کنیم.

$$\Delta P=S\Rightarrow P-P_0=10\times2\xrightarrow{P_0=5kgm/s}P_1-5=20\Rightarrow P_1=25kgm/s$$

۲ در بـازهٔ $t=2s$ تـا $t=5s$ نیرو صفر و تغییـر تکانه صفر اسـت و تکانه همچنان $P_2=25kgm/s$ است.

۳ بعد از $t=5s$ باید لحظه‌ای را پیدا کنیم که تکانه صفر می‌شود. برای این که این اتفاق بیافتد باید مساحت سطح S_2 برابر $-25kgm/s$ شود.

$$S_2=-25\Rightarrow-5(t-5)=-25\Rightarrow t=10s$$



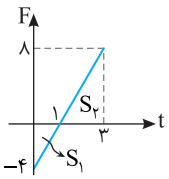
B ۱۱۴۰ ۲

خط فکری نیرو متغیر اسـت $(F=4t-4)$ و بـرای یافتن تغییر تکانه باید نمودار نیرو - زمان را رسم کرده و به کمک سطح محصور بین نمودار نیرو - زمان با محور زمان تکانه را حساب کنیم.

۱ بـرای رسـم خـط $F=4t-4$ کافـی اسـت یکبار $t=0$ و یکبـار $t=3s$ را در معادلـه قـرار داد و دو نقطهٔ به‌دست آمده را روی صفحه به هم وصل کنیم.

$$F=4t-4\Rightarrow t=0\Rightarrow F=-4N\,,\,t=1s\Rightarrow F=0$$

$$t=3s\Rightarrow F=4\times3-4=8N$$



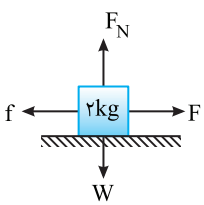
۲ جسـم از حال سـکون راه افتاده و تکانهٔ اولیهٔ آن صفر اسـت. با محاسبهٔ مساحت، تکانه را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta P=S_1+S_2=-\frac{4\times1}{2}+\frac{8\times2}{2}=6kg.m/s$$

$$\Rightarrow P-P_0=6\xrightarrow[P_0=0]{v_0=0}P=6kg\,m/s$$

C ۱۱۴۱ ۱

خط فکری بایـد ابتدا دربـارهٔ سـکون و حرکت جسم فکر کنیم، برای این منظور نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم و تا لحظه‌ای که $F\le f_{max}$ جسم سـاکن می‌ماند و پس از آن لحظه جسم به حرکت درمی‌آید، سـپس باید نیـروی خالص برحسـب زمان را نوشته و نمودار آن را رسم کنید و مسئله را حل کنید.



۱ نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت خواهد شد:

$$f_{s\,max}=\mu_sF_N\xrightarrow[\mu_s=0/5]{F_N=W=2\times10=20N}f_{s\,max}=0/5\times20=10N$$

۲ اکنون باید لحظه‌ای که نیروی F برابر ۱۰N می‌شود را مشخص کنیم.

$F=۴t+۶\Rightarrow ۱۰=۴t+۶\Rightarrow ۴t=۴\Rightarrow t=۱s$

بعد از لحظهٔ $t=۱s$ جسم به حرکت در می‌آید.

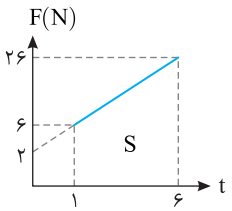
۳ از لحظهٔ $t=۱s$ به بعد نیروی اصطکاک وارد بر جسم، نیروی اصطکاک جنبشی است.

$f_k=\mu_k F_N \xrightarrow{\mu_k=۰/۲} f_k=۰/۲\times ۲۰\Rightarrow f_k=۴N$

۴ معادلهٔ نیروی خالص وارد بر جسم برحسب زمان خواهد شد.

$F_{net}=F-f_k\Rightarrow F_{net}=۴t+۶-۴\Rightarrow F_{net}=۴t+۲$

۵ نمودار نیروی خالص بر حسب زمان را رسم می‌کنیم. البته از لحظهٔ $t=۱s$ به بعد که متحرک به راه می‌افتد.



$\Delta P=S=(۶+۲۶)\times\frac{۵}{۲}\Rightarrow \Delta P=۸۰kgm/s$

۶ تکانه در لحظهٔ $t=۶s$ برابر خواهد شد با:

$\Delta P=P-P_۰ \xrightarrow{P_۰=۰} ۸۰=P-۰\Rightarrow P=۸۰kgm/s$

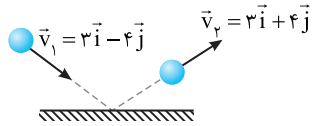
۷ تندی در لحظهٔ $t=۶s$ را به‌دست می‌آوریم.

$P=mv\Rightarrow ۸۰=۲v\Rightarrow v=۴۰m/s$

C ۴ ۱۱۴۲

۱ بردار تغییر سرعت جسم را به‌دست می‌آوریم:

$\Delta\vec{v}=\vec{v}_۲-\vec{v}_۱=۳\vec{i}+۴\vec{j}-۳\vec{i}+۴\vec{j}\Rightarrow \Delta\vec{v}=۸\vec{j}$



۲ تغییر تکانهٔ جسم را حساب می‌کنیم:

$\Delta\vec{P}=m\Delta\vec{v}\xrightarrow{m=۰/۲kg}\Delta\vec{P}=۰/۲\times ۸\vec{j}\Rightarrow\Delta\vec{P}=۱/۶\vec{j}$

۳ نیروی خالص وارد بر توپ خواهد شد:

$F_{net}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t=۰/۴s}\vec{F}_{net}=\frac{۱/۶\vec{j}}{۰/۴}\Rightarrow\vec{F}_{net}=۴\vec{j}$

۴ نیروی وزن رو به پایین است و برحسب $\vec{j}$ و $\vec{i}$ خواهد شد:

$W=mg=۰/۲\times ۱۰=۲N\Rightarrow W=-۲\vec{j}$

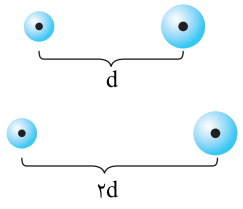
۵ نیرویی که سطح بر توپ وارد می‌کند را به‌دست می‌آوریم:

$\vec{F}_{net}=\vec{F}_N+\vec{W}\Rightarrow ۴\vec{j}=\vec{F}_N-۲\vec{j}\Rightarrow\vec{F}_N=۶\vec{j}$

پنجره ۵

A ۳ ۱۱۴۳

نکته با توجه به قانون گرانش عمومی $F=G\frac{M_۱M_۲}{r^۲}$، نیروی گرانشی با فاصله بین دو جسم رابطهٔ عکس و مجذوری دارد:

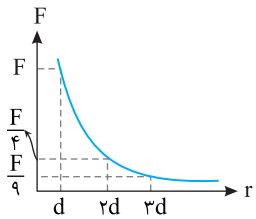


$F=G\frac{m_۱m_۲}{d^۲}$

$F'=G\frac{m_۱m_۲}{(۲d^۲)}=\frac{۱}{۴}G\frac{m_۱m_۲}{d^۲}=\frac{F}{۴}$

$F''=G\frac{m_۱m_۲}{(۳d^۲)}=\frac{۱}{۹}G\frac{m_۱m_۲}{d^۲}=\frac{F}{۹}$

بنابراین نمودار نیروی گرانش برحسب فاصله به صورت زیر می‌شود:



B ۲ ۱۱۴۴

با توجه به رابطهٔ قانون جهانی گرانش می‌توان نوشت.

$F=G\frac{M_e m}{r^۲}=۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\times\frac{۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴}\times ۲۰۰}{((۲۶۰۰+۶۴۰۰)\times ۱۰^۳)^۲}=۹۸۴/۸N\simeq ۹۸۵$

$\Rightarrow F\simeq ۹۸۵N$

بازی با سؤال جسمی کروی به شعاع ۴cm و چگالی $۱۰\frac{g}{cm^۳}$ در فاصلهٔ ۶۰cm از جسم کروی دیگری به شعاع ۵cm و چگالی $۱۶\frac{g}{cm^۳}$ قرار گرفته است. نیروی گرانشی که این دو کره بر هم وارد می‌کنند چند نیوتون است؟

$(\pi\simeq ۳, G\simeq ۶/۳\times ۱۰^{-۱۱}\frac{N.m^۲}{kg^۲})$

۱) $۳/۵۸۴\times ۱۰^{-۱۱}$ ۲) $۳/۵۸۴\times ۱۰^{-۹}$

۳) $۳/۶۸۴\times ۱۰^{-۱۱}$ ۴) $۳/۶۸۴\times ۱۰^{-۹}$

پاسخ ۱ جرم جسم کروی (۱) را به دست می‌آوریم:

$\rho_۱=\frac{m_۱}{V_۱}\xrightarrow{V_۱=\frac{۴}{۳}\pi r_۱^۳}۱۰=\frac{m_۱}{\frac{۴}{۳}\pi r_۱^۳}$

$\xrightarrow{V_۱=\frac{۴}{۳}\times ۳\times ۶۴=۲۵۶cm^۳}۱۰=\frac{m_۱}{۲۵۶}\Rightarrow m_۱=۲۵۶۰g=۲/۵۶kg$

۱ جرم جسم کروی (۲) را به دست می‌آوریم:

$\rho_۲=\frac{m_۲}{V_۲}\xrightarrow{V_۲=\frac{۴}{۳}\pi r_۲^۳}۱۶=\frac{m_۲}{\frac{۴}{۳}\pi r_۲^۳}$

$\xrightarrow{V_۲=\frac{۴}{۳}\times ۳\times ۱۲۵}۱۶=\frac{m_۲}{۵۰۰}\Rightarrow m_۲=۸۰۰۰g=۸kg$

۲ حال با توجه به رابطهٔ $F=G\frac{m_۱m_۲}{r^۲}$، نیروی گرانش را حساب می‌کنیم:

$F=۶/۳\times ۱۰^{-۱۱}\times\frac{۲/۵۶\times ۸}{(۰/۶)^۲}\Rightarrow F=۳۵۸/۴\times ۱۰^{-۱۱}N=۳/۵۸۴\times ۱۰^{-۹}N$

گزینهٔ ۲

A ۳ ۱۱۴۵

خط فکری با توجه به اینکه نیروی گرانشی از رابطهٔ $F=G\frac{m_۱m_۲}{r^۲}$ به‌دست می‌آید، پس نیروی گرانش با جرم دو جسم رابطهٔ مستقیم و با فاصلهٔ دو جسم از هم رابطهٔ عکس و مجذوری دارد:

$\frac{F_۲}{F_۱}=\frac{G\frac{m'_۱m'_۲}{r'^۲}}{G\frac{m_۱m_۲}{r^۲}}=(\frac{r}{r'})^۲(\frac{m'_۱m'_۲}{m_۱m_۲})$

برای حل این سؤال ابتدا باید نیروی گرانش در هر دو حالت را به دست آوریم و سپس نسبت آن‌ها را بنویسیم.

۱ جرم دو جسم را m و فاصلهٔ آن‌ها از هم را r می‌گیریم:

$F_۱=G\frac{m\times m}{r^۲}\Rightarrow F_۱=G\frac{m^۲}{r^۲}$

۲ اگر از جسم به جرم m، مقدار x کم شده و به جرم جسم دیگر اضافه شود، جرم یک جسم $m-x$ و جرم دیگری $m+x$ می‌شود:

$F_۲=G\frac{(m-x)(m+x)}{r^۲}\Rightarrow F_۲=G\frac{m^۲-x^۲}{r^۲}$

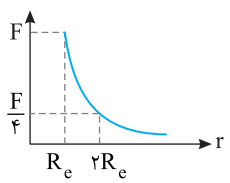
۳ با توجه به سؤال نیروی گرانش ٪۲۵ کاهش یافته است:

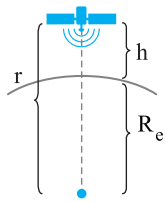
$F_۲=F_۱-\frac{۲۵}{۱۰۰}F_۱\Rightarrow F_۲=\frac{۷۵}{۱۰۰}F_۱\Rightarrow F_۲=\frac{۳}{۴}F_۱$

$\Rightarrow G\frac{m^۲-x^۲}{r^۲}=\frac{۳}{۴}(G\frac{m^۲}{r^۲})\Rightarrow m^۲-x^۲=\frac{۳}{۴}m^۲\Rightarrow\frac{m^۲}{۴}=x^۲\Rightarrow x=\frac{m}{۲}$

A ۱۱۴۶ ۲

نیروی گرانش بین ماهواره و زمین برابر $F=G\frac{M_e m}{r^2}$ است که r فاصله از مرکز زمین یعنی R_e+h است، پس هر چه فاصله ماهواره از سطح زمین بیشتر شود یعنی h افزایش یافته و مخرج بزرگتر می‌شود و نیروی گرانش کاهش یابد. دقت کنید کمترین فاصلهٔ ماهواره زمانی است که این ماهواره روی سطح زمین $h=0$ قرار گرفته و در این حالت r برابر R_e است:



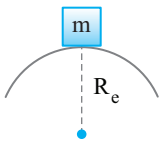


A ۱۱۴۷ ۲

نکته نیروی گرانش بین جسم و زمین برابر $F=G\frac{M_e m}{r^2}$ است که در این رابطه r فاصله از مرکز زمین است.

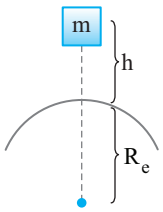
۱ نیروی گرانش، نیرویی است که بین دو جسم و به واسطهٔ جرم آن‌ها وجود دارد. نیروی گرانش وارد بر جسم m در سطح زمین برابر است با:

$$F=G\frac{M_e m}{R_e^2}$$



۲ نیروی گرانش در فاصلهٔ h از سطح زمین را حساب می‌کنیم، دقت کنید در رابطهٔ نیروی گرانش r فاصله تا مرکز زمین است:

$$F'=G\frac{M_e m}{r^2}\Rightarrow F'=G\frac{M_e m}{(R_e+h)^2}$$



۳ با توجه به سؤال نسبت F' و F داده شده است:

$$\frac{F'}{F}=\frac{۱}{۲۵}\Rightarrow\frac{G\frac{M_e m}{(R_e+h)^2}}{G\frac{M_e m}{R_e^2}}=\frac{۱}{۲۵}\Rightarrow\left(\frac{R_e}{R_e+h}\right)^2=\frac{۱}{۲۵}\Rightarrow\frac{R_e}{R_e+h}=\frac{۱}{۵}$$

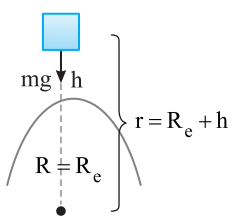
$$\Rightarrow ۵R_e=R_e+h\Rightarrow h=۴R_e$$

A ۱۱۴۸ ۲

نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره همان نیروی وزن وارد بر ماهواره در فاصلهٔ ۱۶۰۰km از سطح زمین است. ابتدا شتاب گرانش در محل ماهواره را حساب می‌کنیم. برای این منظور رابطهٔ g را در سطح زمین و در محل ماهواره نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم. شتاب گرانش از رابطهٔ $g=G\frac{M_e}{R^2}$ به‌دست می‌آید که R فاصله از مرکز زمین است:

$$\frac{g_{\text{ماهواره}}}{g_{\text{زمین}}}=\frac{G\frac{M_e}{(۱۶۰۰+۶۴۰۰)^2}}{G\frac{M_e}{(۶۴۰۰)^2}}\Rightarrow\frac{g_{\text{ماهواره}}}{۱۰}=\frac{(۶۴۰۰)^2}{(۸۰۰۰)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{g_{\text{ماهواره}}}{۱۰}=\left(\frac{۶۴۰۰}{۸۰۰۰}\right)^2=\frac{۱۶}{۲۵}$$



شتاب گرانش در محل ماهواره $g_{\text{ماهواره}}=\frac{۱۶۰}{۲۵}\text{m/s}^2$ است، بنابراین نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره برابر است با:

$$F_{\text{مرکزگرا}}=mg_{\text{ماهواره}}$$

$$\Rightarrow F_{\text{مرکزگرا}}=۵۰۰\times\frac{۱۶۰}{۲۵}=۲۰\times۱۶۰=۳۲۰۰\text{N}$$

میانبر می‌توان برای محاسبهٔ شتاب گرانش در محل ماهواره، به جای جایگذاری اندازهٔ ۱۶۰۰km در رابطه به صورت زیر عمل کرد:

$$\frac{h}{R_e}=\frac{۱۶۰۰}{۶۴۰۰}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow h=\frac{۱}{۴}R_e$$

پس فاصلهٔ ماهواره از مرکز زمین $r=R_e+h=R_e+\frac{R_e}{۴}$ است:

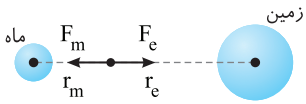
$$\frac{g_{\text{ماهواره}}}{g_{\text{زمین}}}=\frac{\frac{G M_e}{(\frac{۱}{۴}R_e+R_e)^2}}{\frac{G M_e}{R_e^2}}=\frac{R_e^2}{(\frac{۵}{۴}R_e)^2}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow g_{\text{ماهواره}}=\frac{۱۶}{۲۵}g=\frac{۱۶۰}{۲۵}\text{m/s}^2$$

A ۱۱۴۹ ۱

نیروی گرانش بین دو جسم همواره ربایشی است و برای آنکه نیروی خالص وارد بر جسم صفر شود باید نیرویی که زمین به جسم وارد می‌کند با نیرویی که ماه به آن وارد می‌کند هم‌اندازه و خلاف جهت هم باشند. نیروی گرانشی وارد بر جسم توسط کرهٔ ماه و کرهٔ زمین را نوشته و برابر قرار می‌دهیم.

$$F_m=F_e\Rightarrow G\frac{mM_m}{r_m^2}=G\frac{mM_e}{r_e^2}$$

$$\xrightarrow{M_e=۸۱M_m}\frac{۱}{r_m^2}=\frac{۸۱}{r_e^2}\Rightarrow\frac{۱}{r_m}=\frac{۹}{r_e}\Rightarrow r_e=۹r_m$$



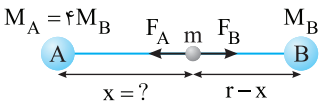
بازی با سؤال سیارهٔ A در فاصلهٔ r از سیارهٔ B قرار دارد. جرم A چهاربرابر جرم B و شعاع آن‌ها یکی است. سفینه‌ای از سیارهٔ A به سوی سیارهٔ B حرکت می‌کند. در چه فاصله‌ای از سیارهٔ A، نیروی گرانش وارد بر سفینه صفر خواهد بود؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) r ۲) $\frac{r}{۲}$ ۳) $\frac{r}{۳}$ ۴) $\frac{۲r}{۳}$

پاسخ با توجه به شکل برای این‌که نیروی گرانش وارد بر سفینه صفر باشد، باید نیروهای گرانش وارد بر آن از طرف سیارهٔ A و از طرف سیارهٔ B برابر و در خلاف جهت هم باشند.

$$F_A=F_B\Rightarrow G\frac{M_A m}{x^2}=G\frac{M_B m}{(r-x)^2}\xrightarrow{M_A=۴M_B}\frac{۴}{x^2}=\frac{۱}{(r-x)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{۲}{x}=\frac{۱}{r-x}\Rightarrow ۲r-۲x=x\Rightarrow x=\frac{۲}{۳}r$$

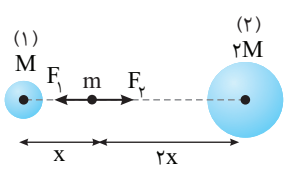


گزینهٔ ۴

B ۱۱۵۰ ۳

یادآوری نیروی گرانش نیروی ربایش بین دو جسم به جرم‌های m_1 و m_2 بوده و بزرگی این نیرو از رابطهٔ $F=G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ به دست می‌آید.

۱ نیروهای گرانشی وارد بر جسم m در شکل الف را به دست می‌آوریم:

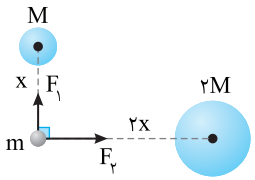


$$\begin{cases}F_۱=G\frac{mM}{x^2}\\ F_۲=G\frac{m(۲M)}{(۲x)^2}\Rightarrow F_۲=G\frac{mM}{۲x^2}\end{cases}$$

این دو نیرو خلاف جهت هم اند، پس نیروی خالص گرانشی وارد بر جسم m برابر است با:

$$F_T=|F_۲-F_۱|\Rightarrow F_T=G\frac{mM}{x^2}-G\frac{mM}{۲x^2}=G\frac{mM}{۲x^2}$$

۲ نیروهای گرانشی وارد بر جسم m در شکل ب را به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} F'_1 = G\dfrac{mM}{x^2} \\ F'_2 = G\dfrac{m(2M)}{(2x^2)} \Rightarrow F_2 = G\dfrac{mM}{2x^2} \end{cases}$$

این دو نیرو عمود بر هم اند پس نیروی برایند آن‌ها برابر است با:

$$F'_T = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \Rightarrow F'_T = \sqrt{(G\frac{mM}{x^2})^2 + (G\frac{mM}{2x^2})^2}$$

$$\Rightarrow F'_T = G\frac{mM}{x^2}\sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2} \Rightarrow F'_T = G\frac{mM}{x^2}\sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow F'_T = \frac{\sqrt{5}}{2}G\frac{mM}{x^2}$$

۳ حال نسبت F_T به F'_T خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{F_T}{F'_T} = \frac{G\frac{mM_e}{2x^2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}G\frac{mM_e}{x^2}} \Rightarrow \frac{F_T}{F'_T} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{F_T}{F'_T} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

A ۱۱۵۱ ۳

میدان گرانش در نقطه‌ای اطراف یک سیاره از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید که در آن M جرم سیاره و r فاصلهٔ نقطهٔ موردنظر از مرکز سیاره است.

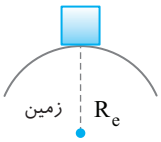
$$g = G\frac{M}{r^2}$$

بنابراین میدان گرانش زمین با جرم زمین و وارون مجذور فاصلهٔ نقطه از مرکز زمین، متناسب است.

A ۱۱۵۲ ۳

خط فکری شتاب گرانش $g = G\frac{M_{سیاره}}{r^2}$ در سطح هر کدام از سیاره‌ها را جداگانه حساب کرده و در نهایت نسبت خواسته شده را به دست می‌آوریم:

۱ شعاع کرهٔ زمین را R_e و جرم آن را M می‌گیریم:



$$g = G\frac{M}{R_e^2}$$

۲ سیارهٔ فرضی شعاعی نصف زمین یعنی $\frac{R_e}{2}$ و جرمی $\frac{1}{4}$ زمین یعنی $\frac{M}{4}$ دارد:

$$g' = G\frac{M'}{r'^2} \Rightarrow g' = G\frac{\frac{M}{4}}{(\frac{R_e}{2})^2} \Rightarrow g' = G\frac{\frac{M}{4}}{\frac{R_e^2}{4}} \Rightarrow g' = G\frac{M_e}{R_e^2}$$

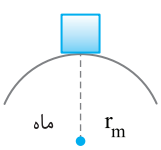
۳ حال نسبت g' به g را به دست می‌آوریم:

$$\frac{g'}{g} = \frac{G\frac{M}{R_e^2}}{G\frac{M}{R_e^2}} = 1$$

B ۱۱۵۳ ۱

جرم کرهٔ ماه را m و جرم کرهٔ زمین را $80m$ می‌گیریم. حال با توجه به رابطهٔ شتاب گرانش $g = G\frac{M_{سیاره}}{r^2}$ ، شتاب گرانش زمین و ماه را به دست می‌آوریم:

۱ شتاب گرانش ماه را حساب می‌کنیم: (r_m شعاع ماه است)



$$g_m = G\frac{M_{ماه}}{r_m^2} \Rightarrow g_m = G\frac{m}{r_m^2}$$

۲ شتاب گرانش زمین را حساب می‌کنیم: (r_e شعاع زمین است)

$$g_e = G\frac{M_{زمین}}{r_e^2} \xrightarrow{m_{زمین} = 80m} g_e = G\frac{80m}{r_e^2}$$

۳ با توجه به سؤال شتاب گرانش زمین g_e ، ۶ برابر شتاب گرانش ماه g_m است:

$$g_e = 6g_m \Rightarrow G\frac{80m}{r_e^2} = 6G\frac{m}{r_m^2} \Rightarrow (\frac{r_e}{r_m})^2 = \frac{80}{6} = \frac{40}{3} \simeq 13 \Rightarrow \frac{r_e}{r_m} = \sqrt{13} \simeq 3/6$$

بازی با سؤال **قطر زمین دو برابر قطر مریخ و میدان گرانش در سطح زمین تقریباً سه برابر میدان گرانش در سطح مریخ است. جرم زمین چند برابر جرم مریخ است؟** کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ **میدان گرانش، در هر نقطه در اطراف یک سیاره، از رابطهٔ $g = G\frac{M}{r^2}$ به دست می‌آید که در آن M جرم سیاره و r فاصلهٔ نقطهٔ مورد نظر تا مرکز سیاره است.**

$$\frac{g_e}{g_m} = \frac{G\frac{M_e}{R_e^2}}{G\frac{M_m}{R_m^2}} = \frac{R_m^2}{R_e^2} \times \frac{M_e}{M_m}$$

$$\xrightarrow[g_e = 3g_m]{R_e = 2R_m} 3 = \frac{R_m^2}{(2R_m)^2} \times \frac{M_e}{M_m} \Rightarrow \frac{M_e}{M_m} = 12$$

گزینهٔ ۱

A ۱۱۵۴ ۲

شتاب گرانش حاصل از سیاره‌ای به جرم M از رابطهٔ $g = G\frac{M}{r^2}$ به دست می‌آید، در این سؤال شتاب گرانش ناشی (حاصل) از خورشید خواسته شده پس در رابطهٔ شتاب گرانش به جای m ، جرم خورشید یعنی M_s را جایگزین می‌کنیم: $g = G\frac{M_s}{r^2}$

B ۱۱۵۵ ۲

جرم جسم در همه‌جا یکسان است و نسبت وزن جسم در دو سیاره برابر نسبت شتاب گرانش در سطح دو سیاره است.

$$\frac{W_P}{W_E} = \frac{mg_P}{mg_E} = \frac{G\frac{M_P}{R_P^2}}{G\frac{M_E}{R_E^2}} \Rightarrow \frac{W_P}{W_E} = \frac{M_P}{M_E} \times (\frac{R_E}{R_P})^2 = 2 \times (\frac{1}{2})^2 \Rightarrow \frac{W_P}{W_E} = \frac{1}{2}$$

B ۱۱۵۶ ۲

شتاب گرانشی در سطح سیاره به شعاع R و جرم M برابر است با: $g = \frac{MG}{R^2}$

$$\frac{g_{زمین}}{g_{ماه}} = \frac{M_{زمین}}{M_{ماه}} (\frac{R_{ماه}}{R_{زمین}})^2 \Rightarrow \frac{g_{زمین}}{g_{ماه}} = 80 \times \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{g_{زمین}}{g_{ماه}} = 5$$

$$\Rightarrow g_{ماه} = \frac{g_{زمین}}{5} = \frac{980}{5} \Rightarrow g_{ماه} = 196 cm/s^2$$

A ۱۱۵۷ ۲

خط فکری شاید ابتدا فکر کنیم این چگالی که در سؤال داده به چه دردی می‌خورد، اما اگر رابطهٔ چگالی را به ذهن بیاوریم، $\rho = \frac{m}{V}$ می‌بینیم که با داشتن چگالی و شعاع که می‌توان با آن حجم را حساب کرده، می‌توانیم نسبت جرم‌ها را به دست آورده و در رابطهٔ $g = G\frac{m}{r^2}$ از آن استفاده کنیم:

۱ با توجه به نسبت چگالی، نسبت جرم را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\rho_{سیاره}}{\rho_{زمین}} = \frac{\frac{m_{سیاره}}{V_{سیاره}}}{\frac{m_{زمین}}{V_{زمین}}} \xrightarrow{V = \frac{4}{3}\pi r^3} \frac{1}{3} = \frac{m_{سیاره}}{m_{زمین}} \times \frac{\frac{4}{3}\pi r_{زمین}^3}{\frac{4}{3}\pi r_{سیاره}^3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{m_{سیاره}}{m_{زمین}} \times (\frac{r_{زمین}}{r_{سیاره}})^3 \xrightarrow{r_{سیاره} = 6r_{زمین}} \frac{1}{3} = \frac{m_{سیاره}}{m_{زمین}} \times \frac{1}{6^3} \Rightarrow \frac{m_{سیاره}}{m_{زمین}} = 72$$

۲ حال با توجه به رابطهٔ شتاب گرانش، نسبت خواسته شده را حساب می‌کنیم:

$$\frac{g_{\text{سیاره}}}{g_{\text{زمین}}}=\frac{G\frac{m_{\text{سیاره}}}{r^2_{\text{سیاره}}}}{G\frac{m_{\text{زمین}}}{r^2_{\text{زمین}}}}\Rightarrow\frac{g_{\text{سیاره}}}{g_{\text{زمین}}}=\frac{m_{\text{سیاره}}}{m_{\text{زمین}}}\times\left(\frac{r_{\text{زمین}}}{r_{\text{سیاره}}}\right)^2$$

$$\xrightarrow{r_{\text{سیاره}}=6r_{\text{زمین}}}72\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\Rightarrow\frac{g_{\text{سیاره}}}{g_{\text{زمین}}}=2$$

میانبر شتاب گرانش برحسب چگالی سیاره از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$G=\frac{4}{3}r\pi G\rho$$

(شعاع سیاره، چگالی متوسط سیاره)

۳ B ۱۱۵۸

خط فکری وزن یک جسم برابر mg است، پس با تغییر فاصله از سطح زمین یا تغییر سیاره $\left(g=G\frac{M}{r^2}\right)$ شتاب گرانش تغییر کرده و وزن جسم نیز تغییر می‌کند.

توجه به این نکته مهم است که جرم جسم در هر کجا و در هر سیاره‌ای ثابت است.

۱ با توجه به اینکه وزن جسم در سطح سیارهٔ A، ۱۲ برابر وزن جسم در سطح سیارهٔ B است، نسبت شتاب گرانش در این دو سیاره را حساب می‌کنیم:

$$\frac{mg_A}{mg_B}=12\Rightarrow\frac{g_A}{g_B}=12\Rightarrow\frac{G\frac{m_A}{r^2_A}}{G\frac{m_B}{r^2_B}}=12\Rightarrow\frac{m_A}{m_B}\times\left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2=12\qquad(I)$$

۲ با توجه به چگالی متوسط سیاره‌ها نسبت جرم به شعاع را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\rho_A}{\rho_B}=6\Rightarrow\frac{\frac{m_A}{V_A}}{\frac{m_B}{V_B}}=6\Rightarrow\frac{m_A}{m_B}\times\frac{V_B}{V_A}=6\xrightarrow{V=\frac{4}{3}r^3}\frac{m_A}{m_B}\times\frac{r^3_B}{r^3_A}=6\qquad(II)$$

۳ حال معادلهٔ (II) را بر معادلهٔ (I) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\frac{m_A}{m_B}\times\left(\frac{r_B}{r_A}\right)^3}{\frac{m_A}{m_B}\times\left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{r_B}{r_A}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{r_A}{r_B}=2$$

بازی با سؤال **شتاب گرانش در سطح سیاره‌ای که جرم و حجم آن به ترتیب ۴ و ۲۷ برابر جرم و حجم کرهٔ زمین است، چند برابر شتاب گرانش در سطح زمین می‌باشد؟**

۱) $\frac{4}{27}$ ۲) $\frac{27}{4}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) ۳۶

پاسخ **شتاب گرانش، همان میدان گرانش $\vec{g}$ است. شتاب گرانش در سطح یک سیاره از رابطهٔ $g=G\frac{M}{R^2}$ به‌دست می‌آید، که در آن M جرم سیاره و R شعاع سیاره است.**

با توجه به فرض مسأله:

$$V_p=27V_e\Rightarrow\frac{4}{3}\pi R^3_p=27\left(\frac{4}{3}\pi R^3_e\right)\Rightarrow R_p=3R_e$$

$$g_p=G\frac{M_p}{R^2_p}=G\frac{4M_e}{(3R_e)^2}=\frac{4}{9}G\frac{M_e}{R^2_e}\Rightarrow g_p=\frac{4}{9}g_e$$

گزینهٔ ۳

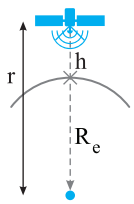
۱ A ۱۱۵۹

نکته با تغییر فاصلهٔ جسم از سطح سیاره یا تغییر سیاره‌ای که جسم در آن قرار دارد با توجه به رابطهٔ $g=G\frac{M_{\text{سیاره}}}{r^2}$ شتاب گرانش و به تبع آن وزن جسم $W=mg$ تغییر می‌کند، اما جرم جسم تغییر نمی‌کند و ثابت می‌ماند.

با توجه به نکتهٔ بالا جرم جسم ثابت مانده و پاسخ گزینهٔ (۱) است.

۴ B ۱۱۶۰

نکته شتاب گرانش در فاصلهٔ h از سطح زمین برابر است با:



$$g=G\frac{M_e}{r^2}=G\frac{M_e}{(h+R_e)^2}$$

شتاب گرانش را در فاصلهٔ $2R_e$ از سطح زمین حساب می‌کنیم:

$$g_1=G\frac{M_e}{(h+R_e)^2}\xrightarrow{h=2R_e}g_1=\frac{GM_e}{9R^2_e}$$

شتاب گرانش در فاصلهٔ h' از سطح زمین $\frac{g_1}{9}$ شده:

$$\frac{\frac{g_1}{9}}{g_1}=\frac{\frac{GM_e}{(h'+R_e)^2}}{\frac{GM_e}{9R^2_e}}\Rightarrow\frac{1}{9}=\frac{9R^2_e}{(h'+R_e)^2}\xrightarrow{\text{از دو طرف جذر می‌گیریم}}\frac{1}{3}=\frac{3R_e}{h'+R_e}$$

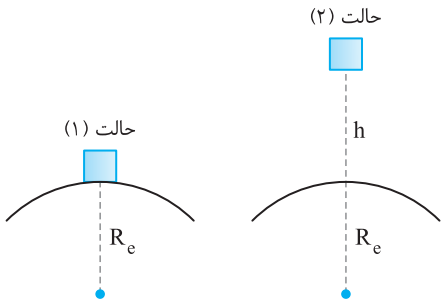
$$\Rightarrow h'+R_e=9R_e\Rightarrow h'=8R_e$$

۴ B ۱۱۶۱

شتاب گرانش ۹۹ درصد کاهش یافته:

$$g'=g-\frac{99}{100}g\Rightarrow g'=\frac{1}{100}g$$

شتاب گرانش از رابطهٔ $g=G\frac{M_e}{r^2}$ به دست می‌آید که r فاصله از مرکز زمین است



$$\frac{GM_e}{(h+R_e)^2}=\frac{1}{100}\frac{GM_e}{R^2_e}$$

$$\left(\frac{R_e}{h+R_e}\right)^2=\frac{1}{100}\Rightarrow\frac{R_e}{h+R_e}=\frac{1}{10}\Rightarrow 10R_e=h+R_e\Rightarrow h=9R_e$$

۴ B ۱۱۶۲

یادآوری شتاب گرانش در هر نقطه با مربع فاصله آن نقطه از مرکز زمین نسبت وارون دارد.

$$\frac{g_h}{g_e}=\frac{G\frac{M_e}{(R_e+h)^2}}{G\frac{M_e}{R^2_e}}\Rightarrow\frac{g_h}{g_e}=\frac{R^2_e}{(R_e+h)^2}$$

داده‌های مسئله را جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{g_h}{9/8}=\frac{(6400)^2}{(6400+1600)^2}\Rightarrow g_h=9/8\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$g_h=9/8\times\frac{16}{25}\Rightarrow g_h=6/272\,m/s^2$$

A ۳ ۱۱۶۳

یادآوری شتاب گرانش یک سیاره با فاصلهٔ r از مرکز آن از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید.

$$g=G\frac{M}{r^2}$$ (M: جرم سیاره، r: فاصله از مرکز سیاره، G: ثابت جهانی گرانش)

۱ شتاب گرانش زمین در سطح آن خواهد شد:

$$g_e=G\frac{M_e}{R_e^2}$$

۲ شتاب گرانشی زمین در فاصلهٔ h از سطح آن برابر است با:

$$g_h=G\frac{M_e}{(R_e+h)^2}$$

۳ دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{g_h}{g_e}=\frac{R_e^2}{(R_e+h)^2}\xrightarrow{g_e=9/8\,m/s^2}\frac{g_h}{9/8}=\frac{(6400)^2}{(6400+6400)^2}$$

$$\Rightarrow g_h=\frac{1}{4}\times 9/8\Rightarrow g_h=2/45\,m/s^2$$

۴ نیروی وزن فضانورد خواهد شد:

$$W_h=mg_h\Rightarrow W_h=80\times 2/45\Rightarrow W_h=196N$$

میانبر البته چون فاصله سفینه از مرکز زمین دو برابر شعاع زمین است بنابراین وزن فضانورد در آن محل $\frac{1}{4}$ وزن فضانورد برسطح زمین است.

$$W_h=(\frac{R_e}{R_e+h})^2\times W\Rightarrow W_h=\frac{1}{4}W=\frac{1}{4}\times 80\times 9/8=196N$$

B ۴ ۱۱۶۴

شتاب گرانشی در محل ماهواره را حساب می‌کنیم.

$$\frac{g_h}{g}=\frac{G\frac{M_e}{(R_e+h)^2}}{G\frac{M_e}{R_e^2}}\Rightarrow\frac{g_h}{10}=(\frac{R_e}{R_e+h})^2\Rightarrow\frac{g_h}{10}=(\frac{6400}{6400+36000})^2$$

$$g_h=10\times(\frac{16}{25})^2$$

وزن ماهواره به دست می‌آید.

$$W_h=mg_h\Rightarrow W_h=250\times 10\times(\frac{16}{25})^2\Rightarrow W_h=1024N$$

B ۲ ۱۱۶۵

قبل از حل دقت کنید که x و ۱/۲x فاصله از سطح زمین بوده و در رابطهٔ $g=G\frac{M_e}{r^2}$ به جای r فاصله از مرکز زمین باید قرار گیرد:

حالت ۱:

$$g'=G\frac{M_e}{(R_e+x)^2}$$

حالت ۲:

$$0/81g'=G\frac{M_e}{(R_e+1/2x)^2}$$

نسبت $\frac{g'}{0/81g'}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{g'}{0/81g'}=\frac{\frac{GM_e}{(R_e+x)^2}}{\frac{GM_e}{(R_e+1/2x)^2}}\Rightarrow\frac{100}{81}=\frac{(R_e+1/2x)^2}{(R_e+x)^2}$$

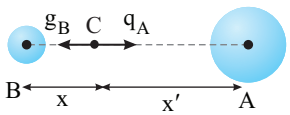
$$\xrightarrow{\text{از دو طرف جذر می‌گیریم.}}\frac{10}{9}=\frac{R_e+1/2x}{R_e+x}\Rightarrow 10R_e+10x=9R_e+10/8x$$

$$\Rightarrow R_e=0/8x\Rightarrow\frac{x}{R_e}=\frac{1}{0/8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

B ۲ ۱۱۶۶

یادآوری شتاب گرانش یک سیاره از رابطهٔ $g=G\frac{M_{سیاره}}{r^2}$ به دست می‌آید و جهت آن به سمت سیاره است.

خط فکری برای آنکه شتاب گرانش خالص در نقطه‌ای صفر شود باید شتاب گرانش حاصل از سیاره‌های A و B در آن نقطه هم‌اندازه و خلاف جهت هم باشند. برای خلاف جهت شدن شتاب گرانش‌ها، چون این شتاب به سمت مرکز سیاره‌ها است پس باید این نقطه بین دو سیاره قرار گیرد. در نقطه C: $g_A=g_B$



۱ شتاب گرانش از طرف جسم A را حساب می‌کنیم:

$$g_A=G\frac{M_A}{x'^2}\Rightarrow g_A=G\frac{4m}{x^2}$$

۲ شتاب گرانش از طرف جسم B را حساب می‌کنیم:

$$g_B=G\frac{M_B}{x^2}\Rightarrow g_B=G\frac{2m}{x^2}$$

۳ باید شتاب گرانش g_A و g_B با هم برابر باشند:

$$g_A=g_B\Rightarrow G\frac{4m}{x'^2}=G\frac{2m}{x^2}\Rightarrow\frac{x^2}{x'^2}=\frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{از دو طرف جذر می‌گیریم.}}\frac{x}{x'}=\frac{1}{2}\Rightarrow x'=2x$$

۴ مجموع فاصله‌های x و x′ برابر فاصلهٔ دو سیاره یعنی r می‌شود:

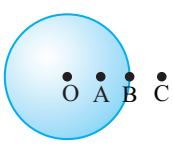
$$r=x+x'\xrightarrow{x'=2x}r=3x\Rightarrow x=\frac{r}{3},\ x'=\frac{2r}{3}$$

فاصله از سیارهٔ A یعنی x′ خواسته شده که برابر $\frac{2r}{3}$ است.

B ۲ ۱۱۶۷

زمین کرهٔ کامل نیست و شعاع استوایی آن از شعاع قطبی‌اش بیشتر است و میدان گرانشی در استوا از میدان گرانشی در قطب کمتر است.

B ۳ ۱۱۶۸



برای یافتن g در خارج از سیاره، بنابر رابطهٔ $g=G\frac{M}{r^2}$ هرچه r بزرگ‌تر باشد، g کوچک‌تر است (r فاصله از مرکز سیاره است)، بنابراین نقطهٔ C پاسخ این پرسش نیست.

اگر با همان رابطه و با فرض آن‌که تمام جرم سیاره در مرکز آن (O) است، به بررسی مسأله بپردازیم، به خطا خواهیم رفت و میدان گرانش در نقطهٔ A بزرگ‌تر از میدان گرانش در نقطهٔ B خواهد شد. این را بدانید که همواره بزرگی میدان گرانشی در سطح آن از بقیهٔ نقاط بیشتر است و نقطهٔ B پاسخ این پرسش است.

حال با یک ساده‌نگری عمومی برای نقاط درون سیاره، یک رابطهٔ بسیار تقریبی به‌دست می‌آوریم. می‌دانیم که:

$$g=G\frac{M}{R^2}$$

اگر صورت و مخرج را در مقدار ثابت $\frac{4}{3}\pi R$ (با فرض کرهٔ کامل بودن سیاره) ضرب کنیم، داریم:

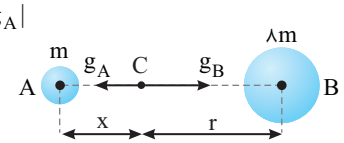
$$g=\frac{4}{3}\pi R\frac{GM}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{4}{3}R\pi G\frac{M}{V}\Rightarrow g=\frac{4}{3}R\pi G\bar{\rho}$$

بر مبنای رابطهٔ بالا و با فرض ثابت بودن چگالی، هر چه R (فاصله از مرکز سیاره) کمتر باشد، g کوچک‌تر است و در نقطهٔ O، g برابر صفر است.

C ۱۱۶۹ ۲

میدان گرانش خالص، حاصل از میدان گرانش دو سیاره است. میدان گرانش دو سیاره در نقطهٔ C در خلاف جهت هم هستند و برآیند آن‌ها از تفاضل آن‌ها به دست می‌آید:

$g_{net}=|g_B-g_A|$



بنا به فرض مسئله خواهیم داشت:

$g_{net}=g_A \Rightarrow g_B-g_A=g_A \Rightarrow g_B=2g_A$

اکنون به جای g از رابطهٔ $g=G\frac{M}{r^2}$ قرار می‌دهیم:

$$G\frac{8m}{r^2}=2G\frac{m}{x^2}\Rightarrow\frac{x^2}{r^2}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{x}{r}=\frac{1}{2}$$

C ۱۱۷۰ ۲

نکته هرگاه مجموع دو عدد مقدار ثابتی باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی بیشینه است که دو عدد با هم برابر باشند.

در رابطهٔ نیروی گرانش $F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$ با حاصلضرب جرم سر و کار داریم و اینکه قرار است بخشی از جرم جسم سنگین‌تر به جسم سبک‌تر منتقل شده پس مجموع جرم دو جسم m_1+m_2 ثابت است بنابراین با توجه به این نکته برای اینکه نیروی گرانش بیشینه شود، باید جرم دو جسم m_1 و m_2 با هم برابر شود، پس جرم ثانویه اجسام برابر میانگین جرم اولیه آن‌ها خواهد بود:

$$m_1'=m_2'=\frac{m_1+m_2}{2}\Rightarrow m_1'=m_2'=\frac{m+2m}{2}\Rightarrow m_1'=m_2'=1/5m$$

جرم جسم سنگین‌تر از ۲m به ۱/۵m رسیده:

$$\text{درصد تغییرات جرم}=\frac{1/5m-2m}{2m}\times100\Rightarrow\text{درصد تغییرات جرم}=\frac{\Delta m}{2m}\times100$$

$$\Rightarrow\text{درصد تغییرات جرم}=-\frac{1}{4}\times100=-25\%$$

۲۵ درصد از جرم جسم سنگین‌تر کاهش یافته است.

پنجره تودرتو

A ۱۱۷۰ ۳

۱ **نیروی وزن** نیرویی است که کرهٔ زمین بر سیب وارد می‌کند و واکنش آن نیز نیرویی است که سیب بر کرهٔ زمین وارد می‌کند. گزارهٔ (الف) نادرست است. با جدا شدن سیب از درخت علاوه بر نیروی وزن که توسط زمین به سیب وارد می‌شود، مقاومت هوا نیز رو به بالا در خلاف جهت سقوط سیب وارد می‌شود و گزارهٔ (ب) درست است. وقتی که سیب به شاخه متصل و ساکن است نیروهای وارد بر آن متوازن هستند و نیروی خالص وارد بر سیب صفر است و گزارهٔ (پ) درست است.

نمای ۳

A ۱۱۷۰ ۱

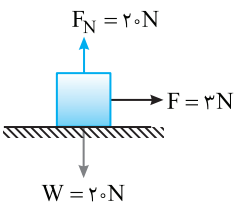
۲ **مقاومت شاره** (هوا) به ابعاد جسم و همچنین تندی جسم بستگی دارد و هرچه ابعاد جسم در برخورد با هوا بزرگ‌تر باشد و تندی جسم بیشتر باشد، مقاومت هوا نیز بیشتر می‌شود.

نمای ۸

B ۱۱۷۰ ۲

۳ **ابتدا** باید مشخص کنیم نیروی اصطکاک بین جسم و سطح چند نیوتون است. مسئله به ما ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k=0/2$ را داده است، بنابراین نیروی اصطکاک جنبشی را به‌دست می‌آوریم.

$f_k=\mu_k F_N \Rightarrow f_k=0/2\times20=4N$



۲ عموماً ضریب اصطکاک آستانهٔ حرکت (μ_s) بزرگ‌تر از ضریب اصطکاک جنبشی (μ_k) است، یعنی اصطکاک آستانهٔ حرکت این جسم روی سطح افقی $f_{s_{max}}>4N$ است.

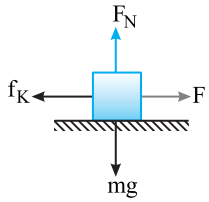
۳ نیروی افقی $F=3N$ از اصطکاک آستانهٔ حرکت کوچک‌تر است. بنابراین جسم به حرکت درنمی‌آید در این حالت نیروی اصطکاک ایستایی با نیروی F برابر است.

جسم ساکن: $F_{net}=0\Rightarrow F=f_s\Rightarrow f_s=3N$

نمای ۱۵ و ۱۶ و ۱۷

B ۱۱۷۰ ۲

۴ **به جسم** نیروی افقی ۳۰N وارد می‌شود اما سرعت جسم ثابت است یعنی نیروی خالص وارد بر جسم صفر است. بنابراین سطح دارای اصطکاک است و اصطکاک جنبشی آن برابر است با: $f_k=F\Rightarrow f_k=30N$



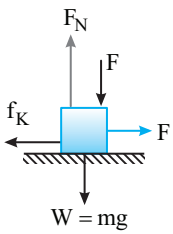
اگر قطعه چوبی مشابه را روی چوب اول قرار دهید، نیروی عمودی سطح دو برابر حالت اول می‌شود. $F_N'=2mg$ بنابراین نیروی اصطکاک $(f_k=\mu_k F_N)$ نیز دو برابر می‌شود $f_k'=2\times30=60N$. برای آنکه مجموعه با سرعت ثابت حرکت کند نیرویی که به آن وارد می‌شود برابر است با:

$F'=f_k'\Rightarrow F'=60N$

نمای ۱۵ و ۱۶ و ۱۷

B ۱۱۷۰ ۱

۵ **نیروهای وارد** بر جسم را رسم می‌کنیم. ابتدا جسم دارای سرعت ثابت است و تمام نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند. از این رو می‌توان نوشت:



$F_{net_y}=0\Rightarrow F+W=F_N$

$F_{net_x}=0\Rightarrow F=f_k$

نیروی اصطکاک خواهد شد: $f_k=\mu_k F_N\Rightarrow f_k=\mu_k(F+W)$

با افزایش F نیروی عمودی F_N افزایش یافته و سبب افزایش نیروی اصطکاک می‌شود.

$\uparrow f_k=\mu_k(\uparrow F+W)$

اما افزایش نیروی افقی F از افزایش f_k بیشتر است که سبب می‌گردد جسم با شتاب بر سرعتش افزوده شود.

برای توضیح بیشتر دقت کنید:

اگر F دو برابر شود، نیروی اصطکاک افزایش می‌یابد اما دو برابر نمی‌شود.

$$\frac{f_k'}{f_k}=\frac{\mu_k(F'+W)}{\mu_k(F+W)}=\frac{(2F+W)}{F+W}=\frac{F+F+W}{F+W}=1+\frac{F}{F+W}$$

کوچکتر از ۱ است

$$\Rightarrow\frac{f_k'}{f_k}<2$$

بنابراین نیروی حرکت‌دهنده ۲ برابر شده اما نیروی مخالف حرکت کمتر از دو برابر است. یعنی $F'>f_k'$ بوده و جسم با شتاب شروع به حرکت می‌کند.

نمای ۱۵ و ۱۶ و ۱۷

B ۱۱۷۰ ۱

۶ **به چه فکر می‌کنید؟** بر شخص سه نیرو وارد می‌شود یکی وزن و دو تای دیگر کشش نخ. شخص روی طناب ایستاده و ساکن است بنابراین این نیروها متوازن هستند. وقتی برایند سه نیرو صفر می‌شود که برایند دو تا از آن‌ها هم‌اندازه و مخالف سومی باشد. در نتیجه باید برایند T_1 و T_2 برابر W یعنی ۸۰۰ باشد:

$\vec{F}_{net}=0\Rightarrow\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{W}=0\Rightarrow(\vec{T}_1+\vec{T}_2)=-\vec{W}\Rightarrow|\vec{T}_1+\vec{T}_2|=|\vec{W}|=800N$

نمای ۲۰

۲ ۱۱۷۰ A

۷ **نیروی گرانش** برابر $W=mg$ است و $g=G\frac{M_e}{r^2}$ که در آن r فاصله از مرکز زمین است. بنابراین نیروی گرانش در سطح زمین خواهد شد:

$$W=G\frac{M_e m}{R_e^2} \quad (I)$$

و در فاصلهٔ h از سطح زمین برابر است با:

$$W_h=G\frac{M_e m}{(R_e+h)^2} \quad (II)$$

بنا به فرض مسئله نسبت $\frac{W_h}{W}=\frac{4}{9}$ است. رابطهٔ (II) را بر رابطهٔ (I) تقسیم می‌کنیم.

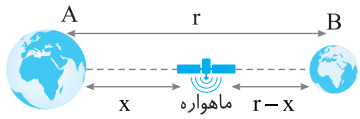
$$\frac{W_h}{W}=\frac{R_e^2}{(R_e+h)^2}\Rightarrow\frac{4}{9}=\left(\frac{R_e}{R_e+h}\right)^2\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{R_e}{R_e+h}\Rightarrow 2R_e+2h=3R_e$$

$$\Rightarrow h=\frac{R_e}{2}$$

نمای ۳۰

۴ ۱۱۷۰ B

۸ **نیروهای گرانش** وارد بر ماهواره متوازن است، یعنی نیروی گرانش A و نیروی گرانش B وارد بر ماهواره هم‌اندازه هستند. اگر فاصلهٔ بین سیارهٔ A تا ماهواره را با حرف x نمایش دهیم فاصلهٔ ماهواره از سیارهٔ B برابر $r-x$ خواهد شد. بنابراین می‌توان نوشت:



$$F_A=F_B \xrightarrow{F=G\frac{Mm}{r^2}} G\frac{M_A m}{x^2}=G\frac{M_B m}{(r-x)^2}$$

$$\xrightarrow{m_A=16m_B}\frac{16}{x^2}=\frac{1}{(r-x)^2}\Rightarrow\frac{4}{x}=\frac{1}{r-x}\Rightarrow 4r-4x=x\Rightarrow 4r=5x$$

$$\Rightarrow x=\frac{4}{5}r$$

نمای ۲۹

۲ ۱۱۷۰ A

۹ **اگر جهت** حرکت اولیهٔ جسم را مثبت فرض کنیم، تکانهٔ جسم $P_1=45kgm/s$ خواهد بود و وقتی که سرعت جسم $\frac{1}{5}$ مقدار اولیه می‌شود تکانهٔ جسم نیز که با سرعت رابطهٔ مستقیم دارد $(P=mv)$ نیز $\frac{1}{5}$ می‌شود و چون در خلاف جهت حرکت اولیهٔ جسم است، در این صورت $P_2=-\frac{1}{5}\times 45=-9kgm/s$ خواهد بود. با توجه به رابطهٔ نیرو با آهنگ تغییر تکانه، نیروی F را حساب می‌کنیم.

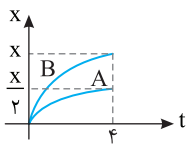
$$F=\frac{\Delta P}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t=2s}|F|=\left|\frac{-9-45}{2}\right|\Rightarrow|F|=\left|-\frac{54}{2}\right|=27N$$

نمای ۲۵

۲ ۱۱۷۰ B

۱۰ **نکته** هرگاه جسمی را روی سطحی پرتاب می‌کنیم نیروی جلوبر صفر است.

هنگامی که جسم روی سطح افقی پرتاب می‌شود نیروی خالص وارد بر جسم نیروی اصطکاک است بنابراین نیروی وارد بر جسم در دو حالت ثابت و شتاب حرکت ثابت است و به کمک روابط حرکت‌شناسی می‌توان نسبت $\frac{v_{0B}}{v_{0A}}$ را به‌دست آورد.



رابطهٔ مستقل از شتاب را برای دو جسم نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t\xrightarrow{B}x=\frac{0+v_{0B}}{2}\times 4\Rightarrow v_{0B}=\frac{x}{2}$$

$$\xrightarrow{A}\frac{x}{2}=\frac{0+v_{0A}}{2}\times 4\Rightarrow v_{0A}=\frac{x}{4}\Rightarrow\frac{v_{0B}}{v_{0A}}=2$$

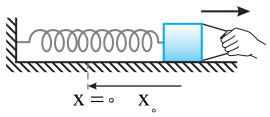
نمای ۱۷

۱ ۱۱۷۰ A

۱۱ **وقتی جعبه** رها می‌شود تنها نیروی وارد بر آن نیروی کشسانی فنر است که بنا به قانون هوک اندازهٔ این نیرو $F=kx$ بوده که در آن x فاصله از طول طبیعی (اولیه) فنر است.

بنا به قانون دوم نیوتون می‌نویسیم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow kx=ma\Rightarrow a=\frac{k}{m}x$$



در این صورت شتاب با تغییر طول متناسب است و تابع آن درجه اول بوده و نمودار آن خط راست است. در حالتی که $x=0$ است شتاب نیز صفر و در حالتی که $x=x_0$ است شتاب بیشترین مقدار است بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

نمای ۱۱

۱ ۱۱۷۰ C

۱۲ **خط فکری** در دو حالت ممکن است اندازهٔ شتاب حرکت یکسان باشد یک بار وقتی که $F_e>W$ و بار دیگر $F_e<W$ باشد به گونه‌ای که F_e-W هم‌اندازهٔ $W-F_e$ شود. بنابراین شما باید این دو حالت را بررسی کنید.

تغییر طول در هر دو حالت به‌ترتیب ۴۰cm و ۶۰cm شده است. تغییر طول ۴۰cm برای هنگامی است که نیروی کشسانی فنر از نیروی وزن کمتر است و تغییر طول ۶۰cm برای هنگامی که نیروی کشسانی فنر از نیروی وزن بیشتر است.

ابتدا $F_e<mg$ و سپس $F_e>mg$ را در نظر می‌گیریم و قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}mg-F_e=ma\\F_e'-mg=ma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F_e=m(g-a)\\F_e'=m(g+a)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k(0/4)=m(g-a)\\k(0/6)=m(g+a)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{g-a}{g+a}\Rightarrow 2g+2a=3g-3a\Rightarrow 5a=g\Rightarrow a=\frac{g}{5}$$

نمای ۲۲

۳ ۱۱۷۰ B

۱۳ **خط فکری** از آخر مسئله شروع کنید. جسم M در آستانهٔ حرکت قرار گیرد یعنی آن قدر جرم m زیاد شود که جسم M در آستانهٔ حرکت رو به پایین قرار گیرد. بنابراین نیروی اصطکاک $f_{s_{max}}$ رو به بالا بر M وارد می‌شود. نیروی F را به شکل دو مؤلفه‌اش نشان می‌دهیم. نیروهای وارد بر جسم M متوازن هستند. اکنون مسئله را حل می‌کنیم.

۱ نیروها را رسم می‌کنیم.

۲ نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم.

$$F_{net_x}=0\Rightarrow F_N=f_k\Rightarrow F_N=10\sqrt{3}N$$

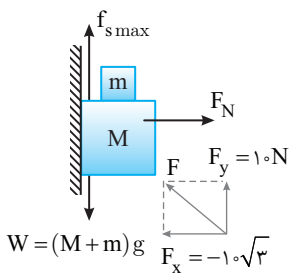
۳ اصطکاک آستانهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$f_{s_{max}}=\mu_s F_N\xrightarrow{\mu_s=\frac{\sqrt{3}}{3}}f_{s_{max}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 10\sqrt{3}\Rightarrow f_{s_{max}}=10N$$

۴ نیروهای وارد بر جسم در امتداد قائم نیز متوازن هستند. از این رو خواهیم داشت:

$$F_{net_y}=0\Rightarrow W-f_{s_{max}}-F_y=0\Rightarrow(M+m)g=f_{s_{max}}+F_y$$

$$\Rightarrow(1/5+m)\times 10=10+10\Rightarrow m=0/5kg\Rightarrow m=500g$$

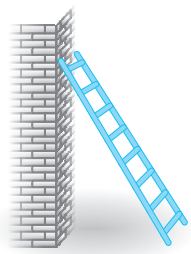


نمای ۱۸

۳ ۱۱۷۰ **B** ۱۴

نردبان در حال سکون است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند و بر آن سه نیرو وارد می‌شود.

۱ نیروی وزن
۲ نیرویی از طرف سطح زمین
۳ نیرویی از طرف دیوار



برایند این سه نیرو صفر است. از این‌رو همواره برایند دو نیرو از آن‌ها قرینهٔ نیروی سوم است یعنی: $|\vec{F}_{net}|=0 \Rightarrow |\vec{F}_{R,\text{دیوار قائم}}+\vec{F}_{R,\text{کف زمین}}|=|\vec{W}|$

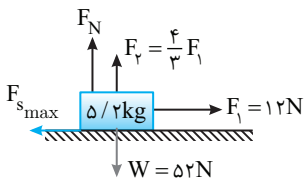
نمای ۲۱

۲ ۱۱۷۰ **B** ۱۵

۱ **نیروهای** وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.

۲ وقتی نیروی $F_1=12N$ می‌شود نیروی F_2 خواهد شد:

$$F_2=\frac{4}{3}F_1=\frac{4}{3}\times 12 \Rightarrow F_2=16N$$



۳ نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم.

$$F_{net_y}=0 \Rightarrow F_N+F_2=W \Rightarrow F_N=W-F_2 \Rightarrow F_N=52-16 \Rightarrow F_N=36N$$

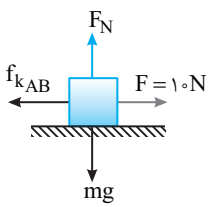
۴ هنگامی که $F=12N$ می‌شود، در این حالت جسم شروع به حرکت می‌کند یعنی $F=f_{s\max}$ بنابراین:

$$F=f_{s\max} \Rightarrow F=\mu_s F_N \Rightarrow 12=\mu_s\times 36 \Rightarrow \mu_s=\frac{1}{3}$$

نمای ۱۵ و ۱۶ و ۱۷

۳ ۱۱۷۰ **B** ۱۶

خط فکری آهنگ تغییر سرعت همان شتاب است. اگر جهت حرکت را مثبت فرض کنیم در مسیر AB شتاب $a_{AB}=+4m/s^2$ و در مسیر BC شتاب $a_{BC}=-2m/s^2$ است. قانون دوم نیوتون را در هر مسیر می‌نویسیم و ضریب اصطکاک را حساب می‌کنیم.



۱ در مسیر AB:

$$F_{net}=ma_{AB} \Rightarrow F-f_{k_{AB}}=ma_{AB}$$
$$\Rightarrow 10-f_{k_{AB}}=m\times 4$$
$$\Rightarrow 10=\mu_{k_{AB}}mg+m\times 4$$
$$\Rightarrow 10=\mu_{k_{AB}}m\times 10+4m$$
$$\Rightarrow 10=m(10\mu_{k_{AB}}+4) \quad (I)$$

۲ در مسیر BC:

$$F_{net}=ma_{BC} \Rightarrow 10-f_{k_{BC}}=m\times(-2) \Rightarrow 10=\mu_{k_{BC}}mg-2m$$
$$\Rightarrow 10=m(10\mu_{k_{BC}}-2) \quad (II)$$

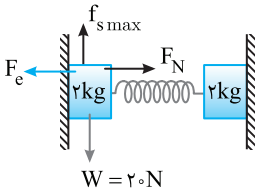
۳ سمت چپ دو رابطهٔ (I) و (II) یکسان است، سمت راست آن‌ها را برابر قرار می‌دهیم.

$$10\mu_{k_{AB}}+4=10\mu_{k_{BC}}-2 \Rightarrow 10(\mu_{k_{BC}}-\mu_{k_{AB}})=6 \Rightarrow \mu_{k_{BC}}-\mu_{k_{AB}}=0/6$$

نمای ۱۵ و ۱۶ و ۱۷

۱ ۱۱۷۰ **B** ۱۷

خط فکری نیازی به بررسی هر دو جسم نیست. یکی از وزنه‌ها را در نظر می‌گیریم و نیروهای وارد بر آن را رسم می‌کنیم. جسم ساکن است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند.



یادآوری یک فنر سبک و همگن نیروی کشسانی یکسانی به دو انتهای خود وارد می‌کند. قرار است که طول فنر کمینه تغییر را داشته باشد و نیروی کشسانی فنر که به وزنه‌ها وارد می‌شود کمینه باشد. یعنی اگر نیروی کشسانی کمتر از آن شود، جسم‌ها به پایین بلغزند بنابراین وزنه‌ها در آستانهٔ حرکت رو به پایین بوده و اصطکاک بیشینه $(f_{s\max})$ است. با این اطلاعات مسئله را حل می‌کنیم.

۱ نیروی وزن و نیروی اصطکاک متوازن هستند. $f_{s\max}=W \Rightarrow f_{s\max}=20N$

۲ نیروی عمودی سطح را به‌دست می‌آوریم:

$$f_{s\max}=\mu_s F_N \xrightarrow{\mu_s=0/4} 20=0/4F_N \Rightarrow F_N=50N$$

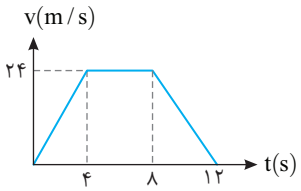
۳ نیروی کشسانی فنر و نیروی عمودی سطح متوازن هستند.

$$F_e=F_N \Rightarrow kx=50 \xrightarrow{k=200N/m} 200x=50 \Rightarrow x=\frac{1}{4}m=25cm$$

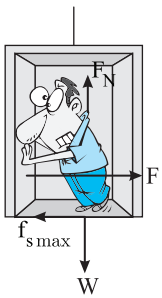
نمای ۱۸

۲ ۱۱۷۰ **C** ۱۸

خط فکری اولین سؤالی که از خود می‌پرسیم این است که چرا با هُل دادن دیوار آسانسور شخص باید لیز بخورد؟ زیرا وقتی شخص به دیواره نیروی F را وارد می‌کند، دیواره نیز به شخص نیروی F را در خلاف جهت وارد می‌کند و این اصطکاک است که مانع سُر خوردن شخص می‌شود. بیشترین نیروی F یعنی اینکه اصطکاک آستانهٔ حرکت نیز بیشترین مقدار را داشته باشد $(f_{s\max}=\mu_s F_N)$ بنابراین باید به دنبال بیشترین نیروی عمودی سطح بگردیم. آسانسور از حال سکون رو به بالا حرکت کرده و در ۴s اول که حرکت آن تندشونده رو به بالاست، نیروی عمودی سطح بیشترین مقدار است. این نیرو را حساب می‌کنیم و نیروی $f_{s\max}$ را به‌دست می‌آوریم. با این کار مسئله حل می‌شود.



۱ نیروهای وارد بر شخص را رسم می‌کنیم.



۲ از نمودار شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{v-v_0}{t} \Rightarrow a=\frac{24-0}{4-0} \Rightarrow a=6m/s^2$$

۳ نیروی عمودی سطح در این حالت خواهد شد:

$$F_{net}=ma \Rightarrow$$
$$F_N-mg=ma \xrightarrow{m=60kg} F_N-600=60\times 6$$
$$\Rightarrow F_N=960N$$

۴ نیروی اصطکاک را حساب می‌کنیم.

$$f_{s\max}=\mu_s F_N \xrightarrow{\mu_s=0/5} f_{s\max}=0/5\times 960 \Rightarrow f_{s\max}=480N$$

۵ در این صورت بیشینه مقدار F خواهد شد:

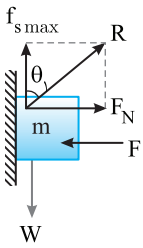
$$F_{net_x}=0 \Rightarrow F_{max}=f_{s\max} \Rightarrow F_{max}=480N$$

نمای ۲۳

C ۱۱۷۰ ۲

۱۹

حالت اول: جسم در آستانهٔ حرکت رو به پایین قرار دارد و نیروهای آن متوازن هستند.



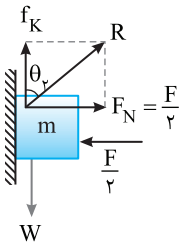
$$F_{net_x}=0\Rightarrow F_N=F$$

$$F_{net_y}=0\Rightarrow f_{s_{max}}=W$$

زاویهٔ بین نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند با جهت مثبت محور y خواهد شد:

$$\tan\theta_1=\frac{F_N}{f_{s_{max}}}\Rightarrow\tan\theta_1=\frac{F}{W}$$

حالت دوم: جسم با سرعت ثابت به پایین می‌لغزد و نیروهای آن متوازن هستند.



$$F_{net_x}=0\Rightarrow F'_N=\frac{F}{2}$$

$$F_{net_y}=0\Rightarrow f_k=W$$

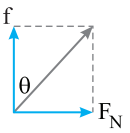
زاویهٔ بین نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند با جهت مثبت محور y‌ها را به‌دست می‌آوریم.

$$\tan\theta_2=\frac{F_N}{f_k}=\frac{\frac{F}{2}}{W}\Rightarrow\tan\theta_2=\frac{1}{2}\frac{F}{W}$$

در نتیجه:

$$\tan\theta_2<\tan\theta_1\Rightarrow\theta_2<\theta_1$$

اگر خوب دقت کنید نیاز به این همه محاسبه نیست، با کوچک شدن F_N قطعاً زاویهٔ θ کوچک می‌شود.

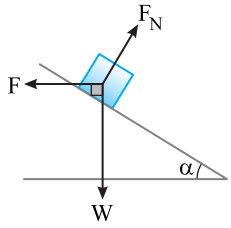


نمای ۱۹

B ۱۱۷۰ ۲

۲۰

خط فکری شکل مسئله شما را نگران نکند. کافی است نیروهای وارد بر جسم را رسم کنید. جسم در تعادل است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند.



بر جسم سه نیرو وارد می‌شود:

۱ نیروی وزن $W=10N$

۲ نیروی افقی $F=10N$

۳ نیروی عمودی سطح

نکته هرگاه برایند سه نیرو صفر شود، برایند هر دو نیروی دلخواه از آن‌ها هم‌اندازه و در خلاف جهت نیروی سوم است.

نیروی F_N برایند دو نیروی عمود بر هم F و W بوده و به کمک رابطهٔ فیثاغورس F_N را می‌توان به‌دست آورد.

$$F_N^2=F^2+W^2\Rightarrow F_N^2=(10)^2+(10)^2\Rightarrow F_N=10\sqrt{2}N$$

نمای ۲۰

پنجره‌ای رو به گذشته

B ۱۱۷۱ ۳

۱

خط فکری انرژی جنبشی یک جسم به جرم m که با سرعت v در حرکت است برابر $K=\frac{1}{2}mv^2$ است، بنابراین شما باید سرعت متحرک را در جابه‌جایی $10m$ حساب کرده و انرژی جنبشی را به‌دست بیاورید.

۱ جابه‌جایی جسم تا $x=10m$ برای $\Delta x=10-0=10m$ می‌باشد و شتاب آن برابر $2m/s^2$ است. به کمک معادل مستقل از زمان سرعت را به‌دست می‌آوریم.

$$v_2^2-v_1^2=2ax\xrightarrow{v_1=0}v_2^2=2\times2\times10\Rightarrow v_2^2=40m^2/s^2$$

۲ انرژی جنبشی برابر است با:

$$K=\frac{1}{2}mv_2^2=\frac{1}{2}\times4\times40=80J$$

بازی با سوال جسمی به جرم $5kg$ روی سطح افقی با شتاب ثابت $2m/s^2$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. پس از چند ثانیه انرژی جنبشی آن به $250J$ می‌رسد؟

ریاضی - ۹۰

۱) ۲/۵ ۲) ۵ ۳) ۷/۵ ۴) ۱۰

پاسخ ابتدا سرعت لازم برای آنکه انرژی جنبشی جسم $250J$ شود را به‌دست می‌آوریم.

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow250=\frac{1}{2}\times5\times v^2\Rightarrow v=10m/s$$

زمان لازم برای آنکه سرعت جسم با شتاب ثابت $2m/s^2$ از صفر به $10m/s$ برسد برابر است با:

$$v=at+v_0\Rightarrow10=2t+0\Rightarrow t=5s$$

گزینهٔ ۲

A ۱۱۷۱ ۱

۲

یادآوری انرژی جنبشی از رابطهٔ $K=\frac{1}{2}mv^2$ به‌دست می‌آید که در آن m جرم جسم و v تندی جسم است.

ابتدا تندی جسم در $t=5s$ را به کمک انرژی جنبشی به‌دست می‌آوریم:

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow40=\frac{1}{2}\times5\times v^2\Rightarrow v^2=16\Rightarrow v=4m/s$$

شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{4-0}{5}=0/8m/s^2$$

نیروی وارد بر جسم خواهد شد:

$$F=ma\Rightarrow F=5\times0/8\Rightarrow F=4N$$

بازی با سوال جسمی به جرم $3kg$ تحت تأثیر نیروی $9N$ از حال سکون به حرکت در می‌آید. انرژی جنبشی جسم در $t=3s$ چند برابر $t=2s$ است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۲

پاسخ ابتدا شتاب را به‌دست می‌آوریم: $F=ma\Rightarrow9=3a\Rightarrow a=3m/s^2$

جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده پس سرعت در $t=3s$ و $t=2s$ برابر است با:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=3t\ ,\ t=2s\Rightarrow v_1=6m/s\ ,\ t=3s\Rightarrow v_2=9m/s$$

اکنون انرژی جنبشی $K=\frac{1}{2}mv^2$ را در دو حالت به دست آورده و بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{K_2}{K_1}=\frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{1}{2}mv_1^2}=\frac{81}{36}=\frac{9}{4}=2/25$$

گزینهٔ ۲

A ۱۱۷۱ ۲

۳

خط فکری نیروی وارد بر دو جسم برابر است و از ما نسبت انرژی جنبشی دو جسم خواسته شده است. بنابراین باید ابتدا نسبت سرعت‌های آن‌ها را به‌دست بیاورید.

۱ نیروی وارد بر دو جسم برابر است و بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_1=F_2\Rightarrow m_1a_1=m_2a_2\xrightarrow{m_1=4kg\ ,\ m_2=5kg}4a_1=5a_2\Rightarrow a_1=\frac{5}{4}a_2$$

۲ نسبت سرعت دو جسم پس از t ثانیه خواهد شد:

$$\begin{cases}v_1=a_1t\\v_2=a_2t\end{cases}\xrightarrow{a_1=\frac{5}{4}a_2}v_1=\frac{5}{4}v_2$$

۳ اکنون نسبت انرژی‌های جنبشی را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{K_1}{K_2}=\frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2}{\frac{1}{2}m_2v_2^2}=\frac{4}{5}\times\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{5}{4}$$

B ۱۱۷۱ ۳

۴ معادلهٔ مکان زمان داده شده را با معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت مقایسه کرده a و v_0 را به‌دست آورده معادله سرعت زمان را می‌نویسیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$$

$$x=t^2+4t+5\Rightarrow\frac{1}{2}a=1m/s^2\Rightarrow a=2m/s^2$$

$$v_0=4m/s\xrightarrow{v=at+v_0}v=2t+4$$

سرعت در بازهٔ ثانیه دوم یعنی از $t_1=1s$ تا $t_2=2s$، بنابراین سرعت را در این لحظه‌ها حساب می‌کنیم.

$$t_1=1s\Rightarrow v_1=2+4=6m/s\,,t_2=2s\Rightarrow v_2=2(2)+4=8m/s$$

بنا به قضیهٔ کار و انرژی:

$$W_t=\Delta K\Rightarrow W_t=\frac{1}{2}\times2(v_2^2-v_1^2)\Rightarrow W_t=(64-36)=28J$$

بازی با سؤال **معادلهٔ حرکت جسمی که بر روی یک مسیر مستقیم حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x=2t^2-4t+8$ است. در کدام بازهٔ زمانی داده شده کار نیروی برایند وارد بر جسم بیشتر است؟**

۱) صفر تا ۱s **۲)** ۱s تا ۲s **۳)** ۲s تا ۳s **۴)** ۳s تا ۴s

پاسخ **با مقایسه معادلهٔ حرکت داده شده با معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت، مکان اولیه، سرعت اولیه و شتاب را مشخص می‌کنیم.**

$$x=2t^2-4t+8\Rightarrow\frac{1}{2}a=2\Rightarrow a=4m/s^2$$

$$v_0=-4m/s\xrightarrow{v=at+v_0}v=4t-4$$

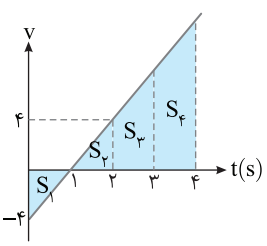
با رسم نمودار سرعت - زمان می‌بینیم که در بازهٔ صفر تا ۱s تندی در حال کاهش و در حال صفر شدن است. در بازهٔ ۱s تا ۲s سرعت از صفر به $+4m/s$ می‌رسد و در این دو بازهٔ تغییر انرژی جنبشی یکسان است. در بازه ۲s تا ۴s حرکت تندشونده است و در بازهٔ ۳s تا ۴s چون سرعت بیشتر است، جابه‌جایی بیشتر و کار نیروی برایند نیز بیشتر است.

$$S_4>S_3\Rightarrow d_4>d_3\xrightarrow{W=Fd}W_4>W_3$$

$$S_4>S_3>S_2=|S_1|\Rightarrow d_4>d_3>d_2=|d_1|$$

$$\xrightarrow{W=Fd}W_4>W_3>W_2=|W_1|$$

دقت کنید حرکت دارای شتاب ثابت است بنابراین بنا به قانون دوم نیوتن $F_{net}=ma$ نیروی وارد بر جسم نیز ثابت است.



گزینهٔ ۴

B ۱۱۷۱ ۱

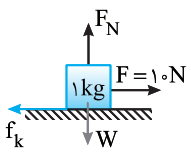
۵ یادآوری کار نیروی ثابت F از رابطهٔ $W=Fd\cos\theta$ به‌دست می‌آید که در آن θ زاویهٔ بین جهت بردار نیرو $(\vec{F})$ و جهت بردار جابه‌جایی $(\vec{d})$ است. کار کمیت نرده‌ای است.

ابتدا f_k را به‌دست می‌آوریم:

$$f_k=\mu_kF_N\Rightarrow f_k=0/1\times10=1N$$

کار نیروی اصطکاک خواهد شد:

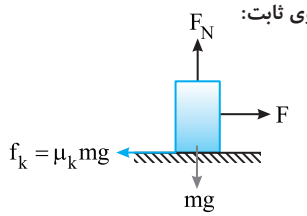
$$W_f=f_kd\cos180^\circ\Rightarrow W_{f_k}=1\times1\times(-1)=-1J$$



بازی با سؤال **جسمی به جرم ۵۰۰g روی سطح افقی به وسیلهٔ نیروی افقی F، به اندازهٔ ۱۰ متر جابه‌جا می‌شود. اگر ضریب اصطکاک $\mu_k=\frac{1}{4}$ باشد، کار انجام شده برای غلبه بر اصطکاک چند ژول است؟** $(g=10N/kg)$

۱) ۱/۲۵ **۲)** ۲/۵ **۳)** ۱۲/۵ **۴)** ۲۵

پاسخ **با توجه به تعریف کار نیروی ثابت:**



$$W_f=f_kd\cos\pi$$

$$\Rightarrow W_f=\mu_kmgd(-1)$$

$$\Rightarrow W_f=-\frac{1}{4}\times0/5\times10\times10$$

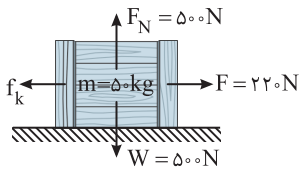
$$\Rightarrow W_f=-12/5J$$

کار انجام شده برای غلبه بر نیروی اصطکاک ۱۲/۵J است.

گزینهٔ ۳

B ۱۱۷۱ ۲

خط فکری نیروهای وارد بر صندوق را رسم می‌کنیم و به کمک قانون دوم نیوتون، شتاب حرکت را حساب کرده و جابه‌جایی صندوق در مدت ۲s را با استفاده از فرمول‌های حرکت‌شناسی به‌دست می‌آوریم و سرانجام کار نیروی F $(W=Fd)$ را حساب می‌کنیم.



۱ نیروی اصطکاک را حساب می‌کنیم.

$$f_k=\mu_kF_N\xrightarrow{\mu_k=0/4}f_k=0/4\times500=200N$$

۲ بنا به قانون دوم نیوتون:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow220-200=50a\Rightarrow a=0/4m/s^2$$

۳ جابه‌جایی متحرک در مدت ۲s خواهد شد:

$$\Delta x=d=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow d=\frac{1}{2}\times0/4\times2^2\Rightarrow d=0/8m$$

۴ کار نیروی F را به‌دست می‌آوریم.

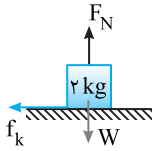
$$W=Fd\Rightarrow W=220\times0/8\Rightarrow W=176J$$

A ۱۱۷۱ ۳

۶ یادآوری انرژی مکانیکی مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل جسم است.

$$E=K+U$$

۱ پس از پرتاب روی سطح نیروی اصطکاک به جسم وارد می‌شود و باعث کاهش سرعت جسم می‌شود. شتاب را به کمک قانون دوم نیوتون حساب می‌کنیم:



$$-f_k=ma\Rightarrow-\mu_kF_N=ma\Rightarrow-0/2\times20=2a$$

$$\Rightarrow a=-2m/s^2$$

۲ سرعت جسم در لحظهٔ $t=0$ برابر $8m/s$ و در لحظهٔ $t=2s$ خواهد شد:

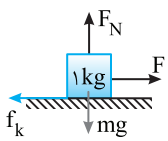
$$v=at+v_0\xrightarrow{t=2s}v=-2\times2+8=4m/s$$

۳ جسم روی سطح افقی جابه‌جا می‌شود و انرژی پتانسیل آن ثابت است. بنابراین تغییر انرژی مکانیکی آن در اثر تغییر انرژی جنبشی جسم است از این رو می‌توان نوشت:

$$E_2-E_1=K_2-K_1=\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2)=(16-64)=-48J$$

B ۱۱۷۱ ۱

۷ نکته سطح بر جسم دو نیروی f_k و F_N وارد می‌کند. کار F_N که بر مسیر حرکت عمود است صفر است. بنابراین کار نیروی سطح وارد بر جسم همان کار نیروی اصطکاک است.



با توجه به نکتهٔ بیان شده ابتدا به کمک کار نیروی سطح یا همان کار نیروی اصطکاک، نیروی اصطکاک را به‌دست می‌آوریم.

$$W_{f_k}=f_kd\cos180^\circ\Rightarrow-2=f_k\times1\times-1\Rightarrow f_k=2N$$

حال با توجه به رابطهٔ $f_k=\mu_kF_N$ داریم:

$$f_k=\mu_kF_N\xrightarrow{F_N=mg}2=\mu_k\times20\Rightarrow\mu_k=0/1$$

A ۱۱۷۱ ۲

۸

یادآوری جابه‌جایی جسم در ثانیهٔ nام در حرکت با شتاب ثابت از رابطهٔ $\Delta x=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0$ به‌دست می‌آید.

۱ ابتدا شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم: $F=ma\Rightarrow 4=5a\Rightarrow a=0/8\,m/s^2$

۲ جابه‌جایی جسم در ثانیهٔ سوم را حساب می‌کنیم:

$$d=\Delta x=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0=\frac{1}{2}(0/8)(2\times 3-1)=2m$$

۳ کار نیروی $F=4N$ در جابه‌جایی $2m$ خواهد شد:

$$W=Fd\Rightarrow W=4\times 2=8J$$

B ۱۱۷۱ ۱

۹

نکته هرگاه جسمی از حال سکون تحت تأثیر چند نیروی ثابت قرار گیرد و به حرکت درآید، جهت حرکت جسم در جهت نیروی خالص وارد بر آن است.

۱ نیروی خالص را به‌دست می‌آوریم. $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=2\vec{i}+5\vec{j}+\vec{i}-\vec{j}=3\vec{i}+4\vec{j}$

۲ اندازهٔ نیروی خالص وارد بر جسم خواهد شد:

$$|\vec{F}_{net}|=\sqrt{F_x^2+F_y^2}\Rightarrow|\vec{F}_{net}|=\sqrt{3^2+4^2}\Rightarrow\vec{F}_{net}=5N$$

۳ شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$$F_{net}=ma\xrightarrow{m=2kg}5=2a\Rightarrow a=2/5m/s^2$$

۴ جابه‌جایی در مدت $4s$ برابر است با: $d=\Delta x=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\times 2/5\times 16=20m$

۵ کار نیروی برایند را به‌دست می‌آوریم: $W_F=Fd\cos\theta=5\times 20\times\cos 0=100J$

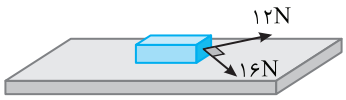
بازی با سؤال **مطابق شکل بر جسمی ساکن به جرم $5kg$ دو نیروی ۱۲ و ۱۶ نیوتونی به صورت عمود بر هم اثر می‌کنند. کار برایند این نیروها در ثانیهٔ سوم حرکت چند ژول است؟**

۱) ۲۰۰

۲) ۱۰۰

۳) ۱۴۴

۴) ۶۴



پاسخ **ابتدا برایند نیروهای وارد بر جسم را به دست می‌آوریم:**

$$F_{net}=\sqrt{12^2+16^2}=4\sqrt{9+16}=20N$$

با توجه به قانون دوم نیوتون شتاب را حساب می‌کنیم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow 20=5a\Rightarrow a=4m/s^2$$

جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم برابر است با:

$$\Delta x=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0\Rightarrow\Delta x=\frac{1}{2}\times 4(2\times 3-1)+0\Rightarrow\Delta x=10\,m$$

کار نیروی خالص خواهد شد: $W_t=F_{net}d=20\times 10=200\,J$

گزینهٔ ۱

B ۱۱۷۱ ۴

۱۰

۱ **ابتدا** سرعت جسم را به‌دست می‌آوریم: $P=mv\Rightarrow 10=2v\Rightarrow v=5m/s$

۲ به کمک فرمول مستقل از شتاب، جابه‌جایی را به‌دست می‌آوریم (چون نیروها ثابت هستند شتاب جسم نیز ثابت است.):

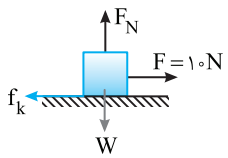
$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}t\Rightarrow\Delta x=\frac{5+0}{2}\times 1/2\Rightarrow\Delta x=3m$$

یادآوری قضیهٔ کار و انرژی جنبشی: تغییرات انرژی جنبشی جسم برابر مجموع کار تک‌تک نیروهای وارد بر جسم است. $(W_t=\Delta K)$

۳ بنا به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، کار نیروی اصطکاک را به‌دست می‌آوریم:

کار نیروهای F_N و W در این مسیر صفر است. بنابراین:

$$F\times d+W_f=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow 10\times 3+W_f=\frac{1}{2}\times 2\times(5)^2\Rightarrow W_f=-5J$$



کار نیروی اصطکاک در این حرکت به گرما تبدیل شده است، بنابراین گرمای تولیدشده ۵ ژول است.

B ۱۱۷۱ ۲

۱۱

بر جسم‌ها نیروی اصطکاک و مقاومت هوا وارد نمی‌شود و تنها نیروی وارد بر آن‌ها نیروی وزن است و بنا به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg=ma\Rightarrow a=g$$

در نتیجه شتاب حرکت هر سه گلوله یکسان و برابر g است. با توجه به رابطهٔ مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت، سرعت گلوله‌ها را پس از جابه‌جایی یکسان h به‌دست می‌آوریم. $v^2-v_0^2=2ad\Rightarrow v^2-0=2gh\Rightarrow v=\sqrt{2gh}$

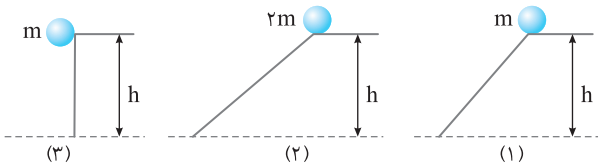
یعنی سرعت هر سه گلوله در لحظهٔ برخورد به زمین یکسان است. $v_1=v_2=v_3$

در این صورت انرژی جنبشی $(K=\frac{1}{2}mv^2)$ و تکانهٔ $(P=mv)$ گلوله‌ای که دارای جرم بیشتری است از بقیه بزرگ‌تر است، یعنی گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست و گزینهٔ (۲) درست است.

روش دیگر: قانون پایستگی انرژی مکانیکی:

$$E_1=E_2\Rightarrow mgh+0=0+\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow v=\sqrt{2gh}$$

سرعت‌ها یکسان است.



B ۱۱۷۱ ۳

۱۲

خط فکری ابتدا به کمک پایستگی انرژی مکانیکی، تندی در مکان B را به‌دست می‌آوریم. سپس با توجه به تعریف تکانه، P را حساب می‌کنیم.

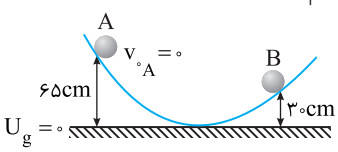
سطح افقی را مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی فرض می‌کنیم.

با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی داریم:

$$E_A=E_B\Rightarrow U_A+K_A=U_B+K_B\Rightarrow mgh_A=mgh_B+\frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\Rightarrow 10\times\frac{65}{100}=10\times\frac{30}{100}+\frac{1}{2}v_B^2\Rightarrow 3/5=\frac{1}{2}v_B^2\Rightarrow 7=v_B^2\Rightarrow v_B=\sqrt{7}m/s$$

تکانه را حساب می‌کنیم. $P=5\times\sqrt{7}\Rightarrow P=5\sqrt{7}kg.m/s$



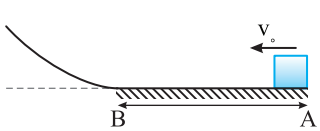
بازی با سؤال **جسمی را روی سطح افقی با ضریب اصطکاک $\mu_k=0/2$ با سرعت اولیهٔ $10m/s$ از نقطهٔ A به حرکت در می‌آوریم. جسم پس از ۳ ثانیه در نقطهٔ B وارد سطح خمیدهٔ بدون اصطکاکی می‌شود. جسم روی سطح خمیده تا چه ارتفاعی بر حسب متر بالا می‌رود؟** $(g=10m/s^2)$

۱) ۰/۸

۲) ۱/۶

۳) ۷/۲

۴) باید جرم جسم معلوم باشد.



پاسخ شتاب حرکت روی سطح افقی را به دست می‌آوریم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow -\mu_k mg=ma$$

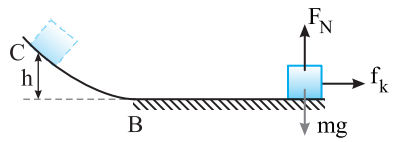
$$\Rightarrow a=-\mu_k g\Rightarrow a=-۰/۲\times ۱۰\Rightarrow a=-۲m/s^۲$$

سرعت جسم را در لحظهٔ گذر از B به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow v_B=-۲\times ۳+۱۰=۴m/s$$

اکنون به کمک پایستگی انرژی مکانیکی ارتفاعی که جسم از سطح بالا می‌رود را حساب می‌کنیم:

$$E_B=E_C\Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_B^۲=mgh\Rightarrow v_B^۲=۲gh\Rightarrow ۱۶=۲۰h\Rightarrow h=۰/۸m$$

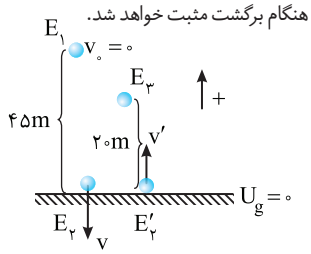


گزینهٔ ۱

B ۱۱۷۱ ۴

۱۳ خط فکری با یک تست ترکیبی سروکار داریم ابتدا باید به کمک اصل پایستگی انرژی مکانیکی، سرعت را هنگام برخورد به زمین و در لحظهٔ برگشت از سطح زمین به‌دست بیاوریم تا بتوانیم به کمک تعریف شتاب $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ شتاب برخورد و از آنجا نیروی خالص وارد بر گلوله را حساب کنیم. دقت کنید که در استفاده از تعریف شتاب باید علامت سرعت را در نظر بگیرید برای این منظور جهت مثبت را رو به بالا اختیار کنید. سرعت هنگام پایین آمدن و برخورد به زمین منفی و هنگام برگشت مثبت خواهد شد.

ابتدا به کمک اصل پایستگی انرژی مکانیکی سرعت برخورد گلوله به زمین و همچنین سرعت برگشت آن از سطح زمین را حساب می‌کنیم. سطح زمین را مبدأ پتانسیل گرانشی فرض می‌کنیم.



$$E_۲=E_۱\xrightarrow[U_۲=۰]{K_۱=۰}\frac{۱}{۲}mv^۲=mgh\Rightarrow v^۲=۲\times ۱۰\times ۴۵\Rightarrow v=-۳۰m/s$$

علت منفی قرار دادن سرعت برخورد به زمین این است که ما جهت مثبت را رو به بالا اختیار کرده‌ایم. اما پس از برخورد گلوله به زمین گلوله ابتدا متوقف می‌شود و سپس با سرعت v' رو به بالا حرکت می‌کند و در این لحظه دارای انرژی جنبشی $\frac{۱}{۲}mv'^۲$ است و تا ۲۰m بالا می‌رود و سرعتش صفر می‌شود و انرژی جنبشی‌اش به انرژی پتانسیل تبدیل می‌شود.

$$E'_۲=E_۳\xrightarrow[U'_۲=۰]{K_۳=۰}\frac{۱}{۲}mv'^۲=mgh'$$

$$\Rightarrow v'^۲=۲gh'=۲\times ۱۰\times ۲۰\Rightarrow v'=۲۰m/s$$

v' را مثبت قرار می‌دهیم زیرا جهتش رو به بالا و در جهت مثبت اختیاری ما بود. اکنون شتاب در مدت برخورد و سپس نیروی خالص را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{v'-v}{t}=\frac{۲۰-(-۳۰)}{۲\times ۱۰^{-۳}}=۲۵\times ۱۰^۳ m/s^۲$$

با نوشتن قانون دوم نیوتون نیروی خالص وارد بر گلوله در مدت برخورد قابل محاسبه است.

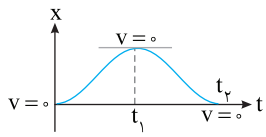
$$F_{net}=ma\Rightarrow F_{net}=۰/۲\times ۲۵\times ۱۰^۳=۵۰۰۰N$$

میانبر در شرایط خلأ می‌توانید از رابطهٔ $v=\sqrt{۲gh}$ که در آن h مقدار جابه‌جایی در امتداد قائم است استفاده کنید.

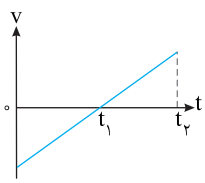
B ۱۱۷۱ ۴

۱۴ خط فکری چگونه از روی نمودار مکان زمان دربارهٔ علامت نیروی خالص وارد بر جسم اظهار نظر کنیم. کافی است مشخص کنیم که در هر بازه زمانی تندی در حال افزایش و یا در حال کاهش است. سپس با توجه به قضیه کار و انرژی جنبشی $W_t=\Delta K$ اگر تندی در حال افزایش باشد $\Delta K>۰$ و کار نیروی خالص مثبت است و اگر تندی در حال کاهش باشد، $\Delta K<۰$ و کار نیروی خالص منفی است.

با توجه به شیب خط مماس بر نمودار در بازهٔ صفر تا $t_۱$، ابتدا سرعت افزایش و سپس کاهش می‌یابد تا در لحظهٔ $t_۱$ سرعت صفر می‌شود و در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ نیز مجدداً سرعت زیاد و سرانجام کم می‌شود. بنابراین در بازهٔ صفر تا $t_۱$ انرژی جنبشی ابتدا افزایش $(\Delta K>۰)$ و سپس کاهش $(\Delta K<۰)$ می‌یابد و کار نیروی خالص ابتدا مثبت $(W>۰)$ و سپس منفی $(W<۰)$ است و در بازهٔ $t_۱$ و $t_۲$ نیز همین حالت تکرار می‌شود.



بازی با سؤال **نمودار سرعت - زمان ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است. کار نیروی خالص وارد بر ذره در بازه‌های زمانی صفر تا $t_۱$ و $t_۱$ تا $t_۲$ به‌ترتیب از راست به چپ چگونه است؟**



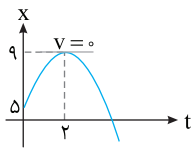
۱) مثبت، منفی ۲) مثبت، مثبت ۳) منفی، مثبت ۴) منفی، منفی

پاسخ **از صفر تا $t_۱$ اندازهٔ سرعت در حال کاهش و انرژی جنبشی ذره در حال کم شدن است $(\Delta K<۰)$ و بنا به قضیه کار و انرژی جنبشی $(W_t=\Delta K)$ کار نیروی خالص وارد بر ذره منفی است. از $t_۱$ تا $t_۲$ اندازهٔ سرعت در حال افزایش و انرژی جنبشی ذره در حال زیاد شدن است و کار برایند نیروهای وارد بر ذره مثبت است.**

گزینهٔ ۳

B ۱۱۷۱ ۴

۱۵ خط فکری باید از روی نمودار شتاب و سرعت اولیه را پیدا کنیم، معادلهٔ سرعت زمان را بنویسیم تا بتوانیم کار نیروی خالص را به کمک قضیه کار و انرژی جنبشی $(W_t=\Delta K)$ به‌دست بیاوریم.



۱ در بازهٔ صفر تا ۲s متحرک از مکان $x_۰=۵m$ به مکان $x=۹m$ می‌رود. به کمک رابطهٔ مستقل از شتاب سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم.

$$x=\frac{v+v_۰}{۲}t+x_۰\Rightarrow ۹=\frac{۰+v_۰}{۲}\times ۲+۵\Rightarrow v_۰=۴m/s$$

۲ شتاب حرکت خواهد شد:

$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۰-۴}{۲}\Rightarrow a=-۲m/s^۲$$

۳ معادله سرعت زمان را می‌نویسیم و در لحظهٔ $t=۲s$ سرعت صفر است، در لحظهٔ $t=۴s$ سرعت را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=-۲t+۴\xrightarrow{t=۴s}v=-۲\times ۴+۴\Rightarrow v=-۴m/s$$

۴ اکنون کار نیروی خالص قابل حساب کردن است.

$$W_t=\Delta K=\frac{۱}{۲}mv_۲^۲-\frac{۱}{۲}mv_۱^۲\xrightarrow{m=۲kg}W_t=\frac{۱}{۲}\times ۲\times(-۴)^۲+۰$$

$$\Rightarrow W_t=۱۶J$$

B ۱۱۷۱ ۳

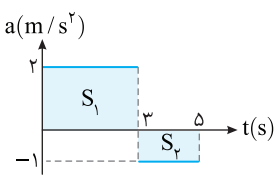
۱۶ مساحت زیر نمودار $a-t$ برابر تغییرات سرعت می‌باشد. از این‌رو خواهیم داشت:

$$\Delta v=S_۱+S_۲\Rightarrow v_۲-v_۱=۶+(-۲)\xrightarrow[\text{جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده}]{v_۱=۰}$$

$$v_۲=۴m/s$$

با توجه به قضیه کار و انرژی جنبشی داریم:

$$W_t=\Delta K\Rightarrow W_t=\frac{۱}{۲}m(v_۲^۲-v_۱^۲)\Rightarrow W_t=\frac{۱}{۲}\times ۲(۴^۲-۰)\Rightarrow W_t=۱۶J$$



بازی با سؤال بر جسم ساکنی به جرم $4kg$ نیروی $F=8t$ وارد شده و جسم شروع به حرکت می‌کند. کار این نیرو در ۲ ثانیهٔ اول حرکت چند ژول است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۴۰

پاسخ **خط فکری** برای به‌دست آوردن کار نیروی F در بازهٔ صفر تا ۲s باید سرعت در لحظهٔ $t=2s$ را به‌دست بیاوریم. مساحت سطح زیر نمودار شتاب زمان برابر تغییرات سرعت است. بنابراین نمودار $a-t$ را رسم کنید، سطح زیر نمودار آن را به‌دست بیاورید تا بتوانید v را حساب کرده به کمک قضیه کار و انرژی جنبشی $(W_t=\Delta K)$ کار این نیرو را به‌دست بیاورید.

۱ با توجه به قانون دوم نیوتون $F=ma$ معادلهٔ شتاب - زمان را می‌نویسیم:

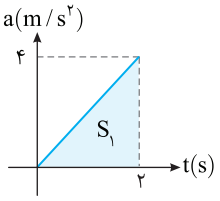
$$\begin{cases} F=ma \\ F=8t \end{cases} \Rightarrow 4a=8t \Rightarrow a=2t$$

۲ نمودار $a-t$ را رسم می‌کنیم و تا لحظهٔ $t=2s$ مساحت زیر نمودار آن را حساب کرده و با توجه به اینکه $v_0=0$ است، خواهیم داشت:

$$\Delta v=S \Rightarrow \Delta v=\frac{4\times 2}{2}=4m/s \Rightarrow v-v_0=4m/s \Rightarrow v=4m/s$$

۳ اکنون به کمک قضیه کار و انرژی جنبشی، کار نیروی F را حساب می‌کنیم.

$$W=\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2) \Rightarrow W=\frac{1}{2}\times 4\times(4^2-0)=32$$

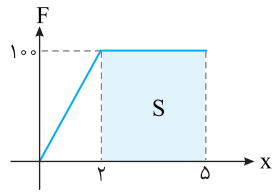


گزینهٔ ۳

B ۱۱۷۱ ۱ ۱۷

نکته مساحت سطح محصور بین نمودار نیرو با محور xها برابر کار نیروی F است.

۱ سطح زیر نمودار $F-x$ را حساب کرده و کار نیروی F را به‌دست می‌آوریم.



$$W=S=\frac{100(3+5)}{2}=400J$$

۲ به کمک قضیه کار و انرژی سرعت در مکان $x=5m$ خواهد شد:

$$W=\Delta K \Rightarrow W=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow 400=\frac{1}{2}\times 2\times(v_2^2-0) \Rightarrow v_2=20m/s$$

۳ شتاب متوسط را حساب می‌کنیم. $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{20-0}{2}=10m/s^2$

B ۱۱۷۱ ۱ ۱۸

سرعت گلوله هنگام رسیدن به زمین را به کمک رابطهٔ مستقل از زمان به‌دست می‌آوریم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x \xrightarrow{a=8m/s^2,h=10m} v^2-0=2\times 8\times 10 \Rightarrow v^2=160$$

بنا به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، تغییر انرژی جنبشی برابر مجموع کار تک‌تک نیروهای وارد بر جسم است. بر این جسم دو نیرو یکی نیروی وزن و دیگری نیروی مقاومت هوا وارد می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$W_t=\Delta K \Rightarrow W_g+W_{f_D}=K_2-K_1 \Rightarrow mgh+W_{f_D}=\frac{1}{2}mv^2-0$$

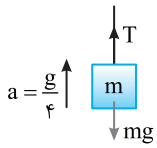
$$\xrightarrow{m=2kg} 2\times 10\times 10+W_{f_D}=\frac{1}{2}\times 2\times(160)=200+W_{f_D}=160$$

$$\Rightarrow W_{f_D}=-40J$$

B ۱۱۷۱ ۴ ۱۹

خط فکری ابتدا نیروی کشش نخ (T) را به کمک دینامیک حساب کنید. سپس کار این نیرو و کار نیروی وزن را به‌دست آورده بر هم تقسیم کنید.

ابتدا با توجه به قانون دوم نیوتون نیروی کشش طناب را به‌دست می‌آوریم:



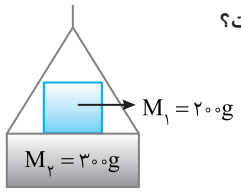
$$F_{net}=ma \Rightarrow T-mg=\frac{mg}{4} \Rightarrow T=\frac{5}{4}mg$$

کار نیروی T و mg خواهد شد:

$$W=Fd\cos\theta \begin{cases} \xrightarrow{W_T} W_T=Td\cos 0^\circ=\frac{5}{4}mgd \\ \xrightarrow{W_{mg}} W_{mg}=mgd\cos 180^\circ=-mgd \end{cases}$$

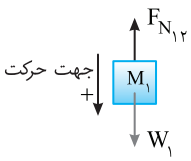
نسبت $\frac{W_T}{W_{mg}}$ برابر است با: $\frac{W_T}{W_{mg}}=\frac{\frac{5}{4}mgd}{-mgd}=-\frac{5}{4}$

بازی با سؤال در شکل روبه‌رو دستگاه با شتاب ثابت $2m/s^2$ از حال سکون رو به پایین شروع به حرکت می‌کند. کار نیرویی که M_2 بر M_1 وارد می‌کند در سه ثانیه آغازین حرکت چند ژول است؟



۱) ۱۴/۴
۲) −۱۴/۴
۳) ۷/۲
۴) −۷/۲

پاسخ نیروهای وارد بر M_1 را رسم می‌کنیم و به کمک قانون دوم نیوتون نیرویی که M_2 بر M_1 وارد می‌کند را حساب می‌کنیم.



$$F_{net}=Ma \Rightarrow M_1g-F_{N_{12}}=M_1a$$

$$\Rightarrow 2-F_{N_{12}}=0/2\times 2 \Rightarrow F_{N_{12}}=1/6N$$

جابه‌جایی دستگاه در مدت ۳ ثانیه را به‌دست می‌آوریم:

$$d=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\times 2\times 9 \Rightarrow d=9m$$

کار نیروی $F_{N_{12}}$ برابر است با:

$$W=F_{N_{12}}d\cos 180^\circ \Rightarrow W=1/6\times 9\times(-1)=-14/4J$$

گزینهٔ ۲

A ۱۱۷۱ ۲ ۲۰

یادآوری قضیه کار و انرژی جنبشی: کار نیروی خالص وارد بر جسم برابر تغییرات انرژی جنبشی جسم: $W_t=\Delta K$

شتاب حرکت $a=0/2m/s^2$ است و آسانسور از حال سکون $(v_0=0)$ به مدت 5s در حرکت است. بنابراین سرعت در $t=5s$ را به‌دست می‌آوریم و با استفاده از قضیه کار و انرژی جنبشی کار نیروی برایند را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0 \Rightarrow v=5(0/2)+0 \Rightarrow v=1m/s$$

$$W_t=\Delta K \Rightarrow W_t=\frac{1}{2}\times 400(v^2-v_0^2) \Rightarrow W_t=200J$$

بازی با سؤال وزنه‌ای به جرم $60kg$ درون آسانسوری قرار دارد و آسانسور با شتاب $2m/s^2$ کندشونده رو به بالا در حرکت است. کار نیروی عمودی سطح پس از $10m$ جابه‌جایی چند ژول است؟

۱) ۴۸۰۰ ۲) ۲۴۰۰ ۳) ۵۶۰۰ ۴) ۷۲۰۰

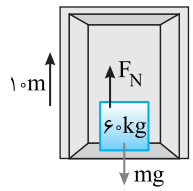
پاسخ ابتدا با توجه به قانون دوم نیوتون F_N را به‌دست می‌آوریم:

$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_N=ma$

$\Rightarrow ۶۰۰-F_N=۱۲۰\Rightarrow F_N=۴۸۰N$

کار نیروی عمودی سطح برابر است:

$W_{F_N}=F_N d\cos ۰=۴۸۰\times ۱۰=۴۸۰۰J$

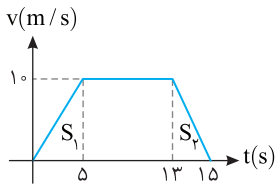


گزینهٔ ۱

B ۱۱۷۱ ۳

۲۱ ۱ در قسمت اول حرکت (۵s آغازین) شتاب حرکت برابر است با:

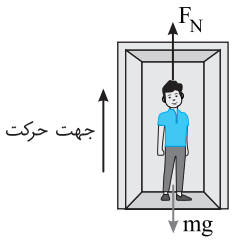
$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۱۰}{۵}=۲m/s^۲$



۲ نیروی عمودی سطح در این حالت را حساب می‌کنیم:

$F_{net}=ma\Rightarrow F_N-mg=ma$

$\Rightarrow F_N=۶۰۰+۱۲۰=۷۲۰N$



۳ همچنین جابه‌جایی برابر مساحت زیر نمودار v−t می‌باشد:

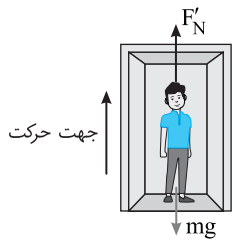
$d=S_۱=۲۵m$

۴ کار نیروی عمودی سطح خواهد شد: $W_{F_N}=F_N d\cos ۰=۷۲۰\times ۲۵\times ۱=۱۸۰۰۰J$

۵ تمام مراحل بالا را برای ۲s آخر تکرار می‌کنیم:

در ۲s آخر حرکت شتاب برابر است با $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-۱۰}{۲}=-۵m/s^۲$ و با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:

$$\begin{cases} F_{net}=ma\Rightarrow F'_N-mg=-ma\Rightarrow F'_N-۶۰۰=-۳۰۰\Rightarrow F'_N=۳۰۰N \\ W_{F'_N}=F'_N d_۲\cos ۰\xrightarrow{d_۲=S_۲} W_{F'_N}=۳۰۰\times\frac{۲\times ۱۰}{۲}=۳۰۰۰J \end{cases}$$



۶ نسبت کار نیروی عمودی سطح در دو حالت خواهد شد: $\frac{W_{F_N}}{W_{F'_N}}=\frac{۱۸۰۰۰}{۳۰۰۰}=۶$

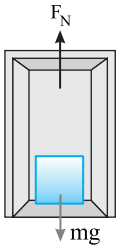
بازی با سؤال وزنه‌ای به جرم ۲kg درون آسانسوری قرار دارد. آسانسور با شتاب ثابت $۲m/s^۲$ رو به بالا شروع به حرکت می‌کند. کار نیروی عمودی سطح در نیم ثانیهٔ اول حرکت چند ژول است؟ $(g=۱۰N/kg)$

۱) صفر ۲) ۱۲ ۳) ۸۹ ۴) ۶

پاسخ ابتدا نیروی عمودی تکیه‌گاه را به‌دست می‌آوریم:

$F_{net}=ma\Rightarrow F_N-mg=ma\Rightarrow F_N-۲۰=۴$

$\Rightarrow F_N=۲۴N$



سپس جابه‌جایی را در مدت نیم‌ثانیه حساب می‌کنیم:

$d=\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲\Rightarrow d=\frac{۱}{۲}\times ۲(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}m$

کار نیروی عمودی سطح خواهد شد:

$W_{F_N}=F_N d\cos\theta=۲۴\times\frac{۱}{۴}\times\cos ۰=۶J$

گزینهٔ ۴

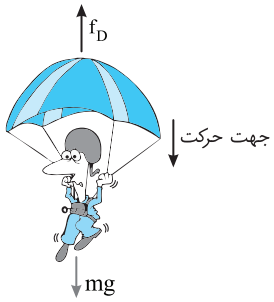
B ۱۱۷۱ ۴

۲۲ در تندی حدی، سرعت ثابت بوده و برایند نیروهای وارد بر چترباز صفر است، از این رو نیروی مقاومت هوا وارد بر چترباز برابر نیروی وزن چترباز است:

$F_{net}=۰\Rightarrow mg=f_D\Rightarrow f_D=۸۰۰N$

در هر متر سقوط کار نیروی مقاومت هوا برابر است با:

$W_{f_D}=f_D d\cos ۱۸۰^\circ=-۸۰۰J$



B ۱۱۷۱ ۴

۲۳ ۱ با توجه به قانون دوم نیوتون کشش T را به‌دست می‌آوریم:

$F_{net}=ma\Rightarrow T-mg=ma\Rightarrow T-۵۰۰=۱۰۰$

$\Rightarrow T=۶۰۰N$

۲ حال جابه‌جایی آن در مدت ۴s را به‌دست می‌آوریم:

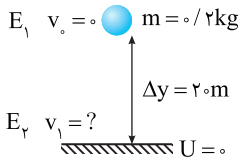
$\Delta y=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow\Delta y=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۱۶\Rightarrow\Delta y=۱۶m$

۳ کار نیرویی که طناب به شخص وارد می‌کند برابر است با:

$W=Td=۶۰۰\times ۱۶=۹۶۰۰J$

A ۱۱۷۱ ۳

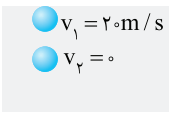
۲۴ ۱ ابتدا تندی گلوله هنگام رسیدن به تودهٔ شنی را به کمک پایستگی انرژی مکانیکی به دست می‌آوریم:



$E_۲=E_۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}mv_۱^۲-۰=mg\Delta y$

$\Rightarrow\frac{۱}{۲}v_۱^۲=۱۰\times ۲۰\Rightarrow v_۱=۲۰m/s$

۲ گلوله با این سرعت به تودهٔ شن برخورد می‌کند و در مدت ۰/۱s سرعت گلوله به صفر می‌رسد.



شتاب توقف گلوله در تودهٔ شنی را حساب می‌کنیم.

$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۰-۲۰}{۰/۱}\Rightarrow a=-۲۰۰m/s^۲$

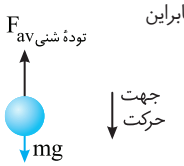
۳ نیروی خالص وارد بر گلوله خواهد شد:

$F_{av}=ma\Rightarrow|F_{av}|=|۰/۲\times(-۲۰۰)|=۴۰N$

A ۱۱۷۱ ۳

۲۵ هنگام برخورد گلوله به تودهٔ شنی بر گلوله دو نیرو یکی نیروی وزن و دیگری نیروی مقاومت تودهٔ شن در مقابل حرکت گلوله است. نیروهای وارد بر گلوله را رسم می‌کنیم و با استفاده از قانون دوم نیوتون، نیروی متوسطی که تودهٔ شن به گلوله وارد می‌کند را به‌دست می‌آوریم.

نیروی خالص متوسط وارد بر گلوله $F_{av}=-۴۰N$ است بنابراین



$mg-F_{av_{\text{تودهٔ شنی}}}=-۴۰$

$\Rightarrow ۲-F_{av_{\text{تودهٔ شنی}}}=-۴۰$

$\Rightarrow F_{av_{\text{تودهٔ شنی}}}=۴۲N$

B ۱۱۷۱ ۳

۲۶ خط فکری در دو مسیر بیان شده مطابق شکل جهت بردار نیروی اصطکاک تغییر می‌کند. دقت کنید کار در رابطهٔ $W=Fd\cos\theta$ برای نیروی ثابت تعریف می‌شود. در حالی که بردار نیروی اصطکاک تغییر کرده است. از این رو شما نمی‌توانید از جابه‌جایی کل از ابتدا تا انتهای مسیر استفاده کنید. بلکه باید در هر قسمت کار نیروی اصطکاک را جداگانه به‌دست آورده و با هم جمع کنید.

ابتدا نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک در هر دو مسیر را حساب کرده و با توجه به جابه‌جایی کار نیروی اصطکاک‌ها را حساب می‌کنیم. $F_{net,y}=0\Rightarrow F_N=mg$

کار نیروی اصطکاک در قسمت اول:

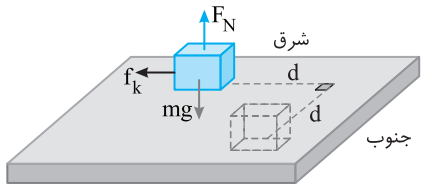
$$f_{k_1}=\mu_k F_N=\mu_k mg\Rightarrow W_{f_{k_1}}=f_{k_1}d\cos 180^\circ=-\mu_k mgd$$

کار نیروی اصطکاک در قسمت دوم:

$$f_{k_2}=\mu_k F_N=\mu_k mg\Rightarrow W_{f_{k_2}}=f_{k_2}d\cos 180^\circ=-\mu_k mgd$$

کار نیروی اصطکاک در کل مسیر:

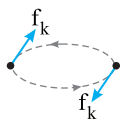
$$W_{f_k}=W_{f_{k_1}}+W_{f_{k_2}}=-\mu_k mgd-\mu_k mgd=-2\mu_k mgd$$



B ۱۱۷۱ ۳

۲۷ نکته اندازهٔ کار نیروی اصطکاک برابر حاصل‌ضرب نیروی اصطکاک در مسافت طی شده (طول مسیر) است.

نیروی اصطکاک روی سطح میز افقی برابر است با:



$$f_k=\mu_k F_N\xrightarrow{F_N=mg}f_k=\mu_k mg$$

طول مسیر حرکت در یک دور کامل برابر محیط دایره $(2\pi R)$ است. بنابراین کار نیروی اصطکاک در یک دور کامل خواهد شد:

$$W_f=-f_k(2\pi R)=-2\mu_k mg\pi R$$

B ۱۱۷۱ ۲

۲۸ نیروی خالص متوسط که سبب حرکت اتومبیل می‌شود خواهد شد:

$$F_{net}=ma\xrightarrow{m=1200kg,\ a=4m/s^2}F_{net}=1200\times 4\Rightarrow F_{net}=4800N$$

یادآوری جابه‌جایی متحرک با شتاب ثابت در ثانیهٔ دوم حرکت از رابطهٔ $\Delta x=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0$ به‌دست می‌آید.

جابه‌جایی در ثانیهٔ دوم حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}\times 4\times(2\times 2-1)+0\Rightarrow\Delta x=6m$$

یادآوری **توان:** آهنگ انجام کار یا مصرف انرژی است.

$$P=\frac{W}{t}\xrightarrow{W=Fx}P=\frac{4800\times 6}{2-1}\Rightarrow P=28800W\Rightarrow P=28/8kW$$

A ۱۱۷۱ ۴

۲۹ **۱** با **تطابق** معادلهٔ سرعت - زمان داده شده $(v=5t+2)$ با معادلهٔ سرعت - زمان حرکت با شتاب ثابت $(v=at+v_0)$، شتاب حرکت $5m/s^2$ و سرعت اولیه $2m/s$ است.

۲ سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{v+v_0}{2}\Rightarrow v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0\Rightarrow v_{av}=\frac{1}{2}\times 5\times 2+2\Rightarrow v_{av}=7m/s$$

۳ نیروی وارد بر جسم برابر است با: $F=ma\Rightarrow F=3\times 5=15N$

۴ توان متوسط را به‌دست می‌آوریم: $P_{av}=\frac{W}{t}=\frac{F.d}{t}=Fv_{av}=15\times 7=105W$

بازی با سؤال جسمی تحت تأثیر نیروی ثابت F از حال سکون به حرکت درمی‌آید و پس از مدت t به سرعت v می‌رسد. توان متوسطی که در این مدت جسم دریافت می‌کند برابر است با:

کنکور دهه‌های گذشته

۱) $\frac{1}{2}Fv$ ۲) Fv ۳) $\frac{1}{2}\frac{Fv}{t}$ ۴) $\frac{Fv}{t}$

پاسخ توان متوسط برابر است با:

$$\bar{P}=\frac{W}{t}=\frac{Fd}{t}=F\frac{d}{t}\xrightarrow{v_{av}=\frac{d}{t}}\bar{P}=Fv_{av}$$

چون نیروی وارد بر جسم ثابت است و با توجه به رابطهٔ $F=ma$ شتاب حرکت ثابت می‌باشد. بنابراین $v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}$:

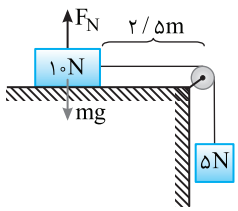
$$\bar{P}=Fv_{av}\Rightarrow\bar{P}=F\frac{v_1+v_2}{2}\xrightarrow[v_2=v]{v_1=0}\bar{P}=F\frac{v}{2}=\frac{1}{2}Fv$$

گزینهٔ ۱

B ۱۱۷۱ ۱

۳۰ ۱ وقتی وزنه‌ها را رها می‌کنیم و وزنه‌ها ۱/۵ متر جابه‌جا می‌شوند وزنهٔ ۱۰N همچنان روی سطح میز است و انرژی پتانسیل آن تغییر نمی‌کند اما انرژی جنبشی به‌دست می‌آورد. در حالی که وزنهٔ ۵N، ۱/۵m به پایین می‌آید و انرژی پتانسیل آن کاهش می‌یابد.

$$\Delta U=-mg\Delta h\Rightarrow\Delta U=-5\times 1/5\Rightarrow\Delta U=-7/5$$



۲ بنا به قانون پایستگی انرژی، تغییر انرژی مکانیکی سامانه برابر کار نیروهای مقاوم به سامانه است بنابراین:

$$E_2-E_1=W_f\Rightarrow K_2+U_2-(K_1+U_1)=W_f\Rightarrow\overbrace{(K_2-K_1)}^{\Delta K}+\overbrace{(U_2-U_1)}^{\Delta U}=W_f$$

$$\Rightarrow\Delta K+\Delta U=W_f\xrightarrow{\Delta K=6J}6+(-7/5)=W_f\Rightarrow W_f=-1/5J$$

۳ نیروی اصطکاک را حساب می‌کنیم.

$$W_f=-f_k d\xrightarrow{d=1/5m}-1/5=-f_k(1/5)\Rightarrow f_k=1N$$

۴ ضریب اصطکاک سطح میز خواهد شد:

$$f_k=\mu_k F_N\xrightarrow{F_N=10N}1=\mu_k\times 10\Rightarrow\mu_k=0/1$$

روش دیگر به کمک قضیهٔ کار و انرژی جنبشی:

با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی برای دستگاه می‌توان نوشت:

$$W_t=\Delta K\Rightarrow W_{mg}+W_{f_k}=K_2-K_1\Rightarrow mgd+W_{f_k}=K_2$$

$$\xrightarrow[K_2=6J]{d=1/5m}7/5+W_{f_k}=6$$

$$W_{f_k}=-1/5J\Rightarrow f_k d\cos 180^\circ=-1/5J\xrightarrow{d=1/5m}f_k=1N$$

$$f_k=\mu_k F_N\Rightarrow 1=\mu_k\times 10\Rightarrow\mu_k=0/1$$

فصل سوم

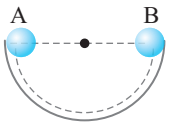
نوسان و امواج

پنجره ۱

A ۱۱۷۲ ۴

حرکت دوره‌ای به حرکتی گویند که در بازه‌های زمانی یکسان عیناً تکرار می‌شود. چرخش زمین به دور خورشید، ضربان قلب و تاب خوردن دائماً در حال تکرار هستند. از این‌رو هر سه آن‌ها حرکت دوره‌ای‌اند.

A ۱۱۷۳ ۲



سطح نیمکره بدون اصطکاک است و با رها شدن جسم، جسم از نقطهٔ A تا B می‌رود و این مسیر را بازمی‌گردد. در نتیجه این حرکت، یک نوسان دوره‌ای است اما چون مسیر حرکت خط راست نیست، این حرکت، حرکت هماهنگ ساده نخواهد بود.

A ۱۱۷۴ ۳

نوسان‌های دوره‌ای هرگاه دارای نوسان‌های سینوسی باشند، حرکت هماهنگ ساده هستند و گزینه (۱) نادرست و گزینهٔ (۳) درست است.

نکته به‌طور عمومی به همهٔ تابع‌های سینوسی و کسینوسی، تابع سینوسی گویند. با توجه به نکتهٔ بیان شده معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده می‌تواند به‌صورت‌های مختلف از جمله $x=A\cos\omega t$ یا $x=A\sin\omega t$ باشد و گزینهٔ (۲) نادرست است.

A ۱۱۷۵ ۴

یادآوری به نوسان‌های سینوسی (و کسینوسی) حرکت هماهنگ ساده (SHM) گویند.

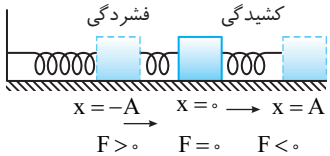
نمودار (الف) نمودار مکان - زمان یک نوسان دوره‌ای است اما نوسان‌های آن سینوسی نیست و این نمودار مربوط به حرکت هماهنگ ساده نیست.

نمودار (پ) نیز با اینکه دوره‌ای است اما سینوسی نبوده و این نمودار نیز مربوط به حرکت هماهنگ ساده نیست.

نمودارهای (ب) و (ت) نمودارهای سینوسی و کسینوسی هستند که به آن‌ها به‌طور عمومی تابع سینوسی می‌گویند و مربوط به حرکت هماهنگ ساده هستند.

A ۱۱۷۶ ۳

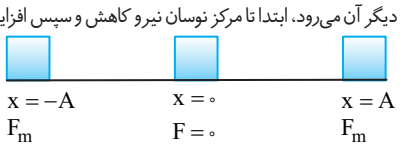
به حرکت هماهنگ ساده این وزنه و فنر دقت کنید. وقتی که فنر دارای فشردگی است (یعنی از $x=0$ تا $x=-A$) قطعاً نیروی فنر می‌خواهد فنر را به حالت طبیعی برگرداند و این نیرو به سمت راست است و در فاصله صفر تا $+A$ که فنر از طول طبیعی کشیدگی دارد، نیروی فنر به سمت چپ است، بنابراین نیروی فنر همواره به سمت نقطه حالت تعادل (طول طبیعی فنر) است یعنی نیرو به سمت مرکز نوسان است.



نکته در حرکت هماهنگ ساده، نیروی برگرداننده نقش اصلی را دارد که جهت بردار این نیرو همواره به سوی مرکز نوسان است.

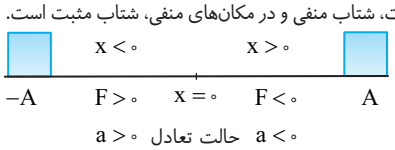
A ۱۱۷۷ ۳

هنگامی که نوسانگر در دو انتهای مسیر است، نیروی خالص وارد بر آن بیشینه است و در مرکز نوسان، نیروی خالص وارد بر نوسانگر صفر است. بنابراین هنگامی که نوسانگر از یک انتهای مسیر به انتهای دیگر آن می‌رود، ابتدا تا مرکز نوسان نیرو کاهش و سپس افزایش می‌یابد.



A ۱۱۷۸ ۲

نکته در حرکت هماهنگ ساده، مکان و شتاب هم‌علامت نیستند و در مکان‌های مثبت، شتاب منفی و در مکان‌های منفی، شتاب مثبت است.



نکته در حرکت هماهنگ ساده، علامت سرعت، ارتباطی به علامت مکان ندارد. یعنی در مکان‌های مثبت سرعت می‌تواند مثبت و یا منفی باشد.

در صورت تست گفته شده در چه حالتی مکان نوسانگر الزاماً منفی است. بنابراین باید شتاب مثبت باشد.

بازی با سؤال **در یک حرکت هماهنگ ساده، در لحظه‌ای که شتاب حرکت مثبت است، الزاماً .....**

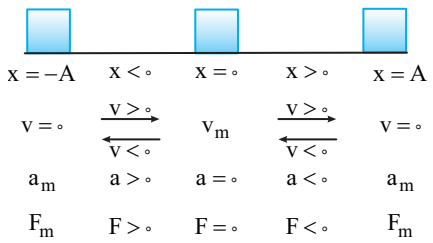
۱) بردار مکان منفی و بردار سرعت مثبت است.

۲) بردار مکان مثبت و بردار سرعت منفی است.

۳) بردار مکان منفی و نیروی وارد بر نوسانگر مثبت است.

۴) بردار مکان و نیروی وارد بر نوسانگر مثبت است.

پاسخ **در حرکت هماهنگ ساده، مطابق شکل، در لحظه‌ای که بُعد حرکت مثبت است، سرعت می‌تواند مثبت یا منفی باشد. اما شتاب و نیرو قطعاً منفی هستند و در لحظه‌ای که بُعد حرکت منفی است، شتاب و نیرو قطعاً مثبت بوده اما سرعت ممکن است مثبت یا منفی باشد. در صورت سؤال بیان شده که شتاب حرکت مثبت است، بنابراین نیرو مثبت، مکان منفی و سرعت می‌تواند مثبت یا منفی باشد.**

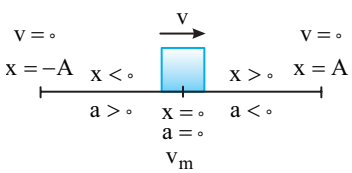


گزینهٔ ۳

A ۱۱۷۹ ۴

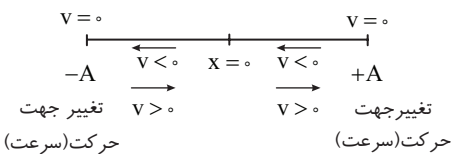
بردار مکان در گذر نوسانگر از مبدأ یعنی در نقطهٔ تعادل تغییر علامت می‌دهد و در این نقطه بردار سرعت تغییر جهت نمی‌دهد، در صورتی که بردار شتاب تغییر جهت می‌دهد.

مطابق شکل بردار سرعت در انتهای مسیر (دامنهٔ حرکت) صفر شده و تغییر علامت می‌دهد.



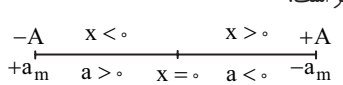
A ۱۱۸۰ ۲

سرعت در دو انتهای مسیر تغییر علامت می‌دهد. وقتی سرعت ابتدا مثبت است و سپس منفی می‌شود، یعنی متحرک در انتهای مسیر و در مکان $x=+A$ بوده و تغییر جهت داده است. در حرکت هماهنگ ساده هرگاه مکان مثبت باشد، شتاب منفی است بنابراین در این لحظه شتاب بیشینه مقدار منفی خود را دارد.



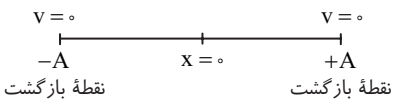
A ۱۱۸۱ ۴

در مرکز نوسان (حالت تعادل) شتاب صفر و در دامنه‌ها شتاب بیشینه است. بنابراین اندازهٔ شتاب در حال تغییر است. در مکان‌های مثبت، شتاب نوسانگر منفی و در مکان‌های منفی شتاب نوسانگر مثبت است و جهت بردار شتاب در لحظهٔ گذر از مبدأ مکان تغییر می‌کند. همچنین جهت سرعت و شتاب مستقل از یکدیگرند، در نتیجه حرکت هماهنگ ساده، یک حرکت شتاب‌دار با شتاب متغیر است که بزرگی و جهت شتاب در حال تغییر است.



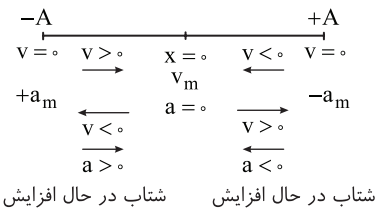
A ۱۱۸۲ ۲

دو انتهای مسیر نوسان $(x=\pm A)$ را که در آن‌جا تندی نوسانگر صفر می‌شود و نوسانگر تغییر جهت می‌دهد نقطهٔ بازگشت می‌گویند. پس گزینهٔ (۳) نادرست است. در این نقاط بازگشت تندی صفر است و گزینهٔ (۲) درست است. اما شتاب نوسانگر بیشینه است زیرا نیروی خالص برگردانندهٔ وارد بر نوسانگر در این نقاط بیشینه است، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.



A ۱۱۸۳ ۴

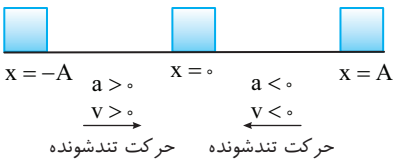
در حرکت هماهنگ ساده، در مرکز نوسان سرعت بیشینه و شتاب صفر است و در دو انتهای مسیر، سرعت صفر و شتاب بیشینه است. بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است. هنگام حرکت نوسانگر به سوی مرکز نوسان که حرکت تندشونده است بردار سرعت و شتاب هم‌جهت هستند، پس گزینهٔ (۲) نادرست است. هنگام حرکت نوسانگر به سوی دو انتهای مسیر، شتاب افزایش می‌یابد و بیشینه می‌شود، در حالی که سرعت کاهش یافته و صفر می‌شود، بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.



A ۱۱۸۴ ۴

نکته وقتی نوسانگر به سوی مرکز نوسان می‌رود، تندی آن افزایش می‌یابد و حرکت نوسانگر تندشونده است.

در حرکت تند شونده باید علامت سرعت و شتاب یکسان نباشد. یعنی اگر $v<0$ باشد $a>0$ و اگر $v>0$ باشد، $a<0$ باشد. بنابراین ممکن است سرعت مثبت و یا منفی بوده و گزینه (۴) درست است.



بازی با سؤال **در یک حرکت هماهنگ ساده، نوسانگر در حال نزدیک شدن به مبدأ (نقطهٔ تعادل) است. کدام گزینه درست است؟**

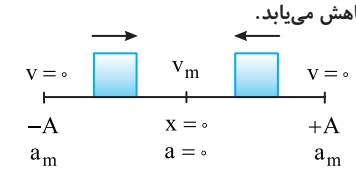
۱) شتاب در حال افزایش و تندی در حال کاهش است.

۲) شتاب و تندی در حال افزایش است.

۳) شتاب در حال کاهش و تندی در حال افزایش است.

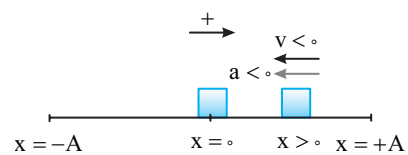
۴) شتاب ثابت و تندی در حال افزایش است.

پاسخ **در حرکت هماهنگ ساده هنگامی که نوسانگر به مبدأ نزدیک می‌شود، تندی در حال افزایش است اما به دلیل کاهش نیروی خالص وارد بر نوسانگر شتاب کاهش می‌یابد.** گزینهٔ ۳



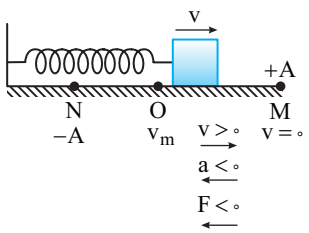
A ۱۱۸۵ ۳

مکان مثبت است و مطابق شکل برای آن‌که حرکت تندشونده باشد باید نوسانگر در حال حرکت به سمت مرکز نوسان باشد، یعنی سرعت منفی بوده و چون حرکت تندشونده است شتاب نیز منفی است و گزینهٔ (۳) درست است. البته می‌دانیم که علامت مکان و شتاب خلاف یکدیگر است و هرگاه مکان مثبت باشد، قطعاً شتاب منفی است.



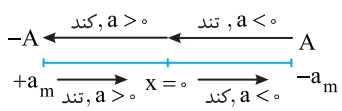
A ۱۱۸۶ ۴

جسم در حال حرکت به سمت نقطهٔ بازگشت است و تندی آن در حال کاهش است، پس حرکت آن کندشونده بوده، از این‌رو بردار شتاب در خلاف جهت بردار سرعت یعنی در خلاف جهت محور xهاست و با توجه به قانون دوم نیوتون $(\vec{F}=m\vec{a})$ نیروی خالص وارد بر نوسانگر نیز در خلاف جهت محور xهاست.



B ۱۱۸۷ ۱

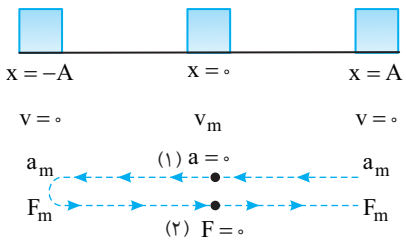
در دو انتهای مسیر (نقاط بازگشت A و $-A$) اندازهٔ شتاب بیشینه و از 0 تا $-A$ حرکت کندشونده و شتاب مثبت است. به شکل زیر دقت کنید.



بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

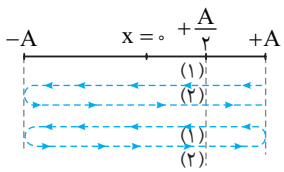
A ۱۱۸۸ ۲

در حرکت هماهنگ ساده، در مرکز نوسان، شتاب و نیروی وارد بر نوسانگر صفر است و در دامنه‌ها سرعت نوسانگر صفر می‌شود و در هر دوره مطابق شکل، نیرو و سرعت دو بار صفر می‌شود.



A ۱۱۸۹ ۲

با توجه به مسیرهای شکل روبه‌رو، متحرک در یک دوره دو بار از مکان $x=+\frac{A}{2}$ می‌گذرد.

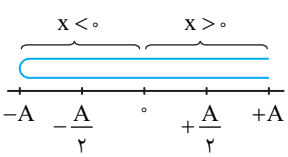


نکته در هر دوره نوسانگر از هر نقطهٔ مسیر بین $+A$ تا $-A$ دو بار می‌گذرد.

A ۱۱۹۰ ۲

خط فکری فاصلهٔ نوسانگر از مرکز نوسان $(x=0)$ می‌تواند در مکان‌های مثبت و یا در مکان‌های منفی باشد، یعنی وقتی گفته می‌شود فاصله از مرکز نوسان $\frac{A}{2}$ باشد شما باید مکان‌های $+\frac{A}{2}$ و $-\frac{A}{2}$ را درنظر بگیرید.

به شکل نگاه کنید نوسانگر در یک دوره دو بار از مکان $+\frac{A}{2}$ و دو بار از مکان $-\frac{A}{2}$ می‌گذرد یعنی در هر

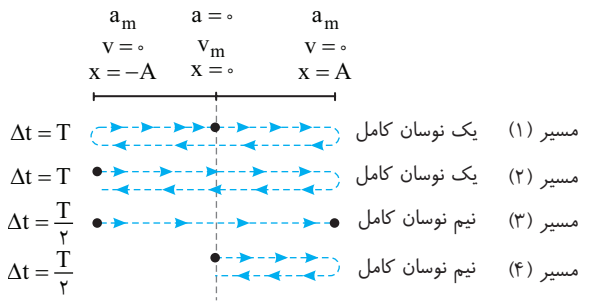


دوره جمعاً ۴ بار فاصلهٔ نوسانگر از حالت تعادل (مرکز نوسان $x=0$) برابر $\frac{A}{2}$ می‌شود.

A ۱۱۹۱ ۲

دوره یعنی زمان یک نوسان کامل و نصف دوره یعنی زمانی که نوسانگر نصف نوسان انجام می‌دهد. به شکل دقت کنید در مسیر (۳) حداقل سرعت یک‌بار بیشینه (max) می‌شود و در مسیر (۴) در مدت نیم‌نوسان سرعت یکبار صفر می‌شود بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

نکته در یک حرکت هماهنگ ساده، مطابق شکل زیر، در بازهٔ $\frac{T}{2}$ سرعت، شتاب، نیرو، انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل حداقل یک بار صفر و یک بار بیشینه می‌شود.



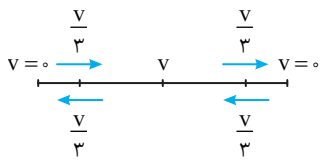
بازی با سؤال **در یک حرکت هماهنگ روی خط راست، در مدت $\frac{T}{2}$ سرعت به‌ترتیب حداکثر چند بار صفر و چند بار بیشینه می‌شود؟**

۱) صفر، ۱ ۲) ۱، ۱ ۳) ۱ و صفر ۴) ۲ و ۲

پاسخ **در مسیر (۳) سرعت دوبار صفر شده و در مسیر (۴) سرعت دوبار بیشینه می‌شود، بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.** گزینهٔ ۴

A ۱۱۹۲ ۳

تندی در نقاط بازگشت صفر و در نقطهٔ تعادل بیشینه یعنی v است، از این‌رو تندی بین صفر تا v تغییر می‌کند و مطابق شکل زیر در هر دوره چهار بار تندی برابر $\frac{v}{3}$ می‌شود.



میانبر در حرکت هماهنگ ساده در هر دوره تندی نوسانگر چهار بار می‌تواند $\frac{1}{n}v_m$ (یعنی کسری از تندی بیشینه) شود.

A ۱۱۹۳ ۱

یادآوری زمان یک نوسان را دوره (T) می‌گویند.

با یک تناسب ساده مسئله قابل حل است.

نوسان $N=40$	$t=20s$
۱ نوسان	$T=?$

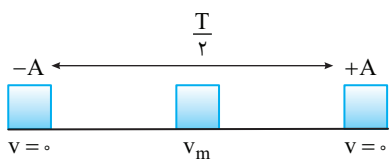
$$\Rightarrow T=\frac{20}{40}=0/5s$$

A ۱۱۹۴ ۳

در صورت مسئله بیان شده در بازه‌های زمانی $0/1s$ سرعت صفر می‌شود. یعنی در این مدت مطابق شکل نوسانگر از یک انتهای مسیر به انتهای دیگر رفته است که این مسیر نصف دوره طول می‌کشد، بنابراین می‌توان نوشت:

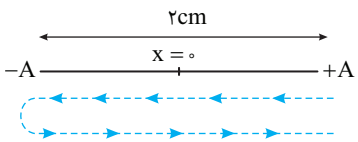
$$\frac{T}{2}=0/1\Rightarrow T=0/2s$$

$$f=\frac{1}{T}\Rightarrow f=\frac{1}{0/2}\Rightarrow f=5Hz$$



A ۱۱۹۵ ۳

یادآوری در هر نوسان کامل، نوسانگر دو بار طول پاره‌خط مسیر را طی می‌کند. مسافتی که نوسانگر در هر نوسان طی می‌کند چهار برابر دامنه $(L=4A)$ است.



۱ ۱۲۰ بار طی طول پاره‌خط یعنی $\frac{120}{2}=60$ نوسان.

۲ ۶۰ نوسان در مدت $1min=60s$ انجام شده است. بنابراین زمان هر نوسان (دوره) خواهد شد.

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow t=\frac{60}{60}=1s$$

۳ در هر ثانیه نوسانگر یک نوسان انجام می‌دهد، در این صورت در مدت ۴s، نوسانگر ۴ نوسان انجام می‌دهد. $(N=4)$

۴ در هر نوسان مسافت طی شده $2\times2=4cm$ است و در مدت ۴ نوسان مسافت طی شده $\ell=4\times4=16cm$ می‌شود.

بازی با سؤال **نوسانگری از یک سر پاره‌خطی شروع به حرکت کرده و در مدت ۵ ثانیه ۲۰۰ بار از مرکز پاره‌خط (وسط پاره‌خط) می‌گذرد. بسامد نوسانگر چند هرتز است؟**

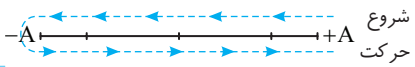
۱) ۱۰ ۲) ۵۰ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰۰

پاسخ **نکته** **نوسانگر در هر دوره، دو بار از مرکز نوسان می‌گذرد.** در این حرکت در مدت ۵s نوسانگر ۲۰۰ بار از مرکز نوسان می‌گذرد، یعنی تعداد نوسان‌ها در مدت ۵s، $N=100$ نوسان است. دوره خواهد شد:

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{5}{100}\Rightarrow T=0/05s$$

بسامد را حساب می‌کنیم:

$$f=\frac{1}{T}\Rightarrow f=\frac{1}{0/05}\Rightarrow f=20Hz$$



گزینهٔ ۳

A ۱۱۹۶ ۲

خط فکری نوسانگر اول پس از ۶s، یک نوسان از نوسانگر دوم جلو می‌افتد، یعنی اگر تعداد نوسان اولی N_1 باشد تعداد نوسان دومی در ۶s، $N_2=N_1-1$ است. از این‌رو شما باید N_1 و سپس N_2 را بیابید تا بتوانید دوره T_2 را به‌دست بیاورید.

۱ تعداد نوسان‌های اولی را به‌دست می‌آوریم:

$$N_1=\frac{t}{T_1}\Rightarrow N_1=\frac{6}{1/5}=4$$

۲ تعداد نوسان‌های دومی برابر $N_2=4-1=3$ است و دورهٔ آن برابر است با:

$$N_2=\frac{t}{T_2}\Rightarrow 3=\frac{6}{T_2}\Rightarrow T_2=2s$$

A ۱۱۹۷ ۴

با توجه به رابطه بسامد زاویه‌ای و دوره:

$$\omega_A=\frac{2\pi}{T_A},\omega_B=\frac{2\pi}{T_B}\Rightarrow\frac{\omega_A}{\omega_B}=\frac{T_B}{T_A}\Rightarrow 4=\frac{T_B}{T_A}\Rightarrow T_A=\frac{1}{4}T_B$$

$$T=f=\frac{1}{T}\Rightarrow\frac{f_A}{f_B}=\frac{T_B}{T_A}=4\Rightarrow f_A=4f_B$$

A ۱۱۹۸ ۲

۱ دورهٔ نوسان ۳۶٪ کاهش یافته، بنابراین دورهٔ جدید برابر است با:

$$T_2=T_1-\frac{36}{100}T_1=\frac{64}{100}T_1=\frac{16}{25}T_1\Rightarrow\frac{T_2}{T_1}=\frac{16}{25}$$

۲ بسامد و دوره با هم نسبت وارون دارند از این‌رو:

$$f=\frac{1}{T}\Rightarrow\frac{f_2}{f_1}=\frac{T_1}{T_2}\Rightarrow\frac{f_2}{f_1}=\frac{25}{16}$$

۳ حال درصد تغییرات بسامد را حساب می‌کنیم.

$$\text{درصد تغییر بسامد}=\frac{\Delta f}{f_1}\times 100=\frac{\frac{25}{16}f_1-f_1}{f_1}\times 100=\frac{9}{16}\times 100=56/25\%$$

۴ بنابراین بسامد ۵۶/۲۵٪ افزایش یافته است.

۵ برای بسامد زاویه‌ای $(\omega=2\pi f)$ نیز داریم:

$$\text{درصد تغییر بسامد زاویه‌ای}\ \frac{\Delta\omega}{\omega_1}\times 100=\frac{2\pi f_2-2\pi f_1}{2\pi f_1}\times 100=\frac{f_2-f_1}{f_1}\times 100=56/25\%$$

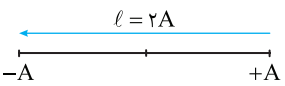
۱۱۹۹ A ۲

دامنه $A=0/05m$ و بسامد زاویه‌ای $\omega=2\pi f=40\pi\ rad/s$ است. بنابراین معادلهٔ حرکت خواهد شد: $x=0/05\cos 40\pi t$

یادآوری معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده‌ای که در کتاب معرفی شده به‌صورت $x=A\cos\omega t$ است که در آن A دامنه و ω بسامد زاویه‌ای است.

۱۲۰۰ A ۲

نکته طول پاره‌خط مسیر نوسان دو برابر دامنه $(2A)$ است.



نکته هر ۲ بار طی پاره‌خط مسیر برابر یک نوسان است.

۱ دامنه خواهد شد: $2A=20\ cm\Rightarrow A=10\ cm$

۲ ۲۰ بار طی کردن طول پاره‌خط یعنی $\frac{20}{2}=10$ نوسان

۳ در مدت ۰/۱s، ۱۰ نوسان انجام شده است بنابراین دوره خواهد شد:

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{0/1}{10}\Rightarrow T=0/01s$$

۴ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم. $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{0/01}\Rightarrow\omega=200\pi\ rad/s$

۵ معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم $x=0/1\cos 200\pi t$

۱۲۰۱ A ۱

با توجه به معادلهٔ حرکت $x=0/02\cos 5\pi t$ بسامد زاویه‌ای برابر $5\pi\ rad/s$ است

از این‌رو دوره خواهد شد: $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 5\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=0/4s$

نوسانگر در ۰/۴s یک نوسان انجام می‌دهد و ۵۰ نوسان را در مدت:

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow t=NT\Rightarrow t=50\times 0/4=20s$$

۱۲۰۲ A ۱

کافی است زمان داده شده را در معادلهٔ حرکت جای‌گذاری کنیم. البته باید مثلثات نیز بلد باشیم.

$$x=0/02\cos 20\pi t\xrightarrow{t=\frac{1}{6}s}x=0/02\cos\frac{20\pi}{6}=0/02\cos\left(\frac{18\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow x=0/02\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow x=0/02\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow x=-0/02\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x=-0/02\times\frac{1}{2}=-0/01m=-1cm$$

(۲π دورهٔ گردش تابع $\cos\theta$ بوده که آن را برمی‌داریم.)

۱۲۰۳ A ۱

معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده $x=A\cos\omega t$ است. لحظه‌ای که نوسانگر در بیشینه مکان مثبت است را مبدأ زمان فرض می‌کنیم. بعد از آن یعنی باید در معادلهٔ حرکت به جای t مقدار $\frac{2T}{3}$ را قرار دهیم.

$$x=A\cos\frac{2\pi}{T}\times\frac{2T}{3}\Rightarrow x=A\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{A}{2}$$

۱۲۰۴ B ۳

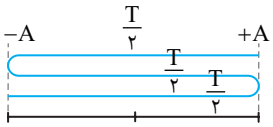
خط فکری انتهای پاره‌خط مسیر نوسان را که در آنجا سرعت صفر شده و نوسانگر تغییر جهت می‌دهد نقطه بازگشت گویند. در صورت مسئله بیان نشده که برای چندمین بار نوسانگر باید به نقطهٔ بازگشت برسد. بنابراین وقتی از مکان $+A$ نوسانگر شروع به حرکت می‌کند، در مدت $\frac{T}{2}$ برای اولین بار به مکان $-A$ (نقطهٔ بازگشت) می‌رسد و در $\frac{T}{2}$ بعدی برای دومین بار به نقطهٔ بازگشت می‌رسد. بنابراین شما باید هر زمان که نوسانگر در نقطهٔ بازگشت است را به‌دست بیاورید.

ابتدا دوره را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 4\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=0/5s$

نوسانگر با گذشت هر $\frac{T}{2}$ به نقطهٔ بازگشت می‌رسد. لحظه‌هایی که نوسانگر به نقاط بازگشت می‌رسند را حساب می‌کنیم.

$$\Delta t_1=\frac{0/5}{2}=0/25s,\ \Delta t_2=2\times\frac{0/5}{2}=0/5s,\ \Delta t_3=3\times\frac{0/5}{2}=0/75s,\ \Delta t_4=4\times\frac{0/5}{2}=1s$$

تنها گزینهٔ (۳) در این اعداد وجود دارد پس گزینهٔ (۳) درست است.



روش دیگر: اگر نوسانگر از یک انتها شروع به نوسان کند. در هر $\frac{T}{2}$ یک‌بار نوسانگر به نقطه بازگشت می‌رسد. بنابراین تعداد دفعاتی که در بازهٔ زمانی Δt به نقطهٔ بازگشت می‌رسد خواهد شد:

$$N=\frac{\Delta t}{\frac{T}{2}}$$

حال گزینه‌ها را بر $\frac{T}{2}$ تقسیم می‌کنیم، اگر عدد صحیح به‌دست آمد، آن زمان درست بوده و اگر عدد صحیح به‌دست نیاید در آن زمان نوسانگر در نقطهٔ بازگشت قرار ندارد.

گزینه ۱: $\frac{\Delta t}{\frac{T}{2}}=\frac{0/4}{\frac{0/5}{2}}=\frac{8}{5}=1/6$ جواب نیست

گزینه ۲: $\frac{\Delta t}{\frac{T}{2}}=\frac{0/6}{\frac{0/5}{2}}=2/4$ جواب نیست

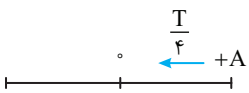
گزینه ۳: $\frac{\Delta t}{\frac{T}{2}}=\frac{1}{\frac{0/5}{2}}=4$ درست است

۱۲۰۵ A ۲

نقطهٔ تعادل یعنی مبدأ $x=0$، بنابراین بنا به فرض مسئله در لحظهٔ $t=2s$ مکان متحرک $x=0$ شده است، از این‌رو:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow 0=A\cos\frac{2\pi}{T}\times 2\Rightarrow\cos\frac{4\pi}{T}=0\Rightarrow\frac{4\pi}{T}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow T=8s$$

روش دیگر: نوسانگر ابتدا در مکان $+A$ بوده و پس از 2s به مکان $x=0$ می‌رود. زمان حرکت از A تا صفر برابر $\frac{T}{4}$ است.



بنابراین: $\frac{T}{4}=2\Rightarrow T=8s$

۱۲۰۶ A ۲

خط فکری مسافت‌های طی شده متوالی هستند، یعنی در مجموع زمان‌های t_1 و t_2 نوسانگر به اندازهٔ مجموع 3/78cm و 4/22cm مسافت طی کرده است. این مسافت را به‌دست بیاورید و با دامنه مقایسه کنید.

کل مسافت طی شده در بازهٔ زمانی t_1+t_2 برابر است با: $4/22+3/78=8cm$

دامنهٔ حرکت 2cm است و در مدت یک دوره نوسانگر مسافتی برابر $4A=4\times 2=8cm$ طی می‌کند از این‌رو کل مدت حرکت یک دوره بوده است $(t_1+t_2=T)$.

A ۴ ۱۲۰۷

مسافتی که نوسانگر در هر دوره طی می‌کند چهار برابر دامنه $(4A)$ است، این نوسانگر در یک دوره مسافت $16cm$ را طی کرده است، بنابراین دامنهٔ حرکت نوسانگر برابر است با:

$$4A=16\Rightarrow A=4cm=0/04m$$

مکان ذره در $t=0/05s$ برابر $x=+2\sqrt{3}cm$ است از این‌رو:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\frac{2\sqrt{3}}{100}=0/04\cos\omega(\frac{5}{100})\Rightarrow\cos\frac{5}{100}\omega=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{5}{100}\omega=\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow\omega=\frac{10\pi}{3}rad/s$$

معادلهٔ حرکت خواهد شد:

$$x=0/04\cos\frac{10\pi}{3}t$$

A ۳ ۱۲۰۸

خط فکری دقت کنید که در توابع مثلثاتی در یک دوره دو بار مقدار تابع یکسان است، به‌طور مثال اگر $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ شود زاویه α می‌تواند $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ باشد. در این مسئله بیان شده کمترین زمان پس از $t=0$، بنابراین باید شما زاویهٔ کوچک‌تر را انتخاب کنید.

کافی است در معادلهٔ حرکت، مکان را $x=-\frac{A}{2}$ قرار دهیم.

$$-\frac{A}{2}=A\cos\omega t\Rightarrow\cos\omega t=-\frac{1}{2}\Rightarrow(\omega t=\frac{2\pi}{3},\omega t=\frac{4\pi}{3})$$

در صورت سؤال کمترین زمان پس از $t=0$ خواسته شده است از این‌رو:

$$\omega t=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}t=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{T}{3}$$

B ۲ ۱۲۰۹

خط فکری ابتدا با قرار دادن مکان نوسانگر در معادلهٔ حرکت لحظه t_1 را حساب کرده سپس t_1 را دو برابر کنید و در معادلهٔ حرکت قرار دهید و مکان نوسانگر را به‌دست بیاورید.

۱ لحظهٔ t_1 را حساب می‌کنیم.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}A=A\cos\omega t_1\Rightarrow\omega t_1=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t_1=\frac{\pi}{6\omega}$$

۲ لحظهٔ $t_2=2t_1$ را در معادله قرار می‌دهیم.

$$x=A\cos\omega\times\frac{2\pi}{6\omega}\Rightarrow x=A\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=+\frac{A}{2}$$

بازی با سؤال **ذره‌ای با دورهٔ T در مبدأ زمان از مکان بیشینهٔ مثبت شروع به نوسان کرده و در لحظه‌های t_1 و $t_2=2t_1$ از یک مکان می‌گذرد. t_1 کدام است؟ $(t_1<\frac{T}{2})$** از کتاب درسی

۱) $\frac{T}{6}$ ۲) $\frac{T}{3}$ ۳) $\frac{T}{4}$ ۴) $\frac{2T}{3}$

پاسخ **در معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده $(x=A\cos\omega t)$ لحظه‌های t_1 و t_2 را قرار داده در این دو لحظه بنا به فرض مکان‌ها یکسان است، بنابراین مکان‌ها را برابر قرار داده و مسئله را حل کنید.**

با توجه به فرض مسأله مکان‌ها در لحظهٔ t_1 و $t_2=2t_1$ برابر است، از این‌رو:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\xrightarrow{x_2=x_1}A\cos\omega(2t_1)=A\cos\omega t_1\Rightarrow\cos2\omega t_1=\cos\omega t_1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\omega t_1=2\pi-\omega t_1\Rightarrow3\omega t_1=2\pi\Rightarrow3\times\frac{2\pi}{T}t_1=2\pi\Rightarrow t_1=\frac{T}{3}\\ \omega t_1=2\omega t_1-2\pi\Rightarrow\omega t_1=2\pi\Rightarrow\frac{2\pi}{T}t_1=2\pi\Rightarrow t_1=T(t_1<\frac{T}{2})\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

گزینهٔ ۲

A ۲ ۱۲۱۰

نکته در نقاط بازگشت $(x=\pm A)$ سرعت نوسانگر صفر است.

$x=-A$ $x=0$ $x=+A$

$v=0$ v_m $v=0$

وقتی معادلهٔ حرکت به شما داده شده است و از شما خواسته شده که لحظه‌هایی را که سرعت صفر می‌شود به‌دست آورید، شما باید به جای مکان، $+A$ و یا $-A$ را قرار دهید. متحرک وقتی اولین بار به مکان $x=-0/03m$ می‌رسد، سرعتش صفر می‌شود، بنابراین خواهیم داشت:

$$x=0/03\cos10\pi t\Rightarrow-0/03=0/03\cos10\pi t\Rightarrow\cos10\pi t=-1$$

$$\Rightarrow10\pi t=\pi\Rightarrow t=0/1s$$

دقت کنید شما باید تمام زاویه‌های مثلثاتی را در حرکت هماهنگ ساده برحسب رادیان بلد باشید.

زاویه برحسب درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۵۰	۱۸۰	۲۷۰
رادیان	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
cos	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	۰
sin	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-1

B ۴ ۱۲۱۱

یادآوری ریاضی برای توابع کسینوسی و سینوسی داریم:

$$\cos\alpha=\pm1\Rightarrow\alpha=k\pi\qquad\sin\alpha=\pm1\Rightarrow\alpha=(2k-1)\frac{\pi}{2}$$

نقاط بازگشت مکان‌های $x=\pm A$ هستند. بنابراین شما در معادلهٔ حرکت به جای x مقدار $\pm A$ را قرار داده و با توجه به معادلهٔ مثلثاتی مسئله را حل کنید.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\pm A=A\cos\omega t\Rightarrow\cos\omega t=\pm1\Rightarrow\omega t=k\pi$$

$$\Rightarrow\frac{2\pi}{T}t=k\pi\Rightarrow t=k\frac{T}{2}$$

A ۴ ۱۲۱۲

یادآوری به کمان مثلثاتی در معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده $(x=A\cos\omega t)$ یعنی ωt، شناسه تابع کسینوس (و یا فاز) می‌گویند.

تغییر شناسهٔ تابع کسینوس در بازهٔ t_1 تا t_2 را حساب می‌کنیم. $\omega t_2-\omega t_1=\omega(t_2-t_1)$

اکنون اگر t_2-t_1 برابر $1s$ باشد آنگاه:

بسامد زاویه‌ای $=\omega\times1=$ تغییر شناسه تابع کسینوس

A ۱ ۱۲۱۳

شناسهٔ تابع کسینوس یعنی کمان ωt در حرکت هماهنگ ساده. با توجه به فرض مسئله، شناسه تابع کسینوس (فاز) را در دو حالت نوشته از هم کم کرده و مقدار آن را برابر $\frac{\pi}{10}$ قرار می‌دهیم و بسازمد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

$$\omega t_2-\omega t_1=\omega(t_2-t_1)=\frac{\pi}{10}\Rightarrow\omega\times\frac{1}{120}=\frac{\pi}{10}\Rightarrow\omega=12\pi$$

اکنون بسامد را به‌دست می‌آوریم

$$\omega=2\pi f=12\pi\Rightarrow f=6Hz$$

B ۲ ۱۲۱۴

خط فکری به شکل نگاه کنید. از لحظهٔ $t=0$، $\frac{T}{4}$ طول می‌کشد تا نوسانگر برای اولین بار به نقطه تعادل رسیده و $3\frac{T}{4}$ طول می‌کشد تا برای دومین بار تندی نوسانگر بیشینه شود و بعد از $\frac{5T}{4}$ برای سومین بار و بعد از $7\frac{T}{4}$ برای چهارمین بار و بعد از $(2n-1)\frac{T}{4}$ برای n امین بار نوسانگر از مبدأ می‌گذرد. یعنی لحظه‌هایی که تندی بیشینه است، مضرب فرد $\frac{T}{4}$ است.

اکنون شما گزینه‌ها را بررسی کنید. هر کدام که مضرب فرد $\frac{T}{4}$ باشد جواب مسئله است.

الف) $\frac{\Delta t}{\frac{T}{4}}=\frac{2T}{\frac{T}{4}}=8 \xrightarrow{\text{عدد زوج}}$ t_1 جواب نیست

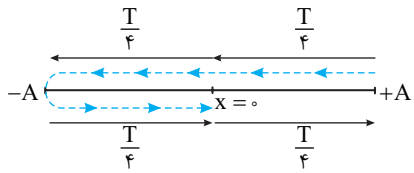
ب) $\frac{t_2}{\frac{T}{4}}=\frac{3/5T}{\frac{T}{4}}=14 \xrightarrow{\text{عدد زوج}}$ t_2 جواب نیست

پ) $\frac{t_3}{\frac{T}{4}}=\frac{5/25T}{\frac{T}{4}}=21 \xrightarrow{\text{عدد فرد}}$ t_3 جواب است

البته به کمک حل معادلهٔ مثلثاتی نیز می‌توانستید رابطهٔ $\Delta t=(2n-1)\frac{T}{4}$ را به‌دست بیاورید.

$$x=A\cos\omega t \Rightarrow 0=A\cos\omega t \Rightarrow \cos\omega t=0$$

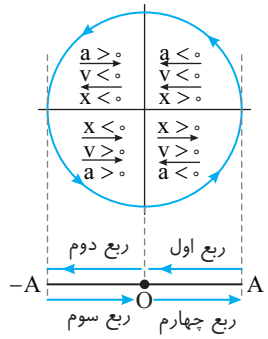
$$\omega t=(2n-1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t=(2n-1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=(2n-1)\frac{T}{4}$$



۳ ۱۲۱۵ A

یادآوری با یک یادآوری طولانی سر و کار داریم. در معادلهٔ حرکت $x=A\cos\omega t$ به کمان ωt کتاب، شناسهٔ تابع کسینوس می‌گوید و ما به اختصار آن را فاز می‌گوییم. بنابراین منظور ما از فاز مقدار $\theta=\omega t$ است.

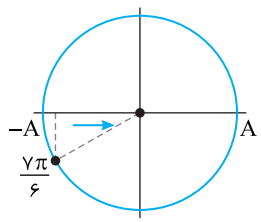
به شکل مقابل به دقت نگاه کنید اگر فاز در ربع اول مثلثاتی باشد مطابق شکل نوسانگر از مکان $+A$ در حال حرکت به حالت تعادل $x=0$ است و حرکت تندشونده است. اگر فاز $(\theta=\omega t)$ در ربع دوم مثلثاتی باشد، نوسانگر در حال حرکت از حالت تعادل به سوی دامنهٔ $-A$ است و حرکت کندشونده است.



اگر فاز $(\theta=\omega t)$ در ربع سوم مثلثاتی باشد نوسانگر در حال حرکت از $-A$ به سوی حالت تعادل است و حرکت تندشونده است.

اگر فاز $(\theta=\omega t)$ در ربع چهارم مثلثاتی باشد، نوسانگر در حال حرکت از مکان $x=0$ به سوی $+A$ بوده و حرکت کندشونده است.

در مسئله فاز حرکت $\omega t=\frac{7\pi}{6}$ بیان شده یعنی فاز در ربع سوم است. بنابراین مکان منفی و گزینهٔ (۱) نادرست است، شتاب مثبت و گزینهٔ (۲) نادرست است و سرعت مثبت و گزینهٔ (۳) درست است، حرکت نیز تندشونده و گزینهٔ (۴) نادرست است.

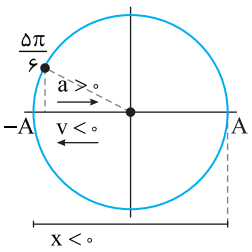


۲ ۱۲۱۶ B

خط فکری در حل این مسئله اگر شما به جای t مقدار $\frac{1}{72}s$ را قرار دهید و مکان را به‌دست آورید، هیچ‌یک از گزاره‌ها را نمی‌توانید بررسی کنید زیرا جهت حرکت نوسانگر مشخص نیست اما اگر فاز حرکت (شناسه تابع کسینوس ωt) را به‌دست بیاورید مشکل حل می‌شود.

۱ فاز حرکت را در لحظهٔ $t=\frac{1}{72}s$ حساب می‌کنیم.

$$\theta=\omega t=60\pi\times\frac{1}{72}\Rightarrow\theta=\frac{5\pi}{6}$$



۲ کمان $\frac{5\pi}{6}$ در ربع دوم مثلثاتی است

بنابراین نوسانگر در حال حرکت از $x=0$ به سوی $-A$ است. در نتیجه در این لحظه نوسانگر در حال دور شدن از حالت تعادل است و گزارهٔ (الف) نادرست است.

۳ در حرکت به سوی دامنهٔ $-A$ حرکت کندشونده است و گزارهٔ (ب) درست است.

۴ مکان منفی و شتاب که همواره به سوی حالت تعادل است مثبت است و گزاره (پ) درست است.

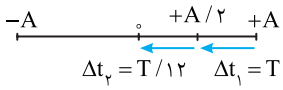
۵ سرعت منفی و در خلاف جهت محور بوده و گزاره (ت) نادرست است.

۳ ۱۲۱۷ B

تابع حرکت هماهنگ ساده یک تابع سینوسی (و کسینوسی) است. بنابراین گزینهٔ (۱)، (۲) و (۴) می‌توانند معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده باشد. اما $x=4\tan 2t$ نمی‌تواند معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده باشد، تابع تانژانت در $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ تعریف نشده است و گزینهٔ (۳) نمی‌تواند معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده باشد.

۳ ۱۲۱۸ B

نکته زمان حرکت از $+A$ به $+\frac{A}{2}$ بدون تغییر جهت برابر $\frac{T}{6}$ و از $+\frac{A}{2}$ به $x=0$ بدون تغییر جهت $\frac{T}{12}$ است.



روش اول: (استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده): اگر شما نکتهٔ بالا را به خاطر بسپرید مسئله به سادگی قابل حل است.

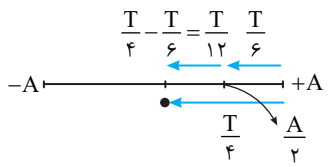
$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=2$$

روش دوم: (استفاده از معادلهٔ حرکت): معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده را می‌نویسیم. در معادله به جای x، $+\frac{A}{2}$ را قرار می‌دهیم:

$$x=A\cos\omega t \xrightarrow{x=+\frac{A}{2}} \frac{A}{2}=A\cos\omega t$$

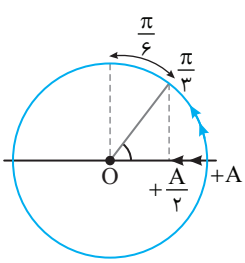
$$\Rightarrow\cos\frac{2\pi}{T}t=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{2\pi}{T}t=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{T}{6}\\ \frac{2\pi}{T}t=\frac{5\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{5T}{6}\end{cases}$$

جواب $\frac{5\pi}{6}$ مربوط به دومین بار عبور از $+\frac{A}{2}$ است که مورد پرسش نیست.



$$\Rightarrow\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=\frac{\frac{T}{6}}{\frac{T}{12}}=2$$

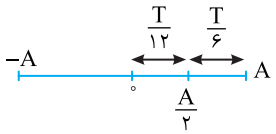
روش سوم: استفاده از فاز حرکت (شناسهٔ تابع کسینوسی) و دایرهٔ مثلثاتی (مرجع) است. از $+A$ تا $+\frac{A}{2}$ فاز حرکت $\frac{\pi}{3}$ رادیان و از $+\frac{A}{2}$ تا $x=0$ فاز حرکت $\frac{\pi}{6}$ تغییر می‌کند. از این‌رو:



$$\Delta\theta=\omega\Delta t\Rightarrow\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{T}\Delta t_1\Rightarrow\Delta t_1=\frac{T}{6},\ \frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{T}\Delta t_2\Rightarrow\Delta t_2=\frac{T}{12}\Rightarrow\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=2$$

A ۱۲۱۹ ۲

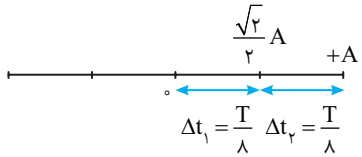
نکته مدت زمان حرکت از $+A$ تا $+\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ بدون تغییر جهت و از $\frac{T}{۸}$ و از $+\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ تا $x=۰$ نیز $\frac{T}{۸}$ است.



روش اول: با استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده

بنابراین:

$$\frac{\Delta t_۱}{\Delta t_۲}=۱$$



روش دوم: استفاده از معادلهٔ حرکت

می‌دانیم زمان حرکت از مکان $+A$ تا صفر برابر $\frac{T}{۴}$ است. اکنون در معادلهٔ حرکت به جای x مقدار $+\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ را قرار می‌دهیم.

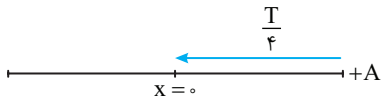
$$x=A\cos\omega t\Rightarrow+\frac{\sqrt{۲}}{۲}A=A\cos\omega t\Rightarrow\cos\frac{۲\pi}{T}t=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}t=\frac{\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴}$$

نوسانگر مستقیماً از $+A$ به $+\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ رفته است یعنی برای اولین بار از مکان $+\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ می‌گذرد بنابراین کمان $\frac{\pi}{۴}$ قابل قبول است.

$$\frac{۲\pi}{T}t=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۸}\Rightarrow\Delta t_۱=\frac{T}{۸}$$

بنابراین از $+A$ تا $+\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$، $\Delta t_۱=\frac{T}{۸}$ از $+\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ تا صفر نیز $\Delta t_۲=\frac{T}{۴}-\frac{T}{۸}=\frac{T}{۸}$ طول می‌کشد.

$$\frac{\Delta t_۱}{\Delta t_۲}=۱$$



روش سوم: دایرهٔ مثلثاتی (مرجع)

فاز حرکت $(\theta=\omega t)$ در مکان $x=+\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ برابر $\theta=\omega t_A=\frac{\pi}{۴}$ و در مکان $x=+A$ برابر صفر است. بنابراین زمان حرکت از $+A$ تا $+\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ خواهد شد:

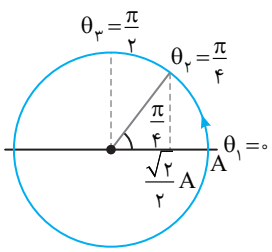
$$\omega t_۲-\omega t_۱=\frac{\pi}{۴}-۰\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}\Delta t_۱=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\Delta t_۱=\frac{T}{۸}$$

فاز حرکت در مکان $x=۰$ برابر $\theta=\omega t=\frac{\pi}{۲}$ بنابراین زمان حرکت از $x=۰$ تا $\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ خواهد شد.

$$\omega t_۳-\omega t_۲=\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}\Delta t_۲=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\Delta t_۲=\frac{T}{۸}$$

بنابراین:

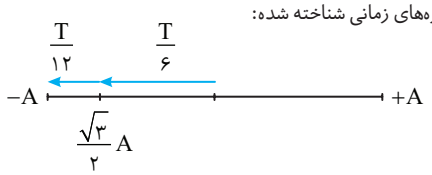
$$\frac{\Delta t_۱}{\Delta t_۲}=۱$$



A ۱۲۲۰ ۳

نکته زمان حرکت از مرکز نوسان (حالت تعادل $x=۰$) تا مکان $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ بدون تغییر جهت $\frac{T}{۶}$ و از مکان $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ تا $-A$ بدون تغییر جهت برابر $\frac{T}{۱۲}$ است.

روش اول: استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:



$$\Rightarrow\frac{\Delta t_۱}{\Delta t_۲}=\frac{\frac{T}{۶}}{\frac{T}{۱۲}}=۲$$

روش دوم: استفاده از فاز حرکت (شناسه تابع کسینوسی $\theta=\omega t$) (دایره مرجع):

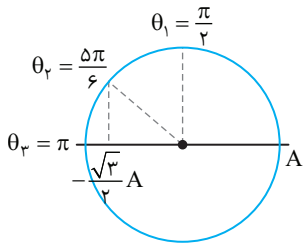
کمان‌های مثلثاتی معادل $x=۰$ و $x=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ را روی دایره مثلثاتی مشخص کرده و به کمک تغییر فاز، $\Delta t_۱$ و $\Delta t_۲$ را حساب می‌کنیم.

$$\omega t_۲-\omega t_۱=\frac{۵\pi}{۶}-\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}\Delta t_۱=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\Delta t_۱=\frac{T}{۶}$$

$$\omega t_۳-\omega t_۲=\pi-\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}\Delta t_۲=\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\Delta t_۲=\frac{T}{۱۲}$$

بنابراین نسبت $\Delta t_۱/\Delta t_۲$ خواهد شد.

$$\frac{\Delta t_۱}{\Delta t_۲}=\frac{\frac{T}{۶}}{\frac{T}{۱۲}}=۲$$



روش سوم: استفاده از معادلهٔ حرکت

در معادله به جای x، $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ را قرار می‌دهیم.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow-\frac{\sqrt{۳}}{۲}A=A\cos\omega t$$

$$\Rightarrow\cos\frac{۲\pi}{T}t=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}t=\frac{۵\pi}{۶},\frac{۷\pi}{۶}$$

متحرک برای بار اول به مکان $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ رسیده است و $\frac{۵\pi}{۶}$ پاسخ است.

$$\frac{۲\pi}{T}t=\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow t=\frac{۵T}{۱۲}$$

این زمان حرکت از $+A$ تا $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ است و اگر از آن مقدار $\frac{T}{۴}$ یعنی زمان حرکت از $+A$ تا صفر را کم کنیم، $\Delta t_۱$ به‌دست می‌آید. $\Delta t_۱=\frac{۵T}{۱۲}-\frac{T}{۴}=\frac{T}{۶}$ و $\Delta t_۲$ خواهد شد:

$$\Delta t_۲=\frac{T}{۴}-\frac{T}{۶}=\frac{T}{۱۲}$$

بنابراین:

$$\frac{\Delta t_۱}{\Delta t_۲}=۲$$

بازی با سؤال

در یک حرکت نوسانی ساده متحرک از دامنهٔ $+A$ بدون تغییر جهت به مکان $+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ در مدت $\Delta t_۱$ و از $+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ نیز بدون تغییر جهت حرکت به مکان $-A$ در مدت $\Delta t_۲$ حرکت می‌کند. نسبت $\Delta t_۲/\Delta t_۱$ کدام است؟ (A دامنهٔ نوسان است.)

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) $\frac{۳}{۲}$

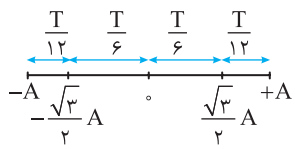
پاسخ **راه‌حل اول:** اگر معادلهٔ حرکت نوسانگر را $x=A\cos\omega t$ بگیریم مدت زمانی که طول می‌کشد بدون تغییر جهت نوسانگر از $+A$ به $+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ برسد برابر است با:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}A=A\cos\frac{۲\pi}{T}t_۱\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}t_۱=\frac{\pi}{۶}\Rightarrow t_۱=\frac{T}{۱۲}$$

مدت زمانی که نوسانگر از $+A$ به $-A$ می‌رسد برابر $\frac{T}{۲}$ است، بنابراین مدت زمانی که نوسانگر از $+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ به $-A$ می‌رسد برابر $\frac{T}{۲}-t_۱=\frac{T}{۲}-\frac{T}{۱۲}=\frac{۵T}{۱۲}$ است، پس $\Delta t_۱=\frac{T}{۱۲}$ و $\Delta t_۲=\frac{۵T}{۱۲}$ است.

$$\frac{\Delta t_۲}{\Delta t_۱}=\frac{\frac{۵T}{۱۲}}{\frac{T}{۱۲}}=۵$$

راه‌حل دوم: با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده داریم:



$$\Delta t_۱=\frac{T}{۱۲}\ ,\ \Delta t_۲=\frac{T}{۶}+\frac{T}{۶}+\frac{T}{۱۲}=\frac{۵T}{۱۲}\Rightarrow\frac{\Delta t_۲}{\Delta t_۱}=۵$$

گزینهٔ ۳

۳ ۱۲۲۱

با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده، مدت زمانی که طول می‌کشد تا نوسانگر از مکان $x=۰$ به مکان $x=\frac{A}{۲}$ برسد برابر $\frac{T}{۱۲}$ است از این‌رو:

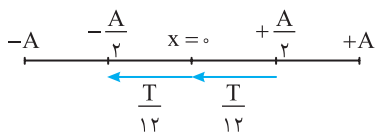
$$\frac{T}{۱۲}=\frac{۱}{۶۰}\Rightarrow T=\frac{۱۲}{۶۰}\Rightarrow T=۰/۲s$$

تعداد نوسانات در هر دقیقه را حساب می‌کنیم.

$$N=\frac{t}{T}\Rightarrow N=\frac{۶۰}{۰/۲}=۳۰۰$$

B ۱ ۱۲۲۲

خط فکری کمترین زمانی که نوسانگر از مکان $+\frac{A}{۲}$ به مکان $-\frac{A}{۲}$ برود یعنی متحرک بدون تغییر جهت از $+\frac{A}{۲}$ به $-\frac{A}{۲}$ می‌رود، اکنون با دانستن این مطلب و به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده مسئله را حل کنید.

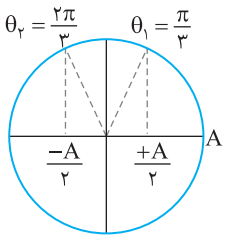


مدت زمان حرکت از $+\frac{A}{۲}$ به $x=۰$ بدون تغییر جهت $\frac{T}{۱۲}$ و از $x=۰$ بدون تغییر جهت تا $-\frac{A}{۲}$ نیز $\frac{T}{۱۲}$ است. از این‌رو:

$$\Delta t=\frac{T}{۱۲}+\frac{T}{۱۲}\Rightarrow ۰/۱=\frac{T}{۶}\Rightarrow T=۰/۶s$$

روش استفاده از فاز حرکت (شناسه تابع کسینوس ωt):

فاز حرکت در مکان $+\frac{A}{۲}$ مطابق شکل برابر $\frac{\pi}{۳}$ و در مکان $-\frac{A}{۲}$ برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ است. بنابراین تغییر فاز در این جابه‌جایی برابر است با:



$$\Delta\theta=\theta_۲-\theta_۱=\frac{۲\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳}=\frac{\pi}{۳}$$

$$\omega(t_۲-t_۱)=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}(\Delta t)=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۶}\Rightarrow T=۰/۶s$$

میانبر کافی است محاسبه کنید $\frac{\pi}{۳}$ چه کسری از دایره (۲π) است:

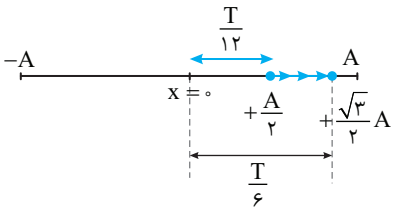
$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{\pi}{۳}}{۲\pi}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۶}\Rightarrow T=۰/۶s$$

B ۴ ۱۲۲۳

نکته مدت زمان حرکت از مکان صفر تا $+\frac{A}{۲}$ بدون تغییر جهت $\frac{T}{۱۲}$ و از صفر تا $+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ بدون تغییر جهت $\frac{T}{۶}$ است.

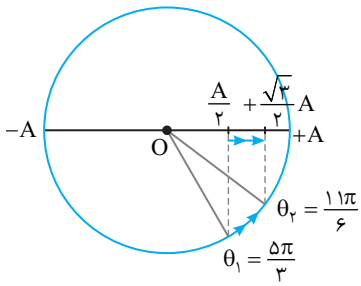
راه‌حل اول: روش استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده

$$\Delta t=\frac{T}{۶}-\frac{T}{۱۲}=\frac{T}{۱۲}$$



راه‌حل دوم: روش استفاده از فاز حرکت و دایره مثلثاتی: روی محور کسینوس‌ها مکان‌ها را مشخص کرده و کمان مربوط به هر مکان را مشخص می‌کنیم. مطابق شکل نوسانگر از $+\frac{A}{۲}$ به $+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ رفته یعنی کمان از $\frac{۵\pi}{۳}$ به $\frac{۱۱\pi}{۶}$ تغییر کرده بنابراین تغییر فاز برابر است با:

$$\theta_۲-\theta_۱=\omega t_۲-\omega t_۱=\frac{۱۱\pi}{۶}-\frac{۵\pi}{۳}\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}\Delta t=\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۱۲}$$



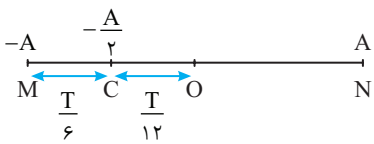
A ۳ ۱۲۲۴

خط فکری در حل این نوع مسائل باید مشخص کنید که زمانی که در مسئله داده شده چه کسری از دوره (T) است تا بتواند به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده مسئله را حل کنید.

۱ مشخص می‌کنیم $۰/۲s$ چه کسری از دوره $(T=۱/۲s)$ است.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{۰/۲}{۱/۲}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۶}$$

۲ با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده حرکت از دامنه $(-A)$ تا نصف $(\frac{-A}{۲})$ برابر $\frac{T}{۶}$ است یعنی نوسانگر فاصلهٔ C تا M را در مدت $\frac{T}{۶}$ طی کرده، بنابراین نقطهٔ C باید در وسط O و M باشد. بنابراین $MC=OC$.



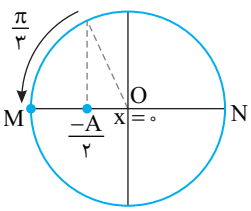
روش استفاده از تغییر فاز $(\Delta\theta=\omega\Delta t)$ و دایرهٔ مثلثاتی:

بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{۲\pi}{۱/۲}\Rightarrow\omega=\frac{۵\pi}{۳}\ rad/s$$

تغییر فاز در مدت $۰/۲s$ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta\theta=\omega\Delta t\Rightarrow\Delta\theta=\frac{۵\pi}{۳}\times۰/۲\Rightarrow\Delta\theta=\frac{\pi}{۳}$$

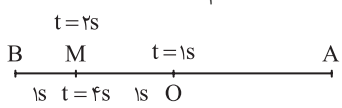


بنابراین فاز حرکت برای رسیدن نوسانگر به نقطهٔ M، $\frac{\pi}{۳}$ تغییر کرده بنابراین مطابق شکل دایرهٔ مثلثاتی باید نقطهٔ C در مکان $\frac{-A}{۲}$ باشد از این رو $MC=OC$ است.

A ۱۲۲۵ ۳

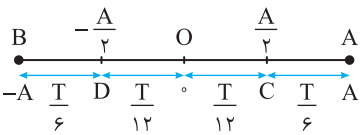
خط فکری دقت کنید نوسانگر در هر بازهٔ زمانی که از یک نقطه مثلاً M به انتهای مسیر مثلاً نقطهٔ B $(-A)$ برود در همان بازهٔ زمانی از نقطهٔ B به نقطهٔ M باز می‌گردد. بنابراین اگر در مدت ۱s از M به B برود در مدت ۱s از B به M می‌رود و یا اگر در مدت ۱s از O تا M برود در همان مدت ۱s از M به O برمی‌گردد.

نوسانگر از O تا M را در مدت $(1s-1=1s)$ و از M تا B را نیز در مدت $(\frac{4-2}{2}=1s)$ طی کرده است. یعنی از O تا B را در مدت $(1+1=2s)$ طی کرده است. از طرفی بازهٔ زمانی حرکت از مبدأ تا انتهای مسیر (O تا B) $\frac{1}{4}$ دوره طول می‌کشد. بنابراین: $\frac{T}{4}=2\Rightarrow T=8s$

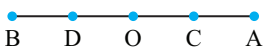


B ۱۲۲۶ ۱

راه‌حل اول: سریع‌ترین راه‌حل استفاده از بازه‌های زمانی است که در درسنامه گفتیم به‌خاطر بسپارید: t_2: از D تا B $\frac{T}{6}\Rightarrow\frac{t_1}{t_2}=1$ ، t_1: از C تا D $\frac{T}{12}+\frac{T}{12}=\frac{T}{6}$



راه‌حل دوم: معادلهٔ مکان - زمان به‌صورت $x=A\cos\omega t$ می‌باشد. در نقطهٔ C متحرک در فاصلهٔ $\frac{A}{2}$ از مرکز تعادل $(x=0)$ قرار دارد.



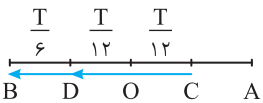
$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\frac{A}{2}=A\cos\omega t_C$$

$$\Rightarrow\cos\omega t_C=\frac{1}{2}\xrightarrow{\omega=\frac{2\pi}{T}}\frac{2\pi}{T}t_C=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t_C=\frac{T}{6}$$

بنابراین زمان حرکت از A تا C برابر $\frac{T}{6}$ است و زمان حرکت از C تا O خواهد شد:

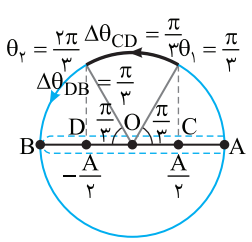
$$t_{C\to O}=\frac{T}{4}-\frac{T}{6}=\frac{T}{12}$$

به دلیل تقارن حرکت، زمان از O تا D نیز $\frac{T}{12}$ و از D تا B نیز $\frac{T}{6}$ خواهد بود از این‌رو:



$$t_{C\to D}=\frac{T}{12}+\frac{T}{12}=\frac{T}{6},\ t_{D\to B}=\frac{T}{6}\Rightarrow\frac{T_{C\to D}}{T_{D\to B}}\Rightarrow\frac{\frac{T}{6}}{\frac{T}{6}}=1$$

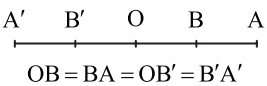
راه‌حل سوم: استفاده از فاز حرکت $(\theta=\omega t)$ و دایرهٔ مثلثاتی است. کمان متناظر $\frac{A}{2}$ و $-\frac{A}{2}$ را روی دایره مشخص می‌کنیم. اکنون می‌توان نوشت:



$$\begin{cases}\omega t_D-\omega t_C=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\\ \frac{2\pi}{T}(t_1)=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t_1=\frac{T}{6}\\ \omega t_B-\omega t_D=\pi-\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\frac{t_1}{t_2}=1\\ \omega(t_2)=\frac{\pi}{3}\\ \frac{2\pi}{T}t_2=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t_2=\frac{T}{6}\end{cases}$$

دقت کنید تغییر شناسهٔ تابع کسینوسی با زمان رابطهٔ خطی دارد. یعنی شناسهٔ تابع کسینوسی در زمان‌های یکسان، تغییرات یکسانی دارد. در این مسئله در جابه‌جایی از $+\frac{A}{2}$ تا $-\frac{A}{2}$ تغییر شناسه $\frac{\pi}{3}$ بوده و در جابه‌جایی از $-\frac{A}{2}$ تا $-A$ نیز تغییر شناسه $\frac{\pi}{3}$ است، بنابراین این دو جابه‌جایی در مدت‌زمان یکسان طی می‌شود.

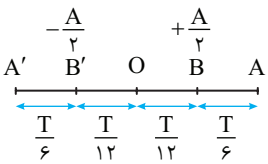
بازی با سؤال در شکل روبه‌رو اگر متحرکی بین دو نقطهٔ A و A′ حرکت هماهنگ ساده انجام دهد و فاصلهٔ OB را در مدت $\frac{1}{300}$ ثانیه طی کند، بسامد نوسان چند هرتز است؟



۱) ۲۵ ۲) ۳۷/۵ ۳) ۵۰ ۴) ۷۵

پاسخ خط فکری به فرض مسئله دقت کنید $OB=BA=OB'=B'A'$ یعنی، نقاط B و B′ به ترتیب مکان $+\frac{A}{2}$ و $-\frac{A}{2}$ هستند و با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده مدت زمان حرکت از $+A$ تا $+\frac{A}{2}$ (نقطهٔ B) $\frac{T}{6}$ و از $+\frac{A}{2}$ تا O، $\frac{T}{12}$ است. با دانستن این مطالب مسئله به راحتی قابل حل است.

مدت زمان رفت از B به O برابر $\frac{T}{12}$ است. بنابراین:

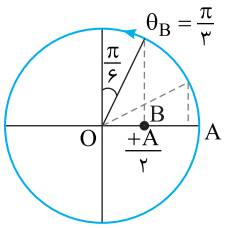


$$t_{B\to O}=\frac{T}{12}=\frac{1}{300}$$

$$\Rightarrow T=\frac{4}{100}s\Rightarrow f=\frac{1}{T}=25Hz$$

روش استفاده از فاز حرکت (شناسه تابع کسینوس $\theta=\omega t$):

نقطهٔ B در مکان $+\frac{A}{2}$ است و مطابق شکل دایرهٔ مثلثاتی فاز آن $\theta_B=\frac{\pi}{3}$ است. در حرکت نوسانگر از B تا O تغییر فاز $\frac{\pi}{6}$ است از این رو خواهیم داشت:



$$\Delta\theta=\omega\Delta t\Rightarrow\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{T}\Delta t\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{12}$$

البته با یک تناسب ذهنی هم می‌توانستیم بگوییم:

2π	T
$\frac{\pi}{6}$	Δt

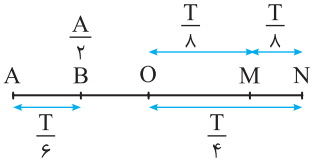
$$\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{12}$$

گزینهٔ ۱

B ۱۲۲۷ ۲

بنا به فرض مسئله بازهٔ زمانی حرکت از O تا M و از M تا N برابر است. از این‌رو M نمی‌تواند وسط ON باشد. از O تا N، $\frac{T}{4}$ طول می‌کشد. بنابراین: $t_{OM}=t_{MN}=\frac{1}{2}(\frac{T}{4})=\frac{T}{8}$

نقطهٔ B وسط OA است و با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده بازهٔ زمانی حرکت از A تا B برابر $\frac{T}{6}$ است.



در این صورت خواهیم داشت:

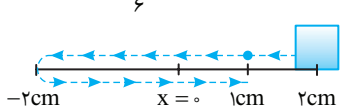
$$\frac{t_{AB}}{t_{MN}}=\frac{\frac{T}{6}}{\frac{T}{8}}=\frac{4}{3}$$

A ۱۲۲۸ ۳

روش اول: استفاده از معادلهٔ حرکت:

۱ طول پاره‌خط ۴cm است بنابراین دامنه مطابق شکل برابر ۲cm است. از طرفی بنا به فرض مسئله بسامد زاویه‌ای نوسانگر $\frac{5\pi}{6}rad/s$ است بنابراین معادلهٔ حرکت خواهد شد:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow x=0/02\cos(\frac{5\pi}{6}t)$$



۲ حال زمان‌هایی که نوسانگر از $x=۱cm=۰/۰۱m$ عبور می‌کند را به‌دست می‌آوریم:

$$۰/۰۱=۰/۰۲\cos(\frac{۵\pi}{۶}t)\Rightarrow\cos\frac{۵\pi}{۶}t=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}\frac{۵\pi}{۶}t_۱=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow t_۱=\frac{۲}{۵}s\\ \frac{۵\pi}{۶}t_۲=۲\pi-\frac{\pi}{۳}\Rightarrow t_۲=۲s\end{cases}$$

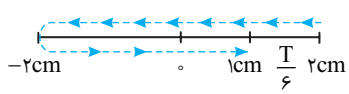
۳ بنابراین پس از $۲s$ برای دومین بار از $x=۱cm$ عبور می‌کند.

روش دوم: استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:

ابتدا دوره را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\frac{۵\pi}{۶}=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{۱۲}{۵}s=۲/۴s$

مدت زمان حرکت از مکان $+\frac{A}{۲}=۱cm$ تا مکان $+A=+۲cm$ برابر $\frac{۱}{۶}$ دوره $(\frac{T}{۶})$ است بنابراین باید $\frac{T}{۶}$ را از کل دوره (T) کم کنیم:

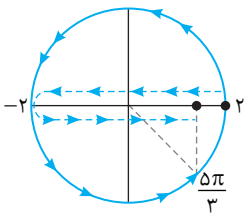
$$\Delta t=T-\frac{T}{۶}=\frac{۵T}{۶}\xrightarrow{T=۲/۴}\Delta t=\frac{۵\times۲/۴}{۶}=۲s$$



روش سوم: استفاده از فاز (شناسه تابع کسینوس $\theta=\omega t$):

فاز (کمان) در مکان $+۱$ برای دومین بار در ربع چهارم مثلثاتی قرار می‌گیرد و فاز برابر $\frac{۵\pi}{۳}$ است بنابراین:

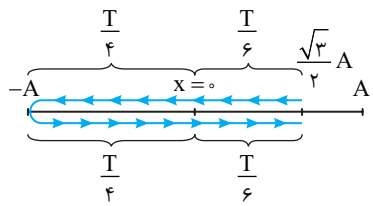
$$\Delta\theta=\omega t\Rightarrow\frac{۵\pi}{۳}=\frac{۵\pi}{۶}t\Rightarrow t=۲s$$



دقت کردید در این مسئله استفاده از دایرهٔ مثلثاتی از روش‌های دیگر سریع‌تر بود.

B ۱۲۲۹ ۱

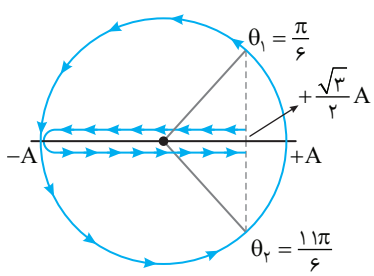
خط فکری مسیر حرکت را رسم می‌کنیم و بازه‌های زمانی مسیر را با بازه‌های شناخته شده مقایسه می‌کنیم. نوسانگر از مکان $+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ به سمت مرکز رفته سپس در نقطهٔ بازگشت $x=-A$ تغییر جهت می‌دهد و به مکان $+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ می‌رسد. بنابراین شما باید بازهٔ زمانی را روی شکل نوشته، با هم جمع کنید تا دوره را به دست بیاورید.



بازهٔ زمانی حرکت از $+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ تا $x=۰$ برابر $\frac{T}{۶}$ و از صفر تا $-A$ برابر $\frac{T}{۴}$ است بنابراین خواهیم داشت:

$$\Delta t=\frac{T}{۶}+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۶}\xrightarrow{\Delta t=۱s}۱=(\frac{۲+۳+۳+۲}{۱۲})T\Rightarrow T=۱/۲s$$

روش استفاده از دایره مثلثاتی و فاز حرکت $(\theta=\omega t)$:



متحرک از مکان $+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ می‌گذرد و بعد از رسیدن به مکان $-A$ مجدداً به مکان $+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ برمی‌گردد. فاز حرکت در حالت اول $\frac{\pi}{۶}$ و در حالت دوم در ربع چهارم بوده و برابر $\frac{۱۱\pi}{۶}$ است، بنابراین به کمک تغییر فاز می‌توان دوره را حساب کرد.

$$\omega(t_۲-t_۱)=\theta_۲-\theta_۱\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}\times(۱)=\frac{۱۱\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow T=۱/۲s$$

B ۱۲۳۰ ۱

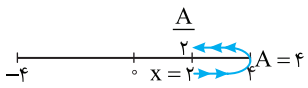
معادلهٔ حرکت به صورت $x=۰/۰۴\cos\frac{۴\pi}{۳}t$ است، با مقایسه این معادله با $x=A\cos\omega t$ خواهیم داشت:

$$A=۰/۰۴m\Rightarrow A=۴cm$$

$$\omega=\frac{۴\pi}{۳}\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}=\frac{۴\pi}{۳}\Rightarrow T=\frac{۳}{۲}s=۱/۵s$$

با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده مدت زمان حرکت از $\frac{A}{۲}$ تا A و بالعکس $\frac{T}{۶}$ است، بنابراین حداقل زمان دو گذر متوالی از $x=۲cm$ خواهد شد:

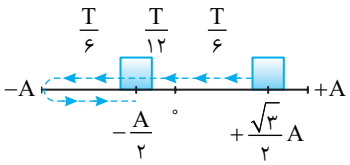
$$\Delta t=\frac{T}{۶}+\frac{T}{۶}=\frac{T}{۳}\Rightarrow\Delta t=\frac{۱/۵}{۳}\Rightarrow\Delta t=۰/۵s$$



B ۱۲۳۱ ۳

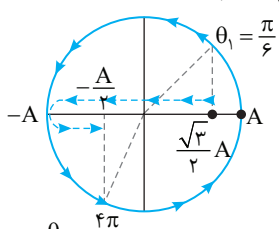
روش اول: در لحظهٔ اول مکان نوسانگر $x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ و سرعت منفی است، پس نوسانگر در حال حرکت به سمت نقطهٔ تعادل می‌باشد و در لحظهٔ دوم نیز مکان نوسانگر $x=-\frac{A}{۲}$ بوده و حرکت تندشونده است یعنی نوسانگر از مکان‌های منفی در حال حرکت به سمت نقطهٔ تعادل است.

با توجه به بازه‌های شناخته شده داریم: $\Delta t=\frac{T}{۶}+\frac{T}{۱۲}+۲(\frac{T}{۶})=\frac{۷T}{۱۲}$



روش دوم: حل با کمک دایره مثلثاتی: معادلهٔ مکان - زمان به‌صورت $x=A\cos\omega t$ است پس در لحظهٔ $t_۱$ کمان متناظر با $x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ برابر $\frac{\pi}{۶}$ است و در لحظهٔ دوم $t_۲$ برای دومین بار نوسانگر از مکان $-\frac{A}{۲}$ عبور می‌کند پس کمان متناظر (فاز $\theta=\omega t$) با مکان در لحظهٔ $t_۲$ برابر $\theta_۲=\pi+\frac{\pi}{۳}=\frac{۴\pi}{۳}$ است.

اکنون به کمک تغییر فاز، مسئله حل است.



$$\theta_۲-\theta_۱=\omega t_۲-\omega t_۱$$
$$\Rightarrow\frac{۴\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶}=\omega(t_۲-t_۱)$$
$$\Rightarrow\frac{۷\pi}{۶}=\frac{۲\pi}{T}(\Delta t)\Rightarrow\Delta t=\frac{۷}{۱۲}T$$

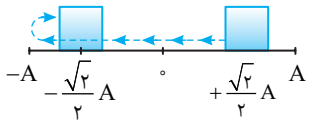
دقت کنید اگر مثلثات شما خوب است و می‌توانید به راحتی کمان (فاز) متناظر با مکان را روی دایرهٔ مثلثاتی تشخیص دهید نیازی به فراگیری بازه‌های زمانی شناخته شده ندارید، اما چنانچه با دایرهٔ مثلثاتی مشکل دارید بهترین روش برای شما فراگیری و به خاطر سپردن بازه‌های زمانی شناخته شده است.

بازی با سؤال ذره‌ای حرکت هماهنگ ساده با دامنهٔ A و دورهٔ T دارد. در یک لحظه مکان ذرهٔ $\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ و سرعت آن منفی است. کمترین زمان لازم برای آنکه مکان ذره $-\frac{\sqrt{۲}A}{۲}$ و سرعت آن مثبت شود. کدام است؟ کنکور دهه‌های گذشته

۱) $\frac{T}{۲}$ ۲) $\frac{T}{۳}$ ۳) $\frac{T}{۴}$ ۴) T

پاسخ روش اول: استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:

$$\begin{cases} \text{از } \frac{T}{۸}: \frac{\sqrt{۲}}{۲}A \text{ تا صفر} \\ \text{از } \frac{T}{۴}: ۰ \text{ تا } -A \\ \text{از } \frac{T}{۸}: -A \text{ تا } -\frac{\sqrt{۲}}{۲}A \end{cases} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{۸}+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۸}=\frac{T}{۲}$$



روش دوم: در لحظهٔ $t_۱$ مکان متحرک $\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ و سرعت منفی است پس جهت حرکت خلاف جهت محور xها می‌باشد و در لحظهٔ $t_۲$ مکان متحرک در قسمت منفی قرار دارد اما جهت حرکت به واسطهٔ مثبت بودن سرعت در جهت محور x ها می‌باشد. بنابراین در لحظهٔ $t_۱$ نوسانگر اولین بار به $x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ رسیده و در $t_۲$ برای دومین بار از $x=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}A$ عبور می‌کند.

$$x=A\cos\omega t \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{۲}}{۲}A=A\cos\omega t_۱ \Rightarrow \omega t_۱=\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}t_۱=\frac{\pi}{۴} \Rightarrow t_۱=\frac{T}{۸} \\ \frac{-\sqrt{۲}}{۲}A=A\cos\omega t_۲ \Rightarrow \omega t_۲=\pi+\frac{\pi}{۴} \\ \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}t_۲=\frac{۵\pi}{۴} \Rightarrow t_۲=\frac{۵T}{۸} \end{cases}$$

بنابراین: $t_۲-t_۱=\frac{۵T}{۸}-\frac{T}{۸}=\frac{۴T}{۸}=\frac{T}{۲}$

گزینهٔ ۱

B ۱۲۳۲ ۴

یادآوری در هر نوسان، نوسانگر ۲ بار طول پاره‌خط مسیر را طی می‌کند.

یادآوری هرگاه نوسانگر به سوی دامنه برود اندازهٔ شتاب در حال افزایش است.

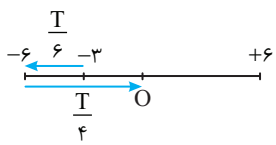
یادآوری هنگامی که نوسانگر از حالت تعادلش می‌گذرد $(x=۰)$ بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد.

۱ طول پاره‌خط ۱۲cm و دامنه برابر $A=\frac{۱۲}{۲}=۶cm$ است.

۲ ذره در مدت ۵s، ۲۰ بار طول پاره‌خط را طی کرده یعنی ۱۰ نوسان را در مدت ۵s انجام داده است و دوره خواهد شد:

$$T=\frac{t}{N} \Rightarrow T=\frac{۵}{۱۰}=۰/۵s$$

۳ ذره در مکان $-۳cm$ و شتاب آن در حال افزایش است بنابراین ذره مطابق شکل در لحظه $t_۱$ به سوی انتهای مسیر در حرکت و در لحظهٔ $t_۲$ که بردار مکان تغییر جهت می‌دهد از نقطهٔ O می‌گذرد بنابراین بازهٔ زمانی بین $t_۱$ و $t_۲$ برابر است با:

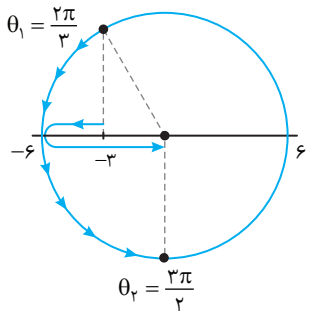


$$\Delta t=\frac{T}{۶}+\frac{T}{۴} \Rightarrow \Delta t=\frac{۵T}{۱۲} \Rightarrow \Delta t=\frac{۵}{۱۲}\times ۰/۵ \Rightarrow \Delta t=\frac{۵}{۲۴}s$$

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت:

وقتی مکان منفی است فاز در ربع دوم و یا ربع سوم مثلثاتی است چون شتاب در حال افزایش است یعنی نوسانگر به سوی دامنهٔ $-A$ در حال حرکت است بنابراین فاز در ربع دوم مثلثاتی است. یعنی در مکان $-۳cm$ در این مسئله فاز برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ و هنگام گذر از نقطهٔ O فاز $\theta_۲=\frac{۳\pi}{۲}$ رادیان است.

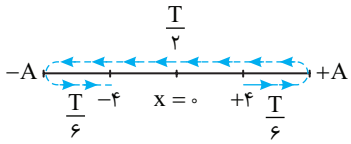
$$\omega t_۲-\omega t_۱=\frac{۳\pi}{۲}-\frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=۴\pi} ۴\pi(t_۲-t_۱)=\frac{۹\pi-۴\pi}{۶} \Rightarrow \Delta t=\frac{۵}{۲۴}s$$



بازی با سؤال ذره‌ای روی پاره‌خطی به طول ۱۶cm دارای حرکت هماهنگ ساده است. ذره در لحظهٔ $t_۱$ از مکان $+۴cm$ می‌گذرد و از حالت تعادل دور می‌شود. ۰/۵ ثانیه بعد از $t_۱$ با گذر از مکان $-۴cm$ به سوی حالت تعادل می‌رود. کمینه بسامد این ذره چند هرتز است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۶}{۵}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ **خط فکری** ابتدا دامنهٔ حرکت را حساب کنید سپس مشخص کنید که مکان‌های $+۴cm$ و $-۴cm$ چه کسری از دامنه هستند تا بتوانید بازه‌های زمانی شناخته شده را استفاده کرده، مسئله را حل کنید.



دامنه برابر $\frac{۱۶}{۲}=۸cm$ است. با توجه به صورت مسأله مسیر حرکت را رسم کرده، بازه‌های زمانی شناخته شده را روی آن نوشته با هم جمع کرده و دوره را حساب می‌کنیم.

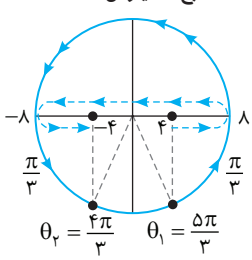
$$\Delta t=\frac{T}{۶}+\frac{T}{۲}+\frac{T}{۶}=\frac{T+۳T+T}{۶} \Rightarrow ۰/۵=\frac{۵T}{۶} \Rightarrow T=۰/۶s$$

بسامد را به‌دست می‌آوریم: $f=\frac{۱}{T} \Rightarrow f=\frac{۱}{۰/۶}=\frac{۵}{۳}Hz$

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت (شناسهٔ تابع کسینوس $\theta=\omega t$):

دامنه ۸cm است. فاز حرکت را برای مکان $+۴cm$ و $-۴cm$ روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم.

مکان نوسانگر $+۴cm$ و در حال دور شدن از مبدأ یعنی فاز در ربع چهارم بوده بنابراین $\theta_۱=\frac{۵\pi}{۳}$ مکان نوسانگر $-۴cm$ و در حال نزدیک شدن به حالت تعادل یعنی فاز در ربع سوم بنابراین $\theta_۲=\frac{۴\pi}{۳}$. تغییر فاز را از روی دایره بررسی می‌کنیم:



$$\Delta\theta=\frac{\pi}{۳}+\pi+\frac{\pi}{۳}=\frac{۵\pi}{۳} \qquad \Delta\theta=\frac{۲\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \frac{۵\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{T}\times ۰/۵ \Rightarrow T=۰/۶s$$

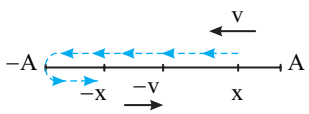
$$f=\frac{۱}{T}=\frac{۱}{۰/۶} \Rightarrow f=\frac{۵}{۳}Hz$$

گزینهٔ ۱

B ۱۲۳۳ ۴

نکتهٔ مهم مدت زمانی که طول می‌کشد که مکان و سرعت نوسانگر قرینه شود برابر $\frac{T}{2}$ است.

صورت مسئله به‌گونه‌ای است که شخص از خیر حل آن می‌گذرد اما نگران نباشید این همه علائم ریاضی یعنی اینکه در لحظهٔ t مکان نوسانگر x بوده و بعد از گذشت T' مکان نوسانگر قرینه شده در ضمن سرعت آن نیز قرینه شده، بنابراین T' همان $\frac{T}{2}$ است.



B ۱۲۳۴ ۳

نکته حداقل زمانی که طی آن مکان و سرعت نوسانگر هر دو قرینه می‌شوند برابر $\frac{T}{2}$ (نصف دوره) است.

با توجه به صورت مسئله طول پاره‌خط ۸cm است در نتیجه دامنهٔ حرکت $A=\frac{8}{2}=4cm$ می‌شود. البته این مطلب در حل مسئله به ما کمکی نمی‌کند فقط برای درک بهتر مسیر حرکت ذره از $-1cm$ تا $+1cm$ است.

نکته هرگاه نوسانگر از مرکز نوسان به سوی دامنه حرکت می‌کند حرکت آن کندشونده است.

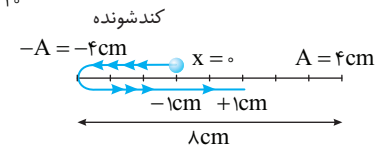
در صورت مسئله بیان شده که نوسانگر از مکان $-1cm$ با حرکت کندشونده می‌گذرد. نوسانگر در حال حرکت به سوی دامنهٔ منفی $(-4cm)$ است و سپس از نقطه بازگشت برمی‌گردد و به نقطه $+1cm$ می‌رود. از این‌رو بازهٔ زمانی که طی می‌کند برابر $\frac{T}{2}$ است.

$$T=\frac{1}{f}\xrightarrow{f=5Hz}T=\frac{1}{5}s$$

$\frac{T}{2}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$t_2-t_1=\frac{T}{2}=\frac{\frac{1}{5}}{2}\Rightarrow\Delta t=\frac{1}{10}s$$

بنابراین حداقل زمان حرکت از $-1cm$ تا $+1cm$ در این مسئله $\frac{1}{10}s$ است.

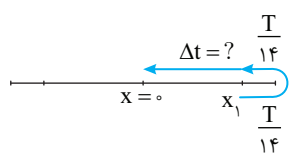


B ۱۲۳۵ ۳

خط فکری حداقل زمان دو بار عبور متوالی از یک مکان یعنی اینکه نوسانگر از آن مکان به یک انتهای مسیر (دامنه) رفته و دوباره به همان مکان بازگردد. بنابراین وقتی گفته شده در مدت $\frac{T}{7}$ نوسانگر از مکان x_1 دو بار عبور کرده، پس نوسانگر از مکان x_1 تا دامنه به مدت نصف $\frac{T}{7}$ در حال حرکت بوده است یعنی $\frac{T}{14}$. اکنون با دانستن این مطلب مسئله به راحتی حل می‌شود.

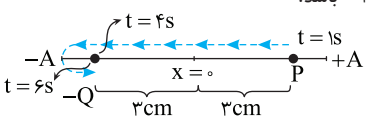
نوسانگر از مکان x_1 تا دامنه $\frac{T}{14}$ در حرکت بوده است همچنین از دامنه نیز طول می‌کشد تا نوسانگر به مکان x_1 برسد بنابراین بازهٔ زمانی حرکت از x_1 تا نقطهٔ تعادل خواهد شد:

$$\Delta t=\frac{T}{4}-\frac{T}{14}\Rightarrow\Delta t=\frac{7T-2T}{28}\Rightarrow\Delta t=\frac{5T}{28}$$



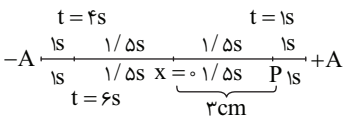
B ۱۲۳۶ ۳

خط فکری شکل ساده‌ای از موضوع مسئله بکشید. دقت کنید که در صورت مسئله بیان شده که فاصله از حالت تعادل ۳cm است یعنی مکان نوسانگر می‌تواند $+3cm$ و $-3cm$ باشد.



مطلب دیگری که باید به آن دقت کنید، تقارن است یعنی اینکه وقتی در مدت $4-1=3s$ نوسانگر از مکان P به Q می‌رود این بازه به دو قسمت مساوی $1/5s$ تقسیم می‌شود و از P تا $x=0$، $1/5s$ و از $x=0$ تا Q نیز $1/5s$ طول می‌کشد و یا در بازهٔ $6s-4s=2s$، در مدت $1s$ نوسانگر از نقطهٔ Q به انتهای مسیر $(-A)$ رفته و در مدت $1s$ همین مسیر را برمی‌گردد. اکنون این اطلاعات را روی شکل قرار داده مسئله را حل کنید.

دوره را حساب می‌کنیم: $T=1+1+1/5+1/5+1/5+1/5+1+1=10s$



میانبر چون در لحظهٔ $t=1s$ مکان $+3cm$ و جهت سرعت منفی و در لحظهٔ $t=6s$ مکان $-3cm$ و جهت سرعت مثبت شده است، یعنی در این بازهٔ زمانی مکان و سرعت قرینه شده است، بنابراین این بازهٔ زمانی برابر $\frac{T}{2}$ بوده و دوره خواهد شد:

$$\frac{T}{2}=6-1\Rightarrow T=10s$$

اما حالا به سراغ دامنه می‌رویم. برای این کار معادلهٔ حرکت می‌نویسیم و در لحظهٔ $t=1s$ مکان را $+3cm$ قرار می‌دهیم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{10}\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{5}rad/s$$

$$x=A\cos\frac{\pi}{5}t\xrightarrow[x=3cm]{t=1s}3=A\cos\frac{\pi}{5}\Rightarrow3=A\times0/8$$

$$\Rightarrow A=\frac{30}{8}=3/75cm$$

B ۱۲۳۷ ۲

خط فکری یک معادلهٔ حرکت به شما داده شده و جابه‌جایی متحرک را در یک بازهٔ زمانی از شما می‌خواهد از این رو بنا به آنچه در حرکت‌شناسی یاد گرفته‌ایم تنها باید در معادلهٔ حرکت ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی را قرار داده و مکان‌های به‌دست آمده را از هم کم کنیم.

کافی است مکان نوسانگر را در لحظهٔ $t=0$ و $t=1/5s$ به‌دست آورده و از هم کم کنیم:

$$x=0/02\cos\pi t\Rightarrow\begin{cases}t_1=0\Rightarrow x_1=0/02m\\ t_2=1/5s\Rightarrow x_2=0/02\cos\frac{3}{2}\pi\Rightarrow x_2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow x_2-x_1=0-0/02\Rightarrow\Delta x=-0/02m$$

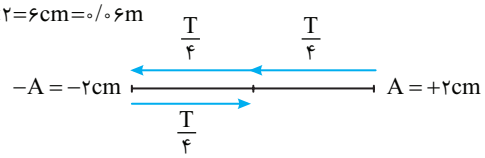
B ۱۲۳۸ ۴

۱ دوره را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{2\pi}{T}\xrightarrow{\omega=\pi\,rad/s}\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=2s$

۲ مشخص می‌کنیم که $1/5s$ چه کسری از دوره است. $\frac{\Delta t}{T}=\frac{1/5}{2}\Rightarrow\Delta t=\frac{3T}{4}$

۳ در مدت $\frac{3T}{4}$ نوسانگر مطابق شکل از مکان $A=+2cm$ به مکان $A=-2cm$ رفته و به مبدأ $x=0$ برمی‌گردد. بنابراین مسافت طی شده خواهد شد:

$$\ell=3\times2=6cm=0/06m$$



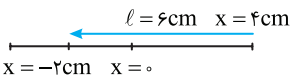
B ۱۲۳۹ ۱

خط فکری شما ابتدا باید دامنه را پیدا کنید و به کمک آن مشخص کنید که وقتی نوسانگر در مدت ۰/۲s مسافت ۶cm را طی می‌کند به کدام نقطهٔ مسیر می‌رسد و با داشتن مکان می‌توانید از روی معادلهٔ حرکت بسامد زاویه‌ای را حساب کرده و معادلهٔ حرکت را بنویسید.

۱ دامنهٔ حرکت نصف طول پاره‌خط مسیر است بنابراین: $A=\frac{۸}{۲}=۴cm$

۲ متحرک از $+۴cm$ شروع به حرکت کرده و پس از ۰/۲ ثانیه، ۶ سانتی‌متر مسافت طی کرده یعنی به مکان $x=-۲cm$ رسیده است.

۳ مکان $-۲cm$ را در معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده قرار می‌دهیم.



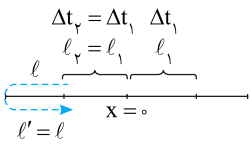
$$x=A\cos\omega t\Rightarrow -۲=۴\cos\omega(۰/۲)\Rightarrow\cos ۰/۲\omega=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۰/۲\omega=\frac{۲\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow\omega=\frac{۱۰\pi}{۳}rad/s$$

معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم: $x=۰/۰۴\cos\frac{۱۰\pi}{۳}t$

B ۱۲۴۰ ۴

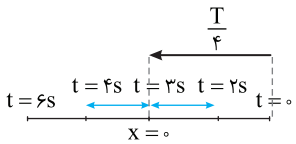
خط فکری به شکل روبه‌رو نگاه کنید.



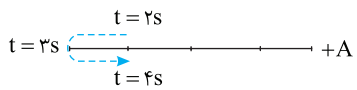
در حرکت هماهنگ ساده مسافت طی شده در بازه‌های زمانی یکسان در دو طرف $x=۰$ و همچنین در دو طرف انتهای مسیر $(x=\pm A)$ تقارن دارد. بنابراین وقتی در ثانیهٔ سوم و ثانیهٔ چهارم مسافت طی شده برابر است دو حالت وجود دارد، یکی در دو طرف مبدأ و دیگری در دو طرف انتهای مسیر. با دانستن این مطلب مسئله قابل حل است.

حالت اول: ثانیهٔ سوم قبل از $x=۰$ و ثانیهٔ چهارم بعد از $x=۰$ است، بنابراین در لحظهٔ $t=۳s$ متحرک از مکان $x=۰$ می‌گذرد یعنی در بازهٔ صفر تا ۳s متحرک از $+A$ به مبدأ رسیده است که این بازه برابر $\frac{T}{۴}$ است.

$$\frac{T}{۴}=۳\Rightarrow T=۱۲s$$



حالت دوم: ثانیهٔ سوم (بازهٔ بین $t=۲s$ تا $t=۳s$) قبل از انتهای مسیر $(-A)$ و ثانیهٔ چهارم (بازهٔ بین $t=۳s$ تا $t=۴s$) بعد از انتهای مسیر است:



بنابراین در مدت صفر تا $t=۳s$ نوسانگر از $+A$ به $-A$ رفته که این بازهٔ زمانی برابر $\frac{T}{۲}$ است، از این‌رو دوره خواهد شد: $\frac{T}{۲}=۳\Rightarrow T=۶s$

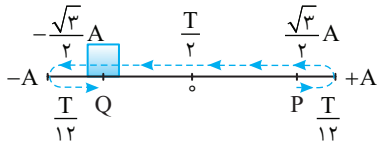
B ۱۲۴۱ ۴

۱ در لحظهٔ $t_۱$ مکان نوسانگر $+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ و سرعت آن مثبت است، یعنی نوسانگر از مکان P در حال حرکت به سوی دامنه است.

۲ در لحظهٔ $t_۲$ در مکان $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ نیز سرعت مثبت است یعنی نوسانگر به سوی مرکز نوسان در حرکت است.

۳ شکل مسیر را رسم می‌کنیم و بازه‌های زمانی شناخته شده را در طول مسیر نوشته تا مدت زمان حرکت از P تا Q مشخص شود.

$$\Delta t=\frac{T}{۱۲}+\frac{T}{۲}+\frac{T}{۱۲}=\frac{۲T}{۳}$$

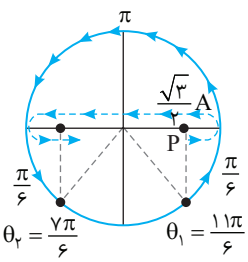


۴ جابه‌جایی متحرک از P تا Q خواهد شد:

$$\Delta x=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}A-(+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A)\Rightarrow\Delta x=-\sqrt{۳}A$$

۵ بنا به تعریف، سرعت متوسط برابر است با: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-\sqrt{۳}A}{\frac{۲T}{۳}}=-\frac{۳\sqrt{۳}A}{۲T}$

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت:



در لحظهٔ $t_۱$ مکان نوسانگر مثبت و سرعت آن نیز مثبت است، بنابراین فاز در ربع چهارم قرار دارد.

در لحظهٔ $t_۲$ مکان نوسانگر منفی و سرعت مثبت است بنابراین فاز در ربع سوم قرار دارد. تغییر فاز برابر است با:

$$\Delta\theta=\frac{\pi}{۶}+\pi+\frac{\pi}{۶}=\frac{۴\pi}{۳}$$

$$\Delta\theta=\omega(t_۲-t_۱)=\frac{۴\pi}{۳}\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}\Delta t=\frac{۴\pi}{۳}\Rightarrow\Delta t=\frac{۲T}{۳}$$

سرعت متوسط برابر است با: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-\sqrt{۳}A}{\frac{۲T}{۳}}\Rightarrow v_{av}=-\frac{۳\sqrt{۳}A}{۲T}$

A ۱۲۴۲ ۱

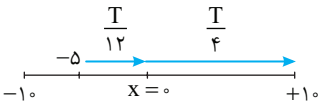
خط فکری متحرک در یک جهت از مکان $-۵cm$ به مکان $+۱۰cm$ مبدأ می‌رود. برای به‌دست آوردن سرعت متوسط شما باید زمان جابه‌جایی از $-۵cm$ تا $+۱۰cm$ را حساب کنید البته می‌توانید از بازه‌های زمانی شناخته شده و یا از دایرهٔ مثلثاتی استفاده کنید.

روش استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:

زمان حرکت از مکان $-۵cm$ یعنی $-\frac{A}{۲}$ تا مبدأ $(x=۰)$ برابر $\frac{T}{۱۲}$ و از مبدأ تا مکان $+۱۰cm$ یعنی $+A$ برابر $\frac{T}{۴}$ است بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta t=\frac{T}{۱۲}+\frac{T}{۴}=\frac{T+۳T}{۱۲}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۳}=\frac{۰/۱۵}{۳}=۰/۰۵s$$

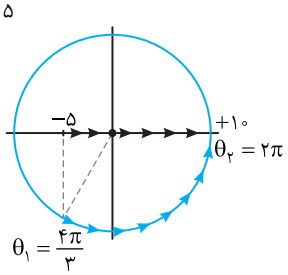
سرعت‌متوسط‌برابراست‌با: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{[۱۰-(-۵)]\times۱۰^{-۲}}{۰/۰۵}\Rightarrow v_{av}=۳m/s$



روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت (ωt): کمان متناظر با مکان $x=-۵cm$ و $x=۱۰cm$ را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم.

$$\omega t_۲-\omega t_۱=۲\pi-\frac{۴\pi}{۳}\Rightarrow\frac{۲\pi}{۰/۱۵}\Delta t=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow\Delta t=۰/۰۵s$$

$$\Rightarrow v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۰/۱۵}{۰/۰۵}=۳m/s$$

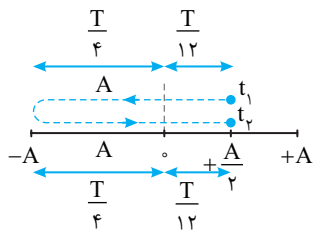


B ۱۲۴۳ ۳

خط فکری شما باید مسیر حرکت را به کمک اطلاعات مسئله رسم کنید و روی شکل بازه‌های زمانی شناخته شده را نوشته تا بتوانید بازهٔ زمانی حرکت و همچنین مسافت طی شده را حساب کرده و تندی متوسط را به‌دست بیاورید.

۱ در لحظهٔ t_1 نوسانگر از مکان $+\frac{A}{2}$ می‌گذرد و دارای حرکت تندشونده است یعنی نوسانگر در حال حرکت به سوی حالت تعادل است.

۲ بعد از لحظهٔ t_1 در لحظهٔ t_2، نوسانگر مجدداً از مکان $+\frac{A}{2}$ می‌گذرد. بنابراین مسیر حرکت مطابق شکل زیر است.



۳ مدت زمان حرکت از $+\frac{A}{2}$ تا $x=0$ برابر $\frac{T}{12}$ و از $x=0$ تا دامنه $-A$ برابر $\frac{T}{4}$ است. بازهٔ زمانی حرکت نوسانگر در این مسیر رفت و برگشت از $+\frac{A}{2}$ تا $+\frac{A}{2}$ برابر است با:

$$\Delta t=\frac{T}{12}+\frac{T}{4}+\frac{T}{4}+\frac{T}{12}\Rightarrow\Delta t=\frac{2T}{3}\xrightarrow{T=\frac{2\pi}{\omega}}\Delta t=\frac{4\pi}{3\omega}$$

همچنین در این مدت مسافت طی شده برابر است با: $\ell=\frac{A}{2}+A+A+\frac{A}{2}=3A$

۴ تندی متوسط را حساب می‌کنیم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{t_2-t_1}=\frac{3A}{\frac{4\pi}{3\omega}}\Rightarrow s_{av}=\frac{9A\omega}{4\pi}$$

دقت کردید که ما در روابط T را برحسب بسامد زاویه‌ای ω نوشته‌ایم. چرا؟ برای آنکه در گزینه‌ها خبری از T نبوده بلکه ω در گزینه‌ها وجود دارد.

B ۱۲۴۴ ۴

هرگاه جسم را از حالت طبیعی منحرف کرده و رها کنیم، مقدار انحراف برابر دامنه است.

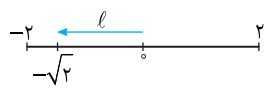
پس: $A=2cm\,,\ x=A\cos(\frac{2\pi}{T}t)$

مکان نوسانگر در لحظه‌های $\frac{T}{4}$ و $\frac{3T}{8}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$t=\frac{T}{4}\Rightarrow x=A\cos(\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{4})\Rightarrow x=A\cos\frac{\pi}{2}=0$$

$$t=\frac{3T}{8}\Rightarrow x=A\cos(\frac{2\pi}{T}\times\frac{3T}{8})\Rightarrow x=A\cos\frac{3\pi}{4}=-(2)\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}\,cm$$

$$\ell=|\Delta x|=|-\sqrt{2}-0|=\sqrt{2}\,cm$$



A ۱۲۴۵ ۱

۱ ابتدا دوره را از روی معادلهٔ $x=A\cos 50\pi t$ حساب می‌کنیم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 50\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{1}{25}=0/04s$$

۲ بازهٔ زمانی $t_1=0\,s$ تا $t_2=0/02s$ نصف دوره است و نوسانگر در نصف دوره مسافتی دو برابر دامنه طی می‌کند. با توجه به تعریف تندی خواهیم داشت:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow 1/5=\frac{2A}{0/02}\Rightarrow A=1/5\times10^{-2}m\Rightarrow A=1/5cm$$

B ۱۲۴۶ ۲

روش اول: استفاده از معادلهٔ حرکت:

۱ دوره را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 5\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{4}{10}s$$

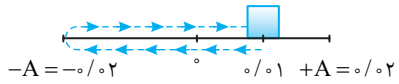
۲ با توجه به زمان‌های داده شده مکان متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$x_1=0/02\cos 5\pi\times\frac{1}{15}\Rightarrow x_1=0/01m$$

$$x_2=0/02\cos 5\pi\times\frac{1}{3}\Rightarrow x_2=0/01m$$

از همین‌جا که نقطهٔ ابتدا و انتهای نوسان یکسان است، می‌توانیم متوجه شویم که سرعت متوسط آن صفر است.

۳ در این صورت متحرک دو بار از مکان $x=0/01m$ گذشته است که هر دو بار در بازهٔ زمانی کوچک‌تر از یک دوره $T=\frac{4}{10}s$ صورت گرفته و مسیر مطابق شکل زیر است. مسافت طی شده را حساب می‌کنیم:



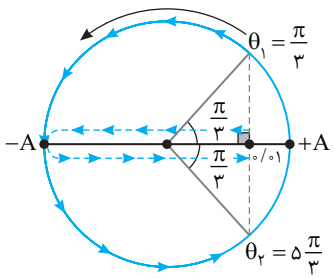
$$\ell=0/01+0/02+0/02+0/01=0/06m$$

۴ تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{0/06}{\frac{4}{15}}=\frac{0/9}{4}=\frac{9}{40}m/s$$

روش دوم: استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت $(\theta=\omega t)$:

ابتدا کمان‌های متناظر با t_1 و t_2 را به‌دست می‌آوریم:



$$\theta_1=\omega t_1=\frac{\pi}{3}$$

$$\theta_2=\omega t_2=\frac{5\pi}{3}$$

بنابراین متحرک از $0/01m$ شروع به حرکت به سمت مرکز کرده و با یک بار تغییر جهت مجدد به $0/01m$ خواهد رسید:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{0/06}{\frac{4}{15}}=\frac{9}{40}m/s$$

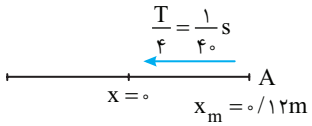
بازی با سؤال **ذره‌ای روی پاره‌خطی به‌طول ۲۴ سانتی‌متر با بسامد ۱۰ هرتز در مبدأ زمان از بیشینه مکان مثبت شروع به نوسان می‌کند. تندی متوسط این ذره بین $t=0$ و $t=\frac{1}{40}s$ چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۹/۶ ۲) ۴/۸ ۳) ۲/۴ ۴) ۶

پاسخ دامنهٔ حرکت نصف طول پاره‌خط مسیر نوسان است.

دوره را حساب می‌کنیم:

$$T=\frac{1}{f}\xrightarrow{f=10Hz}T=\frac{1}{10}s$$



بازهٔ زمانی داده شده را بر حسب دوره به‌دست می‌آوریم: $\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{10}}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{4}$

در مدت $\frac{T}{4}$ نوسانگر از مکان $+A$ به $x=0$ می‌رود، بنابراین تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{0/12}{\frac{1}{40}}=4/8m/s$$

گزینهٔ ۲

B ۱۲۴۷ ۲

دوره را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=2s$

بازهٔ زمانی $t_1=\frac{1}{5}s$ تا $t_2=\frac{6}{5}s$ برابر است با: $\Delta t=\frac{6}{5}-\frac{1}{5}\Rightarrow\Delta t=1s$

این بازه زمانی $1s$ است که برابر نصف دوره این حرکت است و در مدت $\frac{T}{2}$ مسافت طی شده متحرک برابر $2A$ می‌شود. $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{2\times0/04}{1}=0/08m/s=8cm/s$

B ۱۲۴۸ ۲

۱ با توجه به معادلهٔ حرکت، دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$x=0/02\cos\frac{\pi}{2}t\ ,\ \omega=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow T=4s$

۲ بازهٔ زمانی برابر است با:

$\Delta t=t_2-t_1=\frac{25}{12}-\frac{1}{12}\Rightarrow\Delta t=2s\xrightarrow{T=4s}\Delta t=\frac{T}{2}$

نکته همواره مسافت طی شده در مدت زمان T برابر با $4A$ و در مدت زمان $\frac{T}{2}$ برابر با $2A$ است.

۳ با توجه به نکته در مدت نصف دوره مسافتی که نوسانگر طی می‌کند $2A$ یعنی $0/04$ متر است.

$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{0/04}{2}=0/02m/s=2cm/s$

B ۱۲۴۹ ۲

۱ معادلهٔ حرکت نوسانگر به صورت $x=0/04\cos4\pi t$ است، بنابراین دورهٔ حرکت آن خواهد شد:

$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow4\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2}{4}\Rightarrow T=0/5\,s$

۲ اندازهٔ بازهٔ زمانی $t_1=0/1s$ تا $t_2=1/35\,s$ برابر $\Delta t=1/35-0/1=1/25s$ است. این بازه را با دوره مقایسه می‌کنیم.

$\frac{\Delta t}{T}=\frac{1/25}{0/5}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{5}{2}\Rightarrow\Delta t=\frac{5}{2}T\Rightarrow\Delta t=2T+\frac{T}{2}$

یادآوری در هر دوره نوسانگر مسافتی چهار برابر دامنه $(4A)$ را طی می‌کند و در نیم دوره مسافت $2A$ را طی می‌کند.

۳ مسافت طی شده توسط نوسانگر را حساب می‌کنیم.

$\ell=4A+4A+2A\Rightarrow\ell=10A\xrightarrow{A=0/04m}\ell=10\times0/04$

$\Rightarrow\ell=0/4m\Rightarrow\ell=\frac{2}{5}m$

B ۱۲۵۰ ۱

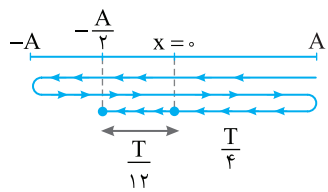
معادله مکان زمان نوسانگر به صورت $x=A\cos\frac{16\pi}{3}t$ است.

۱ دوره را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\frac{16\pi}{3}=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{3}{8}s$

۲ بازهٔ زمانی $0/5s$ را بر حسب دوره مشخص می‌کنیم.

$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{4}{3}\Rightarrow\Delta t=\frac{4}{3}T\Rightarrow\Delta t=T+\frac{T}{3}\Rightarrow\Delta t=T+\frac{T}{4}+\frac{T}{12}$

۳ در مدت $0/5$ ثانیه، نوسانگر به مدت T ثانیه مسافت $4A$ را طی کرده است و جابه‌جایی آن صفر شده و به مدت $\frac{T}{4}$ جابه‌جایی A و به مدت $\frac{T}{12}$ جابه‌جایی $\frac{A}{2}$ را داشته است. به شکل زیر دقت کنید.



مسافت طی شده: $\ell=4A+A+\frac{A}{2}\Rightarrow\ell=\frac{11A}{2}$

جابه‌جایی: $|\Delta x|=A+\frac{A}{2}=\frac{3}{2}A$

۴ نسبت تندی متوسط به سرعت متوسط را به‌دست می‌آوریم.

$\frac{s_{av}}{|v_{av}|}=\frac{\frac{\ell}{\Delta t}}{|\frac{\Delta x}{\Delta t}|}=\frac{\ell}{|\Delta x|}=\frac{4A+\frac{3}{2}A}{\frac{3}{2}A}\Rightarrow\frac{s_{av}}{|v_{av}|}=\frac{11}{3}$

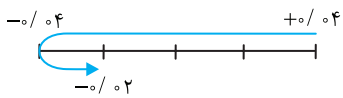
A ۱۲۵۱ ۳

از روی معادلهٔ $x=0/04\cos4\pi t$ ، دوره را حساب می‌کنیم.

$T=\frac{2\pi}{\omega}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{4\pi}\Rightarrow T=\frac{1}{2}s$

نسبت بازهٔ زمانی داده شده به دوره را به‌دست می‌آوریم: $\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\Delta t=\frac{2T}{3}=\frac{T}{2}+\frac{T}{6}$

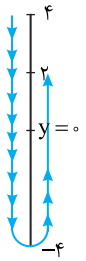
در مدت $\frac{T}{2}$ نوسانگر از مکان $+0/04$ به $-0/02$ می‌رود، سپس در مدت $\frac{T}{6}$ از $-A$ به $-\frac{A}{2}$ می‌رود، بنابراین مسافت طی شده خواهد شد:



$\ell=0/04+0/04+0/02=0/1m$

$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{0/1}{\frac{1}{3}}=0/3m/s=30cm/s$

A ۱۲۵۲ ۳



دامنه نوسان نصف طول پاره‌خط مسیر است. $A=\frac{8}{2}=4cm$

در لحظهٔ $t=0$ نوسانگر در بالاترین نقطهٔ مسیر یعنی در دامنه مثبت $(A=+4cm)$ قرار دارد. بازهٔ زمانی داده شده را برحسب دوره به‌دست می‌آوریم $\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{5}{3}-0}{2}\Rightarrow\Delta t=\frac{5}{6}T$

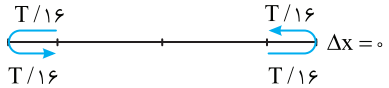
مسیر حرکت در بازهٔ صفر تا $\frac{5T}{6}$ مطابق شکل بوده و در این مدت مسافت طی شده خواهد شد: $\ell=4+4+4+2\Rightarrow\ell=14cm$

تندی متوسط را حساب می‌کنیم.

$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{14}{\frac{5}{3}}\Rightarrow s_{av}=\frac{42}{5}=8/4cm/s$

B ۱۲۵۳ ۱

در هر بازهٔ زمانی دلخواه (مانند $\frac{T}{8}$) که به شما داده می‌شود و از شما کمینهٔ جابه‌جایی خواسته می‌شود شما اگر این بازه را به دو قسمت مساوی تقسیم کنید $(\frac{\frac{T}{8}}{2}=\frac{T}{16})$ می‌توانید فرض کنید که نوسانگر در مدت نصف بازه از یک مکان به دامنه رفته و سپس در نیمهٔ دیگر بازه از دامنه به همان مکان برگشته است. در این صورت جابه‌جایی صفر خواهد شد.

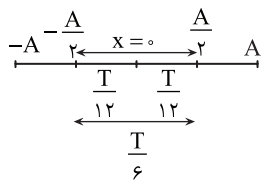


میانبر در هر بازهٔ زمانی دلخواه در حرکت هماهنگ ساده کمینهٔ جابه‌جایی صفر است.

۱ ۱۲۵۴ B

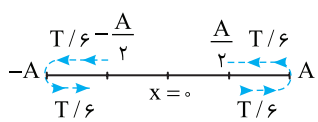
خط فکری در مرکز نوسان (نقطهٔ تعادل) تندی نوسانگر بیشینه است و در جایی که تندی بیشتر است، زمانی طی یک مسافت معین کمتر خواهد شد و در دو انتهای مسیر (نقاط بازگشت) تندی صفر است و در نزدیکی نقاط بازگشت، زمان طی یک مسافت معین طولانی‌تر خواهد بود. بنابراین برای کمینه زمان به سراغ تقسیم مسافت (A) در دوطرف نقطه تعادل می‌رویم و برای بیشینه زمان مسافت طی‌شده برابر یک دامنه را به دو قسمت مساوی در دو طرف نقطهٔ بازگشت تقسیم می‌کنیم.

کوتاه‌ترین زمان حرکت برای مسافتی برابر دامنه مطابق شکل وقتی است که نوسانگر از $-\frac{A}{2}$ به $\frac{A}{2}$ (و یا بالعکس) می‌رود که این زمان $\Delta t_{min}=\frac{T}{6}$ است. بیشینه زمان وقتی است که نوسانگر از مکان $+\frac{A}{2}$ به $+A$ رفته و بر می‌گردد:



$$\Delta t_{max}=\frac{T}{6}+\frac{T}{6}=\frac{T}{3}$$

بنابراین $\frac{\Delta t_{min}}{\Delta t_{max}}=\frac{\frac{T}{6}}{\frac{T}{3}}=\frac{1}{2}$



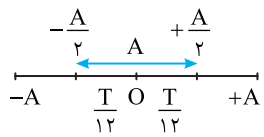
۲ ۱۲۵۵ B

بیشینهٔ سرعت متوسط وقتی است که در بازهٔ ۰/۰۲s بیشترین جابه‌جایی طی شود، از این‌رو باید این جابه‌جایی در دو طرف مرکز نوسان که تندی از بقیهٔ نقاط بیشتر است صورت گیرد.

۱ دوره را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\frac{5}{3}\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=0/12s$

۲ اکنون بررسی می‌کنیم ۰/۰۲s چه کسری از دوره است. $\frac{\Delta t}{T}=\frac{0/02}{0/12}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{6}$

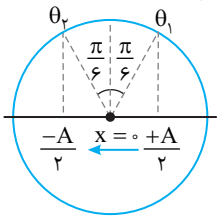
۳ این بازه را به دو قسمت مساوی در دو طرف مرکز نوسان تقسیم می‌کنیم. با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده خواهیم داشت:



پس در ۰/۰۲s بیشینه جابه‌جایی برابر A است. $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{0/06}{0/02}=3m/s$

روش دایرهٔ مثلثاتی: در مدت ۰/۰۲s تغییر شناسه تابع کسینوسی (تغییر فاز) برابر است با: $\Delta\theta=\omega\Delta t\Rightarrow\Delta\theta=\frac{50\pi}{3}\times0/02=\Delta\theta=\frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3}$ باید به دو قسمت مساوی در دو طرف مبدأ تقسیم شود.

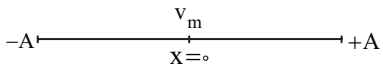


در این صورت $\theta_1=\frac{\pi}{3}$ و $x_1=+\frac{A}{2}$ و $\theta_2=\frac{2\pi}{3}$ و $x_2=-\frac{A}{2}$ خواهد بود و اندازهٔ جابه‌جایی در مدت ۰/۰۲s برابر $+A=0/06m$ می‌شود. $v_{av}=\frac{0/06}{0/02}=3m/s$

بازی با سؤال معادلهٔ مکان - زمان یک نوسانگر در SI به صورت $x=0/05\cos3\pi t$ می‌باشد. بیشینهٔ جابه‌جایی که این نوسانگر در بازهٔ زمانی $\Delta t=\frac{1}{6}s$ می‌پیماید چند سانتی‌متر است؟

۱) ۵ ۲) $5\sqrt{2}$ ۳) $5\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) ۱۰

پاسخ خط فکری می‌خواهیم در یک مدت معین $(\Delta t=\frac{1}{6}s)$ نوسانگر بیشینهٔ جابه‌جایی را داشته باشند. برای آنکه یک متحرک در یک مدت معین جابه‌جایی بیشتری داشته باشد باید سرعتش از لحظه‌های دیگر بیشتر باشد. در حرکت هماهنگ ساده بیشینهٔ سرعت در وسط مسیر اتفاق می‌افتد بنابراین باید نوسانگر در این بازهٔ زمانی در دو طرف $x=0$ در حرکت باشد. یعنی $\frac{1}{6}s$ را باید به دو قسمت تقسیم کنید و در هر $\frac{1}{12}s$ مشخص کنید که متحرک از کجا به کجا می‌رود، البته ابتدا باید دوره را بیابید و سپس معین کنید $\frac{1}{12}s$ چه کسری از دوره است تا به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده مسئله را حل کنید.

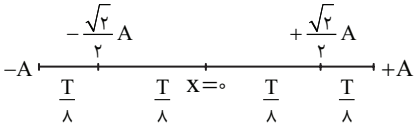


۱ بیشینه جابه‌جایی در یک بازهٔ زمانی معین همواره در دو طرف نقطهٔ تعادل یعنی جایی که تندی بیشینه است رخ می‌دهد، بنابراین $\Delta t=\frac{1}{6}s$ را به دو بازهٔ زمانی $\frac{1}{12}s$ تقسیم می‌کنیم.

۲ دوره را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow3\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2}{3}s$

۳ معین می‌کنیم که $\frac{1}{12}s$ چه کسری از دوره است. $\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{8}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{8}$

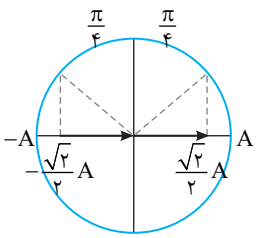
۴ با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده مسیر را رسم می‌کنیم، مدت زمان حرکت از مکان $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ به مکان $x=0$ است. بنابراین جابه‌جایی بیشینه خواهد شد: $\frac{\sqrt{2}}{2}A+\frac{\sqrt{2}}{2}A=\sqrt{2}A=\sqrt{2}\times\frac{5}{100}m=5\sqrt{2}cm$



روش حل به کمک دایرهٔ مثلثاتی و تغییر فاز $(\Delta\theta=\omega\Delta t)$:

۵ تغییر فاز را حساب می‌کنیم: $\Delta\theta=\omega\Delta t=3\pi\times\frac{1}{6}=\frac{\pi}{2}$

۶ تغییر فاز را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم: $(\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4})$



۷ روی دایرهٔ مثلثاتی در دو طرف مرکز، $\frac{\pi}{4}$ را نشان داده و مکان متحرک را روی مسیر مشخص می‌کنیم. بنابراین بیشینهٔ جابه‌جایی وقتی است که نوسانگر از مکان $-\frac{\sqrt{2}}{2}A$ به مکان $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ می‌رود.

$$\Delta x=\sqrt{2}A\xrightarrow{A=5cm}\Delta x=5\sqrt{2}\ cm$$

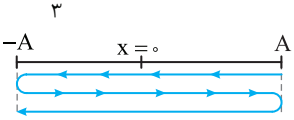
گزینهٔ ۲

۲ ۱۲۵۶ B

ابتدا دوره را به‌دست می‌آوریم. $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow6\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{1}{3}s$

نسبت بازهٔ زمانی را به دست می‌آوریم. $\frac{\Delta t}{T}=\frac{0/5}{\frac{1}{3}}\Rightarrow\Delta t=\frac{3}{2}T=T+\frac{T}{2}$

در مدت T نوسانگر به محل اولیهٔ خود باز می‌گردد و بیشینهٔ جابه‌جایی در $\frac{T}{2}$ باقی‌مانده دو برابر دامنه است.



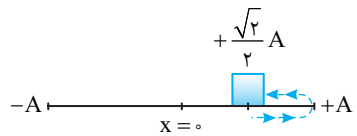
$|d|=2\times2=4cm,\ |v_{av}|=\frac{d}{\Delta t}=\frac{4}{0/5}=8\ cm/s$ است. $d=2A$

B ۱۲۵۷ ۲

نکته کمترین جابه‌جایی و سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه در حرکت هماهنگ ساده صفر است.

۱ کمترین اندازهٔ سرعت متوسط برای زمانی است که نوسانگر از نقطه‌ای از مسیر حرکت کرده و دوباره به آن نقطه برگردد که در این صورت سرعت متوسط برابر صفر می‌شود.

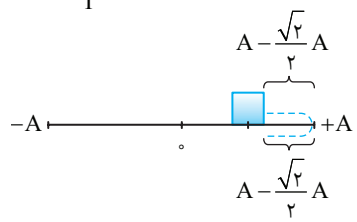
۲ کمترین تندی متوسط در اطراف نقطهٔ بازگشت $(v=0)$ اتفاق می‌افتد، زیرا در این ناحیه سرعت کم و زمان طولانی‌تر از بقیهٔ مسیر است، بنابراین نصف زمان نوسان را قبل از رسیدن به نقطهٔ بازگشت در نظر گرفته و نصف دیگر زمان را بعد از گذر از نقطهٔ بازگشت در نظر می‌گیریم. نصف $\frac{T}{4}$ برابر $\frac{T}{8}$ است، مکان در $\frac{T}{8}$ را به کمک معادله به‌دست می‌آوریم:



۳ بنابراین مسافت طی شده برابر است با: $x_1=A\cos\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{8}\Rightarrow x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}A$

$$l=2(A-\frac{\sqrt{2}}{2}A)=A(2-\sqrt{2})$$

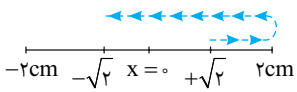
۴ تندی متوسط خواهد شد: $s_{av}=\frac{A(2-\sqrt{2})}{\frac{T}{4}}=\frac{4A(2-\sqrt{2})}{T}$



B ۱۲۵۸ ۴

۱ دورهٔ حرکت را حساب می‌کنیم. $T=\frac{1}{f}\xrightarrow{f=\frac{1}{4}Hz}T=\frac{1}{\frac{1}{4}}\Rightarrow T=4s$

۲ نوسانگر از مکان $+\sqrt{2}cm$ در جهت محور x می‌گذرد، بنابراین نوسانگر در حال حرکت از $+\sqrt{2}cm$ به سوی دامنه $A=+2cm$ است. در نتیجه کمترین بازهٔ زمانی برای رسیدن متحرک به مکان $-\sqrt{2}cm$ مسیری است که نوسانگر مطابق شکل از مکان $+\sqrt{2}cm$ به مکان $+2cm$ رفته و از آنجا در خلاف جهت محور xها خود را به مکان $-\sqrt{2}cm$ برساند.



نکته در حرکت هماهنگ ساده، کمترین بازهٔ زمانی که طی آن مکان و سرعت نوسانگر قرینه می‌شود برابر نصف دوره $(\frac{T}{2})$ است.

۳ در بازهٔ مورد نظر مکان از $+\sqrt{2}cm$ در جهت مثبت محور xها به مکان $-\sqrt{2}cm$ در خلاف جهت محور xها رفته یعنی هم مکان و هم سرعت نوسانگر قرینه شده و این بازه برابر $\frac{T}{2}$ است. $\Delta t=\frac{T}{2}\Rightarrow\Delta t=\frac{4}{2}\Rightarrow\Delta t=2s$

۴ با توجه به تعریف سرعت متوسط خواهیم داشت:

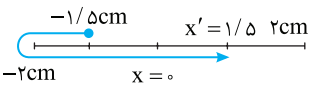
$$|v_{av}|=|\frac{\Delta x}{\Delta t}|=|\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}|=\sqrt{2}m/s$$

بازی با سوال ذره‌ای روی پاره‌خطی واقع بر محور xها به طول $4cm$ دارای حرکت هماهنگ ساده است و حالت تعادل آن مبدأ مختصات است. بیشینه سرعت متوسط ذره در بازه‌ای که از مکان $-1/5cm$ در جهت منفی محور می‌گذرد تا لحظه‌ای که از مکان $x'=+1/5cm$ عبور می‌کند برابر $+1/5m/s$ است. بسامد ذره چند هرتز است؟

۱) ۲۵ ۲) ۵۰ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

پاسخ ۱ دامنه برابر نصف طول پاره‌خط است. $A=\frac{4}{2}\Rightarrow A=2cm$

۲ سرعت متوسط از رابطه $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ به‌دست می‌آید. در صورت مسئله بیان شده که بیشینه سرعت متوسط، دقت کنید Δx مقدارش ثابت است و برای آنکه v_{av} بیشینه شود باید Δt کمینه باشد. اما کمینه بودن Δt مفهومش چیست؟ یعنی ذره از مکان $-1/5cm$ مطابق شکل به مکان $+1/5cm$ برود.



۳ با توجه به مسیر حرکت از مکان $-1/5cm$ به مکان $+1/5cm$ مشخص است که در مدت Δt مکان و سرعت ذره قرینه شده یعنی Δt برابر نصف دوره است. اکنون Δt را به کمک تعریف سرعت متوسط حساب می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow 1/5=\frac{[1/5-(-1/5)]\times10^{-2}}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t=2\times10^{-2}s$$

بنابراین دوره خواهد شد: $\Delta t=\frac{T}{2}\Rightarrow 2\times10^{-2}=\frac{T}{2}\Rightarrow T=4\times10^{-2}s$

بسامد را حساب می‌کنیم. $f=\frac{1}{T}\Rightarrow f=\frac{1}{4\times10^{-2}}\Rightarrow f=25Hz$ گزینهٔ ۱

B ۱۲۵۹ ۴

خط فکری به عبارت «بیشترین سرعت متوسط» دقت کرده‌اید. جابه‌جایی از مکان $\frac{+A}{\sqrt{2}}$ تا $+\frac{A}{2}$ مقدار ثابتی است و در رابطهٔ $v_{av}=\frac{\Delta x\text{ ثابت}}{\Delta t}$ وقتی v_{av} بیشینه است که Δt کمترین مقدار باشد و کمترین مقدار Δt وقتی است که متحرک بدون تغییر جهت مستقیماً از $\frac{+A}{\sqrt{2}}$ به $+\frac{A}{2}$ برود. شما باید زمان این جابه‌جایی را به‌دست بیاورید تا بتوانید سرعت متوسط را حساب کنید.

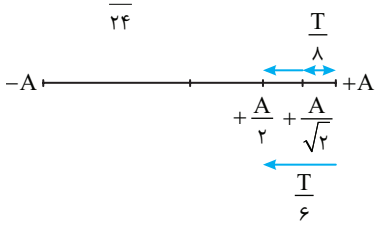
روش استفاده از بازه‌های زمانی:

۱ جابه‌جایی نوسانگر برابر است با:

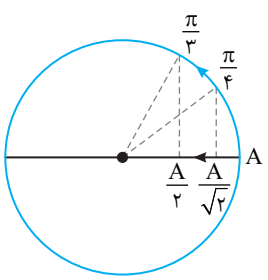
$$\Delta x=\frac{+A}{2}-\frac{A}{\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}-2)A}{2\sqrt{2}}\Rightarrow|\Delta x|=|(\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}})A|=\frac{\sqrt{2}-1}{2}A$$

۲ زمان حرکت از $+A$ تا $\frac{A}{+\sqrt{2}}$ برابر $\frac{T}{8}$ و از $+A$ تا $+\frac{A}{2}$ برابر $\frac{T}{6}$ است.

بنابراین زمان حرکت از $\frac{A}{+\sqrt{2}}$ تا $\frac{+A}{2}$ برابر $\Delta t=\frac{T}{6}-\frac{T}{8}=\frac{T}{24}$ است. بزرگی سرعت متوسط خواهد شد: $|v_{av}|=\frac{|\Delta x|}{\Delta t}\Rightarrow|v_{av}|=\frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2}A}{\frac{T}{24}}\Rightarrow|v_{av}|=12(\sqrt{2}-1)\frac{A}{T}$



روش مثلثاتی: فاز حرکت در مکان $\frac{+A}{\sqrt{2}}$ و در مکان $+\frac{A}{2}$ برابر $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{3}$ مطابق شکل



است. بازهٔ زمانی حرکت را حساب می‌کنیم:

$$\omega t_2-\omega t_1=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{2\pi}{T}\Delta t=\frac{\pi}{12}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{24}$$

باقی راه‌حل شبیه به روش قبل است.

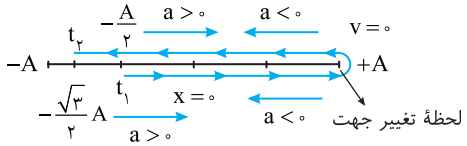
B ۱۲۶۰ ۱

خط فکری در حل این مسائل باید مسیر حرکت را رسم کنید. به تعداد گذر نوسانگر از مبدأ مکان $x=0$ شتاب تغییر علامت می‌دهد و به تعداد رسیدن به نقطهٔ بازگشت و برگشت از آن متحرک تغییر جهت می‌دهد.

نکته در لحظه‌ای که نوسانگر از مبدأ مکان $x=0$ می‌گذرد علامت شتاب و نیروی خالص تغییر جهت می‌دهد.

نکته در لحظه‌ای که نوسانگر به نقطهٔ بازگشت می رسد، سرعتش صفر شده و تغییر علامت می‌دهد.

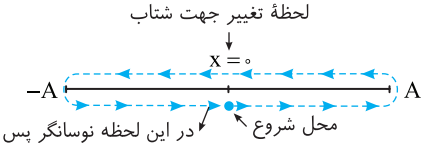
با توجه به صورت مسئله، مسیر حرکت را رسم می‌کنیم. متحرک در مکان $-\frac{A}{2}$ دارای حرکت تندشونده است یعنی در حال حرکت به سوی نقطه تعادل است و برای رسیدن به مکان $-\frac{\sqrt{3}}{2}A$ باید به انتهای مسیر برود $(+A)$ و برگردد بنابراین نوسانگر در مکان $+A$ یک بار تغییر جهت می‌دهد و چون دو بار از مرکز نوسان می‌گذرد دو بار شتاب تغییر جهت می‌دهد و گزینهٔ (۱) درست است. یادمان باشد با هر بار گذر نوسانگر از مرکز نوسان، شتاب و نیرو تغییر جهت می‌دهد.



B ۱۲۶۱ ۱

نکته هرگاه نوسانگر از مبدأ **بگذرد** شتاب تغییر جهت می‌دهد.

در لحظهٔ مورد نظر که تندی نوسانگر بیشینه است یعنی مطابق شکل نوسانگر در مرکز نوسان است. از این لحظه به بعد در مدت یک دوره نوسانگر تنها یک بار از مبدأ می‌گذرد و شتاب تغییر علامت می‌دهد. دقت کنید در آخر دوره شتاب صفر شده اما از مبدأ نمی‌گذرد بنابراین در آخر دوره هنوز تغییر جهت شتاب رخ نداده است.

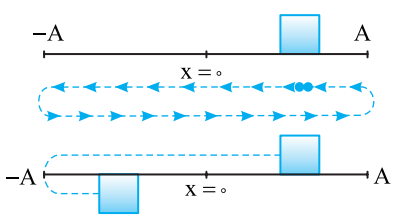


در این لحظه نوسانگر پس از یک دوره، هنوز از مرکز نوسان عبور نکرده و شتاب تغییر علامت نمی‌دهد.

بازی با سؤال **ذره‌ای روی پاره‌خطی دارای حرکت هماهنگ ساده است. اگر در یک لحظه نوسانگر در مکان‌های مثبت قرار داشته باشد $(x>0)$ در مدت یک دوره پس از این لحظه شتاب ..... بار تغییر جهت می‌دهد و در مدت نصف دوره پس از این لحظه نوسانگر ..... بار تغییر جهت می‌دهد.**

۱) ۱، ۲ **۲)** ۲، ۲ **۳)** ۱، ۲ **۴)** ۱، ۱

پاسخ **مکان ابتدایی نوسانگر در لحظهٔ مورد نظر مثبت است. مسیر حرکت در یک دوره را رسم می‌کنیم، نوسانگر دو بار از مبدأ می‌گذرد بنابراین شتاب دو بار تغییر علامت می‌دهد. در مدت نصف دوره $(\frac{T}{2})$ یکبار به نقطهٔ بازگشت می‌رود و برمی‌گردد بنابراین جهت حرکت یکبار عوض می‌شود.**



گزینهٔ ۱

B ۱۲۶۲ ۴

در لحظه‌ای که مکان نوسانگر $x=\pm A$ باشد، نوسانگر تغییر جهت می‌دهد. در معادلهٔ حرکت به جای x، $\pm A$ قرار می‌دهیم و لحظه‌های گذر از این نقاط را بررسی می‌کنیم:

$$x=0/04\cos\frac{\pi}{2}t \xrightarrow{x=\pm A} \pm 0/04=0/04\cos\frac{\pi}{2}t$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{2}t=\pm 1\Rightarrow \frac{\pi}{2}t=k\pi\Rightarrow t=2k\begin{cases}\xrightarrow{k=0} t=0\\ \xrightarrow{k=1} t=2s\\ \xrightarrow{k=2} t=4s\end{cases}$$

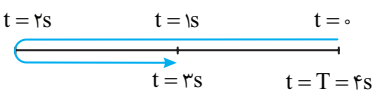
دورهٔ حرکت را حساب می‌کنیم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=4s$$

بازهٔ بیان شده $(t=\frac{1}{3}s$ تا $t=\frac{15}{4}s)$ بین صفر تا $4s$ است و یک بار تغییر جهت رخ می‌دهد. اما راه‌حل ساده‌تری وجود دارد. دوره را به‌دست می‌آوریم و مسیر را رسم می‌کنیم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=4s$$

بازهٔ زمانی $t=\frac{1}{3}s$ تا $t=\frac{15}{4}s$ بین صفر و $4s$ است و در $t=2s$ یک بار تغییر جهت رخ می‌دهد.



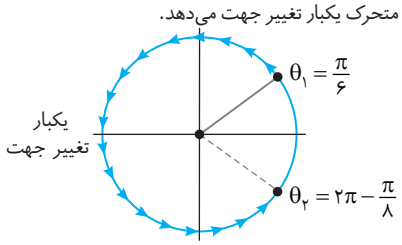
روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز $(\theta=\omega t)$:

در لحظه‌های بیان شده فاز حرکت (ωt) را به دست آورده و روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنید. هر بار که از صفر یا π بگذریم متحرک یک بار تغییر جهت داده و هرگاه از $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ بگذریم شتاب یک بار تغییر جهت می‌دهد.

۱ بسامد زاویه‌ای $\frac{\pi}{2}\,rad/s$ است بنابراین:

$$\theta_1=\omega t_1=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{\pi}{6}\quad,\quad \theta_2=\omega t_2=\frac{\pi}{2}\times\frac{15}{4}=\frac{15\pi}{8}=2\pi-\frac{\pi}{8}$$

۲ اکنون در جهت مثلثاتی از θ_1 تا θ_2 می‌چرخیم. مشاهده می‌شود که یکبار از π می‌گذریم یعنی متحرک یکبار تغییر جهت می‌دهد.



B ۱۲۶۳ ۳

روش استفاده از معادلهٔ حرکت:

نکته شتاب در دو انتهای مسیر یعنی $x=\pm A$ بیشینه است.

بررسی می‌کنیم در بازهٔ $t=\frac{1}{120}s$ تا $t=\frac{1}{12}s$ چند بار مکان‌ها برابر $\pm A$ می‌شود.

$$x=A\cos 40\pi t\Rightarrow \pm A=A\cos 40\pi t\Rightarrow\cos 40\pi t=\pm 1\Rightarrow 40\pi t=k\pi$$

$$\Rightarrow t=\frac{k}{40}$$

بنابراین:

$k=0\Rightarrow t=0$, $k=1\Rightarrow t=\frac{1}{40}=\frac{3}{120}s$ بار اول

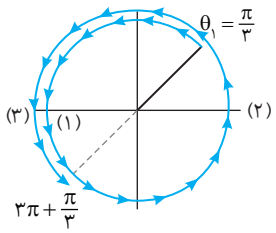
$k=2\Rightarrow t=\frac{2}{40}=\frac{6}{120}s$ بار دوم

$k=3\Rightarrow t=\frac{3}{40}=\frac{9}{120}s$ بار سوم

$k=4\Rightarrow t=\frac{4}{40}=\frac{12}{120}s>\frac{1}{12}s$ قابل قبول نیست

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی:

فاز حرکت (شناسهٔ تابع کسینوس $\theta=\omega t$) را در لحظه‌های $t=\frac{1}{120}s$ و $t=\frac{1}{12}s$ به‌دست آورده و روی دایرهٔ مثلثاتی نمایش می‌دهد.



$$\theta=\omega t\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t=\frac{1}{120}s}\theta_1=40\pi\times\frac{1}{120}\Rightarrow\theta_1=\frac{\pi}{3}\\ \xrightarrow{t=\frac{1}{12}s}\theta_2=40\pi\times\frac{1}{12}\Rightarrow\theta_2=\frac{10\pi}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\Delta\theta=\frac{10\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\Rightarrow\Delta\theta=3\pi$$

از $\theta_1=\frac{\pi}{3}$، 3π رادیان روی دایره می‌چرخیم. هر بار که از $(\pm A)$ یعنی کمان صفر و π می‌گذریم، نوسانگر یک بار تغییر جهت می‌دهد و شتاب یک بار بیشینه می‌شود، بنابراین سه بار شتاب بیشینه شده است.

روش استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:

۱ مکان را در ابتدای بازه به‌دست بیاورید.

$$x=A\cos 40\pi t\Rightarrow x=A\cos 40\pi\times\frac{1}{120}\Rightarrow x=A\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=+\frac{A}{2}$$

۲ دوره را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=40\pi\Rightarrow\frac{2\pi}{T}=40\pi\Rightarrow T=\frac{1}{20}s$$

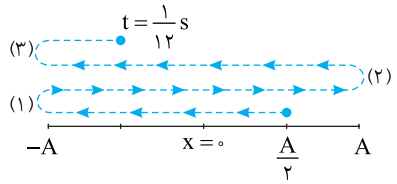
۳ بازهٔ زمانی داده شده را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta t=\frac{1}{12}-\frac{1}{120}\Rightarrow\Delta t=\frac{10-1}{120}\Rightarrow\Delta t=\frac{9}{120}\Rightarrow\Delta t=\frac{3}{40}s$$

۴ مشخص می‌کنیم که Δt چه کسری از دوره است.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{3}{40}}{\frac{1}{20}}\Rightarrow\Delta t=\frac{3}{2}T$$

۵ اکنون روی مسیر حرکت از $+\frac{A}{2}$ به اندازهٔ $\frac{3T}{2}$ حرکت کرده و هر بار گذر از نقطهٔ بازگشت شتاب بیشینه می‌شود.



B ۱۲۶۴ ۲

روش استفاده از معادلهٔ حرکت:

هر بار که ذره از نقطهٔ تعادل (مبدأ) می‌گذرد، نیروی وارد بر نوسانگر تغییر جهت می‌دهد. از این‌رو:

$$x=0\Rightarrow\cos 10\pi t=0\Rightarrow 10\pi t=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{k}{10}+\frac{1}{20}$$

$k=0\Rightarrow t=\frac{1}{20}s<\frac{1}{15}s$ غ ق ق ، $k=1\Rightarrow t=\frac{3}{20}s>\frac{1}{15}s$ قابل قبول

$$k=2\Rightarrow t=\frac{2}{10}+\frac{1}{20}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}s$$

در لحظهٔ $t=\frac{1}{4}s$ نوسانگر در مرکز نوسان است و از آن عبور نکرده و نیرو تغییر علامت نمی‌دهد.

نکته در حرکت هماهنگ ساده هر بار که نوسانگر از مبدأ $x=0$ می‌گذرد بردار نیرو و شتاب تغییر علامت می‌دهد.

روش استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:

۱ مکان ذره را در ابتدای بازه $t_1=\frac{1}{15}s$ حساب می‌کنیم.

$$x=0/02\cos 10\pi t\Rightarrow x=0/02\cos\frac{10\pi}{15}=0/02\cos\frac{2\pi}{3}\xrightarrow{\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}}$$

$$x=-0/01m\Rightarrow x=-1cm$$

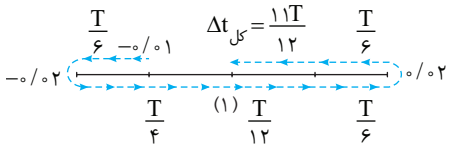
۲ دوره را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 10\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{1}{5}s$$

۳ بازهٔ زمانی داده شده را با دوره مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{15}}{\frac{1}{5}}=\frac{\frac{15-4}{60}}{\frac{1}{5}}=\frac{11}{12}\Rightarrow\Delta t=\frac{11T}{12}$$

۴ مسیر حرکت را رسم می‌کنیم و از مکان $x=-0/01m$ به اندازهٔ $\frac{11T}{12}$ جلو می‌رویم. یعنی تکه تکه جلو می‌رویم و بازه‌ها را می‌نویسیم تا جمع آن‌ها $\frac{11T}{12}$ شود.



۵ نوسانگر یک بار از مرکز نوسان (حالت تعادل) می‌گذرد و گزینهٔ (۲) درست است.

B ۱۲۶۵ ۳

نکته هنگام گذر نوسانگر از مبدأ مکان $(x=0)$ بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

در معادلهٔ حرکت به جای x، صفر قرار می‌دهیم و تمام پاسخ‌های معادله بین ۱s تا ۵s جواب مسئله خواهند بود.

$$x=2\cos\frac{\pi}{3}t\xrightarrow{x=0}0=2\cos\frac{\pi}{3}t\Rightarrow\frac{\pi}{3}t=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{3}t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{3}{2}s\\ \frac{\pi}{3}t=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{9}{2}s\\ \frac{\pi}{3}t=\frac{5\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{15}{2}s\end{cases}$$

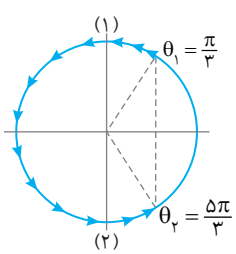
بنابراین $t=\frac{3}{2}s$ و $t=\frac{9}{2}s$ در بازهٔ $1s\le t\le 5s$ قرار دارد و در این دو لحظه متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند.

استفاده از روش دایرهٔ مثلثاتی و فاز $(\theta=\omega t)$:

۱ فاز حرکت در $t=1s$ و $t=5s$ را حساب کرده و روی دایرهٔ مثلثاتی نمایش می‌دهد.

$$\theta=\omega t\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t=1s}\theta_1=\frac{\pi}{3}\times 1=\frac{\pi}{3}\\ \xrightarrow{t=5s}\theta_2=\frac{\pi}{3}\times 5=\frac{5\pi}{3}\end{cases}$$

۲ اکنون از $\frac{\pi}{3}$ تا $\frac{5\pi}{3}$ روی دایره می‌چرخیم



و هر بار که از $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ یعنی $x=0$ می‌گذریم بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

۳ با توجه به دایرهٔ مثلثاتی بردار مکان دو بار تغییر جهت می‌دهد. البته شما می‌توانید به کمک بازه‌های زمانی شاخته شده مسئله را حل کنید.

۲ ۱۲۶۶ B

۱ ابتدا دوره را به‌دست می‌آوریم. $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 20\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{1}{10}s$

۲ بازهٔ $t=0$ تا $t=\frac{1}{24}s$ قطعاً از یک دوره $T=\frac{1}{10}s$ کمتر است.

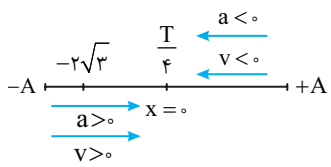
با توجه به مسیر نوسانگر ساده در بازهٔ $+A$ تا صفر و $-A$ تا صفر شتاب و سرعت هم‌جهت است.

اکنون مکان متحرک را در $t=\frac{1}{24}$ حساب می‌کنیم.

$$x=0/04\cos 20\pi t\Rightarrow x=0/04\cos 20\pi\times\frac{1}{24}=0/04\cos\frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x=0/04\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})\Rightarrow x=-2\sqrt{3}cm$$

از $t=0$ تا $\frac{1}{24}s$ نوسانگر از $x=0$ به $x=-2\sqrt{3}cm$ می‌رود و در بازهٔ زمانی حرکت از $+A$ تا $x=0$ بردار شتاب و سرعت هم‌جهت‌اند: $\Delta t=\frac{T}{4}=\frac{\frac{1}{10}}{4}=\frac{1}{40}s$

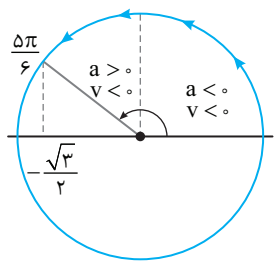


روش استفاده از دایره مثلثاتی:

فاز (شناسه تابع کسینوسی) در لحظهٔ $t=\frac{1}{24}s$ را حساب می‌کنیم.

$$\theta=\omega t\Rightarrow\theta=20\pi\times\frac{1}{24}=\frac{5\pi}{6}$$

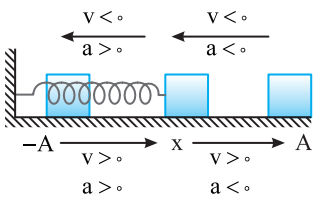
در حرکت از صفر تا $\frac{\pi}{2}$ یعنی ربع اول



سرعت و شتاب هم‌علامت است در واقع به مدت $\frac{T}{4}$ بردار سرعت و شتاب و هم‌جهت هستند. $\Delta t=\frac{T}{4}=\frac{\frac{1}{10}}{4}=\frac{1}{40}s$

۱ ۱۲۶۷ C

خط فکری به مسیر حرکت سامانهٔ جرم - فنر شکل روبه‌رو دقت کنید. در مدتی که نوسانگر از مکان $-A$ به سوی مرکز نوسان می‌رود بردار شتاب و سرعت در جهت محور x هستند که این بازه طول $\frac{T}{4}$ می‌کشد. ابتدا دوره را به دست بیاورید و معین کنید که بازهٔ زمانی داده شده چه کسری از دوره است. مکان نوسانگر در ابتدای بازه $t_1=0/5s$ را به دست آورده و مسیر حرکت تا $t_2=5s$ را دنبال کنید تا مشخص شود چه مدتی a و v همزمان مثبت هستند.



۱ با توجه به معادلهٔ $x=0/04\cos\frac{\pi}{2}t$ دوره خواهد شد:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=4s$$

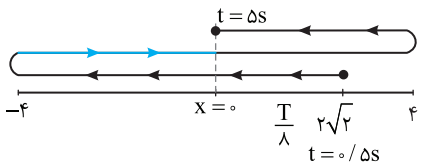
۲ بازهٔ $t_1=0/5s$ تا $t_2=5s$ را با دوره مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{5-0/5}{4}=\frac{4/5}{4}\Rightarrow\Delta t=\frac{9}{8}T=T+\frac{T}{8}$$

۳ مکان در ابتدای بازه یعنی در $t_1=0/5s$ را به دست می‌آوریم.

$$x=0/04\cos\frac{\pi}{2}\times(\frac{1}{2})=0/04\cos\frac{\pi}{4}=0/04\times\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=0/02\sqrt{2}m=2\sqrt{2}cm$$

۴ به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده از مکان $2\sqrt{2}$ مسیر را دنبال می‌کنیم.



۵ بنابراین تنها در قسمت رنگی مسیر $(\frac{T}{4})$، a و v همزمان مثبت هستند.

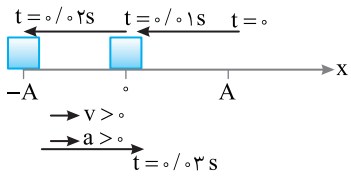
$$\frac{T}{4}=\frac{4}{4}=1s$$

۳ ۱۲۶۸ B

۱ با توجه به معادلهٔ $x=0/03\cos 50\pi t$ دوره را حساب می‌کنیم

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 50\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=0/04s$$

۲ بردارهای سرعت و شتاب هنگامی که نوسانگر از مکان $x=-A$ به سمت $x=0$ در حال حرکت است مثبت بوده و در جهت محور x قرار دارند:



۳ بازهٔ زمانی حرکت نوسانگر از $-A$ تا $x=0$ برابر است با:

$0/02s<t<0/03s$

۱ ۱۲۶۹ C

یادآوری تکانه برابر حاصل‌ضرب جرم در بردار سرعت $(\vec{P}=m\vec{v})$ بوده و تکانه برداری در جهت سرعت است.

خط فکری هرگاه بردار تکانه مثبت باشد یعنی بردار سرعت مثبت است. در حرکت هماهنگ ساده هرگاه نوسانگر از $-A$ به سوی $+A$ برود سرعت مثبت است یعنی در دایرهٔ مثلثاتی هرگاه فاز در ربع سوم و چهارم باشد سرعت مثبت است. اکنون باید شبیه مسائل قبلی، شما بررسی کنید که در بازهٔ زمانی داده شده نوسانگر از کجا به کجا می‌رود تا بتوانید مدت زمانی که بردار تکانه مثبت است را مشخص کنید.

روش استفاده از بازهٔ زمانی شناخته شده:

۱ مکان نوسانگر را در ابتدای بازه به‌دست می‌آوریم.

$$x=0/02\cos 12\pi t\xrightarrow{t_1=\frac{1}{48}s}x_1=0/02\cos\frac{12\pi}{48}$$

$$\Rightarrow x_1=0/02\cos\frac{\pi}{4}=0/02\times\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x_1=\sqrt{2}cm$$

۲ دوره را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 12\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{1}{6}s$

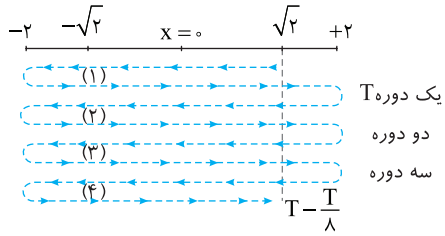
۳ بازهٔ زمانی داده شده را با دوره مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{48}}{\frac{1}{6}}=\frac{\frac{32-1}{48}}{\frac{1}{6}}=\frac{31}{8}\Rightarrow\Delta t=4T-\frac{T}{8}$$

۴ دقت کردید، تعداد دوره‌ها را از شکم Δt بیرون کشیدیم اکنون مسیر را رسم کرده و مسئله را حل می‌کنیم.

به شکل مسیر دقت کنید. در هر قسمت $\frac{T}{2}$ جهت سرعت و جهت تکانه مثبت بوده بنابراین به مدت $4\times\frac{T}{2}$ بردار تکانه مثبت است.

$$\Delta t=4\times\frac{\frac{1}{6}}{2}\Rightarrow\Delta t=\frac{1}{3}s$$



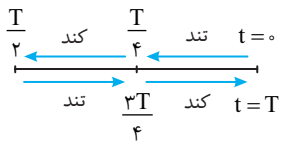
شما نیز با روش مثلثاتی مسئله را حل کنید.

B ۳ ۱۲۷۰

روش بازه‌های زمانی:

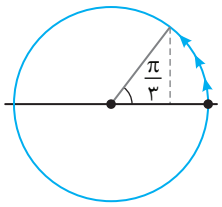
با توجه به مسیر حرکت ذره مکان‌هایی با حرکت کندشونده و تندشونده مشخص است.

ابتدا دوره را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow ۱۰\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{۲}{۱۰}s\Rightarrow \frac{T}{۴}=\frac{۱}{۲۰}s$



بازهٔ صفر تا $\frac{۱}{۳۰}s$ از $\frac{۱}{۲۰}s$ یعنی از $\frac{T}{۴}$ کمتر است و متحرک از $+A$ در حال حرکت به سوی $x=۰$ است و در تمام بازه حرکت تندشونده می‌باشد.

روش دایرهٔ مثلثاتی:



فاز حرکت در ابتدای بازه صفر و در لحظهٔ $t=\frac{۱}{۳۰}s$ خواهد شد: $\theta=\omega t=۱۰\pi\times\frac{۱}{۳۰}=\frac{\pi}{۳}$

یعنی در بازهٔ صفر تا $\frac{۱}{۳۰}$ همچنان شناسهٔ تابع کسینوسی (فاز) در ربع اول است و حرکت تندشونده است.

B ۱ ۱۲۷۱

نکته در بازهٔ زمانی که نوسانگر از دامنه ($+A$ یا $-A$) به سوی مرکز نوسان می‌رود حرکت تندشونده است.

خط فکری شما باید مشخص کنید در بازهٔ زمانی داده شده چه مدت نوسانگر در حال حرکت از $+A$ یا $-A$ به سوی حالت تعادل است.

۱ در $t=۰$ و $t=\frac{۵}{۶}s$ مکان نوسانگر را به‌دست آورده سپس مسیر حرکت را رسم می‌کنیم.

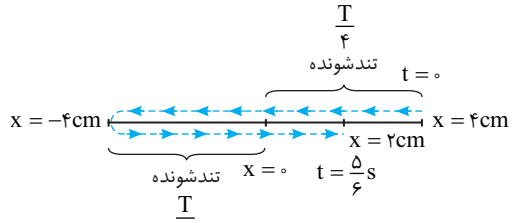
$t=۰\Rightarrow x_۱=۰/۰۴m=۴cm$

$t=\frac{۵}{۶}s\Rightarrow x=۰/۰۴\cos(۲\pi\times\frac{۵}{۶})=۰/۰۴\cos\frac{۵\pi}{۳}\Rightarrow x_۲=۰/۰۴\times\frac{۱}{۲}=+۰/۰۲m$

$\Rightarrow x_۲=۲cm$

۲ دوره را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow ۲\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۱s$

۳ اکنون مسیر را رسم می‌کنیم.



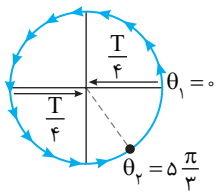
۴ با توجه به شکل در دو بازهٔ $\frac{T}{۴}$ یعنی به مدت $\frac{T}{۲}$ حرکت تندشونده است.

$\Delta t=\frac{T}{۲}=\frac{۱}{۲}s$

بنابراین در مدت $\frac{T}{۲}=\frac{۱}{۲}s$ حرکت تندشونده است. اما پرسشی مطرح است ما از کجا متوجه شدیم که متحرک در $t=\frac{۵}{۶}s$ برای بار دوم به مکان $+۲cm$ می‌رسد. برای پاسخ به این پرسش باید به شناسهٔ تابع کسینوسی (فاز) دقت کنید که با قرار دادن $t=\frac{۵}{۶}s$ مقدار آن $\frac{۵\pi}{۳}=۲\pi-\frac{\pi}{۳}$ شده است که کمانی در ربع چهارم است. بنابراین مسیر رسم شده کاملاً درست است.

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت:

۱ فاز حرکت در $t=۰$ و $t=\frac{۵}{۶}s$ را مشخص کرده و روی دایرهٔ مثلثاتی نمایش می‌دهیم.



$\theta=\omega t\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t=۰}\theta_۱=۰\\ \xrightarrow{t=\frac{۵}{۶}}\theta_۲=۲\pi\times\frac{۵}{۶}\Rightarrow\theta_۲=\frac{۵}{۳}\pi\end{cases}$

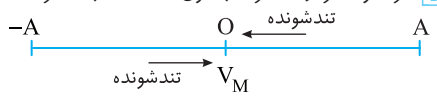
۲ از $\theta_۱$ به سوی $\theta_۲$ می‌رویم در مدتی که فاز در ربع اول و ربع سوم است. حرکت تندشونده است.

۳ مدت زمانی که حرکت متحرک تندشونده است خواهد شد: $\Delta t=\frac{T}{۴}+\frac{T}{۴}=\frac{T}{۲}=\frac{۱}{۲}s$

B ۴ ۱۲۷۲

نکته در مدت یک دوره، همواره $\frac{T}{۲}$ ثانیه حرکت تندشونده است.

نکته هرگاه نوسانگر در حال حرکت به‌سوی حالت تعادل باشد حرکت تندشونده است.



۱ با توجه به معادلهٔ حرکت $x=۰/۰۲\cos ۴\pi t$ دوره را حساب می‌کنیم.

$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow ۴\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{۱}{۲}s$

۲ بازهٔ زمانی $t_۱=\frac{۱}{۱۲}s$ تا $t_۲=\frac{۷}{۶}s$ را با دوره مقایسه می‌کنیم.

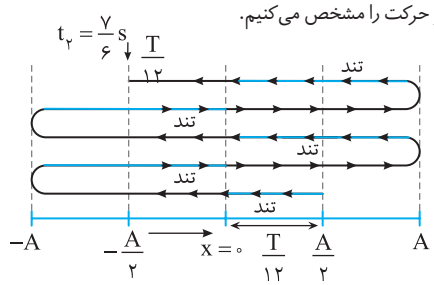
$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{۷}{۶}-\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{۱۴-۱}{۱۲}}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow\Delta t=\frac{۱۳}{۶}T=۲T+\frac{T}{۶}$

۳ در بازهٔ $۲T$ به مدت نصف بازه یعنی T حرکت تند شونده است.

۴ اما در مدت $\frac{T}{۶}$ چگونه است؟ برای این منظور مکان نوسانگر در ابتدای بازه $(t=\frac{۱}{۱۲}s)$ را باید مشخص کنیم.

$x=۰/۰۲\cos ۴\pi(\frac{۱}{۱۲})\Rightarrow x=۰/۰۲\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=۰/۰۱m\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}A$

۵ مسیر حرکت را مشخص می‌کنیم.

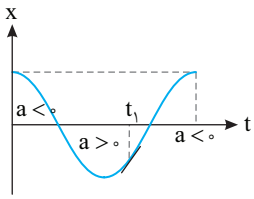


۶ با توجه به مسیر در مدت حرکت از $x=۰$ تا $\frac{A}{۲}$، $\frac{T}{۱۲}$ حرکت تندشونده و در مدت $۲T$ بعدی نیز به مدت T حرکت تندشونده است یعنی در کل زمان حرکت تندشونده خواهد شد:

$\Delta t=T+\frac{T}{۱۲}=\frac{۱۳T}{۱۲}\xrightarrow{T=\frac{۱}{۲}s}\Delta t=\frac{۱۳}{۲۴}s$

۴ ۱۲۷۳ A

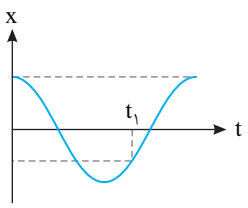
با توجه به نمودار مکان - زمان در لحظهٔ t_1، مکان منفی است.



یادآوری شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر سرعت لحظه‌ای است. در لحظهٔ t_1، شیب خط مماس مثبت بوده بنابراین سرعت و تکانه مثبت است.

یادآوری هرگاه جهت تقعر (دهانه) نمودار مکان - زمان رو به بالا باشد، شتاب مثبت است. در لحظهٔ t_1 جهت دهانه رو به بالاست و شتاب و نیرو مثبت است.

بازی با سؤال



نمودار مکان - زمان نوسانگری که روی سطح افقی در امتداد محور xها در حال نوسان است، به صورت مقابل می‌باشد. کدام گزینه جهت شتاب و سرعت نوسانگر در لحظهٔ t_1 را به ترتیب از راست به چپ درست بیان می‌کند؟

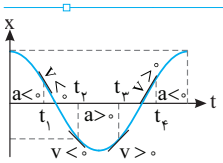
۱) ، ۲) ، ۳) ، ۴) ،

پاسخ در حل این نوع مسائل تمام بحث‌های حرکت هماهنگ ساده را فراموش کنید و تنها به حرکت‌شناسی و ویژگی‌های نمودار مکان زمان دقت کنید.

۱ شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان علامت سرعت را نشان می‌دهد.

۲ جهت تقعر نمودار مکان - زمان علامت شتاب را نشان می‌دهد. در لحظهٔ t_1 دهانه نمودار مکان - زمان رو به بالاست و شتاب مثبت و در جهت محور x ها است و شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ t_1 مثبت است بنابراین سرعت مثبت و در جهت محور xهاست. بنابراین بردار سرعت و شتاب هر دو در جهت مثبت محور xها خواهد بود و گزینهٔ (۱) درست است. گزینهٔ ۱

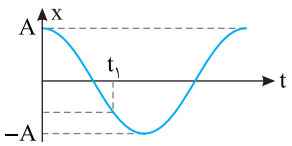
۲ ۱۲۷۴ A



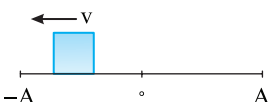
در لحظهٔ t_2 شتاب مثبت و سرعت منفی است. بنابراین حرکت کندشونده است و گزینهٔ (۲) درست است.

روش دیگر: در لحظهٔ t_2 متحرک به سوی دامنه منفی می‌رود. بنابراین تندی آن در حال کاهش بوده و حرکت کندشونده است. در مکان‌های منفی شتاب نوسانگر مثبت است. بنابراین لحظهٔ t_2 جواب مسئله است.

۴ ۱۲۷۵ A

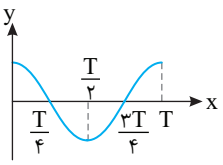


در لحظهٔ t_1 مکان نوسانگر منفی است. از طرفی شیب خط مماس بر نمودار نیز منفی بوده یعنی سرعت متحرک منفی است، بنابراین در لحظهٔ t_1 نوسانگر از $x=0$ به سوی $x=-A$ در حرکت است و گزینهٔ (۴) درست است.

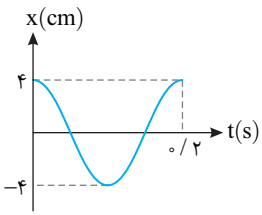


۲ ۱۲۷۶ A

یادآوری ریاضی در نمودار توابع کسینوسی خواهیم داشت:



با توجه به نمودار $A=4cm$ و $T=0/2s$ است.

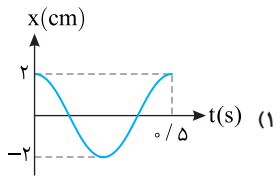


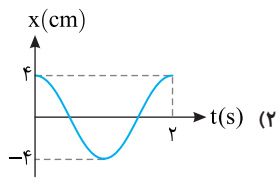
$$x=A\cos\omega t\Rightarrow x=A\cos\frac{2\pi}{T}t$$

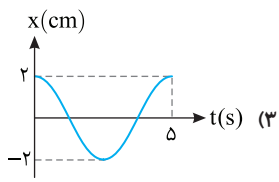
$$\Rightarrow x=0/04\cos\frac{2\pi}{0/2}t$$

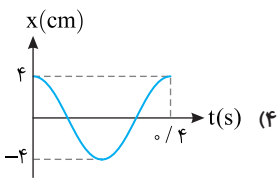
$$\Rightarrow x=0/04\cos 10\pi t$$

بازی با سؤال **معادلهٔ مکان - زمان نوسانگری در SI به صورت $x=0/02\cos(\frac{2\pi}{5}t)$ می‌باشد. کدام گزینه نمودار مکان - زمان این نوسانگر است؟**

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$x=0/02\cos(\frac{2\pi}{5}t)\xrightarrow[\omega=\frac{2\pi}{T}]{\omega=\frac{2\pi}{5}rad/s}\frac{2\pi}{5}=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=5s$$

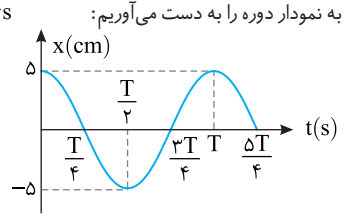
تنها گزینه‌ای که در آن $T=5s$ است، گزینهٔ (۳) می‌باشد. البته دامنه برابر $A=0/02m=2cm$ است. گزینهٔ ۳

۳ ۱۲۷۷ A

یادآوری مسافتی که نوسانگر در هر دوره طی می‌کند، چهار برابر دامنه $(4A)$ است.

۱ ابتدا با توجه به نمودار دوره را به دست می‌آوریم:

$$\frac{5T}{4}=5\Rightarrow T=4s$$



۲ در مدت یک دقیقه تعداد دور کاملی که نوسانگر طی می‌کند برابر است با:

$$T=\frac{t}{n}\Rightarrow 4=\frac{60}{n}\Rightarrow n=15$$

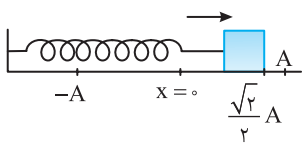
۳ نوسانگر ۱۵ نوسان انجام داده بنابراین مسافتی که طی می‌کند خواهد شد:

$$\ell=15\times(4A)=15\times4\times(5)\Rightarrow\ell=300cm=3m$$

۳ ۱۲۷۸ A

با توجه به نمودار در لحظهٔ t_1 متحرک در مکان مثبت و در حال حرکت به سمت $+A$ می‌باشد. پس مسیر حرکت گزینهٔ (۱) یا گزینهٔ (۳) می‌باشد. مقدار $t=\frac{7T}{8}$ را در معادله $x=A\cos\omega t$ قرار می‌دهیم و مکان نوسانگر را به‌دست بیاوریم.

$$\Rightarrow x=A\cos\frac{2\pi}{T}\times\frac{7T}{8}\Rightarrow x=A\cos\frac{14\pi}{8}\Rightarrow x=A\cos\frac{7\pi}{4}\Rightarrow x=+\frac{\sqrt{2}}{2}A$$



پس گزینهٔ (۳) درست می‌باشد.

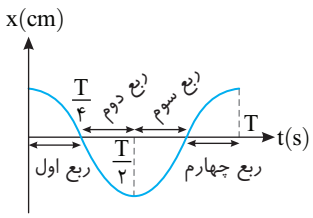
A ۱۲۷۹ ۴

خط فکری مختصات هر نقطه از نمودار باید در معادلهٔ $x=A\cos\omega t$ صدق کند. بنابراین معادلهٔ حرکت را نوشته به جای زمان $t=0/3s$ و به جای مکان $-2/5cm$ را قرار دهید. البته باید دقت کنید که در این لحظه نوسانگر برای اولین بار از مکان $-2/5\,cm$ می‌گذرد.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow -2/5=5\cos\omega t\Rightarrow\cos\omega t=-\frac{1}{2}$$

البته $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ دو جواب دارد، یکی $\frac{2\pi}{3}$ و دیگری $\frac{4\pi}{3}$ است. اما چگونه تشخیص بدهیم که کدام‌یک را اختیار کنیم؟ برای این منظور به نمودار مکان - زمان حرکت هماهنگ ساده دقت کنید.

در نمودار مکان - زمان تقسیم‌بندی نمودار با توجه به دایرهٔ مثلثاتی به‌صورت روبه‌رو است. در شکل مسئله در $3s/0$، کمان در ربع دوم قرار دارد.



بنابراین $\omega t=\frac{2\pi}{3}$ قابل قبول است.

با توجه به نمودار $A=5cm$ است.

$$\omega t=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}\times\frac{3}{10}=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow T=\frac{9}{10}s\Rightarrow x=0/05\cos\frac{20\pi}{9}t$$

B ۱۲۸۰ ۳

۱ به کمک $t=0/45s$ که روی نمودار مشخص است، دوره قابل محاسبه است.

$$t=0/45=\frac{3T}{4}\Rightarrow T=0/6s$$

۲ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0/6}\Rightarrow\omega=\frac{10\pi}{3}rad/s$$

۳ دامنهٔ حرکت برابر $A=6cm$ بوده و معادلهٔ حرکت خواهد شد:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow x=0/06\cos\frac{10\pi}{3}t$$

۴ مکان در لحظهٔ $t=1/1s$ را حساب می‌کنیم:

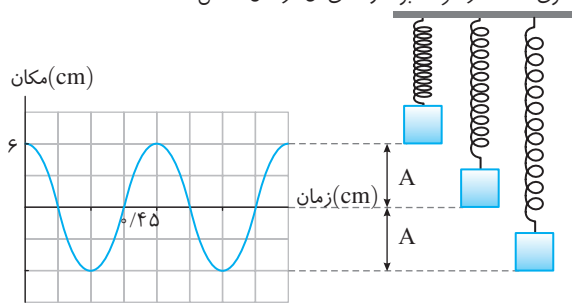
$$x=0/06\cos\frac{10\pi}{3}\times1/1\Rightarrow x=0/06\cos\frac{11\pi}{3}\Rightarrow x=0/06\cos(4\pi-\frac{\pi}{3})$$

4π دورهٔ تابع کسینوسی است از این رو:

$$x=0/06\cos(-\frac{\pi}{3})\Rightarrow x=0/06\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=0/06\times\frac{1}{2}=0/03m=3cm$$

بنابراین نوسانگر در این لحظه در مکان $+3cm$ و در بالای نقطهٔ تعادل قرار دارد.

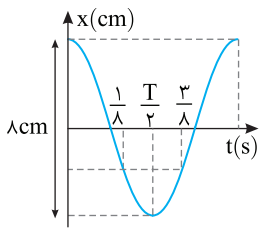
۵ اما قسمت سخت مسئله در مورد رفتار تندی در این لحظه است. کمان $-\frac{\pi}{3}$ که در آخر به‌دست آوریم در ربع چهارم قرار دارد و در ربع چهارم، نوسانگر از حالت تعادل به سوی $+A$ در حرکت بوده و تندی آن در حال کاهش است.



B ۱۲۸۱ ۴

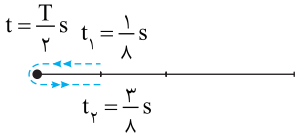
۱ طول مسیر نوسان برابر $8cm$ است. از این رو دامنهٔ حرکت خواهد شد.

$$A=\frac{8}{2}=4cm$$



۲ در لحظهٔ $t=\frac{1}{8}s$ و $t=\frac{3}{8}s$ مکان نوسانگر یکسان است. با توجه به نمودار $\frac{T}{2}$ وسط این بازه است. بنابراین:

$$\frac{T}{2}=\frac{\frac{3}{8}+\frac{1}{8}}{2}=\frac{1}{4}s\Rightarrow T=\frac{1}{2}s$$



۳ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\omega=4\pi\frac{rad}{s}$$

۴ معادلهٔ حرکت خواهد شد:

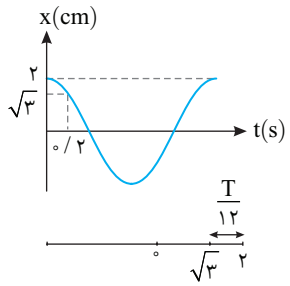
$$x=0/04\cos4\pi t$$

B ۱۲۸۲ ۳

روش استفاده از بازه‌های زمانی

۱ به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده و با توجه به اینکه دامنه $A=2cm$ است و در لحظهٔ $t=0/2s$ مکان نوسانگر $x=\sqrt{3}cm=\frac{\sqrt{3}}{2}A$ می‌باشد یعنی نوسانگر در مدت $0/2s$ از $+A$ به $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ می‌رود که بازه زمانی این جابه‌جایی برابر $\frac{T}{12}$ است. از این‌رو:

$$\frac{T}{12}=0/2\Rightarrow T=2/4s\xrightarrow{\omega=2\pi/T}\omega=\frac{2\pi}{2/4}\Rightarrow\omega=\frac{5\pi}{6}rad/s$$



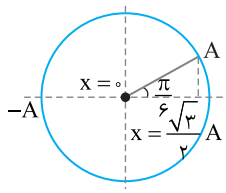
۲ معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow x=0/02\cos\frac{5\pi}{6}t$$

۳ زمان $t=1s$ را در معادلهٔ حرکت قرار داده و مکان را به‌دست می‌آوریم:

$$x=0/02\cos\frac{5\pi}{6}\Rightarrow x=0/02\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{-\sqrt{3}}{100}m\Rightarrow x=-\sqrt{3}cm$$

روش استفاده از دایره مثلثاتی



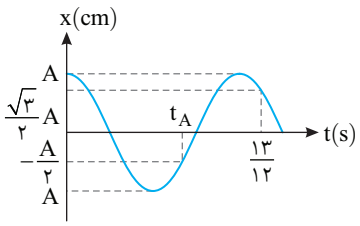
در $t=0/2s$ نوسانگر در ربع اول قرار داشته و مکان آن $\frac{\sqrt{3}}{2}A$ می‌باشد پس کمان متناظر مکان نوسانگر $\theta=\frac{\pi}{6}$ است. با توجه به نمودار از $\theta_0=0$ تا $\theta_1=\frac{\pi}{6}$ در مدت $0/2s$ طی می‌شود پس:

$$\theta_1-\theta_0=\omega t_1-\omega t_0=\omega(\Delta t)=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\omega\times\frac{2}{10}=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\omega=\frac{5\pi}{6}$$

ادامهٔ حل شبیه قسمت اول است.

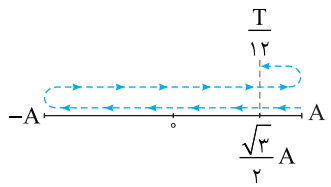
A ۱۲۸۳ ۲

مسیر حرکت را از $t=0$ تا $t=\frac{13}{12}s$ رسم می‌کنیم و بازه‌های زمانی را روی آن نوشته با هم جمع می‌کنیم.



نوسانگر در یک دورهٔ کامل T و از A تا $\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ نیز $\frac{T}{۱۲}$ در راه بوده و جمعاً Δt خواهد شد:

$$\Delta t = T + \frac{T}{۱۲} \Rightarrow \frac{۱۳}{۱۲} = \frac{۱۳T}{۱۲} \Rightarrow T = ۱s$$

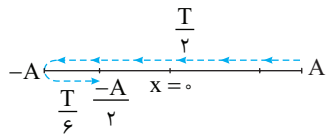


اما مسیر از $x=۰$ تا $x=-\frac{A}{۲}$ را رسم کرده t_A را به‌دست می‌آوریم.

از A تا $-A$ زمان $\frac{T}{۲}$ و از $-A$ تا $-\frac{A}{۲}$ مدت زمان طی مسیر $\frac{T}{۶}$ است. بنابراین

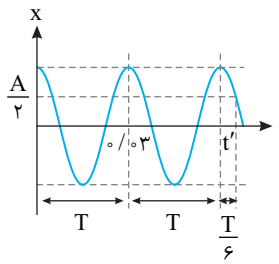
$$t_A = \frac{T}{۲} + \frac{T}{۶} = \frac{۲T}{۳} \Rightarrow t_A = \frac{۲}{۳} \times ۱ = \frac{۲}{۳}s$$

t_A خواهد شد:



۳ | ۱۲۸۴ | B

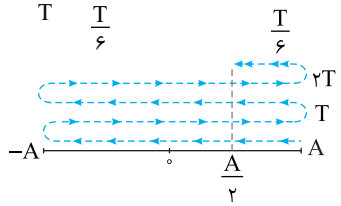
به نمودار دقت کنید. دورهٔ حرکت $T=۰/۰۳s$ است. مسیر حرکت را در بازهٔ $t=۰$ تا t' رسم می‌کنیم. به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده مسئله به راحتی حل می‌شود.



$$t' = ۲T + \frac{T}{۶} \Rightarrow t' = ۲ \times ۰/۰۳ + \frac{۰/۰۳}{۶}$$

$$\Rightarrow t' = ۰/۰۶ + \frac{۰/۰۱}{۲}$$

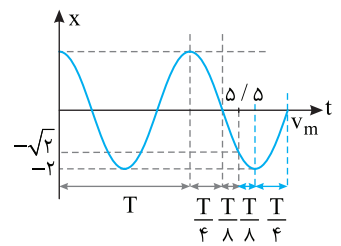
$$\Rightarrow t' = ۰/۰۶۵s = ۶/۵ \times ۱۰^{-۲}s$$



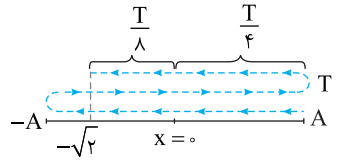
۴ | ۱۲۸۵ | B

راه‌حل اول: حل به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده مسیر حرکت را مطابق نمودار رسم کرده و بازه‌های زمانی را روی آن می‌نویسیم.

$$T + \frac{T}{۴} + \frac{T}{۸} = ۵/۵ \Rightarrow \frac{۸+۲+۱}{۸}T = ۵/۵ \Rightarrow T = ۴s$$

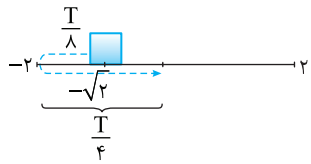


مسیر حرکت را مطابق نمودار رسم کرده و بازه‌های زمانی را روی آن می‌نویسیم.



تندی نوسانگر وقتی بیشینه می‌شود که نوسانگر از مرکز نوسان بگذرد. بنابراین مسیر نوسانگر در بازهٔ $t_۱$ تا گذر از حالت تعادل مطابق شکل روبه‌روست.

$$\frac{T}{۸} + \frac{T}{۴} = \frac{۳T}{۸} = \frac{۳}{۸} \times ۴ = ۱/۵s$$



راه‌حل دوم: حل به کمک معادلهٔ مکان - زمان: با توجه به نمودار در $t=۵/۵s$ نوسانگر برای سومین بار از $x=-\sqrt{۲}cm$ عبور می‌کند.

$$x = A\cos\omega t \Rightarrow -\sqrt{۲} = ۲\cos\omega t \Rightarrow \cos\omega t = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

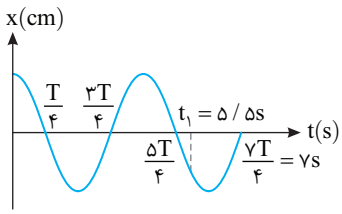
$$\Rightarrow \omega t = (۲k-۱)\pi \pm \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \omega t = \frac{۳\pi}{۴} \text{ یا } \frac{۵\pi}{۴} \text{ یا } \frac{۱۱\pi}{۴}$$

با توجه به توضیح بالا $\omega t_۱ = \frac{۱۱\pi}{۴}$ می‌باشد:

$$\omega \times ۵/۵ = \frac{۱۱\pi}{۴} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \frac{۲\pi}{T} = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow T = ۴s$$

مطابق نمودار در لحظهٔ $\frac{۷T}{۴}=۷s$ تندی بیشینه است. از این‌رو از $۵/۵s$ تا $۷s$ طول می‌کشد تا تندی بیشینه شود. یعنی:

$$\Delta t = ۷ - ۵/۵ = ۱/۵s$$



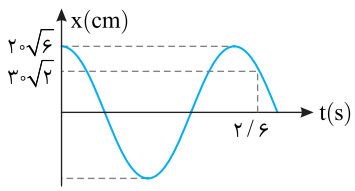
۱ | ۱۲۸۶ | B

فکر خط

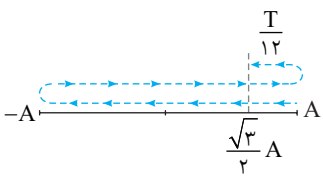
هرگاه دامنه داده شده و مکان در یک لحظه عجیب غریب باشد، شما نسبت $\frac{x}{A}$ را حساب کنید. سپس به سراغ محاسبهٔ دوره بروید.

۱ نسبت $\frac{x}{A}$ را در لحظهٔ $t=۲/۶s$ به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{x}{A} = \frac{۳۰\sqrt{۲}}{۲۰\sqrt{۶}} \Rightarrow \frac{x}{A} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}A$$



۲ مسیر حرکت را رسم کرده بازه‌های زمانی شناخته شده را روی آن می‌نویسیم.

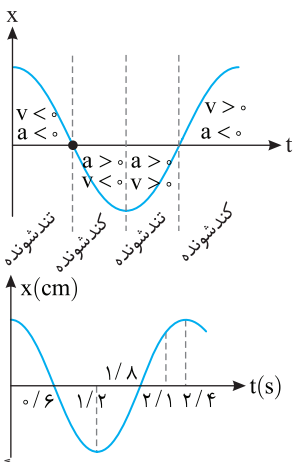


نوسانگر یک نوسان کامل انجام داده (T) سپس به مکان $+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ رفته که زمان حرکت از $+A$ تا $+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$، $\frac{T}{۱۲}$ طول می‌کشد. بنابراین

$$T + \frac{T}{۱۲} = ۲/۶ \Rightarrow \frac{۱۳T}{۱۲} = ۲/۶ \Rightarrow T = ۲/۴s$$

یادآوری هنگام نزدیک شدن نوسانگر به حالت تعادل حرکت تندشونده و اندازهٔ شتاب در حال کاهش است و هنگام دورشدن نوسانگر از حالت تعادل حرکت کندشونده و شتاب در حال افزایش است.

دوره ۲/۴s به‌دست آمده است و نمودار مطابق شکل زیر است.



۱ از لحظهٔ ۰ تا ۰/۶s و از لحظهٔ ۱/۲s تا ۱/۸s که نوسانگر به حالت تعادل نزدیک می‌شود یعنی جمعاً ۱/۲s حرکت تندشونده و گزارهٔ (الف) درست است.

۲ در بازهٔ ۰ تا ۰/۶s و در بازهٔ ۱/۸s تا ۲/۱s شتاب منفی است که جمعاً ۰/۶+۰/۳=۰/۹s خواهد بود و گزارهٔ (ب) نادرست است.

۳ در بازهٔ ۰ تا ۱/۲s سرعت منفی است و گزارهٔ (پ) درست است.

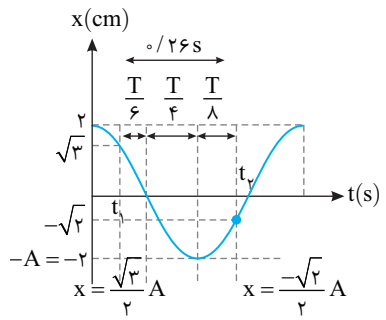
۴ در بازهٔ ۰/۶s تا ۱/۲s (۱/۲−۰/۶=۰/۶s) و در بازهٔ ۱/۸s تا ۲/۱s که نوسانگر به سوی دامنه در حرکت است، اندازهٔ شتاب در حال افزایش است که جمعاً ۰/۶+۰/۳=۰/۹s می‌شود و گزارهٔ (ت) درست است.

B ۱۲۸۷ ۲

دقت کنید با توجه به اینکه دامنه A=۲cm است، مکان‌های $+\sqrt{۳}$cm و $-\sqrt{۲}$cm به ترتیب برابر $x=+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ و $x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ خواهد بود، بنابراین بازهٔ زمانی ۰/۲۶s برابر است با:

$$\Delta t=\frac{T}{۶}+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۸}=\frac{۴T+۶T+۳T}{۲۴}\Rightarrow ۰/۲۶=\frac{۱۳T}{۲۴}\Rightarrow T=۰/۴۸s$$

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{۲\pi}{۰/۴۸}=\omega=\frac{۲۵}{۶}\pi\Rightarrow x=۰/۰۲\cos\frac{۲۵\pi}{۶}t$$



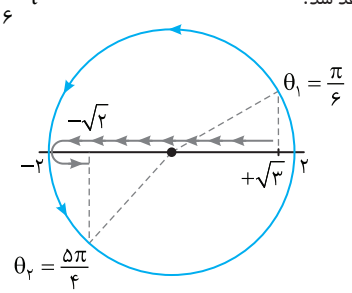
حل به کمک دایره مثلثاتی و فاز حرکت:

با رسم یک دایرهٔ مثلثاتی، کمان معادل مکان‌های $+\sqrt{۳}$cm و $-\sqrt{۲}$cm را روی دایره مشخص می‌کنیم. سپس به کمک آن مسأله را حل می‌کنیم.

$$\omega t_۲-\omega t_۱=\theta_۲-\theta_۱\Rightarrow\omega(\Delta t)=\frac{۵\pi}{۴}-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\omega(\frac{۲۶}{۱۰۰})=\frac{۱۵\pi-۲\pi}{۱۲}$$

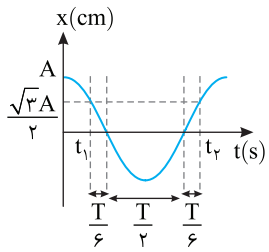
$$\Rightarrow\omega=\frac{۲۵\pi}{۶}\,rad/s$$

معادلهٔ حرکت خواهد شد: $x=۰/۰۲\cos\frac{۲۵\pi}{۶}t$



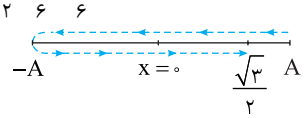
B ۱۲۸۸ ۱

کافی است روی نمودار بازه‌های زمانی شناخته شده از $t_۱$ تا $t_۲$ را مشخص کرده با هم جمع کنیم.



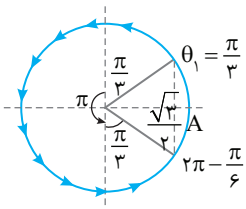
از $\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ تا x=۰، $\frac{T}{۶}$ و از x=۰ تا x=−A، $\frac{T}{۴}$ و از x=−A تا x=۰، $\frac{T}{۶}$ طول $\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ و از x=۰ تا $\frac{T}{۴}$ می‌کشد، بنابراین:

$$t_۲-t_۱=\Delta t=\frac{T}{۶}+\frac{T}{۲}+\frac{T}{۶}=\frac{۵T}{۶}$$



روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت $(\theta=\omega t)$:

در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ مکان نوسانگر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ بوده اما $t_۱$ در ربع اول و $t_۲$ در ربع چهارم مثلثاتی است. فاز را در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ روی دایره مشخص می‌کنیم.



$\theta_۱=\frac{\pi}{۶}$ و $\theta_۲=۲\pi-\frac{\pi}{۶}$ است. در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$، تغییر فاز را روی دایره به‌دست می‌آوریم:

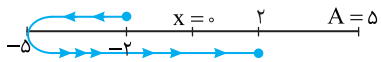
$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{۳}+\pi+\frac{\pi}{۳}=\frac{۵\pi}{۳}$$

یک تناسب ساده و حل مسئله:

$$\begin{array}{c|c}۲\pi & T\\ \hline \frac{۵\pi}{۳} & \Delta t\end{array}\Rightarrow\Delta t=\frac{۵\pi}{۳}\times\frac{T}{۲\pi}\Rightarrow\Delta t=\frac{۵T}{۶}$$

B ۱۲۸۹ ۲

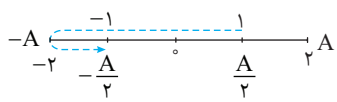
با توجه به نمودار نوسانگر از مکان −۲cm در لحظهٔ $t_۱$ به سوی مکان −۵cm می‌رود و سپس به سوی +۲cm می‌رود. بازهٔ زمانی این حرکت برابر نصف دوره است.



B ۱۲۹۰ ۳

نکته هرگاه در یک بازهٔ زمانی مکان و سرعت نوسانگر قرینه شود، آن بازهٔ زمانی برابر $\frac{T}{۲}$ است.

مسیر حرکت از $t_۱$ تا $t_۲$ را رسم کنید. کاملاً مشخص است که مکان و سرعت نوسانگر در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ قرینه شده است و این یعنی $t_۲-t_۱=\frac{T}{۲}$ بنابراین $۲/۴=\frac{T}{۲}\Rightarrow T=۴/۸s$

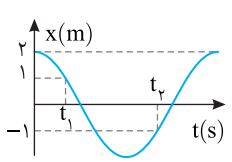


بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{۲\pi}{۴/۸}\Rightarrow\omega=\frac{۵\pi}{۱۲}\,rad/s$$

معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow x=۲\cos\frac{۵\pi}{۱۲}t$$



اکنون مشخص می‌کنیم در چه لحظه‌ای نوسانگر برای چهارمین بار از مکان $+\sqrt{۲}$cm می‌گذرد.

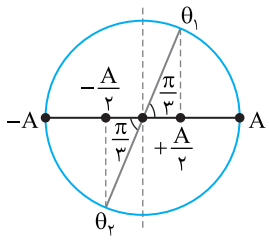
$$+\sqrt{۲}=۲\cos\frac{۵\pi}{۱۲}t\Rightarrow\cos\frac{۵\pi}{۱۲}t=+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\frac{۵\pi}{۱۲}t=(۲k\pi\pm\frac{\pi}{۴})$$

بار اول: $\frac{۵\pi}{۱۲}t=\frac{\pi}{۴}$ ، بار دوم: $\frac{۵\pi}{۱۲}t=۲\pi-\frac{\pi}{۴}$ ، بار سوم: $\frac{۵\pi}{۱۲}t=۲\pi+\frac{\pi}{۴}$

و بار چهارم:

$$\frac{5\pi}{12}t=4\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{5\pi}{12}t=\frac{15\pi}{4}\Rightarrow t=9s$$

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی: کمان متناظر با مکان در t_1 و t_2 برابر است با:



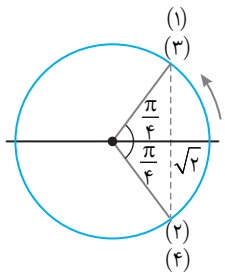
$$1=2\cos\theta_1\xrightarrow{\text{در ربع اول}}\theta_1=\frac{\pi}{3}$$

$$-1=2\cos\theta_2\xrightarrow{\text{در ربع سوم}}\theta_2=\pi+\frac{\pi}{3}$$

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی داریم:

$$\theta_2-\theta_1=\omega t_2-\omega t_1\Rightarrow\omega(t_2-t_1)=\pi\ ,\ \omega(2/4)=\pi\Rightarrow\omega=\frac{5\pi}{12}\,rad/s$$

حال زمانی که نوسانگر برای چهارمین بار از $\sqrt{2}cm$ می‌گذرد را به‌دست می‌آوریم. نوسانگر در نوسان اولش دو بار از $+\sqrt{2}$ می‌گذرد و چهارمین بار در نوسان دوم رخ می‌دهد یعنی:

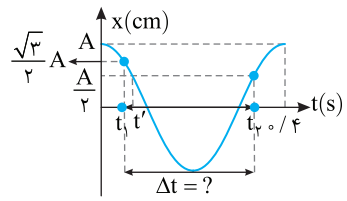


$$\omega t'=2\pi+(2\pi-\frac{\pi}{4})\Rightarrow\frac{5\pi}{12}\times t'=\frac{15\pi}{4}$$

$$\Rightarrow t'=9s$$

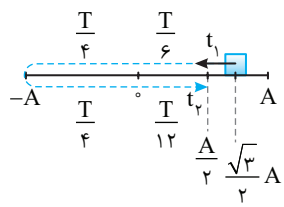
۴ ۱۲۹۱ B

هنگام حرکت نوسانگر از مکان $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ مطابق نمودار برای اولین بار متحرک در لحظهٔ t' از $+\frac{A}{2}$ می‌گذرد



اما در مسأله بیان شده بیشینه زمان در مدت یک دوره از لحظه شروع حرکت، بنابراین بار دومی که نوسانگر از مکان $+\frac{A}{2}$ می‌گذرد مورد نظر است.

با توجه به بازه‌های زمانی روی شکل می‌توان نوشت:



$$\Delta t=\frac{T}{6}+\frac{T}{4}+\frac{T}{4}+\frac{T}{12}$$

$$\Rightarrow\Delta t=\frac{2T+3T+3T+T}{12}$$

$$\Rightarrow\Delta t=\frac{3T}{4}\xrightarrow{T=0/4s}$$

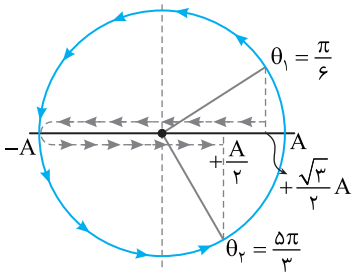
$$\Delta t=0/3s$$

استفاده از دایرهٔ مثلثاتی:

کمان معادل مکان‌های $\frac{+\sqrt{3}}{2}A$ و $+\frac{A}{2}$ را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم.

$$\omega t_2-\omega t_1=\theta_2-\theta_1\Rightarrow\frac{2\pi}{T}(t_2-t_1)=\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{2\pi}{0/4}\Delta t=\frac{9\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 5\pi\Delta t=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\Delta t=0/3s$$



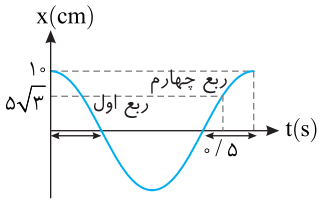
البته با یک تناسب ساده هم می‌توانستیم دوره را حساب کنیم.

2π	$T=0/4s$
$\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$	Δt

$$\Rightarrow\Delta t=0/3s$$

۱ ۱۲۹۲ B

راه‌حل اول: با توجه به شکل در $t=0/5s$ نوسانگر برای دومین بار از مکان $+5\sqrt{3}$ عبور کرده است و ωt در ربع چهارم مثلثاتی است.



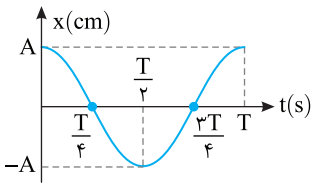
$$x=A\cos\omega t\Rightarrow 5\sqrt{3}=10\cos\omega t$$

$$\Rightarrow\cos\omega t=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\omega t=2\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow\omega t=\frac{11\pi}{6}$$

$$\omega\times 0/5=\frac{11\pi}{6}\Rightarrow\omega=\frac{11\pi}{3}\xrightarrow{\omega=\frac{2\pi}{T}}\frac{2\pi}{T}=\frac{11\pi}{3}\Rightarrow T=\frac{6}{11}s$$

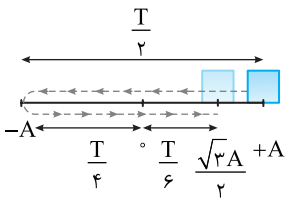
به A و $-A$ نقطهٔ بازگشت گویند، پس با توجه به نمودار روبه‌رو در مدت $\frac{T}{2}$ پس از $t=0$ برای اولین بار به نقطهٔ بازگشت می‌رسیم:

$$\frac{T}{2}=\frac{6}{22}s=\frac{3}{11}s$$



راه‌حل دوم: (راه‌حل مورد علاقهٔ ما) با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده نیز می‌توانیم مسیر حرکت را رسم کرده و به کمک بازه‌های زمانی تست را حل کنیم:

$$\Delta t_{کل}=\frac{T}{2}+\frac{T}{4}+\frac{T}{6}=\frac{11T}{12}=0/5\Rightarrow T=\frac{6}{11}s$$

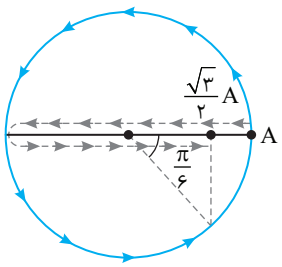


متحرک پس از $\frac{T}{2}$ به نقطهٔ بازگشت خود می‌رسد:

$$\frac{T}{2}=\frac{\frac{6}{11}}{2}=\frac{3s}{11}$$

راه‌حل سوم:

نسبت $\frac{x}{A}$ را حساب می‌کنیم.



$$\frac{x}{A}=\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}A$$

حال با توجه به دایرهٔ مثلثاتی، فاز حرکت خواهد شد:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}A=A\cos\theta\Rightarrow\theta=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$$

بنابراین از $t_1=0$ تا $t_2=0/5s$ کمان دایره مثلثاتی از $\theta_1=0$ به $\theta_2=\frac{11\pi}{6}$ رسیده است:

$$\theta_2-\theta_1=\omega(t_2-t_1)=\frac{11\pi}{6}\xrightarrow{t_2-t_1=0/5}$$

$$\omega=\frac{11\pi}{3}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{11\pi}{3}}\Rightarrow T=\frac{6}{11}s$$

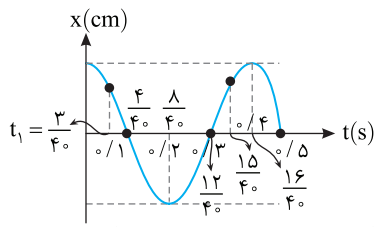
ادامه حل شبیه روش‌های قبلی است.

۲ ۱۲۹۳ B

۱ دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{5T}{4}=0/5\Rightarrow T=0/4\,s$$

۲ اکنون اعداد داده شده را روی نمودار نمایش می‌دهیم.



نکته هرگاه نمودار مکان - زمان حرکت هماهنگ ساده محور زمان را قطع کند $(x=0)$ تندی بیشینه است.

۳ در بازهٔ $t_1=\frac{3}{40}s$ تا $t_2=\frac{15}{40}s$، نمودار دو بار در لحظهٔ $0/1s$ و $0/3s$ محور زمان را قطع کرده بنابراین دو بار تندی بیشینه می‌شود.

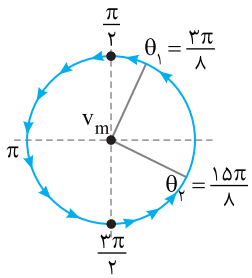
روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت $(\theta=\omega t)$

۱ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{0/4}\Rightarrow\omega=5\pi\ rad/s$$

۲ فاز در لحظهٔ t_1 و t_2 را به‌دست آورده روی دایره نمایش می‌دهیم.

$$\theta=\omega t\Rightarrow\begin{cases}\theta_1=5\pi\times\frac{3}{40}=\frac{3\pi}{8}\ rad\\ \theta_2=5\pi\times\frac{15}{40}=\frac{15\pi}{8}\ rad\end{cases}$$

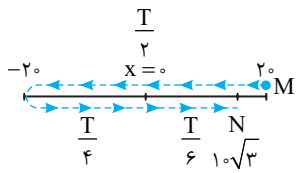


۳ از θ_1 در جهت مثلثاتی به سوی θ_2 می‌رویم. هرگاه از $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ بگذریم تندی بیشینه است. بنابراین دو بار تندی بیشینه می‌شود.

۱ ۱۲۹۴ B

۱ مسیر حرکت را رسم کرده و به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده، مدت زمان حرکت از M تا N را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta t=\frac{T}{2}+\frac{T}{4}+\frac{T}{6}=\frac{11T}{12}\Rightarrow\Delta t=\frac{11\times12}{12}=11\ s$$



۲ مسافت طی شده را از روی مسیر حرکت حساب می‌کنیم:

$$\ell=20+20+20+10\sqrt{3}=60+10\sqrt{3}\Rightarrow\ell=60+10\times1/7=77cm$$

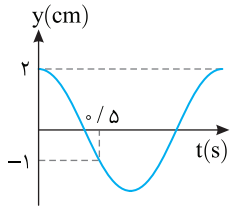
۳ تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{77}{11}=7\ cm/s$$

۱ ۱۲۹۵ B

۱ از روی نمودار دامنهٔ حرکت $2cm$ است.

۲ با توجه به نمودار در $t=0/5s$ برای اولین بار متحرک به مکان $-1\,cm$ می‌رسد؛ در معادلهٔ حرکت زمان را $0/5s$ و مکان $x=-1\,m$ قرار می‌دهیم و بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.



$$x=A\cos\omega t\Rightarrow-1=2\cos\omega(\tfrac{1}{2})\Rightarrow\cos\frac{\omega}{2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\omega}{2}=\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow\omega=\frac{4\pi}{3}\ rad/s$$

۳ معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم:

$$x=0/2\cos\frac{4\pi}{3}t$$

۴ مکان را در لحظهٔ $t=1/25s$ به‌دست می‌آوریم.

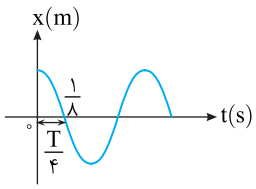
$$x_2=A\cos\omega t\Rightarrow x_2=2\cos(\frac{4\pi}{3}\times1/25)\Rightarrow x_2=2\cos\frac{5\pi}{3}=1\ cm$$

۵ اکنون می‌توان سرعت متوسط را حساب کرد.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{1-(-1)}{1/25-0/5}=\frac{2}{\frac{75}{100}}=\frac{2}{\frac{3}{4}}=\frac{8}{3}\ cm/s$$

۳ ۱۲۹۶ B

۱ با نگاه کردن به نمودار، دوره خواهد شد



$$\frac{T}{4}=\frac{1}{8}\Rightarrow T=\frac{1}{2}s$$

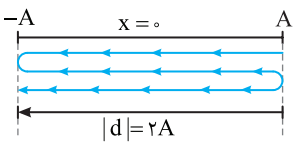
۲ مسافت طی شده در مدت یک دوره $4A$ است، بنابراین:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow24=\frac{4\times A}{\frac{1}{2}}\Rightarrow A=3cm$$

۳ نسبت بازهٔ زمانی به دوره را حساب می‌کنیم

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\Delta t=\frac{3}{2}T=T+\frac{T}{2}$$

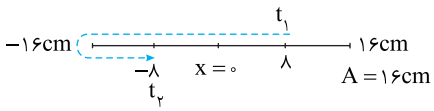
در مدت T نوسانگر به مکان اولیه $x=+A$ بر می‌گردد و در مدت $\frac{T}{2}$ از A به $-A$ می‌رود و اندازهٔ جابه‌جایی آن خواهد شد



$$|d|=2A=2\times3=6cm$$

۳ ۱۲۹۷ B

مسیر حرکت را از روی نمودار رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار دامنه $A=16cm$ است.



مسئلهٔ ساده‌ای است. جابه‌جایی در بازهٔ t_1 تا t_2 برابر $d=-16cm$ و مسافت طی شده برابر است با: $\ell=8+16+8=32cm$

نسبت تندی متوسط به سرعت متوسط خواهد شد:

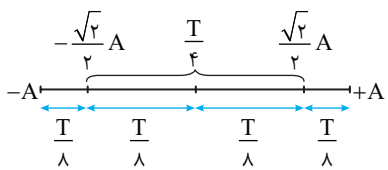
$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\ ,\ v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow\frac{s_{av}}{v_{av}}=\frac{\ell}{d}=\frac{32}{-16}=-2$$

۳ ۱۲۹۸ C

خط فکری سرعت متوسط در یک بازه زمانی معین هنگامی بیشینه است که جابه‌جایی در آن بازه بیشینه باشد. جابه‌جایی بیشینه در یک بازهٔ معین در دو طرف نقطهٔ تعادل رخ می‌دهد زیرا در نقطهٔ تعادل سرعت بیشینه است.

بنابراین شما باید با تقسیم بازهٔ زمانی به دو قسمت و یافتن مکان نوسانگر بیشینه جابه‌جایی آن را حساب کرده و سرعت متوسط بیشینه را به‌دست آورید.

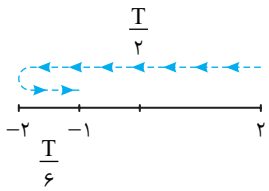
۱ بازه $\frac{T}{4}$ را به دو بازهٔ یکسان $\frac{T}{8}$ در دو طرف نقطهٔ تعادل تقسیم می‌کنیم. با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده مکان در این بازه به صورت زیر است.



۲ در بازهٔ $\frac{T}{4}$ بیشترین اندازه جابه‌جایی برابر است با:

$$|\Delta x|=|-\frac{\sqrt{2}}{2}A-\frac{\sqrt{2}}{2}A|=\sqrt{2}A\Rightarrow|\Delta x|=2\sqrt{2}cm$$

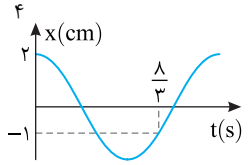
۳ نوسانگر در مدت $\frac{۸}{۳}s$ از مکان $A=۲cm$ به مکان $x=-۱=-\frac{A}{۲}$ می‌رود. بازه‌های زمانی را روی مسیر نوشته، به کمک آن‌ها دوره را به‌دست می‌آوریم.



$$\Delta t=\frac{T}{۲}+\frac{T}{۶}=\frac{۸}{۳}\Rightarrow\frac{۲T}{۳}=\frac{۸}{۳}\Rightarrow T=۴s$$

۴ اندازه سرعت متوسط خواهد شد:

$$|v_{av}|=\frac{|\Delta x|}{\Delta t}=\frac{۲\sqrt{۲}}{\frac{T}{۴}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{\frac{۴}{۴}}=۲\sqrt{۲}cm/s\Rightarrow|v_{av}|=\frac{۲\sqrt{۲}}{۱۰۰}=\frac{\sqrt{۲}}{۵۰}m/s$$



A ۳ ۱۲۹۹

دورهٔ نوسان دستگاه جرم - فنر از رابطهٔ $T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ به دست می‌آید که در آن m جرم وزنهٔ متصل به فنر و k ثابت فنر است. در این صورت دوره با جذر ثابت فنر نسبت وارون دارد و گزینهٔ (۳) درست است.

A ۴ ۱۳۰۰

دوره حرکت هماهنگ سادهٔ جرم - فنر از رابطهٔ $T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ به‌دست می‌آید و بسامد برابر با وارون دوره است، بنابراین:

$$f=\frac{۱}{T}\Rightarrow f=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}\Rightarrow f=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

A ۱ ۱۳۰۱

به کمک رابطهٔ دوره سامانه جرم - فنر، ثابت فنر را به‌دست می‌آوریم:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow\frac{\pi}{۲}=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow\frac{۱}{۱۶}=\frac{۰/۵}{k}\Rightarrow k=۸N/m$$

A ۱ ۱۳۰۲

روش اول: دورهٔ نوسان سامانه جرم - فنر برابر است با:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow T=۲\pi\sqrt{\frac{۰/۴}{۳۶۰}}\Rightarrow T=۲\pi\times\frac{۱}{۳۰}\xrightarrow{\pi=۳}T=۰/۲s$$

جسم در هر ۰/۲s یک نوسان انجام می‌دهد و تعداد نوسان‌ها در ۱s خواهد شد:

$$T=\frac{t}{N}\xrightarrow[T=۰/۲]{t=۱s}۰/۲=\frac{۱}{N}\Rightarrow N=۵$$

روش دوم: تعداد نوسان‌ها در مدت ۱ ثانیه، همان بسامد نوسان است، پس

$$T=\frac{۱}{f}\Rightarrow f=\frac{۱}{T}=\frac{۱}{۰/۲}=۵Hz\Rightarrow N=۵$$

بازی با سؤال **جسمی به جرم ۴۰۰g به فنری با ثابت ۹۰N/m متصل است و روی سطح افقی نوسان می‌کند. این جسم در مدت ۴ دقیقه چند نوسان کامل انجام می‌دهد؟ $(\pi\approx۳)$**

۱) ۶۰ ۲) ۶۰۰ ۳) ۳۰ ۴) ۳۰۰

پاسخ با توجه به رابطهٔ $T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ دوره را به‌دست می‌آوریم:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{۰/۴}{۹۰}}=۲\pi\times\frac{۰/۲}{۳}=۰/۴s$$

حال با توجه به رابطهٔ $T=\frac{t}{N}$ تعداد نوسان کامل در مدت ۴ دقیقه را حساب می‌کنیم.

$$۰/۴=\frac{۴\times۶۰}{N}\Rightarrow N=۶۰۰$$

گزینهٔ ۲

A ۱ ۱۳۰۳

نکته دوره نوسان دستگاه جرم - فنر از رابطهٔ $T=۲\pi\sqrt{m/k}$ به‌دست می‌آید و در تمام حالت‌ها T تنها به جرم و ثابت فنر بستگی دارد. یعنی دورهٔ نوسان دستگاه جرم فنر در تمام امتدادها، افقی، قائم و سطح شیبدار و در تمام فواصل از سطح زمین و در تمام سیارات مقدار ثابتی است.

با توجه به نکتهٔ بیان شده گزینهٔ (۱) پاسخ درست است.

A ۴ ۱۳۰۴

خط فکری در اغلب مسائلی که نسبت خواسته شده است، روابط مورد نیاز را نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم و نسبت‌های داده شده در مسئله را در آن قرار می‌دهیم تا نسبت مورد نظر به‌دست آید. در این جا نیز رابطهٔ دوره برای A و B نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم و مسئله را حل می‌کنیم.

دورهٔ حرکت دستگاه جرم - فنر برابر با $T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ است.

$$T_A=۲\pi\sqrt{\frac{m_A}{k}},T_B=۲\pi\sqrt{\frac{m_B}{k}}\Rightarrow\frac{T_A}{T_B}=\sqrt{\frac{m_A}{m_B}}$$

$$\xrightarrow{f=\frac{۱}{T}}\frac{f_B}{f_A}=\sqrt{\frac{m_A}{m_B}}\xrightarrow{f_B=۲f_A}\sqrt{\frac{m_A}{m_B}}=۲\Rightarrow m_A=۴m_B$$

A ۳ ۱۳۰۵

نکته هرگاه وزنه را از حالت تعادل کشیده و رها کنیم مقدار کشیدگی برابر دامنهٔ حرکت است.

نکته دورهٔ حرکت هماهنگ ساده $T=۲\pi\sqrt{m/k}$ از ویژگی‌های طبیعی نوسانگر است و به دامنه بستگی ندارد. البته به شرط آنکه کشیدگی فنر به حدی نباشد که فنر خاصیت کشسانی خود را از دست بدهد.

در این مسئله جرم و فنرها مشابه بوده بنابراین دوره‌ها یکسان $(T_A=T_B)$ است و مدت زمانی که نوسانگر از دامنه به حالت تعادل می‌رسد برابر $\frac{T}{۴}$ است از این‌رو زمان برگشت برای هر دو وزنه یکسان است. $(t_A=t_B=\frac{T}{۴})$

A ۲ ۱۳۰۶

دورهٔ نوسان دستگاه جرم - فنر $(T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}})$ تنها به جرم وزنه و ثابت فنر بستگی دارد که هیچ‌کدام تغییر نکرده است. بنابراین دوره همچنان ۴s است.

A ۴ ۱۳۰۷

۱ دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{۶۰}{۳۰}\Rightarrow T=۲s$$

نکته دوره نوسان دستگاه جرم - فنر به دامنه بستگی ندارد.

۲ رابطهٔ دوره را در دو حالت نوشته بر هم تقسیم کرده و دوره را در حالت دوم به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{T'}{T}=\frac{۲\pi\sqrt{\frac{m'}{k}}}{۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}\Rightarrow\frac{T'}{۲}=\sqrt{\frac{۴m}{m}}\Rightarrow T'=۴s$$

تعداد نوسانات در مدت ۳ دقیقه برابر است با:

$$N'=\frac{t'}{T'}\Rightarrow N'=\frac{۳\times۶۰}{۴}\Rightarrow N'=۴۵\text{ نوسان}$$

A ۴ ۱۳۰۸

دورهٔ نوسان جرم - فنر را در حالت مقایسه‌ای می‌نویسیم.

$$T=\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow\frac{T_۲}{T_۱}=\sqrt{\frac{m_۲}{m_۱}}\times\sqrt{\frac{k_۱}{k_۲}}$$

فنر تغییر نکرده $(k_۲=k_۱)$ و جرم کاهش یافته $(m_۲=m_۱-۳۲۰)$ و دوره ۴۰ درصد کاهش یافته یعنی $(T_۲=٪۶۰T_۱)$، بنابراین:

$$\frac{۶}{۱۰}=\sqrt{\frac{m_۱-۳۲۰}{m_۱}}\Rightarrow\frac{۳۶}{۱۰۰}=\frac{m_۱-۳۲۰}{m_۱}$$

$$۳۶m_۱=۱۰۰m_۱-۳۲۰۰۰\Rightarrow۳۲۰۰۰=۶۴m_۱\Rightarrow m_۱=۵۰۰g$$

بازی با سؤال دورهٔ دستگاه جرم - فنری T_1 است. اگر جرم متصل به فنر ۲kg افزایش یابد دوره ٪۵۰ زیاد می‌شود. جرم اولیه متصل به فنر چند کیلوگرم بوده است؟ از کتاب درسی

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱/۶ ۴) ۱/۴

پاسخ

۱ جرم متصل به فنر ۲kg افزایش یافته: $m_2=m_1+2$

۲ دوره ٪۵۰ زیاد شده: $T_2=T_1+\frac{50}{100}T_1$

۳ رابطه دوره را در دو حالت نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم و جرم اولیه را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}}\Rightarrow\frac{T_1}{T_1+\frac{50}{100}T_1}=\sqrt{\frac{m_1}{m_1+2}}$$

$$\Rightarrow\frac{T_1}{1/5T_1}=\sqrt{\frac{m_1}{m_1+2}}\Rightarrow\frac{4}{9}=\frac{m_1}{m_1+2}\Rightarrow 9m_1=4m_1+8$$

$$\Rightarrow 5m_1=8\Rightarrow m_1=1/6\,kg$$

گزینهٔ ۳

B ۱۳۰۹ ۴

خط فکری ابتدا بسامد را بر حسب m و k بنویسید. سپس در دو حالت رابطهٔ بسامد را نوشته بر هم تقسیم کنید و یک رابطه بین بسامد دو حالت به‌دست بیاورید. یادتان باشد که جرم کاهش یافته و بسامد افزایش می‌یابد یعنی $f_2-f_1=2/5Hz$ است حال مسئله را حل کنید.

۱ بسامد خواهد شد:

$$f=\frac{1}{T}\xrightarrow{T=2\pi\sqrt{m/k}}f=\frac{1}{2\pi\sqrt{m/k}}\Rightarrow f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

۲ نسبت بسامدها را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{f_2}{f_1}=\frac{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_2}}}{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1}}}\Rightarrow\frac{f_2}{f_1}=\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\Rightarrow\frac{f_2}{f_1}=\sqrt{\frac{400}{100}}\Rightarrow f_2=2f_1$$

۳ اکنون دو معادله و دو مجهول در اختیار دارید و می‌توانید f_1 را به‌دست بیاورید.

$$\begin{cases}f_2-f_1=2/5\\ f_2=2f_1\end{cases}\Rightarrow 2f_1-f_1=2/5\Rightarrow f_1=2/5\,Hz$$

۴ ثابت فنر را حساب می‌کنیم:

$$f_1=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1}}\Rightarrow 2/5=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{0/4}}\Rightarrow 6/25=\frac{1}{4\pi^2}\frac{k}{0/4}$$

$$\Rightarrow k=6/25\times 4\times 10\times 0/4\Rightarrow k=100\,N/m=1\,N/cm$$

A ۱۳۱۰ ۲

خط فکری دورهٔ نوسان دستگاه جرم - فنر برابر $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ است. فنر در هر دو حالت یکسان بوده و $k_1=k_2$ است.

۱ با توجه به دوره در دو حالت مختلف نسبت جرم را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}}\Rightarrow\frac{0/09\pi}{0/1\pi}=\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

۲ جرم ثانویه ۱۹۰ گرم کمتر از جرم اولیه است.

$$\frac{9}{10}=\sqrt{\frac{m_1-190}{m_1}}\Rightarrow\frac{81}{100}=\frac{m_1-190}{m_1}\Rightarrow 81m_1=100m_1-19\times 10^3$$

$$\Rightarrow 19m_1=19\times 10^3\Rightarrow m_1=10^3\,g=1\,kg$$

۳ حال با توجه به دورهٔ اولیه، k را به‌دست می‌آوریم:

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}\Rightarrow 0/1\pi=2\pi\sqrt{\frac{1}{k}}\Rightarrow\frac{1}{20}=\sqrt{\frac{1}{k}}\Rightarrow k=400\,N/m$$

نکته برای تبدیل یکای ثابت فنر داریم:

$$\frac{N}{m}\xrightarrow[\times 100]{\div 100}\frac{N}{cm}$$

بنابراین ثابت فنر برابر $400\,N/m=4\,N/cm$ است.

B ۱۳۱۱ ۲

۱ در انتهای مسیر یعنی وقتی که وزنه در دامنهٔ حرکتش است، $\frac{3}{4}$ جرم آن را جدا کرده‌ایم، بنابراین بیشینه کشیدگی فنر تغییر نمی‌کند و دامنه همان مقدار اولیه خواهد بود $A_2/A_1=1$.

۲ بسامد با دوره نسبت وارون دارد از این‌رو: $f=\frac{1}{T}\xrightarrow{T=2\pi\sqrt{m/k}}f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

۳ نسبت f_2/f_1 خواهد شد:

$$\frac{f_2}{f_1}=\frac{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_2}}}{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1}}}\Rightarrow\frac{f_2}{f_1}=\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\xrightarrow{m_2=m_1-\frac{3}{4}m_1=\frac{1}{4}m_1}\frac{f_2}{f_1}=\sqrt{\frac{m_1}{\frac{m_1}{4}}}\Rightarrow\frac{f_2}{f_1}=2$$

A ۱۳۱۲ ۱

نکته بسامد زاویه‌ای دستگاه جرم - فنر از رابطهٔ $\omega=\sqrt{k/m}$ به‌دست می‌آید که در آن m جرم وزنه و k ثابت فنر است.

با توجه به معادلهٔ حرکت $x=0/02\cos 50\pi t$، بسامد زاویه‌ای این نوسانگر برابر $\omega=50\pi\,rad/s$ است. از این‌رو خواهیم داشت:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\xrightarrow{k=500\,N/m}50\pi=\sqrt{\frac{500}{m}}\Rightarrow 2500\pi^2=\frac{500}{m}$$

$$\Rightarrow m=\frac{1}{5\pi^2}\xrightarrow{\pi^2=10}m=\frac{1}{50}=0/02\,kg=20\,g$$

B ۱۳۱۳ ۳

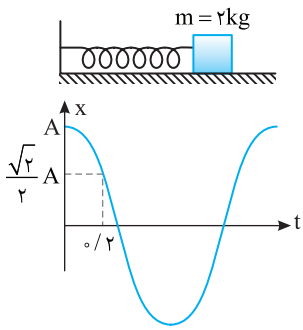
با توجه به فرض مسئله تغییر شناسه تابع کسینوس (تغییر فاز) نوسانگر (ωt) برابر π است از این‌رو می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{matrix}t_1\text{ در }\to\omega t_1\\ t_2\text{ در }\to\omega t_2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\omega t_2-\omega t_1=\omega\Delta t=\pi\Rightarrow\omega\times 0/08=\pi\Rightarrow\omega=\frac{25}{2}\pi\,rad/s$$

با داشتن بسامد زاویه‌ای، ثابت فنر را حساب می‌کنیم:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\frac{25}{2}\pi=\sqrt{\frac{k}{0/8}}\Rightarrow\frac{625}{4}\pi^2=\frac{k}{0/8}\Rightarrow k=1250\,N/m$$

B ۱۳۱۴ ۲



راه حل اول: با توجه به معادلهٔ مکان - زمان داریم:

$$A\cos\omega t\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}A=A\cos\omega t$$

$$\Rightarrow\cos\omega t=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow\omega t=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}\times 0/2=\frac{\pi}{4}$$

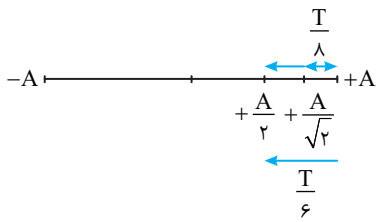
$$\Rightarrow T=1/6\,s$$

حال با توجه به رابطهٔ $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ داریم:

$$1/6=2\pi\sqrt{\frac{2}{k}}\Rightarrow\frac{0/8}{\pi}=\sqrt{\frac{2}{k}}\Rightarrow\frac{0/64}{\pi^2}=\frac{2}{k}\Rightarrow k=\frac{2\pi^2}{0/64}$$

$$\Rightarrow k=\frac{20}{0/64}=31/25\,N/m$$

راه حل دوم: قسمت اول سؤال را می‌توانستیم به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده به‌دست آوریم.



نوسانگر در مدت ۰/۲s از مکان A+ به مکان $\frac{+\sqrt{۲}}{۲}A$ رفته است که بازهٔ زمانی این جابه‌جایی برابر $\frac{T}{۸}$ است بنابراین دوره خواهد شد: $\frac{T}{۸}=۰/۲\Rightarrow T=۱/۶s$

بقیه مراحل شبیه راه حل اول است.

۳ ۱۳۱۵ B

خط فکری دامنهٔ حرکت در دوره نوسانگر تأثیری ندارد با توجه به شکل دامنه $A_۳>A_۲>A_۱$ است. اما برای بررسی دوره با توجه به اینکه فنرها مشابه هستند $(k_۱=k_۲=k_۳)$، شما با توجه به جرم وزنه‌ها باید دوره‌ها را با هم مقایسه کنید.

دوره در حرکت هماهنگ ساده از رابطهٔ $T=۲\pi\sqrt{m/k}$ به‌دست می‌آید و دوره با جذر جرم نسبت مستقیم دارد:

نمودار (الف): $m_۱=m_۲=m_۳\Rightarrow T_۱=T_۲=T_۳$

و نمودار (الف) درست است.

نمودار (ب): $m_۱<m_۲<m_۳\Rightarrow T_۱<T_۲<T_۳$

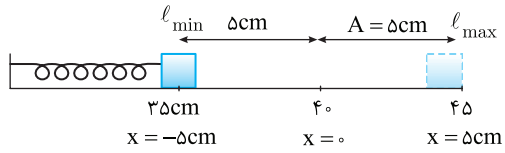
نمودار (ب) درست است.

نمودار (پ): $m_۱>m_۲>m_۳\Rightarrow T_۱>T_۲>T_۳$

نمودار (پ) نیز درست است.

۱ ۱۳۱۶ B

نکته تفاضل بیشینه طول فنر ℓ_{max} و کمینه طول فنر ℓ_{min} برابر طول پاره‌خط مسیر نوسان است. از طرفی طول پاره‌خط مسیر نوسان دو برابر دامنه حرکت است بنابراین می‌توان نوشت: $\ell_{max}-\ell_{min}=۲A$



۱ طول مسیر حرکت $۴۵-۳۵=۱۰cm$ و دامنهٔ حرکت $A=\frac{۱۰}{۲}=۵cm$ است.

۲ بسامد زاویه‌ای خواهد شد: $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{۴۰۰}{۱/۶}}=\sqrt{\frac{۴۰۰۰}{۱۶}}$

$\Rightarrow\omega=\frac{۲۰}{۴}\times\sqrt{۱۰}=۵\sqrt{۱۰}\xrightarrow{\sqrt{۱۰}=\pi}\omega=۵\pi\,rad/s$

۳ معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم: $x=۰/۰۵\cos۵\pi t$

۴ مکان را در لحظه‌های $t_۱=۰$ و $t_۲=۱۵s$ به‌دست می‌آوریم:

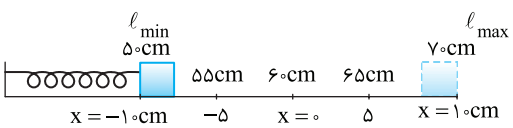
$t_۱=۰\Rightarrow x_۱=+۰/۰۵m\,,\,t_۲=۱۵s\Rightarrow x_۲=-۰/۰۵\,m$

۵ سرعت متوسط را به‌دست می‌آوریم:

$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-۰/۰۵-۰/۰۵}{۱۵-۰}\Rightarrow v_{av}=\frac{-۱}{۱۵۰}m/s$

۴ ۱۳۱۷ B

۱ طول مسیر حرکت را حساب می‌کنیم: $\ell_{max}-\ell_{min}=۷۰-۵۰=۲۰cm$



۲ دامنهٔ حرکت نصف طول پاره‌خط مسیر است: $A=\frac{۲۰}{۲}=۱۰cm$

۳ محل تعادل وسط مسیر با نوسان است. بنابراین وقتی طول فنر ۶۰cm است نوسانگر در حال گذر از محل تعادل $(x=۰)$ است.

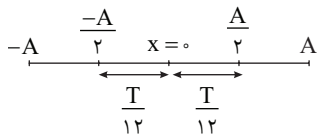
۴ دوره را به‌دست می‌آوریم:

$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow T=۲\pi\sqrt{\frac{۵\times۱۰^{-۲}}{۵۰۰}}\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۱۰۰}=\frac{\pi}{۵۰}s=\frac{۳}{۵۰}=۰/۰۶s$

۵ مکان نوسانگر وقتی طول فنر ۵۵cm است برابر $x=۵۵-۶۰=-۵cm$ و وقتی طول فنر ۶۵cm می‌شود مکان نوسانگر $x=+۵cm$ است.

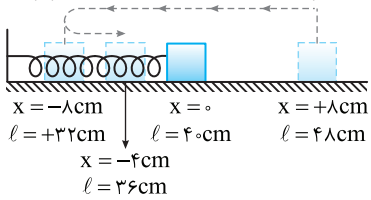
۶ کمترین زمان حرکت از −۵cm تا +۵cm یعنی نوسانگر در مسیر تغییر جهت نداده و مستقیماً از −۵cm به +۵cm برود.

۷ به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده زمان حرکت از −۵cm تا +۵cm خواهد شد: $\Delta t=\frac{T}{۱۲}+\frac{T}{۱۲}=\frac{T}{۶}\Rightarrow\Delta t=\frac{۰/۰۶}{۶}=۰/۰۱s$



۳ ۱۳۱۸ A

نکته مقدار انحراف از حالت تعادل و رها شدن وزنه برابر دامنه نوسان است.



۱ طول طبیعی فنر ۴۰cm است وزنه را کشیده تا طول فنر ۴۸cm شود یعنی طول فنر ۸cm افزایش یابد و وزنه را رها کرده‌ایم از این‌رو دامنه حرکت $A=۸cm$ می‌شود.

۲ بنابراین وزنه بین $L_{max}=۴۸cm$ و $L_{min}=۴۰-۸=۳۲cm$ در حال نوسان است. وقتی طول فنر ۳۶cm است یعنی مکان نوسانگر $x=-۴cm$ خواهد بود.

۳ بسامد زاویه‌ای سامانه را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{۲۵۰}{۰/۱}}=۵۰\,rad/s$

۴ زمان گذر وزنه از مکان $x=-۴cm$ برای دومین بار را به کمک معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده به‌دست می‌آوریم: $x=A\cos\omega t\Rightarrow-۴=۸\cos۵۰t\Rightarrow\cos۵۰t=-\frac{۱}{۲}$

برای بار اول $۵۰t=\frac{۲\pi}{۳}$ و برای دومین بار $۵۰t=\frac{۴\pi}{۳}$ است از این‌رو $t=\frac{۴\pi}{۱۵۰}s$ جواب مسأله است.

$t=\frac{۴\pi}{۱۵۰}\xrightarrow{\pi\approx۳}t=\frac{۴}{۵۰}=۰/۰۸s$

البته با استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده قسمت ۴ حل مسئله بسیار کوتاه‌تر می‌شد.

از $+A$ تا $-A$ $(\frac{T}{۲})$ و از $-A$ تا $-\frac{A}{۲}$ $(\frac{T}{۶})$ طول می‌کشد بنابراین:

$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow۵۰=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۵۰}$

$\Delta t=\frac{T}{۲}+\frac{T}{۶}=\frac{۲T}{۳}\Rightarrow\Delta t=\frac{۲}{۳}\times\frac{۲\pi}{۵۰}\xrightarrow{\pi=۳}\Delta t=\frac{۴}{۵۰}=۰/۰۸s$

۳ ۱۳۱۹ A

نکته مسافتی که نوسانگر در مدت یک دوره طی می‌کند چهار برابر دامنه $(۴A)$ و مسافتی که در مدت نیم دوره $(\frac{T}{۲})$ طی می‌کند دو برابر دامنه $(۲A)$ است.

ابتدا باید دورهٔ حرکت وزنه را حساب کنیم.

$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\xrightarrow{m=۰/۲kg,k=۲۰۰N/m}T=۲\pi\sqrt{\frac{۰/۲}{۲۰۰}}$

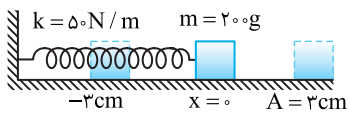
$\xrightarrow{\pi=\sqrt{۱۰}}T=۲\times\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow T=۰/۲s$

مدت زمانی که بیان شده ۰/۱s است و این ۰/۱s نصف دوره است و در مدت نیم دوره مسافت طی شده دو برابر دامنه یعنی $\ell=۲\times۴=۸cm$ است.

B ۱۳۲۰ ۱

نکته هـرگاه وزنـهٔ متصـل به فنـر را از حالت تعادل کشـیده و رهـا کنیم مقدار کشیدگی برابر دامنهٔ نوسان سامانهٔ جرم - فنر است.

۱ دورهٔ حرکت را حساب می‌کنیم:



$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\xrightarrow{\pi=\sqrt{10}}T=2\times\sqrt{10}\times\sqrt{\frac{0/2}{50}}$$

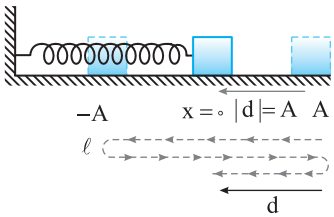
$$T=\frac{2}{5}s\Rightarrow T=0/4s$$

۲ بازهٔ زمانی $\Delta t=0/5s$ را با دوره مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{0/5}{0/4}\Rightarrow\Delta t=\frac{5}{4}T=T+\frac{T}{4}$$

۳ مسیر حرکت وزنـه در مـدت نیـم ثانیـهٔ اول را رسـم می‌کنیم.

با توجه به مسیر حرکت نوسانگر در مـدت $\frac{5}{4}T$ مسـافتی برابـر

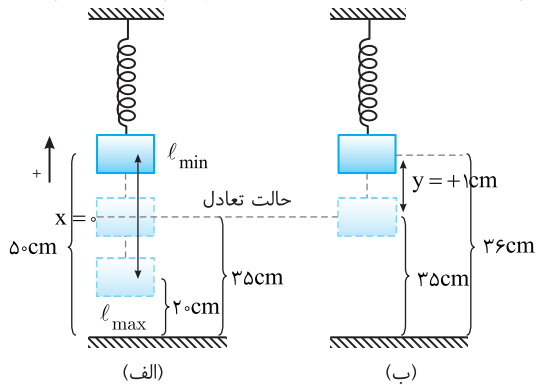


۵A را طی می‌کند و جابه‌جایی آن برابر A است. از این‌رو:

$$\frac{\ell}{d}=\frac{5A}{A}=5$$

B ۱۳۲۱ ۳

خط فکری با اسـتفاده از کمترین و بیشـترین فاصلهٔ وزنه از سـطح میز، طول پاره‌خط مسیر نوسان را حساب کنید و به کمک آن دامنهٔ حرکت را بیابید تا بتوانید فاصلهٔ محل تعادل از سـطح زمین را مشخص کنید با داشتن فاصلهٔ حالت تعادل از سطح زمین، می‌توانید مکان نوسانگر را نسبت به حالت تعادل به دست آورید و در مورد حرکت آن اظهارنظر کنید.



با توجه به شکل (الف)، طول پاره‌خط مسیر حرکت برابر $30-20=50cm$ است.

دامنهٔ حرکت را حساب می‌کنیم: $A=\frac{30}{2}=15cm$

وقتی فاصلهٔ نوسانگر از سطح زمین ۳۶cm است یعنی مکان آن $36-35=1cm$ بالاتر از حالت تعادل است و چون مکان مثبت است شتاب باید منفی یعنی رو به پایین باشد. اما جهت حرکت مشـخص نیسـت و نوسـانگر می‌تواند از این نقطه در حال حرکت رو به بالا یا رو به پایین باشد.

A ۱۳۲۲ ۲

خط فکری باید به سـراغ دینامیک برویم. در حالت تعـادل نیروهای وارد بر وزنه متوازن هستند و نیروی خالص وارد بر جسم صفر است. با توجه به این مطلب، می‌توانید ثابت فنر را حساب کرده، سپس دوره را به دست بیاورید.

پس از آویزان کردن جسم، فنر ۲cm کشیده شده تا به تعادل برسد.

$$kx=mg\Rightarrow k\times\frac{2}{100}=20\Rightarrow k=1000N/m$$

در حالت دوم به فنر وزنه‌ای ۱۰N وصل کرده‌ایم در واقع جرم وزنه برابر ۱kg می‌باشد.

$(mg=10N\Rightarrow m=1kg)$ از این‌رو دوره خواهد داشت:

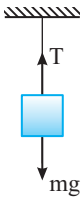
$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\times\sqrt{10}\times\sqrt{\frac{1}{1000}}=2\times\sqrt{10}\times\frac{1}{10\sqrt{10}}=\frac{1}{5}=0/2s$$

B ۱۳۲۳ ۱

خط فکری از حالـت اول که وزنـه را به نخ متصل کرده‌ایـم می‌توانید جرم وزنه را به‌دسـت بیاورید سـپس دوره را حساب کرده و تعداد نوسـان‌ها را در مدت ۳۰s حساب کنید. با داشتن تعداد نوسان‌ها مسافت طی شده در مدت ۳۰s قابل محاسبه است.

به حل مسئله می‌پردازیم:

۱ نیروی وزن با نیروی کشش نخ برابر است از این‌رو:



$$mg=T\Rightarrow mg=2N\Rightarrow m=0/2kg$$

۲ با وصل کردن وزنه به فنر، دورهٔ نوسان وزنه خواهد شد:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\sqrt{10}\times\frac{1}{10\sqrt{10}}\Rightarrow T=0/2s$$

۳ تعداد نوسان‌های وزنه در مدت ۳۰s برابر است با:

نوسان	زمان
۱	۰/۲s
N=?	۳۰

(نوسان) دوره $N=150$

۴ در هر دوره نوسـانگر مسـافتی برابر $4A=4\times5=20cm$ طـی می‌کند، بنابراین

مسافت طی شده در مدت ۱۵۰ دوره (نوسان) خواهد شد: $\ell=150\times\frac{20}{100}=30m$

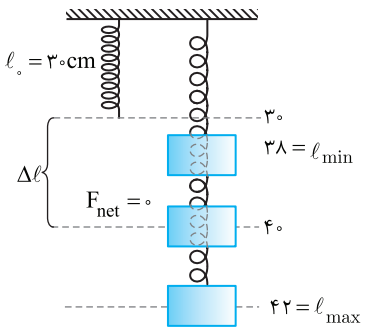
۵ تندی متوسط را حساب می‌کنیم: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{30}{30}=1m/s$

B ۱۳۲۴ ۳

۱ طول پاره‌خط مسیر حرکت را حساب می‌کنیم.

طول مسیر $=\ell_{max}-\ell_{min}\Rightarrow$ طول مسیر $=42-38=4cm$

۲ دامنهٔ حرکت نصف مسیر نوسان است $A=\frac{4}{2}=2cm$



۳ طول فنر در محل تعادل (وسط مسیر) خواهد شد:

طول فنر در حالت تعادل $=38+2=40cm$

۴ تغییر طول فنر از حالت طبیعی تا حالت تعادل را به‌دست می‌آوریم.

$\Delta L=40-30=10cm$

۵ در محل تعادل نیروهای وارد بر وزنه متوازن هسـتند. بر وزنه دو نیرو، یکی وزن و دیگری نیروی کشسانی فنر وارد می‌شود. بنابراین:

$$F_{net}=0\Rightarrow k\Delta\ell=mg\Rightarrow\frac{m}{k}=\frac{\Delta\ell}{g}=\frac{0/1}{10}=\frac{1}{100}$$

۶ اکنـون در رابطهٔ دوره به جای نسـبت $\frac{m}{k}$ می‌توانیم $\frac{1}{100}$ را قـرار داده و دوره را حساب کنیم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{1}{100}}=\frac{\pi}{5}s$$

میانبر در حرکـت سـامانه جـرم - فنـر در امتـداد قائـم دوره را می‌تـوان از رابطـهٔ $T=2\pi\sqrt{\Delta\ell/g}$ به‌دست آورد که در آن $\Delta\ell$ فاصلهٔ محل تعادل از طول طبیعی فنر است.

B ۲ ۱۳۲۵

۱ دوره را حساب می‌کنیم:

$$T=\frac{1}{f}\xrightarrow{f=0/5Hz}T=\frac{1}{0/5}\Rightarrow T=2s$$

۲ اگر تمام کمک‌فنرها را معادل یک فنر فرض کنیم ثابت فنر آن خواهد شد:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\xrightarrow{m=1000kg}2=2\pi\sqrt{\frac{1000}{k}}$$

$$\Rightarrow 4=4\pi^2\times\frac{1000}{k}\xrightarrow{\pi^2=10}k=10^4\,N/m$$

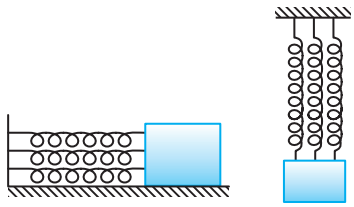
۳ وقتی یک مسافر به جرم ۱۰۰kg سوار ماشین می‌شود، با فرض این‌که به جای تمام فنرها فنری با ثابت $10^4\,N/m$ وجود دارد. تغییر طول فنر خواهد شد:

$$mg=k\Delta\ell\Rightarrow 100\times 10=10^4\Delta\ell\Rightarrow\Delta\ell=0/1m=10\,cm$$

بنابراین ماشین ۱۰cm پایین می‌رود.

C ۴ ۱۳۲۶

نکته هرگاه با n فنر مشابه با ثابت k یک وزنه را به دیواره‌ای متصل کنیم و وزنه را به نوسان درآوریم می‌توانیم n فنر را یک فنر با ثابت nk فرض کنیم.



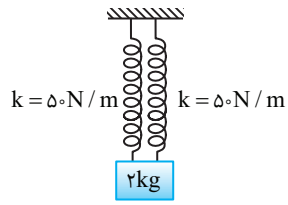
جسم به دو فنر مشابه با ثابت $400\,N/m$ متصل است پس می‌توانیم در نظر بگیریم (مدل‌سازی کنیم) جسم به فنری با ثابت $800\,N/m$ وصل است و دوره را به‌دست بیاوریم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{2}{800}}=\frac{\pi}{10}=0/3s$$

با توجه به رابطهٔ $T=\frac{t}{N}$ زمان ۲۰ نوسان کامل خواهد شد. $0/3=\frac{t}{20}\Rightarrow t=6s$

برای درک این مدل‌سازی به مثال زیر توجه کنید.

مثال: در شکل روبه‌رو افزایش طول هر فنر چند سانتی‌متر است؟



پاسخ: نیروهای وارد بر وزنه را رسم می‌کنیم و نیروی خالص را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$2F_e=W\Rightarrow 2k\Delta\ell=mg\Rightarrow 100\Delta\ell=20\Rightarrow\Delta\ell=0/2m=20cm$$

به قسمت ۲k دقت کنید مانند این است که وزنه به یک فنر با ثابت $k'=2k$ متصل است. در واقع وقتی n فنر با ثابت k را به طور موازی بین دیوار و وزنه متصل کنیم، می‌توان فنرها را یک فنر با یک ثابت $k'=nk$ در نظر گرفت.

A ۲ ۱۳۲۷

خط فکری فرض می‌کنیم که وزن خودرو و سرنشینانش به‌طور یکنواخت روی چهار فنر خودرو تقسیم می‌شود. در این حالت می‌توانیم چهار فنر مشابه با ثابت k را یک فنر با ثابت $k'=4k$ فرض کرده و مسئله را با یک فنر حل کنیم.

۱ ثابت فنر معادل این چهار فنر خواهد شد:

$$k'=4k\Rightarrow k'=4\times 5\times 10^3=2\times 10^4\,N/m$$

۲ بسامد زاویه‌ای برابر است با:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{2\times 10^4}{1800}}=\sqrt{\frac{10^4}{900}}\Rightarrow\omega=\frac{10}{3}\,rad/s$$

A ۲ ۱۳۲۸

یادآوری دورهٔ آونگ ساده برابر با $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ است که در آن L طول آونگ و g میدان گرانش در محل است.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\xrightarrow{\ell=0/25m,\,g=\pi^2}T=2\pi\sqrt{\frac{0/25}{\pi^2}}=2\times 0/5\Rightarrow T=1s$$

A ۴ ۱۳۲۹

دورهٔ آونگ ساده $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ است، از این رو:

$$T^2=4\pi^2\frac{\ell}{g}\Rightarrow T^2\propto\ell$$

بنابراین a می‌تواند T^2 باشد.

A ۲ ۱۳۳۰

۱ ابتدا با توجه به اینکه در مدت ۱min آونگ N=۳۰ نوسان کامل انجام داده، دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{60}{30}\Rightarrow T=2s$$

۲ رابطهٔ دورهٔ آونگ را نوشته و شتاب گرانش در محل را به‌دست می‌آوریم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow 2=2\pi\sqrt{\frac{1/01}{g}}\Rightarrow\frac{1}{\pi}=\sqrt{\frac{1/01}{g}}\Rightarrow\frac{1}{\pi^2}=\frac{1/01}{g}$$

$$\Rightarrow g=1/01\pi^2\xrightarrow{\pi^2\approx 10}g=10/1\,m/s^2$$

بازی با سؤال **طول یک آونگ سادهٔ کم‌دامنه چند سانتی‌متر باشد تا بتواند در مدت ۷۲ ثانیه ۴۰ نوسان کامل انجام دهد؟** $(\pi^2=10\,,\ g=10\,m/s^2)$

کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۸۱ ۲) ۱۶/۲ ۳) ۴۰ ۴) ۸۰

پاسخ ابتدا دورهٔ آونگ را به‌دست می‌آوریم:

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{72}{40}\Rightarrow T=1/8s$$

اکنون طول آونگ را حساب می‌کنیم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow 1/8=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\pi^2}}\Rightarrow 1/8=2\sqrt{\ell}\Rightarrow\ell=0/81m\Rightarrow\ell=81cm$$

گزینهٔ ۱

A ۴ ۱۳۳۱

آونگ در هر ثانیه یک نوسان انجام می‌دهد، بنابراین دورهٔ آن T=1s است. با توجه به رابطهٔ دورهٔ آونگ، طول آن را حساب می‌کنیم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\xrightarrow{g=\pi^2}1=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\pi^2}}\Rightarrow\ell=0/25m\Rightarrow\ell=25cm$$

A ۳ ۱۳۳۲

نکته در هر دوره نوسانگر (آونگ) دو بار طول مسیر نوسان را طی می‌کند.

آونگ در هر دقیقه، ۶۰ بار مسیر AB را طی کرده بنابراین آونگ در هر دقیقه $\frac{60}{2}=30$ نوسان انجام داده است.

دوره را حساب می‌کنیم.

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{60}{30}=2s$$

طول آونگ را به‌دست می‌آوریم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow 2=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\pi^2}}\Rightarrow\ell=1m\Rightarrow\ell=100cm$$

A ۲ ۱۳۳۳

دورهٔ آونگ ساده به جرم آونگ بستگی ندارد، دوره را در دو حالت نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}}\Rightarrow\frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}\Rightarrow\frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{64}{25}}\Rightarrow\frac{T_1}{T_2}=\frac{8}{5}$$

A ۱۳۳۴ ۱

نکته دورهٔ نوسان آونگ ساده به جرم گلولهٔ آن بستگی ندارد و اگر دامنهٔ آن بیش از حد بزرگ نباشد، دوره به دامنه بستگی ندارد.

جرم گلوله m و یا ۳m باشد تأثیری در دوره ندارد. هم‌چنین زاویهٔ انحراف ۲° یا ۴° نیز نقشی در دوره ندارد. نسبت دوره‌ها را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{T'}{T}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}=\sqrt{\frac{\ell'}{\ell}} \xrightarrow{\ell'=4\ell} \frac{T'}{T}=2\Rightarrow\frac{f'}{f}=\frac{1}{2}$$

A ۱۳۳۵ ۲

طول آونگ تغییر نکرده از این‌رو دوره آونگ را در دو محل نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{cases}T_1=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_1}}\\ T_2=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_2}}\end{cases}\Rightarrow\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{g_1}{g_2}}\Rightarrow\frac{5}{4}=\sqrt{\frac{10}{g_2}}\Rightarrow\frac{25}{16}=\frac{10}{g_2}\Rightarrow g_2=6/4\,m/s^2$$

A ۱۳۳۶ ۱

دورهٔ نوسان آونگ از رابطهٔ $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}} \xrightarrow[T_2=\frac{T_1}{2}]{\ell_1=80\,cm} \frac{1}{2}=\sqrt{\frac{\ell_2}{80}}\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{\ell_2}{80}\Rightarrow\ell_2=20\,cm$$

بنابراین باید طول آونگ را به اندازهٔ $80-20=60\,cm$ کاهش دهیم.

بازی با سؤال **دوره آونگ ساده‌ای ۳ ثانیه است. کاهش طول آونگ چه کسری از طول اولیه آونگ شود تا دوره آن یک ثانیه شود؟**

۱) $\frac{3}{9}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{8}{9}$

پاسخ **با توجه به رابطه دورهٔ آونگ طول ثانویه را حساب می‌کنیم.**

$$\begin{cases}T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\\ T'=2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}}\end{cases}\Rightarrow\frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{\ell'}{\ell}}\Rightarrow\frac{1}{3}=\sqrt{\frac{\ell'}{\ell}}\Rightarrow\frac{1}{9}=\frac{\ell'}{\ell}\Rightarrow\ell'=\frac{\ell}{9}$$

تغییر طول آونگ خواهد شد. $\Delta\ell=\ell-\ell'=\ell-\frac{\ell}{9}=\frac{8}{9}\ell$

گزینهٔ ۴

A ۱۳۳۷ ۴

دوره آونگ را نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$T_1=\frac{t}{N_1},T_2=\frac{t}{N_2}\Rightarrow\frac{N_2}{N_1}=\frac{T_1}{T_2}\quad (I)$$

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}}\Rightarrow\frac{T_1}{T_2}=\frac{\sqrt{\ell_1}}{\sqrt{\ell_2}}\quad (II)$$

از رابطه (I) و (II) نتیجه می‌شود که: $\frac{N_2}{N_1}=\frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}$

در حالت اول در مدت t، ۴ نوسان کامل و در حالت دوم در همان مدت t، یک نوسان بیشتر یعنی ۵ نوسان کامل انجام داده است بنابراین: $\frac{4+1}{4}=\sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}\Rightarrow\ell_2=\frac{16}{25}\ell_1$

حال درصد تغییرات طول را به‌دست می‌آوریم: $\frac{\ell_2-\ell_1}{\ell_1}\times100=\frac{-\frac{9}{25}\ell_1}{\ell_1}\times100=-36\%$

که علامت منفی نشان‌دهندهٔ کاهش می‌باشد.

A ۱۳۳۸ ۳

با توجه به فرض مسئله طول آونگ ۱۷cm تغییر کرده و دوره به اندازهٔ ۱۲/۵ درصد افزایش یافته از طرفی $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ است، بنابراین طول آونگ باید زیاد شده باشد. از این رو:

$$T_2=T_1+\frac{12/5}{100}T_1\Rightarrow T_2=\frac{112/5}{100}T_1,\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{\ell_2}{\ell_1}}$$

$$\Rightarrow\frac{112/5}{100}=\sqrt{\frac{\ell_1+17}{\ell_1}}\Rightarrow\frac{9}{8}=\sqrt{\frac{\ell_1+17}{\ell_1}}\Rightarrow\frac{81}{64}=\frac{\ell_1+17}{\ell_1}$$

$$\Rightarrow81\ell_1=64\ell_1+64\times17\Rightarrow17\ell_1=64\times17\Rightarrow\ell_1=64\,cm$$

دورهٔ آونگ خواهد شد: $T_1=2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}\Rightarrow T_1=2\pi\sqrt{\frac{0/64}{\pi^2}}\Rightarrow T_1=2\times0/8=1/6\,s$

B ۱۳۳۹ ۴

۱ با توجه به رابطهٔ دورهٔ آونگ داریم: $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\xrightarrow{f=\frac{1}{T}}f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$

با توجه به رابطهٔ بالا بسامد آونگ به جرم آن بستگی ندارد.

۲ بسامد را در دو حالت نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم و یک معادله برای f_1 و f_2 به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell_1}}}{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell_2}}}\Rightarrow\frac{f_1}{f_2}=\sqrt{\frac{\ell_2}{\ell_1}}\xrightarrow{\ell_2=16\ell_1}\frac{f_1}{f_2}=\sqrt{16}\Rightarrow f_2=\frac{1}{4}f_1\quad (I)$$

۳ f_1 بزرگ‌تر از f_2 بوده و بنا به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$f_1-f_2=60\,Hz\xrightarrow{(I)}f_1-\frac{1}{4}f_1=60\Rightarrow\frac{3}{4}f_1=60\Rightarrow f_1=80\,Hz$$

B ۱۳۴۰ ۳

خط فکری ابتدا با داشتن دوره $T_1=3s$ و $T_2=4s$، طول هر آونگ را بر حسب g حساب کنید، سپس ℓ_1 را با ℓ_2 جمع کرده و دورهٔ آونگ جدید را به‌دست بیاورید.

با توجه به رابطهٔ دورهٔ آونگ $(T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}})$ طول هر آونگ را حساب می‌کنیم:

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}\Rightarrow3=2\pi\frac{\sqrt{\ell_1}}{\sqrt{g}}\Rightarrow\sqrt{\ell_1}=\frac{3\sqrt{g}}{2\pi}\Rightarrow\ell_1=\frac{9g}{4\pi^2}$$

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}\Rightarrow4=2\pi\frac{\sqrt{\ell_2}}{\sqrt{g}}\Rightarrow\sqrt{\ell_2}=\frac{4\sqrt{g}}{2\pi}\Rightarrow\ell_2=\frac{16g}{4\pi^2}$$

حال رابطهٔ دورهٔ آونگ را برای آونگ با طول $\ell_1+\ell_2$ می‌نویسیم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell_1+\ell_2}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{\frac{9g}{4\pi^2}+\frac{16g}{4\pi^2}}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{25g}{4\pi^2}}=2\pi\sqrt{\frac{25}{4\pi^2}}=2\pi\times\frac{5}{2\pi}=5s$$

میانبر اگر دو آونگ با طول‌های ℓ_1 و ℓ_2 به ترتیب با دوره‌های T_1 و T_2 در اختیار داشته باشیم دورهٔ آونگی که طول ریسمان آن $\ell_1+\ell_2$ است از رابطه $T=\sqrt{T_1^2+T_2^2}$ به‌دست می‌آید.

اثبات میانبر:

$$\begin{cases}T_1=2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}\Rightarrow T_1^2=4\pi^2\frac{\ell_1}{g}\\ T_2=2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}\Rightarrow T_2^2=4\pi^2\frac{\ell_2}{g}\end{cases}\xrightarrow[\text{با هم جمع می‌کنیم}]{\text{دو رابطه را}}T_1^2+T_2^2=4\pi^2\left(\frac{\ell_1}{g}+\frac{\ell_2}{g}\right)$$

$$\Rightarrow T_1^2+T_2^2=4\pi^2\left(\frac{\ell_1+\ell_2}{g}\right)\Rightarrow\sqrt{T_1^2+T_2^2}=2\pi\sqrt{\frac{\ell_1+\ell_2}{g}}$$

از طرفی دوره آونگی به طول $\ell_1+\ell_2$ برابر $2\pi\sqrt{\frac{\ell_1+\ell_2}{g}}$ است، بنابراین خواهیم داشت:

$$T=\sqrt{T_1^2+T_2^2}$$

B ۱۳۴۱ ۱

۱ طول هر آونگ را حساب می‌کنیم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{T_1=1/5s}1/5=2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}\Rightarrow\ell_1=\frac{2/25g}{4\pi^2}\\ \xrightarrow{T_2=2/5s}2/5=2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}\Rightarrow\ell_2=\frac{6/25g}{4\pi^2}\end{cases}$$

۲ طول آونگ جدید خواهد شد:

$$\ell_2-\ell_1=\frac{6/25g}{4\pi^2}-\frac{2/25g}{4\pi^2}=\frac{4g}{4\pi^2}\Rightarrow\ell_2-\ell_1=\frac{g}{\pi^2}$$

۳ دوره آونگ جدید را به‌دست می‌آوریم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell_2-\ell_1}{g}}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{g}{\pi^2 g}}\Rightarrow T=2s$$

میانبر هرگاه دو آونگ با طول‌های ℓ_1 و ℓ_2 به ترتیب دارای دورهٔ T_1 و T_2 باشد، دوره آونگی با طول $\ell_2-\ell_1$ برابر $T=\sqrt{T_2^2-T_1^2}$ می‌شود.

B ۱۳۴۲ ۳

۱ با توجه به صورت سؤال دوره یکی از آونگ‌ها دو برابر دیگری است. بنابراین می‌توان به کمک این مطلب یک رابطه بین طول دو آونگ ℓ_1 و ℓ_2 پیدا کنیم.

$$T_2=2T_1\Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}=2\left(2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}\right)\Rightarrow\ell_2=4\ell_1 \quad (I)$$

۲ با توجه به فرض مسئله مجموع ℓ_1 و ℓ_2 برابر طول نخ اولیه یعنی $100cm$ می‌شود.

$$\ell_2+\ell_1=100\ell_1\xrightarrow{(I)}4\ell_1+\ell_1=100cm\Rightarrow\ell_1=20cm$$

۳ آونگی که دورهٔ تناوب بیشتری دارد طولش بزرگ‌تر است، بنابراین:

$$\ell_2=4\ell_1\Rightarrow\ell_2=4\times20=80cm$$

B ۱۳۴۳ ۳

خط فکری با داشتن بسامد آونگ‌ها، طول هر آونگ را حساب کنید تا بتوانید طول آونگی که بسامد آن مجهول (f) است را بیابید.

۱ رابطهٔ بسامد آونگ به صورت زیر است.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\xrightarrow{f=\frac{1}{T}}f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{f=2/5Hz}6/25=\frac{1}{4\pi^2}\frac{g}{\ell}\Rightarrow\ell=\frac{g}{25\pi^2}\\ \xrightarrow{f_1=10Hz}100=\frac{1}{4\pi^2}\frac{g}{\ell_1}\Rightarrow\ell_1=\frac{g}{400\pi^2}\\ \xrightarrow{f_2=5Hz}25=\frac{1}{4\pi^2}\frac{g}{\ell_2}\Rightarrow\ell_2=\frac{g}{100\pi^2}\end{cases}$$

۲ مجموع طول سه آونگ جدید برابر طول ریسمان آونگ اول است، بنابراین:

$$\ell=\ell_1+\ell_2+\ell_3\Rightarrow\frac{g}{25\pi^2}=\frac{g}{400\pi^2}+\frac{g}{100\pi^2}+\ell_3$$

$$\frac{g}{25\pi^2}-\frac{g}{400\pi^2}-\frac{g}{100\pi^2}=\ell_3\Rightarrow\frac{16g-g-4g}{400\pi^2}=\ell_3\Rightarrow\ell_3=\frac{11g}{400\pi^2}$$

۳ بسامد f را حساب می‌کنیم.

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\frac{11g}{400\pi^2}}}\Rightarrow f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{400\pi^2}{11}}\Rightarrow f=\frac{20\pi}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{11}}$$

$$\Rightarrow f=\frac{10}{\sqrt{11}}\Rightarrow f=\frac{10\sqrt{11}}{11}Hz$$

میانبر اگر دوره آونگ T باشد و آن را به n قسمت تقسیم کنیم و با هر قسمت یک آونگ با دوره T_1 ، T_2 ، ... و T_n بسازیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$T=\sqrt{T_1^2+T_2^2+\cdots+T_n^2}$$

B ۱۳۴۴ ۲

خط فکری طول آونگ از ما خواسته شده، دورهٔ آونگ دو برابر دورهٔ نوسان جرم - فنر است. جرم و ثابت فنر را داریم. بنابراین شما ابتدا دورهٔ سامانهٔ جرم - فنر را بیابید، سپس آن را دو برابر کرده دورهٔ آونگ را به‌دست آورده و از آنجا طول آونگ را حساب کنید.

۱ دورهٔ سامانهٔ جرم - فنر را حساب می‌کنیم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\xrightarrow[k=12/5N/cm=1250\frac{N}{m}]{m=0/5kg}T=2\pi\sqrt{\frac{0/5}{1250}}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{1}{2500}}$$

$$\Rightarrow T=\frac{2\pi}{50}\Rightarrow T=\frac{\pi}{25}s$$

۲ دورهٔ آونگ دو برابر T است.

$$T'=2T=2\times\frac{\pi}{25}\Rightarrow T'=\frac{2\pi}{25}s$$

۳ طول آونگ را به‌دست می‌آوریم.

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow\frac{2\pi}{25}=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{10}}\Rightarrow\frac{1}{25}=\sqrt{\frac{\ell}{10}}\Rightarrow\frac{1}{625}=\frac{\ell}{100}\Rightarrow\ell=0/16m=16cm$$

B ۱۳۴۵ ۴

خط فکری کافی است از روی معادلهٔ حرکت $x=0/04\cos\frac{\pi}{3}t$ ، بسامد زاویه‌ای ω را مشخص کرده و به کمک رابطهٔ $\omega=\sqrt{g/\ell}$ طول آونگ را به‌دست آورد.

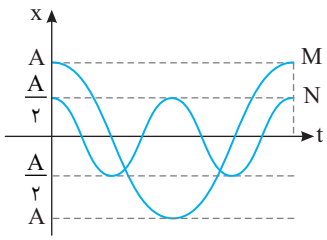
بسامد زاویه‌ای این آونگ $\omega=\frac{\pi}{3}\frac{rad}{s}$ است، بنابراین:

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}\Rightarrow\frac{\pi}{3}=\sqrt{\frac{g}{\ell}}\Rightarrow\frac{\pi^2}{9}=\frac{\pi^2}{\ell}\Rightarrow\ell=9m$$

B ۱۳۴۶ ۳

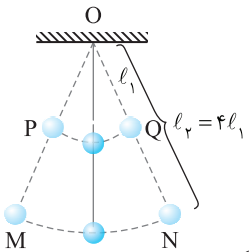
دامنه آونگ در دوره آن تأثیری ندارد. به نمودار دقت کنید. دوره نوسان آونگ M دو برابر دوره نوسان آونگ N است. بنابراین دوره آونگ را نوشته و رابطه ℓ_M با ℓ_N را به‌دست می‌آوریم.

$$T_M=2T_N\Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{\ell_M}{g}}=2\left(2\pi\sqrt{\frac{\ell_N}{g}}\right)\Rightarrow\ell_M=4\ell_N$$



B ۱۳۴۷ ۲

خط فکری باید آونگ را در دو حالت مطابق شکل رسم کنید تا بتوانید دامنهٔ حرکت را از روی شکل به کمک هندسه و مثلثات به‌دست بیاورید. سپس دورهٔ جدید آونگ را به‌دست بیاورید تا مشخص شود کدام نمودار درست است.



با توجه به شکل و تشابه مثلث‌های OPQ و OMN، خواهیم داشت:

$$\frac{MN}{PQ}=\frac{\ell_2}{\ell_1}=4\Rightarrow MN=4PQ\xrightarrow{\text{طول مسیر دو برابر دامنه است}}A_2=4A_1$$

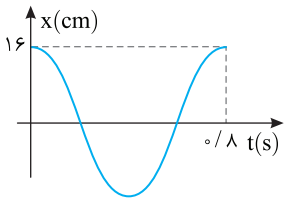
بنابراین دامنهٔ آونگ جدید خواهد شد:

$$A_2=4\times4=16cm$$

دورهٔ آونگ $0/4s$ است. دورهٔ آونگ جدید را حساب می‌کنیم.

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}}\Rightarrow\frac{T_2}{0/4}=\sqrt{\frac{\ell_2}{\ell_1}}\Rightarrow\frac{T_2}{0/4}=\sqrt{\frac{4\ell_1}{\ell_1}}\Rightarrow T_2=0/8s$$

از این‌رو نمودار به شکل روبه‌روست و گزینهٔ (۲) درست است.



۳ ۱۳۴۸ A

نسبت دورهٔ آونگ‌ها را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{T_B}{T_A}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell_B}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell_A}{g}}}\Rightarrow\frac{T_B}{T_A}=\sqrt{\frac{\ell_B}{\ell_A}}\xrightarrow[\ell_A=45cm]{\ell_B=20cm}\frac{T_B}{T_A}=\sqrt{\frac{20}{45}}$$

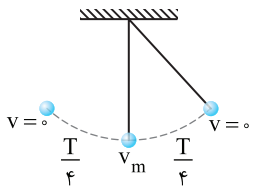
$$\Rightarrow\frac{T_B}{T_A}=\sqrt{\frac{4}{9}}\Rightarrow\frac{T_B}{T_A}=\frac{2}{3}\qquad(I)$$

نسبت تعداد نوسان‌ها در یک مدت معین را حساب می‌کنیم.

$$\frac{T_B}{T_A}=\frac{\frac{t}{N_B}}{\frac{t}{N_A}}\Rightarrow\frac{T_B}{T_A}=\frac{N_A}{N_B}\xrightarrow[(I)]{N_B=9}\frac{2}{3}=\frac{N_A}{9}\Rightarrow N_A=6$$ نوسان

۱ ۱۳۴۹ A

۱ تندی آونگ هنگام عبور از مرکز نوسان (حالت قائم) بیشینه است و زمانی که طول می‌کشد تا آونگ از انتهای مسیر به مرکز نوسان برسد $\frac{T}{4}$ است و زمانی که طول می‌کشد تا آونگ از یک انتهای مسیر به انتهای دیگر برود $\frac{T}{2}$ ثانیه است، بنابراین با توجه به فرض مسئله می‌توان نوشت:



$$\frac{T_A}{4}=\frac{T_B}{2}\Rightarrow T_A=2T_B\quad(1)$$

۲ دورهٔ آونگ $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ است، دوره را در رابطهٔ (۱) جای‌گذاری می‌کنیم.

$$2\pi\sqrt{\frac{\ell_A}{g}}=2(2\pi)\sqrt{\frac{\ell_B}{g}}\Rightarrow\ell_A=4\ell_B$$

۴ ۱۳۵۰ B

دورهٔ آونگ ساده برابر با $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ است. از طرفی به ازای هر ۵ نوسان آونگ A، آونگ B، ۳ نوسان می‌کند، در این صورت:

۱ نسبت دوره‌ها را از روی تعداد نوسان‌های دو آونگ به‌دست می‌آوریم.

$$T_A=\frac{t}{N_A},T_B=\frac{t}{N_B}\Rightarrow\frac{T_A}{T_B}=\frac{N_B}{N_A}\Rightarrow\frac{T_A}{T_B}=\frac{3}{5}\quad(I)$$

۲ نسبت دوره‌ها بر حسب طول آونگ‌ها خواهد شد.

$$\begin{cases}T_A=2\pi\sqrt{\frac{\ell_A}{g}}\\T_B=2\pi\sqrt{\frac{\ell_B}{g}}\end{cases}\Rightarrow\frac{T_A}{T_B}=\sqrt{\frac{\ell_A}{\ell_B}}\quad(II)$$

۳ از رابطهٔ (I) در رابطهٔ (II) جای‌گذاری کرده و نسبت طول‌ها را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{3}{5}=\sqrt{\frac{\ell_A}{\ell_B}}\Rightarrow\frac{\ell_A}{\ell_B}=\frac{9}{25}\Rightarrow\ell_B=\frac{25}{9}\ell_A$$

۴ با توجه به فرض مسئله $(\ell_B-\ell_A=48cm)$ اکنون می‌توان ℓ_A را به‌دست آورد.

$$\frac{25}{9}\ell_A-\ell_A=48\Rightarrow\frac{16\ell_A}{9}=48\Rightarrow\ell_A=27cm$$

۱ ۱۳۵۱ B

۱ دورهٔ آونگ را به‌دست می‌آوریم: $T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{36}{20}\Rightarrow T=1/8s$

۲ طول آونگ را حساب می‌کنیم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\xrightarrow{g=\pi^2}1/8=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\pi^2}}\Rightarrow1/8=2\sqrt{\ell}$$

$$0/9=\sqrt{\ell}\Rightarrow\ell=0/81m=81cm$$

۳ طول آونگ را ۱۷cm کاهش داده‌ایم. $\ell'=81-17=64cm$

۴ دورهٔ جدید آونگ خواهد شد:

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}}\Rightarrow T'=2\pi\sqrt{\frac{0/64}{\pi^2}}\Rightarrow T'=1/6s$$

۵ تعداد نوسانات در مدت ۴۰s برابر است با:

$$T'=\frac{t'}{N'}\Rightarrow1/6=\frac{40}{N'}\Rightarrow N'=\frac{40}{1/6}\Rightarrow N'=25$$ نوسان

۴ ۱۳۵۲ B

خط فکری اگر بسامد آونگی را که طولش بلندتر است f_1 و بسامد دیگری را f_2 بنامیم، چون دورهٔ آونگ $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ با جذر طول نسبت مستقیم دارد بنابراین آونگ بلندتر، دوره‌اش بیشتر و در نتیجه بسامد آن کوچک‌تر است $(\downarrow f=\frac{1}{T})$ یعنی $f_1<f_2$ است، بنابراین نسبت $\frac{f_1}{f_2}=0/9$ است. حال مسئله را حل می‌کنیم.

۱ نسبت دوره‌ها را به کمک نسبت بسامدها به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{\frac{1}{T_1}}{\frac{1}{T_2}}\Rightarrow\frac{f_1}{f_2}=\frac{T_2}{T_1}\Rightarrow\frac{T_2}{T_1}=0/9\Rightarrow T_2=0/9T_1\qquad(I)$$

۲ آونگی که طول کوتاه‌تری دارد و بسامدش بیشتر است تعداد نوسانات آن در یک مدت معین بیشتر است بنابراین: $N_2=N_1+3$

۳ از رابطه $N=\frac{t}{T}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{54}{T_2}=\frac{54}{T_1}+3\Rightarrow\frac{54T_1-54T_2}{T_1T_2}=3\Rightarrow18(T_1-T_2)=T_1T_2$$

$$\xrightarrow{T_2=0/9T_1}18(T_1-0/9T_1)=0/9T_1T_1$$

$$\Rightarrow18(0/1T_1)=0/9T_1^2\Rightarrow T_1=\frac{1/8}{0/9}=2s$$

بازی با سؤال **دو آونگ سادهٔ A و B را با هم با دامنهٔ کم به نوسان درمی‌آوریم. پس از گذشت ۲ دقیقه و ۲۴ ثانیه آونگ B، ۱۰ نوسان کامل از آونگ A جلو می‌افتد. اگر زمان نوسان کامل آونگ A برابر با ۱/۸ ثانیه باشد، دورهٔ آونگ B چند ثانیه می‌باشد؟**

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۴ ۳) ۱/۶ ۴) ۲

پاسخ آونگ B در مدت ۲ دقیقه و ۲۴s یعنی در مدت ۱۴۴s از آونگ A، ۱۰ نوسان جلو افتاده است بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$N_B=N_A+10\Rightarrow\frac{t}{T_B}=\frac{t}{T_A}+10$$

$$\xrightarrow{t=144s}\frac{144}{T_B}=\frac{144}{1/8}+10\Rightarrow\frac{144}{T_B}=80+10\Rightarrow T_B=\frac{144}{90}=1/6s$$

گزینهٔ ۳

۳ ۱۳۵۳ B

نکته میدان گرانش در استوا کمترین مقدار و در قطب‌ها بیشترین مقدار است، در واقع زمین کرهٔ کامل نیست و شعاع استوایی زمین از شعاع قطبی آن بیشتر است و هرچه از استوا به سمت قطب‌ها برویم، g در حال افزایش است.

اگر از استوا به مدار ۴۵° جغرافیایی برویم یعنی از استوا به سوی قطب برویم، g افزایش می‌یابد و دورهٔ آونگ $(T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}})$ کمی کوچک‌تر می‌شود.

B ۱۳۵۴ ۲

خط فکری ابتدا میدان گرانش در ارتفاع R_e (R_e شعاع کرهٔ زمین) از سطح زمین را به‌دست بیاورید، سپس به سراغ به دست آوردن دوره بروید.

۱ شتاب گرانش در هر نقطه برابر $g=GM/R^2$ است که R فاصله از مرکز زمین است، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} \text{در سطح زمین}: g_0=G\dfrac{M}{R_e^2} \\ \text{در ارتفاع } R_e: g'=G\dfrac{M}{(R_e+R_e)^2}\Rightarrow g'=G\dfrac{M}{4R_e^2} \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{g'}{g}=\frac{G\frac{M}{4R_e^2}}{G\frac{M}{R_e^2}}\Rightarrow \frac{g'}{g}=\frac{1}{4}$$

۲ اکنون می‌توان نسبت دوره‌ها را به‌دست آورد.

$$\begin{cases} T=2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}} \\ T'=2\pi\sqrt{\dfrac{\ell'}{g'}} \end{cases}\Rightarrow \frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{\ell'}{\ell}}\times\sqrt{\frac{g}{g'}}\Rightarrow \frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{9\ell}{\ell}}\times\sqrt{4}\Rightarrow \frac{T'}{T}=3\times 2\Rightarrow T'=6T$$

B ۱۳۵۵ ۴

وقتی حالت بی‌وزنی وجود دارد، اگر آونگ ساعت را منحرف کنیم به جای اول باز نمی‌گردد یعنی اصولاً آونگ نوسان نمی‌کند در نتیجه ساعت آونگ‌دار نیز که عقربه‌هایش در اثر نوسان آونگ حرکت می‌کنند، کار نخواهد کرد.

A ۱۳۵۶ ۱

دورهٔ حرکت آونگ $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ و دورهٔ نوسان دستگاه جرم- فنر $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ است، در این صورت دورهٔ آونگ به شتاب گرانش (g) بستگی دارد اما دورهٔ نوسان دستگاه جرم- فنر به شتاب گرانش (g) بستگی ندارد. بنابراین با دور شدن از سطح زمین و کاهش شتاب گرانش $(\downarrow g=G\frac{M}{r^{2}\uparrow})$ دورهٔ حرکت آونگ افزایش می‌یابد اما دورهٔ حرکت دستگاه جرم- فنر ثابت می‌ماند.

B ۱۳۵۷ ۴

یادآوری هرگاه دمای یک ریسمان یا میله فلزی با طول اولیه ℓ_1 و ضریب انبساط طولی α به اندازهٔ $\Delta\theta$ افزایش یابد، طول ثانویه آن خواهد شد $(\ell_2=\ell_1(1+\alpha\Delta\theta))$.

دوره آونگ را در دو حالت نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{cases} T_1=2\pi\sqrt{\dfrac{\ell_1}{g}} \\ T_2=2\pi\sqrt{\dfrac{\ell_2}{g}} \end{cases}\Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{\ell_2}{\ell_1}}\Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{\ell_1(1+\alpha\Delta\theta)}{\ell_1}}\Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\sqrt{1+\alpha\Delta\theta}$$

دمای اولیه $0^\circ C$ بوده و دمای نهایی θ است، از این‌رو $\Delta\theta=\theta$ بنابراین:

$$\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{1+\alpha\theta}$$

A ۱۳۵۸ ۱

نکته هرگاه دوره آونگ ساعت آونگ‌دار افزایش یابد، ساعت کندتر کار کرده و عقب می‌ماند و هرگاه دوره کاهش یابد ساعت تندتر کار کرده و جلو می‌افتد.

نکته شتاب گرانش g در استوا از بقیه نقاط دیگر سطح زمین کمتر است.

اگر ساعت را از تهران به استوا ببریم با توجه به اینکه در استوا شتاب گرانش از بقیهٔ نقاط سطح کرهٔ زمین کمتر است، دورهٔ نوسان آونگ افزایش می‌یابد $(\uparrow T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g\downarrow}})$ و ساعت کندتر کار کرده و عقب می‌ماند. بنابراین گزارهٔ (الف) درست است.

با افزایش دما، طول آونگ فلزی افزایش می‌یابد و دوره آونگ افزایش یافته و ساعت عقب می‌ماند بنابراین گزارهٔ (ب) نیز درست است.

C ۱۳۵۹ ۲

دورهٔ آونگ ۲s بوده و ۰/۲s دوره کاهش می‌یابد، در این صورت دوره $T'=2-0/2=1/8s$ می‌شود. در این صورت تعداد نوسان‌های آونگ افزایش می‌یابد و باعث می‌شود ساعت تندتر کار کند و جلو بیفتد. یعنی در هر ۱/۸s، ساعت ۰/۲s جلو می‌افتد. با توجه به این مطلب میزان جلو افتادن ساعت در مدت ۲۴h با یک تناسب ساده به‌دست می‌آید.

۱/۸s	۰/۲s
۲۴h	x

$$\Rightarrow x=\frac{8}{3}h=160\min$$

B ۱۳۶۰ ۳

دورهٔ آونگ ساده $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ است و در سطح کرهٔ ماه دورهٔ آونگ طولانی‌تر می‌شود و دوره در سطح کره ماه خواهد شد:

$$\frac{T_م}{T_ز}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_م}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_ز}}}=\sqrt{\frac{g_ز}{g_م}}\Rightarrow \frac{T_م}{T_ز}=\sqrt{\frac{g_ز}{\frac{1}{6}g_ز}}=\sqrt{6}\Rightarrow T_م=\sqrt{6}T_ز$$

چرخش عقربه‌های ساعت آونگ‌دار به کمک نوسان آونگ صورت می‌گیرد. دورهٔ چرخش عقربهٔ ساعت‌شمار در سطح زمین ۱۲ ساعت است، بنابراین دورهٔ چرخش عقربهٔ ساعت‌شمار در سطح کرهٔ ماه برابر است با: $12\times\sqrt{6}=12\times 2/45=29h$

B ۱۳۶۱ ۲

۱ طول آونگ را در حالت اول به‌دست می‌آوریم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow 2=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow 1=\pi^2\left(\frac{\ell}{\pi^2}\right)\Rightarrow \ell=1m$$

۲ بنابراین طول آونگ جدید برابر است با $\ell'=100-19=81cm$ و دورهٔ آونگ جدید ساعت برابر خواهد شد با:

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}}\Rightarrow T'=2\pi\sqrt{\frac{0/81}{\pi^2}}\Rightarrow T'=1/8s$$

۳ در مدت ۱/۸s ساعت به اندازهٔ $2-1/8=0/2s$ جلو می‌افتد، پس در مدت یک شبانه‌روز $(86400s)$ مقدار مدتی که جلو می‌افتد برابر است با:

۱/۸	۰/۲
۸۶۴۰۰	Δt

$\Rightarrow \Delta t=9600s=$ ۲ ساعت و ۴۰ دقیقه

C ۱۳۶۲ ۲

خط فکری باید در حل این مسئله به کمک چگالی و جرم سیاره، شتاب گرانش در سطح سیاره را برحسب شتاب گرانش در سطح زمین به‌دست بیاورید. سپس دورهٔ آونگ را در سطح سیاره حساب کنید تا بتوانید مقدار عقب‌افتادگی یا جلوافتادگی ساعت را بیابید.

۱ با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$\rho_p=3\rho_e\Rightarrow \frac{M_p}{V_p}=3\frac{M_e}{V_e}\xrightarrow{M_p=4M_e} V_e=8V_p$$

$$\xrightarrow{V=\frac{4}{3}\pi R^3} R_e=2R_p$$

۲ اکنون با داشتن نسبت جرم‌ها و نسبت شعاع‌ها نسبت میدان گرانش در سطح سیاره (g_p) به میدان گرانش در سطح زمین (g_e) را حساب می‌کنیم.

$$g_p=G\frac{M_p}{R_p^2}, g_e=G\frac{M_e}{R_e^2}\Rightarrow \frac{g_p}{g_e}=\frac{M_p}{M_e}\times\frac{R_e^2}{R_p^2}=4\times 4=16\Rightarrow g_p=16g_e$$

۳ دورهٔ آونگ در سطح زمین 2s است. دوره را در سطح سیاره به‌دست می‌آوریم.

$$T_p=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_p}}, T_e=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_e}}\Rightarrow \frac{T_p}{T_e}=\sqrt{\frac{g_e}{g_p}}\Rightarrow \frac{T_p}{2}=\sqrt{\frac{1}{16}}\Rightarrow T_p=\frac{1}{2}s$$

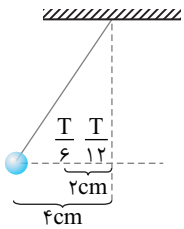
۴ دورهٔ آونگ ساعت کوتاه شده است، بنابراین ساعت تندتر کار می‌کند و جلو می‌افتد. ساعت هر ۰/۵s را به اشتباه 2s نشان می‌دهد یعنی در هر ۰/۵s، ساعت ۱/۵s جلو می‌افتد. در مدت یک شبانه‌روز یعنی ۲۴ ساعت:

۰/۵s	۱/۵s
۲۴h	Δt

$$\Rightarrow \Delta t=72h$$

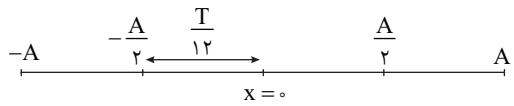
۴ ۱۳۶۳ C

۱ بیشترین انحراف آونگ از راستای قائم همان دامنه نوسان آونگ است، بنابراین دامنه نوسان $A=۴cm$ است.



۲ مکان ۲cm یعنی: $\frac{x}{A}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{A}{۲}$

یادآوری بازهٔ زمانی که طول می‌کشد تا نوسانگر از مکان $\frac{A}{۲}$ به مرکز نوسان برسد برابر $\frac{T}{۱۲}$ است.



۳ با توجه به فرض مسئله دوره را حساب می‌کنیم: $\frac{T}{۱۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow T=۳s$

۴ طول آونگ را به‌دست می‌آوریم.

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow ۳=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow ۳=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{\pi^۲}}\Rightarrow \ell=\frac{۹}{۴}m$$

بنابراین طول نخ برابر $\frac{۹}{۴}\times ۱۰۰=۲۲۵cm$ می‌باشد.

۴ ۱۳۶۴ A

دوره آونگ به مقدار انحراف آن بستگی ندارد، بنابراین وقتی انحراف آن را از ۲° به ۵° تغییر می‌دهیم، دوره تغییری نمی‌کند و گزینه (۱) و (۲) نادرست است.

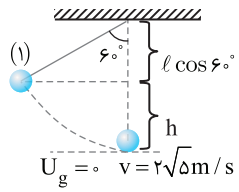
تندی گلوله آونگ هنگام گذر از راستای قائم (حالت تعادل) بیشینه و برابر $v_m=A\omega$ است، بسامد زاویه‌ای در دو حالت برابر است (طول آونگ‌ها برابر است)، اما دامنه در حالت دوم بزرگ‌تر بوده و تندی آونگ در حالت دوم بزرگ‌تر است بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.

۱ ۱۳۶۵ B

خط فکری باید به سراغ کار و انرژی برویم و ابتدا به کمک پایستگی انرژی مکانیکی، طول آونگ را به‌دست بیاوریم، سپس با داشتن طول آونگ، دوره را حساب کرد.

۱ پایین‌ترین نقطهٔ مسیر حرکت را مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی فرض می‌کنیم.

۲ ارتفاع گلولهٔ آونگ را وقتی ۶۰° منحرف می‌شود برحسب طول آونگ حساب می‌کنیم:



$$h=\ell-\ell\cos ۶۰^\circ\Rightarrow h=\ell-\frac{\ell}{۲}\Rightarrow h=\frac{\ell}{۲}$$

۳ پایستگی انرژی مکانیکی را می‌نویسیم:

$$E_۱=E_۲\Rightarrow U_۱+K_۱=U_۲+K_۲\Rightarrow mgh+۰=۰+\frac{۱}{۲}mv^۲$$

$$gh=\frac{۱}{۲}v^۲\Rightarrow ۱۰\times(\frac{\ell}{۲})=\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۵})^۲\Rightarrow \ell=۲m$$

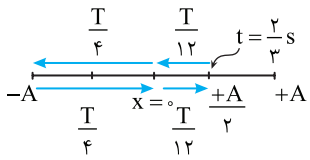
۴ دورهٔ آونگ را حساب می‌کنیم: $T=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\xrightarrow{\pi^۲=g}T=۲\sqrt{۲}s$

۴ ۱۳۶۶ B

روش بازهٔ زمانی ۱ ابتدا با توجه به $t=\frac{۲}{۳}s$ مکان $x_۱$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x_۱=A\cos\frac{\pi}{۲}\times\frac{۲}{۳}\Rightarrow x_۱=\frac{A}{۲}$$

۲ بنابراین در لحظهٔ $t=\frac{۲}{۳}s$ نوسانگر برای اولین بار از $+\frac{A}{۲}$ به سمت مرکز عبور می‌کند و کمینه زمان عبور مجدد از $+\frac{A}{۲}$، یعنی نوسانگر به نقطهٔ بازگشت $-A$ برود و سپس به $+\frac{A}{۲}$ برگردد، با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده و شکل زیر این بازهٔ زمانی را حساب می‌کنیم:

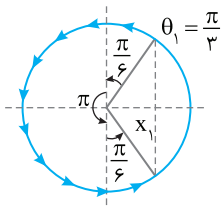


$$\Delta t=\frac{۲}{۳}\times ۴=\frac{۸}{۳}s$$

۳ دوره را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\frac{\pi}{۲}=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۴s$

۴ Δt را حساب می‌کنیم:

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت $(\theta=\omega t)$



۱ فاز حرکت در مکان $x_۱$ را حساب می‌کنیم و روی دایرهٔ مثلثاتی نشان می‌دهیم.

$$\theta=\omega t\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۲}\times\frac{۲}{۳}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۳}$$

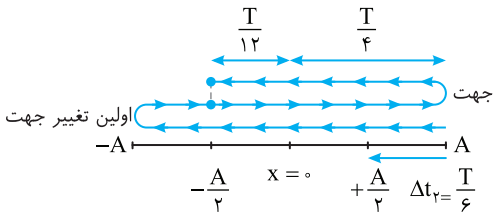
۲ برای آنکه مجدداً نوسانگر از $x_۱=+\frac{A}{۲}$ بگذرد باید فاز آن روی دایرهٔ مثلثاتی به اندازهٔ روبه‌رو تغییر کند:

$$\Delta\theta=\frac{\pi}{۶}+\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\Delta\theta=\frac{۴\pi}{۳}$$

۳ زمان این تغییر فاز را حساب می‌کنیم. $\Delta\theta=\omega\Delta t\Rightarrow\frac{۴\pi}{۳}=\frac{\pi}{۲}\Delta t\Rightarrow\Delta t=\frac{۸}{۳}s$

۲ ۱۳۶۷ B

خط فکری شما باید مسیر حرکت را بنا بر صورت مسئله رسم کنید، سپس بازه‌های زمانی را روی شکل بنویسید تا بتوانید بازه‌های زمانی بیان شده در صورت مسئله را مشخص کنید.



۱ زمان حرکت از $+A$ با دو بار تغییر جهت و رسیدن به $-\frac{A}{۲}$ خواهد شد:

$$\Delta t_۱=T+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۱۲}\Rightarrow\Delta t_۱=\frac{۱۶T}{۱۲}=\frac{۴}{۳}T$$

۲ با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده، زمان حرکت از $+A$ تا $+\frac{A}{۲}$ برابر $\Delta t_۲=\frac{T}{۶}$ است.

۳ نسبت را به‌دست می‌آوریم: $\frac{\Delta t_۱}{\Delta t_۲}=\frac{\frac{۴T}{۳}}{\frac{T}{۶}}=۸$

۳ ۱۳۶۸ B

یادآوری ریاضی هرگاه $\cos\alpha=\cos\beta$ باشد آنگاه: $\alpha=\beta$ یا $\alpha=۲\pi-\beta$

در لحظهٔ $t_۱$ و $۲t_۱$ مکان نوسانگر یکسان و برابر $x=-۴cm$ است. بنابراین در این دو لحظه معادلهٔ حرکت را نوشته و برابر قرار می‌دهیم.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t_۱}x_۱=A\cos\omega t_۱\\ \xrightarrow{t_۲=۲t_۱}x_۲=A\cos ۲\omega t_۱\end{cases}\xrightarrow{x_۱=x_۲}$$

$$\cos\omega t_۱=\cos ۲\omega t_۱\Rightarrow\omega t_۱=۲\pi-۲\omega t_۱\Rightarrow ۳\omega t_۱=۲\pi\Rightarrow\omega t_۱=\frac{۲\pi}{۳}$$

اکنون به کمک معادلهٔ حرکت A را حساب می‌کنیم:

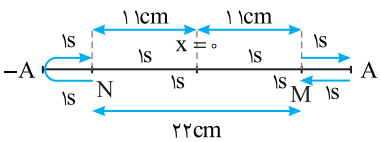
$$x=A\cos\omega t_۱\Rightarrow -۴=A\cos\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow -۴=A(-\frac{۱}{۲})\Rightarrow A=۸cm$$

۱ ۱۳۶۹ C

نکته در حرکت هماهنگ ساده در نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از حالت تعادل یکسان است، اندازهٔ سرعت برابر است.

خط فکری سرعت نوسانگر در نقاط M و N هم‌اندازه است. بنابراین باید فاصلهٔ نقاط M و N از حالت تعادل یکسان باشد. اما عبارت «دو بار عبور متوالی» نیز بسیار مهم است و معنی آن این است که نوسانگر از یک نقطه به انتهای مسیر (نقطهٔ بازگشت) برود و برگردد. اکنون با توجه به این مطالب، مسیر را رسم کرده، زمان‌های داده شده در مسئله را روی آن بنویسید و دوره را حساب کنید. سپس به کمک معادلهٔ حرکت دامنه را به‌دست بیاورید.

۱ نقاط M و N را روی شکل در مکان‌های $x_M=۱۱cm$ و $x_N=-۱۱cm$ مشخص کنید.



۲ از M تا N دو ثانیه طول کشیده، بنابراین از M تا $x=۰$ ۱s و از $x=۰$ تا N نیز ۱s طول می‌کشد.

۳ دو بار عبور متوالی از نقطهٔ N دو ثانیه طول کشیده، یعنی از نقطهٔ N تا نقطهٔ بازگشت ۱s و از نقطهٔ بازگشت تا N نیز ۱s طول می‌کشد.

۴ از N تا M نیز ۲s طول می‌کشد و از M تا A و از A تا M هریک ۱s طول می‌کشد.

۵ بنابراین دوره خواهد شد: $T=۱+۲+۲+۱=۸s$

۶ در لحظهٔ $t=۱s$ نوسانگر از A به M می‌رود، یعنی مکانش در $t=۱s$ برابر $x=۱۱cm$ است. اکنون دامنه را به‌دست می‌آوریم:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow ۱۱=A\cos\frac{۲\pi}{۸}\times ۱\Rightarrow A=۱۱\sqrt{۲}\,cm$$

۴ ۱۳۷۰ C

خط فکری باید بررسی کنیم که این معادلات را می‌توانیم به‌صورت تابع سینوسی یا کسینوسی بنویسیم، زیرا معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده یک تابع سینوسی است.

یادآوری ریاضی $\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha$

بررسی گزینهٔ (۱):

$$x=A\sin\omega t\cos\omega t\xrightarrow{۲\sin\alpha\cos\alpha=\sin ۲\alpha}x=\frac{A}{۲}\sin ۲\omega t$$

معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده است.

بررسی گزینهٔ (۳):

$$x=۲A\cos^۲\omega t-A\Rightarrow x=A(۲\cos^۲\omega t-۱)\Rightarrow x=A\cos ۲\omega t$$

این نیز معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده است.

۳ ۱۳۷۱ C

به کمک ریاضی معادله را به‌صورت $x=A\cos\omega t$ درمی‌آوریم:

$$x=۱-۲\sin^۲ ۵\pi t\Rightarrow x=\cos ۱۰\pi t\xrightarrow{x=\frac{A}{۲}}\frac{۱}{۲}=\cos ۱۰\pi t\Rightarrow ۱۰\pi t=\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow t=\frac{۱}{۳۰}s$$

۱ ۱۳۷۲ B

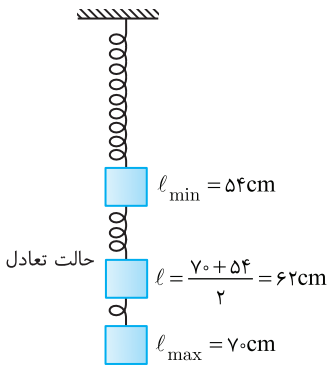
خط فکری در حرکت هماهنگ ساده هرگاه نوسانگر به حالت تعادل (مرکز نوسان) نزدیک می‌شود تندی‌اش افزایش می‌یابد، بنابراین در حل این مسئله باید مشخص کنیم که وقتی طول فنر ۶۰cm و ۶۵cm است، فاصلهٔ آن از مرکز نوسان چند سانتی‌متر است و هر کدام که به مرکز نوسان نزدیک‌تر باشد تندی در آن نقطه بیشتر است.

یادآوری حرکت هماهنگ ساده، یک حرکت روی خط راست در دو طرف یک نقطه در وسط مسیر است.

۱ طول فنر را در حالتی که وزنه از مرکز نوسان (وسط مسیرش) می‌گذرد به‌دست می‌آوریم:

$$\ell_{\text{حالت تعادل}}=\frac{۶۰+۶۴}{۲}=۶۲cm$$

۲ متحرک (نوسانگر) در ۶۰cm در فاصلهٔ $۶۲-۶۰=۲cm$ مرکز نوسان قرار دارد و در ۶۵cm در فاصلهٔ $۶۵-۶۲=۳cm$ مرکز قرار دارد و می‌دانیم که تندی متحرک در مرکز نوسان بیشینه است و با دور شدن از مرکز نوسان تندی کاهش می‌یابد، از این‌رو تندی $s_۱$ بزرگ‌تر از تندی $s_۲$ است. $(s_۱>s_۲)$

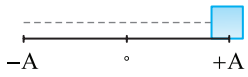


۴ ۱۳۷۳ C

خط فکری تندی متوسط $\frac{۲A\omega}{\pi}$ است. تندی متوسط را برحسب دامنه A و دورهٔ T به‌دست می‌آوریم. سپس برای تک‌تک گزینه‌ها تندی را حساب کرده و با هم مقایسه می‌کنیم.

۱ با توجه به رابطهٔ $\omega=\frac{۲\pi}{T}$ خواهیم داشت:

$$s_{av}=\frac{۲A\omega}{\pi}\xrightarrow{\omega=\frac{۲\pi}{T}}s_{av}=\frac{۲A}{\pi}(\frac{۲\pi}{T})\Rightarrow s_{av}=\frac{۴A}{T}$$

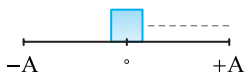


۲ در بازهٔ صفر تا $\frac{T}{۲}$ یعنی در مدت نصف دوره، نوسانگر از $+A$ تا $-A$ حرکت می‌کند: $s_{av}=\frac{۲A}{\frac{T}{۲}}=\frac{۴A}{T}$ و گزینهٔ (۱) درست است.

۳ در بازهٔ صفر تا T یعنی در مدت یک دوره، نوسانگر مسافت $۴A$ را طی می‌کند. پس تندی متوسط برابر است با: $s_{av}=\frac{۴A}{T}$ و گزینهٔ (۲) درست است.

۴ همچنین در بازهٔ $\frac{۳T}{۴}$ تا T نوسانگر از مکان $x_۱=A\cos(\frac{۲\pi}{T}\times\frac{۳T}{۴})=۰$ تا $x_۲=+A$ جابه‌جا می‌شود:

$$s_{av}=\frac{A}{T-\frac{۳T}{۴}}=\frac{۴A}{T}$$



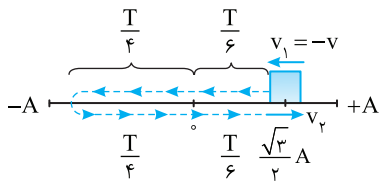
پس در هر سه گزینه تندی متوسط برابر $\frac{۲A\omega}{\pi}=\frac{۴A}{T}$ است.

۲ ۱۳۷۴ C

نکته هرگاه نوسانگر در حال نزدیک شدن به حالت تعادل باشد، اندازهٔ شتاب در حال کاهش است.

خط فکری باید در حل مسئله به تک‌تک عبارت‌ها و اطلاعات مسئله دقت کرد. مکان در لحظهٔ $t_۱$ مثبت $(x=+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A)$ بوده و شتاب در حال کاهش است، یعنی نوسانگر به مرکز نوسان نزدیک شده و سرعت آن منفی است $(v_۱=-v)$. عبارت «برای اولین بار مجدداً نوسانگر از مکان $+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ بگذرد» یعنی نوسانگر به نقطهٔ بازگشت $(-A)$ برود و از آن نقطه برگردد. در این صورت وقتی به مکان $+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ می‌رسد، سرعت آن مثبت است $(v_۲=v)$. اکنون مسیر را رسم کنید و به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده بازهٔ زمانی حرکت را بیابید تا بتوانید اندازهٔ شتاب متوسط را به‌دست بیاورید.

۱ مسیر را مطابق شکل زیر رسم می‌کنیم:



۲ بازهٔ زمانی کل مسیر خواهد شد: $\Delta t=۲(\frac{T}{۶})+۲(\frac{T}{۴})=\frac{T}{۳}+\frac{T}{۲}=\frac{۵T}{۶}$

۳ شتاب متوسط را حساب می‌کنیم:

$$a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{v-(-v)}{\frac{۵T}{۶}}\Rightarrow a_{av}=\frac{۱۲v}{۵T}$$

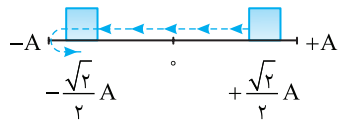
C ۱۳۷۵ ۲

خط فکری تکانه برابر $\vec{P}=m\vec{v}$ است، پس تکانه و سرعت هم‌جهت‌اند و می‌دانیم که نیرو نیز با شتاب هم‌جهت است $(\vec{F}=m\vec{a})$. بنابراین در لحظاتی که تکانه و نیرو هم‌جهت هستند، سرعت و شتاب نیز هم‌جهت بوده و حرکت تندشونده است. می‌دانیم هنگامی که نوسانگر در حال نزدیک شدن به مرکز تعادل است، اندازهٔ سرعت در حال افزایش و حرکت تندشونده است، بنابراین شما باید مشخص کنید که در بازهٔ $t_۱=۰/۰۵s$ تا $t_۲=۰/۲۵s$ نوسانگر از کجا به کجا رفته و چه مدت در حال نزدیک شدن به مرکز نوسان است.

راه‌حل اول: دوره را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow ۵\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۰/۴s$

بازهٔ $t=۰/۰۵s$ تا $t=۰/۲۵s$ در یک دوره قرار می‌گیرد، مکان متحرک در لحظه‌های داده شده را به‌دست آورده و مسیر حرکت را رسم می‌کنیم.

$$t_۱=۰/۰۵s\Rightarrow x_۱=A\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}A\ ,\ t_۲=۰/۲۵s\Rightarrow x_۲=A\cos\frac{۵\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$$

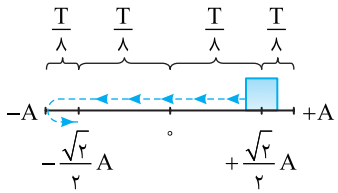


حال با توجه به بازه‌های شناخته شده داریم:

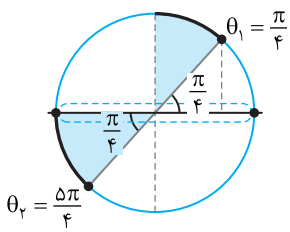
از $+\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ تا مرکز تعادل و از $-A$ تا $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ حرکت تندشونده است. بنابراین

$$t=\frac{T}{۸}+\frac{T}{۸}=\frac{T}{۴}=۰/۱s$$

راه‌حل دوم: در $t=۰/۰۵$ کمان دایرهٔ مثلثاتی (فاز) متناظر با $\theta_۱=\omega t_۱=\frac{\pi}{۴}$ و در



$t=۰/۲۵s$ کمان دایرهٔ مثلثاتی متناظر با $\theta_۲=\omega t_۲=\frac{۵\pi}{۴}$ است و در دایره مثلثاتی زیر در دو کمان $\theta_۱$ تا $\frac{\pi}{۲}$ و π تا $\theta_۲$ نوسانگر در حال نزدیک شدن به مرکز تعادل $(x=۰$ $\theta=\frac{\pi}{۲}$ یا $\frac{۳\pi}{۲})$ است و تندی آن در حال افزایش است، پس در این بازه‌ها حرکت تندشونده است و داریم:



$$\frac{\pi}{۲}-\theta_۱=\omega\Delta t_۱\Rightarrow\frac{\pi}{۴}=۵\pi\Delta t_۱$$

$$\Rightarrow\Delta t_۱=\frac{۱}{۲۰}s\Rightarrow\Delta t_۱=۰/۰۵s$$

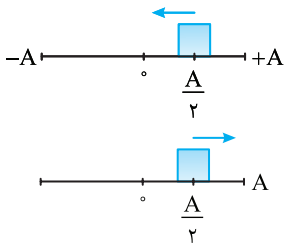
$$\theta_۲-\pi=\omega\Delta t_۲\Rightarrow\frac{\pi}{۴}=۵\pi\Delta t_۲$$

$$\Rightarrow\Delta t_۲=\frac{۱}{۲۰}s\Rightarrow\Delta t_۲=۰/۰۵s$$

پس به مدت $\Delta t_۱+\Delta t_۲=۰/۱s$ حرکت نوسانگر تندشونده است.

B ۱۳۷۶ ۴

هر دو متحرک در فاصلهٔ $\frac{A}{۲}$ از نقطهٔ تعادل قرار دارند و یکی از نوسانگرها در حال حرکت به سمت نقطهٔ تعادل بوده و نوسانگر دیگر در حال حرکت به سمت انتهای مسیر است.



در معادلهٔ حرکت $x=A\cos\omega t$ به جای x، $+\frac{A}{۲}$ را قرار می‌دهیم و ωt را در هر حالت به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{A}{۲}=A\cos\omega t_۱\xrightarrow[\text{ربع اول}]{\text{در حال حرکت به سمت مرکز}}\cos\omega t_۱=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\omega t_۱=\frac{\pi}{۳}$$

$$\frac{A}{۲}=A\cos\omega t_۲\xrightarrow[\text{ربع چهارم}]{\text{در حال حرکت به سمت انتهای مسیر}}\cos\omega t_۲=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\omega t_۲=۲\pi-\frac{\pi}{۳}=\frac{۵\pi}{۳}$$

بنابراین اختلاف شناسهٔ تابع کسینوسی (اختلاف فاز) خواهد شد:

$$\Delta\theta=\omega t_۲-\omega t_۱=\frac{۵\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳}=\frac{۴\pi}{۳}$$

B ۱۳۷۷ ۱

خط فکری در حرکت‌شناسی یاد گرفتیم که هرگاه لحظهٔ رسیدن دو به متحرک به هم را از ما خواسته باشند، باید معادلهٔ حرکت هر دو متحرک را نوشته و با هم برابر قرار دهیم. پس شما هم همین کار را بکنید.

۱ بسامد زاویه‌ای نوسانگر اول خواهد شد:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\xrightarrow{T_۱=۲s}\omega_۱=\frac{۲\pi}{۲}\Rightarrow\omega_۱=\pi\ rad/s$$

۲ معادلهٔ حرکت نوسانگر اول را می‌نویسیم. $x=A\cos\omega t\Rightarrow x_۱=A\cos\pi t$

۳ بسامد زاویه‌ای نوسانگر دوم را به‌دست آورده و معادلهٔ حرکت آن را می‌نویسیم.

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\xrightarrow{T_۲=۶s}\omega_۲=\frac{۲\pi}{۶}\Rightarrow\omega_۲=\frac{\pi}{۳}\ rad/s$$

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow x_۲=A\cos\frac{\pi}{۳}t$$

۴ دو معادله را برابر قرار می‌دهیم.

$$x_۱=x_۲\Rightarrow A\cos\pi t=A\cos\frac{\pi}{۳}t\Rightarrow\cos\pi t=\cos\frac{\pi}{۳}t$$

یادآوری ریاضی

$$\cos\alpha=\cos\beta\Rightarrow\alpha=\beta\ \text{یا}\ \alpha=۲\pi-\beta$$

$$\pi t=۲\pi-\frac{\pi}{۳}t\Rightarrow\frac{۴\pi}{۳}t=۲\pi\Rightarrow t=\frac{۳}{۲}s=۱/۵s$$

۵ حال با جای‌گذاری $t=۱/۵s$ در $x_۱$ یا $x_۲$، مکان نوسانگرها را به‌دست می‌آوریم:

$$x_۱=A\cos\pi t\Rightarrow x_۱=A\cos\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow x_۱=۰$$

C ۱۳۷۸ ۱

یادآوری مکان نوسانگر یعنی فاصلهٔ نوسانگر از مبدأ (حالت تعادل).

در $t=۱s$ فاصلهٔ نوسانگر از حالت تعادلش $x_۱=A-b$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$x=A\cos\omega t\xrightarrow{t=۱s}A-b=A\cos\omega\Rightarrow\cos\omega=\frac{A-b}{A}$$

در $t=۲s$ مکان نوسانگر برابر $x_۲=A-(b+c)$ می‌شود. از این‌رو می‌توان نوشت:

$$x=A\cos\omega t\xrightarrow{t=۲s}A-b-c=A\cos۲\omega\Rightarrow\cos۲\omega=\frac{A-b-c}{A}$$

یادآوری ریاضی

$$\cos۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱$$

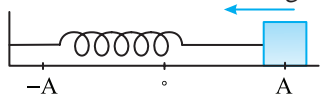
$$\cos۲\omega=۲\cos^۲\omega-۱\Rightarrow\frac{A-b-c}{A}=۲(\frac{A-b}{A})^۲-۱$$

$$\Rightarrow\frac{A-b-c}{A}=\frac{۲A^۲-۴Ab+۲b^۲-A^۲}{A^۲}$$

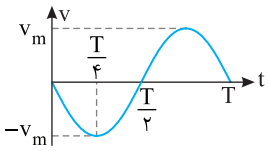
$$\Rightarrow A^۲-Ab-Ac=A^۲-۴Ab+۲b^۲\Rightarrow ۳Ab-Ac=۲b^۲\Rightarrow A=\frac{۲b^۲}{۳b-c}$$

۴ ۱۳۷۹ B

متحرک از $x=+A$ رها شده پس در لحظهٔ $t=0$ سرعت متحرک صفر می‌باشد و پس از رها شدن مطابق شکل نوسانگر در خلاف جهت محور x ها شروع به حرکت می‌کند و سرعت متحرک ابتدا منفی است.



یعنی نمودار باید در مدت $\frac{T}{2}$ که نوسانگر از A به $-A$ می‌رود، زیر محور زمان باشد. البته در $\frac{T}{4}$ تندی بیشینه است و در برگشت از $-A$ به $+A$ سرعت مثبت و باید نمودار بالای محور زمان باشد. بنابراین نمودار سرعت زمان به شکل روبه‌روست و گزینهٔ (۴) درست است.



۱ ۱۳۸۰ B

خط فکری ابتدا دورهٔ حرکت را با توجه به نمودار $x-t$ به دست آورده و سپس به صورت تقریبی مشخص می‌کنیم که در $t=1/3s$ نوسانگر در چه مکانی قرار می‌گیرد تا مشخص شود علامت سرعت و شتاب آن چگونه است.

۱ با توجه به نمودار در $t=0/75s$ نوسانگر برای اولین بار به $x=\frac{-A}{2}$ رسیده است. از این رو در معادلهٔ حرکت t را $0/75s$ و x را $-\frac{A}{2}$ قرار می‌دهیم.

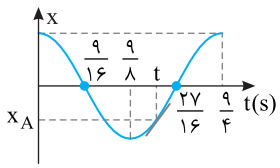
$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\frac{-A}{2}=A\cos\omega t\Rightarrow\cos\omega t=-\frac{1}{2}\Rightarrow\omega t=\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{2\pi}{T}\times\frac{75}{100}=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow T=\frac{9}{4}s=2/25s$$

۲ نمودار را رسم می‌کنیم.

۳ مشخص می‌کنیم که لحظهٔ $t=1/3s$ بین کدام لحظه‌های روی شکل است:

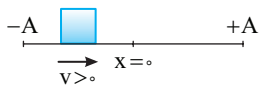
$$\frac{9}{8}<1/3<\frac{27}{16}$$



یعنی متحرک در لحظهٔ $t=1/3s$ در قسمت سوم نمودار بوده و مکان آن منفی است.

۴ در حرکت هماهنگ ساده شتاب و مکان هم‌علامت نیستند و وقتی مکان منفی است، شتاب مثبت است.

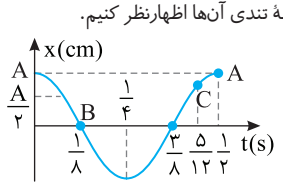
۵ شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t=1/3s$ مثبت است، بنابراین سرعت مثبت است. البته می‌توان این گونه استدلال کرد که متحرک از مکان‌های منفی در حال حرکت به سوی حالت تعادل است، بنابراین سرعت آن مثبت است.



۲ ۱۳۸۱ C

خط فکری در حرکت هماهنگ ساده، هرچه مکان نوسانگر به حالت تعادل $x=0$ نزدیک‌تر باشد، تندی نوسانگر بیشتر است. بنابراین باید مکان نوسانگر را در سه لحظهٔ بیان شده مشخص کرد تا بتوانیم دربارهٔ مقایسهٔ تندی آن‌ها اظهارنظر کنیم.

ابتدا دورهٔ حرکت را با توجه به نمودار به دست می‌آوریم. در $t=\frac{1}{12}s$ نوسانگر برای اولین بار از $\frac{A}{2}$ عبور کرده است:



$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\frac{1}{2}=\cos\omega t$$

$$\omega t=\frac{\pi}{3}\xrightarrow{t=\frac{1}{12}s}\omega\times\frac{1}{12}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\omega=4\pi\xrightarrow{\omega=\frac{2\pi}{T}}T=\frac{1}{2}\ s$$

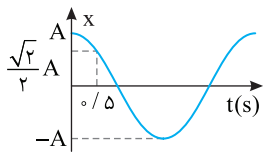
اکنون در لحظه‌های t_1، t_2 و t_3 مکان نوسانگر را مشخص می‌کنیم. هرچه مکان به مبدأ (حالت تعادل) نزدیک‌تر باشد تندی بیشتر است. در $t_1=\frac{1}{2}s$ نوسانگر در مکان A بوده و تندی صفر است و در $t_3=\frac{1}{8}s$ نوسانگر در نقطهٔ B در حال گذر از مرکز نوسان است و تندی‌اش بیشینه است. در لحظهٔ $t_2=\frac{5}{12}s$ یعنی نقطهٔ C نمودار تندی بین صفر و v_m است. پس $s_1<s_2<s_3$.

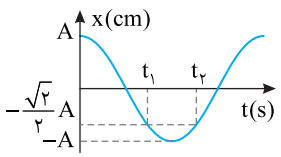
۱ ۱۳۸۲ C

با توجه به نمودار $x-t$، در لحظهٔ $t=0/5s$ نوسانگر برای اولین بار از $x=\frac{\sqrt{2}}{2}A$ عبور می‌کند.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}A=A\cos\omega t\Rightarrow\cos\omega t=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\omega t=\frac{\pi}{4}\xrightarrow{t=0/5s}\frac{\omega}{2}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{2}rad/s$$





با توجه به اینکه نوسانگر در t_1 و t_2 دو بار پشت سر هم از $-\frac{\sqrt{2}}{2}A$ عبور کرده پس دو حالت داریم:

حالت اول:

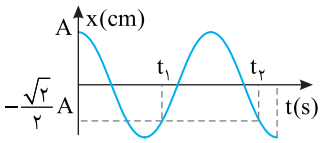
$$x_1=A\cos\frac{\pi}{2}t_1\Rightarrow\frac{-\sqrt{2}}{2}\theta=\cos\frac{\pi}{2}t_1\Rightarrow\frac{\pi}{2}t_1=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow t_1=\frac{3}{2}s$$

$$x_2=A\cos\frac{\pi}{2}t_2\Rightarrow\frac{-\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{2}t_2\Rightarrow\frac{\pi}{2}t_2=\frac{5\pi}{4}\Rightarrow t_2=\frac{5}{2}s$$

$$\Rightarrow\frac{t_2}{t_1}=\frac{5}{3}$$

اما نسبت به دست آمده با فرض مسئله سازگاری $(\frac{t_2}{t_1}=2/2)$ ندارد و قابل قبول نیست.

حالت دوم:



$$x=A\cos\frac{\pi}{2}t_1\Rightarrow\frac{\pi}{2}t_1=\frac{5\pi}{4}\Rightarrow t_1=\frac{5}{2}s$$

$$x=A\cos\frac{\pi}{2}t_2\Rightarrow\frac{\pi}{2}t_2=\frac{11\pi}{4}\Rightarrow t_2=\frac{11}{2}s$$

$$\Rightarrow\frac{t_2}{t_1}=2/2$$

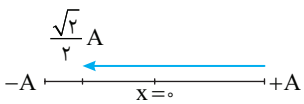
بنابراین حالت دوم درست می‌باشد و $t_1=2/5s$ است.

روش دیگر: با رسم مسیر و بازه‌های زمانی شناخته شده

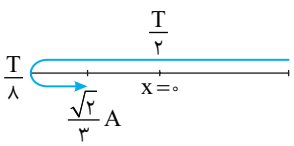
مدت زمانی که طول می‌کشد تا نوسانگر از مکان $+A$ به مکان $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ برود برابر $\frac{T}{8}$ است. بنابراین دوره خواهد شد:

$$\frac{T}{8}=0/5\Rightarrow T=4s$$

حالت اول:



$$t_1=\frac{T}{4}+\frac{T}{8}=\frac{3T}{8}=\frac{3}{8}\times4=\frac{3}{4}s$$



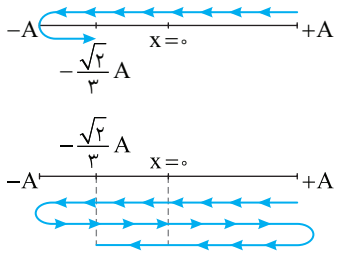
$$t_2=\frac{T}{2}+\frac{T}{8}=\frac{5T}{8}\Rightarrow t_2=\frac{5}{8}\times4=\frac{5}{2}s$$

نسبت t_2 به t_1 را حساب می‌کنیم:

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3}$$

با فرض مسئله سازگاری ندارد و جواب نیست.

حالت دوم:



$t_۱=\frac{T}{۲}+\frac{T}{۸}=\frac{۵\pi}{۸}$

$t_۱=\frac{۵}{۸}\times۴\Rightarrow t_۱=\frac{۵}{۲}s$

$t_۲=T+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۸}\Rightarrow t_۲=\frac{۱۱T}{۸}$

$\Rightarrow t_۲=\frac{۱۱}{۸}\times۴\Rightarrow t_۲=\frac{۱۱}{۲}s$

نسبت $\frac{t_۲}{t_۱}$ را حساب می‌کنیم:

$\frac{t_۲}{t_۱}=\frac{\frac{۱۱}{۲}}{\frac{۵}{۲}}=۲/۲s$

بنابراین حالت دوم درست است و $t_۱$ برابر $۲/۵s$ است.

B ۱۳۸۳ ۳

یادآوری ریاضی $\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$

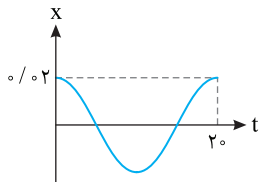
معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده را به شکل معادلهٔ کتاب درسی $x=A\cos\omega t$ درمی‌آوریم:

$x=۰/۰۲\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۰}t)\Rightarrow x=۰/۰۲\cos(\frac{\pi}{۱۰}t)$

دوره را حساب می‌کنیم:

$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\frac{\pi}{۱۰}=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۲۰s$

اکنون می‌توان نمودار را رسم کرد.



بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

C ۱۳۸۴ ۲

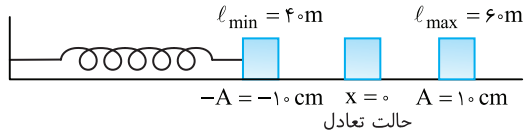
۱ دورهٔ سامانهٔ جرم - فنر را حساب می‌کنیم.

$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\xrightarrow{m=۲kg\,,\,k=۸۰۰N/m}T=۲\pi\sqrt{\frac{۲}{۸۰۰}}\xrightarrow{\pi\sim۳}$

$T=۲\times۳\times\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow T=۰/۳s$

۲ طول پاره‌خط مسیر برابر اختلاف بیشینه طول فنر (ℓ_{max}) و کمینه طول فنر (ℓ_{min}) است.

طول مسیر $=\ell_{max}-\ell_{min}=۶۰-۴۰=۲۰\,cm$

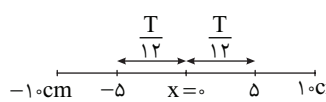


۳ دامنهٔ حرکت نصف طول مسیر حرکت است. $A=\frac{۲۰}{۲}=۱۰\,cm$

۴ تغییر طول فنر در اطراف $x=۰$ (نقطهٔ تعادل) در زمان کوتاه‌تری نسبت به مکان‌های دیگر انجام می‌شود زیرا در اطراف این نقطه تندی نوسانگر بیشینه است، بنابراین تغییر طول به اندازهٔ $۱۰cm$ در بین $x=+۵cm$ تا $x=-۵cm$ و بالعکس در زمان کوتاه‌تری نسبت به تغییر طول به اندازهٔ $۱۰cm$ در بقیه مسیر صورت می‌گیرد.

۵ به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده زمان حرکت از $+۵cm$ به $-۵cm$ خواهد شد.

$\Delta t=۲\frac{T}{۱۲}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۶}\xrightarrow{T=۰/۳s}\Delta t=\frac{۰/۳}{۶}=۰/۰۵s$



B ۱۳۸۵ ۳

خط فکری از مبحث دینامیک استفاده کنید. هنگامی که وزنه‌ها در حال تعادل هستند نیروی خالص وارد بر وزنه‌ها صفر بوده و نیروها متوازن هستند. با توجه به این مطلب می‌توانید، ثابت فنر را حساب کنید. بعد از جداشدن B، تنها A به فنر متصل بوده و دوره خواهد شد: $T=۲\pi\sqrt{m_A/k}$

۱ ابتدا ثابت فنر را به‌دست می‌آوریم:

$F_{net}=۰\Rightarrow(m_A+m_B)g=k\Delta\ell\Rightarrow$

$(۰/۱+۰/۳)\times۱۰=k(۰/۳-۰/۲)\Rightarrow k=۴۰N/m$

۲ بعد از جدایی وزنهٔ B، وزنهٔ A حرکت هماهنگ ساده خواهد داشت، بنابراین:

$T_A=۲\pi\sqrt{\frac{m_A}{k}}\Rightarrow T_A=۲\pi\sqrt{\frac{۰/۱}{۴۰}}\Rightarrow T_A=\frac{\pi}{۱۰}s$

B ۱۳۸۶ ۱

نکته هرگاه n فنر مشابه به یک وزنه متصل شوند، می‌توان به جای n فنر، یک فنر با ثابت $k'=nk$ در نظر گرفته و مسئله را حل کرد.

ابتدا دوره دستگاه با جرم m و ثابت k را به‌دست می‌آوریم: $T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{۶۰}{۲۰}=۳s$

رابطهٔ دوره را در دو حالت نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم و دوره در حالت دوم (T') را به‌دست می‌آوریم.

$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}},T'=۲\pi\sqrt{\frac{m'}{k'}}\Rightarrow\frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{m'}{m}}\times\sqrt{\frac{k}{k'}}\xrightarrow[k'=۳k]{m'=\frac{m}{۳}}$

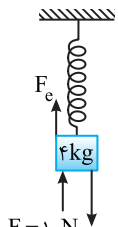
$\frac{T'}{۳}=\sqrt{\frac{۱}{۳}}\times\sqrt{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow\frac{T'}{۳}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow T'=۱\,s$

بسامد خواهد شد: $f'=\frac{۱}{T'}\Rightarrow f'=\frac{۱}{۱}\Rightarrow f'=۱\,Hz$

C ۱۳۸۷ ۳

۱ نیروهای وارد بر وزنه وقتی که ساکن است متوازن است. نیروها را رسم کرده به کمک آن ثابت فنر را حساب می‌کنیم.

طول فنر از طول طبیعی‌اش بیشتر شده بنابراین نیروی کشسانی فنر رو به بالا است.



$F_{net}=۰\Rightarrow F_e+F=W\Rightarrow k\Delta\ell+۱۰=۴۰\xrightarrow{\Delta\ell=۳cm}$

$۳۰=k\times\frac{۳}{۱۰۰}\Rightarrow k=۱۰۰۰N/m$

۲ با حذف F وزنه شروع به نوسان کرده و دورهٔ حرکت آن خواهد شد:

$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow T=۲\pi\sqrt{\frac{۴}{۱۰۰۰}}\Rightarrow T=۲\sqrt{\frac{۴}{۱۰۰}}$

$T=۲\times۰/۲=۰/۴s$

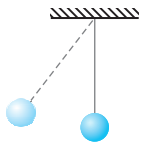
B ۱۳۸۸ ۱

خط فکری صورت سؤال را مجدداً بخوانید. گلوله را می‌گیریم و در امتداد قائم تا محل آویز می‌بریم و از آن‌جا رها می‌کنیم. در این صورت گلوله با شتاب گرانش g پایین می‌آید و زمان پایین آمدن آن را باید از معادلهٔ جابه‌جایی زمان حرکت با شتاب ثابت به‌دست بیاورید. اما در حالت دوم آونگ را از راستای قائم رها می‌کنیم تا نوسان کند. در این حالت مدت زمان برگشت آونگ از دامنه به حالت تعادل (راستای قائم) $\frac{۱}{۴}$ دوره است و باید دوره آونگ را حساب کرد و $\frac{۱}{۴}$ آن را به‌دست آورد و با حالت اول مقایسه کرد.

گلوله را از ارتفاع L (طول آونگ) رها کرده‌ایم. زمان رسیدن گلوله به حالت اولیه خواهد شد:

$\Delta y=\frac{۱}{۲}gt^۲\Rightarrow\ell=\frac{۱}{۲}gt_۱^۲\Rightarrow t_۱=\sqrt{\frac{۲\ell}{g}}$

زمان برگشت آونگ از انتهای مسیر به حالت قائم $\frac{۱}{۴}$ دورهٔ آن است.



$$t_۲=\frac{T}{۴}=\frac{۲\pi}{۴}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow t_۲=\frac{\pi}{۲}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow t_۲=\sqrt{\frac{\pi^۲}{۴}\frac{\ell}{g}}$$

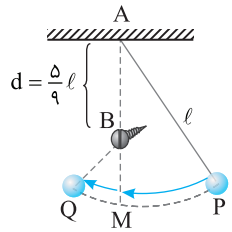
$$\frac{t_۱}{t_۲}=\frac{\sqrt{\frac{۲\ell}{g}}}{\sqrt{\frac{\pi^۲}{۴}\frac{\ell}{g}}}=\sqrt{\frac{۸}{\pi^۲}}\xrightarrow{\pi^۲\approx۱۰}\frac{t_۱}{t_۲}\approx\sqrt{۰/۸}\approx۰/۹<۱$$

بنابراین آونگ اول زودتر به حالت اولیه برمی‌گردد.

۳ ۱۳۸۹ C

خط فکری دقت کنید وقتی ریسمان آونگ به مانع گیر می‌کند قسمت پایین آونگ، خودش یک آونگ جدید با طول $\frac{۴}{۹}\ell$ می‌شود. یعنی مسیر رفت و برگشت PM و MP را با یک آونگ به طول ℓ و دورهٔ $T=۲\pi\sqrt{\ell/g}$ در نظر بگیرید، اما مسیر رفت و برگشت MQ و QM را آونگی به طول $\frac{۴\ell}{۹}$ و دورهٔ $T'=۲\pi\sqrt{\frac{\frac{۴\ell}{۹}}{g}}$ سروکار دارید. اکنون با توجه به این مطالب به سراغ حل مسئله می‌رویم.

۱ از P تا M و از M تا P بازهٔ زمانی نوسان $۲\times\frac{T}{۴}$ است و از M تا Q و Q تا M بازهٔ زمانی نوسان $۲\times\frac{T'}{۴}$ است.



۲ زمان یک نوسان کامل این آونگ ترکیبی، جمع این دو بازهٔ زمانی است.

$$T_۲=۲\times\frac{T}{۴}+۲\frac{T'}{۴}=\frac{T}{۲}+\frac{T'}{۲}\Rightarrow T_۲=\frac{۱}{۲}(T+T')\Rightarrow$$

$$T_۲=\frac{۱}{۲}\left(۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}+۲\pi\sqrt{\frac{\frac{۴}{۹}\ell}{g}}\right)\Rightarrow T_۲=\frac{۱}{۲}\times۲\pi\left(\sqrt{\frac{\ell}{g}}+\frac{۲}{۳}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\right)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۳}\times۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$\Rightarrow T_۲=\frac{۵}{۶}T$$

۱ ۱۳۹۰ B

قبل از حل مسئله باید با هم یک مقداری ریاضی تمرین کنیم. به جواب هریک از پرانتزها دقت کنید. $(۱+۰/۰۱)^۲=۱+۰/۰۲+۰/۰۰۰۱=۱/۰۲۰۱\sim۱/۰۲=[۱+۲(۰/۰۱)]$

$$(۱+۰/۰۱)^۳=۱+۳(۰/۰۱)+۳(۰/۰۰۰۱)+(۰/۰۰۰۰۰۱)=۱/۰۳۰۳۰۱\sim۱/۰۳$$

مثل این است که هرگاه یک عدد کمتر از (۱) را با یک جمع کنیم و به توان برسانیم با تقریب خوبی می‌توانیم بنویسیم: $(۱+\varepsilon)^n\sim۱+n\varepsilon$

در حل این مسئله باید از این تقریب استفاده کنید.

۱ طول ثانویه را برحسب طول اولیه به‌دست می‌آوریم.

$$\ell_۲=\ell_۱(۱+\alpha\Delta\theta)\Rightarrow\ell_۲=\ell_۱(۱+۱/۱\times۱۰^{-۵}\times۴۰)$$

$$\Rightarrow\ell_۲=\ell_۱(۱+۴/۴\times۱۰^{-۴})=۱/۰۰۰۴۴\,\ell_۱$$

۲ دورهٔ آونگ در حالت اول ۲s است دوره را در حالت دوم به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}T_۲=۲\pi\sqrt{\frac{\ell_۲}{g}}\\ T_۱=۲\pi\sqrt{\frac{\ell_۱}{g}}\end{cases}\Rightarrow\frac{T_۲}{T_۱}=\sqrt{\frac{\ell_۲}{\ell_۱}}\Rightarrow\frac{T_۲}{T_۱}=\sqrt{\frac{۱/۰۰۰۴۴\ell_۱}{\ell_۱}}\Rightarrow T_۲=T_۱\sqrt{۱/۰۰۰۴۴}$$

$$\Rightarrow T_۲=T_۱(۱+۰/۰۰۰۴۴)^{\frac{۱}{۲}}$$

اکنون از تقریب بالا استفاده می‌کنیم. $T_۲=۲(۱+\frac{۱}{۲}\times۰/۰۰۰۴۴)=۲/۰۰۰۴۴\Rightarrow$

تغییر دوره خواهد شد: $\Delta T=T_۲-T_۱=۲/۰۰۰۴۴-۲=۰/۰۰۰۴۴s$

پنجره ۲

۳ ۱۳۹۱ A

بنا به قانون دوم نیوتون $F=ma$ و در حرکت سامانهٔ جرم فنر نیروی خالص وارد بر نوسانگر $F=kx$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$|ma|=k|x|\Rightarrow|a|=\frac{k}{m}|x|\Rightarrow|a|=|\frac{۲۰۰}{۰/۰۸}\times(\frac{-۲}{۱۰۰})|=۵۰\,m/s^۲$$

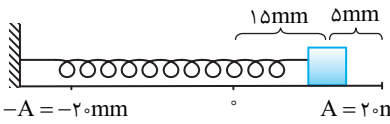
میانبر معادلهٔ شتاب - مکان نوسانگر به‌صورت $a=-\omega^۲x$ است.

۴ ۱۳۹۲ B

نکته نوسانگر در هر دوره، دو بار از مرکز نوسان خود عبور می‌کند.

۱ نوسانگر در هر دقیقه $\frac{۳۰}{۲}=۱۵$ نوسان کامل انجام می‌دهد.

۲ فاصلهٔ دو انتهای مسیر از هم برابر ۴cm داده شده پس دامنهٔ حرکت برابر $A=۲cm=۲۰mm$ است.



۳ دوره را به‌دست می‌آوریم. $T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{۶۰}{۱۵}=۴s$

۴ بسامد زاویه‌ای برابر است با: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{۲\pi}{۴}\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{۲}\,rad/s$

۵ فاصلهٔ نوسانگر از انتهای مسیر $۵mm=۰/۵cm$ بوده بنابراین مکان متحرک خواهد شد: $x=۱۵mm=۱/۵cm$

۶ اندازهٔ شتاب خواهد شد: $|a|=|-\omega^۲x|\Rightarrow a=\frac{\pi^۲}{۴}\times۱/۵=\frac{۱۵}{۴}=۳/۷۵\,cm/s^۲$

۱ ۱۳۹۳ B

خط فکری شتاب حرکت را در یک مکان معین باید به‌دست بیاوریم بنابراین شما باید بسامد زاویه‌ای و مکان نوسانگر را دقیقاً مشخص کنید و با استفاده از رابطهٔ $|a|=\omega^۲x$ مسئله را حل کنید.

۱ ابتدا بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم. $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{۱۸۰}{۰/۲}}\Rightarrow\omega=۳۰\,rad/s$

نکته هرگاه وزنه را از حالت تعادل منحرف و رها کنیم، مقدار انحراف برابر دامنهٔ نوسان است.

۲ چون وزنه از فاصلهٔ 5cm حالت تعادل رها شده است، دامنهٔ نوسانگر 5cm است. فاصلهٔ نوسانگر از حالت تعادل وقتی پس از رها شدن ۲cm بالا رفته، برابر با $x=۳cm$ است. شتاب در مکان $x=۳cm$ برابر است با:

$$|a|=\omega^۲x\Rightarrow a=۹۰۰\times۰/۰۳=۲۷m/s^۲$$

۱ ۱۳۹۴ B

خط فکری رابطهٔ $a+۴x=۰$ را به‌صورت $a=-۴x$ نوشته و آن را با معادلهٔ شتاب - مکان $a=-\omega^۲x$ مقایسه می‌کنیم. با مقایسهٔ دو رابطه می‌توان نتیجه گرفت که:

$$a=-۴x,\ a=-\omega^۲x\Rightarrow\omega^۲=۴\Rightarrow\omega=۲rad/s$$

دوره را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow۲=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=\pi s$

۳ ۱۳۹۵ A

یادآوری در حرکت هماهنگ ساده، بیشینه شتاب نوسانگر از رابطهٔ $a_m=A\omega^۲$ به‌دست می‌آید که در آن A دامنه و ω بسامد زاویه‌ای است.

نوسانگر در هر ۰/۴ ثانیه ۲ نوسان کامل انجام می‌دهد، بنابراین دوره خواهد شد:

$$T=\frac{۰/۴}{۲}=۰/۲s$$

بسامد زاویه را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{۰/۲}\Rightarrow\omega=۱۰\pi\,rad/s$

با توجه به رابطهٔ شتاب بیشینه داریم:

$$a_{max}=A\omega^۲=A\times۱۰۰\pi^۲\Rightarrow A\times۱۰^۳=۲۰\Rightarrow A=۲\times۱۰^{-۲}m=۲cm$$

چون N و M دو سر پاره‌خط نوسان هستند پس طول MN برابر است با:

$$MN=۲A=۴cm$$

A ۱۳۹۶ ۴

با توجه به قانون دوم نیوتون $F=ma$ و قانون هوک $F=-kx$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} F_{max}=ma_m \\ |F|=kx \end{cases} \Rightarrow ma_m=kA \Rightarrow a_m=\frac{k}{m}A \Rightarrow ۲=\frac{۱۰}{m}\times\frac{۸}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow m=\frac{۸}{۲۰}kg=۴۰۰g$$

C ۱۳۹۷ ۱

نکته تمام روابطی که در بررسی سامانهٔ جرم - فنر به دست آورده شده در حرکت آونگ ساده نیز صادق است از جمله رابطهٔ بین شتاب نوسانگر با مکان آن یعنی $a=-\omega^۲x$

در این صورت ابتدا بسامد زاویه‌ای را به دست می‌آوریم: $\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}} \Rightarrow \omega=\sqrt{۱۰}\,rad/s$

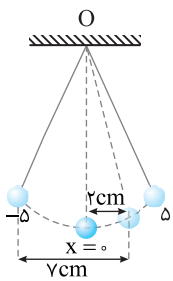
طول مسیر ۶cm است بنابراین دامنهٔ حرکت $A=\frac{۶}{۲}=۳cm$ است و وقتی آونگ در فاصلهٔ ۱cm از انتهای مسیرش است، مکان آن $x=۲cm$ خواهد بود. بنابراین:

$$a=-\omega^۲x \Rightarrow |a|=+(۱۰)(۲\times۱۰^{-۲})=۰/۲m/s^۲$$

بازی با سوال گلوله‌ای به جرم ۱۵۰g به انتهای نخی سبک به طول ۱۵cm آویخته شده و روی مسیری به طول ۱۰cm نوسان می‌کند. در لحظه‌ای که گلوله در فاصله ۷cm از یک انتهای مسیر قرار دارد، اندازه شتاب چند متر بر مجذور ثانیه است؟ $(g=۱۰m/s^۲)$

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۱/۵

پاسخ دامنه نوسان آونگ نصف طول مسیر آن است. $A=\frac{۱۰}{۲}=۵cm$



وقتی گلوله آونگ در فاصله ۷cm از یک انتهای مسیر است باید فاصله آن از حالت تعادل مطابق شکل ۲cm باشد. $(x=۲cm)$

اکنون بسامد زاویه‌ای را به دست می‌آوریم.

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}=\sqrt{\frac{۱۰}{۰/۱۵}}=\sqrt{\frac{۱۰۰۰}{۱۵}} \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{۲۰۰}{۳}}rad/s$$

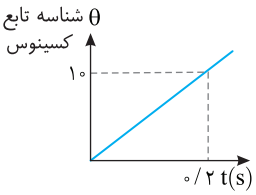
اندازه شتاب خواهد شد. $|a|=\omega^۲x \Rightarrow |a|=\frac{۲۰۰}{۳}\times\frac{۲}{۱۰۰} \Rightarrow a=\frac{۴}{۳}m/s^۲$

گزینهٔ ۲

A ۱۳۹۸ ۱

دامنه نصف طول پاره‌خط مسیر است. $A=\frac{۴}{۲}=۲cm$

یادآوری کمان مثلثاتی در معادلهٔ $x=A\cos\omega t$ را شناسهٔ تابع کسینوس یا فاز (ωt) گویند.



با توجه به نمودار در لحظهٔ $t=۰/۲s$، شناسهٔ تابع کسینوس (فاز) ۱۰ رادیان است. بنابراین بسامد زاویه‌ای خواهد شد:

$$\omega t=۱۰ \Rightarrow \omega\times۰/۲=۱۰ \Rightarrow \omega=۵۰rad/s$$

اندازهٔ شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$|a|=\omega^۲x \Rightarrow |a|=(۵۰)^۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۱۰۰} \Rightarrow |a|=۲۵\sqrt{۲}m/s^۲$$

بازی با سوال شناسه تابع کسینوسی نوسانگری در لحظهٔ t برابر π است، اگر دامنهٔ حرکت ۲cm و دورهٔ آن π ثانیه باشد، پس از گذشت $\frac{T}{۶}$ ثانیه از لحظهٔ t، اندازهٔ شتاب نوسانگر چند متر بر مجذور ثانیه است؟ کنکور دهه‌های گذشته

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲۵}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱}{۲۵}$ ۴) $\frac{۲}{۲۵}$

پاسخ لحظه‌ای که شناسهٔ تابع کسینوسی برابر π است را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega t=\pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}\times t=\pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{\pi}\times t=\pi \Rightarrow t=\frac{\pi}{۲}s$$

مکان در $\frac{T}{۶}$ بعد از t را حساب می‌کنیم:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{\pi}=۲\,rad/s$$

$$x=۰/۰۲\cos\omega(t+\frac{T}{۶}) \Rightarrow x=۰/۰۲\cos۲(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶})$$

$$\Rightarrow x=۰/۰۲\cos\frac{۴\pi}{۳}=-۰/۰۱m$$

اندازهٔ شتاب برابر است با: $|a|=|\omega^۲x|=۴\times۰/۰۱=\frac{۴}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲۵}m/s^۲$

گزینهٔ ۳

A ۱۳۹۹ ۲

خط فکری معادلهٔ شتاب - مکان حرکت هماهنگ ساده به‌صورت $|a|=\omega^۲x$ است. بنابراین از روی معادلهٔ حرکت $x=۰/۰۲\cos\pi t$ بسامد زاویه‌ای نوسانگر و مکان نوسانگر در $t=\frac{۱}{۳}s$ به‌دست می‌آوریم و اندازهٔ شتاب را حساب می‌کنیم.

۱ با مقایسهٔ معادلهٔ $x=۰/۰۲\cos\pi t$ با $x=A\cos\omega t$ مشخص است که بسامد زاویه‌ای برابر $\omega=\pi rad/s$ است.

۲ مکان در لحظهٔ $t=\frac{۱}{۳}s$ خواهد شد:

$$x=۰/۰۲\cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x=۰/۰۲\times\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=۰/۰۱m$$

۳ اندازهٔ شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$|a|=\omega^۲x \Rightarrow |a|=\pi^۲\times۰/۰۱ \xrightarrow{\pi^۲=۱۰} |a|=۰/۱m/s^۲=۱۰cm/s^۲$$

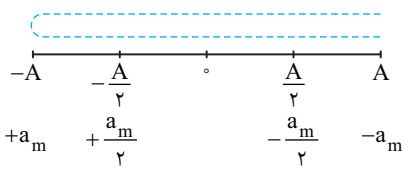
یادآوری در حرکت هماهنگ ساده مکان و شتاب هم‌علامت نیستند.

۴ مکان مثبت است از این رو شتاب باید منفی باشد: $a=-۱۰cm/s^۲$

B ۱۴۰۰ ۱

خط فکری در نقاط بازگشت یعنی نقاط $x=A$ و $x=-A$ شتاب نوسانگر بیشینه است $(a_m=A\omega^۲)$. اندازهٔ شتاب با مکان نوسانگر نسبت مستقیم دارد $|a|=\omega^۲x$. بنابراین در لحظه‌هایی که اندازهٔ شتاب نصف اندازهٔ شتاب بیشینه است، مکان نوسانگر $x=\pm\frac{A}{۲}$ خواهد بود. بنابراین شما کافی است در معادلهٔ حرکت به‌جای x مقدار $\pm\frac{A}{۲}$ را قرار داده و زمان را به‌دست بیاورید.

$$x=A\cos\omega t \Rightarrow \pm\frac{A}{۲}=A\cos\frac{۲\pi}{T}t \Rightarrow \cos\frac{۲\pi}{T}t=\pm\frac{۱}{۲}$$



یادآوری ریاضی هرگاه $\cos\alpha=\pm\frac{۱}{۲}$ باشد در یک دوره برابر $\frac{\pi}{۳}$، $\frac{۲\pi}{۳}$، $\frac{۴\pi}{۳}$ و $\frac{۵\pi}{۳}$ است.

با توجه به یادآوری ریاضی:

$$\frac{۲\pi}{T}t_۱=\frac{\pi}{۳} \Rightarrow t_۱=\frac{T}{۶} \quad , \quad \frac{۲\pi}{T}t_۲=\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow t_۲=\frac{T}{۳}$$

$$\frac{۲\pi}{T}t_۳=\frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow t_۳=\frac{۲T}{۳} \quad , \quad \frac{۲\pi}{T}t_۴=\frac{۵\pi}{۳} \Rightarrow t_۴=\frac{۵T}{۶}$$

۱ ۱۴۰۱ A

نکته بزرگی شتاب بر حسب مکان نوسانگر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$|a|=\omega^2|x|$$

مکان متحرک در نقطهٔ M، ۱cm است:

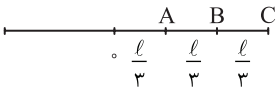
$$|a|=\omega^2|x|\Rightarrow 4=\omega^2\times\frac{1}{100}\Rightarrow\omega^2=400\Rightarrow\omega=20\,rad/s$$

یادآوری بسامد زاویه‌ای سیستم جرم - فنر برابر $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ است:

بسامد زاویه‌ای سیستم جرم - فنر ۲۰rad/s و جرم آن ۲kg است:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega^2=\frac{k}{m}\Rightarrow 400=\frac{k}{2}\Rightarrow k=800\,N/m$$

بازی با سؤال در شکل زیر نوسانگری روی پاره‌خط نشان داده شده در حال نوسان می‌باشد. شتاب در نقاط A، B و C را به ترتیب با a_A، a_B و a_C نشان می‌دهیم. کدام گزینه در مورد شتاب در این سه نقطه درست است؟



۱) $|a_A|=|a_B|=|a_C|$

۲) $|a_C|=3|a_B|=1/5|a_A|$

۳) $|a_C|=\frac{3}{2}|a_B|=3|a_A|$

۴) $|a_C|=3|a_A|=2|a_B|$

پاسخ با توجه به معادلهٔ شتاب - مکان حرکت هماهنگ ساده ($|a|=\omega^2|x|$) شتاب با مکان نسبت مستقیم دارد. شتاب در مکان‌های A و B و C را به‌دست آورده و با هم مقایسه می‌کنیم.

$$|a|=\omega^2|x|$$

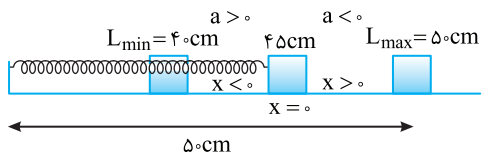
$$|a_A|=\omega^2\frac{\ell}{3},\ |a_B|=\omega^2\frac{2\ell}{3},\ |a_C|=\omega^2\ell\Rightarrow|a_C|=\frac{3}{2}|a_B|=3|a_A|$$

گزینهٔ ۳

۲ ۱۴۰۲ B

۱ ابتدا بسامد زاویه‌ای دستگاه جرم - فنر را حساب می‌کنیم.

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\xrightarrow{k=200\,N/m,\,m=2kg}\omega=\sqrt{\frac{200}{2}}\Rightarrow\omega=10\,rad/s$$



۱ دامنهٔ حرکت وزنه برابر طول مسیر تقسیم بر ۲ است از این‌رو:

$$A=\frac{50-40}{2}\Rightarrow A=5cm$$

۱ به کمک شتاب، مکان وزنه را حساب می‌کنیم.

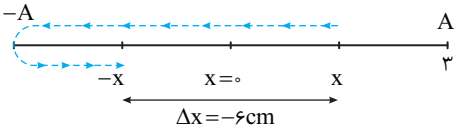
$$a=\omega^2|x|\xrightarrow{a=2m/s^2}2=100|x|\Rightarrow|x|=0/02m=2cm$$

۱ شتاب مثبت است بنابراین مکان نوسانگر منفی است و طول فنر خواهد شد:

$$L=45-2=43cm$$

۳ ۱۴۰۳ B

خط فکری ۰/۲s نصف دوره $(T=0/4s)$ است. در مدت $\frac{T}{2}$، مکان و سرعت متحرک قرینه می‌شود و وقتی جابه‌جایی $-6cm$ است، مطابق شکل متحرک از مکان $+3cm$ به مکان $-3cm$ رفته است. با توجه به این مطلب اندازهٔ شتاب قابل محاسبه است.



۱ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{0/4}\Rightarrow\omega=5\pi\,rad/s$$

۲ اندازهٔ شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$|a|=\omega^2|x|\Rightarrow|a|=(5\pi)^2\left(\frac{3}{100}\right)\Rightarrow|a|=7/5m/s^2$$

۳ در ابتدای این بازه مکان نوسانگر مثبت است، بنابراین شتاب آن منفی است یعنی $a=-7/5m/s^2$ است.

۴ ۱۴۰۴ C

خط فکری ابتدا باید مکان نوسانگر در لحظه‌ای که شتاب $8\pi^2\sqrt{2}m/s^2$ است را به‌دست بیاوریـد. در بازهٔ $t=\frac{1}{60}s$ تا $t=\frac{1}{10}s$ مکان نوسـانگر را مشـخص کنید تا بتوانید تعیین کنید چه مدت شتاب از $8\pi^2\sqrt{2}m/s^2$ کوچکتر است.

۱ بـا توجـه بـه معادلهٔ حرکـت $x=0/04\cos 20\pi t$ بسـامد زاویه‌ای را به‌دسـت می‌آوریم. $\omega=20\pi\,rad/s$

۲ مکان نوسانگر وقتی شتاب $8\pi^2\sqrt{2}m/s^2$ است را به‌دست می‌آوریم.

$$|a|=\omega^2x\Rightarrow 8\pi^2\sqrt{2}=(20\pi)^2x\Rightarrow 8\pi^2\sqrt{2}=400\pi^2x$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{2}}{100}m=2\sqrt{2}\,cm$$

۳ مکان نوسانگر در لحظه‌های $t=\frac{1}{60}s$ و $t=\frac{1}{10}s$ خواهد شد:

$$x=0/04\cos 20\pi t\begin{cases}\xrightarrow{t=\frac{1}{60}s}x_1=0/04\cos 20\pi\times\frac{1}{60}=0/04\cos\frac{\pi}{3}\\ \xrightarrow{t=\frac{1}{10}s}x_2=0/04\cos 20\pi\times\frac{1}{10}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=0/02m=2cm\\ x_2=0/04\cos 2\pi\Rightarrow x_2=0/04m=4cm\end{cases}$$

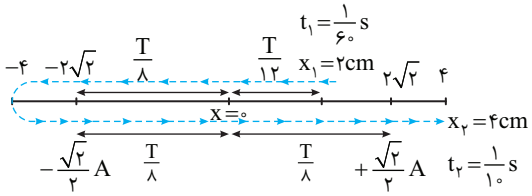
۴ مسیر حرکت را رسم می‌کنیم و مکان‌های x_1 و x_2 را روی آن نشان می‌دهیم.

۵ دوره را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 20\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=0/1s$$

۶ در مکان‌هایی که $-2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}$ شتاب از $8\pi^2\sqrt{2}m/s^2$ کمتر است. به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده مسئله را حل می‌کنیم.

$$\Delta t=\frac{T}{12}+\frac{T}{8}+\frac{T}{8}+\frac{T}{8}=\frac{T}{12}+\frac{3T}{8}=\frac{2T+9T}{24}=\frac{11T}{24}\Rightarrow\Delta t=\frac{11}{24}\times\frac{1}{10}=\frac{11}{240}s$$



۴ ۱۴۰۵ C

خط فکری بیشـینهٔ شتاب نوسانگر $a_m=A\omega^2$ است از این رو شما باید بسامد زاویه‌ای $(\omega=\sqrt{g/\ell})$ را در ارتفاع R_e از سطح زمین پیدا کنید. اما ابتدا باید میدان گرانش در آن ارتفاع را برحسب میدان گرانش در سطح زمین بیابید.

۱ با توجه به رابطه میدان گرانش خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\text{سطح زمین: } g_e=G\frac{M_e}{R_e^2}\\ \text{در ارتفاع } R_e\text{: } g_h=G\frac{M_e}{(R_e+R_e)^2}\end{cases}\Rightarrow\frac{g_h}{g_e}=\frac{(R_e^2)}{(2R_e)^2}=\frac{1}{4}$$

۲ نسبت بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

$$\frac{\omega_h}{\omega_e}=\frac{\sqrt{\frac{g_h}{\ell}}}{\sqrt{\frac{g_e}{\ell}}}=\sqrt{\frac{g_h}{g_e}}=\sqrt{\frac{1}{4}}\Rightarrow\frac{\omega_h}{\omega_e}=\frac{1}{2}$$

۳ اکنون نسبت بیشینه شتاب‌ها را می‌توانیم به‌دست بیاوریم.

$$\frac{a_h}{a_e}=\frac{A\omega_h^2}{A\omega_e^2}\xrightarrow{\text{دامنه‌ها یکسان}}\frac{a_h}{a_e}=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$$

A ۱۴۰۶ ۱

یادآوری بیشینهٔ نیروی خالص وارد بر نوسانگر از رابطهٔ $F=mA\omega^2$ به‌دست می‌آید که در آن A دامنه، m جرم نوسانگر و ω بسامد زاویه‌ای است.

۱ دامنه نصف طول پاره‌خط مسیر نوسانگر است. بنابراین $A=\frac{10}{2}=5cm$

۲ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\xrightarrow{T=\frac{1}{2}s}\omega=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\omega=4\pi\ rad/s$$

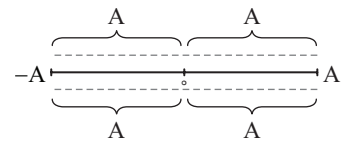
۳ اکنون بیشینه نیروی وارد بر ذره را به‌دست می‌آوریم.

$$F_{max}=mA\omega^2\xrightarrow{m=0/5kg}F_m=0/5\times0/05\times16\pi^2\Rightarrow F_m=4N$$

A ۱۴۰۷ ۱

۱ در هر دقیقه ۱۲۰ نوسان کامل انجام شده بنابراین دوره و بسامد زاویه‌ای خواهد شد:

$$T=\frac{t}{N}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}s\xrightarrow{\omega=2\pi/T}\omega=4\pi\ rad/s$$



۲ در هر دوره مسافت طی شده برابر $4A$ است از این رو دامنه برابر است با:

$$4A=16\Rightarrow A=4cm$$

۳ شتاب را در مکان $x=-\frac{A}{2}=-\frac{4}{2}=-2cm$ به‌دست می‌آوریم.

$$|a|=\omega^2|x|\Rightarrow|a|=(4\pi)^2\times(\frac{2}{100})\Rightarrow|a|=16\times10\times\frac{2}{100}\Rightarrow|a|=3/2m/s^2$$

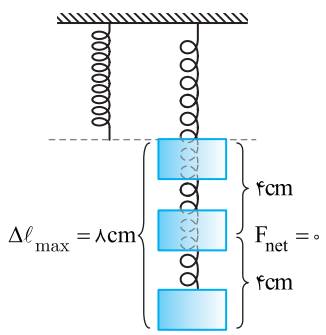
۴ نیروی خالص وارد بر نوسانگر خواهد شد:

$$F=ma\xrightarrow{m=2\times10^{-3}kg}F=2\times10^{-3}\times3/2\Rightarrow F=6/4\times10^{-3}N$$

میانبر معادلهٔ نیرو - مکان نوسانگر $|F|=m\omega^2x$ است.

C ۱۴۰۸ ۲

خط فکری در حالت تعادل نیروها متوازن است. به کمک دینامیک باید ثابت فنر را بیابید. بیشترین نیروی کشسانی فنر وقتی است که طول فنر به بیشینه مقدار خود برسد. بنابراین شما باید بیشینه طول فنر را هنگام نوسان پیدا کنید و به کمک قانون هوک $F=k\Delta\ell$ مسئله را حل کنید.



۱ ابتدا ثابت فنر را حساب می‌کنیم.

$$F_{net}=0\Rightarrow mg=k\Delta\ell\Rightarrow5=k\frac{4}{100}\Rightarrow k=\frac{500}{4}=125N/m$$

۲ در محل تعادل طول فنر $4cm$ افزایش یافته اگر در این حالت با دامنهٔ $4cm$ وزنه را به نوسان درآوریم، وزنه تا طول طبیعی فنر بالا می‌رود و وقتی به پایین‌ترین نقطهٔ مسیر می‌رود افزایش طول فنر مطابق شکل $\Delta\ell_{max}=8cm$ می‌شود. از این رو بیشینهٔ نیرو خواهد شد:

$$F_{max}=k\Delta\ell_{max}=125\times\frac{8}{100}=10N$$

A ۱۴۰۹ ۳

یادآوری ۱ بسامد زاویه‌ای آونگ برابر $\omega=\sqrt{g/\ell}$ است.

۲ بیشینه نیروی خالص وارد بر نوسانگر برابر است با $F_{max}=mA\omega^2$ که در آن A دامنه و m جرم نوسانگر است. بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}\xrightarrow{\ell=1m}\omega=\sqrt{10}\ rad/s$$

بیشینه نیروی خالص وارد بر نوسانگر را حساب می‌کنیم.

$$F_{max}=mA\omega^2\xrightarrow[A=0/01cm]{m=0/2kg}F_{max}=0/2\times0/01\times10=0/02N$$

بازی با سؤال گلوله یک آونگ ساده با دامنهٔ ۵ میلی‌متر نوسان می‌کند و بیشینه شتاب آن ۲ سانتی‌متر بر مربع ثانیه است. طول آونگ چند متر است؟ $(g=10m/s^2)$

۱) ۲ ۲) ۱/۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۴

پاسخ تمام روابطی که برای سامانهٔ جرم - فنر به‌دست آورده‌ایم دربارهٔ آونگ نیز صادق است از جمله بیشینهٔ شتاب برابر $a_{max}=A\omega^2$ می‌باشد. از این می‌توان بسامد زاویه‌ای آونگ را حساب کرد.

$$\frac{2}{100}=5\times10^{-3}\times\omega^2\Rightarrow\omega^2=4\Rightarrow\omega=2rad/s$$

همچنین می‌دانیم بسامد زاویه‌ای برابر $\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ است از این رو:

گزینهٔ ۳

$$\omega^2=\frac{g}{\ell}\Rightarrow\frac{g}{\ell}=4\Rightarrow\ell=2/5m\Rightarrow\ell=2/5m$$

B ۱۴۱۰ ۲

خط فکری بیشینه نیرو در دو حالت یکسان است. از طرفی فنر تغییر نکرده و ثابت فنر k ثابت مانده است. از این مطلب استفاده کنید و نسبت دامنه‌ها را به‌دست بیاورید سپس باید بسامد زاویه‌ای جدید را حساب کنید تا بتوانید معادله را بنویسید.

۱ با توجه به قانون هوک $F=kx$ بیشینهٔ نیرو در مکان $x=\pm A$ خواهد بود یعنی $|F_{max}|=kA$ است. بنابراین:

$$F_{max_1}=F_{max_2}\Rightarrow k_1A_1=k_2A_2\xrightarrow{k_1=k_2}A_1=A_2$$

$$\xrightarrow{A_1=0/1m}A_2=0/1\ m$$

۲ بسامد زاویه را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{\sqrt{\frac{k}{m_2}}}{\sqrt{\frac{k}{m_1}}}\xrightarrow{\omega_1=5\pi}\frac{\omega_2}{5\pi}=\sqrt{\frac{m_1}{4m_1}}\Rightarrow\omega_2=\frac{5\pi}{2}rad/s$$

۳ معادلهٔ حرکت در حالت دوم خواهد شد:

$$x=A_2\cos\omega_2t\Rightarrow x=0/1\cos\frac{5\pi}{2}t\Rightarrow x=0/1\cos2/5\pi t$$

بازی با سؤال جسمی به جرم ۵۰ گرم که از یک فنر آویخته است، نوسان می‌کند، معادلهٔ مکان نوسانگر در SI به‌صورت $x=0/1\cos20t$ است، بیشترین نیروی وارد بر جسم چند نیوتون است؟ مشابه کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ با توجه به معادلهٔ داده شده $A=0/01m$ و $\omega=20rad/s$ است.

$$F_{max}=mA\omega^2\Rightarrow F_{max}=0/05\times0/01\times(20)^2$$

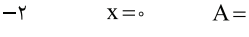
$$\Rightarrow F_{max}=0/05\times0/01\times400=0/2N$$

گزینهٔ ۲

A ۱۴۱۱ ۳

خط فکری در یک حرکت هماهنگ ساده، طول پاره‌خط مسیر نوسان دو برابر دامنه است و بازهٔ زمانی که طول می‌کشد تا نوسانگر طول پاره‌خط را طی کند برابر نصف دوره $(\frac{T}{2})$ است. بنابراین کافی است ابتدا دامنه و دوره و سپس بیشینهٔ سرعت را حساب کنید.

۱ دامنه نوسان یک حرکت هماهنگ ساده نصف طول مسیر آن است.



$$A=\frac{4}{2}=2cm$$

۲ نوسانگر در مدت $\frac{T}{2}$ (نصف دوره) یک‌بار طول پاره‌خط را طی می‌کند. با توجه به صورت سؤال $\frac{T}{2}=1s$ است، بنابراین $T=2s$ خواهد بود.

۳ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi\ \frac{rad}{s}$$

۴ بیشینه سرعت نوسانگر برابر است با:

$$v_m=A\omega\Rightarrow v_m=0/02\times\pi=0/02\pi m/s=2\pi cm/s$$

۴ ۱۴۱۲ B

ابتدا مکان نوسانگر را در لحظهٔ $t=0/07\pi s$ به‌دست می‌آوریم.

$$x=0/04\cos 50t\Rightarrow x=0/04\cos 50\times 0/07\pi$$

$$x=0/04\cos\frac{7}{2}\pi\Rightarrow x=0/04\cos(4\pi-\frac{\pi}{2})\Rightarrow x=0$$

بنابراین در این لحظه، نوسانگر در حال گذر از مبدأ مکان بوده و تندی آن بیشینه است.

با توجه به معادلهٔ $x=0/04\cos(50t)$ ، دامنهٔ نوسان $A=0/04m$ و بسامد زاویه‌ای نوسانگر $\omega=50rad/s$ است. $v_m=A\omega\Rightarrow v_m=0/04\times 50\Rightarrow v_m=2m/s$

۴ ۱۴۱۳ A

با توجه به رابطه سرعت بیشینه نوسانگر داریم:

$$v_m=A\omega\Rightarrow 4/4=7\times 10^{-3}\times\omega\Rightarrow\omega=\frac{4400}{7}rad/s$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{4400}{7}}=\frac{2(\frac{22}{7})}{\frac{4400}{7}}=\frac{1}{100}s$$

۲ ۱۴۱۴ A

خط فکری دوباره گرفتار بیشینه طول و کمینه طول فنر شدیم. البته طول مسیر راحت به‌دست می‌آید $(\ell_{max}-\ell_{min})$ و به کمک طول مسیر، دامنه در دسترس بوده و با داشتن ثابت فنر و جرم، بسامد زاویه‌ای را می‌توان حساب کرد و مسئله تمام است.

۱ طول پاره‌خطی که نوسانگر در آن نوسان می‌کند برابر $2A$ است.

$$2A=52-42=10\Rightarrow A=5cm$$

۲ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\xrightarrow{m=0/1kg,\ F=160N}\omega=\sqrt{\frac{160}{0/1}}\Rightarrow\omega=40rad/s$$

۳ تندی بیشینه خواهد شد: $v_m=A\omega\Rightarrow v_m=0/05\times 40\Rightarrow v_m=2m/s$

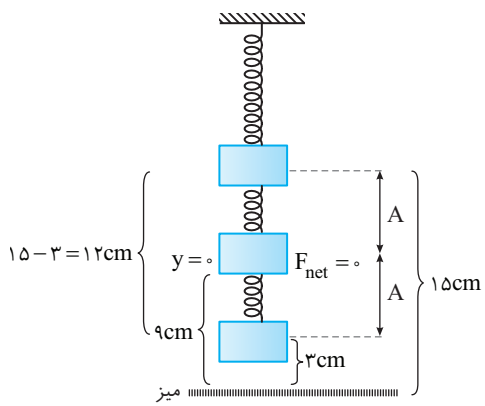
۲ ۱۴۱۵ B

خط فکری باید یک نقاشی مثل شکل زیر رسم کنید و به کمک آن طول مسیر و دامنه و مکان وزنه را وقتی فاصلهٔ آن از میز $9\ cm$ است به‌دست آورید، تا بتوانید مسئله را حل کنید.

۱ با توجه به صورت مسئله بالاترین نقطه از سطح میز $15cm$ و پایین‌ترین فاصله وزنه از سطح میز $3cm$ بوده، بنابراین طول مسیر $15-3=12cm$ و دامنه $A=\frac{12}{2}=6cm$ است.

۲ بسامد زاویه‌ای سامانه جرم - فنر را حساب می‌کنیم.

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\xrightarrow{k=0/4N/m,\ m=0/1kg}\omega=\sqrt{\frac{0/4}{0/1}}\Rightarrow\omega=2\ rad/s$$



۳ به شکل مجدداً نگاه کنید. فاصلهٔ وزنه وقتی از سطح میز $9cm$ است نوسانگر در حال گذر از حالت تعادل خود بوده، در حالت تعادل شتاب صفر و تندی بیشینه است. تندی بیشینه خواهد شد: $v_m=A\omega\Rightarrow v_m=6\times 2=12\ cm/s\Rightarrow v_m=0/12m/s$

۴ ۱۴۱۶ B

خط فکری هنگام گذر از حالت تعادل تندی نوسانگر بیشینه و برابر $v_m=A\omega$ است. وقتی با دادن تندی اولیه دامنه از $4cm$ به $9cm$ افزایش می‌یابد شما باید تندی بیشینه با دامنهٔ $4cm$ و تندی بیشینه با دامنهٔ $9cm$ را پیدا کرده و از هم کم کنید تا تندی اولیه داده شده به نوسانگر را بیابید.

به کمک رابطهٔ سرعت بیشینه، در دو حالت v_m را به‌دست آورده و مقدارهای به‌دست آمده را از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{cases}v_m=A\omega=4\times\frac{2\pi}{\pi}=8cm/s\\ v'_m=A'\omega=9\times\frac{2\pi}{\pi}=18cm/s\end{cases}\Rightarrow 18-8=10\ cm/s=0/1\ m/s$$

۲ ۱۴۱۷ B

در لحظهٔ t که فنر نه کشیده و نه فشرده است، وزنه در نقطهٔ تعادل خود قرار دارد و در نقطه تعادل نیرو و شتاب صفر اما تندی بیشینه است. بنابراین تندی بیشینه نوسانگر $12m/s$ است.

بسامد زاویه‌ای نوسانگر را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\xrightarrow{k=900N/m,\ m=4kg}\omega=\sqrt{\frac{900}{4}}=\frac{30}{2}\Rightarrow\omega=15rad/s$$

به کمک تندی بیشینه، دامنه را به دست می‌آوریم.

$$v_m=A\omega\Rightarrow 12=A\times 15\Rightarrow A=0/8m$$

بنابراین معادلهٔ مکان - زمان وزنه به صورت زیر در می‌آید:

$$x=A\cos(\omega t)\Rightarrow x=0/8\cos 15t$$

۲ ۱۴۱۸ B

خط فکری برای نوشتن معادلهٔ مکان - زمان نوسانگر $(x=A\cos\omega t)$ باید دامنه و بسامد زاویه‌ای را داشته باشیم. معادلهٔ حرکت نوسانگر A، $x=0/1\cos\pi t$ بوده و بسامد زاویه‌ای آن $\omega_A=\pi\ rad/s$ است. با توجه به داده‌های مسئله ω_B و A_B را به‌دست بیاورید.

۱ دورهٔ نوسانگر A برابر است با: $\omega_A=\frac{2\pi}{T_A}\Rightarrow\pi=\frac{2\pi}{T_A}\Rightarrow T_A=2s$

۲ دورهٔ B، $2s$ از دورهٔ A بیشتر است. بنابراین:

$$T_B=T_A+2\Rightarrow T_B=2+2=4s$$

۳ بسامد زاویه‌ای B خواهد شد: $\omega_B=\frac{2\pi}{T_B}=\frac{2\pi}{4}\Rightarrow\omega_B=\frac{\pi}{2}rad/s$

۴ بیشینه تندی A دو برابر بیشینه تندی B است، از این رو:

$$v_{m_A}=2v_{m_B}\Rightarrow A_A\omega_A=2A_B\omega_B\xrightarrow{A_A=0/1m}0/1\times\pi=2A_B\times\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow A_B=0/1m$$

۵ در نتیجه معادلهٔ مکان - زمان نوسانگر B به صورت زیر است:

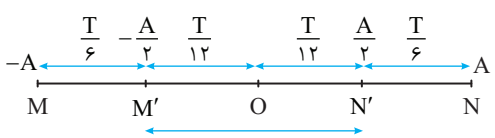
$$x=A_B\cos(\omega_B t)\Rightarrow x=0/1\cos(\frac{\pi}{2}t)$$

۳ ۱۴۱۹ C

تندی بیشینه برابر $A\omega$ است، دوره را حساب می‌کنیم.

$$v_m=A\omega\xrightarrow{v_m=3\pi\ cm/s}3\pi=3\omega\Rightarrow\omega=\pi\ rad/s$$

$$\xrightarrow{\omega=2\pi/T}\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=2s$$

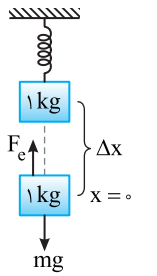


دامنهٔ نوسـانگر $A=\frac{۶}{۲}=۳cm$ بنابراین $x_{N'}=۱/۵cm$ و $x_{M'}=-۱/۵cm$ یعنی نقـاط N' و M' به‌ترتیب در مـکان $+\frac{A}{۲}$ و $-\frac{A}{۲}$ قرار دارند. مدت زمان حرکت از $-\frac{A}{۲}$ تا مرکز نوسان و از مرکز نوسان تا $+\frac{A}{۲}$ خواهد شد:

$$t=\frac{T}{۱۲}+\frac{T}{۱۲}=\frac{T}{۶}\xrightarrow{T=۲s}t=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}s$$

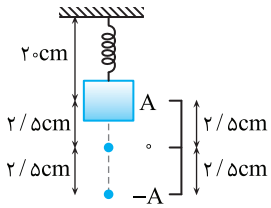
۱۴۲۰ B **۱**

جسـم به فنر آویخته و رها می‌شـود و با توجه به داشـتن یک سیسـتم جرم - فنر، مجموعه شروع به نوسان می‌کند. دقت کنید که وضع تعادل در نوسان که مکان آن را $x=۰$ در نظر می‌گیریم، مکانی اسـت کـه نیروی خالص وارد بر نوسـانگر صفر باشد. برای این سیستم جرم - فنر هنگامی که نوسانگر به $x=۰$ رسـیده باید نیروی وزن و نیروی کشسـانی فنر اثر یکدیگر را خنثی کنند.



$$F_e=mg\xrightarrow{F_e=k\Delta x}۴۰۰\Delta x=۱۰\Rightarrow\Delta x=\frac{۱}{۴۰}m=۲/۵cm$$

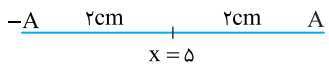
جسـم از حال سـکون رها شده پس طول ۲۰cm فنر وضعیتی اسـت که جسم در نقطهٔ بازگشت یعنی دامنهٔ خود قرار دارد. با توجه به اینکه جسـم ۲/۵cm کشـیده شـده تا به وضع تعادل برسـد پس دامنهٔ حرکت ۲/۵cm است.



بیشینه طول فنر برابر $۲۰+۵=۲۵cm$ است. در این حالت جسم به نقطهٔ بازگشت خود رسیده و تندی نوسانگر صفر است.

۱۴۲۱ B **۴**

طول پاره‌خط ۴cm است، بنابراین دامنهٔ نوسان $A=\frac{۴}{۲}=۲cm$ است.



به کمک بیشینه تندی $(v_m=۰/۰۸\pi m/s)$، بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

$$v_m=A\omega\Rightarrow۰/۰۸\pi=۰/۰۲\omega\Rightarrow\omega=۴\pi\frac{rad}{s}$$

در لحظهٔ تغییر جهت یعنی وقتی نوسـانگر در یکی از دو انتهای مسـیرش اسـت، شـتاب بیشینه است، از این‌رو:

$$a_m=A\omega^۲\Rightarrow a_m=۰/۰۲\times(۴\pi)^۲$$

$$a_m=۰/۰۲\times۱۶\pi^۲\Rightarrow a_m=۰/۳۲\pi^۲\ m/s^۲$$

۱۴۲۲ A **۱**

خط فکری در نقاط بازگشـت شـتاب و نیرو بیشینه و در نقطهٔ تعادل شتاب و نیرو صفر است.

در نقاط بازگشـت تندی صفر بوده و در نقطهٔ تعادل تندی نوسـانگر بیشینه است. تندی بیشینه برابر $A\omega$ و شتاب بیشینه برابر $A\omega^۲$ است.

۱ با توجه به سؤال تندی بیشینه و شتاب بیشینه داده شده است:

$$\begin{cases}v_{max}=A\omega=۰/۲\pi\\ a_{max}=A\omega^۲=۰/۸\pi^۲\end{cases}\xrightarrow{\frac{a_m}{v_m}=\frac{A\omega^۲}{A\omega}=\omega}\omega=\frac{۰/۸\pi^۲}{۰/۲\pi}=۴\pi$$

۲ بزرگی شتاب نوسانگر در هر مکان از رابطهٔ $|a|=|\omega^۲|x$ به‌دست می‌آید:

$$|a|=(۴\pi)^۲\times\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow|a|=۰/۱۶\pi^۲$$

۱۴۲۳ A **۴**

خط فکری تمـام روابط حرکت هماهنگ سـاده را می‌توانید در مـورد آونگ به کار ببرید، بنابراین با نوشتن رابطه سرعت بیشینه و شتاب بیشینه مسئله را حل کنید.

ابتدا با استفاده از سرعت بیشینه و شتاب بیشینه، ω را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases}a_m=A\omega^۲\\ v_m=A\omega\end{cases}\xrightarrow{\text{دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم.}}a_m=v_m\omega$$

$$\xrightarrow{\substack{a_m=۰/۲m/s^۲\\ v_m=\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}m/s}}\frac{۲}{۱۰}=\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}\omega\Rightarrow\omega=\sqrt{۲}rad/s$$

بسامد زاویه‌ای را داریم. بنابراین طول آونگ را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}\Rightarrow\sqrt{۲}=\sqrt{\frac{۱۰}{\ell}}\Rightarrow\ell=۵\,m$$

۱۴۲۴ B **۲**

یادآوری بزرگی شتاب نوسانگر از رابطه $|a|=\omega^۲|x|$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{\pi^۲}{۲}=\omega^۲\times\frac{۲}{۱۰۰}\Rightarrow\omega^۲=۲۵\pi^۲\Rightarrow\omega=۵\pi\frac{rad}{s}$$

طول پاره‌خط نوسانگر برابر $۲A$ است، دامنه خواهد شد: $۲A=۸cm\Rightarrow A=۴cm$

تندی بیشینه نوسانگر برابر است با:

$$v_m=A\omega\Rightarrow v_m=۰/۰۴\times۵\pi=۰/۲\pi=\frac{۲\pi}{۱۰}=\frac{\pi}{۵}m/s$$

بازی با سؤال **در یـک حرکت هماهنگ سـاده، دامنهٔ نوسـان ۵cm و اندازهٔ شـتاب در فاصله ۲cm از حالت تعادل $۸cm/s^۲$ اسـت. بیشـینهٔ تندی نوسانگر چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟** خارج تجربی - ۹۱

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۵π ۴) ۱۰π

پاسخ

یادآوری بیشینه تندی نوسانگر $v_m=A\omega$ و شتاب نوسانگر $|a|=\omega^۲x$ است.

۱ با اسـتفاده از اندازهٔ شتاب $|a|=۸cm/s^۲$ در مکان $x=۲cm$ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$|a|=\omega^۲x\Rightarrow۸=\omega^۲(۲)\Rightarrow\omega=۲rad/s$$

۲ تندی بیشینه خواهد شد:

$$v_m=A\omega\Rightarrow v_m=۵\times۲=۱۰\,cm/s$$

گزینهٔ ۲

۱۴۲۵ A **۳**

۱ ابتدا باید مشخص کنیم وقتی جرم ۵۰٪ افزایش می‌یابد با ثابت بودن فنر، بسامد زاویه‌ای چند برابر می‌شود.

$$\frac{\omega_۲}{\omega_۱}=\frac{\sqrt{\frac{k}{m_۲}}}{\sqrt{\frac{k}{m_۱}}}\Rightarrow\frac{\omega_۲}{\omega_۱}=\sqrt{\frac{m_۱}{m_۲}}\xrightarrow{m_۲=m_۱+۰/۵m_۱=۱/۵m_۱}$$

$$\frac{\omega_۲}{\omega_۱}=\sqrt{\frac{m_۱}{۱/۵m_۱}}=\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

۲ نسبت بیشینه تندی خواهد شد:

$$\frac{v_{۲,max}}{v_{۱,max}}=\frac{A\omega_۲}{A\omega_۱}\Rightarrow\frac{v_{۲,max}}{v_{۱,max}}=\frac{\omega_۲}{\omega_۱}=\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

۳ نسبت بیشینه شتاب برابر است با:

$$\frac{a_{۲,max}}{a_{۱,max}}=\frac{A\omega_۲^۲}{A\omega_۱^۲}=(\frac{\omega_۲}{\omega_۱})^۲=\frac{۲}{۳}$$

۱۴۲۶ B **۳**

خط فکری برای به‌دسـت آوردن شتاب متوسـط باید تغییرات سرعت را به‌دست آوریم $(a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t})$. برای به‌دسـت آوردن سـرعت، ابتدا مکان نوسانگر در $t_۱=۱s$ و $t_۲=۲s$ را بررسـی می‌کنیم. اگر نوسانگر در انتهای مسیر قرار داشت $(x=\pm A$ نقاط بازگشـت) سرعت متحرک صفر و اگر در مرکز نوسـان $x=۰$ قرار داشت، اندازهٔ سرعت بیشینه است $(|v|=A\omega)$.

ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ زمانی بین $t=1s$ تا $t=2s$، مکان متحرک را در این دو لحظه به‌دست می‌آوریم و تندی متحرک در این مکان را حساب می‌کنیم.

$$x=0/02\cos(\frac{\pi}{2}\times 1)=0 \xrightarrow{\text{مرکزنوسان}}$$

$$|v_1|=A\omega=0/02\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{100}\,m/s\Rightarrow v_1=\pi\,cm/s$$

$$x=0/02\cos(\frac{\pi}{2}\times 2)=-0/02 \xrightarrow{\text{درنقاط بازگشت}} v_2=0$$

اندازهٔ شتاب متوسط برابر است با: $|\bar{a}|=|\frac{\Delta v}{\Delta t}|=|\frac{v_2-v_1}{\Delta t}|=\frac{\pi}{2-1}=\pi\,cm/s^2$

B ۱۴۲۷ | ۱

یادآوری تکانه برابر حاصل‌ضرب جرم در سرعت است $(\vec{P}=m\vec{v})$. تکانه وقتی بیشینه است که تندی بیشینه $(v_m=A\omega)$ باشد.

$$P=mv_m\Rightarrow P=mA\omega\Rightarrow 20\times A\times\frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}}=16\,g\,m/s\Rightarrow 20\times 20\times A=16$$

$$\Rightarrow A=0/04\,m\Rightarrow \text{طول پاره‌خط}=2A=8\,cm$$

دقت کنید که واحد تکانه $g.m/s$ است پس m را نیز با واحد گرم قرار دادیم.

B ۱۴۲۸ | ۱

۱ معادله نیرو- مکان داده شده $|F|=160\pi^2 x$ را با معادله نیرو - مکان حرکت هماهنگ ساده $|F|=m\omega^2 x$ مقایسه می‌کنیم.

$$m\omega^2=160\pi^2 \xrightarrow{m=0/1kg} 0/1\omega^2=160\pi^2\Rightarrow\omega=40\pi\ rad/s$$

۲ دامنه نصف پاره‌خط مسیر است. $A=\frac{1}{2}cm=0/5cm=5\times10^{-3}m$

۳ بیشینه تندی خواهد شد:

$$v_m=A\omega\Rightarrow v_m=5\times10^{-3}\times40\pi\Rightarrow v_m=0/2\pi\,m/s$$

B ۱۴۲۹ | ۳

خط فکری در حرکت هماهنگ ساده هرگاه سرعت $v=0$ باشد شتاب ماکزیمم $(a_m=\pm A\omega^2)$ بوده و هرگاه سرعت بیشینه $(v_m=A\omega)$ باشد، شتاب صفر است.

بنابراین کافی است که در معادله شتاب - سرعت $\frac{a^2}{25}+\frac{v^2}{4}=\pi^2$ یکبار $v=0$ و شتاب را a_m و بار دیگر سرعت را v_m و شتاب را صفر قرار دهید.

۱ سرعت را در معادله برابر صفر قرار می‌دهیم: $\frac{a_m^2}{25}+0=\pi^2\Rightarrow a_m=5\pi\,m/s^2$

۲ شتاب را در معادله صفر قرار می‌دهیم. $\frac{0}{25}+\frac{v_m^2}{4}=\pi^2\Rightarrow v_m=2\pi$

۳ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix}a_m=A\omega^2\\ v_m=A\omega^2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\omega=\frac{a_m}{v_m}\Rightarrow\omega=\frac{5\pi}{2\pi}\Rightarrow\omega=2/5\,rad/s$$

۴ دوره خواهد شد: $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 2/5=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{2/5}\Rightarrow T=\frac{4\pi}{5}s$

میانبر رابطه دوره با تندی بیشینه و شتاب بیشینه $T=2\pi\frac{v_m}{a_m}$

A ۱۴۳۰ | ۲

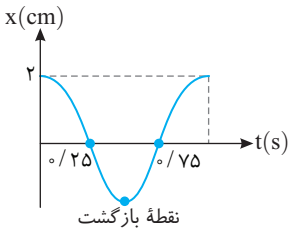
خط فکری در حل این مسئله نکات مهمی که از حرکت هماهنگ ساده باید برای خود یادآوری کنید این است که در حالت تعادل یعنی $x=0$، تندی بیشینه است یعنی اگر در معادلهٔ $v^2=2500z^2-2500x^2$، x را برابر صفر قرار دهیم تندی بیشینه می‌شود و در نقاط بازگشت $(x=\pm A)$ تندی صفر است. یعنی اگر تندی را صفر قرار دهیم x همان $\pm A$ خواهد شد. با این مطالب کافی است در معادلهٔ سرعت - مکان به جای v صفر قرار دهید و z را بررسی کنید.

در نقاط بازگشت $x=\pm A$ سرعت صفر است بنابراین:

$$x=\pm A, v=0\Rightarrow 0=2500z^2-2500A^2\Rightarrow z=A$$

B ۱۴۳۱ | ۲

با توجه به نمودار $\frac{T}{4}=0/25s$ است پس دوره حرکت $T=1s$ می‌باشد و در مدت $\frac{T}{2}=0/5s$ ابتدایی متحرک از $x=A$ به $x=-A$ می‌رسد پس ابتدا نوسانگر به مرکز نوسان $(x=0)$ که



تندی بیشینه دارد نزدیک شده و حرکت آن تندشونده است و پس از آن از مرکز نوسان در حال دور شدن بوده و حرکت آن کندشونده است از این‌رو گزارهٔ (الف) نادرست است.

در بازهٔ $t=\frac{T}{4}=0/25$ تا $t=\frac{3T}{4}=0/75$ مطابق شکل روبه‌رو یک‌بار متحرک به نقطهٔ بازگشت خود رسیده است و گزارهٔ (ب) درست است.

بیشینهٔ تندی نوسانگر برابر $A\omega$ است.

$$A\omega=\frac{2}{100}\times\frac{2\pi}{T}\Rightarrow A\omega=\frac{2}{100}\times\frac{2\pi}{1}=\frac{4\pi}{100}\,m/s=4\pi\,cm/s$$

گزارهٔ (پ) درست است.

B ۱۴۳۲ | ۳

۱ با توجه به نمودار دوره و بسامد حرکت هر دو نوسانگر برابر است:

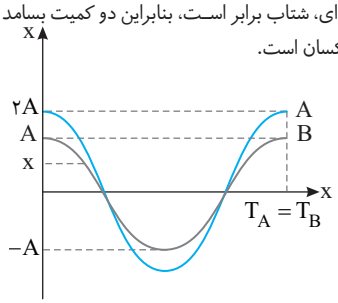
$$T_A=T_B\Rightarrow f_A=f_B\Rightarrow\omega_A=\omega_B$$

۲ تندی بیشینه $v_m=A\omega$ است از این‌رو:

$$v_{m_A}=A_A\omega_A, v_{m_B}=A_B\omega_B\Rightarrow\frac{v_{m_A}}{v_{m_B}}=\frac{2A}{A}=2$$

بنابراین تندی بیشینهٔ آن‌ها برابر نیست.

۳ شتاب در حرکت هماهنگ ساده $|a|=\omega^2 x$ است. در مکان x با توجه به یکسان بودن بسامد زاویه‌ای، شتاب برابر است، بنابراین دو کمیت بسامد و شتاب در مکان x برای دو نوسانگر یکسان است.



B ۱۴۳۳ | ۴

خط فکری در نقاط بازگشت $x=\pm A$ تندی نوسانگر صفر $(v=0)$ است. یعنی اگر در معادلهٔ سرعت - مکان $\frac{25}{\pi^2}v^2+2500x^2=1$ به جای x، $\pm A$ قرار دهیم، تندی صفر و اگر در معادله به جای v، تندی بیشینه $(v_m=A\omega)$ قرار دهیم $x=0$ خواهد بود بنابراین شما یک بار $x=0$ و بار دیگر $v=0$ را در معادله قرار دهید.

۱ تندی بیشینه را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{25}{\pi^2}v^2+2500x^2=1\xrightarrow{x=0,\,v=v_m}\frac{25}{\pi^2}v_m^2+0=1\Rightarrow v_m=\frac{\pi}{5}\,m/s$$

۲ دامنه را به‌دست می‌آوریم

$$\frac{25}{\pi^2}v^2+2500x^2=1\xrightarrow{v=0,\,x=A}0+2500A^2=1\Rightarrow A=0/02m=2cm$$

بنابراین نمودارهای (۱) و (۲) نادرست هستند.

۳ دوره را به‌دست آورده، $\frac{T}{4}$ را حساب می‌کنیم.

$$v_m=A\omega\Rightarrow\frac{\pi}{5}=0/02(\frac{2\pi}{T})\Rightarrow T=0/2s=\frac{2}{10}s\Rightarrow\frac{T}{4}=\frac{1}{20}s$$

بنابراین نمودار (۳) نادرست و نمودار (۴) درست است.

B ۱۴۳۴ ۴

در این تست در معادلهٔ شتاب - مکان یک علامت منفی مشاهده می‌کنید که علت آن همان قانون هوک $F=-kx$ است* که در درسنامه بیان شده است و با توجه به قانون هوک معادلهٔ شتاب - مکان نوسانگر به‌صورت $a=-\omega^2 x$ است، بنابراین ضریب x^2 همان ω^2 است و بسامد زاویه‌ای خواهد شد:

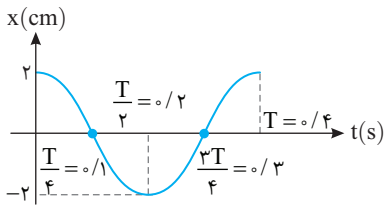
$$a=-۲۵\pi^2 x, a=-\omega^2 x \Rightarrow \omega^2=۲۵\pi^2 \Rightarrow \omega=۵\pi \text{ rad/s}$$

دوره را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T} \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}=۵\pi \Rightarrow T=۰/۴\text{s}$$

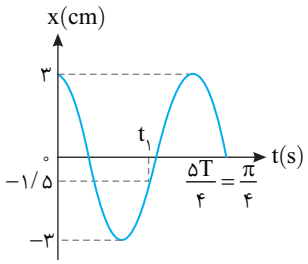
تندی بیشینهٔ نوسانگر برابر $A\omega$ است. به کمک v_m دامنه را حساب می‌کنیم.

$$v_{max}=A\omega \xrightarrow{v_{max}=۱۰\pi \text{ cm/s}} ۱۰\pi=A\times ۵\pi \Rightarrow A=۲\text{cm}$$



B ۱۴۳۵ ۲

قبل از حل مسئله، به یادآوری‌های زیر دقت کنید.



یادآوری ۳ بنا به قانون دوم نیوتون نیروی خالص وارد بر نوسانگر برابر $F=ma$ است.

یادآوری ۴ در حرکت هماهنگ ساده رابطهٔ بین شتاب و مکان به صورت زیر است:

$$|a|=\omega^2|x| \xrightarrow{F=ma} |F|=m\omega^2|x|$$

اولین کاری که باید بکنیم، به‌دست آوردن دوره حرکت به کمک نمودار است.

$$۵\frac{T}{۴}=\frac{\pi}{۴} \Rightarrow T=\frac{\pi}{۵}\text{s}$$

بسامد زاویه‌ای نوسانگر خواهد شد:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T} \Rightarrow \omega=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۵}} \Rightarrow \omega=۱۰\text{rad/s}$$

نیروی وارد بر نوسانگر در لحظهٔ $t=t_1$ خواهد شد:

$$|F|=m\omega^2|x| \xrightarrow[m=۰/۲\text{kg}]{|x|=۱/۵\times ۱۰^{-۲}\text{m}}$$

$$|F|=۰/۲\times(۱۰)^2\times ۱/۵\times ۱۰^{-۲} \Rightarrow |F|=۰/۳\text{N}$$

B ۱۴۳۶ ۳

ابتدا به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده دوره را حساب می‌کنیم.

$$\frac{T}{۲}+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۱۲}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱۰T}{۱۲}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow T=\frac{۶}{۱۰}\text{s}$$

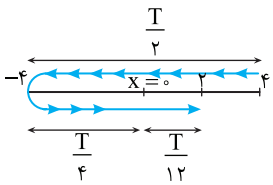
بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم

$$\omega=\frac{۲\pi}{T} \Rightarrow \omega=\frac{۲\pi}{\frac{۶}{۱۰}}=۱۰\text{rad/s}$$

تندی بیشینه ذرات محیط خواهد شد:

$$v_{max}=A\omega=\frac{۴}{۱۰۰}\times ۱۰=۰/۴\text{m/s}$$

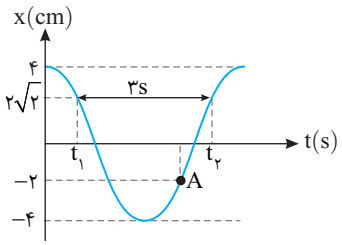
* قانون هوک در کتاب درسی بیان نشده است با آنکه علت اصلی حرکت هماهنگ ساده است.



C ۱۴۳۷ ۱

ابتدا با توجه به بازهٔ زمانی ۳s ، بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم. در t_1 نوسانگر برای نخستین بار از مکان $۲\sqrt{۲}\text{cm}$ عبور کرده و در t_2 نیز نوسانگر برای دومین بار از مکان $۲\sqrt{۲}\text{cm}$ عبور می‌کند.

$$x=A\cos\omega t \begin{cases} \cos\omega t_1=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \omega t_1=\frac{\pi}{۴} \\ \cos\omega t_2=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \omega t_2=\frac{۷\pi}{۴} \end{cases}$$



تفاضل شناسه‌های تابع کسینوسی برابر است با:

$$\omega t_2-\omega t_1=\frac{۷\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \omega(t_2-t_1)=\frac{۳\pi}{۲} \xrightarrow{t_2-t_1=۳\text{s}} \omega(۳)=\frac{۳\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow \omega=\frac{\pi}{۲}\text{rad/s}$$

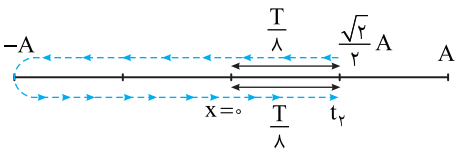
شتاب نوسانگر برابر است با:

$$a=-\omega^2 x \Rightarrow a=-(\frac{\pi}{۴})^2\times(-۲)=\frac{\pi^2}{۲}\text{cm/s}^2 \Rightarrow a=\frac{۱۰}{۲}=۵\text{cm/s}^2$$

روش استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:

$$\frac{x}{A}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$$

مسیر حرکت را رسم می‌کنیم.



از مکان $+\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ تا $-A$ و برگشت به $+\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ بازهٔ زمانی برابر است با:

$$t_2-t_1=\frac{T}{۲}+\frac{T}{۸}+\frac{T}{۸} \Rightarrow ۳=\frac{۶T}{۸} \Rightarrow T=۴\text{s}$$

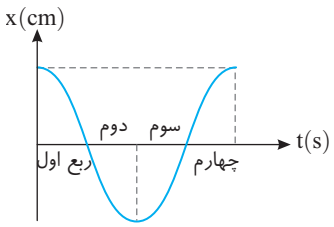
بسامد زاویه‌ای خواهد شد:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{۴} \Rightarrow \omega=\frac{\pi}{۲}\text{rad/s}$$

ادامهٔ مسئله مانند روش قبلی است.

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی:

شناسه تابع کسینوس (فاز) حرکت در لحظهٔ t_1 و t_2 را روی دایره نمایش می‌دهیم. در لحظهٔ t_1 فاز در ربع اول و در لحظهٔ t_2 فاز در ربع چهارم است.

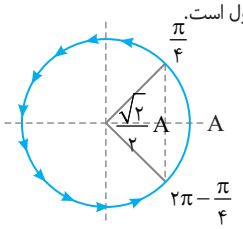


تغییر فاز از t_1 تا t_2 مطابق شکل خواهد شد:

$$\omega t_2-\omega t_1=\frac{\pi}{4}+\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{6\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$$

$$\omega(t_2-t_1)=\frac{3\pi}{2}\xrightarrow{t_2-t_1=3}\omega\times 3=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{2}\,rad/s$$

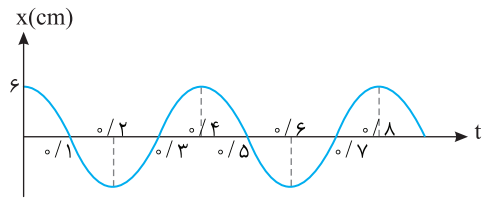
ادامهٔ مسئله مانند روش اول است.



۳ ۱۴۳۸ B

با توجه به نمودار ابتدا دوره را حساب می‌کنیم.

$$\frac{5T}{4}=0/5\Rightarrow T=0/4s$$



بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{0/4}\Rightarrow\omega=5\pi rad/s$$

در لحظهٔ $t=0/1s$ مکان نوسانگر $x=0$ است یعنی نوسانگر در این لحظه از مبدأ می‌گذرد و تندی آن بیشینه است.

$$t=0/1s\Rightarrow v_m=A\omega\Rightarrow v_m=0/06\times 5\pi,\quad v_1=v_m=0/3\pi m/s$$

در لحظهٔ $t=0/8s$، نوسانگر در انتهای مسیر $x=+6m$ بوده و سرعت آن به طور لحظه‌ای صفر است. $v_2=0$

بزرگی شتاب متوسط خواهد شد:

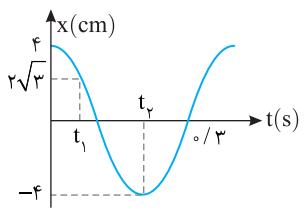
$$|a_{av}|=\frac{|v_2-v_1|}{\Delta t}=\left|\frac{0-0/3\pi}{0/8-0/1}\right|\Rightarrow|a_{av}|=\frac{3}{7}\pi m/s^2$$

۱ ۱۴۳۹ B

خط فکری به نمودار نگاه کنید و در لحظهٔ $t=0$ و $t=t_2$ مکان نوسانگر را مشخص کنید تا بتوانید به کمک آن سرعت در دو لحظه را به‌دست آورده و شتاب متوسط در این بازه را حساب کنید.

۱ در لحظهٔ $t=0$ و $t=t_2$ نوسانگر در نقطهٔ بازگشت خود قرار دارد بنابراین سرعت در این دو لحظه برابر صفر است و شتاب متوسط نیز صفر است.

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\xrightarrow[t=0\text{ در }v=0]{t=t_2\text{ در }v=0}a_{av}=\frac{0}{\Delta t}=0$$



۲ با توجه به نمودار دوره را حساب می‌کنیم:

$$\frac{3T}{4}=0/3\Rightarrow T=0/4s$$

۳ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\frac{4}{10}}=5\pi\ rad/s$$

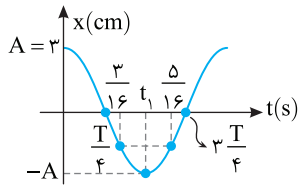
۴ در لحظهٔ t_1 مکان نوسانگر $x=+2\sqrt{3}cm$ است. به کمک معادلهٔ شتاب - مکان، شتاب را حساب می‌کنیم.

$$|a|=+\omega^2|x|\Rightarrow|a|=+25\pi^2\times\frac{2\sqrt{3}}{100}=+5\sqrt{3}m/s^2$$

۴ ۱۴۴۰ B

۱ با توجه به تقارن نمودار در دو طرف لحظهٔ t_1 که نوسانگر در مکان $-A$ قرار دارد می‌توان نتیجه گرفت t_1 در وسط $\frac{3}{16}$ و $\frac{5}{16}$ و t_1 برابر $\frac{T}{2}$ است، از این‌رو:

$$t_1=\frac{\frac{3}{16}+\frac{5}{16}}{2}=\frac{1}{4}s\xrightarrow{t_1=\frac{T}{2}}\frac{1}{4}=\frac{T}{2}\Rightarrow T=\frac{1}{2}s$$



۲ لحظهٔ $t=\frac{3}{8}s$ را برحسب دوره مشخص می‌کنیم.

$$\frac{t}{T}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}\Rightarrow t=\frac{3}{4}T$$

۳ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\omega=4\pi\ rad/s$$

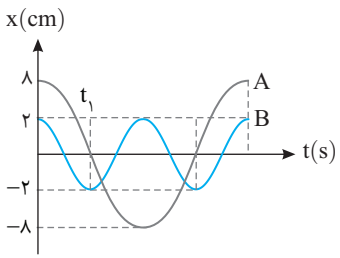
۴ با توجه به نمودار در لحظهٔ $\frac{3}{4}T$ نوسانگر در مکان $x=0$ و دارای تندی بیشینه است در نتیجه:

$$v_m=A\omega\Rightarrow v_m=0/03\times 4\pi\Rightarrow v_m=0/12\pi\ m/s\Rightarrow v_m=12\pi\ cm/s$$

۲ ۱۴۴۱ B

۱ با توجه به نمودار بازهٔ زمانی صفر تا t_1 برای نوسانگر A برابر $\frac{T_A}{4}$ و برای نوسانگر B برابر $\frac{T_B}{4}$ است. بنابراین:

$$t_1=\frac{T_A}{4},t_1=\frac{T_B}{2}\Rightarrow\frac{T_A}{4}=\frac{T_B}{2}\Rightarrow T_A=2T_B$$



۲ بسامد زاویه‌ای A و B را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega_A=\frac{2\pi}{T_A}\Rightarrow\frac{\omega_A}{\omega_B}=\frac{T_B}{T_A}=\frac{1}{2}\Rightarrow\omega_B=2\omega_A$$
$$\omega_B=\frac{2\pi}{T_B}$$

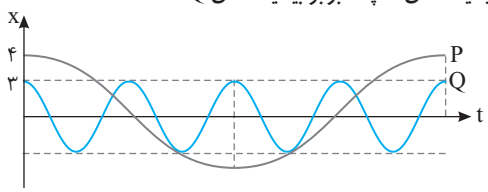
۳ بیشینه نیروی خالص وارد بر نوسانگر از رابطهٔ $F_{max}=mA\omega^2$ به‌دست می‌آید. از این رو:

$$\frac{|F_{max_A}|}{|F_{max_B}|}=\frac{(m\omega^2A)_A}{(m\omega^2A)_B}=\frac{m_A}{m_B}\times\frac{\omega^2{}_A}{\omega^2{}_B}\times\frac{A_A}{A_B}=4\times(\frac{1}{2})^2\times(\frac{8}{2})=4$$

۴ اکنون نسبت بیشینه تندی A به بیشینه تندی B را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{v_{m_A}}{v_{m_B}}=\frac{A_A\omega_A}{A_B\omega_B}\Rightarrow\frac{v_{m_A}}{v_{m_B}}=\frac{8}{2}\times\frac{1}{2}=2$$

بازی با سوال نمودار مکان - زمان دو نوسانگر P و Q مطابق شکل زیر است. بیشینهٔ تندی P چند برابر بیشینهٔ تندی Q است؟

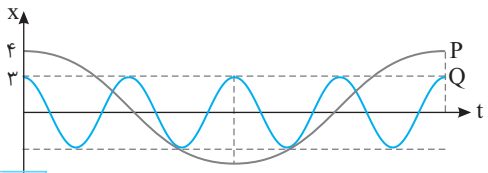


۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ با توجه به شکل دورهٔ P چهار برابر دورهٔ Q است.

$$T_P=۴T_Q \xrightarrow{\omega=\frac{۲\pi}{T}} \omega_P=\frac{۱}{۴}\omega_Q$$

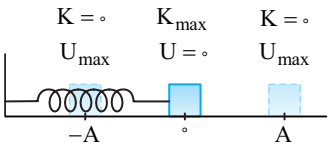
نسبت تندی بیشینه P و Q خواهد شد: $\frac{v_{max\,P}}{v_{max\,Q}}=\frac{A_P\omega_P}{A_Q\omega_Q}=\frac{۴\times\frac{۱}{۴}\omega_Q}{۳\times\omega_Q}=\frac{۱}{۳}$



گزینهٔ ۱

۴ ۱۴۴۲ A

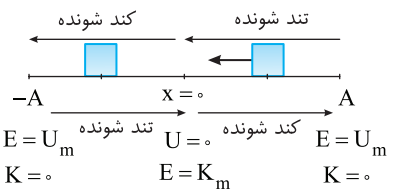
با توجه به شکل روبه‌رو در مرکز تعادل انرژی جنبشی بیشینه و انرژی پتانسیل صفر است. در دو انتهای مسیر انرژی پتانسیل بیشینه و انرژی جنبشی صفر است، پس گزینهٔ (۱) نادرست است. بنابر قانون پایستگی انرژی $E=U+K$ همواره ثابت است، پس گزینهٔ (۲) و (۳) نادرست است. بنا به پایستگی انرژی مکانیکی نوسانگر در تمام نقاط مسیر یکسان است و گزینهٔ (۴) درست است.



۳ ۱۴۴۳ A

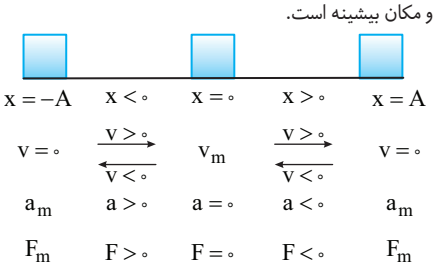
می‌دانیم تندی در مرکز نوسان (نقطه تعادل) بیشینه است. پس اگر نوسانگر در حال حرکت به سمت نقطهٔ تعادل باشد حرکت آن تندشونده است. در نقطهٔ تعادل شتاب و نیرو صفر می‌باشد و با نزدیک شدن به نقطهٔ تعادل شتاب کاهش می‌یابد. بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است و در طول مسیر انرژی مکانیکی ثابت و برابر $\frac{۱}{۲}kA^۲$ بوده. پس گزینهٔ (۲) و (۴) نادرست است.

در دو انتهای مسیر $(x=\pm A)$ فنر بیشینه تغییر طول را دارد، پس در دامنه‌ها انرژی پتانسیل بیشینه است و در مرکز نوسان که فنر نه کشیده و نه فشرده شده انرژی پتانسیل صفر است. بنابراین در حرکت به سمت مرکز تعادل انرژی پتانسیل کاهش می‌یابد.



۱ ۱۴۴۴ A

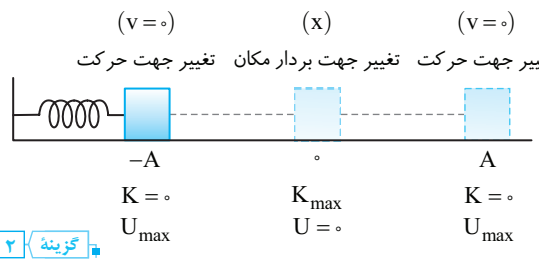
نقاط بازگشت $(x=\pm A)$ انرژی پتانسیل نوسانگر بیشینه است و در این نقاط، اندازهٔ نیرو، شتاب و مکان بیشینه است.



بازی با سوال برای نوسانگری که روی پاره‌خطی در حال نوسان است، هنگام تغییر جهت حرکت ..... آن بیشینه و هنگام تغییر جهت بردار مکان ..... آن بیشینه می‌شود.

۱) انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل ۲) انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی
۳) انرژی جنبشی، انرژی جنبشی ۴) انرژی پتانسیل، انرژی پتانسیل

پاسخ در دو انتهای مسیر حرکت نوسانگر تغییر جهت می‌دهد پس هنگام تغییر جهت حرکت در انتهای مسیر $(x=\pm A)$ انرژی پتانسیل بیشینه است و هنگام گذر از $x=۰$ بردار مکان نوسانگر تغییر جهت می‌دهد و در این مکان $x=۰$ انرژی جنبشی نوسانگر بیشینه است.



گزینهٔ ۲

۱ ۱۴۴۵ A

انرژی مکانیکی یک نوسانگر ساده از رابطهٔ $E=۲\pi^۲mA^۲f^۲$ به‌دست می‌آید که در آن m جرم نوسانگر، A دامنه و f بسامد است، در نتیجه انرژی مکانیکی با مجذور دامنه و مجذور بسامد نسبت مستقیم دارد.

۱ ۱۴۴۶ A

یادآوری انرژی مکانیکی یک نوسانگر برابر با $E=\frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲$ است که در آن m جرم نوسانگر، A دامنه و ω بسامد زاویه‌ای نوسانگر است.

بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم:

$$E=\frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲ \xrightarrow[m=۲\times۱۰^{-۳}\,kg,\ A=\frac{۱۰}{\pi}\times۱۰^{-۲}\,m]{E=۰/۰۰۴J}$$

$$۰/۰۰۴=\frac{۱}{۲}\times۲\times۱۰^{-۳}\times\left(\frac{۱۰}{\pi}\times۱۰^{-۲}\right)^۲\times\omega^۲$$

$$\Rightarrow ۰/۰۰۴=\frac{۱۰^{-۳}\times۱۰^{-۲}}{\pi^۲}\omega^۲\Rightarrow ۱۰^{-۲}\omega^۲=۴\pi^۲$$

$$\Rightarrow\omega^۲=\frac{۴\pi^۲}{۱۰^{-۲}}\Rightarrow\omega=۲\pi\times۱۰\,rad/s=۲۰\pi\ rad/s$$

دوره خواهد شد: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow ۲۰\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۰/۱\,s$

۱ ۱۴۴۷ B

خط فکری مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل برابر انرژی مکانیکی نوسانگر بوده و انرژی مکانیکی نوسانگر $E=۲\pi^۲mA^۲f^۲$ است. بنابراین کافی است K و U را با هم جمع کرده سپس به کمک رابطهٔ انرژی مکانیکی بسامد را حساب کنیم.

انرژی مکانیکی برابر است با:

$$E=K+U \xrightarrow[U=۱۵\times۱۰^{-۳}J]{K=۵\times۱۰^{-۳}J} E=۵\times۱۰^{-۳}+۱۵\times۱۰^{-۳}\Rightarrow E=۲۰\times۱۰^{-۳}J$$

بسامد را حساب می‌کنیم.

$$E=۲\pi^۲mA^۲f^۲ \xrightarrow[\pi^۲=۱۰]{A=۲\times۱۰^{-۲},\ m=۰/۱kg}$$

$$۲۰\times۱۰^{-۳}=۲\times۱۰\times۰/۱\times(۲\times۱۰^{-۲})^۲f^۲\Rightarrow ۱۰^{-۲}=(۲\times۱۰^{-۲})^۲f^۲$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین جذر می‌گیریم}} ۱۰^{-۱}=۲\times۱۰^{-۲}f\Rightarrow f=۵HZ$$

بازی با سوال انرژی جنبشی و پتانسیل یک نوسانگر ساده در یک لحظهٔ معین به‌ترتیب برابر با ۰/۱۲J و ۰/۰۶J است. اگر بسامد زاویه‌ای ۱۵۰rad/s و دامنهٔ حرکت ۴cm باشد، جرم نوسانگر چند گرم است؟

۱) $۱۰^{-۲}$ ۲) $۱۰^{-۱}$ ۳) ۱ ۴) ۱۰

پاسخ **خط فکری** مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل در هر نقطه از مسیر برابر انرژی مکانیکی نوسانگر است، بنابراین کافی است U و K را با هم جمع کرده و بعد از به‌دست آوردن انرژی مکانیکی جرم جسم را حساب کنید.

مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل برابر با انرژی مکانیکی است.

$$E=K+U\Rightarrow E=0/12+0/06\Rightarrow E=0/18J$$

در این صورت می‌توان نوشت:

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2 \xrightarrow{\omega=150rad/s,\ A=4\times10^{-2}m}$$

$$0/18=\frac{1}{2}\times m\times(4\times10^{-2})^2(150)^2\Rightarrow m=10^{-2}kg\Rightarrow m=10g$$

گزینهٔ ۴

۱۴۴۸ B ۱

در لحظهٔ عبور نوسانگر از نقطهٔ تعادل، تندی آن بیشینه (v_m) است. در این نقطه انرژی پتانسیل نوسانگر صفر $(U=0)$ و انرژی جنبشی آن بیشینه و برابر انرژی مکانیکی جسم است. از این‌رو می‌توان نوشت:

$$K_m=E\Rightarrow\frac{1}{2}mv_m^2=E\Rightarrow v_m^2=\left(\frac{2E}{m}\right)$$

$$\Rightarrow v_m=\sqrt{\frac{2E}{m}}\Rightarrow v_m=\left(\frac{2E}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

۱۴۴۹ A ۲

انرژی جنبشی نوسانگر در مبدأ نوسان بیشینه و برابر با انرژی مکانیکی نوسانگر است، بنابراین کافی است انرژی مکانیکی را حساب کنیم.

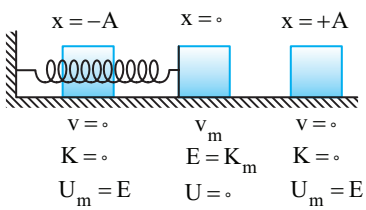
$$K_m=E=\frac{1}{2}kA^2 \xrightarrow{k=100N/m,\ A=4\times10^{-2}m}$$

$$E=\frac{1}{2}\times100\times(4\times10^{-2})^2$$

$$\Rightarrow K_m=50\times16\times10^{-4}=8\times10^{-2}=0/08J$$

۱۴۵۰ B ۲

خط فکری در حل مسائل انرژی نوسانگر بهتر است که شکل زیر را در ذهن خود مرور کنید و به خودتان بگویید که بیشینه انرژی جنبشی و بیشینه انرژی پتانسیل همان انرژی مکانیکی جسم است البته باید یادتان باشد که انرژی مکانیکی مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر $(E=K+U)$ است.



۱ بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر ۰/۸mJ بیان شده که این مقدار برابر انرژی مکانیکی آن است از این‌رو:

$$E=K_m=0/8mJ$$

۲ با توجه به اصل پایستگی انرژی مکانیکی، انرژی جنبشی نوسانگر را وقتی که $U=0/4mJ$ است به‌دست می‌آوریم:

$$E=U+K\Rightarrow 0/8=0/4+K\Rightarrow K=0/4mJ$$

۳ حال می‌توان سرعت نوسانگر را به‌دست آورد.

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow 0/4\times10^{-3}=\frac{1}{2}\times100\times10^{-3}v^2\Rightarrow v^2=\frac{0/8}{100}$$

$$v^2=\frac{8}{1000}=\frac{1}{125}\Rightarrow v=\frac{1}{5\sqrt{5}}m/s$$

$$\Rightarrow v=\frac{20}{\sqrt{5}}cm/s=\frac{20\sqrt{5}}{5}=4\sqrt{5}cm/s$$

بازی با سوال انرژی مکانیکی نوسانگری به جرم ۱۰۰g برابر ۲۰mJ است. در لحظه‌ای که انرژی پتانسیل کشسانی نوسانگر ۱۵mJ است، بزرگی سرعت نوسانگر چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟ ریاضی - ۹۶

۱) $10\sqrt{10}$ ۲) $20\sqrt{10}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{10}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{20}$

پاسخ **خط فکری** انرژی مکانیکی نوسانگر برابر مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل آن $(E=U+K)$ در هر نقطه از مسیر است، بنابراین اگر به شما U و E را بدهند می‌توانید انرژی جنبشی را حساب کرده و تندی نوسانگر در آن لحظه را به‌دست بیاورید.

۱ انرژی جنبشی نوسانگر در لحظهٔ مورد نظر برابر است با:

$$E=U+K\Rightarrow K=E-U=20-15\Rightarrow K=5mJ=5\times10^{-3}J$$

۲ سرعت نوسانگر خواهد شد:

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow 5\times10^{-3}=\frac{1}{2}\times0/1\times v^2\Rightarrow v^2=10^{-1}\Rightarrow v=\frac{\sqrt{10}}{10}m/s$$

$$\Rightarrow v=10\sqrt{10}cm/s$$

گزینهٔ ۱

۱۴۵۱ A ۳

۱ زمان حرکت از مرکز نوسان به انتهای مسیر $\frac{1}{4}$ دوره و دامنه نصف طول پاره‌خط مسیر است. دامنه را به‌دست می‌آوریم.

$$A=\frac{20}{2}=10cm$$

۲ دوره و بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

$$\frac{T}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow T=1s\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=2\pi\ rad/s$$

۳ انرژی جنبشی در مرکز نوسان بیشینه (K_m) و برابر انرژی مکانیکی است از این‌رو:

$$K_m=E\Rightarrow K_m=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\Rightarrow K=\frac{1}{2}\times0/1\times(0/1)^2\times(2\pi)^2$$

$$\Rightarrow K=0/02J=20mJ$$

۱۴۵۲ B ۳

ابتدا مکان جسم در لحظهٔ $t=\frac{1}{8}s$ را حساب می‌کنیم.

$$x=0/05\cos\frac{20\pi}{8}=0/05\cos\frac{5\pi}{2}\Rightarrow x=0$$

نوسانگر در مبدأ مکان دارای بیشینه انرژی جنبشی است که با انرژی مکانیکی جسم برابر است.

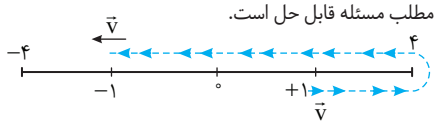
$$K_m=\frac{1}{2}mv_m^2=\frac{1}{2}m(A\omega)^2\Rightarrow K_m=\frac{1}{2}\times0/12\times(0/05\times20\pi)^2$$

$$K_m=0/06\times(\pi^2)J\Rightarrow K_m=60\pi^2mJ$$

۱۴۵۳ A ۳

نکته هرگاه در یک حرکت هماهنگ ساده مکان و سرعت نوسانگر قرینه شود کوتاه‌ترین زمانی که این اتفاق می‌افتد برابر $\frac{T}{2}$ است.

خط فکری مسیر حرکت زیر از مکان $x_1=+1cm$ در جهت مثبت محور تا رسیدن برای اولین بار به مکان $x_2=-1cm$ مشخص می‌کند که هم مکان و هم سرعت نوسانگر قرینه شده است. بنابراین این بازهٔ زمانی برابر $\frac{T}{2}$ است. اکنون با دانستن این مطلب مسئله قابل حل است.



۱ با توجه به سؤال $\frac{T}{2}$ برابر ۲s است:

$$\frac{T}{2}=2s\Rightarrow T=4s$$

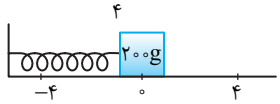
۲ بسامد زاویه‌ای برابر است با:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{4}\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{2}\frac{rad}{s}$$

۳ انرژی مکانیکی نوسانگر برابر خواهد شد با:

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2 \xrightarrow[A=4cm=4\times10^{-2}m]{m=200g=0/2kg} E=\frac{1}{2}\times0/2\times(4\times10^{-2})^2\times(\frac{\pi}{2})^2$$

$$\xrightarrow{\pi^2=10} E=0/1\times16\times10^{-4}\times\frac{10}{4}\Rightarrow E=4\times10^{-4}J$$



نکته هر ژول برابر ۱۰۰۰ میلی‌ژول است:

$$E=4\times10^{-4}J=4\times10^{-1}mJ=0/4mJ$$

۲ ۱۴۵۴ B

خط فکری در کتاب درسی رابطهٔ مستقلی برای انرژی پتانسیل نوسانگر گفته نشده است، پس در این سؤالات که انرژی پتانسیل خواسته می‌شود، باید ابتدا انرژی مکانیکی و انرژی جنبشی را حساب کرده و در نهایت با توجه به $E=K+U$، انرژی پتانسیل را حساب کنیم.

۱ نوسانگر در مدت یک دقیقه یا ۶۰s، ۱۵۰ نوسان کامل انجام داده است:

$$\frac{N}{1}=\frac{t}{T}\Rightarrow T=\frac{60}{150}=\frac{2}{5}=0/4s$$

۲ طول پاره‌خط نوسان دو برابر دامنهٔ حرکت نوسانگر است پس $A=2cm$ است.

۳ انرژی مکانیکی نوسانگر که برابر مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل یک جسم $(E=U+K)$ است ثابت بوده و برابر $E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2$ است. ابتدا $\omega=\frac{2\pi}{T}$ را حساب کرده و سپس انرژی مکانیکی را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{0/4}$$

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\Rightarrow E=\frac{1}{2}\times\frac{200}{1000}\times(\frac{2}{100})^2\times(\frac{2\pi}{0/4})^2$$

$$\Rightarrow E=0/1\times4\times10^{-4}\times\frac{4\pi^2}{0/16}E=0/1\times10^{-2}\times\pi^2\xrightarrow{\pi^2=10}E=10^{-2}J=10mJ$$

۴ انرژی جنبشی در لحظه‌ای که بزرگی سرعت نوسانگر $5\sqrt{2\pi}\,cm/s$ بوده، برابر است با:

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow K=\frac{1}{2}\times0/2\times(5\sqrt{2\pi}\times10^{-2})^2$$

$$K=0/1\times50\pi^2\times10^{-4}=5\times10^{-3}J=5mJ$$

۵ در نهایت با توجه به داشتن انرژی جنبشی و انرژی مکانیکی، انرژی پتانسیل را به‌دست می‌آوریم:

$$E=K+U\Rightarrow10=5+U\Rightarrow U=5mJ$$

۱ ۱۴۵۵ B

ثابت فنر را بر حسب N/m می‌نویسیم: $k=2N/cm=200N/m$

دامنه $0/08m$ است. انرژی مکانیکی را حساب می‌کنیم. بنابراین:

$$E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}(200)(0/08)^2=0/64J$$

انرژی جنبشی را به‌دست می‌آوریم $K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(2)(0/4)^2=0/16J$

اکنون می‌توانیم انرژی پتانسیل را حساب کنیم. $U=E-K=0/64-0/16=0/48J$

۱ ۱۴۵۶ B

خط فکری تندی متحرک $10cm/s$ کمتر از تندی در مرکز نوسان یعنی $v=v_m-10$ است زیرا در مرکز نوسان تندی بیشینه است، بنابراین شما باید بسامد زاویه‌ای و دامنه، سپس تندی بیشینه را بیابید تا بتوانید با داشتن تندی (v)، انرژی جنبشی در آن لحظه را بیابید.

۱ دامنهٔ حرکت نصف طول مسیر حرکت نوسانگر است. $A=\frac{10}{2}=5cm$

۲ انرژی مکانیکی را به‌دست می‌آوریم:

$$E=\frac{1}{2}kA^2\xrightarrow{k=20N/m}E=\frac{1}{2}\times20\times(5\times10^{-2})^2$$

$$\Rightarrow E=10\times25\times10^{-4}=25mJ$$

۳ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\xrightarrow{m=0/2kg}\omega=\sqrt{\frac{20}{0/2}}\Rightarrow\omega=10\,rad/s$$

۴ تندی بیشینه خواهد شد: $v_m=A\omega\Rightarrow v_m=5\times10=50\,cm/s$

۵ تندی در لحظهٔ مورد نظر برابر است با:

$$v=v_m-10=50-10\Rightarrow v=40cm/s=0/4m/s$$

۶ انرژی جنبشی نوسانگر را به‌دست می‌آوریم:

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow K=\frac{1}{2}\times0/2\times(0/4)^2\Rightarrow K=0/1\times0/16$$

$$\Rightarrow K=16\times10^{-3}J=16mJ$$

۷ اکنون می‌توان انرژی پتانسیل را حساب کرد.

$$E=K+U\Rightarrow25=16+U\Rightarrow U=9mJ$$

۱ ۱۴۵۷ B

دامنه ابتدا $4cm$ و سپس $4+1=5\,cm$ است. بنابراین کافی است رابطهٔ انرژی مکانیکی $E=\frac{1}{2}kA^2$ را در دو حالت بنویسیم و بر هم تقسیم کنیم و انرژی مکانیکی را در حالتی که دامنه $5m$ است به‌دست بیاوریم.

$$\frac{E_2}{E_1}=\frac{\frac{1}{2}kA_2^2}{\frac{1}{2}kA_1^2}\xrightarrow[A_1=4\times10^{-2}m,\,A_2=5\times10^{-2}m]{E_1=16J}\frac{E_2}{16}=\frac{A_2^2}{A_1^2}$$

$$\Rightarrow\frac{E_2}{16}=\frac{(5\times10^{-2})^2}{(4\times10^{-2})^2}\Rightarrow E_2=25J$$

بنابراین باید به نوسانگر $25-16=9J$ انرژی داده شود.

۲ ۱۴۵۸ A

رابطهٔ انرژی مکانیکی دستگاه جرم - فنر به صورت $E=\frac{1}{2}kA^2$ است و در دو حالت ثابت فنر و دامنه یکسان است، بنابراین: $E_1=E_2=8J$

۴ ۱۴۵۹ A

با ثابت ماندن دامنه و همچنین k فنر، انرژی مکانیکی $E=\frac{1}{2}kA^2$ ثابت می‌ماند.

۱ ۱۴۶۰ B

خط فکری باید در جواب این مسئله به این فکر کنید که انرژی مکانیکی سامانهٔ جرم - فنر به چه عواملی بستگی دارد. با توجه به رابطهٔ $E=\frac{1}{2}kA^2$، ثابت فنر و دامنهٔ حرکت انرژی نوسانگر را تعیین می‌کنند.

در این مسئله دامنهٔ نوسان (A) و ثابت فنر (k) ثابت مانده است، بنابراین انرژی مکانیکی در دو حالت یکسان بوده و $\frac{E_2}{E_1}=1$ است.

۴ ۱۴۶۱ B

خط فکری با یک تست به شدت مفهومی سروکار داریم. اولاً انرژی مکانیکی نوسانگر از رابطهٔ $E=\frac{1}{2}kA^2$ به‌دست می‌آید، بنابراین اگر ثابت فنر و دامنه ثابت بماند، انرژی مکانیکی تغییر نمی‌کند. ثانیاً در وسط مسیر نوسان انرژی مکانیکی نوسانگر تماماً انرژی جنبشی است $(K_m=\frac{1}{2}mv_m^2)$ و اگر به هر نحوی بتوان جرم وزنه را کاهش داد، قطعاً انرژی مکانیکی تغییر می‌کند (کاهش می‌یابد).

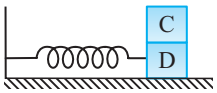
حالت اول: اگر در نقاط بازگشت که سامانه به‌طور لحظه‌ای ساکن است وزنه m_2 را برداریم، دامنهٔ نوسان همچنان بدون تغییر می‌ماند. $(A'=A)$ از طرفی ثابت فنر نیز ثابت است. بنابراین انرژی مکانیکی ثابت می‌ماند.

حالت دوم: اگر هنگام گذر نوسانگر از وسط مسیر (حالت تعادل) وزنهٔ m_2 را بتوان از روی m_1 برداشت، جرم سامانه کاهش می‌یابد و انرژی جنبشی نوسانگر $(\downarrow K_m=\frac{1}{2}\downarrow m\,v_m^2)$ که همان انرژی مکانیکی است کاهش می‌یابد. بنابراین گزینهٔ (۴) پاسخ درست است.

۳ ۱۴۶۲ C

در انتهای مسیر (نقطهٔ بازگشت) نوسانگر به‌طور لحظه‌ای ساکن است و وقتی وزنه دیگری روی آن قرار می‌دهیم، نوسانگر از انتهای مسیر به حرکت درمی‌آید و دامنهٔ حرکت تغییری نمی‌کند. از طرفی فنر نیز تغییر نکرده یعنی فنر ثابت بوده بنابراین انرژی مکانیکی $E=\frac{1}{2}kA^2$ تغییری نمی‌کند و نوسانگر با همان انرژی مکانیکی اولیه به حرکت خود ادامه می‌دهد تا به مرکز نوسان می‌رسد. در اینجا وزنهٔ m را از روی نوسانگر برمی‌داریم، در اینجا تمام انرژی نوسانگر، انرژی جنبشی $(K=\frac{1}{2}mv_m^2)$ است و با برداشتن نیمی از جرم، انرژی جنبشی یا همان انرژی مکانیکی نصف می‌شود.

بازی با سؤال **در شکل روبه‌رو، وزنهٔ C بر روی وزنهٔ D قرار دارد. جرم دو وزنه برابر است و دستگاه با دامنهٔ A و دورهٔ T دارای حرکت هماهنگ ساده است. اگر در انتهای مسیر وزنهٔ C را از روی وزنهٔ D برداریم، انرژی مکانیکی و دورهٔ حرکت دستگاه به ترتیب از راست به چپ چه تغییری می‌کند؟**



۱) تغییر نمی‌کند، کاهش می‌یابد　　۲) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد

۳) تغییر نمی‌کند، افزایش می‌یابد　　۴) کاهش می‌یابد، تغییر نمی‌کند

پاسخ **با برداشتن وزنهٔ C، جرم کاهش می‌یابد به همین دلیل دوره** $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ **کاهش می‌یابد. اما دربارهٔ انرژی مکانیکی باید بگوییم در انتهای مسیر تمام انرژی مکانیکی جسم به صورت انرژی پتانسیل** $E=U_m=\frac{1}{2}kA^2$ **است که با برداشتن وزنهٔ C، دامنه و ثابت فنر هیچگونه تغییر نمی‌کند بنابراین انرژی مکانیکی ثابت می‌ماند و گزینهٔ (۱) درست است.** گزینهٔ ۱

۱ ۱۴۶۳ B

۱ دامنهٔ حرکت را حساب می‌کنیم.　$A=\frac{20}{2}=10\,cm=0/1\,m$

۲ انرژی مکانیکی نوسانگر را به‌دست می‌آوریم:

$$E=\frac{1}{2}kA^2 \xrightarrow{k=100N/m} E=\frac{1}{2}\times100\times(0/1)^2=0/5J$$

۳ با توجه به صورت مسأله در یک لحظه انرژی جنبشی نوسانگر $0/1\,J$ بیشتر از انرژی پتانسیل است و مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل برابر انرژی مکانیکی است از این‌رو دستگاه دو معادله و دو مجهول می‌توان نوشت و U و K را حساب کرد.

$$\begin{cases} K-U=0/1\,J \\ E=K+U=0/5J \end{cases} \Rightarrow 2K=0/6\Rightarrow K=0/3J\ ,\ U=0/2J$$

۴ نسبت $\frac{U}{K}$ خواهد شد:　$\frac{U}{K}=\frac{0/2}{0/3}=\frac{2}{3}$

بازی با سؤال **یک سامانهٔ جرم - فنر با دامنهٔ 10 cm در حال نوسان است. در یک لحظه انرژی پتانسیل نوسانگر $0/6\,J$ از انرژی جنبشی آن کمتر است. اگر ثابت فنر $200\,N/m$ باشد، در این لحظه انرژی جنبشی نوسانگر چند ژول است؟**

۱) ۰/۲　　۲) ۰/۴　　۳) ۰/۶　　۴) ۰/۸

پاسخ ۱ **انرژی مکانیکی نوسانگر را حساب می‌کنیم.**

$$E=\frac{1}{2}kA^2\Rightarrow E=\frac{1}{2}\times200\times(0/1)^2\Rightarrow E=1J$$

۲ **بنا به فرض مسئله داریم:**　$U=K-0/6$

۳ **انرژی مکانیکی برابر است با:**

$$E=U+K\Rightarrow 1=K-0/6+K\Rightarrow 1/6=2K\Rightarrow K=0/8J$$

گزینهٔ ۴

۴ ۱۴۶۴ B

۱ ابتدا انرژی مکانیکی نوسانگر را به‌دست می‌آوریم:

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\Rightarrow E=\frac{1}{2}mA^2\frac{4\pi^2}{T^2}\Rightarrow E=\frac{1}{2}m\times\left(\frac{5}{100}\right)^2\times\frac{4\pi^2}{\left(\frac{1}{10}\right)^2}$$

$$\Rightarrow E=\frac{1}{2}m\left(\frac{25}{10^4}\right)\times4\pi^2\times100\Rightarrow E=\frac{\pi^2}{2}m$$

۲ انرژی مکانیکی برابر مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر است و از طرفی مسئله تندی نوسانگر را در لحظه‌ای که انرژی جنبشی برابر انرژی پتانسیل است $(U=K)$ از شما خواسته است بنابراین:

$$E=K+U\xrightarrow{K=U}\frac{\pi^2}{2}m=2K$$

$$\xrightarrow{K=\frac{1}{2}mv^2}\frac{\pi^2}{2}m=mv^2\Rightarrow v^2=\frac{\pi^2}{2}\Rightarrow v=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\,m/s$$

$$\xrightarrow{m/s\xrightarrow{\times100}cm/s} v=50\sqrt{2}\pi\,cm/s$$

۲ ۱۴۶۵ B

۱ فنر را از حالت تعادل 4cm کشیده و رها کرده‌ایم، بنابراین دامنهٔ حرکت $A=4cm$ است.

۲ انرژی مکانیکی نوسانگر را به‌دست می‌آوریم:

$$E=\frac{1}{2}kA^2\xrightarrow[A=4cm]{k=5N/cm=500N/m}E=\frac{1}{2}\times500\times(4\times10^{-2})^2$$

$$\Rightarrow E=\frac{1}{2}\times500\times16\times10^{-4}\Rightarrow E=0/4J$$

نکته انرژی مکانیکی نوسانگر همواره برابر بیشینه انرژی جنبشی آن است $(K_m=E)$.

۳ وقتی تندی نوسانگر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ تندی بیشینه است نسبت انرژی جنبشی نوسانگر به انرژی جنبشی بیشینه خواهد شد:

$$\frac{K}{K_m}=\frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv_m^2}\Rightarrow\frac{K}{K_m}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\Rightarrow K=\frac{1}{2}K_m\Rightarrow K=\frac{1}{2}E\Rightarrow K=0/2J$$

۴ اختلاف K و E خواهد شد:　$E-K=0/4-0/2=0/2J$

۱ ۱۴۶۶ B

۱ بسامد زاویه‌ای نوسانگر را حساب می‌کنیم.

$$\omega=2\pi f\xrightarrow{f=20Hz}\omega=40\pi\ rad/s$$

۲ مقدار بیشینه انرژی پتانسیل نوسانگر همان مقدار انرژی مکانیکی است.

$$E=U_m\xrightarrow{U=\frac{1}{2}U_m}U=\frac{1}{2}E$$

انرژی برابر است با:　$E=U+K\Rightarrow E=\frac{1}{2}E+K\Rightarrow K=\frac{1}{2}E$

$$K=\frac{1}{2}E\xrightarrow{K=0/1\pi^2}0/1\pi^2=\frac{1}{2}E\Rightarrow E=0/2\pi^2J$$

۳ اکنون دامنه را به‌دست می‌آوریم:

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\Rightarrow0/2\pi^2=\frac{1}{2}\times0/1\times A^2\times(40\pi)^2\Rightarrow A^2=\frac{1}{400}\Rightarrow A=0/05m$$

معادله حرکت خواهد شد:　$x=0/05\cos40\pi t$

۱ ۱۴۶۷ B

۱ انرژی جنبشی در وسط مسیر بیشینه است. در یک لحظه تندی نصف تندی بیشینه است. در این لحظه باید مشخص کنیم که انرژی جنبشی چه کسری از انرژی جنبشی بیشینه است.

$$K=\frac{1}{2}mv^2, K_m=\frac{1}{2}mv_m^2\Rightarrow\frac{K}{K_m}=\frac{1}{4}\Rightarrow K=\frac{1}{4}K_m$$

۲ با توجه به فرض مسئله در این لحظه انرژی پتانسیل ۲۰ ژول است، بنابراین انرژی مکانیکی خواهد شد:

$$E=K+U\Rightarrow E=K+20$$

۳ انرژی مکانیکی برابر بیشینه انرژی جنبشی است.

$$E=K_m\Rightarrow K+20=K_m\xrightarrow{K=\frac{1}{4}K_m}\frac{1}{4}K_m+20=K_m$$

$$\Rightarrow\frac{3}{4}K_m=20\Rightarrow K_m=\frac{80}{3}J$$

B ۱۴۶۸ ۲

بیشینه تندی نوسانگر را حساب می‌کنیم.

$$A=0/04m,\ \omega=20\pi\ rad/s,\ v_m=A\omega\Rightarrow v_m=0/04\times20\pi=\frac{4\pi}{5}m/s$$

انرژی مکانیکی برابر بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر است $(E=K_m)$.

نسبت انرژی مکانیکی به انرژی جنبشی نوسانگر یعنی نسبت K_m/K. بنابراین:

$$\frac{E}{K}=\frac{K_m}{K}=2\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}mv_m^2}{\frac{1}{2}mv^2}=2\Rightarrow v=\frac{\sqrt{2}}{2}v_m\Rightarrow v=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4\pi}{5}$$

$$v=\frac{2\sqrt{2}\pi}{5}m/s$$

A ۱۴۶۹ ۱

۱ انرژی پتانسیل ۸ برابر انرژی جنبشی $(U=8K)$ است، بنابراین انرژی مکانیکی خواهد شد:

$$E=U+K\Rightarrow E=8K+K=9K\Rightarrow E=9K\quad(I)$$

۲ انرژی مکانیکی برابر بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر است، از این‌رو:

$$K_m=E\xrightarrow{(I)}K_m=9K\Rightarrow\frac{1}{2}mv_m^2=9(\frac{1}{2}mv^2)\Rightarrow v_m=3v$$

۳ با توجه به فرض مسئله در این لحظه $v=2m/s$ است، در نتیجه v_m خواهد شد:

$$v_m=3\times2=6m/s$$

B ۱۴۷۰ ۲

۱ انرژی مکانیکی برابر با مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل است، از این‌رو می‌توان نوشت:

$$E=U+K\xrightarrow{U=3K}E=3K+K\Rightarrow E=4K$$

۲ انرژی مکانیکی، برابر با انرژی جنبشی بیشینهٔ نوسانگر است، بنابراین:

$$K_m=4K\Rightarrow\frac{1}{2}mv_m^2=4(\frac{1}{2}mv^2)\Rightarrow v_m=2v\Rightarrow v=\frac{v_m}{2}=\frac{5}{2}=2/5m/s$$

B ۱۴۷۱ ۴

انرژی پتانسیل در $x=A$ بیشینه و در حرکت هماهنگ ساده، انرژی مکانیکی برابر بیشینه انرژی پتانسیل است، از این‌رو:

$$E=U_m=0/36J\xrightarrow{E=K_m}K_m=0/36J$$

انرژی جنبشی خواهد شد:

$$\begin{cases}K=\frac{1}{2}mv^2\\K_m=\frac{1}{2}mv_m^2\end{cases}\xrightarrow{v=\frac{\sqrt{3}}{2}v_m}\frac{K}{0/36}=\frac{3}{4}\Rightarrow K=0/27J$$

B ۱۴۷۲ ۴

انرژی مکانیکی برابر بیشینه انرژی جنبشی $(E=K_m)$ است. وقتی گفته می‌شود انرژی جنبشی $\frac{1}{n}$ انرژی مکانیکی باشد، یعنی $K=\frac{1}{n}K_m$ شود. در حالت تعادل انرژی جنبشی بیشینه است، بنابراین وقتی که نوسانگر از $x=A$ به سوی $x=0$ می‌رود و انرژی جنبشی از صفر به K_m می‌رسد حتماً در این مسیر یک بار انرژی جنبشی $\frac{1}{n}K_m$ خواهد شد. همچنین در مسیر از $x=0$ تا $x=A$ نیز یکبار این اتفاق می‌افتد. در برگشت نیز همین اتفاق می‌افتد و جمعاً چهار بار انرژی جنبشی $\frac{1}{n}K_m$ خواهد شد:

$$K=\frac{E}{n}\qquad K=\frac{E}{n}$$

$$K=0\quad(2)\quad E=K_m\quad(1)\quad K=0$$

$$A\quad(3)\quad 0\quad(4)$$

$$K=\frac{E}{n}\qquad K=\frac{E}{n}$$

نکته در یک حرکت هماهنگ ساده در مدت یک دوره، چهار بار تندی $\frac{1}{n}$ تندی بیشینه، چهار بار شتاب $\frac{1}{n}$ شتاب بیشینه، چهار بار انرژی جنبشی $\frac{1}{n}$ انرژی جنبشی بیشینه و ... خواهد بود.

B ۱۴۷۳ ۱

۱ انرژی جنبشی نوسانگر ۱۲/۵ درصد انرژی پتانسیل است، بنابراین:

$$K=\frac{12/5}{100}U\Rightarrow U=8K$$

۲ مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر برابر انرژی مکانیکی آن است.

$$E=U+K\Rightarrow E=8K+K\Rightarrow E=9K$$

۳ بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر برابر انرژی مکانیکی نوسانگر بوده از این‌رو می‌توانیم بنویسیم:

$$K_m=9K\Rightarrow\frac{1}{2}mv_m^2=9(\frac{1}{2}mv^2)\Rightarrow v_m=3v\Rightarrow v=\frac{v_m}{3}\quad(I)$$

۴ با توجه به فرض مسئله در لحظهٔ مورد نظر تندی نوسانگر $3m/s$ از بیشینه تندی کمتر است، بنابراین:

$$v=v_m-3\xrightarrow{(I)}\frac{v_m}{3}=v_m-3\Rightarrow3=\frac{2}{3}v_m\Rightarrow v_m=4/5m/s$$

۵ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

$$v_m=A\omega\xrightarrow{A=0/02m}4/5=0/02\omega\Rightarrow\omega=\frac{450}{2}=225rad/s$$

۶ دوره را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow225=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{225}s$$

۷ مسیر حرکت را رسم می‌کنیم. کمترین زمانی که طول می‌کشد تا نوسانگر دو بار از فاصلهٔ $1cm$ مرکز نوسان بگذرد وقتی است که نوسانگر از مکان $-1cm$ به $+1cm$ یا بالعکس برود بنابراین Δt خواهد شد:

$$\Delta t=\frac{T}{12}+\frac{T}{12}=\frac{T}{6}\Rightarrow\Delta t=\frac{\frac{2\pi}{225}}{6}\xrightarrow{\pi=3}\Delta t=\frac{1}{225}s$$

$$-2\quad -1\quad \frac{T}{12}\quad \frac{T}{12}+1\quad 2$$

A ۱۴۷۴ ۲

با توجه به معادلهٔ مکان - زمان $x=0/05\cos20t$، دامنهٔ حرکت برابر $A=0/05m$ خواهد شد. از طرفی بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر برابر انرژی مکانیکی آن است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$K_m=E=\frac{1}{2}kA^2\Rightarrow6\times10^{-2}=\frac{1}{2}k(0/05)^2\Rightarrow k=48N/m$$

A ۱۴۷۵ ۳

خط فکری انرژی پتانسیل یک نوسانگر در دو انتهای مسیر یعنی نقاط بازگشت بیشینه می‌شود، بنابراین شما باید در معادلهٔ حرکت به جای $x=\pm A$ را قرار داده و لحظاتی که مکان بیشینه می‌شود را حساب کنید و مشخص کنید در بازهٔ بیان شده در صورت مسئله چند بار $x=\pm A$ شده است.

روش استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:

۱ دوره را حساب می‌کنیم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=2s$$

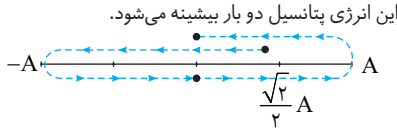
۲ در لحظهٔ ابتدایی بازهٔ $t_1=0/25s$ مکان نوسانگر را مشخص می‌کنیم.

$$x=0/02\cos\pi t\Rightarrow x_1=0/02\cos\frac{\pi}{4}\Rightarrow x_1=0/02\times\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}A$$

۳ مشخص می‌کنیم بازهٔ زمانی ارائه شده چه کسری از دوره است.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{2/5-0/25}{2}\Rightarrow\Delta t=\frac{9T}{8}$$

۴ مسیر را رسم می‌کنیم. Δt برابر $T+\frac{T}{8}$ شده یعنی نوسانگر از $\frac{\sqrt{2}}{2}A$ شروع به حرکت کرده و دوباره به همین نقطه برمی‌گردد (T) و سپس در مدت $\frac{T}{8}$ از $\frac{\sqrt{2}}{2}A$ به صفر می‌رسد و در طول مسیرش یک بار از $-A$ و بار دیگر از $+A$ می‌گذرد، بنابراین انرژی پتانسیل دو بار بیشینه می‌شود.



روش استفاده از معادلهٔ حرکت: در نقاط بازگشت $(x=\pm A)$ انرژی پتانسیل بیشینه است، بنابراین بررسی می‌کنیم در بازهٔ خواسته شده چند بار نوسانگر در انتهای مسیر بوده است.

$$x=0/02\cos\pi t\Rightarrow x=\pm0/02m\Rightarrow\cos\pi t=\pm1\Rightarrow\pi t=k\pi\Rightarrow t=k$$

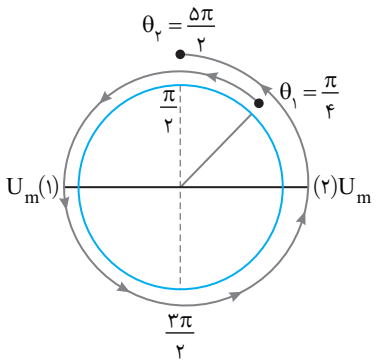
$$k=0\Rightarrow t=0\ ,\ k=1\Rightarrow t=1s\ ,\ k=2\Rightarrow t=2s\ ,\ k=3\Rightarrow t=3s$$

بازهٔ زمانی داده شده $0/25s$ تا $2/5s$ که $t=1s$ و $t=2s$ در این بازه است بنابراین دو بار انرژی پتانسیل بیشینه می‌شود.

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی: در لحظه‌های $t_1=0/25s$ و $t_2=2/5s$، کمان ωt (فاز) را به‌دست می‌آوریم.

$$\theta_1=\omega t_1\Rightarrow\theta_1=\pi(0/25)=\frac{\pi}{4}\quad,\quad\theta_2=\pi(2/5)=\frac{5}{2}\pi$$

روی دایرهٔ مثلثاتی در جهت مثلثاتی می‌چرخیم در عبور از $\theta=0$ و $\theta=\pi$ انرژی پتانسیل بیشینه است و تعداد گذر از این نقاط را می‌شماریم که با توجه به دایره مثلثاتی ۲ بار انرژی پتانسیل بیشینه می‌شود.



B ۱۴۷۶ ۲

راه‌حل اول: **۱** دوره را به‌دست می‌آوریم.

$$x=A\cos40\pi t\Rightarrow\omega=40\pi\Rightarrow\frac{2\pi}{T}=40\pi\Rightarrow T=\frac{1}{20}s$$

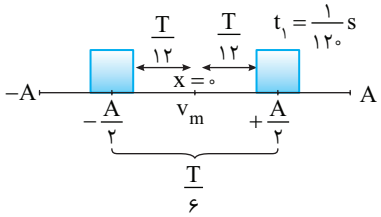
۲ مکان نوسانگر در ابتدای بازه را به‌دست می‌آوریم.

$$t=\frac{1}{120}s\Rightarrow x=A\cos\frac{40\pi}{120}\Rightarrow x_1=A\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x_1=+\frac{A}{2}$$

۳ مشخص می‌کنیم بازهٔ زمانی داده شده چه کسری از دوره است.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{60}-\frac{1}{120}}{\frac{1}{20}}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{120}}{\frac{1}{20}}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{1}{6}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{6}$$

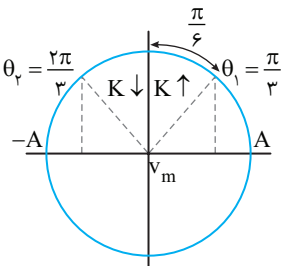
۴ مسیر حرکت را با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده مطابق شکل زیر است.



۵ بنابراین در بازهٔ $\frac{T}{12}$ ابتدایی حرکت تندشونده و انرژی جنبشی در حال افزایش است.

$$\frac{T}{12}=\frac{\frac{1}{20}}{12}=\frac{1}{240}s$$

راه‌حل دوم: کمان (فاز) را در لحظه‌های $t_1=\frac{1}{120}s$ و $t_2=\frac{1}{60}s$ روی دایره مثلثاتی (مرجع) مشخص می‌کنیم.



$$\theta=\omega t\Rightarrow\begin{cases}\theta_1=40\pi\times\frac{1}{120}=\frac{\pi}{3}\\ \theta_2=40\pi\times\frac{1}{60}=\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

با توجه به دایره مرجع در مدتی که کمان (فاز) از $\frac{\pi}{3}$ به $\frac{\pi}{2}$ تغییر می‌کند انرژی جنبشی در حال افزایش است.

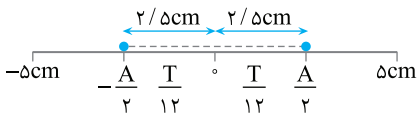
$$\Delta\theta=\omega t\Rightarrow\frac{\pi}{6}=40\pi t\Rightarrow t=\frac{1}{240}s$$

B ۱۴۷۷ ۲

۱ طول پاره‌خط ۱۰cm داده شده است، پس دامنهٔ نوسان 5cm است.

$$-A=-5cm\quad\quad0\quad\quad A=5cm$$

حداقل زمان طی یک مسیر معین در حرکت هماهنگ ساده مربوط به بازه‌ای است که نوسانگر اطراف نقطهٔ تعادل در حال نوسان باشد، در واقع نوسانگر نصف مسیر را از قبل از $x=0$ شروع کرده باشد و نصف دیگر را بعد از $x=0$ طی کند.



۲ با توجه به نکتهٔ بالا دوره را حساب می‌کنیم

$$\Delta t=\frac{T}{12}+\frac{T}{12}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{6}\ ,\ \frac{1}{30}=\frac{T}{6}\Rightarrow T=\frac{1}{5}s$$

۳ بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر برابر است با:

$$K_{max}=\frac{1}{2}mv_m^2\xrightarrow{v_m=A\omega}K_{max}=\frac{1}{2}\times0/4\times(A^2\omega^2)$$

$$\xrightarrow{\omega=\frac{2\pi}{T}=10\pi}K_{max}=0/2\times25\times10^{-4}\times100\pi^2$$

$$K_{max}=5\times10^{-2}\times9\Rightarrow K_{max}=45\times10^{-2}J$$

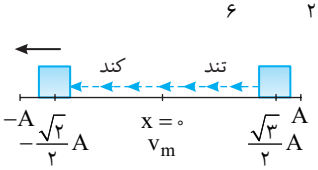
$$\xrightarrow{J\xrightarrow{\times10^3}mJ}K_{max}=450mJ$$

B ۱۴۷۸ ۱

مکان نوسانگر را در دو حالت مشخص می‌کنیم:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow x=A\cos\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}A\ ,\ x=A\cos\frac{3\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{-\sqrt{2}}{2}A$$

روی مسیر مطابق شکل مشخص است که نوسانگر ابتدا در حال حرکت به سوی مرکز نوسان بوده و سرعت و انرژی جنبشی در حال افزایش و پس از گذر از نقطهٔ تعادل، سرعت و انرژی جنبشی در حال کاهش است و گزینهٔ (۱) درست است.



A ۱۴۷۹ ۱

نکته در یک تابع کسینوس مانند $y=A\cos x$ یا $y=A\cos^2 x$ بیشینه مقدار تابع برابر ضریب cos یعنی A است.

۱ در معادلهٔ داده شده $K=K_0\cos^2\omega t$، K_0 همان بیشینه مقدار انرژی جنبشی است $(K_0=K_m)$.

نکته در حرکت هماهنگ ساده بیشینه انرژی جنبشی بیشینه انرژی پتانسیل نوسانگر مقدار یکسانی داشته و برابر انرژی مکانیکی نوسانگر هستند $U_m=K_m=E$.

۲ با توجه به نکتهٔ بالا بیشینه انرژی پتانسیل نوسانگر برابر K_0 است $U_m=K_m=K_0$.

B ۱۴۸۰ ۱

خط فکری در معادله‌های این‌چنینی $(K=0/16-400x^2)$ باید شما یادتان باشد که اگر $x=0$ باشد، K بیشینه است (مرکز نوسان) و اگر $K=0$ باشد یعنی نوسانگر در نقاط بازگشت $(x=\pm A)$ قرار دارد، یعنی اگر به جای K صفر قرار دهیم باید به جای x، A را قرار داده و مسئله را حل کنید.

انرژی جنبشی هنگامی صفر می‌شود که نوسانگر در نقطهٔ بازگشت یعنی $x=\pm A$ باشد از این‌رو:

$$K=0/16-400x^2 \xrightarrow[K=0]{x=\pm A} 0=0/16-400A^2\Rightarrow A^2=\frac{0/16}{400}$$

$$\Rightarrow A=0/02m\Rightarrow A=2cm$$

B ۱۴۸۱ ۳

۱ بیشینه انرژی جنبشی برابر انرژی مکانیکی نوسانگر است.

$$K_m=E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2 \quad (1)$$

۲ بیشینه نیروی وارد بر نوسانگر برابر است با:

$$F_m=mA\omega^2 \quad (2)$$

۳ دو رابطهٔ (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم و به جای F_m مقدار که مسئله داده یعنی 12N را قرار می‌دهیم.

$$\frac{K_m}{F_m}=\frac{1}{2}A\Rightarrow\frac{K_m}{12}=\frac{1}{2}\times 0/08\Rightarrow K_m=0/48J=480mJ$$

میانبر انرژی مکانیکی نوسانگر (E یا K_m یا U_m) برابر است با:

$$E=K_m=U_m=\frac{1}{2}F_mA$$

A ۱۴۸۲ ۲

۱ با مقایسهٔ $F=-200x$ با توجه به قانون هوک $F=-kx$ مشخص می‌شود که ثابت فنر $k=200\ N/m$ است.

۲ مسافتی که نوسانگر در مدت یک دوره طی می‌کند چهار برابر دامنه است. از این‌رو دامنه خواهد شد:

$$4A=20\Rightarrow A=5cm$$

۳ انرژی مکانیکی را حساب می‌کنیم.

$$E=\frac{1}{2}kA^2\Rightarrow E=\frac{1}{2}\times 200\times(5\times10^{-2})^2=100\times25\times10^{-4}\Rightarrow E=0/25J$$

۴ بیشینهٔ انرژی جنبشی برابر انرژی مکانیکی است از این‌رو: $E=K_m=0/25J$

۵ انرژی جنبشی $\frac{1}{5}$ انرژی مکانیکی است از این‌رو:

$$K=\frac{1}{5}E\Rightarrow K=\frac{1}{5}\times 0/25\Rightarrow K=0/05J$$

۶ انرژی پتانسیل در این لحظه خواهد شد:

$$E=K+U\Rightarrow 0/25=0/05+U\Rightarrow U=0/2J$$

بازی با سوال معادلهٔ نیرو - مکان نوسانگر ساده‌ای به جرم ۲۰۰ گرم در SI به صورت $F=-180x$ است. اگر بیشینهٔ انرژی جنبشی این نوسانگر ۲۲۵ میلی‌ژول باشد، معادلهٔ مکان - زمان این نوسانگر در SI، کدام است؟ خارج ریاضی - ۹۷

۱) $x=0/05\cos 30t$ ۲) $x=0/03\cos 30t$

۳) $x=0/05\cos 30\pi t$ ۴) $x=0/03\cos 30\pi t$

پاسخ با توجه به رابطهٔ $F=-180x$ و مقایسهٔ آن با $F=-kx$ مشخص است که $k=180\ N/m$ از این‌رو:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{180}{0/2}}=30\ rad/s$$

بیشینهٔ انرژی جنبشی برابر است با:

$$K_m=\frac{1}{2}mv_m^2=\frac{1}{2}m(A\omega)^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2=225\times10^{-3}J$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\times0/2\times A^2\times900=225\times10^{-3}\Rightarrow A^2=25\times10^{-4}\Rightarrow A=0/05m$$

حال معادلهٔ مکان - زمان نوسانگر را می‌نویسیم:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow x=0/05\cos 30t$$

گزینهٔ ۱

A ۱۴۸۳ ۳

با توجه به قانون هوک $(F=kx)$، ثابت فنر خواهد شد:

$$F=-\frac{\pi^2}{10}x\Rightarrow k=\frac{\pi^2}{10}N/m$$

بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{\frac{\pi^2}{10}}{0/1}}\Rightarrow\omega=\pi rad/s$$

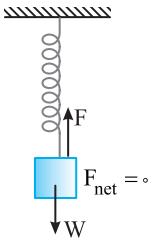
دامنهٔ حرکت را به کمک انرژی مکانیکی نوسانگر حساب می‌کنیم:

$$E=\frac{1}{2}kA^2\Rightarrow2\pi^2\times10^{-3}=\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{10}A^2\Rightarrow A^2=0/04m\Rightarrow A=0/2m$$

معادله را می‌نویسیم:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow x=0/2\cos\pi t$$

B ۱۴۸۴ ۲



در حالت تعادل، نیروی وزن و نیروی کشسانی فنر متوازن هستند.

$$F=W\Rightarrow k\Delta L=mg\Rightarrow k(0/25)=0/2\times10$$

$$k=80N/m$$

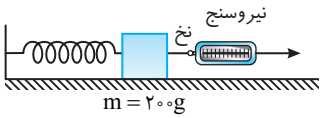
انرژی مکانیکی یا همان بیشینه انرژی جنبشی خواهد شد:

$$K_m=E=\frac{1}{2}kA^2\Rightarrow K_m=\frac{1}{2}\times80\times(2\times10^{-2})^2$$

$$K_m=40\times4\times10^{-4}\Rightarrow K_m=16\times10^{-3}J=16mJ$$

B ۱۴۸۵ ۱

خط فکری وقتی وزنهٔ ۱، 2cm از حالت تعادل منحرف کرده و رها می‌کنیم دامنهٔ حرکت $A=2cm$ است. در این حالت نیروی فنر برابر 5N بوده است، $(F_m=5N)$. با توجه به این داده‌ها، انرژی مکانیکی را پیدا می‌کنیم سپس با داشتن آن، انرژی پتانسیل را به‌دست آورده و انرژی جنبشی را حساب می‌کنیم تا بتوانیم تندی وزنه را به‌دست بیاوریم.



۱ انرژی مکانیکی نوسانگر برابر است با:

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2 \quad (I)$$

۲ بیشینه نیروی وارد بر نوسانگر برابر است با:

$$F_m=mA\omega^2 \quad (II)$$

۳ دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{E}{F_m}=\frac{\frac{1}{2}mA^2\omega^2}{mA\omega^2}\Rightarrow\frac{E}{F_m}=\frac{1}{2}A\xrightarrow[A=0/02m]{F_m=5N}E=5\times\frac{1}{2}(0/02)$$

$$\Rightarrow E=0/05J=50mJ$$

۴ انرژی جنبشی نوسانگر را به‌دست می‌آوریم.

$$E=U+K\Rightarrow50=34+K\Rightarrow K=16mJ$$

۵ تندی را حساب می‌کنیم:

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow16\times10^{-3}=\frac{1}{2}\times0/2\times v^2\Rightarrow v^2=16\times10^{-2}\Rightarrow v=0/4m/s$$

۱ ۱۴۸۶ B

تکانه نوسانگر برابر $P=mv$ است و بیشینه تکانه آن برابر $P_{max}=mv_m$ است.

انرژی مکانیکی نوسانگر برابر $E=K_m=\frac{1}{2}mv_m^2$ است. با توجه به رابطهٔ $K=\frac{P^2}{2m}$، اگر انرژی جنبشی نوسانگر بیشینه باشد، تکانه آن نیز بیشینه است:

$$K_m=\frac{P_m^2}{2m}=\frac{4\times10^{-6}\pi^2}{2\times0/1}\Rightarrow K_m=2\times10^{-5}\pi^2 J$$

$$\xrightarrow[\times10^6]{\text{تبدیل یکا به میکروژول}} K_m=20\pi^2\mu J$$

دقت کردید در حل تست دانستن طول پاره‌خط (4cm) در حل مسئله نقشی ندارد.

۳ ۱۴۸۷ B

۱ طول پاره‌خط برابر 10cm است پس دامنهٔ حرکت $\frac{10}{2}=5cm$ است.

۲ انرژی مکانیکی که در طول مسیر ثابت است و برابر است با:

$$E=\frac{1}{2}kA^2=25\times10^{-3}J=25mJ$$

۳ در $x=0$ تندی نوسانگر بیشینه است پس در $x=0$ انرژی جنبشی بیشینه و انرژی پتانسیل صفر است و در $x=\pm A$ که انتهای مسیر است، تندی متحرک صفر است پس انرژی جنبشی صفر و انرژی پتانسیل بیشینه می‌باشد. با این اطلاعات نمودار گزینهٔ (۳) پاسخ مسئله است.

۱ ۱۴۸۸ A

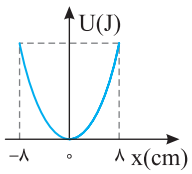
خط فکری بیشینه انرژی جنبشی همان انرژی مکانیکی است. $(E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2)$

بنابراین شما از روی شکل دامنه را مشخص کنید و با استفاده از اطلاعات مسئله ω را بیابید تا مسئله حل شود.

۱ با توجه به نمودار دامنه $A=8cm$ است.

۲ در هر دقیقه نوسانگر ۱۲۰ نوسان انجام می‌دهد

بنابراین دوره برابر است با:



$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{60}{120}\Rightarrow T=\frac{1}{2}s$$

۳ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi\,rad/s$$

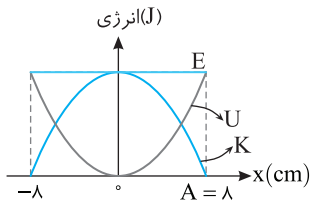
۴ انرژی جنبشی بیشینه را حساب می‌کنیم.

$$K_m=E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2=\frac{1}{2}\times2\times(8\times10^{-2})^2\times(4\pi)^2=64\times10^{-4}\times144$$

$$K_m=9216\times10^{-4}J=9/216\times10^{-1}J$$

۳ ۱۴۸۹ A

نکته در حرکت هماهنگ ساده مسیر بدون اتلاف بوده و انرژی مکانیکی جسم ثابت است و در طول مسیر اگر انرژی جنبشی کاهش یابد، به همان اندازه انرژی پتانسیل افزایش خواهد یافت و بالعکس:



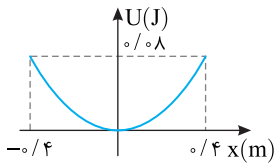
با توجه به نمودار انرژی مکانیکی نوسانگر ۴۰J و دامنهٔ نوسان آن 8cm است. انرژی مکانیکی نوسانگر از رابطه زیر به دست می‌آید بنابراین:

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\xrightarrow{\omega=2\pi f}E=2m\pi^2A^2f^2$$

$$\Rightarrow40=2\times(0/5)\times(\sqrt{10})^2\times(\frac{8}{100})^2\times f^2$$

$$40=10\times\frac{64}{10000}\times f^2\Rightarrow\frac{10^4}{16}=f^2\Rightarrow f=\frac{100}{4}=25Hz$$

بازی با سوال نمودار انرژی پتانسیل نوسانگر ساده‌ای به جرم ۴۰ گرم بر حسب مکان مطابق شکل روبه‌رو است. دورهٔ نوسان این نوسانگر چند ثانیه است؟



۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) $\frac{3\pi}{5}$ ۳) $\frac{4\pi}{5}$ ۴) $\frac{2\pi}{5}$

پاسخ دامنهٔ نوسانگر $A=0/4m$ است.

با توجه به رابطهٔ $E=U_{max}=\frac{1}{2}mA^2\omega^2$، بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم:

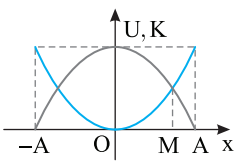
$$0/08=\frac{1}{2}\times\frac{4}{100}\times(0/4)^2\times\omega^2\Rightarrow\omega^2=25\Rightarrow\omega=5rad/s$$

دوره را حساب می‌کنیم: گزینهٔ ۴

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow5=\frac{2\times\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{5}s$$

۳ ۱۴۹۰ A

به نمودار با دقت نگاه کنید. در نقطهٔ M انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل برابر است از این‌رو:



$$E=U+K\Rightarrow E=K+K\Rightarrow E=2K$$

به جای انرژی مکانیکی، بیشینه انرژی جنبشی $K_m=\frac{1}{2}mv_m^2$ را قرار می‌دهیم.

$$E=2K\Rightarrow\frac{1}{2}mv_m^2=2(\frac{1}{2}mv^2)\Rightarrow v=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}v_m$$

۱ ۱۴۹۱ B

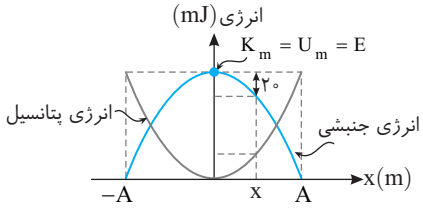
۱ با توجه به نمودار انرژی جنبشی در نقطهٔ x انرژی جنبشی نوسانگر 20mJ از انرژی جنبشی بیشینه کمتر است. $K=K_m-20$

۲ انرژی جنبشی بیشینه برابر انرژی مکانیکی نوسانگر است. از این‌رو:

$$K=E-20\quad(I)$$

۳ مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل برابر انرژی مکانیکی است.

$$E=U+K\xrightarrow{(I)}E=U+E-20\Rightarrow U=20mJ$$



۱ ۱۴۹۲ B

۱ مطابق نمودار انرژی جنبشی در مکان x_2 (K_2) با انرژی پتانسیل در نقطهٔ x_1 (U_1) برابر است.

$$U_1=K_2$$

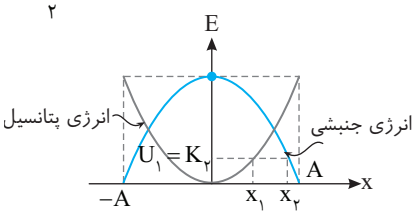
۲ انرژی مکانیکی برابر است با:

$$E_1=U_1+K_1\xrightarrow{U_1=K_2}E_1=K_2+K_1\Rightarrow E=K_2+K_1$$

۳ بنابراین کافی است برای به‌دست آوردن انرژی مکانیکی نوسانگر K_1 و K_2 را حساب کرده با هم جمع کنیم.

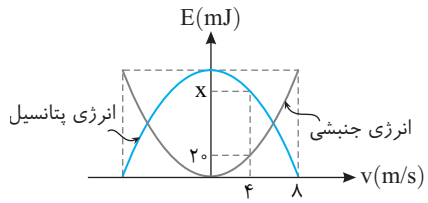
$$E=\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}mv_1^2\xrightarrow{m=0/1kg}E=\frac{1}{2}\times0/1(2\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}\times0/1(2\sqrt{6})^2$$

$$E=\frac{1}{2}\times0/1\times8+\frac{1}{2}\times0/1\times24\Rightarrow E=0/16J$$



B ۱۴۹۳ ۳

خط فکری نمودار انرژی برحسب سرعت است آن را با نمودار انرژی برحسب مکان اشتباه نکنید. تندی بیشینه $v_m=8m/s$ و وقتی تندی $v=4m/s$ است انرژی جنبشی ۲۰mJ است. به کمک این مطلب انرژی جنبشی بیشینه (K_m) یعنی انرژی مکانیکی نوسانگر $(E=K_m)$ را به‌دست بیاورید. سپس به کمک پایستگی انرژی مکانیکی مقدار x یعنی انرژی پتانسیل را حساب کنید.



با توجه به نمودار می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} K_m=\frac{1}{2}mv_m^2 \\ K=\frac{1}{2}mv^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{K_m}{K}=\frac{v_m^2}{v^2} \Rightarrow \frac{K_m}{20}=(\frac{8}{4})^2 \Rightarrow K_m=80mJ$$

بنابراین انرژی مکانیکی نوسانگر $E=K_m=80mJ$ است. در این صورت انرژی پتانسیل x خواهد شد:

$$E=K+U \Rightarrow 80=20+U \Rightarrow U=60mJ$$

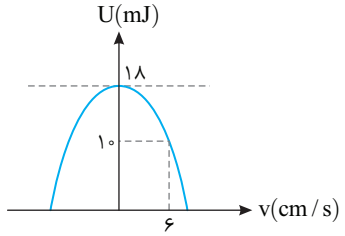
B ۱۴۹۴ ۱

نکته بیشینه انرژی پتانسیل نوسانگر برابر انرژی مکانیکی آن است.

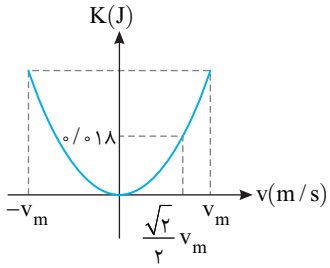
انرژی مکانیکی نوسانگر $E=18mJ$ و ثابت فنر $k=1000N/m$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$E=\frac{1}{2}kA^2 \xrightarrow{E=U_m} 18\times10^{-3}=\frac{1}{2}\times10^3\times A^2$$

$$\Rightarrow A=6\times10^{-3}m=0/6cm \Rightarrow \text{طول پاره‌خط}=1/2cm$$



بازی با سوال **نمودار انرژی جنبشی بر حسب سرعت نوسانگر ساده‌ای مطابق شکل است. انرژی مکانیکی نوسانگر چند ژول است؟**



۱) ۰/۰۲۴
۲) ۰/۰۳۶
۳) $0/018\sqrt{2}$
۴) $0/018\sqrt{3}$

پاسخ **انرژی مکانیکی برابر انرژی جنبشی بیشینه است، از این‌رو انرژی جنبشی بیشینه را حساب می‌کنیم:**

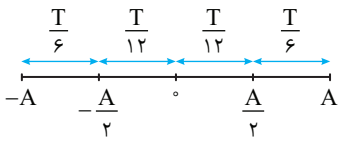
$$\begin{cases} K=\frac{1}{2}mv^2 \\ K_m=\frac{1}{2}mv_m^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{K}{K_m}=\frac{v^2}{v_m^2} \Rightarrow \frac{0/018}{K_m}=\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2}v_m)^2}{v_m^2}$$

$$\Rightarrow K_m=0/036J \Rightarrow E=0/036J$$

گزینهٔ ۲

B ۱۴۹۵ ۴

۱ طول پاره‌خط برابر ۲۰cm است بنابراین دامنه برابر $A=\frac{20}{2}=10cm$ است.



۲ نوسانگر در مدت ۰/۵s به $+\frac{A}{2}$ می‌رسد که با توجه به بازه‌های شناخته شده داریم:

$$\frac{T}{6}=0/5s \Rightarrow T=3s$$

۳ بسامد زاویه‌ای خواهد شد:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{3}$$

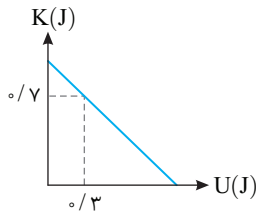
۴ انرژی مکانیکی همواره ثابت و برابر $E=\frac{1}{2}mv_m^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2$ است، بنابراین نمودارهای (۱) و (۲) نادرست هستند. از طرفی دقت کنید که تندی همواره مثبت است و قسمت منفی در نمودار (۳) نادرست است و مقدار E نیز خواهد شد:

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2=\frac{1}{2}\times0/9\times(0/1)^2\times(\frac{2\pi}{3})^2=\frac{1}{2}\times0/9\times0/01\times\frac{4\pi^2}{9}$$

$$=0/02J=20mJ$$

بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

B ۱۴۹۶ ۱



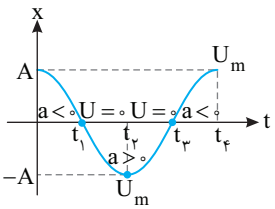
مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل برابر با انرژی مکانیکی است. با توجه به اینکه روی نمودار در لحظه‌ای که $U=0/3J$ بوده، انرژی جنبشی برابر ۰/۷J است، خواهیم داشت:

$$E=K+U \Rightarrow E=0/7+0/3=1J$$

انرژی مکانیکی از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید.

$$E=\frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow 1=\frac{1}{2}(k)(0/2)^2 \Rightarrow k=\frac{2}{0/04}=50N/m$$

A ۱۴۹۷ ۴



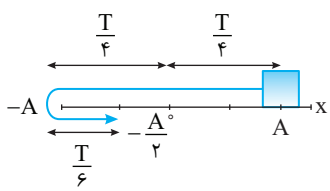
به نمودار روبه‌رو با دقت بنگرید. در حرکت به سمت انتهای مسیر انرژی پتانسیل نوسانگر رو به افزایش است یعنی از t_1 تا t_2 و یا از t_3 تا t_4.

می‌دانیم که علامت شتاب نوسانگر مخالف علامت مکان نوسانگر می‌باشد* و چون شتاب منفی مدنظر می‌باشد پس باید مکان مثبت باشد یعنی از t_3 تا t_4 هم شتاب منفی و هم انرژی پتانسیل در حال افزایش است.

A ۱۴۹۸ ۲

خط فکری از روی محور افقی (t) نمودار x−t باید دورهٔ نوسان را به‌دست آورد و با توجه به محور قائم دامنه و مکان نوسانگر مشخص خواهد شد. در گام اول دوره را حساب کرده و در گام دوم با توجه به رابطهٔ $E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2$ انرژی مکانیکی را حساب می‌کنیم.

در لحظهٔ $t_1=\frac{2}{15}$ برای دومین بار مکان نوسانگر به $-2cm$ یا $-\frac{A}{2}$ رسیده است:



* هم‌علامت نبودن شتاب و مکان در کتاب درسی به‌طور مشخص بیان نشده است.

$$\Delta t=\frac{T}{4}+\frac{T}{4}+\frac{T}{6}=\frac{8T}{12}=\frac{2T}{3}$$

$$\Delta t=t_1=\frac{2}{15}s\Rightarrow\frac{2T}{3}=\frac{2}{15}\Rightarrow T=\frac{1}{5}s$$

با داشتن T و محاسبهٔ ω انرژی مکانیکی را به‌دست می‌آوریم:

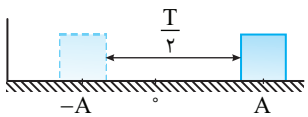
$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\xrightarrow[\omega=\frac{2\pi}{T}=10\pi]{m=500g,A=4cm}$$

$$E=\frac{1}{2}\times(500\times10^{-3})(16\times10^{-4})(100\times\pi^2)$$

$$\xrightarrow{\pi^2\simeq10}E=\frac{1}{2}(800\times10^{-3})=400\times10^{-3}J\Rightarrow E=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}J$$

۳ ۱۴۹۹ B

خط فکری بیشینه جابه‌جایی یک نوسانگر در مدت نیم دوره همواره وقتی رخ می‌دهد که نوسانگر از مکان A به $-A$ و یا از $-A$ به $+A$ برود. در این صورت مقدار جابه‌جایی برابر $2A$ است. با این توضیحات شما می‌توانید دامنهٔ حرکت را بیابید و با داشتن دامنهٔ حرکت و انرژی مکانیکی، دوره را حساب کرده و نمودار مورد نظر را تشخیص دهید.



۱ بیشینه جابه‌جایی در مدت $\frac{T}{2}$، $10cm$ است، بنابراین دامنه خواهد شد:

$$2A=10\Rightarrow A=\frac{10}{2}\Rightarrow A=5cm$$

۲ رابطهٔ انرژی مکانیکی را نوشته و بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم:

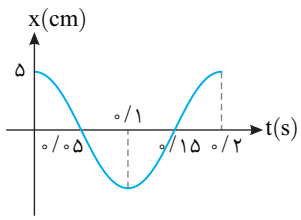
$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\xrightarrow[A=5\times10^{-2}m]{E=1/25\times10^{-2}\pi^2J,\ m=0/1kg}$$

$$E=1/25\times10^{-2}\times\pi^2=\frac{1}{2}\times0/1\times25\times10^{-4}\times\omega^2\Rightarrow\omega^2=10^2\pi^2\Rightarrow\omega=10\pi\ rad/s$$

۳ دوره را حساب می‌کنیم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow10\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=0/2s$$

۴ بنابراین نمودار مکان - زمان به صورت روبه‌رو می‌باشد:

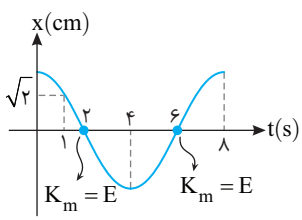


۴ ۱۵۰۰ B

۱ با توجه به نمودار $x-t$ در $t=1s$ برای اولین بار مکان نوسانگر برابر $x=\sqrt{2}$ می‌شود، بنابراین می‌توان دوره را حساب کرد.

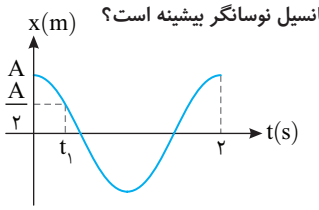
$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\sqrt{2}=2\cos\frac{2\pi}{T}t\xrightarrow{t=1s}$$

$$\cos\frac{2\pi}{T}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow T=8s$$



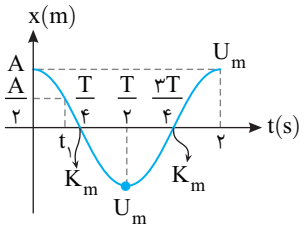
۲ هنگام گذر نوسانگر از حالت تعادل یعنی در لحظه‌هایی که نمودار مکان - زمان محور زمان را قطع می‌کند، تمام انرژی مکانیکی جسم به صورت انرژی جنبشی است که باتوجه به نمودار در لحظهٔ $t=2s$ برای اولین بار و در $t=6s$ برای دومین بار این اتفاق می‌افتد.

بازی با سوال نمودار مکان - زمان نوسانگری مطابق شکل روبه‌رو است. چند ثانیه پس از t_1، انرژی پتانسیل نوسانگر بیشینه است؟



۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{5}{8}$

پاسخ با توجه به نمودار $T=2s$ می‌باشد و t_1 اولین لحظه‌ای است که متحرک به مکان $x=\frac{A}{2}$ رسیده است:



$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi\ rad/s,\frac{A}{2}=A\cos\omega t_1$$

$$\Rightarrow\cos\pi t_1=\frac{1}{2}\Rightarrow\pi t_1=\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow t_1=\frac{1}{3}s$$

در انتهای مسیر $x=\pm A$، انرژی پتانسیل نوسانگر بیشینه است پس از t_1 در $t=\frac{T}{2}$ انرژی پتانسیل نوسانگر بیشینه می‌شود.

$$\frac{T}{2}-t_1=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}s$$

گزینهٔ ۲

۱ ۱۵۰۱ B

۱ با توجه به نمودار، دو دورهٔ نوسانگر B برابر نصف دورهٔ A است، بنابراین:

$$2T_B=\frac{T_A}{2}\Rightarrow T_A=4T_B\quad(I)$$

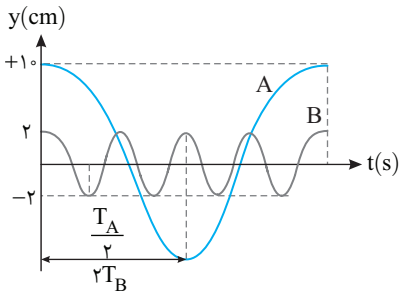
۲ نسبت بسامد زاویه‌ای دو نوسانگر را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{\omega_B}{\omega_A}=\frac{\frac{2\pi}{T_B}}{\frac{2\pi}{T_A}}\Rightarrow\frac{\omega_B}{\omega_A}=\frac{T_A}{T_B}\xrightarrow{(I)}\frac{\omega_B}{\omega_A}=4\Rightarrow\omega_A=\frac{1}{4}\omega_B$$

۳ دامنهٔ A، $10cm$ و دامنهٔ B برابر $2cm$ است.

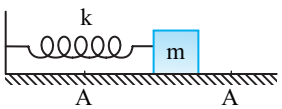
۴ انرژی مکانیکی نوسانگر A و B را نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{E_A}{E_B}=\frac{\frac{1}{2}m_AA_A^2\omega_A^2}{\frac{1}{2}m_BA_B^2\omega_B^2}\xrightarrow{m_B=5m_A}\frac{E_A}{E_B}=\frac{1}{5}\times(\frac{10}{2})^2\times(\frac{1}{4})^2\Rightarrow\frac{E_A}{E_B}=\frac{5}{16}$$

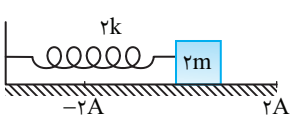


۴ ۱۵۰۲ C

خط فکری ابتدا به کمک نوشته‌های روی دو شکل نسبت انرژی مکانیکی آن‌ها را به‌دست آورید سپس به سراغ حل مسئله بروید.



(۱)



(۲)

انرژی مکانیکی یک نوسانگر از رابطهٔ $E=\frac{1}{2}kA^2$ به‌دست می‌آید. بنابراین:

$$\frac{E_2}{E_1}=\frac{\frac{1}{2}k_2A_2^2}{\frac{1}{2}k_1A_1^2}=\frac{(2k)(2A)^2}{k(A)^2}\Rightarrow E_2=8E_1$$

بنابراین E_2 بزرگ‌تر از E_1 است. اکنون E_1 و E_2 برحسب انرژی جنبشی و پتانسیل نوشته شده از هم کم می‌کنیم.

$$E_1=U_1+K_1\,,\,E_2=U_2+K_2\Rightarrow E_2-E_1=(U_2-U_1)+(K_2-K_1)$$

با فرض مسئله $U_2-U_1=46mJ$ و $K_2-K_1=10mJ$ است. از این رو:

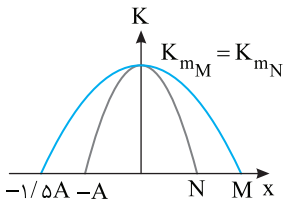
$$8E_1-E_1=46+10\Rightarrow 7E_1=56\Rightarrow E_1=8mJ\,,\,E_2=8\times 8=64mJ$$

۳ ۱۵۰۳ B

خط فکری با توجه به نمودار بیشینه انرژی جنبشی نوسانگرهای M و N با هم برابر و دو نوسانگر هم‌جرم بوده و دامنهٔ نوسان M، ۱/۵ برابر دامنهٔ نوسان N $(A_M=1/5A_N)$ است، بنابراین همه چیز برای حل مسئله آماده است کافی است انرژی جنبشی بیشینه را با هم برابر قرار دهید.

۱ بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر N و M با هم برابر است.

$$K_{m_M}=K_{m_N}\Rightarrow\frac{1}{2}m_Mv_{m_M}^2=\frac{1}{2}m_Nv_{m_N}^2\xrightarrow{m_N=m_M}v_{m_M}=v_{m_N}$$



۲ تندی بیشینه برابر $v_m=A\omega$ است. بنابراین:

$$v_{m_M}=v_{m_N}\Rightarrow A_M\omega_M=A_N\omega_N\xrightarrow{\omega=\frac{2\pi}{T}}1/5(\frac{2\pi}{T_M})=\frac{2\pi}{T_N}$$

$$\frac{T_M}{T_N}=1/5$$

۲ ۱۵۰۴ A

هرگاه بر جسمی که می‌تواند با دوره یا بسامد خاصی (دورهٔ طبیعی) نوسان کند، یک نیروی دوره‌ای با همان دوره وارد شود، جسم شروع به نوسان می‌کند و دامنهٔ نوسان تا مقدار بیشینه‌ای افزایش می‌یابد و از آن پس حرکت نوسانی بدون کاهش دامنه ادامه می‌یابد، این پدیده را تشدید می‌گویند.

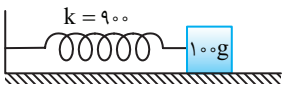
در حالتی هم که بسامد نیروی اعمال شده با بسامد نوسانگر برابر نباشد، انرژی به نوسانگر منتقل می‌شود و نوسانگر را به حرکت درمی‌آورد اما بیشترین انرژی در حالت تشدید به نوسانگر منتقل می‌شود. با توجه به گفته‌های بالا گزینهٔ (۲) درست است.

۲ ۱۵۰۵ B

یادآوری هرگاه با اعمال نیروی خارجی نوسانگری را به نوسان درآوردیم چنین نوسانی را نوسان واداشته گویند.

خط فکری هرگاه بسامد نوسان‌های واداشته با بسامد نوسانگر برابر باشد، تشدید رخ می‌دهد و دامنهٔ نوسانگر افزایش می‌یابد. اما اگر نوسانگر را با بسامدهایی بیشتر یا کمتر از بسامد طبیعی آن به نوسان درآوریم، دامنهٔ نوسان کوچک‌تر از حالت تشدید است، بنابراین شما باید بسامد طبیعی سامانهٔ جرم - فنر را حساب کرده با بسامدهای داده شده در مسئله مقایسه کنید.

بسامد طبیعی سامانهٔ جرم و فنر را به‌دست می‌آوریم:

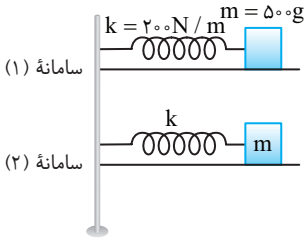


$$f_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{900}{0/1}}=15Hz$$

بسامد $f_2=15Hz$ با بسامد طبیعی f_0 سامانه برابر است. بنابراین دامنهٔ نوسان برای بسامد (فرکانس) f_2 از دو فرکانس دیگر بزرگ‌تر است.

۳ ۱۵۰۶ A

بسامد سامانهٔ جرم - فنر اول را حساب می‌کنیم.



$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\xrightarrow{f=\frac{1}{T}}f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow f_2=f_1=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{200}{0/5}}=\frac{20}{2\pi}Hz$$

هنگامی تشدید رخ می‌دهد که بسامد طبیعی دو سامانه با هم برابر باشند، بنابراین بسامد سامانهٔ (۲) نیز برابر است با:

$$f_2=\frac{20}{2\pi}Hz$$

بسامد زاویه‌ای سامانهٔ (۲) را حساب می‌کنیم.

$$\omega_2=2\pi f_2\Rightarrow\omega_2=2\pi\times\frac{20}{2\pi}\Rightarrow\omega_2=20rad/s$$

تنها گزینه‌ای که در آن بسامد زاویه‌ای $20rad/s$ است، گزینهٔ (۳) است.

۲ ۱۵۰۷ B

هنگامی بین دو سامانه تشدید رخ می‌دهد که بسامد (دوره) آن‌ها با هم برابر باشد.

در حالت اول:

$$T_{ف}=T_{آ}\Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow\frac{m}{k}=\frac{\ell}{g}$$

در حالت دوم: طول آونگ $\ell'=2\ell$ شده است. در این صورت دورهٔ آونگ خواهد شد:

$$\frac{T'}{T}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}\Rightarrow\frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{\ell'}{\ell}}\Rightarrow\frac{T'}{T}=\sqrt{2}$$

باید دورهٔ سامانه جرم فنر نیز $\sqrt{2}$ برابر $(T'_{ف}=\sqrt{2}T_{ف})$ باشد تا مجدداً تشدید رخ دهد، بنابراین

$$2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}}=\sqrt{2}(2\pi\sqrt{\frac{m}{k}})\Rightarrow k'=\frac{1}{2}k$$

۳ ۱۵۰۸ B

طول آونگ (۱) و آونگ (۴) با هم برابر است، بنابراین دورهٔ $(T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}})$ هر دو آونگ یکی است.

$$T_1=T_4\Rightarrow f_{0_1}=f_{0_4}$$

از این رو هرگاه آونگ (۱) را به نوسان درآوریم چون بسامد طبیعی آونگ‌های (۱) و (۴) با هم برابر است، برای آونگ (۴) تشدید رخ می‌دهد و دامنهٔ نوسان آونگ (۴) از بقیه بیشتر است و گزینهٔ (۳) درست است. دقت کنید با حرکت آونگ (۱) انرژی به همهٔ آونگ‌ها منتقل می‌شود و همه می‌جنبند اما برای آونگ (۴) تشدید رخ می‌دهد و دامنه‌اش از بقیه بیشتر است.

۲ ۱۵۰۹ B

خط فکری هرگاه طول دو آونگ برابر باشد بسامد طبیعی (دورهٔ طبیعی) آن‌ها یکسان بوده و می‌توانند با هم تشدید انجام دهند. در حل این تست باید دقت کنید در اثر افزایش دما که طول آونگ‌ها افزایش می‌یابد و سپس بررسی کنید طول کدام‌ها با هم برابر می‌شود.

طول آونگ‌های (۱) و (۴) با هم برابر است و بسامد طبیعی آونگ‌های (۱) و (۴) $(f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}})$ با هم برابر است در نتیجه با نوسان آونگ (۱)، برای آونگ (۴) تشدید رخ می‌دهد.

با افزایش دما، طول آونگ‌های (۲) و (۳) و (۴) افزایش می‌یابد و با افزایش دما ممکن است طول آونگ (۳) با آونگ (۱) برابر شده و با نوسان آونگ (۱)، آونگ (۳) شروع به تشدید می‌کند اما با افزایش طول آونگ (۴) بسامد آن دیگر با بسامد آونگ (۱) برابر نیست و برای آن تشدید رخ نمی‌دهد.

طول آونگ (۲) که در هر دو حالت از طول آونگ (۱) بیشتر است و تشدید برای آونگ (۲) رخ نمی‌دهد.

B ۳ ۱۵۱۰

خط فکری میله با بسامد زاویه‌ای در گسترهٔ $1rad/s$ تا $2rad/s$ نوسان می‌کند یعنی تمام بسامد بین این دو مقدار را می‌تواند ایجاد کند بنابراین اگر بسامد آونگ‌ها بین این دو مقدار باشد برای آن‌ها تشدید رخ می‌دهد اما ما به جای اینکه بسامد تک تک آونگ‌ها را حساب کنیم مسیر دیگری را انتخاب کرده‌ایم، محدودهٔ طول آونگ‌ها بین این دو بسامد زاویه‌ای را به‌دست آورده و طول آونگ‌ها را با این محدوده مقایسه می‌کنیم.

یادآوری بسامد زاویه‌ای آونگ برابر $\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ است.

بسامد زاویه‌ای (ω) در گسترهٔ $1rad/s$ تا $2rad/s$ می‌باشد و با توجه به $\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ خواهیم داشت:

$$1\le\omega\le2\Rightarrow1\le\sqrt{\frac{g}{\ell}}\le2\Rightarrow1\le\frac{g}{\ell}\le4\Rightarrow\frac{1}{4}\le\frac{\ell}{g}\le1\xrightarrow{g\approx10}2/5\le\ell\le10$$

بنابراین اگر طول آونگ در بازهٔ $2/5m$ تا $10m$ باشد، آونگ تشدید می‌کند یعنی آونگ‌های به طول‌های $2/8m$، $3/6m$ و $8/2m$ دچار تشدید می‌شوند.

B ۴ ۱۵۱۱

خط فکری با توجه به متن کتاب برای اینکه نوسان نامیرا باشد باید یک نیروی دوره‌ای مناسب که دامنه را عوض نکند در انتهای مسیر به آونگ وارد شود و چون آونگ را به سمت راست کشیده و رها می‌کنیم، این نیرو باید در انتهای راست مسیر وارد شود، بنابراین در هر دوره (T) یک بار این نیرو وارد می‌شود.

۱ دوره را حساب می‌کنیم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{24/5\times10^{-2}}{9/8}}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{2/5\times10^{-2}}$$

$$\xrightarrow{\pi=\sqrt{10}}T=2\times\sqrt{10}\times\sqrt{2/5\times10^{-2}}\Rightarrow T=2\sqrt{25\times10^{-2}}\Rightarrow T=1s$$

۲ بنابراین در لحظه‌های $t=1s$، $t=2s$، $t=3s$، $t=4s$ و $t=5s$ و ... باید آونگ تحت تأثیر این نیرو قرار گیرد.

B ۳ ۱۵۱۲

وقتی یک نیروی خارجی با بسامدی برابر بسامد طبیعی نوسانگر به آن وارد می‌شود، نوسانگر شروع به نوسان کرده و دامنهٔ آن افزایش می‌یابد. بنابراین دامنه باید در نمودار در حال افزایش باشد اما دوره و بسامد نوسانگر به دامنه بستگی ندارد و ثابت می‌ماند.

A ۲ ۱۵۱۳

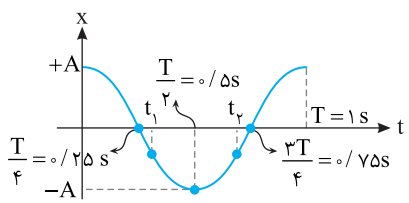
با توجه به رابطهٔ $a=-k$، $a=-k$ است و با توجه به فرض مسأله که k یک مقدار ثابت است، شتاب متحرک و در نتیجه نیروی خالص وارد بر متحرک ثابت است، درحالی که می‌دانیم حرکت هماهنگ ساده حرکت با شتاب متغیر است پس حرکت هماهنگ ساده نیست.

B ۴ ۱۵۱۴

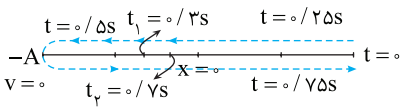
با توجه به رابطهٔ $a=-\omega^2x$ ابتدا بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega^2=4\pi^2\Rightarrow\omega=2\pi\xrightarrow{\omega=\frac{2\pi}{T}}\frac{2\pi}{T}=2\pi\Rightarrow T=1s$$

نمودار $x-t$ نوسانگر را رسم می‌کنیم. در t_1 نوسانگر در حال حرکت به سمت انتهای مسیر $(x=-A)$ است، پس حرکت متحرک کندشونده است. در t_2 نوسانگر در حال حرکت به سمت مرکز تعادل $x=0$ است، پس حرکت متحرک تندشونده است.



روش دیگر: مسیر حرکت را رسم می‌کنیم. مطابق شکل در $t_1=0/3s$ حرکت کندشونده و در $t_2=0/7s$ حرکت تندشونده است.



A ۱ ۱۵۱۵

خط فکری ابتدا به کمک قانون دوم نیوتون $(F=ma)$، قانون هوک $(F=-kx)$ و بسامد زاویه‌ای $(\omega=\sqrt{k/m})$ معادلهٔ کلی شتاب - زمان در حرکت هماهنگ ساده را به‌دست می‌آوریم، سپس معادلهٔ شتاب - زمان داده شده در مسئله را با آن مقایسه می‌کنیم و به کمک آن بسامد زاویه‌ای، دامنه و دوره را به‌دست می‌آوریم، سپس بازهٔ زمانی داده شده را با دوره مقایسه کرده با رسم مسیر حرکت و به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده مدت زمانی که حرکت کندشونده است را به‌دست می‌آوریم.

۱ با توجه به قانون دوم نیوتون $(F=ma)$ و قانون هوک $(F=-kx)$ معادلهٔ شتاب - زمان را در حالت کلی به‌دست می‌آوریم.

$$ma=-kx\Rightarrow ma=-kA\cos\omega t\Rightarrow a=-\frac{k}{m}A\cos\omega t$$

$$\xrightarrow{\omega^2=\frac{k}{m}}a=-A\omega^2\cos\omega t$$

۲ معادلهٔ شتاب - زمان داده شده را با حالت کلی مقایسه کرده بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$a=-100\pi^2\cos50\pi t$$

$$a=-A\omega^2\cos\omega t$$

$$\Rightarrow\omega=50\pi rad/s$$

$$100\pi^2=A\omega^2\Rightarrow100\pi^2=A(50\pi)^2\Rightarrow A=0/04m=4cm$$

۳ دوره را حساب می‌کنیم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow50\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=0/04s$$

۴ معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم.

$$x=0/04\cos50\pi t$$

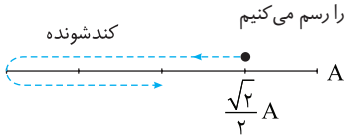
۵ بازهٔ زمانی $t_1=\frac{1}{200}s$ تا $t_2=\frac{3}{100}s$ را با دوره مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{3}{100}-\frac{1}{200}}{\frac{4}{100}}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{5}{200}}{\frac{4}{100}}\Rightarrow\Delta t=\frac{5}{8}T$$

۶ مکان متحرک در $t_1=\frac{1}{200}s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$x_1=0/04\cos50\pi\times\frac{1}{200}\Rightarrow x_1=0/04\cos\frac{\pi}{4}\Rightarrow x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(0/04)=\frac{\sqrt{2}}{2}A$$

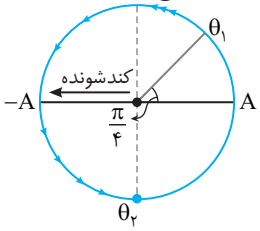
۷ مسیر حرکت را رسم می‌کنیم



در مدت $\frac{T}{4}$ حرکت کندشونده است، یعنی $\frac{T}{4}=\frac{0/04}{4}=0/01s$

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی: این روش در این مسئله سریع‌تر به جواب می‌رسد.

کمان متناظر با $t_1=\frac{1}{200}s$ و $t_2=\frac{3}{100}s$ روی دایرهٔ مثلثاتی را مشخص می‌کنیم.



$$\theta_1=\omega t_1=50\pi\times\frac{1}{200}=\frac{\pi}{4}$$

$$\theta_2=\omega t_2=50\pi\times\frac{3}{100}=\frac{3\pi}{2}$$

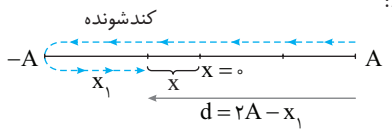
می‌دانیم که با حرکت به سمت دامنه‌ها حرکت کندشونده است، پس در حرکت از θ_1 تا θ_2 تنها در بازهٔ $\frac{\pi}{2}$ تا π ($x=0$ تا $x=-A$) حرکت کندشونده است که این بازه برابر $\frac{T}{4}=0/01s$ است.

C ۱۵۱۶ | ۱

خط فکری از لحظهٔ صفر تا t برای اولین بار تندی متوسط دو برابر بزرگی سرعت متوسط شده است. یعنی مسافت طی شده دو برابر جابه‌جایی است. تا لحظه‌ای که نوسانگر در یک جهت در حرکت است، تندی متوسط و سرعت متوسط یکسان است، بنابراین t بعد از تغییر جهت در مکان $-۴cm$ اتفاق می‌افتد. مسیر حرکت را به‌طور فرضی از صفر تا t رسم می‌کنیم و مسافت را دو برابر جابه‌جایی می‌نویسیم. به حل دقت کنید.

با توجه به مسیر اگر فاصله محل مورد نظر را از $-A$ برابر $x_۱$ قرار دهیم، مسافت طی شده خواهد شد:

$$\ell = ۲A + x_۱$$



و جابه‌جایی خواهد شد:

$$d = ۲A - x_۱$$

با توجه به فرض مسئله:

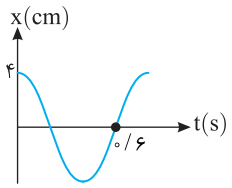
$$s_{av} = ۲v_{av} \Rightarrow \ell = ۲d \Rightarrow ۲A + x_۱ = ۲(۲A - x_۱) \Rightarrow ۲A + x_۱ = ۴A - ۲x_۱$$

$$\Rightarrow x_۱ = \frac{۲}{۳}A$$

مکان نوسانگر یعنی فاصله نوسانگر از مبدأ مکان، بنابراین مکان در لحظهٔ $x(t)$ خواهد شد:

$$x_۱ + x = A \Rightarrow \frac{۲}{۳}A + x = A \Rightarrow x = \frac{۱}{۳}A = \frac{۱}{۳} \times ۴ = \frac{۴}{۳}cm$$

دورهٔ حرکت را حساب می‌کنیم.



$$\frac{۳T}{۴} = ۰/۶ \Rightarrow T = ۰/۸s$$

بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{۲\pi}{۰/۸} \Rightarrow \omega = \frac{۵\pi}{۲} rad/s$$

شتاب حرکت خواهد شد:

$$|a| = \omega^۲|x| \Rightarrow |a| = (\frac{۵\pi}{۲})^۲ \times (\frac{۴}{۳} \times ۱۰^{-۲}) \Rightarrow |a| = \frac{۲۵\pi^۲}{۴} \times \frac{۴}{۳} \times ۱۰^{-۲}$$

$$\Rightarrow |a| = \frac{۵}{۶} m/s^۲$$

B ۱۵۱۷ | ۱

خط فکری صورت مسئله کمی گنگ است. شتاب تکرار شونده یعنی چی؟ به‌نظر می‌رسد با یک قطعه الکترونیکی در حال نوسان روبه‌رو هستیم که شتاب آن می‌تواند حداکثر ۱۶g شود و اگر شتاب از این مقدار بیشتر شود قطعه آسیب می‌بیند. در حرکت هماهنگ ساده بیشینه شتاب در نقاط بازگشت خواهد بود $(a_m = A\omega^۲)$ بنابراین شما باید شتاب بیشینه را برابر ۱۶g قرار داده مسئله را حل کنید.

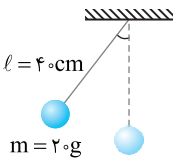
در صورت سؤال بیشینهٔ شتاب قابل تحمل ۱۶g بیان شده است از این‌رو:

$$a_m = ۱۶g \Rightarrow A\omega^۲ = ۱۶g \Rightarrow \frac{۴}{۱۰۰}\omega^۲ = ۱۶g \Rightarrow \omega^۲ = ۴۰۰g \Rightarrow (۲\pi f)^۲ = ۴۰۰g$$

$$\Rightarrow ۲\pi f = ۲۰\sqrt{g} \xrightarrow{g=\pi^۲} ۲\pi f = ۲۰\pi \Rightarrow f = ۱۰Hz$$

B ۱۵۱۸ | ۱

۱ بسامد زاویه‌ای آونگ را حساب می‌کنیم.



$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{۱۰}{۰/۴}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{۱۰۰}{۴}} = ۵rad/s$$

۲ نیروی خالص در نقطهٔ بازگشت با محل رهاشدن آونگ همان بیشینه نیرو در حرکت هماهنگ ساده است.

$$F_{max} = mA\omega^۲$$

۳ تندی هنگام گذر از نقطهٔ تعادل یعنی تندی بیشینه نوسانگر: $v_m = A\omega$ (II)

رابطهٔ (I) و (II) را بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{v_m}{F_m} = \frac{A\omega}{mA\omega^۲} \Rightarrow \frac{v_m}{F_m} = \frac{۱}{m\omega}$$

۴ اکنون داده‌های مسئله را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\frac{v_m}{۰/۱} = \frac{۱}{۰/۰۲ \times ۵} \Rightarrow v_m = ۱ m/s$$

B ۱۵۱۹ | ۲

خط فکری وقتی وزنه به فنر برخورد می‌کند، آن را فشرده کرده و متوقف می‌شود. سرعت v در لحظهٔ برخورد همان تندی بیشینه $v_m = A\omega$ در حرکت هماهنگ ساده است و فاصلهٔ محل توقف از محل برخورد نیز برابر دامنه است. بنابراین شما باید بسامد زاویه‌ای را حساب کنید تا بتوانید دامنه‌ها را با هم مقایسه کنید.

بسامد زاویه‌ای فنر A:

$$\omega_A = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

بسامد زاویه‌ای فنر B:

$$\omega_B = \sqrt{\frac{k}{۲m}}$$

نسبت ω_A/ω_B خواهد شد:

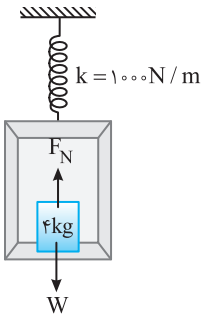
$$\frac{\omega_A}{\omega_B} = \sqrt{\frac{۲m}{m}} = \sqrt{۲}$$

تندی بیشینه A و B را نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{matrix} v_{m_A} = A_A\omega_A \\ v_{m_B} = A_B\omega_B \end{matrix} \xrightarrow{\frac{v_{m_A}=v}{v_{m_B}=۲v}} \frac{۱}{۲} = \frac{A_A}{A_B} \times \sqrt{۲} \Rightarrow \frac{A_B}{A_A} = ۲\sqrt{۲}$$

C ۱۵۲۰ | ۴

خط فکری بر وزنه دو نیرو یکی نیروی وزن $(W = mg)$ و دیگری نیروی عمودی سطح (F_N) وارد می‌شود. یعنی نیروی خالص وارد بر وزنه برایند این دو نیرو است. در پایین‌ترین نقطه مسیر (نقطهٔ بازگشت) بیشینه نیروی خالص به وزنه وارد می‌شود که برابر $F_{max} = mA\omega^۲$ است.



۱ بسامد زاویه‌ای سامانه را حساب می‌کنیم.

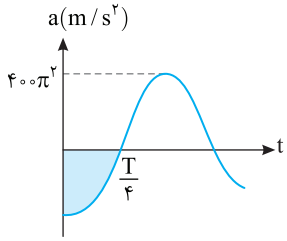
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{۱۰۰۰}{۶+۴}} \Rightarrow \omega = ۱۰rad/s$$

۲ برایند نیروهای F_N و ω را برابر F_{max} قرار می‌دهیم.

$$F_N - mg = mA\omega^۲ \xrightarrow{A=۲cm} F_N - ۴۰ = ۴ \times ۲ \times ۱۰^{-۲} \times ۱۰^۲ \Rightarrow F_N = ۴۸N$$

C ۱۵۲۱ | ۲

یادآوری مساحت سطح محصور بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان برابر تغییر سرعت است.



۱ در بازه صفر تا $\frac{T}{۴}$، تغییر سرعت $۲\pi m/s$ است. در این صورت در لحظهٔ $\frac{T}{۴}$ که نوسانگر از مکان $x = ۰$ می‌گذرد، سرعت بیشینه و در $t = ۰$ سرعت صفر است. بنابراین بیشینه سرعت خواهد شد:

$$\Delta v = v - v_۰ \Rightarrow ۲\pi = v_m - ۰ \Rightarrow v_m = ۲\pi$$

۲ شتاب بیشینه برابر $a_m = ۴۰۰\pi^۲ m/s^۲$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

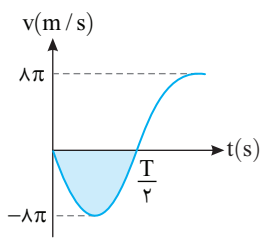
$$\begin{matrix} v_m = A\omega \\ a_m = A\omega^۲ \end{matrix} \Rightarrow \frac{v_m}{a_m} = \frac{۱}{\omega} \Rightarrow \frac{۲\pi}{۴۰۰\pi^۲} = \frac{۱}{\omega} \Rightarrow \omega = ۲۰۰\pi rad/s$$

۳ دوره را حساب می‌کنیم.

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow ۲۰۰\pi = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow T = ۰/۰۱s$$

B ۱۵۲۲ | ۱

یادآوری مساحت سطح زیر نمودار سرعت - زمان و محور زمان برابر جابه‌جایی است.



۱ در بازهٔ صفر تا $\frac{T}{۲}$ سطح زیر نمودار ۰/۰۴ واحد SI بوده یعنی جابه‌جایی برابر ۰/۰۴m است.

۲ در مدت صفر تا $\frac{T}{2}$ نوسانگر از مکان $+A$ به مکان $-A$ می‌رود و جابه‌جایی آن برابر $2A$ است. از این‌رو می‌توان نوشت: $2A=0/04\Rightarrow A=0/02m$

۳ با توجه به نمودار $v-t$، بیشینه تندی برابر $8\pi m/s$ است. در نتیجه خواهیم داشت: $v_m=A\omega\Rightarrow 8\pi=0/02\omega\Rightarrow\omega=400\pi rad/s$

۴ بسامد را حساب می‌کنیم. $\omega=2\pi f\Rightarrow 400\pi=2\pi f\Rightarrow f=200Hz$

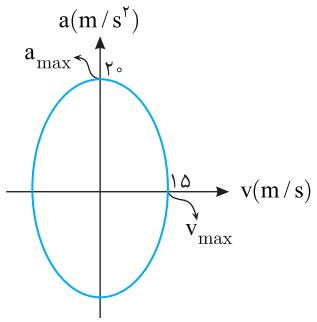
B ۱۵۲۳ ۲

خط فکری مسئلهٔ سختی نیست از روی شکل می‌توانید شتاب بیشینه a_m و سرعت بیشینه آونگ را مشخص کنید سپس روابط a_m و v_m را نوشته، بسامد زاویه‌ای و از آن‌جا طول آونگ را حساب کنید.

با توجه به نمودار:

$$\begin{cases} a_{max}=20 \xrightarrow{a_{max}=A\omega^2} A\omega^2=20 \\ v_{max}=15 \xrightarrow{v_{max}=A\omega} A\omega=15 \end{cases} \Rightarrow \omega=\frac{20}{15}=\frac{4}{3}rad/s$$

بنابراین: $\omega=\sqrt{\frac{g}{L}}\Rightarrow\frac{4}{3}=\sqrt{\frac{10}{L}}\Rightarrow\frac{16}{9}=\frac{10}{L}\Rightarrow L=\frac{90}{16}\Rightarrow L=\frac{45}{8}m$



B ۱۵۲۴ ۴

خط فکری با استفاده از انرژی مکانیکی A و B، ثابت فنر هر یک را حساب کرده سپس آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم و ثابت فنر جدید را به‌دست می‌آوریم و انرژی مکانیکی در حالت جدید را حساب می‌کنیم.

با توجه به رابطهٔ انرژی مکانیکی دستگاه جرم- فنر $(E=\frac{1}{2}kA^2)$ ثابت فنر k_A و k_B را حساب می‌کنیم.

۱ با استفاده از

$$E=\frac{1}{2}kA^2\Rightarrow\begin{cases} E_A=\frac{1}{2}\times k_A\times(10\times10^{-2})^2\Rightarrow 5=\frac{1}{2}\times k_A\times10^{-2} \\ \Rightarrow k_A=1000N/m \\ E_B=\frac{1}{2}\times k_B\times(10\times10^{-2})^2\Rightarrow 10=\frac{1}{2}\times k_B\times10^{-2} \\ \Rightarrow k_B=2000N/m \end{cases}$$

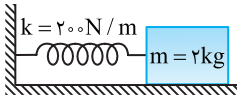
۲ ثابت فنر جدید خواهد شد: $k_T=k_A+k_B=1000+2000=3000N/m$

۳ انرژی مکانیکی سامانه جرم و فنر جدید را به‌دست می‌آوریم

$$E=\frac{1}{2}k_TA^2=\frac{1}{2}\times3000\times(10\times10^{-2})^2=\frac{1}{2}\times3000\times10^{-2}=15J$$

B ۱۵۲۵ ۳

خط فکری با توجه به این‌که برای جابه‌جا کردن جسم $4J$ کار انجام شده است، بنابر قانون پایستگی انرژی این کار به انرژی مکانیکی جسم تبدیل می‌شود، بنابراین انرژی مکانیکی جسم برابر با $4J$ است.



۱ با توجه به رابطهٔ انرژی مکانیکی $(E=\frac{1}{2}kA^2)$ داریم:

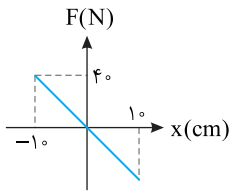
$$E=\frac{1}{2}kA^2\Rightarrow 4=\frac{1}{2}\times200\times A^2\Rightarrow100A^2=4\Rightarrow A=0/2m=20cm$$

۲ دورهٔ حرکت، تنها به جرم جسم و ثابت فنر بستگی دارد و از رابطهٔ $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ محاسبه می‌شود. بنابراین:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{2}{200}}=2\pi\sqrt{\frac{1}{100}}=2\times\pi\times\frac{1}{10}=0/2\pi s$$

B ۱۵۲۶ ۱

خط فکری دقت کنید که در مکان‌های $+10cm$ و $-10cm$، اندازهٔ نیرو بیشینه شده و برابر $F_m=40$ است. بنابراین نوسانگر بین مکان‌های $+10cm$ و $-10cm$ در نوسان بوده و دامنه برابر $A=10cm$ است.



در $x=10cm$ یعنی در دامنه انرژی پتانسیل بیشینه و برابر انرژی مکانیکی $(E=U_m)$ است. از این‌رو شما باید به کمک نمودار، ثابت فنر را بیابید و انرژی مکانیکی را به‌دست آورید.

۱ با توجه به نمودار هرگاه $x=10cm$ باشد، اندازهٔ $F=40N$ است بنابراین می‌توان نوشت: $|F|=k|x|\Rightarrow40=k|0/1|\Rightarrow k=400N/m$

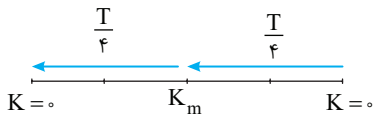
۲ انرژی پتانسیل نوسانگر در $x=10cm$ بیشینه مقدار را دارد و برابر انرژی مکانیکی نوسانگر است بنابراین $U_m=E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}\times400\times(0/1)^2=2J$

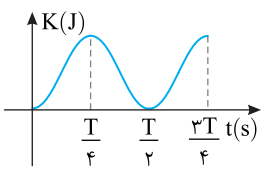
میانبر رابطهٔ بین انرژی مکانیکی، بیشینه نیرو و دامنه به‌صورت زیر است.

$$E=\frac{1}{2}AF_m$$

B ۱۵۲۷ ۲

خط فکری به نمودار به دقت نگاه کنید. در مسیر حرکت نوسانگر در هر $\frac{T}{4}$ انرژی جنبشی نوسانگر از صفر به بیشینه و در $\frac{T}{4}$ بعدی از بیشینه به صفر می‌رسد. بنابراین روی نمودار از $t=0$ تا اولین بیشینه (max) برابر $\frac{T}{4}$ است. با توجه به این مطلب می‌توانید دورهٔ نوسان را حساب کنید. در ضمن انرژی جنبشی همواره مثبت است و نمودار آن نمی‌تواند زیر محور زمان قرار گیرد.





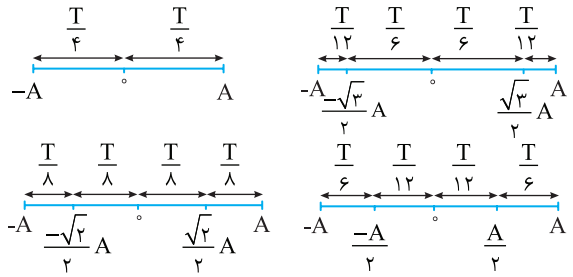
با توجه به شکل پس از $t=\frac{T}{2}+\frac{T}{4}=\frac{3T}{4}$ نوسانگر برای دومین بار به نقطهٔ تعادل خود رسیده که با توجه به نمودار $t=0/3s$ است. $\frac{3T}{4}=0/3\Rightarrow T=0/4s$

B ۱۵۲۸ ۲

در ابتدای این تست به شما می‌گوییم که این تست با اطلاعات کتاب درسی قابل حل نیست. زیرا در کتاب درسی به صراحت بیان شده که نباید براساس رابطهٔ انرژی پتانسیل نوسانگر $(U=\frac{1}{2}kx^2)$ مسئله‌ای طرح شود.

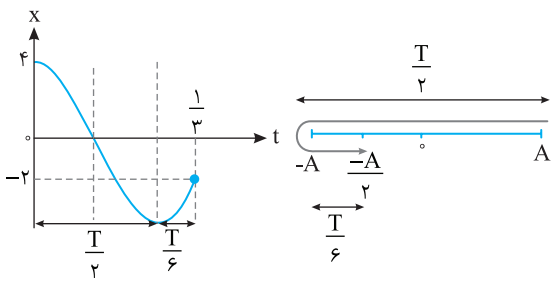
خط فکری در نمودار $x-t$ حرکت هماهنگ ساده، از محور افقی دوره و از محور قائم دامنهٔ حرکت به‌دست می‌آید.

یادآوری باید بازه‌های زمانی شناخته شده مربوط به جابه‌جایی‌های معروف را به‌خاطر بسپارید.



با توجه به نمودار مدت زمانی که طول می‌کشد متحرک برای دومین بار به $-۲cm$ یعنی $-\frac{A}{۲}$ برسد، $\frac{۱}{۳}$ ثانیه است:

مسیر را رسم می‌کنیم. بازه‌های شناخته شده را روی آن می‌نویسیم.



$$\Delta t=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{T}{۲}+\frac{T}{۶}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{۴T}{۶}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow T=\frac{۱}{۲}s$$

بسامد زاویه‌ای خواهد شد: $\omega=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow\omega=۴\pi\frac{rad}{s}$

معادلهٔ حرکت نوسانی را می‌نویسیم:

$$x=A\cos\omega t\xrightarrow{A=۴cm=۰/۰۴m}x=۰/۰۴\cos۴\pi t$$

$$\xrightarrow{t=\frac{۳}{۱۶}s}x=۰/۰۴\cos۴\pi\times\frac{۳}{۱۶}\Rightarrow x=۰/۰۴\cos\frac{۳\pi}{۴}=-۰/۰۲\sqrt{۲}m$$

از اینجا به بعد شما باید از کتاب درسی خارج شوید و از رابطهٔ $U=\frac{۱}{۲}kx^۲$ استفاده کنید.

$$\frac{U}{E}=\frac{\text{انرژی پتانسیل کشسانی}}{\text{انرژی مکانیکی}}=\frac{\frac{۱}{۲}kx^۲}{\frac{۱}{۲}kA^۲}\Rightarrow\frac{U}{E}=\frac{x^۲}{A^۲}\xrightarrow{x=-۰/۰۲\sqrt{۲}m,\ A=۰/۰۴m}$$

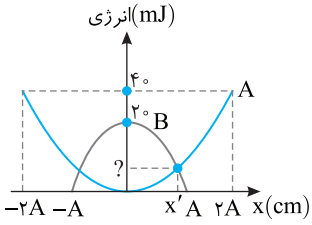
$$\frac{U}{E}=\frac{(-۰/۰۲\sqrt{۲})^۲}{(۰/۰۴)^۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow U=\frac{۱}{۲}E$$

با توجه به تعریف انرژی مکانیکی خواهیم داشت:

$$E=U+K\Rightarrow E=\frac{۱}{۲}E+K\Rightarrow K=\frac{۱}{۲}E$$

۳ ۱۵۲۹ B

نکته در حرکت هماهنگ ساده بیشینه انرژی پتانسیل و بیشینه انرژی جنبشی یکسان و برابر انرژی مکانیکی نوسانگر هستند. $(E=U_m=K_m)$



۱ بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر B برابر $۲۰mJ$ است، یعنی انرژی مکانیکی نوسانگر B نیز $۲۰mJ$ است. در صورت مسئله انرژی پتانسیل نوسانگر B در مکان x' برابر $۱۵mJ$ بیان شده از این رو انرژی جنبشی نوسانگر B در مکان x' خواهد شد.

$$E_B=K_B+U_B\Rightarrow ۲۰=K_B+۱۵\Rightarrow K_B=۵mJ$$

۲ با توجه به نمودارها در مکان x'، انرژی جنبشی نوسانگر B برابر انرژی پتانسیل نوسانگر A است، از این‌رو خواهیم داشت. $U_A=K_B=۵mJ$

۳ با توجه به نمودار انرژی پتانسیل A، بیشینه مقدار انرژی پتانسیل $U_{A\,max}=۴۰mJ$ است، بنابراین انرژی مکانیکی A نیز $U_m=E=۴۰mJ$ بوده و می‌توان نوشت:

$$E_A=K_A+U_A\Rightarrow ۴۰=K_A+۵\Rightarrow K_A=۳۵mJ$$

۱ ۱۵۳۰ C

خط فکری پدیده تشدید وقتی اتفاق می‌افتد که دو سامانه دارای بسامد یکسان (بسامد زاویه‌ای یکسان) باشند. بنابراین وقتی بیان می‌شود که سامانهٔ (۱) تنها با سامانهٔ (۳) تشدید ایجاد می‌کند یعنی $\omega_۱=\omega_۳$ است. سامانهٔ (۲) نیز تنها با سامانه (۴) تشدید ایجاد می‌کند $(\omega_۲=\omega_۴)$، شما باید به کمک این تساوی‌ها رابطه‌ای بین $k_۱$ و $k_۲$ با k به‌دست بیاورید. سپس در حالت جدید بسامدهای زاویه‌ای را حساب کرده و با هم مقایسه کنید. هر کدام که با هم برابر هستند تشدید ایجاد می‌کنند.

۱ وقتی سامانهٔ (۳) با به نوسان درآمدن سامانه (۱)، به نوسان در می‌آید یعنی:

$$\omega_۱=\omega_۳\Rightarrow\sqrt{\frac{k}{m_۱}}=\sqrt{\frac{k_۱}{m_۳}}\Rightarrow\frac{k}{m}=\frac{k_۱}{\frac{m}{۲}}\Rightarrow k_۱=\frac{۱}{۲}k$$

وقتی سامانهٔ (۲) با به نوسان در آمدن سامانهٔ (۴) به نوسان در می‌آید:

$$\omega_۲=\omega_۴\Rightarrow\sqrt{\frac{k}{m_۲}}=\sqrt{\frac{k_۲}{m_۴}}\Rightarrow\frac{k}{\frac{m}{۲}}=\frac{k_۲}{۴m}\Rightarrow k_۲=۸k$$

۲ با تعویض جرم سامانهٔ (۳) $(m_۳=\frac{m}{۲})$ با جرم سامانهٔ (۱)، $(m_۱=m)$ بسامد زاویه‌ای سامانه‌ها به ترتیب خواهد شد:

$$\omega_۱'=\sqrt{\frac{k}{\frac{m}{۲}}}=\sqrt{۲}\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{۲}\omega_۱\ ,\ \omega_۲=\sqrt{\frac{k}{\frac{m}{۲}}}=\sqrt{۲}\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{۲}\omega_۱$$

$$\omega_۲'=\sqrt{\frac{k_۱}{m}}=\sqrt{\frac{\frac{۱}{۲}k}{m}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\omega_۱,\omega_۴=\sqrt{\frac{k_۲}{۴m}}=\sqrt{\frac{۸k}{۴m}}=\sqrt{۲}\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{۲}\omega_۱$$

دقت کنید بسامد زاویه‌ای $\omega_۲$ و $\omega_۱'=\omega_۲$ است. بنابراین در این حالت با نوسان $\omega_۴=\omega_۱'$ سامانه (۱) برای سامانه‌های (۲) و (۴) تشدید رخ می‌دهد.

۴ ۱۵۳۱ B

یادآوری تشدید هنگامی رخ می‌دهد که دو نوسانگر هم‌بسامد باشند.

۱ آونگ نوسانات سامانهٔ جرم فنر را تشدید کرده است بنابراین بسامد آن‌ها با هم برابر است. $f_ف=f_آ$

۲ با بردن آونگ به سیارهٔ دیگر دوره و بسامد آونگ تغییر می‌کند بنابراین

$$\frac{\text{دوره در سطح سیاره}\leftarrow T_P}{\text{دوره در سطح زمین}\leftarrow T_e}=\frac{۲\pi\sqrt{\frac{\ell_p}{g_p}}}{۲\pi\sqrt{\frac{\ell_e}{g_e}}}\Rightarrow\frac{T_P}{T_e}=\sqrt{\frac{g_e}{g_p}}\times\sqrt{\frac{\ell_p}{\ell_e}}$$

$$\xrightarrow[\ell_p=\frac{۱}{۴}\ell_e]{g_p=\frac{۱}{۲}g_e}\frac{T_p}{T_e}=\sqrt{۲}\times\sqrt{\frac{۱}{۴}}\Rightarrow\frac{T_p}{T_e}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow T_P=\frac{\sqrt{۲}}{۲}T_e$$

۳ بنابراین باید دورهٔ سامانهٔ جرم فنر نیز $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ حالت اول شود تا مجدداً تشدید رخ دهد.

$$\text{فنر:}\ \frac{T'}{T}=\frac{۲\pi\sqrt{\frac{m}{k'}}}{۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}\Rightarrow\frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{k}{k'}}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{\frac{k}{k'}}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{k}{k'}\Rightarrow k'=۲k$$

پنجره ۳

A ۱۵۳۲ ۳

یادآوری امواج دو دسته هستند: امواج مکانیکی - امواج الکترومغناطیسی

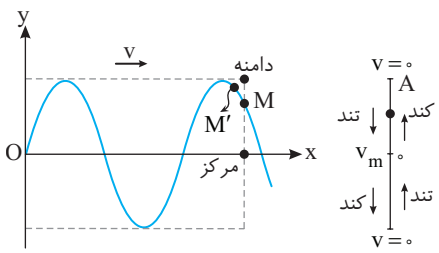
امواج رادیویی و نور مرئی از نوع امواج الکترومغناطیسی هستند و برای انتشار به محیط مادی نیاز ندارد و گزارهٔ (الف) نادرست است.

امواج صوتی از نوع امواج مکانیکی‌اند که برای انتشار به محیط مادی نیاز دارند و گزارهٔ (ب) نیز نادرست است.

منشأ امواج مکانیکی و امواج الکترومغناطیسی متفاوت است اما همگی آن‌ها مشخصه‌های یکسانی دارند و رفتار آن‌ها از قاعده‌های کلی پیروی می‌کند که در هر پدیدهٔ موجی برقرار است بنابراین گزاره‌های (پ) و (ت) درست هستند.

B ۱۵۳۳ ۴

نکته در انتشار موج سینوسی در یک محیط، تمام ذره‌های محیط دارای حرکت هماهنگ ساده‌اند و هر ذره حرکت ذرهٔ قبل از خود را در راستای پیشروی موج تکرار می‌کند.

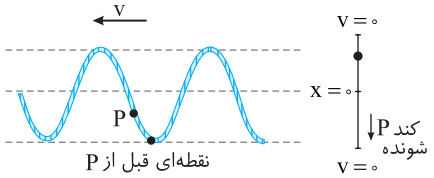


به ذرهٔ قبل از M (یعنی M') روی شکل نگاه کنید، بالاتر از نقطهٔ M است، بنابراین نقطهٔ M رو به بالا در حرکت است و از مرکز نوسانش به سوی دامنه در حرکت است. هرگاه یک نوسانگر ساده از مرکز به سوی دامنه برود حرکتش کندشونده است، پس نقطهٔ M دارای حرکت کندشونده و رو به بالا است.

B ۱۵۳۴ ۴

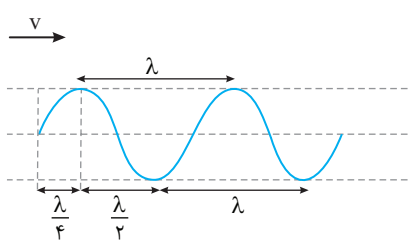
خط فکری باید در انتشار موج به جهت پیشروی موج دقت کنید تا بتوانید نقطهٔ قبل از P را تشخیص دهید.

پیشروی موج از راست به چپ است. در انتشار موج، هر ذره حرکت ذرهٔ قبل از خود در راستای پیشروی موج را تکرار می‌کند. با توجه به شکل، ذرهٔ قبل از P پایین‌تر از P است بنابراین P رو به پایین حرکت می‌کند. از طرفی هر ذره از محیط دارای حرکت هماهنگ ساده است و P در حال حرکت به سوی انتهای مسیرش است، بنابراین دارای حرکت کندشونده است.



B ۱۵۳۵ ۱

نکته در انتشار موج در یک محیط، هر ذره حرکت ذرهٔ قبل از خود را تکرار می‌کند و ذره دارای حرکت هماهنگ ساده است. هرگاه ذره به سوی انتهای مسیرش در حرکت باشد حرکت آن کندشونده و هرگاه به سوی مرکز نوسانش در حرکت باشد حرکت آن تندشونده است.



به جهت پیشروی موج دقت کنید، جهت پیشروی در جهت مثبت محور x است.

با توجه به شکل نقطهٔ P' قبل از نقطهٔ P پایین‌تر از P است از این‌رو ذرهٔ P در حال حرکت رو به پایین به سمت مرکز نوسانش بوده و حرکتش تندشونده است.

نقطهٔ Q' نقطهٔ قبل از Q بوده و بالاتر از Q است از این‌رو ذرهٔ Q در حال حرکت رو به بالا به سمت انتهای مسیرش بوده و حرکتش کندشونده است.

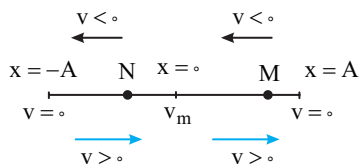
برای نقاط M و N با همین استدلال می‌توان گفت:

ذرهٔ M در حال حرکت رو به بالا به سمت مرکز نوسانش بوده و حرکتش تندشونده است. بنابراین نقطهٔ M پاسخ تست است.

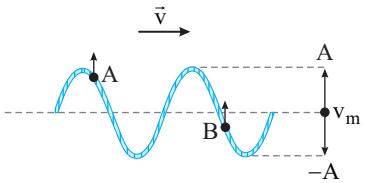
ذرهٔ N در حال حرکت رو به پایین به سمت انتهای مسیرش بوده و حرکتش کندشونده است.

B ۱۵۳۶ ۲

یادآوری ذرات محیط دارای حرکت هماهنگ ساده هستند و هرچه نوسانگر به مبدأ (حالت تعادل) نزدیک‌تر باشد، تندی نوسان آن بزرگتر است و هرچه به نقطهٔ بازگشت نزدیک‌تر باشد تندی کمتر است به‌طور مثال: $(s_M < s_N)$



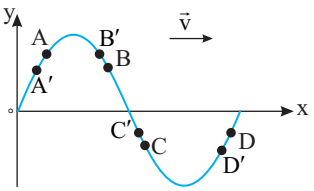
اگر ذره در حال حرکت رو به بالا باشد سرعت مثبت و اگر در حال حرکت رو به پایین باشد سرعت منفی است.



با توجه به جهت پیشروی موج، ذرهٔ A و ذرهٔ B هر دو در حال حرکت رو به بالا هستند و سرعت هر دو مثبت است. ذرهٔ B به مرکز نوسان نزدیک بوده و تندی آن بیشتر است. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

B ۱۵۳۷ ۲

نکته هرگاه نقش موج رسم شده باشد، برای اظهار نظر کردن در مورد حرکت هر ذره از محیط، ابتدا به جهت پیشروی موج $(\vec{v})$ نگاه می‌کنیم، سپس حرکت نقطهٔ قبلی را بررسی می‌کنیم. اگر نقطهٔ قبلی پایین‌تر باشد، ذره در حال حرکت به سمت پایین و اگر نقطهٔ قبلی بالاتر باشد ذره در حال حرکت به سمت بالاست.



اگر ذره به سمت محور x حرکت کند حرکت آن تندشونده و اگر در حال دور شدن از محور x باشد حرکت آن کندشونده است و در نقاط بیشینه و کمینه تندی ذره صفر می‌شود.

نقطهٔ A : نقطهٔ قبل $(A')A$

پایین‌تر از A است، بنابراین A در حال حرکت رو به پایین بوده و حرکت آن تندشونده است.

نقطهٔ B : نقطهٔ قبل $(B')B$ بالاتر از B است، بنابراین B در حال حرکت رو به بالا بوده و حرکت آن کندشونده بوده و سرعت آن در حال صفر شدن است.

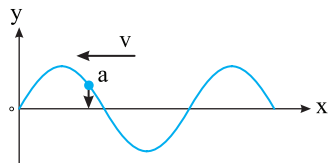
نقطهٔ C : نقطهٔ قبل $(C')C$ بالاتر از C بوده و C در حال حرکت رو به بالا و نزدیک شدن به محور x بوده و تندی آن در حال افزایش است.

نقطهٔ D : نقطهٔ قبل $(D')D$ پایین‌تر از D بوده و D در حال حرکت رو به پایین و دور شدن از محور افقی x بوده و حرکت آن کندشونده و سرعت آن در حال صفر شدن است، اما فاصلهٔ آن از نقطهٔ بیشینه بیشتر از فاصلهٔ نقطهٔ B از نقطهٔ بیشینه است. بنابراین تندی نقطهٔ B زودتر از بقیه صفر می‌شود.

B ۱۵۳۸ ۱

ذرات یک موج سینوسی، دارای حرکت هماهنگ ساده هستند و می‌دانیم در حرکت نوسانی مکان و شتاب خلاف جهت هم‌اند. ذرهٔ b در مکان‌های منفی قرار دارد پس شتاب آن مثبت بوده و در جهت محور y است.

انرژی جنبشی یعنی $K=\frac{1}{2}mv^2$ برای نقطهٔ a در حال افزایش است پس باید تندی a در حال افزایش باشد و در واقع حرکت آن تندشونده باشد، بنابراین a در حال حرکت به سمت پایین یعنی حرکت به سمت مرکز تعادل خود است و ذرهٔ قبلی a باید پایین‌تر از آن باشد، پس ذرهٔ قبلی a سمت راست این نقطه قرار دارد و نتیجه می‌گیریم جهت انتشار موج به سمت چپ است و جهت انتشار موج خلاف جهت محور x است.



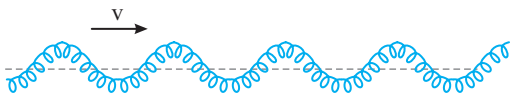
A ۱۵۳۹ ۲

یادآوری امواج مکانیکی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱ **امواج مکانیکی عرضی:** در این امواج راستای نوسان ذره‌های محیط بر راستای پیشروی موج عمود است، مانند امواج منتشر شده در یک طناب و یا یک فنر.

امواج عرضی دارای برآمدگی و فرورفتگی هستند.

امواج مکانیکی عرضی تنها در جامدات منتشر می‌شوند.



۲ **امواج مکانیکی طولی:** در این امواج راستای نوسان ذره‌های محیط بر راستای پیشروی موج منطبق است.

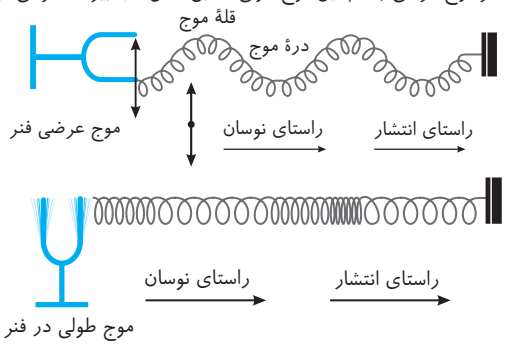
در امواج مکانیکی طولی، نوسان‌ها به صورت تپ‌های تراکمی و انبساطی در محیط منتشر می‌شوند.

امواج مکانیکی طولی در هر سه محیط جامد، مایع و گاز پیشروی می‌کنند.

با توجه به تعاریف بیان شده گزینهٔ (۲) درست است.

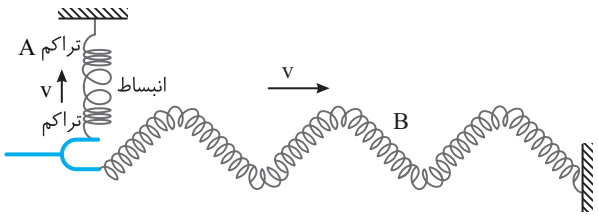
A ۱۵۴۰ ۳

در یک فنر موج عرضی و همچنین موج طولی مطابق شکل‌های زیر منتشر می‌شود.



A ۱۵۴۱ ۳

خط فکری باید بدانید که تیغه‌های دیاپازون در شکل هنگام نوسان بالا و پایین می‌روند (↕) و در امتداد قائم نوسان می‌کنند و موج در امتداد فنر پیشروی می‌کند. از این رو با توجه به شکل سؤال، نوسان ایجاد شده در فنر A در راستای محور قائم بوده یعنی حلقه‌های فنر A بالا و پایین می‌روند و راستای نوسان حلقهٔ A با راستای پیشروی موج یکی است، بنابراین موج منتشر شده در A طولی است. اما با بالا و پایین رفتن شاخه‌های دیاپازون، نوسان ذره‌های فنر B در راستای قائم و پیشروی موج در راستای افقی است بنابراین در فنر B موج عرضی است.



A ۱۵۴۲ ۳

موج با تندی ثابت در یک محیط منتشر می‌شود. تجربه و محاسبات نظری نشان می‌دهد که تندی انتشار موج به جنس و ویژگی‌های محیط انتشار بستگی دارد و در یک محیط با ویژگی‌های ثابت تندی انتشار موج ثابت بوده و انتشار موج حرکت یکنواخت با تندی ثابت است.

A ۱۵۴۳ ۲

تندی انتشار موج به ویژگی‌های فیزیکی محیط انتشار موج بستگی دارد و در یک محیط همگن که شرایط فیزیکی در تمام جهت‌های آن یکسان است، تندی انتشار موج مقدار ثابتی است.

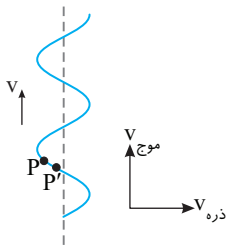
تندی انتشار موج به ویژگی‌های چشمهٔ موج مانند بسامد، دوره، شدت، انرژی و ... بستگی ندارد. بنابراین با دو برابر شدن بسامد چشمه، تندی انتشار موج تغییر نمی‌کند.

A ۱۵۴۴ ۲

تندی انتشار موج در یک محیط مقدار ثابتی است و با گذشت زمان تغییر نمی‌کند، بنابراین نمودار آن برحسب زمان یک خط راست افقی است.

B ۱۵۴۵ ۳

خط فکری به شکل دقت کردید، موج در حال حرکت رو به بالا در امتداد محور y هاست و راستای نوسان ذرات محیط در امتداد محور افقی و در جهت مثبت محور x هاست، یعنی شما باید ذره‌ای را شناسایی کنید که در لحظهٔ نشان داده شده به سمت راست در حرکت باشد.



در گزینهٔ (۱) و (۲) موج در حال پیشروی در امتداد محور افقی است که با توجه به فرض مسئله نادرست است.

در گزینه‌های (۳) و (۴) جهت پیشروی موج درست است بنابراین شما باید بررسی کنید که در کدام شکل نقطهٔ P در حال حرکت به سمت راست است.

با توجه به اینکه نقطهٔ P′ قبل از نقطهٔ P قرار دارد و در سمت راست P است، پس P به سمت راست می‌رود و گزینهٔ (۳) درست اما گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۱۵۴۶ ۱

تندی انتشار موج در یک طناب برابر $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ است که در آن F نیروی کشش و μ چگالی خطی جرم $(\mu=\frac{m}{\ell})$ می‌باشد، بنابراین تندی انتشار موج در طناب با جذر چگالی خطی جرم طناب نسبت وارون دارد.

A ۱۵۴۷ ۱

تندی انتشار موج در تار برابر $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ است، که در آن F نیروی کشش و μ چگالی خطی جرم $(\mu=\frac{m}{\ell})$ است.

چگالی خطی جرم را به دست می‌آوریم.

$$\mu=\frac{m}{\ell}\Rightarrow\mu=\frac{۰/۱۶}{۰/۸}=۰/۲\,kg/m$$

تندی انتشار موج خواهد شد:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\xrightarrow{F=۲۰N}v=\sqrt{\frac{۲۰}{۰/۲}}=۱۰\,m/s$$

A ۱۵۴۸ ۴

۱ ابتدا سرعت انتشار موج در ریسمان را به‌دست می‌آوریم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}} \xrightarrow{\mu=\frac{m}{\ell}} v=\sqrt{\frac{F\ell}{m}} \Rightarrow v=\sqrt{\frac{۳۲۰\times ۱}{۸\times ۱۰^{-۳}}}=\sqrt{۴\times ۱۰^{۴}}=۲۰۰\,m/s$$

۲ سرعت انتشار موج ثابت است و زمان پیشروی موج در طول تار برابر است با:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow ۲۰۰=\frac{۱}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t=\frac{۱}{۲۰۰}=\frac{۵}{۱۰۰۰}=۰/۰۰۵s \Rightarrow \Delta t=۰/۰۰۵s$$

A ۱۵۴۹ ۴

فاصله افقی A تا B برابر ۲۰m بوده و تپ این فاصله را در مدت ۴s طی کرده است، بنابراین تندی پیشروی موج خواهد شد.

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v=\frac{۲۰}{۴}=۵\,m/s$$

اکنون به کمک رابطهٔ تندی طناب، چگالی خطی جرم را حساب می‌کنیم.

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}} \xrightarrow{F=۲۵N} ۵=\sqrt{\frac{۲۵}{\mu}} \Rightarrow ۲۵=\frac{۲۵}{\mu} \Rightarrow \mu=۱\,kg/m$$

$$\Rightarrow \mu=\frac{۱\,kg}{m}\times\frac{۱۰^{۳}g}{۱\,kg}\times\frac{۱\,m}{۱۰^{۲}cm} \Rightarrow \mu=۱۰\,g/cm$$

بنابراین هر سانتی‌متر آن ۱۰g جرم دارد.

A ۱۵۵۰ ۱

تندی انتشار موج عرضی در فنر از رابطه روبه‌رو به‌دست می‌آید: $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$

چگالی خطی $۴\times ۱۰^{-۵}kg/cm$ بوده بنابراین:

$$\mu=۴\times ۱۰^{-۵}kg/cm \Rightarrow \mu=۴\times ۱۰^{-۵}\times ۱۰۰\frac{kg}{m} \Rightarrow \mu=۴\times ۱۰^{-۳}\frac{kg}{m}$$

تندی را حساب می‌کنیم: $v=\sqrt{\frac{۲۵۰}{۴\times ۱۰^{-۳}}} \Rightarrow v=\sqrt{\frac{۲۵۰۰۰۰}{۴}} \Rightarrow v=\frac{۵۰۰}{۲}=۲۵۰\,m/s$

B ۱۵۵۱ ۱

یادآوری تندی انتشار موج در تار برابر است با:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{F\ell}{m}}=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}=\frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}$$

با توجه به اینکه چگالی و سطح مقطع داده شده از رابطهٔ $v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ برای حل استفاده می‌کنیم، دقت کنید در این رابطه باید یکای چگالی و مساحت سطح مقطع در SI باشند.

$$\rho=۸\frac{g}{cm^{۳}}=۸۰۰۰\frac{kg}{m^{۳}} \quad , \quad A=۲mm^{۲}=۲\times ۱۰^{-۶}m^{۲}$$

$$v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}} \Rightarrow ۲۵=\sqrt{\frac{F}{۸۰۰۰\times ۲\times ۱۰^{-۶}}} \xrightarrow[\text{به توان دو}]{\text{طرفین}} ۶۲۵=\frac{F}{۱۶\times ۱۰^{-۳}} \Rightarrow F=۱۰N$$

بازی با سوال مساحت مقطع یک سیم $۱۰^{-۶}$ مترمربع و چگالی آن $۶/۴g/cm^{۳}$ است. اگر این سیم با نیروی ۴ نیوتون کشیده شود، تندی انتشار امواج عرضی در آن چند متر بر ثانیه است؟ ریاضی- ۸۸

۱) ۲۵ ۲) ۵×۱۰^{۳} ۳) ۲۵۰ ۴) ۵۰

پاسخ رابطه تندی انتشار موج در یک سیم به صورت $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ است.

اکنون می‌خواهیم یک رابطه برای تندی انتشار موج برحسب چگالی و مساحت سطح مقطع پیدا کنیم و آن را به خاطر بسپاریم.

چگالی خطی جرم: $\mu=\frac{m}{\ell} \xrightarrow{m=\rho V} \mu=\frac{\rho V}{\ell}$

$$\xrightarrow{V=A\ell} \mu=\frac{\rho A\ell}{\ell} \Rightarrow \mu=\rho A$$

اکنون به جای μ ، حاصلضرب ρA را قرار می‌دهیم. $v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$

داده‌های مسئله را در رابطه جای‌گذاری می‌کنیم ($F=۴N$ ، $\rho=۶۴۰۰\frac{kg}{m^{۳}}$ و مساحت مقطع سیم $۱۰^{-۶}m^{۲}$)

بنابراین تندی انتشار موج در سیم برابر خواهد شد با:

$$v=\sqrt{\frac{۴}{۶/۴\times ۱۰^{۳}\times ۱۰^{-۶}}} \Rightarrow v=۲۵\,m/s$$

گزینهٔ ۱

B ۱۵۵۲ ۲

ابتدا تندی انتشار موج در سیم را به‌دست می‌آوریم: $v=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v=\frac{۰/۸}{۰/۰۲} \Rightarrow v=۴۰\,m/s$

تندی انتشار موج در یک سیم برابر $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ است.

$$\mu=\frac{m}{\ell}=\frac{\rho V}{\ell}=\frac{\rho A\ell}{\ell}=\rho A \Rightarrow v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

از طرفی سطح مقطع سیم برابر $A=\pi\frac{D^{۲}}{۴}$ است که در آن D قطر سیم می‌باشد و به جای A در تندی انتشار موج $\pi\frac{D^{۲}}{۴}$ را قرار داده و رابطه زیر را به دست می‌آوریم و آن را به خاطر می‌سپاریم.

$$v=\frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$$

داده‌های مسئله را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۴۰=\frac{۲}{۱۰^{-۳}}\sqrt{\frac{F}{۳\times ۸\times ۱۰^{۳}}} \Rightarrow F=۹/۶\,N$$

B ۱۵۵۳ ۱

یادآوری برای تندی انتشار موج عرضی در تار سه رابطه داریم که با توجه به داده‌های مسئله باید یکی را انتخاب کنیم. $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}, v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}, v=\frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$

در این مسئله از سطح مقطع نام برده شده و گفته شده تندی انتشار موج در دو تار برابر است بنابراین خواهیم داشت:

$$v_۱=v_۲ \Rightarrow \sqrt{\frac{F_۱}{\rho_۱ A_۱}}=\sqrt{\frac{F_۲}{\rho_۲ A_۲}} \xrightarrow{A_۱=A_۲} \frac{۲۰}{\rho_۱}=\frac{۱۵}{\rho_۲} \Rightarrow \frac{\rho_۱}{\rho_۲}=\frac{۲۰}{۱۵}=\frac{۴}{۳}$$

A ۱۵۵۴ ۳

خط فکری کافی است ابتدا چگالی خطی جرم دو تار را با هم مقایسه کنید سپس نسبت تندی انتشار موج را به دست بیاورید.

۱ نسبت $\frac{\mu'}{\mu}$ را به دست می‌آوریم:

$$\mu=\frac{m}{\ell},\ \mu'=\frac{m'}{\ell'} \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu}=\frac{\frac{m'}{\ell'}}{\frac{m}{\ell}} \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu}=\frac{m'}{m}\times\frac{\ell}{\ell'}$$

$$\xrightarrow[\ell'=\frac{۵}{۴}\ell]{m'=۰/۸m} \frac{\mu'}{\mu}=۰/۸\times\frac{۱}{\frac{۵}{۴}} \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu}=۰/۶۴$$

۲ نسبت تندی‌ها خواهد شد:

$$\begin{cases} v'=\sqrt{\frac{F'}{\mu'}} \\ v=\sqrt{\frac{F}{\mu}} \end{cases} \Rightarrow \frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{F'}{F}}\times\sqrt{\frac{\mu}{\mu'}} \xrightarrow{F'=F} \frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{\mu}{\mu'}}=\sqrt{\frac{\mu}{۰/۶۴\mu}}=\frac{۱}{۰/۸}=\frac{۵}{۴}$$

B ۱۵۵۵ ۱

در صورت مسئله چگالی و در شکل‌ها نیروی کشش و قطر سطح مقطع داده شده است، بنابراین از رابطه $v=\frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{v_B}{v_A}=\frac{\frac{۲}{D_B}\sqrt{\frac{F_B}{\pi\rho_B}}}{\frac{۲}{D_A}\sqrt{\frac{F_A}{\pi\rho_A}}} \Rightarrow \frac{v_B}{v_A}=\sqrt{\frac{F_B}{F_A}}\times\sqrt{\frac{\rho_A}{\rho_B}}\times\frac{D_A}{D_B}$$

$$\Rightarrow \frac{v_B}{v_A}=\sqrt{\frac{F}{۴F}}\times\sqrt{\frac{۴\rho_B}{\rho_B}}\times\frac{\frac{۳}{۲}D}{D} \Rightarrow \frac{v_B}{v_A}=\frac{۳}{۲}$$

نکته تندی انتشار موج عرضی در ریسمان به طول ریسمان بستگی ندارد.

B ۱۵۵۶ ۲

رابطهٔ تندی انتشار موج در تار را در دو حالت می‌نویسیم و بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases} v=\sqrt{\frac{F}{\mu}} \\ v'=\sqrt{\frac{F'}{\mu}} \end{cases} \Rightarrow \frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{F'}{F}} \xrightarrow[v_2=200\,m/s,\,F=128\,N]{v_1=160\,m/s} \frac{200}{160}=\sqrt{\frac{F'}{128}}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}=\sqrt{\frac{F'}{128}} \Rightarrow \frac{25}{16}=\frac{F'}{128} \Rightarrow F'=200\,N$$

بنابراین مقدار افزایش نیروی کشش خواهد شد: $\Delta F=F'-F=200-128=72\,N$

A ۱۵۵۷ ۳

در صورت مسئله مساحت سطح مقطع تار داده شده بنابراین از سه رابطهٔ تندی انتشار موج عرضی در تار، از رابطه $v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ استفاده می‌کنیم.

مساحت سطح مقطع تار ۶۴ درصد کاهش یافته است بنابراین مساحت سطح مقطع در حالت جدید خواهد شد: $A_2=A_1-0/64A_1 \Rightarrow A_2=0/36A_1$

$$\begin{cases} v_1=\sqrt{\frac{F_1}{\rho_1 A_1}} \\ v_2=\sqrt{\frac{F_2}{\rho_2 A_2}} \end{cases} \Rightarrow v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1}=\sqrt{\frac{F_2}{F_1}\times\frac{A_1}{A_2}}$$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_1}=\sqrt{\frac{4F_1}{F_1}\times\frac{A_1}{0/36A_1}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1}=\frac{2}{0/6} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1}=\frac{10}{3}$$

B ۱۵۵۸ ۳

۱ نیروی کشش تار را ۶۹ درصد افزایش داده‌ایم بنابراین می‌توان نوشت:

$$F_2=F_1+0/69F_1 \Rightarrow F_2=1/69F_1$$

۲ تندی انتشار موج عرضی در تار در اثر افزایش نیروی کشش $(\uparrow v=\sqrt{\uparrow F/\mu})$ افزایش می‌یابد و بنا بر فرض مسئله تندی $30\,m/s$ زیاد می‌شود.

$$v_2=v_1+30 \qquad (I)$$

۳ نسبت تندی انتشار موج را در دو حالت به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} v_2=\sqrt{\frac{F_2}{\mu_2}} \\ v_1=\sqrt{\frac{F_1}{\mu_1}} \end{cases} \xrightarrow{\mu_2=\mu_1} \frac{v_2}{v_1}=\sqrt{\frac{F_2}{F_1}}=\sqrt{\frac{1/69F_1}{F_1}}$$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_1}=1/3 \Rightarrow v_2=1/3v_1 \qquad (II)$$

۴ از رابطه (I) و (II) نتیجه می‌شود که:

$$1/3v_1=v_1+30 \Rightarrow 0/3v_1=30 \Rightarrow v_1=100\,m/s$$

B ۱۵۵۹ ۳

در این مسئله قطر مطرح شده بنابراین از سه رابطه تندی انتشار موج باید به سراغ $v=\frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$ برویم.

$$\begin{cases} v_2=\frac{2}{D_2}\sqrt{\frac{F_2}{\pi\rho_2}} \\ v_1=\frac{2}{D_1}\sqrt{\frac{F_1}{\pi\rho_1}} \end{cases} \xrightarrow{F_2=F_1,\,\rho_2=\rho_1} \frac{v_1}{v_2}=\frac{D_2}{D_1} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2}=\frac{D_2}{1/25D_2}$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{v_2}=0/8 \Rightarrow v_1=0/8v_2$$

درصد اختلاف تندی انتشار صوت در دو ریسمان خواهد شد:

$$\frac{v_1-v_2}{v_2}\times100=\frac{0/8v_2-v_2}{v_2}\times100=-20\%$$

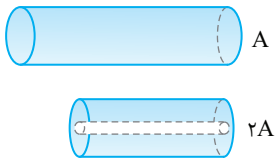
بنابراین تندی انتشار موج عرضی در ریسمان اول، ۲۰ درصد از تندی انتشار موج در ریسمان دوم کمتر است.

A ۱۵۶۰ ۱

وقتی از این تار، طولی برابر $\frac{\ell}{3}$ انتخاب شود، جرم آن نیز $\frac{m}{3}$ می‌شود و چگالی خطی جرم $\mu=m/\ell$ تغییر نمی‌کند. با توجه به فرض پرسش، نیروی کشش نیز یکسان است. بنابراین v تغییر نمی‌کند $\left(v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right)$ و نسبت $\frac{v_1}{v_2}$ برابر یک خواهد شد.

A ۱۵۶۱ ۳

خط فکری وقتی سیم را دولا می‌کنیم، مساحت سطح مقطع سیم دو برابر می‌شود و برای مقایسه تندی انتشار موج باید به سراغ رابطه $v=\sqrt{F/\rho A}$ بروید.



جنس ریسمان تغییر نکرده بنابراین چگالی نیز تغییر نکرده است $(\rho'=\rho)$. نیروی کشش بنا به فرض مسئله ثابت است $(F'=F)$ بنابراین تندی انتشار موج خواهد شد.

$$\begin{cases} v'=\sqrt{\frac{F'}{\rho' A'}} \\ v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}} \end{cases} \Rightarrow \frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{F'}{F}}\times\sqrt{\frac{\rho}{\rho'}}\times\sqrt{\frac{A}{A'}} \Rightarrow \frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{A}{A'}}=\sqrt{\frac{A}{2A}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

B ۱۵۶۲ ۴

نکته اگر سیمی را از وسط دو لا کنیم سطح مقطع آن دو برابر می‌شود و اگر مجدداً سیم را دو لا کنیم سطح مقطع آن $2^2=4$ برابر می‌شود و اگر n بار این عمل را تکرار کنیم و سیم را n بار از وسط تا کنیم، سطح مقطع آن 2^n برابر سطح اولیه می‌شود. $(A'=2^nA)$

یادآوری تندی انتشار موج از سه رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad , \quad v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}} \quad , \quad v=\frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$$

از رابطهٔ $v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{v'}{v}=\frac{\sqrt{\frac{F'}{\rho' A'}}}{\sqrt{\frac{F}{\rho A}}} \xrightarrow{F=F',\,\rho=\rho'} \frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{A}{A'}} \Rightarrow \frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{A}{2^nA}} \Rightarrow \frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{\sqrt{2^n}}$$

B ۱۵۶۳ ۳

نکته با عبور سیم از دستگاه، جرم سیم تغییر نکرده و با توجه به ثابت ماندن چگالی، حجم سیم ثابت می‌ماند بنابراین با افزایش طول سطح مقطع کاهش می‌یابد:

۱ طول جدید برابر است با: $\ell'=\ell+0/44\ell \Rightarrow \ell'=1/44\ell$

۲ نسبت سطح مقطع در دو حالت خواهد شد:

$$\begin{cases} \rho=\rho' \\ m=m' \end{cases} \Rightarrow V=V' \Rightarrow A\ell=A'\ell' \xrightarrow{\ell'=1/44\ell} A\ell=A'\times(1/44\ell)$$

$$\Rightarrow \frac{A}{A'}=1/44$$

۳ تندی انتشار را حساب می‌کنیم.

$$\frac{v'}{v}=\frac{\sqrt{\frac{F}{\rho A'}}}{\sqrt{\frac{F}{\rho A}}} \Rightarrow \frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{A}{A'}}=\sqrt{1/44} \Rightarrow \frac{v'}{v}=1/2 \Rightarrow v'=1/2v$$

۴ درصد تغییر تندی انتشار خواهد شد: $\frac{v_2-v_1}{v_1}\times100 \Rightarrow \frac{1/2v-v}{v}\times100=20\%$.

بنابراین تندی ۲۰ درصد افزایش می‌یابد.

B ۱۵۶۴ ۲

مرحله به مرحله باید تغییرات تار را بررسی کنید.

۱ $\frac{۲}{۳}$ تار را بریده و کنار گذاشته‌ایم بنابراین طول تار جدید $\frac{۱}{۳}$ طول اولیه است.

$$\ell_۲=\frac{۱}{۳}\ell_۱$$

۲ این تار جدید را از دستگاه گذرانده‌ایم تا مجدداً طول آن برابر طول اولیه شود $(\ell'_۲=\ell_۱)$ بنابراین طول تار ۳ برابر شده و مساحت سطح مقطع آن کاهش می‌یابد.

$$\text{حجم اولیه=حجم ثانویه}\Rightarrow v'_۲=v_۲\Rightarrow A'\ell'_۲=A\ell_۲\Rightarrow A'\times\ell_۱=A\times\frac{\ell_۱}{۳}\Rightarrow A'=\frac{۱}{۳}A$$

۳ جنس تار تغییر نکرده بنابراین چگالی آن ثابت می‌ماند. برای بررسی تندی انتشار موج از سه رابطهٔ تندی، رابطهٔ $v=\sqrt{F/\rho A}$ را استفاده می‌کنیم. قرار است تندی انتشار موج تغییر نکند، از این رو:

$$v'=v\Rightarrow\sqrt{\frac{F'}{\rho' A'}}=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}\xrightarrow{\rho'=\rho}\frac{F'}{\frac{۱}{۳}A}=\frac{F}{A}\Rightarrow F'=\frac{۱}{۳}F$$

B ۱۵۶۵ ۲

۱ نیروهای وارد بر ریسمان را در هر شکل به‌دست می‌آوریم:

الف) جسم در حال تعادل

$$F_{net}=۰\Rightarrow F_{\text{الف}}=mg\xrightarrow{m=۴kg}$$

$$F_{\text{الف}}=۴۰N$$

ب) جسم در حال تعادل

$$F_{net}=۰\Rightarrow F_{\text{ب}}+F_b=mg\xrightarrow{m=۴kg}$$

$$F_{\text{ب}}=۴۰-F_b$$

(الف) (ب)

۲ تندی انتشار تار برابر $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ است و چون دو تار مشابه است پس چگالی خطی آن‌ها $(\mu=m/L)$ یکسان است.

$$\frac{v_{\text{الف}}}{v_{\text{ب}}}=\frac{\sqrt{\frac{F_{\text{الف}}}{\mu}}}{\sqrt{\frac{F_{\text{ب}}}{\mu}}}\xrightarrow{\frac{v_{\text{الف}}}{v_{\text{ب}}}=۲}۲=\sqrt{\frac{F_{\text{الف}}}{F_{\text{ب}}}}\Rightarrow\frac{F_{\text{الف}}}{F_{\text{ب}}}=۴\xrightarrow[F_{\text{ب}}=۴۰-F_b]{F_{\text{الف}}=۴۰N}$$

$$\frac{۴۰}{۴۰-F_b}=۴\Rightarrow ۴۰=۱۶۰-۴F_b\Rightarrow ۴F_b=۱۲۰\Rightarrow F_b=۳۰N$$

B ۱۵۶۶ ۲

خط فکری با توجه به رابطهٔ تندی تار $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$، این تندی زمانی بیشینه است که نیروی کشش تار بیشینه باشد. چون در سؤال گفته شده جعبه‌ها ساکن هستند پس باید نیروهای وارد بر جعبه‌ها متوازن باشد یعنی نیروی کشش تار وارد بر جعبه‌ها و نیروی اصطکاک ایستایی با هم برابر باشد و چون نیروی کشش تار بیشینه بوده پس باید نیروی اصطکاک ایستایی نیز بیشینه باشد.

۱ با توجه به خط فکری ابتدا نیروی کشش تار را با توجه به نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه حساب می‌کنیم:

$$۱)F_N=mg\Rightarrow F_N=۴۰N$$

$$۲)f_{s_{max}}=\mu_s F_N\Rightarrow f_{s_{max}}=۰/۵\times۴۰=۲۰N$$

$$۳)F=f_{s_{max}}\Rightarrow F=۲۰N$$

۲ حال تندی انتشار موج در تار را حساب می‌کنیم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{۲۰}{۰/۲}}\Rightarrow v=\sqrt{۱۰۰}\Rightarrow v=۱۰m/s$$

B ۱۵۶۷ ۴

خط فکری وقتی که یک طناب سنگین را آویزان می‌کنیم، کشش در نقاط مختلف آن یکسان نخواهد بود و هر چه از پایین طناب به سمت محل آویز برویم، کشش بیشتر می‌شود و در هر نقطه از طناب، کشش طناب برابر وزن قسمت زیرین آن نقطه است. بنابراین شما باید نیروی کشش در نقاط A و B را بر حسب وزن طناب پیدا کرده تا بتوانید تندی موج در نقاط A و B را با هم مقایسه کنید.

۱ نقطه B وزن $\frac{\ell}{۴}$ طناب پایین‌تر از خود را تحمل می‌کند، بنابراین: $F_B=\frac{۱}{۴}W_{\text{طناب}}$

۲ نقطه A وزن $\frac{\ell}{۹}$ طناب پایین‌تر از خود را تحمل می‌کند، بنابراین:

$$F_A=\frac{۱}{۹}W_{\text{طناب}}$$

۳ در طول طناب، چگالی خطی جرم ثابت است $(\mu_A=\mu_B)$ بنابراین نسبت تندی‌ها خواهد شد:

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{\sqrt{\frac{F_A}{\mu_A}}}{\sqrt{\frac{F_B}{\mu_B}}}\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\sqrt{\frac{F_A}{F_B}}\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\sqrt{\frac{\frac{mg}{۹}}{\frac{mg}{۴}}}=\frac{۲}{۳}$$

B ۱۵۶۸ ۲

۱ تندی انتشار موج در طناب مقدار ثابتی بوده و برابر است با:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{۵}{\frac{۲}{۱۰}}}\Rightarrow v=۵m/s$$

شکل الف

شکل ب

۲ جابه‌جایی آشفتگی اول پس از ۱s برابر است با: $\Delta x=v\Delta t\Rightarrow\Delta x=۵\times۱=۵m$

۳ وقتی تپ اول ۵m جلو آمده تپ دوم با همان تندی ۵m/s به راه می‌افتد. در این حالت فاصله دو تپ از هم ۵m است و چون سرعت آن‌ها یکی است، هر دو آشفتگی در وسط فاصلهٔ ۵m به هم می‌رسند. یعنی هر آشفتگی ۲/۵m پیشروی می‌کند. بنابراین آشفتگی (۱) جمعاً ۷/۵m=۵+۲/۵ و آشفتگی (۲) تنها ۲/۵m پیشروی کرده تا دو آشفتگی به هم برسند.

A ۱۵۶۹ ۴

یادآوری فاصلهٔ بین دو برآمدگی یا دو فرورفتگی مجاور، طول موج نامیده می‌شود. طول موج λ برابر مسافتی است که موج در مدت دورهٔ نوسان چشمه طی می‌کند.

$$\lambda=vT$$

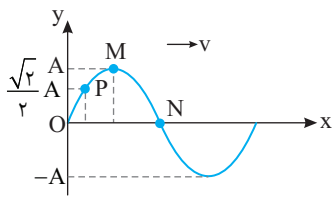
با توجه به یادآوری بالا، در مدت نیم‌دورهٔ نوسان هر ذره از محیط، موج مسافتی را به اندازهٔ نصف طول موج می‌پیماید.

B ۱۵۷۰ ۴

در انتشار موج در یک محیط، تمام ذرات محیط با یک دوره و یک بسامد به نوسان در می‌آیند. از این‌رو بسامد زاویه‌ای تمام ذرات $\omega=۲\pi f=\frac{۲\pi}{T}$ یکسان است و گزینهٔ (۴) پاسخ تست است.

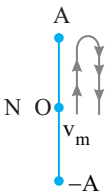
نکته در بررسی حرکت ذره‌های محیط انتشار موج هر ذره را به عنوان یک نوسانگر ساده فرض می‌کنیم.

برای بررسی گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) به شکل انتشار موج عرضی در طناب شکل زیر دقت کنید.



به‌طور مثل در بازه زمانی $\frac{T}{2}$، ذرهٔ M از دامنه $+A$ به دامنهٔ $-A$ می‌رسد و جابه‌جایی آن $-2A$ و مسافت طی شدهٔ آن $\ell=+2A$ و شتاب متوسط آن صفر می‌شود. زیرا از یک نقطهٔ بازگشت که در آن سرعت صفر است به نقطهٔ بازگشت دیگری که سرعت آنجا نیز صفر است می‌رود، بنابراین Δv مساوی صفر شده و شتاب متوسط نیز صفر می‌شود.

اما نقطهٔ N در مدت $\frac{T}{2}$ از مرکز نوسان به نقطهٔ A رفته سپس به مرکز نوسان بر می‌گردد، یعنی جابه‌جایی آن صفر و مسافت طی شدهٔ آن $2A$ است و شتاب متوسط آن نیز برابر است با:



$$a_{av}=\frac{-v_m-v_m}{\frac{T}{2}}=\frac{-2v_m}{T}$$

بنابراین برای نقطه‌های N و M جابه‌جایی و شتاب متوسط یکسان نیست. برای مسافت‌های مختلف هم می‌توانید حرکت نقطهٔ P را با حرکت نقطهٔ M در مدت $\frac{T}{4}$ مقایسه کنید تا مشخص شود در بازهٔ زمانی معین، مسافت طی شده توسط ذرات محیط ممکن است یکسان نباشد.

A ۱۵۷۱ ۲

حالت اول: تندی انتشار موج در یک محیط (ریسمان) به بسامد چشمه بستگی ندارد. بنابراین در حالت اول وقتی بسامد (f) را افزایش می‌دهیم دوره $(\downarrow T=\frac{1}{f\uparrow})$ کاهش می‌یابد. با افزایش بسامد، بسامد زاویه‌ای $(\uparrow\omega=2\pi f\uparrow)$ و از آنجا بیشینهٔ تندی ذرات $(\uparrow v_m=A\omega\uparrow)$ افزایش می‌یابد. با ثابت بودن تندی انتشار موج و افزایش بسامد، طول موج $(\downarrow\lambda=\frac{v}{f\uparrow})$ کاهش می‌یابد بنابراین در حالت اول تنها تندی انتشار موج یعنی تنها یک کمیت بدون تغییر است.

حالت دوم: اگر نیروی کشش را افزایش دهیم $(\uparrow v=\sqrt{\uparrow F/\mu})$ تندی انتشار موج افزایش می‌یابد. با ثابت بودن بسامد نوسان‌ساز، طول موج افزایش می‌یابد $(\uparrow\lambda=\frac{v\uparrow}{f_{ثابت}})$ اما دوره $(T=\frac{1}{f})$ تغییر نمی‌کند. هم‌چنین بیشینه تندی نوسان ذرات $(v=A\omega)$ ثابت می‌ماند یعنی دو کمیت بدون تغییر است.

B ۱۵۷۲ ۳

با توجه به رابطهٔ $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$، با افزایش نیرو، تندی موج افزایش می‌یابد. $(v\propto\sqrt{F})$

بسامد از ویژگی‌های چشمه موج (نوسان‌ساز) است و ثابت می‌ماند، در نتیجه دوره نیز ثابت است. $(f=\frac{1}{T})$

و با افزایش تندی، طول موج نیز افزایش می‌یابد. $\lambda\uparrow=\uparrow vT$

A ۱۵۷۳ ۳

۱ طول موج مسافتی است که موج در مدت یک دوره طی می‌کند، بنابراین:

$$v=\frac{\lambda}{T}\xrightarrow{T=\frac{1}{f}}v=\lambda f\xrightarrow[f=100Hz]{\lambda=0/5m}v=0/5\times100=50m/s$$

۲ زمان طی ۱۰m با تندی $v=50m/s$ خواهد شد:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow10=50(\Delta t)\Rightarrow\Delta t=\frac{1}{5}s$$

A ۱۵۷۴ ۴

۱ فاصلهٔ یک برآمدگی از فرورفتگی مجاورش برابر نصف طول موج است بنابراین با توجه به فرض مسئله $\frac{\lambda}{2}=15cm$ و $\lambda=30cm$ است.

۲ دوره را حساب می‌کنیم:

$$\lambda=vT\xrightarrow{v=6m/s}0/3=6T\Rightarrow T=\frac{1}{20}s$$

۳ هر ذره از محیط انتشار موج دارای حرکت هماهنگ ساده است و مدت زمانی که طول می‌کشد تا تندی یک نوسانگر برای نخستین بار از صفر به بیشینه مقدار برسد برابر $\frac{T}{4}$ است. از این‌رو:

$$\Delta t=\frac{T}{4}\Rightarrow\Delta t=\frac{1}{80}s$$

B ۱۵۷۵ ۲

خط فکری هر ذره از محیط انتشار موج دارای حرکت هماهنگ ساده است و تمام ویژگی‌های حرکت هماهنگ ساده در مورد آن صدق می‌کند. به عنوان نمونه، هر ذره از محیط در مدت یک دوره مسافتی چهار برابر دامنه $(4A)$ می‌کند، بنابراین با توجه به مسافت طی شده می‌توانید تعداد نوسان‌ها را پیدا کرده سپس دوره را به دست بیاورید و مسئله را حل کنید.

۱ دامنه 2cm است و مسافت طی شده در هر دوره $4A=4\times2=8cm$ است.

۲ کل مسافت طی شده در 0/2s برابر 32cm بوده است بنابراین تعداد نوسان‌ها خواهد شد:

8cm	N=1
32cm	N=?

$\Rightarrow N=4$ نوسان

۳ دوره را به دست می‌آوریم:

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{0/2}{4}\Rightarrow T=0/05s$$

۴ با توجه به تعریف طول موج، تندی انتشار موج را حساب می‌کنیم:

$$v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow v=\frac{1/5}{0/05}=30m/s$$

۵ پیشروی موج در مدت 0/2s خواهد شد:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow\Delta x=30\times0/2\Rightarrow\Delta x=6m$$

A ۱۵۷۶ ۳

تندی انتشار موج را حساب می کنیم.

$$\mu=\frac{m}{\ell}\xrightarrow[\ell=0/5m]{m=0/2kg}\mu=\frac{0/2}{0/5}\Rightarrow\mu=0/4kg/m$$

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\xrightarrow{F=10N}v=\sqrt{\frac{10}{0/4}}\Rightarrow v=5m/s$$

طول موج را به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow{f=20Hz}\lambda=\frac{5}{20}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{4}m\Rightarrow\lambda=25cm$$

B ۱۵۷۷ ۳

نکته تندی انتشار موج عرضی در طناب (تار) یا فنر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{FL}{m}}=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}=\frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}$$

۱ ابتدای تندی موج را به‌دست می‌آوریم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{250}{4\times10^{-3}}}=\sqrt{\frac{25}{4}\times10^4}=\frac{5}{2}\times10^2\Rightarrow v=250m/s$$

۲ با توجه به رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}$ طول موج را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda=\frac{250}{312/5}=\frac{2500}{3125}=\frac{100}{125}=\frac{4}{5}=0/8m$$

بازی با سؤال نیروی کشش طنابی ۱۲N و چگالی خطی جرم آن ۳۰g/m است. اگر سر این طناب را با دیاپازونی که بسامد آن ۱۰۰Hz است، عمود بر راستای طناب به نوسان درآوریم، طول موج ایجاد شده در طناب چند سانتی‌متر خواهد بود؟

۱) ۰/۲ ۲) ۲ ۳) ۲۰ ۴) ۲۰۰

پاسخ تندی پیشروی موج را حساب می‌کنیم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{12}{30\times10^{-3}}}\Rightarrow v=20m/s$$

در این صورت طول موج خواهد شد:

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{20}{100}=0/2m=20cm$$

گزینهٔ ۳

B ۱۵۷۸ ۱

با توجه به تعریف طول موج، تندی انتشار موج در طناب را حساب می‌کنیم.

$$\lambda=vT\xrightarrow{T=\frac{1}{f}}v=f\lambda\xrightarrow{f=600Hz,\lambda=0/2m}$$

$$v=600\times0/2\Rightarrow v=120m/s$$

نکته تندی انتشار موج عرضی در یک سیم (طناب) دارای سه رابطهٔ زیر است که با توجه به داده‌های مسئله یکی از آن‌ها را استفاده می‌کنیم.

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\ ,\ v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}\ ,\ v=\frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$$

$\mu=\frac{m}{\ell}$ چگالی خطی — $\rho=\frac{m}{V}$ چگالی سیم — مساحت سطح مقطع سیم — قطر سیم

تندی انتشار موج در سیم برابر است با:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}\xrightarrow[\rho=10000kg/m^3]{F=36N}120=\sqrt{\frac{36}{10000\times A}}\Rightarrow120\times120=\frac{36}{10000A}$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{4000000}m^2=\frac{1}{4000000}\times10^6mm^2\Rightarrow A=0/25mm^2$$

B ۱۵۷۹ ۳

۱ با توجه به بسامد و طول موج، تندی انتشار موج در تار را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow0/25=\frac{v}{200}\Rightarrow v=50m/s$$

۲ حال با توجه به رابطهٔ تندی موج عرضی در تار $v=\frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}$ قطر تار را حساب می‌کنیم:

$$v=\frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}\xrightarrow[\rho=8g/cm^3=8000kg/m^3]{F=60N}50=\frac{2}{D}\sqrt{\frac{60}{8000\times3}}$$

$$\Rightarrow50=\frac{2}{D}\sqrt{\frac{1}{400}}\Rightarrow50=\frac{2}{D}\times\frac{1}{20}\Rightarrow D=\frac{1}{500}m$$

۳ قطر بر حسب میلی‌متر خواسته شده است:

$$D=\frac{1}{500}m\times\frac{1000mm}{1m}=2mm$$

B ۱۵۸۰ ۳

۱ تندی انتشار موج عرضی در تار را حساب می‌کنیم.

$$v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}\xrightarrow[A=\pi r^2=3\times(10^{-3})^2]{F=234N,\rho=7800kg/m^3}v=\sqrt{\frac{234}{7800\times3\times10^{-6}}}$$

$$v=\sqrt{\frac{78}{78\times10^{-4}}}\Rightarrow v=100m/s$$

۲ طول موج را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow{f=200Hz}\lambda=\frac{100}{200}\Rightarrow\lambda=0/5m\Rightarrow\lambda=50cm$$

۳ فاصلهٔ یک قله (ستیغ) از دره (پاستیغ) بعدی برابر با $\frac{\lambda}{2}$ است، بنابراین:

$$d=\frac{\lambda}{2}=\frac{50}{4}\Rightarrow d=25cm$$

B ۱۵۸۱ ۴

تندی انتشار موج را به‌دست می‌آوریم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}=\sqrt{\frac{156}{7800\times0/5\times10^{-6}}}=\sqrt{4\times10^4}=200m/s$$

تندی موج در یک محیط ثابت است، بنابراین مسافت طی شده خواهد شد:

$$\ell=vt=200\times1=200m$$

A ۱۵۸۲ ۱

نکته تندی انتشار موج در یک محیط برای بسامدهای مختلف، یکسان است.

تندی انتشار موج‌های A و B با هم برابر است $(v_A=v_B)$ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$v_A=v_B\xrightarrow{v=f\lambda}f_A\lambda_A=f_B\lambda_B$$

$$\Rightarrow\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{f_B}{f_A}\xrightarrow{f_A=4f_B}\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{1}{4}$$

میانبر در یک محیط برای دو موج با بسامدهای f_1 و f_2، طول موج با بسامد نسبت وارون دارد.

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{f_2}{f_1}$$

B ۱۵۸۳ ۲

نکته بسامد از ویژگی‌های چشمهٔ موج است و اگر چشمه تغییر نکند بسامد موج تغییر نمی‌کند. اما تندی انتشار موج از ویژگی‌های محیط است و چنانچه ویژگی‌های محیط تغییر کند، تندی و در نتیجه طول موج تغییر می‌کند.

۱ در این مسئله چشمه همان دیاپازون است بنابراین بسامد ثابت می‌ماند $(f'=f)$.

۲ با ۴ برابر شدن نیروی کشش $(F'=4F)$ تندی خواهد شد:

$$\frac{v'}{v}=\frac{\sqrt{\frac{F'}{\mu}}}{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}=\sqrt{\frac{F'}{F}}\Rightarrow\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{4F}{F}}\Rightarrow\frac{v'}{v}=2$$

۳ با توجه به تعریف طول موج خواهیم داشت:

$$f=\frac{v}{\lambda},f'=\frac{v'}{\lambda'}\xrightarrow{f'=f}\frac{v}{\lambda}=\frac{v'}{\lambda'}\Rightarrow\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{v'}{v}=2$$

B ۱۵۸۴ ۲

خط فکری دقت کنید، نیروی کشش تار تغییر کرده بنابراین تندی انتشار موج در تار تغییر می‌کند از طرفی بسامد چشمه تغییر کرده است در نتیجه طول موج تحت تأثیر دو عامل تغییر می‌کند. تغییرات تندی و بسامد را مشخص کنید تا تغییر طول موج را بتوانید حساب کنید.

۱ در مسئله فاصلهٔ دو قلهٔ متوالی ۴ متر بیان شده بنابراین طول موج در ابتدا $\lambda=4m$ است.

۲ نیروی کشش ۵۱ درصد کاهش‌یافته بنابراین: $F_2=F_1-0/51F_1\Rightarrow F_2=0/49F_1$

۳ تندی موج در حالت جدید را حساب می‌کنیم. البته چون تار تغییر نکرده است چگالی خطی جرم ثابت است $(\mu_2=\mu_1)$، پس:

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{\sqrt{\frac{F_2}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{F_1}{\mu_1}}}\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\sqrt{\frac{F_2}{F_1}}=\sqrt{\frac{0/49F_1}{F_1}}\Rightarrow v_2=0/7v_1$$

۴ طول موج جدید با بسامد چشمهٔ ۱۰۰Hz را به‌دست می‌آوریم:

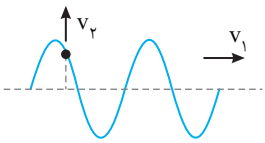
$$\begin{cases}\lambda_1=\frac{v_1}{f_1}\\ \lambda_2=\frac{v_2}{f_2}\end{cases}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{v_2}{v_1}\times\frac{f_1}{f_2}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{4}=0/7\times\frac{50}{100}\Rightarrow\lambda_2=1/4m$$

۵ فاصلهٔ یک قله (ستیغ) از درهٔ (پاستیغ) مجاورش برابر نصف طول موج است.

$$\frac{\lambda_2}{2}=0/7m$$

A ۱۵۸۵ ۲

v_1 تندی انتشار موج در محیط است که به شرایط فیزیکی محیط بستگی دارد اما v_2 تندی ارتعاش نوسان ذرات محیط است که بین مقادیر صفر تا $v_m=A\omega$ تغییر می‌کند بنابراین گزاره (الف) نادرست است و گزاره‌های (ب) و (پ) درست هستند.



A ۱۵۸۶ ۳

یادآوری ذرات محیط انتشار موج دارای حرکت هماهنگ ساده بوده و بیشینه تندی آن‌ها $v_m=A\omega$ است.

خط فکری تندی پیشروی موج در یک محیط ثابت و برابر $v=f\lambda$ است. بیشینه تندی ذرات محیط $v'=A\omega$ است البته اگر به گزینه‌ها نگاه کنید در هیچ‌یک خبری از ω نیست بنابراین شما باید در حل مسئله از فرمول $\omega=2\pi f$ استفاده کنید تا بتوانید گزینهٔ مورد نظر را بیابید.

نسبت $\frac{v}{v'}$ را حساب می‌کنیم: $\frac{v}{v'}=\frac{f\lambda}{A\omega}\xrightarrow{\omega=2\pi f}\frac{v}{v'}=\frac{f\lambda}{A(2\pi f)}\Rightarrow\frac{v}{v'}=\frac{\lambda}{2\pi A}$

B ۱۵۸۷ ۱

۱ ابتدا دورهٔ تناوب نوسان‌ساز که در اینجا یک سامانهٔ جرم - فنر فرض شده است به‌دست می‌آوریم. $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\xrightarrow[k=100N/m]{m=1kg}T=2\pi\sqrt{\frac{1}{100}}\Rightarrow T=\frac{\pi}{5}s$

۲ تندی پیشروی موج در طناب را حساب می‌کنیم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\xrightarrow[\mu=20g/m=20\times10^{-3}kg/m]{F=200N}v=\sqrt{\frac{200}{20\times10^{-3}}}\Rightarrow v=100m/s$$

۳ طول موج خواهد شد: $\lambda=vT\Rightarrow\lambda=100\times\frac{\pi}{5}=20\pi m$

۴ فاصلهٔ بین قله (ستیغ) از دره (پاستیغ) مجاورش برابر $\frac{\lambda}{2}$ است بنابراین:

$$\frac{\lambda}{2}=\frac{20\pi}{2}=10\pi m$$

B ۱۵۸۸ ۲

۱ چگالی خطی جرم را حساب می‌کنیم: $\mu=\frac{m}{\ell}\xrightarrow[L=6m]{m=1kg}\mu=\frac{1}{6}kg/m$

۲ تندی انتشار موج در فنر را به دست می‌آوریم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\xrightarrow{F=6N}v=\sqrt{\frac{6}{\frac{1}{6}}}\Rightarrow v=6m/s$$

۳ بسامد موج همان بسامد چشمهٔ موج (دیاپازون) است. بسامد را به کمک طول موج به دست می‌آوریم: $v=f\lambda\xrightarrow{\lambda=1/5cm}6=f(1/5\times10^{-2})\Rightarrow f=400Hz$

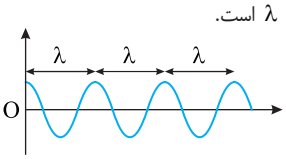
۴ تعداد نوسان‌های دیاپازون در هر دقیقه خواهد شد:

$$\begin{array}{c|c}1s & 400\\ 60s & N\end{array}\Rightarrow N=24000$$

B ۱۵۸۹ ۳

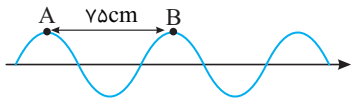
خط فکری فاصلهٔ هر دو برآمدگی متوالی برابر λ است و هرگاه فاصلهٔ دو نقطه از هم λ باشد، یعنی در هر لحظه دو نقطه در یک وضعیت قرار دارند. در لحظه‌ای که O در دامنهٔ مثبت است تمام نقاطی که در فاصلهٔ λ، 2λ، 3λ و ... (مضرب صحیح λ)، از O قرار دارند در دامنهٔ مثبت هستند، بنابراین شما باید گزینه‌ها را بررسی کنید و مشخص کنید کدام فاصله مضرب صحیحی λ است.

با توجه به شکل گزینهٔ (۳) که فاصلهٔ صفر تا M، $\frac{6}{2}\lambda=3\lambda$ است درست می‌باشد.



B ۱۵۹۰ ۲

قرار است دو نقطهٔ A و B دو ستیغ (قله) متوالی باشند و فاصلهٔ دو قلهٔ متوالی برابر یک طول موج است. بنابراین طول موج که در ابتدا $\lambda_1=50cm$ بوده است اکنون باید $\lambda_2=75cm$ شود تا A و B دو برآمدگی متوالی باشند.



از طرفی تندی انتشار موج در یک محیط (یک ریسمان) برای هر بسامدی مقدار یکسانی است بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{f_2}{f_1}=\frac{\frac{v_2}{\lambda_2}}{\frac{v_1}{\lambda_1}}\xrightarrow{v_2=v_1}\frac{f_2}{f_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Rightarrow\frac{f_2}{f_1}=\frac{50}{75}\Rightarrow\frac{f_2}{f_1}=\frac{2}{3}$$

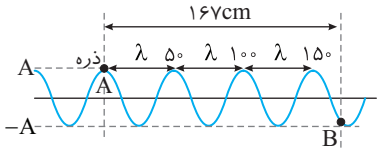
میانبر دقت کنید برای آن‌که طول موج افزایش یابد باید بسامد کاهش یابد و تنها گزینه‌ای که در آن بسامد کاهش یافته گزینهٔ (۲) است.

B ۱۵۹۱ ۳

خط فکری شکل موج را رسم کنید. نام یکی از قله‌های رسم شده را A بگذارید. حال اگر به اندازهٔ یک طول موج جلو بروید به قلهٔ بعدی می‌رسید. تعداد قله‌های مسیر را بشمارید. در این‌صورت تعداد ذره‌هایی که همزمان با A در دامنهٔ مثبت $(+A)$ قرار دارند به دست می‌آید. البته ابتدا باید طول موج را حساب کنید.

در انتشار موج وقتی ذرهٔ A در دامنهٔ مثبت است مطابق شکل تمام ذره‌هایی که فاصلهٔ آن‌ها از A مضرب صحیحی از طول موج است هم‌زمان در دامنهٔ مثبت قرار دارند.

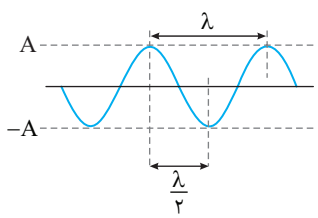
ابتدا طول موج را به‌دست می‌آوریم. $\lambda=\frac{v}{f}=\frac{100}{200}=0/5m=50cm$



بنابراین نقاطی که در فاصلهٔ ۵۰cm، ۱۰۰cm، ۱۵۰cm و ... از A قرار دارند هم‌زمان با ذرهٔ A در دامنهٔ مثبت قرار دارند، بنابراین سه ذره بین A و B هم‌زمان در دامنهٔ مثبت قرار دارند.

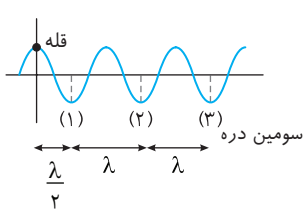
B ۱۵۹۲ ۱

مطابق شکل زیر نزدیک‌ترین فاصلهٔ دو نقطه که هم‌زمان یکی در دامنهٔ مثبت و دیگری در دامنهٔ منفی باشد یعنی یکی ستیغ (قله) و دیگری پاستیغ (دره) باشد $\frac{\lambda}{2}$ است. طول موج را به‌دست آورده و $\frac{\lambda}{2}$ را حساب می‌کنیم: $\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{4}{20}=0/2m\Rightarrow\frac{\lambda}{2}=0/1m$



B ۱۵۹۳ ۲

خط فکری در حل این مسائل لازم است شکل رسم کنیم. فاصلهٔ سومین دره از قلهٔ مورد نظر $\frac{5\lambda}{2}$ است بنابراین طول موج را می‌توانید به دست بیاورید و مسئله را حل کنید.



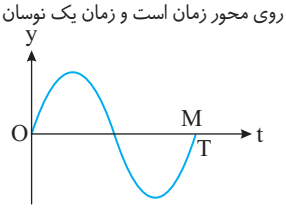
۱ با توجه به شکل می‌توان نوشت: $5\frac{\lambda}{2}=14\Rightarrow\lambda=\frac{28}{5}=5/6cm$

۲ بسامد موج همان بسامد چشمه است. بسامد چشمه را از معادلهٔ حرکت آن حساب می‌کنیم: $x=0/05\cos 40\pi t \Rightarrow \omega=40\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{T}=40\pi \Rightarrow T=\frac{1}{20}s$

۳ تندی انتشار موج خواهد شد: $v=\frac{\lambda}{T}=\frac{0/056}{\frac{1}{20}} \Rightarrow v=1/12m/s$

۲ ۱۵۹۴ A

دقت کنید که OM روی محور زمان است و زمان یک نوسان کامل برابر دوره است.



۳ ۱۵۹۵ B

نکته فاصلهٔ دو برآمدگی متوالی برابر طول موج است. فاصلهٔ هر ذره از محیط تا حالت تعادلش برابر یک دامنه است.

۱ فاصلهٔ Δx همان طول موج بوده یعنی $\lambda=40cm=0/4m$ است.

۲ فاصلهٔ Δy همان دامنه است یعنی $A=15cm=0/15m$ است.

۳ تندی انتشار موج در محیط خواهد شد:

$$v=f\lambda \xrightarrow{f=8Hz} v=8\times 0/4 \Rightarrow v=3/2m/s$$

۴ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم:

$$\omega=2\pi f \Rightarrow \omega=2\pi\times 8 \Rightarrow \omega=16\pi\, rad/s$$

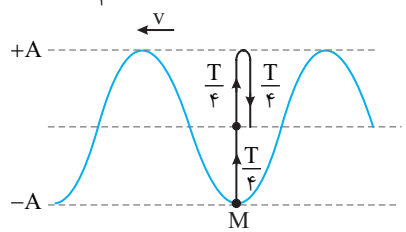
۵ بیشینه تندی نوسان ذرات محیط برابر است با:

$$v_m=A\omega \Rightarrow v_m=0/15\times 16\pi \Rightarrow v_m=2/4\pi\, m/s$$

۱ ۱۵۹۶ A

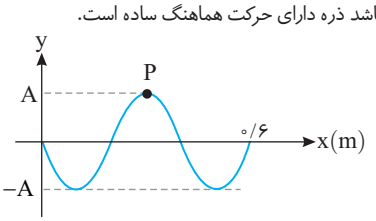
خط فکری هر ذره از محیط انتشار موج سینوسی دارای حرکت هماهنگ ساده است. بنابراین وقتی از شما دربارهٔ یک ذره از محیط پرسش می‌شود، شما باید تنها به حرکت هماهنگ ساده فکر کنید. به طور مثال اگر ذره در $+A$ باشد بعد از $\frac{T}{4}$ به حالت تعادل می‌رسد. $\frac{T}{4}$ بعد به مکان $-A$ می‌رسد و تمام بازه‌های زمانی در مورد آن صدق می‌کند. با توجه به این مطلب، مسئله را بررسی کنید.

مطابق شکل M در مکان $-A$ است و پس از $\frac{T}{4}$ به مرکز می‌رود، $\frac{T}{4}$ بعد به $+A$ رفته و در $\frac{T}{4}$ آخر به مرکز بر می‌گردد، بنابراین پس از $\frac{3T}{4}$ در مرکز نوسان است.



۴ ۱۵۹۷ A

خط فکری شما باید ابتدا مشخص کنید که ذرهٔ مورد نظر در لحظهٔ $t=0$ در چه وضعیتی است؟ برای این منظور باید طول موج را پیدا کرده و به کمک آن محل ذره را بیابید. یادتان باشد ذره دارای حرکت هماهنگ ساده است.

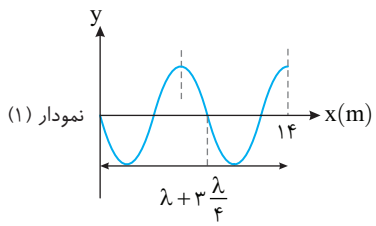


طول موج را به‌دست می‌آوریم: $3\frac{\lambda}{2}=0/6 \Rightarrow \lambda=0/4m=40cm$

ذره‌ای در فاصلهٔ 30cm از چشمه، نقطه‌ای مانند P است که در $t=0$ بُعد آن $+A$ است و این نقطه شبیه نوسانگر ساده‌ای است که از دامنهٔ مثبت شروع به حرکت کرده و نمودار مکان زمان آن یک نمودار کسینوسی است که گزینهٔ (۴) تنها گزینه‌ای است که این موضوع را نشان می‌دهد.

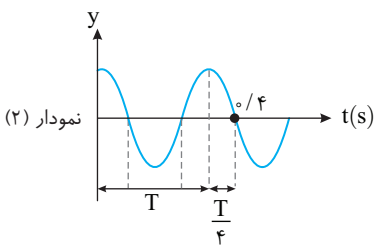
۳ ۱۵۹۸ A

۱ نمودار (۱) نقش موج در تار است و در نقش موج فاصلهٔ دوبرآمدگی برابر یک طول موج است. با توجه به نمودار خواهیم داشت: $\frac{7\lambda}{4}=14 \Rightarrow \lambda=8m$



۲ نمودار (۲)، نمودار مکان - زمان، حرکت هماهنگ سادهٔ یک ذره از محیط است و محور افقی، محور زمان است از این‌رو می‌توان نوشت:

$$T+\frac{T}{4}=0/4 \Rightarrow \frac{5T}{4}=0/4 \Rightarrow T=\frac{16}{50}s$$



۳ تندی انتشار موج در تار را حساب می‌کنیم: $v=\frac{\lambda}{T} \Rightarrow v=\frac{8}{\frac{16}{50}} \Rightarrow v=25m/s$

۴ چگالی خطی جرم را به‌دست می‌آوریم: $\mu=\frac{m}{\ell} \Rightarrow \mu=\frac{4\times 10^{-3}}{10\times 10^{-2}}=4\times 10^{-2}kg/m$

۵ نیروی کشش تار خواهد شد:

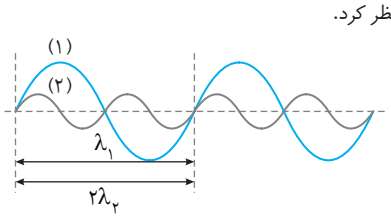
$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow 25=\sqrt{\frac{F}{4\times 10^{-2}}} \Rightarrow 625=\frac{F}{4\times 10^{-2}} \Rightarrow F=25N$$

۱ ۱۵۹۹ A

۱ با توجه به شکل طول موج λ_1 ، دو برابر طول موج λ_2 است و گزینهٔ (۱) الزاماً درست است.

۲ طناب‌ها به دو چشمهٔ مختلف متصل هستند بنابراین در مورد بسامد موج‌ها نمی‌توان اظهارنظر کرد.

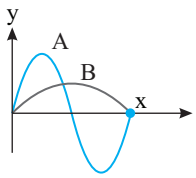
۳ دربارهٔ دو طناب اطلاعاتی نداریم بنابراین اگر دو طناب مشابه باشند تندی انتشار موج در آن‌ها یکی است و اگر مشابه نباشند تندی یکسان نیست یعنی دربارهٔ تندی آن‌ها نمی‌توان اظهارنظر کرد.



B ۴ ۱۶۰۰

خط فکری سرعت انتشار موج از ویژگی‌های محیطی است که موج در آن در حال انتشار است، چون هر دو موج در یک محیط منتشر می‌شوند پس $v_A=v_B$ است.

۱ در گام اول بـا توجه به نقش موج و محور افقی نسبت طول موج A و B را به‌دست می‌آوریم:

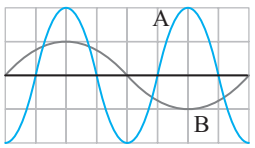


$$\begin{cases} x=\lambda_A \\ x=\frac{\lambda_B}{۲} \end{cases} \Rightarrow \lambda_A=\frac{\lambda_B}{۲} \Rightarrow \lambda_B=۲\lambda_A$$

۲ از طرفی بنا به رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}=vT$ می‌توان نوشت:

$$\lambda_B=۲\lambda_A \xrightarrow{\lambda=vT} v_BT_B=۲v_AT_A \xrightarrow{v_A=v_B} T_B=۲T_A \Rightarrow \frac{T_A}{T_B}=\frac{۱}{۲}$$

بازی با سوال در شـکل روبه‌رو دو موج عرضی A و B نشـان داده شده اسـت. کدام رابطه در مورد دامنه و طول موج آن دو درست است؟ از کتاب درسی



۱) $A_A=A_B \ ، \lambda_A=\frac{\lambda_B}{۲}$

۲) $A_A=A_B \ ، \lambda_A=۲\lambda_B$

۳) $A_A=۲A_B \ ، \lambda_A=\lambda_B$

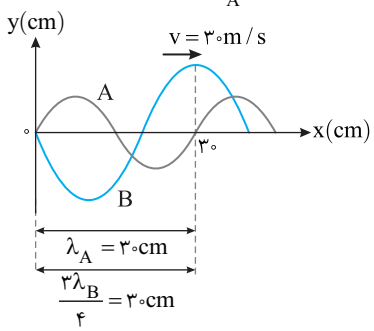
۴) $A_A=۲A_B \ ، \lambda_A=\frac{\lambda_B}{۲}$

پاسخ با توجه به شـکل فاصلهٔ دو سـتیغ مجاور در موج A (λ_A) برابر فاصلهٔ ستیغ از پاستیغ مجاورش در موج B $(\frac{\lambda_B}{۲})$ است، بنابراین $\lambda_A=\frac{\lambda_B}{۲}$ است. از طرفی ارتفاع ستیغ A دو برابر B است، بنابراین $A_A=۲A_B$ است. گزینهٔ ۴

A ۴ ۱۶۰۱

۱ با توجه به شکل طول موج A برابر ۳۰cm است بنابراین دورهٔ A خواهد شد:

$$\lambda_A=۳۰cm=۰/۳m \xrightarrow{v=\lambda/T} ۳۰=\frac{۰/۳}{T_A} \Rightarrow T_A=۰/۰۱s$$



۲ طول موج B برابر است با:

$$\frac{۳}{۴}\lambda_B=۳۰ \Rightarrow \lambda_B=۴۰cm=۰/۴m \xrightarrow{v=\lambda/T} ۳۰=\frac{۰/۴}{T_B} \Rightarrow T_B=\frac{۴}{۳۰۰}s$$

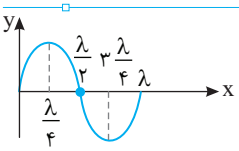
۳ حال با توجه به رابطهٔ $T=\frac{t}{N}$ ، تعداد نوسان‌های کامل A و B را در مدت ۲۰s به‌دست می‌آوریم:

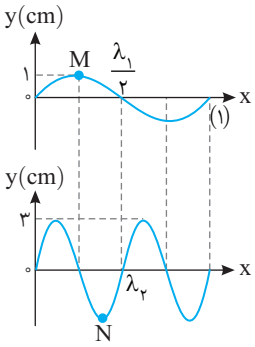
$$۰/۰۱=\frac{۲۰}{N_A} \Rightarrow N_A=۲۰۰۰, \frac{۴}{۳۰۰}=\frac{۲۰}{N_B} \Rightarrow N_B=۱۵۰۰ \Rightarrow N_A-N_B=۵۰۰$$

B ۴ ۱۶۰۲

یادآوری در نقش موج به کمک مؤلفهٔ افقی نمودار می‌توان طول موج را حساب کرد:

۱ با توجه به شکل دو نمودار، طول موج تار (۱) دو برابر طول موج تار (۲) است.





$$\frac{\lambda_1}{۲}=\lambda_2 \Rightarrow \lambda_1=۲\lambda_2$$

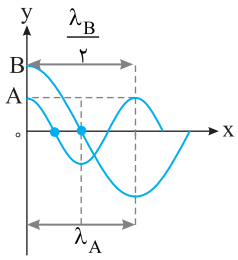
۲ حال با توجه به رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}$ می‌توان بسـامد نوسـان ذرات موج را حساب کرد و به کمک $f=\frac{۱}{T}$ دورهٔ نوسان آن‌ها را به‌دست آورد:

$$\begin{cases} \lambda_1=\frac{v_1}{f_1} \\ \lambda_2=\frac{v_2}{f_2} \end{cases} \xrightarrow{v_1=v_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{f_2}{f_1} \Rightarrow \frac{f_2}{f_1}=۲ \Rightarrow \frac{\frac{۱}{T_2}}{\frac{۱}{T_1}}=۲ \Rightarrow \frac{T_1}{T_2}=۲$$

۳ دورهٔ نوسـان ذرات موج (۱) (مثل نقطهٔ M) دو برابر دورهٔ نوسـان ذرات موج (۲) (مثل نقطهٔ N) است:

$$\begin{cases} T_M=\frac{t_M}{N_M} \\ T_N=\frac{t_N}{N_N} \end{cases} \xrightarrow[N_M=۲]{T_M=۲T_N} \frac{T_M}{T_N}=\frac{N_N}{N_M} \Rightarrow ۲=\frac{N_N}{۲} \Rightarrow N_N=۴$$

A ۲ ۱۶۰۳



با توجه به شکل: $\lambda_A=\frac{\lambda_B}{۲}$

دو موج در یک محیط منتشـر می‌شوند بنابراین تندی انتشار دو موج در محیط یکسان است.

$$v_A=v_B$$

با توجه به تعریف طول موج:

$$\lambda=\frac{v}{f} \Rightarrow \frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{f_B}{f_A} \Rightarrow \frac{\frac{\lambda_B}{۲}}{\lambda_B}=\frac{f_B}{f_A} \Rightarrow f_B=\frac{۱}{۲}f_A$$

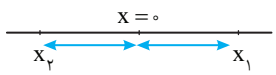
تعداد نوسانات در مدت معین t با بسامد نسبت مستقیم دارد.

$$\frac{N_B}{N_A}=\frac{f_B}{f_A} \Rightarrow \frac{N_B}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow N_B=۵۰$$

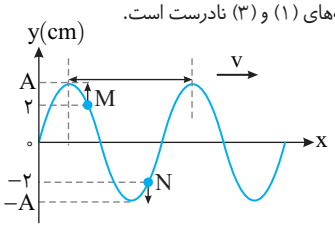
در مدتی که چشمه A، ۱۰۰ نوسان انجام می‌دهد چشمهٔ B، ۵۰ نوسان انجام خواهد داد.

A ۲ ۱۶۰۴

یادآوری در حرکت هماهنگ ساده هرگاه فاصلهٔ نوسانگر از مرکز نوسان یکسان باشد، تندی نیز یکسان است. $|v_1|=|v_2|$



بـا توجـه به جهت پیشـروی موج، ذرهٔ M در حـال حرکت رو به بالا و نزدیک شـدن به انتهای مسیر (نقطهٔ بازگشت) است بنابراین حرکت آن کندشونده است. هم‌چنین ذرهٔ N در حال حرکت رو به پایین و نزدیک شـدن به نقطهٔ بازگشت بوده و حرکت آن کندشونده است بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست است.

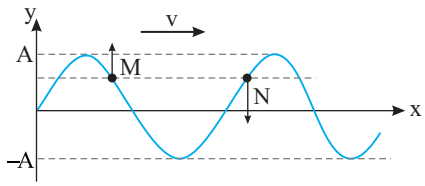


مکان دو ذرهٔ M و N از محیط نسبت به مرکز نوسانشان یکسان و قرینه است. پس تندی در آن نقطه‌ها برابر بوده و در نتیجه گزینهٔ (۲) درست است.

فاصلهٔ دو برآمدگی از هم λ است و M و N بین دو قله متوالی قرار دارند و فاصلهٔ آن‌ها از هم کمتر از λ است و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۱۶۰۵ **۴**

۱ نقطهٔ M در حال حرکت رو به بالا و نقطهٔ N در حال حرکت رو به پایین است، بنابراین در یک لحظه از حالت تعادل نمی‌گذرند و گزینهٔ (۱) نادرست است.



۲ حرکت M رو به بالا و در حال دور شدن از حالت تعادلش بوده و کندشونده است اما N در حال نزدیک شدن به حالت تعادل بوده و دارای حرکت تندشونده است، بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است.

۳ جهت حرکت هر دو، قرینهٔ هم (M رو به بالا و N رو به پایین) است و در یک مکان دو نوسانگر دارای تندی یکسان هستند اما سرعت آن‌ها قرینه است و گزینهٔ (۳) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.

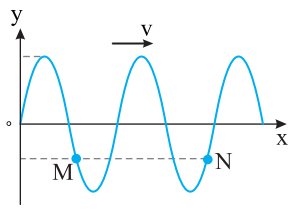
بازی با سؤال **شکل روبه‌رو موج عرضی را در طناب نشان می‌دهد. کدام مورد دربارهٔ دو نقطهٔ M و N از طناب درست است؟** ریاضی - ۹۵

۱) سرعت آن‌ها در هر لحظه یکسان است.

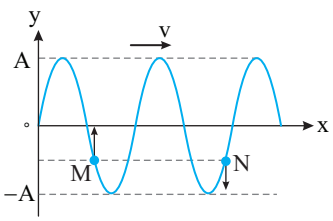
۲) دامنه و بسامد یکسانی دارند.

۳) در هر لحظه فاصلهٔ آن‌ها از مرکز نوسان یکسان است.

۴) هر سه گزینه درست است.



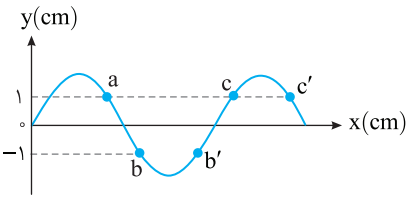
پاسخ **با توجه به جهت پیشروی موج، ذرهٔ M در حال حرکت رو به بالا و نزدیک شدن به حالت تعادلش است اما ذرهٔ N در حال حرکت رو به پایین و در حال نزدیک شدن به نقطهٔ بازگشت است. با آن که در این لحظه تندی آن‌ها یکسان است اما در لحظه‌های بعدی تندی آن‌ها یکسان نخواهد بود. همچنین با گذشت زمان فاصلهٔ آن‌ها از مرکز نوسان تغییر خواهد کرد و گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست است.**



بسامد تمام نقاط محیط یکسان است و دامنهٔ نقاط مختلف برای یک موج عرضی که در یک بُعد در حال انتشار است، با صرف‌نظر از اتلاف انرژی نیز برای تمام نقاط یکسان است و گزینهٔ (۲) درست است. گزینهٔ ۲

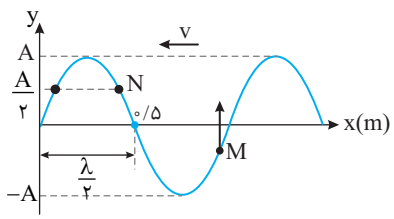
B ۱۶۰۶ **۱**

دو ذرهٔ a و b در فاصلهٔ یکسان از حالت تعادل خود قرار دارند $(y_a = y_b)$ بنابراین تندی آن‌ها یکسان است و گزینهٔ (۱) درست است. با توجه به جهت پیشروی موج (جهت مثبت محور xها) ذرهٔ a در حال حرکت رو به بالا و نزدیک شدن به دامنهٔ مثبت است و حرکت آن کندشونده است بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است. فاصلهٔ a و c' برابر یک طول موج است و فاصلهٔ a و c از یک طول موج کمتر است و گزینهٔ (۳) نادرست است. برای آن‌که فاصلهٔ دو ذره از محیط $\frac{\lambda}{2}$ باشد باید مکان و جهت حرکت آن‌ها قرینه باشد یعنی نقاط a و b'، در نتیجه گزینهٔ (۴) نیز نادرست است.



C ۱۶۰۷ **۴**

بنا به فرض مسئله نقطهٔ M در حال حرکت رو به بالاست. به شکل نگاه کنید. برای آن که M رو به بالا در حرکت باشد باید قلهٔ موج در حال نزدیک شدن به نقطهٔ M باشد و نقطهٔ قبل از M در مسیر موج باید بالاتر از M باشد. نقطهٔ سمت راست M بالاتر از M است یعنی نقطهٔ قبل از M در سمت راست آن قرار دارد بنابراین باید جهت پیشروی موج از راست به چپ باشد.



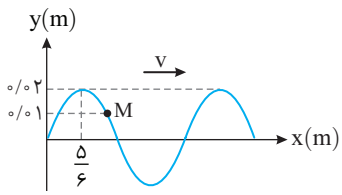
با توجه به نمودار $\frac{\lambda}{2}$ برابر ۰/۵m است بنابراین طول موج خواهد شد:

$$\frac{\lambda}{2}=0/5 \Rightarrow \lambda = 1\ m$$

A ۱۶۰۸ **۲**

خط فکری ذرهٔ M در هر ثانیه چند نوسان انجام می‌دهد؟ یعنی بسامد موج را بیابید. به کمک محور افقی نقش موج طول موج را به دست می‌آوریم و با استفاده از تندی موج $(v=10m/s)$ بسامد را حساب می‌کنیم.

۱ با توجه به نمودار طول موج خواهد شد:



$$\frac{\lambda}{4}=\frac{5}{6} \Rightarrow \lambda = \frac{20}{6}=\frac{10}{3}\ m$$

۲ دوره را حساب می‌کنیم:

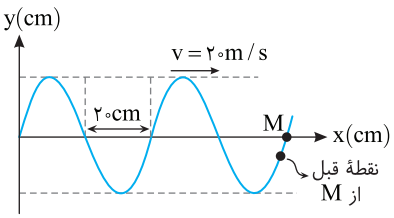
$$T=\frac{\lambda}{v}=\frac{\frac{10}{3}}{10} \Rightarrow T=\frac{1}{3}\ s$$

۳ تعداد نوسانات در هر ثانیه یعنی بسامد در این صورت:

$$f=\frac{1}{T}=3Hz$$

B ۱۶۰۹ **۴**

خط فکری در حل مسائل نقش موج معمولاً ابتدا از روی محور افقی، طول موج را حساب کرده سپس به کمک تندی انتشار موج دوره را حساب می‌کنیم و بعد از آن با توجه به جهت حرکت موج، رفتار نقطهٔ مورد نظر را بررسی می‌کنیم.



گام اول: یافتن طول موج:

$$\frac{\lambda}{2}=20\ cm \Rightarrow \lambda = 0/4 m$$

گام دوم: یافتن دوره:

$$T=\frac{\lambda}{v} \Rightarrow T=\frac{0/4}{20} \Rightarrow T=0/02 s$$

گام سوم: نقطهٔ M در حال گذر از مرکز نوسانش بوده و نقطهٔ قبل از M پایین‌تر از نقطهٔ M است. یعنی M در حال حرکت رو به پایین و دارای بیشینه تندی است.

$$v_m = A\omega \Rightarrow v_m = A\frac{2\pi}{T} \xrightarrow{A=0/02m} v_m = 0/02 \times \frac{2\times 3/14}{0/02}$$

$$\Rightarrow v_m = 6/28 m/s$$

A ۱۶۱۰ ۴

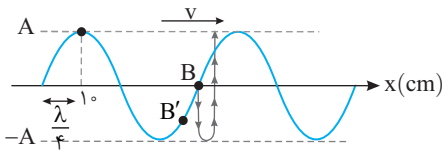
خط فکری در اغلب مسائل نقش موج دو کار را همان ابتدا باید انجام دهید:

۱ پیدا کردن طول موج از روی محور افقی

۲ به دست آوردن دوره به کمک تندی انتشار موج و هرگاه دربارهٔ رفتار یک ذره از محیط از شما سؤال شود شما باید جهت حرکت ذره را تشخیص دهید (بالا می‌رود یا پایین می‌آید) و سپس با ذره شبیه یک نوسان‌گر هماهنگ ساده برخورد کنید.

۱ با توجه به نقش موج طول موج را حساب می‌کنیم: $\frac{\lambda}{۴}=۱۰\Rightarrow\lambda=۴۰cm=۰/۴m$

y(cm)



۲ دوره را حساب می‌کنیم: $\lambda=vT\Rightarrow T=\frac{\lambda}{v}=\frac{۰/۴}{۱۰}=۰/۰۴s$

۳ با توجه به نقش موج ذرهٔ موج در حال نزدیک شدن به نقطهٔ B است و ذرهٔ قبل از B یعنی B′، از B پایین‌تراست پس B رو به پایین در حرکت است.

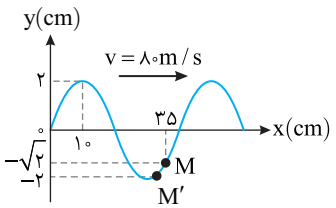
۴ ذرهٔ B از مرکز نوسان تا $-A$، $\frac{T}{۴}$ و از $-A$ تا $+A$، $\frac{T}{۲}$ یعنی جمعاً $\frac{۳T}{۴}$ در حال حرکت خواهد بود بنابراین مدت زمانی که طول می‌کشد تا ذرهٔ B برای اولین بار به مکان $+A$ برسد خواهد شد: $\Delta t=\frac{۳T}{۴}\Rightarrow\Delta t=\frac{۳}{۴}\times۰/۰۴\Rightarrow\Delta t=۰/۰۳s$

B ۱۶۱۱ ۱

۱ گام اول: پیدا کردن طول موج از روی محور افقی:

$\frac{\lambda}{۴}=۱۰\Rightarrow\lambda=۴۰cm=۰/۴m$

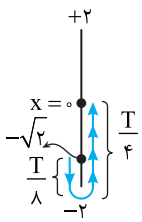
۲ گام دوم: پیدا کردن دوره به کمک تندی انتشار موج:



$f=\frac{v}{\lambda}\Rightarrow f=\frac{۸۰}{۰/۴}\Rightarrow f=۲۰۰Hz\Rightarrow T=\frac{۱}{۲۰۰}s$

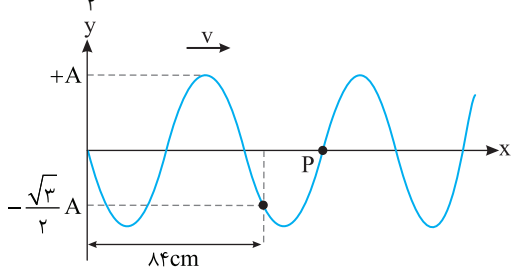
۳ گام سوم: تعیین جهت حرکت ذرهٔ M: با توجه به جهت پیشروی موج ذرهٔ موج در حال نزدیک شدن به ذرهٔ M است و ذرهٔ قبل از M از M پایین‌تر است بنابراین M از مکان $-\sqrt{۲}cm$ در حال حرکت به سوی دامنهٔ منفی $A=-۲cm$ است.

۴ اکنون با یک حرکت هماهنگ ساده سر و کار داریم که در آن نوسانگر از مکان $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ به سوی $-A$ رفته سپس به مکان $x=۰$ می‌رود. به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده زمان را به‌دست می‌آوریم:



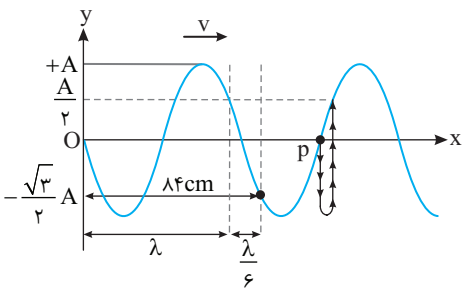
$\Delta t=\frac{T}{۸}+\frac{T}{۴}=\frac{۳T}{۸}\Rightarrow\Delta t=\frac{۳}{۸}\times\frac{۱}{۲۰۰}\Rightarrow\Delta t=\frac{۳}{۱۶۰۰}s$

بازی با سوال **مطابق شکل زیر یک موج عرضی با دامنهٔ A با تندی ۵۰m/s در یک تار در حال پیشروی است. چند ثانیه پس از لحظهٔ نشان داده شده در شکل، نقطهٔ P از محیط برای نخستین بار به مکان $+\frac{A}{۲}$ می‌رسد؟**



۱) $۸/۴\times۱۰^{-۳}$ ۲) $۱/۲\times۱۰^{-۳}$ ۳) $۸/۴\times۱۰^{-۴}$ ۴) ۷×۱۰^{-۳}

پاسخ با توجه به بازه‌های مکانی شناخته شده می‌توان نوشت.



$\lambda+\frac{\lambda}{۶}=۸۴\Rightarrow\frac{۷\lambda}{۶}=۸۴\Rightarrow\lambda=۷۲cm$

$T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۷۲}{۵۰}\Rightarrow T=۱/۴۴\times۱۰^{-۲}s$

اکنون به مسیر حرکت P دقت کنید. P در مدت $\frac{T}{۴}$ از مرکز به دامنهٔ $-A$ می‌رود و پس از $\frac{T}{۴}$ دیگر به تعادلش بازمی‌گردد و از محل تعادل در مدت $\frac{T}{۱۲}$ به مکان $+\frac{A}{۲}$ می‌رود از این‌رو:

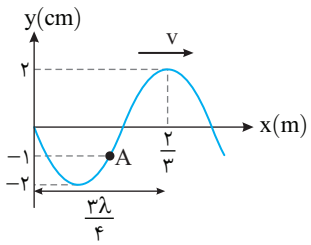
$\Delta t=\frac{T}{۴}+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۱۲}\Rightarrow\Delta t=\frac{۷T}{۱۲}\Rightarrow\Delta t=\frac{۷}{۱۲}\times۱/۴۴\times۱۰^{-۲}$

$\Rightarrow\Delta t=۸/۴\times۱۰^{-۳}s$ گزینهٔ ۱

B ۱۶۱۲ ۳

راه‌حل اول: ۱ گام اول: طول موج را از روی محور افقی حساب می‌کنیم:

$۳\frac{\lambda}{۴}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\lambda=\frac{۸}{۹}m$



۲ گام دوم: به کمک تندی انتشار موج دوره را به دست می‌آوریم.

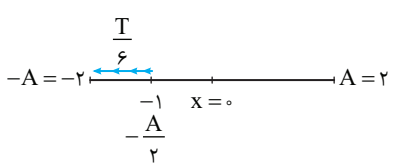
$T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{\frac{۸}{۹}}{۱۰}\Rightarrow T=\frac{۸}{۹۰}s$

۳ گام سوم: ذرهٔ A در حال حرکت به کدام جهت است؟ با توجه به جهت پیشروی موج ذرهٔ موج در حال نزدیک شدن به نقطهٔ A است و نقطهٔ قبل از A از A پایین‌تر است بنابراین A در حال حرکت به سمت پایین است.

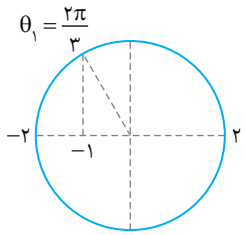
۴ اکنون با ذرهٔ A شبیه یک حرکت هماهنگ ساده برخورد می‌کنیم. ابتدا مشخص می‌کنیم که بازهٔ زمانی داده شده چه کسری از دوره است.

$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{۲}{۱۳۵}}{\frac{۸}{۹۰}}=\frac{۲\times۹۰}{۱۳۵\times۸}=\frac{۲\times۲}{۳\times۸}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۶}$

۵ یک نوسانگر وقتی در مکان $-\frac{A}{۲}$ قرار دارد در مدت $\frac{T}{۶}$ به مکان $-A$ می‌رسد بنابراین ذرهٔ A در این مدت به مکان $-۲cm$ می‌رسد.



راه‌حل دوم: استفاده از دایرهٔ مثلثاتی برای حرکت هماهنگ ساده ذرهٔ A



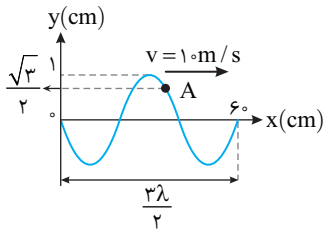
$$\theta_2-\theta_1=\omega t_2-\omega t_1$$
$$\Rightarrow \theta_2-\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{T}\left(\frac{2}{135}\right)$$
$$\Rightarrow \theta_2-\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{\frac{8}{90}}\times\frac{2}{135}$$
$$\Rightarrow \theta_2-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi\times 90}{2\times 135}$$
$$\Rightarrow \theta_2-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow \theta_2=\pi$$

بنابراین ذرهٔ A به مکان $-2cm$ می‌رسد.

B ۳ ۱۶۱۳

۱ گام اول: یافتن طول موج از روی محور افقی نقش موج:

$$3\frac{\lambda}{2}=60\Rightarrow\lambda=40cm=0/4m$$



۲ گام دوم: یافتن دوره به کمک تندی انتشار موج: $T=\frac{\lambda}{v}=\frac{0/4}{10}=\frac{1}{25}s$

۳ بسامد زاویه‌ای موج را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{\frac{1}{25}}=50\pi\ rad/s$$

۴ اکنون ذرهٔ A یک نوسانگر هماهنگ ساده است که مکان آن $x=\frac{\sqrt{3}}{2}cm$ می‌باشد و روابط حرکت هماهنگ ساده در مورد آن صدق می‌کند.

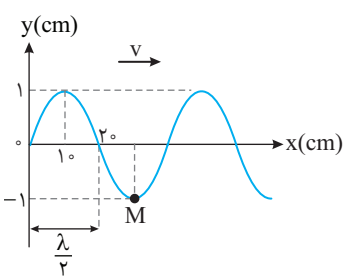
یادآوری شتاب یک نوسانگر ساده برحسب مکان آن از رابطهٔ $|a|=\omega^2 x$ به دست می‌آید.

۵ شتاب ذرهٔ A در لحظهٔ نشان داده شده خواهد شد:

$$|a|=\omega^2 x\Rightarrow|a|=(50\pi)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times10^{-2}$$
$$\Rightarrow|a|=2500\pi^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times10^{-2}\Rightarrow|a|=125\sqrt{3}m/s^2$$

C ۴ ۱۶۱۴

۱ گام اول: یافتن طول موج از روی محور افقی: $\frac{\lambda}{2}=20\Rightarrow\lambda=40cm=0/4m$



۲ گام دوم: یافتن دوره به کمک تندی انتشار موج: $T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{0/4}{4}\Rightarrow T=0/1s$

۳ گام سوم: تعیین جهت حرکت ذرهٔ مورد نظر، ذرهٔ M در دامنهٔ $-A$ قرار دارد بنابراین یقیناً رو به بالا حرکت خواهد کرد.

۴ گام چهارم: مشخص می‌کنیم بازهٔ زمانی داده شده چه کسری از دوره است:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{0/025}{0/1}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{1}{4}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{4}$$

۵ ذرهٔ M دارای حرکت هماهنگ ساده است بنابراین در مدت $\frac{T}{4}$ از مکان $-A$ به مرکز نوسان می‌رسد. بنابراین بعد از $\frac{T}{4}$ تندی ذرهٔ M بیشینهٔ مثبت خواهد بود. $(v_m=+A\omega)$ اما ابتدا باید بسامد زاویه‌ای را حساب کنیم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{0/1}\Rightarrow\omega=20\pi\ rad/s$$
$$v_m=+A\omega\xrightarrow{A=1cm}v_m=+(1\times20\pi)\Rightarrow v_m=+20\pi\ cm/s$$

B ۳ ۱۶۱۵

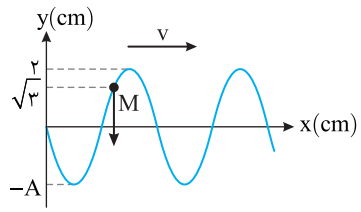
خط فکری این بار خوشبختانه نیازی به پیدا کردن طول موج نداریم. مسئله راجع به سرعت متوسط نقطهٔ M سؤال کرده و شما در حقیقت یک حرکت هماهنگ ساده را باید بررسی کنید که در آن دامنه $2cm$ و مکان ذره $\sqrt{3}cm$ یعنی $\frac{\sqrt{3}}{2}A$ است.

تنها نکتهٔ مهم تعیین جهت حرکت ذرهٔ M است.

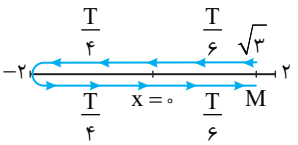
۱ دوره را حساب می‌کنیم: $T=\frac{1}{f}\Rightarrow T=\frac{1}{20}s$

۲ مشخص می‌کنیم که $\Delta t=\frac{1}{24}s$ چه کسری از دوره است: $\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{20}}\Rightarrow\Delta t=\frac{5}{6}T$

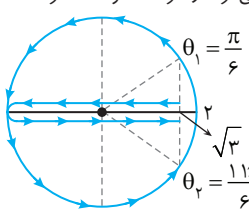
راه‌حل اول: با توجه به جهت پیشروی موج، ذرهٔ M در حال حرکت رو به پایین است. اکنون مسیر حرکت آن را رسم کرده و به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده، مکان ذره را پس از $\frac{5}{6}T$ مشخص کرده و مسافت طی شده را از روی مسیر حرکت معین می‌کنیم.



ذرهٔ M پس از $\frac{T}{6}$ به مرکز می‌رسد و پس از $\frac{T}{2}$ به مرکز برمی‌گردد و بعد به M می‌رسد که جمعاً $\frac{T}{2}+\frac{T}{6}+\frac{T}{6}=\frac{5T}{6}$ می‌شود و M به مکان اولیه باز می‌گردد و سرعت متوسط صفر است.



راه‌حل دوم: اکنون به کمک دایرهٔ مثلثاتی مجدداً قسمت آخر مسئله را حل می‌کنیم:



$$\theta_2-\theta_1=\omega t_2-\omega t_1=\omega(t_2-t_1)$$
$$\Rightarrow\theta_2-\frac{\pi}{6}=2\pi\times(20)\left(\frac{1}{24}\right)\Rightarrow\theta_2=\frac{11\pi}{6}$$

کمان $\frac{11\pi}{6}$ معادل مکان $\sqrt{3}$ است و ذره به جای اول باز می‌گردد و سرعت متوسط صفر است.

B ۱ ۱۶۱۶

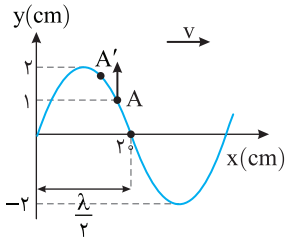
خط فکری حل مسئله به همان شکل همیشگی است. حساب کردن طول موج، پیدا کردن دوره، بررسی جهت حرکت ذره و اینکه بازهٔ زمانی داده شده چه کسری از دوره است، بنابراین مراحل بیان شده را طی کنید.

۱ گام اول: یافتن طول موج: $\frac{\lambda}{2}=20\Rightarrow\lambda=40cm=0/4m$

۲ گام دوم: یافتن دوره از روی تندی انتشار موج:

$$T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۴}{۱۰}$$

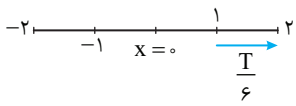
$$\Rightarrow T=\frac{۴}{۱۰۰}s$$



۳ مشخص کردن جهت حرکت ذرهٔ مورد نظر: با توجه به جهت انتشار موج، قلهٔ موج در حال نزدیک شدن به ذرهٔ A بوده و ذرهٔ قبل از آن بالاتر از A قرار دارد بنابراین A در حال حرکت رو به بالاست.

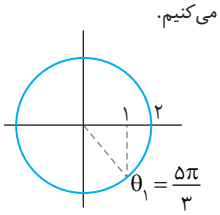
۴ مشخص می‌کنیم که $\Delta t=\frac{۱}{۱۵۰}s$ چه کسری از دوره است:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{۱}{۱۵۰}}{\frac{۴}{۱۰۰}}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۶}$$



۵ **راه‌حل اول:** ذرهٔ A از مکان $\frac{A}{۲}=۱\,cm$ در حال حرکت رو به بالاست. با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده ذرهٔ A در مدت $\frac{T}{۶}$ از مکان $\frac{+A}{۲}$ به $+A$ می‌رسد یعنی $x=۲cm$ می‌شود و ذره به اندازهٔ $۱cm$ $۲-۱=۱cm$ جابه‌جا می‌شود.

راه‌حل دوم: این بار مجدداً مکان ذرهٔ A را به کمک رسم دایرهٔ مثلثاتی به‌دست می‌آوریم. ابتدا کمان معادل مکان را روی دایره مشخص می‌کنیم.



$$\theta_۲-\theta_۱=\omega(t_۲-t_۱)\Rightarrow\theta_۲-\theta_۱=\omega(\Delta t)=\frac{۲\pi}{T}(\Delta t)$$

$$\Rightarrow\theta_۲-\frac{۵\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{\frac{۴}{۱۰۰}}\times\frac{۱}{۱۵۰}\Rightarrow\theta_۲-\frac{۵\pi}{۳}=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\theta_۲=۲\pi$$

معادل مکانی ۲π، $x=+A=۲cm$ است.

B ۳ ۱۶۱۷

خط فکری ابتدا دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم.

با توجه به شکل:

$$۵\frac{\lambda}{۴}=۲۵\Rightarrow\lambda=۲۰cm=۰/۲m$$

$$\lambda=vT\Rightarrow\frac{۲}{۱۰}=۱۰\times T\Rightarrow T=۰/۰۲s$$

حال برای بررسی گزارهٔ (الف) دقت کنید که گفته شده مسافتی که موج در هر ثانیه طی می‌کند، با توجه اینکه سرعت انتشار موج $۱۰m/s$ است پس این مسافت برابر است با:

$$\Delta x=vt=۱۰\times۱=۱۰m$$

گزارهٔ (الف) نادرست است.

گزارهٔ (ب): هر ذره از محیط در مدت یک نوسان، مسافت $۴A$ را طی می‌کند. بنابراین با توجه به اینکه $T=۰/۰۲s$ است، در $۰/۰۱$ ثانیه تعداد نوسان‌های هر ذره از محیط برابر است با:

$$N=\frac{t}{T}=\frac{۰/۰۱}{۰/۰۲}=\frac{۱}{۲}$$

و ذره مسافت $۲A$ یعنی $۴۰cm$ را طی می‌کند و این گزاره درست است.

گزارهٔ (پ) در مورد جابه‌جایی است. اگر ذره‌ای در نقطه تعادل باشد بعد از $۰/۰۱s$ یعنی $\frac{T}{۲}$ مجدداً در نقطهٔ تعادل است و جابه‌جایی‌اش صفر است و اگر ذره‌ای در مکان بیشینه مثبت (A) باشد پس از $\frac{T}{۲}$ در مکان بیشینه منفی $(-A)$ قرا ردارد و اندازهٔ جابه‌جایی آن برابر $۲A$ خواهد شد. پس جابه‌جایی بستگی به مکان اولیه ذره دارد و این گزاره نادرست است.

بررسی گزارهٔ (ت): $۰/۰۲s$ برابر یک دوره است و جابه‌جایی هر ذره در مدت یک دوره همواره برابر صفر است و این گزاره درست است. پس گزاره‌های (ب) و (ت) درست‌اند.

B ۴ ۱۶۱۸

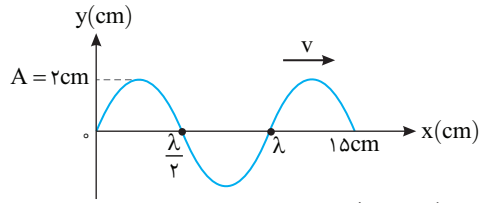
تذکر دقت شود ذرات ریسمان فقط در جهت عمود بر پیشروی موج (یعنی در راستای محور y) ارتعاش (یا نوسان) می‌کنند و مسافت طی‌شدهٔ هر ذره ارتباطی به سرعت پیشروی موج در جهت x ندارد.

۱ تندی موج در ریسمان برابر است با:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{۸۰}{۰/۲}}=۲۰m/s$$

۲ با توجه به نقش موج داده شده طول موج را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda+\frac{\lambda}{۲}=۱۵cm\Rightarrow\frac{۳\lambda}{۲}=۱۵\Rightarrow\lambda=۱۰cm=۰/۱m$$



۳ دورهٔ نوسان موج خواهد شد:

$$v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow\lambda=vT\Rightarrow۰/۱=۲۰T\Rightarrow T=\frac{۱}{۲۰۰}s=۰/۰۰۵s$$

۴ در حل این نوع مسائل پس از به دست‌آوردن دوره، بازهٔ زمانی داده شده را با آن مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{۰/۰۱}{۰/۰۰۵}\Rightarrow\Delta t=۲T$$

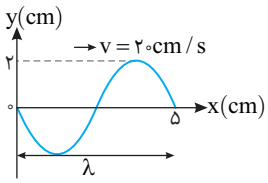
۵ بازهٔ ارائه‌شده دو دورهٔ کامل است و در هر دوره ذره مسافت $۴A$ را طی می‌کند بنابراین:

۱ نوسان کامل	$۴A=۸cm$
۲ نوسان کامل	$۱۶cm$

B ۳ ۱۶۱۹

خط فکری در مسائل مربوط به نقش موج معمولاً می‌توان از روی نمودار، طول موج و سپس دوره و بسامد را حساب کرد. سپس باید مشخص کنیم که بازهٔ زمانی که در مسئله بیان شده چه کسری از دوره است تا بتوانیم به کمک آن، مسئله را حل کنیم.

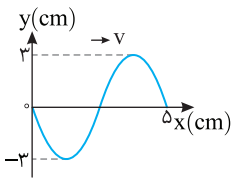
با توجه به نقش موج داده شده طول موج برابر $۵cm$ است:



$$\lambda=vT\Rightarrow۵=۲۰\times T\Rightarrow T=\frac{۱}{۴}s$$

دوره $\frac{۱}{۴}s$ است و بازهٔ $\frac{۱}{۸}s$ برابر نصف دوره است و یک نوسانگر در مدت نصف دوره مسافتی دو برابر دامنه $(۲A)$ را طی می‌کند، با توجه به نمودار دامنه $۲cm$ است از این‌رو مسافت طی شده در مدت $\frac{۱}{۸}s$ برابر $۲\times۲=۴cm$ می‌شود.

بازی با سوال **نقش یک موج عرضی که در یک طناب با تندی v درحال انتشار است، مطابق شکل مقابل است. مسافتی که یک ذره از طناب در مدت $\frac{۱}{۸}s$ طی می‌کند برابر $۱۸cm$ است. v چند m/s است؟**



۱) ۰/۶ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵

پاسخ **به نمودار نگاه کنید دامنهٔ نوسان ذره‌های طناب $۳cm$ است و هر ذره در مدت یک دوره (T) مسافتی برابر $(۴A=۴\times۳=۱۲cm)$ طی می‌کند. مسافت طی شده در مدت $\frac{۱}{۸}s$، برابر $۱۸cm$ است.**

مسافت $۱۸cm$، برابر مسافتی است که یک ذره در مدت یک و نیم دوره $(۳\frac{T}{۲})$ طی می‌کند.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{۱۸}{۱۲}\Rightarrow\Delta t=\frac{۳}{۲}T$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم: $\frac{۳}{۲}T=\frac{۱}{۸}\Rightarrow T=\frac{۱}{۱۲}s$

با توجه به نقش موج، طول موج برابر $\lambda=۵cm$ است در نتیجه تندی انتشار موج خواهد شد:

گزینهٔ ۱ $v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow v=\frac{۵\times۱۰^{-۲}}{\frac{۱}{۱۲}}\Rightarrow v=۰/۶m/s$

B ۱۶۲۰ ۳

به نمودار نگاه کنید، طول موج روی نمودار $\lambda=۲۰cm$ و دامنهٔ نوسان ذرات $A=۵cm$ است. دوره را حساب می‌کنیم. $T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۲}{۱۰}\Rightarrow T=۰/۰۲s$

نسبت بازهٔ زمانی داده شده به دوره را به‌دست می‌آوریم. $\frac{\Delta t}{T}=\frac{۰/۰۱}{۰/۰۲}\Rightarrow \Delta t=\frac{T}{۲}$

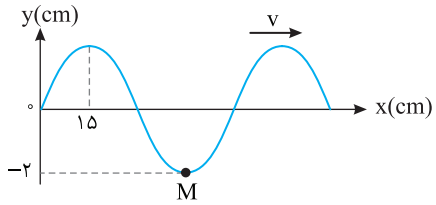
در مدت $T/۲$ هر ذره که دارای حرکت هماهنگ ساده است مسافت $۲A$ را طی می‌کند. $\ell=۲\times A=۲\times۵\Rightarrow \ell=۱۰cm$

B ۱۶۲۱ ۱

با توجه به نمودار، دامنهٔ حرکت ذرات محیط $۲cm$ است و نقطهٔ M در مدت $\frac{۱}{۸}s$ مسافت $۴cm$ را طی می‌کند یعنی مسافتی برابر $۲A$ را طی می‌کند. از طرفی نوسانگر ساده در مدت نصف دوره $(\frac{T}{۲})$ مساحت $۲A$ را طی می‌کند. بنابراین $\frac{۱}{۸}s$ برابر نصف دوره است. $\frac{T}{۲}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow T=\frac{۱}{۴}s$

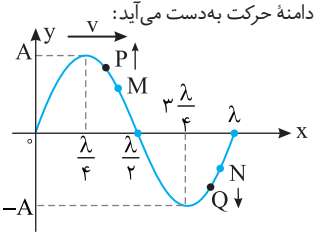
طول موج را به‌دست می‌آوریم $\frac{\lambda}{۴}=۱۵cm\Rightarrow \lambda=۶۰cm=۰/۶m$

تندی انتشار موج را حساب می‌کنیم $\lambda=vT\Rightarrow ۰/۶=v\times\frac{۱}{۴}\Rightarrow v=۲/۴m/s$



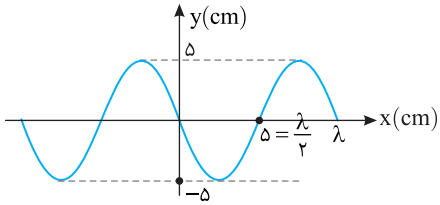
B ۱۶۲۲ ۳

خط فکری در نمودار $y-x$ یک موج که تصویر آن است، از محور افقی طول موج و از محور قائم دامنهٔ حرکت به‌دست می‌آید:



جهت حرکت هر ذره از محیط با توجه به نقطهٔ قبل به‌دست می‌آید، به‌طور مثال وقتی موج به سمت راست حرکت می‌کند ذره P که قبل از M است بالاتر از M قرار دارد یعنی ذرهٔ M رو به بالا در حال حرکت است. ذرهٔ قبل از N یعنی ذرهٔ Q پایین‌تر از N بوده و نقطهٔ N در حال حرکت به سمت پایین است.

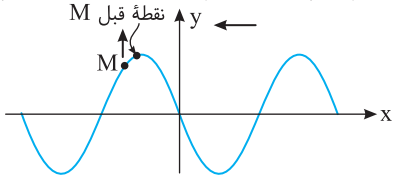
۱ با توجه به محور افقی طول موج را به‌دست می‌آوریم: $\frac{\lambda}{۲}=۵\Rightarrow \lambda=۱۰cm$



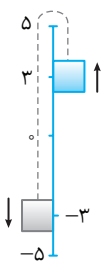
با توجه به رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}=vT$، دورهٔ نوسان ذرات موج و بسامد نوسان ذرات موج به‌دست می‌آید: $\lambda=vT\Rightarrow ۱۰cm=۲۰\frac{cm}{s}\times T\Rightarrow T=\frac{۱}{۲}s$

نکته در مدت T ذرات محیط یک نوسان کامل انجام داده و به مکان قبلی و در همان جهت نوسان قبلی باز می‌گردند و در مدت $\frac{T}{۲}$ مکان و جهت نوسان ذرات محیط قرینه می‌شوند.

۲ با توجه به مکان M و جهت انتشار موج نقطهٔ قبل M بالاتر از آن قرار دارد بنابراین در لحظهٔ $t_۱$ مکان نوسانگر $x=۳cm$ بوده و به سمت بالا در حال حرکت است.



۳ در مدت $\Delta t=t_۲-t_۱=\frac{۱}{۴}s$ باید دید نوسانگر چه مقدار جابه‌جا شده است. دقت کنید که $\frac{۱}{۴}s$ نصف دورهٔ نوسان $(T=\frac{۱}{۲}s)$ است. بنابراین مطابق شکل روبه‌رو مکان و جهت نوسانگر در این مدت قرینه می‌شود و جابه‌جایی آن خواهد شد:



$\Delta x=x_۲-x_۱\Rightarrow \Delta x=-۳-۳=-۶cm$

یادآوری سرعت متوسط برابر است با: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$

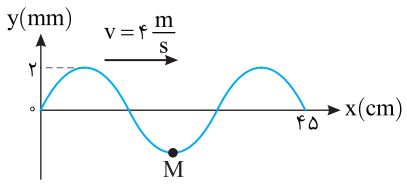
۴ بزرگی سرعت متوسط ذرهٔ M را حساب می‌کنیم:

$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{-۶cm}{\frac{۱}{۴}s}\Rightarrow v_{av}=-۲۴\frac{cm}{s}$

بزرگی سرعت متوسط خواسته شده $|v_{av}|$ $\rightarrow |v_{av}|=۲۴cm/s$

B ۱۶۲۳ ۴

خط فکری اغلب این مسائل دارای راه‌حلی مشخص هستند. ابتدا به کمک اعداد روی محور xها طول موج را به‌دست بیاورید سپس به کمک آن و تندی انتشار موج دوره را حساب کنید. با داشتن دوره و بازهٔ زمانی داده شده در مسئله می‌توانید مسافت و تندی متوسط ذره M را به‌دست بیاورید.



۱ با توجه به نمودار موج: $۳\frac{\lambda}{۲}=۴۵\Rightarrow \lambda=۳۰cm$

۲ دورهٔ نوسان ذرات محیط:

$T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۳}{۴}\Rightarrow T=\frac{۳}{۴۰}s\Rightarrow T=۰/۰۷۵s$

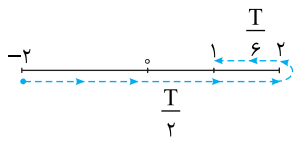
۳ نسبت $\Delta t=۰/۰۵s$ به دوره را حساب می‌کنیم.

$\frac{\Delta t}{T}=\frac{۰/۰۵}{۰/۰۷۵}\Rightarrow \Delta t=\frac{۵۰}{۷۵}\Rightarrow \Delta t=\frac{۲T}{۳}$

۴ $\frac{۲T}{۳}$ را به بازه‌های زمانی شناخته شده تبدیل می‌کنیم. $\Delta T=\frac{۲T}{۳}=\frac{T}{۲}+\frac{T}{۶}$

۵ در مدت $\frac{T}{۲}$، ذرهٔ M از $-۲mm$ به $۲mm$ می‌رود و در مدت $\frac{T}{۶}$ از $A=۲mm$ به $\frac{A}{۲}=۱mm$ می‌رود، بنابراین مسافت طی شده خواهد شد:

$\ell=۴+۱=۵m$

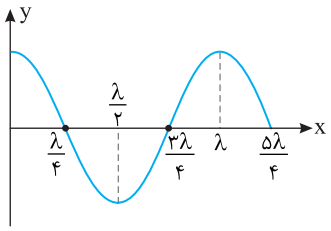


۶ تندی متوسط را حساب می‌کنیم. $S_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow S_{av}=\frac{۰/۰۰۵}{۰/۰۵}=۰/۱m/s$

B ۲ ۱۶۲۴

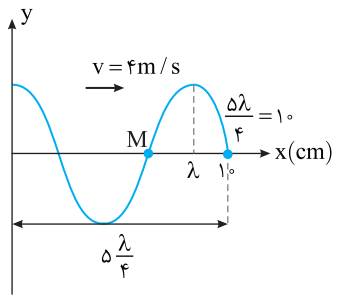
خط فکری در سؤالاتی مانند این سؤال که با تصویر موج یا به اصطلاح نقش موج سروکار داریم از محور قائم دامنهٔ موج و از محور افقی طول موج را به‌دست می‌آوریم. دقت کنید در یک موج ذرات محیط دارای حرکت نوسانی‌اند پس برای بررسی حرکت ذرات محیط باید از رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}=vT$ دورهٔ نوسان را حساب کنید.

نکته برای به‌دست آوردن طول موج در یک نقش موج به شکل زیر دقت کنید:



۱ با توجه به شکل $\frac{5\lambda}{4}$ برابر ۱۰cm شده است، پس طول موج خواهد شد:

$$5\frac{\lambda}{4}=10\Rightarrow\lambda=8cm$$



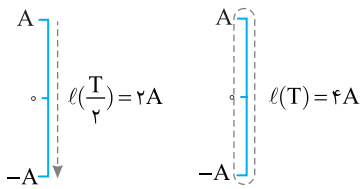
۲ با استفاده از رابطهٔ $\lambda=vT$ دوره را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda=vT\Rightarrow T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۰۸}{4}\Rightarrow T=۰/۰۲s$$

۳ بازهٔ ۰/۲۵s را با دوره مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{۰/۲۵}{۰/۰۲}\Rightarrow\Delta t=۱۲/۵T\Rightarrow\Delta t=۱۲T+\frac{T}{2}$$

نکته در هر دوره مسافتی که ذرهٔ M در حرکت هماهنگ ساده طی می‌کند برابر ۴A و در نصف دوره برابر ۲A است.



۴ بنابراین در مدت $۱۲T+\frac{T}{2}$ مسافت طی شده خواهد شد:

$$\ell=۱۲(4A)+2A\Rightarrow\ell=50A$$

یادآوری تندی متوسط برابر است با: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}$

۵ تندی متوسط ذرهٔ M در این مدت برابر ۶m/s است از این‌رو خواهیم داشت:

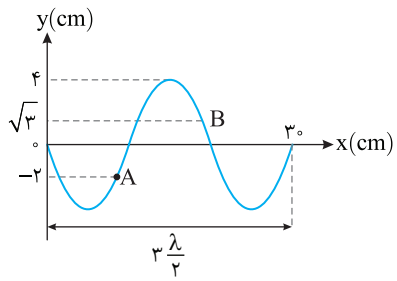
$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow 6=\frac{50A}{۰/۲۵}\Rightarrow A=۰/۰۳m\Rightarrow A=3cm$$

B ۲ ۱۶۲۵

خط فکری در این مسئله با دو ذره از محیط سر و کار دارید اما مهم نیست زیرا تمام مراحل حل مسئله مثل قبل است. نکتهٔ دیگر در حل این مسئله این است که مکان ذرهٔ B برحسب دامنه $\frac{x_B}{A}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ است که شناخته شده نیست. نگران نباشید حل را ببینید.

۱ گام اول: طول موج را از روی محور افقی نقش موج به‌دست می‌آوریم:

$$3\frac{\lambda}{2}=30\Rightarrow\lambda=20cm$$



۲ گام دوم: با استفاده از تندی انتشار موج، دوره را به‌دست می‌آوریم:

$$T=\frac{۰/۲}{8}\Rightarrow T=\frac{1}{40}s$$

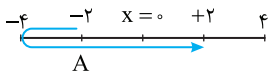
۳ مشخص می‌کنیم بازهٔ زمانی داده شده چه کسری از دوره است:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{80}}{\frac{1}{40}}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{2}$$

نکته در مدت $\frac{T}{2}$ مکان و سرعت نوسانگر قرینه می‌شود.

۴ ذرهٔ A در مکان −2cm قرار دارد بنابراین بعد از $\frac{T}{2}$ مکان آن قرینه می‌شود یعنی مکانش +2cm خواهد شد و جابه‌جایی آن از −2cm تا +2cm برابر +4cm خواهد بود.

$$\Delta y_A=2+2=4cm$$



(مسیر A)

۵ ذرهٔ B در مکان $+\sqrt{3}cm$ قرار دارد و در مدت $\frac{T}{2}$ مکان آن قرینه شده و برابر $-\sqrt{3}cm$ می‌شود بنابراین جابه‌جایی آن از $+\sqrt{3}cm$ تا $-\sqrt{3}cm$ برابر $-2\sqrt{3}cm$ خواهد شد:

$$|\Delta y_B|=\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}cm$$

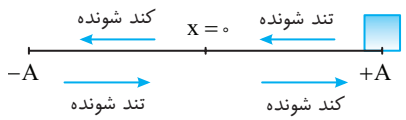
(مسیر B)

۶ نسبت جابه‌جایی‌ها برابر است با:

$$\frac{|\Delta y_B|}{\Delta y_A}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

B ۱ ۱۶۲۶

خط فکری در حل مسائل نقش موج، معمولاً شما باید از روی نمودار، طول موج سپس به کمک تندی انتشار موج، دورهٔ موج یعنی دورهٔ حرکت هماهنگ ساده ذرات محیط را حساب کنید.

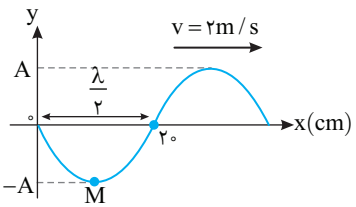


از طرفی هر گاه در مورد رفتار یک ذره از محیط از شما سؤال شود، باید به سراغ حرکت هماهنگ ساده بروید و به کمک دانسته‌های خود در مورد حرکت هماهنگ ساده، حرکت آن ذره را بررسی کنید. اگر ذره از مرکز نوسان به سوی دامنه حرکت کند حرکت آن کندشونده و اگر از دامنه به‌سوی مرکز برود حرکت آن تندشونده است.

اکنون به سراغ حل مسئله بروید.

ابتدا طول موج را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{\lambda}{۲}=۲۰\Rightarrow\lambda=۴۰cm$$

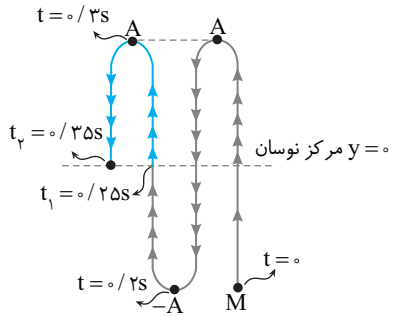


دوره را حساب می‌کنیم:

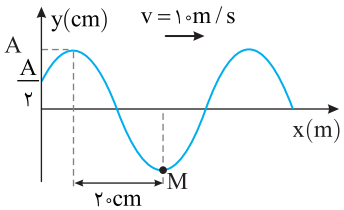
$$T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۴}{۲}\Rightarrow T=۰/۲s$$

دوره را $T=۰/۲s$ به‌دست آورده‌ایم. نمودار مربوط به لحظهٔ $t=۰$ است اما طراح بازهٔ زمانی را از $t_۱=۰/۲۵s$ شروع کرده است یعنی ابتدا شما باید بررسی کنید که ذرهٔ M در لحظهٔ $t_۱$ در چه مکانی است. در مدت یک دوره یک نوسانگر به جای اولیهٔ خود باز می‌گردد، بنابراین در $t=۰/۲s$ نقطهٔ M در مکان $-A$ است. دقت کنید که $۰/۰۵s$ در این حرکت برابر $\frac{T}{۴}$ دوره است و در $\frac{T}{۴}$ متحرک از دامنه به مرکز نوسان و بالعکس می‌رود. اکنون ادامهٔ حرکت را بررسی می‌کنیم. در مدت $۰/۰۵s-۰/۲۵=۰/۲$ متحرک به محل تعادل خود می‌رسد $(y=۰)$ و از آن جا به مدت $۰/۰۵s$ به انتهای مسیر (نقطهٔ A) می‌رود که حرکت کندشونده است $(t=۰/۳s)$ و در $۰/۰۵s$ باقیمانده از A به تعادل بر می‌گردد و حرکت تندشونده است.

(البته این مسیر روی خط راست است که برای درک بهتر آن به صورت شکل زیر نمایش داده شده است.)



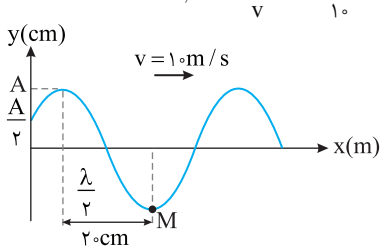
بازی با سؤال شکل زیر، نقش موج عرضی طنابی را در یک لحظه نشان می‌دهد. حرکت ذرهٔ M در بازهٔ زمانی $۰\le t\le\frac{۱}{۱۰۰}s$ چگونه است؟ ریاضی - ۹۰



۱) کندشونده
۲) تندشونده
۳) ابتدا تندشونده و سپس کندشونده
۴) ابتدا کندشونده و سپس تندشونده

پاسخ طول موج و سپس دوره را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\lambda}{۲}=۲۰cm\Rightarrow\lambda=۴۰cm=۰/۴m\quad,\quad T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۴}{۱۰}\Rightarrow T=\frac{۴}{۱۰۰}s$$



مشخص می‌کنیم که $\frac{۱}{۱۰۰}s$ چه کسری از دوره است:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{۱}{۱۰۰}}{\frac{۴}{۱۰۰}}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۴}$$

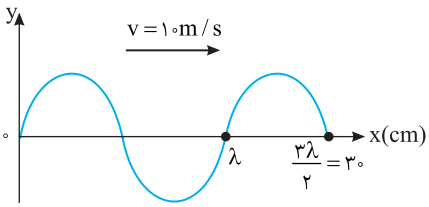
با توجه به شکل در مدت $\frac{T}{۴}$، M از مکان $-A$ به مرکز نوسان می‌رود و حرکتش تندشونده است.

گزینهٔ ۲

B ۱۶۲۷ ۳

خط فکری معمولاً در مسائل موج و نوسان لازم است نسبت $\frac{\Delta t}{T}$ را محاسبه کنیم. برای این منظور مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱ با توجه به نمودار طول موج را حساب می‌کنیم: $\frac{۳\lambda}{۲}=۳۰\Rightarrow\lambda=۲۰cm=۰/۲m$

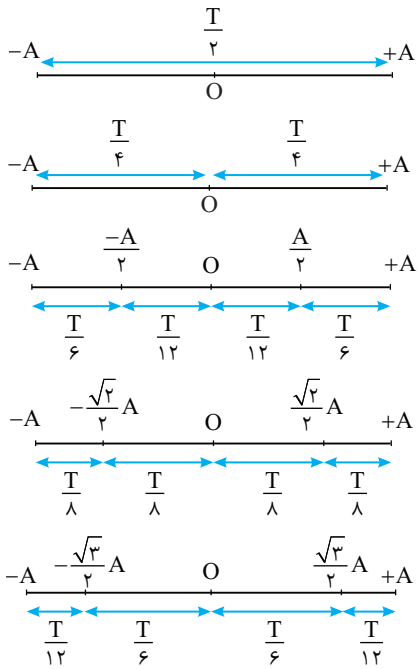


۲ حال دورهٔ موج را حساب می‌کنیم: $v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow ۱۰=\frac{۰/۲}{T}\Rightarrow T=۰/۰۲s=\frac{۲}{۱۰۰}s$

۳ بازهٔ زمانی داده شده را بر حسب دوره به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta t=\frac{۹}{۴۰۰},\ T=\frac{۲}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{۹}{۸}\Rightarrow\Delta t=\frac{۹}{۸}T=T+\frac{T}{۸}$$

نکته برای بررسی نوسان ذره‌های موج در هر لحظه لازم است بازه‌های زمانی زیر را به خاطر بسپارید:

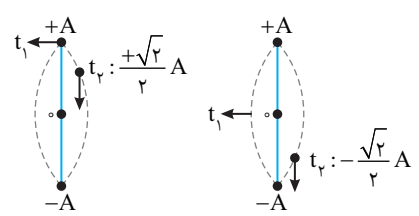


۴ حال حرکت ذره‌های A و B را بررسی می‌کنیم.

ذرات A و B روی ریسمان در حال نوسان‌اند.

نوسان A: ذرهٔ A ابتدا در دامنهٔ مثبت قرار دارد پس از یک دوره (T) مجدد به همان مکان می‌رسد و $\frac{T}{۸}$ ثانیه بعد به مکان $+\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ می‌رسد.

نوسان B: ذرهٔ B ابتدا در $x=۰$ قرار دارد و با توجه به جهت انتشار موج، ذرهٔ قبلی B پایین‌تر از آن قرار داد و این ذره ابتدا به سمت پایین شروع به نوسان کرده و پس از T مجدد به همان مکان می‌رسد و در مدت $\frac{T}{۸}$ به مکان $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ می‌رسد:



نکته برای یک نوسانگر تندی در دامنه‌ها صفر و در $x=0$ بیشینه است:

$$v=0 \quad v_{max} \quad v=0$$
$$-A \quad 0 \quad A$$

۵ مکان ذره‌های A و B در $x=0$ و $x=A$ نیست پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست است.

۶ ذرهٔ A در حال حرکت به سمت $x=0$ است، پس ذرهٔ A در حال حرکت به سمت مکانی است که تندی در آن بیشینه می‌شود و حرکت این ذره تندشونده است. ذرهٔ B در حال حرکت به سمت $x=-A$ است، پس ذرهٔ B در حال حرکت به سمت مکانی است که تندی آن صفر می‌شود، پس حرکت این ذره کندشونده است و گزینهٔ (۳) درست است.

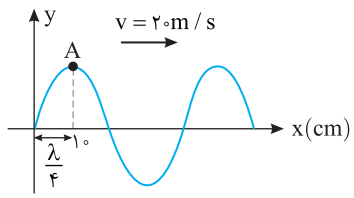
B ۱۶۲۸ ۱

نکته هنگام گذر نوسانگر از حالت تعادل $(y=0)$ جهت بردار مکان تغییر می‌کند.

۱ گام اول: یافتن طول موج از روی محور افقی: $\frac{\lambda}{4}=10\Rightarrow\lambda=40cm=0/4m$

۲ گام دوم: یافتن دوره با استفاده از تندی انتشار موج:

$\lambda=vT\Rightarrow 0/4=20T\Rightarrow T=0/02s$



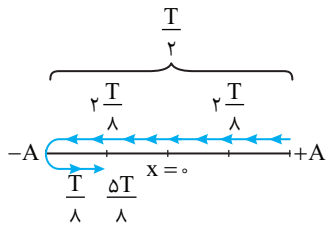
۳ گام سوم: نقطهٔ مورد نظر در چه جهتی حرکت خواهد کرد؟ نقطهٔ A در دامنه قرار دارد و قطعاً رو به پایین حرکت خواهد کرد و به مرکز نوسان نزدیک می‌شود.

۴ گام چهارم: مشخص می‌کنیم که $\frac{1}{80}s$ چه کسری از دوره است:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{80}}{\frac{2}{100}}=\frac{5}{8}\Rightarrow\Delta t=\frac{5}{8}T$$

۵ مسیر حرکت را رسم می‌کنیم. نوسانگر در بازهٔ حرکت از $+A$ با $-A$ یعنی $\frac{T}{2}$ یکبار از مرکز نوسان می‌گذرد و بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

اما در ادامهٔ بازه یعنی $\frac{\Delta T}{8}-\frac{T}{2}=\frac{T}{8}$ نوسانگر دیگر به مرکز نوسان نمی‌رسد. بنابراین بردار مکان ذرهٔ A در مدت $\frac{1}{80}s$ تنها یک بار تغییر جهت می‌دهد.



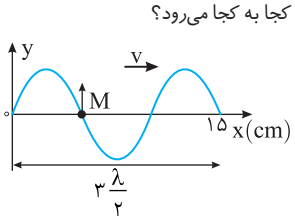
B ۱۶۲۹ ۳

خط فکری از روی نمودار نقش موج، طول موج را به‌دست بیاورید و دورهٔ حرکت ذرات محیط را حساب کنید. در مسئله راجع به رفتار یک ذره از محیط (ذرهٔ M) از شما سؤال شده است بنابراین پس از پیدا کردن دوره، شما باید حرکت هماهنگ ساده ذره M را بررسی کنید و بازهٔ زمانی داده شده را با دوره مقایسه کنید تا متوجه شوید در بازهٔ زمانی داده شده برای ذرهٔ M چه اتفاقی می‌افتد و از کجا به کجا می‌رود؟

۱ با توجه به شکل طول موج خواهد شد: $3\frac{\lambda}{2}=15\Rightarrow\lambda=10cm$

۲ بسامد موج را به‌دست می‌آوریم:

$v=f\lambda\Rightarrow 20=f(10)\Rightarrow f=2Hz$

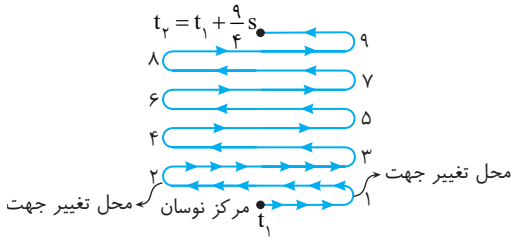


۳ دوره را حساب می‌کنیم: $T=\frac{1}{f}\Rightarrow T=\frac{1}{2}s$

۴ اکنون $\Delta t=\frac{9}{4}s$ را با دوره مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\Delta t=\frac{9}{2}T$$

۵ وقتی که در مسئله دربارهٔ حرکت یک ذره از محیط پرسش می‌شود، یعنی شما باید به سراغ حرکت هماهنگ ساده بروید. در حرکت هماهنگ ساده در هر دوره، نوسانگر به موقعیت قبلی خود باز می‌گردد یعنی مکان و سرعت خود را تکرار می‌کند. با توجه به جهت پیشروی موج نقطهٔ M در مرکز نوسانش در حال حرکت رو به بالاست و در هر بازهٔ $\frac{T}{2}$، یکبار جهت حرکتش عوض می‌شود بنابراین در مدت $(\frac{T}{2})9$، ۹ بار جهت حرکتش عوض می‌شود.



نکته دقت کنید در صورت مسئله به جای تعداد تغییر جهت حرکت می‌توانست پرسش‌های زیر را مطرح کند:

۱) تندی نوسانگر چند بار صفر می‌شود؟ ۹ بار

۲) بزرگی شتاب نوسانگر چند بار بیشینه می‌شود؟ ۹ بار

۳) انرژی پتانسیل نوسانگر چند بار بیشینه می‌شود؟ ۹ بار

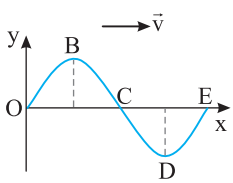
۴) انرژی جنبشی نوسانگر چند بار صفر می‌شود؟ ۹ بار

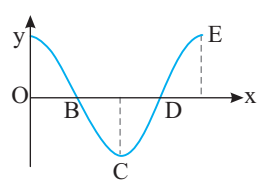
B ۱۶۳۰ ۱

خط فکری در حل این مسائل باید یک نقطه از محیط مثلاً نقطهٔ M را انتخاب کنید سپس با توجه به جهت حرکت آن مشخص کنید که در بازهٔ زمانی بیان شده نقطهٔ M به چه مکانی می‌رود. یک نقطهٔ دیگر را نیز انتخاب کنید سپس نمودارهای داده شده در گزینه‌ها را بررسی کنید و ببینید در کدام نمودار وضعیت دو نقطه‌ای که انتخاب کرده‌اید درست نشان داده شده است.

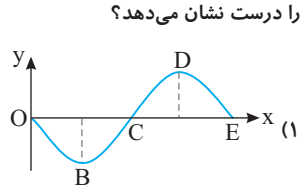
موج در حال حرکت به سمت چپ است بنابراین ذرهٔ موج در حال نزدیک شدن به نقطهٔ M است و نقطهٔ قبل از M نیز پایین‌تر از M قرار دارد بنابراین M رو به پایین حرکت می‌کند و در مدت $\frac{T}{4}$ نقطهٔ M به دامنهٔ $-A$ می‌رسد بنابراین نمودار گزینهٔ (۱) پاسخ مسئله است.

بازی با سؤال در شکل روبه‌رو، شکل یک موج نشان داده شده است. پس از گذشت زمان $\frac{T}{4}$، کدام گزینه شکل موج را درست نشان می‌دهد؟

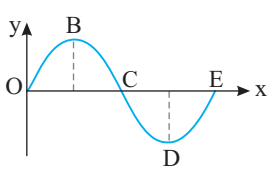




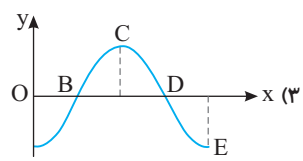
۲)



۱)

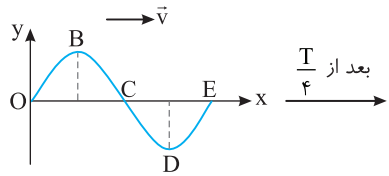


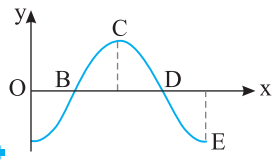
۴)



۳)

پاسخ نقطـهٔ B را در نظـر می‌گیریم. پس از $\frac{T}{4}$ نقطهٔ B از $+A$ به مرکز نوسـان می‌آید بنابراین B باید روی محور x باشد. اما نقطهٔ C از مرکز نوسان در حال حرکت رو به بالاسـت و بعد از $\frac{T}{4}$ به $+A$ می‌رسـد یعنی C باید در دامنهٔ $+A$ باشد. تنها گزینه‌ای که چنین است گزینهٔ (۳) است.

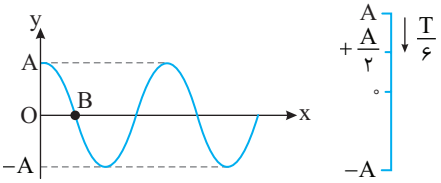




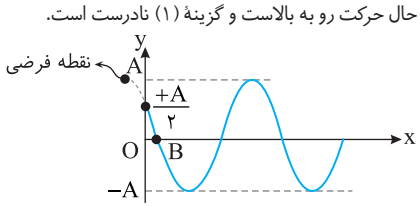
گزینهٔ ۳

C ۱۶۳۱ ۲

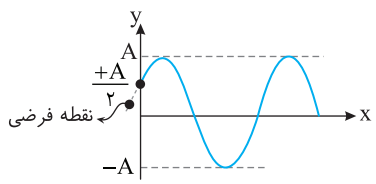
به مبدأ نمودار نگاه کنید. نقطهٔ مبدأ در دامنهٔ $+A$ قرار دارد و قطعاً با گذشت زمان باید بـه پاییـن بیایـد اما یک نوسـانگر سـاده در مـدت $\frac{T}{6}$ از مکان $+A$ بـه مکان $+\frac{A}{2}$ می‌رسـد. بنابرایـن گزینه‌های (۳) و (۴) نادرسـت هسـتند زیرا مکان $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ شـده است. بعد از این لحظه همچنان ذرهٔ O باید رو به پایین در حرکت باشد.



در شـکل گزینهٔ (۱) اگر نقطه‌ای قبل از مبدأ فرض کنید آن نقطه بالاتر از $+\frac{A}{2}$ اسـت بنابراین O در حال حرکت رو به بالاست و گزینهٔ (۱) نادرست است.



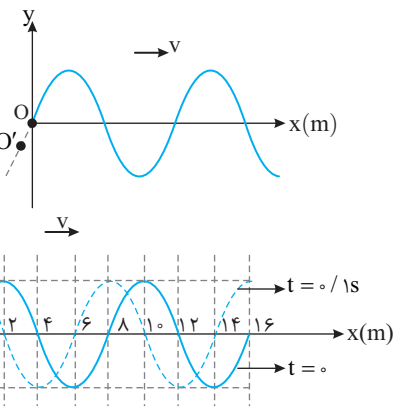
در شـکل گزینـهٔ (۲) نقطـهٔ فرضی قبل از مبدأ در حال حرکت رو به پایین اسـت و جواب مسئله گزینهٔ (۲) است.



A ۱۶۳۲ ۱

خط فکری سؤال عجیب و زیبایی است. نقش موج در دو لحظهٔ $t=0$ و $t=0/1s$ رسـم شـده است یعنی موج در $0/1s$ پیشروی کرده و جلو رفته است. باید به نمودار در لحظـهٔ $t=0$ دقت کنید. نمودار را در قسـمت منفی x ادامه دهیـد، خواهید دید که در لحظهٔ $t=0$ قلهٔ موج از O گذشـته و نقطهٔ فرضی قبل از O پایین‌تر از O بوده یعنی O رو به پایین در حال حرکت اسـت اما نمودار در لحظهٔ $t=0/1s$ نشـان می‌دهد که O در این لحظه به مکان $+A$ رسـیده است این چگونه ممکن است؟ مطابق شکل باید O به $-A$ رفته $(\frac{T}{4})$ و از $-A$ به $+A$ رفته باشـد یعنی $(\frac{T}{2})$ $0/1s$ برابر $\frac{3T}{4}$ است.

حال مسئله قابل حل است.



با توجه به جهت سـرعت انتشـار موج نقطهٔ O در حال پایین رفتن اسـت و مطابق شکل $0/1\,s$ معادل $3\frac{T}{4}$ می‌باشد از این‌رو دوره خواهد شد:

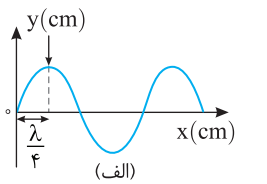
$$3\frac{T}{4}=0/1\Rightarrow T=\frac{4}{30}s\Rightarrow f=\frac{30}{4}=7/5Hz$$

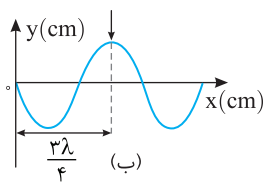
با توجه به شکل $\lambda=8m$ است از این‌رو:

$$v=f\lambda\Rightarrow v=7/5\times 8=60m/s$$

A ۱۶۳۳ ۳

خط فکری بـرای نمایش یک نقطه از مـوج کـه در حال پیشـروی در یـک محیط اسـت، آن را با یک فلش مشخص می‌کنند. در شـکل (الف)، نقطهٔ مورد نظـر در فاصلهٔ $\frac{\lambda}{4}$ از مبدأ قرار دارد و در بازهٔ $\Delta t=t_2-t_1$ به فاصلهٔ $\frac{3\lambda}{4}$ از مبدأ رسـیده اسـت (شکل ب). در ایـن مـدت مـوج $\frac{3\lambda}{4}-\frac{\lambda}{4}=\frac{\lambda}{2}$ پیشـروی می‌کنـد. مـدت زمانی کـه طول می‌کشد موج $\frac{\lambda}{2}$ پیشروی کند برابر $\frac{T}{2}$ است. با توجه به این نکته مسئله قابل حل است.





۱ دوره را حساب می‌کنیم:

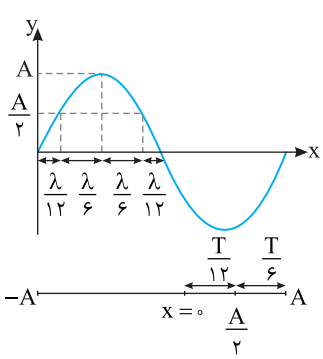
$$T=\frac{1}{f}\xrightarrow{f=50Hz}T=\frac{1}{50}=0/02s$$

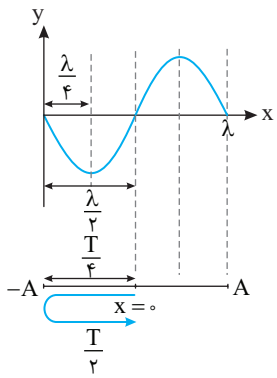
۲ بازهٔ زمانی t_2-t_1 برابر نصف دوره است بنابراین:

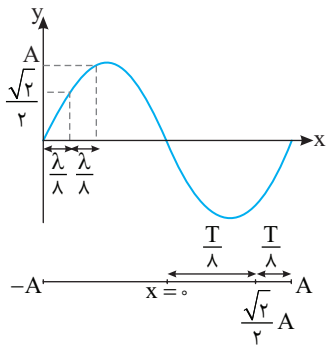
$$\Delta t=\frac{T}{2}=\frac{0/02}{2}=0/01s\Rightarrow\Delta t=10^{-2}s$$

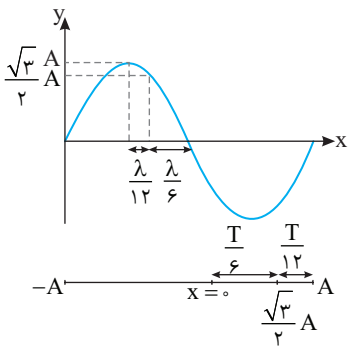
B ۱۶۳۴ ۳

خط فکری طول موج فاصله‌ای اسـت (مسـافتی) کـه موج در مدت یـک دوره طی می‌کند. جالب اسـت بدانید تمام تقسـیمات در بازه‌های زمانی شناخته شـده، عیناً در مورد بازه‌های مکانی برقرار است.





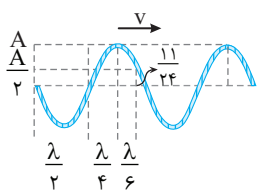




با توجه به شکل و بازه‌های مکانی شناخته شده می‌توان نوشت:

$$\frac{\lambda}{۲}+\frac{\lambda}{۴}+\frac{\lambda}{۶}=\frac{۱۱}{۲۴}$$

$$\Rightarrow\frac{۶\lambda+۳\lambda+۲\lambda}{۱۲}=\frac{۱۱}{۲۴}\Rightarrow\lambda=۰/۵\text{m}$$



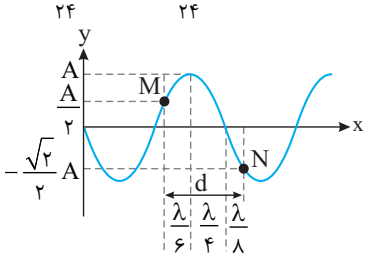
تندی انتشار موج برابر است با:

$$v=f\lambda=۵۰\times۰/۵=۲۵\text{m/s}$$

B ۱۶۳۵ ۴

۱ با توجه به بازه‌های مکانی شناخته شده مسافت طی شده را بر حسب طول موج به دست می‌آوریم:

$$d=\frac{\lambda}{۶}+\frac{\lambda}{۴}+\frac{\lambda}{۸}=\frac{۴\lambda+۶\lambda+۳\lambda}{۲۴}\Rightarrow d=\frac{۱۳}{۲۴}\lambda$$



۲ نکتهٔ مهم این است که موج، مسافت λ را در مدت یک دوره (T) طی می‌کند بنابراین مسافت $\frac{۱۳\lambda}{۲۴}$ را در مدت $\frac{۱۳}{۲۴}T$ طی می‌کند از این‌رو:

$$\frac{۱۳T}{۲۴}=۰/۲۶\Rightarrow T=۰/۴۸\text{s}$$

۳ تعداد نوسانات در ۱/۶ دقیقه خواهد شد:

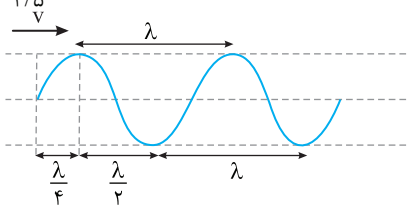
$$N=\frac{t}{T}\Rightarrow N=\frac{۱/۶\times۶۰}{۰/۴۸}=۲۰۰$$

A ۱۶۳۶ ۲

یادآوری در موج عرضی، راستای نوسان ذره‌های محیط بر راستای پیشروی موج عمود است و در شکل ظاهری موج عرضی، برآمدگی و فرورفتگی قابل مشاهده است. در موج عرضی فاصلهٔ بین دو برآمدگی یا دو فرورفتگی متوالی برابر یک طول موج (λ) بوده و فاصلهٔ بین یک برآمدگی از فرورفتگی مجاورش $\frac{\lambda}{۲}$ است.

در این پرسش، کافی است طول موج را به‌دست آوریم:

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{۰/۵}{۲/۵}\Rightarrow\lambda=۰/۲\text{m}=۲۰\text{cm}$$



B ۱۶۳۷ ۲

خط فکری منظور از ضربهٔ موج بر ساحل، برخورد برآمدگی موج به ساحل است. بنابراین وقتی اختلاف زمانی دو ضربهٔ متوالی ۲s باشد، یعنی دورهٔ نوسان موج ۲s است. از طرفی فاصلهٔ دو برآمدگی متوالی یعنی طول موج بنابراین به راحتی می‌توانید تندی انتشار موج را حساب کرده و زمانی که این موج مسافت ۱۲۰m را طی می‌کند به دست بیاورید.

۱ تندی انتشار موج را به دست می‌آوریم: $v=\frac{\lambda}{T}\xrightarrow[T=۲\text{s}]{\lambda=۱\text{m}}v=\frac{۱}{۲}\text{m/s}$

۲ زمان رسیدن موج از چشمه به نقطه‌ای در فاصلهٔ ۱۲۰ متری خواهد شد:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow ۱۲۰=\frac{۱}{۲}\Delta t\Rightarrow\Delta t=۲۴۰\text{s}=۴\text{ min}$$

B ۱۶۳۸ ۴

نکته تندی امواج سطحی آب در آب‌های کم‌عمق به عمق بستگی دارد و هرچه عمق آب کمتر باشد، تندی انتشار موج سطحی کمتر می‌شود.

عمق ظرف (۲) از عمق ظرف (۱) کمتر است و تندی انتشار امواج سطحی در ظرف (۲) از ظرف (۱) کمتر است. $(v'_۲<v'_۱)$

اما در مورد بیشینه تندی ذرات محیط $(v_m=A\omega)$ باید بسامد زاویه‌ای نوسان‌سازها را به‌دست بیاوریم:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega_۱=\sqrt{\frac{k}{۴}},\omega_۲=\sqrt{\frac{k}{۸}}\Rightarrow\frac{\omega_۱}{\omega_۲}=\sqrt{\frac{۸}{۴}}=\sqrt{۲}\Rightarrow\frac{\omega_۲}{\omega_۱}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنا به فرض مسئله دامنه‌ها یکسان است بنابراین:

$$\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{A\omega_۲}{A\omega_۱}\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow v_۲<v_۱$$

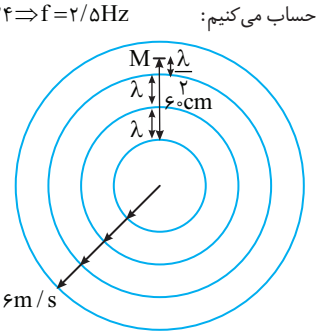
A ۱۶۳۹ ۴

خط فکری نقطهٔ M وسط دو جبهه موج متوالی قرار دارد بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ M از جبههٔ موج مجاورش $\frac{\lambda}{۲}$ است و فاصلهٔ دو جبههٔ متوالی λ است. با توجه به این نکته بررسی کنید ۶۰cm معادل چند λ است و λ را به‌دست آورده سپس با استفاده از تندی انتشار امواج، بسامد را حساب کنید.

۱ با توجه به شکل فاصلهٔ ۶۰cm معادل $\lambda+\lambda+\frac{\lambda}{۲}=\frac{۵\lambda}{۲}$ است بنابراین طول موج خواهد شد:

$$\frac{۵}{۲}\lambda=۰/۶\Rightarrow\lambda=\frac{۱/۲}{۵}\Rightarrow\lambda=۰/۲۴\text{m}$$

۲ بسامد را حساب می‌کنیم: $v=f\lambda\Rightarrow۰/۶=f\times۰/۲۴\Rightarrow f=۲/۵\text{Hz}$



A ۱۶۴۰ ۲

۱ در شکل B ، فاصلهٔ جبهه‌های موج بیشتر است بنابراین طول موج در تشت موج B از طول موج در تشت موج A بلندتر است. چشمه‌های موج مشابه بوده یعنی بسامد یکسان است از این‌رو: $\lambda_B > \lambda_A , f_B = f_A \Rightarrow v_B > v_A$

نکته تندی امواج در سطح آب به عمق آب بستگی دارد و در عمق بیشتر تندی امواج بیشتر است.

۲ تندی انتشار امواج سطحی در تشت موج B از تندی انتشار امواج در تشت موج A بیشتر است، بنابراین عمق تشت موج B از عمق تشت موج A بیشتر است.

A ۱۶۴۱ ۱

ثابت می‌شود مقدار متوسط آهنگ انتقال انرژی (توان متوسط) در یک موج سینوسی برای همهٔ انواع امواج مکانیکی با مربع دامنه (A^2) و نیز مربع بسامد (f^2) موج متناسب است.

A ۱۶۴۲ ۲

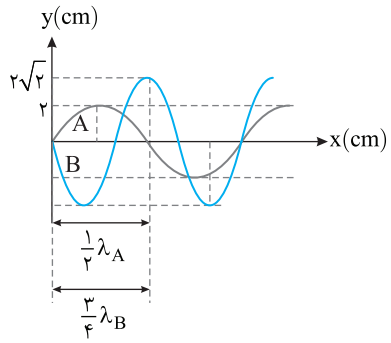
مقدار متوسط آهنگ انتقال انرژی با مربع دامنه (A^2) و مربع بسامد (f^2) متناسب است، بنابراین با دو برابر شدن دامنه و نصف شدن بسامد مقدار متوسط آهنگ انتقال انرژی تغییر نمی‌کند (دقت کنید با دو برابر شدن دوره بسامد نصف می‌شود.)

$$\frac{\overline{P}_2}{\overline{P}_1} = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 \times \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{2}f_1}{f_1}\right)^2 \times \left(\frac{2A_1}{A_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{\overline{P}_2}{\overline{P}_1} = 1$$

B ۱۶۴۳ ۲

یادآوری توان متوسط انتقال انرژی با مربع دامنه (A^2) و مربع بسامد (f^2) موج متناسب است.

۱ با توجه به شکل مسئله، دامنهٔ نوسان ذرات محیط در موج A برابر ۲cm و دامنهٔ نوسان ذرات در موج B برابر $2\sqrt{2}$cm است، پس $\frac{A_B}{A_A} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$



۲ نصف طول موج A برابر $\frac{3}{4}$ طول موج B است. بنابراین:

$$\frac{1}{2}\lambda_A = \frac{3}{4}\lambda_B \Rightarrow \frac{\lambda_B}{\lambda_A} = \frac{2}{3}$$

۳ با توجه به این‌که هر دو موج در طناب واحدی منتشر می‌شوند، بنابراین سرعت انتشار هر دو موج یکسان است و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} v_A = \lambda_A f_A \\ v_B = \lambda_B f_B \end{cases} \xrightarrow{v_A = v_B} \lambda_A f_A = \lambda_B f_B \Rightarrow \frac{f_B}{f_A} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{3}{2}$$

۴ نسبت توان‌ها خواهد شد:

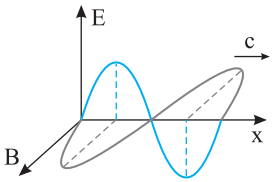
$$\frac{\overline{P}_B}{\overline{P}_A} = \left(\frac{A_B}{A_A}\right)^2 \times \left(\frac{f_B}{f_A}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2 \times \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$$

A ۱۶۴۴ ۲

یادآوری امواج الکترومغناطیسی از دو میدان الکتریکی و مغناطیسی هم‌بسامد، همگام و عمود بر هم تشکیل شده‌اند که این میدان‌ها بر امتداد پیشروی موج عمودند.

با توجه به یادآوری گزینهٔ (۲) درست است.

A ۱۶۴۵ ۲



میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی موج الکترومغناطیسی، هم‌بسامد و همگام هستند یعنی در هر لحظه یکی از آن‌ها بیشینه باشد دیگری نیز بیشینه است. از طرفی این دو میدان بر هم عمودند بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

A ۱۶۴۶ ۴

موج الکترومغناطیسی از دو میدان الکتریکی و مغناطیسی هم‌بسامد و عمود بر هم تشکیل شده که این میدان‌ها بر مسیر حرکت عمود بوده و این امواج عرضی هستند و گزینهٔ (۱) درست است. تمام امواج الکترومغناطیسی در خلأ با سرعت $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ منتشر می‌شوند و گزینهٔ (۲) درست است. بسامد نوسان میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی موج الکترومغناطیسی یکسان بوده بنابراین تعداد نوسان‌های این دو میدان در واحد زمان (۱s) برابر است و گزینهٔ (۳) درست است. طول موج میدان الکتریکی و مغناطیسی تمام امواج الکترومغناطیسی با هم برابرند و گزینهٔ (۴) نادرست است.

بازی با سؤال **کدام یک از گزینه‌های زیر جزء ویژگی‌های موج الکترومغناطیسی نیست؟** از کتاب درسی

۱) حامل انرژی و حامل بار الکتریکی هستند.

۲) عرضی بوده و در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی منحرف نمی‌شود.

۳) تندی انتشار تمام طول موج‌های موج الکترومغناطیسی یکسان است.

۴) میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی آن‌ها بر مسیر پیشروی موج عمود است.

پاسخ یادآوری **ویژگی‌های امواج الکترومغناطیسی:**

۱ موج‌های الکترومغناطیسی از یک میدان الکتریکی و یک میدان مغناطیسی هم‌دوره، همگام و عمود بر هم تشکیل شده‌اند.

۲ این امواج حامل انرژی بوده و

۳ حامل بار الکتریکی نیستند و گزینهٔ (۱) نادرست است.

۴ در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی منحرف نمی‌شوند.

۵ این امواج عرضی هستند و گزینهٔ (۲) درست است.

۶ سرعت آن‌ها در خلأ یکسان و برابر $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ است و گزینهٔ (۳) درست است.

۷ میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بر مسیر پیشروی موج عمودند و گزینهٔ (۴) درست است.

گزینهٔ ۱

B ۱۶۴۷ ۳

در اطراف بار الکتریکی چه ساکن و چه متحرک میدان الکتریکی وجود دارد. از طرفی هرگاه میدان مغناطیسی در ناحیه‌ای از فضا تغییر کند، در آن ناحیه میدان الکتریکی القایی به‌وجود می‌آید و گزینهٔ (۱) درست است.

در اطراف آهن‌ربا و سیم حامل جریان الکتریکی، میدان مغناطیسی وجود دارد. از طرفی هر گاه میدان الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا تغییر کند در آن ناحیه میدان مغناطیسی به وجود می‌آید و گزینهٔ (۲) درست است.

در موج‌های الکترومغناطیسی، میدان الکتریکی و مغناطیسی بر راستای انتشار موج عمودند و گزینهٔ (۳) نادرست است.

امواج الکترومغناطیسی در هر سه محیط منتشر می‌شوند و بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

بازی با سؤال **امواج الکترومغناطیسی در کدام یک از این مواد می‌توانند منتشر شوند؟**

۱) شیشه ۲) آب

۳) آهن ۴) هر سه گزینه درست هستند.

پاسخ **موج‌های الکترومغناطیسی در تمام محیط‌ها حتی در خلأ منتشر می‌شوند. برای مثال، نور مرئی از آب و شیشه می‌گذرد و امواج x و γ از آهن می‌گذرند.**

گزینهٔ ۴

۱۶۴۸ A ۲

بنا به نظریهٔ ماکسول، تغییر هر کدام از میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی با زمان، میدان دیگری را ایجاد می‌کند. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

۱۶۴۹ A ۴

بنابر قانون القای الکترومغناطیس فاراده: تغییر شار مغناطیسی گذرنده از یک مدار بسته سبب ایجاد نیروی محرکهٔ القایی می‌شود، بنابراین گزینهٔ (۱) نظریهٔ فاراده بوده و نظریهٔ ماکسول نیست و گزینهٔ (۱) نادرست است.

نکته طبق نظریه ماکسول، عامل ایجاد امواج الکترومغناطیسی حرکت شتاب‌دار ذرهٔ باردار است. در گزینهٔ (۲) تنها به حرکت بار اشاره شده و این گزینه نادرست است. گزینهٔ (۳) بنابر قانون لنز درست است، نه ماکسول، گزینهٔ (۴) بیان مستقیم ماکسول است. پس گزینهٔ (۴) درست است.

۱۶۵۰ A ۳

تندی انتشار تمام امواج الکترومغناطیسی در خلأ یکسان و برابر $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ است که در آن ε_0 ضریب گذردهی الکتریکی خلأ و μ_0 قابلیت تراوایی مغناطیسی خلأ بوده یعنی $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ از جنس سرعت است.

۱۶۵۱ A ۱

سرعت تمام موج‌های الکترومغناطیسی در خلأ یکسان و برابر با $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ است. از این‌رو:

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\Rightarrow c^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\Rightarrow \varepsilon_0\mu_0=c^{-2}$$

با توجه به فرض مسئله $\varepsilon_0\mu_0=c^k$ است. بنابراین:

$$c^{-2}=c^k\Rightarrow k=-2$$

۱۶۵۲ A ۱

سرعت انتشار موج در یک محیط مقدار ثابتی است و معادلهٔ انتشار موج همان معادلهٔ حرکت یکنواخت با سرعت ثابت روی خط راست است.

$$\Delta x=vt\xrightarrow[v=c]{\Delta x=300\times10^3\,m}300\times10^3=3\times10^8 t\Rightarrow t=10^{-3}\,s$$

۱۶۵۳ A ۱

مسافتی که موج در مدت ۶۰ns با تندی $3\times10^8\,m/s$ طی می‌کند را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=vt\Rightarrow\Delta x=3\times10^8\times60\times10^{-9}\Rightarrow\Delta x=18\,m$$

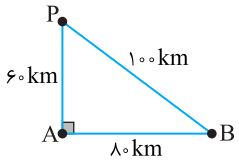
اکنون نسبت $\Delta x/\lambda$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{\Delta x}{\lambda}=\frac{18}{3}=6$$

۱۶۵۴ A ۱

خط فکری یک مسئلهٔ بسیار ساده حرکت‌شناسی است، شما باید زمان رسیدن موج از ایستگاه‌های A و B به گیرندهٔ P را حساب کرده از هم کم کنید.

۱ فاصلهٔ ایستگاه رادیویی B را از گیرندهٔ P حساب می‌کنیم:



$$PB^2=60^2+80^2\Rightarrow PB=100\,km$$

۲ زمان رسیدن سیگنال از ایستگاه A به گیرندهٔ P خواهد شد:

$$\Delta x=vt\Rightarrow60\times10^3=3\times10^8 t_A=t_A=20\times10^{-5}\,s$$

۳ زمان رسیدن سیگنال از ایستگاه B به گیرندهٔ P را حساب می‌کنیم.

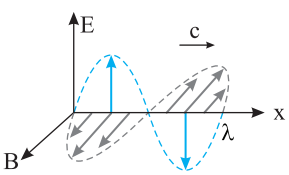
$$\Delta x=vt\Rightarrow100\times10^{+3}=3\times10^8 t_B\Rightarrow t_B=\frac{100}{3}\times10^{-5}\,s$$

۴ اختلاف زمانی خواهد شد:

$$\Delta t=t_B-t_A=\frac{100}{3}\times10^{-5}-20\times10^{-5}=\frac{100-60}{3}\times10^{-5}\Rightarrow\Delta t=\frac{4}{3}\times10^{-4}\,s$$

۱۶۵۵ A ۳

در یک موج الکترومغناطیسی، نوسان‌های میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی دارای بسامد یکسان بوده و سرعت انتشار آن‌ها یکی است، در نتیجه طول موج آن‌ها نیز برابر است.



۱۶۵۶ A ۴

با توجه به رابطهٔ بین طول موج، بسامد و سرعت انتشار موج می‌توان نوشت:

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow{v=c=3\times10^8\,,\,\lambda=0/6\times10^{-6}\,mm}f=\frac{c}{\lambda}$$

$$\Rightarrow f=\frac{3\times10^8}{0/6\times10^{-6}}\Rightarrow f=5\times10^{14}\,Hz$$

بازی با سؤال در یک موج الکترومغناطیسی، طول موج $3\times10^5\,nm$ است. دورهٔ تناوب موج در SI کدام است؟ $(c=3\times10^8\,m/s)$ کنکور دهه‌های گذشته

۱) 10^{-13} ۲) 10^{-12} ۳) $\frac{1}{3}\times10^{-13}$ ۴) $\frac{1}{3}\times10^{-12}$

پاسخ با توجه به تعریف طول موج، دوره را به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda=vT\Rightarrow T=\frac{\lambda}{v}\xrightarrow[c=3\times10^8]{\lambda=3\times10^5\times10^{-9}}T=\frac{3\times10^5\times10^{-9}}{3\times10^8}\Rightarrow T=10^{-12}\,s$$

گزینهٔ ۲

۱۶۵۷ A ۱

در صورت مسئله بیان شده که طول آنتن $\frac{1}{4}$ طول موج دریافتی است، بنابراین وقتی طول آنتن $6/5\,cm$ باشد، طول موج خواهد شد:

$$\text{طول آنتن}=\frac{1}{4}\lambda\Rightarrow6/5=\frac{1}{4}\lambda\Rightarrow\lambda=4\times6/5=26\,cm$$

بسامد موج را به‌دست می‌آوریم:

$$v=f\lambda\Rightarrow f=\frac{v}{\lambda}\Rightarrow f=\frac{3\times10^8}{26\times10^{-2}}\Rightarrow f\approx12\times10^8\,Hz\Rightarrow f=1200\,MHz$$

۱۶۵۸ B ۲

۱ بسامد از ویژگی چشمهٔ موج بوده و با تغییر محیط ثابت می‌ماند. یعنی بسامد نور در هوا و در زجاجیه چشم باهم برابر است. تندی نور در هوا و طول موج نور در هوا را در اختیار داریم بنابراین می‌توانیم بسامد را حساب کنیم

$$\lambda_{هوا}=\frac{v_{هوا}}{f}\xrightarrow{v_{هوا}=3\times10^8\,m/s\,,\,\lambda_{هوا}=0/6\mu m}$$

$$\Rightarrow f=\frac{3\times10^8}{0/6\times10^{-6}}\Rightarrow f=\frac{10^{15}}{2}=5\times10^{14}\,Hz$$

۲ با در اختیار داشتن طول موج این پرتو در زجاجیه $(\lambda'=0/45\mu m)$ و همچنین با داشتن بسامد نور $f=5\times10^{14}\,Hz$ به سادگی تندی انتشار نور در زجاجیه به‌دست می‌آید.

$$v=f\lambda\Rightarrow v=5\times10^{14}\times0/45\times10^{-6}\Rightarrow v=2/25\times10^8\,m/s$$

۱۶۵۹ B ۳

۱ بنا به فرض مسئله طول موج پرتو A، ۱۲۰ نانومتر از طول موج پرتو B، کمتر است.

$$\lambda_B=\lambda_A+120$$

۲ بسامد A، ۲۵ درصد از بسامد B بیشتر است، در نتیجه:

$$f_A=f_B+0/25f_B\Rightarrow f_A=1/25f_B\Rightarrow\frac{f_A}{f_B}=1/25\quad(I)$$

۳ در یک محیط تندی انتشار موج ثابت است، از این‌رو نسبت طول موج‌های A و B عکس نسبت بسامدهای آن‌هاست.

$$\frac{\lambda_B}{\lambda_A}=\frac{\frac{v}{f_B}}{\frac{v}{f_A}}\Rightarrow\frac{\lambda_B}{\lambda_A}=\frac{f_A}{f_B}\xrightarrow{(I)}1/25=\frac{\lambda_A+120}{\lambda_A}\Rightarrow1/25\lambda_A=\lambda_A+120$$

$$\Rightarrow0/25\lambda_A=120\Rightarrow\lambda_A=480\,nm\Rightarrow\lambda_A=0/48\mu m$$

$$\lambda_B=\lambda_A+120\,nm\Rightarrow\lambda_B=600\,nm\Rightarrow\lambda_B=0/6\mu m$$

۱۶۶۰ A ۲

یادآوری در امواج الکترومغناطیسی، میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی همگام (همفاز) هستند، یعنی باهم بیشینه، باهم صفر و باهم کمینه می‌شوند و در هر لحظه‌ای که E بیشینه است در همان لحظهٔ B نیز بیشینه است.

خط فکری مانند حرکت هماهنگ ساده کمترین فاصله زمانی رسیدن نوسانگر از $+A$ به صفر برابر $\frac{T}{4}$ است، در اینجا نیز کمترین فاصلهٔ زمانی رسیدن میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی از حالت بیشینه به صفر $\frac{T}{4}$ است، بنابراین شما باید دوره را حساب کنید. کمینه اختلاف زمانی بین t_1 و t_2، $\frac{T}{4}$ است.

۱ دوره را به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda = vT \xrightarrow[v=c]{\lambda=450m} 450 = 3\times10^{8}\times T \Rightarrow T = \frac{450}{3\times10^{8}}$$

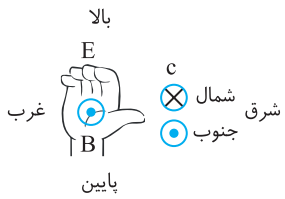
$$\Rightarrow T = 150\times10^{-8}s = 1/5\times10^{-6}s$$

۲ اختلاف زمانی $t_2 - t_1$ خواهد شد:

$$t_2 - t_1 = \frac{T}{4} = \frac{1/5\times10^{-6}}{4} \Rightarrow \Delta t = 0/375\times10^{-6}s = 375ns$$

۳ ۱۶۶۱ A

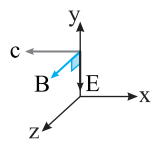
چهار انگشت دست راست خود را رو به بالا بگیرید (در جهت میدان الکتریکی) به گونه‌ای که انگشت شست دست راست شما در راستای انتشار موج (به سمت شرق (سمت راست بدنتان)) باشد، در این حالت کف دست شما در راستای میدان مغناطیسی (رو به جنوب (رو به پشت سر شما)) خواهد بود.



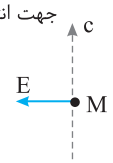
اگر جهت رو به شمال درونسو و جهت رو به جنوب برونسو باشد، جهت B رو به جنوب خواهد بود.

۱ ۱۶۶۲ A

با توجه به قانون دست راست برای موج الکترومغناطیسی باید انگشت شست در جهت پیشروی موج یعنی خلاف جهت محور xها باشد، به گونه‌ای که کف دست در جهت B یعنی محور zها باشد، در این حالت چهار انگشت باز دست راست به سمت yهای منفی است، یعنی جهت میدان الکتریکی در خلاف جهت محور yهاست.



بازی با سؤال **در شکل روبه‌رو، میدان الکتریکی موج الکترومغناطیسی گسیلی از یک آنتن فرستندهٔ رادیویی در نقطهٔ M در لحظهٔ نشان داده شده بیشینه است. در همان لحظه میدان مغناطیسی موج چگونه است؟**



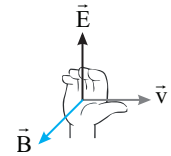
۱) صفر است. ۲) بیشینه رو به بالاست.

۳) بیشینه و برونسو است. ۴) بیشینه و درونسوست.

پاسخ **میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی موج الکترومغناطیسی هم‌بسامد و همگام هستند. بنابراین هنگامی که میدان الکتریکی بیشینه است، میدان مغناطیسی نیز بیشینه است.**

قاعدهٔ دست راست برای موج الکترومغناطیسی:

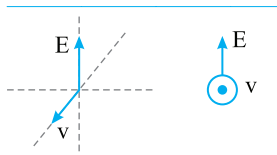
چهار انگشت: جهت میدان الکتریکی، انگشت شست: راستای پیشروی موج، کف دست: جهت میدان مغناطیسی. چهار انگشت باز دست راست را در جهت E به سمت چپ بگیرید به‌طوری که انگشت باز شست به سمت بالای صفحهٔ کاغذ باشد (در جهت c). در این صورت کف دست شما به سمت خارج صفحه یعنی برونسوست. در نتیجه میدان مغناطیسی در این لحظه بیشینه و برونسوست.



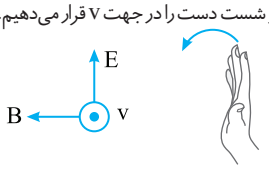
گزینهٔ ۳

۱ ۱۶۶۳ B

با توجه به سؤال جهت انتشار موج به سمت $+z$ یا برونسو است و میدان الکتریکی به سمت بالا است:



چهار انگشت دست راست را در جهت E قرار داده و شست دست را در جهت v قرار می‌دهیم، در این صورت کف دست راست جهت میدان مغناطیسی را مشخص می‌کند. جهت میدان مغناطیسی خلاف جهت محور x است.

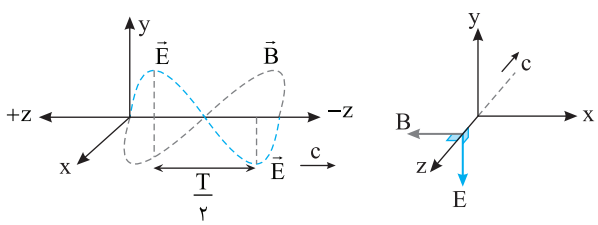


۳ ۱۶۶۴ B

خط فکری ابتدا جهت میدان الکتریکی E را بعد از $\frac{T}{2}$ مشخص می‌کنیم، سپس به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت میدان مغناطیسی را معین می‌کنیم.

۱ در مدت $\frac{T}{2}$ جهت بردار میدان الکتریکی $\vec{E}$ قرینه می‌شود، یعنی جهت میدان E که در جهت مثبت محور yهاست، قرینه شده و در جهت منفی محور yها می‌شود.

۲ چهار انگشت باز دست راست خود را در خلاف جهت محور yها به گونه‌ای بگیرید که انگشت باز شست در خلاف جهت محور z باشد، در این صورت کف دست شما در جهت منفی محور xها خواهد بود.



۲ ۱۶۶۵ A

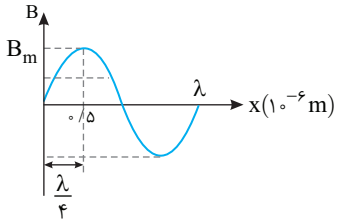
خط فکری نمودار میدان مغناطیسی بر حسب مکان برای موج الکترومغناطیسی شبیه نمودار جابه‌جایی - مکان موج مکانیکی است. از روی محور افقی (xها) طول موج را به‌دست بیاورید، سپس بسامد را حساب کنید.

۱ طول موج را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\lambda}{4} = 0/5\times10^{-6} \Rightarrow \lambda = 2\times10^{-6}m$$

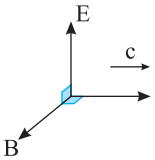
۲ بسامد میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی موج الکترومغناطیسی برابر است.

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{3\times10^{8}}{2\times10^{-6}} \Rightarrow f = 1/5\times10^{14}Hz$$

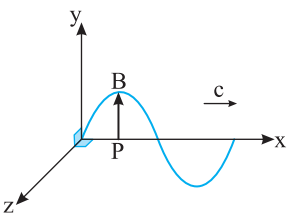


۱ ۱۶۶۶ B

یادآوری در موج الکترومغناطیسی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی برهم عمودند و این میدان‌ها بر جهت پیشروی موج نیز عمودند و از قاعده دست راست پیروی می‌کنند.

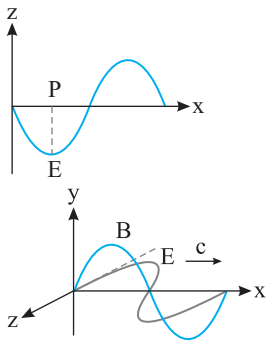


یک نقطه مانند P در نظر بگیرید. کف دست راست خود را رو به بالا در جهت مثبت محور yها بگیرید به گونه ای که انگشت شست باز دست راست شما در جهت مثبت محور xها باشد، در این صورت چهار انگشت باز شما به سمت منفی محور zها خواهد بود.



یعنی میدان الکتریکی موج در نقطهٔ P $\left(\frac{\lambda}{۴}\right)$ باید در خلاف جهت محور z ها باشد.

بنابراین نمودار $E-x$ به صورت شکل روبه‌روست.



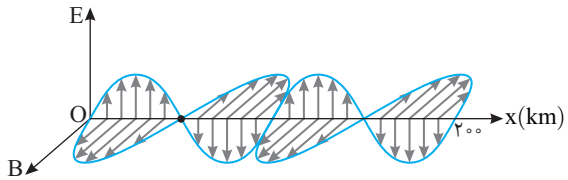
A ۱۶۶۷ ۲

۱ به شکل نگاه کنید و از روی محور افقی طول موج را حساب کنید.

$۲\lambda=۲۰۰\Rightarrow\lambda=۱۰۰km=۱۰^{۵}m$

۲ بسامد را به‌دست می‌آوریم.

$f=\frac{v}{\lambda}\Rightarrow f=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۱۰^{۵}}=۳\times۱۰^{۳}Hz$



B ۱۶۶۸ ۲

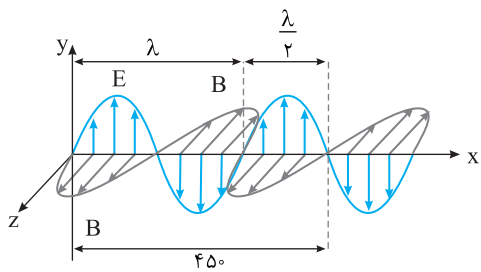
با توجه به شکل، طول موج را به‌دست می‌آوریم.

$۳\frac{\lambda}{۲}=۳۰۰cm\Rightarrow\lambda=۲۰۰cm=۲m$

بسامد خواهد شد: $f=\frac{c}{\lambda}\Rightarrow f=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۲}\Rightarrow f=۱/۵\times۱۰^{۸}Hz\Rightarrow f=۱۵۰MHz$

B ۱۶۶۹ ۱

۱ با توجه به نمودار می‌توان طول موج را حساب کرد. $۳\frac{\lambda}{۲}=۴۵۰\Rightarrow\lambda=۳۰۰nm$



۲ دوره را حساب می‌کنیم.

$\lambda=vT\xrightarrow{v=c}T=\frac{\lambda}{c}\Rightarrow T=\frac{۳۰۰\times۱۰^{-۹}}{۳\times۱۰^{۸}}\Rightarrow T=۱۰^{-۱۵}s$

بنابراین گزینه (۱) درست است.

۳ بسامد نوسان خواهد شد: $f=\frac{۱}{T}\Rightarrow f=۱۰^{۱۵}Hz$

گزینه (۲) نادرست است.

۴ تندی حرکت موج الکترومغناطیسی در خلأ ثابت و برابر $۳\times۱۰^{۸}m/s$ است:

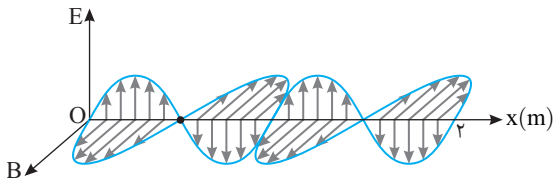
$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=۱s]{v=۳\times۱۰^{۸}m/s}\Delta x=۳\times۱۰^{۸}m$

بنابراین موج الکترومغناطیسی در مدت یک ثانیه، $۳\times۱۰^{۸}m$ طی می‌کند که برابر با $۳\times۱۰^{۱۷}nm$ است، بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

نکته طول موج‌های بین ۴۰۰nm (بنفش) تا ۷۰۰nm (قرمز) در محدودهٔ نور مرئی قرار دارند.

۵ طول موج این موج ۳۰۰nm است در حالی که محدوده تقریبی طول موج‌های مرئی بین ۴۰۰nm (بنفش) تا ۷۰۰nm (قرمز) است بنابراین گزینه (۴) نادرست است.

بازی با سوال نمودار میدان الکترومغناطیسی بر حسب مکان یک موج الکترومغناطیسی که در خلأ منتشر می‌شود، مطابق شکل زیر است. کدام مورد با توجه به نمودار درست است؟ $(c=۳\times۱۰^{۸}m/s)$ ریاضی - ۹۷ - با تغییر



۱) طول موج ۰/۵ متر است.

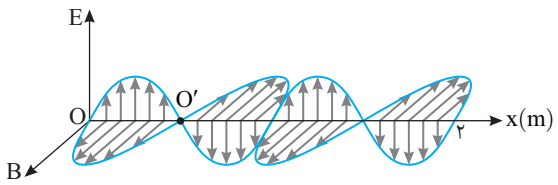
۲) دورهٔ موج یک ثانیه است.

۳) بسامد زاویه‌ای π رادیان بر ثانیه است.

۴) بسامد موج $۳\times۱۰^{۸}Hz$ است.

پاسخ ۱ با توجه به نمودار طول موج خواهد شد: $۲\lambda=۲\Rightarrow\lambda=۱m$

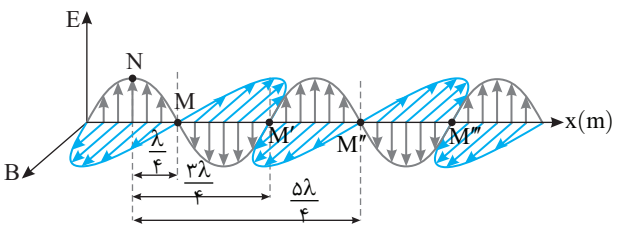
۲ بسامد موج را حساب می‌کنیم: $v=f\lambda\Rightarrow۳\times۱۰^{۸}=f\times۱\Rightarrow f=۳\times۱۰^{۸}Hz$



گزینهٔ ۴

B ۱۶۷۰ ۲

خط فکری میدان مغناطیسی و میدان الکتریکی موج الکترومغناطیسی هم‌گام هستند، یعنی با هم بیشینه و با هم صفر می‌شوند. در نقطه N میدان الکتریکی بیشینه است، پس در نقطه N میدان مغناطیسی نیز بیشینه است. در صورت مسأله بیان شده در همان لحظه میدان مغناطیسی نقطهٔ M صفر است. در این صورت اگر نقطهٔ N را روی نقش موج شکل زیر مشخص کنیم نقطه M باید $\frac{\lambda}{۴}$، $\frac{۳\lambda}{۴}$، $\frac{۵\lambda}{۴}$ و... با N فاصله داشته باشد.



اکنون طول موج را حساب می‌کنیم.

۱ طول موج را به‌دست می‌آوریم. $\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۱۰۰\times۱۰^{۶}}=۳m$

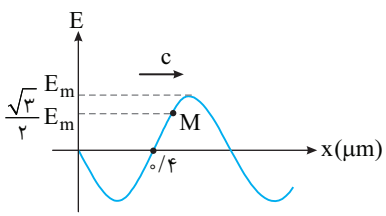
۲ فاصلهٔ نقطهٔ M از نقطهٔ N خواهد شد.

$\frac{\lambda}{۴}=\frac{۳}{۴}m\ ,\ \frac{۳\lambda}{۴}=\frac{۹}{۴}m\ ,\ \frac{۵}{۴}\lambda=\frac{۱۵}{۴}m\ ,\ \ldots$

که در گزینه‌ها $\frac{۹}{۴}m$ وجود دارد.

B ۱۶۷۱ ۴

خط فکری نمودار $E-x$ شبیه نمودار جابه‌جایی مکان (نقش موج) است. شما تمام گام‌های مربوط به نقش موج را باید طی کنید.



۱ گام اول: از روی محور افقی طول موج را حساب می‌کنیم

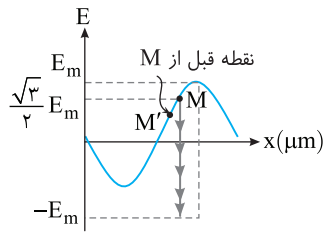
$\frac{\lambda}{۲}=۰/۴\mu m\Rightarrow\lambda=۰/۸\mu m$

۲ گام دوم: یافتن دوره به کمک تندی انتشار موج

$$T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۸\times۱۰^{-۶}}{۳\times۱۰^{۸}}\Rightarrow T=\frac{۸}{۳}\times۱۰^{-۱۵}s$$

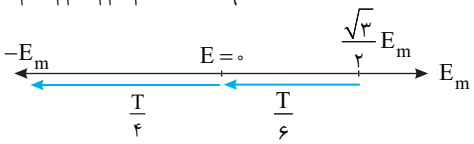
۳ گام سوم: بررسی جهت حرکت نقطهٔ M (بررسی جهت تغییر میدان در نقطهٔ M) با توجه به جهت پیشروی موج.

به نقطهٔ M نگاه کنید. برآمدگی موج از این نقطه عبور کرده و نقطهٔ قبل از M، پایین‌تر از M است، یعنی میدان الکتریکی E در حال کاهش و صفر شدن است.



اکنون به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده در حرکت هماهنگ ساده و با توجه به اینکه میدان نقطهٔ M در حال صفر شدن (حرکت رو به پایین) است، مسأله را حل می‌کنیم.

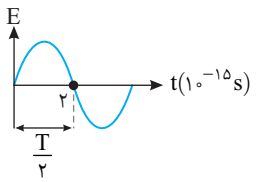
$$\Delta t=\frac{T}{۶}+\frac{T}{۴}=\frac{۵T}{۱۲}=\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۸}{۳}\times۱۰^{-۱۵}=\frac{۱۰}{۹}\times۱۰^{-۱۵}s$$



۳ ۱۶۷۲ A

با توجه به نمودار:

۱ از روی محور زمان نمودار E−t دوره را حساب می‌کنیم:



$$\frac{T}{۲}=۲\times۱۰^{-۱۵}\Rightarrow T=۴\times۱۰^{-۱۵}s$$

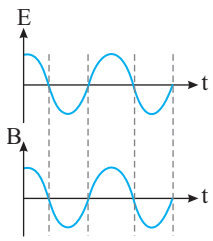
۲ طول موج میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی موج الکترومغناطیسی برابر است. با توجه به تعریف طول موج، خواهیم داشت:

$$\lambda=cT\Rightarrow\lambda=۳\times۱۰^{۸}\times۴\times۱۰^{-۱۵}=۱۲\times۱۰^{-۷}m=۱/۲\mu m$$

۲ ۱۶۷۳ A

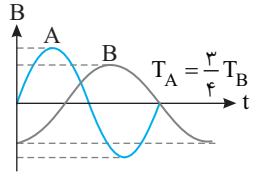
یادآوری در موج‌های الکترومغناطیسی، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی همگام بوده و طول موج و دورهٔ یکسانی دارند.

میدان الکتریکی و مغناطیسی همگام هستند و هر لحظه که میدان الکتریکی بیشینه است در همان لحظه میدان مغناطیسی بیشینه است و در هر لحظه‌ای که میدان الکتریکی صفر است میدان مغناطیسی صفر است بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.



۱ ۱۶۷۴ B

با توجه به شکل، رابطهٔ زیر بین دورهٔ موج الکترومغناطیسی B و دورهٔ موج الکترومغناطیسی A برقرار است:



$$T_A=\frac{۳}{۴}T_B\xrightarrow{\lambda=cT}\lambda_A=\frac{۳}{۴}\lambda_B$$

۱ ۱۶۷۵ A

۱ با توجه به شکل (الف) می‌توان طول موج را به‌دست آورد:

$$\frac{\lambda}{۴}=۱۵۰\Rightarrow\lambda=۶۰۰nm$$

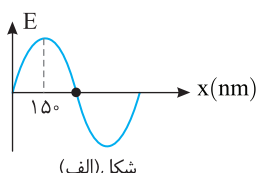
۲ با توجه به شکل (ب)، دوره به‌دست می‌آید:

$$\frac{T}{۲}=۰/۰۰۲\Rightarrow T=۰/۰۰۴ps$$

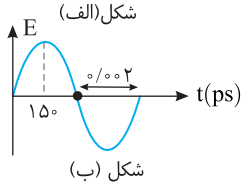
۳ بنابراین سرعت انتشار موج در این محیط برابر است با:

$$v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow v=\frac{۶۰۰\times۱۰^{-۹}}{۰/۰۰۴\times۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow v=\frac{۶\times۱۰^{-۷}}{۴\times۱۰^{-۱۵}}$$

$$\Rightarrow v=۱/۵\times۱۰^{۸}m/s$$



شکل (الف)



شکل (ب)

۳ ۱۶۷۶ B

خط فکری همان‌گونه که برای هر ذره از محیط انتشار موج مکانیکی سینوسی که دارای حرکت هماهنگ ساده است، معادلهٔ $x=A\cos\omega t$ نوشته می‌شود، می‌توان برای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی موج معادله‌هایی شبیه معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده به صورت مقابل نوشت: $E=E_m\cos\omega t\ ,\ B=B_m\cos\omega t$

در این معادله‌ها ضریب کسینوس مقدار بیشینهٔ میدان‌ها است. با توجه به معادلهٔ داده شده، میدان الکتریکی بیشینه را مشخص کنید، سپس با توجه به تعریف میدان الکتریکی $E=\frac{F}{q}$ نیروی وارد بر بار را بیابید.

با توجه به معادلهٔ $E=۲\times۱۰^{-۳}\cos\omega t$، بیشینهٔ میدان الکتریکی برابر $E=۲\times۱۰^{-۳}N/C$ است. از این‌رو بیشینهٔ نیروی وارد بر بار الکتریکی خواهد شد:

$$F_{max}=qE_{max}\ \Rightarrow\ F=۲\times۲\times۱۰^{-۳}=۴\times۱۰^{-۳}N$$

۱ ۱۶۷۷ B

بسامد و طول موج را به‌دست می‌آوریم:

۱ با توجه به معادلهٔ $B=B_m\cos\frac{۳}{۲}\pi\times۱۰^{۸}t$ بسامد زاویه‌ای موج برابر $\omega=\frac{۳}{۲}\pi\times۱۰^{۸}rad/s$ است. بنابراین بسامد خواهد شد.

$$\omega=۲\pi f\Rightarrow\frac{۳}{۲}\times۱۰^{۸}\pi=۲\pi f\Rightarrow f=۷/۵\times۱۰^{۷}Hz$$

۲ طول موج را حساب می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۷/۵\times۱۰^{۷}}=۴m$$

با توجه به شکل صفحهٔ ۶۸ کتاب درسی دربارهٔ طیف امواج الکترومغناطیسی این طول موج در ناحیهٔ رادیویی است.

۱ ۱۶۷۸ A

امواج مکانیکی برای انتشار نیاز به محیط مادی دارند. امواج صوتی از نوع امواج مکانیکی هستند بنابراین برای انتشار نیاز به محیط مادی دارند.

پرتوهای x، رادیویی و فروسرخ از جنس امواج الکترومغناطیسی بوده و می‌توانند در خلأ منتشر شوند و برای انتشار به محیط مادی نیاز ندارند.

۱ ۱۶۷۹ A

سرعت تمام پرتوهای الکترومغناطیسی در خلأ یکسان و برابر $c=\frac{۱}{\sqrt{\varepsilon_۰\mu_۰}}$ است.

بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

البته طول موج و بسامد امواج الکترومغناطیسی مختلف، متفاوت بوده و گزینهٔ (۲) و (۳) نادرست است.

موج الکترومغناطیسی، موج عرضی است و گزینهٔ (۴) نادرست است.

۱ ۱۶۸۰ A

امواج الکترومغناطیسی از قوانین یکسانی پیروی کرده و سرعت انتشار آن‌ها در خلأ یکسان است و گزینهٔ (۱) درست است.

این امواج در محیط‌های شفاف غیر خلأ تندی انتشار یکسانی ندارند و گزینهٔ (۲) نادرست است.

نحوهٔ تولید این امواج متفاوت است، به‌طور مثال یک جسم داغ از خود نور مرئی و امواج فروسرخ گسیل می‌کند، منشأ پرتوهای گاما واکنش‌های هسته‌ای است، بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

نحوهٔ آشکارسازی این امواج متفاوت است، مثلاً امواج رادیویی به کمک گیرنده رادیویی قابل آشکارسازی‌اند و یا نور مرئی توسط چشم دیده می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

بازی با سؤال **موج‌های الکترومغناطیسی در کدام ویژگی با هم فرق می‌کنند؟**

۱) سرعت آن‌ها در خلأ ۲) ماهیت آن‌ها

۳) طولی یا عرضی بودن آن‌ها ۴) نحوهٔ تولید و آشکارسازی آن‌ها

پاسخ **نحوهٔ تولید و آشکارسازی پرتوهای الکترومغناطیسی با هم متفاوت است.** گزینهٔ ۴

A ۱۶۸۱ ۳

پرتوهای ایکس و پرتوهای گاما از جنس امواج الکترومغناطیسی هستند و این امواج حامل بار الکتریکی نیستند، بنابراین میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بر این پرتوها بی‌تأثیر است.

A ۱۶۸۲ ۳

با توجه به شکل صفحهٔ ۶۸ کتاب درسی فیزیک (۳)، میکروموج‌ها در اجاق برای آشپزی کاربرد دارند.

A ۱۶۸۳ ۱

با توجه به طیف امواج الکترومغناطیسی در صفحهٔ ۶۸ کتاب درسی فیزیک (۳)، امواج رادیویی در پخش تلویزیونی و رادیویی، یعنی در سیستم‌های مخابراتی کاربرد دارد.

A ۱۶۸۴ ۲

گسترهٔ امواج الکترومغناطیسی به ترتیب کاهش طول موج و افزایش بسامد به قرار زیر است:

رادیویی ← میکروموج ← فروسرخ ← نورمرئی ← فرابنفش ← پرتو ایکس ← پرتو گاما

بنابراین قسمت R مربوط به طیف فروسرخ است و گزاره (الف) درست است. بسامد طیف S، از بسامد طیف P (نورمرئی) کمتر است، و گزارهٔ (ب) نادرست است.

طیف T مربوط به امواج رادیویی است و بیشترین طول موج را دارد، بنابراین گزاره (پ) درست است.

A ۱۶۸۵ ۴

یادآوری در طیف موج‌های الکترومغناطیسی به صورت زیر است که در آن از رادیویی به گاما بسامد افزایش و طول موج کاهش می‌یابد.

رادیویی ← میکروموج ← فروسرخ ← نورمرئی ← فرابنفش ← پرتو x ← پرتو گاما

امواج رادیویی بلندترین طول موج و اشعه گاما بیشترین بسامد را دارد.

بازی با سؤال **در طیف امواج الکترومغناطیسی از فرابنفش تا فروسرخ، طول موج ... و بسامد ... می‌یابد.**

۱) افزایش، کاهش ۲) افزایش یافته، نیز افزایش

۳) کاهش، افزایش ۴) کاهش یافته، نیز کاهش

پاسخ **در طیف امواج الکترومغناطیسی (رادیویی، میکروموج، فروسرخ، نور مرئی، پرتو فرابنفش، پرتو X و پرتو γ) از راست به چپ بسامد افزایش و طول موج کاهش می‌یابد.** گزینهٔ ۱

A ۱۶۸۶ ۱

در نور مرئی (قرمز، نارنجی، زرد، سبز، آبی، بنفش) از راست به چپ، بسامد زیاد می‌شود.

B ۱۶۸۷ ۲

طیف امواج الکترومغناطیسی به صورت زیر است:

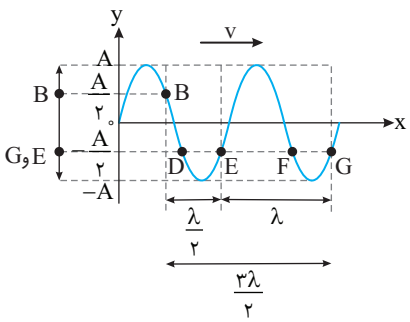
$$\gamma \leftarrow x \leftarrow \text{فرابنفش} \leftarrow \text{مرئی} \leftarrow \text{فروسرخ} \leftarrow \text{میکروموج} \leftarrow \text{رادیویی}$$

$$\overbrace{\text{ELF}-\text{AM}-\text{FM}}$$

که از راست به چپ بسامد کاهش و طول موج افزایش می‌یابد. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

A ۱۶۸۸ ۳

با توجه به جهت پیشروی موج نقطهٔ B در حال حرکت رو به بالا است و نقاط D و F هم در حال حرکت رو به بالا هستند وقتی B به دامنهٔ $+A$ می‌رسد، قطعاً آن‌ها به دامنهٔ $-A$ نمی‌رسند اما نقاط E و G هر دو در حال حرکت رو به پایین هستند و در بازهٔ زمانی که B از $\frac{+A}{2}$ به $+A$ می‌رود قطعاً نقاط E و G نیز از $\frac{-A}{2}$ به $-A$ می‌روند و گزینهٔ (۳) درست است.



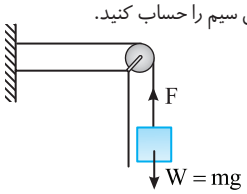
A ۱۶۸۹ ۲

نکته در طول یک ریسمان همگن کشش یکسان است.

خط فکری وزنهٔ A ساکن است. بنابراین نیروهای وارد بر آن متوازن هستند، نیروهای وارد بر وزنهٔ A را رسم کنید و نیروی کشش سیم را حساب کنید.

۱ نیروی کشش سیم برابر نیروی وزن وزنهٔ A است. $F=mg$

۲ در طول سیم، چگالی خطی جرم ثابت است، از این‌رو:

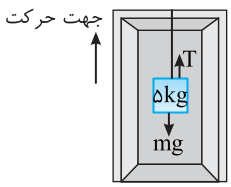


$$\frac{v'}{v}=\frac{\sqrt{\frac{F'}{\mu'}}}{\sqrt{\frac{F}{\mu}}} \xrightarrow{\mu'=\mu} \frac{v'}{v}=\frac{\sqrt{F'}}{\sqrt{F}} \xrightarrow{F=mg} \frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{m'g}{mg}}$$

$$\Rightarrow \frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{۱۰۰-۷۵}{۱۰۰}} \Rightarrow \frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{۲۵}{۱۰۰}}=\frac{۱}{۲}$$

B ۱۶۹۰ ۲

۱ ابتدا با توجه به قانون دوم نیوتون نیروی کشش تار در این حرکت را به‌دست می‌آوریم:



حرکت کندشونده بوده و a منفی است

$$F_{net}=ma \Rightarrow \underbrace{T-mg}=ma$$

آسانسور در حال حرکت به سمت بالا

$$T-۵۰=۵\times(-۲) \Rightarrow T=۴۰N$$

۲ نیروی کشش تار برابر ۴۰N است و با توجه به رابطهٔ $v=\frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}$ تندی انتشار موج در تار را حساب می‌کنیم:

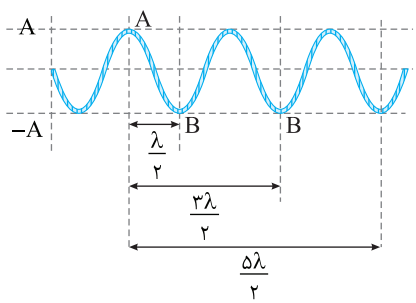
$$D=۱mm=۱۰^{-۳}m \ , \ F=T=۴۰N \ , \ \rho=۳g/cm^۳=۳۰۰۰kg/m^۳$$

$$v=\frac{۲}{۱۰^{-۳}}\sqrt{\frac{۴۰}{۳۰۰۰\times ۳}} \Rightarrow v=\frac{۲}{۱۰^{-۳}}\sqrt{\frac{۴}{۹۰۰}}$$

$$\Rightarrow v=\frac{۲}{۱۰^{-۳}}\times\frac{۲}{۳۰} \Rightarrow v=\frac{۴۰۰}{۳}m/s$$

B ۱۶۹۱ ۴

خط فکری شکل ساده‌ای از انتشار موج در طناب رسم می‌کنیم. در صورت مسئله بیان کرده که ذرهٔ A در دامنهٔ مثبت $(+A)$ قرار دارد و در همان لحظه ذرهٔ B در دامنهٔ منفی $(-A)$ قرار دارد. بنابراین با توجه به شکل، فاصلهٔ A تا B می‌تواند $\frac{\lambda}{۲}$، $\frac{۳\lambda}{۲}$ و ... یعنی مضارب فرد $\frac{\lambda}{۲}$ باشد. از این‌رو شما باید فاصلهٔ A تا B $(AB=۴۵cm)$ را برابر این مقدارها قرار دهید و طول موج‌های ممکن را به‌دست بیاورید.



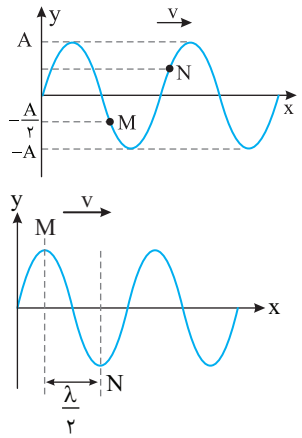
طول موج را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\lambda}{۲}=۴۵ \Rightarrow \lambda=۹۰cm, \frac{۳\lambda}{۲}=۴۵ \Rightarrow \lambda=۳۰cm, \frac{۵\lambda}{۲}=۴۵ \Rightarrow \lambda=۱۸cm, \ldots$$

بنابراین هر سه گزینه می‌تواند طول موج این موج باشد.

A ۱۶۹۲ ۲

اگر به نقش موج دقت کنید فاصله یک قله از دره $\frac{\lambda}{۲}$ است و وقتی M در حال حرکت به سوی بالا است نقطهٔ N در حال حرکت رو به پایین است و وقتی M از مرکز نوسانش می‌گذرد N نیز از مرکز نوسان می‌گذرد. اکنون به نقش موج مسأله نگاه کنید. M و N، $\frac{\lambda}{۲}$ از هم فاصله دارند و M در حال حرکت رو به بالا و N نیز در حال حرکت رو به پایین است و همان‌گونه که گفتیم باید با هم از مرکز نوسان بگذرند بنابراین اگر M در $\frac{-A}{۲}$ به سوی مرکز در حرکت باشد باید N در $\frac{+A}{۲}$ به سوی مرکز در حرکت باشد و گزینهٔ (۲) درست است.



میانبر هرگاه دو ذره از محیط دارای مکان و سرعت قرینه باشند، فاصلهٔ بین آن‌ها $\frac{\lambda}{۲}$ است و بالعکس.

B ۱۶۹۳ ۴

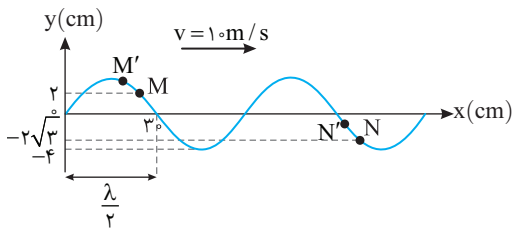
۱ گام اول: یافتن طول موج از روی محور افقی $\frac{\lambda}{۲}=۳۰\Rightarrow\lambda=۶۰cm=۰/۶m$

۲ گام دوم: یافتن دوره به کمک تندی انتشار موج $T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۶}{۱۰}=۰/۰۶s$

۳ گام سوم: مشخص می‌کنیم مدت زمان $\frac{۱}{۲۰۰}s$ چه کسری از دوره است.

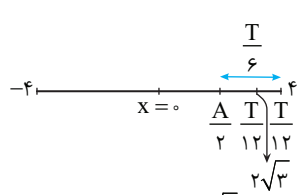
$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{۱}{۲۰۰}}{\frac{۶}{۱۰۰}}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۱۲}$$

۴ اکنون مشخص می‌کنیم که ذره M و ذرهٔ N در کدام جهت در حال حرکت هستند. با توجه به جهت پیشروی موج قلهٔ موج در حال نزدیک شدن به نقطهٔ M است و نقطهٔ M' نقطهٔ قبل از M بالاتر از M است. یعنی M در حال حرکت رو به بالاست. ذرهٔ موج از N گذشته و قلهٔ موج در حال نزدیک شدن به نقطهٔ N بوده و ذرهٔ N' که قبل از N قرار دارد، بالاتر از N بوده یعنی نقطهٔ N رو به بالا در حرکت است.

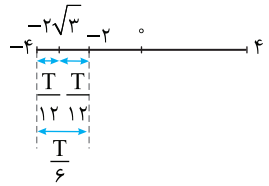


۵ باید مکان M و N را پس از گذشت $\frac{۱}{۲۰۰}s=\frac{T}{۱۲}$ تعیین کنید.

ذرهٔ M در مکان $\frac{A}{۲}=۲cm$ قرار دارد و با توجه به بازه‌های زمان شناخته شده در مدت $\frac{T}{۱۲}$ به مکان $\frac{\sqrt{۳}}{۲}A=۲\sqrt{۳}cm$ می‌رسد.



ذرهٔ N در مکان $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}A=-۲\sqrt{۳}cm$ قرار دارد و در مدت $\frac{T}{۱۲}$ به مکان $-۲cm=-\frac{A}{۲}$ می‌رسد.



۶ رابطهٔ شتاب - مکان در حرکت هماهنگ ساده یک ذره از محیط به‌صورت $|a|=\omega^۲x$ است که در این مسئله ذرات در راستای محور yها نوسان می‌کنند، بنابراین خواهیم داشت:

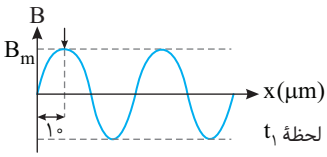
$$|\frac{a_M}{a_N}|=|\frac{\omega^۲y_M}{\omega^۲y_N}|=\frac{۲\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}$$

B ۱۶۹۴ ۱

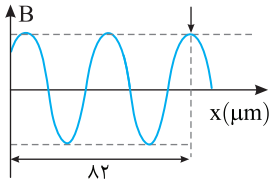
خط فکری علامت پیکان یک قله (ستیغ) موج را نشان می‌دهد که در حال حرکت در جهت مثبت محور x هاست و در مدت ۰/۳۶ps از ۱۰cm مبدأ به ۸۲cm مبدأ می‌رود. بنابراین شما می‌توانید تندی انتشار موج را حساب کنید. از روی شکل (الف) نیز طول موج را به‌دست بیاورید و سرانجام بسامد را حساب کنید.

۱ در مدت ۰/۳۶ پیکوثانیه، موج به اندازهٔ $۸۲-۱۰=۷۲\mu m$ پیشروی کرده است، بنابراین سرعت انتشار موج در این محیط شفاف برابر است با:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v=\frac{۷۲\times۱۰^{-۶}}{۰/۳۶\times۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow v=۲\times۱۰^۸m/s$$



الف - لحظهٔ $t_۱$



ب - لحظهٔ $t_۲$

۲ با توجه به شکل (الف)، طول موج برابر است با: $\frac{\lambda}{۴}=۱۰\Rightarrow\lambda=۴۰\mu m$

۳ اکنون می‌توان بسامد نور را به‌دست آورد:

$$f=\frac{v}{\lambda}\Rightarrow f=\frac{۲\times۱۰^۸}{۴۰\times۱۰^{-۶}}\Rightarrow f=۵\times۱۰^{۱۲}Hz$$

B ۱۶۹۵ ۲

کمینه فاصلهٔ بین یک دره و یک قله $\frac{\lambda}{۲}$ است، بنابراین طول موج خواهد شد:

$$\frac{\lambda}{۲}=۰/۲\Rightarrow\lambda=۰/۴m$$

بسامد نوسان ذره‌های محیط را حساب می‌کنیم:

$$f=\frac{v}{\lambda}\xrightarrow{v=۴m/s}f=\frac{۴}{۰/۴}=۱۰Hz$$

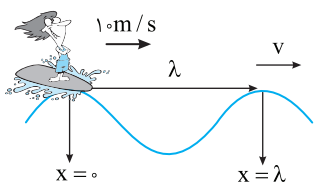
بسامد زاویه‌ای موج را به‌دست می‌آوریم: $\omega=۲\pi f=۲\pi\times۱۰=۲۰\pi$

در حرکت هماهنگ سادهٔ ذرات محیط، بیشینهٔ شتاب برابر است با:

$$a_m=A\omega^۲\xrightarrow{a_m=۳۲۰m/s^۲}۳۲۰=A(۴۰۰\times۱۰)\Rightarrow A=۰/۰۸m$$

$$\Rightarrow A=۸cm$$

C ۱۶۹۶ ۴



حالت اول: در این حالت موج با سرعت v و شخص با سرعت ۱۰m/s در یک جهت در حال حرکت‌اند و این دو پس از ۰/۵s به هم می‌رسند. فاصلهٔ یک قله تا قلهٔ دیگر نیز که در ۰/۵s طی شده برابر طول موج است، حال با توجه به حرکت‌شناسی معادلهٔ حرکت قلهٔ موج و معادلهٔ حرکت شخص را می‌نویسیم، هنگام رسیدن این دو به هم یعنی $t=۰/۵$ لحظه‌ای است که مکان آن‌ها با هم برابر شود:

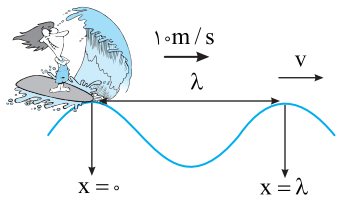
$$x_{قله}=v_{موج}t+x_۰\Rightarrow x_{قله}=vt+\lambda$$

$$x_{شخص}=v_{شخص}t+x_۰\Rightarrow x_{شخص}=۱۰t+۰$$

$$\xrightarrow[t=۰/۵s]{x_{قله}=x_{شخص}}۰/۳v+\lambda=۵(I)$$

حالت دوم: در این حالت قله موج با سرعت v و شخص با سرعت ۱۰m/s به سمت هم در حال حرکت بوده و پس از ۰/۳s به هم می‌رسند:

$$x_{قله}=-vt+\lambda\ ,\ x_{شخص}=۱۰t\xrightarrow[x_{قله}=x_{شخص}]{t=۰/۳s}-۰/۳v+\lambda=۳(II)$$



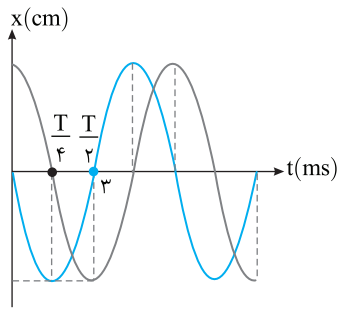
حال با توجه به معادلهٔ به‌دست آمده v و λ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۰/۳v+\lambda=۵ \\ -۰/۳v+\lambda=۳ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲\lambda=۸\Rightarrow\lambda=۴m$$

C ۱۶۹۷ | ۱

ابتدا دقت کنید که نمودار داده شده نمودار $x-t$ است یعنی نمودار نوسان دو ذرهٔ A و B است. از روی محور زمان دورهٔ نوسان ذرات محیط را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{T}{۲}=۳ms\Rightarrow T=۶ms$$

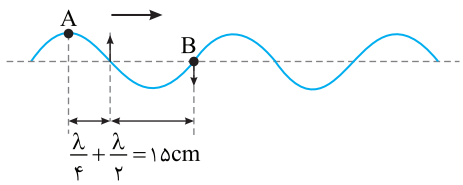


برای ادامهٔ حل ابتدا به دو نکته دقت کنید:

۱ فاصلهٔ دو ذرهٔ از محیط ۱۵cm است، چون بیشینه تندی موج خواسته شده است $v_{موج}=\frac{\lambda}{T}$ پس باید این دو ذره را دو ذرهٔ متوالی با مشخصات نوسانی داده شده در نظر گرفت تا طول موج بیشینه باشد.

۲ ذرهٔ A از دامنهٔ مثبت در لحظهٔ $t=۰$ نوسان می‌کند و ذرهٔ B از $x=۰$ در لحظهٔ $t=۰$ به سمت پایین شروع به نوسان می‌کند.

یک موج مطابق شکل در لحظهٔ $t=۰$ می‌کشیم، جهت انتشار موج به سمت راست است. نقطهٔ A در مکان یکی از قله‌ها است تا از دامنهٔ مثبت شروع به نوسان کند، اما نقطهٔ B در $x=۰$ بوده و به سمت پایین شروع به نوسان می‌کند پس این دو نقطه به صورت زیر می‌شود:



$$\frac{\lambda}{۴}+\frac{\lambda}{۲}=۱۵\Rightarrow\frac{۳\lambda}{۴}=۱۵cm\Rightarrow\lambda=۲۰cm$$

حال با توجه به دوره و طول موج تندی انتشار را به‌دست می‌آوریم:

$$v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow v=\frac{۲۰\times۱۰^{-۲}}{۶\times۱۰^{-۳}}\Rightarrow v=\frac{۱۰۰}{۳}m/s$$

B ۱۶۹۸ | ۴

یادآوری میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی موج الکترومغناطیسی هم‌بسامد و همگام هستند. از این‌رو در هر نقطه شناسهٔ تابع کسینوس این میدان‌ها یکسان است.

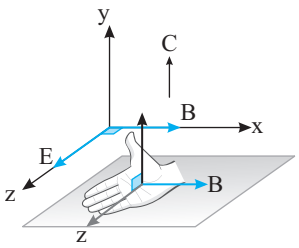
وقتی میدان الکتریکی موج به‌صورت $E=E_m\cos(\omega t+\frac{\pi}{۲})$ باشد، میدان مغناطیسی آن نیز به‌صورت $B=B_m\cos\omega t$ است.

C ۱۶۹۹ | ۲

یادآوری در امواج الکترومغناطیسی میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی همگام هستند.

خط فکری هرگاه در یک مسئله مربوط به امواج الکترومغناطیسی در مورد میدان مغناطیسی (یا الکتریکی) به شما اطلاعاتی داده شود، با توجه به همگام بودن این دو میدان، اطلاعات در مورد میدان دیگر صادق است. وقتی در مسئله بیان می‌شود که $B=\frac{\sqrt{۲}}{۲}B_m$ و در حال کاهش است، یعنی میدان الکتریکی در آن لحظه نیز $E=\frac{\sqrt{۲}}{۲}E_m$ و در حال کاهش است.

۱ جهت میدان الکتریکی در لحظهٔ t را مشخص می‌کنیم. با توجه به قاعدهٔ دست راست، کف دست خود را به سمت راست در جهت محور x ها به‌گونه‌ای قرار دهید که انگشت شست رو به بالا در جهت محور yها نشان دهد. در این حالت چهار انگشت باز دست راست شما در جهت محور zها خواهد بود.



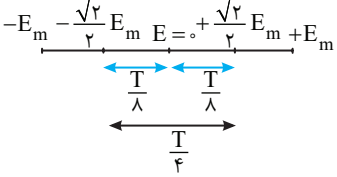
۲ بنابراین در لحظهٔ $t=۰$، میدان الکتریکی $E=\frac{+\sqrt{۲}}{۲}E_m$ بوده و باید در حال کاهش باشد.

۳ دوره را حساب می‌کنیم. $T=\frac{۱}{f}\Rightarrow T=\frac{۱}{۲\times۱۰^{۱۵}}s\Rightarrow T=۵\times۱۰^{-۱۶}s$

۴ مشخص می‌کنیم که $۱/۲۵\times۱۰^{-۱۶}s$ چه کسری از دوره است.

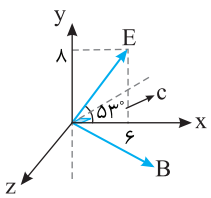
$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{۱/۲۵\times۱۰^{-۱۶}}{۵\times۱۰^{-۱۶}}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۴}$$

۵ در مدت $\frac{T}{۴}$، میدان الکتریکی از $+\frac{\sqrt{۲}}{۲}E_m$ به $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}E_m$ تغییر کرده و اندازهٔ آن در حال افزایش است.



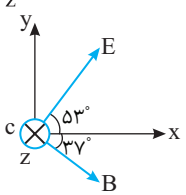
C ۱۷۰۰ | ۱

بردار میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی موج الکترومغناطیسی بر هم عمودند. بردار میدان الکتریکی $\vec{E}=۶\vec{i}+۸\vec{j}$ را روی دستگاه محورها نمایش می‌دهیم.



زاویهٔ بین میدان E با محور xها خواهد شد:

$$\tan\alpha=\frac{E_y}{E_x}=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\alpha=۵۳^\circ$$



انتشار موج در امتداد محور zها است، از این‌رو باید در هر دو میدان E و B در صفحهٔ xoy باشد و این دو میدان بر هم عمود باشند و در قاعدهٔ دست راست نیز صدق کنند، بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

A ۱۷۰۱ | ۳

خط فکری بیشینه نیرویی که میدان الکترومغناطیسی بر یک ذرهٔ باردار متحرک می‌تواند وارد کند، جمع بیشینهٔ نیروی میدان الکتریکی وارد بر ذرهٔ $F_{E_m}=qE_m$ و بیشینهٔ نیروی میدان مغناطیسی وارد بر ذرهٔ $F_{B_m}=qvB$ است.

یعنی باید جهت حرکت بار به‌گونه‌ای باشد که این دو نیرو هم‌جهت شده و با هم جمع شوند. F_{E_m} و F_{B_m} را حساب کرده، با هم جمع کنید.

۱ بیشینهٔ نیروی الکتریکی وارد بر ذره با بار $۱\times۱۰^{-۳}C$ را حساب می‌کنیم.

$$F_{E_m}=qE_{max}\xrightarrow{E_{max}=۳۰۰V/m}F_{E_m}=۱۰^{-۳}\times۳۰۰۰\Rightarrow F_{E_m}=۳N$$

۲ بیشینهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر ذره را به‌دست می‌آوریم.

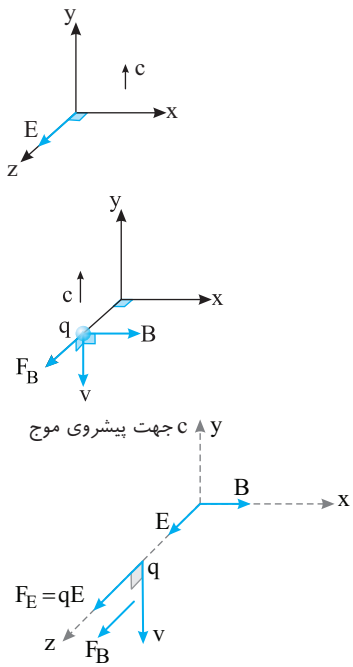
$$F_{E_m}=qvB_m\xrightarrow{v=۴\times۱۰^{۶}m/s,B_m=۱۰^{-۵}T}F_{B_m}=۱۰^{-۳}\times۴\times۱۰^{۶}\times۱۰^{-۵}$$

$$\Rightarrow F_{B_m}=۰/۰۴N$$

۳ نیروها را با هم جمع می‌کنیم:

$$F_m=F_{E_m}+F_{B_m}=۳+۰/۰۴\Rightarrow F_m=۳/۰۴N$$

ممکن است که شما سؤال کنید چگونه چنین حالتی ممکن است. فرض کنید موج در حال پیشروی در جهت مثبت محور yها است و ذرهٔ باردار در جهت منفی محور yها در حرکت باشد. اگر میدان الکتریکی موج در جهت محور zها باشد، نیرویی که بر بار وارد می‌کند، در جهت محور zها است. در این حالت میدان مغناطیسی موج قطعاً در جهت محور xها است. اکنون به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت نیروی میدان مغناطیسی وارد بر ذرهٔ باردار را مشخص می‌کنیم: چهار انگشت دست راست در جهت v و کف دست در جهت B، انگشت شست در جهت F یعنی در جهت محور zها است.



بنابراین F_{E_m} و F_{B_m} هر دو در جهت مثبت محور zها بوده و با هم جمع می‌شوند:

$$F_m=F_{E_m}+F_{B_m}=۳+۰/۰۴\Rightarrow F_m=۳/۰۴N$$

به شکل نهایی دقت کنید.

A ۱۷۰۲ ۴

ذرهٔ باردار که دارای حرکت شتابدار است، موج الکترومغناطیسی گسیل می‌کند. هنگام تخلیهٔ خازن، یک میدان الکتریکی متغیر با زمان ایجاد می‌شود که می‌تواند به‌طور لحظه‌ای موج الکترومغناطیسی گسیل کند. همچنین جریان متناوب با بسامد بالا نیز به‌دلیل تغییر دائمی میدان مغناطیسی آن با زمان می‌تواند موج الکترومغناطیسی ایجاد کند. بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

بازی با سؤال **از دیدگاه ماکسول عامل اصلی ایجاد موج‌های الکترومغناطیسی، .....**

۱) میدان‌های الکتریکی است.

۲) حرکت شتابدار ذرهٔ دارای بار الکتریکی است.

۳) میدان‌های مغناطیسی است.

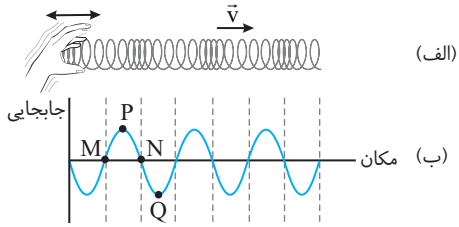
۴) حرکت یکنواخت بار الکتریکی است.

پاسخ **بنابر نظریهٔ ماکسول، هرگاه ذرهٔ باردار دارای حرکت شتابدار شود از خود موج الکترومغناطیسی گسیل می‌کند.** گزینهٔ ۲

پنجره ۴

B ۱۷۰۳ ۴

در انتشار موج طولی در یک فنر بلند کشیده، موج به‌صورت جمع‌شدگی و بازشدگی در طول فنر منتشر می‌شود. برای مدل‌سازی این موج به ناحیه‌های جمع‌شدگی و بازشدگی بیشتر دقت می‌کنیم. در مکان‌هایی که بیشترین بازشدگی حلقه رخ می‌دهد، جابه‌جایی هر جزء فنر از وضعیت تعادل صفر است. (مانند نقاط M و N در یک موج عرضی). در وسط فاصلهٔ بین یک جمع‌شدگی بیشینه و یک بازشدگی بیشینهٔ مجاور آن، اندازهٔ جابه‌جایی هر جزء فنر از وضعیت تعادل بیشینه است (مانند نقاط P و Q شبیه قله و درهٔ یک موج عرضی) با این توضیحات گزینهٔ (۲) و (۳) درست است.



B ۱۷۰۴ ۲

نکته فاصلهٔ بین دو تراکم متوالی یا دو انبساط متوالی برابر طول موج (λ) است.

۱ با توجه به شکل فاصلهٔ بین تراکم و انبساط نشان داده شده در شکل ۶۰cm است. از این رو:

$$\lambda+\frac{\lambda}{۲}=۶۰\Rightarrow\frac{۳}{۲}\lambda=۶۰\Rightarrow\lambda=۴۰cm$$

۲ تندی انتشار موج را برحسب یکای m/s می‌نویسیم.

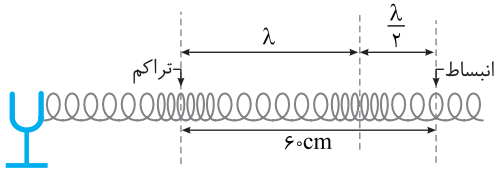
$$v=۵۴\frac{km}{h}\times\frac{۱۰۰۰m}{۱km}\times\frac{۱h}{۳۶۰۰s}\Rightarrow\frac{۵۴}{۳/۶}\Rightarrow v=۱۵m/s$$

۳ دوره را به‌دست می‌آوریم.

$$T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۴}{۱۵}\Rightarrow T=\frac{۴}{۱۵۰}s\Rightarrow T=\frac{۲}{۷۵}s$$

۴ تعداد نوسان‌های هر حلقه (ذره) را حساب می‌کنیم.

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow\frac{۲}{۷۵}=\frac{۶۰}{N}\Rightarrow N=۳۰\times۷۵\Rightarrow N=۲۲۵۰\frac{\text{نوسان}}{\text{دقیقه}}$$



B ۱۷۰۵ ۱

یادآوری در امواج طولی، طول موج برابر فاصلهٔ بین دو تراکم (برای فنر جمع‌شدگی) و یا دو انبساط (برای فنر، بازشدگی) متوالی است.

۱ طول موج با توجه به فرض مسئله برابر است با:

$$\lambda=۱۰m$$

۲ دوره را حساب می‌کنیم.

$$T=\frac{۱}{f}\xrightarrow{f=۱۰Hz}T=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow T=۰/۱s$$

۳ تندی انتشار موج در محیط خواهد شد:

$$v=f\lambda\Rightarrow v=۱۰\times۱۰\Rightarrow v=۱۰۰m/s$$

۴ مسافتی که موج در مدت ۰/۰۵s طی می‌کند را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow\Delta x=۵۰\times۰/۰۵\Rightarrow\Delta x=۵m$$

۵ مشخص می‌کنیم $\Delta t=۰/۰۵s$ چه کسری از دوره $T=۰/۱s$ است.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{۰/۰۵}{۰/۱}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۲}$$

نکته مسافتی که یک ذره دارای حرکت هماهنگ ساده در مدت $\frac{T}{۲}$ طی می‌کند دو برابر دامنه است.

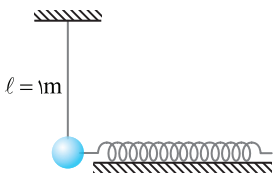
۶ مسافتی که در مدت $\frac{T}{۲}=۰/۰۵s$ هر ذره از محیط طی می‌کند خواهد شد:

$$\Delta x'=۲A\xrightarrow{A=۰/۰۴m}\Delta x'=۲\times۰/۰۴=۰/۰۸m$$

B ۱۷۰۶ ۴

۱ دوره و بسامد از ویژگی‌های چشمهٔ موج هستند. در این مسئله آونگ چشمهٔ موج است، دورهٔ آونگ را حساب می‌کنیم.

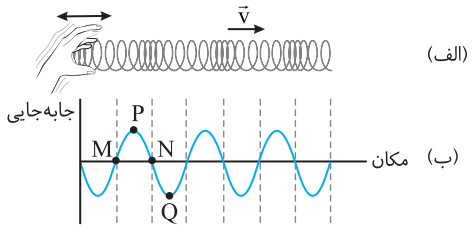
$$T=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\xrightarrow{\pi^{۲}\sim g}T=۲\pi\sqrt{\frac{۱}{\pi^{۲}}}\Rightarrow T=۲s$$



۲ طول موج را به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda = vT \xrightarrow{v=0/2\,m/s} \lambda = 0/2\times 2 \Rightarrow \lambda = 0/4\,m$$

۳ با توجه به مدل‌سازی موج طولی در فنر فاصلهٔ یک جمع‌شدگی بیشینه شبیه نقطهٔ N از وسط یک جمع‌شدگی و بازشدگی بیشینه مانند نقطهٔ P برابر $\frac{\lambda}{4}$ است. بنابراین $\frac{\lambda}{4}=\frac{0/4}{4}=0/1\,m$



B ۱۷۰۷ ۲

نکته در امواج لرزه‌ای، (زمین‌لرزه‌ها)، معمولاً تندی انتشار موج اولیهٔ P از تندی انتشار موج ثانویهٔ S بیشتر است. P امواج طولی و S امواج عرضی هستند.

۱ موجی که تندی آن $9\,km/s$ است و زودتر به مقصد رسیده است، موج طولی (P) بوده و زمان رسیدن آن به مقصد برابر است با:

$$t=\frac{\Delta x}{v}\Rightarrow t=\frac{1620}{9}=180\,s\Rightarrow t_1=3\,min$$

۲ موج دیگر ۳ دقیقه دیرتر به این فاصله رسیده است بنابراین این موج عرضی بوده و زمان رسیدن آن $3+3=6\,min$ است و تندی آن خواهد شد.

$$v=\frac{\Delta x}{t}=\frac{1620}{6\times 60}\Rightarrow v=4/5\,km/s$$

B ۱۷۰۸ ۳

تندی امواج عرضی در جامدات از تندی امواج طولی در جامدات کمتر است و زمان رسیدن موج عرضی به عقرب از زمان رسیدن موج طولی به عقرب بیشتر است.

زمان رسیدن موج از طعمه به عقرب برای موج عرضی خواهد شد:

$$\Delta x = vt \Rightarrow d = v_T t_T \Rightarrow t_T = \frac{d}{v_T}$$

زمان رسیدن موج از طعمه به عقرب برای موج طولی خواهد شد:

$$\Delta x = vt \Rightarrow d = v_L t_L \Rightarrow t_L = \frac{d}{v_L}$$

اختلاف زمانی رسیدن موج‌های طولی و عرضی به عقرب خواهد شد:

$$\Delta t = t_T - t_L \Rightarrow \Delta t = \frac{d}{v_T} - \frac{d}{v_L} \Rightarrow \Delta t = \frac{v_L - v_T}{v_L v_T} d \Rightarrow d = \frac{v_L v_T}{v_L - v_T}\Delta t$$

B ۱۷۰۹ ۴

خط فکری بسامد از ویژگی‌های چشمهٔ موج است و برای هر دو موج S و P یکسان است. از این رو نمودار نقش موج طول موج S و P را پیدا کرده، تندی انتشار موج S و P را به‌دست بیاورید. با اختلاف زمانی رسیدن موج‌های S و P به مقصد فاصلهٔ محل مورد نظر تا مرکز زمین‌لرزه را حساب کنید.

۱ ابتدا طول موج هر موج را به‌دست می‌آوریم.

شکل (۱): $\frac{\lambda}{4}=15\Rightarrow\lambda=60\,m$ ، شکل (۲): $\frac{\lambda}{4}=30\Rightarrow\lambda=120\,m$

۲ تندی انتشار هر موج را حساب می‌کنیم.

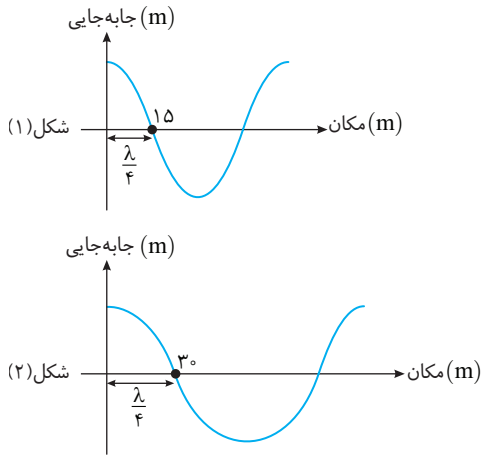
$v=f\lambda\Rightarrow v=100\times 60=6\,km/s$ ، $v=f\lambda\Rightarrow v=100\times 120=12\,km/s$

۳ موج شکل (۱) دارای تندی کمتری است بنابراین نمودار شکل (۱) مربوط به موج عرضی S است و نمودار شکل (۲) مربوط به موج طولی P است.

۴ اختلاف زمانی دو موج ۱۲۰s است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$t_S - t_P = 120\,s \xrightarrow{t=\frac{\Delta x}{v}} \frac{\Delta x}{v_s} - \frac{\Delta x}{v_p} = 120 \Rightarrow \frac{\Delta x}{6} - \frac{\Delta x}{12} = 120$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x}{12} = 120 \Rightarrow \Delta x = 1440\,km$$



A ۱۷۱۰ ۳

موج صوتی یک موج مکانیکی و طولی است که به صورت لایه‌های تراکمی و انبساطی منتشر می‌شود. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) درست است، اما در مورد گزینهٔ (۳) عموماً در محیط‌های غلیظ‌تر سرعت انتشار صوت بیشتر است و در این مورد استثنایی وجود دارد. به‌طور مثال سرعت صوت در هیدروژن (گاز) از سرعت صوت در متیل الکل (مایع) $(25^\circ C)$ بیشتر است. به جدول صفحهٔ ۷۱ کتاب درسی رجوع کنید.

A ۱۷۱۱ ۴

صوت موج است و در انتشار موج، ذره‌های محیط منتشر نمی‌شود و گزینهٔ (۱) نادرست است، بلکه ذرات محیط در مسیر حرکت موج، در جای خود مرتعش می‌شوند و گزینهٔ (۲) درست است. از طرفی صوت، موج طولی است و به‌صورت لایه‌های تراکمی و انبساطی در هوا منتشر می‌شود، بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) درست‌اند و جواب گزینهٔ (۴) می‌باشد.

A ۱۷۱۲ ۲

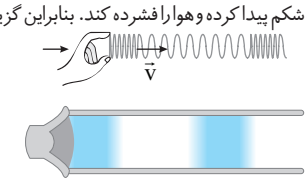
امواج الکترومغناطیسی که تلفن همراه با آن کار می‌کند از شیشه و خلأ درون جعبه می‌گذرند، بنابراین تماس برقرار می‌شود، اما صدای زنگ تلفن همراه که موج مکانیکی است و از خلأ نمی‌گذرد و صدای زنگ تلفن شنیده نمی‌شود.

A ۱۷۱۳ ۲

امواج صوتی از نوع امواج مکانیکی و طولی هستند و در خلأ منتشر نمی‌شوند و گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) نادرست است و امواج فرابنفش از جنس امواج الکترومغناطیسی هستند و تندی آن‌ها برابر تندی انتشار نور است و از تندی صوت بسیار بزرگ‌تر است و گزینهٔ (۲) درست است. البته هر دو موج بوده و انرژی را منتقل می‌کنند.

A ۱۷۱۴ ۱

در مدل‌سازی صوت درون لوله، جمع‌شدگی فنر معادل تراکم و بازشدگی فنر معادل انبساط در نظر گرفته می‌شود. در شکل در محل دست فنر جمع شده بنابراین باید در لوله کنار دیافراگم تراکم داشته باشیم. بنابراین گزینهٔ (۱) یا گزینهٔ (۳) درست است. برای ایجاد تراکم باید دیافراگم به سمت راست شکم پیدا کرده و هوا را فشرده کند. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.



A ۱۷۱۵ ۴

دیافراگم دارای حرکت هماهنگ ساده است و مدت زمانی که طول می‌کشد تا از برآمدگی سمت راست (A+) به فرورفتگی سمت چپ (A−) برود، به اندازهٔ $\frac{T}{2}$ طول می‌کشد.

بازهٔ زمانی داده شده $\Delta t=0/2\,s$ را با دوره $T=0/4\,s$ مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{0/2}{0/4}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{2}$$

در مدت $\frac{T}{2}$ باید تراکم به انبساط تبدیل شود. از طرفی در مدت $\frac{T}{2}$، موج به اندازهٔ $\frac{\lambda}{2}$ جلو می‌رود و تنها باید در شکل یک تراکم و یک انبساط را شاهد باشیم، از این رو گزینهٔ (۴) درست است.

A ۱۷۱۶ ۳

امواج صوتی از نوع امواج طولی هستند و سرعت انتشار صوت معمولاً در جامدها از مایع‌ها بیشتر است.

B ۱۷۱۷ ۱

نکته بسامد یک موج از ویژگی‌های چشمهٔ موج است و در هنگام انتشار موج تغییر نمی‌کند.

نکته سرعت صوت در آهن از سرعت صوت در آب بیشتر و سرعت صوت در آب از سرعت صوت در اکسیژن بیشتر است.

با توجه به نکات ارائه شده می‌توان نوشت:

$$\lambda=\frac{v}{f_o}\Rightarrow\begin{cases}\text{آهن}: \lambda_1=\frac{v_1}{f}\\ \text{اکسیژن}: \lambda_2=\frac{v_2}{f}\xrightarrow{v_1>v_3>v_2}\lambda_1>\lambda_3>\lambda_2\\ \text{آب}: \lambda_3=\frac{v_3}{f}\end{cases}$$

A ۱۷۱۸ ۴

بسامد موج توسط چشمهٔ موج تعیین می‌شود و هنگام پیشروی موج، بسامد موج ثابت می‌ماند، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست‌اند. برای بررسی چگونگی تغییر طول موج باید چگونگی تغییر تندی انتشار موج را بررسی کنیم.

تندی انتشار صوت در یخ از تندی انتشار صوت در آب و تندی انتشار صوت در آب از تندی انتشار صوت در هوا بیشتر است.

$$v_{\text{یخ}}>v_{\text{آب}}>v_{\text{هوا}}\xrightarrow{\lambda=\frac{v}{f}}\lambda_{\text{یخ}}>\lambda_{\text{آب}}>\lambda_{\text{هوا}}$$

بنابراین وقتی صوت از هوا وارد یخ می‌شود طول موج ابتدا افزایش می‌یابد $(\lambda_{\text{یخ}}>\lambda_{\text{هوا}})$ و سپس وقتی از یخ وارد آب می‌شود، طول موج کاهش می‌یابد $(\lambda_{\text{آب}}<\lambda_{\text{یخ}})$.

بازی با سؤال **هرگاه موج‌های صوتی از هوا وارد آب شوند .....**

۱) طول موج و سرعت آن‌ها کاهش می‌یابد.

۲) طول موج کاهش و بسامد آن‌ها افزایش می‌یابد.

۳) طول موج و سرعت آن‌ها افزایش می‌یابد.

۴) طول موج کاهش و بسامد آن‌ها ثابت می‌ماند.

پاسخ **سرعت انتشار صوت در آب از سرعت انتشار صوت در هوا بیشتر است و هنگام گذر صوت از هوا به آب، بسامد ثابت می‌ماند، اما با زیاد شدن سرعت انتشار صوت، طول موج نیز افزایش می‌یابد.** گزینهٔ ۳

A ۱۷۱۹ ۴

تندی انتشار موج توسط چشمهٔ موج تعیین می‌شود و بسامد چشمهٔ موج نیز به دامنهٔ موج بستگی ندارد، از این رو تندی انتشار موج حاصل از دو چشمه با هم برابر است. $(v'=v)$

بسامد دو موج یکسان نیست، بنابراین طول موج آن‌ها نیز یکسان نخواهد بود.

$$\begin{cases}\lambda=\frac{v}{f}\\ \lambda'=\frac{v'}{f'}\end{cases}\xrightarrow{v'=v}\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{f}{f'}\xrightarrow{f'=3f}\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{f}{3f}\Rightarrow\lambda'=\frac{\lambda}{3}$$

بازی با سؤال **دو صوت با بسامدهای متفاوت در یک نقطه تولید و در هوا منتشر می‌شوند. طول موج آن‌ها در هوا .....**

۱) با هم برابر است. ۲) متناسب با جذر بسامد آن‌ها است.

۳) متناسب با بسامد آن‌ها است. ۴) متناسب با عکس بسامد آن‌ها است.

پاسخ **سرعت انتشار صوت در یک محیط به ویژگی‌های فیزیکی محیط بستگی دارد و به ویژگی‌های چشمهٔ صوت بستگی ندارد، بنابراین سرعت انتشار این دو صوت در محیط برابر است.**

$$\lambda_1=\frac{v}{f_1},\lambda_2=\frac{v}{f_2}\Rightarrow\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{f_2}{f_1}$$ گزینهٔ ۴

A ۱۷۲۰ ۱

چشمهٔ تولید موج یکسان است، بنابراین بسامد صوت در آب و هوا با هم یکسان بوده و خواهیم داشت:

$$v=\lambda f\Rightarrow\begin{cases}v_{\text{آب}}=f\lambda_{\text{آب}}\\ v_{\text{هوا}}=f\lambda_{\text{هوا}}\end{cases}\Rightarrow\frac{v_{\text{آب}}}{v_{\text{هوا}}}=\frac{\lambda_{\text{آب}}}{\lambda_{\text{هوا}}}=5\Rightarrow v_{\text{آب}}=5v_{\text{هوا}}$$

B ۱۷۲۱ ۴

سرعت انتشار موج در یک محیط به ویژگی‌های فیزیکی محیط بستگی دارد و به ویژگی‌های چشمهٔ موج مانند بسامد، دوره، انرژی موج و ... بستگی ندارد، از این‌رو سرعت انتشار موج‌های صوتی A و B در یک محیط با هم برابرند. نسبت طول موج‌ها خواهد شد:

$$\lambda_A=\frac{v}{f_A},\lambda_B=\frac{v}{f_B}\Rightarrow\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{f_B}{f_A}\Rightarrow\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{800}{600}=\frac{4}{3}$$

A ۱۷۲۲ ۴

با توجه به تعریف طول موج:

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow[v=330m/s]{\lambda=3/3\times10^{-3}m}f=\frac{v}{\lambda}=\frac{330}{3/3\times10^{-3}}=10000Hz$$

A ۱۷۲۳ ۲

خط فکری کافی است از روی معادلهٔ نوسان $x=A\cos 1/2\times10^{7}\pi t$ دوره را حساب کرده، سپس طول موج را به‌دست آورید.

۱ بسامد زاویه‌ای موج $\omega=1/2\times10^{7}\pi rad/s$ است. از این رو بسامد خواهد شد:

$$\omega=2\pi f\Rightarrow1/2\times10^{7}\pi=2\pi f\Rightarrow f=6\times10^{6}Hz$$

۲ طول موج را حساب می‌کنیم.

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{1500}{6\times10^{6}}=2/5\times10^{-4}m=2/5\times10^{-1}mm=0/25mm$$

A ۱۷۲۴ ۳

خط فکری علت شنیدن دو صدای مختلف، تفاوت تندی صوت در فلز و هوا است، یک صوت توسط فلز و با تندی بیشتر و صوت دیگر توسط هوا و با تندی کمتر منتقل می‌شود. بنابراین در حل این تست ابتدا باید زمان سیر صوت در هوا را به‌دست بیاورید. سپس با توجه به اختلاف زمانی رسیدن دو موج زمان پیشروی صوت در فلز را بیابید و سرانجام تندی انتشار موج در فلز را به‌دست بیاورید.

۱ زمان پیشروی صوت در هوا تا رسیدن به شخص را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=v_1t_1\Rightarrow140=350t_{\text{هوا}}\Rightarrow t_{\text{هوا}}=0/4s$$ زمان انتشار صوت توسط هوا

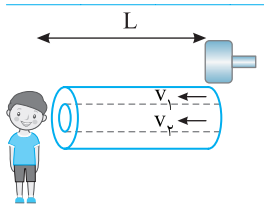
۲ تندی صوت در فلز بیشتر و زمان حرکت صوت در فلز کوتاه‌تر است، بنابراین:

$$t_{\text{فلز}}=t_{\text{هوا}}-0/36=0/4-0/36\Rightarrow t_{\text{فلز}}=0/04s$$

۳ تندی انتشار صوت در فلز خواهد شد:

$$\Delta x=v_{\text{فلز}}t_{\text{فلز}}\Rightarrow140=v_{\text{فلز}}\times0/04\Rightarrow v_{\text{فلز}}=3500m/s$$

B ۱۷۲۵ ۳



سرعت صوت در فلزات بیشتر از سرعت صوت در هوا است و $v_1>v_2$ است. پس صوت توسط فلز سریع‌تر و در زمان کوتاه‌تری به شخص می‌رسد.

$$v_1=\frac{L}{t_1}\Rightarrow t_1=\frac{L}{v_1}$$
$$v_2=\frac{L}{t_2}\Rightarrow t_2=\frac{L}{v_2}$$
$$\xrightarrow{t_1<t_2}t_2-t_1=\frac{L}{v_2}-\frac{L}{v_1}\Rightarrow\Delta t=(\frac{v_1-v_2}{v_1v_2})L$$

۴ ۱۷۲۶ A

خط فکری ابتدا سر شخص درون آب است. صدای انفجار به گوشش می‌رسد. این صدا از طریق آب منتقل شده است، شخص هیجان‌زده سر خود را از آب بیرون می‌آورد، اما مجدداً صدای انفجار می‌شنود و دوباره وحشت‌زده می‌شود، اما انفجار دومی در کار نیست، بلکه صدای همان انفجار اول است که با تندی کمتری و در زمان طولانی‌تری به گوش شخص رسیده است. محل انفجار تا شخص در هر دو حالت یکی است. اگر شما زمان حرکت صوت در آب را t_1 فرض کنید، زمان حرکت صوت در هوا بنا به داده‌های مسئله برابر $t_2=t_1+1/7$ ثانیه می‌شود.

اکنون کافی است جابه‌جایی‌ها را برابر قرار داده و از حرکت‌شناسی مسئله را حل کنید.

جابه‌جایی‌ها را برابر قرار می‌دهیم.

$$\Delta x_1=\Delta x_2 \Rightarrow v_1t_1=v_2t_2 \xrightarrow[v_2=350\,m/s]{v_1=1540\,m/s} 1540t_1=350(t_1+1/7)$$

$$\Rightarrow 4/4t_1=t_1+1/7 \Rightarrow t_1=0/5s$$

فاصلهٔ محل انفجار از شخص خواهد شد:

$$\Delta x=vt \Rightarrow \Delta x=1540\times 0/5 \Rightarrow \Delta x=770m$$

۲ ۱۷۲۷ B

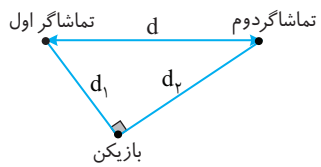
سرعت نور در هوا حدود $3\times10^8\,m/s$ است و سرعت انتشار صوت در هوا بسیار کمتر از آن و حدود $340\,m/s$ است. بنابراین می‌توان گفت که نور حاصل از آذرخش بلافاصله به چشم می‌رسد، یعنی همین که شما نور را مشاهده کردید، می‌توانید با یک کرونومتر زمان شنیدن صدای رعد (تُندر) را حساب کرده و فاصلهٔ تقریبی ابر تا سطح زمین را به‌دست بیاورید. $d=vt=340\times20=6800m\sim7km$

۱ ۱۷۲۸ A

خط فکری با توجه به زمانی که طول می‌کشد تا تماشاگرها صدای ضربه را بشنوند، به کمک تندی انتشار صوت، فاصلهٔ هر شخص از بازیکن را حساب کنید. سپس به کمک رابطهٔ فیثاغورس فاصلهٔ دو تماشاگر را به‌دست بیاورید.

۱ فاصلهٔ هر تماشاگر از بازیکن را حساب می‌کنیم.

$$d_1=vt_1=360\times0/75=270\,m \quad , \quad d_2=vt_2=360\times1=360\,m$$



۲ فاصلهٔ دو تماشاگر از هم را به‌دست می‌آوریم.

$$d^2=d_1^2+d_2^2 \Rightarrow d^2=270^2+360^2 \Rightarrow d^2=90^2(3^2+4^2) \Rightarrow d_2=90^2(25)$$

$$\Rightarrow d_2=90\times5=450m$$

۳ ۱۷۲۹ A

بسامد موج توسط چشمهٔ موج تعیین می‌شود. بسامد صوت حاصل از ارتعاش سیم همان بسامد نوسانات سیم است. یعنی وجه مشترک این دو موج منتشر شده در سیم و هوا، بسامد است. اما تندی انتشار موج به محیط بستگی دارد و تندی انتشار آن‌ها یکی نیست. بنابراین طول موج آن‌ها هم یکی نیست.

۱ ۱۷۳۰ B

خط فکری نسبت طول موج در هوا به طول موج در تار از شما خواسته شده است. بسامد موج در هوا و تار یکسان است. بنابراین با توجه به رابطهٔ $v=f\lambda$ شما برای مقایسهٔ طول موج‌ها باید سرعت انتشار موج در دو محیط را با هم مقایسه کنید. بنابراین تندی موج در تار را حساب کرده و مسئله را حل کنید.

۱ چگالی خطی جرم تار را حساب می‌کنیم.

$$\mu=\frac{m}{\ell} \xrightarrow{m=2g,\ \ell=0/8m} \mu=\frac{2\times10^{-3}}{0/8} \Rightarrow \mu=\frac{10^{-2}}{4} \Rightarrow \mu=2/5\times10^{-3}\,kg/m$$

۲ تندی انتشار موج در تار را به‌دست می‌آوریم.

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{100}{2/5\times10^{-3}}} \Rightarrow v=\sqrt{4\times10^4} \Rightarrow v=200m/s$$

۳ بسامد موج عرضی ایجاد شده در تار و بسامد صوت حاصل از نوسان تار در هوا یکسان است، از این رو:

$$f_{صوت}=f_{تار}=f, \lambda=\frac{v}{f} \Rightarrow \frac{\lambda_{صوت}}{\lambda_{تار}}=\frac{v_{صوت}}{v_{تار}}=\frac{320}{200}=\frac{8}{5}=1/6$$

۲ ۱۷۳۱ B

نمودار داده شده نمودار جابه‌جایی - مکان است که محور افقی آن نشان‌دهندهٔ طول موج و محور قائم آن دامنه را نشان می‌دهد. بنابراین: $A_A=2A_B$ ، $\lambda_B=2\lambda_A$

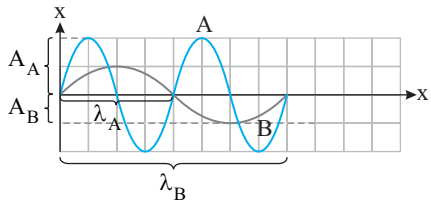
بنابراین گزاره (الف) $(A_A=2A_B)$ و گزاره (ت) $(\lambda_B=2\lambda_A)$ درست است.

دو موج در یک محیط منتشر شده‌اند، در این صورت تندی انتشار آن‌ها برابر است $(v_A=v_B)$ و گزارهٔ (پ) نادرست است.

نسبت بسامد دو موج خواهد شد:

$$\lambda=\frac{v}{f} \xrightarrow{v_A=v_B} \frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{f_B}{f_A} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{f_B}{f_A} \Rightarrow f_A=2f_B$$

بنابراین گزارهٔ (ب) نادرست هستند.



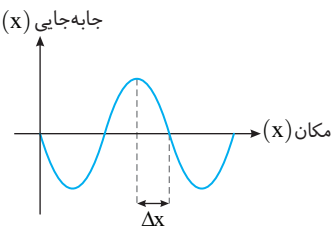
۲ ۱۷۳۲ A

۱ با توجه به معادلهٔ ارتعاشی چشمه $x=A\cos1700\pi t$ بسامد زاویه‌ای موج $\omega=1700\pi\,rad/s$ است. از این رو بسامد موج خواهد شد:

$$\omega=2\pi f \Rightarrow 1700\pi=2\pi f \Rightarrow f=850Hz$$

۲ طول موج صوت را به‌دست می‌آوریم: $\lambda=\frac{v}{f}=\frac{340}{850}=\frac{2}{5}=0/4m=40cm$

۳ با توجه به نمودار جابه‌جایی مکان، فاصلهٔ Δx نشان داده شده روی نمودار برابر $\frac{\lambda}{4}$ است. در نتیجه: $\Delta x=\frac{\lambda}{4}=10cm$



۱ ۱۷۳۳ A

بنا به تعریف مقدار انرژی صوتی را که در واحد زمان از واحد سطح عمود بر راستای پیشروی صوت می‌گذرد شدت صوت می‌نامند.

۳ ۱۷۳۴ A

به مقدار انرژی صوتی گذرنده از یکای سطح عمود بر راستای پیشروی صوت در واحد زمان شدت صوت گویند، بنابراین رابطهٔ شدت صوت خواهد شد:

$$I=\frac{E}{A.t} \xrightarrow{P=\frac{E}{A}} I=\frac{P}{A}$$

یکای توان، وات و یکای مساحت متر مربع است، بنابراین یکای شدت صوت برابر W/m^2 است

۴ ۱۷۳۵ A

یادآوری ۱ شدت صوت برابر مقدار انرژی‌ای است که در یکای زمان از یک سطح عمود بر راستای پیشروی موج می‌گذرد.

۲ شدت صوت با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد. $(I\propto\frac{1}{r^2})$

۳ شدت صوت با مجذور بسامد چشمه نسبت مستقیم دارد. $(I\propto f^2)$

۴ شدت صوت با مجذور دامنه نسبت مستقیم دارد. $(I\propto A^{۲})$

۵ شدت صوت به محیط انتشار صوت بستگی دارد.

شدت صوت با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد $(I\propto\frac{۱}{r^{۲}})$، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند. شدت صوت برابر $I=\frac{E}{At}$ است و به انرژی امواج صوتی بستگی دارد، بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

شدت صوت به محیط انتشار صوت بستگی دارد. به عنوان نمونه لولهٔ اگزوز اتومبیل شدت صوت صدای موتور را با جذب انرژی صوتی کاهش می‌دهد. همچنین هنگام انتشار صوت در هوا صداهایی که دارای بسامد بالا هستند، بیشتر جذب می‌شوند، پس شدت صوت به محیط بستگی دارد.

بازی با سؤال **اگر شدت صوت در فاصلهٔ $r_۱$ از چشمهٔ صوتی $I_۱$ و در فاصلهٔ $r_۲$ از چشمهٔ صوتی $I_۲$ باشد، در این صورت $\frac{I_۲}{I_۱}$ برابر است با .....**

کنکور دهه‌های گذشته

۱) $\frac{r_۱}{r_۲}$ ۲) $\frac{r_۱^{۲}}{r_۲^{۲}}$ ۳) $\frac{r_۲^{۲}}{r_۱^{۲}}$ ۴) $\frac{r_۲}{r_۱}$

پاسخ **شدت صوت برابر مقدار انرژی‌ای است که در یکای زمان از یکای سطح عمود بر راستای پیشروی صوت می‌گذرد.** $I=\frac{E}{At}=\frac{P}{A}\ (W/m^{۲})$

در رابطهٔ بالا A سطحی است که صوت از آن منتشر می‌شود. صوت به صورت امواج کروی در محیط منتشر می‌شود و سطح جبهه‌های کروی صوت با مجذور فاصله نسبت مستقیم دارد $(A=۴\pi r^{۲})$**، بنابراین شدت صوت با مجذور فاصله نسبت وارون دارد.** $\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{r_۱}{r_۲})^{۲}$

گزینهٔ ۲

A ۳ ۱۷۳۶

بنا بر تعریف شدت صوت:

$$I=\frac{E}{At}\xrightarrow[E=۱/۵\times۱۰^{-۱۱}J,t=۵s]{A=۳\times۱۰^{-۴}m^{۲}}I=\frac{۱/۵\times۱۰^{-۱۱}}{۳\times۱۰^{-۴}\times۵}$$

$$\Rightarrow I=۱۰^{-۸}W/m^{۲}=۰/۰۱\mu W/m^{۲}$$

A ۱ ۱۷۳۷

خط فکری چشمهٔ صوت به‌طور یکنواخت صوت را در همهٔ جهت‌ها منتشر می‌کند و جبهه‌های موج به صورت سطوح کروی شکل هستند که انرژی چشمه روی این سطوح پخش می‌شود، بنابراین در فاصلهٔ r از چشمه مساحت سطح جبهه برابر $A=۴\pi r^{۲}$ خواهد بود و این مقدار در رابطهٔ شدت صوت باید به جای A قرار گیرد.

با توجه به تعریف شدت صوت:

$$I=\frac{P}{A}\Rightarrow I=\frac{P}{۴\pi r^{۲}}\Rightarrow I=\frac{۶۰}{۴\times۳\times۱۰^{۶}}=۵\times۱۰^{-۶}W/m^{۲}=۵\mu W/m^{۲}$$

A ۲ ۱۷۳۸

شدت صوت برابر مقدار انرژی است که در یکای زمان از یکای سطح عمود بر راستای انتشار موج می‌گذرد.

$$I=\frac{E}{At}\xrightarrow{P=\frac{E}{t}}I=\frac{P}{A}$$

از طرفی، جبهه‌های موج صوتی، کروی هستند و مساحت این جبهه‌های صوت $A=۴\pi r^{۲}$ است که r برابر فاصله از چشمهٔ صوت است.

$$I=\frac{P}{۴\pi r^{۲}}\Rightarrow ۱۰^{-۳}=\frac{۴\pi\times۱۰^{-۳}}{۴\pi r^{۲}}\Rightarrow r=۱m$$

B ۲ ۱۷۳۹

شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد.

$$\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{r_۱}{r_۲})^{۲}\Rightarrow\frac{I_۲}{۰/۱}=(\frac{۶۴۰}{۱۶۰})^{۲}\Rightarrow I_۲=۱/۶W/m^{۲}$$

A ۲ ۱۷۴۰

نکته شدت صوت با مجذور دامنه، نسبت مستقیم و با مجذور فاصله، نسبت وارون دارد.

کافی است در رابطهٔ زیر اطلاعات مسئله را قرار دهیم.

$$\frac{I'}{I}=(\frac{A'}{A})^{۲}\times(\frac{r}{r'})^{۲}\xrightarrow[\frac{r'}{r}=\frac{۱}{۴}]{\frac{A'}{A}=۲۵,}\frac{I'}{I}=(۲۵\times۴)^{۲}=۱۰^{۴}$$

A ۳ ۱۷۴۱

شدت صوت با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد.

با توجه به اطلاعات مسئله خواهیم داشت:

$$\frac{I'}{I}=(\frac{r}{r'})^{۲}\xrightarrow{I'=\frac{۴}{۹}I,\ d'=d+۳}\frac{۴}{۹}=\frac{d^{۲}}{(d+۳)^{۲}}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{d}{d+۳}\Rightarrow ۲d+۶=۳d$$

$$\Rightarrow d=۶m$$

B ۴ ۱۷۴۲

۱ شدت صوت با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد بنابراین:

$$\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{d_۱}{d_۲})^{۲}\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{۳۰}{۱۰})^{۲}\Rightarrow I_۲=۹I_۱\ \ (I)$$

۲ با توجه به فرض مسئله: $I_۲-I_۱=۱/۶W/m^{۲}\ \ (II)$

۳ از رابطهٔ (I) و (II) خواهیم داشت:

$$۹I_۱-I_۱=۱/۶\Rightarrow I_۱=۰/۲W/m^{۲}\Rightarrow I_۲=۹\times۰/۲=۱/۸W/m^{۲}$$

۴ شدت صوت در فاصلهٔ ۳۰cm چشمه برابر $۰/۲W/m^{۲}$ شده است. بنابراین شدت صوت در فاصلهٔ ۱m منبع خواهد شد:

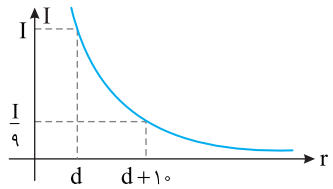
$$\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{d_۱}{d_۳})^{۲}\Rightarrow\frac{I_۳}{۰/۲}=(\frac{۰/۳}{۱})^{۲}\Rightarrow I_۲=۰/۲\times۰/۰۹\Rightarrow I_۲=۰/۰۱۸W/m^{۲}$$

B ۴ ۱۷۴۳

شدت صوت با مربع فاصله از منبع صوت نسبت وارون دارد بنابراین با توجه به نمودار خواهیم داشت:

$$\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{d_۱}{d_۲})^{۲}\Rightarrow\frac{\frac{I}{۹}}{I}=(\frac{d}{d+۱۰})^{۲}\Rightarrow\frac{۱}{۹}=(\frac{d}{d+۱۰})^{۲}\Rightarrow\frac{d}{d+۱۰}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳d=d+۱۰\Rightarrow d=۵m$$



اگر در فاصلهٔ d' از چشمهٔ صوت شدت صوت $I'=\frac{I}{۲۵}$ شود داریم:

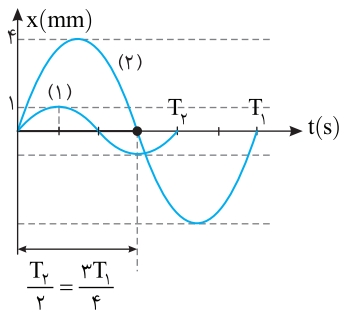
$$\frac{I'}{I}=(\frac{d}{d'})^{۲}\Rightarrow\frac{\frac{I}{۲۵}}{I}=(\frac{d}{d'})^{۲}\Rightarrow\frac{۱}{۲۵}=(\frac{d}{d'})^{۲}\Rightarrow\frac{d}{d'}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow d'=۵d$$

$$\Rightarrow d'=۵\times۵=۲۵m$$

B ۴ ۱۷۴۴

خط فکری شدت صوت چشمه (۱)، $\frac{۹}{۴}$ برابر شدت صوت چشمهٔ (۲) است. از طرفی شدت صوت با مجذور بسامد و مجذور دامنه نسبت مستقیم و با مجذور فاصله نسبت وارون دارد. از روی نمودار رابطهٔ دوره $T_۱$ و $T_۲$ و همچنین دامنه‌های $A_۱=۱mm$ و $A_۲=۴mm$ را مشخص کنید سپس نسبت شدت صوت‌ها را به‌دست آورید.

۱ با توجه به نمودار $\frac{T_۲}{۲}=\frac{۳}{۴}T_۱\Rightarrow T_۲=\frac{۳}{۲}T_۱\Rightarrow f_۲=\frac{۲}{۳}f_۱\Rightarrow f_۱=\frac{۳}{۲}f_۲$



۲ شدت صوت با مجذور دامنه و مجذور بسامد نسبت مستقیم و با مجذور فاصله نسبت وارون دارد. از این‌رو:

$$\frac{I_۱}{I_۲}=(\frac{f_۱}{f_۲})^۲\times(\frac{A_۱}{A_۲})^۲\times(\frac{d_۲}{d_۱})^۲\Rightarrow\frac{۹}{۴}=(\frac{۳}{۲})^۲\times(\frac{۱}{۴})^۲\times(\frac{d_۲}{d_۱})^۲\Rightarrow\frac{d_۲}{d_۱}=۴$$

A ۱۷۴۵ ۱

یادآوری تراز شدت صوت به صورت $\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}$ تعریف می‌شود که در آن $I_۰$ شدت صوت مبنا است.

کافی است در رابطهٔ تراز شدت صوت داده‌های مسئله را قرار دهیم.

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\xrightarrow[I_۰=۱۰^{-۱۲}W/m^۲]{\beta=۱۳۰dB}۱۳۰=۱۰\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}=۱۳$$

یادآوری ریاضی $\log_{۱۰}a=b\Rightarrow a=۱۰^b$

بنابراین خواهیم داشت: $\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}=۱۰^{۱۳}\Rightarrow I=۱۰W/m^۲$

B ۱۷۴۶ ۲

یادآوری تراز شدت صوت از رابطهٔ $\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}$ و شدت صوت از رابطهٔ $I=P/A$ محاسبه می‌شود و نباید این دو مفهوم را با یکدیگر اشتباه گرفت.

۱ تراز شدت صوت برابر است با: $\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}$

$$۸۰=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\Rightarrow۸=\log\frac{I}{I_۰}\Rightarrow۱۰^۸=\frac{I}{I_۰}\Rightarrow I=۱۰^۸I_۰=۱۰^{-۴}\frac{W}{m^۲}$$

۲ شدت صوت از رابطهٔ $I=\frac{P}{A}$ به‌دست می‌آید که چون جبهه‌های موج صوتی کروی هستند، $A=۴\pi r^۲$ است:

$$۱۰^{-۴}=\frac{۴۸}{A}\Rightarrow A=۴۸\times۱۰^۴\Rightarrow۴\pi r^۲=۴۸\times۱۰^۴\xrightarrow{\pi=۳}$$

$$۱۲r^۲=۴۸\times۱۰^۴\Rightarrow r^۲=۴\times۱۰^۴\Rightarrow r=۲\times۱۰^۲=۲۰۰m$$

B ۱۷۴۷ ۴

با توجه به تعریف تراز شدت صوت، ابتدا شدت صوت در فاصلهٔ ۵۰ متری چشمه را به‌دست می‌آوریم:

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\xrightarrow{\beta=۶۰dB}۶۰=۱۰\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow I=۱۰^{-۶}\frac{W}{m^۲}$$

اکنون با استفاده از شدت صوت، توان چشمه را حساب می‌کنیم:

$$I=\frac{P}{A}\Rightarrow I=\frac{P}{۴\pi r^۲}\Rightarrow۱۰^{-۶}=\frac{P}{۴\times۳\times۵۰^۲}\Rightarrow P=۰/۰۳W=۳۰mW$$

A ۱۷۴۸ ۳

۱ شدت صوت را در محل پردهٔ گوش شخص به‌دست می‌آوریم:

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\xrightarrow[I_۰=۱۰^{-۱۲}W/m^۲]{\beta=۵۰dB}۵۰=۱۰\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow I=۱۰^{-۷}W/m^۲$$

۲ با توجه به تعریف شدت صوت، انرژی صوتی گذرنده از پردهٔ گوش شنونده در مدت ۵۰s خواهد شد:

$$I=\frac{E}{At}\Rightarrow E=IAt\Rightarrow E=۱۰^{-۷}\times۶۰\times۱۰^{-۶}\times۵۰=۳\times۱۰^{-۱۰}J=۳\times۱۰^{-۴}\mu J$$

B ۱۷۴۹ ۱

شدت صوت چشمه را حساب می‌کنیم.

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\xrightarrow{\beta=۹۰dB}۹۰=۱۰\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}=۱۰^۹$$

$$\Rightarrow I=۱۰^{-۳}W/m^۲$$

آهنگ متوسط انتقال انرژی (P) از $۱cm^۲$ خواهد شد:

$$I=\frac{P}{A}\Rightarrow P=IA\Rightarrow P=۱۰^{-۳}\times۱۰^{-۴}\Rightarrow P=۱۰^{-۷}W\Rightarrow P=۱۰^{-۱}\mu W$$

B ۱۷۵۰ ۴

یادآوری ریاضی $\log a\times b=\log a+\log b\,,\log a^n=n\log a$

ابتدا شدت صوت در محل میکروفون را به‌دست می‌آوریم:

$$I=\frac{E}{At}\xrightarrow[A=۲\times۱۰^{-۴}m^۲,t=۲s]{E=۸\times۱۰^{-۱۲}J}I=\frac{۸\times۱۰^{-۱۲}}{۲\times۱۰^{-۴}\times۲}=۲\times۱۰^{-۸}W/m^۲$$

اکنون تراز شدت صوت را حساب می‌کنیم:

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\Rightarrow\beta=۱۰\log\frac{۲\times۱۰^{-۸}}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow\beta=۱۰\log(۲\times۱۰^{+۴})$$

$$\Rightarrow\beta=۱۰[\log۲+\log۱۰^۴]=۱۰(۰/۳+۴)=۴۳dB$$

B ۱۷۵۱ ۴

خط فکری در اطلاعات مسئله $\log۲=۰/۳$ داده شده است. بنابراین شما در محاسبهٔ تراز شدت صوت باید از این مطلب استفاده کنید، به حل دقت کنید.

بنا به تعریف شدت صوت خواهیم داشت:

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\xrightarrow{I=۳/۲\times۱۰^{-۳}W/m^۲}$$

$$\beta=۱۰\log\frac{۳/۲\times۱۰^{-۳}}{۱۰^{-۱۲}}=۱۰\log۳/۲\times۱۰^۹=۱۰(\log۳۲+\log۱۰^۸)$$

تکلیف $\log۱۰^۸$ معلوم است مقدار آن ۸ است اما $\log۳۲$ را چکار باید کرد؟ ۳۲ را به صورت $۲^۵$ بنویسید.

$$\beta=۱۰(\log۲^۵+\log۱۰^۸)=۱۰(۵\log۲+۸)\Rightarrow\beta=۱۰(۵\times۰/۳+۸)=۱۰(۹/۵)$$

$$\Rightarrow\beta=۹۵dB$$

B ۱۷۵۲ ۳

تراز شدت صوت بنا به تعریف $\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}$ است که در آن $I_۰$ شدت صوت مرجع است. در صورت مسئله نسبت $\frac{I}{I_۰}$ برابر $۲\sqrt{۱۰}\times۱۰^۵$ داده شده است.

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\Rightarrow\beta=۱۰\log۲\sqrt{۱۰}\times۱۰^۵$$

یادآوری ریاضی $\log ab=\log a+\log b$

اکنون لگاریتم را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\beta=۱۰(\log۲+\log\sqrt{۱۰}+\log۱۰^۵)\Rightarrow\beta=۱۰(۰/۳+\frac{۱}{۲}\log۱۰+۵\log۱۰)$$

$$\xrightarrow{\log۱۰=۱}\beta=۱۰(۰/۳+۰/۵+۵)\Rightarrow\beta=۱۰(۵/۸)=۵۸dB$$

A ۱۷۵۳ ۳

بنا بر تعریف تراز شدت صوت داریم:

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\Rightarrow۱۵=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\Rightarrow۱/۵=\log\frac{I}{I_۰}$$

با توجه به اینکه $\log۲=۰/۳$ است، عدد ۱/۵ را به صورت $۵\times۰/۳$ می‌نویسیم و به جای ۰/۳، $\log۲$ را قرار می‌دهیم.

$$۵\times۰/۳=\log\frac{I}{I_۰}\xrightarrow{\log۲=۰/۳}۵\log۲=\log\frac{I}{I_۰}\Rightarrow\log۲^۵=\log\frac{I}{I_۰}$$

$$\Rightarrow\frac{I}{I_۰}=۲^۵\Rightarrow\frac{I}{I_۰}=۳۲$$

B ۱۷۵۴ ۲

با توجه به اینکه در صورت مسئله $\log ۳=۰/۵$ داده شده است، به سراغ حل مسئله بروید. بنا به تعریف تراز شدت صوت بنویسید:

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\xrightarrow{\beta=۲۵dB,I_۰=۱۰^{-۱۲}W/m^۲}۲۵=۱۰\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}$$

$$\Rightarrow ۲/۵=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\xrightarrow{۲/۵=۲+۰/۵}۲+۰/۵=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}$$

به جای ۲، $\log ۱۰^۲$ و به جای ۰/۵، $\log ۳$ را قرار می‌دهیم.

$$\log ۱۰^۲+\log ۳=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\xrightarrow{\log a+\log b=\log ab}$$

$$\log ۳\times ۱۰^۲=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}=۳\times ۱۰^۲\Rightarrow I=۳\times ۱۰^{-۱۰}W/m^۲$$

B ۱۷۵۵ ۱

رابطهٔ تراز شدت صوت را می‌نویسیم:

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\Rightarrow ۶۶=۱۰\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow ۶/۶=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow ۶+۰/۶=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}$$

به جای ۶، $\log ۲$ و به جای ۰/۶، $۲\log ۲$ قرار می‌دهیم.

$$\log ۱۰^۶+۲\log ۲=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow ۴\times ۱۰^۶=\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow I=۴\times ۱۰^{-۶}W/m^۲$$

دقت کنید در حل این تست نباید به جای عدد ۶/۶ مقدار ۰/۳×۲۲ یا $۲۲\log ۲$ را قرار داد زیرا خواهیم داشت: $۲۲\log ۲=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow I=۲^{۲۲}\times ۱۰^{-۱۲}$

که در گزینه‌ها نیست و نیز در روش اول ما دو بار از تقریب $\log ۲=۰/۳$ استفاده کرده‌ایم در حالی که در روش دوم ۲۲ بار این تقریب به‌کار برده شده پس جواب در حالت اول به مقدار واقعی نزدیک‌تر است.

بازی با سؤال **تراز شدت صوتی ۲۶ دسی‌بل است. شدت این صوت، چند وات بر مترمربع است؟** $(\log ۲=۰/۳, I_۰=۱۰^{-۱۲}W/m^۲)$ ریاضی - ۹۰

۱) ۴×۱۰^{-۱۰} ۲) ۲×۱۰^{-۴} ۳) ۴×۱۰^{-۴} ۴) ۲×۱۰^{-۱۰}

پاسخ **تراز شدت صوت برحسب دسی‌بل، بنا به تعریف برابر است با:**

$$\beta=\log\frac{I}{I_۰}\Rightarrow ۲۶=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow ۲/۶=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow ۲+۰/۶=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}$$

به جای عدد ۲، $\log ۱۰^۲$ و به جای عدد ۰/۶، $۲\log ۲$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\log ۱۰^۲+۲\log ۲=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow\log(۲^۲\times ۱۰^۲)=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}$$

$$\Rightarrow ۲^۲\times ۱۰^۲=\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow I=۴\times ۱۰^{-۱۰}W/m^۲$$

گزینهٔ ۱

B ۱۷۵۶ ۳

خط فکری در حل این تست باید از $\log ۵=۰/۷$ استفاده کنید یعنی هرجا که ۰/۷ دیده شد، $\log ۵$ را به جای آن قرار دهید.

تراز شدت صوت برحسب دسی‌بل بنا بر تعریف برابر است با:

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\xrightarrow{\beta=۳۷dB,I_۰=۱۰^{-۱۲}W/m^۲}۳۷=۱۰\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}$$

$$\Rightarrow ۳/۷=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow ۳+۰/۷=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}$$

به‌جای عدد ۳، $\log ۱۰^۳$ و به جای عدد ۰/۷، $\log ۵$ را قرار می‌دهیم.

$$\log ۱۰^۳+\log ۵=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\xrightarrow{\log a+\log b=\log ab}$$

$$\log(۵\times ۱۰^۳)=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow I=۵\times ۱۰^{-۹}W/m^۲$$

بازی با سؤال **تراز شدت صوتی ۳۷ دسی‌بل است. اگر شدت صوت مبنا $۱۰^{-۱۲}W/m^۲$ باشد، شدت این صوت، چند وات بر متر مربع است؟** $(\log ۲=۰/۳)$

۱) ۷×۱۰^{-۵} ۲) $۱۰^{-۷}$ ۳) ۵×۱۰^{-۹} ۴) $۱/۵\times ۱۰^{-۹}$

پاسخ **دقت کنید در فرض مسئله $\log ۲=۰/۳$ داده شده است. بنابرین از آن استفاده می‌کنیم.** $\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\Rightarrow ۳۷=۱۰\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow ۳/۷=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}$

به جای ۳/۷ مقدار ۴−۰/۳ را قرار می‌دهیم.

$$۴-۰/۳=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\xrightarrow{۴=\log ۱۰^۴,\log ۲=۰/۳}\log ۱۰^۴-\log ۲=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}$$

$$\xrightarrow{\log a-\log b=\log\frac{a}{b}}\log\frac{۱۰^۴}{۲}=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow I=۵۰۰۰\times ۱۰^{-۱۲}$$

$$\Rightarrow I=۵\times ۱۰^{-۹}W/m^۲$$

گزینهٔ ۳

B ۱۷۵۷ ۴

تراز شدت صوت برحسب دسی‌بل برابر است با:

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\xrightarrow{\beta=۱۵۹dB}۱۵۹=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\Rightarrow ۱۵/۹=\log\frac{I}{I_۰}$$

$$\Rightarrow ۱۵+۰/۹=\log\frac{I}{I_۰}\Rightarrow ۱۵+۳(۰/۳)=\log\frac{I}{I_۰}$$

به جای عدد ۱۵، مقدار $\log ۱۰^{۱۵}$ و به جای عدد ۰/۳ مقدار $\log ۲$ را قرار می‌دهیم.

$$\xrightarrow{I_۰=۱۰^{-۱۲}W/m^۲}\log ۱۰^{۱۵}+۳\log ۲=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}$$

$$\xrightarrow{n\log a=\log a^n}\log ۱۰^{۱۵}+\log ۲^۳=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}$$

$$\Rightarrow ۸\times ۱۰^{۱۵}=\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow I=۸۰۰۰W/m^۲$$

B ۱۷۵۸ ۳

ابتدا شدت صوت دریافتی توسط شنونده را به‌دست می‌آوریم:

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\xrightarrow{\beta=۹۰dB,I_۰=۱۰^{-۱۲}W/m^۲}۹۰=۱۰\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}$$

$$\Rightarrow ۱۰^۹=\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow I=۱۰^{-۳}W/m^۲$$

امواج صوتی به صورت امواج کروی در محیط منتشر می‌شوند و سطح جبهه‌های کروی صوت $A=۴\pi r^۲$ است که r فاصله از چشمهٔ صوت است. بنا به تعریف شدت صوت خواهیم داشت:

$$I=\frac{P}{A}\Rightarrow I=\frac{P}{۴\pi r^۲}\xrightarrow{P=۱۲۰W,\pi=۳}۱۰^{-۳}=\frac{۱۲۰}{۴\times ۳\times r^۲}\Rightarrow r^۲=۱۰^۴\Rightarrow r=۱۰۰m$$

B ۱۷۵۹ ۱

در گام اول به کمک تعریف تراز شدت صوت، شدت صوت در مکان مورد نظر را به‌دست می‌آوریم.

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\xrightarrow[I_۰=۱۰^{-۱۲}W/m^۲]{\beta=۹۶d\beta}۹۶=۱۰\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow ۹/۶=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}$$

به سراغ ریاضی می‌رویم و عدد ۹/۶ را به صورت ۹+۰/۶ می‌نویسیم. به جای عدد ۹، $\log ۱۰^۹$ و به جای عدد ۰/۶، $۲\log ۲$ را قرار می‌دهیم. از این‌رو می‌نویسیم:

$$\log ۱۰^۹+۲\log ۲=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}$$

یادآوری ریاضی $\log a^n=n\log a\ ,\ \log a+\log b=\log ab$

به توجه به یادآوری ریاضی خواهیم داشت:

$$\log ۱۰^۹+\log ۲^۲=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow\log ۲^۲\times ۱۰^۹=\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}$$

$$\Rightarrow ۴\times ۱۰^۹=\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow I=۴\times ۱۰^{-۳}W/m^۳$$

یادآوری شدت صوت برابر مقدار انرژی است که در مدت ۱s از سطحی به مساحت $۱m^۲$ می‌گذرد. $I=\frac{E}{A.t}$

با توجه به تعریف شدت صوت، مقدار انرژی گذرنده از سطحی به مساحت $۱mm^۲$ خواهد شد:

$$E=IA.t\xrightarrow[t=۶۰s]{A=۱۰^{-۶}m^۲}E=۴\times ۱۰^{-۳}\times ۱۰^{-۶}\times ۶۰$$

$$\Rightarrow E=۰/۲۴\times ۱۰^{-۶}\Rightarrow E=۰/۲۴\mu J$$

B ۳ ۱۷۶۰

خط فکری تراز شدت صوت یک تابع لگاریتمی به صورت $\beta=10\log\frac{I}{I_0}$ است. اما یادتان باشد که اگر در مسئله برای دو حالت مختلف، تراز شدت صوت به شما داده شود معمولاً شما باید برای هر دو حالت رابطه تراز شدت صوت را بنویسید، سپس آن‌ها را از هم کم کنید. دقت کنید که از تقسیم دو رابطه برهم شما به تقسیم دو لگاریتم می‌رسید که کاربردی در حل مسئله ندارد. البته شما در ریاضی یاد گرفته‌اید که $\log a-\log b=\log\frac{a}{b}$.

شدت صوت ۱۰۰۰ برابر شده است از این‌رو برای هر دو حالت رابطه تراز شدت صوت به صورت زیر است و خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\beta_1=10\log\frac{I_1}{I_0}\\ \beta_2=10\log\frac{I_2}{I_0}\end{cases}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10(\log\frac{I_2}{I_0}-\log\frac{I_1}{I_0})=10\log\frac{I_2}{I_1}$$

$$\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log10^3\Rightarrow\Delta\beta=30dB$$

بنابراین تراز شدت صوت ۳۰ دسی‌بل افزایش می‌یابد.

B ۳ ۱۷۶۱

خط فکری تراز شدت صوت‌ها را در دو حالت می‌نویسیم و آن‌ها را از هم کم می‌کنیم و رابطهٔ بین I_2 و I_1 را به‌دست می‌آوریم.

یادآوری ریاضی $\log a-\log b=\log\frac{a}{b}$

$$\begin{cases}\beta_1=10\log\frac{I_1}{I_0}\\ \beta_2=10\log\frac{I_2}{I_0}\end{cases}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{\frac{I_2}{I_0}}{\frac{I_1}{I_0}}$$

$$\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}$$

تراز شدت صوت‌ها را به ترتیب ۲۷dB و ۴۷dB را در رابطه قرار می‌دهیم و نسبت شدت صوت‌ها را حساب می‌کنیم.

$$47-27=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow20=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow\log\frac{I_2}{I_1}=2\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=100$$

B ۳ ۱۷۶۲

اختلاف تراز شدت صوت دو صوت مختلف برابر است با:

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow5=10\log\frac{I_2}{I_1}$$

$$\Rightarrow0/5=\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$$

در این تست نکتهٔ ظریفی وجود دارد. شما ممکن است به جای ۰/۵ مقدار $\log3$ را قرار دهید و به جواب نادرست ۳ برسید. دقت کنید $\sqrt{10}=3$ است و علت اختلاف پاسخ، تقریبی است که در $\log3=0/5$ وجود دارد.

A ۱ ۱۷۶۳

یادآوری ریاضی $\log a-\log b=\log\frac{a}{b}$

اختلاف تراز شدت صوت این دو صوت برابر است با:

$$\beta_2-\beta_1=0/3\xrightarrow{\beta=10\log\frac{I}{I_0}}\log\frac{I_2}{I_0}-\log\frac{I_1}{I_0}=0/3\Rightarrow\log\frac{I_2}{I_1}=\log2$$

$$\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=2$$

بازی با سوال تراز شدت صوتی از ۳۰ دسی‌بل به ۳۶ دسی‌بل می‌رسد. شدت صوت چند برابر شده است؟ $(\log2=0/3)$ خارج ریاضی - ۹۷

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) $\frac{6}{5}$ ۴) $\frac{36}{25}$

پاسخ تراز شدت صوت برحسب دسی‌بل بنا به تعریف برابر است با:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}$$

$$\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{\frac{I_2}{I_0}}{\frac{I_1}{I_0}}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}$$

$$36-30=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow\log\frac{I_2}{I_1}=0/6$$

به جای ۰/۶، مقدار $2\times0/3$ یعنی $2\log2$ را قرار می‌دهیم.

$$\log\frac{I_2}{I_1}=2\times0/3=2\log2\Rightarrow\log\frac{I_2}{I_1}=\log2^2\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=4$$

گزینهٔ ۱

A ۱ ۱۷۶۴

با توجه به تعریف تراز شدت صوت:

$$\beta_1-\beta_2=10\log\frac{I_1}{I_2}\Rightarrow12=10\log\frac{I_1}{I_2}\Rightarrow1/2=\log\frac{I_1}{I_2}$$

$$\Rightarrow4\log2=\log\frac{I_1}{I_2}\Rightarrow\log2^4=\log\frac{I_1}{I_2}\Rightarrow\frac{I_1}{I_2}=16$$

B ۴ ۱۷۶۵

تراز شدت صوت را در دو حالت نوشته از هم کم می‌کنیم:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}$$

$$\xrightarrow{\log a-\log b=\log\frac{a}{b}}\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}=10\log\frac{500}{100}$$

$$\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log5$$

اکنون به جای $5=\frac{10}{2}$ را قرار می‌دهیم و به جای $\log\frac{10}{2}$ می‌نویسیم $\log10-\log2$

بنابراین:

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{10}{2}=10(\log10-\log2)\xrightarrow{\log2=0/3}$$

$$\beta_2-\beta_1=10(1-0/3)=7dB$$

بازی با سوال تراز شدت صوت دو چشمهٔ صوت در یک نقطه به ترتیب $\beta_1=90dB$ و $\beta_2=95dB$ است. نسبت شدت صوت دو چشمه در این نقطه $(\frac{I_2}{I_1})$ کدام است؟ $(\log3=0/5)$

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ بنابه تعریف تراز شدت صوت، خواهیم داشت:

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow95-90=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow0/5=\log\frac{I_2}{I_1}$$

$$\Rightarrow\log3=\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=3$$

گزینهٔ ۱

A ۱ ۱۷۶۶

خط فکری با توجه به صورت مسئله $\beta_2=5\beta_1$ و $I_2=16I_1$ است. بنا به تعریف تراز شدت صوت به جای β_1 و β_2 قرار دهید و به کمک روابط لگاریتم مسئله را حل کنید.

با توجه به فرض مسئله:

$$\beta_۲=۵\beta_۱ \xrightarrow{\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}} \log\frac{I_۲}{I_۰}=۵\log\frac{I_۱}{I_۰} \xrightarrow{I_۲=۱۶I_۱} \log\frac{۱۶I_۱}{I_۰}=۵\log\frac{I_۱}{I_۰} \xrightarrow{n\log a=\log a^n} \log\frac{۱۶I_۱}{I_۰}=\log(\frac{I_۱}{I_۰})^۵$$

$$\Rightarrow\frac{۱۶I_۱}{I_۰}=(\frac{I_۱}{I_۰})^۵\Rightarrow ۱۶=(\frac{I_۱}{I_۰})^۴\Rightarrow I_۱=۲I_۰\Rightarrow I_۱=۲\times۱۰^{-۱۲}\,W/m^۲$$

بازی با سؤال **اگر شدت صوت چشمه‌ای را ۸ برابر کنیم، تراز شدت صوت برای شنونده‌ای که به فاصلهٔ معینی از چشمه قرار دارد، ۱/۳ برابر می‌شود، تراز شدت صوت اولیه برای شنونده چند دسی‌بل بوده است؟** $(\log۲=۰/۳)$

ریاضی - ۹۵

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۰ ۴) ۳۹

پاسخ با توجه به رابطهٔ ریاضی $\log ab=\log a+\log b$ به جای $\log\frac{۸I}{I_۰}$ می‌نویسیم: $\log۸+\log\frac{I}{I_۰}$:

$$\log۸+\log\frac{I}{I_۰}=۱/۳\log\frac{I}{I_۰}$$

$$\Rightarrow\log۸=۱/۳\log\frac{I}{I_۰}-\log\frac{I}{I_۰}\Rightarrow\log۸=۰/۳\log\frac{I}{I_۰}$$

به جای $\log۸$، $\log۲^۳$ می‌نویسیم.

$$\log۲^۳=۰/۳\log\frac{I}{I_۰} \xrightarrow{\log a^n=n\log a} ۳\log۲=۰/۳\log\frac{I}{I_۰}$$

$$\xrightarrow{\log۲=۰/۳} ۳\times۰/۳=۰/۳\log\frac{I}{I_۰}\Rightarrow\log\frac{I}{I_۰}=۳$$

تراز شدت صوت اولیه خواهد شد: $\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}=۱۰\times۳=۳۰dB$

گزینهٔ ۳

B ۱۷۶۷ ۳

اختلاف تراز شدت صوت A و B از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\beta_A-\beta_B=۱۰\log\frac{I_A}{I_B}$$

با توجه به فرض مسئله $\beta_A-\beta_B=۱۰dB$ و $I_A=۰/۰۴\,W/m^۲$ است. از این رو خواهیم داشت:

$$۱۰=۱۰\log\frac{۰/۰۴}{I_B}\Rightarrow\log\frac{۰/۰۴}{I_B}=۱\Rightarrow\frac{۰/۰۴}{I_B}=۱۰\Rightarrow I_B=\frac{۰/۰۴}{۱۰}=۰/۰۰۴\,W/m^۲$$

در این صورت اختلاف شدت این دو صوت خواهد شد:

$$I_A-I_B=۰/۰۴-۰/۰۰۴=۰/۰۳۶\,W/m^۲\Rightarrow I_A-I_B=۳۶\,mW/m^۲$$

B ۱۷۶۸ ۳

با توجه به رابطهٔ اختلاف تراز شدت صوت دو صورت خواهیم داشت:

$$\beta_A-\beta_B=۱۰\log\frac{I_A}{I_B}$$

با توجه به فرض مسئله $\beta_A-\beta_B=۱۱/۵dB$ بنابراین:

$$۱۱/۵=۱۰\log\frac{I_A}{I_B}\Rightarrow۱/۱۵\log\frac{I_A}{I_B}$$

$$۱+۰/۱۵=\log\frac{I_A}{I_B} \xrightarrow{۰/۱۵=۰/۵\times۰/۳=۰/۵\log۲} \log۱۰+\frac{۱}{۲}\log۲=\log\frac{I_A}{I_B}$$

$$\log۱۰+\log۲^{\frac{۱}{۲}}=\log\frac{I_A}{I_B}\Rightarrow\log۱۰\sqrt{۲}=\log\frac{I_A}{I_B}\Rightarrow\frac{I_A}{I_B}=۱۰\sqrt{۲}$$

B ۱۷۶۹ ۴

خط فکری هرگاه شدت صوت منبع صوتی I باشد و n منبع مشابه با این شدت صوت در کنار هم صوت تولید کنند شدت صوت حاصل از آن $I'=nI$ خواهد بود. از شما تغییر تراز شدت صوت خواسته شده است، بنابراین تراز شدت صوت را در دو حالت نوشته از هم کم کنید و به جای $I_۲$، $۵I_۱$ قرار دهید.

با توجه به تعریف تراز شدت صوت خواهیم داشت:

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۰}-۱۰\log\frac{I_۱}{I_۰}=۱۰\log\frac{\frac{I_۲}{I_۰}}{\frac{I_۱}{I_۰}}\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}$$

$$\xrightarrow{I_۲=۵I_۱}\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{۵I_۱}{I_۱}=\log۵$$

به جای $\log۵$، $\log\frac{۱۰}{۲}$ را قرار می‌دهیم.

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{۱۰}{۲}=۱۰\,(\log۱۰-\log۲) \xrightarrow{\log۱۰=۱,\log۲=۰/۳}$$

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\times(۱-۰/۳)=۷dB$$

بنابراین تراز شدت صوت ۷dB افزایش می‌یابد.

B ۱۷۷۰ ۴

تراز شدت صوت برحسب دسی‌بل بنا به تعریف برابر است با:

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\Rightarrow\beta_B-\beta_A=۱۰\log\frac{I_B}{I_۰}-۱۰\log\frac{I_A}{I_۰}=۱۰\log\frac{\frac{I_B}{I_۰}}{\frac{I_A}{I_۰}}$$

$$\Rightarrow\beta_B-\beta_A=۱۰\log\frac{I_B}{I_A}\;(I)$$

از طرفی شدت صوت با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد.

$$\frac{I_B}{I_A}=(\frac{r_A}{r_B})^۲\Rightarrow\frac{I_B}{I_A}=(\frac{۶}{۳})^۲\Rightarrow\frac{I_B}{I_A}=۲^۲$$

در رابطهٔ (I) به جای $\frac{I_B}{I_A}=۲^۲$ را قرار می‌دهیم.

$$\beta_B-\beta_A=۱۰\log۲^۲=۲۰\log۲ \xrightarrow{\log۲=۰/۳}\beta_B-\beta_A=۲۰\times۰/۳=۶dB$$

B ۱۷۷۱ ۲

یادآوری شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد $(I\propto\frac{۱}{r^۲})$.

به کمک رابطهٔ اختلاف تراز شدت صوت مسئله به راحتی حل می‌شود.

$$\beta_۲-\beta_۱=\log\frac{I_۲}{I_۱}\Rightarrow\Delta\beta=۱۰\log(\frac{r_۱}{r_۲})^۲\Rightarrow\Delta\beta=۱۰\log(\frac{۱}{۲})^۲$$

$$\Delta\beta=۱۰\log(۲)^{-۲}=-۲۰\log۲=-۲۰\times۰/۳\Rightarrow\Delta\beta=-۶dB$$

تراز شدت صوت ۶ دسی‌بل کاهش می‌یابد.

B ۱۷۷۲ ۲

خط فکری نسبت دو شدت صوت با بسامد و دامنه رابطهٔ مستقیم و مجذوری و با فاصله رابطهٔ عکس و مجذوری دارد:

$$\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{f_۲}{f_۱}\times\frac{A_۲}{A_۱}\times\frac{r_۱}{r_۲})^۲$$

اگر چشمه ثابت باشد و تنها فاصله تغییر کند بسامد و دامنه ثابت می‌ماند: $\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{r_۱}{r_۲})^۲$

با توجه به تعریف تراز شدت صوت، اختلاف تراز شدت صورت برابر با:

$$\beta_۱-\beta_۲=۱۰\log\frac{I_۱}{I_۰}-۱۰\log\frac{I_۲}{I_۰}=۱۰\log\frac{I_۱}{I_۲}=۱۸\Rightarrow۱/۸=\log(\frac{I_۱}{I_۲})$$

در حالت کلی با توجه به عدد به‌دست آمده، مضاربی از ۰/۳ یا نزدیک‌ترین عدد صحیح را که بتوان با جمع و یا تفریق ۰/۳ یا مضاربی از آن به عدد مذکور رسید را پیدا می‌کنیم.

در این سؤال می‌توان ۱/۸ را به صورت ۶×۰/۳ نوشت:

$$۶\times۰/۳=\log(\frac{I_۱}{I_۲})\xrightarrow{۰/۳=\log۲}۶\log۲=\log(\frac{I_۱}{I_۲})\Rightarrow۲^۶=(\frac{I_۱}{I_۲})$$

شدت صوت با مجذور فاصله رابطهٔ عکس دارد: $\frac{I_۱}{I_۲}=(\frac{d_۲}{d_۱})^۲=۲^۶\Rightarrow\frac{d_۲}{d_۱}=۲^۳\Rightarrow\frac{d_۲}{d_۱}=۸$

بازی با سؤال **شنونده‌ای که در فاصلهٔ ۸ متری یک منبع صوت قرار دارد، چند متر به منبع صوت نزدیک شود تا صوت منبع را با تراز شدت ۱۲ دسی‌بل بیشتر از حالت قبل احساس کند؟** $(\log۲=۰/۳)$ ریاضی - ۹۱

۱) ۷/۵ ۲) ۶ ۳) ۴/۵ ۴) ۲

پاسخ با توجه به تعریف تراز شدت صوت:

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}\Rightarrow۱۲=۱۰\log(\frac{d_۱}{d_۲})^۲\Rightarrow۱/۲=\log(\frac{d_۱}{d_۲})^۲$$

$$\Rightarrow۴\times۰/۳=\log(\frac{d_۱}{d_۲})^۲\Rightarrow۴\log۲=\log(\frac{d_۱}{d_۲})^۲\Rightarrow۲^۴=(\frac{d_۱}{d_۲})^۲$$

$$\Rightarrow۲^۲=\frac{d_۱}{d_۲}\Rightarrow۲^۲=\frac{۸}{d_۲}\Rightarrow d_۲=۲m$$

بنابراین باید $۸-۲=۶m$ به چشمه نزدیک شود. گزینهٔ ۲

۲ ۱۷۷۳ B

۱ امواج صوتی در یک فضای باز به صورت جبهه‌های کروی در محیط منتشر می‌شوند و سطح این جبهه‌ها $A=۴\pi r^۲$ است که در آن r فاصله از چشمهٔ صوت است. شدت صوت با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد. از این‌رو خواهیم داشت: $\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{r_۱}{r_۲})^۲\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=\frac{۱}{۱۰۰}$

۲ تراز شدت صوت بنا به تعریف برابر $\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}$ است.

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۰}-۱۰\log\frac{I_۱}{I_۰}=۱۰\log\frac{\frac{I_۲}{I_۰}}{\frac{I_۱}{I_۰}}\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}$$

$$\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{۱}{۱۰۰}=۱۰\log۱۰^{-۲}\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=-۲۰dB$$

تراز شدت صوت ۲۰dB کاهش می‌یابد.

۴ ۱۷۷۴ B

شدت صوت با توان چشمه نسبت مستقیم و با جذر فاصله از چشمه نسبت وارون دارد.

$$I=\frac{P}{A}=\frac{P}{۴\pi r^۲}\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=\frac{P_۲}{P_۱}\times(\frac{r_۱}{r_۲})^۲\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=۲\times(۲)^۲\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=۸$$

تغییر تراز شدت صوت خواهد شد:

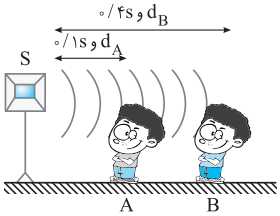
$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}\Rightarrow\Delta\beta=۱۰\log۸=۱۰\log۲^۳$$

$$\Rightarrow\Delta\beta=۳۰\log۲\Rightarrow\Delta\beta=۳۰\times۰/۳\Rightarrow\Delta\beta=۹dB$$

۹ دسی‌بل افزایش می‌یابد.

۴ ۱۷۷۵ B

یادآوری سرعت انتشار موج در یک محیط ثابت است: $v_{\text{موج}}=\frac{\Delta x_{\text{پیشروی}}}{\Delta t}$



۱ با توجه به سؤال شخص A زودتر صدا را شنیده و به منبع نزدیک‌تر است:

$$v_{\text{صوت}}=\frac{d_B}{\Delta t_B}=\frac{d_B}{۰/۴}\quad,\quad v_{\text{موج}}=\frac{\Delta x_{\text{پیشروی}}}{\Delta t}\Rightarrow v_{\text{صوت}}=\frac{d_A}{\Delta t_A}=\frac{d_A}{۰/۱}$$

$$\xrightarrow{v_{\text{موج}}=v_{\text{صوت}}}\frac{d_A}{۰/۱}=\frac{d_B}{۰/۴}\Rightarrow\frac{d_A}{۱}=\frac{d_B}{۴}\Rightarrow d_B=۴d_A$$

یادآوری اختلاف تراز شدت صوت برابر $\Delta B=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}$ است.

۲ نسبت شدت صوت‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\frac{I_A}{I_B}=(\frac{f_A}{f_B})^۲\times(\frac{A_A}{A_B})^۲\times(\frac{d_B}{d_A})^۲\xrightarrow[A_A=A_B]{f_A=f_B}\frac{I_A}{I_B}=(\frac{d_B}{d_A})^۲\Rightarrow\frac{I_A}{I_B}=۱۶$$

۳ اختلاف تراز شدت صوت را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta B=۱۰\log\frac{I_A}{I_B}\Rightarrow\Delta B=۱۰\log۱۶\Rightarrow\Delta B=۱۰\log۲^۴$$

$$\Rightarrow\Delta B=۴۰\log۲\Rightarrow\Delta B=۴۰\times۰/۳=۱۲dB$$

۳ ۱۷۷۶ A

شدت صوت با مجذور فاصله نسبت وارون دارد. $\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{r_۱}{r_۲})^۲$

با توجه به تعریف تراز شدت صوت می‌توان نوشت:

$$\beta_۱-\beta_۲=۱۰\log\frac{I_۱}{I_۲}\Rightarrow۴۶-۲۰=۱۰\log(\frac{r_۲}{r_۱})^۲$$

$$۲/۶=۲\log(\frac{r_۲}{r_۱})\Rightarrow\log(\frac{r_۲}{r_۱})=۱/۳=۱+۰/۳=\log۱۰+\log۲$$

$$\log\frac{r_۲}{r_۱}=\log۲۰\Rightarrow\frac{r_۲}{r_۱}=۲۰\Rightarrow r_۲=۲۰r_۱$$

با توجه به فرض مسئله:

$$r_۲-r_۱=۹۵\Rightarrow۲۰r_۱-r_۱=۹۵\Rightarrow۱۹r_۱=۹۵\Rightarrow r_۱=۵m, r_۲=۲۰\times۵=۱۰۰m$$

۳ ۱۷۷۷ B

۱ با توجه به تعریف تراز شدت صوت می‌توان نوشت:

$$\beta_۱-\beta_۲=۱۰\log\frac{I_۱}{I_۰}-۱۰\log\frac{I_۲}{I_۰}\Rightarrow\beta_۱-\beta_۲=۱۰\log\frac{\frac{I_۱}{I_۰}}{\frac{I_۲}{I_۰}}$$

$$\Rightarrow\beta_۱-\beta_۲=۱۰\log\frac{I_۱}{I_۲}\ (I)$$

۲ شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد. $\frac{I_۱}{I_۲}=(\frac{r_۲}{r_۱})^۲\ (II)$

۳ با توجه به فرض مسئله $\beta_۱=۵۴dB$ و $\beta_۲=۴۰dB$ است اکنون رابطهٔ (II) را در رابطهٔ (I) قرار می‌دهیم:

$$۵۴-۴۰=۱۰\log(\frac{r_۲}{r_۱})^۲\Rightarrow۱/۴=\log(\frac{r_۲}{r_۱})^۲$$

به جای عدد ۱/۴ مقدار ۰/۶−۲ و به جای ۲ مقدار ۲×۰/۳=۰/۶ را قرار می‌دهیم.

$$۲-۰/۶=\log(\frac{r_۲}{r_۱})^۲\Rightarrow۲-۲\times۰/۳=\log(\frac{r_۲}{r_۱})^۲\xrightarrow{\log۱۰^۲=۲,\log۲=۰/۳}$$

$$\log۱۰^۲-۲\log۲=\log(\frac{r_۲}{r_۱})^۲\Rightarrow\frac{۱۰۰}{۴}=(\frac{r_۲}{r_۱})^۲\Rightarrow r_۲=۵r_۱$$

۴ با توجه به فرض $r_۲-r_۱=۳۶m$ است.

$$۵r_۱-r_۱=۳۶\Rightarrow r_۱=۹m$$

۳ ۱۷۷۸ B

۱ نسبت شدت صوت در محل سطح (۲) به شدت صوت در محل سطح (۱) برابر است با:

$$\frac{I_۲}{I_۱}=\frac{\frac{P_۲}{A_۲}}{\frac{P_۱}{A_۱}}\xrightarrow{P_۲=P_۱=\text{توان چشمه}}\frac{I_۲}{I_۱}=\frac{A_۱}{A_۲}\xrightarrow{A_۲=۵A_۱}\frac{I_۲}{I_۱}=\frac{۱}{۵}$$

۲ تراز شدت صوت در دو محل را نوشته از هم کم می‌کنیم:

$$\beta_1-\beta_2=10\log\frac{I_1}{I_0}-10\log\frac{I_2}{I_0}\xrightarrow{\log a-\log b=\log\frac{a}{b}}$$

$$\beta_1-\beta_2=10\log\frac{\frac{I_1}{I_0}}{\frac{I_2}{I_0}}\Rightarrow\beta_1-\beta_2=\log\frac{I_1}{I_2}\Rightarrow\beta_1-\beta_2=10\log 5\xrightarrow{5=\frac{10}{2}}$$

$$\beta_1-\beta_2=10\log\frac{10}{2}=10(\log 10-\log 2)\xrightarrow{\log 10=1,\ \log 2=0/3}$$

$$\beta_1-\beta_2=10(1-0/3)\Rightarrow\beta_1-\beta_2=7dB$$

بنابراین شنونده (۱) صوت را ۷ دسی‌بل بلندتر می‌شوند.

۳ ۱۷۷۹ B

خط فکری حد پایین گسترهٔ شنوایی نزدیک $10^{-12}W/m^2$ است. یعنی اگر شدت صوت از این مقدار کمتر شود. شخص دیگر صدا را نمی‌شنود، بنابراین حداکثر فاصله‌ای که شخص از چشمه دور می‌شود تا جایی است که شدت صوت به $10^{-12}W/m^2$ برسد، بنابراین با استفاده از تعریف شدت صوت مسئله حل می‌شود. دقت کنید بسامد چشمه در حل این مسئله نقشی ندارد.

با نوشتن رابطهٔ شدت صوت، فاصله از چشمه را به‌دست می‌آوریم.

$$I=\frac{\bar{P}}{A}\xrightarrow[A=4\pi r^2]{\bar{P}=\frac{\pi}{2/5}\times10^{-3}}10^{-12}=\frac{\frac{\pi}{2/5}\times10^{-3}}{4\pi r^2}\Rightarrow10^{-12}=\frac{10^{-3}}{10r^2}\Rightarrow r^2=10^8$$

$$\Rightarrow r=10^4m$$

۲ ۱۷۸۰ B

خط فکری جملهٔ «صدا به زحمت شنیده می‌شود» یعنی شدت صوتی که به گوش می‌رسد در حد آستانهٔ شنوایی یعنی $10^{-12}W/m^2$ است، بنابراین ابتدا شدت صوت را در حالتی که تراز شدت صوت ۴۰dB را به‌دست بیاورید، سپس فاصله را حساب کنید.

۱ ابتدا شدت صوت را در فاصلهٔ ۲ متری چشمه به‌دست می‌آوریم:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow40=10\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow\frac{I}{10^{-12}}=10^4\Rightarrow I=10^{-8}W/m^2$$

۲ شدت صوت با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد.

$$\frac{I_2}{I_1}=(\frac{r_1}{r_2})^2\Rightarrow\frac{10^{-12}}{10^{-8}}=(\frac{2}{r_2})^2\Rightarrow10^{-2}=\frac{2}{r_2}\Rightarrow r_2=200m$$

۴ ۱۷۸۱ B

۱ صوت A به اندازهٔ 5dB بلندتر از صوت B شنیده می‌شود، بنابراین:

$$\beta_A-\beta_B=5dB\ (I)$$

۲ صوت A، 15dB از صوت C کوتاه‌تر شنیده می‌شود، در نتیجه:

$$\beta_C-\beta_A=15dB\ (II)$$

۳ در مسئله از شما رابطهٔ بین شدت صوت C و شدت صوت B خواسته شده است بنابراین باید A را از روابط حذف کنیم. از این‌رو دو رابطهٔ (I) و (II) را با هم جمع می‌کنیم.

$$\beta_A-\beta_B+\beta_C-\beta_A=5+15\Rightarrow\beta_C-\beta_B=20dB$$

۴ اکنون به کمک تعریف تراز شدت صوت، مسأله را پاسخ می‌دهیم.

$$\beta_C-\beta_B=10\log\frac{I_C}{I_0}-10\log\frac{I_B}{I_0}\Rightarrow\beta_C-\beta_B=10\log\frac{I_C}{I_B}$$

$$\Rightarrow20=10\log\frac{I_C}{I_B}\Rightarrow\frac{I_C}{I_B}=10^2=100$$

بنابراین شدت صوت C، ۱۰۰ برابر شدت صوت B است و گزینهٔ (۴) درست است.

۱ ۱۷۸۲ B

خط فکری در سؤالاتی که تراز شدت صوت در چند نقطه داده می‌شود به نکات زیر دقت کنید:

الف) شدت صوت برابر $I=\frac{P}{A}$ است که در این رابطه $A=4\pi r^2$ و r فاصله از چشمهٔ صوت و P توان چشمه صوت است.

ب) اگر چشمهٔ صوت یکسان و فاصله‌ها در حال تغییر باشند، توان چشمه P در هر نقطه ثابت اما A با توجه به فاصله از چشمه در حال تغییر است.

پ) تراز شدت صوت برابر است:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}$$

(I: شدت صوت در نقطه خواسته شده، I_0: تراز شدت صوت مبنا، β: تراز شدت صوت برحسب دسی بل)

اختلاف تراز شدت صوت در دو نقطهٔ دلخواه (۱) و (۲) برابر است:

$$\Delta\beta=\beta_2-\beta_1\Rightarrow\Delta\beta=10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}$$

$$\Delta\beta=10(\log\frac{I_2}{I_0}-\log\frac{I_1}{I_0})\xrightarrow{\log a-\log b=\log\frac{a}{b}}\Delta\beta=10\log\frac{I_2}{I_1}$$

ت) نسبت شدت صوت در دو نقطه برابر است با:

($P\propto f^2, P\propto A^2$، $A=4\pi r^2$، بسامد چشمه موج، دامنه چشمه موج، A: مساحت سطح جبهه صوت)

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{P_2}{P_1}\times\frac{A_1}{A_2}\xrightarrow{P\propto f^2,\ P\propto A^2,\ A=4\pi r^2}\frac{I_2}{I_1}=(\frac{f_2}{f_1})^2\times(\frac{A_2}{A_1})^2\times(\frac{r_1}{r_2})^2$$

که اگر چشمه ثابت باشد:

$$\frac{I_2}{I_1}=(\frac{r_1}{r_2})^2$$

جمع‌بندی از نکات لگاریتم که در این بخش به آن نیاز داریم:

$$\log a+\log b=\log ab\qquad \log a-\log b=\log\frac{a}{b}$$

$$\log a^b=b\log a\qquad \log a=\log b\Rightarrow a=b$$

$$\log 10^a=a\log 10=a$$

۱ اختلاف تراز شدت صوت در دو نقطهٔ A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta\beta=\beta_A-\beta_B\xrightarrow[\beta_B=10\log\frac{I_B}{I_0}=\frac{5}{6}\beta_A]{\beta_A=10\log\frac{I_A}{I_0}=\beta}$$

$$\beta_A-\frac{5}{6}\beta_A=10(\log\frac{I_A}{I_0}-\log\frac{I_B}{I_0})\Rightarrow\frac{\beta_A}{6}=10\log\frac{I_A}{I_B}$$

۲ چشمه ثابت است و شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد یعنی $\frac{I_A}{I_B}$ برابر $(\frac{r_B}{r_A})^2$ است:

$$\frac{\beta_A}{6}=10\log(\frac{r_B}{r_A})^2\xrightarrow{r_B=2r_A}\frac{\beta_A}{6}=10\log(2)^2$$

$$\xrightarrow{\log a^b=b\log a}\frac{\beta_A}{6}=20\log2\xrightarrow{\log2=0/3}\frac{\beta_A}{6}=6\Rightarrow\beta_A=36d\beta$$

۳ حال اختلاف تراز شدت صوت بین A و C را به‌دست می‌آوریم:

$$\beta_A-\beta_C=10\log\frac{I_A}{I_0}-10\log\frac{I_C}{I_0}\Rightarrow36-\beta_C=10(\log\frac{I_A}{I_C})$$

$$\xrightarrow[16=2^4]{\frac{I_A}{I_C}=(\frac{r_C}{r_A})^2=16}36-\beta_C=10\log2^4\xrightarrow{\log a^b=b\log a}$$

$$36-\beta_C=40\log2\xrightarrow{\log2=0/3}36-\beta_C=12\Rightarrow\beta_C=24dB$$

۳ ۱۷۸۳ B

۱ شدت صوت، با مجذور دامنه نسبت مستقیم و با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد. با توجه به فرض مسئله نسبت شدت صوت‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{I_2}{I_1}=(\frac{A_2}{A_1})^2(\frac{r_1}{r_2})^2=(25)(2)^2=100\ (I)$$

۲ تراز شدت صوت به صورت $\beta=10\log\frac{I}{I_0}$ تعریف می‌شود. از این‌رو خواهیم داشت:

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}=10\log\frac{\frac{I_2}{I_0}}{\frac{I_1}{I_0}}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}$$

$$\xrightarrow{(I)}\beta_2-\beta_1=10\log100=10\log10^2\Rightarrow\beta_2-\beta_1=20\,dB$$

بنابراین شدت صوت ۲۰ دسی‌بل افزایش می‌یابد.

A ۱۷۸۴ ۲

۱ دامنه ٪۲۰ کاهش یافته است، بنابراین: $A_2=A_1-0/2A_1\Rightarrow A_2=0/8A_1$

۲ شدت صوت با مجذور دامنه نسبت مستقیم دارد و نسبت شدت صوت‌ها را حساب می‌کنیم.

$$\frac{I_2}{I_1}=(\frac{A_2}{A_1})^2\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=(\frac{0/8A_1}{A_1})^2\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=0/64$$

۳ تراز شدت صوت را در هر حالت نوشته از هم کم می‌کنیم:

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}-10\log\frac{I_1}{I_0}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10(\log\frac{I_2}{I_0}-\log\frac{I_1}{I_0})$$

$$\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log0/64=10\log\frac{64}{100}$$

$$\xrightarrow{\log\frac{a}{b}=\log a-\log b}\beta_2-\beta_1=10(\log64-\log100)$$

به جای ۶۴ مقدار 2^6 را قرار می‌دهیم.

$$\beta_2-\beta_1=10(\log2^6-\log10^2)\xrightarrow{\log a^n=n\log a}$$

$$\beta_2-\beta_1=10(6\log2-2\log10)\xrightarrow{\log10=1,\ \log2=0/3}$$

$$\beta_2-\beta_1=10(6\times0/3-2\times1)\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10(1/8-2)=-2dB$$

بنابراین تراز شدت صوت ۲dB کاهش می‌یابد.

B ۱۷۸۵ ۴

خط فکری ابتدا باید مشخص کنید وقتی دامنه ۴ برابر می‌شود، شدت صوت چند برابر می‌شود و در نتیجه تراز شدت صوت چند دسی‌بل تغییر می‌کند تا بتوانید مسئله را حل کنید.

۱ شدت صوت با مجذور فاصله نسبت وارون و با مجذور دامنه نسبت مستقیم دارد.

$$\frac{I_2}{I_1}=(\frac{A_2}{A_1})^2\xrightarrow{A_2=4A_1}\frac{I_2}{I_1}=(\frac{4A_1}{A_1})^2\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=16$$

۲ تغییر تراز شدت صوت را حساب می‌کنیم.

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log16\xrightarrow{16=2^4}\beta_2-\beta_1=10\log2^4$$

$$\Rightarrow\beta_2-\beta_1=40\log2\xrightarrow{\log2=0/3}\beta_2-\beta_1=40\times0/3$$

$$\Rightarrow\beta_2-\beta_1=12dB\ (I)$$

۳ بنا به فرض مسئله $\beta_2=1/3\beta_1$ است از این‌رو در رابطهٔ (I) به جای β_2، $1/3\beta_1$ را قرار می‌دهیم.

$$1/3\beta_1-\beta_1=12\Rightarrow0/3\beta_1=12\Rightarrow\beta_1=\frac{120}{3}=40dB$$

۴ در صورت مسئله بیان شده که در این حالت «تراز شدت صوت چند دسی‌بل» یعنی β_2 چند دسی‌بل است.

$$\beta_2=1/3\beta_1=1/3\times40=52dB$$

C ۱۷۸۶ ۳

۱ شدت صوت با مجذور بسامد و مجذور دامنه نسبت مستقیم دارد. از این‌رو:

$$\frac{I_2}{I_1}=(\frac{f_2}{f_1})^2\times(\frac{A_2}{A_1})^2\xrightarrow{f_2=3f_1,\ A_2=3A_1}\frac{I_2}{I_1}=(3)^2(3)^2\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=3^4$$

۲ تغییر تراز شدت صوت را به‌دست می‌آوریم.

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}\xrightarrow{\beta_2=3/5\beta_1}3/5\beta_1-\beta_1=10\log3^4\Rightarrow2/5\beta_1=10\times4\log3$$

$$\xrightarrow{\log3=0/5}2/5\beta_1=10\times4\times0/5\Rightarrow2/5\beta_1=20\Rightarrow\beta_1=\frac{20}{2/5}\Rightarrow\beta_1=8dB$$

تراز شدت صوت β_2 خواهد شد: $\beta_2=3/5\beta_1\Rightarrow\beta_2=3/5\times8\Rightarrow\beta_2=28dB$

B ۱۷۸۷ ۱

نکته شدت صوت با مربع دامنه و مربع بسامد نسبت مستقیم و با مربع فاصله از چشمه نسبت وارون دارد:

$$\frac{I_2}{I_1}=(\frac{A_2}{A_1})^2\times(\frac{f_2}{f_1})^2\times(\frac{d_1}{d_2})^2$$

۱ شرایط محیط ثابت است. بنابراین:

$$v=f_1\lambda_1\ ,\ v=f_2\lambda_2\Rightarrow f_1\lambda_1=f_2\lambda_2\Rightarrow\frac{f_2}{f_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\xrightarrow{\lambda_2=4\lambda_1}f_2=\frac{1}{4}f_1$$

۲ دامنه چهار برابر $(A_2=4A_1)$ و فاصلهٔ نصف شده $(d_2=\frac{d_1}{2})$ و بسامد نیز $\frac{1}{4}$ شده است، بنابراین نسبت شدت صوت خواهد شد.

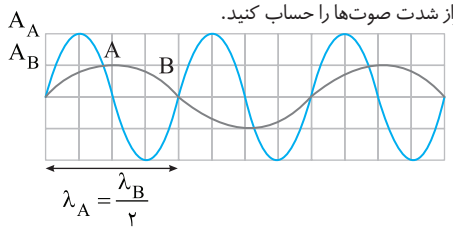
$$\frac{I_2}{I_1}=(\frac{A_2}{A_1})^2\times(\frac{f_2}{f_1})^2\times(\frac{d_1}{d_2})^2\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=4^2\times(\frac{1}{4})^2\times(2)^2=2^2$$

۳ باتوجه‌به‌تعریف‌ترازشدت‌صوت‌خواهیم‌داشت: $\beta=10\log\frac{I_1}{I_0}\ ,\ \beta'=10\log\frac{I_2}{I_0}$

$$\beta'-\beta=10(\log\frac{I_2}{I_0}-\log\frac{I_1}{I_0})=10\log\frac{I_2}{I_1}=10\log2^2=20\log2\Rightarrow\Delta\beta=20\times0/3=6dB$$

B ۱۷۸۸ ۱

خط فکری با توجه به نمودارها ابتدا نسبت دامنه‌ها و طول موج‌ها را مشخص کنید. تندی انتشار موج در محیط برای دو موج A و B یکسان است. به کمک این مطلب، نسبت بسامدها را به‌دست بیاورید تا بتوانید نسبت شدت صوت‌ها و از آنجا اختلاف تراز شدت صوت‌ها را حساب کنید.



۱ دامنهٔ A دو برابر دامنهٔ B است. $A_A=2A_B$

۲ طول موج A نصف طول موج B است، بنابراین:

$$\lambda_A=\frac{\lambda_B}{2}\xrightarrow{\lambda=\frac{v}{f}}\frac{v_A}{f_A}=\frac{1}{2}\frac{v_B}{f_B}\xrightarrow{v_A=v_B}f_A=2f_B$$

۳ شدت صوت با مجذور دامنه و مجذور بسامد نسبت مستقیم دارد.

$$\frac{I_A}{I_B}=(\frac{A_A}{A_B})^2\times(\frac{f_A}{f_B})^2\Rightarrow\frac{I_A}{I_B}=(2)^2\times(2)^2\Rightarrow\frac{I_A}{I_B}=2^4$$

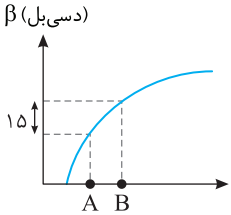
۴ اختلاف تراز شدت صوت خواهد شد:

$$\beta_A-\beta_B=10\log\frac{I_A}{I_B}\Rightarrow\beta_A-\beta_B=10\log2^4\Rightarrow\beta_A-\beta_B=40\log2$$

$$\xrightarrow{\log2=0/3}\beta_A-\beta_B=12dB$$

B ۱۷۸۹ ۳

با توجه به نمودار و تعریف تراز شدت صوت می‌توانیم بنویسیم:



$$\beta_B-\beta_A=10\log\frac{\frac{I_B}{I_0}}{\frac{I_A}{I_0}}=10\log\frac{I_B}{I_0}-10\log\frac{I_A}{I_0}$$

$$\Rightarrow\beta_B-\beta_A=10\log\frac{I_B}{I_A}$$

داده‌های نمودار را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$۱۵=۱۰\log\frac{I_B}{I_A}\Rightarrow ۱/۵=\log\frac{I_B}{I_A}\xrightarrow{۱/۵=۱+۰/۵}$$

$$۱+۰/۵=\log\frac{I_B}{I_A}\xrightarrow[\log۳=۰/۵]{\log۱۰=۱}\log۱۰+\log۳=\log\frac{I_B}{I_A}$$

$$\log۱۰\times۳=\log\frac{I_B}{I_A}\Rightarrow\frac{I_B}{I_A}=۳۰$$

شدت صوت با مجذور فاصله نسبت وارون دارد.

$$\frac{I_B}{I_A}=(\frac{r_A}{r_B})^۲\Rightarrow ۳۰=(\frac{r_A}{r_B})^۲\Rightarrow\frac{r_A}{r_B}=\sqrt{۳۰}$$

اگر شما به جای ۱/۵ ، ۳×۰/۵ قرار داده باشید، جواب شما $\frac{I_B}{I_A}=۲۷$ خواهد شد شما در این حالت ۳ بار از تقریب $\log۳=۰/۵$ استفاده کردید و جواب شما خطای بیشتری نسبت به $\sqrt{۳۰}$ داشته از این رو $\sqrt{۳۰}$ درست است.

B ۱۷۹۰ ۴

خط فکری در حل این مسئله باید دقت کنید که جذب انرژی صوتی توسط هوا قابل ملاحظه است بنابراین با دورشدن از چشمه، شدت صوت به شدت کاهش می‌یابد یعنی اگر فاصله ۳ برابر شود، شدت صوت $\frac{۱}{۹}$ نمی‌شود و از $\frac{۱}{۹}$ نیز کمتر خواهد شد.

ابتدا اختلاف تراز شدت صوت در نقاط A و B را بدون در نظر گرفتن اتلاف انرژی به‌دست می‌آوریم. سپس با توجه به اتلاف انرژی اختلاف β_A و β_B از عددی که به‌دست آورده‌ایم بزرگ‌تر است.

شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد از این‌رو:

$$\frac{I_B}{I_A}=(\frac{d_A}{d_B})^۲\xrightarrow{d_A=d,\,d_B=۳d}\frac{I_B}{I_A}=(\frac{d}{۳d})^۲\Rightarrow I_A=۹I_B$$

اختلاف تراز شدت صوت را به‌دست می‌آوریم.

$$\beta_A-\beta_B=۱۰\log(\frac{I_A}{I_B})=۱۰\log۹=۱۰\log۳^۲$$

$$\Rightarrow\beta_A-\beta_B=۲۰\log۳=۲۰\times۰/۵=۱۰dB$$

بنابراین اگر اتلاف انرژی نبود، اختلاف β_A و β_B، ۱۰dB می‌شد، یعنی از β_A، ۱۰dB کاسته می‌شد اما چون جذب انرژی قابل ملاحظه است از β_A مقدار بیشتری کاسته می‌شود و اختلاف β_A و β_B از ۱۰dB بزرگ‌تر خواهد شد.

$$\beta_A-\beta_B>۱۰dB$$

B ۱۷۹۱ ۲

خط فکری در محیط جذب انرژی صوتی وجود دارد. برای آنکه مشخص کنیم که چند درصد انرژی جذب شده است، شدت صوت در فاصلهٔ ۲۰ متری را به کمک تراز شدت صوت شنیده شده در محل (۸۰dB) به‌دست می‌آوریم، سپس به کمک شدت صوت، توان رسیده به فاصلهٔ ۲۰ متری را حساب می‌کنیم تا مشخص شود چه مقدار توان در مسیر جذب شده است.

۱ ابتدا شدت صوت دریافتی توسط شنونده را به‌دست می‌آوریم:

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\Rightarrow ۸۰=۱۰\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow ۱۰^۸=\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow I=۱۰^{-۴}\,W/m^۲$$

۲ توان در محل شنونده را حساب می‌کنیم:

$$I=\frac{P'}{A}\Rightarrow I=\frac{P'}{۴\pi R^۲}\Rightarrow ۱۰^{-۴}=\frac{P'}{۴\times۳\times(۲۰)^۲}\Rightarrow P'=۴۸۰۰\times۱۰^{-۴}\times۱۰^۳\,mW$$

$$\Rightarrow P'=۴۸۰mW$$

۳ درصد اتلاف (جذب) توان در محیط برابر است با:

$$\text{درصد جذب توان}=\frac{P'-P}{P}\times۱۰۰=\frac{۴۸۰-۵۰۰}{۵۰۰}\times۱۰۰=-۴٪$$

۴ درصد توان جذب محیط می‌شود.

B ۱۷۹۲ ۳

خط فکری اختلاف تراز شدت صوت در محل A و B را در اختیار داریم بنابراین می‌توانیم نسبت فاصلهٔ d_B و d_A را به‌دست بیاوریم و با استفاده از آن SA را حساب کرده سپس به کمک رابطهٔ فیثاغورس AB را بیابیم.

۱ با توجه به تعریف تراز شدت صوت، اختلاف ترازها را حساب می‌کنیم.

$$\beta_A-\beta_B=۱۰\log\frac{I_A}{I_۰}-۱۰\log\frac{I_B}{I_۰}\Rightarrow\beta_A-\beta_B=۱۰\log\frac{I_A}{I_B}$$

$$\xrightarrow{\beta_A-\beta_B=۹dB}۹=۱۰\log\frac{I_A}{I_B}\Rightarrow ۰/۹=\log\frac{I_A}{I_B}$$

$$\xrightarrow{۰/۹=۳\times۰/۳=۳\log۲}۳\log۲=\log\frac{I_A}{I_B}\xrightarrow{n\log a=\log a^n}$$

$$\log۲^۳=\log\frac{I_A}{I_B}\Rightarrow\frac{I_A}{I_B}=۸$$

۲ شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد.

$$\frac{I_A}{I_B}=(\frac{SB}{SA})^۲\Rightarrow ۸=(\frac{۲۴}{SA})^۲\Rightarrow ۲\sqrt{۲}=\frac{۲۴}{SA}\Rightarrow SA=۶\sqrt{۲}m$$

۳ فاصلهٔ AB را حساب می‌کنیم:

$$AB^۲=SA^۲+SB^۲\Rightarrow AB^۲=(۶\sqrt{۲})^۲+(۲۴)^۲\Rightarrow AB^۲=۶^۲[(\sqrt{۲})^۲+۴^۲]$$

$$\Rightarrow AB^۲=۶^۲(۱۸)\Rightarrow AB=۶\times۳\sqrt{۲}\Rightarrow AB=۱۸\sqrt{۲}m$$

B ۱۷۹۳ ۲

۱ شدت صوت چشمهٔ A در محل P برابر است با:

$$I_A=\frac{P_A}{A_A}=\frac{P_A}{۴\pi r_A^۲}\xrightarrow[r_A=۶m]{P_A=۳۶۰۰W}I_A=\frac{۳۶۰۰}{۴\pi(۶)^۲}\Rightarrow I_A=\frac{۲۵}{\pi}\,W/m^۲$$

۲ فاصلهٔ منبع B تا گیرندهٔ P را به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آوریم.

$$PB^۲=۶^۲+۸^۲\Rightarrow PB=۱۰m$$

۳ شدت صوت چشمهٔ B در محل گیرندهٔ P را حساب می‌کنیم.

$$I_B=\frac{P_B}{A_B}=\frac{P_B}{۴\pi r_B^۲}\xrightarrow{r_B=۱۰m}I_B=\frac{۱۰۰۰۰}{۴\pi(۱۰۰)}\Rightarrow I_B=\frac{۲۵}{\pi}\,W/m^۲$$

۴ شدت صوت دریافتی توسط گیرندهٔ موج $I_{کل}=I_A+I_B=\frac{۵۰}{\pi}\,W/m^۲$

A ۱۷۹۴ ۳

شدت صوت را می‌توان با یک آشکارساز اندازه گرفت. با اندازه‌گیری شدت صوت‌های مختلف درمی‌یابیم نسبت شدت‌های صوت در گسترهٔ شنوایی انسان می‌تواند در حدود $۱۰^{۱۲}$ باشد بنابراین گزارهٔ (الف) درست است.

$I_۰=۱۰^{-۱۲}\,W/m^۲$ را شدت صوت مرجع می‌نامند که نزدیک به حد پایین گسترهٔ شنیداری انسان است. گزارهٔ (ب) نادرست می‌باشد.

وقتی دیاپازونی را با ضربه‌ای به ارتعاش وا می‌داریم، دیاپازون نوسان‌هایی انجام می‌دهد که به دلیل میرایی کم، به حرکت هماهنگ ساده نزدیک است. به صوت حاصل از چنین چشمه‌هایی تُنِ موسیقی یا به اختصار تُن گفته می‌شود و گزارهٔ «پ» درست است.

A ۱۷۹۵ ۱

ارتفاع، بسامدی است که گوش انسان درک می‌کند اما بلندی، شدتی است که گوش انسان از صوت درک می‌کند. وقتی که در فاصله‌ای دورتر از چشمه قرار می‌گیریم بسامد صوت که توسط چشمه صوت تعیین می‌شود تغییر نمی‌کند بنابراین ارتفاع صوت ثابت می‌ماند. اما به دلیل این که شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد وقتی فاصلهٔ شخص از چشمه بیشتر می‌شود، بلندی صوت کمتر احساس می‌شود و گزینهٔ (۱) درست است.

A ۱۷۹۶ ۲

ارتفاع، بسامدی است که گوش انسان درک می‌کند و بلندی، شدتی است که گوش انسان از صوت درک می‌کند بنابراین بلندی و ارتفاع صوت علاوه بر اینکه به چشمهٔ صوت بستگی دارند به حس شنوایی ما وابسته هستند. در واقع بلندی متفاوت با شدت است. شدت را می‌توان با یک آشکارساز اندازه گرفت در حالی که بلندی چیزی است که شخص حس می‌کند و قابل اندازه‌گیری نیست، از این رو گزینهٔ (۲) درست است.

A ۱۷۹۷ ۱

بیشترین حساسیت گوش انسان به بسامدهایی در گسترهٔ ۲۰۰۰Hz تا ۵۰۰۰Hz است، در حالی که گوش انسان قادر به شنیدن تن‌های صدای ۲۰Hz تا ۲۰۰۰۰Hz است.

A ۱۷۹۸ ۴

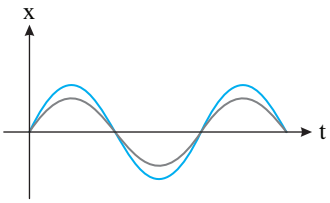
برای تقویت صوت از بلندگو استفاده می‌شود و بلندگو با افزایش دامنهٔ ارتعاش صوت، انرژی صوت (و همچنین شدت صوت) را افزایش می‌دهد و سبب می‌گردد که صدای تقویت شده تا فاصله‌های دورتری شنیده شود.

A ۱۷۹۹ ۲

ارتفاع صوت به بسامد بستگی دارد که چون چشمه یکسان است بنابراین ارتفاع صوت رسیده به هر دو شخص یکسان می‌باشد. با توجه به رابطهٔ $I=\frac{\bar{P}}{A}$ شدت صوت با سه برابر شدن مساحت سطح، $\frac{1}{3}$ می‌شود $(I_2=3I_1)$ و صوتی که شخص B می‌شنود ضعیف‌تر (آهسته‌تر) است.

A ۱۸۰۰ ۳

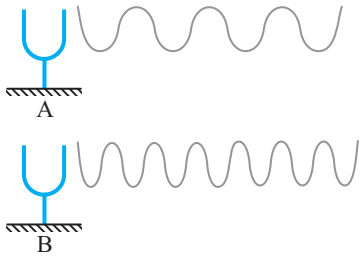
ارتفاع، بسامدی است که گوش انسان درک می‌کند. با توجه به شکل، دورهٔ صوت‌های تولیدی و در نتیجه بسامد آن‌ها با هم برابر است، بنابراین ارتفاع دو صوت با هم یکسان است.



بلندی، شدتی است که گوش انسان از صوت درک می‌کند شدت صوت با موج دامنه نسبت مستقیم دارد. دامنهٔ دو صوت یکسان نیست در نتیجه شدت صوت‌ها متفاوت است بنابراین بلندی دو صوت متفاوت است.

A ۱۸۰۱ ۳

ارتفاع، بسامدی است که گوش انسان درک می‌کند و هرچه بسامد صوت بیشتر باشد، ارتفاع آن بیشتر است. با توجه به شکل طول موج صوت حاصل از دیاپازون A بلندتر از طول موج صوت حاصل از دیاپازون B است. با توجه به ثابت بودن تندی صوت و بنا بر رابطهٔ $f=\frac{v}{\lambda}$ می‌توان نتیجه گرفت که $f_B>f_A$ است و ارتفاع صوت B بیشتر از ارتفاع صوت A است.



B ۱۸۰۲ ۲

۱ بلندی، شدتی است که گوش انسان از صوت درک می‌کند. حساسیت گوش برای این دو بسامد یکسان فرض شده است بنابراین وقتی دو صوت با یک بلندی شنیده می‌شود یعنی شدت دو صوت رسیده به شخص یکسان است. $(I_1=I_2)$

۲ شدت صوت با مربع دامنه و مربع بسامد نسبت مستقیم و با مربع فاصله نسبت وارون دارد.

$$\frac{I_2}{I_1}=(\frac{f_2}{f_1})^2\times(\frac{A_2}{A_1})^2\times(\frac{d_1}{d_2})^2\Rightarrow 1=16\times(\frac{d_1}{d_2})^2\Rightarrow(\frac{d_1}{d_2})^2=\frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow\frac{d_1}{d_2}=\frac{1}{4}\Rightarrow d_2=4d_1$$

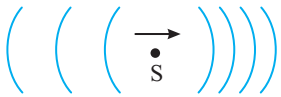
A ۱۸۰۳ ۱

گوش یک انسان با شنوایی معمولی بسامدهای بین ۲۰Hz و ۲۰۰۰۰Hz را می‌شنود. اکنون طول موج این بسامدها را به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{330}{20}\Rightarrow\lambda=16m\,,\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{330}{20000}\Rightarrow\lambda=1/6\times10^{-2}m$$

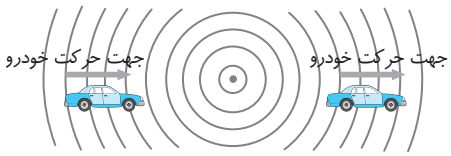
A ۱۸۰۴ ۴

هرگاه چشمهٔ موج در حرکت باشد جبهه‌های موج در جلوی چشمه به هم نزدیک می‌شوند و طول موج کاهش می‌یابد و در پشت چشمه، جبهه‌ها از هم فاصله می‌گیرند و طول موج افزایش می‌یابد یعنی طول موج با حرکت چشمه تغییر می‌کند. تندی انتشار موج در محیط ثابت است و با تغییر طول موج، بسامد نیز تغییر می‌کند. $(f_{متغیر}=\frac{v_{ثابت}}{\lambda_{متغیر}})$



A ۱۸۰۵ ۳

هرگاه چشمهٔ موج ساکن باشد، طول موج در جلو و عقب آن یکسان است. از این رو $\lambda_r=\lambda_1$ خواهد بود اما هنگام نزدیک شدن شنونده به چشمهٔ ساکن بسامد دریافتی توسط شنونده از بسامد واقعی چشمه بیشتر است $(f_r>f_s)$ و هنگام دورشدن از چشمه بسامد دریافتی توسط شنونده از بسامد واقعی چشمه کمتر است $(f_1<f_s)$. بنابراین بسامد دریافتی شنونده هنگام نزدیک شدن (f_r) از بسامد دریافتی شنونده هنگام دورشدن (f_1) بیشتر است. $(f_r>f_1)$



در مدت زمان یکسان، خودرویی که به چشمهٔ ساکن صوت نزدیک می‌شود با جبهه‌های موج بیشتری برخورد می‌کند، در حالی‌که خودرویی که از این چشمه دور می‌شود، با جبهه‌های موج کم‌تری برخورد می‌کند.

A ۱۸۰۶ ۴

نکته هرگاه چشمهٔ صوت ساکن باشد، طول موج دریافتی توسط ناظر با طول موج چشمه یکسان است.

در گزینهٔ (۱) و (۲) که چشمه در حال حرکت است نمی‌تواند $\lambda_o=\lambda_s$ باشد و این دو گزینه نادرست هستند.

نکته هرگاه ناظر به چشمه نزدیک شود بسامد دریافتی (f_o) از بسامد چشمه (f_s) بیشتر است.

در گزینهٔ (۳) ناظر در حال دور شدن از چشمه است و بسامد دریافتی ناظر از بسامد چشمه کمتر است $(f_o<f_s)$ و این گزینه نادرست است.

در گزینهٔ (۴) ناظر در حال نزدیک شدن به چشمه است و $f_o>f_s$ بوده و چون چشمه ساکن طول موج ثابت بوده و $\lambda_o=\lambda_s$ است از این رو گزینهٔ (۴) درست است.

A ۱۸۰۷ ۳

نکته وقتی چشمهٔ صوت ساکن است طول موج تغییر نمی‌کند و به حرکت ناظر بستگی ندارد.

هر دو ناظر نسبت به یک چشمهٔ ساکن در حرکت هستند بنابراین طول موج دریافتی توسط هر دو ناظر برابر طول موج چشمه بوده و $\lambda_B=\lambda_A$ خواهد بود.

B ۱۸۰۸ ۱

در پدیدهٔ دوپلر هرگاه چشمهٔ موج ساکن باشد، طول موج ثابت می‌ماند و طول موج به حرکت ناظر بستگی ندارد و هرگاه چشمه و شنونده از هم دور شوند، بسامد واقعی از بسامد واقعی چشمه کمتر خواهد بود. بنابراین گزینه (۱) درست است.

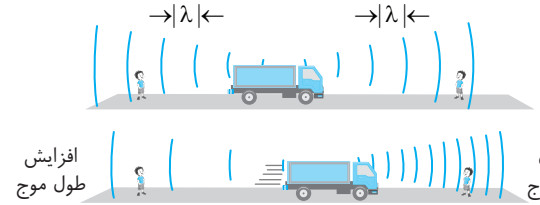
B ۱۸۰۹ ۴

با توجه به حرکت چشمه به سمت شخص، فاصلهٔ جبهه‌های موج در جلوی چشمه از هم کم می‌شود، پس طول موج صوت کاهش می‌یابد $(\lambda\downarrow)$. هم‌چنین شرایط محیطی یکسان است پس تندی صوت در حالت سکون و یا حرکت چشمه یکسان از نظر شنونده ثابت است.

$$\downarrow\lambda=\frac{v_{ثابت}}{f}\Rightarrow f\uparrow$$ بسامد افزایش می‌یابد

چون فاصلهٔ چشمه از شخص در حال کاهش است بنابراین شدت صوت $(I\propto 1/d^2)$ در حال افزایش می‌باشد.

ارتفاع صوت به بسامد صوت و بلندی صوت به شدت صوت بستگی دارد. بسامد و شدت صوت در حال افزایش است بنابراین بلندی و ارتفاع صوت در حال افزایش است.



A ۱۸۱۰ ۱

در شکل (۱) جبهه‌ها در سمت راست به هم نزدیک شده‌اند و تندی چشمه از تندی صوت کمتر است. $(v_1<v_{صوت})$

در شکل (۲) چشمه در سمت راست، جبهه‌های موج را پشت سر می‌گذارد، بنابراین $(v_2>v_{صوت})$

در شکل (۳)، جبهه‌های موج کروی تقارن دارند، یعنی چشمهٔ ساکن است. $(v_3=0)$

بنابراین $v_3<v_1<v<v_2$

A ۱۸۱۱ ۱

یادآوری ۱ اگر چشمهٔ موج ساکن باشد، جبهه‌های موج به صورت دایره‌هایی هم‌مرکز با فواصل یکسان مدل‌سازی می‌شود. $(v_s=0)$

(الف)

۲ اگر چشمه حرکت کند در جهتی که حرکت می‌کند جبهه‌های موج به هم نزدیک می‌شود و اگر سرعت چشمه از سرعت صوت (موج) کمتر باشد، $(v_s<v_{موج})$، جبهه‌های موج به صورت زیر است. در این شکل چشمه به سمت راست در حرکت است.

(ب)

۳ اگر سرعت چشمه (v_s) برابر سرعت صوت باشد، جبهه‌های موج در جهت پیشروی موج بر هم مماس می‌شوند. $(v_s=v_{موج})$

(پ)

۴ اگر سرعت چشمه بیشتر از سرعت صوت $(v_s>v_{صوت})$ باشد، جبهه‌های جدید از جبهه‌های قدیمی‌تر، جلوی می‌زنند و چشمه جبهه‌های خود را پشت سر می‌گذارد.

(ت)

با توجه به جهت حرکت چشمه به سمت چپ، جبهه‌های موج در سمت راست دارای فاصلهٔ بیشتر و در سمت چپ جلوی چشمه دارای فاصلهٔ کمتر هستند. از طرفی هرگاه تندی چشمه از تندی صوت بیشتر می‌شود، جبهه‌هایی که زودتر تولید شده‌اند از جبهه‌هایی که بعداً ایجاد شده‌اند عقب می‌ماند و شکل جبهه‌های موج مانند گزینهٔ (۱) خواهد بود.

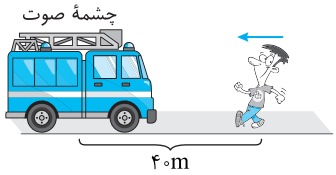
B ۱۸۱۲ ۲

x_1 و x_2 در واقع همان طول موج‌های چشمه‌های s_1 و s_2 می‌باشند و چون در طرف x_1 و x_2 فاصلهٔ بین جبهه‌های موج بیشتر از طرف دیگر است می‌فهمیم که x_1 و x_2 باید در عقب چشمه باشند، بنابراین چشمهٔ s_2 به سمت راست و چشمهٔ s_1 به سمت چپ می‌رود و چون $x_2>x_1$ است تندی چشمهٔ s_2 بیشتر است.

A ۱۸۱۳ ۱

نکته هرگاه چشمهٔ موج ساکن باشد، طول موج در تمام محیط با طول موج چشمه برابر بوده و طول موج ثابت است.

در این مسئله چشمهٔ صوت ساکن است و با گذشت زمان طول موج ثابت می‌ماند و گزینهٔ (۱) درست است، نیازی به محاسبهٔ طول موج نیست.



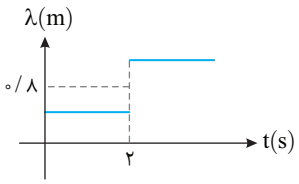
B ۱۸۱۴ ۲

۱ ابتدا زمان رسیدن چشمه به شنونده را حساب می‌کنیم.

$$v=\frac{d}{t}\Rightarrow 20=\frac{40}{t}\Rightarrow t=2s$$

۲ سپس طول موج صوت چشمه را وقتی که چشمه ساکن است، به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{320}{400}\Rightarrow\lambda=0/8m$$



۳ در هنگام نزدیک شدن چشمه به شنونده، طول موج در جلوی چشمه از $\lambda=0/8m$ کمتر است و هنگام دور شدن چشمه که شنونده در پشت چشمه قرار دارد طول موج از $0/8m$ بزرگ‌تر است بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

A ۱۸۱۵ ۳

شخص A درون آمبولانس است و به همراه چشمهٔ صوت با یک تندی در حرکت است و نسبت به چشمهٔ صوت ساکن است بنابراین اثر دوپلر برای او رخ نمی‌دهد. $(f_A=f_s)$ اما شخص B در جلوی چشمه بوده و چشمهٔ صوت در حال نزدیک‌شدن به اوست در این حالت طول موج‌های جلوی چشمه کوتاه‌تر و بسامد دریافتی شخص B بیشتر از f_s خواهد بود $(f_B>f_s)$ و گزینهٔ (۳) درست است.

A ۱۸۱۶ ۲

خط فکری شنونده در حال نزدیک شدن به چشمهٔ ساکن است بنابراین طول موج ثابت است اما بسامد دریافتی شنونده از بسامد چشمه بیشتر است. بسامد زاویه‌ای موج را از روی معادله $x=5\times10^{-4}\cos 800\pi t$ به‌دست می‌آوریم، بسامد چشمه و طول موج را حساب می‌کنیم. هر بسامدی که در گزینه‌ها از بسامد چشمه بیشتر باشد می‌تواند جواب مسئله باشد.

۱ بسامد موج را حساب می‌کنیم. $\omega=2\pi f\Rightarrow 800\pi=2\pi f_s\Rightarrow f_s=400Hz$

۲ طول موج را به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow{v=330m/s}\lambda=\frac{330}{400}\Rightarrow\lambda=0/825m$$

۳ چشمه ساکن است بنابراین طول موج رسیده به شخص همان $0/825$ است و گزینه‌های (۱) و (۴) نادرست است.

۴ شخص به چشمه نزدیک می‌شود بنابراین بسامد دریافتی شخص باید از بسامد چشمه بیشتر $(f_o>400Hz)$ باشد. در این صورت گزینهٔ (۲) درست است.

B ۱۸۱۷ ۳

خط فکری در حرکت چشمه (شخص در حال سقوط) هرچه تندی بیشتر می‌شود، جبهه‌های موج در جلوی چشمه فشرده‌تر شده و طول موج کوتاه‌تر و کوتاه‌تر شده یعنی با گذشت زمان و افزایش تندی، بسامد در جلوی چشمه در حال افزایش خواهد بود. اکنون بررسی کنید هنگام سقوط شخص، تندی آن چگونه تغییر می‌کند.

یادآوری ارتفاع، بسامدی است که گوش انسان درک می‌کند.

هنگام سقوط دائماً بر سرعت شخص در حال سقوط افزوده می‌شود، به همین دلیل بسامد دریافتی توسط شخص کنار استخر به علت پدیدهٔ دوپلر افزایش می‌یابد، بنابراین ارتفاع صوت دریافتی بیشتر می‌شود.

۳ ۱۸۱۸ B

نکته هرگاه چشمهٔ موج دارای حرکت شتابدار باشد و به ناظر نزدیک شود، اگر چشمه تندشونده باشد: بسامد دریافتی توسط ناظر (f_o) در حال افزایش بوده و $f_o > f_s$ است و اگر حرکت چشمه کندشونده باشد چون به ناظر نزدیک می‌شود $f_o > f_s$ است اما f_o در حال کاهش خواهد بود.

این یک سؤال علمی تخیلی است زیرا باید گوش حساسی داشته باشید تا بتوانید در آن مدت کوتاه تغییر ارتفاع را حس کنید. اما پاسخ چیست؟

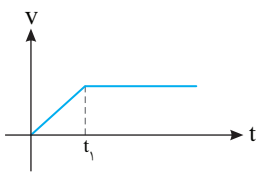
ارتفاع در حال کاهش است یعنی بسامد در حال کاهش است بنابراین تندی آمبولانس در حال کاهش است که سبب می‌گردد بسامد دریافتی توسط شما کاهش یابد و سپس ممکن است تندی آن ثابت و یا ساکن شود که در این صورت بسامد دریافتی ثابت می‌ماند بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

۴ ۱۸۱۹ A

نکته ۱ هرگاه چشمه با حرکت شتاب‌دار تندشونده در حال دور شدن از ناظر باشد بسامد دریافتی توسط ناظر f_o از بسامد چشمه f_s کمتر است $(f_o < f_s)$ و علاوه بر آن f_o در حال کاهش است.

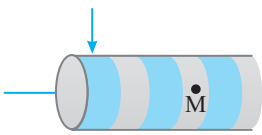
نکته ۲ هرگاه چشمه با حرکت شتاب‌دار کندشونده در حال دور شدن از ناظر باشد $f_o < f_s$ بوده و علاوه بر آن f_o در حال افزایش و نزدیک شدن به f_s است.

چشمه در حال دور شدن از ناظر است و بسامد دریافتی توسط ناظر از بسامد چشمه کمتر است اما تا لحظهٔ t_1 سرعت چشمه در حال افزایش است. به همین دلیل بسامد دریافتی در حال کاهش است و بعد از t_1 چشمه با تندی ثابت در حال دور شدن از ناظر است بنابراین بسامد دریافتی توسط ناظر ثابت می‌ماند، اما همچنان $f_o < f_s$ است.



۴ ۱۸۲۰ A

با توجه به شکل فاصلهٔ نقطهٔ M و تپ انبساطی که با پیکان نشان داده شده $3\frac{\lambda}{2}$ است. در مدت $t=\frac{T}{2}$، موج به اندازهٔ $\frac{\lambda}{2}$ پیشروی می‌کند و تپ انبساطی نشان داده شده به اندازه $\frac{\lambda}{2}$ به نقطهٔ M نزدیک می‌شود و فاصلهٔ تپ انبساطی از نقطهٔ M، λ می‌شود. از طرفی با حرکت موج به اندازه $\frac{\lambda}{2}$ باید در محل قبلی تپ انبساطی یک ناحیهٔ تراکمی ایجاد شود. با توجه به مطالب گفته شده گزینهٔ (۴) درست است.



۴ ۱۸۲۱ B

خط فکری شدت صوت با مربع بسامد و مربع دامنه نسبت مستقیم و با مربع فاصله نسبت وارون دارد. در اینجا فاصله‌ها یکسان بوده بنابراین $\frac{I_2}{I_1}=(\frac{A_2}{A_1}\times\frac{f_1}{f_2})^2$ است یعنی هر کدام که حاصل‌ضرب Af یا $A\omega$ در آن‌ها بزرگ‌تر باشد، شدت صوت آن چشمه بیشتر است. حاصل‌ضرب $A\omega$ را برای هر گزینه به‌دست می‌آوریم.

گزینهٔ (۱) : $2^2\times(4\pi)^2=64\pi^2$ ، گزینهٔ (۲) : $(8\pi)^2=64\pi^2$

گزینهٔ (۳) : $(0/5)^2(16\pi)^2=64\pi^2$

بنابراین شدت صوت هر سه چشمه باهم برابر است و گزینهٔ (۴) درست است.

۱ ۱۸۲۲ B

۱ شدت صوت با مجذور فاصله رابطهٔ عکس دارد:

$$\frac{I_2}{I_1}=(\frac{r_1}{r_2})^2\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=(\frac{1}{10\sqrt{2}})^2\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=\frac{1}{200}\Rightarrow I_1=200I_2$$

۲ اکنون مقدارهای I_1 و I_2 را جایگزین می‌کنیم:

$$10^{\beta_1-12}=200\times5\times10^{2\beta_1-19}\Rightarrow10^{\beta_1-12}=10^3\times10^{2\beta-19}$$

$$\Rightarrow10^{\beta_1-12}=10^{2\beta_1-16}\Rightarrow\beta_1-12=2\beta_1-16\Rightarrow\beta_1=4dB$$

$$\Rightarrow I_1=10^{\beta_1-12}\Rightarrow I_1=10^{-8}W/m^2$$

۲ ۱۸۲۳ C

با توجه به تعریف تراز شدت صوت خواهیم داشت:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\xrightarrow{\beta=28dB}28=10\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow2/8=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

اکنون باید فکر کنیم ۲/۸۰ را چگونه بنویسیم تا بتوانیم مسئله را حل کنیم. با توجه به فرض مسئله $(\log2=0/3)$ باید به سراغ تولید ۰/۳ برویم. ۲/۸ را به صورت $4\times0/7$ می‌نویسیم و به جای ۰/۷ نیز $(1-0/3)$ را قرار می‌دهیم بنابراین:

$$4\times0/7=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow4(1-0/3)=\log\frac{I}{10^{-12}}\xrightarrow{\log10=1\ ,\ \log2=0/3}$$

$$4(\log10-\log2)=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow4\log\frac{10}{2}=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow4\log5=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$\Rightarrow5^4=\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow I=6/25\times10^{-10}W/m^2$$

۳ ۱۸۲۴ B

۱ ابتدا فرض می‌کنیم که اتلاف انرژی وجود ندارد و شدت صوت در ۴ متری چشمه صوت را حساب می‌کنیم.

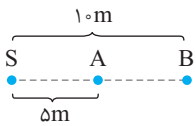
$$\frac{I'}{I}=(\frac{r}{r'})^2\xrightarrow{I=500W/m^2\ ,\ r=2m\ ,\ r'=4m}\frac{I'}{500}=(\frac{2}{4})^2\Rightarrow I'=125W/m^2$$

۲ ۵۰٪ این مقدار توسط محیط جذب شده و ۵۰٪ آن به ۴ متری رسیده است بنابراین شدت صوت در ۴ متری خواهد شد:

$$I''=\frac{50}{100}I'\Rightarrow I''=\frac{50}{100}\times125\Rightarrow I''=62/5W/m^2$$

۴ ۱۸۲۵ C

۱ شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد. بنابراین اگر اتلاف انرژی وجود نداشته باشد نسبت شدت صوت در نقاط A و B خواهد شد:



$$\frac{I_B}{I_A}=(\frac{d_A}{d_B})^2\Rightarrow\frac{I_B}{I_A}=(\frac{5}{10})^2\Rightarrow\frac{I_B}{I_A}=\frac{1}{4}\Rightarrow I_B=\frac{1}{4}I_A$$

۲ با توجه به تعریف تراز شدت صوت، به کمک اختلاف تراز شدت در نقاط A و B، نسبت شدت صوت را حساب می‌کنیم.

$$\beta_A-\beta_B=10\log\frac{I_A}{I_B}\xrightarrow{\beta_A=45dB\ ,\ \beta_B=35dB}$$

$$45-35=10\log\frac{I_A}{I'_B}\Rightarrow\log\frac{I_A}{I'_B}=1\Rightarrow\frac{I_A}{I'_B}=10\Rightarrow I'_B=\frac{1}{10}I_A$$

۳ درصد اتلاف انرژی خواهد شد:

$$\frac{I'_B-I_B}{I_B}\times100=\frac{\frac{1}{10}I_A-\frac{1}{4}I_A}{\frac{1}{4}I_A}\times100=\frac{\frac{4-10}{40}}{\frac{1}{4}}=-0/6=-60\%$$

۶۰ درصد انرژی تلف شده است.

۳ ۱۸۲۶ B

خط فکری مسئلهٔ جالبی است. شما ابتدا باید شدت صوت حاصل از صدای گوینده در فاصلهٔ $r=0/5m$ از گوینده را حساب کرده، سپس سهم میکروفون از این شدت صوت را به‌دست بیاورید.

۱ شدت صوت در فاصلهٔ 50cm برابر است با:

$$I=\frac{P}{A}\xrightarrow{A=4\pi r^2}I=\frac{P}{4\pi r^2}$$

$$\xrightarrow{P=10\pi\times10^{-6}W}I=\frac{10\pi\times10^{-6}}{4\pi\times(0/5)^2}\Rightarrow I=10^{-5}W/m^2$$

۲ اکنون باید حساب کنیم که در مدت یک دقیقه با این شدت صوت از سطحی به مساحت $A_{\text{میکروفون}}=۱۰cm^۲$ چند ژول انرژی می‌گذرد.

$$E=IA_{\text{میکروفون}}t\Rightarrow E=۱۰^{-۵}\times ۱۰\times ۱۰^{-۴}\times ۶۰\Rightarrow E=۶\times ۱۰^{-۷}J$$

۱ ۱۸۲۷ B

یادآوری آستانهٔ شنوایی، ضعیف‌ترین صدایی است که گوش می‌تواند بشنود.

خط فکری برای گوش ضعیف‌ترین صدای بسامد $۵kHz$ برابر $۱۰^{-۸}W/m^۲$ است. بنابراین شخص تا جایی می‌تواند از چشمه دور شود که شدت صوت از $۱۰^{-۸}W/m^۲$ کمتر نشود. با این مطلب، می‌توان بیشینه فاصلهٔ شخص از چشمه را حساب کرد. با توجه به تعریف شدت صوت خواهیم داشت:

$$I=\frac{P}{A}\xrightarrow{A=۴\pi r^۲,\ P=\frac{\pi}{۱۰۰}W}۱۰^{-۸}=\frac{\frac{\pi}{۱۰۰}}{۴\pi r^۲}\Rightarrow r^۲=\frac{\pi}{۴\pi r^۲\times ۱۰^{-۶}}$$

$$\Rightarrow r^۲=\frac{۱۰^۶}{۴}\Rightarrow r=\frac{۱۰۰۰}{۲}=۵۰۰m$$

۳ ۱۸۲۸ B

خط فکری در رابطه $I=P/A$ وقتی چشمه جبهه‌های موج کروی را به‌طور یکنواخت در تمام جهت‌ها منتشر می‌کند، در فاصلهٔ r از چشمه مساحتی که توان روی آن توزیع می‌شود برابر $A=۴\pi r^۲$ است. در این مسئله بلندگو تنها در جلوی خود جبهه‌های موج نیمکره را گسیل می‌کند بنابراین مساحت جبهه موج در فاصلهٔ r برابر نصف مساحت یک کره یعنی $A=\frac{۴\pi r^۲}{۲}=۲\pi r^۲$ است. با دانستن این مطلب ابتدا شدت صوت و سپس تراز شدت صوت در فاصلهٔ ۵۰ متری بلندگو را به دست می‌آوریم.

۱ شدت صوت خواهد شد:

$$I=\frac{P}{A}\Rightarrow I=\frac{P}{۲\pi r^۲}\xrightarrow[\pi=۳]{P=۱/۵W}I=\frac{۱/۵}{۲\times ۳(۵۰)^۲}\Rightarrow I=۱۰^{-۴}W/m^۲$$

۲ تراز شدت صوت در این محل را حساب می‌کنیم.

$$\beta=\log\frac{I}{I_۰}=\log\frac{۱۰^{-۴}}{۱۰^{-۱۲}}=\log ۱۰^۸\Rightarrow\beta=۸B$$

۴ ۱۸۲۹ B

۱ بسامد چشمه ۴۴ درصد افزایش یافته بنابراین بسامد خواهد شد:

$$f_۲=f_۱+\frac{۴۴}{۱۰۰}f_۱=۱/۴۴f_۱$$

۲ فاصله از چشمه نیز ۲۰ درصد افزایش می‌یابد بنابراین می‌توان نوشت:

$$d_۲=d_۱+\frac{۲۰}{۱۰۰}d_۱=۱/۲d_۱$$

۳ شدت صوت با مربع بسامد نسبت مستقیم و با مربع فاصله نسبت وارون دارد، نسبت شدت صوت‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{f_۲}{f_۱})^۲\times(\frac{d_۱}{d_۲})^۲=(۱/۴۴)^۲\times(\frac{۱}{۱/۲})^۲=۱/۴۴$$

۴ تغییرات تراز شدت صوت برابر است با:

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۰}-۱۰\log\frac{I_۱}{I_۰}\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}=۱۰\log ۱/۴۴=۱۰\log\frac{۱۴۴}{۱۰۰}$$

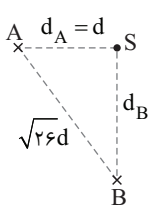
$$=۱۰(\log ۱۴۴-\log ۱۰۰)=۱۰(\log ۲^۴\times ۳^۲-۲)\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۰(۴\log ۲+۲\log ۳-۲)$$

$$\xrightarrow{\log ۲=۰/۳,\log ۳=۰/۵}\beta_۲-\beta_۱=۱۰(۱/۲+۱-۲)=۲dB\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۲dB$$

۵ تراز شدت صوت ۲dB افزایش می‌یابد.

۴ ۱۸۳۰ C

۱ ابتدا فاصلهٔ نقطهٔ B از چشمه را به کمک رابطهٔ فیثاغورس حساب می‌کنیم:



$$AB^۲=S_A^۲+S_B^۲=d_B^۲+d_A^۲=۲۶d^۲$$

$$\xrightarrow{d_A=d}d_B^۲=۲۵d^۲\Rightarrow d_B=۵d$$

۲ شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد، از این‌رو:

$$\xrightarrow{\frac{I_B}{I_A}=(\frac{d_A}{d_B})^۲}\frac{I_B}{I_A}=\frac{۱}{۲۵}$$

۳ اختلاف تراز شدت صوت برابر است با:

$$\beta_B-\beta_A=۱۰\log\frac{I_B}{I_۰}-۱۰\log\frac{I_A}{I_۰}=۱۰\log\frac{I_B}{I_A}\Rightarrow$$

$$\beta_B-\beta_A=۱۰\log\frac{۱}{۲۵}=۱۰\log ۵^{-۲}\Rightarrow\beta_B-\beta_A=-۲۰\log ۵\ \ (I)$$

۴ اکنون $\log ۵$ را حساب می‌کنیم.

$$\log ۲\times ۵=۱\Rightarrow\log ۲+\log ۵=۱\xrightarrow{\log ۲=۰/۳}\log ۵=۰/۷$$

۵ $\log ۵$ را در رابطهٔ (I) قرار می‌دهیم: $\beta_B-\beta_A=-۲۰\times(۰/۷)=-۱۴dB$

۶ تراز شدت صوت ۱۴dB کاهش می‌یابد.

۳ ۱۸۳۱ A

نکته هر گاه چشمهٔ صوت ساکن باشد، طول موج در تمام اطراف آن یکسان و برابر طول موج چشمه است و طول موج به حرکت ناظر بستگی ندارد.

در این مسئله چشمه ساکن است بنابراین در تمام طول مسیر حرکت کودک، طول موج ثابت است. $(\lambda_A=\lambda_B=\lambda_C)$

۱ ۱۸۳۲ B

خط فکری هر گاه چشمه با حرکت شتاب‌دار تندشونده به ناظر نزدیک شود به دلیل نزدیک شدن به ناظر بسامد دریافتی شنونده $f_o>f_s$ است و به دلیل افزایش تندی، جبهه‌های موج به هم فشرده‌تر شده و بسامد دریافتی افزایش می‌یابد. بنابراین شما باید با به‌دست آوردن دورهٔ نوسان سامانهٔ جرم - فنر مشخص کنید که در لحظهٔ $t=۰/۴s$ بلندگو به ناظر (شنونده) نزدیک و یا دور می‌شود و حرکت آن در این لحظه چگونه است.

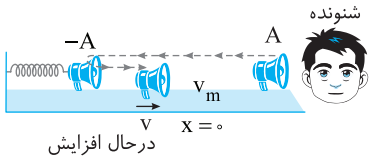
۱ دوره نوسان سامانه جرم - فنر را به دست می‌آوریم.

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow T=۲\times ۳\times\sqrt{\frac{۰/۲}{۲۰}}\Rightarrow T=۰/۶s$$

۲ بررسی می‌کنیم که $\Delta t=۰/۴s$ چه کسری از دوره است.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{۰/۴}{۰/۶}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\Delta t=۲\frac{T}{۳}$$

مدت زمان $۲\frac{T}{۳}$ از $\frac{T}{۲}$ بیشتر و از $۳\frac{T}{۴}$ کمتر است. از این رو در لحظهٔ $t=۰/۴s$ بلندگو از مکان $+A$ به مکان $-A$ رفته و از مکان $-A$، به سوی حالت تعادل در حرکت است و چون به ناظر نزدیک می‌شود $f_o>f_s$ است و از طرفی سرعتش در حال افزایش است و f_o نیز در حال افزایش است.



درحال افزایش

۳ ۱۸۳۳ C

چشمه در حال نزدیک شدن به صخره است بنابراین ناظر ساکن کنار صخره بسامدی که دریافت می‌کند $(f_{o_۱})$ از بسامد چشمه (f_s) بیشتر است $(f_{o_۱}>f_s)$. صوت با بسامد $f_{o_۱}$ به صخره برخورد کرده و به سوی راننده برمی‌گردد. در این حالت صخره شبیه یک چشمهٔ ساکن رفتار می‌کند که امواجی با بسامد $f_{o_۱}$ به سوی شنوندهٔ متحرک می‌فرستد. از این رو شنونده متحرک که در حال نزدیک شدن به چشمه است بسامد دریافتی‌اش $(f_{o_۲})$ از $f_{o_۱}$ بیشتر است بنابراین:

$$f_s<f_{o_۱}<f_{o_۲}$$

پنجره ۵

B ۱۸۳۴ ۳

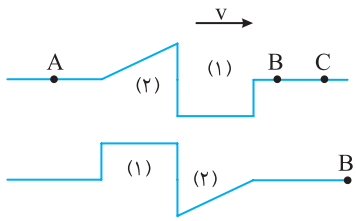
یادآوری هرگاه یک تپ به انتهای ثابت رسیده و بر آن فرود آید، تپ بازتاب از مانع وارون و قرینهٔ تپ فرودی است.

دقت کنید هر قسمت از تپ که زودتر به مانع برخورد می‌کند زودتر بازمی‌گردد، یعنی قسمت (۱) تپ به مانع برخورد کرده وارونه می‌شود و به بالا می‌رود و قسمت (۲) پس از آن به مانع رسیده وارون شده به سمت پایین می‌آید و به دنبال (۱) حرکت خواهد کرد.

بازتاب از انتهای ثابت — تپ فرودی بر انتهای ثابت

B ۱۸۳۵ ۳

خط فکری تپ فرضی می‌خواهد از A به C برسد، اما نقطهٔ B غیرقابل حرکت است، از این‌رو نقطهٔ B یک انتهای ثابت است. بنابراین تپ بازتابیده وارون و قرینهٔ تپ فرودی است.



نقطهٔ B شبیه انتهای ثابت عمل کرده و تپ از آن بازتابیده می‌شود و تپ بازتابیده نسبت به تپ فرودی وارونگی دارد. قسمت مستطیل شکل تپ ابتدا به نقطهٔ B می‌رسد، بنابراین در بازتاب نیز، ابتدا برمی‌گردد و در سمت چپ تپ قرار می‌گیرد. با این توضیحات، گزینهٔ (۳) تپ بازتابیده است.

B ۱۸۳۶ ۴

خط فکری هرگاه یک موج به مانعی برخورد کرده از مانع بازتاب کند، محیط انتشار موج قبل و بعد از برخورد به مانع تغییر نمی‌کند. بنابراین تندی انتشار موج که به ویژگی‌های محیط وابسته است تغییر نمی‌کند. بسامد موج نیز از ویژگی‌های چشمهٔ موج است، بنابراین هنگام انتشار موج در محیط بسامد آن ثابت می‌ماند $(f_1=f_2)$، از این‌رو طول موج $\lambda=v/f$ نیز ثابت می‌ماند.

اکنون با یادآوری‌هایی که در خط فکری بیان شده گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم.

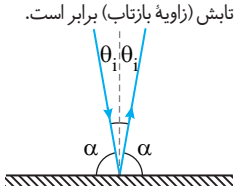
بازتاب موج از هر سطحی از قانون بازتاب عمومی پیروی می‌کند و گزارهٔ (الف) درست است.

طول موج، بسامد و تندی انتشار موج در بازتاب موج ثابت می‌مانند، بنابراین گزاره‌های (ب)، (پ) و (ت) نیز درست هستند.

B ۱۸۳۷ ۱

یادآوری بنا به قانون بازتاب عمومی همواره زاویهٔ بین پرتو تابش و خط عمود در نقطهٔ تابش (زاویهٔ تابش) با زاویهٔ بین پرتو بازتاب و خط عمود در نقطهٔ تابش (زاویهٔ بازتاب) برابر است.

در صورت مسأله بیان شده که زاویهٔ بین راستای پرتو تابش و راستای پرتو بازتابش یعنی $2\theta_i$ برابر $\frac{1}{4}$ زاویهٔ α است. از این‌رو خواهیم داشت:



$$\theta_i+\theta_i=\frac{1}{4}\alpha\Rightarrow\alpha=8\theta_i$$

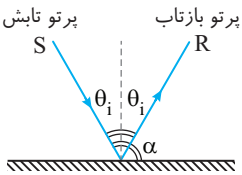
$$\alpha+\theta_i=90^\circ\Rightarrow 8\theta_i+\theta_i=90^\circ\Rightarrow\theta_i=10^\circ$$

B ۱۸۳۸ ۲

خط فکری قرار است پرتو بازتاب نیمساز زاویهٔ بین پرتو تابش و سطح آینه باشد. یعنی زاویهٔ بین پرتو تابش و پرتو بازتاب $(2\theta_i)$ برابر زاویهٔ بین پرتو بازتاب و سطح آینه (α) باشد. با توجه به این مطلب مسئله به راحتی قابل حل است.

مجموع زاویهٔ تابش θ_i و زاویهٔ بین پرتو با سطح آینهٔ α برابر 90° است، از این‌رو:

$$\begin{cases}\alpha=2\theta_i\\ \theta_i+\alpha=90^\circ\end{cases}\Rightarrow 3\theta_i=90^\circ\Rightarrow\theta_i=30^\circ$$



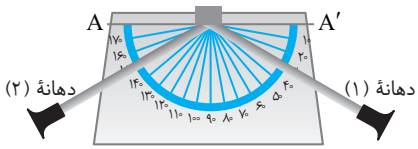
B ۱۸۳۹ ۲

خط فکری امواج صوتی مانند تمام امواج دیگر از قانون بازتاب عمومی پیروی می‌کنند. یعنی زاویهٔ تابش با زاویهٔ بازتاب برابر است. اگر شنوندهٔ دوم بخواهد صدا را با بیشترین بلندی بشنود باید گوش او (دهانهٔ دوم) در امتداد صوت بازتاب قرار گیرد.

زاویهٔ بین دو لوله 120° است، بنابراین زاویهٔ بین هر لوله با خط عمود بر سطح مانع خواهد شد:

$$\theta_i+\theta_r=120^\circ\xrightarrow{\theta_i=\theta_r}2\theta_i=120^\circ\Rightarrow\theta_i=60^\circ$$

زاویهٔ بین لولهٔ متصل به دهانهٔ (۱) با خط AA' برابر $90^\circ-60^\circ=30^\circ$ می‌باشد.



B ۱۸۴۰ ۴

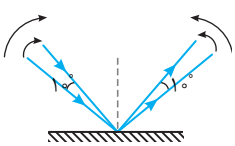
نکته برای آن‌که بیشینهٔ بلندی به دهانهٔ دوم برسد باید زاویهٔ تابش موج صوتی و بازتابش با هم برابر باشند.

زاویه‌ای که دهانهٔ (۱) با خط عمود می‌سازد $135-90=45^\circ$ و زاویه‌ای که دهانهٔ (۲) با خط عمود می‌سازد $90-60=30^\circ$ است، بنابراین برای آن‌که صدای دریافتی بیشینه شود باید یا زاویهٔ دهانهٔ (۱) با خط عمود 30° شود، یعنی لوله متصل به دهانهٔ (۱) 15° ساعتگرد بچرخد و یا زاویهٔ دهانهٔ (۲) با خط عمود از 30° به 45° تغییر کند، یعنی لولهٔ متصل به دهانهٔ (۲) نیز 15° ساعتگرد بچرخد.

B ۱۸۴۱ ۱

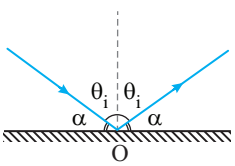
خط فکری با توجه به قانون بازتاب عمومی، زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب با هم برابر است و اگر زاویهٔ تابش کاهش (و یا افزایش) یابد زاویهٔ بازتاب نیز کاهش (و یا افزایش) می‌یابد. البته با کاهش زاویهٔ تابش و کاهش زاویهٔ بازتاب زاویه‌ای که پرتوهای تابش و بازتاب با سطح آینه می‌سازند افزایش می‌یابد.

پرتو SI به اندازهٔ 10° ساعتگرد چرخیده و دراین صورت پرتو بازتاب 10° پادساعتگرد می‌چرخد. بنابراین زاویهٔ بازتاب نیز 10° کاهش می‌یابد و زاویهٔ بین پرتو بازتاب و سطح 10° افزایش می‌یابد.



B ۱۸۴۲ ۱

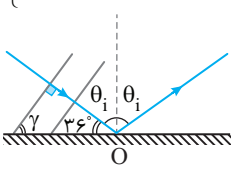
یادآوری زاویهٔ بین پرتو تابش و پرتو بازتاب دو برابر زاویهٔ تابش $(2\theta_i)$ است. از طرفی اگر زاویهٔ بین پرتو تابش با سطح آینه را α بنامیم مجموع α و θ_i همواره برابر 90° است.



بنابه فرض مسئله زاویهٔ α، $\frac{1}{3}$ زاویهٔ بین پرتو تابش و پرتو بازتاب است از این‌رو:

$$\begin{cases}\alpha=\frac{1}{3}(2\theta_i)\\ \alpha+\theta_i=90^\circ\end{cases}\Rightarrow\frac{2}{3}\theta_i+\theta_i=90\Rightarrow\frac{5}{3}\theta_i=90\Rightarrow\theta_i=54^\circ\text{ و }\alpha=36^\circ$$

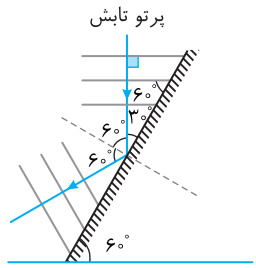
پرتو نور بر جبهه‌های موج عمود می‌باشد بنابراین: $\gamma=180^\circ-(90^\circ+36^\circ)\Rightarrow\gamma=54^\circ$



میانبر همواره زاویهٔ بین جبهه‌های موج با سطح آینه (مانع) برابر زاویهٔ بین پرتو تابش و خط عمود است.

۱ ۱۸۴۳ B

نکته زاویهٔ بین جبهه‌های موج و سطح صیقلی برابر زاویهٔ بین پرتو تابش و خط عمود است.

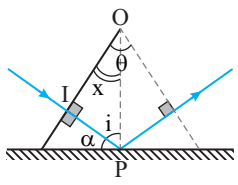


با توجه به صورت مسأله جبهه‌های موج موازی افق هستند و بنا به خاصیت خطوط موازی و مورب، جبهه‌های موج با سطح صیقلی زاویهٔ ۶۰° می‌سازند از این‌رو زاویه تابش نیز ۶۰° می‌شود و زاویه بازتاب نیز ۶۰° خواهد بود.

۲ ۱۸۴۴ B

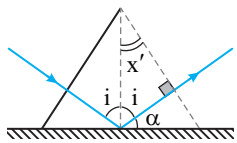
خط فکری زاویهٔ ۸۴° در شکل را با حرف θ نمایش می‌دهیم و ابتدا رابطه‌ای بین θ و α پیدا می‌کنیم تا مسئله را حل کنیم.

جبهه‌های موج بر پرتوی موج عمود است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OIP مجموع زاویهٔ i و x، ۹۰° است، از طرفی مجموع i و α نیز ۹۰° است:



$$\begin{cases} i+x=90^\circ \\ \alpha+i=90^\circ \end{cases} \Rightarrow x=\alpha \qquad (1)$$

با توجه به قانون بازتاب عمومی زاویهٔ تابش و بازتاب با هم یکسان و برابر i است:



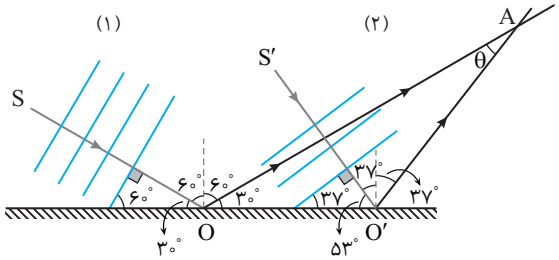
$$\begin{cases} \alpha+i=90^\circ \\ i+x'=90^\circ \end{cases} \Rightarrow x'=\alpha \qquad (2)$$

با توجه به شکل و روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت: $\theta=x+x'=2\alpha$

بنابراین: $84=2\alpha \Rightarrow \alpha=42^\circ$

۲ ۱۸۴۵ B

خط فکری به جای جبهه‌های موج شما باید با رسم پرتو مسئله را حل کنید و همواره یادتان باشد که زاویه‌ای که جبهه‌های موج با سطح بازتابنده می‌سازند برابر زاویهٔ بین پرتو و خط عمود است. اکنون بر جبهه‌های موج تابش و بازتاب، پرتو تابش SO و S′O′ را رسم کرده و پرتوهای بازتاب را رسم می‌کنیم، سپس زاویه بین دو پرتو بازتاب را به‌دست می‌آوریم.



زاویهٔ تابش پرتو SO، ۶۰° و زاویهٔ تابش پرتو S′O′ برابر ۳۷° است. پرتوهای بازتاب OA و O′A نیز زاویهٔ ۶۰° و ۳۷° با خط عمود می‌سازند. در مثلث OO′A′ مجموع زوایا ۱۸۰° است بنابراین θ خواهد شد. $\theta=180-(30+53+74)=23^\circ$

۲ ۱۸۴۶ B

باید به سراغ هندسه برویم. مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰° است.

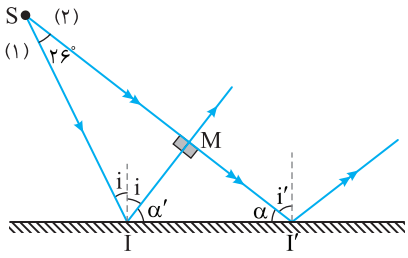
۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ SMI می‌توان نوشت:

$$2i+26+90=180^\circ \Rightarrow 2i+26=90 \Rightarrow i+13=45 \Rightarrow i=32^\circ$$

۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ IMI′ خواهیم داشت:

$$\alpha'=90-i \Rightarrow \alpha'=90-32 \Rightarrow \alpha'=58^\circ$$

$$\alpha'+\alpha+90=180 \Rightarrow 58+\alpha+90=180 \Rightarrow \alpha=32^\circ$$



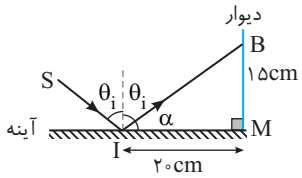
۳ اکنون زاویهٔ i′ را حساب می‌کنیم. $\alpha+i'=90 \Rightarrow 32+i'=90 \Rightarrow i'=58^\circ$

۴ نسبت زوایای تابش خواهد شد. $\frac{i'}{i}=\frac{58}{32} \Rightarrow \frac{i'}{i}=\frac{29}{16}$

۱ ۱۸۴۷ B

خط فکری پرتو SI بعد از بازتاب آینه در نقطه‌ای در فاصلهٔ ۱۵cm از سطح آینه به دیوار برخورد کرده بنابراین به کمک مثلث قائم‌الزاویهٔ IBM می‌توانید زاویهٔ بین پرتو بازتاب و سطح آینه (α) را حساب کرده سپس زاویهٔ تابش را به‌دست آورید.

با توجه به شکل روبه‌رو می‌توان نوشت:



$$\tan\alpha=\frac{15}{20}=\frac{3}{4} \Rightarrow \alpha=37^\circ$$

$$\xrightarrow{\theta_i+\alpha=90^\circ} \theta_i=53^\circ$$

۴ ۱۸۴۸ B

میکروفون سهموی برای ثبت صداهای ضعیف استفاده می‌شود. پس گزینهٔ (۱) نادرست است. در دستگاه لیتوتریپسی برای شکستن سنگ‌های کلیه از بازتابنده‌های بیضوی استفاده می‌شود. پس گزینهٔ (۲) نادرست است.

برای تعیین تندی خودروها از اثر دوپلر امواج الکترومغناطیسی استفاده می‌شود پس گزینهٔ (۳) نادرست است.

از مکان‌یابی پژواکی امواج فراصوت به همراه اثر دوپلر برای تعیین تندی شارش خون (گویچه‌های قرمز) در رگ استفاده می‌شود و گزینهٔ (۴) درست است.

بنابراین نتیجه می‌گیریم که باید مبحث فناوری و کاربرد را در کتاب درسی به خوبی فرابگیریم.

۱ ۱۸۴۹ A

۱ صوت در مدت ۰/۲s، ۱۰۰ متر فاصلهٔ بین وال با مانع را رفته و بازگشته یعنی مسافت ۱۰۰+۱۰۰ متر را در مدت ۰/۲s طی می‌کند. بنابراین تندی صوت در محیط برابر است با: $v_{\text{صوت در آب}}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{100+100}{0/2}=\frac{200}{0/2} \Rightarrow v_{\text{صوت در آب}}=1000\,m/s$

۲ حال با توجه به سرعت صوت و بسامد داده شده طول موج را حساب می‌کنیم.

$$\lambda=\frac{v}{f} \Rightarrow \lambda=\frac{1000}{100\times10^3}=10^{-2}\,m=1\,cm$$

یادآوری تندی موج در یک محیط که شرایط فیزیکی آن ثابت بوده و تغییر نمی‌کند مقدار ثابتی است و معادلهٔ انتشار موج همان معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت است. $(L=vt)$

۲ ۱۸۵۰ A

تندی صوت در محیط را به‌دست می‌آوریم:

$$v=f\lambda \xrightarrow{f=40\times10^3\,Hz,\ \lambda=8/75\times10^{-3}\,m} v=40\times10^3\times8/75\times10^{-3}$$

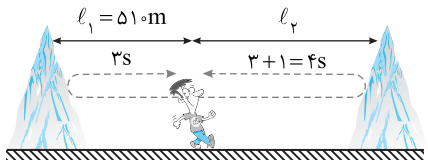
$$\Rightarrow v=350\,m/s$$

زمان رفت و برگشت صوت ۰/۴s است، بنابراین زمان رفت صوت $\frac{0/4}{2}=0/2s$ است،

از این‌رو فاصلهٔ دیوار از چشمه خواهد شد: $d=vt=350\times0/2=70\,m$

۲ ۱۸۵۱ B

۱ صوت فاصلهٔ شخص تا صخرهٔ نزدیک تر را در مدت ۳s می‌رود و برمی‌گردد، یعنی مسافت ۵۱۰+۵۱۰=۱۰۲۰m را در مدت ۳s طی می‌کند بنابراین تندی صوت در محیط خواهد شد: $v=\frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow v=\frac{1020}{3} \Rightarrow v=340\,m/s$



۲ صوت مسیر تا صخرهٔ دورتر را در مدت $۳+۱=۴s$ می‌رود و برمی‌گردد، فاصلهٔ صخره تا شخص را به‌دست می‌آوریم. $\ell_2+\ell_2=v(t)\Rightarrow ۲\ell_2=۳۴۰(۴)\Rightarrow \ell_2=۶۸۰m$

۳ بنابراین فاصلهٔ دو صخره از هم برابر است با: $\ell_1+\ell_1=۵۱۰+۶۸۰=۱۱۹۰m$

بازی با سؤال **شخصی بین دو کوه ایستاده است و فریاد می‌زند. اگر اختلاف فاصلهٔ شخص از دو کوه $۱۶m$ باشد، پژواک اول را چند ثانیه زودتر از پژواک دوم می‌شنود؟ (سرعت صوت $۳۲۰m/s$ است.)**

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱ ۳) ۰/۰۵ ۴) ۰/۵

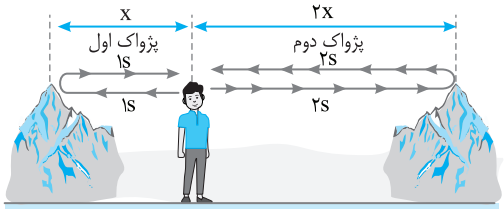
پاسخ **پژواک دوم باید $۱۶m$ بیشتر برود و $۱۶m$ بیشتر برگردد، یعنی مسیر پژواک دوم $۱۶+۱۶=۳۲m$ از پژواک اول بیشتر است و تندی صوت در محیط $۳۲۰m/s$ است. بنابراین پژواک دوم با اختلاف زمانی زیر به شنونده می‌رسد.**

$\Delta x=vt\Rightarrow t=\frac{\Delta x}{v}=\frac{۲\times ۱۶}{۳۲۰}=۰/۱s$

گزینهٔ ۲

B ۱۸۵۲ ۲

صوت، مسیر دانش‌آموز تا صخرهٔ نزدیک‌تر را در مدت $۱s$ و مسیر دانش‌آموز تا صخرهٔ دورتر را در مدت $۲s$ طی کرده است. بنابراین فاصلهٔ دانش‌آموز از صخرهٔ دورتر دو برابر فاصله او از صخره نزدیک‌تر است. یعنی اگر فاصلهٔ دانش‌آموز از صخرهٔ نزدیک‌تر x باشد از صخره دورتر $۲x$ است، بنابراین: $x+۲x=۱۰۲۰\Rightarrow ۳x=۱۰۲۰\Rightarrow x=۳۴۰m$



B ۱۸۵۳ ۲

خط فکری فاصلهٔ خودرو تا مانع را d فرض می‌کنیم. اگر صوت فاصلهٔ d را طی کرده به مانع برخورد کرده و بازگردد و در مدت t به راننده برسد در این مدت خودرو نیز به اندازهٔ $v_{خودرو}\times t$ به مانع نزدیک می‌شود، یعنی صوت در برگشت فاصلهٔ d را طی نمی‌کند بلکه فاصلهٔ $d-vt$ را طی می‌کند تا به خودرو برسد. اکنون با این دانسته‌ها مسئله قابل حل است.

۱ سرعت خودرو را بر حسب m/s حساب می‌کنیم.

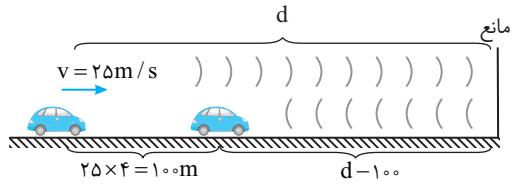
$v=۹۰km/h=۹۰\times\frac{۱۰۰۰m}{۳۶۰۰s}\Rightarrow v=۲۵m/s$

۲ مقداری که خودرو در مدت $۴s$ جلو می‌آید را به‌دست می‌آوریم.

$\Delta x=vt=۲۵\times ۴\Rightarrow \Delta x=۱۰۰m$

۳ در این مدت صوت مسافت $d+(d-۱۰۰)$ را با سرعت $۳۲۰m/s$ طی می‌کند بنابراین:

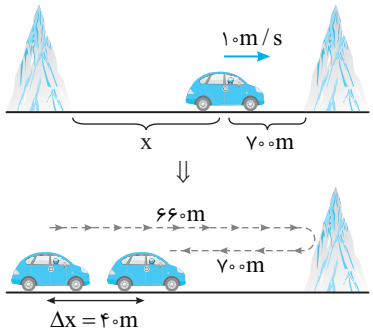
$\ell=vt\Rightarrow d+d-۱۰۰=۳۲۰\times ۴\Rightarrow ۲d=۱۳۸۰\Rightarrow d=۶۹۰m$



B ۱۸۵۴ ۴

۱ خودرو با تندی $۱۰m/s$ در حال حرکت به سمت صخرهٔ نزدیک‌تر است و در فاصلهٔ ۷۰۰ متری از صخره گلوله شلیک می‌شود و در مدت $۴s$ شخص صدای اولین پژواک را می‌شنود و در این مدت خودرو به اندازهٔ $\Delta x=vt=۱۰\times ۴=۴۰m$ حرکت کرده، بنابراین صوت فاصلهٔ $\ell=۷۰۰+۶۶۰=۱۳۶۰m$ را در مدت $۴s$ طی کرده است و تندی صوت خواهد شد.

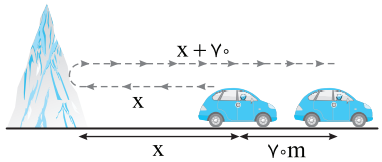
$v=\frac{\ell}{t}\Rightarrow v=\frac{۱۳۶۰}{۴}=۳۴۰m/s$



۲ اما پژواک دوم از صخرهٔ دورتر پس از $۷s$ به گوش شخص می‌رسد و در این مدت خودرو $\Delta x=۷\times ۱۰=۷۰m$ از صخره دور شده است.

و اگر فاصلهٔ صخره دورتر از خودرو در ابتدا x باشد، هنگام دریافت پژواک این فاصله $x+۷۰$ است یعنی صوت مسافت $(x+x+۷۰)$ متر را طی می‌کند تا به گوش راننده برسد از این‌رو:

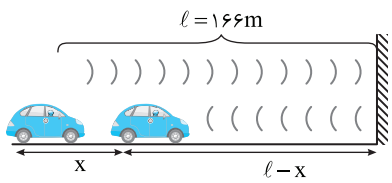
$v=\frac{x+(x+۷۰)}{\Delta t'}\Rightarrow ۳۴۰=\frac{۲x+۷۰}{۷}\Rightarrow ۲x+۷۰=۲۳۸۰\Rightarrow x=۱۱۵۵m$



بنابراین فاصلهٔ دو صخره از هم $۱۱۵۵+۷۰۰=۱۸۵۵m$ می‌باشد.

C ۱۸۵۵ ۲

خط فکری در حل تمام این مسایل شما باید دقت کنید که اگر فاصلهٔ خودرو تا مانع در لحظهٔ تولید صوت ℓ باشد، صوت در مسیر رفت ℓ را طی می‌کند، اما در برگشت خودرو در حال نزدیک شدن به مانع است و صوت مسیر کوتاه‌تری را طی می‌کند زیرا خودرو به طور مثال به اندازهٔ x جلو آمده بنابراین کل مسافت طی شده توسط صوت $(\ell+\ell-x)$ خواهد بود.



۱ اگر مدت رفت و برگشت صوت را t بنامیم، پیشروی ماشین در این مدت خواهد شد:

$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\times ۴\times t^۲+۱۰t\Rightarrow x=۲t^۲+۱۰t$

۲ صوت با تندی $۳۲۰m/s$ مسافت $\ell+\ell-x$ را طی می‌کند، بنابراین خواهیم داشت:

$۲\ell-x=vt\Rightarrow(۲\times ۱۶۶)-(۲t^۲+۱۰t)=۳۲۰\times t$

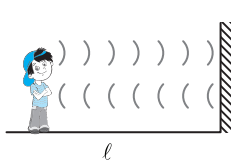
$۳۳۲-۲t^۲-۱۰t=۳۲۰t\Rightarrow ۲t^۲+۳۳۰t-۳۳۲=۰$

$t^۲+۱۶۵t-۱۶۶=۰\Rightarrow(t+۱۶۶)(t-۱)=۰\Rightarrow t=۱s$

B ۱۸۵۶ ۳

نکته حداقل تأخیر زمانی بین صوت و پژواک آن که گوش قادر به تمیز دادن صوت از پژواکش شود $۰/۱s$ است.

با توجه به نکتهٔ بیان شده باید صوت، فاصلهٔ شخص را با تندی $۳۵۰m/s$ در مدت $۰/۱s$ طی کند و اگر فاصلهٔ شخص از دیوار L باشد در مسیر رفت و برگشت صوت می‌توان نوشت:



$\Delta x=vt\Rightarrow ۲\ell=۳۵۰\times ۰/۱\Rightarrow \ell=۱۷/۵m$

B ۳ ۱۸۵۷

خط فکری تندی انتشار صوت در فلز از سرعت صوت در هوا بیشتر است، از این‌رو هرگاه به یک سرلولهٔ فلزی یک ضربه بزنیم در سمت دیگر لوله دو صدا دریافت می‌شود که یکی از طریق هوا و دیگری از طریق فلز منتقل می‌شود و برای تمیز دادن این دو صوت باید اختلاف زمانی رسیدن آن‌ها به انتهای دیگر لوله حداقل ۰/۱s باشد. زمان حرکت صوت در هوا و در فلز را به ترتیب $t_{هوا}$ و $t_{فلز}$ می‌نامیم. اختلاف این دو باید از ۰/۱s بیشتر باشد.

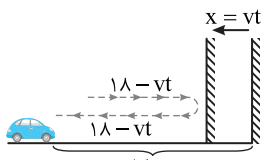
$$t_{هوا}-t_{فلز}\geq ۰/۱ \xrightarrow{t=\frac{x}{v}} \frac{\ell}{v_{هوا}}-\frac{\ell}{v_{فلز}}\geq ۰/۱ \Rightarrow \frac{\ell}{۳۰۰}-\frac{\ell}{۱۸۰۰}\geq ۰/۱$$

$$\Rightarrow \frac{۶\ell-\ell}{۱۸۰۰}\geq ۰/۱ \Rightarrow ۵\ell\geq ۱۸۰ \Rightarrow \ell\geq \frac{۱۸۰}{۵} \Rightarrow \ell\geq ۳۶m$$

C ۱ ۱۸۵۸

نکته حداقل اختلاف زمانی برای دو صوت رسیده به گوش که گوش قادر به تشخیص دو صوت از هم باشد برابر ۰/۱s است.

خط فکری مانع در حال حرکت با سرعت v است. وقتی راننده بوق می‌زند، صوت به سمت مانع می‌رود و در مدت t به مانع می‌رسد در این مدت مانع به اندازهٔ $x=vt$ جلو می‌آید بنابراین صوت در فاصلهٔ $۱۸-vt$ به مانع برخورد می‌کند و همین فاصله را در برگشت طی می‌کند تا به گوش راننده برسد در این صورت زمان رفت و برگشت صوت $۲t$ خواهد شد و این $۲t$ باید حداقل برابر ۰/۱s باشد یعنی $t=۰/۰۵s$ است اکنون مسئله قابل حل است.



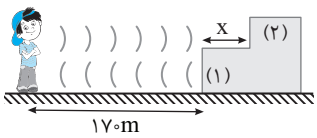
مسافتی که صوت با سرعت ۳۲۰m/s طی می‌کند برابر $۲\times(۱۸-v\times ۰/۰۵)$ است بنابراین:

$$\Delta x=vt \Rightarrow ۳۲۰\times ۰/۱=۲(۱۸-۰/۰۵v) \Rightarrow ۱۶=(۱۸-۰/۰۵v) \Rightarrow ۰/۰۵v=۲$$

$$\Rightarrow v=\frac{۲۰۰}{۵}=۴۰m/s$$

B ۱ ۱۸۵۹

پرواک اول از پلهٔ اول به سوی شخص می‌رود. این پژواک مسیر ۱۷۰m را می‌رود و ۱۷۰m را برمی‌گردد، بنابراین مدت زمان رسیدن پژواک اول خواهد شد:



$$\Delta x=vt \Rightarrow ۱۷۰+۱۷۰=۳۴۰t_۱ \Rightarrow t_۱=۱s$$

پژواک دوم باید فاصلهٔ $۱۷۰+x$ (x پهنای پله) را برود و همین فاصله را باید برگردد، یعنی مسافت طی شده برای پژواک دوم برابر $۲(۱۷۰+x)$ است و زمان پژواک دوم برابر است با:

$$\Delta x=vt \Rightarrow ۲(۱۷۰+x)=۳۴۰t_۲ \Rightarrow t_۲=\frac{۳۴۰+۲x}{۳۴۰}$$

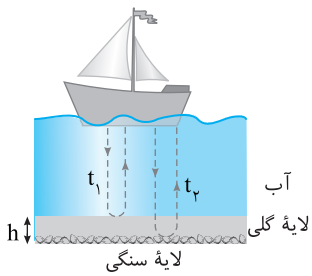
اختلاف زمانی $t_۱$ و $t_۲$ اگر از ۰/۱s کمتر باشد، صدای دو پژواک را نمی‌توان از هم تمیز داد.

$$t_۲-t_۱<۰/۱ \Rightarrow \frac{۳۴۰+۲x}{۳۴۰}-۱<۰/۱$$

$$\Rightarrow \frac{۳۴۰+۲x-۳۴۰}{۳۴۰}<۰/۱ \Rightarrow \frac{۲x}{۳۴۰}<۰/۱ \Rightarrow x<۱۷m$$

B ۲ ۱۸۶۰

خط فکری دقت کنید صوت پس از بازتاب از لایهٔ گِلی در مدت $t_۱=۰/۱s$ برمی‌گردد، اما بازتاب از لایهٔ سنگی از لحظه ارسال تا برگشت به دریافت کننده $t_۲=۰/۱۵s$ طول می‌کشند. اختلاف زمانی $(t_۲-t_۱)$ مدت زمانی است که صوت در لایهٔ گلی در حال رفت و برگشت است. بنابراین با داشتن تندی صوت در لایهٔ گلی می‌توانید، ضخامت این لایه را حساب کنید.



ضخامت لایهٔ گلی را h می‌نامیم در این صورت:

$$\Delta x=v\Delta t \Rightarrow ۲h=v(t_۲-t_۱) \Rightarrow ۲h=۱۹۲۰(۰/۱۵-۰/۱)$$

$$\Rightarrow ۲h=۱۹۲۰(۰/۰۵) \Rightarrow h=۹۶۰(۰/۰۵) \Rightarrow h=۴۸m$$

B ۳ ۱۸۶۱

اولین پژواک در اثر بازتاب از پلهٔ اول ایجاد می‌شود و این پژواک ۲×۱۶۰m مسافت در رفت و برگشت طی می‌کند. پژواک دوم از پلهٔ دوم برمی‌گردد و در مسیر خود $۱۶۰+d$ را طی کرده و در برگشت نیز $۱۶۰+d$ را طی می‌کند یعنی مسافت طی شدهٔ آن $۲\times ۱۶۰+۲d$ است و اختلاف زمانی بین دو پژواک به دلیل همین $۲d$ اختلاف فاصله است. بنابراین برای این ۰/۵s اختلاف زمانی بین دو پژواک اول و دوم می‌توان نوشت:

$$\Delta x=v\Delta t \Rightarrow ۲d=v\times ۰/۵ \Rightarrow v=۴d \qquad (I)$$

اکنون به رابطهٔ دیگری بین d و v نیاز داریم. به سراغ پژواک سوم می‌رویم.

مسافت طی شدهٔ پژواک سوم برابر است با:

$$\ell_۳=(۱۶۰+d+d)+(d+d+۱۶۰)=۳۲۰+۴d$$

این پژواک بعد از ۲s به گوش رسیده است، بنابراین:

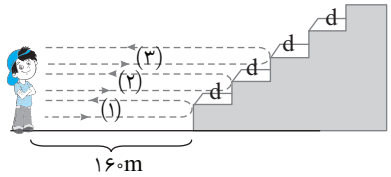
$$t_۳=\frac{\ell_۳}{v} \Rightarrow ۲=\frac{۳۲۰+۴d}{v} \Rightarrow ۳۲۰+۴d=۲v \qquad (II)$$

از رابطهٔ (I) در رابطهٔ (II) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۳۲۰+۴d=۲\times ۴d \Rightarrow ۳۲۰=۴d \Rightarrow d=۸۰m$$

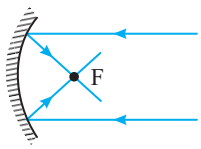
$$(I) \Rightarrow v=۴d \Rightarrow v=۴\times ۸۰=۳۲۰m/s$$

تندی انتشار صوت خواهد شد:

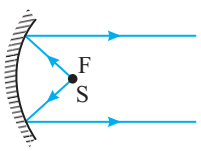


B ۲ ۱۸۶۲

یادآوری ۱ هرگاه پرتوها موازی هم به سطح کاو بتابند، در بازتاب از نقطه‌ای به نام کانون می‌گذرند.



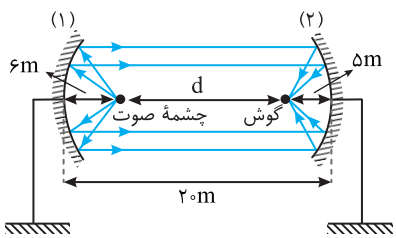
یادآوری ۲ هرگاه پرتوها از چشمهٔ S که در کانون سطح کاو قرار دارد به سطح کاو برسند پرتوهای بازتاب از سطح با هم موازی هستند.



اگر دو سطح کاو در مقابل هم قرار گیرند و چشمهٔ صوت در کانون یکی از دو سطح قرار داشته باشد چنانچه گوش شخصی در کانون سطح دوم قرار گیرد گوش صدای چشمه را با بیشترین بلندی در آن فاصله می‌شنود.

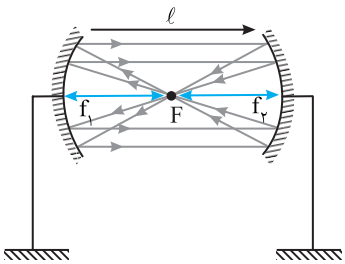
پس فاصلهٔ بین شخص و چشمهٔ صوت برابر فاصلهٔ بین دو کانون $F_۱$ و $F_۲$ است و این فاصله مطابق شکل خواهد شد.

$$d=۲۰-(۵+۶) \Rightarrow d=۹m$$



B ۱۸۶۳ ۱

تمام موج صوت تولید شده توسط شخص پس از بازتاب از هر دو سطح باید در همان نقطهٔ تولید صوت متمرکز شود تا شخص صوت پژواک را با بیشترین بلندی بشنود. همان‌طور که می‌دانیم اگر در کانون صوت تولید کنیم صوت تولیدی پس از بازتاب از سطح کاو، موازی با محور بازمی‌گردد و با توجه به سؤال صوت بازتاب پس از برخورد به سطح دوم نیز باید در محل تشکیل صوت متمرکز شود. از طرفی اگر موجی موازی با محور بر سطحی برخورد کند موج بازگشتی از کانون عبور می‌کند پس شخص در فاصلهٔ کانونی هر دو سطح قرار دارد و فاصلهٔ دو سطح کاو از هم برابر مجموع فاصلهٔ کانون از دو سطح است. $\ell = f_1 + f_2$



B ۱۸۶۴ ۱

در رادار دوپلری از بازتاب امواج الکترومغناطیسی برای مکان‌یابی پژواکی در تعیین تندی خودروها استفاده می‌شود و (الف) درست است.

در سونوگرافی از امواج فراصوت استفاده می‌شود و (ب) نادرست است.

در اجاق خورشیدی از بازتاب نور خورشید (امواج الکترومغناطیسی گسیل شده از خورشید) از سطح کاو استفاده می‌شود و (پ) درست است.

در دستگاه سونار کشتی‌ها از مکان‌یابی پژواکی امواج فراصوت استفاده می‌شود و (ت) نادرست است.

بنابراین گزینهٔ (۱) پاسخ تست است.

دقت کنید باید کاربرد پدیده‌های فیزیکی در دستگاه‌های مختلف را که در کتاب درسی بیان شده است فرابگیرید.

B ۱۸۶۵ ۲

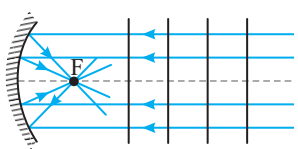
قانون بازتاب عمومی برای تمام امواج و تمام سطوح برقرار است و گزینهٔ (۱) نادرست است.

برای تعیین تندی خودرو از مکان‌یابی پژواکی امواج الکترومغناطیسی استفاده می‌شود.

برای اندازه‌گیری تندی شارش خون از امواج فراصوت استفاده می‌شود و گزینهٔ (۳) نادرست است.

مکان‌یابی خفاش نیز با امواج صوتی است و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۱۸۶۶ ۲

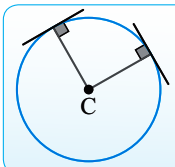


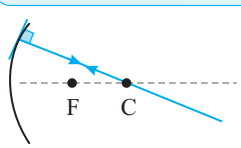
پرتوها بر جبهه‌های موج عمودند، از این‌رو وقتی جبهه‌های موج بر محور سطح کاو عمود هستند چنانچه پرتوها را رسم کنیم این پرتو موازی هم بوده و هنگام بازتاب از کانون سطح کاو می‌گذرند و گزینهٔ (۲) درست است.

B ۱۸۶۷ ۱

یادداشت ریاضی هر خط که در امتداد شعاع دایره است بر سطح دایره عمود است.

نکته هرگاه پرتو نور (موج) بر سطح عمود باشد زاویهٔ تابش صفر است و پرتو بازتاب روی پرتو تابش بازتاب می‌کند.





نقطهٔ C در شکل مرکز سطح کروی است و اگر موج از نقطهٔ C بر سطح بتابند یعنی پرتوها در امتداد شعاع دایره قرار دارند و این پرتوها بر سطح کاو عمود هستند. زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب صفر بوده یعنی پرتو روی خودش بازتاب می‌کند.

B ۱۸۶۸ ۲

نور لیزر وقتی به دیوار برخورد می‌کند چون ابعاد ناهمواری‌های میکروسکوپی سطح دیوار از طول موج نور مرئی لیزر بزرگتر است سطح دیوار برای نور لیزر سطح ناهموار بوده و نور لیزر بازتاب پخشنده انجام می‌دهد و نور در تمام جهات بازتاب می‌یابد و این دانش‌آموزان از هر جایی که نشسته‌اند می‌توانند نقطهٔ رنگی روی دیوار را ببینند. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

B ۱۸۶۹ ۳

یادآوری دو نوع بازتاب نور در طبیعت مشاهده می‌شود.

۱ بازتاب منظم: سطح بازتابندهٔ نور بسیار هموار است مانند سطح آینه.

۲ بازتاب پخشنده یا نامنظم: وقتی که نور بر سطحی غیرصیقلی و ناهموار بتابد بازتاب پخشنده رخ می‌دهد.

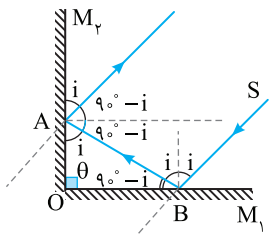
منظور از سطح ناهموار این است که سطح در مقایسه با طول موج نور ناهموار است. اگر طول موج از ابعاد ناهمواری‌ها بزرگتر باشد، بازتاب منظم و اگر طول موج از ابعاد ناهمواری‌ها کوچکتر باشد، بازتاب پخشنده است.

طول موج نور مرئی در حدود $0/5\mu m$ است و اگر از دید میکروسکوپی سطحی که به آن نور تابیده شده دارای ناهمواری‌های بزرگ‌تر از $1\mu m$ باشد این سطح‌ها برای نور مرئی ناهموار محسوب می‌شوند و بازتاب نور از سطح آن‌ها پخشنده یا نامنظم است و اگر ناهمواری‌های سطح از $1\mu m$ بسیار کوچک‌تر باشد آن سطح برای نور مرئی هموار خواهد بود و بازتاب از این سطح آینه‌ای و منظم است، بنابراین بازتاب نور مرئی از سطح a و b و c پخشنده یا نامنظم است و بازتاب از سطح d آینه‌ای یا منظم است.

A ۱۸۷۰ ۲

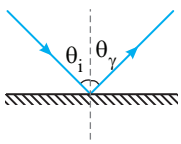
نکته هرگاه زاویهٔ بین دو آینهٔ متقاطع 90° باشد (دو آینه بر هم عمود باشند) چنانچه پرتویی بر سطح یکی از آن‌ها بتابد و بعد از بازتاب به آینه دیگر برخورد کند پرتو بازتاب از آینهٔ دوم موازی پرتو تابش بر آینهٔ اول است.

با توجه به نکتهٔ بالا گزینهٔ (۲) درست است.

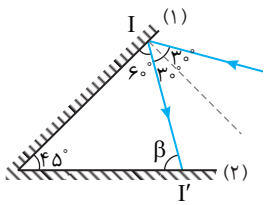


C ۱۸۷۱ ۱

خط فکری بنا به قانون بازتاب عمومی، زاویهٔ بین پرتو تابش با خط عمود بر سطح تابش (θ_i) با زاویه بین پرتو بازتاب با خط عمود بر سطح تابش (θ_γ) باهم برابراند.



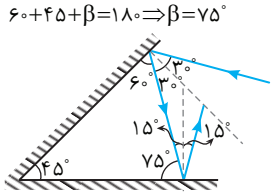
۱ با توجه به فرض مسئله، زاویهٔ بین دو آینه 45° و زاویهٔ تابش بر آینهٔ (۱)، 30° است، از این‌رو زاویهٔ بازتاب نیز 30° بوده و پرتو بازتاب مطابق شکل با سطح آینهٔ (۱) زاویهٔ $90-30=60^\circ$ می‌سازد.



۲ مجموع زوایای داخلی یک مثلث 180° است، بنابراین زاویه‌ای که پرتو تابش (II') بر آینهٔ (۲) با سطح آینهٔ (۲) می‌سازد (β) برابر است با:

$$60+45+\beta=180 \Rightarrow \beta=75^\circ$$

۳ بنابراین زاویهٔ تابش بر سطح آینهٔ (۲) برابر $90-75=15^\circ$ خواهد شد و زاویهٔ بازتاب از سطح آینهٔ (۲) نیز 15° است.

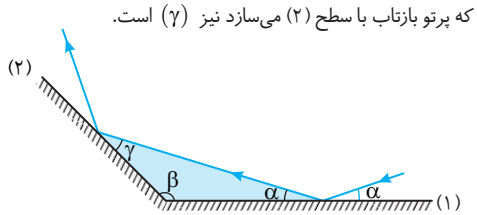


B ۱۸۷۲ ۴

یادآوری با توجه به قانون بازتاب عمومی، زاویه‌های تابش و بازتاب با هم برابراند و همچنین زاویه‌ای که پرتو تابش با سطح می‌سازد با زاویه‌ای که پرتو بازتاب با سطح می‌سازد برابر است.

در مثلث رنگی داریم: $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ \xrightarrow{180^\circ=\pi} \alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \gamma=\pi-(\alpha+\beta)$

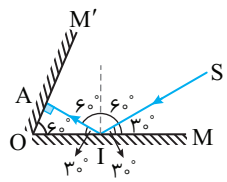
زاویه‌ای که پرتو بازتاب با سطح (۲) می‌سازد نیز (γ) است.



A ۱۸۷۳ ۱

۱ زاویه‌ای که پرتو SI با سطح آینهٔ M می‌سازد ۳۰° است و بنا به قانون بازتاب عمومی زاویه‌ای که پرتو بازتاب با آینهٔ M می‌سازد نیز ۳۰° است.

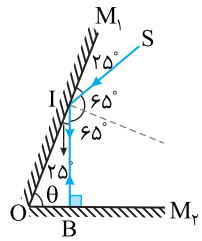
۲ زاویهٔ O (زاویهٔ بین دو آینه) ۶۰° بوده بنابراین مثلث OAI یک مثلث قائم‌الزاویه است یعنی زاویهٔ A باید ۹۰° باشد در نتیجه زاویهٔ تابش بر سطح آینهٔ M′ صفر می‌شود.



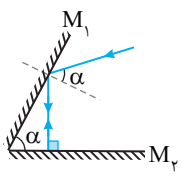
A ۱۸۷۴ ۳

نکته هرگاه پرتو بر سطح آینه عمود بتابد زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب $\theta_i=\theta_r=0$ است. در این حالت پرتو روی خودش بازتاب می‌کند.

برای آنکه پرتوی روی خودش برگردد، باید عمود بر سطح آینهٔ M_2 بتابد. با توجه به شکل مثلث OIB باید قائم‌الزاویه باشد از این‌رو زاویهٔ بین دو آینه (θ) خواهد شد: $\theta=90^\circ-25^\circ=65^\circ$

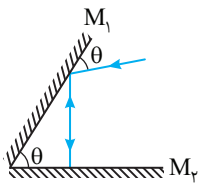


میانبر هرگاه دو آینه با هم زاویهٔ حاده (α) بسازند. چنانچه پرتو با زاویه تابش α بر یکی از آینه‌ها بتابد پس از بازتاب متوالی روی خودش بازمی‌گردد.



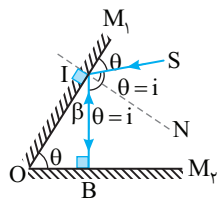
بازی با سؤال در شکل روبه‌رو مسیر پرتو نور مشخص شده است. θ چند درجه است؟ خارج ریاضی - ۸۵

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰



پاسخ ۱ پرتو پس از تابیدن بر آینهٔ M_2 روی خودش بازتاب کرده بنابراین پرتو بر آینهٔ M_2 عمود است و مثلث OIB قائم‌الزاویه است از این‌رو می‌توان نوشت:

$\theta+\beta=90^\circ \quad (I)$



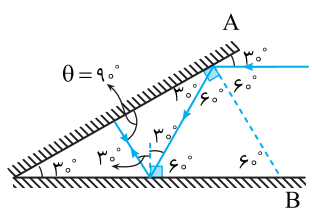
۲ پرتو SI با زاویهٔ θ به آینهٔ M_1 می‌تابد بنابراین پرتو بازتاب از آینهٔ M_1 با سطح آن زاویهٔ θ می‌سازد. $(\beta=\theta)$

۳ اکنون از رابطهٔ (I) و (II) می‌توان نوشت: $\theta+\theta=90^\circ\Rightarrow\theta=45^\circ$

گزینهٔ ۳

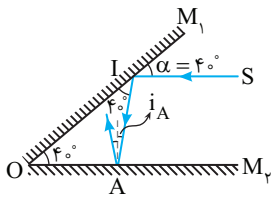
B ۱۸۷۵ ۴

مسیر پرتو نور در برخورد به آینه A و سپس آینه B و سرانجام در دومین برخورد به آینه A را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل پرتو عمود بر سطح آینه A به آن تابیده پس زاویه تابش، صفر درجه است.



B ۱۸۷۶ ۴

۱ شکل (الف): به دلیل خطوط موازی مورب زاویه‌ای که پرتو SI با سطح آینهٔ M_1 می‌سازد $\alpha=40^\circ$ است و زاویه‌ای که پرتو بازتاب با سطح آینه می‌سازد برابر ۴۰° است.

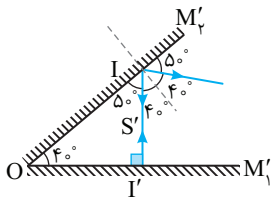


۲ در مثلث OIA زاویهٔ A برابر $100^\circ=180^\circ-(40^\circ+40^\circ)$ است.

۳ اگر در نقطهٔ A بر سطح آینهٔ M_2 خطی عمود کنیم زاویهٔ تابش بر سطح M_2 برابر خواهد شد با: $i'_A=100^\circ-90^\circ=10^\circ$

۴ در این صورت زاویهٔ بازتاب پرتو SI از سطح M_2 برابر ۱۰° است.

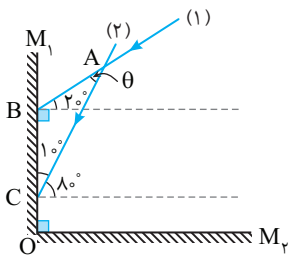
شکل (ب): پرتو S′I′ بر سطح آینهٔ M'_1 عمود است. از این‌رو روی خودش بازتاب می‌کند و هنگام برخورد به سطح آینهٔ M'_2 با سطح زاویهٔ $90^\circ-40^\circ=50^\circ$ می‌سازد بنابراین زاویهٔ تابش بر سطح آینهٔ M'_2، ۴۰° و زاویهٔ بازتاب نیز ۴۰° است.



B ۱۸۷۷ ۲

نکته هرگاه دو آینه بر هم عمود باشند و پرتو با هر زاویه‌ای که سطح یکی از آن‌ها بتابد پرتو بازتاب از آینهٔ دیگر موازی پرتو اول است.

خط فکری چون پرتوهای بازتاب از آینهٔ M_2 با پرتوهای تابش بر آینهٔ M_1 موازی هستند. هر زاویه‌ای که پرتوهای بازتاب می‌سازند همان زاویهٔ بین پرتوهای تابش (۱) و (۲) است بنابراین کافی است زاویهٔ بین دو پرتوی (۱) و (۲) را به‌دست بیاوریم.

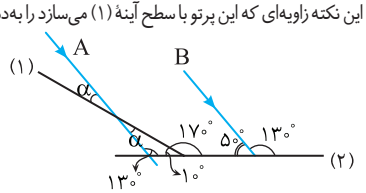


در مثلث ABC زاویهٔ β برابر $110^\circ=90^\circ+20^\circ$ است از این‌رو می‌توان نوشت:

$\theta+110^\circ+10^\circ=180^\circ\Rightarrow\theta=60^\circ$

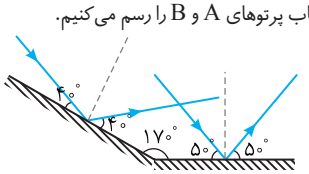
B ۱۸۷۸ ۲

پرتو A با پرتوی B موازی است و بنا به خاصیت موازی - مورب امتداد پرتو A نیز با افق زاویهٔ ۱۳۰° می‌سازد. با توجه به این نکته زاویه‌ای که این پرتو با سطح آینهٔ (۱) می‌سازد را به‌دست می‌آوریم:



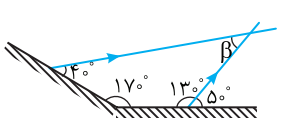
$\Delta ODI: \alpha+130^\circ+10^\circ=180^\circ\Rightarrow\alpha=40^\circ$

با توجه به متقابل به رأس بودن زاویه‌ها، زاویه پرتو A با سطح آینهٔ (۱) نیز برابر $\alpha=40^\circ$ است. حال زاویه بازتاب پرتوهای A و B را رسم می‌کنیم.



برای سادگی و جلوگیری از شلوغی شکل، تنها پرتوهای بازتاب را رسم می‌کنیم.

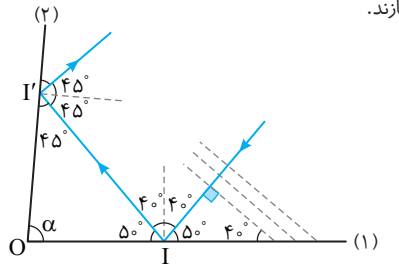
$\beta+40^\circ+170^\circ+130^\circ=360^\circ\Rightarrow\beta=20^\circ$



B ۱۸۷۹ ۱

یادآوری برای بررسی حرکت جبهه‌های موج از یک پرتو که عمود بر جبهه‌های موج بوده و در جهت پیشروی جبهه‌ها رسم می‌شود در استفاده می‌کنیم.

نکته زاویه‌ای که پرتو با خط عمود می‌سازد برابرزاویه‌ای که جبهه‌های موج با سطح می‌سازند.



۱ در شکل زاویهٔ تابش بر سطح آینهٔ (۱) برابر 40° است و زاویه‌ای که پرتو بازتاب با سطح (۱) می‌سازد برابر 50° است.

۲ بنابه فرض مسئله زاویهٔ بین جبهه‌های موج بازتاب با سطح (۲) 45° است بنابراین پرتو بازتاب II' با سطح آینه (۲) زاویه‌های 45° می‌سازد.

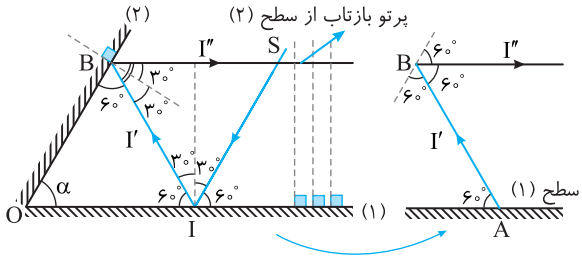
۳ مجموع زوایای مثلث 180° است از این‌رو برای مثلث OII' می‌توان نوشت:

$$\alpha+45+50=180\Rightarrow\alpha=85^\circ$$

B ۱۸۸۰ ۳

خط فکری پرتو بر جبهه‌های موج عمود است. اگر پرتوهای بازتاب از سطح (۲) که در شکل به صورت خط‌چین‌های موازی هم و عمود بر سطح (۱) نشان داده شده‌اند را در نظر بگیرید، پرتو بازتاب از سطح (۲) بر این جبهه‌ها عمود بود بنابراین پرتو بازتاب از سطح (۲) موازی سطح (۱) است. با توجه به این مطلب به سراغ حل مسئله می‌رویم پرتو SI با زاویهٔ تابش 30° به سطح (۱) تابیده و بنا به قانون بازتاب عمومی زاویهٔ بازتاب از سطح (۱) نیز 30° و زاویه‌ای که پرتو بازتاب با سطح (۱) می‌سازد $90-30=60^\circ$ است. گفتیم پرتو بازتاب سطح (۲) موازی سطح (۱) است از این‌رو بنا به خطوط موازی مورب زاویهٔ بین پرتو AB و پرتو بازتاب از سطح (۲) برابر 60° است.

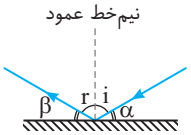
در مثلث OAB زاویهٔ A و B هر کدام 60° شده است بنابراین α نیز 60° خواهد شد.



شکل خطوط موازی و مورب استفاده شده

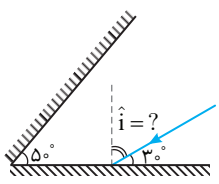
B ۱۸۸۱ ۳

نکته با توجه به قانون بازتاب عمومی، زاویه‌ای که پرتو تابش با نیم‌خط عمود (زاویه تابش) با زاویه‌ای که پرتو بازتاب با نیم‌خط عمود (زاویه بازتاب) می‌سازد باهم برابر است:



$$\begin{cases}\hat{i}=\hat{r}\\ \hat{\alpha}+\hat{i}=90^\circ\\ \hat{r}+\hat{\beta}=90^\circ\end{cases}$$

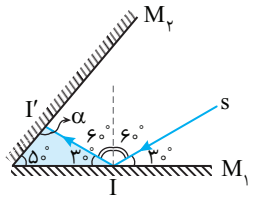
۱ با توجه به پرتو تابش زاویهٔ تابش را به‌دست می‌آوریم، سپس با توجه به اینکه زاویهٔ تابش و بازتاب باهم برابر است، زاویه بازتاب و پرتو بازتاب را می‌کشیم:



$$30^\circ+\hat{i}=90^\circ\Rightarrow\hat{i}=60^\circ$$

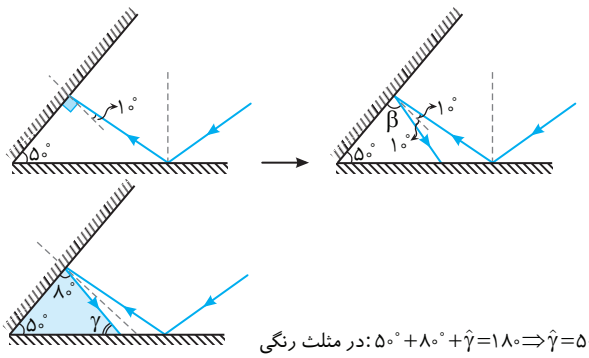
۲ زاویهٔ بازتاب 60° است:

$$30^\circ+50^\circ+\hat{\alpha}=180^\circ\Rightarrow\hat{\alpha}=100^\circ$$:در مثلث رنگی



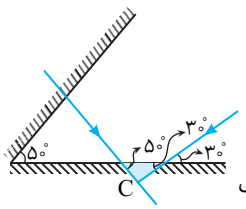
۳ برای پرتو II' خط عمود را می‌کشیم، پس زاویهٔ تابش به سطح M_2، 10° است و زاویهٔ بازتاب نیز 10° است:

$$\hat{\beta}+10^\circ=90^\circ\Rightarrow\hat{\beta}=80^\circ$$



$$80^\circ+\hat{\gamma}=180^\circ\Rightarrow\hat{\gamma}=50^\circ$$:در مثلث رنگی

۴ حال امتداد دو پرتو SI و بازتاب از سطح دوم را باهم قطع می‌دهیم تا زاویهٔ بین دو پرتو را به‌دست بیاوریم. برای خلوت شدن شکل تنها پرتو SI و بازتاب از سطح M_2 را کشیدیم:

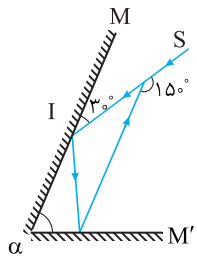


$$50^\circ+30^\circ+\hat{C}=180^\circ\Rightarrow\hat{C}=100^\circ$$:در مثلث رنگی

بازی با سؤال **پرتو نورانی SI بر آینهٔ تخت M تابیده و مطابق شکل روی دو آینهٔ M و M' بازتابش پیدا کرده است. زاویهٔ بین دو آینه چند درجه است؟** خارج ریاضی - ۸۹

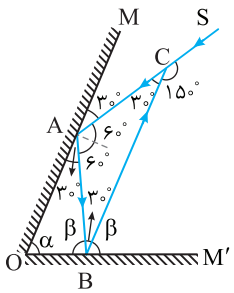
۱) ۴۵ ۲) ۶۰

۳) ۷۵ ۴) ۸۰



پاسخ **زاویهٔ بین پرتو SI و سطح آینهٔ M، 30° است از این‌رو زاویهٔ تابش بر آینهٔ M، 60° است. در مثلث ABC زاویهٔ مجاور 150° بوده بنابراین زاویهٔ $C=30^\circ$ است. در نتیجه زاویهٔ بین پرتوی تابش AB و بازتابش BC بر آینهٔ M' برابر است با:**

$$180-(2\times60+30)=30^\circ$$



اکنون زاویهٔ بین پرتوی تابش AB بر آینهٔ M' با سطح آینه را به‌دست می‌آوریم:

$$2\beta=180-30=150^\circ\Rightarrow\beta=75^\circ$$

در این صورت در مثلث OAB می‌توان نوشت:

$$\alpha+\beta+30=180^\circ\Rightarrow\alpha+75+30=180^\circ\Rightarrow\alpha=75^\circ$$

میانبر **در آینه‌های متقاطع همواره زاویهٔ انحراف بین پرتوی تابش اولیه و پرتوی بازتاب از آینهٔ دوم دو برابر زاویهٔ بین دو آینه است و به زاویهٔ تابش اولیه بستگی ندارد.**

با دانستن این نکته می‌توان نوشت:

$$\alpha=\frac{150^\circ}{2}=75^\circ$$

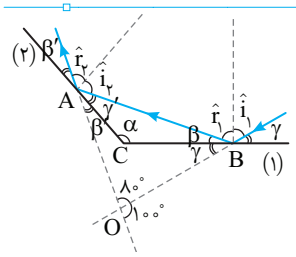
گزینهٔ ۳

B ۱۸۸۲ ۳

بـا توجه به قانون بازتاب، زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب با هم برابرند:

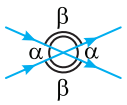
$$\hat{i}_1=\hat{r}_1 \xrightarrow[\beta=90-r_1]{\gamma=90-i_1} \gamma=\beta$$

$$\hat{i}_2=\hat{r}_2 \xrightarrow[\beta'=90-r_2]{\gamma'=90-i_2} \gamma'=\beta'$$



تذکر زاویهٔ بین دو پرتو زاویه‌ای است که در محل تقاطع آن‌ها و در قسمتی که هر دو پرتو هم‌جهت (ورود یا خروج) هستند ساخته می‌شود.

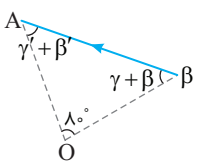
در شکل روبه‌رو زاویه‌های α، زاویهٔ بین دو پرتو و زاویه‌های β مکمل آن‌ها هستند.



در مثلثی که از امتداد پرتوی تابش اولیه و بازتاب ثانویه و پرتوی بازتاب از سطح (۱) ساخته می‌شود می‌توان نوشت:

$$(\gamma+\beta)+(\gamma'+\beta')+80=180 \xrightarrow[\gamma=\beta]{\gamma'=\beta'}$$

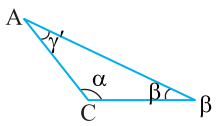
$$2\beta+2\gamma'=100^\circ \Rightarrow \beta+\gamma'=50^\circ$$



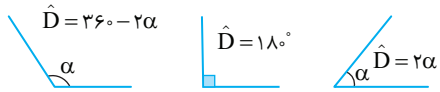
در مثلثی که با پرتوی بازتاب از سطح (۱) و دو سطح ساخته می‌شود داریم:

$$\alpha+\beta+\gamma'=180 \xrightarrow{\beta+\gamma'=50^\circ}$$

$$\alpha+50=180 \Rightarrow \alpha=130^\circ$$



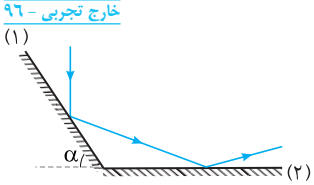
میانبر به زاویهٔ بین پرتوی تابش اولیه و پرتو بازتاب از سطح دوم زاویهٔ انحراف گویند:



باتوجه‌به‌شکل‌سوال‌زاویهٔ‌انحراف ۱۰۰° است: $360-2\alpha=100 \Rightarrow 2\alpha=260^\circ \Rightarrow \alpha=130^\circ$

بازی با سؤال **مطابق شکل زیر، پرتو نوری به آینهٔ تخت (۱) می‌تابد و در نهایت از آینهٔ تخت (۲) بازتاب می‌شود. پرتو تابش به آینهٔ (۱) با پرتو بازتابش از آینهٔ (۲)، چه زاویه‌ای می‌سازد؟**

خارج تجربی - ۹۶



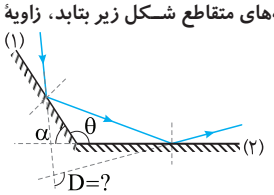
۱) α

۲) 2α

۳) $180-\alpha$

۴) $90+\alpha$

پاسخ **نکته** **هرگاه پرتو به آینه‌های متقاطع شکل زیر بتابد، زاویهٔ انحراف یعنی زاویهٔ بین راستای پرتو تابش بر آینهٔ (۱) و پرتو بازتابش از آینهٔ (۲) برابر است با:**



$$D=360-2\theta \qquad (I)$$

با توجه به شکل مجموع زاویه‌های α و θ یک زاویهٔ نیم‌صفحه (180°) تشکیل می‌دهند.

$$\theta+\alpha=180 \Rightarrow \theta=180-\alpha$$

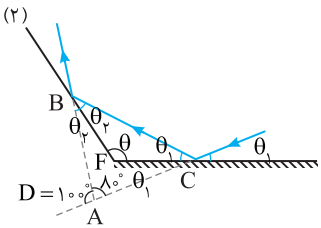
در رابطهٔ (I) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$D=360-2(180-\alpha) \Rightarrow D=360-2\times180+2\alpha \Rightarrow D=2\alpha$$

گزینهٔ ۲

B ۱۸۸۳ ۲

به شکل نگاه کنید. در مثلث ABC زاویهٔ $D=100^\circ C$ زاویهٔ خارجی است، بنابراین:



$$D=2\theta_1+2\theta_2 \Rightarrow 100=2(\theta_1+\theta_2)$$

$$\Rightarrow \theta_1+\theta_2=50$$

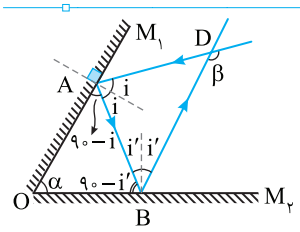
به مثلث BFC دقت کنید،

$$\theta+\theta_1+\theta_2=180^\circ \Rightarrow \theta+50^\circ=180^\circ \Rightarrow \theta=130^\circ$$

میانبر هرگاه زاویهٔ بین دو آینه متقاطع منفرجه باشد و پرتو با دو بازتاب متوالی از بین دو آینه خارج شود. آن‌گاه زاویهٔ انحراف خواهد شد:

$$D=360^\circ-2\theta \Rightarrow 100^\circ=360^\circ-2\theta \Rightarrow \theta=130^\circ$$

B ۱۸۸۴ ۴



۱ اگر زاویهٔ تابش بر سطح M_1، i و بر سطح M_2، i' باشد، در این صورت در مثلث OAB زاویهٔ A و B خواهند شد: $A=90-i$ ، $B=90-i'$ از طرفی خواهیم داشت:

$$\alpha+90-i+90-i'=180 \Rightarrow \alpha=i+i' \qquad (I)$$

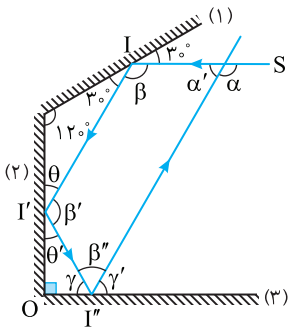
۲ در مثلث ABD زاویهٔ β زاویهٔ خارجی مثلث است و اندازهٔ آن برابر مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور با β است. از این‌رو:

$$\triangle ABD: 2i+2i'=\beta \Rightarrow 2(i+i')=\beta \xrightarrow{(I)} \beta=2\alpha$$

بنابرایـن هرگونـه تغییـری در زاویهٔ تابش، تأثیـری روی اندازهٔ β ندارد و در این شـکل همواره $\beta=2\alpha$ است.

۳ با توجه به رابطهٔ (I) جمع i و i' همواره با α برابر است بنابراین هر مقدار که از i کم شود همان مقدار به i' اضافه شود. یعنی وقتی i به $\frac{i}{2}$ تبدیل می‌شود به اندازهٔ $\frac{i}{2}$ به i' اضافه می‌شود.

B ۱۸۸۵ ۲



۱ پرتو SI با سطح آینهٔ (۱) زاویهٔ 30° می‌سازد بنابراین زاویه‌ای که پرتو بازتاب II' با آینهٔ (۱) می‌سازد 30° است از این‌رو زاویهٔ بین دو پرتو SI و II' خواهد شد. $\beta=180-60=120^\circ$

۲ زاویه‌ای که پرتوی II' با سطح آینهٔ (۲) می‌سازد:

$$\theta=180-(120+30) \Rightarrow \theta=30^\circ$$

۳ زاویهٔ بین $I'I''$ با سطح آینهٔ (۲) نیز 30° خواهد شد:

$$\theta'=30^\circ$$

۴ زاویهٔ بین دو پرتو II' و $I'I''$ نیز برابر است با: $\beta'=180-(30+30)=120^\circ$

۵ زاویهٔ پرتو $I'I''$ با سطح آینهٔ (۳) برابر است با:

$$\theta'+\gamma=90 \Rightarrow 30+\gamma=90 \Rightarrow \gamma=60^\circ \Rightarrow \gamma'=60^\circ$$

۶ زاویهٔ بین دو پرتو $I'I''$ و $I''S$ را حساب می‌کنیم: $\beta''=180-(60+60)=60^\circ$

۷ مجموع زوایای چهارضلعی $SII'I''$ برابر 360° است از این‌رو:

$$\alpha'+\beta+\beta'+\beta''=360 \Rightarrow \alpha'+120+120+60=360 \Rightarrow \alpha'=60^\circ$$

۸ مجموع زاویهٔ α و α'، 180° است. بنابراین:

$$\alpha+\alpha'=180 \Rightarrow \alpha+60=180 \Rightarrow \alpha=120^\circ$$

دقت کنید که توضیح دادن مسئله سبب طولانی شدن راه‌حل شده است وگرنه حل این تست زمان کوتاهی لازم دارد.

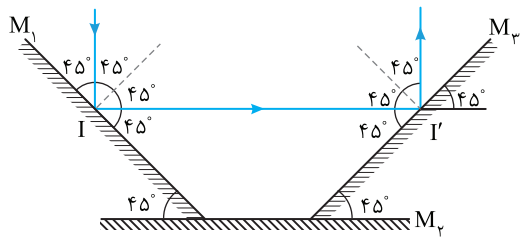
B ۱۸۸۶ ۱

خط فکری در حل این مسائل باید به زوایای روی شکل دقت کنید. سپس بازتاب پرتو از هر آینه را به دقت رسم کرده تا بتوانید مسئله را حل کنید.

۱ زاویـه‌ای که پرتو تابش با سـطح آینهٔ M_1 می‌سـازد 45° اسـت و بنـا به قانون عمومی بازتاب زاویهٔ پرتو بازتاب با سطح آینهٔ M_1 نیز 45° است.

۲ مجدداً به شکل نگاه کنید زاویهٔ بین امتداد آینهٔ M_1 و M_2، 45° و زاویهٔ بین پرتو II' و آینهٔ M_1 نیز 45° است و بنابه خطوط موازی مورب پرتوی II' موازی سطح آینهٔ M_2 بوده یعنی پرتو بازتاب از M_1 به M_2 برخورد نمی‌کند بلکه به آینهٔ M_3 می‌تابد و مطابق شکل

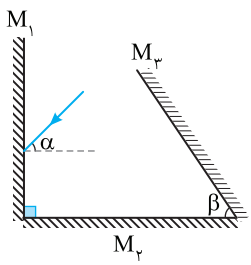
بازتاب کرده بین پرتو نهایی موازی پرتو SI بوده و پرتو SI، ۱۸۰° منحرف شده است.



بازی با سؤال در شکل روبه‌رو پرتو SI با زاویهٔ تابش α بر سطح آینهٔ M_1 تابیده شده و پس از بازتاب از سطح آینه‌های (۲) و (۳) روی خودش باز می‌گردد. کدام گزینه درست است؟

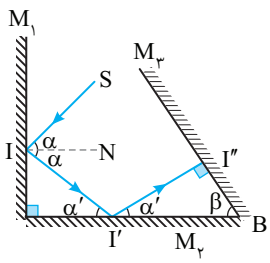
۱) $\beta=2\alpha$ ۲) $\alpha=2\beta$

۳) $\alpha+\beta=90^\circ$ ۴) $\alpha=\beta+90^\circ$



پاسخ ۱ پرتو SI با زاویهٔ تابش α به آینهٔ M_1 می‌تابد و بنا به قانون عمومی بازتابش زاویهٔ بازتاب نیز α می‌شود (به شکل نگاه کنید.)

۲ با توجه به شکل دو آینهٔ M_1 و M_2 برهم عمودند بنابراین خط عمود N که بر آینهٔ M_1 عمود است موازی آینهٔ M_2 بوده و با توجه به خطوط موازی مورب زاویهٔ α' با زاویهٔ α برابر است.



۳ α' زاویهٔ بین پرتو تابش II' بر آینهٔ M_2 است بنابراین زاویهٔ پرتو بازتاب $(I'I'')$ با سطح آینهٔ M_2 نیز α' است.

۴ در مثلث $I'I''B$، پرتو $I'I''$ باید بر آینهٔ M_3 عمود باشد تا روی خودش بازتاب کند در این صورت مجموع زوایای α' و β برابر ۹۰° خواهد شد.

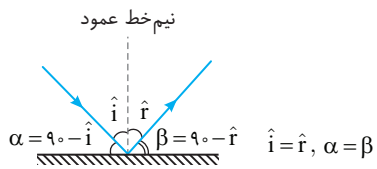
$$\alpha'+\beta=90 \xrightarrow{\alpha=\alpha'} \alpha+\beta=90^\circ$$

گزینهٔ ۳

B ۱۸۸۷ ۳

خط فکری در حل این سؤال باید در گام اول پرتوهای تابش و بازتاب بر سطح آینه (۱) و سپس پرتو تابش و بازتاب دوم از سطح آینه (۲) را رسم کنیم. به فرض مسئله دقت کنید که گفته شده پرتو دوم بازتابی از سطح آینه (۱) موازی آینه (۲) خواهد شد.

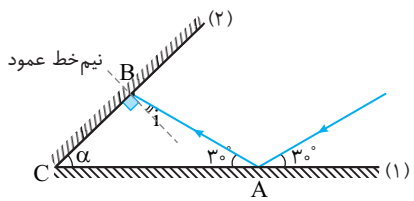
نکته با توجه به قانون بازتاب عمومی داریم:



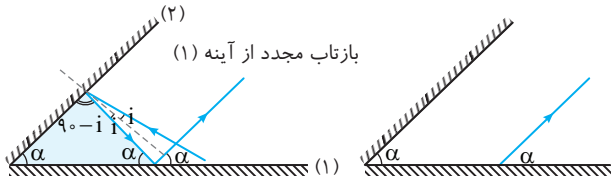
$$\hat{i}=\hat{r},\ \alpha=\beta$$

۱ بازتاب پرتو از آینه (۲) را رسم می‌کنیم و نیم‌خط عمود آن را مشخص می‌کنیم، مجموع زوایای داخلی مثلث ABC برابر ۱۸۰° است:

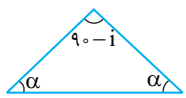
$$30^\circ+(90^\circ+\hat{i})+\alpha=180^\circ \Rightarrow \hat{i}=180^\circ-90^\circ-30^\circ-\hat{\alpha} \Rightarrow \hat{i}=60^\circ-\hat{\alpha}\ (I)$$



۲ پرتو بازتاب شده از آینه (۲) مجدد به آینه (۱) برخورد کرده و با توجه به سؤال و پرتو بازتاب مجدد از آینه (۱) موازی با آینه (۲) است. طبق خطوط موازی و مورب، آینهٔ (۲) و بازتاب مجدد موازی‌اند و آینهٔ (۱) مورب است بنابراین:



۳ در مثلث رنگی زاویهٔ دو آینه α و زاویه‌ای که پرتو تابش با سطح آینه می‌سازد نیز با توجه به موازی مورب بالا α درجه است و مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰° است، بنابراین:

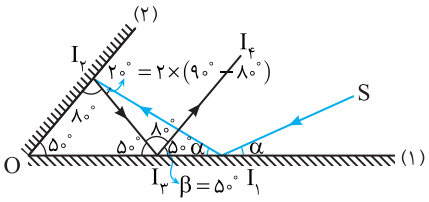


$$\hat{\alpha}+\hat{\alpha}+(90-\hat{i})=180^\circ \xrightarrow[i=60-\alpha]{\text{طبق معادلهٔ (۱)}}$$

$$2\alpha+(90-(60-\alpha))=180^\circ \Rightarrow 3\alpha+30=180^\circ \Rightarrow \alpha=50^\circ$$

B ۱۸۸۸ ۳

مسیر پرتو را بعد از برخورد به آینه‌های ۱ و ۲ مطابق شکل رسم می‌کنیم. با توجه به فرض مسئله پرتو I_3I_4 موازی آینه (۲) است و بنابر خاصیت خطوط موازی و مورب، زاویهٔ بین پرتو I_3I_4 با سطح آینه (۱) $\beta=50^\circ$ می‌شود. بنابراین پرتو I_2I_3 که بر سطح آینه (۱) می‌تابد با سطح آینه زاویهٔ ۵۰° می‌سازد.



در مثلث OI_2I_3 زاویهٔ بین I_2I_3 با آینهٔ (۲) $180-100=80^\circ$ می‌شود. در این صورت:

در مثلث $I_1I_2I_3$:

$$20+80+50+\alpha=180 \Rightarrow \alpha=30^\circ$$

B ۱۸۸۹ ۱

با توجه به قانون بازتاب زاویه تابش و بازتاب با هم برابر است و مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰° است:

۱ زاویهٔ تابش بر سطح آینهٔ (۱) برابر $90-30=60^\circ$ است بنابراین مطابق شکل (الف) زاویهٔ بازتاب از سطح آینه (۱) نیز ۶۰° است.

۲ به شکل (الف) نگاه کنید. زاویهٔ بین پرتو و سطح آینهٔ (۲) خواهد شد:

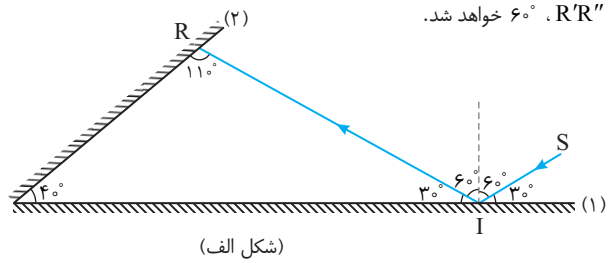
$$R=180-(30+40)=110^\circ$$

۳ اگر خط عمود بر سطح آینهٔ (۲) را رسم کنید، مطابق شکل (ب) زاویهٔ تابش بر سطح آینهٔ (۲) برابر $110-90=20^\circ$ می‌شود و زاویهٔ پرتو بازتاب RR' با سطح آینهٔ (۲) $90-20=70^\circ$ خواهد شد.

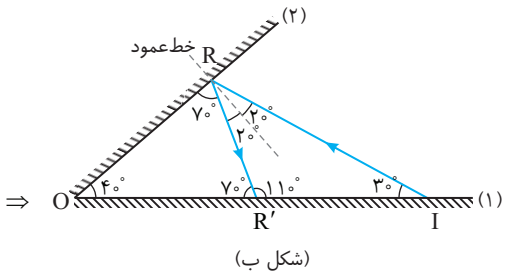
۴ در مثلث ORR' زاویهٔ پرتو بین پرتو RR' با سطح آینه (۱) نیز برابر $180-(40+70)=70^\circ$ می‌شود.

۵ زاویهٔ تابش و بازتاب از سطح آینه (۱)، ۲۰° می‌شود.

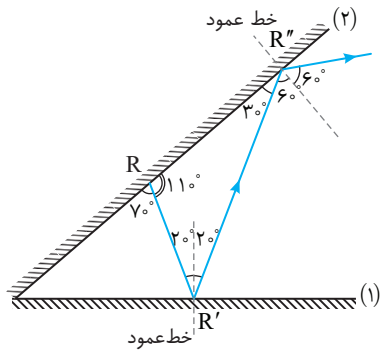
۶ پرتو $R''R'$ با آینه ۲ زاویهٔ ۳۰° می‌سازد بنابراین زاویهٔ تابش و بازتاب برای پرتو $R'R''$، ۶۰° خواهد شد.



(شکل الف)



(شکل ب)

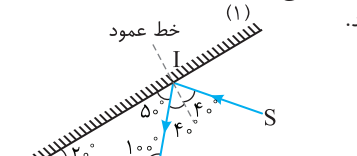


B ۱۸۹۰ ۴

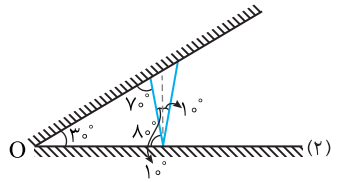
خط فکری در حل این مسائل باید یک‌به‌یک، زاویهٔ تابش و بازتاب در هر بار برخورد نور به هر آینه را ادامه داده تا لحظه‌ای که دیگر پرتو به آینه‌ای برخورد نکند البته شما باید مقداری هندسه بدانید و اینکه مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰° است، سپس بروید و با حوصله مسئله را حل کنید.

۱ زاویهٔ تابش بر سطح آینه (۱) بنا بر فرض مسئله ۴۰° است و بنا بر قانون بازتاب عمومی، زاویهٔ بازتاب نیز ۴۰° و زاویه‌ای که پرتو بازتاب با سطح آینه (۱) می‌سازد ۵۰° خواهد بود.

۲ به مثلث OII′ شکل (الف) نگاه کنید، زاویه‌ای که پرتو تابیده به سطح آینه (۲) با آینه می‌سازد ۱۰۰° است. اگر خط عمود را رسم کنید در شکل (ب) مشخص می‌شود که زاویهٔ تابش ۱۰° است. پرتو بازتاب وقتی به آینه (۱) می‌رسد با سطح آینه (۱) زاویه ۷۰° می‌سازد.



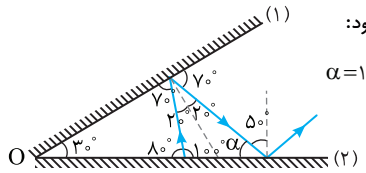
(الف)



(ب)

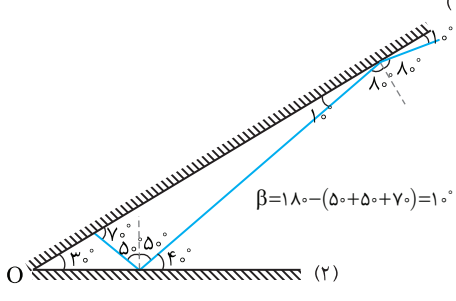
۳ برای پرتویی که مجدد به آینهٔ (۱) با زاویهٔ ۷۰° برخورد کرده خط عمود رسم می‌کنیم زاویهٔ تابش ۲۰° می‌شود:

$\alpha = 180^\circ - (20^\circ + 20^\circ + 100^\circ) = 40^\circ$



(پ)

با توجه به شکل (ت) زاویهٔ پرتویی که مجدد به سطح (۱) می‌تابد با آن ۱۰° است.



(ت)

زاویهٔ بین دو آینه $\rightarrow \beta = 180^\circ - (50^\circ + 50^\circ + 70^\circ) = 10^\circ < 30^\circ$

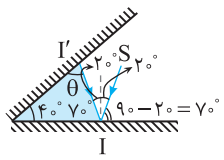
زاویهٔ بین پرتو و آینهٔ (۱) از زاویهٔ بین دو آینه کمتر است ۳۰° > ۱۰°. بنابراین پرتو به آینهٔ (۲) برخورد نخواهد کرد و آخرین زاویهٔ بازتابش ۸۰° است.

B ۱۸۹۱ ۲

۱ بازتاب پرتو SI را رسم می‌کنیم، زاویه تابش و بازتاب یکسان و برابر ۲۰° است:

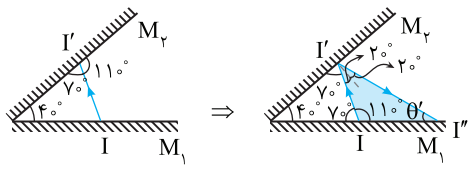
در مثلث رنگی: $\theta + 40^\circ + 70^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow \theta = 70^\circ$



۲ پرتو II′ با سطح زاویهٔ ۱۱۰° می‌سازد. نیم‌خط عمود این پرتو در سطح M_2 را رسم کرده، زاویه تابش را مشخص و پرتو بازتاب را رسم می‌کنیم زاویهٔ تابش پرتو II′ با آینه M_2، برابر ۲۰° است.

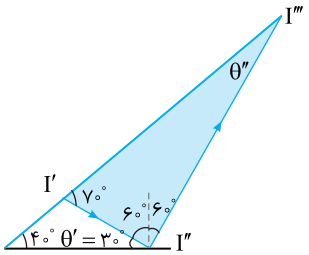
در مثلث رنگی: $110^\circ + 40^\circ + \theta' = 180^\circ \Rightarrow \theta' = 30^\circ$



۳ حال پرتو تابش مجدد به از سطح M_1 (II″) را رسم می‌کنیم و زاویهٔ بازتاب آن را به‌دست می‌آوریم:

$\theta' = 180^\circ - 110^\circ - 40^\circ \Rightarrow \theta' = 30^\circ$

در مثلث رنگی: $\theta'' + 70^\circ + (60^\circ + 60^\circ) = 180^\circ \Rightarrow \theta'' = -10^\circ$ غ ق ق



۴ زاویهٔ ۱۰° − غیرقابل قبول است یعنی پرتوی I″I‴ به سطح M_2 برخورد نمی‌کند. بنابراین زاویهٔ بازتاب نهایی پرتو SI هنگام خروج ۶۰° است.

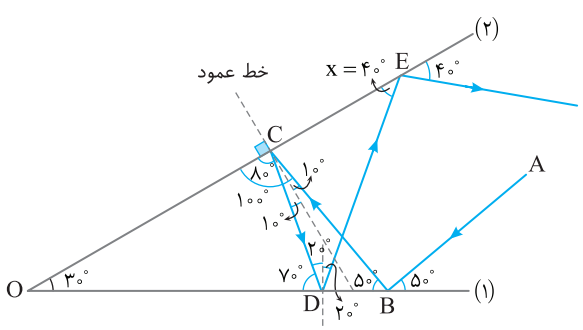
B ۱۸۹۲ ۲

۱ پرتو AB با زاویهٔ ۵۰° به سطح آینه (۱) برخورد می‌کند و با همان زاویه نسبت به سطح بازتاب می‌کند. در مثلث OBC زاویهٔ C برابر ۱۰۰° است.

۲ با رسم خط عمود مشخص می‌شود که زاویهٔ تابش بر سطح آینه (۲) ۱۰° و بازتاب آن نیز ۱۰° است.

۳ در مثلث OCD زاویهٔ D برابر ۷۰° است بنابراین، در مثلث CDB زاویهٔ بین پرتو تابش CD و پرتو بازتاب DE، ۴۰° می‌شود.

۴ در چهارمین بازتاب، زاویهٔ پرتو DE با سطح آینهٔ (۲)، برابر ۴۰° می‌شود.

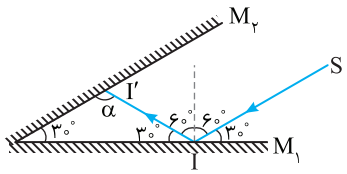


B ۱ ۱۸۹۳

خط فکری با سؤال سختی سروکار نداریم اما کمی سؤال طولانی است، باید دوبار سوال حل شود یکبار با زاویه تابش 60° و بار دیگر حالتی را بررسی کنیم که پرتو 10° ساعتگرد ( ) چرخیده و زاویهٔ تابش 70° شده است:

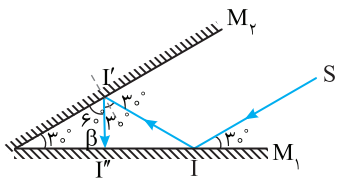
حالت (الف) زاویه تابش SI برابر 60° است، پس زاویه بازتاب II' نیز 60° است، حال زاویه‌ای که پرتو II' با سطح آینهٔ M_2 می‌سازد را به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha+30+30=180^\circ \Rightarrow \alpha=120^\circ$$



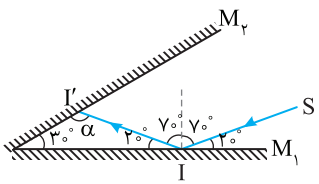
خط عمود را برای زاویهٔ α رسم کرده و پرتو بازتاب $I'I''$ از سطح M_2 را رسم می‌کنیم:

$$\beta+30+60=180\Rightarrow\beta=90^\circ$$

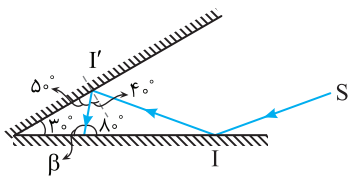


بنابراین با توجه به شکل پرتو $I'I''$ بر سطح آینه M_1 عمود است یعنی پرتو در دومین بار با زاویهٔ تابش صفر درجه بر سطح آینهٔ M_1 می‌تابد.

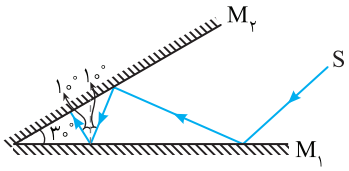
حالت (ب) زاویه تابش SI، 70° شده پس زاویه بازتاب از این سطح نیز 70° می‌شود. حال زاویهٔ بین پرتو II' با سطح M_2 را به‌دست می‌آوریم: $\alpha+20+30=180\Rightarrow\alpha=130^\circ$



خط عمود را برای زاویه α رسم کرده و پرتو بازتاب $I'I''$ را رسم می‌کنیم. زاویهٔ تابش و بازتاب بر سطح M_2، 40° می‌شود. حال پرتو $I'I''$ بر سطح M_1 برخورد کرده که همان پرتو تابش بر سطح M_1 برای دومین بار است: $\beta+30+50=180\Rightarrow\beta=100^\circ$

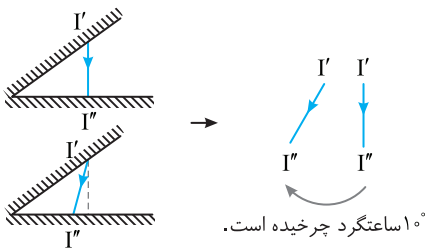


اگر برای زاویهٔ $\beta=100^\circ$ خط عمود رسم کنیم، زاویهٔ تابش $10^\circ=90^\circ-100^\circ$ می‌شود.



بنابراین زاویهٔ تابش بر سطح آینه M_1 از 0° به 10° می‌رسد.

به امتداد پرتو $I'I''$ در دو حالت (الف) و (ب) در شکل بعد توجه کنید، پرتو تابش بر سطح M_1، 10° ساعتگرد می‌چرخد.



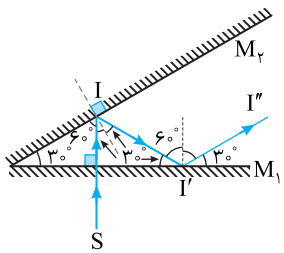
10° ساعتگرد چرخیده است.

B ۲ ۱۸۹۴

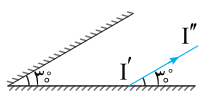
خط فکری شما باید در هر مرحله پرتو تابش بر هر آینه و پرتو بازتاب را رسم کرده و به کمک هندسه اندازهٔ زاویهٔ تابش و بازتاب را مشخص کنید و این عمل را تکرار کنید تا لحظه‌ای که زاویهٔ بین پرتو و سطح آینه کوچک‌تر و یا برابر زاویهٔ بین دو آینه شود. در این حالت پرتو از بین دو آینه خارج می‌گردد.

۱ زاویهٔ تابش پرتو SI، 30° و زاویهٔ بازتاب آن نیز 30° خواهد بود.

۲ پرتو II' وقتی به آینهٔ M_1 برخورد می‌کند به دلیل خطوط موازی مورب با خط عمود زاویهٔ 60° می‌سازد بنابراین پرتو II' با سطح آینهٔ M_1 زاویهٔ 30° خواهد ساخت در نتیجه زاویهٔ بین پرتو بازتاب از M_1 با سطح آینهٔ M_1، 30° است.

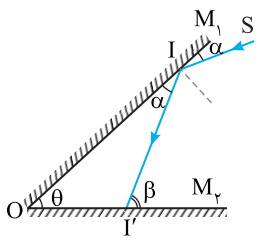


۳ طبق خطوط موازی - مورب پرتو $I'I''$ با آینهٔ M_2 موازی شده و از بین دو آینه خارج می‌شود در نتیجه تنها دو بار برخورد صورت می‌گیرد.



B ۴ ۱۸۹۵

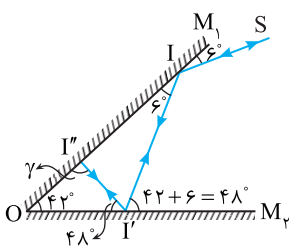
خط فکری قبل از حل مسئله باید مطلبی را برای هم روشن کنیم. اگر پرتو تابش بر آینهٔ M_1 پس از بازتاب به آینهٔ M_2 برسد. زاویه‌ای که پرتو با سطح آینهٔ M_2 می‌سازد زاویهٔ خارجی مثلث OII' است. یعنی β برابر $\alpha+\theta$ است و در هر بازتاب به اندازهٔ θ به زاویهٔ بین پرتو و سطح آینهٔ افزوده می‌شود.



۱ پرتو SI با سطح آینهٔ (۱) زاویهٔ 6° می‌سازد و زاویهٔ بین دو آینهٔ 42° است بنابراین زاویهٔ II' بر سطح M_2 برابر 48° است.

۲ زاویهٔ پرتو بازتاب $I'I''$ با آینهٔ M_1 خواهد شد. $\gamma=180-(42+48)\Rightarrow\gamma=90^\circ$

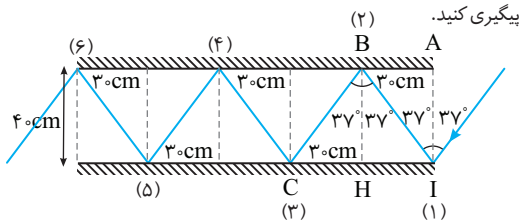
۳ بنابراین پرتو $I'I''$ بر سطح آینهٔ (۱) عمود است از این‌رو روی خودش بازتاب کرده و مسیر را برمی‌گردد. بنابراین پرتو پس از ۵ بار برخورد از سطح دو آینه و با زاویهٔ 180° نسبت به پرتو SI از بین دو آینه خارج می‌شود.



میانبر پرتوی SI یکبار به M_1 برخورد کرده سپس با زاویهٔ $42+6=48$ به آینهٔ M_2 برخورد کرده و بعد از آن با زاویهٔ $42+48=90^\circ$ به آینهٔ M_1 برخورد می‌کند (تا اینجا سه برخورد) و پرتو از M_1 روی خود باز می‌گردد به آینهٔ M_2 برخورد کرده و از آنجا بر همان مسیر به آینهٔ M_1 می‌رسد (جمعاً ۵ برخورد) و بر مسیر SI برمی‌گردد.

۲ ۱۸۹۶ B

خط فکری باید پرتو بازتاب را رسم کنید سپس محل برخورد به آینهٔ (۲) را بیابید و به کمک مثلثات مشخص کنید پرتو چند cm جلو رفته و این عمل را تکرار کنید. بنابراین با دقت حل را پیگیری کنید.



پرتو SI با زاویهٔ 37° به آینهٔ (۱) می‌تابد و با زاویهٔ 37° بازتاب می‌کند در مثلث IAB می‌توان نوشت:

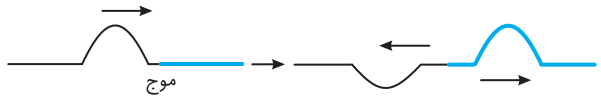
$$\tan 37=\frac{AB}{IA}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{AB}{40}\Rightarrow AB=30cm$$

با همین استدلال $CH=30cm$ می‌شود. یعنی بعد از هر برخورد پرتو $30cm$ جلو می‌رود و مطابق شکل بعد از ۶ برخورد پرتو از بین دو آینه خارج می‌شود.

نکته اگر پهنای آینه‌ها در مسئلهٔ بالا بین $150cm$ تا کمتر از $180cm$ بود پرتو هم‌چنان پس از ۶ بازتاب از بین آینه‌ها خارج می‌شد.

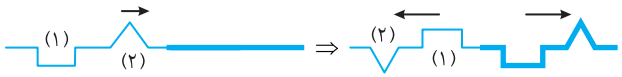
۴ ۱۸۹۷ A

دو قسمت طناب هم‌جنس هستند و در طناب ضخیم‌تر، تندی انتشار موج کمتر است. وقتی تپ به محل تغییر قطر طناب می‌رسد، بخشی از تپ وارد بخش ضخیم می‌شود و بخشی از روی مرز بازتاب کرده و وارونه می‌شود.



۲ ۱۸۹۸ A

تپ بازتابیده از مرز شبیه تپ بازتابیده از انتهای ثابت وارونه و قرینه است. اما تپ عبوری از مرز شبیه تپ اولیه است اما ابعاد آن از تپ اولیه کوچک‌تر است زیرا انرژی تپ اولیه به دو بخش تقسیم می‌شود. یک بخش سهم تپ بازتاب و بخش دیگر سهم تپ عبوری است.



۱ ۱۸۹۹ B

گزینه‌های داده شده را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): بخشی از موج عبور می‌کند و بخشی برمی‌گردد. بنابراین انرژی موج عبوری کاهش می‌یابد. در نتیجه دامنه کاهش می‌یابد. (درست)

گزینهٔ (۲): بسامد و در نتیجه دوره تناوب از ویژگی‌های چشمه موج است و ثابت می‌ماند. (نادرست) $(T=\frac{1}{f}=\text{ثابت})$

گزینهٔ (۳): با کاهش ضخامت طناب چگالی خطی جرم (μ) کاهش می‌یابد $(\uparrow v=\sqrt{F/\mu\downarrow})$ و تندی افزایش می‌یابد (نادرست)

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}},\mu=\frac{m}{L},m=\rho V=\rho\frac{\pi D^2}{4}\Rightarrow v\uparrow=\frac{2}{D\downarrow}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}$$

گزینهٔ (۴): با افزایش تندی و ثابت بودن بسامد (دوره) طول موج افزایش می‌یابد. $(\uparrow\lambda=\uparrow vT)$

۱ ۱۹۰۰ A

یادآوری تندی انتشار موج در یک سیم از رابطهٔ $v=\sqrt{F/\mu}$ به دست می‌آید که در آن F نیروی کشش سیم و μ چگالی خطی سیم $(\mu=m/\ell)$ است.

نکته هرگاه یک موج از یک محیط به محیط دیگر برود بسامد موج که توسط چشمهٔ موج ایجاد می‌شود، ثابت می‌ماند.

$$\begin{cases}\lambda_1=\frac{v_1}{f_1}:\text{طول موج در محیط اول}\\ \lambda_2=\frac{v_2}{f_2}:\text{طول موج در محیط دوم}\end{cases}\xrightarrow{f_1=f_2}\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{v_1}{v_2}$$

با توجه به رابطهٔ تندی انتشار موج در ریسمان خواهیم داشت:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sqrt{\frac{F_1}{\mu_1}}}{\sqrt{\frac{F_2}{\mu_2}}}\xrightarrow{F_1=F_2}\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\Rightarrow\frac{\mu_2}{\mu_1}=(\frac{\lambda_1}{\lambda_2})^2$$

۳ ۱۹۰۱ B

خط فکری در یک محیط همگن که شرایط فیزیکی در تمام جهت‌ها یکسان باشد، سرعت انتشار موج ثابت است، اما در این پرسش، شرایط فیزیکی محیط از A تا B در حال تغییر است، بنابراین سرعت انتشار موج از A تا B در حال تغییر بوده و طول موج نیز از A تا B درحال تغییر خواهد بود. بنابراین باید به سراغ رابطهٔ تندی انتشار موج در سیم با چگالی سیم برویم.

یادآوری سرعت انتشار موج در سیم $v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ بوده و با جذر چگالی سیم نسبت وارون دارد.

نکته در طول یک سیم ساکن کشش در تمام نقاط سیم یکسان است.

با توجه به اینکه بسامد موج در طول سیم تغییر نمی‌کند خواهیم داشت:

$$v_A=f\lambda_A\ ,\ v_B=f\lambda_B\Rightarrow\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{v_A}{v_B}$$

به جای v مقدار $\sqrt{F/\rho A}$ را قرار می‌دهیم.

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{\sqrt{\frac{F_A}{\rho_A A_A}}}{\sqrt{\frac{F_B}{\rho_B A_B}}}\xrightarrow[F_A=F_B]{A_A=A_B}\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\sqrt{\frac{\rho_B}{\rho_A}}$$

با توجه به فرض مسئله $\rho_A>\rho_B$ است بنابراین $\lambda_A<\lambda_B$ خواهد شد.

۲ ۱۹۰۲ A

یادآوری تندی انتشار موج در یک طناب (ریسمان) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید که در آن D قطر طناب، F نیروی کشش و μ چگالی خطی طناب است. $v=\frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$

خط فکری دو طناب به هم متصل هستند و کشش در هر دو یکسان $(F_1=F_2)$ است. از طرفی دو طناب هم‌جنس هستند و چگالی هر دو یکی است. $(\rho_1=\rho_2)$ بنابراین ابتدا نسبت سرعت‌ها و سپس نسبت طول موج را حساب کنید.

۱ بسامد موج از ویژگی‌های چشمهٔ موج است و هنگام انتشار موج ثابت می‌ماند. $(f_1=f_2)$

۲ نسبت v_2/v_1 را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases}v_1=\frac{2}{D_1}\sqrt{\frac{F_1}{\pi\rho_1}}\\ v_2=\frac{2}{D_2}\sqrt{\frac{F_2}{\pi\rho_2}}\end{cases}\xrightarrow[\rho_1=\rho_2]{F_1=F_2}\frac{v_2}{v_1}=\frac{D_1}{D_2}\xrightarrow{D_2=2D_1}\frac{v_2}{v_1}=\frac{1}{2}$$

۳ نسبت طول موج‌ها خواهد شد:

$$v_2=f\lambda_2\ ,\ v_1=f\lambda_1\xrightarrow{f_1=f_2}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{v_2}{v_1}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{1}{2}$$

بازی با سوال **در شکل زیر چشمهٔ O در دو ریسمان که از یک نقطه به هم متصل شده‌اند، موج گسیل می‌کند، اگر دو ریسمان هم‌جنس و همگن باشند و سرعت انتشار امواج در ریسمان B، سه برابر سرعت انتشار امواج در ریسمان A باشد، سطح مقطع ریسمان A چند برابر سطح مقطع ریسمان B است؟ (نیروی کشش دو ریسمان یکی است.)**

۱) ۹ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{1}{9}$

پاسخ سرعت انتشار موج در ریسمان برابر $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ است.

اکنون به حل مسئله می‌پردازیم: $\frac{v_B}{v_A}=\frac{\sqrt{\frac{F}{\rho A_B}}}{\sqrt{\frac{F}{\rho A_A}}}\Rightarrow ۳=\sqrt{\frac{A_A}{A_B}}\Rightarrow \frac{A_A}{A_B}=۹$

گزینهٔ ۱

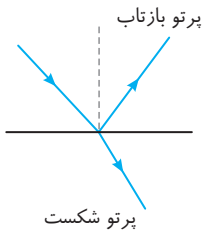
B ۱۹۰۳ ۲

بسامد از ویژگی‌های چشمه است و در برهم‌کنش موج با محیط تغییر نمی‌کند.

بازی با سؤال **موج‌های نور فرودی، از هوا به شیشه می‌تابند. بعضی از آن‌ها در سطح جدایی دو محیط بازتابیده و بعضی شکسته شده و وارد شیشه می‌شوند. کدام‌یک از کمیت‌های زیر برای موج‌های بازتابیده و شکسته شده یکسان است؟** ریاضی- ۸۹

۱) دوره ۲) امتداد ۳) شدت نور ۴) سرعت انتشار

پاسخ **دوره و بسامد موج توسط چشمهٔ موج تعیین می‌شود و هنگام گذر موج از یک محیط به محیط دیگر ثابت می‌ماند و گزینهٔ (۱) درست است. اما هنگام گذر موج از مرز دو محیط بخشی از موج بازتاب کرده و بخشی وارد محیط دوم می‌شود. مطابق شکل، امتداد پرتو بازتاب و شکست یکسان نیست و گزینهٔ (۲) نادرست است.**



وقتی بخشی از نور وارد محیط دیگر و بخشی از آن بازتاب می‌شود یعنی انرژی اولیه موج به دو بخش تقسیم می‌شود، بنابراین شدت نور برای این موج‌ها ممکن است یکسان نباشد و گزینهٔ (۳) نادرست است.

ویژگی‌های دو محیط یکسان نیست بنابراین وقتی موج از یک محیط به محیط دیگری می‌رود تندی انتشار تغییر می‌کند از این‌رو تندی انتشار موج بازتاب و تندی انتشار موج شکست یکسان نبوده و گزینهٔ (۴) نادرست است.

گزینهٔ ۱

A ۱۹۰۴ ۱

در عبور از یک محیط به محیط دیگر بسامد موج ثابت می‌ماند. بنابراین تمام گزینه‌هایی که در آن‌ها بسامد وجود دارد (گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴)) نادرست هستند. با ورود پرتو از هوا به آب، شکست اتفاق می‌افتد، تندی پرتو و طول موج آن کاهش می‌یابد و جهت انتشار آن تغییر می‌کند. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

B ۱۹۰۵ ۱

هنگام گذر موج از یک محیط به محیط دیگر، جهت انتشار موج (نور)، تندی و طول موج تغییر می‌کند.

A ۱۹۰۶ ۳

بسامد از ویژگی‌های چشمه است و تغییر نمی‌کند. $f_۱=f_۲=۶۰\,Hz$

طول موج یک موج از یک محیط به محیط دیگر با تندی انتشار موج نسبت مستقیم دارد.

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{\frac{v_۲}{f}}{\frac{v_۱}{f_۱}}\Rightarrow\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{v_۲}{v_۱}\Rightarrow\frac{\lambda_۲}{۰/۵}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\lambda_۲=۰/۲۵m$$

بازی با سؤال **موج‌های حاصل از یک چشمهٔ موج در آب با سرعت $۱۵۴۰m/s$ و در هوا با سرعت $۳۵۰m/s$ منتشر می‌شوند. اگر طول موج آن‌ها در هوا ۲/۵ متر باشد، طول موج آن‌ها در آب چند متر است؟**

۱) ۲/۵ ۲) ۱۱ ۳) ۴/۴ ۴) ۵

پاسخ **هنگام گذر موج از یک محیط به محیط دیگر (از هوا به آب)، بسامد ثابت می‌ماند. بنابراین:** $f_۱=f_۲\Rightarrow\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{v_۲}{v_۱}\Rightarrow\frac{\lambda_۲}{۲/۵}=\frac{۱۵۴۰}{۳۵۰}\Rightarrow\lambda_۲=۱۱m$

گزینهٔ ۲

B ۱۹۰۷ ۳

نکته رنگ نور به بسامد نور بستگی دارد و هنگام گذر نور از یک محیط شفاف به محیط شفاف دیگر بسامد نور و در نتیجه رنگ نور ثابت می‌ماند.

با توجه به نکتهٔ بیان شده گزینهٔ (۳) درست است.

بازی با سؤال **رنگ نور به کدام عامل زیر بستگی دارد؟** کنکور دهه‌های گذشته

۱) شدت نور ۲) سرعت نور ۳) بسامد نور ۴) طول موج نور

پاسخ **نور یک لامپ تکفام قرمز در آب و هوا یکسان دیده می‌شود و نور قرمز در آب و در هوا دارای بسامد مشخص است. اما طول موج نور قرمز در هوا و آب به دلیل پدیدهٔ شکست یکسان نیست؛ بنابراین رنگ نور که توسط چشم دیده می‌شود به بسامد آن بستگی دارد.**

گزینهٔ ۳

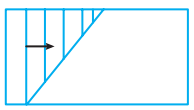
B ۱۹۰۸ ۱

یادآوری تشت موج شامل یک تشت شیشه‌ای کم‌عمق و یک نوسان‌ساز است. یک راه مشاهدهٔ رفتار موج با استفاده از سایه‌ای است که توسط لامپ از سطح آب داخل تشت بر ورقهٔ کاغذی زیر تشت تشکیل می‌شود.

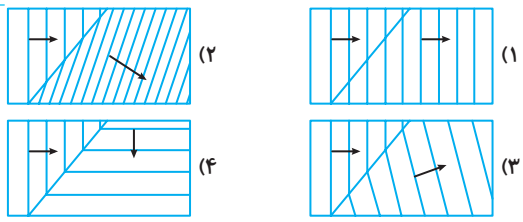
نکته تندی انتشار موج سطحی روی آب‌های کم‌عمق به عمق آب بستگی دارد و در مناطق کم‌عمق‌تر، تندی کمتر است.

وقتی موج به مرز برهٔ شیشه‌ای می‌رسد و وارد قسمت کم‌عمق‌تر می‌شود، تندی انتشار موج کاهش می‌یابد اما بسامد موج که توسط چشمهٔ موج تعیین می‌شود ثابت است بنابراین طول موج یعنی فاصلهٔ جبهه‌های موج کاهش می‌یابد $(\downarrow\lambda=\frac{v\downarrow}{f_{ثابت}})$ از طرفی همین امر سبب تغییر مسیر جبهه‌های موج می‌شود؛ بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

بازی با سؤال **روی سطح آب یک تشت، یک موج سطحی تخت در قسمت کم‌عمق ایجاد شده است و این موج به مرز آب کم‌عمق و آب عمیق‌تر می‌رسد. کدام گزینه شکل جبهه‌های موج سطحی در آب عمیق‌تر را به درستی نمایش می‌دهد؟**



از کتاب درسی



پاسخ **با ورود موج از آب کم‌عمق به آب عمیق‌تر، تندی موج و در نتیجه طول موج یعنی فاصلهٔ جبهه‌های موج افزایش می‌یابد و جبهه‌های موج نیز که با مرز زاویه می‌سازند از مسیر خود منحرف می‌شوند؛ بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.**

گزینهٔ ۳

B ۱۹۰۹ ۳

یادآوری در آب‌های کم‌عمق، تندی انتشار امواج سطحی آب به عمق آب بستگی دارد و در نقاط عمیق‌تر، بیشتر است.

طول موج یعنی فاصلهٔ جبهه‌های موج در بخش B کوتاه‌تر از طول موج در بخش A است بنابراین: $\lambda_A>\lambda_B\xrightarrow[v=f\lambda]{f_A=f_B}v_A>v_B,A\text{عمق}>B\text{عمق}$

A ۱۹۱۰ ۱

۱ تندی موج ۶۰٪ کاهش یافته، یعنی تندی در ناحیهٔ کم‌عمق خواهد شد:

$$v_۲=v_۱-\frac{۶۰}{۱۰۰}v_۱\Rightarrow v_۲=۰/۴v_۱$$

۲ با توجه به $\lambda=\frac{v}{f}$ و اینکه در شکست بسامد تغییر نمی‌کند، داریم:

$$\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{v_۲}{v_۱}=۰/۴\xrightarrow[\text{برابر طول موج است}]{\text{فاصلهٔ دو ستیغ متوالی}}\frac{\lambda_۲}{۱۰}=۰/۴\Rightarrow\lambda_۲=۴cm$$

A ۱۹۱۱ ۱

بسامد زاویه‌ای برابر $\omega=2\pi f$ است و می‌دانیم بسامد با تغییر محیط ثابت می‌ماند، بنابراین بسامد زاویه‌ای موج الکترومغناطیسی در شیشه و خلأ یکسان می‌باشد.

A ۱۹۱۲ ۲

هرگاه نور از یک محیط شفاف وارد محیط شفاف دیگری شود، سرعت و طول موج آن به‌طور ناگهانی تغییر می‌کند اما بسامد آن ثابت می‌ماند. از این‌رو خواهیم داشت:

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow{f=\text{ثابت}}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{v_2}{v_1}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{2/25\times10^8}{3\times10^8}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{4}{3}$$

A ۱۹۱۳ ۴

نکته سرعت صوت در آب از سرعت صوت در هوا بیشتر است. اما در مورد امواج الکترومغناطیسی با توجه به قانون شکست اسنل هرچه محیط غلیظ‌تر باشد، ضریب شکست بیشتر شده و سرعت کاهش می‌یابد. از این‌رو: $\downarrow v=\frac{c}{n\uparrow}$

وقتی صوت از هوا وارد آب می‌شود، بسامد ثابت می‌ماند. اما با زیاد شدن تندی انتشار صوت در آب، طول موج در آب افزایش می‌یابد.

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow[\text{v افزایش یافته}]{\text{با تغییر محیط بسامد ثابت می‌ماند.}}\lambda\text{ بیشتر می‌شود}$$

وقتی نور و یا هر موج الکترومغناطیسی از هوا وارد آب می‌شود تندی انتشار آن کاهش می‌یابد؛ بنابراین: $\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow[\text{v کاهش یافته}]{\text{با تغییر محیط بسامد ثابت مانده}}\lambda$ کمتر می‌شود

A ۱۹۱۴ ۱

بنا به تعریف ضریب شکست هر محیط برابر با نسبت تندی نور در خلأ به تندی نور در آن محیط است؛ از این‌رو:

$$n=\frac{c}{v}\xrightarrow[c=3\times10^8\,m/s=3\times10^5\,km/s]{v=2/5\times10^5\,km/s}n=\frac{3\times10^5}{2/5\times10^5}\Rightarrow n=1/2$$

A ۱۹۱۵ ۴

با توجه به تعریف ضریب شکست، وقتی پرتو از خلأ وارد محیطی با ضریب شکست n می‌شود، تندی انتشار $\frac{1}{n}$ می‌شود. $n=\frac{c}{v}\Rightarrow v=\frac{c}{n}$

چون بسامد نور ثابت می‌ماند، طول موج آن نیز $\frac{1}{n}$ می‌شود. $\lambda'=\frac{\lambda}{n}$

B ۱۹۱۶ ۴

ابتدا با توجه به بسامد و طول موج نور تندی در مایع را حساب می‌کنیم.

$$v=\frac{\lambda}{T}=\lambda f\Rightarrow v=\frac{9}{20}\times10^{-6}\times5\times10^{14}=2/25\times10^8$$

حال ضریب شکست را به‌دست می‌آوریم:

$$n=\frac{c}{v}\Rightarrow n=\frac{3\times10^8}{2/25\times10^8}=\frac{3}{2/25}=\frac{300}{225}=\frac{100}{75}=\frac{4}{3}$$

A ۱۹۱۷ ۴

یادآوری سرعت تمام امواج الکترومغناطیسی در خلأ یکسان و برابر $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ است. با توجه به تعریف ضریب شکست:

$$v=\frac{c}{n}\Rightarrow v=\frac{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}}{\frac{4}{3}}\Rightarrow v=\frac{3}{4\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

A ۱۹۱۸ ۲

۱ با توجه به قانون شکست عمومی و قانون شکست اسنل

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{n_1}{n_2}\Rightarrow\frac{v_2}{3\times10^8}=\frac{1}{\frac{6}{5}}\Rightarrow\frac{v_2}{3\times10^8}=\frac{5}{6}\Rightarrow v_2=2/5\times10^8\,m/s$$

۲ بسامد به چشم نور بستگی دارد و با تغییر محیط تغییر نمی‌کند.

$$f=\frac{v}{\lambda}\Rightarrow f=\frac{3\times10^8}{600\times10^{-9}}\Rightarrow f=\frac{1}{2}\times10^{15}\Rightarrow f=5\times10^{14}\,Hz$$

۳ همچنین با توجه به $\lambda=\frac{v}{f}$ و ثابت ماندن f بنابراین تغییرات λ و v یکسان می‌باشد:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{v_2}{v_1}=\frac{n_1}{n_2}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{600}=\frac{1}{\frac{6}{5}}\Rightarrow\lambda_2=500\,nm$$

A ۱۹۱۹ ۲

با توجه به تعریف ضریب شکست خواهیم داشت:

$$v_1=\frac{c}{n_1}\ ,\ v_2=\frac{c}{n_2}\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\frac{\frac{c}{n_2}}{\frac{c}{n_1}}\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\frac{n_1}{n_2}\qquad(I)$$

از طرفی با ثابت ماندن بسامد موج در گذر از یک محیط به محیط دیگر می‌توان نوشت:

$$v_1=f\lambda_1,v_2=f\lambda_2\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\qquad(II)$$

از رابطهٔ (I) و (II) رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{n_1}{n_2}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{0/45}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}}\Rightarrow\lambda_2=0/4\mu m$$

B ۱۹۲۰ ۲

سرعت نور در خلأ بیشتر از محیط‌های شفاف دیگر است، پس با ورود نور از خلأ به محیط شفاف دیگر سرعت انتشار موج کاهش می‌یابد که با توجه به رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}$ با کاهش سرعت، طول موج نیز کاهش می‌یابد: $\lambda_2=\lambda_1-150$

با توجه به بسامد نور و سرعت نور در خلأ λ_1 را حساب می‌کنیم:

$$\lambda_1=\frac{c}{f}\Rightarrow\lambda_1=\frac{3\times10^8}{5\times10^{14}}\Rightarrow\lambda_1=0/6\times10^{-6}\,m\Rightarrow\lambda_1=600\,nm$$

طول موج در محیط دوم را حساب می‌کنیم:

$$\lambda_2=\lambda-150\Rightarrow\lambda_2=600-150=450\,nm$$

نسبت طول موج در دو محیط با عکس نسبت ضریب شکست دو محیط است:

$$\frac{n_2}{n_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\xrightarrow{n_1=1\text{ محیط اول خلأ}}\frac{n_2}{1}=\frac{600}{450}\Rightarrow n_2=\frac{4}{3}$$

A ۱۹۲۱ ۲

با توجه به تعریف ضریب شکست

$$\frac{n_{\text{مایع}}}{n_{\text{شیشه}}}=\frac{v_{\text{شیشه}}}{v_{\text{مایع}}}\Rightarrow\frac{\frac{5}{4}}{1/5}=\frac{v_{\text{ش}}}{v_{\text{م}}}\Rightarrow\frac{v_{\text{م}}}{v_{\text{ش}}}=\frac{1/5}{\frac{5}{4}}\Rightarrow\frac{v_{\text{م}}}{v_{\text{ش}}}=\frac{6}{5}$$

A ۱۹۲۲ ۱

خط فکری نکتهٔ مهم در حل این تست ساده این است که بسامد با تغییر محیط ثابت می‌ماند و نسبت بسامد در هوا با نسبت بسامد در محیط شفاف دیگر تفاوتی ندارد؛ به همین علت شما نسبت بسامدها در هوا را به‌دست بیاورید. نسبت بسامدها در هوا را حساب می‌کنیم:

$$f_A=\frac{v}{\lambda_A},f_B=\frac{v}{\lambda_B}\Rightarrow\frac{f_A}{f_B}=\frac{\lambda_B}{\lambda_A}=\frac{400}{200}\Rightarrow\frac{f_A}{f_B}=2$$

A ۱۹۲۳ ۱

۱ با توجه به رابطهٔ ضریب شکست با سرعت نور خواهیم داشت:

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{n_1}{n_2}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{1}{\frac{4}{3}}\Rightarrow\lambda_2=\frac{3}{4}\lambda_1$$

۲ اکنون یک معادله داریم و دو مجهول؛ اما با توجه به صورت مسئله و اینکه طول موج در آب از طول موج در هوا کمتر شده، می‌توان نوشت:

$$\lambda_1-\lambda_2=100\Rightarrow\lambda_1-\frac{3}{4}\lambda_1=100\Rightarrow\frac{\lambda_1}{4}=100\Rightarrow\lambda_1=400\,nm$$

۳ طول موج در هوا $\lambda_1=۴۰۰nm$ است. در گستره امواج الکترومغناطیسی طول موج نور مرئی در بازهٔ ۴۰۰nm تا ۷۰۰nm قرار دارد. بنابراین این موج الکترومغناطیسی در ناحیهٔ نور مرئی قرار دارد.

۴ بسامد این موج الکترومغناطیسی در هر محیطی از جمله خلأ خواهد شد:

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow ۴۰۰\times ۱۰^{-۹}=\frac{۳\times ۱۰^{۸}}{f}\Rightarrow f=\frac{۳}{۴}\times ۱۰^{۱۵}Hz\Rightarrow f=۷/۵\times ۱۰^{۱۴}Hz$$

A ۱۹۲۴ ۳

با ورود نور از شیشه به هوا اندازهٔ سرعت آن ٪۴۰ افزایش یافته؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_{هوا}=v_{شیشه}+\frac{۴۰}{۱۰۰}v_{شیشه}\Rightarrow v_{هوا}=۱/۴v_{شیشه}$$

با توجه به قانون شکست اسنل:

$$\begin{cases}\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{n_۲}{n_۱}\\ \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{v_۱}{v_۲}\end{cases}\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{n_۱}{n_۲}\Rightarrow\frac{v_{شیشه}}{v_{هوا}}=\frac{n_{هوا}}{n_{شیشه}}\Rightarrow\frac{v_{شیشه}}{۱/۴v_{شیشه}}=\frac{۱}{n_{شیشه}}$$

$$\Rightarrow n_{شیشه}=۱/۴=\frac{۷}{۵}$$

A ۱۹۲۵ ۲

سرعت نور در این محیط شفاف ۳۶ درصد از سرعت نور در خلأ (c) کمتر است؛ یعنی:

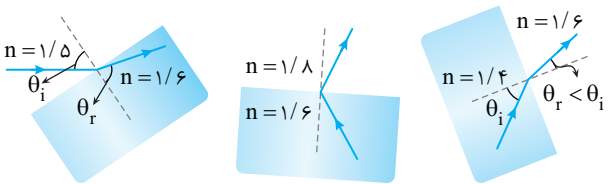
$$v=c-\frac{۳۶}{۱۰۰}c\Rightarrow v=\frac{۶۴}{۱۰۰}c$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{n_۱}{n_۲}\Rightarrow\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{۶۴}{۱۰۰}=\frac{۱۶}{۲۵}$$

A ۱۹۲۶ ۲

برای هر سه شکل خط عمود را رسم می‌کنیم.



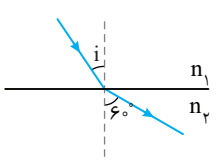
(الف) (ب) (پ)

در شکل (الف) ضریب شکست محیط دوم از محیط اول بیشتر است، بنابراین پرتو شکست به خط عمود باید نزدیک شود و شکل (الف) درست است.

شکل (ب) کاملاً نادرست است. زیرا زاویه تابش و شکست باید در دو طرف خط عمود تشکیل شود. در حالی که در این شکل هر دو پرتو در یک طرف خط عمود رسم شده‌اند.

در شکل (پ) ضریب شکست محیط دوم بزرگ‌تر است و باید پرتو به خط عمود نزدیک شود؛ یعنی $\theta_r<\theta_i$ باشد، اما پرتو از خط عمود دور شده که این شکل نادرست است.

A ۱۹۲۷ ۴

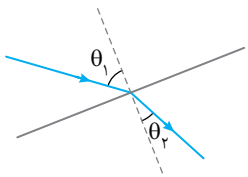


با توجه به شکل روبه‌رو زاویهٔ شکست از زاویهٔ تابش بیشتر است. با توجه به قانون اسنل $(n_1\sin\theta_1=n_۲\sin\theta_۲)$، ضریب شکست محیط اول (n_1) از ضریب شکست محیط دوم $(n_۲)$ بزرگ‌تر است و گزینهٔ (۱) درست است.

سرعت نور با ضریب شکست نسبت وارون دارد $(\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{n_۱}{n_۲})$ بنابراین وقتی $n_1>n_۲$ است، سرعت نور در محیط اول از سرعت نور در محیط دوم کمتر است $(v_1<v_۲)$ و گزینهٔ (۲) درست است.

هرگاه پرتو نور از محیط غلیظ وارد محیط رقیق شود، پرتو از خط عمود دور می‌شود. پرتو در محیط (۲) از خط عمود دور شده؛ بنابراین محیط (۲) از محیط (۱) رقیق‌تر است و گزینهٔ (۳) نیز درست است.

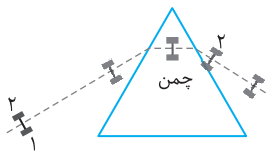
A ۱۹۲۸ ۲



با توجه به شکل و رسم خط عمود بر سطح با عبور موج الکترومغناطیسی پرتو به خط عمود نزدیک شده؛ بنابراین سرعت در محیط دوم کمتر از سرعت در محیط اول است اما بسامد ثابت می‌ماند و طول موج نیز کاهش می‌یابد:

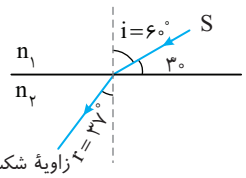
$$\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}\xrightarrow{v_۲<v_۱}\lambda_۲<\lambda_۱$$

A ۱۹۲۹ ۲



در هر چهار گزینه ماشین با ورود به چمن، به سمت پایین منحرف شده است و این نشان می‌دهد که تندی حرکت چرخ‌های ماشین روی چمن از محیط پیرامونش کمتر بوده و همین امر سبب می‌گردد که وقتی چرخ شمارهٔ (۱) به روی چمن می‌رود، سرعتش از چرخ شمارهٔ (۲) کمتر بوده و ماشین درون زمین چمن منحرف شود. سرعت هر دو چرخ یکسان است اما وقتی چرخ شمارهٔ (۲) از چمن خارج می‌شود سرعتش بیشتر شده و سبب چرخش ماشین رو به پایین می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

A ۱۹۳۰ ۱



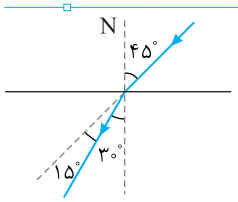
هرگاه پرتو نور به طور مایل از یک محیط شفاف وارد محیط شفاف دیگری شود، مسیر آن به طور ناگهانی تغییر می‌کند و علت آن، تغییر ناگهانی سرعت نور است. در محیط‌های غلیظ سرعت نور کمتر است. پس اگر هنگام گذر نور از محیط شفاف به محیط شفاف دیگر پرتو به خط عمود نزدیک شود، محیط دوم غلیظ‌تر بوده و سرعت نور در این محیط از سرعت نور در محیط اول کمتر است.

$$r<i\Rightarrow n_۲>n_۱\xrightarrow{\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{n_۱}{n_۲}}v_۲<v_۱$$

زاویهٔ شکست زاویهٔ بین پرتو شکست و خط عمود است که این زاویه $r=۳۷^\circ$ است.

میانبر در هر محیطی که زاویهٔ بین پرتو و خط عمود بزرگ‌تر است، تندی انتشار نور در آن محیط بیشتر است.

A ۱۹۳۱ ۳



۱ پرتو هنگام ورود به محیط دوم از مسیر خود ۱۵° منحرف می‌شود و زاویهٔ شکست برابر است با: $\theta_۲=۴۵-۱۵=۳۰^\circ$

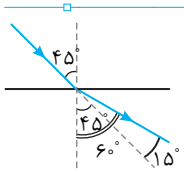
۲ با توجه به رابطهٔ اسنل، ضریب شکست خواهد شد:

$$n_1\sin\theta_1=n_۲\sin\theta_۲\xrightarrow{n_1=۱,n_۲=n}\sin۴۵^\circ=n\sin۳۰^\circ\Rightarrow n=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow n=\sqrt{۲}$$

۳ اکنون می‌توان طول موج پرتو مورد نظر را در محیط شفاف جدید به‌دست آورد:

$$\lambda'=\frac{\lambda}{n}\Rightarrow\lambda'=\frac{۷۰۰}{\sqrt{۲}}\Rightarrow\lambda'=۳۵۰\sqrt{۲}nm\Rightarrow\lambda'=\frac{۷\sqrt{۲}}{۲۰}\mu m$$

B ۱۹۳۲ ۴



۱ هرگاه صوت از هوا وارد یک مایع شود پرتو از خط عمود دور می‌شود. بنابراین زاویهٔ شکست خواهد شد: $\theta_۲=۴۵^\circ+۱۵^\circ=۶۰^\circ$

۲ با توجه به قانون شکست عمومی خواهیم داشت:

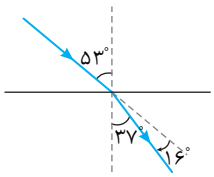
$$\frac{\sin\theta_{هوا}}{\sin\theta_{مایع}}=\frac{v_{هوا}}{v_{مایع}}\Rightarrow\frac{\sin۴۵}{\sin۶۰}=\frac{v_{هوا}}{v_{مایع}}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{v_{هوا}}{v_{مایع}}\Rightarrow\frac{v_{مایع}}{v_{هوا}}=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

۱۹۳۳ B ۱

نکته روابط شکست موج در هنگام ورود غیرعمودی از یک محیط شفاف به محیط شفاف دیگر را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد: $\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\frac{v_2}{v_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{n_1}{n_2}$

باید توجه داشت هنگام عبور موج از یک محیط به محیط دیگر، بسامد موج تغییر نمی‌کند.

بـا ورود نور از هوا به هر محیط دیگری پرتو به خط عبور نزدیک‌تر می‌شود. بنابراین پرتو موج ۱۶° به نیم‌خط عمود نزدیک می‌شود:



$53^\circ-16^\circ=37^\circ$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{\sin37^\circ}{\sin53^\circ}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

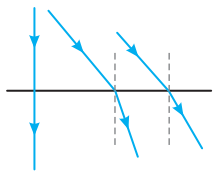
طول موج $\frac{1}{8}\mu m$ کاهش یافته است.

$$\lambda_1-\lambda_2=\frac{1}{8}\times10^{-6}\xrightarrow{\lambda_2=\frac{3}{4}\lambda_1}\frac{1}{4}\lambda_1=\frac{1}{8}\times10^{-6}\Rightarrow\lambda_1=0/5\times10^{-6}m$$

$$\lambda=\frac{c}{f}\Rightarrow f=\frac{3\times10^8}{0/5\times10^{-6}}=6\times10^{14}Hz$$

۱۹۳۴ B ۲

خط فکری زاویهٔ تابش صفر درجه یعنی پرتو عمود بر مرز دو محیط بتابد و بدون انحراف وارد محیط دوم شود. اما وقتی زاویهٔ تابش شروع بـه افزایش می‌کنـد و از هوا وارد محیط شـفاف می‌شـود از مسیر خود منحرف می‌شود اما زاویهٔ شکسـت از زاویهٔ تابش همواره کمتر اسـت $(\theta_r<\theta_i)$ و وقتی زاویهٔ تابش به ۹۰° می‌رسد زاویهٔ شکست از ۹۰° کمتر است. بنابراین شما باید به گزینهٔ (۲) و (۳) فکر کنید.



با توجه به قانون اسـنل $(n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2)$ هرگاه $\theta_1=90^\circ$ شـود آنگاه زاویهٔ شکست خواهد شد:

$$1\times\sin90^\circ=2\sin\theta_r\Rightarrow\sin\theta_r=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta_r=30^\circ$$

یعنی حد نهایی زاویهٔ شکست در این پدیده ۳۰° است بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

۱۹۳۵ A ۲

خط فکری سـرعت نـور در یک محیط معین مقدار ثابتی اسـت؛ پـس حرکت نور حرکت یکنواخت روی خط راست است. شما باید به کمک معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت $x=vt$ مسئله را حل کنید.

معادلهٔ انتشار نور را برای آب و هوا می‌نویسیم:

$$\begin{cases}d_{هوا}=v_{هوا}t_{هوا}\\ d_{آب}=v_{آب}t_{آب}\end{cases}\xrightarrow[t_{هوا}=t_{آب}]{\text{با فرض مسئله}}\frac{d_{هوا}}{d_{آب}}=\frac{v_{هوا}}{v_{آب}}\quad(I)$$

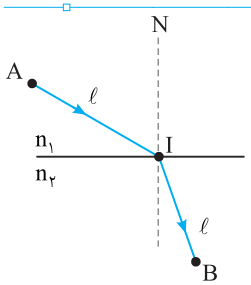
با توجه به تعریف ضریب شکست خواهیم داشت: $n_{آب}=\frac{v_{هوا}}{v_{آب}}\quad(II)$

از رابطهٔ (I) و (II) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{d_{هوا}}{d_{آب}}=n_{آب}\xrightarrow[n_{آب}=\frac{4}{3}]{d_{آب}=120cm}\frac{d_{هوا}}{120}=\frac{4}{3}\Rightarrow d_{هوا}=160cm$$

۱۹۳۶ A ۱

خط فکری با یک مسئلهٔ حرکت‌شناسی سـر و کار دارید. از شـما خواسـته شـده زمان حرکـت یک متحـرک را از نقطهٔ A تا I و از I تا B را بر حسـب تندی حرکت متحرک حسـاب کنیـد. بنابرایـن شـما باید بـا معادلـهٔ حرکت یکنواخت در هر مسیر، زمان را بر حسب تندی حساب کرده و با هم جمع کنید.



۱ زمان حرکت نور از A تا I برابر است با: $x=vt\Rightarrow t=\frac{x}{v}\Rightarrow t_1=\frac{\ell}{v_1}$

۲ زمان حرکت نور از I تا B برابر است با: $t=\frac{x}{v}\Rightarrow t_2=\frac{\ell}{v_2}$

۳ زمان رسیدن از A تا B برابر است با: $t_{کل}=t_1+t_2\Rightarrow t=\frac{\ell}{v_1}+\frac{\ell}{v_2}\quad(I)$

۴ امـا بـه گزینه‌ها دقت کنید! در تمـام گزینه‌ها خبری از v_2 نیسـت بلکه ضریب شکسـت‌های n_1 و n_2 دیده می‌شود؛ بنابراین باید از رابطهٔ (I)، v_2 را حذف کنید.

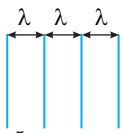
پس به سراغ رابطهٔ سرعت و ضریب شکست می‌رویم. $\frac{v_2}{v_1}=\frac{n_1}{n_2}\Rightarrow v_2=\frac{n_1}{n_2}v_1$

۵ اکنون رابطهٔ به‌دست آمده را در (I) قرار می‌دهیم.

$$t=\frac{\ell}{v_1}+\frac{\ell}{\frac{n_1}{n_2}v_1}\Rightarrow t=\frac{\ell}{v_1}+\frac{n_2}{n_1}\left(\frac{\ell}{v_1}\right)\xrightarrow{\text{از }\frac{\ell}{v_1}\text{ فاکتور می‌گیریم.}}t=\frac{\ell}{v_1}\left(1+\frac{n_2}{n_1}\right)$$

۱۹۳۷ A ۳

نکته در رسـم جبهه‌های موج فاصلهٔ دو جبههٔ متوالی برابر یک طول موج است.



خط فکری دقت کنیـد در بازتـاب موج از مرز دو محیط، موج در همان محیط انتشـار می‌یابد. بنابراین تندی موج و طول موج آن بدون تغییر می‌ماند اما در پدیدهٔ شکست، موج از یک محیط وارد محیط دیگر می‌شود و با تغییر شرایط فیزیکی محیط، تندی انتشار موج و در نتیجه طول موج آن تغییر می‌کند. بنابراین شما در شکل‌ها باید به دنبال چگونگی تغییر فاصلهٔ جبهه‌های موج بگردید.

در بازتـاب، طـول موج ثابت می‌ماند پـس باید در بازتاب، فاصلـهٔ جبهه‌های موج ثابت بماند. بنابراین گزینهٔ (۱) و (۲) نادرست است. در شکست نور و ورود به محیط غلیظ‌تر $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{n_1}{n_2}\right)$ طـول موج کاهش می‌یابد؛ بنابراین باید فاصلهٔ جبهه‌های موج در ورود به شیشه از هم کم شود که در گزینهٔ (۳) جبهه‌های موج این‌گونه رسم شده‌اند.

۱۹۳۸ A ۱

با توجه به شکل با ورود جبهه‌های موج به محیط دوم فاصلهٔ جبهه‌های موج کمتر شده است؛ بنابراین در محیط دوم طول موج کمتر از طول موج در محیط اول است $(\lambda_1>\lambda_2)$. در گذر موج از یک محیط به محیط دیگر بسامد ثابت می‌ماند و با توجه به $\lambda=\frac{v}{f}$ وقتی طول موج کاهش می‌یابد یعنی تندی در محیط دوم از تندی در محیط اول کمتر است. $(v_2<v_1)$

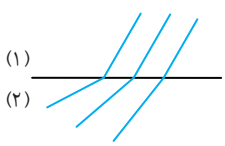
با توجه به تعریف ضریب شکست خواهیم داشت:

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{n_1}{n_2}\xrightarrow{v_2<v_1}n_2>n_1\Rightarrow\frac{n_2}{n_1}>1$$

میانبر اگر هنگام ورود جبهه‌های موج از یک محیط به محیط دیگر جبهه‌های موج به مرز دو محیط نزدیک شوند، آنگاه تندی و طول موج در محیط دوم از محیط اول کمتر است.

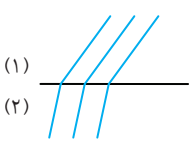
۱۹۳۹ B ۳

در گزینـهٔ (۱) جبهه‌هـای مـوازی از محیط همگن (۱) وارد محیط همگن شده بنابراین باید جبهه‌های در محیط دوم نیز با هم موازی باشند اما نیستند و گزینهٔ (۱) نادرست است.

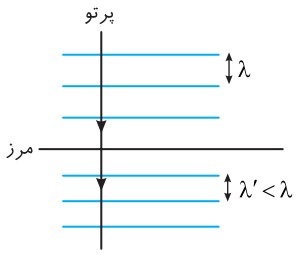


نکته هـرگاه مـوج از یک محیط وارد محیط دیگری شـود و تندی انتشـار موج کاهش یابد، قطعاً طول موج یعنی فاصلهٔ جبهه‌های موج کم می‌شود. $\left(\downarrow\lambda=\frac{v\downarrow}{f_{ثابت}}\right)$

در گزینـهٔ (۲) مـوج وارد محیط (۲) شـده که در آن تنـدی موج کمتر اسـت؛ بنابرایـن باید فاصلهٔ جبهه‌هـای موج کاهـش یابد اما افزایـش یافته و گزینهٔ (۲) نادرست است.



هنگامی که پرتو عمود بر سطح بتابد بدون انحراف موج از مرز عبور می‌کند و از طرفی می‌دانیم که پرتو بر جبهه‌های موج نیز عمود است؛ بنابراین باید جبهه‌های موج موازی با سطح باشد. با ورود به محیط دوم، با کم شدن v طول موج (فاصلهٔ موج‌های تخت) نیز از هم کم شده و فاصلهٔ جبهه‌های موج نیز کم می‌شود



بنابراین گزینهٔ (۳) درست و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۱۹۴۰ ۳

یادآوری ۱ فاصلهٔ دو جبهه موج متوالی از هم برابر طول موج (λ) است.

۲ در آب‌های کم‌عمق، هرچه عمق کمتر می‌شود، تندی انتشار موج سطحی در سطح آب کمتر می‌شود.

۳ در عبور موج از یک محیط به محیط دیگر بسامد موج که از ویژگی‌های چشمهٔ موج است ثابت می‌ماند از این‌رو: $v=f\lambda \xrightarrow{f_1=f_2} \frac{v_2}{v_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$

با توجه به شکل، فاصلهٔ جبهه‌های موج در بخش B از بخش A کمتر است. از این‌رو طول موج در بخش B از بخش A کوتاه‌تر بوده $(\lambda_B<\lambda_A)$، در نتیجه تندی انتشار موج در بخش B از بخش A کمتر است $(v_B<v_A)$. بنابراین عمق آب در بخش B از عمق آب در بخش A کمتر است $(h_B<h_A)$.

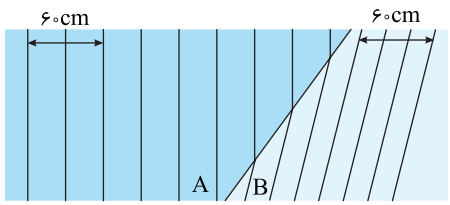
دوباره به شکل نگاه کنید:

در بخش A فاصله‌ای که مقدار آن ۶۰cm است، دو برابر طول موج و در بخش B سه برابر طول موج است، از این‌رو:

$$2\lambda_A=60\Rightarrow\lambda_A=30\text{cm}\ ,\ 3\lambda_B=60\Rightarrow\lambda_B=20\text{cm}$$

اکنون نسبت $\frac{v_B}{v_A}$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{v_B}{v_A}=\frac{\lambda_B}{\lambda_A}=\frac{20}{30}\Rightarrow\frac{v_B}{v_A}=\frac{2}{3}$$

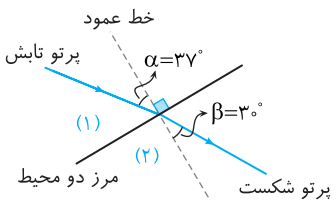


B ۱۹۴۱ ۴

خط فکری برای به‌دست آوردن نسبت سرعت‌ها در دو محیط (v_1/v_2) باید از قانون شکست عمومی استفاده کنید. اما قبل از آن باید زاویهٔ تابش (θ_1) و زاویهٔ شکست (θ_2) را به کمک شکل مشخص کنید.

نکته زاویه‌ای که جبههٔ موج با مرز بین دو محیط می‌سازد برابر زاویه‌ای است که پرتو آن با خط عمود بر مرز می‌سازد.

۱ با توجه به نکتهٔ بالا نمودار پرتویی به‌صورت روبه‌رو بوده و زاویهٔ تابش و زاویهٔ شکست به ترتیب برابر $\theta_1=37^\circ$ و $\theta_2=30^\circ$ است.



۲ حال با توجه به قانون شکست عمومی:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}\Rightarrow\frac{\sin37^\circ}{\sin30^\circ}=\frac{v_1}{v_2}\Rightarrow\frac{0/6}{0/5}=\frac{v_1}{v_2}\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\frac{6}{5}$$

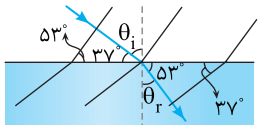
B ۱۹۴۲ ۳

۱ پرتو موج همواره بر جبهه‌های موج عمود است. با توجه به این نکته ابتدا زاویه تابش را به کمک زوایای شکل زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\hat{\theta}_i=90^\circ-37^\circ\Rightarrow\hat{\theta}_i=53^\circ\ ,\ \hat{\theta}_r=90^\circ-53^\circ\Rightarrow\hat{\theta}_r=37^\circ$$

۲ حال با توجه به قانون شکست عمومی داریم:

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Rightarrow\frac{\sin53^\circ}{\sin37^\circ}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Rightarrow\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{4}{3}\Rightarrow\lambda_2=\frac{3}{4}\lambda_1$$



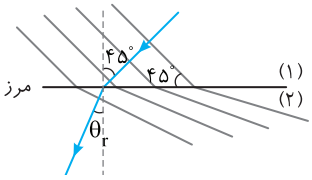
۳ درصد تغییرات طول موج خواهد شد:

$$\text{درصد تغییرات}=\frac{\Delta\lambda}{\lambda_1}\times100\Rightarrow\frac{-\frac{\lambda_1}{4}}{\lambda_1}\times100=-25\%$$

میانبر همواره زاویه‌های بین جبهه‌های موج و مرز دو محیط برابر زاویهٔ بین پرتو و خط عمود است. $\theta_i=53^\circ,\theta_r=37^\circ$

A ۱۹۴۳ ۲

یادآوری زاویهٔ بین جبهه‌های موج با مرز دو محیط برابر زاویهٔ بین پرتو تابش و خط عمود است.



خط فکری ابتدا باید تشخیص دهیم محیط اول و محیط دوم کدام است. با توجه به فرض مسئله در محیط اول تندی انتشار موج از تندی آن در محیط دوم بیشتر است. $(25\text{m/s}>21/25\text{m/s})$

بنابراین طول موج در محیط اول باید از طول موج در محیط دوم بلندتر باشد. در نتیجه محیط اول محیط بالای مرز بوده و موج از آن‌جا وارد محیط دوم شده است. اکنون به کمک قانون عمومی شکست می‌توانید زاویهٔ شکست در محیط دوم را به‌دست آورده و مقدار انحراف جبهه‌های موج را تعیین کرد.

۱ بنا به قانون شکست عمومی:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}\Rightarrow\frac{\sin45}{\sin\theta_2}=\frac{25}{21/25}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\theta_2}=\frac{1}{0/85}$$

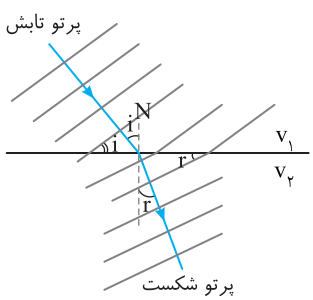
$$\sin\theta_2=0/85\times\frac{\sqrt{2}}{2}=0/85\times\frac{1/4}{2}\Rightarrow\sin\theta_2=0/595\sim0/6\Rightarrow\theta_2=37^\circ$$

۲ مقدار انحراف برابر است با: $45-37=8^\circ$

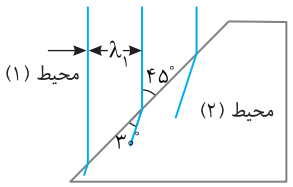
A ۱۹۴۴ ۳

یادآوری زاویهٔ بین جبهه‌های موج با سطح جدایی دو محیط برابر زاویه بین پرتو و نیم‌خط عمود بر نقطه تابش است.

قانون شکست عمومی: $\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\frac{v_2}{v_1}$



با توجه به شکل زاویهٔ بین جبهه‌های تابش با سطح 45° است، بنابراین زاویهٔ تابش $\theta_1=45^\circ$ است، همچنین زاویهٔ بین جبهه‌های شکست در محیط (۲) با سطح جدایی 30° بوده یعنی زاویهٔ شکست $\theta_2=30^\circ$ است، از این‌رو با

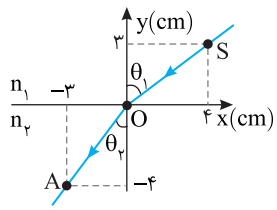


توجه به قانون شکست عمومی خواهیم داشت:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}\Rightarrow\frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{v_1}{v_2}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{v_1}{v_2}\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{2}$$

A ۱۹۴۵ | ۳

خط فکری باز یک مسئله که به‌جای اندازه زوایای تابش و شکست، روی شکل فاصله‌ها و مکان‌ها را به ما داده است. بنابراین شما باید به کمک هندسه و مثلثات زوایای شکست و تابش را حساب کرده به سراغ قانون شکست عمومی بروید.



۱ زاویهٔ تابش را حساب می‌کنیم.

$$\tan\theta_1=\frac{4}{3}\Rightarrow\theta_1=53^\circ$$

۲ زاویهٔ شکست را به دست می‌آوریم.

$$\tan\theta_2=\frac{3}{4}\Rightarrow\theta_2=37^\circ$$

۳ قانون شکست عمومی را می‌نویسیم.

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sin 53^\circ}{\sin 37^\circ}=\frac{0/8}{0/6}\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\frac{4}{3}$$

بازی با سوال **یک قطعه شیشه تخت با ضریب شکست $\sqrt{2}$ مطابق شکل روی محور مختصات قرار گرفته و پرتو SI از هوا به آن می‌تابد و وارد شیشه می‌شود. مختصات نقطه‌ای که پرتو از قطعه خارج می‌شود، کدام گزینه است؟**

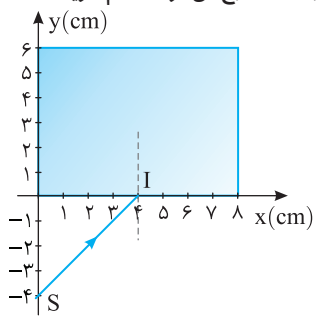
$(\sqrt{3}=1/7)$

۱) $(7/4,6)$

۲) $(6,7/4)$

۳) $(6,6)$

۴) $(6,8)$



پاسخ زاویهٔ تابش را حساب می‌کنیم.

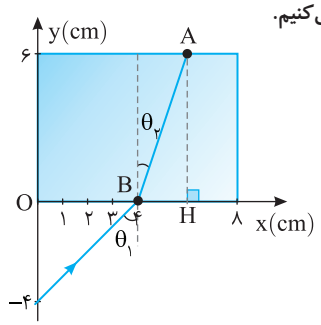
$$\tan\theta_1=\frac{4}{4}=1\Rightarrow\theta_1=45^\circ$$

زاویهٔ شکست در تیغهٔ شیشه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$$

$$\Rightarrow 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\sin\theta_2$$

$$\Rightarrow\sin\theta_2=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta_2=30^\circ$$



فاصلهٔ BH را به کمک هندسه و مثلثات به‌دست می‌آوریم:

$$\tan 30^\circ=\frac{BH}{AH}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{BH}{6}\Rightarrow BH=2\sqrt{3}\text{cm}=2\times 1/7=3/4\text{cm}$$

مختصات نقطهٔ A محل خروج پرتو خواهد شد.

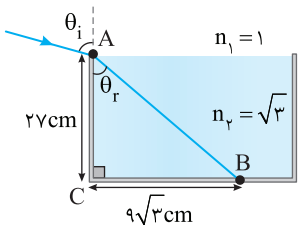
$$x_A=4+3/4=7/4\text{cm}\ ,\ y_B=6\text{cm}\Rightarrow A=(7/4,6)$$

گزینهٔ ۱

A ۱۹۴۶ | ۴

خط فکری در مسائل نور هندسی شما باید به کمک اضلاع و زوایای روی شکل شروع به حل مسئله کنید. یعنی در این مسئله باید از طول $BC=9\sqrt{3}\text{cm}$ و طول $AC=18\text{cm}$ برای یافتن زاویهٔ شکست (θ_r) استفاده کنید. سپس به سراغ قانون شکست اسنل رفته زاویهٔ تابش θ_i را به‌دست آورید.

۱ ابتدا با توجه به روابط مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه ABC زاویهٔ شکست (θ_r) را به‌دست می‌آوریم:



$$\tan\theta_r=\frac{9\sqrt{3}}{27}$$

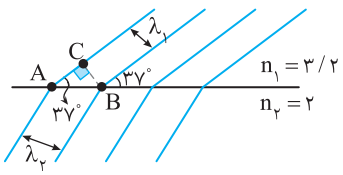
$$\Rightarrow\tan\theta_r=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\theta_r=30^\circ$$

۲ حال با توجه به قانون شکست اسنل داریم:

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{n_2}{n_1}\Rightarrow\frac{\sin\theta_i}{\sin 30^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{1}\Rightarrow\sin\theta_i=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\theta_i=60^\circ$$

A ۱۹۴۷ | ۴

خط فکری ابتدا شما باید به کمک فاصلهٔ AB و زاویهٔ 37° روی شکل طول موج در محیط اول (λ_1) را به کمک هندسه و مثلثات حساب کنید. سپس به سراغ قوانین شکست رفته و λ_2 را به دست آورید.



۱ طول موج فاصلهٔ عمودی بین دو جبههٔ متوالی موج است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC می‌توان نوشت:

$$\sin 37^\circ=\frac{BC}{AB}\Rightarrow 0/6=\frac{\frac{\lambda_1}{2}}{8}\Rightarrow\lambda_1=4/8\text{cm}$$

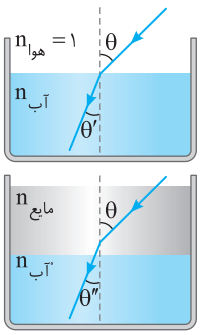
۲ اکنون به کمک ضریب شکست محیط، طول موج در محیط دوم را حساب می‌کنیم:

$$\frac{n_2}{n_1}=\frac{v_1}{v_2}\xrightarrow{\frac{v_1}{v_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\frac{n_2}{n_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Rightarrow\frac{2}{3/2}=\frac{4/8}{\lambda_2}$$

$$\lambda_2=1/6\times 4/8\Rightarrow\lambda_2=7/68\text{ cm}$$

A ۱۹۴۸ | ۴

ضریب شکست هوا برابر ۱ است اما ضریب شکست مایع ریخته شده بزرگ‌تر از ۱ است:



حالت (۱): پرتو از هوا وارد آب شود:

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}=\frac{n_{آب}}{n_{هوا}}\Rightarrow\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}=\frac{n_{آب}}{1}\quad (I)$$

حالت (۲): پرتو از مایع وارد آب شود:

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}=\frac{n_{آب}}{n_{مایع}}\quad (II)$$

دو معادله را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}}{\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}}=\frac{\frac{n_{آب}}{1}}{\frac{n_{آب}}{n_{مایع}}}\Rightarrow\frac{\sin\theta''}{\sin\theta'}=n_{مایع}$$

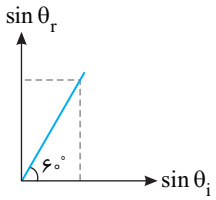
چون $n_{مایع}$ از ۱ بزرگ‌تر است پس نسبت $\frac{\sin\theta''}{\sin\theta'}$ نیز از ۱ بزرگ‌تر است:

$$\frac{\sin\theta''}{\sin\theta'}>1\Rightarrow\sin\theta''>\sin\theta'\Rightarrow\theta''>\theta'$$

با توجه به اینکه در قانون شکست زاویه، تندی و طول موج پرتو با هم رابطهٔ مستقیم دارند پس در حالت دوم که زاویهٔ شکست بزرگ‌تر بوده، طول موج نیز بزرگ‌تر است.

A ۱۹۴۹ ۴

۱ با توجه به شکل نسبت سینوس‌ها برابر شیب نمودار بوده از این‌رو می‌توان نوشت:



$$\tan ۶۰^\circ=\frac{\sin\theta_r}{\sin\theta_i}\Rightarrow\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{۱}{\tan ۶۰^\circ}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$
$$\Rightarrow\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۲ بنا به قانون شکست عمومی خواهیم داشت:

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow v_A<v_B$$

بنابراین گزینهٔ (۱) و (۲) نادرست است.

۳ اکنون با قانون اسنل به سراغ ضریب شکست می‌رویم.

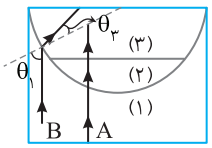
$$\frac{n_B}{n_A}=\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}\Rightarrow\frac{n_B}{n_A}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow n_A>n_B$$

از این‌رو گزینهٔ (۳) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.

A ۱۹۵۰ ۳

یادآوری هرگاه نور از یک محیط شفاف به‌طور مایل وارد محیط شفاف دیگری شود، مسیرش به‌طور ناگهانی تغییر می‌کند. این پدیده را شکست نور می‌گویند. اگر پرتو از محیط رقیق وارد محیط غلیظ شود، به خط عمود نزدیک می‌شود و اگر از محیط غلیظ وارد محیط رقیق شود، از خط عمود دور می‌شود و اگر عمود بر سطح جدایی دو محیط بتابد، بدون انحراف وارد محیط دوم می‌شود.

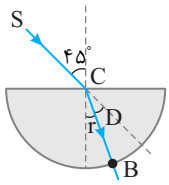
در شکل داده شده پرتو A بر سطح جدایی (۱) و (۲) عمود نیست، اما بدون انحراف از این سطح گذشته است، پس $n_۱=n_۲$ است. پرتو B هنگام گذر از محیط (۱) به محیط (۳) به خط عمود نزدیک شده است. $(\theta_۳<\theta_۱)$



پس ضریب شکست محیط (۳) از ضریب شکست محیط (۱) و (۲) بزرگتر است. $(n_۳>n_۱=n_۲)$

A ۱۹۵۱ ۲

خط فکری C مرکز نیم‌استوانه است و اگر پرتوی از مرکز بگذرد و به سوی محیط برود، این پرتو در امتداد شعاع استوانه بوده و بر محیط عمود است و از نقطهٔ B بدون انحراف خارج می‌شود. بنابراین شما تنها باید زاویهٔ شکست هنگام ورود پرتو به استوانه را حساب کنید و مقدار انحراف پرتو را به دست بیاورید.



با توجه به قانون اسنل خواهیم داشت:

$$n_۱\sin\theta_i=n_۲\sin\theta_r\Rightarrow ۱\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}\times\sin\theta_r\Rightarrow\sin\theta_r=\frac{۱}{۲}\Rightarrow r=۳۰^\circ$$

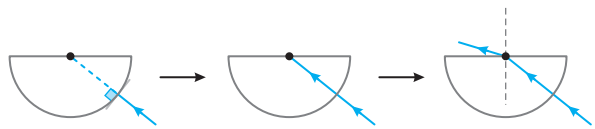
از این‌رو مقدار انحراف پرتو برابر است با: $D=۴۵^\circ-۳۰^\circ=۱۵^\circ$

A ۱۹۵۲ ۲

نکته هرگاه پرتو نوری وارد نیم کره یا نیم‌استوانه‌ای شود و امتداد آن از مرکز بگذرد، پرتو در امتداد شعاع حرکت کرده و بر سطح نیم کره یا نیم‌استوانه عمود است و هنگام ورود یا خروج منحرف نمی‌شود.

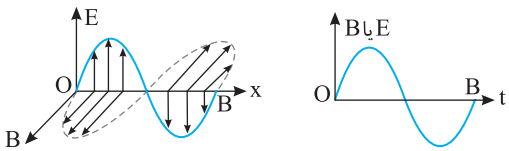
با توجه به نکتهٔ بیان شده، شکل‌های گزینهٔ (۱) و (۴) نادرست است.

هنگام خروج از نیم کره، پرتو وارد هوا خواهد شد پس سرعت پرتو افزایش می‌یابد و از خط عمود دور می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

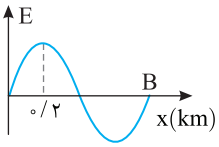


A ۱۹۵۳ ۴

یادآوری در نمودار $E-x$ و $B-x$ فاصلهٔ OB برابر یک طول موج است و در نمودار $E-t$ یا $B-t$ فاصلهٔ OB برابر یک دوره است.

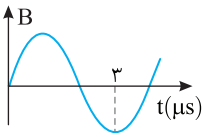


۱ از روی نمودار $E-x$ طول موج نور را به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{\lambda}{۴}=۰/۲\Rightarrow\lambda=۰/۸\text{km}$$

۲ دوره را از روی نمودار میدان مغناطیسی - زمان $(B-t)$ حساب می‌کنیم.



$$\frac{۳T}{۴}=۳\times۱۰^{-۶}\Rightarrow T=۴\times۱۰^{-۶}\text{s}$$

۳ تندی نور در این محیط شفاف خواهد شد:

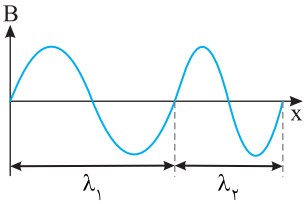
$$v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow v=\frac{۰/۸\times۱۰^{۳}}{۴\times۱۰^{-۶}}\Rightarrow v=۰/۲\times۱۰^{۹}\Rightarrow v=۲\times۱۰^{۸}\text{m/s}$$

۴ اکنون طول موج در خلأ را به کمک رابطهٔ بین تندی و طول موج به دست می‌آوریم.

$$\lambda_۱=\frac{v_۱}{f_۱}\xrightarrow{f_۱=f_۲}\frac{\lambda_۲}{\lambda_{\text{خلأ}}}=\frac{v_۲}{v_{\text{خلأ}}}\Rightarrow\frac{۰/۸}{\lambda_{\text{خلأ}}}=\frac{۲\times۱۰^{۸}}{۳\times۱۰^{۸}}$$
$$\lambda_۲=\frac{v_۲}{f_۲}\qquad\lambda_{\text{خلأ}}=۱/۲\,\text{km}\Rightarrow\lambda_{\text{خلأ}}=۱۲۰۰\text{m}$$

A ۱۹۵۴ ۲

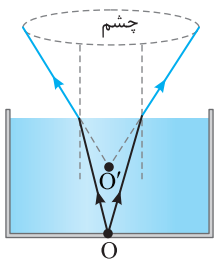
با توجه به شکل با ورود به محیط دوم طول موج کاهش یافته است و با توجه به ثابت بودن بسامد که از ویژگی‌های چشمه است. تندی انتشار نیز کاهش می‌یابد.

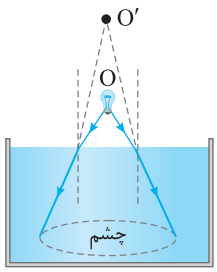


$$\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}\xrightarrow{\lambda_۲<\lambda_۱}v_۲<v_۱$$

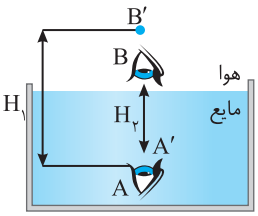
A ۱۹۵۵ ۱

خط فکری هرگاه پرتو نور از محیط غلیظ مانند آب وارد محیط رقیق مانند هوا شود، پرتو از خط عمود دور می‌شود و این امر سبب می‌گردد که ناظر بیرون آب نقطهٔ O را در محل نقطهٔ O' ببیند، یعنی اگر سکه‌ای در کف ظرف باشد، آن را بالاتر می‌بیند، اما اگر پرتو نور از هوا به آب وارد شود، مثلاً یک چراغ بالای سطح آب باشد و شما از زیر آب به آن نگاه کنید، چراغ را بالاتر از جایی که هست می‌بینید. به مسیر پرتوها دقت کنید. با توجه به این مطلب شما می‌توانید در مورد این تست اظهارنظر کنید.





ناظر A که در محیط غلیظ (آب) است، ناظر B را بالاتر از جایی که واقعاً هست و دورتر از خود می‌بینید. ناظر B که در محیط رقیق (هوا) است، ناظر A را بالاتر از جایی که واقعاً هست و نزدیک‌تر به خود می‌بینند. بنابراین $H_۱>H_۲$ است.

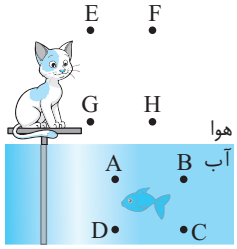


بازی با سؤال گربه‌ای بالای سکو و یک ماهی درون دریاچه قرار دارد.

گربه، ماهی را در ناحیهٔ ..... و ماهی، گربه را در ناحیهٔ ..... می‌بیند.

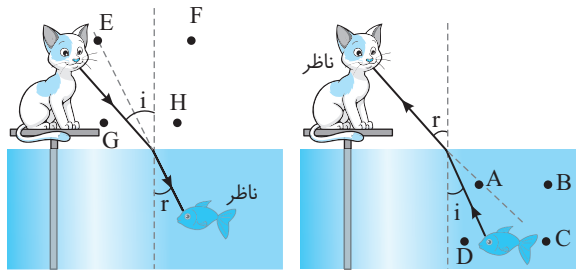
۱) H, A　　۲) E, A

۳) B, E　　۴) F, B



پاسخ گربه در محیط رقیق بوده و به ماهی در محیط غلیظ نگاه می‌کند، از این‌رو ماهی را از جایی که هست بالاتر یعنی در نقطهٔ A می‌بیند. (شکل الف) ماهی از محیط غلیظ (آب) به محیط رقیق هوا می‌نگرد و گربه را از جایی که هست بالاتر یعنی در نقطهٔ E می‌بیند (شکل ب).

گزینهٔ ۲



شکل(الف)　　شکل(ب)

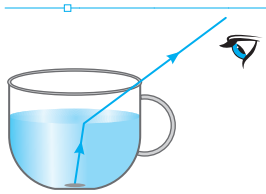
A ۱۹۵۶ ۳

خط فکری پرتوهای نور از آب وارد هوا شده و از خط عمود دور می‌شود. اما چشم شخص در جایی است که پرتو با آن که منحرف می‌شود به آن نمی‌رسد. بنابراین شما باید کاری بکنید که پرتو از این مقدار نیز بیشتر منحرف شده تا شخص بتواند سکه را ببیند. برای این منظور باید کاری کنیم که ضریب شکست مایع درون فنجان افزایش یابد.

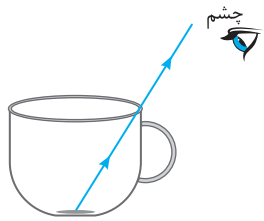
اگر فنجان را از آب خالی کنیم پرتو بدون انحراف از فنجان خارج می‌شود و شخص قطعاً نمی‌تواند سکه را ببیند و گزاره (الف) نادرست است.

اگر نمک یا شکر را به‌خوبی در آب حل کنیم، پرتو هنگام خروج از مایع بیشتر منحرف شده و سبب می‌گردد که شخص سکه را ببیند و (ب) درست است.

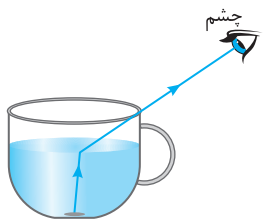
اگر فنجان را از آب خالی کرده و به جای آن مایعی با ضریب شکست بیشتر قرار دهیم. در این حالت نیز پرتو خروجی بیشتر منحرف می‌شود و ممکن است به چشم شخص برسد و گزاره (پ) نیز درست است.



فنجان آب



فنجان بدون آب



مایع با ضریب شکست بیشتر

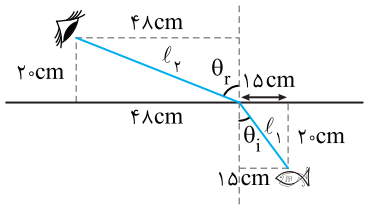
A ۱۹۵۷ ۴

خط فکری دقت کنید نیازی به دانستن اندازهٔ زاویهٔ تابش θ_i و زاویهٔ شکست (θ_r) نیست و شما باید $\sin\theta_i$ و $\sin\theta_r$ را به کمک شکل به‌دست بیاورید و مسئله را حل کنید.

۱) با توجه به قانون شکست اسنل داریم: $\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{n_2}{n_1}$

$\ell_1=\sqrt{۲۰^۲+۱۵^۲}=۲۵\text{cm}$ ، $\ell_2=\sqrt{۲۰^۲+۴۸^۲}=۵۲\text{cm}$

$\sin\theta_r=\frac{۴۸}{\ell_2}\Rightarrow\sin\theta_r=\frac{۴۸}{۵۲}=\frac{۱۲}{۱۳}$ ، $\sin\theta_i=\frac{۱۵}{\ell_1}\Rightarrow\sin\theta_i=\frac{۱۵}{۲۵}=\frac{۳}{۵}$

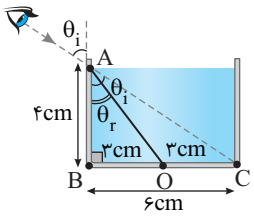


۲) اکنون به کمک قانون اسنل ضریب شکست آب دریاچه را حساب می‌کنیم.

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{n_2}{n_1}\Rightarrow\frac{\frac{۳}{۵}}{\frac{۱۲}{۱۳}}=\frac{۱}{n_{آب}}\Rightarrow n_{آب}=\frac{۲۰}{۱۳}$$

A ۱۹۵۸ ۴

خط فکری باز باید شما از فاصله‌های روی شکل سینوس زاویه‌های تابشی و شکست را حساب کنید، سپس به سراغ قوانین مربوط به شکست بروید. البته ابتدا باید طول ضلع AC و AO را به کمک رابطهٔ فیثاغورس به دست بیاورید.



۱) طول وترهای AC و AO را حساب کنیم.

$$AC^۲=AB^۲+BC^۲\Rightarrow AC=\sqrt{۴^۲+۶^۲}\Rightarrow AC=\sqrt{۲^۲(۲^۲+۳^۲)}\Rightarrow$$
$$AC=۲\sqrt{۱۳}\,\text{cm}$$

$$AO^۲=AB^۲+BO^۲\Rightarrow AO=\sqrt{۴^۲+۳^۲}\Rightarrow AO=۵\,\text{cm}$$

۲) در مثلث ABC زاویهٔ A با زاویهٔ تابش θ_i متقابل به رأس بوده و با هم برابرند و $\sin\theta_i$ خواهد شد.

$$\sin\theta_i=\frac{BC}{AC}\Rightarrow\sin\theta_i=\frac{۶}{۲\sqrt{۱۳}}\Rightarrow\sin\theta_i=\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}=\frac{۳\sqrt{۱۳}}{۱۳}$$

۳) در مثلث ABO زاویهٔ A با زاویهٔ شکست (θ_r) را به دست می‌آوریم.

$$\sin\theta_r=\frac{OB}{OA}=\frac{۳}{۵}$$

۴) به کمک قانون اسنل، ضریب شکست مایع را حساب می‌کنیم.

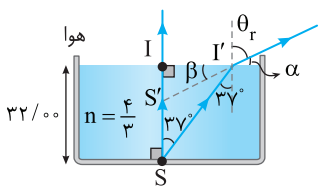
$$n=\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}\Rightarrow n=\frac{\frac{۳\sqrt{۱۳}}{۱۳}}{\frac{۳}{۵}}=\frac{۵\sqrt{۱۳}}{۱۳}$$

A ۱۹۵۹ ۱

۱) پرتو SI بر سطح آب عمود است و بدون انحراف از آب خارج می‌شود.

۲) بنا به خطوط موازی و مورب زاویهٔ تابش پرتو SI′ برابر ۳۷° است.

۳) زاویهٔ شکست θ_r را به کمک قانون اسنل به دست می‌آوریم.



$$n_1\sin\theta_i=n_2\sin\theta_r\Rightarrow\frac{۴}{۳}\sin۳۷^\circ=۱\times\sin\theta_r=\sin\theta_r=\frac{۴}{۳}\times۰/۶$$

$$\sin\theta_r=۰/۸\Rightarrow\theta_r=۵۳^\circ$$

۴) زاویهٔ α را روی شکل حساب می‌کنیم. $\alpha+\theta_r=۹۰\Rightarrow\alpha+۵۳=۹۰\Rightarrow\alpha=۳۷^\circ$

۵) زاویه‌های β و α متقابل به رأس هستند و با هم برابرند: $\beta=\alpha=۳۷^\circ$

۶) در مثلث قائم‌الزاویهٔ SII′ فاصلهٔ II′ را به دست می‌آوریم.

$$\tan۳۷^\circ=\frac{II'}{SI}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{II'}{۳۲}\Rightarrow II'=۲۴\,\text{cm}$$

۷) در مثلث S′II′، فاصلهٔ S′I را به دست می‌آوریم.

$$\tan\beta=\frac{S'I}{II'}\Rightarrow\tan۳۷^\circ=\frac{S'I}{۲۴}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{S'I}{۲۴}\Rightarrow S'I=۱۸\,\text{cm}$$

۸) بنابراین خواهیم داشت:

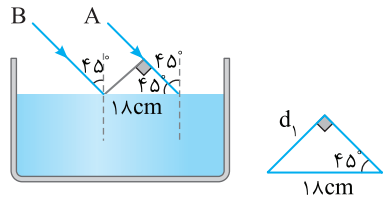
$$\frac{SI}{S'I}=\frac{۳۲}{۱۸}=\frac{۱۶}{۹}$$

C ۱۹۶۰ ۳

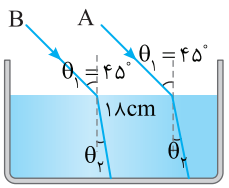
نکته فاصلهٔ دو پرتو از هم برابر طول پاره‌خط عمود بر دو پرتو است.

۱ فاصلهٔ دو پرتو را در هوا به‌دست می‌آوریم:

$$\sin ۴۵^\circ = \frac{\text{ضلع روبه‌رو}}{\text{وتر}} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{d_۱}{۱۸} \Rightarrow d_۱ = ۹\sqrt{۲}\,cm$$



۲ زاویهٔ شکست پرتوها در مایع را به‌دست می‌آوریم:



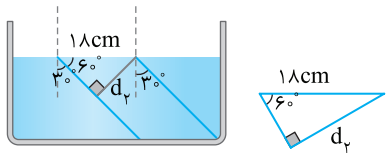
$$\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲} = \frac{n_۲}{n_۱} \Rightarrow \frac{\sin ۴۵^\circ}{\sin\theta_۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۱}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\sin\theta_۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۱} \Rightarrow \sin\theta_۲ = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \theta_۲ = ۳۰^\circ$$

۳ فاصلهٔ دو پرتو در محیط دوم را حساب می‌کنیم.

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{\text{ضلع روبه‌رو}}{\text{وتر}} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{d_۲}{۱۸} \Rightarrow d_۲ = ۹\sqrt{۳}\,cm$$

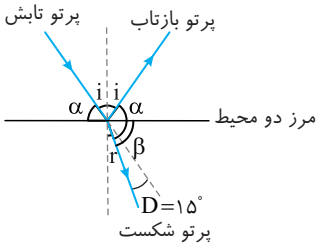


۴ نسبت خواسته شده یعنی $\frac{d_۲}{d_۱}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{d_۲}{d_۱} = \frac{۹\sqrt{۳}}{۹\sqrt{۲}} \Rightarrow \frac{d_۲}{d_۱} = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \frac{d_۲}{d_۱} = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

A ۱۹۶۱ ۱

مطابق شکل، پرتو بازتاب و شکست را رسم می‌کنیم.



۱ زاویهٔ بین پرتو تابش و سطح تیغه (α) با زاویهٔ β متقابل به رأس بوده و با هم برابر هستند. ($\beta=\alpha$)

۲ با توجه به فرض مسئله زاویهٔ بین پرتو بازتاب و پرتو شکست ۱۲۵° است، از این‌رو:

$$\alpha+\beta+D=۱۲۵ \quad (I)$$

۳ پرتو ۱۵° از مسیرش منحرف شده ($D=۱۵^\circ$)

$$(I) \Rightarrow \alpha+\alpha+۱۵=۱۲۵ \Rightarrow \alpha=۵۵^\circ$$

۴ مجموع زاویه‌ای که پرتو بازتاب با سطح تیغه می‌سازد (α) و زاویهٔ i، ۹۰° است.

$$i+۵۵=۹۰ \Rightarrow i=۳۵^\circ$$

۵ زاویهٔ شکست خواهد شد:

$$r=i-D \Rightarrow r=۳۵-۱۵ \Rightarrow r=۲۰^\circ$$

B ۱۹۶۲ ۴

۱ ابتدا سرعت نور در آب را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{v_۲}{v_۱} = \frac{n_۱}{n_۲} \Rightarrow \frac{v_{آب}}{۳\times۱۰^۸} = \frac{۱}{\frac{۴}{۳}} \Rightarrow v_{آب} = \frac{۹}{۴}\times۱۰^۸ = ۲/۲۵\times۱۰^۸\,m/s$$

۲ نور مسیر تا کف مخزن رفته و از آینه بازتاب شده و این مسیر را باز می‌گردد پس نور دو بار مسافت ۹m در هوا طی کرده و دو بار مسافت ۴/۵m را در آب طی می‌کند. با توجه به اینکه سرعت نور در یک محیط ثابت است، پس زمان طی شدن مسافت در آب و هوا را به‌دست می‌آوریم:

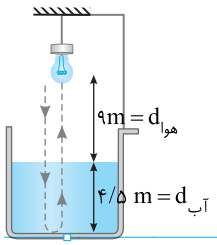
$$v_{آب}: v_{آب} = \frac{۲d_{آب}}{\Delta t_{آب}} \Rightarrow \Delta t_{آب} = \frac{۲d_{آب}}{v_{آب}} \Rightarrow \Delta t_{آب} = \frac{۲\times۴/۵}{۲/۲۵\times۱۰^۸} = ۴\times۱۰^{-۸}\,s$$

$$v_{هوا}: v_{هوا} = \frac{۲d_{هوا}}{\Delta t_{هوا}} \Rightarrow \Delta t_{هوا} = \frac{۲d_{هوا}}{v_{هوا}} \Rightarrow \Delta t_{هوا} = \frac{۲\times۹}{۳\times۱۰^۸} = ۶\times۱۰^{-۸}\,s$$

۳ زمان کل طی شده برابر است با:

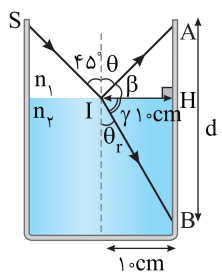
$$\Delta t_{کل} = \Delta t_{آب} + \Delta t_{هوا}$$

$$\Rightarrow \Delta t_{کل} = ۴\times۱۰^{-۸} + ۶\times۱۰^{-۸} = ۱۰^{-۷}\,s$$



A ۱۹۶۳ ۲

خط فکری باید زاویهٔ بازتاب (θ) و زاویهٔ شکست θ_r را حساب کنید. سپس به کمک این زاویه‌ها از مثلث AIH و IHB، مقدار AH و HB را به‌دست آورده و با هم جمع کنید.



۱ بنا به قانون بازتاب عمومی: $\theta=۴۵^\circ$

۲ در مثلث AH زاویهٔ β نیز ۴۵° بوده و این مثلث متساوی‌الساقین است و $AH=۱۰cm$ می‌شود.

$$\theta = ۴۵^\circ$$

۳ زاویهٔ شکست را به کمک قانون اسنل به دست می‌آوریم:

$$n = \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} \Rightarrow \sqrt{۲} = \frac{\sin ۴۵}{\sin\theta_r} \Rightarrow \sin\theta_r = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta_r = ۳۰^\circ$$

۴ در مثلث IHB زاویه γ خواهد شد:

$$۹۰-۳۰=۶۰^\circ$$

۵ طول HB را حساب می‌کنیم.

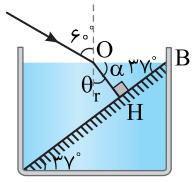
$$\tan\gamma = \frac{HB}{IH} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{HB}{۱۰} \Rightarrow HB = ۱۰\sqrt{۳}\,cm \Rightarrow HB = ۱۰\times۱/۷ = ۱۷cm$$

۶ طول d برابر است با:

$$d = AH + HB \Rightarrow d = ۱۰+۱۷ = ۲۷cm$$

A ۱۹۶۴ ۴

۱ مسئله را باید از آخر حل کرد، یعنی اینکه، پرتو به سطح آینه برخورد کرده و روی خودش بازتاب می‌کند، بنابراین پرتو بر سطح آینه به‌طور عمود می‌تابد. بنابراین مثلث OHB قائم‌الزاویه است.



۲ زاویهٔ B نیز به دلیل خطوط مورب و موازی ۳۷° بوده بنابراین زاویهٔ α خواهد شد:

$$\alpha+۳۷^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۵۳^\circ$$

۳ زاویهٔ شکست نیز برابر است با:

$$\theta_r = ۹۰-\alpha = ۹۰-۵۳ = ۳۷^\circ$$

۴ با کمک قانون اسنل ضریب شکست مایع را به دست می‌آوریم.

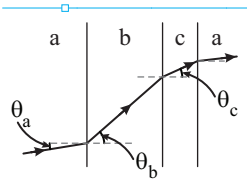
$$n_۱\sin\theta_۱ = n_۲\sin\theta_۲ \Rightarrow ۱\times\sin ۶۰^\circ = n\sin ۳۷^\circ$$

$$۱\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = n\times۰/۶ \Rightarrow n = \frac{\sqrt{۳}}{۱/۲} \Rightarrow n = \frac{۵\sqrt{۳}}{۶}$$

A ۱۹۶۵ ۱

نکته با توجه به قانون شکست عمومی $\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲} = \frac{v_۱}{v_۲}$، در هر محیطی که تندی انتشار موج بیشتر است، در آن محیط زاویهٔ بین پرتو نور و خط عمود بزرگ‌تر است.

$$\theta_۱ > \theta_۲ \Leftrightarrow v_۱ > v_۲$$



به شکل دقت کنید و زاویه‌ای را که پرتو با خط عمود می‌سازد در هر محیط با دیگر محیط‌ها مقایسه کنید.

$$\theta_a < \theta_c < \theta_b \Rightarrow v_a < v_c < v_b$$

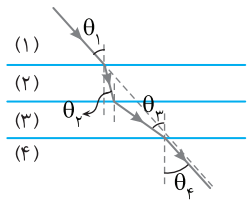
A ۱۹۶۶ ۱

خط فکری با توجه به قانون اسنل، ضریب شکست یک محیط با سینوس زاویهٔ بین پرتو و خط عمود در همان محیط نسبت وارون دارد. $(\frac{n_۲}{n_۱}=\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲})$ بنابراین در هر محیطی که زاویهٔ بین پرتو و خط عمود بزرگتر باشد، ضریب شکست در آن محیط کوچکتر است. بنابراین شما باید زاویهٔ بین پرتو و خط عمود در محیط‌ها را با هم مقایسه کنید.

$\theta_۱=۶۰^\circ,\theta_۲=۴۰^\circ,\theta_۳=۵۰^\circ\Rightarrow\theta_۲<\theta_۳<\theta_۱\Rightarrow n_۲>n_۳>n_۱$

B ۱۹۶۷ ۳

نکته هرچه زاویه‌ای که پرتو با خط عمود می‌سازد بزرگتر باشد، تندی نور در آن محیط بیشتر است.



۱ پرتو ورودی از محیط (۱) با پرتو خروجی در محیط (۴) با هم موازی هستند. $(\theta_۱=\theta_۴)$ در نتیجه تندی نور در این دو محیط با هم برابر است.

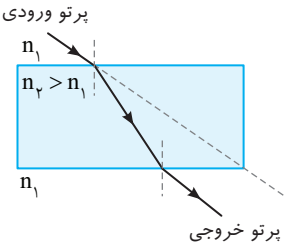
۲ زاویهٔ بین پرتو و خط عمود در محیط (۲) $(\theta_۲)$ از سه محیط دیگر کمتر و زاویهٔ بین پرتو و خط عمود در محیط (۳) $(\theta_۳)$ از سه محیط دیگر بیشتر است بنابراین:

$v_۲<v_۱=v_۴<v_۳$

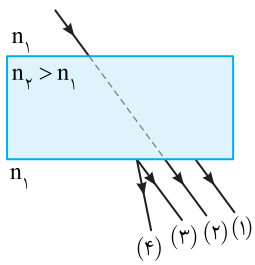
A ۱۹۶۸ ۳

یادآوری ۱ در تیغهٔ شفاف امتداد پرتو ورودی به تیغه و امتداد پرتو خروجی از تیغه موازی هستند.

یادآوری ۲ پرتو خروجی از یک تیغه نمی‌تواند در امتداد پرتو ورودی باشد و در اثر شکست، مسیر پرتو خروجی نسبت به پرتو ورودی، جابه‌جا می‌شود.



چون $n_۲>n_۱$ است پرتو هنگام ورود به خط عمود نزدیک می‌شود بنابراین مسیر (۱) نمی‌تواند پاسخ باشد، زیرا نشان می‌دهد که پرتو درون تیغه از خط عمود دور شده است.



پرتو (۲) در امتداد پرتو ورودی است که این نیز نمی‌تواند جواب مسئله باشد.

پرتو (۳) دقیقاً موازی پرتو ورودی و نسبت به آن جابه‌جا شده، از این‌رو این پرتو صحیح است.

امتداد پرتو (۴) و امتداد پرتو ورودی موازی هم نبوده و این پرتو نیز پاسخ درست نخواهد بود.

A ۱۹۶۹ ۱

روی هر مرز قانون اسنل را می‌نویسیم:

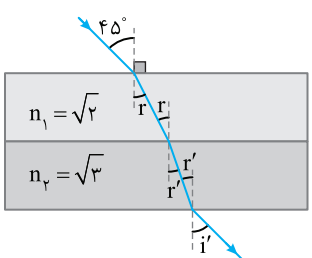
۱ مرز هوا و $n_۱$:

$\sin۴۵^\circ=\sqrt۲\sin r$

۲ مرز $n_۱$ و $n_۲$:

$\sqrt۲\sin r=\sqrt۳\sin r'$

۳ مرز $n_۲$ و هوا:



$\sqrt۳\sin r'=\sin i'$

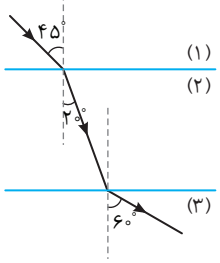
با مقایسهٔ سه رابطه می‌توان نوشت:

$\sin۴۵^\circ=\sin i'\Rightarrow i'=۴۵^\circ$

میانبر در یک تیغه تخت شفاف همواره زاویه ورود به تیغه با زاویه خروج از تیغه برابر است.

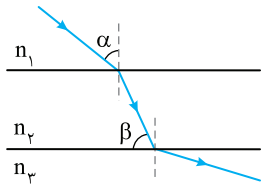
A ۱۹۷۰ ۳

قانون شکست عمومی را برای دو محیط (۱) و (۳) می‌نویسم:



$\frac{v_۳}{v_۱}=\frac{\sin\theta_۳}{\sin\theta_۱}\xrightarrow{\theta_۱=۴۵^\circ,\theta_۳=۶۰^\circ}\frac{v_۳}{v_۱}=\frac{\sin۶۰}{\sin۴۵}\Rightarrow\frac{v_۳}{v_۱}=\frac{\frac{\sqrt۳}{۲}}{\frac{\sqrt۲}{۲}}\Rightarrow\frac{v_۳}{v_۱}=\sqrt{\frac{۳}{۲}}$

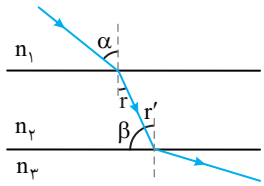
بازی با سؤال اگر $v_۱$ و $v_۲$ به‌ترتیب سرعت نور در محیط‌های (۱) و (۲) در شکل مقابل باشند، $\frac{v_۱}{v_۲}$ کدام است؟



۱) $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ ۲) $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ ۳) $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ ۴) $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$

پاسخ یادآوری ریاضی $\sin(۹۰-\theta)=\cos\theta$

به شکل دقت کنید. به دلیل خاصیت موازی و مورب زاویهٔ r و r′ با هم برابر هستند. $(r=r')$



از طرفی مجموع زاویهٔ β و r′ برابر ۹۰° است.

$r'+\beta=۹۰\Rightarrow r+\beta=۹۰\Rightarrow r=۹۰-\beta\quad(I)$

بنا به قانون شکست عمومی خواهیم داشت:

$\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{\sin\alpha}{\sin r}\xrightarrow{(I)}\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{\sin\alpha}{\sin(۹۰-\beta)}\Rightarrow\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$ **گزینهٔ ۴**

B ۱۹۷۱ ۱

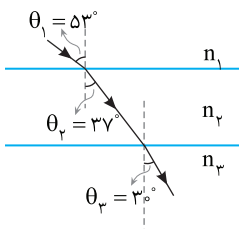
با توجه به رابطهٔ اسنل و قانون شکست عمومی می‌توان نوشت:

$\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱}\Rightarrow\frac{\lambda_۳}{\lambda_۱}=\frac{\sin۳۷^\circ}{\sin۵۳^\circ}=\frac{۰/۶}{۰/۸}=\frac{۳}{۴}$

(دقت کنید قانون اسنل را برای دو محیط غیرمجاور نیز می‌توان نوشت.)

B ۱۹۷۲ ۴

۱ قانون شکست عمومی را برای محیط‌های (۱) و (۲) می‌نویسیم:



$\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱}\Rightarrow v_۲=v_۱\frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱}$

$\Rightarrow v_۲=(۳\times۱۰^۸)(\frac{\sin۳۷^\circ}{\sin۵۳^\circ})=۳\times۱۰^۸\times\frac{۰/۶}{۰/۸}$

$\Rightarrow v_۲=۲/۲۵\times۱۰^۸\,m/s$

۲ قانون شکست عمومی را برای محیط‌های (۱) و (۳) می‌نویسیم:

$\frac{v_۳}{v_۱}=\frac{\sin\theta_۳}{\sin\theta_۱}\Rightarrow v_۳=v_۱\frac{\sin\theta_۳}{\sin\theta_۱}\Rightarrow v_۳=(۳\times۱۰^۸)(\frac{\sin۳۰^\circ}{\sin۵۳^\circ})=۳\times۱۰^۸\times\frac{۰/۵}{۰/۸}$

$\Rightarrow v_۳=۱/۸۷۵\times۱۰^۸\,m/s$

۳ اختلاف تندی‌ها را به‌دست می‌آوریم

$\Delta v=v_۲-v_۳=(۲/۲۵-۱/۸۷۵)\times۱۰^۸=۳/۷۵\times۱۰^۷\,m/s$

۴ ۱۹۷۳ B

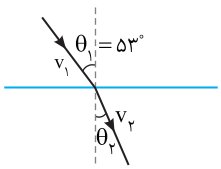
خط فکری در هر مرحله از ورود نور به محیط‌های شفاف رابطهٔ شکست نور $(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{n_2}{n_1})$ را می‌نویسیم و با هم مقایسه می‌کنیم.

محیط (۱) و (۲): با توجه به صورت مسئله سرعت نور از محیط (۱) به محیط (۲)، ۲۵٪ کاهش یافته است:

$$v_2=v_1-\frac{25}{100}v_1\Rightarrow v_2=0/75v_1$$

(کاهش ۲۵٪)

رابطهٔ بین سرعت نور و زاویهٔ تابش و زاویهٔ شکست $\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$ است.



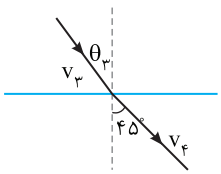
$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\Rightarrow\frac{v_1}{0/75v_1}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{0/75}=\frac{0/8}{\sin\theta_2}\Rightarrow\sin\theta_2=0/6\Rightarrow\theta_2=37^\circ$$

محیط (۳) و (۴): سرعت نور در محیط (۴)، ۴۰ درصد بیشتر از سرعت نور در محیط (۳) است:

$$v_4=v_3+\frac{40}{100}v_3\Rightarrow v_4=1/4v_3$$

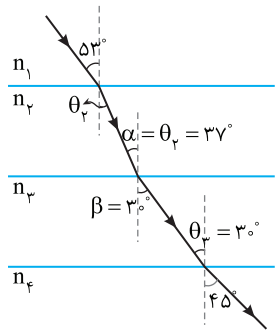
رابطهٔ بین سرعت نور و زاویهٔ تابش و شکست به صورت $\frac{v_3}{v_4}=\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_4}$ است:



$$\frac{v_3}{v_4}=\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_4}\Rightarrow\frac{v_3}{1/4v_3}=\frac{\sin\theta_3}{\sin45^\circ}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1/4}=\frac{\sin\theta_3}{0/7}\Rightarrow\sin\theta_3=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta_3=30^\circ$$

محیط (۲) و (۳): حال با توجه به خطوط موازی و مورب، α در مرز دو محیط (۲) و (۳) برابر 37° و β در مرز دو محیط (۳) و (۴) برابر 30° است. رابطهٔ بین ضریب شکست دو محیط و زاویهٔ پرتو تابش و شکست به صورت زیر است:



$$\frac{n_2}{n_3}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\Rightarrow\frac{n_2}{n_3}=\frac{\sin30^\circ}{\sin37^\circ}$$

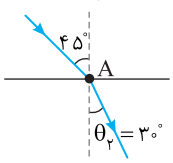
$$\Rightarrow\frac{n_2}{n_3}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{6}{10}}\Rightarrow\frac{n_2}{n_3}=\frac{5}{6}$$

۳ ۱۹۷۴ B

خط فکری با توجه به رابطهٔ سرعت در حرکت با سرعت ثابت داریم: $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$

بنابراین برای محاسبه Δt به $\Delta x=AB$ و سرعت حرکت نور نیاز داریم.

۱ ابتدا زاویهٔ شکست محیط (۲) را به‌دست می‌آوریم:

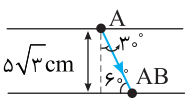


$$\frac{\sin45^\circ}{\sin\theta_2}=\frac{n_2}{n_1}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\theta_2}=\frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\Rightarrow\sin\theta_2=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta_2=30^\circ$$

۲ حال طول AB را به‌دست می‌آوریم:

$$\sin60^\circ=\frac{15\sqrt{3}}{\ell_{AB}}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{\ell_{AB}}\Rightarrow\ell_{AB}=30cm=0/3m$$



۳ سرعت در محیط (۲) را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{n_1}{n_2}\Rightarrow\frac{v_2}{3\times10^8}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow v_2=\frac{3}{\sqrt{2}}\times10^8\Rightarrow v_2=1/5\sqrt{2}\times10^8 m/s$$

۴ حال زمان مسافت طی شده را به‌دست می‌آوریم:

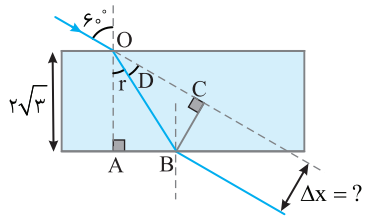
$$v=\frac{\ell_{AB}}{t_{AB}}\Rightarrow t_{AB}=\frac{\ell_{AB}}{v_2}\Rightarrow t_{AB}=\frac{0/3}{1/5\sqrt{2}\times10^8}=\frac{2}{\sqrt{2}}\times10^{-9}s=\sqrt{2}ns$$

۴ ۱۹۷۵ A

خط فکری امتداد پرتو خروجی و امتداد پرتو ورودی موازی هم هستند، بنابراین فاصلهٔ آن‌ها از هم خط عمودی است که بر دو خط رسم می‌شود یعنی مطابق شکل خط BC فاصلهٔ بین پرتو ورودی و خروجی است که شما باید آن را به دست بیاورید. از این‌رو ابتدا باید زاویهٔ ورود به تیغه (زاویهٔ شکست r) را حساب کنید، سپس به کمک مثلث‌های OAB و OBC، BC را به‌دست بیاورید.

۱ ابتدا زاویهٔ شکست (r) را به‌دست می‌آوریم:

$$n=\frac{\sin i}{\sin r}\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{\sin60^\circ}{\sin r}\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin r}\Rightarrow\sin r=\frac{1}{2}\Rightarrow r=30^\circ$$



۲ در مثلث OAB می‌توان نوشت:

$$\cos r=\frac{OA}{OB}\Rightarrow\cos30^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{OB}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{OB}\Rightarrow OB=4cm$$

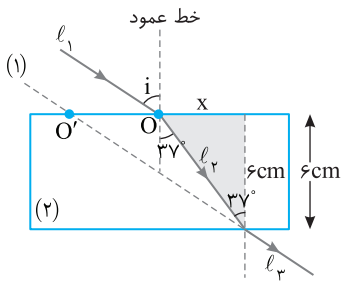
۳ زاویهٔ انحراف D را حساب می‌کنیم. $D=60^\circ-30^\circ=30^\circ$ زاویهٔ انحراف

۴ در مثلث OBC می‌توان نوشت: $\sin D=\frac{BC}{OB}\Rightarrow\sin30^\circ=\frac{BC}{4}\Rightarrow BC=2cm$

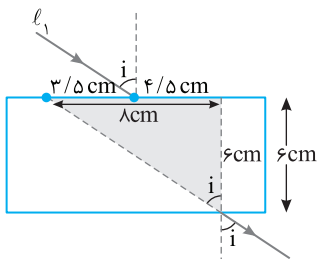
۲ ۱۹۷۶ A

۱ با توجه قضیهٔ خطوط موازی و مورب زاویه پرتو ℓ_2 با خط عمود بر سطح متوازی‌السطوح هنگام خروج نیز 37° است.

$$\tan37^\circ=\frac{x}{6}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{x}{6}\Rightarrow x=4/5cm$$



۲ پرتوهای ورودی و خروجی در یک محیط هستند، پس پرتوهای ورودی و خروجی موازی هم هستند و زاویه خروج از متوازی‌السطوح نیز $\hat{i}$ است. $\tan i=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}\Rightarrow\hat{i}=53^\circ$

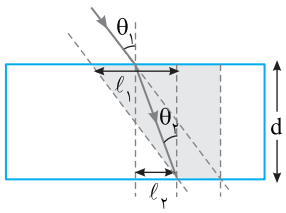


۳ حال ضریب شکست را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin ۵۳^\circ}{\sin ۳۷^\circ}=\frac{n_۲}{n_۱}\Rightarrow\frac{۰/۸}{۰/۶}=\frac{n_۲}{۱}\Rightarrow n_۲=\frac{۴}{۳}$$

میانبر به طور کلی اگر d ضخامت تیغه متوازی‌السطوح باشد، فاصله محل تقاطع پرتوهای ورودی و خروجی یا امتداد آنها روی سطح تیغه از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\ell=\ell_۱-\ell_۲=d\times|\tan\theta_۱-\tan\theta_۲|$$



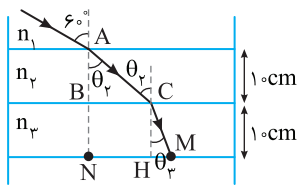
در این سؤال محاسبهٔ زاویهٔ i با استفاده از این نکته به صورت زیر است:

$$۳/۵=۶\times|\tan\hat{i}-\tan ۳۷^\circ|\Rightarrow\frac{۳/۵}{۶}=\tan\hat{i}-\frac{۳}{۴}$$

$$\tan\hat{i}=\frac{۳/۵}{۶}+\frac{۳}{۴}\Rightarrow\tan\hat{i}=\frac{۷+۹}{۱۲}=\frac{۱۶}{۱۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\hat{i}=۵۳^\circ$$

A ۱۹۷۷ ۳

۱ زاویهٔ شکست در محیط $n_۲$ را حساب می‌کنیم.



$$n_۱\sin\theta_۱=n_۲\sin\theta_۲\Rightarrow ۱\times\sin ۶۰=\frac{۱۷}{۱۶}\sin\theta_۲$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۱۷}{۱۶}\sin\theta_۲\Rightarrow\frac{۱/۷}{۲}=\frac{۱۷}{۱۶}\sin\theta_۲=\sin\theta_۲=۰/۸\Rightarrow\theta_۲=۵۳^\circ$$

۲ در مثلث ABC، طول ضلع BC را به‌دست می‌آوریم.

$$\tan\theta_۲=\frac{BC}{AB}\Rightarrow\frac{۴}{۳}=\frac{BC}{۱۰}\Rightarrow BC=\frac{۴۰}{۳}cm$$

۳ زاویهٔ $\theta_۳$ را نیز به کمک قانون اسنل حساب می‌کنیم.

$$n_۲\sin\theta_۲=n_۳\sin\theta_۳\Rightarrow\frac{۱۷}{۱۶}\sin ۵۳=\frac{۱۷}{۱۲}\sin\theta_۳\Rightarrow$$

$$\frac{۰/۸}{۴}=\frac{\sin\theta_۳}{۳}\Rightarrow\sin\theta_۳=۰/۶\Rightarrow\theta_۳=۳۷^\circ$$

۴ فاصلهٔ HM را در مثلث CHM به‌دست می‌آوریم.

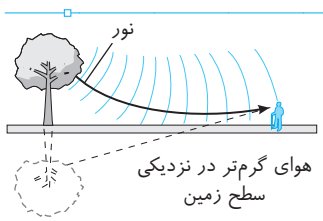
$$\tan\theta_۳=\frac{HM}{CH}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{HM}{۱۰}\Rightarrow HM=\frac{۳۰}{۴}cm$$

۵ فاصلهٔ MN خواهد شد.

$$MN=BC+HM=\frac{۴۰}{۳}+\frac{۳۰}{۴}\Rightarrow MN=\frac{۱۶۰+۹۰}{۱۲}\Rightarrow MN=\frac{۲۵۰}{۱۲}=\frac{۱۲۵}{۶}cm$$

A ۱۹۷۸ ۲

سراب در روزهای گرم که هوای مجاور سطح زمین گرم‌تر از لایه‌های بالاتر هوا بوده و چگالی هوا در سطح زمین از لایه‌های بالاتر کمتر است، اتفاق می‌افتد، بنابراین گزارهٔ (الف) درست است.

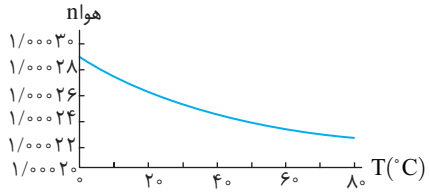


همچنین جبهه‌های موج که به سمت پایین می‌آیند با ضریب شکست‌های کوچک‌تر روبه‌رو شده و سرعت آن‌ها افزایش می‌یابد که مطابق شکل این امر سبب خم شدن پرتو به سمت بالا می‌شود و گزارهٔ (ب) درست است.

با تغییر چگالی هوا از بالا تا سطح زمین، ویژگی‌های محیط تغییر کرده و تندی انتشار نور در لایه‌های بالاتر از تندی آن در سطح زمین کمتر است، بنابراین گزارهٔ (پ) نادرست است.

A ۱۹۷۹ ۱

با افزایش دما چگالی هوا کاهش می‌یابد. در واقع با افزایش دما چگالی هوا رقیق‌تر می‌شود، پس ضریب شکست هوا کاهش می‌یابد و گزینهٔ (۱) می‌تواند درست باشد.



A ۱۹۸۰ ۳

در روزهای گرم هوای سطح زمین نسبتاً داغ است. از طرفی، چگالی هوا با افزایش دما کاهش می‌یابد که این امر سبب کاهش ضریب شکست نیز می‌شود و تندی انتشار موج از لایه‌های بالایی به سوی سطح زمین افزایش می‌یابد. از طرفی بسامد نور از ویژگی‌های چشمهٔ موج بوده و ثابت است بنابراین طول موج در نقاط نزدیک سطح زمین بزرگتر است. $(\uparrow\lambda=\frac{v\uparrow}{f})$

A ۱۹۸۱ ۱

ضریب شکست یک محیط شفاف برای طول موج‌های کوتاه‌تر، بیشتر است. در گسترهٔ نور مرئی، نور قرمز دارای بلندترین طول موج و کمترین ضریب شکست است. از این‌رو کمتر از رنگ‌های دیگر منحرف می‌شود. اما دربارهٔ تندی پرتوها:

پرتو فرابنفش دارای کمترین طول موج و بیشترین ضریب شکست است. بنابراین تندی پرتو بنفش از همه کمتر است. $(\downarrow v=\frac{c}{n\uparrow})$

A ۱۹۸۲ ۳

نکته ضریب شکست یک محیط شفاف برای طول موج‌های کوتاه‌تر، بیشتر است.

یادآوری در گستره (طیف) امواج الکترومغناطیسی طول موج از پرتو گاما تا امواج رادیویی در حال افزایش است.

$$\gamma\rightarrow x\rightarrow\text{فرابنفش}\rightarrow\text{نور مرئی}\rightarrow\text{فروسرخ}\rightarrow\text{رادیویی}$$

$$\text{نور مرئی}\xrightarrow[\lambda\uparrow,f\downarrow]{\text{قرمز نارنجی زرد سبز آبی بنفش}}$$

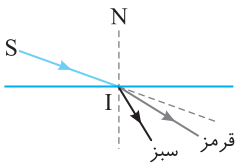
الگوی تست به‌راحتی قابل بررسی است.

$$\lambda_G>\lambda_U>\lambda_\gamma\Rightarrow n_G<n_U<n_\gamma\xrightarrow{n=\frac{c}{v}}\frac{c}{v_G}<\frac{c}{v_U}<\frac{c}{v_\gamma}$$

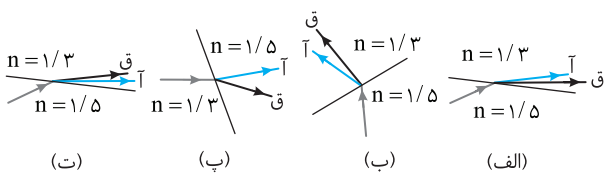
$$\Rightarrow v_G>v_U>v_\gamma$$

A ۱۹۸۳ ۱

هرگاه پرتو نور از هوا وارد محیط غلیظ‌تری مانند مایع شود، پرتو منحرف شده و به خط عمود نزدیک‌تر می‌شود. از طرفی پرتویی که دارای طول موج کوتاه‌تر است بیشتر منحرف می‌شود. طول موج پرتو سبز از طول موج پرتو قرمز کوتاه‌تر است، بنابراین پرتو سبز نیز باید به خط عمود نزدیک‌تر شود.

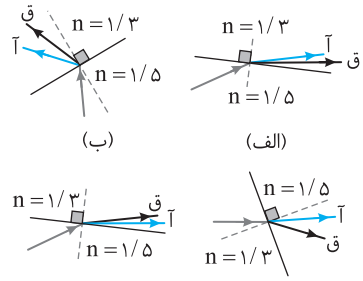


بازی با سؤال **در شکل‌های زیر، پرتو فرودی که شامل نورهای قرمز و آبی است در سطح مشترک دو محیط شکست پیدا کرده‌اند. چه تعداد از شکل‌ها شکست را به‌درستی نشان می‌دهد؟ (قرمز: ق، آبی: آ)** از کتاب درسی



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خط عمود بر سطح مشترک دو محیط را در هر شکل رسم می‌کنیم. در شکل (ب) پرتوهای تابش و شکست در یک طرف خط عمود قرار دارند که چنین چیزی ممکن نیست.



در شکل (پ)، پرتو آبی به خط عمود نزدیک و پرتو قرمز از خط دور شده است در حالی‌که چون پرتوها از محیط با ضریب شکست کمتر وارد محیط با ضریب شکست بیشتر شده‌اند باید هر دو پرتو آبی و قرمز با زوایای شکست متفاوت به خط عمود نزدیک شوند در حالیکه پرتو قرمز از خط عمود دور شده است، بنابراین شکل (پ) نادرست است.

در مورد شکل‌های (الف) و (ت) پرتویی از محیط غلیظ وارد محیط رقیق شده است و پرتوها از خط عمود باید دور شوند و پرتو قرمز باید کمتر منحرف شود. از این‌رو شکل (الف) نادرست و شکل (ت) درست است. بنابراین تنها شکل (ت) درست است. گزینهٔ ۱

A ۱۹۸۴ ۳

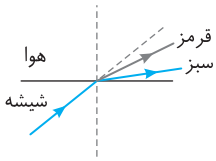
یادآوری هرگاه پرتو نور از محیط رقیق وارد محیط غلیظ شود، پرتو به خط عمود نزدیک می‌شود.

نکته ضریب شکست یک محیط شفاف برای طول موج‌های کوتاه‌تر بیشتر است یعنی این پرتوها بیشتر منحرف می‌شوند.

طول موج نور آبی از طول موج نور قرمز کمتر است، بنابراین وقتی این دو پرتو وارد شیشه (محیط غلیظ) می‌شوند، نور آبی بیشتر منحرف شده و به خط عمود نزدیک‌تر می‌شود.

A ۱۹۸۵ ۳

یادآوری ضریب شکست محیط شفاف برای طول موج‌های کوتاه‌تر بیشتر است.



نور از شیشه وارد هوا (از محیط غلیظ وارد محیط رقیق) شده و پرتوها از خط عمود دور می‌شوند. طول موج نور قرمز از طول موج نور سبز بلندتر بوده و نور قرمز کمتر شکسته می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

B ۱۹۸۶ ۳

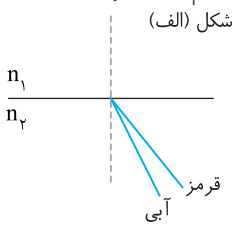
هرگاه نور از محیط غلیظ وارد محیط رقیق شود، پرتو از خط عمود دور می‌شود و هر چه طول موج کوتاه‌تر باشد، انحراف بیشتر است. طول موج نور آبی از طول موج نور قرمز کمتر است بنابراین نور آبی نسبت به نور قرمز هنگام ورود به هوا از خط عمود دورتر می‌شود و گزینهٔ (۳) درست است.

A ۱۹۸۷ ۳

خط فکری ضریب شکست هر محیط شفاف غیر از خلأ برای طول موج‌های کوتاه‌تر بیشتر است، یعنی پرتو آبی که طول موجش از پرتو قرمز کوتاه‌تر است، بیشتر منحرف می‌شود. اکنون با مقایسهٔ انحراف پرتوی آبی و قرمز در محیط‌های n_1 و n_2 و همچنین n_3 و n_4 می‌توان ضریب شکست آن‌ها را با هم مقایسه کرد.

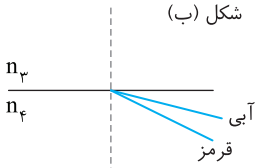
در شکل (الف) پرتو آبی به خط عمود نزدیک‌تر از پرتو قرمز است و چون پرتو آبی بیشتر منحرف شده است باید $n_2 > n_1$ باشد.

شکل (الف)



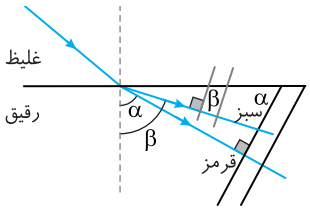
در شکل (ب) پرتو آبی هنگام شکست از خط عمود دورتر است و قرمز و به خط عمود نزدیک‌تر و چون آبی بیشتر شکسته است پس $n_3 > n_4$ است.

شکل (ب)



A ۱۹۸۸ ۳

خط فکری نور زرد ترکیبی از نور قرمز و نور سبز است، از طرفی طول موج نور سبز از طول موج نور قرمز کوتاه‌تر است $(\lambda_G < \lambda_R)$.



ضریب شکست محیط به طول موج نور بستگی دارد و هر چه طول موج کوتاه‌تر باشد، ضریب شکست محیط بیشتر است. بنابراین هنگام ورود پرتو نور زرد به محیط رقیق، پرتو سبز از مسیرش بیشتر منحرف می‌شود. حال با توجه به این دانسته‌ها باید در مورد α و β اظهار نظر کنید.

در واقع زاویه شکست نور قرمز از زاویهٔ شکست نور سبز کمتر است. زاویه‌ای که جبهه موج با مرز مشترک دو محیط می‌سازد برابر زاویه شکست پرتو مربوط به همان موج با خط عمود است، بنابراین زاویهٔ بین جبهه‌های موج قرمز با مرز شکست یعنی α از زاویه بین جبهه‌های موج سبز با مرز مشترک یعنی β کمتر است.

A ۱۹۸۹ ۳

یادآوری تندی انتشار تمام امواج الکترومغناطیسی در خلأ برابر است.

دو پرتو الکترومغناطیسی A و B در حال انتشار در خلأ هستند، بنابراین تندی انتشار آن‌ها با هم برابر است $(v_A = v_B)$ و گزینه‌های (۱) و (۲) و (۴) نادرست هستند. با توجه به رابطهٔ طول موج می‌توان نوشت:

$$\lambda_A = \frac{v_A}{f_A} \xrightarrow{v_A = v_B} \frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{f_B}{f_A} \xrightarrow{\lambda_A > \lambda_B \text{ اگر}} f_A < f_B$$
$$\lambda_B = \frac{v_B}{f_B}$$

گزینهٔ (۳) درست است.

A ۱۹۹۰ ۳

نکته سرعت امواج الکترومغناطیسی در محیط‌های شفاف غیر از خلأ با هم برابر نیست و پرتو با طول موج بزرگتر، در محیط شفاف دارای سرعت بیشتری است.

دو پرتو الکترومغناطیسی A و B در آب در حال انتشار هستند، بنابراین تندی انتشار آن‌ها با هم برابر نیست. با توجه به نکتهٔ بیان شده گزینهٔ (۳) درست است.

$$\lambda_A > \lambda_B \Rightarrow n_A < n_B \Rightarrow \frac{c}{v_A} < \frac{c}{v_B} \Rightarrow v_A > v_B$$

A ۱۹۹۱ ۲

در ابتدا به شما بگوییم که رابطهٔ $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ مربوط به گذر یک پرتو از یک محیط شفاف به محیط شفاف دیگر است. یعنی v_1 و v_2 سرعت یک پرتو در محیط (۱) و (۲) همچنین λ_1 و λ_2 طول موج یک پرتو در دو محیط است. در حالی که در این تست شما با دو پرتو مختلف با طول موج‌های مختلف در هوا سر و کار دارید که به یک منشور می‌تابد. یعنی v_1 و v_2 سرعت پرتو (۱) در منشور و v_2 سرعت پرتو (۲) در منشور بوده و گزینهٔ (۴) اصولاً در مورد این تست نادرست است. حال به حل مسئله بپردازیم.

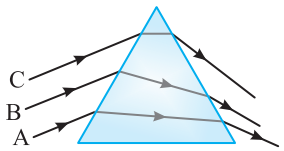
هرگاه یک پرتو مرکب از دو موج λ_1 و λ_2 $(\lambda_1 > \lambda_2)$ وارد محیط شفافی شوند. ضریب شکست محیط شفاف برای پرتوی λ_1 که دارای طول موج بیشتری است کمتر بوده از این‌رو می‌توان نوشت:

$$\lambda_1 > \lambda_2 \Rightarrow n_1 < n_2 \Rightarrow \frac{c}{v_1} < \frac{c}{v_2} \Rightarrow v_1 > v_2$$

ضریب شکست محیط شفاف برای پرتو اول ← n_1
سرعت نور پرتو اول در محیط شفاف ← v_1
سرعت نور پرتو دوم در محیط شفاف ← v_2

A ۱۹۹۲ ۳

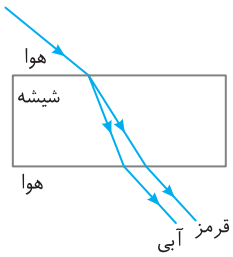
خط فکری ضریب شکست یک محیط برای طول موج‌های مختلف موج‌های الکترومغناطیسی، متفاوت و برای طول موج‌های بلندتر، کمتر است و این پرتوها هنگام گذر از منشور کمتر منحرف می‌شوند. بنابراین شما باید به انحراف پرتوها توجه کنید و تشخیص بدهید کدام پرتو بیشتر منحرف شده است.



انحراف پرتو C هنگام ورود به منشور از بقیه کمتر است، از این‌رو طول موج آن از بقیه بزرگتر بوده و بسامد آن از بقیه کمتر است.

B ۱۹۹۳ ۳

نور آبی دارای طول موج کوتاه‌تری است، بنابراین هنگام ورود از هوا به شیشه بیشتر منحرف می‌شود و بر خط عمود نزدیک‌تر می‌شود و پرتوها مطابق شکل روبه‌رو از هم جدا شده اما در یک امتداد حرکت می‌کنند و هنگام خروج موازی هستند.



A ۱۹۹۴ ۴

خط فکری باید از روی نمودار داده شده، ضریب شکست نور آبی و نور قرمز را مشخص کنید، سپس سرعت نور آبی و قرمز در تیغه را به دست آورده، زمان گذر هر یک از پرتوها از تیغه را حساب کرده و اختلاف زمانی را به دست بیاورید.

۱ با توجه به داده‌های روی نمودار ضریب شکست نور آبی ۱/۵۳ و ضریب شکست نور قرمز ۱/۵۱ است. تندی پرتوهای قرمز و آبی را به دست می‌آوریم:

$$v_{\text{نور آبی}}=\frac{c}{n_{\text{آبی}}}=\frac{c}{1/53}\quad,\quad v_{\text{نور قرمز}}=\frac{c}{n_{\text{قرمز}}}=\frac{c}{1/53}$$

۲ ضخامت تیغه d است و مدت زمان عبور هر پرتو از تیغه خواهد شد:

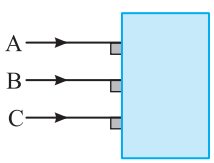
$$d=vt\Rightarrow\begin{cases}t_{\text{قرمز}}=\dfrac{d}{\frac{c}{1/51}}\Rightarrow t_{\text{قرمز}}=1/51\dfrac{d}{c}\\ t_{\text{آبی}}=\dfrac{d}{\frac{c}{1/53}}\Rightarrow t_{\text{آبی}}=1/53\dfrac{d}{c}\end{cases}$$

۳ زمان‌های به دست آمده را از هم کم می‌کنیم.

$$t_{\text{آبی}}-t_{\text{قرمز}}=0/02\frac{d}{c}=\frac{2d}{100c}=\frac{d}{50c}$$

در واقع نور قرمز $\frac{d}{50c}$ ثانیه زودتر از نور آبی از تیغه خارج می‌شود.

بازی با سوال مطابق شکل روبه‌رو، سه پرتو موازی تک‌رنگ A، B و C به یک تیغهٔ شیشه‌ای تخت می‌تابند. مدت زمان عبور پرتوها از تیغه به ترتیب t_A، t_B و t_C است. اگر $t_B<t_C<t_A$ باشد، کدام گزینه می‌تواند به‌ترتیب از راست به چپ رنگ پرتوهای A، B و C باشد؟



۱) قرمز - آبی - بنفش
۲) بنفش - قرمز - آبی
۳) بنفش - آبی - قرمز
۴) آبی - قرمز - بنفش

پاسخ هر چه زمان عبور پرتو از تیغه کوتاه‌تر باشد، تندی انتشار پرتو در تیغه بیشتر است و هر چه تندی انتشار پرتو در تیغه بیشتر باشد، طول موج آن پرتو بزرگتر است.

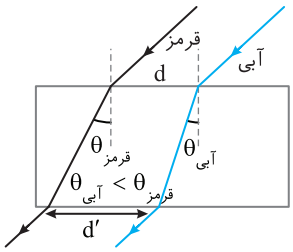
$$t_B<t_C<t_A\Rightarrow v_B>v_C>v_A\xrightarrow{v=\frac{c}{n}}$$
$$n_B<n_C<n_A\Rightarrow\lambda_B>\lambda_C>\lambda_A$$

یادآوری در گستره نور مرئی که از رنگ‌های قرمز، نارنجی، زرد، سبز، آبی و بنفش تشکیل شده است. از قرمز به بنفش طول موج کاهش می‌یابد.

گزینهٔ ۲ $\lambda_B>\lambda_C>\lambda_A\Rightarrow\lambda_{\text{قرمز}}>\lambda_{\text{آبی}}>\lambda_{\text{بنفش}}$

A ۱۹۹۵ ۳

هر چه طول موج کوچک‌تر باشد، ضریب شکست محیط برای آن پرتو بیشتر می‌شود. طول موج نور آبی از طول موج نور قرمز کمتر است به همین دلیل نور آبی بیشتر در تیغه دچار شکست می‌شود و پرتو آبی به خط عمود نزدیک‌تر می‌شود. $(\theta_{\text{آبی}}<\theta_{\text{قرمز}})$

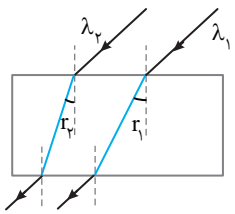


از این‌رو با توجه به شکل $d'>d$ خواهد شد.

A ۱۹۹۶ ۳

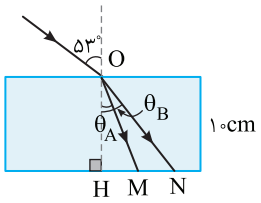
خط فکری باید به نحوهٔ خروج پرتو و مقدار انحراف آن‌ها دقت کنید.

پرتوها پس از خروج از تیغه به هم نزدیک شده‌اند و مطابق شکل باید پرتو λ_1 از پرتو λ_2 کمتر منحرف شده باشد، $(r_1>r_2)$ یعنی ضریب شکست تیغه برای λ_1 کمتر از ضریب شکست تیغه برای λ_2 بوده است و با توجه به اینکه ضریب شکست یک محیط شفاف برای طول موج‌های بلندتر، کمتر است باید $\lambda_1>\lambda_2$ باشد.



A ۱۹۹۷ ۲

خط فکری ابتدا باید زاویهٔ شکست هر پرتو در تیغه را حساب کنید. سپس با استفاده از مثلثات در مثلث‌های OHM و OHN طول ضلع‌های HM و HN را به‌دست آورده و از هم کم کنیم.



۱ ضریب شکست محیط برای پرتو A بیشتر است. بنابراین پرتو A بیشتر منحرف می‌شود. زاویهٔ شکست A را حساب می‌کنیم.

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2\Rightarrow 1\times\sin 53^\circ=1/6\sin\theta_A\Rightarrow 0/8=1/6\sin\theta_A$$
$$\Rightarrow\sin\theta_A=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta_A=30^\circ$$

۲ طول ضلع MH خواهد شد:

$$\Delta OHM:\tan\theta_A=\frac{HM}{OH}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{HM}{10}$$
$$\Rightarrow HM=\frac{10\sqrt{3}}{3}\text{cm}=\frac{10\times 1/7}{3}=5/6\text{ cm}$$

۳ زاویهٔ شکست B را به‌دست می‌آوریم.

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2=1\times\sin 53^\circ=\frac{4}{3}\sin\theta_B\Rightarrow 0/8=\frac{4}{3}\sin\theta_B$$
$$\Rightarrow\sin\theta_B=0/6\Rightarrow\theta_B=37^\circ$$

۴ طول ضلع HN برابر است با:

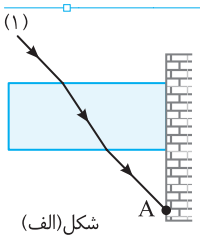
$$\Delta OHN:\tan\theta_B=\frac{HN}{OH}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{HN}{10}\Rightarrow HN=\frac{30}{4}=7/5\text{ cm}$$

۵ فاصلهٔ MN خواهد شد.

$$MN=HN-HM=7/5-5/6\Rightarrow MN=1/9\text{cm}$$

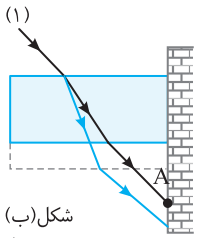
A ۱۹۹۸ ۲

خط فکری مسیر پرتو در ابتدا مطابق شکل (الف) بود و پرتو بعد از عبور از تیغه به نقطهٔ A می‌رسد. برای آن‌که پرتو به نقطهٔ پایین‌تر از A برسد، باید انحراف بیشتری پیدا کند. اکنون شما باید تک‌تک حالت‌ها را بررسی کنید.

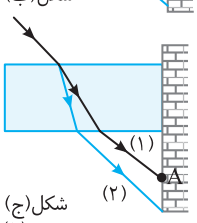


شکل (الف)

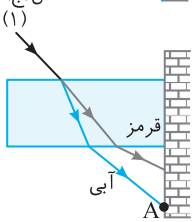
اگر ضخامت تیغه را بیشتر کنیم با توجه به مسیر پرتو در شکل روبه‌رو نور آبی پس از خروج از منشور در نقطه پایین‌تر از A قرار می‌گیرد (شکل ب) و روش (الف) درست است.



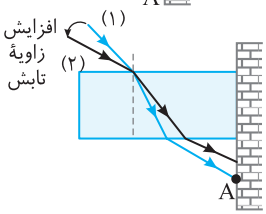
هرچه ضریب شکست تیغه بیشتر باشد، پرتو شکست بیشتر به خط عمود نزدیک می‌شود. پس از خروجی نیز پایین‌تر از A قرار می‌گیرد و روش (ب) درست است.



اگر از نور قرمز به جای نور آبی استفاده شود، چون طول موج نور قرمز از طول موج نور آبی بیشتر است، ضریب شکست تیغه برای نور قرمز کمتر از نور آبی بوده. یعنی پرتو قرمز کمتر منحرف شده و به نقطهٔ بالای A می‌رسد و روش (پ) نادرست است.

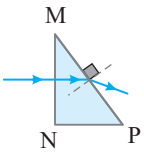


اگر زاویهٔ تابش را افزایش دهیم، از مسیر (۲) پرتو به نقطه‌ای بالاتر از A می‌رسد و روش (ت) نادرست است.



A ۱۹۹۹ ۴

پرتو عمود بر وجه MN می‌تابد (زاویهٔ تابش صفر است) و بدون انحراف وارد منشور می‌شود. سپس روی وجه MP از منشور وارد هوا می‌شود. بنابراین اگر خط عمود را رسم کنید، باید پرتو از خط عمود دور شود، بنابراین پرتوهای BA نادرست هستند. اما پرتوهای C و D هر دو از خط عمود دور شده و ممکن است، پاسخ مسئله باشند.

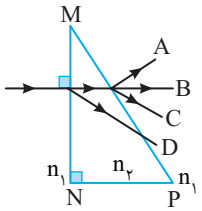


A ۲۰۰۰ ۴

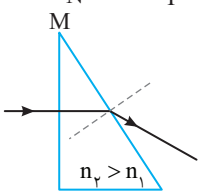
پرتو عمود به MN می‌تابد و بدون انحراف باید وارد منشور شود. بنابراین مسیر D نادرست است.

پرتو بر وجه MP عمود نمی‌تابد بنابراین باید روی این وجه منحرف شود بنابراین مسیر B نادرست است.

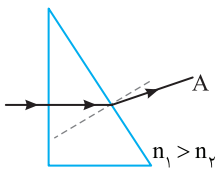
اما مسئله بیان نکرده که n_1 بزرگتر است یا n_2.



اگر $n_2 > n_1$ باشد، هنگام خروج پرتو از منشور باید پرتو از خط عمود دور شود، یعنی پرتو به سمت قاعده منشور منحرف می‌شود و مسیر C درست است.

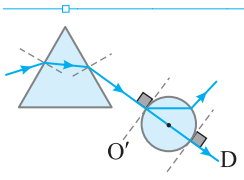


اگر $n_1 > n_2$ باشد، هنگام خروج پرتو از منشور باید به خط عمود نزدیک شود و پرتو به سمت رأس منحرف می‌شود و مسیر A درست است.



A ۲۰۰۱ ۴

هرگاه پرتو از خلأ به یک منشور بتابد مطابق شکل، به سمت قاعدهٔ منشور منحرف می‌شود. در نتیجه پرتو به سمت کرهٔ شیشه‌ای O نمی‌رود و وقتی پرتو به کرهٔ شیشه‌ای به‌گونه‌ای بتابد که امتداد آن از مرکز بگذرد، یعنی پرتو در امتداد قطر کره باشد، پرتو بر سطح کره عمود بوده و بدون انحراف از کره می‌گذرد. بنابراین مسیر D درست است و مسیر C نادرست است.



A ۲۰۰۲ ۱

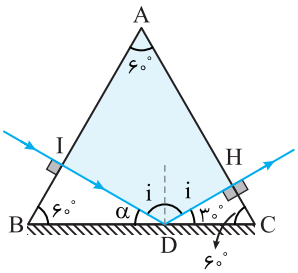
۱ نور بر وجه AB عمود تابیده و زاویهٔ تابش صفر است. از این‌رو پرتو بدون انحراف از وجه AB می‌گذرد و در نقطهٔ D به آینه برخورد می‌کند.

۲ در مثلث قائم‌الزاویه BID زاویهٔ α برابر است با:

$\alpha+۶۰=۹۰\Rightarrow\alpha=۳۰^\circ$

۳ بنابراین زاویهٔ تابش بر سطح آینه $i=۶۰^\circ$ است و پرتو DH با سطح آینه زاویهٔ ۳۰° می‌سازد.

۴ زاویه‌ای که پرتو DH بر وجه AC می‌سازد ۹۰° بوده و پرتو خروجی از منشور نیز با وجه AC زاویهٔ ۹۰° می‌سازد.



B ۲۰۰۳ ۱

خط فکری حل مسئله را باید از زاویهٔ تابش ۳۷° به آینهٔ M_2 شروع کرد و مرحله به مرحله زوایای روی شکل (زاویه‌های تابش، بازتاب ...) را مشخص کرد تا در نهایت زاویهٔ بین دو پرتو بازتاب (γ) را به‌دست آورد.

۱ زاویه‌ای که پرتو SB با سطح آینهٔ M_2 می‌سازد مطابق شکل $۹۰-۳۷=۵۳^\circ$ است.

۲ اگر پرتو SB را امتداد دهیم تا در نقطهٔ A آینهٔ M_1 را قطع کند چون دو آینهٔ M_1 و M_2 موازی هستند، به دلیل خطوط موازی و مورب زاویهٔ A نیز ۵۳° است.

۳ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ASC زاویه‌ای که پرتو تابش SC با سطح آینهٔ M_1 می‌سازد برابر است با:

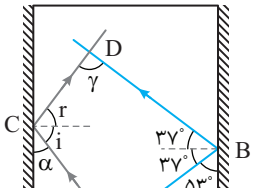
$\alpha+A=۹۰\Rightarrow\alpha+۵۳=۹۰\Rightarrow\alpha=۳۷^\circ$

۴ زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب روی آینهٔ M_1 را حساب می‌کنیم:

$i+\alpha=۹۰\Rightarrow i+۳۷=۹۰\Rightarrow i=۵۳^\circ$

۵ مجموع زوایای داخلی چهارضلعی SCDB، ۳۶۰° است، بنابراین γ خواهد شد:

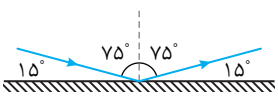
$\gamma+(۲\times۳۷)+(۲\times۵۳)+۹۰=۳۶۰\Rightarrow\gamma=۹۰^\circ$



A ۲۰۰۴ ۴

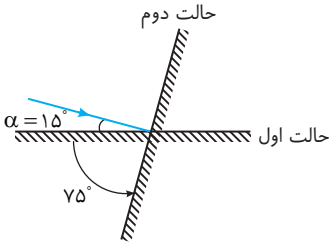
یادآوری زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب با هم برابرند، از این‌رو زاویهٔ بین پرتو تابش و پرتو بازتاب دو برابر زاویهٔ تابش است.

در این مسئله زاویهٔ بین پرتو تابش و پرتو بازتاب ۱۵۰° است، بنابراین زاویهٔ تابش خواهد شد: $۲i=۱۵۰^\circ\Rightarrow i=۷۵^\circ$



زاویهٔ بین پرتو تابش با سطح آینه $\alpha=۹۰-۷۵=۱۵^\circ$

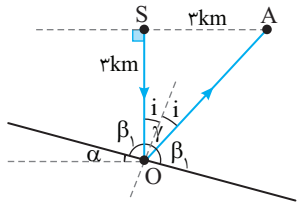
می‌خواهیم پرتو تابش روی خودش بازتاب کند، بنابراین باید پرتو تابش بر سطح آینه عمود شود، یعنی زاویهٔ بین پرتو تابش با سطح آینه ۹۰° شود. در نتیجه مطابق شکل آینه باید ۷۵° پادساعتگرد دوران کند.



C ۲۰۰۵ ۱

۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ SOA زاویهٔ بین پرتو تابش SO و پرتو بازتاب OA را با استفاده از روابط مثلثاتی به دست می‌آوریم:

$$\tan\gamma=\frac{SA}{SO}\Rightarrow\tan\gamma=\frac{۳}{۳}=۱\Rightarrow\gamma=۴۵^\circ$$



۲ زاویهٔ تابش بر سطح تیغه برابر نصف زاویهٔ بین پرتو تابش و بازتاب است.

$$i=\frac{\gamma}{۲}\Rightarrow i=\frac{۴۵}{۲}=۲۲/۵^\circ$$

۳ زاویه‌ای که پرتو بازتاب (OA) با سطح تیغه می‌سازد برابر است با:

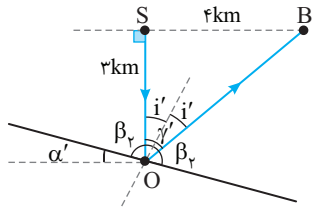
$$\beta=۹۰-۲۲/۵=۶۷/۵^\circ$$

۴ زاویهٔ α را به‌دست می‌آوریم. $\alpha+\beta_۱=۹۰\Rightarrow\alpha+۶۷/۵=۹۰\Rightarrow\alpha=۲۲/۵^\circ$

۵ در حالت دوم همان کارها را مجدداً تکرار می‌کنیم.

زاویهٔ بین پرتو تابش SO و پرتو بازتاب OB را به دست می‌آوریم:

$$\tan\gamma'=\frac{SB}{SO}\Rightarrow\tan\gamma'=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\gamma'=۵۳^\circ$$



۶ زاویهٔ تابش بر سطح آینه در حالت دوم خواهد شد:

$$i'=\frac{\gamma'}{۲}\Rightarrow i'=\frac{۵۳}{۲}\Rightarrow i'=۲۶/۵^\circ$$

۷ زاویهٔ $\beta_۲$ را حساب می‌کنیم: $i'+\beta_۲=۹۰\Rightarrow۲۶/۵+\beta_۲=۹۰\Rightarrow\beta_۲=۶۳/۵^\circ$

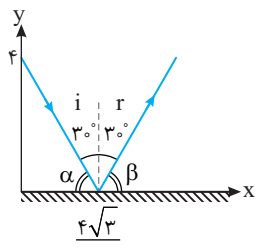
۸ زاویهٔ α' خواهد شد: $\alpha'+\beta_۲=۹۰\Rightarrow\alpha'=۹۰-۶۳/۵\Rightarrow\alpha'=۲۶/۵^\circ$

۹ بنابراین باید تیغه را $۴^\circ=۲۲/۵^\circ-۲۶/۵^\circ$ بچرخانیم.

C ۲۰۰۶ ۴

۱ ابتدا خط $y=-\sqrt{۳}x+۴$ را رسم می‌کنیم. عرض از مبدأ خط ۴+ و شیب خط برابر $-\sqrt{۳}$ است. زاویهٔ بین پرتو و سطح آینه را به‌دست می‌آوریم:

$$\tan\alpha=\sqrt{۳}\Rightarrow\alpha=۶۰^\circ$$



۲ زاویهٔ پرتو تابش با سطح آینه ۶۰° شد، بنابراین زاویهٔ پرتو بازتاب با سطح آینه نیز $\beta=۶۰^\circ$ می‌شود.

۳ محل برخورد پرتو بر سطح آینه را مشخص می‌کنیم.

$$y=-\sqrt{۳}x+۴\xrightarrow{y=۰}-\sqrt{۳}x+۴=۰\Rightarrow x=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

۴ اکنون می‌توانیم معادلهٔ خطی که پرتو بازتاب بر آن منطبق است را به دست آوریم.

شیب خط خواهد شد: $\tan\beta=\tan۶۰^\circ=\sqrt{۳}$

این خط از نقطهٔ $(\frac{۴\sqrt{۳}}{۳},۰)$ می‌گذرد. در این صورت:

$$\tan\beta=\frac{y-y_۰}{x-x_۰}\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{y-۰}{x-\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}}\Rightarrow y=\sqrt{۳}x-۴$$

C ۲۰۰۷ ۳

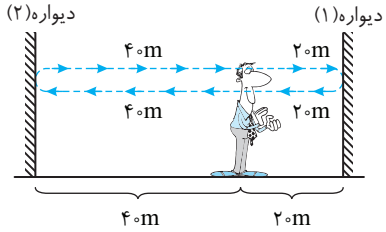
صوت تولید شده ابتدا به دیوار (۱) رسیده و پس از بازتاب به گوش شخص می‌رسد و پژواک دوم ناشی از پژواک از دیوار (۲) می‌باشد

زمان رفت و برگشت پژواک اول: $d_۱=۲۰+۲۰=۴۰\,m, v_۱=۳۲۰\,m/s\Rightarrow t_۱=\frac{d_۱}{v_۱}$

$$\Rightarrow t_۱=\frac{۴۰}{۳۲۰}=\frac{۱}{۸}=۰/۱۲۵\,s$$ زمان رفت و برگشت پژواک اول

$$d_۲=۴۰+۴۰=۸۰\,m, v_۲=۳۲۰\,m/s\Rightarrow t_۲=\frac{d_۲}{v_۲}$$

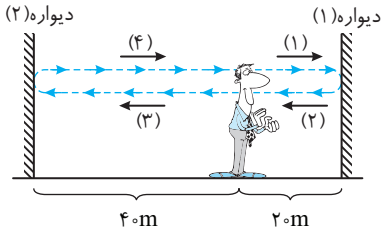
$$\Rightarrow t_۲=\frac{۸۰}{۳۲۰}=\frac{۱}{۴}=۰/۲۵\,s$$ زمان رفت و برگشت پژواک دوم



یعنی در لحظه‌های ۰/۱۲۵s و ۰/۲۵s از هر دیواره یک پژواک یعنی جمعاً دو پژواک به گوش شخص می رسد.

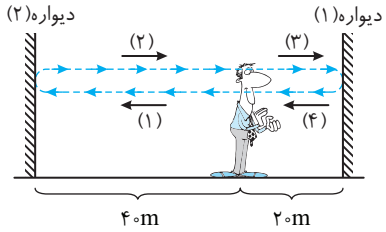
صوت برخورد کرده به دیوارهٔ (۱) می‌تواند به دیوارهٔ (۲) برخورد کند و سپس به گوش شخص برسد: زمان این پژواک را حساب می‌کنیم:

$$d'_۱=۲(۲۰)+۲(۴۰)=۱۲۰\,m, v=۳۲۰\,m/s\Rightarrow t'_۱=\frac{d'_۱}{v}=\frac{۱۲۰}{۳۲۰}=\frac{۳}{۸}=۰/۳۷۵\,s$$



اما همین مطلب در مورد پژواک بازتابیده از دیوارهٔ (۲) نیز صدق می‌کند. یعنی این پژواک می‌تواند به دیوارهٔ (۱) برسد و از روی دیوارهٔ (۱) بازتاب کرده و مجدداً به گوش شخص برسد. زمان این پژواک را نیز به دست می‌آوریم:

$$d'_۲=۲(۴۰)+۲(۲۰)=۱۲۰\,m, v=۳۲۰\,m/s\Rightarrow t'_۲=\frac{d'_۲}{v}=\frac{۱۲۰}{۳۲۰}=\frac{۳}{۸}=۰/۳۷۵\,s$$



جالب شد! زمان پژواک دوم از هر دیواره ۰/۳۷۵s است، یعنی دو پژواک با هم به گوش می‌رسند. اما گوش نمی‌تواند آن‌ها را از هم تشخیص دهد زیرا برای تمیز دادن دو صوت از هم حداقل اختلاف زمانی ۰/۱s لازم است. در نتیجه گوش شخص در مدت ۰/۴s جمعاً سه پژواک را درک می‌کند.

C ۲۰۰۸ ۱

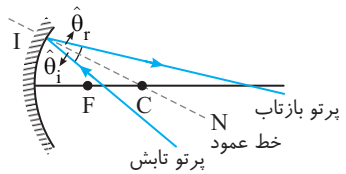
خط فکری به شکل سؤال دقت کنید. وقتی شخص دست می‌زند، امواج صوتی کروی به سوی پلکان می‌رود. اولین پژواک از اولین پله، دومین پژواک در اثر بازتاب از دومین پله و ... به گوش شخص می‌رسد و اختلاف زمانی هر دو پژواک متوالی که شخص دریافت می‌کند برابر دورهٔ صدای دریافتی توسط شخص است؛ یعنی برای به‌دست آوردن دوره، شما باید زمان رفت و برگشت صوت روی یک پله (۲ℓ) را به دست بیاورید و از آنجا بسامد را حساب کنید.

دورهٔ صدای بازگشتی را حساب می‌کنیم: $\Delta x=v\Delta t\Rightarrow۲\ell=vT\Rightarrow T=\frac{۲\ell}{v}$

بسامد صدای دریافتی خواهد شد: $f=\frac{۱}{T}\Rightarrow f=\frac{v}{۲\ell}\Rightarrow f=\frac{۳۲۰}{۲\times۰/۵}\Rightarrow f=۳۲۰\,Hz$

B ۴ ۲۰۰۹

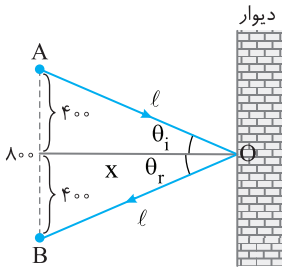
بنـا به قانون بازتاب عمومـی، زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب با هم برابرند. یعنی اگر در نقطهٔ تابش خطی عمود بر سطح بازتاب کننده رسم کنیم زاویهٔ بین پرتو تابش با این خط عمود با زاویهٔ بین پرتو بازتاب و خط عمود برابر است، اما چگونه خط عمود بر این سطح کاو را رسـم کنیم. برای این کار کافی اسـت یک شـعاع از مرکز سطح به نقطهٔ تابش (I) رسم کنید. شعاع بر سطح عمود است، بنابراین شما با این کار خط عمود بر سطح تابش را رسم کرده‌اید و می‌توانید پرتو بازتاب را رسم کنید. دراین حالت گزینهٔ (۴) پاسخ مسئله است.



C ۲ ۲۰۱۰

۱ صدا اول مسـتقیماً از محل شلیک در امتداد AB به شـنونده می‌رسـد، که این مدت برابر است با:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow ۳۲۰=\frac{۸۰۰}{\Delta t_{AB}}$$
$$\Rightarrow \Delta t_{AB}=۲/۵\,s$$



۲ صدای دوم در اثر بازتاب صوت از دیوار به گوش شخص می‌رسد. با توجه به فرض مسئله اختلاف زمانی دو صورت رسیده به شـخص ۰/۶۲۵ اسـت؛ از این‌رو مدت زمان رسیدن صدای دوم از چشمه به شخص خواهد شد:

$$\Delta t'=۲/۵+۰/۶۲۵=۳/۱۲۵\,s$$

۳ بـا توجه به قانـون عمومی بازتاب صوت به‌صورت شـکل روبـه‌رو از دیوار بازتاب می‌شود، بنابراین فاصلهٔ هر شخص تا محل بازتاب خواهد شد:

$$v=\frac{۲\ell}{\Delta t}\Rightarrow ۳۲۰=\frac{۲\ell}{۳/۱۲۵}\Rightarrow ۲\ell=۱۰۰۰\Rightarrow \ell=۵۰۰\,m$$

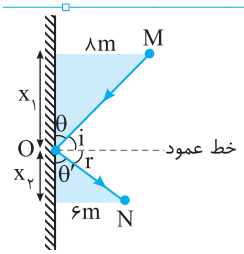
۴ در این صورت فاصلهٔ هر شخص از دیوار خواهد شد:

$$۵۰۰^۲=۴۰۰^۲+x^۲\Rightarrow x=۳۰۰\,m$$

B ۳ ۲۰۱۱

مسـیر پرتو عبوری از M که پس از بازتاب به N رسیده را رسم می‌کنیم.

بـا توجـه به اینکـه زاویـهٔ تابـش (i) و زاویهٔ بازتـاب (r) با هـم برابرند پـس زاویه‌ای که پرتوها با سـطح می‌سازند θ و θ' نیز با هم برابر بوده و دو مثلث رنگی با هم متشابه‌اند:



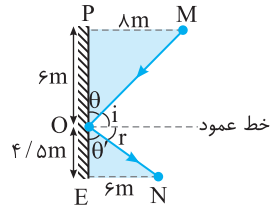
دو مثلث متشابه: $\frac{PM}{PO}=\frac{NE}{EO}\Rightarrow\frac{۸}{x_۱}=\frac{۶}{x_۲}\Rightarrow x_۲=\frac{۳}{۴}x_۱$

با توجه به شکل سؤال $x_۱+x_۲$ برابر ۱۰/۵ متر است:

$$x_۱+x_۲=۱۰/۵\Rightarrow x_۱+\frac{۳}{۴}x_۱=۱۰/۵\Rightarrow\frac{۷x_۱}{۴}=۱۰/۵$$
$$\Rightarrow x_۱=۶m, x_۲=\frac{۳}{۴}\times۶=۴/۵m$$

حال طول پرتوهای MO و NO را حساب می‌کنیم:

$$OM=\sqrt{PM^۲+PO^۲}\Rightarrow OM=\sqrt{۸^۲+۶^۲}=۱۰\,m$$
$$ON=\sqrt{NE^۲+OE^۲}\Rightarrow ON=\sqrt{۶^۲+(۴/۵)^۲}=۷/۵\,m$$



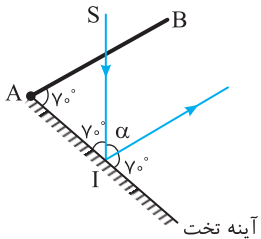
حال با توجه به سرعت نور، مدت زمانی که هر مسیر طی می‌شود را حساب می‌کنیم:

$$c=\frac{\text{طول مسیر طی شده}}{\text{مدت زمان}}\Rightarrow\begin{cases}۳\times۱۰^۸=\frac{۱۰}{\Delta t_{MO}}\Rightarrow\Delta t_{MO}=\frac{۱۰}{۳}\times۱۰^{-۸}\\ ۳\times۱۰^۸=\frac{۷/۵}{\Delta t_{ON}}\Rightarrow\Delta t_{ON}=\frac{۷/۵}{۳}\times۱۰^{-۸}\end{cases}$$

کل زمان طی شده برابر است با:

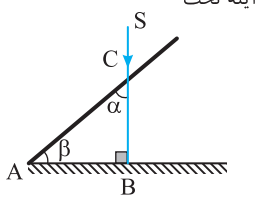
$$\Delta t_{\text{کل}}=\Delta t_{MO}+\Delta t_{ON}=\frac{۱۰}{۳}\times۱۰^{-۸}+\frac{۷/۵}{۳}\times۱۰^{-۸}$$
$$\Rightarrow\Delta t_{\text{کل}}=\frac{۱۷/۵}{۳}\times۱۰^{-۸}s=\frac{۱/۷۵}{۳}\times۱۰^{-۷}s$$

B ۲ ۲۰۱۲



حالـت (۱) پرتـو بازتـاب و سـطح AB با هم موازی‌انـد پس طبـق خطوط مـوازی و مورب زاویه پرتو بازتاب با آینهٔ تخت برابر زاویه بین دو سطح ۷۰° است بنابراین زاویه بین پرتو SI با سطح آینه نیز ۷۰° است، زاویهٔ α را حساب می‌کنیم.

$$۷۰+۷۰+\alpha=۱۸۰\Rightarrow\alpha=۴۰^\circ$$

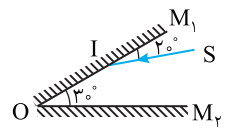


حالت (۲): در این حالت باید پرتو بر مسیر پرتو SI عمود باشد تا بازتاب پرتو روی خودش صورت گیرد و پرتـو از شـکاف S خـارج اسـت، بنابراین مثلث ABC یک مثلث قائم‌الزاویه است که زاویه α در آن ۴۰° است، بنابراین زاویه بین آینه و دیواره (β) خواهد شد.

$$\alpha+\beta+۹۰=۱۸۰\xrightarrow{\alpha=۴۰^\circ}\beta=۵۰^\circ$$

در نتیجه زاویه بین دو آینه از ۷۰° به ۵۰° رسیده و ۲۰° کاهش یافته است.

بازی با سؤال **آینهٔ $M_۱$ را چند درجه و در کدام جهت حول O بچرخانیم تا زاویهٔ تابش بر آینهٔ $M_۲$ صفر درجه شود؟**



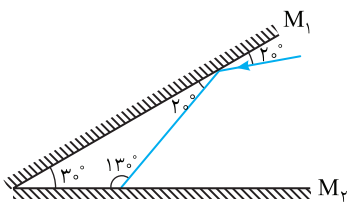
۱) ۴۰°، پادساعتگرد

۲) ۴۰°، ساعتگرد

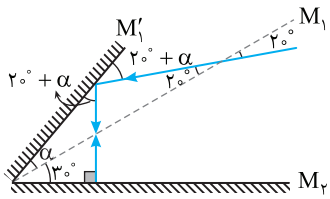
۳) ۲۰°، پادساعتگرد

۴) ۲۰°، ساعتگرد

پاسخ **زاویهٔ تابش صفر یعنی پرتو بازتاب و تابش روی هم بیفتند. یعنی پرتو با سـطح آینه زاویهٔ ۹۰° می‌سـازد، بنابرایـن باید زاویهٔ پرتو با سـطح آینهٔ $M_۱$ افزایش پیدا کند. در نتیجه آینهٔ $M_۱$ باید پادساعتگرد بچرخد.**



با توجه به شکل:



$$۲۰^\circ+\alpha+۳۰^\circ+\alpha=۹۰^\circ\Rightarrow۲\alpha=۴۰^\circ\Rightarrow\alpha=۲۰^\circ$$

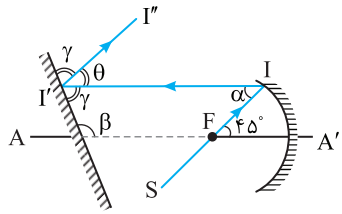
گزینهٔ ۳

C ۲۰۱۳ ۲

نکته هرگاه پرتو از کانون بگذرد و به سطح کاو بتابد، در بازتاب موازی محور آینه باز می‌گردد.

۱ پرتو SI به سطح کاو می‌تابد و موازی محور AA' بازتاب می‌کند.

۲ با توجه به خطوط موازی و مورب، زاویهٔ $\alpha=45^\circ$ است.



۳ پرتو بازتاب II' به سطح آینهٔ تخت تابیده و پرتو بازتاب آن بنا به فرض مسئله با پرتو SI موازی است.

۴ با توجه به خطوط موازی و مورب، دو زاویهٔ α و θ برابرند: $\theta=\alpha\Rightarrow\theta=45^\circ$

۵ بنا به قانون بازتاب عمومی، زاویه‌ای که پرتو II' با سطح آینه می‌سازد (γ) با زاویه‌ای که پرتو بازتاب $I'I''$ با سطح آینه تخت می‌سازد هم اندازه است، بنابراین:

$$2\gamma+\theta=180\xrightarrow{\theta=45^\circ}2\gamma=180-45\Rightarrow2\gamma=135\Rightarrow\gamma=67/5^\circ$$

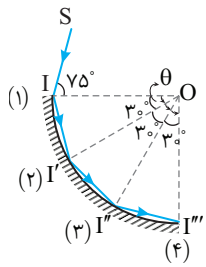
۶ بنا به خطوط موازی - مورب خواهیم داشت: $\beta=\gamma+\theta=67/5+45=112/5^\circ$

C ۲۰۱۴ ۴

خط فکری مسئلهٔ زیبایی است اما شما باید چند مطلب را به خودتان یادآوری کنید.

۱ شعاع دایره در این مسئله در هر نقطه، همان خط عمود بر سطح آینه است.

۲ زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب با هم برابرند، اکنون باید مسیر پرتو را دنبال کنید.



زاویهٔ تابش در نقطهٔ I، 75° است و زاویهٔ بازتاب نیز 75° است. پرتو در نقطهٔ I' به سطح آینه برخورد می‌کند. چون مثلث OII' متساوی‌الساقین است، زاویهٔ تابش در I' نیز 75° است. در این صورت در مثلث OII' زاویهٔ θ برابر است با:

$$\theta+75+75=180\Rightarrow\theta=30^\circ$$

پرتو در ادامهٔ مسیرش دوباره به سطح آینه در نقطهٔ I'' برخورد می‌کند و مجدداً زاویهٔ تابش 75° است و زاویهٔ رأس مثلث $OI'I''$، 30° می‌شود؛ یعنی به ازای هر 30° چرخش شعاع، یک بار نور به آینه می‌خورد. بنابراین مطابق شکل ۴ بار پرتو از روی آینه بازتاب می‌کند.

میانبر اگر زاویهٔ تابش اول بر سطح این آینهٔ کروی شکل i باشد، علاوه بر برخورد اول به ازای هر $\theta=180-2i$ یک بار پرتو به آینه برخورد می‌کنند.

$$n=\frac{90}{180-(2\times75)}+1=\frac{90}{30}+1=4$$

B ۲۰۱۵ ۴

۱ زاویهٔ تابش SI بر سطح آینه، α نامیده شده است و بنا به قانون بازتاب عمومی، زاویهٔ بازتاب آن را در شکل نیز با α نمایش داده‌ایم.

۲ در مثلث OII' دو ضلع OI و OI' شعاع دایره هستند و با هم برابرند. بنابراین مثلث OII' متساوی‌الساقین است و زاویهٔ رأس I' نیز α است.

۳ زاویهٔ پرتو بازتاب از نقطهٔ I' نیز α است.

۴ مجموع زوایای یک مثلث 180° است؛ از این‌رو در مثلث OII' خواهیم داشت:

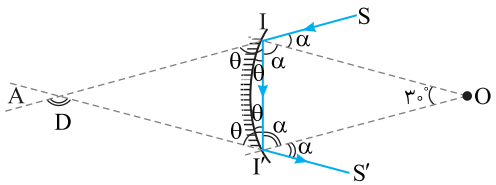
$$2\alpha+30=180\Rightarrow\alpha=75^\circ$$

۵ مجموع دو زاویهٔ α و زاویهٔ θ برابر 180° است: از این‌رو:

$$2\alpha+2\theta=180\Rightarrow2\times75+\theta=180\Rightarrow\theta=30^\circ$$

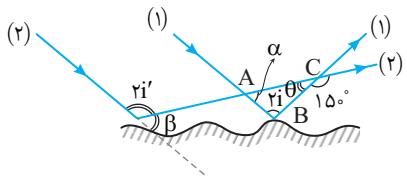
۶ زاویهٔ D زاویهٔ خارجی مثلث AII' است؛ در نتیجه می‌توان نوشت:

$$D=\theta+\theta\Rightarrow D=30^\circ+30^\circ=60^\circ$$



C ۲۰۱۶ ۴

۱ بنا به فرض مسئله دو پرتو (۱) و (۲) موازی هستند. پرتو (۲) را امتداد می‌دهیم، در این صورت زاویهٔ α و زاویهٔ β روی شکل بنا به خطوط موازی و مورب برابر هستند. $(\alpha=\beta)$



۲ زاویهٔ θ روی شکل برابر $\theta=180^\circ-150^\circ=30^\circ$ است.

۳ زاویهٔ بین پرتو تابش (۱) و پرتو بازتاب آن را با $2i$ نمایش می‌دهیم، در این صورت می‌توان نوشت: $(I)\quad 2i+\alpha+\theta=180^\circ\Rightarrow2i+\alpha+30=180\Rightarrow2i=150-\alpha$

۴ زاویهٔ بین پرتو تابش (۲) و پرتو بازتاب آن را با $2i'$ نمایش می‌دهیم، بنابراین می‌توان نوشت: $(II)\quad 2i'+\beta=180^\circ\xrightarrow{\beta=\alpha}2i'+\alpha=180^\circ\Rightarrow2i'=180^\circ-\alpha$

۵ دو رابطهٔ (I) و (II) از هم کم می‌کنیم:

$$2i'-2i=180^\circ-\alpha-(150^\circ-\alpha)\Rightarrow2(i'-i)=30^\circ\Rightarrow i'-i=15^\circ$$

میانبر هرگاه شکلی شبیه شکل مسئله به شما داده شود خواهیم داشت: $i'-i=\frac{\theta}{2}$

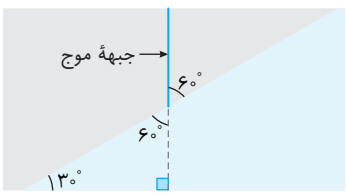
B ۲۰۱۷ ۱

نکته ۱ زاویهٔ بین جبههٔ موج و مرز برابر است با زاویهٔ بین پرتو موج و خط عمود.

نکته ۲ در آب کم‌عمق، در ناحیه‌ای که عمق بیشتر است تندی انتشار موج و طول موج بزرگ‌تر است.

۱ در شکل زاویهٔ بین جبهه‌های شکست و مرز دو محیط 30° است، بنابراین زاویهٔ شکست $(\theta_2=30^\circ)$ می‌شود.

۲ حال باید سراغ زاویهٔ تابش برویم. یکی از جبهه‌های تابش را امتداد می‌دهیم تا یک مثلث قائم‌الزاویه مطابق شکل بسازیم. اکنون مشخص است که جبهه‌های موج تابش با مرز دو محیط زاویهٔ $\theta_1=60^\circ$ می‌سازند.



۳ بنا به قانون شکست عمومی $\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\frac{v_2}{v_1}$ و از طرفی هنگام گذر موج از یک محیط به محیط دیگر بسامد ثابت می‌ماند. از این‌رو طول موج با تندی انتشار موج در محیط نسبت مستقیم دارد.

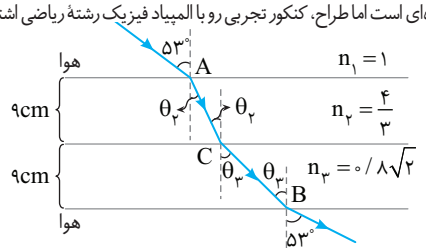
$$v_1=f\lambda_1\ ,\ v_2=f\lambda_2\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

۴ محیط اول از محیط دوم عمیق‌تر است بنابراین باید نسبت $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ را حساب کنیم.

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Rightarrow\frac{\sin60^\circ}{\sin30^\circ}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt3}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Rightarrow\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\sqrt3$$

B ۲۰۱۸ ۳*

این تست ساده‌ای است اما طراح، کنکور تجربی رو با المپیاد فیزیک رشتهٔ ریاضی اشتباه گرفته. ☺



۱ ابتدا تندی نور در محیط n_2 را حساب می‌کنیم.

$$\frac{n_2}{n_1}=\frac{v_1}{v_2}\Rightarrow\frac{4}{3}=\frac{3\times10^8}{v_2}\Rightarrow v_2=\frac{9}{4}\times10^8\,m/s$$

۲ زاویهٔ ورود (شکست) به محیط (۲) را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{n_2}{n_1}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\Rightarrow\frac{4}{3}=\frac{0/8}{\sin\theta_2}\Rightarrow\sin\theta_2=0/6\Rightarrow\theta_2=37^\circ$$

۳ اکنون AC را حساب می‌کنیم:

$$\cos\theta_2=\frac{9}{AC}\Rightarrow0/8=\frac{9}{AC}\Rightarrow AC=\frac{90}{8}cm=\frac{90}{8}\times10^{-2}m$$

۴ زمان طی مسیر AC برابر است با:

$$t_{AC}=\frac{AC}{v_2}=\frac{\frac{90}{8}\times10^{-2}}{\frac{9}{4}\times10^8}=5\times10^{-10}s=0/5ns$$

۵ اکنون به سراغ محیط (۳) می‌رویم:

$$\frac{n_3}{n_1}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_3}\Rightarrow n_3=\frac{\sin53^\circ}{\sin\theta_3}\Rightarrow0/8\sqrt{2}=\frac{0/8}{\sin\theta_3}$$

$$\Rightarrow\sin\theta_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta_3=45^\circ$$

۶ بنابراین CB برابر $9\sqrt{2}cm$ خواهد بود. تندی در محیط (۳) برابر است با:

$$v_3=\frac{c}{n_3}\Rightarrow v_3=\frac{3\times10^8}{0/8\sqrt{2}}m/s$$

$$t_{CB}=\frac{CB}{v_3}=\frac{9\sqrt{2}\times10^{-2}}{\frac{3\times10^8}{0/8\sqrt{2}}}=\frac{9\sqrt{2}\times0/8\sqrt{2}\times10^{-2}}{3\times10^8}$$

$$t_{CB}=4/8\times10^{-10}=0/48ns\quad,\quad t_{کل}=0/5+0/48=0/98ns$$

بالاخره حل تمام شد اما دقت کردید پاسخ در گزینه‌ها نیست. البته اگر حل را یاد گرفته‌اید نگران نباشید.

A ۲۰۱۹ ۱

یادآوری ضریب شکست یک محیط برابر نسبت سرعت نور در خلأ به سرعت نور در آن محیط است. $(n=\frac{c}{v})$.

۱ با توجه به ضریب شکست‌ها سرعت نور در هر لایه را به‌دست می‌آوریم:

$$v_1=\frac{c}{n}=\frac{c}{1/5}\ ,\ v_2=\frac{c}{n'}=\frac{c}{1/7}\ ,\ v_3=\frac{c}{n''}=\frac{c}{1/6}$$

۲ پرتو یک‌بار از بین دو لایه با ضریب شکست‌های n و n' رد می‌شود و بار دیگر از لایه با ضریب شکست n'' و همان‌طور که می‌دانید $t=\frac{x}{v}$، بنابراین زمان گذر از هر لایه را به‌دست می‌آوریم:

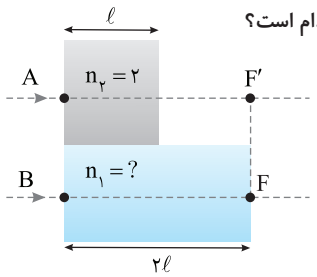
$$t_1=\frac{\ell}{\frac{c}{1/5}}\Rightarrow t_1=1/5\frac{\ell}{c}\ ,\ t_2=\frac{\ell}{\frac{c}{1/7}}\Rightarrow t_2=1/7\frac{\ell}{c}$$

$$\Rightarrow\Delta t_{1,2}=t_1+t_2\Rightarrow\Delta t=3/2\frac{\ell}{c}\quad,\quad t_3=\frac{2\ell}{\frac{c}{1/6}}\Rightarrow t_3=3/2\frac{\ell}{c}$$

۳ بنابراین اختلاف زمان صفر است.

* کلید سازمان سنجش، ۳ با تأثیر مثبت

بازی با سؤال مطابق شکل روبه‌رو دو پرتو A و B به طور هم‌زمان از هوا وارد محیط‌های شفاف n_2 و n_1 می‌شوند و به‌طور هم‌زمان از نقاط F' و F عبور می‌کنند. ضریب شکست n_1 کدام است؟



۱) $\frac{3}{2}$

۲) $\frac{4}{3}$

۳) $\frac{6}{5}$

۴) $\frac{5}{3}$

پاسخ سرعت انتشار پرتو A از درون محیط شفاف n_2 برابر است با:

$$v=\frac{c}{n_2}\Rightarrow v_A=\frac{c}{2}$$

زمان رسیدن پرتو A به نقطهٔ F' از دو قسمت تشکیل شده است. در جابه‌جایی ℓ سرعت $\frac{c}{2}$ و در جابه‌جایی ℓ بعدی تندی انتشار c است؛ بنابراین:

$$\Delta x=vt\Rightarrow t=\frac{\Delta x}{v}\Rightarrow t_A=\frac{\ell}{\frac{c}{2}}+\frac{\ell}{c}\Rightarrow t_A=\frac{3\ell}{c}$$

بنا به فرض مسئله زمان گذر پرتو B از محیط n_1 نیز برابر t_A است، از این‌رو:

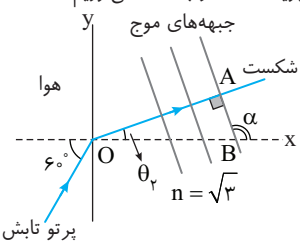
$$t_B=t_A=\frac{3\ell}{c}\xrightarrow{t_B=\frac{2\ell}{v_B}}\frac{2\ell}{v_B}=\frac{3\ell}{c}\Rightarrow\frac{c}{v_B}=\frac{3}{2}\xrightarrow{n=\frac{c}{v}}n=\frac{3}{2}$$

گزینهٔ ۱

C ۲۰۲۰ ۴

خط فکری دقت کنید که مرز دو محیط محور yهاست. بنابراین زاویه‌ای که پرتو تابش با محور xها می‌سازد، زاویهٔ تابش است $(\theta_i=60^\circ)$ با دانستن این مطلب زاویهٔ شکست را بیابید $(\theta_2=?)$، سپس با رسم جبهه‌های موج زاویهٔ بین این جبهه‌ها با محور xها را مشخص کرده و شیب این جبهه‌ها را حساب کنید.

۱ ابتدا با توجه به قانون شکست اسنل زاویهٔ شکست را به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{n_2}{n_1}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\theta_2}=\frac{\sqrt{3}}{1}$$

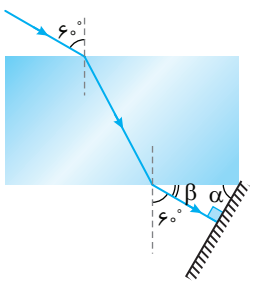
$$\Rightarrow\sin\theta_2=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta_2=30^\circ$$

۲ همان‌طور که می‌دانیم جبهه‌های موج بر پرتو عمودند، بنابراین جبهه‌های شکست بر پرتو شکست عمود بوده و جبهه‌های شکست با محور xها زاویهٔ α می‌سازند در مثلث OAB، α زاویهٔ خارجی است و مقدار آن خواهد شد: $\alpha=90+30=120^\circ$

۳ اکنون شیب جبهه‌های موج شکست قابل محاسبه است:

شیب جبهه‌های موج شکست $=\tan120^\circ=-\tan60^\circ=-\sqrt{3}$

B ۲۰۲۱ ۱

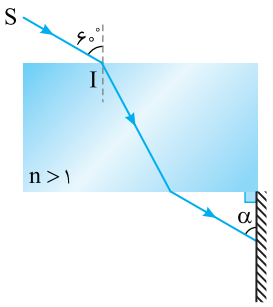


هنگامی بازتاب پرتو تابش روی خودش خواهد بود که پرتو بر سطح آینه عمود باشد. زاویهٔ ورودی به یک تیغه متوازی‌السطوح با زاویهٔ خروجی از تیغه برابر است. بنابراین زاویه‌ای که پرتو خروجی با وجه تیغه می‌سازد $\beta=90-60=30^\circ$ می‌شود. پرتو خروجی بر سطح آینه عمود است؛ از این‌رو زاویهٔ α خواهد شد:

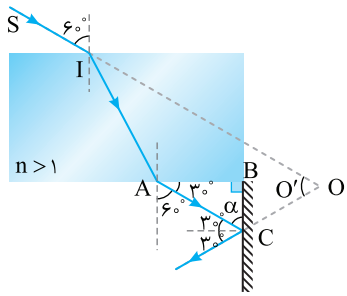
$$\alpha=180^\circ-(90^\circ+30^\circ)\Rightarrow\alpha=60^\circ$$

بازی با سؤال مطابق شکل، پرتوی SI از هوا با زاویهٔ تابش 60° به وجه AB یک تیغهٔ متوازی‌السطوح می‌تابد و وارد تیغه می‌شود. این پرتو پس از خروج از تیغه به یک آینهٔ تخت برخورد می‌کند. پرتو بازتابیده از آینه با امتداد پرتوی SI چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۱) 53°
۲) 120°
۳) 90°
۴) 150°



پاسخ پرتو خروجی از تیغهٔ تخت با پرتوی ورودی به تیغهٔ موازی است. بنابراین هر زاویه‌ای که پرتو بازتاب از آینه با پرتوی خروجی می‌سازد طبق خطوط موازی و مورب، همان زاویه را با پرتو SI می‌سازد. زاویهٔ خروجی از تیغه 60° است و پرتوی خروجی با وجه تیغه زاویهٔ 30° می‌سازد. مثلث ABC قائم‌الزاویه بوده و زاویهٔ $\alpha=90^\circ-30^\circ=60^\circ$ است. از این‌رو زاویهٔ تابش بر سطح آینه $i=30^\circ$ می‌شود و زاویهٔ بین پرتو بازتاب و پرتو تابش $2i=60^\circ$ خواهد شد. پرتو SI و پرتو AB موازی هستند، بنابراین زاویهٔ O' بنا به خطوط موازی - مورب 60° و زاویهٔ D، 120° خواهد بود.

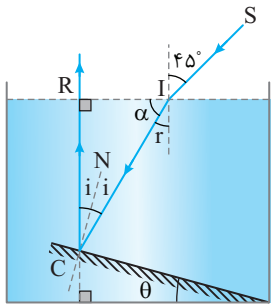


گزینهٔ ۲

C ۲۰۲۲ | ۱

۱ ابتدا زاویهٔ شکست در آب را به‌دست می‌آوریم:

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$$
$$\Rightarrow 1\times\sin 45=\sqrt{2}\sin r$$
$$\Rightarrow \sin r=\frac{1}{2}=30^\circ\Rightarrow r=30^\circ$$



۲ زاویه‌ای که پرتو شکست با سطح مایع می‌سازد خواهد شد:

$$\alpha=90^\circ-30^\circ=60^\circ$$

۳ مثلث RIC قائم‌الزاویه است، از این‌رو زاویهٔ بین پرتو تابش IC و پرتو بازتاب CR خواهد شد: $2i+\alpha+90^\circ=180^\circ\xrightarrow{\alpha=60^\circ}2i+60^\circ+90^\circ=180^\circ\Rightarrow i=15^\circ$

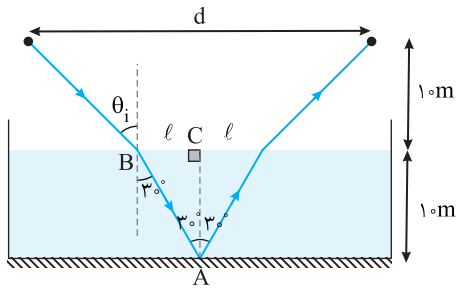
یادداشت ریاضی هرگاه دو ضلع یک زاویه بر دو ضلع زاویهٔ دیگر عمود باشند، آن دو زاویه برابر یا مکمل یکدیگرند.

به اصلاح زاویهٔ بازتاب i دقت کنید. یک ضلع آن خط عمود N است که بر سطح آینه یعنی یکی از ضلع‌های زاویهٔ θ عمود است، ضلع دیگر آن خط RC است که بر سطح افقی یعنی ضلع دیگر زاویهٔ θ عمود است، بنابراین $\theta=i=15^\circ$ است.

C ۲۰۲۳ | ۲

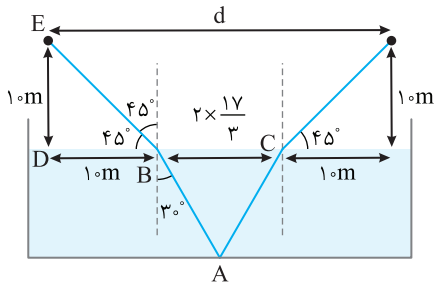
۱ با توجه به قانون بازتاب عمومی زاویه پرتو تابش به آینه و بازتاب از آن با هم برابر است، بنابراین در مثلث ABC می‌توان نوشت:

$$\Delta ABC\Rightarrow\tan 30^\circ=\frac{\ell}{10}\Rightarrow\ell=\frac{10\sqrt{3}}{3}\,m\Rightarrow\ell=\frac{17}{3}\,m$$



۲ همچنین می‌توان θ_i را با توجه به قانون شکست اسنل به‌دست آورد:

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin 30^\circ}=\frac{n_2}{n_1}\Rightarrow\frac{\sin\theta_i}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{1}\Rightarrow\sin\theta_i=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta_i=45^\circ$$



۳ بنابراین مثلث BDE متساوی‌الساقین بوده و ضلع $BD=10cm$ می‌شود.

۴ در این صورت با توجه به شکل مقدار d خواهد شد: $d=10+2\times\frac{17}{3}+10=\frac{94}{3}\,m$

B ۲۰۲۴ | ۱

خط فکری باید زاویهٔ تابش بر هر وجه را به کمک زوایا و اضلاع روی شکل پیدا کنید، سپس با داشتن زوایای شکست در هر دو محیط، ضریب شکست آن‌ها را به دست آورید و نسبت $\frac{n}{n'}$ را حساب کنید.

۱ مثلث SAB، متساوی‌الساقین است، بنابراین زاویهٔ β روی شکل 45°، زاویهٔ تابش پرتو SB بر وجه AB برابر $\theta_{i_2}=45^\circ$ است.

۲ ضلع CD برابر $\sqrt{3}d$ و ضلع SC برابر d است، از این‌رو زاویهٔ α روی شکل خواهد شد:

$$\tan\alpha=\frac{d}{\sqrt{3}d}\Rightarrow\alpha=30^\circ$$

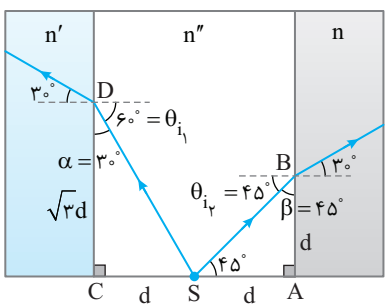
در نتیجه زاویهٔ تابش پرتو SD برابر $\theta_{i_1}=60^\circ$ است.

۳ اکنون به کمک قانون شکست اسنل، ضریب شکست هر محیط را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\sin\theta_{i_1}}{\sin 30^\circ}=\frac{n'}{n''}\Rightarrow n'=\sqrt{3}n''\quad,\quad\frac{\sin\theta_{i_2}}{\sin 30^\circ}=\frac{n}{n''}\Rightarrow n=\sqrt{2}n''$$

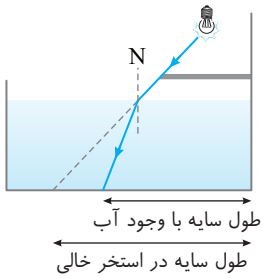
۴ نسبت ضریب شکست‌ها خواهد شد:

$$\frac{n}{n'}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$



A ۲۰۲۵ ۱

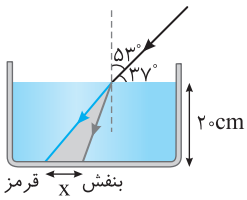
هنگامی که پرتو به سطح آب می‌تابد و وارد آب می‌شود، به خط عمود (N) نزدیک می‌شود و طول سایه کوتاه‌تر می‌شود.



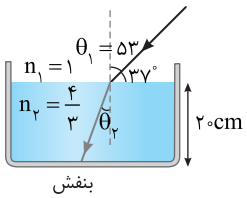
B ۲۰۲۶ ۳

یادآوری عموماً ضریب شکست یک محیط معین برای طول موج‌های کوتاه‌تر، بیشتر است.

۱ با توجه به نکتهٔ بالا در یک محیط، نور قرمز کمترین و نور بنفش بیشترین ضریب شکست را دارد، بنابراین:



۲ در شکل بالا x خواسته سؤال است، زاویهٔ شکست پرتو بنفش را حساب می‌کنیم:

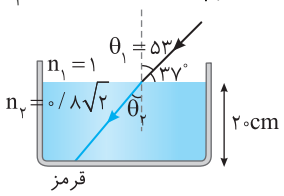


$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{n_2}{n_1}\Rightarrow\frac{\sin 53^\circ}{\sin\theta_2}=\frac{\frac{4}{3}}{1}$$

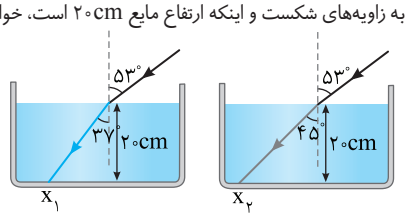
$$\Rightarrow\frac{0/8}{\sin\theta_2}=\frac{4}{3}\Rightarrow\sin\theta_2=0/6\Rightarrow\theta_2=37^\circ$$

۳ زاویه شکست پرتو قرمز را رسم می‌کنیم:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{n_2}{n_1}\Rightarrow\frac{\sin 53}{\sin\theta_2}=\frac{0/8\sqrt{2}}{1}\Rightarrow\sin\theta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\sin\theta_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta_2=45^\circ$$



۴ با توجه به زاویه‌های شکست و اینکه ارتفاع مایع ۲۰cm است، خواهیم داشت:

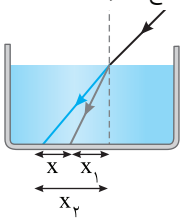


$$\tan 45^\circ=\frac{\text{ضلع روبه‌رو}}{\text{ضلع مجاور}}\xrightarrow{\tan 45^\circ=1}1=\frac{x_2}{20}\Rightarrow x_2=20\text{cm}$$

$$\tan 37^\circ=\frac{\text{ضلع روبه‌رو}}{\text{ضلع مجاور}}\xrightarrow{\tan 37^\circ=\frac{3}{4}}\frac{3}{4}=\frac{x_1}{20}\Rightarrow x_1=15\text{cm}$$

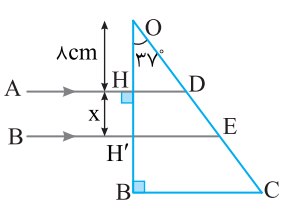
۵ حال x خواستهٔ سؤال را حساب می‌کنیم:

$$x=x_2-x_1\Rightarrow x=20-15=5\text{cm}$$



C ۲۰۲۷ ۴

۱ طول مسیر HD در منشور را به کمک مثلثات در مثلث OHD حساب می‌کنیم:



$$\tan 37^\circ=\frac{HD}{OH}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{HD}{8}$$

$$\Rightarrow HD=6\text{cm}$$

۲ سرعت پرتو A در منشور را به کمک تعریف ضریب شکست به‌دست می‌آوریم.

$$v_A=\frac{c}{n_A}\xrightarrow{n_A=1/6}v_A=\frac{c}{1/6}$$

۳ زمان حرکت پرتو A در منشور خواهد شد:

$$\Delta x=vt\Rightarrow DH=v_At_A\Rightarrow 6=\frac{c}{1/6}t_A\Rightarrow t_A=\frac{6\times 1/6}{c}$$

۴ سرعت پرتو B در منشور را حساب می‌کنیم:

$$v_B=\frac{c}{n_B}\xrightarrow{n_B=\frac{4}{3}}v_B=\frac{c}{\frac{4}{3}}\Rightarrow v_B=\frac{3c}{4}$$

۵ زمان حرکت B را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=vt\Rightarrow H'E=v_Bt_B\Rightarrow t_B=\frac{H'E}{v_B}\Rightarrow t_B=\frac{H'E}{\frac{3c}{4}}\Rightarrow t_B=\frac{4H'E}{3c}$$

۶ با توجه به فرض مسئله $t_A=t_B$. از این‌رو خواهیم داشت:

$$\frac{6\times 1/6}{c}=\frac{4H'E}{3c}\Rightarrow H'E=7/2\text{cm}$$

۷ در مثلث OH′E طول ضلع OH′ را به دست می‌آوریم:

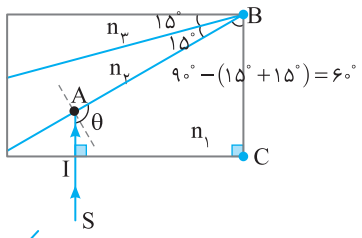
$$\tan 37^\circ=\frac{H'E}{OH'}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{7/2}{8+x}\Rightarrow 9/6=8+x\Rightarrow x=1/6\text{cm}$$

C ۲۰۲۸ ۲

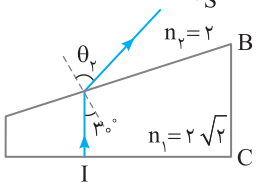
یادآوری اگر پرتویی عمود بر مرز بین دو محیط بتابد، بدون انحراف وارد محیط دوم می‌شود.

۱ با توجه به یادآوری بالا مسیر پرتو در محیط (۱) را رسم می‌کنیم:

در چهار ضلعی IABC: $\theta+90+90+60=360\Rightarrow\theta=120^\circ$



۲ برای پرتو IA نیم‌خط عمود را رسم می‌کنیم، زاویه تابش IA برابر $120-90=30^\circ$ است. حال با توجه به قانون شکست زاویهٔ θ_2' را حساب می‌کنیم:



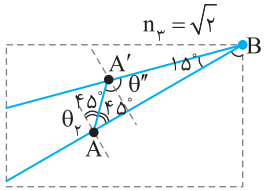
$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{n_2}{n_1}\Rightarrow\frac{\sin 30^\circ}{\sin\theta_2}=\frac{2}{2\sqrt{2}}$$

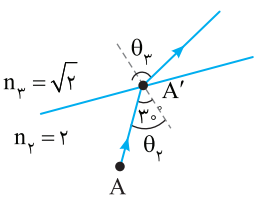
$$\Rightarrow\sin\theta_2=\sqrt{2}\sin 30^\circ\Rightarrow\sin\theta_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta_2=45^\circ$$

۳ در محیط (۲) مسیر پرتو را کشیده و زاویه تابش را به‌دست می‌آوریم:

$$\theta''+45+15=180\Rightarrow\theta''=120^\circ$$

۴ نیم‌خط عمود را برای پرتو AA′ کشیده و زاویه تابش $120-90=30^\circ$ می‌شود:



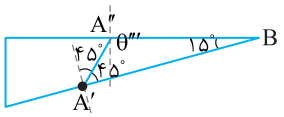


$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3}=\frac{n_3}{n_2}\Rightarrow\frac{\sin 30^\circ}{\sin\theta_3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow\sin\theta_3=\frac{2}{\sqrt{2}}\sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow\sin\theta_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta_3=45^\circ$$

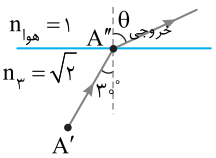
۵ مسیر پرتو در محیط (۳) یعنی $A''A'$ را دنبال می‌کنیم:



$\theta'''+۱۵+۴۵=۱۸۰\Rightarrow\theta'''=۱۲۰$

۶ نیم‌خط عمود را برای پرتو $A''A'$ رسم می‌کنیم. زاویه تابش $۱۲۰-۹۰=۳۰$ می‌شود:

۷ قانون شکست را برای پرتو خروجی می‌نویسیم:



$$\frac{\sin\theta_{۳}}{\sin\theta_{\text{خروجی}}}=\frac{n_{\text{خروجی}}}{n_{۳}}\Rightarrow\frac{\sin ۳۰^\circ}{\sin\theta_{\text{خروجی}}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

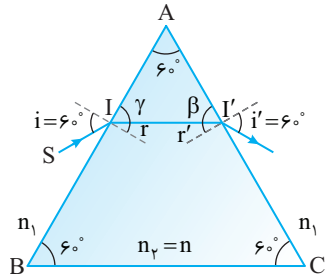
$$\sin\theta_{\text{خروجی}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\theta_{\text{خروجی}}=۴۵^\circ$$

B ۲۰۲۹ ۲

خط فکری تمام زوایای α با هم برابرند، بنابراین مثلث ABC باید یک مثلث متساوی‌الاضلاع با زوایای ۶۰° باشد. از طرفی زاویهٔ تابش بر وجه AB نیز $\alpha=i=۶۰^\circ$ بوده؛ همچنین زاویهٔ پرتو خروجی با خط عمود بر وجه AC نیز $i'=\alpha=۶۰^\circ$ است. اکنون با توجه به این مطالب باید به سراغ بررسی زوایای γ ، β و زوایای r و r' رفته و به کمک آن ضریب شکست منشور را حساب کرد.

۱ قانون اسنل را برای وجه AB و AC می‌نویسیم تا ثابت شود دو زاویهٔ r و r' برابرهستند.

$$\begin{cases}AB: n_{۱}\sin i=n_{۲}\sin r\\ AC: n_{۱}\sin i'=n_{۲}\sin r'\end{cases}\xrightarrow{i=i'}r=r'$$



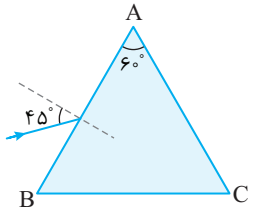
۲ با برابر بودن r' و r مشخص می‌شود که زوایای β و γ نیز برابر هستند.

$$\gamma=\beta=۶۰^\circ$$

۳ بنابراین زاویه‌های r و r' هر کدام برابر ۳۰° می‌شوند.

۴ ضریب‌شکست n خواهد شد: $n_{۱}\sin i=n_{۲}\sin r\Rightarrow ۱\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=n\times\frac{۱}{۲}\Rightarrow n=\sqrt{۳}$

بازی با سوال مطابق شکل روبه‌رو پرتو تک‌رنگی از هوا با زاویهٔ ۴۵° به وجه AB منشوری می‌تابد و با همان زاویه از وجه AC بیرون می‌رود. ضریب شکست منشور کدام است؟ تجربی - ۹۰

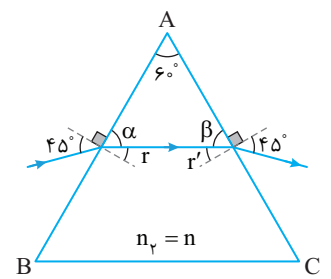


۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{۳}$

پاسخ ۱ با توجه به قانون اسنل $n_{۱}\sin\theta_{۱}=n_{۲}\sin\theta_{۲}$ چون زوایای ورودی و خروجی هر کدام ۴۵° است، زوایای r و r' نیز با هم برابرند.

۲ با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\alpha+r=۹۰^\circ,\beta+r'=۹۰^\circ\Rightarrow\alpha+\beta+r+r'=۱۸۰^\circ\quad(I)$$



۳ مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰° است. از این‌رو:

$$\alpha+\beta+A=۱۸۰^\circ\quad(II)$$

از روابط (I) و (II) نتیجه می‌شود: $A=r+r'$. یعنی مجموع زاویه‌های شکست داخلی برابر با زاویهٔ رأس منشور است.

$$A=r+r'\xrightarrow{r=r'}۶۰^\circ=۲r\Rightarrow r=۳۰^\circ$$

۴ ضریب شکست خواهد شد:

$$n_{۱}\sin\theta_{۱}=n_{۲}\sin\theta_{۲}\xrightarrow[n_{۲}=n]{n_{۱}=۱}n=\frac{\sin i}{\sin r}\Rightarrow n=\frac{\sin ۴۵^\circ}{\sin ۳۰^\circ}\Rightarrow n=\sqrt{۲}$$

نکته در منشور مجموع زاویه‌های شکست داخلی برابر زاویهٔ رأس منشور است.

$$A=r+r'$$

گزینهٔ ۲

B ۲۰۳۰ ۳

۱ هر دو پرتو بدون انحراف وارد منشور شده‌اند؛ یعنی زاویهٔ بین این پرتوها و وجه AC ۹۰° است.

۲ زاویهٔ بین پرتو HH' با وجه AB برابر $\gamma=۹۰-۳۰=۶۰^\circ$ است.

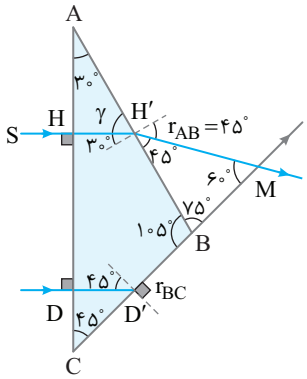
در نتیجه زاویهٔ تابش پرتو HH' برابر ۳۰° خواهد شد.

۳ زاویهٔ شکست بر وجه AB را با حرف r_{AB} نشان داده و مقدار آن را حساب می‌کنیم.

در وجه AB: $n_{۱}\sin i=n_{۲}\sin r\Rightarrow\sqrt{۲}\times\sin ۳۰^\circ=۱\times\sin r_{AB}\Rightarrow r_{AB}=۴۵^\circ$

۴ با همین استدلال زاویهٔ تابش پرتو DD' بر وجه BC ، برابر ۴۵° است. زاویهٔ شکست بر وجه BC را با حرف r_{BC} نشان داده و مقدار آن را به دست می‌آوریم.

در وجه BC: $n_{۱}\sin i=n_{۲}\sin r\Rightarrow\sqrt{۲}\times\sin ۴۵^\circ=۱\times\sin r_{BC}\Rightarrow r_{BC}=۹۰^\circ$



۵ زاویهٔ A و C به ترتیب ۳۰° و ۴۵° بوده، بنابراین در مثلث ABC زاویهٔ B برابر $۱۸۰^\circ-(۴۵^\circ+۳۰^\circ)=۱۰۵^\circ$ خواهد شد.

۶ بنابراین در مثلث $H'BM$ زاویهٔ بین دو پرتو، ۶۰° به‌دست می‌آید.

نمای ۳۹

پنجره تو در تو

A ۲۰۳۰ ۲

۱ **خط فکری** هر ذره از محیط انتشار موج سینوسی دارای حرکت هماهنگ ساده است. از طرفی در حرکت هماهنگ ساده بیشینه شتاب نوسانگر در نقاط بازگشت (دو انتهای مسیر) اتفاق می‌افتد. یعنی نقاطی که در برآمدگی و یا فرورفتگی موج قرار دارند دارای بیشینه شتاب هستند. نقاط P، Q و N در بیشترین فاصله از حالت تعادلشان یعنی در نقاط بازگشت قرار دارند. بنابراین دارای بیشینه شتاب هستند.

نمای ۱۴

B ۲۰۳۰ ۳

۱ ۲ **تندی** انتشار تمام امواج الکترومغناطیسی در خلأ یکسان است. بنابراین:

$$\begin{cases}\lambda_A=\frac{c}{f_A}\\ \lambda_B=\frac{c}{f_B}\end{cases}\Rightarrow\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{f_B}{f_A}\xrightarrow{\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{۶}{۵}}\frac{f_B}{f_A}=\frac{۶}{۵}\xrightarrow{(I)}f_A=\frac{۵}{۶}f_B$$

۲ با توجه به صورت مسئله:

$$f_B-f_A=۱۰۰\text{MH}\xrightarrow{(I)}f_B-\frac{۵}{۶}f_B=۱۰۰\Rightarrow\frac{f_B}{۶}=۱۰۰\Rightarrow f_B=۶۰۰\text{Hz}$$

نمای ۲۲

B ۲۰۳۰ ۳

۱ **تندی** انتشار موج را به‌دست می‌آوریم:

$$v=f\lambda \xrightarrow{f=40Hz,\ \lambda=1/2m} v=40\times 1/2 \Rightarrow v=48m/s$$

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند.

۲ بیشینه تندی نوسان ذرات طناب را حساب می‌کنیم.

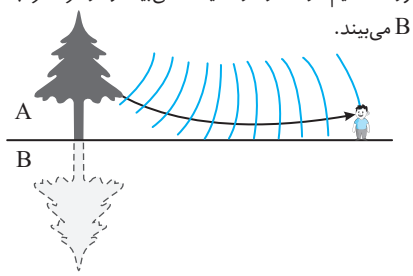
$$v_m=A\omega \xrightarrow{\omega=2\pi f} v_m=A(2\pi f) \xrightarrow{A=2cm,\ f=40Hz}$$

$$v_m=0/02\times 2\pi\times 40 \Rightarrow v_m=1/6\pi\ m/s$$

نمای ۱۸

B ۲۰۳۰ ۴

۴ **شخص به‌طور** مستقیم درخت را در ناحیهٔ A می‌بیند و در اثر سراب تصویر درخت را نیز در ناحیهٔ B می‌بیند.



نمای ۴۱

A ۲۰۳۰ ۵

۱ **در** گذر موج از یک محیط به محیط دیگر دوره و بسامد موج که از ویژگی‌های چشمه است ثابت می‌ماند. اما سرعت انتشار موج که به ویژگی‌های فیزیکی محیط بستگی دارد، تغییر می‌کند، در نتیجه طول موج نیز تغییر خواهد کرد.

$$v_1=f\lambda_1\ ,\ v_2=f\lambda_2 \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{v_1}{v_2}\quad (I)$$

۲ دو طناب از یک ماده ساخته شده‌اند، بنابراین چگالی آن‌ها با هم برابر است $(\rho_1=\rho_2)$.

۳ دو طناب در یک نقطه به هم گره خورده و نیروی کشش در طول دو طناب یکسان است. $F_1=F_2$

۴ نسبت تندی انتشار موج در دو طناب خواهد شد:

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\frac{2}{D_1}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}}{\frac{2}{D_2}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2}=\frac{D_2}{D_1}\quad (II)$$

۵ با توجه به رابطهٔ (I) و (II) خواهیم داشت:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{D_2}{D_1} \xrightarrow{\lambda_1=7cm,\ D_1=3D_2} \frac{7}{\lambda_2}=\frac{D_2}{3D_2} \Rightarrow \lambda_2=21cm$$

میانبر استفادهٔ مستقیم از رابطهٔ $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{D_2}{D_1}$

نمای ۳۵

B ۲۰۳۰ ۲

خط فکری **۶** دورهٔ آونگ به میدان گرانش (g) بستگی دارد. بنابراین شما باید ابتدا شتاب گرانش در سیاره (g_P) را برحسب شتاب گرانش (g_e) حساب کنید.

۱ نسبت حجم سیاره به حجم کرهٔ زمین خواهد شد:

$$\frac{V_P}{V_e}=\frac{\frac{4}{3}\pi R_P^3}{\frac{4}{3}\pi R_e^3}=\frac{R_P^3}{R_e^3} \xrightarrow{R_P=2R_e} \frac{V_P}{V_e}=(2)^3=8 \Rightarrow V_P=8V_e$$

۲ با توجه به نسبت چگالی‌ها، نسبت جرم سیاره به جرم کرهٔ زمین را به‌دست می‌آوریم.

$$\rho_P=3\rho_e \Rightarrow \frac{M_P}{V_P}=3\frac{M_e}{V_e} \Rightarrow 3\frac{M_P}{8V_e}=3\frac{M_e}{V_e} \Rightarrow M_P=24M_e$$

۳ نسبت میدان گرانش در سطح سیاره به میدان گرانش در سطح زمین خواهد شد:

$$\frac{g_P}{g_e}=\frac{G\frac{M_P}{R_P^2}}{G\frac{M_e}{R_e^2}} \Rightarrow \frac{g_P}{g_e}=\frac{M_P}{M_e}\times\left(\frac{R_e}{R_P}\right)^2=24\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow g_P=6g_e$$

۴ اکنون دورهٔ آونگ را در سیارهٔ جدید به‌دست می‌آوریم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow \frac{T_P}{T_e}=\sqrt{\frac{g_e}{g_P}} \xrightarrow{T_e=2s} \frac{T_P}{2}=\sqrt{\frac{1}{6}} \Rightarrow T_P=\frac{\sqrt{6}}{3}s$$

میانبر برای میدان گرانش سیاره‌ای که چگالی و شعاع آن را برحسب چگالی و شعاع زمین در اختیار داریم، می‌توان از رابطهٔ مقابل استفاده کرد. $g=\frac{4}{3}\pi RG\bar{\rho}$

نمای ۸

B ۲۰۳۰ ۲

۷ **با توجه به فرض** مسئله دورهٔ آونگ ۳ برابر دورهٔ سامانهٔ جرم فنر بوده بنابراین کافی است به جای دورهٔ آونگ $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ و به جای دورهٔ سامانهٔ جرم - فنر، $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ را قرار دهیم.

$$T_{\text{آونگ}}=3T_{\text{فنر}} \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}=3\times 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \frac{\ell}{10}=9\times\frac{0/5}{450} \Rightarrow \frac{\ell}{10}=9\times\frac{1}{900}$$

$$\Rightarrow \ell=0/1m=10cm$$

نمای ۸

B ۲۰۳۰ ۱

۸ **۱** **هنگامی** که سرنشینان درون ماشین قرار گرفتند، فنرها فشرده شده‌اند. بنابراین ثابت فنر کل فنرها (فنر آرمانی) خواهد شد:

$$mg=F_e \Rightarrow 4000=k\times\frac{4}{100} \Rightarrow k=10^5\ N/m$$

۲ هنگامی که اتومبیل دارای سرنشین می‌باشد، دورهٔ تناوب کمک فنرهای اتومبیل (فنر آرمانی) برابر ۱s شده است از این‌رو می‌توان جرم اتومبیل را حساب کرد.

$$\begin{cases} m_{\text{جرم اتومبیل}} \\ m'_{\text{جرم سرنشینان}} \end{cases} \Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{m+m'}{k}} \Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{m+400}{10^5}}$$

$$\Rightarrow 1=4\pi^2\left(\frac{m+400}{10^5}\right) \Rightarrow m+400=2500 \Rightarrow m=2100kg$$

۳ حال اگر اتومبیل خالی باشد، روی فنرها تنها جرم اتومبیل $(m=2100kg)$ قرار دارد. $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{2100}{10^5}}=\frac{2\pi\sqrt{21}}{10\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{21}}{5}s$

نمای ۷

B ۲۰۳۰ ۲

نکته **۹** هرگاه حرکت نوسانگر به سمت نقطهٔ تعادل باشد حرکت نوسانگر تندشونده است.

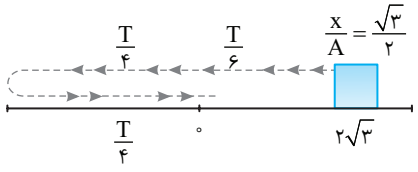
نکته همواره برای استفاده از بازهٔ زمانی باید نسبت $\frac{x}{A}$ را به‌دست بیاورید.

۱ نسبت $\frac{x}{A}$ را حساب می‌کنیم. $\frac{x}{A}=\frac{+2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}A$

۲ حرکت در این مکان تندشونده است، یعنی نوسانگر به سوی مرکز نوسان در حال حرکت است.

۳ در بازهٔ زمانی $\frac{4}{150}s$، دو بار شتاب صفر شده است. شتاب نوسانگر در نقطهٔ تعادل $x=0$، صفر می‌شود. بنابراین در این بازه نوسانگر از مکان $x=+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ به مکان $-A$ رفته و به $x=0$ برمی‌گردد.

۴ مسیر حرکت را رسم می‌کنیم.



۵ به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده دوره را حساب می‌کنیم.

$$\Delta t=\frac{۴}{۱۵۰}s\Rightarrow\frac{T}{۶}+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۴}=\frac{۴}{۱۵۰}s\Rightarrow\frac{۲T}{۳}=\frac{۴}{۱۵۰}s\Rightarrow T=۰/۰۴s$$

۶ بنابراین بسامد زاویه‌ای برابر $\omega=\frac{۲\pi}{T}=۵۰\pi\,rad/s$ می‌باشد و معادلهٔ حرکت خواهد شد:

$$x=A\cos\omega t\xrightarrow{A=۴cm}x=۰/۰۴\cos(۵۰\pi t)$$

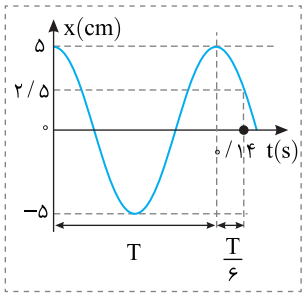
نمای ۳

۲ ۲۰۳۰ B

۱۰ **خط فکری** هنگامی در یک بازهٔ زمانی تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط با هم برابر است که جابه‌جایی و مسافت طی شده یکسان باشد، یعنی در آن بازهٔ مشترک تغییر جهت ندهد. بنابراین شما باید دوره را به‌دست بیاورید و بازه‌های زمانی داده شده در گزینه‌ها بررسی کنید. در هر بازه‌ای که نوسانگر تغییر جهت ندهد، جواب مسئله را یافته‌اید.

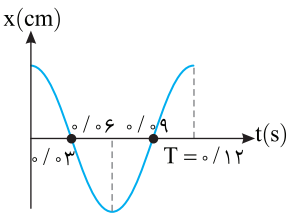
با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده می‌توان نوشت:

$$\Delta t=T+\frac{T}{۶}=\frac{۷T}{۶}\Rightarrow۰/۱۴=\frac{۷T}{۶}\Rightarrow T=۰/۱۲s$$



بنابراین نمودار $x-t$ به صورت روبه‌رو می‌باشد. در بازه‌ای که نوسانگر تغییر جهت نداده باشد تندی متوسط و سرعت متوسط با هم برابر می‌باشد، یعنی در بازه‌های $t_۱=۰/۰۶s$ تا $t_۲=۰/۱۲s$ و $t=۰$ تا $t=۰/۰۶s$ تندی متوسط با سرعت متوسط برابر است و گزینهٔ (۲) در بازهٔ $t=۰$ تا $t=۰/۶s$ و پاسخ تست است.

نمای ۵ و ۱



۲ ۲۰۳۰ B

۱۱ **خط فکری** هرگاه به شما معادلهٔ سرعت - مکان یک حرکت هماهنگ ساده داده شود، اگر $x=۰$ را در معادله قرار دهید، تندی برابر تندی بیشینه می‌شود $(v=v_m)$ زیرا در نقطهٔ تعادل $(x=۰)$ تندی بیشینه است و اگر به جای v، صفر قرار دهید، x برابر $\pm A$ می‌شود.

۱ در لحظه‌ای که نوسانگر از مبدأ مکان می‌گذرد، سرعت بیشینه است:

$$v^۲=\frac{\pi^۲}{۴۰۰}-\frac{\pi^۲}{۴}x^۲\xrightarrow{x=۰,v=v_m}v_m^۲=\frac{\pi^۲}{۴۰۰}\Rightarrow v_m=\frac{\pi}{۲۰}m/s$$

۲ در دو انتهای مسیر یعنی هرگاه $x=\pm A$ است، سرعت صفر می‌باشد:

$$v^۲=\frac{\pi^۲}{۴۰۰}-\frac{\pi^۲}{۴}x\xrightarrow{v=۰,\,x=\pm A}۰=\frac{\pi^۲}{۴۰۰}-\frac{\pi^۲}{۴}A^۲\Rightarrow\frac{\pi^۲}{۴۰۰}=\frac{\pi^۲}{۴}A^۲$$

$$\Rightarrow A^۲=\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow A=۰/۱m$$

۳ بسامد زاویه‌ای خواهد شد: $v_m=A\omega\Rightarrow\frac{\pi}{۲۰}=۰/۱\omega\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{۲}rad/s$

۴ دوره را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\frac{\pi}{۲}=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۴s$

نمای ۱۰

۴ ۲۰۳۰ B

۱۲ **۱** **انرژی** مکانیکی برابر مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل است، با توجه به فرض مسئله اگر $U=K$ باشد، آنگاه:

$$E=U+K\xrightarrow{U=K}E=K+K=۲K\xrightarrow{E=K_m}K_m=۲K$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}mv_m^۲=۲(\frac{۱}{۲}mv^۲)\Rightarrow v=\frac{\sqrt{۲}}{۲}v_m(I)$$

۲ از روی معادلهٔ $x=۰/۰۲\cos۲۰t$، بیشینه تندی نوسانگر را به‌دست می‌آوریم.

$$v_m=A\omega\Rightarrow v_m=۰/۰۲\times۲۰\Rightarrow v_m=۰/۴m/s$$

۳ در معادلهٔ (I) به جای v_m، $۰/۴m/s$ قرار می‌دهیم.

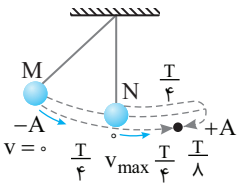
$$v=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times۰/۴\Rightarrow v=۰/۲\sqrt{۲}m/s$$

نمای ۱۱

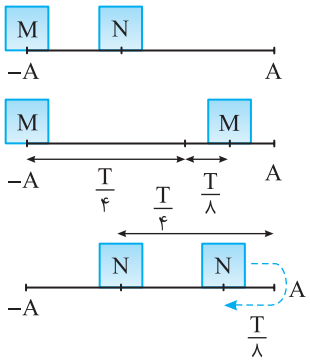
۳ ۲۰۳۰ C

۱۳ **۱** دو آونگ هم‌طول هستند و با توجه به رابطهٔ $T=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ دورهٔ دو نوسانگر یکسان است.

۲ در یک لحظه تندی یکی از آونگ‌ها صفر است. بنابراین این آونگ در نقطهٔ بازگشت قرار دارد مانند آونگ M در شکل روبه‌رو. آونگ دیگر در این لحظه دارای بیشینه تندی است. یعنی مانند آونگ N در حال گذر از نقطهٔ تعادل است.



۳ دو آونگ در یک جهت در حرکت هستند. در مدت $\frac{T}{۴}$ آونگ M به مرکز نوسان می‌رسد و آونگ N به دامنهٔ $(+A)$ می‌رسد و تغییر جهت می‌دهد. اکنون دو متحرک هرکدام باید به مدت $\frac{T}{۸}$ حرکت کنند تا به هم برسند. بنابراین دو آونگ پس از مدت Δt از کنار هم می‌گذرند:



$$\Delta t=\frac{T}{۴}+\frac{T}{۸}=\frac{۳T}{۸}$$

نمای ۷

۳ ۲۰۳۰ B

۱۴ **۱** با توجه به رابطهٔ تکانه و انرژی جنبشی و اینکه بیشینه انرژی جنبشی آن‌ها با هم برابر است، می‌توان نسبت جرم سامانه‌ها را به‌دست آورد.

$$\begin{cases}P=mv\\K=\frac{۱}{۲}mv^۲\end{cases}\Rightarrow K_{max}=\frac{P_{max}^۲}{۲m}\xrightarrow{K_۲=K_۱}\frac{P_۲^۲}{۲m_۲}=\frac{P_۱^۲}{۲m_۱}$$

$$\xrightarrow{P_۲=۳P_۱}\frac{۹P_۱^۲}{m_۲}=\frac{P_۱^۲}{m_۱}\Rightarrow m_۲=۹m_۱$$

۲ بیشینه انرژی جنبشی آن‌ها با هم برابر است:

$$K_{max_۱}=K_{max_۲}\Rightarrow\frac{۱}{۲}m_۱v_{۱max}^۲=\frac{۱}{۲}m_۲v_{۲max}^۲\xrightarrow{m_۲=۹m_۱}$$

$$m_۱v_{۱max}^۲=۹m_۱v_{۲max}^۲\Rightarrow v_{۱max}=۳v_{۲max}$$

۳ اندازه بیشینه سرعت نوسانگر $v_m=A\omega$ است از این‌رو:

$$A_۱\omega_۱=۳A_۲\omega_۲\xrightarrow{A_۱=A_۲}\omega_۱=۳\omega_۲\xrightarrow{\omega=۲\pi f}۲\pi f_۱=۳(۲\pi f_۲)$$

$$\Rightarrow\frac{f_۲}{f_۱}=\frac{۱}{۳}$$

نمای ۱۱

A ۲۰۳۰ ۴

۱۵ **خط فکری** هنگامی نوسانگر وادارنده باعث تشدید مابقی نوسانگرها می‌شود که بسامد آن با بسامد دیگر نوسانگرها برابر باشد. از طرفی بسامد یک آونگ به جرم آونگ بستگی ندارد و بسامد به طول آونگ بستگی دارد. $\left(f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right)$ و هرگاه طول دو آونگ برابر باشد، بسامد طبیعی آن‌ها با هم برابر است و می‌توانند سبب تشدید یکدیگر شوند. بنابراین شما باید ببینید طول کدام آونگ‌ها با آونگ ۳ برابر است.

طول آونگ (۱)، (۳) و (۷) با هم برابر است. $(\ell_1=\ell_3=\ell_7)$ بنابراین اگر (۳) را به نوسان درآوریم آونگ (۱) و (۷) نوسان آونگ (۳) را تشدید می‌کنند.

نمای ۱۳

B ۲۰۳۰ ۲

۱۶ **۱** فاصلهٔ دو برآمدگی متوالی یعنی یک طول موج بنابراین $\lambda=8cm$ است.

۲ فاصلهٔ یک برآمدگی از فرورفتگی مجاورش نصف طول موج است از این‌رو:

$$\frac{\lambda'}{2}=8\Rightarrow\lambda'=16cm$$

۳ نسبت تندی انتشار موج در دو سیم خواهد شد:

$$\frac{v'}{v}=\frac{f'\lambda'}{f\lambda}\xrightarrow{f'=2f}\frac{v'}{v}=2\times\frac{16}{8}\Rightarrow\frac{v'}{v}=4$$

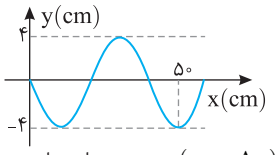
۴ نیروی کشش F' را برحسب F به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{v'}{v}=\frac{\sqrt{\frac{F'}{\mu}}}{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}=\sqrt{\frac{F'}{F}}\Rightarrow4=\sqrt{\frac{F'}{F}}\Rightarrow\frac{F'}{F}=16$$

نمای ۱۹

B ۲۰۳۰ ۲

۱۷ **۱** با توجه به نمودار دامنه $A=4cm$ است و طول موج برابر است با:



$$\frac{5\lambda}{4}=50\Rightarrow\lambda=40cm$$

۲ نسبت بیشینه سرعت نوسان ذرات $(v_m=A\omega)$ به سرعت انتشار موج $v=f\lambda$ خواهد شد:

$$\frac{v_m}{v}=\frac{A\omega}{f\lambda}\xrightarrow{\omega=2\pi f}\frac{v_m}{v}=\frac{A(2\pi f)}{f\lambda}\Rightarrow\frac{v_m}{v}=\frac{2\pi A}{\lambda}\Rightarrow\frac{v_m}{v}=\frac{2\pi\times4}{40}$$

$$\Rightarrow\frac{v_m}{v}=\frac{\pi}{5}$$

نمای ۱۹

A ۲۰۳۰ ۱

۱۸ از شکل معادلهٔ $\vec{B}=B_m\cos(\pi\times10^7t)\vec{j}$ ترس به دلتان راه ندهید. در واقع میدان مغناطیسی بردار است و با این نحوهٔ نمایش، مشخص می‌شود که میدان مغناطیسی در راستای محور yهاست.

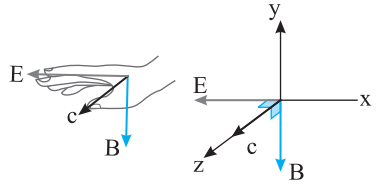
۱ در لحظهٔ $t=75ns$، میدان مغناطیسی B را به‌دست می‌آوریم.

$$\vec{B}=B_m\cos(\pi\times10^7t)\vec{j}\Rightarrow\vec{B}=B_m\cos(\pi\times10^7\times75\times10^{-9})\vec{j}$$

$$\vec{B}=B_m\cos(0/75\pi)\vec{j}\Rightarrow\vec{B}=B_m\cos(\frac{3\pi}{4})\vec{j}\Rightarrow\vec{B}=B_m(-\frac{\sqrt{2}}{2})\vec{j}$$

$$\Rightarrow\vec{B}=-\frac{\sqrt{2}}{2}B_m\vec{j}$$

۲ در این لحظه میدان مغناطیسی موج در جهت منفی محور yهاست و جهت انتشار موج در جهت مثبت محور zها است.



به کمک قاعدهٔ دست راست برای امواج الکترومغناطیسی کف دست خود را به سمت yهای منفی به گونه‌ای قرار دهید که انگشت باز شست دست راست شما در جهت مثبت محور zها باشد، در این حالت چهار انگشت باز دست راست شما در خلاف جهت محور xها خواهد بود. یعنی میدان الکتریکی در جهت منفی محور xهاست.

۳ بسامد موج را به‌دست می‌آوریم

$$\omega=2\pi f\Rightarrow\pi\times10^7=2\pi f\Rightarrow f=5\times10^6Hz$$

۴ طول موج را حساب می‌کنیم.

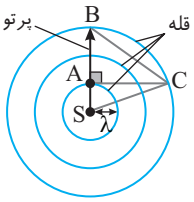
$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow{v=c=3\times10^8m/s}\lambda=\frac{3\times10^8}{5\times10^6}\Rightarrow\lambda=60m$$

طول موج نور مرئی بین $400nm$ تا $700nm$ است. بنابراین این موج الکترومغناطیسی نور مرئی نبوده و موج رادیویی است و گزینهٔ (۱) درست است.

نمای ۱۳

C ۲۰۳۰ ۲

۱۹ **۱** نقطهٔ S را به نقطهٔ C وصل کنید. اکنون یک مثلث (ASC) در اختیار دارید که در آن طول ضلع SC برابر 3λ و طول ضلع SA برابر λ است. به کمک رابطهٔ فیثاغورس طول AC را حساب می‌کنیم.



$$AS^2+AC^2=SC^2\Rightarrow\lambda^2+AC^2=(3\lambda)^2$$

$$\Rightarrow AC^2=8\lambda^2\Rightarrow AC=2\sqrt{2}\lambda$$

۲ نقطهٔ B را به C وصل می‌کنیم در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC می‌توان نوشت:

$$AB^2+AC^2=BC^2\xrightarrow{AB=2\lambda}(2\lambda)^2+(2\sqrt{2}\lambda)^2=18^2$$

$$\Rightarrow4\lambda^2+8\lambda^2=18^2\Rightarrow12\lambda^2=18^2\Rightarrow\lambda^2=27\Rightarrow\lambda=3\sqrt{3}cm$$

نمای ۲۰

B ۲۰۳۰ ۳

۲۰ **نکته** اختلاف تراز شدت صوت با شدت‌های I_1 و I_2 از رابطهٔ $\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}$ به‌دست می‌آید. شدت صوت $I_2=2\sqrt{10}I_1$ است. بنابراین

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log2\sqrt{10}$$

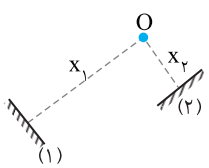
$$\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10(\log2+\log\sqrt{10})=10(0/3+0/5)\Rightarrow\beta_2-\beta_1=8dB$$

تراز شدت صوت ۸ دسی‌بل افزایش می‌یابد.

نمای ۲۷

B ۲۰۳۰ ۳

۲۱ برای آنکه گوش بتواند صدای دو پژواک را از هم تشخیص دهد باید اختلاف زمانی رسیدن دو پژواک به گوش $0/1s$ باشد. زمان رفت و برگشت پژواک شماره (۱) برابر است با:



$$2x_1=vt_1\Rightarrow t_1=\frac{2x_1}{v}$$

زمان رفت و برگشت پژواک شمارهٔ (۲) خواهد شد:

$$2x_2=vt_2\Rightarrow t_2=\frac{2x_2}{v}$$

اختلاف این دو زمان باید بزرگ‌تر مساوی $0/1s$ باشد.

$$t_1-t_2=\frac{2x_1}{v}-\frac{2x_2}{v}\Rightarrow0/1\le\frac{2(x_1-x_2)}{320}\Rightarrow x_1-x_2\ge16m$$

باید اختلاف x_1 و x_2، حداقل $16m$ باشد و از طرفی نباید هیچ یک از x_1 و x_2 کمتر از $16m$ باشند که تنها در گزینهٔ (۳) چنین است.

نمای ۳۲

۴ بسامد موج از یک محیط به محیط دیگر ثابت است. در این صورت طول موج با تندی انتشار موج در محیط نسبت مستقیم دارد.

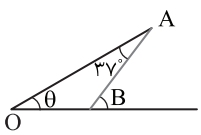
$$v_1=f\lambda_1,\ v_2=f\lambda_2\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\frac{10}{\frac{40}{3}}\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\frac{3}{4}$$

۵ با توجه به قانون شکست عمومی می‌توان نوشت:

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\frac{v_2}{v_1}\Rightarrow\frac{\sin\theta_2}{\sin53^\circ}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{\sin\theta_2}{0/8}=\frac{3}{4}\Rightarrow\sin\theta_2=0/6\Rightarrow\theta_2=37^\circ$$

۶ بنابراین زاویهٔ بین جبههٔ موج شکست و مرز محیط 37° است.

۷ در مثلث OAB زاویهٔ 53° زاویهٔ خارجی مثلث است و برابر مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور با آن است.



$$\theta+\theta_2=53^\circ\Rightarrow\theta+37=53\Rightarrow\theta=16^\circ$$

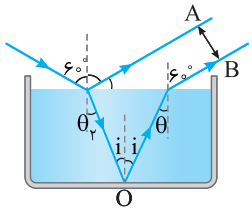
نمای ۳۹

۳ ۲۰۳۰ C ۲۵

۱ به کمک قانون اسنل زاویهٔ شکست را به‌دست می‌آوریم.

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2\Rightarrow1\times\sin60=\sqrt{3}\sin\theta_2$$

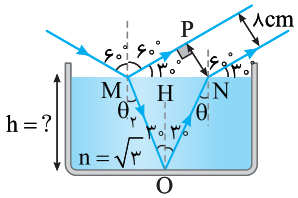
$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\sin\theta_2\Rightarrow\sin\theta_2=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta_2=30^\circ$$



۲ با توجه به خاصیت موازی - مورب زاویهٔ تابش بر سطح آینه $i=30^\circ$ و بازتاب آن نیز 30° خواهد بود.

۳ زاویهٔ تابش بر مرز دو محیط (θ) نیز بنا به خاصیت موازی - مورب برابر 30° می‌شود. بنابراین پرتو با زاویهٔ 60° وارد هوا می‌شود.

۴ دوباره شکل را برای شما رسم می‌کنیم و تمام زوایا را روی آن می‌نویسیم.



۵ مثلث MPN قائم‌الزاویه است و ضلع PN برابر $8\,cm$ است. بنابراین طول وتر آن یعنی MN خواهد شد:

$$\sin30^\circ=\frac{PN}{MN}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{8}{MN}\Rightarrow MN=16\ cm$$

۶ در مثلث MHO طول MH برابر است با:

$$MH=\frac{MN}{2}=\frac{16}{2}=8cm$$

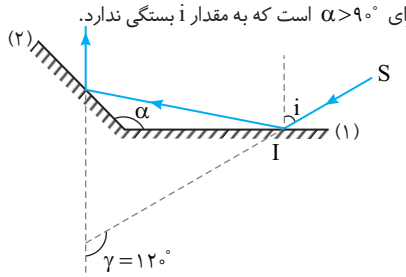
۷ ضخامت تیغه خواهد شد:

$$\triangle OMH:\tan30=\frac{MH}{h}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{8}{h}\Rightarrow h=\frac{24}{\sqrt{3}}\Rightarrow h=8\sqrt{3}cm$$

نمای ۳۹

۴ ۲۰۳۰ B ۲۲

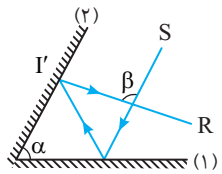
نکته در این‌گونه بازتاب از سطح آینه‌های متقاطع (پیداکردن زاویهٔ بین پرتو تابش به آینه (۱) و بازتاب از آینه (۲)) زاویهٔ انحراف پرتو برابر 2α برای $\alpha<90^\circ$ و $360-2\alpha$ برای $\alpha>90^\circ$ است که به مقدار i بستگی ندارد.



نمای ۳۴

بازی با سؤال مطابق شکل روبه‌رو پرتو SI پس از بازتابش از آینه‌های تخت در مسیر I′R بازتاب می‌شود. اندازهٔ زاویهٔ β چند برابر زاویهٔ α است؟ ریاضی - ۹۲

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) بستگی به زاویهٔ تابش آینهٔ (۱) دارد.



پاسخ β زاویهٔ خارجی است:

$$\beta=2i+2i'=2(i+i')\quad(1)$$

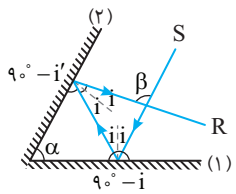
از طرفی داریم:

$$\alpha+90-i'+90-i=180\Rightarrow\alpha=i'+i\quad(2)$$

با توجه به رابطهٔ (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\beta=2\alpha$$

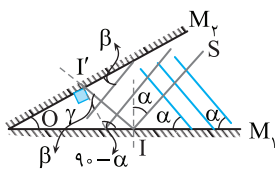
گزینهٔ ۲



۴ ۲۰۳۰ B ۲۳

یادآوری زاویه‌ای که جبهه‌های موج با سطح می‌سازند برابر زاویهٔ بین پرتو و خط عمود است.

۱ زاویهٔ تابش بر سطح آینه M_1 برابر α است. از این‌رو زاویه‌ای که پرتو بازتاب I′I با آینهٔ M_1 می‌سازد برابر $90-\alpha$ است.



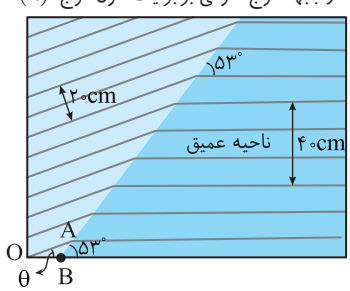
۲ زاویهٔ جبهه‌های موج با سطح آینه M_2 حاده و برابر β است. یعنی پرتو II′ با خط عمود زاویهٔ β می‌سازد، بنابراین در مثلث OII′ برای زوایای آن می‌توانیم بنویسیم

$$\gamma+90-\alpha+90+\beta=180\Rightarrow\alpha-\beta=\gamma$$

نمای ۳۴

۲ ۲۰۳۰ C ۲۴

یادآوری فاصلهٔ دو جبههٔ موج متوالی برابر یک طول موج (λ) است.



۱ طول موج در ناحیهٔ عمیق برابر است با:

$$3\lambda_1=40\Rightarrow\lambda_1=\frac{40}{3}cm$$

۲ طول موج در ناحیهٔ کم‌عمق‌تر:

$$2\lambda_2=20\Rightarrow\lambda_2=10cm$$

۳ زاویه‌ای که جبههٔ موج با مرز دو محیط می‌سازد برابر زاویهٔ بین پرتو و خط عمود است. بنابراین زاویهٔ تابش $\theta_1=53^\circ$ است.