

۱۶۰۶ دو مثلث ABC و BEH هم‌نهشت‌اند، پس مثلث ABC

قائم‌الزاویه است، $BH=AB=4$ و $BC=EH=8$

همچنین $AC=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$ پس

$$\triangle BEH:DF \parallel EH \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{DF}{EH} = \frac{BF}{BH} \Rightarrow \frac{DF}{8} = \frac{BF}{4}$$

$$DF=2BF \quad (1)$$

از طرف دیگر دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و BEH هم‌نهشت‌اند، پس

$\hat{E}=\hat{C}$ و داریم

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel EH \\ BE \text{ مورب} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{E} \xrightarrow{\hat{E}=\hat{C}} \hat{B}_1 = \hat{C} \xrightarrow{\hat{A}+\hat{C}=90^\circ} \hat{B}_1 + \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \hat{D}_1 = 90^\circ$$

در نتیجه BD ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه ABC است، پس با استفاده از

روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم

$$\triangle ABC: AB \times BC = BD \times AC$$

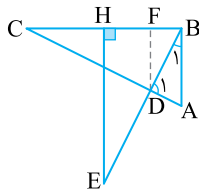
$$4 \times 8 = BD \times 4\sqrt{5} \Rightarrow BD = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

بنابراین

$$\triangle BDF: BD^2 = BF^2 + DF^2$$

$$\xrightarrow{\text{از (1)}} \left(\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 = BF^2 + (2BF)^2$$

$$\frac{64}{5} = 5BF^2 \Rightarrow BF^2 = \frac{64}{25} \Rightarrow BF = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$$



۱۶۰۷ مماس‌های رسم شده در نقطه تلاقی دو دایره به مراکز O و O'.

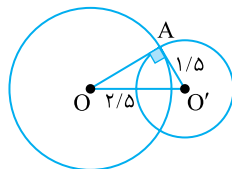
یعنی A بر هم عمودند، پس این مماس‌ها از مراکز دو دایره عبور می‌کنند.

نتیجه در مثلث OAO' قائم‌الزاویه است.

$$\triangle OAO': OA^2 = OO'^2 - O'A^2$$

$$= 2^2/5^2 - 1^2/5^2 = 6/25 - 1/25 = 4/25$$

$$OA = 2/5$$

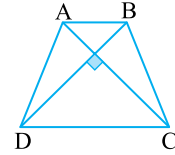


۱۶۰۳ در دوزنقه متساوی‌الساقین ABCD، دو قطر AC و BD

بر هم عمودند و اندازه این دو قطر برابر است، ولی ABCD مربع نیست.

توجه کنید که گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) گزاره‌های همیشه درست هستند،

پس برای آن‌ها نمی‌توان مثال نقض ارائه کرد.



۱۶۰۴ بنا بر فرض، چهارضلعی ABCD مربع است. با توجه به

شکل می‌نویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{MND} = 90^\circ \Rightarrow \hat{N}_1 + \hat{N}_2 = 90^\circ \\ \triangle DNC: \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{D}_1 + \hat{N}_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{N}_1$$

بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویه BMN و CND با داشتن دو زاویه مساوی

متشابه هستند، پس

$$\frac{ND}{MN} = \frac{CD}{BN} \Rightarrow \frac{4}{1} = \frac{CD}{BN} \xrightarrow{BN=x} CD=4x$$

در نتیجه

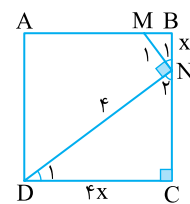
$$BC=CD=4x \xrightarrow{BN=x} NC=3x$$

$$\triangle DNC: DN^2 = CD^2 + NC^2 \Rightarrow 4^2 = (4x)^2 + (3x)^2 \Rightarrow 16 = 25x^2$$

$$x = \frac{4}{5}$$

پس طول ضلع مربع مساوی $\frac{16}{5}$ است. پس

$$S_{ABCD} = CD^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{256}{25} = 10\frac{6}{25}$$

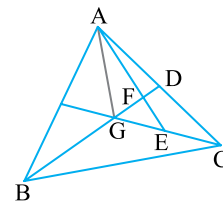


۱۶۰۵ از A به G وصل می‌کنیم. چون D وسط AC و E وسط CG

است، پس F مرکز ثقل مثلث AGC است. در نتیجه $FD = \frac{1}{3}GD$.

از طرف دیگر G مرکز ثقل مثلث ABC است، پس $GD = \frac{1}{3}BD$. بنابراین

$$FD = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}BD\right) = \frac{1}{9}BD \Rightarrow \frac{BD}{FD} = 9$$



۲۱۶۰۸ بنابر مسئله کتاب درسی هندسه یازدهم، فصل ۳، EF موازی BC

است. پس

$$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AB} \Rightarrow \frac{EF}{10} = \frac{12\sqrt{2}}{15\sqrt{2}} \Rightarrow EF = 8$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیه نیمساز در مثلث ABD می نویسیم

$$DF: \frac{AF}{BF} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{12\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{AD}{5} \Rightarrow AD = 20$$

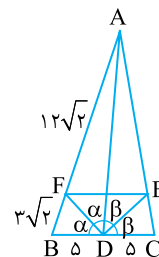
$$DF: DF^2 = AD \times BD - AF \times BF = 20 \times 5 - 12\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$$

$$= 100 - 72 = 28 \Rightarrow DF = \sqrt{28}$$

در ضمن DE و DF به ترتیب نیمسازهای زاویه های ADC و ADB هستند، پس

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ. \text{ در نتیجه } \alpha + \beta = 90^\circ, \text{ پس مثلث DEF قائم الزامه است.}$$

$$\triangle DEF: DE^2 = EF^2 - DF^2 = 8^2 - \sqrt{28}^2 = 36 \Rightarrow DE = 6$$



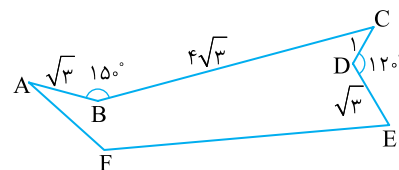
۳۱۶۰۹ بنابر مسئله هم پیرامونی، میزان افزایش مساحت برابر

$2S_{DEC} + 2S_{ABC}$ است.

$$2S_{ABC} = 2\left(\frac{1}{2} AB \times BC \sin 150^\circ\right) = \sqrt{3} \times 4 \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 6$$

$$2S_{DEC} = 2\left(\frac{1}{2} DC \times DE \sin 120^\circ\right) = 1 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

بنابراین میزان افزایش مساحت برابر $6 + \frac{3}{2} = 7\frac{1}{2}$ است.



۲۱۶۱۰ ابتدا ماتریس A را به دست می آوریم.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{وارون می گیریم}}$$

$$A = (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{-2+1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

اکنون طرفین تساوی داده شده را از سمت چپ در ماتریس A ضرب می کنیم.

$$2I - 3A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A \times} 2A - 3B^{-1} = A \times \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2A - 3B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A - 3B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & ? \\ ? & 0 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه های قطر اصلی این ماتریس برابر -۲ است.

۴۱۶۱۱ ابتدا ماتریس A^2 را به دست می آوریم.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{A^2}{\text{مجموع درایه های A}} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{بنابراین}$$

۱۶۱۲ ابتدا در معادله سهمی حرف a را به m تغییر می دهیم تا a با پارامتر

سهمی اشتباه گرفته نشود. پس معادله سهمی به صورت $3y^2 - 3x - my = 0$

است. اکنون معادله سهمی را به صورت استاندارد می نویسیم.

$$3y^2 - my = 3x \Rightarrow 3\left(y^2 - \frac{m}{3}y\right) = 3x \Rightarrow \left(y - \frac{m}{6}\right)^2 - \frac{m^2}{36} = x$$

$$\left(y - \frac{m}{6}\right)^2 = x + \frac{m^2}{36}$$

پس این سهمی افقی رو به راست با رأس $\left(-\frac{m^2}{36}, \frac{m}{6}\right)$ است به طوری که

۴۱۶۱۳ $a = \frac{1}{4}$ پس $a = \frac{1}{4}$. معادله خط هادی این نوع سهمی به صورت زیر است:

$$x = -a + \alpha \Rightarrow x = -\frac{1}{4} - \frac{m^2}{36} \xrightarrow{x = -\frac{5}{4}} -\frac{5}{4} = -\frac{1}{4} - \frac{m^2}{36} \xrightarrow{\times(-4)} 5 = 1 + \frac{m^2}{9} \Rightarrow m^2 = 36 \Rightarrow m = \pm 6$$

بنابراین اختلاف مقادیر m برابر ۱۲ است.

۲۱۶۱۳ نقاط A، B و C وسط های اضلاع مثلث MNE به مساحت

۶۴ هستند. چون مثلث ABC با مثلث MNE متشابه با نسبت تشابه $\frac{1}{2}$

است، پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNE}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{S_{MNE}=64} S_{ABC} = 16$$

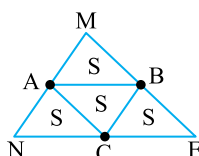
اکنون با استفاده از ضرب خارجی، مساحت مثلث ABC را پیدا می کنیم.

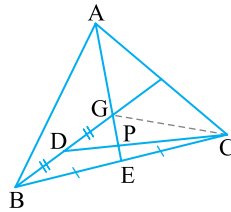
$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-4, -2a, 0), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (2, -4 - a, 0)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -2a & 0 \\ 2 & -4-a & 0 \end{vmatrix} = (16 + 4a + 4a)\vec{k} = (16 + 8a)\vec{k}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \Rightarrow 16 = \frac{1}{2} \sqrt{(16 + 8a)^2} \Rightarrow |16 + 8a| = 32$$

$$\begin{cases} 16 + 8a = 32 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-4, -4, 0) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 4\sqrt{2} \\ 16 + 8a = -32 \Rightarrow a = -6 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-4, 12, 0) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 4\sqrt{10} \end{cases}$$





۴ ۱۶۱۷ دو مثلث ABC و BEF هم‌نهشت‌اند، پس $BF=BC=1$ و $EF=AB=2$ ، پس $AF=1$. اکنون فرض می‌کنیم $FH=x$. در این صورت $BH=1-x$ داریم

$$\triangle ABC: DH \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{AH}{AB} = \frac{DH}{BC} \Rightarrow \frac{1+x}{2} = \frac{DH}{1}$$

$$DH = \frac{1+x}{2}$$

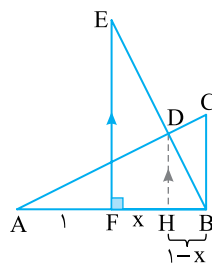
$$\triangle BEF: DH \parallel EF \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{DH}{EF} = \frac{BH}{BF} \Rightarrow \frac{DH}{2} = \frac{1-x}{1}$$

$$DH = 2 - 2x$$

بنابراین

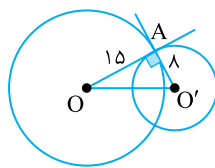
$$\frac{1+x}{2} = 2 - 2x \Rightarrow 1+x = 4 - 4x \Rightarrow 5x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

$$DH = 2 - 2x = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \cdot 4$$



۱ ۱۶۱۸ مماس‌های رسم شده در نقطه تلاقی دو دایره به مراکز O و O'، یعنی نقطه A بر هم عمودند. پس این مماس‌ها از مراکز دو دایره عبور می‌کنند. در نتیجه در مثلث OAO' که قائم‌الزاویه است، می‌نویسیم

$$\triangle OAO': OO'^2 = OA^2 + O'A^2 = 8^2 + 15^2 = 289 \Rightarrow OO' = 17$$



۴ ۱۶۱۹ می‌دانیم پاره خط PQ موازی ضلع BC است. پس

$$\triangle ABC: PQ \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{AP}{AC} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{PQ}{BC}$$

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیه نیمساز می‌نویسیم:

$$\triangle AMC: MP \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{AM}{MC} = \frac{AM}{3AM} = \frac{1}{3}$$

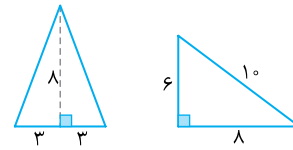
$$\triangle AMC: MP \text{ نیمساز} \Rightarrow MP^2 = AM \times MC - AP \times PC$$

$$\sqrt{33}^2 = AM \times 3AM - (\sqrt{5})(3\sqrt{5}) \Rightarrow 33 = 3AM^2 - 15$$

$$11 = AM^2 - 5 \Rightarrow AM^2 = 16 \Rightarrow AM = 4 \Rightarrow MC = 12 \Rightarrow BC = 24$$

$$\xrightarrow{\text{از (1)}} \frac{PQ}{24} = \frac{1}{4} \Rightarrow PQ = 6$$

۳ ۱۶۱۴ گزاره گزینۀ (۳) یک گزاره همیشه درست و در نتیجه یک قضیه است. پس برای آن مثال نقض وجود ندارد. توجه کنید که گزاره‌های سایر گزینه‌ها قضیه نیستند، پس برای آن‌ها مثال نقض وجود دارد. برای رد گزینه‌های (۱) و (۲)، دو مثلث زیر را در نظر بگیرید:



مساحت این دو مثلث برابر ۲۴ است، ولی این دو مثلث هم‌نهشت نیستند. همچنین هر دو مثلث ارتفاعی به اندازه ۸ و ضلعی به اندازه ۶ دارند. برای رد گزینۀ (۴) مثلث زیر را در نظر بگیرید:



۴ ۱۶۱۵ بنابر فرض چهارضلعی ABCD مربع است. با توجه به شکل

می‌نویسیم

$$\left. \begin{aligned} \angle MNC = 90^\circ &\Rightarrow \hat{N}_1 + \hat{N}_2 = 90^\circ \\ \triangle DNC: \hat{D} = 90^\circ &\Rightarrow \hat{N}_2 + \hat{C}_1 = 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{N}_1 = \hat{C}_1$$

بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویه AMN و DNC با داشتن دو زاویه مساوی متشابه‌اند، پس

$$\frac{NC}{MN} = \frac{DC}{AN} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{DC}{AN} \xrightarrow{AN=x} DC = 2x$$

در نتیجه

$$AD = DC = 2x \xrightarrow{AN=x} ND = x$$

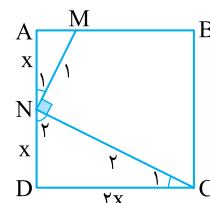
پس

$$\triangle DNC: NC^2 = ND^2 + DC^2 \Rightarrow 2^2 = (2x)^2 + x^2 \Rightarrow 5x^2 = 4$$

$$x^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

پس طول ضلع مربع مساوی $2x = \frac{4}{\sqrt{5}}$ است. بنابراین

$$S_{ABCD} = (2x)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$$



۱ ۱۶۱۶ از C به G وصل می‌کنیم. چون D وسط BG و E وسط BC است،

است، پس P مرکز ثقل مثلث BGC است. در نتیجه $GP = \frac{2}{3} GE$. از

طرف دیگر G مرکز ثقل مثلث ABC است، پس $GE = \frac{1}{2} AG$. بنابراین

$$GP = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} AG\right) = \frac{1}{3} AG \Rightarrow \frac{AG}{GP} = 3$$

۲۱۶۲۳ ابتدا در معادله سهمی حرف a را به m تغییر می‌دهیم تا a با پارامتر سهمی اشتباه گرفته نشود. پس معادله سهمی به صورت $y^2 - 2y + 4x = m$ است. اکنون معادله سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$y^2 - 2y + 4x = m \Rightarrow (y-1)^2 - 1 + 4x = m \Rightarrow (y-1)^2 = -4x + m + 1$$

$$(y-1)^2 = -4\left(x - \frac{m}{4} - \frac{1}{4}\right)$$

پس این سهمی افقی رو به چپ با رأس $S\left(\frac{m}{4} + \frac{1}{4}, 1\right)$ است به طوری که $4a = 4$. پس $a = 1$. معادله خط هادی این نوع سهمی به صورت زیر است:

$$x = a + \alpha \Rightarrow x = 1 + \frac{m}{4} + \frac{1}{4} \xrightarrow{x=3} 3 = \frac{m}{4} + \frac{1}{4} \xrightarrow{4 \times} 12 = m + 1 \Rightarrow m = 11$$

$$12 = m + 1 \Rightarrow m = 11$$

۲۱۶۲۴ نقاط A, B, C و وسط‌های اضلاع مثلث MNE به مساحت ۱۶ هستند. چون مثلث ABC با مثلث MNE با نسبت $\frac{1}{4}$ متشابه

است، پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNE}} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \xrightarrow{S_{MNE}=16} S_{ABC} = 4$$

اکنون با استفاده از ضرب خارجی، مساحت مثلث ABC را پیدا می‌کنیم.

$$A(a, 4, 1), \quad B(a, b, 3), \quad C(a, 9, b)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, b-4, 2), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (0, 5, b-1)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & b-4 & 2 \\ 0 & 5 & b-1 \end{vmatrix} = (b^2 - 5b + 4 - 10)\vec{i} = (b^2 - 5b - 6)\vec{i}$$

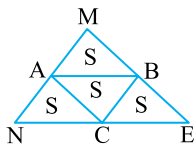
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \Rightarrow 4 = \frac{1}{2} \sqrt{(b^2 - 5b - 6)^2} \Rightarrow |b^2 - 5b - 6| = 8$$

بنابراین

$$b^2 - 5b - 6 = 8 \Rightarrow b^2 - 5b - 14 = 0 \Rightarrow b \text{ مجموع مقادیر } = 5$$

$$b^2 - 5b - 6 = -8 \Rightarrow b^2 - 5b + 2 = 0 \Rightarrow b \text{ مجموع مقادیر } = 5$$

پس مجموع مقادیر ممکن برابر b مساوی ۱۰ است.



۲۱۶۲۵ از فرض $CD = 3ED$ نتیجه می‌گیریم $ED = x$ و $CE = 2x$. پس $CD = 3x$. در نتیجه $AB = CD = 3x$. اکنون از نقطه F عمود FH را بر AD وارد می‌کنیم. در دوزنقه $ABED$ چون $AB \parallel DE$ ، پس $FH \parallel DE$ است. بنابراین پاره‌خط FH وسط‌های دو ساق دوزنقه را به هم وصل کرده است. پس

$$FH = \frac{AB + DE}{2} = \frac{3x + x}{2} = 2x$$

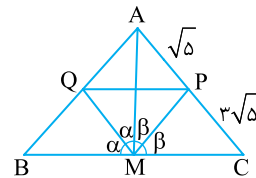
در نتیجه

$$\triangle AFH: AF^2 = AH^2 + FH^2 \Rightarrow 25 = \frac{9}{4}x^2 + 4x^2 = \frac{25}{4}x^2 \Rightarrow x = 2$$

در ضمن MP و MQ به ترتیب نیمسازهای زاویه‌های AMC و AMB هستند. پس $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$. پس $\alpha + \beta = 90^\circ$. در نتیجه مثلث MPQ قائم‌الزاویه است. بنابراین

$$PQ^2 = MP^2 + MQ^2 \Rightarrow 6^2 = 3^2 + MQ^2$$

$$MQ^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow MQ = 3\sqrt{3}$$

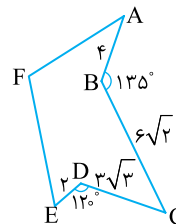


۲۱۶۲۰ بنابر مسئله هم‌پیرامونی، میزان افزایش مساحت برابر $2S_{ABC} + 2S_{DEC}$ است.

$$2S_{ABC} = 2\left(\frac{1}{2} AB \times BC \sin 135^\circ\right) = 4 \times 6 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 24$$

$$2S_{DEC} = 2\left(\frac{1}{2} DE \times DC \sin 120^\circ\right) = 2 \times 3 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9$$

بنابراین میزان افزایش مساحت برابر $24 + 9 = 33$ است.



۲۱۶۲۱ ابتدا ماتریس B^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2-3} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

اکنون طرفین تساوی داده شده را از سمت راست در B^{-1} ضرب می‌کنیم.

$$3I - 2A^{-1}B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -12 & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times B^{-1}}$$

$$3B^{-1} - 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -12 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -11 \\ -1 & 14 \end{bmatrix}$$

پس کوچک‌ترین درایه این ماتریس -۱۱ است.

۲۱۶۲۲ ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

حاصل ضرب درایه‌های A
حاصل ضرب درایه‌های A^2

پس

۱۶۲۹ چون مثلث ABC متساوی الساقین است، پس ارتفاع AD

نیمساز زاویه A است. در ضمن

$$CE = \frac{AB}{2} \xrightarrow{AB=AC} CE = \frac{AC}{2} \Rightarrow \hat{BAC} = 30^\circ$$

$$\hat{C}_1 = 60^\circ \xrightarrow{\hat{C} = 75^\circ} \hat{C}_2 = 15^\circ$$

بنابراین در مثلث قائم الزاویه BEC ارتفاع EF مساوی $\frac{1}{4} BC$ است. همچنین

در این مثلث قائم الزاویه DE میانه است، پس نصف BC است و داریم

$$DE = \frac{BC}{2} \Rightarrow 2\sqrt{3} + 4 = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC = 4\sqrt{3} + 8$$

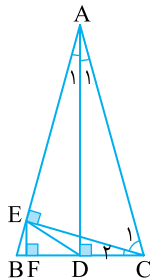
$$EF = \frac{4\sqrt{3} + 8}{4} = \sqrt{3} + 2$$

اکنون با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم الزاویه می نویسیم

$$\triangle BEC: EF^2 = BF \times FC \Rightarrow (\sqrt{3} + 2)^2 = BF(BC - BF)$$

$$3 + 4 + 4\sqrt{3} = BF(4\sqrt{3} + 8 - BF)$$

$$BF^2 - (4\sqrt{3} + 8)BF + 7 + 4\sqrt{3} = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است.}} BF = 1$$



۱۶۳۰ مطابق شکل نیم دایره را کامل می کنیم تا دایره تشکیل شود. در

این صورت زاویه B محاطی رویه رو به قطر دایره است، پس $\hat{B} = 90^\circ$. اکنون OF از سمت O را امتداد می دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند.

با استفاده از روابط طولی در دایره می نویسیم

$$BE \times EC = EF \times ED \Rightarrow \frac{BE}{EF} = \frac{ED}{EC} \Rightarrow \frac{BE}{EF} = \frac{OE + OD}{EC}$$

$$\xrightarrow{OD=OC} \frac{BE}{EF} = \frac{OE + OC}{EC} \Rightarrow \frac{BE}{EF} = \frac{OE}{EC} + \frac{OC}{EC} \quad (1)$$

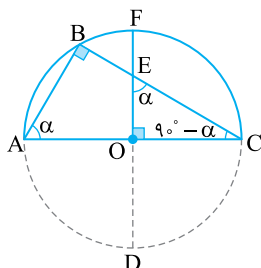
اکنون با توجه به شکل داریم

$$\triangle OEC: \frac{OE}{EC} = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \frac{OC}{EC} = \sin \alpha$$

پس

$$(1) \Rightarrow \frac{BE}{EC} = \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} + \sin \alpha$$

$$\xrightarrow{\sin \alpha = \frac{4}{5}} \frac{BE}{EC} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} + \frac{4}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5} = \frac{14}{10}$$

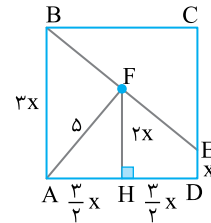


بنابراین

$$S_{AFED} = S_{AFH} + S_{DEFH} = \frac{1}{2} AH \times FH + \frac{1}{2} DH (DE + FH)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} x \right) (2x) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} x \right) (x + 2x) = \frac{3}{2} x^2 + \frac{9}{4} x^2 = \frac{15}{4} x^2$$

$$\xrightarrow{x=2} S_{AFED} = \frac{15}{4} \times 2^2 = 15$$



۱۶۲۶ ابتدا حاصل دترمینان سمت راست را به دست می آوریم.

$$\begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix} = (\log 5)^2 - (\log 2)^2$$

$$= (\log 5 - \log 2)(\log 5 + \log 2) = \log \frac{5}{2} \log 10 = \log \frac{5}{2}$$

بنابراین

$$\log(3x+1) = \log \frac{5}{2} \Rightarrow 3x+1 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

پس

$$\log \sqrt{2} x = \log \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \log \frac{1}{2} = \log 2^{-1} = -1 \log 2 = -2$$

۱۶۲۷ مکعب داده شده از $4 \times 4 \times 3 = 48$ مکعب کوچک ساخته

شده است. نمای بالای خواسته شده شامل ۱۰ مکعب است، پس حداکثر تعداد مکعب هایی که باید برداشته شوند تا به نمای خواسته شده برسیم، برابر $48 - 10 = 38$ است.

۱۶۲۸ فرض کنید مثلث ABC قائم الزاویه متساوی الساقین باشد.

برای رسم عمود منصف ساق AC باید کماتی به شعاع بزرگ تر از نصف طول AC بزنیم. با توجه به شکل اگر O مرکز دایره محاطی باشد، آن گاه

$OT = OT' = \sqrt{2}$ در نتیجه چهارضلعی OTAT' مربع و OA نیمساز زاویه A است. بنابراین مثلث OAT قائم الزاویه متساوی الساقین است،

یعنی $\hat{A}_1 = \hat{O}_1 = 45^\circ$. پس $AT = OT = \sqrt{2}$ و $OA = 2$. بنابراین

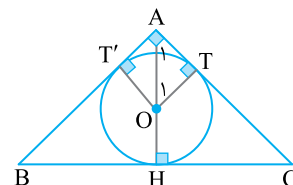
$$AH = 2 + \sqrt{2}$$

$$\triangle AHC: \hat{C} = 45^\circ \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{2}}{2} AC \Rightarrow 2 + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} AC$$

$$\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) = \frac{\sqrt{2}}{2} AC \Rightarrow \sqrt{2} + 1 = \frac{1}{2} AC$$

پس شعاع کمان برای رسم عمود منصف AC باید از $\frac{1}{2} AC$ ، یعنی از

$$\sqrt{2} + 1 \text{ بیشتر باشد.}$$



۴۱۶۳۴ می‌دانیم اندازه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$ برابر

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} \text{ است. پس اندازه تصویر قائم بردار } \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \text{ بر امتداد بردار } \vec{a}$$

برابر است با

$$\frac{|\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) \cdot \vec{a}|}{\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|} = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}|}{\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|} = \frac{\frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|} + \frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ}{|\vec{a}|}}{\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} + \frac{|\vec{b}|\cos 60^\circ}{|\vec{a}|}}$$

$$= \frac{\left|\vec{a} + |\vec{a}|\left(\frac{1}{2}\right)\right|}{\frac{|\vec{a}|}{2} + \frac{|\vec{a}|}{2}} = \frac{3}{2}$$

۳۱۶۳۵ ابتدا درمیان ماتریس A را پیدا می‌کنیم.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

از طرف دیگر

$$|A^2 + kA - A| = 125 \Rightarrow |A(A + (k-1)I)| = 125$$

$$|A||A + (k-1)I| = 125 \xrightarrow{|A|=5} |A + (k-1)I| = 25$$

اکنون ماتریس $A + (k-1)I$ را به دست می‌آوریم.

$$A + (k-1)I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & 2 \\ 2 & 2 & k \end{bmatrix}$$

$$|A + (k-1)I| = \begin{vmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & 2 \\ 2 & 2 & k \end{vmatrix} = k(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} + 2(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} + 2(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & k \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = k^3 - 12k + 16$$

بنابراین

$$k^3 - 12k + 16 = 25 \Rightarrow k^3 - 12k - 9 = 0 \Rightarrow k = -3$$

$$|(k+1)I_r| = (k+1)^r |I_r| = (k+1)^r = (-3+1)^r = -8$$

(توجه کنید که جواب معادله $k^3 - 12k - 9 = 0$ را با امتحان کردن مقادیر

$\pm 1, \pm 2, \pm 3$ پیدا کرده‌ایم. جواب‌های دیگر این معادله اعدادی گنگ

هستند.)

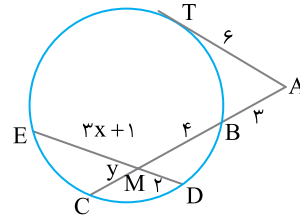
۴۱۶۳۱ با استفاده از روابط طولی در دایره می‌نویسیم

$$AT^2 = AB \times AC \Rightarrow 6^2 = 3(3+4+y) \Rightarrow y = 5$$

$$MD \times ME = MB \times MC \Rightarrow 2(3x+1) = 20 \Rightarrow x = 3$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

بنابراین



۱۱۶۳۲ در شکل A' بازتاب A نسبت به خط d است. چون بازتاب

تبدیل ایزومتري است، پس $OA = OA' = 10$. در ضمن ارتفاع $A'H$

بنابر فرض برابر $9/6$ است. پس

$$\triangle OA'H: OH^2 = OA'^2 - A'H^2 = 10^2 - 9/6^2 = (10 - 9/6)(10 + 9/6)$$

$$= (0/4)(19/6) = \frac{4}{10} \times \frac{196}{10} \Rightarrow OH = \frac{2 \times 14}{10} = \frac{14}{5}$$

$$\triangle OA'H: \cos \hat{O} = \frac{OH}{OA'} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

در نتیجه

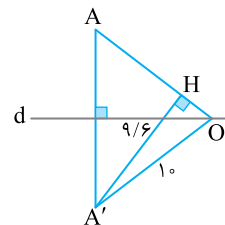
اکنون با استفاده از قضیه کسینوس‌ها می‌نویسیم

$$\triangle OAA': AA'^2 = OA^2 + OA'^2 \pm 2OA \times OA' \cos \hat{O}$$

$$= 100 + 100 \pm 2(100)\left(\frac{7}{5}\right) = 200 \pm 280$$

$$AA'^2 = 280 \Rightarrow AA' = 16, \quad AA'^2 = 144 \Rightarrow AA' = 12$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای AA' برابر ۲۸ است.



۲۱۶۳۳ ابتدا به کمک قضیه کسینوس‌ها $\cos \hat{A}$ را به دست می‌آوریم.

$$\triangle ABC: BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A}$$

$$7^2 = 4^2 + 5^2 - 2(4)(5) \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = -\frac{1}{5}$$

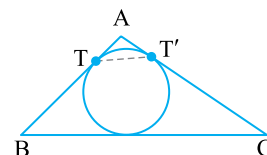
$$AT = AT' = P - a = \frac{4+5+7}{2} - 7 = 1$$

از طرف دیگر داریم

بنابراین

$$\triangle ATT': TT'^2 = AT^2 + AT'^2 - 2AT \times AT' \cos \hat{A}$$

$$= 1 + 1 - 2(1)(1)\left(-\frac{1}{5}\right) = 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5} \Rightarrow TT' = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{15}}{5} = \frac{0/4\sqrt{15}}{5}$$



راه حل دوم مرکز دایره روی عمودمنصف وتر AB و روی خط OB است. معادله هر دو خط را می نویسیم و با هم قطع می دهیم تا مرکز دایره به دست آید. شیب خط OB قرینه معکوس شیب خط $3x - 2y = 6$ و برابر $-\frac{2}{3}$ است. همچنین شیب خط عمودمنصف AB قرینه معکوس شیب AB است و

خط عمودمنصف از نقطه $M = \frac{A+B}{2} = (\frac{13}{4}, \frac{1}{4})$ می گذرد.

$$m_{OB} = -\frac{2}{3}, \quad \text{شیب عمودمنصف} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{\frac{-5}{2}} = -5$$

$$\text{OB خط: } y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow 2x + 3y = 4$$

$$\text{AB عمودمنصف خط: } y - \frac{1}{4} = -5(x - \frac{13}{4}) \Rightarrow 20x + 4y = 66$$

$$10x + 2y = 33$$

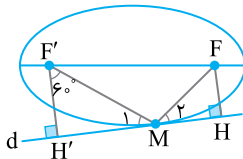
$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 10x + 2y = 33 \end{cases} \Rightarrow x = 3/5, y = -1 \Rightarrow O(3/5, -1)$$

۳۱۶۳۸ بنابر فرض سؤال $HH' = 2\sqrt{3}$. بنابر خاصیت بازتابندگی بیضی نتیجه می گیریم $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$. پس $\hat{F} = 60^\circ$. در نتیجه

$$\begin{cases} \triangle MFH: \hat{F} = 60^\circ \Rightarrow MH = \frac{\sqrt{3}}{2} MF \\ \triangle MF'H': \hat{F}' = 60^\circ \Rightarrow MH' = \frac{\sqrt{3}}{2} MF' \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می کنیم}}$$

$$MH + MH' = \frac{\sqrt{3}}{2} (MF + MF') \Rightarrow HH' = \frac{\sqrt{3}}{2} (2a)$$

$$2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} (2a) \Rightarrow 2a = 4$$

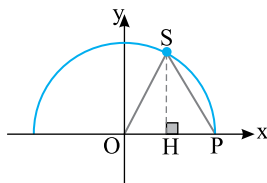


۳۱۶۳۹ از مرکز O به نقطه S وصل می کنیم. در این صورت $OS = OP = SP = R$. پس مثلث OPS متساوی الاضلاع است. اکنون ارتفاع SH را در این مثلث رسم می کنیم. چون عرض نقطه S برابر ۳ است، پس $SH = \frac{\sqrt{3}}{2} OP \Rightarrow 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} R \Rightarrow R = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ و داریم

بنابراین

$$OS = R \Rightarrow \sqrt{a^2 + 3^2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a^2 + 9 = 12 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$$

با توجه به شکل نقطه S در ناحیه اول دستگاه مختصات قرار دارد، پس a باید مثبت باشد، پس $a = \sqrt{3}$.



۳۱۶۳۶ با استفاده از فرض های سؤال مقادیر صحیح a, b, c و d را به دست می آوریم.

$$B^2 = 2I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \sqrt{2}b & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \sqrt{2}b & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+ac & 0 & a+ad \\ 0 & 2b^2 & 0 \\ c+cd & 0 & ac+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{cases} 1+ac=2 \Rightarrow ac=1 \Rightarrow a \neq 0, c \neq 0 \\ 2b^2=2 \Rightarrow b^2=1 \Rightarrow b=\pm 1 \\ c+cd=0 \Rightarrow c(1+d)=0 \xrightarrow{c \neq 0} 1+d=0 \Rightarrow d=-1 \end{cases}$$

حالت اول:

$$|A|=2 \Rightarrow ad-bc=2 \xrightarrow{\substack{d=-1 \\ b=1}} -a-c=2$$

$$a+c=-2 \xrightarrow{ac=1} a=-1, c=-1$$

$$|A|=2 \Rightarrow ad-bc=2 \xrightarrow{\substack{d=-1 \\ b=1}} -a+c=2 \xrightarrow{c=1/a} -a+\frac{1}{a}=2 \Rightarrow -a^2+1=2a \Rightarrow a^2+2a-1=0 \Rightarrow a=\frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \notin \mathbb{Z}$$

پس $a=-1, c=-1, d=-1, b=1$ و داریم

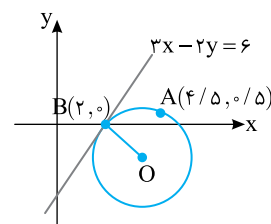
$$B^3 = B^2 \times B = 2I \times B = 2B = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \sqrt{2}b & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

در نتیجه حاصل ضرب درایه های غیرصفر ماتریس B^3 برابر $2(-2)(2\sqrt{2})(-2)(-2) = -32\sqrt{2}$ است.

۴۱۶۳۷ **راه حل اول** با توجه به داده های سؤال شکلی رسم می کنیم. در این صورت مرکز دایره در ناحیه چهارم قرار دارد، پس گزینه های (۱) و (۲) نادرست اند. اکنون گزینه های (۳) و (۴) را امتحان می کنیم. اگر $O(4, -3/5)$ را مرکز دایره در نظر بگیریم، آن گاه شیب OB باید قرینه معکوس شیب خط $3x - 2y = 6$ باشد.

$$m_{OB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3/5 - 0}{4 - 2} = \frac{-3/5}{2} = -\frac{3}{10}, \quad \text{شیب خط} = \frac{3}{2}$$

دیده می شود که حاصل ضرب این دو شیب برابر -۱ نیست. پس گزینه (۳) هم نادرست است. پس گزینه (۴) درست است.



۱۶۴۴) محیط مثلث محیطی برابر $\sqrt{48\pi}$ ، یعنی $4\sqrt{3}\pi$ است. اگر

r شعاع دایره محاطی باشد، آن گاه $r = \frac{S}{P}$. از طرف دیگر مساحت مثلث

برابر ۳ به اضافه مساحت دایره است، بنابراین

$$r = \frac{3 + \pi r^2}{2\sqrt{3}\pi} \Rightarrow 2\sqrt{3}\pi r = 3 + \pi r^2 \Rightarrow \pi r^2 - 2\sqrt{3}\pi r + 3 = 0$$

$$(\sqrt{\pi}r - \sqrt{3})^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow \text{مساحت مثلث} = 3 + \pi r^2$$

$$= 3 + \pi \left(\frac{3}{\pi}\right) = 6$$

۱۶۴۵) با استفاده از قضیه نیمساز می نویسیم

$$\triangle ABD: DE \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DB} = \frac{3}{5} \quad (1)$$

اکنون از قضیه تالس استفاده می کنیم.

$$\triangle ABC: EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB} \xrightarrow{(1)} \frac{AF}{FC} = \frac{3}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AF}{AC} = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{AF}{8} = \frac{3}{10} \Rightarrow AF = \frac{12}{5}$$

$$FC = AC - AF = 8 - \frac{12}{5} = \frac{28}{5}$$

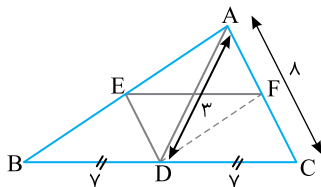
حالا از تناسب $\frac{AF}{FC} = \frac{AD}{DC} = \frac{3}{5}$ و عکس قضیه نیمساز می توان نتیجه

گرفت DF نیمساز زاویه ADC است. پس

$$\triangle ADC: DF \text{ نیمساز} \Rightarrow DF^2 = AD \times DC - AF \times FC$$

$$DF^2 = 3 \times 7 - \left(\frac{12}{5}\right) \left(\frac{28}{5}\right) = 21 - 21 \times \frac{16}{25} = 21 \left(1 - \frac{16}{25}\right) = 21 \times \frac{9}{25}$$

$$DF = \frac{3}{5} \sqrt{21} = \frac{6\sqrt{21}}{5}$$



۱۶۴۶) از فرض $\hat{ADB} = \hat{BAD}$ نتیجه می گیریم مثلث ADB

متساوی الساقین است، پس $AB = BD$. اکنون با استفاده از قضیه

سینوس ها می نویسیم.

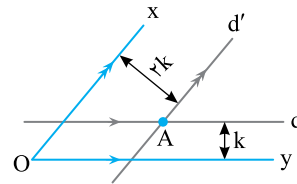
$$\begin{cases} \triangle ABC: \frac{BC}{\sin x} = \frac{AB}{\sin 45^\circ} \\ \triangle BDC: \frac{BC}{\sin y} = \frac{BD}{\sin 120^\circ} \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم می کنیم}} \frac{BC}{\sin y} = \frac{BD}{\sin 120^\circ} = \frac{BC}{\sin x} = \frac{BD}{\sin 45^\circ}$$

$$\xrightarrow{AB=BD} \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} \quad (1)$$

از طرف دیگر $x + y = 90^\circ$ ، پس $\sin y = \cos x$ و داریم

$$(1) \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

۱۶۴۰) زاویه xOy را در نظر بگیرید. خط d را موازی ضلع Oy به فاصله k از آن و خط d' را موازی ضلع Ox به فاصله ۲k از آن رسم می کنیم. نقطه تلاقی این دو خط، یعنی نقطه A جواب سؤال است.



۱۶۴۱) از C به D وصل می کنیم، زاویه

D محاطی روبه رو به قطر است، پس $\hat{D} = 90^\circ$.

از طرف دیگر از مرکز O به نقطه E وسط کمان

DC وصل می کنیم. در این صورت OE بر وتر

DC عمود خواهد شد. بنابراین دو خط OE و

AB هر دو بر DC عمودند، بنابراین

$OE \parallel AB$. در ضمن نقاط O و F وسط های دو ضلع مثلث ABC هستند.

پس بنابر عکس قضیه تالس $OF \parallel AB$. در نتیجه نقاط O، E و F روی

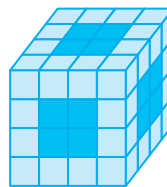
یک خط موازی با AB قرار دارند و داریم

$$OE = R = 4/5 \Rightarrow OF = OE + EF = 4/5 + 2 = 6/5$$

پس

$$\triangle ABC: OF \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{CF}{AC} = \frac{OF}{AB}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{6/5}{AB} \Rightarrow AB = 13$$



۱۶۴۲) این مکعب از ۶۴ مکعب کوچک

به ابعاد $4 \times 4 \times 4$ تشکیل شده است. مکعب های

کوچکی که فقط یک وجه آن ها رنگ شده

است، در مرکز وجه های مکعب بزرگ قرار

دارند. در شکل مکعب های پررنگ تر مورد

نظر سؤال هستند. بنابراین

$$24 = (4-2)(4-2)(4-2) = 6 \text{ تعداد مکعب های کوچک با یک وجه رنگی}$$

۱۶۴۳) فرض کنید $AE = ED = DC = x$. چون مثلث EFD

متساوی الاضلاع است، پس $EF = FD = x$. در نتیجه هر دو مثلث AEF و

DFC متساوی الساقین با زاویه رأس 120° هستند، پس $\hat{C}_1 = \hat{A}_1 = 30^\circ$.

پس $AF = FC$. از طرف دیگر با استفاده از فرض $\frac{AF}{BC} = \frac{2}{3}$ داریم $AF = 2y$

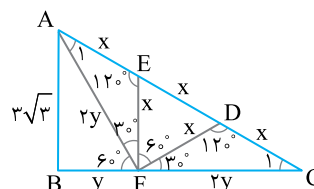
و $BC = 3y$. پس $FC = 2y$ و $BF = y$. اکنون با توجه به شکل زاویه

AFB برابر 60° است، پس با استفاده از قضیه کسینوس ها می نویسیم

$$\triangle ABF: AB^2 = AF^2 + BF^2 - 2AF \times BF \cos 60^\circ$$

$$(3\sqrt{3})^2 = (2y)^2 + y^2 - 2(2y)(y) \cos 60^\circ \Rightarrow 27 = 4y^2 + y^2 - 4y^2 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$27 = 3y^2 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow FC = 2y = 6$$



۳۱۶۵۱ نقطه A روی سهمی قرار دارد. پس فاصله نقطه A تا کانون سهمی برابر فاصله نقطه A تا خط هادی سهمی است. با استاندارد کردن معادله سهمی معادله خط هادی آن را پیدا می‌کنیم.

$$x = -y^2 + 5y - 6 \Rightarrow y^2 - 5y = -x - 6 \Rightarrow (y - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} = -x - 6$$

$$(y - \frac{5}{2})^2 = -x + \frac{1}{4} \Rightarrow (y - \frac{5}{2})^2 = -(x - \frac{1}{4})$$

پس سهمی افقی با دهانه رو به چپ با رأس $S(\frac{1}{4}, \frac{5}{2})$ است و داریم

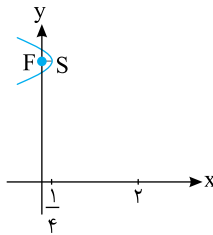
$$4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$x = a + h \xrightarrow{h = \frac{1}{4}} x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x - \frac{1}{2} = 0$$

بنابراین

$$\begin{cases} \alpha - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = 2 \\ \alpha - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = -1 \end{cases}$$

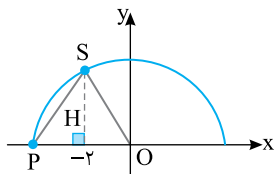
با توجه به نمودار سهمی نقطه A به طول ۲ نمی‌تواند روی سهمی باشد پس $\alpha = -1$ قابل قبول است.



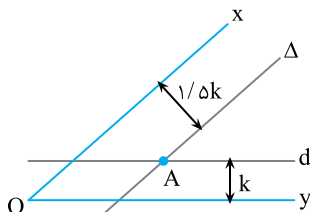
۳۱۶۵۲ از مرکز O به نقطه S وصل می‌کنیم. در این صورت $PS = OS = OP = R$ ، یعنی مثلث OPS متساوی‌الاضلاع است. پس ارتفاع SH میانه هم هست. در نتیجه $R = OP = 2OH = 4$. بنابراین

$$SH = \frac{\sqrt{3}}{2} OP = \frac{\sqrt{3}}{2} (4) = 2\sqrt{3}$$

پس عرض نقطه S برابر $2\sqrt{3}$ است.



۴۱۶۵۳ زاویه xOy را در نظر بگیرید. خط d را موازی ضلع Oy به فاصله معلوم k و خط Δ موازی ضلع Ox به فاصله معلوم 1/5k از آن رسم می‌کنیم. نقطه تلاقی دو خط d و Δ، یعنی نقطه مورد نظر سؤال است. پس برای پیدا کردن چنین نقطه‌ای از رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای غیرواقع بر آن استفاده می‌کنیم.



۲۱۶۴۷ اگر بازتاب A نسبت به خط d نقطه A' باشد و از A' به B وصل کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند، آن‌گاه بنابر مسئله هرون، محیط مثلث ABC متینم است. پس $\hat{C}_1 = \hat{C}_3$ و چون $\hat{C}_2 = \hat{C}_3$ ، پس $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$. بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویه BCH و ACH' به دلیل داشتن دو زاویه مساوی متشابه می‌شوند.

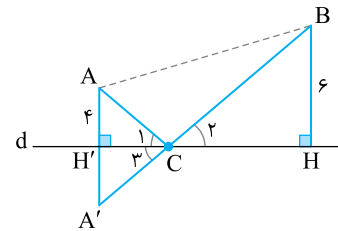
$$\triangle BCH \sim \triangle ACH' \Rightarrow \frac{CH}{CH'} = \frac{BH}{AH'} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{CH}{HH'} = \frac{3}{5} \quad (1)$$

از طرف دیگر $S_{ABHH'} = 50\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2} HH' (BH + AH') = 50\sqrt{3}$

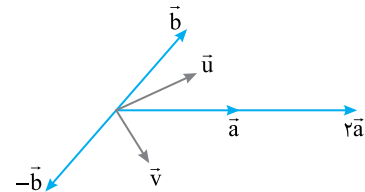
$$\frac{1}{2} HH' (10) = 50\sqrt{3} \Rightarrow HH' = 10\sqrt{3} \quad (2)$$

$$(2) \text{ و } (1) \Rightarrow \frac{CH}{10\sqrt{3}} = \frac{3}{5} \Rightarrow CH = 6\sqrt{3}$$



۳۱۶۴۸ در شکل بردار یکه $\vec{u}$ در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است و بردار یکه $\vec{v}$ در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $2\vec{a}$ و $-\vec{b}$ است. چون دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ در راستای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند، پس بر هم عمودند. بنابراین مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ساخته می‌شود برابر است با

$$S = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} |\vec{u}| |\vec{v}| \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$



۴۱۶۴۹ می‌دانیم اگر ماتریس‌های A و B مربعی باشند، آن‌گاه $|AB| = |A||B|$ پس

$$|D| = |BA^3B| = |B||A^3||B| = |B|^2|A|^3$$

از طرف دیگر $|B| = (-2)(3)(4) = -24$ و $|A| = (-1)(\frac{1}{2})(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{6}$

بنابراین

$$|D| = |B|^2|A|^3 = (-24)^2(-\frac{1}{6})^3 = 24 \times 24 \times \frac{-1}{6 \times 6 \times 6} = -\frac{16}{3}$$

۱۶۵۰ ابتدا ماتریس D را پیدا می‌کنیم. بنابر فرض سؤال می‌نویسیم.

$$D = B \times C \times A = B \times A \times B \times A = (BA)(BA) = (BA)^2$$

اکنون ماتریس BA را به دست می‌آوریم.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |BA| = 2$$

$$(1) \Rightarrow |D| = |(BA)^2| = |BA|^2 = 2^2 = 4$$

بنابراین

۱۶۵۸۴ با استفاده از قضیه نیمساز می‌نویسیم

$$\triangle ABD: DE \Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BD} = \frac{3}{5}$$

$$\triangle ABC: EF \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{FC} = \frac{3}{5}$$

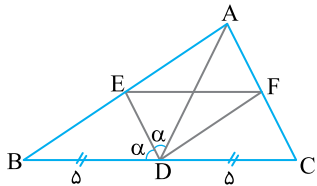
پس $\frac{AF}{FC} = \frac{AD}{DC}$ در نتیجه در مثلث ADC پاره خط DF نیمساز زاویه ADC است. بنابراین

$$\frac{AF}{FC} = \frac{3}{5} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AF}{AC} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{AF}{7} = \frac{3}{8} \Rightarrow AF = \frac{21}{8}$$

$$FC = 7 - \frac{21}{8} = \frac{35}{8}$$

$$\triangle ADC: DF \Rightarrow DF^2 = AD \times DC - AF \times FC$$

$$= 3 \times 5 - \frac{21}{8} \times \frac{35}{8} = 15(1 - \frac{49}{64}) = 15 \times \frac{15}{64} \Rightarrow DF = \frac{15}{8}$$



۱۶۵۸۹ در چهارضلعی ABCD مجموع زوایای داخلی برابر 360° است.

$$\hat{A} + \hat{ABC} + \hat{C} + \hat{ADC} = 360^\circ \Rightarrow \hat{A} + 105^\circ + \alpha + 165^\circ = 360^\circ \quad \text{پس}$$

$$\hat{A} + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \sin \hat{A} = \cos \alpha \quad (1)$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیه سینوس‌ها می‌نویسیم

$$\triangle ABD: \frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{BD}{\sin \hat{A}} \xrightarrow{(1)} \frac{AB}{1} = \frac{BD}{\cos \alpha} \quad (2)$$

$$\triangle BDC: \frac{BC}{\sin 135^\circ} = \frac{BD}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{BD}{\sin \alpha} \quad (3)$$

اکنون از تقسیم روابط (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\sqrt{2}AB}{BC} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \xrightarrow{\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}} \frac{2\sqrt{2}}{3} = \tan \alpha$$

۱۶۵۹۰ بنابر مسئله هرون دو زاویه C_1 و C_2 مساوی اند، پس مثلث‌های

قائم‌الزاویه ACH' و BCH' به دلیل داشتن دو زاویه مساوی متشابه‌اند.

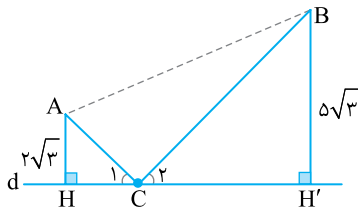
$$\triangle ACH' \sim \triangle BCH' \Rightarrow \frac{CH}{CH'} = \frac{AH}{BH} = \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \frac{2}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{CH}{HH'} = \frac{2}{7} \quad (1)$$

$$S_{ACH} = 6\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2} AH \times CH = 6\sqrt{3} \quad \text{از طرف دیگر}$$

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} CH = 6\sqrt{3} \Rightarrow CH = 6 \quad (2)$$

$$(2) \text{ و } (1) \Rightarrow \frac{6}{HH'} = \frac{2}{7} \Rightarrow HH' = 21$$



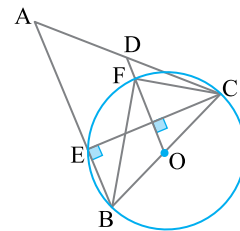
۱۶۵۴۳ از O به F وصل می‌کنیم. چون F وسط $\widehat{EC}$ قرار دارد، پس

OF بر وتر CE عمود می‌شود. از طرف دیگر زاویه E محاطی روبه‌رو به قطر BC است، پس $\hat{E} = 90^\circ$. بنابراین OF و AB هر دو بر CE عمودند. پس $OF \parallel AB$. در ضمن در مثلث ABC نقاط O و D به ترتیب وسط‌های اضلاع BC و AC هستند. پس بنابر عکس قضیه تالس $OD \parallel AB$. بنابراین نقاط O، F و D روی یک خط موازی AB هستند. داریم

$$\begin{cases} OF = R = \frac{7}{2} \\ DF = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} OD = \frac{7}{2} + 1 = \frac{9}{2}$$

$$\triangle ABC: OD \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{OD}{AB} = \frac{CD}{AC}$$

$$\frac{\frac{9}{2}}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 9$$



۱۶۵۵۳ مکعب بزرگ از $4 \times 4 \times 4 = 64$ مکعب کوچک تشکیل شده

است. اگر از هر طرف یک ردیف حذف کنیم، آن‌گاه $2 \times 2 \times 2 = 8$ مکعب کوچک باقی می‌مانند که هیچ وجه رنگی‌ای ندارند. از طرف دیگر تعداد مکعب‌های کوچک رنگ شده برابر $64 - 8 = 56$ است. بنابراین

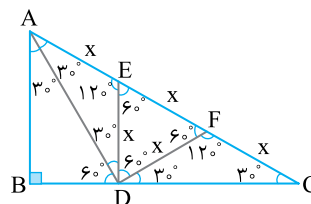
$$\frac{\text{تعداد مکعبات رنگ شده}}{\text{تعداد مکعبات رنگ نشده}} = \frac{56}{8} = 7$$

۱۶۵۵۶ فرض کنید $DF = x$. چون مثلث‌های DFC و AED

متساوی‌الساقین و مثلث DEF مثلث متساوی‌الاضلاع است، نتیجه می‌گیریم $AE = DE = DF = EF = FC = x$

پس زاویه‌های روی شکل را خواهیم داشت

$$\triangle ABD: \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow BD = \frac{AD}{2} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = 2$$



۱۶۵۵۷ فرض کنید r شعاع دایره محاطی باشد.

$$2P = \sqrt{80}\pi \Rightarrow 2P = 4\sqrt{5}\pi \Rightarrow P = 2\sqrt{5}\pi$$

در ضمن مساحت چهارضلعی محیطی مساوی 5 به اضافه مساحت دایره است، پس

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow r = \frac{5 + \pi r^2}{2\sqrt{5}\pi} \Rightarrow 2\sqrt{5}\pi r = 5 + \pi r^2$$

$$\pi r^2 - 2\sqrt{5}\pi r + 5 = 0 \Rightarrow (\sqrt{\pi}r - \sqrt{5})^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}$$

$$\text{بنابراین} \quad \text{محیط دایره} = 2\pi r = 2\pi \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}\right) = 2\sqrt{5}\pi$$

۱۶۶۴ ۲ ابتدا معادله سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم

$$y^2 + 2x + 3y + 2 = 0 \Rightarrow (y + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + 2x + 2 = 0$$

$$(y + \frac{3}{2})^2 = -2x + \frac{1}{4} \Rightarrow (y + \frac{3}{2})^2 = -2(x - \frac{1}{8})$$

پس سهمی افقی و دهانه آن رو به چپ با رأس $S(\frac{1}{8}, -\frac{3}{2})$ است و

$$4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

فاصله نقطه $A(\alpha, \beta)$ روی سهمی از کانون و خط هادی آن برابر است.

اکنون خط هادی این سهمی را پیدا می‌کنیم

$$\text{معادله خط هادی: } x = a + h \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \Rightarrow x - \frac{5}{8} = 0$$

$$\text{فاصله } A \text{ تا خط هادی} = 2/5 \Rightarrow |\alpha - \frac{5}{8}| = \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \frac{5}{8} = \frac{5}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{25}{8} \\ \alpha - \frac{5}{8} = -\frac{5}{2} \Rightarrow \alpha = -\frac{15}{8} \end{cases}$$

با توجه به شکل به ازای $\alpha = \frac{25}{8}$ نقطه $A(\alpha, \beta)$ نمی‌تواند روی این

سهمی باشد. پس $\alpha = -\frac{15}{8}$ قابل قبول است. نقطه $A(-\frac{15}{8}, \beta)$ در

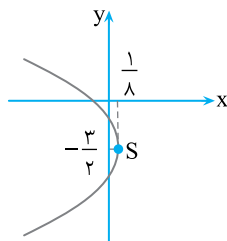
معادله سهمی صدق می‌کند. پس

$$\beta^2 + 2(-\frac{15}{8}) + 3\beta + 2 = 0 \Rightarrow \beta^2 + 3\beta - \frac{7}{4} = 0$$

$$\xrightarrow{\times 4} 4\beta^2 + 12\beta - 7 = 0$$

بنابراین اختلاف مقادیر ممکن برای β برابر است با

$$\frac{\sqrt{12^2 - 4(4)(-7)}}{|4|} = \frac{\sqrt{256}}{4} = 4$$

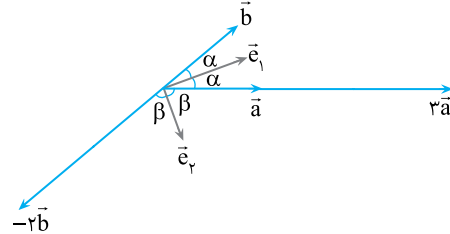


۱۶۶۱ ۲ $\vec{e}_1$ در راستای نیمساز داخلی زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$

و $\vec{e}_2$ در راستای نیمساز خارجی زاویه بین این دو بردار است. پس

$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$. بنابراین متوازی‌الاضلاع ساخته شده توسط بردارهای واحد $\vec{e}_1$

و $\vec{e}_2$ مربع به ضلع ۱ است. در نتیجه طول قطر این مربع $\sqrt{2}$ است.



۱۶۶۲ ۴ دترمینان ماتریس‌های A و B برابرند با

$$|A| = (-2)(-3)(-1) = -6, \quad |B| = (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{3})(-5) = -\frac{5}{6}$$

از طرف دیگر

$$|(AB)^2| = |AB|^2 = (|A||B|)^2 = ((-6) \times (-\frac{5}{6}))^2 = 5^2 = 25$$

۱۶۶۳ ۱ ابتدا ماتریس A را به دست می‌آوریم

$$A = B \times C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس A^2 را پیدا می‌کنیم

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین

A^5 (ستون اول A^2) A (سطر سوم A^2) = درایه سطر سوم و ستون اول

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= -8 - 8 = -16$$