پاسخ‌های تشریحی

ویندوز ۱۲

ویراست چهارم

فیزیک ۳ دوازدهم

جلد دوم

رضا خالو • امیرعلی میری



رشتهٔ ریاضی

نشر الگو



پیشگفتار

به نام خدا

درود بر

همکاران گرامی و دانش‌آموزان عزیز

به دنیای پنجره‌های کتاب فیزیک ۳ (ویندوز ۱۲) خوش آمدید.

همراهی صمیمانهٔ شما عزیزان عزم ما را برای تغییر و ویراست کتاب فیزیک ۳ (ویندوز ۱۲) دوچندان کرد و اکنون کتاب جدید دنیای پنجره‌ها در اختیار شماست.

کتاب دو جلدی است. یک جلد شامل درسنامه و تست‌ها و جلد دوم پاسخ‌نامهٔ کاملاً تشریحی

اما حکایت پنجره‌ها چیست؟

هر فصل به پنج پنجره و هر پنجره به زیرموضوع‌هایی به نام «نما» که دارای شماره و عنوان است تقسیم شده است.

در هر پنجره ابتدا درسنامه و سپس تست‌های همان پنجره آورده شده است.

۱) درسنامه : در این کتاب با یک درسنامهٔ کامل و جامع روبه‌رو هستید که در آن تمام نکات درسی در قالب مسئله‌های تشریحی و به همراه تست‌های مربوط به آن نکات به‌صورت طبقه‌بندی شده در نماهای مختلف ارائه شده است.

۲) تست‌ها: تست‌ها بخش مهم کتاب را تشکیل می‌دهند که شامل تست‌های کنکور، تست‌های برگرفته از کتاب درسی و تست‌های تألیفی هستند.

الف- چینش تست‌ها در هر «نما» از ساده به سخت بوده تا بتوانید گام به گام پیش رفته و پله پله مهارتتان را بالا ببرید.

ب- معمولاً دانش‌آموزان در ابتدا بدون مطالعه درسنامه به سراغ حل تست‌ها می‌روند. اگر چنین کردید و در تست‌هایی دچار مشکل شدید برای رجوع به درسنامه و یادگیری بهتر کافی است به سراغ همان شماره «نما» در درسنامه بروید.

پ- برای مرور سریع تست‌ها حدود ٪۳۰ آن‌ها را با لوگوی مشخص کرده‌ایم.

ت- در کنار بعضی از تست‌ها لوگوی مشاهده می‌کنید. در پاسخ این تست‌ها، یک تست اضافی تحت عنوان «بازی با سؤال» قرار دارد که شما با حل آن می‌توانید اطمینان پیدا کنید که تست مورد نظر را یاد گرفته‌اید.

ث- پنجرهٔ روبه‌رو (آزمونک) - پنجرهٔ تودرتو (آزمون فصل)

در این کتاب آزمونک‌ها به صورت فایل PDF ارائه شده است و شما می‌توانید با مراجعه به سایت نشر الگو یا اسکن QR Code فهرست، آن را دانلود کنید. سؤالات آزمون‌هایی که در این قسمت قرار دارند، طبقه‌بندی نشده‌اند و شما خودتان باید موضوع هر سؤال را تشخیص دهید. ترتیب این آزمون‌ها در کتاب برای مطالعه به این صورت است که بین هر دو بخش یک آزمونک قرار می‌گیرد. می‌توان گفت این بخش به صورت یک مینی کتاب مجازی در اختیار شما قرار می‌گیرد.

در انتهای هر فصل هم یک آزمون با عنوان پنجرهٔ تودرتو (آزمون فصل) قرار می‌گیرد.

ج- پنجرهٔ رو به گذشته : در این پنجره مسائل ترکیبی دینامیک و حرکت‌شناسی با کار و انرژی جنبشی ارائه شده است.



اما جلد دوم یا جلد پاسخنامه[1]

تمام زحماتی که شما و ما در درسنامه و تست‌ها کشیده‌ایم، در جلد ۲ به سرانجام می‌رسد. به قول معروف شاهنامه آخرش خوش است. برای همین سعی کردیم در این قسمت کامل‌ترین و بهترین پاسخ‌ها ارائه شود.

به سراغ ویژگی‌های جلد دوم برویم.

خط فکری: بارها شما از ما سر کلاس پرسیده‌اید که چرا این مسئله از این راه حل شده یا چرا از این فرمول استفاده می‌کنیم؟ برای پاسخ به این نیاز شما، خط فکری ارائه شده تا با خواندن آن شما استراتژی حل مسئله را به‌دست بیاورید. بنابراین اگر تستی را حل نکرده‌اید، پیشنهاد می‌کنیم که ابتدا خط فکری آن را بخوانید و سعی کنید مسئله را حل کنید. در بیشتر تست‌ها با خواندن خط فکری مشکل شما در حل مسئله برطرف خواهد شد.

نکته: مطالب مهم و مطالبی که باید به آن دقت کنید را تحت عنوان «نکته» آورده‌ایم تا از چشم شما دور نماند.

یادآوری: اگر در حل یک تست نیاز به مطلبی باشد که قبلاً بیان شده، برای راحتی شما آن مطلب را دوباره بیان کرده‌ایم.

یادداشت ریاضی: گاهی در حل تست شما به یک مطلب ریاضی نیاز دارید که ممکن است آن را به خاطر نداشته باشید از این رو آن مطلب و یا اثبات آن را برای شما آورده‌ایم.

میان‌بر: بعد از حل تشریحی و کامل تست در آخر بعضی از تست‌ها برای سرعت بخشیدن به حل تست راه‌حل‌های کوتاه با تکیه بر فیزیک و ریاضی ارائه شده است.

بازی با سؤال: در برخی از تست‌ها، همان تست به نحو دیگری بیان شده تا اگر شما تست مورد نظر را حل نکرده‌اید، بعد از مطالعهٔ پاسخ، بازی با سوال را حل کرده و با پاسخ ارائه شده مقایسه کنید.

پاسخ آزمونک‌ها و آزمون فصل: در پاسخ این تست‌ها، شمارهٔ «نمای» مربوط به آن تست ارائه شده تا شما متوجه شوید این تست مربوط به چه موضوعی است و درسنامهٔ آن کجاست.

در آخر باید بگوییم که پاسخ همهٔ تست‌ها به‌صورت گام به گام انجام شده تا پله پله با هم تست را به طور کامل حل کرده و یاد بگیریم.

در پایان لازم است از تلاش صمیمانهٔ کارکنان نشر الگو سپاسگزاری کنیم، در واحد ویرایش خانم‌ها زهره نوری و زهرا امیدوار و محسن شعبان شمیرانی. همچنین آقای عرفان شاهین‌پور که ویرایش این کتاب بی‌یاری ایشان امکان‌پذیر نبود. در واحد حروف‌چینی از خانم فاضله محسنی و همچنین خانم ستین مختار مدیر واحد فنی و ویرایش ونیز از همکارانی که نظرات اصلاحی داده‌اند، آقایان علی جیرودی و وحید کرابی قدردانی می‌کنیم.

همچنین از آقای بهزاد قاسم‌زاده که نکات اصلاحی را پس از مطالعه کتاب برای ما ارسال کردند تشکر می‌کنیم.

رضا خالو – امیرعلی میری

۱- با اسکن QR Code یا با مراجعه به سایت نشر الگو به آدرس olgoobooks.ir می‌توانید جلد دوم این کتاب را دانلود کنید.



پاسخ‌های تشریحی فصل اول ۱

پاسخ‌های تشریحی فصل دوم ۱۳۹

پاسخ‌های تشریحی فصل سوم ۲۴۱

پاسخ‌های تشریحی فصل چهارم ۳۵۷

پاسخ‌های تشریحی فصل پنجم ۴۱۵

پاسخ‌های تشریحی فصل ششم ۴۴۹

فصل اول

حرکت بر خط راست



پنجره ۱

A ۲ ۱

در زندگی روزمره وقتی متحرکی مطابق شکل بر مسیر آبی رنگ از A به B می‌رود، طول مسیر حرکت مهم است که به آن **مسافت** طی شده ℓ می‌گویند. اما در فیزیک علاوه بر مسافت که به مسیر حرکت بستگی دارد، فاصلهٔ مستقیم A تا B نیز اهمیت دارد که این فاصله را توسط یک بردار نمایش می‌دهند و به آن **بردار جابه‌جایی** گویند، بنابراین جابه‌جایی کمیت برداری و مسافت کمیت نرده‌ای است و گزینهٔ (۱) نادرست است. مسافت و جابه‌جایی هر دو برحسب یکای متر در SI بیان می‌شوند و گزینهٔ (۲) درست است. مسافت به مسیر حرکت بستگی دارد. به‌طور مثال، اگر متحرک بر مسیر خاکستری از A به B برود، مسافت آن با مسیر آبی رنگ متفاوت است اما جابه‌جایی در هر دو مورد برابر بردار $\overrightarrow{AB}$ است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

A ۴ ۲

خط فکری ابتدا مفهوم مکان، جهت حرکت را باید در ذهن خود یادآوری کنید. بردار مکان، برداری است که از مبدأ مکان $(x=0)$ یا $(y=0)$ به محل متحرک رسم می‌شود. بنابراین اگر این بردار در جهت مثبت محور باشد، مکان متحرک مثبت است. برای مثال مکان متحرک A $(\vec{x}_A=4\vec{i})$ است و اگر در خلاف جهت محور باشد مکان متحرک منفی است همچنین مکان متحرک B $(x_B=-2\vec{i})$ است. اگر متحرک در جهت مثبت محور حرکت کند، جهت حرکت مثبت و اگر در خلاف جهت محور حرکت کند جهت حرکت منفی است.

A: خودروی A در xهای مثبت و در ۶ متری مبدأ قرار دارد، بنابراین بردار مکان آن $+6\vec{i}$ است و گزارهٔ (الف) نادرست است.

از طرفی خودروی A در خلاف جهت محور xها حرکت می‌کند، بنابراین گزارهٔ (ب) درست است.

B: خودروی B در مکان‌های منفی محور yها است و بردار مکان آن $-4\vec{j}$ است و در جهت مثبت محور yها در حال حرکت است بنابراین بردار مکان B و جهت حرکت آن، خلاف جهت هم هستند. در نتیجه گزارهٔ (پ) نادرست و گزارهٔ (ت) درست است.

بازی با سؤال کدام گزینه جهت بردار مکان و جهت حرکت متحرک را درست نشان می‌دهد؟

۱) → و → ۲) → و ←

۳) ← و ← ۴) ← و →

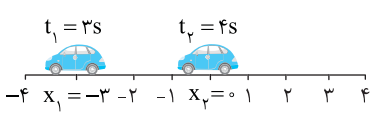
پاسخ خودرو در خلاف جهت محور xها (←) در حرکت است و در لحظهٔ نشان داده شده خودرو در مکان‌های مثبت محور xهاست و بردار مکان آن به سمت راست (→) است.

گزینهٔ ۲

A ۳ ۳

یادآوری معادلهٔ حرکت یا معادلهٔ مکان - زمان به یک رابطهٔ ریاضی بین مکان و زمان گفته می‌شود که به کمک آن می‌توان مکان متحرک را در هر لحظه مشخص کرد. معادلهٔ حرکت به صورت $x=t^2-4t$ است بنابراین کافی است زمان‌های $t_1=3s$ و $t_2=4s$ را در معادله قرار دهیم و مکان‌ها را به‌دست آوریم و روی محور مشخص کنیم.

$$x=t^2-4t \xrightarrow{t_1=3s} x=9-12=-3m \quad ,\quad \xrightarrow{t_2=4s} x=16-16=0$$



A ۴ ۴

خط فکری یک معادلهٔ مکان - زمان (معادلهٔ حرکت) در اختیار داریم که در آن دو مجهول a و b وجود دارد. اما شما در دو لحظهٔ مبدأ زمان یعنی $t_1=0$ و همچنین $t_2=3s$ مکان متحرک را در اختیار دارید و در این دو لحظه متحرک به ترتیب از $x=12m$ و مبدأ مکان یعنی $x=0$ می‌گذرد، بنابراین کافی است شما اعداد زمان را در معادله قرار دهید و یک دستگاه دو معادله دو مجهول حل کنید.

اعداد را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x=t^2+at+b \xrightarrow{t_1=0,\ x=12m} 12=0+0+b\Rightarrow b=12m$$

$$\xrightarrow{t_2=3s,\ x=0} 0=9+3a+b \xrightarrow{b=12} 0=3a+21\Rightarrow a=-7m/s$$

نکته اما از کجا یکای a را تشخیص داده‌ایم؟ با توجه به بحث سازگاری یکاها در فیزیک دهم باید یکای at با یکای x یعنی متر یکسان باشد بنابراین:

$$\text{متر}=a(\text{ثانیه})^2\Rightarrow[\text{یکای } a]=m/s^2$$

A ۵ ۴

خط فکری به دو عبارت «مبدأ حرکت» و «مبدأ مکان» باید دقت کنید و دو نکته زیر را فراگیرید.

نکته مبدأ مکان یعنی $x=0$ و مکان متحرک از مبدأ مکان یعنی فاصلهٔ متحرک از $x=0$.

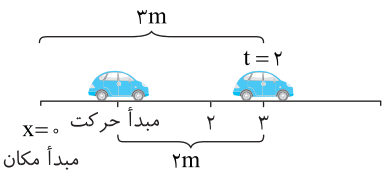
نکته مبدأ حرکت یعنی مکانی که متحرک در لحظهٔ $t=0$ در آن قرار دارد که به آن **مکان اولیه** گویند.

معادلهٔ حرکت به‌صورت $x=t^3-3t+1$ است. در لحظهٔ $t=0s$ متحرک در مکان $x=+1m$ قرار دارد یعنی مکان اولیهٔ متحرک (مبدأ حرکت) $x=+1m$ است.

لحظهٔ $t=2s$ را در معادلهٔ حرکت قرار می‌دهیم و مکان متحرک را به‌دست می‌آوریم.

$$x=t^3-3t+1 \xrightarrow{t=2s} x=2^3-(3\times2)+1=8-6+1\Rightarrow x=+3m$$

بنابراین وقتی متحرک در $x=+3m$ قرار دارد فاصلهٔ آن از مبدأ حرکت $(x=+1m)$ برابر $3-1=2m$ و از مبدأ مکان $(x=0)$ برابر $3m$ است.



B ۱ ۶

یادداشت ریاضی برای تعیین علامت یک تابع درجه ۲ به صورت $y=ax^2+bx+c$ ابتدا ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم و سپس با رسم یک جدول معادله را تعیین علامت می‌کنیم، بین دو ریشه مخالف علامت a (ضریب x^2) و بیرون دو ریشه موافق علامت a.

خط فکری وقتی مسئله به شما می‌گوید بردار مکان منفی باشد یعنی x باید منفی باشد بنابراین شما باید این معادله را تعیین علامت کنید.

۱ ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$x=t^2+t-12=0\Rightarrow(t+4)(t-3)=0\Rightarrow\begin{cases}t=3s\\t=-4s\end{cases}$$

۲ ریشه‌ها را در جدول قرار می‌دهیم و معادله را تعیین علامت می‌کنیم.

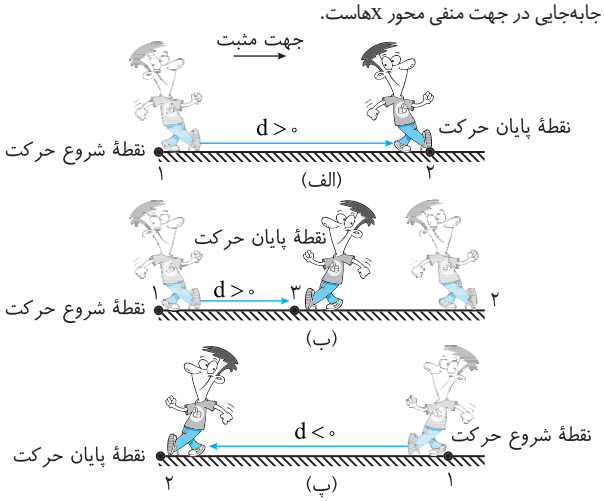
t	$-\infty$		-4		0		3		$+\infty$
x		+		−		−		+	

۳ اما زمان منفی در فیزیک دبیرستان تعریف نمی‌شود بنابراین قسمت $t<0$ را رنگ زده‌ایم بنابراین در بازهٔ $t=0$ تا $t=3s$ مکان منفی است در نتیجه در بازهٔ $t=2s$ تا $t=3s$ $(\Delta t=1s)$ مکان منفی و از $t>3$ مکان مثبت است و گزینهٔ (۱) درست است.

۷ ۲ B

نکته هرگاه حرکت روی خط راست و بدون تغییر جهت صورت گیرد مسافت و بزرگی جابه‌جایی با هم برابر است.

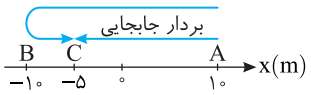
در شکل (الف) و (پ) شخص روی خط راست در حرکت است و تغییر جهت نمی‌دهد و جابه‌جایی و مسافت هم‌اندازه هستند. در شکل (الف) جابه‌جایی در جهت مثبت محور xهاست و در شکل (ب) نیز جابه‌جایی در جهت مثبت محور xهاست. در شکل (پ) جابه‌جایی در جهت منفی محور xهاست.



۸ ۱ A

خط فکری طول مسیر حرکت را با رسم شکل به‌دست بیاورید. سپس بردار جابه‌جایی را از ابتدای مسیر یعنی نقطهٔ A به انتهای مسیر یعنی نقطهٔ C رسم کنید و مقدار آن را حساب کنید و مقدارهای به‌دست آمده را بر هم تقسیم کنید.

۱ مسیر حرکت جسم به صورت روبه‌رو است، بردار جابه‌جایی برابر با برداری است که مکان اولیه را به مکان نهایی وصل می‌کند.



$|\vec{d}|=x_C-x_A \Rightarrow |\vec{d}|=|-۵-۱۰|=۱۵m$

۲ مسافت طی شده برابر طول مسیر حرکت است یعنی متحرک از $A=۱۰m$ به $B=-۱۰m$ رفته و سپس از $B=-۱۰m$ به $C=-۵m$ می‌رود بنابراین مسافت طی شده برابر است با:

$\ell=|d_{AB}|+|d_{BC}|=۲۵m$

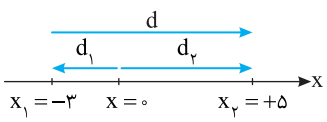
۳ نسبت خواسته شده برابر است با:

$\frac{\ell}{d}=\frac{۲۵}{۱۵}=\frac{۵}{۳}$

۹ ۲ A

نکته هرگاه متحرک از مبدأ مکان عبور کند، بردار مکان تغییر جهت و تغییر علامت می‌دهد.

شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم، به شکل دقت کنید. ابتدا بردار مکان منفی است و سپس مثبت می‌شود و گزارهٔ (الف) نادرست است.

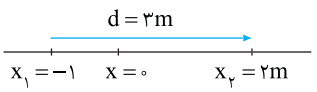


بردار جابه‌جایی $(\vec{d})$ در جهت مثبت و بردار مکان ابتدا منفی $(d_1<۰)$ و سپس مثبت $(d_2>۰)$ است و بردار جابه‌جایی و بردار مکان در طول مسیر همواره هم‌جهت نیستند و گزارهٔ (ب) نادرست است. مسافت طی‌شده و جابه‌جایی مطابق شکل هم‌اندازه هستند و گزارهٔ (پ) درست است.

۱۰ ۳ A

نکته مسافت طی شده همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازهٔ جابه‌جایی است $(\ell\geq|d|)$.

متحرک از مکان $x_1=-۱m$ به مکان $x_2=۲m$ رفته است. بنابراین قطعاً جابه‌جایی آن مطابق شکل $۳m$ است. اما مسافت طی شده برابر و یا بزرگ‌تر $۳m$ است $(\ell\geq۳m)$ و تنها گزینهٔ بزرگ‌تر از $۳m$ گزینهٔ (۳) است.

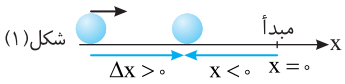


۱۱ ۴ B

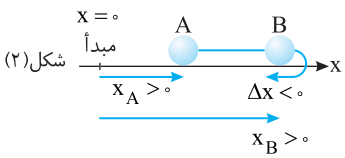
یادآوری تغییر جهت بردار مکان هنگام عبور متحرک از مبدأ مکان $(x=۰)$ اتفاق می‌افتد.

یادآوری تغییر جهت حرکت متحرک یعنی متحرک به یک نقطه برود و از آن برگردد.

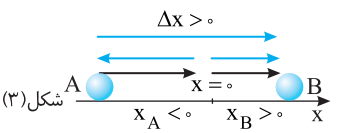
برای بررسی گزینه‌های این تست به شکل‌های زیر دقت کنید.



با توجه به شکل (۱) متحرک در جهت مثبت محور جابه‌جا شده اما بردار مکان آن منفی است و گزینهٔ (۱) درست است.



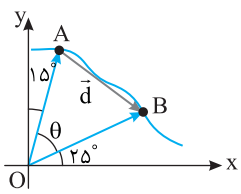
ممکن است مطابق شکل (۲) متحرک در مکان مثبت در جهت مثبت جابه‌جا شده سپس تغییر جهت داده باشد و در جهت منفی جابه‌جا شود اما از مبدأ نگذرد و بردار مکان با آن‌که تغییر می‌کند اما تغییر جهت نمی‌دهد. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.



اگر متحرک مطابق شکل (۳) در یک جهت از مبدأ بگذرد بردار مکان تغییر جهت می‌دهد اما جهت حرکت تغییر نمی‌کند و گزینهٔ (۳) درست است. در شکل (۲) در نقطهٔ B متحرک تغییر جهت داده است اما بردار مکان هم‌چنان مثبت است و تغییر جهت نداده است، بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست و پاسخ تست است. (نادرستی آن نیز با توجه به شکل دوم کاملاً مشخص است).

۱۲ ۱ A

خط فکری بردارهای مکان متحرک را در نقاط A و B از مبدأ مکان رسم کنید.

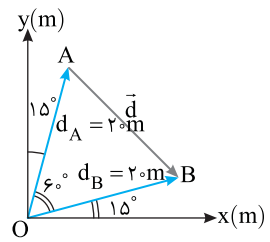


سپس به کمک هندسه زاویهٔ θ را حساب کنید.

زاویهٔ اولیه بردار مکان با محور xها برابر $\theta_1=۹۰-۱۵=۷۵^\circ$ و زاویه نهایی آن $\theta_2=۲۵^\circ$ است یعنی بردار مکان ۵۰° ساعتگرد چرخیده است.

۱۳ ۱ A

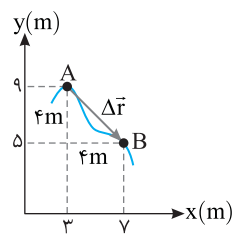
بردار جابه‌جایی از نقطهٔ A تا نقطهٔ B را رسم کنید، مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است زیرا طول بردارهای مکان d_A و d_B یکی است مثلث متساوی‌الساقین است و چون زاویه رأس آن ۶۰° است، پس مثلث حاصل متساوی‌الاضلاع است و اندازهٔ بردار جابه‌جایی $d=۲۰m$ است.



۱۴ ۲ A

یادداشت ریاضی فاصلهٔ دو نقطه در صفحهٔ xoy با مختصات $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید. $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

از نقطهٔ A به نقطهٔ B برداری رسم کرده سپس به کمک قضیهٔ فیثاغورس اندازهٔ بردار جابه‌جایی را به دست می‌آوریم:



$\overrightarrow{AB}=\sqrt{(۷-۳)^2+(۵-۹)^2}=۴\sqrt{۲}m$

B ۱۵ ۲

خط فکری باید به سراغ ریاضی بروید و فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B را در ریاضی از رابطهٔ $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ به‌دست می‌آوریم، بنابراین بردار جابه‌جایی راحت به‌دست می‌آید. اما یادمان باشد که مسافت طی شده (ℓ) همواره بزرگ‌تر یا مساوی جابه‌جایی است. در نتیجه مسئله به راحتی قابل حل است.

۱ بردار جابه‌جایی خواهد شد:

$$\vec{d}=\vec{d}_2-\vec{d}_1\Rightarrow\vec{d}=(1-4)\vec{i}+(-1-3)\vec{j}\Rightarrow d=-3\vec{i}-4\vec{j}$$

۲ بردار جابه‌جایی بین دو نقطهٔ $\vec{d}_1=4\vec{i}+3\vec{j}$ و $\vec{d}_2=\vec{i}-\vec{j}$ خواهد شد:

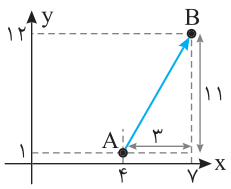
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\Rightarrow d=\sqrt{(1-4)^2+(-1-3)^2}$$
$$\Rightarrow d=\sqrt{9+16}=5m$$

۳ مسافت طی شده باید بزرگ‌تر یا مساوی ۵m بیشتر باشد. بنابراین گزینهٔ (۲) پاسخ مسئله است.

بازی با سوال **متحرکی در صفحهٔ مختصات از نقطهٔ A(۴m ,۱m) به نقطهٔ B(۷m ,۱۲m) می‌رود. جابه‌جایی متحرک چند متر است؟**

۱) $\sqrt{130}$ ۲) $\sqrt{65}$ ۳) $\sqrt{170}$ ۴) $\sqrt{85}$

پاسخ **از A تا B بردار جابه‌جایی را رسم می‌کنیم. اندازهٔ فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B همان اندازهٔ جابه‌جایی است. به کمک ریاضی مسئله قابل حل است.**



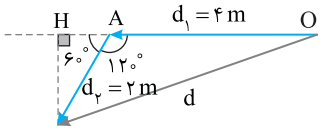
$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}\Rightarrow d=\sqrt{(7-4)^2+(12-1)^2}$$
$$=\sqrt{3^2+11^2}\Rightarrow d=\sqrt{9+121}=\sqrt{130}m$$

گزینهٔ ۱

B ۱۶ ۴

خط فکری برای حل این نوع مسائل باید ابتدا شکل ساده‌ای از موضوع مسئله مطابق داده‌های مسئله رسم کنید. سپس اعداد مسئله را روی شکل قرار دهید. برای به‌دست آوردن مسافت کافی است، تمام اعداد مسیر از ابتدا تا انتهای مسیر را با هم جمع کنیم. اما برای به‌دست آوردن بردار جابه‌جایی نیاز به محاسبات مثلثاتی و ریاضی خواهیم داشت.

۱ ابتدا یک شکل ساده از مسأله رسم می‌کنیم. جابه‌جایی برداری است که از ابتدای مسیر را به انتهای آن وصل می‌کند. مطابق شکل خط عمودی از B بر خط OA رسم می‌کنیم. در مثلث AHB ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر است از این رو $AH=\frac{2}{2}=1m$ و ضلع BH خواهد شد:



$$\cos 30^\circ=\frac{BH}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{BH}{2}\Rightarrow BH=\sqrt{3}m$$

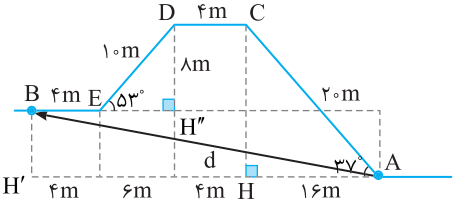
اکنون در مثلث OHB، طول وتر (d) را به دست می‌آوریم.

$$d^2=BH^2+OH^2=(\sqrt{3})^2+(4+1)^2\Rightarrow d^2=3+25=28\Rightarrow d=2\sqrt{7}m$$

۲ مسافت طی‌شده برابر مجموع طول مسیر ۴m و طول مسیر ۲m یعنی ۶m است.

C ۱۷ ۴

خط فکری برای به‌دست آوردن مسافت کافی است اعداد روی شکل را از A تا B با هم جمع کنید اما برای جابه‌جایی باید برداری از A تا B رسم کنید سپس به سراغ هندسه و مثلثات بروید و اندازهٔ جابه‌جایی را حساب کنید.



۱ مسافت طی شده را حساب می‌کنیم.

$$\ell=20+4+10+4\Rightarrow\ell=38m$$

۲ فاصلهٔ CH و AH خواهد شد:

$$\triangle AHC:\cos 37^\circ=\frac{AH}{AC}\Rightarrow 0/8=\frac{AH}{20}\Rightarrow AH=16m$$

$$\sin 37^\circ=\frac{CH}{AC}\Rightarrow 0/6=\frac{CH}{20}\Rightarrow CH=12m$$

۳ DH'' و EH'' را به‌دست می‌آوریم:

$$\triangle DEH'':\cos 53^\circ=\frac{EH''}{DE}\Rightarrow 0/6=\frac{EH''}{10}\Rightarrow EH''=6m$$

$$\sin 53^\circ=\frac{DH''}{DE}\Rightarrow 0/8=\frac{DH''}{10}\Rightarrow DH''=8m$$

۴ جابه‌جایی افقی متحرک برابر است با: $AH'=16+4+6+4\Rightarrow AH'=30m$

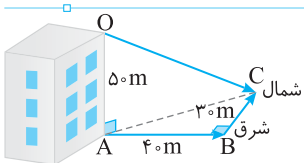
۵ جابه‌جایی قائم متحرک را حساب می‌کنیم: $BH'=CH-DH''=12-8=4m$

۶ اکنون اندازهٔ بردار جابه‌جایی را می‌توان به‌دست آورد.

$$AB=\sqrt{BH'^2+AH'^2}=\sqrt{4^2+30^2}=\sqrt{916}\simeq 30/3m$$

C ۱۸ ۲

خط فکری با یک مسئله سه‌بعدی سر و کار داریم. شما ابتدا باید جابه‌جایی متحرک روی سطح زمین وقتی ابتدا ۴۰m به سمت شرق و سپس ۳۰m به سوی شمال می‌رود را حساب کنید سپس به سراغ جابه‌جایی کل بروید.



۱ شکل مسیر حرکت را رسم می‌کنیم. پرنده از نقطهٔ O به نقطهٔ A روی سطح زمین آمده سپس ۴۰m از A تا B به سمت شرق سپس ۳۰m به سوی شمال رفته است.

۲ جابه‌جایی روی زمین را حساب می‌کنیم.

$$AC^2=AB^2+BC^2=40^2+30^2\Rightarrow AC=50m$$

۳ در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAC، اندازهٔ وتر OC را حساب می‌کنیم که همان اندازهٔ جابه‌جایی است. $OC^2=OA^2+AC^2\Rightarrow OC^2=50^2+50^2\Rightarrow OC=50\sqrt{2}m$

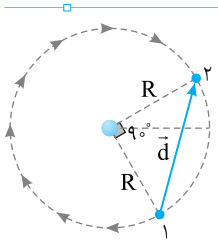
میانبر هرگاه امتداد سه مسیر بر هم عمود باشد مانند محورهای x، y و z جابه‌جایی کل خواهد شد: $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

بازی با سوال **مسافت طی شده توسط پرنده چند متر است؟**

پاسخ **کافی است اعداد ۵۰m، ۴۰m و ۳۰m را با هم جمع کنیم**

$$\ell=50+40+30=120m$$

A ۱۹ ۲



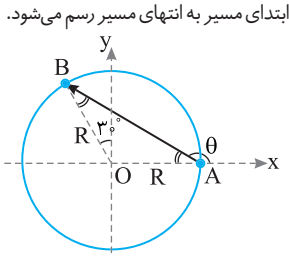
دقت کنید که در صورت مسأله بیان شده که ماه در جهت ساعتگرد از مکان (۱) به مکان (۲) می‌رود بنابراین مسیر حرکت مطابق شکل روبه‌روست و ماه، مسافتی که طی کرده است $\frac{3}{4}$ محیط دایرهٔ مسیر حرکت است. $\ell=\frac{3}{4}(2\pi R)\Rightarrow\ell=\frac{3}{2}\pi R$

بردار جابه‌جایی از مکان (۱) به مکان (۲) رسم می‌شود و با توجه به شکل و اندازهٔ آن بنا به رابطهٔ فیثاغورس جابه‌جایی را حساب می‌کنیم. $d=\sqrt{R^2+R^2}=\sqrt{2}R$

در این صورت: $\frac{\ell}{d}=\frac{\frac{3}{2}\pi R}{\sqrt{2}R}=\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}\pi}{4}$

B ۲۰ ۲

یادآوری بردار جابه‌جایی برداری است که از ابتدای مسیر به انتهای مسیر رسم می‌شود.



بردار جابه‌جایی را از A تا B رسم می‌کنیم. مثلث OAB یک مثلث متساوی‌الساقین است و زاویهٔ رأس آن مطابق شکل $\hat{O}=90^\circ+30^\circ=120^\circ$ است، بنابراین زاویهٔ دو ساق آن با قاعده (جابه‌جایی) ۳۰° است. یعنی زاویهٔ بین بردار جابه‌جایی و جهت مثبت محور xها خواهد شد:

$$\theta=180^\circ-30^\circ=150^\circ$$

بازی با سؤال در این سؤال اگر شعاع حرکت ۱۵cm باشد، مسافت طی شده توسط متحرک چند سانتی‌متر است؟ $(\pi=3/14)$

۱) ۳۱/۴ ۲) ۱۵/۷ ۳) ۱/۵۷ ۴) ۳/۱۴

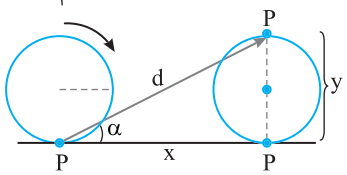
پاسخ متحرک از A تا B کمان 120° یعنی $\frac{120}{360}=\frac{1}{3}$ محیط دایره را طی می‌کند، بنابراین مسافت خواهد شد:

گزینهٔ ۱ مسافت $\ell=\frac{1}{3}(2\pi R)\Rightarrow \ell=\frac{1}{3}\times(2\times3/14\times15)\Rightarrow \ell=31/4cm$

B ۲۱ ۲

خط فکری به این فکر کنید که اگر چرخ، نیم‌دور بچرخد نقطهٔ P در چه وضعیتی قرار می‌گیرد تا بتوانید جابه‌جایی افقی و قائم نقطهٔ P را مشخص کرده و بزرگی جابه‌جایی را به‌دست بیاورید.

با چرخش نیم دور مطابق شکل، نقطهٔ P از سطح زمین به بالاترین نقطه می‌رود در این حالت نقطهٔ P در امتداد قائم به اندازهٔ قطر لاستیک بالا می‌رود $(y=60\,cm)$ و روی سطح افقی به اندازهٔ نصف محیط جابه‌جا می‌شود $x=\frac{1}{2}(2\pi R)$.



$x=\frac{1}{2}\pi\times60\Rightarrow x=30\pi\,cm\Rightarrow x=30\times3=90\,cm$

اندازهٔ جابه‌جایی خواهد شد:

$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{90^2+60^2}\Rightarrow d=30\sqrt{3^2+2^2}\Rightarrow d=30\sqrt{13}cm$

بازی با سؤال در این حرکت بردار جابه‌جایی با سطح افقی زاویهٔ α می‌سازد. کدام گزینه درست است؟

۱) $\tan\alpha=\frac{2}{3}$ ۲) $\tan\alpha=\frac{1}{3}$ ۳) $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\tan\alpha=\sqrt{3}$

پاسخ با توجه به شکل خواهیم داشت:

$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{60}{90}=\frac{2}{3}$

گزینهٔ ۱

A ۲۲ ۳

سرعت متوسط بنابه تعریف برابر نسبت بردار جابه‌جایی به زمان جابه‌جایی است $(\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{t})$، بنابراین سرعت متوسط کمیت برداری است و همواره بردار سرعت متوسط هم‌جهت بردار جابه‌جایی است. تندی متوسط بنابه تعریف برابر نسبت مسافت به زمان طی مسیر است $s_{av}=\frac{\ell}{t}$. تندی متوسط کمیت نرده‌ای و همواره مثبت بیان می‌شود.

A ۲۳ ۱

سرعت متوسط برابر با $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ بنابراین:

متحرک اول:

$x_1=-2, x_2=6/4\Rightarrow \Delta x=x_2-x_1=8/4m\ ,\ v_{av}=\frac{8/4}{4}=2/1\,m/s$

متحرک دوم: با توجه به رابطهٔ سرعت متوسط داریم: $-2/8=\frac{\Delta x}{2}\Rightarrow \Delta x=-5/6m$

$\Rightarrow x_2-x_1=-5/6\Rightarrow -2/5-x_1=-5/6\Rightarrow \vec{x}_1=3/1\,\vec{i}$

متحرک سوم: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow 3/3=\frac{8/6-2}{\Delta t}\Rightarrow \Delta t=2s$

	مکان آغازین	مکان پایانی	زمان	سرعت متوسط
متحرک (۱)	$-2\vec{i}$	$6/4\vec{i}$	۴s	A
متحرک (۲)	B	$-2/5\vec{i}$	۲s	$-2/8\vec{i}$
متحرک (۳)	$2\vec{i}$	$8/6\vec{i}$	C	$3/3\vec{i}$

A ۲۴ ۳

یادآوری هرگاه مختصات نقطهٔ ابتدایی و انتهایی مسیر حرکت را داشته باشیم می‌توانیم جابه‌جایی متحرک را حساب کنیم و اما نمی‌توانیم در مورد مسافت اظهارنظر کنیم. مگر آنکه مسیر حرکت از ابتدا تا انتهای مسیر مشخص باشد.

۱ متحرک روی محور xها از مکان $+4m$ به مکان $-6m$ رفته است یعنی جابه‌جایی آن برابر است با: $d=-6-4=-10m$

۲ سرعت متوسط متحرک برابر خواهد شد با:

$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{-10}{6-2}\Rightarrow v_{av}=-2/5m/s$

۳ مسیر حرکت مشخص نیست یعنی معلوم نیست که متحرک مستقیم و بدون تغییر جهت از مکان $+4m$ به مکان $-6m$ رفته است یا نه؟ بنابراین در مورد تندی متوسط نمی‌توان اظهارنظر کرد.

B ۲۵ ۳

خط فکری در بررسی سرعت متوسط، مهم نیست که متحرک چه مسیری را طی کرده است تنها شما باید ببینید متحرک از چه نقطه‌ای به چه نقطه‌ای رفته و فاصلهٔ دو نقطه را حساب کنید و جابه‌جایی را به‌دست آورده تا بتوانید سرعت متوسط را حساب کنید.

متحرک در مبدأ زمان یعنی $t=0$ در مکان $-40m$ و در لحظهٔ آخر یعنی $t_2=10s$ در مکان $+20m$ بوده یعنی $d=20-(-40)=60m$ در جهت مثبت محور xها جابه‌جا شده است، بنابراین سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{d}{t}=\frac{60}{10-0}\Rightarrow v_{av}=6m/s$

دقت کردید لحظهٔ $t=6s$ و مکان $x=100m$ در حل این تست تأثیری ندارد.

بازی با سؤال متحرکی که روی محور x در حرکت است، در لحظهٔ $t_1=2/4s$ از مکان $x_1=-4m$ و در لحظهٔ $t_2=4/4s$ از مکان $x_2=2m$ می‌گذرد و سپس در لحظهٔ t_3 به مکان $x_3=6m$ می‌رسد. اگر در بازهٔ t_2 تا t_3 سرعت متوسط $2m/s$ باشد، سرعت متوسط در بازهٔ t_1 تا t_3 چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ با توجه به تعریف سرعت متوسط، لحظهٔ t_3 را حساب می‌کنیم.

$t_2\to t_3: v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow 2=\frac{6-2}{t_3-4/4}\Rightarrow 2=\frac{4}{t_3-4/4}\Rightarrow t_3-4/4=2$

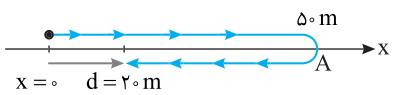
$\Rightarrow t_3=6/4s$

اکنون می‌توانیم سرعت متوسط از $t_1=2/4s$ تا $t_3=6/4s$ را به‌دست بیاوریم:

گزینهٔ ۱ $t_1\to t_3: v_{av}=\frac{6-(-4)}{6/4-2/4}=\frac{10}{4}=2/5m/s$

A ۲۶ ۱

در به‌دست آوردن سرعت متوسط، مسیر حرکت مهم نیست و تنها محل نقطهٔ ابتدایی و محل نقطهٔ انتهایی مسیر مهم است. در این مسئله ذره از مکان $x=0$ شروع کرده و در نهایت به مکان $+20m$ رسیده است بنابراین جابه‌جایی متحرک $d=+20m$ است و سرعت متوسط خواهد شد:



$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{20}{20}\Rightarrow v_{av}=1\,m/s$

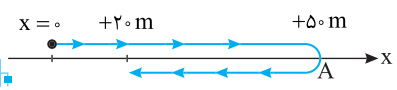
بازی با سؤال ذره‌ای در امتداد محور x ها از مبدأ شروع به حرکت می‌کند و در مدت ۲۰ ثانیه ابتدا تا نقطهٔ A به طول $+50$ می‌رود و بعد به نقطهٔ $+20$ برمی‌گردد. تندی متوسط ذره در این مدت چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) صفر ۴) ۳/۵

پاسخ مسافت طی‌شده برابر است با: $\ell=50+30=80m$

تندی متوسط خواهد شد: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{80}{20}=4m/s$

گزینهٔ ۲



A ۲۷ ۲

خط فکری چرا در هر گزینه دو مکان برای لحظهٔ $t=۴s$ بیان شده است؟ چون که اندازهٔ سرعت متوسط داده شده بنابراین شما باید در فرمول سرعت متوسط یک بار عدد $+۳/۵m/s$ و بار دیگر عدد $-۳/۵m/s$ قرار دهید. به همین دلیل دو جواب به‌دست می‌آوریم.

رابطهٔ سرعت متوسط را نوشته و داده‌های مسئله را در آن جای‌گذاری می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\xrightarrow{x_۱=-۱/۶m}\begin{cases}v_{av}=\frac{x_۲-(-۱/۶)}{۴}\Rightarrow\frac{x_۲+۱/۶}{۴}=۳/۵\Rightarrow x_۲=۱۲/۴m\\ v_{av}=\frac{x_۲-(-۱/۶)}{۴}\Rightarrow\frac{x_۲+۱/۶}{۴}=-۳/۵\Rightarrow x_۲=-۱۵/۶m\end{cases}$$

B ۲۸ ۳

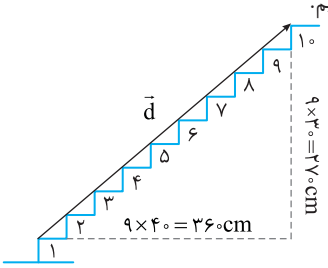
خط فکری اشتباه نکنید فاصلهٔ لبهٔ پلهٔ اول تا لبهٔ پلهٔ دهم، ۱۰ پله نیست، باید شکل رسم کنید و تعداد پله‌ها را بشمرید. سپس از لبهٔ پلهٔ اول تا لبهٔ پلهٔ دهم بردار جابه‌جایی را رسم کرده و اندازهٔ آن را به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست بیاورید.

۱ شمردید؟ تعداد پله‌ها، ۹ پله است.

۲ پهنای هر پله $۴۰cm$ است و جابه‌جایی افقی موچه $۹\times۴۰=۳۶۰cm$ می‌شود.

۳ بلندی هر پله $۳۰cm$ است و جابه‌جایی قائم موچه $۹\times۳۰=۲۷۰cm$ خواهد شد.

۴ جابه‌جایی موچه را حساب می‌کنیم.



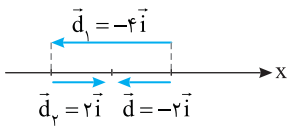
$$|\vec{d}|=\sqrt{(۲۷۰)^۲+(۳۶۰)^۲}$$
$$=\sqrt{۹^۲\times(۳۰^۲+۴۰^۲)}$$
$$\Rightarrow|\vec{d}|=۴۵۰cm=۴/۵m$$

۵ سرعت متوسط آن را به‌دست می‌آوریم.

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{۴/۵}{۴۵}=۰/۱m/s$$

B ۲۹ ۱

۱ به صورت مسئله دقت کنید. متحرک ابتدا جابه‌جایی $-۴\vec{i}$ را انجام داده یعنی در مدت $۲s$ در خلاف جهت محور xها، $۴m$ جابه‌جا شده و در دو ثانیهٔ دوم جابه‌جایی $۲\vec{i}$ را انجام داده است یعنی از $۴m$ که در خلاف جهت محور رفته بود، $۲m$ را برگشته و در کل جابه‌جایی آن در مدت $۴s$، $-۲m$ است. بنابراین بردار سرعت متوسط آن در این چهار ثانیه خواهد شد:



$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}\Rightarrow\vec{v}_{av}=\frac{-۲\vec{i}}{۴}=-\frac{\vec{i}}{۲}$$

۲ مسافت طی شده در مدت $۴s$ برابر $\ell=۴+۲=۶m$ و تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{۶}{۴}=۱/۵m/s$$

بازی با سوال متحرکی روی محور xها در حال حرکت بوده و در بازهٔ زمانی $t_۱=۲s$ تا $t_۲=۴s$ بردار جابه‌جایی آن $۵\vec{i}$ و در مدت $t_۲=۴s$ تا $t_۳=۵s$ بردار جابه‌جایی آن $-۳\vec{i}$ خواهد بود. سرعت متوسط در بازهٔ $t=۲s$ تا $t=۵s$ چند متر بر ثانیه خواهد بود؟

۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) $-\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

پاسخ جابه‌جایی متحرک در بازهٔ $۲s$ تا $۴s$، ۵ متر و در جهت مثبت محور xها بوده سپس در مدت $۱s$ (بازهٔ $t_۲=۴s$ تا $t_۳=۵s$) از این ۵ متر، $۳m$ را برمی‌گردد. بنابراین جابه‌جایی آن در کل برابر $۵-۳=۲m$ و در جهت مثبت محور xها بوده و سرعت متوسط متحرک خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{۲}{۵-۲}=\frac{۲}{۳}m/s$$

گزینهٔ ۳

B ۳۰ ۲

خط فکری فاصلهٔ مستقیم تهران تا اصفهان مشخص نیست بنابراین سرعت متوسط قابل محاسبه نیست. بنابراین شما باید تنها به سراغ تندی متوسط یعنی گزینه‌های (۲) و (۳) بروید.

۱ مدت زمان حرکت از تهران تا قم $t_۱=۱/۵h$ و مدت زمان حرکت از قم تا اصفهان ۸۰٪ بیشتر از $۱/۵h$ است. بنابراین زمان حرکت قم تا اصفهان خواهد شد:

$$t_۲=t_۱+\frac{۸۰}{۱۰۰}t_۱\Rightarrow t_۲=۱/۵+\frac{۴}{۵}(۱/۵)\Rightarrow t_۲=۲/۷h$$

۲ کل زمان حرکت از تهران تا اصفهان را به‌دست می‌آوریم.

$$t_{کل}=t_۱+t_۲=۱/۵+۲/۷=۴/۲h$$

۳ مسافت طی شده خودرو را حساب می‌کنیم. $\ell=۱۲۵+۲۷۴\Rightarrow\ell=۳۹۹km$

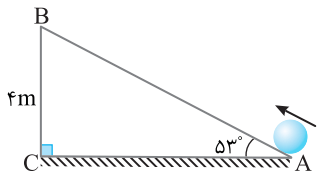
۴ تندی متوسط در کل مسیر خواهد شد.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{۳۹۹}{۴/۲}\Rightarrow s_{av}=۹۵km/h$$

A ۳۱ ۲

نکته هرگاه در یک مسیر متحرک به مکان اولیه‌اش بازگردد، جابه‌جایی متحرک صفر و در نتیجه سرعت متوسط متحرک صفر می‌شود.

۱ مسیر حرکت A تا B را حساب می‌کنیم.



$$\sin ۵۳^\circ=\frac{BC}{AB}$$
$$\Rightarrow ۰/۸=\frac{۴}{AB}\Rightarrow AB=۵m$$

۲ مسافت طی شده در کل مسیر رفت و برگشت خواهد شد: $\ell=۵+۵=۱۰m$

۳ مسافت طی شده را به‌دست می‌آوریم.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t=۳+۵}s_{av}=\frac{۱۰}{۸}\Rightarrow s_{av}=۱/۲۵m/s$$

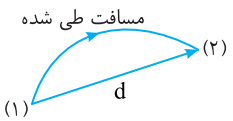
A ۳۲ ۳

یادآوری تندی متوسط برابر مسافت پیموده شده تقسیم بر زمانِ طی این مسافت و کمیتی نرده‌ای است. (مسافت طی‌شده در یکای زمان)

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}$$

یادآوری سرعت متوسط برابر جابه‌جایی تقسیم بر یکای زمان و کمیتی برداری است.

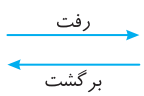
$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}$$



در حرکت بر خط راست بدون تغییر جهت مسافت طی‌شده و اندازهٔ جابه‌جایی برابر بوده و تندی متوسط با اندازهٔ سرعت متوسط برابر است. در مسیرهای خمیده مثل شکل روبه‌رو همواره مسافت طی‌شده از اندازهٔ جابه‌جایی بزرگ‌تر است. از این‌رو: $s_{av}>|\vec{v}_{av}|$

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) در حالت‌های خاصی درست هستند و عبارت قطعاً نادرست در مورد آن‌ها صدق نمی‌کند. اندازهٔ جابه‌جایی متحرک همواره کوچک‌تر یا برابر مسافت طی شده است $(d\le\ell)$ بنابراین اندازهٔ سرعت متوسط همواره کوچک‌تر یا برابر تندی متوسط بوده و هرگز اندازهٔ سرعت متوسط نمی‌تواند از تندی متوسط بیشتر شود و قطعاً گزینهٔ (۳) نادرست است.

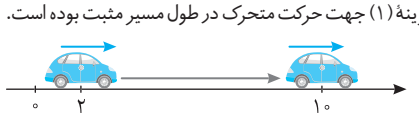
در یک مسیر بسته مثلاً در یک مسیر رفت و برگشت به محل شروع حرکت، جابه‌جایی صفر و سرعت متوسط صفر است. هرچند تندی متوسط صفر نیست و گزینهٔ (۴) درست است.



A ۳۳ ۴

برای بررسی گزینه‌های این تست از یک مثال عددی استفاده می‌کنیم. فرض کنید متحرک در مدت $۲s$ از مکان $۲\vec{i}$ به مکان $۱۰\vec{i}$ رفته حال حالت‌های مختلف را بررسی می‌کنیم:

۱ در این حالت مانند گزینهٔ (۱) جهت حرکت متحرک در طول مسیر مثبت بوده است.



$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۸}{۲}=۴m/s$$

۲ فرض کنید در مدت ۲s از مکان $+۲\vec{i}$ ابتدا به مکان $+۱۲\vec{i}$ رفته و سپس از $+۱۲\vec{i}$ به $+۱۰\vec{i}$ بازگشته بنابراین ابتدا جهت حرکت مثبت و سپس این جهت منفی است.



$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۸}{۲}=۴m/s$$

۳ فرض کنید در مدت ۲s از مکان $+۲\vec{i}$ ابتدا به مبدأ مکان رفته و سپس از مبدأ به $+۱۰\vec{i}$ برود. بنابراین ابتدا جهت حرکت منفی و سپس این جهت مثبت است:



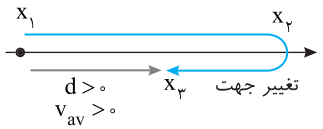
$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۸}{۲}=۴m/s$$

بنابراین هر سه گزینه می‌تواند حرکت ما را شامل شود و گزینهٔ (۴) درست است.

A ۳ ۳۴

نکته جهت بردار سرعت چگونگی مسیر حرکت را مشخص نمی‌کند.

اگر جهت حرکت مثبت باشد جهت جابه‌جایی و سرعت متوسط نیز مثبت خواهد بود اما عکس این جمله نادرست است یعنی اگر سرعت متوسط متحرک مثبت باشد ممکن است متحرک ابتدا در جهت منفی و سپس در جهت مثبت حرکت کرده باشد و یا ابتدا در جهت مثبت محور جابه‌جا شده و سپس مقدار کمتری در جهت منفی حرکت کرده است، به طوری که جابه‌جایی کل مثبت بوده و سرعت متوسط مثبت باشد اما متحرک همواره در جهت مثبت حرکت نکرده باشد. بنابراین گزارهٔ (الف) درست است. در شکل زیر مشخص است که سرعت متوسط مثبت اما متحرک مدتی در خلاف جهت محور حرکت کرده است و گزارهٔ (ب) نادرست است.

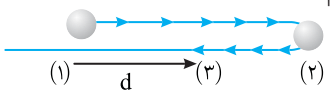


با توجه به رابطهٔ $\vec{v}_{av}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$ جهت سرعت و جابه‌جایی یکسان است، بنابراین گزارهٔ (پ) درست است.

B ۳ ۳۵

۱ مسافت طی شده دو برابر اندازهٔ جابه‌جایی است. $\ell=۲d$

۲ سرعت متوسط در این حرکت قطعاً از تندی متوسط کوچک‌تر است از این رو بنابه فرض مسئله خواهیم داشت:



$$s_{av}-v_{av}=۲\quad (II)$$

۳ در رابطهٔ (۲) به جای v_{av} و s_{av} مقدار آن‌ها را براساس فرمول آن‌ها قرار می‌دهیم.

$$s_{av}=\frac{\ell}{t},v_{av}=\frac{d}{t}\xrightarrow{(II)}\frac{\ell}{t}-\frac{d}{t}=۲\xrightarrow[t=۴s]{\ell=۲d}$$

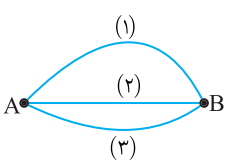
$$\frac{۲d}{۴}-\frac{d}{۴}=۲\Rightarrow\frac{d}{۴}=۲\Rightarrow d=۸m,\ell=۱۶m$$

۴ تندی متوسط را حساب می‌کنیم

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{۱۶}{۴}=۴m/s$$

B ۳ ۳۶

خط فکری تندی هر سه متحرک یکسان است، بنابراین هر متحرکی که مسیرش طولانی‌تر است در زمان بیشتری از A به B می‌رود. اما سرعت متوسط به مسیر حرکت بستگی ندارد و برداری است که ابتدای مسیر (نقطهٔ A) را به انتهای مسیر (نقطهٔ B) وصل می‌کند. با توجه به این مطالب و رابطهٔ سرعت متوسط $v_{av}=\frac{d}{\Delta t}$ می‌توانید دربارهٔ پاسخ درست فکر کنید.

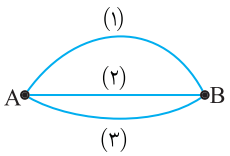


۱ طول مسیر (۱) از هر سه مسیر طولانی‌تر و طول مسیر (۲) از هر سه مسیر کوتاه‌تر است. تندی هر سه متحرک یکسان است بنابراین: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t_۱>\Delta t_۳>\Delta t_۲$

۲ جابه‌جایی هر سه برابر است از این‌رو:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t_۱>\Delta t_۳>\Delta t_۲]{d_۱=d_۲=d_۳}v_{av_۱}<v_{av_۳}<v_{av_۲}$$

بازی با سوال مطابق شکل زیر، سه متحرک با بزرگی سرعت متوسط یکسان سه مسیر نشان داده شده را طی می‌کند و تندی متوسط در مسیرهای (۱)، (۲) و (۳) به‌ترتیب $s_{av_۱}$، $s_{av_۲}$ و $s_{av_۳}$ خواهد بود. کدام گزینه درست است؟



۱) $s_{av_۱}=s_{av_۲}=s_{av_۳}$

۲) $s_{av_۱}<s_{av_۲}<s_{av_۳}$

۳) $s_{av_۱}>s_{av_۳}>s_{av_۲}$

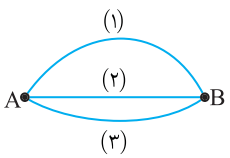
۴) $s_{av_۱}>s_{av_۲}>s_{av_۳}$

پاسخ یادآوری سرعت متوسط $v_{av}=d/t$ و تندی متوسط $s_{av}=\ell/t$ است که d، جابه‌جایی و ℓ مسافت طی شده است.

۱ با توجه فرض مسئله سرعت متوسط هر سه متحرک برابر است از طرفی جابه‌جایی هر سه متحرک از A تا B یکسان و برابر d است.

$$v_{av_۱}=v_{av_۲}=v_{av_۳}\Rightarrow\frac{d}{\Delta t_۱}=\frac{d}{\Delta t_۲}=\frac{d}{\Delta t_۳}\Rightarrow\Delta t_۱=\Delta t_۲=\Delta t_۳$$

۲ اکنون در مورد تندی متوسط می‌توان اظهارنظر کرد. مسافت طی شده توسط متحرک (۱) بیشترین و توسط متحرک (۲) کمترین است. از این رو می‌توان نوشت:



$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=\text{ثابت}]{\ell_۱>\ell_۳>\ell_۲}s_{av_۱}>s_{av_۳}>s_{av_۲}$$

گزینهٔ ۳

B ۱ ۳۷

۱ جابه‌جایی خودرو در یک مسیر رفت و برگشت صفر است، بنابراین سرعت متوسط آن نیز صفر است. $(v_{av}=۰)$

۲ تندی متوسط در کل مسیر را حساب می‌کنیم. اگر طول مسیر رفت و طول مسیر برگشت ℓ باشد طول کل مسیر رفت و برگشت ۲ℓ خواهد بود.

۳ زمان حرکت در مسیر رفت خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t_۱}\Rightarrow۹۰=\frac{\ell}{\Delta t_۱}\Rightarrow\Delta t_۱=\frac{\ell}{۹۰}$$

۴ زمان حرکت در مسیر برگشت خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t_۲}\Rightarrow۶۰=\frac{\ell}{\Delta t_۲}\Rightarrow\Delta t_۲=\frac{\ell}{۶۰}$$

۵ تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell_{کل}}{\Delta t_{کل}}=\frac{۲\ell}{\frac{\ell}{۹۰}+\frac{\ell}{۶۰}}\Rightarrow s_{av}=\frac{۲\ell}{\frac{۲+۳}{۱۸۰}\ell}\Rightarrow s_{av}=\frac{۲\times۱۸۰}{۵}=۷۲km/h$$

میانبر در یک مسیر وقتی دو نیمهٔ مسیر توسط خودرو با دو تندی متفاوت $s_{av_۱}$ و $s_{av_۲}$ طی می‌شود تندی متوسط در کل مسیر خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{۲s_{av_۱}s_{av_۲}}{s_{av_۱}+s_{av_۲}}$$

بازی با سوال متحرکی نصف مسیر مستقیمی را با تندی ۴۰m/s و بقیهٔ آن مسیر را در همان سو با تندی v طی کرده است. اگر سرعت متوسط در کل مسیر ۴۸m/s باشد، اندازهٔ v چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۵۶ ۲) ۹۰ ۳) ۳۰ ۴) ۶۰

پاسخ با توجه به تعریف سرعت متوسط می‌توان نوشت:

$$v_{av}=\frac{\Delta x_۱+\Delta x_۲}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}=\frac{\frac{x}{۲}+\frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲s_۱}+\frac{x}{۲s_۲}}\Rightarrow v_{av}=\frac{۲s_۱s_۲}{s_۱+s_۲}\Rightarrow۴۸=\frac{۲\times۴۰\times v}{۴۰+v}$$

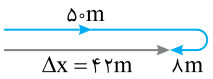
$$\Rightarrow۲۴۰+۶v=۱۰v\Rightarrow v=۶۰m/s$$

گزینهٔ ۴

B ۳ ۳۸

خط فکری باید مدت زمان رفت و مدت زمان برگشت را حساب کنیم و ببینیم که در لحظهٔ $t=۱۴s$ ، متحرک در چه مکانی است و آیا در مسیر رفت است یا مسیر برگشت؟ در این صورت می‌توانیم سرعت متوسط را به‌دست بیاوریم.

۱ زمان رفت شناگر برابر خواهد شد با:



$$t=\frac{\Delta x}{v_{av}}\Rightarrow t_۱=\frac{۵۰}{۵}\Rightarrow t_۱=۱۰s$$

۲ زمان برگشت شناگر برابر خواهد شد با:

$$t_۲=\frac{۵۰}{۲}=۲۵s$$

بنابراین در لحظهٔ $t=۱۴s$ شناگر در مسیر برگشت است و با سرعت متوسط $۲m/s$ در مدت $۴s$ ، مسافت ۸ متر برگشته است، بنابراین جابه‌جایی شناگر از لحظهٔ شروع تا $t=۱۴s$ برابر $۵۰-۸=۴۲m$ است و سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{۴۲}{۱۴}=\frac{۶}{۲}=۳m/s$$

A ۳ ۳۹

خط فکری دقت کنید که متحرک زمان کل حرکت خود (t) را در دو بازهٔ زمانی یکسان $(\frac{t}{۲})$ طی می‌کند، بنابراین باید بررسی کنید مسافت طی شده در هریک از این بازه‌ها برحسب t چه مقدار است.

۱ مسافت طی‌شده در بازهٔ $\Delta t_۱=\frac{t}{۲}$ برابر است با: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow ۱۰=\frac{\ell_۱}{\frac{t}{۲}}\Rightarrow \ell_۱=۵t$

۲ مسافت طی شده در بازهٔ $\Delta t_۲=\frac{t}{۲}$ با تندی $۴۰m/s$ خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow ۴۰=\frac{\ell_۲}{\frac{t}{۲}}\Rightarrow \ell_۲=۲۰t$$

۳ تندی متوسط در کل مدت t را به‌دست می‌آوریم.

$$s_{av}=\frac{\ell_۱+\ell_۲}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}\Rightarrow s_{av}=\frac{۵t+۲۰t}{t}=۲۵m/s$$

میانبر هرگاه متحرک کل زمان حرکت را در بازه‌های زمانی یکسان با تندی‌های متفاوت $s_{av_۱}, s_{av_۲}, \dots, s_{av_n}$ طی کند آن‌گاه تندی متوسط در کل زمان حرکت خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{s_{av_۱}+s_{av_۱}+\dots+s_{av_n}}{n}$$

A ۴ ۴۰

۱ طول مسیر حرکت یعنی مسافت طی شده را حساب می‌کنیم ابتدا در مدت $۲h$ با تندی متوسط $۶۰km/h$ متحرک حرکت کرده و مسافت طی شده $\ell_۱=۶۰\times ۲=۱۲۰km$ و در مدت $۳۰min$ یا $۰/۵h$ متوقف بوده و سپس با تندی $۹۰km/h$ به مدت $۲/۵h$ رانندگی کرده یعنی مسافت طی شده آن $\ell_۲=۹۰\times ۲/۵=۲۲۵km$ است.

۲ کل زمان حرکت متحرک $\Delta t_{کل}=۲+۰/۵+۲/۵=۵h$ و کل مسافت طی شده $\ell=۱۲۰+۲۲۵=۳۴۵km$ است، بنابراین تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{۳۴۵}{۵}\Rightarrow s_{av}=۶۹km/h$$

A ۲ ۴۱

۱ جابه‌جایی در مدت $t_۱$ و $t_۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{d}{t}\Rightarrow d_۱=v_{av_۱}t_۱=۲۰t_۱\ ,\quad d_۲=v_{av_۲}t_۲=۴۰t_۲$$

۲ متحرک در یک جهت در حال حرکت است و جابه‌جایی کل آن برابر مجموع $d_۲$ و $d_۱$ است. از این رو بنا به تعریف سرعت متوسط خواهیم داشت:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow ۲۸=\frac{۲۰t_۱+۴۰t_۲}{t_۱+t_۲}\Rightarrow ۲۸t_۱+۲۸t_۲=۲۰t_۱+۴۰t_۲$$

$$\Rightarrow ۸t_۱=۱۲t_۲\Rightarrow \frac{t_۱}{t_۲}=\frac{۱۲}{۸}=\frac{۳}{۲}$$

B ۳ ۴۲

خط فکری سرعت متوسط کل خلاف جهت محور xها یعنی $-۲۸m/s$ است. شما باید جابه‌جایی در هر قسمت را حساب کنید سپس جابه‌جایی کل را به‌دست بیاورید تا بتوانید به کمک سرعت متوسط کل نسبت $\frac{t_۱}{t_۲}$ را بیابید.

۱ در مدت $t_۱$ جابه‌جایی متحرک با سرعت متوسط $۲۰m/s$ خواهد شد:

$$d_۱=v_{av_۱}t_۱\Rightarrow d_۱=+۲۰t_۱$$

۲ در مدت $t_۲$ جابه‌جایی متحرک در خلاف جهت محور xها بوده یعنی سرعت متوسط آن $-۴۰m/s$ است و جابه‌جایی در این مدت خواهد شد:

$$d_۲=v_{av_۲}t_۲\Rightarrow d_۲=-۴۰t_۲$$

۳ اکنون رابطهٔ سرعت متوسط کل را نوشته، داده‌های به‌دست آمده را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t}\Rightarrow -۲۸=\frac{۲۰t_۱-۴۰t_۲}{t_۱+t_۲}\Rightarrow -۱۴=\frac{۱۰t_۱-۲۰t_۲}{t_۱+t_۲}$$

$$\Rightarrow -۱۴t_۱-۱۴t_۲=۱۰t_۱-۲۰t_۲\Rightarrow -۱۴t_۲+۲۰t_۲=۱۰t_۱+۱۴t_۱$$

$$\Rightarrow ۶t_۲=۲۴t_۱\Rightarrow \frac{t_۱}{t_۲}=\frac{۶}{۲۴}=\frac{۱}{۴}$$

C ۴ ۴۳

خط فکری ابتدا باید بررسی کنیم که در مدت $۸s$ جابه‌جایی متحرک چند متر است. به چه دلیل به این جابه‌جایی نیاز داریم؟ به این دلیل که جابه‌جایی متحرک در بازهٔ ۰ تا $۳s$ کمتر از این مقدار است.

۱ جابه‌جایی متحرک در مدت $۸s$ با سرعت متوسط $۱۵m/s$ خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{d}{t}\Rightarrow ۱۵=\frac{d}{۸}\Rightarrow d=۱۲۰m$$

۲ جابه‌جایی متحرک در تمام مدت $۸s$ در جهت مثبت محور xها بوده بنابراین در بازهٔ ۰ تا $۳s$ قطعاً جابه‌جایی از $۱۲۰m$ کمتر است. از این رو سرعت متوسط در بازهٔ ۰ تا $۳s$ خواهد شد:

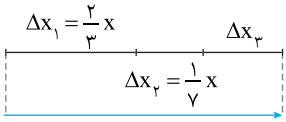
$$v_{av}<\frac{۱۲۰}{۳}\Rightarrow v_{av}<۴۰m/s$$

نتیجه آنکه تمام مقدارهای زیر $۴۰m/s$ می‌تواند جواب مسئله باشد و گزینهٔ (۴) درست است.

B ۲ ۴۴

خط فکری کل مسیر حرکت را x فرض کنید و جابه‌جایی هر سه قسمت را برحسب x به‌دست بیاورید سپس به سراغ بازهٔ زمانی هر قسمت بروید و از فرمول سرعت متوسط بازه‌های زمانی را نیز برحسب x حساب کرده و مسئله را حل کنید.

۱ متحرک ابتدا $\Delta x_۱=\frac{۲x}{۳}$ ، سپس $\Delta x_۲=\frac{x}{۷}$ را طی کرده بنابراین باقی مسیر خواهد شد:



$$\Delta x_۳=x-\frac{۲x}{۳}-\frac{x}{۷}\Rightarrow \Delta x_۳=\frac{۴x}{۲۱}$$

۲ بازهٔ زمانی هر قسمت را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{d}{t}\Rightarrow t=\frac{d}{v_{av}}\begin{cases}\Delta x_۱=\frac{۲}{۳}x\rightarrow \Delta t_۱=\frac{\Delta x_۱}{v_{av_۱}}\Rightarrow \Delta t_۱=\frac{\frac{۲}{۳}x}{۲۸}\Rightarrow \Delta t_۱=\frac{x}{۴۲}\\ \Delta x_۲=\frac{x}{۷}\rightarrow \Delta t_۲=\frac{\Delta x_۲}{v_{av_۲}}\Rightarrow \Delta t_۲=\frac{\frac{x}{۷}}{۶}\Rightarrow \Delta t_۲=\frac{x}{۴۲}\\ \Delta x_۳=\frac{۴x}{۲۱}\rightarrow \Delta t_۳=\frac{\Delta x_۳}{v_{av_۳}}\Rightarrow \Delta t_۳=\frac{\frac{۴x}{۲۱}}{۸}\Rightarrow \Delta t_۳=\frac{x}{۴۲}\end{cases}$$

۳ اکنون می‌توان سرعت متوسط را به‌دست آورد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3}{\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3}\Rightarrow v_{av}=\frac{x}{\frac{x}{۴۲}+\frac{x}{۴۲}+\frac{x}{۴۲}}$$

$$\Rightarrow v_{av}=۱۴\,m/s$$

۳ ۴۵ A

۱ بازهٔ زمانی هر قسمت از مسیر را برحسب x و v به‌دست می‌آوریم.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow \Delta t=\frac{\Delta x}{v}\quad\begin{cases}x_1=x\,,v_1=v\rightarrow \Delta t_1=\frac{x}{v}\\ x_2=۲x\,,v_2=۲v\rightarrow \Delta t_2=\frac{۲x}{۲v}=\frac{x}{v}\\ x_3=۳x\,,v_3=۳v\rightarrow \Delta t_3=\frac{۳x}{۳v}=\frac{x}{v}\end{cases}$$

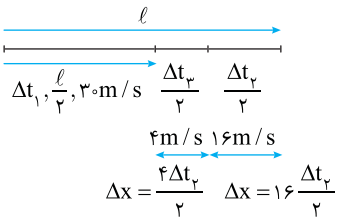
۲ جابه‌جایی کل را حساب می‌کنیم. $\Delta x_{کل}=x+۲x+۳x=۶x$

۳ سرعت متوسط در کل مسیر خواهد شد:

$$v_{av_{کل}}=\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t_{کل}}=\frac{۶x}{\frac{x}{v}+\frac{x}{v}+\frac{x}{v}}\Rightarrow v_{av_{کل}}=\frac{۶x}{\frac{۳x}{v}}=۲v$$

۱ ۴۶ B

خط فکری مسئله از دو قسمت تشکیل شده یک بار مسیر حرکت را به دو نیمهٔ مساوی تقسیم کرده و بار دیگر نیمهٔ دوم مسیر را به دو بازهٔ زمانی یکسان تقسیم کرده است، بنابراین شما باید تندی متوسط را در قسمت دوم مسیر (Δt_2) حساب کنید. سپس تندی در قسمت دوم و قسمت اول را برای به‌دست آوردن تندی کل مسیر به‌کار ببریم.



ابتدا تندی متوسط در نیمهٔ دوم مسیر را حساب می‌کنیم:

$$s_{av_2}=\frac{\frac{\ell}{۲}}{\Delta t_2}\Rightarrow s_{av_2}=\frac{۴\frac{\Delta t_2}{۲}+۱۶\frac{\Delta t_2}{۲}}{\Delta t_2}=\frac{۴+۱۶}{۲}=۱۰\,m/s$$

اکنون تندی متوسط در کل مسیر را به‌دست می‌آوریم:

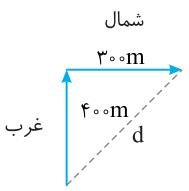
$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{\ell}{\Delta t_1+\Delta t_2}\xrightarrow[\Delta t_2=\frac{\frac{\ell}{۲}}{۱۰}=\frac{\ell}{۲۰}]{\Delta t_1=\frac{\frac{\ell}{۲}}{۳۰}=\frac{\ell}{۶۰}}s_{av}=\frac{\ell}{\frac{\ell}{۶۰}+\frac{\ell}{۲۰}}=\frac{۶۰}{۴}=۱۵\,m/s$$

میانبر البته می‌توانستیم در قسمت دوم مسیر، مستقیماً از رابطهٔ $v_{av}=\frac{۲v_1v_2}{v_1+v_2}$ استفاده کنیم. دقت کنید در اینجا تندی متوسط و سرعت متوسط یکی است زیرا متحرک روی خط راست بدون تغییر جهت حرکت کرده است.

$$v_{av}=\frac{۲\times ۱۰\times ۳۰}{۱۰+۳۰}=۱۵\,m/s$$

۱ ۴۷ B

۱ متحرک با سرعت ثابت ۱۶m/s، ۴۰۰m به سمت شمال رفته است، مدت زمان طی این مسیر را حساب می‌کنیم.



$$v=v_{av}=\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}\Rightarrow ۱۶=\frac{۴۰۰}{\Delta t_1}\Rightarrow \Delta t_1=۲۵\,s$$

۲ سپس متحرک در مدت ۲۵s با سرعت ثابت ۱۲m/s به سمت شرق رفته است و مقدار جابه‌جایی آن در این مدت برابر است با:

$$v=v_{av}=\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}\Rightarrow ۱۲=\frac{\Delta x_2}{۲۵}\Rightarrow \Delta x_2=۳۰۰\,m$$

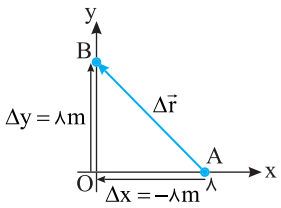
۳ جابه‌جایی کل را به‌دست می‌آوریم: $|d|=\sqrt{۳۰۰^2+۴۰۰^2}=۵۰۰\,m$

۴ سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{|d|}{\Delta t_1+\Delta t_2}=\frac{۵۰۰}{۲۵+۲۵}=۱۰\,m/s$

۲ ۴۸ B

دقت کنید مسئله سرعت متوسط در امتداد محور xها یعنی از A تا O را خواسته است و شما نباید سرعت متوسط از A تا B را حساب کنید. از A تا O متحرک از مکان $+۸m$ به مکان $x=۰$ رفته یعنی در مدت ۵s جابه‌جایی آن $-۸m$ است، بنابراین سرعت متوسط در امتداد محور xها (مولفهٔ x سرعت متوسط) خواهد شد:

$$v_{av,x}=-\frac{۸}{۵}=-۱/۶\,m/s$$



۱ ۴۹ A

ذره در امتداد خط راست از A به B رفته است، بنابراین ابتدا طول مسیر از A تا B را به کمک ریاضی به‌دست می‌آوریم.

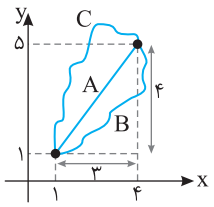
$$\ell=AB=\sqrt{(y_B-y_A)^2+(x_B-x_A)^2}$$

$$=\sqrt{(-۳-۶)^2+(۸+۴)^2}=\sqrt{۸۱+۱۴۴}\Rightarrow \ell=۱۵\,m$$

تندی متوسط متحرک خواهد شد: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۱۵}{۵-۳}=۷/۵\,m/s$

۴ ۵۰ B

خط فکری برای آنکه تندی متوسط جسم را حساب کنیم باید چگونگی مسیر حرکت مشخص باشد تا بتوانیم مسافت و سپس تندی را به‌دست بیاوریم در این مسئله مسیر حرکت مشخص نیست، اما ما می‌دانیم که مسافت طی شده بین دو نقطه همواره بزرگ‌تر یا مساوی جابه‌جایی بین دو نقطه است و جابه‌جایی بین دو نقطه نیز برداری است که نقطهٔ ابتدایی را به نقطهٔ انتهایی وصل کند، بنابراین شما باید ابتدا جابه‌جایی و سپس سرعت متوسط را پیدا کنید در این صورت تندی متوسط باید از عددی که برای سرعت متوسط به‌دست می‌آورید بزرگ‌تر یا با آن مساوی باشد.



مسیر حرکت مشخص نیست اما جابه‌جایی در تمام مسیرهایی که روی شکل نشان داده‌ایم برابر است با:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\Rightarrow d=\sqrt{(۴-۱)^2+(۵-۱)^2}$$

$$\Rightarrow d=\sqrt{۹+۱۶}=۵m$$

سرعت متوسط را حساب می‌کنیم. $v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\xrightarrow{t=۵s}v_{av}=\frac{۵}{۵}=۱\,m/s$

بنابراین تندی متوسط باید بزرگ‌تر یا مساوی $۱\,m/s$ باشد. بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

۲ ۵۱ B

خط فکری در بررسی سرعت متوسط به مسیر حرکت کاری نداریم و تنها فاصلهٔ نقطهٔ ابتدایی از نقطهٔ انتهایی که مشخص کنندهٔ اندازهٔ جابه‌جایی است مهم است، بنابراین مکان d_2 را از ذهن خود حذف کنید و در مدت $۵s=۲+۳$ جابه‌جایی متحرک را از مکان d_1 تا d_3 حساب کنید.

یادآوری فاصلهٔ بین دو نقطه در صفحهٔ xoy از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

۱ جابه‌جایی از $\vec{d}_1=۷\vec{i}+۴\vec{j}$ تا $\vec{d}_3=-۵\vec{i}-\vec{j}$ متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$d=\sqrt{(-۵-۷)^2+(-۱-۴)^2}=\sqrt{۱۴۴+۲۵}=\sqrt{۱۶۹}\Rightarrow d=۱۳\,m$$

۲ سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{۱۳}{۵}=۲/۶\,m/s$

بازی با سوال اگر متحرک مسیر بین d_1 تا d_2 و همچنین d_2 تا d_3 را روی خط راست طی کند، تندی متوسط متحرک چند متر بر ثانیه خواهد بود؟ $(\sqrt{41}\simeq 6/4)$

۱) ۱۳/۸ ۲) ۱۴/۰۸ ۳) ۲/۸۸ ۴) ۳۶

پاسخ برای به‌دست آوردن تندی متوسط باید مسافت طی شده در هر قسمت را به‌دست آورد.

d_2 تا d_1: $\ell_1=\sqrt{(3-7)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}\simeq 6/4\,m$

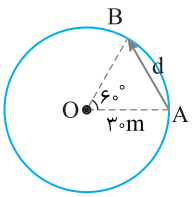
d_3 تا d_2: $\ell_2=\sqrt{(-5-3)^2+(-1+1)^2}=8\,m$

تندی متوسط خواهد شد: $s_{av}=\frac{(\ell_1+\ell_2)}{\Delta t}=\frac{6/4+8}{2+3}=\frac{14/4}{5}=2/88\,m/s$

گزینهٔ ۳

A ۵۲ ۴

۱ در شکل روبه‌رو، بردار جابه‌جایی از A تا B رسم شده است با توجه به اینکه زاویهٔ O، ۶۰° بوده و ضلع‌های OA و OB هر دو شعاع دایره بوده و با هم برابر و مقدار آن ۳۰m است. مثلث OAB یک مثلث متساوی‌الاضلاع بوده و طول بردار جابه‌جایی AB نیز ۳۰m خواهد بود. بنابراین سرعت متوسط خواهد شد:



$v_{av}=\frac{AB}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{30}{5-2}\Rightarrow v_{av}=10\,m/s$

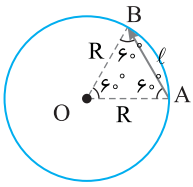
نکته هرگاه متحرک روی مسیر دایره‌ای زاویهٔ θ را طی کند مسافتی که می‌پیماید برابر $\frac{\theta}{360}$ محیط دایره است.

۲ برای تندی متوسط باید طول مسیر AB را حساب کنیم که طول این مسیر $\frac{60}{360}=\frac{1}{6}$ محیط دایره است. $\ell=\frac{1}{6}(2\pi R)\Rightarrow \ell=\frac{1}{6}(2\pi\times 30)\Rightarrow \ell=10\pi\,m$

تندی متوسط خواهد شد: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{10\pi}{5-2}=\frac{10\pi}{3}\,m/s$

A ۵۳ ۱

ابتدا زمان حرکت از A تا B را به کمک تندی حرکت حساب می‌کنیم.



$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow{\ell=\frac{1}{6}(2\pi R)} 4=\frac{\frac{1}{6}(2\pi R)}{\Delta t}$

$\Rightarrow \Delta t=\frac{\pi R}{12}$

مثلث OAB متساوی‌الاضلاع بوده بنابراین جابه‌جایی از A تا B با توجه به شکل برابر شعاع دایره $(d=R)$ است. در این صورت سرعت متوسط خواهد شد:

$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{R}{\frac{\pi R}{12}}\Rightarrow v_{av}=\frac{12}{\pi}\,m/s$

A ۵۴ ۱

نکته ثانیهٔ nام حرکت یعنی بازهٔ زمانی بین $n-1$ و n به‌طور مثال ثانیهٔ سوم یعنی بازهٔ زمانی بین $t=2s$ تا $t=3s$.

خط فکری برای به‌دست آوردن سرعت متوسط در ثانیهٔ سوم شما باید مکان متحرک در $t=2s$ و $t=3s$ به‌دست بیاورید و سرعت متوسط را به کمک $v_{av}=\Delta x/\Delta t$ حساب کنید. همچنین برای سرعت متوسط در ثانیهٔ دوم باید مکان متحرک در $t=1s$ و $t=2s$ را به کمک معادلهٔ مکان - زمان حساب کرده و سرعت متوسط در این بازه را به‌دست بیاورید.

۱ ثانیهٔ دوم حرکت یعنی بازهٔ زمانی بین $t_1=1s$ تا $t_2=2s$ در این صورت:

$x=t^3-2t+1\Rightarrow\begin{cases}t_1=1s\Rightarrow x_1=1-2+1=0\\ t_2=2s\Rightarrow x_2=8-4+1=5m\end{cases}\Rightarrow v_{av}=\frac{5-0}{2-1}=5\,m/s$

۲ ثانیهٔ سوم حرکت یعنی بازهٔ زمانی بین $t_1=2s$ تا $t_2=3s$ از این‌رو:

$\begin{cases}t_1=2s\Rightarrow x_1=8-4+1=5m\\ t_2=3s\Rightarrow x_2=27-6+1=22m\end{cases}\Rightarrow v'_{av}=\frac{22-5}{3-2}=17\,m/s$

۳ بنابراین خواهیم داشت: $v'_{av}-v_{av}=17-5=12\,m/s$

بازی با سوال معادلهٔ حرکت جسمی که روی محور xها در حرکت است در SI به صورت $x=t^2-2t+1$ است. سرعت متوسط این جسم در بازهٔ زمانی $0/5s$ تا $1/5s$ چند m/s است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۱ ۳) ۰/۵ ۴) صفر

پاسخ مکان جسم در لحظه‌های $t_1=0/5s$ و $t_2=1/5s$ را به‌دست می‌آوریم:

$t_1=0/5s\Rightarrow x_1=0/25-1+1\Rightarrow x_1=0/25m$

$t_2=1/5s\Rightarrow x_2=2/25-3+1\Rightarrow x_2=0/25m$

سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\Rightarrow v_{av}=\frac{0/25-0/25}{1/5-0/5}\Rightarrow v_{av}=0$

گزینهٔ ۴

B ۵۵ ۳

نکته هرگاه متحرک به مکان اولیهٔ خود بازگردد، یعنی جابه‌جایی متحرک در یک بازهٔ مشخص صفر می‌شود قطعاً سرعت متوسط در آن بازه صفر می‌شود.

با توجه به معادلهٔ $x=3t^2-15t+12$ در لحظهٔ $t_1=0$ مکان اولیه متحرک $x_0=+12m$ می‌شود و اگر در بازهٔ $t_1=0$ تا $t_2=t'$ سرعت متوسط صفر شده باشد یعنی مکان متحرک مجدداً باید $x=+12m$ شود بنابراین در معادلهٔ حرکت به جای x مقدار ۱۲ را قرار می‌دهیم و t' را حساب می‌کنیم.

$12=3t^2-15t+12\Rightarrow 3t^2-15t=0\Rightarrow 3t(t-5)=0\Rightarrow\begin{cases}t=0\\ t=5s\end{cases}$

در نتیجه $t'=5s$ پاسخ مسئله است.

A ۵۶ ۱

بردار مکان، برداری است که از مبدأ مکان $(x=0)$ به محل متحرک رسم می‌شود. بنابراین هنگام گذر از مبدأ، بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

اکنون باید مکان را برابر صفر قرار دهیم: $x=0\Rightarrow t^2+t+1=0\Rightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$

معادلهٔ بالا بدون پاسخ است یعنی مکان متحرک هرگز صفر $(x=0)$ نمی‌شود و متحرک از مبدأ مکان نمی‌گذرد و بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

A ۵۷ ۲

خط فکری لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان یعنی لحظه‌ای که متحرک از مکان $(x=0)$ می‌گذرد بنابراین شما باید در معادلهٔ حرکت مکان را برابر صفر قرار داده و لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان را پیدا کنید تا بتوانید سرعت متوسط را در بازهٔ زمانی $t=0$ تا لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان به‌دست بیاورید.

۱ در لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ می‌گذرد، بنابراین:

$x=t^2-t-6\Rightarrow 0=t^2-t-6\Rightarrow (t-3)(t+2)=0\Rightarrow\begin{cases}t=3s & \checkmark\\ t=-2s & \text{غ ق ق}\end{cases}$

۲ سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{0+6}{3}=2\,m/s$

A ۵۸ ۲

۱ معادلهٔ حرکت زمان‌های $t=0$ و $t=3s$ را قرار می‌دهیم.

$x=\alpha+\beta t^3\xrightarrow{t_1=0} x_1=\alpha$

$\xrightarrow{t_2=3s} x_2=\alpha+27\beta$

۲ با توجه به فرض مسئله $v_{av}=۱۸m/s$ می‌توان نوشت:

$$v_{av}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow v_{av}=\frac{\alpha+۲۷\beta-\alpha}{۳-۰}=۱۸\Rightarrow \frac{۲۷\beta}{۳}=۹\beta=۱۸\Rightarrow\beta=۲$$

۳ اکنون با داشتن مقدار β و با توجه به این مکان متحرک در $t=۲s$ برابر $۲۴m$ است. مقدار α را حساب می‌کنیم.

$$x=\alpha+\beta t^۳\Rightarrow ۲۴=\alpha+\beta(۲)^۳\xrightarrow{\beta=۲}۲۴=\alpha+۱۶\Rightarrow\alpha=۸$$

۴ ۵۹ A

خط فکری معادلهٔ مثلثاتی حرکت شما را دچار مشکل نکند روش حل همان است که بود یعنی در لحظه‌های داده شده باید مکان متحرک را به کمک معادلهٔ حرکت به‌دست آورده سپس سرعت متوسط را حساب کنید.

۱ ابتدا مکان متحرک در لحظه‌های $t_۱=\frac{۱}{۶}s$ و $t_۲=\frac{۴}{۳}s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x=۰/۰۲\cos ۱۰\pi t\begin{cases}\xrightarrow{t_۱=\frac{۱}{۶}s}x_۱=۰/۰۲\cos\frac{۱۰\pi}{۶}\\ \xrightarrow{t_۲=\frac{۴}{۳}s}x_۲=۰/۰۲\cos\frac{۴۰\pi}{۳}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_۱=۰/۰۲\cos\frac{۵\pi}{۳}\Rightarrow x_۱=۰/۰۲\cos(۲\pi-\frac{\pi}{۳})\\ \Rightarrow x_۲=۰/۰۲\cos(۱۲\pi+\pi+\frac{\pi}{۳})\Rightarrow x_۲=-۰/۰۲\cos\frac{\pi}{۳}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_۱=+۰/۰۲\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x_۱=+۰/۰۱m\\ x_۲=-۰/۰۱m\end{cases}$$

۲ سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{-۰/۰۱-۰/۰۱}{\frac{۴}{۳}-\frac{۱}{۶}}=\frac{-۰/۰۲}{\frac{۸-۱}{۶}}\Rightarrow v_{av}=-\frac{۰/۱۲}{۷}$$

$$\Rightarrow v_{av}=-\frac{۱۲}{۷۰۰}=-\frac{۳}{۱۷۵}m/s$$

۳ ۶۰ B

یادآوری جابه‌جایی کمیت برداری $(\vec{d})$ و مسافت کمیت نرده‌ای (ℓ) است.

نکته همواره مسافت برابر یا بزرگ‌تر از اندازهٔ جابه‌جایی است.

با توجه به نکتهٔ بیان شده می‌توان نوشت: $|\vec{d}|\le\ell\Rightarrow\frac{|\vec{d}|}{\ell}\le۱$

یادداشت ریاضی $|x|\le۱\Rightarrow-۱\le x\le۱$

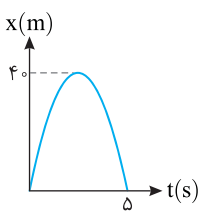
با توجه به یادداشت ریاضی باید $-۱\le\frac{|\vec{d}|}{\ell}\le۱$ باشد.

۳ ۶۱ A

در یک لحظه دو متحرک در یک مکان قرار دارند و مبدأ را هرجا در نظر بگیریم مکان دو متحرک یکسان است.

۱ ۶۲ A

خط فکری دقت کنید نمودار مکان - زمان مسیر حرکت نیست یعنی اینکه تصور نکنید که متحرک روی این مسیر بالا و پایین می‌رود. در نمودار مکان - زمان، در هر لحظه می‌توان مکان جسم را مشخص کرد و شما به کمک آن می‌توانید مسیر حرکت روی محور xها را رسم کنید. برای سادگی شما روی محور xها مسیر حرکت جسم را رسم کنید تا مسئله حل شود.



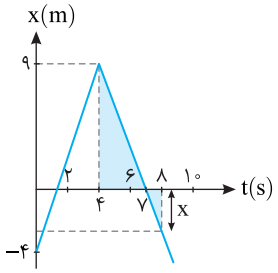
متحرک در $t=۰$ در مکان $x=۰$ است. سپس به مکان $+۴۰m$ می‌رود و از آن نقطه تغییر جهت داده و برمی‌گردد. بنابراین در مدت $۵s$ جابه‌جایی متحرک صفر است. اما در این مدت متحرک از مکان $x=۰$ به مکان $x=۴۰m$ رفته و سپس به مبدأ برمی‌گردد و مسافت طی شده برابر $\ell=۴۰+۴۰=۸۰m$ می‌شود.



۱ ۶۳ B

یادآوری جابه‌جایی برداری است که ابتدای مسیر را به انتهای مسیر وصل می‌کند و نقطهٔ بین راه و مسیر حرکت مهم نیست.

خط فکری جابه‌جایی در مسئله خواسته شده است. در لحظهٔ $t=۰$ مکان متحرک $-۴m$ است. بنابراین شما باید مکان متحرک را در لحظهٔ $t=۸s$ مشخص کنید و به کمک آن اندازهٔ جابه‌جایی را به‌دست بیاورید. معمولاً در نمودارهایی که خط راست هستند از تشابه مثلث استفاده می‌کنیم.



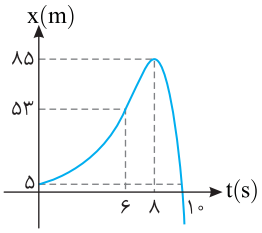
۱ دو مثلث رنگی در شکل با هم متشابه‌اند و نسبت تشابه خواهد شد:

$$\frac{۹}{x}=\frac{۳}{۱}\Rightarrow x=۳m$$

البته x زیر محور زمان بوده و منفی است. یعنی در لحظهٔ $t=۸s$ متحرک در مکان $-۳m$ است.

۲ متحرک در لحظهٔ $t=۰$ در مکان $-۴m$ و در لحظهٔ $t=۸s$ در مکان $-۳m$ است. بنابراین در بازهٔ ۰ تا ۸s متحرک $+۱m$ جابه‌جا شده است.

۴ ۶۴ A



گزینهٔ (۱): با توجه به نمودار مکان متحرک در لحظه‌های ۸s تا ۱۰s به‌ترتیب ۸۵m و صفر است. بنابراین جابه‌جایی در این بازه زمانی $d=۰-۸۵=-۸۵m$ بوده و این گزینه نادرست است.

گزینهٔ (۲): در لحظهٔ $t=۶s$ متحرک در مکان $+۵۳$ و در لحظهٔ $t=۱۰s$ متحرک در مکان $x=۰$ است. یعنی جابه‌جایی آن $d=۰-۵۳=-۵۳m$ بوده و گزینهٔ (۲) نادرست است.

گزینهٔ (۳): برای مسافت طی شده باید مسیر حرکت از $t=۸s$ تا $t=۱۰s$ را مرور کنیم. در این مدت حرکت متحرک روی محور xها و در یک جهت بوده و متحرک ۸۵ متر مسافت طی کرده است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

گزینهٔ (۴): در لحظهٔ $t=۶s$ مکان متحرک $+۵۳m$ بوده و در $t=۸s$ متحرک در مکان ۸۵m تغییر جهت می‌دهد و در $t=۱۰s$ به مبدأ می‌رود، بنابراین مسافتی که در این مدت طی می‌کند برابر است با $\ell=(۸۵-۵۳)+۸۵=۱۱۷m$.

۲ ۶۵ B

خط فکری مسافت همواره کمیتی مثبت است و هرگاه متحرک تغییر جهت دهد، مسافت همچنان مثبت می‌ماند. بنابراین نموداری می‌تواند نمودار مسافت - زمان این متحرک باشد که از مبدأ شروع شود و تغییر جهت نداشته باشد.

با توجه به آنچه در خط فکری بیان شده، گزینهٔ (۲) می‌تواند نمودار مسافت - زمان این متحرک باشد.

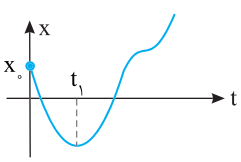
۳ ۶۶ A

۱ مکان اولیهٔ متحرک در لحظهٔ $t=۰$ ، مثبت است.

۲ متحرک از لحظهٔ صفر تا $t_۱$ در خلاف جهت محور در حرکت است.

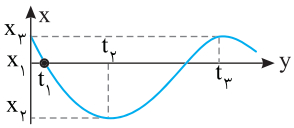
۳ متحرک در لحظهٔ $t_۱$ تغییر جهت داده است.

۴ بعد از لحظهٔ $t_۱$ متحرک تمام مدت در جهت مثبت محور x در حرکت است. بنابراین گزینهٔ (۳) پاسخ درست است.



A ۶۷ ۲

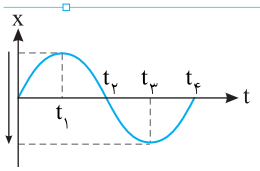
متحرک در لحظهٔ $t_1=0$ در مبدأ مکان است. در لحظهٔ t_2 در مکان x_2 و در لحظهٔ t_3 در مکان x_3 است که با

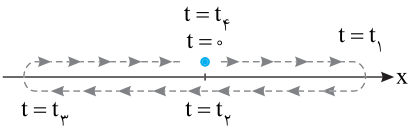


توجه به نمودار فاصلهٔ متحرک از مبدأ در لحظهٔ t_2 از بقیهٔ لحظه‌ها بیشتر است.

A ۶۸ ۳

مسیر حرکت از $t=0$ تا $t=t_4$ مطابق شکل روبه‌روست و در بازهٔ t_1 تا t_3 متحرک در خلاف جهت محور xها یعنی در جهت منفی محور در حرکت است.



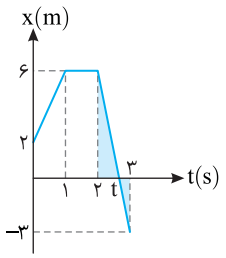


حرکت در خلاف جهت محور

A ۶۹ ۲

خط فکری در مدت ۰ تا ۱s مورچه از مکان ۲ متری به مکان ۶ متری رفته یعنی از مبدأ مکان در حال دور شدن است. در بازهٔ ۱s تا ۲s مورچه در مکان $+6m$ مبدأ ساکن است و مکانش تغییر نمی‌کند. در لحظهٔ t مکان مورچه $x=0$ می‌شود. یعنی در بازهٔ ۲s تا t مورچه در خلاف جهت محور xها از مکان $+6m$ در حال نزدیک شدن به مبدأ است، بنابراین شما باید زمان t را به کمک تشابه مثلث به‌دست بیاورید.

دو مثلث رنگی در شکل متشابه هستند، بنابراین نسبت تشابه خواهد شد:



$$\frac{6}{3}=\frac{t-2}{3-t}\Rightarrow 18-6t=3t-6$$

$$\Rightarrow 24=9t\Rightarrow t=\frac{8}{3}s$$

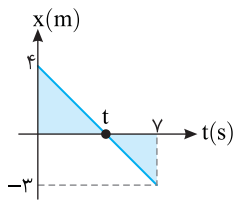
از بازهٔ $t=2s$ تا $t=\frac{8}{3}s$ متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ $(x=0)$ است، بنابراین:

$$\Delta t=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}s$$

البته شما می‌توانستید به کمک شیب خط نیز مقدار t را حساب کنید.

A ۷۰ ۳

خط فکری در حرکت متحرک هنگامی که مکان متحرک منفی است، بردار مکان منفی است و اگر مکان متحرک مثبت باشد بردار مکان مثبت است. بنابراین هنگام عبور از مبدأ مکان $(x=0)$ بردار مکان تغییر جهت می‌دهد. شما باید از تشابه مثلث، t را به دست بیاورید.



دو مثلث رنگی متشابه هستند و نسبت تشابه خواهد شد:

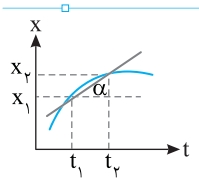
$$\frac{t}{4}=\frac{7-t}{3}\Rightarrow 3t=28-4t\Rightarrow 7t=28\Rightarrow t=4s$$

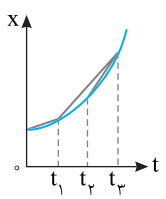
B ۷۱ ۳

یادآوری در نمودار مکان - زمان شیب خط قاطع بین دو نقطه برابر سرعت متوسط بین آن دو نقطه است.

$$v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\tan\alpha$$

در بازه‌های زمانی بیان شده در گزینه‌ها، خط قاطع را روی نمودار رسم می‌کنیم. در هر گزینه که شیب خط قاطع بیشتر باشد، سرعت متوسط بزرگ‌تر است. در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3 شیب خط قاطع از بقیهٔ بازه‌ها بیشتر است بنابراین سرعت متوسط در این بازه بزرگ‌تر از بقیهٔ بازه‌هاست.

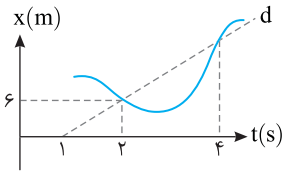




B ۷۲ ۳

خط فکری تندی متوسط به مسافت یعنی مسیر حرکت بستگی دارد که در نمودار چگونگی مسیر یعنی اینکه متحرک از چه نقاطی می‌گذرد مشخص نیست، بنابراین تندی متوسط قابل محاسبه نیست. بنابراین شما باید به سراغ سرعت متوسط بروید و سرعت متوسط را از شیب خط d به‌دست بیاورید.

شیب خط d در همه جای آن قطعاً یکسان است. بنابراین برای به‌دست آوردن سرعت متوسط، کافی است شیب خط d را به کمک دو نقطه که روی نمودار مختصات مشخص دارند به‌دست آوریم.

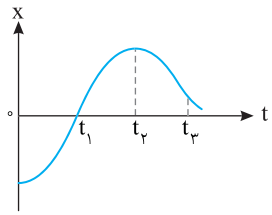


$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{6-0}{2-1}=6m/s$$

بنابراین سرعت متوسط در بازهٔ ۱s، ۲s یا ۲s تا ۴s یا ۱s تا ۴s برابر $6m/s$ است.

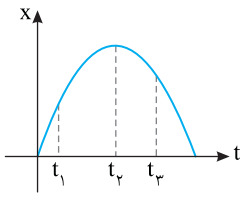
B ۷۳ ۱

یادآوری شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر سرعت متحرک است.



با توجه به نمودار در لحظهٔ t_1 شیب خط مماس از لحظه‌های دیگر بیشتر و تندی متحرک نیز بیشتر است.

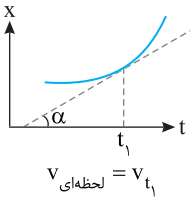
بازی با سؤال **نمودار مکان - زمان حرکت متحرکی مطابق شکل روبه‌رو می‌باشد. در کدام لحظه تندی متحرک بیشتر است؟** تجربی - ۱۴۰۰



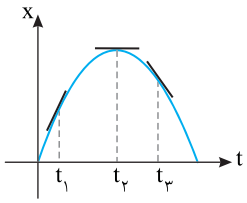
۱) t_1 ۲) t_2

۳) t_3 ۴) نمی‌توان اظهارنظر قطعی کرد.

پاسخ یادآوری **شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر تندی لحظه‌ای (اندازهٔ سرعت لحظه‌ای) در آن لحظه است.**



$$v_{\text{لحظه‌ای}}=v_{t_1}$$



دقت کنید تندی لحظه‌ای همواره مثبت است، بنابراین شما همواره باید قدرمطلق شیب خط مماس را بررسی کنید. اکنون در لحظه‌های خواسته شده، خط مماس بر نمودار را رسم می‌کنیم. شیب خط مماس در لحظهٔ t_1 از دو لحظهٔ دیگر بزرگ‌تر است. بنابراین تندی در لحظهٔ t_1 از بقیهٔ لحظه‌های بیان شده بیشتر است.

گزینهٔ ۱

B ۷۴ ۳

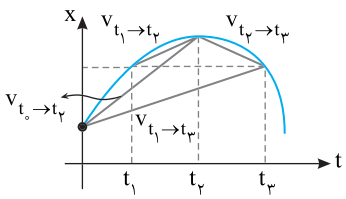
خط فکری مسئلهٔ ساده‌ای است. با رسم خط قاطع در بازه‌های زمانی که در گزینه‌ها بیان شده می‌توان مشخص کرد که شیب کدام خط قاطع منفی است در نتیجه سرعت متوسط منفی است.

برای سادگی روی شکل v_{av} را با حرف v نمایش داده‌ایم. در بازهٔ صفر تا t_2 شیب خط قاطع یعنی سرعت متوسط مثبت است و گزینهٔ (۱) نادرست است.

در بازهٔ t_1 تا t_2 نیز شیب خط قاطع یعنی سرعت متوسط مثبت است و گزینهٔ (۲) نادرست است.

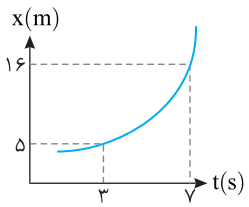
در بازهٔ t_2 تا t_3 شیب خط قاطع منفی و سرعت متوسط منفی بوده و گزینهٔ (۳) درست است.

در بازهٔ صفر تا t_3 شیب خط قاطع مثبت و سرعت متوسط مثبت بوده و گزینهٔ (۴) نادرست است.



A ۷۵ ۲

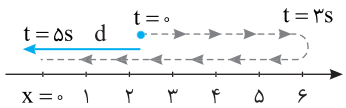
به نمودار دقت کنید. متحرک روی خط راست (محور xها) بدون تغییر جهت از مکان $x=5m$ به مکان $x=16m$ رفته بنابراین می‌توان نوشت:



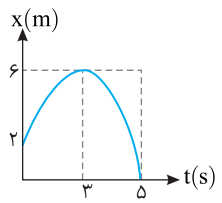
$$s_{av}=v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$$
$$=\frac{16-5}{7-3}=2/75m/s$$

A ۷۶ ۲

مسیر حرکت را روی محور xها رسم می‌کنیم. البته می‌توانید این کار را در ذهن خود انجام دهید.



۱ جابه‌جایی متحرک برداری است که از $x=2$ باید به $x=0$ برسد یعنی از ابتدای مسیر به انتهای مسیر رسم شود. بنابراین $d=-2m$ و سرعت متوسط برابر است با:



$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{-2}{5-0}$$
$$\Rightarrow v_{av}=-0/4m/s$$

۲ مطابق شکل متحرک از مکان $+2m$ به مکان $+6m$ رفته یعنی $6-2=4m$ مسافت طی کرده سپس از مکان $+6m$ به مکان $x=0$ می‌رود و در این مدت نیز مسافت $6m$ را طی می‌کند، بنابراین مسافت طی شده در مدت ۰ تا $5s$ برابر $\ell=4+6=10m$ می‌شود. از این‌رو تندی متوسط خواهد شد

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{10}{5-0}\Rightarrow s_{av}=2m/s$$

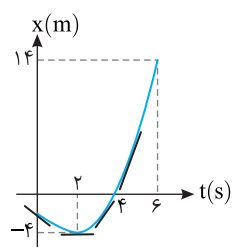
B ۷۷ ۳

یادآوری قدرمطلق شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر تندی لحظه‌ای متحرک است و هرچه خط مماس به حالت قائم نزدیک‌تر شود، تندی لحظه‌ای متحرک بیشتر می‌شود.

نکته حرکت تندشونده یعنی حرکتی که در آن تندی جسم افزایش می‌یابد بنابراین هرگاه قدرمطلق شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان افزایش یابد حرکت تندشونده است.

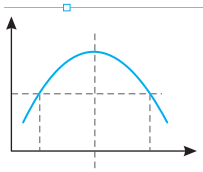
یادآوری در نقاط بیشینه و کمینه نمودار مکان - زمان شیب خط مماس صفر است، یعنی تندی لحظه‌ای متحرک صفر است.

به نمودار نگاه کنید. از لحظهٔ ۰ تا $2s$ قدرمطلق شیب خط مماس در حال کاهش بوده و در $t=2s$ تندی صفر شده و حرکت کندشونده است و از $t=2s$ تا $t=6s$ شیب خط مماس در حال افزایش بوده و حرکت تندشونده است. مسافت طی شده از $-4m$ تا $+14m$ برابر $\ell=18m$ است و تندی متوسط خواهد شد:



$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{18}{4}=4/5m/s$$

B ۷۸ ۴

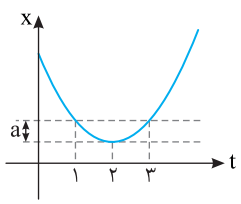


یادآوری تندی متوسط برابر است با مسافت طی شده در یکای زمان. از طرفی سهمی (نمودار معادلهٔ درجه دوم) نسبت به خط قائم گذرا از رأس سهمی متقارن می‌باشد.

$x_{t=1}$ با $x_{t=3}$ با هم برابر است. مسافت طی شده از ۱s تا ۲s و ۲s تا ۳s را روی شکل با حرف a نشان داده‌ایم. در این صورت:

در بازهٔ $t=1s$ تا $t=2s$ و در بازهٔ $t=2s$ تا $t=3s$ تندی متوسط خواهد شد:

$$t=1s\text{ تا }t=2s\Rightarrow s_{av}=\frac{a}{1}=a\quad,\quad t=2s\text{ تا }t=3s\Rightarrow v_{av}=\frac{a}{1}=a$$



در بازهٔ ۱s تا ۳s، مسافت طی‌شده $\ell=a+a=2a$ است و تندی متوسط در این بازه نیز برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{2a}{3-1}=a$$

بنابراین در هر سه بازه، تندی یکسان است.

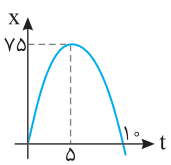
C ۷۹ ۳

یادداشت ریاضی هرگاه ریشه‌های یک معادله درجه ۲ (x_1 و x_2) را داشته باشیم معادلهٔ آن خواهد شد:

$$y=a(x-x_1)(x-x_2)$$

خط فکری در حل این مسئله شما باید ابتدا معادلهٔ حرکت را به‌دست بیاورید. بنابراین باید به سراغ تمام دانسته‌های خود دربارهٔ سهمی بروید.

۱ نمودار سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس سهمی متقارن است. بنابراین مختصات رأس این سهمی خواهد شد $(t=5s, x=75m)$



۲ ریشه‌های معادله روی نمودار مشخص است $(t=10s, t=0)$

۳ معادلهٔ درجه ۲ این سهمی را به کمک ریشه‌های آن می‌نویسیم:

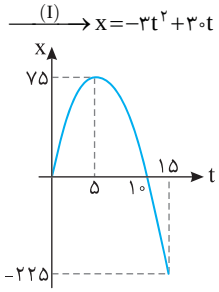
$$x=a(t-0)(t-10)\Rightarrow x=at^2-10at\quad(I)$$

۴ باید مختصات رأس در این معادله صدق کند.

$$75=a(5)^2-10a(5)\Rightarrow 75=25a-50a\Rightarrow a=-3$$

۵ بنابراین معادلهٔ حرکت خواهد شد:

$$\xrightarrow{(I)} x=-3t^2+30t$$



۶ مکان متحرک در $t=15s$ را حساب می‌کنیم

$$x=-3(15)^2+30\times15=-3\times225+450$$
$$\Rightarrow x=-225m$$

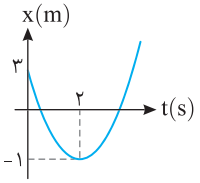
۷ مسافت طی شده از ۰ تا ۱۵s را به‌دست می‌آوریم.

$$\ell=75+75+225=375m$$

۸ تندی متوسط در مدت ۱۵s خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{375}{15}=25m/s$$

بازی با سؤال نمودار مکان - زمان متحرکی به صورت سهمی شکل روبه‌رو است. تندی متوسط متحرک در بازهٔ $t_1=1s$ تا $t_2=5s$ چند متر بر ثانیه است؟ از کتاب درسی



۱) ۵ ۲) ۴/۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۱/۵

پاسخ در حل این تست باید به کمک داده‌های روی نمودار معادلهٔ $x=at^2+bt+c$ را کامل کنیم.

۱ در لحظهٔ $t=0$ مکان اولیهٔ متحرک $x_0=3m$ است، از این رو:

$$3=0+0+c\Rightarrow c=3m$$

۲ برای مختصات رأس سهمی می‌توان نوشت:

$$t=-\frac{b}{2a}\xrightarrow{t=2s}2=\frac{-b}{2a}\Rightarrow b=-4a \quad (I)$$

۳ مختصات رأس باید در معادله صدق کند:

$$(t=2s, x=-1m)\Rightarrow -1=4a+2b+3\Rightarrow 4a+2b=-4\Rightarrow 2a+b=-2 \quad (II)$$

از رابطه‌های (I) و (II)، a و b را به‌دست می‌آوریم.

$$2a+b=-2\Rightarrow 2a-4a=-2\Rightarrow -2a=-2\Rightarrow a=1$$

$$b=-4a\Rightarrow b=-4$$

معادله کامل شد: $x=t^2-4t+3$

اکنون در لحظه‌های $t=1s$ و $t=5s$، مکان متحرک را حساب می‌کنیم:

$$t=1s\Rightarrow x=1-4+3\Rightarrow x=0\ ,\ t=5s\Rightarrow x=25-20+3\Rightarrow x=8m$$

مسافت طی شده را به‌دست می‌آوریم. متحرک در لحظهٔ $t=1s$ از مکان $x=0$ به مکان $-1m$ رفته و سپس از مکان $-1m$ به مکان $+8m$ رفته است. بنابراین

$$\ell=1+1+8=10m$$

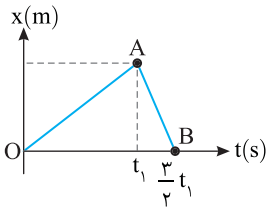
تندی متوسط برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{10}{5-1}=2/5m/s$$

گزینهٔ ۳

A ۸۰ **۲**

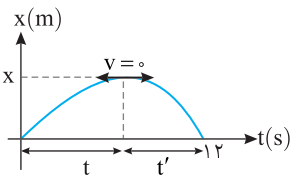
با توجه به تعریف سرعت متوسط $\left(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$، سرعت متوسط را در هر شاخه حساب کرده و بر هم تقسیم می‌کنیم. داده‌های روی نمودار را در رابطهٔ سرعت متوسط قرار می‌دهیم.



$$\frac{v_{av_{OA}}}{v_{av_{AB}}}=\frac{\frac{x_A-0}{t_1}}{\frac{0-x_A}{\frac{3}{2}t_1-t_1}}=-\frac{1}{2}$$

B ۸۱ **۲**

خط فکری ابتدا باید برای خودتان مشخص کنید که در کدام بازه حرکت تندشونده است. سپس به سراغ اطلاعات مسئله بروید و زمان حرکت تندشونده را حساب کنید.



۱ در بازهٔ ۰ تا t تندی متحرک به سمت صفر می‌رود و حرکت کندشونده است و در بازهٔ t' متحرک از $v=0$ شروع به حرکت کرده و تندی آن در حال افزایش است. شما با رسم چند خط مماس می‌توانید این مسئله را بررسی کنید. هرچه به سمت ۱۲s بروید خط مماس به حالت قائم نزدیک‌تر شده و قدرمطلق شیب آن در حال افزایش بوده و حرکت تندشونده است.

۲ با توجه به نمودار در بازهٔ ۰ تا t مسافت طی شده $\ell_1=x$ و در بازهٔ ۰ تا ۱۲s مسافت طی شده $\ell_2=2x$ است.

۳ با توجه به فرض مسئله می‌توانیم بنویسیم:

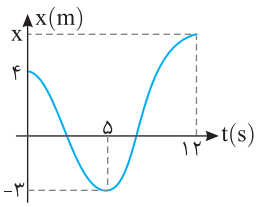
$$s_{av_{0\to t}}=2s_{av_{12}}\xrightarrow{s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}}\frac{x}{t}=2\frac{2x}{12}\Rightarrow t=3s$$

۴ بنابراین مدت زمانی که حرکت تندشونده است برابر خواهد شد با: $t'=12-3=9s$

B ۸۲ **۱**

خط فکری دقت کنید هرگاه در مسئله یک مجهول غیرقابل محاسبه داشته باشیم، معمولاً آن مجهول هنگام محاسبات حذف می‌شود. بنابراین نگران مکان متحرک در لحظهٔ $t=12s$ نباشید و سرعت متوسط و تندی متوسط برحسب x یعنی مکان در $t=12s$ به‌دست بیاورید و از هم کم کنید.

۱ مسافت طی شده در مدت ۱۲s را به کمک نمودار حساب کنید.

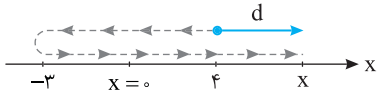


$$\ell=4+3+3+x=10+x$$

۲ تندی متوسط را در این مدت به‌دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{10+x}{12}$$

۳ در مدت ۱۲s متحرک از مکان $x=4m$ به مکان x می‌رود و جابه‌جایی آن خواهد شد: $d=x-4$



۴ سرعت متوسط را حساب می‌کنیم

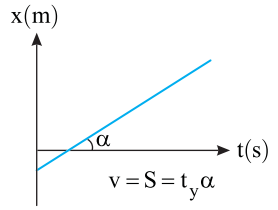
$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{x-4}{12}$$

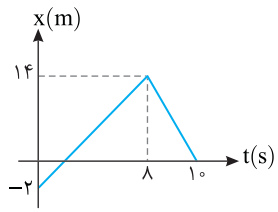
۵ s_{av} و v_{av} را از هم کم می‌کنیم و مسئله را حل می‌کنیم.

$$s_{av}-v_{av}=\frac{10+x}{12}-\frac{x-4}{12}\Rightarrow s_{av}-v_{av}=\frac{10+x-x+4}{12}=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}m/s$$

A ۸۳ **۱**

یادآوری در هر بازه‌ای که نمودار مکان - زمان، خط راست مایل باشد، در تمام بازه‌های آن شیب خط یکسان است، یعنی در تمام لحظات سرعت لحظه‌ای و تندی لحظه‌ای برابر و مقدار آن ثابت است. نمودار از دو قسمت در بازهٔ ۰ تا ۸s و ۸ تا ۱۰s تشکیل شده و در هر بازه تندی لحظه‌ای ثابت و برابر شیب نمودار است، بنابراین تندی در لحظهٔ $t=4s$ یعنی شیب نمودار در بازهٔ ۰ تا ۸s و تندی در لحظهٔ $t=9s$ یعنی شیب نمودار در بازهٔ ۸s تا ۱۰s از این رو خواهیم داشت:





$$v_{t=4s}=\frac{14-(-2)}{8-0}=2m/s\Rightarrow s_{t=4s}=2m/s$$

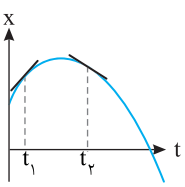
$$v_{t=9s}=\frac{0-14}{10-8}=-7m/s\Rightarrow s_{t=9s}=7m/s$$

در این صورت:

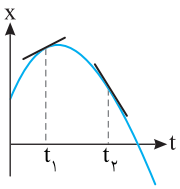
$$\frac{s_{t=4s}}{s_{t=9s}}=\frac{2}{7}$$

B ۸۴ **۲**

خط فکری به دو مطلب باید دقت کنید. یکی اینکه در لحظهٔ t_1 سرعت مثبت است $(+10m/s)$ بنابراین شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در این لحظه باید مثبت باشد و در لحظهٔ t_2 سرعت منفی است $(-12m/s)$ و شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان منفی است و دیگر اینکه اندازهٔ سرعت در لحظهٔ t_1 از اندازهٔ سرعت در لحظهٔ t_2 کمتر است $(|-12|<10)$، بنابراین قدرمطلق شیب خط مماس در لحظهٔ t_1 باید از قدرمطلق شیب خط مماس در لحظهٔ t_2 کمتر باشد. اکنون گزینه‌ها را بررسی کنید.



از گزینه‌های (۳) و (۴) شروع می‌کنیم. در گزینهٔ (۳) شیب خط مماس در لحظه‌های t_1 و t_2 هر دو منفی است یعنی سرعت در این لحظه‌ها منفی است و گزینهٔ (۳) نادرست است. در گزینهٔ (۴) شیب خط مماس بر نمودار در لحظه‌های t_1 و t_2 هر دو مثبت است یعنی سرعت در این لحظه‌ها مثبت است و گزینهٔ (۴) نادرست است. اما به سراغ گزینه‌های (۱) و (۲) می‌رویم. شیب خط مماس در نمودار شکل (۱) در لحظهٔ t_1 از قدرمطلق شیب خط مماس در لحظهٔ t_2 بیشتر است و این گزینه نادرست است. در گزینهٔ (۲) قدرمطلق شیب خط مماس در لحظهٔ t_2 بزرگ‌تر بوده و گزینهٔ (۲) درست است.



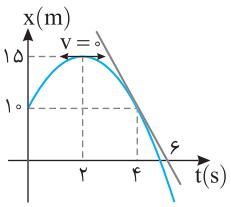
نکته دقت کنید در فیزیک وقتی از بزرگی شیب خط مماس حرف می‌زنیم یعنی هرچه خط مماس به حالت قائم نزدیک‌تر شود بزرگی شیب خط مماس بیشتر می‌شود و تندی لحظه‌ای جسم بیشتر می‌شود.

A ۸۵ ۲

خط فکری از شما در مورد سرعت لحظه‌ای سؤال شده بنابراین شما باید به سراغ شیب خط مماس در لحظه‌های $t=2s$ و $t=4s$ بروید زیرا شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر سرعت لحظه‌ای است. البته در نقاط بیشینه و کمینه که خط مماس موازی محور افقی است، شیب صفر و سرعت متحرک صفر است حال با این اطلاعات مسئله را حل کنید.

۱ لحظهٔ $t=2s$، نقطهٔ بیشینه نمودار است و سرعت لحظه‌ای در این لحظه صفر است.

۲ با اطلاعات روی نمودار شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان را در لحظهٔ $t=4s$ به‌دست می‌آوریم.



$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{0-10}{6-4}=-5m/s$$

B ۸۶ ۱

خط فکری در این سؤال با نمودار $x-t$ سروکار داریم، به دو نکته زیر دقت کنید:

۱ سرعت متوسط برابر $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ (جابه‌جایی) یا شیب خط قاطع بین دو لحظه است و تندی متوسط برابر $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}$ (مسافت) است.

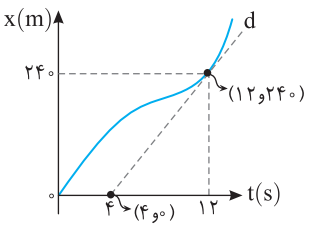
۲ سرعت در هر لحظه برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در آن لحظه و تندی برابر اندازهٔ شیب خط مماس در آن لحظه خواهد بود.

در حل سؤال ابتدا با فرض مسئله یعنی برابری تندی در لحظهٔ $t=12s$ با تندی متوسط در بازهٔ $t_1=2s$ تا $t_2=14s$ شروع می‌کنیم، سپس خواستهٔ سؤال یعنی نسبت سرعت متوسط در دو بازهٔ گفته شده را حساب می‌کنیم.

۳ تندی در لحظهٔ $t=12s$ برابر شیب خط مماس d است.

یادآوری شیب خط برابر نسبت تغییرات محور قائم به تغییرات محور افقی است:

$$\text{شیب خط}=\frac{\text{تغییرات محور قائم}}{\text{تغییرات محور افقی}}=\frac{240-0}{12-4}=\frac{240}{8}=30m/s$$



شیب خط برابر تندی لحظه‌ای است، بنابراین: $s(t=12s)=30m/s$ (I)

۴ مکان متحرک در لحظهٔ $t=14s$ داده نشده و مطابق شکل در بازهٔ ۲s تا ۱۴s متحرک از مکان $60m$ به مکان x می‌رسد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{x-60}{12} \quad (II)$$

با توجه به فرض مسئله تندی در لحظهٔ ۱۲s با تندی متوسط در بازهٔ ۲s تا ۱۴s باهم برابر است پس از رابطهٔ (I) و (II) می‌توان نوشت:

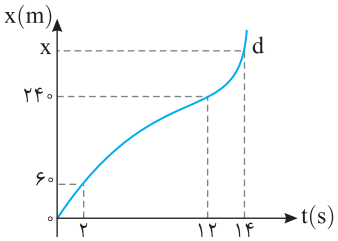
$$\frac{x-60}{12}=30\Rightarrow x-60=360\Rightarrow x=420m$$

یادآوری دو ثانیه اول یعنی $t=0$ تا $t=2s$ و دو ثانیه هفتم یعنی $t=12s$ تا $t=14s$

دو ثانیه هفتم	دو ثانیه ششم	دو ثانیه پنجم	دو ثانیه چهارم	دو ثانیه سوم	دو ثانیه دوم	دو ثانیه اول
۱۲s تا ۱۴s	۱۰s تا ۱۲s	۸s تا ۱۰s	۶s تا ۸s	۴s تا ۶s	۲s تا ۴s	۰ تا ۲s

۵ در دو ثانیه اول (۰ تا ۲s) متحرک از مکان $x=0$ تا $x=60m$ جابه‌جا می‌شود و سرعت متوسط در این بازه برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{60-0}{2}=30m/s$$

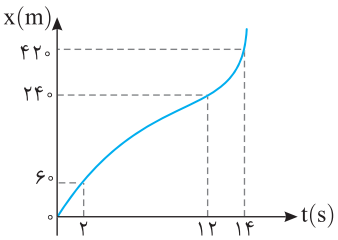


۶ در دو ثانیه هفتم (۱۲s تا ۱۴s) متحرک از مکان $x=240m$ به مکان $x=420m$ می‌رود و سرعت متوسط خواهد شد:

$$v'_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v'_{av}=\frac{420-240}{2}=\frac{180}{2}=90m/s$$

۷ نسبت v_{av} به v'_{av} را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{v_{av}}{v'_{av}}=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$$

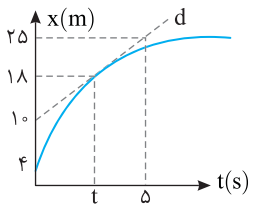


B ۸۷ ۱

۱ لحظه‌ای که مکان متحرک $+18m$ است را به راحتی به کمک شیب خط d می‌توانید به‌دست بیاورید.

$$\frac{25-10}{5-0}=\frac{18-10}{t-0}\Rightarrow 3=\frac{8}{t}\Rightarrow t=\frac{8}{3}s$$

۲ تندی لحظه‌ای در لحظهٔ t نیز شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان یعنی شیب خط d است.



$$v=\frac{25-10}{5-0}=3m/s$$

B ۸۸ ۳

قبل از حل مسئله دقت کنید تقسیم‌بندی روی محور xها ۲s، ۲s بوده و تقسیم‌بندی روی محور xها ۶m، ۶m است.

۱ به نمودار دقت کنید. در $t=0$ نمودار بر محور t مماس شده یعنی شیب خط مماس در $t=0$ صفر بوده و متحرک از حال سکون به راه افتاده است.

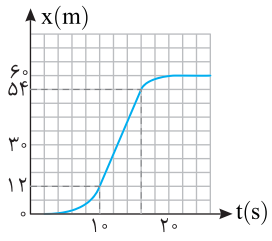
۲ تا لحظهٔ $t=10s$ شیب نمودار در حال افزایش است پس به سرعت متحرک اضافه می‌شود.

۳ از لحظهٔ $t=10s$ تا $t=16s$ شیب نمودار ثابت است و نتیجه می‌گیریم که تندی در این بازه ثابت مانده و تندی در این بازه همان تندی در لحظهٔ $t=10s$ است.

۴ از لحظهٔ $t=16s$ شیب خط مماس در حال کاهش است بنابراین تندی در حال کاهش است.

۵ نتیجه اینکه بیشینه تندی همان تندی در بازهٔ ۱۰s تا ۱۶s است.

۶ از نمودار مشخص می‌شود که در لحظهٔ $t=10s$ و $t=16s$ مکان جسم به‌ترتیب $12m$ و $54m$ است. بنابراین تندی خواهد شد:



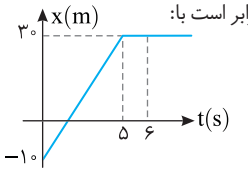
$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{54-12}{16-10}=\frac{42}{6}\Rightarrow v=7m/s$$

A ۸۹ ۴

در لحظهٔ t_2 خط مماس، خط افقی و شیب آن صفر است، یعنی در این لحظه سرعت برابر صفر است. بنابراین بازه‌ای را باید انتخاب کنیم که جابه‌جایی در آن بازه صفر باشد تا سرعت متوسط مانند سرعت لحظه‌ای در t_2 صفر شود که با توجه به نمودار از t_1 تا t_3 و همچنین t_3 تا t_5 جابه‌جایی صفر می‌شود که در گزینه‌ها بازه t_1 تا t_3 را داریم.

A ۹۰ ۲

۱ در لحظهٔ $t=0$ مکان متحرک $x=-10m$ و در لحظهٔ $t=6s$ مکان متحرک $30m$ است. بنابراین سرعت متوسط در این بازه برابر است با:



$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{30-(-10)}{6}=\frac{40}{6}$$
$$\Rightarrow v_{av}=\frac{20}{3}m/s$$

۲ در بازهٔ ۰ تا ۵s نمودار یک خط راست مایل است و در تمام لحظات تندی (سرعت) یکسان و برابر شیب نمودار است بنابراین خواهیم داشت:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v=\frac{30-(-10)}{5}=8m/s\Rightarrow v_{t=4s}=8m/s$$

۳ اکنون نسبت را حساب می‌کنیم:

$$\frac{v_{av}}{v_{t=4s}}=\frac{\frac{20}{3}}{8}=\frac{20}{24}=\frac{5}{6}$$

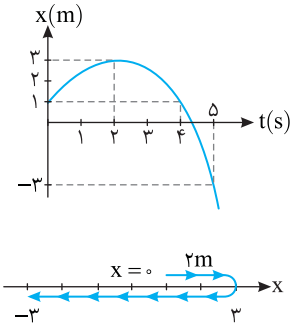
A ۹۱ ۴

در بازهٔ صفر تا ۴s متحرک از مکان $x=1m$ به مکان $x=1m$ جابه‌جا شده و جابه‌جایی آن صفر است. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

در بازهٔ صفر تا ۵s مسافت طی شده متحرک برابر است با: $\ell=2+6=8m$

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{8}{5}=1/6m/s$$

بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.



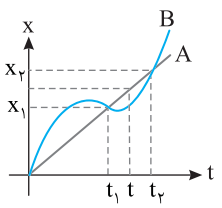
شیب خط مماس در $t=5s$ از شیب خط مماس در $t=4s$ بیشتر است پس تندی لحظه‌ای (اندازهٔ سرعت لحظه‌ای) در $t=5s$ از $t=4s$ بزرگ‌تر است. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

در لحظهٔ $t=2s$ مکان متحرک $x=3m$ و در لحظهٔ $t=5s$ مکان متحرک $-3m$ است، یعنی متحرک در خلاف جهت محور جابه‌جا شده و سرعت متوسط منفی است و در تمام بازهٔ ۲s تا ۵s سرعت منفی بوده و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۹۲ ۴

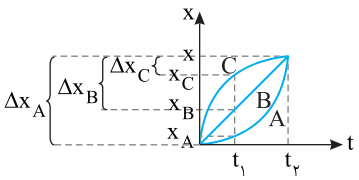
خط فکری در تمام گزینه‌ها سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا t_1 و یا t_1 تا t_2 برای دو متحرک A و B مقایسه شده است، بنابراین شما باید با توجه به تعریف سرعت متوسط $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ دربارهٔ مقایسهٔ سرعت متوسط‌ها اظهارنظر کنید.

در بازهٔ ۰ تا t_1 مکان هر دو متحرک از صفر تا x_1 تغییر کرده بنابراین جابه‌جایی متحرک A و B یکسان و برابر $\Delta x=x_1$ بوده و سرعت متوسط A و B در این بازه برابر است. همچنین در بازهٔ t_1 تا t_2 جابه‌جایی دو متحرک A و B یکسان و برابر x_2-x_1 است و در این بازه نیز سرعت متوسط یکی است. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.



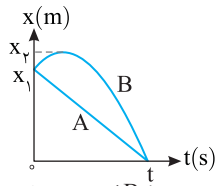
به نمودار نگاه کنید. کاملاً قابل تشخیص که در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 جابه‌جایی‌ها به‌صورت $\Delta x_A>\Delta x_B>\Delta x_C$ است و رابطهٔ سرعت متوسط $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ A و B و C به‌صورت مقابل است:

$$v_{av_A}>v_{av_B}>v_{av_C}$$



A ۹۴ ۴

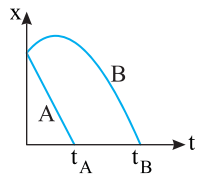
به نمودار نگاه می‌کنیم:



۱ در ابتدای بازه $(t=0)$ مکان هر دو متحرک x_1 و در انتهای بازه (t) مکان صفر است. بنابراین جابه‌جایی در این بازه یکسان و در نتیجه سرعت متوسط A و B با هم برابر است.

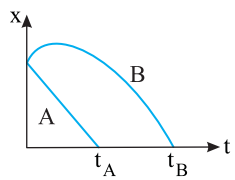
۲ مسافت طی شده توسط A کمتر از مسافت طی شده توسط B است. دقت کنید متحرک B از x_1 به x_2 رفته سپس به مکان $x=0$ می‌رسد. بنابراین تندی متوسط A از تندی متوسط B کمتر است و گزینهٔ (۴) پاسخ تست است.

A ۹۵ ۴



تندی متوسط به مسیر حرکت و مسافت طی شده بستگی دارد. با توجه به نمودار جابه‌جایی دو متحرک یکسان است اما بازهٔ زمانی B از A بزرگ‌تر است و تنها می‌توان اظهارنظر کرد که سرعت متوسط B از سرعت متوسط A کوچک‌تر است $(v_{av_B}<v_{av_A})$ اما در مورد تندی متوسط نمی‌توان اظهارنظر قطعی کرد. زیرا متحرک B دارای مسافت طی شده بیشتری، در زمان طولانی‌تری است. به همین دلیل ممکن است تندی متوسط A با تندی متوسط B برابر یا از آن کمتر و یا بیشتر باشد.

A ۹۶ ۱

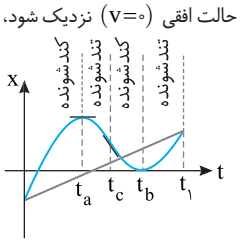


با توجه به شکل، جابه‌جایی دو متحرک یکسان، اما زمان حرکت متحرک B از زمان حرکت متحرک A بیشتر است $(t_B>t_A)$ از این‌رو با توجه به تعریف سرعت متوسط $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$ سرعت متوسط متحرک B از سرعت متوسط متحرک A کمتر می‌باشد و گزینهٔ (۱) درست است.

A ۹۷ ۴

یادآوری شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر سرعت لحظه‌ای است و شیب خط قاطع بین دو لحظه برابر سرعت متوسط است.

نکته اگر در هر بازهٔ زمانی، چند خط مماس بر نمودار رسم کنیم و خط مماس به حالت قائم نزدیک شود، حرکت تندشونده و اگر به حالت افقی $(v=0)$ نزدیک شود، حرکت کندشونده است.



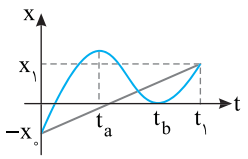
۱ از صفر تا t_a شیب خط مماس در حال کاهش و سرعت به سمت صفر می‌رود و حرکت کندشونده است. از t_a تا t_b ابتدا قدرمطلق شیب در حال افزایش بوده حرکت تندشونده و سپس قدرمطلق شیب در حال کاهش بوده یعنی تندی به سمت صفر می‌رود و در t_b تندی صفر است. یعنی حرکت کندشونده است و از t_b به بعد شیب در حال افزایش و حرکت تندشونده است. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) هر دو نادرست است.

B ۹۳ ۳

خط فکری به صورت سؤال دقت کنید، سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا t_2 از شما خواسته نشده است. بلکه سرعت متوسط از لحظهٔ t_1 تا t_2 مورد پرسش است بنابراین شما باید بررسی کنید که در این بازه جابه‌جایی A و B و C چگونه است؟

نکته جهت حرکت همان جهت سرعت است.

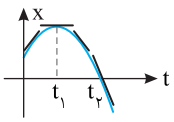
۲ در بازهٔ ۰ تا t_a و در بازهٔ t_b تا t_1 شیب خط مماس مثبت و سرعت و جهت حرکت مثبت و در بازهٔ t_a تا t_b متحرک در جهت منفی محور در حرکت است. بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است.



۳ در بازهٔ ۰ تا t_1 متحرک از مکان منفی $(-x_0)$ به مکان مثبت x_1 می‌رود. بنابراین جابه‌جایی و سرعت متوسط $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$ مثبت بوده و گزینهٔ (۴) درست است.

۴ ۹۸ A

در هنگام گذر از مبدأ مکان $(x=0)$ یعنی در لحظهٔ t_2 شیب خط مماس منفی است، پس سرعت منفی می‌باشد و گزینهٔ (۱) درست است. در بیشینه و کمینه نمودار $x-t$ به شرط تغییر علامت سرعت، جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند. در این حرکت نیز در t_1 جهت حرکت تغییر کرده است و گزینهٔ (۲) درست است. ابتدا شیب خط مماس در حال کم شدن است تا در لحظهٔ t_1 به صفر می‌رسد پس ابتدا حرکت کندشونده بوده و پس از آن شیب خط در حال زیاد شدن است. (خط مماس به حالت قائم نزدیک می‌شود) بنابراین بعد از t_1 حرکت تندشونده می‌شود و گزینهٔ (۳) نیز درست است.



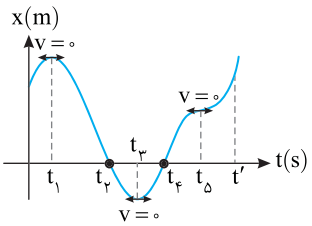
۳ ۹۹ B

یادآوری ۱ هرگاه خط مماس بر نمودار مکان - زمان موازی محور زمان شود و شیب آن صفر گردد، متحرک در آن لحظه ساکن است.

یادآوری ۲ هرگاه نمودار مکان - زمان محور زمان را قطع کند یعنی متحرک از $x=0$ رد شود، بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

یادآوری ۳ برای تغییر جهت متحرک علاوه بر صفر شدن سرعت باید علامت سرعت قبل و بعد از آن لحظه تغییر کند.

به نمودار نگاه کنید. در سه لحظهٔ t_1 و t_3 و t_5 مماس بر نمودار موازی محور زمان بوده و در این لحظات سرعت صفر است. یعنی ۳ بار سرعت صفر می‌شود. در لحظهٔ t_2 و t_4 نمودار محور زمان را قطع کرده یعنی متحرک از مبدأ مکان می‌گذرد. بنابراین ۲ بار بردار مکان تغییر جهت می‌دهد. در لحظهٔ t_1 و t_3 سرعت صفر شده و در دو طرف این لحظه‌ها علامت سرعت عوض می‌شود یعنی دو بار متحرک تغییر جهت می‌دهد اما در لحظهٔ t_5 با آنکه سرعت صفر می‌شود، اما متحرک در جهت مثبت محور به حرکت ادامه می‌دهد و تغییر جهت نداریم.



۳ ۱۰۰ B

۱ شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ t_1 افقی است و شیب آن صفر بوده از این‌رو در این لحظه سرعت صفر می‌شود و گزینهٔ (۱) درست است.

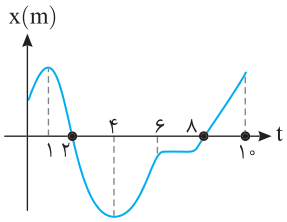
۲ علامت سرعت قبل و بعد از t_1 تغییر کرده پس جهت حرکت در این لحظه تغییر می‌کند و گزینهٔ (۲) درست است.

۳ دقت کنید در این لحظه متحرک به مبدأ مکان می‌رسد. نمودار محور زمان را قطع نمی‌کند یعنی متحرک از مبدأ نمی‌گذرد و بعد از t_1 و قبل از t_1 مکان متحرک مثبت است. بنابراین علامت مکان تغییر نمی‌کند. پس بردار مکان تغییر جهت نداده است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

۴ قبل از t_1 شیب خط مماس کم می‌شود تا در t_1 صفر شود. پس قبل از t_1 حرکت کندشونده بوده و بعد از t_1 شیب خط مماس زیاد می‌شود یعنی حرکت تندشونده شده است. پس در t_1 نوع حرکت تغییر کرده است و گزینهٔ (۴) درست است.

۱ ۱۰۱ A

نکته هرگاه نمودار بالای محور زمان باشد، یعنی $x>0$ باشد، مکان متحرک مثبت و هرگاه نمودار پایین محور زمان قرار داشته باشد یعنی $(x<0)$ و مکان متحرک منفی است.



۱ در بازهٔ ۰ تا ۱s متحرک در جهت مثبت محور و از ۱s تا ۴s در خلاف جهت محور، از ۴s تا ۶s در جهت مثبت محور و از ۶s به بعد تا مدتی متحرک ساکن و در آخر در جهت مثبت محور در حرکت است، بنابراین کل مدتی که متحرک در خلاف جهت محور حرکت می‌کند، ۴−۱=۳s است.

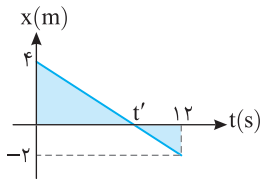
۲ در بازهٔ ۲s تا ۸s نمودار پایین محور زمان بوده و بردار مکان متحرک منفی است. بنابراین در مدت ۸−۲=۶s بردار مکان خلاف جهت محور xهاست.

۳ نسبت دو بازهٔ بیان شده خواهد شد:

$$\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

۱ ۱۰۲ A

خط فکری جهت حرکت را علامت سرعت مشخص می‌کند. اگر سرعت مثبت باشد متحرک در جهت مثبت محور x ها در حال حرکت است و اگر سرعت منفی باشد متحرک در جهت منفی محور x ها در حال حرکت است. بنابراین شما باید از روی نمودار علامت سرعت را مشخص کنید و برای مشخص شدن بردار مکان‌های مثبت و منفی، باید مشخص کنید در چه بازه‌ای نمودار بالای محور زمان و در چه بازه‌ای نمودار پایین محور زمان است. یعنی شما باید t' را به‌دست بیاورید.



۱ در تمام مدت ۱۲s متحرک در جهت منفی محور با تندی ثابت از مکان +۴m به مکان −۲m می‌رود.

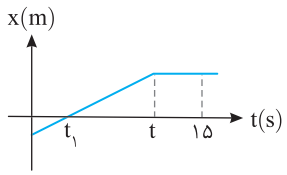
۲ t' را به کمک نوشتن شیب خط به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{۴-(-۲)}{۱۲-۰}=\frac{۴-۰}{t'-۰}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۴}{t'}\Rightarrow t'=۸s$$

۳ در بازهٔ ۸s تا ۱۲s نمودار زیر محور زمان بوده و مکان متحرک به مدت ۱۲−۸=۴s منفی است.

۱ ۱۰۳ A

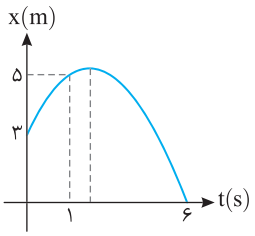
در مدت ۱۵s متحرک ابتدا تا لحظهٔ t در یک جهت در حرکت بوده است و جابه‌جایی و مسافت با هم برابر است و از t تا ۱۵s، جسم ساکن است. بنابراین در مدت ۱۵s جابه‌جایی با مسافت برابر است و گزینهٔ (۱) درست است.



در بازهٔ صفر تا t_1 متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ و سپس تا لحظهٔ t در حال دور شدن از مبدأ است و بعد از t ساکن است و گزینهٔ (۲) نادرست است. در بازهٔ صفر تا t متحرک در جهت مثبت حرکت می‌کند و تغییر جهت نمی‌دهد، یعنی سرعت تغییر علامت نمی‌دهد و گزینهٔ (۳) نادرست است.

۱ ۱۰۴ C

خط فکری وقتی نمودار سهمی است، باید معادلهٔ مکان - زمان تابع درجه ۲ شبیه $x=at^2+bt+c$ باشد و مختصات نقاط روی نمودار باید در معادله صدق کند. با توجه به این مطلب با یک مسئلهٔ ریاضی سروکار دارید و باید معادله را به‌دست بیاورید.



مختصات نقاط $(t=0, x_0=30m)$، $(t=1s, x=50m)$ و $(t=6s, x=0)$ را در معادلهٔ $x=at^2+bt+c$ جای‌گذاری می‌کنیم.

نمودار سهمی می‌باشد پس معادلهٔ حرکت به صورت $x=at^2+bt+c$ می‌باشد.

$$\begin{cases} t=0 \\ x=30m \end{cases} \Rightarrow 30=a(0)^2+b(0)+c \Rightarrow 30=c$$

$$\begin{cases} t=1s \\ x=50m \end{cases} \Rightarrow 50=a(1)^2+b(1)+30 \Rightarrow 20=a+b \quad (I)$$

$$\begin{cases} t=6s \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow 0=a(6)^2+b(6)+30 \Rightarrow -30=36a+6b \quad (II)$$

از حل دو معادلهٔ (I) و (II) مقدار a و b را به‌دست می‌آوریم:

$$(I),(II)\begin{cases} (a+b=20)\times -6 \\ 36a+6b=-30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6a-6b=-120 \\ 36a+6b=-30 \end{cases} +$$

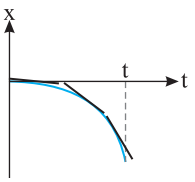
$$30a=-150 \Rightarrow a=-5 \Rightarrow b=25$$

در رأس سهمی شیب خط مماس یعنی تندی صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد.

بنابراین مختصات رأس را حساب می‌کنیم. $t=\frac{-b}{2a} \Rightarrow t=\frac{-25}{-10}=2/5s$

۴ ۱۰۵ A

با توجه به شکل روبه‌رو در لحظهٔ $t=0$ نمودار مکان - زمان بر محور زمان مماس بوده و شیب خط مماس یعنی سرعت لحظه‌ای، صفر است و گزینهٔ (۱) درست است.

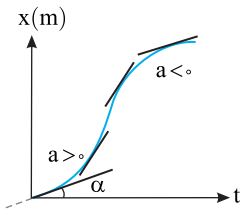


اگر به مماس‌های رسم شده دقت کنید قدرمطلق شیب خط مماس در حال افزایش است، یعنی تندی در حال افزایش است و حرکت تندشونده است و گزینهٔ (۲) درست است

از شروع حرکت، متحرک از مبدأ در جهت منفی محور و در حال دور شدن از مبدأ است بنابراین گزینهٔ (۳) نیز درست است و پاسخ گزینهٔ (۴) است.

۱ ۱۰۶ A

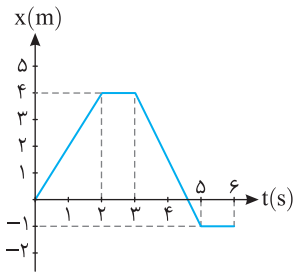
۱ با توجه به شکل روبه‌رو خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t=0$ با محور زمان زاویهٔ α می‌سازد یعنی شیب خط مماس بر نمودار صفر نبوده بنابراین سرعت اولیه مخالف صفر بوده و متحرک دارای سرعت اولیه است. $v_0=\tan\alpha$



۲ بار رسم چند خط مماس مشخص است که ابتدا شیب خط مماس در حال افزایش بوده تندی در حال افزایش و حرکت تندشونده و سپس شیب خط مماس در حال کاهش بوده یعنی تندی در حال کاهش و حرکت کندشونده است. بنابراین گزینهٔ (۱) درست و گزینه‌های (۲) و (۳) و (۴) نادرست است.

۲ ۱۰۷ B

۱ متحرک در بازهٔ صفر تا ۲s، چهار متر مسافت طی می‌کند، در بازهٔ ۲s تا ۳s ساکن بوده و در بازهٔ ۳s تا ۵s از مکان ۴m به مکان −۱m رفته و مسافت ۵m را می‌پیماید و از لحظهٔ $t=5s$ به بعد ساکن می‌ماند. بنابراین مسافت طی شده از صفر تا ۶s جمعاً



$\ell=4+5=9m$ است و تندی متوسط برابر است با: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{9}{6}=1/5m/s$

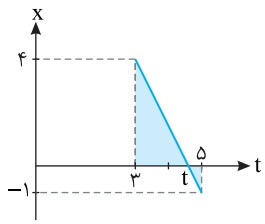
بنابراین گزارهٔ (الف) درست است.

۲ در بازهٔ ۰ تا ۶s متحرک از مکان $x=0$ به مکان $x=-1m$ می‌رود و بردار جابه‌جایی برابر $\vec{d}=-\vec{i}$ است و از این رو سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا ۶s خواهد شد:

$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}=\frac{-\vec{i}}{6}=-\frac{1}{6}\vec{i}$$

بنابراین گزارهٔ (ب) نادرست است.

۳ لحظه‌ای که بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد لحظه‌ای است که متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ می‌گذرد و نمودار محور زمان را قطع می‌کند. برای به دست آوردن لحظهٔ تغییر جهت از تشابه مثلث استفاده می‌کنیم. دو مثلث رنگی متشابه است، نسبت تشابه را برای دو مثلث می‌نویسیم:



$$\frac{t-3}{5-t}=\frac{4}{1} \Rightarrow t-3=20-4t \Rightarrow 5t=23 \Rightarrow t=4/6s$$

بنابراین گزارهٔ (پ) درست است.

۴ متحرک از لحظهٔ ۳s تا لحظهٔ ۵s یعنی به مدت ۲s در خلاف جهت محور در حرکت است و گزارهٔ (ت) درست است.

۳ ۱۰۸ B

خط فکری در فیزیک دبیرستان خبری از زمان منفی نیست و همواره $t>0$ است. از طرفی بردار مکان وقتی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ بگذرد. بنابراین در تابع درجهٔ یک باید معادله دارای ریشهٔ مثبت باشد. همچنین در تابع درجهٔ ۲ باید معادله دارای ریشهٔ مثبت بوده در این صورت بردار مکان تغییر جهت می‌دهد. اما اگر معادلهٔ درجهٔ ۲ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، بردار مکان در آن لحظه تغییر جهت نمی‌دهد.

الف) $x=t+4 \Rightarrow 0=t+4 \Rightarrow t=-4s$

ریشه منفی شد و متحرک از مبدأ مکان نمی‌گذرد و بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

ب) $x=t^2-4t+5=0 \Rightarrow t=\frac{+4\pm\sqrt{16-20}}{2}, t=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}$

این معادله ریشه ندارد، یعنی متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ نمی‌گذرد و بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

پ)

$$x=2t^2-4t-2=0 \Rightarrow t^2-2t-1=0 \Rightarrow t=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=1\pm\sqrt{2}=\begin{cases} 1+\sqrt{2}>0 \\ 1-\sqrt{2}<0 \end{cases}$$

بنابراین متحرک یک بار تغییر جهت می‌دهد.

ت) $x=t^2-6t+9=0 \Rightarrow x=(t-3)^2$

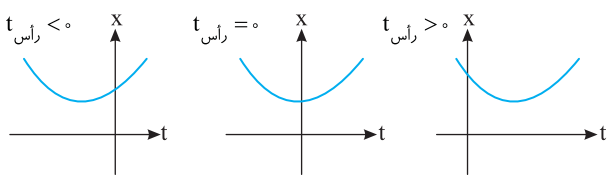
این عبارت همواره مثبت یعنی x تغییر علامت نمی‌دهد. از طرفی این معادله دارای ریشهٔ مضاعف $t=3s$ و همان‌گونه که گفتیم در ریشهٔ مضاعف بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

بازی با سؤال **در چه تعداد از معادله‌های حرکت این مسئله، متحرک تغییر جهت نمی‌دهد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ نکته **هرگاه معادلهٔ حرکت درجه اول باشد نمودار مکان - زمان آن یک خط راست مایل است، یعنی متحرک در یک جهت در حال حرکت است و تغییر جهت نمی‌دهد.**

نکته **در تابع‌های مکان - زمان درجه ۲، در رأس سهمی متحرک تغییر جهت می‌دهد اگر زمان رأس سهمی مثبت باشد، متحرک تغییر جهت می‌دهد و اگر منفی یا صفر باشد متحرک تغییر جهت نمی‌دهد. (در فیزیک دبیرستان بازهٔ زمانی منفی را در نظر نمی‌گیریم.)**



الف) $x=t+4$ تابع درجه اول بوده و متحرک روی خط راست در حرکت است و تغییر جهت نمی‌دهد.

ب) $x=t^۲-۴t+۵ \xrightarrow{t=\frac{-b}{۲a}} t=-\frac{-۴}{۲\times۱}=۲s>۰$

متحرک تغییر جهت می‌دهد.

پ) $x=۲t^۲-۴t-۲=۰ \xrightarrow{t=\frac{-b}{۲a}} t=\frac{-۴}{۲\times۲}=۱>۰$

متحرک تغییر جهت می‌دهد.

ت) $x=t^۲-۶t+۹=۰ \xrightarrow{t=\frac{-b}{۲a}} t=-\frac{-۶}{۲}=۳s>۰$

متحرک تغییر جهت می‌دهد.

گزینهٔ ۱

B ۱۰۹ ۲

یادآوری برای به‌دست آوردن لحظهٔ تغییر جهت باید مختصات رأس سهمی $(t=\frac{-b}{۲a})$ را به‌دست آورد. اگر زمان مثبت به‌دست آمد، متحرک (در $t=\frac{-b}{۲a}$) تغییر جهت می‌دهد.

۱ برای به‌دست آوردن لحظهٔ تغییر جهت کافی است مختصات رأس سهمی را به‌دست بیاوریم.

$x=۲t^۲-۴t-۶ \xrightarrow{t=\frac{-b}{۲a}} t=-\frac{-۴}{۲\times۲}\Rightarrow t=۱s$

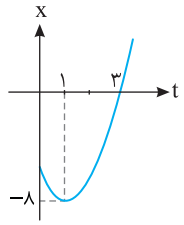
۲ مکان لحظهٔ تغییر جهت را با قرار دادن $t=۱s$ در معادلهٔ حرکت به‌دست می‌آوریم.

$x=۲(۱)^۲-۴(۱)-۶=۲-۴-۶\Rightarrow x=-۸m$

۳ برای به‌دست آوردن لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان، در معادلهٔ حرکت x را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$x=۲t^۲-۴t-۶=۰\Rightarrow t^۲-۲t-۳=۰\Rightarrow(t-۳)(t+۱)=۰\Rightarrow t=۳s$

۴ بنابراین در لحظهٔ $t=۱s$ متحرک در مکان $-۸m$ و در لحظهٔ $t=۳s$ متحرک در مکان $x=۰$ بوده و در این بازهٔ زمانی $+۸m$ جابه‌جا می‌شود.



B ۱۱۰ ۲

خط فکری باید نمودار $x-t$ را رسم کنید، تا مشخص شود آیا نمودار محور زمان را قطع می‌کند یا نه، زیرا اگر محور زمان را قطع کند، کمترین فاصله از مبدأ مکان صفر می‌شود. اما اگر محور زمان را قطع نکند باید به کمک نمودار کمترین فاصله تا مبدأ مکان را مشخص کرد.

۱ مقدار $\Delta=b^۲-۴ac$ را به‌دست می‌آوریم:

$x=t^۲-۶t+۱۰\Rightarrow\Delta=(-۶)^۲-۴\times۱۰\Rightarrow\Delta=۳۶-۴۰=-۴<۰$

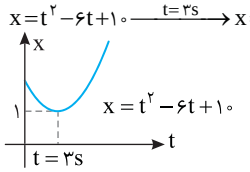
بنابراین این معادله ریشه ندارد.

۲ مختصات رأس سهمی این معادله را حساب می‌کنیم.

$t=-\frac{b}{۲a}\Rightarrow t=-\frac{-۶}{۲}\Rightarrow t=۳s$

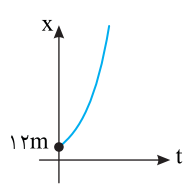
$x=t^۲-۶t+۱۰ \xrightarrow{t=۳s} x=۳^۲-۶\times۳+۱۰\Rightarrow x=+۱m$

۳ بنابراین شکل نمودار می‌تواند به شکل روبه‌رو باشد و کمترین فاصله از مبدأ زمان در لحظهٔ $t=۳s$ بوده و برابر $x=۱m$ است.



B ۱۱۱ ۱

معادلهٔ حرکت به صورت $x=(t+۳)(t+۴)$ می‌باشد، هر دو ریشهٔ این معادله منفی است و می‌دانیم که زمان نمی‌تواند منفی باشد، پس نمودار $x-t$ تقریباً مشابه شکل مقابل بوده و بالای محور زمان قرار می‌گیرد. از این رو کمترین فاصله از مبدأ در $t=۰$ رخ می‌دهد.



B ۱۱۲ ۱

خط فکری ابتدا بررسی کنید که در بازهٔ زمانی داده شده، متحرک تغییر جهت می‌دهد یا نه؟ برای این منظور باید به سراغ مختصات رأس سهمی $t=-\frac{b}{۲a}$ بروید.

رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم.

$x=۲t^۲+۴t-۸ \xrightarrow{\text{رأس سهمی}} t=-\frac{۴}{۲\times۲}=-۱<۰$

بنابراین این متحرک تغییر جهت نداده و همواره در یک جهت روی محور xها در حرکت است و مسافت طی شده برابر اندازهٔ جابه‌جایی متحرک است.

B ۱۱۳ ۲

خط فکری باید مختصات رأس سهمی $(t=-\frac{b}{۲a})$ را به‌دست بیاورید تا مشخص شود لحظهٔ تغییر جهت در بازهٔ زمانی ارائه شده در مسئله قرار دارد یا نه؟ اگر لحظهٔ تغییر جهت در بازهٔ بیان شده نبود یعنی متحرک در آن بازهٔ زمانی در یک جهت در حرکت است بنابراین مسافت طی شده و اندازهٔ جابه‌جایی و در نتیجه تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط با هم برابر است.

مختصات رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم. $t=-\frac{b}{۲a}\Rightarrow t=-\frac{-۱}{۲}\Rightarrow t=\frac{۱}{۲}s$

این عدد بین بازهٔ ۱s تا ۴s قرار ندارد. یعنی متحرک در این بازهٔ زمانی همواره در یک جهت در حال حرکت بوده و مسافت طی شده با اندازهٔ جابه‌جایی در آن بازه برابر $(\ell=|\vec{d}|)$ است، در نتیجه تندی متوسط $(s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t})$ با اندازهٔ سرعت متوسط $(v_{av}=\frac{d}{t})$ برابر است.

B ۱۱۴ ۲

برای آنکه در تمام بازه‌های زمانی اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت با هم برابر باشند، باید متحرک در یک جهت در حال حرکت باشد یعنی متحرک تغییر جهت ندهد. برای آنکه متحرک تغییر جهت ندهد باید $t=-\frac{b}{۲a}$ یعنی زمان رأس سهمی منفی شود. بنابراین باید a و b هم‌علامت باشند. در این صورت $ab>۰$ خواهد بود.

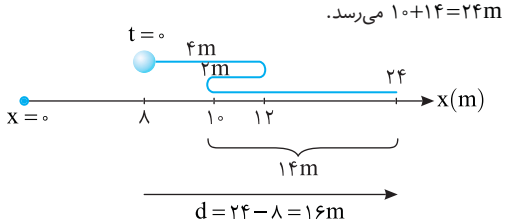
B ۱۱۵ ۴

خط فکری برای حل این مسئله قطعاً شما باید مسیر حرکت را رسم کنید. از طرفی به کمک تندی متوسط باید مسافت طی شده در مدت ۵s را به‌دست بیاورید تا متوجه شوید متحرک در لحظهٔ $t=۵s$ در چه مکانی است و بتوانید جابه‌جایی و در نتیجه سرعت متوسط را حساب کنید.

۱ مسافت طی شده در مدت ۵s را به‌دست می‌آوریم.

$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow ۴=\frac{\ell}{۵}\Rightarrow\ell=۲۰m$

۲ مسیر را از مکان $x_۰=+۸m$ رسم می‌کنیم، متحرک از $+۸m$ به مکان $+۱۲m$ می‌رود یعنی ۴m مسافت طی کرده سپس بازمی‌گردد و به مکان $+۱۰m$ می‌رود. یعنی ۲m مسافت طی می‌کند تا اینجا ۶m مسافت طی کرده و هنوز ۱۴m باقی مانده تا مسافت کل ۲۰m شود. در نقطهٔ $+۱۰m$ تغییر جهت می‌دهد و در امتداد محور xها به حرکت خود ادامه می‌دهد بنابراین باید از مکان $+۱۰m$، ۱۴m جلو برود پس به مکان $۱۰+۱۴=۲۴m$ می‌رسد.



۳ متحرک در مدت ۵s از مکان $+۸m$ به مکان $+۲۴m$ رفته و جابه‌جایی آن $d=۲۴-۸=۱۶m$ است.

۴ سرعت متوسط در این مدت خواهد شد: $v_{av}=\frac{d}{t}\Rightarrow v_{av}=\frac{۱۶}{۵}=۳/۲m/s$

C ۱ ۱۱۶

خط فکری نیمهٔ دوم مسیر را مستقل از نیمهٔ اول بررسی کنید. یعنی اگر در نیمهٔ دوم مسافت (یا جابه‌جایی) ℓ_2 و زمان جابه‌جایی Δt_2 باشد، $\frac{1}{3}\Delta t_2$ متحرک با تندی $8m/s$ و $\frac{2}{3}\Delta t_2$ را با تندی $6m/s$ می‌رود. شما با این اطلاعات تندی متوسط در نیمهٔ دوم مسیر را حساب کنید. سپس به سراغ تندی متوسط در کل مسیر بروید.

۱ جابه‌جایی در مدت $\frac{1}{3}\Delta t_2$ برابر است با: $s=\frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow \ell'_2 = 8\times\frac{1}{3}\Delta t_2 = \frac{8}{3}\Delta t_2$

۲ جابه‌جایی درمدت $\frac{2}{3}\Delta t_2$ خواهدشد: $s=\frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow \ell''_2 = 6\times\frac{2}{3}\Delta t_2 \Rightarrow \ell''_2 = 4\Delta t_2$

۳ تندی متوسط در نیمهٔ دوم را حساب می‌کنیم.

$$s_2 = \frac{\ell_2}{\Delta t_2} = \frac{\frac{8}{3}\Delta t_2 + 4\Delta t_2}{\Delta t_2} = \frac{20}{3}\,m/s$$

اکنون به سراغ کل مسیر می‌رویم

$$\ell_1 = \frac{\ell}{2},\quad s_{av_1} = 20\,m/s \qquad \ell_2 = \frac{\ell}{2},\quad s_{av_2} = \frac{20}{3}\,m/s \qquad (\ell)$$

۴ اما باید زمان حرکت در هر نیمه را برحسب ℓ به‌دست بیاوریم.

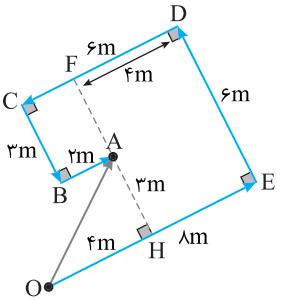
$$s_{av} = \frac{\ell}{t} \Rightarrow \begin{cases} 20 = \frac{\frac{\ell}{2}}{t_1} = t_1 = \frac{\ell}{40} \\ \frac{20}{3} = \frac{\frac{\ell}{2}}{t_2} \Rightarrow t_2 = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{20}{3}} = \frac{3\ell}{40} \end{cases}$$

۵ تندی متوسط در کل مسیر خواهد شد:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\frac{\ell}{40} + 3\frac{\ell}{40}} = \frac{40}{4} = 10\,m/s$$

A ۳ ۱۱۷

جابه‌جایی برداری است که از ابتدای مسیر به انتهای مسیر رسم می‌شود، با توجه به شکل جابه‌جایی برابر طول OA است. بنابراین از نقطهٔ O تا نقطهٔ A بردار جابه‌جایی OA را رسم می‌کنیم در مثلث OAH باید طول وتر OA را به‌دست بیاوریم بنابراین باید طول اضلاع AH و OH را از روی شکل مشخص کنیم:



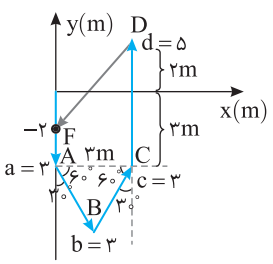
$$AH = DE - BC = 6 - 3 = 3m \quad , \quad OH = OE - FD = 8 - 4 = 4m$$

اکنون بردار جابه‌جایی را حساب می‌کنیم.

$$OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5m$$

B ۳ ۱۱۸

به شکل نگاه کنید. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. بنابراین ضلع $AC = 3m$ است. با توجه به فرض مسئله قرار است ذره خود را از نقطهٔ D به نقطه‌ای روی محور yها در مکان $-2m$ (نقطهٔ F) برساند.

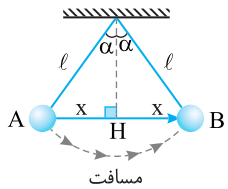


بنابراین ذره باید جابه‌جایی DF را طی کند یعنی از نقطهٔ D به مختصات $D(3,2)$ به نقطهٔ $F(0,-2)$ برود بنابراین روی محور xها باید $-3m$ و روی محور yها باید $-4m$ جابه‌جا شود. بنابراین بردار DF خواهد شد:

$$\overrightarrow{DF} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$$

C ۱ ۱۱۹

خط فکری مسیر حرکت را مطابق شکل روبه‌رو رسم کنید. بردار A تا B را بکشید یعنی بردار جابه‌جایی را مشخص کنید. در این صورت مسیر حرکت از A تا B را روی شکل نشان دهید. باید طول AB را به کمک مثلثات به دست بیاورید و طول کمان مسیر AB را نیز به‌دست آورید تا بتوانید α را به کمک فرض مسئله حساب کنید.



۱ اندازهٔ جابه‌جایی AB برابر $2x$ است و هر x روی شکل را به کمک سینوس به‌دست می‌آوریم.

$$\sin\alpha = \frac{x}{\ell} \Rightarrow x = \ell\sin\alpha \Rightarrow AB = 2\ell\sin\alpha$$

نکته طول کمانی که زاویهٔ روبه‌روی آن θ است برابر $\frac{\theta}{360}(2\pi R)$ است.

۲ طول کمان AB را حساب می‌کنیم. کمان روبه‌روی AB برابر 2α است بنابراین مسافت AB خواهد شد:

$$\text{مسافت} = \frac{2\alpha}{360}(2\pi R)$$

شعاع مسیر همان طول ریسمان آونگ است.

$$\text{مسافت} = \frac{2\alpha}{360}(2\pi\ell) \Rightarrow \text{مسافت} = \frac{\alpha\pi\ell}{90}$$

۳ با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$\frac{\text{مسافت}}{\text{جابه‌جایی}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi \Rightarrow \frac{\frac{\alpha\pi L}{90}}{2\ell\sin\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi \Rightarrow \frac{\alpha}{\sin\alpha} = 45\sqrt{2}$$

۴ اکنون باید گزینه‌ها را در این رابطه قرار داد تا اندازهٔ α مشخص می‌شود. زاویهٔ $\alpha = 45^\circ$ را امتحان می‌کنیم.

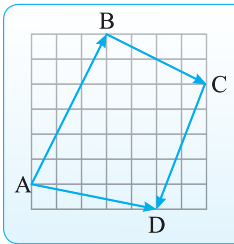
$$\frac{45}{\sin 45^\circ} = 45\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

بنابراین $\alpha = 45^\circ$ جواب است.

B ۲ ۱۲۰

یادداشت ریاضی در شکل روبه‌رو که از کتاب ریاضی پایهٔ هشتم آورده شده است مسیر ذره‌ای که به‌ترتیب جابه‌جایی $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CD}$ را طی کرده نشان داده شده است و بردار $\overrightarrow{AD}$ بردار جابه‌جایی کل است. یعنی

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$



خط فکری در صورت مسئله سه جابه‌جایی برحسب بردارهای یکه بیان شده که ذره پشت سر هم آن‌ها را پیموده است بنابراین برای به‌دست آوردن جابه‌جایی کل باید جمع برداری آن‌ها را حساب کنید.

۱ بردار جابه‌جایی در کل مدت حرکت خواهد شد:

$$\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3 = (5\vec{i} - 2\vec{j}) + (3\vec{i} + v\vec{j}) + (4\vec{i} + 4\vec{j}) \Rightarrow \vec{d} = 12\vec{i} + 9\vec{j}$$

۲ اندازهٔ جابه‌جایی را حساب می‌کنیم:

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} \Rightarrow d = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} \Rightarrow d = 15m$$

۳ سرعت متوسط را به‌دست می‌آوریم.

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{15}{3+5+4} \Rightarrow v_{av} = \frac{15}{12} \Rightarrow v_{av} = 1/25 m/s$$

A ۱ ۱۲۱

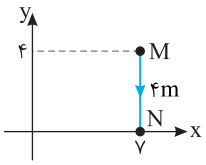
خط فکری همواره یادتان باشد که جابه‌جایی متحرک به مسیر حرکت بستگی ندارد و تنها به مختصات نقطهٔ ابتدایی از نقطهٔ انتهایی بستگی دارد و در حل این مسئله باید از نقطهٔ B چشم‌پوشی کنید و فاصلهٔ بین نقاط A و C را به کمک ریاضی به‌دست بیاورید.

فاصلهٔ $A(1,1)$ تا $C(2,2)$ یعنی اندازهٔ جابه‌جایی خواهد شد:

$$AC = d = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \Rightarrow |d| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\,m$$

۱ ۱۲۲ B

برای به‌دست آوردن تندی متوسط نیاز داریم که مسافت طی شده از M تا N و سپس از N تا P را به‌دست بیاوریم.



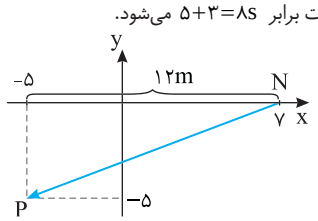
۱ مسافت طی شده از MN مطابق شکل برابر $\ell_{MN}=۴m$ است.

۲ متحرک روی خط راست از N به P رفته و فاصلهٔ N تا P خواهد شد:

$$\ell_{NP}=\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}=۱۳m$$

۳ مسافت کل برابر است با: $\ell=\ell_{MN}+\ell_{NP}=۴+۱۳=۱۷m$

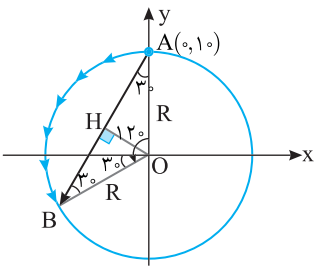
۴ زمان کل حرکت برابر $۵+۳=۸s$ می‌شود.



۵ تندی متوسط را به‌دست می‌آوریم. $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۱۷}{۸}m/s$

۴ ۱۲۳ B

۱ متحرک روی دایره‌ای به شعاع $R=۱۰m$ از نقطهٔ A به نقطهٔ B رفته است. ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین OAB را رسم می‌کنیم.



۲ طول AH را به کمک $\cos ۳۰^\circ$ حساب می‌کنیم.

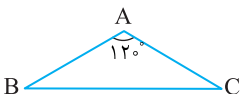
$$\cos ۳۰^\circ=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{AH}{OA}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{AH}{R}\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}R$$

۳ بنابراین جابه‌جایی AB برابر است با:

$$d=AB=۲AH=۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}R\Rightarrow d=\sqrt{۳}R\xrightarrow{R=۱۰m}d=۱۰\sqrt{۳}m$$

۴ سرعت متوسط را به‌دست می‌آوریم. $v_{av}=\frac{d}{t}=\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow v_{av}=۵\sqrt{۳}m/s$

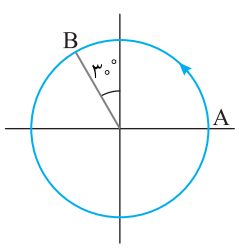
میانبر قاعدهٔ مثلث متساوی الساقین با زاویهٔ رأس ۱۲۰° همواره $\sqrt{۳}$ برابر طول هر ساق آن است. $BC=\sqrt{۳}AB$



بازی با سؤال متحرکی کمان AB را طی کرده است. مسافت طی‌شده توسط متحرک چند برابر اندازهٔ جابه‌جایی آن است؟

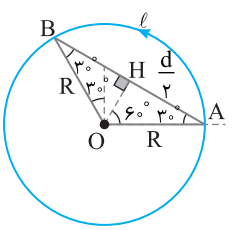
۱) ۱ ۲) ۳

۳) $\sqrt{۳}\pi$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۳}\pi}{۹}$



پاسخ زاویه‌ای که متحرک طی کرده $\frac{۱۲۰}{۳۶۰}=\frac{۱}{۳}$ دایره است بنابراین مسافت طی‌شده برابر طول کمان AB بوده که $\frac{۱}{۳}$ محیط دایره است.

$$\ell=\frac{۱}{۳}(۲\pi R)\Rightarrow\ell=\frac{۲}{۳}\pi R$$



اگر طول وتر AB را d فرض کنیم فاصلهٔ AH برابر $\frac{d}{۲}$ است و با توجه به شکل در مثلث OAH می‌توان نوشت:

$$\sin ۶۰^\circ=\frac{\frac{d}{۲}}{R}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{d}{۲R}\Rightarrow d=\sqrt{۳}R$$

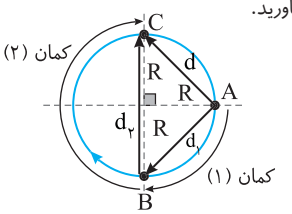
در این صورت نسبت مسافت و اندازهٔ جابه‌جایی خواهد شد:

گزینهٔ ۴

$$\frac{\ell}{d}=\frac{\frac{۲}{۳}\pi R}{\sqrt{۳}R}=\frac{۲\sqrt{۳}\pi}{۹}$$

۲ ۱۲۴ C

خط فکری دوباره متن مسئله را بخوانید. مسیر حرکت ذره پادساعتگرد است یعنی مطابق شکل ذره از نقطهٔ A به نقطهٔ B سپس از نقطهٔ B به نقطهٔ C می‌رود. سرعت متوسط یعنی جابه‌جایی تقسیم بر زمان بنابراین شما باید جابه‌جایی از A تا B و جابه‌جایی از B تا C را حساب کنید و به کمک سرعت متوسط‌هایی که در مسئله داده شده، زمان حرکت را در هر مرحله به دست بیاورید.



با توجه به شکل متحرک کمان (۱) را با سرعت $۵\sqrt{۲}m/s$ و کمان (۲) را با سرعت متوسط $۴m/s$ طی کرده است. حال زمان کل حرکت را به‌دست می‌آوریم.

۱ جابه‌جایی در قسمت اول:

$$d_۱=\sqrt{R^۲+R^۲}=R\sqrt{۲}$$

۲ زمان در قسمت اول:

$$v_{av}=\frac{d_۱}{\Delta t_۱}\Rightarrow\Delta t_۱=\frac{d_۱}{v_{av}}=\frac{R\sqrt{۲}}{۵\sqrt{۲}}=\frac{R}{۵}s$$

۳ جابه‌جایی در قسمت دوم:

$$d_۲=R+R=۲R$$

۴ زمان در قسمت دوم:

$$v_{av}=\frac{d_۲}{\Delta t_۲}\Rightarrow\Delta t_۲=\frac{d_۲}{v_{av}}=\frac{۲R}{۴}=\frac{R}{۲}s$$

۵ کل زمان طی شده برابر است با:

$$\Delta t_{کل}=\frac{R}{۵}+\frac{R}{۲}=\frac{۷}{۱۰}R$$

۶ جابه‌جایی از ابتدا تا انتهای مسیر برابر بردار AC است که اندازهٔ آن خواهد شد:

$$d=\sqrt{R^۲+R^۲}=R\sqrt{۲}$$

۷ سرعت متوسط را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t_{کل}}=\frac{R\sqrt{۲}}{\frac{۷}{۱۰}R}=\frac{۱۰\sqrt{۲}}{۷}m/s$$

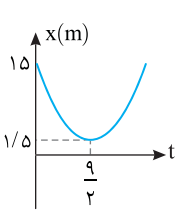
بازی با سؤال معادلهٔ مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند. در SI به صورت $x=\frac{۲}{۳}t^۲-۶t+۱۵$ است. بعد از لحظهٔ $t=۰$، کمترین فاصلهٔ متحرک تا مبدأ محور چند متر است؟

ریاضی (نوبت دوم) - ۱۴۰۳

۱) ۱/۵ ۲) ۳ ۳) ۴/۵ ۴) ۶

پاسخ معادلهٔ $x=\frac{۲}{۳}t^۲-۶t+۱۵$ ریشه ندارد، زیرا دلتای آن منفی است.

$$\Delta=۳۶-۴۰=-۴<۰$$



با توجه به اینکه ضریب $t^۲$ معادله $x-t$ مثبت است، پس دهانه نمودار رو به بالا و شکل آن به صورت U است، بنابراین کمترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ همان نقطهٔ رأس سهمی است.

$$t_{رأس}=-\frac{b}{۲a}\Rightarrow t_{رأس}=-\frac{-۶}{۲\times\frac{۲}{۳}}\Rightarrow t_{رأس}=\frac{۹}{۲}s$$

مکان رأس خواهد شد:

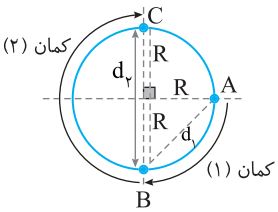
$$x=\frac{۲}{۳}\left(\frac{۹}{۲}\right)^۲-۶\left(\frac{۹}{۲}\right)+۱۵\Rightarrow x=\frac{۲}{۳}\times\frac{۸۱}{۴}-۲۷+۱۵$$

$$x=۱۳/۵-۱۲\Rightarrow x_{min}=۱/۵m$$

گزینهٔ ۱

C ۱۲۵ ۳

خط فکری به کمک محاسبهٔ جابه‌جایی d_1 و d_2 و با داشتن سرعت متوسط در این جابه‌جایی‌ها یعنی $5\sqrt{2}\,m/s$ و $4\,m/s$ زمان را در هر قسمت حساب کنید تا بتوانید زمان کل حرکت از A تا C را به‌دست بیاورید. سپس مسافت طی شده که مطابق شکل $\frac{3}{4}$ محیط دایره را حساب کرده و تندی متوسط را به‌دست بیاورید.



۱ جابه‌جایی در مرحلهٔ اول از A تا B با سرعت متوسط $5\sqrt{2}\,m/s$:

$$d_1=\sqrt{R^2+R^2}=R\sqrt{2}$$

۲ زمان جابه‌جایی در مرحلهٔ اول از A تا B:

$$v_{av}=\frac{d_1}{\Delta t_1}\Rightarrow \Delta t_1=\frac{d_1}{v_{av}}=\frac{R\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}=\frac{R}{5}\,s$$

۳ جابه‌جایی در مرحلهٔ دوم از B تا C با سرعت متوسط $4\,m/s$ وقتی است که ذره کمان π را ساعتگرد طی کرده و این جابه‌جایی برابر است با: $d_2=R+R=2R$

۴ زمان جابه‌جایی در مرحلهٔ دوم:

$$v_{av}=\frac{d_2}{\Delta t_2}\Rightarrow \Delta t_2=\frac{d_2}{v_{av}}=\frac{2R}{4}=\frac{R}{2}\,s$$

۵ زمان کل حرکت از A تا C خواهد شد.

$$\Delta t_{کل}=\frac{R}{5}+\frac{R}{2}=\frac{7}{10}R$$

۶ مسافت طی شده $\frac{3}{4}$ محیط دایره است.

$$\ell=\frac{3}{4}(2\pi R)=\frac{9}{2}R$$

۷ تندی متوسط را به‌دست می‌آوریم:

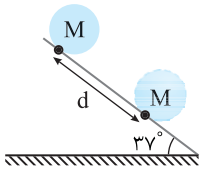
$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t_{کل}}=\frac{\frac{9}{2}R}{\frac{7}{10}R}=\frac{45}{7}\,m/s$$

A ۱۲۶ ۴

خط فکری صورت مسئله شما را نترساند. وقتی استوانه یک دور کامل می‌چرخد روی سطح به اندازهٔ محیط دایرهٔ سطح مقطع استوانه جلو می‌رود یعنی نقطهٔ M محل تماس استوانه با سطح پس از یک دور کامل به اندازهٔ $d=2\pi r$ جلو می‌رود. بنابراین شما کافی است محیط دایرهٔ سطح مقطع استوانه را به‌دست بیاورید.

جابه‌جایی نقطه M خواهد شد:

$$d=2\pi r \xrightarrow{\pi=3,\ r=5cm} d=2\times3\times5=30\,cm$$



C ۱۲۷ ۲

خط فکری متوجه این نکته می‌شوید که وقتی مسئله می‌گوید پس از هر برخورد ۸۰٪ ارتفاع قبلی بالا می‌آید، یعنی در ابتدا که ارتفاع آن ۱۰۰ متر است پس از برخورد اول $\frac{80}{100}\times100=80\,m$ و پس از برخورد دوم $\frac{80}{100}\times80=64\,m$ و پس از برخورد سوم $\frac{80}{100}\times64=51/2\,m$ و ... بالا می‌آید؟ بنابراین شما باید به کمک سرعت متوسط ابتدا مشخص کنید که در لحظهٔ $t=4s$ گلوله در چه مکانی قرار دارد، سپس مسافت طی شده را در کل زمان ۰ تا ۴s به‌دست بیاورید تا بتوانید تندی متوسط را حساب کنید.

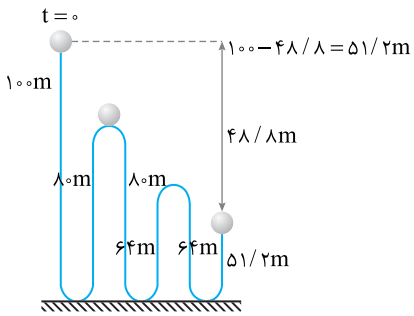
۱ جابه‌جایی گلوله در بازهٔ صفر تا $6/1s$ را حساب می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{d}{t}\Rightarrow d=v_{av}t\Rightarrow d=8\times6/1\Rightarrow d=48/8\,m$$

۲ فاصلهٔ گلوله در $t=6/1s$ از سطح زمین را به‌دست می‌آوریم.

$$100-48/8=51/2\,m$$

۳ مسیر حرکت را رسم کرده و مسافت را حساب می‌کنیم. البته حرکت روی خط راست است. گلوله روی خط راست بالا و پایین می‌شود و ما برای محاسبهٔ مسافت مسیر را این‌گونه رسم کرده‌ایم.



$$\ell=100+80+80+64+64+51/2=439/2\,m$$

۴ تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{t}=\frac{439/2}{6/1}=72$$

C ۱۲۸ ۴

خط فکری با یک مسئله ریاضی سر و کار داریم. متحرک در هر مرحله خسته شده و مسیر کمتری را با سرعت کوچک‌تری طی کرده است. اگر کل مسیر حرکت x باشد، در مرحلهٔ اول $\frac{x}{2}$ و در مرحلهٔ دوم $\frac{x}{4}$ و مرحلهٔ سوم $\frac{x}{8}$ و ... را طی می‌کند. باید زمان را در هر مرحله به‌دست بیاورید. سپس سرعت متوسط را در کل مسیر x حساب کنید. زمان در هر مرحله خواهد شد:

$$v_{av_1}=\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}\Rightarrow v=\frac{\frac{x}{2}}{\Delta t_1}\Rightarrow \Delta t_1=\frac{x}{2v}$$

$$v_{av_2}=\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}\Rightarrow \frac{v}{2}=\frac{\frac{x}{4}}{\Delta t_2}\Rightarrow \Delta t_2=\frac{x}{2v}$$

$$v_{av_3}=\frac{\Delta x_3}{\Delta t_3}\Rightarrow \frac{v}{4}=\frac{\frac{x}{8}}{\Delta t_3}\Rightarrow \Delta t_3=\frac{x}{2v}$$

$$\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots$$

سرعت متوسط در کل مسیر را حساب می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{x}{t_{کل}}=\frac{x}{\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3+\cdots}$$

$$v_{av}=\frac{x}{\frac{x}{2v}+\frac{x}{2v}+\frac{x}{2v}+\cdots}$$

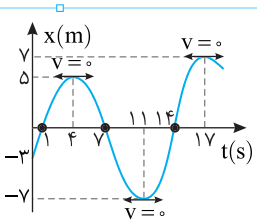
$$v_{av}=\frac{x}{\frac{x}{2v}\underbrace{(1+1+1+\cdots)}_{\text{بی‌نهایت بار}}}=\frac{2v}{\infty}$$

جمع تعداد بی‌نهایت عدد یک در مخرج برابر بی‌نهایت است و تقسیم یک عدد معین بر بی‌نهایت برابر صفر است، بنابراین:

$$v_{av}=\frac{2v}{\infty}=0$$

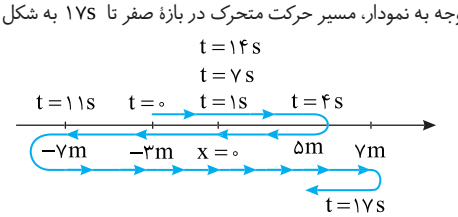
A ۱۲۹ ۲

۱ در نقاط کمینه و بیشینه نمودار مکان - زمان تندی صفر می‌شود. بنابراین در لحظهٔ $t=4s$ و $t=11s$ و $t=17s$ تندی متحرک صفر شده و سوی حرکت آن تغییر کرده است. بنابراین گزاره (الف) درست است.



۲ هرگاه متحرک از مبدأ مکان بگذرد، جهت بردار مکان در آن لحظه تغییر می‌کند. در $t=1s$، $t=7s$ و $t=14s$ متحرک از مبدأ گذر کرده است بنابراین سه بار بردار مکان تغییر جهت داده است و گزارهٔ (ب) نادرست است.

۳ با توجه به نمودار، مسیر حرکت متحرک در بازهٔ صفر تا ۱۷s به شکل زیر است.



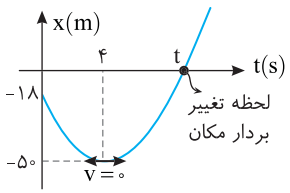
مطابق شکل مسیر، از $t=0$ تا $t=4s$ متحرک در جهت مثبت محور از مکان $-3m$ به مکان $+5m$ می‌رود سپس در بازهٔ $t=4s$ تا $t=11s$ از مکان $+5m$ تا مکان $-7m$ در جهت منفی محور در حرکت است و سرانجام در بازهٔ $t=11s$ تا $t=17s$ یعنی به مدت $6s$ در جهت مثبت محور از مکان $-7m$ به مکان $+7m$ می‌رود یعنی ابتدا به مبدأ نزدیک و سپس از آن دور می‌شود.

در این صورت جمعاً $10s$ در جهت مثبت محور در حرکت بوده است و گزارهٔ (پ) درست است.

۴ اما متحرک در بازهٔ $t=11s$ تا $t=14s$ در حال نزدیک شدن به مبدأ است و گزارهٔ (ت) نادرست است.

C ۱۳۰ ۱

خط فکری چاره‌ای نیست باید معادلهٔ حرکت را به کمک نقاط مشخص شده روی نمودار به‌دست آورده سپس به کمک آن لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان (t) را به‌دست آورد.



۱ شکل نمودار به صورت سهمی است یعنی $x=at^2+bt+c$. مختصات هر نقطه از نمودار باید در معادله صدق کند از این رو:

$$t=0, x=-18m \Rightarrow x=a(0)^2+b(0)+c \Rightarrow -18=c$$

$$t=4, x=-50m \Rightarrow x=a(4)^2+b(4)-18 \Rightarrow -50=16a+4b-18$$

$$\Rightarrow -32=16a+4b \quad (1)$$

۲ نقطهٔ $t=4s$ رأس سهمی می‌باشد و می‌دانیم رأس سهمی است. $t=-\frac{b}{2a}$

پس: $t=-\frac{b}{2a} \Rightarrow 4=-\frac{b}{2a} \Rightarrow b=-8a \quad (2)$

۳ به کمک رابطهٔ (۱) و (۲) مقدار a و b را حساب می‌کنیم.

$$(1), (2) \Rightarrow 16a+4(-8a)=-32 \Rightarrow -16a=-32 \Rightarrow a=2 , b=-16$$

۴ پس معادله حرکت به صورت $x=2t^2-16t-18$ است. زمانی بردار مکان تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ عبور می‌کند:

$$2t^2-16t-18=0 \Rightarrow t^2-8t-9=0 \Rightarrow (t-9)(t+1)=0$$

$$\Rightarrow t=9s , t=-1s \text{ (غ.ق.ق)}$$

بنابراین در $t=9s$ بردار مکان تغییر جهت می‌دهد. زمانی متحرک تغییر جهت می‌دهد که سرعت متحرک صفر شود و علامت سرعت قبل و بعد از آن تغییر کند که همان رأس سهمی می‌باشد. $\Delta t=t_2-t_1=9-4=5s$

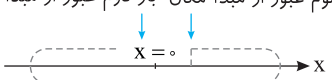
B ۱۳۱ ۳

مسیرهای ممکنی که ذره طی می‌کند را بررسی می‌کنیم.

متحرک در مکان‌های مثبت قرار دارد و دو حالت ممکن است پیش بیاید.

۱ متحرک در جهت مثبت شروع به حرکت کند، در این صورت برای آنکه از مبدأ مکان بگذرد باید متوقف شده و برگردد و پس از عبور از مبدأ باید مجدداً متوقف شده و برگردد و برای دومین بار از مبدأ بگذرد، بنابراین حداقل دو بار از مبدأ حرکت می‌گذرد. اما چند بار تغییر جهت می‌دهد. ذره می‌تواند بیشمار بار تغییر جهت داده سپس از مبدأ مکان بگذرد.

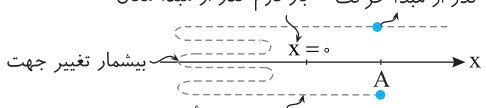
بار سوم عبور از مبدأ مکان بار دوم عبور از مبدأ مکان



بار اول عبور از مبدأ مکان

۲ متحرک در جهت منفی محور شروع به حرکت کند در این صورت مطابق شکل می‌تواند بیشمار بار تغییر جهت دهد و دو بار از مبدأ مکان بگذرد اما هنوز از مبدأ حرکت خود عبور نکرده باشد.

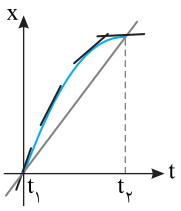
یکبار گذر از مبدأ حرکت بار دوم گذر از مبدأ مکان



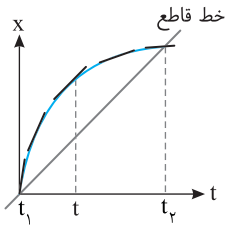
بار اول گذر از مبدأ مکان

C ۱۳۲ ۴

خط فکری شیب خط قاطع نمودار بین دو لحظه t_1 و t_2 برابر سرعت متوسط و شیب خط مماس بر نمودار در هر لحظه برابر اندازهٔ سرعت لحظه‌ای (تندی لحظه‌ای) در آن لحظه است. بنابراین شما باید خط قاطع بین t_1 و t_2 و چند خط مماس بر نمودار از لحظهٔ t_1 تا t_2 رسم کرده شیب خطوط مماس را با شیب خط قاطع مقایسه کنید تا متوجه شوید کدام بزرگ‌تر است و گزینه را انتخاب کنید.



به شکل خوب نگاه کنید. در ابتدا شیب خطوط مماس از شیب خط قاطع بیشتر است یعنی سرعت لحظه‌ای از سرعت متوسط بزرگ‌تر است. بعد از لحظهٔ t خط مماس به سمت افقی شدن می‌رود و شیب آن از شیب خط قاطع کمتر می‌شود یعنی سرعت لحظه‌ای از سرعت متوسط کوچک‌تر می‌شود.



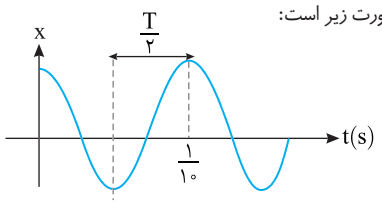
B ۱۳۳ ۱

خط فکری در حل این مسئله چاره‌ای نیست و باید شما رسم توابع مثلثاتی را که از ریاضی فراگرفته‌اید به‌کار ببرید و نقاط بیشینه و کمینهٔ نمودار را مشخص کنید. زیرا در این نقاط سرعت متحرک صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد و تعیین بازه‌های زمانی بین یک کمینه و بیشینهٔ متوالی یعنی حل مسئله.

یادداشت ریاضی در توابع سینوسی و کسینوسی به‌صورت $y=\sin ax$ و $y=\cos ax$ دورهٔ تناوب تابع برابر $T=\frac{2\pi}{|a|}$ است.

دورهٔ تناوب تابع $x=0/4\cos 20\pi t$ خواهد شد: $T=\frac{2\pi}{20\pi}=\frac{1}{10}s$

نمودار تابع به‌صورت زیر است:



بنابراین بازهٔ زمانی بین دو تغییر جهت متوالی خواهد شد: $\frac{T}{2}=\frac{\frac{1}{10}}{2}=\frac{1}{20}s \Rightarrow T=0/05s$

A ۱۳۴ ۳

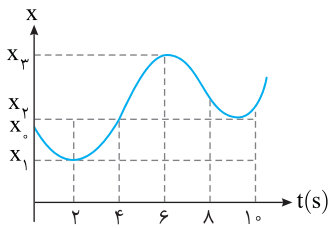
خط فکری تندی متوسط یعنی مقدار مسافت طی شده تقسیم بر مدت زمان طی کردن آن مسافت، بنابراین شما باید در هر بازه زمانی مسافت طی شده را بررسی کرده تا بتوانید تندی متوسط را در بازه‌های مختلف مقایسه کنید.

با توجه به نمودار مسافت طی شده در بازهٔ ۲s تا ۴s از مسافت طی شده در بازه صفر تا ۲s بیشتر است و هم‌چنین در بازهٔ ۴s تا ۶s مسافت طی شده از بازهٔ صفر تا ۲s بیشتر است. یعنی در هر دو ثانیه (از ۲ تا ۶) مسافت طی شده بزرگ‌تر از بازهٔ صفر تا ۲s است بنابراین تندی متوسط در بازهٔ ۲s تا ۶s از ۰ تا ۲s بیشتر می‌شود.

در مدت ۴s بین ۲s تا ۶s مسافت طی شده از مدت ۴s بین ۶s تا ۱۰s بیشتر است و تندی در بازهٔ ۲s تا ۶s از تندی در ۶s تا ۱۰s بیشتر است. اگر بازه بین ۲s تا ۱۰s را به دو قسمت ۴s تقسیم کنیم در ۴s اول تندی از ۴s دوم بیشتر است بنابراین تندی متوسط در بازه ۲s تا ۱۰s قطعاً از ۶s تا ۱۰s بیشتر است.

اما داستان اصلی در مورد بازهٔ صفر تا ۶s و مقایسهٔ آن با ۲s تا ۱۰s است.

بازهٔ ۲s تا ۶s در هر دو مشترک است. اگر بازهٔ ۶s تا ۱۰s را به دو بازهٔ دو ثانیه‌ای ۶ تا ۸ و ۸ تا ۱۰ تقسیم کنیم در هر دو بازه مسافت طی شده با توجه به نمودار از مسافت طی شده در بازه ۰ تا ۲s بیشتر بوده بنابراین در بازه ۶s تا ۸s و ۸s تا ۱۰s تندی از بازهٔ ۰ تا ۲s بیشتر است در نتیجه به‌طور کلی تندی متوسط در بازه ۲s تا ۱۰s از تندی متوسط در بازهٔ صفر تا ۶s بیشتر است.



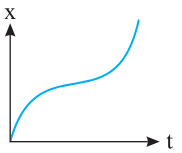
B ۱۳۵ ۴

از نمودار مسافت - زمان چیز زیادی به‌دست نمی‌آوریم

۱ مسافت همواره مثبت است بنابراین متحرک می‌تواند از مکان‌های منفی یا مثبت و یا از مبدأ مکان شروع به حرکت کرده باشد.

۲ متحرک ممکن است متوقف شده و در همان جهت ادامهٔ حرکت داده و یا متوقف شده و تغییر جهت دهد.

۳ متحرک ممکن است در جهت مثبت محور و در مکان‌های مثبت و در مکان‌های منفی دارای جابه‌جایی‌ها مثبت یا منفی باشد.



بنابراین هر سه گزینه می‌تواند پاسخ مسئله باشد.

پنجره ۲

A ۱۳۶ ۴

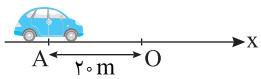
یادآوری حرکت یکنواخت روی خط راست یعنی حرکت با سرعت ثابت که در آن تندی لحظه‌ای ثابت و جهت حرکت تغییر نمی‌کند.

۱ در حرکت یکنواخت تندی ثابت است و جهت حرکت تغییر نمی‌کند و مسافت طی شده برابر اندازهٔ جابه‌جایی است بنابراین در هر بازهٔ دلخواهی مثلاً ۱s تا ۵s یا ۰s تا ۸s اندازهٔ سرعت متوسط با تندی متوسط برابر و همچنین با اندازه سرعت لحظه‌ای و تندی لحظه‌ای برابر است. $(v_{av}=s_{av}=s)$

۲ جهت حرکت ثابت است اما ممکن است در مسیر حرکت متحرک از مبدأ مکان بگذرد و بردار مکان تغییر جهت دهد بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

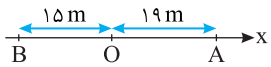
A ۱۳۷ ۳

یادآوری معادلهٔ حرکت یکنواخت روی خط راست به صورت $x=vt+x_0$ است که در آن v سرعت لحظه‌ای متحرک و x_0 مکان اولیهٔ متحرک یعنی مکان متحرک در مبدأ زمان $(t=0)$ است.



در مبدأ زمان متحرک در نقطهٔ A بوده یعنی مکان اولیهٔ آن $x_0=-20m$ است. سرعت متحرک در جهت مثبت محور xهاست بنابراین سرعت آن $v=8m/s$ بوده و معادلهٔ مکان - زمان این متحرک در SI خواهد شد: $x=8t-20$

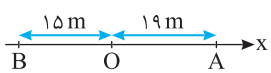
بازی با سؤال **متحرکی با سرعت ثابت مطابق شکل از نقطهٔ A روی محور xها به حرکت درمی‌آید و پس از ۱۷s به نقطهٔ B می‌رسد. معادلهٔ حرکت کدام است؟ (O مبدأ است.)**



از کتاب درسی

۱) $x=-2t+19$ ۲) $x=3t-19$ ۳) $x=2t+19$ ۴) $x=5t-15$

پاسخ **خط فکری** **در حرکت یکنواخت روی خط راست سرعت در تمام لحظات ثابت است و مقدار آن را از هر بازهٔ زمانی می‌توان حساب کرد بنابراین شما در بازهٔ زمانی حرکت از A تا B می‌توانید سرعت متحرک را حساب کنید.**



۱ مکان اولیه متحرک نقطهٔ A یعنی $x_0=+19m$ است.

۲ سرعت متحرک خواهد شد:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t=17s}v=\frac{-15-19}{17-0}\Rightarrow v=-2m/s$$

۳ معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم: $x=-2t+19$ گزینهٔ ۱

A ۱۳۸ ۲

در حرکت با سرعت ثابت، سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای با هم برابراند:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v=\frac{26-8}{10-4}=\frac{18}{6}=3m/s$$

معادلهٔ مکان - زمان حرکت با سرعت ثابت $x=vt+x_0$ است. در این تابع نقطهٔ $t_1=4s$ و $x_1=8m$ را قرار می‌دهیم تا x_0 که مکان اولیه بوده به‌دست آید:

$$x=vt+x_0\xrightarrow{v=3m/s}x=3t+x_0\Rightarrow 8=12+x_0\Rightarrow x_0=-4m$$

بنابراین معادلهٔ حرکت به صورت روبه‌رو است: $x=3t-4$

A ۱۳۹ ۴

خط فکری مسئلهٔ ساده‌ای است، کافی است داده‌های مسئله را در معادلهٔ حرکت قرار داده سپس با حل یک دستگاه دو معادلهٔ دو مجهول x_0 و v را حساب کرده، معادلهٔ حرکت را نوشته و در آخر با قرار دادن $x=-30m$ در معادله، لحظهٔ گذر متحرک از مکان $x=-30m$ را به‌دست بیاوریم.

معادلهٔ حرکت را به دست می‌آوریم:

$$x=vt+x_0\Rightarrow\begin{cases}t_1=2s\Rightarrow -6=2v+x_0\\ t_2=8s\Rightarrow 54=8v+x_0\end{cases}$$

$$\Rightarrow 60=6v\Rightarrow v=10m/s\ ,\ x_0=-26m\ ,\ x=10t-26$$

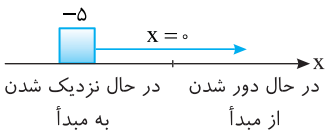
اکنون $x=-30m$ را در رابطه قرار می‌دهیم.

$$-30=10t-26\Rightarrow -4=10t\Rightarrow t=-0/4s$$

مفهوم زمان منفی این است که متحرک هرگز از مکان $-30m$ نمی‌گذرد.

A ۱۴۰ ۳

۱ به معادلهٔ حرکت نگاه کنید $(x=2t-5)$، مکان اولیهٔ متحرک $x_0=-5m$ و سرعت متحرک مثبت است و مطابق شکل مسیر، متحرک ابتدا به مبدأ نزدیک و سپس از آن دور می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۱) و (۲) نادرست است.



۲ سرعت متحرک ثابت بوده و برابر $2m/s$ است یعنی در هر ثانیه متحرک $2m$ جابه‌جا می‌شود و گزینهٔ (۳) درست است.

۳ در لحظهٔ $t=1s$، مکان متحرک برابر $(x=2\times1-5=-3m)$ بوده و گزینهٔ (۴) نادرست است.

بازی با سؤال **معادلهٔ حرکت متحرکی $x=2t+5$ است. کدام گزینه در مورد حرکت این متحرک درست است؟**

۱) سرعت متحرک در لحظهٔ $t=1s$ برابر $2m/s$ می‌باشد.

۲) سرعت متوسط و تندی متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه باهم برابر می‌باشد.

۳) بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

۴) هر سه گزینه درست است.

پاسخ **۱** **معادلهٔ حرکت درجه اول است یعنی معادله حرکت مربوط به حرکت با سرعت ثابت می‌باشد و مقدار سرعت با توجه به معادلهٔ حرکت خواهد شد:** $x=2t+5, x=vt+v_0\Rightarrow v=2m/s$

بنابراین سرعت در هر لحظه برابر $2m/s$ است و گزینهٔ (۱) درست است.

۲ سرعت ثابت و حرکت روی خط راست است بنابراین تندی متوسط و سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه باهم برابر می‌باشد و گزینهٔ (۲) درست است.

۳ بردار مکان هنگامی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند $(x=0)$ $x=2t+5\xrightarrow{x=0}0=2t+5\Rightarrow t=-2/5$ غ‌ق‌ق

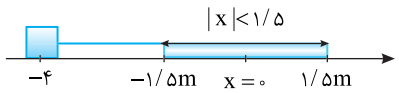
پس بردار مکان تغییر علامت نمی‌دهد. در نتیجه هر سه گزینه درست است.

گزینهٔ ۴

A ۱۴۱ ۲

متحرک با سرعت ثابت $2m/s$ در جهت مثبت محور در حرکت و از مکان $-4m$ می‌گذرد یعنی متحرک ابتدا در مکان‌های منفی بوده و در حال نزدیک شدن به مبدأ است. سؤال شده که چند ثانیه فاصلهٔ متحرک از مبدأ کمتر از $1/5m$ است بنابراین شما باید بازهٔ زمانی حرکت از مکان $-1/5m$ تا $+1/5m$ را حساب کنید.

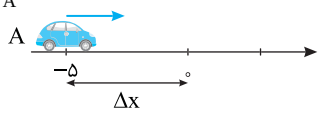
$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow 2=\frac{1/5-(-1/5)}{\Delta t}\Rightarrow \Delta t=1/5s$$



B ۱۴۲ ۲

۱ متحرک A از مکان $x=-5m$ در حال نزدیک شدن به مبدأ بوده و در جهت مثبت در حال حرکت می‌باشد و در مدت $3s$ به مبدأ می‌رسد بنابراین سرعت حرکت آن خواهد شد:

$$v_A=v_{av_A}=\frac{\Delta x_A}{\Delta t_A}\Rightarrow v_A=\frac{5}{3}m/s$$

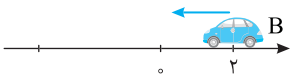


۲ متحرک B از مکان مثبت و در جهت منفی در حال نزدیک شدن به مبدأ می‌باشد و در مدت $4s$ از مکان $x=+2m$ به مبدأ می‌رسد و سرعت آن خواهد شد:

$$v_B=v_{av_B}=\frac{\Delta x_B}{\Delta t_B}\Rightarrow v_B=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}m/s$$

۳ نسبت v_A/v_B برابر است با:

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{-1}{2}}=-\frac{10}{3}$$



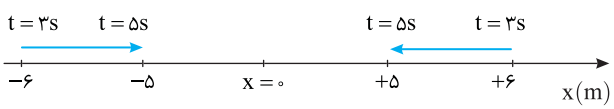
B ۱۴۳ ۴

خط فکری دقت کنید در لحظهٔ $t_1=3s$ و $t_2=5s$ مکان متحرک داده نشده بلکه فاصلهٔ متحرک از مبدأ به ترتیب ۶ متر و ۵ متر است یعنی متحرک ممکن است از مکان $+6m$ به مکان $+5m$ برود و یا از مکان $+6m$ به مکان $-5m$ برود البته متحرک می‌تواند از مکان $-6m$ به مکان $-5m$ و یا حتی به مکان $+5m$ برود. بنابراین همهٔ حالت‌ها باید بررسی شود.

لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان یعنی لحظهٔ گذر از مبدأ مختصات.

۱ اگر دو نقطه در یک طرف مبدأ مختصات باشند (از $+6m$ به $+5m$ و از $-6m$ به $-5m$) آن‌گاه سرعت ذره برابر خواهد شد با:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{|5-6|}{5-3}=0/5m/s$$



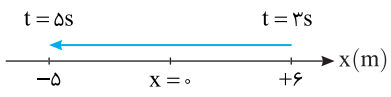
۲ لحظهٔ تغییر جهت یعنی لحظهٔ گذر از $x=0$، بنابراین باید زمان حرکت از مکان $+6m$ (یا $-6m$) با مبدأ با سرعت $0/5m/s$ را حساب کنیم:

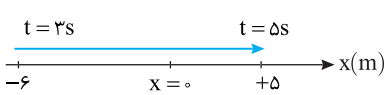
$$\Delta t=\frac{6}{0/5}\Rightarrow \Delta t=12s$$

۳ و لحظه گذر از مبدأ برابر $t=12+3=15s$ است.

۴ این بار سرعت متحرک از مکان $+6m$ تا $-5m$ (و یا $-6m$ تا $+5m$) را حساب می‌کنیم.

$$v=\frac{|\Delta x|}{\Delta t}=\frac{|6-(-5)|}{5-3}\Rightarrow v=5/5m/s$$





۵ زمان رسیدن از مکان $+6m$ (و یا $-6m$) تا مبدأ با سرعت $5/5m/s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow 5/5=\frac{6}{\Delta t}\Rightarrow \Delta t=\frac{12}{11}s$$

۶ لحظهٔ رسیدن به مبدأ خواهد شد:

$$t_2-t_1=\frac{12}{11}\Rightarrow t_2-3=\frac{12}{11}\Rightarrow t_2=\frac{45}{11}s$$

بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

A ۱۴۴ ۳

نکته مدت زمان ثانیهٔ n اُم برابر $1s$ است و بازهٔ آن از لحظهٔ $n-1$ تا لحظهٔ n است.

مدت زمان ثانیهٔ پنجم و مدت زمان ثانیهٔ سوم هر دو یک ثانیه است. حرکت با سرعت ثابت است، پس در هر ثانیه جابه‌جایی متحرک مقدار ثابتی است، از این‌رو جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم و ثانیهٔ پنجم یکسان است و نسبت جابه‌جایی‌ها برابر یک است.

A ۱۴۵ ۴

نکته در حرکت با سرعت ثابت روی خط راست در بازه‌های زمانی یکسان، جابه‌جایی متحرک برابر است. مدت زمان دو ثانیهٔ سوم برابر $2s$ است و جابه‌جایی در این $2s$ با جابه‌جایی در هر دو ثانیهٔ دیگر برابر است. در صورت سؤال گفته شده جابه‌جایی در این مدت نصف جابه‌جایی در مدت n ثانیه است (کلمهٔ پنجم در این مسئله نقشی ندارد) چون سرعت ثابت است بنابراین باید $n=4$ ثانیه باشد تا جابه‌جایی در مدت $2s$ نصف جابه‌جایی در مدت $(n=4)$ باشد.

A ۱۴۶ ۲

۱ حرکت با سرعت ثابت می‌باشد، بنابراین سرعت متوسط در هر بازه برابر سرعت جسم می‌باشد، در مدت $t=3s$ تا $t=19s$ متحرک از $x=25m$ به $x=49m$ منتقل شده است و می‌توان سرعت حرکت را در تمام مسیر به دست آورد.

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{49-25}{19-3}=\frac{24}{16}\Rightarrow v=1/5m/s$$

۲ حال در بازهٔ $t_1=3s$ تا t_1 نیز سرعت همان $2m/s$ است و مقدار t_1 قابل محاسبه است:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow 1/5=\frac{34-25}{t_1-3}\Rightarrow 9=1/5t_1-4/5\Rightarrow t_1=9s$$

۳ در بازهٔ $t=3s$ تا $t=17s$ متحرک از مکان $x=25m$ به $x_1=?m$ رسیده بنابراین مجدداً به کمک رابطهٔ سرعت، مقدار x_1 را حساب می‌کنیم:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow 1/5=\frac{x_1-25}{17-3}\Rightarrow x_1=46m$$

B ۱۴۷ ۱

خط فکری مسئلهٔ قشنگی است، در بازهٔ $7s$ به بعد سرعت v_2 است یعنی از لحظهٔ $t=8s$ و $t=14s$ سرعت متحرک v_2 است و می‌توانید v_2 را حساب کنید. در بازهٔ $t=7s$ تا $t=8s$ متحرک همین سرعت را دارد و می‌توانید جابه‌جایی متحرک در این $1s$ را حساب کنید تا مشخص شود که متحرک در بازهٔ $2s$ تا $7s$ با سرعت v_1 چند متر جابه‌جا شده و v_1 را به‌دست بیاورید.

t(s)	۲	۸	۱۴
x(m)	۳۰	۵۰	۸۶

۱ سرعت ثابت v_2 را حساب می‌کنیم:

$$v_2=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_2=\frac{86-50}{14-8}\Rightarrow v_2=\frac{36}{6}=6m/s$$

۲ در مدت $t=7s$ تا $t=8s$ متحرک با سرعت $6m/s$، به اندازهٔ $\Delta x=6\times 1=6m$ جابه‌جا می‌شود یعنی در لحظهٔ $t=7s$ متحرک در مکان $50-6=44m$ قرار دارد.

۳ سرعت v_1 در بازهٔ $2s$ تا $7s$ را حساب می‌کنیم. (یادتان باشد سرعت در تمام بازهٔ ۰ تا $7s$ ثابت است.)

$$v_1=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_1=\frac{44-30}{7-2}\Rightarrow v_1=\frac{14}{5}=2/8m/s$$

۴ نسبت v_1/v_2 خواهد شد:

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{2/8}{6}=\frac{28}{60}\Rightarrow \frac{v_1}{v_2}=\frac{7}{15}$$

A ۱۴۸ ۳

در حرکت با سرعت ثابت روی خط راست، مسافت همان اندازهٔ جابه‌جایی است. با توجه به فرض مسئله مسافت (جابه‌جایی) در دو حالت یکسان است بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta x = v\Delta t \xrightarrow{\Delta x_1 = \Delta x_2} v_\circ \times ۸ = (v_\circ + ۳)\times ۵$$

$$\Rightarrow ۸v_\circ = ۵v_\circ + ۱۵ \Rightarrow v_\circ = ۵\,m/s$$

بازی با سؤال متحرک A و متحرک B به‌ترتیب با سرعت‌های ثابت ۲۱ و $(v-۳۰)$ متر بر ثانیه جابه‌جایی‌های یکسانی را در مدت t_A و t_B طی می‌کنند، اگر $\frac{t_A}{t_B}=\frac{۳}{۷}$ باشد v چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۴۹ ۲) ۵۱ ۳) ۳۹ ۴) ۳۷

پاسخ جابه‌جایی دو متحرک یکسان است، بنابراین:

$$\Delta x_A = \Delta x_B \Rightarrow ۲۱t_A = (v-۳۰)t_B$$

با توجه به فرض مسأله $\frac{t_A}{t_B}=\frac{۳}{۷}$ از این‌رو:

$$۲۱\times(\frac{۳}{۷}t_B) = (v-۳۰)t_B \Rightarrow ۹ = v-۳۰ \Rightarrow v = ۳۹\,m/s$$

گزینهٔ ۳

A ۱۴۹ ۳

زمان حرکت با سرعت ۸۰km/h و ۱۲۰km/h در جابه‌جایی ۱۵۰km را حساب کرده و از هم کم می‌کنیم.

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} \Delta t_1 = \frac{۱۵۰}{۸۰}\times ۶۰ = ۱۱۲/۵\,min \\ \Delta t_2 = \frac{۱۵۰}{۱۲۰}\times ۶۰ = ۷۵\,min \end{cases} \Rightarrow ۱۱۲/۵ - ۷۵ = ۳۷/۵\,min$$

بازی با سؤال راننده‌ای که با سرعت ۱۰۸ km/h حرکت می‌کند، برای یک ثانیه چشم از جاده برمی‌دارد و در آینه نگاه می‌کند. در این یک ثانیه خودروی او چند متر جلوتر رفته است؟ کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۱۰۸ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰ ۴) ۲۰

پاسخ سرعت ۱۰۸km/h را برحسب یکای m/s می‌نویسیم:

$$v=\frac{۱۰۸\,km}{h}=۱۰۸\times\frac{۱۰۰۰\,m}{۳۶۰۰\,s} \Rightarrow v = ۳۰\,m/s$$

جابه‌جایی (مسافتی) که متحرک در ۱s طی می‌کند خواهد شد:

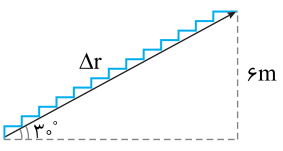
$$\Delta x = v\Delta t = ۳۰\times ۱ = ۳۰\,m$$

این تست ساده بیان می‌کند که هنگام رانندگی با سرعت ۱۰۸km/h، در هر ثانیه ۳۰ متر جلو می‌روید و اگر مانعی در ۳۰ متری مقابل شما باشد، با همان سرعت به آن برخورد می‌کنید.

گزینهٔ ۲

D ۱۵۰ ۲

۱ ارتفاع هر طبقه ۶ متر بوده یعنی فاصلهٔ بین دو طبقه ۶m مطابق شکل است. طول مسیر حرکت (جابه‌جایی) بین دو طبقه را به کمک مثلثات به‌دست می‌آوریم:



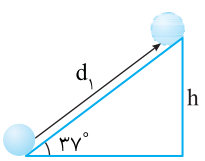
$$\sin ۳۰^\circ = \frac{۶}{\Delta r} \Rightarrow \Delta r = ۱۲\,m$$

۲ مدت زمان جابه‌جایی ۱۲ متر با سرعت ۰/۶m/s را حساب می‌کنیم:

$$\Delta r = v\Delta t \Rightarrow ۱۲ = ۰/۶\Delta t \Rightarrow \Delta t = ۲۰\,s$$

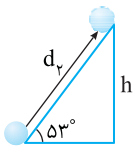
C ۱۵۱ ۳

۱ این سؤال بیشتر جنبهٔ ریاضی دارد. طول مسیر (جابه‌جایی) جسم روی دو سطح شیب‌دار را به کمک مثلثات به دست می‌آوریم.



$$\begin{cases} \sin ۳۷^\circ = \frac{h}{d_1} \Rightarrow d_1 = \frac{h}{\sin ۳۷^\circ} \\ \sin ۵۳^\circ = \frac{h}{d_2} \Rightarrow d_2 = \frac{h}{\sin ۵۳^\circ} \end{cases}$$

۲ نسبت $\frac{d_1}{d_2}$ را حساب می‌کنیم:



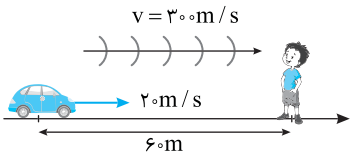
$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{\sin ۵۳^\circ}{\sin ۳۷^\circ}=\frac{۰/۸}{۰/۶}=\frac{۴}{۳}$$

۳ جابه‌جایی d_1 و d_2 را نوشته و دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\Delta x = vt \Rightarrow \begin{cases} d_1 = v_1 t_1 \\ d_2 = v_2 t_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{۵t}{v\frac{t}{۲}} \Rightarrow \frac{۴}{۳} = \frac{۱۰}{v} \Rightarrow v = ۷/۵\,m/s$$

B ۱۵۲ ۳

خط فکری سرعت صوت ۳۰۰m/s است، زمانی که طول می‌کشد تا صدای بوق به دانش‌آموز برسد را به‌دست بیاورید سپس مشخص کنید در این مدت خودرو با سرعت ۷۲km/h=۲۰m/s چند متر جلو رفته و در چه فاصله‌ای از دانش‌آموز قرار می‌گیرد.



۱ ابتدا زمان رسیدن صدای بوق به دانش‌آموز را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow ۶۰ = ۳۰۰\Delta t \Rightarrow \Delta t = ۰/۲\,s$$

۲ حال باید مشخص کرد در این مدت خودرو چند متر جلو آمده است.

$$v = ۷۲\,km/h = ۲۰\,m/s\ ,\ \Delta x = v\Delta t \Rightarrow \Delta x = ۲۰\times ۰/۲ = ۴\,m$$

۳ بنابراین خودرو در این لحظه در فاصلهٔ ۶۰−۴=۵۶m دانش‌آموز است.

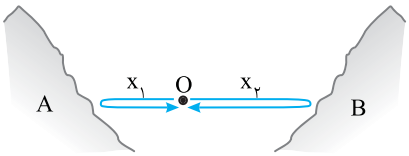
C ۱۵۳ ۲

یکی از نمونه‌های طبیعی حرکت یکنواخت روی خط راست با سرعت ثابت انتشار صوت در یک محیط در یک امتداد و روی خط راست است.

۱ دقت کنید صدا از منبع O به کوه نزدیک (نقطهٔ A) رفته و از روی آن باز می‌گردد. بنابراین مسافتی که صوت در این رفت و برگشت طی می‌کند $۲x_1$ است:

$$\ell_1 = vt \Rightarrow ۲x_1 = v_{صوت}t_1 \quad (۱)$$

۲ صوت از O تا B می‌رود و صدای پژواک دوم شنیده می‌شود و در این مسیر مسافت طی شده $۲x_2$ بوده و خواهیم داشت: $\ell_2 = vt \Rightarrow ۲x_2 = v_{صوت}t_2$ (۲)



۳ با توجه به فرض مسئله $t_2 - t_1 = ۳s$ و سرعت صوت ۳۴۰m/s است، بنابراین رابطهٔ (۱) و (۲) را از هم کم کرده و مسئله را حل می‌کنیم:

$$۲x_2 - ۲x_1 = v(t_2 - t_1) \Rightarrow ۲(x_2 - x_1) = ۳۴۰\times ۳ \Rightarrow x_2 - x_1 = ۱/۵\times ۳۴۰\,m$$

بنابراین اختلاف فاصلهٔ O از A تا B، برابر ۱/۵×۳۴۰m است.

B ۱۵۴ ۲

خط فکری هر گاه در یک مسئله دربارهٔ دو متحرک از شما سؤال شود که دو متحرک در چه لحظه‌ای و یا در چه مکانی از کنار هم می‌گذرد شما باید معادلهٔ مکان - زمان هر متحرک را بنویسید (خوشبختانه در این مسئله معادله‌ها را در اختیار دارید)، سپس مکان (x) دو متحرک را برابر قرار دهید.

۱ لحظهٔ عبور از کنار هم را حساب می‌کنیم:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow ۲t - ۴ = ۳t - ۱۲ \Rightarrow t = ۸s$$

۲ با قرار دادن زمان $t=۸s$ در هر یک از معادله‌ها می‌توانید مکانی که دو متحرک از کنار هم می‌گذرند را به‌دست بیاورید.

$$x = ۲t - ۴ \xrightarrow{t=۸s} x = ۲\times ۸ - ۴ \Rightarrow x = ۱۲\,m$$

بازی با سؤال معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک P و Q که هم‌زمان روی محور x ها با سرعت‌های ثابت شروع به حرکت کرده‌اند در SI به‌ترتیب به‌صورت $x_P=vt+۱۲$ و $x_Q=۴t-۲۴$ است. اگر هر دو در یک لحظه به مکان $x=+۸m$ برسند، v چند متر بر ثانیه است؟

۱) $-۰/۵$ ۲) $۰/۵$ ۳) $۲/۵$ ۴) $-۲/۵$

پاسخ با قرار دادن $x=+۸m$ در معادلهٔ حرکت Q، زمان رسیدن آن را به این مکان به‌دست می‌آوریم:

$$x_Q=۴t-۲۴\Rightarrow ۸=۴t-۲۴\Rightarrow t=\frac{۳۲}{۴}\Rightarrow t=۸s$$

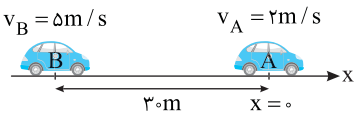
اکنون با قرار دادن $t=۸s$ و $x=۸m$ در معادلهٔ حرکت P، سرعت v را به‌دست می‌آوریم:

$$x_P=vt+۱۲\Rightarrow ۸=v(۸)+۱۲\Rightarrow v=-۰/۵m/s$$

گزینهٔ ۱

۱ ۱۵۵ B

راه‌حل اول: محل حرکت متحرک A را مبدأ در نظر می‌گیریم. معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته و با هم برابر قرار می‌دهیم:



مکان اولیه متحرک A $(x_{۰A}=۰)$ و مکان اولیه متحرک B $(x_{۰B}=-۳۰m)$ است.

معادله‌های حرکت A و B را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}x_A=۲t\\ x_B=۵t-۳۰\end{cases}\xrightarrow{x_A=x_B}۲t=۵t-۳۰\Rightarrow ۳t=۳۰\Rightarrow t=۱۰s$$

مکان رسیدن دو متحرک نسبت به محل آغاز حرکت A خواهد شد: $x=۲\times ۱۰=۲۰m$

راه‌حل دوم: روش نسبی: در حل این مسائل می‌توان این‌گونه فکر کرد که متحرک A با سرعت $۲m/s$ در هر ثانیه ۲ متر جلو می‌رود و متحرک B با سرعت $۵m/s$ در هر ثانیه $۵m$ حرکت می‌کند یعنی در هر ثانیه $۵-۲=۳m$ عقب ماندگی خود را جبران می‌کند بنابراین با یک تناسب ساده می‌توان نوشت:

۳m	۱s
۳۰	Δt

$$\Rightarrow \Delta t=۱۰s$$

میانبر اگر دو متحرک در یک جهت در حرکت باشند می‌توان فرض کرد یک متحرک (مثلاً A) در حال سکون است و متحرک B با سرعت (v_B-v_A) در حال نزدیک شدن به آن است و می‌نویسیم:

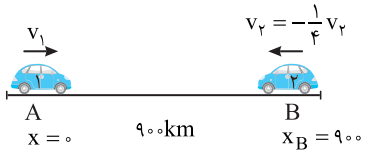
$$\Delta x=|v_B-v_A|\Delta t$$

۴ ۱۵۶ C

راه‌حل اول: روش کلی حل این نوع مسائل به این‌گونه است که معادلهٔ حرکت دو متحرک را نسبت به یک مبدأ اختیاری مثلاً نقطهٔ A می‌نویسیم و معادلهٔ حرکت را باهم برابر قرار می‌دهیم. جهت حرکت $v_۱$ را مثبت می‌گیریم.

$$x=vt+x_۰\begin{cases}x_۱=v_۱t\\ x_۲=-\frac{۱}{۴}v_۱t+۹۰۰\end{cases}\xrightarrow{x_۱=x_۲}v_۱t=-\frac{۱}{۴}v_۱t+۹۰۰$$

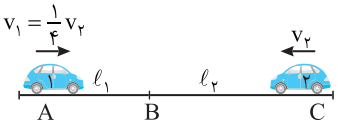
$$\Rightarrow \frac{۵}{۴}vt=۹۰۰\xrightarrow{t=۴s}v=۱۸۰km/h$$



راه‌حل دوم: در حرکت با سرعت ثابت روی خط راست، اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی شده یکسان است. باید مجموع مسافت‌هایی که هر متحرک طی می‌کند تا به هم برسند را به‌دست بیاورید و آن را با فاصلهٔ ابتدایی دو متحرک برابر قرار دهید.

$$\ell_۱=v_۱t\ ,\ \ell_۲=v_۲t\Rightarrow \ell_۱+\ell_۲=(v_۱+v_۲)t\xrightarrow{\ell_۱+\ell_۲=۹۰۰km,\ t=۴h}$$

$$۹۰۰=(v_۱+\frac{۱}{۴}v_۱)\times ۴\Rightarrow ۹۰۰=\frac{۵}{۴}v_۱\times ۴\Rightarrow v_۱=۱۸۰km/h$$



راه‌حل سوم: روش نسبی: می‌توان چنین استدلال کرد که متحرک (۱) با سرعت $v_۱$ در مدت ۱h به اندازهٔ $v_۱$ کیلومتر و متحرک (۲) با سرعت $v_۲$ در مدت ۱h به اندازهٔ $v_۲$ کیلومتر به هم نزدیک می‌شوند یعنی در مدت ۱h دو متحرک به اندازهٔ $v_۱+v_۲$ به هم نزدیک می‌شوند، بنابراین به کمک یک تناسب ساده می‌توان نوشت:

$v_۱+v_۲$	۱h
۹۰۰km	۴h

$$\Rightarrow v_۱+v_۲=\frac{۹۰۰}{۴}\Rightarrow v_۱+\frac{v_۱}{۴}=\frac{۹۰۰}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۵v_۱}{۴}=\frac{۹۰۰}{۴}\Rightarrow v_۱=۱۸۰km/h$$

میانبر هر گاه دو متحرک خلاف جهت هم حرکت می‌کنند می‌توان نوشت:

$$\Delta x=|v_۱+v_۲|t$$

۳ ۱۵۷ B

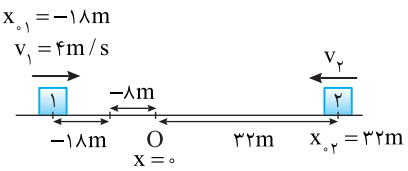
روش اول:

۱ معادلهٔ حرکت متحرک اول را می‌نویسیم:

$$\text{متحرک (۱)}: x=v_۱t+x_{۰۱}\Rightarrow x=۴t-۱۸$$

۲ اکنون زمانی که مکان متحرک $-۸m$ می‌شود را به‌دست می‌آوریم.

$$-۸=۴t-۱۸\Rightarrow ۴t=۱۰\Rightarrow t=۲/۵s$$



۳ اکنون معادلهٔ حرکت متحرک دوم را می‌نویسیم:

$$x_۲=v_۲t+x_{۰۲}\Rightarrow -۸=v_۲\times ۲/۵+۳۲\Rightarrow -۴۰=v_۲\times ۲/۵$$

$$\Rightarrow v_۲=\frac{-۴۰}{۲/۵}\Rightarrow v_۲=-۱۶m/s\Rightarrow |v_۲|=۱۶m/s$$

روش دوم:

با توجه به فرض مسأله متحرک (۱) با حرکت از نقطهٔ $-۱۸m$ در $-۸m$ به متحرک (۲) می‌رسد، از این‌رو زمان این حرکت برابر است با:

$$\Delta x=vt\Rightarrow ۱۰=۴t\Rightarrow t=۲/۵s$$

متحرک (۲) در این مدت برای رسیدن به نقطهٔ C به اندازهٔ $۳۲+۸=۴۰m$ جابه‌جا می‌شود. در این صورت:

$$|\Delta x|=|v|\Delta t\Rightarrow ۴۰=v_۲\times ۲/۵\Rightarrow v_۲=۱۶m/s$$

۲ ۱۵۸ B

اگر دو متحرک به سمت یکدیگر در حال حرکت باشند با توجه به صورت سؤال بعد از ۸۰s به هم می‌رسند، در این مدت متحرک A با سرعت ثابت $۲۰m/s$ به اندازهٔ $\Delta x=vt=۱۶۰۰m$ می‌پیماید که بیشتر از فاصله اولیه بین دو متحرک است. بنابراین این دو متحرک باید قبل از $t=۸۰s$ هم را دیده باشند، پس دو متحرک در حال نزدیک شدن به‌هم نیستند و در یک جهت در حال حرکت می‌باشند. معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

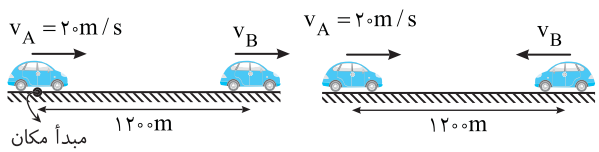
$$x_A=vt=۲۰t\xrightarrow{t=۸۰s}x_A=۱۶۰۰m$$

$$x_B=v_Bt+۱۲۰۰\xrightarrow{t=۸۰s}x_B=۸۰v_B+۱۲۰۰$$

در $t=۸۰s$ دو متحرک به هم می‌رسند:

$$x_A=x_B$$

$$۱۶۰۰=۸۰v_B+۱۲۰۰\Rightarrow ۴۰۰=۸۰v_B\Rightarrow v_B=۵m/s$$



B ۴ ۱۵۹

خط فکری می‌خواهیم یک مثال ساده و عددی را باهم بررسی کنیم. متحرک A از یک نقطه رأس ساعت ۳ بعدازظهر شروع به حرکت می‌کند و $1h$ بعد (یعنی در ساعت ۴ بعدازظهر) متحرک B از همان نقطه به راه می‌افتد. رأس ساعت ۸ شب متحرک B به متحرک A می‌رسد. در این صورت متحرک A $(8-3=5)$ ساعت و متحرک B، $(8-4=4h)$ در حرکت بوده‌اند یعنی زمان حرکت A بزرگ‌تر از زمان حرکت B $(t_A>t_B)$ بوده و اگر مدت زمان حرکت A را t_A بنامیم، مدت زمان حرکت B تا رسیدن به A (t_A-1) خواهد بود. البته بین خودمان بماند که بعضی افراد وقتی زمان حرکت A را t_A در نظر می‌گیرند زمان حرکت B را $(t_B=t_A+1)$ در نظر می‌گیرند که کاملاً غلط است. شما باید رابطه جابه‌جایی $\Delta x=vt$ را برای هر دو متحرک بنویسید و آن‌ها را باهم برابر قرارداده، مسئله را حل کنید.

وقتی دو خودرو به هم می‌رسند، جابه‌جایی آن‌ها یکسان است. متحرک دوم یک ساعت پس از متحرک اول شروع به حرکت کرده بنابراین اگر زمان حرکت متحرک اول را Δt_1 در نظر بگیریم زمان حرکت متحرک دوم $(\Delta t_2=\Delta t_1-1)$ خواهد شد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم: $\Delta x_1=\Delta x_2\Rightarrow v_1\Delta t_1=v_2\Delta t_2\Rightarrow 60\Delta t_1=80(\Delta t_1-1)$

$$\Rightarrow 60\Delta t_1=80\Delta t_1-80\Rightarrow \Delta t_1=4h$$

B ۱ ۱۶۰

۱ خودروی اول با سرعت $10m/s$ پس از ۲۰ ثانیه، ۲۰۰ متر به جلو می‌رود و فاصلهٔ دو خودرو از هم $270-200=70m$ می‌شود.

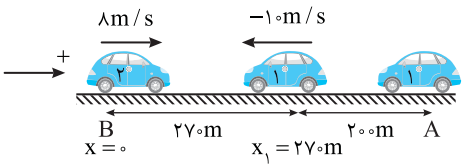
۲ معادلهٔ حرکت دو متحرک را از این لحظه به بعد نوشته و برای این منظور نقطهٔ B را مبدأ مکان فرض می‌کنیم:

معادلهٔ حرکت خودرو (۱): $x_1=-10t+270$

معادلهٔ حرکت خودرو (۲): $x_2=8t$

۳ دو معادله را باهم برابر قرار می‌دهیم و زمان رسیدن دو خودرو به هم را حساب می‌کنیم: $x_2=x_1\Rightarrow 8t=-10t+270\Rightarrow 18t=270\Rightarrow t=15s$

۴ بنابراین متحرک (۲)، ۱۵ ثانیه در حرکت بوده است تا به متحرک (۱) برسد و اندازهٔ جابه‌جایی آن در این مدت خواهد شد: $\Delta x=vt\Rightarrow \Delta x=8\times 15=120m$



B ۱ ۱۶۱

خط فکری دو متحرک از یک مبدأ به سوی یک مقصد می‌روند یعنی جابه‌جایی آن‌ها باهم برابر است $(\Delta x_1=\Delta x_2)$. یکی از آن‌ها $50s$ زودتر به مقصد می‌رسد. یعنی اگر زمان حرکت متحرک کندرو $t_1(v_1=30m/s)$ باشد زمان حرکت متحرک تندرو و $(v_2=40m/s)$ برابر t_1-50 است بنابراین کافی است شما جابه‌جایی‌ها را مساوی قرار داده و مسئله را حل کنید.

۱ جابه‌جایی دو متحرک برابر است. از این‌رو:

$$\Delta x_1=\Delta x_2\xrightarrow{\Delta x=vt}30t_1=40t_2\xrightarrow{t_2=t_1-50}$$

$$30t_1=40(t_1-50)\Rightarrow 30t_1=40t_1-2000\Rightarrow t_1=200s$$

۲ فاصلهٔ مبدأ تا مقصد برابر است با: $\Delta x=v_1t_1=30\times 200=6000m$

B ۱ ۱۶۲

خط فکری مسئلهٔ ساده اما قابل فکر کردن است. بیشینه فاصلهٔ دو متحرک در طول مسیر یعنی چه؟

دقت کنید متحرک تندرو با سرعت $8m/s$ از مبدأ به راه می‌افتد و همزمان با آن متحرک کندرو با سرعت $5m/s$ از همان نقطه به راه می‌افتد بنابراین در هر لحظه فاصلهٔ بین دو متحرک در حال افزایش است و در طول مسیر بیشینه فاصلهٔ آن‌ها از هم وقتی که متحرک تندرو به مقصد برسد است. بنابراین شما باید مدت زمان رسیدن متحرک تندرو به مقصد را حساب کرده سپس، معین کنید در این مدت متحرک کندرو چند متر جلو آمده تا مشخص شود فاصلهٔ آن‌ها در این لحظه چند متر است.

۱ زمان رسیدن متحرک تندرو را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=v\Delta t\xrightarrow{\Delta x=400m}400=8\Delta t\Rightarrow \Delta t=50s$$

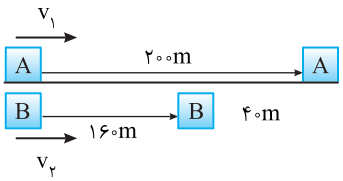
۲ در مدت $50s$ جابه‌جایی متحرک کندرو خواهد شد:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow \Delta x_{\text{کندرو}}=5\times 50=250m$$

۳ بنابراین بیشینه فاصلهٔ دو متحرک در طول مسیر برابر است با: $400-250=150m$

B ۳ ۱۶۳

خط فکری دونده A و B مسیر ۲۰۰ متر را می‌خواهند بدوند. دوندهٔ A وقتی به مقصد می‌رسد دوندهٔ B به اندازهٔ $40m$ از او عقب‌تر است یعنی در مدتی که دوندهٔ A، ۲۰۰ متر دویده، دوندهٔ B، $160m$ دویده است و شما به کمک این موضوع می‌توانید نسبت سرعت B به سرعت A (v_B/v_A) را پیدا کرده و به کمک آن مسئله را حل کنید.



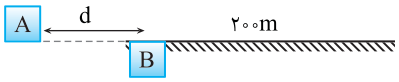
۱ با توجه به رابطهٔ جابه‌جایی زمان خواهیم داشت:

$$\Delta x=vt\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{A}200=v_At\\ \xrightarrow{B}160=v_Bt\end{cases}\Rightarrow\frac{200}{160}=\frac{v_At}{v_Bt}\Rightarrow v_B=0/8v_A$$

۲ اکنون دوندهٔ A به اندازهٔ d از دوندهٔ B عقب‌تر استارت می‌زند و قرار است باهم به مقصد برسند بنابراین:

$$\begin{matrix}A:d+200=v_At'\\ B:200=v_Bt'\end{matrix}\Rightarrow\frac{d+200}{200}=\frac{v_A}{v_B}\xrightarrow{v_B=0/8v_A}$$

$$\frac{d+200}{200}=\frac{1}{0/8}\Rightarrow d+200=250\Rightarrow d=50m$$

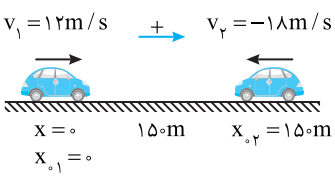


A ۲ ۱۶۴

فاصلهٔ دو خودرو از هم $150m$ است، بنابراین برای آنکه فاصلهٔ آن‌ها از هم ۱۸۰ متر شود. ابتدا باید دو خودرو به هم رسیده و از کنار هم بگذرند، از هم دور شوند تا فاصلهٔ آن‌ها از هم ۱۸۰ متر شود. معادلهٔ حرکت دو خودرو را نوشته و از هم کم می‌کنیم.

$$\begin{cases}x_1=12t\\ x_2=-18t+150\end{cases}\xrightarrow{|x_1-x_2|=180m}12t+18t-150=180$$

$$\Rightarrow 30t=330\Rightarrow t=11s$$



اگر تفاضل را برابر -180 قرار دهیم خواهیم داشت:

$$12t+18t-150=-180\Rightarrow 30t=-30\Rightarrow t=-1s\ \text{غ.ق.ق}$$

روش دیگر: می‌توان فرض کرد متحرک (۲) ساکن است و متحرک (۱) با سرعت $12+18=30m/s$ از فاصلهٔ ۱۵۰ متری به آن نزدیک و سپس ۱۸۰ متر از آن دور می‌شود یعنی متحرک (۱) جمعاً $150+180=330m$ را با سرعت $30m/s$ طی می‌کند.

$$\Delta x=vt\Rightarrow 330=30t\Rightarrow t=11s$$

B ۴ ۱۶۵

خط فکری یک‌بار هنگام نزدیک شدن دو متحرک به هم، فاصلهٔ آن‌ها از هم ۱۰۰ متر و بار دیگر بعد از رسیدن به هم و دور شدن از هم، فاصلهٔ آن‌ها از هم ۱۰۰ متر می‌شود. بنابراین مسئله دو حالت دارد:

حالت اول: وقتی هنگام نزدیک شدن فاصلهٔ آن‌ها ۱۰۰ متر است، دو متحرک در مجموع باید مسافت $۳۰۰-۱۰۰=۲۰۰m$ را طی کرده باشند.

$$\begin{cases}|\Delta x_۱|=v_۱t\\|\Delta x_۲|=v_۲t\end{cases}\Rightarrow|\Delta x_۱|+|\Delta x_۲|=(v_۱+v_۲)t\Rightarrow۲۰۰=۵۰t\Rightarrow t=۴s$$

حالت دوم: هنگامی که از کنار هم می‌گذرند و مجدداً فاصلهٔ آن‌ها از هم ۱۰۰ متر است، باید دو متحرک در مجموع مسافت $۳۰۰+۱۰۰=۴۰۰m$ را بپیمایند.

$$\begin{cases}|\Delta x_۱|=v_۱t\\|\Delta x_۲|=v_۲t\end{cases}\Rightarrow(v_۱+v_۲)t=۴۰۰\Rightarrow۵۰t=۴۰۰\Rightarrow t=۸s$$

بازی با سوال **دو متحرک از یک نقطه، هم‌زمان در یک جهت با سرعت $۷۲km/h$ و $۱۰۸km/h$ به حرکت درمی‌آیند. پس از چند دقیقه فاصلهٔ دو متحرک از هم ۳/۶ کیلومتر می‌شود؟**

۱) ۱۰ **۲)** ۳/۶ **۳)** ۶ **۴)** ۱۲

پاسخ **راه‌حل اول: معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته، از هم کم کرده و برابر $۳/۶km$ قرار می‌دهیم:**

$$x=vt\begin{cases}x_۱=۷۲t\\x_۲=۱۰۸t\end{cases}\xrightarrow{x_۲-x_۱=۳/۶}۱۰۸t-۷۲t=۳/۶\Rightarrow۳۶t=۳/۶$$

$$\Rightarrow t=۰/۱h\Rightarrow t=۰/۱\times۶۰=۶\min$$

دقت کردید برای حل مسئله سرعت‌ها را تبدیل واحد نکردیم و مسئله را با همان یکای km/h حل کردیم.

راه‌حل دوم: هر دو با هم حرکت کرده‌اند، در هر ساعت متحرک (۱) $۷۲km$ و متحرک (۲) $۱۰۸km$ طی می‌کند یعنی متحرک (۲) $۱۰۸-۷۲=۳۶km$ از اولی جلو می‌افتد، مانند این است که متحرک اول را ساکن فرض کنیم و متحرک دوم با سرعت $۱۰۸-۷۲=۳۶km/h$ از آن دور شود، در واقع از سرعت نسبی استفاده می‌کنیم: $\Delta x=v_{\text{نسبی}}t\Rightarrow۳/۶=(۱۰۸-۷۲)t\Rightarrow t=۰/۱h=۶\min$

گزینهٔ ۳

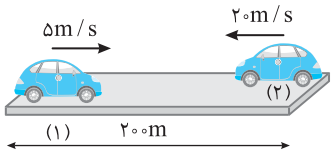
B ۳ ۱۶۶

خط فکری قرار است فاصلهٔ دو متحرک از هم در طول مسیر کمتر از $۵۰m$ باشد یعنی $|x_۱-x_۲|=۲۵۰m$ شود. بنابراین کافی است که معادلهٔ حرکت هر متحرک را نوشته و از هم کم کرده و قدرمطلق تفاضل را کوچک‌تر از ۵۰ قرار دهید.

یادداشت ریاضی هر گاه $|a|\le b$ و $b>۰$ باشد آن‌گاه $-b\le a\le b$.

مکان اولیه متحرک با سرعت $۱۰m/s$ را به عنوان مبدأ مکان و سمت راست را جهت مثبت در نظر می‌گیریم. در این صورت معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}x_۱=۵t\\x_۲=-۲۰t+۲۰۰\end{cases}$$



فاصلهٔ دو متحرک از هم کمتر از $۵۰m$ باشد یعنی:

$$|x_۱-x_۲|\le۵۰\Rightarrow|۲۵t-۲۰۰|\le۵۰$$

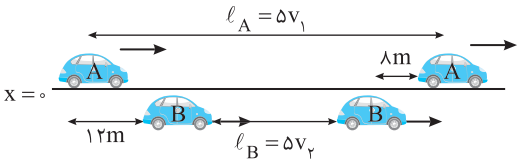
$$\Rightarrow-۵۰\le۲۵t-۲۰۰\le۵۰\Rightarrow۱۵۰\le۲۵t\le۲۵۰\Rightarrow۶s\le t\le۱۰s$$

بنابراین در بازهٔ $t=۶s$ تا $t=۱۰s$ یعنی در مدت $\Delta t=۱۰-۶=۴s$، فاصلهٔ دو متحرک از هم کمتر از ۵۰ متر است.

B ۳ ۱۶۷

با توجه به شکل و صورت مسئله در مدت $۵s$ متحرک A با سرعت v_A مسافت $\ell_A=v_At=۵v_A$ و متحرک B مسافت $\ell_B=v_Bt=۵v_B$ را طی می‌کند. اگر به شکل دقت کنید خواهیم داشت:

$$\ell_A=۱۲+\ell_B+۸\Rightarrow۵v_A=۲۰+۵v_B\Rightarrow v_A-v_B=۴m/s\quad(I)$$



اکنون می‌خواهیم فاصلهٔ دو متحرک به جای $۸m$، $۲۴m$ شود بنابراین:

$$\ell'_A=۱۲+\ell'_B+۲۴\Rightarrow\ell'_A-\ell'_B=۳۶\Rightarrow v_At-v_Bt=۳۶$$

$$\Rightarrow(v_A-v_B)t=۳۶\xrightarrow{(I)}۴t=۳۶\Rightarrow t=۹s$$

B ۴ ۱۶۸

راه‌حل اول: ابتدا معادلهٔ حرکت دو متحرک را نسبت به نقطهٔ A می‌نویسیم.

$$x=vt+x_۰\Rightarrow\begin{cases}x_۱=v_۱t\\x_۲=-۴v_۱t+AB\end{cases}\Rightarrow v_۱t=-۴v_۱t+AB$$

$$\Rightarrow AB=v_۱t+(۴v_۱t)\Rightarrow AB=۵v_۱t$$

زمان به هم رسیدن دو متحرک برابر می‌شود با:

$$t=\frac{AB}{۵v_۱}\quad(I)$$

زمان حرکت متحرک (۱) از A تا B برابر است با:

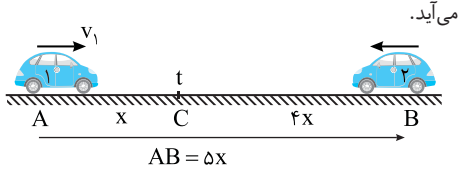
$$\Delta t=\frac{\Delta x}{v}\Rightarrow t_۱=\frac{AB}{v_۱}\quad(II)$$

اکنون با تقسیم روابط (I) و (II) بر هم می‌توان $t_۱$ را برحسب t به دست آورد:

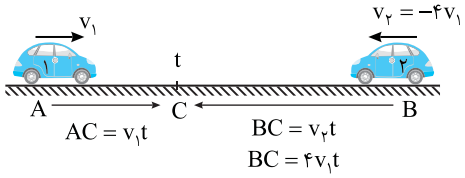
$$\frac{t_۱}{t}=\frac{\frac{AB}{v_۱}}{\frac{AB}{۵v_۱}}\Rightarrow\frac{t_۱}{t}=۵\Rightarrow t_۱=۵t$$

راه‌حل دوم و سریع:

۱ بنا به فرض مسئله $v_۲=-۴v_۱$ است یعنی در لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند اگر متحرک $v_۱$ به اندازهٔ x جلو آمده باشد متحرک ۲ با سرعت $۴v_۱$ به اندازهٔ $۴x$ جلو می‌آید.



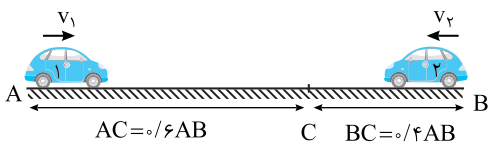
۲ متحرک کندرو (۱) در مدت t مسافت x را طی کرده است بنابراین کل مدت حرکت از A تا B که برابر $۵x$ است را در مدت $۵t$ طی می‌کند.



B ۱ ۱۶۹

۱ در گام اول شما باید نسبت سرعت‌های $v_۱$ و $v_۲$ را به کمک جابه‌جایی آن‌ها از لحظهٔ شروع حرکت تا لحظه‌ای که به هم می‌رسند را حساب کنید. دقت کنید که سرعت متحرک (۱) قطعاً از سرعت متحرک (۲) بیشتر است زیرا در مدت t که به هم می‌رسند مسیر طولانی‌تری را طی می‌کند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}AC=v_۱t\Rightarrow۰/۶AB=v_۱t\\BC=v_۲t\Rightarrow۰/۴AB=v_۲t\end{cases}\Rightarrow\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{۳}{۲}\quad(I)$$



۲ در ادامهٔ مسیر، متحرک (۱) مسیر BC را در مدت ۴۰s طی کرده است:

$$\Delta x=vt\Rightarrow CB=v_1\times 40\Rightarrow 0/4AB=v_1\times 40 \quad (II)$$

۳ در ادامهٔ مسیر، متحرک (۲) مسیر CA را در مدت t_2 طی می‌کند بنابراین:

$$\Delta x=vt\Rightarrow CA=v_2\times t_2\Rightarrow 0/6AB=v_2t_2 \quad (III)$$

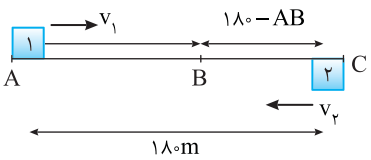
۴ رابطهٔ (II) را بر رابطهٔ (III) تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{0/4AB}{0/6AB}=\frac{v_1\times 40}{v_2\times t_2}\xrightarrow{(I)}\frac{2}{3}=\frac{3}{2}\times\frac{40}{t_2}\Rightarrow t_2=90s$$

B ۲ ۱۷۰

۱ متحرک (۱) مطابق شکل از نقطهٔ A و متحرک (۲) از نقطهٔ C به سوی هم می‌روند و در نقطهٔ B به هم می‌رسند. در این مدت متحرک (۱) مسافت AB و متحرک (۲) مسافت $BC=180-AB$ را به ترتیب با تندی‌های v_1 و v_2 طی می‌کنند.

متحرک اول: $AB=v_1t$ (I) ، متحرک دوم: $(180-AB)=v_2t$ (II)



۲ دو رابطه را برهم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{AB}{180-AB} \quad (III)$$

۳ با توجه به فرض مسئله متحرک (۱) در ادامهٔ مسیر، مسافت BC را در مدت ۱۶s طی می‌کند و متحرک ۲، مسافت BA را در مدت ۲۵s طی می‌کند، از این‌رو خواهیم داشت:

$$\ell=vt\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{\text{متحرک اول}} BC=v_1\times 16\Rightarrow 180-AB=16v_1\\ \Rightarrow v_1=\dfrac{180-AB}{16}\\ \xrightarrow{\text{متحرک دوم}} BA=v_2\times 25\Rightarrow AB=25v_2\Rightarrow v_2=\dfrac{AB}{25}\end{cases}$$

۴ دو رابطه را برهم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\frac{180-AB}{16}}{\frac{AB}{25}}\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\frac{25}{16}\left(\frac{180-AB}{AB}\right)$$

۵ طرف چپ رابطهٔ بالا و رابطهٔ (III) یکسان بوده، طرف راست آن‌ها را برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{AB}{180-AB}=\frac{25}{16}\left(\frac{180-AB}{AB}\right)\Rightarrow\frac{AB^2}{(180-AB)^2}=\frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow\frac{AB}{180-AB}=\frac{5}{4}\Rightarrow 900-5AB=4AB\Rightarrow AB=100m$$

$$\Rightarrow BC=180-100=80m$$

متحرک (۱) $80m$ را در مدت $16s$ طی کرده بنابراین اندازهٔ سرعت آن (تندی) برابر خواهد شد با:

$$v_1=\frac{BC}{t}=\frac{80}{16}=5m/s$$

میانبر هر گاه دو متحرک با تندی‌های ثابت v_1 و v_2 به ترتیب از نقاط A و C به سوی هم بروند و در نقطهٔ B از کنار هم بگذرند چنانچه بازهٔ زمانی که متحرک (۱) را در ادامه مسیر از B به C می‌رود t_1 و بازهٔ زمانی که متحرک (۲) در ادامهٔ مسیر از B به A می‌رود t_2 بنامیم خواهیم داشت:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}\Rightarrow\frac{AB}{180-AB}=\sqrt{\frac{16}{25}}\Rightarrow\frac{AB}{180-AB}=\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow AB=100m\Rightarrow BC=80m\Rightarrow v_1=\frac{BC}{t_1}=\frac{80}{16}=5m/s$$

بازی با سؤال مطابق شکل، دو متحرک (۱) و (۲) هم‌زمان از نقاط A و B می‌گذرند و با تندی‌های ثابت به طرف هم حرکت می‌کنند. دو متحرک پس از مدت t در نقطهٔ C از کنار هم عبور می‌نمایند به‌طوری که $AC=\frac{2}{5}AB$ است. چه مدت پس از آنکه متحرک (۲) به نقطهٔ A می‌رسد، متحرک (۱) از نقطهٔ B عبور خواهد کرد؟



۱) $\frac{4}{5}t$ ۲) $\frac{5}{6}t$ ۳) $\frac{6}{5}t$ ۴) $\frac{5}{4}t$

پاسخ تندی دو متحرک ثابت است. دو متحرک پس از t ثانیه به هم می‌رسند. متحرک (۲) در این مدت از B به C می‌رود یعنی $\frac{3}{5}AB$ را طی می‌کند و در ادامهٔ مسیر از C به A با همان تندی ثابت مسافت $AC=\frac{2}{5}AB$ را طی می‌کند، بنابراین با یک تناسب ساده زمان حرکت (۲) از C تا A به‌دست می‌آید.

$$\begin{array}{c|c}\frac{3}{5}AB & t\\ \frac{2}{5}AB & t_2\end{array}\Rightarrow t_2=\frac{2}{3}t$$

با همین استدلال زمان حرکت متحرک (۱) از A تا C برابر t و از C تا B برابر t_2 است از این‌رو:

$$\begin{array}{c|c}\frac{2}{5}AB & t\\ \frac{3}{5}AB & t_1\end{array}\Rightarrow t_1=\frac{3}{2}t$$

در نتیجه خواهیم داشت:

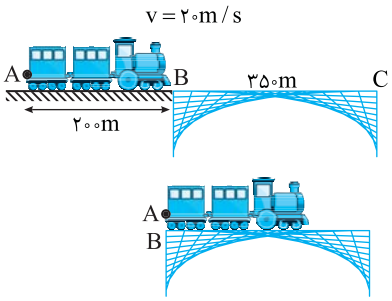
$$t_1-t_2=\frac{3}{2}t-\frac{2}{3}t=\frac{9-4}{6}t\Rightarrow t_1-t_2=\frac{5}{6}t$$

گزینهٔ ۲

B ۲ ۱۷۱

۱ هنگامی که انتهای قطار به ابتدای پل برسد قطار به طور کامل روی پل قرار گرفته که نقطهٔ A به نقطهٔ B برسد. یعنی قطار $200m$ جابه‌جا شود. تندی حرکت قطار $20m/s$ است بنابراین پس از مدت زیر قطار به‌طور کامل روی پل قرار می‌گیرد:

$$\Delta x=vt\Rightarrow 200=20t\Rightarrow t=10s$$



۲ اما وقتی قطار از ابتدای پل شروع به حرکت کند و به‌طور کامل از پل بگذرد باید نقطهٔ A (انتهای قطار) از انتهای پل (نقطهٔ C) بگذرد یعنی قطار باید به اندازهٔ مجموع طول پل و طول خودش جابه‌جا شود.

$$\Delta x=200+350=550m$$

در این صورت زمان عبور کامل قطار از پل خواهد شد:

$$\ell_1+\ell_2=vt\Rightarrow 550=20t\Rightarrow t=27/5s$$

B ۴ ۱۷۲

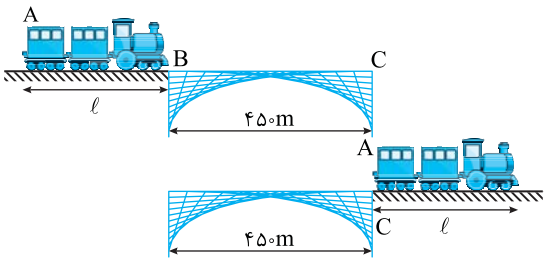
نکته هر گاه یک قطار از ابتدای یک پل بگذرد جابه‌جایی آن هنگامی که به‌طور کامل از پل می‌گذرد برابر $\ell_{\text{پل}}+\ell_{\text{قطار}}$ خواهد شد.

۱ مسافتی که قطار در دو حالت طی می‌کند خواهد شد:

$$\Delta x=vt\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{\text{حالت اول}} 450+\ell=20v\\ \xrightarrow{\text{حالت دوم}} 450+\ell=15(v+15)\end{cases}$$

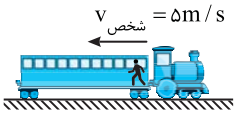
۲ مسافت طی شده در دو حالت یکسان است. بنابراین سمت راست روابط بالا را برابر قرار می‌دهیم.
$۲۰v=۱۵v+۲۲۵\Rightarrow ۵v=۲۲۵\Rightarrow v=۴۵m/s$

۳ حال با قرار دادن $v=۴۵m/s$ در یکی از معادله‌ها داریم:
$۴۵۰+\ell=۲۰v\Rightarrow ۴۵۰+\ell=۲۰(۴۵)\Rightarrow ۴۵۰+\ell=۹۰۰\Rightarrow \ell=۴۵۰m$



۱۷۳ B ۱

مسئلهٔ ساده‌ای است حرکت قطار نقشی در زمان حرکت شخص از ابتدا به انتهای قطار نخواهد داشت. یعنی شخص با سرعت ثابت $۵m/s$ می‌خواهد جابه‌جایی ۲۵۰ متری انجام دهد، بنابراین:



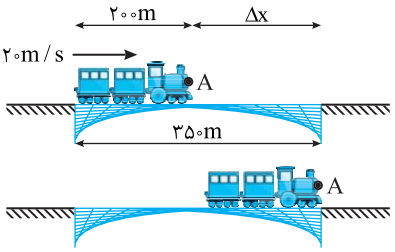
$\Delta x=vt\Rightarrow ۲۵۰=۵t\Rightarrow t=۵۰s$

۱۷۴ B ۳

خط فکری وقتی گفته شده «قطار به‌طور کامل روی پل باشد» یعنی تمام طول قطار باید روی پل باشد. بنابراین مطابق شکل ابتدا شما باید قطار را روی پل قرار دهید و انتهای قطار ابتدای پل باشد (شکل ۱) سپس قطار را در ذهن خود حرکت داده تا ابتدای قطار به انتهای پل برسد اما از آن رد نشود، بنابراین جابه‌جایی قطار برابر تفاضل طول پل و طول قطار است. $(\Delta x=\ell_{\text{پل}}-\ell_{\text{قطار}})$

۱ مسافتی که قطار طی می‌کند و در آن مدت تمام طول قطار روی پل است برابر است با:
$\Delta x=۳۵۰-۲۰۰=۱۵۰m$

۲ مدت زمانی که قطار به‌طور کامل روی پل است خواهد شد:
$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow ۱۵۰=۲۰\Delta t\Rightarrow \Delta t=۷/۵s$



۱۷۵ B ۲

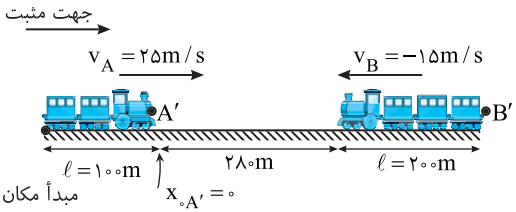
خط فکری به جای دو قطار، ذرهٔ A' را در جلوی قطار A و ذرهٔ B' را در انتهای B در نظر می‌گیریم که می‌خواهند از کنار هم بگذرند. بنابراین معادلهٔ حرکت این دو ذره را نوشته باهم برابر قرار دهید.

۱ روی شکل مبدأ مکان اختیاری را نشان داده‌ایم در لحظهٔ $t=۰$ مکان ذرهٔ A'، $x_{۰A}=۰$ و مکان ذرهٔ B'، $x_{۰B}=۲۸۰+۲۰۰=۴۸۰m$ است.

۲ معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:
$x=vt+x_۰\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{A'} x_{A'}=۲۵t \\ \xrightarrow{B'} x_{B'}=-۱۵t+۴۸۰ \end{cases}$

۳ دو معادله را برابر قرار می‌دهیم:
$x_{A'}=x_{B'}\Rightarrow ۲۵t=-۱۵t+۴۸۰\Rightarrow ۴۰t=۴۸۰\Rightarrow t=۱۲s$

میانبر دو متحرک به سوی هم می‌روند و برای به‌دست آوردن زمان رسیدن آن‌ها به هم می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد.
$\Delta x=(v_۱+v_۲)t\Rightarrow ۴۸۰=(۲۵+۱۵)t\Rightarrow t=۱۲s$

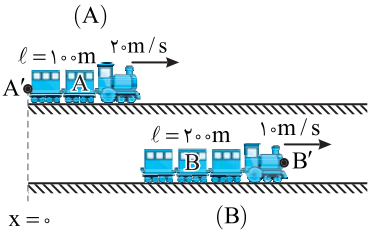


۱۷۶ B ۲

هنگامی قطار A به‌طور کامل از قطار B سبقت می‌گیرد که انتهای قطار A یعنی نقطهٔ A' از ابتدای قطار B یعنی نقطهٔ B' بگذرد. دقت کنید B'، $۱۰۰+۲۰۰=۳۰۰m$ جلوتر از A' است.

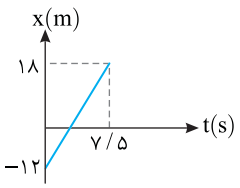
۱ معادلهٔ حرکت نقاط A' و B' را نسبت به مبدأ مکان اختیاری روی شکل می‌نویسیم:
$x=vt+x_۰\Rightarrow \begin{cases} x_{A'}=۲۰t \\ x_{B'}=۱۰t+۳۰۰ \end{cases}$

۲ معادله‌ها را برابر قرار می‌دهیم:
$x_{A'}=x_{B'}\Rightarrow ۲۰t=۱۰t+۳۰۰\Rightarrow ۱۰t=۳۰۰\Rightarrow t=۳۰s$



۱۷۷ A ۴

یادآوری معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت $x=vt+x_۰$ یک تابع درجهٔ اول بوده و نمودار آن خط راست مایل است. $x_۰$ مکان اولیه همان عرض از مبدأ و v سرعت متحرک برابر شیب نمودار است.



با توجه به نمودار، مکان متحرک در $t=۰$، $-۱۲m$ و در $t=۷/۵$، ۱۸ متر بوده و تغییر مکان متحرک $\Delta x=x_۲-x_۱=۱۸-(-۱۲)=۳۰m$ می‌شود.

نمودار $x-t$ متحرک به صورت خط راست است پس حرکت با سرعت ثابت است و سرعت در $t=۳s$ با سرعت متوسط در بازهٔ دلخواه صفر تا $۷/۵s$ برابر است.
$v=v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۳۰}{۷/۵}=۴m/s$

۱۷۸ A ۳

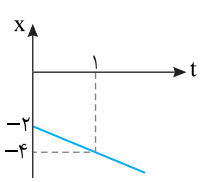
۱ شیب خط نمودار مکان- زمان بیانگر سرعت متحرک است. بنابراین سرعت خواهد شد:
$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۰-۴}{۲-۰}=-۲m/s$

۲ مکان اولیهٔ متحرک $x_۰=۴m$ است.

۳ معادلهٔ حرکت خواهد شد:
$x=vt+x_۰\Rightarrow x=-۲t+۴$

۱۷۹ A ۳

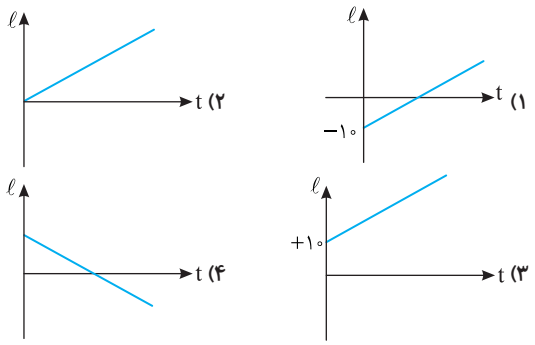
با توجه به شکل مکان اولیه جسم در فاصلهٔ ۲m از مبدأ محور xها و در قسمت منفی این محور است. بنابراین $x_۰=-۲m$ است. جهت حرکت و جهت سرعت یکی است و با توجه به شکل جهت حرکت منفی است پس سرعت متحرک نیز منفی و برابر $v=-۲m/s$ می‌باشد. بنابراین معادلهٔ حرکت خواهد شد:
$x=vt+x_۰\Rightarrow x=-۲t-۲$



A ۱۸۰ ۱

دقت کنید معادلهٔ مکان - زمان $x=5t-10$ بوده و مکان اولیه (عرض از مبدأ) $x_0=-10m$ است و شیب خط مثبت بنابراین به نظر می‌رسد که شما باید گزینهٔ (۳) را انتخاب کنید اما به کلمهٔ روی محور قائم دقت کنید، روی محور به جای «مکان» «جابه‌جایی» نوشته شده یعنی شما نمودار $\Delta x-t$ را باید مشخص کنید. جابه‌جایی در حرکت با سرعت ثابت برابر $\Delta x=vt$ بوده که در اینجا $\Delta x=5t$ است. بنابراین پاسخ گزینهٔ (۱) است.

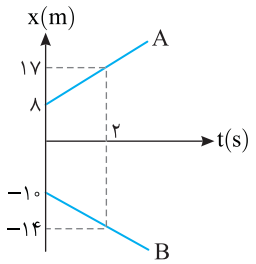
بازی با سوال معادلهٔ مکان جسمی در SI به صورت $x=-5t-10$ است. نمودار مسافت - زمان این متحرک کدام است؟



پاسخ مسافت کمیت نرده‌ای و همواره مثبت است. معادلهٔ حرکت $x=-5t-10$ یعنی متحرک با سرعت $5m/s$ در خلاف جهت محور در حال حرکت است و در هر ثانیه $+5m$ جابه‌جا می‌شود. بنابراین نمودار مسافت زمان خطی با شیب مثبت است که از مبدأ می‌گذرد. گزینهٔ ۲

A ۱۸۱ ۳

خط فکری شیب نمودار مکان - زمان برابر سرعت جسم است. وقتی نمودار خط راست مایل است سرعت در تمام لحظات یکسان است و تندی متحرک همان اندازهٔ سرعت متحرک است بنابراین شما کافی است شیب هر خط را حساب کنید، البته مقدار مثبت شیب را در نظر بگیرید.

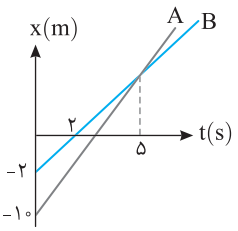


تندی متحرک A: $s_A=v_A=\frac{17-8}{2-0}=4/5m/s$

تندی متحرک B: $s_B=v_B=\frac{|-14-(-10)|}{2}=\frac{4}{2}=2m/s$

B ۱۸۲ ۱

۱ نمودار $x-t$ هر دو متحرک خط راست مایل است، بنابراین حرکت هر دو یکنواخت است. ابتدا سرعت متحرک B را با توجه به شکل به‌دست می‌آوریم:



$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_B=\frac{0-(-2)}{2-0}=1m/s$

۲ معادلهٔ حرکت B برابر خواهد شد با: $x_B=v_Bt+x_{0B}\Rightarrow x_B=t-2$

۳ مکان متحرک A و B در لحظهٔ $t=5s$ که نمودارها یکدیگر را قطع کرده‌اند باهم برابر است، از این‌رو مکان متحرک B در لحظهٔ $t=5s$ را به دست می‌آوریم:

$x_B=5-2=3m$

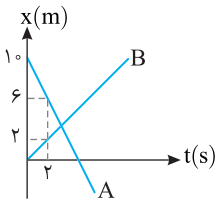
۴ در $t=5s$ مکان متحرک A نیز $x_A=+3m$ است. به کمک معادلهٔ حرکت A، سرعت A را حساب می‌کنیم:

$x_A=v_At+x_{0A}\Rightarrow 3=v_A\times 5+(-10)\Rightarrow v_A=2/6m/s$

۵ در لحظهٔ $t=2s$ متحرک B از مبدأ می‌گذرد و در این لحظه متحرک A در مکان $-4/8m$ خواهد بود: $x_A=2/6t-10\xrightarrow{t=2s}x_A=-4/8m$

A ۱۸۳ ۴

نمودار $x-t$ دو متحرک به صورت خط راست می‌باشد پس حرکت دو متحرک با سرعت ثابت است و شیب هر نمودار برابر سرعت آن‌هاست پس سرعت هر یک را حساب می‌کنیم.



$v=v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow\begin{cases}v_A=\frac{6-10}{2}=-2m/s\\ v_B=\frac{2-0}{2}=1m/s\end{cases}$

با توجه به نمودار مکان اولیه متحرک A و B به ترتیب $x_{0A}=10m$ و $x_{0B}=0$ می‌باشد، بنابراین معادلهٔ حرکت آن‌ها خواهد شد:

$x=vt+x_0\Rightarrow\begin{cases}x_A=-2t+10\\ x_B=t\end{cases}$

لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند وقتی است که $x_A=x_B$ می‌شود از این‌رو معادلهٔ حرکت دو متحرک را باهم برابر قرار می‌دهیم:

$t=-2t+10\Rightarrow t=\frac{10}{3}s$

B ۱۸۴ ۱

خط فکری معادلهٔ حرکت دو متحرک را به کمک نمودار مکان - زمان نوشته و با هم برابر قرار می‌دهیم. نمودار هر دو خط راست مایل است. بنابراین حرکت هر دو متحرک با سرعت ثابت صورت می‌گیرد.

۱ سرعت متحرک A برابر است با: $v_A=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_A=\frac{0-16}{8-0}=-2m/s$

مکان اولیه A، $x_{0A}=+16m$ بوده و معادلهٔ حرکت A خواهد شد:

$x=vt+x_0\Rightarrow x_A=-2t+16$

۲ سرعت متحرک B را حساب می‌کنیم.

$v_B=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_B=\frac{-25-(-29)}{8-0}\Rightarrow v_B=+\frac{1}{2}m/s$

مکان اولیهٔ متحرک B، $x_{0B}=-29m$ بوده و معادلهٔ حرکت B خواهد شد:

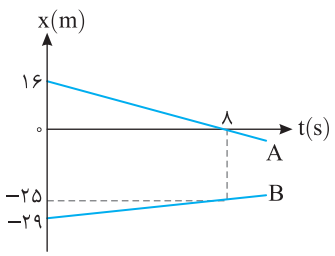
$x=vt+x_0\Rightarrow x_B=\frac{1}{2}t-29$

۳ دو معادله را برابر قرار داده و لحظهٔ رسیدن دو متحرک به هم را به‌دست می‌آوریم.

$x_A=x_B\Rightarrow -2t+16=\frac{1}{2}t-29\Rightarrow 45=2/5t\Rightarrow t=18s$

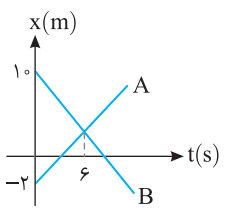
۴ مکان رسیدن دو متحرک به هم خواهد شد:

$x=-2\times 18+16\Rightarrow x=-36+16\Rightarrow x=-20m$



B ۱۸۵ ۲

۱ در صورت مسئله بیان شده که تندی دو متحرک برابر است یعنی بزرگی سرعت دو متحرک یکسان بوده $|v_A|=|v_B|$ است. با توجه به نمودار شیب خط نمودار $x-t$ متحرک B منفی و شیب خط نمودار $x-t$ متحرک A مثبت است بنابراین $v_A=+v$ و $v_B=-v$ است.



۲ معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

$x_A=v_At+x_0\xrightarrow{x_{0A}=-2m}x_A=vt-2$

$x_B=v_Bt+x_0\xrightarrow{x_{0B}=10m}x_B=-vt+10$

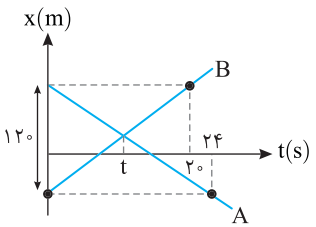
۳ با توجه به نمودار دو متحرک از لحظه‌ای که شروع به حرکت می‌کنند تا لحظه‌ای که به هم می‌رسند در حال نزدیک شدن به هم هستند و از طرفی در صورت سؤال گفته شده ۶s در حال نزدیک شدن به هم هستند، پس دو متحرک در $t=6s$ به هم می‌رسند. یعنی در $t=6s$، $x_A=x_B$ است از این‌رو می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} x_A=6v-2 \\ x_B=-6v+10 \end{cases} \Rightarrow 6v-2=-6v+10 \Rightarrow 12v=12 \Rightarrow v=1\,m/s$$

۴ بنابراین معادلهٔ متحرک A به صورت $x_A=t-2$ می‌باشد و می‌دانیم هنگام گذر متحرک از مبدأ مکان $x=0$ بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد. $x=0 \Rightarrow 0=t-2 \Rightarrow t=2s$

۱۸۶ B

خط فکری به نمودار باید به خوبی نگاه کنید تا تشخیص دهید متحرک A در مدت ۲۴s مسافت ۱۲۰m و متحرک B نیز در مدت ۲۰s مسافت ۱۲۰m را طی کرده تا بتوانید تندی هر یک را به‌دست بیاورید و در نهایت لحظهٔ t یعنی لحظهٔ رسیدن آن‌ها به یکدیگر را حساب کنید.



۱ تندی متحرک A خواهد شد: $s_A=\frac{120}{24}=5m/s$

۲ تندی متحرک B را حساب می‌کنیم: $s_B=\frac{120}{20}=6m/s$

۳ در مدت t متحرک A مسافت مقابل را طی می‌کند. $\ell_A=s_A t=5t$

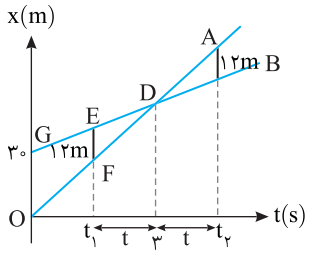
۴ در مدت t متحرک B مسافت مقابل را طی می‌کند. $\ell_B=s_B t=6t$

۵ مجموع ℓ_A و ℓ_B باید ۱۲۰m شود تا دو متحرک به هم برسند.

$$\ell_A+\ell_B=120 \Rightarrow 5t+6t=120 \Rightarrow t=\frac{120}{11}s$$

۱۸۷ B

خط فکری در حل این مسئله نباید به سراغ معادلهٔ حرکت برویم بلکه باید به کمک ریاضیات مسئله را حل کنید. به روش حل دقت کنید.



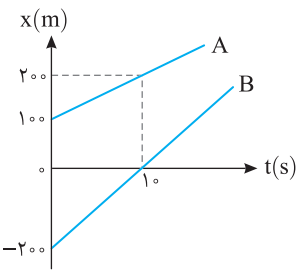
روی نمودار دو لحظهٔ t_1 و t_2 را نشان داده‌ایم که در این دو لحظه فاصلهٔ دو متحرک از هم ۱۲m است. برای مثلث DEF△ و DGO△ نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{30}{12}=\frac{3}{t} \Rightarrow t=1/2s$$

بنابراین ۱/۲s قبل از $t=3s$ یعنی $t_1=3-1/2=1/8s$ و ۱/۲s بعد از $t=3s$ یعنی $t_2=3+1/2=4/2s$ فاصلهٔ دو متحرک از هم ۱۲ متر است.

۱۸۸ B

خط فکری معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم. فاصلهٔ دو متحرک برابر $|x_A-x_B|$ بوده که باید کمتر یا مساوی ۲۰ متر باشد.



۱ شیب خط نمودار $x-t$ برابر سرعت متحرک است:

$$v_A=\frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=10s]{x_0=100m,\ x_1=200m} v_A=\frac{100}{10}=10m/s$$

$$v_B=\frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=10s]{x_0=-200m,\ x_1=0} v_B=\frac{200}{10}=20m/s$$

۲ معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x_A=v_A t+x_0 \Rightarrow x_A=10t+100$$

$$x_B=v_B t+x_0 \Rightarrow x_B=20t-200$$

۳ خواستهٔ سؤال این است که فاصلهٔ دو متحرک از هم کمتر یا مساوی ۲۰ متر باشد:

$$|x_B-x_A| \le 20m \Rightarrow |20t-200-10t-100| \le 20$$

$$\Rightarrow |10t-300| \le 20 \Rightarrow -20 \le 10t-300 \le 20$$

$$\Rightarrow 280 \le 10t \le 320 \Rightarrow 28 \le t \le 32$$

بنابراین بازهٔ زمانی برابر $32-28=4s$ است.

۱۸۹ B

۱ با توجه به فرض مسئله در بازهٔ صفر تا ۶s تندی A ثابت و برابر $4m/s$ است، بنابراین جابه‌جایی متحرک A در بازهٔ ۲ تا ۶s برابر خواهد شد با:

$$\Delta x_1=v_{1_A}\Delta t=4\times 4=16m$$

۲ در بازهٔ ۶s تا ۱۲s تندی متحرک A ثابت اما برابر $8m/s$ است و جابه‌جایی متحرک A در بازهٔ ۶s تا ۱۰s برابر است با:

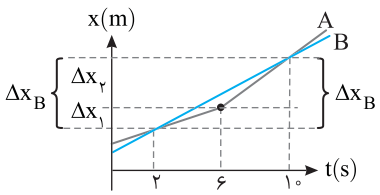
$$\Delta x_2=v_{2_A}\Delta t=8\times(10-6)=32m$$

۳ جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی ۲s تا ۱۰s مطابق شکل خواهد شد:

$$\Delta x_B=\Delta x_1+\Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_B=16+32=48m$$

۴ سرعت متوسط B را حساب می‌کنیم.

$$v_{av_B}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av_B}=\frac{48}{10-2} \Rightarrow v_{av_B}=6m/s$$



یادآوری هرگاه متحرکی روی مسیر مستقیم (محور xها) در یک جهت نصف زمان حرکت را با تندی v_1 و نیمهٔ دیگر زمان را با تندی v_2 طی کند، سرعت متوسط در کل مسیر خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}$$

روش دیگر: در واقع سرعت متوسط B همان سرعت متوسط A در بازهٔ زمانی ۲s تا ۱۰s است. که در این بازه متحرک A، نصف زمان حرکت را با تندی $4m/s$ و نیمهٔ دیگر زمان را با تندی $8m/s$ طی کرده بنابراین سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{8+4}{2}=6m/s$$

۱۹۰ C

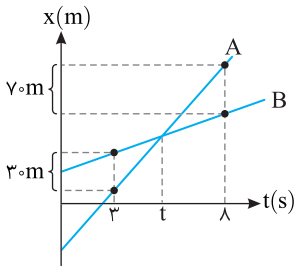
۱ در $t=3s$ فاصلهٔ دو متحرک از هم ۳۰m است و A، ۳۰m از B عقب‌تر است.

۲ در لحظهٔ t دو متحرک به هم می‌رسند.

۳ در $t=8s$ فاصلهٔ دو متحرک از هم ۷۰m و متحرک A، ۷۰m از B جلوتر است.

۴ در مدت $8-3=5s$، دو متحرک نسبت به هم $30+70=100m$ جابه‌جا شده‌اند. بنابراین مانند این است که اگر B ساکن باشد A با سرعت $\frac{100}{5}=20m/s$ از ۳۰ متری آن به سوی B رفته و از آن ۷۰m فاصله گرفته است.

۵ در بازهٔ $8-8=8s$ فاصلهٔ دو متحرک به اندازهٔ $20\times 8=160m$ افزایش می‌یابد یعنی فاصلهٔ آن‌ها از هم $70+160=230m$ می‌شود.



۳ ۱۹۱ B

خط فکری شیب نمودار مکان - زمان برابر سرعت جسم است. وقتی نمودار $x-t$ به صورت خط راست باشد شیب نمودار ثابت بوده یعنی سرعت متحرک ثابت است. فاصلهٔ دو متحرک برابر بزرگی تفاضل مکان دو متحرک در آن لحظه است. سرعت متحرک A مثبت بوده چون شیب خط آن مثبت است و شیب خط B منفی است پس سرعت این متحرک منفی است. در صورت سؤال گفته شده تندی یعنی بزرگی سرعت A دو برابر بزرگی سرعت B است:

$$|v_A|=۲|v_B| \xrightarrow[v_B<۰]{v_A>۰} v_A=-۲v_B$$

نکته معادلهٔ حرکت سرعت ثابت به صورت $x=vt+x_۰$ است.

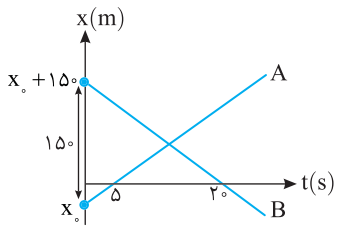
(v: سرعت متحرک، $x_۰$: مکان اولیه)

روش اول: معادلهٔ حرکت هر متحرک را نوشته و از روی نمودار، داده‌های مسئله را در آن‌ها جایگذاری می‌کنیم.

$$x_A=v_At+x_۰ \xrightarrow[x_A=۰]{t=۵s} ۰=۵v_A+x_۰ \Rightarrow v_A=\frac{-x_۰}{۵} \quad (۱)$$

$$x_B=v_Bt+x_۰+۱۵۰ \xrightarrow[x_B=۰]{t=۲۰s} ۰=۲۰v_B+x_۰+۱۵۰$$

$$\Rightarrow v_B=\frac{-x_۰-۱۵۰}{۲۰} \quad (۲)$$



با توجه به سؤال $v_A=-۲v_B$ است:

$$v_A=-۲v_B \xrightarrow[v_B=\frac{-x_۰-۱۵۰}{۲۰}]{v_A=\frac{-x_۰}{۵}} \frac{-x_۰}{۵}=-۲\left(\frac{-x_۰-۱۵۰}{۲۰}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{-x_۰}{۵}=\frac{x_۰+۱۵۰}{۱۰} \Rightarrow -x_۰=\frac{x_۰+۱۵۰}{۲} \Rightarrow -۲x_۰=x_۰+۱۵۰$$

$$\Rightarrow -۳x_۰=۱۵۰ \Rightarrow x_۰=-۵۰m$$

حال $x_۰=-۵۰m$ را در معادله‌های (۱) و (۲) قرار می‌دهیم تا سرعت‌ها به‌دست آید:

$$v_A=\frac{-x_۰}{۵}=\frac{۵۰}{۵}=۱۰m/s \;,\; v_B=\frac{-x_۰-۱۵۰}{۲۰}=\frac{-۱۰۰}{۲۰}=-۵m/s$$

با توجه به نمودار در لحظهٔ $t=۲۰s$ متحرک B از مبدأ مکان می‌گذرد $(x_B=۰)$. معادلهٔ حرکت متحرک A را نوشته و در لحظهٔ $t=۲۰s$ مکان متحرک A را به‌دست می‌آوریم:

$$x_A=v_At+x_۰ \xrightarrow[x_۰=-۵۰m]{v_A=۱۰m/s} x_A=+۱۰t-۵۰$$

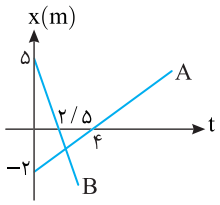
$$\xrightarrow{t=۲۰s} x_A=۲۰۰-۵۰=۱۵۰m$$

فاصله دو متحرک را حساب می‌کنیم: $r=|x_A-x_B| \Rightarrow r=|۱۵۰-۰|=۱۵۰m$

روش دوم: سرعت متحرک A برابر $۱۰m/s$ است یعنی متحرک A در هر ثانیه $۱۰m$ در جهت مثبت جابه‌جا می‌شود و سرعت متحرک B، $-۵m/s$ بوده یعنی متحرک B در هر ثانیه $۵m$ خلاف جهت محور x جابه‌جا می‌شود یعنی در هر ثانیه جمعاً دو متحرک A و B، $۵+۱۰=۱۵m$ به هم نزدیک می‌شوند. در ابتدا فاصلهٔ A از B، ۱۵۰ متر است بنابراین این دو متحرک در مدت $\frac{۱۵۰}{۱۵}=۱۰s$ به هم می‌رسند و بعد از به هم رسیدن در هر ثانیه $۱۵m$ از هم دور می‌شوند در مدت $(۲۰-۱۰=۱۰s)$ فاصلهٔ آن‌ها از هم $۱۰\times۱۵=۱۵۰m$ می‌شود.

۳ ۱۹۲ C

خط فکری وقتی بیان می‌شود که فاصلهٔ دو متحرک A و B از $۶m$ کمتر باشد یعنی باید $|x_B-x_A|<۶$ باشد بنابراین شما باید از روی نمودار سرعت هر متحرک را به‌دست آورده معادلهٔ حرکت هر یک را نوشته و قدر مطلق تفاضل آن‌ها را کوچک‌تر از $۶m$ قرار داده تا مسئله حل شود.



۱ سرعت حرکت هر متحرک را به دست می‌آوریم:

$$v_A=\frac{۰-(-۲)}{۴-۰} \Rightarrow v_A=۰/۵m/s$$

$$v_B=\frac{۰-۵}{۲/۵-۰} \Rightarrow v_B=-۲m/s$$

۲ معادله حرکت هر متحرک را می‌نویسیم:

$$x_A=۰/۵t-۲ \quad , \quad x_B=-۲t+۵$$

۳ با توجه به صورت مسأله:

$$|x_A-x_B|<۶ \Rightarrow |۰/۵t-۲+۲t-۵|<۶ \Rightarrow |۲/۵t-۷|<۶$$

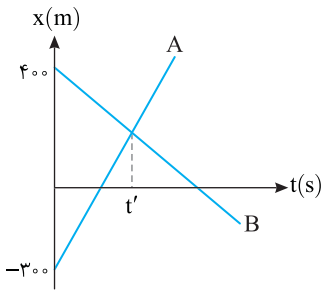
$$\Rightarrow -۶<۲/۵t-۷<۶ \Rightarrow ۱<۲/۵t<۱۳ \Rightarrow ۰/۴<t<۵/۲$$

۳ ۱۹۳ C

با توجه به شکل فاصلهٔ ابتدایی A و B از هم $۴۰۰+۳۰۰=۷۰۰m$ است. در لحظهٔ t' دو متحرک به هم می‌رسند سپس از هم دور می‌شوند و فاصلهٔ آن‌ها از هم در $t=۳۰s$، $۳۵۰m$ می‌شود. یعنی مجموع مسافت طی شده توسط دو متحرک در بازهٔ ۰ تا $۳۰s$ باید $۷۰۰+۳۵۰=۱۰۵۰m$ باشد. در این صورت:

$$\ell_A+\ell_B=۱۰۵۰ \xrightarrow{\ell=st} s_At+s_Bt=۱۰۵۰$$

$$(s_A+s_B)۳۰=۱۰۵۰ \Rightarrow s_A+s_B=۳۵m/s$$

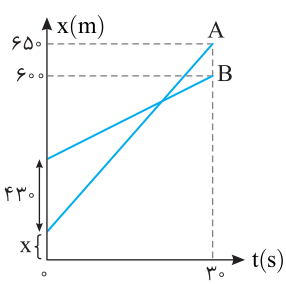


با توجه به فرض مسئله $s_B=s_A-۵$ بنابراین:

$$s_A+s_A-۵=۳۵ \Rightarrow ۲s_A=۴۰ \Rightarrow s_A=۲۰m/s$$

۳ ۱۹۴ B

خط فکری در صورت مسئله از شما خواسته شده v_A-v_B را به‌دست بیاورید بنابراین شما باید شیب نمودار A و شیب نمودار B را به کمک داده‌های روی نمودار به‌دست آورده از هم کم کنید.



۱ سرعت هر متحرک برابر شیب نمودار $x-t$ است، از این‌رو با توجه به نمودار داریم:

$$v_A=\frac{۶۵۰-x}{۳۰}$$

$$v_B=\frac{۶۰۰-(۴۳۰+x)}{۳۰}$$

۲ تفاضل سرعت‌ها را به دست می‌آوریم:

$$v_A-v_B=\frac{۶۵۰-x}{۳۰}-\frac{۱۷۰-x}{۳۰}=\frac{۴۸۰}{۳۰} \Rightarrow v_A-v_B=۱۶m/s$$

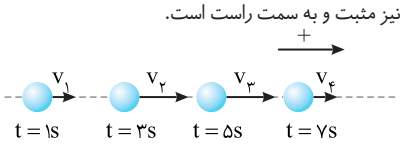
A ۱۹۵ ۲

یادآوری نسبت تغییرات بردار سرعت به زمان تغییر را شتاب متوسط گویند $\vec{a}_{av}=\frac{\vec{v}_۲-\vec{v}_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$. شتاب متوسط کمیت برداری است و همواره در جهت بردار تغییر سرعت است.

با توجه به تعریف شتاب متوسط، وقتی تغییرات سرعت منفی باشد شتاب متوسط الزاماً منفی است.

A ۱۹۶ ۴

۱ در لحظه‌های $t_۱=۱s$ و $t_۲=۳s$ سرعت‌ها به‌ترتیب $v_۱$ و $v_۲$ بوده و $v_۲>v_۱$ است، بنابراین تغییرات سرعت $(\Delta v=v_۲-v_۱>۰)$ مثبت بوده و بردار شتاب متوسط نیز مثبت و به سمت راست است.



۲ در لحظه‌های $t=۵s$ و $t=۷s$ سرعت متحرک $v_۳$ و $v_۴$ بوده و $v_۴<v_۳$ است یعنی تغییرات سرعت منفی $(\Delta v=v_۴-v_۳<۰)$ و بردار شتاب متوسط منفی و به سمت چپ است.

A ۱۹۷ ۳

یک جای‌گذاری ساده در رابطهٔ شتاب متوسط و حل مسئله و تمام.

$$a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow a_{av}=\frac{۹-۵}{۳-۱}=۲m/s^۲$$

B ۱۹۸ ۴

خط فکری در صورت مسئله تندی در لحظهٔ $t_۱=۱s$ و $t_۲=۳s$ داده شده است. تندی کمیت نرده‌ای است و جهت ندارد در حرکت روی خط راست تندی لحظه‌ای برابر اندازهٔ سرعت است و سرعت کمیت برداری است، بنابراین وقتی گفته می‌شود تندی $۹m/s$ است یعنی سرعت می‌تواند $+۹m/s$ و یا $-۹m/s$ باشد بنابراین این مسئله چهار حالت خواهد داشت. البته در صورت مسئله اندازهٔ شتاب متوسط خواسته شده است.

تندی حرکت در لحظهٔ $t_۱=۲s$ برابر $s_۱=۵m/s$ است. بنابراین سرعت $v_۱=\pm ۵m/s$ است و در لحظهٔ $t_۲=۳s$ تندی برابر $s_۲=۹m/s$ است پس $v_۲=\pm ۹m/s$ است:

$$|a_{av}|=\left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right|=\frac{|v_۲-v_۱|}{\Delta t}\xrightarrow{v_۱=+۵m/s,v_۲=+۹m/s} a_{av}=\frac{۹-۵}{۲}=+۲m/s^۲$$

$$|a_{av}|=\left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right|=\frac{|v_۲-v_۱|}{\Delta t}\xrightarrow{v_۱=+۵m/s,v_۲=-۹m/s} a_{av}=\left|\frac{-۹-۵}{۲}\right|=+۷m/s^۲$$

$$|a_{av}|=\left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right|=\frac{|v_۲-v_۱|}{\Delta t}\xrightarrow{v_۱=-۵m/s,v_۲=۹m/s} a_{av}=\frac{۹-(-۵)}{۲}=+۷m/s^۲$$

$$|a_{av}|=\left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right|=\frac{|v_۲-v_۱|}{\Delta t}\xrightarrow{v_۱=-۵m/s,v_۲=-۹m/s} a_{av}=\left|\frac{-۹-(-۵)}{۲}\right|=۲m/s^۲$$

A ۱۹۹ ۱

خط فکری برای به‌دست آوردن شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ تنها باید بردار سرعت در لحظهٔ $t_۱$ (v_i) و لحظهٔ $t_۲$ (v_f) را در رابطهٔ شتاب متوسط قرار داد و در این مدت سرعت چه مقدارهایی داشته مهم نیست.

شتاب متوسط برابر آهنگ تغییرات سرعت v_f-v_i می‌باشد، بنابراین:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_f-v_i}{\Delta t}=\frac{۵-۲}{۲+۳}=\frac{۳}{۵}=۰/۶m/s^۲$$

B ۲۰۰ ۲

خط فکری شتاب متوسط برابر $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ است. با توجه به این رابطه و مقدار شتاب متوسط داده شده در دو بازهٔ زمانی حل سؤال را شروع می‌کنیم.

۱ با توجه به تعریف شتاب متوسط برای هر مرحله رابطهٔ شتاب متوسط را می‌نویسیم.

$$\vec{a}_{av}=\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\xrightarrow[\vec{a}=-۴\vec{i}]{t_۱=۵s\ \text{تا}\ t_۲=۱۰s} -۴\vec{i}=\frac{\vec{v}_{۱۰}-\vec{v}_۵}{۱۰-۵}\Rightarrow \vec{v}_{۱۰}-\vec{v}_۵=-۲۰\vec{i}\quad (۱)$$

$$\xrightarrow[t_۲=۱۰s\ \text{و}\ t_۳=۱۲s]{\vec{a}=۲\vec{i}} ۲\vec{i}=\frac{\vec{v}_{۱۲}-\vec{v}_{۱۰}}{۱۲-۱۰}\Rightarrow \vec{v}_{۱۲}-\vec{v}_{۱۰}=۴\vec{i}\quad (۲)$$

۲ برای رسیدن به بررسی بازهٔ $t_۱=۵s$ تا $t_۳=۱۲s$ سرعت $\vec{v}_{۱۰}$ مزاحم است پس رابطهٔ (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم تا $v_{۱۰}$ از دو معادله حذف شود:

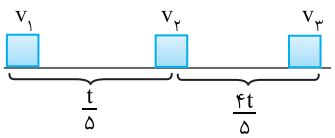
$$\begin{cases}\vec{v}_{۱۰}-\vec{v}_۵=-۲۰\vec{i}\\ \vec{v}_{۱۲}-\vec{v}_{۱۰}=۴\vec{i}\end{cases}\xrightarrow{+}\vec{v}_{۱۲}-\vec{v}_۵=-۲۰\vec{i}+۴\vec{i}\Rightarrow\vec{v}_{۱۲}-\vec{v}_۵=-۱۶\vec{i}$$

۳ شتاب متوسط در بازهٔ $t=۵s$ تا $t=۱۲s$ خواهد شد.

$$\vec{a}_{av}=\frac{\vec{v}_{۱۲}-\vec{v}_۵}{۱۲-۵}\xrightarrow{\vec{v}_{۱۲}-\vec{v}_۵=-۱۶\vec{i}}a_{av}=\frac{-۱۶\vec{i}}{۷}=\frac{-۱۶}{۷}\vec{i}$$

B ۲۰۱ ۱

خط فکری رابطهٔ شتاب متوسط را در بازهٔ $\frac{۱}{۵}t$ و $\frac{۴}{۵}t$ بنویسید و رابطه‌ای بین $v_۱$ و $v_۲$ و $v_۳$ به‌دست بیاورید، سپس به سراغ شتاب متوسط در کل مدت t بروید.



۱ شتاب متوسط در $\frac{۱}{۵}t$:

$$a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{\Delta t}\Rightarrow ۲=\frac{v_۲-v_۱}{\frac{۱}{۵}t}\Rightarrow v_۲-v_۱=\frac{۲}{۵}t\Rightarrow v_۱=v_۲-\frac{۲}{۵}t\quad (I)$$

۲ شتاب متوسط در مابقی زمان یعنی $\frac{۴}{۵}t$:

$$-۴=\frac{v_۳-v_۲}{\frac{۴}{۵}t}\Rightarrow v_۳-v_۲=-\frac{۱۶}{۵}t\Rightarrow v_۳=v_۲-\frac{۱۶}{۵}t$$

۳ شتاب متوسط در کل مدت حرکت خواهد شد.

$$a_{av}=\frac{v_۳-v_۱}{t}$$

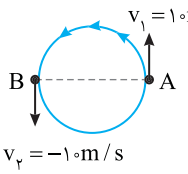
$$\xrightarrow{(I),(II)}a_{av}=\frac{v_۲-\frac{۱۶}{۵}t-(v_۲-\frac{۲}{۵}t)}{t}=\frac{-\frac{۱۶}{۵}t+\frac{۲}{۵}t}{t}$$

$$a_{av}=\frac{-۱۴}{۵}m/s^۲=-۲/۸m/s^۲$$

B ۲۰۲ ۳

نکته بردار سرعت در هر نقطه از مسیر بر مسیر حرکت مماس است.

خط فکری دقت کنید در هر ۱۶s، ذره، یک بار محیط دایره را طی می‌کند، بنابراین در مدت ۸s، نصف محیط را طی خواهد کرد و به‌طور مثال مطابق شکل در مدت ۸s ذره از نقطهٔ A در سوی نشان داده شده به نقطهٔ B می‌رود، بنابراین شما با رسم بردارهای سرعت در نقطهٔ A و B علامت سرعت‌ها را مشخص کرده و شتاب متوسط را به‌دست بیاورید.



در نقطهٔ A بردار سرعت $v_۱=+۱۰m/s$ و در نقطهٔ B که بردار سرعت در خلاف جهت A است $v_۲=-۱۰m/s$ خواهد بود بنابراین اندازهٔ شتاب متوسط خواهد شد.

$$|a_{av}|=\frac{|v_۲-v_۱|}{t_۲-t_۱}=\frac{|-۱۰-۱۰|}{۸}=\frac{۲۰}{۸}\Rightarrow|a_{av}|=۲/۵\frac{m}{s^۲}$$

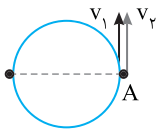
A ۲۰۳ — ۱

۱ در هر ۲۰s ذره، چهار بار محیط دایره را طی می‌کند بنابراین زمان طی کردن یک بار محیط دایره خواهد شد:

۴ بار	۲۰s
۱ بار	t

$\Rightarrow t=5s$

۲ در بازهٔ 5s ذره از هر نقطه‌ای که شروع به حرکت کرده (مثلاً نقطهٔ A) به همان نقطه برمی‌گردد و بردار سرعت‌های v_1 و v_2 برابر شده و تغییرات سرعت برابر صفر شده $(\Delta v=0)$ و در نتیجه شتاب متوسط نیز صفر می‌شود $(a_{av}=0)$.



A ۲۰۴ — ۲

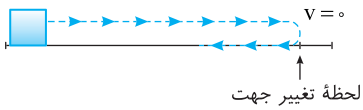
یادآوری معادله سرعت - زمان یک رابطهٔ ریاضی بین سرعت متحرک و زمان است که با قراردادن زمان می‌توان سرعت متحرک را در هر لحظه به‌دست آورد.

خط فکری در صورت مسئله خواسته شده لحظه‌ای که تندی $3m/s$ است را حساب کنیم. تندی کمیت نرده‌ای است و برابر اندازهٔ سرعت است از این‌رو سرعت می‌تواند $+3m/s$ و $-3m/s$ باشد. یک‌بار $v=+3m/s$ و بار دیگر $v=-3m/s$ را در معادله سرعت زمان قرار بدهید.

$$v=-4t+1\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{v=3m/s} 3=-4t+1\Rightarrow 2=-4t\Rightarrow t=-0/5 \text{ غیرقابل قبول}\\ \xrightarrow{v=-3m/s} -3=-4t+1\Rightarrow -4=-4t\Rightarrow t=1s\end{cases}$$

B ۲۰۵ — ۳

خط فکری برای آنکه متحرکی که روی خط راست در حرکت است تغییر جهت بدهد باید ابتدا سرعتش صفر شده سپس تغییر جهت بدهد. بنابراین باید در معادلهٔ سرعت - زمان، سرعت را برابر صفر قرار دهید اما دقت کنید که آیا علامت سرعت تغییر می‌کند یا نه؟



نکته هرگاه معادلهٔ سرعت زمان درجه ۲ باشد و با قراردادن $v=0$ در معادله اگر زمان منفی به‌دست بیاید و یا معادله ریشه مضاعف داشته باشد تغییر جهتی رخ نمی‌دهد و تنها وقتی که زمان مثبت به‌دست بیاید تغییر جهت اتفاق افتاده است. معادلهٔ سرعت را مساوی صفر قرار می‌دهیم: $v=t^2-6t+9=(t-3)^2\geq 0$

دقت کنید سرعت تغییر علامت نمی‌دهد و همواره $v\geq 0$ است و متحرک تغییر جهت نخواهد داد.

A ۲۰۶ — ۱

خط فکری اول باید مشخص کنید که ۲ ثانیهٔ دوم یعنی چه؟ یعنی بازهٔ زمانی بین $t=2s$ تا $t=4s$.

$$0 \xrightarrow{\text{۲ ثانیه اول}} 2s \xrightarrow{\text{۲ ثانیه دوم}} 4s \xrightarrow{\text{۲ ثانیه سوم}} 6s\ldots$$

شتاب متوسط یعنی آهنگ تغییر سرعت بنابراین باید سرعت را در لحظه‌های $t=2s$ و $t=4s$ حساب کنید سپس شتاب متوسط را به‌دست بیاورید.

۱ سرعت متحرک را در این دو لحظه حساب می‌کنیم.

$$v=3t^2-8\Rightarrow\begin{cases}v_1=3\times(2)^2-8\Rightarrow v_1=4m/s\\ v_2=3\times(4)^2-8\Rightarrow v_2=40m/s\end{cases}$$

۲ شتاب متوسط را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\Rightarrow a_{av}=\frac{40-4}{2}\Rightarrow a_{av}=18m/s^2$$

بازی با سؤال **متحرکی در مسیر مستقیم حرکت می‌کند و معادلهٔ سرعت - زمان آن در SI به‌صورت $v=2t^2-4t-2$ است. شتاب متوسط آن در ۲ ثانیهٔ دوم چند متر بر مجذور ثانیه است؟** خارج تجربی - ۹۸

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

یاسخ ۱ از معادلهٔ سرعت زمان سرعت‌ها را به‌دست می‌آوریم.

$v=2t^2-4t-2$

$$\begin{cases}\xrightarrow{t=2s} v=2(2)^2-4(2)-2\Rightarrow v_1=-2m/s\\ \xrightarrow{t=4s} v=2(4)^2-4(4)-2=+14m/s\end{cases}$$

۲ شتاب متوسط خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{14-(-2)}{2}\Rightarrow a_{av}=8m/s^2$$

گزینه ۴

B ۲۰۷ — ۱

یادآوری ریاضی $\sin\frac{\pi}{2}=1\ ,\ \sin\frac{3\pi}{2}=-1$

۱ سرعت در لحظه‌های $t=\frac{1}{8}s$ و $t=\frac{3}{8}s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$v_1=2\sin(4\pi\times\frac{1}{8})+0/5=2\sin(\frac{\pi}{2})+0/5$$
$$\Rightarrow v_1=2\times 1+0/5\Rightarrow v_1=2/5m/s$$
$$v_2=2\sin(4\pi\times\frac{3}{8})+0/5=2\sin(\frac{3\pi}{2})+0/5$$
$$\Rightarrow v_2=2\times(-1)+0/5\Rightarrow v_2=-1/5m/s$$

۲ بنابراین شتاب متوسط در این بازه برابر است با:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_2-v_1}{\Delta t}=\frac{-1/5-2/5}{\frac{3}{8}-\frac{1}{8}}=\frac{-4}{\frac{1}{4}}=-16m/s^2$$

B ۲۰۸ — ۴

۱ سرعت در لحظهٔ $t_1=1s$ و $t_2=4s$ را حساب می‌کنیم:

$$v=t^2-bt+1\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t=1s} v_1=1-b\times 1+1\Rightarrow v_1=2-b\\ \xrightarrow{t_2=4s} v_2=16-4b+1\Rightarrow v_2=17-4b\end{cases}$$

۲ شتاب متوسط صفر است بنابراین:

$$v_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\Rightarrow 0=\frac{17-4b-(2-b)}{4-1}\Rightarrow 15-3b=0\Rightarrow b=5$$

۳ معادلهٔ سرعت را کامل می‌کنیم. $v=t^2-5t+1$

۴ سرعت را مساوی $-5m/s$ قرار می‌دهیم.

$$v=-5m/s\Rightarrow t^2-5t+1=-5\Rightarrow t^2-5t+6=0$$
$$\Rightarrow(t-2)(t-3)=0\Rightarrow t=2s, t=3s$$

B ۲۰۹ — ۲

۱ متحرک از مکان $x_1=2m$ به مکان $x_2=-2m$ رفته است. حال به کمک معادلهٔ سرعت - مکان سرعت متحرک را در این دو مکان به‌دست می‌آوریم:

$$v=4x+2\Rightarrow v_1=4(2)+2=10m/s\ ,\ v_2=4(-2)+2=-6m/s$$

۲ شتاب متوسط در این مدت برابر است با:

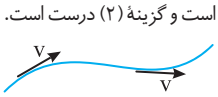
$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_2-v_1}{\Delta t}=\frac{-6-10}{2}=-8m/s^2$$

A ۲۱۰ — ۴

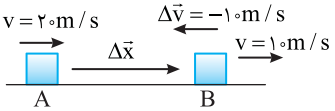
۱ با توجه به تعریف سرعت متوسط $\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}$ بردار سرعت متوسط همواره در جهت بردار جابه‌جایی است و گزینهٔ (۱) درست است.

۲ سرعت در هر نقطه از مسیر حرکت بر مسیر مماس است و گزینهٔ (۲) درست است.

۳ هرگاه حرکت روی خط راست (مثلاً محور x) باشد در این صورت بردار سرعت متحرک در امتداد محور xهاست (یا در جهت مثبت و یا در جهت منفی آن. وقتی بردار سرعت در امتداد محور xهاست بردار تغییر سرعت $(\Delta\vec{v})$ نیز در امتداد محور xها بوده در نتیجه بردار شتاب $\vec{a}=\Delta\vec{v}/\Delta t$ نیز در امتداد محور xهاست یعنی بردار سرعت و بردار شتاب لحظه‌ای همواره در یک امتداد و هم‌راستا هستند و گزینهٔ (۳) نیز درست است.



۴ بردار شتاب متوسط با تغییر سرعت هم‌جهت است $\vec{a}_{av}=\Delta\vec{v}/\Delta t$ و بردار سرعت متوسط با بردار جابه‌جایی ($\vec{v}_{av}=\Delta\vec{x}/\Delta t$) هم‌جهت است. به شکل زیر دقت کنید متحرک از A به B رفته و جابه‌جایی آن نیز مثبت بوده اما به دلیل کاهش سرعت، بردار تغییر سرعت منفی و خلاف جهت جابه‌جایی است یعنی بردار شتاب متوسط و بردار سرعت متوسط در این مثال هم‌جهت نبوده و گزینهٔ (۴) نادرست است.



۲ ۲۱۱ A

خط فکری حرکت تندشونده حرکتی است که در آن تندی متحرک در حال افزایش است برای این منظور در حرکت روی خط راست باید بردار سرعت و بردار شتاب هم‌جهت و هم‌علامت باشند، یعنی هر دو مثبت و یا هر دو منفی باشند. حرکت کندشونده حرکتی است که در آن تندی متحرک در حال کاهش است از این‌رو در حرکت روی خط راست باید بردار سرعت و بردار شتاب در خلاف جهت هم باشند یعنی اگر بردار سرعت مثبت باشد باید بردار شتاب منفی و یا اگر بردار سرعت منفی باشد باید بردار شتاب مثبت باشد.

به شکل‌ها نگاه کنید و ببینید که در کدام شکل‌ها بردار سرعت و شتاب در خلاف هم هستند.

(الف) هر دو بردار شتاب و سرعت هم‌جهت بوده و حرکت تندشونده است.

(ب) بردار شتاب منفی و بردار سرعت مثبت بوده و حرکت کندشونده است.

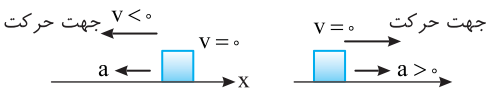
(پ) بردار شتاب مثبت و بردار سرعت منفی بوده و حرکت کندشونده است.

(ت) بردار شتاب و سرعت هر دو منفی بوده و حرکت تندشونده است.

بنابراین در دو مورد حرکت کندشونده است.

۳ ۲۱۲ A

نکته هرگاه جسم از حال سکون روی خط راست به حرکت درآید، شتاب شروع حرکت جسم قطعاً در جهت حرکت جسم است.



در گزینهٔ (۱) جسم از حال سکون در جهت منفی روی محور شروع به حرکت کرده بنابراین شتاب حرکت نیز در جهت منفی محور بوده و گزینهٔ (۱) درست است.

وقتی حرکت روی خط راست تندشونده باشد یعنی سرعت متحرک در یک جهت در حال افزایش بوده و متحرک تغییر جهت نمی‌دهد بنابراین جابه‌جایی و مسافت طی شده یکسان است $(d=\ell)$ و گزینهٔ (۲) درست است.

در حرکت کندشونده روی خط راست باید بردار سرعت و بردار شتاب در خلاف جهت هم باشند و لزومی ندارد شتاب منفی باشد بلکه کافی است اگر بردار سرعت منفی است بردار شتاب مثبت باشد بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

در هر حرکتی طول مسیر حرکت (مسافت) همواره برابر یا بزرگ‌تر از اندازهٔ بردار جابه‌جایی است و گزینهٔ (۴) درست است.

۳ ۲۱۳ B

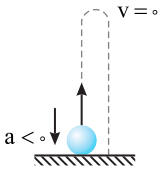
در حرکت تندشونده بردار سرعت و شتاب هم‌جهت و هم‌علامت هستند یعنی اگر $a<0$ باشد بردار سرعت نیز منفی است و تا زمانی که شتاب منفی است سرعت در حال افزایش است و حرکت تندشونده است و هرگز کندشونده نمی‌شود مگر آنکه علامت شتاب تغییر کند که در این مسئله بیان شده a منفی است و علامت آن تغییر نمی‌کند بنابراین هرگز گزینهٔ (۳) اتفاق نمی‌افتد. اما گزینه‌های دیگر را بررسی می‌کنیم.

اگر متحرک با سرعت منفی در جهت منفی محور با شتاب $a<0$ در حرکت باشد، حرکت تندشونده است و گزینهٔ (۱) می‌تواند درست باشد.

اگر سرعت متحرک مثبت اما شتاب منفی $(a<0)$ باشد حرکت کندشونده است در این‌صورت دو حالت ممکن است اتفاق بیافتد.

حالت اول: تندی متحرک کاهش یافته، سرعت صفر شود و متحرک ساکن بماند در این حالت گزینهٔ (۲) درست است.

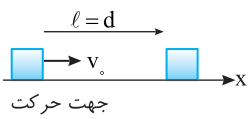
حالت دوم: متحرک پس از آنکه سرعتش صفر شد با همان شتاب بازگردد مانند گلوله‌ای که در شرایط خلأ رو به بالا پرتاب می‌کنیم گلوله متوقف شده و برمی‌گردد و گزینهٔ (۴) درست است.



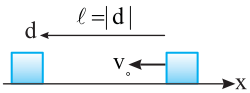
۱ ۲۱۴ B

خط فکری هرگاه مسافت طی شده و بزرگی جابه‌جایی برابر باشد حرکت الزاماً روی خط راست است. اما دو حالت وجود دارد یک حالت آنکه جابه‌جایی مثبت بوده و حالت دیگر آن که جابه‌جایی منفی باشد. بنابراین شما باید دو حالت را بررسی کرده تا بتوانید نوع حرکت را بیان کنید.

حالت اول: متحرک در جهت مثبت در حرکت است و با توجه به اینکه شتاب متوسط در جهت سرعت اولیه است باید سرعت در حال افزایش و حرکت تندشونده باشد.

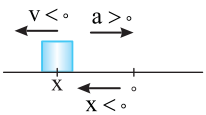


حالت دوم: متحرک در جهت منفی در حرکت باشد در این حالت نیز با توجه به فرض مسئله بردار شتاب متوسط هم‌جهت بردار سرعت اولیه بوده و حرکت تندشونده است، بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

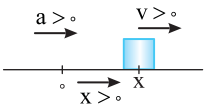


۴ ۲۱۵ B

۱ تست جالبی‌ست، حاصل‌ضرب مکان و سرعت مثبت شده است یعنی وقتی مکان مثبت است، سرعت نیز مثبت است مانند شکل (۱) و وقتی مکان منفی بوده، سرعت نیز منفی است مانند شکل (۲)، بنابراین در هر دو شکل متحرک در حال دور شدن از مبدأ است و گزینهٔ (۱) و (۲) نادرست است.



شکل (۲)



شکل (۱)

۲ شتاب حرکت مثبت بیان شده $(a>0)$ بنابراین در شکل (۱) بردار شتاب و سرعت هم جهت حرکت بوده و حرکت تندشونده است و در شکل (۲)، بردار شتاب و سرعت خلاف‌جهت بوده و حرکت کندشونده است در نتیجه ممکن است حرکت کندشونده یا تندشونده باشد از این‌رو گزینهٔ (۳) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.

نکته هرگاه حاصل‌ضرب سرعت در مکان مثبت باشد $(vx>0)$ متحرک در حال دور شدن از مبدأ و اگر منفی باشد $(vx<0)$ متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است.

۱ ۲۱۶ B

شتاب حرکت از رابطهٔ $a=2t+1$ پیروی می‌کند و با توجه به اینکه زمان همواره مثبت در نظر گرفته می‌شود. با گذشت زمان شتاب افزایش می‌یابد اما جهت آن تغییر نمی‌کند. جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده بنابراین سرعت و جهت حرکت جسم همان جهت بردار شتاب است و حرکت تندشونده است و چون شتاب تغییر جهت نمی‌دهد، حرکت کندشونده نخواهد شد.

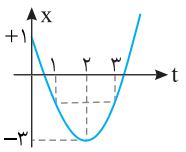
۱ ۲۱۷ B

خط فکری معادله $x=t^2-4t+1$ یک تابع درجه ۲ بوده و نمودار آن سهمی است. سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس آن متقارن است رأس سهمی نقطه بیشینه یا کمینه سهمی است و در این نقطه خط مماس بر نمودار موازی محور افقی بوده و شیب آن صفر است. شیب خط مماس بر منحنی مکان - زمان برابر سرعت لحظه‌ای بنابراین در رأس سهمی سرعت لحظه‌ای صفر است بنابراین اولین کاری که شما باید انجام بدهید به‌دست آوردن مختصات رأس سهمی است تا بتوانید در مورد سرعت متوسط و شتاب متوسط اظهارنظر کنید.

۱ معادلهٔ حرکت به‌صورت $x=t^2-4t+1$ است و مختصات رأس آن خواهد شد:

$$t=\frac{-b}{2a}\Rightarrow t=\frac{-(-4)}{2\times1}\Rightarrow t=2s\Rightarrow x=4-8+1=-3m$$

۲ نمودار مکان - زمان را رسم می‌کنیم. در دو لحظهٔ $t=1s$ و $t=3s$ مکان متحرک یکی است و جابه‌جایی و در نتیجه سرعت متوسط صفر است و گزینهٔ (۱) درست است.



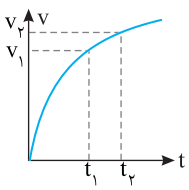
۳ در لحظه‌های $t=1s$ و $t=3s$ شیب خط مماس (سرعت لحظه‌ای متحرک) قرینه است بنابراین تغییر سرعت $(\Delta v\neq 0)$ صفر نبوده و شتاب متوسط حرکت $(a_{av}=\Delta v/\Delta t)$ نیز صفر نمی‌شود و گزینهٔ (۲) نادرست است.

۴ در لحظهٔ $t=2s$ یعنی رأس سهمی سرعت لحظه‌ای صفر می‌شود اما شتاب لحظه‌ای صفر نیست و گزینهٔ (۳) نادرست است.

A ۲۱۸ ۴

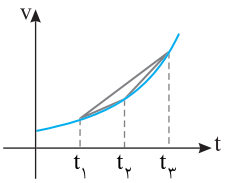
شیب خط قاطع در لحظه‌های t_1 و t_2 روی نمودار سرعت - زمان، برابر شتاب متوسط است.

$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$$



B ۲۱۹ ۳

خط فکری شیب خط واصل بین دو لحظه در نمودار $v-t$ برابر شتاب متوسط در آن بازه است. از این‌رو برای بررسی شتاب متوسط شما باید خط قاطع بر نمودار را در هر بازه رسم کنید. شتاب متوسط در بازهٔ صفر تا t_1، t_1 تا t_2، t_2 تا t_3 و t_1 تا t_3 برابر شیب خط واصل مشخص شده در نمودار است و با توجه به نمودار $v-t$، شیب خط قاطع در بازهٔ t_2 تا t_3 بیشتر است. از این‌رو شتاب متوسط در این بازه بزرگ‌تر است.

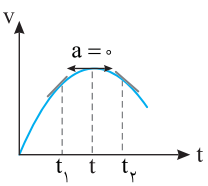


B ۲۲۰ ۴

یادآوری بنا به قانون دوم نیوتون نیروی خالص وارد بر جسم برابر $F=ma$ است.

خط فکری برای بررسی تغییرات نیرو باید تغییرات شتاب را بررسی کنیم و برای بررسی تغییرات شتاب باید تغییرات شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ را بررسی کنیم.

از لحظهٔ t_1 تا t شیب خط مماس یعنی شتاب و در نتیجه نیرو در حال کاهش بوده تا به صفر برسد از t به بعد قدرمطلق شیب خط مماس بر نمودار در حال افزایش است (خط مماس به حالت قائم نزدیک می‌شود) بنابراین بزرگی شتاب در حال افزایش یعنی بزرگی نیرو در حال افزایش است.



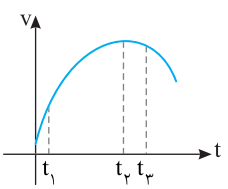
بازی با سؤال **نمودار $v-t$ متحرکی به صورت شکل روبه‌رو است. نیروی وارد بر متحرک در کدام لحظه بزرگ‌تر است؟**

۱) t_1

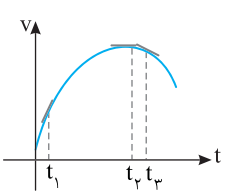
۲) t_2

۳) t_3

۴) نیروی وارد بر متحرک ثابت است.



پاسخ **با توجه به قانون دوم نیوتون $F=ma$ است، پس هرچه شتاب بزرگ‌تر باشد نیرو هم بزرگ‌تر است و می‌دانیم شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ در هر لحظه برابر شتاب در آن لحظه است.**

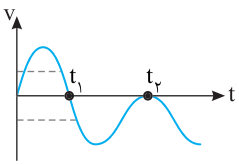


با توجه به شکل اندازهٔ شیب خط مماس در t_1 بزرگ‌تر از اندازهٔ شیب خط مماس در دو لحظهٔ دیگر است پس در t_1 نیروی بزرگتری به جسم وارد می‌شود.

گزینهٔ ۱

A ۲۲۱ ۳

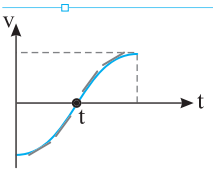
محل برخورد نمودار سرعت - زمان با محور زمان به مفهوم توقف جسم است. بنابراین در لحظه‌های t_1 و t_2 سرعت صفر است. اما متحرک در لحظهٔ t_1 تغییر جهت می‌دهد.



زیرا سرعت آن قبل از t_1 مثبت و بعد از t_1 منفی است. یعنی سرعت تغییر علامت و متحرک تغییر جهت داده است. اما در لحظهٔ t_2 سرعت متحرک صفر شده اما تغییر علامت نداده و هم قبل و بعد از t_2 هم‌چنان سرعت منفی است یعنی متحرک تغییر جهت نداده است، بنابراین سرعت دو بار صفر و متحرک یک بار تغییر جهت داده است.

B ۲۲۲ ۳

به نمودار دقت کنید.



۱ سرعت در لحظهٔ t صفر شده و تغییر علامت داده بنابراین متحرک یک بار تغییر جهت داده است و گزارهٔ (الف) درست است.

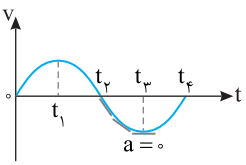
۲ اندازهٔ سرعت از لحظهٔ $t=0$ تا لحظهٔ t در حال کاهش است و از لحظهٔ t به بعد اندازهٔ سرعت در حال افزایش است و گزارهٔ (ب) نادرست است.

۳ با توجه به شیب مماس‌های روی نمودار ابتدا شیب در حال افزایش (خط مماس در حال نزدیک شدن به حالت قائم) و سپس در حال کاهش (خط مماس در حال افقی شدن) است بنابراین شتاب ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد و گزارهٔ (پ) درست است.

۴ اما در تمام مدت شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان مثبت و شتاب مثبت است و گزارهٔ (ت) نادرست است. در نتیجه گزاره‌های (الف) و (پ) درست می‌باشند.

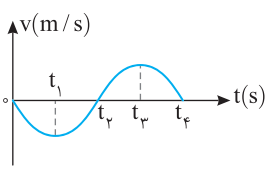
A ۲۲۳ ۳

با توجه به نمودار $v-t$ در لحظهٔ t_2 سرعت صفر است و از این لحظه تا لحظهٔ t_3 اندازهٔ سرعت در حال افزایش و حرکت تندشونده است و گزینهٔ (۱) درست است. اگر در بازهٔ t_2 تا t_3 بر نمودار خط مماس رسم کنیم شیب خط مماس منفی و شتاب منفی است و گزینهٔ (۲) درست است.



اما با رسم خط‌های مماس بر نمودار در بازهٔ t_2 تا t_3 مشاهده می‌شود که شیب خط مماس در حال کاهش است و در t_3 شیب خط مماس صفر می‌شود. بنابراین شتاب در حال کاهش و در t_3 شتاب صفر می‌شود و گزینهٔ (۳) نادرست است. در بازهٔ t_2 تا t_3 نمودار زیر محور زمان قرار دارد و سرعت در این بازه منفی است و گزینهٔ (۴) درست است.

بازی با سؤال **نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور xها در حرکت است. مطابق شکل زیر است. در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 حرکت متحرک .....شونده و علامت شتاب ..... است.**



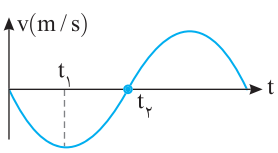
۱) تند، منفی

۲) تند، مثبت

۳) کند، مثبت

۴) کند، منفی

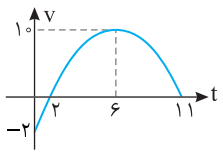
پاسخ **در بازهٔ t_1 تا t_2 اندازهٔ سرعت در حال کاهش است و در t_2 سرعت صفر می‌شود، بنابراین حرکت کندشونده است اما شیب خط مماس بر نمودار در این بازه مثبت و شتاب مثبت است. (علامت سرعت در این بازه منفی و علامت شتاب مثبت است $(av<0)$ و حرکت کندشونده است.)**



گزینهٔ ۳

A ۲۲۴ ۲

خط فکری هرگاه تندی متحرک (اندازه سرعت) در حال کاهش باشد حرکت کندشونده و هرگاه تندی در حال افزایش باشد حرکت تندشونده است از این‌رو شما باید به تغییر اندازهٔ سرعت دقت کنید.



۱ در بازهٔ صفر تا ۲s اندازهٔ سرعت از ۲m/s به صفر می‌رسد؛ حرکت کندشونده است.

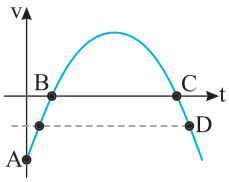
۲ در بازهٔ ۶s تا ۱۱s سرعت از ۱۰m/s به صفر می‌رسد و حرکت کندشونده است.

۳ جمعاً به مدت ۲s+۵s=۷s حرکت کندشونده است.

۴ از ۲s تا ۶s سرعت از صفر به ۱۰m/s رسیده است؛ بنابراین ۴s حرکت تندشونده است.

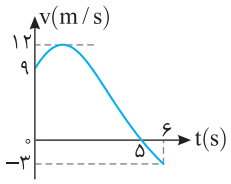
A ۲۲۵ ۴

در لحظات B و C که نمودار سرعت محور زمان را قطع کرده سرعت متحرک صفر شده یعنی متحرک به‌طور لحظه‌ای ساکن است. در لحظهٔ A بزرگی سرعت در حال کوچک‌تر شدن است و سرعت به سمت صفر می‌رود. بنابراین در این لحظه حرکت کندشونده است و در لحظهٔ D بزرگی سرعت در حال افزایش می‌باشد پس حرکت در این لحظه تندشونده است.



A ۲۲۶ ۲

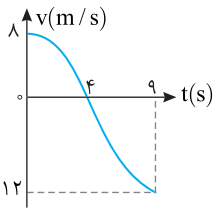
با توجه به تعریف شتاب متوسط، $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$، کافی است در لحظهٔ $t=0$ و $t=6s$ از روی نمودار سرعت متحرک را مشخص کرده و در رابطهٔ شتاب متوسط قرار دهیم.



$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{-3-9}{6-0}=-2m/s^2$$

A ۲۲۷ ۴

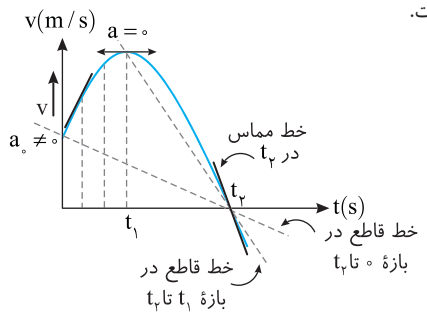
در بازهٔ زمانی که اندازهٔ سرعت در حال کاهش است حرکت کندشونده است بنابراین با توجه به نمودار سرعت - زمان در بازهٔ صفر تا ۴s، حرکت کندشونده است و سرعت از ۸ متر بر ثانیه به صفر متر بر ثانیه کاهش می‌یابد و در بازهٔ ۴s تا ۹s، اندازهٔ سرعت از صفر به ۱۲m/s در خلاف جهت محور می‌رسد یعنی تندی افزایش می‌یابد و حرکت تندشونده است. از این‌رو در بازهٔ صفر تا ۴s و ۴s تا ۹s شتاب متوسط خواهد شد:



$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow\begin{cases}a_{av_{\text{تندشونده}}}=\frac{-12-0}{9-4}=-2/4m/s^2\\ a_{av_{\text{کندشونده}}}=\frac{0-8}{4-0}=-2m/s^2\end{cases}\Rightarrow\frac{a_{av_{\text{تندشونده}}}}{a_{av_{\text{کندشونده}}}}=\frac{6}{5}$$

B ۲۲۸ ۴

مطابق شکل در بازهٔ صفر تا t_1 سرعت متحرک در حال افزایش است و گزینهٔ (۱) نادرست است.

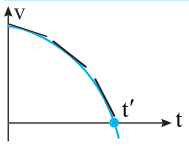


یادآوری شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ برابر شتاب لحظه‌ای است. در لحظهٔ $t=0$ شیب خط مماس بر نمودار با قدرمطلق شیب خط مماس در لحظهٔ t_2 برابر نیست و گزینهٔ (۲) نادرست است.

در بازهٔ صفر تا t_1 شیب خط مماس بر نمودار مثبت و شتاب مثبت است و در بازهٔ t_1 تا t_2 شیب خط مماس بر نمودار منفی و شتاب منفی است از این‌رو گزینهٔ (۳) نادرست است.

یادآوری شیب خط قاطع بین دو لحظه در نمودار $v-t$ برابر شتاب متوسط است. با رسم خط قاطع در بازهٔ ۰ تا t_2 و t_1 تا t_2 مشخص است که قدرمطلق شیب خط قاطع در بازهٔ t_1 تا t_2 بزرگ‌تر از شیب خط قاطع در بازهٔ صفر تا t_2 است، بنابراین شتاب متوسط آن بیشتر و گزینهٔ (۴) درست است.

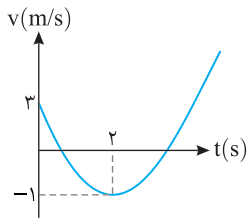
A ۲۲۹ ۳



با توجه به نمودار $v-t$ در بازهٔ صفر تا t' سرعت مثبت است. اما شیب نمودار که معرف شتاب بوده منفی است، بنابراین: $a<0,\quad v>0$

B ۲۳۰ ۱

خط فکری به نظر می‌رسد راهی به جز به دست آوردن معادله سرعت - زمان به کمک اعداد روی نمودار نداریم. بعد از نوشتن معادله حرکت در لحظهٔ $t=1s$ و $t_2=7s$ سرعت‌ها را به‌دست می‌آوریم و شتاب متوسط را حساب می‌کنیم.



۱ در لحظهٔ $t=0$، سرعت $+3m/s$ است بنابراین

$$v=at^2+bt+c\Rightarrow 3=0+0+c\Rightarrow c=3$$

۲ مختصات رأس سهمی

$$t=-\frac{b}{2a}\Rightarrow 2=-\frac{b}{2a}\Rightarrow b=-4a\quad (1)$$

۳

$$v=at^2+bt+3\xrightarrow{t=2s,\ v=-1m/s}-1=4a+2b+3\Rightarrow 4a+2b=-4\ (2)$$

از رابطهٔ (۱) در رابطهٔ (۲) جای‌گذاری می‌کنیم.

$$4a+2(-4a)=-4\Rightarrow -4a=-4\Rightarrow a=1,\ b=-4\times 1=-4$$

۴ معادلهٔ سرعت - زمان خواهد شد $v=t^2-4t+3$

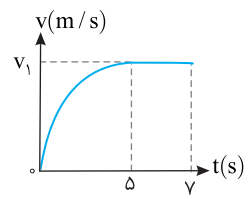
۵ سرعت در لحظه‌های $t_1=1s$ و $t_2=7s$ را حساب می‌کنیم.

$$t=1s\Rightarrow v=0,\ t=7s\Rightarrow v=49-28+3\Rightarrow v=24m/s$$

۶ شتاب متوسط برابر است با:

$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\Rightarrow a_{av}=\frac{24-0}{7-1}\Rightarrow a_{av}=4m/s^2$$

B ۲۳۱ ۱



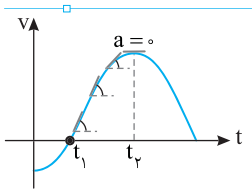
۱ با توجه به نمودار در بازهٔ ۵s تا ۷s سرعت متحرک تغییر نکرده است و بنا به رابطهٔ سرعت ثابت خواهیم داشت:

$$\Delta x=v_1\Delta t\Rightarrow 18=v_1\times 2\Rightarrow v_1=9m/s$$

۲ شتاب متوسط برابر است با:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{9-0}{5}=1/8m/s^2$$

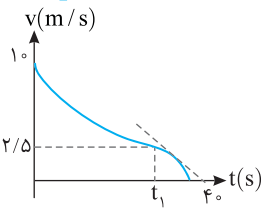
A ۲۳۲ ۳



در بازهٔ صفر تا t_1 تندی جسم در حال کاهش بوده و در لحظهٔ t_1 تندی صفر می‌شود یعنی در این بازه حرکت کندشونده است در بازهٔ t_1 تا t_2 سرعت در حال افزایش بوده و حرکت تندشونده است در صورت سؤال پرسیده شده در مدتی که حرکت تندشونده است، شتاب چگونه تغییر می‌کند. با توجه به اینکه شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ اندازهٔ شتاب را مشخص می‌کند در بازهٔ t_1 تا t_2 با رسم چند خط مماس مشخص می‌شود که شیب خط مماس در حال کاهش یعنی شتاب در حال کاهش است.

B ۲۳۳ ۱

۱ شتاب در لحظهٔ t_1 یعنی شیب خط مماس در نمودار در لحظهٔ t_1 شتاب لحظه‌ای را از روی نمودار حساب می‌کنیم.



$$a_{t_1}=\frac{0-2/5}{40-t_1}$$

۲ شتاب متوسط در بازهٔ ۰ تا t_1 خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{2/5-10}{t_1-0}=\frac{-7/5}{t_1}$$

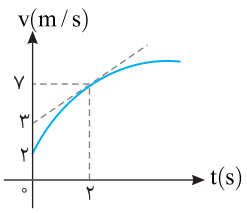
۳ با توجه به فرض مسئله این دو شتاب را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{0-2/5}{40-t_1}=\frac{2/5-10}{t_1-0}\Rightarrow\frac{-2/5}{40-t_1}=\frac{-7/5}{t_1-0}\Rightarrow\frac{1}{40-t_1}=\frac{3}{t_1}$$

$$\Rightarrow 120-3t_1=t_1\Rightarrow t_1=30s$$

B ۲۳۴ ۱

۱ شتاب لحظه‌ای برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان است، بنابراین برای شتاب لحظه‌ای در $t=2s$ شیب خط مماس را در این لحظه به‌دست می‌آوریم.



$$a=\frac{7-3}{2}=2m/s^2$$

۲ شتاب متوسط نیز در بازهٔ صفر تا ۲s برابر است با:

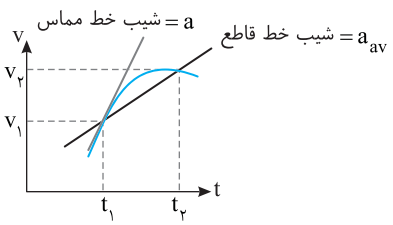
$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{7-2}{2}=2/5m/s^2$$

۳ نسبت شتاب‌ها را حساب می‌کنیم.

$$\frac{a}{a_{av}}=\frac{2}{2/5}=0/8$$

B ۲۳۵ ۲

یادآوری در نمودار سرعت - زمان، شیب خط قاطع بین دو لحظه برابر شتاب متوسط و شیب خط مماس بر نمودار برابر اندازه سرعت لحظه‌ای است.



خط فکری در نقاط بیشینه و کمینه نمودار سرعت - زمان، خط مماس موازی محور زمان بوده و شیب آن و در نتیجه شتاب حرکت صفر است. از طرفی معادلهٔ $v=t^2-8t+12$ تابع درجه ۲ بوده و نمودار آن سهمی است، بنابراین شما تنها کافی است مختصات رأس سهمی $(t=-\frac{b}{2a})$ را حساب کنید.

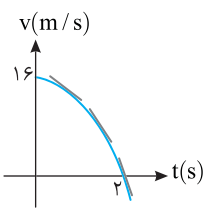
در رأس سهمی شیب خط مماس صفر است، لحظهٔ رأس سهمی را حساب می‌کنیم.

$$v=t^2-8t+12\ ,\ t=\frac{-b}{2a}\Rightarrow t=\frac{8}{2}=4s$$

B ۲۳۶ ۲

خط فکری برای بررسی نوع حرکت شما باید نمودار سرعت - زمان را رسم کنید سپس تمام گزینه‌ها را به کمک نمودار رسم شده بررسی کنید.

۱ معادلهٔ سرعت - زمان $v=16-4t^2$ تابع درجه ۲ بوده و نمودار آن سهمی است. نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم:



$$v=16-4t^2\Rightarrow v=4(4-t^2)$$

$$\xrightarrow{v=0} t=2s$$

۲ با توجه به شیب خط مماس بر نمودار، در کل مسیر این شیب منفی است. پس شتاب متحرک در طول مسیر در خلاف جهت محور xها است، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.

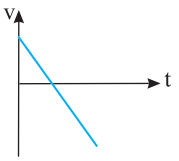
۳ با توجه به نمودار از صفر تا ۲s سرعت متحرک مثبت است یعنی متحرک در جهت مثبت محور x در حرکت است و پس از $t=2s$ سرعت متحرک منفی می‌شود یعنی متحرک در جهت منفی محور x حرکت می‌کند و به حرکت خود ادامه می‌دهد، بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

۴ با توجه به نمودار قبل از $t=2s$ تندی در حال کاهش و نوع حرکت کندشونده و بعد از $t=2s$ تندی جسم در حال افزایش و حرکت تندشونده است، بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

۵ نوع حرکت در لحظهٔ $t=2s$ از کندشونده به تندشونده تغییر می‌کند، اما قبل و بعد از $t=4s$ حرکت تندشونده است، بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۲۳۷ ۲

نمودار سرعت - زمان خط راست بوده از این‌رو در تمام لحظات شیب آن ثابت بوده یعنی شتاب حرکت در تمام مدت ثابت است از طرفی شیب نمودار منفی است از این‌رو شتاب ثابت و منفی است.

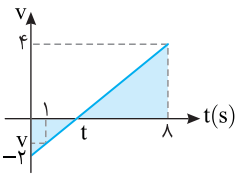


A ۲۳۸ ۱

شیب خط نمودار را نوشته و سرعت در لحظهٔ $t=1s$ را حساب می‌کنیم.

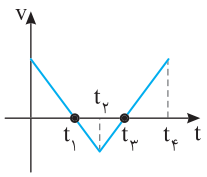
$$\frac{4-(-2)}{8-0}=\frac{v-(-2)}{1-0}\Rightarrow\frac{6}{8}=\frac{v+2}{1}\Rightarrow\frac{3}{4}=v+2\Rightarrow 4v+8=3\Rightarrow v=-\frac{5}{4}m/s$$

بنابراین سرعت $-\frac{5}{4}m/s$ و به دلیل منفی بودن سرعت متحرک خلاف جهت محور x در حال حرکت است.



A ۲۳۹ ۳

خط فکری هرگاه سرعت مثبت است متحرک در جهت محور xها حرکت کرده و اگر سرعت منفی باشد متحرک خلاف جهت محور xها حرکت می‌کند. هم‌چنین اگر نمودار به محور افقی نزدیک شود بزرگی سرعت در حال کاهش می‌باشد و حرکت کندشونده و اگر نمودار در حال دور شدن از این محور افقی باشد بزرگی سرعت در حال افزایش می‌باشد و حرکت تندشونده است.



۱ در بازهٔ صفر تا t_1 سرعت مثبت و حرکت در جهت مثبت محور xها بوده و گزینهٔ (۱) نادرست است.

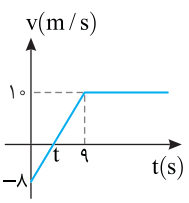
۲ در بازهٔ t_1 تا t_2 سرعت منفی و متحرک در خلاف جهت محور xها در حال حرکت است از طرفی بزرگی سرعت (تندی متحرک) در حال افزایش یعنی حرکت تندشونده است و گزینهٔ (۲) نادرست است.

۳ در بازهٔ t_2 تا t_3 سرعت منفی و جهت حرکت خلاف جهت محور xها است و تندی (اندازهٔ سرعت) در حال کاهش است به‌طوری که در نقطهٔ t_3 سرعت صفر می‌شود یعنی حرکت کندشونده است و گزینهٔ (۳) درست است.

۴ در بازهٔ t_3 تا t_4 سرعت مثبت بوده و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۲۴۰ ۴

ابتدا لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود (t) را به کمک شیب خط به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{10-(-8)}{9-0}=\frac{0-(-8)}{t-0}\Rightarrow 2=\frac{8}{t}\Rightarrow t=4s$$

اکنون با داشتن لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود می‌توان گزینه‌ها را بررسی کرد.

بـا توجـه به نمودار در لحظهٔ $t=۳s$ بزرگی سـرعت متحرک در حال کاهش اسـت و در $t=۴s$ متحـرک متوقـف می‌شـود، بنابراین در $t=۳s$ حرکت کندشـونده و گزینهٔ (۱) نادرست است.

در بازهٔ زمانی ۰ تا ۹s شیب خط نمودار $v-t$ تغییر نمی‌کند بنابراین شتاب در این بازهٔ زمانی ثابت است پس در لحظهٔ $t=۴s$ نیز شتاب تغییر نمی‌کند و گزینهٔ (۲) نادرست است.

در $t=۹s$ به بعد بزرگی سرعت ثابت و برابر $۱۰m/s$ باقی می‌ماند، بنابراین حرکت نه تندشونده و نه کندشونده است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

در $t=۷s$ بزرگی سرعت متحرک در حال افزایش است و در $t=۹s$ سرعت متحرک به بیشینه مقدار خود یعنی $v=۱۰m/s$ می‌رسد بنابراین در این لحظه حرکت تندشونده و گزینهٔ (۴) درست است.

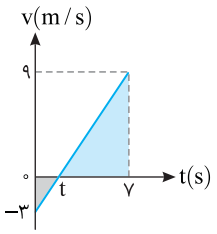
A ۲۴۱ ۴

نکته اگر مکان اولیهٔ متحرکی مشخص نباشد نمودار سرعت - زمان دربارهٔ مکان متحرک و هم‌چنین نزدیک یا دور شدن متحرک به مبدأ مکان اطلاعاتی به ما نمی‌دهد.

با توجه به نکته بیان شده گزینهٔ (۴) درست است.

A ۲۴۲ ۳

لحظـهٔ تغییر جهت، لحظه‌ای اسـت که سـرعت صفر شده و تغییر علامت می‌دهد. نسبت تشابه را برای دو مثلث رنگی می‌نویسـیم و لحظهٔ تغییر جهت را به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{۹}{۳}=\frac{۷-t}{t}\Rightarrow ۳t=۷-t\Rightarrow t=\frac{۷}{۴}s$$

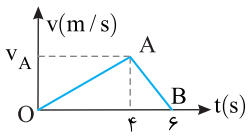
نمودار سـرعت - زمان خط راسـت است و شیب آن ثابت اسـت. از این‌رو شـتاب حرکت در تمام بازه‌های زمانی ثابت و یکسـان اسـت و خواهد شد:

$$a=a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{۹-(-۳)}{۷}=\frac{۱۲}{۷}m/s^۲$$

A ۲۴۳ ۳

یادآوری شـیب نمودار سـرعت زمان برابر شتاب متحرک است.

در هر قسمت شتاب را حساب می‌کنیم.



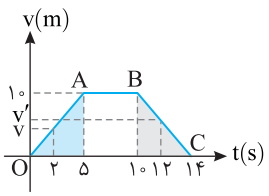
$$a_{av_{OA}}=\frac{v_A-۰}{۴-۰}=\frac{v_A}{۴}\ ,\ a_{av_{AB}}=\frac{۰-v_A}{۶-۴}=\frac{-v_A}{۲}$$

نسبت اندازهٔ شتاب‌ها خواهد شد:

$$\frac{|a_{av_{OA}}|}{|a_{av_{OB}}|}=\frac{\frac{v_A}{۴}}{\frac{v_A}{۲}}=\frac{۱}{۲}$$

B ۲۴۴ ۱

خط فکری بایـد بـه کمـک شـیب خطهـای OA و BC سـرعت را در لحظه‌های $t=۲s$ و $t=۱۲s$ حساب کرده سـپس به کمـک تعریف شـتاب متوسـط $a_{av}=\Delta v/\Delta t$ مسئله را حل کنید.



۱ به کمک شیب خط OA سرعت در لحظهٔ $t=۲s$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{۱۰-۰}{۵-۰}=\frac{v-۰}{۲-۰}\Rightarrow ۲=\frac{v}{۲}\Rightarrow v=۴m/s$$

۲ شیب خط BC را نوشته سرعت در لحظهٔ $t=۱۲s$ را به‌دست می‌آوریم.

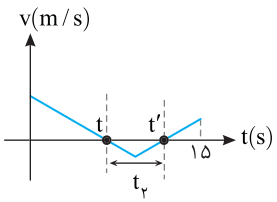
$$\frac{۰-۱۰}{۱۴-۱۰}=\frac{۰-v'}{۱۴-۱۲}\Rightarrow\frac{-۱۰}{۴}=\frac{-v'}{۲}\Rightarrow v'=۵m/s$$

۳ شتاب متوسط خواهد شد.

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v'-v}{\Delta t}=\frac{۵-۴}{۱۲-۲}=\frac{۱}{۱۰}m/s^۲$$

C ۲۴۵ ۳

خط فکری هـرگاه سـرعت مثبت باشـد متحـرک در جهت محـور xها در حرکت اسـت و هرگاه سرعت منفی باشد متحـرک در خـلاف جهـت محـور xهـا حرکـت می‌کند. از طرفـی متحرک وقتی تغییر جهت می‌دهد که سـرعت آن صفر می‌شود. یعنی نمودار محور زمان را قطع می‌کند بنابراین بازهٔ زمانی بین دو تغییر جهت با توجه به شکل بازهٔ زمانی بین t تا t' $(t'-t)$ است. دقت کنید در این بازه سرعت منفی است و در واقع طراح از شما می‌خواهد که $t_۲=t'-t$ را از روی نمودار به‌دست آورید.



در بازهٔ صفر تا t و t' تا ۱۵s متحرک در جهت مثبت محور xها و در بازهٔ t تا t' متحرک در خلاف جهت محور xها در حرکت بوده است.

$$t_۱=(t-۰)+(۱۵-t')=۱۵+(t-t')\Rightarrow t_۱=۱۵-t_۲\ ,\ t_۲=t'-t$$

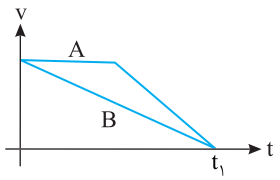
حال با توجه به نسبت داده شده در سؤال:

$$\frac{t_۱}{t_۲}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow\frac{۱۵-t_۲}{t_۲}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow ۶۰-۴t_۲=۵t_۲\Rightarrow ۶۰=۹t_۲\Rightarrow t_۲=\frac{۲۰}{۳}s$$

مدت زمان بین دو لحظهٔ توقف همان $t'-t$ است که برابر با $t_۲$ یعنی $\frac{۲۰}{۳}s$ است.

B ۲۴۶ ۱

در بـازهٔ زمانی ۰ تا $t_۱$ تغییر سـرعت دو متحرک A و B یکسان است و با توجه به تعریف شـتاب متوسـط $(a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t})$ شتاب متوسـط دو متحرک در این بازه با هم برابر است.

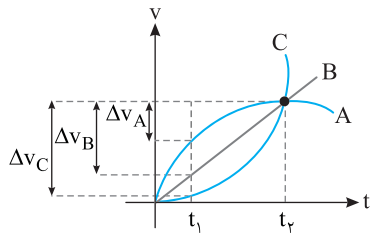


B ۲۴۷ ۱

می‌خواهیم شتاب متوسط سه متحرک A، B و C را در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ با هم مقایسه کنیم. با توجه به تعریف شـتاب متوسط $(a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t})$ ما باید تغییرات سرعت این سه متحرک را با هم مقایسه کنیم.

با توجه به شـکل در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ تغییر سـرعت متحرک A از متحرک B کمتر و تغییر سرعت متحرک B از تغییر سرعت متحرک C کمتر است.

$$\Delta v_A<\Delta v_B<\Delta v_C\Rightarrow a_{av_A}<a_{av_B}<a_{av_C}$$

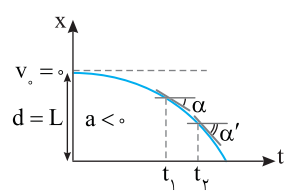


A ۲۴۸ ۴

۱ متحـرک روی محـور xهـا در خـلاف جهـت محـور از حال سـکون $(|v_۰=۰|)$ شروع به حرکت کرده است.

۲ دقت کنید در لحظهٔ $t=۰$ خط مماس بر نمودار موازی محور xها است و شیب خط مماس صفر و در نتیجه سرعت اولیه صفر است. (گزینهٔ (۳) درست است.)

۳ متحرک روی محور xها تغییر جهت نداده بنابراین جابه‌جایی و مسـافت طی شـده یکسـان اسـت. در نتیجه تندی متوسط و بزرگی سرعت متوسـط برابر است. (گزینهٔ (۱) درست است.)

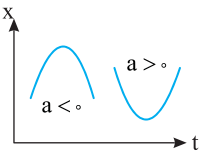


۴ به شکل دقت کنید در بازهٔ t_1 تا t_2 شیب خط مماس بر نمودار بیشتر می‌شود بنابراین اندازهٔ سرعت در لحظهٔ t_2 از اندازهٔ سرعت در لحظهٔ t_1 بیشتر (منفی‌تر) است.

در نتیجه: $\Delta v = v_2 - v_1 \xrightarrow[v_2<0,\ v_1<0]{|v_2|>|v_1|} \Delta v<0 \Rightarrow a<0$

هر دو لحظه دلخواه دیگری را که در نظر بگیرید، به همین نتیجه می‌رسید که شتاب منفی است و گزینهٔ (۲) درست است.

میانبر برای تعیین علامت شتاب از روی نمودار مکان - زمان کافی است به جهت تقعر (دهانهٔ نمودار) دقت کنید اگر دهانه رو به بالا باشد شتاب مثبت و اگر رو به پایین باشد شتاب منفی است.

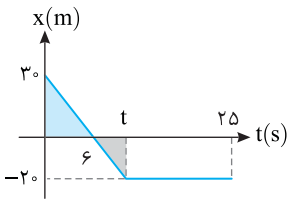


B ۲۴۹ ۴

۱ به کمک شیب نمودار لحظهٔ t را حساب می‌کنیم.

$$\frac{-۲۰-۳۰}{t-۰}=\frac{۰-۳۰}{۶-۰} \Rightarrow t=۱۰\,s$$

۲ سرعت متوسط در مدت ۲۵s خواهد شد:



$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-۲۰-۳۰}{۲۵}=-۲m/s$$

۳ سرعت در بازهٔ صفر تا ۶s ثابت است، بنابراین:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v=\frac{۰-۳۰}{۶}=-۵m/s \Rightarrow v_{۰}=-۵m/s$$

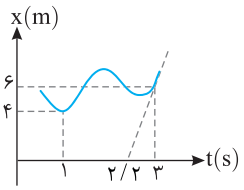
شیب خط مماس بر نمودار در بازهٔ $t=۱۰s$ تا $t=۲۵s$، صفر است بنابراین: $v_{۲۵}=۰$

در نتیجه شتاب متوسط در مدت ۲۵s خواهد شد: $a_{av}=\frac{۰-(-۵)}{۲۵}=۰/۲m/s^2$

B ۲۵۰ ۱

برای به‌دست آوردن شتاب متوسط در بازهٔ $t=۱s$ تا $t=۳s$ باید سرعت را در این دو لحظه به‌دست بیاوریم.

۱ در $t=۱s$ شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان موازی محور زمان بوده و سرعت لحظه‌ای صفر است $(v_1=۰)$



۲ در $t=۳s$ شیب خط مماس برابر است با:

$$v_2=\frac{۶-۰}{۳-۲/۲}=\frac{۶}{۰/۸}=\frac{۶۰}{۸}=۷/۵m/s$$

۳ در این صورت شتاب متوسط برابر است با:

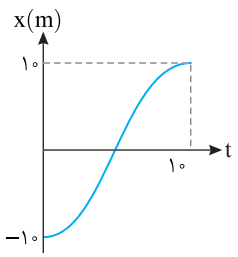
$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{۷/۵-۰}{۳-۱}=\frac{۷/۵}{۲} \Rightarrow a_{av}=۳/۷۵\,m/s^2$$

A ۲۵۱ ۲

در لحظهٔ $t=۰$، مکان متحرک $x_1=-۱۰m$ و در لحظهٔ $t=۱۰s$ مکان متحرک $x_2=+۱۰m$ بوده بنابراین سرعت متوسط خواهد شد.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av}=\frac{۱۰-(-۱۰)}{۱۰-۰}=۲m/s$$

برای به‌دست آوردن شتاب متوسط باید سرعت متحرک را در لحظه‌های $t=۰$ و $t=۱۰s$ از روی نمودار مشخص کنیم. در این دو لحظه خط مماس بر نمودار موازی محور زمان بوده و شیب خط مماس و در نتیجه سرعت در این لحظات صفر است، بنابراین شتاب متوسط برابر است با: $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_{av}=۰$



A ۲۵۲ ۱

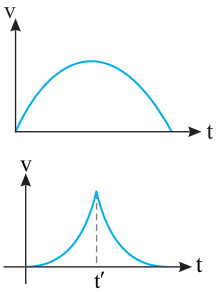
نکته هرگاه جهت دهانهٔ (تقعر) نمودار مکان - زمان به سمت بالا باشد شتاب حرکت مثبت و هرگاه جهت دهانه (تقعر) نمودار رو به پایین باشد، شتاب منفی است.

یادآوری هرگاه شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان مثبت باشد سرعت مثبت و متحرک در جهت مثبت محور در حال حرکت است و هرگاه شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان منفی باشد، سرعت منفی و متحرک در جهت منفی محور در حال حرکت است.

در صورت مسئله بیان شده که سرعت اولیه مثبت باشد یعنی در لحظهٔ $t=۰$ شیب خط مماس بر نمودار مثبت باشد که در گزینهٔ (۱) و (۳) این چنین است. از طرفی خواسته شده که شتاب در خلاف جهت محور x یعنی منفی باشد بنابراین دهانه (تقعر) نمودار باید رو به پایین باشد و گزینهٔ (۱) درست است.

B ۲۵۳ ۲

ابتدا دقت کنید که نمودارهای داده شده، نمودار سرعت - زمان است. سپس به حل مسئله بپردازید.



متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده و در نهایت نیز متوقف شده است پس در ابتدا و انتهای حرکت سرعت صفر است و گزینهٔ (۱) نمی‌تواند جواب باشد.

در نمودار گزینهٔ (۲)، در تمام مدت نمودار بالای محور زمان بوده و سرعت متحرک مثبت است از طرفی در $t=۰$، سرعت صفر است بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

چون متحرک در جهت مثبت محور xها در حرکت است پس سرعت باید مثبت باشد بنابراین گزینهٔ (۳) نیز نادرست است. در لحظهٔ t' در نمودار گزینهٔ (۴) خط مماس قائم است پس شیب خط مماس در این نقطه که برابر شتاب می‌باشد ∞ است و این ناممکن است بنابراین گزینهٔ (۴) نیز نادرست است اگرچه سرعت در ابتدا و انتها صفر است.

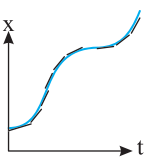
A ۲۵۴ ۴

متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده یعنی نمودار در لحظهٔ $t=۰$ باید بر محور زمان مماس باشد بنابراین گزینهٔ (۱) و (۳) نادرست هستند. متحرک پس از مدتی متوقف شده و سپس در جهت مثبت محور به حرکت خود ادامه می‌دهد یعنی شیب خط مماس بر نمودار پس از تغییر جهت باید مثبت باشد بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.

B ۲۵۵ ۳

در ابتدا با گذر زمان، در بازه‌های زمانی یکسان جابه‌جایی خودرو در حال افزایش است بنابراین سرعت در حال افزایش است یعنی شیب خط مماس بر نمودار باید در حال افزایش باشد.





در ادامهٔ مسیر در بازه‌های زمانی یکسان، جابه‌جایی‌ها کاهش یافته یعنی سرعت در حال کاهش است و مجدداً جابه‌جایی‌ها افزایش می‌یابد یعنی سرعت افزایش می‌یابد. در گزینهٔ (۳) ابتدا شیب خط مماس افزایش، سپس کاهش و سرانجام افزایش می‌یابد.

B ۲۵۶ ۲

۱ بردار مکان متحرک زمانی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان $(x=۰)$ عبور می‌کند، بنابراین مکان را مساوی صفر $(x=۰)$ قرار می‌دهیم:

$$x=t^3-۳t^2+۲t \Rightarrow ۰=t^3-۳t^2+۲t \Rightarrow ۰=t(t-۱)(t-۲)$$

$$\Rightarrow t=۰,\ t=۱s,\ t=۲s$$

۲ دقت کنید در $t=۰$ متحرک شروع به حرکت می‌کند پس در $t=۰$ از مبدأ مکان متحرک عبور نمی‌کند، بنابراین در لحظه‌های $t=۱s$ و $t=۲s$ تغییر بردار مکان رخ داده است. اکنون در این دو لحظه سرعت را به کمک معادلهٔ سرعت - زمان داده شده حساب می‌کنیم:

$$v_{t=۱s}=۳(۱)^2-۶(۱)+۲ \Rightarrow v_{t=۱}=-۱\,m/s$$

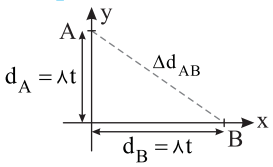
$$v_{t=۲s}=۳(۲)^2-۶(۲)+۲ \Rightarrow v_{t=۲}=۲m/s$$

۳ شتاب متوسط حرکت را به‌دست می‌آوریم: $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۲-(-۱)}{۲-۱}=۳m/s^2$

B ۲۵۷ ۲

۱ مسئلهٔ ساده‌ای است. در مدت t ثانیه جابه‌جایی هر متحرک را حساب می‌کنیم. سرعت هر متحرک $8m/s$ است. بنابراین:

$$d_A=d_B=vt\Rightarrow d_A=d_B=8t$$



۲ فاصلهٔ A تا B را به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست آورده و برابر $32\sqrt{2}m$ قرار می‌دهیم.

$$AB=\sqrt{d_A^2+d_B^2}\Rightarrow 32\sqrt{2}=\sqrt{(8t)^2+(8t)^2}$$

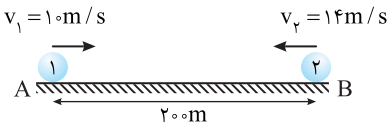
$$\Rightarrow 32\sqrt{2}=\sqrt{2}(8t)\Rightarrow t=4s$$

B ۲۵۸ ۳

خط فکری آنچه مسلم است دیدار این دو متحرک برای اولین بار هنگامی است که به سوی هم می‌روند و در بین راه یکدیگر را ملاقات می‌کنند. اما ملاقات دوم آن‌ها وقتی است که دو متحرک به انتهای مسیر می‌رسند و برمی‌گردند و مجدداً بین راه یکدیگر را ملاقات می‌کنند، بنابراین شما باید ابتدا زمان حرکت متحرک کندرو (۱) را از A تا B حساب کنید. در این مدت متحرک تندرو (۲) قطعاً از B به A رسیده و در حال برگشت است و مقدار مسافتی که در برگشت طی می‌کند را به‌دست بیاورید، بنابراین به مراحل زیر با دقت توجه کنید.

۱ مدت زمان حرکت متحرک کندرو از A تا B خواهد شد:

$$d=vt=200=10t_1\Rightarrow t_1=20s$$

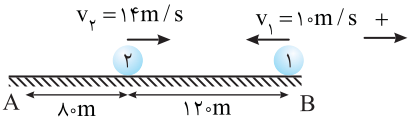


۲ جابه‌جایی متحرک (۲) با تندی $14m/s$ در مدت $20s$ را حساب می‌کنیم.

$$\ell_2=vt_0=14\times 20=280m$$

۳ یعنی متحرک (۲)، ۲۰۰ متر رفته و $80m$ برگشته و در این لحظه متحرک (۱) از نقطهٔ B در حال برگشت است. یعنی فاصلهٔ دو متحرک از هم $200-80=120m$ است.

۴ اگر نقطهٔ B را در این لحظه مبدأ مکان فرض کنیم با نوشتن معادلهٔ حرکت دو متحرک و برابر قرار دادن معادله‌ها لحظه‌ای که به هم می‌رسند را به‌دست می‌آوریم.



$$\begin{cases}x_1=-10t\\ x_2=14t-120\end{cases}\xrightarrow{x_1=x_2}-10t=14t-120\Rightarrow 24t=120\Rightarrow t_2=5s$$

ملاقات دوم پس از $20+5=25s$ صورت می‌گیرد.

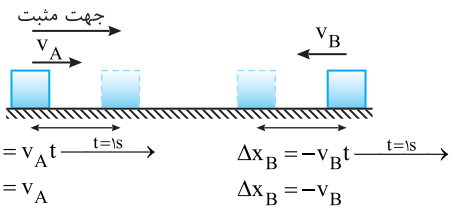
میانبر در قسمت آخر می‌توانستیم سرعت‌ها را با هم جمع کرده $14+10=24m/s$ سپس زمانی که $120m$ با این سرعت طی می‌شود را حساب کرد.

$$\Delta x=(v_1+v_2)t\Rightarrow 120=24t\Rightarrow t=5s\,,\,t_{کل}=20+5=25s$$

B ۲۵۹ ۲

فرض اول: دو جسم با سرعت ثابت به سمت هم حرکت می‌کنند و در هر $10s$، ۱۶ متر به‌هم نزدیک می‌شوند، یعنی در هر ثانیه $1/6m$ به‌هم نزدیک‌تر می‌شوند با توجه به شکل در هر ثانیه متحرک A به اندازهٔ v_A در جهت مثبت و متحرک B، به اندازهٔ v_B در جهت منفی به‌هم نزدیک می‌شوند بنابراین:

$$\Delta x_{AB}=v_A-(-v_B)=1/6\Rightarrow v_A+v_B=1/6m/s \quad (1)$$: در یک ثانیه

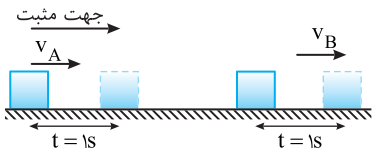


فرض دوم: دو جسم با سرعت ثابت در یک جهت حرکت می‌کنند. متحرک A به اندازهٔ v_A و متحرک B به اندازهٔ v_B در هر ثانیه جابه‌جا می‌شوند و چون در هر $5s$ فاصلهٔ دو متحرک ۳ متر اضافه می‌شود باید سرعت $v_B>v_A$ باشد. پس این دو متحرک در هر ثانیه $0/6$ متر از هم دورتر خواهند شد:

$$\Delta x_{AB}=v_B-v_A\Rightarrow v_B-v_A=0/6 \quad (2)$$

$$(1)\text{ و }(2)\Rightarrow\begin{cases}v_A+v_B=1/6\\ v_B-v_A=0/6\end{cases}\Rightarrow 2v_B=2/2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}v_B=1/1m/s\\ v_A=0/5m/s\end{cases}$$



میانبر اگر دو متحرک در یک جهت در حال حرکت باشند می‌توان یکی از آن‌ها را ساکن فرض کرد که دیگری با تندی $|v_A-v_B|$ نسبت به آن در حرکت است.

$$\Delta x=|v_A-v_B|t$$

و اگر دو متحرک در خلاف جهت هم در حال حرکت باشند آن‌گاه:

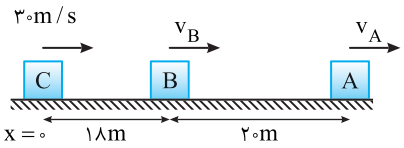
$$\Delta x=(v_A+v_B)t$$

C ۲۶۰ ۲

خط فکری شکل مسئله را رسم کنید و داده‌های مسئله را روی شکل به‌طور کامل نمایش دهید. سپس معادلهٔ حرکت هریک از سه متحرک را بنویسید آن‌گاه مرحله به مرحله مسئله را حل کنید.

۱ اگر مکان C را مبدأ مکان و سمت راست را جهت مثبت در نظر بگیریم، معادلهٔ حرکت هر متحرک خواهد شد:

$$x_C=30t\ ,\ x_B=v_Bt+18\ ,\ x_A=v_At+38$$



۲ در لحظهٔ $t=3s$ متحرک‌های B و C به هم رسیده‌اند بنابراین معادله‌های حرکت B و C را برابر قرار داده و v_B را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}x_C=30(3)\\ x_B=3v_B+18\end{cases}\xrightarrow{x_C=x_B}90=3v_B+18\Rightarrow 3v_B=72$$

$$\Rightarrow v_B=24m/s$$

۳ دو ثانیه پس از $t=3s$ یعنی در لحظهٔ $t=5s$ متحرک‌های A و C به هم رسیده‌اند از این رو x_A را برابر x_C قرار داده و سرعت A (v_A) را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases}x_C=30(5)\\ x_A=5v_A+38\end{cases}\xrightarrow{x_C=x_A}150=5v_A+38\Rightarrow 5v_A=112$$

$$\Rightarrow v_A=22/4m/s$$

۴ اکنون با برابر قرار دادن معادلهٔ A و B زمان رسیدن B به A را به‌دست می‌آوریم.

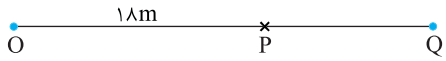
$$\begin{cases}x_B=24t+18\\ x_A=22/4t+38\end{cases}\xrightarrow{x_A=x_B}24t+18=22/4t+38\Rightarrow 1/6t=20$$

$$\Rightarrow t=\frac{200}{16}=12/5s$$

۵ پس در لحظهٔ $t=12/5s$ متحرک B به A می‌رسد یعنی $\Delta t=12/5-5=7/5s$ بعد از سبقت C از A این اتفاق می‌افتد.

B ۲۶۱ ۳

۱ متحرک A از نقطهٔ P شروع به حرکت کرده، ۴s بعد متحرک B از نقطهٔ O به راه می‌افتد و بعد از ۴s با متحرک A، از نقطهٔ Q می‌گذرد. بنابراین مدت زمان حرکت A از P تا Q به اندازهٔ $۴+۴=۸s$ طول کشیده است.



۲ سرعت A ثابت و برابر $۵m/s$ است. بنابراین فاصلهٔ P تا Q خواهد شد.

$$\Delta x=vt\Rightarrow PQ=۵\times۸=۴۰m$$

۳ متحرک B مسیر OQ را در مدت ۴s طی کرده است. بنابراین OQ را حساب می‌کنیم. با توجه به شکل:

$$OQ=OP+PQ=۱۸+۴۰\Rightarrow OQ=۵۸m$$

۴ سرعت B خواهد شد:

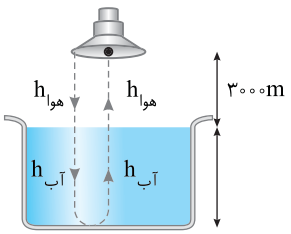
$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_B=\frac{۵۸}{۴}\Rightarrow v_B=۱۴/۵m/s$$

B ۲۶۲ ۱

خط فکری صوت از فرستنده به سمت آب می‌رود سپس وارد آب شده به کف اقیانوس برخورد کرده و به سطح آب بازمی‌گردد و وارد هوا شده و به محل گیرنده می‌رسد. یعنی در طول مسیر حرکت صوت از دو بخش $۲h_{هوا}$ و $۲h_{آب}$ تشکیل شده است، بنابراین شما ابتدا باید مدت زمان حرکت صوت در هوا را به‌دست آورده و این زمان را از ۴۰s کل حرکت کم کنید تا بتوانید عمق آب را حساب کنید.

۱ تندی صوت در هوا ثابت و برابر $۳۰۰m/s$ است و مسافتی که صوت در هوا طی می‌کند برابر $۲h=۶۰۰۰m$ است بنابراین زمان حرکت صوت در هوا را می‌توان به‌دست آورد.

$$\ell=vt\Rightarrow ۲h_{هوا}=v_{هوا}\times t_{هوا}\Rightarrow ۶۰۰۰=۳۰۰\times t_{هوا}\Rightarrow t_{هوا}=۲۰s$$



۲ صوت ۲۰s در هوا در حال حرکت است و بنابراین مدت $۴۰-۲۰=۲۰s$ نیز در آب طی کرده است.

۳ اکنون عمق آب را حساب می‌کنیم.

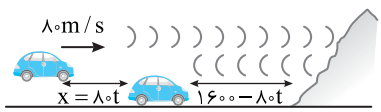
$$\ell=vt\Rightarrow ۲h_{آب}=۱۲۰۰\times۲۰\Rightarrow ۲h_{آب}=۲۴۰۰۰\Rightarrow h_{آب}=۱۲۰۰۰m=۱۲km$$

C ۲۶۳ ۱

اگر زمانی که طول می‌کشد تا راننده صدای پژواک را بشنود برابر t فرض کنیم در این مدت خودرو با تندی $۸۰m/s$ مسافت $x=۸۰t$ جلو می‌آید و صوت نیز مسافت $۱۶۰۰+۱۶۰۰-x$ یعنی $۳۲۰۰-x$ را طی می‌کند بنابراین می‌توان نوشت:

$$\ell_{صوت}=v_{صوت}t\Rightarrow ۳۲۰۰-x=۳۲۰t\xrightarrow{x=۸۰t}۳۲۰۰-۸۰t=۳۲۰t$$

$$\Rightarrow ۳۲۰۰=۴۰۰t\Rightarrow t=۸s$$



B ۲۶۴ ۴

خط فکری اگر شما از یک پله برقی که در حال بالا رفتن است بالا بروید قطعاً زمان رسیدن شما به انتهای پله کمتر از زمانی است که روی پله برقی بایستید. در واقع در حالت اول تندی حرکت شما با تندی حرکت پله جمع می‌شود و اگر زمان حرکت پله $t_۱$، زمانی که شما از پلکان ساکن بالا می‌روید $t_۲$ و زمان حرکت پله و شما با هم t فرض شود. به کمک جمع تندی‌ها مسئله قابل حل است.

$$v=v_۱+v_۲\xrightarrow[\text{طول پلکان}=\ell]{v=\frac{\ell}{t}}\frac{\ell}{t}=\frac{\ell}{t_۱}+\frac{\ell}{t_۲}\xrightarrow{t_۱=۱min\,,t_۲=۳min}$$

$$\frac{۱}{t}=\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow t=\frac{۳}{۴}min\Rightarrow t=۴۵s$$

B ۲۶۵ ۳

خط فکری مجدداً با مسئله‌ای سروکار داریم که در آن از شما مقایسهٔ مسافت طی شده و جابه‌جایی خواسته شده است. ابتدا شما باید مدت زمان حرکت دو قطار از لحظه‌ای که فاصلهٔ آن‌ها از هم ۸۰km بوده تا لحظه‌ای که به هم برخورد می‌کنند را بیابید سپس مسافت و جابه‌جایی در این مدت را به‌دست بیاورید.

۱ سرعت حرکت هر قطار $۴۰km/h$ است یعنی در هر ساعت هر قطار ۴۰km جابه‌جا می‌شود که جمعاً ۸۰km شده در نتیجه دو قطار پس از ۱h به هم برخورد می‌کنند.

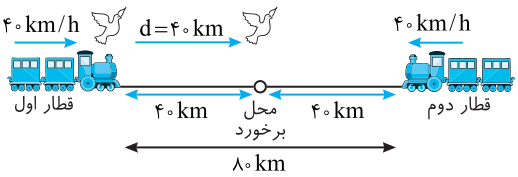
۲ در مدت ۱h پرنده با تندی $۶۰km/h$ مسافتی که طی می‌کند برابر است با:

$$\ell=vt\Rightarrow \ell=۶۰\times۱=۶۰km$$

۳ به شکل دقت کنید. جابه‌جایی پرنده از محل شروع پرواز تا محل برخورد برابر $d=۴۰km$ است.

۴ نسبت ℓ به d خواهد شد:

$$\frac{\ell}{d}=\frac{۶۰}{۴۰}=\frac{۳}{۲}$$



B ۲۶۶ ۲

این نوع پرسش‌ها به مبحث جمع سرعت‌ها مربوط است.

وقتی شناگر در جهت جریان آب شنا می‌کند، سرعت شناگر نسبت به ساحل برابر جمع اندازهٔ سرعت‌ها می‌شود (v_S+v_W) و هنگامی که در خلاف جهت جریان آب شنا می‌کند، سرعت شناگر نسبت به ساحل برابر تفاضل اندازهٔ سرعت‌ها می‌شود (v_S-v_W)، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow\begin{cases}۹۰۰=(v_S+v_W)(۹۰)\Rightarrow v_S+v_W=۱۰\\ ۹۰۰=(v_S-v_W)(۱۵۰)\Rightarrow v_S-v_W=۶\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{v_S+v_W}{v_S-v_W}=\frac{۱۰}{۶}=\frac{۵}{۳}\Rightarrow ۳v_S+۳v_W=۵v_S-۵v_W\Rightarrow ۸v_W=۲v_S$$

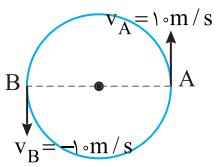
$$\Rightarrow\frac{v_S}{v_W}=۴$$

B ۲۶۷ ۲

۱ مدت زمان بازهٔ زمانی $t_۱=\frac{۱}{۴}s$ تا $t_۲=\frac{۵}{۴}s$ برابر $\frac{۵}{۴}-\frac{۱}{۴}=۱s$ است.

۲ ذره در هر ۲s یک دور کامل می‌چرخد، بنابراین در مدت ۱s، ذره نیم دور می‌چرخد. به‌طور مثال از نقطهٔ A با تندی ثابت $۱۰m/s$ به نقطهٔ B می‌رود.

۳ بردار سرعت در هر نقطه بر مسیر حرکت مماس است، بردارهای سرعت دو نقطهٔ A و B را رسم می‌کنیم.



۴ اگر اندازه سرعت در نقطهٔ A، $۱۰m/s$ باشد در نقطهٔ B سرعت $-۱۰m/s$ بوده و تغییرات سرعت خواهد شد:

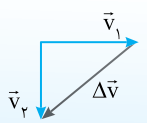
$$|\Delta v|=|-۱۰-۱۰|=۲۰m/s$$

۵ شتاب متوسط را حساب می‌کنیم.

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۲۰}{۱}\Rightarrow a_{av}=۲۰m/s^۲$$

C ۲۶۸ ۲

یادداشت ریاضی برای نشان دادن بردار تفاضل دو بردار $(\vec{v}_۲-\vec{v}_۱)$، دو بردار را مطابق شکل از یک نقطه رسم کرده سپس از انتهای بردار اول $(\vec{v}_۱)$ برداری به انتهای بردار دوم $(\vec{v}_۲)$ رسم می‌کنیم.



۱ ابتدا محیط دایره را به‌دست می‌آوریم.

$$\ell=۲\pi r\xrightarrow{r=۲۰m}\ell=۲\pi\times۲۰=۴۰\pi\,m$$

۲ زمان یک دور زدن متحرک که با تندی $۱۰\pi\ m/s$ محیط دایره را طی می‌کند، خواهد شد:

$$s=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow ۱۰\pi=\frac{۴۰\pi}{t}\Rightarrow t=۴s$$

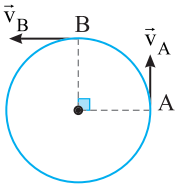
۳ اکنون باید مشخص کنیم که در هر ثانیه متحرک روی دایره چه مقدار می‌چرخد؟ از یک تناسب ساده کمک می‌گیریم.

۴s	۱ دور
۱s	?

$$\Rightarrow ?=\frac{۱}{۴}\ \text{دور}$$

۴ $\frac{۱}{۴}$ محیط دایره یعنی متحرک کمان $\frac{\pi}{۲}(۹۰^\circ)$ طی می‌کند و به‌طور مثال از نقطهٔ A در سوی نشان داده شده به نقطهٔ B می‌رود.

۵ بردار سرعت در نقطهٔ A و B را مماس بر دایره رسم می‌کنیم.



۶ تغییر بردار سرعت را به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آوریم.

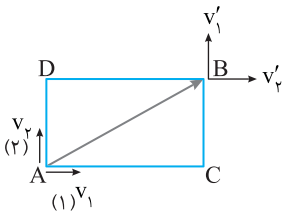
$$\Delta v=\sqrt{v_A^۲+v_B^۲}=\sqrt{(۱۰\pi)^۲+(۱۰\pi)^۲}$$
$$\Rightarrow \Delta v=۱۰\sqrt{۲}\pi\ m/s$$

۷ شتاب متوسط خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{۱۰\sqrt{۲}\pi}{۱}=۱۰\sqrt{۲}\pi\ m/s^۲$$

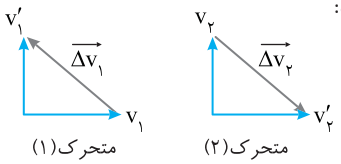
C ۲۶۹ ۱

گزارهٔ (الف): طول مسیر و تندی حرکت دو متحرک یکسان است بنابراین زمان حرکت از A تا B روی دو مسیر برابر است. از طرفی جابه‌جایی هر دو متحرک برابر $\overrightarrow{AB}$ است. بنابراین $\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}$ یکسان بوده و بردار سرعت متوسط یکی است و گزارهٔ (الف) درست است.



گزارهٔ (ب): همان‌گونه که در بالا بیان کردیم طول مسیر، تندی حرکت دو متحرک و زمان حرکت یکسان بوده و در نتیجه تندی متوسط در کل مسیر $(s_{av}=\ell/\Delta t)$ برابر است و گزارهٔ (ب) درست است.

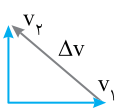
گزارهٔ (پ): به شکل دقت کنید. بردار تغییر سرعت متحرک (۱) و متحرک (۲) به‌صورت زیر است:



بردار شتاب متوسط $(\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t})$ هم‌جهت بردار تغییرات سرعت است، بردار تغییرات سرعت قرینهٔ هم بوده بنابراین بردار شتاب متوسط دو متحرک نیز قرینهٔ هم بوده و گزارهٔ (پ) نادرست است.

B ۲۷۰ ۲

یادآوری ریاضی بردار تغییر سرعت $(\Delta\vec{v}=\vec{v}_۲-\vec{v}_۱)$ برداری است که از انتهای $v_۱$ به انتهای $v_۲$ مطابق شکل رسم می‌شود.

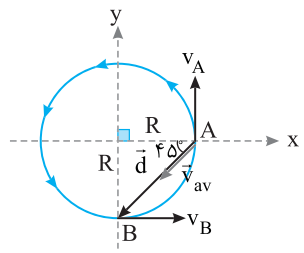


یادآوری بردار سرعت متوسط در جهت بردار جابه‌جایی است و بردار شتاب متوسط در جهت بردار تغییر سرعت است.

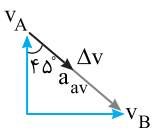
نکته سرعت در هر نقطه بر مسیر مماس است.

خط فکری باید بردار جابه‌جایی و بردار سرعت در نقاط A و B را رسم کرده سپس بردار سرعت متوسط و بردار شتاب متوسط را رسم کنید و زاویهٔ بین آن‌ها را حساب کنید.

۱ بردار جابه‌جایی از A تا B را رسم می‌کنیم $\vec{d}=\overrightarrow{AB}$. این بردار با امتداد افقی مطابق شکل زاویهٔ ۴۵° می‌سازد.



۲ بردارهای $\vec{v}_A$ و $\vec{v}_B$ را از یک نقطه مطابق شکل رسم می‌کنیم. سپس بردار تغییر سرعت را از انتهای $\vec{v}_A$ به انتهای $\vec{v}_B$ می‌کشیم. این بردار با امتداد قائم زاویهٔ ۴۵° می‌سازد.



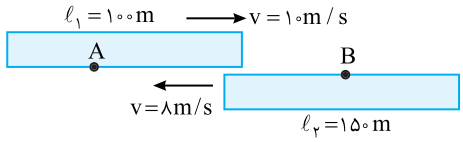
۳ از این‌رو زاویهٔ بین بردار $\vec{d}$ و $\Delta\vec{v}$ یعنی همان زاویهٔ بین بردار سرعت متوسط و بردار شتاب متوسط ۹۰° می‌شود.



A ۲۷۱ ۱

به شکل زیر به دقت نگاه کنید. حال خود را به جای ناظر A قرار دهید که از پنجره به بیرون نگاه می‌کند. این ناظر قطار ۱۵۰ متری را می‌بیند که از جلوی چشمانش می‌گذرد. خود را ساکن فرض کنید قطار ۱۵۰ متری با سرعت $\vec{v}_۱+\vec{v}_۲=۱۰+۸=۱۸m/s$ از مقابل دیدگان شما می‌گذرد و زمان عبور آن از مقابل شما خواهد شد:

$$v=\frac{\ell}{t}\Rightarrow t_۱=\frac{\ell}{v}=\frac{۱۵۰}{۱۸}$$



اکنون خود را جای ناظر B قرار دهید چه طولی از قطار از مقابل شما می‌گذرد؟ حق با شماست ۱۰۰ متر از جلوی شما با سرعت $۱۸m/s$ نسبت به شما می‌گذرد، بنابراین زمان عبور قطار از مقابل ناظر B برابر خواهد شد با:

$$t_۲=\frac{\ell}{v}\Rightarrow t_۲=\frac{۱۰۰}{۱۸}$$

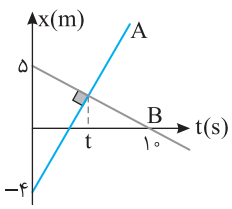
نسبت $\frac{t_۱}{t_۲}$ برابر است با:

$$\frac{t_۱}{t_۲}=\frac{\frac{۱۵۰}{۱۸}}{\frac{۱۰۰}{۱۸}}\Rightarrow\frac{t_۱}{t_۲}=۱/۵$$

B ۲۷۲ ۴

یادآوری ریاضی هرگاه دو خط A و B با شیب‌های m_A و m_B بر هم عمود باشند، آن‌گاه $m_Am_B=-۱$ است.

۱ شیب نمودار مکان-زمان برابر سرعت متحرک است. با توجه به نمودار، شیب خط B را به‌دست می‌آوریم:



$$m_B=\frac{۰-۵}{۱۰}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow v_B=-\frac{۱}{۲}\ m/s$$

۲ شیب نمودار A یعنی سرعت A خواهد شد:

$$m_A=-\frac{۱}{m_B}\Rightarrow m_A=۲\Rightarrow v_A=۲m/s$$

۳ معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته و مکان‌ها را مساوی قرار می‌دهیم تا زمان رسیدن دو متحرک را به‌دست آوریم.

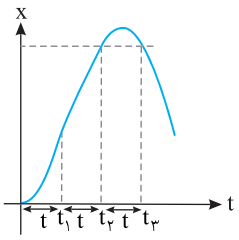
$$\begin{cases}x_A=۲t-۴\\ x_B=-\frac{۱}{۲}t+۵\end{cases}\xrightarrow{x_A=x_B}۲t-۴=-\frac{۱}{۲}t+۵\Rightarrow\frac{۵}{۲}t=۹\Rightarrow t=۳/۶s$$

۴ مکان به هم رسیدن دو متحرک برابر خواهد شد با:

$$x=۲t-۴\Rightarrow x=۷/۲-۴=۳/۲m$$

B ۲۷۳ ۱

۱ نمودار از ۰ تا t_1 سهمی است و در لحظهٔ $t=0$ نمودار بر محور زمان مماس بوده و سرعت اولیه صفر است و سرعت در لحظهٔ t_1 شیب خط مماس بر نمودار بوده و آن را v فرض می‌کنیم شتاب متوسط خواهد شد:



$$a_{av}=\frac{v-0}{t_1-0}\Rightarrow a_{av_1}=\frac{v}{t}$$

۲ نمودار از t_1 تا t_2 خط راست است و سرعت در این بازه برابر شیب خط است و شتاب متوسط در این بازه صفر است. $a_{av_2}=0$

۳ نکتهٔ مهم این است که سرعت در بازهٔ t_1 تا t_2 با سرعت در لحظهٔ t_1 و سرعت در لحظهٔ t_2 برابر است. $v_{t_1}=v=v_{t_2}$

۴ نمودار در بازهٔ t_2 تا t_3 سهمی است و در لحظهٔ t_2 و t_3 مکان متحرک یکسان بوده و با توجه به اینکه سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس سهمی متقارن است شیب خط مماس در لحظهٔ t_2 و t_3 هم‌اندازه و قرینهٔ هم است. یعنی در لحظهٔ t_2 سرعت v و در لحظهٔ t_3 سرعت $-v$ است و شتاب در این بازه خواهد شد:

$$|a_{av_3}|=\frac{|v_{t_3}-v_{t_2}|}{t_3-t_2}=\frac{|-v-v|}{t}=\frac{2v}{t}$$

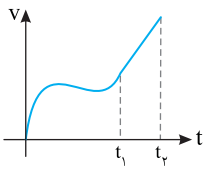
۵ اندازهٔ شتاب در بازهٔ صفر تا t_2 نیز خواهد شد: $|a_{av_4}|=\frac{|v-0|}{t_2-0}=\frac{v}{2t}$

بنابراین در بازهٔ t_2 تا t_3 شتاب متوسط از بقیهٔ بازه‌ها بیشتر است.

B ۲۷۴ ۲

خط فکری دقت کنید با نمودار سرعت - زمان سروکار داریم. از طرفی اگر در یک بازهٔ زمانی در هر لحظه سرعت لحظه‌ای از سرعت لحظه‌ای تمام لحظات بازهٔ زمانی دیگر بیشتر باشد قطعاً سرعت متوسط در بازهٔ زمانی اول از سرعت متوسط در بازهٔ زمانی دوم بیشتر است.

به نمودار نگاه کنید. در تمام لحظه‌های صفر تا t_1 سرعت لحظه‌ای از سرعت در تمام لحظه‌های t_1 تا t_2 کمتر است، بنابراین قطعاً سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا t_1 از سرعت متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2 کمتر است و گزینهٔ (۲) درست است.

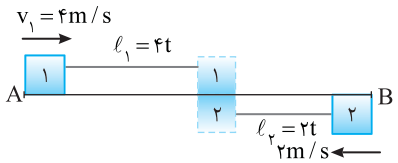


B ۲۷۵ ۱

۱ مسافتی که هر متحرک درمدت می‌پیماید تا دو متحرک به هم برسند t خواهد شد:

متحرک (۱): $\ell=vt\Rightarrow \ell_1=4t$

متحرک (۲): $\ell_2=v_2t\Rightarrow \ell_2=2t$



۲ طول مسیر حرکت برابر است با: $AB=\ell_1+\ell_2=4t+2t\Rightarrow AB=6t$

۳ مدت زمانی که متحرک (۱) مسیر AB را طی می‌کند حساب می‌کنیم:

$$AB=v_1t_1\Rightarrow 6t=4t_1\Rightarrow t_1=1/5t$$

۴ مدت زمانی که متحرک (۲) از B به A می‌رود خواهد شد:

$$AB=v_2t_2\Rightarrow 6t=2t_2\Rightarrow t_2=3t$$

۵ بنابر فرض مسئله اختلاف زمانی t_1 و t_2، برابر t' است. از این‌رو:

$$t'=t_2-t_1=3t-1/5t=1/5t\Rightarrow \frac{t'}{t}=1/5$$

پنجره ۳

A ۲۷۶ ۲

یادآوری در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، معادلهٔ مکان - زمان یک تابع درجه ۲ به‌صورت $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ است.

مکان اولیهٔ متحرک $x_0=0$ و سرعت اولیهٔ متحرک $v_0=3m/s$ بوده و در لحظهٔ $t=2s$، مکان متحرک $+12m/s$ است. با قرار دادن این داده‌ها در معادله، شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$$12=\frac{1}{2}a(2)^2+3\times2+0\Rightarrow a=3m/s^2$$

اکنون می‌توانیم معادلهٔ حرکت را بنویسیم.

$$x=\frac{3}{2}t^2+3t$$

A ۲۷۷ ۳

با توجه به معادلهٔ جابه‌جایی - زمان حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 20=\frac{1}{2}\times4\times(2)^2+v_0\times2\Rightarrow v_0=6m/s$$

A ۲۷۸ ۱

با توجه به فرض مسئله مکان اولیهٔ متحرک $x_0=0$ است. اندازهٔ سرعت اولیهٔ متحرک $8m/s$ و اندازهٔ شتاب آن $-3m/s^2$ است. بنابراین به کمک معادلهٔ مکان - زمان می‌توانیم مکان متحرک را در لحظهٔ $t=4s$ حساب کنیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x=\frac{1}{2}(-3)(4)^2+8\times4+0\Rightarrow x=-24+32\Rightarrow x=8m$$

بردار مکان خواهد شد: $\vec{x}=8\vec{i}$

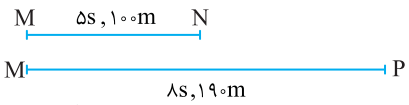
A ۲۷۹ ۴

در معادلهٔ مکان - زمان در بازهٔ زمانی $47-2=45s$ متحرک با شتاب ثابت $a=2m/s^2$ جابه‌جایی ۲۱۱۵ متر را طی کرده است بنابراین:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+vt\Rightarrow 2115=\frac{1}{2}\times2\times(45)^2+v\times45\Rightarrow 90=v\times45\Rightarrow v=2m/s$$

B ۲۸۰ ۳

خط فکری متحرک در مدت ۵s جابه‌جایی $MN=100m$ و در مدت ۳s جابه‌جایی $NP=90m$ طی کرده است و در بازهٔ زمانی $5+3=8s$ جابه‌جایی کل $MP=100+90=190m$ را طی می‌کند. بنابراین شما کافی است به کمک معادلهٔ جابه‌جایی زمان حرکت با شتاب ثابت یک دستگاه دو معادله دو مجهول بنویسید و آن را حل کنید.



$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow\begin{cases}100=\frac{1}{2}a(25)+5v_0\\190=\frac{1}{2}a(64)+8v_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5a+2v_0=40\\4a+v_0=23/75\end{cases}$$

$$\Rightarrow -3a=-7/5\Rightarrow a=2/5m/s^2$$

بازی با سؤال **متحرکی با شتاب ثابت روی خط راست، در ۳ ثانیه آغازین حرکت، جابه‌جایی ۱۵ متر و ۲ ثانیه بعد جابه‌جایی ۲۵ متر را می‌پیماید. سرعت اولیه متحرک چند m/s است؟**

۱) ۰/۵+ ۲) ۰/۵− ۳) ۱+ ۴) ۱−

پاسخ **۱** **متحرک در مدت ۳s، ۱۵m طی کرده بنابراین می‌توانیم بنویسیم**

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow[x=15m]{t=3s}15=\frac{1}{2}\times a\times9+3v_0\Rightarrow 30=9a+6v_0$$

$$\Rightarrow 10=3a+2v_0\quad (I)$$

۲ **متحرک در کل مدت** $3s+2s=5s$ **جمعاً** $15+25=40m$ **جابه‌جا شده است.**

از این رو: $40=\frac{1}{2}\times a\times25+5v_0\Rightarrow 40=12/5a+5v_0\Rightarrow 8=2/5a+v_0\quad (II)$

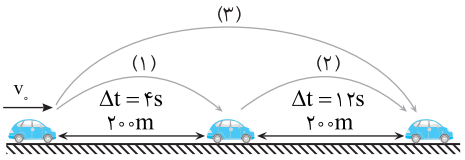
۳ **با حل دو معادلهٔ** (I) **و** (II) **داریم:** $a=3m/s^2, v_0=0/5m/s$

گزینهٔ ۱

۴ ۲۸۱ B

خط فکری بازهٔ زمانی t_1 تا $t_2=t_1+16\,(s)$ یعنی کل مدت مورد بررسی $16s$ است و در این $16s$، متحرک $400m$ جابه‌جا شده است و بنا به فرض مسئله نصف این مسیر یعنی $200m$ را در $4s$ و 200 متر بعدی را در $12=4-16$ طی کرده است. از این رو کافی است شما از معادلهٔ جابه‌جایی - زمان در حرکت با شتاب ثابت یک بار در $4s$ و بار دیگر در کل مدت $16s$ استفاده کنید.

مسیر حرکت را رسم می‌کنیم و با توجه به اینکه جابه‌جایی متحرک در زمان‌های مختلف داده شده است. برای مسیرهای (۱) و (۳) معادلهٔ $\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t$ را می‌نویسیم.



$$(۱)\ \Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 200=\frac{1}{2}a(4)^2+4v_0\Rightarrow 200=8a+4v_0 \quad (I)$$

$$(۳)\ \Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 400=\frac{1}{2}a\times(16)^2+16v_0\Rightarrow 400=128a+16v_0 \quad (II)$$

حال با حل دستگاه دو معادله دو مجهول شتاب حرکت را حساب می‌کنیم

$$\begin{cases}-4(8a+4v_0=200)\\ 128a+16v_0=400\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-32a-16v_0=-800\\ 128a+16v_0=400\end{cases}\xrightarrow{+}96a=-400$$

$$\Rightarrow a=\frac{-400}{96}\Rightarrow a=\frac{-25}{6}\,m/s^2$$

بزرگی شتاب خواسته شده است، از این‌رو: $|a|=\frac{25}{6}\,m/s^2$

۱ ۲۸۲ A

با توجه به تعریف شتاب خواهیم داشت:

$$\vec{a}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t_2-t_1}\xrightarrow[t_2=5s,\,t_1=3s]{\vec{a}=-4\vec{i},\,v_1=8\vec{i}}-4\vec{i}=\frac{\vec{v}_2-8\vec{i}}{5-3}\Rightarrow-8\vec{i}=\vec{v}_2-8\vec{i}\Rightarrow\vec{v}_2=0$$

۴ ۲۸۳ A

۱ با توجه به معادله سرعت - زمان خواهیم داشت:

$$v=at+v_0\xrightarrow{t_1=2s}5=2a+v_0\xrightarrow{t_2=6s}12=6a+v_0\Rightarrow 7=4a\Rightarrow a=1/75\,m/s^2$$

$$5=2\times1/75+v_0\Rightarrow v_0=1/5\,m/s$$

۲ در این صورت سرعت در لحظه $t=3s$ خواهد شد:

$$v=1/75t+1/5\Rightarrow v=1/75\times3+1/5\Rightarrow v=6/75\,m/s$$

۴ ۲۸۴ B

معادلهٔ سرعت زمان را می‌نویسیم و مقادیر t و $2t$ را در آن قرار می‌دهیم. البته حواسمان هست که متحرک دارای سرعت اولیه (v_0) بوده و حرکت آن تندشونده است، یعنی شتاب a و سرعت هم‌علامت بوده و با گذشت زمان سرعت در حال افزایش است بنابراین:

$$v=at+v_0\Rightarrow\begin{cases}v_1=at+v_0\\ v_2=a(2t)+v_0=2at+v_0\end{cases}\Rightarrow v_1<v_2<2v_1$$

البته شاید یک مثال عددی کار را برای شما راحت‌تر کند. فرض کنید: $at=3$ و $v_0=2$ است از این‌رو:

$$v_1=3+2=5,\ v_2=6+2=8\Rightarrow5<8<10\Rightarrow5<8<2\times5$$

۱ ۲۸۵ B

یادآوری دو ثانیهٔ سوم یعنی بازهٔ زمانی بین $t=4s$ تا $t=6s$.

۱ معادلهٔ سرعت زمان در حرکت با شتاب ثابت به‌صورت $v=at+v_0$ است. معادلهٔ داده شده در مسئله را با این معادله مقایسه کرده، شتاب و سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم: $v=at+v_0,\ v=-2t+4\Rightarrow a=-2m/s^2,\ v_0=4m/s$

۲ در لحظهٔ $t=4s$ و $t=6s$ مکان‌ها را به‌دست آورده از هم کم می‌کنیم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}(-2)(4)^2+4\times4+x_0\Rightarrow x_1=x_0\\ x_2=\frac{1}{2}(-2)(6)^2+4\times6+x_0\Rightarrow x_2=-12+x_0\end{cases}$$

۳ بزرگی جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ سوم خواهد شد: $|\Delta x|=|-12|=12m$

بازی با سؤال **معادله سرعت - زمان متحرکی (در SI) به صورت $v=4t+3$ است. شتاب و جابه‌جایی متحرک در $0/5s$ آغازین حرکت به ترتیب از راست به چپ چند m/s^2 و چند متر است؟**

۱) ۴، ۲ **۲)** ۴، ۶ **۳)** ۲، −۶ **۴)** ۲، ۴

پاسخ **ابتدا با مقایسه معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت با معادله سرعت - زمان مسأله، شتاب و سرعت اولیه را مشخص می‌کنیم.**

$$v=at+v_0,\ v=4t+3\Rightarrow a=4m/s^2,\ v_0=3m/s$$

جابه‌جایی متحرک را در مدت $0/5s$ به دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow\Delta x=\frac{1}{2}\times4\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{2}\Rightarrow\Delta x=2m$$

گزینهٔ ۱

۲ ۲۸۶ A

۱ ابتدا به کمک معادلهٔ جابه‌جایی زمان، سرعت اولیهٔ متحرک را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow24=\frac{1}{2}\times2\times(4)^2+4v_0\Rightarrow24=16+4v_0\Rightarrow v_0=2m/s$$

۲ سرعت در پایان این مدت خواهد شد: $v=at+v_0\Rightarrow v=2\times4+2=10m/s$

میانبر سرعت در پایان مدت t را می‌توان از رابطهٔ زیر نیز به‌دست آورد.

$$\Delta x=-\frac{1}{2}at^2+vt$$

۲ ۲۸۷ A

خط فکری اگر مشتق‌گیری بلد بودید و می‌دانستید که مشتق معادلهٔ مکان - زمان برابر سرعت لحظه‌ای است، مسأله را راحت حل می‌کردید، اما اکنون باید معادلهٔ مکان - زمان داده شده را با معادلهٔ حرکت کلاسیک حرکت با شتاب ثابت مقایسه کرده و معادلهٔ سرعت زمان را به‌دست آورد.

۱ با مقایسهٔ معادلهٔ مکان - زمان خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\\ x=5t^2-3t+1\end{cases}\xrightarrow[v=at+v_0]{x_0=1m,\,v_0=-3m/s,\,\frac{1}{2}a=5\Rightarrow a=10m/s^2}v=10t-3$$

۲ لحظه‌ای را که در آن سرعت $6m/s$ است، به‌دست می‌آوریم:

$$6=10t-3\Rightarrow t=0/9s$$

۳ زمان به‌دست آمده را در معادلهٔ مکان - زمان قرار می‌دهیم.

$$x=5t^2-3t+1\xrightarrow{t=0/9s}x=5(0/9)^2-3(0/9)+1\Rightarrow x=2/35m$$

۲ ۲۸۸ A

۱ در مبدأ زمان متحرک در مکان $+2m$ است، یعنی مکان اولیهٔ متحرک $x_0=+2m$ است.

۲ با مقایسه معادله سرعت - زمان حرکت با شتاب ثابت با معادله سرعت - زمان مسأله، شتاب و سرعت اولیه مشخص می‌شود.

$$\begin{cases}v=at+v_0\\ v=3t-6\end{cases}\Rightarrow a=3m/s^2,\ v_0=-6m/s$$

۳ اکنون به کمک معادلهٔ مکان - زمان، مکان را در $t=3s$ حساب می‌کنیم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\times3\times9+3\times(-6)+2\Rightarrow x=13/5-18+2$$

$$\Rightarrow x=-2/5m$$

A ۲۸۹ ۲

بردار مکان، برداری است که از مبدأ مکان $(x=0)$ به محل متحرک رسم می‌شود و هرگاه متحرک از مبدأ می‌گذرد، بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

اکنون باید مکان را برابر صفر قرار دهیم:

$x=0 \Rightarrow t^2+3t-4=0 \Rightarrow (t+4)(t-1)=0 \Rightarrow t=1s \ , \ t=-4s$ غ‌ق‌ق

یکی از ریشه‌ها مثبت $(t=1s)$ و یکی از آن‌ها منفی $(t=-4)$ است. از این‌رو بردار مکان یک بار تغییر جهت می‌دهد.

A ۲۹۰ ۴

۱ ابتدا با مقایسه معادله داده شده با معادله مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت، مقدار شتاب، سرعت اولیه و مکان اولیه را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \\ x=t^2-6t+10 \end{cases} \Rightarrow x_0=+10m \ , \ \frac{1}{2}a=1 \Rightarrow a=2m/s^2, v_0=-6m/s$$

۲ معادلهٔ سرعت - زمان خوهد شد: $v=at+v_0 \Rightarrow v=2t-6$

۳ در حرکت با شتاب ثابت لحظه تغییر جهت حرکت لحظه صفر شدن سرعت است.

بنابراین می‌توان نوشت: $v=0 \Rightarrow 2t-6=0 \Rightarrow t=3s$

۴ اکنون مکان تغییر جهت حرکت را به‌دست می‌آوریم

$$x=t^2-6t+10 \xrightarrow{t=3s} x=(3)^2-6(3)+10=1m$$

پس متحرک در یک متری مبدأ تغییر جهت می‌دهد.

B ۲۹۱ ۴

یادآوری بردار مکان وقتی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ می‌گذرد.

۱ ابتدا با استفاده از معادلهٔ مکان - زمان، شتاب حرکت جسم را به‌دست می‌آوریم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow -10=\frac{1}{2}a(4)^2+4\times4+(-2) \Rightarrow a=-3m/s^2$$

۲ معادلهٔ مکان - زمان را نوشته و در آن مکان را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$x=\frac{1}{2}\times(-3)\times t^2+4t+(-2) \Rightarrow x=-\frac{3}{2}t^2+4t-2$$

$$x=0 \Rightarrow -\frac{3}{2}t^2+4t-2=0 \Rightarrow 3t^2-8t+4=0 \Rightarrow t=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{3}=\frac{4\pm2}{3}$$

$$\Rightarrow t=2s \ , t=\frac{2}{3}s$$

۳ هر دو مقدار زمان به‌دست آمده مثبت است، بنابراین در دو لحظهٔ $t=2s$ و $t=\frac{2}{3}s$ متحرک تغییر جهت می‌دهد.

B ۲۹۲ ۲

لحظات تغییر بردار مکان $(x=0)$ را حساب می‌کنیم.

$$x=-2t^2+10t-8 \Rightarrow t^2-5t+4=0 \Rightarrow (t-1)(t-4)=0$$

$$t=1s, \quad t=4s$$

لحظهٔ تغییر سرعت خواهد شد:

$$\begin{cases} x=-2t^2+10t-8 \\ x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}a=-2 \Rightarrow a=-4m/s^2, \quad v_0=10m/s$$

$$v=at+v_0 \Rightarrow 0=-4t+10 \Rightarrow t=2/5s$$

سرعت در دومین لحظهٔ تغییر بردار مکان $(t=4s)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_0 \Rightarrow v=-4\times4+10 \Rightarrow v=-6m/s$$

سرعت متوسط در بازهٔ $2/5s$ تا $4s$ خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}=\frac{0+(-6)}{2} \Rightarrow \vec{v}_{av}=-3\vec{i}$$

روش دیگر: ریشه‌های معادله مکان - زمان را به دست آوردیم $t=4s$ و $t=1s$.

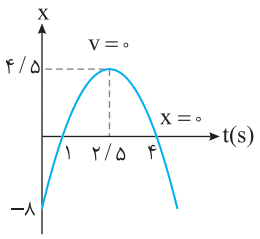
مختصات رأس سهمی را حساب می‌کنیم. (لحظه‌ای که متحرک تغییر جهت می‌دهد.)

$$t=\frac{-b}{2a} \Rightarrow t=\frac{-10}{-2\times(-2)} \Rightarrow t_{\text{راس}}=2/5s$$

$$x_{\text{رأس}}=-2(2/5)^2+10\times2/5-8 \Rightarrow x=4/5m$$

بنابراین در بازهٔ $2/5s$ تا $4s$ متحرک جابه‌جایی $-4/5m$ را انجام می‌دهد.

$$\vec{v}_{av}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{v}_{av}=\frac{-4/5\vec{i}}{4-2/5}=-3\vec{i}$$



B ۲۹۳ ۴

۱ متحرک از مکان اولیهٔ $x_0=+20m$ با سرعت اولیهٔ $-4m/s$ گذشته و در لحظهٔ $t=2s$ به مکان $x=+2m$ رسیده است. این داده‌ها را در معادلهٔ مکان - زمان قرار داده و شتاب را حساب می‌کنیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow 2=\frac{1}{2}\times a\times4+2\times(-4)+20 \Rightarrow a=-5m/s^2$$

۲ متحرک لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد که سرعتش صفر شود و تغییر علامت بدهد. در حرکت با شتاب ثابت کافی است در معادلهٔ سرعت - زمان، مقدار v را برابر صفر قرار داده تا لحظهٔ تغییر جهت را به‌دست بیاوریم.

$$v=at+v_0 \Rightarrow v=-5t-4 \xrightarrow{v=0} -5t-4=0 \Rightarrow t=-0/8s$$

زمان منفی به‌دست آمده است، از این رو متحرک هرگز تغییر جهت نمی‌دهد.

میانبر سرعت اولیه و شتاب حرکت هر دو منفی هستند یعنی هم‌علامت هستند و حرکت تندشونده است. از این رو سرعت متحرک صفر نخواهد شد و متحرک تغییر جهت نمی‌دهد.

B ۲۹۴ ۳

معادلهٔ سرعت - زمان را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \\ x=-4t^2+24t-30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a=-4 \Rightarrow a=-8m/s^2 \\ v_0=24m/s \end{cases}$$

$$v=at+v_0 \Rightarrow v=-8t+24$$

لحظهٔ صفر شدن سرعت خواهد شد: $0=-8t+24 \Rightarrow t=3s$

مکان در لحظهٔ توقف را به‌دست می‌آوریم:

$$x=-4(3)^2+24\times3-30 \Rightarrow x=-36+72-30 \Rightarrow x=6m$$

B ۲۹۵ ۴

خط فکری از ما خواسته شده بازهٔ زمانی‌ای که متحرک خلاف جهت محور x در حرکت است را مشخص کنیم. وقتی متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند یعنی سرعت آن منفی است. بنابراین شما باید معادلهٔ سرعت - زمان را از روی معادلهٔ مکان - زمان بنویسید، سپس آن را تعیین علامت کنید.

یادداشت ریاضی در معادلهٔ درجهٔ اول $y=ax+b$ سمت چپ ریشه مخالف علامت a و سمت راست ریشه موافق علامت a است.

۱ با مقایسهٔ معادلهٔ حرکت مسئله و معادلهٔ مکان - زمان، حرکت با شتاب ثابت، سرعت اولیه و شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x=t^2-6t+5 \\ x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \end{cases} \Rightarrow a=2m/s^2, v_0=-6m/s$$

۲ معادلهٔ سرعت - زمان را نوشته و تعیین علامت می‌کنیم.

$$v=at+v_0 \Rightarrow v=2t-6 \xrightarrow{v=0} 2t-6=0 \Rightarrow t=3s$$

۳ با رسم جدول، علامت سرعت را تعیین می‌کنیم.

t	$-\infty$		۰		۳		$+\infty$
v		−		−	۰	+	

زمان منفی نداریم.

۴ بنابراین در بازهٔ زمانی ۱s تا ۵s، در مدت ۱s تا ۳s سرعت منفی است یعنی به مدت ۲s متحرک در خلاف جهت محور در حال حرکت است.

A ۲۹۶ ۲

خط فکری متحرک از مبدأ مکان $(x_۰=۰)$ در جهت مثبت محور با سرعت اولیه $+۲۰m/s$ و شتاب $a=-۱۰m/s^۲$ می‌گذرد. بنابراین در ابتدا که بردار سرعت و شتاب خلاف جهت هم هستند حرکت کندشونده است و متحرک پس از مدتی می‌ایستد و برمی‌گردد. در لحظهٔ تغییر جهت فاصلهٔ متحرک از مبدأ را باید به‌دست بیاورید. همچنین در انتهای بازه صفر تا ۳s یعنی $t=۳s$ مکان را حساب کرده تا مشخص شود بیشترین فاصله از مبدأ چند متر است؟

۱ در معادلهٔ $v=-۱۰t+۲۰$، سرعت را برابر صفر قرار می‌دهیم تا لحظهٔ تغییر جهت مشخص شود.

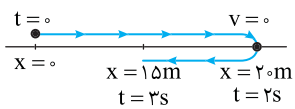
$$-۱۰t+۲۰=۰\Rightarrow t=۲s$$

۲ به کمک معادلهٔ مکان - زمان، مکان متحرک در لحظهٔ تغییر جهت و لحظهٔ انتهای بازه را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=۲s\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\times(-۱۰)\times(۲)^۲+۲۰\times۲+۰\Rightarrow x=-۲۰+۴۰=۲۰m\\ t=۳s\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\times(-۱۰)\times(۳)^۲+۲۰\times۳+۰\Rightarrow x=-۴۵+۶۰=۱۵m\end{cases}$$

۳ بنابراین بیشترین فاصله از مبدأ در بازهٔ صفر تا ۳s، ۲۰m است.



بازی با سوال **اگر در این تست بازهٔ زمانی $t=۰$ تا $t=۶s$ بیان شده بود، بیشترین فاصله از مبدأ چند متر می‌شد؟**

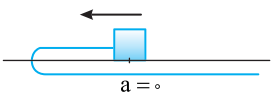
۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰ ۴) ۴۰

پاسخ **تمام حل شبیه مسئلهٔ قبلی است، فقط در انتها باید مکان در لحظهٔ $t=۶s$ را به‌دست بیاوریم**

گزینهٔ ۳ $$x=\frac{۱}{۲}\times(-۱۰)(۶)^۲+۲۰\times۶\Rightarrow x=-۱۸۰+۱۲۰=-۶۰m$$

B ۲۹۷ ۳

با توجه به معادلهٔ $v=۴t-۶$، سرعت اولیهٔ متحرک $v_۰=-۶m/s$ است. یعنی متحرک در جهت منفی محور شروع به حرکت کرده است و چون شتاب آن $+۴m/s^۲$ است و بردار شتاب و سرعت هم‌علامت نیستند. ابتدا حرکت کندشونده است و متحرک متوقف شده برمی‌گردد و برای آنکه تنها یک بار از مبدأ مکان بگذرد کافی است که از ابتدا مکان اولیهٔ آن صفر یا منفی باشد. $(x_۰=a\le۰)$ و مسئله نیازی به هیچ‌گونه محاسبهٔ عددی ندارد.



B ۲۹۸ ۴

یادآوری الف) حرکتی که تندی متحرک در آن در حال کاهش باشد را حرکت کندشونده گویند. در این حرکت $av<۰$ است.

ب) حرکتی که تندی متحرک در آن در حال افزایش باشد را حرکت تندشونده گویند. در این حرکت $av>۰$ است.

۱ با توجه به معادلهٔ سرعت - زمان متحرک و معادلهٔ سرعت - زمان حرکت با شتاب ثابت خواهیم داشت: $v=۴t-۱۲, v=at+v_۰\Rightarrow v_۰=-۱۲m/s, a=۴m/s^۲$

۲ در ابتدا شتاب و سرعت مختلف‌العلامت بوده و $av<۰$ است، پس حرکت در ابتدا کندشونده است.

۳ در لحظهٔ $t=۳s$ با توجه به معادلهٔ $v=۴t-۱۲$ سرعت متحرک صفر می‌شود و پس از این لحظه سرعت متحرک مثبت و شتاب نیز ثابت و مثبت است پس بعد از $t=۳s$، $av>۰$ بوده و حرکت تندشونده است.

B ۲۹۹ ۳

۱ معادلهٔ $x-t$ متحرک درجه دوم است پس حرکت با شتاب ثابت است. با مقایسهٔ معادلهٔ مکان - زمان مسئله با معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت $v_۰$ و a را مشخص می‌کنیم:

$$x=t^۲-۶t+۵, x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow a=۲m/s^۲, v_۰=-۶m/s$$

۲ معادلهٔ سرعت - زمان را می‌نویسیم: $v=at+v_۰\Rightarrow v=۲t-۶$

۳ حال در لحظات $t=۲s$ و $t=۵s$ سرعت را حساب می‌کنیم.

$$t=۲s\Rightarrow v=۲\times۲-۶=-۲m/s\quad,\quad t=۵s\Rightarrow v=۲\times۵-۶=۴m/s$$

۴ در لحظهٔ $t=۲s$ شتاب مثبت و سرعت منفی است، پس در این لحظه $av<۰$ و حرکت کندشونده است.

۵ در لحظهٔ $t=۵s$ شتاب مثبت و سرعت مثبت است، پس در این لحظه $av>۰$ و حرکت تندشونده است.

A ۳۰۰ ۴

۱ ابتدا به کمک معادلهٔ جابه‌جایی- زمان، سرعت اولیه را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\xrightarrow{t=۴s,x=۱۶m,a=۳m/s^۲}$$

$$۱۶=\frac{۱}{۲}\times۳\times(۴)^۲+v_۰\times(۴)\Rightarrow v_۰=-۲m/s$$

۲ بنابراین در ابتدا سرعت منفی و شتاب مثبت بوده یعنی شتاب و سرعت در خلاف جهت هم هستند و حرکت کندشونده است.

۳ معادلهٔ سرعت - زمان را نوشته و لحظهٔ تغییر جهت را به‌دست می‌آوریم.

$$v=۳t-۲\xrightarrow{v=۰}۳t-۲=۰\Rightarrow t=\frac{۲}{۳}s$$

۴ بازهٔ زمانی خواسته شده صفر تا ۴s است. بنابراین از صفر تا $\frac{۲}{۳}s$ حرکت کندشونده و از $\frac{۲}{۳}s$ تا ۴s حرکت تندشونده است.

B ۳۰۱ ۲

۱ معادلهٔ مکان- زمان $x=t^۲-۴t+۸$ را با معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت $x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$ مقایسه می‌کنیم و شتاب و سرعت اولیه را به دست آورده و معادلهٔ سرعت زمان را می‌نویسیم.

$$\begin{cases}x=t^۲-۴t+۸\\ x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\end{cases}\Rightarrow a=۲m/s^۲, v_۰=-۴m/s, x_۰=+۸m$$

۲ معادلهٔ سرعت- زمان خواهد شد: $v=۲t-۴$

۳ لحظهٔ تغییر جهت را یعنی لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود را حساب می‌کنیم.

$$۲t-۴=۰\Rightarrow t=۲s$$

۴ بنابراین در ابتدا که سرعت اولیه منفی است متحرک تا لحظهٔ $t=۲s$ در خلاف جهت محور در حرکت است و گزینهٔ (۱) نادرست است.

۵ در بازهٔ ۰ تا ۲s حرکت کندشونده است و در لحظهٔ $t=۲s$ متحرک متوقف شده و برمی‌گردد و در جهت مثبت محور دارای حرکت تندشونده می‌شود و گزینهٔ (۲) درست و گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست هستند.

بازی با سوال **معادلهٔ مکان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x=-۵t^۲+۶t+۱۲$ است. در مورد جهت حرکت و نوع آن کدام مطلب درست است؟**

۱) همواره در جهت محور و کندشونده ۲) ابتدا در جهت محور و کندشونده

۳) ابتدا در خلاف جهت محور و کندشونده ۴) همواره در خلاف جهت محور و کندشونده

پاسخ معادلهٔ $x=-۵t^۲+۶t+۱۲$ را با معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت یعنی $x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$ مقایسه می‌کنیم و سرعت اولیه و شتاب را مشخص می‌کنیم.

$$\frac{۱}{۲}a=-۵\Rightarrow a=-۱۰m/s^۲\ ,\ v_۰=۶m/s\ ,\ x_۰=۱۲m$$

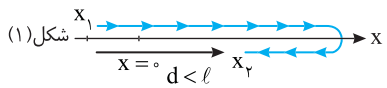
سرعت اولیه $+۶m/s$ است، پس متحرک ابتدا در جهت مثبت محور در حرکت است. سرعت اولیه مثبت و شتاب منفی است، بنابراین در ابتدا حرکت کندشونده است.

نتیجه: در حرکت با شتاب ثابت هرگاه در معادلهٔ مکان - زمان ضریب $t^۲$ و ضریب t هم‌علامت باشند، حرکت همواره تندشونده است و اگر دارای علامت مخالف باشند حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است. گزینهٔ ۲

B ۳۰۲ ۳

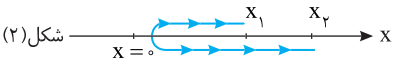
در مسیر زیر جابه‌جایی و مسافت هم‌اندازه نیستند اما جابه‌جایی مثبت و در نتیجه سرعت متوسط مثبت است و لزومی ندارد که سرعت متوسط منفی باشد و گزینهٔ (۱) نادرست است.

شکل (۱)



در مسیر زیر متحرک با شتاب ثابت از نقطهٔ $x_۱$ گذشته، متوقف شده و برمی‌گردد و از مبدأ نمی‌گذرد بنابراین لزومی ندارد که بردار مکان تغییر جهت دهد و گزینهٔ (۲) نادرست است.

شکل (۲)



در یک بازهٔ زمانی معین سرعت متوسط $(v_{av}=d/t)$ و تندی متوسط $(s_{av}=\ell/t)$ با هم برابر نیستند. بنابراین جابه‌جایی و مسافت هم‌اندازه نخواهند بود. در این صورت باید متحرک روی خط راست حداقل یک بار تغییر جهت بدهد یعنی حرکت ابتدا کندشونده بوده و پس از توقف و تغییر جهت متحرک با همان شتاب ثابت برمی‌گردد و با حرکت تندشونده به حرکت خود ادامه می‌دهد و گزینهٔ (۳) درست است.

دوباره به شکل (۲) نگاه کنید دقیقاً متوجه می‌شوید که لزومی ندارد که متحرک ابتدا در جهت مثبت حرکت کند و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۳۰۳ ۲

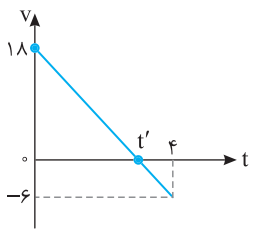
در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی برابر میانگین سرعت در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی $(\frac{v+v_۰}{۲})$ است، بنابراین: $v_{av}=\frac{۰+۲۰}{۲}=۱۰m/s$

B ۳۰۴ ۲

خط فکری برای به‌دست آوردن تندی متوسط و یا مسافت طی شده بهتر است نمودار سرعت - زمان $(v-t)$ متحرک را رسم کرده و از سطح زیر نمودار کمک گرفت.

۱ نمودار $v-t$ در بازهٔ صفر تا $۴s$ را رسم می‌کنیم

$$v=-۶t+۱۸\begin{cases}t=۰\rightarrow v=۱۸m/s\\ t=۴s\rightarrow v=-۶m/s\end{cases}$$

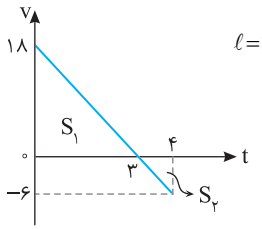


۲ لحظهٔ t' لحظهٔ تغییر جهت حرکت متحرک یعنی لحظه‌ای که $v=۰$ است:

$$v=-۶t+۱۸\xrightarrow{v=۰}-۶t'+۱۸=۰\Rightarrow t'=۳s$$

۳ مسافت طی شده را حساب می‌کنیم:

$$\ell=S_۱+S_۲\Rightarrow \ell=\frac{۳\times۱۸}{۲}+\frac{۱\times۶}{۲}=۲۷+۳=۳۰m$$



۴ تندی متوسط برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s'_{av}=\frac{۳۰}{۴}=۷/۵m/s$$

A ۳۰۵ ۱

سرعت در لحظهٔ $t=۳s$ را به‌دست می‌آوریم: $v=۲t+v_۰\xrightarrow{t=۳s}v=۶+v_۰$

سرعت متوسط در بازهٔ ۰ تا ۳s برابر $۸m/s$ شده است. از طرفی در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط از رابطهٔ $v_{av}=\frac{v+v_۰}{۲}$ به‌دست می‌آید، بنابراین:

$$۸=\frac{۶+v_۰+v_۰}{۲}\Rightarrow ۱۶=۶+۲v_۰\Rightarrow v_۰=۵m/s$$

A ۳۰۶ ۱

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست در بازهٔ زمانی ۰ تا t ثانیه سرعت متوسط از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید. $v_{av}=\frac{۱}{۲}at+v_۰$

۱ متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده و سرعت اولیهٔ آن $v_۰=۰$ است.

۲ در بازهٔ صفر تا ۲/۵s سرعت متوسط برابر $۸m/s$ است. به کمک رابطهٔ بالا شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{۱}{۲}at+v_۰\Rightarrow ۸=\frac{۱}{۲}a\times۲/۵+۰\Rightarrow a=۶/۴m/s^۲$$

۳ سرعت در لحظهٔ $t=۳s$ خواهد شد:

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=۶/۴\times۳+۰\Rightarrow v=۱۹/۲m/s$$

بازی با سؤال **متحرکی روی خط راست با شتاب ثابت $۲m/s^۲$ و با سرعت اولیهٔ $۵m/s$ تندشونده در حرکت است. اگر در بازهٔ صفر تا t ثانیه سرعت متوسط ۱/۵ برابر سرعت اولیه باشد، t چند ثانیه است؟**

۱) ۱/۵ ۲) ۴ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

پاسخ با توجه به فرض مسأله:

$$v_{av}=۱/۵v_۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}at+v_۰=۱/۵v_۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times۲t+۵=۱/۵\times۵\Rightarrow t+۵=۷/۵$$

$$\Rightarrow t=۲/۵s$$

گزینهٔ ۳

A ۳۰۷ ۱

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی برابر میانگین سرعت ابتدای بازه $(v_۱)$ و سرعت انتهای بازه $(v_۲)$ است. $(v_{av}=\frac{v_۲+v_۱}{۲})$

۱ با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}\xrightarrow{v_{av}=۵/۵\ m/s}۵/۵=\frac{v_۱+v_۲}{۲}\Rightarrow v_۱+v_۲=۱۱\ (I)$$

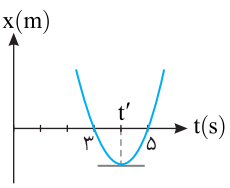
۲ تغییرات سرعت برابر $۹\ m/s$ است. از این‌رو: $v_۲-v_۱=۹\ (II)$

۳ دستگاه دو معادله دو مجهول (I) و (II) را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases}v_۱+v_۲=۱۱\\ v_۲-v_۱=۹\end{cases}\xrightarrow[\text{از هم کم می‌کنیم}]{\text{دو معادله را}}۲v_۱=۲\Rightarrow v_۱=۱m/s$$

B ۳۰۸ ۳

در لحظهٔ $t_۱=۲s$ و $t_۲=۶s$ مکان متحرک را به‌دست می‌آوریم:



$$x(۲)=۲^۲-۸(۲)+۱۵=۳m$$

$$x(۶)=۶^۲-۸(۶)+۱۵=۳m$$

بنابراین جابه‌جایی در این بازه صفر شده و سرعت متوسط در این بازه صفر است. در این صورت سرعت لحظه‌ای خواسته شده نیز باید صفر شود، یعنی شیب خط مماس بر نمودار صفر باشد. می‌دانیم در تابع درجه دوم در رأس سهمی $(t'=-\frac{b}{۲a})$ شیب خط مماس صفر می‌شود.

$$t'=\frac{۸}{۲}=۴s$$

میانبر در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط با سرعت در وسط بازهٔ زمانی برابر است.

۳۰۹ B ۱

معادلهٔ مکان - زمان متحرک $(x=t^۲-۴t+۵)$ تابع درجه دوم می‌باشد، یعنی متحرک دارای شتاب ثابت بوده، بنابراین شتاب در هر لحظه با شتاب متوسط در هر بازه برابر است.

۳۱۰ A ۱

ابتدا به کمک معادله جابه‌جایی - زمان، زمان را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t \xrightarrow{\Delta x=۲۴m,\ a=۴m/s^۲,\ v_۰=۲m/s} ۲۴=\frac{۱}{۲}\times۴\times t^۲+۲t$$

$$\Rightarrow ۲t^۲+۲t=۲۴\Rightarrow t^۲+t-۱۲=۰\Rightarrow t=\frac{-۱\pm\sqrt{۱+۴۸}}{۲}=\frac{-۱\pm۷}{۲}\Rightarrow t=۳s$$

سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۲۴}{۳}=۸m/s$

۳۱۱ A ۳

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست در بازهٔ زمانی ۰ تا t ثانیه سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{۱}{۲}at+v_۰$

۱ شتاب حرکت را به کمک معادلهٔ سرعت متوسط به دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{۱}{۲}at+v_۰\Rightarrow ۶=\frac{۱}{۲}a\times۵+۲\Rightarrow a=۱/۶m/s^۲$$

۲ مکان را در لحظهٔ $t=۲s$ و $t=۴s$ به دست آورده و از هم کم می‌کنیم و جابه‌جایی را حساب می‌کنیم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\begin{cases}\xrightarrow{t=۲s} x=\frac{۱}{۲}\times۱/۶\times۴+۲\times۲+x_۰=۷/۲+x_۰\\ \xrightarrow{t=۴s} x=\frac{۱}{۲}\times۱/۶\times۱۶+۲\times۴+x_۰=۲۰/۸+x_۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x=۱۳/۶m$$

۳۱۲ B ۲

۱ سرعت متوسط در مدت ۵s را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta x=۷۵m} v_{av}=\frac{۷۵}{۵}=۱۵m/s$$

۲ در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{v_۲+v_۱}{۲}\xrightarrow{v_۲=۲۰m/s}۱۵=\frac{۲۰+v_۱}{۲}\Rightarrow v_۱=۱۰m/s$$

۳ شتاب حرکت را حساب می‌کنیم: $a=\frac{v_۲-v_۱}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{۲۰-۱۰}{۵}=۲m/s^۲$

۴ سرعت در ۵s بعدی خواهد شد:

$$v=at+v_۰\Rightarrow v_۳=۲\times۵+۲۰\Rightarrow v_۳=۳۰m/s$$

۵ سرعت متوسط در این ۵s را به‌دست می‌آوریم.

$$v_{av}=\frac{v_۳+v_۲}{۲}=\frac{۲۰+۳۰}{۲}=۲۵m/s$$

۳۱۳ A ۳

خط فکری سرعت متوسط در کل مسیر برحسب سرعت نهایی (v) در انتهای بازه داده شده است. اگر شما سرعت اولیه را برحسب v به‌دست بیاورید، می‌توانید تشخیص دهید که حرکت کندشونده است یا تندشونده.

۱ در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{v+v_۰}{۲}\Rightarrow\frac{۲}{۳}v=\frac{v+v_۰}{۲}\Rightarrow v_۰=\frac{۱}{۳}v$$

۲ سرعت اولیه برابر با $\frac{v}{۳}$ می‌باشد، بنابراین حرکت تندشونده است، زیرا سرعت از $\frac{۱}{۳}v$ به v رسیده است.

۳۱۴ B ۲

خط فکری حرکت تندشونده است، یعنی بردار سرعت و بردار شتاب هم‌جهت هستند. اگر جهت حرکت را مثبت بگیریم، سرعت و شتاب نیز مثبت خواهد بود.

۱ در معادلهٔ جابه‌جایی - زمان، داده‌های مسئله را قرار می‌دهیم.

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\xrightarrow{\Delta x=۱۶m,\ t=۴s}۱۶=\frac{۱}{۲}a(۴)^۲+۴v_۰\Rightarrow ۴=۲a+v_۰$$

$$\Rightarrow v_۰=۴-۲a$$

۲ دقت کنید سرعت و شتاب هر دو مثبت (یا هر دو منفی) اند. البته با توجه به اینکه ما جهت حرکت را مثبت گرفته‌ایم $v_۰$ و a هر دو مثبت هستند. بنابراین

$$v_۰>۰\Rightarrow ۴-۲a>۰\Rightarrow ۴>۲a\Rightarrow a<۲m/s^۲$$

۳ گزینه‌ای که در آن شتاب کمتر از $۲m/s^۲$ است پاسخ تست است یعنی گزینهٔ (۲) درست است.

۳۱۵ A ۲

یادآوری در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط در t ثانیهٔ آغازین حرکت از رابطهٔ روبه‌رو به‌دست می‌آید $v_{av}=\frac{۱}{۲}at+v_۰$

۱ ابتدا در معادلهٔ داده شده در مسئله $v_{av}=\alpha t+۵$، زمان را $t=۵s$ و سرعت متوسط را $۱۱m/s$ قرار می‌دهیم.

$$۱۱=۵\alpha+۵\Rightarrow\alpha=۱/۲m/s^۲$$

۲ α را در معادلهٔ سرعت متوسط زمان قرار داده و شتاب را حساب می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{۱}{۲}at+v_۰\Rightarrow\alpha=\frac{۱}{۲}a\Rightarrow ۱/۲=\frac{۱}{۲}a\Rightarrow a=۲/۴m/s^۲$$

۳۱۶ A ۲

مسئلهٔ ساده‌ای است و به کمک معادلهٔ مستقل از زمان که ما به آن فرمول طلایی می‌گوییم قابل حل است.

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}t\Rightarrow ۰/۱=\frac{۳۰+۵۰}{۲}t\Rightarrow t=\frac{۱}{۴۰۰}s$$

بازی با سؤال **سرعت متحرکی که با شتاب ثابت در حرکت است، در مدت ۱۵ دقیقه از $۴۰km/h$ به $۶۰km/h$ می‌رسد. در این مدت متحرک چند متر جابه‌جا شده است؟** از کتاب درسی

۱) ۱۲۵۰۰ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۵ ۴) ۱۵۰۰۰

پاسخ نیازی به تبدیل یکای km/h به m/s نیست، بلکه دقیقه را به ساعت تبدیل می‌کنیم، سپس مسأله را حل می‌کنیم:

گزینهٔ ۱ $\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t=\frac{۶۰+۴۰}{۲}\times\frac{۱۵}{۶۰}=\frac{۱۰۰}{۸}=۱۲/۵km=۱۲۵۰۰m$

۳۱۷ A ۲

۱ ابتدا سرعت را بر حسب m/s به دست می‌آوریم

$$v=۵۴\frac{km}{h}=\frac{۵۴}{۳/۶}=۱۵m/s$$

۲ سپس به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب خواهیم داشت:

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t\Rightarrow ۲۴۰=\frac{۰+۱۵}{۲}\Delta t\Rightarrow\Delta t=\frac{۴۸۰}{۱۵}=\frac{۱۶۰}{۵}\Rightarrow\Delta t=۳۲s$$

۳۱۸ A ۴

با یک جای‌گذاری ساده در فرمول طلایی $x=\frac{v+v_۰}{۲}t+x_۰$ مسئله حل می‌شود.

$$(x=-۱۲۲/۵m,\ t=۵s,\ v_۰=۰,\ x_۰=۰)\Rightarrow -۱۲۲/۵=\frac{v+۰}{۲}\times۵+۰$$

$$\Rightarrow v=-۴۹m/s$$

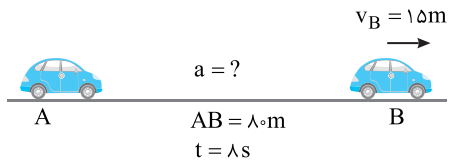
بنابراین بزرگی سرعت $|v|=۴۹m/s$ است.

۳۱۹ A ۴

۱ ابتدا به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب، سرعت در هنگام گذر از نقطهٔ A را به‌دست می‌آوریم: $\Delta x=\frac{v_B+v_A}{۲}\Delta t\Rightarrow ۸۰=\frac{۱۵+v_A}{۲}\times۸\Rightarrow v_A=۵m/s$

۲ اکنون می‌توان شتاب را به دست آورد:

$$a=\frac{v_B-v_A}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{۱۵-۵}{۸}=\frac{۵}{۴}m/s^۲$$



A ۳ ۳۲۰

داده‌های مسئله را در معادلهٔ مستقل از شتاب (فرمول طلایی) قرار می‌دهیم و مقدار v را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{۲}\Delta t\Rightarrow ۲۴=\frac{\frac{۳v}{۲}+v}{۲}\times ۴\Rightarrow ۲۴=\frac{۳v}{۲}\times ۴\Rightarrow ۲۴=۳v\Rightarrow v=۸m/s$$

بازی با سوال متحرکی با شتاب ثابت و سرعت اولیه v_0 روی خط راست به راه می‌افتد و در مدت ۴s، جابه‌جایی متحرک ۲۰ متر بوده و در پایان این مدت سرعت آن $۳v_0$ می‌شود، v_0 چند m/s است؟

۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۲/۵

پاسخ با جای‌گذاری در معادلهٔ مستقل از شتاب:

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{۲}t\Rightarrow ۲۰=\frac{۳v_0+v_0}{۲}\times ۴\Rightarrow v_0=۲/۵m/s$$

گزینهٔ ۴

A ۳ ۳۲۱

۱) با توجه به تعریف شتاب ثابت:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow ۲=\frac{\frac{v}{۳}-v}{۸}\Rightarrow ۱۶=-\frac{۲}{۳}v\Rightarrow v=-۲۴m/s$$

۲) اکنون جابه‌جایی را به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب (رابطهٔ طلایی) به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{۲}\Delta t\Rightarrow \Delta x=\frac{-۸+(-۲۴)}{۲}\times ۸\Rightarrow \Delta x=-۱۲۸m$$

بنابراین اندازهٔ جابه‌جایی ۱۲۸ متر است. در حل این تست شتاب $+۲m/s$ را در نظر گرفتیم و چون اندازهٔ سرعت در حال کاهش بوده، v منفی به دست آمد. شما می‌توانید شتاب را $-۲m/s^۲$ قرار دهید که در جواب نهایی یعنی اندازهٔ جابه‌جایی تغییری حاصل نخواهد شد.

A ۱ ۳۲۲

۱) معادلهٔ سرعت - زمان، تابع درجهٔ اول از زمان است، بنابراین حرکت دارای شتاب ثابت است:

$$\left.\begin{matrix} v=at+v_0 \\ v=۲t-۴ \end{matrix}\right\}\Rightarrow a=۲m/s^۲\ ,\ v_0=-۴m/s$$

۲) برای حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط $v_{av}=\frac{v_۲+v_۱}{۲}$ است. سرعت در لحظهٔ $t=۱s$ و $t=۲s$ را حساب می‌کنیم

$$\left.\begin{matrix} t_۱=۱s\Rightarrow v_۱=-۲m/s \\ t_۲=۲s\Rightarrow v_۲=۰ \end{matrix}\right\}\Rightarrow v_{av}=\frac{-۲+۰}{۲}\Rightarrow v_{av}=-۱m/s$$

۳) جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی با توجه به سرعت متوسط خواهد شد.

$$\Delta x=v_{av}\Delta t\Rightarrow \Delta x=-۱\times(۲-۱)=-۱m/s$$

A ۱ ۳۲۳

سرعت متحرک در $x_۱=۱۰m$ برابر $v_۱=۴m/s$ و در مکان $x_۲=۱۹m$ است. $v_۲=\frac{۱۸}{۳/۶}=۵m/s$ داده‌های مسئله ما را به معادلهٔ مستقل از زمان (معادلهٔ سرعت - مکان) هدایت می‌کند.

$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۲۵-۱۶=۲a\times(۱۹-۱۰)\Rightarrow a=۰/۵m/s^۲$$

A ۴ ۳۲۴

شتاب حرکت یعنی آهنگ تغییر سرعت. در صورت مسئله بیان شده تندی با شتاب $۱m/s^۲$ افزایش می‌یابد، بنابراین $a=+۱m/s^۲$ است و به کمک معادلهٔ مستقل از زمان مسئله قابل حل است. البته ابتدا یکای سرعت را به m/s تبدیل می‌کنیم.

$$v=۱۸km/h\times\frac{۱۰^۳m}{۱km}\times\frac{۱h}{۳۶۰۰s}\Rightarrow v=\frac{۱۸}{۳/۶}=۵m/s$$

$$v^۲-v_۱^۲=۲a\Delta x\xrightarrow{\Delta x=۳۰۰m} v^۲-۲۵=۲\times۱\times۳۰۰\Rightarrow v^۲=۶۲۵$$

$$\Rightarrow v=۲۵m/s$$

$$v_۲=۲۵m/s\times\frac{۳۶۰۰s}{۱h}\times\frac{۱km}{۱۰۰۰m}=۲۵\times۳/۶km/h=۹۰km/h$$

A ۱ ۳۲۵

۱) میزان کاهش سرعت در هر ثانیه یعنی آهنگ تغییر سرعت برابر $۱/۶m/s$ در هر ثانیه است، بنابراین شتاب حرکت $(-۱/۶m/s^۲)$ است (جهت حرکت را مثبت فرض کرده‌ایم).

۲) به کمک معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) خواهیم داشت:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-۴۰۰=۲(-۱/۶)\Delta x\Rightarrow \Delta x=\frac{۲۰۰۰}{۱۶}=۱۲۵m$$

A ۳ ۳۲۶

به کمک معادلهٔ مستقل از زمان (معادلهٔ سرعت-مکان) به راحتی این پرسش قابل حل است.

$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲a(x_۲-x_۱)\xrightarrow{a=۲m/s^۲,v_۱=۵m/s,x_۱=۳m/s,v_۲=۷m/s}$$

$$۴۹-۲۵=۲\times۲\times(x_۲-۳)\Rightarrow x_۲=۹m$$

A ۲ ۳۲۷

۱) متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده یعنی سرعت اولیه صفر است. به کمک معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\xrightarrow{\Delta x=۹m} ۸۱-۰=۲a\times۹\Rightarrow a=۴/۵m/s^۲$$

۲) سرعت متوسط در ۴s آغازین حرکت خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{۱}{۲}at+v_۰\Rightarrow v_{av}=\frac{۱}{۲}\times۴/۵\times۴+۰\Rightarrow v_{av}=۹m/s$$

A ۱ ۳۲۸

۱) با توجه به معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) برای حرکت با شتاب ثابت خواهیم داشت:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-v_۰^۲=۲(-a)\Delta x\Rightarrow \Delta x_{\text{توقف}}=\frac{v_۰^۲}{۲a}$$

۲) شتاب در دو حالت یکسان است در دو حالت رابطهٔ بالا را نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم سپس داده‌های مسئله $v_{۰۱}=۴۰km/h$ و $v_{۰۲}=۸۰km/h$ را در رابطه قرار می‌دهیم.

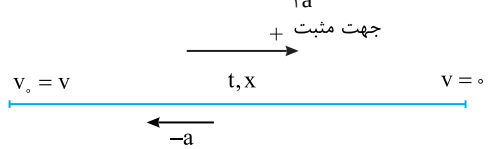
$$\frac{\Delta x_۲}{\Delta x_۱}=\frac{v_{۰۲}^۲}{v_{۰۱}^۲}=\frac{۸۰^۲}{۴۰^۲}\Rightarrow\frac{\Delta x_۲}{۵۰}=۴\Rightarrow \Delta x_۲=۲۰۰m$$

A ۳ ۳۲۹

نکته وقتی متحرک، ترمز می‌کند و می‌ایستد، زمان توقف و جابه‌جایی تا توقف برابر خواهد شد با:

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=-at+v\Rightarrow t=\frac{v}{a}$$

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-v^۲=۲(-a)x\Rightarrow x=\frac{v^۲}{۲a}$$



سرعت اولیه از v به ۲v و شتاب از a به ۲a تغییر کرده است. از طرفی متحرک روی خط راست با شتاب ثابت ترمز کرده و می‌ایستد، بنابراین مسافت طی شده همان جابه‌جایی خودرو است. در روابط بالا داده‌ها را قرار داده و مسئله را حل می‌کنیم.

۱) زمان توقف:

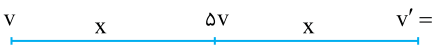
$$t'=\frac{۲v}{(۲a)}\Rightarrow t'=\frac{v}{a}\Rightarrow t'=t$$

۲) جابه‌جایی توقف:

$$\Delta x'=\frac{(۲v)^۲}{۲(۲a)}\Rightarrow \Delta x'=\frac{۴v^۲}{۴a}\Rightarrow \Delta x'=\frac{v^۲}{a}\Rightarrow \Delta x'=۲x$$

A ۳۳۰ ۲

برای درک بهتر مسئله یک شکل ساده رسم می‌کنیم.



با توجه به شکل و معادلهٔ مستقل از زمان برای حرکت با شتاب ثابت عدد جابه‌جایی حالت اول و جابه‌جایی حالت دوم می‌توان نوشت:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x$$

$$\left.\begin{matrix}(۵v)^۲-v^۲=۲ax\\(v')^۲-(۵v)^۲=۲ax\end{matrix}\right\}\Rightarrow ۲۴v^۲=v'^۲-۲۵v^۲\Rightarrow v'^۲=۴۹v^۲\Rightarrow v'=۷v$$

A ۳۳۱ ۳

۱ به کمک معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-۴۰۰=۲a\times ۴۰\Rightarrow a=-۵m/s^۲$$

۲ اکنون سرعت را در جابه‌جایی $\Delta x=۳۰m$ به‌دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow v^۲-۴۰۰=۲\times(-۵)\times ۳۰\Rightarrow v^۲=۱۰۰\Rightarrow v=۱۰m/s$$

A ۳۳۲ ۱

جهت حرکت را مثبت می‌گیریم، در این‌صورت شتاب $-۴m/s^۲$ است به کمک معادلهٔ مستقل از زمان مسأله را حل می‌کنیم:

$$v_۱=۳۶km/h\times\frac{۱۰}{۳۶}=۱۰m/s$$

$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰^۲-۱۰^۲=۲\times(-۴)\times\Delta x\Rightarrow\Delta x=۱۲/۵m$$

گوزن در فاصلهٔ ۱۵ متری اتومبیل بوده و اتومبیل پس از ۱۲/۵m می‌ایستد، بنابراین فاصلهٔ گوزن تا اتومبیل در هنگام توقف ۱۵−۱۲/۵=۲/۵m می‌باشد.

B ۳۳۳ ۱

نکته زمان واکنش یعنی بازهٔ زمانی از لحظه‌ای که راننده مانع را می‌بیند تا لحظه‌ای که ترمز می‌کند.

خط فکری در مدت زمان واکنش، حرکت متحرک تقریباً حرکت با سرعت ثابت روی خط راست است. بنابراین شما باید در مدت ۰/۴s، جابه‌جایی خودرو را به کمک رابطهٔ سرعت ثابت به‌دست آورده سپس جابه‌جایی آن را پس از ترمز تا توقف کامل به کمک روابط شتاب ثابت حساب کنید.

۱ سرعت را برحسب m/s به‌دست می‌آوریم. $v=۹۰km/h=\frac{۹۰}{۳/۶}=۲۵m/s$

۲ جابه‌جایی در مدت زمان واکنش برابر است با:

$$\Delta x=vt\Rightarrow\Delta x_۱=۲۵\times ۰/۴\Rightarrow\Delta x_۱=۱۰m$$

۳ از لحظهٔ ترمز تا توقف کامل، جابه‌جایی اتومبیل برابر خواهد شد با:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-۲۵^۲=۲(-۵)\Delta x_۲\Rightarrow\Delta x_۲=۶۲/۵m$$

۴ بنابراین اتومبیل از لحظهٔ مشاهدهٔ مانع تا توقف، جابه‌جایی $\Delta x_۱+\Delta x_۲$ را می‌پیماید: ۶۲/۵+۱۰=۷۲/۵m

در نتیجه اتومبیل در فاصلهٔ ۸۰−۷۲/۵=۷/۵m از مانع می‌ایستد.

B ۳۳۴ ۲

ابتدا سرعت خودرو را بر حسب متر بر ثانیه به‌دست می‌آوریم:

$$v=۱۰۸\frac{km}{h}\times\frac{۱h}{۳۶۰۰s}\times\frac{۱۰۰۰m}{۱km}=\frac{۱۰۸}{۳/۶}=۳۰m/s$$

۱ جابه‌جایی متحرک در مدت t خودرو با سرعت ثابت ۳۰m/s برابر است با:

$$\Delta x=vt\Rightarrow\Delta x_۱=۳۰t$$

۲ جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی که حرکت کندشونده است به کمک معادلهٔ مستقل از زمان (معادلهٔ سرعت - مکان) حساب می‌کنیم.

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x_۲\Rightarrow ۰-۳۰^۲=۲\times(-۳)\times\Delta x_۲\Rightarrow\Delta x_۲=۱۵۰m$$

۳ برای آنکه خودرو به مانع برخورد نکند، باید در مدت زمان واکنش جابه‌جایی آن کمتر ۲۰۰−۱۵۰=۵۰m باشد، بنابراین

$$\Delta x_۱\le ۵۰\Rightarrow ۳۰t\le ۵۰\Rightarrow t\le\frac{۵}{۳}$$

B ۳۳۵ ۴

۱ ابتدا به کمک معادلهٔ سرعت-مکان (مستقل از زمان) شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a(x-x_۰)\xrightarrow[v_۰=۸m/s,v=۶m/s]{x=۱۸/۵m,x_۰=۱۵m}۳۶-۶۴=۲a(۱۸/۵-۱۵)$$

$$\Rightarrow a=-۴m/s^۲$$

۲ بنابراین معادلهٔ مکان- زمان آن خواهد شد:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}(-۴)t^۲+۸t+۱۵\Rightarrow x=-۲t^۲+۸t+۱۵$$

A ۳۳۶ ۲

۱ ابتدا شتاب را به کمک معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) به‌دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۱۷^۲-۹^۲=۲a(۳۱-۵)\Rightarrow(۱۷+۹)(۱۷-۹)=۲\times a\times ۲۶$$

$$\Rightarrow a=۴m/s^۲$$

۲ سرعت اولیه را به کمک معادلهٔ سرعت- زمان حساب می‌کنیم:

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۹=۴\times ۱+v_۰\Rightarrow v_۰=۵m/s$$

۳ اکنون مکان اولیهٔ متحرک را حساب می‌کنیم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow ۵=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۱+۵\times ۱+x_۰\Rightarrow x_۰=-۲m$$

۴ معادله حرکت برابر است با: $x=\frac{۱}{۲}\times ۴t^۲+۵t-۲\Rightarrow x=۲t^۲+۵t-۲$

B ۳۳۷ ۲

خط فکری در این پرسش خاص معادلهٔ سرعت - مکان داده شده را با معادلهٔ مستقل از زمان حرکت با شتاب ثابت مقایسه می‌کنیم و ضریب x را برابر ۲a قرار می‌دهیم و شتاب را به‌دست می‌آوریم.

معادله $v=۵\sqrt{x}$ را به توان ۲ رسانده تا شبیه معادلهٔ مستقل از زمان شود.

$$v^۲=۲۵x$$

با توجه به معادلهٔ $v^۲-v_۰^۲=۲ax$، ضریب x در دو معادله را برابر قرار می‌دهیم و شتاب را به‌دست می‌آوریم. $۲a=۲۵\Rightarrow a=۱۲/۵m/s^۲$

A ۳۳۸ ۱

خط فکری معادلهٔ سرعت - مکان داده شده را به توان ۲ برسانید و آن را به‌صورت معادلهٔ مستقل از زمان حرکت با شتاب ثابت $v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x$ مرتب کنید و با مقایسه، مقدار $v_۰$ و a را به‌دست بیاورید، حرکت کندشونده است و باید علامت a و $v_۰$ یکسان نباشد. پس به سراغ حل مسئله برویم.

۱ $v=\pm\sqrt{۷x+۴۹}\Rightarrow v^۲-۴۹=+۷x\xrightarrow{v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x}$

$$v_۰^۲=۴۹\Rightarrow v_۰=\pm ۷m/s\,,۲a=۷\Rightarrow a=\mp ۳/۵m/s^۲$$

۲ حرکت کندشونده است از این‌رو اگر شتاب را مثبت $a=+۳/۵m/s^۲$ فرض کنیم، سرعت اولیهٔ آن منفی $(v_۰=-۷m/s)$ است. اکنون به کمک معادلهٔ جابه‌جایی زمان مسئله را حل می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow\Delta x=\frac{۱}{۲}(۳/۵)۱۶+(-۷)\times ۴\Rightarrow\Delta x=۲۸-۲۸=۰$$

C ۳۳۹ ۱

خط فکری مهم‌ترین قسمت حل مسئله این است که در لحظهٔ $t=۰$ مکان اولیه $x_۰=\frac{-۲۷}{۸}m$ است. بنابراین با قرار دادن مکان اولیه در معادلهٔ داده شده، سرعت اولیه متحرک را به‌دست می‌آوریم سپس با مرتب کردن معادله و با مقایسهٔ آن با معادلهٔ مستقل از زمان شتاب را حساب کرده سپس به کمک معادلهٔ مکان - زمان لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان یعنی لحظهٔ گذر از $x=۰$ را حساب می‌کنیم.

۱ سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$$\frac{v^۲}{۳۶}-\frac{۲x}{۹}=۱\Rightarrow\frac{v_۰^۲}{۳۶}-\frac{۲(\frac{-۲۷}{۸})}{۹}=۱\Rightarrow\frac{v_۰^۲}{۳۶}+\frac{۳}{۴}=۱\Rightarrow\frac{v_۰^۲+۲۷}{۳۶}=۱$$

$$\Rightarrow v_۰^۲+۲۷=۳۶\Rightarrow v_۰^۲=۹\Rightarrow v_۰=۳m/s$$

۲ متحرک در حال حرکت با شتاب ثابت است بنابراین معادلهٔ سرعت - مکان $v^2-v_0^2=2ax$ می‌باشد. حال معادلهٔ داده شده را مرتب می‌کنیم

$$\frac{v^2}{36}-\frac{2x}{9}=1\Rightarrow\frac{v^2}{36}-\frac{8x}{36}=1\xrightarrow{\times 36}v^2-8x=36\Rightarrow v^2=8x+36$$

۳ شتاب را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases}v^2=2a(x-x_0)+v_0^2\\ v^2=8x+36\end{cases}\Rightarrow 2a=8\Rightarrow a=4m/s^2$$

۴ معادلهٔ مکان - زمان متحرک به صورت $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ می‌باشد، بنابراین:

$$x=\frac{1}{2}\times 4\times t^2+3t-\frac{27}{8}\Rightarrow x=2t^2+3t-\frac{27}{8}$$

۵ هنگامی که متحرک از $x=0$ عبور می‌کند بردار مکان متحرک تغییر جهت خواهد داد:

$$2t^2+3t-\frac{27}{8}=0\Rightarrow t=\frac{3}{4}s,\ t=-\frac{9}{4}s\ \text{غ ق ق}$$

بنابراین در لحظهٔ $t=\frac{3}{4}s=0/75s$ بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

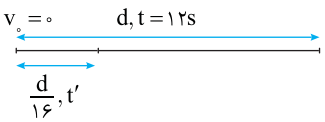
۳۴۰ B ۴

۱ برای آن‌که معادلهٔ $v=\frac{-\sqrt{-2x}}{4}$ پاسخ داده باید زیر رادیکال مثبت باشد. از این‌رو مقدارهای x باید منفی بوده یعنی متحرک در مکان‌های منفی است.

۲ در $x=0$، $v_0=0$ است یعنی متحرک از مبدأ مکان از حال سکون در جهت منفی محور حرکت کرده است و با افزایش مقدار x، تندی نیز در حال افزایش و حرکت تندشونده است.

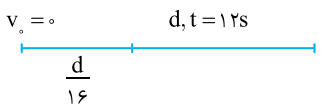
۳۴۱ A ۳

خط فکری در حل این نوع مسائل یک شکل ساده از مسئله بکشید و طول تمام مسیر مستقیم را d بنامید و معادلهٔ مکان - زمان را برای آن بنویسید همچنین معادلهٔ مکان - زمان را برای قسمت اول مسیر (دقت کنید حتماً قسمت اول که در آن سرعت اولیه صفر است) بنویسید و دو معادله را بر هم تقسیم کنید.



با توجه به معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت و سرعت اولیه صفر، برای کل مسیر (d) و $\frac{d}{16}$ اول مسیر معادله‌ها را می‌نویسیم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow\begin{cases}d=\frac{1}{2}at^2\\ \frac{d}{16}=\frac{1}{2}at'^2\end{cases}\Rightarrow 16=\frac{t^2}{t'^2}\Rightarrow t'=\frac{t}{4}=\frac{12}{4}\Rightarrow t'=3s$$



میانبر وقتی متحرک از حال سکون با شتاب ثابت روی خط راست شروع به حرکت کرده و در مدت t جابه‌جایی d را انجام می‌دهد، $\frac{d}{n}$ اول مسیر را در مدت $t'=\frac{t}{\sqrt{n}}$ می‌پیماید.

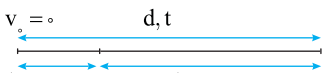
بازی با سؤال **متحرکی روی خط راست از حال سکون با شتاب ثابت جابه‌جایی d را در مدت t طی می‌کند. این متحرک $\frac{3d}{4}$ آخر مسیر را در مدت $15s$ طی می‌کند. t چند ثانیه است؟**

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

پاسخ همان‌گونه که بیان شد، باید $d-\frac{3d}{4}=\frac{d}{4}$ اول مسیر را با کل مسیر مقایسه کنیم. اگر زمان کل حرکت t باشد، زمان حرکت $\frac{d}{4}$ اول مسیر $t'=t-15$ ثانیه است. معادله‌ها را نوشته و مسئله را حل می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow\begin{cases}\frac{d}{4}=\frac{1}{2}a(t-15)^2\\ d=\frac{1}{2}at^2\end{cases}\xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{دو رابطه را بر هم}}\frac{1}{4}=\frac{(t-15)^2}{t^2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{t-15}{t}\Rightarrow t=30s$$



$\frac{d}{4}, t'=t-15$ $\quad$ $\frac{3d}{4}, t''=15s$

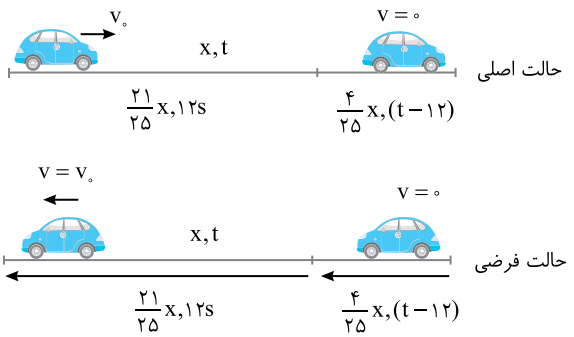
گزینهٔ ۳

۳۴۲ B ۱

نکته در حرکت کندشونده با شتاب ثابت روی خط راست که متحرک متوقف می‌شود، می‌توان حرکت را از مکان توقف یک حرکت تندشونده با همان شتاب فرض کرد.

خط فکری با توجه به نکتهٔ بیان شده، شما زمان کل توقف را t و مسافت طی شده را x فرض کنید. در این صورت، متحرک مسافت طی شدهٔ اول حالت فرضی $(\frac{4}{25}x)$ را در $12s-t$ طی می‌کند. بنابراین معادلهٔ مکان - زمان را برای x و $\frac{4}{25}x$ نوشته و بر هم تقسیم کنید.

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}at^2\\ \frac{4x}{25}=\frac{1}{2}a(t-12)^2\end{cases}\Rightarrow\frac{25}{4}=\frac{t^2}{(t-12)^2}\Rightarrow\frac{5}{2}=\frac{t}{t-12}\Rightarrow 5t-60=2t\Rightarrow t=20s$$



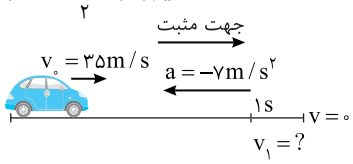
۳۴۳ A ۴

روش اول: سرعت خودرو با شتاب $7m/s^2$ از $35m/s$ به صفر رسیده است از این‌رو سرعت آن یک ثانیه قبل از توقف کامل خواهد شد:

$$v=at+v_1\Rightarrow 0=-7\times 1+v_1\Rightarrow v_1=7m/s$$

جابه‌جایی در یک ثانیهٔ آخر را به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{v+v_1}{2}t\Rightarrow\Delta x=\frac{0+7}{2}\times 1=3/5m$$



روش راحت‌تر: کافی است فرض کنیم متحرک از حال سکون با شتاب $7m/s^2$ به راه می‌افتد و جابه‌جایی آن را در $t=1s$ از شروع حرکتش به‌دست آوریم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\times 7\times 1=3/5m$$

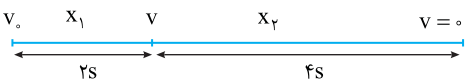


B ۳۴۴ ۲

خط فکری ابتدا شتاب حرکت را برحسب سرعت اولیه v_0 به‌دست بیاورید، زمان طی مسیر ۶s است که به دو بازهٔ ۲s اول و ۴s بعدی تقسیم شده سرعت را در $t=2s$ حساب کنید و به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب (فرمول طلایی) جابه‌جایی در هر قسمت را به‌دست آورده بر هم تقسیم می‌کنیم.

۱ شتاب حرکت برابر است با:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-v_0}{6}\Rightarrow a=\frac{-v_0}{6}$$



۲ سرعت را در لحظهٔ $t=2s$ به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=\frac{-v_0}{6}\times 2+v_0\Rightarrow v=\frac{2}{3}v_0$$

۳ اکنون به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب، جابه‌جایی‌های x_1 و x_2 را به‌دست می‌آوریم و بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{\frac{2}{3}v_0+v_0}{2}\times 2\Rightarrow x_1=\dfrac{5}{3}v_0\\ x_2=\dfrac{0+\frac{2}{3}v_0}{2}\times 4\Rightarrow x_2=\dfrac{4}{3}v_0\end{cases}\Rightarrow\frac{x_2}{x_1}=\frac{4}{5}$$

A ۳۴۵ ۲

مسئلهٔ ساده‌ای است. در صورت مسئله حرفی از زمان (t) زده نشده بنابراین فرمول مستقل از زمان اولین انتخاب برای حل مسئله است.

رابطهٔ مستقل از زمان را برای کل مسیر (x) و برای ۱۵۰ متر اول که تندی نصف می‌شود را می‌نویسیم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\begin{cases}\xrightarrow{v=0}0-v_0^2=2a(x)\\ \xrightarrow{v=\frac{v_0}{2}}(\frac{v_0}{2})^2-v_0^2=2a(150)\Rightarrow-\frac{3v_0^2}{4}=2a(150)\end{cases}$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم.

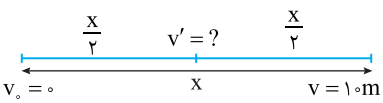
$$\frac{v_0^2}{\frac{3}{4}v_0^2}=\frac{x}{150}\Rightarrow\frac{4}{3}=\frac{x}{150}\Rightarrow x=200m$$

بازی با سؤال **متحرکی با شتاب ثابت از حال سکون به راه می‌افتد و در جابه‌جایی x سرعتش به $10m/s$ می‌رسد، سرعت این متحرک در گذر از وسط مسیر چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۵ ۲) $5\sqrt{2}$ ۳) $5\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $5\sqrt{3}$

پاسخ معادلهٔ مستقل از زمان را در دو حالت نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{cases}v'^2-v_0^2=2a(\frac{x}{2})\\ v^2-v_0^2=2ax\end{cases}\xrightarrow[v=10]{v_0=0}\frac{v'^2}{100}=\frac{1}{2}\Rightarrow v'=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 10\Rightarrow v'=5\sqrt{2}m/s$$



میانبر اگر متحرک از حال سکون با شتاب ثابت a شروع به حرکت کرده و پس از جابه‌جایی x سرعتش v شود سرعت آن پس از جابه‌جایی $\frac{x}{n}$ خواهد شد $v'=\frac{v}{\sqrt{n}}$.

گزینهٔ ۲

A ۳۴۶ ۳

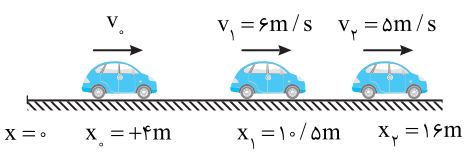
به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، شتاب حرکت را در مدتی که متحرک از مکان $x_1=10/5m$ به مکان $x_2=+16m$ می‌رود به‌دست می‌آوریم:

$$v_2^2-v_1^2=2a(x_2-x_1)\Rightarrow 25-36=2a(16-10/5)\Rightarrow a=-1m/s^2$$

اکنون بزرگی سرعت اولیه را در مدتی که متحرک از مکان اولیه $x_0=+4m$ به مکان $x_2=+16m$ می‌رود را حساب می‌کنیم.

$$v^2-v_0^2=2a(x-x_0)\Rightarrow 25-v_0^2=2(-1)(16-4)\Rightarrow v_0^2=25+24$$
$$\Rightarrow v_0=+7m/s$$

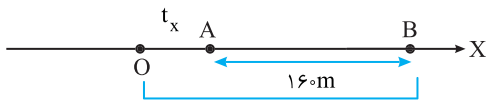
مسیر حرکت در واقع به شکل زیر است:



B ۳۴۷ ۲

خط فکری سرعت متحرک در نقطهٔ O صفر است، بنابراین می‌توانید فرض کنید که متحرک از نقطهٔ O با شتاب $2m/s^2$ از حال سکون روی محور xها شروع به حرکت کرده و ابتدا فاصلهٔ OA را در مدت t ثانیه و فاصلهٔ OB را در مدت $(t+8)$ ثانیه طی کرده است. فاصله OA را با حرف x نشان دهید. در این صورت فاصلهٔ OB برابر $(x+160)$ متر است.

۱ با توجه به شکل زیر، به کمک معادلهٔ مکان - زمان برای حرکت با شتاب ثابت می‌توان نوشت:



$$OB=x+160$$

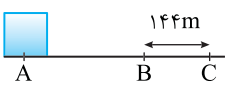
$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}at^2=t^2\\ x+160=\frac{1}{2}a(t+8)^2=(t+8)^2\end{cases}\xrightarrow{\text{دو معادله را از هم کم کنیم}}$$

$$160=(t+8)^2-t^2\Rightarrow 160=16t+64\Rightarrow t=6s$$

۲ با داشتن $t=6s$ مقدار OA را حساب می‌کنیم:

$$x=t^2\xrightarrow{t=6s}OA=36m$$

بازی با سؤال **متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت از نقطهٔ A حرکت می‌کند و فاصلهٔ B تا C را در مدت ۴ ثانیه طی می‌کند. اگر سرعت متحرک هنگام عبور از B برابر $16m/s$، فاصلهٔ A و B چند متر است؟**



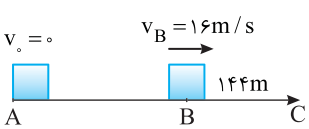
۱) ۱۲/۸ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۵/۶

پاسخ به کمک معادلهٔ جابه‌جایی - زمان در بازهٔ زمانی حرکت متحرک از B تا C شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 144=\frac{1}{2}a\times(4)^2+16\times 4\Rightarrow 80=8a\Rightarrow a=10m/s^2$$

اکنون به کمک معادلهٔ مستقل از زمان فاصلهٔ AB را حساب می کنیم:

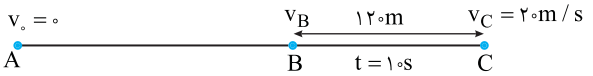
$$v_B^2-v_A^2=2a\Delta x\Rightarrow 16^2-0=2\times 10(AB)\Rightarrow AB=12/8m$$



گزینهٔ ۱

B ۲ ۳۴۸

حرکت دارای شتاب ثابت است.



۱ سرعت در نقطهٔ B را به کمک رابطهٔ مستقل از شتاب به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{v_C+v_B}{2}\Delta t\Rightarrow 120=\frac{20+v_B}{2}\times 10\Rightarrow v_B=4m/s$$

۲ شتاب را حساب می‌کنیم:

$$a=\frac{v_C-v_B}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{20-4}{10}\Rightarrow a=1/6m/s^2$$

۳ اکنون به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، فاصلهٔ A تا B را به دست می‌آوریم:

$$v_B^2-v_A^2=2a\Delta x\Rightarrow 16-0=2\times 1/6\times\Delta x\Rightarrow\Delta x=5m$$

C ۳ ۳۴۹

نکته در یک حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی برابر سرعت لحظه‌ای در وسط بازه است.

خط فکری در بازهٔ زمانی ۲s تا ۴s سرعت متوسط را به‌دست بیاورید. با این کار سرعت در لحظهٔ $t=3s$ حساب کرده‌اید همین کار را برای بازهٔ ۴s تا ۶s انجام دهید تا سرعت در لحظهٔ $t=5s$ را به‌دست بیاورید از آن‌جا شتاب حرکت و ... را به‌دست آورید.

t(s)	۲	۴	۶
x(m)	۲۰	۳۶	۴۴

۱ سرعت متوسط در بازهٔ ۲s تا ۴s برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{36-20}{4-2}\Rightarrow v_{av}=8m/s\Rightarrow v_{t=3s}=8m/s$$

۲ سرعت متوسط در بازهٔ ۴s تا ۶s حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{44-36}{6-4}=4m/s\Rightarrow v_{t=5s}=4m/s$$

۳ شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{4-8}{5-3}\Rightarrow a=-2m/s^2$$

۴ سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_0\xrightarrow[a=-2m/s^2]{t=3s,\ v=8m/s}8=-2\times 3+v_0\Rightarrow v_0=14m/s$$

۵ معادلهٔ سرعت - زمان را می‌نویسیم: $v=-2t+14$

۶ در حرکت با شتاب ثابت نوع حرکت در لحظه‌ای تغییر می‌کند که سرعت صفر شود بنابراین $v=0\Rightarrow -2t+14=0\Rightarrow t=7s$

بازی با سوال **متحرکی با شتاب ثابت روی خط راست حرکت می‌کند. اگر در زمان‌های $t=2s$ ، $t=6s$ و $t=8s$ به‌ترتیب از $x=10m$ ، $x=50m$ و $x=90m$ عبور کند، شتاب حرکت چند متر بر مجذور ثانیه است؟**

۱) ۲/۵ ۲) ۴ ۳) $\frac{10}{3}$ ۴) $\frac{3}{10}$

پاسخ **سرعت متوسط در بازهٔ ۲s تا ۶s با سرعت در لحظهٔ $t=4s$ برابر است از این‌رو می‌توان نوشت:**

$$v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\Rightarrow v_{av}=\frac{50-10}{6-2}\Rightarrow v_{av}=10m/s\Rightarrow v_{t=4s}=10m/s$$

سرعت در لحظهٔ $t=7s$ با سرعت متوسط در بازهٔ ۶s تا ۸s برابر است از این‌رو:

$$v_{av}=\frac{90-50}{8-6}\Rightarrow v_{av}=20m/s\Rightarrow v_{t=7s}=20m/s$$

شتاب حرکت خواهد شد:

$$a=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\Rightarrow a=\frac{20-10}{7-4}=\frac{10}{3}m/s^2$$

گزینهٔ ۳

B ۲ ۳۵۰

خط فکری با مسئله راحتی سروکار داریم. در صورت مسئله صحبتی از زمان نیست بنابراین باید به سراغ معادلهٔ مستقل از زمان برویم و به کمک آن شتاب را در بازهٔ مکانی $-25m$ تا $-10m$ حساب کنیم سپس با همان معادلهٔ v_1 را به‌دست می‌آوریم.

x(m)	$x_1=-22$	$x_2=-25$	$x_3=-10$
v(m/s)	v_1	$v_2=2$	$v_3=8$

۱ شتاب حرکت خواهد شد:

$$v_3^2-v_2^2=2a(x_3-x_2)\Rightarrow 8^2-2^2=2a[-10-(-25)]$$

$$\Rightarrow 60=2a(15)\Rightarrow a=2m/s^2$$

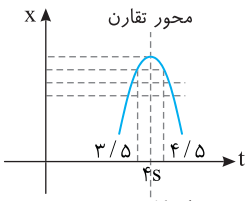
۲ سرعت v_1 را حساب می‌کنیم:

$$v_2^2-v_1^2=2a(x_2-x_1)\Rightarrow 2^2-v_1^2=2\times 2[-25-(-22)]$$

$$4^2-v_1^2=-12\Rightarrow v_1^2=+16\Rightarrow v_1=\pm 4m/s$$

دقت کنید مکان متحرک ابتدا $x_1=-22m$ ، سپس $x_2=-25m$ است یعنی متحرک در جهت منفی محور در حال حرکت بوده است از این‌رو $v_1=-4m/s$ خواهد بود.

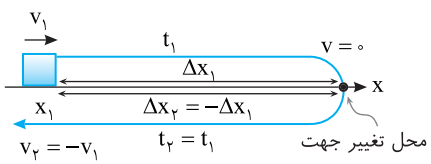
B ۳ ۳۵۱



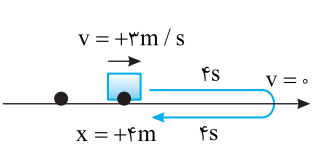
متحرک دارای شتاب ثابت است و نمودار مکان- زمان آن سهمی است. از طرفی در لحظهٔ $t=4s$ متحرک در بیشترین فاصلهٔ مثبت از مبدأ مکان است. یعنی متحرک در این لحظه تغییر جهت داده است. به عبارت بهتر متحرک ابتدا در جهت محور x ها در حرکت بوده و در لحظهٔ $t=4s$ سرعتش در مکان مثبت صفر شده و متحرک تغییر جهت داده و در خلاف جهت محور x ها حرکت کرده است. لحظهٔ $t=4s$ رأس سهمی مکان- زمان است و نمودار مکان - زمان آن می‌تواند به شکل زیر باشد. در یک سهمی نقاط واقع بر سهمی نسبت به محور قائم گذرنده از رأس تقارن دارد و در نقاطی که فاصلهٔ زمانی یکسانی از محور دارند مکان متحرک یکسان است و در بازهٔ زمانی بین این لحظه‌ها جابه‌جایی صفر است و تنها در گزینهٔ (۳) فاصلهٔ زمانی ۳/۵s و ۴/۵s از ۴s برابر است و جابه‌جایی صفر است.

B ۱ ۳۵۲

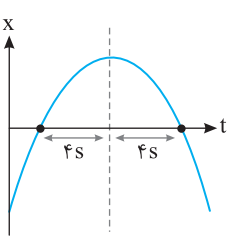
خط فکری در حل این نوع مسائل مطلب بسیار مهم تقارن حرکت متحرک در دو طرف مکان و لحظه‌ای است که متحرک با شتاب ثابت متوقف شده و برمی‌گردد یعنی در هر بازهٔ زمانی و مکانی از یک نقطه به سوی محل تغییر جهت برود در همان بازهٔ زمانی از محل تغییر جهت به محل اولیه بازمی‌گردد و در آن محل سرعتش نیز قرینه می‌شود.



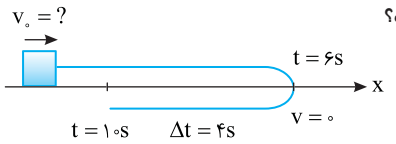
روش اول: نیازی به نوشتن هیچ رابطه و فرمولی نداریم، در مدت ۴s متحرک به بیشینه مکان می‌رسد. مدت زمان ۸s را در ذهن خود به دو بازهٔ زمانی ۴s تقسیم کنید در ۴s اول متحرک از مکان $+4m$ با سرعت $+3m/s$ به بیشینه مکان مثبت رفته، متوقف شده و ۴s بعد این مسیر را برگشته و به مکان $x=+4m$ برمی‌گردد.



روش دوم: معادلهٔ مکان-زمان حرکت با شتاب ثابت یک تابع درجه ۲ $\left(x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\right)$ بوده و نمودار آن سهمی است و خطی که از رأس سهمی می‌گذرد محور تقارن سهمی است و مفهوم آن این است که در فاصلهٔ زمانی یکسان از این محور مکان مقدار یکسانی است.



بازی با سؤال متحرکی روی محور xها با شتاب ثابت در حرکت است و در لحظهٔ $t_۱=۶s$ در جهت مثبت در بیشترین فاصلهٔ خود از مبدأ مکان است. اگر در لحظهٔ $t_۲=۱۰s$ از مبدأ مکان با سرعت $۸m/s$ خلاف جهت محور x عبور کند، سرعت اولیه متحرک چند متر بر ثانیه است؟



پاسخ

۱ متحرک در لحظهٔ $t=۶s$ در محل تغییر جهت حرکت خود است و در لحظهٔ $t=۱۰s$ از مبدأ مکان $x=۰$ با سرعت $۸m/s$ در خلاف جهت محور $(v=-۸m/s)$ می‌گذرد. شتاب حرکت را با توجه به این مطالب حساب می‌کنیم. در بازهٔ $۴s$ سرعت متحرک از صفر به $-۸m/s$ رسیده از این‌رو،

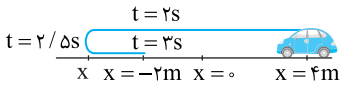
$$v=at+v_۰\Rightarrow -۸=a(+۴)+۰\Rightarrow a=-۲m/s^۲$$

۲ سرعت متحرک در مدت ۰ تا $۶s$ از سرعت اولیه $(v_۰)$ با شتاب $(-۲m/s^۲)$ به صفر رسیده است بنابراین خواهیم داشت:

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=-۲\times ۶+v_۰\Rightarrow v_۰=۱۲m/s$$

۳۵۳ B

۱ متحرک دارای حرکت با شتاب ثابت است و در لحظه‌های $t=۲s$ و $t=۳s$ از مکان $-۲m$ می‌گذرد، بنابراین در این بازه متحرک تغییر جهت داده است. اما در چه لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد. در واقع متحرک از $t=۲s$، نیم ثانیه رفته در لحظهٔ $۲/۵s$ متوقف شده و نیم ثانیه برمی‌گردد و در لحظهٔ $t=۳s$ از مکان $-۲m$ مجدداً می‌گذرد. (البته لحظهٔ تغییر جهت، لحظهٔ رأس سهمی است و در دو طرف محور قائم گذرنده از رأس سهمی تقارن دارد با این استدلال نیز مشخص است که $t_{رأس}=\frac{۲+۳}{۲}=۲/۵s$.



۲ با توجه به معادلهٔ سرعت - زمان می‌توان نوشت:

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=a(۲/۵)+v_۰\Rightarrow v_۰=-۲/۵a \quad (I)$$

۳ مکان اولیهٔ متحرک $x=+۴m$ است. با توجه به معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت خواهیم داشت

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \xrightarrow{t=۲s,\ x=-۲m} -۲=\frac{۱}{۲}a(۴)+۲v_۰+۴$$

$$\Rightarrow -۲=۲a+۲v_۰+۴\Rightarrow ۲a+۲v_۰=-۶\Rightarrow a+v_۰=-۳ \quad (II)$$

۴ از رابطهٔ (I) در رابطهٔ (II) جای‌گذاری کرده شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$a-۲/۵a=-۳\Rightarrow -۱/۵a=-۳\Rightarrow a=۲m/s^۲$$

۳۵۴ B

خط فکری در مسئله گفته شده در بازهٔ ۰ تا $۱۰s$، $۶s$ حرکت تندشونده است یعنی باید از ۰ تا $۴s$ حرکت کندشونده باشد و در لحظهٔ $t=۴s$ متحرک متوقف شده و تغییر جهت داده و $۶s$ حرکت آن تندشونده است.

۱ معادلهٔ سرعت - زمان را نوشته در $t=۴s$، سرعت را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=۴a+v_۰\Rightarrow v_۰=-۴a \quad (I)$$

۲ در لحظهٔ $t=۰$ مکان اولیه $x_۰=-۱۰m$ بوده و در لحظهٔ $t=۱۰s$ مکان آن $x=-۳۰m$ است. معادلهٔ مکان زمان را نوشته یک رابطهٔ دیگر بین $v_۰$ و a به‌دست می‌آوریم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow -۳۰=\frac{۱}{۲}a(۱۰)^۲+v_۰(۱۰)+(-۱۰)$$

$$-۳۰=۵۰a+۱۰v_۰-۱۰\Rightarrow -۲۰=۵۰a+۱۰v_۰$$

۳ از رابطهٔ (I) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$-۲۰=۵۰a+۱۰(-۴a)\Rightarrow -۲۰=۱۰a\Rightarrow a=-۲m/s^۲$$

$$v_۰=-۴(-۲)\Rightarrow v_۰=۸m/s$$

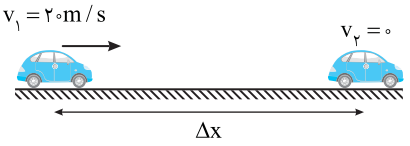
۴ معادلهٔ سرعت را نوشته، $t=۱۶s$ را در آن قرار می‌دهیم.

$$v=-۲t+۸\Rightarrow v=-۲\times ۱۶+۸\Rightarrow v=-۲۴m/s$$

۳۵۵ A

سرعت اولیه برابر $v_۱=۷۲km/h=\frac{۷۲}{۳/۶}=۲۰m/s$ است. به کمک رابطهٔ مستقل از شتاب مسئله به‌راحتی قابل حل است.

$$\Delta x=\frac{v_۱+v_۲}{۲}\Delta t\Rightarrow \Delta x=\frac{۲۰+۰}{۲}\times ۵\Rightarrow \Delta x=۵۰m$$



۳۵۶ A

با استفاده از فرمول مستقل از زمان، شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$v_۲=۱۸km/h=۵m/s, v_۱=۴m/s$$

$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲a(x_۲-x_۱)\Rightarrow ۲۵-۱۶=۲a(۹)\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}m/s^۲$$

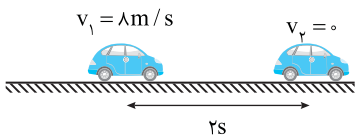
مکان متحرک در لحظهٔ $t=۰$، $x_۰=-۶m$ است:

$$v_۱^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۱۶-v_۰^۲=۲(\frac{۱}{۲})(۱۰-(-۶))\Rightarrow v_۰^۲=۰\Rightarrow v_۰=۰$$

۳۵۷ A

متحرک ترمز کرده و در انتهای مسیر متوقف خواهد شد بنابراین در بازهٔ ۰ تا $۲s$ سرعت متحرک از $۸m/s$ با شتاب ثابت به صفر می‌رسد از این‌رو به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب مسئله قابل حل است.

$$\Delta x=\frac{v_۱+v_۲}{۲}\Delta t\Rightarrow \Delta x=\frac{۸+۰}{۲}\times ۲\Rightarrow \Delta x=۸m$$



۳۵۸ A

۱ به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، شتاب حرکت متحرک را حساب می‌کنیم.

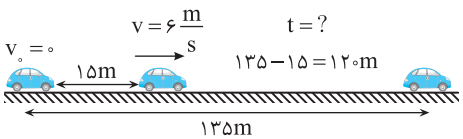
$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow (۶)^۲-۰=۲a\times ۱۵\Rightarrow a=\frac{۳۶}{۳۰}\Rightarrow a=۱/۲m/s^۲$$

۲ در قسمت دوم مسیر، متحرک مسافت $۱۳۵-۱۵=۱۲۰m$ را طی کرده است. زمان این قسمت را به کمک معادلهٔ جابه‌جایی - زمان به‌دست می‌آوریم. سرعت اولیهٔ این قسمت $۶m/s$ است.

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow ۱۲۰=\frac{۱}{۲}\times ۱/۲t^۲+۶t\Rightarrow ۰/۶t^۲+۶t-۱۲۰=۰$$

$$\xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{دو طرف را به }۰/۶} t^۲+۱۰t-۲۰۰=۰\Rightarrow (t+۲۰)(t-۱۰)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=۱۰s \\ t=-۲۰s \text{ غ ق ق} \end{cases}$$



۳۵۹ B

راه‌حل اول:

۱ مطابق شکل در مدت $۲s$ آخر حرکت سرعت از $v_۱$ به صفر می‌رسد. به کمک رابطهٔ مستقل از شتاب سرعت $v_۱$ را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v+v_۱}{۲}\Delta t\Rightarrow ۶=\frac{۰+v_۱}{۲}\times ۲\Rightarrow v_۱=۶m/s$$

$$a=\frac{v-v_۱}{t}\Rightarrow a=\frac{۰-۶}{۲}=-۳m/s^۲$$

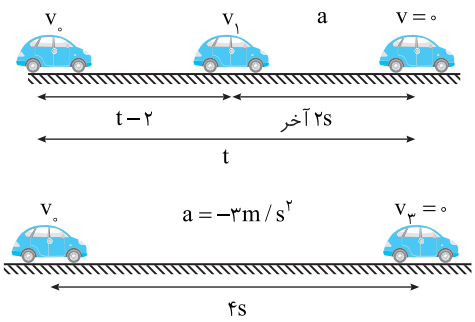
۲ شتاب حرکت خواهد شد:

۳ سرعت لحظهٔ ترمز را به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=-۳\times ۴+v_۰\Rightarrow v_۰=۱۲m/s$$

۴ مسافت طی‌شده از لحظهٔ ترمز تا توقف برابر است با:

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}t\Rightarrow\Delta x=\frac{0+12}{2}\times4\Rightarrow\Delta x=24m$$



راه‌حل دوم: می‌توان فرض کرد که متحرک از حال سکون با همان شتاب به راه افتاده است و شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow6=\frac{1}{2}a(2)^2\Rightarrow a=3m/s^2$$

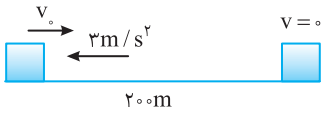
جابه‌جایی در مدت ۴s با شتاب $3m/s^2$ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at_{کل}^2=\frac{1}{2}\times3\times4^2\Rightarrow\Delta x=24m$$

۲ ۳۶۰ B

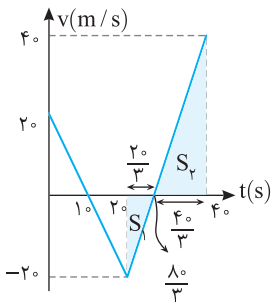
به جای آنکه مسیر توقف را بررسی کنیم، فرض می‌کنیم که متحرک از حال سکون با شتاب $3m/s^2$ شروع به حرکت می‌کند. سپس جابه‌جایی متحرک را در مدت این سه ثانیه به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\quad,\quad\Delta x=\frac{1}{2}(3)(9)=13/5m$$



۲ ۳۶۱ B

خط فکری ۱۰۰m آخر مسیر را که متحرک در ۲s طی می‌کند یک مسیر مستقل فرض کنید که در ابتدای آن سرعت اولیهٔ متحرک v_1 است. سپس سرعت را در انتهای ۱۰۰ متر یعنی سرعت نهایی در (v_f) را به‌دست بیاورید و سرعت متوسط از $v_0=0$ تا v_f را حساب کنید.



۱ ۱۰۰m آخر با سرعت اولیه v_1 و در مدت ۲s با شتاب $2m/s^2$ طی می‌شود. بنابراین:

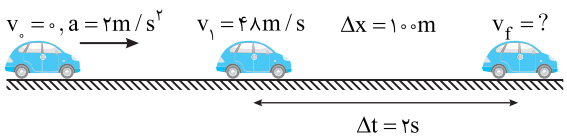
$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_1t\Rightarrow100=\frac{1}{2}\times2\times2^2+2v_1\Rightarrow100=(2)^2+2v_1\Rightarrow v_1=48m/s$$

۲ سرعت نهایی را از رابطهٔ مستقل از شتاب حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{v_1+v_f}{2}\Delta t\Rightarrow100=\frac{48+v_f}{2}\times2\Rightarrow v_f=52m/s$$

۳ متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده پس $v_i=0$ و سرعت نهایی $v_f=52m/s$ می‌باشد:

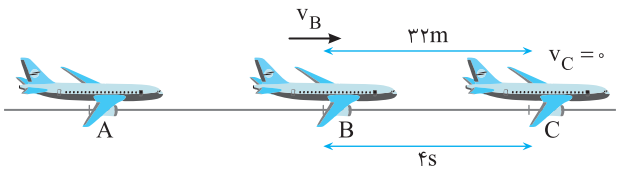
$$v_{av}=\frac{v_i+v_f}{2}=\frac{0+52}{2}=26m/s$$



۱ ۳۶۲ B

۱ ابتدا شکل ساده‌ای از مسأله را می‌کشیم. در قسمت دوم مسیر سرعت نهایی هواپیما صفر، جابه‌جایی آن ۳۲m و مدت زمان حرکت ۴s است. با توجه به این اطلاعات سرعت در نقطهٔ B را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{v_C+v_B}{2}\Delta t\Rightarrow32=\frac{0+v_B}{2}\times4\Rightarrow v_B=16m/s$$



۲ سرعت در نقاط B و C را داشته و مدت زمان حرکت بین این دو نقطه ۴s است، شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{v_C-v_B}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{-16}{4}=-4m/s^2$$

۳ به کمک سرعت در نقاط A و C و شتاب به‌دست آمده و با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان مسافت کل طی‌شده توسط هواپیما را حساب می‌کنیم:

$$v_C^2-v_A^2=2a\Delta x\Rightarrow0-3600=2\times(-4)\Delta x\Rightarrow\Delta x=450m$$

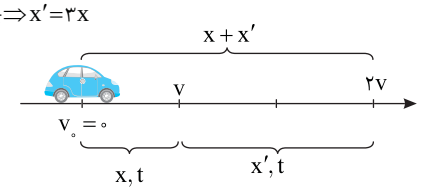
۲ ۳۶۳ A

۱ حرکت دارای شتاب ثابت است بنابراین در بازهٔ زمانی یکسان، تغییر سرعت یکسان است یعنی در مدت t سرعت از صفر به v رسیده است. بنابراین مدتی که سرعت از v به 2v می‌رسد نیز برابر $t'=t$ است.

۲ رابطهٔ مستقل از زمان را برای ۰ تا v و برای ۰ تا 2v را نوشته بر هم تقسیم کرده نسبت $\frac{x'}{x}$ را حساب می‌کنیم

$$\begin{cases}v^2-0=2ax & (1)\\ (2v)^2-0=2a(x+x') & (2)\end{cases}\xrightarrow{\text{دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم}}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{x}{x+x'}\Rightarrow x'=3x$$



۱ ۳۶۴ B

یادآوری سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی در حرکت باشتاب ثابت برابر سرعت لحظه‌ای در وسط آن بازه است.

۱ ابتدا معادله سرعت - زمان را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}x=\frac{3}{4}t^2-15t+30\\ x=\frac{1}{2}at^2+v_1t+x_1\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}a=\frac{3}{4}\Rightarrow a=\frac{3}{2}m/s^2, v_0=-15m/s$$

$$v=at+v_0\Rightarrow v=\frac{3}{2}t-15$$

۲ سرعت متوسط در ۵ ثانیه اول یعنی سرعت در لحظهٔ $t=2/5s$

$$v_1=\frac{3}{2}\times2/5-15=\frac{15}{4}-15\Rightarrow v_1=\frac{-3\times15}{4}m/s$$

۳ ۵ ثانیه سوم یعنی بازهٔ زمانی بین ۱۰s تا ۱۵s و سرعت متوسط در این بازه برابر سرعت لحظه‌ای در لحظهٔ $t=12/5s$ است.

$$v_2=\frac{3}{2}\times12/5-15=\frac{3\times25}{4}-15\Rightarrow v_2=\frac{75-60}{4}\Rightarrow v_2=\frac{15}{4}m/s$$

بنابراین

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{-\frac{3\times15}{4}}{\frac{15}{4}}=-3$$

روش دیگر: می‌توان جابه‌جایی در این دو بازه را به‌دست آورده برهم تقسیم کرد.

۳۶۵ B ۱

روش اول: بـا توجه به معادلهٔ مکان - زمان $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ و داده‌های سـؤال می‌توان نوشت:

$$x_1=\frac{1}{2}at_1^2+v_0t_1+x_0 \xrightarrow{t_1=1s,\,x_1=3m} 3=\frac{1}{2}a+v_0+x_0 \quad (I)$$

$$x_2=\frac{1}{2}at_2^2+v_0t_2+x_0 \xrightarrow{t_2=3s,\,x_2=11m} 11=\frac{9}{2}a+3v_0+x_0 \quad (II)$$

$$x_3=\frac{1}{2}at_3^2+v_0t_3+x_0 \xrightarrow{t_3=5s,\,x_3=35m} \Rightarrow 35=\frac{25}{2}a+5v_0+x_0 \quad (III)$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل دو معادلهٔ (I), (II)}} 8=4a+2v_0$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل دو معادلهٔ (II), (III)}} 24=8a+2v_0$$

حال با توجه به دو معادلهٔ $\begin{cases}8=4a+2v_0\\24=8a+2v_0\end{cases}$ مقدار a و v_0 را به دست می‌آوریم:

$$-16=-4a\Rightarrow a=4m/s^2\ ,\ v_0=-4m/s$$

معادلهٔ سرعت - زمان خواهد شد: $v=at+v_0\Rightarrow v=4t-4$

لحظهٔ تغییر جهت، لحظه‌ای است که سرعت صفر شده و تغییر علامت می‌دهد. معادلهٔ سـرعت - زمان $v=4t-4$ تابع درجهٔ یک است و در دو طرف ریشه‌اش تغییر علامت می‌دهد.

$$v=0\Rightarrow 4t-4=0\Rightarrow t=1s$$

روش دوم: **نکته** در حرکت با شـتاب ثابت سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی برابر سرعت لحظه‌ای در وسط بازه است.

۱ سـرعت متوسـط را در بـازهٔ زمانـی ۱s تـا ۳s کـه متحرک از مـکان $x_1=3m$ تا $x_2=11m$ را طی می‌کند، به‌دست می‌آوریم که برابر سرعت لحظه‌ای در لحظهٔ $t=2s$ است.

$$v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\Rightarrow v_{av}=\frac{11-3}{3-1}\Rightarrow v_{av}=4m/s\Rightarrow v_{t=2s}=4m/s$$

۲ سـرعت متوسـط در بـازهٔ زمانـی ۳s تا ۵s کـه متحرک از مـکان $x_2=11m$ و $x_3=35m$ را طی می‌کند برابر سرعت لحظه‌ای در لحظهٔ $t=4s$ است.

$$v_{av}=\frac{35-11}{5-3}\Rightarrow v_{av}=\frac{24}{2}=12m/s\Rightarrow v_{t=4s}=12m/s$$

۳ شتاب حرکت خواهد شد: $a=\frac{v-v_0}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{12-4}{4-2}\Rightarrow a=4m/s^2$

۴ به کمک معادلهٔ سرعت - زمان، سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

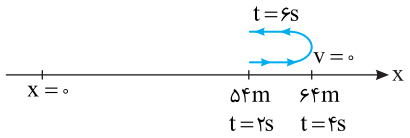
$$v=at+v_0 \xrightarrow{t=2s,\,v=4m/s} 4=2\times4+v_0\Rightarrow v_0=-4m/s$$

۵ لحظهٔ تغییر جهت یعنی لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=4t-4\Rightarrow t=1s$$

۳۶۶ B ۱

۱ مکان متحرکی در لحظه‌های t_1 و t_3 یکسـان اسـت، پس جابه‌جایی متحرک در بازهٔ ۲s تا ۶s صفر شده و سرعت متوسط در این بازه صفر است.



یادآوری در حرکت با شـتاب ثابت سـرعت متوسـط در یک بازهٔ زمانی برابر سرعت متحرک در لحظهٔ وسط آن بازهٔ زمانی است.

وسط بازهٔ زمانی ۲s تا ۶s، لحظهٔ $\frac{2+6}{2}=4s$ است:

$$\begin{cases}v_{av_{2s\text{ تا }6s}}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=0\\v_{av_{2s\text{ تا }6s}}=v_{4s}\end{cases}\Rightarrow v_{4s}=0$$

۲ در بـازهٔ ۴s تـا ۶s متحرک بـه اندازهٔ $\Delta x=x_3-x_2=-10m$ جابه‌جا شـده و سرعت در ابتدای بازه یعنی در لحظهٔ $t=4s$ صفر است:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_{0_{\text{اولیه}}}t \xrightarrow{v_{\text{اولیه}}=0,\ \Delta t=6-4=2s} -10=\frac{1}{2}a\times(2)^2\Rightarrow a=-5m/s^2$$

یادآوری در حرکت با شـتاب ثابت سـرعت متوسـط در یک بازهٔ زمانی برابر میانگین سرعت اولیه و انتهایی مسیر است: $v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}$

۳ برای به‌دست آوردن سرعت متوسط در بازهٔ $t_1=0$ تا $t_2=10s$، ابتدا سرعت را در این دو لحظه حساب می‌کنیم:

$$v=at+v_0 \xrightarrow[v_{4s}=0,\,v_0=?]{\Delta t=4s,\,a=-5m/s^2} 0=-20+v_0\Rightarrow v_0=20m/s$$

$$v=at+v_0 \xrightarrow[v_0=20m/s,\,v_{10s}=?]{\Delta t=10s,\,a=-5m/s} v_{10s}=-50+20\Rightarrow v_{10s}=-30m/s$$

۴ حال سرعت متوسط را در ۱۰ ثانیه اول حرکت، حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{v_0+v_{10s}}{2}=\frac{20+(-30)}{2}=-5m/s$$

بزرگی سرعت متوسط برابر $|\bar{v}_{av}|=5m/s$ است.

۳۶۷ B ۳

در حرکت با شتاب ثابت سرعت لحظه‌ای در وسط بازه برابر سرعت متوسط در آن بازه است. سرعت متوسط در بازهٔ ۱s تا ۳s را حساب می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{20}{2}=10m/s\Rightarrow v_{t=2s}=10m/s$$

شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم. $a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{10-0}{2}\Rightarrow a=5m/s^2$

سرعت را در لحظه‌های ۳s و ۷s حساب کرده از فرمول مستقل از شتاب جابه‌جایی را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0\Rightarrow\begin{cases}v_1=5\times3+0=15m/s\\v_2=5\times7+0=35m/s\end{cases}$$

$$\Delta x=\frac{v_2+v_1}{2}t\Rightarrow\Delta x=\frac{35+15}{2}\times4\Rightarrow\Delta x=100m$$

بعداً یاد می‌گیرید که این تست رو با سطح زیر نمودار $v-t$ حل کنید.

۳۶۸ B ۳

۱ سرعت اتومبیل پس از ترمز در طی x متر، از v به $\frac{v}{2}$ رسیده، بنابراین طبق معادلهٔ مستقل از زمان داریم: (۱) $v_2^2-v_1^2=2a\Delta x\Rightarrow(\frac{v}{2})^2-v^2=2ax\Rightarrow\frac{-3}{4}v^2=2ax$

۲ در کل مسـیر ترمـز گرفتـن سـرعت متحرک از v بـه صفر خواهد رسـید بنابراین خواهیم داشت: (۲) $v_2^2-v_1^2=2a\Delta x\Rightarrow 0^2-v^2=2ax'\Rightarrow -v^2=2ax'$

۳ با تقسیم رابطه (۱) و (۲) دو برهم داریم: $\frac{(1)}{(2)}\Rightarrow\frac{\frac{-3}{4}v^2}{-v^2}=\frac{x}{x'}\Rightarrow x'=\frac{4}{3}x$

۳۶۹ B ۳

جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده است و شتاب ثابت است، بنابراین جسم تغییر جهت نمی‌دهد، یعنی مسافت طی شده توسط جسم با جابه‌جایی جسم، یکسان است:

$$x=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow 216=\frac{1}{2}a(12)^2\Rightarrow a=3m/s^2$$

اختلاف زمانی داده شده در گزینه‌ها ۲s است که می‌توان آن‌ها را به صورت n تا n+۲ نوشت:

$$x_{n+2}-x_n=36\Rightarrow\frac{3}{2}(n+2)^2-\frac{3}{2}n^2=36\Rightarrow n=5$$

بنابراین بازه زمانی مورد نظر ۵s تا ۷s است.

روش دیگر: شتاب را مطابق روش اول به‌دست می‌آوریم: $a=3m/s^2$

در حرکت با شـتاب ثابت، سـرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی، برابر میانگین سرعت ابتدا و انتهای آن بازه است. $v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}$

بازه‌های زمانی داده شده در گزینه‌ها همگی ۲s هستند، بنابراین سرعت متوسط در بازهٔ زمانی ۲s را می‌نویسیم (می‌خواهیم جابه‌جایی در این بازه ۳۶m باشد):

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۳۶}{۲}=۱۸\Rightarrow ۱۸=\frac{v_۱+v_۲}{۲}$$

$v_۱$ سرعت ابتدای بازه و $v_۲$ سرعت انتهای آن است: $v_۲=a\times ۲+v_۱$

$$v_۱+v_۲=۳۶\Rightarrow v_۱+(v_۱+۲a)=۳۶\Rightarrow ۲v_۱+۶=۳۶\Rightarrow v_۱=۱۵m/s$$

$$v_۱=at+v_۰\Rightarrow ۱۵=۳t+۰\Rightarrow t=۵s$$

بنابراین بازهٔ زمانی مورد نظر ۵s تا ۷s است.

۳ ۳۷۰ B

خط فکری در صورت مسئله، حرفی از زمان نیست بنابراین معادلهٔ مستقل از زمان اولین انتخاب است. برای AB و AC و DB معادلهٔ مستقل از زمان را برحسب a و ℓ بنویسید و مسئله را حل کنید.

۱ سرعت متحرک پس از طی مسافت ℓ با شتاب ثابت از $۵m/s$ به $۱۵m/s$ می‌رسد، بنابراین:

$$v_B^۲-v_A^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۲۲۵-۲۵=۲a\ell\Rightarrow ۱۰۰=a\ell \quad (I)$$

۲ حال از A تا C متحرک با همان شتاب و با سرعت $v_A=۵m/s$ پس از مسافت $\frac{\ell}{۴}$ به نقطهٔ C رسیده بنابراین:

$$v_C^۲-v_A^۲=۲a\Delta x\Rightarrow v_C^۲-۲۵=۲a\frac{\ell}{۴}\Rightarrow v_C^۲-۲۵=\frac{a\ell}{۲} \quad (II)$$

۳ رابطهٔ (I) و (II) را بر هم تقسیم کنیم تا v_C را به‌دست بیاوریم.

$$\frac{۱۰۰}{v_C^۲-۲۵}=\frac{a\ell}{\frac{a\ell}{۲}}\Rightarrow v_C^۲=۷۵\Rightarrow v_C=۵\sqrt{۳}m/s$$

۴ متحرک از D تا B مسافت $\frac{\ell}{۴}$ را با همان شتاب طی کرده و در نقطهٔ B سرعتش به $۱۵m/s$ می‌رسد:

$$v_B^۲-v_D^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۲۲۵-v_D^۲=۲a\frac{\ell}{۴}\xrightarrow{a\ell=۱۰۰}۲۲۵-v_D^۲=۵۰$$

$$\Rightarrow v_D^۲=۱۷۵\Rightarrow v_D=۵\sqrt{۷}m/s$$

۲ ۳۷۱ B

۱ بعد از این همه تست یاد گرفته‌ایم که در معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت ضریب $t^۲$ نصف شتاب $(\frac{۱}{۲}a)$ و ضریب t، سرعت اولیه است از این‌رو:

$$x=۲t^۲-۱۶t+۵\Rightarrow a=۴m/s^۲\ ,\ v_۰=-۱۶m/s$$

۲ بنابراین معادلهٔ سرعت - زمان و لحظهٔ تغییر جهت خواهد شد:

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=۴t-۱۶\xrightarrow{v=۰}۰=۴t-۱۶\Rightarrow t=۴s$$

۳ حال مکان متحرک را در لحظه تغییر جهت به‌دست می‌آوریم:

$$x'=۲(۴)^۲-۱۶(۴)+۵=-۲۷m$$

۴ بنابراین فاصلهٔ متحرک از $x=-۲m$ برابر است با:

$$|x'-x|=|-۲۷-(-۲)|=۲۵m$$

۳ ۳۷۲ B

در این مسئله شما با یک سؤال صرفاً ریاضی سروکار دارید و باید نامعادلهٔ زیر را حل کنید.

$$|x|\le ۸\Rightarrow -۸\le ۲t^۲-۱۲t+۸\le ۸\Rightarrow ۲t^۲-۱۲t\le ۰$$

$$t^۲-۶t\le ۰\Rightarrow ۰<t<۶s$$

$$-۸\le ۲t^۲-۱۲t+۸ \qquad ۰\le ۲t^۲-۱۲t+۱۶\Rightarrow t^۲-۶t+۸\ge ۰\Rightarrow (t-۲)(t-۴)\ge ۰$$

$t\ge ۴s$ و $t\le ۲s$، اشتراک دو بازهٔ صفر تا ۶s و $t\le ۲s$ و $t\ge ۴s$ برابر ۴s می‌شود.

۲ ۳۷۳ B

خط فکری دو ثانیهٔ اول یعنی بازهٔ زمانی بین صفر تا ۲s و ثانیهٔ سوم یعنی بازهٔ زمانی در $t=۲s$ تا $t=۳s$، سرعت در لحظه‌های صفر، ۲s و ۳s را به‌دست بیاورید سپس به کمک رابطهٔ سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت $(v_{av}=\frac{v_۲+v_۱}{۲})$، سرعت متوسط در دو ثانیهٔ اول و ثانیهٔ سوم را حساب کنید و تفاضل آن‌ها را برابر $۶m/s$ قرار دهید و مسئله را حل کنید.

۱ سرعت‌ها را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t=۰}v_۱=v_۰\\ \xrightarrow{t=۲s}v_۲=۲a+v_۰\\ \xrightarrow{t=۳s}v_۳=۳a+v_۰\end{cases}$$

۲ سرعت متوسط در ۲ ثانیهٔ اول خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}=\frac{v_۰+۲a+v_۰}{۲}\Rightarrow v_{av}=v_۰+a$$

۳ سرعت متوسط در ثانیهٔ سوم را به‌دست می‌آوریم.

$$v'_{av}=\frac{v_۲+v_۳}{۲}=\frac{۲a+v_۰+۳a+v_۰}{۲}\Rightarrow v'_{av}=\frac{۵}{۲}a+v_۰$$

۴ تفاضل دو سرعت متوسط را با توجه به فرض مسئله برابر $۶m/s$ قرار می‌دهیم.

$$v_{av}-v'_{av}=۶\Rightarrow v_۰+a-(\frac{۵}{۲}a+v_۰)=۶\Rightarrow -\frac{۳}{۲}a=۶\Rightarrow a=-۴m/s^۲$$

۳ ۳۷۴ B

۱ حرکت دارای شتاب ثابت است و معادلهٔ داده شده در واقع رابطه‌ای بین سرعت و مکان، یعنی رابطهٔ مستقل از زمان است. دو طرف آن را به توان ۲ رسانده و با رابطهٔ مستقل از زمان حرکت با شتاب ثابت مقایسه کنیم:

$$|v_x|=\sqrt{۴\Delta x+۳۶}\Rightarrow v_x^۲-۳۶=۴\Delta x\xrightarrow{v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x}$$

$$v_۰^۲=۳۶\Rightarrow v_۰=۶m/s\ ,\ ۲a=۴\Rightarrow a=۲m/s^۲$$

۲ اکنون با داشتن سرعت اولیه و شتاب، جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ اول خواهد شد:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow \Delta x=\frac{۱}{۲}\times ۲\times (۲)^۲+۶\times ۲\Rightarrow \Delta x=۱۶m$$

۳ ۳۷۵ A

یادآوری معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت $(x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰)$ یک تابع درجه ۲ است و نمودار آن سهمی است. اگر ضریب $t^۲$ مثبت باشد یعنی شتاب مثبت باشد، دهانه نمودار رو به بالا و اگر منفی باشد دهانهٔ نمودار رو به پایین است.

با توجه به معادلهٔ $x=t^۲+۳t+۴$ خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}a=۱\Rightarrow a=+۲m/s^۲\ ,\ v_۰=۳m/s\ ,\ x_۰=۴m$$

شتاب مثبت است $a=۲m/s^۲$، بنابراین دهانه نمودار باید رو به بالا باشد، سرعت اولیه $+۳m/s$ است یعنی شیب خط مماس بر نمودار در $t=۰$ باید مثبت باشد و مکان اولیه $x=+۴m$ است، بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

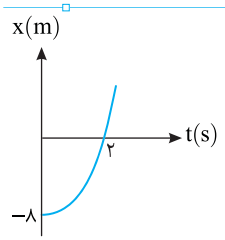
۳ ۳۷۶ A

در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۴s، بردار مکان متحرک در جهت محور x است:

$$v=|\frac{\Delta x}{\Delta t}|=\frac{۲۸}{۱۴}=۲m/s$$

۴ ۳۷۷ A

خط فکری به نمودار نگاه کنید با توجه به فرض مسئله $v_۰=۰$ بوده و در مدت ۲s متحرک جابه‌جایی $+۸m$ را طی کرده است بنابراین به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب، سرعت در لحظهٔ $t=۲s$ به راحتی به‌دست می‌آید.



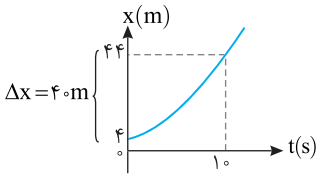
داده‌های روی نمودار را در معادلهٔ مستقل از شتاب جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t\Rightarrow ۸=\frac{v+۰}{۲}\times ۲\Rightarrow v=۸m/s$$

۱ ۳۷۸ B

۱ نمودار سهمی است، بنابراین حرکت دارای شتاب ثابت است از طرفی شیب خط مماس در $t=۰$ برابر ۲ است یعنی سرعت اولیه جسم برابر $v_۰=۲m/s$ است به کمک معادله طلایی مستقل از شتاب، سرعت در لحظه $t=۱۰s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}t\Rightarrow ۴۰=\frac{v+۲}{۲}\times ۱۰\Rightarrow v=۶m/s$$

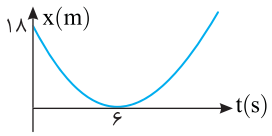


۲ حرکت دارای شتاب ثابت است و شتاب متوسط در تمام بازه‌های زمانی یکسان است.

$$a_{av}=a=\frac{v-v_0}{t}=\frac{۶-۲}{۱۰}=۰/۴m/s$$

A ۳۷۹ ۲

۱ در لحظهٔ $t=۶s$ نمودار بر محور زمان مماس شده است یعنی در این لحظه شیب خط مماس بر نمودار صفر بوده و سرعت در این لحظه صفر است.



۲ به کمک معادله مستقل از شتاب (فرمول طلایی) سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

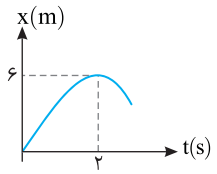
$$\Delta x=\frac{v+v_0}{۲}t\Rightarrow -۱۸=\frac{۰+v_0}{۲}\times ۶\Rightarrow v_0=-۶m/s$$

۳ شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{۰-(-۶)}{۶}\Rightarrow a=۱m/s^۲$$

A ۳۸۰ ۳

یادآوری در نقاط کمینه و بیشینه نمودار مکان - زمان سرعت لحظه‌ای صفر است.



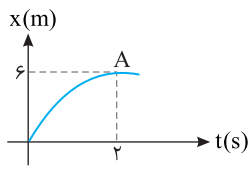
۱ سرعت در لحظهٔ $t=۲s$ برابر صفر است. به کمک معادله طلایی مستقل از شتاب، سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{۲}\Delta t\Rightarrow ۶=\frac{۰+v_0}{۲}\times ۲\Rightarrow v_0=۶m/s$$

۲ شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{۰-۶}{۲}=-۳m/s^۲$$

بازی با سؤال **شکل زیر که قسمتی از یک سهمی است، نمودار مکان- زمان یک متحرک را نشان می‌دهد. اگر نقطهٔ A ماکزیمم نمودار باشد، معادلهٔ سرعت- زمان متحرک کدام است؟**



۱) $v=۳-۶t$
۲) $v=۶+۳t$
۳) $v=۳+۶t$
۴) $v=۶-۳t$

پاسخ **نمودار مکان- زمان بخشی از یک سهمی است، بنابراین حرکت دارای شتاب ثابت است و به کمک رابطه‌های حرکت با شتاب ثابت پرسش را حل می‌کنیم. در نقطهٔ بیشینهٔ نمودار مکان- زمان، سرعت صفر است.**

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{۲}\Delta t\Rightarrow ۶=\frac{۰+v_0}{۲}\times ۲\Rightarrow v_0=۶m/s$$

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{۰-۶}{۲}=-۳m/s^۲$$

معادلهٔ سرعت- زمان خواهد شد:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=-۳t+۶$$

گزینهٔ ٤

B ۳۸۱ ۳

ثانیه ششم یعنی بازهٔ زمانی بین $t=۵s$ تا $t=۶s$، در لحظهٔ $t=۴s$ و در مکان $x=۸m$ سرعت متحرک صفر است و سرعت متحرک در $t_1=۵s$ و $t_2=۶s$ به‌ترتیب $v_1=a$ و $v_2=۲a$ است. $(v_2=at+v_1)$ به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$v_2^۲-v_1^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۴a^۲-a^۲=۲a\times(-۶)$$

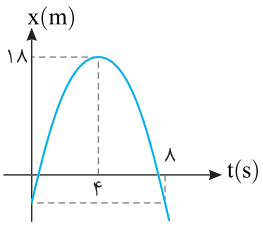
$$۳a^۲=-۱۲a\Rightarrow a=-۴m/s^۲$$

در لحظهٔ $t=۴s$، سرعت صفر و مکان $۸m$ است، بنابراین سرعت در لحظهٔ عبور از مکان $x=۰$ (مبدأ محور) خواهد شد:

$$v^۲-v_0^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-v_0^۲=۲\times(-۴)\times ۸\Rightarrow v_0=۸m/s$$

B ۳۸۲ ۳

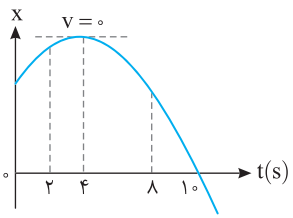
خط فکری شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ برابر سرعت است و می‌دانیم نمودار سهمی نسبت به رأس آن متقارن می‌باشد و در فاصله‌های زمانی یکسان نسبت به رأس اندازهٔ شیب‌ها یکسان است بنابراین شما باید به دنبال نقطه‌ای که با $t=۰$ متقارن است بگردید.



به نمودار نگاه کنید رأس سهمی در $t=۴s$ اتفاق افتاده و بنابراین لحظهٔ متقارن با صفر $(t=۰)$ لحظهٔ $t=۸s$ است و در این لحظه شیب خط مماس بر نمودار قرینهٔ شیب خط مماس در لحظهٔ $t=۰$ بوده یعنی بزرگی سرعت در $t=۸s$ با بزرگی سرعت در $t=۰$ برابر است.

B ۳۸۳ ۱

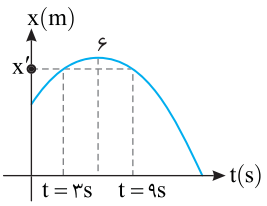
حرکت با شتاب ثابت است و در هر بازهٔ زمانی شتاب یکسان است بنابراین:



$$a_{۲\to ۴s}=a_{۴\to ۸s}\xrightarrow{a=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}}\frac{۰-v_۱}{۴-۲}=\frac{v_۲-۰}{۸-۴}\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=۲\Rightarrow\frac{|v_۲|}{|v_۱|}=۲$$

B ۳۸۴ ۱

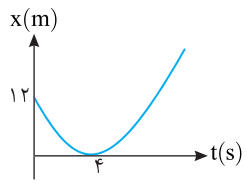
نمودار سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس متقارن است. به نمودار نگاه کنید لحظهٔ رأس سهمی $t=۶s$ است و لحظه‌های $t=۳s$ و $t=۹s$ در دو طرف آن متقارن هستند از این‌رو مکان متحرک در $t=۳s$ و $t=۹s$ که فاصلهٔ یکسانی از رأس سهمی $t=۶s$ دارند با هم برابر است بنابراین جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی صفر است.



$$\Delta x=x_{(۹)}-x_{(۳)}=x'-x'=۰$$

A ۳۸۵ ۳

۱ در لحظهٔ $t=۴s$ که نمودار مماس بر محور زمان است، سرعت لحظه‌ای متحرک صفر است از این‌رو به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب (فرمول طلایی)، سرعت اولیه به راحتی به‌دست می‌آید.



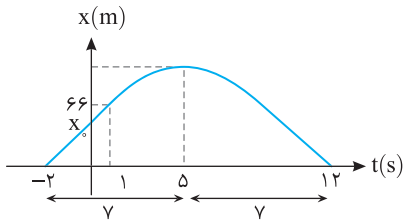
$$x=\frac{v+v_0}{۲}t+x_0\Rightarrow ۰=\frac{۰+v_0}{۲}\times ۴+۱۲\Rightarrow -۲v_0=۱۲\Rightarrow v_0=-۶m/s$$

نکته هرگاه نمودار مکان - زمان سهمی باشد در لحظه‌هایی که در فاصلهٔ یکسان از رأس سهمی هستند، سرعت‌ها قرینه هم است.

۲ لحظهٔ $t=۸s$ و لحظهٔ $t=۰$ در فاصلهٔ یکسان از رأس سهمی قرار دارند و تندی لحظه‌ای در آن‌ها یکسان است بنابراین بدون استفاده از فرمول دیگری، می‌توان گفت سرعت در لحظهٔ $t=۸s$ برابر $+۶m/s$ است.

C ۳۸۶ ۳

نکته نمودار مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت یک سهمی است و سهمی نسبت به محور گذرا از رأس سهمی دارای تقارن است.



با توجه به نمودار ریشه‌های این سهمی $t=-2s$ و $t=12s$ است. بنابراین معادلهٔ آن خواهد شد: $x=A(t-12)(t+2)$

باید مختصات $t=1s$ و $x=66m$ در این معادله صدق کند.

$$66=A(1-12)(1+2)\Rightarrow A=-2$$

معادله را کامل می‌کنیم. $x=-2(t-12)(t+2)$

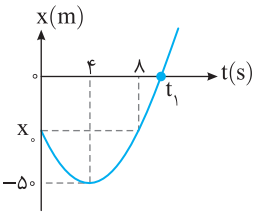
اکنون کافی است که در این معادله $t=0$ را قرار داده و مکان اولیه را حساب کنیم:

$$x_0=-2(0-12)(0+2)\Rightarrow x_0=48m$$

B ۳۸۷ ۱

خط فکری هرگاه سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی صفر شود، یعنی متحرک در ابتدا و انتهای بازه در یک مکان قرار دارد. از طرفی در حرکت با شتاب ثابت نمودار مکان - زمان سهمی است و سهمی نسبت به محور گذرا از رأس آن دارای تقارن است و در بازهٔ زمانی یکسان در دو طرف محور، مکان یکسان است. اکنون با توجه به این نکات مسئله را حل می‌کنیم.

۱ در مدت ۸s اول سرعت متوسط صفر است یعنی مکان متحرک در $t=0$ و $t=8s$ یکسان است و این دو لحظه نسبت به محور دارای تقارن بوده و مختصات رأس سهمی خواهد شد $(t=4s, x=-50m)$.



۲ تندی در لحظهٔ t_1 برابر $20m/s$ بوده و از طرفی شیب خط مماس در این لحظه مثبت است یعنی سرعت متحرک در این لحظه $+20m/s$ است و در لحظهٔ $t=4s$ سرعت صفر است. در بازهٔ زمانی ۴s تا t_1 متحرک جابه‌جایی $\Delta x=+50m$ را طی کرده است. بنابراین به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 20^2-0=2a(+50)\Rightarrow a=4m/s^2$$

۳ سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0 \xrightarrow{t=4s,\,v=0} 0=4\times 4+v_0\Rightarrow v_0=-16m/s$$

یادآوری در حرکت با شتاب ثابت در یک بازهٔ زمانی معین، سرعت متوسط میانگین سرعت ابتدایی و انتهایی متحرک در آن بازه است.

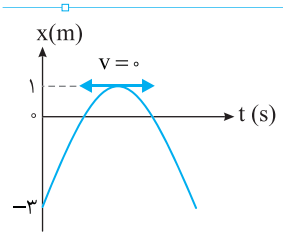
$$v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}$$

۴ سرعت متوسط در بازهٔ $t=0$ تا $t=t_1$ خواهد شد: $v_{av}=\frac{-16+20}{2}=2m/s$

B ۳۸۸ ۴

جهت دهانهٔ نمودار $x-t$ رو به پایین است بنابراین شتاب منفی است. $(a=-2m/s^2)$

به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم.



$$v^2-v_0^2=2a(x-x_0)\Rightarrow 0-v_0^2=2(-2)[+1-(-3)]$$

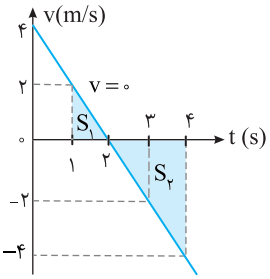
$$v_0^2=16\Rightarrow v_0=+4m/s$$

بردار مکان وقتی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان ($x=0$) بگذرد.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow 0=\frac{1}{2}(-2)\times t^2+4t-3\Rightarrow t^2-4t+3=0$$

$$(t-1)(t-3)=0\Rightarrow\begin{cases}t=1s\\t=3s\end{cases}$$

نمودار سرعت زمان را رسم می‌کنیم



$$v=at+v_0\Rightarrow v=-2t+4$$

$$v=0\Rightarrow -2t+4=0\Rightarrow t=2s$$

$$t=1s\Rightarrow v=-2+4=2m/s$$

$$t=4s\Rightarrow v=-2\times 4+4=-4m/s$$

مسافت طی شده در بازهٔ $t=1s$ تا $t=4s$ را حساب می‌کنیم.

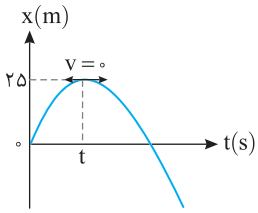
$$\ell=|S_1|+|S_2|=\frac{1\times 2}{2}+\frac{2\times 4}{2}=5m$$

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{5}{3}m/s$$

B ۳۸۹ ۳

یادآوری در نمودار مکان - زمان در نقاط کمینه و بیشینه، سرعت متحرک صفر است.

۱ تندی متحرک در مکان $x=25m$ که رأس سهمی بوده برابر صفر است. با توجه به فرض سؤال در مکان $x=-375m$ نیز تندی $40m/s$ است، بنابراین به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:

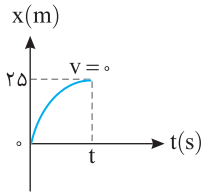


$$v_2^2-v_1^2=2a\Delta x\Rightarrow 1600=2a(x_2-x_1)$$

$$\Rightarrow 1600=2a(-375-25)$$

$$1600=-800a\Rightarrow a=-2m/s^2$$

۲ در بازهٔ زمانی ۰ تا t متحرک با شتاب $a=-2m/s^2$ به اندازهٔ $\Delta x=25m$ جابه‌جا شده و سرعت نهایی آن صفر شده است. ابتدا با توجه به رابطهٔ $v^2-v_0^2=2a\Delta x$ سرعت اولیه را حساب کرده و سپس به کمک معادلهٔ سرعت زمان t را به دست می‌آوریم:

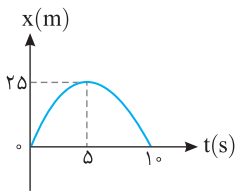


$$v^2-v_0^2=2a\Delta x \xrightarrow[v=0]{a=-2m/s^2}$$

$$-v_0^2=-4\times 25\Rightarrow v_0^2=100$$

$$\Rightarrow v_0=10m/s$$

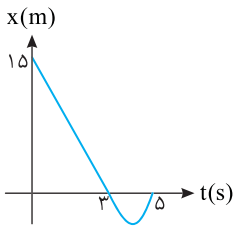
$$v=at+v_0\Rightarrow 0=-2t+10\Rightarrow t=5s$$



سهمی نسبت به محور قائم گذرا از رأس آن تقارن دارد، از این رو متحرک در لحظهٔ $t=10s$ از مکان $x=0$ عبور کرده و در بازهٔ ۰ تا ۱۰s مکان متحرک مثبت بوده و بردار مکان در جهت محور x است.

A ۳۹۰ ۳

خط فکری محل تقاطع نمودار مکان - زمان با محور قائم برابر مکان اولیه است. از طرفی مختصات هر نقطه روی نمودار باید در معادلهٔ مکان - زمان صدق کند بنابراین معادلهٔ مکان - زمان را بنویسید و مختصات نقاط روی نمودار را در آن قرار داده و مسئله را حل کنید.



بـا توجه به نمودار مـکان اولیه $x_0=15m$ و در لحظه‌های $t=3s$ و $t=5s$ متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ گذشته است و مختصات این نقاط باید در معادله صدق کند از این‌رو:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow\begin{cases}t=3s\Rightarrow 0=\frac{9}{2}a+3v_0+15\\ t=5s\Rightarrow 0=\frac{25}{2}a+5v_0+15\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=2m/s^2, v_0=-8m/s$$

اکنون می‌توانیم معادلهٔ حرکت را بنویسیم: $x=\frac{1}{2}\times 2t^2-8t+15\Rightarrow x=t^2-8t+15$

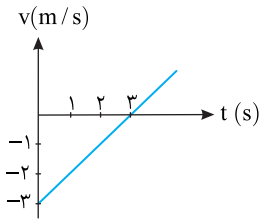
B ۳ ۳۹۱

شیب نمودار سرعت- زمان برابر شتاب است.

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-(-3)}{3-0}=1m/s^2$$

سرعت اولیهٔ متحرک $v_0=-3m/s$ می‌باشد.

بنابرایـن معادلهٔ حرکـت آن در SI به‌صورت زیر است:

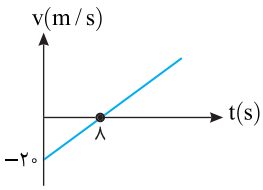


$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x=\frac{1}{2}t^2-3t+x_0$$

که در همهٔ گزینه‌ها مکان اولیه $x_0=0$ است و معادله به‌صورت $x=\frac{1}{2}t^2-3t$ خواهد بود.

B ۳ ۳۹۲

۱ داده‌هـای روی نمـودار را در رابطهٔ شـتاب قرار می‌دهیـم و شـتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.



$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-(-20)}{8}$$

$$\Rightarrow a=2/5m/s^2$$

۲ با توجه به فرض مسئله در لحظهٔ $t=0$ مکان متحرک $x_0=0$ و با توجه به نمودار $v_0=-20m/s$ اسـت بنابراین به کمک معادلهٔ مکان - زمان، مکان متحرک در لحظهٔ $t=20s$ را حساب می‌کنیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\times 2/5\times 400+(-20)\times 20+0\Rightarrow x=100m$$

B ۲ ۳۹۳

۱ شتاب حرکت جسم را به‌دست می‌آوریم.

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{-9-12}{21}\Rightarrow a=-1m/s^2$$

۲ سرعت در لحظهٔ $t=6s$ و $t=12s$ را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t_1=6s} v=-1\times 6+12\Rightarrow v_1=+6m/s\\ \xrightarrow{t_2=12s} v=-1\times 12+12\Rightarrow v_2=0\end{cases}$$

۳ جابه‌جایی را به کمک معادله مستقل از شتاب به‌دست می‌آوریم.

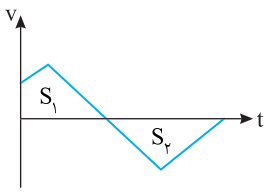
$$\Delta x=\frac{v_1+v_2}{2}t\Rightarrow\Delta x=\frac{6+0}{2}\times(12-6)\Rightarrow\Delta x=18m$$

روش دیگر:

یادآوری سـطح محصـور بیـن نمـودار سرعت - زمان و محور زمان به ما جابه‌جایی و مسافت متحرک را می‌دهد.

جابه‌جایی $d=S_1+S_2+\cdots$

مسافت $\ell=|S_1|+|S_2|+\cdots$



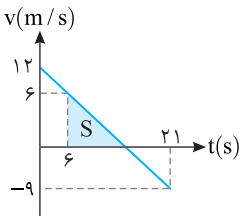
سرعت در لحظهٔ $t=6s$ و $t=12s$ را به کمک شیب نمودار حساب می‌کنیم.

$$\frac{-9-12}{21-0}=\frac{v_1-12}{6-0}$$

$$\Rightarrow -1=\frac{v_1-12}{6}\Rightarrow v_1=6m/s$$

$$\frac{-9-12}{21-0}=\frac{v-12}{12-0}$$

$$\Rightarrow -1=\frac{v-12}{12}\Rightarrow v_2=0$$

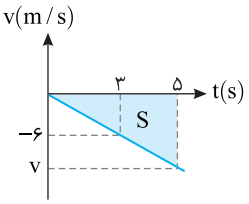


سطح زیر نمودار از $t=6s$ تا $t=12s$ را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=S=\frac{6\times 6}{2}=18m$$

B ۳ ۳۹۴

۱ به کمک شیب خط، سرعت در لحظهٔ $t=5s$ را به‌دست می‌آوریم.

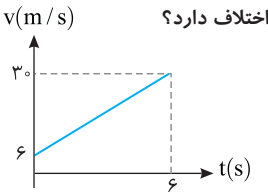


$$\frac{v-0}{5-0}=\frac{-6-0}{3-0}\Rightarrow v=-10m/s$$

۲ مسافت طی شـده را به کمک سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان به‌دست می‌آوریم.

$$\ell=|S|=|\frac{-10\times 5}{2}|=25m$$

بازی با سؤال نمودار سـرعت - زمان متحرکی که روی خط راسـت در حرکت است، مطابق شـکل زیر است جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیهٔ سوم حرکت چند متر با جابه‌جایی در ۴s آغازین حرکت اختلاف دارد؟



۱) ۲ متر، بیشتر

۲) ۲ متر، کمتر

۳) ۴ متر، بیشتر

۴) ۴ متر، کمتر

پاسخ ۱ ابتدا شتاب را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{30-6}{6}=4m/s^2$$

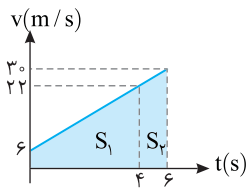
۲ ثانیهٔ سـوم یعنی بازهٔ زمانی بین $t=4s$ تا $t=6s$، بنابراین سـرعت در $t=4s$ را به‌دست می‌آوریم.

سرعت در $t=4s$ خواهد شد: $v=at+v_0\Rightarrow v=4\times 4+6=22m/s$

اکنون سطح زیر نمودار در بازهٔ صفر تا 4s و بازهٔ 4s تا 6s را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x_1=S_1=\frac{6+22}{2}\times 4=56m, \Delta x_2=S_2=\frac{30+22}{2}\times 2=52m$$

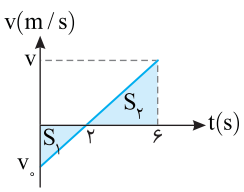
جابه‌جایی در ۲s ثانیهٔ سوم آغازین حرکت ۴ متر کمتر است. $56-52=4m$



گزینهٔ ۴

B ۱ ۳۹۵

خط فکری هـرگاه تندی در حـال افزایش بایـد حرکـت تندشـونده و هرگاه تنـدی در حال کاهش باشد حرکت کندشـونده است. از طرفی بـه کمـک سـطح زیـر نمـودار $v-t$ می‌تـوان مسـافت را حساب کرد. البته شما باید بین v_0 و v سرعت در هر لحظهٔ صفر و 6s رابطه‌ای به‌دست بیاورید.



۱ در بازهٔ ۰ تا 2s حرکت کندشونده و در بازهٔ 2s تا 6s حرکت تندشونده است.

۲ با توجه به شـیب نمودار یک رابطهٔ ریاضی بین سـرعت اولیه و سـرعت در لحظهٔ $t=6s$ به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{v_0-0}{0-2}=\frac{v-0}{6-2}\Rightarrow v=-2v_0$$

۳ سطح S_1 و S_2 را بر حسب v_0 و v به‌دست آورده بر هم تقسیم می‌کنیم.

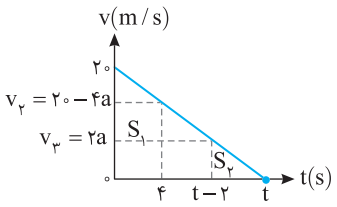
تندشونده $\ell_2=|S_2|=|\frac{v\times(6-2)}{2}|=2v$

کندشونده $\ell_1=|S_1|=|\frac{v_0\times 2}{2}|=v_0$

$\Rightarrow \frac{\ell_2}{\ell_1}=|\frac{2v}{v_0}|=\frac{2\times 2v_0}{v_0}=4$

B ۲ ۳۹۶

نمودار سرعت - زمان خط راست است، پس شتاب حرکت ثابت است. اگر شتاب حرکت را a در نظر بگیریم در هر ثانیه سرعت به اندازهٔ a تغییر می‌کند. بنابراین بعد از $4s$ به اندازهٔ $4a$ از سرعت $20\frac{m}{s}$ کاسته شده و $v_2=20-4a$ می‌شود و $2s$ قبل از t که سرعت صفر شده است، سرعت $2a$ بوده یعنی $v_3=2a$ است.

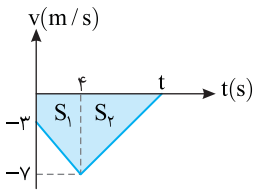


با توجه به فرض مسئله

$$\frac{S_1}{S_2}=3\Rightarrow\frac{\frac{20+20-4a}{2}\times 4}{\frac{2a}{2}\times 2}=3\Rightarrow 40-4a=3a\Rightarrow a=+1m/s^2$$

A ۲ ۳۹۷

سطح بین نمودار سرعت زمان و محور زمان برابر جابه‌جایی است، سطح S_1 و S_2 را به‌دست آورده با هم جمع کرده و برابر $27m$ قرار می‌دهیم.



$$|d|=|S|=|S_1|+|S_2|=|\frac{-3+(-7)}{2}\times 4|+|\frac{-7\times(t-4)}{2}|+20+3/5t-14=27$$

$\Rightarrow t=6s$

دقت کنید که جابه‌جایی منفی $(-27m)$ است.

A ۲ ۳۹۸

خط فکری شتاب برابر شیب نمودار سرعت - زمان است و در بازهٔ صفر تا $12s$ شیب خط نمودار مثبت بنابراین شتاب مثبت است و باید مسافت طی شده در بازهٔ ۰ تا $12s$ را به کمک سطح زیر نمودار حساب کنید.

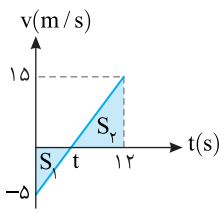
۱ لحظهٔ t را به کمک شیب خط به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{0-(-5)}{t-0}=\frac{15-0}{12-t}\Rightarrow 3t=12-t\Rightarrow t=3s$$

۲ اکنون سطح‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$\ell=|S_1|+|S_2|\Rightarrow\ell=\frac{5\times 3}{2}+\frac{15\times 9}{2}$$

$\Rightarrow \ell=7/5+67/5=75m$



B ۱ ۳۹۹

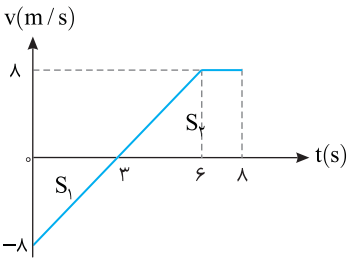
خط فکری بنا به تعریف، سرعت متوسط برابر جابه‌جایی تقسیم بر زمان جابه‌جایی است $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$. از طرفی جابه‌جایی برابر سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان است. شما باید به کمک سطح زیر نمودار جابه‌جایی را پیدا کنید و سرعت متوسط را بیابید.

۱ جابه‌جایی خواهد شد:

$$\Delta x=S=\frac{-8\times 3}{2}+\frac{5+2}{2}\times 8=-12+28=16m$$

۲ سرعت متوسط برابر است با:

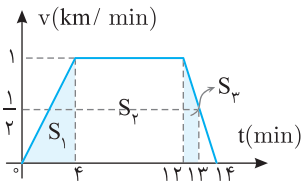
$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{16}{8}=2m/s$$



B ۲ ۴۰۰

مسئله، جابه‌جایی را در مدت ۱۳ دقیقه می‌خواهد. بنابراین واحد سرعت را از کیلومتر بر ساعت به کیلومتر بر دقیقه تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{60km}{h}=\frac{60km}{60min}=1\frac{km}{min}$$



با توجه به نمودار، سرعت در لحظه $t=13min$ را به‌دست می‌آوریم:

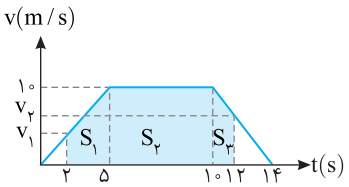
$$\frac{0-1}{14-12}=\frac{0-v_{t=13min}}{14-13}\Rightarrow\frac{-1}{2}=\frac{-v_{t=13min}}{1}\Rightarrow v_{t=13}=\frac{1}{2}km/min$$

مسافت طی شده برابر سطح زیر نمودار سرعت - زمان است:

$$\Delta x=S_1+S_2+S_3\Rightarrow S=\frac{1\times 4}{2}+1\times 8+\frac{(\frac{1}{2}+1)\times 1}{2}=10/75km$$

B ۳ ۴۰۱

خط فکری باید به کمک شیب خط، سرعت در لحظه‌های $t=2s$ و $t=12s$ را به‌دست بیاورید سپس به کمک سطح زیر نمودار، جابه‌جایی را حساب کرده و در آخر سرعت متوسط را حساب کنید.



۱ سرعت در لحظهٔ $t=2s$:

$$\frac{10-0}{v_1-0}=\frac{5-0}{2-0}\Rightarrow v_1=4m/s$$

۲ سرعت در لحظهٔ $t=12s$:

$$\frac{0-10}{14-10}=\frac{0-v_2}{14-12}\Rightarrow v_2=5m/s$$

۳ جابه‌جایی در بازه $t=2s$ تا $t=12s$:

$$\Delta x=S_1+S_2+S_3\Rightarrow\Delta x=\frac{10+4}{2}\times 3+10\times 5+\frac{10+5}{2}\times 2$$

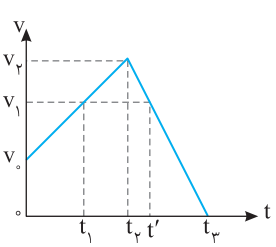
$$\Delta x=21+50+15\Rightarrow\Delta x=86m$$

۴ سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{86}{12-2}\Rightarrow v_{av}=8/6m/s$$

B ۲ ۴۰۲

۱ تندی متوسط در بازهٔ زمانی ۰ تا t_1 و t_1 تا t_2 و t_2 تا t_3 خواهد شد.



$$v_{av_{0\to t_1}}=\frac{v_1+v_0}{2}\quad(1)$$

$$v_{av_{t_1\to t_2}}=\frac{v_1+v_2}{2}\quad(2)$$

$$v_{av_{t_2\to t_3}}=\frac{0+v_2}{2}\quad(3)$$

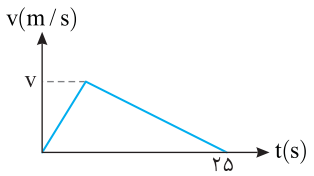
۲ با دقت به روابط (۱)، (۲) و (۳) و با توجه به اینکه $v_2>v_1>v_0$ است، نتیجه می‌شود:

$$v_{av_{t_1\to t_2}}>v_{av_{0\to t_1}}>v_{av_3}$$

۳ اما برای مقایسه $v_{av_{۰\to t_۴}}$ با $av_{t_۱\to t_۲}$ در یک بازهٔ زمانی طولانی $(۰\to t_۱, t'<t_۳)$ تندی متحرک از تندی در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ کوچک‌تر است در نتیجه تندی متوسط در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ بزرگ‌تر است. در نتیجه گزینهٔ (۲) درست است.

۱ ۴۰۳ A

۱ سطح زیر نمودار برابر جابه‌جایی است از این‌رو:

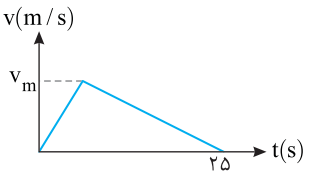


$$\Delta x=S=\frac{v\times ۲۵}{۲}$$

۲ سرعت متوسط $۱۰m/s$ است به کمک تعریف سرعت متوسط، v را حساب می‌کنیم.

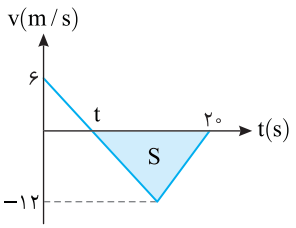
$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow ۱۰=\frac{v\times ۲۵}{۲\times ۲۵}\Rightarrow v=۲۰\frac{m}{s}$$

میانبر در نمودارهای سرعت - زمان که به شکل مثلث از مبدأ زمان شروع می‌شوند، همواره بیشینه سرعت دو برابر سرعت متوسط است. $v_m=۲v_{av}$



۲ ۴۰۴ B

خط فکری مدتی که متحرک در خلاف جهت محور x در حرکت است یعنی مدت زمانی که سرعت متحرک منفی است با توجه به شکل در بازه t تا ۲۰s سرعت منفی است. شما باید سطح S را به‌دست بیاورید تا بتوانید سرعت متوسط را حساب کنید. نیازی به محاسبه t وجود ندارد و مسئله بسیار ساده است دقت کنید.



سطح S را حساب می‌کنیم.

$$\ell=|S|=\frac{۱۲\times(۲۰-t)}{۲}\Rightarrow \ell=۶(۲۰-t)$$

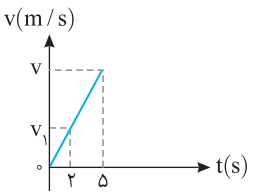
تندی متوسط را به‌دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۶\times(۲۰-t)}{۲۰-t}\Rightarrow s_{av}=۶m/s$$

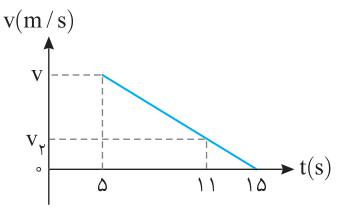
۲ ۴۰۵ B

سرعت متحرک در لحظهٔ ۵s را v می‌گیریم.

۱ به کمک شیب نمودار سرعت در $t=۲s$ و $t=۱۱s$ را حساب می‌کنیم:



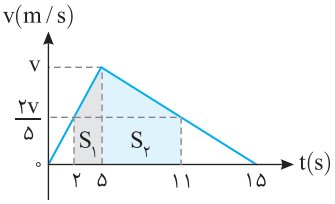
$$\frac{v-v_۱}{۵-۲}=\frac{v-۰}{۵-۰}\Rightarrow v_۱=\frac{۲v}{۵}$$



$$\frac{۰-v}{۱۵-۵}=\frac{۰-v_۲}{۱۵-۱۱}$$

$$\Rightarrow v_۲=\frac{۲v}{۵}$$

۲ نمودار را رسم می‌کنیم:



۳ حال با توجه به سطح زیر نمودار $v-t$ که برابر جابه‌جایی است خواهیم داشت:

$$\Delta x=S_۱+S_۲\Rightarrow ۱۲۶=\frac{۳(\frac{۲v}{۵}+v)}{۲}+\frac{۶(\frac{۲v}{۵}+v)}{۲}$$

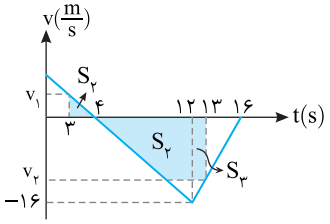
$$\Rightarrow ۱۲۶=۲/۱v+۴/۲v\Rightarrow ۱۲۶=۶/۳v\Rightarrow v=۲۰m/s$$

۴ به کمک شیب نمودار سرعت در $t=۱۲s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{۰-۲۰}{۱۵-۵}=\frac{۰-v_{t=۱۲}}{۱۵-۱۲}\Rightarrow v_{t=۱۲s}=۶\frac{m}{s}$$

۱ ۴۰۶ B

۱ به کمک شیب نمودار سرعت $v_۱$ در لحظهٔ $t_۱=۳s$ و سرعت $v_۲$ در لحظهٔ $t_۲=۱۳s$ را حساب می‌کنیم.



$$v_۱:\frac{۰-v_۱}{۴-۳}=\frac{-۱۶-۰}{۱۲-۴}\Rightarrow v_۱=۲m/s$$

$$v_۲:\frac{۰+۱۶}{۱۶-۱۲}=\frac{v_۲+۱۶}{۱۳-۱۲}\Rightarrow v_۲=-۱۲m/s$$

۲ مسافت طی شده توسط متحرک در بازهٔ زمانی $t=۳s$ تا $t=۱۳s$ را به کمک سطح زیر نمودار حساب می‌کنیم.

$$\ell=|S_۱|+|S_۲|+|S_۳|\Rightarrow \ell=\frac{۲\times ۱}{۲}+\frac{۸\times ۱۶}{۲}+\frac{۱۶+۱۲}{۲}\times ۱$$

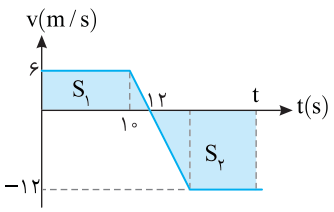
$$\Rightarrow \ell=۱+۶۴+۱۴\Rightarrow \ell=۷۹m$$

۳ تندی متوسط را به‌دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{۷۹}{۱۳-۳}\Rightarrow s_{av}=۷/۹m/s$$

۲ ۴۰۷ B

خط فکری هنگامی که متحرک مجدداً از مبدأ حرکتش می‌گذرد، جابه‌جایی آن صفر است. از این‌رو باید لحظه‌ای را به‌دست آورد که سطح زیر نمودار برابر صفر شود در واقع باید در لحظهٔ فرضی t، سطح زیر نمودار $S_۱$ و $S_۲$ برابر و قرینه هم باشند



قرار است سطح $S_۱$ و $S_۲$ هم‌اندازه باشد از این‌رو مسافت طی شده برابر است با:

$$\ell=|S_۱|+|S_۲|\Rightarrow |S_۱|=|S_۲|\Rightarrow \ell=۲|S_۱|$$

بنابراین کافی است سطح $S_۱$ را به‌دست بیاورید و مقدار آن را دو برابر کنید. یعنی نیازی به یافتن لحظه t نداریم.

$$\ell=۲S_۱=۲\times\frac{۱۰+۱۲}{۲}\times ۶=۱۳۲m$$

۴ ۴۰۸ B

سرعت متوسط برابر جابه‌جایی تقسیم بر زمان جابه‌جایی است. از طرفی سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان با محور زمان برابر جابه‌جایی متحرک است. در حالت کلی می‌توانید برای هر گزینه به کمک سطح زیر نمودار سرعت متوسط را به‌دست آورده با هم مقایسه کنید.

گزینهٔ (۱): حرکت با سرعت ثابت است: $v_{av_۱}=v_۱$

گزینهٔ (۲):

$$v_{av_۲}=\frac{v_۱t_۱+\frac{۳v_۱+v_۱}{۲}t_۱}{۲t_۱}=\frac{۳v_۱}{۲}=۱/۵v_۱$$

گزینهٔ (۳): $v_{av_۳}=\frac{v_۱t_۱+۲v_۱t_۱+۳v_۱t_۱}{۳t_۱}=\frac{۶}{۳}v_۱=۲v_۱$

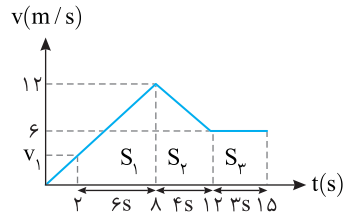
گزینهٔ (۴): $v_{av_۴}=\frac{v_۱t_۱+۲v_۱t_۱+۳v_۱\times ۲t_۱}{۴t_۱}=\frac{۹}{۴}v_۱=۲/۲۵v_۱$

بنابراین گزینهٔ (۴) پاسخ صحیح است.

۱ ۴۰۹ B

۱ به کمک شیب خط سرعت در لحظهٔ $t=۲s$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{۱۲-۰}{۸-۰}=\frac{v_۱-۰}{۲-۰}\Rightarrow v_۱=۳m/s$$



۲ جابه‌جایی متحرک را در بازهٔ $t=۲s$ تا $t=۱۵s$ به کمک سطح زیر نمودار به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=S_۱+S_۲+S_۳\Rightarrow\Delta x=\frac{۳+۱۲}{۲}\times۶+(\frac{۱۲+۶}{۲})\times۴+۶\times۳$$

$$\Rightarrow\Delta x=۴۵+۳۶+۱۸\Rightarrow\Delta x=۹۹m$$

۳ اکنون می‌توان مکان متحرک در لحظهٔ $t=۱۵s$ را حساب کرد:

$$\Delta\vec{x}=\vec{x}_۲-\vec{x}_۱\Rightarrow ۹۹\vec{i}=\vec{x}_۲+۶\vec{i}\Rightarrow x_۲=۹۳\vec{i}$$

۱ ۴۱۰ B

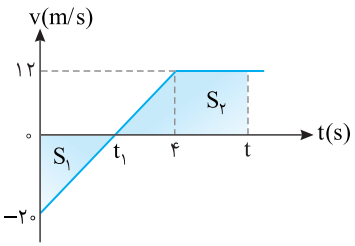
۱ به کمک شیب خط لحظهٔ $t_۱$ که سرعت صفر می‌شود را حساب می‌کنیم.

$$\frac{۰-(-۲۰)}{t_۱-۰}=\frac{۱۲-۰}{۴-t_۱}\Rightarrow\frac{۵}{t_۱}=\frac{۳}{۴-t_۱}\Rightarrow ۳t_۱=۲۰-۵t_۱\Rightarrow ۸t_۱=۲۰\Rightarrow t_۱=۲/۵s$$

۲ قرار است متحرک به مکان شروع حرکتش برگردد یعنی جابه‌جایی متحرک صفر شود $(\Delta x=۰)$، در واقع سطح زیر نمودار باید تا لحظهٔ موردنظر صفر شود، بنابراین مساحت $S_۱$ و $S_۲$ باید هم‌اندازه باشد.

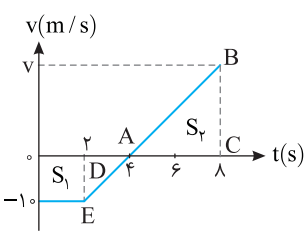
$$|S_۱|=|S_۲|\Rightarrow|\frac{-۲۰\times۲/۵}{۲}|=|\frac{(t-۲/۵)+(t-۴)}{۲}\times۱۲|$$

$$۲۵=۱۲t-۳۹\Rightarrow ۱۲t=۶۴\Rightarrow t=\frac{۱۶}{۳}$$



۲ ۴۱۱ C

۱ به کمک شیب خط EB سرعت در لحظهٔ $t=۸s$ را به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{۰-(-۱۰)}{۴-۲}=\frac{v-۰}{۸-۴}$$

$$\Rightarrow v=۲۰m/s$$

۲ متحرک در مبدأ زمان از مبدأ مکان $x=۰$ با سرعت منفی شروع به حرکت کرده و به مدت ۴s در حال دور شدن از مبدأ است. جابه‌جایی متحرک در این ۴s را به کمک سطح زیر نمودار حساب می‌کنیم.

$$S_۱=\Delta x_۱=(\frac{۴+۲}{۲})(-۱۰)=-۳۰m$$

۳ در لحظهٔ $t=۴s$، سرعت صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد و به سوی مبدأ بازمی‌گردد و در بازهٔ ۴s تا ۸s به اندازهٔ مقدار زیر در جهت مثبت محور حرکت می‌کند.

$$\Delta x_۲=S_۲=\frac{۴\times۲۰}{۲}=۴۰m$$

۴ پس متحرک در بازگشت از مبدأ گذشته و در $t=۸s$ در مکان $x=-۳۰+۴۰=۱۰m$ مبدأ است، پس در $t=۴s$ فاصلهٔ متحرک از مبدأ از بقیهٔ لحظه‌ها بیشتر است.

۲ ۴۱۲ B

۱ به کمک سطح زیر نمودار سرعت زمان، مکان متحرک در بازهٔ اول حرکت یعنی صفر تا ۶s را به دست می‌آوریم.

$$\Delta x_{۰\to۶}=S_۱=\frac{۱۸\times۶}{۲}=۵۴m\Rightarrow x_۶=۵۴+۱۰=۶۴m$$

۲ شتاب حرکت در بازهٔ ۶s تا ۲۱s را حساب می‌کنیم.

$$a_{t>۶s}=\frac{-۱۲-۱۸}{۲۱-۶}=\frac{-۳۰}{۱۵}=-۲m/s^۲$$

۳ در بازهٔ زمانی $t>۶s$، سرعت اولیهٔ بازه $۱۸m/s$، مکان اولیه $۶۴m$ و شتاب $-۲m/s^۲$ است. بنابراین به کمک معادلهٔ مکان - زمان خواهیم داشت:

$$x_{t>۶s}=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow ۱۳۶=\frac{۱}{۲}(-۲)t^۲+۱۸t+۶۴$$

$$\Rightarrow t^۲-۱۸t+۷۲=۰\Rightarrow(t-۶)(t-۱۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۶s\\t=۱۲s\end{cases}$$

این اعداد بعد از ۶s است بنابراین زمان‌های اصلی خواهد شد:

$$t_T=t+۶\Rightarrow ۶+۶=۱۲s,۱۲+۶=۱۸s$$

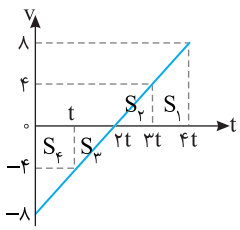
۴ ۴۱۳ A

در هر سه گزینه $v_۰^۲=(\pm۴)^۲=۱۶$ و $v^۲=(\pm۸)^۲=۶۴$ بوده و با توجه به معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) $v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x$، جابه‌جایی در هر سه حالت برابر است با:

$$\Delta x=\frac{۶۴-۱۶}{۲a}=\frac{۲۴}{a}$$

روش استفاده از نمودار:

ابتدا دقت کنید که حرکت با شتاب ثابت است و در بازهٔ زمانی یکسان تغییرات سرعت یکسان است یعنی بازه زمانی تغییر سرعت از $-۸m/s$ تا $-۴m/s$ و از $-۴m/s$ تا صفر و ... یکسان و برابر t است.



بزرگی جابه‌جایی برابر سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان است.

سطح $S_۱$ و سطح $S_۴$ با هم برابر است زیرا دو ذوزنقه با قاعده‌های برابر و ارتفاع t هستند و جابه‌جایی در گزینهٔ (۱) و (۳) برابر است.

$$|S_۱|=|S_۴|=\frac{۸+۴}{۲}t=۶t$$

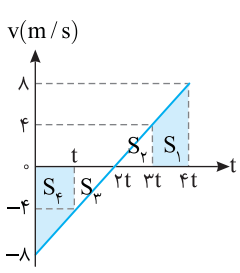
در تغییر سرعت از $-۴m/s$ تا $۸m/s$ سطح زیر نمودار خواهد شد.

$$(S_۱+S_۲)+S_۳=\frac{۸+۴}{۲}t+\frac{۴\times t}{۲}+\frac{-۴\times t}{۲}=۶t$$

بنابراین در سه حالت جابه‌جایی یکسان است. البته روش اول منطقی‌تر و کوتاه‌تر است.

۲ ۴۱۴ A

متحرک دارای شتاب ثابت است و در گزینهٔ (۱) و (۳) تغییر جهت نداده است اما در گزینهٔ (۲) سرعت ابتدا از $-۴m/s$ به صفر رسیده و سپس از صفر به $۸m/s$ می‌رسد، بنابراین مسافت طی شده در گزینهٔ (۱) و (۳) برابر و در گزینهٔ (۲) بیشتر از گزینه‌های (۱) و (۳) است. البته با رسم نمودار سرعت - زمان مسئله را واضح‌تر توضیح می‌دهیم.



۱ مسافت طی شده در بازهٔ زمانی تغییر سرعت از $۴m/s$ تا $۸m/s$ برابر سطح $|S_۱|$ است.

۲ مسافت طی شده در بازهٔ زمانی تغییر سرعت از $-۴m/s$ تا $۸m/s$ برابر مجموع سطح‌ها $|S_۱|+|S_۲|+|S_۳|$ است.

۳ مسافت طی شده در بازهٔ زمانی تغییر سرعت از $-۴m/s$ تا $-۸m/s$ برابر سطح $|S_۴|$ است.

بنابراین مسافت طی شده در گزینهٔ (۲) از بقیه حالت‌ها بیشتر است.

۴ ۴۱۵ B

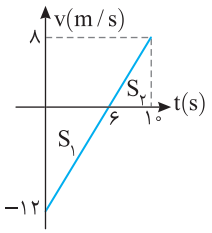
ابتدا معادلهٔ سرعت زمان را به‌دست می‌آوریم.

$$x=t^۲-۱۲t+۲۰,\ x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$$

$$\frac{۱}{۲}a=۱\Rightarrow a=۲m/s^۲\Rightarrow v_۰=-۱۲m/s$$

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=۲t-۱۲$$

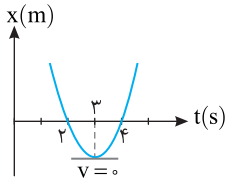
نمودار سرعت - زمان را در بازهٔ ۰ تا ۱۰s رسم می‌کنیم و به کمک سطح زیر نمودار مسافت را حساب می‌کنیم.



$$\ell=|S_۱|+|S_۲|=\frac{۶\times۱۲}{۲}+\frac{۴\times۸}{۲}=۵۲m$$

۳ ۴۱۶ C

معادلهٔ $x=t^۲-۶t+۸$ تابع درجه ۲ است، ریشه‌ها و مختصات رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم و نمودار مکان - زمان را رسم می‌کنیم.



$$x=t^۲-۶t+۸$$

$$\Rightarrow x=(t-۲)(t-۴)\xrightarrow{x=۰}t=۲s,t=۴s$$

رأس سهمی که جهت حرکت تغییر می‌کند برابر است با $t=-\frac{b}{۲a}=\frac{۶}{۲}=۳s$.

قبل از لحظهٔ $t=۳s$ متحرک در جهت منفی محور در حرکت است و در $t>۳s$ متحرک در جهت مثبت محور در حرکت است یعنی در تمام بازه‌های زمانی قبل از ۳s و تمام بازه‌های زمانی بعد از ۳s که تغییر جهت وجود ندارد تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط یکی است.

بازی با سؤال معادلهٔ مکان- زمان متحرکی در SI که روی خط راست حرکت می‌کند به‌صورت $x=t^۲-۳t$ است. مسافت طی شده در ثانیهٔ سوم چند برابر جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم است؟ (خارج ریاضی - ۹۸)

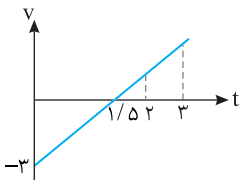
۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $۱/۵$ ۴) $-۱/۰۵$

پاسخ ابتدا لحظهٔ تغییر جهت یعنی لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود و علامت سرعت تغییر می‌کند را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}x=t^۲-۳t\\ x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\end{cases}\Rightarrow a=۲m/s^۲,v_۰=-۳m/s$$

$$\xrightarrow{v=at+v_۰}v=۲t-۳\xrightarrow{v=۰}۰=۲t-۳\Rightarrow t=۱/۵s$$

لحظهٔ تغییر جهت $t=۱/۵s$ است. اما ثانیهٔ سوم یعنی $t=۲s$ تا $t=۳s$ و در این بازه متحرک تغییر جهت نمی‌دهد بنابراین جابه‌جایی و مسافت در ثانیهٔ سوم با هم برابر است.



گزینهٔ ۱

۲ ۴۱۷ B

راه‌حل اول: با توجه به معادلهٔ مکان- زمان جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم یعنی جابه‌جایی در بازه $t=۲s$ تا $t=۳s$ برابر است با:

$$\Delta x=x_{t=۳s}-x_{t=۲s}=(۳)^۲-۳(۳)-(۲^۲-۳(۲))=۹-۹-۴+۶=۲m$$

با مقایسهٔ معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت و معادله داده شده در مسأله، سرعت اولیه و شتاب را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases}x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\\ x=t^۲-۳t\end{cases}\Rightarrow\frac{۱}{۲}a=۱\Rightarrow a=۲m/s^۲\ ,\ v_۰=-۳m/s$$

ثانیه دوم یعنی بازهٔ $t=۱s$ تا $t=۲s$. مکان در این دو لحظه را به‌دست می‌آوریم:

$$t=۱s\Rightarrow x=۱-۳=-۲m\ \ ,\ \ t=۲s\Rightarrow x=۴-۶=-۲m$$

بررسی می‌کنیم که آیا متحرک در این بازه تغییر جهت داده است؟ از این رو معادلهٔ سرعت- زمان را می‌نویسیم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

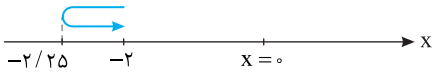
$$v=۲t-۳\xrightarrow{v=۰}۲t-۳=۰\Rightarrow t=۱/۵s$$

$$x=t^۲-۳t\Rightarrow x=(۱/۵)^۲-۳(۱/۵)=۲/۲۵-۴/۵=-۲/۲۵m$$

اکنون مسیر حرکت را رسم می‌کنیم.

بنابراین:

$$\ell=۰/۲۵+۰/۲۵=۰/۵m$$



$$\frac{\ell}{\Delta x}=\frac{۰/۵}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

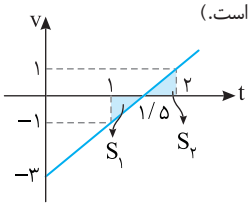
راه‌حل دوم: بهترین روش برای حل مسائل مربوط به مسافت طی شده رسم نمودار سرعت - زمان است. مسافت طی شده برابر مجموع مساحت‌های زیر نمودار $v-t$ است، بنابراین ابتدا نمودار معادلهٔ $v=۲t-۳$ را رسم می‌کنیم.

در ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ $t=۱s$ تا $t=۲s$، سرعت این دو لحظه را روی نمودار مشخص کرده و مساحت مثلث‌های $S_۱$ و $S_۲$ را به‌دست می‌آوریم و با هم جمع می‌کنیم.

$$v=۲t-۳\begin{cases}\xrightarrow{t=۱s}v_۱=-۱m/s\\ \xrightarrow{t=۲s}v_۲=۱m/s\end{cases}$$

$$\ell=|S_۱|+|S_۲|\Rightarrow\ell=\frac{۱\times۰/۵}{۲}+\frac{۱\times۰/۵}{۲}=۰/۵m$$

(ادامه حل مانند روش اول است.)



بازی با سؤال معادلهٔ مکان - زمان متحرکی در SI به صورت $x=t^۲-۸t+۱۵$ است، مسافت طی شده در مدت صفر تا ۵s چند متر است؟

۱) صفر ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۶

پاسخ ابتدا معادلهٔ سرعت زمان را به‌دست می‌آوریم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\ ,\ x=t^۲-۸t+۱۵$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}a=۱\Rightarrow a=۲m/s^۲,v_۰=-۸m/s^۲\Rightarrow v=۲t-۸$$

نمودار سرعت زمان را رسم می‌کنیم.

$$v=۲t-۸\xrightarrow{v=۰}t=۴s$$

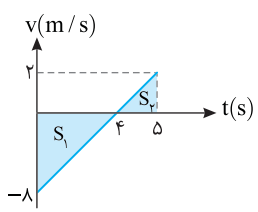
سرعت در $t=۵s$ برابر است با:

$$v=۲\times۵-۸=۲m/s$$

اکنون قدر مطلق سطح‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$$\ell=S_۱+S_۲=\frac{۸\times۴}{۲}+\frac{۲\times۱}{۲}=۱۶+۱=۱۷m$$

گزینهٔ ۳



B ۴۱۸ ۳

۱ ابتدا لحظهٔ تغییر جهت را حساب می‌کنیم. $v=0\Rightarrow -2t+8=0\Rightarrow t=4s$

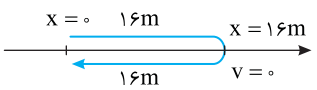
۲ مکان اولیه را به دلخواه مبدأ می‌گیریم و مکان تغییر جهت را به‌دست می‌آوریم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow x=\frac{1}{2}(-2)\times(4)^2+8\times4=16m$$

۳ در لحظهٔ $t=8s$ نیز مکان را به‌دست می‌آوریم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow x=\frac{1}{2}(-2)(8)^2+8\times8=0$$

۴ با توجه به نمودار روبه‌رو مسافت طی شده برابر است با:



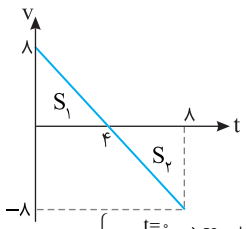
$$\ell=16+16=32m$$

۵ تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{32}{8}=4m/s$$

روش بهتر رسم نمودار سرعت - زمان:

سرعت در لحظه صفر و ۸s و لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود را حساب کرده و نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم و به کمک سطح زیر نمودار تندی را به‌دست می‌آوریم.



$$v=-2t+8\begin{cases}t=0\rightarrow v=+8m/s\\ v=0\rightarrow 0=-2t+8\Rightarrow t=4s\\ t=8s\rightarrow v=-2\times8+8=-8m/s\end{cases}$$

مسافت طی شده برابر است با: $\ell=|S_1|+|S_2|=\frac{8\times4}{2}+\frac{8\times4}{2}=32m$

تندی متوسط خواهد شد: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{32}{8}=4m/s$

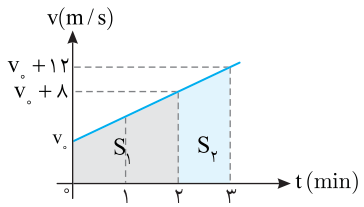
B ۴۱۹ ۲

خط فکری شتاب حرکت مثبت است و با توجه به صورت سؤال متحرک در جهت محور x در حال حرکت بوده پس سرعت نیز مثبت است. حرکت تندشونده $(av>0)$ با شتاب ثابت بوده و تغییر جهت نداریم بنابراین مسافت و جابه‌جایی با هم برابر است.

۱ سرعت در لحظهٔ $t=2s$ و $t=3s$ خواهد شد:

$$v=at+v_0\Rightarrow\begin{cases}t=2s\Rightarrow v=8+v_0\\ t=3s\Rightarrow v=12+v_0\end{cases}$$

۲ نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم.



۳ با توجه به فرض مسئله:

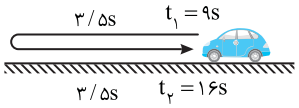
$$S_1-S_2=4\Rightarrow\frac{v_0+v_0+8}{2}\times2-\frac{v_0+8+v_0+12}{2}\times1=4$$

$$2v_0+8-(v_0+10)=4\Rightarrow v_0=6\frac{m}{s}$$

B ۴۲۰ ۲

۱ جابه‌جایی متحرک روی محور xها در بازهٔ $t_1=9s$ تا $t_2=16s$ صفر شده است، یعنی متحرک یک مسیر رفت و برگشت را طی کرده است. از طرفی شتاب ثابت است، بنابراین مسیر رفت و برگشت قرینه هستند و دقیقاً وسط بازهٔ زمانی یعنی $\frac{9+16}{2}=12/5s$ متحرک متوقف شده و برمی‌گردد، یعنی متحرک با شتاب $4m/s^2$ در مدت $12/5-9=3/5s$ متوقف شده و برمی‌گردد.

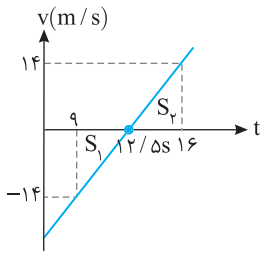
$$t_{\text{تغییر جهت}}=\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{25}{2}=12/5s$$



۲ سرعت در لحظهٔ $t=9s$ و $t=16s$ هم‌اندازه است. سرعت در این دو لحظه را به‌دست می‌آوریم.

$$v_2=at+v_1\begin{cases}\xrightarrow[v_2=0]{9s\text{ تا }12/5s}0=4\times3/5+v_1\Rightarrow v_1=-14m/s\\ \xrightarrow[12/5s\text{ تا }16s]{v_2=0}v_2=4\times3/5+v_2\Rightarrow v_2=14m/s\end{cases}$$

۳ نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم. حال با استفاده از سطح زیر نمودار مسافت را به دست می‌آوریم:



$$S_1=\frac{-14\times(12/5-9)}{2}=-24/5m$$

$$S_2=\frac{14\times(16-12/5)}{2}=24/5m$$

$$\ell=|S_1|+|S_2|\Rightarrow\ell=49m$$

۴ تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{49}{16-9}=\frac{49}{7}=7m/s$$

B ۴۲۱ ۳

خط فکری مسافت طی شده متحرک با شتاب ثابت $a=4m/s^2$ در یک بازهٔ زمانی ۳۸۸m است. سرعت اولیه که در خلاف جهت محور است برابر $-20m/s$ بوده و متحرک در این لحظه از مبدأ مکان $(x_0=0)$ می‌گذرد. بنابراین به نظر می‌رسد با نوشتن معادله سرعت - زمان و رسم نمودار سرعت - زمان به کمک سطح زیر نمودار می‌توانند لحظه‌ای که مسافت طی شده به ۳۸۸m می‌رسد را به‌دست آورد.

۱ معادلهٔ سرعت - زمان را می‌نویسیم: $v=at+v_0\Rightarrow v=4t-20$

۲ نمودار را رسم می‌کنیم. $v=0\Rightarrow 4t-20=0\Rightarrow t=5s$

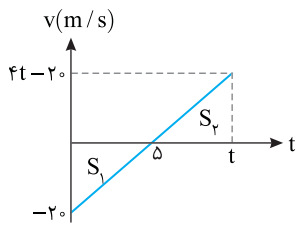
۳ با توجه به فرض مسئله، مسافت طی شده برابر است با:

$$\ell=|S_1|+|S_2|\Rightarrow 388=\left|\frac{-20\times5}{2}\right|+\left|\frac{(4t-20)(t-5)}{2}\right|$$

$$338=(2t-10)(t-5)\Rightarrow 338=2(t-5)(t-5)$$

$$169=(t-5)^2\Rightarrow t-5=13\Rightarrow t=18s$$

۴ تندی در لحظهٔ $t=18s$ خواهد شد: $v=4t-20\Rightarrow v=4\times18-20=52m/s$



B ۴۲۲ ۴

۱ ابتدا به کمک معادله مکان - زمان سرعت اولیه را به دست می‌آوریم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow 2=\frac{1}{2}\times4\times(2)^2+2v_0\Rightarrow v_0=-3m/s$$

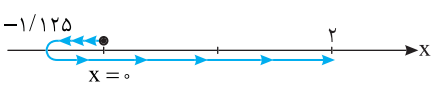
۲ اکنون لحظه و مکان تغییر جهت متحرک را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0\Rightarrow v=4t-3\xrightarrow{v=0}t=\frac{3}{4}s$$

$$x=\frac{1}{2}\times4\times(\frac{3}{4})^2-3(\frac{3}{4})\Rightarrow x=\frac{9}{8}-\frac{9}{4}=-\frac{9}{8}m=-1/125m$$

۳ با توجه به شکل مسافت طی‌شده خواهد شد.

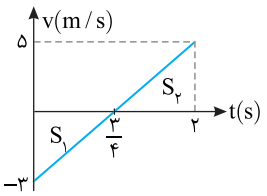
$$\ell=1/125+1/125+2=4/25m$$



روش رسم نمودار:

نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم.

$v=۴t-۳ \xrightarrow{t=۲s} v=۵m/s$



مسافت طی شده برابر است با:

$\ell=|S_۱|+|S_۲| \Rightarrow \ell=\left|\frac{-۳\times\frac{۳}{۴}}{۲}\right|+\left|\frac{۵\times(۲-\frac{۳}{۴})}{۲}\right|$

$\Rightarrow \ell=\frac{۹}{۸}+\frac{۲۵}{۸} \Rightarrow \ell=\frac{۳۴}{۸} \Rightarrow \ell=۴/۲۵m$

B ۴۲۳ ۱

خط فکری برای به‌دست آوردن تندی متوسط $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}$ باید ابتدا مسافت طی‌شده را حساب کنیم که بهتر است مسافت را به کمک نمودار $v-t$ به‌دست بیاوریم.

۱ معادلهٔ مکان - زمان متحرک به صورت تابع درجهٔ دوم است، پس حرکت متحرک شتاب ثابت بوده و معادلهٔ آن به صورت $x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$ است:

$$\begin{cases} x=۳t^۲-۱۲t+۹ \\ x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{۲}a=۳ \Rightarrow a=۶m/s^۲ \\ v_۰=-۱۲m/s \end{cases}$$

۲ معادلهٔ سرعت - زمان متحرک را می‌نویسیم: $v=at+v_۰ \Rightarrow v=۶t-۱۲$

لحظهٔ صفر شدن سرعت را حساب می‌کنیم:

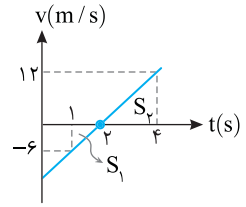
$v=۶t-۱۲ \xrightarrow{v=۰} ۰=۶t-۱۲ \Rightarrow t=۲s$

سرعت در لحظات ۱s و ۴s را به‌دست می‌آوریم.

$$v=۶t-۱۲ \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{t=۱s} v=۶-۱۲ \Rightarrow v=-۶m/s \\ \xrightarrow{t=۴s} v=۲۴-۱۲ \Rightarrow v=۱۲m/s \end{cases}$$

۳ نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم:

۴ با سطح زیر نمودار $v-t$ مسافت طی‌شده در بازهٔ ۱s تا ۴s را حساب می‌کنیم:



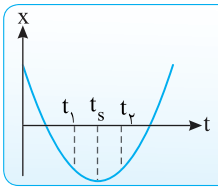
$\ell=|S_۱|+|S_۲| \Rightarrow \ell=\frac{۶\times۱}{۲}+\frac{۲\times۱۲}{۲}=۱۵m$

۵ تندی متوسط را حساب می‌کنیم: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۱۵}{۴-۱} \Rightarrow s_{av}=\frac{۱۵}{۳}=۵m/s$

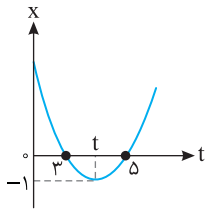
A ۴۲۴ ۳

۱ در لحظه‌های $t=۳s$ و $t=۵s$ متحرک از مبدأ گذشته و در لحظه تغییر جهت (رأس سهمی $x-t$) مکان متحرک منفی بوده پس نمودار $x-t$ حرکت تقریباً به صورت زیر است.

یادداشت ریاضی در نمودارهای سهمی مانند نمودار $x-t$ در حرکت با شتاب ثابت، رأس نمودار محور تقارن است بنابراین: $t_s=\frac{t_۱+t_۲}{۲}$



۲ با توجه به یادداشت ریاضی بالا لحظهٔ t در نمودار $x-t$ برابر است با: $t=\frac{۳+۵}{۲}=۴s$



۳ با توجه به نمودار در $t=۴s$ سرعت متحرک صفر شده و در بازهٔ $t=۴s$ تا $t=۵s$ متحرک به اندازهٔ $\Delta x=۰-(-۱)=۱m$ جابه‌جا می‌شود. شتاب متحرک را با توجه به این اطلاعات حساب می‌کنیم:

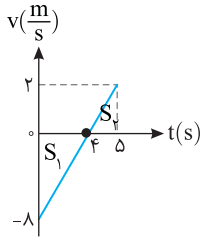
$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۱t \xrightarrow{v_۱=۰} ۱=\frac{۱}{۲}a \Rightarrow a=۲m/s^۲$

۴ شتاب متحرک $۲m/s^۲$ و در $t=۴s$ سرعت متحرک صفر شده است، با توجه به این اطلاعات سرعت اولیه و سرعت در $t=۵s$ را حساب می‌کنیم:

$t_۲=۴s$ ، $t_۱=۰$: $v_۲=at+v_۱ \xrightarrow[v_۲=۰]{\Delta t=۴s} ۰=۲\times۴+v_۱ \Rightarrow v_۱=-۸m/s$

$t_۳=۵s$ ، $t_۲=۴s$: $v_۳=at+v_۲ \xrightarrow[v_۲=۰]{\Delta t=۱s} v_۳=۲\times۱+۰ \Rightarrow v_۳=۲m/s$

۵ برای به‌دست آوردن تندی متوسط نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم تا با استفاده از سطح زیر نمودار مسافت به‌دست آید:



$\ell=|S_۱|+|S_۲|$

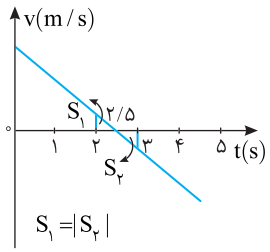
$\Rightarrow \ell=\frac{۴\times۸}{۲}+\frac{۱\times۲}{۲}=۱۶+۱=۱۷m$

۶ تندی متوسط برابر است با:

$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۱۷}{۵}m/s$

A ۴۲۵ ۳

خط فکری با رسم نمودار $v-t$ متحرک، وضعیت حرکت را بررسی می‌کنیم. برای این منظور با توجه به منفی‌بودن شتاب، شیب نمودار منفی خواهد بود. از طرفی چون جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم (۲s تا ۳s) حرکت صفر است، یعنی در نیمی از آن جابه‌جایی مثبت و در نیمی از آن جابه‌جایی منفی است بنابراین مطابق شکل مقابل باید در لحظهٔ $t=\frac{۲+۳}{۲}=۲/۵s$ متحرک تغییر جهت داده باشد تا سطح زیر نمودار در ثانیه‌های ۲s تا ۲/۵s و ۲/۵s تا ۳s برابر باشد، زیرا مجموع جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم صفر است.



نکته در حرکت شتاب ثابت که مسافت و یا تندی خواسته می‌شود باید نمودار $v-t$ را رسم کرده و از روی سطح زیر نمودار مسافت را حساب کنید.

تندی متحرک در $t=۲/۵s$ صفر شده و شتاب حرکت $a=-۴m/s^۲$ است. برای رسم نمودار $v-t$ و محاسبهٔ مسافت در بازهٔ $t_۱=۲s$ تا $t_۲=۴s$ باید تندی در $t=۲s$ و $t=۴s$ حساب شود:

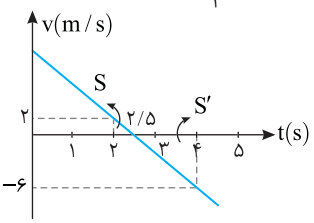
$$\begin{cases} t_۱=۲/۵s, v_۱=۰ \\ a=-۴m/s^۲ \\ t_۲=۴s \end{cases} \Rightarrow v_۲=a\Delta t+v_۱ \xrightarrow[\Delta t=۱/۵s]{\Delta t=t_۲-t_۱}$$

$v_۲=-۴\times۱/۵+۰ \Rightarrow v_۲=-۶m/s$

$$\begin{cases} t_۱=۲s, v_۱=? \\ a=-۴m/s^۲ \\ t_۲=۲/۵s, v_۲=۰ \end{cases} \Rightarrow v_۲=a\Delta t+v_۱ \xrightarrow[\Delta t=۰/۵s]{\Delta t=t_۲-t_۱}$$

$۰=-۴\times۰/۵+v_۱ \Rightarrow v_۱=۲m/s$

نمودار $v-t$ را رسم کرده و سطح زیر نمودار بین ثانیه‌های ۲s تا ۲/۵s و ۲/۵s تا ۴s را حساب کرده $S=\frac{۰/۵\times۲}{۲}=۰/۵m$ ، $|S'|=\frac{۱/۵\times۶}{۲}=۴/۵m$



مجموع قدر مطلق سطح زیر نمودار $v-t$ برابر مسافت طی‌شده است:

$\ell=S+|S'| \Rightarrow \ell=۰/۵+۴/۵=۵m$

میانبر در حرکت با شتاب ثابت اگر جابه‌جایی یا سرعت متوسط در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ صفر شود، آن‌گاه در لحظهٔ $t=\frac{t_۱+t_۲}{۲}$ متحرک تغییر جهت داده و تندی آن صفر می‌شود.

بازی با سؤال متحرکی با شتاب ثابت در مبدأ زمان با سرعت $18m/s$ روی خط راست، در حرکت بوده و سرعت متوسط متحرک در ثانیهٔ پنجم حرکت برابر با صفر است. تندی متوسط متحرک در بازهٔ $t=0$ تا $t=10s$ چند متر بر ثانیه است؟

۱) $10/1$ ۲) $10/1$ ۳) 20 ۴) $20/1$

پاسخ **نکته** هرگاه در حرکت با شتاب ثابت در یک بازهٔ زمانی جابه‌جایی و یا سرعت متوسط صفر شود، در لحظهٔ وسط بازه زمانی سرعت متحرک صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد.

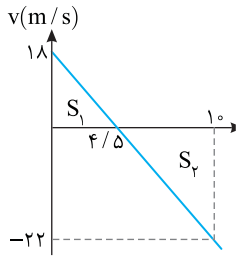
۱ در ثانیهٔ پنجم بین بازهٔ زمانی $t=4s$ تا $t=5s$ سرعت متوسط صفر شده است. بنابراین در لحظهٔ $t=4/5s$ سرعت متحرک صفر شده و تغییر جهت می‌دهد. سرعت اولیه $v_0=18m/s$ و شتاب ثابت است. شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0 \Rightarrow 0=a\times 4/5+18 \Rightarrow a=-4m/s^2$$

۲ معادلهٔ سرعت - زمان را نوشته، سرعت در لحظهٔ $t=10s$ را حساب کرده نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم:

$$v=-4t+18 \xrightarrow{t=10s} v=-40+18 \Rightarrow v=-22m/s$$

۳ مسافت طی شده را به‌دست می‌آوریم:



$$\ell=|S_1|+|S_2|=\left|\frac{18\times 4/5}{2}\right|+\left|\frac{-22\times 5/5}{2}\right|$$

$$\ell=9\times 4/5+11\times 5/5$$

$$\Rightarrow \ell=40/5+60/5 \Rightarrow \ell=101m$$

۴ تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{101}{10}=10/1m/s$$

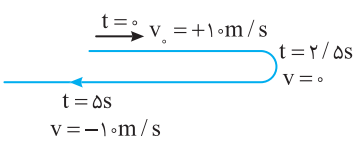
گزینهٔ ۱

۴ ۴۲۶ B

نکته هرگاه در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست در ابتدا و انتهای یک بازهٔ زمانی تندی متحرک یکسان باشد، در وسط بازه، تندی متحرک صفر می‌شود.

$$a=\frac{v-v_0}{t} \Rightarrow a=\frac{0-10}{2/5} \Rightarrow a=-4m/s^2$$

۵ ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ زمانی $t=5s$ تا $t=10s$ که در این بازه متحرک در یک جهت در حرکت است و تندی متوسط، هم‌اندازهٔ سرعت متوسط است. سرعت در لحظهٔ $t=10s$ را حساب می‌کنیم.

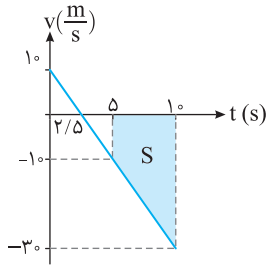


$$v=at+v_0 \Rightarrow v=-4\times 10+10 \Rightarrow v=-30m/s$$

اندازهٔ سرعت متوسط (تندی متوسط) خواهد شد:

$$s_{av}=|v_{av}|=\frac{|v_1+v_2|}{2}=\frac{|-10+(-30)|}{2}=20m/s$$

روش دیگر: رسم نمودار سرعت زمان و یافتن تندی متوسط در بازهٔ بیان شده، البته دقت کنید که برای رسم نمودار تمام محاسبات بالا را باید انجام دهید.



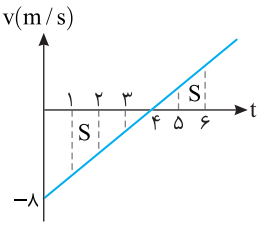
$$s_{av}=\frac{|S|}{\Delta t}=\frac{\frac{10+30}{2}\times 5}{5} \Rightarrow s_{av}=20m/s$$

۲ ۴۲۷ C

نکته هرگاه در یک حرکت با شتاب ثابت مسافت طی شده در دو بازهٔ زمانی با هم برابر شود، آن‌گاه دقیقاً در وسط بازهٔ زمانی از ابتدای بازه اول تا انتهای بازهٔ دوم سرعت متحرک صفرشده و تغییر جهت می‌دهد.

خط فکری ثانیهٔ سوم یعنی از $t=2s$ تا $t=3s$ و ثانیهٔ ششم یعنی از $t=5s$ تا $t=6s$ مسافت‌ها یکسان است. بنابراین در لحظهٔ $t=\frac{6+2}{2}=4s$ سرعت متحرک صفر می‌شود و متحرک تغییر جهت می‌دهد. با توجه به صورت مسئله سرعت اولیه $-8m/s$ است، بنابراین شما باید نمودار سرعت - زمان را رسم کنید و تا لحظهٔ $t=4s$ سطح زیر نمودار را حساب کنید.

۱ سطح زیر نمودار خواهد شد:



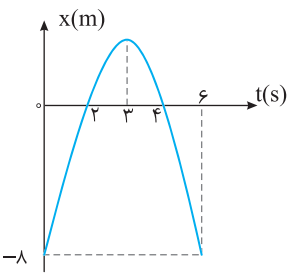
$$\Delta x=S=\frac{-8\times 4}{2}=-16m$$

۲ مکان اولیهٔ متحرک $x_0=20m$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta x=x-x_0 \Rightarrow -16=x-20 \Rightarrow x=4m$$

۳ ۴۲۸ B

با توجه به اطلاعات سؤال نمودار مکان - زمان متحرک مطابق شکل است.



در لحظهٔ $t=3$ (رأس سهمی) سرعت صفر می‌شود، بنابراین داریم:

$$v=at+v_0 \Rightarrow 0=3a+v_0$$

$$\Rightarrow v_0=-3a \quad (I)$$

جابه‌جایی در بازهٔ صفر تا $2s$ برابر است با:

$$\Delta x=x_{t=2s}-x_0 \Rightarrow \Delta x=0-(-8)=8m$$

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2-3at \Rightarrow 8=\frac{1}{2}a(2)^2-3a(2) \Rightarrow a=-2m/s^2$$

$$(I) \Rightarrow v_0=-3\times(-2)=6m/s$$

سرعت اولیه:

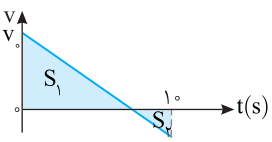
در بازهٔ ۳ ثانیهٔ دوم یعنی $t=3s$ تا $t=6s$ حرکت در یک جهت است و به دلیل تقارن سهمی جابه‌جایی در بازهٔ صفر تا $3s$ با جابه‌جایی در بازهٔ $3s$ تا $6s$ هم‌اندازه بوده و تندی در این بازه میانگین سرعت ابتدایی و انتهایی بازه است.

$$s_{av}=\frac{v_2+v_1}{2}=\frac{6+0}{2}=3m/s$$

۴ ۴۲۹ A

خط فکری هرگاه تندی متوسط بزرگ‌تر از سرعت متوسط باشد، مسافت طی‌شده بزرگ‌تر از جابه‌جایی بوده و به این معنی است که متحرک در حین حرکت تغییر جهت داده است.

برای محاسبهٔ مسافت و تندی بهتر است نمودار $v-t$ کشیده شود که چون سرعت اولیه با توجه به سؤال در جهت محور xها بوده (در جهت مثبت) و تغییر جهت داشته‌ایم، نمودار $v-t$ به صورت روبه‌رو می‌شود:



واضح است که چون سرعت اولیه مثبت است و متحرک تغییر جهت داده، شیب نمودار منفی می‌شود. حال با توجه به تعریف سرعت متوسط و تندی متوسط خواهیم داشت:

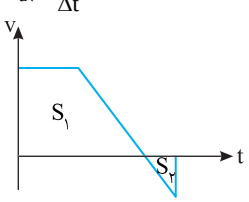
۱ در بازهٔ صفر تا $10s$ سرعت متوسط $7/5$ متر بر ثانیه است:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x=75m$$

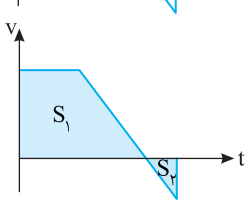
۲ در بازهٔ صفر تا $10s$ تندی متوسط $8/5$ متر بر ثانیه است: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow \ell=85m$

نکته در نمودار $v-t$ مسافت و جابه‌جایی متحرک با استفاده از سطح محصور بین نمودار و محور افقی به‌دست می‌آید:

$$\Delta x=S_1+S_2 \quad , \quad \ell=|S_1|+|S_2|$$



۳ مسافت و جابه‌جایی را می‌توان به کمک سطح زیر نمودار به‌دست آورد:

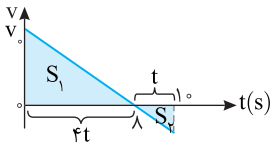


$$\begin{cases} \ell=S_1+S_2 \Rightarrow 85=S_1+S_2 \\ \Delta x=S_1-S_2 \Rightarrow 75=S_1-S_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_1=80m \, , S_2=5m$$

یادداشت ریاضی یکی از ابزارهای ریاضی مفید در محاسبات سطح زیر نمودار استفاده از تشابه مثلث‌ها است که در آن، مجذور نسبت ضلع‌ها برابر با نسبت مساحت‌هاست.

۴ نسبت مساحت سطح زیر نمودار در این دو بخش به صورت $\frac{S_1}{S_2}=16$ است، پس نسبت ضلع‌های این دو مثلث متشابه ۱ به ۴ است.

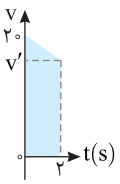


$$\frac{t}{(10-t)}=\frac{1}{4}\Rightarrow 4t=10-t\Rightarrow t=2$$

$$S_1=80m\Rightarrow\frac{v_0\times 8}{2}=80\Rightarrow v_0=20m/s$$

برای به‌دست آوردن سطح زیر نمودار در ۲ ثانیه اول نیاز به داشتن سرعت در ثانیه دوم داریم. به این منظور ابتدا شتاب حرکت را با توجه به شیب نمودار $v-t$ به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-20}{8}=-2/5m/s^2$$



حال مسافت ۲s اول را حساب می‌کنیم:

$$v'=at+v_0\Rightarrow v'=-5+20\Rightarrow v'=15m/s$$

$$\ell=\frac{(20+15)2}{2}=35m$$

C **۲** **۴۳۰**

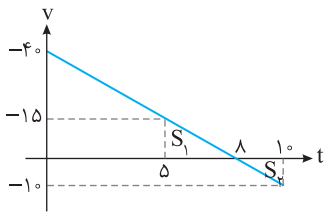
۵ ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ زمانی بین $t=5s$ تا $t=10s$. برای به‌دست آوردن تندی در بازهٔ ۵ ثانیهٔ دوم باید مسافت را در این بازه حساب کنیم و بهترین روش رسم نمودار سرعت - زمان است.

$$v=at+v_0\xrightarrow{a=-5m/s^2,\,v_0=+40m/s}v=-5t+40$$

$$v=0\Rightarrow 0=-5t+40\Rightarrow t=8s$$

$$t=5s\Rightarrow v_1=-5\times 5+40\Rightarrow v_1=15m/s$$

$$t=10s\Rightarrow v_2=-5\times 10+40\Rightarrow v_2=-10m/s$$



مسافت طی شده را به کمک سطح زیر نمودار حساب می‌کنیم.

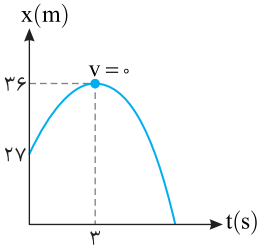
$$\ell=S_1+S_2=\frac{15\times 3}{2}+\frac{10\times 2}{2}\Rightarrow\ell=22/5+10=32/5m$$

تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{32/5}{5}\Rightarrow s_{av}=6/5m/s$$

A **۳** **۴۳۱**

خط فکری حرکت متحرک شتاب ثابت است و با توجه به اطلاعات داده شده در بازهٔ زمانی $t=0$ تا $t=3s$ شتاب متحرک و سرعت اولیه آن را به‌دست می‌آوریم. دقت کنید در لحظهٔ $t=3s$ شیب خط مماس بر نمودار افقی شده و سرعت متحرک صفر است (رأس سهمی)، همچنین مسافت طی شده خواسته شده و برای حل از سطح زیر نمودار $v-t$ کمک می‌گیریم.



۱ با توجه به رابطهٔ $\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t$، سرعت اولیه را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=36-27=9m\ ,\ \Delta t=3s\ \ ,\ v_0=?\ \ ,\ v=0$$

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\times\Delta t\Rightarrow 9=\frac{0+v_0}{2}\times 3\Rightarrow v_0=6m/s$$

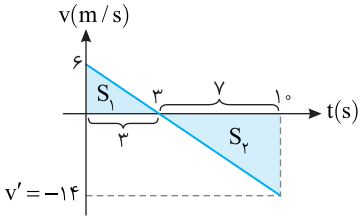
۲ با توجه به معادلهٔ سرعت - زمان، شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=3a+6\Rightarrow a=-2m/s^2$$

۳ سرعت اولیه $v_0=6m/s$ و شتاب $a=-2m/s^2$ است، سرعت در لحظهٔ $t=10s$ را نیز به‌دست می‌آوریم:

$$t=10s\Rightarrow v'=at+v_0\Rightarrow v'=-2\times 10+6=-14m/s$$

۴ با توجه به اطلاعات به‌دست آمده نمودار $v-t$ متحرک را رسم و از سطح زیر نمودار مسافت را حساب می‌کنیم:

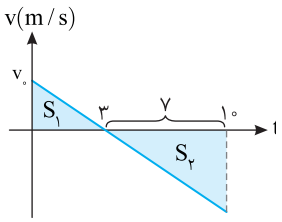


$$S_1=\frac{6\times 3}{2}=9m$$

$$|S_2|=\frac{7\times 14}{2}=49m$$

$$\Rightarrow\ell=S_1+|S_2|=58m$$

میانبر از ابتدا با دانستن اینکه سرعت اولیه متحرک مثبت است نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم:



با توجه به اینکه سطح زیر نمودار نشان‌دهنده جابه‌جایی متحرک است، S_1 برابر خواهد بود با:

$$\Delta x_1=S_1=36-27=9m$$

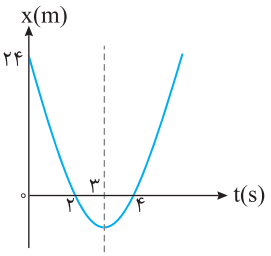
حال با استفاده از تشابه دو مثلث شکل گرفته در نمودار، اندازه جابه‌جایی ۳ ثانیه تا ۱۰ ثانیه را حساب می‌کنیم:

$$\frac{S_1}{S_2}=(\frac{3}{7})^2\Rightarrow\frac{9}{S_2}=\frac{9}{49}\Rightarrow S_2=49m$$

در نتیجه مسافت طی شده از شروع حرکت تا ثانیه ۱۰ ام برابر مجموع جابه‌جایی‌ها یعنی $49+9=58m$ است.

B **۲** **۴۳۲**

نمودار مکان زمان حرکت با شتاب ثابت به صورت یک سهمی است و سهمی نسبت به محور گذرنده از رأسش دارای تقارن است. بنابراین ریشه‌های معادلهٔ مکان - زمان $t=2s$ و $t=4s$ است.



$$x=A(t-2)(t-4)$$

در $t=0$، مکان متحرک $x=24$ است. از این‌رو:

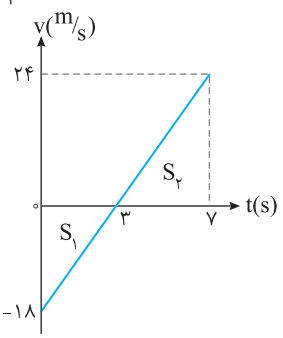
$$24=A(0-2)(0-4)\Rightarrow A=3$$

معادلهٔ مکان - زمان خواهد شد:

$$x=3(t-2)(t-4)\Rightarrow x=3(t^2-6t+8)\Rightarrow x=3t^2-18t+24$$

معادلهٔ سرعت - زمان را به‌دست آورده و نمودار آن را رسم می‌کنیم.

$$\frac{1}{2}a=3\Rightarrow a=6m/s^2\ ,\quad v_0=-18m/s\ ,\quad v=6t-18$$



سرعت در لحظهٔ $t=7s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$v=6\times 7-18\Rightarrow v=24m/s$$

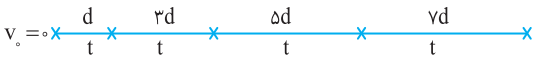
نسبت $\frac{s_{av}}{v_{av}}$ خواهد شد:

$$\frac{s_{av}}{v_{av}}=\frac{\frac{\ell}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}\Rightarrow\frac{s_{av}}{v_{av}}=\frac{|S_1|+|S_2|}{S_1+S_2}=\frac{|\frac{-18\times 3}{2}|+|\frac{24\times 4}{2}|}{\frac{-18\times 3}{2}+\frac{24\times 4}{2}}$$

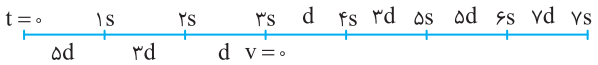
$$\Rightarrow\frac{s_{av}}{v_{av}}=\frac{27+48}{-27+48}=\frac{75}{21}=\frac{25}{7}$$

روش دیگر:

نکته در یک حرکت با شتاب ثابت روی خط راست وقتی متحرک از حال سکون شروع به حرکت می‌کند، جابه‌جایی آن در بازه‌های زمانی یکسان t به صورت زیر است:



با توجه به نمودار سرعت - زمان در لحظهٔ $t=3s$ سرعت صفر است از این‌رو خواهیم داشت:



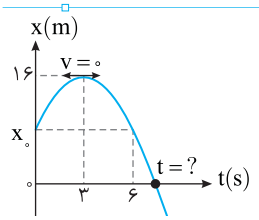
$\ell=5d+3d+d+d+3d+5d+7d=25d$

$\Delta x=-5d-3d-d+d+3d+5d+7d=7d$

$\frac{s_{av}}{v_{av}}=\frac{\ell}{\Delta x}=\frac{25}{7}$

A ۴۳۳ ۳

۱ حرکت با شتاب ثابت بوده و نمودار آن سهمی است. در نمودار سهمی، خط قائم گذرنده از رأس سهمی، محور تقارن آن است. بنابراین مطابق شکل در لحظه‌های $t=0$ و $t=6s$، مکان متحرک یکسان است.



۲ در بازهٔ صفر تا $6s$، تندی متوسط متحرک $3m/s$ است، در این صورت مسافت طی شده در این مدت خواهد شد: $\ell=vt\Rightarrow\ell=3\times6=18m$

۳ متحرک در مدت صفر تا $6s$، $18m$ مسافت طی کرده و مطابق نمودار ابتدا در مدت $3s$ اول $9m$ رفته و سپس از $3s$ تا $6s$، $9m$ برگشته است.

۴ از صفر تا $3s$، $9m$ رفته بنابراین مکان اولیهٔ آن خواهد شد:

$16-x_0=9\Rightarrow x_0=7m$

۵ با توجه به معادلهٔ مستقل از شتاب در بازهٔ صفر تا $3s$ سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t\Rightarrow 9=\frac{0+v_0}{2}\times3\Rightarrow v_0=\frac{18}{3}=6m/s$

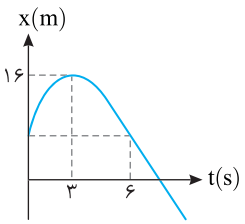
۶ شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم. $a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-6}{3}=-2m/s^2$

۷ در مدت زمانی که نمودار $x-t$ بالای محور زمان است و x مثبت است، بردار مکان مثبت خواهد بود.

$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow 0=\frac{1}{2}(-2)t^2+6t+7$

$\Rightarrow t^2-6t-7=0\Rightarrow t=-1$ غ.ق.ق , $t=7s$

بازی با سوال **نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. اگر در بازهٔ زمانی ۰ تا $6s$ تندی متوسط $3m/s$ باشد، در چه لحظه‌ای بردار مکان تغییر جهت می‌دهد؟** $(\sqrt{25}=1/4)$



۱) ۷
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۹

پاسخ **۱** متحرک با تندی متوسط $3m/s$ در مدت $6s$ مسافت زیر را طی می‌کند. $\ell=s_{av}t\Rightarrow\ell=6\times3=18m$

۲ نمودار سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس تقارن دارد بنابراین در $t=0$ و $t=6s$ مکان متحرک برابر بوده و در این مدت مسافت طی شده $18m$ است. از این‌رو در ۰ تا $3s$ متحرک $\frac{18}{2}=9m$ طی کرده و به مکان $16m$ می‌رسد. بنابراین مکان اولیهٔ آن $x_0=16-9=7m$ است.

۳ به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم.

$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}t\Rightarrow 9=\frac{0+v_0}{2}\times3\Rightarrow v_0=6m/s$

۴ شتاب حرکت خواهد شد: $a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-\frac{14}{3}}{3}\Rightarrow a=-2m/s^2$

۵ معادلهٔ حرکت را بنویسید زمان تغییر جهت بردار مکان $(x=0)$ را به‌دست می‌آوریم.

$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x=\frac{1}{2}(-2)t^2+6t+7=0$

$\Rightarrow -t^2+6t+7=0\Rightarrow +t^2-6t-7=0$

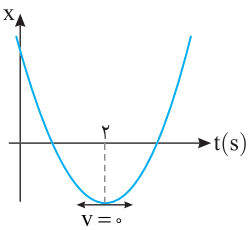
$t=\frac{+6\pm8}{2}\Rightarrow t=+3\pm4\Rightarrow t=3-4<0$ غ ق ق

$t=3+4\Rightarrow t=7\Rightarrow t=7s$

گزینه ۱

B ۴۳۴ ۳

باید از نمودار به این اطلاعات دست پیدا کنید.



۱ در لحظهٔ $t=2s$ متحرک تغییر جهت داده و سرعت آن صفر شده است.

۲ در نمودار مکان - زمان اگر جهت تقعر رو به بالا شد شتاب مثبت است که در این نمودار جهت تقعر منحنی رو به بالاست و شتاب مثبت است.

۳ در لحظهٔ $t=2s$ سرعت صفر شده است، با توجه به معادلهٔ سرعت زمان درحرکت با شتاب ثابت، سرعت اولیه و سرعت در لحظهٔ $t=1s$ و $t=6s$ را برحسب شتاب حساب می‌کنیم.

$v=at+v_0\xrightarrow{t=2s}0=2a+v_0\Rightarrow v_0=-2a$

$t_1=1s\Rightarrow v_1=a\times1+(-2a)\Rightarrow v_1=-a$

$t_2=6s\Rightarrow v_2=a\times6-2a\Rightarrow v_2=4a$

۴ سرعت متوسط در بازهٔ $t=1s$ تا $t=6s$ برابر $3m/s$ است بنابراین جابه‌جایی در این مدت خواهد شد: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow 3=\frac{\Delta x}{6-1}\Rightarrow\Delta x=15m$

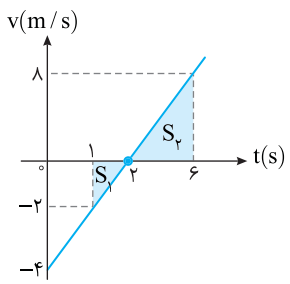
۵ در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط بین دو لحظهٔ t_1 و t_2 برابر میانگین سرعت‌هاست از این‌رو می‌توان نوشت:

$v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}\xrightarrow{v_1=-a\,,v_2=4a}3=\frac{-a+4a}{2}\Rightarrow a=2m/s^2$

۶ در این صورت v_1 و v_2 را می‌توان به دست آورد.

$v_1=-a\Rightarrow v_1=-2m/s\,,v_2=4a\Rightarrow v_2=4\times2=8m/s$

۷ نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم.

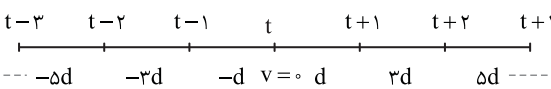


۸ برای یافتن مسافت کافی است S_1+S_2 را حساب کنیم.

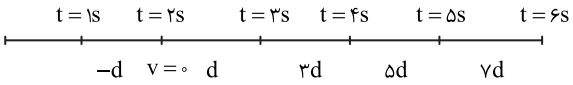
$\ell=|S_1|+|S_2|=\frac{2\times1}{2}+(\frac{8\times4}{2})$

$\Rightarrow\ell=17m$

میانبر در حرکت با شتاب ثابت اگر در لحظه t سرعت جسم صفر شود برای جابه‌جایی‌ها در ثانیه‌های قبل و بعد از t رابطهٔ زیر برقرار است.



با توجه به نمودار مسئله در لحظهٔ $t=2s$ سرعت صفر شده است بنابراین در بازهٔ $1s$ تا $6s$ که سرعت متوسط $3m/s$ و جابه‌جایی $15m$ است می‌توان نوشت:

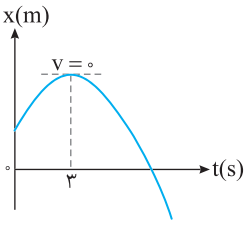


$\Delta x=-d+d+3d+5d+7d=15\Rightarrow 15d=15\Rightarrow d=1m$

مسافت طی شده خواهد شد: $\ell=|-d|+d+3d+5d+7d=17d\Rightarrow \ell=17m$

B ۴ ۴۳۵

دقت کنید بزرگی شتاب $|a|=2m/s^2$ است، چون دهانهٔ نمودار رو به پایین بوده شتاب منفی و برابر $a=-2m/s^2$ است و در نمودار $v-t$ شیب نمودار منفی است و در لحظهٔ $t=3s$ که شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ صفر شده، سرعت صفر می‌شود:



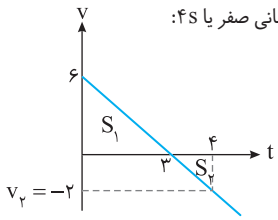
به کمک معادلهٔ سرعت - زمان سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$v=at+v_0\Rightarrow 0=-2\times 3+v_0\Rightarrow v_0=6m/s$

برای به‌دست آوردن مسافت در حرکت با شتاب ثابت بهتر است نمودار $v-t$ را رسم کنیم و با توجه به سطح زیر نمودار $v-t$ مسافت را حساب کنیم.

الف) بررسی بازهٔ زمانی ۴ ثانیه اول یعنی بازهٔ زمانی صفر تا ۴s:

$v_2=at+v_1\Rightarrow v_2=-2\times 4+6=-2m/s$

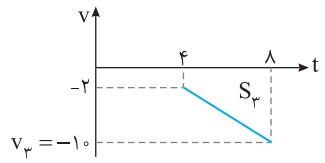


$\ell_1=|S_1|+|S_2|\Rightarrow \ell_1=\frac{3\times 6}{2}+\frac{1\times 2}{2}=10m$

ب) بررسی بازهٔ زمانی ۴ ثانیه دوم یعنی ۴s تا ۸s:

$v_3=at+v_2 \xrightarrow[v_2=-2]{\Delta t=4s}$

$v_3=-8-2=-10m/s$



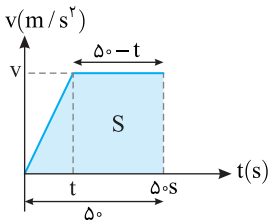
$\ell_2=|S_3|=\frac{4(2+10)}{2}=24m$

حال نسبت $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ خواسته شده را حساب می‌کنیم:

$\frac{\ell_1}{\ell_2}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$

B ۴ ۴۳۶

راه‌حل اول: نمودار سرعت - زمان را با توجه به داده‌های مسئله رسم می‌کنیم.



مساحت زیر نمودار $v-t$ برابر جابه‌جایی می‌باشد بنابراین:

$\Delta x_{کل}=600+200=800m$

$\Rightarrow \Delta x_{کل}=S=\frac{v(50+(50-t))}{2}=800m$

$\Delta x_{کل}=S=\frac{100v-vt}{2}=800 \quad (1)$

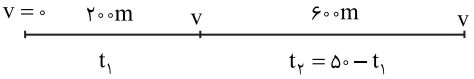
بنا به فرض مسئله سطح زیر نمودار از صفر تا t باید برابر $200m$ باشد از این‌رو:

$S_1=\frac{vt}{2}=200\Rightarrow vt=400m \quad (2)$

اکنون در رابطهٔ (۱) از رابطهٔ (۲) جای‌گذاری می‌کنیم:

$\frac{100v-400}{2}=800\Rightarrow 100v-400=1600\Rightarrow v=20m/s$

راه‌حل دوم: با توجه به صورت سؤال، می‌توان برای سادگی در فهم آن، شکل زیر را رسم کرد. برای قسمت اول از فرمول مستقل از زمان می‌نویسیم:



$\Delta x_1=\frac{v+v_0}{2}\Delta t_1\Rightarrow 200=\frac{v+0}{2}t_1\Rightarrow vt_1=400 \quad (1)$

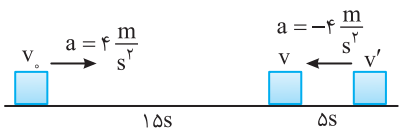
اگر مدت حرکت در ابتدا را t_1 فرض کنیم در مدت $t_2=50-t_1$ متحرک دارای حرکت یکنواخت بوده از این‌رو:

$\Delta x_2=v\Delta t_2\Rightarrow 600=v(50-t_1)\Rightarrow 600=50v-vt_1 \quad (2)$

از رابطهٔ (۱) در رابطهٔ (۲) جای‌گذاری می‌کنیم: $600=50v-(400)\Rightarrow v=20m/s$

B ۳ ۴۳۷

سرعت را در لحظهٔ $t=15s$ حساب می‌کنیم. $v=at+v_0\Rightarrow v=60+v_0$



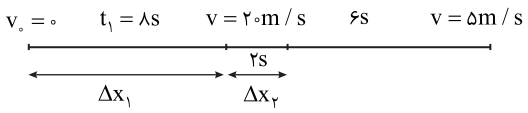
سرعت را در انتهای ۵s با شتاب $-4m/s^2$ را به‌دست می‌آوریم.

$v'=a't'+v\Rightarrow v'=-4\times 5+60+v_0\Rightarrow v'=40+v_0$

شتاب متوسط خواهد شد: $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{40+v_0-v_0}{20}\Rightarrow a_{av}=2m/s^2$

B ۴ ۴۳۸

جابه‌جایی در قسمت اول مسیر برابر است با:



$\Delta x_1=\frac{v+v_0}{2}\Delta t_1\Rightarrow \Delta x_1=\frac{20+0}{2}\times 8\Rightarrow \Delta x_1=80m$

در قسمت دوم مسیر که حرکت کندشونده است، ابتدا شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:

$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{5-20}{6}\Rightarrow a=-\frac{5}{2}m/s^2$

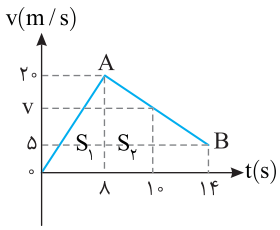
جابه‌جایی در مدت ۲s از لحظهٔ $t=8s$ تا $t=10s$ را حساب می‌کنیم:

$\Delta x_2=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow \Delta x_2=\frac{1}{2}\times(-\frac{5}{2})\times 4+(20\times 2)\Rightarrow \Delta x_2=35m$

سرعت متوسط برابر جابه‌جایی در یکای زمان است:

$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{80+35}{10}=11/5m/s$

روش رسم نمودار سرعت - زمان:



متحرک از حال سکون $v_0=0$ شروع به حرکت کرده و در مدت ۸s سرعتش به $20m/s$ رسید. سپس در مدت ۶s یعنی بازهٔ زمانی بین (۸s تا ۱۴s) سرعت به $5m/s$ رسیده است بنابراین نمودار $v-t$ به‌صورت روبه‌روست.

سرعت در لحظهٔ $t=10s$ را به کمک شیب خط AB حساب می‌کنیم.

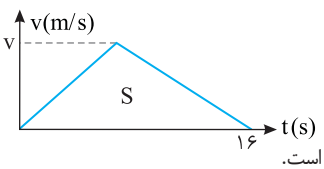
$\frac{5-20}{14-8}=\frac{v-20}{10-8}\Rightarrow \frac{-15}{6}=\frac{v-20}{2}\Rightarrow v=15m/s$

به کمک سطح زیر نمودار از جابه‌جایی در ۱۰s را حساب می‌کنیم.

$\Delta x=S_1+S_2\Rightarrow \Delta x=\frac{20\times 8}{2}+\frac{20+15}{2}\times 2\Rightarrow \Delta x=80+35\Rightarrow \Delta x=115m$

سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{115}{10}\Rightarrow v_{av}=11/5m/s$

B ۳ ۴۳۹



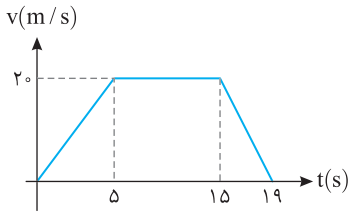
متحرک از حال سکون $(v_0=0)$ شروع به حرکت کرده و سرعتش به v رسیده سپس مجدداً سرعت آن به صفر رسیده است. از این‌رو نمودار سرعت- زمان خودرو مطابق شکل روبرو است.

سطح زیر نمودار سرعت- زمان برابر با جابه‌جایی جسم است.

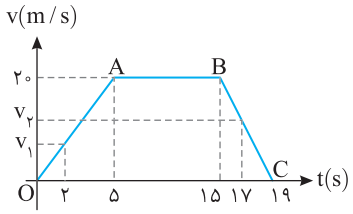
$\Delta x=S\Rightarrow \Delta x=160m\Rightarrow 160=\frac{v\times 16}{2}\Rightarrow v=20m/s$

B ۴۴۰ ۳

۱ نمودار $v-t$ متحرک را رسم کنیم. در مدت ۰ تا $5s$ سرعت از صفر به $20m/s$ رسیده و در مدت $5s$ تا $15s$ سرعت ثابت و در مدت $15s$ تا $19s$ سرعت از $20m/s$ به صفر رسیده است.



۲ حال به کمک شیب خط OA و BC، سرعت در $t_1=2s$ و $t_2=17s$ را به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{20-0}{5-0}=\frac{v_1-0}{2-0}\Rightarrow v_1=8m/s\,,\ \frac{0-20}{19-15}=\frac{0-v_2}{19-17}\Rightarrow v_2=8m/s$$

۳ در نهایت شتاب متوسط را به دست می‌آوریم:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{10-8}{17-2}=\frac{2}{15}m/s^2$$

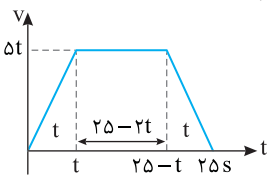
C ۴۴۱ ۳

خط فکری بهتر بود طراح می‌گفت متحرک از حال سکون $(v_0=0)$ شروع به حرکت کرده است. اما حل مسئله اگر مدت زمان حرکت تندشونده با شتاب $5m/s^2$ را t بنامیم، سرعت متحرک در لحظهٔ t برابر $v=at+v_0=5t$ خواهد شد. از طرفی وقتی متحرک با شتاب $-5m/s^2$ حرکت را کند کرده تا می‌ایستد زمان آن نیز t خواهد بود. کل مدت حرکت $25s$ است، بنابراین زمان حرکت یکنواخت $25-2t$ می‌شود. اکنون با این داشته‌ها می‌توانید نمودار سرعت - زمان را به شکل روبه‌رو رسم و به کمک سطح زیر نمودار مسئله را حل کنید.

۱ با توجه به فرض مسئله سرعت متوسط در مدت ۲۵، $20m/s$ است بنابراین جابه‌جایی متحرک خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow \Delta x=20\times 25\Rightarrow \Delta x=500m$$

۲ سطح زیر نمودار سرعت - زمان یک ذوزنقه است که مقدار مساحت آن باید ۵۰۰ باشد.



یادآوری ریاضی مساحت ذوزنقه برابر مجموع دو قاعده ضربدر نصف ارتفاع

$$S=\frac{(25-2t)+25}{2}\times 5t=500\Rightarrow \frac{50-2t}{2}\times t=100\Rightarrow (25-t)t=100$$

$$t^2-25t+100=0\Rightarrow (t-5)(t-20)=0\Rightarrow t=5s\,,t=20s$$

کل مدت حرکت $25s$ است، بنابراین $t=20s$ نمی‌تواند جواب مسئله باشد. زیرا مدت زمان حرکت یکنواخت خواهد شد: $25-2t=25-2\times 20=-15s$

که غیرقابل قبول است بنابراین $t=5s$ جواب بوده و مدت زمان حرکت یکنواخت برابر است با: $25-2\times 5=15s$

بازی با سوال متحرکی در یک مسیر مستقیم از حال سکون حرکت می‌کند و پس از ۱۵ ثانیه می‌ایستد. اگر متحرک t_1 ثانیه اول مسیر را با شتاب $2m/s^2$ و مابقی زمان را با شتاب $-1m/s^2$ طی کند تا متوقف شود، سرعت متوسط متحرک در کل مسیر چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۶

پاسخ متحرک از حال سکون $v_1=0$ حرکت کرده و پس از t_1 ثانیه به سرعت $v_2=v$ می‌رسد: $v_2=at+v_1\Rightarrow v=2t_1$ (۱)

سپس متحرک پس از t_2 ثانیه با شتاب $a=-1m/s^2$ از سرعت $v_2=v$ به سرعت $v_3=0$ می‌رسد: $v_3=at+v_2\Rightarrow -v=-t_2\Rightarrow v=t_2$ (۲)

با توجه به معادله‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} v=2t_1 \\ v=t_2 \end{cases}\Rightarrow t_2=2t_1$$

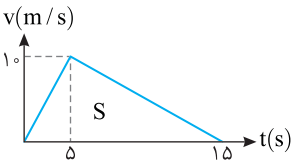
زمان کل حرکت $t_1+t_2=3t_1=15s$ است، بنابراین $t_1=5s$ ، $t_2=10s$ و $v=2t_1=10m/s$ است. جابه‌جایی در هر بازه را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} \Delta x_1=\frac{v_1+v_2}{2}t_1\Rightarrow \Delta x_1=\frac{0+10}{2}\times 5=25m \\ \Delta x_2=\frac{v_2+v_3}{2}t_2\Rightarrow \Delta x_2=\frac{10+0}{2}\times 10=50m \end{cases}\Rightarrow \Delta x_{کل}=\Delta x_1+\Delta x_2=75m$$

سرعت متوسط برابر است با: $v_{av}=\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t}=\frac{75}{15}=5m/s$

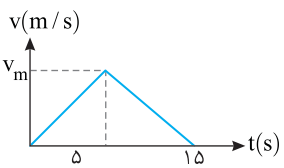
روش حل به کمک نمودار سرعت - زمان

با توجه به اینکه $t_1=5s$ و $t_2=10s$ و سرعت در لحظهٔ t_1 برابر $10m/s$ است نمودار سرعت - زمان را رسم کرده و مسئله را حل می‌کنیم.



$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{S}{\Delta t}=\frac{\frac{10\times 15}{2}}{15}=5m/s$$

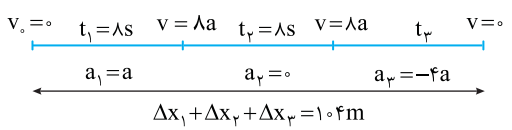
میانبر هرگاه نمودار به‌صورت مثلث شکل روبه‌رو باشد، سرعت متوسط، نصف سرعت بیشینه است: $v_{av}=\frac{1}{2}v_m$



گزینهٔ ۲

B ۴۴۲ ۱

با توجه به نمودار رسم شده در قسمت اول حرکت: $v=at_1\Rightarrow v=8a$



در قسمت سوم (آخر) حرکت: $v=a_3t_3+v_0\Rightarrow 0=-4at_3+8a\Rightarrow t_3=2s$

اکنون مسأله به راحتی قابل حل است.

$$\Delta x_1=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow \Delta x_1=\frac{1}{2}a\times 64=32a$$

$$\Delta x_2=vt_2\Rightarrow \Delta x_2=(8a)\times 8=64a$$

$$\Delta x_3=\frac{1}{2}(-4a)(2)^2+(8a)\times 2=8a$$

جمع جابه‌جایی‌ها برابر ۱۰۴ متر است.

$$\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3=104\Rightarrow 32a+64a+8a=104\Rightarrow a=1m/s^2$$

روش رسم نمودار:

نکته هرگاه متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت a_1 شروع به حرکت کند و در مدت t_1 سرعتش به v برسد، سپس با شتاب ثابت a_2 سرعتش از v به صفر برسد آن‌گاه:

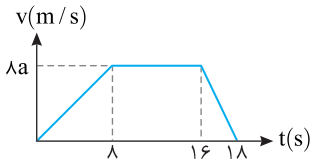
$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{t_1}{t_2}=\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}$$

در صورت مسئله بیان شده که در مدت $8s$ با شتاب a سرعت به $v=8a$ رسیده و سپس با شتاب $-4a$ متوقف شده است. بنابراین زمان توقف آن خواهد شد:

$$t_2=\frac{8}{4}=2s$$

نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم. سطح زیر نمودار برابر جابه‌جایی است. از این‌رو خواهیم داشت:

$$S=\Delta x\Rightarrow\frac{18+8}{2}\times 8a=104\Rightarrow a=1m/s^2$$



۲ ۴۴۳ B

با توجه به فرض‌های پرسش، شکل زیر را رسم کرده و سپس به کمک معادلهٔ مستقل از زمان پرسش را حل می‌کنیم.



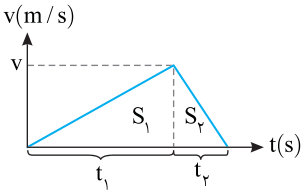
$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow\begin{cases}\text{برای قسمت اول حرکت}: v^2-0=2a_1\Delta x_1\\ \text{برای قسمت دوم حرکت}: 0-v^2=2(-a_2)\Delta x_2\end{cases}$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$1=\frac{2a_1(4\Delta x_2)}{2a_2(\Delta x_2)}\Rightarrow a_2=4a_1$$

روش رسم نمودار

با توجه به فرض مسئله:



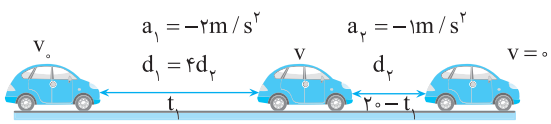
$$\frac{S_1}{S_2}=4\Rightarrow\frac{\frac{vt_1}{2}}{\frac{vt_2}{2}}=4\Rightarrow t_1=4t_2$$

به کمک معادلهٔ سرعت - زمان خواهیم داشت:

$$v=at+v_0\Rightarrow\begin{cases}v=a_1t_1+0\\ 0=a_2t_2+v\end{cases}\Rightarrow\left|\frac{a_2}{a_1}\right|=\left|\frac{t_1}{t_2}\right|=4$$

۱ ۴۴۴ B

خودرو با دو شتاب متفاوت ترمز قرار گرفته تا متوقف شود. ابتدا سرعت اولیه v_0 است، در t_1 ثانیه اول با شیب خط $a_1=-2m/s^2$ سرعت کم و در ادامه با شیب خط $a_2=-1m/s^2$ سرعت کم شده تا متوقف شود:



به کمک معادلهٔ مستقل از زمان $v_2^2-v_1^2=2a\Delta x$ یک رابطه بین v_0 و سرعت ابتدایی مرحلهٔ دوم یعنی v_1 به‌دست می‌آوریم.

مسافت طی شده با شتاب $-2m/s^2$، ۴ برابر مسافت طی شده با شتاب $-1m/s^2$ است. $(d_1=4d_2)$

$$v_1^2-v_0^2=2(a_1)(4d_2)\Rightarrow v_1^2-v_0^2=-16d_2$$

$$v_2^2-v_1^2=2(a_2)(d_2)\Rightarrow -v_1^2=-2d_2$$

دو معادله را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{v_1^2-v_0^2}{-v_1^2}=8\Rightarrow v_1^2-v_0^2=-8v_1^2\Rightarrow 9v_1^2=v_0^2\Rightarrow v_1=\frac{v_0}{3}$$

اکنون شتاب در دو مرحله را می‌نویسیم:

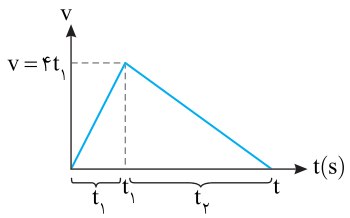
$$\begin{cases}|a_1|=\frac{|v_1-v_0|}{t_1}\\ |a_2|=\frac{|0-v_1|}{20-t_1}\end{cases}\xrightarrow{|a_1|=2|a_2|}\frac{\frac{2}{3}v_0}{t_1}=2\times\frac{\frac{v_0}{3}}{20-t_1}\Rightarrow 20-t_1=t_1\Rightarrow t_1=10s$$

در نتیجه در بازهٔ $10s$ تا $20s$ شتاب حرکت $-1m/s^2$ است. در $5s$ آخر سرعت با شتاب $-1m/s^2$ به صفر می‌رسد. می‌توان فرض کرد متحرک از حال سکون با شتاب $+1m/s^2$ به راه می‌افتد و جابه‌جایی آن در مدت $5s$ خواهد شد:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow\Delta x=\frac{1}{2}(1)(5)^2=12/5m$$

۳ ۴۴۵ B

خط فکری شتاب مرحلهٔ اول $4m/s^2$ و شتاب مرحلهٔ دوم $-1m/s^2$ بوده و متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده و سپس متوقف شده است. شتاب حرکت در قسمت اول چهار برابر شتاب مرحلهٔ دوم است. بنابراین شیب نمودار در قسمت اول چهار برابر شیب در قسمت دوم است.



$$|a_1|=4|a_2|\Rightarrow\left|\frac{v}{t_1}\right|=4\left|\frac{v}{t_2}\right|\Rightarrow t_2=4t_1$$

سرعت v بر حسب t_1 خواهد شد:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=4t_1$$

و کل مدت حرکت برابر است با:

$$t=t_1+t_2\Rightarrow t=t_1+4t_1=5t_1$$

سطح زیر نمودار بردار جابه‌جایی $(1km=1000m)$ است، بنابراین:

$$S=\Delta x\Rightarrow\frac{4t_1\times t}{2}=1000\Rightarrow\frac{4t_1\times 5t_1}{2}=1000$$

$$t_1^2=100\Rightarrow t_1=10s\Rightarrow t=50s=\frac{5}{6}min$$

۴ ۴۴۶ A

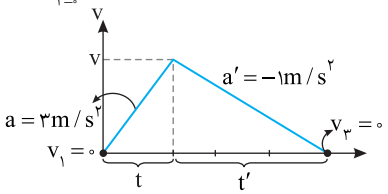
خط فکری در سؤالات مشابه این تست که حرکت متحرک چندمرحله‌ای است یعنی ابتدا با شتاب تندشونده $3m/s^2$ در حال حرکت بوده و سپس با شتاب $1m/s^2$ حرکت کندشونده دارد بهتر است، سؤال را با استفاده نمودار $v-t$ حل کنیم.

۱ با توجه به نمودار سرعت در لحظهٔ t در هردو قسمت شیب‌دار مشترک است، بنابراین از آن‌جا که شتاب در قسمت کندشونده $\frac{1}{3}$ شتاب در قسمت تندشونده است

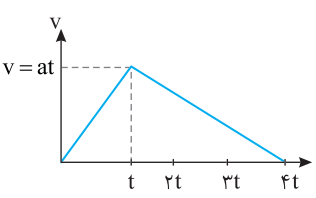
بنابراین زمان و مسافت توقف درقسمت کندشونده ۳ برابر زمان و مسافت طی شده در قسمت تندشونده است.

$$v_2=at+v_1\xrightarrow[v_1=0]{v_2=v}v=3t\Rightarrow t'=3t$$

$$v_3=a't'+v_2\xrightarrow[v_3=0]{v_2=v}v=t'$$



۲ مسافت طی‌شده خواهد شد:

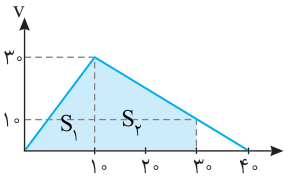


$$S=\frac{v\times 4t}{2}=\frac{at\times 4t}{2}$$

$$\xrightarrow{a=3m/s^2}\frac{3t\times 4t}{2}=600\Rightarrow t=10s$$

$$v=at=3\times 10=30m/s$$

۳ اکنون سطح زیر نمودار را از صفر تا ۳۰s حساب می‌کنیم. ابتدا سرعت را در لحظهٔ $t=30s$ حساب می‌کنیم:



$$v=at+v_0 \Rightarrow v=-1\times 20+30 \Rightarrow v=10m/s$$

$$\ell=S_1+S_2=\frac{30\times 10}{2}+\frac{30+10}{2}\times 20 \Rightarrow \ell=150+400=550m$$

میانبر سرعت در لحظهٔ $t=30s$ را می‌توان با توجه به شیب نمودار از قسمت انتهایی محاسبه کرد:

$$v=at_0+v_0 \Rightarrow v=1\times 10+0=10m/s$$

سپس مساحت زیر نمودار بین ثانیه‌های $t=30s$ تا $t=40s$ را حساب می‌کنیم:

$$S'=\frac{10\times 10}{2}=50m$$

با کاستن این مسافت از کل مسافت طی‌شده می‌توان مسافت طی‌شده تا ثانیهٔ ۳۰ را به‌دست آورد:

$$\ell=600-50=550m$$

B **۴۴۷** **۲**

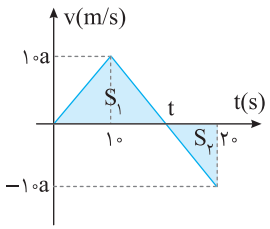
سرعت در لحظهٔ $t=10s$ را بر حسب شتاب a به‌دست می‌آوریم

$$v=at+v_0 \Rightarrow v_1=10a$$

سرعت v_1، سرعت اولیهٔ قسمت بعدی است. سرعت در لحظهٔ $t=20s$ را حساب می‌کنیم.

$$v_2=a_2t+v_1 \Rightarrow v_2=-2a_2\times 10+10a_2 \Rightarrow v_2=-10a_2$$

نمودار سرعت - زمان متحرک را در بازهٔ صفر تا ۲۰s رسم می‌کنیم.



لحظهٔ t که در آن سرعت صفر شده است را به‌دست می‌آوریم:

$$-2at+30a=0 \Rightarrow 2t=30 \Rightarrow t=15s$$

مسافت طی شده در مدت ۲۰s برابر است با:

$$200=|S_1|+|S_2|$$

$$\Rightarrow 200=\frac{15\times 10a}{2}+\frac{5\times 10a}{2}=75a+25a \Rightarrow 200=100a \Rightarrow a=2m/s^2$$

شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $t_1=5s$ تا $t_2=17s$ را می‌خواهیم. سرعت در این دو لحظه را حساب می‌کنیم:

$$v_{t=5s}=2t \Rightarrow v_{t=5s}=10m/s$$

$$v_{t=17s}=-4\times(17-10)+20 \Rightarrow v_{t=17s}=-8m/s$$

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_{av}=\frac{-8-(10)}{17-5}=\frac{-18}{12}=-1/5m/s^2$$

B **۴۴۸** **۴**

ابتدا جابه‌جایی خودرو را در مدتی که با شتاب $3m/s^2$ و سرعت اولیهٔ $108km/h$ با حرکت کندشونده می‌ایستد، به دست می‌آوریم.

$$v_0=108km/h=108\times\frac{1000m}{3600s}=30m/s$$

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x_2 \Rightarrow 0-900=2(-3)\Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2=150m$$

در بازه‌ای که راننده مانع را می‌بیند تا لحظه‌ای که ترمز می‌کند، جابه‌جایی خودرو برابر است با:

$$\Delta x_1=165-150=15m$$

اکنون زمان‌های t_1 و t_2 را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x_1=v_1\Delta t \Rightarrow 15=30t_1 \Rightarrow t_1=0/5s$$

$$\Delta x_2=\frac{1}{2}at^2+v_0t \Rightarrow 150=\frac{1}{2}(-3)(t_2^2)+30t_2$$

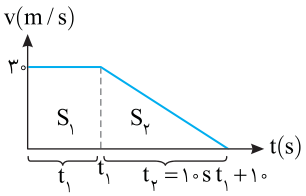
$$\Rightarrow 50=-\frac{1}{2}t_2^2+10t_2 \Rightarrow t_2^2-20t_2+100=0 \Rightarrow (t_2-10)^2=0 \Rightarrow t_2=10s$$

البته برای محاسبهٔ t_2 می‌توانستیم حرکت اتومبیل را از حال سکون و تندشونده با شتاب $+3m/s^2$ در نظر بگیریم:

$$\Delta x_2=\frac{1}{2}at_2^2 \Rightarrow 150=\frac{1}{2}\times 3t_2^2 \Rightarrow t_2=10s$$

در این صورت $\frac{t_2}{t_1}=\frac{10}{0/5}=20$.

روش رسم نمودار:



سرعت متحرک در مدت t_2 از ۳۰m/s با شتاب $3m/s^2$ به صفر می‌رسد بنابراین:

$$v=at+v_0 \Rightarrow 0=-3\times t_2+30 \Rightarrow t_2=10s$$

با توجه به فرض مسئله اتومبیل دقیقاً جلو مانع می‌ایستد یعنی ۱۶۵m جابه‌جا شده است. بنابراین سطح زیر نمودار $v-t$ باید ۱۶۵ متر باشد.

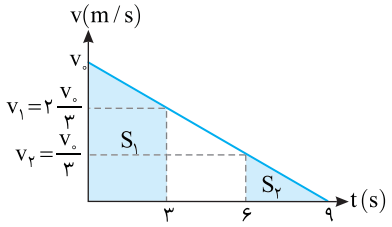
$$S_1+S_2=165 \Rightarrow 30t_1+\frac{30\times 10}{2}=165 \Rightarrow 30t_1=15 \Rightarrow t_1=0/5s$$

بنابراین نسبت t_2/t_1 خواهد شد:

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{10}{0/5}=20$$

B **۴۴۹** **۳**

نمودار سرعت - زمان را به شکل روبه‌رو رسم می‌کنیم.



به کمک شیب نمودار سرعت - زمان، سرعت در لحظهٔ $t=3s$ و $t=6s$ را حساب می‌کنیم. سرعت در $t=3s$:

$$\frac{0-v_0}{9-0}=\frac{v_1-v_0}{3-0} \Rightarrow \frac{-v_0}{3}=v_1-v_0 \Rightarrow v_1=\frac{2v_0}{3}$$

سرعت در $t=6s$:

$$\frac{0-v_0}{9-0}=\frac{v_2-v_0}{6-0} \Rightarrow \frac{-v_0}{3}=\frac{v_2-v_0}{2} \Rightarrow \frac{-2v_0}{3}=v_2-v_0 \Rightarrow v_2=\frac{v_0}{3}$$

سطح زیر نمودار S_1 و S_2 را به دست آورده بر هم تقسیم می‌کنیم.

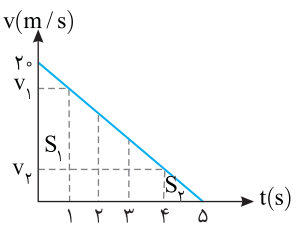
$$\begin{cases} 0\to 3s: \Delta x_1=S_1=\frac{v_0+\frac{2v_0}{3}}{2}\times 3=\frac{5v_0}{2} \\ 6s\to 9s: \Delta x_2=S_2=\frac{\frac{v_0}{3}\times 3}{2}=\frac{v_0}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}=\frac{\frac{5v_0}{2}}{\frac{v_0}{2}}=5$$

A **۴۵۰** **۴**

زمان کل حرکت را به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}t \xrightarrow{\Delta x=50m,\ v=0,\ v_0=20m/s} 50=\frac{+20}{2}t \Rightarrow t=5s$$

سرعت در ثانیهٔ اول و ثانیهٔ $t=4s$ را به کمک شیب نمودار حساب کرده سپس سطح S_1 و S_2 را به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{0-20}{5-0}=\frac{20-v_1}{0-1} \Rightarrow v_1=16m/s$$

$$\frac{0-20}{5-0}=\frac{20-v_2}{0-4} \Rightarrow v_2=4m/s$$

سطح S_1:

$$S_1=\frac{20+16}{2}\times 1=18m$$

سطح S_2:

$$S_2=\frac{4\times 1}{2}=2m$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{18}{2}=9$$

B ۴۵۱ ۱

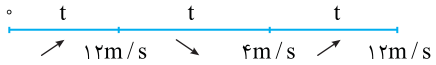
می‌توان با رابطهٔ $v=\frac{v+v_0}{2}$ تست را حل کرد. ابتدا سرعت را در ابتدا و انتهای هر بازه مشخص می‌کنیم.

سرعت در انتهای بازهٔ اول $v_{av}=\frac{v_1+v_0}{2}\Rightarrow 6=\frac{v_1+0}{2}\Rightarrow v_1=12m/s$

سرعت در انتهای بازهٔ دوم $v_{av}=\frac{v_2+v_1}{2}\Rightarrow 8=\frac{v_2+12}{2}\Rightarrow v_2=4m/s$

سرعت در انتهای بازهٔ سوم $v_{av}=\frac{v_3+v_2}{2}\Rightarrow 8=\frac{v_3+4}{2}\Rightarrow v_3=12m/s$

دقت کنید، سرعت انتهای هر قسمت، سرعت اولیهٔ قسمت بعدی است. ابتدا سرعت از صفر به $12m/s$ رسیده است. پس حرکت تندشونده است. سپس از $12m/s$ به $4m/s$ می‌رسد. یعنی حرکت کندشونده است و سرانجام از $4m/s$ به $12m/s$ می‌رسد. یعنی سرانجام حرکت تندشونده است.



B ۴۵۲ ۱

خط فکری مبدأ و مقصد دو متحرک (۱) و (۲) یکسان است و هر دو هم‌زمان از حال سکون شروع به حرکت کرده‌اند، شتاب متحرک (۱) برابر $a_1=2m/s^2$ و شتاب متحرک (۲) را $a_2=8m/s^2$ بوده بنابراین متحرک (۲) زودتر به مقصد می‌رسد. اگر زمان رسیدن متحرک (۱) به مقصد را t_1 فرض کنیم، زمان رسیدن متحرک (۲) به مقصد برابر $t_2=t_1-3$ خواهد بود. از این رو شما باید معادلهٔ جابه‌جایی - زمان هر دو متحرک را نوشته و با هم مساوی قرار دهید تا زمان رسیدن هر متحرک به مقصد را به‌دست بیاورید و سرانجام طول مسیر AB را حساب کنید.

۱ جابه‌جایی دو متحرک با هم برابر است.

$$\Delta x_1=\Delta x_2\Rightarrow\frac{1}{2}a_1t_1^2=\frac{1}{2}a_2t_2^2\xrightarrow{t_1=t_2+3}\frac{1}{2}\times 2(t_2+3)^2=\frac{1}{2}\times 8t_2^2$$
$$\Rightarrow|t_2+3|=|2t_2|\Rightarrow t_2=3s$$

۲ اکنون مقدار جابه‌جایی را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}\times 8\times(3)^2\Rightarrow x=36m$$

A ۴۵۳ ۳

جابه‌جایی دو متحرک برابر است و متحرکی که دارای شتاب بیشتری است، زمان حرکتش کوتاه‌تر است.

$$\Delta x_1=\Delta x_2\Rightarrow\frac{1}{2}a_1t_1^2=\frac{1}{2}a_2t_2^2\Rightarrow a_1t_1^2=\frac{16}{25}a_1(t_1+5)^2$$
$$t_1=\frac{4}{5}(t_1+5)\Rightarrow 5t_1=4t_1+20\Rightarrow t_1=20s$$

بازی با سوال **دو متحرک روی محور x از حال سکون با شتاب‌های a و $\frac{9}{16}a$ همزمان از یک نقطه به سوی مقصدی معین به حرکت درمی‌آیند و با فاصلهٔ زمانی ۲ ثانیه به مقصد می‌رسند. زمان حرکت جسمی که زودتر به مقصد می‌رسد، چند ثانیه است؟** تجربی - ۹۹

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ یک تست ساده روبه‌روی شماست. دو متحرک از یک نقطه شروع به حرکت کرده‌اند و به سوی یک مقصد می‌روند، پس شما باید جابه‌جایی آن‌ها را برابر قرار دهید. البته متحرکی که شتابش بیشتر است، سریع‌تر (زودتر) به مقصد می‌رسد. یعنی اگر شما زمان حرکت متحرک تندرو را t_1 بگیرید زمان حرکت متحرک کندرو $t_2=t_1+2$ می‌شود و شما می‌توانید مسئله را حل کنید.

۱ جابه‌جایی‌ها یکسان است. $\Delta x_1=\Delta x_2$

۲ معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت را برای دو متحرک می‌نویسیم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow\frac{1}{2}at_1^2=\frac{1}{2}(\frac{9}{16}a)(t_1+2)^2\Rightarrow t_1=\frac{3}{4}(t_1+2)$$
$$\Rightarrow t_1=\frac{3}{4}t_1+\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}t_1=\frac{3}{2}\Rightarrow t_1=6s$$

گزینهٔ ۲

A ۴۵۴ ۲

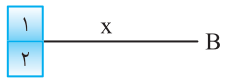
خط فکری سرعت دو متحرک در لحظهٔ t داده شده است. اگر شما معادلهٔ سرعت زمان را برای هریک از دو متحرک بنویسید و مقدار سرعت در لحظهٔ t را در معادله قرار دهید، در این صورت دو معادله دو مجهول به‌دست می‌آورید که با حل آن می‌توانید t را حساب کنید. البته بهتر بود که طراح در صورت مسئله بیان می‌کرد که متحرک از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. یعنی سرعت اولیه صفر است. $(v_0=0)$

با توجه به معادلهٔ سرعت - زمان برای حرکت با شتاب ثابت می‌توان نوشت:

$$v=at+v_0\Rightarrow\begin{cases}10=at+v_0\\22=(a+1/5)t+v_0\end{cases}\xrightarrow{v_0=0}\begin{cases}10=at\\22=at+1/5t\end{cases}$$
$$\Rightarrow 22=10+1/5t\Rightarrow t=\frac{12}{1/5}=8s$$

B ۴۵۵ ۲

۱ سرعت متحرک در هر لحظه را با استفاده از معادلهٔ سرعت - زمان به‌دست می‌آوریم:



$$v_1=a_1t_1+v_0\xrightarrow{\text{از حال سکون}}v_1=a_1t_1$$
$$v_2=a_2t_2+v_0\xrightarrow{\text{از حال سکون}}v_2=a_2t_2$$

۲ در یک لحظه سرعت متحرک اول دو برابر سرعت متحرک دوم است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{a_1t_1}{a_2t_2}=2\xrightarrow[t_1=t_2]{\text{در یک لحظه}}\frac{v_1}{v_2}=\frac{a_1}{a_2}=2\Rightarrow a_1=2a_2$$

۳ هر دو متحرک تا انتهای مسیر جابه‌جایی یکسانی را انجام می‌دهند. معادلهٔ مستقل از زمان را برای دو متحرک می‌نویسیم.

$$\begin{cases}v_{f_1}^2-v_0^2=2a_1x\\v_{f_2}^2-v_0^2=2a_2x\end{cases}\xrightarrow[x=AB]{v_0=0}\begin{cases}v_{f_1}^2=2a_1x\Rightarrow v_{f_1}^2=4a_2x & (1)\\v_{f_2}^2=2a_2x & (2)\end{cases}$$
$$\Rightarrow\frac{(1)}{(2)}\Rightarrow(\frac{v_{f_1}}{v_{f_2}})^2=2\Rightarrow\frac{v_{f_1}}{v_{f_2}}=\sqrt{2}\Rightarrow v_{f_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}v_{f_1}\Rightarrow v_{f_2}=10\sqrt{2}m/s$$

B ۴۵۶ ۲

خط فکری دو متحرک A و B بدون سرعت اولیه $(v_0=0)$ شروع به حرکت کرده‌اند. شتاب متحرک A، چهار برابر شتاب متحرک B است $(a_A=4a_B)$. معادلهٔ مکان - زمان را برای دو متحرک A و B بنویسید و جابه‌جایی‌های آن‌ها را برابر قرار دهید تا بتوانید رابطه‌ای بین زمان حرکت دو متحرک به‌دست بیاورید و از آنجا سرعت متوسط را حساب کنید.

۱ جابه‌جایی دو متحرک را برابر قرار می‌دهیم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow{\Delta x_A=\Delta x_B}\frac{1}{2}a_At_A^2=\frac{1}{2}a_Bt_B^2$$
$$\xrightarrow[\text{فرض مسأله}]{a_A=4a_B}4t_A^2=t_B^2\Rightarrow t_B=2t_A$$

۲ اکنون نسبت سرعت متوسط A به سرعت متوسط B را به دست می‌آوریم.

$$\frac{v_{av_A}}{v_{av_B}}=\frac{\frac{\Delta x_A}{t_A}}{\frac{\Delta x_B}{t_B}}=\frac{t_B}{t_A}=2$$

A ۴۵۷ ۲

خط فکری معادلهٔ حرکت دو متحرک را در اختیار دارید، بنابراین کافی است که با مقایسهٔ معادله‌های حرکت با معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت، شتاب و سرعت اولیهٔ هر متحرک را به‌دست آورده و معادلهٔ سرعت - زمان هر متحرک را بنویسید و تفاضل سرعت‌ها را مطابق فرض مسئله برابر $8m/s$ قرار دهید.

با مقایسه معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت با معادلهٔ حرکت دو متحرک داده شده، معادله سرعت زمان را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\\x_1=2t^2-3t+17\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}a_1=2\Rightarrow a_1=4m/s^2,\ v_0=-3m/s$$:(۱) متحرک

معادلهٔ سرعت - زمان متحرک (۱):

$$v_1=4t-3$$

متحرک (۲):

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \\ x_2=t^2-\alpha t \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}a_2=1\Rightarrow a_2=2m/s^2\ ,\ v_0=-\alpha$$

معادلهٔ سرعت - زمان متحرک (۲):

$$v_2=2t-\alpha$$

با توجه به فرض مسأله:

$$v_1-v_2=8\Rightarrow 4t-3-(2t-\alpha)=8\Rightarrow 2t-3+\alpha=8$$

$$\xrightarrow{t=3s} 3+\alpha=8\Rightarrow\alpha=5$$

A ۴۵۸ ۲

خط فکری هرگاه از شما مدت زمان رسیدن دو متحرک به هم خواسته شود، کافی است معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک را نوشته و مکان‌ها را برابر قرار دهید.

خودرو دارای شتاب ثابت بوده و معادلهٔ مکان - زمان آن خواهد شد:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow x_{\text{خودرو}}=t^2$$

کامیون دارای سرعت ثابت بوده و معادلهٔ حرکت آن خواهد شد:

ابتدا سرعت را برحسب m/s به‌دست می‌آوریم:

$$36\frac{km}{h}\times\frac{10}{36}=10\frac{m}{s}\Rightarrow x=vt\Rightarrow x_{\text{کامیون}}=10t$$

هنگامی که دو متحرک به هم می‌رسند $x_{\text{کامیون}}=x_{\text{خودرو}}$ می‌شود پس:

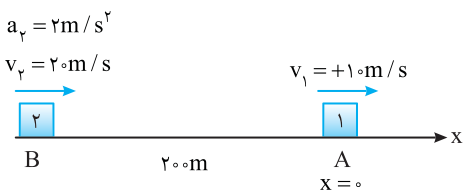
$$t^2=10t\Rightarrow t^2-10t=0\Rightarrow t(t-10)=0\Rightarrow t=10s$$

جابه‌جایی کامیون و خودرو در $t=10s$ برابر است با:

$$\Delta x_{\text{خودرو}}=\Delta x_{\text{کامیون}}=100m$$

B ۴۵۹ ۲

خط فکری در صورت مسئله بیان نشده که متحرک (۱) با سرعت ثابت $10m/s$ به دنبال متحرک (۲) در حرکت است یا برعکس؟ اگر متحرک (۱) از نقطهٔ A به دنبال متحرک (۲) حرکت کند هرگز به متحرک (۲) نمی‌رسد زیرا سرعت متحرک (۱) $10m/s$ و سرعت اولیهٔ متحرک (۲) $20m/s$ و حرکت آن شتابدار است. بنابراین شما باید معادلهٔ حرکت هر دو متحرک را در حالتی که متحرک (۲) به دنبال متحرک (۱) است بنویسید و مکان‌ها را برابر قرار دهید.



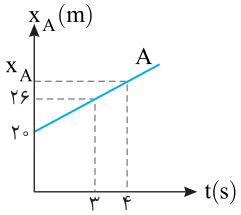
$$\begin{cases} x_1=vt+x_0\Rightarrow x_1=+10t+200 \\ x_2=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x_2=\frac{1}{2}\times 2t^2+20t \end{cases} \Rightarrow +10t+200=t^2+20t$$

$$\Rightarrow t^2+10t-200=0\Rightarrow (t-10)(t+20)=0\Rightarrow t=10s$$

B ۴۶۰ ۴

ابتدا مشخص می‌کنیم که متحرک A در لحظهٔ $t=4s$ در چه مکانی است.

$$\frac{26-20}{3}=\frac{x_A-20}{4}\Rightarrow x_A=28m$$



در مدت $4s$ متحرک B با سرعت اولیهٔ $12m/s$ از مبدأ مکان به مکان $28m$ می‌رسد، بنابراین:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow 28=\frac{1}{2}a(4)^2+12\times 4+0$$

$$28=8a+48\Rightarrow 8a=-20\Rightarrow a=-2/5m/s^2$$

بردار شتاب:

$$\vec{a}=-2/5\vec{i}$$

B ۴۶۱ ۳

۱ جهت حرکت را مثبت و محل شروع حرکت را مبدأ مکان $(x_0=0)$ می‌گیریم، سرعت توپ با آهنگ $1m/s$ کم می‌شود، یعنی شتاب حرکت $-1m/s^2$ است و سرعت اولیهٔ توپ $15m/s$ است. معادلهٔ حرکت توپ را می‌نویسیم:

$$a=-1m/s^2\ ,\ x_{\text{توپ}}=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow x_{\text{توپ}}=-\frac{1}{2}t^2+15t$$

۲ موتور نیز از همان مکان با شتاب $a=2m/s^2$ از حال سکون شروع به حرکت $(v_0=0)$ می‌کند، بنابراین معادلهٔ حرکت موتور خواهد شد:

$$x_{\text{موتور}}=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow x_{\text{موتور}}=t^2$$

۳ هنگامی که توپ و موتور به هم می‌رسند مکان آن‌ها یکسان است، از این رو معادله‌های حرکت را برابر قرار می‌دهیم:

$$x_{\text{موتور}}=x_{\text{توپ}}\Rightarrow t^2=-\frac{1}{2}t^2+15t\Rightarrow\frac{3}{2}t^2-15t=0\Rightarrow t^2-10t=0$$

$$\Rightarrow t(t-10)=0\Rightarrow\begin{cases} t=0 \\ t=10s \end{cases}$$

بنابراین پس از $10s$ موتورسوار و توپ به هم می‌رسند. در این مدت موتورسوار $x_{\text{موتور}}=t^2=10^2=100m$ جابه‌جا شده است.

A ۴۶۲ ۱

خط فکری مسئلهٔ جالبی است، ابتدا به این فکر می‌افتیم که معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک را نوشته با هم برابر قرار می‌دهیم و مسئله حل می‌شود، اما شتاب حرکت متحرک A را نداریم، بنابراین برای متحرک A از معادلهٔ مستقل از شتاب استفاده می‌کنیم و سرعت متحرک A هنگام رسیدن به متحرک B را حساب می‌کنیم.

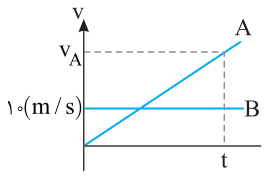
با توجه به صورت پرسش می‌توان نوشت:

$$x_A=\frac{v+v_0}{2}t\Rightarrow x_A=\frac{v_A}{2}t\ ,\ x_B=v_Bt\Rightarrow x_B=10t$$

$$\xrightarrow{x_A=x_B}\frac{v_A}{2}t=10t\Rightarrow v_A=20m/s$$

روش دیگر: استفاده از نمودار سرعت - زمان

نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B را رسم می‌کنیم. اگر در لحظهٔ t دو متحرک از کنار هم بگذرند، باید سطح زیر نمودار A و B تا لحظهٔ t با هم برابر باشند. از این رو:



$$S_A=S_B\Rightarrow\frac{v_At}{2}=10t\Rightarrow v_A=20m/s$$

B ۴۶۳ ۴

خط فکری متحرک A از نقطهٔ O شروع به حرکت کرده و $5s$ بعد متحرک B در همان جهت از نقطهٔ O می‌گذرد. وقتی دو متحرک به هم می‌رسند، متحرک A، $5s$ بیشتر در حرکت بوده است $(t_A>t_B)$ بنابراین زمان حرکت B، $5s$ از زمان حرکت A کمتر است $(t_B=t_A-5)$. معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته و با هم برابر قرار می‌دهیم.

معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته و با هم برابر قرار می‌دهیم. (نقطهٔ O را مبدأ در نظر می‌گیریم.)

معادلهٔ حرکت A:

$$x_A=\frac{1}{2}a_At^2+v_{0A}t\Rightarrow x_A=t_A^2$$

معادلهٔ حرکت B:

$$x_B=vt_B\Rightarrow x_B=30(t_A-5)$$

$$x_A=x_B\Rightarrow t_A^2=30t_A-150\Rightarrow t_A^2-30t_A+150=0$$

$$\Rightarrow t_A=+15\pm\sqrt{225-150}\Rightarrow t_A=15\pm\sqrt{75}=15\pm5\sqrt{3}$$

با توجه به فرض پرسش $\sqrt{3}=1/7$:

$$t_A=15\pm8/5\Rightarrow t_A=6/5s,23/5s$$

۱ ۴۶۴ C

خط فکری هرگاه معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک را نوشته و برابر قرار دهیم می‌توان لحظهٔ گذر دو متحرک از کنار یکدیگر را به‌دست آورد. وقتی یکی از متحرک‌ها دارای حرکت با شتاب ثابت باشد، معادلهٔ به‌دست آمده یک تابع درجه ۲ است. اگر معادله دارای دو جواب $(\Delta>0)$ باشد و هر دو جواب مثبت باشد $(t>0)$، متحرک‌ها دو بار از کنار هم می‌گذرند و اگر معادله دارای یک جواب مثبت $(\Delta=0)$ باشد، دو متحرک یک بار در کنار هم قرار می‌گیرند و اگر $(\Delta<0)$ باشد دو متحرک از کنار هم نمی‌گذرند.

۱ معادلهٔ حرکت کامیون را می‌نویسیم:

$$x_{ک}=\frac{1}{2}at^2+v_0t \xrightarrow{a=2m/s^2,\,v_0=0} x_{ک}=\frac{1}{2}\times 2t^2+0\Rightarrow x_{ک}=t^2$$

۲ اگر مدت حرکت کامیون t باشد مدت حرکت اتومبیل $t-1$ است. بنابراین معادلهٔ حرکت اتومبیل خواهد شد:

$$x_{اتو}=vt_{اتو}\Rightarrow x_{اتو}=v(t-1)$$

۳ معادله‌ها را برابر قرار می‌دهیم.

$$t^2=vt-v\Rightarrow t^2-vt+v=0$$

۴ باید $\Delta=0$ شود تا اتومبیل یک بار در کنار کامیون باشد.

$$v^2-4v=0\Rightarrow v=4m/s$$

۲ ۴۶۵ B

معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم. متحرک B، ۲s دیرتر راه افتاده است. یعنی $t_B=t_A-2$ است. بنابراین:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow\begin{cases}x_A=\frac{1}{2}a(t_A)^2+0+0\\ x_B=\frac{1}{2}(a+0/5)(t_A-2)^2+0+0\end{cases}$$

با توجه به فرض مسئله در $t_A=6s$ مکان‌ها برابراند، از این رو:

$$x_A=x_B\Rightarrow\frac{1}{2}a(6)^2=\frac{1}{2}(a+0/5)(6-2)^2$$

$$\Rightarrow 36a=16a+8\Rightarrow 20a=8\Rightarrow a=0/4\,\frac{m}{s^2}$$

اکنون مکان هر متحرک را در $t=10s$ به دست آورده از هم کم می‌کنیم.

$$\begin{cases}x_A=\frac{1}{2}\times 0/4\times(10)^2\Rightarrow x_A=20m\\ x_B=\frac{1}{2}\times(0/4+0/5)\times(8)^2\Rightarrow x_B=28/8m\end{cases}$$

$$\Rightarrow\Delta x_{AB}=28/8-20=8/8m$$

۲ ۴۶۶ A

زمان حرکت کامیون را وقتی $9/9m$ جابه‌جا شده است به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow{a=2/2m/s^2}9/9=\frac{1}{2}(2/2)t^2\Rightarrow t=3s$$

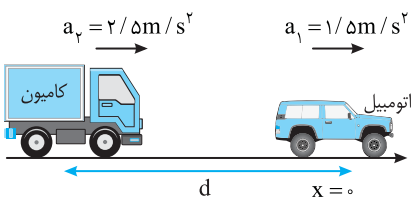
در این لحظه $(t=3s)$ اتومبیل به کامیون می‌رسد و سرعت آن برابر خواهد شد با:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=3/5\times 3\Rightarrow v=10/5m/s$$

۲ ۴۶۷ A

۱ ابتدا مدت زمانی که طول می‌کشد تا اتومبیل مسافت ۷۵ متر را طی کند به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x_1=\frac{1}{2}a_1t^2\Rightarrow 75=\frac{1}{2}\times 1/5t^2\Rightarrow 150=1/5t^2\Rightarrow t=10s$$



۲ در این مدت کامیون باید مسافت $d+75$ متر را طی کرده باشد بنابراین

$$\Delta x_2=\frac{1}{2}a_2t^2\Rightarrow d+75=\frac{1}{2}\times 2/5\times 10^2\Rightarrow d=50m$$

۳ در لحظهٔ $t=15s$ مکان هر دو را حساب می‌کنیم.

اتومبیل $x=\frac{1}{2}a_1t^2\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}\times 1/5\times 225$

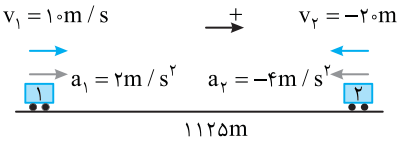
کامیون $x=\frac{1}{2}at^2-d\Rightarrow x_2=\frac{1}{2}\times 2/5\times 225-50$

۴ برای به‌دست آوردن فاصله دو متحرک از هم کافی است x_2-x_1 را حساب کنیم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}(2/5-1/5)\times 225-50\Rightarrow\Delta x=112/5-50\Rightarrow\Delta x=62/5m$$

۱ ۴۶۸ B

با توجه به شکل رسم شده، معادلهٔ حرکت هر متحرک را می‌نویسیم. به دلخواه خود، مکان متحرک (۱) را مبدأ مختصات گرفته و جهت متحرک اول را جهت مثبت اختیار کرده‌ایم. در هر دو حرکت باید بردار سرعت و بردار شتاب هم‌جهت باشند زیرا هر دو حرکت تندشونده هستند.



$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}\times 2t^2+10t\\ x_2=\frac{1}{2}(-4)t^2-20t+1125\end{cases}\xrightarrow{x_1=x_2}$$

$$t^2+10t=-2t^2-20t+1125\Rightarrow 3t^2+30t-1125=0\Rightarrow t^2+10t-375=0$$

$$t=-5\pm\sqrt{25+375}=-5\pm 20\Rightarrow t=15s\quad,\quad t=-25s\ \text{غ ق ق}$$

یادآوری ریاضی در معادلهٔ درجهٔ دو $y=ax^2+bx+c$، هرگاه b عدد زوج باشد $(b=2b')$، می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد که محاسبات عددی ساده‌تر شود زیرا اعداد کوچک‌تر هستند.

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

میانبر استفاده از سرعت نسبی و شتاب نسبی.

چون سرعت‌های اولیه خلاف جهت هم هستند: $v_{نسبی}=v_1+v_2=10+20=30\ m/s$

چون شتاب‌های دو متحرک خلاف جهت هم هستند:

$$a_{نسبی}=a_1+a_2=2+4=6\ m/s^2$$

$$\Delta x=\frac{1}{2}a_{نسبی}t^2+v_{0_{نسبی}}t\Rightarrow 1125=\frac{1}{2}(6)t^2+30t\Rightarrow 3t^2+30t-1125=0$$

$$\Rightarrow t^2+10t-375=0\Rightarrow t=15s$$

۲ ۴۶۹ B

در مدت $1s$، متحرک A با شتاب $-2\frac{m}{s^2}$ به اندازهٔ زیر جابه‌جا می‌شود.

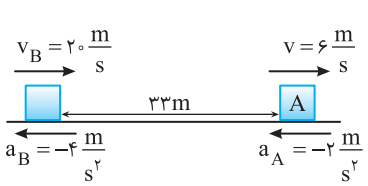
$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t=\frac{1}{2}\times(-2)\times 1+8\Rightarrow\Delta x_A=7m$$

در این لحظه سرعت A برابر است با:

$$v_A=a_At+v_0\Rightarrow v_A=-2\times 1+8=6\,\frac{m}{s}$$

در مدت $1s$، متحرک B با سرعت $20\frac{m}{s}$ مسافت $20\times 1=20m$ را می‌پیماید، بنابراین در لحظه‌ای که متحرک B از سرعت خود می‌کاهد، فاصلهٔ دو متحرک از هم برابر است با:

$$46-20+7=33m$$



در ایـن لحظـه مکان B را مبدأ می‌گیریم. معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشـته با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$x_A = x_B \Rightarrow \frac{1}{2}(-2)t^2+6t+33=\frac{1}{2}(-4)t^2+20t \Rightarrow t^2-14t+33=0$$

$$\Rightarrow t=7\pm\sqrt{49-33} \Rightarrow t=7\pm\sqrt{16} \Rightarrow t=7\pm4 \Rightarrow t=3s$$

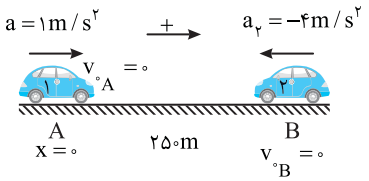
سرعت B در لحظهٔ رسیدن به A خواهد شد: $v_B = at+v_0 \Rightarrow v_B = -4\times3+20=8\frac{m}{s}$

B ۴۷۰ ۴

نقطهٔ A را مبدأ مختصات و جهت راست را جهت مثبت فرض می‌کنیم. سپس داده‌های مسئله را با توجه به علامت آن‌ها روی شکل می‌نویسیم تا حل مسئله راحت‌تر شود.

۱ ابتدا معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow x_A=\frac{t^2}{2} \quad , \quad x_B=-2t^2+250$$



۲ هنگام رسیدن دو متحرک به هم $x_A=x_B$ است. بنابراین:

$$x_A=x_B \Rightarrow \frac{t^2}{2}=-2t^2+250 \Rightarrow \frac{5t^2}{2}=250 \Rightarrow t^2=100s \Rightarrow t=10s$$

۳ دو متحـرک پـس از ۱۰s بـه هم می‌رسـند. حال مـدت زمانی که طول می‌کشـد متحرک (۱) از A به B برسد را به دست می‌آوریم:

$$250=\frac{t'^2}{2} \Rightarrow t'^2=500 \Rightarrow t'=10\sqrt{5}=10\times2/2=22s$$

۴ متحـرک (۱) $t'-t=22-10=12s$ پس از به هم رسـیدن متحرک (۱) و (۲) به مکان B می‌رسد.

C ۴۷۱ ۱

نکته وقتی دو متحرک در یک جهت در حال حرکت هستند تا لحظه‌ای که سرعت متحرک عقبی کمتر از متحرک جلویی اسـت، فاصله دو متحرک در حال افزایش اسـت. وقتی فاصله کاهش می‌یابد که سرعت متحرک عقبی از جلویی بیشتر باشد. البته پس از سبقت فاصله زیاد می‌شود.

تا لحظه‌ای که تندی آن‌ها برابر شود، فاصلهٔ بین دو متحرک در حال افزایش است. لحظهٔ برابر شدن تندی دو متحرک را حساب می‌کنیم.

$$v_1=v_2 \Rightarrow 0/5t_1=2(t_1-3) \Rightarrow 0/5t_1=2t_1-6 \Rightarrow t_1=4s$$

لحظهٔ رسیدن دو متحرک به هم را با برابر قرار دادن معادلهٔ حرکت آن‌ها به‌دست می‌آوریم:

$$x_1=x_2 \Rightarrow \frac{1}{2}(0/5)t_1'^2=\frac{1}{2}(2)(t_1'-3)^2$$

$$t_1'^2=4(t_1'-3)^2 \Rightarrow t_1'=2(t_1'-3) \Rightarrow t_1'=6s$$

از لحظهٔ $t=4s$ سـرعت متحرک (۲) از سـرعت متحرک (۱) بیشـتر می‌شـود و به آن نزدیک می‌شود تا لحظهٔ $t=6s$ که به آن می‌رسد. یعنی به مدت ۲s فاصلهٔ دو متحرک در حال کاهش است.

B ۴۷۲ ۲

خط فکری پـس از جدا شـدن واگـن، قطار با سـرعت ثابت به حرکـت خود ادامه می‌دهـد و واگـن با حرکت کندشـونده متوقف می‌شـود. شـتاب حرکت واگـن را نداریم بنابراین شما باید برای واگن از معادلهٔ مستقل از شتاب (فرمول طلایی) استفاده کنید.

۱ برای واگن می‌نویسیم: $\Delta x_{\text{واگن}}=\frac{v+v_0}{2}\Delta t=\frac{v_0}{2}\Delta t$

۲ قطار با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه داده است از این رو: $\Delta x_{\text{قطار}}=v_0\Delta t$

۳ اکنون خواهیم داشت: $\frac{\Delta x_{\text{واگن}}}{\Delta x_{\text{قطار}}}=\frac{\frac{v_0}{2}\Delta t}{v_0\Delta t}=\frac{1}{2}$

B ۴۷۳ ۲

خط فکری از شما خواسته شده فاصلهٔ دو متحرک را پس از توقف متحرک دوم برحسب v و a به‌دست بیاورید. بنابراین شما ابتدا باید زمان توقف و جابه‌جایی متحرک (۲) را حساب کرده سپس مقدار جابه‌جایی متحرک (۱) را در این مدت به‌دست آورده و جابه‌جایی‌ها را از هم کم کنید.

۱ ابتـدا زمان توقـف و جابه‌جایی متحرک (۲) از محل گذر دو متحرک تا محل توقف را به‌دست می‌آوریم:

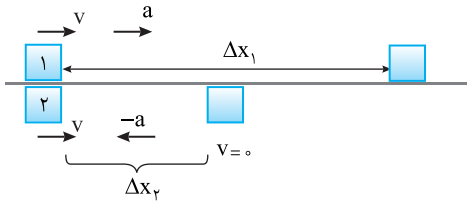
$$v=at+v_0 \Rightarrow 0=-at_2+v \Rightarrow t_2=\frac{v}{a}$$

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x \Rightarrow 0-v^2=-2a\Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2=\frac{v^2}{2a}$$

۲ اکنون جابه‌جایی متحرک (۱) را با شتاب a در مدت t_2 حساب می‌کنیم:

$$\Delta x_1=\frac{1}{2}at^2+v_0t \Rightarrow \Delta x_1=\frac{1}{2}a(\frac{v}{a})^2+v(\frac{v}{a})=\frac{3}{2}\frac{v^2}{a}$$

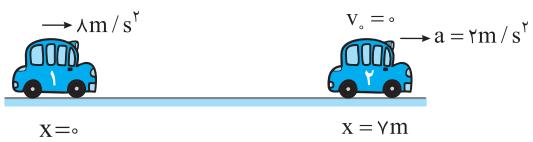
۳ فاصلهٔ دو متحرک از هم خواهد شد: $\Delta x_1-\Delta x_2=\frac{3v^2}{2a}-\frac{v^2}{2a}=\frac{v^2}{a}$



B ۴۷۴ ۴

معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم: $x_1=vt+x_0 \Rightarrow x_1=8t$

$$x_2=\frac{1}{2}at^2+v_0+x_0 \Rightarrow x_2=\frac{1}{2}\times2\times t^2+0+7$$



قرار است که تعداد دفعاتی که فاصلهٔ دو متحرک ۵m است را به‌دست بیاوریم. بنابراین می‌توانیم بنویسیم.

$$|x_2-x_1|=5 \Rightarrow |t^2+7-8t|=5 \Rightarrow \begin{cases} t^2-8t+7=5 & (I) \\ t^2-8t+7=-5 & (II) \end{cases}$$

معادله‌ها را حل می‌کنیم.

$$(I) \Rightarrow t^2-8t-2=0 \Rightarrow t=\pm\sqrt{16-2} \Rightarrow t=4\pm\sqrt{14} \Rightarrow \begin{cases} t=4-\sqrt{14}>0 \\ t=4+\sqrt{14}>0 \end{cases}$$

$$(II) \Rightarrow t^2-8t+12=0 \Rightarrow t=4\pm\sqrt{16-12} \Rightarrow t=4\pm2 \Rightarrow \begin{cases} t=2s \\ t=6s \end{cases}$$

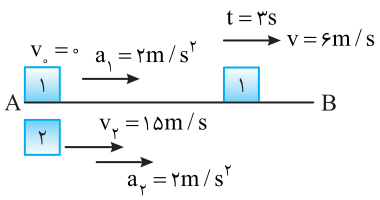
هـر چهار زمان به‌دسـت آمده مثبت هسـتند بنابراین فاصلهٔ دو متحـرک از هم چهار بار ۵m می‌شود.

B ۴۷۵ ۱

دقت کنید سرعت متحرک اول پس از ۳s با شتاب $2m/s^2$ خواهد شد:

$$v=at+v_0 \Rightarrow v_1=2\times3+0 \Rightarrow v_1=6m/s$$

در لحظه‌ای که سـرعت متحرک اول $6m/s$ اسـت، سـرعت متحرک دوم $15m/s$ و شـتاب هر دو متحرک یکسان است. چون سـرعت متحرک (۲) بیشتر است. به متحرک (۱) نزدیک شده از آن سبقت می‌گیرد و سپس از متحرک اول دور می‌شود.



C ۳ ۴۷۶

لحظهٔ رسیدن دو متحرک به هم را به‌دست می‌آوریم.

$$x_A = x_B \Rightarrow \frac{1}{2}a_A t^2 = v_B(t-3)$$

$$\frac{1}{2}\times 2\times t^2 = 16(t-3) \Rightarrow t^2 - 16t + 48 = 0$$

$$(t-4)(t-12)=0 \Rightarrow t_1 = 4s,\ t_2 = 12s$$

بنابراین در دو لحظهٔ $t_1 = 4s$ و $t_2 = 12s$ از کنار هم می‌گذرند. ابتدا B، به A می‌رسد.

سپس A که سرعتش در حال افزایش است از B سبقت می‌گیرد.

در لحظه‌های $t = 7s$ و $t = 9s$ سرعت A را به‌دست می‌آوریم.

$$v = at + v_0 \Rightarrow v_{1A} = 2\times 7 = 14m/s,\ v_{2A} = 2\times 9 = 18m/s$$

بعد از $t = 4s$، B از A جلو می‌افتد و چون در $t = 7s$ سرعت B از A بیشتر است $(16m/s > 14m/s)$ فاصلهٔ بین آنها در حال افزایش است و در $t = 9s$ سرعت A $18m/s$ می‌شود و سرعت A از B بیشتر می‌شود و فاصلهٔ بین آنها کاهش می‌یابد تا در لحظهٔ $t = 12s$ A به B می‌رسد.

بنابراین در بازهٔ $7s$ تا $9s$ ابتدا فاصله افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

B ۲ ۴۷۷

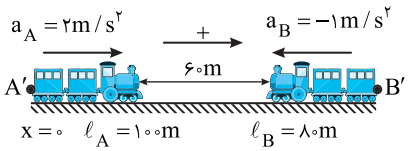
خط فکری ابتدا باید دقت کنید که این دو قطار وقتی به‌طور کامل از کنار هم می‌گذرند که انتهای قطار A به انتهای قطار B برسد. یعنی نقاط A' و B' از کنار هم بگذرند. بنابراین شما باید یک نقطه مثلاً محل ابتدایی A' را مبدأ و جهت راست را جهت مثبت فرض کنید. در این صورت مکان اولیهٔ B' خواهد شد $(x_{0B'} = 100+60+80 = 240m)$

معادلهٔ حرکت نقاط A' و B' را نوشته و مسئله را حل کنید.

معادلهٔ مکان نقطهٔ A' و B' را می‌نویسیم و برابر قرار می‌دهیم.

$$x_{A'} = \frac{1}{2}a_A t^2 \Rightarrow x_{A'} = t^2 \ ,\ x_{B'} = \frac{1}{2}a_B t^2 + d \Rightarrow x_{B'} = -\frac{t^2}{2} + 240$$

$$x_{A'} = x_{B'} \Rightarrow t^2 = -\frac{t^2}{2} + 240 \Rightarrow \frac{3t^2}{2} = 240 \Rightarrow t^2 = 160 \Rightarrow t = 4\sqrt{10}s$$



B ۲ ۴۷۸

هنگامی قطار B به‌طور کامل از قطار A سبقت می‌گیرد که انتهای قطار B به ابتدای قطار A برسد. یعنی نقطهٔ B' (انتهای قطار B) به نقطهٔ A' (ابتدای قطار A) برسد. مکان ابتدایی B' را مبدأ مکان و جهت راست را مطابق شکل جهت مثبت در نظر می‌گیریم و برای نقاط B' و A' معادلهٔ حرکت می‌نویسیم:

$$x_{A'} = vt + x_0 \xrightarrow{x_0 = 250m} x_{A'} = 37/5t + 250$$

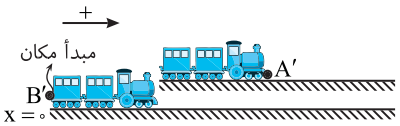
معادلهٔ حرکت A: $x_{A'} = 37/5t + 250$

معادلهٔ حرکت B: $x_{B'} = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow x_{B'} = 2/5t^2$

مکان A' و B' را برابر قرار می‌دهیم:

$$x_{A'} = x_{B'} \Rightarrow 37/5t + 250 = 2/5t^2 \Rightarrow 2/5t^2 - 37/5t - 250 = 0$$

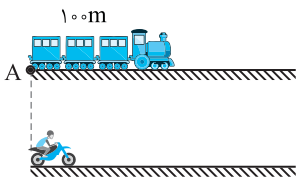
$$\Rightarrow t^2 - 15t - 100 = 0 \Rightarrow (t-20)(t+5) = 0 \Rightarrow t = 20s$$



B ۲ ۴۷۹

۱ نقطهٔ A را مبدأ مکان می‌گیریم و جهت حرکت قطار و موتور را جهت مثبت فرض می‌کنیم.

۲ معادلهٔ حرکت موتور که با شتاب $4m/s^2$ از حال سکون $(v_0 = 0)$ به راه می‌افتد را می‌نویسیم.



$$x_م = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow x_م = \frac{1}{2}\times 4t^2 + 0 \Rightarrow x_م = 2t^2$$

۳ موتور قرار است که از جلوی قطار بگذرد بنابراین معادلهٔ نقطهٔ جلوی قطار را که در فاصلهٔ ۱۰۰ متری نقطهٔ A قرار دارد می‌نویسیم. $x = vt + x_0 \Rightarrow x_{\text{جلوی ق}} = 10t + 100$

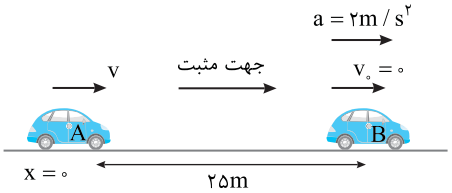
۴ معادله‌های حرکت را برابر قرار می‌دهیم.

$$x_م = x_{\text{جلوی ق}} \Rightarrow 2t^2 = 10t + 100 \Rightarrow t^2 - 5t - 50 = 0 \Rightarrow (t+5)(t-10) = 0 \Rightarrow t = 10s$$

B ۱ ۴۸۰

خط فکری هرگاه قرار باشد که دو متحرک به هم برسند، معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک را می‌نویسیم و برابر قرار می‌دهیم. اگر یکی از متحرک‌ها (و یا هردو) دارای حرکت شتابدار باشد با برابر قرار دادن معادله‌های حرکت، یک معادلهٔ درجه ۲ به‌دست می‌آید و برای آنکه دو متحرک از کنار هم بگذرند باید $\Delta \geq 0$ شود یعنی معادله دارای جواب باشد. از این رو شما معادلهٔ حرکت‌های دو متحرک را نوشته برابر قرار دهید و Δ را بزرگ‌تر و مساوی صفر بگذارید.

محل ابتدایی خودروی A در لحظه‌ای که خودروی B شروع به حرکت می‌کند را مبدأ مکان و مطابق شکل جهت راست را جهت مثبت می‌گیریم.



معادلهٔ حرکت دو متحرک را نسبت به محل ابتدایی خودروی A می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x_A = vt + x_0 \Rightarrow x_A = vt \\ x_B = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow x_B = t^2 + 25 \end{cases} \xrightarrow{x_A = x_B} vt = t^2 + 25$$

$$\Rightarrow t^2 - vt + 25 = 0$$

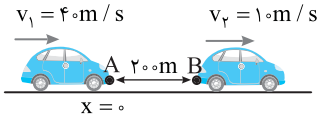
اگر معادلهٔ به دست آمده دارای جواب باشد، دو متحرک به هم می‌رسند. معادلهٔ درجه ۲ وقتی جواب دارد که $\Delta \geq 0$ باشد از این‌رو:

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow v^2 - 4\times 25 \geq 0 \Rightarrow v^2 \geq 100 \Rightarrow v \geq 10m/s$$

بنابراین حداقل سرعت v باید $10m/s$ باشد.

C ۲ ۴۸۱

خط فکری وقتی خودروی عقبی به خودروی جلویی برخورد می‌کند که نقطهٔ A به نقطهٔ B برسد (مطابق شکل). در این صورت اگر معادلهٔ حرکت دو خودرو را بنویسیم در آخر به یک معادلهٔ درجهٔ ۲ می‌رسیم. با حل این معادله زمان رسیدن A به B به‌دست می‌آید. اما مسئله می‌خواهد که خودروی عقبی به خودروی جلویی نرسد. یعنی از نظر ریاضی باید معادلهٔ به‌دست آمده بدون جواب باشد $(\Delta < 0)$ معادله‌های حرکت را بنویسید، با هم برابر قرار داده و Δ ی آن را کوچک‌تر از صفر قرار دهید.



معادلهٔ حرکت هر دو متحرک را نوشته و برابر قرار می‌دهیم.

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}at^2 + 40t \\ x_2 = v_2 t = 10t + 200 \end{cases}$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{1}{2}at^2 + 40t = 10t + 200 \Rightarrow \frac{1}{2}at^2 + 30t - 200 = 0$$

اگر این معادله جواب نداشته باشد برخوردی صورت نمی‌گیرد. برای این منظور باید $\Delta<0$ باشد.

$$\Delta<0\Rightarrow 900+400a<0\Rightarrow a<-\frac{9}{4}\Rightarrow |a|>\frac{9}{4}$$

بنابراین کمینه (حداقل) مقدار a باید برابر $\frac{9}{4}m/s^2$ باشد تا متحرک عقبی به متحرک جلویی برخورد نکند.

B ۴۸۲ ۳

خط فکری شکل مسئله را کامل کنید. یعنی تمام داده‌های مسئله را روی آن بنویسید. نقطهٔ ۲ را مبدأ مکان و جهت راست را جهت مثبت می‌گیریم. در این صورت شتاب متحرک A که حرکتش تندشونده است $a_A=+4m/s^2$ و شتاب متحرک B که حرکتش کندشونده بوده $a_B=-4m/s^2$ می‌شود. معادله‌های حرکت را بنویسید و با هم برابر قرار دهید. یک معادلهٔ درجه ۲ به‌دست می‌آورید که ریشه‌های آن، لحظه‌هایی است که دو متحرک به هم می‌رسند اما برای آنکه معادله دارای جواب باشد باید $\Delta\geq 0$ باشد. حل مسئله را شروع کنید.

۱ معادلهٔ متحرک‌های A و B را می‌نویسیم. حرکت متحرک A تندشونده است پس شتاب در جهت حرکت می‌باشد امّا حرکت متحرک B کندشونده است پس شتاب خلاف جهت حرکت می‌باشد.

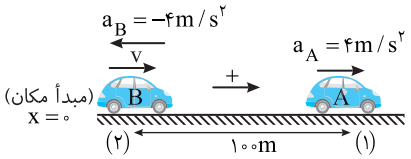
$$\begin{cases} x_A=\frac{1}{2}a_At^2+v_{0A}t+x_0\Rightarrow x_A=2t^2+100 \\ x_B=\frac{1}{2}a_Bt^2+v_{0B}t\Rightarrow x_B=-2t^2+vt \end{cases} \xrightarrow{x_A=x_B}$$

$$2t^2+100=-2t^2+vt\Rightarrow 4t^2-vt+100=0$$

۲ معادلهٔ بالا به ازای $\Delta\geq 0$ جواب خواهد داشت:

$$(-v)^2-4(400)\geq 0\Rightarrow v^2\geq 1600\Rightarrow v\geq 40m/s$$

بنابراین کمینهٔ سرعت متحرک B در لحظهٔ نشان داده شده $v=40m/s$ می‌باشد.

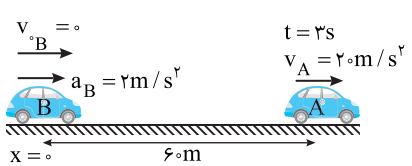


C ۴۸۳ ۳

خط فکری سؤال جالبی است. اتومبیل A با سرعت ثابت از کنار اتومبیل ساکن B می‌گذرد، سه ثانیه بعد اتومبیل B با شتاب $2m/s^2$ به دنبال A به راه می‌افتد. در این لحظه اتومبیل A به اندازهٔ $(\Delta x=20\times 3=60m)$ جلوتر از اتومبیل B است. اما مهم‌ترین نکته این است که تا لحظه‌ای که سرعت اتومبیل A $(20m/s)$ از سرعت اتومبیل B بیشتر باشد، فاصلهٔ دو اتومبیل زیاد می‌شود و لحظه‌ای که $v_B\geq v_A$ شود فاصلهٔ دو اتومبیل شروع به کم شدن می‌کند. بنابراین در لحظه‌ای که $v_B=20m/s$ می‌شود، فاصلهٔ دو متحرک از هم بیشترین مقدار است. با توجه به این مطلب مسئله را حل می‌کنیم.

۱ مدت زمانی که طول می‌کشد سرعت متحرک B به سرعت $20m/s$ برسد برابر است با:

$$v=a_Bt+v_0\Rightarrow 20=2t\Rightarrow t=10s$$



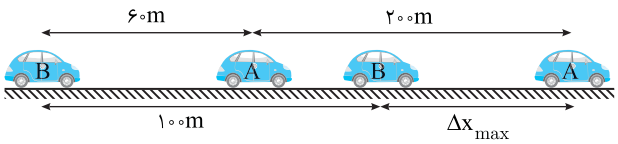
۲ در این مدت جابه‌جایی A و B را به دست می‌آوریم:

$$x_B=\frac{1}{2}a_Bt^2+v_0t\Rightarrow x_B=\frac{1}{2}\times 2\times 10^2=100m$$

$$x_A=vt\Rightarrow x_A=20\times 10=200m$$

۳ بنابراین جابه‌جایی متحرک A از لحظهٔ عبور از متحرک B برابر است با

$$200+60=260m$$



۴ بیشینه فاصلهٔ A و B خواهد شد:

$$d=x_A-x_B\Rightarrow d_{max}=260-100=160m$$

A ۴۸۴ ۳

تا لحظهٔ $t=3T$ سرعت متحرک ثابت است. با توجه به رابطهٔ $\Delta x=v\Delta t$ و با توجه به شکل‌ها، در $t=0$ تا $t=T$ متحرک A بیشتر از متحرک B جابه‌جا می‌شود:

$$\Delta x_A=v_{0A}T \xrightarrow{\Delta x_A>\Delta x_B} v_{0A}>v_{0B}$$
$$\Delta x_B=v_{0B}T$$

از لحظهٔ $t=3T$ به بعد حرکت‌ها با شتاب ثابت است و با ادامهٔ حرکت از این لحظه به بعد جابه‌جایی‌های متحرک B بیشتر از جابه‌جایی‌های متحرک A شده است بنابراین شتاب متحرک B بیشتر از شتاب متحرک A است. در ثانیهٔ Tام آخر حرکت چون جابه‌جایی B بیشتر از جابه‌جایی A بوده پس سرعت انتهایی متحرک B بزرگ‌تر از سرعت انتهایی متحرک A است.

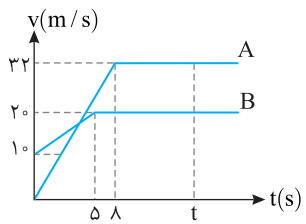
B ۴۸۵ ۴

خط فکری در مسائلی که نوع حرکت متحرک تغییر می‌کند بهتر است که مسئله را به کمک رسم نمودار سرعت - زمان حل کنیم. در لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند باید سطح زیر نمودار سرعت - زمان دو متحرک با هم برابر باشد. از این رو با توجه به داده‌های مسئله، نمودارها را رسم کنید.

۱ زمان رسیدن دو متحرک به سرعت ثابت را به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow 4=\frac{32-0}{t}\Rightarrow t_A=8s\ ,\ 2=\frac{20-10}{t}\Rightarrow t_B=5s$$

۲ نمودار سرعت - زمان هر دو متحرک را رسم می‌کنیم. لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند (t) سطح زیر نمودار سرعت - زمان آن‌ها یکی است.



یادآوری ریاضی مساحت ذوزنقه برابر مجموع دو قاعده ضربدر نصف ارتفاع است.

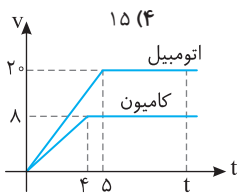
$$\Delta x_A=\Delta x_B\Rightarrow S_A=S_B\Rightarrow \frac{t+t-8}{2}\times 32=\frac{20+10}{2}\times 5+20\times(t-5)\Rightarrow$$

$$(2t-8)\times 16=75+20t-100\Rightarrow 32t-128=20t-25\Rightarrow 12t=103\Rightarrow t=\frac{103}{12}s$$

بازی با سؤال **یک اتومبیل و یک کامیون به طور همزمان از حال سکون و در یک جهت شروع به حرکت می‌کنند. در لحظهٔ شروع حرکت اتومبیل ۲۰۶m عقب‌تر از کامیون است. ابتدا اتومبیل ۵s با شتاب ثابت $4m/s^2$ و کامیون ۴s با شتاب ثابت $2m/s^2$ حرکت می‌کنند. سپس هر یک از آن‌ها با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهند. چند ثانیه پس از شروع حرکت، اتومبیل به کامیون می‌رسد؟**

۱) ۲۰ ۲) ۷ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

پاسخ نمودار سرعت - زمان هر دو متحرک را رسم می‌کنیم:



اتومبیل: $v=at+v_0\Rightarrow v=4\times 5=20m/s$

کامیون: $v=at+v_0\Rightarrow v=2\times 4=8m/s$

دقت کنید برای آنکه دو متحرک به هم برسند باید سطح زیر نمودار اتومبیل از سطح زیر نمودار کامیون ۲۰۶ متر بیشتر باشد. زیرا اتومبیل ۲۰۶m عقب بودن خود را باید جبران کند.

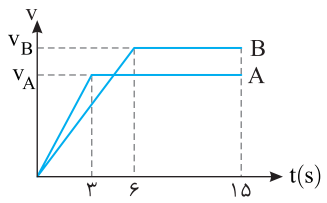
$$S_{\text{اتومبیل}}=S_{\text{کامیون}}+206\Rightarrow \frac{t+(t-5)}{2}\times 20=\frac{t+(t-4)}{2}\times 8+206\Rightarrow$$

$$20t-50=8t-16+206\Rightarrow 12t=240\Rightarrow t=20s$$

گزینهٔ ۱

۴ ۴۸۶ B

۱ باید نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B را مطابق شکل روبه‌رو رسم کنید. دقت کنید که در ۳s اول نمودار متحرک A خط راست مایل و پس از آن نمودار خط راست افقی است و برای متحرک B نمودار تا لحظهٔ t=۶s ، حرکت با شتاب ثابت و سرعت در حال افزایش تا مقدار v_B است و از آن به بعد سرعت متحرک B ثابت است.



۲ دو متحرک پس از ۱۵s با هم از مبدأ به مقصد می‌رسند بنابراین سطح زیر نمودار دو متحرک در بازهٔ صفر تا ۱۵s باید برابر باشد.

$$S_A=S_B\Rightarrow(۱۵+۱۲)\times\frac{v_A}{۲}=(۱۵+۹)\times\frac{v_B}{۲}\Rightarrow ۲۷v_A=۲۴v_B$$

$$\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\frac{۲۴}{۲۷}\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\frac{۸}{۹}$$

۳ اکنون نسبت شتاب دو متحرک را حساب می‌کنیم.

$$\frac{a_A}{a_B}=\frac{\frac{v_A-۰}{۳}}{\frac{v_B-۰}{۶}}\Rightarrow\frac{a_A}{a_B}=\frac{v_A}{v_B}\times۲\Rightarrow\frac{a_A}{a_B}=\frac{۸}{۹}\times۲=\frac{۱۶}{۹}$$

۴ ۴۸۷ B

متحرک A: سرعت در لحظهٔ t=۴s و t=۸s را به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow\begin{cases}t=۴s:v_۱=۲/۵\times۴+۰\Rightarrow v_۱=۱۰m/s\\ v_۲=۲\times۴+۱۰\Rightarrow v_۲=۱۸m/s\end{cases}$$

جابه‌جایی در هر مرحله را به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}t\Rightarrow\begin{cases}\Delta x_۱=\frac{۱۰+۰}{۲}\times۴\Rightarrow\Delta x_۱=۲۰m\\ \Delta x_۲=\frac{۱۸+۱۰}{۲}\times۴\Rightarrow\Delta x_۲=۵۶m\end{cases}$$

کل جابه‌جایی A: $\Delta x_A=۲۰+۵۶=۷۶m$

برای متحرک B نیز همین کار را انجام می‌دهیم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow\begin{cases}v_{۱B}=۴\times۲=۸m/s\\ v_{۲B}=۲/۵\times۴+۸=۱۸m/s\end{cases}$$

$$\Delta x_۱=\frac{۰+۸}{۲}\times۴=۱۶m\ ,\ \Delta x_۲=\frac{۱۸+۸}{۲}\times۴=۵۲m$$

$$\Delta x_B=۱۶+۵۲=۶۸m$$

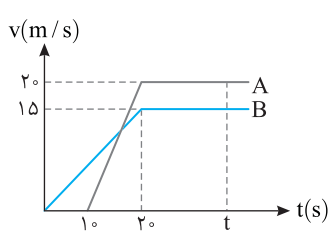
نسبت سرعت‌های متوسط:

$$\frac{v_{av_B}}{v_{av_A}}=\frac{\frac{\Delta x_B}{\Delta t}}{\frac{\Delta x_A}{\Delta t}}=\frac{\frac{۶۸}{۸}}{\frac{۷۶}{۸}}\Rightarrow\frac{v_{av_B}}{v_{av_A}}=\frac{۱۷}{۱۹}$$

البته می‌توانستیم با رسم نمودار سرعت زمان برای هر متحرک مسئله را حل کنیم که در این صورت تمام محاسبات بالا را نیز باید انجام می‌دادیم.

۲ ۴۸۸ C

خط فکری با توجه به نمودار متحرک A، ۱۰s پس از حرکت متحرک B به راه می‌افتد. بنابراین باید مشخص کنیم در این مدت متحرک B چند متر از متحرک A جلو می‌افتد. سپس سطح زیر نمودار را برای هر دو متحرک A و B در لحظهٔ t که به هم می‌رسند حساب کنیم. البته سطح زیر نمودار A باید به مقداری که از متحرک B عقب است از سطح زیر نمودار B بیشتر باشد.



۱ شتاب متحرک B را حساب می‌کنیم. $a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۱۵-۰}{۲۰}\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}m/s^۲$

۲ جابه‌جایی متحرک B را در مدت ۱۰s به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow\Delta x_B=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴}\times(۱۰)^۲+۰\Rightarrow\Delta x_B=۳۷/۵m$$

۳ سطح زیر نمودار دو متحرک را حساب می‌کنیم.

$$S_A=(t-۱۰+t-۲۰)\times\frac{۲۰}{۲}\Rightarrow S_A=۲۰t-۳۰۰$$

$$S_B=(t+t-۲۰)\times\frac{۱۵}{۲}\Rightarrow S_B=۱۵t-۱۵۰$$

۴ با توجه به آنچه در خط فکری بیان کردیم، می‌نویسیم:

$$S_A=S_B+۳۷/۵\Rightarrow ۲۰t-۳۰۰=۱۵t-۱۵۰+۳۷/۵\Rightarrow ۵t=۱۸۷/۵\Rightarrow t=۳۷/۵s$$

۱ ۴۸۹ A

خط فکری ثانیهٔ t ام یعنی بازهٔ زمانی بین t−۱ تا t بنابراین جابه‌جایی در ثانیهٔ چهارم یعنی جابه‌جایی در بازهٔ t=۳s تا t=۴s . دقت کنید متحرک از حال سکون با شتاب ثابت حرکت کرده است از این رو مسافت طی شده و جابه‌جایی متحرک یکی است. شما باید مکان جسم در لحظه‌های t=۳s و t=۴s را به‌دست آورده و آن‌ها را از هم کم کنید.

راه‌حل اول: به کمک معادلهٔ مکان - زمان، مکان جسم در لحظهٔ t=۳s و t=۴s را به‌دست آورده و از هم کم می‌کنیم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\begin{cases}\xrightarrow{t=۳s}x=\frac{۱}{۲}\times۱۰\times۹=۴۵m\\ \xrightarrow{t=۴s}x=\frac{۱}{۲}\times۱۰\times۱۶=۸۰m\end{cases}$$

$$\Rightarrow\Delta x_{(۴)}=۸۰-۴۵=۳۵m$$

میانبر در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام حرکت از رابطهٔ روبه‌رو به‌دست می‌آید: $\Delta x_{(t)}=\frac{۱}{۲}a(۲t-۱)+v_۰$

راه‌حل دوم: استفاده از رابطهٔ جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام:

$$\Delta x_{(۴)}=\frac{۱}{۲}\times۱۰(۲\times۴-۱)=۳۵m$$

۲ ۴۹۰ A

یادآوری سرعت متوسط متحرکی که با شتاب ثابت در حرکت است در بازهٔ زمانی صفر تا t از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید: $v_{av}=\frac{۱}{۲}at+v_۰$

۱ شتاب حرکت متحرک را به کمک سرعت متوسط آن به‌دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{۱}{۲}at+v_۰\xrightarrow{t=۳s,v_{av}=۱۲m/s,v_۰=۰}۱۲=\frac{۱}{۲}\times a\times۳+۰\Rightarrow a=۸m/s^۲$$

۲ جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم خواهد شد:

$$\Delta x_{(t)}=\frac{۱}{۲}a(۲t-۱)+v_۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times۸\times(۲\times۳-۱)+۰=۲۰m$$

۳ ۴۹۱ A

روش اول: متحرک از حال سکون $(v_۰=۰)$ شروع به حرکت کرده است محل شروع حرکت را مبدأ اختیار می‌کنیم. جابه‌جایی متحرک در مدت ۱s برابر ۲/۵m شده است یعنی مکان در لحظهٔ t=۱s برابر x=۲/۵m است. به کمک معادله حرکت، شتاب را حساب می‌کنیم. $\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow ۲/۵=\frac{۱}{۲}(a)(۱)\Rightarrow a=۵m/s^۲$

مکان متحرک در مدت ۲s را به‌دست می‌آوریم. $\Delta x'=\frac{۱}{۲}\times۵\times۲^۲+۰\Rightarrow\Delta x'=۱۰m$

جابه‌جایی در ثانیهٔ دوم یعنی جابه‌جایی در بازهٔ t=۱s تا t=۲s بنابراین مکان در این دو لحظه را از هم کم می‌کنیم. $\Delta x_{(۲)}=x'-x=۱۰-۲/۵=۷/۵m$

روش دوم: جابه‌جایی یک متحرک که دارای حرکت با شتاب ثابت روی خط راست است، در ثانیهٔ t ام حرکتش از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta x_{(t)}=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0 \Rightarrow \Delta x_{(1)}=\frac{1}{2}a(2\times1-1)+0 \Rightarrow 2/5=\frac{1}{2}a \Rightarrow a=5m/s^2$$

بنابراین جابه‌جایی آن در ثانیهٔ دوم حرکتش برابر است با:

$$\Delta x_{(2)}=\frac{1}{2}\times5\times(2\times2-1)+0 \Rightarrow \Delta x_{(2)}=7/5m$$

تذکر رابطهٔ جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام در کتاب بیان نشده است اما در حل این‌گونه مسائل، کاربرد مفیدی دارد.

B ۴۹۲ ۳

راه‌حل اول:

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست جابه‌جایی‌ها در ثانیه‌های متوالی تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند که قدرنسبت آن شتاب است. $|\Delta x_{(t)}-\Delta x_{(t-1)}|=a$

۱ جابه‌جایی متحرک در حرکت کندشونده‌اش در ثانیهٔ چهارم، یک متر از جابه‌جایی آن در ثانیهٔ ششم بیشتر بوده است و با توجه به نکتهٔ بیان شده جابه‌جایی در ثانیهٔ چهارم به اندازهٔ $2a$ از جابه‌جایی در ثانیهٔ ششم بیشتر است، بنابراین شتاب حرکت خواهد شد:

$$|2a|=1 \Rightarrow |a|=\frac{1}{2}m/s^2$$

۲ سرعت اولیه را حساب می‌کنیم:

$$v=at+v_0 \Rightarrow 0=-0/5\times6+v_0 \Rightarrow v_0=3m/s$$

راه‌حل دوم: به کمک رابطهٔ جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست می‌توان نوشت:

$$\Delta x_{(t)}=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0 \Rightarrow \begin{cases}\Delta x_{(4)}=\frac{1}{2}a(2\times4-1)+v_0=\frac{7}{2}a+v_0\\ \Delta x_{(6)}=\frac{1}{2}a(2\times6-1)+v_0=\frac{11}{2}a+v_0\end{cases}$$

دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$\Delta x_{(4)}-\Delta x_{(6)}=\frac{7}{2}a-\frac{11}{2}a \Rightarrow 1=\frac{-4}{2}a \Rightarrow a=-0/5m/s^2$$

$$v=at+v_0 \Rightarrow 0=-0/5\times6+v_0 \Rightarrow v_0=3m/s$$

B ۴۹۳ ۲

جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم برابر ۲۸ متر است، سرعت اولیه را به کمک جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x_{(t)}=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0 \Rightarrow 28=\frac{1}{2}\times6(2\times3-1)+v_0 \Rightarrow v_0=13m/s$$

اکنون به کمک معادلهٔ مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت، مکان متحرک در ثانیهٔ $t=5s$ را حساب می‌کنیم البته در لحظهٔ $t=0$ مکان اولیهٔ متحرک $x_0=4m$ بوده است.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\times6\times25+13\times5+4=75+65+4 \Rightarrow x=144m$$

B ۴۹۴ ۱

نکته ۲ ثانیهٔ سوم یعنی بازه‌های زمانی بین $t=4s$ تا $t=6s$.

یادآوری برای به‌دست آوردن جابه‌جایی در مدت n ثانیهٔ حرکت از معادلهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Delta x_{(n)}=\frac{n}{2}a(2t-n)+nv_0$$

که در آن t کل مدت زمان و n تعداد ثانیه‌های آخر مدت t است اما این به چه معنی است؟ یعنی اگر گفته شود جابه‌جایی در سه ثانیهٔ پنجم شما باید به جای t مقدار $5\times3=15s$ و جای n، $3s$ را قرار دهید.

۱ جابه‌جایی در $2s$ اول برابر $13m$ شده است از این‌رو:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \Rightarrow 13=\frac{1}{2}a(2)^2+2v_0 \Rightarrow 13=2a+2v_0 \quad (I)$$

۲ در دو ثانیهٔ سوم یعنی در رابطهٔ بیان شده در یادآوری به جای t مقدار $2\times3=6s$ و به جای n مقدار $2s$ را قرار دهید.

$$25=\frac{2}{2}a(2\times6-2)+2v_0 \Rightarrow 25=10a+2v_0 \quad (II)$$

۳ به کمک معادله‌های (I) و (II)، a را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}13=2a+2v_0\\ 25=10a+2v_0\end{cases} \xrightarrow{\text{دو رابطه را از هم کم می‌کنیم}} 12=8a \Rightarrow a=1/5m/s^2$$

B ۴۹۵ ۴

یادآوری در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، جابه‌جایی در بازهٔ زمانی n ثانیه از کل مدت حرکت t ثانیه برابر است با: $\Delta x_{(n)}=\frac{n}{2}a(2t-n)+nv_0$

۱ جابه‌جایی در دو ثانیهٔ اول یعنی در رابطهٔ $n=2s$ و $t=2s$ را قرار دهیم:

$$54=\frac{2}{2}a(2\times2-2)+2v_0 \Rightarrow 54=2a+2v_0 \quad (1)$$

۲ جابه‌جایی در دو ثانیهٔ سوم یعنی در رابطهٔ $n=2s$ و $t=6s$ را قرار دهیم:

$$38=\frac{2}{2}a(2\times6-2)+2v_0 \Rightarrow 38=10a+2v_0 \quad (2)$$

۳ رابطه‌های (۱) و (۲) را از هم کم کرده و شتاب را حساب می‌کنیم:

$$54-38=2a+2v_0-10a-2v_0 \Rightarrow 16=-8a \Rightarrow a=-2m/s^2$$

۴ اکنون v_0 را از رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آوریم:

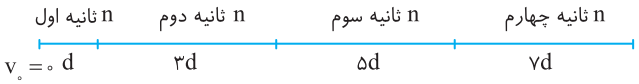
$$54=2a+2v_0 \Rightarrow 54=2\times(-2)+2v_0 \Rightarrow v_0=29m/s$$

۵ مسافت طی شده تا توقف به کمک رابطهٔ مستقل از زمان خواهد شد:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x \Rightarrow 0-(29)^2=2\times(-2)\Delta x \Rightarrow \Delta x=210/25m$$

B ۴۹۶ ۱

در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست بدون سرعت اولیه جابه‌جایی‌ها در بازه‌های زمانی یکسان n (یا t) از مقادیر زیر پیروی می‌کنند.



بنابراین:

$$\frac{\Delta x_{\text{سوم}}}{\Delta x_{\text{دوم}}}=\frac{5}{3}$$

روش دیگر: استفاده از رابطهٔ $\Delta x_n=\frac{n}{2}a(2t-n)$ است.

جابه‌جایی در n ثانیهٔ سوم و n ثانیهٔ دوم خواهد شد:

$$\begin{cases}\Delta x_{\text{سوم}}=\frac{n}{2}a[2(3n)-n]=\frac{5n^2}{2}a\\ \Delta x_{\text{دوم}}=\frac{n}{2}a[(2(2n)-n]=\frac{3n^2}{2}a\end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta x_{\text{سوم}}}{\Delta x_{\text{دوم}}}=\frac{5}{3}$$

B ۴۹۷ ۲

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست می‌توان ثابت کرد که جابه‌جایی‌ها در بازه‌های زمانی متوالی یکسان t تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت at^2 می‌دهند.

در صورت مسئله بیان شده که در هر $2s$، متحرک $8m$ کمتر جابه‌جا می‌شود یعنی در بازهٔ زمانی یکسان $t=2s$، قدرنسبت دنبالهٔ حسابی برابر ۸ است از این‌رو می‌توان نوشت: $at^2=8 \Rightarrow a(2)^2=8 \Rightarrow a=2m/s^2$

متحرک بعد از $400m$ متوقف شده است. به کمک معادلهٔ مستقل از زمان سرعت اولیهٔ را حساب می‌کنیم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x \Rightarrow 0-v_0^2=2\times(-2)\times400 \Rightarrow v_0^2=1600 \Rightarrow v_0=40m/s$$

بازی با سؤال **متحرکی روی خط راست با شتاب ثابت در حرکت است و در هر ثانیه، ۲/۵ متر بیشتر از ثانیهٔ قبل جابه‌جا می‌شود. شتاب متحرک چند متر بر مجذور ثانیه است؟**

۱) ۲/۵ ۲) ۵

۳) ۱/۲۵ ۴) قابل محاسبه نیست.

پاسخ **در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، جابه‌جایی‌ها در ثانیه‌های متوالی تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند که قدرنسبت آن شتاب است.**

$$\Delta x_{(t)}-\Delta x_{(t-1)}=a$$

در این پرسش، جابه‌جایی در هر ثانیه، ۲/۵ متر بیشتر از ثانیهٔ قبل است یعنی قدرنسبت این دنباله که همان شتاب است برابر $2/5\,m/s^2$ است.

گزینهٔ ۱

۴۹۸ B ۲

راه‌حل اول: ۱ معادلهٔ سرعت - زمان $v=-2t+4$ را با معادلهٔ سرعت - زمان حرکت با شتاب ثابت $v=at+v_0$ مقایسه می‌کنیم، مشخص می‌شود که حرکت دارای شتاب ثابت $a=-2m/s^2$ و سرعت اولیهٔ $v_0=4m/s$ است و معادلهٔ مکان - زمان آن به صورت روبه‌رو است:

$$x=\frac{1}{2}(-2)t^2+4t+x_0\Rightarrow x=-t^2+4t+x_0$$

۲ ثانیهٔ سوم حرکت یعنی بازهٔ زمانی بین $t=4s$ و $t=6s$ بنابراین مکان در این دو لحظه را به‌دست آورده از هم کم می‌کنیم تا جابه‌جایی به‌دست آید:

$$\left.\begin{array}{l} t_1=4s\Rightarrow x_1=-16+16+x_0\Rightarrow x_1=x_0 \\ t_2=6s\Rightarrow x_2=-36+24+x_0\Rightarrow x_2=-12+x_0 \end{array}\right\}\Rightarrow|\Delta x|=12\,m$$

راه‌حل دوم: استفاده از رابطهٔ روبه‌رو:

$$\Delta x_{(n)}=\frac{n}{2}a(2t-n)+nv_0$$

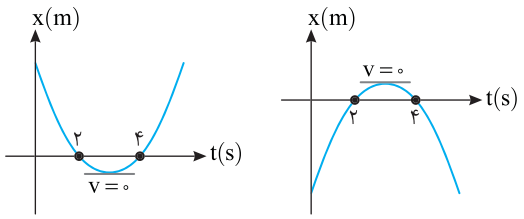
در این رابطه ۲ ثانیهٔ سوم یعنی $n=2$ و $t=6s$ است.

$$\Delta x_{(n)}=\frac{2}{2}\times(-2)(2\times6-2)+2\times4=-20+8=-12m$$

پس بزرگی جابه‌جایی برابر $12m$ است.

۴۹۹ B ۴

خط فکری معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت $\left(x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\right)$ یک تابع درجه ۲ است که نمودار آن سهمی است. از طرفی لحظه‌ای بردار مکان متحرک تغییر جهت (علامت) می‌دهد که از مبدأ $(x=0)$ بگذرد، در این صورت لحظه‌های $t=2s$ و $t=4s$ ریشه‌های معادلهٔ مکان زمان هستند و در این لحظه‌ها نمودار مکان - زمان محور زمان را قطع خواهد کرد. بنابراین اگر شما بخواهید نمودار مکان - زمان که یک سهمی است را رسم کنید باید یکی از دو نمودار زیر را رسم کنید.



۱ به نمودارهای رسم شده دقت کنید. لحظهٔ تغییر جهت متحرک یعنی لحظه‌ای که سرعت متحرک صفر می‌شود و این لحظه در لحظه‌های کمینه و بیشینه نمودار (رأس سهمی) اتفاق می‌افتد.

۲ همچنین سهمی نسبت به خط قائم عبوری از رأس سهمی متقارن است بنابراین لحظهٔ تغییر جهت $t_{\text{تغییر جهت}}=\frac{2+4}{2}=3s$ خواهد شد.

۵۰۰ B ۲

الف) جابه‌جایی بین دو لحظهٔ $t=0$ تا $t=4s$ را به دست می‌آوریم. برای این کار مکان در لحظهٔ $t=0$ و $t=4s$ را به کمک معادلهٔ حرکت $x=t^2+4t+5$ به‌دست آورده از هم کم می‌کنیم.

$$t=0\Rightarrow x=0+4(0)+5\Rightarrow x_1=5m\,,\ t=4s\Rightarrow x=4^2+4(4)+5\Rightarrow x_2=37$$

جابه‌جایی $37-5=32m$ است. بنابراین سرعت متوسط در این بازه خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{32}{4}=8m/s$$

این گزاره نادرست است.

ب) معادلهٔ مکان - زمان مسئله را با معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت مقایسه کرده و شتاب و سرعت اولیه را مشخص می‌کنیم.

$$x=t^2+4t+5\,,\ x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow a=2m/s^2\,,\ v_0=4m/s$$

معادلهٔ سرعت - زمان را می‌نویسیم: $v=at+v_0\Rightarrow v=2t+4$

بعد از $t=0$ همواره یک مقدار مثبت به ۴ اضافه می‌شود پس کمترین سرعت در $t=0$ و $4m/s$ است و این گزاره درست است.

پ) با توجه به معادلهٔ سرعت که در بالا به دست آمده همواره سرعت مثبت است و شتاب نیز ثابت و مثبت می‌باشد پس حرکت تند شونده است و این گزاره درست است.

ت) زمانی بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان $x=0$ عبور می‌کند.

Δ را تشکیل می‌دهیم $x=t^2+4t+5\Rightarrow\Delta=b^2-4ac\Rightarrow\Delta=16-4\times5=-4<0$

بنابراین معادله جواب ندارد. یعنی متحرک هیچ‌گاه از مبدأ مکان نمی‌گذرد و گزارهٔ (ت) نادرست است.

۵۰۱ B ۴

خط فکری طراح بیان کرده که در لحظهٔ $t=2s$ متحرک در یک متری مبدأ است بنابراین مکان آن می‌تواند $x=+1m$ و یا $x=-1m$ باشد. شما باید در دو حالت مسئله را حل کنید.

حالت اول: اگر متحرک در $t=2s$ در $x=+1m$ باشد، آن‌گاه: $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$

$$\left\{\begin{array}{l} t=2s\Rightarrow1=\frac{1}{2}a\times(2)^2+0+x_0 \\ t=4s\Rightarrow13=\frac{1}{2}a\times(4)^2+0+x_0 \end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} 2a+x_0=1 \\ 8a+x_0=13 \end{array}\right.\Rightarrow6a=12$$

$$\Rightarrow a=2m/s^2\Rightarrow x_0=-3m$$

حالت دوم: اگر متحرک در $t=2s$ در $x=-1m$ باشد، آن‌گاه:

$$\left\{\begin{array}{l} t=2s\Rightarrow-1=\frac{1}{2}a(2)^2+0+x_0 \\ t=4s\Rightarrow13=\frac{1}{2}a(4)^2+0+x_0 \end{array}\right.\Rightarrow6a=14\Rightarrow a=\frac{7}{3}m/s^2\,,x_0=-\frac{17}{3}m$$

۵۰۲ C ۴

خط فکری در صورت مسئله اندازهٔ شتاب و اندازهٔ جابه‌جایی در مدت $2s$ داده شده است. بنابراین ممکن است شتاب مثبت و جابه‌جایی نیز مثبت باشد یا شتاب و جابه‌جایی هر دو منفی باشند و یا شتاب مثبت و جابه‌جایی منفی و بالعکس باشد. در نتیجه چهار حالت را باید یک به یک بررسی کنیم و با به‌دست آوردن سرعت اولیه و مقایسهٔ آن با شتاب، نوع حرکت را تعیین کنیم.

اگر بردار شتاب و بردار جابه‌جایی هم جهت باشند یعنی اگر شتاب و بردار جابه‌جایی هر دو مثبت و یا هر دو منفی باشند آن‌گاه:

۱ هر دو مثبت باشند.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow+6=\frac{1}{2}\times(+2)\times(2)^2+v_0\times(2)\Rightarrow v_0=+1m/s$$

معادلهٔ سرعت - زمان خواهد شد: $v=at+v_0\Rightarrow v=2t+1$

در معادلهٔ $v=2t+1$، شتاب $+2m/s^2$ و سرعت اولیه $v_0=1m/s$ است و حرکت همواره تندشونده است.

۲ هر دو منفی باشند.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow{\text{هر دو منفی}}-6=\frac{1}{2}(-2)\times(2)^2+v_0\times(2)\Rightarrow v_0=-1m/s$$

معادلهٔ سرعت زمان خواهد شد $v=-2t-1$ و چون سرعت اولیه و شتاب هر دو منفی هستند حرکت همواره تندشونده است و گزینهٔ (۱) درست است.

اکنون حالتی را بررسی می‌کنیم که بردار شتاب و بردار جابه‌جایی در این دو ثانیه هم جهت نباشد.

۳ شتاب $۲m/s^۲$ و جابه‌جایی $-۶m$ باشد.

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t \xrightarrow[\Delta x<۰]{a>۰} -۶=\frac{۱}{۲}\times۲\times(۲)^۲+v_۰\times۲\Rightarrow v_۰=-۵m/s$$

در این صورت معادلهٔ سرعت زمان خواهد شد: $v=at+v_۰\Rightarrow v=۲t-۵$

بنابراین ابتدا سرعت و شتاب هم‌علامت نبوده حرکت کندشونده است اما پس از توقف جسم در $t=۲/۵s$، حرکت تندشونده می‌شود.

۴ شتاب منفی $-۲m/s^۲$ و جابه‌جایی مثبت $+۶m$ باشد:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t \xrightarrow[\Delta x>۰]{a<۰} ۶=\frac{۱}{۲}\times(-۲)\times(۲)^۲+v_۰\times۲\Rightarrow v_۰=+۵m/s$$

در این حالت نیز $v=-۲t+۵$ بوده و حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده خواهد بود. گزینهٔ (۲) درست است.

B ۵۰۳ ۲

خط فکری متحرک از حال سکون با شتاب ثابت $+۲a$ شروع به حرکت کرده و سرعتش به v می‌رسد. سپس با همان شتاب $(-۲a)$ ترمز می‌کند و می‌ایستد، بنابراین اگر در قسمت اول زمان $t_۱$ و جابه‌جایی $\Delta x_۱$ و در قسمت دوم زمان $t_۲$ و جابه‌جایی $\Delta x_۲$ باشد، باید رابطه‌ای بین زمان‌ها و جابه‌جایی‌ها به‌دست بیاوریم.

۱ به کمک معادلهٔ سرعت - زمان خواهیم داشت

قسمت اول: $v=at+v_۰\Rightarrow v=(۲a)t_۱\Rightarrow t_۱=\frac{v}{۲a}$

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow v^۲=۲(۲a)\Delta x_۱\Rightarrow \Delta x_۱=\frac{v^۲}{۴a}$$

قسمت دوم: $v=at+v_۰ \xrightarrow{v=۰} ۰=(-۲a)t_۲+v\Rightarrow t_۲=\frac{v}{۲a}$

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-v^۲=۲(-۲a)\Delta x_۲\Rightarrow \Delta x_۲=\frac{v^۲}{۴a}$$

۲ نتیجه اینکه در این حرکت $t_۱=t_۲$ و $\Delta x_۱=\Delta x_۲$ بوده و اگر زمان کل حرکت t و کل جابه‌جایی x باشد آنگاه:

$$t_۱-t_۲=t\Rightarrow t_۱+t_۱=t\Rightarrow t_۱=\frac{t}{۲} \quad (I)$$

$$\Delta x_۱+\Delta x_۲=x\Rightarrow \Delta x_۱+\Delta x_۱=x\Rightarrow \Delta x_۱=\frac{x}{۲} \quad (II)$$

۳ با توجه به معادلهٔ مکان - زمان می‌توان نوشت:

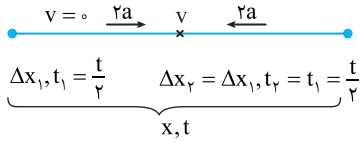
$$\Delta x_۱=\frac{۱}{۲}at^۲\Rightarrow \Delta x_۱=\frac{۱}{۲}(۲a)t_۱^۲ \xrightarrow{t_۱=\frac{t}{۲}} \Delta x_۱=a(\frac{t}{۲})^۲=\frac{at^۲}{۴}$$

با توجه به رابطهٔ (II) خواهیم داشت:

$$\Delta x_۱=\frac{x}{۲}\Rightarrow\frac{at^۲}{۴}=\frac{x}{۲}\Rightarrow x=\frac{at^۲}{۲}\Rightarrow t=\sqrt{\frac{۲x}{a}}$$

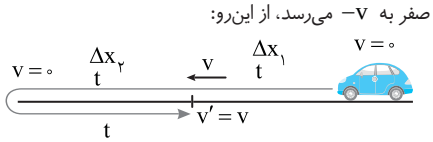
هرگاه متحرک با شتاب $a_۱$ از حال سکون شروع به حرکت کرده و در مدت $t_۱$ جابه‌جایی $x_۱$ را طی کند، سپس با شتاب $a_۲$ ترمز کرده و در مدت $t_۲$ جابه‌جایی $x_۲$ را طی کند تا متوقف شود آن‌گاه:

$$\frac{x_۲}{x_۱}=\frac{t_۲}{t_۱}=\frac{a_۲}{a_۱}$$



B ۵۰۴ ۳

در قسمت اول حرکت در مدت t سرعت از صفر به v رسیده سپس مطابق شکل در مدت $۲t$ سرعت به $-v$ می‌رسد یعنی ابتدا سرعت صفر شده و متحرک تغییر جهت داده تا سرعتش از صفر به $-v$ می‌رسد، از این‌رو:



$$\Delta x_۱=\frac{v_۱+v_۲}{۲}\Delta t_۱\Rightarrow \Delta x_۱=\frac{v}{۲}t \quad , \quad \Delta x_۲=\frac{v_۲+v'}{۲}\Delta t_۲\Rightarrow \Delta x_۲=\frac{v}{۲}t$$

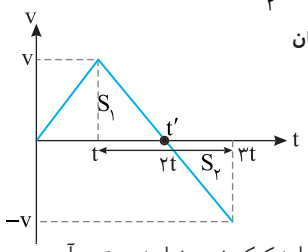
$$\Delta x_۳=\frac{v_۳+v'}{۲}\Delta t\Rightarrow \Delta x_۳=\frac{-v}{۲}t$$

مسافت برابر است با مجموع بزرگی جابه‌جایی‌ها:

$$\ell=|\Delta x_۱|+|\Delta x_۲|+|\Delta x_۳|\Rightarrow \ell=\frac{v}{۲}t+\frac{v}{۲}t+\frac{v}{۲}t\Rightarrow \ell=\frac{۳v}{۲}t$$

حل به کمک رسم نمودار سرعت - زمان

نمودار سرعت - زمان حرکت متحرک به شکل روبه‌روست و کافی است مساحت $S_۱$ و $S_۲$ را حساب کرده و با هم جمع کنیم.



ابتدا t' محل تقاطع نمودار با محور زمان را به کمک شیب خط به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{-v-v}{۳t-t}=\frac{۰-v}{t'-t}\Rightarrow\frac{۲}{۳t-t}=\frac{۱}{t'-t}\Rightarrow ۲t'-۲t=۲t\Rightarrow t'=۲t$$

$$\ell=|S_۱|+|S_۲|\Rightarrow \ell=|\frac{v\times۲t}{۲}+\frac{-v\times t}{۲}|\Rightarrow \ell=vt+\frac{vt}{۲}=\frac{۳}{۲}vt$$

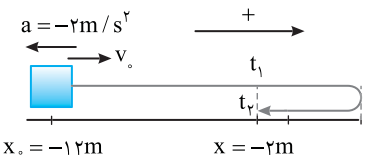
B ۵۰۵ ۳

یادآوری ریاضی در معادلهٔ درجهٔ ۲ $(y=ax^۲+bx+c)$ برای حاصل‌ضرب دو ریشه حاصل‌جمع دو ریشه و تفاضل دو ریشه داریم:

$$x_۱x_۲=\frac{c}{a} \quad , \quad x_۱+x_۲=-\frac{b}{a} \quad , \quad |x_۲-x_۱|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

خط فکری دقت کنید در مدت $۳s$ متحرک از یک مکان $(x=-۲m)$ می‌گذرد و چنانچه لحظه‌های گذر از این مکان را حساب کنیم اختلاف آن‌ها $t_۲-t_۱=۳s$ است. معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم و به جای x مقدار $-۲m$ را قرار می‌دهیم. اما به جای به‌دست آوردن ریشه‌ها تفاضل آن‌ها $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ را حساب می‌کنیم.

با توجه به شکل، اختلاف زمانی دو بار گذر از مکان $x=-۲m$ برابر $۳s$ است. $(t_۲-t_۱=۳s)$



معادلهٔ مکان - زمان را نوشته، داده‌های مسأله را در آن قرار می‌دهیم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow -۲=\frac{۱}{۲}\times-۲\times t^۲+v_۰t-۱۲\Rightarrow t^۲-v_۰t+۱۰=۰$$

تفاضل دو ریشهٔ این معادله برابر ۳ است.

$$\Delta t=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\Rightarrow \Delta t=\frac{\sqrt{v_۰^۲-۴۰}}{۱}\Rightarrow ۳=\sqrt{v_۰^۲-۴۰}\Rightarrow v_۰^۲=۴۹\Rightarrow v_۰=۷m/s$$

B ۵۰۶ ۴

۱ معادله را به صورت معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت $(x-t)$ در می‌آوریم:

$$t=۱+\frac{\sqrt{۶۵-۱۰x}}{۵}\Rightarrow \frac{\sqrt{۶۵-۱۰x}}{۵}=t-۱\Rightarrow \sqrt{۶۵-۱۰x}=۵(t-۱)$$

$$\Rightarrow ۶۵-۱۰x=۲۵(t-۱)^۲\Rightarrow ۶۵-۱۰x=۲۵+۲۵t^۲-۵۰t$$

$$\Rightarrow ۱۰x=-۲۵t^۲+۵۰t+۴۰\Rightarrow x=-۲/۵t^۲+۵t+۴$$

۲ معادله را با معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت مقایسه کرده a و $v_۰$ را مشخص می‌کنیم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow x=-۲/۵t^۲+۵t+۴\Rightarrow\begin{cases}\frac{۱}{۲}a=-۲/۵\Rightarrow a=-۵m/s^۲\\ v_۰=۵m/s\\ x_۰=+۴m\end{cases}$$

۳ معادلهٔ سرعت - زمان خواهد شد. $v=-۵t+۵=۰\Rightarrow t=۱s$

t	۰	۱	
v		+	−
$a=-۵m/s^۲$		−	−
av		− (کندشونده)	+ (تندشونده)

بنابراین حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

میانبر هرگاه ضریب $t^۲$ (شتاب) و ضریب t (سرعت اولیه) در معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت مختلف‌العلامت باشند حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

۴ ۵۰۷ C

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، جابه‌جایی‌ها در بازه‌های زمانی یکسان و متوالی t تشکیل دنبالهٔ حسابی به قدر نسبت $at^۲$ می‌دهند.

با توجه به فرض مسئله در بازه‌های متوالی و یکسان t متحرک به‌ترتیب مسافت ۴۵ متر، ۲۷ متر و ۹ متر طی می‌کند بنابراین تفاضل هر دو مسافت متوالی باید برابر $at^۲$ باشد. اگر جهت حرکت را مثبت فرض کنیم چون حرکت کندشونده است شتاب حرکت در خلاف جهت حرکت بوده و منفی است. بنابراین شتاب حرکت $-۲m/s^۲$ است:

$$۴۵-۲۷=at^۲\Rightarrow ۱۸=۲t^۲\Rightarrow t=۳s$$

اکنون به کمک معادلهٔ سرعت - زمان، سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=(-۲)(۹)+v_۰\Rightarrow v_۰=۱۸m/s$$

۳ ۵۰۸ B

وقتی متحرکی با شتاب ثابت می‌ایستد یعنی شتاب $-a$ و حرکت کندشونده است، می‌توان فرض کرد در همان مدت با شتاب $+a$ از حال سکون شروع به حرکت کرده است. یعنی می‌توان حرکت در ثانیهٔ آخر را از سکون بررسی کرد. بدین ترتیب می‌توان نوشت:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲\Rightarrow ۳=\frac{۱}{۲}a\times ۱\Rightarrow a=۶m/s^۲$$

حال برای ۳s اول مسیر کندشونده می‌نویسیم:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow ۳۳=\frac{۱}{۲}(-۶)\times(۳)^۲+۳v_۰\Rightarrow v_۰=۲۰m/s$$

روش حل به کمک رسم نمودار سرعت - زمان

نمودار سرعت - زمان را رسم کنید. دقت کنید سطح زیر نمودار در ۱s آخر برابر ۳m است و در ثانیهٔ آخر سرعت از v به صفر می‌رسد. حساب می‌کنیم و در هر ثانیه سرعت به اندازهٔ شتاب a کم می‌شود بنابراین ابتدای ثانیهٔ آخر سرعت برابر a است. از این رو:

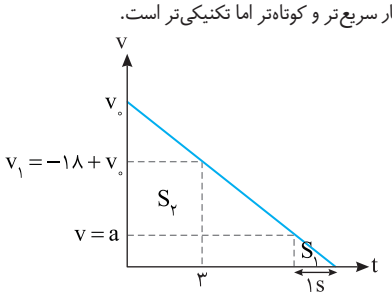
$$S_۱=\frac{a\times ۱}{۲}\Rightarrow ۳=\frac{a\times ۱}{۲}\Rightarrow a=۶m/s^۲$$

سرعت در لحظهٔ $t=۳s$ برابر است با: $v=at+v_۰\Rightarrow v_۱=-۶\times ۳+v_۰=-۱۸+v_۰$

اکنون سطح ذوزنقهٔ $S_۲$ را برابر ۳۳ متر قرار می‌دهیم.

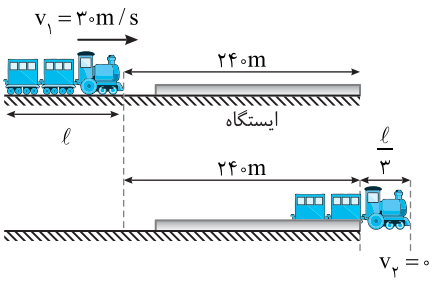
$$(-۱۸+v_۰+v_۰)\times\frac{۳}{۲}=۳۳\Rightarrow -۱۸+۲v_۰=۲۲\Rightarrow v_۰=۲۰m/s$$

روش اول بسیار سریع‌تر و کوتاه‌تر اما تکنیکی‌تر است.



۱ ۵۰۹ B

خط فکری فاصلهٔ ابتدای قطار تا انتهای ایستگاه ۲۴۰m است و هنگام توقف قطار، $\frac{۱}{۳}$ آن از ایستگاه عبور کرده یعنی کل مسافت طی‌شده توسط قطار $۲۴۰+\frac{\ell}{۳}$ است، بنابراین شما ابتدا باید مشخص کنید که این قطار با شتاب $-۱/۵m/s^۲$ و سرعت اولیه $۳۰m/s$ پس از طی مسافت چند متر می‌ایستد و این مقدار به‌دست آمده را با $۲۴۰+\frac{\ell}{۳}$ برابر قرار بدهید و طول قطار را به‌دست بیاورید.



۱ به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، مسافت طی شده توسط قطار در مدت توقف را به‌دست می‌آوریم: $v_۲^۲-v_۱^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-۹۰۰=۲\times(-۱/۵)\Delta x\Rightarrow\Delta x=۳۰۰m$

۲ بنابراین قطار بعد از ۳۰۰m متوقف می‌شود، در این صورت طول قطار را حساب می‌کنیم: $\Delta x=۲۴۰+\frac{\ell}{۳}\Rightarrow ۳۰۰=۲۴۰+\frac{\ell}{۳}\Rightarrow\ell=۱۸۰m$

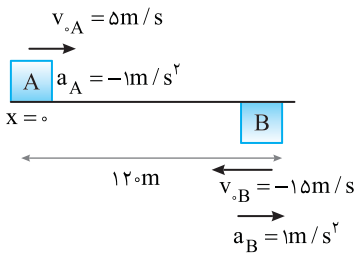
۳ برای آنکه طولی از قطار از انتهای ایستگاه عبور نکند باید سرعت قطار در مسافت ۲۴۰ متر از $۳۰m/s$ به صفر برسد. از این رو:

$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲a\Delta x\xrightarrow{v_۱=۳۰m/s,v_۲=۰,\Delta x=۲۴۰m}-۹۰۰=+۲a\times ۲۴۰$$

$$\Rightarrow a=-\frac{۱۵}{۸}m/s^۲$$

۱ ۵۱۰ C

۱ محل ابتدایی اتومبیل A را مبدأ مکان و جهت مثبت را مطابق شکل به سوی راست می‌گیریم. با توجه به جهت مثبت برای اتومبیل A $v_{۰A}=+۵m/s$ و شتاب $a_A=-۱m/s^۲$ می‌شود و سرعت اولیه B، $v_{۰B}=-۱۵m/s$ و شتاب حرکت B که خلاف جهت $v_{۰B}$ و در جهت مثبت محور است برابر $a_B=+۱m/s^۲$ می‌شود.



۲ معادلهٔ حرکت دو اتومبیل را می‌نویسیم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow\begin{cases}x_A=\frac{۱}{۲}(-۱)t^۲+۵t\\ x_B=\frac{۱}{۲}(۱)t^۲-۱۵t+۱۲۰/۵\end{cases}$$

۳ معادله‌های حرکت را مساوی قرار می‌دهیم.

$$x_A=x_B=\frac{-۱}{۲}t^۲+۵t=\frac{۱}{۲}t^۲-۱۵t+۱۲۰/۵\Rightarrow t^۲-۲۰t+۱۲۰/۵=۰$$

$$\Rightarrow\Delta'=۱۰۰-۱۲۰/۵<۰$$

چرا مسئله جواب ندارد؟ مگر دو متحرک به سوی هم نمی‌روند. در واقع در این حل هر متحرک متوقف شده و برمی‌گردد. در حالی که اتومبیل‌ها وقتی که متوقف می‌شوند برنمی‌گردند، از این‌رو باید مشخص کنیم که اتومبیل A پس از چند ثانیه می‌ایستد و در این مدت چند متر جلو می‌آید.

$v=at+v_0 \Rightarrow 0=(-1)t+5 \Rightarrow t=5s$

$\Delta x_A=\frac{1}{2}a_A t^2+v_{0_A}t \Rightarrow \Delta x_A=\frac{1}{2}\times(-1)(5)^2+5\times5 \Rightarrow \Delta x_A=12/5m$

بنابراین اتومبیل A پس از ۵s با طی مسافت ۱۲/۵m می‌ایستد و برای آنکه اتومبیل B به A برسد باید ۱۲۰/۵−۱۲/۵=۱۰۸m مسافت طی کند. اکنون بررسی کنیم B در چه مدتی ۱۰۸/۵m را طی می‌کند.

$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0 t \Rightarrow -108=\frac{1}{2}(1)t^2+(-15)t \Rightarrow t^2-30t+216=0$

حال با توجه به معادلهٔ درجه دوم، ریشه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$t_{1,2}=\frac{30\pm\sqrt{900-864}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{30\pm\sqrt{36}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1=12s \\ t_2=18s \end{cases}$

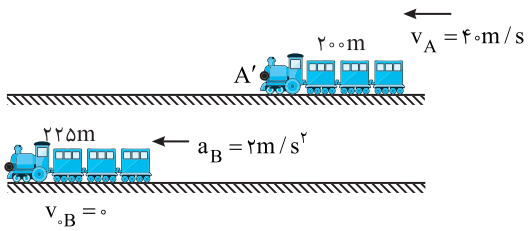
اکنون باید مشخص کنیم اتومبیل B پس از چه مدتی می‌ایستد؟

$v=at+v_0 \Rightarrow 0=-1\times t+15 \Rightarrow t_B=15s$

در نتیجه $t_1=12s$ قابل قبول است و $t_2=18s$ جواب مسئله نیست. زیرا از ۱۵s بیشتر است.

۴ ۵۱۱ B

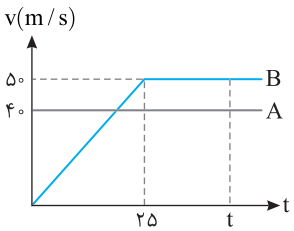
۱ شکل سادهٔ زیر را برای خود رسم کنید. تا متوجه شوید برای سبقت گرفتن از A باید قطار B، ۲۲۵+۲۰۰=۴۲۵ متر بیشتر از قطار A حرکت کند. چرا؟ برای آنکه سبقت B از A یعنی انتهای قطار B (نقطهٔ B') باید از ابتدای قطار A (نقطهٔ A') بگذرد.



۲ لحظه‌ای را که سرعت قطار B با شتاب $2m/s^2$ به $50m/s$ می‌رسد حساب کنید.

$v=at+v_0 \Rightarrow 50=2t+0 \Rightarrow t=25s$

۳ نمودار سرعت - زمان دو متحرک را مطابق شکل روبه‌رو رسم کنید.



۴ سطح زیر نمودار B باید ۴۲۵m از سطح زیر نمودار A بیشتر باشد.

$S_B=S_A+425 \Rightarrow (t+t-25)\times\frac{50}{2}=40t+425 \Rightarrow 50t-625=40t+425$

$\Rightarrow 10t=1050 \Rightarrow t=105s$

۲ ۵۱۲ C

خط فکری زمان واکنش یعنی بازهٔ زمانی که راننده مانع را می‌بیند تا لحظه‌ای که پدال ترمز را می‌فشرد. در این بازه زمانی می‌توان حرکت را یکنواخت فرض کرد. مسافتی که خودروی A طی می‌کند ۱۱۰ متر است. شما باید جابه‌جایی در مدت ترمز را حساب کرده از ۱۱۰ متر کم کنید و جابه‌جایی در زمان واکنش را به‌دست بیاورید تا بتوانید زمان واکنش A را حساب کرده به سراغ خودروی B بروید.

۱ جابه‌جایی خودروی A با شتاب $-2m/s^2$ و سرعت اولیهٔ $+20m/s$ تا لحظهٔ توقف خواهد شد:

$v^2-v_0^2=2a\Delta x \Rightarrow 0-20^2=2\times(-2)\times\Delta x \Rightarrow \Delta x=100m$

۲ بنابراین راننده پس از طی مسافت $110-100=10m$ ترمز می‌گیرد و این ۱۰ متر را با تندی $20m/s$ می‌رود. زمان واکنش A را حساب می‌کنیم.

$\Delta x=vt \Rightarrow 10=20t \Rightarrow t_A=0/5s$

۳ زمان واکنش A نصف زمان واکنش B است. از این‌رو زمان واکنش B خواهد شد:

$t_A=0/5t_B \Rightarrow 0/5=t_B \Rightarrow t_B=1s$

۴ در این مدت خودروی B با تندی $18m/s$ مسافت زیر را طی می‌کند.

$\Delta x_B=v_B t \Rightarrow \Delta x_{B_1}=18\times1 \Rightarrow \Delta x_{B_1}=18m$

۵ جابه‌جایی B حین ترمز گرفتن خواهد شد:

$v^2-v_0^2=2a\Delta x \Rightarrow 0-(18)^2=2(-2)\Delta x \Rightarrow \Delta x_{B_2}=81m \Rightarrow \Delta x=81m$

۶ بنابراین خودروی B پس از طی مسافت $81+18=99m$ در فاصلهٔ $110-99=11$ متری مانع می‌ایستد.

۲ ۵۱۳ C

حل با رسم نمودار سرعت - زمان

نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم اما چگونه؟

۱ در مدت ۲۰s سرعت متحرک با شتاب ثابت a از صفر به مقدار v می‌رسد سپس شتاب آن $-a$ می‌شود، بنابراین در همان مدت ۲۰s سرعت متحرک صفر می‌شود، یعنی در لحظهٔ $t=40s$ متوقف شده سرعتش منفی می‌شود.

۲ متحرک می‌خواهد به مبدأ حرکت برگردد یعنی جابه‌جایی آن صفر شود. $\Delta x=0$

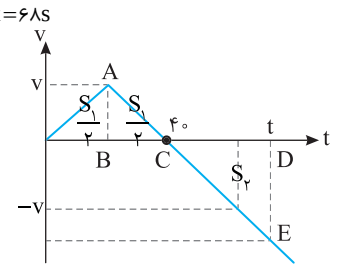
۳ جابه‌جایی برابر سطح زیر نمودار $v-t$ است، بنابراین سطح زیر نمودار در بازهٔ صفر تا (S_1) 40s باید با سطح زیر نمودار در بازهٔ 40s تا (S_2) t برابر شود.

۴ سطح S_1 به دو قسمت مساوی تقسیم شده است. یعنی S_1 دو برابر سطح مثلث ABC است و برابر با سطح مثلث CDE است $(S_2=S_1)$. $S_{CDE}=2S_{ABC}$

۵ دو مثلث ABC و CDE متشابه‌اند و در مثلث‌های متشابه نسبت مساحت‌ها برابر توان ۲ نسبت تشابه است.

$\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}}=(\frac{CD}{BC})^2 \Rightarrow 2=(\frac{t-40}{20})^2 \Rightarrow t-40=20\sqrt{2} \Rightarrow t=40+20\sqrt{2}$

$\xrightarrow{\sqrt{2}=1/4} t=68s$



روش تحلیلی با معادلات حرکت با شتاب ثابت

۱ ابتدا متحرک با شتاب ثابت a از حال سکون شروع به حرکت کرده و بعد از ۲۰s سرعت آن خواهد شد:

$v=at+v_0 \Rightarrow v=a\times20+0 \Rightarrow v=20a$

برای آن‌که مجدداً به مکانی برسیم که در ابتدا سرعت $20a$ بوده باید متحرک مسیر رفت را بازگردد و به همان مکان برسد. چون شتاب حرکت ثابت است بنابراین در لحظهٔ بازگشت به مکان x_1 تندی برابر $20a$ اما جهت آن قرینه خواهد بود، بنابراین حرکت بازگشت قرینهٔ حرکت رفت است.

۲ در لحظهٔ $t=20s$، شتاب قرینه می‌شود $(a_2=-a)$ زمان توقف را حساب می‌کنیم.

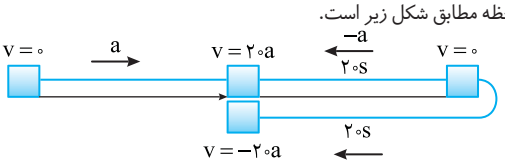
$v=at+v_0 \Rightarrow 0=-a\times t+20a \Rightarrow t=20s$

۳ بنابراین متحرک در لحظهٔ $t=40s$ سرعتش صفر شده و برمی‌گردد.

۴ لحظه‌ای که سرعتش برابر $-20a$ می‌شود را حساب می‌کنیم.

$v=at+v_0 \Rightarrow -20a=(-a)t+0 \Rightarrow t=20s$

بنابراین در لحظهٔ $t=40+20=60s$ سرعت متحرک $-20a$ می‌شود و مسیر حرکت تا این لحظه مطابق شکل زیر است.



۵ از این لحظه $(t=۶۰s)$ متحرک باید جابه‌جایی x را طی کند تا به مبدأ حرکتش برگردد. ابتدا x را حساب می‌کنیم. $x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}a(۲۰)^۲+۰\Rightarrow x=۲۰۰a$

۶ اکنون زمان طی x را در مسیر برگشت حساب می‌کنیم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\xrightarrow[a_۲=-a\,,\,v_۰=-۲۰a]{x=-۲۰۰a}-۲۰۰a=\frac{۱}{۲}(-a)t^۲+(-۲۰a)t$$

$$۲۰۰=\frac{۱}{۲}t^۲+۲۰t\Rightarrow t^۲+۴۰t-۴۰۰=۰\Rightarrow t=-۲۰\pm\sqrt{۴۰۰+۴۰۰}$$

$$\Rightarrow t=-۲۰\pm۲۰\sqrt{۲}\xrightarrow{\sqrt{۲}=۱/۴}\begin{cases}t=-۲۰-۲۸=-۴۸s & \text{غ ق ق}\\ t=-۲۰+۲۸=۸s\end{cases}$$

۷ بنابراین متحرک در مدت $۶۰+۸=۶۸s$ به مبدأ حرکتش برمی‌گردد.

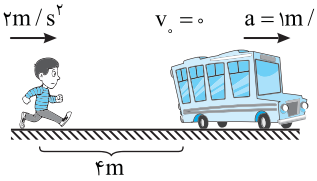
B ۵۱۴ ۱

خط فکری از زندگی روزمره می‌توانید درک کنید که اگر اتومبیل B به دنبال اتومبیل A در حرکت باشد تا لحظه‌ای که سرعت اتومبیل B از سرعت اتومبیل A بیشتر باشد، اتومبیل B به اتومبیل A نزدیک می‌شود، اگر $v_B=v_A$ باشد، فاصلهٔ دو اتومبیل تغییر نمی‌کند و اگر سرعت اتومبیل B از اتومبیل A کمتر شود، فاصلهٔ دو اتومبیل افزایش می‌یابد. در صورت مسئله بیان شده که متحرک A از حال سکون شروع به حرکت کرده و با شتاب ثابت بر سرعت خود می‌افزاید. اتومبیل B، سرعتش ثابت و برابر $۱۵m/s$ است. تا لحظه‌ای که سرعت اتومبیل A از $۱۵m/s$ کمتر است، B به آن نزدیک می‌شود و وقتی سرعت A از $۱۵m/s$ بیشتر شد، فاصلهٔ دو اتومبیل از هم زیاد می‌شود. بنابراین در مدت $۵s$ با شتاب a نباید سرعت A به $۱۵m/s$ رسیده باشد. از این رو می‌توان نوشت: $v=at<۱۵\Rightarrow ۵a<۱۵\Rightarrow a<۳m/s^۲$

توجه کنید اگر شتاب حرکت بزرگ‌تر از $۳m/s^۲$ باشد پس از $۵s$ تندی متحرک A بزرگ‌تر از $۱۵m/s$ بوده فاصلهٔ آن از متحرک B دائماً افزایش می‌یابد.

B ۵۱۵ ۳

خط فکری دقت کنید در لحظه‌ای که اتوبوس با شتاب $۱m/s^۲$ شروع به حرکت می‌کند، سرعت شخص $۲m/s$ است و شخص به اتوبوس نزدیک می‌شود اما پس از $۲s$، سرعت اتوبوس $v=at=۱\times۲=۲m/s$ شده و از آن به بعد فاصلهٔ اتوبوس از شخص شروع به افزایش می‌کند. در نتیجه کمینه فاصلهٔ بین شخص و اتوبوس در $t=۲s$ اتفاق می‌افتد، بنابراین شما جابه‌جایی شخص و اتوبوس را در مدت $۲s$ پیدا کرده و مسئله را حل کنید.



راه‌حل اول:

۱ جابه‌جایی شخص در مدت $۲s$ خواهد شد:

$$\Delta x_{ش}=vt\Rightarrow\Delta x_{ش}=۲\times۲=۴m$$

۲ جابه‌جایی اتوبوس در مدت $۲s$ را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x_{اتو}=\frac{۱}{۲}at^۲\Rightarrow\Delta x_{اتو}=\frac{۱}{۲}\times۱\times(۲)^۲\Rightarrow\Delta x_{اتو}=۲m$$

۳ فاصلهٔ ابتدایی اتوبوس و شخص ۴ متر بوده است. شخص $۴m$ جلو آمده و در این مدت اتوبوس نیز دو متر جلو می‌رود و فاصلهٔ شخص تا اتوبوس $۴-۲=۲m$ می‌شود.

راه‌حل دوم: چون شخص با سرعت ثابت $۲m/s$ در حال دویدن است، در نتیجه از معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت استفاده می‌کنیم. اگر مبدأ مختصات را مکان شخص، وقتی که در فاصلهٔ ۴ متری از انتهای اتوبوس قرار دارد در نظر بگیریم، داریم:

$$x_{ش}=vt+x_۰\xrightarrow[x_۰=۰]{v=۲m/s}x_{ش}=۲t$$

اتوبوس هم با شتاب ثابت حرکت خود را آغاز می‌کند، بنابراین:

$$x_{اتو}=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\xrightarrow[x_۰=۴m]{a=۱m/s^۲\,,\,v_۰=۰}x_{اتو}=\frac{۱}{۲}\times۱\times t^۲+۰\times t+۴$$

$$\Rightarrow x_{اتو}=\frac{t^۲}{۲}+۴$$

برای به دست آوردن حداقل فاصلهٔ شخص از اتوبوس، باید از معادلهٔ تفاضل مکان اتوبوس و شخص بهره ببریم: $\Delta x=\frac{t^۲}{۲}-۲t+۴$

با توجه به این‌که معادلهٔ به دست آمده تابع درجهٔ ۲ است مقدار کمینه تابع (یعنی رأس سهمی) خواهد شد:

$$t=-\frac{b}{۲a}\Rightarrow t=-\left(\frac{-۲}{۲\times\frac{۱}{۲}}\right)\Rightarrow t=۲s\ ,\ \Delta x_{min}=۲-۴+۴=۲m$$

B ۵۱۶ ۲

بردار مکان وقتی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ بگذرد، یعنی $x=۰$ شود. البته باید در این لحظه بردار مکان تغییر علامت دهد. معادلهٔ حرکت را مساوی صفر $(x=۰)$ قرار می‌دهیم. $x=۰\Rightarrow t^۲-۶t+۹=۰\Rightarrow(t-۳)^۲=۰\Rightarrow t=۳s$

مقدار $(t-۳)^۲$ همواره مثبت است یعنی مکان همواره مثبت است و با آنکه در $t=۳s$ مکان صفر می‌شود اما بردار مکان تغییر علامت نمی‌دهد. متحرک در تمام مسیرش در قسمت مثبت محور در حرکت است و در لحظهٔ $t=۳s$ به مبدأ رسیده از آن عبور نکرده و برمی‌گردد. متحرک تغییر جهت می‌دهد، اما بردار مکان آن همواره مثبت است. پس، بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

C ۵۱۷ ۲

خط فکری موتورسوار با تندی ثابت $۱۶m/s$ در حرکت است و حرکت آن یکنواخت است. خودرو دارای سرعت $۲۴m/s$ است و با شتاب $۴m/s^۲$ از سرعت خود می‌کاهد و تا لحظه‌ای که سرعت آن به $۱۶m/s$ برسد، در حال نزدیک شدن به موتورسوار است. یعنی کمترین فاصلهٔ بین موتورسوار و خودرو لحظه‌ای است که سرعت خودرو $۱۶m/s$ شود.

۱ در مدت $۰/۵s$ جابه‌جایی خودرو و موتورسوار را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases}\Delta x_{خودرو}=v_{خودرو}t\Rightarrow\Delta x_{خودرو}=۲۴\times۰/۵=۱۲m\\ \Delta x_{موتورسوار}=v_{موتورسوار}t\Rightarrow\Delta x=۱۶\times۰/۵=۸m\end{cases}\Rightarrow ۱۲-۸=۴m$$

۲ بنابراین در لحظه‌ای که خودرو ترمز می‌کند، فاصلهٔ آن از موتورسوار برابر است با: $۵۰-۴=۴۶m$

۳ مدت زمانی که طول می‌کشد تا سرعت خودرو $۱۶m/s$ شود را به‌دست می‌آوریم. $v=at+v_۰\Rightarrow ۱۶=-۴\times t+۲۴\Rightarrow t=۲s$

۴ جابه‌جایی موتورسوار و خودرو را در مدت $۲s$ حساب می‌کنیم.

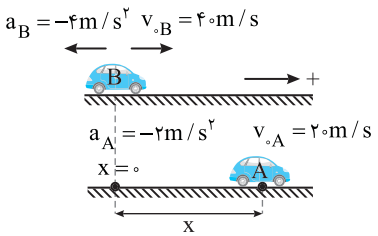
$$\Delta x_{موتورسوار}=v_{موتورسوار}t=۱۶\times۲\Rightarrow\Delta x_{موتورسوار}=۳۲m$$

$$\Delta x_{خودرو}=\frac{v+v_۰}{۲}t\Rightarrow\frac{۱۶+۲۴}{۲}\times۲\Rightarrow\Delta x_{خودرو}=۴۰m$$

۵ یعنی در این دو ثانیه خودرو $۴۰-۳۲=۸m$ به موتورسوار نزدیک می‌شود. بنابراین کمینه فاصلهٔ آن‌ها از هم برابر است با: $\Delta x_{min}=۴۶-۸=۳۸m$

B ۵۱۸ ۳

۱ با توجه به صورت مسئله شکل زیر را رسم می‌کنیم. مکان اولیهٔ متحرک B را مبدأ مکان و سمت راست را جهت مثبت اختیار می‌کنیم.



۲ معادلهٔ حرکت متحرک A را می‌نویسیم.

$$x_A=\frac{۱}{۲}a_At^۲+v_{۰_A}t+x_۰\Rightarrow x_A=\frac{۱}{۲}\times(-۲)t^۲+۲۰t+x\Rightarrow x_A=-t^۲+۲۰t+x$$

۳ مکان متحرک A را در مدت ۴s به‌دست می‌آوریم.

$t=4s \Rightarrow x_A=-16+20\times4+x \Rightarrow x_A=64+x$

۴ متحرک B به مدت ۱s با همان سرعت $40m/s$ به حرکت خود ادامه می‌دهد سپس با شتاب $-4m/s^2$ ترمز می‌گیرد. بنابراین در مدت ۴s متحرک B، ۱s دارای حرکت یکنواخت و ۳s دارای حرکت با شتاب ثابت است. مکان آن در $t=4s$ را حساب می‌کنیم.

$x_B=vt_{\text{تاخیر}}+\left(\frac{1}{2}at'^2+v_0t'\right) \Rightarrow x_B=40\times1+\frac{-1}{2}\times4\times3^2+40\times3$

$\Rightarrow x_B=40-18+120 \Rightarrow x_B=142m$

۵ در $t=4s$ مکان دو متحرک یکی است بنابراین:

$x_A=x_B \Rightarrow 64+x=142 \Rightarrow x=78m$

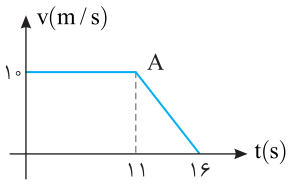
B ۳ ۵۱۹

خط فکری به دلیل اینکه دو متحرک از یک نقطه در مبدأ زمان عبور کرده‌اند، پس زمانی به هم می‌رسند که جابه‌جایی یکسانی داشته باشد، پس نمودار $v-t$ دو متحرک را رسم می‌کنیم و با توجه به سطح زیر نمودار می‌توان جابه‌جایی را به‌دست آورد:

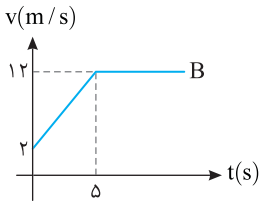
۱ متحرک A در ابتدا تا لحظهٔ $t=11s$ با تندی ثابت $10m/s$ حرکت می‌کند و بعد از آن با شتاب $a=-2m/s^2$ از تندی خود کاسته تا متوقف شود:

$v_1=10m/s \ , v_2=0 \ , \ \Delta t=(t'-11) \ , \ a=-2m/s^2$

$v_2=a(t'-11)+v_1 \Rightarrow 0=-2(t'-11)+10 \Rightarrow t'-11=5 \Rightarrow t'=16s$



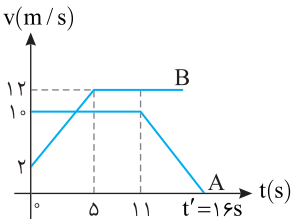
۲ متحرک B از تندی $2m/s$ شروع به حرکت کرده و مدت ۵s به طور شتابدار حرکت می‌کند و سپس با تندی ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد و چون دو متحرک به هم می‌رسند، پس باید علامت تندی هر دو متحرک یکسان باشد:



$v'_2=? \ , \ v'_1=2m/s \ , \ t=5s \ , \ a'=2m/s^2$

$v'_2=a't+v'_1 \Rightarrow v'_2=2\times5+2 \Rightarrow v'_2=12m/s$

۳ نمودار $v-t$ دو متحرک به صورت روبه‌رو است:



۴ هر دو متحرک از یک نقطه (مبدأ مختصات) شروع به حرکت کرده‌اند، پس برای آنکه دو متحرک به هم برسند باید جابه‌جایی هر دو متحرک یکسان باشد. ابتدا جابه‌جایی دو متحرک تا لحظهٔ $t=5s$ را از سطح زیر نمودار $v-t$ به‌دست می‌آوریم:

$\Delta x_A=S_A=10\times5=50m \ , \ \Delta x_B=S_B=\frac{5\times(2+12)}{2}=35m$

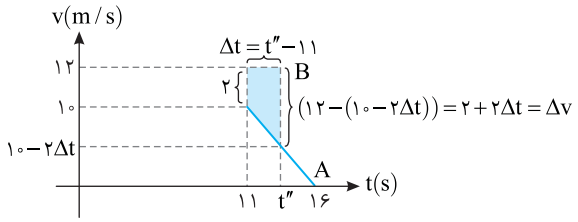
۵ تندی اولیهٔ متحرک A بیشتر از تندی اولیهٔ متحرک B است و در ابتدا A از متحرک B جلو زده و همانطور که در حساب کردن جابه‌جایی مشخص است متحرک A در ۵s اولیه بیشتر از متحرک B جابه‌جا شده است و این دو در این مدت به هم نمی‌رسند. حال جابه‌جایی در بازهٔ صفر تا ۱۱s را حساب می‌کنیم. $\Delta x_A=11\times10=110m \ , \ \Delta x_B=35+(12\times6)=107m$

۶ بنابراین تا لحظهٔ $t=11s$ متحرک A به اندازهٔ $110-107=3m$ جلوتر از متحرک B است و اگر در لحظهٔ t'' این دو متحرک به هم برسند باید جابه‌جایی متحرک B از $t=11s$ تا t'' به اندازهٔ $3m$ بیشتر از جابه‌جایی متحرک A در این بازه باشد و با توجه به نمودار، سرعت متحرک در لحظهٔ t'' را به‌دست می‌آوریم.

$\Delta x_B-\Delta x_A=3m \xrightarrow[\text{جابه‌جایی برابر سطح رنگی ذوزنقه شکل زیر نمودار است}]{\text{با توجه به شکل این اختلاف}}$

$\frac{(\Delta t)\times((2\Delta t+2)+2)}{2}=3 \Rightarrow (\Delta t)(2\Delta t+4)=6$

$\Delta t(\Delta t+2)=3 \Rightarrow \Delta t=1s \ , \ t''=11+1=12s$

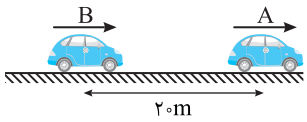


۷ بنابراین دو متحرک در لحظهٔ $t''=12$ به یکدیگر می‌رسند و اختلاف سرعت متحرک یعنی Δv برابر است با: $\Delta v=2+2\times1=4m/s$

B ۳ ۵۲۰

خط فکری سه متحرک همزمان شروع به حرکت کرده‌اند و در یک لحظه از کنار هم می‌گذرند. بنابراین شما باید ابتدا زمان رسیدن متحرک B به متحرک A را به‌دست بیاورید. سپس معادلهٔ متحرک C و متحرک A را نوشته برابر قرار دهید.

۱ متحرک B با سرعت ثابت حرکت می‌کند و در هر ثانیه ۲ متر به متحرک A نزدیک می‌شود، بنابراین بعد از ۱۰s فاصلهٔ ۲۰m بین A و B را جبران خواهد کرد و در این لحظه متحرک C کنار آن‌هاست.

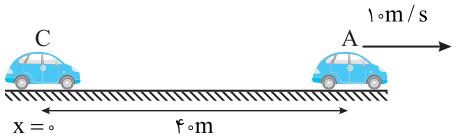


۲ معادلهٔ حرکت A و C را نوشته برابر قرار می‌دهیم.

$x_C=\frac{1}{2}at^2 \xrightarrow{t=10s} x_{C'}=50a$

$x_A=v_At+x_0 \Rightarrow x_A=10t+40 \xrightarrow{t=10s} x_A=140m$

در لحظهٔ $t=10s$: $x_C=x_A \Rightarrow 50a=140 \Rightarrow a=2/8m/s^2$



C ۲ ۵۲۱

نکته می‌توان ثابت کرد که هرگاه دو متحرک خلاف جهت هم با سرعت‌های v_1 و v_2 حرکت کنند چنانچه یکی از آن‌ها را ساکن فرض کنیم، سرعت دیگری نسبت به آن از جمع اندازهٔ سرعت‌ها به‌دست می‌آید. $v=v_1+v_2$

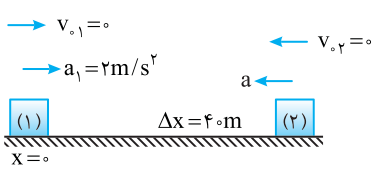
نکته می‌توان ثابت کرد که هرگاه شتاب دو متحرک در خلاف جهت هم باشد می‌توان یکی از آن‌ها را ساکن فرض کرده و شتاب دیگری را نسبت به آن از جمع اندازهٔ شتاب‌ها به‌دست آورد.

با توجه به شکل می‌توان فرض کرد یکی از آن‌ها ساکن است و دیگری پس از طی مسیر $40m$ به اولی می‌رسد.

چون شتاب‌ها در خلاف جهت هم هستند: $a_{\text{نسبی}}=a_1+a_2=2+a$

حال می‌توان روابط نسبی را به کار برد. $v^2_{\text{نسبی}}-v^2_{0\text{نسبی}}=2a_{\text{نسبی}}\Delta x$

$\Rightarrow 20^2-0=2(2+a)\times40 \Rightarrow 400=80(2+a) \Rightarrow a=3m/s^2$

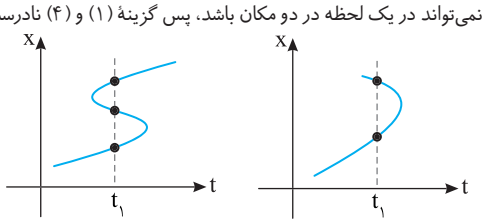


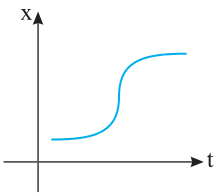
پنجره ۴

B ۵۲۲ ۳

خط فکری دقت کنید که نمودار مکان - زمان به ما در هر لحظه مکان متحرک را نشان می‌دهد و یک متحرک در یک لحظه نمی‌تواند در دو مکان مختلف باشد از این‌رو یک خط عمود بر محور زمان (t) رسم کنید اگر نمودار را در دو یا چند نقطه قطع کند این نمودار نمی‌تواند نمودار مکان - زمان باشد. از طرفی در هیچ نقطه‌ای خط مماس بر نمودار نباید بر محور زمان عمود شود زیرا در این صورت شیب خط مماس که برابر سرعت لحظه‌ای است بی‌نهایت می‌شود حال با توجه به این نکات گزینهٔ درست را انتخاب کنید.

متحرک نمی‌تواند در یک لحظه در دو مکان باشد، پس گزینهٔ (۱) و (۴) نادرست است.



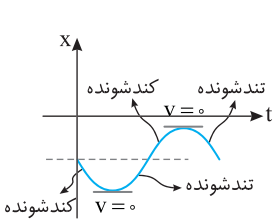


شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ برابر سرعت متحرک است، در لحظهٔ نشان داده شده خط مماس در نمودار گزینهٔ (۲) خط قائم است که شیب آن ∞ می‌باشد، بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است. در نتیجه گزینهٔ (۳) درست است.

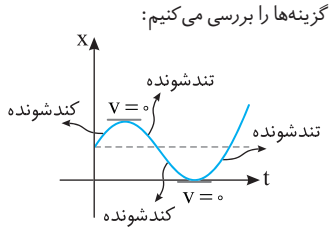
B ۵۲۳ ۴

نکته هرگاه متحرک تغییر جهت بدهد، سرعت آن صفر می‌شود و برای ادامهٔ حرکت باید نوع حرکت آن تغییر کند. یعنی قبل از صفر شدن سرعت، باید حرکت کندشونده و بعد از آن تندشونده باشد.

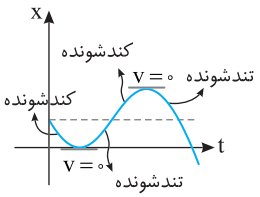
گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



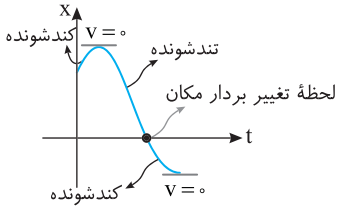
گزینهٔ (۱)



گزینهٔ (۲)



گزینهٔ (۳)



گزینهٔ (۴)

در گزینهٔ (۱) مطابق شکل، متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد و نوع حرکت ۳ بار تغییر کرده و نمودار محور - زمان را قطع نمی‌کند یعنی بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد و گزینهٔ (۱) نادرست است.

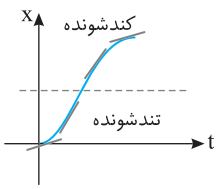
در گزینهٔ (۲) متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد و نوع حرکت ۳ بار تغییر کرده و یک بار مکان آن صفر می‌شود $(x=0)$ اما بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد و گزینهٔ (۲) نادرست است.

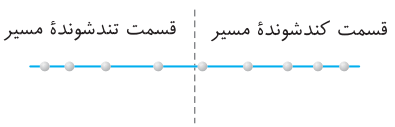
در گزینهٔ (۳) نیز متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد و نوع حرکت ۳ بار تغییر کرده اما از مبدأ مکان $(x=0)$ نمی‌گذرد و بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهند و گزینهٔ (۳) نادرست است.

در گزینهٔ (۴) نوع حرکت دو بار تغییر کرده و نمودار یک بار محور زمان را قطع می‌کند، یعنی بردار مکان یک بار تغییر جهت می‌دهد و گزینهٔ (۴) درست است.

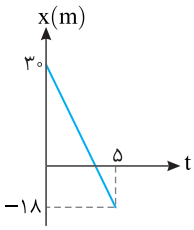
B ۵۲۴ ۳

با توجه به نمودار $x-t$ ابتدا حرکت تندشونده و سپس کندشونده است، بنابراین در قسمت اول حرکت در فاصله‌های زمانی یکسان متحرک مسافت بیشتری طی می‌کند و در قسمت دوم حرکت در فاصله‌های زمانی یکسان متحرک مسافت کمتری را طی می‌کند.





A ۵۲۵ ۴



نمودار مکان - زمان خط راست و متحرک دارای سرعت ثابت است. از این‌رو سرعت متحرک برابر شیب نمودار است.

۱ به کمک داده‌های روی نمودار سرعت را به‌دست می‌آوریم.

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v=\frac{-۱۸-۳۰}{۵-۰}=\frac{-۴۸}{۵}\Rightarrow v=-۹/۶m/s$$

۲ معادله حرکت خواهد شد:

$$x=vt+x_0\Rightarrow x=-۹/۶t+۳۰$$

۳ در $t=۳s$ مکان را حساب نمی‌کنیم:

$$x=-۹/۶\times۳+۳۰=-۲۸/۸+۳۰\Rightarrow x=+۱/۲m$$

۴ جابه‌جایی در مدت $۳s$ خواهد شد:

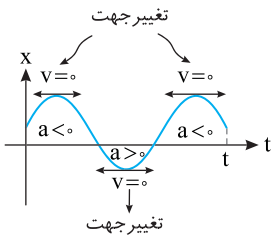
$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow \Delta x=-۹/۶\times۳=-۲۸/۸m$$

A ۵۲۶ ۴

یادآوری ۱ در نقاط کمینه و بیشینه نمودار مکان - زمان، سرعت صفر بوده و متحرک تغییر جهت می‌دهد (به شرط تغییر علامت شیب خط مماس بر نمودار).

۲ هرگاه دهانهٔ (تقعر) نمودار مکان - زمان رو به بالا باشد، شتاب مثبت و اگر رو به پایین باشد شتاب منفی است.

نمودار دارای سه نقطه بیشینه و کمینه است و سه بار متحرک تغییر جهت می‌دهد و گزینهٔ (۱) درست و گزینهٔ (۳) نادرست است.

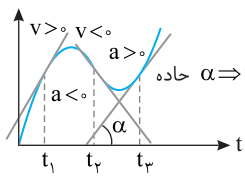


ابتدا شتاب منفی سپس شتاب مثبت و سرانجام شتاب منفی شده است.

بنابراین شتاب دو بار تغییر علامت داده است و گزینهٔ (۲) درست است.

A ۵۲۷ ۳

در لحظهٔ t_1، شیب خط مماس بر نمودار مثبت است، پس سرعت مثبت است. اما جهت تقعر نمودار رو به پایین است، پس شتاب منفی است و در لحظهٔ t_1، $av<۰$ است و حرکت کندشونده و گزینهٔ (۱) نادرست است.



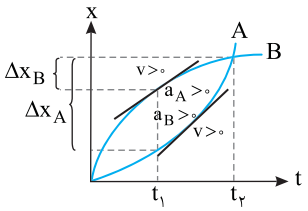
حاده $\alpha\Rightarrow\tan\alpha>۰\Rightarrow v>۰$

در لحظهٔ t_2، سرعت منفی است زیرا شیب خط مماس بر نمودار منفی است (خط مماس در لحظهٔ t_2 با محور زمان زاویهٔ منفرجه می‌سازد) اما در مورد علامت شتاب نمی‌توان اظهارنظر کرد یعنی جایی که جهت تقعر منحنی و در نتیجه علامت شتاب عوض می‌شود، مشخص نیست پس نوع حرکت در لحظهٔ t_2 مشخص نیست و گزینهٔ (۲) نادرست است. در لحظهٔ t_3 جهت تقعر رو به بالا است، پس شتاب مثبت و شیب خط مماس بر نمودار نیز مثبت است و حرکت تندشونده است و گزینهٔ (۳) درست است.

در لحظهٔ t_3 حرکت تندشونده $\Rightarrow a_3>۰\ ,\ v_3>۰$ $(av>۰)$

B ۵۲۸ ۳

برای بررسی و مقایسه سرعت متوسط دو متحرک در بازهٔ t_1 تا t_2 باید جابه‌جایی دو متحرک را بررسی کنید. در بازهٔ t_1 تا t_2 جابه‌جایی A از B بیشتر بوده و سرعت متوسط A از سرعت متوسط B بزرگ‌تر است و گزینهٔ (۱) و (۴) نادرست است.

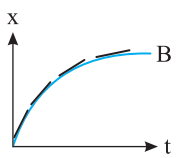


برای بررسی نوع حرکت دو راه وجود دارد.

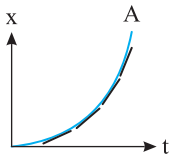
۱ علامت شتاب و سرعت را در بازهٔ زمانی داده شده مشخص کنید. اگر هم‌علامت باشند حرکت تندشونده و اگر مختلف‌العلامت باشند حرکت کندشونده است.

جهت تقعر نمودار A رو به بالا بوده پس شتاب آن مثبت است و اگر در بازهٔ t_1 تا t_2 بر منحنی A مماس رسم شود، شیب خط مماس مثبت بوده در نتیجه سرعت نیز مثبت است، بنابراین حرکت تندشونده $(av>0)$ است. اما جهت تقعر نمودار B رو به پایین بوده پس شتاب آن منفی است و شیب خط مماس بر نمودار B در بازهٔ t_1 تا t_2 مثبت بوده درنتیجه سرعت مثبت است، بنابراین حرکت B کندشونده $(av<0)$ است و گزینهٔ (۲) نادرست و گزینهٔ (۳) درست است.

۲ روش دوم این است که تعدادی خط مماس بر نمودار رسم کنید اگر خط مماس به سمت افقی شدن برود حرکت کندشونده و اگر به سمت قائم شدن برود حرکت تندشونده است.



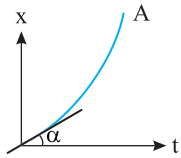
حرکت B کندشونده است



حرکت A تندشونده است

A ۵۲۹ ۳

راه‌حل اول: چون نمودار مکان- زمان بخشی از سهمی است، پس حرکت با شتاب ثابت است. در لحظهٔ $t=0$ منحنی بر محور t مماس نبوده، پس سرعت اولیه صفر نیست بلکه $v_0>0$ است. جهت تقعر منحنی رو به بالا است، پس شتاب مثبت است و چون سرعت اولیه مثبت است حرکت تندشونده است.



خط مماس بر نمودار در $t=0$ $\Rightarrow v_0 \neq 0$

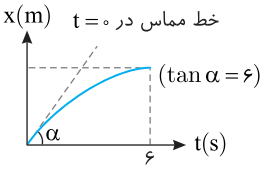
راه‌حل دوم: اگر بر منحنی چند مماس در لحظه‌های مختلف رسم کنید، مشاهده می‌کنید که با گذشت زمان، شیب این خط‌های مماس در حال افزایش است، پس سرعت در حال زیاد شدن بوده و حرکت تندشونده است.

A ۵۳۰ ۱

نکته شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان برابر سرعت لحظه‌ای است.

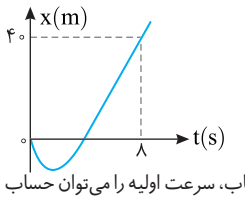
با توجه به نمودار شیب خط مماس بر نمودار در $t=0$ $(\tan\alpha=6)$ سرعت اولیهٔ متحرک $6m/s$ و در لحظهٔ $t=6s$ که خط مماس بر نمودار موازی محور زمان است سرعت صفر است، بنابراین به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب (فرمول طلایی) مسئله قابل حل است.

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t \Rightarrow \Delta x=\frac{0+6}{2}\times 6 \Rightarrow \Delta x=18\,m$$



A ۵۳۱ ۲

شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در هر لحظه برابر سرعت در آن لحظه‌ای است در صورت مسئله بیان شده که در لحظهٔ $t=8s$، شیب خط مماس ۲۰ واحد SI است یعنی سرعت $v=20m/s$ است. در بازهٔ صفر تا ۸s جابه‌جایی ۴۰m بوده و به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب، سرعت اولیه را می‌توان حساب کرد.



$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t \Rightarrow 40=\frac{20+v_0}{2}\times 8 \Rightarrow v_0=-10\,m/s$$

شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$a=\frac{v-v_0}{t} \Rightarrow a=\frac{20-(-10)}{8}=3/75\,m/s^2$$

B ۵۳۲ ۴

خط فکری ریشه‌های معادلهٔ مکان - زمان این حرکت یعنی $t=2s$ و $t=5s$ و مکان اولیهٔ آن را در اختیار داریم. بنابراین ابتدا معادلهٔ مکان - زمان را به کمک معادلهٔ سهمی می‌نویسیم سپس معادلهٔ سرعت زمان را به‌دست آورده و مسئله را حل می‌کنیم.

معادلهٔ سهمی به‌صورت روبه‌رو است. $x=A(t-t_1)(t-t_2)$

که در آن t_1 و t_2 ریشه‌های معادله هستند که در این نمودار $t_1=2s$ و $t_2=5s$ است. در لحظهٔ $t=0$ نیز مکان $+20m$ است. بنابراین:

$$x=A(t-2)(t-5) \xrightarrow{t=0} 20=A(-2)(-5) \Rightarrow A=2$$

معادلهٔ مکان زمان خواهد شد:

$$x=2(t-2)(t-5) \Rightarrow x=2(t^2-7t+10) \Rightarrow x=2t^2-14t+20$$

معادلهٔ سرعت زمان را می‌نویسیم:

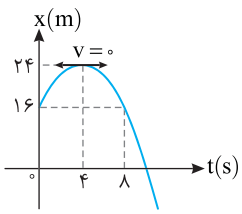
$$\frac{1}{2}a=2 \Rightarrow a=4\,m/s^2, v_0=-14\,m/s$$

$$v=4t-14 \xrightarrow{t=5s} v=4\times 5-14 \Rightarrow v=6\,m/s$$

B ۵۳۳ ۱

خط فکری نمودار مکان - زمان سهمی است و سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس متقارن است. به نمودار دقت کنید در لحظهٔ $t=0$ و $t=8s$ مکان $x=16m$ است. بنابراین لحظهٔ رأس سهمی $t=4s$ خواهد بود و در این لحظه سرعت صفر است. اکنون می‌توانید با این اطلاعات مسئله را حل کنید.

۱ نمودار مکان - زمان سهمی است و حرکت شتابدار با شتاب ثابت است. در لحظهٔ $t=4s$ سرعت صفر می‌شود بنابراین سرعت اولیه خواهد شد:



$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t \Rightarrow (24-16)$$

$$=\frac{0+v_0}{2}\times 4 \Rightarrow v_0=4\,m/s$$

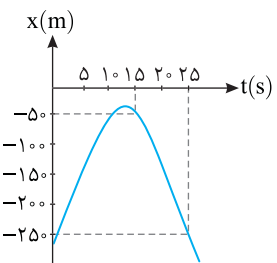
۲ سرعت در لحظهٔ $t=8s$ به دلیل تقارن سهمی برابر $-4m/s$ است، از این‌رو:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow |a_{av}|=\left|\frac{-4-4}{8}\right|=+1\,m/s$$

۳ متحرک در بازهٔ صفر تا ۸s از مکان $+16m$ به همان مکان برگشته است از این‌رو سرعت متوسط صفر است. $\Delta x=0 \Rightarrow v_{av}=0$

C ۵۳۴ ۲

خط فکری نمودار مکان - زمان بخشی از یک سهمی است بنابراین حرکت با شتاب ثابت روی خط راست بوده و معادلهٔ مکان - زمان این نمودار به‌صورت $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ است. می‌دانیم که مختصات هر نقطه روی نمودار باید در معادله صدق کند. سرعت اولیه $(v_0=40m/s)$ داده شده است. بنابراین شما باید به کمک مختصات دو نقطه دیگر روی نمودار دو معادله به‌دست بیاورید تا به کمک آن بتواند شتاب و مکان اولیه را حساب کنید البته مسئله از شما فقط شتاب را خواسته است.



۱ با توجه به نمودار مکان متحرک در لحظهٔ $t_1=15s$ برابر $x_1=-50m$ و در لحظهٔ $t_2=25s$ برابر $x_2=-250m$ است. این مختصات را در معادله مکان - زمان قرار می‌دهیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow -250=\frac{1}{2}a(625)+40\times25+x_0$$

$$\Rightarrow 312/5a+x_0=-1250 \quad (1)$$

$$-50=\frac{1}{2}a(225)+40\times15+x_0 \Rightarrow 112/5a+x_0=-650 \quad (2)$$

۲ دو رابطهٔ (۱) و (۲) را از هم کم می‌کنیم و شتاب را به دست می‌آوریم:

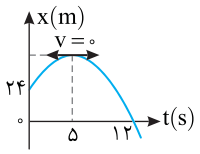
$$200a=-600 \Rightarrow a=-3m/s^2$$

۵۳۵ C ۱

لحظهٔ تغییر جهت همان رأس سهمی است و در $t=5s$ سرعت صفر است.

۱ سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا ۱۲s را حساب می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{0-24}{12-0}=-2m/s$$



سرعت متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2 با سرعت لحظه‌ای در وسط این بازه برابر است.

سرعت در لحظهٔ $t=\frac{12+0}{2}=6s$ برابر $-2m/s$ است.

۲ با توجه به نمودار سرعت در $t=5s$، صفر است پس می‌توان شتاب را به‌دست آورد.

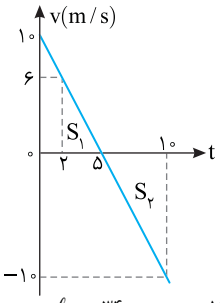
$$a=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1} \Rightarrow a=\frac{-2-0}{6-5} \Rightarrow a=-2m/s^2$$

۳ سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_0 \xrightarrow[v=0]{t=5s} 0=-2\times5+v_0 \Rightarrow v_0=10m/s$$

۴ نمودار سرعت - زمان را رسم کرده و سطح زیر نمودار را در بازهٔ ۲s تا ۱۰s حساب می‌کنیم.

$$v=-2t+10 \Rightarrow \begin{cases} t=2s \Rightarrow v=6m/s \\ t=10s \Rightarrow v=-10m/s \end{cases}$$



$$\ell=|S_1|+|S_2| \Rightarrow \ell=\frac{6\times3}{2}+\frac{10\times5}{2}$$

$$\ell=9+25 \Rightarrow \ell=34m$$

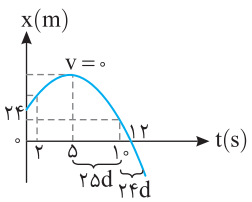
۵ تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{34}{10-2} \Rightarrow s_{av}=\frac{17}{4}m/s$$

روش دیگر:

نکته هرگاه متحرک از حال سکون با شتاب ثابت شروع به حرکت کند، در بازه‌های یکسان و متوالی t به ترتیب مسافت‌های d، ۳d، ۵d و ... را طی می‌کند.

به نمودار نگاه کنید. لحظهٔ $t=5s$ سرعت صفر است. اگر در بازه‌های $\Delta t=1s$ ($t=5s$ تا $t=6s$) مسافت d باشد، در 1s بعدی 3d و ... خواهد بود و مسافت در بازهٔ $t=5s$ تا $t=10s$:



$$\ell=d+3d+5d+7d+9d=25d$$

در بازهٔ 10s تا 12s متحرک از مکان ۲۴ به مکان صفر می‌رود و مسافت طی شده ۲۴m است، در نتیجه:

$$11d+13d=24 \Rightarrow d=1m$$

در بازهٔ 5s تا 10s:

$$\ell=25\times1=25m$$

در بازهٔ 2s تا 5s مسافت را حساب می‌کنیم:

$$5s \text{ تا } 4s \rightarrow d$$

$$4s \text{ تا } 3s \rightarrow 3d \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{جمع}} 9d=9m$$

$$3s \text{ تا } 2s \rightarrow 5d$$

مسافت کل از 2s تا 10s برابر است با:

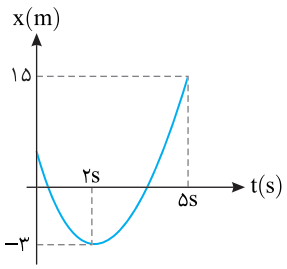
$$\ell=25+9=34m$$

تندی متوسط را به‌دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{34}{10-2} \Rightarrow s_{av}=\frac{17}{4}m/s$$

۵۳۶ B ۱

۱ $t=2s$ رأس سهمی است و سرعت در این لحظه صفر است از این‌رو:



$$v=at+v_0 \Rightarrow 0=a\times2+v_0$$

$$\Rightarrow v_0=-2a$$

۲ نمودار مکان - زمان است و حرکت دارای شتاب ثابت است مختصات هر نقطه از نمودار باید در معادلهٔ مکان زمان صدق کند از این‌رو در لحظهٔ $t=2s$ مکان $x=-3m$ و در لحظهٔ $t=5s$ مکان $x=+15m$ است.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \begin{cases} t=2s \Rightarrow -3=\frac{1}{2}a\times4+(-2a)\times2+x_0 \\ \Rightarrow -3=-2a+x_0 \quad (1) \\ t=5s \Rightarrow 15=\frac{1}{2}a\times25+(-2a)\times5+x_0 \\ \Rightarrow 15=2/5a+x_0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دو معادله را از هم کم می‌کنیم}} 18=4/5a \Rightarrow a=4m/s^2$$

۳ شتاب را در معادلهٔ (۱) جای‌گذاری می‌کنیم: $-3=-2\times4+x_0 \Rightarrow x_0=5m$

راه‌حل پیشنهادی یک دانش‌آموز: در بازهٔ 2s تا 5s خواهیم داشت:

$$x=\frac{v+v_0}{2}t+x_0 \Rightarrow 15=\frac{v+0}{2}\times3-3 \Rightarrow v=12m/s$$

$$a=\frac{v-v_0}{t} \Rightarrow a=\frac{12-0}{5-2}=4m/s^2$$

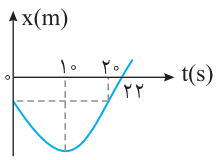
به دلیل تقارن سهمی مکان در $t=0$ و $t=4s$ یکی است از این‌رو برای یافتن x_0 از لحظهٔ $t=2s$ که سرعت صفر و مکان $-3m$ است تا لحظهٔ $t=4s$ می‌توانیم بنویسیم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+x_0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\times4(4-2)^2-3 \Rightarrow x=5m \Rightarrow x_0=5m$$

۵۳۷ B ۳

تست زیبایی است، تمام فرمول‌های حرکت با شتاب ثابت قدم به قدم استفاده می‌شود.

۱ با توجه به صورت مسئله و نمودار در مدت 10s جابه‌جایی $\Delta x=-50m$ و در لحظهٔ $t=10s$ سرعت صفر است. به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب، سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم.



$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t \Rightarrow -50=\frac{0+v_0}{2}\times10 \Rightarrow v_0=-10m/s$$

۲ به کمک تعریف شتاب:

$$a=\frac{v-v_0}{t} \Rightarrow a=\frac{0-(-10)}{10} \Rightarrow a=1m/s^2$$

۳ با استفاده از معادلهٔ مکان - زمان، مکان اولیه را حساب می‌کنیم:

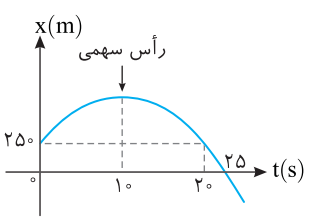
$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \xrightarrow[x=0]{t=22s} 0=\frac{1}{2}\times1\times484-10\times22+x_0$$

$$\Rightarrow x_0=-242+220 \Rightarrow x_0=-22m/s$$

۴ با توجه به تقارن سهمی نسبت به محور قائم گذرنده از رأس سهمی مکان در لحظهٔ $t=20s$ و $t=0$ با هم برابر است. $x_{t=20s}=x_0=-22m$

۵۳۸ C ۱

۱ نمودار $x-t$ حرکت با شتاب ثابت به صورت سهمی می‌باشد و می‌دانیم که سهمی نسبت به خط قائم گذر از رأس آن تقارن دارد. بنابراین لحظهٔ رأس سهمی خواهد شد:



$$t_{\text{رأس}}=\frac{0+20}{2}=10s$$

۲ در رأس سهمی یعنی در نقطهٔ بیشینه نمودار مکان - زمان سرعت صفر است. به کمک معادلهٔ سرعت - زمان سرعت اولیه را بر حسب a به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_0 \Rightarrow 0=a\times 10+v_0 \Rightarrow v_0=-10a \quad (1)$$

۳ در لحظهٔ $t=25s$ مکان متحرک $x=0$ است که باید در معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت صدق کند.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \xrightarrow{(1)}$$

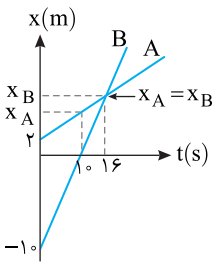
$$0=\frac{1}{2}a(25)^2+(-10a)\times(25)+250 \Rightarrow a=-4m/s^2 \Rightarrow v_0=-10a=+40m/s$$

۴ در $t=10s$ سرعت صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد مکان تغییر جهت را به کمک معادلهٔ مکان - زمان به‌دست می‌آوریم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\times(-4)\times(10)^2+40\times 10+250 \Rightarrow x=450m$$

۵۳۹ B

۱ به نمودار نگاه کنید. متحرک B در لحظهٔ $t=10s$ از مبدأ مکان می‌گذرد و در لحظهٔ $t=16s$ مکان هر دو متحرک یکسان است $(x_A=x_B)$.



۱ به کمک شیب خط B، مکان متحرک B را در لحظهٔ $t=16s$ به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{x_B-(-10)}{16-0}=\frac{0-(-10)}{10-0} \Rightarrow \frac{x_B+10}{16}=1$$

$$\Rightarrow x_B+10=16 \Rightarrow x_B=6m$$

بنابراین در لحظهٔ $t=16s$ مکان متحرک A نیز $x_A=+6m$ است.

۲ به کمک شیب خط A، مکان متحرک A را در لحظهٔ $t=10s$ یعنی لحظهٔ عبور متحرک B از مبدأ مکان را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{6-2}{16-0}=\frac{x_A-2}{10-0} \Rightarrow \frac{4}{8}=\frac{x_A-2}{5} \Rightarrow 20=8x_A-16 \Rightarrow 36=8x_A \Rightarrow x_A=4/5m$$

۵۴۰ A

۱ سرعت حرکت هر متحرک را از روی نمودار به کمک شیب خط به‌دست می‌آوریم:

$$v_A=\frac{0-(-5)}{2/5-0} \Rightarrow v_A=2m/s \ , \ v_B=\frac{0-3}{6-0} \Rightarrow v_B=-0/5m/s$$

۲ معادلهٔ حرکت هر متحرک را می‌نویسیم:

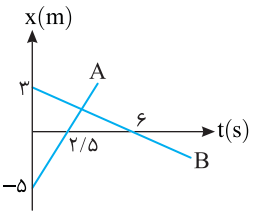
$$x=vt+x_0 \Rightarrow x_A=2t-5 \ , \ x_B=-0/5t+3$$

۳ با توجه به صورت مسأله قرار است فاصلهٔ دو متحرک از هم 5m باشد از این‌رو خواهیم داشت:

$$|x_A-x_B|=5 \Rightarrow |2t-5+0/5t-3|=5$$

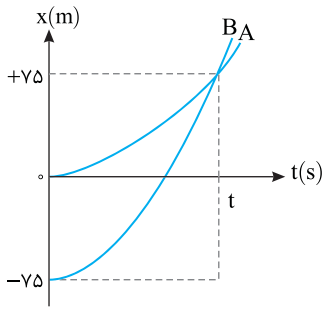
$$\Rightarrow \begin{cases} 2/5t-8=5 \Rightarrow t=\frac{13}{2/5} \Rightarrow t=5/2s \\ 2/5t-8=-5 \Rightarrow t=\frac{3}{2/5} \Rightarrow t=1/2s \end{cases}$$

دقت کنید فاصلهٔ دو متحرک از هم ابتدا $(3+5=8m)$ بوده و دو متحرک در حال نزدیک شدن به هم هستند و برای اولین بار هنگام نزدیک شدن یعنی در لحظهٔ $t=1/2s$ فاصلهٔ آن‌ها از هم 5m می‌شود سپس دو متحرک از کنار هم می‌گذرند و از هم دور می‌شوند و دوباره در لحظهٔ $t=5/2s$ فاصلهٔ آن‌ها از هم 5m می‌شود.



۵۴۱ A

خط فکری نمودار داده شده نمودار مکان - زمان است و جابه‌جایی در مدت t برای هر دو متحرک A و B مشخص است از طرفی سرعت اولیه هر دو متحرک صفر است. شتاب متحرک A را در اختیار داریم می‌توانیم به کمک آن زمان t یعنی زمانی که دو متحرک به هم می‌رسند (زمان سبقت) را حساب کرده و سرانجام به کمک معادلهٔ سرعت - زمان، سرعت هر دو متحرک را هنگام سبقت حساب کرد.



۱ جابه‌جایی متحرک A در مدت t، 75m و شتاب آن ثابت و برابر $1/5m/s^2$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \xrightarrow{x_0A=0,v_0A=0} 75=\frac{1}{2}(1/5)t^2 \Rightarrow t=10s$$

۲ متحرک B در مدت 10s از مکان $x_0=-75m$ به مکان $x=75m$ رفته است از این‌رو خواهیم داشت:

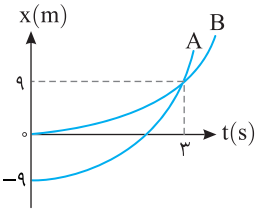
$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \xrightarrow{v_0B=0} 75=\frac{1}{2}a(10)^2+0-75 \Rightarrow a=3m/s^2$$

زمان سبقت دو متحرک $t=10s$ است، در این لحظه به کمک معادلهٔ سرعت زمان، سرعت هر یک را حساب می‌کنیم:

$$v_A=a_At+v_{0A} \Rightarrow v_A=(1/5)(10) \Rightarrow v_A=15m/s$$

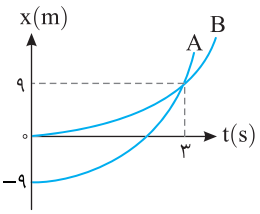
$$v_B=a_Bt+v_{0B} \Rightarrow v_B=(3)(10) \Rightarrow v_B=30m/s \Rightarrow \frac{v_B}{v_A}=\frac{30}{15}=2$$

بازی با سؤال نمودار مکان - زمان دو متحرک که از حال سکون و با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کنند، مطابق شکل روبه‌رو است. در لحظهٔ $t=10s$ متحرک A چندمتر جلوتر از B قرار دارد؟



۱) ۹۱ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۰۹ ۴) ۲۰۰

پاسخ حرکت با شتاب ثابت است. به کمک رابطهٔ مستقل از شتاب مسأله را حل می‌کنیم:



$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t \ , \ B: 9=\frac{v_B+0}{2}\times 3$$

$$\Rightarrow v_B=6m/s$$

$$A: 9-(-9)=\frac{v_A+0}{2}\times 3$$

$$\Rightarrow v_A=12m/s$$

شتاب را برای هر متحرک به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v-v_0}{t} \Rightarrow a_A=\frac{12-0}{3}=4m/s^2 \ , \ a_B=\frac{6-0}{3}=2m/s^2$$

مکان هر متحرک را در $t=10s$ به‌دست می‌آوریم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_A=\frac{1}{2}\times 4\times 100+0+(-9)=191m \\ x_B=\frac{1}{2}\times 2\times 100+0+0=100m \end{cases}$$

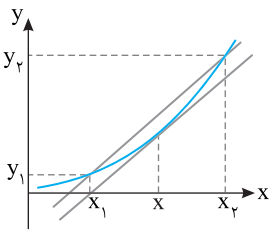
$$\Rightarrow x_A-x_B=91m$$

گزینهٔ ۱

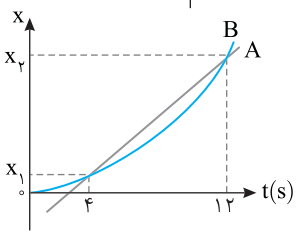
۵۴۲ A

روش اول: با توجه به آن‌چه در کتاب حسابان برای شکل شبیه نمودار مقابل بیان می‌شود، شیب خط قاطع بین دو نقطهٔ (x_1,y_1) و (x_2,y_2) با شیب خط مماس گذرنده از نقطهٔ $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ برابر است از این‌رو در نمودارهای A و B نیز شیب خط مماس بر نمودار سهمی (B) در لحظهٔ $t=\frac{t_1+t_2}{2}$ با شیب خط قاطع A برابر می‌شود.

بنابراین $t=\frac{4+12}{2}=8s$.



روش دوم: جابه‌جایی متحرک A و B در بازهٔ $t=۴s$ و $t=۱۲s$ یکسان است.



متحرک A حرکت سرعت ثابت داشته و سرعت لحظه‌ای و متوسط آن همواره با هم برابر است:

$$v_{av_A}=v_A \xrightarrow{v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}} \frac{\Delta x_A}{\Delta t}=v_A \xrightarrow{\Delta x_A=\Delta x_B=\frac{۱}{۲}a(\Delta t)^۲+v\Delta t}$$

$$v_A=\frac{\frac{۱}{۲}a\Delta t^۲+v\Delta t}{\Delta t}=\frac{۱}{۲}a\Delta t+v \Rightarrow v_A=a\frac{\Delta t}{۲}+v$$

برای متحرک B معادلهٔ سرعت به صورت $v_B=a\Delta t'+v$ است و چون سرعت A و B با هم برابر است.

$$a\frac{\Delta t}{۲}+v=a\Delta t'+v \Rightarrow \Delta t'=\frac{\Delta t}{۲} \Rightarrow \Delta t'=\frac{۱۲-۴}{۲}=۴s$$

بنابراین لحظهٔ مورد نظر خواهد شد: $۴+۴=۸s$

روش سوم:

نکته در نمودار $x-t$ شیب خط قاطع بین دو لحظه برابر سرعت متوسط متحرک است.

شیب نمودار A از طرفی برابر سرعت این متحرک است و از طرف دیگر چون خط قاطع بین دو لحظهٔ $t_۱=۴s$ تا $t_۲=۱۲s$ متحرک B بوده برابر سرعت متوسط متحرک B در این بازه خواهد بود:

$$v_{av_B}(۴s\text{ تا }۱۲s)=v_A \quad (I)$$

نکته در حرکت شتاب ثابت، سرعت متوسط در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ با سرعت در وسط بازه برابر است:

$$v_{av}(t_۱\text{ تا }t_۲)=v(\frac{t_۱+t_۲}{۲})$$

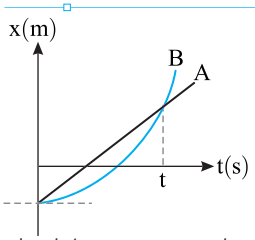
سرعت متوسط متحرک B که دارای حرکت شتاب ثابت است (چون نمودار $x-t$ آن به صورت سهمی بوده) برابر سرعت در وسط آن بازه خواهد بود:

$$v_{av_B}(۴s\text{ تا }۱۲s)=v_B(\frac{۴+۱۲}{۲}) \Rightarrow v_{av_B}(۴s\text{ تا }۱۲s)=v_B(۸s) \quad (II)$$

با توجه به روابط (I) و (II) داریم:

$$\begin{cases} v_{av_B}(۴s\text{ تا }۱۲s)=v_A \\ v_{av_B}(۴s\text{ تا }۱۲s)=v_B(۸s) \end{cases} \Rightarrow v_A=v_B(۸s)$$

B ۵۴۳ | ۲



سرعت اولیهٔ متحرک B، صفر است. $(v_{۰B}=۰)$

نکته در نمودارهایی شبیه نمودار سؤال، شیب خط A (سرعت متحرک A) با شیب خط مماس بر سهمی در لحظهٔ وسط بازهٔ زمانی تقاطع دو نمودار برابر است.

نکته در حرکت با شتاب ثابت در هر بازهٔ زمانی، سرعت در وسط بازه برابر میانگین سرعت‌ها در لحظات ابتدایی و انتهایی بازه است.

$$v=v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}$$

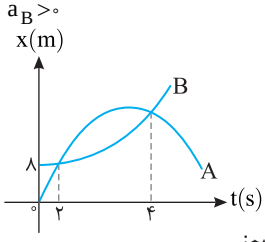
با توجه به نکات بیان شده باید سرعت متحرک A با سرعت B در لحظهٔ $\frac{t+۰}{۲}=\frac{t}{۲}$ وسط بازه برابر شود از این‌رو:

$$v_A=\frac{v_{Bt}+v_{۰B}}{۲} \Rightarrow v_A=\frac{v_{Bt}}{۲} \Rightarrow v_{Bt}=۲v_A$$

C ۵۴۴ | ۲

خط فکری دقت کنید در این مسئله نمی‌توانید سرعت اولیه A $(v_{۰A})$ و سرعت اولیه $(v_{۰B})$ را جداگانه حساب کرده و سپس اختلاف آن‌ها را به دست بیاورید به‌همین دلیل باید به کمک معادلهٔ مکان - زمان و مختصات نقاط روی نمودار مسئله را حل کنید.

۱ شتاب دو متحرک هم‌اندازه است اما دهانهٔ نمودار متحرک B رو به بالاست پس حرکت این متحرک دارای شتاب مثبت است. $a_B>۰$



دهانهٔ نمودار متحرک A رو به پایین است پس حرکت این متحرک دارای شتاب منفی است. $a_A<۰$

بنابراین اگر شتاب B برابر a باشد شتاب A برابر a- خواهد بود.

۲ معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x_B=\frac{۱}{۲}at^۲+v_{۰B}t+۸ \ , \ x_A=-\frac{۱}{۲}at^۲+v_{۰A}t$$

۳ در دو لحظهٔ $t=۲s$ و $t=۴s$ مکان دو متحرک یکسان است. بنابراین در این دو لحظه مکان متحرک A و B را به‌دست می‌آوریم و برابر قرار می‌دهیم.

$$x_B=x_A \Rightarrow \begin{cases} t=۲s \Rightarrow ۲a+۲v_{۰B}+۸=-۲a+۲v_{۰A} \\ \Rightarrow ۴a+۸=۲(v_{۰A}-v_{۰B}) \Rightarrow ۲a+۴=v_{۰A}-v_{۰B} \quad (۱) \\ t=۴s \Rightarrow ۸a+۴v_{۰B}+۸=-۸a+۴v_{۰A} \\ \Rightarrow ۱۶a+۸=۴(v_{۰A}-v_{۰B}) \quad (۲) \end{cases}$$

۴ در رابطهٔ (۲) به جای $v_{۰A}-v_{۰B}$ از رابطهٔ (۱) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۱۶a+۸=۸a+۱۶ \Rightarrow ۸a=۸ \Rightarrow a=۱m/s^۲$$

۵ با جای‌گذاری $a=۱m/s^۲$ در معادلهٔ (۱)، اختلاف سرعت اولیهٔ دو متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$۲a+۴=v_{۰A}-v_{۰B} \xrightarrow{a=۱m/s^۲} v_{۰A}-v_{۰B}=۶m/s$$

B ۵۴۵ | ۱

خط فکری حرکت خودروی A شتابدار و با شتاب ثابت و بدون سرعت اولیه است بنابراین نمودار A سهمی بوده که در $t=۰$ بر نمودار t مماس است که ۴۲ متر عقب‌تر از A است. برای آنکه نمودار درست را تشخیص بدهید باید ابتدا لحظه‌ای که دو متحرک از کنار هم می‌گذرند را حساب کنید و اگر محل حرکت خودروی A را مبدأ مکان بگیرید باید مکان اولیهٔ B $(x_{۰B}=-۴۲m)$ شود.

زمان رسیدن دو خودرو به هم را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور، معادلهٔ مکان- زمان هر دو را نوشته و برابر قرار می‌دهیم: $x_A=x_B \Rightarrow \frac{۱}{۲}a_At^۲+v_{۰A}t+x_{۰A}=v_Bt+x_{۰B}$

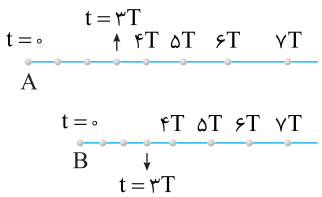
$$\frac{۱}{۲}\times۲\times t^۲+۰+۰=۱۷t-۴۲ \Rightarrow t^۲-۱۷t+۴۲=۰$$

$$\Rightarrow (t-۳)(t-۱۴)=۰ \Rightarrow t=۳s, t=۱۴s$$

با توجه به این‌که متحرک A از حال سکون شروع به حرکت کرده و این که مکان اولیهٔ B منفی است، گزینهٔ (۱) درست است.

A ۵۴۶ | ۴

با توجه به شکل مسیر، متحرک A از مکان عقب‌تر از B شروع به حرکت کرده و سرعت ابتدایی A بیشتر از سرعت B است $(v_A>v_B)$، زیرا در مدت ۳T



مسیر طولانی‌تری را طی کرده است. جابه‌جایی هر دو در مدت ۳T با تندی ثابت انجام شده زیرا مسافت طی شده در بازه‌های T یکسان است. در ادامهٔ مسیر شتاب A بیشتر از B است و بر تندی A مقدار بیشتری اضافه می‌شود زیرا جابه‌جایی‌ها در بازه‌های ۳T تا ۷T برای A بزرگ‌تر از B بوده و در ۷T دو متحرک کنار یکدیگرند. در این صورت در بازهٔ صفر تا ۳T نمودار A و B خط راست مایل بوده که شیب خط A بیشتر از شیب خط B است و در ادامه نمودار هر دو متحرک خمیده است.

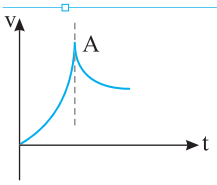
A ۵۴۷ ۱

در شکل (الف) اگر در نقطهٔ A خط مماس بر نمودار را رسم کنید این خط بر محور افقی عمود است بنابراین شتاب که برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان است بی‌نهایت (∞) خواهد شد که ممکن نیست و شکل (الف) نادرست است.

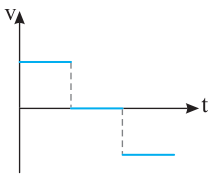
نمودار $v-t$ یک نمودار پیوسته است یعنی نمی‌توان در یک لحظه از سرعت $+v$ به صفر رسید، پس نمودار (ب) نیز نادرست است.

در شکل (پ) نمودار یک دایره است در این صورت در یک لحظهٔ مانند t_1 متحرک دو سرعت مختلف دارد که این ممکن نیست و شکل (پ) نادرست است.

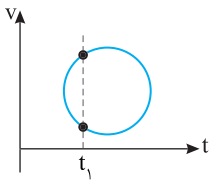
بنابراین شکل (ت) تنها شکل درست است.



شکل (الف)



شکل (ب)



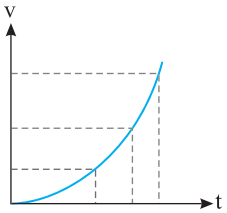
شکل (پ)

B ۵۴۸ ۱

حرکت تندشونده یعنی حرکتی که در آن بزرگی سرعت (تندی) در حال افزایش است. در نمودار گزینهٔ (۱) در بازهٔ t_1 تا t_2 بزرگی سرعت در حال افزایش است و حرکت تندشونده است و گزینهٔ (۱) درست است. در نمودار گزینه‌های (۲) و (۴) بزرگی سرعت در حال کاهش است پس در بازهٔ t_1 تا t_2 حرکت کندشونده است و گزینه‌های (۲) و (۴) نادرست هستند. در نمودار گزینهٔ (۳) ابتدا تندی (اندازهٔ سرعت) در حال کاهش بوده و صفر می‌شود و سپس افزایش می‌یابد، بنابراین حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است و گزینه (۳) نادرست است.

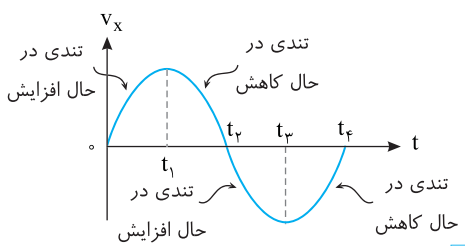
A ۵۴۹ ۴

نمودار سرعت - زمان است و در $t=0$ سرعت صفر است. با گذشت زمان، سرعت در حال افزایش است. پس حرکت تندشونده است. نمودار سهمی بوده و اما شتاب متغیر است زیرا اگر شتاب ثابت بود بنا به معادلهٔ سرعت - زمان حرکت با شتاب ثابت $(v=at+v_0)$ باید نمودار سرعت - زمان خط راست می‌شد که چنین نیست و گزینهٔ (۴) درست است.



B ۵۵۰ ۱

هرگاه تندی متحرک (اندازهٔ سرعت) کاهش یابد حرکت کندشونده است، با توجه به شکل در بازهٔ t_1 تا t_2 تندی کاهش یافته و در لحظهٔ t_2 صفر می‌شود، بنابراین در این بازه حرکت کندشونده است. از طرفی در بازهٔ t_1 تا t_2، نمودار بالای محور زمان است. بنابراین سرعت مثبت و حرکت متحرک در جهت محور xها است.



A ۵۵۱ ۲

در بازهٔ t_1 تا t_3 شتاب متوسط صفر است، زیرا در این دو لحظه، سرعت‌ها برابراند $(\Delta v=0)$ و گزینهٔ (۱) نادرست است.

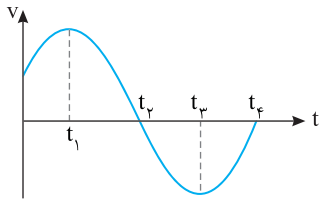
در لحظهٔ t_1 سرعت مثبت و در لحظهٔ t_4 سرعت صفر است، بنابراین $\Delta v<0$ بوده و شتاب متوسط منفی و خلاف جهت محور xهاست و گزینهٔ (۲) درست است.

در بازهٔ صفر تا t_1 و t_1 تا t_2، شیب نمودار مثبت و ثابت است بنابراین در این دو بازه شتاب‌ها برابر و مثبت هستند و گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست است.

B ۵۵۲ ۱

خط فکری در نمودار $v-t$ مطابق شکل زیر به نکات زیر دقت کنید:

۱ در بازهٔ ۰ تا t_2 سرعت متحرک مثبت بوده و متحرک در جهت مثبت محور xها در حال حرکت است و در مدت t_2 تا t_4 سرعت منفی شده و جهت حرکت متحرک تغییر کرده و متحرک در خلاف جهت محور xها در حال حرکت است.



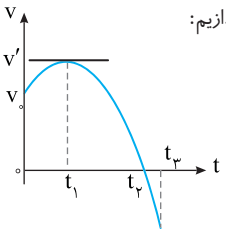
نکته جهت حرکت با جهت سرعت مشخص می‌شود و اگر سرعت مثبت باشد، متحرک در جهت محور xها حرکت می‌کند و بالعکس.

۲ شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ در هر لحظه برابر شتاب حرکت است. در بازهٔ صفر تا t_1 و t_3 تا t_4 نمودار صعودی با شیب مثبت بوده و شتاب مثبت است و در بازهٔ t_1 تا t_3 نمودار نزولی بوده و شتاب منفی است.

۳ در بازهٔ ۰ تا t_1 و t_2 تا t_3 نمودار از محور زمان در حال دور شدن بوده و تندی در حال افزایش و حرکت تندشونده است و از طرف دیگر در بازهٔ t_1 تا t_2 و t_3 تا t_4 نمودار به محور زمان در حال نزدیک شدن بوده و تندی در حال کاهش و حرکت کندشونده است.

۴ در لحظهٔ t_2 سرعت صفر شده و پس از آن تغییر علامت می‌دهد، پس در این لحظه متحرک تغییر جهت می‌دهد و در بیشینه و کمینهٔ نمودار یعنی لحظه‌های t_1 و t_3 شیب خط مماس صفر بوده و در نتیجه شتاب صفر می‌شود و علامت شتاب تغییر می‌کند.

با توجه به این نکات به بررسی تک‌تک گزاره‌ها می‌پردازیم:



الف) در لحظهٔ t_1 شیب خط نمودار افقی و صفر شده پس در این لحظه تنها شتاب صفر شده و تغییر علامت می‌دهد اما سرعت v' بوده و تغییر علامت نمی‌دهد، بنابراین گزاره (الف) نادرست است.

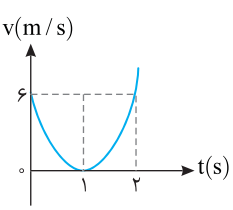
ب) در بازهٔ t_1 تا t_2 سرعت مثبت بوده پس متحرک در جهت مثبت محور xها در حال حرکت است و گزارهٔ (ب) درست است.

پ) در بازهٔ ۰ تا t_1 نمودار از محور افقی زمان در حال دور شدن است، پس حرکت متحرک تندشونده بوده و تندی آن از v_0 تا v' افزایش می‌یابد و گزارهٔ (پ) نادرست است.

ت) در بازهٔ ۰ تا t_1 نمودار صعودی با شیب مثبت بوده و شتاب آن مثبت است (شتاب در جهت محور x است) و در بازهٔ t_1 تا t_2 نمودار نزولی با شیب منفی بوده و شتاب آن منفی است (شتاب خلاف جهت محور x است) بنابراین گزارهٔ (ت) نادرست است و تنها گزارهٔ (ب) درست است.

نکته البته می‌توانیم کمی حرفه‌ای‌تر باشیم، با توجه به گزینه‌ها گزارهٔ (ب) و (ت) دو بار در گزینه‌ها تکرار شده‌اند، پس تنها همین دو گزاره را بررسی کنیم و چون گزارهٔ (ب) درست و گزارهٔ (ت) نادرست است، پس پاسخ گزینهٔ (۱) می‌شود.

B ۵۵۳ ۲



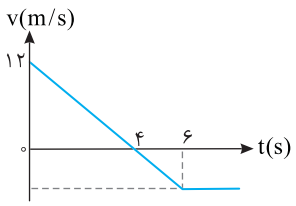
نمودار سهمی است و سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس دارای تقارن است. لحظهٔ $t=1s$ رأس سهمی است بنابراین سرعت متحرک در لحظهٔ $t=0$ و $t=2s$ یکسان و برابر $6m/s$ است. از طرفی در لحظهٔ $t=1s$ سرعت صفر است بنابراین شتاب متوسط در ثانیهٔ دوم یعنی در بازهٔ $t=1s$ تا $t=2s$ خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\Rightarrow a_{av}=\frac{6-0}{2-1}\Rightarrow a=6m/s^2$$

B ۵۵۴ ۲

یادآوری شیب نمودار سرعت - زمان برابر شتاب متحرک است وقتی نمودار سرعت - زمان خط راست مایل باشد. شیب نمودار ثابت یعنی شتاب حرکت ثابت است.

در بازهٔ صفر تا ۶s حرکت دارای شتاب ثابت است یعنی در تمام بازه‌های زمانی بین صفر تا ۶s شتاب متحرک یکسان و برابر شیب خط است از این رو کافی است شیب نمودار را در بازهٔ صفر تا ۴s از روی نمودار حساب کنیم.



$$a=\frac{v-v_0}{t-t_0}=\frac{0-12}{4-0}=-3m/s^2\Rightarrow|a|=3m/s^2$$

B ۵۵۵ ۱

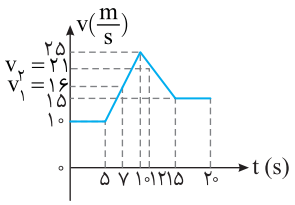
به کمک شیب نمودار، سرعت در لحظه‌های $t=7s$ و $t=12s$ را حساب می‌کنیم.

$$t=7s:\frac{25-10}{10-5}=\frac{v_1-10}{7-5}=3=\frac{v_1-10}{2}=v_1=16m/s$$

$$t=12s:\frac{15-25}{15-10}=\frac{v_2-25}{12-10}\Rightarrow v_2=21m/s$$

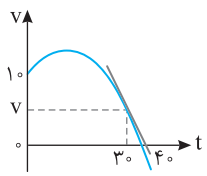
شتاب متوسط را حساب می‌کنیم:

$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{21-16}{12-7}\Rightarrow a_{av}=1m/s^2$$



B ۵۵۶ ۴

۱ در نمودار $v-t$ شیب خط مماس در هر لحظه برابر شتاب لحظه‌ای است بنابراین شتاب متحرک در لحظهٔ $t=30s$ را به کمک شیب خط مماس بر نمودار به‌دست می‌آوریم



$$a_{t=30}=\frac{0-v}{40-30}=\frac{-v}{10}\quad(1)$$

۲ شتاب متوسط در مدت ۳۰s اول یعنی در بازهٔ $t=0$ تا $t=30s$ خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{v_{t=30}-v_t}{\Delta t}=\frac{v-10}{30}\quad(2)$$

۳ در صورت مسئله بیان شده شتاب در لحظهٔ $t=30s$ با شتاب متوسط در ۳۰s اول برابر است بنابراین رابطهٔ (۱) و (۲) را برابر قرار می‌دهیم:

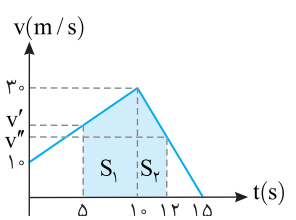
$$a_{av}=a_{t=30}\Rightarrow\frac{v-10}{30}=\frac{-v}{10}\Rightarrow v-10=-3v\Rightarrow 4v=10\Rightarrow v=2/5m/s$$

B ۵۵۷ ۲

۱ شتاب حرکت در قسمت اول برابر است با:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a_1=\frac{30-10}{10}=2m/s^2$$

۲ سرعت در لحظهٔ $t=5s$ خواهد شد:



$$v=at+v_0\Rightarrow v'=2\times5+10=20m/s$$

۳ شتاب حرکت در قسمت دوم (۱۰s تا ۱۵s) برابر است با:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a_2=\frac{0-30}{15-10}\Rightarrow a_2=-6m/s^2$$

۴ سرعت در لحظهٔ $t=12s$ (لحظهٔ ۲s این قسمت) برابر خواهد شد با:

$$v=at+v_0\Rightarrow v''=-6\times(12-10)+30\Rightarrow v''=18m/s$$

۵ مساحت سطح رنگی را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x=S=S_1+S_2=\frac{20+30}{2}\times5+\frac{18+30}{2}\times2\Rightarrow\Delta x=125+48=173m$$

روش استفاده از شیب نمودار برای یافتن سرعت در لحظهٔ $t=5s$ و $t=12s$:

سرعت در لحظهٔ $t=5s$:

$$\frac{30-10}{10-0}=\frac{v'-10}{5-0}\Rightarrow v'=20m/s$$

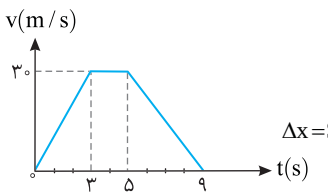
سرعت در لحظهٔ $t=8s$:

$$\frac{0-30}{15-10}\frac{0-v''}{15-12}\Rightarrow 6=\frac{v''}{3}\Rightarrow v''=18m/s$$

بقیهٔ حل مسئله همان محاسبهٔ سطح S_1 و S_2 است.

A ۵۵۸ ۱

۱ سطح زیر نمودار را در بازهٔ صفر تا ۹s برابر ۱۶۵m قرار می‌دهیم.



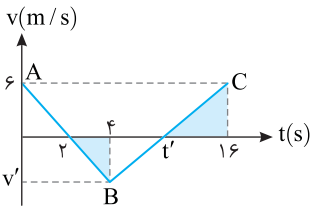
$$\Delta x=S\Rightarrow 165=\frac{9+2}{2}\times v\Rightarrow v=30m/s$$

۲ اندازهٔ شتاب در قسمت کندشوندهٔ حرکت خواهد بود:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow|a|=\left|\frac{0-30}{9-5}\right|=7/5m/s^2$$

A ۵۵۹ ۴

خط فکری قرار است مسافت طی شده در بازهٔ زمانی که حرکت تندشونده است را حساب کنیم در این بازهٔ زمانی باید تندی متحرک (اندازهٔ سرعت آن) در حال افزایش باشد. بنابراین شما ابتدا باید این بازه‌های زمانی را شناسایی کرده سپس اندازهٔ سطح زیر نمودار را در این بازه‌ها با هم جمع کنید.



۱ تندی متحرک در بازهٔ ۲s تا ۴s و بازهٔ t' تا $t=16s$ در حال افزایش بوده و حرکت متحرک تندشونده است.

۲ سرعت متحرک در $t=4s$ را به کمک شیب خط AB به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{v'-6}{4-0}=\frac{0-6}{2-0}\Rightarrow v'=-6m/s$$

۳ لحظهٔ t' را به کمک شیب خط BC حساب می‌کنیم.

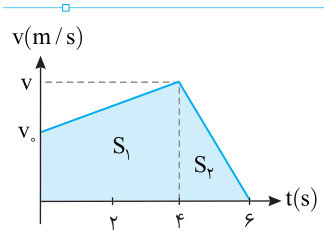
$$\frac{6-(-6)}{16-4}=\frac{6-0}{16-t'}\Rightarrow 16-t'=6\Rightarrow t'=10s$$

۴ حال مساحت زیر نمودار را در این دو بازه که حرکت تندشونده است، به‌دست آورده و با هم جمع می‌کنیم.

$$\begin{cases}t=2s\text{ تا }t=4s: & |\ell_1|=\frac{2\times6}{2}=6m\\ t=10s\text{ تا }t=16s: & |\ell_2|=\frac{6\times6}{2}=18m\end{cases}\Rightarrow\ell=6+18=24m$$

A ۵۶۰ ۳

در بازهٔ صفر تا ۴s شیب نمودار مثبت بنابراین شتاب حرکت مثبت $(a_1=+2/5m/s^2)$ و در بازهٔ زمانی ۴s تا ۶s شیب نمودار منفی و شتاب حرکت نیز منفی $(a_2=-7/5m/s^2)$ است.



۱ ابتدا به کمک بازهٔ $t=4s$ تا $t=6s$، سرعت را در لحظهٔ $t=4s$ به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow-7/5=\frac{0-v}{6-4}\Rightarrow v=15m/s$$

۲ سرعت اولیهٔ متحرک را از قسمت اول حساب می‌کنیم:

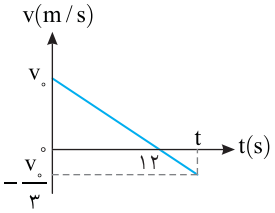
$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow ۲/۵=\frac{۱۵-v_0}{۴-۰}\Rightarrow v_0=۵m/s$$

۳ جابه‌جایی برابر سطح زیر نمودار است از این‌رو خواهیم داشت:

$$\Delta x=S_۱+S_۲=\frac{۱۵+۵}{۲}\times ۴+\frac{۱۵\times ۲}{۲}\Rightarrow \Delta x=۵۵m$$

B ۵۶۱ **۴**

۱ نمودار $v-t$ خط راست است. پس حرکت با شتاب ثابت بوده و در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی برابر $v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}$ است، با توجه به فرض مسئله سرعت متوسط قرار است $\frac{۱}{۳}v_0$ باشد از این‌رو:



$$v_{av}=\frac{v_0+v}{۲}=\frac{۱}{۳}v_0\Rightarrow v_0+v=\frac{۲}{۳}v_0\Rightarrow v=-\frac{۱}{۳}v_0$$

۲ سرعت متحرک از $t=0$ تا $t=۱۲s$ از v_0 به صفر می‌رسد. شتاب حرکت متحرک را برحسب v_0 به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_0\Rightarrow -v_0=۱۲a\Rightarrow a=\frac{-v_0}{۱۲}$$

۳ اکنون لحظه‌ای که سرعت متحرک به $-\frac{۱}{۳}v_0$ می‌رسد را حساب می‌کنیم (نگران v_0 نباشید از رابطه حذف می‌شود)

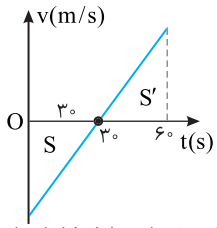
$$v=at+v_0\Rightarrow -\frac{۱}{۳}v_0=\frac{-v_0}{۱۲}t+v_0\Rightarrow \frac{-۴}{۳}v_0=\frac{-v_0}{۱۲}t\Rightarrow t=۱۶s$$

روش دیگر: استفاده از شیب نمودار $v-t$ که در آن نیازی نیست که شتاب را حساب کنیم.

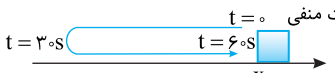
$$\frac{v_0-0}{0-۱۲}=\frac{\frac{-v_0}{۳}-0}{t-۱۲}\Rightarrow t-۱۲=۴\Rightarrow t=۱۶s$$

C ۵۶۲ **۱**

خط فکری متحرک در مبدأ زمان از مبدأ مکان $(x_0=0)$ گذشته تا لحظهٔ $t=۳۰s$ با سرعت منفی در جهت منفی به حرکت ادامه می‌دهد تا سرعتش صفر شده و با همان شتاب مسیر را برمی‌گردد و از لحظهٔ $t=۳۰s$ تا $t=۶۰s$ در جهت مثبت محور در حال حرکت است و به مبدأ نزدیک می‌شود. اگر به نمودار دقت کنید. با توجه به اینکه قاعدهٔ دو مثلث در بازهٔ صفر تا $۳۰s$ برابر قاعدهٔ مثلث در بازهٔ $۳۰s$ تا $۶۰s$ است (طول هر دو قاعده $۳۰s$) بنابراین این دو مثلث هم‌نهشت بوده و دارای مساحت‌های یکسانی‌اند:



بنابراین جمع جابه‌جایی‌های متحرک در این بازه‌ها برابر $S+S'$ بوده که با هم برابرند اما جابه‌جایی در بازهٔ صفر تا $۳۰s$ منفی است و جابه‌جایی کل برابر صفر می‌شود، یعنی متحرک در $t=۶۰s$ مجدداً به مبدأ مکان می‌رسد پس نتیجه می‌گیریم بیشترین فاصله از مبدأ در لحظهٔ تغییر جهت $t=۳۰s$ اتفاق می‌افتد و در این مدت شما باید مساحت مثلث OAB را به‌دست بیاورید.



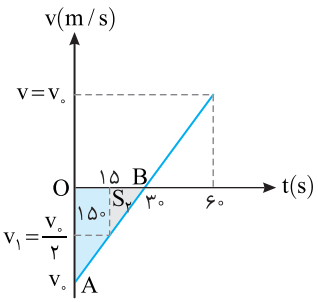
یادداشت ریاضی در تشابه دو مثلث نسبت مساحت‌ها با مربع نسبت تشابه اضلاع برابر است.

در بازهٔ صفر تا $۱۵s$ مکان متحرک از $x=0$ به $x=-۱۵۰m$ رسیده است یعنی جابه‌جایی متحرک $-۱۵۰m$ است، بنابراین اندازهٔ سطح زیر نمودار در بازهٔ صفر تا $۱۵s$ برابر $۱۵۰m$ است. نسبت مساحت‌ها را می‌نویسیم.

$$\frac{S_{ABO}}{S_۲}=(\frac{۳۰}{۱۵})^۲\Rightarrow \frac{۱۵۰+S_۲}{S_۲}=(۲)^۲\Rightarrow ۱۵۰+S_۲=۴S_۲$$

$$\Rightarrow S_۲=۵۰\Rightarrow S_{ABC}=۱۵۰+۵۰=۲۰۰m$$

بنابراین بیشترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ ۲۰۰ متر است.



B ۵۶۳ **۱**

۱ با توجه به شیب خط AB، سرعت اولیهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{۳۶-0}{۵-۴}=\frac{۳۶-v_0}{۵-۲}\Rightarrow ۳\times ۳۶=۳۶-v_0\Rightarrow v_0=-۷۲m/s$$

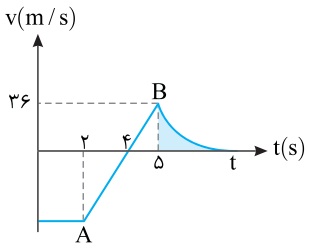
۲ با توجه به صورت مسئله مساحت قسمت هاشورخورده برابر ۳۰ واحد SI است یعنی متحرک در بازهٔ $۵s$ تا t جابه‌جایی $+۳۰m$ رادر جهت مثبت محور xها می‌پیماید.

۳ جابه‌جایی کل متحرک برابرسطح زیر نمودار سرعت - زمان است بنابراین:

$$\Delta x=S=(۴+۲)\times\frac{-۷۲}{۲}+\frac{۳۶\times ۱}{۲}+۳۰\Rightarrow \Delta x=-۲۱۶+۴۸\Rightarrow \Delta x=-۱۶۸m$$

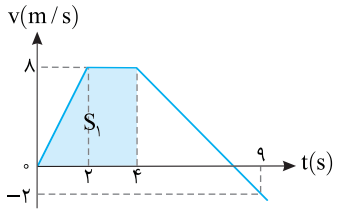
۴ مکان اولیه بنا به فرض مسئله $x_0=+۱۵۰m$ است بنابراین مکان نهایی خواهد شد:

$$\Delta x=x-x_0\Rightarrow -۱۶۸=x-(۱۵۰)\Rightarrow x=-۱۸m$$



C ۵۶۴ **۲**

خط فکری متحرک از مکان $x_0=-۳۶m$ شروع به حرکت کرده است و برای اینکه متحرک از مبدأ مکان بگذرد باید جابه‌جایی برابر $+۳۶m$ انجام دهد. سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان برابر با جابه‌جایی متحرک است، بنابراین باید شما لحظه‌ای را به‌دست بیاورید که سطح زیر نمودار برابر ۳۶ واحد SI شود.



۱ ابتدا سطح زیر نمودار را در مدت $۴s$ به‌دست می‌آوریم:

$$0\to ۴s\Rightarrow S_۱=\Delta x\Rightarrow \Delta x=\frac{۴+۲}{۲}\times ۸=۲۴m$$

۲ در مدت $۴s$ متحرک $۲۴m$ حرکت کرده و به مکان $-۳۶+۲۴=۱۲m$ می‌رسد و هنوز از مبدأ مکان عبور نکرده بنابراین لحظه‌ای که متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ می‌گذرد. بعد از $t=۴s$ رخ می‌دهد و از لحظهٔ $t=۴s$ باید متحرک $۱۲m$ جابه‌جا شود تا به مبدأ برسد.

۳ شتاب را در بازهٔ $۴s$ تا $۹s$ به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v-v_0}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{-۲-۸}{۹-۴}=-۲m/s^۲$$

۴ مدت زمانی که طول می‌کشد متحرک با شتاب $-۲m/s^۲$ و سرعت اولیهٔ $۸m/s$ به اندازهٔ $۱۲m$ جابه‌جا شود را به‌دست می‌آوریم.

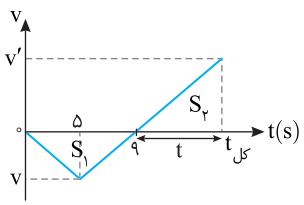
$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_0t\Rightarrow ۱۲=\frac{۱}{۲}(-۲)t^۲+۸t\Rightarrow t^۲-۸t+۱۲=0$$

$$\Rightarrow (t-۲)(t-۶)=0\Rightarrow t=۲s, t=۶s$$

۵ لحظهٔ گذر از مبدأ برای اولین بار $۲+۴=۶s$ است. لحظهٔ $۶+۴=۱۰s$ مربوط به لحظه‌ای است که متحرک متوقف شده و در برگشت برای دومین بار از مبدأ مکان می‌گذرد.

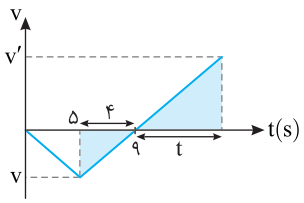
۱ ۵۶۵ B

خط فکری برای آن‌که متحرک به جای اول بازگردد باید جابه‌جایی آن صفر شود، یعنی جمع جبری سطح‌های محصور بین نمودار $v-t$ با محور زمان صفر می‌شود. از این‌رو باید $|S_۱|=|S_۲|$ باشد.



دو مثلث هاشورخورده در شکل مقابل با هم متشابه‌اند، بنابراین:

$$\frac{v'}{v}=\frac{t}{۴}\Rightarrow v'=v\frac{t}{۴}$$



با توجه به خط فکری باید سطح زیر نمودار قسمت اول نمودار $(S_۱)$ با سطح زیر نمودار قسمت دوم $(S_۲)$ برابر باشد.

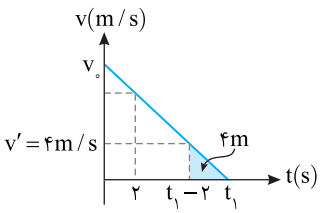
$$S_۱=S_۲\Rightarrow\frac{۹\times v}{۲}=\frac{v'\times t}{۲}\Rightarrow\frac{۹\times v}{۲}=\frac{vt}{۴}\times\frac{t}{۲}\Rightarrow t^۲=۳۶\Rightarrow t=۶s$$

$$t_{کل}=۶+۹=۱۵s$$

۲ ۵۶۶ B

۱ نمودار $v-t$ به صورت خط راست است پس حرکت با شتاب ثابت است. در ۲s آخر متحرک با شتاب ثابت جابه‌جایی ۴m را طی می‌کند و سرعتش از v' به صفر می‌رسد. مقدار v' را به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب (فرمول طلایی) به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{v_۲+v_۱}{۲}t\Rightarrow\Delta x_۲=\frac{v'}{۲}\times۲\Rightarrow v'=۴m/s$$



۲ در ۲s آخر سرعت از ۴m/s به صفر رسیده است بنابراین شتاب خواهد شد:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۰-۴}{۲}=-۲m/s$$

۳ متحرک در مدت ۲s آغازین با سرعت اولیه $v_۰$ و شتاب $-۲m/s^۲$ جابه‌جایی ۳۶ متر را طی می‌کند بنابراین می‌توان به کمک معادلهٔ جابه‌جایی - زمان، سرعت اولیه را حساب کرد.

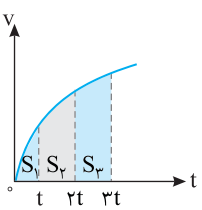
$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow۳۶=\frac{۱}{۲}(-۲)\times(۲)^۲+v_۰\times۲\Rightarrow v_۰=۲۰m/s$$

۴ اکنون با معادلهٔ سرعت - زمان، $t_۱$ را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow۰=-۲t+۲۰\Rightarrow t=۱۰s$$

۳ ۵۶۷ B

سرعت متوسط برابر $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ است. از طرفی سطح زیر نمودار سرعت - زمان برابر با جابه‌جایی است. بازه‌های زمانی در گزینه‌ها یکسان است از این‌رو باید جابه‌جایی یعنی سطح زیر نمودارها را در این بازه‌های زمانی با هم مقایسه کرد.



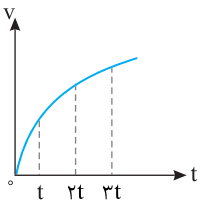
$$S_۳>S_۲>S_۱\Rightarrow v_{av_۳}>v_{av_۲}>v_{av_۱}$$

بنابراین در بازهٔ ۲t تا ۳t، سرعت متوسط از بقیهٔ گزینه‌ها بزرگ‌تر است.

بازی با سوال نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی خط راست در حرکت است مطابق شکل روبه‌رو است، در کدام بازهٔ زمانی سرعت متوسط متحرک بزرگ‌تر است؟

۱) صفر تا ۳t ۲) صفر تا ۲t

۳) ۲t تا ۳t ۴) t تا ۲t

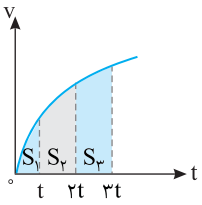


پاسخ سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا ۳s:

$$v_{av_۱}=\frac{S_۱+S_۲+S_۳}{۳t}$$

سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا ۲s:

$$v_{av_۲}=\frac{S_۱+S_۲}{۲t}$$



سرعت متوسط در بازهٔ ۲t تا ۳t:

$$v_{av_۳}=\frac{S_۳}{t}$$

سرعت متوسط در بازهٔ t تا ۲t:

$$v_{av_۴}=\frac{S_۲}{t}$$

با توجه به اینکه $S_۳>S_۲>S_۱$ است، داریم:

$$\text{در بازهٔ صفر تا }۳t\Rightarrow v_{av}=\frac{S_۱+S_۲+S_۳}{۳t}\xrightarrow{S_۱+S_۲+S_۳<۳S_۳}v_{av_۱}<\frac{۳S_۳}{۳t}$$

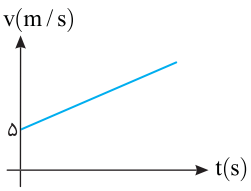
$$\Rightarrow v_{av_۱}<\frac{S_۳}{t}\Rightarrow v_{av_۱}<v_{av_۳}$$

$$\text{در بازهٔ صفر تا }۲t\Rightarrow v_{av}=\frac{S_۱+S_۲}{۲t}\Rightarrow S_۱+S_۲<۲S_۳\Rightarrow v_{av_۲}<v_{av_۳}$$

$$\text{در بازهٔ t تا }۲t\Rightarrow v_{av_۴}=\frac{S_۲}{t}\xrightarrow{S_۲<S_۳}v_{av_۴}<v_{av_۳}$$

گزینهٔ ۳

۳ ۵۶۸ B



ابتدا سرعت را در لحظه‌های $t_۱=۴s$ و $t_۲=۱۲s$ به‌دست می‌آوریم:

$$v_۱=at_۱+v_۰\Rightarrow v_۱=۵\times۴+۵=۲۵m/s$$

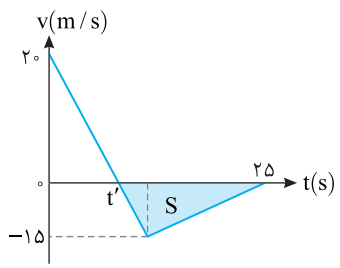
$$v_۲=at_۲+v_۰\Rightarrow v_۲=۵\times۱۲+۵=۶۵m/s$$

در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی میانگین سرعت ابتدا و انتهای بازه است از این‌رو خواهیم داشت:

$$v_{av}=\frac{v_۲+v_۱}{۲}=\frac{۶۵+۲۵}{۲}=۴۵m/s$$

۳ ۵۶۹ A

خط فکری جهت حرکت و جهت سرعت یکی است، بنابراین وقتی متحرک در خلاف جهت محور در حرکت است یعنی سرعت آن منفی است. در بازهٔ t' تا ۲۵s سرعت متحرک منفی است در این بازه سطح زیر نمودار (S) را برحسب t' حساب کنید نگران مقدار t' نباشید زیرا در محاسبهٔ سرعت متوسط $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ حذف خواهد شد.



۱ جابه‌جایی یا سطح زیر نمودار را حساب می‌کنیم.

$$|\Delta x|=S=\frac{|-۱۵\times(۲۵-t')|}{۲}$$

۲ اندازهٔ سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\frac{۱۵(۲۵-t')}{۲}}{۲۵-t'}=۷/۵m/s$$

B ۲ ۵۷۰

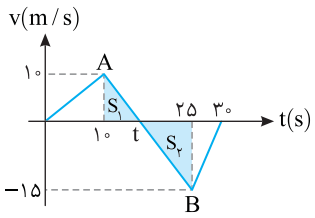
نکته شیب نمودار سرعت - زمان برابر شتاب متحرک است، هرگاه شیب منفی باشد شتاب منفی و اگر شیب مثبت باشد شتاب مثبت است.

۱ در بازهٔ $t=۱۰s$ تا $t=۲۵s$ شیب خط نمودار $v-t$ منفی بنابراین در این بازه شتاب منفی است. به کمک شیب خط AB ، لحظهٔ t را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{۱۰-۰}{۱۰-t}=\frac{۰-(-۱۵)}{t-۲۵}\Rightarrow ۲t-۵۰=۳۰-۳t\Rightarrow t=۱۶s$$

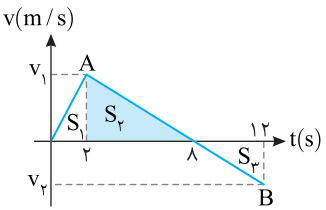
۲ مجموع سطح‌های $S_۱$ و $S_۲$ برابر مساحت طی شده است، از این‌رو تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{|S_۱|+|S_۲|}{\Delta t}=\frac{\frac{۱۰\times۶}{۲}+\frac{۹\times۱۵}{۲}}{۲۵-۱۰}\Rightarrow s_{av}=\frac{۳۰+۶۷/۵}{۱۵}\Rightarrow s_{av}=\frac{۹۷/۵}{۱۵}$$
$$\Rightarrow s_{av}=۶/۵m/s$$



B ۴ ۵۷۱

در بازهٔ ۲s تا ۸s تندی جسم در حال کاهش و حرکت کندشونده است و برای به‌دست آوردن شتاب در این بازه شما باید سرعت در لحظهٔ $t=۲s$ $(v_۱)$ را حساب کنید.



۱ سرعت در لحظهٔ $t=۲s$ را $v_۱$ و سرعت در لحظهٔ $t=۱۲s$ را $v_۲$ می‌نامیم، حال به کمک شیب خط AB یک رابطهٔ ریاضی بین $v_۱$ و $v_۲$ به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{v_۱-۰}{۲-۸}=\frac{v_۲}{۱۲-۸}\Rightarrow v_۱=-\frac{۳}{۲}v_۲\Rightarrow v_۱=\frac{۳}{۲}(v_۲)$$

۲ تندی متوسط در بازهٔ صفر تا ۱۲s، $\frac{۱۰}{۳}m/s$ بنابراین مسافت طی شده خواهد شد.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow\frac{۱۰}{۳}=\frac{\ell}{۱۲}\Rightarrow\ell=۴۰m$$

۳ با توجه به مسافت طی شده که برابر قدرمطلق مساحت زیر نمودار است داریم:

$$\ell=|S_۱|+|S_۲|+|S_۳|=\frac{۲\times v_۱}{۲}+\frac{۶\times v_۱}{۲}+\frac{۴\times|v_۲|}{۲}=۴v_۱+۲|v_۲|$$

$$\Rightarrow ۴۰=۴v_۱+۲|v_۲|\xrightarrow{v_۱=\frac{۳}{۲}(v_۲)}۸|v_۲|=۴۰\Rightarrow|v_۲|=۵m/s$$

۴ مقدار $v_۱$ خواهد شد:

$$v_۱=\frac{۳}{۲}|v_۲|=\frac{۳}{۲}\times۵\Rightarrow v_۱=۷/۵m/s$$

۵ شتاب در قسمت کندشونده خواهد شد:

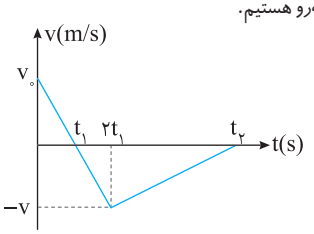
$$|a_{av}|=|\frac{۰-۷/۵}{۸-۲}|=۱/۲۵m/s^۲$$

B ۳ ۵۷۲

اول بگوییم که با یک تست سطح دو روبه‌رو هستیم.

۱ ابتدا سرعت در لحظه $۲t_۱$ را به کمک شیب خط به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{۰-v_۰}{t_۱-۰}=\frac{v-۰}{۲t_۱-t_۱}\Rightarrow|v|=|v_۰|$$



۲ شتاب در قسمت اول و قسمت دوم را نوشته و بنا به فرض مسئله خواهیم داشت.

$$|a_۱|=۲|a_۲|\Rightarrow|\frac{۰-v_۰}{t_۱-۰}|=۲|\frac{۰-(-v)}{t_۲-۲t_۱}|\xrightarrow{v=v_۰}$$

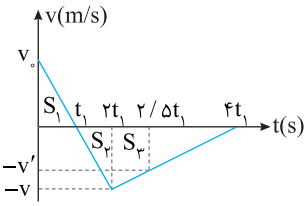
$$\frac{v_۰}{t_۱}=\frac{۲v_۰}{t_۲-۲t_۱}\Rightarrow ۲t_۱=t_۲-۲t_۱\Rightarrow t_۲=۴t_۱$$

بنابراین بازهٔ $۲t_۱$ تا $t_۲$ برابر $۴t_۱-۲t_۱=۲t_۱$ است.

۳ به کمک شیب خط در بازهٔ $۲t_۱$ تا $t_۲$ سرعت در لحظهٔ $۲/۵t_۱$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{۰-(-v)}{t_۲-۲t_۱}=\frac{۰-(-v')}{t_۲-۲/۵t_۱}\Rightarrow\frac{v}{۲t_۱}=\frac{v'}{۱/۵t_۱}\Rightarrow v'=\frac{۳}{۴}v$$

۴ به کمک سطح زیر نمودار مسافت طی شده و تندی متوسط را در بازه‌های زمانی داده شده به‌دست می آوریم.



$$۰\to t_۱\Rightarrow S_۱=\ell_۱=\frac{v_۰t_۱}{۲}\Rightarrow s_{av_۱}=\frac{\ell_۱}{t_۱}=\frac{v_۰}{۲}$$

$$t_۱\to ۲/۵t_۱\Rightarrow\ell_۲=|S_۲|+|S_۳|=\frac{v_۰t_۱}{۲}+\frac{|\frac{۳v_۰}{۴}+v_۰|\times۰/۵t_۱}{۲}$$

$$\ell_۲=\frac{v_۰t_۱}{۲}+\frac{v}{۱۶}v_۰t_۱\Rightarrow\ell_۲=\frac{۱۵}{۱۶}v_۰t_۱\,,\,s_{av_۲}=\frac{\frac{۱۵}{۱۶}v_۰t_۱}{\frac{۳}{۲}t_۱}=\frac{۵}{۸}v_۰$$

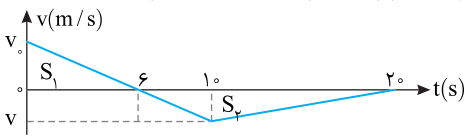
۵ نسبت $\frac{s_{av_۱}}{s_{av_۲}}$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{s_{av_۱}}{s_{av_۲}}=\frac{\frac{v_۰}{۲}}{\frac{۵v_۰}{۸}}=\frac{۴}{۵}$$

آخیش حلش تموم شد. باورتون می‌شه؟

B ۱ ۵۷۳

خط فکری در حل این مسئله باید سرعت اولیه $(t=۰)$ را $v_۰$ اختیار کنید. سپس باید شیب نمودار سرعت در لحظهٔ $t=۱۰s$ را بر حسب $v_۰$ به‌دست بیاورید، سپس کل مساحت بین نمودار و محور زمان را برابر ۱۳۸m قرار داده و $v_۰$ را حساب کرده و به کمک آن مسئله را حل کنید.



۱ محاسبهٔ v بر حسب $v_۰$

$$\frac{۰-v_۰}{۶-۰}=\frac{v-۰}{۱۰-۶}\Rightarrow v=-\frac{۲}{۳}v_۰$$

۲ مساحت را حساب می‌کنیم:

$$\ell=|S_۱|+|S_۲|\Rightarrow ۱۳۸=\frac{۶\times v_۰}{۲}+\frac{(\frac{۲}{۳}v_۰\times۱۴)}{۲}$$

$$۱۳۸=۳v_۰+\frac{۱۴v_۰}{۳}\Rightarrow ۱۳۸=\frac{۹v_۰+۱۴v_۰}{۳}\Rightarrow ۱۳۸=\frac{۲۳v_۰}{۳}$$

$$v_۰=۱۸m/s\Rightarrow v=-۱۸\times\frac{۲}{۳}\Rightarrow v=-۱۲m/s$$

۳ سرعت در لحظه‌های $t_۱=۲s$ و $t_۲=۱۲s$ به کمک شیب نمودار خواهد شد:

$$\frac{۰-۱۸}{۶-۰}=\frac{v_۱-۱۸}{۲-۰}\Rightarrow v_۱=۱۲m/s$$

$$\frac{۰-(-۱۲)}{۲۰-۱۰}=\frac{v_۲-(-۱۲)}{۱۲-۱۰}\Rightarrow v_۲=-۹/۶m/s$$

۴ شتاب متوسط را به‌دست می‌آوریم:

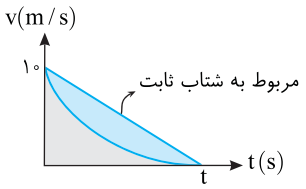
$$a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow a_{av}=\frac{-۹/۶-۱۲}{۱۲-۲}\Rightarrow a_{av}=-۲/۱۶m/s^۲\Rightarrow|a_{av}|=۲/۱۶m/s^۲$$

B ۵۷۴ ۴

خط فکری سرعت متوسط برابر $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ است و جابه‌جایی (Δx) برابر سطح زیر نمودار سرعت - زمان است. اما نمودار $v-t$ داده شده منحنی (خمیده) است و یافتن سطح زیر آن ممکن نیست بنابراین چگونه باید به مسئله پاسخ داده شود. به گزینه‌ها نگاه کنید. برای سرعت متوسط محدوده ارائه شده است. شما بهتر است در بازهٔ صفر تا t یک خط راست رسم کنید این خط مربوط به حرکت با شتاب ثابت است و مقدار سرعت متوسط این حرکت برابر $\frac{۱۰+۰}{۲}=۵m/s$ است. با مقایسهٔ سطح زیر نمودار منحنی با سطح زیر نمودار خط راست (مربوط به حرکت با شتاب ثابت) می‌تواند در مورد سرعت متوسط اظهارنظر کرد. سطح زیر نمودار سرعت - زمان برای شتاب ثابت از سطح زیر نمودار سرعت - زمان برای شتاب متغیر بیشتر است.

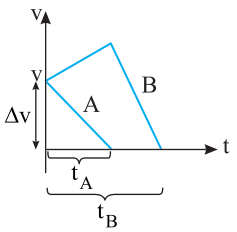
$$S_{\text{منحنی}}<S_{\text{شتاب ثابت}}\Rightarrow \Delta x_{\text{منحنی}}<\Delta x_{\text{شتاب ثابت}}\xrightarrow{v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}} v_{av_{\text{منحنی}}}<v_{av_{\text{ثابت}}}$$

$$\Rightarrow v_{av_{\text{منحنی}}}<\frac{۰+۱۰}{۲}\Rightarrow v_{av}<۵m/s$$



B ۵۷۵ ۱

شتاب متوسط برابر $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ است. به نمودار نگاه کنید، تغییر سرعت دو متحرک A و B در بازهٔ صفر تا لحظهٔ توقف آن‌ها یکسان است $\Delta v_A=\Delta v_B$. اما بازهٔ زمانی این تغییر برای متحرک A از متحرک B کمتر در نتیجه شتاب متوسط A از شتاب متوسط B بیشتر است.

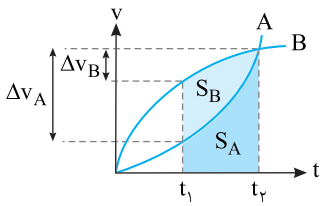


$$a_{av_A}=\frac{\Delta v}{\Delta t_A}, a_{av_B}=\frac{\Delta v}{\Delta t_B}\xrightarrow{\Delta t_A<\Delta t_B} a_{av_A}>a_{av_B}$$

B ۵۷۶ ۲

به نمودار دقت کنید. در بازهٔ t_1 تا t_2، تغییرات سرعت متحرک A از تغییرات سرعت متحرک B بیشتر است بنابراین شتاب متوسط A از شتاب متوسط B بزرگ‌تر است.

$$a_{av_A}=\frac{\Delta v_A}{t_2-t_1}, a_{av_B}=\frac{\Delta v_B}{t_2-t_1}\xrightarrow{\Delta v_A>\Delta v_B} a_{av_A}>a_{av_B}$$



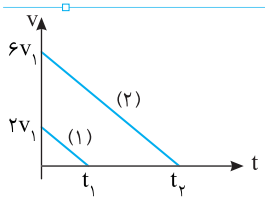
اکنون به سراغ بررسی و مقایسهٔ سرعت متوسط دو متحرک می‌رویم.

در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان برای متحرک A کمتر از متحرک B است، بنابراین سرعت متوسط A کمتر از سرعت متوسط B است.

$$\begin{cases} v_{av_A}=\frac{\Delta x_A}{t_2-t_1}=\frac{S_A}{t_2-t_1} \\ v_{av_B}=\frac{\Delta x_A}{t_2-t_1}=\frac{S_B}{t_2-t_1} \end{cases}\xrightarrow{S_A<S_B} v_{av_A}<v_{av_B}$$

B ۵۷۷ ۳

۱ شیب نمودار سرعت - زمان برابر شتاب متحرک است در صورت مسئله بیان شده که شتاب دو متحرک یکسان است بنابراین شیب این دو نمودار باید با هم برابر باشد. شیب دو نمودار را با هم برابر قرار می‌دهیم و یک رابطهٔ ریاضی بین t_1 و t_2 به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{۰-۲v_1}{t_1-۰}=\frac{۰-۶v_1}{t_2-۰}\Rightarrow t_2=۳t_1 \quad (۱)$$

۲ سطح زیر نمودار سرعت - زمان برابر جابه‌جایی متحرک است سطح زیر نمودار متحرک اول را به‌دست می‌آوریم.

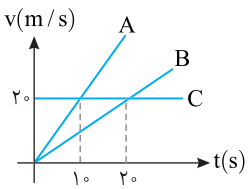
$$\Delta x_1=S_1\Rightarrow \Delta x_1=\frac{۲v_1\times t_1}{۲}\Rightarrow \Delta x_1=v_1t_1\Rightarrow v_1t_1=۱۰ \quad (۲)$$

۳ اکنون سطح زیر نمودار دوم را به‌دست آورده و از رابطهٔ (۱) و (۲) در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$S_2=\Delta x_2=\frac{۶v_1\times t_2}{۲}=\frac{۶v_1\times ۳t_1}{۲}=۹v_1t_1\Rightarrow \Delta x_2=۹۰m$$

A ۵۷۸ ۳

با توجه به نمودار متحرک A و B دارای حرکت با شتاب ثابت و متحرک C دارای حرکت با سرعت ثابت $۲۰m/s$ است.



شتاب متحرک A را به‌دست می‌آوریم.

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a_A=\frac{۲۰-۰}{۱۰}=۲m/s^2$$

به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، سرعت متحرک A را پس از جابه‌جایی $۴۰۰m$ حساب می‌کنیم.

$$v^2-v_0^2=۲a\Delta x\Rightarrow v_A^2-۰=۲\times ۲\times ۴۰۰\Rightarrow v_A=۴۰m/s$$

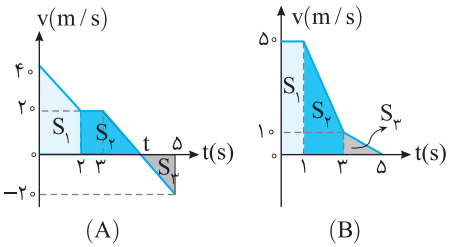
شتاب متحرک B خواهد شد:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a_B=\frac{۲۰-۰}{۲۰}=۱m/s^2$$

سرعت متحرک B را حساب می‌کنیم:

$$v^2-v_0^2=۲a\Delta x\Rightarrow v_B^2-۰=۲\times ۱\times ۴۰۰\Rightarrow v_B=۲۰\sqrt{۲}\ m/s$$

B ۵۷۹ ۱



مسافت طی شده متحرک A در مدت ۵s برابر است با: $\ell_A=|S_1|+|S_2|+|S_3|$

ابتدا باید لحظهٔ t را به‌دست آوریم:

شیب نمودار در بازهٔ زمانی ۳ تا ۵ ثانیه را به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v_2-v_1}{\Delta t}=\frac{-۲۰-۲۰}{۲}=-۲۰m/s^2$$

$$v=at+v_0\Rightarrow ۰=-۲۰(t-۳)+۲۰\Rightarrow t-۳=۱\Rightarrow t=۴s$$

$$S_1=\frac{۱}{۲}(۴۰+۲۰)(۲)=۶۰m,\ S_2=\frac{۱}{۲}(۱+۲)(۲۰)=۳۰m$$

$$S_3=\frac{۱}{۲}(۱)(۲۰)=۱۰m,\ \ell_A=۶۰+۳۰+۱۰=۱۰۰m$$

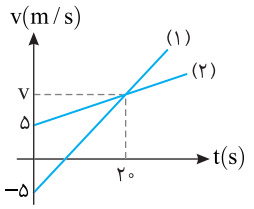
مسافت طی شده متحرک B در مدت ۵s برابر است با:

$$S_1=۵۰m,\ S_2=\frac{۱}{۲}(۱۰+۵)(۲)=۶۰m,\ S_3=\frac{۱}{۲}(۲)(۱۰)=۱۰m$$

$$\ell_B=S_1+S_2+S_3=۵۰+۶۰+۱۰=۱۲۰m\Rightarrow \frac{\ell_B}{\ell_A}=\frac{۱۲۰}{۱۰۰}=۱/۲$$

B ۲ ۵۸۰

هر دو متحرک از مبدأ مکان شروع به حرکت کرده‌اند. با توجه به نمودار، سرعت ابتدایی و انتهایی هر دو حرکت را داریم در این مسئله بهترین روش استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان (فرمول طلایی) است.



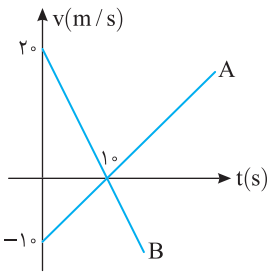
$$x=\frac{v+v_{\circ}}{2}t+x_{\circ}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{-5+v}{2}\times 20=10(-5+v)\\ x_2=\frac{5+v}{2}\times 20=10(5+v)\end{cases}$$

فاصلهٔ دو متحرک برابر است با:

$$|x_1-x_2|=10(5+v)-10(-5+v)=50+10v+50-10v\Rightarrow\Delta x_1-\Delta x_2=100m$$

B ۲ ۵۸۱

شتاب حرکت هر متحرک را به‌دست می‌آوریم. سپس معادلهٔ حرکت آن‌ها را می‌نویسیم.



$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow\begin{cases}a_A=\frac{10}{10}=1m/s^2\\ a_B=\frac{0-20}{10}=-2m/s^2\end{cases}$$

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_{\circ}t+x_{\circ}\Rightarrow\begin{cases}x_A=\frac{1}{2}t^2-10t\\ x_B=\frac{1}{2}(-2)t^2+20t\Rightarrow x_B=-t^2+20t\end{cases}$$

تفاضل x_A و x_B را برابر ۱۵۰m قرار می‌دهیم.

$$|x_A-x_B|=150\Rightarrow\frac{1}{2}t^2-10t+t^2-20t=\pm 150$$

$$\frac{3}{2}t^2-30t=150\Rightarrow\frac{3}{2}t^2-30t-150=0$$

$$\frac{t^2}{2}-10t-50=0\Rightarrow t^2-20t-100=0$$

$$t=10\pm\sqrt{200}=10\pm 10\sqrt{2}\Rightarrow t=10+10\sqrt{2}$$

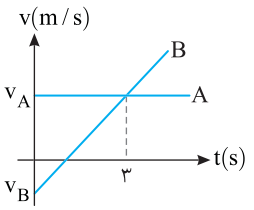
$$\frac{3}{2}t^2-30t=-150\Rightarrow\frac{t^2}{2}-10t+50=0$$

$$t^2-20t+100=0\Rightarrow(t-10)^2=0\Rightarrow t=10s$$

بنابراین دو بار و در لحظه‌های ۱۰s و $(10+10\sqrt{2})s$ فاصلهٔ آن‌ها ۱۵۰ متر است.

A ۲ ۵۸۲

۱ سرعت متحرک A ثابت و متحرک B دارای شتاب ثابت است، می‌دانیم شیب خط نمودار $v-t$ برابر شتاب ثابت است پس شتاب متحرک A خواهد شد: $a_B=\frac{v_A-v_B}{3}$



۲ هر دو هم‌زمان از یک نقطه که آن را مبدأ مکان می‌گیریم شروع به حرکت کرده‌اند $(x_{\circ A}=x_{\circ B})$.

۳ معادلهٔ حرکت هر دو را می نویسیم:

معادلهٔ حرکت A: $x=vt+x_{\circ}\Rightarrow x_A=v_At$

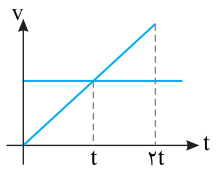
معادلهٔ حرکت B: $x=\frac{1}{2}at^2+v_{\circ}t+x_{\circ}\Rightarrow x_B=\frac{1}{2}(\frac{v_A-v_B}{3})t^2+v_{\circ B}t$

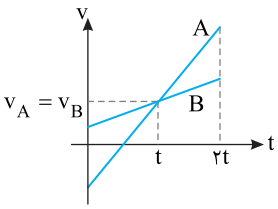
۴ اگر در لحظهٔ t_1 از کنار هم بگذرند. مکان آن‌ها در این لحظه برابر است.

$$x_A=x_B\Rightarrow\frac{1}{2}(\frac{v_A-v_B}{3})t_1^2+v_Bt_1=v_At_1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}(\frac{v_A-v_B}{3})t_1^2=(v_A-v_B)t_1\Rightarrow t_1=6s$$

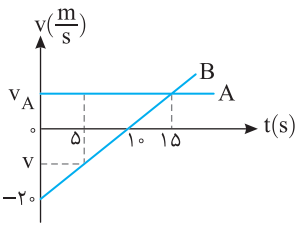
میانبر **اثر پروانه‌ای:** هرگاه دو متحرک که از یک نقطه شروع به حرکت کنند و در لحظهٔ t دارای سرعت یکسان باشند، دو متحرک در لحظهٔ ۲t از کنار هم می‌گذرند.





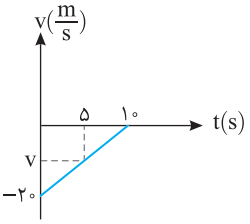
B ۴ ۵۸۳

در لحظهٔ t=۱۵s سرعت متحرک A و B با هم برابر است. به کمک شیب نمودار B، تندی متحرک B در t=۱۵s را حساب می‌کنیم. در واقع تندی متحرک A را نیز به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{0-(-20)}{10-0}=\frac{v_A-0}{15-10}\Rightarrow v_A=10m/s$$

سرعت متحرک B در لحظهٔ t=۵s را به حساب می‌کنیم.



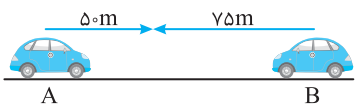
$$\frac{0-(-20)}{10-0}=\frac{0-v}{10-5}\Rightarrow v=-10m/s$$

با توجه به فرض مسئله دو متحرک پس از ۵s از کنار هم می‌گذرند. جابه‌جایی متحرک A و B را در مدت ۵s به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x_A=v_A\times t\Rightarrow\Delta x_A=5\times 10=50m$$

$$\Delta x_B=\frac{v+v_{\circ}}{2}\times t\Rightarrow\Delta x_B=\frac{-10+(-20)}{2}\times 5\Rightarrow\Delta x_B=-75m$$

سرعت متحرک A مثبت بوده و متحرک A در جهت محور xها ۵۰m جابه‌جا می‌شود و در همان مدت سرعت متحرک B منفی بوده و متحرک B خلاف جهت محور xها ۷۵m جابه‌جا می‌شود تا دو متحرک به هم برسند.

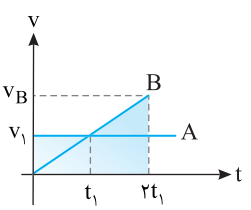


بنابراین، این دو متحرک در ابتدا در فاصلهٔ ۵۰+۷۵=۱۲۵m از هم بوده‌اند.

B ۳ ۵۸۴

۱ دو متحرک هم‌زمان از یک نقطه شروع به حرکت کرده‌اند $(x_{\circ A}=x_{\circ B})$.

۲ سرعت متحرک B را در لحظهٔ $2t_1$ به کمک شیب نمودار B به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{v_B-0}{2t_1-0}=\frac{v_1-0}{t_1-0}\Rightarrow v_B=2v_1$$

۳ برای مقایسهٔ سرعت متوسط دو متحرک $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$ چون Δt برای هر دو یکسان است باید جابه‌جایی دو متحرک را در بازهٔ صفر تا $2t_1$ مقایسه کنیم.

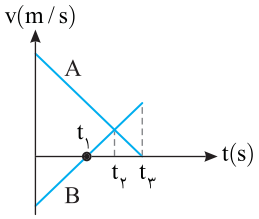
$$\Delta x_A=S=v_1(2t_1)=2v_1t_1\quad,\quad\Delta x_B=S=\frac{(2v_1)(2t_1)}{2}=2v_1t_1$$

۴ بنابراین جابه‌جایی‌ها در بازه‌های زمانی یکسان برابر بوده و سرعت متوسط آن‌ها یکی است.

۲ ۵۸۵ B

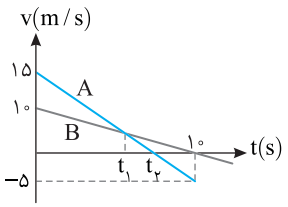
نکته هرگاه متحرک B به دنبال متحرک A در حرکت باشد تا لحظه‌ای که $v_B < v_A$ است، فاصلهٔ دو متحرک در حال افزایش است و اگر $v_B = v_A$ شود فاصلهٔ دو متحرک ثابت می‌ماند اما اگر $v_B > v_A$ شود فاصلهٔ متحرک B از A شروع به کاهش می‌کند.

دو متحرک A و B، A با سرعت مثبت و B با سرعت منفی هم‌زمان به راه می‌افتند و از هم دور می‌شوند. در لحظهٔ t_1 متحرک B سرعتش صفر شده و تغییر جهت می‌دهد و به دنبال متحرک A می‌رود، اما از لحظهٔ t_1 تا t_2 هم‌چنان سرعت A بیشتر از سرعت B است و تا لحظه‌ای که سرعت دو متحرک برابر شود یعنی تا لحظهٔ t_2 فاصلهٔ دو متحرک، در حال افزایش است از این لحظه به بعد $t > t_2$، سرعت B از سرعت A بیشتر شده و متحرک B فاصله‌اش از متحرک A شروع به کم شدن می‌کند بنابراین بیشترین فاصلهٔ دو متحرک از هم در لحظهٔ t_2 رخ می‌دهد.



۴ ۵۸۶ C

خط فکری سرعت اولیهٔ متحرک A، $15\,m/s$ و سرعت اولیهٔ متحرک B، $10\,m/s$ است از این رو متحرک A از متحرک B جلو می‌افتد و تا لحظه‌ای که سرعت متحرک B از A کمتر است فاصلهٔ A و B در حال افزایش است تا لحظه‌ای که $v_A = v_B$ می‌شود بنابراین بیشترین فاصلهٔ دو متحرک از هم در $10\,s$ نخست حرکت لحظه‌ای است که سرعت‌ها برابر می‌شوند، یعنی لحظهٔ t_1. بنابراین شما باید لحظهٔ t_1 را از روی نمودار به‌دست بیاورید.



سپس جابه‌جایی A و B را حساب کنید.

۱ شتاب حرکت هر متحرک را به‌دست می‌آوریم.

$$a = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow \begin{cases} a_A = \frac{-5-15}{10} = -2\,m/s^2 \\ a_B = \frac{0-10}{10} = -1\,m/s^2 \end{cases}$$

۲ در لحظهٔ t_1، سرعت دو متحرک را برابر قرار می دهیم.

$$v_A = v_B \xrightarrow{v = at + v_0} -2t_1 + 15 = -t_1 + 10 \Rightarrow t_1 = 5s$$

۳ مکان دو متحرک را در این لحظه به‌دست آورده از هم کم می‌کنیم

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{1}{2}(-2)(5)^2 + 15 \times 5 = 50\,m \\ x_B = \frac{1}{2}(-1)(5)^2 + 10 \times 5 = 37/5\,m \end{cases} \Rightarrow x_A - x_B = 12/5\,m$$

۲ ۵۸۷ C

۱ نمودار $v-t$ هر دو قطار خط راست و حرکت هر دو با شتاب ثابت می‌باشد. شتاب هر یک را حساب می‌کنیم:

$$a = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow \begin{cases} a_A = \frac{0-(-30)}{10} = 3\,m/s^2 \\ a_B = \frac{0-40}{16} = 2/5\,m/s^2 \end{cases}$$

۲ محل قطار A را در $t=0$ مبدأ اختیار کرده و معادلهٔ حرکت آن را می‌نویسیم و در لحظهٔ $t = 10\,s$ مکان A را حساب می‌کنیم.

$$x_A = \frac{1}{2} \times 3 \times t^2 - 30t \xrightarrow{t=10\,s} x_A = 150 - 300 = -150\,m$$

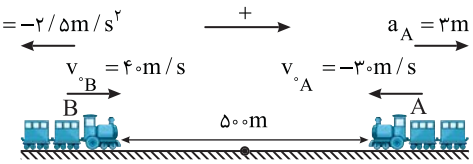
۳ معادلهٔ حرکت قطار B را می نویسیم و مکان آن را در $t = 10\,s$ به‌دست می‌آوریم:

$$x_B = \frac{1}{2} \times (-2/5)t^2 + 40t - 500 \xrightarrow{t=10\,s} x_B = -125 + 400 - 500$$

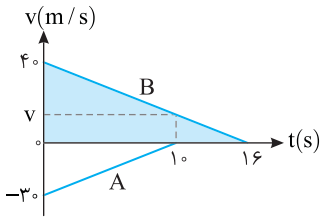
$$\Rightarrow x_B = -225\,m$$

۴ فاصلهٔ دو متحرک از هم خواهد شد:

$$\Delta x = |x_A - x_B| = 75\,m$$



روش دیگر: در لحظهٔ $t = 10\,s$ متحرک A می‌ایستد. به کمک شیب خط B سرعت متحرک B را در لحظهٔ $t = 10\,s$ به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{0-40}{16-0} = \frac{0-v}{16-10} \Rightarrow \frac{10}{4} = \frac{v}{6}$$

$$\Rightarrow v = 15\,m/s$$

اکنون سطح زیر دو نمودار را در بازهٔ صفر تا $10\,s$ به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x_A = \frac{-30 \times 10}{2} = -150\,m \quad , \quad \Delta x_B = \frac{40+15}{2} \times 10 = 275\,m$$

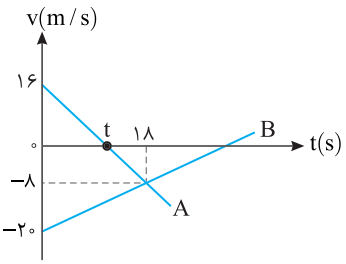
متحرک A، $150\,m$ و متحرک B، ۲۷۵ متر به سمت هم حرکت کرده‌اند و در ابتدا فاصلهٔ آن‌ها از هم $500\,m$ بوده بنابراین در این لحظه فاصلهٔ آن‌ها از هم خواهد شد.

$$500 - (150 + 275) = 75\,m$$

۲ ۵۸۸ B

جهت حرکت همان جهت سرعت متحرک است، بنابراین در مدتی که متحرک A در جهت محور x حرکت می‌کند، سرعت A مثبت است و این بازه زمانی از لحظه صفر تا t (محل برخورد نمودار با محور زمان) است.

۱ لحظهٔ t را به کمک شیب نمودار A به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{16-(-8)}{0-18} = \frac{16-0}{0-t}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{16}{t} \Rightarrow t = 12\,s$$

۲ شتاب حرکت B را حساب می‌کنیم:

$$a = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow a_B = \frac{-8-(-20)}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}\,m/s^2$$

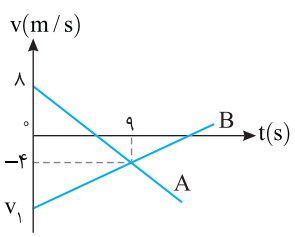
۳ جابه‌جایی B در مدت $t = 12\,s$ خواهد شد:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow \Delta x_B = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times (12)^2 + (-20) \times 12 \Rightarrow \Delta x_2 = 48 - 240$$

$$\Rightarrow \Delta x_2 = -192\,m$$

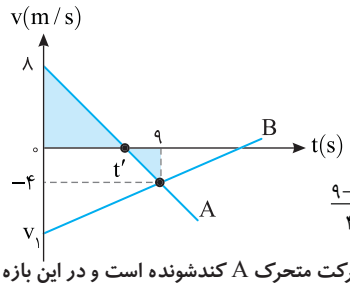
بنابراین بزرگی جابه‌جایی B برابر ۱۹۲ متر است.

بازی با سوال **نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که روی محور x حرکت می‌کنند مطابق شکل روبه‌رو است. در مدتی که حرکت متحرک A کندشونده است متحرک B به اندازه $96\,m$ مسافت طی می‌کند. بزرگی v_1 برابر چند متر بر ثانیه است؟** ریاضی - ۹۵



۱) ۲۲ ۲) ۱۱ ۳) ۲۰ ۴) ۱۸

پاسخ هنگامی‌که نمودار v−t متحرکی به محور زمان‌ها نزدیک می‌شود حرکت آن کندشونده است.



مطابق نمودار از $t=0$ تا $t=t'$ حرکت متحرک A کندشونده است. با استفاده از تشابه مثلث داریم:

$$\frac{9-t'}{4}=\frac{t'}{8}\Rightarrow 18-2t'=t'\Rightarrow t'=6s$$

بنابراین در بازهٔ $t=0$ تا $t'=6$ حرکت متحرک A کندشونده است و در این بازه مسافت طی شده توسط متحرک B برابر 96m است، شتاب متحرک B را به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a_B=\frac{-4-v_1}{9}$$

معادلهٔ مکان زمان را برای متحرک B می‌نویسیم. دقت کنید جابه‌جایی متحرک B در بازهٔ صفر تا 6s که سرعت منفی است برابر −96m است.

$$\Delta x_B=\frac{1}{2}a_Bt^2+v_1t'\Rightarrow -96=\frac{1}{2}\left(\frac{-4-v_1}{9}\right)\times 36+6v_1$$

$$\Rightarrow -96=-8-2v_1+6v_1\Rightarrow -88=4v_1\Rightarrow v_1=-22m/s\Rightarrow |v_1|=22m/s$$

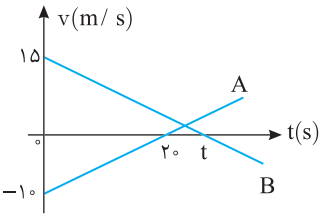
گزینهٔ ۱

B ۵۸۹ ۲

شتاب حرکت متحرک A را با توجه به نمودار به‌دست می‌آوریم و معادله حرکت آن را می‌نویسیم:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_A=\frac{0-(-10)}{20}=\frac{1}{2}m/s^2$$

$$x_A=\frac{1}{2}a_At^2+v_{0A}t+x_{0A}\Rightarrow x_A=\frac{1}{4}t^2-10t-100$$



با توجه به نمودار، لحظهٔ t، لحظه‌ای است که متحرک B تغییر جهت داده است، طبق صورت سؤال در این لحظه متحرک A، در مکان $x_A=-175m$ است. به کمک معادله حرکت A، این لحظه را به‌دست می‌آوریم.

$$x_A=-175\Rightarrow\frac{1}{4}t^2-10t+100=-175\Rightarrow\frac{1}{4}t^2-10t+75=0\Rightarrow t=10s,\ t=30s$$

$t=30s$ قابل قبول است زیرا متحرک B در لحظه‌ای پس از ۲۰ ثانیه تغییر جهت داده است. با داشتن لحظه تغییر جهت B $(t=30s)$ شتاب متحرک B را با استفاده از معادله سرعت - زمان حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=a(30)+15\Rightarrow a=-\frac{1}{2}m/s^2$$

(با استفاده از نمودار نیز می‌توان شتاب را محاسبه کرد: $a_B=\frac{0-15}{30}=-\frac{1}{2}m/s^2$)

مکان متحرک B را در $t=30s$ حساب می‌کنیم.

$$x_B=-\frac{1}{4}(30)^3+15(30)+100=325m$$

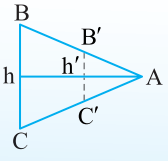
بنابراین فاصلهٔ متحرک‌ها از هم در $t=30s$ برابر است با:

$$x_B-x_A=325-(-175)=500m$$

B ۵۹۰ ۲

با یک مسئله ریاضی در مبحث تشابه مثلث‌ها سروکار داریم.

یادداشت ریاضی در مثلث روبه‌رو نسبت مساحت ABC به مساحت AB′C′ با مجذور نسبت ارتفاع Ah/Ah′ برابر است.



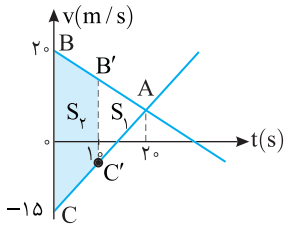
$$\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}}=\left(\frac{Ah'}{Ah}\right)^2$$

مسئله در واقع مساحت S_2 را می‌خواهد. بنابراین با توجه به یادداشت ریاضی می‌توان نوشت:

$$\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}}=\left(\frac{10}{20}\right)^2\Rightarrow\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{4}$$

$$S_1=\frac{1}{4}S_{ABC}\xrightarrow{S_{ABC}=S_1+S_2}S_2=\frac{3}{4}S_{ABC}$$

برای به‌دست آوردن مساحت مثلث ABC دقت کنید که ارتفاع آن ۲۰ و قاعدهٔ آن ۳۵=۱۵+۲۰ است. از این‌رو خواهیم داشت:

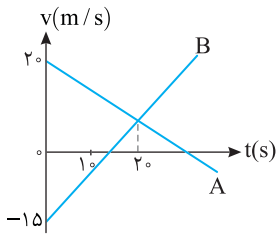


$$S_2=\frac{3}{4}\left(\frac{35\times 20}{2}\right)\Rightarrow S_2=262/5m$$

بازی با سؤال نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که در مبدأ زمان از مبدأ مکان روی محور xها می‌گذرند به صورت شکل روبه‌رو است، فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t=10s$ چند متر است؟

۱) ۲۵۰ ۲) ۲۶۲/۵

۳) ۳۵۰ ۴) ۱۲۵/۵

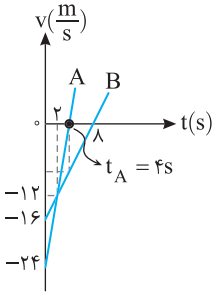


پاسخ حل این مسئله دقیقاً شبیه مسئلهٔ اصلی است.

گزینهٔ ۳

B ۵۹۱ ۳

شتاب a را حساب می‌کنیم.



$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_B=\frac{0-(-16)}{8}\Rightarrow a_B=2\frac{m}{s^2}$$

$$v_B=a_Bt+v_0$$

سرعت B در $t=2s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$t=2s\Rightarrow v_B=2\times 2-16\Rightarrow v_B=-12\frac{m}{s}$$

شتاب A خواهد شد:

$$a_A=\frac{-12-(-24)}{2}\Rightarrow a_A=6\frac{m}{s^2}$$

لحظه‌ای که تندی A صفر می‌شود، برابر است با: $v_A=0\Rightarrow 0=6(t_A)-24\Rightarrow t_A=4s$

از لحظهٔ $t=4s$ به بعد سرعت A مثبت می‌شود اما در بازهٔ 4s تا 8s سرعت B منفی است. بنابراین از 4s تا 8s دو متحرک در خلاف جهت هم در حرکت هستند. (فاصلهٔ بین آنها افزایش می‌یابد.)

جابه‌جایی متحرک A در این بازه (4s تا 8s) خواهد شد: $\Delta x_A=\frac{1}{2}\times 6\times 4^2=48m$

تندی جسم B را در لحظهٔ $t=4s$ به دست می‌آوریم. $v_B=2\times 4-16=-8\frac{m}{s}$

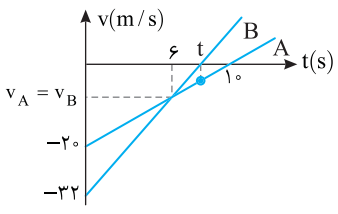
جابه‌جایی متحرک B در این بازه (4s تا 8s) را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x_B=\frac{v_2+v_1}{2}t\Rightarrow\Delta x_B=\frac{0+(-8)}{2}\times 4=-16m$$

بنابراین در بازهٔ 4s تا 8s فاصلهٔ A تا B 64m افزایش می‌یابد. $48+16=64m$

C ۵۹۲ ۴

خط فکری البته باید مشخص کنیم چه مدت دو متحرک خلاف جهت هم در حرکت هستند. در مدت صفر تا t سرعت هر دو متحرک منفی و در مدت $t>10s$ نیز سرعت هر دو متحرک مثبت است، بنابراین در بازهٔ زمانی t تا 10s دو متحرک خلاف جهت هم در حرکت هستند و شما باید رفتار دو متحرک را در این بازه بررسی کنید.



۱ شتاب A را به‌دست می‌آوریم.

$$a_A=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a_A=\frac{0-(-20)}{10}\Rightarrow a_A=2m/s^2$$

۲ سرعت متحرک A و B در لحظهٔ $t=6s$ یکسان و برابر است با:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=2\times6-20\Rightarrow v=-8m/s\Rightarrow v_A=v_B=-8m/s$$

۳ شتاب متحرک B را حساب می‌کنیم.

$$a_B=\frac{-8+32}{6-0}\Rightarrow a_B=4m/s^2$$

۴ لحظهٔ t را حساب می‌کنیم.

$$v_B=a_Bt+v_{0B}\Rightarrow 0=4\times t-32\Rightarrow t=8s$$

۵ معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته فاصلهٔ دو متحرک را در لحظه‌های $t=8s$ و $t=10s$ به‌دست آورده مقایسه می‌کنیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow\begin{cases}x_A=\frac{1}{2}\times2t^2-20t\Rightarrow x_A=t^2-20t\\ x_B=\frac{1}{2}\times4t^2-32t\Rightarrow x_B=2t^2-32t\end{cases}$$

$$|x_A-x_B|=|t^2-20t-2t^2+32t|\Rightarrow|x_A-x_B|=|-t^2+12t|$$

$$t=8s\Rightarrow|x_A-x_B|=|-64+96|\Rightarrow|x_A-x_B|=32m$$

$$t=10s\Rightarrow|x_A-x_B|=|-100+120|\Rightarrow|x_A-x_B|=20m$$

بنابراین فاصلهٔ دو متحرک از $32m$ در لحظهٔ $t=8s$ به $20m$ در لحظهٔ $t=10s$ رسیده یعنی فاصلهٔ A و B $12m$ کاهش می‌یابد.

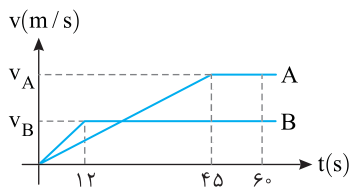
B ۵۹۳ ۳

دو متحرک A و B با سرعت مثبت در یک جهت از یک نقطه می‌گذرند. در تمام مدت $28s$ ، سرعت متحرک B از سرعت متحرک A بیشتر است بنابراین فاصلهٔ دو متحرک در تمام مدت $28s$ در حال افزایش است.

B ۵۹۴ ۳

۱ شتاب حرکت A و B را در اختیار داریم، بنابراین سرعت ثابت هر دو متحرک را می‌توانیم به‌دست بیاوریم.

$$v=at+v_0\begin{cases}\xrightarrow{a_A=1m/s^2} v_A=1\times45=45m/s\\ \xrightarrow{a_B=3m/s^2} v_B=3\times12=36m/s\end{cases}$$



۲ سطح زیر نمودار A از لحظهٔ صفر تا $60s$ را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x_A=S_A\Rightarrow\Delta x_A=(60+15)\times\frac{45}{2}=1687/5m$$

۳ سطح زیر نمودار B از لحظهٔ صفر تا $60s$ را به‌دست می‌آوریم.

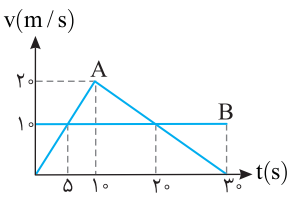
$$\Delta x_B=S_B\Rightarrow\Delta x_B=(60+48)\times\frac{36}{2}=1944m$$

۴ فاصلهٔ دو متحرک در $t=60s$ خواهد شد:

$$1944-1687/5=256/5m$$

B ۵۹۵ ۳

برای حل این پرسش در لحظه‌های بیان شده در گزینه‌ها، سطح زیر نمودارها را با هم مقایسه می‌کنیم. در هر لحظه‌ای که سطح زیر نمودارها یکی شود، دو متحرک از کنار هم می‌گذرند.



$$t=5s\Rightarrow\begin{cases}x_A=S_A=\frac{5\times10}{2}=25m\\ x_B=S_B=5\times10=50m\end{cases}\Rightarrow x_A\neq x_B$$

$$t=10s\Rightarrow\begin{cases}x_A=S_A=\frac{20\times10}{2}=100m\\ x_B=S_B=10\times10=100m\end{cases}\Rightarrow x_A=x_B$$

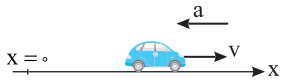
$$t=20s\Rightarrow\begin{cases}x_A=S_A=100+\frac{20+10}{2}\times10=250m\\ x_B=S_B=10\times20=200m\end{cases}\Rightarrow x_A\neq x_B$$

$$t=30s\Rightarrow\begin{cases}x_A=S_A=\frac{30\times20}{2}=300m\\ x_B=S_B=10\times30=300m\end{cases}\Rightarrow x_A=x_B$$

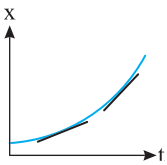
بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

A ۵۹۶ ۴

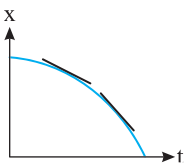
به شکل نگاه کنید، بردار سرعت و بردار شتاب در خلاف جهت هم هستند، بنابراین حرکت کندشونده است.



در گزینهٔ (۱)، شتاب مثبت است و سرعت مثبت است و اگر در نمودار مکان - زمان چند مماس رسم کنیم، شیب خط مماس در حال افزایش است بنابراین حرکت تندشونده و این گزینه نادرست است.

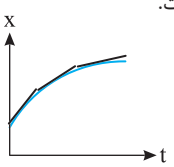


گزینهٔ (۲): نمودار مکان - زمان مربوط به حرکت تندشونده است. زیرا با رسم چند مماس مشخص است که خط مماس به حالت قائم نزدیک می‌شود و تندی در حال افزایش است. از طرفی سرعت و شتاب هر دو منفی هستند بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است.



گزینهٔ (۳): با اینکه سرعت مثبت و شتاب منفی است اما نمودار مکان زمان مانند گزینهٔ (۲) مربوط به حرکت تندشونده است و این گزینه نادرست است.

گزینهٔ (۴): در نمودار مکان - زمان اگر چند مماس رسم کنیم خط مماس به حالت افقی نزدیک می‌شود یعنی شیب خط مماس به سمت صفر می‌رود و حرکت کندشونده است. از طرفی سرعت مثبت و شتاب منفی است و این گزینه درست است.



A ۵۹۷ ۳

نکته هرگاه متحرک از حال سکون روی خط راست شروع به حرکت کند، جسم در جهت شتاب حرکت کرده و تا لحظه‌ای که شتاب تغییر جهت ندهد حرکت آن تندشونده است.

در گزینهٔ (۱) شتاب تغییر علامت و تغییر جهت داده است یعنی ابتدا شتاب منفی و سپس شتاب مثبت می‌شود، بنابراین ابتدا حرکت تندشونده و با تغییر جهت بردار شتاب، حرکت کندشونده می‌شود.

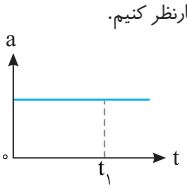
در گزینهٔ (۲) نیز ابتدا شتاب مثبت و سپس منفی است. بنابراین حرکت متحرک که از حال سکون شروع به حرکت کرده ابتدا تندشونده و سپس کندشونده است و گزینهٔ (۲) نادرست است.

متحرک در جهت مثبت از حال سکون شروع به حرکت کرده بنابراین شتاب حرکت آن مثبت است و حرکت همواره تندشونده است یعنی جهت شتاب تغییر نکرده از این رو گزینهٔ (۳) درست است و گزینهٔ (۴) نادرست است. زیرا در گزینهٔ (۴) شتاب منفی است.

B ۵۹۸ ۴

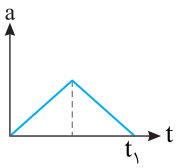
نکته هرگاه سرعت اولیهٔ متحرک مشخص نباشد و تنها نمودار شتاب زمان را در اختیار داشته باشیم، در مورد چگونگی حرکت نمی‌توانیم اظهارنظر کنیم.

فرض کنید متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده باشد در این صورت چون شتاب ثابت بوده و تغییر جهت نمی‌دهد حرکت همواره تندشونده است و گزینهٔ (۱) می‌تواند درست باشد. اگر از ابتدا سرعت اولیهٔ متحرک منفی باشد چون شتاب مثبت است می‌تواند حرکت کندشونده باشد و متحرک



در لحظهٔ t_1 متوقف شود و گزینهٔ (۲) می‌تواند درست باشد. البته ممکن است ابتدا حرکت کندشونده باشد و قبل از t_1 متحرک متوقف شده و برگردد و سپس حرکت تندشونده باشد بنابراین گزینهٔ (۳) نیز می‌تواند درست باشد.

بازی با سؤال **نمودار شتاب - زمان متحرکی که روی محور x‌ها با سرعت اولیهٔ v_0 شروع به حرکت کرده است، مطابق شکل روبه‌رو است. حرکت متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 چگونه است؟**



۱) تندشونده ۲) کندشونده

۳) ابتدا تندشونده و سپس کندشونده ۴) بستگی به v_0 دارد.

پاسخ نمودار شتاب - زمان نوع حرکت را مشخص نمی‌کند مگر آن‌که سرعت اولیه مشخص باشد.

گزینهٔ ۴

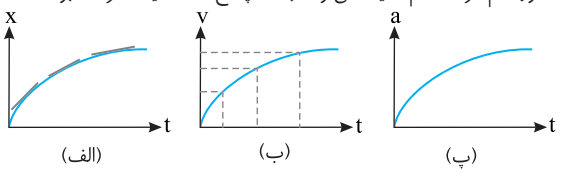
B ۵۹۹ ۳

به کلمهٔ می‌تواند در صورت مسئله دقت کنید. از طرفی قرار است که حرکت تندشونده باشد. نمودار الف نمودار مکان - زمان فرض شده. اگر شما چند خط مماس بر نمودار رسم کنید شیب خط مماس به حالت افقی نزدیک شده یعنی تندی در حال کاهش است و حرکت کندشونده است. بنابراین محور b نمی‌تواند محور مکان باشد و گزینهٔ (۱) نادرست است.

اگر محور b محور سرعت باشد، حرکت قطعاً تندشونده است. (نمودار (ب))

اگر محور b محور شتاب باشد و سرعت اولیه صفر یا مثبت باشد، حرکت تندشونده است و اگر سرعت اولیه منفی باشد، حرکت ابتدا کندشونده است. (نمودار (پ))

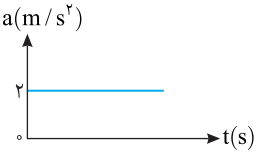
بنابراین محور b می‌تواند سرعت یا شتاب باشد. اما اگر در صورت مسئله بیان می‌کرد که محور قائم الزاماً کدام کمیت می‌تواند باشد، پاسخ فقط کمیت سرعت بود.



(الف) (ب) (پ)

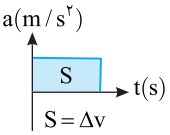
B ۶۰۰ ۳

سرعت اولیه $+5m/s$ و شتاب مثبت است یعنی بردار سرعت و بردار شتاب همواره هم‌جهت بوده و حرکت همواره تندشونده است.



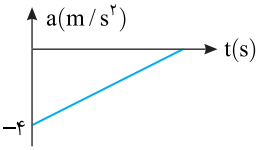
B ۶۰۱ ۳

نکته سطح زیر نمودار شتاب - زمان برابر تغییر سرعت متحرک است.



خط فکری سرعت اولیهٔ متحرک $+14m/s$ به شما داده شده همچنین نمودار شتاب - زمان را در اختیار دارید بنابراین به کمک سطح زیر نمودار شتاب - زمان، تغییر سرعت را به‌دست آورید و به کمک این تغییر سرعت و سرعت اولیه دربارهٔ نوع حرکت اظهارنظر کنید.

۱ ابتدا سطح محصور بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان که بیانگر تغییر سرعت متحرک است را به‌دست می‌آوریم:



$$\Delta v=S\Rightarrow \Delta v=\frac{-4\times 5}{2}$$
$$\Rightarrow \Delta v=-10m/s$$

۲ اکنون سرعت نهایی متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta v=v-v_0\Rightarrow -10=v-14\Rightarrow v=4m/s$$

۳ بنابراین در بازهٔ زمانی صفر تا $5s$، سرعت متحرک از $+14m/s$ به $+4m/s$ کاهش یافته است و حرکت کندشونده است.

B ۶۰۲ ۴

خط فکری نکته‌ای که شما باید به آن دقت کنید این است که اگر سرعت جسم مثلاً از $-5m/s$ به $+8m/s$ برسد یعنی تندی متحرک از $-5m/s$ ابتدا به صفر رسیده و حرکت کندشونده و سپس تندی از صفر به $8m/s$ رسیده و حرکت تندشونده است. بنابراین شما باید در به‌دست آوردن سرعت نهایی به این نکته دقت کنید سپس دربارهٔ نوع حرکت اظهارنظر کنید.

۱ ابتدا سطح زیر نمودار شتاب - زمان را که بیانگر تغییر سرعت است به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta v=S\Rightarrow \Delta v=\frac{7\times(-3)}{2}=-10/5m/s$$

۲ بنابراین سرعت نهایی در لحظهٔ $t=7s$ برابر است با:

$$\Delta v=v-v_0\Rightarrow -10/5=v-4\Rightarrow v=-6/5m/s$$

۳ در نتیجه ابتدا تندی از $+4m/s$ به صفر کاهش یافته و حرکت کندشونده بوده سپس تندی از صفر به $6/5m/s$ در جهت منفی محور افزایش یافته است و حرکت تندشونده است.

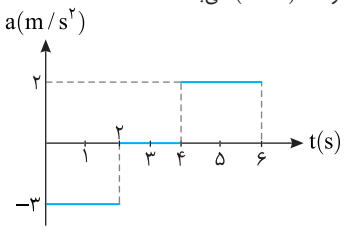
B ۶۰۳ ۲

خط فکری برای آنکه بتوان تشخیص داد در یک لحظه حرکت تندشونده و یا کندشونده است، باید علامت سرعت و علامت شتاب را در آن لحظه تعیین کرد. در لحظهٔ $t=1s$ و $t=4/5s$ علامت سرعت را به‌دست بیاورید و نوع حرکت در این لحظه‌ها مشخص کنید.

۱ سرعت در لحظهٔ $t=1s$ خواهد شد:

$$v=at+v_0 \xrightarrow{t=1s} v=-3\times 1+4\Rightarrow v=+1m/s$$

۲ در لحظهٔ $t=1s$ سرعت مثبت $(+1m/s)$ و شتاب منفی $(a=-3m/s^2)$ بوده و حرکت کندشونده $(av<0)$ می‌باشد.



۳ سرعت در لحظهٔ $t=2s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_0=-3\times 2+4=-2m/s$$

۴ از لحظهٔ $t=2s$ تا $t=4s$، شتاب صفر است و حرکت دارای سرعت ثابت بوده از این‌رو در لحظهٔ $t=4s$ سرعت همچنان برابر $-2m/s$ است.

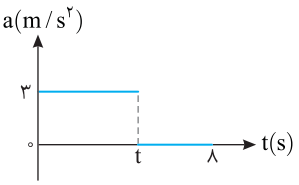
۵ اکنون سرعت در لحظهٔ $t=4/5s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_0\Rightarrow v=2\times(4/5-4)+(-2)\Rightarrow v=-1m/s$$

۶ در لحظهٔ $t=4/5s$ سرعت منفی $(-1m/s)$ و شتاب مثبت $(a=2m/s^2)$ است بنابراین حرکت کندشونده $(av<0)$ است.

B ۶۰۴ ۱

یادآوری شتاب متوسط برابر $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ بوده، از طرفی مساحت سطح زیر نمودار شتاب - زمان برابر تغییرات سرعت است.



۱ ابتدا سطح زیر نمودار در بازهٔ صفر تا $8s$ را به‌دست می‌آوریم.

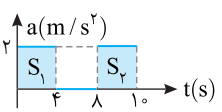
$$\Delta v=S=3t$$

۲ بنابه فرض مسئله خواهیم داشت:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow 1/2=\frac{3t}{8}\Rightarrow t=3/2s$$

B ۶۰۵ ۳

شتاب متوسط برابر تغییر سرعت در یکای زمان است و تغییر سرعت برابر سطح زیر نمودار شتاب - زمان است.

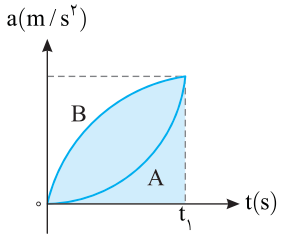


$$S=\Delta v=2\times 4+2\times 2=12m/s$$

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{12}{10}\Rightarrow a_{av}=1/2m/s^2$$

A ۶۰۶ ۳

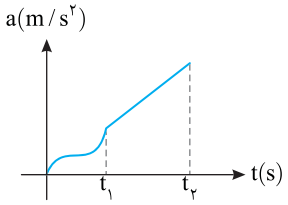
مساحت زیر نمودار $a-t$ برابر تغییر سرعت است. با توجه به نمودار، مساحت زیر نمودار $a-t$، متحرک B بزرگ‌تر از مساحت زیر نمودار $a-t$ متحرک A است بنابراین تغییرات سرعت B بیشتر از A است و در یک مدت زمان یکسان شتاب متوسط B بزرگ‌تر از شتاب متوسط A می‌باشد.



$$\Delta v_B > \Delta v_A \Rightarrow \frac{\Delta v_B}{\Delta t} > \frac{\Delta v_A}{\Delta t} \xrightarrow{a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}} a_{av_B} > a_{av_A}$$

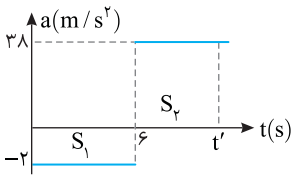
B ۶۰۷ ۲

بررسی این مسئله به کمک سطح زیر نمودار راه به جایی نمی‌برد اما می‌توان این‌گونه استدلال کرد که در بازهٔ t_1 تا t_2 شتاب در تمام لحظات از شتاب در لحظات مختلف بازهٔ صفر تا t_1 بیشتر بوده بنابراین شتاب متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2 بزرگ‌تر از شتاب متوسط در بازهٔ صفر تا t_1 است.



B ۶۰۸ ۳

نکته هرگاه در مسئله خواسته شود که بزرگی سرعت به بزرگی سرعت اولیه برسد یعنی تغییر سرعت صفر شود. سطح زیر نمودار شتاب - زمان برابر تغییر سرعت متحرک است از این‌رو سطح زیر نمودار را در مدت t' برابر صفر قرار می‌دهیم.



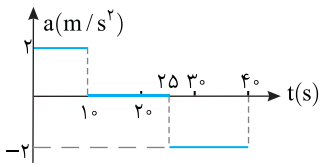
$$\Delta v = S \Rightarrow S_1 + S_2 = 0$$

$$\Rightarrow -2\times 6 + 3\times(t'-6) = 0 \Rightarrow -30 = -3t' \Rightarrow t' = 10\,s$$

B ۶۰۹ ۱

در حل این پرسش کافی است از معادلهٔ سرعت- زمان در هر مرحله استفاده کنیم:

$$v = at + v_0$$



$0 \to 10\,s$: $v = 2\times 10 + 4 \Rightarrow v = 24\,m/s$

$10\,s \to 25\,s$: $a = 0 \Rightarrow v = 24\,m/s$

$25\,s \to 30\,s$: $v = -2\times(30-25)+24 \Rightarrow v = 14\,m/s$

حل به کمک سطح زیر نمودار شتاب - زمان

سطح زیر نمودار را حساب می‌کنیم:

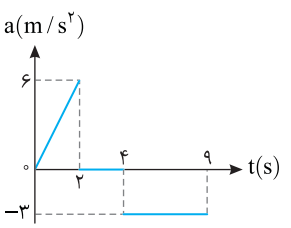
$$\Delta v = S = 2\times 10 + (-2)\times(30-25) \Rightarrow \Delta v = +10\,m/s$$

سرعت اولیه $v_0 = +4\,m/s$ است. از این‌رو خواهیم داشت:

$$\Delta v = v - v_0 \Rightarrow 10 = v - 4 \Rightarrow v = 14\,m/s$$

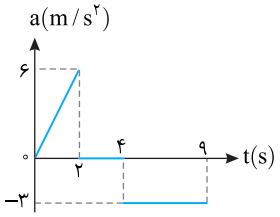
دقت کنید که سرعت در لحظهٔ $t = 30\,s$ از شما خواسته شده نه لحظهٔ $t = 40\,s$.

بازی با سؤال سرعت اولیهٔ متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند برابر $3\,m/s$ و نمودار شتاب - زمان آن به شکل روبه‌رو است. در چه لحظه‌ای سرعت این متحرک برابر $v = -3\,m/s$ می‌شود؟



۱) $t = 3\,s$ ۲) $t = 6\,s$ ۳) $t = 8\,s$ ۴) $t = 12\,s$

پاسخ مساحت زیر نمودار $a-t$ برابر تغییرات سرعت می‌باشد. بنابراین:



$$\Delta v_{t=0\,to\,2s} = \frac{6\times 2}{2} = 6\,m/s$$

$$\Rightarrow \Delta v = v - v_0$$

$$\Rightarrow 6 = v - 3 \Rightarrow v_{t=2s} = 9\,m/s$$

در بازهٔ $t=2s$ تا $4s$ شتاب صفر است پس سرعت تغییر نمی‌کند. از بازهٔ $4s$ تا t' که سرعت در t' برابر $-3\,m/s$ می‌شود، حرکت با شتاب ثابت $-3\,m/s^2$ است از این‌رو:

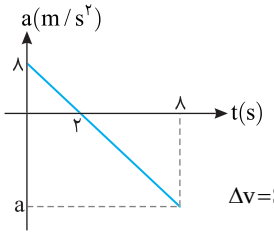
$$v = at + v_0 \Rightarrow -3 = -3(t-4)+9 \Rightarrow t = 8\,s$$

گزینهٔ ۳

B ۶۱۰ ۲

خط فکری در لحظهٔ $t=8s$ جهت حرکت عوض شده بنابراین در این لحظه قطعاً سرعت صفر شده است. به کمک شیب نمودار شتاب در لحظهٔ $8s$ را به‌دست آورده سطح زیر نمودار را حساب کنید تا تغییر سرعت را به‌دست آورده باشید سپس به سراغ سرعت اولیه بروید.

۱ شتاب در لحظهٔ $t=8s$ را به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{0-8}{2-0} = \frac{a-0}{8-2} \Rightarrow a = -24\,m/s^2$$

۲ سطح زیر نمودار را حساب می‌کنیم:

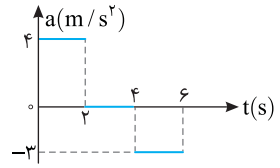
$$\Delta v = S_1 + S_2 \Rightarrow \Delta v = 8 + \left(\frac{-24\times 6}{2}\right) = -64\,m/s$$

۳ در $t=8s$ جهت حرکت تغییر کرده بنابراین $v_{t=8s} = 0$ است:

$$\Delta v = v_{t=8s} - v_{t=0} = -64 \Rightarrow 0 - v_{t=0} = -64\,m/s \Rightarrow v_{t=0} = 64\,m/s$$

B ۶۱۱ ۳

خط فکری سرعت در لحظه‌های $t=2s$، $t=4s$ و $t=6s$ را به‌دست بیاورید. حرکت در بازهٔ ۰ تا $2s$ با شتاب ثابت مثبت، در بازهٔ $2s$ تا $4s$ با سرعت ثابت و در بازهٔ $3s$ تا $6s$ با شتاب ثابت منفی بوده است. در نمودار سرعت - زمان در هر نقطه‌ای که نمودار محور زمان را قطع کند، متحرک تغییر داده است.



۱ سرعت در لحظهٔ $t=2s$ خواهد شد:

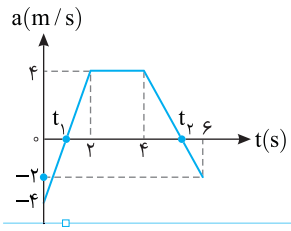
$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 4\times 2 + (-4) \Rightarrow v = +4\,m/s$$

۲ در لحظهٔ $t=4s$ همچنان سرعت $4\,m/s$ است.

۳ سرعت در لحظهٔ $t=6s$ را حساب می‌کنیم.

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -3\times 2 + 4 \Rightarrow v = -2\,m/s$$

۴ نمودار را رسم می‌کنیم، در دو لحظهٔ t_1 و t_2 متحرک تغییر جهت داده است.



A ۶۱۲ ۳

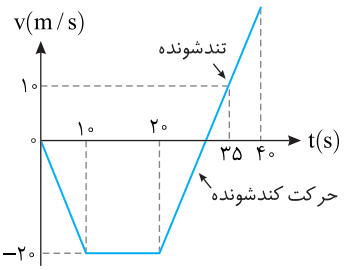
باید نمودار سرعت - زمان را رسم کنیم. در هر قسمت که تندی در حال کاهش باشد حرکت کندشونده و در هر قسمت که تندی در حال افزایش باشد حرکت تندشونده است. ابتدا سرعت جسم را در لحظهٔ $t_1=20s$ و $t_2=35s$ حساب می‌کنیم. با توجه به نمودار سؤال در بازهٔ صفر تا $10s$ حرکت دارای شتاب ثابت $-2\,m/s^2$ است از این‌رو:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -2\times 10 + 0 \Rightarrow v = -20\,m/s$$

در بازهٔ $10s$ تا $20s$ شتاب صفر و حرکت یکنواخت بوده و سرعت همچنان $-20\,m/s$ است. در بازهٔ $20s$ تا $35s$ حرکت دارای شتاب ثابت $2\,m/s^2$ است، در نتیجه:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 2(35-20) + (-20) \Rightarrow v = 10\,m/s$$

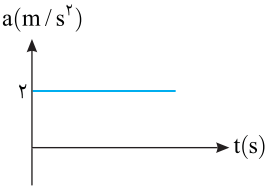
نمودار را رسم می‌کنیم (متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده و سرعت اولیه صفر است). در بازهٔ ۲۰s تا ۳۵s تندی ابتدا در حال کاهش و حرکت کندشونده است و سپس افزایش یافته به $10m/s$ می‌رسد پس



گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند. نمودار سرعت - زمان در این بازه محور زمان را قطع کرده و سرعت صفر شده و تغییر علامت داده بنابراین یک بار متحرک تغییر جهت می‌دهد و گزینهٔ (۳) درست است. در ابتدا سرعت منفی بوده یعنی متحرک در ابتدا در جهت منفی محور در حرکت است و گزینهٔ (۴) نادرست است.

B ۶۱۳ **۳**

حرکت دارای شتاب ثابت است و معادلهٔ حرکت به صورت زیر است:



$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x=t^2-4t+3$$

معادلهٔ سرعت - زمان را می‌نویسیم تا مشخص کنیم در بازهٔ صفر تا $3s$ متحرک تغییر جهت می‌دهد یا نه:

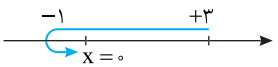
$$v=2t-4\xrightarrow{v=0}t=2s$$

متحرک در $t=2s$ تغییر جهت می‌دهد. حال مکان را در لحظهٔ $t=2s$ و $t=3s$ مشخص می‌کنیم.

$$t=2s\Rightarrow x=4-8+3\Rightarrow x=-1m$$

$$t=3s\Rightarrow x=9-12+3\Rightarrow x=0$$

مسافت طی شده برابر است با:



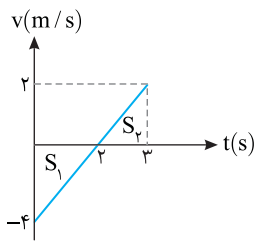
$$d=3+1+1=5m$$

حل با استفاده از رسم نمودار سرعت - زمان

متحرک از مکان اولیه $x_0=+3m$ با سرعت اولیهٔ $v_0=-4m/s$ با شتاب $+2m/s^2$ می‌گذرد. معادلهٔ سرعت - زمان آن را می‌نویسیم:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=2t-4$$

نمودار سرعت - زمان آن را رسم می‌کنیم.



$$v=0\Rightarrow 2t-4=0\Rightarrow t=2s$$

$$t=3s\Rightarrow v=2\times3-4=2m/s$$

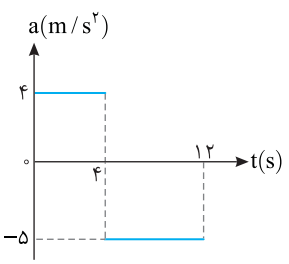
حال به کمک مجموع مساحت‌های S_1 و S_2 مسافت طی شده را حساب می‌کنیم:

$$\ell=|S_1|+|S_2|=\frac{4\times2}{2}+\frac{1\times2}{2}=5m$$

B ۶۱۴ **۳**

خط فکری سرعت در $t=0$ برابر $v_0=4m/s$ است. سرعت را در $t=4s$ و $t=12s$ را به‌دست می‌آوریم، نمودار سرعت - زمان را رسم کرده و به کمک سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان مسافت طی شده را حساب می‌کنیم.

۱ در بازهٔ صفر تا $4s$ شتاب حرکت $4m/s^2$ است و سرعت در $t=4s$ خواهد شد:



$$v=at+v_0\Rightarrow v=4\times4+4$$

$$\Rightarrow v=20m/s$$

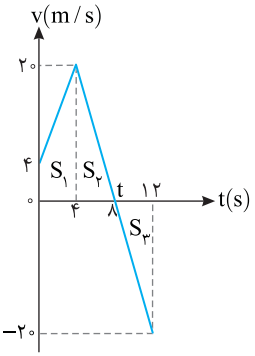
۲ در بازهٔ $4s$ تا $12s$ شتاب حرکت $-5m/s^2$ بوده و سرعت اولیهٔ این قسمت همان سرعت انتهای بازهٔ قبلی یعنی $20m/s$ است.

$$v=at+v_0\Rightarrow v=-5(12-4)+20\Rightarrow v=-5\times8+20\Rightarrow v=-20m/s$$

۳ لحظه‌ای که نمودار محور زمان را قطع می‌کند و سرعت صفر می‌شود را به‌دست می‌آوریم:

$$0=-5(t-4)+20\Rightarrow -5t+20+20=0\Rightarrow t=8s$$

۴ اکنون می‌توانیم نمودار را رسم کنیم.



۵ با محاسبهٔ مساحت‌های S_1، S_2 و S_3، مسافت در بازهٔ صفر تا $12s$ را حساب می‌کنیم:

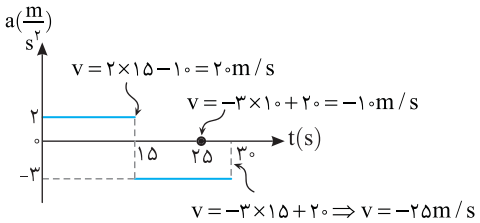
$$d=|S_1|+|S_2|+|S_3|$$

$$d=\frac{20+4}{2}\times4+\frac{20\times4}{2}+\frac{20\times4}{2}$$

$$d=48+40+40=128m$$

B ۶۱۵ **۱**

خط فکری نمودار شتاب - زمان به شما اطلاعات زیادی نمی‌دهد. در نمودار شتاب - زمان مسئله، متحرک در بازهٔ صفر تا $15s$ دارای شتاب ثابت $2m/s^2$ و در بازهٔ زمانی $15s$ تا $30s$ دارای شتاب ثابت $-3m/s^2$ است از این‌رو شما می‌توانید از روابط حرکت با شتاب ثابت استفاده کنید. ابتدا به کمک معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت جابه‌جایی در $5s$ اول را حساب کنید. سپس سرعت متحرک را در لحظهٔ $t=15s$ به کمک معادلهٔ سرعت زمان $(v=at+v_0)$ به‌دست بیاورید و فراموش نکنید سرعت در این لحظه، سرعت اولیهٔ قسمت بعدی حرکت است. اما ۵ ثانیهٔ ششم یعنی چه؟ یعنی بازهٔ زمانی بین $t=25s$ تا $t=30s$ به کمک معادلهٔ سرعت - زمان، سرعت متحرک را در این لحظه‌ها حساب کنید و سپس به کمک فرمول مستقل از شتاب $(\Delta x=\frac{v+v_0}{2}t)$ جابه‌جایی در این بازه را به‌دست بیاورید. اکنون به سراغ حل مسئله بروید.



ابتدا در ۵ ثانیهٔ اول جابه‌جایی را حساب می‌کنیم. حرکت دارای شتاب ثابت $2m/s^2$ و سرعت اولیه $-10m/s$ است، از این رو در پنج ثانیه اول جابه‌جایی خواهد شد:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow \Delta x_1=\frac{1}{2}\times2\times25-10\times5\Rightarrow|\Delta x_1|=25m$$

برای به‌دست آوردن جابه‌جایی در پنج ثانیهٔ ششم (یعنی بازهٔ $25s$ تا $30s$) مراحل زیر را باید طی کنیم.

۱ سرعت در لحظهٔ $t=15s$ را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0\Rightarrow v=2\times15-10=20m/s$$

۲ سرعت در لحظهٔ $t=25s$ و $t=30s$ را حساب می‌کنیم.

$$t=25s\ ,\ v_1=-3(25-15)+20\Rightarrow v_1=-10m/s$$

$$t=30s\ ,\ v_2=-3(30-15)+20\Rightarrow v_2=-25m/s$$

۳ اندازه جابه‌جایی در بازه ۵ ثانیهٔ ششم خواهد شد:

$$|\Delta x_2|=|\frac{v_1+v_2}{2}|\Delta t\Rightarrow|\Delta x_2|=\frac{|10+25|}{2}\times5=87/5m$$

$$\frac{|\Delta x_2|}{|\Delta x_1|}=\frac{87/5}{25}=3/5$$

اکنون نسبت اندازه جابه‌جایی‌ها را به‌دست می‌آوریم.

البته شما می‌توانید این مسئله را به کمک رسم نمودار سرعت زمان نیز حل کنید اما فراموش نکنید برای رسم نمودار $v-t$ نیز باید تمام محاسبات بالا را انجام دهید.

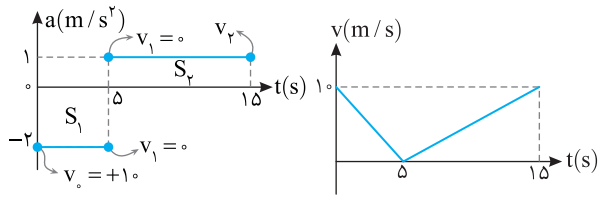
B ۶۱۶ ۲

ابتدا از روی نمودار $a-t$ ، نمودار $v-t$ متحرک را رسم می‌کنیم:

یادآوری سطح زیر نمودار $a-t$ برابر تغییر سرعت است.

$S_1=\Delta v_1\Rightarrow -10=v_1-v_0\Rightarrow -10=v_1-10\Rightarrow v_1=0$

$S_2=\Delta v_2\Rightarrow 10=v_2-v_1\Rightarrow 10=v_2-0\Rightarrow v_2=10m/s$



الف) با توجه به نمودار $v-t$ ، سرعت متحرک در لحظهٔ $t=5s$ صفر می‌شود اما علامت سرعت تغییر نمی‌کند، یعنی متحرک در این لحظه تغییر جهت نمی‌دهد و گزاره (الف) نادرست است. بنابراین نیازی به بررسی تغییر جهت بردار مکان وجود ندارد.

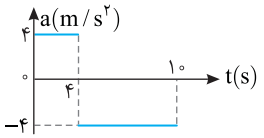
ب) چون متحرک تغییر جهت نمی‌دهد پس جابه‌جایی و مسافت با هم برابر است و گزاره (ب) درست است.

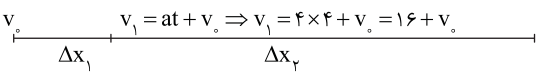
پ) شتاب متوسط برابر $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ است و چون سرعت در $t=0$ و $t=15s$ یکسان و برابر $10m/s$ بوده پس $\Delta v=0$ است و شتاب متوسط برابر صفر است و گزارهٔ (پ) درست است.

ت) سطح زیر نمودار $v-t$ برابر جابه‌جایی است و چون نمودار $v-t$ کلاً بالای محور زمان قرار دارد و جابه‌جایی مثبت و مخالف صفر $(\Delta x>0)$ بوده و با توجه به تعریف $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ سرعت متوسط دارای مقداری مثبت خواهد بود و گزارهٔ (ت) نادرست است.

B ۶۱۷ ۳

حرکت از دو مرحلهٔ با شتاب ثابت تشکیل شده است.





۱ جابه‌جایی متحرک در قسمت اول مسیر را برحسب v_0 به‌دست می‌آوریم:

$\Delta x_1=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow \Delta x_1=\frac{1}{2}\times 4\times 16+4v_0\Rightarrow \Delta x_1=32+4v_0$

۲ سرعت انتهایی مرحلهٔ اول برابر سرعت اولیهٔ مرحلهٔ دوم حرکت است و جابه‌جایی متحرک در این قسمت را حساب می‌کنیم و به جای سرعت اولیه از روی شکل مقدار $16+v_0$ را قرار می‌دهیم.

$\Delta x_2=\frac{1}{2}at^2+v_1t\Rightarrow \Delta x_2=\frac{1}{2}(-4)\times 36+6v_1\Rightarrow \Delta x_2=-72+6(16+v_0)$

$\Rightarrow \Delta x_2=24+6v_0$

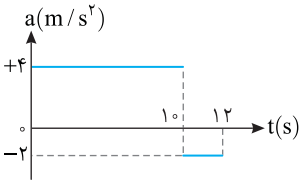
۳ بنا به فرض مسئله باید جمع Δx_1 و Δx_2 را برابر ۱۵۶m قرار داده و v_0 را حساب کنیم:

جابه‌جایی کل برابر ۱۵۶ متر است از این‌رو:

$\Delta x_t=\Delta x_1+\Delta x_2\Rightarrow 156=32+4v_0+24+6v_0\Rightarrow v_0=10m/s$

B ۶۱۸ ۴

۱ جابه‌جایی را در بازه‌ها زمانی صفر تا ۱۰ ثانیه برابر است با:



$0\to 10s:\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t$

$\Rightarrow \Delta x_1=\frac{1}{2}\times 4\times 100+5\times 10=250m$

۲ سرعت در لحظهٔ $t=10s$ را حساب می‌کنیم:

$v_1=at+v_0\Rightarrow v_1=4\times 10+5=45m/s$

این سرعت، سرعت اولیهٔ قسمت بعدی است، از این رو جابه‌جایی در بازهٔ $t=10s$ تا $t=12s$ برابر است با:

$10s\to 12s:\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_1t\Rightarrow \Delta x_2=\frac{1}{2}\times(-2)\times 4+45\times 2=86m$

۳ سرعت متوسط برابر خواهد شد با:

$v_{av}=\frac{\Delta x_1+\Delta x_2}{\Delta t_1+\Delta t_2}=\frac{250+86}{12}=\frac{336}{12}=\frac{112}{4}\Rightarrow v_{av}=28m/s$

حل به کمک رسم نمودار سرعت - زمان:

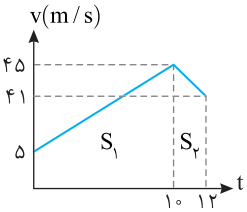
۱ سرعت در لحظهٔ $t=10s$ را به‌دست می‌آوریم.

$v=at+v_0\Rightarrow v=4\times 10+5\Rightarrow v=45m/s$

۲ سرعت در لحظهٔ $t=12s$ را حساب می‌کنیم.

$v=-2(12-10)+45\Rightarrow v=41m/s$

۳ نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم و سطح زیر نمودار را به‌دست می‌آوریم.



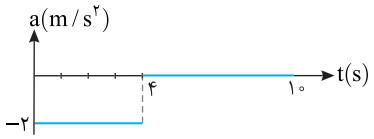
$\Delta x=S_1+S_2$

$\Rightarrow \Delta x=(45+5)\times\frac{10}{2}+(45+41)\times\frac{2}{2}$

$\Rightarrow \Delta x=250+86\Rightarrow \Delta x=336m$

۴ سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{336}{12}=\frac{112}{4}\Rightarrow v_{av}=28m/s$

بازی با سؤال نمودار شتاب- زمان ذره‌ای که با سرعت اولیهٔ $4m/s$ در جهت مثبت محور x شروع به حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. سرعت متوسط متحرک تا پایان ثانیهٔ دهم چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۴/۸
۲) −۲/۴
۳) ۲/۴
۴) −۴/۸

پاسخ ۱ جابه‌جایی متحرک در بازهٔ صفر تا ۴s برابر است با:

$\Delta x_1=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow \Delta x_1=\frac{1}{2}\times(-2)(4)^2+4\times 4\Rightarrow \Delta x_1=0$

۲ در انتهای این بازه سرعت متحرک را به‌دست می‌آوریم:

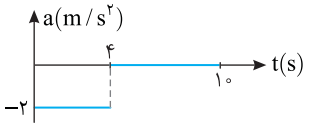
$v=at+v_0\Rightarrow v=-2\times 4+4\Rightarrow v=-4m/s$

۳ بعد از $t=4s$ شتاب صفر و حرکت با سرعت ثابت $-4m/s$ است، جابه‌جایی در مدت ۴s تا ۱۰s را حساب می‌کنیم.

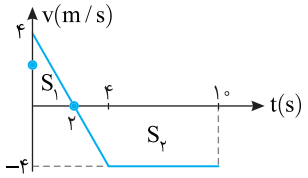
$\Delta x_2=vt\Rightarrow \Delta x_2=-4\times 6\Rightarrow \Delta x_2=-24m$

۴ سرعت متوسط خواهد شد:

$v_{av}=\frac{\Delta x_1+\Delta x_2}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{0+(-24)}{10}\Rightarrow v_{av}=-2/4m/s$



حل مسئله به کمک رسم نمودار سرعت - زمان سرعت در لحظهٔ $t=4s$ برابر است با:



$v=at+v_0$

$\Rightarrow v=-2\times 4+4=-4m/s$

لحظهٔ صفر شدن سرعت را حساب می‌کنیم:

$0=-2t+4\Rightarrow t=2s$

از لحظهٔ $t=4s$ به بعد حرکت با سرعت ثابت $-4m/s$ است. نمودار را رسم کرده، سطح زیر نمودار را حساب می‌کنیم.

$\Delta x=S=S_1+S_2\Rightarrow \Delta x=\frac{4\times 2}{2}+(8+6)\times(-\frac{4}{2})=4+(-28)\Rightarrow \Delta x=-24m$

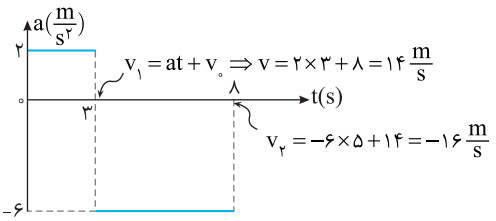
سرعت متوسط خواهد شد:

$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-24}{10}\Rightarrow v_{av}=-2/4m/s$

گزینهٔ ۲

B ۴ ۶۱۹

سرعت در لحظهٔ $t=۳s$ و $t=۸s$ را حساب می‌کنیم و روی نمودار می‌نویسیم.



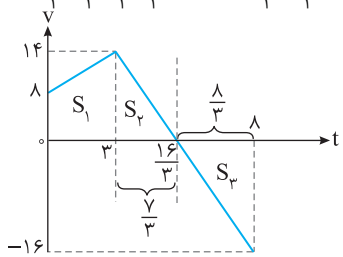
در بازهٔ زمانی ۳s تا ۸s، سرعت از مقداری مثبت به مقداری منفی رسیده است، بنابراین در این بازهٔ زمانی سرعت صفر می‌شود. لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود را به‌دست می‌آوریم.

$v=at+v_۰ \Rightarrow ۰=-۶t+۱۴ \Rightarrow t=\frac{۷}{۳}s$

بنابراین لحظه‌ای که در این بازه سرعت می‌شود خواهد شد: $۳+\frac{۷}{۳}=\frac{۱۶}{۳}s$

نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم و سطح زیر نمودار را حساب می‌کنیم و مسافت طی شده را به‌دست می‌آوریم. $\ell=|S_۱|+|S_۲|+|S_۳|$

$\ell=(۸+۱۴)\times\frac{۳}{۲}+(۱۴\times\frac{۷}{۳})\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱۶}{۲}\times\frac{۸}{۳} \Rightarrow \ell=۳۳+\frac{۴۹}{۳}+\frac{۶۴}{۳} \Rightarrow \ell=\frac{۲۱۲}{۳}m$

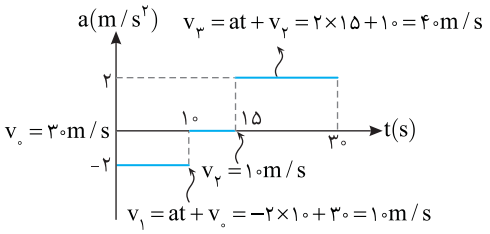


تندی متوسط خواهد شد: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow s_{av}=\frac{\frac{۲۱۲}{۳}}{۸} \Rightarrow s_{av}=\frac{۲۱۲}{۲۴} \Rightarrow s_{av}=\frac{۵۳}{۶}m/s$

B ۳ ۶۲۰

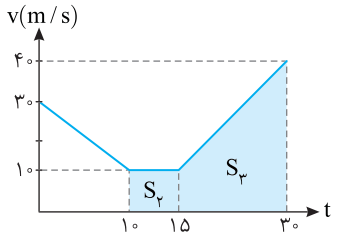
خط فکری نمودار شتاب - زمان اطلاعات زیادی در مورد حرکت به ما نمی‌دهد اما می‌توانیم از روی آن، سرعت در هر لحظه را البته با داشتن سرعت اولیه به‌دست بیاوریم. برای به‌دست آوردن سرعت متوسط در بازهٔ ۱۰s تا ۳۰s باید جابه‌جایی متحرک را حساب کنید. برای این کار می‌توانید نمودار سرعت زمان را رسم کرده و سطح زیر نمودار را حساب کنید و یا از معادلات حرکت با شتاب ثابت و حرکت با سرعت ثابت استفاده کنید. هر دو روش را برای شما به کار می‌بریم.

روش اول: ۱ سرعت در هر لحظه را روی نمودار شتاب زمان به کمک رابطه $v=at+v_۰$ نوشته، سپس نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم.



۲ جابه‌جایی متحرک در بازه ۱۰s تا ۳۰s برابر مجموع $S_۳$ و $S_۲$ است.

$\Delta x=S_۲+S_۳=۱۰\times۵+\frac{۴۰+۱۰}{۲}\times۱۵ \Rightarrow \Delta x=۴۲۵m$



۳ سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av}=\frac{۴۲۵}{۳۰-۱۰}=۲۱/۲۵m$

روش دوم: نیازی به رسم شکل $v-t$ نیست.

۱ در بازهٔ ۱۰s، ۱۵s حرکت با سرعت ثابت $۱۰m/s$ بوده و جابه‌جایی برابر است با: $\Delta x_۱=vt=۱۰\times۵=۵۰m$

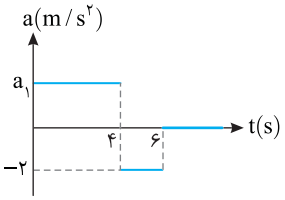
۲ در بازهٔ ۱۵s تا ۳۰s حرکت با شتاب ثابت، $۲m/s^۲$ و سرعت اولیهٔ $۱۰m/s$ است بنابراین جابه‌جایی خواهد شد:

$\Delta x_۲=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t \Rightarrow \Delta x_۲=\frac{۱}{۲}\times۲\times(۱۵)^۲+۱۰\times۱۵$

$=۲۲۵+۱۵۰ \Rightarrow \Delta x_۲=۳۷۵m$

۳ جابه‌جایی کل و سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{۳۷۵+۵۰}{۳۰-۱۰}=۲۱/۲۵m$

B ۳ ۶۲۱



در بازهٔ $t>۶s$ حرکت یکنواخت است $(a=۰)$ پس سرعت در لحظهٔ $t=۶s$ برابر سرعت در لحظهٔ $t=۸s$ یعنی برابر $۱۲m/s$ است. به کمک معادلهٔ سرعت- زمان، سرعت در لحظهٔ $t=۴s$ را به‌دست می‌آوریم:

$v=at+v_۱ \Rightarrow ۱۲=-۲\times۲+v_۱ \Rightarrow v_۱=۱۶m/s$

در بازهٔ ۰ تا ۴s حرکت دارای شتاب ثابت $a_۱$ بوده و سرعت متوسط در ۴s نخست برابر $۸m/s$ است برای سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت می‌توان نوشت:

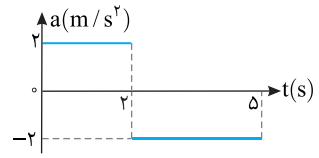
$v_{av}=\frac{v_۱+v_۰}{۲} \Rightarrow ۸=\frac{۱۶+v_۰}{۲} \Rightarrow v_۰=۰$

و شتاب $a_۱$ برابر خواهد شد با: $a_۱=\frac{v_۱-v_۰}{t}=\frac{۱۶-۰}{۴}=۴m/s^۲$

B ۲ ۶۲۲

یادآوری سرعت متوسط برابر جابه‌جایی در یکای زمان است $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$.

۱ جابه‌جایی در مدت ۵s را حساب می‌کنیم:



$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{v_{av}=۶/۴m/s} ۶/۴=\frac{\Delta x}{۵} \Rightarrow \Delta x=۳۲m$

۲ حرکت این متحرک از دو قسمت با دو شتاب مختلف تشکیل شده است و جابه‌جایی متحرک در مدت ۵ ثانیه برابر مجموع جابه‌جایی در بازهٔ صفر تا ۲s با شتاب $۲m/s^۲$ و جابه‌جایی در بازهٔ ۲s تا ۵s با شتاب $-۲m/s^۲$ است. جابه‌جایی در بازهٔ صفر تا ۲s را برحسب $v_۰$ می‌نویسیم.

$\Delta x_۱=\frac{۱}{۲}a_۱t^۲+v_۰t \Rightarrow \Delta x_۱=\frac{۱}{۲}(۲)(۲)^۲+۲v_۰ \Rightarrow \Delta x_۱=۴+۲v_۰$

۳ سرعت در لحظهٔ $t=۲s$ را برحسب $v_۰$ به‌دست می‌آوریم:

$v_۱=a_۱t_۱+v_۰ \Rightarrow v_۱=۴+v_۰$

۴ جابه‌جایی در بازهٔ ۲s تا ۵s را حساب می‌کنیم.

$\Delta x_۲=\frac{۱}{۲}a_۲t_۲^۲+v_۱t_۲ \Rightarrow \Delta x_۲=\frac{۱}{۲}\times(-۲)\times(۳)^۲+(۴+v_۰)\times۳$

$\Rightarrow \Delta x_۲=-۹+۱۲+۳v_۰ \Rightarrow \Delta x_۲=۳+۳v_۰$

۵ جابه‌جایی متحرک در مدت ۵s برابر ۳۲m است. بنابراین مجموع $\Delta x_۱$ و $\Delta x_۲$ را برابر ۳۲ قرار داده مسئله را حل می‌کنیم:

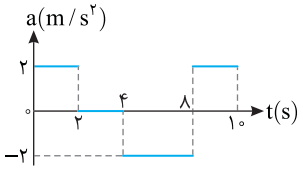
$\Delta x=\Delta x_۱+\Delta x_۲ \Rightarrow ۳۲=۴+۲v_۰+۳+۳v_۰ \Rightarrow ۲۵=۵v_۰ \Rightarrow v_۰=۵m/s$

دنبال راه‌حل ساده‌تری نگردید، وجود ندارد!

B ۶۲۳ ۴

خط فکری متحرک از حال سکون با شتاب $۲m/s^۲$ در جهت مثبت محور xها از مبدأ $(x_۰=۰)$ شروع به حرکت کرده به کمک نمودار شتاب - زمان، نمودار سرعت - زمان را رسم کنید. تا لحظه‌ای که مجموع سطح‌های زیر نمودار $v-t$ مثبت است، مکان متحرک مثبت بوده یعنی جهت بردار مکان در جهت مثبت محور xها است.

سرعت را در لحظه‌های روی نمودار به‌دست آورده سپس به کمک آن‌ها نمودار سرعت زمان را رسم می‌کنیم:



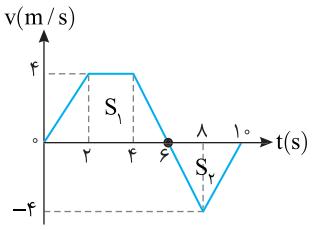
$v=at+v_۰$

$t=۲s \Rightarrow v_۱=۲\times۲=۴m/s$

$t=۴s \Rightarrow v_۱=۴m/s$

$t=۸s \Rightarrow v_۲=-۲\times۴+۴=-۴m/s$ و $t=۱۰s \Rightarrow v_۳=۲\times۲+(-۴)=۰$

در بازهٔ صفر تا ۶s سطح زیر نمودار مثبت و برابر است با:

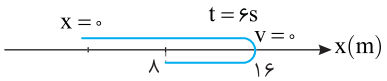


$\Delta x_۱=S_۱=(۶+۲)\times(\frac{۴}{۲})=۱۶m$

در بازهٔ ۶s تا ۱۰s سطح زیر نمودار منفی و برابر است با:

$\Delta x_۲=S_۲=\frac{-۴\times(۱۰-۶)}{۲}=-۸m$

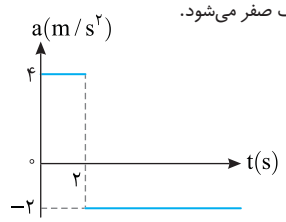
بنابراین در مدت ۰ تا ۶s متحرک از مبدأ به مکان $+۱۶m$ رفته و در بازهٔ ۶s تا ۱۰s به اندازهٔ $۸m$ برگشته و به مکان $+۸m$ رسیده یعنی در تمام مدت ۱۰s بردار مکان متحرک مثبت $(x>۰)$ بوده است.



البته با نگاه کردن به نمودار سرعت - زمان می‌توان بدون محاسبه این‌گونه استدلال کرد که در بازهٔ صفر تا ۶s سطح زیر نمودار مثبت بوده و مکان متحرک که از مبدأ شروع به حرکت کرده مثبت است. با مقایسهٔ سطح زیر نمودار از صفر تا ۶s و ۶s تا ۱۰s کاملاً مشخص است که متحرک در بازهٔ ۶s تا ۱۰s در خلاف جهت محور جابه‌جا شده است امّا هم‌چنان مکان مثبت است و متحرک به مبدأ برنمی‌گردد پس در مدت ۱۰s مکان متحرک مثبت است.

B ۶۲۴ ۲

خط فکری لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان یعنی لحظه‌ای که متحرک از مبدأ مکان $(x=۰)$ می‌گذرد. متحرک در مبدأ زمان از مکان $+۲m$ شروع به حرکت کرده باید در مرحلهٔ اول مشخص کنید مکان متحرک کجاست. سپس در بازه‌ای که شتاب منفی شده است تعیین کنید در چه لحظه‌ای مکان متحرک صفر می‌شود.



۱ مکان متحرک در لحظهٔ $t=۲s$ را به‌دست می‌آوریم.

$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$

$\Rightarrow x_۱=\frac{۱}{۲}\times۴\times۴+۰+۲ \Rightarrow x=۱۰m$

۲ سرعت در لحظهٔ $t=۲s$ برابر است با: $v=at+v_۰ \Rightarrow v=۴\times۲=۸m/s$

در قسمت دوم سرعت اولیهٔ $۸m/s$ است و لحظهٔ تغییر بردار مکان هنگامی است که $x=۰$ می‌شود.

$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \Rightarrow ۰=\frac{۱}{۲}(-۲)t^۲+۸t+۱۰ \Rightarrow t^۲-۸t-۱۰=۰$

$\Rightarrow t=۴\pm\sqrt{۱۶+۱۰} \Rightarrow t=۴\pm\sqrt{۲۶} \Rightarrow t\approx۴+۵\approx۹s$

B ۶۲۵ ۴

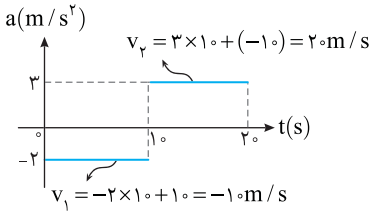
روش اول: **خط فکری** در لحظهٔ $t=۰$ متحرک برای اولین بار در جهت مثبت محور با سرعت $۱۰m/s$ از مبدأ می‌گذرد.

شما باید در لحظهٔ $t=۱۰s$ و $t=۲۰s$ سرعت جسم را به کمک رابطه سرعت - زمان حرکت با شتاب ثابت $(v=at+v_۰)$ به‌دست بیاورید. سرعت در لحظهٔ $t=۱۰s$ که جهت شتاب عوض می‌شود برابر سرعت اولیه قسمت دوم است. لحظه‌هایی که سرعت متحرک صفر می‌شود و تغییر جهت می‌دهد را نیز باید حساب کنید.

۱ سرعت در لحظهٔ $t=۱۰s$ و $t=۲۰s$ خواهد شد:

$v=at+v_۰ \Rightarrow v_۱=-۲\times۱۰+۱۰ \Rightarrow v_۱=-۱۰m/s$

$\Rightarrow v_۲=۳\times۱۰+(-۱۰) \Rightarrow v_۲=۲۰m/s$



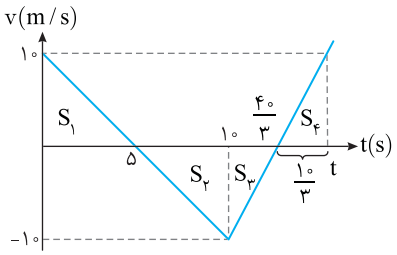
۲ لحظه‌هایی که سرعت صفر می‌شود و متحرک تغییر جهت می‌دهد یک بار در بازهٔ صفر تا ۱۰s و بار دیگر در بازهٔ ۱۰s تا ۲۰s رخ می‌دهد از این‌رو:

$v=at+v_۰ \xrightarrow[a=-۲m/s^۲]{v=۰,v_۰=۱۰m/s} ۰=-۲\times t+۱۰ \Rightarrow t_۱=۵s$

$v=at+v_۱ \xrightarrow[a=۳m/s^۲]{v=۰,v_۱=-۱۰m/s} ۰=۳t+(-۱۰) \Rightarrow t=\frac{۱۰}{۳}s$

دقت کنید این $\frac{۱۰}{۳}s$ بعد از ۱۰s رخ داده یعنی لحظه‌ای که سرعت برای بار دوم صفر می‌شود $۱۰+\frac{۱۰}{۳}=\frac{۴۰}{۳}s$ است.

۳ نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم.

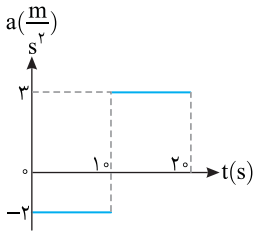


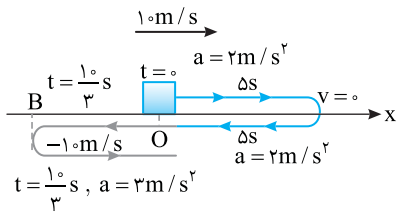
نکته هرگاه متحرک به جای اولیه‌اش باز گردد یعنی جابه‌جایی آن صفر باشد، باید سطح زیر نمودار سرعت زمان صفر شود.

۴ در بازهٔ ۰ تا ۱۰s سطح $S_۱$ و $S_۲$ هم‌اندازه و قرینه هستند و جابه‌جایی صفر است یعنی در لحظه $t=۱۰s$ برای بار دوم متحرک از مبدأ مکان می‌گذرد. (بار اول در $t=۰$ از مبدأ مکان گذشته است.)

۵ برای آنکه برای بار سوم از مبدأ بگذرد باید سطح $S_۳$ و $S_۴$ هم‌اندازه و قرینه هم باشند. برای همنهشتی این دو مثلث که شیب وتر آن‌ها یکی است باید ارتفاع هر دو $۱۰m/s$ و قاعدهٔ هر دو $\frac{۱۰}{۳}s$ باشد. در این صورت t خواهد شد: $t=\frac{۴۰}{۳}+\frac{۱۰}{۳}=\frac{۵۰}{۳}s$

روش دوم: سؤال سختی برای جلسه کنکور است. اما با توجه به رفتار متحرک در حرکت با شتاب ثابت می‌توان آن را حل کرد. متحرک در لحظهٔ $t=۰$ برای اولین بار با سرعت $+۱۰m/s$ از مبدأ می‌گذرد سپس با شتاب $-۲m/s^۲$ بعد از ۵s متوقف می‌شود و در لحظه $t=۱۰s$ یعنی ۵s بعد از توقف در نقطهٔ A از نقطه O مبدأ می‌گذرد و در این لحظه سرعتش $-۱۰m/s$ است و با شتاب $۳m/s^۲$ بعد از مدت $t=\frac{v}{a}=\frac{۱۰}{۳}s$ در نقطهٔ B متوقف می‌شود و پس از $\frac{۱۰}{۳}s$ برای بار سوم به مبدأ می‌رسد و برای همیشه از آن دور می‌شود. بنابراین در لحظهٔ $t=۵+۵+\frac{۱۰}{۳}+\frac{۱۰}{۳}=\frac{۵۰}{۳}s$ برای سومین بار از مبدأ می‌گذرد.





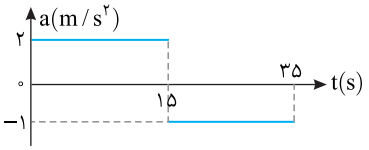
B ۶۲۶ ۱

خط فکری نمودار شتاب - زمان، اطلاعات خاصی از حرکت به ما نمی‌دهد بنابراین از نقاط روی نمودار استفاده کرده و به کمک روابط حرکت با شتاب ثابت مسئله را حل می‌کنیم. سرعت و مکان متحرک در $t=۲s$ به ما داده شده است، با استفاده از آن‌ها و با توجه به اینکه در بازهٔ ۲s تا ۱۵s، شتاب ثابت و $۱۲m/s^۲$ است مکان و سرعت متحرک در $t=۱۵s$ را حساب کرده سپس در بازهٔ ۱۵s تا ۳۵s نیز به کمک معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت مکان در $t=۳۵s$ را به دست می‌آوریم.

۱ در لحظهٔ $t=۲s$، مکان $-۱۶m$ و سرعت $-۶m/s$ و شتاب ثابت $۲m/s^۲$ است، بنابراین مکان در لحظهٔ $t=۱۵s$ خواهد شد:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \Rightarrow x_۱=\frac{۱}{۲}\times۲\times(۱۳)^۲+(-۶)\times۱۳+(-۱۶)$$

$$x_۱=۱۶۹+(-۷۸)-۱۶ \Rightarrow x_۱=۷۵m$$



۲ سرعت در لحظهٔ $t=۱۵s$ را حساب می‌کنیم

$$v_۱=at+v_۰ \Rightarrow v_۱=۲\times۱۳-۶ \Rightarrow v_۱=۲۰m/s$$

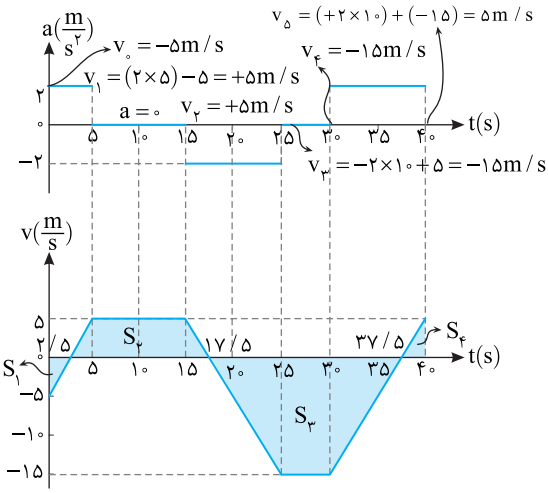
۳ سرعت $v_۱=۲۰m/s$ سرعت اولیهٔ قسمت دوم حرکت و مکان $x_۱=۷۵m$ مکان اولیهٔ این قسمت است، بنابراین می‌توان به کمک معادلهٔ مکان - زمان، مکان در $t=۳۵s$ را حساب کرد.

$$x_۲=\frac{۱}{۲}a_۲t_۲^۲+v_۱t+x_۱ \Rightarrow x_۲=\frac{۱}{۲}\times(-۱)\times(۲۰)^۴+۲۰\times۲۰+۷۵$$

$$x_۲=-۲۰۰+۴۰۰+۷۵ \Rightarrow x_۲=۲۷۵m \Rightarrow \vec{x}_۲=۲۷۵\vec{i}$$

B ۶۲۷ ۴

این مسئله، یک مسئله با راه حل محاسباتی طولانی است، اما حل آن چندان مشکل نیست. ابتدا نمودار سرعت زمان را رسم می‌کنیم و به کمک آن هر چهار گزینه را بررسی کرده و گزینهٔ درست را به دست می‌آوریم.



سرعت را در لحظه‌های نشان داده شده روی نمودار به دست می‌آوریم.

گزینهٔ (۱):

در بازهٔ ۲/۵s تا ۵s شتاب و سرعت مثبت هستند: $(۲/۵s)$

در بازهٔ ۱۷/۵s تا ۲۵s شتاب و سرعت منفی هستند. $(۲۵-۱۷/۵=۷/۵s)$

در بازهٔ ۳۷/۵s تا ۴۰s شتاب و سرعت مثبت هستند. $(۴۰-۳۷/۵=۲/۵s)$

بنابراین به مدت $۲/۵+۷/۵+۲/۵=۱۲/۵s$ شتاب و سرعت هم‌جهت بوده و گزینهٔ (۱) نادرست است.

گزینهٔ (۲): سطح زیر نمودار را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=S_۱+S_۲+S_۳+S_۴$$

$$\Rightarrow \Delta x=\frac{-۵\times۲/۵}{۲}+\frac{۱۵+۱۰}{۲}\times۵+\frac{(۲۰+۵)\times(-۱۵)}{۲}+\frac{۲/۵\times۵}{۲}$$

گزینهٔ (۲) نادرست است.

$$\Delta x=-۶/۲۵+۶۲/۵-۱۸۷/۵+۶/۲۵ \Rightarrow \Delta x=-۱۲۵m$$

گزینهٔ (۳):

در بازهٔ ۲/۵s تا ۱۷/۵s یعنی ۱۵s و در بازهٔ ۳۷/۵s تا ۴۰s یعنی ۲/۵s و جمعاً $۱۷/۵s$ $۱۵+۲/۵=۱۷/۵s$ متحرک در جهت مثبت محور در حرکت بوده و گزینهٔ (۳) نادرست است.

بنابراین بدون محاسبهٔ گزینهٔ (۴) درست خواهد بود اما بررسی گزینهٔ (۴):

$$\ell=|S_۱|+|S_۲|+|S_۳|+|S_۴| \Rightarrow \ell=۶/۲۵+۶۲/۵+۱۸۷/۵+۶/۲۵ \Rightarrow \ell=۲۶۲/۵m$$

B ۶۲۸ ۴

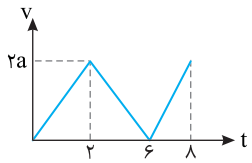
خط فکری متحرک از حال سکون در جهت مثبت محور شروع به حرکت کرده و تا لحظه‌ای که سرعت آن مثبت است متحرک در حال دور شدن از مبدأ بوده و بیشترین فاصله از مبدأ لحظه‌ای که سرعت متحرک صفر شده و علامت سرعت منفی شده و متحرک به سوی مبدأ بازمی‌گردد، بنابراین تکلیف شتاب مشخص است. شما باید لحظه‌ای را بیابید که متحرک بازمی‌گردد.

در لحظهٔ $t=۲s$ سرعت خواهد شد: $v=at+v_۰ \xrightarrow{t=۲s} v_۱=۲a$

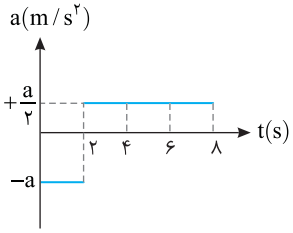
در لحظهٔ $t=۶s$ سرعت را حساب می‌کنیم. $v_۲=-\frac{a}{۲}(۴)+۲a=۰$

در لحظهٔ $t=۸s$ سرعت برابر است با: $v_۳=a(۲)+۰=۲a$

بنابراین در تمام لحظات سرعت مثبت است و متحرک هرگز بازنمی‌گردد. در نتیجه بیشترین فاصله از مبدأ در لحظهٔ $t=۸s$ اتفاق می‌افتد.

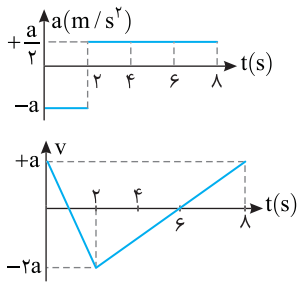


بازی با سؤال **متحرکی در مبدأ زمان از مبدأ مکان روی محور xها از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. نمودار شتاب- زمان این متحرک مطابق شکل روبه‌رو است. در کدام لحظه فاصلهٔ متحرک از مبدأ از بقیه لحظه‌ها بیشتر است؟**



۱) $t=۳s$ ۲) $t=۴s$ ۳) $t=۶s$ ۴) $t=۸s$

پاسخ متحرک از حال سکون $(v_۰=۰)$ از مبدأ مکان $(x=۰)$ در مبدأ زمان $(t=۰)$ شروع به حرکت کرده و شتاب ابتدایی حرکت منفی است، بنابراین متحرک در جهت منفی محور حرکت می‌کند تا سرعتش به $v_۱=-۲a$ می‌رسد. در $t=۲s$ شتاب مثبت می‌شود اما سرعت همچنان منفی بوده و متحرک در حال دور شدن از مبدأ است در لحظهٔ $t=۶s$ سرعت متحرک $v_۲=\frac{a}{۲}(۶-۲)+(-۲a)=۰$ می‌شود. در این لحظه متحرک دارای بیشترین فاصله از مبدأ مکان است از این لحظه به بعد سرعت مثبت شده و متحرک به سوی مبدأ باز می‌گردد و فاصلهٔ متحرک از مبدأ کم می‌شود اما در $t=۸s$ به مبدأ نمی‌رسد. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.



گزینهٔ ۳

C ۶۲۹ ۳

سرعت اولیهٔ متحرک $v_۰=-۱۰m/s$ و در ابتدا شتاب مثبت و متحرک در حال حرکت در جهت منفی محور است، تا لحظه‌ای که سرعت آن صفر می‌شود و تغییر جهت می‌دهد. نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم برای این منظور سرعت در لحظه‌های $t=۱۰s$ و $t=۱۵s$ و $t=۳۵s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$v_۰=-۱۰m/s \quad , \quad v_۱=at+v_۰=۲\times۱۰+(-۱۰)=۱۰m/s$$

$$v_۲=a_۲\Delta t_۲+v_۱=۴\times۵+۱۰=۳۰m/s$$

$$v_۳=a_۳\Delta t_۳+v_۲=-۲\times۲۰+۳۰=-۱۰m/s$$

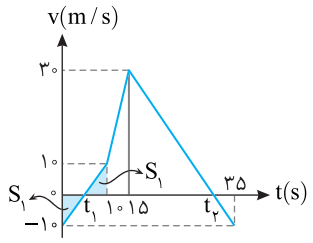
لحظه‌هایی که سرعت صفر است را مشخص می‌کنیم:

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=۲t_۱+(-۱۰)$$

$$\Rightarrow t_۱=۵s$$

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=-۲(t_۲-۱۵)+۳۰$$

$$\Rightarrow ۰=-۲t_۲+۳۰+۳۰\Rightarrow t_۲=۳۰s$$



با توجه به نمودار سرعت - زمان، در لحظهٔ $t=۱۰s$ متحرک به مکان اولیه باز می‌گردد $(S_۱=S_۲)$ یعنی در مبدأ است و از این لحظه $(t=۱۰s)$ تا لحظهٔ $t_۲=۳۰s$ متحرک در حال دور شدن از مبدأ است و باید این جابه‌جایی را حساب کرد:

$$\Delta x=\frac{۱۰+۳۰}{۲}\times۵+\frac{۳۰\times۱۵}{۲}\Rightarrow \Delta x=۱۰۰+۲۲۵=۳۲۵m$$

C ۶۳۰ ۳

۱ سرعت را در لحظهٔ $t=۲۰s$ حساب می‌کنیم

$$v=at+v_۰\Rightarrow v_۱=-۲\times۲۰+۲۰\Rightarrow v_۱=-۲۰m/s$$

۲ سرعت $-۲۰m/s$، سرعت اولیهٔ قسمت دوم حرکت در بازهٔ ۲۰s تا ۴۰s است. لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود و متحرک تغییر جهت می‌دهد را به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_۱\Rightarrow ۰=۳t+(-۲۰)\Rightarrow t=\frac{۲۰}{۳}s$$

۳ سرعت متحرک در $t=۴۰s$ را حساب می‌کنیم.

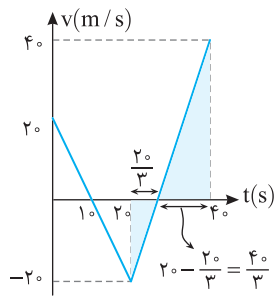
$$v=at+v_۰\Rightarrow v=۳\times۲۰-۲۰\Rightarrow v=۴۰m/s$$

۴ حال می‌توانیم نمودار سرعت - زمان را رسم کرده و مسافت طی شده در بازهٔ ۲۰s تا ۴۰s را به‌دست آوریم.

$$\ell=|S_۱|+|S_۲|$$

$$\Rightarrow \ell=\frac{۲۰\times\frac{۲۰}{۳}}{۲}+\frac{۴۰\times\frac{۴۰}{۳}}{۲}$$

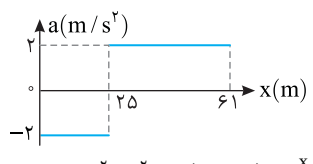
$$=\frac{۲۰۰}{۳}+\frac{۸۰۰}{۳}\Rightarrow \ell=\frac{۱۰۰۰}{۳}m$$



A ۶۳۱ ۲

خط فکری نمودار داده شده نمودار شتاب - مکان است و از زمان خبری نیست، بنابراین استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان در حل مسئله اولین راهی است که باید به ذهن شما برسد.

سرعت متحرک را به کمک معادلهٔ مستقل از زمان در مکان $x=۲۵m$ به‌دست می‌آوریم:



$$x=۲۵m: v_۱^۲-v_۰^۲=۲a(x_۱-x_۰)\xrightarrow{x_۰=۰} v_۱^۲-۱۰۰=۲(-۲)(۲۵)$$

$$\Rightarrow v_۱^۲=۰\Rightarrow v_۱=۰$$

اکنون سرعت را در مکان $x=۶۱m$ به‌دست می‌آوریم:

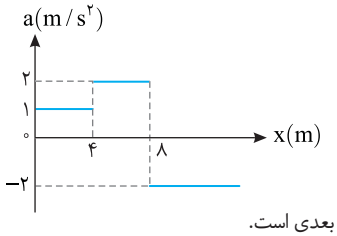
$$x=۶۱m: v_۲^۲-v_۱^۲=۲a(x_۲-x_۱)\Rightarrow v_۲^۲-۰=۲(۲)\times(۶۱-۲۵)$$

$$\Rightarrow v_۲^۲=۴\times۳۶\Rightarrow v_۲=۲\times۶=۱۲m/s$$

B ۶۳۲ ۳

خط فکری نمودار شتاب - مکان بوده بنابراین باید به سراغ معادلهٔ مستقل از زمان برویم. در صورت مسئله بیان شده که متحرک تا چند متری مبدأ در جهت مثبت محور xها می‌رود، بنابراین مکانی را باید به‌دست بیاورید که متحرک متوقف شده و برمی‌گردد.

۱ سرعت در مکان $x=+۴m$ را به کمک رابطهٔ مستقل از زمان به دست می‌آوریم.



$$v_۱^۲-v_۰^۲=۲a(x_۱-x_۰)$$

$$\Rightarrow v_۱^۲-۰=۲\times۱\times۴$$

$$\Rightarrow v_۱=۲\sqrt{۲}m/s$$

۲ سرعت در مکان $+۸m$ را حساب می‌کنیم البته سرعت انتهایی هر مرحله سرعت اولیهٔ مرحلهٔ بعدی است.

$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲a_۲\Delta x_۲\Rightarrow v_۲^۲-(۲\sqrt{۲})^۲=۲\times۲\times(۸-۴)\Rightarrow v_۲^۲=۲۴$$

$$\Rightarrow v_۲=۲\sqrt{۶}m/s$$

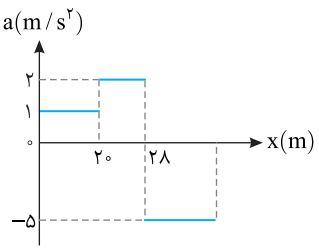
۳ اکنون متحرک در مکان $x=+۸m$ دارای سرعت $۲\sqrt{۶}m/s$ است و باید بررسی کنیم در چه مکانی با شتاب $-۲m/s^۲$، سرعت صفر می‌شود.

$$v_۳^۲-v_۲^۲=۲a_۳(x_۳-x_۲)\Rightarrow ۰-۲۴=۲(-۲)(x_۳-۸)\Rightarrow x_۳=۱۴m$$

در مکان $x=۱۴m$ متحرک تغییر جهت می‌دهد و در خلاف جهت شروع به حرکت می‌کند.

B ۶۳۳ ۱

۱ با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان سرعت در مکان $x=۲۰m$ را به‌دست می‌آوریم:



$$v_۱^۲-v_۰^۲=۲a_۱(x_۱-x_۰)$$

$$\xrightarrow{v_۰=۳m/s} v_۱^۲-۹=۴۰$$

$$\Rightarrow v_۱^۲=۴۹\Rightarrow v_۱=۷m/s$$

۲ سرعت در مکان $+۲۸m$ را حساب می‌کنیم. سرعت اولیهٔ این قسمت همان سرعت انتهایی در مکان $+۲۰m$ یعنی $v_۱=۷m/s$ است. بنابراین:

$$v_۲^۲-۴۹=۲a_۲\Delta x_۲\xrightarrow{\Delta x=(x_۲-x_۱)} v_۲^۲-۴۹=۲\times۲\times(۲۸-۲۰)$$

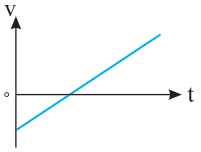
$$\Rightarrow v_۲^۲=۸۱\Rightarrow v_۳=۹m/s$$

۳ در قسمت آخر حرکت شتاب $-۵m/s^۲$ و سرعت ابتدایی آن همان سرعت نهایی قسمت قبل است. در این بازه متحرک تا زمان تغییر جهت $v=۰$ به حرکت خود ادامه می‌دهد.

$$۰-۸۱=۲\times(-۵)(x-۲۸)\Rightarrow ۸۱=x-۲۸\Rightarrow x=۳۶/۱m$$

B ۶۳۴ ۱

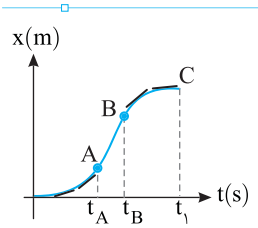
۱ شیب نمودار سرعت - زمان برابر شتاب متحرک است شیب این نمودار مثبت است. بنابراین شتاب حرکت مثبت است.



۲ اگر جهت تقعر (دهانه) نمودار مکان - زمان رو به بالا باشد، شتاب مثبت است. بنابراین دهانهٔ (تقعر) نمودار مکان - زمان این متحرک باید رو به بالا باشد، در نتیجه گزینهٔ (۱) درست است.

B ۶۳۵ ۳

اتوبوس از ایستگاهی شروع به حرکت کرده و در ایستگاه بعد متوقف می‌شود پس در $t=۰$ و $t=t_۱$ سرعت صفر است. همچنین شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ در بازهٔ صفر تا t_A مثبت و در حال افزایش و در بازهٔ t_B تا $t_۱$ نیز مثبت اما در حال کاهش است. یعنی در این دو بازه سرعت مثبت است و نمودار باید بالای محور زمان باشد، بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.



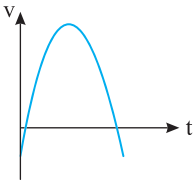
B ۶۳۶ ۱

خط فکری باید این نکات را یادآوری کنید.

۱ شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان برابر شتاب است و جهت تقعر نمودار مکان - زمان علامت شتاب را مشخص می‌کند.

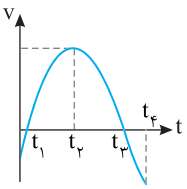
۲ هرگاه سرعت متحرک منفی باشد شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان باید منفی باشد.

۳ لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود یعنی در نمودار مکان - زمان، در نقاط بیشینه و کمینه نمودار هستیم.



ابتدا سرعت منفی است، بنابراین شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان باید منفی باشد در نتیجه گزینهٔ (۴) نادرست است.

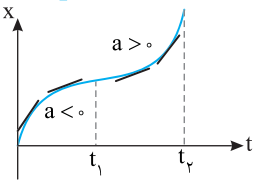
از لحظهٔ صفر تا $t_۲$ شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان داده شده مثبت و پس از آن منفی است، بنابراین دهانه (تقعر) نمودار مکان - زمان باید ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین باشد، گزینه‌های (۲) و (۴) نادرست هستند.



در دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۳$ سرعت صفر شده یعنی نمودار مکان - زمان باید دارای دو نقطهٔ بیشینه و کمینه باشد، گزینهٔ (۱) دارای تمام شرایط بیان شده بوده و درست است.

B ۶۳۷ ۳

۱ در بازهٔ صفر تا $t_۱$ دهانهٔ (تقعر) نمودار مکان - زمان رو به پایین است، بنابراین شتاب منفی و در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ که جهت تقعر رو به بالاست شتاب مثبت است.

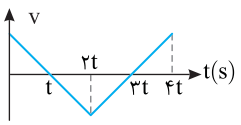


۲ شیب نمودار سرعت - زمان برابر شتاب است. در نمودار گزینه‌های (۱) و (۲) شیب ثابت بوده یعنی این نمودارها مربوط به حرکت با شتاب ثابت است اما در نمودار داده شده شتاب تغییر می‌کند و گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند.

۳ شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر سرعت متحرک است. در تمام بازهٔ صفر تا $t_۲$ شیب خط مماس مثبت است، بنابراین در تمام بازهٔ صفر تا $t_۲$ سرعت مثبت است. از این‌رو گزینهٔ (۳) درست و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۶۳۸ ۲

خط فکری نمودار ارائه شده نمودار سرعت - زمان است و هرگاه نمودار سرعت - زمان خط راست مایل باشد حرکت دارای شتاب ثابت است و نمودار آن قسمتی از یک سهمی است. از طرفی هر گاه شتاب مثبت باشد جهت تقعر (دهانه) نمودار مکان زمان رو به بالا و هر گاه شتاب منفی باشد تقعر (دهانه) نمودار مکان - زمان رو به پایین است. اکنون شما گزینه‌ها را بررسی کنید تا مشخص شود کدام گزینه دارای شرایط بیان شده است.



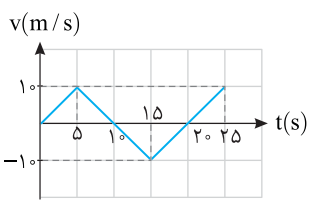
در بازهٔ صفر تا ۲t نمودار سرعت زمان خط راست بوده و شیب آن یعنی شتاب حرکت منفی است بنابراین نمودار مکان زمان سهمی است که دهانهٔ آن باید رو به پایین باشد در بازهٔ ۲t تا ۴t شیب نمودار سرعت - زمان مثبت است بنابراین دهانه (تقعر) نمودار مکان زمان نیز باید رو به بالا باشد. در نتیجه گزینهٔ (۲) جواب مسئله است.

A ۶۳۹ ۲

در بازهٔ صفر تا ۵s شتاب حرکت خواهد شد:

$$a=\frac{v-v_۰}{t}$$

$$\Rightarrow a_۱=\frac{۱۰-۰}{۵-۰}=۲m/s^۲$$



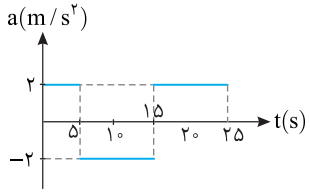
شتاب در بازهٔ ۵s تا ۱۵s ثابت و برابر است با:

$$a_۲=\frac{-۱۰-۱۰}{۱۵-۵}=-۲m/s^۲$$

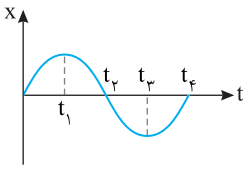
شتاب در بازهٔ ۱۵s تا ۲۵s ثابت را به‌دست می‌آوریم:

$$a_۳=\frac{۱۰-(-۱۰)}{۲۵-۱۵}=۲m/s^۲$$

اکنون می‌توان نمودار شتاب - زمان را رسم کرد.

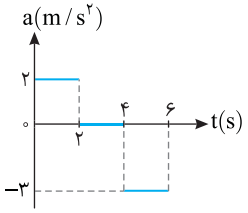


B ۶۴۰ ۲



لحظه‌های $t_۱$ و $t_۳$ نقاط بیشینه و کمینه نمودار است و در نقاط بیشینه و کمینه نمودار مکان - زمان، سرعت لحظه‌ای صفر است. در حالی که در گزینه‌های (۳) و (۴) در این لحظات سرعت صفر نیست و این دو نمودار نادرست هستند. شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در بازهٔ صفر تا $t_۱$ مثبت است یعنی در این بازه سرعت مثبت است، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست و گزینهٔ (۲) درست است.

A ۶۴۱ ۳

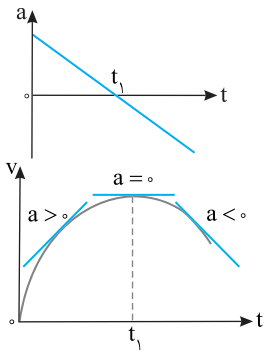


در بازهٔ صفر تا ۲s متحرک با شتاب ثابت از حال سکون شروع به حرکت کرده و سرعتش به $v=۲\times۲+۰=۴m/s$ می‌رسد در بازهٔ ۲s تا ۴s شتاب صفر و حرکت یکنواخت با سرعت ثابت $۴m/s$ است، پس از آن شتاب $-۳m/s^۲$ است و سرعت متحرک در $t=۶s$ خواهد شد:

$$v=at+v_۰ \Rightarrow -۳\times(۶-۴)+۴=-۲m/s$$

بنابراین نمودار گزینهٔ (۳) درست است.

A ۶۴۲ ۲



ابتدا شتاب مثبت بوده و شیب خط مماس بر نمودار سرعت- زمان باید مثبت باشد، سپس شتاب صفر می‌شود و سرانجام شتاب منفی بوده و شیب خط مماس بر نمودار سرعت- زمان باید منفی شود، بنابراین نمودار سرعت- زمان مطابق شکل روبه‌رو یعنی گزینه (۲) است.

A ۶۴۳ ۲

متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده است، بنابراین نمودار مکان- زمان در مبدأ زمان باید به محور زمان مماس شود، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست هستند. باید بین گزینه‌های (۲) و (۴) یکی را انتخاب کنیم. سرعت در لحظه‌های $t=۱۰s$ ، $t=۲۰s$ و $t=۳۰s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_۰ \begin{cases} \xrightarrow{t=۱۰s} v_۱=-۱\times۱۰+۰=-۱۰m/s \\ \xrightarrow{t=۲۰s} v_۲=۱\times(۲۰-۱۰)+(-۱۰)=۰ \\ \xrightarrow{t=۳۰s} v_۳=۱\times(۳۰-۲۰)+۰=۱۰m/s \end{cases}$$

بنابراین ابتدا سرعت به $-۱۰m/s$ می‌رسد سپس در $t=۲۰s$ سرعت صفر شده و تغییر علامت می‌دهد در نتیجه گزینهٔ (۲) پاسخ درست است.

در گزینهٔ (۴) نمودار پس از $v=۰$ ادامه پیدا نکرده و این گزینه نادرست است.

B ۶۴۴ ۲

خط فکری می‌خواهیم از روی نمودار شتاب - مکان، نمودار شتاب - زمان را رسم کنیم، بنابراین برای هر بازهٔ مکانی روی نمودار باید بازهٔ زمانی آن را مشخص کرد.

۱ متحرک از حال سکون $(v_0=0)$ شروع به حرکت کرده است. سرعت در مکان $x=+2m$ را به‌دست آوریم.

$$v_1^2-v_0^2=2ax\Rightarrow v_1^2=4$$
$$\Rightarrow v_1=2m/s$$

۲ بازهٔ زمانی که در آن متحرک $2m$ را طی کرده سرعت متحرک به $2m/s$ رسیده است را به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v_0+v_1}{2}\Delta t_1\Rightarrow 2=\frac{2}{2}\Delta t_1\Rightarrow \Delta t_1=2s$$

۳ از $2m$ تا $5/5m$ متحرک با شتاب $3m/s^2$ از سرعت $v_1=2m/s$ به سرعت v_2 خواهد رسید بنابراین:

$$v_2^2-v_1^2=2ax\Rightarrow v_2^2-4=21\Rightarrow v_2=5m/s$$

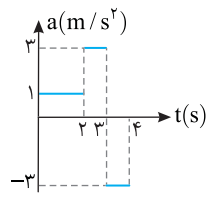
$$\Delta x=\frac{v_1+v_2}{2}\Delta t_2\Rightarrow \Delta t_2=1s$$

۴ از $5/5m$ تا $9m$ متحرک با شتاب $-3m/s^2$ از سرعت v_2 به سرعت v_3 خواهد رسید بنابراین:

$$v_3^2-v_2^2=2ax\Rightarrow v_3^2-25=-21\Rightarrow v_3=2m/s$$

$$\Delta x=\frac{v_3+v_2}{2}\Delta t\Rightarrow 3/5=\frac{5+2}{2}\times\Delta t_3\Rightarrow \Delta t_3=1s$$

۵ اکنون نمودار شتاب - زمان را می‌توان رسم کرد.



B ۶۴۵ ۳

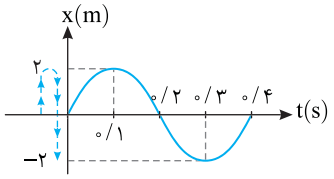
خط فکری تنها راه حل این مسئله رسم نمودار $x-t$ است.

یادآوری ریاضی در تابع‌های $y=A\sin ax$ و $y=A\cos ax$ دورهٔ تناوب برابر $T=\frac{2\pi}{|a|}$ است و مقدار بیشینه تابع همان ضریب $\sin$ (و یا $\cos$) یعنی A است.

۱ دورهٔ تابع $y=2\sin 5\pi t$ را به‌دست می‌آوریم.

$$T=\frac{2\pi}{5\pi}\Rightarrow T=0/4s$$

۲ نمودار مکان - زمان را رسم می‌کنیم.



۳ در بازهٔ $t=0$ تا $t=0/3s$ مسافت طی شده را از روی نمودار به‌دست می‌آوریم.

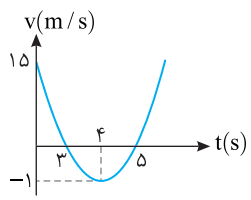
$$\ell=2+2+2=6m$$

۴ تندی متوسط را حساب می‌کنیم.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{6}{0/3}\Rightarrow s_{av}=20m/s$$

C ۶۴۶ ۲

کافی است نمودار سرعت - زمان را رسم کنیم. برای این منظور باید مختصات رأس سهمی و همچنین محل تلاقی نمودار با محور زمان را به‌دست بیاوریم:



رأس سهمی: $t=-\frac{b}{2a}\Rightarrow t=4s\Rightarrow v=16-32+15\Rightarrow v=-1m/s$

$$v=0\Rightarrow t^2-8t+15=0\Rightarrow (t-3)(t-5)=0\Rightarrow t=3s\ ,\ t=5s$$

با توجه به نمودار در بازهٔ صفر تا $3s$ سرعت از $15m/s$ تا صفر در حال کاهش و حرکت کندشونده است. همچنین در بازهٔ $4s$ تا $5s$ به مدت $1s$ تندی متحرک از $1m/s$ به صفر کاهش می‌یابد و حرکت کندشونده است، بنابراین جمعاً $4s$ حرکت کندشونده است.

B ۶۴۷ ۲

یادآوری شتاب متوسط برابر $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ و سطح زیر نمودار شتاب - زمان برابر تغییر سرعت متحرک است.

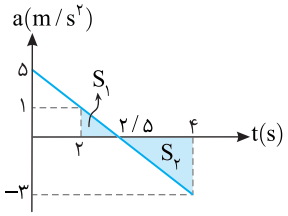
خط فکری باید نمودار شتاب - زمان معادلهٔ $a=-2t+5$ را رسم کنید و در بازهٔ $t=2s$ تا $t=4s$ سطح زیر نمودار را به‌دست بیاورید سپس شتاب متوسط را حساب کنید.

۱ شتاب را در لحظهٔ $t=2s$ و $t=4s$ حساب می‌کنیم.

$$a=-2t+5\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t=2s} a=-2\times 2+5=1m/s^2\\ \xrightarrow{t=4s} a=-2\times 4+5=-3m/s^2\end{cases}$$

۲ لحظهٔ صفر شدن شتاب را به‌دست می‌آوریم. $a=0\Rightarrow -2t+5=0\Rightarrow t=2/5s$

۳ نمودار را رسم می‌کنیم.



۴ تغییرات سرعت برابر مجموع مساحت‌های S_1 و S_2 است بنابراین:

$$\Delta v=S_1+S_2\Rightarrow \Delta v=\frac{0/5\times 1}{2}+\frac{-3\times 1/5}{2}=0/25-2/25=-2m/s$$

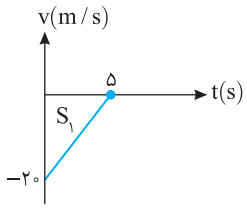
۵ شتاب متوسط برابر است با:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-2}{2}=-1m/s^2$$

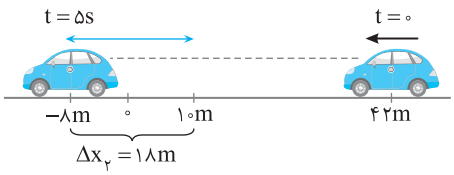
B ۶۴۸ ۴

در ابتدا متحرک مثبت اما سرعت آن تا لحظهٔ $t=5s$ منفی است. جابه‌جایی متحرک در مدت $5s$ نخست حرکت برابر است با:

$$\Delta x_1=S_1=-\frac{20\times 5}{2}=-50m$$

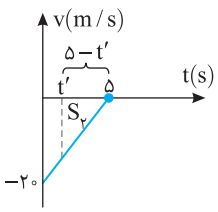


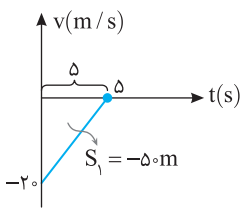
جابه‌جایی متحرک برابر $x_2-x_1=-50m$ شده که $x_1=42m$ است. پس $x_2=-8m$ است. مسیر حرکت متحرک به صورت زیر است و در بازه‌ای که با رنگ دیگر مشخص کرده‌ایم در مدت صفر تا $5s$ فاصلهٔ متحرک از $x=0$ کمتر از $10m$ است.



زمان مربوط به مکان $x=10m$ را مشخص می‌کنیم. از لحظهٔ t' که متحرک در مکان $x=10m$ قرار دارد تا لحظهٔ $t=5s$ که مکان آن $-8m$ می‌شود، جابه‌جایی متحرک $-18m$ است. پس داریم:

$$\begin{cases}S_2=-18m\\ S_1=-50m\end{cases}\Rightarrow\frac{S_2}{S_1}=\frac{18}{50}=\frac{9}{25}$$



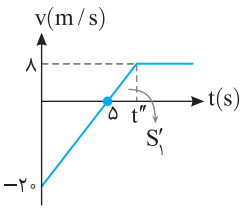


نسبت تشابه برابر است با:

$$(\frac{۵-t'}{۵})^۲=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow t'=۲s$$

بازهٔ زمانی که متحرک از مکان $۱۰m$ به $-۸m$ رسیده برابر $۵-۲=۳s$ است.

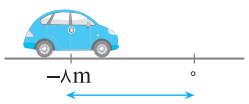
دقت کنید که بعد از $۵s$ سرعت متحرک مثبت شده و متحرک از مکان $-۸m$ در جهت مثبت شروع به حرکت می‌کند و مجدداً به مکان $x=۱۰m$ می‌رسد. اما نمی‌دانیم این لحظه قبل از t'' (به نمودار توجه کنید) است یا بعد از آن. پس ابتدا زمان t'' را حساب کرده و جابه‌جایی در بازهٔ $۵s$ تا t'' را حساب می‌کنیم:



$$\frac{۵}{۲۰}=\frac{t''-۵}{۸}\Rightarrow t''=۷s$$

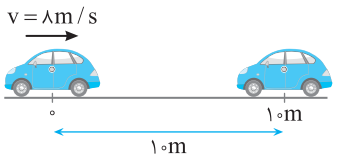
$$S'_۱=\frac{۲\times۸}{۲}=۸m$$

بنابراین متحرک در بازهٔ $۵s$ تا $۷s$، $۸m$ در جهت مثبت حرکت کرده و به $x=۰$ می‌رسد و تمام این مدت $۲s$ فاصله از مبدأ مکان کمتر از $۱۰m$ است.



حال مکان متحرک در $x=۰$ بوده و تا لحظه‌ای که به مکان $x=۱۰m$ برسد فاصلهٔ آن از مبدأ مکان کمتر از $۱۰m$ است. این بازهٔ زمانی که پس از $t''=۷s$ بوده با سرعت ثابت $۸m/s$ طی می‌شود.

$$\Delta x=۸\Delta t_۴\Rightarrow ۱۰=۸\Delta t_۴\Rightarrow \Delta t_۴=۱/۲۵s$$



بنابراین $۳s$ در قسمت اول مسیر (از $x=۱۰m$ تا $x=-۸m$) فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان کمتر از $۱۰m$ بود، $۲s$ با شتاب ثابت در بازهٔ زمانی $۵s$ تا $۷s$ نیز فاصله کمتر از $۱۰m$ بوده (از $x=-۸m$ تا $x=۰$) و در آخر $۱/۲۵s$ (از $x=۰$ تا $x=۱۰m$) این اتفاق افتاده است:

$$\Delta t_{کل}=۳+۲+۱/۲۵=۶/۲۵s$$

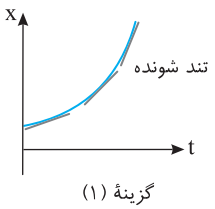
B ۶۴۹ ۱

نکته هرگاه حاصلضرب سرعت در مکان متحرک مثبت $(vx>۰)$ باشد، متحرک در حال دور شدن از مبدأ و هرگاه منفی $(vx<۰)$ باشد. متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است.

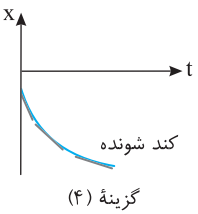
نکته هرگاه $av>۰$ باشد، حرکت تندشونده است و تندی یعنی شیب خط مماس بر نمودار مکان زمان در حال افزایش و هرگاه $av<۰$ باشد حرکت کندشونده است و تندی یعنی خط مماس بر نمودار مکان - زمان در حال کاهش است.

با توجه به فرض مسئله نموداری که در آن متحرک در حال دور شدن از مبدأ بوده و دارای حرکت تندشونده است را باید پیدا کنیم. در گزینهٔ (۲) و گزینهٔ (۳) در ابتدا متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ $(x=۰)$ است و این نمودارها نادرست هستند.

در گزینهٔ (۱) و (۴)، متحرک‌ها در حال دور شدن از مبدأ هستند اما مطابق شکل در گزینهٔ (۴) حرکت کند شونده بوده و نمودار گزینهٔ (۴) نادرست است. اما در نمودار گزینهٔ (۱) متحرک دارای حرکت تند شونده است و این گزینه درست است.



گزینهٔ (۱)

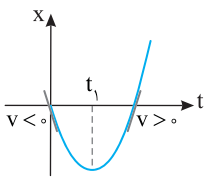


گزینهٔ (۴)

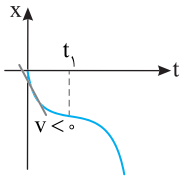
B ۶۵۰ ۳

۱ متحرک در ابتدا دارای سرعت اولیه مثبت است. بنابراین شیب خط مماس بر نمودار باید در لحظهٔ $t=۰$ مثبت باشد. (یعنی خط مماس با جهت مثبت محور زمان زاویه حاده بسازد. از این‌رو مطابق شکل گزینهٔ (۲) و (۴) نادرست هستند.

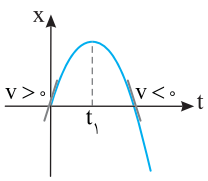
۲ متحرک در $t_۱$ متوقف شده بنابراین سرعت در این لحظه صفر است و شیب خط مماس در نمودار $x-t$ در لحظهٔ $t_۱$ باید افقی باشد. متحرک با اینکه در $t_۱$ متوقف شده اما تغییر جهت نداده یعنی علامت سرعت قبل و بعد از $t_۱$ تغییر نمی‌کند و متحرک در جهت مثبت محور به حرکت خود ادامه می‌دهد. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است و گزینه (۱) نادرست است.



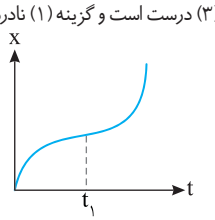
گزینهٔ (۲)



گزینهٔ (۴)

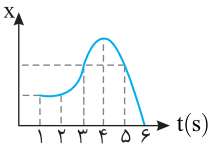


گزینهٔ (۱)



گزینهٔ (۳)

B ۶۵۱ ۲



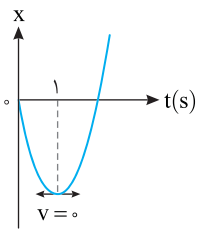
دقت کنید نمودار از لحظهٔ $t=۱s$ شروع شده است.

در بازهٔ $۱s$ تا $۲s$ متحرک ساکن است، پس سرعت صفر است.

در بازهٔ $۲s$ تا $۳s$ حرکت با شتاب ثابت و مثبت است، پس نمودار سرعت- زمان خط راستی است که شیب آن مثبت است و با محور زمان زاویهٔ حاده می‌سازد.

در بازهٔ $۳s$ تا $۵s$ چون منحنی یک سهمی است و جهت تقعر آن رو به پایین است، شتاب ثابت و منفی است و چون شیب نمودار سرعت- زمان، علامت شتاب را نشان می‌دهد، در این بازه باید شیب نمودار سرعت- زمان منفی باشد و با محور زمان زاویهٔ منفرجه بسازد. با توجه به فرض مسئله در بازهٔ $۵s$ تا $۶s$ نمودار خط راست بوده حرکت دارای سرعت ثابت است.

B ۶۵۲ ۱



۱ شتاب حرکت ثابت و برابر $۲m/s^۲$ است و در لحظهٔ $t=۱s$ سرعت صفر شده است. از این‌رو می‌توان سرعت اولیه را به‌دست آورد.

$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow ۲=\frac{۰-v_۰}{۱}\Rightarrow v_۰=-۲m/s$$

یادآوری هر جابه‌جایی در ثانیهٔ nth در حرکت با شتاب ثابت a و سرعت اولیه $v_۰$ از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید.

$$\Delta x_{(t)}=\frac{۱}{۲}a(۲t-۱)+v_۰$$

۲ در رابطه بالا جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\Delta x_{(۳)}=\frac{۱}{۲}\times۲(۲\times۳-۱)+(-۲)\Rightarrow \Delta x_{(۳)}=۳m$$

B ۶۵۳ ۱

خط فکری اولاً شما باید متوجه باشید که اندازهٔ شتاب دو متحرک یکی است اما چون جهت تقعر نمودار مکان زمان A رو به بالاست، شتاب آن مثبت $(a_A=+a)$ و شتاب متحرک B که جهت تقعر نمودارش رو به پایین است منفی $(a_B=-a)$ است. ثانیاً در $t=۲s$ مکان دو متحرک برابر $+۴m$ بوده و در این نقطه دو نمودار بر هم مماس هستند. یعنی شیب خط مماس در این لحظه یکسان بوده پس سرعت لحظه‌ای این دو متحرک با هم برابر است. اکنون سرعت در لحظهٔ $t=۲s$ و مکان در این لحظه را برای دو متحرک برابر قرار دهید.

۱ سرعت دو متحرک در $t=۲s$ برابر است، از این‌رو:

$$v_A=v_B \xrightarrow[t=۲s]{v=at+v_۰} a\times ۲+v_{۰A}=(-a)\times ۲+v_{۰B} \Rightarrow v_{۰B}-v_{۰A}=۴a \quad (I)$$

۲ مکان متحرک در $t=۲s$ را برابر قرار می‌دهیم.

$$x_A=x_B \xrightarrow[t=۲s]{x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰} \frac{۱}{۲}a\times ۴+۲v_{۰A}+۸=\frac{۱}{۲}(-a)۴+۲v_{۰B}$$

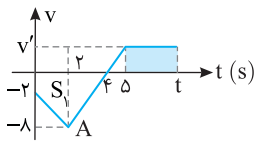
$$\Rightarrow ۴a+۲(v_{۰A}-v_{۰B})+۸=۰ \quad (II)$$

۳ از رابطهٔ (I) در رابطهٔ (II) جایگذاری می‌کنیم.

$$۴a-۲(۴a)+۸=۰ \Rightarrow -۴a=-۸ \Rightarrow a=۲m/s^۲$$

B ۶۵۴ ۳

خط فکری متحرک از مکان $-۵m$ با سرعت $-۲m/s$ عبور کرده است، یعنی اولین بار که فاصلهٔ آن از مبدأ ۵ متر است لحظهٔ $t=۰$ است. متحرک ابتدا در جهت منفی محور حرکت می‌کند. در لحظهٔ $t=۴s$ با توجه به نمودار سرعت صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد. باید بررسی کنیم در چه لحظه‌ای مجدداً از مکان $-۵m$ می‌گذرد و در چه لحظه‌ای به مکان $+۵m$ می‌رسد.



۱ مساحت سطح زیر نمودار را در بازهٔ ۰ تا $۴s$ حساب می‌کنیم. یعنی جابه‌جایی متحرک را در این بازه مشخص می‌کنیم.

$$\Delta x_۱=S_۱=\frac{-۲+(-۸)}{۲}\times ۲+\frac{(-۸)\times ۲}{۲}=-۱۰+(-۸)=-۱۸m$$

۲ مکان متحرک در $t=۴s$ برابر است با:

$$\Delta x=x_۱-x_۰ \Rightarrow -۱۸=x_۱-(-۵) \Rightarrow x_۱=-۲۳m$$

۳ اگر متحرک به مکان $x=+۵m$ برسد، برای سومین بار فاصلهٔ متحرک از مبدأ ۵ متر می‌شود. بنابراین متحرک باید از مکان $-۲۳m$ به مکان $+۵m$ برود. یعنی جابه‌جایی متحرک در بازهٔ ۴ تا t ثانیه باید $+۲۸m$ باشد.

۴ به کمک شیب خط AB سرعت در لحظهٔ $t=۵s$ را به‌دست می‌آوریم.

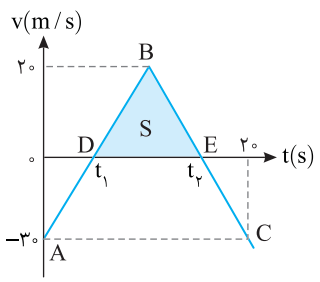
$$\frac{۰-(-۸)}{۴-۲}=\frac{v'-۰}{۵-۴} \Rightarrow v'=۴m/s$$

۵ اکنون سطح زیر نمودار را از $t=۴s$ تا لحظهٔ t حساب کرده و برابر $+۲۸m$ قرار داده و t را به‌دست آورید.

$$\Delta x=S \Rightarrow (t-۴+t-۵)\times \frac{۴}{۲}=۲۸ \Rightarrow ۴t-۱۸=۲۸ \Rightarrow ۴t=۴۶ \Rightarrow t=۱۱/۵s$$

B ۶۵۵ ۳

خط فکری مسئله مسافت طی شده در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ را از شما خواسته است. یعنی باید سطح S را به‌دست بیاورید. ارتفاع مثلث معلوم و برابر ۲۰ واحد است، اما قاعدهٔ آن یعنی $t_۲-t_۱$ را باید حساب کنید. چگونه؟



توسط تشابه مثلث‌های ABC و DBE. پس حل را شروع کنید.

با توجه به شکل و تشابه دو مثلث رنگی بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ را به دست می‌آوریم.

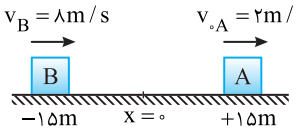
$$\frac{۲۰}{t_۲-t_۱}=\frac{۳۰+۲۰}{۲۰} \Rightarrow t_۲-t_۱=\frac{۴۰۰}{۵۰}=۸s$$

مسافت طی شده در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ برابر مساحت زیر نمودار در این بازه است و آن را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{۲۰\times ۸}{۲}=۸۰m$$

B ۶۵۶ ۳

خط فکری متحرک A از مکان $+۱۵m$ و متحرک B از مکان $-۱۵m$ در جهت مثبت محور در حرکت هستند. یعنی در $t=۰$ فاصلهٔ آن‌ها از هم ۳۰ متر است. سرعت متحرک B ثابت و برابر $۸m/s$ و سرعت متحرک A، $v_{۰A}=۲m/s$ است. بنابراین متحرک B در حال نزدیک شدن به متحرک A است. اما تا کی؟ تا لحظه‌ای که سرعت B از سرعت A بیشتر است و لحظه‌ای که سرعت A از $۸m/s$ بیشتر می‌شود، فاصلهٔ دو متحرک از هم افزایش می‌یابد. بنابراین باید لحظه‌ای را که متحرک A سرعتش به $۸m/s$ می‌رسد حساب کنید و در این لحظه مکان دو متحرک A و B را حساب کرده فاصلهٔ دو متحرک را به‌دست آورید.



۱ شتاب متحرک A برابر است با:

$$a_A=\frac{v-v_۰}{t} \Rightarrow a_A=\frac{۸-۲}{۳}=۲m/s^۲$$

۲ معادلهٔ حرکت B را نوشته و مکان آن را در $t=۳s$ به‌دست می‌آوریم.

$$x=vt+x_۰ \Rightarrow x_B=۸t-۱۵ \xrightarrow{t=۳s} x_B=۲۴-۱۵ \Rightarrow x_B=۹m$$

۳ معادلهٔ حرکت A را نوشته و مکان آن را در $t=۳s$ به‌دست می‌آوریم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$$

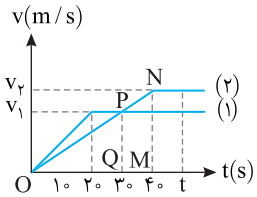
$$\Rightarrow x_A=\frac{۱}{۲}\times ۲t^۲+۲t+۱۵ \xrightarrow{t=۳s} x_A=۹+۶+۱۵=۳۰m$$

۴ کمترین فاصلهٔ دو متحرک خواهد شد.

$$x_A-x_B=۳۰-۹=۲۱m$$

B ۶۵۷ ۴

خط فکری دو متحرک از مبدأ شروع به حرکت کرده‌اند. متحرک (۱) جلو می‌افتد. چرا؟ چون زودتر سرعتش افزایش می‌یابد و در لحظهٔ $t=۲۰s$ سرعتش ثابت و برابر $v_۱$ می‌شود متحرک (۲) شتاب کمتری دارد اما در لحظهٔ $t=۳۰s$ سرعتش از $v_۱$ بیشتر می‌شود. بنابراین می‌تواند عقب‌افتادگی خود را جبران کند. وقتی متحرک (۲) به متحرک (۱) می‌رسد که جابه‌جایی دو متحرک یکسان بوده و از این‌رو تا لحظهٔ t که دو متحرک به هم می‌رسند باید سطح زیر نمودار دو متحرک برابر باشد. سطح زیر نمودارها را برابر قرار دهید. البته باید ابتدا یک رابطهٔ ریاضی بین $v_۱$ و $v_۲$ پیدا کنید. مقدار $۶۰۰m$ در حل مسئله نقشی ندارد.



با توجه به تشابه مثلث‌های OPQ و ONM می‌توان نوشت:

$$\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{۴۰}{۳۰} \Rightarrow \frac{v_۲}{v_۱}=\frac{۴}{۳}$$

در لحظهٔ t که دو متحرک به هم می‌رسند، باید سطح زیر نمودارها برابر شود.

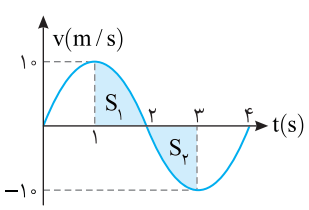
$$S_۱=S_۲ \Rightarrow \frac{t+t-۲۰}{۲}v_۱=\frac{t+t-۴۰}{۲}v_۲$$

$$\Rightarrow (۲t-۲۰)v_۱=(۲t-۴۰)\times \frac{۴}{۳}v_۱ \Rightarrow ۲t-۲۰=\frac{۴}{۳}(۲t-۴۰) \Rightarrow t=۵۰s$$

B ۶۵۸ ۲

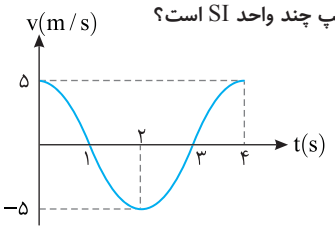
۱ به نمودار نگاه کنید. در لحظهٔ $t_۱=۱s$، سرعت متحرک $v_۱=۱۰m/s$ و در لحظهٔ $t_۲=۳s$ سرعت متحرک $v_۲=-۱۰m/s$ است. از این‌رو شتاب متوسط خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱} \Rightarrow a_{av}=\frac{-۱۰-۱۰}{۳-۱} \Rightarrow a_{av}=-۱۰m/s^۲$$



۲ برای به‌دست آوردن سرعت متوسط باید جابه‌جایی در بازهٔ $1s$ تا $3s$ را حساب کرد. البته برای جابه‌جایی باید به سراغ سطح زیر نمودار $v-t$ برویم. دوباره به نمودار نگاه کنید، مساحت سطح زیر نمودار در بازهٔ $1s$ تا $3s$ مجموع S_1 و S_2 است که S_1 و S_2 هم‌اندازه و قرینه هم بوده. بنابراین مجموع آن‌ها یعنی جابه‌جایی متحرک صفر است. $(\Delta x=0)$ بنابراین سرعت متوسط $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$ صفر است.

بازی با سؤال **نمودار سرعت - زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است. شتاب متوسط و سرعت متوسط در بازهٔ زمانی ۲ تا ۴ ثانیه به‌ترتیب از راست به چپ چند واحد SI است؟**



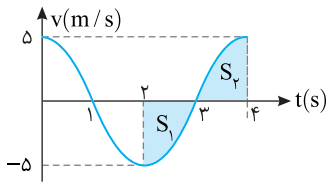
۱) صفر ، صفر
۲) $+۵$ ، صفر
۳) صفر، -۵
۴) ۵ ، -۵

پاسخ **شتاب متوسط خواهد شد:**

$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\Rightarrow a_{av}=\frac{۵-(-۵)}{۴-۲}\Rightarrow a_{av}=۵m/s$$

سطح زیر نمودار سرعت - زمان در بازهٔ $2s$ تا $4s$ برابر مجموع S_1 و S_2 است.

$$\Delta x=S=S_1+S_2\xrightarrow{S_1=-S_2}\Delta x=0\Rightarrow v_{av}=0$$

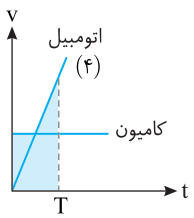


گزینهٔ ۲

B ۶۵۹ ۴

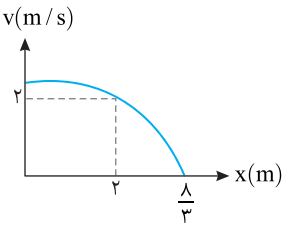
برای آن‌که اتومبیل بتواند به کامیون برسد باید سرعتش از کامیون بیشتر شود. در مدت T در نمودار (۱) و (۲) سرعت اتومبیل از کامیون کمتر است. بنابراین اتومبیل و کامیون به هم نمی‌رسد و این نمودارها نادرست هستند.

از طرفی باید جابه‌جایی اتومبیل و کامیون یکسان شود تا اتومبیل به کامیون برسد. یعنی مساحت سطح زیر نمودار دو متحرک باید یکی شود، سطح زیر نمودار (۳) از سطح زیر نمودار کامیون کمتر است. بنابراین این نمودار نیز درست نیست و مطابق شکل نمودار (۴) جواب مسئله است.



B ۶۶۰ ۳

نمودار داده شده، نمودار سرعت مکان است. آن را با نمودار سرعت زمان اشتباه نگیرید.



۱ در مکان $x_1=2m$ سرعت متحرک $v_1=2m/s$ و در مکان $x_2=\frac{8}{3}m$ سرعت متحرک صفر $(v_2=0)$ است.

به کمک معادلهٔ مستقل از زمان شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$v_2^2-v_1^2=2a(x_2-x_1)\Rightarrow 0-4=2(a)(\frac{8}{3}-2)\Rightarrow$$

$$-2=a(\frac{2}{3})\Rightarrow a=-3m/s^2$$

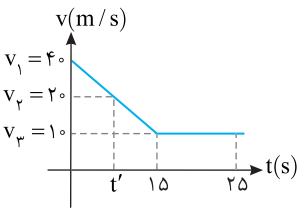
۲ مجدداً معادلهٔ مستقل از زمان را نوشته و سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$$v_1^2-v_0^2=2a(x_1-x_0)\xrightarrow{x_0=0}2^2-v_0^2=2(-3)(2-0)$$

$$4-v_0^2=-12\Rightarrow v_0^2=16\Rightarrow v_0=4m/s$$

B ۶۶۱ ۲

سرعت متحرک A ثابت و برابر $20m/s$ است و سرعت اولیهٔ متحرک B برابر $40m/s$ است. بنابراین B از A جلو می‌افتد و تا لحظه‌ای که سرعت B از $20m/s$ بیشتر است، متحرک B در حال دور شدن از A می‌باشد و پس از این لحظه سرعت متحرک A از سرعت متحرک B بیشتر می‌شود و شروع به کم کردن فاصلهٔ خود از متحرک B می‌کند و ممکن است از متحرک B سبقت بگیرد.



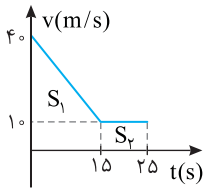
۱ لحظه‌ای که سرعت متحرک B، $20m/s$ می‌شود را حساب می‌کنیم.

از $t=0$ تا $t=15s$ شیب خط حرکت ثابت می‌ماند:

$$\frac{\overbrace{v-v_3}^{\text{شیب خط در بازه ۰ تا ۱۵s}}}{15s}=\frac{\overbrace{v-v_2}^{\text{شیب خط در بازه ۰ تا t}}}{t'}\Rightarrow\frac{40-10}{15-0}=\frac{40-20}{t'-0}\Rightarrow t'=10s$$

۲ سرعت متحرک A ثابت بوده و جابه‌جایی آن برابر $\Delta x_A=v_A t$ و در این مدت متحرک A به اندازهٔ $\Delta x_A=v_A t=200m$ و متحرک B به اندازهٔ $\Delta x_B=\frac{v_1+v_2}{2}\Delta t=\frac{40+20}{2}\times 10=300m$ جابه‌جا شده‌اند. بنابراین در این مدت متحرک B، $100m$ جلو می‌افتد.

۳ از $t=10s$ متحرک A به B نزدیک می‌شود و از آن جلو می‌افتد. اکنون جابه‌جایی دو متحرک از $t=0$ تا $25s$ را حساب می‌کنیم:

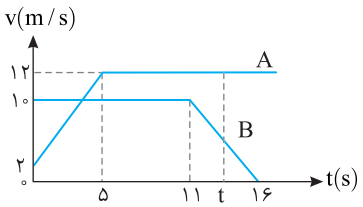


$$\begin{cases}\Delta x_A=20\times 25=500m\\ \Delta x_B=\underbrace{\frac{40+10}{2}}_{S_1}\times 15+\underbrace{10\times 10}_{S_2}=475m\\ \Rightarrow 500-475=25m\end{cases}$$

۴ یعنی در انتهای زمان، A تنها ۲۵ متر بیشتر از B جابه‌جا شده و در $t=25s$ فاصلهٔ دو متحرک از هم $25m$ است پس بیشترین فاصلهٔ آن‌ها در همان $t=10s$ رخ داده که متحرک B، $100m$ جلوتر از متحرک A است.

B ۶۶۲ ۳

خط فکری این مسئله با روش‌هایی که می‌شناسیم و به آن‌ها عادت کردیم حل نمی‌شود. شما باید مرحله به مرحله جابه‌جایی دو متحرک (یعنی سطح زیر نمودار دو متحرک) را با هم مقایسه کنید تا مشخص شود دو متحرک در چه لحظه‌ای به هم می‌رسند.



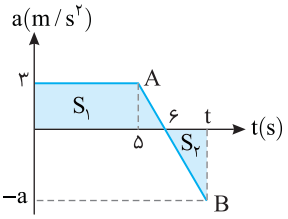
۱ ابتدا بررسی می‌کنیم که در لحظه‌های کلیدی مانند $t=5s$ و $t=11s$ دو متحرک در کنار یکدیگر هستند یا خیر؟ سطح زیر نمودار سرعت- زمان برابر با جابه‌جایی است و هر دو متحرک از مکان $x=0$ به حرکت درآمده‌اند. بنابراین سطح زیر نمودار در این حالت بیانگر مکان هر متحرک نیز هست.

$$t=5s\Rightarrow\begin{cases}x_A=\frac{2+12}{2}\times 5=35m\\ x_B=10\times 5=50m\end{cases}$$

۲ با توجه به عددهای به دست آمده متحرک B، در لحظهٔ $t=5s$، ۱۵ متر جلوتر از متحرک A است.

۶۶۵ | ۲ | B

سطح محصور بین نمودار شتاب- زمان و محور زمان برابر تغییر سرعت است. متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده، پس سرعت اولیه $v_0=0$ است. لحظه‌ای کـه مجدداً متحـرک متوقف می‌شود را با حرف t نمایش می‌دهیم.



۱ شتاب حرکت در لحظهٔ t را به کمک شیب خط AB به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{0-3}{6-5}=\frac{-a-0}{t-6}\Rightarrow a=3(t-6) \qquad (I)$$

۲ برای آن‌که سرعت متحرک مجدداً صفر شود، باید تغییرات سرعت در بازهٔ صفر تا t صفر شود. یعنی در این بازه باید سطح زیر نمودار شتاب - زمان صفر شود. بنابراین خواهیم داشت.

$$\Delta v=0\Rightarrow S_1+S_2=0\Rightarrow \frac{5+6}{2}\times 3=\frac{a\times(t-6)}{2}\Rightarrow a(t-6)=33 \qquad (II)$$

۳ در رابطهٔ (II)، شتاب را از رابطهٔ (I) قرار می‌دهیم.

$$3(t-6)(t-6)=33$$

$$\Rightarrow(t-6)(t-6)=11\Rightarrow(t-6)^2=11\Rightarrow t-6=\sqrt{11}\Rightarrow t=6+\sqrt{11}\,s$$

۶۶۶ | ۱ | B

در ابتدا با توجه به فرض پرسش، سـرعت منفی و برابر $v_0=-8m/s$ است، از طرفی سطح زیر نمودار شتاب- زمان برابر تغییر سرعت متحرک است.

بنابرایـن به کمک سـطح زیـر نمودار اندازهٔ سـرعت در لحظه‌هـای $t=2s$ ، $t=4s$ و $t=5s$ را به‌دست می‌آوریم و با هم مقایسه می‌کنیم.

$$0\to 2s\Rightarrow \Delta v=S=\frac{2+1}{2}\times 2=3m/s \xrightarrow{\Delta v=v-v_0} 3=v-(-8)\Rightarrow v=-5m/s$$

$$2s\to 4s\Rightarrow \Delta v=S=\frac{2+1}{2}\times 2=3m/s \xrightarrow{\Delta v=v'-v} 3=v'-(-5)$$

$$\Rightarrow v'=-2m/s$$

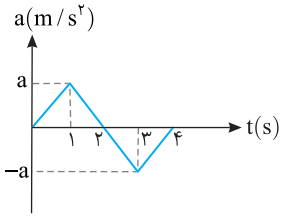
$$4s\to 5s\Rightarrow \Delta v=S=(-2\times 1)\times\frac{1}{2}=-1\,m/s \xrightarrow{\Delta v=v''-v'} -1=v''-(-2)$$

$$\Rightarrow v''=-3m/s$$

بنابراین اندازهٔ سرعت اولیه از بقیهٔ لحظه‌های بیان شده بیشتر است.

۶۶۷ | ۱ | B

متحرک از حال سـکون با شـتاب مثبت شـروع بـه حرکت کـرده، پـس ابتدا در جهت مثبت محـور در حال حرکت بوده است. در مدت ۲ ثانیهٔ اول بر سرعتش افزوده می‌شـود زیرا در این مدت شتاب و سـرعت هـر دو مثبت بـوده و حرکت تندشونده است. سپس در بازهٔ ۲ تا ۴ ثانیه شتاب منفی، اما سرعت همچنان مثبت بوده و حرکـت در جهت مثبت محور کندشـونده اسـت تا لحظهٔ $t=4s$ کـه متحرک متوقف می‌شـود. برای درک بهتر موضوع سـرعت‌ها را در لحظهٔ ۱s، ۲s، ۳s و ۴s به‌دست می‌آوریم.



$$t=0\Rightarrow v_0=0$$

$$t=1s\Rightarrow \Delta v=S=\frac{a\times 1}{2} \xrightarrow{\Delta v=v-v_0} v_1=\frac{a}{2}$$

$$t=2s\Rightarrow \Delta v=S=\frac{a\times 1}{2}=\frac{a}{2} \xrightarrow{v_2-v_1=\frac{a}{2}} v_2=a$$

$$t=3s\Rightarrow \Delta v=S=\frac{-a\times 1}{2}=-\frac{a}{2} \xrightarrow{v_3-v_2=-\frac{a}{2}} v_3=\frac{a}{2}$$

$$t=4s\Rightarrow \Delta v=\frac{-a\times 1}{2}=S=-\frac{a}{2} \xrightarrow{v_4-v_3=-\frac{a}{2}} v_4=0$$

کاملاً مشـخص اسـت که در هر لحظه در بازهٔ صفر تا 4s سرعت مثبت است. یعنی در تمـام ایـن مدت متحرک در جهت مثبـت محور در حال حرکت بـوده بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

۳ مکان دو متحرک در $t=11s$ را حساب می‌کنیم.

$$t=11s\Rightarrow\begin{cases}x_A=\frac{2+12}{2}\times 5+12\times(11-5)=107\,m\\ x_B=10\times 11=110\,m\end{cases}$$

۴ در لحظـهٔ $t=11s$ همچنـان متحرک B، ۳ متر از متحرک A جلوتر اسـت و با توجه به سرعت متحرک A در این لحظه $(v_A=12m/s)$ متحرک A پس از زمان $t=1s$ می‌تواند به متحرک B برسد.

۵ معادلهٔ حرکت دو متحرک را پس از $t=11s$ برابر قرار می‌دهیم: $x_A=12(t-11)+107$

$$x_B=\frac{1}{2}a_Bt^2+v_0t+x_0=\frac{1}{2}\left(\frac{0-10}{16-11}\right)(t-11)^2+10(t-11)+110$$

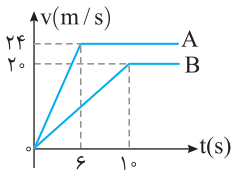
۶ معادله‌های مکان A و B را برابر قرار می‌دهیم.

$$12(t-11)+107=-(t-11)^2+10(t-11)+110\Rightarrow(t-11)^2+2(t-11)-3=0$$

$$\Rightarrow[(t-11)+3][(t-11)-1]=0\Rightarrow(t-9)(t-12)=0\Rightarrow\begin{cases}t=9s & \text{غ ق ق}\\ t=12s & \text{جواب}\end{cases}$$

۶۶۳ | ۲ | C

لحظـه‌ای کـه متحـرک A از کنـار متحـرک B می‌گذرد را به کمک سـطح زیر نمودار به‌دست می‌آوریم:



$$S_A=S_B+68$$

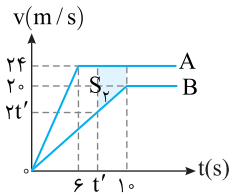
$$\frac{t+t-6}{2}\times 22=\frac{t+t-10}{2}\times 20+68\Rightarrow 24t-72=20t-100+68$$

$$4t=40\Rightarrow t=10s$$

بعـد از $t=10s$ متحـرک A از متحرک B جلو می‌افتد و بعد از این لحظه نوع حرکت دو متحرک یکنواخت است.

$$x_A-x_B\le 12\Rightarrow 24t-20t\le 12\Rightarrow 4t\le 12\Rightarrow t\le 3s$$

سـه ثانیـه پـس از $t=10s$ فاصلـهٔ دو متحرک کمتـر از ۱۲ متر اسـت امـا قبل از $t=10s$ چه مدت فاصلهٔ بین دو متحرک از 12m کمتر یا با آن مساوی است؟ اگر قبل از $t=10s$ در لحظهٔ t' فاصلهٔ دو متحرک 12m شود در این لحظه سرعت متحرک B خواهد شد:



$$v=at,\ a=\frac{20}{10}=2\frac{m}{s^2}\Rightarrow v=2t'$$

باید مساحت قسمت رنگی برابر ۱۲ واحد باشد.

$$[(24-20)+(24-2t')]\times\frac{(10-t')}{2}\le 12$$

$$t'^2-24t'+140\le 12\Rightarrow t'^2-24t'+128\le 0$$

$$(t'-8)(t'-16)=0\Rightarrow\begin{cases}t'=8\\ t'=16 \quad (\text{غ ق ق})\end{cases}$$

بنابرایـن در بـازهٔ $t=8s$ تا $t=10s$ یعنی مدت 2s قبـل $t=10s$ فاصلهٔ دو متحرک مساوی و کمتر از 12m بوده است یعنی جمعاً $5s=3+2$.

عجب تسـتی بود. بالاخره تموم شـد. راه‌حلـش بعد از دو روز فکر کردن این شـده پس نگران نباشید.

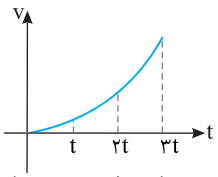
۶۶۴ | ۳ | B

هر دو متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده‌اند، بنابراین حرکت هر دو تندشونده بوده و متحرک A که دارای شتاب مثبت است در جهت مثبت محور شروع به حرکت کرده و متحرک B که دارای شتاب منفی است، در جهت منفی محور شروع به حرکت کرده است.

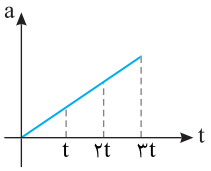
نکته هرگاه متحرکی از حال سکون روی خط راست شروع به حرکت کند، جهت حرکت آن در جهت شتاب بوده و تا لحظه‌ای که شتاب تغییر جهت بدهد، متحرک دارای حرکت تندشونده است.

B ۶۶۸ ۳

اندازهٔ شتاب مثبت و در حال افزایش است، پس شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ باید مثبت و در حال افزایش باشد. همچنین متحرک از حال سکون $(v_0=0)$ شروع به حرکت می‌کند بنابراین نمودار سرعت - زمان آن به شکل روبه‌رو است. با توجه به نمودار، سرعت در تمام لحظات $2t$ تا $3t$، از سرعت در تمام لحظات دو بازهٔ دیگر بیشتر است و سرعت متوسط از $2t$ تا $3t$ از بقیه بازه‌ها بزرگ‌تر است.



بازی با سؤال نمودار شتاب - زمان متحرکی که از حال سکون روی خط راست شروع به حرکت کرده است، مطابق شکل روبه‌رو است. سرعت متوسط در کدام بازهٔ زمانی از بقیه بزرگ‌تر است؟



۱) صفر تا t ۲) t تا $2t$

۳) $2t$ تا $3t$ ۴) اظهار نظر قطعی ممکن نیست.

پاسخ متحرک از حال سکون روی خط راست شروع به حرکت کرده بنابراین حرکت آن تندشونده است. در تمام مدت شتاب در حال افزایش است و علامت آن مثبت است. بنابراین سرعت متحرک در حال افزایش است. در حرکت تندشونده هرچه زمان می‌گذرد، سرعت بیشتر شده و در بازه‌های زمانی یکسان متحرک جابه‌جایی‌های بزرگ‌تری را طی می‌کند و از این‌رو در بازه $2t$ تا $3t$ چون جابه‌جایی بیشتر است، سرعت متوسط $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$ بزرگ‌تر است.

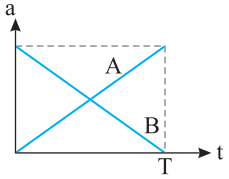
$$0 \quad t \quad t \quad t \quad 2t \quad t \quad 3t$$
$$\Delta x_1 \qquad \Delta x_2 \qquad \Delta x_3$$
$$v_{av_1}=\frac{\Delta x_1}{t} \qquad v_{av_2}=\frac{\Delta x_2}{t} \qquad v_{av_3}=\frac{\Delta x_3}{t}$$

گزینهٔ ۳

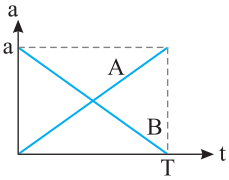
B ۶۶۹ ۳

۱ دو متحرک از حال سکون $(v_0=0)$ شروع به حرکت کرده‌اند و در مدت صفر تا T شتاب آن‌ها تغییر علامت نداده. بنابراین تغییرات سرعت برای هر دو متحرک مثبت است و چون $v_0=0$ بوده پس تندی در حال افزایش بوده و حرکت آن‌ها در کل مدت T، تند شونده است. البته چون در هر لحظه شتاب A در حال افزایش و شتاب B در حال کاهش است، چنانچه نمودار سرعت زمان این دو متحرک را رسم کنیم در هر لحظه شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ که معرف شتاب متحرک است برای متحرک A رفته رفته افزایش می‌یابد اما برای متحرک B رفته رفته شیب کاهش یافته و کندتر می‌شود.

۲ سطح زیر نمودار شتاب زمان برابر تغییرات سرعت متحرک است. در این‌جا هر دو متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده‌اند و تغییرات سرعت برابر سرعت نهایی متحرک است و گزینهٔ (۴) نادرست است.

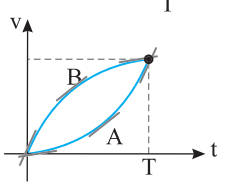


۳ سطح زیر نمودار A و سطح زیر نمودار B برابر است. از این‌رو:



$$\Delta v=S \Rightarrow S_A=\frac{aT}{2}\ ,\ S_B=\frac{aT}{2}$$
$$\Rightarrow \Delta v_A=\Delta v_B \Rightarrow v_A=v_B$$

۴ اگر نمودار سرعت زمان A را رسم کنیم چون شتاب A در حال افزایش است، باید نمودار به‌گونه‌ای باشد که شیب خط مماس بر آن در حال افزایش باشد. اما در مورد نمودار سرعت زمان B برعکس است. بنابراین نمودار سرعت زمان این دو متحرک باید شبیه شکل روبه‌رو باشد.



۵ سطح زیر نمودار سرعت زمان برابر جابه‌جایی متحرک است و سطح زیر نمودار B از سطح زیر نمودار A بزرگ‌تر است و گزینهٔ (۱) نادرست است.

۶ جابه‌جایی متحرک B از جابه‌جایی متحرک A در مدت T بیشتر است. بنابراین سرعت متوسط B از سرعت متوسط A بزرگ‌تر بوده و گزینهٔ (۳) درست است.

پنجره ۵

A ۶۷۰ ۳

نکته هنگام سقوط جسم در خلأ به دلیل نبود مقاومت هوا تنها نیروی وزن به جسم رو به پایین وارد می‌شود، با توجه به قانون دوم نیوتون $F_{net}=ma$ خواهیم داشت:

$$F_{net}=ma \Rightarrow mg=ma \Rightarrow a=g$$

بنابراین شتاب سقوط اجسام در خلأ به جرم آن‌ها بستگی ندارد و تمام اجسام در خلأ با شتاب یکسان g سقوط می‌کنند.

هر دو جسم از یک ارتفاع $(h_1=h_2)$ رها شده‌اند $(v_{0_1}=v_{0_2}=0)$ و شتاب سقوط با توجه به نکتهٔ بالا برابر g است:

۱ مدت زمان سقوط: $h=\frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow[a_1=a_2]{h_1=h_2} t_1=t_2$

۲ سرعت برخورد به زمین: $v^2=2g\Delta y \xrightarrow[a_1=a_2=g]{\Delta y_1=\Delta y_2=h} v_1=v_2$

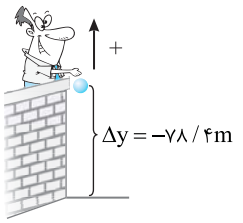
بنابراین سرعت برخورد آن‌ها به سطح زمین و زمان سقوط آن‌ها برابر است.

A ۶۷۱ ۳

راه اول: جهت مثبت را رو به بالا اختیار می‌کنیم و معادلهٔ مکان - زمان را می‌نویسیم. دقت کنید که گلوله از ارتفاع $78/4m$ رها شده و به زمین $h=0$ رسیده. پس جابه‌جایی گلوله برابر $y_2-y_1=0-78/4m$ است:

$$\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow -78/4=-\frac{1}{2}\times 9/8t^2 \Rightarrow t=4s$$

راه دوم: اگر جهت مثبت را رو به پایین بگیریم، حل کمی ساده‌تر می‌شود چون جابه‌جایی $78/4$ متر رو به پایین بوده و مثبت است و شتاب گرانش نیز رو به پایین و مثبت می‌گیریم:

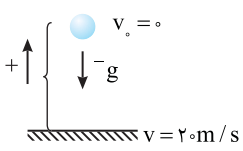


$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 78/4=\frac{1}{2}\times 9/8t^2 \Rightarrow t=4s$$

جهت مثبت اختیاری است و می‌توان جهت مثبت را رو به بالا و یا رو به پایین گرفت.

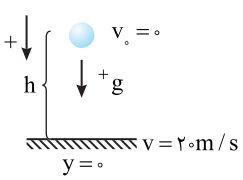
A ۶۷۲ ۲

راه اول: سرعت ابتدایی $(v_0=0)$ و انتهایی $(v=20m/s)$ و شتاب حرکت $(g=10m/s^2)$ را داریم، پس از معادلهٔ مستقل از زمان استفاده کرده و ارتفاع را به‌دست می‌آوریم. جهت مثبت را برای سادگی رو به پایین درنظر می‌گیریم.



$$v^2-v_0^2=2gh \Rightarrow 400=20h \Rightarrow h=20m$$

راه دوم: اگر جهت مثبت را رو به بالا اختیار کنیم شتاب گرانش که رو به پایین است منفی بوده و در روابط $-g$ قرار می‌دهیم از طرفی چون جسم به اندازهٔ h پایین می‌آید جابه‌جایی نیز منفی خواهد بود از این رو:



$$v^2-v_0^2=-2g\Delta y \Rightarrow 20^2-0=-20(0-h) \Rightarrow h=20m$$

A ۶۷۳ ۱

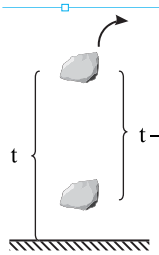
جهت مثبت را رو به پایین اختیار می‌کنیم. گلوله رها شده $(v_0=0)$، گلوله با تندی $24m/s$ به حسگر برخورد می‌کند و سرعت نهایی $v=2/4m/s$ بوده و ارتفاع $30cm$ است. پس به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، پرسش را حل می‌کنیم:

$$v^2-v_0^2=2g\Delta y \xrightarrow{\Delta y=30cm=\frac{30}{100}m} (2/4)^2-0=2\times g\times\frac{30}{100}$$

$$\Rightarrow g=\frac{2/4\times 2/4}{2\times\frac{30}{100}} \Rightarrow g=9/6m/s^2$$

A ۶۷۴ ۲

مطابق شکل روبه‌رو اگر زمان سقوط را t در نظر بگیریم، لحظه‌ای که تندی به $24m/s$ رسیده $t-1$ خواهد بود. اطلاعات سؤال را در شکل مشخص می‌کنیم، همان‌طور که مشخص است در مورد ارتفاع اطلاعاتی نداده و مقدار h خواستهٔ سؤال نیست پس سؤال را به کمک معادلهٔ $v=gt$ (جهت مثبت را رو به پایین گرفتیم) به‌دست می‌آوریم:

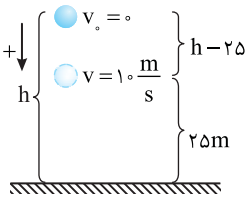


$$v=g(t-1)\Rightarrow 24=10(t-1)\Rightarrow 2/4=t-1\Rightarrow t=3/4s$$

بنابراین زمان سقوط کامل یعنی t برابر $3/4s$ است.

A ۶۷۵ ۱

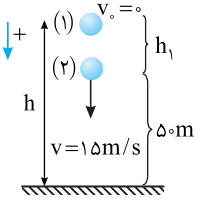
مطابق شکل گلوله پس از طی مسافت $h-25$ سرعت گلوله از صفر به $10m/s$ رسیده است و برای حل باید از معادلهٔ مستقل از زمان کمک گرفت. جهت مثبت را برای سادگی رو به پایین درنظر می‌گیریم، بنابراین:



$$v^2-v_0^2=2g\Delta y \xrightarrow[\Delta y=h-25]{v_0=0,\ v=10m/s} v^2=2g(h-25)\Rightarrow 100=20(h-25)\Rightarrow h=30m$$

B ۶۷۶ ۲

شکلی ساده از سقوط جسم می‌کشیم. سرعت اولیه $v_0=0$، سرعت پس از اینکه جسم به اندازهٔ h_1 پایین آمده برابر $15m/s$ و شتاب برابر $g=10m/s^2$ است.



۱ ابتدا h_1 را به کمک معادلهٔ مستقل از زمان حساب می‌کنیم. h_1 را با $50m$ جمع کرده و ارتفاع جسم در لحظهٔ رها شدن از سطح زمین را به‌دست می‌آوریم:

$$v^2-v_0^2=2gh_1\Rightarrow 225=20h_1\Rightarrow h_1=11/25m$$

۲ h_1 برابر $11/25m$ بوده و ارتفاع گلوله در وضعیت (۲) تا سطح زمین ۵۰ متر است پس:

$$h=50+11/25=61/25m$$

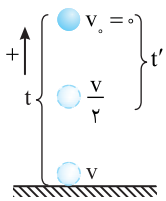
۳ اکنون با داشتن ارتفاع محل رها شدن جسم، زمان رسیدن جسم به زمین را به‌دست می‌آوریم.

$$h=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow 61/25=5t^2\Rightarrow t^2=12/25\Rightarrow t=3/5s$$

میانبر به‌دست آوردن جذر $12/25$ کار دشواری است، پس باید از گزینه‌ها کمک بگیریم. گزینهٔ (۱) جذر عدد ۴، گزینهٔ (۳) جذر عدد ۲۵ است و گزینهٔ (۴) نیز نمی‌تواند جذر عدد $12/25$ باشد. زیرا $6\times 6=36$ بوده که از $12/25$ بزرگ‌تر است. پس $6/5\times 6/5$ مطمئناً از $12/25$ بیشتر می‌شود.

A ۶۷۷ ۱

۱ جهت مثبت را رو به بالا فرض کرده‌ایم. مطابق شکل سرعت اولیه صفر بوده $(v_0=0)$ و شتاب حرکت در کل مسیر یکسان و برابر g است. با استفاده از معادلهٔ سرعت - زمان داریم:



کل زمان سقوط از v_0 تا v: $v=-gt+v_0\Rightarrow v=-gt$

از سرعت v_0 تا $\frac{v}{2}$: $\frac{v}{2}=-gt'+v_0\Rightarrow \frac{v}{2}=-gt'$

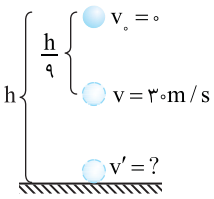
۲ دو معادله را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{v}{\frac{v}{2}}=\frac{-gt}{-gt'}\Rightarrow \frac{t}{t'}=2\Rightarrow t'=\frac{t}{2}$$

میانبر البته می‌توان استدلال کرد که چون حرکت با شتاب ثابت است و پس از t سرعت به v رسیده بنابراین بعد از $\frac{t}{2}$ سرعت به $\frac{v}{2}$ می‌رسد زیرا تغییرات سرعت در یک ثانیه مقدار ثابتی است.

A ۶۷۸ ۲

خط فکری اطلاعاتی در مورد زمان سقوط داده نشده و خواستهٔ سؤال هم نیست پس سؤال را به کمک معادلهٔ مستقل از زمان حل می‌کنیم:



۱ سرعت اولیه $v_0=0$ بوده و پس از سقوط $\frac{h}{9}$ به تندی $30m/s$ می‌رسد:

$$v^2-v_0^2=2g\Delta y\Rightarrow 900-0=20\times\frac{h}{9}$$

$$\Rightarrow h=405m$$

۲ حال سرعت رسیدن به زمین را به‌دست می‌آوریم:

$$v'^2-v_0^2=2g\Delta y'\Rightarrow v'^2=20\times 405\Rightarrow v'^2=8100\Rightarrow v'=90m/s$$

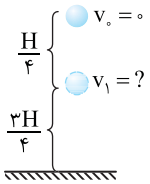
روش دیگر: با توجه به معادلهٔ مستقل از زمان مسأله به راحتی قابل حل است. جهت مثبت را رو به پایین فرض کنید و دو بار از معادلهٔ مستقل از زمان یک‌بار برای h و بار دیگر برای $\frac{h}{9}$ استفاده کنید.

$$v_2^2=2g\Delta y_2,\ v_1^2=2g\Delta y_1\Rightarrow \frac{v_2^2}{v_1^2}=\frac{\Delta y_2}{\Delta y_1}$$

$$\Rightarrow \frac{v_2^2}{30^2}=\frac{\frac{h}{9}}{h}\Rightarrow v_2^2=30^2\times 9\Rightarrow v_2=30\times 3=90m/s$$

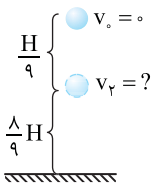
B ۶۷۹ ۱

۱ دقت کنید در لحظه‌ای که ارتفاع سنگ از زمین $\frac{3H}{4}$ بوده، سنگ به اندازهٔ $\frac{H}{4}$ سقوط کرده و چون در مورد زمان صحبتی نشده برای حل از معادلهٔ مستقل از زمان استفاده می‌کنیم:



$$v_1^2-v_0^2=2g\Delta y_1\Rightarrow v_1^2=2g(\frac{H}{4})\quad (I)$$

۲ اگر ارتفاع سنگ از سطح زمین $\frac{8}{9}H$ شود یعنی سنگ $\frac{H}{9}$ سقوط کرده پس:

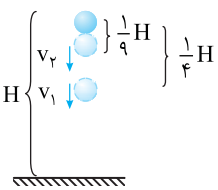


$$v_2^2-v_0^2=2g\Delta y_2\Rightarrow v_2^2=2g(\frac{H}{9})\quad (II)$$

۳ حال دو معادله را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{v_1^2}{v_2^2}=\frac{2g(\frac{H}{4})}{2g(\frac{H}{9})}\Rightarrow \frac{v_1^2}{v_2^2}=\frac{9}{4}\xrightarrow[\text{جذر می‌گیریم}]{\text{از دو طرف}}\frac{v_1}{v_2}=\frac{3}{2}$$

میانبر محل رها شدن را مبدأ مختصات و جهت رو به پایین را مثبت می‌گیریم.

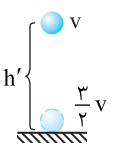


$$v^2-v_0^2=2g\Delta y\Rightarrow v=\sqrt{2g\Delta y}$$

دقت کنید که در رابطهٔ $v=\sqrt{2g\Delta y}$، مقدار Δy جابه‌جایی جسم است یعنی وقتی جسم از ارتفاع H رها می‌شود و به ارتفاع $\frac{8}{9}H$ می‌رسد، Δy برابر $\frac{H}{9}$ است.

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sqrt{2g\frac{H}{4}}}{\sqrt{2g\frac{H}{9}}}=\frac{3}{2}$$

A ۶۸۰ ۱

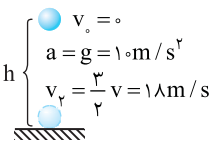


جابه‌جایی $9m$ آخر مسیر با سرعت اولیهٔ v و سرعت نهایی $\frac{3}{2}v$ انجام می‌شود.

$$v_2^2-v_1^2=2gh'\Rightarrow \frac{9}{4}v^2-v^2=2\times 10\times 9$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}v^2=180\Rightarrow v^2=144\Rightarrow v=12m/s$$

گلوله از ارتفاع h رها شده پس تندی آن در ارتفاع h برابر $v_0=0$ بوده و تندی گلوله هنگام رسیدن به زمین $\frac{3}{2}v=18m/s$ است.

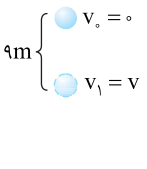


$$v_2^2-v_0^2=2gh\Rightarrow(18)^2-0^2=2\times10\times h$$
$$\Rightarrow324=2\times10\times h\Rightarrow h=16/2m$$

B ۶۸۱ ۲

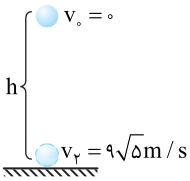
خط فکری در سؤال اطلاعاتی در مورد زمان داده شده و خواستهٔ سؤال نیز مدت زمان سقوط نیست پس سؤال را به کمک معادلهٔ مستقل از زمان حل می‌کنیم:

۱ با جابه‌جایی 9m تندی گلوله از صفر به v می‌رسد:



$$v_1^2-v_0^2=2g\Delta y\Rightarrow v^2=2\times10\times9\Rightarrow v^2=180$$
$$\Rightarrow v=\sqrt{180}=6\sqrt{5}m/s$$

۲ تندی گلوله هنگام رسیدن به زمین $\frac{3}{2}v=9\sqrt{5}m/s$ است. بنابراین خواهیم داشت:



$$v_2^2-v_0^2=2g\Delta y\Rightarrow405=20h\Rightarrow h=20/25m$$

A ۶۸۲ ۱

یادآوری ثانیهٔ اول سقوط بازهٔ زمانی $t=0$ تا $t=1s$ بوده یعنی $\Delta t_1=1s$ و ثانیهٔ چهارم سقوط بازهٔ زمانی $t=3s$ تا $t=4s$ یعنی بازهٔ زمانی $\Delta t=1s$ است.

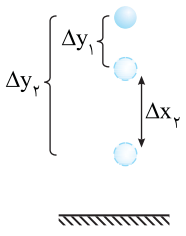
تغییر سرعت خواهد شد:

$$\Delta v=g\Delta t\begin{cases}\xrightarrow{\text{ثانیهٔ اول}}\Delta v_1=g\times1\\ \xrightarrow{\text{ثانیهٔ چهارم}}\Delta v_4=g\times1\end{cases}\Rightarrow\frac{\Delta v_4}{\Delta v_1}=1$$

میانبر شتاب یعنی تغییر سرعت در مدت 1s، سقوط آزاد یک حرکت با شتاب ثابت g است، بنابراین با هم برابر است.

A ۶۸۳ ۲

راه‌حل اول: با توجه به رابطهٔ مکان- زمان $\Delta y=\frac{1}{2}gt^2$ جابه‌جایی در ثانیهٔ اول را به‌دست می‌آوریم:



$$x=\frac{1}{2}gt^2\xrightarrow{t=1s}\Delta x_1=5m$$

با توجه به اینکه سرعت اولیه برابر صفر است و در رابطهٔ $\Delta y=\frac{1}{2}gt^2$ سرعت اولیه یعنی $t=0$ را صفر قرار دادیم پس برای به‌دست آوردن جابه‌جایی در ثانیهٔ دوم $t=1s$ تا $t=2s$ جابه‌جایی Δy_1 و Δy_2 را حساب کرده و تفاضل این دو Δx_2 را می‌دهد:

$$\begin{cases}\Delta y_1=\frac{1}{2}gt_1^2\xrightarrow{t_1=1s}\Delta y_1=5m\\ \Delta y_2=\frac{1}{2}gt_2^2\xrightarrow{t_2=2s}\Delta y_2=20m\end{cases}\Rightarrow\Delta x_{(2)}=20-5=15m$$

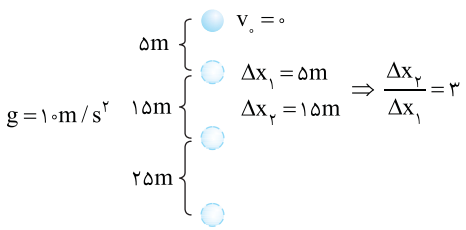
بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}=\frac{15}{5}=3$$

راه‌حل دوم: در حرکت با شتاب ثابت، جابه‌جایی متحرک در ثانیهٔ t ام از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta x_{(t)}=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0\Rightarrow\begin{cases}t=1s\Rightarrow\Delta x_{(1)}=5m\\ t=2s\Rightarrow\Delta x_{(2)}=15m\end{cases}\Rightarrow\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}=\frac{15}{5}=3$$

میانبر مسافت‌های طی شده در ۱ ثانیه‌های متوالی تشکیل تصاعد حسابی با قدرنسبت g می‌دهد:



A ۶۸۴ ۲

۱ ابتدا مسافت طی‌شده در $\frac{3}{4}$ ثانیهٔ اول را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta y_{(\frac{3}{4})}=\frac{1}{2}gt^2=5\times\frac{9}{16}\Rightarrow\Delta y_{(\frac{3}{4})}=\frac{45}{16}m$$

۲ ثانیهٔ سوم سقوط یعنی $t=2s$ تا $t=3s$ و چون با توجه به اینکه شتاب آهنگ تغییر سرعت بوده و سرعت در هر ثانیه $10m/s$ افزایش می‌یابد پس در لحظهٔ $t=2s$ سرعت $v_1=gt=20m/s$ و در لحظهٔ $t=3s$ سرعت برابر $v_2=gt=30m/s$ است و جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم سقوط خواهد شد:

$$\Delta y_{(t)}=\frac{v_1+v_2}{2}\Delta t\Rightarrow\Delta y_{(2s\text{ تا }3s)}=\frac{20+30}{2}\times1\Rightarrow\Delta y_{(2s\text{ تا }3s)}=25m$$

حال نسبت مسافت‌های خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta y_{(\frac{3}{4})}}{\Delta y_{(3)}}=\frac{\frac{45}{16}}{25}=\frac{9}{80}$$

میانبر مسافت طی شده در ثانیهٔ سوم سقوط برابر است با:

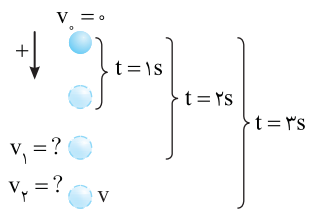
$$\Delta y_{(t)}=\frac{1}{2}g(2t-1)+v_0\Rightarrow\Delta y_{(3)}=5\times5+0=25m$$

بازی با سؤال **اگر جسمی در شرایط خلأ از ارتفاعی بدون سرعت اولیه رها شود و d_1 مسافت طی شده در ثانیهٔ اول حرکت و d_2 مسافت طی شده در ثانیهٔ سوم حرکت باشد، d_2-d_1 کدام است؟**

کنکور دهه‌های گذشته

۱) g ۲) $2g$ ۳) $\frac{g}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}g$

پاسخ **جهت مثبت را برای سادگی رو به پایین درنظر می‌گیریم. مسافت طی شده در ثانیهٔ اول یعنی از $t=0$ تا $t=1s$ با توجه به معادلهٔ مکان - زمان برابر است با:**



$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow d_1=\frac{1}{2}g$$

مسافت طی شده در ثانیهٔ سوم یعنی مسافت طی شده در بازهٔ بین $t=2s$ تا $t=3s$ از این‌رو یک‌بار $t=2s$ و بار دیگر $t=3s$ مکان جسم را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\Delta y_2=\frac{1}{2}g(2)^2=2g\\ \Delta y_3=\frac{1}{2}g(3)^2=\frac{9}{2}g\end{cases}\Rightarrow d_2=\frac{9}{2}g-2g=\frac{5}{2}g$$

بنابراین d_2-d_1 برابر است با:

$$d_2-d_1=\frac{5}{2}g-\frac{g}{2}=\frac{4g}{2}=2g$$

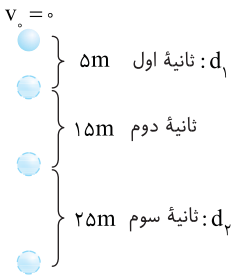
روش دیگر: با توجه به رابطهٔ جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام می‌توان نوشت:

$$\Delta x_{(t)}=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0\Rightarrow\Delta y_{(t)}=\frac{1}{2}g(2t-1)\Rightarrow d_1=\frac{1}{2}g(2\times1-1)=\frac{1}{2}g$$
$$d_2=\frac{1}{2}g(2\times3-1)=\frac{5}{2}g\Rightarrow d_2-d_1=2g$$

میانبر جابه‌جایی جسم در سقوط

در ثانیه‌های متوالی برابر است با:

$d_۲-d_۱=۲۵-۵=۲۰=۲g$

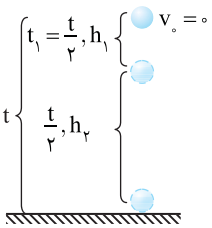


گزینهٔ ۲

۲ ۶۸۵ B

خط فکری شکل ساده‌ای از سقوط گلوله را رسم می‌کنیم و با توجه به اینکه تنها سرعت $v_۰=۰$ داده شده یک بار با استفاده از رابطهٔ $\Delta y=\frac{۱}{۲}gt^۲$ مسافت سقوط در مدت t ثانیهٔ اول و بار دیگر با استفاده از همین فرمول مسافت سقوط در مدت کل ۲t ثانیه را به‌دست می‌آوریم:

۱ در مدت t ثانیه گلوله به اندازهٔ $h_۱$ متر سقوط کرده:



$h_۱=\frac{۱}{۲}gt_۱^۲ \Rightarrow h_۱=\frac{۱}{۲}g(\frac{t}{۲})^۲ \Rightarrow h_۱=\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۲}gt^۲)$

۲ در مدت t ثانیه گلوله به اندازهٔ $h_۱+h_۲$ سقوط می‌کند:

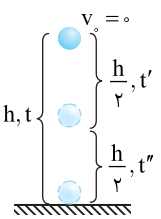
$h_۱+h_۲=\frac{۱}{۲}g(t)^۲$

۳ حال دو معادله را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$\frac{h_۱+h_۲}{h_۱}=\frac{\frac{۱}{۲}g(t^۲)}{\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۲}gt^۲)} \Rightarrow \frac{h_۱+h_۲}{h_۱}=۴ \Rightarrow h_۱+h_۲=۴h_۱ \Rightarrow h_۲=۳h_۱ \Rightarrow \frac{h_۲}{h_۱}=۳$

۱ ۶۸۶ B

۱ با توجه به معادلهٔ مکان - زمان در دو بازهٔ مشخص شده سرعت اولیه صفر بوده و در بازهٔ زمانی t' گلوله به اندازهٔ $\frac{h}{۲}$ و در مدت t گلوله به اندازهٔ h سقوط می‌کند:



$(I): h=-\frac{۱}{۲}gt^۲$ $\quad$ $(II): \frac{h}{۲}=-\frac{۱}{۲}gt'^۲$

۲ دو معادلهٔ (I) و (II) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$\frac{h}{\frac{h}{۲}}=\frac{\frac{۱}{۲}gt^۲}{\frac{۱}{۲}gt'^۲} \Rightarrow (\frac{t}{t'})^۲=۲ \Rightarrow t'=\frac{\sqrt{۲}}{۲}t$

۳ بنابراین زمان سپری شده در نیمه دوم مسیر برابر است با:

$t''=t-t'=t-\frac{\sqrt{۲}}{۲}t=\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}t$

۴ درنتیجه نسبت $\frac{t'}{t''}$ برابر است با:

$\frac{t'}{t''}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}t}{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}t}=\frac{\sqrt{۲}}{۲-\sqrt{۲}}$

باید معادله را گویا کرد و در مخرج رادیکال نداشته باشیم. بنابراین صورت و مخرج را در $۲+\sqrt{۲}$ ضرب می‌کنیم:

$\frac{t'}{t''}=\frac{\sqrt{۲}}{۲-\sqrt{۲}}\times\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}+۲}{۴-۲}=\frac{۲\sqrt{۲}+۲}{۲}=\sqrt{۲}+۱$

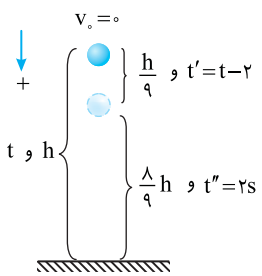
۲ ۶۸۷ B

خط فکری همواره در حل این مسائل، قسمت اول مسیر را با کل مسیر مقایسه می‌کنیم. چون سرعت اولیه در هر دو حالت $v_۰=۰$ است.

با توجه به خط فکری بالا، شکل ساده‌ای از مسیر سقوط گلوله رسم می‌کنیم و معادلهٔ مکان - زمان را برای قسمت اول و کل مسیر می‌نویسیم:

$(I): h=\frac{۱}{۲}gt^۲$ $\quad$ $(II): \frac{h}{۹}=\frac{۱}{۲}g(t-۲)^۲$

حال دو معادلهٔ (I) و (II) را بر هم تقسیم کرده و $\frac{۱}{۲}g$ از صورت و مخرج ساده می‌شود:

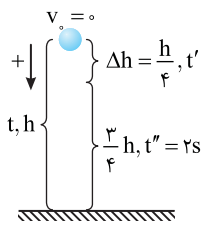


$\frac{h}{\frac{h}{۹}}=\frac{t^۲}{(t-۲)^۲} \Rightarrow ۹=\frac{t^۲}{(t-۲)^۲}$

$\Rightarrow ۳=\frac{t}{t-۲} \Rightarrow ۳t-۶=t \Rightarrow t=۳s$

۱ ۶۸۸ A

با توجه به فرض مسأله اگر ارتفاع سقوط h باشد گلوله $\frac{h}{۴}$ اول مسیر را در مدت t' و $\frac{۳}{۴}h$ بقیهٔ مسیر را در مدت $t''=۲s$ طی می‌کند. در حل این نوع مسائل همواره شما باید به کمک معادلهٔ مکان - زمان، زمان کل مسیر را با زمان قسمت ابتدایی مسیر مقایسه کنید.



$\Delta y=\frac{۱}{۲}gt^۲ \begin{cases} h=\frac{۱}{۲}gt^۲ \\ \frac{h}{۴}=\frac{۱}{۲}gt'^۲ \end{cases} \Rightarrow t'=\frac{t}{۲}\ ,\ t''=t-t' \Rightarrow t''=t-\frac{t}{۲} \Rightarrow ۲=\frac{t}{۲} \Rightarrow t=۴s$

اکنون h را به‌دست می‌آوریم.

$h=\frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow h=\frac{۱}{۲}\times۹/۸\times۱۶=۷۸/۴m$

در حل مسأله برای سادگی جهت رو به پایین مثبت اختیار شده است.

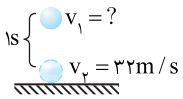
۲ ۶۸۹ A

نکته حرکت دارای شتاب $g=۱۰m/s^۲$ است یعنی تغییرات سرعت در هر ثانیه برابر $۱۰m/s$ است.

گلوله با سرعت $۳۲m/s$ به زمین رسیده است. اگر یک ثانیه قبل از آن سرعت گلوله را v فرض کنیم سرعت برخورد به زمین $v+۱۰$ خواهد شد. بنابراین:

$v+۱۰=۳۲ \Rightarrow v=۲۲m/s$

روش دیگر: یک ثانیهٔ آخر را یک حرکت مستقل فرض می‌کنیم. برای سادگی جهت مثبت رو به پایین اختیار شده است.



$v_۲=gt+v_۱ \Rightarrow ۳۲=۱۰\times۱+v_۱ \Rightarrow v_۱=۲۲m/s$

۱ ۶۹۰ B

کل زمان سقوط را حساب می‌کنیم. جهت مثبت را رو به پایین و محل رها شدن را مبدأ مختصات فرض می‌کنیم.

$y=\frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow ۱۲/۸=\frac{۱}{۲}\times۱۰\times t^۲ \Rightarrow t^۲=۲/۵۶ \Rightarrow t=۱/۶s$

$۰/۶s$ قبل از رسیدن به زمین، یعنی سنگ $۱s$ سقوط کرده است.

$\Delta y=\frac{۱}{۲}\times۱۰\times۱ \Rightarrow \Delta y=۵m$

در نتیجه در فاصلهٔ سنگ از زمین برابر است با:

$۱۲/۸-۵=۷/۸m$

بازی با سؤال **گلوله‌ای از ارتفاع ۸۰ متری سطح زمین رها می‌شود. این گلوله $۰/۶$ ثانیه قبل از رسیدن به سطح زمین در ارتفاع چند متری است؟ (مقاومت هوا ناچیز و $g=۱۰\frac{m}{s^۲}$)**

خارج ریاضی (نوبت دوم) - ۱۴۰۴

۱) ۲۲/۲ $\quad$ ۲) ۳۲/۸ $\quad$ ۳) ۵۷/۸ $\quad$ ۴) ۴۷/۲

پاسخ **جهت رو به بالا را مثبت می‌گیریم و محل پرتاب را مبدأ مکان فرض می‌کنیم. ابتدا زمان کل سقوط را به‌دست می‌آوریم.**

$y=-\frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow -۸۰=\frac{-۱}{۲}\times۱۰\times t^۲ \Rightarrow t=۴s$

$۰/۶s$ قبل از رسیدن به زمین، گلوله $۴-۰/۶=۳/۴s$ در حرکت بوده است.

$y=-\frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}\times۱۰\times(۳/۴)^۲ \Rightarrow y=-۵۷/۸m$

فاصله از زمین: $-۵۷/۸-(-۸۰)=۲۲/۲m$ گزینهٔ ۱

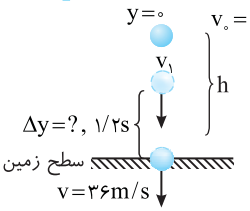
B ۶۹۱ ۳

جهت رو به پایین را مثبت می‌گیریم:

$v=gt+v_0 \Rightarrow ۳۶=۱۰(۱/۲)+v_1$

$\Rightarrow v_1=۲۴m/s$

اکنون به کمک فرمول طلایی (رابطهٔ مستقل از شتاب)، می‌توان نوشت:



$\Delta y=\frac{v+v_1}{۲}\times\Delta t \Rightarrow \Delta y=\frac{۳۶+۲۴}{۲}\times ۱/۲=۳۶m$

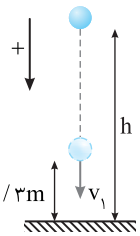
میانبر می‌توان سؤالاتی که سرعت انتهایی بازهٔ زمانی داده شده و سرعت ابتدایی را نداریم از رابطهٔ $\Delta y=\frac{-۱}{۲}gt^۲+v_{\text{انتهایی}}.t$ حل کنیم:

$\Delta y=-\frac{۱}{۲}\times ۱۰(۱/۲)^۲+۳۶(۱/۲) \Rightarrow \Delta y=-۷/۲+۴۳/۲=۳۶m$

بازی با سؤال گلوله‌ای بدون سرعت اولیه در شرایط خلأ سقوط می‌کند و در آخرین ثانیهٔ سقوط، ۳۴/۳ متر را طی می‌کند. این گلوله با سرعت چند متر بر ثانیه به زمین رسیده است؟ $(g=۹/۸m/s^۲)$

۱) ۷۸/۴ ۲) ۴۹ ۳) ۲۹/۴ ۴) ۳۹/۲

پاسخ **راه‌حل اول:** به کمک معادلهٔ مکان - زمان سرعت را در یک ثانیه قبل از برخورد به زمین (v_1) را به دست می‌آوریم:



$\Delta y=\frac{۱}{۲}gt^۲+v_1t \Rightarrow ۳۴/۳=\frac{۱}{۲}\times ۹/۸\times ۱+v_1\times ۱$

$\Rightarrow v_1=۲۹/۴m/s$

حال به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب، سرعت برخورد به زمین را به دست می‌آوریم:

$\Delta y=\frac{v_۲+v_1}{۲}\Delta t \Rightarrow ۳۴/۳=\frac{v_۲+۲۹/۴}{۲}\times ۱ \Rightarrow v_1=۳۹/۲m/s$

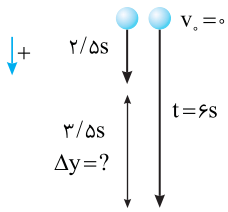
راه‌حل دوم: استفاده از فرمول جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام:

$\Delta y=\frac{۱}{۲}g(۲t-۱) \Rightarrow ۳۴/۳=\frac{۱}{۲}\times ۹/۸(۲t-۱) \Rightarrow t=۴s$

$v=gt+v_0 \Rightarrow v=۹/۸\times ۴+۰=۳۹/۲m/s$ گزینهٔ ۴

B ۶۹۲ ۴

۱ بازهٔ ۳/۵s آخر یعنی مدت زمان بین t=۲/۵s تا t=۶s . از این‌رو سرعت در لحظهٔ t=۲/۵s و t=۶s را به‌دست می‌آوریم.



$v=gt+v_0 \Rightarrow t_1=۲/۵s \Rightarrow v_1=۲۵m/s$

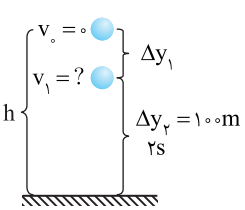
$\Rightarrow t_۲=۶s \Rightarrow v_۲=۶۰m/s$

۲ جابه‌جایی در مدت ۳/۵s آخر برابر خواهد شد با:

$\Delta y=\frac{v_۲+v_1}{۲}\Delta t \Rightarrow \Delta y=\frac{۶۰+۲۵}{۲}\times ۳/۵ \Rightarrow \Delta y=۱۴۸/۷۵m$

B ۶۹۳ ۱

در مسیر حرکت در مدت ۲s متحرک با شتاب ثابت $g=۱۰m/s^۲$ جابه‌جایی ۱۰۰ متر را طی کرده است به همین دلیل می‌توان نوشت:



$\Delta y=\frac{۱}{۲}gt^۲+v_1t \Rightarrow ۱۰۰=۵\times ۴+v_1\times ۲$

$\Rightarrow v_1=۴۰m/s$

فاصلهٔ محل رها شدن تا رسیدن به سرعت $۴۰m/s$ را حساب می‌کنیم:

$v_1^۲=۲g\Delta y_1 \Rightarrow ۱۶۰۰=۲۰\Delta y_1 \Rightarrow \Delta y_1=۸۰m$

ارتفاع کل سقوط h برابر مجموع Δy_1 و $\Delta y_۲$ است:

$h=\Delta y_1+\Delta y_۲ \Rightarrow h=۸۰+۱۰۰ \Rightarrow h=۱۸۰m$

میانبر در حرکت سقوط آزاد متحرک در ثانیه اول ۵ متر و در ثانیه دوم ۱۵ متر و ثانیه سوم ۲۵ متر و ... را طی می‌کند.

۵m	۱۵m	۲۵m	۳۵m	۱۰۰m: ۴۵m	۵۵m
ثانیه اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم

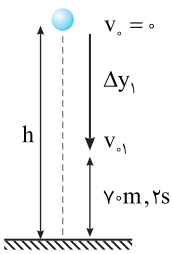
بنابراین h برابر است با: $h=۵+۱۵+۲۵+۳۵+۴۵+۵۵=۱۸۰m$

دقت کنید که از این میانبر تنها برای سؤالاتی می‌توان استفاده کرد که زمان سقوط گلوله عدد صحیح باشد نه عدد اعشاری.

بازی با سؤال گلولهٔ کوچکی از ارتفاع h بالای سطح زمین بدون سرعت اولیه رها می‌شود و ۷۰ متر آخر سقوط را در مدت ۲s می‌پیماید. ارتفاع h چند متر است؟ (مقاومت هوا ناچیز و $g=۱۰m/s^۲$ است.) کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۱۲۵ ۲) ۱۰۱/۲۵ ۳) ۱۶۰ ۴) ۱۵۰

پاسخ جهت مثبت را رو به پایین اختیار می‌کنیم. با توجه به شکل، $v_{۰۱}$ را به‌دست می‌آوریم:



$\Delta y=\frac{۱}{۲}gt^۲+v_{۰۱}t \Rightarrow ۷۰=\frac{۱}{۲}\times ۱۰\times ۴+v_{۰۱}\times ۲$

$\Rightarrow v_{۰۱}=۲۵m/s$

حال Δy_1 را حساب می‌کنیم:

$v_{۰۱}^۲-v_0^۲=۲g\Delta y_1 \Rightarrow ۶۲۵-۰=۲۰\Delta y_1 \Rightarrow \Delta y_1=۳۱/۲۵m$

$h=۷۰+۳۱/۲۵=۱۰۱/۲۵m$

تذکر: آیا این تست از روش اول تست قبلی حل می‌شود؟ قطعاً خیر، بنابراین روش‌های اصلی حل کردن را فرا بگیرید. گزینهٔ ۲

A ۶۹۴ ۱

حالت اول: گلوله در شرایط خلأ از ارتفاع h رها شده است.

الف) با توجه به معادلهٔ مکان - زمان، t را به‌دست می‌آوریم:

$y=\frac{۱}{۲}gt^۲+v_0t \Rightarrow h=\frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow t=\sqrt{\frac{۲h}{g}}$

ب) با توجه به معادلهٔ مستقل از زمان سرعت رسیدن به زمین را حساب می‌کنیم:

$v^۲-v_0^۲=۲gy \Rightarrow v^۲=۲gh \Rightarrow v=\sqrt{۲gh}$

حالت دوم: حال اگر جسم از ارتفاع ۴h رها شده باشد:

الف) با توجه به معادلهٔ مکان - زمان داریم:

$۴h=\frac{۱}{۲}gt'^۲ \Rightarrow t'^۲=\frac{۸h}{g} \Rightarrow t'=\sqrt{\frac{۸h}{g}}=۲\sqrt{\frac{۲h}{g}}$

ب) با توجه به معادلهٔ مستقل از زمان داریم:

$v'^۲=۲g(۴h) \Rightarrow v'^۲=۸gh \Rightarrow v'=\sqrt{۸gh}=۲\sqrt{۲gh}$

بنابراین t'، دو برابر t و v' دو برابر v است.

با توجه به رابطهٔ زمان سقوط $\left(t=\sqrt{\frac{۲h}{g}}\right)$، زمان سقوط h با جذر ارتفاع نسبت مستقیم دارد. همچنین سرعت رسیدن به زمین با جذر ارتفاع $(v=\sqrt{۲gh})$ رابطهٔ مستقیم دارد:

$v_{\text{رسیدن به زمین}} \propto \sqrt{h}$ $\quad$ $t_{\text{رسیدن به زمین}} \propto \sqrt{h}$

A ۶۹۵ ۲

۱ جهت رو به پایین را برای سادگی مثبت درنظر می‌گیریم، زمان سقوط را به‌دست می‌آوریم.

$\Delta y=\frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow ۱۲۲/۵=\frac{۱}{۲}\times ۹/۸t^۲ \Rightarrow ۱۲۲/۵=۴/۹t^۲ \Rightarrow t^۲=۲۵ \Rightarrow t=۵s$

یادآوری سرعت متوسط برابر $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ است.

۲ سرعت متوسط خواهد شد:

$v_{av}=\frac{\Delta y}{\Delta t} \Rightarrow v_{av}=\frac{۱۲۲/۵}{۵}=۲۴/۵m/s$

A ۶۹۶ ۳

خط فکری دقت کنید: نیم ثانیهٔ اول: بازهٔ ۰ تا ۰/۵s
نیم ثانیهٔ دوم: بازهٔ ۰/۵s تا ۱s
نیم ثانیهٔ سوم: بازهٔ ۱s تا ۱/۵s

تندی متوسط در حرکت با شتاب ثابت که در آن متحرک تغییر جهت نمی‌دهد، برابر سرعت متوسط است. از طرفی در یک بازهٔ زمانی سرعت متوسط برابر $v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}$ است. بنابراین سرعت در $t=1s$ و $t=1/5s$ را حساب کرده و سرعت (تندی) متوسط را حساب می‌کنیم.

سرعت در لحظهٔ $t=1s$:

$$v=gt\Rightarrow v_1=9/8\times 1=9/8m/s$$

سرعت در لحظهٔ $t=1/5s$:

$$v=gt\Rightarrow v_2=9/8\times 1/5=14/7m/s$$

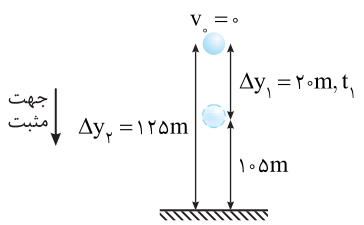
تندی متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{9/8+14/7}{2}=\frac{14/5}{2}\Rightarrow v_{av}=12/25m/s$$

B ۶۹۷ ۳

۱ زمان حرکت در $105m$ آخر را به‌دست می‌آوریم، برای این کار چون سرعت v_0 داده شده باید زمان سقوط Δy_1 و زمان کل سقوط را ابتدا به‌دست آوریم:

$$\Delta y_1=\frac{1}{2}gt_1^2\Rightarrow 20=5t_1^2\Rightarrow t_1=2s\quad,\quad \Delta y_2=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow 125=5t^2\Rightarrow t=5s$$

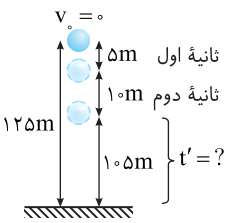


۲ بنابراین مدت زمان طی مسافت $105m$ آخر مسیر برابر $5-2=3s$ است.

۳ سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{105}{3}=35m/s$$

میانبر با توجه به روش دنبالهٔ حسابی جسم در ثانیهٔ اول حرکت $5m$ و در ثانیهٔ دوم آن $15m$ سقوط می‌کند بنابراین از ارتفاع $125m$ در مدت دو ثانیهٔ اول $20m$ و مابقی زمان یعنی $t-2$ ثانیه ارتفاع $125-20=105m$ را طی می‌کند:



$$\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow -125=-5t^2\Rightarrow t=5s$$

۱۰۵ متر آخر مسیر را در مدت $t'=t-2=3s$ طی کرده، بنابراین:

$$v_{av}=\frac{105}{3}=35m/s$$

B ۶۹۸ ۳

راه‌حل اول: زمان سقوط گلوله را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow 44/1=\frac{1}{2}\times 9/8t^2\Rightarrow t^2=9\Rightarrow t=3s$$

بنابراین ثانیهٔ آخر، بازهٔ زمانی بین $t_1=2s$ تا $t_2=3s$ است. سرعت را در لحظه‌های $t_1=2s$ و $t_2=3s$ به‌دست می‌آوریم:

$$v=gt\Rightarrow\begin{cases}t_1=2s\Rightarrow v_1=9/8\times 2=19/6m/s\\ t_2=3s\Rightarrow v_2=9/8\times 3=29/4m/s\end{cases}$$

سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت برابر است با:

$$v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}=\frac{19/6+29/4}{2}\Rightarrow v_{av}=24/5m/s$$

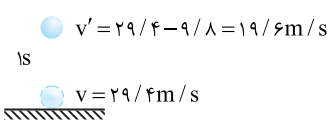
(در حل این پرسش جهت رو به پایین مثبت اختیار شده است.)

راه‌حل دوم: سرعت هنگام رسیدن به زمین را حساب می‌کنیم:

$$v^2-0^2=2gh\Rightarrow v^2=2\times 9/8\times 44/1\xrightarrow{44/1=9/8\times 4/5}$$

$$v^2=2\times 9/8\times 9/8\times 4/5\Rightarrow v^2=(9/8)^2(3)^2\Rightarrow v=29/4m/s$$

در سقوط آزاد در هر ثانیه به سرعت جسم به اندازهٔ g اضافه می‌شود. بنابراین $1s$ قبل از برخورد گلوله به زمین سرعت گلوله خواهد شد:



$$v=29/4-9/8=19/6m/s\Rightarrow v=29/4m/s$$

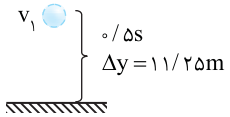
سرعت متوسط را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{v+v'}{2}=\frac{49}{2}=24/5m/s$$

بازی با سوال گلوله‌ای در شرایط خلأ از ارتفاع h رها می‌شود و پس از t ثانیه به زمین می‌رسد. اگر تندی متوسط آن در نیم ثانیهٔ آخر سقوطش برابر $22/5$ متر بر ثانیه باشد، t چند ثانیه است؟ $(g=10m/s^2)$

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۲/۲۵

پاسخ برای سادگی جهت مثبت را رو به پایین اختیار می‌کنیم. تندی متوسط در نیم ثانیهٔ آخر سقوط $22/5m$ است. بنابراین جابه‌جایی در نیم ثانیه آخرحرکت برابر است با:



$$v_{av}=\frac{\Delta y}{\Delta t}\Rightarrow \Delta y=22/5\times 0/5$$
$$\Rightarrow \Delta y=11/25m$$

سرعت گلوله در ابتدای این قسمت مسیر (v_1) را از معادلهٔ جابه‌جایی - زمان به دست می‌آوریم.

$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2+v_1t\Rightarrow 11/25=5\times 0/25+v_1\times 0/5\Rightarrow v_1=20m/s$$

زمان رسیدن گلوله به سرعت $20m/s$ را حساب می‌کنیم.

$$v=gt\Rightarrow 20=10t_1\Rightarrow t_1=2s$$

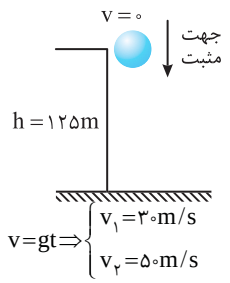
زمان کل سقوط برابر است با:

$$t=2+0/5=2/5s$$

گزینهٔ ۲

B ۶۹۹ ۳

ابتدا زمان کل سقوط را به‌دست می‌آوریم.



$$h=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow 125=\frac{1}{2}\times 10t^2\Rightarrow t=5s$$

سرعت را در دو ثانیهٔ آخر، یعنی بازهٔ زمانی بین $t_1=3s$ و $t_2=5s$، به‌دست می‌آوریم.

سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}=\frac{30+50}{2}\Rightarrow v_{av}=40m/s$$

A ۷۰۰ ۳

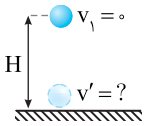
متحرک از حال سکون رها شده و حرکت شتابدار با شتاب ثابت $g=9/8m/s^2$ است. سرعت متوسط در جابه‌جایی $\frac{H}{9}$ برابر $4/9m/s$ است. سرعت متوسط در حرکت شتاب ثابت برابر میانگین سرعت اولیه و نهایی است:

$$v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}\Rightarrow 4/9=\frac{0+v_2}{2}\Rightarrow v_2=9/8m/s$$

$$\Delta y=\frac{H}{9}\quad,\quad g=9/8m/s^2\quad,\quad v_1=0\quad,\quad v_2=9/8m/s$$

$$v_2^2-v_1^2=2g\Delta y\Rightarrow (9/8)^2=2\times 9/8\times\frac{H}{9}\Rightarrow H=4/9\times 9$$

خواستهٔ مسئله تندی هنگام رسیدن به زمین است، یعنی در مدتی که متحرک به اندازهٔ H جابه‌جا شده است:



$$v'^2_2-v^2_1=2gH\Rightarrow v'^2-0=2\times9/8\times4/9\times9$$
$$v'^2=2\times2\times4/9\times4/9\times9\Rightarrow v'=2\times4/9\times3$$
$$\Rightarrow v'=29/4\,m/s$$

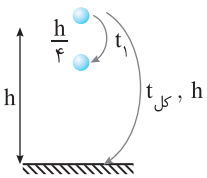
روش دیگر: هر دو معادلهٔ مستقل از زمان بالا را با هم می‌نویسیم:

$$\begin{cases} v^2_2-v^2_0=2g\frac{H}{9}\Rightarrow v^2_2=2g\frac{H}{9} \\ v'^2-v^2_0=2gH\Rightarrow v'^2=2gH \end{cases}\Rightarrow \frac{v^2_2}{v'^2}=\frac{1}{9}\Rightarrow v'=3v_2$$

حال با توجه به اینکه v_2 برابر $9/8\,m/s$ است. v' را حساب می‌کنیم.

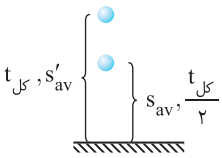
B ۳ ۷۰۱

ابتدا مدت بازهٔ زمانی سقوط در جابه‌جایی h و $\frac{3h}{4}$ پایانی مسیر را به‌دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} \frac{h}{4}=\frac{1}{2}gt^2_1 \\ h=\frac{1}{2}gt^2_{کل} \end{cases}\xrightarrow{\div}\frac{1}{4}=\frac{t^2_1}{t^2_{کل}}\Rightarrow t_1=\frac{t_{کل}}{2}$$

بنابراین $\frac{h}{4}$ اول مسیر در مدت نصف زمان کل سقوط و $\frac{3h}{4}$ دیگر مسیر نیز در مدت نصف دیگر طی خواهد شد:

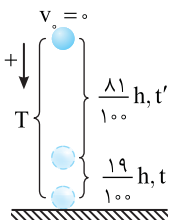


$$s_{av}=\frac{\frac{3h}{4}}{\frac{t_{کل}}{2}}\xrightarrow{s_{av}=15}15=\frac{3h}{2t_{کل}}\Rightarrow\frac{h}{t_{کل}}=10\frac{m}{s}$$

$$s'_{av}=\frac{h}{t_{کل}}=10\frac{m}{s}$$

B ۱ ۷۰۲

خط فکری جهت مثبت را برای سادگی محاسبات رو به پایین درنظر می‌گیریم. ارتفاع کل را h درنظر می‌گیریم و با توجه به سؤال متحرک در مدت t، جابه‌جایی $\frac{19}{100}h$ آخر مسیر را طی کرده است. حال زمان کل مسیر را با قسمت اول مسیر مقایسه می‌کنیم.



۱ اگر کل زمان سقوط T باشد، زمان لازم برای اینکه گلوله $\frac{81}{100}h$ سقوط کند $t'=T-t$ است. حال به کمک معادلهٔ مکان - زمان برای قسمت اول و کل مسیر داریم:

$$\frac{81}{100}h=\frac{1}{2}gt'^2\quad (I)$$

$$h=\frac{1}{2}gT^2\quad (II)$$

۲ دو معادله را بر هم تقسیم می‌کنیم:

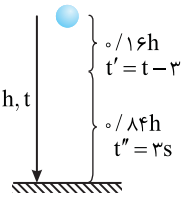
$$\frac{\frac{1}{2}gt'^2}{\frac{1}{2}gT^2}=\frac{\frac{81}{100}h}{h}\Rightarrow\left(\frac{t'}{T}\right)^2=\frac{81}{100}\Rightarrow\frac{t'}{T}=\frac{9}{10}\Rightarrow\frac{T-t}{T}=\frac{9}{10}\Rightarrow10T-10t=9T$$

$$\Rightarrow T=10t\Rightarrow t=0/1T$$

۳ بنابراین t، $\frac{1}{10}$ کل زمان (T) است و ۱۰٪ کل زمان می‌شود.

B ۳ ۷۰۳

جهت مثبت را رو به پایین در نظر می‌گیریم. با توجه به سؤال اگر ارتفاع رها شدن گلوله از سطح زمین را h درنظر بگیریم، ۸۴ درصد پایانی مسیر را در ۳s طی کرده است. زمان قسمت اول مسیر $0/16h$ را با زمان کل مسیر مقایسه می‌کنیم.



$$0/16h=\frac{1}{2}g(t-3)^2, h=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow0/16=\frac{(t-3)^2}{t^2}$$

$$\Rightarrow0/4=\frac{t-3}{t}\Rightarrow0/4t=t-3\Rightarrow t=5s$$

بنابراین زمان کل سقوط 5s است، اکنون h را به‌دست می‌آوریم:

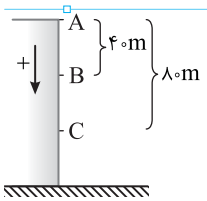
$$h=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow h=5\times25=125m$$

سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{125}{5}=25m/s$$

A ۲ ۷۰۴

خط فکری جهت رو به پایین را برای سادگی در عددگذاری در روابط، مثبت می‌گیریم، چون در سؤال جابه‌جایی‌ها داده و سرعت خواسته شده برای حل از معادلهٔ مستقل از زمان کمک می‌گیریم.



۱ از A تا B گلوله ۴۰ متر جابه‌جا شده و سرعت اولیه آن در A صفر است:

$$v^2_B=2g\Delta y_{AB}\Rightarrow v^2_B=2\times10\times40\Rightarrow v_B=20\sqrt{2}m/s$$

۲ از A تا C گلوله ۸۰ متر جابه‌جا شده و سرعت اولیهٔ آن در A صفر است:

$$v^2_C=2g\Delta y_{AC}\Rightarrow v^2_C=2\times10\times80\Rightarrow v_C=40m/s$$

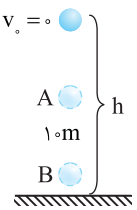
۳ نسبت سرعت در مکان B و C را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{v_B}{v_C}=\frac{20\sqrt{2}}{40}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

B ۳ ۷۰۵

جهت مثبت را برای سادگی رو به پایین اختیار می‌کنیم. گلوله پس از 3s به A رسیده است. بنابراین سرعت آن در نقطهٔ A برابر است با:

$$v=gt\Rightarrow v_A=10\times3\Rightarrow v_A=30m/s$$



مدت زمان طی مسیر A تا B خواسته شده و چون تنها سرعت A داده شده پس استفاده از معادلهٔ $\Delta y_{AB}=\frac{1}{2}gt^2+v_{اولیه}t$

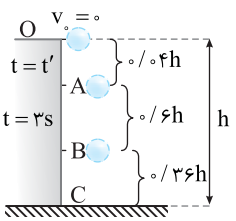
سؤال را حل می‌کنیم، دقت کنید که سرعت اولیه در بازهٔ حرکت A تا B، سرعت در نقطهٔ A یعنی $30m/s$ است:

$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2+v_0t\Rightarrow10=5t^2+30t\Rightarrow t^2+6t-2=0\Rightarrow t=\frac{-6\pm\sqrt{36+8}}{2}$$

$$\Rightarrow t=\frac{-6+\sqrt{44}}{2}\approx\frac{-6+6/7}{2}=0/35s$$

B ۱ ۷۰۶

۱ برای سادگی جهت مثبت را رو به پایین درنظر می‌گیریم:



با توجه به شکل معادلهٔ مکان - زمان را برای از O تا A و از O تا B می‌نویسیم:

$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow0/04h=5t'^2$$

$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow0/64h=5(t'+3)^2$$

۲ دو معادله را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{4}{64}=\frac{t'^2}{(t'+3)^2}\Rightarrow\frac{t'}{t'+3}=\frac{1}{4}\Rightarrow t'=1s$$

۳ با جای‌گذاری t'، h را به دست می‌آوریم:

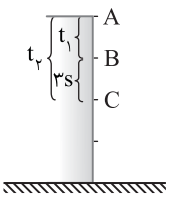
$$OA=\frac{1}{2}gt'^2\Rightarrow0/04h=5(1)^2\Rightarrow h=125m$$

۴ ارتفاع سقوط جسم از O تا C برابر ۱۲۵m و سرعت اولیهٔ آن در O صفر است. پس زمان کل حرکت را به دست می‌آوریم: $\Delta y=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow 125=5t^2\Rightarrow t_{کل}=5s$

۵ زمان رسیدن از O تا B برابر $t'+3$ یعنی $1+3=4s$ است. زمان کل سقوط O تا C نیز برابر 5s است. پس: $t_{BC}=t_{OC}-t_{OB}\Rightarrow t_{BC}=5-4=1s$

B ۷۰۷ ۳

خط فکری چون تنها سرعت در نقطهٔ A را داشته که برابر صفر بوده پس بهتر است معادلهٔ مکان - زمان برای مسیر AB و AC نوشته شود.



۱ مدت زمانی که گلوله از A به B می‌رسد برابر است با:

$$\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow -\frac{h}{4}=-\frac{1}{2}gt_1^2\Rightarrow\frac{h}{20}=t_1^2$$
$$\Rightarrow t_1=\sqrt{\frac{h}{20}}\quad (1)$$

۲ مدت زمانی که گلوله از A به C می‌رسد برابر است با:

$$\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow -\frac{h}{2}=-\frac{1}{2}gt_2^2\Rightarrow\frac{h}{10}=t_2^2\Rightarrow t_2=\sqrt{\frac{h}{10}}\quad (2)$$

۳ دو معادله را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{\sqrt{\frac{h}{10}}}{\sqrt{\frac{h}{20}}}\Rightarrow\frac{t_2}{t_1}=\sqrt{2}\Rightarrow t_2=1/4t_1$$

۴ مدت زمانی که گلوله از B به C می‌رسد برابر $t_{BC}=t_2-t_1=0/4t_1$ است.

۵ با توجه به فرض مسأله:

$$t_{AB}-t_{BC}=3s\Rightarrow t_1-0/4t_1=3s\Rightarrow 0/6t_1=3s\Rightarrow t_1=5s$$

۶ با جای‌گذاری $t_1=5s$ در معادلهٔ (۱) داریم:

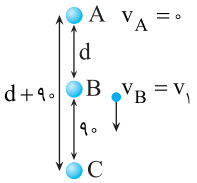
$$t_1=\sqrt{\frac{h}{20}}\Rightarrow 5=\sqrt{\frac{h}{20}}\Rightarrow 25=\frac{h}{20}\Rightarrow h=500m$$

B ۷۰۸ ۳

۱ سرعت گلوله در لحظهٔ گذر از نقطهٔ B را v_1 فرض می‌کنیم. گلوله فاصلهٔ ۹۰ متر BC را در مدت 3s طی کرده، بنابراین:

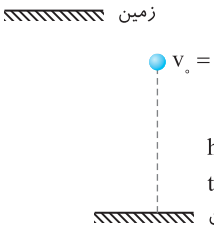
$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2+v_1t\Rightarrow 90=\frac{1}{2}\times 10\times 9+v_1\times 3\Rightarrow v_1=15m/s$$

۲ فاصلهٔ A تا B را به کمک رابطهٔ مستقل از زمان حساب می‌کنیم.



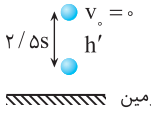
$$v_B^2-v_A^2=2g\Delta y$$
$$225=20\Delta y\Rightarrow\Delta y=11/25m$$

۳ مدت زمان سقوط و رسیدن به زمین را حساب می‌کنیم:



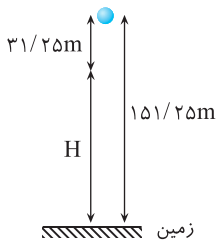
$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow 151/25=5t^2\Rightarrow t^2=30/25\Rightarrow t=5/5s$$

۴ بنابراین 3s قبل از رسیدن به زمین یعنی گلوله به مدت $5/5-3=2/5s$ در حال سقوط بوده:



$$\Delta g=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow h'=5(2/5)^2=31/25m$$

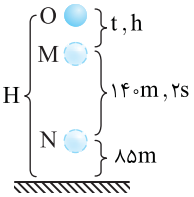
۵ فاصلهٔ گلوله از سطح زمین خواسته شده است:



$$H=151/25-31/25=120m$$

C ۷۰۹ ۴

جهت مثبت را برای سادگی رو به پایین اختیار می‌کنیم.



۱ به کمک معادله مکان، مدت سقوط از O تا M را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow h=\frac{1}{2}gt^2$$

۲ از O تا N، ۲ ثانیه بیشتر از t طول می‌کشد و گلوله به اندازهٔ $h+140$ متر سقوط می‌کند.

$$h+140=\frac{1}{2}g(t+2)^2$$

۳ اگر دو معادله را از هم کم کنیم داریم:

$$140=\frac{1}{2}g((t+2)^2-t^2)\Rightarrow 140=5((t+2-t)(t+2+t))$$
$$\Rightarrow 140=5(2(2t+2))\Rightarrow 2t+2=14\Rightarrow t=6s$$

۴ با جای‌گذاری $t=6s$ در یکی از معادلات h را به‌دست می‌آوریم:

$$h=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow h=5\times 36\Rightarrow h=180m$$

۵ با توجه به اطلاعات روی شکل $H=180+140+85=405m$ است. با توجه به H زمان کل سقوط را حساب می‌کنیم.

$$H=\frac{1}{2}gt_{کل}\Rightarrow 405=5t_{کل}^2\Rightarrow t_{کل}^2=81\Rightarrow t_{کل}=9s$$

۶ سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{405}{9}\Rightarrow v_{av}=45m/s$$

B ۷۱۰ ۳

جهت مثبت را برای سادگی رو به پایین اختیار می‌کنیم.

یادآوری حرکت سقوط آزاد یک حرکت با شتاب ثابت است و سرعت متوسط در هر بازه برابر است با: $v_{av}=\frac{v_2+v_1}{2}$

از طرفی اگر مدت حرکت از A تا B و از B تا C برابر t باشد خواهیم داشت.

$$v=at+v_0\Rightarrow\begin{cases}v_B=10t+v_A\\ v_C=10\times(2t)+v_A\Rightarrow v_C=20t+v_A\end{cases}$$

حال با توجه به رابطهٔ سرعت متوسط خواهیم داشت:

$$\begin{cases}v_{av_{AB}}=\frac{v_A+v_B}{2}\Rightarrow 16=\frac{v_A+v_B}{2}\Rightarrow v_A+v_A+10t=32\\ v_{av_{BC}}=\frac{v_B+v_C}{2}\Rightarrow 24=\frac{v_A+10t+v_A+20t}{2}\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}2v_A+10t=32\quad (1)\\ 2v_A+30t=48\quad (2)\end{cases}$$

برای حل دو معادلهٔ (۱) و (۲) دستگاه می‌نویسیم:

$$\begin{cases}2v_A+10t=32\\ 2v_A+30t=48\end{cases}\Rightarrow 20t=16\Rightarrow t=0/8s$$

$t=0/8s$ را در رابطهٔ (۱) جای‌گذاری می‌کنیم:

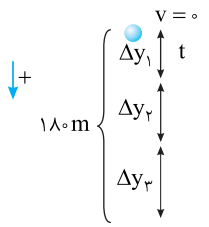
$$2v_A+10\times 0/8=32\Rightarrow v_A=12m/s$$

B ۷۱۱ ۴

ابتدا زمان کل سقوط را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow -۱۸۰=-\frac{1}{2}\times ۱۰t^2\Rightarrow t=۶s$$

بنا به فرض مسئله ۶s به سه بازهٔ زمانی یکسان تقسیم شده، بنابراین هر بازهٔ زمانی $t=\frac{۶}{۳}=۲s$ می‌باشد. در لحظه‌های $t=۲s$ ، $t=۴s$ و $t=۶s$ مکان گلوله را به‌دست می‌آوریم:



$$y=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow\begin{cases}t=۲s\Rightarrow y_۱=۵\times ۴=۲۰m\Rightarrow \Delta y_۱=۲۰m\\ t=۴s\Rightarrow y_۲=۵\times ۱۶=۸۰m\Rightarrow \Delta y_۲=۸۰-۲۰=۶۰m\\ t=۶s\Rightarrow y_۳=۵\times ۳۶=۱۸۰m\Rightarrow \Delta y_۳=۱۸۰-۸۰=۱۰۰m\end{cases}$$

B ۷۱۲ ۳

۱ ابتدا زمان کل سقوط گلوله را به‌دست می‌آوریم (برای سادگی جهت مثبت را رو به پایین درنظر می‌گیریم.)

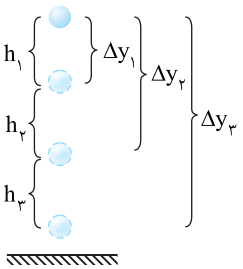
$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow ۳۶۰=۵t^2\Rightarrow t^2=۷۲\Rightarrow t=۶\sqrt{۲}s$$

۲ این زمان به سه بازهٔ $۲\sqrt{۲}s$ تقسیم شده است.

$$\Delta t_۱+\Delta t_۲+\Delta t_۳=t\xrightarrow[t=۶\sqrt{۲}s]{\Delta t_۱=\Delta t_۲=\Delta t_۳}۳\Delta t_۱=۶\sqrt{۲}s\Rightarrow \Delta t_۱=۲\sqrt{۲}s$$

بنابراین بازه‌های زمانی برابر است با: صفر تا $۲\sqrt{۲}$ ، $۲\sqrt{۲}$ تا $۴\sqrt{۲}$ و $۴\sqrt{۲}$ تا $۶\sqrt{۲}$.

۳ جابه‌جایی از صفر تا $۲\sqrt{۲}$ را به‌دست می‌آوریم: $\Delta y_۱=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow \Delta y_۱=۴۰m$



با همین بازه مشخص است که پاسخ گزینهٔ (۳) می‌شود زیرا تنها گزینه‌ای که $\Delta y_۱$ در آن ۴۰m گزینهٔ (۳) است.

جابه‌جایی از صفر تا $۴\sqrt{۲}$ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta y_۲=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow \Delta y_۲=۱۶۰m$$

جابه‌جایی از صفر تا $۶\sqrt{۲}$ را حساب می‌کنیم: $\Delta y_۳=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow \Delta y_۳=۳۶۰m$

جابه‌جایی در بازهٔ زمانی دوم $(h_۲)$ برابر است با:

$$h_۲=\Delta y_۲-\Delta y_۱\Rightarrow h_۲=۱۶۰-۴۰=۱۲۰m$$

جابه‌جایی در بازهٔ زمانی دوم $(h_۲)$ برابر است با:

$$h_۳=\Delta y_۳-\Delta y_۲\Rightarrow h_۳=۳۶۰-۱۶۰=۲۰۰m$$

میانبر در حرکت با شتاب ثابت در بازه‌های زمانی یکسان جابه‌جایی در بازهٔ وسط الزاماً واسطهٔ حسابی بین دو بازهٔ دیگر است. به‌طور مثال اگر در بازه‌های زمانی t، جابه‌جایی‌ها $x_۱$ ، $x_۲$ و $x_۳$ باشد: $x_۲=\frac{x_۳+x_۱}{۲}$

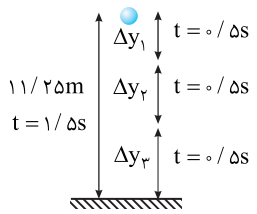
که گزینه‌های (۱) و (۲) اینگونه حذف می‌شوند و از طرفی جابه‌جایی در T ثانیهٔ دوم به اندازهٔ aT^2 بیشتر از T ثانیهٔ قبل است. در این سؤال T برابر $۲\sqrt{۲}s$ و شتاب برابر ۱۰ است. پس aT^2 برابر ۸۰m است که این اختلاف بین جابه‌جایی‌های گزینهٔ (۳) برقرار است.

بازی با سؤال **گلوله‌ای از ارتفاع ۱۱/۲۵ متری زمین در شرایط خلأ رها می‌شود. اگر مدت حرکت را به ۳ بازهٔ زمانی یکسان تقسیم کنیم، مسافت‌های طی شده در این بازه‌های زمانی چند متر است؟** $(g=۱۰m/s^2)$

۱) ۲/۲۵ ، ۳/۷۵ ، ۵/۲۵ ۲) ۱/۲۵ ، ۳/۷۵ ، ۶/۲۵

۳) ۱ ، ۴ ، ۶/۲۵ ۴) ۱/۵ ، ۳/۵ ، ۶/۲۵

پاسخ ابتدا زمان کل حرکت را به‌دست می‌آوریم:



$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow ۱۱/۲۵=\frac{1}{2}\times ۱۰t^2$$

$$\Rightarrow t^2=۲/۲۵\Rightarrow t=۱/۵s$$

که بازهٔ زمانی $\frac{۱/۵}{۳}=۰/۵s$ را باید بررسی کنیم:

$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow \Delta y_۱=\frac{1}{2}\times ۱۰(۰/۵)^2=۱/۲۵m$$

برای ۰/۵s دوم باید مکان را در لحظه‌های ۰/۵s و ۱s به‌دست آورد و از هم کم کرد.

$$\Delta y_۲=\frac{1}{2}\times ۱۰(۱)^2-\frac{1}{2}\times ۱۰(۰/۵)^2=۳/۷۵m$$

برای ۰/۵s سوم باید مکان را در لحظهٔ ۱/۵s و ۱s به‌دست آورد و از هم کم کرد.

$$\Delta y_۳=\frac{1}{2}\times ۱۰(۱/۵)^2-\frac{1}{2}\times ۱۰(۱)^2=۶/۲۵m$$

گزینهٔ ۲

B ۷۱۳ ۳

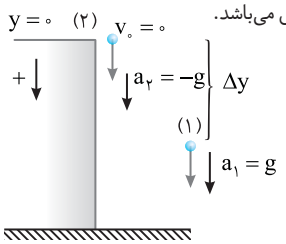
راه‌حل اول: معادلهٔ مکان- زمان دو گلوله را نوشته از هم کم می‌کنیم. گلولهٔ دوم t ثانیه بعد از گلولهٔ اول رها شده است.

$$y_۱-y_۲=\frac{1}{2}gt_۱^2-\frac{1}{2}gt_۲^2\Rightarrow y_۱-y_۲=\frac{1}{2}g[t_۱^2-(t_۱-t)^2]$$

$$\Rightarrow \Delta y=y_۱-y_۲=\frac{1}{2}g(t_۱^2-t_۱^2+۲t_۱t-t^2)=\frac{1}{2}g(۲t_۱t-t^2)$$

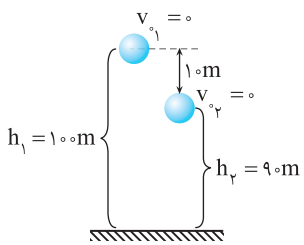
در رابطهٔ بالا t اختلاف زمانی رهاشدن دو گلوله، مقدار ثابتی است. با گذشت زمان و زیاد شدن $t_۱$ ، فاصلهٔ دو گلوله در حال افزایش می‌باشد.

راه‌حل دوم: گلولهٔ اول رها شده بعد از مدتی گلولهٔ دوم رها می‌شود. بنابراین سرعت گلولهٔ اول در هر لحظه از سرعت گلولهٔ دوم بیشتر است و با گذشت زمان فاصلهٔ هر دو گلوله افزایش می‌یابد.



C ۷۱۴ ۴

در لحظه‌ای که گلولهٔ دوم رها می‌شود گلولهٔ اول یک ثانیه در حرکت بوده و سرعت آن و جابه‌جایی آن خواهد شد:



$$v=gt\Rightarrow v=۱۰\times ۱=۱۰\frac{m}{s}$$

$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow \Delta y=\frac{1}{2}\times ۱۰\times (۱)^2=۵m$$

بنابراین در لحظهٔ رها شدن گلولهٔ دوم، سرعت گلولهٔ اول $۱۰\frac{m}{s}$ و فاصله‌اش از گلولهٔ دوم $۱۰-۵=۵m$ است. در نتیجه گلولهٔ اول که دارای سرعت بیشتری است، ابتدا به گلولهٔ دوم نزدیک شده و سپس از آن دور می‌شود.

B ۷۱۵ ۱

جهت رو به پایین را مثبت در نظر می‌گیریم و محل رها شدن را مبدأ فرض می‌کنیم. زمان حرکت گلولهٔ دوم همواره ۱s از گلولهٔ اول کمتر است. $(t_۱=t\,,t_۲=t-۱)$ برای به‌دست آوردن فاصلهٔ دو گلوله، معادلهٔ مکان - زمان دو گلوله را از هم کم می‌کنیم.

$$\Delta h=h_۱-h_۲=\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}g(t-۱)^2$$

$$\Delta h=۵t^2-(۵t^2-۱۰t+۵)\Rightarrow \Delta h=۱۰t-۵$$

در $t=۱s$ ، $\Delta h=۵m$ و در $t=۲s$ ، $\Delta h=۱۵m$ و در $t=۳s$ ، $\Delta h=۲۵m$ و ...

بنابراین در هر ثانیه فاصلهٔ دو گلوله ۱۰ متر افزایش می‌یابد.

B ۷۱۶ ۱

۱ مدت زمانی که طول می‌کشد گلولهٔ A به زمین برسد را با استفاده از معادلهٔ مکان - زمان به‌دست می‌آوریم: $\Delta y_A=-\frac{1}{2}gt_A^2\Rightarrow -۱۲۵=-۵t_A^2\Rightarrow t_A=۵s$

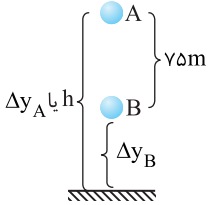
۲ زمانی که طول می‌کشد گلولهٔ B به زمین برسد برابر است با:

$$\Delta y_B=-\frac{1}{2}gt_B^2\Rightarrow -۴۵=-۵t_B^2\Rightarrow t_B=۳s$$

۳ گلولهٔ B، ۳s زمان نیاز دارد تا به زمین برسد در حالی که گلولهٔ A، ۵s زمان نیاز دارد. بنابراین اگر گلولهٔ B با اختلاف زمانی بیشتر از $۵-۳=۲s$ $(t>۲s)$ رها شود A زودتر به زمین می‌رسد.

A ۷۱۷ ۲

۱ جهت مثبت را برای راحتی رو به پایین درنظر می‌گیریم. با توجه به معادلهٔ مکان - زمان برای دو گلوله داریم:



$$\Delta y_A=\frac{1}{2}gt_A^2=۵t_A^2\ ,\ \Delta y_B=\frac{1}{2}gt_B^2=۵t_B^2$$

۲ با توجه به فرض مسأله $t_B=t_A-۳$ و $\Delta y_A-\Delta y_B=۷۵m$ بنابراین دو معادلهٔ بالا را از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{cases}\Delta y_A=۵t_A^2\\ \Delta y_B=۵(t_A-۳)^2\end{cases}\xrightarrow{\Delta y_A-\Delta y_B=۷۵}\Delta y_A-\Delta y_B=۵t_A^2-۵(t_A-۳)^2$$

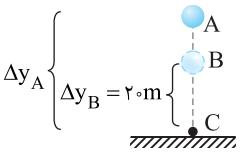
$$\Rightarrow ۵t_A^2-۵(t_A-۳)^2=۷۵\Rightarrow ۵t_A^2-۵(t_A^2-۶t_A+۹)=۷۵$$

$$\Rightarrow ۵t_A^2-۵t_A^2+۳۰t_A-۴۵=۷۵\Rightarrow t_A=۴s$$

۳ اکنون h را به‌دست می‌آوریم. $h=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow h=۵\times ۴^2\Rightarrow h=۸۰m$

B ۷۱۸ ۲

با توجه به شکل، گلولهٔ دوم پس از $BC=۲۰m$ سقوط به زمین می‌رسد. جهت مثبت را رو به پایین اختیار می‌کنیم.



زمان سقوط گلولهٔ دوم

$$y_B=\frac{1}{2}gt_B^2\Rightarrow ۲۰=\frac{1}{2}\times ۱۰t_B^2\Rightarrow t_B=۲s$$

زمان سقوط گلولهٔ A، ۱s بیشتر بوده پس زمان سقوط A برابر است با:

$$t_A=t_B+۱=۳s$$

با توجه به اینکه t_A برابر ۳s است، جابه‌جایی Δy_A را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow y_A=\frac{1}{2}\times ۱۰\times ۳^2=۴۵m$$

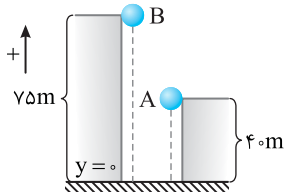
y_B برابر ۲۰m و y_A برابر ۴۵ متر است:

$$AB=y_A-y_B\Rightarrow AB=۴۵-۲۰=۲۵\,m$$

A ۷۱۹ ۳

خط فکری برای به‌دست آوردن فاصلهٔ دو گلوله باید معادلهٔ مکان هر گلوله را جداگانه بنویسیم. فاصلهٔ دو گلوله برابر تفاضل مکان دو گلوله است.

۱ زمین را به‌عنوان مبدأ حرکت درنظر گرفته و معادلهٔ حرکت هر دو گلوله را می‌نویسیم:



$$y_B=-\frac{1}{2}gt^2+۷۵$$
$$y_A=-\frac{1}{2}gt^2+۴۰$$

۲ در $t=۲s$، فاصلهٔ گلوله‌ها از سطح زمین را به‌دست می‌آوریم:

$$y_A=-۵(۲)^2+۴۰=۲۰m\quad ,\quad y_B=-۵(۲)^2+۷۵=۵۵m$$

۳ بنابراین فاصلهٔ دو گلوله از هم $۵۵-۲۰=۳۵m$ است.

میانبر البته سؤال نیاز به حل عددی نداشته و از همان ابتدا مشخص می‌باشد که فاصلهٔ دو گلوله از هم ۳۵m است زیرا هر دو گلوله با هم رها شده و شتاب حرکت هردو $a=g$ می‌باشد پس سرعت این دو گلوله در زمان‌های مختلف با هم برابر است و فاصلهٔ آن‌ها نسبت به فاصلهٔ اولیه نه کم می‌شود و نه زیاد.

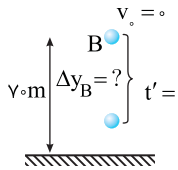
A ۷۲۰ ۴

خط فکری گلولهٔ A، ۱/۵s زودتر رها شده پس بعد از گذشت ۲ ثانیه از سقوط B، گلولهٔ A، ۳/۵s سقوط کرده است. پس جابه‌جایی گلولهٔ A و B را در این مدت زمان‌ها به‌دست می‌آوریم.

۱ جابه‌جایی گلولهٔ A در مدت ۳/۵s را حساب می‌کنیم:

$$\Delta y_A=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow \Delta y_A=۵\times(۳/۵)^2\Rightarrow \Delta y_A=۶۱/۲۵m$$

۲ جابه‌جایی گلولهٔ B در مدت ۲s را حساب می‌کنیم:



$$\Delta y_B=\frac{1}{2}gt'^2$$
$$\Rightarrow \Delta y_B=۵(۲)^2=۲۰m$$

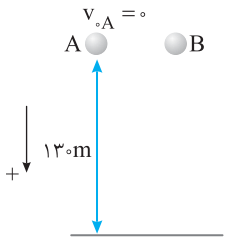
۳ بنابراین در این مدت متحرک A، ۶۱/۲۵m و متحرک B، ۲۰m سقوط کرده‌اند، بنابراین فاصلهٔ دو متحرک برابر است با:

$$d=\Delta y_A-\Delta y_B\Rightarrow d=۶۱/۲۵-۲۰=۴۱/۲۵m$$

A ۷۲۱ ۳

در مدت ۵s که گلولهٔ A جابه‌جا می‌شود گلولهٔ B به مدت $۵-۲=۳s$ در حال سقوط است. جابه‌جایی دو گلولهٔ A و B را به ترتیب در مدت ۵s و ۳s حساب می‌کنیم.

جهت رو به پایین را به اختیار خود مثبت فرض می‌کنیم.



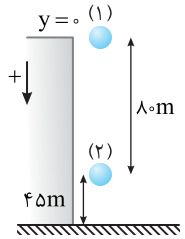
$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow\begin{cases}\Delta y_A=\frac{1}{2}\times ۱۰\times ۲۵\Rightarrow \Delta y_A=۱۲۵m\\ \Delta y_B=\frac{1}{2}\times ۱۰\times ۹\Rightarrow \Delta y_B=۴۵m\end{cases}$$

بنابراین فاصلهٔ آن‌ها از هم $۱۲۵-۴۵=۸۰m$ خواهد شد.

B ۷۲۲ ۲

خط فکری هرگاه از ما خواسته شود زمان رسیدن دو متحرک را به‌دست بیاوریم، معادلهٔ حرکت هر متحرک را نوشته با هم برابر قرار می‌دهیم.

۱ گلولهٔ اول از ارتفاع ۱۲۵m به ۸۰m رسیده است یعنی ۴۵ متر سقوط می‌کند. مدت این سقوط را حساب می‌کنیم. برای سادگی جهت مثبت را رو به پایین فرض می‌کنیم.



$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow ۴۵=۵t^2\Rightarrow t=۳s$$

۲ محل رهاشدن گلولهٔ (۱) را مبدأ فرض می‌کنیم و معادلهٔ حرکت دو گلوله را نسبت به این مبدأ می‌نویسیم.

معادلهٔ حرکت گلولهٔ اول: $y_1=\frac{1}{2}gt_1^2\Rightarrow y_1=۵t_1^2$

معادلهٔ حرکت گلولهٔ دوم: مکان اولیهٔ گلولهٔ دوم $y_2=+۸۰m$ است. بنابراین:

$$y_2=\frac{1}{2}gt_2^2+۸۰\Rightarrow y_2=۵t_2^2+۸۰$$

۳ گلولهٔ دوم ۳s دیرتر رها شده است یعنی زمان حرکت گلولهٔ دوم ۳s از زمان حرکت گلولهٔ اول کمتر است $(t_2=t_1-۳)$ بنابراین معادلهٔ حرکت گلولهٔ دوم خواهد شد:

$$y_2=۵(t_1-۳)^2+۸۰$$

۴ مکان‌ها را برابر قرار می‌دهیم:

$$y_۱=y_۲\Rightarrow ۵t_۱^۲=۵(t_۱-۳)^۲+۸۰\Rightarrow ۵t_۱^۲=۵t_۱^۲-۳۰t_۱+۴۵+۸۰\Rightarrow t_۱=\frac{۱۲۵}{۳۰}s$$

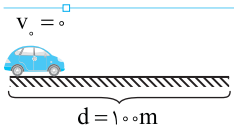
۵ باید زمان کل سقوط گلولهٔ اول را حساب کنیم. اگر این زمان کوتاه‌تر از $\frac{۱۲۵}{۳۰}s$ باشد دو گلوله در مسیر سقوط به هم نمی‌رسند.

$$\Delta y=\frac{۱}{۲}gt^۲\Rightarrow ۱۲۵=\frac{۱}{۲}\times ۱۰\times t_{کل}^۲\Rightarrow t_{کل}=۵s>t_۱$$

بنابراین $t_۱=\frac{۱۲۵}{۳۰}s$ صحیح است.

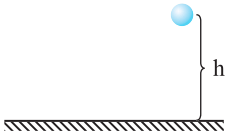
B ۷۲۳ ۳

۱ ابتدا مدت زمانی که متحرک به محل سقوط گلوله می‌رسد را حساب می‌کنیم:



$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\xrightarrow[\Delta x=۱۰۰m\,,\,a=۲m/s^۲]{v_۰=۰}۱۰۰=t^۲\Rightarrow t=۱۰s$$

۲ باید زمان سقوط گلوله ۱۰s باشد تا به خودرو برخورد کند از این رو ارتفاع h خواهد شد:



$$h=\frac{۱}{۲}gt^۲\xrightarrow{g=۱۰m/s^۲}$$
$$h=۵\times ۱۰۰=۵۰۰m$$

میانبر شتاب حرکت گلوله $۱۰m/s^۲$ و شتاب حرکت خودرو $۲m/s^۲$ است، با توجه به رابطهٔ $\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t$ چون سرعت اولیهٔ هر دو متحرک صفر بوده $(v_۰=۰)$ و هر دو هم‌زمان به یک محل می‌رسند و زمان یکسانی خواهند داشت پس جابه‌جایی آن‌ها با شتاب رابطهٔ مستقیم دارد و چون شتاب گلوله ۵ برابر شتاب خودرو بوده پس جابه‌جایی آن نیز ۵ برابر خودرو می‌شود.

B ۷۲۴ ۳

نکته برای دو گلوله که با فاصلهٔ زمانی از یک ارتفاع رها می‌شوند همواره بیشترین فاصلهٔ دو گلوله وقتی است که گلولهٔ اول به زمین رسیده باشد.

۱ بنابراین ابتدا زمان سقوط گلولهٔ اول را به‌دست می‌آوریم. جهت مثبت را رو به پایین اختیار کرده‌ایم.

$$\Delta y=\frac{۱}{۲}gt^۲\Rightarrow ۲۴/۲=\frac{۱}{۲}\times ۱۰t^۲\Rightarrow t^۲=۴/۸۴\Rightarrow t=۲/۲s$$

۲ گلولهٔ دوم ۰/۷s دیرتر رها شده است و در لحظه‌ای که گلولهٔ اول به زمین رسیده است، گلولهٔ دوم به مقدار زیر سقوط کرده است.

$$\Delta y=\frac{۱}{۲}gt^۲\xrightarrow{t=۲/۲-۰/۷=۱/۵s}\Delta y_۲=\frac{۱}{۲}\times ۱۰(۲/۲۵)\Rightarrow \Delta y_۲=\frac{۲۲/۵}{۲}=۱۱/۲۵m$$

در این صورت بیشترین فاصلهٔ دو گلوله از هم خواهد شد:

$$۲۴/۲-۱۱/۲۵=۱۲/۹۵m$$

B ۷۲۵ ۱

یادآوری دو گلوله با فاصلهٔ زمانی و از یک نقطه رها شده‌اند بنابراین بیشترین فاصلهٔ بین دو گلوله زمانی اتفاق می‌افتد که گلولهٔ اول به زمین برسد.

۱ زمان رسیدن گلولهٔ اول به زمین را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta y=\frac{۱}{۲}gt^۲\Rightarrow ۸۰=\frac{۱}{۲}\times ۱۰t^۲\Rightarrow t=۴s$$

۲ در این لحظه فاصلهٔ دو گلوله از هم ۳۵ متر است یعنی گلولهٔ دوم $۸۰-۳۵=۴۵m$ سقوط کرده است.

۳ زمان سقوط متحرک (۲) را حساب می‌کنیم.

$$\Delta y=\frac{۱}{۲}gt^۲\Rightarrow ۴۵=۵t_۲^۲\Rightarrow t_۲=۳s$$

۴ بنابراین گلولهٔ دوم $t=۴-۳=۱s$ بعد رها شده است.

بازی با سوال دو گلوله به فاصلهٔ زمانی یک ثانیه از نقطه‌ای به ارتفاع h در شرایط خلأ رها می‌شوند. اگر بیشترین فاصلهٔ بین آن‌ها در طول حرکت به ۴۵ متر برسد، ارتفاع h چند متر است؟ $(g=۱۰m/s^۲)$ کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۸۰ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۲۵ ۴) ۱۴۵

پاسخ محل رها شدن را مبدأ می‌گیریم و جهت رو به پایین را مثبت اختیار می‌کنیم. معادلهٔ حرکت دو گلوله را نوشته از هم کم می‌کنیم و برابر ۴۵m قرار می‌دهیم. اگر زمان حرکت گلولهٔ اول t باشد زمان حرکت گلولهٔ دوم $(t-۱)$ است. بنابراین:

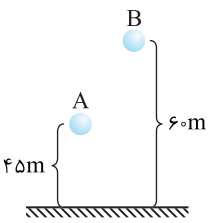
$$y_۱-y_۲=۴۵\Rightarrow \frac{۱}{۲}gt^۲-\frac{۱}{۲}g(t-۱)^۲=۴۵\Rightarrow t=۵s$$

$$y=\frac{۱}{۲}gt^۲=\frac{۱}{۲}\times ۱۰\times (۵)^۲=۱۲۵m$$

گزینهٔ ۳

B ۷۲۶ ۳

خط فکری گلولهٔ A از ارتفاع کمتر و زودتر رها شده است، بنابراین گلوله A زودتر به زمین می‌رسد و بیشترین فاصلهٔ بین دو گلوله وقتی است که A به زمین رسیده است.



۱ زمان سقوط گلولهٔ A را حساب می‌کنیم.

$$\Delta y=\frac{۱}{۲}gt^۲\Rightarrow ۴۵=\frac{۱}{۲}\times ۱۰\times t^۲\Rightarrow t=۳s$$

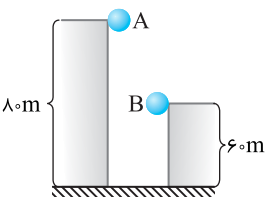
۲ در مدت ۳s سقوط A، گلوله B یک ثانیه کمتر سقوط کرده و $۳-۱=۲s$ در حال سقوط است. مقدار سقوط B را حساب می‌کنیم.

$$\Delta y=\frac{۱}{۲}gt^۲\Rightarrow \Delta y_B=\frac{۱}{۲}\times ۱۰\times ۴=۲۰m$$

۳ بنابراین وقتی A به زمین رسیده است، گلولهٔ B، ۲۰m سقوط کرده و در ارتفاع $۶۰-۲۰=۴۰m$ سطح زمین است و بیشترین فاصلهٔ بین A و B، ۴۰m است.

C ۷۲۷ ۱

خط فکری بعد از ۲s گلولهٔ A با سرعت $v=gt=۲۰m/s$ به روبه‌روی گلولهٔ B می‌رسد. بعد از رها کردن گلولهٔ B، در ارتفاع‌های یکسان سرعت گلولهٔ A از سرعت گلولهٔ B بیشتر است $(v=gt, t_A>t_B)$ پس در طول زمان فاصلهٔ دو گلوله از هم بیشتر خواهد شد و بیشترین فاصلهٔ دو گلوله از هم بعد از رها شدن گلولهٔ B زمانی است که گلولهٔ A به زمین برسد.



۱ فاصلهٔ بین گلولهٔ A تا B برابر $۸۰-۶۰=۲۰m$ است. ابتدا حساب می‌کنیم که گلولهٔ A بعد از چند ثانیه به روبه‌روی گلولهٔ B رسیده و ۲۰ متر سقوط می‌کند:

$$\Delta y=\frac{۱}{۲}gt^۲\Rightarrow ۲۰=۵t^۲\Rightarrow t=۲s$$

۲ با معادلهٔ مکان - زمان، زمان رسیدن گلولهٔ A به زمین را به‌دست می‌آوریم:

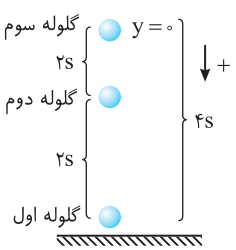
$$\Delta y=\frac{۱}{۲}gt^۲\Rightarrow ۸۰=۵t^۲\Rightarrow t=۴s$$

۳ گلولهٔ A بعد از ۴s از رها شدن خود به زمین می‌رسد، در این مدت گلولهٔ B که ۲ ثانیه دیرتر رهاشده به اندازهٔ $۴-۲=۲s$ در حال سقوط بوده و مقدار سقوط B در مدت این ۲s را حساب می‌کنیم.

$$\Delta y_B=\frac{۱}{۲}gt^۲\Rightarrow \Delta y_B=۵(۲)^۲=۲۰m$$

۴ هنگامی که گلولهٔ A به زمین رسیده گلولهٔ B، ۲۰m جابه‌جا شده و در فاصلهٔ ۴۰m از زمین است پس بیشترین فاصلهٔ دو گلوله از هم ۴۰m می‌باشد.

B ۷۲۸ ۴



با توجه به صورت مسئله، هر گلوله دو ثانیه بعد ازدیگری رها می‌شود بنابراین در لحظهٔ رها شدن گلولهٔ سوم، گلولهٔ اول ۴s در حال سقوط بوده و به سطح زمین رسیده و در این لحظه گلولهٔ دوم، ۲s در حرکت است.

بنابراین:

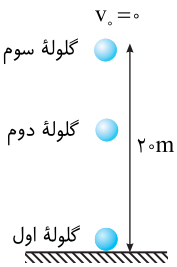
$$y=+\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{گلولهٔ اول}} y_1=+\frac{1}{2}\times 10\times 16 \Rightarrow y_1=80\text{m} \\ \xrightarrow{\text{گلولهٔ دوم}} y_2=\frac{1}{2}\times 10(2)^2 \Rightarrow y_2=20\text{m} \end{cases}$$

فاصله گلولهٔ دوم از زمین خواهد شد. $y=80-20=60\text{m}$

۲ ۷۲۹ B

ابتدا زمان رسیدن گلولهٔ اول به زمین را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 20=\frac{1}{2}\times 10\times t^2 \Rightarrow t=2\text{s}$$



گلوله‌ها در بازه‌های زمانی یکسان رها شده‌اند و گلولهٔ سوم تازه رها شده پس گلولهٔ سوم ۲s بعد از گلولهٔ اول و گلولهٔ دوم ۱s پس از گلولهٔ اول رها شده‌اند. جابه‌جایی گلولهٔ دوم در مدت ۱s را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \Delta y=\frac{1}{2}\times 10\times 1 \Rightarrow \Delta y=5\text{m}$$

در نتیجه فاصلهٔ گلولهٔ دوم از سطح زمین $20-5=15\text{m}$ است.

۴ ۷۳۰ A

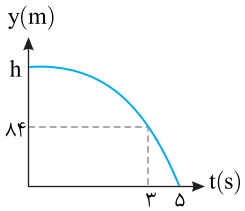
جسم از حال سکون رها شده است، بنابراین شیب خط مماس بر نمودار $y-t$ که معرف سرعت است در $t=0$ باید افقی باشد. همچنین نمودار $y-t$ سهمی‌شکل است زیرا سقوط آزاد حرکت با شتاب ثابت است. بنابراین گزینهٔ (۴) می‌تواند نمودار $y-t$ آن باشد.

۱ ۷۳۱ A

هر سه گلوله از یک ارتفاع رها شده پس شتاب حرکت هر سه برابر $-g$ است و در نمودار $v-t$ شیب خط برابر شتاب می‌باشد از این رو شیب خط نمودار $v-t$ هر سه گلوله با هم برابر می‌باشد و نمودار $v-t$ هر سه موازی هم است. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

۳ ۷۳۲ B

با توجه به نمودار در مدت ۳s گلوله به اندازهٔ $h-84$ متر و در مدت ۵s به اندازهٔ h متر سقوط می‌کند. با توجه به معادلهٔ مکان - زمان $\Delta y=\frac{1}{2}gt^2$ داریم: الف) در بازهٔ ۰ تا ۳s:



$$h-84=\frac{1}{2}g(3)^2 \Rightarrow h-84=4/5g \quad (I)$$

ب) در بازهٔ ۰ تا ۵s:

$$h=\frac{1}{2}g(5)^2 \Rightarrow h=12/5g \quad (II)$$

دو معادلهٔ (I) و (II) را از هم کم می‌کنیم:

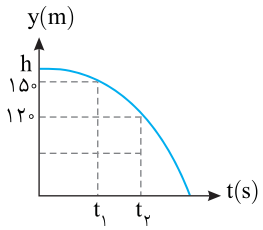
$$h-(h-84)=12/5g-4/5g \Rightarrow 84=8g \Rightarrow g=10/5\text{m/s}^2$$

این شتاب گرانش برای زحل است.

۱ ۷۳۳ C

یادآوری شیب خط مماس بر نمودار $y-t$ سرعت گلوله را مشخص می‌کند.

۱ گلوله از ارتفاع h رها شده و سرعت اولیه صفر است. با توجه به معادلهٔ سرعت - زمان، سرعت در لحظه‌های t_1 و t_2 خواهد شد:



$$v=at+v_0 \begin{cases} \xrightarrow[a=g]{v_0=0} v_1=gt_1 \\ \xrightarrow[a=g]{v_0=0} v_2=gt_2 \end{cases}$$

۲ با توجه به فرض مسئله سرعت گلوله در لحظهٔ t_2، دو برابر لحظهٔ t_1 است:

$$v_2=2v_1 \Rightarrow gt_2=2gt_1 \Rightarrow t_2=2t_1$$

۳ از لحظهٔ $t=0$ تا t_1 گلوله به اندازهٔ $h-150$ متر سقوط کرده و سرعت اولیه در این بازه صفر است:

$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h-150=\frac{1}{2}gt_1^2 \quad (I)$$

۴ از لحظهٔ $t=0$ تا $t_2=2t_1$ به اندازهٔ $h-120$ متر سقوط کرده و سرعت اولیه در این بازه صفر است:

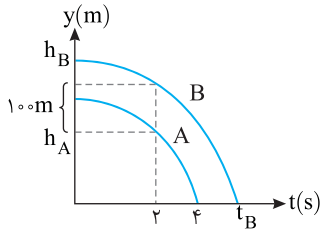
$$h-120=\frac{1}{2}g(2t_1)^2 \Rightarrow h-120=4(\frac{1}{2}gt_1^2) \quad (II)$$

۵ دو معادلهٔ بالا را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{h-150}{h-120}=\frac{\frac{1}{2}gt_1^2}{4(\frac{1}{2}gt_1^2)} \Rightarrow 4h-600=h-120 \Rightarrow 3h=480 \Rightarrow h=160\text{m}$$

۲ ۷۳۴ B

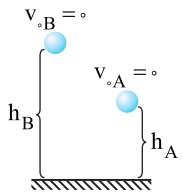
۱ هر دو گلوله رها شده و $v_0=0$ است. معادلهٔ مکان - زمان گلولهٔ A و B را می‌نویسیم:



$$y_A=\frac{1}{2}gt^2+h_A$$

$$y_B=\frac{1}{2}gt^2+h_B$$

۲ در $t=2\text{s}$ فاصلهٔ دو گلوله از هم ۱۰۰ است:



$$\begin{cases} y_A=\frac{1}{2}g(4)+h_A \\ y_B=\frac{1}{2}g(4)+h_B \end{cases} \xrightarrow[\text{معادلهٔ پایین کم می‌کنیم.}]{\text{معادلهٔ بالا را از}(-)}$$

$$y_B-y_A=\frac{1}{2}g(4)+h_B-(\frac{1}{2}g(4)+h_A)$$

$$\Rightarrow y_B-y_A=h_B-h_A \xrightarrow{y_B-y_A=100\text{m}} h_B-h_A=100\text{m}$$

۳ تا رسیدن به زمین گلولهٔ A، h_A و گلولهٔ B، h_B را طی می‌کند. با توجه به نمودار مدت زمان طی این مسافت به‌ترتیب t_A و t_B است:

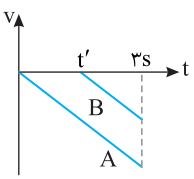
$$\begin{cases} h_A=\frac{1}{2}gt_A^2 \Rightarrow h_A=5t_A^2 \\ h_B=\frac{1}{2}gt_B^2 \Rightarrow h_B=5t_B^2 \end{cases} \xrightarrow[\text{معادلهٔ بالا کم می‌کنیم.}]{\text{معادلهٔ پایین را از}(-)} h_B-h_A=5(t_B^2-t_A^2)$$

$$100=5(t_B^2-16) \Rightarrow t_B^2=36 \Rightarrow t_B=6\text{s}$$

میانبر دو گلوله همزمان رها می‌شوند و در هر لحظه سرعت آن یکسان بوده و مقدار سقوط هر دو گلوله در هر ثانیه برابر است در نتیجه فاصلهٔ آن‌ها از هم تغییر نمی‌کند و در تمام لحظه‌ها فاصلهٔ آن‌ها از هم یکسان است. بنابراین اگر در $t=2\text{s}$ فاصلهٔ آن‌ها از هم ۱۰۰m است در $t=0$ نیز فاصلهٔ آن‌ها از هم ۱۰۰ متر بوده است.

۱ ۷۳۵ A

خط فکری با توجه به نمودار، گلولهٔ A را اول رها کرده‌ایم و هر لحظه فاصلهٔ آن از متحرک B بیشتر می‌شود. وقتی فاصلهٔ بین A و B بیشینه است که گلولهٔ A به زمین رسیده باشد و از آن لحظه به بعد گلولهٔ B به آن نزدیک می‌شود.



۱ در $t=3\text{s}$ فاصله بین دو گلوله بیشینه است. ارتفاع h را که در مدت ۳s گلولهٔ A طی کرده است به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h=5\times 9=45\text{m}$$

۲ تا این لحظه گلولهٔ B، ۲۵ متر کمتر سقوط کرده پس $45-25=20\text{m}$ سقوط کرده است، با توجه به این جابه‌جایی مدت زمان سقوط B را حساب می‌کنیم:

$$\Delta y_B=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 20=\frac{1}{2}\times 10\times t_B^2 \Rightarrow t_B=2\text{s}$$

۳ گلولهٔ A، ۳s و گلولهٔ B، ۲s سقوط کرده پس اختلاف زمانی رها شدن دو گلوله خواهد شد:

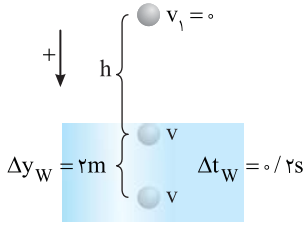
$$t'=t_A-t_B=3-2=1\text{s}$$

B ۷۳۶ ۲

خط فکری گلوله دو مرحله حرکت دارد یکی حرکت گلوله در قسمت اول سقوط آزاد و دومی هنگامی است که گلوله وارد آب شده و حرکت گلوله در آب دارای سرعت ثابت است.

۱ در مدت سقوط آزاد، سرعت گلوله از $v_۱=۰$ به v رسیده و گلوله به اندازهٔ h سقوط کرده. چون زمانی در این حرکت نداریم پس معادلهٔ مستقل از زمان می‌نویسیم:

$$v^۲=۲gh \qquad (۱)$$



۲ درون آب، گلوله به مدت $۰/۲s$ با سرعت ثابت حرکت کرده و $۲m$ جابه‌جا می‌شود:

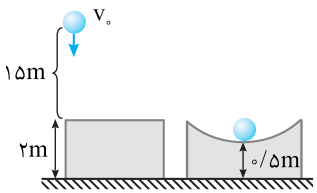
$$\Delta y_W=vt\Rightarrow ۲=v\times ۰/۲\Rightarrow v=۱۰m/s \qquad (۲)$$

۳ با توجه به دو معادلهٔ (۱) و (۲)، h را حساب می‌کنیم:

$$v^۲=۲gh \xrightarrow{v=۱۰\frac{m}{s}} ۱۰۰=۲۰h\Rightarrow h=۵m$$

B ۷۳۷ ۴

۱ جهت رو به پایین را مثبت می‌گیریم، سرعت برخورد شخص به بالش را حساب می‌کنیم



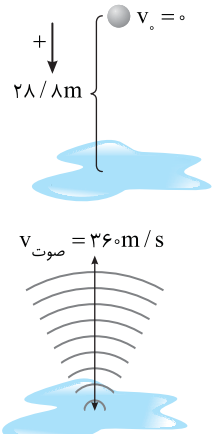
$$v^۲-v_۰^۲=۲gy$$
$$\Rightarrow v^۲-۰=۲g(۱۵)$$
$$\Rightarrow v^۲=۳۰g\Rightarrow v=\sqrt{۳۰g}\ m/s$$

۲ بعد از برخورد به بالش جسم دارای حرکت کندشونده می‌شود تا می‌ایستد، شتاب در این قسمت خواسته شده و سرعت گلوله از v به صفر رسیده بنابراین مجدداً معادلهٔ مستقل از زمان را نوشته و شتاب توقف شخص را حساب می‌کنیم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta y\Rightarrow ۰-۳۰g=۲a(۱/۵)\Rightarrow a=-۱۰g$$

B ۷۳۸ ۳

خط فکری در این سؤال دو مرحله حرکت را بررسی می‌کنیم، ۱) سقوط آزاد گلوله از ارتفاع $۲۸/۸m$ با شتاب g و ۲) حرکت سرعت ثابت موج صوتی از هنگام برخورد گلوله به سطح آب تا رسیدن به گوش شخص.



۱ ابتدا مدت زمانی که طول می‌کشد تا سنگ به سطح آب برسد را حساب می‌کنیم:

$$\Delta y=\frac{۱}{۲}gt^۲\Rightarrow ۲۸/۸=۵t^۲\Rightarrow t=۲/۴s$$

۲ صوت نیز بعد از برخورد باید مسافت $۲۸/۸m$ را با سرعت ثابت $۳۶۰m/s$ طی کند تا به گوش شخص برسد.

$$\Delta y=vt'\Rightarrow t'=\frac{\Delta y}{v}=\frac{۲۸/۸}{۳۶۰}=۰/۰۸s$$

۳ بنابراین مدت زمان بین رها کردن سنگ تا شنیدن صدا برابر است با:

$$t+t'=۲/۴+۰/۰۸=۲/۴۸s$$

B ۷۳۹ ۱

با توجه به معادلهٔ مستقل از زمان، برای دو حالت سرعت رسیدن به زمین را حساب می‌کنیم:

۱ گلوله از ارتفاع h رها شده و با سرعت v به زمین می‌رسد:

$$v^۲-۰^۲=۲g\Delta y\Rightarrow v^۲=۲gh\Rightarrow v=\sqrt{۲gh}$$

۲ گلوله از ارتفاع nh رها شده و با سرعت v' به سطح سیاره‌ای با شتاب گرانش g' رسیده:

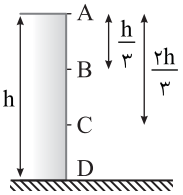
$$v'^۲-۰^۲=۲g'\Delta y\Rightarrow v'^۲=۲ng'h\Rightarrow v'=\sqrt{۲ng'h}$$

۳ حال نسبت $\frac{v'}{v}$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{v'}{v}=\frac{\sqrt{۲ng'h}}{\sqrt{۲gh}} \xrightarrow{g'=(n-۱)g} \frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{(n-۱)g(nh)}{gh}}\Rightarrow \frac{v'}{v}=\sqrt{n^۲-n}$$

B ۷۴۰ ۴

خط فکری گلوله از نقطهٔ A رها شده است. $(v_۰=۰)$، برای حل یک بار مسیر AB و بار دیگر مسیر AC را در نظر می‌گیریم. در هر دو مسیر سرعت اولیه صفر بوده و چون تنها سرعت A را داریم، برای حل از معادلهٔ $\Delta y=\frac{۱}{۲}gt^۲$ کمک می‌گیریم:



۱ در سقوط از A تا B گلوله به اندازهٔ $\frac{h}{۳}$ جابه‌جا می‌شود:

$$\Delta y_{AB}=\frac{۱}{۲}gt^۲\Rightarrow AB=\frac{h}{۳}=\frac{۱}{۲}gt^۲$$

۲ در سقوط از A تا C گلوله به اندازهٔ $\frac{۲h}{۳}$ جابه‌جا می‌شود:

$$AC=\frac{۲h}{۳}=\frac{۱}{۲}g(t+۱)^۲$$

۳ دو معادله را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\frac{h}{۳}}{\frac{۲h}{۳}}=\frac{\frac{۱}{۲}gt^۲}{\frac{۱}{۲}g(t+۱)^۲}\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\left(\frac{t}{t+۱}\right)^۲\Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{t}{t+۱} \xrightarrow{\sqrt{۲}=۱/۴}$$

$$\frac{۱}{۱/۴}=\frac{t}{t+۱}\Rightarrow t+۱=۱/۴t\Rightarrow ۰/۴t=۱\Rightarrow t=۲/۵s$$

۴ در معادلهٔ مسیر AB، t را برابر $۲/۵s$ قرار می‌دهیم:

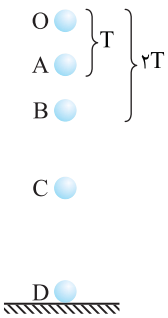
$$\frac{h}{۳}=\frac{۱}{۲}g(۲/۵)^۲\Rightarrow h=۹۳/۷۵m$$

۵ به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، سرعت گلوله هنگام برخورد به زمین را به‌دست می‌آوریم:

$$v^۲=۲g\Delta y\Rightarrow v^۲=۲\times ۱۰\times ۹۳/۷۵=۱۸۷۵\Rightarrow v=۲۵\sqrt{۳}\approx ۴۲$$

C ۷۴۱ ۲

جهت مثبت را رو به پایین در نظر می‌گیریم.



۱ برای مسیر OA، تندی اولیه صفر بوده و مدت زمان سقوط T است:

$$\Delta y=\frac{۱}{۲}gt^۲\Rightarrow OA=\frac{۱}{۲}gT^۲$$

۲ برای مسیر OB، تندی اولیه صفر بوده و مدت زمان سقوط $۲T$ است:

$$OB=\frac{۱}{۲}g(۲T)^۲=۲gT^۲$$

۳ فاصلهٔ A تا B داده شده در سؤال برابر $AB=OB-OA$ است، بنابراین:

$$AB=OB-OA \xrightarrow{AB=۵/۴m} ۵/۴=۲gT^۲-\frac{۱}{۲}gT^۲$$

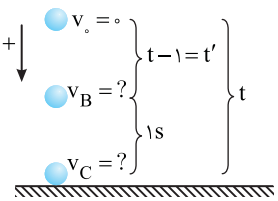
$$\Rightarrow \frac{۳}{۲}gT^۲=۵/۴m \xrightarrow{g=۱۰m/s^۲} ۱۵T^۲=۵/۴m\Rightarrow T^۲=\frac{۵/۴}{۱۵}=\frac{۹}{۲۵}$$

$$\Rightarrow T=\frac{۳}{۵}s=۰/۶s$$

۴ از لحظهٔ رها شدن ۴ بازهٔ زمانی T ثانیه‌ای در مسیرهای OA، AB، BC، CD طی می‌شود پس زمان سقوط $۴T$ است.

$$\Delta y=\frac{۱}{۲}gt^۲\Rightarrow h=\frac{۱}{۲}\times ۱۰(۴\times ۰/۶)^۲\Rightarrow h=۵\times(۲/۴)\times(۲/۴)=۲۸/۸m$$

C ۷۴۲ ۴



۱ اگر زمان سقوط را t در نظر بگیریم سرعت در نقطهٔ C هنگام رسیدن به زمین برابر است با:

$$v_C=gt+v_۰\Rightarrow v_C=gt$$

۲ نقطهٔ B، ۱s قبل از رسیدن به زمین بوده پس زمان رسیدن به نقطهٔ B برابر $t-۱$ است:

$$v_B=gt'+v_۰\Rightarrow v_B=g(t-۱)$$

یادآوری در حرکت با شتاب ثابت مانند سقوط آزاد سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}$$

۳ بنابراین سرعت متوسط در ثانیه آخر حرکت برابر است با:

$$v_{av}=\frac{v_B+v_C}{2}=\frac{gt-g+gt}{2}=\frac{2gt-g}{2}$$

۴ سرعت متوسط از لحظهٔ رها شدن تا نقطهٔ B برابر است با:

$$v'_{av}=\frac{v_B+v_0}{2}=\frac{gt-g+0}{2}\Rightarrow v'_{av}=\frac{gt-g}{2}$$

۵ با توجه به فرض مسئله $v_{av}=6v'_{av}$ است.

$$v_{av}=6v'_{av}\Rightarrow\frac{2gt-g}{2}=6\frac{gt-g}{2}\Rightarrow 2gt-g=6gt-6g$$

$$\Rightarrow t=1/25s, v_C=gt=10\times(1/25)=12/5m/s$$

۴ ۷۴۳ C

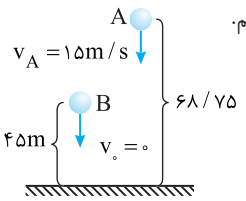
حالت ۱: اگر هنگام رها شدن B، گلولهٔ A هم‌چنان بالاتر از B باشد، ابتدا دو گلوله به هم نزدیک می‌شوند و اگر گلولهٔ A قبل از رسیدن B به زمین از B جلو نزند در طول مسیر همواره فاصلهٔ دو گلوله از هم کم می‌شود.

حالت ۲: گلولهٔ B قبل از رسیدن گلولهٔ A به ارتفاع آن رها شود و گلولهٔ A از B قبل از رسیدن به زمین جلو زده باشد. بعد از جلو زدن چون سرعت A بیشتر از B است $(v=-gt)$ فاصلهٔ آن‌ها از هم زیاد می‌شود (یعنی ابتدا فاصله آن‌ها کم و سپس زیاد می‌شود)

حالت ۳: اگر پس از گذر گلوله A از گلوله B، گلولهٔ B رها شود یعنی گلولهٔ A پایین‌تر از B قرار داشته باشد با توجه به اینکه سرعت A در تمام لحظات از B بیشتر است پیوسته فاصلهٔ این دو گلوله از هم زیاد می‌شود، پس هر سه گزینه ممکن است.

۳ ۷۴۴ C

۱ جهت رو به پایین را برای سادگی محاسبات مثبت می‌گیریم. ابتدا زمان سقوط دو گلوله از لحظهٔ رهاشدن تا رسیدن به زمین را به‌دست می‌آوریم.



$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow 80=\frac{1}{2}\times 10t_A^2$$

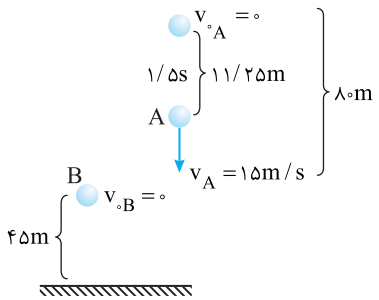
$$\Rightarrow t_A=4s$$

$$45=\frac{1}{2}\times 10t_B^2\Rightarrow t_B=3s$$

۲ گلولهٔ A، ۱/۵ ثانیه زودتر رها شده و در این مدت سرعتش به $v=gt=10\times 1/5=15m/s$ رسیده و به اندازهٔ $\Delta y=\frac{1}{2}gt^2=5(1/5)^2=11/25m$ سقوط کرده است بنابراین در لحظهٔ رها شدن B، A دارای سرعت بوده و در حال نزدیک شدن به B است.

۳ زمان کل سقوط B، ۳s است. B، ۱/۵s بعد از A رها شده یعنی B در لحظهٔ $t=3+1/5=4/5s$ به زمین برخورد می‌کند.

در حالی که مدت زمان سقوط A، ۴s است، یعنی A در لحظهٔ $t=4s$ به زمین برخورد می‌کند.



۴ زمان رسیدن دو گلوله به هم را به‌دست می‌آوریم.

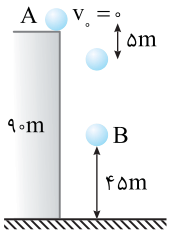
$$y_A=y_B\Rightarrow\frac{1}{2}gt_A^2=\frac{1}{2}g(t_A-1/5)^2+35\Rightarrow t_A^2=(t_A-1/5)^2+7$$

$$\Rightarrow t_A^2=t_A^2-3t_A+2/25+7\Rightarrow 9/25=3t_A\Rightarrow t_A=3/08s<4s$$

یعنی گلولهٔ A قبل از رسیدن به زمین از گلولهٔ B جلو می‌زند بنابراین ابتدا A به B نزدیک و سپس از آن دور می‌شود.

۱ ۷۴۵ C

۱ گلولهٔ A از ارتفاع ۹۰ متری رها شده و پس از ۱s سرعت آن خواهد شد:



$$v=gt\Rightarrow v_B=10\times 1=10m/s$$

۲ در لحظه‌ای که B رها می‌شود سرعت A، $10m/s$ است. در طول مسیر سرعت A از B بیشتر است و A به B نزدیک می‌شود و فاصلهٔ آن‌ها از هم کم می‌شود. البته تا زمانی که A از B جلو بزند. بنابراین ما باید زمان سقوط دو گلوله را حساب کنیم:

$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2\begin{cases}\xrightarrow{A:} 90=\frac{1}{2}\times 10\times t_A^2\Rightarrow t_A=3\sqrt{2}\sim 3\times 1/4=4/2s\\ \xrightarrow{B:} 45=\frac{1}{2}\times 10\times t_B^2\Rightarrow t_B=3s\end{cases}$$

۳ گلولهٔ B، در مدت ۳s به زمین می‌رسد و چون ۱s دیرتر رها شده بنابراین در لحظهٔ $t=3+1=4s$ به زمین برخورد می‌کند.

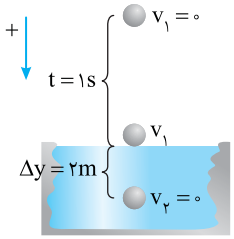
۴ لحظهٔ برخورد A به زمین $t=4/2s$ است. بنابراین قبل از رسیدن A به B، گلولهٔ B به زمین می‌رسد. در نتیجه در تمام مدت A در حال نزدیک شدن به B است.

۵ بیشینه فاصلهٔ A از B در طول این مسیر همان فاصلهٔ اولیه یعنی $90-45=45m$ است.

۴ ۷۴۶ C

خط فکری ابتدا سرعت قطعه چوب هنگام رسیدن به سطح آب را حساب می‌کنیم. قطعه چوب پس از مسافت ۲m متوقف شده است $(v=0)$ به کمک رابطهٔ مستقل از شتاب، زمان توقف را به‌دست می‌آوریم تا مشخص شود که در یک ثانیهٔ آخر حرکت، تمام مدت قطعه چوب در آب بوده و یا بخشی از این ۱s را در حال سقوط بوده است.

جهت مثبت را رو به پایین اختیار می‌کنیم.



۱ مقاومت هوا ناچیز است و سرعت قطعه چوب پس از ۱s خواهد شد:

$$v=gt\Rightarrow v_1=10\times 1\Rightarrow v_1=10m/s$$

۲ گلوله با سرعت $10m/s$ وارد آب می‌شود و پس از ۲m جابه‌جایی متوقف می‌شود. زمان طی مسافت ۲m را به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب حساب می‌کنیم.

$$\Delta y=\frac{v_2+v_1}{2}t\Rightarrow 2=\frac{0+10}{2}t\Rightarrow t=0/4s$$

۳ بنابراین از ۱s آخر حرکت، $0/4s$ تکه چوب در آب در حال حرکت و $1-0/4=0/6s$ بیرون آب در حرکت و سقوط بوده است.

۴ باید مسافت طی شده در مدت $0/6s$ قبل از برخورد به سطح آب را حساب کنیم. از رابطهٔ جابه‌جایی برحسب سرعت نهایی استفاده می‌کنیم.

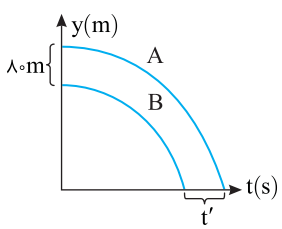
$$\Delta y=\frac{-1}{2}gt^2+vt\Rightarrow\Delta y=-5(0/36)+10\times 0/6\Rightarrow\Delta y=-1/8+6$$

$$\Rightarrow\Delta y=4/2m$$

۵ در این صورت در ۱s ثانیه، $4/2m$ بیرون آب و ۲m داخل آب طی می‌کند تا متوقف شود. یعنی جمعاً $6/2m$.

۱ ۷۴۷ B

خط فکری هر دو همزمان رها شده‌اند. محل رهاشدن گلولهٔ A، $80m$ بالاتر از محل رهاشدن گلولهٔ B است و تأخیر زمانی رسیدن دو گلوله به زمین به دلیل همین اختلاف فاصله است. بنابراین شما کافی است مدت زمانی که A سپری می‌کند تا $80m$ سقوط کند را حساب کنید.

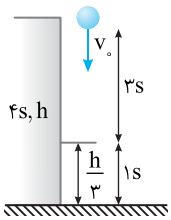


مقدار t' برابر خواهد شد با:

$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow 80=5t'^2\Rightarrow t'=4s$$

B ۷۴۸ ۴

به کمک معادلهٔ حرکت مسأله را حل می‌کنیم:



$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2+v_0t$$

$$\begin{cases} h=\frac{1}{2}\times10\times16+4v_0 & (1) \\ \frac{2h}{3}=\frac{1}{2}\times10\times9+3v_0 & (2) \end{cases} \xrightarrow[(1)\text{ بر }(2)]{\text{با تقسیم رابطه}}$$

$$\frac{3}{2}=\frac{80+4v_0}{45+3v_0}\Rightarrow135+9v_0=160+8v_0$$

$$\Rightarrow v_0=25m/s$$

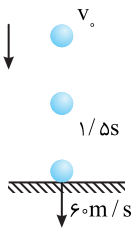
در این صورت می‌توان h را به‌دست آورید: $h=\frac{1}{2}\times10\times16+4\times25\Rightarrow h=180m$

سؤالات سقوط آزاد با سرعت اولیه مشابه سؤالات شتاب ثابت از رابطهٔ $\Delta y=\frac{1}{2}at^2+v_0t$ قابل حل می‌باشد و نیاز به اطلاعات اضافی نیست. در کتاب درسی نمونه‌ای از این نوع تست وجود ندارد. به همین علت تنها یک تست را برای شما انتخاب کرده‌ایم.

بازی با سؤال **جسمی از ارتفاع ۱۰۰ متری بالای سطح زمین با سرعت اولیهٔ v_0 در راستای قائم و در شرایط خلأ به سمت پایین پرتاب شده است. اگر سرعت جسم در لحظهٔ برخورد به زمین $60m/s$ باشد، سرعت متوسط آن در ۱/۵ ثانیه آخر حرکت چند متر بر ثانیه است؟ $(g=10m/s^2)$** خارج ریاضی - ۹۶

۱) ۳۰ ۲) ۳۵ ۳) ۴۲/۵ ۴) ۵۲/۵

پاسخ **سرعت جسم هنگام برخورد به زمین $60m/s$ است. در مدت ۱/۵s، تغییر سرعت $\Delta v=gt=1/5\times10=15m/s$ بوده یعنی سرعت ۱/۵s قبل از برخورد $60-15=45m/s$ است و سرعت متوسط خواهد شد:**



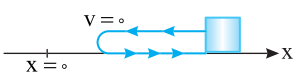
$$v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}\Rightarrow v_{av}=\frac{45+60}{2}\Rightarrow v_{av}=\frac{105}{2}\Rightarrow v_{av}=52/5m/s$$

دقت کنید که در حل این تست و ارتفاع ۱۰۰ متری و سرعت اولیه کاربردی ندارد یعنی می‌توانید فرض کنید جسم از ارتفاع بالاتری بدون سرعت اولیه رها شده است. گزینهٔ ۴

پنجره تودرتو (آزمون فصل)

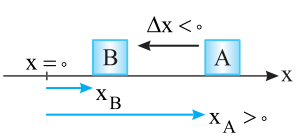
B ۷۴۸ ۴

۱ مطابق شکل روبه‌رو ممکن است متحرک در مکان‌های مثبت $(x>0)$



در حال حرکت باشد و در همان جا تغییر جهت دهد و علامت بردار مکان هم‌چنان مثبت باشد، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.

در شکل روبه‌رو متحرک از نقطهٔ A به نقطهٔ B رفته، جابه‌جایی منفی $(\Delta x<0)$ است اما بردار مکان در نقاط A و B هر دو مثبت است و



گزینهٔ (۲) نادرست است. سرعت متوسط، برابر است با $\vec{v}_{av}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$ بنابراین بردار سرعت متوسط همواره هم‌جهت با بردار جابه‌جایی است، در نتیجه گزینهٔ (۳) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.

نمای ۲

بازی با سؤال **با تغییر مبدأ مکان، چه تعداد از پارامترهای حرکتی زیر تغییر می‌کند؟**

«بردار جابه‌جایی - سرعت - شتاب متوسط - بردار مکان - مسافت طی‌شده»

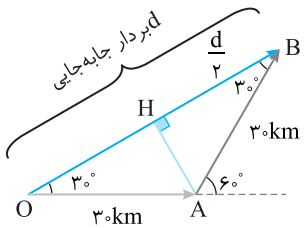
۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ **نکته** **جابه‌جایی، سرعت، شتاب و مسافت طی شده به محل مبدأ مکان اختیاری بستگی ندارد و تنها بردار مکان تابعی از محل مبدأ مکان است.** گزینهٔ ۱

B ۷۴۸ ۲

خط فکری ۲ باید شکل مسیر حرکت را رسم کنیم. مطابق شکل متحرک از نقطهٔ O به نقطهٔ A و سپس به نقطهٔ B می‌رود. جابه‌جایی دوچرخه‌سوار برداری است که از O به B رسم می‌شود. بنابراین باید به کمک ریاضی طول بردار جابه‌جایی (d) را حساب کنیم. با توجه به شکل روبه‌رو خط عمود AH را رسم می‌کنیم. در مثلث AHB می‌توان نوشت:

$$\cos30^\circ=\frac{HB}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\frac{d}{2}}{30}\Rightarrow d=30\sqrt{3}m$$



نمای ۱

B ۷۴۸ ۳

۳ با توجه به معادلهٔ مستقل از زمان سرعت در انتهای هر مرحله را به‌دست آورده و دربارهٔ نوع حرکت اظهار نظر می‌کنیم:

$$\bar{v}=\frac{v+v_0}{2}\Rightarrow4=\frac{v+0}{2}\Rightarrow v=8m/s$$

بنابراین در t ثانیهٔ اول، سرعت از صفر به $8m/s$ رسیده و حرکت تندشونده است.

در t ثانیهٔ دوم:

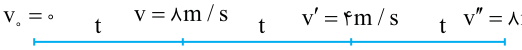
$$v_{av}=\frac{v'+v}{2}\Rightarrow6=\frac{v'+8}{2}\Rightarrow v'=4m/s$$

در این مرحله سرعت از $8m/s$ به $4m/s$ رسیده و حرکت کندشونده است.

در t ثانیهٔ سوم:

$$v_{av}=\frac{v''+v'}{2}\Rightarrow6=\frac{v''+4}{2}\Rightarrow v''=8m/s$$

در این مرحله سرعت از $4m/s$ به $8m/s$ رسیده و حرکت تندشونده است.



نمای ۲۵

A ۷۴۸ ۳

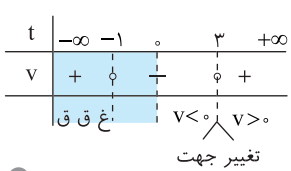
خط فکری ۴ جهت حرکت همان جهت سرعت متحرک است، بنابراین مدت زمانی که متحرک در جهت منفی محور در حرکت است یعنی مدت زمانی که سرعت منفی است. بنابراین شما باید ریشه‌های معادله سرعت - زمان $v=t^2-2t-3$ را به‌دست آورده، تابع را تعیین علامت کنید.

یادآوری ریاضی در تابع درجه دو $y=ax^2+bx+c$، علامت تابع بین دو ریشه مخالف علامت a و بیرون دو ریشه موافق علامت a است.

ابتدا ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم.

$$t^2-2t-3=0\Rightarrow(t-3)(t+1)=0\Rightarrow t=-1\,,\,t=3s$$

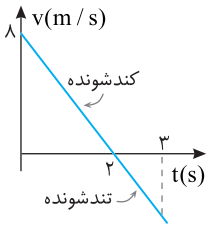
به کمک جدول روبه‌رو علامت سرعت را مشخص می‌کنیم. بنابراین در بازهٔ صفر تا ۳s سرعت منفی است. دقت کنید قسمت رنگی جدول به دلیل منفی بودن زمان $(t<0)$ است.



نمای ۱۶

A ۷۴۸ ۱

۵ **راه‌حل اول:** با استفاده از معادلهٔ مکان - زمان، معادلهٔ سرعت - زمان و شتاب - زمان را به‌دست آورده، تعیین علامت می‌کنیم.



$$\begin{cases} x=-2t^2+8t+10 \\ x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-4m/s^2, v_0=8m/s \Rightarrow v=at+v_0$$

$$\Rightarrow v=-4t+8 \xrightarrow{v=0} t=2s$$

سرعت در بازهٔ زمانی صفر تا ۲s مثبت و در بازهٔ ۲s تا ۳s منفی است، بنابراین ابتدا حرکت کندشونده $(av<0)$ و سپس حرکت تندشونده $(av>0)$ است.

راه‌حل دوم: کافی است نمودار سرعت - زمان را رسم کنیم. مشخص است که در بازهٔ صفر تا ۲s سرعت کاهش یافته و صفر شده سپس از ۲s تا ۳s بزرگی سرعت افزایش می‌یابد و گزینهٔ (۱) درست است.

میانبر هر گاه در معادلهٔ مکان زمان حرکت با شتاب ثابت روی خط راست ضریب t^2 و ضریب t ناهمنام باشند، حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است. نمای ۲۴

بازی با سوال **معادلهٔ حرکت جسمی که روی خط راست در حرکت است در SI به صورت $x=2t^2-3t-8$ می‌باشد. کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟**

۱) متحرک همواره در جهت مثبت محور در حرکت است.

۲) بردار مکان حتماً تغییر جهت می‌دهد.

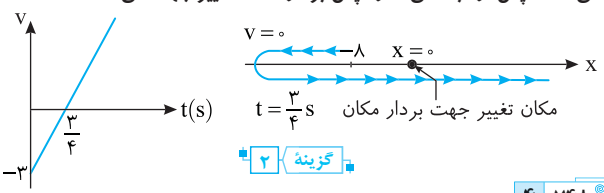
۳) متحرک در ابتدا در حال حرکت به سمت مبدأ است.

۴) متحرک در مکان‌های مثبت تغییر جهت می‌دهد.

پاسخ **معادلهٔ حرکت $x=2t^2-3t-8$ را با معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ مقایسه کرده و شتاب a و سرعت اولیه v_0 را به‌دست آورده و معادله سرعت زمان را می‌نویسیم.**

شتاب حرکت $a=+4m/s^2$ سرعت اولیه $-3m/s$ و مکان اولیه $-8m$ است. معادلهٔ سرعت - زمان و لحظهٔ تغییر جهت حرکت را به‌دست می‌آوریم: $v=4t-3=0 \Rightarrow t=\frac{3}{4}s$

بنابراین مطابق نمودار سرعت زمان رسم شده متحرک ابتدا در جهت منفی محور در حرکت است و در لحظهٔ $t=\frac{3}{4}s$ متوقف شده و در جهت مثبت محور حرکت می‌کند سپس از مبدأ می‌گذرد پس بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.



گزینهٔ ۲

B ۷۴۸ ۴

۶ **خط فکری** در حرکت با شتاب ثابت بهترین روش برای به‌دست آوردن مسافت طی شده از روی معادلهٔ حرکت این است که ابتدا معادلهٔ سرعت - زمان را به‌دست آورده سپس نمودار را رسم کرده و سرانجام در بازهٔ زمانی بیان شده مسافت را به کمک سطح زیر نمودار $v-t$ حساب کنید.

۱ معادلهٔ حرکت $x=-t^2+4t+5$ را با معادلهٔ مکان زمان حرکت با شتاب ثابت $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ مقایسه می‌کنیم.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a=-1 \Rightarrow a=-2m/s^2, v_0=4m/s \quad , \quad x_0=5m$$

۲ معادلهٔ سرعت - زمان را می‌نویسیم.

$$v=at+v_0 \Rightarrow v=-2t+4$$

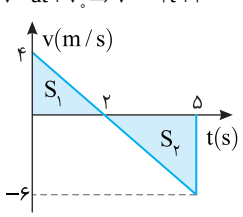
۳ نمودار سرعت زمان را رسم می‌کنیم.

البته باید بعضی از نقاط را مشخص کرد.

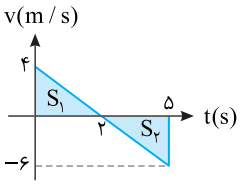
$$t=0 \Rightarrow v_0=4m/s \ ,$$

$$v=0 \Rightarrow -2t+4=0 \Rightarrow t=2s$$

$$t=5s \Rightarrow v=-2\times5+4 \Rightarrow v=-6m/s$$



۴ قدرمطلق سطح‌های محصور بین نمودار و محور زمان را جمع کنیم.



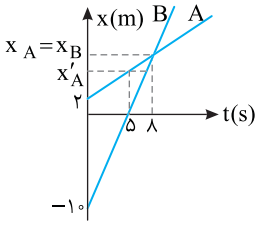
$$L=|S_1|+|S_2|$$

$$L=|\frac{4\times2}{2}|+|\frac{-6\times3}{2}|=13m$$

نمای ۳۲

B ۷۴۸ ۱

۷ **۱** به کمک شیب نمودار B مکان متحرک A و B را در لحظهٔ $t=8s$ به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{x_B-(-10)}{8-0}=\frac{0-(-10)}{5-0}$$

$$\Rightarrow \frac{x_B+10}{8}=2 \Rightarrow x_B=6m$$

در این لحظه x_A نیز $x_A=x_B=6$ است.

۲ لحظهٔ گذر B از مبدأ $t=5s$ است. به کمک شیب نمودار A در این لحظه مکان متحرک A را که روی شکل با x'_A نشان داده‌ایم حساب می‌کنیم.

$$\frac{6-2}{8-0}=\frac{x'_A-2}{5-0} \Rightarrow \frac{4}{8}=\frac{x'_A-2}{5} \Rightarrow 2/5=x'_A-2 \Rightarrow x'_A=4/5m$$

نمای ۱۴

A ۷۴۸ ۱

۸ متحرک از حال سکون ۴s با شتاب ثابت حرکت کرده و سرعتش در حال افزایش است یعنی در هر ثانیه جابه‌جایی آن از ثانیهٔ قبلی باید بیشتر باشد. از لحظه $t=4s$ تا لحظهٔ $t=7s$ باید جابه‌جایی یکسان باشند زیرا سرعت ثابت است بعد از $t=7s$، با شتاب ثابت قرینهٔ شتاب قسمت اول از سرعت خود می‌کاهد بنابراین در هر ثانیه جابه‌جایی آن کوچک‌تر از ثانیهٔ قبل است این مشخصات با گزینه (۱) هماهنگی دارد. نمای ۳۵

A ۷۴۸ ۲

۹ کافی است لحظهٔ گذر از مکان $x_0=-3m$ با تندی $v_0=1/5m/s$ را مبدأ زمان $(t=0)$ بگیریم و سپس به کمک معادلهٔ حرکت مکان متحرک را در $t=4s$ به‌دست بیاوریم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$$

$$x=\frac{1}{2}\times2\times(4)^2+1/5\times4+(-3)=16+6-3 \Rightarrow x=19m$$

نمای ۲۲

B ۷۴۸ ۲

۱۰ **راه‌حل اول:** استفاده از معادلهٔ مستقل از شتاب:

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}t \Rightarrow 9=\frac{0+v_0}{2}\times1/5 \Rightarrow v_0=12m/s$$

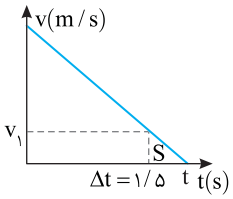
بنابراین شتاب خواهد شد:

$$a=\frac{v-v_0}{t} \Rightarrow a=\frac{0-12}{1/5} \Rightarrow a=-8m/s^2 \Rightarrow |a|=8m/s^2$$

راه‌حل دوم: کافی است متحرکی را فرض کنیم که از حال سکون با شتاب ثابت به حرکت در آمده است و در مدت ۱/۵s جابه‌جایی ۹ متر را طی کرده است.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 9=\frac{1}{2}a(1/5)^2 \Rightarrow a=8m/s^2$$

راه‌حل سوم: نمودار سرعت زمان با توجه به صورت مسئله سطح S برابر ۹ واحد است از این‌رو می‌توان نوشت:



$$S=\Delta x=\frac{v_1\Delta t}{2} \Rightarrow 9=\frac{v_1\times1/5}{2}$$

$$\Rightarrow v_1=12m/s$$

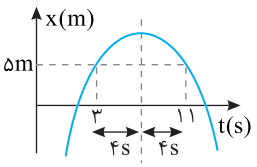
شتاب ثابت را از هر قسمت از حرکت می‌توان حساب کرد. از این‌رو:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a=\frac{0-12}{1/5}=-8m/s^2 \Rightarrow |a|=8m/s^2$$

نمای ۲۶

A ۷۴۸ ۲

۱۱ متحرک دارای شتاب ثابت است و در حال حرکت در جهت مثبت حرکت بود و در لحظهٔ $t=۷s$ بیشترین فاصله مثبت از مبدأ را داشته یعنی در این لحظه سرعت متحرک صفر شده و جهت حرکت متحرک تغییر کرده است.



در حرکت با شتاب ثابت معادلهٔ مکان-زمان تابع درجه ۲ است $(x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰)$ و نمودار سهمی است و خط گذرنده از رأس سهمی خط تقارن سهمی است.

در $t=۷s$ مکان بیشینه است یعنی $t=۷s$ رأس سهمی است و در فاصله‌های زمانی یکسان از $t=۷s$ مکان‌ها یکسان است، پس در $t=۳s$ و $t=۱۱s$ مکان $+۵m$ است (به شکل سهمی دقت کنید).

نمای ۲۶

B ۷۴۸ ۳

۱۲ **نکته** در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ سرعت متوسط متحرک با سرعت در لحظهٔ وسط بازه زمانی برابر است. $v_{\frac{t_۱+t_۲}{۲}}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}$

۱ در ثانیهٔ دوم سرعت متوسط $۸m/s$ شده است. ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ زمانی بین $۱s$ تا $۲s$ است و لحظه وسط این بازه برابر $t=۱/۵s$ است و سرعت در این لحظه برابر سرعت متوسط یعنی $v_{۱/۵s}=۸m/s$ است.

۲ در ثانیهٔ چهارم یعنی بازهٔ زمانی $t=۳s$ تا $t=۴s$، سرعت متوسط $۱۶m/s$ شده است یعنی سرعت در لحظهٔ $\frac{۳+۴}{۲}=۳/۵s$ برابر $۱۶m/s$ است.

۳ شتاب حرکت را در بازهٔ $۱/۵s$ تا $۳/۵s$ حساب می‌کنیم که شتاب کل مسیر حرکت است.

$$a=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{۱۶-۸}{۳/۵-۱/۵}=۴m/s^۲$$

نمای ۲۵ و ۳۷

B ۷۴۸ ۲

۱۳ در قسمت اول حرکت متحرک با شتاب ثابت $۲m/s^۲$ به سرعت $۱۰m/s$ می‌رسد. مدت زمان حرکت با این شتاب و جابه‌جایی در این مدت را حساب می‌کنیم.

$$v_۱=at+v_۰ \xrightarrow{v_۰=۰} ۱۰=۲t_۱\Rightarrow t_۱=۵s\ ,\ \Delta x_۱=\frac{۱}{۲}at_۱^۲+v_۰t_۱$$

$$\xrightarrow{t_۱=۵s}\Delta x_۱=\frac{۱}{۲}\times۲\times(۵)^۲\Rightarrow\Delta x_۱=۲۵m$$

۲ در قسمت دوم متحرک $۳s$ با سرعت ثابت $۱۰m/s$ حرکت می‌کند و جابه‌جایی آن خواهد شد:

$$\Delta x_۲=vt_۲\Rightarrow\Delta x_۲=۱۰(۳)\Rightarrow\Delta x_۲=۳۰m$$

۳ در قسمت سوم متحرک با شتاب $a=-۲m/s^۲$ سرعتش از $۱۰m/s$ کاهش می‌یابد تا به صفر برسد

$$v=at_۳+v_۰\Rightarrow۰=-۲t+۱۰\Rightarrow t_۳=۵s$$

مدت زمان و جابه‌جایی در قسمت کندشونده را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x_۳=\frac{۱}{۲}at_۳^۲+v_۰t_۳\Rightarrow\Delta x_۳=\frac{۱}{۲}(-۲)(۵)^۲+۱۰(۵)\Rightarrow\Delta x_۳=۲۵m$$

۴ اکنون می‌توان تندی متوسط را به دست آورد.

$$s_{av}=\frac{L}{\Delta t}=\frac{\Delta x_۱+\Delta x_۲+\Delta x_۳}{\Delta t_۱+\Delta t_۲+\Delta t_۳}=\frac{۲۵+۳۰+۲۵}{۵+۳+۵}=\frac{۸۰}{۱۳}m/s$$

نمای ۳۵

B ۷۴۸ ۳

۱۴ متحرک اول دارای حرکت با شتاب ثابت $۲m/s^۲$ است و بدون سرعت اولیه به راه می‌افتد. معادلهٔ حرکت آن را می‌نویسیم:

$$x_۱=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow x_۱=\frac{۱}{۲}\times۲t_۱^۲\Rightarrow x_۱=t_۱^۲$$

متحرک دوم $۵s$ بعد از متحرک اول به راه می‌افتد، یعنی اگر مدت زمان حرکت متحرک اول $t_۱$ باشد مدت زمان حرکت متحرک دوم $t_۲=t_۱-۵$ خواهد بود. از این‌رو معادلهٔ حرکت متحرک دوم خواهد شد:

$$x_۲=vt_۲\Rightarrow x_۲=۵(t_۱-۵)$$

معادلهٔ دو متحرک را با هم قرار می‌دهیم:

$$x_۱=x_۲\Rightarrow t_۱^۲=۵t_۱-۲۵\Rightarrow t_۱^۲-۵t_۱+۲۵=۰\Rightarrow\Delta=b^۲-۴ac=۲۵-۱۰۰<۰$$

معادله بدون جواب است یعنی دو متحرک هرگز به هم نمی‌رسند.

نمای ۳۴

بازی با سوال **متحرک A با شتاب ثابت $۱m/s^۲$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کند، هم‌زمان با آن متحرک B از ۱۰۰ متر عقب‌تر در همان جهت با سرعت ثابت $۵۴km/h$ به دنبال A به راه می‌افتد. دو متحرک در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه از کنار هم می‌گذرند؟**

۱) ۱۰ و ۲۰ **۲)** ۱۰ و ۳۰ **۳)** ۲۰ و ۳۰ **۴)** ۱۵ و ۲۵

پاسخ **معادلهٔ حرکت دو متحرک را و نوشته و برابر قرار می‌دهیم:**

معادلهٔ حرکت متحرک A را می‌نویسیم محل شروع حرکت متحرک A مبدأ مکان فرض می‌کنیم.

$$x_A=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow x_A=\frac{۱}{۲}t^۲$$

متحرک B از ۱۰۰ متر عقب‌تر هم‌زمان با سرعت $۵۴km/h$ به راه می‌افتد. سرعت B را بر حسب m/s به‌دست می‌آوریم.

$$v_B=۵۴km/h=۵۴\times\frac{۱۰۰۰m}{۳۶۰۰s}\Rightarrow v_B=۱۵m/s$$

معادلهٔ حرکت B را نوشته و با معادلهٔ حرکت A برابر قرار می‌دهیم.

$$x_B=vt+x_۰\Rightarrow x_B=۱۵t-۱۰۰\ ,\ x_A=x_B\Rightarrow\frac{۱}{۲}t^۲=۱۵t-۱۰۰$$

$$t^۲-۳۰t+۲۰۰=۰\Rightarrow(t-۱۰)(t-۲۰)=۰\Rightarrow t=۱۰s\ ,\ t=۲۰s$$

گزینهٔ ۱

B ۷۴۸ ۳

۱۵ **خط فکری** شتاب حرکت متحرک اول داده نشده، زمان رسیدن دو متحرک به هم از شما خواسته نشده بلکه سرعت متحرک اول در لحظهٔ رسیدن به متحرک دوم از شما خواسته شده بنابراین برای متحرک اول از معادلهٔ مستقل از شتاب و برای متحرک دوم معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت را بنویسید و برابر قرار دهید.

جابه‌جایی دو متحرک یکسان است. متحرک اول دارای حرکت با شتاب ثابت با تندی اولیهٔ $\frac{v}{۲}$ و متحرک دوم دارای حرکت با تندی ثابت v است، بنابراین:

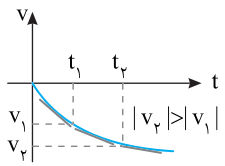
$$\Delta x_۱=\frac{v_۲+v_۱}{۲}\Delta t\Rightarrow\Delta x_۱=\frac{v'+\frac{v}{۲}}{۲}\Delta t,\ \Delta x_۲=v\Delta t$$

$$\Rightarrow\Delta x_۱=\Delta x_۲\Rightarrow v\Delta t=\frac{v'+\frac{v}{۲}}{۲}\Delta t\Rightarrow v'=\frac{۳v}{۲}$$

نمای ۳۴

B ۷۴۸ ۲

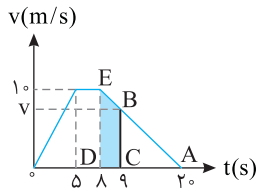
۱۶ به نمودار دقت کنید. تندی متحرک در حال افزایش است و حرکت تندشونده است. از طرفی نمودار سرعت زمان سهمی است بنابراین قطعاً حرکت دارای شتاب ثابت نیست زیرا نمودار $v-t$ حرکت با شتاب ثابت خط راست مایل است بنابراین شتاب این متحرک متغیر است.



نمای ۱۸

B ۷۴۸ ۳

۱۷ باید مساحت سطح رنگی را به‌دست آورید. قاعدهٔ بزرگ این ذوزنقه $ED=۱۰$ است. باید قاعدهٔ کوچک آن (BC) یعنی سرعت v را به کمک شیب خط AE به‌دست آورد.



$$\frac{۰-۱۰}{۲۰-۸}=\frac{۰-v}{۲۰-۹}\Rightarrow v=\frac{۱۱۰}{۱۲}m/s$$

اکنون جابه‌جایی را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=S\Rightarrow S=\frac{۱۰+\frac{۱۱۰}{۱۲}}{۲}\times۱=\frac{۲۳۰}{۲\times۱۲}=\frac{۱۱۵}{۱۲}m$$

نمای ۴۰

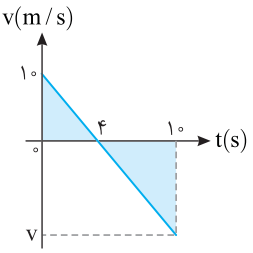
B ۷۴۸ ۲

۱۸ شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-10}{4}=-2/5m/s^2$$

مکان را حساب می‌کنیم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$$



$$x=\frac{1}{2}(-2/5)(100)+10\times10+2\Rightarrow x=-125+100+2\Rightarrow x=-23m$$

روش استفاده از سطح زیر نمودار:

۱ ابتدا سرعت در لحظهٔ $t=10s$ را به کمک شیب خط حساب می‌کنیم:

$$\frac{v-10}{10-0}=\frac{0-10}{4-0}\Rightarrow v=-15m/s$$

۲ سطح زیر نمودار را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=S\Rightarrow x-x_0=\frac{10\times4}{2}+\left(\frac{-15\times6}{2}\right)\xrightarrow{x_0=2m}$$

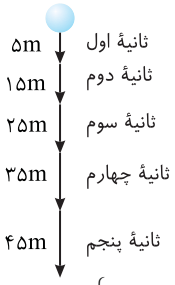
$$x-2=20+(-45)\Rightarrow x=-23m$$

نمای ۴۰

B ۷۴۸ ۱

۱۹ **راه‌حل اول:** با استفاده از دنبالهٔ حسابی مسافت‌های طی شده در سقوط آزاد و با توجه به شکل روبه‌رو جابه‌جایی در ۳s آخر برابر است با:

$$25+35+45=105m$$



راه‌حل دوم: در لحظه‌های $t=2s$ و $t=5s$ سرعت را به دست آورده و به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب مسأله را حل می‌کنیم.

$$v=gt+v_0\begin{cases}t=2s\Rightarrow v_1=10\times2=20m/s\\ t=5s\Rightarrow v_2=10\times5=50m/s\end{cases}$$

$$\Delta y=\frac{v_2+v_1}{2}\Delta t=\frac{50+20}{2}\times3=105m$$

راه‌حل سوم: استفاده از معادلهٔ حرکت

$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2+v_0t\begin{cases}t=2s\Rightarrow \Delta y=\frac{1}{2}\times10\times4=20m\\ t=5s\Rightarrow \Delta y=\frac{1}{2}\times10\times25=125m\end{cases}$$

اکنون جابه‌جایی در ۳ ثانیهٔ آخر برابر است با: $125-20=105m$

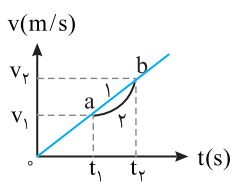
راه‌حل چهارم: استفاده از جابه‌جایی در n ثانیه:

$$\Delta y=\frac{n}{2}g(2t-n)+nv_0\Rightarrow \Delta y=\frac{3}{2}\times10(2\times5-3)+3\times0\Rightarrow \Delta y=105m$$

نمای ۴۵

B ۷۴۸ ۲

۲۰ چون نمودار منحنی است، پس حرکت با شتاب متغیر می‌باشد. بنابراین $v_{av}\neq\frac{v_1+v_2}{2}$ خواهد بود. زیرا فقط در حرکت با شتاب ثابت که نمودار سرعت - زمان آن خط راست بوده سرعت متوسط برابر $v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}$ است.



از طرفی سطح زیر نمودار سرعت - زمان برابر تغییر مکان متحرک است و سطح زیر نمودار (۲) در بازهٔ t_1 تا t_2 از سطح زیر نمودار یک حرکت فرضی با شتاب ثابت مانند نمودار (۱) کمتر است، پس سرعت متوسط در نمودار (۲) از سرعت متوسط در نمودار (۱) کمتر خواهد بود.

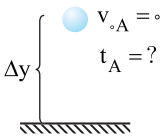
$$S_2<S_1\Rightarrow \Delta x_2<\Delta x_1\Rightarrow v_{av,2}<v_{av,1}\Rightarrow v_{av}<\frac{v_1+v_2}{2}$$

نمای ۴۰

B ۷۴۸ ۴

۲۱ جهت مثبت را برای سادگی رو به پایین اختیار می‌کنیم.

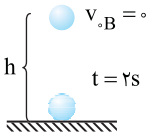
ابتدا زمان سقوط گلولهٔ A را حساب می‌کنیم.



$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow 44/1=\frac{1}{2}\times9/8t_A^2$$

$$\Rightarrow t_A=3s$$

گلولهٔ B هم‌زمان با گلولهٔ A به زمین می‌رسد و 1s با تأخیر رهاشده پس مدت زمان سقوط گلولهٔ B برابر $t_B=3-1=2s$ است. اکنون h را به‌دست می‌آوریم:

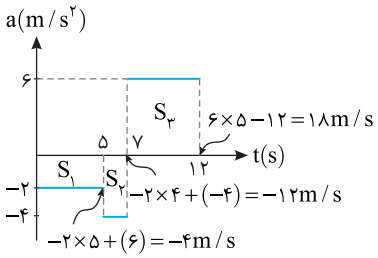


$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow h=\frac{1}{2}\times9/8\times(2)^2\Rightarrow h=19/6s$$

نمای ۴۵

B ۷۴۸ ۴

۲۲ **خط فکری** یک مسئله محاسباتی ریاضی در اختیار داریم. باید نمودار سرعت - زمان را با دقت رسم کنید و جابه‌جایی و مکان متحرک را از سطح زیر نمودار حساب کرده و مشخص کنید که دورترین فاصله متحرک از مبدأ چند متر است.



۱ سرعت در لحظه‌های $t=5s$، $t=7s$ و $t=12s$ را حساب می‌کنیم.

$$t=5s:S_1=\Delta v\Rightarrow -2\times5=v_1-6\Rightarrow v_1=-4m/s$$

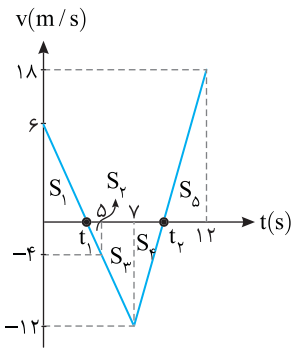
$$t=7s:S_2=\Delta v_2\Rightarrow -4\times(7-5)=v_2-(-4)$$

$$\Rightarrow -8=v_2+4\Rightarrow v_2=-12m/s$$

$$t=12s:S_3=\Delta v_3\Rightarrow 6\times(12-7)=v_3-(-12)$$

$$\Rightarrow v_3=30-12\Rightarrow v_3=18m/s$$

۲ نمودار را رسم می‌کنیم.



۳ لحظه‌های t_1 و t_2 را به کمک شیب خط مشخص می‌کنیم.

$$\frac{6-(-4)}{5-0}=\frac{6-0}{t_1-0}\Rightarrow t_1=3s$$

$$\frac{18-(-12)}{12-7}=\frac{18-0}{12-t_2}$$

$$\Rightarrow 12-t_2=3\Rightarrow t_2=9s$$

۴ مکان در لحظه‌های 3s، 5s، 7s، 9s و 12s را به‌دست می‌آوریم.

$$t=3s\ :S_1=\Delta x_1\Rightarrow\frac{6\times3}{2}=x_1-4\Rightarrow x_1=13m$$

$$t=5s\ :S_2=\Delta x_2\Rightarrow\frac{(5-3)\times(-4)}{2}=x_2-13\Rightarrow x_2=9m$$

$$t=7s\ :S_3=\Delta x_3\Rightarrow\frac{-4+(-12)}{2}\times2=x_3-9\Rightarrow x_3=-7m$$

$$t=9s\ :S_4=\Delta x_4\Rightarrow\frac{-12\times(9-7)}{2}=x_4-(-7)\Rightarrow x_4=-19m$$

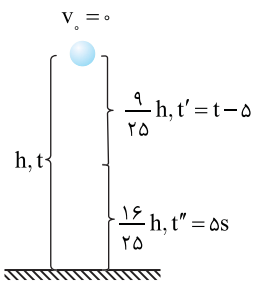
$$t=12s\ :S_5=\Delta x_5\Rightarrow\frac{18\times(12-9)}{2}=x_5-(-19)\Rightarrow x_5=+8m$$

۵ بنابراین در لحظهٔ $t=9s$ دورترین فاصله از مبدأ 19m است.

نمای ۴۲

B ۳ ۷۴۸

۲۳ خط فکری گلوله از ارتفاع h رها شده و سرعت اولیه صفر است. مدت زمانی که طول می‌کشد گلوله به زمین برسد را t در نظر بگیریم می‌توان برای جابه‌جایی قسمت اول و کل مسیر شکل روبه‌رو معادلهٔ جابه‌جایی - زمان $\Delta y=\frac{1}{2}gt^2$ را نوشت:



۱ در مدت t، گلوله به اندازهٔ h سقوط می‌کند. $h=\frac{1}{2}gt^2$ (۱)

۲ در مدت $t-5$، گلوله به اندازهٔ $h-\frac{16}{25}h=\frac{9}{25}h$ سقوط می‌کند:

$$\frac{9}{25}h=\frac{1}{2}g(t-5)^2 \quad (2)$$

۳ دو معادله را بر هم تقسیم می‌کنیم:

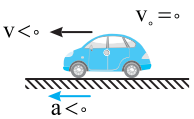
$$\frac{h}{\frac{9}{25}h}=\frac{\frac{1}{2}gt^2}{\frac{1}{2}g(t-5)^2}\Rightarrow\frac{25}{9}=(\frac{t}{t-5})^2\Rightarrow\frac{t}{t-5}=\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow 3t=5t-25\Rightarrow 2t=25\Rightarrow t=12/5s$$

نمای ۴۵

C ۳ ۷۴۸

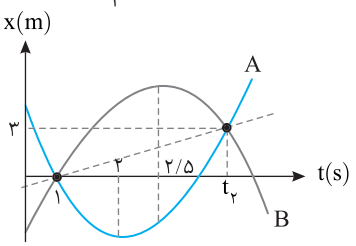
۲۴ متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده است. در بازهٔ زمانی صفر تا ۲s در جهت منفی محور، با شتاب منفی بر تندی آن افزوده می‌شود. دقت کنید شتاب منفی به معنی حرکت کندشونده نیست. اگر مطابق شکل، متحرک از مبدأ و خلاف جهت محور، شروع به حرکت کند، با شتاب منفی دارای حرکت تندشونده است زیرا بردار سرعت و شتاب هم‌جهت است. در لحظهٔ $t=2s$، شتاب تغییر جهت (علامت) داده است یعنی شتاب مثبت است اما همچنان سرعت منفی است و حرکت بعد از $t=2s$ کندشونده است، پس بیشترین سرعت در $t=2s$ است.



نمای ۴۲

C ۳ ۷۴۸

۲۵ نکته هرگاه دو متحرک دارای حرکت با شتاب ثابت، یکبار در لحظهٔ t_1 از کنار هم بگذرند و مجدداً در لحظهٔ t_2 نیز از کنار هم بگذرند در لحظهٔ $t=\frac{t_1+t_2}{2}$، سرعت آن‌ها با هم برابر است.



به نمودار نگاه کنید در لحظهٔ $t_1=1s$ و در لحظهٔ t_2 دو متحرک از کنار هم می‌گذرند و در لحظهٔ $t=2/5s$ سرعت آن‌ها با هم برابر است. از این‌رو لحظهٔ t_2 خواهد شد:

$$t=\frac{t_1+t_2}{2}\Rightarrow 2/5=\frac{1+t_2}{2}\Rightarrow t_2=4s$$

با توجه به نمودار متحرک A باید نقاط $(1,0)$ و $(3,4)$ در معادلهٔ حرکت صدق کند.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \xrightarrow{t=1s} 0=\frac{1}{2}a+v_0+x_0 \quad (1)$$

$$\xrightarrow{t=4s} 3=\frac{1}{2}a\times 4^2+4v_0+x_0\Rightarrow 3=8a+4v_0+x_0 \quad (2)$$

برای رأس سهمی $t=2s$ می‌توان نوشت:

$$t=\frac{-b}{2a}\Rightarrow 2=\frac{-v_0}{2(\frac{1}{2}a)}\Rightarrow v_0=-2a \quad (3)$$

دو رابطه (۱) و (۲) را از هم کم می‌کنیم:

$$3=8a+4v_0+x_0$$

$$0=\frac{1}{2}a+v_0+x_0$$

$$3=7/5a+3v_0$$

از رابطهٔ (۳) در رابطهٔ بالا جای‌گذاری می‌کنیم:

$$3=7/5a+3(-2a)\Rightarrow 3=1/5a\Rightarrow a=2m/s^2$$

نمای ۳۹

فصل دوم

دینامیک و حرکت دایره‌ای



پنجره ۱

A ۴ ۷۴۹

اثر نیرو بر یک جسم به شکل‌های مختلف مانند شروع به حرکت، توقف، کم و زیاد شدن تندی، تغییر جهت سرعت و تغییر شکل جسم، خود را نشان می‌دهد. به‌طور خلاصه «نیروی وارد بر جسم می‌تواند سبب تغییر سرعت جسم یا تغییر شکل آن شود» بنابراین هر سه گزینه درست است.

A ۱ ۷۵۰

یادآوری «یک جسم، حالت سکون یا حرکت با سرعت ثابت خود را حفظ می‌کند مگر آنکه نیروی خالصی (غیرصفر) به آن وارد شود.» (قانون اول نیوتون)

به عبارت بهتر وقتی نیروهای وارد بر جسمی متوازن باشند وقتی که جسم در حال حرکت باشد سرعت جسم تغییر نمی‌کند و ثابت می‌ماند.

بازی با سوال **هنگامی که برایند نیروهای وارد بر جسم صفر است، کدام گزارهٔ زیر درست است؟**

۱) جسم الزاماً ساکن است.

۲) جسم الزاماً در حال حرکت است.

۳) جسم ممکن است ساکن یا متحرک باشد.

۴) جسم الزاماً دارای حرکت با سرعت ثابت است.

پاسخ **بنابر قانون اول نیوتون، هرگاه بر جسمی نیرو وارد نشود، اگر جسم ساکن است، ساکن می‌ماند (تعادل ایستا)، اگر در حال حرکت است، به حرکت با سرعت ثابت ادامه می‌دهد (تعادل جنبشی).** گزینهٔ ۳

A ۱ ۷۵۱

آزمایش گالیله بیانگر قانون اول نیوتون می‌باشد که هرگاه جسمی در حال حرکت با سرعت ثابت باشد و به آن نیروی خالصی وارد نشود به حرکت با همان سرعت ادامه خواهد داد.

A ۳ ۷۵۲

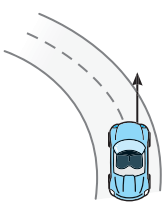
با توجه به قانون اول جسم درون واگن قطار تمایل دارد حرکت خود را حفظ کند. بنابراین می‌توان گفت هنگامی که شخص درون واگن قرار دارد همواره از تغییر حرکت لحظه‌ای قطار جا می‌ماند. یعنی هنگامی که قطار ترمز می‌کند شخص با همان سرعت قبلی در حال حرکت می‌باشد، پس به سمت جلو منحرف می‌شود و هنگامی که حرکت قطار تندشونده می‌شود و ناگهان سرعت قطار افزایش یابد، شخص با همان سرعت کم در حال حرکت است پس شخص به سمت عقب منحرف می‌شود. در پاسخ این تست‌ها همواره به زندگی روزمرهٔ خود دقت کنید. اگر در اتوبوس ایستاده باشید و اتوبوس ناگهان ترمز کند رو به جلو منحرف می‌شود و اگر از حال سکون ناگهان به راه بیفتد به سمت عقب منحرف می‌شوید.

A ۲ ۷۵۳



بناهای ساختمانی وقتی سر چکش آن‌ها مقداری شُل می‌شود، دستهٔ آن را محکم به سطح زمین می‌کوبند. زیرا آن‌ها به‌طور تجربی می‌دانند با این حرکت، دسته چکش که رو به پایین در حرکت است ناگهان متوقف می‌شود. اما سرچکش به حرکت خود رو به پایین (بنا به قانون اول) ادامه می‌دهد. در چکش‌ها معمولاً ضخامت دستهٔ چکش از سر تا ته آن افزایش می‌یابد. بنابراین با پایین رفتن سر چکش، درگیری سر چکش با دسته بیشتر می‌شود و دسته در سر چکش سفت می‌شود.

B ۴ ۷۵۴



تمایل اجسام به حفظ وضع موجود را لختی جسم می‌گوییم. در واقع وقتی خودرو با سرعت v روی خط راست در حرکت است، شما نیز روی خط راست با سرعت v در حرکت هستید. وقتی خودرو دور می‌زند، شما بنابر قانون اول نیوتون تمایل دارید بر مسیر مستقیم حرکت کنید و به سمت خارج پیچ متمایل می‌شوید. قانون اول نیوتون را اصل اینرسی (لختی) نیز می‌گویند.

B ۴ ۷۵۵

در پاسخ به این پرسش باید به مفهوم لختی بپردازیم. جسم بنا به قانون اول نیوتون در مقابل تغییر سرعت از خود مقاومت نشان می‌دهد، یعنی جسم تمایل دارد وضع موجود خود را حفظ کند. به این مقاومت، لختی گویند.

اگر نخ پایینی را به سرعت بکشیم، لختی وزنه مانع حرکت کردن وزنه شده و نخ از پایین وزنه پاره می‌شود. اما اگر نخ پایینی را به آرامی پایین بکشیم، نیروی F و وزن وزنه با هم جمع شده و نخ از قسمت بین وزنه و سقف یعنی از قسمت بالایی پاره می‌شود.

A ۲ ۷۵۶

اتومبیل B ساکن است و می‌خواهد حالت خود را حفظ کند هنگامی که A ناگهان شروع به حرکت کند مقاومت اتومبیل B در مقابل تغییر حالت (لختی B) سبب پاره‌شدن سیم بکسل می‌شود.

به‌طور مثال: اگر یک نایلکس را پر از سیب‌زمینی کرده و شما دسته نایلکس را بگیرید و بخواهید ناگهان آن را از سطح زمین بلند کنید، به دلیل لختی، امکان دارد دستهٔ نایلکس پاره شود.

A ۲ ۷۵۷

نکته اگر در خودرو نشسته باشید و خودرو با تندی ثابت دور میدانی به سمت چپ بچرخد شما به سمت خارج پیچ (به سمت راست) منحرف می‌شوید که این پدیده شاهدی بر قانون اول نیوتون است.



عروسکی که از نخ آویزان است اگر اتومبیل ترمز کند، عروسک به حرکت خودرو به جلو ادامه می‌دهد و گزینهٔ (۱) نادرست است.

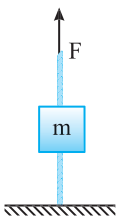
اگر اتومبیل به سمت چپ در حال پیچیدن باشد از دید شخص درون اتومبیل عروسک به سمت راست منحرف می‌شود. زیرا می‌خواهد مطابق شکل بنا به قانون اول نیوتون به حرکت خود ادامه دهد و گزینهٔ (۲) درست و گزینهٔ (۳) نادرست است.

وقتی تندی اتومبیل (بزرگی سرعت آن) ثابت باشد، ممکن است جهت سرعت آن تغییر کند و گزینهٔ (۴) نادرست است.

B ۴ ۷۵۸

بنا به خاصیت لختی اگر خودرو شتاب رو به جلو داشته باشد، آونگ رو به عقب منحرف می‌شود و در حرکت دایره‌ای همواره آونگ به سمت خارج پیچ (به‌سمت بیرون دایره) منحرف می‌شود.

B ۲ ۷۵۹



نکتهٔ مهم در حل این مسئله این است که آیا وزن وزنهٔ m در کشیدگی و پاره شدن ریسمان پایینی مؤثر است؟

فرض کنید که وزنهٔ m روی سطح زمین قرار دارد و ریسمان پایینی به آن متصل است اگر نیروی F را به تدریج و یا ناگهانی به ریسمان وارد کنیم در هر دو حالت نیرو ریسمان بالایی را می‌کشد و می‌تواند آن را پاره کند.

اگر مطابق شکل نیروی F وزنه را از سطح زمین بلند کند و ریسمان پایینی را بکشد همواره کشیدگی ریسمان پایینی از کشیدگی ریسمان بالایی کمتر بوده و احتمال پاره شدن ریسمان بالایی بیشتر است.

A ۴ ۷۶۰

یادآوری قانون دوم نیوتون: هرگاه بر جسمی نیرو وارد شود، جسم در جهت نیرو، شتابی می‌گیرد که با نیرو متناسب و با جرم جسم نسبت وارون دارد. $\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}$

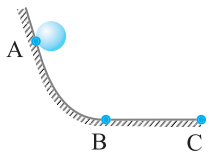
ممکن است نیروی خالص وارد بر جسم در خلاف جهت حرکت جسم باشد و باعث توقف جسم شود بنابراین گزینهٔ (۱) و (۳) نادرست است.

اگر نیروی خالص وارد بر جسم ثابت باشد، شتاب جسم نیز ثابت است و گزینهٔ (۲) نادرست است.

وقتی بر جسم نیروی خارجی خالصی وارد شود، بنابه قانون دوم نیوتون $(\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m})$، جسم شتاب می‌گیرد و گزینهٔ (۴) درست است.

A ۷۶۱ ۳

جسم در نقطهٔ A رها شده و شروع به حرکت کرده بنابراین حرکتش شتاب‌دار است و نیروی خالص وارد بر جسم قطعاً صفر نیست. $F_{net_1} \neq 0$

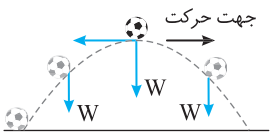


جسم در مسیر BC روی سطح افقی کاملاً صیقلی قرار دارد و نیرویی در جهت حرکت و یا در خلاف جهت حرکت بر آن وارد نمی‌شود و با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد بنابراین نیروهای وارد بر آن متوازن بوده و $F_{net_2} = 0$ است.

B ۷۶۲ ۴

نکته چگونگی حرکت جسم پس از وارد آمدن نیرو، به سرعت اولیهٔ جسم و زاویه‌ای که نیرو با راستای سرعت اولیه می‌سازد، بستگی دارد.

اگر جسم ساکن باشد و بر آن یک نیرو وارد شود، جسم در راستای نیرو شروع به حرکت می‌کند و اگر نیرو تغییر جهت ندهد، حرکت جسم روی خط راست است.



بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

اگر جسم دارای سرعت اولیه باشد، مثلاً گلوله‌ای که در شرایط خلأ مطابق شکل، پرتاب شود، در تمام مسیر نیروی وارد بر جسم نیروی گرانشی و رو به پایین است، اما مسیر حرکت خمیده است. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

اگر یک اتوبوس دور یک میدان با تندی ثابت در حال حرکت باشد چون مسیر آن خمیده است حرکت آن شتابدار است و نیروی خالص وارد بر آن صفر نیست بنابراین ممکن است که بر جسم نیرو وارد شود و بزرگی سرعت (تندی) آن ثابت بماند. پس گزینهٔ (۳) نیز درست است.

A ۷۶۳ ۴

نکته برایند نیروهای وارد بر جسم، تنها شتاب حرکت را مشخص می‌کند و در مورد جهت حرکت جسم به تنهایی اطلاعاتی نمی‌دهد. $\vec{F}=m\vec{a}$

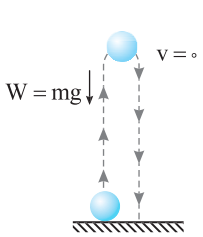
نیروی خاص وارد بر جسم رو به شمال است، بنابراین شتاب حرکت بنا به قانون دوم نیوتون $(\vec{F}=m\vec{a})$ رو به شمال است. حرکت متحرک کندشونده باشد، جهت سرعت در خلاف جهت شتاب و رو به جنوب است و گزینهٔ (۱) درست است.

اگر حرکت تندشونده باشد، جهت سرعت باید در جهت شتاب باشد یعنی متحرک رو به شمال در حرکت است و گزینهٔ (۲) درست است.

اگر مسیر خمیده باشد، نیروی وارد بر جسم و سرعت جسم با هم زاویه می‌سازند، بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

B ۷۶۴ ۲

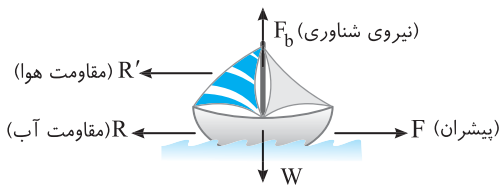
اگر نیروهای وارد بر جسم در بالاترین نقطه مسیر متوازن باشند بنا به قانون اول نیوتون جسم باید ساکن باقی بماند اما جسم به سوی پایین برمی‌گردد بنابراین در بالاترین نقطهٔ مسیر نیروها متوازن نیستند و در طول مسیر رفت و برگشت به جسم نیروی وزن رو به پایین وارد می‌شود. بنابراین جسم در بالاترین نقطهٔ مسیر به‌طور لحظه‌ای ساکن است اما در تعادل نیست. $(F_{net} \neq 0)$



B ۷۶۵ ۴

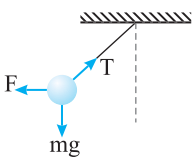
یادآوری اگر جسمی درون مایعی قرار گیرد از طرف مایع بر آن نیرویی رو به بالا وارد می‌شود که منشأ این نیرو اختلاف فشار مایع در عمق‌های مختلف است و همین نیرو است که کشتی‌ها را بر سطح آب شناور نگه می‌دارد که به آن نیروی شناوری (F_b) گویند. منظور از نیروی پیشران نیز همان نیروی موتور قایق یا نیرویی که باد بر بادبان‌ها وارد می‌کند یا نیرویی است که در اثر پارو زدن باعث پیشروی قایق می‌شود. قایق با سرعت ثابت در حال حرکت روی سطح دریاچه آرام است. بنابراین نیروهای وارد بر آن متوازن هستند و بر آن چهار نیرو وارد می‌شود:

۱ نیروی شناوری ۲ نیروی وزن ۳ نیروی پیشران (F)
۴ نیروی مقاومت آب R (و هوا R′)



A ۷۶۶ ۳

برای آن که یک گلولهٔ متصل به نخ را از راستای قائم منحرف کرده و ثابت نگه دارید قطعاً باید بر آن نیرویی مانند F وارد کنید. بنابراین حداقل تعداد نیروهای وارد بر گلوله که باعث می‌شود گلوله در این وضعیت ساکن بماند، سه نیروی نشان داده شده در شکل است.



B ۷۶۷ ۱

گلوله در حال سقوط آزاد است و به آن نیروی وزن mg وارد می‌شود. برای آن‌که حرکت آن کندشونده شود و متوقف گردد باید نیروی F رو به بالا بر آن وارد شود که این نیرو باید از W بزرگ‌تر باشد تا نیروی خالص وارد بر گلوله رو به بالا و خلاف جهت حرکت بوده سبب کاهش سرعت شده و گلوله متوقف شود.



A ۷۶۸ ۴

بنابر قانون سوم نیوتون، هرگاه جسم A بر جسم B نیروی F را وارد کند، جسم B نیز بر جسم A نیروی $-F$ را وارد می‌کند. بنابراین نقطهٔ اثر نیروهای کنش و واکنش متفاوت است، به همین علت بررسی برایند آن‌ها اصولاً مفهوم فیزیکی ندارد.

دقت کنید در گزینهٔ (۳) بیان شده است که برایند نیروی کنش و واکنش صفر نیست درحالی که این دو نیرو، بر دو جسم وارد می‌شود و برایند فیزیکی ندارند که صفر و یا غیرصفر باشد.

A ۷۶۹ ۳

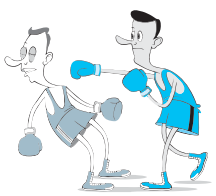
اندازهٔ نیروی کنش و واکنش یکسان است و گزارهٔ (الف) درست است.

نیروهای کنش و واکنش در خلاف جهت هم بوده و جهت آن‌ها یکسان نیست پس گزارهٔ (ب) نادرست است. نیروهای کنش و واکنش همواره به دو جسم وارد می‌شوند و هم نوع‌اند، جنس نیروهای کنش و واکنش یکسان است و گزارهٔ (پ) درست است.

A ۷۷۰ ۳

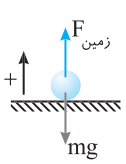
بنابر قانون سوم نیوتون نیروهای کنش و واکنش بین دو جسم یکسان و در خلاف جهت یکدیگر است.

از این‌رو نیرویی که صورت شما بر دست تایسون وارد می‌کند با نیرویی که تایسون به صورت شما وارد می‌کند دقیقاً هم‌اندازه و در خلاف جهت هم هستند.



B ۷۷۱ ۲

هنگام برخورد توپ با زمین ابتدا توپ با سرعت v به سمت پایین به زمین برخورد می‌کند تا به طور لحظه‌ای متوقف شود یعنی در این حالت حرکت متحرک کندشونده است و سرعت و شتاب خلاف جهت هم‌اند پس جهت شتاب به سمت بالا است. می‌دانیم شتاب در جهت نیروی برایند قرار دارد پس نیروی برایند وارد بر جسم به سمت بالا می‌باشد.

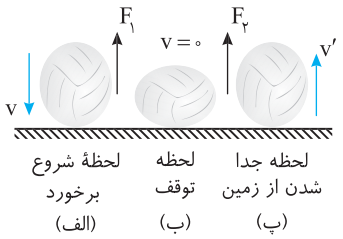


$$F_{net}=ma \xrightarrow{a>0} F_{net}>0 \Rightarrow F_{زمین}-mg>0 \Rightarrow F_{زمین}>mg$$

هنگام بلند شدن توپ از زمین سرعت از $v=0$ به سرعت v' به سمت بالا خواهد رسید، پس حرکت تندشونده و جهت شتاب و سرعت یکسان است، پس شتاب به سمت بالا و برایند نیروها مجدداً به سمت بالا است که مشابه محاسبات بالا $F_{زمین}>mg$ است.

B ۷۷۲ ۴

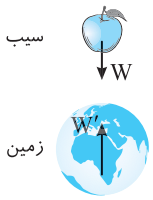
به جمله‌ها و عبارت‌های تست دقت کنید. «در تماس توپ با زمین» نه قبل و نه بعد از تماس توپ با زمین و «نیروی وارد بر توپ» نه نیروی وارد بر سطح. بنابراین از لحظهٔ شروع تماس توپ با زمین (شکل الف) بر توپ نیرویی رو به بالا وارد شده و آن‌را از حرکت می‌اندازد (شکل ب) و سپس این نیروی رو به بالا، توپ را مجدداً رو به بالا هُل می‌دهد. شکل (پ)



بنابراین F_1 و F_2 هر دو رو به بالا هستند.

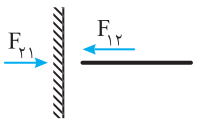
B ۷۷۳ ۴

خط فکری در بررسی نیروی واکنش باید شما مشخص کنید که بر جسم از طرف کدام جسم نیرو وارد می‌شود تا بتوانید دربارهٔ نیروی واکنش اظهارنظر کنید. بنا به قانون سوم نیوتون، اگر جسم A بر جسم B نیروی F را وارد کند، جسم B نیز به جسم A نیروی $-F$ را وارد می‌کند. نیروی وزن نیرویی است که کرهٔ زمین بر جسم وارد می‌کند پس واکنش آن نیرویی است که جسم بر مرکز کرهٔ زمین وارد می‌کند.



A ۷۷۴ ۳

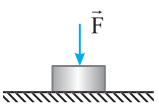
خط فکری در بررسی نیروی واکنش ابتدا باید دو جسمی که به هم نیرو وارد می‌کنند و مورد پرسش است را مشخص کنید. در این تست، یک جسم، دست شخص و جسم دیگر طناب است بنابراین نیروی کنش بر یکی و واکنش بر دیگری وارد می‌شود و نیرویی که دیوار به طناب وارد می‌کند و بالعکس نقشی در کنش و واکنش بین دست و طناب ندارد.



نیرویی که طناب بر دیوار وارد می‌کند واکنش نیرویی است که دیوار بر طناب وارد می‌کند و گزینهٔ (۱) و (۲) نادرست است.

واکنش نیرویی که دست بر طناب وارد می‌کند توسط طناب بر دست وارد می‌شود. گزینهٔ (۳) درست و گزینهٔ (۴) نادرست است.

بازی با سؤال **جسمی به وزن W روی یک سطح افقی (تکیه‌گاه) قرار دارد و نیروی عمودی F رو به پایین بر آن وارد می‌شود. کدام گزینه واکنش نیروی F است؟**



۱) نیروی عمودی تکیه‌گاه F_N

۲) نیرویی که توسط سطح بر جسم وارد می‌شود.

۳) نیروی وزن جسم منهای نیروی عمودی تکیه‌گاه

۴) نیرویی که توسط جسم بر عامل به‌وجود آورندهٔ F وارد می‌شود.

پاسخ **گزینهٔ (۴) دقیقاً تعریف قانون سوم نیوتون در مورد نیروهای کنش و واکنش است.** گزینهٔ ٤

B ۷۷۵ ۱

با توجه به قانون سوم نیوتون واکنش نیروی F بر عامل به‌وجود آورنده‌اش وارد می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

نیروی W نیرویی است که توسط کرهٔ زمین بر جسم وارد می‌شود و واکنش آن توسط جسم بر کرهٔ زمین وارد می‌شود و گزینهٔ (۲) نادرست است.

نیروی عمودی تکیه‌گاه (F_N) نیرویی است که توسط سطح بر جسم وارد می‌شود و واکنش آن توسط جسم بر سطح وارد می‌شود بنابراین F_N و W واکنش یکدیگر نیستند و گزینه (۳) نادرست است.

نیروی F نیرویی است که سبب حرکت جسم می‌شود و واکنش آن بر عاملی که F را وارد می‌کند وارد می‌شود و نیروی f نیروی اصطکاکی است که از طرف سطح بر جسم وارد می‌شود و واکنش آن نیرویی است که از طرف جسم بر سطح وارد می‌شود یعنی F و f ارتباط به هم نداشته و واکنش هم نیستند و گزینهٔ (۴) نادرست است.

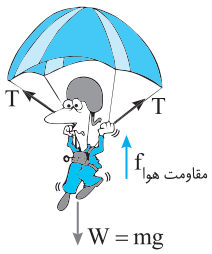
A ۷۷۶ ۲

یادآوری قانون سوم نیوتون: هرگاه جسم A بر جسم B نیروی F را وارد کند، جسم B نیز بر جسم A نیروی $-F$ را وارد می‌کند.

هنگام پرتاب موشک، موشک بر گازهای خروجی‌اش نیرویی رو به عقب (رو به پایین) وارد می‌کند. بنابه قانون سوم نیوتون گازهای خروجی به موشک نیرویی رو به جلو (رو به بالا) وارد می‌کنند که سبب حرکت موشک می‌شود.

A ۷۷۷ ۲

خط فکری واکنش نیروهای وارد بر چترباز از شما خواسته شده است بنابراین ابتدا شما باید مشخص کنید چه اجسامی، چه نیروهایی به چترباز وارد می‌کنند. آن‌گاه می‌توانید بگویید که واکنش نیروها به چه اجسامی وارد می‌شود.



نیروهای وارد بر چترباز عبارتند از:

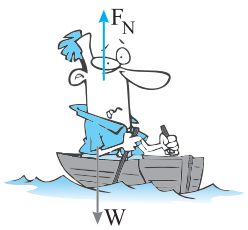
۱ نیروی وزن که توسط کره زمین بر شخص وارد می‌شود.

۲ نیرویی که طناب‌های چترنجات بر شخص وارد می‌کنند.

۳ نیروی مقاومت هوا که توسط هوا بر چترباز وارد می‌شود بنابراین واکنش این نیروها بر کرهٔ زمین، طناب‌ها و هوا وارد می‌شود.

A ۷۷۸ ۳

مطابق شکل شخص درون قایق نشسته و از طرف کرهٔ زمین نیروی وزن بر شخص وارد می‌شود که واکنش آن توسط شخص بر کره زمین وارد می‌شود. از طرفی کف قایق بر شخص نیروی F_N رو به بالا وارد می‌کند که واکنش آن توسط شخص بر کف قایق رو به پایین وارد می‌شود. نیرویی که شخص بر پارو و پارو بر شخص وارد می‌کند نیز نیروی کنش و واکنش یکدیگرند، بنابراین واکنش نیروهای وارد به شخص توسط شخص به قایق، پارو و زمین وارد می‌شود.



A ۷۷۹ ۲

قانون دوم نیوتون را برای هر جسم به‌طور جداگانه نوشته و طرفین روابط را با هم مساوی قرار می‌دهیم:

$$F=m_1a_1\ ,\ F=m_2a_2 \xrightarrow{F=F} m_1a_1=m_2a_2 \Rightarrow 6a_1=9a_2 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{3}{2}$$

A ۷۸۰ ۱

رابطهٔ $F=ma$ را یک بار برای حالت اول و بار دیگر برای حالت دوم می‌نویسیم و سپس طرفین تساوی‌ها را با هم مساوی قرار می‌دهیم.

$$F=m\times 2 \quad (1)\ ,\ F=(m+5)1/8 \quad (2) \Rightarrow 2m=1/8m+9 \Rightarrow m=5kg$$

$$\xrightarrow{\text{در (۱) قرار می‌دهیم}} F=m\times 2 \Rightarrow F=10N$$

A ۷۸۱ ۱

۱ با توجه به شتاب و جرم واگن‌ها نیروی پیشران لوکوموتیو را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{\text{پیشران}}=m_1a \Rightarrow F_{\text{پیشران}}=5(200)\times 2=2000N$$

۲ در حالت دوم یک واگن از لوکوموتیو جدا شده و جرم کل قطار کاهش پیدا کرده و چون نیروی پیشران تغییر نکرده شتاب حرکت افزایش یافته و برابر خواهد شد با:

$$F_{\text{پیشران}}=m_2a' \Rightarrow 2000=4(200)a' \Rightarrow a'=2/5m/s^2$$

۳ بنابراین شتاب از $a=2m/s^2$ به $a'=2/5m/s^2$ رسیده است:

$$\text{درصد تغییرات}=\frac{\Delta a}{a}\times 100 \Rightarrow \text{درصد تغییرات}=\frac{2/5-2}{2}\times 100=0/25\times 100=25\%$$

۳ ۷۸۲ A

به نیروی وارد بر جسم ۲۰٪ افزوده شده پس نیروی وارد بر جسم خواهد شد:

$$F_۲=F_۱+۰/۲F_۱\Rightarrow F_۲=۱/۲F_۱$$

بنا به قانون دوم نیوتون $F=ma$ خواهیم داشت:

$$F_۲=۱/۲F_۱\Rightarrow ma_۲=۱/۲ma_۱\Rightarrow a_۲=۱/۲a_۱$$

۱ ۷۸۳ B

جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$ را بر حسب F به دست می‌آوریم:

$$F=ma\Rightarrow\begin{cases}F=m_۱\times۱۲\Rightarrow m_۱=\frac{F}{۱۲}\\F=m_۲\times۴\Rightarrow m_۲=\frac{F}{۴}\end{cases}$$

اکنون شتاب حرکت جسمی به جرم $m_۲-m_۱$ را حساب می‌کنیم:

$$F=ma\Rightarrow F=(m_۲-m_۱)a$$

$$F=(\frac{F}{۴}-\frac{F}{۱۲})a\Rightarrow F=\frac{۳F-F}{۱۲}a\Rightarrow a=\frac{۱۲}{۲}=۶m/s$$

۲ ۷۸۴ A

خط فکری به کمک قانون دوم نیوتون $F=ma$ با توجه به ثابت بودن F، جرم $m_۱$ و $m_۲$ را برحسب F به‌دست بیاورید سپس شتاب حرکت را برای جسمی به جرم $m_۲-m_۱$ و $m_۲+m_۱$ حساب کرده بر هم تقسیم کنید.

۱ با توجه به شتابی که نیروی F به جسم $m_۱$ و $m_۲$ می‌دهد داریم:

$$\begin{cases}F=m_۱a_۱\xrightarrow{a_۱=۱۰m/s^۲}F=۱۰m_۱\Rightarrow m_۱=\frac{F}{۱۰}\\F=m_۲a_۲\xrightarrow{a_۲=۶m/s^۲}F=۶m_۲\Rightarrow m_۲=\frac{F}{۶}\end{cases}$$

۲ حال شتاب داده شده به جسمی به جرم $m_۲-m_۱$ و $m_۲+m_۱$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}F=(m_۲-m_۱)a'\Rightarrow F=(\frac{F}{۶}-\frac{F}{۱۰})a'\Rightarrow F=(\frac{۵F-۳F}{۳۰})a'\\\Rightarrow a'=\frac{۳۰}{۲}=۱۵m/s^۲\\F=(m_۲+m_۱)a''\Rightarrow F=(\frac{F}{۶}+\frac{F}{۱۰})a'\Rightarrow F=(\frac{۵F+۳F}{۳۰})a''\\\Rightarrow F=\frac{۸F}{۳۰}a''\Rightarrow a''=\frac{۳۰}{۸}=\frac{۱۵}{۴}m/s^۲\end{cases}$$

۳ نسبت شتاب‌ها خواهد شد:

$$\frac{a'}{a''}=\frac{۱۵}{\frac{۱۵}{۴}}=۴$$

۱ ۷۸۵ A

نکته هرگاه دو نیرو هم‌جهت باشند، اندازه نیروی خالص از جمع اندازهٔ دو نیرو به‌دست می‌آید:

$$F_{net}=F_۱+F_۲$$

شتاب وقتی دو نیرو هم‌جهت هستند خواهد شد:

$$F_{net}=ma\Rightarrow ۳+۴=۲a_۱\Rightarrow a_۱=۳/۵m/s^۲$$

نکته هرگاه دو نیرو در خلاف جهت هم باشد، اندازه نیروی خالص از تفاضل اندازهٔ دو نیرو به‌دست می‌آید.

$$F_{net}=|F_۱|-|F_۲|$$

شتاب وقتی دو نیرو خلاف جهت هم هستند خواهد شد

$$F_{net}=ma\Rightarrow ۴-۳=۲a\Rightarrow a_۲=۰/۵m/s^۲$$

نیروی خالص وقتی دو نیرو عمود بر هم هستند از رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آید.

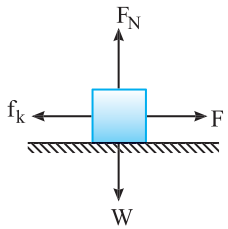
$$F_{net}=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵N$$

شتاب حرکت خواهد شد:

$$F_{net}=ma\Rightarrow ۵=۲a_۳\quad\Rightarrow\quad a_۳=۲/۵m/s^۲\Rightarrow a_۱=۷a_۲=\frac{۷}{۵}a_۳$$

۴ ۷۸۶ A

خط فکری وقتی که جسم روی خط راست با سرعت ثابت در حرکت است نیروهای وارد بر آن متوازن است. نیروهای وارد بر جسم را به شکل ساده‌ای رسم کنید. به کمک متوازن بودن نیروها نیروی اصطکاک را حساب کنید سپس شتاب حرکت در حال جدید را به‌دست بیاورید.



۱ نیروی $F=۵۰N$ و نیروی اصطکاک متوازن هستند از این‌رو:

$$f_k=F\xrightarrow{F=۵۰N}f_k=۵۰N$$

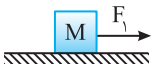
۲ وقتی نیروی $F=۶۰N$ می‌شود، بنا به قانون دوم نیوتون:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow ۶۰-۵۰=۱۰a\Rightarrow a=۱m/s^۲$$

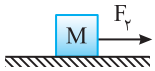
۲ ۷۸۷ A

خط فکری ابتدا به کمک قانون دوم نیوتون نیروهای $F_۱$ و $F_۲$ را برحسب M به‌دست می‌آوریم. در حالت دوم این نیروها بر هم عمود هستند و نیروی خالص را می‌توان به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست آورده و شتاب را در حالت جدید حساب کرد.

۱ با توجه به قانون دوم نیوتون:



$$F_۱=Ma_۱\xrightarrow{a_۱=۴m/s^۲}F_۱=۴M$$



$$F_۲=Ma_۲\xrightarrow{a_۲=۳m/s^۲}F_۲=۳M$$

۲ نیروی خالص را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=\sqrt{F_۱^۲+F_۲^۲}=\sqrt{۱۶M^۲+۹M^۲}=۵M$$

۳ شتاب حرکت خواهد شد:

$$F_{net}=۲Ma\Rightarrow ۵M=۲Ma\Rightarrow a=۲/۵m/s^۲$$

۱ ۷۸۸ A

یادآوری ریاضی جمع برداری دو بردار $\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}$ و $\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}$ خواهد شد:

$$\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\vec{i}+(A_y+B_y)\vec{j}$$

۱ نیروی خالص وارد بر جسم را به کمک قانون دوم نیوتون حساب می‌کنیم.

$$\vec{F}_{net}=m\vec{a}\Rightarrow F_{net}=۳(۲\vec{i}+۴\vec{j})\Rightarrow\vec{F}_{net}=۶\vec{i}+۱۲\vec{j}\qquad(I)$$

۲ نیروی خالص را از جمع دو بردار $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۲$ به‌دست می‌آوریم.

$$\vec{F}_{net}=\vec{F}_۱+\vec{F}_۲\Rightarrow\vec{F}_{net}=۱۳\vec{i}+\alpha\vec{j}+\beta\vec{i}+۵\vec{j}$$

$$\Rightarrow\vec{F}_{net}=(۱۳+\beta)\vec{i}+(۵+\alpha)\vec{j}\quad(II)$$

۳ F_{net} در رابطهٔ (I) و (II) با هم برابرند از این‌رو می‌توان نوشت:

$$۱۳+\beta=۶\Rightarrow\beta=-۷\ ,\ ۵+\alpha=۱۲\Rightarrow\alpha=۷\ ,\ \frac{\alpha}{\beta}=-۱$$

بازی با سوال فرض کنید بر جسمی به جرم $۰/۵kg$ دو نیروی $\vec{F}_۲=-\frac{\vec{F}_۱}{۲}$ و $\vec{F}_۱=-۶\vec{i}+۸\vec{j}$ اثر می‌کند. بزرگی شتاب حرکت این جسم چقدر است؟ (تمام مقادیر در SI هستند.) کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۷/۵ ۴) ۲/۵

پاسخ ابتدا بردار نیروی $F_۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{F}_۲=-\frac{\vec{F}_۱}{۲}=۳\vec{i}-۴\vec{j}$$

برایند نیروها خواهد شد:

$$\vec{F}_{net}=\vec{F}_۱+\vec{F}_۲=-۶\vec{i}+۸\vec{j}+۳\vec{i}-۴\vec{j}=-۳\vec{i}+۴\vec{j}$$

اندازهٔ نیروی وارد بر جسم برابر است با:

$$F_{net}=\sqrt{F_x^۲+F_y^۲}=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵N$$

$$F_{net}=ma\Rightarrow ۵=۰/۵a\Rightarrow a=۱۰m/s^۲$$

گزینهٔ ۲

۴ ۷۸۹ A

هرگاه سرعت جسم ثابت باشد نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند و نیروی خالص وارد بر جسم صفر است از این‌رو می‌توان نوشت:

$$\vec{F}_{net}=ma\Rightarrow\vec{F}_{net}=0$$

$$\Rightarrow\vec{F}_1+\vec{F}_2=0\xrightarrow{\vec{F}_1=2\vec{i}-6\vec{j}}\vec{F}_2=-\vec{F}_1\Rightarrow\vec{F}_2=-2\vec{i}+6\vec{j}$$

۳ ۷۹۰ A

۱ ابتدا نیروی خالص جسم را از جمع بردارهای نیرو به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{F}_{net}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=(20\vec{i}-50\vec{j})+(10\vec{i}+20\vec{j})+(-10\vec{j})=30\vec{i}-40\vec{j}$$

$$\Rightarrow\vec{F}_{net}=30\vec{i}-40\vec{j}$$

۲ اندازهٔ نیروی خالص وارد بر جسم را حساب می‌کنیم.

$$F_{net}=\sqrt{F_x^2+F_y^2}\Rightarrow F_{net}=\sqrt{30^2+40^2}\Rightarrow F_{net}=50N$$

۳ شتاب حرکت جسم خواهد شد: $F_{net}=ma\Rightarrow a=\frac{F_T}{m}=\frac{50}{5}=10m/s^2$

بازی با سوال جسمی به جرم $5kg$ تحت تأثیر سه نیروی $\vec{F}_1=-15\vec{i}+8\vec{j}$، $\vec{F}_2=-21\vec{i}+19\vec{j}$ و $\vec{F}_3$ قرار گرفته و شتاب $\vec{a}=-4\vec{i}+3\vec{j}$ را پیدا کرده است. اندازهٔ نیروی $\vec{F}_3$ کدام است؟ ریاضی - ۸۹

۱) ۴ ۲) ۲۰ ۳) ۲۸ ۴) ۴۸

پاسخ با توجه به قانون دوم نیوتون:

$$\vec{F}_T=m\vec{a}\Rightarrow\vec{F}_T=5(-4\vec{i}+3\vec{j})\Rightarrow\vec{F}_T=-20\vec{i}+15\vec{j}$$

$$\vec{F}_T=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3\Rightarrow-20\vec{i}+15\vec{j}=-15\vec{i}+8\vec{j}-21\vec{i}+19\vec{j}+\vec{F}_3$$

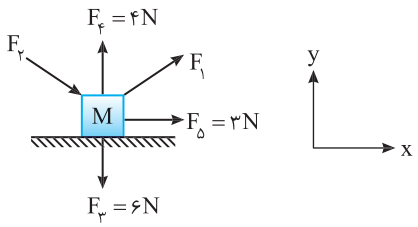
$$\Rightarrow\vec{F}_3=16\vec{i}-12\vec{j}\Rightarrow F_3=\sqrt{16^2+12^2}=4\sqrt{4^2+3^2}\Rightarrow F_3=4\times5=20N$$

گزینهٔ ۲

۳ ۷۹۱ A

جسم در تعادل است و نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند و برایند آن‌ها صفر است.

با توجه به شکل نیروی $\vec{F}_4=4\vec{j}$، نیروی $\vec{F}_3=-6\vec{j}$ و نیروی $\vec{F}_5=3\vec{i}$ است.

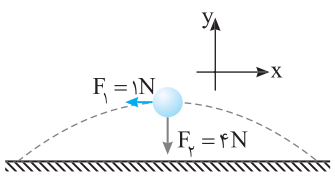


برایند نیروها را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4+\vec{F}_5=0\Rightarrow\vec{F}_1+\vec{F}_2+3\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{j}=0\Rightarrow\vec{F}_1+\vec{F}_2=-3\vec{i}+2\vec{j}$$

۲ ۷۹۲ A

خط فکری به شکل نگاه کنید. بر جسم دو نیرو یکی نیروی $F_1=1N$ در خلاف جهت محور x $(\vec{F}_1=-\vec{i})$ و دیگری نیروی وزن $F_2=4N$ در خلاف جهت محور yها $(\vec{F}_2=-4\vec{j})$ وارد می‌شود بنابراین کافی است نیروی خالص را برحسب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ به‌دست بیاورید سپس، شتاب را حساب کنید.



۱ ابتدا بردار نیروها را برحسب بردارهای یکه می‌نویسیم: $\vec{F}=-1\vec{i}-4\vec{j}$

۲ با توجه به قانون دوم نیوتون $\vec{F}=m\vec{a}$ داریم:

$$\vec{F}=m\vec{a}\Rightarrow-\vec{i}-4\vec{j}=0/4\vec{a}\Rightarrow\vec{a}=-2/5\vec{i}-10\vec{j}$$

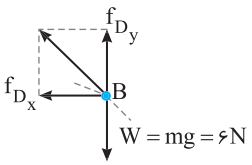
۳ ۷۹۳ C

نیروی وزن در امتداد قائم و روبه پایین است. مؤلفهٔ قائم نیروی مقاومت هوا در امتداد قائم و روبه بالا است، بنابراین: $W=mg=0/6\times10=6N$

$$F_{net\,y}=f_{D_y}-W\Rightarrow-1=f_{D_y}-6\Rightarrow f_{D_y}=5N$$

نیروی وزن مؤلفهٔ افقی ندارد، در نتیجه مؤلفهٔ افقی نیروی خالص برابر مؤلفهٔ افقی نیروی مقاومت هواست. $F_{net\,x}=f_{D_x}=-12N$

نیروی مقاومت هوا برابر است با: $f_D=\sqrt{(12)^2+(5)^2}=13N$



۴ ۷۹۴ A

نکته برایند دو نیرو وقتی بیشینه است که دو نیرو هم‌جهت باشند.

$$F_{max}=F_1+F_2$$

نکته برایند دو نیرو وقتی کمینه است که دو نیرو در خلاف جهت هم باشند.

$$F_{min}=F_1-F_2$$

بیشینه شتاب را حساب می‌کنیم:

$$F_{max}=F_1+F_2=10N\quad,\quad F_{max}=ma\Rightarrow10=4a\Rightarrow a_{max}=2/5m/s^2$$

کمینه شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{min}=F_2-F_1=6-4=2N\quad,\quad F_{min}=ma\Rightarrow2=4a\Rightarrow a_{min}=0/5m/s^2$$

شتاب جسم می‌تواند بین این دو مقدار باشد. $a_{min}\le a\le a_{max}\Rightarrow0/5\le a\le2/5$

تنها گزینهٔ (۴) که در آن $a=1m/s^2$ است در این بازه قرار دارد.

۱ ۷۹۵ A

نکته اندازه برایند دو بردار عمود بر هم همواره از اندازهٔ تک‌تک آن‌ها بیشتر است.

اگر برایند نیروهای وارد بر جسم را F_{net} بگیریم:

$$F_{net}=\sqrt{F_1^2+F_2^2}\Rightarrow F_{net}>F_1\quad,\quad F_{net}>F_2$$

بنابراین اگر یکی از نیروها حذف شود تنها یک نیرو باقی می‌ماند که با توجه به اینکه مقدار این نیرو از F_{net} کمتر است پس شتاب جسم از $4m/s^2$ کمتر خواهد شد.

۲ ۷۹۶ A

خط فکری نکته مهمی که در حل این‌گونه مسایل وجود دارد این است که وقتی n نیرو متوازن هستند یعنی برایند آن‌ها صفر است همواره برایند $n-1$ بردار دلخواه از این بردارها هم‌اندازهٔ بردار nاُم است.

در صورت مسئله برایند سه نیروی ۸N، ۶N و ۱۲N صفر است و مفهوم آن این است در این مسئله سه نیرو به گونه‌ای قرار دارند که اندازه برایند ۸N و ۶N برابر ۱۲N و اندازه برایند ۸N و ۱۲N برابر ۶N و برایند ۶N و ۱۲N برابر ۸N است. یعنی هرگاه نیروی ۶N حذف شود، برایند دو نیروی ۸N و ۱۲N که باقی می‌مانند همان $F_{net}=6N$ خواهد بود. با توجه به این مفهوم مسئله به راحتی قابل حل است و کافی است بعد از حذف نیروی ۶N شما نیروی خالص را برابر ۶N قرار دهید. سه نیرو متوازن می‌باشد. بنابراین:

$$\begin{cases}|\vec{F}_1|=8N\\|\vec{F}_2|=6N\\|\vec{F}_3|=12N\end{cases}\xrightarrow{\text{نیرو متوازن}}\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=0\Rightarrow\vec{F}_1+\vec{F}_3=-\vec{F}_2\quad(1)$$

هنگامی که نیروی $\vec{F}_2$ حذف می‌شود به جسم تنها دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_3$ وارد خواهد شد:

$$\vec{F}_1+\vec{F}_3=m\vec{a}\Rightarrow|\vec{F}_1+\vec{F}_3|=m|\vec{a}|\xrightarrow{|\vec{F}_1+\vec{F}_3|=|\vec{F}_2|=6N}6=4a$$

$$\Rightarrow a=1/5m/s^2$$

بازی با سؤال به یک جسم ۲ کیلوگرمی، هم‌زمان چهار نیرو به اندازه‌های ۲۰، ۱۵، ۱۰، ۸ نیوتون وارد می‌شود و جسم به حالت تعادل قرار می‌گیرد. اگر فقط نیروی ۱۵ نیوتونی حذف شود و دیگر نیروها با همان اندازه و جهت اثرگذار باشند، تغییر سرعت جسم بعد از ۲ ثانیه، چند متر بر ثانیه خواهد شد؟

کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

پاسخ جسم در تعادل است و برایند چهار نیروی ۲۰N، ۱۵N، ۱۰N و ۸N صفر است. از این‌رو هر نیرو هم‌اندازهٔ برایند سه نیروی دیگر است. با حذف نیروی ۱۵N، سه نیروی ۲۰N، ۱۰N و ۸N باقی می‌مانند که برایند آن‌ها ۱۵N است. بنابراین:

$F_{\text{خالص}} = ma \Rightarrow 15 = 2a \Rightarrow a = 7/5 m/s^2$

$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow 7/5 = \frac{\Delta v}{2} \Rightarrow \Delta v = 15 m/s$

گزینهٔ ۳

۴ ۷۹۷ B

خط فکری دقت کنید سه نیرو در حال تعادل هستند یعنی برایند آن‌ها صفر است. حال اگر هر نیرویی اضافه شود نیروی برایند دقیقاً برابر همان مقدار اضافه شده است.

وقتی جسم در تعادل است برایند نیروهای ۵، ۷ و ۱۰ نیوتونی صفر است. وقتی به نیروی ۷ نیوتونی، ۳ نیوتون اضافه شود، یعنی برایند نیروها برابر ۳N می‌شود. بنابراین:

$F = ma \Rightarrow 3 = 2a \Rightarrow a = 1/5 m/s^2$

۳ ۷۹۸ A

خط فکری هرگاه در مسئله زمان داده شود یا از شما زمان خواسته شود یعنی شما باید به سراغ روابط حرکت‌شناسی بروید. بنابراین شتاب را به کمک قانون دوم نیوتون به‌دست بیاورید سپس به کمک معادل سرعت زمان حرکت یا شتاب ثابت، زمانی که سرعت $15 m/s$ می‌شود را به‌دست بیاورید.

۱ ابتدا با توجه به قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$F = ma \xrightarrow{m=400kg, F=800N} 800 = 400a \Rightarrow a = 2 m/s^2$

۲ زمان را حساب می‌کنیم. $v = at + v_0 \Rightarrow 15 = 2t + 0 \Rightarrow t = 7/5 s$

۱ ۷۹۹ B

یکای سرعت را به m/s تبدیل می‌کنیم. $v_0 = 72 km/h = \frac{72}{3/6} m/s \Rightarrow v_0 = 20 m/s$

شتاب حرکت را حساب می‌کنیم. $a = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow a = \frac{0 - 20}{5} \Rightarrow a = -4 m/s^2$

اندازهٔ نیروی خالص وارد بر راننده برابر است با:

$|F_{net}| = m|a| \Rightarrow |F_{net}| = 800 \times 4 = 3200 N$

۴ ۸۰۰ B

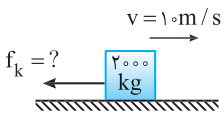
۱ سرعت خودرو را برحسب m/s می‌نویسیم.

$v = 36 \frac{km}{h} \times \frac{1h}{3600s} \times \frac{10^3 m}{1km} \Rightarrow v = \frac{36}{3/6} \Rightarrow v = 10 m/s$

۲ شتاب توقف جسم را به کمک حرکت‌شناسی از رابطهٔ مستقل از زمان به‌دست می‌آوریم.

$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \xrightarrow[\Delta x = 4m]{v=0} 0 - 10^2 = 2a \times 4 \Rightarrow a = -12/5 m/s^2$

۳ نیروی خالصی که سبب توقف خودرو شده نیروی اصطکاک است و بنا به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:

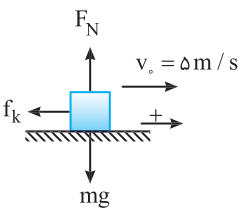


$F_{net} = ma \Rightarrow 0 - f_k = 2000 \times -12/5$

$f_k = 25000 N$

۴ ۸۰۱ A

۱ نیروی وارد بر جسم که مانع حرکت می‌شود و به جسم شتاب کندشونده می‌دهد، نیروی اصطکاک است. با توجه به قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.



$F_{\text{خالص}} = ma \Rightarrow -f_k = ma$

$\Rightarrow -0/5 = 0/2a \Rightarrow a = -2/5 m/s^2$

۲ اکنون جابه‌جایی را در ثانیهٔ اول به کمک معادله حرکت با شتاب ثابت حساب می‌کنیم:

$\Delta x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}(-2/5)(1) + 5(1) = 3/75 m$

بازی با سؤال اتومبیلی به جرم ۴ تُن با سرعت $20 m/s$ روی سطح افقی در مسیر مستقیم حرکت می‌کند. این اتومبیل در اثر ترمز با شتاب ثابت در مدت ۴s متوقف می‌شود. نیروی ترمز چند نیوتون است؟

کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۲۰۰۰۰ ۲) ۱۰۰۰۰ ۳) ۸۰۰۰ ۴) ۴۰۰۰

پاسخ ابتدا شتاب ترمز اتومبیل را محاسبه می‌کنیم:

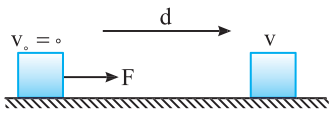
$v_2 = at + v_1 \Rightarrow a = -5 m/s^2 \xrightarrow{F_{net} = ma} F_{\text{ترمز}} = ma$

$\Rightarrow 4 \times 10^3 \times 5 = 20 \times 10^3 = 20000 N$

گزینهٔ ۱

۱ ۸۰۲ B

نیروی خالص وارد بر جسم نیروی افقی F است.



۱ بنا به قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را حساب می‌کنیم: $F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m}$

۲ به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، v را به‌دست می‌آوریم:

$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v^2 - 0 = 2(\frac{F}{m})d \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2Fd}{m}}$

۱ ۸۰۳ A

نیروی وارد بر جسم ثابت است بنابراین شتاب حرکت نیز ثابت است. جسم از حال سکون $v_0 = 0$ در مدت t سرعتش به v رسیده است. چون شتاب ثابت است پس تغییر سرعت در بازه‌های زمانی یکسان t ثابت است، بنابراین همین مدت طول می‌کشد تا سرعت از v به 2v برسد.

$F_{\text{ثابت}} = ma_{\text{ثابت}} \begin{cases} v = at + 0 \Rightarrow t = \frac{v}{a} \\ 2v = at' + v \Rightarrow t' = \frac{v}{a} \end{cases} \Rightarrow t' = t$

۳ ۸۰۴ A

۱ ابتدا با توجه به مسافت طی شده و تندی نهایی شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:

$v_1^2 - v_0^2 = 2a\Delta x_1 \Rightarrow 100 - 0 = 2a \times (10) \Rightarrow a = 5 m/s^2$

۲ چون نیرو ثابت است، با توجه به رابطهٔ $F = ma$ شتاب نیز همان $a = 5 m/s^2$ خواهد شد. بنابراین:

$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x_2 \Rightarrow 400 - 100 = 2 \times 5 \times \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = 30 m$

۲ ۸۰۵ A

خط فکری تندی اولیه هر دو هنگام ترمز v است و قرار است هر دو متحرک در جابه‌جایی یکسان d متوقف شوند. با توجه به معادلهٔ مستقل از زمان $(v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x)$ باید شتاب توقف موتور و خودرو یکسان باشد.

بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$\begin{cases} F_{\text{خودرو}} = m_{\text{خودرو}} a \\ F_{\text{موتور}} = m_{\text{موتور}} a \end{cases} \Rightarrow \frac{F_{\text{موتور}}}{F_{\text{خودرو}}} = \frac{m_{\text{موتور}}}{m_{\text{خودرو}}} \xrightarrow{m_{\text{خودرو}} = 3/5 m_{\text{موتور}}}$

$\frac{F_{\text{موتور}}}{F} = \frac{1}{3/5} \Rightarrow F_{\text{موتور}} = \frac{F}{3/5} \Rightarrow F_{\text{موتور}} = \frac{2F}{7}$

۲ ۸۰۶ A

۱ سرعت خودرو را بر حسب $\frac{m}{s}$ به‌دست می‌آوریم.

$108 km/h = \frac{108}{3/6} \Rightarrow v_{\text{خودرو}} = 30 m/s$

۲ نیروی خالص وارد بر دو متحرک هنگام توقف نیروی اصطکاک جنبشی است، بنابراین:

$\frac{f_{netA}}{f_{netB}} = \frac{m_A a_A}{m_B a_B} \xrightarrow{f_{net} = f_k} \frac{f_{k_A}}{f_{k_B}} = \frac{m_A \times \frac{\Delta v_A}{t}}{m_B \times \frac{\Delta v_B}{t}}$

$\Rightarrow \frac{f_{k_A}}{f_{k_B}} = \frac{18000}{1600} \times \frac{0 - 20}{0 - 30} \Rightarrow \frac{f_{k_A}}{f_{k_B}} = 7/5$

A ۸۰۷ ۴

خط فکری دقت کنید در مسئله t_1 و t_2 داده شده است، بنابراین باید به سراغ فرمول‌های حرکت‌شناسی در حرکت با شتاب ثابت برویم. شتاب حرکت را در هر حالت برحسب Δx و t حساب کنید و نیرو را برحسب قانون دوم بنویسید.

۱ شتاب حرکت هر متحرک را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow a_1=\frac{2\Delta x_1}{t_1^2}\ ,\ a_2=\frac{2\Delta x_2}{t_2^2}$$

۲ اکنون شتاب‌ها را در قانون دوم نیوتون قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases}F_1=m_1a_1\Rightarrow F_1=m_1\dfrac{2\Delta x}{t_1^2}\\ F_2=m_2a_2\Rightarrow F_2=m_2\dfrac{2\Delta x}{t_2^2}\end{cases}\Rightarrow\frac{F_1}{F_2}=\frac{m_1t_2^2}{m_2t_1^2}$$

A ۸۰۸ ۲

۱ جرم میخ نسبت به چکش کم است. وقتی با چکش به میخ ضربه می‌زنیم و میخ ۵mm در چوب فرو می‌رود یعنی سرعت چکش طی مسافت ۵mm از ۴m/s به صفر می‌رسد. بنابراین شتاب توقف چکش خواهد شد:

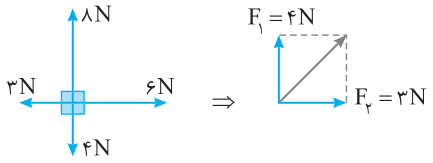
$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-16=2a(5\times10^{-3})\Rightarrow a=-1600m/s^2$$

۲ نیرویی که سبب توقف چکش شده همان نیروی مقاومت متوسط چوب در مقابل حرکت میخ و چکش است. از این‌رو می‌توان نوشت:

$$F_{net}=ma\xrightarrow{m=0/25kg}|F|=0/25\times|-1600|\Rightarrow F_{net}=400N$$

A ۸۰۹ ۲

۱ ابتدا برایند نیروها را مشخص می‌کنیم: $F_T=\sqrt{F_1^2+F_2^2}=\sqrt{16+9}=5N$



۲ حال با توجه به نیروی برایند، شتاب جسم را به‌دست می‌آوریم:

$$F_T=ma\Rightarrow 5=2a\Rightarrow a=2/5m/s^2$$

۳ جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده از این‌رو:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=2/5\times5+0\Rightarrow v=12/5m/s$$

نکته جسمی که از حال سکون تحت تأثیر نیروی خالص و ثابتی شروع به حرکت کند همواره حرکت آن روی خط راست با شتاب ثابت و در جهت نیروی خالص وارد بر جسم است.

جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده و جهت حرکت (سرعت) در جهت نیرو است و می‌دانیم جهت شتاب نیز در جهت برایند نیروها قرار دارد بنابراین جهت سرعت، ↗ است.

B ۸۱۰ ۱

خط فکری وقتی نیروهای وارد بر جسم متوازن باشد $(F_{net}=0)$ در این صورت شتاب جسم نیز صفر است. بنابراین کافی است معادلهٔ شتاب زمان را برابر صفر قرار دهید و اولین باری که شتاب بعد از $t=0$ صفر می‌شود را به کمک حل معادلهٔ مثلثاتی به‌دست بیاورید. ریشهٔ معادلهٔ شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$F_{net}=ma\xrightarrow{F_{net}=0}a=0\xrightarrow{a=-16\pi^2\sin4\pi t}0=-16\pi^2\sin4\pi t$$

$$\Rightarrow4\pi t=k\pi\Rightarrow t=\frac{k}{4}\qquad k=1,2,\cdots$$

بنابراین اولین لحظه بعد از $t=0$ برابر است با $t=\frac{1}{4}s$.

A ۸۱۱ ۳

یادآوری در حرکت روی خط راست، لحظه‌ای جهت سرعت تغییر می‌کند که سرعت به‌طور لحظه‌ای صفر شده و تغییر علامت دهد.

خط فکری معادله مکان زمان درجه ۲ یعنی حرکت با شتاب ثابت بنابراین وقتی شتاب ثابت باشد، نیروی خالص وارد بر جسم در همهٔ نقاط مسیر از جمله در لحظهٔ تغییر جهت سرعت ثابت است. با مقایسه معادلهٔ حرکت داده شده با معادلهٔ مکان زمان حرکت با شتاب ثابت، شتاب را حساب کرده و نیروی خالص وارد بر جسم را به‌دست بیاورید.

معادلهٔ مکان - زمان متحرک درجهٔ دوم می‌باشد یعنی حرکت با شتاب ثابت می‌باشد.

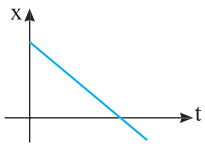
شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}x=t^2-6t+8\\ x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}a=1\Rightarrow a=2m/s^2$$

نیروی خالص وارد بر جسم خواهد شد: $F_{net}=ma\xrightarrow{m=4kg}F_{net}=4\times2=8N$

A ۸۱۲ ۲

نمودار $x-t$ به صورت خطی می‌باشد بنابراین حرکت متحرک با سرعت ثابت و شتاب صفر است، با توجه به قانون دوم نیوتون $F_{net}=ma$، برایند نیروها صفر می‌باشد و نیروها متوازن هستند.

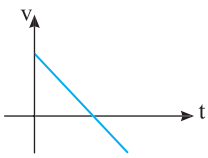


B ۸۱۳ ۱

یادآوری شیب نمودار سرعت - زمان برابر است با شتاب متحرک.

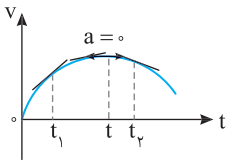
شیب نمودار ثابت است بنابراین این حرکت دارای شتاب ثابت بوده و نیروی خالص $(F_{net}=ma)$ وارد بر آن نیز ثابت است.

دقت کنید که در لحظهٔ قطع نمودار علامت (یا جهت) سرعت عوض شده است ولی شتاب و نیرو تغییر نکرده است.



B ۸۱۴ ۴

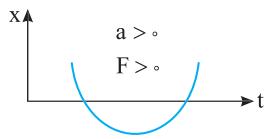
خط فکری هرگاه به شما نمودار مکان - زمان، سرعت - زمان و ... داده شود و از شما دربارهٔ چگونگی تغییر نیرو سؤال شود شما باید به سراغ چگونگی تغییر شتاب بروید.

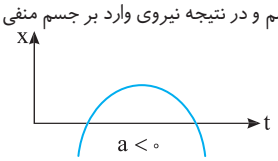


نکته در نمودار سرعت - زمان شیب خط مماس بر نمودار برابر شتاب لحظه‌ای است. شیب خط مماس بر نمودار از لحظهٔ t_1 تا t در حال کاهش و از لحظهٔ t تا t_2 اندازهٔ شیب خط مماس در حال افزایش است و بنا به قانون دوم نیوتون $(F=ma)$ بزرگی نیروی خالص وارد بر جسم ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

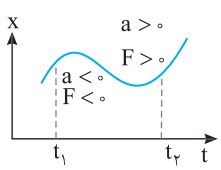
A ۸۱۵ ۱

یادآوری بنا به قانون دوم نیوتون $F=ma$، همواره نیرو و شتاب حاصل از آن هم‌جهت هستند. از طرفی دهانهٔ منحنی مکان - زمان بیان‌گر علامت شتاب (مشتق دوم مکان) است. اگر جهت دهانه منحنی مکان - زمان رو به بالا باشد شتاب جسم و در نتیجه نیروی وارد بر جسم مثبت است و اگر جهت دهانه منحنی مکان - زمان رو به پایین باشد شتاب جسم و در نتیجه نیروی وارد بر جسم منفی است.





اکنون به نمودار مکان - زمان تست دقت کنید. ابتدا دهانه رو به پایین بوده و بنابراین شتاب و درنتیجه نیروی وارد بر جسم منفی است و سپس دهانه (تقعر) نمودار رو به بالا بوده، شتاب و در نتیجه نیرو مثبت می‌شود. بنابراین نیروی وارد بر جسم یک بار تغییر جهت داده است.



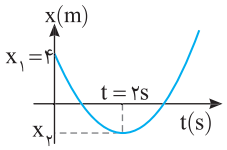
۸۱۶ **۲** **B**

۱ ابتدا با توجه به قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$F=ma \xrightarrow{F=۱۲N,m=۴kg} ۱۲=۴a \Rightarrow a=۳m/s^۲$$

نکته در نقاط بیشینه و کمینه نمودار مکان زمان سرعت صفر است.

۲ در لحظهٔ $t=۲s$ سرعت متحرک صفر می‌شود (خط مماس بر نمودار $x-t$ به‌صورت افقی می‌باشد).



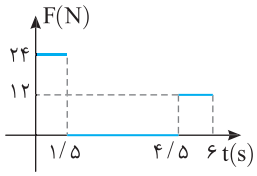
$$v=at+v_۰ \Rightarrow ۰=۳\times۲+v_۰ \Rightarrow v_۰=-۶m/s$$

حال با توجه به سرعت اولیه مکان، x را به‌دست می‌آوریم:

$$x_۲=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۱ \Rightarrow x_۲=\frac{۱}{۲}\times۳\times(۲)^۲-۶(۲)+۴ \Rightarrow x_۲=-۲m$$

۸۱۷ **۴** **A**

خط فکری به نمودار دقت کنید. در بازهٔ صفر تا $۱/۵s$ نیروی وارد بر جسم $۲۴N$ است و از $۱/۵s$ تا $۴/۵s$ نیروی خالص وارد بر جسم صفر است. یعنی از $۱/۵s$ تا $۴/۵s$ سرعت متحرک ثابت و برابر سرعت در لحظهٔ $t=۱/۵s$ است. بنابراین کافی است شما سرعت را در $t=۱/۵s$ حساب کنید.



۱ شتاب حرکت جسم را در بازه صفر تا $۱/۵s$ به‌دست می‌آوریم.

$$F=ma \xrightarrow{m=۳kg} ۲۴=۳a \Rightarrow a=۸m/s^۲$$

۲ سرعت در لحظهٔ $t=۱/۵s$ را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰ \xrightarrow{v_۰=۰} v=۸\times۱/۵+۰ \Rightarrow v=۱۲m/s$$

بنابراین در لحظهٔ $t=۳s$ سرعت $۱۲m/s$ است.

۸۱۸ **۱** **B**

خط فکری برای آن‌که نمودار نیرو - زمان را از روی نمودار سرعت - زمان رسم کنید کافی است شتاب در هر بازه را حساب کرده و با ضرب جرم در شتاب، نیرو را به‌دست آورده $(F=ma)$ نمودار نیرو زمان را رسم کنید.

۱ در بازهٔ زمانی صفر تا ۳ ثانیه شتاب ثابت است، پس نیرو ثابت و برابر است با:

$$F=ma=m\frac{v-v_۰}{t}=۲\times\frac{۳-(-۶)}{۳}=۶N$$

۲ در بازهٔ زمانی ۳ تا ۵ ثانیه حرکت یکنواخت پس نیرو صفر است. $(F=۰)$

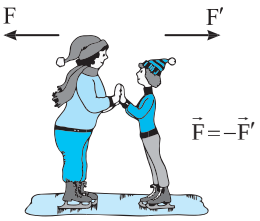
۳ در بازهٔ زمانی ۵ تا ۷ ثانیه نیز شتاب ثابت پس نیرو ثابت و برابر است با:

$$F=ma=۲\times\frac{۰-۳}{۷-۵}=-۳N$$

بنابرین گزینهٔ (۱) پاسخ مسئله است.

۸۱۹ **۴** **A**

نیروهای $\vec{F}$ و $\vec{F}'$ کنش و واکنش یکدیگراند پس این دو نیرو هم‌اندازه و خلاف جهت یکدیگرند.



شتاب از رابطهٔ $F=ma \Rightarrow a=\frac{F}{m}$ به دست می‌آید. دو نیرو هم‌اندازه‌اند، بنابراین هرچه جرم شخصی بیشتر باشد شتاب حرکت او کمتر است. بنابراین:

$$m_۲>m_۱ \xrightarrow[F=F']{a=\frac{F}{m}} a_۲<a_۱$$

۸۲۰ **۳** **A**

نیرویی که شخص اول بر دوم وارد می‌کند به شخص دوم شتابی در جهت محور x ها می‌دهد:

$$\vec{F}_{۱۲}=m_۲\vec{a}_۲ \Rightarrow ۱۰۰\vec{i}=۵۰\vec{a}_۲ \Rightarrow \vec{a}_۲=۲\vec{i}$$

بنا به قانون سوم نیوتون همین مقدار نیرو توسط شخص دوم بر شخص اول در خلاف جهت محور x ها وارد می‌شود و به شخص اول شتابی در خلاف جهت محور x ها خواهد داد:

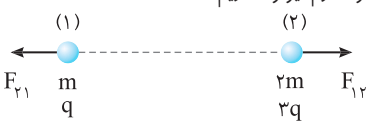
$$\vec{F}_{۲۱}=m_۱\vec{a}_۱ \Rightarrow -۱۰۰\vec{i}=۷۵\vec{a}_۱ \Rightarrow \vec{a}_۱=-\frac{۴}{۳}\vec{i}$$

۸۲۱ **۳** **A**

با توجه به قانون سوم نیوتون نیروی الکتریکی که ذرهٔ m با بار الکتریکی q به ذرهٔ $۲m$ با بار الکتریکی $۳q$ وارد می‌کند برابر نیرویی است که بار $۳q$ به بار q وارد کرده است. بنابراین:

$$|\vec{F}_{۱۲}|=|\vec{F}_{۲۱}|=F$$

حال با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:



$$\begin{cases} (۱) \text{ جسم} \Rightarrow F=ma_۱ \Rightarrow a_۱=\frac{F}{m} \\ (۲) \text{ جسم} \Rightarrow F=۲ma_۲ \Rightarrow a_۲=\frac{F}{۲m} \end{cases} \Rightarrow \frac{a_۱}{a_۲}=۲$$

۸۲۲ **۳** **A**

خط فکری بنا به قانون سوم نیوتون نیرویی که شخص (۱) بر شخص (۲) وارد می‌کند هم‌اندازه و در خلاف جهت نیرویی است که شخص (۲) بر شخص (۱) وارد می‌کند. نیروها یکسان است بنابراین شخصی که دارای جرم کمتری است بنا به قانون دوم نیوتون شتاب بیشتری خواهد داشت و زودتر به نقطهٔ O می‌رسد و از آن عبور می‌کند. حال به حل مسئله دقت کنید.

نیرویی که توسط طناب به هر دو شخص وارد می‌شود یکسان است:

$$\begin{cases} F_۱=m_۱a_۱ \Rightarrow a_۱=\frac{F_۱}{m_۱} \\ F_۲=m_۲a_۲ \Rightarrow a_۲=\frac{F_۲}{m_۲} \end{cases} \xrightarrow[F_۱=F_۲]{m_۱>m_۲} a_۱<a_۲$$

دو جسم در ابتدا ساکن هستند و $a_۱<a_۲$ است پس متحرک (۲) سریع‌تر حرکت می‌کند و هنگام رسیدن دو متحرک به هم متحرک (۲) جابه‌جایی بیشتری انجام می‌دهد بنابراین دو متحرک بین O و A به یکدیگر می‌رسند.

بازی با سوال **دو شخص A و B هم‌قد با کفش‌های چرخ‌دار در حالت ایستاده در یک سالن مسطح و صاف دو سر طنابی را گرفته و هر یک دیگری را به سوی خود می‌کشد. کدام‌یک زودتر به خط پایان که وسط فاصلهٔ میان آن‌ها است می‌رسد؟ (جرم شخص A بیشتر از جرم شخص B است.)**

۱) شخص A **۲)** شخص B

۳) هر دو با هم می‌رسند. **۴)** نمی‌توان اظهارنظر قطعی کرد.

پاسخ **با توجه به قانون سوم نیوتون نیرویی که شخص A به B وارد می‌کند برابر نیرویی است که شخص B به A وارد می‌کند. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:**

$$\vec{F}_{AB}=-\vec{F}_{BA}$$

حال با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:

$$a=\frac{F}{m} \xrightarrow[|F_{AB}|=|F_{BA}|\ ,\ m_A>m_B]{} a_B>a_A$$

پس شتاب B از شتاب A بیشتر است. بنابراین شخص B زودتر از شخص A به وسط طناب می‌رسد.

گزینهٔ ۲

B ۸۲۳ ۴

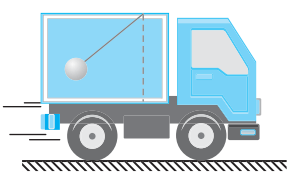
هرگاه جسم ساکن و یا دارای حرکت با سرعت ثابت باشد، نیروهای وارد بر جسم متوازن بوده $(F_{net}=0)$ یعنی جسم در حال تعادل به سر می‌برد. بنابراین از نگاه قانون اول نیوتون حالت سکون و یا حرکت با سرعت ثابت هم‌ارز هستند و گزینهٔ (۱) درست است. بنا به قانون اول نیوتون اگر نیروی خالصی بر جسم وارد نشود اگر جسم ساکن است ساکن می‌ماند و اگر در حال حرکت است به حرکت روی خط راست با سرعت ثابت ادامه می‌دهد یعنی جسم تمایل دارد وضع موجود را حفظ کند، بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) نیز درست است.

A ۸۲۴ ۱

در قانون اول نیوتون بیان می‌شود که اگر جسم در حال حرکت است برای ادامه حرکت نیاز به نیرو ندارد و اگر بر آن نیرو وارد نشود، جسم به حرکت خود ادامه می‌دهد و برای ادامهٔ حرکتش به ارائهٔ دلیل نیازی نیست. اما اگر حرکتش تغییر کند، باید برای این تغییر به دنبال علت بود و گزینهٔ (۱) درست است.

بنابر قانون دوم نیوتون، نیرو با آهنگ تغییر سرعت یعنی شتاب متناسب است نه با خود تغییر سرعت $(\vec{F}=m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t})$ و گزینهٔ (۲) نادرست است. بنابر قانون سوم نیوتون نیروهای کنش و واکنش بر دو جسم وارد شده، بنابراین نمی‌توان گفت یکدیگر را خنثی می‌کنند و گزینهٔ (۳) نیز نادرست است.

A ۸۲۵ ۱



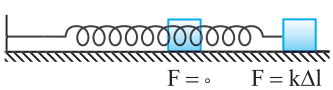
طبق قانون اول اجسام تمایل دارند که وضعیت حرکت خود را حفظ کنند. بنابراین می‌توان گفت هنگامی جسم درون کامیون قرار دارد همواره از تغییر حرکت لحظه‌ای کامیون جا می‌ماند. یعنی اگر کامیون ترمز کند (حرکت کندشونده) آونگ طبق سرعت قبلی به حرکت خود ادامه می‌دهد، پس به جلو پرتاب می‌شود و اگر کامیون تندشونده به سمت جلو حرکت کند آونگ با همان سرعت کمتر قبلی در حال حرکت است، پس از حرکت کامیون عقب می‌ماند و به سمت عقب پرتاب می‌شود و با توجه به شکل که در آن آونگ به سمت عقب منحرف شده است نتیجه می‌گیریم که کامیون با حرکت تندشونده رو به جلو در حرکت است.

C ۸۲۶ ۳

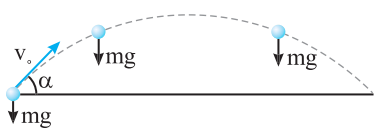


گزینهٔ (۱): اگر جسمی را در راستای قائم رو به بالا پرتاب کنیم، سرعت گلوله در اوج، صفر است و جسم به‌طور لحظه‌ای در حال سکون است، اما نیروی وزن همچنان به جسم وارد می‌شود و شتاب حرکت برابر g است، پس گزینهٔ (۱) نادرست است. / گزینهٔ (۲): هرگاه قطاری با سرعت ثابت یک مسیر خمیده را دور بزند، چون جهت بردار سرعت در حال تغییر است، حرکت شتابدار است و برایند نیروی وارد بر جسم صفر نیست. در این صورت گزینهٔ (۲) نادرست است، زیرا کلمهٔ الزاماً را به‌کار برده است.

گزینهٔ (۳): به وزنه و فنر روبه‌رو دقت کنید، اگر وزنه را به راست بکشیم و رها کنیم، هرچه وزنه به محل اولیه (تعادلش) نزدیک می‌شود تغییر طول فنر کمتر شده و نیروی کشسانی فنر کمتر می‌شود، در حالی که تا رسیدن وزنه به محل تعادل، سرعت آن در حال افزایش است، بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.



در مورد گزینهٔ (۴): اگر گلوله‌ای را در شرایط خلأ تحت زاویهٔ α مطابق شکل پرتاب کنیم، نیروی وارد بر جسم در تمام مسیر ثابت و برابر mg است. اما حرکت روی مسیر خمیده است، بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است، زیرا کلمهٔ الزاماً در آن به‌کار رفته است.



A ۸۲۷ ۳

یادآوری در سال دهم در کتاب فیزیک (۱) خوانده‌اید که یکاها باید در دو طرف یک رابطهٔ فیزیکی دارای سازگاری باشند یعنی در دو طرف یکاها باید یکسان باشند.

در رابطه $v=\alpha Ft$، یکای سرعت m/s، یکای نیرو نیوتون (N) و یکای t، ثانیه است. اما در گزینه‌ها خبری از نیوتون (N) نیست. بنابراین باید یکای فرعی نیرو یعنی kgm/s^2 را در بررسی خود استفاده کنید.

$$v=\alpha Ft\Rightarrow[m/s]=\alpha[kg\,m/s^2][s]\Rightarrow\alpha=[\frac{1}{kg}]$$

A ۸۲۸ ۲

۱ جرم هر جسم را بر حسب نیرو و شتاب به‌دست می‌آوریم.

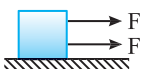
جسم (۱): $F=m_1a_1\Rightarrow m_1=\frac{F}{a_1}$

جسم (۲): $F=m_2a_2\Rightarrow m_2=\frac{F}{a_2}$

۲ شتاب نیروی F وارد بر جسمی به جرم (m_1+m_2) خواهد شد:

$$F=(m_1+m_2)a'\Rightarrow F=(\frac{F}{a_1}+\frac{F}{a_2})a'\Rightarrow F=F(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})a'\Rightarrow a'=\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}$$

A ۸۲۹ ۱

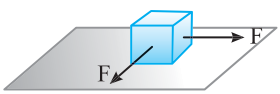


در حالت اول دو نیرو هم‌جهت و مساوی هستند، آن‌ها را با حرف F نمایش می‌دهیم. نیروی خالص خواهد شد:

$$F_{net}=F+F\Rightarrow F_{net}=2F$$

بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_{net}=ma\Rightarrow 2F=ma\xrightarrow{a=6m/s^2}2F=m\times 6\Rightarrow F=3m\quad (I)$$



در حالت دوم دو نیروی افقی بر هم عمودند و نیروی خالص را از رابطهٔ فیثاغورس حساب می‌کنیم.

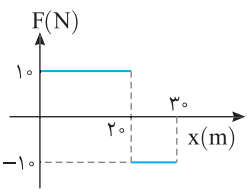
$$F'_{net}=\sqrt{F^2+F^2}=\sqrt{2}F\xrightarrow{(I)}F'_{net}=3\sqrt{2}m$$

شتاب در این حالت را به‌دست می‌آوریم.

$$F'_{net}=ma'\Rightarrow 3\sqrt{2}m=ma'\Rightarrow a'=3\sqrt{2}m/s^2$$

B ۸۳۰ ۲

خط فکری نمودار داده شده، نمودار نیرو - مکان است. در صورت مسئله نیز از زمان حرفی زده نشده بنابراین فرمولی که از حرکت‌شناسی برای حل این مسئله باید کاندید کنیم رابطهٔ مستقل از زمان است. شتاب را در هر قسمت به کمک قانون دوم نیوتون حساب کنید (برحسب جرم جسم m) سپس به کمک رابطهٔ مستقل از زمان مسئله را حل کنید.



۱ طبق قانون دوم نیوتون $F=ma$ است. پس شتاب در قسمت اول حرکت برابر $a_1=\frac{10}{m}$ و در قسمت دوم حرکت $a_2=-\frac{10}{m}$ است.

۲ برای قسمت اول حرکت به کمک معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) خواهیم داشت:

$$v_1^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow v_1^2-0^2=2\times\frac{10}{m}\times 20\Rightarrow v_1^2=\frac{400}{m}$$

۳ برای قسمت دوم حرکت نیز می‌توان نوشت:

$$v_2^2-v_1^2=2a_2\,\Delta x\Rightarrow 100-\frac{400}{m}=2\times(-\frac{10}{m})\times 10\Rightarrow 100-\frac{400}{m}=-\frac{200}{m}$$

$$\Rightarrow 100=\frac{200}{m}\Rightarrow m=2kg$$

B ۸۳۱ ۳

بنا به قانون سوم هنگام شلیک، نیرویی که گلوله و ارابهٔ توپ بر هم وارد می‌کنند برابر و در خلاف جهت هم است، برای نیروهای وارد بر ارابهٔ توپ و گلوله می‌توان نوشت:

$$F_1=-F_2 \xrightarrow{F=ma} m_1a_1=-m_2a_2 \Rightarrow a=\frac{v-v_0}{t}$$

$$\Rightarrow m_1\left(\frac{v_1-0}{t}\right)=-m_2\left(\frac{v_2-0}{t}\right)\Rightarrow m_1v_1=-m_2v_2$$

$$\Rightarrow |0/5\times 2000|=|-80\times v_2| \Rightarrow v_2=12/5 m/s$$

B ۸۳۲ ۱

خط فکری در قانون سوم نیوتون برای بررسی نیروی واکنش شما باید ابتدا مشخص کنید نیروی وارد بر جسم توسط کدام جسم بر جسم مورد نظر اعمال می‌شود به‌طور مثال برای یافتن واکنش نیروی وزن ابتدا باید از خود بپرسید نیروی وزن توسط چه جسمی بر جسم مورد نظر وارد شده تا بتوانید واکنش نیروی وزن را بیان کنید.

نیروی وزن (mg) نیرویی است که کرهٔ زمین بر جسم وارد می‌کند و واکنش آن توسط جسم بر کرهٔ زمین وارد می‌شود از این رو گزارهٔ (الف) نادرست است.

در شکل T_2 نیروی کشش نخ است که توسط نخ بر m_2 وارد می‌شود در نتیجه واکنش T_2 نیرویی است که جسم m_2 بر نخ وارد می‌کند، بنابراین گزارهٔ (ب) نادرست است.

در شکل T_4 نیروی کششی است که نخ بر دیوار وارد می‌کند، واکنش آن توسط دیوار بر نخ وارد می‌شود و گزارهٔ (پ) درست است.

T_3 بر m_2 و T_4 بر دیوار وارد می‌شوند و نمی‌توانند واکنش هم باشند و گزارهٔ (ت) نادرست است.

C ۸۳۳ ۲

اکنون باید به ذهن خود فشار آورید تا قانون سوم را بهتر درک کنید.



نیروهای وارد بر جسم را بررسی می‌کنیم.

۱ نیروی وزن W_2 که توسط کرهٔ زمین بر جسم رو به پایین وارد می‌شود.

۲ نیرویی که توسط مایع بر جسم رو به بالا وارد می‌شود که آن را حرف F نمایش داده‌ایم.

قطعاً نیروی F از W_2 کوچک‌تر است $(F<W_2)$ زیرا جسم با شتاب ثابت رو به پایین در حرکت است یعنی نیروی خالص وارد بر جسم رو به پایین است.

۳ بنا به قانون سوم نیوتون وقتی مایع به جسم نیروی F را رو به بالا وارد می‌کند جسم همان نیروی F را رو به پایین بر مایع وارد می‌کند.

۴ به مایع درون ظرف دو نیرو یکی وزن $W_{مایع}$ و دیگری F رو به پایین وارد می‌شود.

۵ عددی که نیروسنج نشان می‌دهد مجموع نیروی وزن مایع و ظرف (W_1) و نیروی واکنش F است از این‌رو خواهیم داشت.

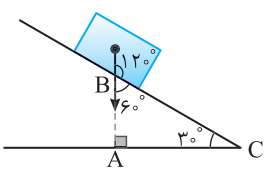
$$W_3=W_1+F \xrightarrow{F<W_2} W_3<W_1+W_2 \Rightarrow W_1+W_2>W_3$$

پنجره ۲

A ۸۳۴ ۲

یادآوری نیروی وزن، نیرویی است که توسط کرهٔ زمین بر جسم وارد می‌شود. این نیرو همواره در امتداد قائم و رو به پایین است.

نیروی وزن را رسم می‌کنیم و آن را امتداد می‌دهیم تا خط افقی را قطع کند و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را تشکیل می‌دهیم. در این صورت اندازهٔ $\hat{B}$، زاویهٔ بین نیروی وزن و امتداد سطح شیبدار مطابق شکل 60° است.



A ۸۳۵ ۴

جرم از ویژگی‌های ذاتی جسم بوده و در مکان‌های مختلف تغییر نمی‌کند بنابراین اختلاف جرم ثابت می‌ماند و برابر ۴kg است. اما نیروی وزن برابر $W=mg$ است یعنی نیروی وزن وارد بر جسم به شتاب گرانش سیاره‌ای که جسم روی سطح آن قرار دارد بستگی دارد. از این‌رو اختلاف وزن آن بر سطح سیاره برابر است با:

$$\Delta W_{سیاره}=|m_A-m_B|g_{سیاره} \xrightarrow{g_{سیاره}=\frac{3}{4}\times 10=7/5 m/s^2}$$

$$\Delta W_{سیاره}=4\times 7/5=30N$$

A ۸۳۶ ۴

۱ جرم جسم ثابت است بنابراین تغییر وزن مربوط به شتاب گرانش است، از این رو تغییر وزن را حساب می‌کنیم:

$$W_{مریخ}-W_{ماه}=mg_{مریخ}-mg_{ماه} \xrightarrow{(g_{ماه}=1/6 N/kg, g_{مریخ}=3/6 N/kg)}$$

$$\Delta W=3/6m-1/6m=2m$$

۲ درصد تغییرات برابر است با:

$$\frac{W_{مریخ}-W_{ماه}}{W_{ماه}}\times 100=\frac{2m}{1/6m}\times 100=125\%$$

بنابراین نیروی وزن ۱۲۵٪ افزایش می‌یابد.

A ۸۳۷ ۲

یادآوری بنا به تعریف چگالی یک جسم برابر $\rho=\frac{m}{V}$ است. حجم مکعب برابر طول یک ضلع به توان ۳ است.

$$V=a^3$$

۱ حجم مکعب برابر است با:

$$V=20^3 \Rightarrow V=8\times 10^3 cm^3$$

۲ جرم جسم را به کمک چگالی حساب می‌کنیم.

$$\rho=\frac{m}{V}\Rightarrow 5=\frac{m}{8\times 10^3}\Rightarrow m=40\times 10^3 g \Rightarrow m=40kg$$

۳ وزن جسم خواهد شد:

$$W=mg \Rightarrow W=40\times 10=4\times 10^2 N$$

A ۸۳۸ ۲

به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

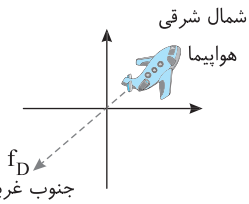
$$v^2-v_0^2=2a\Delta y \xrightarrow[\Delta y=20m]{v=15m/s} 225-0=2a\times 20\Rightarrow a=5/625 m/s^2$$



اگر جسم تنها تحت تأثیر نیروی وزن سقوط می‌کرد شتاب حرکت آن برابر شتاب گرانش $(g\sim 10 m/s^2)$ بود اما اکنون شتاب از شتاب گرانش کمتر است $(a<g)$ بنابراین حداقل یک نیرو رو به بالا در خلاف جهت حرکت جسم مطابق شکل باید بر جسم وارد شده باشد. در نتیجه تعداد نیروهای وارد بر جسم حداقل دو نیرو است.

A ۸۳۹ ۳

نکته نیروی مقاومت هوا همواره خلاف جهت حرکت بر جسم وارد می‌شود. هواپیما در حال حرکت به سمت شمال شرقی است، نیروی مقاومت هوا در خلاف جهت حرکت هواپیما بر آن وارد می‌شود. از این‌رو جهت نیروی مقاومت هوا در جهت جنوب غربی است.



B ۸۴۰ ۲

نکته نیروی مقاومت شاره (هوا) به تندی جسم و ابعاد و شکل جسم بستگی دارد.

۱ مساحت وجهی از جسم که مقاومت هوا بر آن وارد می‌شود را حساب می‌کنیم.

$A_A=\frac{۲}{۳}a\times\frac{۳}{۲}a=a^۲\ ,\ A_B=۲a\times a=۲a^۲$

سطح $A_B>A_A$ است از این رو نیروی مقاومت شاره وارد بر جسم B بزرگتر است.

$f_{D_B}>f_{D_A}$

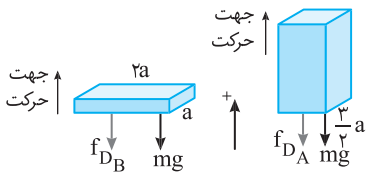
۲ جرم دو جسم یکسان است، بنابراین نیروی وزن وارد بر دو جسم یکی است. $W_A=W_B$

۳ نیروی خالص وارد بر هر جسم $(F_{net}=-(W+f_D))$ است.

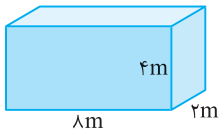
$$-(mg+f_{D_B})=ma_B\Rightarrow a_B=-g-\frac{f_{D_B}}{m}$$

$$-(mg+f_{D_A})=ma_A\Rightarrow a_A=-g-\frac{f_{D_A}}{m}$$

نیروی مقاومت f_{D_B} بیشتر از f_{D_A} است، بنابراین شتاب کندشوندهٔ جسم B بیشتر از جسم A بوده و زودتر متوقف می‌شود.



بازی با سوال مکعب مستطیل زیر را از ارتفاعی مشخص در هوا به سمت زمین رها می‌کنیم. اگر فرض شود در طول سقوط مکعب‌مستطیل در هوا نمی‌چرخد، آن را از طرف کدام وجه رها کنیم که با سرعت کمتری به زمین برسد؟



۱) ۲×۸ ۲) ۴×۸

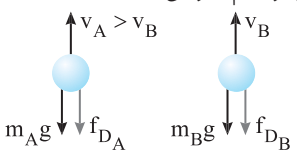
۳) ۲×۴ ۴) سرعت رسیدن به زمین در هر سه حالت یکسان است.

پاسخ هرچه مساحت سطح جلوی جسم بیشتر باشد برخورد مولکول‌های هوا با جسم بیشتر می‌شود پس نیروی مقاومت بیشتری به جسم وارد شده و سرعت رسیدن آن به زمین کمتر است. بنابراین کمترین تندی برای زمانی است که مکعب را از وجه ۸×۴ به سمت پایین رها کنیم. گزینهٔ ۲

B ۸۴۱ ۲

نکته هر چه تندی جسم بیشتر باشد نیروی مقاومت شاره (هوا) وارد بر آن بیشتر است.

خط فکری ابتدا نیروی وارد بر هر جسم را در یک شکل ساده نشان دهید سپس برایند نیروهای وارد بر هر جسم را بررسی کنید.



۱ در لحظه‌ای که $v_A>v_B$ است نیروی مقاومت هوا وارد بر A از نیروی مقاومت هوا وارد بر B بزرگتر است. $f_{D_A}>f_{D_B}$

۲ قانون دوم نیوتون را برای هر جسم می نویسیم و شتاب هریک را به‌دست می‌آوریم و به کمک نیروی خالص وارد بر آن‌ها شتاب‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم.

$$f_{net}=ma\begin{cases}\xrightarrow{A}|m_Ag+f_{D_A}|=m|a_A|\Rightarrow|a_A|=|g+\frac{f_{D_A}}{m}|\\ \xrightarrow{B}|m_Bg+f_{D_B}|=m|a_B|\Rightarrow|a_B|=|g+\frac{f_{D_B}}{m}|\end{cases}$$

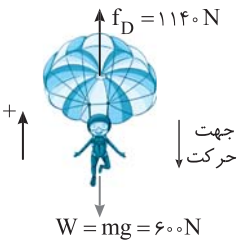
۳ $f_{D_A}>f_{D_B}$ است بنابراین $|a_A|>|a_B|$ خواهد بود.

A ۸۴۲ ۴

۱ نیروی وزن چترباز را حساب می‌کنیم:

$W=mg\xrightarrow{m=۶۰kg}W=۶۰\times۱۰=۶۰۰N$

۲ در لحظهٔ مورد نظر نیروی مقاومت هوا $f_D=۱۱۴۰N$ رو به بالا است. این نیرو از نیروی وزن بزرگتر است. $(f_D>W)$ و نیروی خالص روبه بالا خواهد بود در حالی که جهت حرکت رو به پایین است بنابراین حرکت در این لحظه کندشونده است.



۳ اندازهٔ شتاب را به کمک قانون دوم به‌دست می‌آوریم.

$f_{net}=ma\Rightarrow f_D-mg=ma\Rightarrow ۱۱۴۰-۶۰۰=۶۰a\Rightarrow a=۹m/s^۲$

A ۸۴۳ ۳

۱ به جسم دو نیروی W و f_D عمود بر هم وارد می‌شود بنابراین نیروی خالص وارد بر جسم برابر است با: $F_{net}=\sqrt{f_D^۲+W^۲}\Rightarrow F_{net}=\sqrt{f_D^۲+(۴/۸)^۲}\quad(I)$

۲ با توجه به وزن داده‌شده و شتاب گرانش، جرم را به‌دست می‌آوریم:

$W=mg\xrightarrow[W=۴/۸N]{g=۱۰m/s^۲}۴/۸=m\times۱۰\Rightarrow m=۰/۴۸kg$

۳ با توجه به قانون دوم نیوتون، نیروی خالص برابر است:

$F_{net}=ma\Rightarrow F_{net}=۰/۴۸\times\frac{۶۵}{۶}=۵/۲N\quad(II)$

۴ با توجه به دو معادلهٔ (I) و (II) خواهیم داشت:

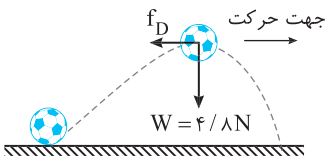
$۵/۲=\sqrt{f_D^۲+(۴/۸)^۲}\Rightarrow(۵/۲)^۲=f_D^۲+(۴/۸)^۲$

$\Rightarrow f_D^۲=(۵/۲)^۲-(۴/۸)^۲$

یادداشت ریاضی یک اتحاد پرکاربرد که محاسبات را برای ما ساده می‌کند، اتحاد مزدوج است: $x^۲-y^۲=(x-y)(x+y)$

۵ با توجه به اتحاد مزدوج معادله را حل می‌کنیم:

$f_D^۲=(۵/۲-۴/۸)(۵/۲+۴/۸)\Rightarrow f_D^۲=۰/۴\times۱۰\Rightarrow f_D^۲=۴\Rightarrow f_D=۲N$



میانبر بهتر است اعداد فیثاغورسی «۵ و ۴ و ۳» و «۱۳ و ۱۲ و ۵» را به خاطر بسپارید.

$۵/۲=\sqrt{f_D^۲+(۴/۸)^۲}\Rightarrow f_D=۵\times۰/۴=۲N$

$۱۳\times۰/۴\quad ۵\times۰/۴\quad ۱۲\times۰/۴$

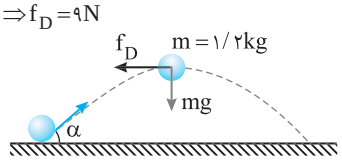
بازی با سوال توپی به جرم ۱/۲kg را تحت زاویهٔ α به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اگر در بیشینهٔ ارتفاع توپ از زمین اندازهٔ شتاب حرکت توپ $۱۲/۵m/s^۲$ باشد، در این نقطه نیروی مقاومت هوای وارد بر توپ چند نیوتون است؟ $(g=۱۰N/kg)$ از کتاب درسی

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۱۵

پاسخ در نقطهٔ بیشینه مطابق شکل دو نیروی وزن (رو به پایین) و مقاومت هوا (خلاف جهت حرکت) به جسم وارد می‌شوند.

$|\vec{F}_{net}|=|m\vec{a}|\Rightarrow F_{net}=\sqrt{f_D^۲+mg^۲}=ma\Rightarrow\sqrt{f_D^۲+(۱۲)^۲}=۱۲/۵\times۱/۲=۱۵$

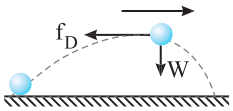
$f_D^۲+۱۴۴=۲۲۵\Rightarrow f_D=۹N$

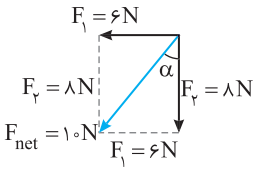


گزینهٔ ۱

A ۸۴۴ ۲

نیروی مقاومت هوا، خلاف جهت حرکت است و نیروی وزن رو به پایین وارد می‌شود، بنابراین بنـا به قانـون دوم نیوتون همـواره جهت بردار شـتاب جسـم در جهت نیروی خالص وارد بر جسم $(\vec{F}=m\vec{a})$ است. بنابراین کافی است شما نیروی برایند را رسم کنید و زاویهٔ این نیرو با راستای قائم را به‌دست بیاورید.





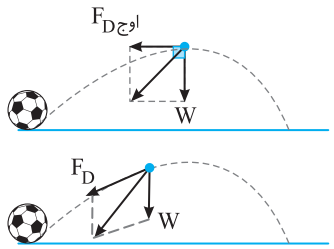
مطابق شکل زاویهٔ بین نیروی خالص و محور قائم (α) خواهد شد:

$$\tan\alpha=\frac{F_۱}{F_۲}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۶}{۸}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\alpha=۳۷^\circ$$

B ۸۴۵ ۱

نیروی مقاومت شـاره با افزایش تندی، افزایـش می‌یابد. اندکی قبل از اوج تندی توپ از تنـدی آن در اوج بیشـتر اسـت. بنابرایـن نیـروی مقاومـت هـوا نیـز بیشـتر اسـت. $(f_D>f_{D_{اوج}})$ از طرفـی مطابق شـکل نیـروی برایند f_D و W در قبـل اوج بزرگ‌تر خواهد شد، بنابراین:

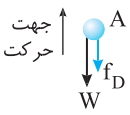
$$F_{net_{قبل\ از\ اوج}}>F_{net_{اوج}}>W\Rightarrow a>a_{اوج}>g$$



A ۸۴۶ ۱

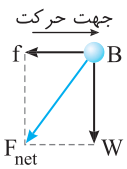
خط فکری سـؤال زیبایی اسـت. مهم‌ترین نکتهٔ آن عبارت «اثر مقاومت هوا قابل ملاحظه باشـد» بنابراین شـما برای هر گلوله باید نیروهای وارد بر آن یعنی نیروی وزن را رو به پایین و نیروی مقاومت هوا را در خلاف جهت حرکت رسـم کنید. نیروی خالص را به دست بیاورید و به کمک آن شتاب گلوله‌ها را با هم مقایسه کنید.

۱ جسـم A: نیروی وزن و مقاومت شـاره (هوا) وارد بر A هر دو رو به پایین است از این‌رو:



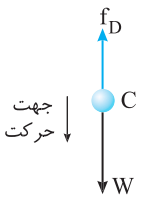
$$F_{net}=ma\Rightarrow|a|=\frac{|F_{net}|}{m}\Rightarrow|a|=\frac{|f_D+W|}{m}$$

۲ جسم B:



$$F_{net}=ma\Rightarrow a_B=\frac{\sqrt{f_D^۲+W^۲}}{m}$$

۳ جسم C:



$$F_{net}=ma\Rightarrow a_C=\frac{W-f_D}{m}$$

۴ بنابراین بزرگی شتاب A از بزرگی شتاب‌های B و C بزرگتر است.

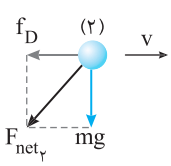
$$|a_A|>|a_B|>|a_C|$$

B ۸۴۷ ۴

نکته نیـروی مقاومـت شـاره (هـوا) در خلاف جهت حرکت جسم است.

۱ نیروهای وارد بر گلوله (۲) را رسم می‌کنیم.

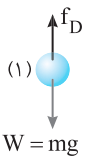
۲ نیـروی خالص وارد بر گلوله (۲) را به کمک رابطهٔ فیثاغورس می‌نویسیم:



$$F_{net}=\sqrt{f_D^۲+mg^۲}\xrightarrow[F_{net_۲}=۴\sqrt{۴۱}N]{m=۲kg}۴\sqrt{۴۱}=\sqrt{f_D^۲+۲۰^۲}$$

$$\Rightarrow۱۶\times۴۱=f_D^۲+۴۰۰\Rightarrow f_D^۲=۶۵۶-۴۰۰=۲۵۶\Rightarrow f_D=۱۶N$$

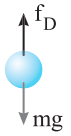
۳ نیروهای وارد بر گلولهٔ (۱) را رسـم می‌کنیم و به کمک قانون دوم نیوتون شتاب حرکت جسم را حساب می‌کنیم:



$$F_{net_۱}=ma\Rightarrow W-f_D=ma\Rightarrow۲۰-۱۶=۲a\Rightarrow a=۲m/s^۲$$

B ۸۴۸ ۲

نکته نیـروی مقاومت هوا (f_D) به تندی جسـم بسـتگی دارد و هرچه تندی بیشتر شود، نیروی مقاومت هوا افزایش می‌یابد.



هنگامی که چترباز سـقوط می‌کند، تنـدی آن افزایش می‌یابد. یعنی در ابتدا سرعت ثابت نیست و گزینهٔ (۳) نادرست است. با افزایش تندی، نیروی مقاومت هوای وارد بر چترباز نیز افزایش می‌یابد. بنابراین نیروی خالـص وارد بـر چترباز $(F_{net}=W-f_D)$ متغیر اسـت و شـتاب حاصل از آن نیز متغیر اسـت. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۴) نادرسـت است. هنگامی که جسـم به تندی حدی خود می‌رسد نیروی مقاومت هوا و نیروی وزن هم‌اندازه می‌شوند و چون در خلاف جهت هم هستند برایند نیروهای وارد بر چترباز صفر می‌شود و حرکت با سرعت ثابت ادامه پیدا می‌کند. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

(متغیر — ثابت — متغیر)

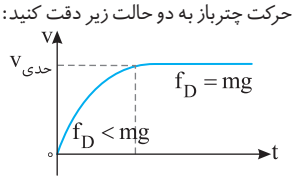
A ۸۴۹ ۲

وقتـی یـک چترباز بلافاصله بعد از سـقوط چترش را باز می‌کند، ابتـدا تندی‌اش افزایش می‌یابد پس در ابتدا حرکت تندشـونده اسـت در نتیجه نیروی مقاومـت هوا نیز افزایش می‌یابـد تـا لحظه‌ای که نیروی مقاومـت هوا با وزن چترباز هم‌اندازه شـود، در این هنگام نیروی خالص صفر شده و چترباز با تندی ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد.

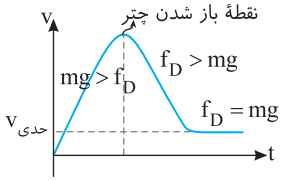
B ۸۵۰ ۲

خط فکری در موضوع مقاومت شاره و حرکت چترباز به دو حالت زیر دقت کنید:

الـف) اگر چترباز در همان ابتدا با چتر باز پریده باشـد، رفته‌رفته تنـدی آن افزایش یافته تا به تندی حدی برسد و پس از آن با تندی ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد:



ب) اگر چترباز بپرد و پس از مدتی چتر خود را باز کند، در لحظهٔ باز شـدن چتر تندی حرکت متحرک بیشـینه بوده و با باز شدن چتر تندی چترباز شروع به کم شدن می‌کند تا به تندی حدی برسد:

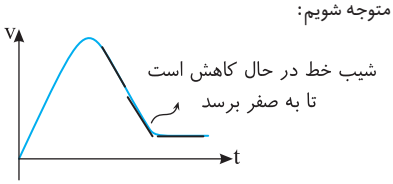


نکته مقاومت هوا به تندی جسـم بسـتگی دارد و با افزایـش و یا کاهش تندی جسم مقاومت هوا به ترتیب افزایش و یا کاهش می‌یابد.

بـا توجه به سـؤال چترباز بعـد از مدتی چتر خود را بـاز کرده یعنی حرکـت چترباز مانند حالت (ب) خط فکری است. بعد از باز شدن چتر تندی چترباز شروع به کاهش می‌کند بنابرایـن گزینه‌های (۱) و (۳) و (۴) که در آن‌ها بیان شـده تندی جسـم افزایش می‌یابد نادرست بوده و تنها گزینهٔ (۲) درست است.

اما بررسـی شـتاب حرکت: جهت حرکت چترباز به سـمت پایین است و پس از باز کردن چتر حرکت چترباز کندشـونده بوده و نیروی مقاومت هوا (f_D) به سمت بالا و بزرگ‌تر از W اسـت و نیـروی خالـص وارد بـر چترباز f_D-W، خواهـد شـد. در اصـل $F_{net}=ma\Rightarrow f_D-W=ma$ اسـت و با کم شدن تندی جسم f_D کاهش می‌یابد در نتیجه شـتاب کاهش می‌یابد و در تندی حدی که $f_D=mg$ می‌شـود شـتاب صفر است یعنی شتاب بعد از باز شدن چتر در حال کاهش است.

البته می‌توانستیم از روی نمودار $v-t$ و شیب خط مماس که شتاب را به ما می‌دهد نیز این موضوع را متوجه شویم:

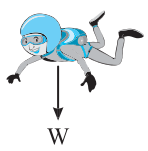


A ۸۵۱ ۴

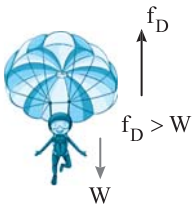
چترباز از ارتفاع نسبتاً زیادی به بیرون می‌پرد و چتر خود را باز می‌کند. بنابراین در ابتدا تندی چترباز افزایش می‌یابد. با افزایش تندی مقاومت هوا نیز زیاد شده تا وقتی که نیروی مقاومت هوا با نیروی وزن برابر می‌شود $(W=f_D)$ بعد از این لحظه نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند $(F_{net}=0)$ و حرکت جسم با سرعت ثابت ادامه پیدا می‌کند، بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

A ۸۵۲ ۴

۱ چترباز بعد از پریدن از بالگرد تا مدتی با چتر بسته سقوط می‌کند و تقریباً با شتاب گرانشی ناشی از نیروی وزن پایین می‌آید $(g=10m/s^2)$ و در هر ثانیه تقریباً به اندازهٔ $10m/s$ بر سرعتش افزوده می‌شود و نمودار سرعت - زمان باید با گذشت زمان صعودی باشد.



۲ هنگامی که چترباز چتر خود را باز می‌کند، به دلیل ابعاد بزرگ چتر، نیروی مقاومت هوا (f_D) به شدت افزایش می‌یابد به‌گونه‌ای که f_D از نیروی وزن (W) چترباز بزرگتر است $(f_D>W)$ و مانند ترمز، سرعت چترباز را کاهش می‌دهد. بنابراین نمودار سرعت - زمان، نزولی می‌شود.



۳ هرچه از سرعت چترباز کاسته می‌شود، نیروی مقاومت هوا کاهش می‌یابد تا لحظه‌ای فرا می‌رسد که نیروی مقاومت هوا با نیروی وزن برابر می‌شود $(f_D=W)$ و نیروهای وارد بر چترباز متوازن شده و چترباز با سرعت ثابت پایین می‌آید بنابراین سرعت چترباز ثابت می‌ماند و نمودار سرعت - زمان خط راست افقی می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

A ۸۵۳ ۳

یادآوری هرگاه هنگام سقوط جسم در هوا، نیروی وزن برابر نیروی مقاومت هوا شود نیروهای وارد بر جسم متوازن شده و جسم با تندی ثابت که به آن تندی حدی می‌گویند پایین می‌آید.

نیروی وزن را با نیروی مقاومت هوا برابر قرار می‌دهیم و تندی جسم را به دست می‌آوریم.

$$f_D=W \xrightarrow{f_D=150v} 150v=mg \xrightarrow{m=60kg} 150v=60\times10$$
$$\Rightarrow v=4m/s$$

بازی با سوال **قطعه سنگی به جرم $7/5kg$ از ارتفاع زیادی رها می‌شود و پس از طی مسافتی با تندی حدی $2/5m/s$ به زمین می‌رسد. اگر رابطهٔ بین اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر سنگ برحسب تندی در SI به‌صورت $f_D=bv^2$ باشد، b کدام است؟ $(g=10m/s^2)$**

۱) $1/2$ ۲) 6 ۳) $0/6$ ۴) 12

پاسخ **در تندی حدی، نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا با هم برابرند:**

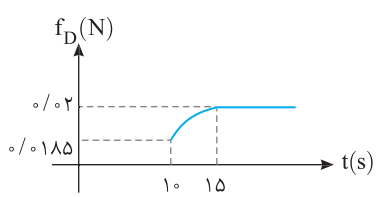
$$f_D=mg\Rightarrow f_D=75N$$
$$f_D=bv^2 \xrightarrow{f_D=75N,\ v=2/5m/s} 75=b(2/5)^2\Rightarrow b=12$$

گزینهٔ ۴

B ۸۵۴ ۱

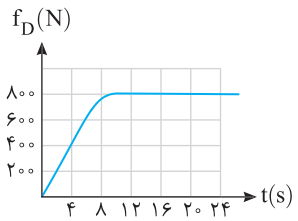
با توجه به نمودار نیز از لحظهٔ $t=15s$ به بعد نیروی مقاومت هوا ثابت شده پس از $t=15s$ به بعد قطره به تندی حدی خود رسیده است و نیروی وزن و مقاومت آن باهم برابر است.

$$mg=f_D=0/02N\Rightarrow m=0/002kg\Rightarrow m=2g$$



B ۸۵۵ ۲

۱ در لحظه‌ای که نیروی مقاومت هوا $f_D=800N$ شده است، این نیرو ثابت مانده است یعنی در این لحظه تندی چترباز به تندی حدی رسیده است و نیروی وزن با نیروی مقاومت هوا برابر شده است.



$$F_{net}=0=f_D=800N$$

۲ جرم جسم را حساب می‌کنیم.

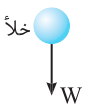
$$W=mg\Rightarrow 800=m\times10\Rightarrow m=80kg$$

۳ در لحظهٔ $t=4s$ نیروی مقاومت هوا وارد بر جسم برابر $400N$ است از این رو شتاب حرکت خواهد شد:

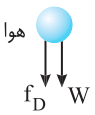
$$F_{net}=ma\Rightarrow W-f_D=ma\Rightarrow 800-400=80a\Rightarrow a=5m/s^2$$

B ۸۵۶ ۴

۱ هنگامی که جسم در خلأ پرتاب می‌شود تنها نیروی وزن رو به پایین به آن وارد می‌شود $-mg=ma\Rightarrow|a|=g$. بنابراین با شتاب g از تندی جسم کاسته می‌شود تا گلوله متوقف شود.



۲ اما در هوا علاوه بر نیروی وزن، نیروی مقاومت هوا نیز خلاف جهت حرکت یعنی رو به پایین به جسم وارد می‌شود و بزرگی شتاب حرکت جسم خواهد شد:



$$F_{net}=ma\Rightarrow|mg+f_D|=ma'\Rightarrow a'=g+\frac{f_D}{m}>g$$

۳ شتاب توقف جسم وقتی در هوا رو به بالا پرتاب می‌شود بیشتر از g است. بنابراین گلوله سریع‌تر متوقف می‌شود در نتیجه، زمان توقف و ارتفاع اوج گلوله هنگام پرتاب در هوا کوچکتر از پرتاب در شرایط خلأ است. $t'<t \quad , \quad H'<H$

۴ به محاسبات زیر دقت کنید.

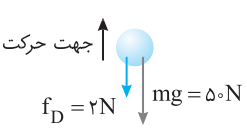
$$v=at+v_0\begin{cases}\xrightarrow{v=0\ \text{خلأ}} 0=-gt+v_0\Rightarrow t=\dfrac{v_0}{g}\\ \xrightarrow{v=0\ \text{هوا}} 0=(-g-\dfrac{f_D}{m})t'+v_0\Rightarrow t'=\dfrac{v_0}{g+\frac{f_D}{m}}\end{cases}\Rightarrow t'<t$$

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\begin{cases}\xrightarrow{\text{خلأ}} 0-v_0^2=2(-g)H\Rightarrow H=\dfrac{v_0^2}{2g}\\ \xrightarrow{\text{هوا}} 0-v_0^2=2(-g-\dfrac{f_D}{m})H'\Rightarrow H'=\dfrac{v_0^2}{2(g+\frac{f_D}{m})}\end{cases}$$
$$\Rightarrow H'<H$$

A ۸۵۷ ۲

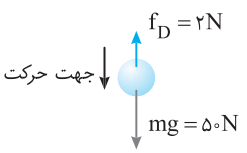
خط فکری شکل ساده‌ای از مسئله در دو حالت رسم می‌کنیم نیروهای وارد بر جسم را روی شکل نمایش می دهیم سپس به کمک قانون دوم نیوتون شتاب جسم را در مسیر رفت و در مسیر برگشت حساب می‌کنیم.

۱ هنگام پرتاب توپ به سمت بالا نیروی مقاومت هوا که مخالف جهت حرکت است، به سمت پایین است. نیروی وزن نیز به سمت پایین است. بنابراین شتاب حرکت خواهد شد.



$$F_{net}=ma\Rightarrow -50-2=5a\Rightarrow a=-10/4m/s^2\Rightarrow|a|=10/4m/s^2$$

۲ در مسیر برگشت، جهت حرکت رو به پایین و نیروی مقاومت هوا رو به بالا است. نیروی وزن نیز به سمت پایین است.



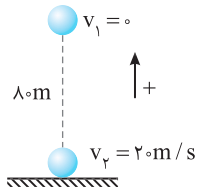
$$F_{net}=ma'\Rightarrow -50+2=5a'$$
$$\Rightarrow a'=-9/6m/s^2\Rightarrow|a'|=9/6m/s^2$$

بنابراین: $\dfrac{|a|}{|a'|}=\dfrac{10/4}{9/6}=\dfrac{13}{12}$

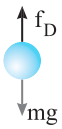
B ۸۵۸ ۳

۱ جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده ($v_0=0$) و بعد از جابه‌جایی $d=80m$ سرعت آن به $v=20m/s$ رسیده است بنابراین می‌توانیم که به کمک رابطهٔ مستقل از زمان برای حرکت با شتاب ثابت، شتاب را حساب کنیم.

$$v^2-v_0^2=2ad\Rightarrow 20^2-0=2a(80)\Rightarrow a=2/5m/s^2$$



۲ نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و برایند نیروها را مساوی ma قرار می‌دهیم.



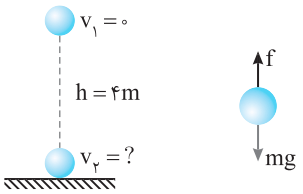
$$f_{net}=ma\xrightarrow{m=2kg}mg-f_D=ma\Rightarrow 20-f_D=2\times 2/5$$
$$\Rightarrow f_D=15N$$

بازی با سؤال **جسمی به جرم ۲kg از ارتفاع ۴m سطح زمین رها می‌شود. اگر نیروی مقاومت هوای وارد بر جسم ثابت و برابر $f_D=12N$ فرض شود، سرعت جسم هنگام رسیدن به زمین چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{3}$

پاسخ ابتدا با توجه به نیروهای وارد بر جسم شتاب جسم را محاسبه می‌کنیم:

$$mg-f=ma\Rightarrow 20-12=2a\Rightarrow a=4m/s^2$$



جسم با شتاب $4m/s^2$ از حال سکون رو به پایین شروع به حرکت کرده و در جابه‌جایی $d=4m$ سرعت آن خواهد شد:

$$v^2-v_0^2=2ad\Rightarrow v^2-0=2\times 4\times 4\Rightarrow v=4\sqrt{2}\ m/s$$

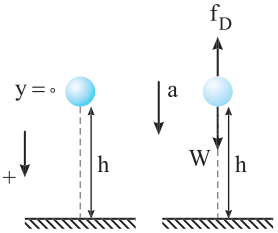
گزینهٔ ۳

B ۸۵۹ ۲

خط فکری به گزینه‌ها این گونه با تعجب نگاه نکنید مسئله ساده‌تر از این حرف‌هاست. شکل ساده‌ای رسم کنید، نیروهای وارد بر جسم را روی آن نشان دهید. نیروی خالص را به دست بیاورید تا بتوانید شتاب را حساب کنید. در مسئله از شما زمان خواسته شده بنابراین باید به سراغ حرکت‌شناسی بروید و زمان را حساب کنید.

۱ ابتدا با توجه به نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-f_D=ma\Rightarrow a=g-\frac{f_D}{m}$$



۲ با استفاده از معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت، زمان را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow -h=\frac{1}{2}(-(g-\frac{f_D}{m}))t^2\Rightarrow h=\frac{1}{2}(g-\frac{f_D}{m})t^2$$
$$\Rightarrow t^2=\frac{2hm}{mg-f_D}\Rightarrow t=\sqrt{\frac{2hm}{mg-f_D}}$$

B ۸۶۰ ۲

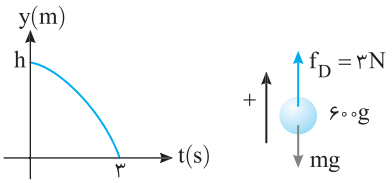
۱ نیروهای وارد بر جسم نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا هستند، نیروها را روی یک شکل ساده نمایش می‌دهیم. در نمودار جهت مثبت رو به بالا اختیار شده بنابراین f_D مثبت و W منفی شده و نیروی خالص وارد بر جسم $F_{net}=-mg+f_D$ خواهد شد.

با توجه به قانون دوم نیوتون شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow -mg+f_D=ma\Rightarrow -6+3=0/6a\Rightarrow -3=0/6a$$
$$\Rightarrow a=-5m/s^2$$

۲ حال با توجه به معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت داریم:

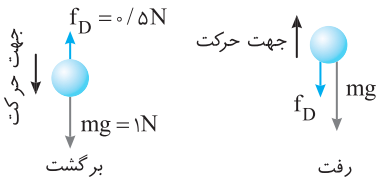
$$\Delta y=-\frac{1}{2}at^2\Rightarrow -h=-\frac{1}{2}\times 5\times 9\Rightarrow h=22/5m$$



B ۸۶۱ ۳

هم در مسیر رفت و هم در مسیر برگشت با توجه به ثابت بودن نیروها (نیروی وزن و مقاومت هوا) شتاب حرکت ثابت است. به کمک قانون دوم نیوتون در مسیر رفت که نیروی وزن و مقاومت هوا هم‌جهت‌اند f_D را حساب می‌کنیم. (جهت مثبت رو به بالا انتخاب شده است.)

$$F_{net}=ma\Rightarrow -mg-f_D=ma\Rightarrow -1-f_D=-1/5\Rightarrow f_D=0/5N$$



اکنون در مسیر برگشت با توجه به این‌که نیروی وزن و نیروی f_D خلاف جهت هستند، شتاب را به دست می‌آوریم.

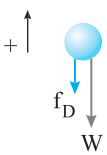
$$F_{net}=ma\Rightarrow -mg+f_D=ma'\Rightarrow -1+0/5=0/1a'\Rightarrow a'=-5m/s^2$$

B ۸۶۲ ۳

در ابتدا نمودار (۲) و (۴) را کنار می‌گذاریم زیرا در صورت مسئله جهت رو به بالا مثبت در نظر گرفته شده بنابراین سرعت اولیه در لحظهٔ پرتاب رو به بالا باید مثبت باشد که در نمودار گزینه‌های (۲) و (۴) منفی است.

یادآوری شیب نمودار سرعت - زمان برابر شتاب متحرک است.

۱ در مسیر رفت نیروهای وارد بر جسم یعنی نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا رو به پایین است و با هم جمع می‌شوند و اندازهٔ نیروی خالص وارد بر جسم از جمع W و f_D به دست می‌آید و شتاب حرکت خواهد شد:



$$|F_{net}|=ma\Rightarrow f_D+W=ma\Rightarrow a_{رفت}=\frac{W+f_D}{m}$$

۲ در مسیر برگشت نیروی وزن رو به پایین و نیروی مقاومت هوا رو به بالا و شتاب حرکت خواهد شد:



$$|F_{net}|=ma'\Rightarrow W-f_D=ma'\Rightarrow a'=\frac{W-f_D}{m}$$

شیب a و a' هر دو رو به پایین هستند پس منفی هستند، بنابراین شیب نمودار $v-t$ باید منفی باشد از طرفی بزرگی شتاب در مسیر رفت از بزرگی شتاب در مسیر برگشت بزرگتر و اندازهٔ شیب در مسیر رفت از اندازهٔ شیب در مسیر برگشت بیشتر بوده و گزینهٔ (۳) درست است.

۸۶۳ B ۱

خط فکری برای هر جسم نیروها را رسم کرده و برایند نیروها را مشخص کرده، سپس شتاب حرکت هر جسم را به دست بیاورید و سرانجام به کمک رابطهٔ مستقل از زمان نسبت تندی دو متحرک را در برخورد به زمین حساب کنید.

۱ شتاب حرکت هر جسم را به‌دست می‌آوریم:



$$A\ \text{جسم}: m_Ag-f_{D_A}=m_Aa_A \xrightarrow{f_{D_A}=\frac{1}{3}m_Ag} m_Ag-\frac{1}{3}m_Ag=m_Aa_A \Rightarrow a_A=\frac{2}{3}g$$

$$B\ \text{جسم}: m_Bg-f_{D_B}=m_Ba_B \xrightarrow{f_{D_B}=\frac{1}{6}m_Bg} m_Bg-\frac{1}{6}m_Bg=m_Ba_B \Rightarrow a_B=\frac{5}{6}g$$

۲ باتوجه به رابطهٔ مستقل از زمان:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta y \Rightarrow \begin{cases} v_A^2=2a_Ah \\ v_B^2=2a_Bh \end{cases} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B}=\sqrt{\frac{a_A}{a_B}}=\sqrt{\frac{\frac{2}{3}g}{\frac{5}{6}g}}=\sqrt{\frac{12}{15}}=\sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{v_A}{v_B}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

۸۶۴ B ۲

نیروهای وارد بر دو گوی به ترتیب نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا است:



$$A\ \text{جسم}: m_Ag-f_D=m_Aa_A \Rightarrow a_A=g-\frac{f_D}{m_A}$$

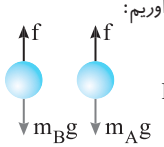
$$B\ \text{جسم}: m_Bg-f_D=m_Ba_B \Rightarrow a_B=g-\frac{f_D}{m_B}$$

با توجه به اینکه $m_A=2m_B$ است. $\frac{f_D}{m_A}<\frac{f_D}{m_B} \Rightarrow a_A>a_B$

شتاب A بیشتر از شتاب B است، بنابراین تندی A در برخورد به زمین بیشتر از تندی B است، در نتیجه A زودتر به زمین می‌رسد.

۸۶۵ B ۳

۱ ابتدا با توجه به قانون دوم نیوتون شتاب‌ها را به‌دست می‌آوریم:



$$F_{\text{خالص}}=ma \Rightarrow \begin{cases} m_Bg-f=m_Ba_B \Rightarrow a_B=g-\frac{f}{m_B} \\ m_Ag-f=m_Aa_A \Rightarrow a_A=g-\frac{f}{m_A} \end{cases}$$

۲ جرم دو جسم یکسان بوده $(m_A=m_B)$ بنابراین شتاب a_A و a_B با هم برابر است.

۳ به کمک رابطهٔ شتاب ثابت $\Delta y=\frac{1}{2}at^2+v_0t$ زمان سقوط هر گوی را حساب می‌کنیم:

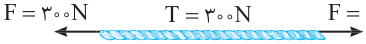
$$\Delta y=\frac{1}{2}at^2 \begin{cases} \xrightarrow{A:} h_A=\frac{1}{2}a_At_A^2 \Rightarrow t_A=\sqrt{\frac{2h_A}{a_A}} \\ \xrightarrow{B:} h_B=\frac{1}{2}a_Bt_B^2 \Rightarrow t_B=\sqrt{\frac{2h_B}{a_B}} \end{cases}$$

اکنون نسبت زمان‌ها را به دست می‌آوریم.

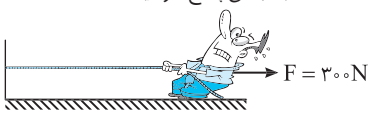
$$\frac{t_A}{t_B}=\sqrt{\frac{h_Aa_B}{h_Ba_A}} \xrightarrow[a_A=a_B]{h_A=2h_B} \frac{t_A}{t_B}=\sqrt{\frac{2h_B}{h_B}}=\sqrt{2}$$

۸۶۶ A ۳

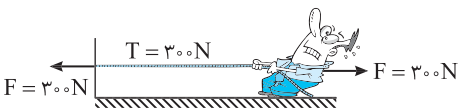
نکته هرگاه دو سر طناب سبکی را با نیروهای یکسان F در خلاف جهت هم بکشیم نیروی کشش طناب برابر F خواهد بود.



برای توجیه این نکته به جای دو نفر، یک نفر را در نظر بگیرید که با نیروی $F=300N$ طناب متصل به دیواری را می‌کشد. اگر در این حالت از شما پرسیده شود نیروی کشش طناب چند نیوتون است شما به راحتی پاسخ خواهید داد « ۳۰۰N »



اما به شکل دقت کنید طناب ساکن است بنابراین باید نیروهای وارد بر آن متوازن باشند یعنی دیوار نیروی ۳۰۰N به سمت چپ به طناب وارد می‌کند و این حالت با حالتی که دو نفر دو سر طناب را با ۳۰۰N می‌کشند فرقی نمی‌کند.



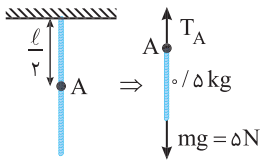
در این مسئله نیروی کشش نخ ۳۰۰N است که از بیشینهٔ نیروی قابل تحمل طناب (۴۰۰N) کمتر است و طناب پاره نمی‌شود.

۸۶۷ B ۱

نکته هرگاه یک طناب سنگین از سقف آویزان شود، هر نقطه از طناب وزن قسمت پایینی طناب را تحمل می‌کند.

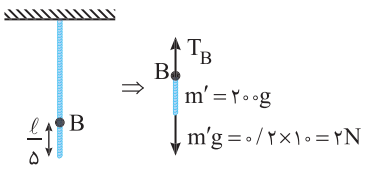
۱ در نقطهٔ A ، کشش نخ برابر وزن قسمت پایین طناب یعنی برابر وزن یک نیمهٔ طناب است.

$$T_A=\frac{W}{2}=\frac{mg}{2} \xrightarrow{m=1kg} T_A=5N$$



۲ در نقطهٔ B ، کشش نخ وزن $\frac{1}{5}$ طناب یعنی $\frac{W}{5}$ را تحمل می‌کند، از این‌رو:

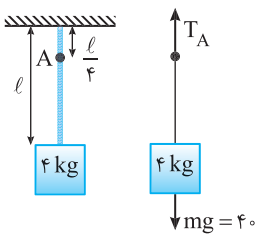
$$T_B=\frac{1}{5}W \Rightarrow T_B=\frac{1}{5}\times 10 \Rightarrow T_B=2N$$



۳ تفاضل دو نیروی کشش خواهد شد: $T_A-T_B=5-2 \Rightarrow T_A-T_B=3N$

۸۶۸ A ۴

نکته هرگاه جرم ریسمان ناچیز باشد، نیروی کشش در تمام طول آن یکسان است.



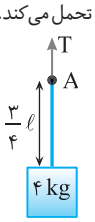
فواصل داده شده روی شکل مهم نیست و کشش در نقطهٔ A یا هر نقطه از ریسمان برابر وزن جسم متصل به ریسمان است.

$$T_A=mg \Rightarrow T_A=40N$$

۸۶۹ A ۲

خط فکری هرگاه طناب دارای جرم باشد و در امتداد قائم به سقف آویزان شود، کشش از نقاط بالا به پایین کاهش می‌یابد و هر نقطه از طناب وزن قسمت زیرین خود را تحمل می‌کند.

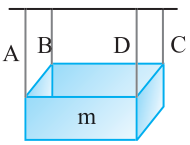
کشش در نقطهٔ A برابر وزن قسمت زیر نقطه A است.



$$T_A=m_{\text{جسم}}g+\frac{3}{4}m_{\text{طناب}}g \Rightarrow T_A=40+3/75=43/75N$$

۱ ۸۷۰ B

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. نیروی وزن به‌طور یکنواخت بین چهار ریسمان تقسیم شده است و هر ریسمان $\frac{1}{4}$ وزن جسم را تحمل می‌کند. برای آنکه هیچ‌یک از ریسمان‌ها پاره نشود نیروی کشش هریک از آن‌ها باید برابر کمینهٔ نیروی کشش ریسمان‌ها یعنی $10N$ باشد. در این صورت:

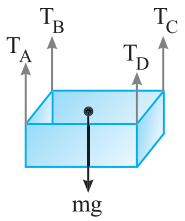


$$T_A=T_B=T_C=T_D=10N$$

جسم در تعادل است بنابراین:

$$W=T_A+T_B+T_C+T_D=10+10+10+10$$

$$\Rightarrow W=40N$$



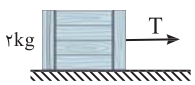
جرم جسم خواهد شد:

$$W=mg\Rightarrow 40=m\times 10\Rightarrow m=4kg$$

۱ ۸۷۱ A

نکته در یک طناب سبک و همگن با جرم ناچیز کشش در تمام نقاط طناب یکسان است.

به جای نیروی کشش در محل M، نیروی کشش در محل اتصال طناب به جعبه را حساب می‌کنیم، سطح بدون اصطکاک است بنابراین نیروی خالص وارد بر جعبه همان نیروی کشش طناب است.



$$F_{net}=ma\Rightarrow T=2\times 2=4N$$

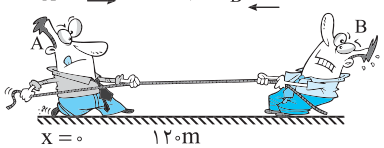
۲ ۸۷۲ B

۱ اندازهٔ نیروی وارد بر شخص A و شخص B برابر نیروی کشش طناب $F_A=F_B=36N$ است. شتاب هر یک را به دست می‌آوریم:

$$A: F=ma\Rightarrow 36=40a_A\Rightarrow a_A=0/9m/s^2$$

$$B: F=ma\Rightarrow 36=60a_B\Rightarrow a_B=0/6m/s^2$$

$$a_A=0/9m/s^2 \rightarrow \quad \leftarrow a_B=-0/6m/s^2$$



۲ سرعت A و B را به کمک معادلهٔ سرعت - زمان حرکت با شتاب ثابت به‌دست می‌آوریم:

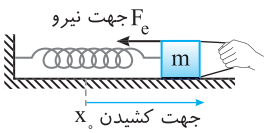
$$v=at+v_0\Rightarrow \begin{cases} v_A=0/9t \\ v_B=0/6t \end{cases}\Rightarrow \frac{v_A}{v_B}=\frac{0/9}{0/6}=\frac{3}{2}$$

۳ ۸۷۳ A

یادآوری نیروی کشسانی فنر از رابطهٔ $F=kx\ (F=k\Delta\ell)$ به دست می‌آید که در آن x تغییر طول فنر از حالت طبیعی آن است و k ثابت فنر بوده و به ویژگی‌های ساختمانی فنر بستگی دارد.

نکته نیروی کشسانی فنر همواره به سمت حالت طبیعی فنر است.

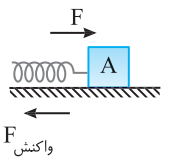
نیروی کشسانی فنر با تغییر طول فنر رابطهٔ خطی دارد نه با طول فنر مثلاً اگر طول اولیه فنری $15cm$ باشد یک‌بار طول آن را $17cm$ و بار دیگر $34cm$ کنیم، با اینکه طول فنر دو برابر شده (از $17cm$ به $34cm$) رسیده اما نیروی کشسانی دو برابر نمی‌شود $(F_1=k\times\frac{17-15}{100}, F_2=k\times\frac{34-15}{100})$، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است. ثابت فنر از ویژگی‌های ساختمانی فنر است و به جرم متصل آن بستگی ندارد، بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است. جهت نیروی فنر همواره خلاف جهت تغییر طول فنر است. به شکل زیر دقت کنید:



بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

۳ ۸۷۴ B

به شکل باید دقت کنید. نیرویی که وزنهٔ A را هُل می‌دهد و به سمت راست می‌راند نیروی کشسانی فنر است. بنا به قانون سوم نیوتون جسم A همان نیرو را به فنر رو به چپ وارد می‌کند. وقتی با نیروی F جسم B را به سمت راست هُل می‌دهیم، فنر به وزنهٔ B به سمت چپ نیرو وارد می‌کند و بنا به قانون سوم نیوتون توسط وزنهٔ B نیرویی به سمت راست به فنر وارد می‌شود. بنابراین نیروهای وارد بر فنر به شکل روبه‌رو هستند.





۳ ۸۷۵ A

نکته هرگاه فنری را از دو طرف با نیروی یکسان F بکشیم و یا فشرده کنیم نیروی کشسانی برابر F خواهد بود.

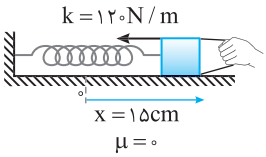
نیرویی که فنر بر هر یک از دست‌های ورزشکار وارد می‌کنند برابر نیروی کشسانی فنر است بنابراین می‌توان نوشت:

$$F=F_e=kx \xrightarrow{k=250N/m, x=0/4m} F_e=250\times 0/4\Rightarrow F=100N$$

۴ ۸۷۶ A

نکته نیروی کشسانی فنر همواره در خلاف جهت تغییر طول فنر از طول طبیعی است.

در لحظهٔ رها شدن جسم تنها نیروی مؤثر وارد بر آن نیروی کشسانی فنر است.



$$F_e=kx\Rightarrow F_e=120\times\frac{15}{100}\Rightarrow F_e=18N$$

فنر از طول طبیعی به سمت راست کشیده شده بنابراین نیروی کشسانی فنر به سمت چپ و در خلاف جهت محور x‌ها است. نیروی کشسانی فنر در لحظهٔ رها شدن خواهد شد:

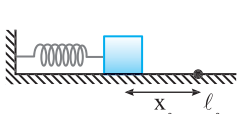
$$\vec{F}_e=-18\vec{i}$$

با توجه به قانون دوم نیوتون شتاب را حساب می‌کنیم:

$$\vec{F}=m\vec{a}\Rightarrow -18\vec{i}=2\vec{a}\Rightarrow\vec{a}=-9\vec{i}$$

۲ ۸۷۷ B

از لحظهٔ رها شدن جعبه $(v_0=0)$ تا لحظهٔ گذر از طول طبیعی نیروی کشسانی فنر به سمت راست بر جسم وارد می‌شود و سبب می‌گردد تندی جسم همواره در حال افزایش باشد یعنی حرکت پیوسته تندشونده است و گزارهٔ (الف) نادرست است.

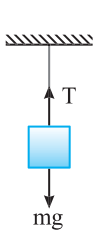


هرچه جعبه به ℓ_0 نزدیک می‌شود طول طبیعی فنر به حالت طبیعی خود نزدیک شده و نیروی کشسانی فنر کاهش می‌یابد، از این‌رو بزرگی شتاب آن نیز کاهش می‌یابد و گزارهٔ (ب) درست است. تا لحظهٔ گذر از طول طبیعی حرکت پیوسته تندشونده است یعنی در لحظهٔ گذر از طول طبیعی تندی بیشینه است و گزارهٔ (پ) نادرست است.

۲ ۸۷۸ A

در حالت اول جسم ساکن است و نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند، بنابراین نیروی وزن جسم با نیروی کشسانی طناب برابر است.

$$W=T=30N$$



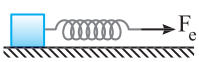
در حالت دوم اگر به جای طناب، فنر هم قرار دهیم باید فنر وزن جسم را تحمل کند یعنی نیروی وارد بر فنر نیز $30N$ است.

$$F_e=kx\Rightarrow 30=750x$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{25}m=4cm$$

۸۷۹ ۳ A

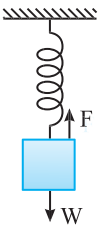
نیروی خالص وارد بر جسم نیروی کشسانی فنر است و بنا به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:



$$F=ma\Rightarrow kx=ma\Rightarrow 350x=2\times 1/75\Rightarrow 350x=3/5\Rightarrow x=\frac{1}{100}m=1cm$$

۸۸۰ ۴ A

نیروی وزن و نیروی کشسانی فنر در دو حالت متوازن هستند.



$$(F=W)$$

حالت اول: $k(L-L_0)=m_1g\Rightarrow k(0/12-L_0)=40N$

حالت دوم: $k(L'-L_0)=m_2g\Rightarrow k(0/13-L_0)=50N$

دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$k(0/13)-kL_0-k(0/12)+kL_0=50-40$$

$$k(0/01)=10\Rightarrow k=1000N/m=10N/cm$$

۸۸۱ ۴ B

۱ طول فنر در حالت دوم $\frac{4}{3}$ برابر طول فنر در حالت اول است یعنی طول اولیه که با وزنهٔ ۱۰۰ گرمی، ۱۵cm بوده است با وزنهٔ ۵۰۰g خواهد شد:

$$x'_2=\frac{4}{3}\times 15=20cm$$

۲ در هر دو حالت نیروی وزن برابر نیروی کشسانی فنر است، از این‌رو خواهیم داشت:

$$F_e=k\Delta x\begin{cases} x_2=15cm\,,F=mg\xrightarrow{m=0/1kg}k(\frac{15}{100}-x_0)=0/1\times 10\\ \Rightarrow k(\frac{15}{100}-x_0)=1\Rightarrow 1=\frac{15}{100}k-kx_0 \quad (1)\\ x'_2=20cm\,,F=m'g\xrightarrow{m_2=0/5kg}k(\frac{20}{100}-x_0)=0/5\times 10\\ \Rightarrow 5=\frac{20}{100}k-kx_0 \quad (2)\end{cases}$$

۳ دو رابطهٔ (۱) و (۲) را از هم کم می‌کنیم و ثابت فنر را به‌دست می‌آوریم.

$$5-1=\frac{20}{100}k-kx_0-\frac{15}{100}k+kx_0\Rightarrow 4=\frac{5k}{100}\Rightarrow k=80N/m$$

میانبر به ازای افزایش ۴۰۰g−۱۰۰=۵۰۰g بر جرم وزنه طول فنر به اندازهٔ $x=\frac{1}{3}\times 15=5cm$ افزایش یافته از این‌رو:

$$F_e=k\Delta\ell\Rightarrow 0/4\times 10=k(0/05)\Rightarrow k=80\,N/m$$

بازی با سؤال **اگر به انتهای فنر قائم با جرم ناچیز، وزنهٔ ۲۰ نیوتونی آویزان کنیم، طول آن به ۱۰cm می‌رسد. اگر وزنه را دو برابر کنیم، طول آن به ۱۱cm می‌رسد، ضریب ثابت این فنر در SI کدام است؟**

۱) ۲۰۰ ۲) ۱۵۰۰ ۳) ۲۰۰۰ ۴) ۴۰۰۰

پاسخ با استفاده از میانبر:

$$k=\frac{W_2-W_1}{\ell_2-\ell_1}\xrightarrow{W_2=2W_1}k=\frac{40-20}{0/11-0/10}\Rightarrow k=\frac{20}{0/01}$$

گزینهٔ ۳

$$\Rightarrow k=2000N/m$$

۸۸۲ ۴ A

خط فکری دقت کنید که کفه دارای جرم است و وقتی روی کفه وزنه قرار می‌دهیم جرم متصل به فنر مجموع جرم وزنه و کفه است. در دو حالت مسئله نیروی کشسانی فنر را با نیروی وزن برابر قرار دهید و یک دستگاه دو معادله و دو مجهول به دست بیاورید و با حل آن جرم کفه را معین کنید.

۱ حالت اول: $F_{net}=0\Rightarrow(m+m_1)g=k(\Delta\ell)\Rightarrow(m+0/1)\times g=k(\frac{6}{100})$

۲ حالت دوم: $F_{net}=0\Rightarrow(m+m_2)g=k(\Delta\ell')\Rightarrow(m+0/2)\times g=k(\frac{10}{100})$

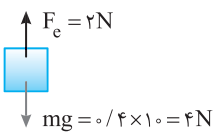
۳ دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{m+0/1}{m+0/2}=\frac{6}{10}\Rightarrow 10m+1=6m+1/2\Rightarrow 4m=0/2\Rightarrow m=\frac{0/2}{4}kg=\frac{200}{4}g$$

$$\Rightarrow m=50g$$

۸۸۳ ۳ A

۱ نیروی وزن وارد بر جسم را حساب می‌کنیم.



$$W=mg\xrightarrow{m=0/4kg}W=0/4\times 10=4N$$

۲ نیروی کشسانی فنر وقتی که طول آن ۱cm افزایش می‌یابد را به دست می‌آوریم.

$$F_e=kx\xrightarrow{k=2N/cm=200N/m}F_e=200\times\frac{1}{100}=2N$$

۳ نیروی خالص وارد بر وزنه را برابر ma قرار داده، شتاب حرکت را به دست می‌آوریم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow W-F_e=ma\Rightarrow 4-2=0/4a\Rightarrow a=5m/s^2$$

۴ شتاب در جهت نیروی برایند است و در این سؤال چون در لحظهٔ مورد نظر $mg>F_e$ پس شتاب در جهت mg به سمت پایین است.

۸۸۴ ۲ C

در حالت اول دو نیروی وزن و کشسانی فنر بر جسم وارد می‌شود که چون جسم ساکن است این نیروها متوازن هستند.

$$W=F_{e_1}\Rightarrow W=k(\ell_1-\ell_0)\qquad (I)$$

در حالت دوم سه نیرو بر جسم وارد می‌شوند. نیروی وزن، نیروی کشسانی فنر و نیروی شناوری توسط مایع و این نیرو نیز متوازن هستند.

$$W=F_{e_2}+F_b=k(\ell_2-\ell_0)+F_b\,(II)$$

دو رابطهٔ (I) و (II) را با هم برابر قرار می‌دهیم.

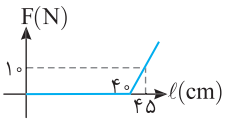
$$k(\ell_1-\ell_0)=k(\ell_2-\ell_0)+F_b\Rightarrow k\ell_1=k\ell_2+F_b\Rightarrow F_b=k(\ell_1-\ell_2)$$

با توجه به صورت مسئله، فاصلهٔ جسم تا کف ظرف از ۴cm به ۶cm افزایش یافته یعنی تغییر طول فنر $|\ell_1-\ell_2|=2cm$ است، بنابراین:

$$F_b=100\times\frac{2}{100}=2N$$

میانبر نیروی شناوری برابر تغییر نیروی کشسانی فنر است. $F_b=k(\ell_1-\ell_2)$

۸۸۵ ۳ A

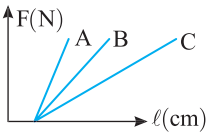


۱ وقتی طول فنر ۴۰cm است نیروی کشسانی آن صفر است بنابراین طول طبیعی فنر $\ell_0=40cm$ است.

۲ با توجه به نمودار با تغییر طول از ۴۰cm به ۴۵cm نیروی فنر ۱۰N می‌شود، بنابراین:

$$F_e=kx\Rightarrow 10=k\times\frac{5}{100}\Rightarrow k=200\,N/m$$

۸۸۶ ۱ A



نمودارهای $F-\ell$ خطی هستند، شیب این خطها با توجه به رابطهٔ $F=k\Delta\ell=k\ell-k\ell_0$ برابر ثابت فنر است.

$$k_A>k_B>k_C$$

۸۸۷ ۴ B

با توجه به شکل نسبت ثابت فنرها را به‌دست می‌آوریم:

$$(1)\text{ فنر}:F=k_1(3x)\Rightarrow k_1=\frac{F}{3x}\qquad (2)\text{ فنر}:3F=k_2(4x)\Rightarrow k_2=\frac{3F}{4x}$$

$$(3)\text{ فنر}:4F=k_3(4x)\Rightarrow k_3=\frac{F}{x}$$

بنابراین $\frac{k_1}{k_2}=\frac{\frac{F}{3x}}{\frac{3F}{4x}}=\frac{4}{9}$, $\frac{k_3}{k_2}=\frac{\frac{F}{x}}{\frac{3F}{4x}}=\frac{4}{3}$ است. در سؤال گفته شده نیروی ۳۰N طول فنر S_2 را ۴cm تغییر داده.

$$F_e=k\Delta x\Rightarrow\begin{cases} 30=k_2\times\frac{4}{100}\Rightarrow k_2=750\frac{N}{m}\\ 30=k_1\times\Delta x_1\xrightarrow{k_1=\frac{4}{9}k_2=\frac{1000}{3}\frac{N}{m}}\\ 30=\frac{1000}{3}\times\Delta x_1\Rightarrow\Delta x_1=0/09m=9cm\\ 30=k_3\times\Delta x_3\xrightarrow{k_3=\frac{4}{3}k_2=1000\frac{N}{m}}\\ 30=1000\times\Delta x_3\Rightarrow\Delta x_3=0/03m=3cm\end{cases}$$

B ۸۸۸ ۲

تابع نیرو برحسب طول فنر به صورت $F_e=۱۰۰x-۲۰$ است. وقتی فنر دارای طول طبیعی است نیروی کشسانی فنر صفر است بنابراین اگر به جای F_e صفر قرار دهیم باید به جای x، $\ell_۰$ را قرار داده و طول طبیعی فنر را به دست بیاوریم. $۰=۱۰۰\ell_۰-۲۰\Rightarrow \ell_۰=۰/۲m$

با توجه به رابطهٔ $F=k(x-x_۰)$ ضریب x همان ثابت است بنابراین $k=۱۰۰N/m$ است.

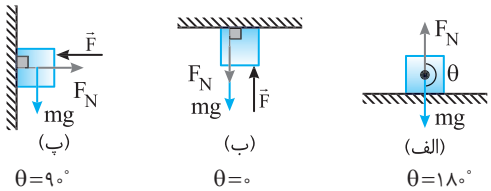
A ۸۸۹ ۴

خط فکری نیرویی که یک سطح بدون اصطکاک بر جسمی که به آن تکیه داده وارد می‌کند بر سطح عمود است که به آن نیروی عمودی تکیه‌گاه (سطح) گویند.

گزینهٔ (۴) نیروهایی که دو سطح بر چوب وارد می‌کنند را درست نمایش می‌دهد.

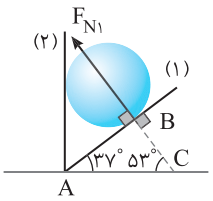
A ۸۹۰ ۴

نیروی عمودی سطح و نیروی وزن را در هر سه شکل رسم می‌کنیم (دقت کنید که نیروی عمودی سطح همواره بر تکیه‌گاه عمود می‌باشد). بنابراین در هر سه شکل θ به درستی بیان شده است.



A ۸۹۱ ۲

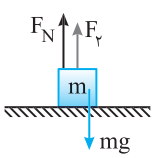
نیروی عمودی سطح همواره بر دیواری که جسم بر آن تکیه دارد عمود می‌باشد. نیرویی که سطح (۱) بر گوی وارد می‌کند را رسم کرده امتداد می‌دهیم تا سطح افقی را قطع کند. در این صورت در مثلث ABC زاویهٔ بین امتداد افق AC با امتداد نیروی F_N، یعنی ضلع BC برابر ۵۳° است.



A ۸۹۲ ۱

نیروهای وارد بر جسم در امتداد قائم عبارتند از نیروی وزن، $F_۲$ و نیروی عمودی تکیه‌گاه. هر سه نیرو را رسم می‌کنیم. نیروهای وارد بر جسم در امتداد قائم متوازن هستند بنابراین:

$$F_۲+F_N=mg\Rightarrow F_N=mg-F_۲$$

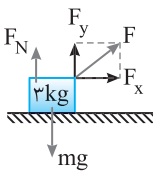


A ۸۹۳ ۳

با توجه به نیروی F، به جسم در راستای y علاوه بر نیروی وزن و نیروی عمودی سطح، نیرویی دیگر به سمت بالا وارد می‌شود. بنابراین:

$$F_N+F_y=mg\Rightarrow F_N+F_y=۳۰\Rightarrow F_N<۳۰N$$

در واقع مؤلفهٔ قائم نیروی F سبب کاهش نیروی عمودی سطح شده است.



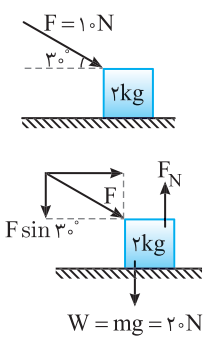
بازی با سوال **در شکل روبه‌رو نیروی عمودی سطح چند نیوتون است؟***

۱) ۲۰ ۲) ۲۵

۳) ۱۵ ۴) ۳۵

پاسخ **به کمک تجزیه نیروها که در فیزیک (۱) در سال دهم خوانده‌اید مسئله را حل می‌کنیم.**

ابتدا تمام نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و نیروی F را تجزیه می‌کنیم.



$$F_{y_{net}}=۰\Rightarrow F_N=F\sin ۳۰^\circ+W$$

$$\Rightarrow F_N=۱۰\times\frac{۱}{۲}+۲۰=۲۵N$$

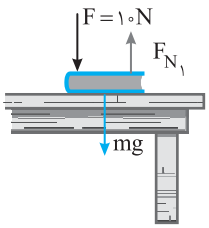
گزینهٔ ۲

* این نوع مسائل در برنامه رسمی کتاب درسی نیست اما یادگیری این مسئله ساده برای شما که به دانشگاه می‌روید بسیار مفید است.

A ۸۹۴ ۳

نیروی‌های وارد بر کتاب را در دو حالت رسم می‌کنیم و نیروی خالص در امتداد قائم را برابر صفر قرار می‌دهیم و نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم.

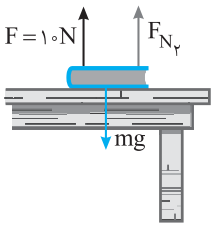
حالت اول:



$$F_{net}=۰\Rightarrow F+mg=F_{N_۱}$$

$$\Rightarrow F_{N_۱}=۱۰+۲\times۱۰\Rightarrow F_{N_۱}=۳۰N$$

حالت دوم:



$$F_{net}=۰\Rightarrow F+F_{N_۲}=mg$$

$$\Rightarrow F_{N_۲}=mg-F=۲۰-۱۰\Rightarrow F_{N_۲}=۱۰N$$

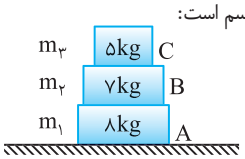
بنابراین:

$$\frac{F_{N_۱}}{F_{N_۲}}=\frac{۳۰}{۱۰}=۳$$

A ۸۹۵ ۳

نکته هرگاه چند جسم روی سطح افقی روی هم قرار داشته باشند، نیرویی که بین سطح مشترک هر دو جسم است هم‌اندازهٔ مجموع نیروی وزن تمام اجسام بالای آن سطح است.

نیرویی که سطح افقی تحمل می‌کند برابر وزن سه جسم است:



$$F_{N_A}=W_۱+W_۲+W_۳$$
$$=۸۰+۷۰+۵۰=۲۰۰N$$

نیرویی که سطح مشترک B تحمل می‌کند (نیروی عمودی سطح B) برابر مجموع وزن $m_۲$ و $m_۳$ است.

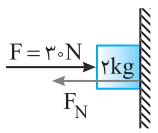
$$F_{N_B}=W_۲+W_۳=۷۰+۵۰=۱۲۰N$$

نیرویی که سطح C تحمل می‌کند (نیروی عمودی سطح C) برابر وزن وزنهٔ $m_۳$ است.

$$F_{N_C}=W_۳=۵۰N$$

A ۸۹۶ ۲

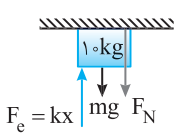
جسم بر دیوار تکیه داده شده است پس برایند نیروها در راستای افقی صفر است و نیروهای خلاف جهت با هم برابر هستند.



$$F_N=F=۳۰N$$

A ۸۹۷ ۳

خط فکری باید تمام نیروهای وارد بر وزنه را رسم کنید (نیروی وزن، نیروی عمودی سقف و نیروی کشسانی فنر) نیروهای W و F_N رو به پایین است بنابراین F_e رو به بالا بوده و باید اندازهٔ آن با مجموع نیروی W و F_N برابر باشد تا جسم ساکن بماند. بنابراین کافی است F_e را با $W+F_N$ برابر قرار داده و مسئله را حل کنید.



جسم در حال تعادل است پس نیروهای وارد بر جسم متوازن می‌باشد:

$$mg+F_N=F_e\Rightarrow ۱۰۰+۵۰=۳۰۰x\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}m$$

$$\Rightarrow x=۵۰cm$$

B ۸۹۸ ۱

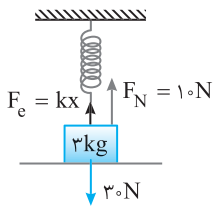
۱ نیروی وزن جسم را حساب می‌کنیم: $W=mg\Rightarrow W=۳\times۱۰=۳۰N$

۲ نیروی عمودی سطح رو به بالا و برابر $۱۰N$ است و نیروی وزن $۳۰N$ رو به پایین. از طرفی جسم روی سطح ساکن است بنابراین باید نیروی کشسانی فنر رو به بالا باشد.

۳ اندازهٔ تغییر طول فنر را حساب می‌کنیم.

$F_e+F_N=mg\Rightarrow F_e=۳۰-۱۰=۲۰N$

$\Rightarrow kx=۲۰N\Rightarrow ۲۰۰\times x=۲۰\Rightarrow x=۰/۱m$

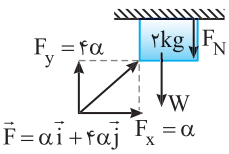


۴ نیروی کشسانی فنر همواره به سمت طول طبیعی فنر است. از طرفی F_e رو به بالاست یعنی باید فنر کشیده شده و از حالت طبیعی طولش بیشتر شده باشد.

B ۸۹۹ ۱

۱ نیروهای وارد بر جسم در امتداد قائم را رسم کرده و بررسی می‌کنیم.

۲ در امتداد افقی جسم تحت تأثیر F_x شتاب $۴m/s^۲$ دارد بنابراین به کمک قانون دوم نیوتون می‌توان F_x را به دست آورد (سقف بدون اصطکاک است.)



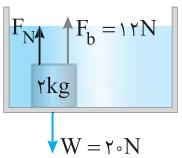
$F_{net_x}=ma_x\xrightarrow{F_x=\alpha}\alpha=۲\times۴\Rightarrow\alpha=۸N$

۳ مؤلفهٔ قائم نیروی F خواهد شد: $F_y=۴\alpha=۴\times۸=۳۲N$

۴ در امتداد قائم جسم حرکتی ندارد و نیروها در این امتداد متوازن هستند از این‌رو خواهیم داشت: $F_{net_y}=۰\Rightarrow F_N+W=F_y\Rightarrow F_N+۲۰=۳۲\Rightarrow F_N=۱۲N$

A ۹۰۰ ۳

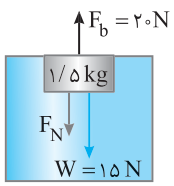
نیروهای وارد بر جسم عبارتند از:
نیروی وزن رو به پایین، نیروی عمودی تکیه‌گاه رو به بالا، نیروی شناوری رو به بالا
جسم ساکن است نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و نیروی خالص را مساوی صفر قرار می‌دهیم.



$F_{net}=۰\Rightarrow F_N+F_b=W\Rightarrow F_N+۱۲=۲۰\Rightarrow F_N=۸N$

A ۹۰۱ ۲

هرگاه جسم در شاره‌ای قرار گیرد به اندازهٔ وزن شارهٔ جابه‌جاشده به آن نیرویی رو به بالا وارد می‌شود که به آن نیروی شناوری (F_b) می‌گویند. نیروهای وارد بر جسم مطابق شکل روبه‌رو است:



۱ نیروی وزن جسم را حساب می‌کنیم:

$W=mg\xrightarrow{m=۱/۵kg}W=۱/۵\times۱۰=۱۵N$

۲ نیروی شناوری رو به بالا بر جسم وارد می‌شود. این نیرو بنا به فرض مسئله $F_b=۲۰N$ است. بنابراین خواهیم داشت: $F_N+W=F_b\Rightarrow F_N+۱۵=۲۰\Rightarrow F_N=۵N$

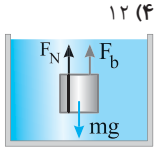
۳ نیرویی که دیواره به جسم وارد می‌کند $F_N=۵N$ است که برابر نیرویی است که جسم به دیواره رو به بالا وارد می‌کند.

بازی با سؤال مطابق شکل جسمی به جرم ۲kg درون ظرف حاوی آب روی کفه‌ای قرار گرفته است. اگر از طرف آب به جسم نیروی شناوری ۱۰N وارد شود نیروی عمودی سطح از طرف کفه که به جسم وارد می‌شود چند نیوتون است؟



۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲

پاسخ نیروهای وارد بر جسم عبارت است از:



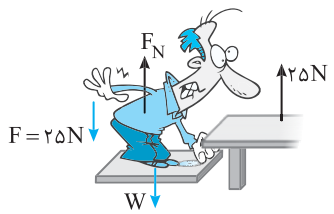
$F_N+F_b=mg\Rightarrow F_N=۲۰-۱۰=۱۰N$

گزینهٔ ۱

B ۹۰۲ ۳

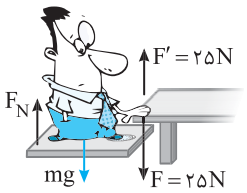
شخصی به میز نیروی $۲۵N$ رو به بالا وارد می‌کند و بنا به قانون سوم نیوتون میز نیز نیرویی برابر $۲۵N$ رو به پایین بر شخص وارد می‌کند. برای آنکه شخص ساکن بماند نیروسنج باید به شخص مجموع نیروی وزن شخص و نیروی $۲۵N$ را نشان دهد.

$F_N=mg+F\Rightarrow F_N=۷۵۰+۲۵\Rightarrow F_N=۷۷۵N$



B ۹۰۳ ۲

شخص نیروی $۲۵N$ به سمت پایین به میز وارد کرده پس میز نیروی ۲۵ نیوتونی به سمت بالا به شخص وارد خواهد کرد و سبب می‌گردد که ترازوی فنری عدد کمتری را نشان دهد. نیروهای وارد بر شخص عبارتند از: W ، F_N و F' بنابراین می‌توان نوشت:

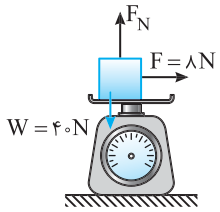


$mg=F'+F_N\Rightarrow ۷۵۰=۲۵+F_N$

$F_N=۷۲۵N$

A ۹۰۴ ۱

نیروها در راستای قائم متوازن است و ترازوی فنری مقدار F_N را نشان می‌دهد که برابر وزن جسم است.

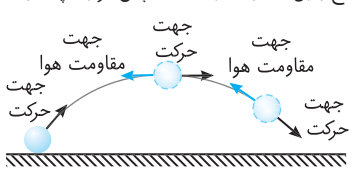


$F_N=mg\Rightarrow F_N=۴۰N$

A ۹۰۵ ۲

نکته مقاومت شاره (هوا) به تندی جسم بستگی دارد و با افزایش تندی جسم افزایش می‌یابد و با کاهش تندی، مقاومت هوا کاهش می‌یابد.

با گذشت زمان تا رسیدن به نقطهٔ اوج تندی جسم در حال کاهش و پس از اوج تندی در حال افزایش است پس اندازهٔ مقاومت هوا نیز ابتدا در حال کاهش و سپس در حال افزایش است و گزارهٔ (الف) نادرست است. در هر لحظه مقاومت هوا خلاف جهت حرکت است و چون جهت حرکت در حال تغییر است پس جهت مقاومت هوا نیز تغییر می‌کند، بنابراین گزارهٔ (ب) نادرست است. اندازهٔ نیروی وزن همواره برابر mg و جهت آن همواره در امتداد قائم به سمت پایین است در نزدیکی سطح زمین مقدار آن ثابت است. پس گزارهٔ (پ) درست است.



B ۹۰۶ ۴

چترباز بلافاصله بعد از پرش آزاد چتر خود را باز کرده پس حرکت چترباز ابتدا تندشونده است تا به تندی حدی برسد و سپس ادامهٔ حرکت را با همین تندی طی می‌کند. در تندی حدی، نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا باهم برابر می‌شوند:

$f_D=mg\xrightarrow{m=۷۰kg}f_D=۷۰۰N\xrightarrow{f_D=۱۴۰v}۷۰۰=۱۴۰v$

$\Rightarrow v=۵m/s$

بنابراین در این حرکت بیشینهٔ تندی چترباز همان $۵m/s$ می‌باشد و تندی نمی‌تواند از $۵\ m/s$ بیشتر شود.

یادآوری با افزایش تندی سقوط چترباز لحظه‌ای فرا می‌رسد که نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا برابر شده و سرعت چترباز ثابت می‌ماند که به آن تندی حدی گویند.

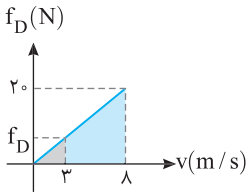
۹۰۷ B ۲

۱ آخرین سرعتی که جسم در طول مسیر به آن رسیده $8m/s$ است یعنی تندی حدی این جسم $8m/s$ است و در این تندی نیروی وزن و مقاومت هوا با هم برابر است، بنابراین:

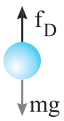
$$f=mg\Rightarrow 20=m\times 10\Rightarrow m=2kg$$

۲ برای به‌دست آوردن شتاب در تندی $3m/s$ ابتدا نیروی مقاومت هوا را به کمک شیب نمودار در این لحظه به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{20-0}{8-0}=\frac{f_D-0}{3-0}\Rightarrow f_D=7/5N$$



۳ به کمک قانون دوم نیوتون، شتاب را در این لحظه حساب می‌کنیم.



$$f_{net}=ma\Rightarrow mg-f_D=ma\Rightarrow 20-7/5=2a\Rightarrow a=\frac{12/5}{2}$$

$$\Rightarrow a=6/25m/s^2$$

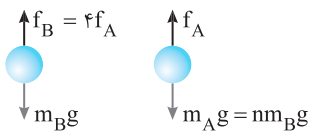
۹۰۸ B ۴

خط فکری نیروی مقاومت هوا ثابت فرض شده، نیروی وزن هم ثابت است. بنابراین نیروی خالص وارد بر گوی A و گوی B ثابت است و نوع حرکت آن‌ها حرکت با شتاب ثابت است و می‌توان از روابط حرکت با شتاب ثابت استفاده کرد. برای هر گوی یک شکل ساده شامل نیروهای وارد بر آن را رسم کنیم و به کمک قانون دوم نیوتون شتاب آن‌ها را به دست بیاوریم.

۱ دو گوی از ارتفاع یکسان $(h_A=h_B)$ رها شده $(v_0=0)$ و با تندی یکسان $(v_A=v_B)$ به زمین برخورد کرده‌اند. با توجه به رابطهٔ مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت خواهیم داشت:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow\begin{cases}v_A^2=2a_Ah_A\\ v_B^2=2a_Bh_B\end{cases}\xrightarrow[h_A=h_B]{v_A=v_B}a_A=a_B$$

۲ شتاب‌ها را به کمک قانون دوم به دست آورده و با هم برابر قرار می‌دهیم:



$$F_{\text{خالص}}=ma\Rightarrow\begin{cases}m_Bg-4f_A=m_Ba_B\Rightarrow a_B=g-\frac{4f_A}{m_B}\\ nm_Bg-f_A=nm_Ba_A\Rightarrow a_A=g-\frac{f_A}{nm_B}\end{cases}$$

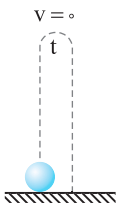
$$a_B=a_A\Rightarrow g-\frac{4f_A}{m_B}=g-\frac{f_A}{nm_B}\Rightarrow n=\frac{1}{4}$$

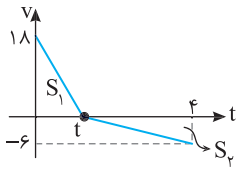
۹۰۹ C ۲

خط فکری طول مسیر رفت و برگشت جسم برابر است. از طرفی سطح زیر نمودار سرعت - زمان برابر جابه‌جایی جسم است. از این‌رو سطح زیر نمودار در بازهٔ صفر تا t و t تا $4s$ باید برابر باشند، S_1 و S_2 را با هم برابر قرار دهید و t را حساب کنید سپس به کمک t، شتاب در مسیر رفت و یا برگشت را به دست آورده تا بتوانید f_D را حساب کنید.

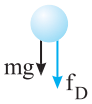
۱ اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در مسیر رفت و برگشت با هم برابر است و می‌دانیم جابه‌جایی برابر است با مساحت زیر نمودار $v-t$ بنابراین:

$$S_1=S_2\Rightarrow\frac{18\times t}{2}=\frac{6(4-t)}{2}\Rightarrow 3t=4-t\Rightarrow 4t=4\Rightarrow t=1s$$





۲ شیب خط در نمودار $v-t$ برابر شتاب است. شتاب در مسیر رفت خواهد شد:



$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=-\frac{18}{1}=-18\frac{m}{s^2}$$

۳ نیروهای وارد بر جسم در مسیر رفت را در یک شکل ساده نمایش داده و به کمک قانون دوم f_D را حساب می‌کنیم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow -mg-f_D=m(-18)\Rightarrow -2-f_D=-3/6\Rightarrow f_D=1/6N$$

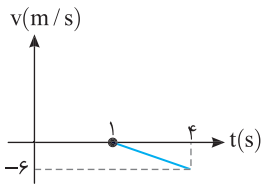
البته می‌توان در مسیر برگشت نیز f_D را با توجه به معادلات مسیر برگشت به دست آورد:

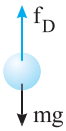
$$a=-\frac{6}{3}=-2m/s^2$$

$$-mg+f_D=ma$$

$$\Rightarrow -2+f_D=-0/4$$

$$\Rightarrow f_D=1/6N$$

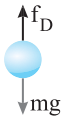




۹۱۰ C ۴

خط فکری وقتی چترباز، چتر خود را باز می‌کند، تندی‌اش $40m/s$ است و قرار است با باز کردن چتر تندی آن به $5m/s$ برسد. با توجه به فرض مسئله مقدار متوسط نیروی مقاومت هوا $1000N$ است بنابراین شما می‌توانید شتاب کند شدن حرکت را بیابید سپس به کمک رابطهٔ مستقل از زمان حداقل ارتفاعی که باید چتر باز شود را حساب کنید.

۱ ابتدا شتاب حرکت چترباز پس از بازشدن چتر را به‌دست می‌آوریم. دقت کنید که مقدار متوسط نیروی مقاومت هوا در بازهٔ تغییر سرعت $1000N$ فرض شده است.



$$mg-f_D=ma\Rightarrow 800-1000=80a\Rightarrow a=-\frac{200}{80}=-2/5m/s^2$$

۲ اکنون جابه‌جایی برای رسیدن سرعت از $40m/s$ تا $5m/s$ را به‌دست می‌آوریم.

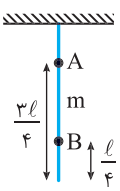
$$v^2-v_0^2=2a\Delta y\Rightarrow 25-1600=2(-2/5)h\Rightarrow h=\frac{1575}{5}=315m$$

۹۱۱ B ۳

نکته هرگاه یک طناب دارای جرم از سقف آویزان کنیم، هر نقطه از طناب باید وزن قسمت زیرین خود را تحمل کند و در نقطهٔ آویز کشش بیشترین و در انتهای طناب کشش صفر است.

با فاصله گرفتن از انتهای آزاد، هر نقطه از طناب باید وزن بیشتری را تحمل کند. به طور مثال در نقاط A و B کشش طناب برابر است با:

$$T_B=\frac{mg}{4},\ T_A=\frac{3mg}{4}$$



یعنی کشش طناب با فاصله از انتهای آزاد رابطهٔ مستقیم و خطی دارد و نمودار آن خط راست مایل با شیب ثابت است و گزینهٔ (۳) درست است.

۹۱۲ A ۱

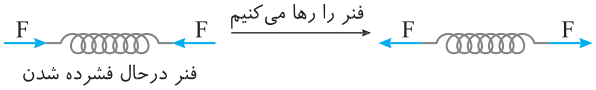
نکته در یک طناب سبک (با جرم ناچیز) کشش در تمام نقاط یکسان است. در این مسئله طناب سبک بوده بنابراین T ثابت است و گزینهٔ (۱) نمودار درست است.

A ۹۱۳ ۳

خط فکری سؤال زیبایی است، اگر خاطرتان باشد یک فنر نیرویی که به اجسام دو طرف خود وارد می‌کند یکسان است. با رها کردن فنر نیروی وارد بر گلولهٔ A و B یکسان بوده و این مطلب، نکتهٔ حل مسئله است.

هنگام باز شدن فنر نیرویی که فنر به دو طرف خود وارد می‌کند با هم برابر است، بنابراین نیروی وارد بر هر دو گوی یکسان می‌باشد.

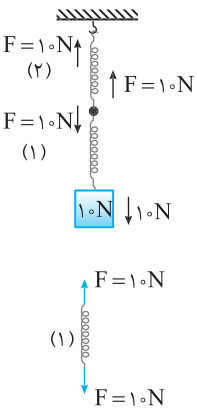
$$F=m_A a_A \Rightarrow F=2a_A \xrightarrow{a_A=\frac{1}{3}a_B} 2\times\frac{a_B}{3}=m_B a_B$$
$$F=m_B a_B \Rightarrow F=m_B a_B$$
$$\Rightarrow m_B=\frac{2}{3}\,kg\approx 666g$$



فنر درحال فشرده شدن

A ۹۱۴ ۲

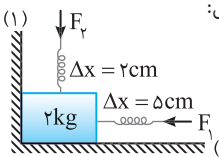
هنگامی که نیروسنج بدون جرم فرض شود، نیروی کشسانی در طول فنر هر دو نیروسنج یکسان و برابر ۱۰N است، پس هر نیروسنج ۱۰N را نشان می‌دهد. اما برای توضیح بیشتر به فنر (۱) نگاه کنید که ساکن است و چه نیروهایی به آن وارد می‌شود: نیروی ۱۰N توسط وزنه اما چرا فنر ثابت مانده است؟ قطعاً در محل اتصال دو فنر، فنر (۲) به فنر (۱) نیروی ۱۰N وارد کرده تا نیروها متوازن شده و فنر ثابت بماند یعنی فنری داریم که بر دو سرش نیروی یکسان ۱۰N وارد می‌شود. بنابراین کشش آن نیز ۱۰N است. همین مطلب در مورد فنر (۲)، نیز صدق می‌کند.



B ۹۱۵ ۳

۱ نیروهای وارد بر جسم را کامل می‌کنیم.

۲ نیروهای F_1 و F_2 از طرف فنر وارد می‌شود، پس:



$$F_1=k\Delta x_1 \Rightarrow F_1=2\frac{N}{cm}\times 5cm \Rightarrow F_1=10N$$
$$F_2=k\Delta x_2 \Rightarrow F_2=2\frac{N}{cm}\times 2cm \Rightarrow F_2=4N$$

۳ نیروهای وارد بر جسم متوازن است، پس اندازه نیروهای در خلاف جهت باید با هم برابر باشند.

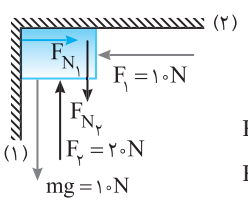
$$F_{x_{net}}=0 \Rightarrow F_1=F_{N_1} \Rightarrow F_{N_1}=10N$$
$$F_{y_{net}}=0 \Rightarrow F_2+mg=F_{N_2} \Rightarrow F_{N_2}=24N$$

نیروی خالصی که دیواره‌ها بر جسم وارد می‌کنند را به کمک رابطهٔ فیثاغورس حساب می‌کنیم.

$$F_{N_{net}}=\sqrt{F_{N_1}^2+F_{N_2}^2}=\sqrt{10^2+24^2}$$
$$=2\sqrt{5^2+12^2}=2\sqrt{25+144}=2\sqrt{169}=26N$$

A ۹۱۶ ۱

۱ در حل مسائل دینامیک گام اول رسم تمام نیروهای وارد بر جسم است تا بتوانیم به راحتی مسئله را حل کنیم. نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.



۲ جسم ساکن است بنابراین نیروهای وارد بر جسم متوازن بوده از این‌رو در امتداد افقی و قائم می‌توان نوشت:

$$F_{x_{net}}=0 \Rightarrow F_1=F_{N_1} \Rightarrow F_{N_1}=10N$$
$$F_{y_{net}}=0 \Rightarrow F_{N_2}+mg=F_2 \Rightarrow F_{N_2}+10=20$$
$$\Rightarrow F_{N_2}=10N$$

۳ نسبت نیروهای دو دیواره وارد بر جسم خواهد شد:

$$\frac{F_{N_2}}{F_{N_1}}=\frac{10}{10}=1$$

A ۹۱۷ ۱

اگر شما روی یک نیروسنج بایستید، نیروسنج وزن شما را نشان می‌دهد حال اگر یک قطعه سنگ را در دست بگیرید و روی نیروسنج بایستید، نیروسنج مجموع وزن شما و قطعه سنگ را نشان می‌دهد. به طور کلی یک نیروسنج، همواره مجموع وزن اجسام ساکن که روی نیروسنج قرار دارند را نشان می‌دهد و به نحوهٔ قرار گرفتن آن‌ها بستگی ندارد. بنابراین هر دو ترازوی فنری یک عدد را نشان خواهند داد و اختلاف عددهای نشان داده شده صفر است.

پنجره ۳

A ۹۱۸ ۴

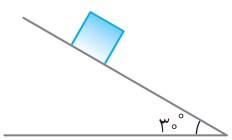
هنگامی که ما راه می‌رویم، عامل حرکت رو به جلوی ما، اصطکاک بین کف کفش ما و سطح زمین است یعنی ما زمین را رو به عقب هل می‌دهیم و زمین همان نیرو را رو به جلو به ما وارد می‌کند. همچنین هنگام به راه افتادن و حرکت اتومبیل، اصطکاک بین لاستیک و جاده سبب حرکت اتومبیل می‌شود.

هنگامی که بین لاستیک و جاده اصطکاک وجود نداشته باشد، اتومبیل تغییر مکان نمی‌دهد. به‌طور مثال روی یخ، چرخ خودرو بُکس باد می‌کند (یعنی درجا می‌چرخد) و خودرو جلو نمی‌رود.

A ۹۱۹ ۱

نیروهای وارد بر جسم به ترتیب: ۱) نیروی وزن در امتداد قائم رو به پایین، ۲) نیروی عمودی سطح در امتداد عمود بر سطح، ۳) نیروی اصطکاک که با حرکت جسم رو به پایین مخالف است.

بازی با سؤال **در شکل روبه‌رو جسم در حال سکون است. زاویه‌ای که نیروی اصطکاک با نیروی وزن می‌سازد چند درجه است؟**



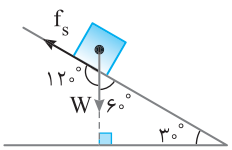
۱) ۳۰

۲) ۶۰

۳) ۱۲۰

۴) ۱۵۰

پاسخ **نیروی اصطکاک همواره مماس بر مسیر حرکت بوده و در خلاف جهت لغزش است، هم‌چنین نیروی وزن نیز همواره در امتداد قائم به سمت پایین است. از این‌رو مطابق شکل زاویهٔ بین نیروی اصطکاک ایستایی و نیروی وزن ۱۲۰° می‌شود.**



گزینهٔ ۳

A ۹۲۰ ۴

تمام داده‌های مسئله بیهوده است. چرا؟ چون جسم ساکن است و در راستای افقی به آن نیرویی وارد نمی‌شود، پس نیروی اصطکاکی بین جسم و سطح ایجاد نمی‌شود و اصطکاک صفر است.

B ۹۲۱ ۳

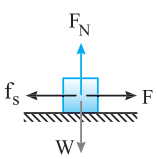
خط فکری در حل مسائل اصطکاک، که در آن جسم ساکنی تحت تأثیر نیرویی قرار می‌گیرد، در گام اول باید با به‌دست آوردن نیروی اصطکاک ایستایی در آستانهٔ حرکت $(f_{s\,max})$ مشخص کنید که جسم شروع به حرکت می‌کند یا نه؟ اگر $F<f_{s\,max}$ باشد، جسم ساکن می‌ماند و اصطکاک بین جسم و سطح اصطکاک ایستایی است که همواره با نیرویی که می‌خواهد جسم را در امتداد اصطکاک حرکت دهد برابر است.

۱ ابتدا اصطکاک ایستایی جسم در آستانهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$f_{s\,max}=\mu_s F_N \Rightarrow f_{s\,max}=0/4\times 5\times 10=20N$$

۲ چون نیروی افقی $F=15N$ از اصطکاک ایستایی بیشینه، کمتر است، جسم روی سطح افقی ساکن می‌ماند.

۳ برایند نیروهای وارد بر جسم در این حالت صفر است و نیروی اصطکاک ایستایی با نیروی F برابر است.

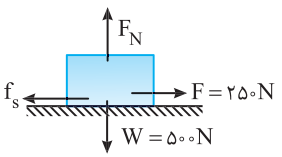


$$F_{net}=0 \Rightarrow f_s=F=15N$$

A ۹۲۲ **۱**

خط فکری هر گاه در صورت مسئله با اعمال نیرو، جسم همچنان ساکن باشد شما باید بالای کلمه ساکن بنویسید $(F_{net}=0)$. از طرفی در آستانهٔ حرکت همچنان نیروی خالص وارد بر جسم صفر است $(F_{net}=0)$ شما باید نیروهای وارد بر جسم را در هر دو حالت رسم کنید و برایند نیروها را مساوی صفر قرار دهید.

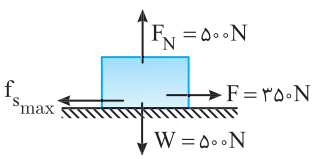
در حالت اول، جسم ساکن است بنابراین اصطکاک ایستایی جسم با نیروی افقی وارد بر آن برابر می‌شود. $F_{net}=0\Rightarrow F-f_s=0\Rightarrow F=f_s\Rightarrow f_s=۲۵۰N$



حالت دوم در آستانهٔ حرکت نیروی اصطکاک وارد بر جسم بیشینه است اما چون جسم همچنان ساکن است خواهیم داشت: $F_{net}=0\Rightarrow F-f_{s\,max}=0\Rightarrow f_{s\,max}=۳۵۰N$

اکنون ضریب اصطکاک ایستایی را حساب می‌کنیم:

$$f_{s\,max}=\mu_s F_N \xrightarrow{F_N=W=۵۰۰N} ۳۵۰=\mu_s\times ۵۰۰\Rightarrow \mu_s=۰/۷$$

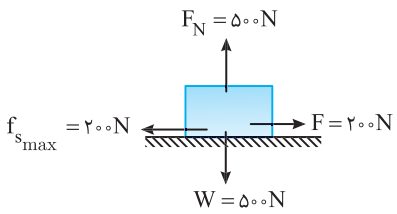


بازی با سؤال **جسمی به جرم ۵۰kg روی سطح افقی با ضریب اصطکاک $\mu_s=۰/۴$ و $\mu_k=۰/۲$ ساکن است، یکبار با نیروی افقی $F=۲۰۰N$ و بار دیگر با نیروی افقی $F=۴۰۰N$ جسم را هُل می‌دهیم، شتاب حرکت جسم در هر حالت به ترتیب از راست به چپ چند m/s^2 است؟**

۱) ۲، ۶ **۲)** صفر، ۶ **۳)** صفر، ۴ **۴)** ۲، ۴

پاسخ **ابتدا باید نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت را به‌دست بیاورید.**

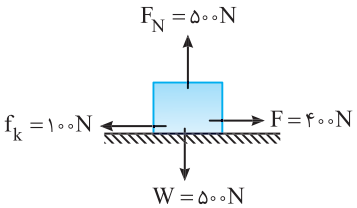
$$f_{s\,max}=\mu_s F_N \xrightarrow{F_N=W=۵۰۰N} f_{s\,max}=۰/۴\times ۵۰۰=۲۰۰N$$



ابتدا نیروی افقی $F=۲۰۰N$ بر جسم وارد شده است که این نیرو با اصطکاک آستانهٔ حرکت برابر است بنابراین جسم ساکن می‌ماند و شتاب آن صفر است.

در حالت دوم بر جسم نیروی افقی $F=۴۰۰N$ وارد شده است و جسم شروع به حرکت می‌کند. در این حالت نیروی اصطکاک بین جسم و سطح، اصطکاک جنبشی است از این‌رو می‌توان نوشت:

$$f_k=\mu_k F_N\Rightarrow f_k=۰/۲\times ۵۰۰\Rightarrow f_k=۱۰۰N$$



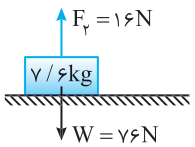
به کمک قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow ۴۰۰-۱۰۰=۵۰a\Rightarrow a=۶m/s^2$$

گزینهٔ ۲

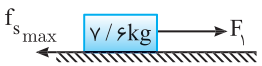
B ۹۲۳ **۴**

با توجه به نیروی F_2، نیروی عمودی سطح را به‌دست می‌آوریم.



$$mg-F_2=F_N\Rightarrow ۷۶-۱۶=F_N$$
$$\Rightarrow F_N=۶۰N$$

وقتی نیروی F_1 برابر ۱۲N شده است با ضربهٔ کوچکی جسم به حرکت درآمده است یعنی در حالتی که $F_1=۱۲N$ می‌شود جسم در آستانهٔ حرکت قرار می‌گیرد. بنابراین:



$$F_1=f_{s\,max}=\mu_s F_N\Rightarrow ۱۲=\mu_s\times ۶۰\Rightarrow \mu_s=\frac{۱}{۵}$$

A ۹۲۴ **۳**

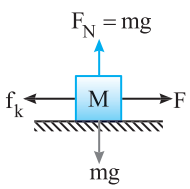
نکته اصطکاک بین دو جسم، به چگونگی سطوح تماس و نیروی عمودی بستگی دارد و به ابعاد ظاهری سطح تماس دو جسم بستگی ندارد.

در دو حالت، جسم به حرکت درآمده است و اصطکاک بین جسم و سطح $f_k=\mu_k mg$ است. بنابراین اصطکاک در دو حالت یکسان بوده و گزینهٔ (۳) درست است.

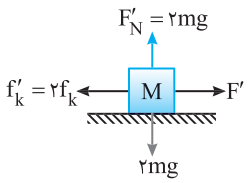
B ۹۲۵ **۳**

نکته ضریب اصطکاک بین دو سطح به چگونگی و ویژگی‌های دو سطح بستگی دارد و اگر سطح‌ها تغییر نکنند ضریب اصطکاک ثابت می‌ماند.

۱ جنس قطعه چوب و سطح تغییر نکرده بنابراین ضریب اصطکاک تغییر نمی‌کند $(\mu'_k=\mu_k)$ جسم M با سرعت ثابت در حرکت و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند بنابراین نیروی F با نیروی اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح برابر است. $(F=f_k)$

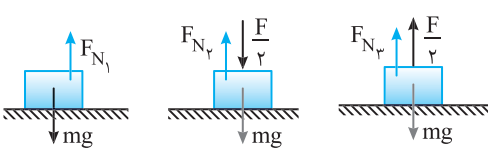


۲ وقتی جرم قطعه چوب دو برابر می‌شود، $(M'=۲M)$ نیروی عمودی تکیه‌گاه $F'_N=۲mg$ می‌شود بنابراین نیروی اصطکاک $f'_k=\mu_k F'_N$ نیز دو برابر می‌شود و اگر بخواهیم جسم با سرعت ثابت حرکت کند باید $F'=۲F$ شود.



B ۹۲۶ **۲**

خط فکری جسم‌ها در حال حرکت هستند، بنابراین نیروی اصطکاک وارد بر آن‌ها برابر $f_k=\mu_k N$ می‌باشد و با توجه به صورت مسأله μ_k در تمام سطوح مقایسه یکسان است پس نیروی اصطکاک جسمی بیشتر است که نیروی عمودی سطح بیشتری بر آن وارد شود. بنابراین نیروی عمودی هر سطح را حساب می‌کنیم و با هم مقایسه می‌کنیم، نیروی عمودی سطح‌ها خواهد شد:



بنابراین F_{N_2} از همه بیشتر بوده و نیروی اصطکاک جنبشی در گزینهٔ (۲) از سایر گزینه‌ها بیشتر می‌باشد.

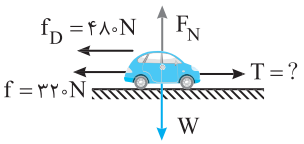
A ۹۲۷ ۳

خط فکری در حل مسائل دینامیک، باید نیروهای وارد بر جسمی که در مسئله از آن سؤال شده را رسم کرده سپس به سراغ قانون دوم نیوتون برویم.

به کمک قانون دوم نیوتون، نیروی کشش طناب را به‌دست می‌آوریم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow T-(f_D+f)=ma \xrightarrow{m=1500kg,a=2m/s^2}$$

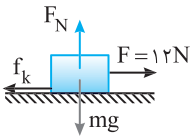
$$T-(480+320)=1500\times 2\Rightarrow T-800=3000\Rightarrow T=3800N$$



B ۹۲۸ ۳

خط فکری ابتدا برای هر حالتی نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم سپس برای هر حالت قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم تا یک دستگاه دو معادله با دو مجهول m و f_k به‌دست بیاوریم. با حل این دستگاه و یافتن نیروی اصطکاک، ضریب اصطکاک قابل محاسبه است.

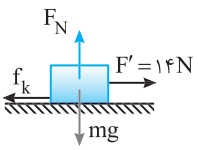
در هر دو حالت با توجه به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} F-f_k=ma_1\Rightarrow 12-f_k=0/4m \\ F'-f_k=ma_2\Rightarrow 14-f_k=0/8m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (12-f_k=0/4m)\times -2 \\ 14-f_k=0/8m \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_k=10N \quad , \quad m=5kg$$



نیروی اصطکاک $f_k=\mu_k F_N$ می‌باشد:

$$f_k=\mu_k F_N=\mu_k mg=10\Rightarrow \mu_k(50)=10$$

$$\Rightarrow \mu_k=0/2$$

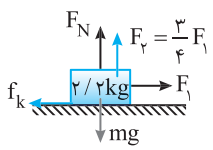
B ۹۲۹ ۳

۱ نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.

۲ نیروی عمودی تکیه‌گاه وارد بر جسم خواهد شد:

$$F_N+F_2=W\Rightarrow F_N=mg-F_2$$

$$\Rightarrow F_N=22-F_2$$



۳ نیروی اصطکاک بین جسم و سطح را حساب می‌کنیم.

$$f_k=\mu_k F_N=\mu_k(22-F_2) \quad (I)$$

۴ جسم دارای تندی ثابت است و نیروهای وارد بر آن متوازن است از این‌رو باید نیروی F_1 و f_k هم‌اندازه باشند بنابراین:

$$F_1=f_k \xrightarrow{(I)} F_1=\mu_k(22-F_2) \xrightarrow[\mu_k=0/5]{F_2=\frac{3}{4}F_1}$$

$$F_1=0/5(22-\frac{3}{4}F_1)\Rightarrow F_1=11-\frac{3}{8}F_1\Rightarrow \frac{11}{8}F_1=11\Rightarrow F_1=8N$$

۵ با توجه به $F_2=\frac{3}{4}F_1$ اندازهٔ F_2 برابر $\frac{3}{4}\times 8=6N$ است.

$$F=\sqrt{F_1^2+F_2^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10N$$

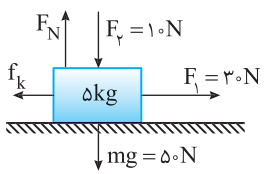
B ۹۳۰ ۲

در حالت اول، شتاب حرکت $2m/s^2$ تندشونده است یعنی $f_k<F_1$ است:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F_1-f_k=ma$$

$$30-f_k=10\Rightarrow f_k=20N$$

نیروی اصطکاک از رابطهٔ $f_k=\mu_k F_N$ به‌دست می‌آید:

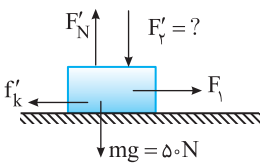


$$F_N=F_2+mg\Rightarrow F_N=60N\Rightarrow 20=\mu_k F_N\Rightarrow \mu_k=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$$

در حالت دوم، شتاب حرکت کندشونده است پس باید $F_1<f'_k$ باشد:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F_1-f'_k=m(a')\Rightarrow 30-f'_k=5\times(-2)\Rightarrow f'_k=40N$$

$$f'_k=\mu_k F'_N\Rightarrow 40=\frac{1}{3}F'_N\Rightarrow F'_N=120N$$

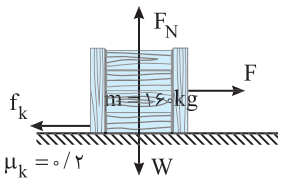


نیروها در راستای قائم متوازن‌اند. $F'_2+mg=F'_N\Rightarrow F'_2+50=120\Rightarrow F'_2=70N$

نیروی F_2 از $10N$ به $70N$ رسیده و $60N$ افزایش یافته است.

A ۹۳۱ ۲

شکل مسئله را مدل‌سازی می‌کنیم و نیروهای وارد بر صندوق را رسم می‌کنیم.



۱ جسم در امتداد قائم حرکتی ندارد، بنابراین نیروهای F_N و W متوازن هستند.

$$F_N=W \xrightarrow{W=mg} F_N=160\times 10\Rightarrow F_N=1600N$$

۲ اندازهٔ نیروی اصطکاک جنبشی را در این حالت به‌دست می‌آوریم:

$$f_k=\mu_k F_N\Rightarrow f_k=0/2\times 1600\Rightarrow f_k=320N$$

۳ به کمک قانون دوم نیوتون، نیروی F را حساب می‌کنیم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma \xrightarrow{a=0/25m/s^2}$$

$$F-320=160\times 0/25\Rightarrow F-320=40\Rightarrow F=360N$$

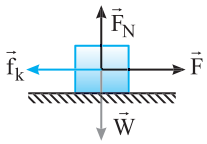
۴ قرار است که با برداشتن مقداری از محتویات صندوق شتاب حرکت دو برابر یعنی $2\times 0/25=0/5m/s^2$ شود. البته باید دقت کنید که با کاهش محتویات صندوق، نیروی اصطکاک نیز تغییر می‌کند، بنابراین خواهیم داشت:

$$F'_{net}=m'a'\Rightarrow F-f'_k=m'a' \xrightarrow{f'_k=\mu_k m'g}$$

$$320-0/2m'\times 10=m'\times 0/5\Rightarrow 320=2/5m'\Rightarrow m'=128kg$$

۵ جرم محتویات خارج شده از صندوق برابر است با: $\Delta m=160-128=32kg$

B ۹۳۲ ۳



۱ به کمک قانون دوم نیوتون در هر حالت شکل ساده‌ای از مسئله رسم می‌کنیم و نیروهای وارد بر جسم را روی شکل نمایش می‌دهیم.

۲ به کمک قانون دوم نیوتون شتاب حرکت جعبه را در دو حالت به‌دست می‌آوریم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow \begin{cases} F-f_k=ma\Rightarrow a=\dfrac{F-f_k}{m} \\ 2F-f_k=ma'\Rightarrow a'=\dfrac{2F-f_k}{m} \end{cases}$$

۳ برای مقایسه a و a′ به‌صورت کسر a′ مقدار f_k را اضافه و کم می‌کنیم.

$$a'=\frac{2F-f_k-f_k+f_k}{m}=\frac{2F-2f_k}{m}+\frac{f_k}{m}\Rightarrow a'=2(\overbrace{\frac{F-f_k}{m}}^{a})+\frac{f_k}{m}$$

$$\Rightarrow a'=2a+\frac{f_k}{m}\Rightarrow a'>2a$$

برای سادگی یک مثال عددی می‌زنیم. فرض کنید $F=5N$ ، $f_k=2N$ و جرم m برابر $1kg$ است، در این صورت:

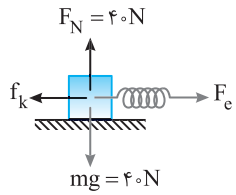
$$a=\frac{5-2}{1}=3m/s^2 \quad , \quad a'=\frac{2\times 5-2}{1}=8m/s^2\Rightarrow 8>2\times 3$$

A ۹۳۳ ۲

۱ شکل مسئله را با رسم نیروهای وارد بر جسم کامل می‌کنیم.

۲ نیروی عمودی تکیه‌گاه برابر نیروی وزن جسم است.

$F_N = W \Rightarrow F_N = ۴۰N$



۳ اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح خواهد شد:

$f_k = \mu_k F_N \xrightarrow{\mu_k = ۰/۲۵} f_k = ۰/۲۵ \times ۴۰ = ۱۰N$

۴ قانون دوم را می‌نویسیم و نیروی کشسانی فنر را به‌دست می‌آوریم.

$F_{net} = ma \Rightarrow F_e - f_k = ma \xrightarrow{a = ۱/۵ m/s^۲} F_e - ۱۰ = ۴ \times ۱/۵ \Rightarrow F_e = ۱۶N$

۵ افزایش طول فنر را حساب می‌کنیم:

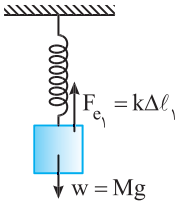
$F_e = kx \xrightarrow{k = ۸۰ N/m} ۱۶ = ۸۰x \Rightarrow x = ۰/۲m = ۲۰cm$

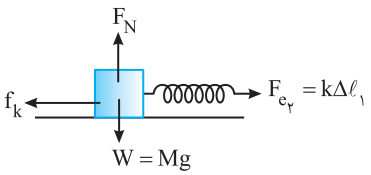
B ۹۳۴ ۳

حالت اول: وزنه از فنر آویزان و در حال تعادل است.

$F_{net} = ۰ \Rightarrow m = k\Delta\ell_۱ \Rightarrow mg = k(۰/۱) \quad (I)$

حالت دوم: تندی جسم ثابت است، بنابراین نیروی خالص وارد بر وزنه صفر است و وزنه در حالت تعادل است.





$F_{net} = ۰ \Rightarrow f_k = F_{e_۲} \Rightarrow \mu_k Mg = k\Delta\ell_۲$

$۰/۲(Mg) = k(۰/۰۲) \Rightarrow Mg = k(۰/۱) \quad (II)$

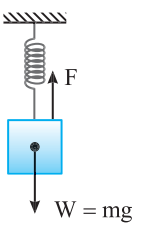
دو رابطهٔ (I) و (II) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$\frac{M}{m} = ۱$

بازی با سؤال **افزایش طول یک فنر وقتی وزنه‌ای به جرم m به انتهای آن آویزان است، برابر ۴ سانتی‌متر می‌شود. اگر بخواهیم با همین فنر وزنه‌ای به جرم M را روی یک سطح افقی با ضریب اصطکاک ۰/۲ با سرعت ثابت بکشیم افزایش طول آن ۲ سانتی‌متر می‌شود. M/m کدام است؟**

۱) ۰/۴ **۲)** ۲/۵ **۳)** ۱۰ **۴)** ۴۰

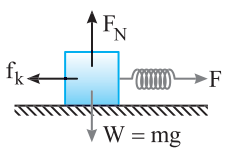
پاسخ **در حالت اول جسم ساکن است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند از این‌رو:**



در حالت اول خواهیم داشت:

$F = W \Rightarrow k\Delta l = mg \Rightarrow k(\frac{۴}{۱۰۰}) = mg \quad (۱)$

در حالت دوم جسم با سرعت ثابت در حرکت بوده و مجدداً نیروهای وارد بر آن متوازن بوده و خواهیم داشت:



$F_{net} = ۰ \Rightarrow F = f_k \Rightarrow k\Delta x = \mu_k W$

$\Rightarrow k(\frac{۲}{۱۰۰}) = ۰/۲Mg \quad (۲)$

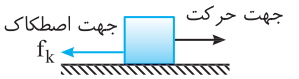
از تقسیم رابطهٔ (۱) بر رابطهٔ (۲) نسبت جرم‌ها را حساب می‌کنیم:

$۲ = \frac{m}{۰/۲M} \Rightarrow \frac{M}{m} = ۲/۵$

گزینهٔ ۲

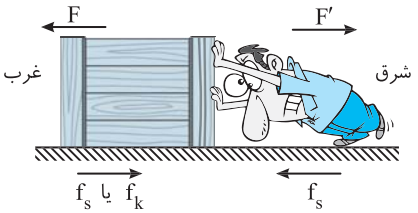
B ۹۳۵ ۱

یادآوری هر گاه دو جسم که باهم در تماس هستند بخواهند نسبت به هم حرکت کنند بین آن‌ها یک نیروی تماسی به وجود می‌آید که می‌خواهد مانع لغزش این دو جسم نسبت به هم شود که به آن نیروی اصطکاک گویند بنابراین نیروی اصطکاک در خلاف جهت لغزش جسم است.



به شکل زیر به دقت نگاه کنید. شخصی جعبه را با نیروی F به سمت غرب هُل می‌دهد و جعبه روی سطح افقی به سمت غرب می‌خواهد بلغزد بنابراین نیروی اصطکاکی که زمین به جعبه وارد می‌کند به سمت شرق بوده تا مانع لغزش شود.

اما بنا به قانون سوم نیوتون وقتی که شخص بر جعبه نیروی F را وارد می‌کند جعبه نیز نیروی F' هم‌اندازه F را بر شخص به سوی شرق وارد می‌کند که این نیرو می‌خواهد شخص را به سوی شرق براند. بنابراین اصطکاک ایستایی که سطح زمین بر پای شخص وارد می‌کند، به سمت غرب است تا مانع لغزش پا به سمت شرق شود.



B ۹۳۶ ۲

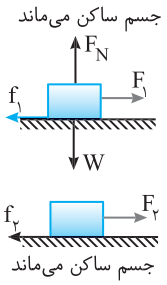
خط فکری ابتدا نیروی اصطکاک در آستانه حرکت $(f_{s\,max})$ را به‌دست می‌آوریم. اگر نیروی F از این اصطکاک کمتر باشد جسم ساکن می‌ماند و نیروی اصطکاک برابر نیروی F است و اگر نیروی F از نیروی اصطکاک در آستانه حرکت بیشتر باشد نیروی اصطکاک برابر نیروی اصطکاک جنبشی $(f_k = \mu_k F_N)$ می‌شود.

۱ اصطکاک آستانهٔ حرکت برابر است با:

$f_{s\,max} = \mu_s F_N \xrightarrow{F_N = mg} f_{s\,max} = \mu_s mg \xrightarrow{\mu_s = ۰/۲۵, m = ۴kg}$

$f_{s\,max} = ۰/۲۵ \times ۴۰ = ۱۰N$

۲ اکنون نیروهای $F_۱$، $F_۲$ و $F_۳$ با $f_{s\,max}$ مقایسه می‌کنیم.



$F_۱, F_۲ < f_{s\,max}$

$\begin{cases} F_۱ = ۴N \rightarrow f_۱ = F_۱ = ۴N \\ F_۲ = ۸N \rightarrow f_۲ = F_۲ = ۸N \end{cases}$

۳ نیروی $F_۳ = ۱۲N$ از $f_{s\,max} = ۱۰$ بزرگ‌تر است بنابراین اصطکاک بین جسم و سطح، اصطکاک جنبشی است.

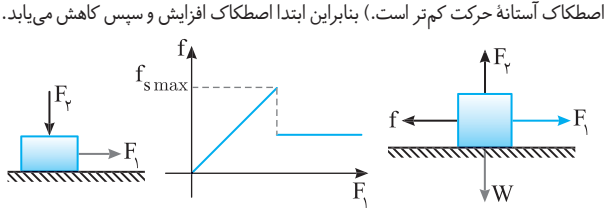
$f_۳ = f_k = F_N \mu_k = mg\mu_k = ۴۰ \times ۰/۲ = ۸N$

۴ در نتیجه:

$f_۱ < f_۲ = f_۳$

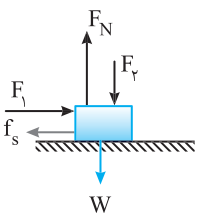
A ۹۳۷ ۴

جسم ساکن است، نیروی $F_۱$ بر جسم وارد می‌شود و تا لحظه‌ای که جسم ساکن است نیروها متوازن هستند و نیروی اصطکاک ایستایی با نیروی $F_۱$ برابر است $(F_۱ = f_s)$ با افزایش $F_۱$، نیروی اصطکاک F_s افزایش می‌یابد تا به مقدار پیشینهٔ آستانه حرکت $f_{s\,max}$ برسد. از لحظه‌ای که نیروی $F_۱$ از نیروی اصطکاک $f_{s\,max}$ بیشتر شده، جسم به حرکت درمی‌آید اصطکاک ناگهان کاهش می‌یابد و برابر اصطکاک جنبشی $f_k = \mu_k F_N$ می‌شود. (معمولاً اصطکاک جنبشی از اصطکاک آستانهٔ حرکت کم‌تر است.) بنابراین ابتدا اصطکاک افزایش و سپس کاهش می‌یابد.



B ۹۳۸ ۲

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. دقت کنید که جسم ساکن است.



با افزایش $F_۲$ نیروی عمودی سطح افزایش می‌یابد

$$F_{net_y}=۰\Rightarrow F_N=F_۲\uparrow+W$$

و (الف) درست است.

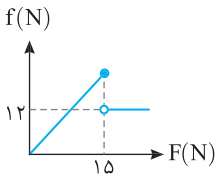
جسم ساکن است و با افزایش نیروی $F_۲$ تغییری در نیروی جلوبر $F_۱$ ایجاد نمی‌شود و جسم هم‌چنان ساکن می‌ماند و نیروی خالص وارد بر جسم صفر می‌ماند و گزاره (ت) نادرست است. نیروهای وارد بر جسم ساکن متوازن هستند و نیروی اصطکاک بین جسم و سطح با نیروی $F_۱$ برابر است. $f_s=F_۱=۱۰N$

و هرچه $F_۲$ را افزایش دهیم f_s همچنان $۱۰N$ باقی می‌ماند و عبارت (ب) نادرست است.

با افزایش نیروی عمودی سطح، نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت یعنی نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه $f_{s\max}=\mu_sF_N\uparrow$ افزایش می‌یابد. بنابراین، گزارهٔ (پ) درست است.

B ۹۳۹ ۱

خط فکری به شکل با دقت نگاه کنید،



نیروی اصطکاک جنبشی مقدار ثابت $f_k=۱۲N$ است. وقتی نیروی افقی $F=۱۵N$ است، اصطکاک بیشینه مقدار را دارد یعنی جسم در این لحظه در آستانهٔ حرکت بوده و اصطکاک آستانهٔ حرکت $f_{s\max}=۱۵N$ است. اکنون می‌توانید مسئله را حل کنید.

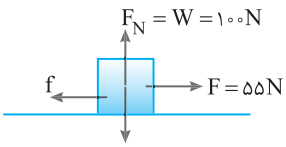
۱ ضریب اصطکاک جنبشی را به‌دست می‌آوریم. $f_k=\mu_kF_N\Rightarrow\mu_k=\frac{۱۲}{F_N}$

۲ ضریب اصطکاک ایستایی خواهد شد: $f_{s\max}=\mu_sF_N\Rightarrow\mu_s=\frac{۱۵}{F_N}$

۳ نسبت ضریب اصطکاک‌ها خواهد شد: $\frac{\mu_k}{\mu_s}=\frac{\frac{۱۲}{F_N}}{\frac{۱۵}{F_N}}=\frac{۴}{۵}$

B ۹۴۰ ۳

ابتدا نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را حساب می‌کنیم تا ببینیم جسم به حرکت در می‌آید یا نه.



$$f_{s\max}=\mu_sF_N\Rightarrow f_{s\max}=۰/۵\times۱۰۰\Rightarrow f_{s\max}=۵۰N$$

نیروی $F=۵۵N$ از نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت بیشتر است و باعث حرکت جسم می‌شود. بنابراین باید نیروی اصطکاک جنبشی را حساب کرد.

$$f_k=\mu_kF_N\Rightarrow f_k=۰/۲۵\times۱۰۰\Rightarrow f_k=۲۵N$$

نیروی خالص وارد بر جسم خواهد شد:

$$F_{net}=F-f_k\Rightarrow F_{net}=۵۵-۲۵\Rightarrow F_{net}=۳۰N$$

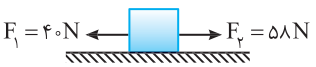
B ۹۴۱ ۳

خط فکری گام اول، یافتن اصطکاک آستانهٔ حرکت جسم $f_{s\max}$ است. گام بعدی، یافتن برایند دو نیروی $F_۱$ و $F_۲$ و مقایسهٔ آن با $f_{s\max}$ است تا بتوانیم تشخیص بدهیم که جسم ساکن می‌ماند یا به حرکت درمی‌آید. آنگاه اصطکاک قابل محاسبه می‌شود.

۱ نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را حساب می‌کنیم.

$$f_{s\max}=\mu_sF_N=\mu_smg\Rightarrow f_{s\max}=۰/۴\times۵\times۱۰=۲۰N$$

۲ برایند دو نیروی $F_۱=۴۰N$ و $F_۲=۵۸N$ برابر $۵۸-۴۰=۱۸N$ است.



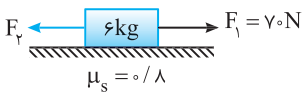
۳ برایند $F_۱$ و $F_۲$ از $f_{s\max}$ کمتر است بنابراین جسم ساکن می‌ماند.

۴ وقتی جسم ساکن می‌ماند نیروی اصطکاک ایستایی با نیرویی که می‌خواهد جسم را به حرکت درآورد برابر است: $f_s=۱۸N$

B ۹۴۲ ۴

خط فکری می‌خواهیم جسم در آستانهٔ حرکت قرار گیرد. بنابراین دو حالت ممکن است اتفاق بیافتد. اگر $F_۱>F_۲$ باشد و برایند آن‌ها برابر $f_{s\max}=F_۱-F_۲$ شود جسم در آستانهٔ حرکت به سمت راست قرار می‌گیرد و اگر $F_۱<F_۲$ و برایند آن‌ها $(F_۲-F_۱=f_{s\max})$ باشد، جسم در آستانهٔ حرکت به سمت چپ قرار می‌گیرد بنابراین باید دو حالت را بررسی کنید.

اگر $F_۱>F_۲$ باشد جسم در آستانهٔ حرکت به سمت راست قرار خواهد داشت:



$$\mu_s=۰/۸$$

نیروی اصطکاک آستانه حرکت خواهد شد:

$$f_{s\max}=\mu_sN=۰/۸\times۶۰=۴۸N$$

بنابراین:

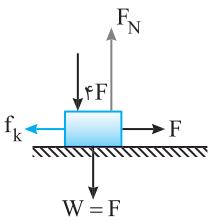
$$F_۱-F_۲-f_{s\max}=۰\Rightarrow ۷۰-F_۲-۴۸=۰\Rightarrow F_۲=۲۲N$$

اگر $F_۱<F_۲$ باشد جسم در آستانهٔ حرکت به سمت چپ قرار خواهد داشت بنابراین:

$$F_۲-F_۱-f_{s\max}=۰\Rightarrow F_۲-۷۰-۴۸=۰\Rightarrow F_۲=۱۱۸N$$

B ۹۴۳ ۴

۱ نیروهای وارد بر جسم را کامل رسم می‌کنیم.



۲ نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم.

$$F_N=۴F+W\xrightarrow{W=F}F_N=۵F$$

۳ نیروی اصطکاک بیشینه $(f_{s\max})$ را به‌دست می‌آوریم.

$$f_{s\max}=\mu_sF_N\xrightarrow{\mu_s=۰/۱۸}f_{s\max}=۰/۱۸\times۵F\Rightarrow f_{s\max}=۰/۹F$$

۴ نیروی افقی جلوبر F و اصطکاک آستانهٔ حرکت $f_{s\max}=۰/۹F$ بوده یعنی $F>f_{s\max}$ است و جسم شروع به حرکت می‌کند. در این حالت جسم دارای اصطکاک جنبشی است که معمولاً از اصطکاک آستانهٔ حرکت $f_{s\max}=۰/۹F$ کوچک‌تر است و تنها گزینه‌ای که چنین است گزینهٔ (۴) درست است.

B ۹۴۴ ۱

خط فکری دقت کنید که در ابتدا نخ کشیدگی ندارد و نیروی کشش نخ صفر است و اگر نیروی F نتواند سبب حرکت جسم شود، نیروی کشش نخ همچنان صفر است.



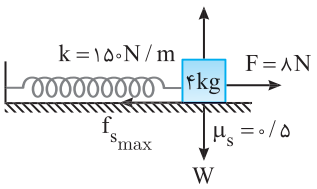
نیروی اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح $۱۵N$ است، بنابراین نیروی اصطکاک ایستایی در آستانهٔ حرکت از $۱۵N$ نیز بیشتر است و نیروی افقی $F=۱۰N$ نمی‌تواند این جسم ساکن را به حرکت درآورد و باعث کشیدگی نخ شود. به همین علت نیروی کشش نخ صفر است.

B ۹۴۵ ۲

۱ نیروی اصطکاک آستانه حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$f_{s\max}=\mu_s F_N \xrightarrow{F_N=mg=۴۰} f_{s\max}=۰/۵\times۴۰\Rightarrow f_{s\max}=۲۰N$$

$$F_N=W=۴۰N$$



۲ جسم در آستانهٔ حرکت به سمت راست است یعنی نیروی اصطکاک $f_{s\max}=۲۰N$ به سمت چپ است.

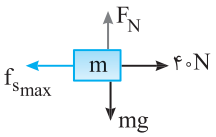
۳ جسم ساکن است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند و برای آن‌که جسم در آستانهٔ حرکت به سمت راست باشد باید نیروی کشسانی فنر برابر $F_e=۲۰-۸=۱۲N$ به سوی راست باشد، بنابراین باید فنر فشرده شده باشد تا نیروی کشسانی آن رو به راست باشد.

۴ اندازه تغییر طول فنر برابر است با:

$$F_e=kx\Rightarrow ۱۲=۱۵۰x\Rightarrow x=\frac{۱۲}{۱۵۰}=\frac{۴}{۵۰}=۰/۰۸\Rightarrow x=۸cm$$

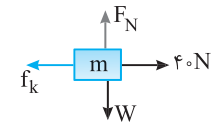
C ۹۴۶ ۳

۱ جسم در آستانهٔ حرکت است بنابراین نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند و می‌توان از این مطلب استفاده کرد و جرم جسم را به‌دست آورد.



$$F_{net}=۰\Rightarrow ۴۰-f_{s\max}=۰$$
$$\Rightarrow f_{s\max}=۴۰\Rightarrow \mu_s mg=۴۰$$
$$\Rightarrow ۰/۴\times m\times ۱۰=۴۰\Rightarrow m=۱۰kg$$

۲ جسم در حال حرکت است و نیروی اصطکاک بین جسم و سطح نیروی اصطکاک جنبشی $(f_k=\mu_k F_N)$ است. قانون دوم نیوتون را نوشته شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.



$$F_{net}=ma\Rightarrow ۴۰-f_k=۱۰\times a\Rightarrow ۴۰-\mu_k mg=۱۰a$$
$$\Rightarrow ۴۰-(۰/۲\times ۱۰\times ۱۰)=۱۰a\Rightarrow a=۲m/s^۲$$

B ۹۴۷ ۱

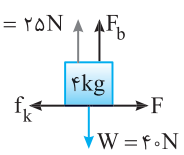
خط فکری با یک مسئله زیبا مربوط به قانون دوم و قانون سوم سروکار دارید. نیرویی که شخص را به جلو می‌راند نیروی اصطکاک ایستایی بین پای شخص و سطح پیست است، در واقع شخص سطح را به عقب می‌راند و بنا به قانون سوم نیوتون، واکنش آن نیرو توسط سطح به شخص وارد می‌شود و شخص را به جلو می‌راند. بیشینه شتاب وقتی است که نیروی اصطکاک بیشینه $(f_{s\max})$ باشد.

برای یافتن شتاب حرکت کافی است از قانون دوم نیوتون استفاده کنیم و به جای نیروی خالص وارد بر شخص نیروی $f_{s\max}$ را قرار دهیم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow \mu_s mg=ma\Rightarrow a=\mu_s g=۰/۹۵\times ۱۰=۹/۵\,m/s^۲$$

A ۹۴۸ ۲

۱ شکل ساده‌ای از نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.

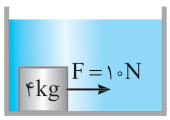


۲ جسم با سرعت ثابت در حال حرکت است بنابراین:

$$F_{net}=۰\Rightarrow F=f_k\Rightarrow ۱۰=\mu_k F_N\Rightarrow ۱۰=۰/۴N\Rightarrow F_N=۲۵N$$

۳ جسم در امتداد قائم حرکتی ندارد و نیروهای رو به بالا با نیروهای رو به پایین برابر هستند. بر جسم نیروی F_N و نیروی شناوری F_b رو به بالا و نیروی وزن رو به پایین وارد می‌شود بنابراین خواهیم داشت: $F_N+F_b=W\Rightarrow F_b=۴۰-۲۵\Rightarrow F_b=۱۵N$

بازی با سؤال مطابق شکل جسمی به جرم ۴kg در کف ظرف حاوی مایعی با نیروی $F=۱۰N$ شروع به حرکت می‌کند، نیروی شناوری وارد بر جسم چند نیوتون می‌تواند باشد؟ $(\mu_k=۰/۲,\mu_s=۰/۴,g=۱۰N/kg)$

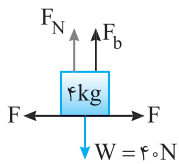


۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

پاسخ برای آنکه جسم شروع به حرکت کند، $F>f_{s_{max}}$ باشد.

$$F>f_{s_{max}}\Rightarrow ۱۰>\mu_s F_N\Rightarrow ۱۰>۰/۴F_N\Rightarrow F_N<۲۵N$$

نیروهای در راستای قائم جسم را می‌نویسیم:

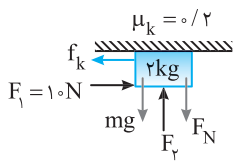


$$F_N+F_b=W\Rightarrow F_N=W-F_b$$
$$F_N<۲۵\Rightarrow W-F_b<۲۵$$
$$\Rightarrow ۴۰-F_b<۲۵\Rightarrow F_b>۱۵N$$

گزینهٔ ۴

B ۹۴۹ ۳

۱ تمام نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:



۲ جسم با سرعت ثابت در حال حرکت است پس نیروهای وارد بر جسم متوازن می‌باشند و می‌توانیم بنویسیم: $F_۱=f_k\Rightarrow F_۱=\mu_k F_N$ (۱) : در راستای افقی

$F_N+mg=F_۲\Rightarrow F_N=F_۲-mg$ (۲) : در راستای قائم

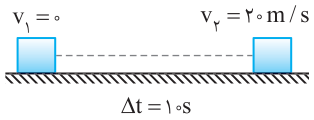
۳ اکنون رابطهٔ (۲) را در رابطهٔ (۱) جایگزین می‌کنیم:

$$(۲)\text{ و }(۱)\Rightarrow F_۱=\mu_k(F_۲-mg)\Rightarrow ۱۰=۰/۲(F_۲-۲۰)\Rightarrow F_۲=۷۰N$$

نمونهٔ واقعی این حرکت کشیدن ماله توسط گچ‌کار روی سقف است.

B ۹۵۰ ۴

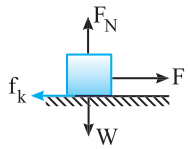
خط فکری حضور زمان در مسئله یعنی رفتن به سراغ روابط حرکت‌شناسی، ابتدا به کمک معادلهٔ سرعت - زمان، شتاب را بیابید، سپس نیروهای وارد بر جسم را رسم کنید و به کمک قانون دوم نیوتون F را به‌دست بیاورید.



۱ در مدت ۱۰s سرعت اتومبیل از صفر به $\frac{۷۲}{۳/۶}=۲۰m/s$ رسیده است، بنابراین شتاب حرکت خواهد شد:

$$v_۲=at+v_۱\Rightarrow ۲۰=۱۰a\Rightarrow a=۲m/s^۲$$

۲ حال با توجه به قانون دوم نیوتون:



$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma$$
$$\xrightarrow{f_k=\mu_k mg} F-\mu_k mg=ma$$
$$\xrightarrow{m=۱۵۰۰kg,\ \mu_k=۰/۰۲}$$
$$F-۰/۰۲\times ۱۵۰۰۰=۱۵۰۰\times ۲\Rightarrow F=۳۳۰۰N$$

A ۹۵۱ ۴

ابتدا به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، شتاب حرکت خودرو را به‌دست می‌آوریم.

$$v=۳۶km/h\Rightarrow v=\frac{۳۶}{۳/۶}\Rightarrow v=۱۰m/s$$
$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\xrightarrow{\Delta x=۱۰m} ۰-۱۰۰=۲a\times ۱۰\Rightarrow a=-۵m/s^۲$$

نیروی خالص وارد بر خودرو همان نیروی اصطکاک است.

$$F_{net}=ma\Rightarrow -f_k=ma\xrightarrow{m=۱۶۰۰kg}-f_k=۱۶۰۰\times(-۵)$$
$$\Rightarrow f_k=۸۰۰۰N$$

A ۹۵۲ ۱

۱ سرعت خودرو را برحسب m/s به‌دست می‌آوریم:

$$v=۵۴km/h=۵۴\times\frac{۱۰۰۰m}{۳۶۰۰s}=۱۵m/s$$

۲ نیرویی که باعث توقف جسم می‌شود نیروی اصطکاک است و مقدار آن را حساب می‌کنیم.

$$f_k=\mu_k mg=۰/۲\times m\times ۱۰=۲m$$

۳ شتاب حرکت جسم را به کمک قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آوریم:

$$-f_k=ma\Rightarrow -۲m=ma\Rightarrow a=-۲m/s^۲$$

۴ اکنون به کمک معادلهٔ مستقل از زمان جابه‌جایی تا لحظهٔ توقف را حساب می‌کنیم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-۱۵^۲=۲\times(-۲)\Delta x\Rightarrow \Delta x\approx ۵۶m$$

میانبر اندازهٔ شتاب توقف جسم روی سطح افقی در اثر نیروی اصطکاک برابر است با: $a=\mu_k g$

B ۹۵۳ ۲

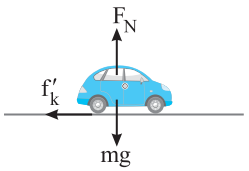
ابتدا با توجه به سرعت ابتدایی $۵۴km/h$ و سرعت انتهایی صفر و طول مسیر $۲۲/۵m$، شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$v_۱=۵۴km/h\div ۳/۶=۱۵m/s$$

$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-۲۲۵=۲a\times ۲۲/۵\Rightarrow a=-۵m/s^۲$$

هنگام ترمز تنها نیروی اصطکاک در راستای حرکت به خودرو وارد می‌شود و خودرو نیروی پیشرانی ندارد:

$$\begin{cases} F_{net}=ma\Rightarrow -f_k=ma \quad (I)\\ f_k=\mu_k F_N \xrightarrow{F_N=mg} f_k=mg\mu_k \quad (II)\end{cases}$$



با توجه به دو معادلهٔ بالا:

$$-mg\mu_k=ma\Rightarrow -g\mu_k=a\xrightarrow{a=-۵m/s^۲}$$

$$-۱۰\mu_k=-۵\Rightarrow \mu_k=۰/۵$$

A ۹۵۴ ۳

یادآوری در مدت‌زمان تأخیر واکنش راننده یعنی در بازهٔ زمانی دیدن مانع و ترمز گرفتن، اتومبیل دارای سرعت ثابت است.

۱ سرعت اتومبیل را برحسب m/s به‌دست می‌آوریم.

$$۷۲\frac{km}{h}=\frac{۷۲}{۳/۶}=۲۰m/s$$

۲ جابه‌جایی اتومبیل در $۰/۵s$ زمان واکنش را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=vt\Rightarrow \Delta x_۱=۲۰\times ۰/۵=۱۰m$$

در این $۱۰m$ نیروی خالص وارد بر جسم صفر است.

۳ اتومبیل مماس بر مانع متوقف شده یعنی فاصلهٔ $۲۰m$ اتومبیل تا مانع کاملاً طی شده است. البته $۱۰m$ اول آن در زمان واکنش و $۱۰m$ باقی‌مانده با حرکت کندشونده انجام شده. به کمک رابطهٔ مستقل از زمان شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.

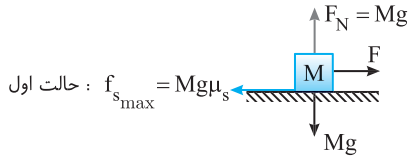
$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-۴۰۰=۲\times a\times(۱۰)\Rightarrow a=-۲۰m/s^۲$$

۴ اندازهٔ نیروی خالص وارد بر اتومبیل خواهد شد:

$$|F_{net}|=m|a|\xrightarrow{m=۱۵۰۰kg} F_{net}=۱۵۰۰\times ۲۰\Rightarrow F_{net}=۳۰۰۰۰N$$

B ۹۵۵ ۲

خط فکری اول باید بدانیم منظور از حداقل نیروی لازم برای به حرکت درآوردن جسم چیست؟ منظور این است که جسم با نیروی F در آستانهٔ حرکت قرار گیرد و با یک ضربهٔ کوچک به راه بیافتد. بنابراین اصطکاک آستانهٔ حرکت را در دو حالت به‌دست بیاورید و برهم تقسیم کنید.

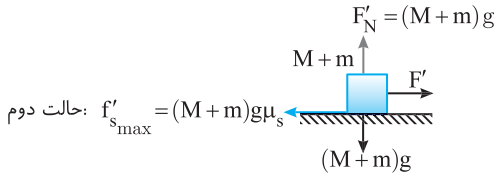


نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه برابر $f_{s_{max}}=\mu_s N$ می‌باشد و دقت کنید که μ_s به جرم جسم بستگی ندارد.

$$F=f_{s\,max}\Rightarrow F=\mu_s Mg \quad , \quad F'=f'_{s\,max}\Rightarrow F'=\mu_s(M+m)g$$

بنابراین:

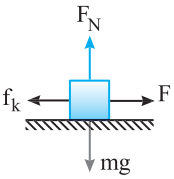
$$\frac{F'}{F}=\frac{\mu_s(M+m)g}{\mu_s Mg}=\frac{M+m}{M}$$



بدون حل نیز مشخص است که وقتی جرم از M به $M+m$ افزایش یابد F' به همان نسبت باید زیاد شود.

A ۹۵۶ ۴

خط فکری با دیدن گزینه‌ها نگران نشوید. کافی است شکل مسئله را رسم کنید نیروهای وارد بر جسم را روی آن نمایش دهید. به کمک قانون دوم نیوتون شتاب را پارامتری به‌دست بیاورید و با روابط حرکت‌شناسی سرعت جسم را بعد از طی مسافت d حساب کنید و تمام.



۱ ابتدا شتاب حرکت را به کمک قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آوریم:

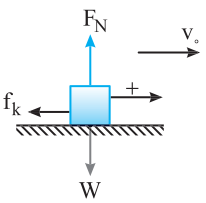
$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow F-\mu_k mg=ma\Rightarrow a=\frac{F-\mu_k mg}{m}$$

۲ اکنون به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، v را به‌دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow v^۲-۰=۲\frac{F-\mu_k mg}{m}d\Rightarrow v=\sqrt{\frac{۲(F-\mu_k mg)d}{m}}$$

B ۹۵۷ ۱

نکته هرگاه در مسئله بیان شود که جسم را با سرعت اولیه پرتاب کرده (یا به حرکت درآورده‌ایم) یعنی نیروی جلوبر صفر است و جسم چون دارای سرعت اولیه است بنا به قانون اول نیوتون به حرکت خود ادامه می‌دهد تا در اثر اصطکاک بایستد.



شکل مسئله را رسم می‌کنیم. تمام نیروهای وارد بر جسم را روی جسم نمایش می‌دهیم. نیرویی که مانع حرکت جسم می‌شود اصطکاک است. شتاب حرکت را حساب می‌کنیم. بنابراین شتاب حرکت به جرم جسم بستگی ندارد. از طرفی:

$$F_{net}=ma\Rightarrow -f_k=ma\Rightarrow -\mu_k mg=ma\Rightarrow a=-\mu_k g$$

با توجه به رابطهٔ مستقل از زمان، جابه‌جایی تا توقف خواهد شد:

$$v^۲-v_۰^۲=۲(-a)\Delta x\Rightarrow \Delta x=\frac{v_۰^۲}{۲a}$$

بنابراین مسافت طی شده در دو حالت یکی است و جرم در آن بی‌تأثیر است.

میانبر هر گاه تنها نیروی وارد بر جسم نیروی اصطکاک جنبشی باشد، شتاب حرکت جسم برابر $a=\mu_k g$ خواهد بود.

بازی با سؤال جسمی به جرم $5kg$ با سرعت اولیهٔ v_0 روی سطح افقی پرتاب می‌شود و پس از طی مسافت $20m$ می‌ایستد. اگر جسمی به جرم $15kg$ را با همان سرعت اولیه روی همان سطح با همان μ_k پرتاب کنیم، پس از طی چند متر می‌ایستد؟ $(g=10N/kg)$

۱) ۲۰ ۲) ۱۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵

پاسخ شتاب حرکت در دو حالت برابر $a=-\mu_k g$ است و بنا به رابطهٔ مستقل از زمان جابه‌جایی در دو حالت یکسان و برابر است با:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x \Rightarrow 0-v_0^2=2(-\mu_k g)\Delta x \Rightarrow \Delta x=\frac{v_0^2}{2\mu_k g}$$

یعنی جابه‌جایی همان $20m$ خواهد بود. گزینهٔ ۱

۲ ۹۵۸ B

خط فکری تا زمانی که نیروی F، بزرگ‌تر یا مساوی اصطکاک آستانهٔ حرکت نشود جسم شروع به حرکت نمی‌کند. البته اگر $F=f_{s\,max}$ باشد با یک ضربهٔ کوچک جسم به راه می‌افتد. بنابراین لحظهٔ شروع حرکت یعنی شما باید نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را به‌دست آورده و آن را به جای F قرار داده لحظهٔ حرکت را حساب کنید.

۱ جسم هنگامی شروع به حرکت می‌کند که حداقل مقدار F برابر نیروی اصطکاک در آستانه حرکت $(f_{s\,max})$ باشد: $F=f_{s\,max}=\mu_s F_N=\mu_s mg=0/4\times 20=8N$

۲ در معادله $F(t)=t^2+t-4$ می‌توان به جای F، $8N$ قرار داد.

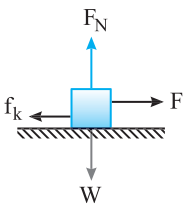
$$F(t)=8\Rightarrow t^2+t-4=8\Rightarrow t^2+t-12=0\Rightarrow (t+4)(t-3)=0$$
$$\Rightarrow t=3, t=-4 \text{ غ ق ق}$$

۲ ۹۵۹ A

با مقایسه معادلهٔ سرعت زمان داده شده در مسئله با معادلهٔ سرعت زمان حرکت با شتاب ثابت، شتاب حرکت را مشخص می‌کنیم.

$$v=4t+3\ ,\ v=at+v_0 \Rightarrow a=4m/s^2$$

نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده، به کمک قانون دوم نیوتون اصطکاک را به‌دست می‌آوریم.



$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow 18-f_k=4\times 4$$
$$\Rightarrow f_k=2N$$

۱ ۹۶۰ A

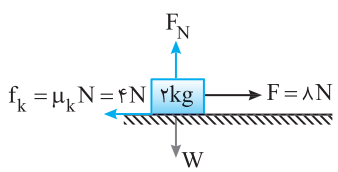
نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. نیروی اصطکاک خواهد شد:

$$f_k=\mu_k F_N=\mu_k mg\Rightarrow f_k=0/2\times 2\times 10\Rightarrow f_k=4N$$

شتاب حرکت جسم را با توجه به نیروهای وارد بر جسم به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow -f_k=ma\Rightarrow 8-4=2a\Rightarrow a=2m/s^2$$

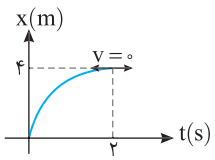
شتاب حرکت ثابت و برابر $2m/s^2$ است. معادلهٔ حرکت مسئله $(x=bt^2+4t)$ را با معادله مکان زمان حرکت با شتاب ثابت مقایسه می‌کنیم: $b=\frac{1}{2}a\Rightarrow b=\frac{1}{2}\times 2=1$



۲ ۹۶۱ B

۱ در پرتاب جسم روی سطح افقی، نیروی خالص وارد بر جسم نیروی اصطکاک است. بنابراین شتاب حرکت خواهد شد:

$$-f_k=ma\Rightarrow -\mu_k mg=ma\Rightarrow a=-\mu_k g$$



۲ حال با توجه به ثابت بودن شتاب از رابطهٔ مستقل از شتاب $\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t$، سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم دقت کنید که در لحظهٔ $t=2s$ در مکان $x=4m$ سرعت صفر است.

$$4=\frac{0+v_0}{2}\times 2\Rightarrow v_0=4m/s$$

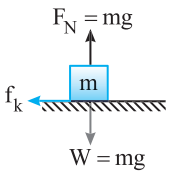
۳ شتاب حرکت خواهد شد: $a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-4}{2}=-2m/s^2$

۴ ضریب اصطکاک را به‌دست می‌آوریم:

$$a=-\mu_k g\Rightarrow -2=-\mu_k(10)\Rightarrow \mu_k=0/2$$

۱ ۹۶۲ A

هرگاه جسمی را روی سطحی با سرعت اولیه پرتاب کنیم (سُر دهیم) نیروی جلوبر آن صفر بوده و روی سطح افقی نیروی خالص وارد بر جسم نیروی اصطکاک جنبشی است. بنابراین شتاب حرکت خواهد شد:



$$F_{net}=ma\Rightarrow 0-f_k=ma$$
$$\xrightarrow{f_k=\mu_k mg} -\mu_k mg=ma\Rightarrow a=-\mu_k g$$

این شتاب به جرم جسم و تندی اولیه جسم بستگی ندارد. بنابراین شتاب حرکت دو جسم یکی است.

$$a_A=a_B$$

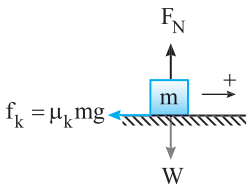
۴ ۹۶۳ B

دو جسم روی سطح افقی مماس بر سطح پرتاب شده‌اند، بنابراین نیروی جلوبر صفر است و نیروی خالص وارد بر دو وزنه، نیروی اصطکاک بین وزنه و سطح افقی است. به کمک قانون دوم نیوتون، شتاب حرکت وزنه‌ها در اثر اصطکاک را حساب می‌کنیم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow f_k=ma\Rightarrow \begin{cases} -\mu_{k_A} m_A g=m_A a_A\Rightarrow a_A=-\mu_{k_A} g \\ -\mu_{k_B} m_B g=m_B a_B\Rightarrow a_B=-\mu_{k_B} g \end{cases}$$
$$\xrightarrow{\mu_{k_A}=2\mu_{k_B}} \frac{a_A}{a_B}=2$$

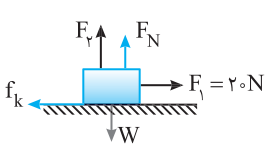
سرعت اولیهٔ هر دو یکسان است. به کمک معادلهٔ مستقل از زمان مسأله را حل می‌کنیم.

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x \xrightarrow{v=0} \Delta x=\frac{v_0^2}{-2a}\Rightarrow \frac{\Delta x_A}{\Delta x_B}=\frac{a_B}{a_A}=\frac{1}{2}$$



۲ ۹۶۴ B

نیروهای وارد بر جسم را روی شکل نمایش می‌دهیم.



۱ نیروی عمودی سطح در حالت اول برابر است با:

$$F_N+F_2=W\Rightarrow F_N=W-F_2$$
$$\xrightarrow{W=40N} F_N=40-F_2$$

۲ نیروی اصطکاک در حالت اول را به‌دست می‌آوریم.

$$f_k=\mu_k F_N \xrightarrow{\mu_k=0/2} f_k=0/2(40-F_2)$$

۳ نیروی عمودی سطح در حالت دوم برابر است با:

$$F'_N+2F_2=W\Rightarrow F'_N=W-2F_2\Rightarrow F'_N=40-2F_2$$

۴ نیروی اصطکاک در حالت دوم را حساب می‌کنیم.

$$f'_k=\mu_k(40-2F_2)\Rightarrow f'_k=0/2(40-2F_2)$$

در دو حالت طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$F_۱-f_k=ma\Rightarrow ۲۰-\mu_k(۴۰-F_۲)=ma\Rightarrow ۲۰-۰/۲(۴۰-F_۲)=ma \quad (۱)$

$F_۱-f'_k=ma'\Rightarrow ۲۰-\mu_k(۴۰-۲F_۲)=m(\frac{۵}{۴}a)$

$\Rightarrow ۲۰-۰/۲(۴۰-۲F_۲)=m(\frac{۵}{۴}a) \quad (۲)$

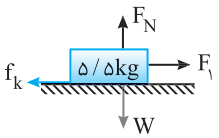
دو رابطهٔ بالا را برهم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۲۰-۸+۰/۲F_۲}{۲۰-۸+۰/۴F_۲}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow\frac{۱۲+۰/۲F_۲}{۱۲+۰/۴F_۲}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow ۶۰+F_۲=۴۸+۱/۶F_۲$$

$$\Rightarrow ۱۲=۰/۶F_۲\Rightarrow F_۲=۲۰N$$

B ۹۶۵ ۲

۱ در حالت اول سرعت ثابت است و نیروهای وارد بر جسم متوازن است بنابراین:

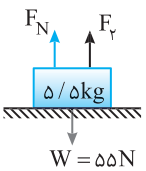


$F_{net}=۰\Rightarrow F_۱=f_k \xrightarrow{f_k=\mu_k F_N} ۰/۸F=\mu_k F_N \quad (I)$

۲ نیروی عمودی سطح در حالت اول را حساب می‌کنیم:

$F_N+F_۲=W\Rightarrow F_N=W-F_۲\Rightarrow F_N=mg-F_۲\Rightarrow F_N=۵۵-۰/۶F$

۳ در رابطه (I)، F_N را قرار می‌دهیم و F را به‌دست می‌آوریم.



$۰/۸F=\mu_k F_N=۰/۵\times(۵۵-۰/۶F)=۲۷/۵-۰/۳F$

$\Rightarrow ۱/۱F=۲۷/۵\Rightarrow F=۲۵N$

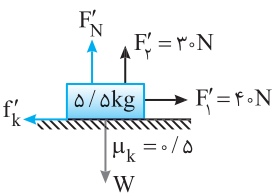
۴ نیروی $F_۱$ و $F_۲$ برابر است با:

$F_۲=۰/۶F=۱۵N$ و $F_۱=۰/۸F=۲۰N$

۵ نیروی اصطکاک در حالت اول خواهد شد:

$f_k=\mu_k F_N\Rightarrow f_k=۰/۵(۵۵-۱۵)\Rightarrow f_k=۲۰N$

۶ نیروهای $F_۱$ و $F_۲$ دو برابر شده‌اند یعنی $F'_۱=۲F_۱=۴۰$ و $F'_۲=۲F_۲=۳۰N$ است.



۷ نیروی عمودی سطح در حالت دوم خواهد شد:

$F'_N=W-F'_۲\Rightarrow F'_N=۵۵-۳۰=۲۵N$

۸ نیروی اصطکاک در حالت دوم را حساب می‌کنیم.

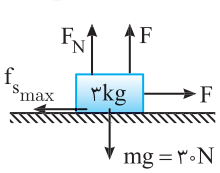
$f'_k=\mu_k F'_N=۰/۵\times۲۵=۱۲/۵N$

۹ نسبت نیروی اصطکاک در دو حالت برابر است با:

$$\frac{f'_k}{f_k}=\frac{۱۲/۵}{۲۰}=\frac{۱۲۵}{۲۰۰}\Rightarrow\frac{f'_k}{f_k}=\frac{۵}{۸}$$

B ۹۶۶ ۲

حالت اول: جسم در آستانهٔ حرکت بوده و نیروی اصطکاک آن نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه $f_{s_{max}}$ است:



نیروی عمودی سطح را به دست می‌آوریم:

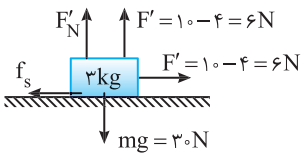
$F+F_N=mg\Rightarrow F_N=۳۰-F$:جسم در راستای قائم حرکت نمی‌کند

$F=f_{s_{max}}$:در راستای افقی جسم در آستانهٔ حرکت بوده و هنوز حرکت نکرده

$$\xrightarrow[F_N=۳۰-F]{f_{s_{max}}=\mu_s F_N} F=\mu_s(۳۰-F)\xrightarrow{\mu_s=۰/۵} F=۰/۵(۳۰-F)$$

$\Rightarrow F+۰/۵F=۱۵\Rightarrow ۱/۵F=۱۵\Rightarrow F=۱۰N$

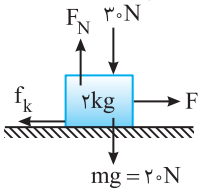
حالت دوم: هر کدام از نیروهای F، ۴N کاهش یافته و F=۱۰N به ۶N می‌رسد. دقت کنید که چون نیروی در راستای قائم کاهش یافته پس F_N افزایش می‌یابد و نیروی F



افقی نیز کاهش یافته، در واقع در قسمت قبلی با نیروی ۱۰N و نیروی عمودی سطح F′=۶N جسم در آستانهٔ حرکت بوده پس در این حالت که نیروی افقی ۲۰N−۱۰=۳۰ شده و نیروی عمودی سطح $F'_N=۳۰-۶=۲۴N$ افزایش یافته نتیجه می‌گیریم که جسم همچنان ساکن می‌ماند و نیروی اصطکاک برابر نیروی F′ است. $F'=f_s\Rightarrow f_s=۶N$

B ۹۶۷ ۳

در حالت دوم سرعت حرکت ثابت است، پس نیروهای وارد بر جسم متوازن بوده و شتاب حرکت صفر است:



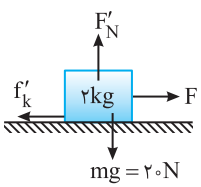
$۳۰+mg=F_N\Rightarrow F_N=۵۰N$

$f_k=\mu_k F_N\Rightarrow f_k=\frac{۱}{۴}\times۵۰\Rightarrow f_k=۱۲/۵N$

$F_{net}=ma\xrightarrow{a=۰}F_{net}=۰$

$\Rightarrow F=f_k\Rightarrow F=۱۲/۵N$

حال با توجه به اینکه در حالت اول نیروی ۳۰N بر جسم وارد نشده و نیروی F برابر ۱۲/۵N جسم را می‌کشد، شتاب حرکت را حساب می‌کنیم:



$F'_N=mg\Rightarrow F'_N=۲۰N$

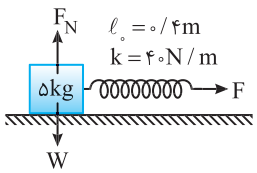
$f'_k=\mu_k F'_N\Rightarrow f'_k=\frac{۱}{۴}\times۲۰=۵N$

$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow ۱۲/۵-۵=۲a$

$\Rightarrow ۷/۵=۲a\Rightarrow a=۳/۷۵m/s^۲$

B ۹۶۸ ۴

نیروی کشسانی فنر را حساب می‌کنیم.



$F=k\Delta\ell$

$\Rightarrow F_e=۴۰۰\times\frac{(۴/۷۵-۴۰)}{۱۰۰}\Rightarrow F_e=۳۰N$

در لحظهٔ شروع به حرکت نیروی کشسانی فنر با تقریب خوبی با نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت برابر است، از این‌رو:

$f_{s\,max}=F_e\Rightarrow\mu_s mg=۳۰\Rightarrow\mu_s\times۵۰=۳۰\Rightarrow\mu_s=۰/۶$

وقتی جسم در حرکت است آنگاه:

$F_{net}=ma\Rightarrow F_e-f_k=ma\xrightarrow{a=۲m/s^۲}۳۰-\mu_k(۵۰)=۵\times۲\Rightarrow\mu_k=۰/۴$

بنابراین خواهیم داشت:

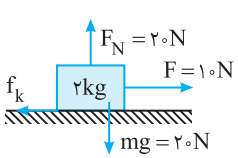
$$\frac{\mu_s}{\mu_k}=\frac{۰/۶}{۰/۴}=\frac{۳}{۲}$$

B ۹۶۹ ۴

ابتدا نیروی اصطکاک بیشینه $(f_{s_{max}})$ را حساب می‌کنیم. اگر نیروی افقی وارد بر جسم $(F=۴۰N)$ بزرگ‌تر از $f_{s_{max}}$ باشد جسم به حرکت در می‌آید:

$f_{s_{max}}=\mu_s F_N\Rightarrow f_{s_{max}}=۰/۶\times۲۰=۱۲N<F$

بنابراین جسم به حرکت در می‌آید و پس از ۵s سرعتش به v می‌رسد. حال ۳۰N از F کم شده و مقدار آن به ۱۰N می‌رسد. جسم درحال حرکت بوده پس همچنان به جسم نیروی اصطکاک جنبشی وارد می‌شود.



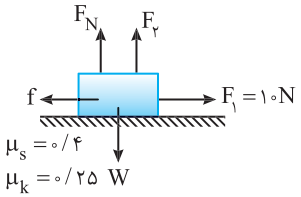
$f_k=\mu_k F_N\Rightarrow f_k=۰/۵\times۲۰=۱۰N$

$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow ۱۰-۱۰=۲\times a\Rightarrow a=۰$

بنابراین جسم با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد.

۴ ۹۷۰ C

خط فکری نیروی $F_۲$ از صفر تا $۲۰N$ در حال تغییر است بنابراین نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت $(f_{s\max})$ در حال تغییر است. شما باید مشخص کنید که ابتدا $f_{s\max}$ صفر نیوتون بوده و در نهایت چند نیوتون می‌شود و با مقایسه نیروی جلوبر $F_۱$ با $f_{s\max}$ مشخص کنید که جسم در حال سکون می‌ماند و یا اینکه به حرکت درمی‌آید.



۱ نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را وقتی $F_۲=۰$ است حساب می‌کنیم:

$$F_۲=۰\Rightarrow F_N=W\Rightarrow F_{N_۱}=۴۰N$$

نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت: $f_{s\max_۱}=\mu_s F_N\Rightarrow F_{s\max_۱}=۰/۴\times۴۰=۱۶N$

۲ نیروی $F_۱=۱۰N$ را با $F_{s\max}=۱۶N$ مقایسه می‌کنیم، $F_۱<f_{s\max}$ است. به همین دلیل تا لحظه‌ای که $f_{s\max}\geq۱۰N$ شود، جسم ساکن می‌ماند و نیروی اصطکاک برابر نیروی $F_۱$ بوده و اصطکاک ثابت می‌ماند. $(f_s=F_۱=۱۰N)$

۳ با افزایش $F_۲$، نیروی عمودی سطح $(\downarrow F_N=W-F_۲\uparrow)$ کاهش می‌یابد که سبب کاهش $f_{s\max}$ می‌شود. وقتی $F_۲=۲۰N$ می‌شود، F_N و $f_{s\max}$ را به دست می‌آوریم.

$$F_N=W-F_۲\xrightarrow{F_۲=۲۰N}F_N=۴۰-۲۰=۲۰N$$

$$f_{s\max}=\mu_s F_N\Rightarrow F_{s\max}=۰/۴\times۲۰\Rightarrow f_{s\max}=۸N$$

۴ در این حالت $F_۱=۱۰N>f_{s\max}$ بوده یعنی جسم به حرکت درمی‌آید و نیروی اصطکاک، نیروی اصطکاک جنبشی خواهد بود که از $f_{s\max}$ کمتر است، یعنی اصطکاک کاهش می‌یابد و برابر خواهد شد با: $F_k=\mu_k F_N\Rightarrow F_k=۰/۲۵\times۲۰=۵N$

در نتیجه ابتدا اصطکاک ثابت است و سپس کاهش می‌یابد.

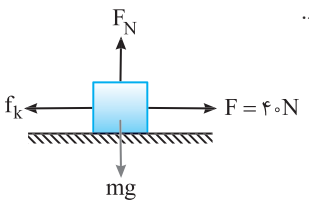
۴ ۹۷۱ C

خط فکری تا لحظه‌ای که نیروی $F\geq f_k$ است بر سرعت جسم افزوده می‌شود. بنابراین باید نیروی اصطکاک جنبشی را حساب کنید. اگر نیروی $F=۴۰N$ را کاهش دهیم تا لحظه‌ای که با نیروی اصطکاک برابر شود از تندی جسم کاسته نخواهد شد.

نیروی اصطکاک جنبشی را به‌دست می‌آوریم:

$$f_k=\mu_k mg\xrightarrow{m=۴kg}f_k=\frac{۱}{۴}\times۴۰=۱۰N$$

اگر نیروی F را از $۴۰N$ تا $f_k=۱۰N$ یعنی $۴۰-۱۰=۳۰N$ کاهش دهیم، تندی جسم کاهش نمی‌یابد.



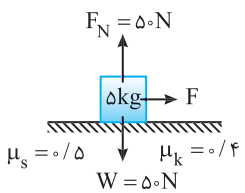
۲ ۹۷۲ B

حداقل نیرو تقریباً برابر اصطکاک ایستایی بیشینه است.

$$F_{min}=f_{s\max}=\mu_s mg$$
$$F_{min}=۰/۵\times۵۰=۲۵N$$

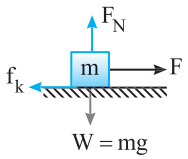
وقتی جسم به حرکت در می‌آید، نیروی اصطکاک بین جسم و سطح، اصطکاک جنبشی است. برای آنکه جسم متوقف نشود باید مقدار f_k، حداکثر $۲۵N$ باشد بنابراین:

$$F=f_k\Rightarrow F=\mu_k F'_N$$
$$۲۵=۰/۴(۵۰+m\times۱۰)\Rightarrow ۲۵=۲۰+۴m\Rightarrow m=۱/۲۵kg$$



۳ ۹۷۳ A

۱ در حالت اول نیروهای F و f_k در امتداد افقی بر جسم وارد می‌شوند و بنا به قانون دوم خواهیم داشت:

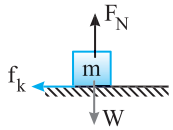


$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\quad(۱)$$

۲ بنا به فرض مسئله پس از حذف F شتاب ۵۰٪ کاهش یافته است.

$$a'=a-\frac{۵۰}{۱۰۰}a=\frac{a}{۲}$$

۳ پس از حذف نیروی F، تنها نیروی مؤثر وارد بر جسم نیروی اصطکاک است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:



$$|f_k|=\frac{m|a|}{۲}\quad(۲)$$

۴ با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

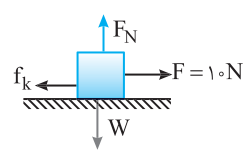
$$F-\frac{m|a|}{۲}=ma\Rightarrow F=\frac{۳}{۲}ma$$

۵ بنابراین:

$$\frac{f_k}{F}=\frac{\frac{ma}{۲}}{\frac{۳}{۲}ma}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow f_k=\frac{F}{۳}$$

۱ ۹۷۴ C

خط فکری ابتدا چون جسم در اثر اعمال نیروی F در راستای افقی با سرعت ثابت حرکت می‌کند، طبق قانون دوم نیوتون برایند نیروها در راستای افقی صفر است. بنابراین نیروی F برابر نیروی اصطکاک (f_k) است. بعد از حذف نیروی F تنها نیروی وارد شده به جسم نیروی اصطکاک (f_k) است و جسم در اثر این نیرو حرکت کندشونده‌ای را انجام می‌دهد.



قبل از حذف F:

$$F_{net}=۰\Rightarrow f_k=F=۱۰N$$

بعد از حذف F تنها نیروی مؤثر اصطکاک است، ازاین‌رو خواهیم داشت:

$$F_{net}=ma\Rightarrow -f_k=ma\Rightarrow -۱۰=۵a\Rightarrow a=-۲m/s^۲$$

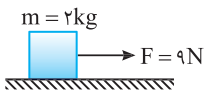
به کمک رابطهٔ مستقل از زمان سرعت در لحظهٔ حذف F را حساب می‌کنیم.

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\xrightarrow{\Delta x=۹m}۰-v^۲=۲(-۲)\times(۹)\Rightarrow v=۶m/s$$

لحظه‌ای که سرعت $۵m/s$ است را به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۵=-۲t+۶\Rightarrow t=۰/۵s$$

بازی با سوال **در شکل روبه‌رو، جسم در اثر اعمال نیروی افقی $F=۹N$ با سرعت ثابت v حرکت می‌کند. اگر در یک لحظه نیروی F حذف شود، بعد از آن جسم پس از طی مسافت $۹m$ متوقف می‌شود. v چند متر بر ثانیه است و در کدام لحظه برحسب ثانیه پس از قطع F سرعت آن به ۵ متر بر ثانیه می‌رسد؟**

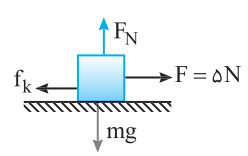


۱) ۰/۵ ، ۶ ۲) ۳ ، ۱۰ ۳) ۱ ، ۴ ۴) ۹ ، $\frac{۸}{۹}$

پاسخ سرعت جسم ثابت است بنابراین برایند نیروهای وارد بر جسم صفر است.

$$F_{net}=۰\Rightarrow F=f_k\Rightarrow f_k=۹N$$

شتاب توقف را به دست می‌آوریم، نیروی موثر اصطکاک جنبشی است.



$$-f_k=ma\Rightarrow -۹=۲a\Rightarrow a=-\frac{۹}{۲}m/s^۲$$

سرعت v را به کمک رابطهٔ مستقل از زمان به دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-v^۲=۲(-\frac{۹}{۲})(۹)\Rightarrow v^۲=۸۱\Rightarrow v=۹m/s$$

بنابراین داریم:

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۵=\frac{-۹}{۲}t+۹\Rightarrow t=\frac{۸}{۹}s$$

گزینهٔ ۴

B ۴ ۹۷۵

روش اول:

خط فکری در حل مسائل دینامیک اولین گام رسم نیروهای وارد بر جسم روی شکل است و سپس به کار بردن قانون دوم نیوتون $F_{net}=ma$.

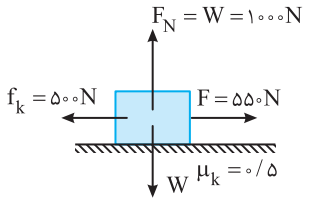
مطابق شکل نیروهای وارد بر جسم شامل نیروی افقی $F=۵۵۰N$ ، نیروی وزن، نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح است، اندازهٔ نیروی عمودی سطح برابر است با:

$$F_N=W=mg\Rightarrow F_N=۱۰۰۰N$$

نیروی اصطکاک جنبشی خواهد شد: $f_k=\mu_k F_N\Rightarrow f_k=۰/۵\times۱۰۰۰=۵۰۰N$

اکنون به سراغ حساب کردن شتاب می‌رویم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow ۵۵۰-۵۰۰=۱۰۰a\Rightarrow a=۰/۵m/s^۲$$



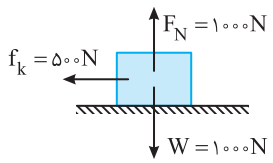
جابه‌جایی و سرعت را تا لحظهٔ پاره شدن طناب حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲\xrightarrow{t=۴s}\Delta x=\frac{۱}{۲}\times۰/۵\times۱۶\Rightarrow\Delta x=۴m$$

$$v_۱=at+v_۰\Rightarrow v_۱=۰/۵\times۴=۲m/s$$

اشتباه نکنید. پس از پاره شدن طناب جعبه نمی‌ایستد بلکه به دلیل آنکه سرعتش $۲m/s$ است بنا به قانون اول نیوتون به حرکت خود ادامه می‌دهد اما تحت تأثیر نیروی اصطکاک متوقف می‌شود. بنابراین باید شتاب توقف در اثر اصطکاک را حساب کنیم.

$$f_{net}=ma\xrightarrow{f_{net}=f_k}-۵۰۰=۱۰۰a\Rightarrow a=-۵m/s^۲$$



اکنون جابه‌جایی از لحظه پاره شدن طناب تا توقف جعبه خواهدشد:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-۴=۲(-۵)\Delta x\Rightarrow\Delta x=۰/۴m$$

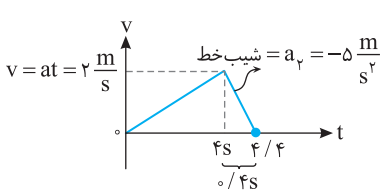
بنابراین کل جابه‌جایی برابر است با: $۴+۰/۴=۴/۴m$

روش دوم: ابتدا با توجه به دینامیک، شتاب حالت اول و حالت دوم را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{(۱)}F-f_k=ma\Rightarrow ۵۵۰-(۱۰۰۰)(۰/۵)=۱۰۰a\\ \Rightarrow a_۱=۰/۵m/s^۲\\ \xrightarrow{(۲)}-f_k=ma\Rightarrow -۵۰۰=۱۰۰a_۲\Rightarrow a_۲=-۵m/s^۲\end{cases}$$

حال نمودار $v-t$ را کشیده و سطح زیر نمودار را که برابر مسافت است، به‌دست می‌آوریم:

$$S=\frac{۴/۴\times۲}{۲}=۴/۴m$$

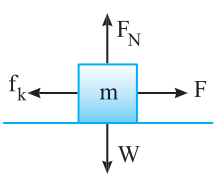


B ۴ ۹۷۶

۱ نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.

۲ بنا به قانون دوم نیوتون:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma_۱\quad (I)$$



۳ با قطع نیروی F تنهای نیروی مؤثر وارد بر جسم نیروی اصطکاک است.

$$F_{net}=ma_۲\Rightarrow -f_k=ma_۲\quad (II)$$

دو رابطهٔ (I) و (II) را بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{F-f_k}{-f_k}=\frac{a_۱}{a_۲}\quad (III)$$

۴ اکنون باید به کمک معادلهٔ مستقل از زمان نسبت $a_۱$ و $a_۲$ را حساب کرده و در رابطهٔ بالا قرار دهیم.

$$\begin{cases}\text{قبل از قطع F}: v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow v^۲=۲a_۱\Delta x\Rightarrow a_۱=\frac{v^۲}{۲\Delta x}\\ \text{بعد از قطع F}: ۰-v^۲=۲a_۲(۴\Delta x)\Rightarrow a_۲=\frac{-v^۲}{۸\Delta x}\end{cases}\Rightarrow\frac{a_۱}{a_۲}=-۴$$

۵ مقدار $\frac{a_۱}{a_۲}$ را در رابطهٔ (III) جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\frac{F-f_k}{-f_k}=-۴\Rightarrow F-f_k=۴f_k\Rightarrow F=۵f_k$$

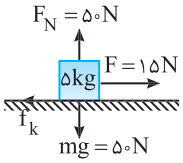
میانبر هر گاه متحرکی با شتاب $a_۱$ از حال سکون شروع به حرکت کرده و جابه‌جایی $\Delta x_۱$ را طی کند و سپس با شتاب $a_۲$ حرکت خود را کُند کرده و پس از جابه‌جایی $\Delta x_۲$ متوقف شود خواهیم داشت:

$$\left|\frac{\Delta x_۲}{\Delta x_۱}\right|=\left|\frac{a_۱}{a_۲}\right|$$

B ۴ ۹۷۷

خط فکری حرکت مکعب چوبی شامل یک قسمت تندشونده قبل از پاره‌شدن نخ و یک قسمت کندشونده بعد از پاره شدن نخ است. در نتیجه شتاب هر قسمت را به‌دست آورده و مسافت‌ها را محاسبه می‌کنیم.

۱ ابتدا برایند نیروها در ۲s اول را حساب کرده و شتاب حرکت در این بازه را به‌دست می‌آوریم:



$$f_k=\mu_k F_N\Rightarrow f_k=۰/۲\times۵۰=۱۰N$$

$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma$$

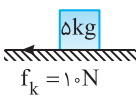
$$\Rightarrow ۱۵-۱۰=۵a\Rightarrow a=۱m/s^۲$$

۲ با استفاده از رابطهٔ سرعت - زمان و جابه‌جایی - زمان، سرعت متحرک در لحظهٔ $t=۲s$ و مسافت طی‌شده در این ۲s را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰\xrightarrow[v_۰=۰]{a=۱,t=۲s}v=۲m/s$$

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow\Delta x=\frac{۱}{۲}\times۱\times۴=۲m$$

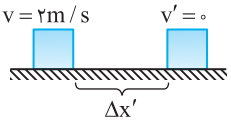
۳ بعد از پاره شدن نخ به جسم تنها نیروی اصطکاک جنبشی وارد می‌شود:



$$F'_{net}=ma'\Rightarrow -۱۰=۵a'\Rightarrow a'=-۲m/s^۲$$

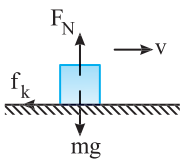
۴ با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان جابه‌جایی در این بازه را حساب می‌کنیم:

$$v'^۲-v^۲=۲a'\Delta x'\Rightarrow ۰-۴=-۴\Delta x'\Rightarrow\Delta x'=۱m$$



۵ جابه‌جایی کل برابر است با: $\Delta x_{کل}=\Delta x+\Delta x'\Rightarrow\Delta x_{کل}=۲+۱=۳m$

میانبر اگر جسمی روی سطحی پرتاب شود و در راستای حرکت تنها نیروی اصطکاک جنبشی به آن وارد شود، خواهیم داشت:



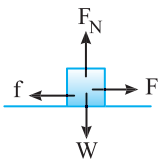
$$F_{net}=ma\Rightarrow -f_k=ma\Rightarrow -\mu_k F_N=ma$$

نیروی عمودی سطح برابر mg است:

$$-\mu_k mg=ma\Rightarrow a=-\mu_k g$$

۹۷۸ | ۳ | B

ابتدا نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه را حساب می‌کنیم تا مشخص شود در چه لحظه‌ای جعبه به حرکت در می‌آید.



$f_{s\max}=\mu_s\times F_N=۰/۶\times ۵۰۰=۳۰۰N$

$F=۱۰۰t\Rightarrow ۳۰۰=۱۰۰t\Rightarrow t=۳s$

بنابراین تا $t=۳s$ جعبه حرکت نمی‌کند و با توجه به صورت سؤال، حرکت مربوط به بازهٔ ۳s تا ۴s است و اصطکاک در این حالت اصطکاک جنبشی است.

$f_k=\mu_k F_N=۰/۴\times ۵۰۰=۲۰۰N$

کمترین مقدار شتاب در لحظهٔ $t=۳s$ است که اگر جعبه با این شتاب حرکت کند جابه‌جایی آن خواهد شد:

$t=۳s\Rightarrow F=۳۰۰N\Rightarrow F_{net}=ma\Rightarrow ۳۰۰-۲۰۰=۵۰a\Rightarrow a_{min}=۲m/s^۲$

$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow \Delta x_{min}=\frac{۱}{۲}(۲)(۱)^۲=۱m$

بیشترین مقدار شتاب در لحظهٔ $t=۴s$ است.

$t=۴s\Rightarrow F=۴۰۰N\Rightarrow ۴۰۰-۲۰۰=۵۰a\Rightarrow a_{max}=۴m/s^۲$

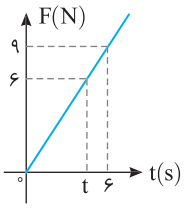
اگر جعبه در کل مدت ۱s با شتاب $۴m/s^۲$ حرکت کند، جابه‌جایی آن خواهد شد.

$\Delta x_{max}=\frac{۱}{۲}(۴)(۱)^۲=۲m$

بنابراین مقدار جابه‌جایی بین $۱m<d<۲m$ است.

۹۷۹ | ۱ | B

نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:



$f_s=\mu_s F_N\Rightarrow f_s=۰/۲\times ۳۰=۶$

تا لحظه‌ای که نیروی افقی F به ۶ نیوتون نرسیده است، جسم ساکن می‌ماند. با توجه به نمودار لحظه‌ای که نیرو به ۶N می‌رسد را به‌دست می‌آوریم. $\frac{۹}{۶}=\frac{۶}{t}\Rightarrow t=۴s$

از لحظه $t=۴s$ (چون ضریب اصطکاک جنبشی و ایستایی یکسان است) نیروی اصطکاک ثابت و برابر ۶ نیوتون است.

۹۸۰ | ۳ | C

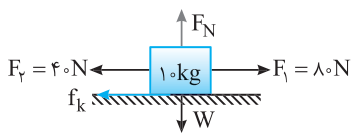
حالت اول:

۱ نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را حساب می‌کنیم و آن را با برایند $F_۱-F_۲$ مقایسه می‌کنیم تا مشخص شود که جسم به حرکت درمی‌آید یا نه؟

$F_N=W\Rightarrow F_N=۱۰\times ۱۰=۱۰۰N$

$f_{s\max}=\mu_s F_N\Rightarrow f_{s\max}=۰/۳\times ۱۰۰=۳۰N$

$F_۱-F_۲=۸۰-۴۰=۴۰N>۳۰N$



بنابراین جسم به‌حرکت درمی‌آید و اصطکاک بین جسم و سطح اصطکاک جنبشی است.

۲ اصطکاک جنبشی را حساب می‌کنیم. $f_k=\mu_k F_N=۰/۲\times ۱۰۰\Rightarrow f_k=۲۰N$

۳ با استفاده از قانون دوم نیوتون شتاب حرکت خواهد شد:

$F_{net}=ma\Rightarrow F_۱-(F_۲+f_k)=ma\Rightarrow ۸۰-(۴۰+۲۰)=۱۰a\Rightarrow a=۲m/s^۲$

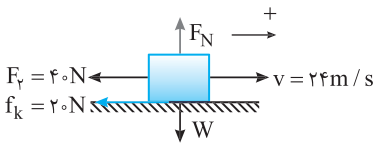
۴ سرعت جسم پس از ۱۲s را به‌دست می‌آوریم.

$v=at+v_۰\Rightarrow v=۲\times ۱۲+۰\Rightarrow v=۲۴m/s$

حالت حذف $F_۱$:

۵ وقتی نیروی $F_۱$ حذف می‌شود جسم بلافاصله متوقف نخواهد شد بلکه نیروی $F_۲$ و f_k باعث کندشدن حرکت جسم خواهد شد. شتاب حرکت را در این حالت به‌دست می‌آوریم.

$F_{net}=ma\Rightarrow -۴۰-۲۰=۱۰a'\Rightarrow a'=-۶m/s^۲$



۶ تندی حرکت جسم بعد از ۵s خواهد شد:

$v=at+v_۰\Rightarrow v'=-۶\times ۵+۲۴=-۶m/s$

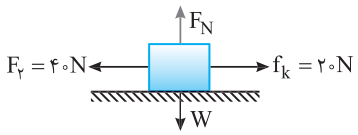
جالب است عدد منفی به‌دست آمد اما مفهوم آن چیست؟ مفهوم آن این است که جسم قبل از ۵s متوقف شده است. چون نیروی $F_۲=۴۰N$ از بیشینه نیروی اصطکاک $f_{s\max}=۳۰N$ بزرگ‌تر است، جسم برمی‌گردد.

حالت برگشت:

۷ زمان توقف جسم را حساب می‌کنیم. $v=at+v_۰\Rightarrow ۰=-۶t+۲۴\Rightarrow t=۴s$

۸ شتاب برگشت جسم را به‌دست می‌آوریم.

$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma''\Rightarrow ۴۰-۲۰=۱۰a''\Rightarrow a''=۲m/s^۲$



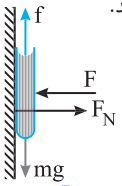
۹ تندی جسم در بازهٔ ۴s تا ۵s یعنی در مدت ۱s خواهد شد:

$v=at+v_۰\Rightarrow v=۲\times ۱=۲m/s$

آخیش بالاخره تموم شد.

۹۸۱ | ۲ | A

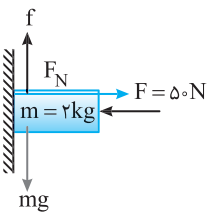
خط فکری جسم ساکن است و تا لحظه‌ای که جسم ساکن است، نیروی اصطکاک بین جسم و سطح نیروی اصطکاک ایستایی است و نیروی اصطکاک ایستایی برابر نیرویی است که در راستای اصطکاک بخواهد جسم را حرکت دهد.



در تمام مدتی که کتاب روی سطح دیوار ساکن است نیروهای وارد بر آن متوازن بوده و نیروی اصطکاک بین کتاب و سطح دیوار نیروی اصطکاک ایستایی است که با نیروی وزن جسم برابر است. $f=mg$

۹۸۲ | ۲ | B

خط فکری مشخص نیست که جسم در حال حرکت است یا سکون؟ بنابراین شما باید ابتدا نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت $(f_{s\max})$ را به‌دست بیاورید و آن را با نیروی وزن جسم $W=۲۰N$ مقایسه کنید. اگر جسم ساکن بماند نیروی اصطکاک برابر نیروی وزن جسم است و اگر به حرکت درآید باید نیروی اصطکاک جنبشی را حساب کنید. در راستای افقی: $F-F_N=۰\Rightarrow F=F_N=۵۰N$



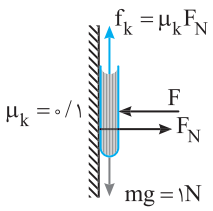
نیروی عمود سطح را حساب می‌کنیم.

نیروی اصطکاک آستانه حرکت را به‌دست می‌آوریم: $f_{s\max}=\mu_s F_N=۰/۵\times ۵۰=۲۵N$

عامل حرکت به سمت پایین جسم نیروی وزن $mg=۲۰N$ است که از $f_{s\max}$ کمتر می‌باشد

پس جسم در جای خود ساکن باقی می‌ماند و با توجه به متوازن بودن نیروها نیروی اصطکاک برابر وزن جسم است: $f_s=mg=۲۰N$

۹۸۳ | ۱ | C



نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.

جسم در راستای افقی حرکت نمی‌کند و نیروی عمودی سطح خواهد شد: $F_N=F=۴N$

نیروی اصطکاک جنبشی را حساب می‌کنیم.

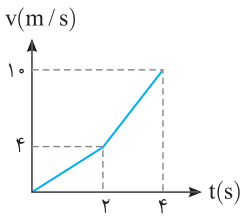
$f_k=\mu_k F_N=۰/۱\times ۴=۰/۴N$

شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$F_{\text{خالص}}=ma\Rightarrow mg-f_k=ma\Rightarrow ۱-۰/۴=۰/۱a\Rightarrow a=۶m/s^۲$

C ۹۸۴ ۴

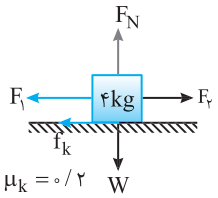
به نمودار دقت کنید. در لحظهٔ $t=۲s$ نیروی $F_۱$ حذف شده و با حذف $F_۱$، شیب نمودار $v-t$ افزایش یافته یعنی شتاب افزایش یافته است. چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟ نیروهای $F_۱$ و $F_۲$ هم‌امتداد هستند. و باید $F_۱$ در خلاف جهت $F_۲$ باشد، که با حذف $F_۱$ نیروی خالص زیاد شده و شتاب حرکت افزایش یافته است.



نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک در دو حالت یکسان و برابر است با:

$$F_N=W\Rightarrow F_N=۴\times۱۰\Rightarrow F_N=۴۰N$$

$$f_k=\mu_k F_N\Rightarrow f_k=۰/۲\times۴۰\Rightarrow f_k=۸N$$



حالت اول از لحظهٔ ۰ تا ۲s:

شتاب را حساب می‌کنیم.

$$a_۱=\frac{۴-۰}{۲-۰}\Rightarrow a=۲m/s^۲$$

قانون دوم نیوتون را در این حالت می‌نویسیم:

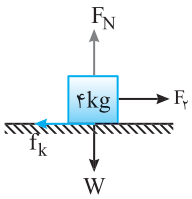
$$F_{net}=ma\Rightarrow F_۲-F_۱-f_k=ma_۱\Rightarrow F_۲-F_۱-۸=۴\times۲$$

$$\Rightarrow F_۲-F_۱=۱۶N\quad (I)$$

حالت دوم از لحظهٔ ۲s تا ۴s:

شتاب در حالت دوم را به‌دست می‌آوریم:

$$a_۲=\frac{۱۰-۴}{۴-۲}\Rightarrow a_۲=۳m/s^۲$$



بنا به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F_۲-f_k=ma_۲$$

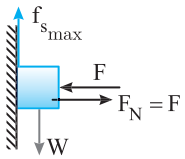
$$\Rightarrow F_۲-۸=۴\times۳\Rightarrow F_۲=۲۰N$$

با توجه به رابطهٔ (I) خواهیم داشت:

$$F_۲-F_۱=۱۶\Rightarrow ۲۰-F_۱=۱۶\Rightarrow F_۱=۴N$$

B ۹۸۵ ۱

خط فکری شکل سادهٔ مسئله به همراه نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم جسم به سمت پایین نلغزد. بنابراین نیروهای وارد بر جسم باید متوازن باشد و نیروی اصطکاک بین جسم و سطح دیوار باید با وزن جسم برابر باشد $(f_s=W)$ اما یک مطلب مهم این است که می‌خواهیم نیروی افقی F کمترین مقدار باشد، یعنی اگر F از آن کمتر شد جسم به پایین بلغزد بنابراین کمترین مقدار F وقتی است که جسم در آستانهٔ لغزیدن به سمت پایین باشد و در این حالت نیروی اصطکاک برابر $f_{s_{max}}$ است. با برابر قرار دادن وزن با نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت مسئله را حل می‌کنیم.



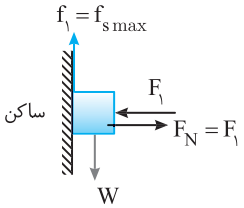
$$W=f_{s_{max}}\Rightarrow W=\mu_s F_N$$

$$\Rightarrow W=\mu_s F\Rightarrow F=\frac{W}{\mu_s}$$

B ۹۸۶ ۳

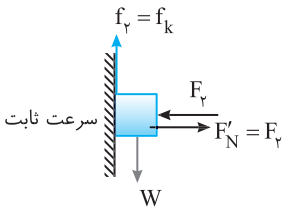
خط فکری مسئلهٔ زیبایی است. زیرا وقتی که جسم در آستانهٔ حرکت قرار دارد و همچنین وقتی که با سرعت ثابت در حرکت است نیروهای وارد بر آن متوازن هستند یعنی در هر دو حالت نیروی اصطکاک با نیروی وزن برابر است. البته یک‌بار با نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت $(W=f_{s_{max}})$ و بار دیگر نیروی اصطکاک جنبشی $(W=f_k)$ یعنی اصطکاک در حالت اول $(f_۱)$ با اصطکاک در حالت دوم یعنی $(f_۲)$ برابر است. $F_۱$ و $F_۲$ را شما باید تعیین کنید.

حالت اول:



$$W=f_۱=f_{s_{max}}$$

حالت دوم:



$$W=f_۲=f_k$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$f_۱=f_۲\Rightarrow f_{s_{max}}=f_k\Rightarrow \mu_s F_۱=\mu_k F_۲$$

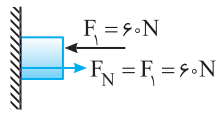
$$\Rightarrow\frac{F_۱}{F_۲}=\frac{\mu_k}{\mu_s}\xrightarrow{\mu_s>\mu_k}\frac{F_۱}{F_۲}<۱\Rightarrow F_۱<F_۲$$

C ۹۸۷ ۱

خط فکری در حل این مسائل گام اول یافتن نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت $(f_{s_{max}})$ است. بعد از یافتن $f_{s_{max}}$ آن را با نیروهایی که در امتداد اصطکاک هستند مقایسه می‌کنیم تا بتوانیم تشخیص دهیم جسم به حرکت در می‌آید یا نه. اگر جسم ساکن بماند، اصطکاک برابر برایند نیروهایی است که در امتداد اصطکاک هستند.

۱ نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت جسم را به‌دست می‌آوریم.

$$f_{s_{max}}=\mu_s F_N\Rightarrow f_{s_{max}}=۰/۵\times۶۰=۳۰N$$



۲ نیروی وزن جسم را حساب می‌کنیم: $W=mg=۷\times۱۰=۷۰N$

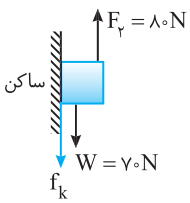
نیروی $F_۲=۸۰N$ رو به بالا وارد می‌شود. برایند $F_۲$ و W برابر است با:

$$۸۰-۷۰=۱۰N$$

۳ جسم باید با نیروی $۱۰N$ به بالا برود اما نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت $f_{s_{max}}=۳۰N$ است و نیروی $۱۰N$ نمی‌تواند بر آن غلبه کند و جسم ساکن می‌ماند.

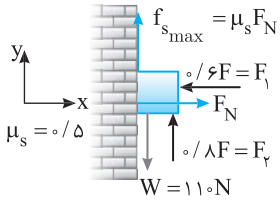
۴ جسم ساکن است بنابراین اصطکاک رو به پایین بوده و با نیروی $۱۰N$ برابر است.

$$F_{y_{net}}=۰\Rightarrow F_۲-W-f_s=۰\Rightarrow ۸۰-۷۰=f_s\Rightarrow f_s=۱۰N$$



B ۹۸۸ ۴

خط فکری وقتی کمینه مقدار F را می‌خواهیم یعنی $۰/۸F$ نیز حداقل باشد، یعنی نیرو به سمت بالا آنقدر کم باشد تا جسم روی دیوار در آستانه لغزیدن به سمت پایین باشد. جسم در آستانهٔ لغزیدن به پایین است بنابراین اصطکاک بین جسم و سطح رو به بالا بوده و برابر $f_{s_{max}}$ است.



۱ شکل ساده‌ای از مسئله را رسم می‌کنیم و نیروهای وارد بر جسم را روی آن نمایش می‌دهیم.

۲ نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم:

$$F_{net_x}=۰\Rightarrow F_N=F_۱\Rightarrow F_N=۰/۶F$$

۳ بیشینهٔ نیروی اصطکاک را به‌دست می‌آوریم.

$$f_{s_{max}}=\mu_s F_N\Rightarrow f_{s_{max}}=۰/۵(۰/۶F)\Rightarrow f_{s_{max}}=۰/۳F$$

۴ بر جسم در امتداد قائم سه نیروی وزن، رو به پایین و $F_۲$ و $f_{s_{max}}$ رو به بالا وارد می‌شود. جسم ساکن است بنابراین:

$$F_{net_y}=۰\Rightarrow F_۲+f_{s_{max}}=W\Rightarrow ۰/۸F+۰/۳F=۱۱۰\Rightarrow F=۱۰۰N$$

۳ ۹۸۹ B

خط فکری وقتی در مسئله بیان می‌کند که بیشترین نیروی F چه مقدار باشد تا جسم ساکن باشد یعنی اگر نیروی F کمی بیشتر شود جسم به حرکت در آید. نیروی F رو به بالا است در این صورت بیشترین مقدار F برای حالتی است که جسم رو به بالا در آستانهٔ حرکت قرار گیرد. در این حالت نیروی اصطکاک رو به پایین بوده و به کمک وزن می‌آید تا F نتواند جسم را به بالا حرکت دهد.

۱ نیروهای وارد بر جسم را به‌طور کامل رسم می‌کنیم.

۲ نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم:

$$F_{net_x}=0\Rightarrow F_N=F_2\Rightarrow F_N=\frac{3}{4}F$$

۳ نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$f_{s_{max}}=\mu_s F_N\Rightarrow f_{s_{max}}=0/2\times\frac{3}{4}F\Rightarrow f_{s_{max}}=\frac{3}{20}F$$

۴ نیروهای در امتداد قائم را بررسی می‌کنیم. نیروی وزن و نیروی اصطکاک رو به پایین و $F_1=F$ رو به بالا. جسم ساکن است بنابراین باید برایند این سه نیرو صفر شود.

$$F_{net_y}=0\Rightarrow F_1-f_{s_{max}}-W=0\Rightarrow F=\frac{3}{20}F+20$$

$$\Rightarrow\frac{17}{20}F=20\Rightarrow F=\frac{400}{17}N$$

۳ ۹۹۰ B

خط فکری کمینه اندازهٔ نیروی افقی F یعنی اگر این نیروی افقی از F کمتر شود جسم رو به پایین شروع به لغزیدن می‌کند. بنابراین کمینه نیروی F زمانی است که وزنه‌ها در آستانهٔ حرکت رو به پایین باشند، در این حالت نیروی اصطکاک $f_{s_{max}}$ رو به بالا نیروی وزن وزنه‌ها را خنثی کرده، جسم ساکن می‌ماند. بنابراین شما باید $f_{s_{max}}$ را حساب کرده آن را برابر نیروی وزن قرار دهید.

۱ نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم؛ در راستای افقی جسم ساکن می‌ماند، پس: $F_N=F$

۲ جسم ساکن بوده و نیروی خالص وارد بر آن صفر است از این‌رو:

$$\text{در راستای قائم جسم ساکن می‌ماند}\Rightarrow f_{s_{max}}=(m_1+m_2)g$$

$$\Rightarrow\mu_s F_N=(m_1+m_2)g\Rightarrow 0/4F=50\Rightarrow F=\frac{500}{4}=125N$$

$$(m_1+m_2)g=(2+3)\times10=50N$$

۴ ۹۹۱ C

۱ در حالت اول جسم با تندی ثابت در حال حرکت است. پس نیروهای وارد بر آن متوازن است.

$$(m_A+m_B)g=f_k\Rightarrow f_k=\frac{3m}{2}g\Rightarrow f_k=\frac{3mg}{2}$$

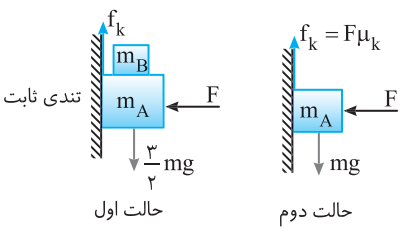
۲ اگر جسم m_B را برداریم نیروی وزن که عامل حرکت به سمت پایین است برابر $m_Ag=mg$ می‌شود. در حالی که نیروی اصطکاک جنبشی همچنان $f_k=\frac{3}{2}mg$ است.

۳ نیروی رو به پایین mg پس از حذف m_B، $f_k=\frac{3}{2}mg$ رو به بالا خواهد و بنابر قانون دوم نیوتون شتاب خواهد شد:

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-\frac{3}{2}mg=ma\Rightarrow a=-5m/s^2$$

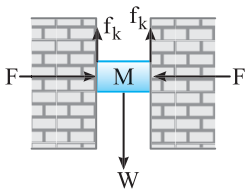
۴ پس با شتاب $5\,m/s^2$ از تندی جسم کاسته می‌شود:

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=-5t+4\Rightarrow t=0/8s$$



۱ ۹۹۲ B

خط فکری جسم M وقتی به پایین می‌لغزد با سطح دو دیواره اصطکاک دارد و از هر دیواره بر جسم نیروی اصطکاک جنبشی رو به بالا وارد می‌شود و می‌خواهد مانع لغزیدن جسم به پایین شود.



۱ نیروهای وارد بر جسم را کامل می‌کنیم.

۲ نیروی عمودی وارد بر هر سطح جسم برابر $F_N=F=20N$ است.

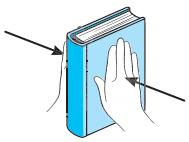
۳ بر جسم نیروی وزن رو به پایین و دو نیروی اصطکاک رو به بالا وارد می‌شود و بنا به قانون دوم نیوتون می‌توانیم بنویسیم:

$$F_{net}=Ma\Rightarrow Mg-2f_k=Ma\xrightarrow{M=3kg}30-2f_k=3\times2\Rightarrow f_k=12N$$

۴ ضریب اصطکاک را حساب می‌کنیم.

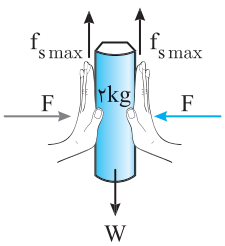
$$f_k=\mu_k F_N\xrightarrow{F_N=F}12=\mu_k\times20\Rightarrow\mu_k=0/6$$

بازی با سوال **مطابق شکل، دانش‌آموزی کتابی به جرم 2kg را بین دو دست خود، قرار داده است. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین کف هر دست او و کتاب ۰/۴ باشد، حداقل نیروی افقی که کف هر دست به کتاب وارد می‌کند، چند نیوتون باشد تا کتاب در حال تعادل قرار گیرد؟** $(g=9/8N/kg)$



۱) ۱۵/۶ ۲) ۱۲/۷۵ ۳) ۲۴/۵ ۴) ۱۷/۵

پاسخ **۱ کتاب ساکن است و نیروی خالص وارد بر کتاب صفر است. بنابراین دو نیروی افقی F که از دو طرف بر کتاب وارد می‌شوند باید باهم برابر باشند.**



۲ حداقل نیروی افقی یعنی اگر نیروی دستان شخص کمتر شود کتاب رو به پایین شروع به لغزیدن کند. یعنی کتاب در آستانهٔ حرکت باشد و اصطکاک بین هر دست و کتاب $f_{s_{max}}$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

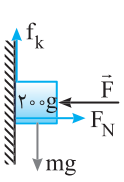
$$W=2f_{s_{max}}\xrightarrow[m=2kg,\mu_s=0/4]{f_{s_{max}}=\mu_s F,\ g=9/8N/kg}2\times9/8=2\times0/4F$$

$$\Rightarrow F=\frac{98}{4}\Rightarrow F=24/5N$$

گزینهٔ ۳

۳ ۹۹۳ C

نکته اگر نیروی عمودی سطح دو برابر شود، نیروی اصطکاک جنبشی دو برابر می‌شود.



۱ در حالت اول جسم با تندی ثابت در حال حرکت است پس نیروهای وارد بر جسم متوازن است. $f_k=W=0/2\times10=2N$

۲ نیروی F، ۱/۵ برابر شده، پس نیروی عمودی سطح هم ۱/۵ برابر می‌شود و نیروی اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح نیز ۱/۵ برابر می‌شود.

$$f'_k=1/5f_k\Rightarrow f'_k=1/5mg\Rightarrow f'_k=1/5\times2=3N$$

۳ در این حالت نیروی وزن رو به پایین ۲N و اصطکاک بین جسم و دیوار $f'_k=3N$ است که سبب می‌گردد حرکت جسم کندشونده شود. شتاب حرکت را به کمک قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آوریم.

$$f_{net_y}=ma\Rightarrow mg-f'_k=ma\Rightarrow 2-3=0/2a\Rightarrow a=-5m/s^2$$

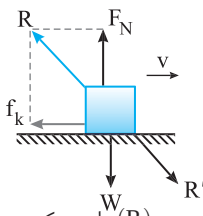
۴ در مسئله زمان داده شده است یعنی باید به سراغ روابط حرکت‌شناسی برویم به کمک معادلهٔ مکان زمان حرکت با شتاب ثابت جابه‌جایی را حساب می‌کنیم، البته چون حرکت در امتداد قائم است به جای Δx، Δy می‌نویسیم:

$$\Delta y=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow[t=3s]{v_0=30m/s}\Delta y=\frac{1}{2}(-5)\times(3)^2+30\times3$$

$$\Delta y=-22/5+90\Rightarrow\Delta y=67/5m$$

B ۹۹۴ ۱

۱ وقتی به جسم ضربه می‌زنیم تا به حرکت در آید نیروی جلوبر صفر خواهد بود و جسم بنا به قانون اول نیوتون به حرکتش ادامه می‌دهد اما اصطکاک (f_k) سبب می‌گردد که جسم متوقف شود.



۲ نیرویی که جسم به سطح (R') وارد می‌کند بنا به قانون سوم واکنش نیرویی است که سطح بر جسم (R) وارد می‌کند.

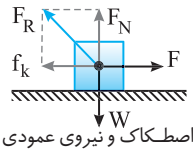
۳ نیروی R در واقع حاصل برایند F_N و f_k است بنابراین مطابق شکل جهت R' رو به پایین و به سمت راست است.

۴ در طول مسیر R تغییر نمی‌کند البته وقتی جسم متوقف می‌شود f_k وجود ندارد و R به صورت قائم و برابر F_N است. در سؤال در مورد R در طول حرکت سؤال شده است.

A ۹۹۵ ۳

یادآوری نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند دارای دو مؤلفه است، یک مؤلفه نیروی اصطکاک است که سطح بر جسم وارد می‌کند و دیگری نیروی عمودی سطح است. بنابراین نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند خواهد شد: $F_R=\sqrt{F_N^2+f^2}$

اگر جسم ساکن باشد $f=f_s$ و اگر در حال حرکت باشد $f=f_k$ است.



شکل ساده‌ای از مسئله رسم می‌کنیم و نیروهای وارد بر جسم را نمایش می‌دهیم.

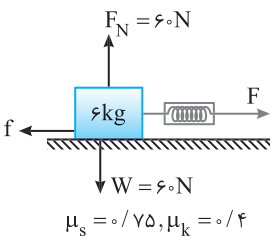
۱ سرعت ثابت است. بنابراین برایند نیروهای وارد بر جسم صفر است. از این‌رو نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح خواهد شد: $F_{net,x}=0\Rightarrow f_k=F=60N$, $F_{net,y}=0\Rightarrow F_N=W=80N$

۲ نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند را حساب می‌کنیم:

$$F_R=\sqrt{F^2+W^2}=\sqrt{60^2+80^2}=\sqrt{100^2}=100N$$

B ۹۹۶ ۱

۱ ابتدا نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم تا مشخص شود که جسم به حرکت درمی‌آید یا نه؟



$$f_{s\max}=\mu_sF_N\Rightarrow f_{s\max}=\mu_smg$$

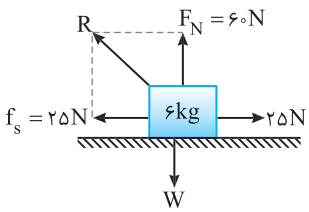
$$\Rightarrow f_{s\max}=0/75\times60\Rightarrow f_{s\max}=45N$$

۲ نیروی کشسانی نیروسنج 25N بوده و از $f_{s\max}$ کمتر است بنابراین جسم ساکن می‌ماند و نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر جسم خواهد شد:

$$F_{net}=0\Rightarrow f_s=F_e\Rightarrow f_s=25N$$

$\mu_s=0/75, \mu_k=0/4$

۳ بنا به قانون سوم نیوتون نیرویی که جسم بر سطح وارد می‌کند هم‌اندازهٔ نیرویی است که سطح بر جسم وارد می‌کند.

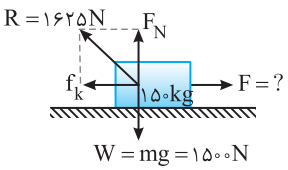


$$R=\sqrt{f_s^2+F_N^2}$$

$$\Rightarrow R=\sqrt{25^2+60^2}\Rightarrow R=65N$$

C ۹۹۷ ۴

یادآوری نیرویی که سطح زمین به جسم وارد می‌کند (R) برایند نیروی اصطکاک (f_k) و نیروی عمودی سطح است $(R=\sqrt{f_k^2+F_N^2})$.



۱ جسم در راستای قائم حرکتی ندارد بنابراین $F_N=W\Rightarrow F_N=1500N$

۲ نیروی اصطکاک جنبشی را به کمک نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند حساب می‌کنیم.

$$1625=\sqrt{f_k^2+(1500)^2}\Rightarrow(1625)^2=f_k^2+(1500)^2$$

$$\Rightarrow f_k^2=(1625)^2-(1500)^2\Rightarrow f_k^2=(1625-1500)(1625+1500)$$

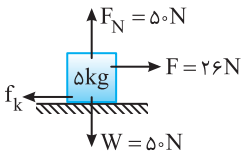
$$f_k^2=125(3125)\Rightarrow f_k^2=125\times(125\times25)\Rightarrow f_k=125\times5=625N$$

۳ با توجه به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\xrightarrow{a=2m/s^2}F-625=150\times2\Rightarrow F=925N$$

B ۹۹۸ ۳

نیروی اصطکاک ایستایی را به دست می‌آوریم تا مشخص شود جسم به حرکت درمی‌آید یا نه؟ البته در صورت مسئله بیان شده «در حین حرکت» یعنی جسم به حرکت درمی‌آید.

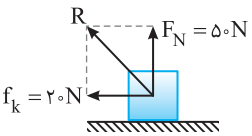


$$f_{s\max}=\mu_sF_N=0/5\times50=25N<26N$$

جسم به حرکت درمی‌آید.

$$f_k=\mu_kF_N=0/4\times50\Rightarrow f_k=20N$$

قانون دوم نیوتون را نوشته و شتاب را حساب می‌کنیم.



$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma$$

$$\Rightarrow 26-20=5a\Rightarrow a=1/2\frac{m}{s^2}$$

نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند خواهد شد:

$$R=\sqrt{F_N^2+f_k^2}\Rightarrow R=\sqrt{2500+400}\Rightarrow R=\sqrt{2900}=10\sqrt{29}N$$

B ۹۹۹ ۱

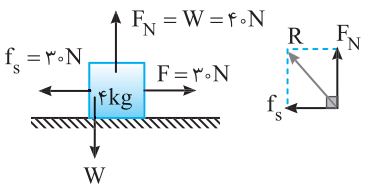
ابتدا بررسی می‌کنیم که جسم با نیرویی که به آن وارد می‌شود، ساکن می‌ماند یا حرکت می‌کند.

$$f_{s\max}=\mu_sF_N=\mu_smg=0/8\times4\times10=32N$$

چون $F<f_{s\max}$ است، جسم ساکن می‌ماند. در نتیجه نیروی اصطکاک وارد بر جسم با نیروی افقی F برابر است:

$$f_s=F=30N$$

$$R=\sqrt{f_s^2+F_N^2}=\sqrt{30^2+40^2}\Rightarrow R=50N$$

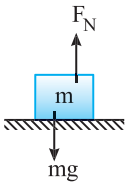


B ۱۰۰۰ ۴

خط فکری جسم در ابتدا ساکن بوده و باید بررسی کنیم توسط نیروی $F=250N$ جسم حرکت کرده یا ساکن می‌ماند. برای این منظور باید F و $f_{s_{max}}$ را با هم مقایسه می‌کنیم.

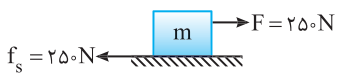
اگر نیروی F بزرگ‌تر از $f_{s_{max}}$ باشد، متحرک حرکت کرده و نیروی اصطکاک برابر $f_k=\mu_kF_N$ می‌شود و اگر نیروی F کوچک‌تر از $f_{s_{max}}$ باشد متحرک ساکن مانده و نیروی اصطکاک برابر نیروی F است.

۱ در گام اول $f_{s_{max}}$ را حساب می‌کنیم:



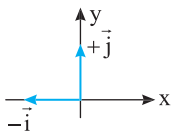
$$F_N = mg \Rightarrow F_N = ۵۰۰N$$
$$f_{s_{max}} = \mu_s F_N \Rightarrow f_{s_{max}} = ۰/۶ \times ۵۰۰ = ۳۰۰N$$

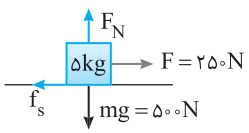
۲ $f_{s_{max}}$ بزرگ‌تر از F بوده پس متحرک ساکن باقی مانده و نیروی اصطکاک برابر نیروی F، ۲۵۰N است.



۳ نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک، نیرویی است که سطح به جسم وارد می‌کند:

$$\vec{R} = -f_s\vec{i} + F_N\vec{j} \Rightarrow \vec{R} = -۲۵۰\vec{i} + ۵۰۰\vec{j}$$





۴ نیرویی که جسم به سطح وارد می‌کند واکنش نیرویی است که سطح به جسم وارد کرده بنابراین:

$$\vec{R}' = ۲۵۰\vec{i} - ۵۰۰\vec{j}$$

B ۱۰۰۱ ۴

خط فکری در حل مسائل دینامیک اولین کار، پیدا کردن نیروهایی است که به جسم وارد می‌شود، سپس رسم این نیروهاست. در این مسئله مشخص نیست که جسم پس از اعمال نیروی ۱۰N در حال حرکت خواهد بود یا همچنان ساکن می‌ماند. بنابراین شما باید نیروها را بررسی کنید و نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را حساب کنید تا مشخص شود که جسم با نیروی ۱۰N شروع به حرکت می‌کند یا نه؟

۱ نیروی وزن جسم $W = mg = ۲۰N$ است و نیروی $F' = ۱۰N$ نیز رو به پایین به جسم وارد می‌شود، بنابراین جسم تحت تأثیر نیروی $۱۰ + ۲۰ = ۳۰N$ روبه پایین قرار دارد.

۲ نیروی افقی $F = ۶۰N$ به جسم وارد می‌شود و نیروی عمودی سطح دیوار وارد بر جسم نیز برابر $F_N = F = ۶۰N$ است.

۳ نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت جسم را حساب می‌کنیم.

$$f_{s\,max} = \mu_s F_N \xrightarrow{\mu_s = ۰/۶} f_{s\,max} = ۰/۶ \times ۶۰ \Rightarrow f_{s\,max} = ۳۶N > ۳۰N$$

۴ نیروی ۳۰N نمی‌تواند سبب حرکت جسم رو به پایین شود و جسم همچنان ساکن می‌ماند.

۵ نیروی خالص وارد بر جسم برابر صفر است. از این‌رو می‌توان نوشت:

$$F_{net} = ۰ \Rightarrow f_s = F' + W \Rightarrow f_s = ۱۰ + ۲۰ \Rightarrow f_s = ۳۰N$$

یادآوری نیرویی که جسم بر سطح یا سطح بر جسم وارد می‌کند برابر $R = \sqrt{f_s^۲ + F_N^۲}$ است.

۶ نیروی که جسم به دیواره وارد می‌کند، خواهد شد: $R = \sqrt{۳۰^۲ + ۶۰^۲} \Rightarrow R = ۳۰\sqrt{۵}N$

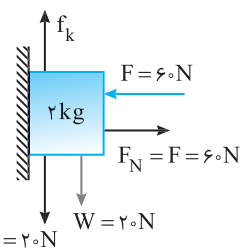
بازی با سؤال **در این مسئله اگر نیروی $F' = ۲۰N$ روبه پایین بر جسم وارد شود، نیرویی که جسم به دیواره وارد می‌کند چند نیوتون است؟** $(\mu_k = ۰/۴)$

۱) $۱۲\sqrt{۲۹}$ ۲) $۵\sqrt{۲۹}$ ۳) ۱۰ ۴) $۱۵\sqrt{۳}$

پاسخ ۱ بیشینه اصطکاک ایستایی برابر است با:

$$f_{s\,max} = \mu_s F_N = ۰/۶ \times ۶۰ = ۳۶N$$

۲ **جمع نیروهای رو به پایین را حساب می‌کنیم.** $F' + W = ۲۰ + ۲۰ = ۴۰N > ۳۶$



۳ **نیروی ۴۰N رو به پایین از اصطکاک آستانهٔ حرکت بیشتر است و جسم شروع به حرکت می‌کند. در این حالت نیروی اصطکاک بین جسم و دیواره برابر f_k است. نیروی اصطکاک جنبشی را به‌دست می‌آوریم.**

$$f_k = \mu_k F_N \xrightarrow{\mu_k = ۰/۴} f_k = ۰/۴ \times ۶۰ \Rightarrow f_k = ۲۴N$$

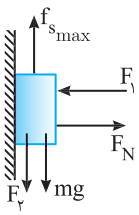
۴ **نیرویی که جسم بر سطح وارد می‌کند خواهد شد:**

$$R = \sqrt{f_k^۲ + F_N^۲} \Rightarrow R = \sqrt{۲۴^۲ + ۶۰^۲} = \sqrt{۱۲^۲(۲^۲ + ۵^۲)}$$
$$\Rightarrow R = ۱۲\sqrt{۲۹}N$$

گزینهٔ ۱

B ۱۰۰۲ ۱

۱ ابتدا نیروهای وارد بر قطعه چوب را رسم می‌کنیم، دقت کنید قطعه چوب در آستانهٔ لغزش رو به پایین قرار دارد و در نتیجه نیروی اصطکاک بیشینه $(f_{s_{max}})$ و رو به بالا است:



۲ نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را حساب می‌کنیم.

$$F_{nety} = ۰ \Rightarrow f_{s_{max}} = F_۲ + mg \xrightarrow[F_۲ = ۳/۵N, m = ۰/۲۵kg]{f_{s_{max}}} f_{s_{max}} = ۳/۵ + ۲/۵ = ۶N$$

۳ نیرویی که دیوار به چوب وارد می‌کند از رابطهٔ $R = \sqrt{f_{s_{max}}^۲ + F_N^۲}$ به‌دست می‌آید، نیروی عمودی سطح خواهد شد.

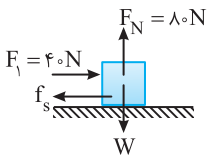
$$R = \sqrt{f_{s_{max}}^۲ + F_N^۲} \Rightarrow ۱۰ = \sqrt{۶^۲ + F_N^۲} \Rightarrow ۱۰۰ = ۳۶ + F_N^۲ \Rightarrow F_N = ۸N$$

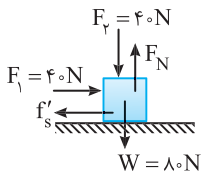
۴ $f_{s_{max}}$ برابر $\mu_s F_N$ است:

$$f_{s_{max}} = \mu_s F_N \Rightarrow ۶ = \mu_s \times ۸ \Rightarrow \mu_s = \frac{۶}{۸} = ۰/۷۵$$

B ۱۰۰۳ ۲

در حالت اول، جسم ساکن است و نیروی اصطکاک ایستایی با نیروی افقی $F_۱ = ۴۰N$ برابر است. $f_s = F_۱ = ۴۰N$ وقتی نیروی عمودی $F_۲ = ۴۰N$ به سمت پایین بر جسم وارد می‌شود، اصطکاک همچنان با نیروی $F_۱ = ۴۰N$ برابر است.





جسم ساکن: $F_۱ = f'_s = ۴۰N$

$$\frac{f'_s}{f_s} = \frac{۴۰}{۴۰} = ۱$$

نیروی عمودی سطح در حالت اول $F_N = W = ۸۰N$

و در حالت دوم:

$$F'_N = W + F_۲ \Rightarrow F'_N = ۱۲۰N$$

نیرویی که سطح افقی بر جسم وارد می‌کند:

$$R = \sqrt{F_N^۲ + f_s^۲} \Rightarrow \begin{cases} R_۱ = \sqrt{۴۰^۲ + ۸۰^۲} = ۴۰\sqrt{۱^۲ + ۲^۲}N = ۴۰\sqrt{۵}N \\ R_۲ = \sqrt{۴۰^۲ + (۱۲۰)^۲} = ۴۰\sqrt{۱ + ۳^۲}N = ۴۰\sqrt{۱۰}N \end{cases}$$

بنابراین نسبت $\frac{R_۲}{R_۱}$ خواهد شد:

$$\frac{R_۲}{R_۱} = \frac{۴۰\sqrt{۱۰}}{۴۰\sqrt{۵}} \Rightarrow \frac{R_۲}{R_۱} = \sqrt{۲}$$

B ۱۰۰۴ ۲

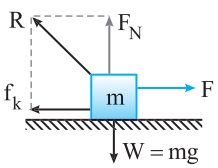
خط فکری هر گاه در مسائل دینامیک، در صورت مسئله، زمان داده شود یعنی شما باید سراغ حرکت‌شناسی بروید زیرا در روابط حرکت‌شناسی، زمان وجود دارد. یعنی به کمک حرکت‌شناسی، شتاب را حساب کنید سپس به کمک قانون دوم نیوتون (البته پس از رسم نیروهای وارد بر جسم) مجهول مسئله را به‌دست بیاورید.

۱ شتاب حرکت جسم را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{۳-۰}{۴}\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}\,m/s^۲$$

۲ به کمک قانون دوم نیوتون نیروی اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح را به‌دست می‌آوریم:

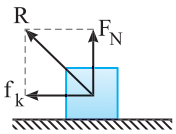
$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow ۱۷۷-f_k=۳۶\times\frac{۳}{۴}\Rightarrow f_k=۱۵۰N$$



۳ جسم روی سطح افقی در حال حرکت است پس باید نیروهای قائم متوازن باشند:

$$F_N=W\Rightarrow F_N=mg\Rightarrow F_N=۳۶۰N$$

نکته نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک از طرف سطح به جسم وارد می‌شود بنابراین نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند برابر برایند دو نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح است که برهم عمودند:



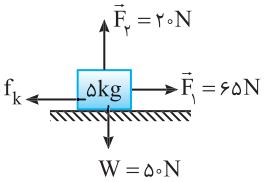
$$R=\sqrt{F_N^۲+f_k^۲}$$

۴ نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند، برایند نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک است:

$$R=\sqrt{F_N^۲+f_k^۲}=\sqrt{۳۶۰^۲+۱۵۰^۲}\Rightarrow R=\sqrt{۳۰^۲(۱۲^۲+۵^۲)}$$
$$\Rightarrow R=۳۰\sqrt{۱۶۹}\Rightarrow R=۳۰\times۱۳\Rightarrow R=۳۹۰N$$

۴ ۱۰۰۵ B

۱ شتاب حرکت جسم را به کمک رابطهٔ مستقل از زمان به‌دست می‌آوریم.



$$v^۲-v_0^۲=۲a\Delta x\xrightarrow[\Delta x=۱۲m]{v_0=۰,v=۱۲m/s}$$
$$۱۲\times۱۲-۰=۲a\times۱۲\Rightarrow a=۶m/s^۲$$

۲ نیروی اصطکاک را به کمک قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F_۱-f_k=ma\Rightarrow ۶۵-f_k=۵\times۶\Rightarrow f_k=۳۵N$$

۳ نیروی عمودی سطح برابر است با:

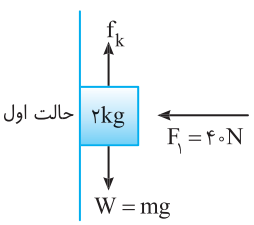
$$F_N=W+F_۲\Rightarrow F_N=۵۰+۲۰=۷۰N$$

۴ نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند را حساب می‌کنیم.

$$R=\sqrt{f_k^۲+F_N^۲}\Rightarrow R=\sqrt{۳۵^۲+۷۰^۲}\Rightarrow R=۳۵\sqrt{۱+۲^۲}\Rightarrow R=۳۵\sqrt{۵}N$$

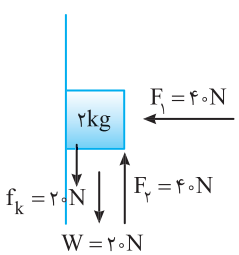
۱ ۱۰۰۶ C

خط فکری ابتدا بدون حضور $F_۲$ (چون جسم ساکن است) باید اصطکاک ایستایی جسم را بررسی کنیم سپس باید با اعمال نیروی $F_۲$ مشخص کنیم که $F_۲$ می‌تواند جسم را به بالا حرکت دهد یا نه.



نیروی وزن $(W=mg=۲۰N)$ می‌خواهد جسم را به پایین بیاورد اما جسم ساکن است بنابراین نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر جسم رو به بالاست و هم‌اندازهٔ نیروی وزن است.

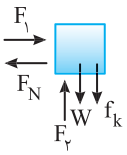
$$F_{net}=۰\Rightarrow f_s=mg\Rightarrow f_s=۲۰N$$



وقتی $F_۲=۴۰N$ بر جسم وارد می‌شود چون این نیرو از وزن بیشتر است و می‌خواهد جسم را رو به بالا حرکت دهد بنابراین در این حالت به جسم نیروی خالص به اندازهٔ $F_۲-W=۲۰N$ رو به بالا وارد می‌شود که با توجه به حالت قبل نیروی ۲۰N نمی‌تواند جسم را حرکت دهد، پس جهت اصطکاک عوض شده و نیروی اصطکاک ۲۰N رو به پایین به کمک وزن می‌آید و جسم همچنان ساکن خواهد بود.

۳ ۱۰۰۷ B

جسم به حرکت در می‌آید و نیروی اصطکاک جنبشی است.



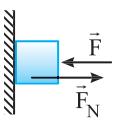
$$f_k=\mu_kF_N=۰/۴\times۴۰\Rightarrow f_k=۱۶N$$

نیرویی که جسم به دیوار وارد می‌کند.

$$R'=\sqrt{F_N^۲+f_k^۲}\Rightarrow R'=\sqrt{(۴۰)^۲+(۱۶)^۲}\Rightarrow R'=۸\sqrt{۲۵+۴}$$
$$\Rightarrow R'=۸\sqrt{۲۹}N$$

۳ ۱۰۰۸ B

به شکل دقت کنید. جسم ساکن است و نیروهای F و F_N متوازن هستند.



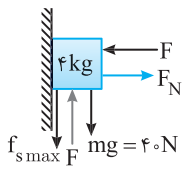
$$F=F_N\xrightarrow{F'=۲F}F'_N=۲F_N$$

۲ ۱۰۰۹ C

خط فکری مسئله در دو حالت بیان شده است بنابراین شما باید هر حالت را جداگانه بررسی کنید و نیروهای وارد بر جسم را در هر حالت رسم کرده و به کمک قانون دوم نیوتون مسئله را حل کنید.

حالت (۱): در حالت اول جسم در آستانهٔ حرکت به سمت بالا است نیروی اصطکاک باید خلاف جهت لغزش باشد پس نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت $(f_{s\,max})$ رو به پایین است.

۱ جسم در راستای افقی ساکن است پس باید F_N و F متوازن باشند:



$$F_N=F$$

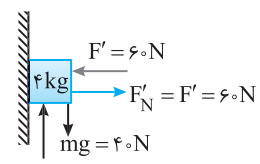
۱ اصطکاک در آستانهٔ حرکت را حساب می‌کنیم.

$$f_{s\,max}=\mu_sF_N\xrightarrow[\mu_s=۰/۵]{F_N=F}f_{s\,max}=۰/۵F$$

۱ جسم ساکن است و نیروها در راستای قائم متوازن بوده بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

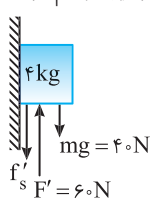
$$F_{net}=ma\Rightarrow \overbrace{mg+f_{s\,max}}^{\text{نیروهای رو به پایین}}=F\Rightarrow ۴۰+۰/۵F=F$$
$$\Rightarrow ۴۰=F-۰/۵F\Rightarrow ۴۰=۰/۵F\Rightarrow F=۸۰N$$

حالت (۲): در این حالت نیروی F را F' کاهش داده‌ایم یعنی نیروی $f'_{s\,max}$ برابر $۸۰-۲۰=۶۰$ است، ابتدا را به‌دست می‌آوریم تا ببینیم جسم شروع به حرکت می‌کند یا نه؟



$$f'_{s\,max}=\mu_sF'\Rightarrow f'_{s\,max}=۰/۵\times۶۰=۳۰N$$

نیروی $mg=۴۰N$ می‌خواهد جسم را به سمت پایین بکشد و نیروی $F'=۶۰N$ می‌خواهد جسم را به سمت بالا هل دهد پس در واقع نیروی $۶۰-۴۰=۲۰$ نیوتون می‌خواهد جسم را بالا ببرد که این مقدار از $f'_{s\,max}$ کمتر است در نتیجه جسم در حال سکون باقی می‌ماند و به جسم ساکن نیروی اصطکاک ایستایی وارد می‌شود:



جسم ساکن است: $\overbrace{mg+f'_s}^{\text{نیروهای رو به پایین}}=F'$

$$\Rightarrow ۴۰+f'_s=۶۰\Rightarrow f'_s=۲۰N$$

نیروی عمودی سطح و اصطکاک در حالت اول برابر شد با:

$F_N = ۸۰N \ , \ f_{s\,max} = \mu_s F_N = ۴۰N$

نیروی عمودی سطح و اصطکاک در حالت دوم برابر شد با:

$F'_N = ۶۰N \ , \ f'_s = ۲۰N$

نکته برایند دو نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح برابر نیرویی است که جسم بر سطح یا سطح بر جسم وارد می‌کند.

حالت (۱)	حالت (۲)
$R = \sqrt{f_{s\,max}^۲ + F_N^۲}$	$R' = \sqrt{f_s'^۲ + F_N'^۲}$
$R = \sqrt{۴۰^۲ + ۸۰^۲} = ۴۰\sqrt{۱^۲ + ۲^۲}$	$R' = \sqrt{۲۰^۲ + ۶۰^۲} = ۲۰\sqrt{۱^۲ + ۳^۲}$
$R = ۴۰\sqrt{۵}N$	$R' = ۲۰\sqrt{۱۰}$

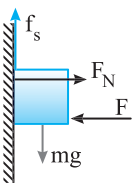
حال نسبت $\frac{R'}{R}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{R'}{R} = \frac{۲۰\sqrt{۱۰}}{۴۰\sqrt{۵}} = \frac{۲۰\sqrt{۵}\times\sqrt{۲}}{۴۰\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۲ ۱۰۱۰ B

خط فکری سطح بر جسم نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک وارد می‌کند، بنابراین واکنش این نیروها هم‌اندازهٔ آن‌ها و خلاف جهتشان توسط جسم بر سطح وارد خواهد شد. به جای نیرویی که جسم بر سطح وارد می‌کند نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند را بررسی می‌کنیم.

۱ جسم ساکن است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند.



$f_s = W \ , F_N = F$

۲ نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند خواهد شد:

$R = \sqrt{F_N^۲ + f_s^۲} \Rightarrow R = \sqrt{F^۲ + W^۲}$

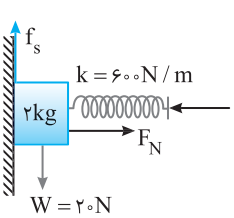
۳ اگر نیروی F دو برابر شود جسم همچنان ساکن می‌ماند. یعنی نیروی اصطکاک f_s همچنان با نیروی وزن (W) برابر است اما با دو برابر شدن F، نیروی F_N نیز دو برابر می‌شود و نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند برابر است با:

$R' = \sqrt{F_N'^۲ + f_s^۲} \Rightarrow R' = \sqrt{(۲F)^۲ + f_s^۲}$

برای آن‌که R' دو برابر R باشد باید f_s نیز در دو ضرب شده باشد که چنین نیست و $R < R' < ۲R$ است یعنی نیرویی که سطح به جسم (یا جسم به سطح) وارد می‌کند افزایش می‌یابد اما دو برابر نمی‌شود.

۲ ۱۰۱۱ C

شکل ساده‌ای از موضوع مسئله به همراه نیروهای وارد بر آن رسم می‌کنیم. یادمان باشد نخ پاره شده است و کشش نخی وجود ندارد.



۱ نیروی کشسانی فنر را حساب می‌کنیم:

$F = kx \xrightarrow{x = ۰/۱m} F = ۶۰۰\times ۰/۱$

$\Rightarrow F = ۶۰N$

۲ نیروی عمودی سطح خواهد شد:

$F_{net_x} = ۰ \Rightarrow F_N = F \Rightarrow F_N = ۶۰N$

۳ نیروی وزن را به‌دست می‌آوریم:

$W = mg \Rightarrow W = ۲\times ۱۰ = ۲۰N$

۴ نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را حساب می‌کنیم:

$f_{s_{max}} = \mu_s F_N \xrightarrow{\mu_s = ۰/۴} f_{s_{max}} = ۰/۴\times ۶۰ \Rightarrow f_{s_{max}} = ۲۴N$

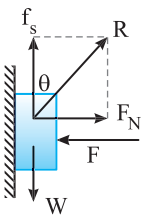
۵ با مقایسه نیروی وزن با نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت مشخص است که جسم همچنان ساکن می‌ماند و اصطکاک بین جسم و سطح $f_s = W = ۲۰N$ است.

۶ نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند خواهد شد:

$R = \sqrt{F_N^۲ + f_s^۲} \Rightarrow R = \sqrt{۶۰^۲ + ۲۰^۲} = ۲۰\sqrt{۱۰}N$

۳ ۱۰۱۲ B

۱ جسم ساکن است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند بنابراین هر چقدر بر نیروی F بیافزاییم نیروی اصطکاک همچنان برابر نیروی وزن است $f_s = W$ و نیروی اصطکاک تغییر نمی‌کند.

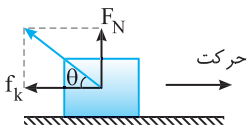


۲ با افزایش F نیروی عمودی سطح افزایش می‌یابد. با توجه به شکل می‌توان نوشت: $\tan\theta \uparrow = \frac{F_N \uparrow}{f_s}$

بنابراین با افزایش F_N ، θ افزایش می‌یابد.

۱ ۱۰۱۳ B

خط فکری ابتدا باید دقت کنید منظور از نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند $R = \sqrt{f_k^۲ + F_N^۲}$ است. یعنی شما ابتدا باید در هر حالت نیروی عمودی سطح F_N و نیروی اصطکاک را حساب کنید سپس به کمک $\tan\theta$ ، زاویهٔ θ را بررسی کنید.



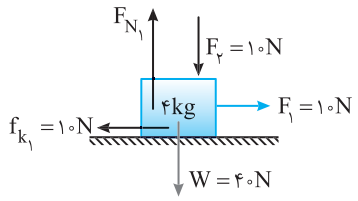
حالت اول: سرعت جسم ثابت است یعنی نیروی اصطکاک $f_{k_۱}$ با نیروی $F_۱ = ۱۰N$ برابر است.

$F_{net} = ۰ \Rightarrow f_{k_۱} = F_۱ = ۱۰N$ سرعت ثابت

نیروی عمودی تکیه‌گاه در این حالت خواهد شد:

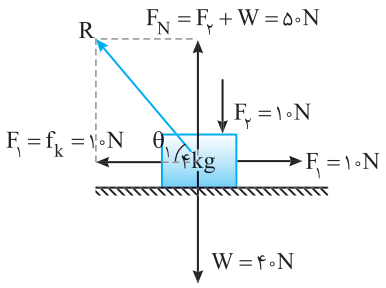
$F_{N_۱} = F_۲ + W = ۱۰ + ۴۰ \Rightarrow F_{N_۱} = ۵۰N$

ضریب اصطکاک را حساب می‌کنیم. $f_{k_۱} = \mu_k F_{N_۱} \Rightarrow ۱۰ = \mu_k (۵۰) \Rightarrow \mu_k = ۰/۲$



تانژانت زاویهٔ $\theta_۱$ خواهد شد:

$\tan\theta_۱ = \frac{۵۰}{۱۰} = ۵$



حالت دوم: نیروی عمودی سطح مطابق شکل زیر خواهد شد:

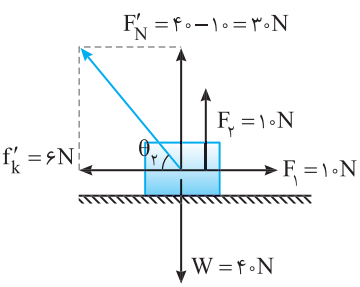
$F'_N = W - F_۲ \Rightarrow F'_N = ۴۰ - ۱۰ = ۳۰N$

نیروی اصطکاک جدید را حساب می‌کنیم. $f'_k = \mu_k F'_N = ۰/۲\times ۳۰ = ۶N$

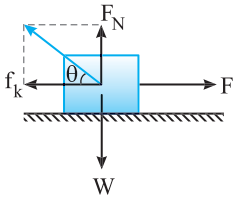
تانژانت زاویهٔ $\theta_۲$ خواهد شد:

$\tan\theta_۲ = \frac{۳۰}{۶} = ۵$

بنابراین $\theta_۱ = \theta_۲ < ۹۰^\circ$ است.



میانبر به این همه حل نیازی نداریم. با توجه به شکل خواهیم داشت:



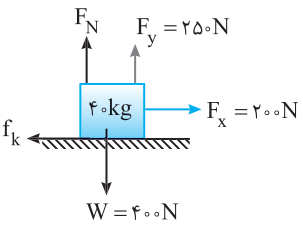
$$\tan\theta=\frac{F_N}{f_k}=\frac{F_N}{\mu_k F_N}\Rightarrow\tan\theta=\frac{1}{\mu_k}$$

یعنی θ تنها به μ_k بستگی دارد که μ_k تغییر نکرده و $\theta_1=\theta_2$ است.

۱۰۱۴ B ۲

خط فکری جسم دارای سرعت ثابت است. بنابراین نیروهای وارد بر آن متوازن هستند. نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و برایند نیروهای در امتداد محور x و برایند نیروها در امتداد محور y را برابر صفر قرار می‌دهیم و نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح را به‌دست می‌آوریم. نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند $(R=\sqrt{f_k^2+F_N^2})$ را حساب می‌کنیم سپس زاویهٔ بین نیروی R و راستای افق را به کمک مثلثات معین می‌کنیم.

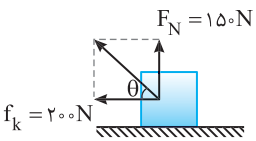
۱ مطابق شکل می‌توان نوشت:



$$F_{net_x}=0\Rightarrow f_k=F_x$$
$$\Rightarrow f_k=200N$$
$$F_{net_y}=0\Rightarrow F_n+F_y=W$$
$$\Rightarrow F_N=W-F_y=400-250$$
$$\Rightarrow F_N=150N$$

۲ نیروی وارد بر جسم برابر خواهد شد با: $R=\sqrt{200^2+150^2}\Rightarrow R=250N$

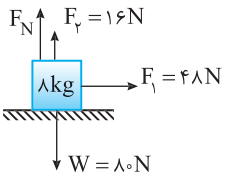
۳ زاویه‌ای که نیرو با راستای حرکت می‌سازد را به‌دست می‌آوریم:



$$\tan\theta=\frac{F_N}{f_k}=\frac{150}{200}\Rightarrow\theta=37^\circ$$

۱۰۱۵ B ۴

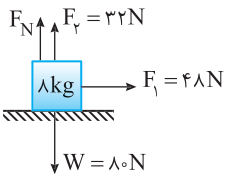
ابتدا به یک راه‌حل کاملاً تشریحی می‌پردازیم و در نهایت یک راه‌حل منطقی و کوتاه را بیان می‌کنیم. با توجه به داده‌های سؤال، می‌توانیم ضریب اصطکاک جنبشی سطح را به‌دست آوریم.



در حالت اول چون جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند نیروی اصطکاک با نیروی $F_1=48N$ برابر و در خلاف جهت آن است. نیروی عمودی سطح نیز برابر با $F_N=80-16=64N$ است. ضریب اصطکاک جنبشی برابر است با:

$$f_k=\mu_k F_N\Rightarrow 48=64\mu_k\Rightarrow\mu_k=\frac{48}{64}=\frac{3}{4}$$

اگر نیروی $\vec{F}_2$ را 16N افزایش دهیم، نیروی عمودی سطح $F_N=80-32=48N$ می‌شود و نیروی اصطکاک برابر است با:



$$f_k=\frac{3}{4}\times 48=36N$$

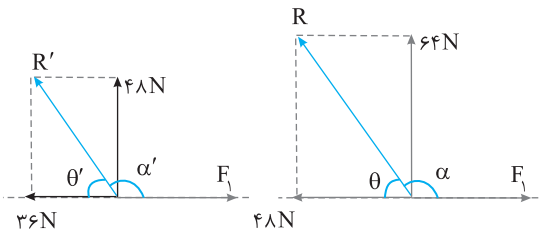
اندازهٔ نیروی برایند سطح برابر است با: $\sqrt{F_N^2+f_k^2}$

در حالت اول نیروی برایند سطح (R) برابر است با: $R=\sqrt{(64)^2+(48)^2}$

و در حالت دوم نیروی برایند سطح (R') برابر است با: $R'=\sqrt{(48)^2+(36)^2}$

که $R'<R$ است و بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست‌اند. در هر هر دو حالت زاویه‌ای که نیروی برایند با نیروی F_1 می‌سازد $(\alpha$ و $\alpha')$ در شکل مشخص شده است:

$$\tan\theta=\frac{64}{48}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3},\ \tan\theta'=\frac{48}{36}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$
$$\Rightarrow\tan\theta=\tan\theta'\Rightarrow\theta=\theta'\Rightarrow\alpha=\alpha'$$

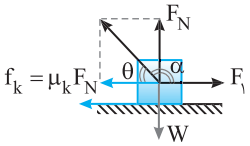


و گزینهٔ (۴) درست است.

حال راه‌حل کوتاه: با توجه به شکل زیر:

$$|\tan\alpha|=|\tan\theta|=\frac{F_N}{\mu_k F_N}=\frac{1}{\mu_k}$$

μ_k مقدار ثابتی است، بنابراین α و θ ثابت می‌ماند.



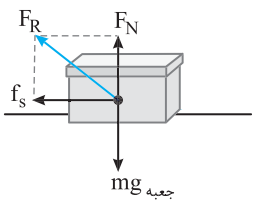
۱۰۱۶ C ۳

خط فکری بابدابتدا با هم فکر کنیم. وقتی تریلی ترمز می‌کند، عاملی که سبب توقف جعبه به همراه کامیون می‌شود نیروی اصطکاک بین کف تریلی و جعبه است. از خود می‌پرسیم که حداکثر نیروی اصطکاک چند نیوتون است و بیشترین شتاب جعبه در اثر نیروی اصطکاک چند m/s^2 است؟

$$f_{s_{max}}=\mu_s mg=0/5\times 2\times 10\Rightarrow f_{s_{max}}=10N$$
$$f_{s_{max}}=m_{\text{جعبه}}a\Rightarrow 10=2a_{max}\Rightarrow a_{max}=5m/s^2$$

بنابراین حداکثر شتاب توقف این جعبه $5m/s^2$ یعنی اگر شتاب کامیون از $5m/s^2$ کمتر باشد، جعبه و کامیون باهم متوقف می‌شوند و اگر شتاب ترمز گرفتن کامیون از $5m/s^2$ بیشتر باشد، جعبه بر کف تریلی رو به جلو می‌لغزد. در این مسئله خوشبختانه شتاب توقف تریلی $4m/s^2$ است و هر دو باهم متوقف می‌شوند. اکنون می‌توان مسئله را حل کرد.

تریلی در حال حرکت است اما جعبه نسبت به تریلی ساکن است، هنگام ترمز نیرویی که جعبه را از حرکت باز می‌دارد نیروی اصطکاک بین کف تریلی و جعبه است. با رسم نیروهای وارد بر جعبه و با توجه به این‌که تریلی با شتاب $4m/s^2$ ترمز می‌کند، داریم:



نیروی عمودی سطح وارد بر جعبه را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net,y}=0\Rightarrow F_N-mg_{\text{جعبه}}=0$$
$$\Rightarrow F_N=2\times 10=20N$$

نیروی اصطکاک به جعبه شتاب $4m/s^2$ داده است بنابراین نیروی اصطکاک وارد بر جعبه برابر است با:

$$F_{net,x}=ma_{\text{جعبه}}\Rightarrow -f_s=2\times(-4)=-8\Rightarrow f_s=8N$$

با توجه به این‌که کف تریلی، دو نیروی F_N و f_s را بر جعبه وارد می‌کند، برایند این دو نیرو را محاسبه می‌کنیم:

نیرویی که کف تریلی بر جعبه وارد می‌کند: $F_R=\sqrt{F_N^2+f_s^2}$

$$\Rightarrow R=\sqrt{20^2+8^2}=4\sqrt{5^2+2^2}=4\sqrt{29}N$$

۱۰۱۷ B ۴

خط فکری وقتی کامیون ترمز می‌کند، عاملی که سبب متوقف کردن صندوق به همراه کامیون می‌شود اصطکاک بین صندوق و کامیون است و اگر اصطکاک نبود، صندوق بنا به قانون اول نیوتون به حرکت خودش بر کف کامیون ادامه می‌داد تا به دیوارهٔ اتاقک کامیون برخورد کند. برای آنکه کامیون در کوتاه‌ترین فاصله متوقف شود باید شتاب حرکت کندشونده آن بیشینه باشد و برای آنکه صندوق نیز با این شتاب متوقف شود باید نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر صندوق بیشینه $(f_{s\,max})$ باشد، بنابراین شما باید شتاب بیشینهٔ صندوق حاصل از نیروی اصطکاک را حساب کنید. سپس با نوشتن معادلهٔ مستقل از زمان مقدار جابه‌جایی را به‌دست بیاورید.

۱ عامل توقف صندوق، اصطکاک بین کف کامیون و صندوق است که به صندوق شتاب توقف می‌دهد.

$$f_{s\,max}=ma\Rightarrow\mu_s mg=ma\Rightarrow a=\mu_s g=۰/۲۵\times۱۰=۲/۵m/s^۲$$

۲ شتاب توقف کامیون حداکثر باید $۲/۵m/s^۲$ باشد تا صندوق بر کف کامیون نلغزد

از این‌رو: $v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-۲۲۵=۲(-۲/۵)\Delta x\Rightarrow\Delta x=\frac{۲۲۵}{۵}=۴۵m$

بازی با سؤال **یک محمولهٔ ۱۰۰۰ کیلوگرمی درون کامیونی که با سرعت $۷۲km/h$ روی سطح افقی در حرکت است قرار دارد. فقط نیروی اصطکاک از لغزیدن محموله به جلو و عقب جلوگیری می‌کند. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین محموله و کامیون ۰/۴ باشد، کمترین فاصله‌ای که کامیون می‌تواند بایستد بدون اینکه محموله در اتاقک به جلو بلغزد، چند متر است؟ $(g=۱۰m/s^۲)$**

۱) ۵۰ ۲) ۲۵

۳) ۱۰۰ ۴) باید جرم کامیون مشخص باشد.

پاسخ **محمولهٔ کامیون در اثر اصطکاک بین کف کامیون و محموله متوقف می‌شود و حداکثر شتابی که اصطکاک می‌تواند ایجاد کند خواهد شد:**

$$f_{s_{max}}=ma\Rightarrow-\mu_s mg=ma\Rightarrow a_{max}=-\mu_s g$$

$$\Rightarrow a_{max}=-۰/۴\times۱۰\Rightarrow a_{max}=-۴m/s^۲$$

بنابراین حداکثر اندازهٔ شتاب کامیون نیز باید $۴m/s^۲$ باشد تا محموله کف کامیون نلغزد. به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، کمترین جابه‌جایی کامیون را حساب می‌کنیم:

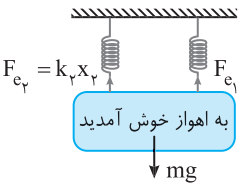
$$v^۲-v_۰^۲=۲a_{max}\Delta x_{min}\xrightarrow{v=۰,\,v_۰=۷۲km/h=۲۰m/s}$$

$$۰-۴۰۰=۲(-۴)\Delta x_{min}\Rightarrow\Delta x_{min}=۵۰m$$

گزینهٔ ۱

۲ ۱۰۱۸ A

جسم در حال سکون است. پس نیروهای وارد بر آن متوازن می‌باشد. چون فنرها مشابه‌اند پس کشش آن‌ها با هم برابر است. بنابراین:

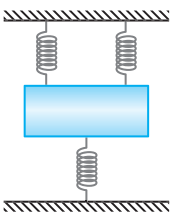


$$F_{net}=۰\Rightarrow k_۱x_۱+k_۲x_۲=mg\Rightarrow ۲۰۰۰x_۱+۲۰۰۰x_۲=۱۲۰۰$$

$$\xrightarrow[x_۱=x_۲=x]{\text{فنرها مشابه}}۴۰۰۰x=۱۲۰۰\Rightarrow x=۰/۳m=۳۰cm$$

بازی با سؤال **در شکل روبه‌رو هر سه فنر با ثابت $۳۰۰۰N/m$ به اندازهٔ $۱۰cm$ کشیده شده‌اند. جرم تابلو چند کیلوگرم است؟**

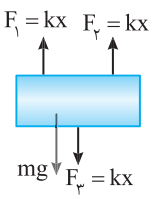
$(g=۱۰N/kg)$



۱) ۱۵ ۲) ۲۰

۳) ۲۵ ۴) ۳۰

پاسخ **هر سه فنر بنا به فرض مسئله کشیده شده‌اند و می‌خواهند به حالت اول باز گردند بنابراین نیروی کشسانی دو فنر بالایی رو به بالا و نیروی کشسانی فنر پایین رو به پایین و در جهت نیروی وزن است. تابلو ساکن است و نیروهای وارد بر تابلو متوازن هستند. بنابراین:**



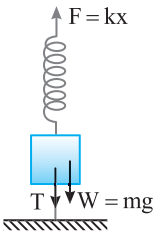
$$F_{net}=۰\Rightarrow F_۱+F_۲=F_۳+W\Rightarrow kx+kx=kx+W$$

$$\Rightarrow kx=W\xrightarrow[x=۰/۱m]{k=۳۰۰۰N/m}۳۰۰۰\times۰/۱=m\times۱۰\Rightarrow m=۳۰kg$$

گزینهٔ ۴

۴ ۱۰۱۹ B

خط فکری نیروی وزن و نیروی کشش نخ هر دو رو به پایین و نیروی کشسانی فنر رو به بالاست و چون جسم در تعادل است باید نیروها متوازن باشند. نیروها را رسم کنید و مسئله را حل کنید.



۱ ثابت فنر $۴N/cm$ یعنی $۴۰۰N/m$ است.

۲ نیروی F باید با مجموع نیروی وزن و نیروی کشش نخ برابر باشد.

$$F_{net}=۰\Rightarrow F=T+W\xrightarrow[W=۱\times۱۰=۱۰N]{T=۸N}kx=۸+۱۰\Rightarrow۴۰۰x=۱۸$$

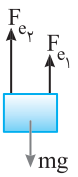
$$\Rightarrow x=\frac{۴/۵}{۱۰۰}\Rightarrow x=۴/۵cm$$

۳ طول فنر در این حالت برابر است با:

$$\ell=۲۴+۴/۵\Rightarrow\ell=۲۸/۵cm$$

۳ ۱۰۲۰ B

نکته نیروی کشسانی فنر همواره در خلاف جهت تغییر طول آن است.



فنر $k_۱$ کشیده شده و نیروی آن خلاف جهت جابه‌جایی یعنی روبه بالا به جسم وارد می‌شود. هم‌چنین $k_۲$ نیز فشرده شده پس نیروی آن خلاف جهت جابه‌جایی یعنی روبه بالا به جسم وارد می‌شود. نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و نیروی کشسانی هر فنر را حساب می‌کنیم:

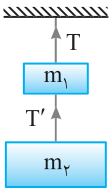
$$F_{e_۱}=k_۱\Delta x_۱=۵\times۴=۲۰N\quad,\quad F_{e_۲}=k_۲\Delta x_۲=۲۰۰۰\times\frac{۲}{۱۰۰}=۴۰N$$

نیروی خالص وارد بر جسم صفر است از این‌رو می‌توان نوشت:

$$F_{net}=۰\Rightarrow mg=F_{e_۱}+F_{e_۲}\Rightarrow mg=۶۰N\Rightarrow m=۶kg$$

۲ ۱۰۲۱ A

خط فکری دقت کنید نخ بالایی وزن هر دو وزنهٔ $m_۱=۲kg$ و $m_۲=۳kg$ را تحمل می‌کند اما نخ بین دو وزنه تنها نیروی وزن $m_۲$ را تحمل می‌کند. حال کشش هر نخ را حساب کرده از هم کم کنید.



۱ نیروی کشش نخ متصل به سقف خواهد شد:

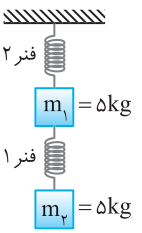
$$T=(m_۱+m_۲)g\Rightarrow T=(۲+۳)\times۱۰=۵۰N$$

۲ نیروی کشش نخ بین دو وزنه برابر است با: $T'=m_۲g\Rightarrow T'=۳\times۱۰=۳۰N$

۳ تفاوت T و T' را به‌دست می‌آوریم: $T-T'=۵۰-۳۰=۲۰N$

میانبر از همان ابتدا مشخص است که اختلاف این دو نیروی کشش برابر وزن، وزنهٔ $m_۱$ یعنی $W_۱=۲۰N$ است. زیرا T، به همین اندازه وزن بیشتری را تحمل می‌کند.

بازی با سؤال **در شکل روبه‌رو مجموعه در حال تعادل می‌باشد و دو فنر مشابه‌اند. تغییر طول فنر (۲) چند برابر تغییر طول فنر (۱) است؟ (جرم فنرها ناچیز و $g=۱۰N/kg$ است)** خارج ریاضی - ۸۸

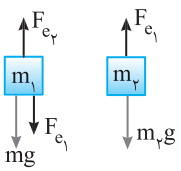


۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۲/۵ ۴) ۱/۵

پاسخ **جسم $m_۲$ توسط کشش فنر (۱) در حال تعادل است.** $F_{e_۱}=m_۲g\Rightarrow k\Delta x_۱=۵۰N$

به جسم $m_۱$ نیروی وزن و هم‌چنین $F_{e_۱}$ به سمت پایین وارد می‌شود:



$$F_{e_۲}=mg+F_{e_۱}=۵۰+۵۰\Rightarrow F_{e_۲}=۱۰۰N\Rightarrow k\Delta x_۲=۱۰۰N$$

$$\frac{k\Delta x_۲}{k\Delta x_۱}=\frac{۱۰۰}{۵۰}\Rightarrow\frac{\Delta x_۲}{\Delta x_۱}=۲$$

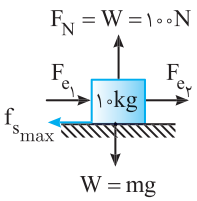
البته می‌توان به راحتی گفت که فنر (۲) دو وزنه و فنر (۱) یک وزنه را تحمل می‌کند بنابراین افزایش طول فنر (۲) دو برابر افزایش طول فنر (۱) است.

گزینهٔ ۲

۳ ۱۰۲۲ B

نکته نیروی وارد از طرف فنر همواره خلاف جهت تغییر طول می‌باشد.

فنر k_1 فشرده شده بنابراین نیروی کشسانی آن (F_{e_1}) به سمت راست است. فنر k_2 کشیده شده بنابراین نیروی کشسانی آن (F_{e_2}) به سمت راست است.



بنابراین جسم در آستانهٔ حرکت به سمت راست بوده و نیروی اصطکاک ایستایی $f_{s_{max}}$ به سمت چپ است.

نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده برایند آن‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم و ضریب اصطکاک را حساب می‌کنیم:

$$F_{net}=۰ \Rightarrow F_{e_1}+F_{e_2}=f_{s_{max}} \Rightarrow k_1\Delta x_1+k_2\Delta x_2=f_{s_{max}}$$

$$۲۰۰\times\frac{۲}{۱۰۰}+۴۰۰\times\frac{۴}{۱۰۰}=\mu_s F_N \xrightarrow{F_N=mg} ۲۰=\mu_s\times۱۰۰ \Rightarrow \mu_s=۰/۲$$

۲ ۱۰۲۳ B

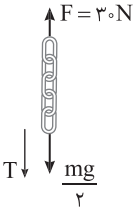
خط فکری اگر زنجیر و جسم بر کف نیروسنج قرار داده شوند، نیروسنج جمع وزن آن‌ها را نشان خواهد داد $(۴۰+۱۰=۵۰N)$ حال اگر شما زنجیر را گرفته و به آن نیرویی رو به بالا وارد کنید، نیروسنج عدد کمتری را نشان می‌دهد که این کاهش برابر نیرویی است که شما رو به بالا به مجموعه وارد کرده‌اید.

۱ نیروسنج به جای $۵۰N$ عدد $۲۰N$ را نشان می‌دهد بنابراین نیروی F برابر است با:

$$F=۵۰-۲۰ \Rightarrow F=۳۰N$$

۲ نیروی کشش در وسط زنجیر را باید این‌گونه در نظر گرفت که اگر وزنه را با نصف زنجیر $(۵N)$ روی ترازو قرار دهیم، ترازو عدد $۴۵+۵=۴۵N$ را نشان می‌دهد. اما نیروسنج $۲۰N$ را نشان می‌دهد یعنی در وسط زنجیر نیروی $۴۵-۲۰=۲۵N$ وارد می‌شود.

روش دیگر: نیروهای وارد بر نیمهٔ بالای زنجیر را رسم می‌کنیم، این نیروها متوازن هستند.



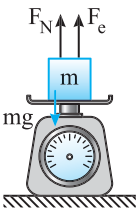
$$F=T+\frac{mg}{۲} \Rightarrow ۳۰=T+\frac{۱۰}{۲} \Rightarrow T=۲۵N$$

۳ ۱۰۲۴ B

نکته نیروی کشسانی فنر در خلاف جهت تغییر طول آن است.

۱ ابتدا نیروی کشسانی فنر را به‌دست می‌آوریم:

$$F_e=k\Delta l \Rightarrow F_e=۲۰۰\times\frac{۲}{۱۰۰}=۴N$$



۲ فنر کشیده شده است و نیروی کشسانی فنر رو به بالا است بنابراین با توجه به ساکن بودن جسم می توان نوشت:

$$F_T=۰ \Rightarrow F_N+F_e=W \quad (۱)$$

نکته عددی که نیروسنج نشان می‌دهد برابر نیروی عمودی است که کف نیروسنج بر جسم وارد می‌کند. (F_N)

۳ ترازو عدد $۴N$ را نشان می‌دهد، ترازوی فنری نیروی عمودی سطح را نشان می‌دهد پس $F_N=۴N$ است، از این‌رو داریم:

$$(۱) \Rightarrow ۴+۴=W \Rightarrow W=۸N \Rightarrow mg=۸ \Rightarrow m=۰/۸kg$$

۱ ۱۰۲۵ B

خط فکری شخصی فنر را رو به پایین می‌کشد، بنابراین نیرویی که فنر بر شخص وارد می‌کند رو به بالاست و سبب می‌گردد که نیروسنج عدد کمتری نشان دهد. در واقع عددی که نیروسنج نشان خواهد داد تفاضل نیروی وزن شخص و نیروی کشسانی فنر است. نیروها را رسم کنید و نیروی کشسانی فنر را به‌دست آورید و از وزن کم کنید.

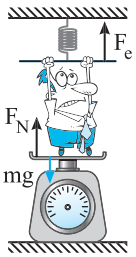
۱ شخص فنر را رو به پایین کشیده است بنابراین نیروی کشسانی فنر رو به بالا است.

$$F_e=k\Delta x \Rightarrow F_e=۱۵۰\times۰/۱=۱۵N$$

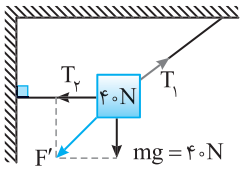
۲ وزن شخص برابر است با: $W=mg \Rightarrow W=۶۰۰N$

ترازوی فنری نیروی عمودی سطح را نمایش می‌دهد از این‌رو:

$$F_N=W-F_e \Rightarrow \text{عدد نیروسنج}=۶۰۰-۱۵=۵۸۵N$$



۴ ۱۰۲۶ B

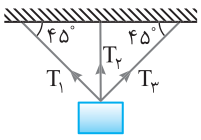


بر وزنه سه نیروی T_1 و T_2 و W وارد می‌شود. جسم در تعادل است و سه نیروی T_1 و T_2 و وزن متوازن‌اند بنابراین برایند T_2 و W که عمود بر هم‌اند باید هم‌اندازه و خلاف جهت T_1 باشد. از این رو به کمک قضیهٔ فیثاغورس می‌توان نوشت:

$$F'=T_1 \Rightarrow \sqrt{T_2^2+(mg)^2}=T_1 \Rightarrow T_2^2+(mg)^2=T_1^2$$

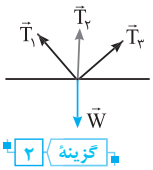
$$\Rightarrow T_2^2+۱۶۰۰=۲۵۰۰ \Rightarrow T_2^2=۹۰۰ \Rightarrow T_2=۳۰N$$

بازی با سؤال **در شکل روبه‌رو، وزنهٔ ۲۶ کیلوگرمی توسط سه طناب T_1، T_2 و T_3 از سقف آویخته شده و ساکن است. اگر کشش طناب قائم T_2 برابر $۹۰N$ باشد، اندازهٔ برایند نیروی کشش دو طناب T_1 و T_3 چند نیوتون است؟** $(g=۱۰N/kg)$



۱) ۳۳۰ ۲) ۱۷۰ ۳) ۱۱۰ ۴) ۸۰

پاسخ **چون جسم در تعادل است، بنابراین:**



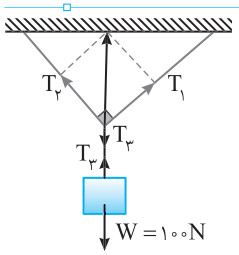
$$F_{net}=۰ \Rightarrow \vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{T}_3+\vec{W}=۰$$

$$\Rightarrow |\vec{T}_1+\vec{T}_3|=|\vec{T}_2+\vec{W}|$$

$$\Rightarrow |\vec{T}_1+\vec{T}_3|=|۲۶۰-۹۰|=۱۷۰N$$

گزینه ۲

۲ ۱۰۲۷ B



۱ نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. به نخ قائم متصل به وزنه دقت کنید نیروی کشش این نخ برابر وزن جسم است.

$$T_۳=W \Rightarrow T_۳=۱۰۰N$$

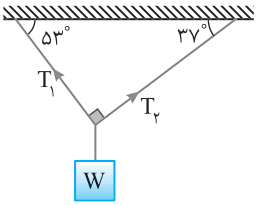
۲ اکنون به نیروهای وارد بر محل اتصال سه نخ دقت کنید. $(T_۳ \text{ و } T_۲ ,T_۱)$

این سه نیرو متوازن هستند و باید اندازهٔ T_3 با اندازهٔ برایند T_1 و T_2 برابر شود.

۳ T_1 و T_2 بر هم عمودند و بنا به رابطهٔ فیثاغورس می‌توان نوشت:

$$\sqrt{T_۱^2+T_۲^2}=T_۳ \xrightarrow{T_1=\sqrt{۳}T_2} \sqrt{۳T_۲^2+T_۲^2}=T_۳ \Rightarrow ۲T_۲=T_۳ \Rightarrow T_۲=۵۰N$$

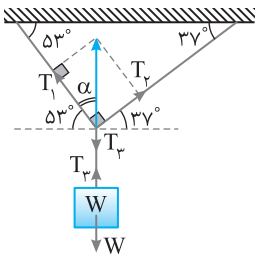
بازی با سؤال **در شکل روبه‌رو وزنهٔ W در حال تعادل است. برابر کدام $\frac{T_۲}{T_۱}$ گزینه است؟ (جرم ریسمان ناچیز است.)**



۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ **با توجه به اینکه جسم در حال تعادل است پس کشش T_3 برابر W می‌باشد و باید برایند T_1 و T_2 هم‌اندازهٔ T_3 و خلاف جهت آن باشد. زاویه‌ای که T_1 و T_2 با راستای افقی می‌سازند با توجه به خطوط موازی و مورب به ترتیب ۵۳° و ۳۷° است:**

$$\tan\alpha=\frac{T_۲}{T_۱} \xrightarrow[\alpha=۳۷^\circ]{\text{با توجه به شکل}} \tan ۳۷^\circ=\frac{T_۲}{T_۱} \Rightarrow \frac{T_۲}{T_۱}=\frac{۳}{۴}$$

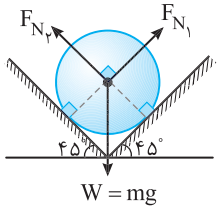


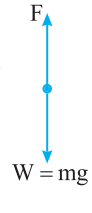
گزینهٔ ۱

۱۰۲۸ B **۳**

خط فکری نیرویی که جسم بر دیواره‌ها وارد می‌کند همان نیروی عمودی سطح F_N است که توسط دیواره‌ها بر جسم وارد می‌شود، بنابراین باید F_N را حساب کنیم.

همچنین چون زاویهٔ دیواره‌ها با سطح یکسان و 45° است پس با توجه به تقارن، نیرویی که هریک از دیواره‌ها وارد می‌کنند، یکسان است.





زاویهٔ دیواره‌ها با سطح یکسان است پس نیروی عمودی سطح دو دیواره یکسان است:

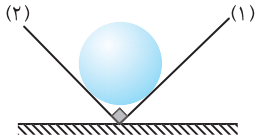
$$F=\sqrt{F_{N_1}^2+F_{N_2}^2} \xrightarrow{F_{N_1}=F_{N_2}} F=F_{N_1}\sqrt{2}$$

جسم در حال تعادل است پس نیروی وزن و نیروی F هم‌اندازه و خلاف جهت هم‌اند:

$$F_{N_1}\sqrt{2}=mg \Rightarrow F_{N_1}\sqrt{2}=50$$

$$\Rightarrow F_{N_1}=\frac{50}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{50\sqrt{2}}{2} \Rightarrow F_{N_1}=25\sqrt{2}N$$

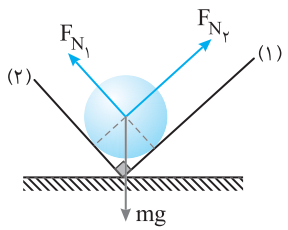
بازی با سؤال یک کرهٔ فلزی به وزن ۴۰N درون ناوه‌ای با دیواره‌های صیقلی قرار دارد. اگر نیرویی که دیوارهٔ (۱) به کره وارد می‌کند $\frac{4}{3}$ برابر نیرویی باشد که دیوارهٔ (۲) بر کره وارد کرده، نیروی وارد بر کره از طرف دیوار (۲) چند نیوتون است؟



کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۴۰ ۴) ۳۶

پاسخ ابتدا نیروهای وارد بر جسم را مطابق شکل رسم می‌کنیم. F_{N_1} و F_{N_2} بر دیواره‌ها عمودند. با توجه به شکل زاویهٔ بین F_{N_1} و F_{N_2} مانند زاویهٔ بین دو دیوار 90° است. با توجه به اینکه جسم در حال تعادل می‌باشد و سه نیروی F_{N_1}، F_{N_2} و mg متوازن هستند و برایند دو نیروی عمود بر هم F_{N_1} و F_{N_2} باید هم‌اندازه و در خلاف جهت mg باشد:



$$\begin{cases}\sqrt{F_{N_1}^2+F_{N_2}^2}=mg\\ F_{N_2}=F \text{ و } F_{N_1}=\frac{4}{3}F_{N_2}=\frac{4}{3}F\end{cases} \Rightarrow \sqrt{F^2+\frac{16}{9}F^2}=40 \Rightarrow \frac{5}{3}F=40 \Rightarrow F=24N$$

گزینهٔ ۱

۱۰۲۹ A **۳**

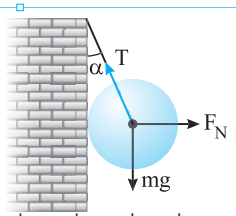
بر جسم سه نیرو وارد می‌شود:

۱ نیروی وزن

۲ نیروی کشش

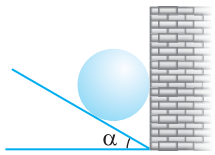
۳ نیروی عمود بر سطح

ابتدا نیروهایی که به جسم وارد می‌شوند را رسم می‌کنیم. جسم در حال تعادل است پس نیروهای متوازن می‌باشند و باید برایند نیروهای F_N و mg با T برابر و خلاف جهت آن می‌باشد.



$$T=\sqrt{F_N^2+(mg)^2} \Rightarrow T=\sqrt{900+1600}=50N$$

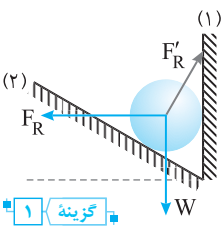
بازی با سؤال در شکل روبه‌رو نیروی عمودی سطح شیب‌دار وارد بر جسم کروی برابر ۵۰۰N است. نیروی عمودی سطح از طرف دیوار قائم بر جسم کروی و نیروی وزن کره به ترتیب از راست به چپ کدام گزینه می‌تواند باشد؟



تجربی - ۹۴

۱) ۳۰۰ و ۴۰۰ ۲) صفر و ۳۰۰ ۳) صفر و ۴۰۰ ۴) ۳۰۰ و ۶۰۰

پاسخ نیروهای وارد بر جسم متوازن می‌باشد بنابراین باید برایند دو نیروی عمود بر هم F_R و W برابر F'_R و در خلاف جهت آن باشد. $\sqrt{F_R^2+W^2}=F'_R$

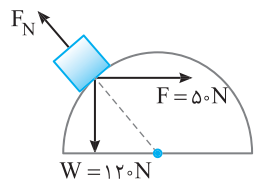


با توجه به معادلهٔ بالا تنها گزینهٔ (۱) می‌تواند درست باشد.

گزینهٔ ۱

۱۰۳۰ B **۱**

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:



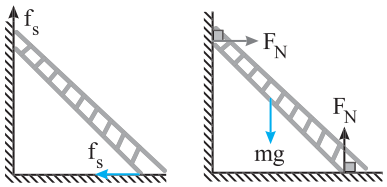
۱ نیروی F_N عمود بر سطح و در امتداد شعاع نیمکره است.

۲ جسم ساکن و در حالت تعادل است و نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند. از این‌رو اندازهٔ برایند نیروی افقی F=۵۰N و نیروی وزن W=۱۲۰N باید هم‌اندازهٔ نیروی F_N باشد. به کمک رابطهٔ فیثاغورس F_N را به‌دست می‌آوریم.

$$F_N=\sqrt{F^2+W^2} \Rightarrow F_N=\sqrt{50^2+120^2} \Rightarrow F_N=130N$$

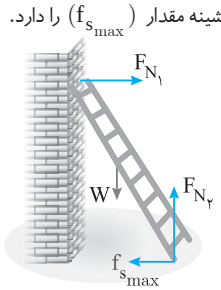
۱۰۳۱ A **۲**

دیوار و کف بر نردبان نیروی عمودی F_N وارد می‌کنند در شکل (۱) و (۴) نیروی F_N بر سطح عمود نبوده و این شکل‌ها نادرست هستند. اما در مورد شکل (۲) و (۳)، نیروی اصطکاک خلاف جهت لغزش به نردبان وارد می‌شود. اگر نردبان بخواهد بلغزد به سمت پایین خواهد لغزید پس روی دیوار قائم روبه پایین می‌لغزد و باید اصطکاک به سمت بالا به آن وارد شود و روی سطح افقی نیز به سمت راست می‌لغزد پس نیروی اصطکاک به سمت چپ به آن وارد می‌شود و گزینهٔ (۲) درست است.



۱۰۳۲ B **۲**

خط فکری نردبان ساکن است. باید نیروهای وارد بر آن را رسم کنیم اما جالبی مسئله این است که این نیروها بر خلاف همهٔ مسائل قبلی بر نقاط مختلف جسم باید رسم شوند. نیروهای وارد بر نردبان عبارتند از نیروی عمودی سطح دیوار بر نردبان (F_{N_1}) که به‌طور افقی بر نردبان وارد می‌شود. نیروی وزن (W) رو به پایین، نیروی عمودی سطح زمین (F_{N_2}) رو به بالا و در آخر نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر نردبان که مانع لیز خوردن آن می‌شود. نردبان در آستانهٔ سر خوردن بوده و نیروی اصطکاک بیشینه مقدار $(f_{s_{max}})$ را دارد.



۱ با توجه به شکل روبه‌رو برایند نیروها در امتداد قائم را برابر صفر قرار داده و نیروی F_{N_2} را حساب می‌کنیم.

$$F_{net,y}=0 \Rightarrow F_{N_2}=W \Rightarrow F_{N_2}=200N$$

۲ اکنون نیروی اصطکاکی که توسط سطح زمین بر نردبان وارد می‌شود را به دست می‌آوریم:

$$f_{s_{max}}=\mu_s F_{N_2}=0/5\times200=100N$$

۳ در این صورت نیرویی که سطح زمین به نردبان وارد می‌کند برابر است با:

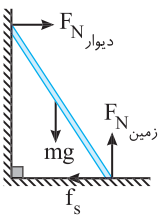
$$\vec{F}_{R,\text{سطح زمین}}=-100\vec{i}+200\vec{j}$$

B ۲ ۱۰۳۳

نکته برایند نیروی عمودی سطح (F_N) و نیروی اصطکاک (f) که از طرف سطح به جسم وارد می‌شود را نیروی سطح گویند:

$$R=\sqrt{F_N^2+f^2}$$

توسط دیوار قائم تنها نیروی عمودی سطح و توسط سطح زمین دو نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک به نردبان وارد می‌شود. نیروی اصطکاک مانع لیزخوردن نردبان به سمت راست می‌شود بنابراین جهت f_s به سمت چپ است.



نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم و نیروهای افقی را برابر هم و نیروهای قائم را نیز برابر هم قرار می‌دهیم:

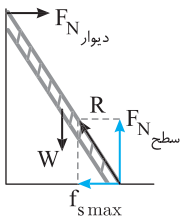
$$\text{نردبان در حال تعادل}:\begin{cases}f_s=F_{N_{دیوار}}=۳۰۰N\\F_{N_{زمین}}=mg=۴۰۰N\end{cases}$$

هر دو نیروی $F_{N_{زمین}}$ و f_s از زمین به نردبان وارد شده و نیرویی که زمین به نردبان وارد می‌کند برابر است با:

$$R=\sqrt{۳۰۰^2+۴۰۰^2}=۵۰۰N$$

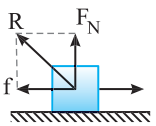
B ۱ ۱۰۳۴

نکته هر گاه بر جسمی نیرو وارد شود و جسم در آستانهٔ سُر خوردن باشد، یعنی اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح بیشینه $(f_{s_{max}}=\mu_sF_N)$ است.



باید شکل مسئله را رسم کنید و نیروهای وارد بر نردبان را بکشید.

یادآوری نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند، برایند دو نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح است.



$$R=\sqrt{F_N^2+f^2}$$

۱ نردبان ساکن است، از این‌رو نیروهایی که در امتداد قائم هستند، یعنی نیروی وزن (W) و نیروی عمودی سطح (F_N) متوازن بوده بنابراین:

$$F_N=W=mg\xrightarrow{m=۱۶kg}F_N=۱۶\times۱۰=۱۶۰N$$

۲ نیروی اصطکاک را حساب می‌کنیم:

$$R=\sqrt{F_N^2+f_{s_{max}}^2}\Rightarrow ۲۰۰^2=۱۶۰^2+f_{s_{max}}^2$$

$$\Rightarrow f_{s_{max}}^2=۲۰۰^2-۱۶۰^2=(۲۰۰+۱۶۰)(۲۰۰-۱۶۰)=۳۶۰\times۴۰$$

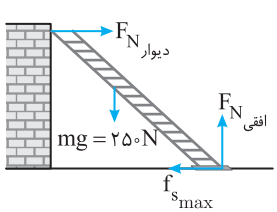
$$f_{s_{max}}^2=۳۶\times۴۰۰\Rightarrow f_{s_{max}}=۶\times۲۰=۱۲۰N$$

۳ ضریب اصطکاک ایستایی خواهد شد:

$$f_{s_{max}}=\mu_smg\Rightarrow ۱۲۰=\mu_s\times۱۶\times۱۰\Rightarrow\mu_s=\frac{۱۲}{۱۶}=\frac{۳}{۴}$$

B ۴ ۱۰۳۵

۱ شکل ساده‌ای از صورت سؤال رسم می‌کنیم و نیروهای وارد بر نردبان را می‌کشیم. دقت کنید چون بیشینه نیروی سطح افقی خواسته شده پس باید اصطکاک ایستایی بین نردبان و سطح افقی نیز بیشینه $(f_{s_{max}})$ باشد و نردبان در آستانهٔ حرکت باشد.



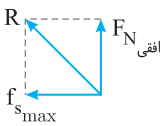
۲ نردبان ساکن است پس $F_{N_{افقی}}$ که به سمت بالا است باید اثر نیروی mg رو به پایین را خنثی کند. از این‌رو می‌توان نوشت:

$$F_{N_{افقی}}=mg\Rightarrow F_{N_{افقی}}=۲۵۰N$$

۳ نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه را به‌دست می‌آوریم:

$$f_{s_{max}}=\mu_sF_{N_{افقی}}\Rightarrow f_{s_{max}}=۰/۴\times۲۵۰=۱۰۰N$$

۴ نیرویی که سطح افقی بر نردبان وارد می‌کند برایند دو نیروی عمود بر هم $F_{N_{افقی}}$ و $f_{s_{max}}$ است.



بنابراین:

$$R=\sqrt{f_{s_{max}}^2+F_{N_{افقی}}^2}\xrightarrow[\text{گرفته و از زیر رادیکال بیرون می‌آوریم}]{\text{عامل‌های مشترک بین } F_N \text{ و } f_{s_{max}} \text{ را فاکتور}}$$

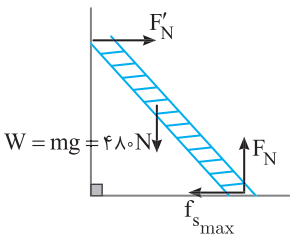
$$R=۵۰\sqrt{۲^2+۵^2}\Rightarrow R=۵۰\sqrt{۲۹}N$$

B ۲ ۱۰۳۶

وزن نردبان برابر است با:

$$W=mg$$

$$\Rightarrow W=۴۸\times۱۰=۴۸۰N$$



نردبان ساکن است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند. بنابراین:

$$F_N=W\Rightarrow F_N=۴۸۰N$$

نیرویی که سطح افقی بر نردبان وارد می‌کند، برایند دو نیروی F_N و $f_{s_{max}}$ است.

از این‌رو:

$$R=\sqrt{F_N^2+f_{s_{max}}^2}\Rightarrow ۱۲۰\times\sqrt{۱۷}=\sqrt{۴۸۰^2+f_{s_{max}}^2}$$

$$\Rightarrow ۱۲۰\times۱۲۰\times۱۷=۴۸۰^2+f_{s_{max}}^2\Rightarrow (۱۲۰)^2\times۱۷=(۱۲۰)^2\times۱۶+f_{s_{max}}^2$$

$$f_{x_{max}}^2=۱۷\times(۱۲۰)^2-۱۶\times(۱۲۰)^2\Rightarrow f_{x_{max}}^2=(۱۲۰)^2\Rightarrow f_{s_{max}}=۱۲۰N$$

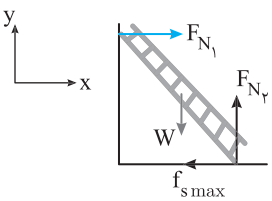
ضریب اصطکاک ایستایی را به‌دست می‌آوریم.

$$f_{s_{max}}=\mu_sF_N\Rightarrow ۱۲۰=\mu_s\times۴۸۰=\mu_s=۰/۲۵$$

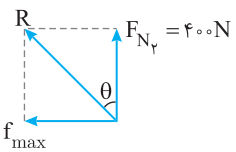
B ۱ ۱۰۳۷

۱ نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم.

۲ نردبان در آستانهٔ لغزیدن است بنابراین نیروی اصطکاک بین نردبان و سطح برابر $f_{s_{max}}$ است.



۳ با توجه به شکل نیروهای وارد بر نردبان توسط سطح زمین را می‌توان نوشت:



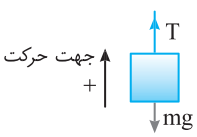
$$\tan\theta=\frac{f_{s_{max}}}{F_{N_2}}=\frac{\mu_sF_{N_2}}{F_{N_2}}=\mu_s$$

$$\tan\theta=\mu_s\xrightarrow{\mu_s=\frac{\sqrt{۳}}{۳}}$$

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow\theta=۳۰^\circ$$

A ۴ ۱۰۳۸

حرکت کندشونده است، اگر جهت حرکت را رو به بالا مثبت بگیریم شتاب منفی و برابر $-۲m/s^2$ می‌شود. نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و برایند نیروها را برابر ma قرار می‌دهیم.



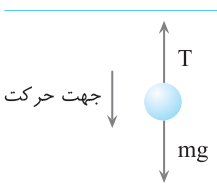
$$F_{net}=ma\Rightarrow T-mg=ma\Rightarrow T-۵۰=۵\times(-۲)\Rightarrow T=۴۰N$$

روش دیگر: جسم دارای حرکت کندشونده رو به بالا است، بنابراین نیروی وزن که رو به پایین است از نیروی کشش نخ که رو به بالاست بزرگ‌تر بوده و سبب کندشدن حرکت می‌شود. بنابراین نیروی کشش نخ را از وزن کم می‌کنیم و شتاب قطعاً مثبت اختیار می‌شود.

$$mg>T\Rightarrow mg-T=ma\Rightarrow ۵۰-T=۵\times۲\Rightarrow T=۴۰N$$

A ۴ ۱۰۳۹

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و نیروی خالص وارد بر جسم را بنا به قانون دوم نیوتون برابر ma قرار می‌دهیم.



$$mg-T=ma\xrightarrow{a=۰/۸g}$$

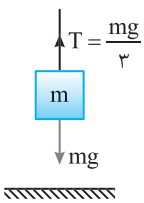
$$mg-T=۰/۸mg\Rightarrow T=۰/۲mg=\frac{۱}{۵}mg$$

A ۱۰۴۰ ۳

خط فکری نیروهای وزن بر جسم (کشش نخ T و نیروی وزن W) را رسم می‌کنیم.

برای سادگی برای به‌دست آوردن نیروی خالص نیروی بزرگ‌تر را منهای نیروی کوچک‌تر می‌کنیم و سپس به کمک قانون دوم نیوتون مسئله را حل می‌کنیم.

در صورت مسئله دقیقاً بیان شده که $T=\frac{1}{3}W$ است. بنابراین خواهیم داشت:



$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-T=ma\xrightarrow{T=\frac{mg}{3}}\frac{2mg}{3}=ma\Rightarrow a=\frac{2g}{3}$$

A ۱۰۴۱ ۱

خط فکری جسم در راستای قائم جابه‌جا می‌شود اما معلوم نیست که بالا می‌رود و یا پایین می‌آید همچنین نوع حرکت مشخص نیست. البته مسئله از ما خواسته است که حالتی که کشش نخ بیشترین مقدار است را مشخص کنیم. تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینهٔ (۱): حرکت تندشونده رو به بالا: در این حالت باید نیروی کشش طناب از وزن شخص بیشتر باشد. $T>mg\Rightarrow T-mg=ma\Rightarrow T=mg+ma$

گزینهٔ (۲): حرکت کندشونده رو به بالا: برای آنکه حرکت رو به بالا کندشونده باشد باید نیروی وزن رو به پایین از نیروی کشش طناب رو به بالا بزرگ‌تر باشد.

$T'<mg\Rightarrow mg-T'=ma\Rightarrow T'=mg-ma$

گزینهٔ (۳): حرکت تندشونده رو به پایین: در این حرکت نیز $T'<mg$ است و نیروی وزن جسم را به پایین می‌آورد و بر سرعت آن می‌افزاید.

گزینهٔ (۴): حرکت با سرعت ثابت: در این حالت نیروها متوازن بوده و $T''=mg$ است. در نتیجه در حالت اول T از همه حالات بیشتر است.

در این تست قدیمی فرض شده در گزینه‌ها بزرگی شتاب یکسان است.

B ۱۰۴۲ ۴

حداکثر تحمل طناب ۴۳۰N و وزن جسم ۴۹۰N و حرکت رو به پایین است. بنابراین: (دقت کنید $g=9/8m/s^2$ است.)

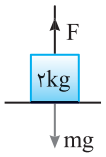


$$mg-T=ma\Rightarrow 490-430=50a$$

$$a=\frac{60}{50}\Rightarrow a=1/2m/s^2$$

B ۱۰۴۳ ۲

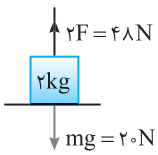
در حالت اول نیرویی که در راستای قائم به طناب وارد می‌شود را F در نظر می‌گیریم.



$$F_{net}=ma\Rightarrow F-mg=ma_1$$

$$\Rightarrow F-20=4\Rightarrow F=24N$$

در حالت دوم نیروی F دو برابر شده پس نیروی رو به بالای وارد بر جعبه $2\times 24=48N$ است.



$$F_{net}=ma_2\Rightarrow 2F-mg=ma$$

$$\Rightarrow 48-20=2a_2\Rightarrow a_2=14m/s^2$$

بنابراین شتاب حرکت از $2m/s^2$ به $14m/s^2$ رسیده و $\frac{a_2}{a_1}=\frac{14}{2}=7$ برابر شده است.

بازی با سوال وزنهٔ m را به‌وسیلهٔ طنابی با شتاب $2m/s^2$ به طور قائم با حرکت تندشونده رو به بالا می‌کشیم. اگر نیروی کشش طناب را دو برابر کنیم، شتاب حرکت چند متر بر مجذور ثانیه افزایش می‌یابد؟ $(g=10N/kg)$ کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۲

پاسخ ابتدا شتاب حرکت $2m/s^2$ است بنابراین:



$$F_{net}=ma\Rightarrow T-mg=ma\Rightarrow T=10m+2m=12m$$

اگر نیروی کشش طناب دو برابر شود $T'=2T=24m$ خواهد شد و داریم:

$$F_{net}=ma'\Rightarrow T'-mg=ma'\Rightarrow 24m-10m=ma'\Rightarrow a'=14m/s^2$$

بنابراین شتاب از $2m/s^2$ به $a=2m/s^2$ رسیده و $a'=14m/s^2$ افزایش یافته است:

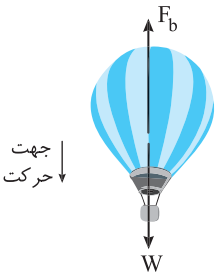
$$(a'-a)=12m/s^2$$

گزینهٔ ۴

C ۱۰۴۴ ۴

خط فکری ابتدا باید نیروی شناوری (F_b) وارد بر بالون را حساب کنید. برای این کار باید نیروهای وارد بر بالون را هنگامی که بالون تندشونده در حال پایین آمدن است را رسم کنید و به کمک قانون دوم نیوتون F_b را حساب کنید. سپس جهت حرکت بالون را رو به بالا در نظر گرفته و نیروی وزن جدید بالون را به‌دست بیاورید.

۱ نیروی شناوری خواهد شد:



$$mg-F_b=ma\xrightarrow{m=200kg}2000-F_b=200\times 2\Rightarrow F_b=1600N$$

۲ در حالت دوم بالون با همین شتاب $2m/s^2$ تندشونده رو با نیروی $F_b=1600N$ به بالا می‌رود، بنابراین می‌نویسیم:

$$F_b-m'g=m'a\Rightarrow 1600-m'\times 10=m'\times 2$$

$$1600=12m'\Rightarrow m'=\frac{1600}{12}\Rightarrow m'=\frac{400}{3}kg$$

۳ کسری از جرم که باید از جرم بالون کاسته شود را حساب می‌کنیم:

$$\frac{m'-m}{m}=\frac{\frac{400}{3}-200}{200}=\frac{-\frac{200}{3}}{200}=-\frac{1}{3}$$

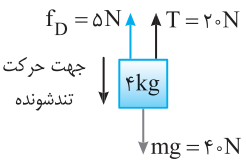
B ۱۰۴۵ ۴

خط فکری جهت حرکت جسم و نوع حرکت مشخص نشده است.

اگر جسم رو به پایین در حرکت باشد، نیروی مقاومت هوا رو به بالا بوده و هم‌جهت T است و اگر جسم رو به بالا در حرکت باشد، نیروی مقاومت هوا رو به پایین و هم‌جهت W خواهد بود. نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده، یک‌بار جسم را با حرکت تندشونده رو به پایین و بار دیگر با حرکت کندشونده رو به بالا مسئله را حل کنید.

نیروهای در جهت حرکت را منهای نیروهای خلاف جهت حرکت کنید در این صورت اگر حرکت تندشونده باشد شتاب مثبت و اگر حرکت کندشونده باشد، شتاب منفی به‌دست می‌آید.

اگر جسم در حال حرکت رو به پایین باشد مقاومت هوا رو به بالا بر جسم وارد می‌شود بنابراین:

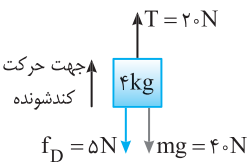


$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-T-f_D=ma$$

$$\Rightarrow 40-20-5=4a\Rightarrow 4a=15$$

$$\Rightarrow a=3/75m/s^2$$

همچنین اگر جسم در حال حرکت کندشونده رو به بالا باشد مقاومت هوا رو به پایین به جسم وارد می‌شود بنابراین:



$$F_{net}=ma\Rightarrow T-mg-f_D=ma$$

$$\Rightarrow 20-40-5=4a$$

$$\Rightarrow a=-6/25m/s^2$$

$$\Rightarrow |a|=6/25m/s^2$$

B ۱۰۴۶ ۴

نکته تا لحظه‌ای که نیروی جلوبر وارد بر یک جسم از نیروهای مقاوم در مقابل حرکت بزرگ‌تر یا مساوی آن باشد، از تندی جسم کاسته نمی‌شود.

تا زمانی که نیروی T از نیروی وزن W بیشتر است تندی در حال افزایش است. با کاهش T نیروی برایند کاهش می‌یابد و تا زمانی که $T=mg=40N$ شود، سرعت در حال افزایش است و در لحظه $T=mg$ سرعت ثابت می‌ماند از این رو اگر نیروی T را از 80N به 40N کاهش دهیم تندی جسم کاهش نمی‌یابد: $\Delta T=80-40=40N$

A ۱۰۴۷ ۱

در حالت اول که به کمک طناب وزنهٔ $۹۰kg$ را بالا می‌بریم، نیروی کشش طناب خواهد شد:



$$T>mg\Rightarrow T_{max}-mg=ma\Rightarrow T_{max}-۹۰۰=۹۰a \quad (I)$$

در حالت دوم می‌خواهیم وزنه $۱۱۰kg$ را پایین ببریم در این حالت حداکثر نیروی کشش طناب با حالت اول برابر است. اما نیروی وزن جسم جدید از نیروی کشش طناب بزرگ‌تر است از این‌رو می‌توانیم بنویسیم:

$$m'g>T\Rightarrow m'g-T_{max}=m'a$$

$$\xrightarrow{m'=۱۱۰kg} ۱۱۰۰-T_{max}=۱۱۰a \quad (II)$$

رابطهٔ (I) و (II) را برهم تقسیم کرده، بیشینه کشش قابل تحمل طناب را حساب می‌کنیم:

$$\frac{T_{max}-۹۰۰}{۱۱۰۰-T_{max}}=\frac{۹}{۱۱}\Rightarrow ۱۱T_{max}-۹۹۰۰=۹۹۰۰-۹T_{max}$$

$$\Rightarrow ۲۰T_{max}=۲\times ۹۹۰۰\Rightarrow T_{max}=۹۹۰\,N$$

در حالت سوم با این طناب، بار را یکنواخت بالا می‌بریم بنابراین جرم بار خواهد شد:

$$F_{net}=ma\Rightarrow T_{max}=m''g\Rightarrow ۹۹۰=m''\times ۱۰\Rightarrow m''=۹۹\,kg$$

A ۱۰۴۸ ۱

۱ زمان داده شده بنابراین باید به کمک روابط حرکت‌شناسی شتاب حرکت جسم را حساب کنیم:

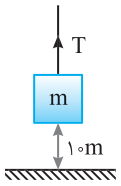
$$a=\frac{v-v_۰}{t}\xrightarrow[v_۰=۰]{t=۴s,\,v=۱۰m/s} a=\frac{۱۰-۰}{۴}\Rightarrow a=۲/۵m/s^۲$$

۲ نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده سپس به کمک قانون دوم نیوتون نیروی کششی را به‌دست می‌آوریم:



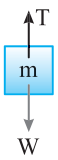
$$F_{net}=ma\Rightarrow T-mg=ma\Rightarrow T-۲۰=۵\Rightarrow T=۲۵N$$

بازی با سؤال **در شکل روبه‌رو در لحظهٔ نشان داده شده جسم ساکن است، نیروی کشش T را کاهش می‌دهیم تا برابر نصف نیروی وزن شود، تندی جسم هنگام رسیدن به زمین چند m/s است؟ $(g=۱۰N/kg)$**



۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

پاسخ **خط فکری** **در ابتدا جسم ساکن و نیروی کشش نخ برابر نیروی وزن است $T=mg$ وقتی کشش را کاهش دهیم تا $T'=\frac{mg}{۲}$ جسم شروع به حرکت رو به پایین می‌کند.**



ابتدا با توجه به قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow T'-mg=ma\Rightarrow \frac{mg}{۲}-mg=ma\Rightarrow a=-\frac{g}{۲}=-۵m/s^۲$$

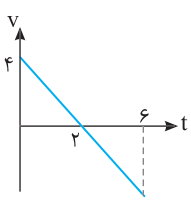
تندی جسم را هنگام رسیدن به زمین از رابطهٔ مستقل از زمان به دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta y\Rightarrow v^۲=۲\times(۵)(۱۰)\Rightarrow v^۲=۱۰۰\Rightarrow v=۱۰m/s$$

گزینهٔ ۲

B ۱۰۴۹ ۲

دقت کنید که در تمام مدت حرکت شتاب حرکت ثابت است بنابراین در تمام مدت حرکت نیروی خالص وارد بر جسم ثابت بوده و با توجه به ثابت بودن نیروی وزن، باید نیروی کشش طناب نیز ثابت باشد. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

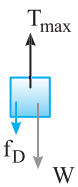


A ۱۰۵۰ ۳

خط فکری حداقل زمان وقتی است که شتاب بالا بردن جسم بیشینه مقدار باشد. در این صورت باید نیروی کشش نخ بیشترین مقدار یعنی برابر $۱۰N$ باشد. با توجه به این موضوع شتاب حرکت جسم را به دست آورده سپس به کمک روابط حرکت‌شناسی حداقل زمان را حساب کنید.

نیروهای وارد بر وزنه را رسم می‌کنیم:

۱ جرم جسم را به‌دست می‌آوریم:



$$W=mg\Rightarrow ۵=m\times ۱۰\Rightarrow m=۰/۵kg$$

۲ به کمک قانون دوم نیوتون شتاب را حساب می‌کنیم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow T_{max}-W-f_D=ma$$

$$\Rightarrow ۱۰-۵-۱=۰/۵a\Rightarrow a=۸m/s^۲$$

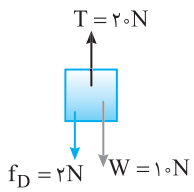
۳

$$\Delta y=\frac{۱}{۲}at^۲\Rightarrow ۱۶=\frac{۱}{۲}\times ۸t^۲\Rightarrow t^۲=۴\Rightarrow t=۲s$$

بازی با سؤال **به نخی که می‌تواند حداکثر نیروی کشش $۲۰N$ را تحمل کند، وزنهٔ $۱۰N$ آویزان است. مقاومت هوا در مقابل حرکت وزنه به طور متوسط ۲ نیوتون است. حداکثر ارتفاعی که در مدت $۱s$ آغازین حرکت می‌توان وزنه را بالا برد، چند متر است؟ $(g=۱۰N/kg)$**

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۱/۵

پاسخ ۱ **شکل ساده‌ای از مسئله به همراه نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.**



۲ **ابتدا جرم وزنه را حساب می‌کنیم:**

$$W=mg\Rightarrow ۱۰=m\times ۱۰\Rightarrow m=۱kg$$

۳ **به کمک قانون دوم نیوتون شتاب حرکت وزنه‌ها را به‌دست می‌آوریم:**

$$F_{net}=ma\Rightarrow T-(f_D+W)=ma\Rightarrow ۲۰-(۱۰+۲)=۱a\Rightarrow a=۸m/s^۲$$

۴ **در مسئله زمان داده شده بنابراین به سراغ روابط حرکت‌شناسی می‌رویم.**

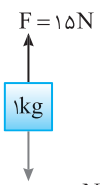
$$\Delta y=\frac{۱}{۲}at^۲\Rightarrow h=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۱\Rightarrow h=۴m$$

گزینهٔ ۲

C ۱۰۵۱ ۳

خط فکری جسم را با نیروی $F=۱۵N$ رو به بالا برده‌ایم، سپس این نیرو را حذف کرده‌ایم. مشکل خیلی از دانش‌آموزان از اینجا شروع می‌شود. زیرا تصور می‌کنند که با حذف نیروی F جسم دیگر بالا نمی‌رود در حالی که جسم در مدت $۳s$ سرعت پیدا کرده و وقتی F حذف می‌شود، به دلیل قانون اول نیوتون جسم تمایل دارد وضع موجود خود یعنی حرکت رو به بالا را ادامه دهد. به همین دلیل به بالا رفتن ادامه می‌دهد اما تحت تأثیر نیروی وزن از سرعتش کاسته شده و سرانجام متوقف می‌گردد و به سوی زمین بر می‌گردد. شما یک بار جابه‌جایی در حرکت تندشونده اول مسیر و بار دیگر جابه‌جایی پس از حذف F تا لحظهٔ توقف را باید حساب کرده باهم جمع کنید.

۱ شتاب حرکت جسم با حضور نیروی $F=۱۵N$ را حساب می‌کنیم.



$$F_{net}=ma\Rightarrow F-mg=ma\Rightarrow ۱۵-۱۰=a$$

$$\Rightarrow a=۵m/s^۲$$

۲ جابه‌جایی جسم در مدت $۳s$ خواهد شد:

$$\Delta y_۱=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow \Delta y_۱=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۹=۲۲/۵m$$

۳ تندی جسم در پایان این $۳s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=۳\times ۵\Rightarrow v=۱۵m/s$$

۴ با حذف نیروی F تنها نیروی مؤثر وارد بر جسم نیروی وزن است بنابراین شتاب قسمت کندشونده خواهد شد:

$$F_{net}=ma\Rightarrow ۰-mg=ma\Rightarrow a=-۱۰m/s^۲$$

۵ در ابتدای حذف F، سرعت جسم $۱۵m/s$ است بنابراین به کمک رابطهٔ مستقل از زمان مقدار بالا رفتن جسم را به‌دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta y\Rightarrow ۰-۱۵^۲=۲(-۱۰)\Delta y_۲\Rightarrow \Delta y_۲=۱۱/۲۵m$$

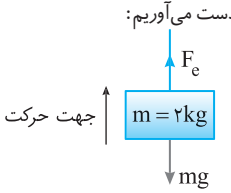
۶ حداکثر ارتفاع بالا رفتن جسم برابر است با:

$$\Delta y_{کل}=\Delta y_۱+\Delta y_۲=۲۲/۵+۱۱/۲۵=۳۳/۷۵m$$

۳ ۱۰۵۲ A

بر جسم نیروهای وزن $W=mg$ و نیروی کشسانی فنر $F_e=k\Delta x$ وارد می‌شود.

با توجه به قانون دوم نیوتون نیروی کشسانی فنر را به‌دست می‌آوریم:



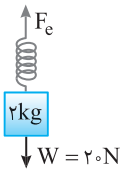
$$F_{net}=ma\Rightarrow F_e-mg=ma$$
$$\Rightarrow F_e-۲۰=۴\Rightarrow F_e=۲۴N$$

تغییر طول فنر را حساب می‌کنیم:

$$F_e=k\Delta x \xrightarrow{k=۴۰۰N/m} ۲۴=۴۰۰\Delta x$$
$$\Rightarrow \Delta x=۰/۰۶m\Rightarrow \Delta x=۶cm$$

۲ ۱۰۵۳ B

۱ دوباره حضور حرکت‌شناسی در مسئله را می‌بینید. باید ابتدا با مقایسهٔ معادلهٔ سرعت زمان مسئله $v=۴t+۲$ با معادلهٔ سرعت زمان حرکت با شتاب ثابت شتاب حرکت را به‌دست بیاورید.



$$v=at+v_۰\ ,\ v=۴t+۲\Rightarrow a=۴m/s^۲$$

۲ شکل ساده‌ای به همراه نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.

۳ قانون دوم نیوتون را نوشته و نیروی کشسانی فنر را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F_e-W=ma \xrightarrow{m=۲kg} F_e-۲\times۱۰=۲\times۴\Rightarrow F_e=۲۸N$$

۴ تغییر طول فنر را حساب می‌کنیم:

$$F_e=kx \xrightarrow{k=۲N/cm=۲۰۰N/m} ۲۸=۲۰۰x\Rightarrow x=۰/۱۴m\Rightarrow x=۱۴cm$$

بازی با سؤال **جسمی به جرم $۲kg$ تحت تأثیر نیروی T رو به بالا در حرکت است و معادلهٔ سرعت - زمان آن $v=۴t+۱۰$ است. نیروی T چند نیوتون می‌باشد؟** $(g=۱۰N/kg)$

۱) ۱۲ ۲) ۲۸ ۳) ۱۵ ۴) ۳۵

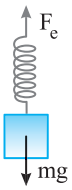
پاسخ **معادلهٔ سرعت - زمان حرکت با شتاب ثابت برابر $v=at+v_۰$ است، بنابراین شتاب این حرکت $۴m/s^۲$ می‌باشد.**

گزینهٔ ۲ $F_{net}=ma\Rightarrow T-mg=ma\Rightarrow T-۲۰=۸\Rightarrow T=۲۸N$

۳ ۱۰۵۴ B

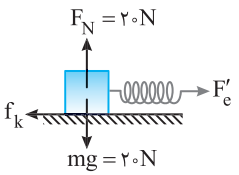
خط فکری ابتدا با نوشتن تعادل در راستای قائم ضریب سختی فنر را به‌دست می‌آوریم. سپس با نوشتن معادلهٔ تعادل افقی مقدار نیروی اصطکاک و درنهایت ضریب اصطکاک جنبشی به دست می‌آید. در مراحل زیر محاسبات لازم را انجام می‌دهیم.

۱ در حالت اول به جسم نیروی کشش فنر به سمت بالا و نیروی وزن به سمت پایین وارد می‌شود:



$$F_{net}=ma\Rightarrow F_e-mg=ma\Rightarrow k\Delta x-mg=ma$$
$$\Rightarrow k\left(\frac{۴۲}{۱۰۰}-\frac{۳۰}{۱۰۰}\right)-۲۰=۲\times۲\Rightarrow k=۲۰۰N/m$$

۲ در حالت دوم نیروی کشش فنر در جهت حرکت و نیروی اصطکاک خلاف جهت به جسم وارد می‌شود:

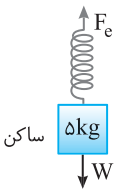


$$F_{net}=ma\Rightarrow F'_e-f_k=ma'$$
$$\Rightarrow k\Delta x'-f_k=ma'$$
$$\Rightarrow ۲۰۰\times\left(\frac{۶}{۱۰۰}\right)-f_k=۲\times۲\Rightarrow f_k=۸N$$

۳ نیروی اصطکاک برابر است با: $f_k=\mu_k F_N\Rightarrow ۸=\mu_k(۲۰)\Rightarrow \mu_k=۰/۴$

۳ ۱۰۵۵ B

۱ در حالت اول جسم در حال تعادل است، بنابراین نیروی کشسانی فنر و نیروی وزن وارد بر وزنه متوازن هستند.

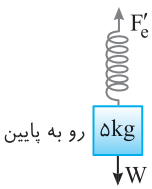


$$F_e=W\Rightarrow F_e=۵\times۱۰\Rightarrow F_e=۵۰N$$

۲ ثابت فنر را حساب می‌کنیم:

$$F_e=kx \xrightarrow{x=۰/۰۵m} ۵۰=k(۰/۰۵)$$
$$\Rightarrow k=۱۰۰۰N/m$$

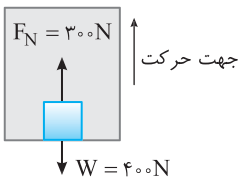
۳ در حالت دوم وزنه را با شتاب $۳m/s^۲$ پایین می‌آوریم، در این حالت $mg>F_e$ است و بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:



$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F'_e=ma$$
$$\Rightarrow ۵۰-kx'=۵\times۳$$
$$۵۰-۱۰۰۰x'=۱۵\Rightarrow ۱۰۰۰x'=۳۵$$
$$\Rightarrow x'=\frac{۳۵}{۱۰۰۰}m\Rightarrow x'=۳/۵cm$$

۳ ۱۰۵۶ A

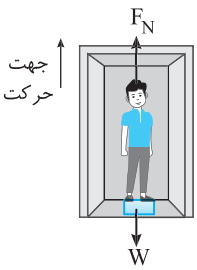
دقت کنید وزن جسم $۴۰۰N$ است اما نیرویی که جسم به کف آسانسور وارد می‌کند $۴۰۰N$ نیست. با توجه به اینکه سطح کف آسانسور بر جسم نیروی $۳۰۰N$ وارد کرده است بنا به قانون سوم نیوتون جسم نیز نیرویی برابر آن و در خلاف جهت به کف آسانسور یعنی نیروی $۳۰۰N$ را وارد می‌کند.



اما چگونه این حالت ممکن است؟ جسم در حال حرکت رو به بالاست و اگر حرکت آسانسور کندشونده باشد، نیروی رو به بالا (F_N) از نیروی رو به پایین (W) کوچک‌تر است.

۴ ۱۰۵۷ B

بر شخص درون آسانسور دو نیروی وزن W و عمودی سطح F_N وارد می‌شود. نیروی F_N توسط کف آسانسور بر شخص وارد می‌شود، پس بنابر قانون سوم نیوتون، شخص نیز بر کف نیرویی برابر F_N رو به پایین وارد می‌کند. F_N را در حالت‌های مختلف بررسی می‌کنیم. اگر سرعت آسانسور ثابت باشد، $F_N=W$ است.



اگر با حرکت تندشونده بالا برود، $F_N>W$ است و اگر با حرکت کندشونده بالا رود، $F_N<W$ است. بنابراین نیرویی که شخص بر کف وارد می‌کند می‌تواند برابر، کمتر یا بیشتر از وزن مشخص باشد.

بازی با سؤال **شخصی به جرم m درون آسانسوری که حرکت شتابدار دارد ایستاده است و آسانسور به طرف بالا حرکت می‌کند، نیرویی که کف آسانسور به شخصی وارد می‌کند را F می‌نامیم. کدام گزینه درست است؟**

۱) الزاماً $F=۰$

۲) الزاماً $F<mg$

۳) الزاماً $F>mg$

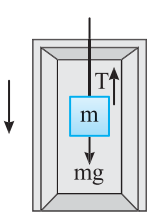
۴) بسته به حرکت آسانسور، هر سه گزینه می‌تواند باشد.

پاسخ **جهت حرکت جسم رو به بالا است. اما نوع حرکت مشخص نیست اگر حرکت تندشونده باشد $F>W$ است، اگر حرکت کندشونده باشد $F<W$ است و اگر جسم با حرکت کندشونده با شتاب g رو به بالا حرکت کند، نیروی $F=۰$ خواهد بود.**

گزینهٔ ٤

۳ ۱۰۵۸ B

خط فکری در حرکت آسانسور، قانون دوم نیوتون به صورت زیر نوشته می‌شود:



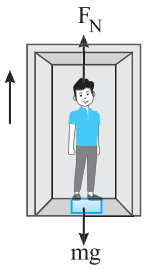
$$\begin{bmatrix}\text{نیروی در}\\ \text{جهت حرکت}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\text{نیروی خلاف}\\ \text{جهت حرکت}\end{bmatrix}=m\,(\pm a)$$

حرکت تندشونده ↗ ↘ حرکت کندشونده

به طور مثال اگر آسانسور پایین بیاید: $mg-T=m(\pm a)$

نکته عددی که باسکول نشان می‌دهد برابر نیروی عمودی سطحی است که به شخص وارد می‌شود.

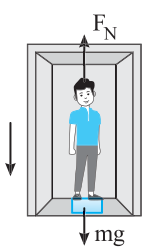
۱ اگر آسانسور به سمت بالا در حال حرکت باشد، نیروی در جهت حرکت F_N و نیرو خلاف جهت حرکت mg است.



$$F_{net}=ma\Rightarrow F_N-mg=m(\pm a)$$
$$\Rightarrow F_N=mg+m(\pm a)$$

برای آن‌که $F_N>mg$ باشد باید a مثبت باشد تا با mg جمع شود پس طبق خط فکری در حرکت به سمت بالا، حرکت تندشونده است.

۲ اگر آسانسور به سمت پایین در حال حرکت باشد، نیرو در خلاف جهت حرکت F_N و نیروی در جهت حرکت mg است:



$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_N=m(\pm a)$$
$$\Rightarrow F_N=mg-m(\pm a)$$

برای آن‌که $F_N>mg$ باشد باید a منفی باشد تا mg از یک عدد منفی کم شود:

$$F_N=mg-m(-a)\xrightarrow{\text{منفی در منفی، مثبت می‌شود}}F_N=mg+ma$$

پس در حرکت به سمت پایین باید حرکت کندشونده $(a<0)$ باشد.

بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

میانبر اگر در آسانسور دو نیرو، یکی در جهت حرکت و دیگری خلاف جهت حرکت به جسم وارد شود:

- حرکت تندشونده روبه بالا یا کندشونده رو به پایین:

نیرو خلاف جهت حرکت > نیرو در جهت حرکت

- حرکت تندشونده روبه پایین یا کندشونده رو به بالا:

نیرو خلاف جهت حرکت < نیرو در جهت حرکت

۴ ۱۰۵۹ B

یادآوری در حرکت شتابدار آسانسور با شتاب ثابت چهار حالت وجود دارد که دو حالت آن‌ها معادل هم هستند.

۱ حرکت تندشونده رو به بالا، با حرکت کندشونده رو به پایین با همان شتاب معادل است. زیرا در این دو حالت نیروی بالابر وارد بر جسم (F_N) از نیروی وزن جسم (W) بزرگتر است و در هر دو حالت می‌توان نوشت: $F_N-W=ma\Rightarrow F_N=mg+ma$

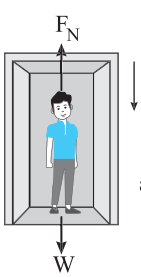
۲ حرکت تندشونده رو به پایین با حرکت کندشونده رو به بالا با همان شتاب معادل است. در این دو حالت یکسان، نیروی F_N از W کوچکتر است و در دو حالت خواهیم داشت: $W-F_N=ma\Rightarrow F_N=mg-ma$

بنابراین حرکت تندشونده رو به بالا با شتاب $3m/s^2$ با حرکت کندشونده رو به پایین با شتاب $3m/s^2$ معادل است و در هر دو حالت نیروی وارد بر جسم توسط کف آسانسور یکسان است و بنا به قانون سوم نیوتون نیرویی که جسم بر تکیه‌گاه وارد می‌کند نیز برابر (F) است.

۴ ۱۰۶۰ A

خط فکری به جای نیروی شخص وارد بر آسانسور ابتدا نیرویی که آسانسور رو به بالا به شخص وارد می‌کند را حساب کنید.

حرکت تندشونده رو به پایین است از این‌رو $F_N<W$ خواهد بود، نیروهای وارد بر شخص را رسم کرده به کمک قانون دوم نیوتون نیرویی که کف آسانسور بر شخص (F_N) وارد می‌کند را حساب می‌کنیم.



$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_N=ma$$
$$\Rightarrow 800-F_N=80\times 2\Rightarrow F_N=640N$$

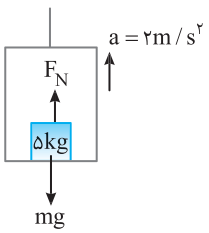
آسانسور بر شخص نیروی $640N$ را رو به بالا وارد می‌کند. بنا به قانون سوم نیوتون شخص نیز بر کف آسانسور نیروی $640N$ را رو به پایین وارد می‌کند.

۳ ۱۰۶۱ B

خط فکری در حرکت آسانسور که به جسم دو نیروی عمودی سطح F_N و نیروی وزن mg وارد می‌شود برای محاسبهٔ برایند نیروها (F_{net}) باید نیروی در جهت حرکت را از نیروی خلاف جهت حرکت کم کرد:

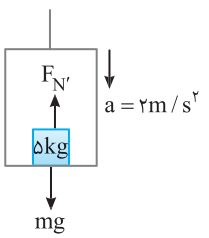
$$F_{net}=ma\Rightarrow\begin{cases}a>0 & \text{حرکت تندشونده}\\ a<0 & \text{حرکت کندشونده}\end{cases}$$
$$\downarrow$$
نیروی خلاف جهت حرکت - نیروی در جهت حرکت

در حالت اول داریم:



$$F_{net}=ma\xrightarrow{\text{جسم رو به بالا حرکت می‌کند}}$$
$$F_N-mg=ma\Rightarrow F_N-50=10\Rightarrow F_N=60N$$

در حالت دوم داریم:



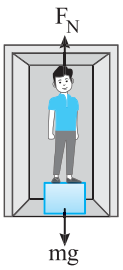
$$F_{net}=ma\xrightarrow{\text{جسم رو به پایین حرکت می‌کند}}$$
$$mg-F_{N'}=ma\Rightarrow 50-F_{N'}=10\Rightarrow F_{N'}=40N$$

اختلاف نیروی عمودی سطح برابر است با:

$$F_N-F_{N'}=60-40=20N$$

میانبر هرگاه آسانسور یکبار با شتاب a رو به بالا و بار دیگر با همان شتاب رو به پایین حرکت کند اختلاف نیروی عمودی سطح برابر $2mg$ است (البته باید نوع حرکت (تندشونده یا کندشونده در دو حالت یکسان باشد).

۱ ۱۰۶۲ B



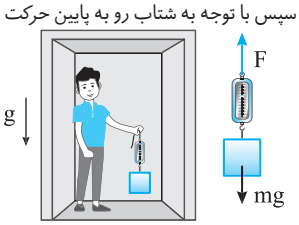
نیرویی که ترازو نشان می‌دهد همان نیروی عمودی سطح است که توسط ترازو بر شخص وارد می‌شود. شتاب حرکت را با قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_N=ma\Rightarrow 600-480=60a$$
$$\Rightarrow a=2m/s^2$$

بنابراین گزینهٔ (۳) و (۴) که در آن‌ها شتاب $\frac{1}{2}m/s^2$ است نادرست هستند. اما بین گزینهٔ (۱) و (۲) چون نیروی وزن رو به پایین $(600N)$ از نیروی عمودی سطح $(480N)$ بزرگتر بوده بنابراین نیروی خالص وارد بر شخص رو به پایین است. بنا به قانون دوم نیوتون همواره جهت شتاب در جهت نیروی خالص است از این‌رو جهت شتاب نیرو رو به پایین است.

۴ ۱۰۶۳ A

خط فکری سؤال زیبایی است. ابتدا فرض کنید که بر جسم دو نیرو یکی وزن و دیگری نیرو کشسانی نیروسنج وارد می‌شود. سپس با توجه به شتاب رو به پایین حرکت آسانسور نیروی نیروسنج را حساب کنید.



با توجه به نیروهای وارد بر جسم:

$$F_{net}=ma\xrightarrow{a=g}$$
$$mg-F=m(g)\Rightarrow F=0$$

بنابراین نیروسنج صفر را نشان می‌دهد. این وضعیت را حالت بی‌وزنی گویند. در حالت بی‌وزنی تنها نیروی مؤثر وارد بر جسم نیروی وزن بوده و شتاب جسم برابر شتاب گرانش g است. البته به آن حالت بی وزنی می‌گویند زیرا وزن جسم صفر نیست و جسم، شخص و آسانسور تحت تأثیر نیروی وزن در حال حرکت رو به پایین هستند.

۴ ۱۰۶۴ A

بنا به تعریف فشار $P=F_N/A$، باید نیروی عمودی کف سطل را حساب کنیم. هنگام سقوط آزاد سطل، سطل با شتاب گرانش به پایین می‌آید.

$$mg-F_N=ma\xrightarrow{a=g}mg-F_N=mg\Rightarrow F_N=0$$

بنابراین فشار وارد بر کف سطل صفر است.

۱ ۱۰۶۵ A

وقتی کابل پاره می‌شود، تنها نیروی وارد بر شخص نیروی وزن است که در این حالت نیروسنج بر شخص و شخص بر نیروسنج نیرو وارد نمی‌کند و عددی که نیروسنج نمایش می‌دهد عدد صفر است.

۳ ۱۰۶۶ B

در حالت اول آسانسور با تندی ثابت در حال حرکت است پس نیروهای وارد بر جسم متوازن است و نیروی کشش کابل با مجموع نیروی وزن آسانسور و شخص برابر است.

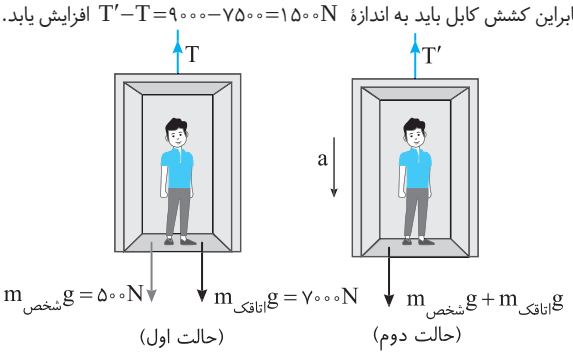
$$T = m_{\text{شخص}}g + m_{\text{اتاقک}}g = ۷۵۰۰\,N$$

در حالت دوم می‌خواهیم آسانسور با شتاب $۲m/s^۲$ کندشونده رو به پایین حرکت کند در این حالت:

$$F_{net} = ma \xrightarrow{T' > W} T' - (m_{\text{شخص}}g + m_{\text{اتاقک}}g) = m_{\text{کل}}a$$

$$T' - ۷۵۰۰ = ۷۵۰ \times ۲ \Rightarrow T' = ۹۰۰۰\,N$$

بنابراین کشش کابل باید به اندازهٔ $T' - T = ۹۰۰۰ - ۷۵۰۰ = ۱۵۰۰\,N$ افزایش یابد.

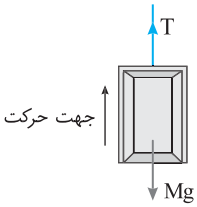


در حل مسائل آسانسور می‌توان این‌گونه عمل کرد که با توجه به جهت حرکت آسانسور و نوع حرکت آن نیروی بزرگتر را تشخیص داده و نیروی بزرگتر را منهای نیروی کوچکتر کرده و شتاب را به‌دست آورد. در این حالت همواره شتاب مثبت خواهد بود.

روش دیگر این‌گونه است که نیروهای در جهت حرکت را منهای نیروهای خلاف جهت حرکت می‌کنیم. اگر حرکت تندشونده باشد شتاب را مثبت و اگر حرکت کندشونده باشد شتاب را منفی قرار می‌دهیم. به‌طور مثال در حل این مسئله آسانسور رو به پایین در حرکت است نیرویی در جهت حرکت وزن و خلاف آن کشش کابل است و چون حرکت کندشونده است شتاب نیز منفی است بنابراین می‌توان نوشت: $mg - T' = ma \Rightarrow ۷۵۰۰ - T' = ۷۵۰(-۲) \Rightarrow T' = ۹۰۰۰\,N$

۴ ۱۰۶۷ B

۱ در حالت اول آسانسور در حال بالا رفتن است بنابراین:



$$F_{net} = Ma \Rightarrow T - Mg = Ma$$

$$\Rightarrow T = M(a+g)$$

۲ در حالت دوم آسانسور در حال پایین آمدن است بنابراین:

$$F_{net} = ma \Rightarrow Mg - T' = Ma \Rightarrow T' = M(g-a)$$

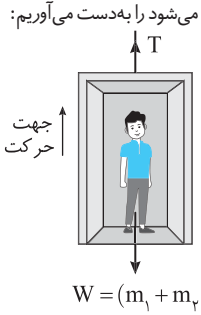
۳ با توجه به صورت سؤال $\frac{T}{T'} = ۱/۵$ است:

$$\frac{T}{T'} = \frac{M(a+g)}{M(g-a)} = ۱/۵ \Rightarrow \frac{a+g}{g-a} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲a + ۲g = ۳g - ۳a \Rightarrow ۵a = g \Rightarrow a = \frac{g}{۵}$$

۱ ۱۰۶۸ B

خط فکری ابتدا کل آسانسور را یک جسم فرض می‌کنیم که توسط نیروی کشش کابل به حرکت درآمده است و شتاب حرکت را حساب می‌کنیم سپس نیروهای وارد بر شخص را رسم کرده و نیروی F_N که از کف آسانسور به شخص وارد می‌شود را به‌دست می‌آوریم:

۱ شتاب حرکت آسانسور را حساب می‌کنیم:



$$F_{net} = ma$$

$$\Rightarrow T - (m_۱ + m_۲)g = (m_۱ + m_۲)a$$

$$\xrightarrow[T=۲۲۰۰\,N]{m_۱=۶۰\,kg,\ m_۲=۱۴۰\,kg}$$

$$۲۲۰۰ - (۶۰+۱۴۰) \times ۱۰ = (۶۰+۱۴۰) \times a$$

$$\Rightarrow a = ۱\,m/s^۲$$

۲ نیرویی که کف آسانسور بر شخص وارد می‌کند را به‌دست می‌آوریم:



$$F_{net} = ma \Rightarrow F_N - m_۱g = m_۱a$$

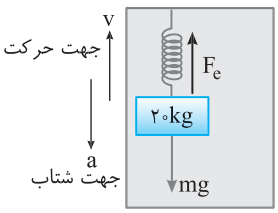
$$\Rightarrow F_N - ۶۰۰ = ۶۰ \times ۱ \Rightarrow F_N = ۶۶۰\,N$$

۳ بنا به قانون سوم نیوتون، نیرویی که شخص بر کف آسانسور وارد می‌کند، هم‌اندازه و هم‌جهت با F_N است یعنی ۴۴۰N و رو به پایین و خلاف جهت محور yهاست:

$$\vec{F} = -۶۶۰\,\vec{j}$$

۲ ۱۰۶۹ A

جسم رو به بالا دارای حرکت کندشونده است بنابراین نیروی کشسانی فنر وارد بر وزنه از نیروی وزن جسم کمتر است.



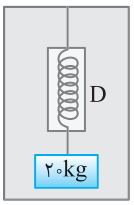
$$F_e < W \Rightarrow mg - F_e = ma$$

$$\Rightarrow ۲۰۰ - F_e = ۲۰ \times ۲/۵ \Rightarrow F_e = ۱۵۰\,N$$

روش دیگر: نیروی در جهت حرکت را منهای نیروی خلاف جهت حرکت کرده، نیروی خالص را به‌دست می‌آوریم:

$$F - mg = ma \xrightarrow[a=-۲/۵\,m/s^۲]{\text{حرکت کندشونده}} F - ۲۰ \times ۱۰ = ۲۰ \times (-۲/۵) \Rightarrow F = ۱۵۰\,N$$

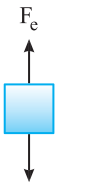
بازی با سوال شکل روبه‌رو اتاقک آسانسوری را نشان می‌دهد که در یک فاصلهٔ زمانی کوتاه، تندشونده با شتاب $۲/۵m/s^۲$ رو به بالا در حال حرکت است. نیروسنج D در این حالت چند نیوتون را نشان می‌دهد؟ $(g = ۱۰\,N/kg)$



۱) ۵۰ ۲) ۱۵۰

۳) ۲۰۰ ۴) ۲۵۰

پاسخ نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و به کمک قانون دوم نیوتون عددی که نیروسنج نشان می‌دهد را به دست می‌آوریم:



$$F_e - mg = ma \Rightarrow F_e - ۲۰۰ = ۲۰ \times ۲/۵ \Rightarrow F_e = ۲۵۰\,N$$

گزینهٔ ۴

۳ ۱۰۷۰ A

در حال سکون، نیروسنج وزن وزنه را نشان می‌دهد.

$$W = F_e = ۸\,N \Rightarrow mg = ۸ \Rightarrow m = ۰/۸\,kg$$

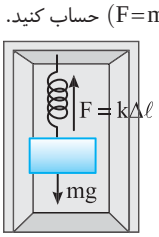
با شروع حرکت آسانسور رو به پایین خواهیم داشت:

$$F_{net} = ma \Rightarrow W - F_e = ma \Rightarrow ۸ - F_e = ۰/۸ \times ۲/۵ \Rightarrow F_e = ۶\,N$$

۲ ۱۰۷۱ A

خط فکری نیروهای وارد بر وزنه را رسم کنید. (نیروی وزن و نیروی کشسانی فنر) سپس نیروی خالص وارد بر وزنه را بنا به قانون دوم نیوتون $(F = ma)$ حساب کنید.

۱ هنگام بالا رفتن آسانسور با شتاب تندشونده نیروی کشسانی فنر $F_۱$ از نیروی وزن (mg) بزرگتر است و بنا به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:



$$F_۱ > mg \Rightarrow F_۱ - mg = ma \Rightarrow F_۱ - mg = m \times ۲$$

$$\Rightarrow F_۱ = ۱۲m \quad (۱)$$

۲ هنگام پایین آمدن آسانسور با شتاب تندشونده نیروی وزن (mg) از نیروی کشسانی فنر $F_۲$ بزرگتر است بنابراین می‌توان نوشت:

$$F_۲ < mg \Rightarrow mg - F_۲ = ma \Rightarrow mg - F_۲ = m \times ۲ \Rightarrow F_۲ = ۸m \quad (۲)$$

اکنون نسبت $\frac{F_۲}{F_۱}$ را به‌دست می‌آوریم:

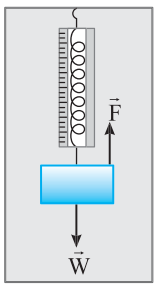
$$\frac{F_۲}{F_۱}=\frac{۸m}{۱۲m}=\frac{۲}{۳}$$

میانبر تغییر البته بدون حل با توجه به اینکه $F_۱>mg$ و $F_۲<mg$ است قطعاً $F_۱>F_۲$ بوده و تنها نسبت کوچک‌تر از ۱، گزینهٔ (۲) است و می‌توان گزینهٔ درست را انتخاب کرد.

بازی با سؤال **جسمی به انتهای نیروسنجی درون یک آسانسور آویزان است. تفاوت نیروی کشسانی فنر وقتی آسانسور با شتاب $۰/۴m/s^۲$ با حرکت تندشونده بالا می‌رود و هنگامی‌که با سرعت ثابت $۲m/s$ پایین می‌آید، برابر $۱N$ است. جرم این جسم چند کیلوگرم است؟**

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۵ ۴) ۰/۸

پاسخ **عددی که نیروسنج نشان می‌دهد برابر نیروی کشسانی فنر نیروسنج است.**



۱ **هنگامی‌که آسانسور تندشونده بالا می‌رود:**

$$F>W\Rightarrow F-mg=ma\Rightarrow F=mg+ma \quad (۱)$$

۲ **هنگامی‌که آسانسور با سرعت ثابت پایین می‌آید:**

$$F_{net}=۰\Rightarrow F'=mg \quad (۲)$$

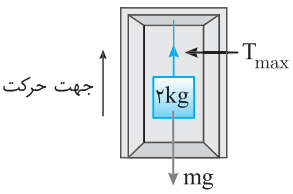
۳ **با توجه به رابطهٔ (۱) و (۲):**

$$F-F'=۱\Rightarrow mg+ma-mg=۱\Rightarrow m(۰/۴)=۱\Rightarrow m=۲/۵kg$$

گزینهٔ ۲

A ۱۰۷۲ ۴

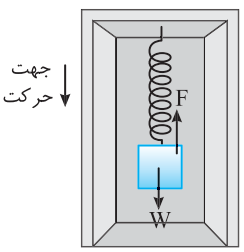
بیشینهٔ شتاب زمانی اتفاق می‌افتد که کشش طناب بیشینه باشد. نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و به کمک قانون دوم نیوتون شتاب را حساب می‌کنیم.



$$T_{max}-mg=ma_{max}\Rightarrow ۲۵-۲۰=۲a_{max}\Rightarrow a_{max}=۲/۵m/s^۲$$

B ۱۰۷۳ ۱

آسانسور از حال سکون رو به پایین شروع به حرکت می‌کند. نیروهای وارد بر وزنه را رسم می‌کنیم. بر وزنه دو نیرو وارد می‌شود: (۱) وزن رو به پایین (۲) نیروی کشسانی فنر رو به بالا بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:



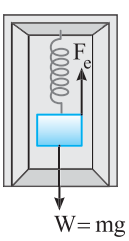
$$F_{net}=ma\Rightarrow W-F=ma\Rightarrow mg-kx=ma$$

$$\xrightarrow[k=۲۰۰N/m\,,\,a=۱m/s^۲]{x=۳۵-۲۶=۹cm} m\times ۱۰-۲۰۰\times\frac{۹}{۱۰۰}=m\times ۱$$

$$\Rightarrow ۱۰m-m=۱۸\Rightarrow ۹m=۱۸\Rightarrow m=۲kg$$

B ۱۰۷۴ ۴

۱ مطابق شکل روبه‌رو، در یک شکل ساده نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:

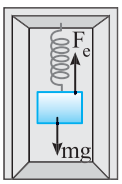


نکته در استفاده از قانون دوم نیوتون به نکات زیر دقت کنید:

$$F_{net}=ma\Rightarrow\begin{cases}a>۰: \text{حرکت تندشونده}\\ a<۰: \text{حرکت کندشونده}\end{cases}$$

$F_{net}=$ نیرو خلاف جهت حرکت $-$ نیرو در جهت حرکت

۲ آسانسور در حال حرکت به سمت بالا و در حال ترمز بوده $(a=-۲m/s^۲)$ است، با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:



$$F_{net}=ma$$

$$\xrightarrow[a=-۲m/s^۲]{F_{net}=\text{نیرو خلاف جهت حرکت}-\text{نیرو در جهت حرکت}} F_e-mg=ma\xrightarrow[m=۰/۸kg]{mg=۸N}$$

$$F_e-۸=۰/۸\times(-۲)\Rightarrow F_e-۸=-۱/۶\Rightarrow F_e=۶/۴N$$

یادآوری نیروی فنر برابر $F_e=k\Delta x$ است:

$$F_e=k\Delta x$$

نکته در رابطهٔ $F_e=k\Delta x$ اگر یکای ثابت فنر N/m باشد، تغییر طول فنر نیز برحسب m قرار می‌گیرد و اگر ثابت فنر برحسب N/cm داده شد می‌توان یکای تغییر طول فنر را نیز cm قرار داد.

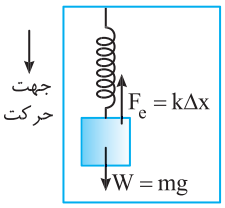
$$۶/۴=۲\times\Delta x\Rightarrow\Delta x=۳/۲cm$$

نیروی وزن (mg) فنر را به سمت پایین می‌کشد و بزرگی شتاب حرکت $۲m/s^۲$ بوده و از $g=۱۰m/s^۲$ کمتر است پس فنر کشیده خواهد شد:

$$x_۲-x_۱=۳/۲\xrightarrow{x_۱=۲۰cm}x_۲-۲۰=۳/۲\Rightarrow x_۲=۲۳/۲cm$$

B ۱۰۷۵ ۳

نکته شتاب حرکت رو به پایین است. در این صورت اگر حرکت آسانسور نیز رو به پایین باشد حرکت تند شونده روبه پایین بوده و اگر حرکت آسانسور رو به بالا باشد، حرکت کندشونده روبه بالا است که در هر دو صورت تحلیل یکسان خواهد بود.



آسانسور با شتاب ثابت $۲m/s^۲$ رو به پایین در حرکت است و با توجه به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_{net}=ma\Rightarrow W-F_e=ma\Rightarrow mg-k\Delta x=ma\xrightarrow[a=۲m/s^۲]{m=۳kg,k=۴۰۰N/m}$$

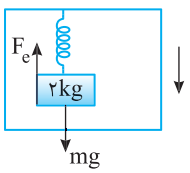
$$۳۰-۴۰۰\times\Delta x=۳\times۲\Rightarrow ۲۴=۴۰۰\Delta x\Rightarrow\Delta x=۰/۰۶m=۶cm$$

طول فنر خواهد شد:

$$\Delta x=x_۲-x_۱\Rightarrow ۶=x_۲-۴۲\Rightarrow x_۲=۴۸cm$$

B ۱۰۷۶ ۴

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:



$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_e=ma\Rightarrow ۲۰-F_e=۴\Rightarrow F_e=۱۶N$$

نیروی فنر از رابطهٔ $F_e=k\Delta x$ به‌دست می‌آید:

$$k\Delta x=۱۶\Rightarrow ۴۰۰\Delta x=۱۶\Rightarrow\Delta x=\frac{۴}{۱۰۰}m=۴cm$$

بنابراین طول فنر $۴cm$ کشیده شده:

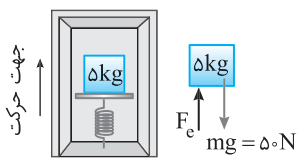
$$x_۲=x_۱+\Delta x\Rightarrow x_۲=۳۰+۴=۳۴cm$$

B ۱۰۷۷ ۴

آسانسور در حال حرکت کندشونده رو به بالا است، بنابراین نیروهای رو به پایین یعنی وزن از نیروی رو به بالا یعنی F_e بیشتر است.

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_e=ma\Rightarrow ۵۰-F_e=۱۰\Rightarrow F_e=۴۰N$$

$$F_e=k\Delta x\Rightarrow ۴۰=۲۰۰\Delta x\Rightarrow\Delta x=\frac{۱}{۵}m=۲۰cm$$



روش دیگر: نیروی کشسانی فنر وارد بر جسم (F_e) در جهت حرکت جسم و نیروی وزن (W) در خلاف جهت حرکت جسم است.

ma = نیروهای خلاف جهت حرکت − نیروهای در جهت حرکت

$$F_e - W = ma \xrightarrow[\text{شتاب منفی}]{\text{حرکت کندشونده}}$$

$$F_e - ۵۰ = ۵\times(-۲) \Rightarrow F_e = ۴۰N$$

بقیه حل شبیه روش اول است.

B ۲ ۱۰۷۸

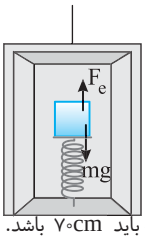
خط فکری ابتدا با توجه به اینکه آسانسور در ابتدا ساکن بوده، با استفاده از متوازن بودن نیروها، طول طبیعی فنر را حساب می‌کنیم و در گام بعدی به کمک قانون دوم نیوتون تغییر طول فنر در حرکت با شتاب $۲m/s^۲$ را به‌دست می‌آوریم. با داشتن طول طبیعی و تغییر طول در حالت دوم می‌توان طول ثانویه را به‌دست آورد.

نکته در رابطهٔ نیروی فنر $F_e = k\Delta x$:

اگر k برحسب N/m باشد، تغییر طول فنر را برحسب متر قرار می‌دهیم.

اگر k برحسب N/cm باشد، می‌توان تغییر طول فنر را برحسب سانتی‌متر قرار داد.

۱ نیروهای وارد بر جسم را رسم کنیم، در ابتدا آسانسور ساکن است:

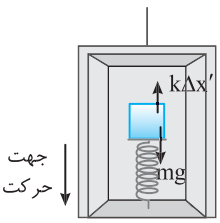


$F_{net} = ۰ \Rightarrow F_e = mg \Rightarrow k\Delta x = mg$: جسم در حال تعادل

$$\Rightarrow ۱۰\times\Delta x = ۱۰۰ \Rightarrow \Delta x = ۱۰cm$$

طول ثانویه نیز در این حالت $۶۰cm$ باشد و می‌دانیم فنر $۱۰cm$ فشرده شده چون جسم روی آن قرار گرفته پس طول اولیه باید $۷۰cm$ باشد.

۲ در حالت دوم آسانسور با شتاب $۲m/s^۲$ به سمت پایین شروع به حرکت می‌کند، نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و برایند نیروها را با توجه به اینکه نیروها در جهت حرکت از نیروهای خلاف جهت حرکت کم می‌شود به‌دست آورد. در این حالت چون آسانسور شروع به حرکت کرده و حرکت تندشونده است، در معادله، شتاب را مثبت می‌گیریم:



$$F_{net} = ma \Rightarrow mg - k\Delta x' = ma \Rightarrow ۱۰۰ - ۱۰\Delta x' = ۲۰ \Rightarrow ۱۰\Delta x' = ۸۰$$

$$\Rightarrow \Delta x' = ۸cm$$

نکته نیروی کشسانی فنر در خلاف جهت تغییر طول آن است. در این مسئله نیروی کشسانی فنر رو به بالا بوده بنابراین تغییر طول فنر از حالت طبیعی رو به پایین است یعنی فنر فشرده شده و طول آن خواهد شد: $۷۰ - ۸ = ۶۲cm$

میانبر تغییر طول فنر هرگاه حرکت آسانسور تندشوندهٔ روبه بالا و یا کندشوندهٔ رو به پایین باشد از تغییر طول فنر از حالتی که آسانسور ساکن است بیشتر است. تغییر طول فنر هرگاه حرکت آسانسور کندشوندهٔ رو به بالا و یا تندشوندهٔ رو به پایین باشد از تغییر طول فنر از حالتی که آسانسور ساکن است کمتر است.

در این سوال در حالت دوم تغییر طول مجدد فنر به دلیل شتاب حرکت است:

$$k\Delta x = ma \Rightarrow ۱۰\times\Delta x = ۲۰ \Rightarrow \Delta x = ۲cm$$

در حالت اول نیروی کشسانی فنر برابر نیروی وزن است.

در حالت دوم نیروی کشسانی فنر از نیروی وزن کمتر است.

با کاهش نیروی کشسانی، تغییر طول فنر $۲cm$ کاهش یافته یعنی $۲cm$ فشردگی کمتر شده بنابراین طول آن از $۶۰cm$ به $۶۲cm$ افزایش می‌یابد.

B ۲ ۱۰۷۹

خط فکری در سؤالاتی مانند مسائل آسانسور که نیروهای وارد بر جسم هم‌راستای هستند، می‌توان قانون دوم نیوتون را به صورت زیر نوشت:

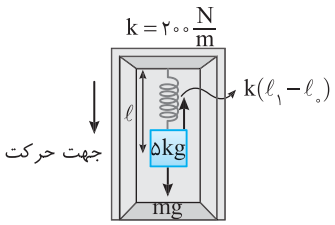
$$F_{net} = ma$$

$$\Rightarrow ma = \text{نیرو در خلاف جهت حرکت} - \text{نیرو در جهت حرکت} \begin{cases} a>۰: \text{تندشونده} \\ a<۰: \text{کندشونده} \end{cases}$$

حالت اول: آسانسور در حال پایین رفتن بوده و mg نیرو در جهت حرکت است. حرکت تندشونده بوده و شتاب $+۲m/s^۲$ گرفته می‌شود.

$$F_{net} = ma \Rightarrow mg - k(\ell_۱ - \ell_۰) = ma \Rightarrow ۵۰ - ۲۰۰(\ell_۱ - \ell_۰) = ۵\times۲$$

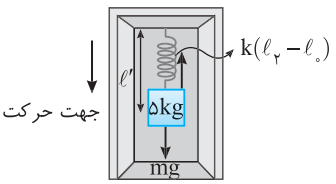
$$\Rightarrow ۲۰۰(\ell_۱ - \ell_۰) = ۴۰ \Rightarrow \ell_۱ - \ell_۰ = ۰/۲m = ۲۰cm \quad (I)$$



حالت دوم: آسانسور به سمت پایین در حال حرکت بوده و mg نیرو در جهت است. حرکت کندشونده بوده و شتاب را $-۱m/s^۲$ در نظر می‌گیریم.

$$F_{net} = ma \Rightarrow mg - k(\ell_۲ - \ell_۰) = ma \Rightarrow ۵۰ - ۲۰۰(\ell_۲ - \ell_۰) = ۵\times(-۱)$$

$$\Rightarrow ۲۰۰(\ell_۲ - \ell_۰) = ۵۵ \Rightarrow \ell_۲ - \ell_۰ = \frac{۵۵}{۲۰۰}m = ۲۷/۵cm \quad (II)$$



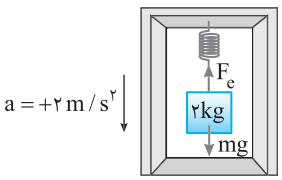
با استفاده از دو معادله (I) و (II) اختلاف $\ell_۱$ و $\ell_۲$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} \ell_۱ - \ell_۰ = ۲۰cm \\ \ell_۲ - \ell_۰ = ۲۷/۵cm \end{cases} \Rightarrow \ell_۲ - \ell_۱ = ۷/۵cm$$

بازی با سوال **درون آسانسوری ساکن، جسمی به جرم $۲kg$ که به فنری قائم آویزان است در حال تعادل قرار دارد. وقتی آسانسور از حال سکون با شتاب ثابت $۲m/s^۲$ به طرف پایین شروع به حرکت می‌کند، طول فنر برابر $۱۴cm$ و وقتی از حال سکون با شتاب ثابت $۲m/s^۲$ به طرف بالا شروع به حرکت می‌کند طول فنر $۱۶cm$ می‌شود. ثابت این فنر چند واحد SI است؟**

۱) ۲۰ ۲) ۴ ۳) ۲۰۰ ۴) ۴۰۰

پاسخ **در هر دو حالت آسانسور از حال سکون شروع به حرکت کرده پس حرکت جسم در هر دو حالت تندشونده و در حالت اول $W > F_e$ است.**

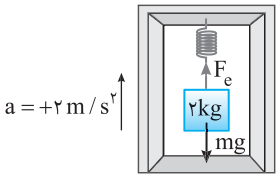


$$F_{net} = ma \Rightarrow mg - F_e = ma$$

$$\Rightarrow F_e = ۲۰ - ۴ \Rightarrow k\Delta x_۱ = ۱۶N$$

$$k(\frac{۱۴}{۱۰۰} - x_۰) = ۱۶ \quad (۱)$$

در حالت دوم $W < F_e$ است از این‌رو:



$$F_{net} = ma \Rightarrow F_e - mg = ma$$

$$\Rightarrow F_e = ۲۰ + ۴ \Rightarrow k\Delta x_۲ = ۲۴N$$

$$k(\frac{۱۶}{۱۰۰} - x_۰) = ۲۴N \quad (۲)$$

با تقسیم رابطهٔ (۲) بر رابطهٔ (۱) داریم:

$$\frac{\frac{۱۶}{۱۰۰} - x_۰}{\frac{۱۴}{۱۰۰} - x_۰} = \frac{۲۴}{۱۶} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۳۲}{۱۰۰} - ۲x_۰ = \frac{۴۲}{۱۰۰} - ۳x_۰ \Rightarrow x_۰ = \frac{۱۰}{۱۰۰}m = ۱۰cm$$

حال با جای‌گذاری $x_۰ = ۱۰cm$ در رابطهٔ (۱) داریم:

$$k(\frac{۱۴}{۱۰۰} - \frac{۱۰}{۱۰۰}) = ۱۶ \Rightarrow k\times\frac{۴}{۱۰۰} = ۱۶ \Rightarrow k = ۴۰۰N/m$$

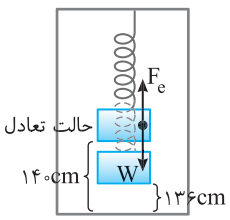
گزینهٔ ۴

B ۱۰۸۰ ۲

خط فکری در مرحلهٔ اول وقتی آسانسور ساکن است و وزنه به فنر آویزان می‌شود، نیروی خالص وارد بر وزنه صفر است $(F_{net}=0)$ و نیروی کشسانی فنر برابر وزن وزنه است $(W=F_e)$. وقتی آسانسور با شتاب ثابت شروع به حرکت رو به بالا می‌کند دیگر نیروی خالص وارد بر وزنه صفر نیست و شما باید نیروی خالص (برایند F_e و W) را بنا به قانون دوم نیوتون مساوی ma قرار دهید و مسئله را حل کنید.

۱ در حالت تعادل نیروی کشسانی فنر برابر نیروی گرانش وزنه است. $W=F_e$

۲ در حالتی که آسانسور با شتاب $2m/s^2$ رو به بالا شروع به حرکت می‌کند نیروی کشسانی فنر از نیروی گرانشی بیشتر است و بنا بر قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:



$$F'_e-W=ma \xrightarrow{W=F_e} F'_e-F_e=ma$$

$$\xrightarrow{F_e=kx} k(x')-kx=ma \Rightarrow k(x'-x)=ma$$

۳ با حرکت آسانسور رو به بالا فاصلهٔ وزنه از کف آسانسور که ۱۴۰cm بوده به ۱۳۶cm می‌رسد یعنی طول فنر $140-136=4cm$ افزایش می‌یابد. $(x'-x=4cm)$

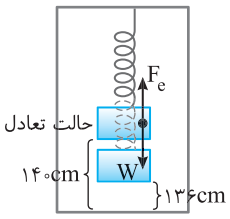
۴ اکنون ثابت فنر را به‌دست می‌آوریم.

$$k(\frac{4}{100})=2\times2 \Rightarrow k=100N/m=1N/cm$$

بازی با سؤال **وزنه‌ای به جرم $2kg$ را به فنر سبکی به طول $40cm$ که از سقف آسانسور ساکنی آویزان است وصل می‌کنیم. اگر آسانسور با سرعت ثابت رو به پایین در حرکت باشد، فاصلهٔ وزنه از کف آسانسور $140cm$ است. اگر آسانسور با شتاب ثابت $2m/s^2$ شروع به توقف کند، فاصلهٔ وزنه از کف آسانسور $136cm$ می‌شود. ثابت فنر چند N/m است؟ $(g=10N/kg)$**

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۵۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۷۵

پاسخ **جالب است بدانید، تست شبیه‌سازی شده از نظر دینامیکی هیچ تفاوتی با مسئله اصلی ندارد.**



۱ **سرعت ثابت یعنی نیروی خالص وارد بر وزنه صفر است.**

$$F_{net}=0 \Rightarrow F_e=W \quad (I)$$

۲ **وقتی سرعت آسانسور در حال حرکت رو به پایین است، کاهش می‌یابد، حرکتش کندشونده می‌شود. در این حالت نیروی خالص وارد بر وزنه صفر نیست و نیروی کشسانی فنر از نیروی وزن وزنه بزرگ‌تر است و بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:**

$$F_{net}=ma \Rightarrow F'_e-W=ma \quad (II)$$

از رابطهٔ (I) در رابطهٔ (II) جای‌گذاری می‌کنیم.

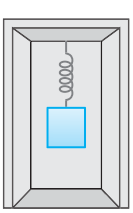
$$F'_e-F_e=ma \Rightarrow kx'-kx=ma \Rightarrow k(x'-x)=ma$$

$$\xrightarrow{x'-x=4cm} k(\frac{4}{100})=2\times2 \Rightarrow k=100N/m$$

گزینهٔ ۱

B ۱۰۸۱ ۱

خط فکری هر گاه در صورت مسئله کلمه ساکن و یا سرعت ثابت مشاهده کردید بلافاصله بالای آن عبارت $F_{net}=0$ را قرار دهید. در این مسئله با این کار می‌توانید جرم m را حساب کنید.

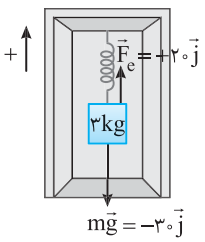


۱ وقتی آسانسور ساکن است نیروی کشسانی فنر برابر نیروی وزن جسم است.

$$W=F_e \Rightarrow mg=k\Delta x$$

$$\Rightarrow m\times10=200\times(\frac{65-50}{100}) \Rightarrow m=3kg$$

۲ می‌خواهیم طول فنر $60cm$ شود یعنی نیروی کشسانی فنر برابر شود با:



$$F_e=k\Delta L \Rightarrow F_e=200\times(\frac{60-50}{100})$$

$$\Rightarrow F_e=20N$$

۳ جهت مثبت محور yها را رو به بالا اختیار می‌کنیم.

در صورت تست بیان نشده که جهت مثبت را باید رو به بالا و یا رو به پایین اختیار کنیم اما چون همواره در ریاضی جهت مثبت محور yها رو به بالاست ما نیز این مطلب را رعایت می‌کنیم. در این حالت نیروی کشسانی فنر برابر $\vec{F}_e=+20\vec{j}$ و نیروی وزن برابر $\vec{W}=m\vec{g}=-30\vec{j}$ می‌شود و بنا به قانون دوم نیوتون شتاب برابر است با:

$$\vec{F}_{net}=m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_e+\vec{W}=m\vec{a} \Rightarrow 20\vec{j}+(-30\vec{j})=3\vec{a} \Rightarrow \vec{a}=\frac{-10}{3}\vec{j}$$

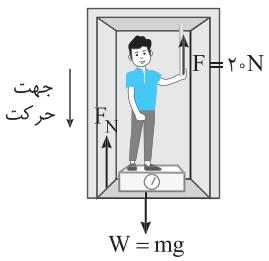
B ۱۰۸۲ ۱

آسانسور با شتاب $3m/s^2$ شروع به حرکت کرده است. کافی است تمام نیروهای وارد بر شخص را رسم کنیم، این نیروها عبارتند از:

۱ نیروی وزن به شخص رو به پایین وارد می‌شود.

۲ نیروی عمودی سطح توسط کف باسکول بر شخص رو به بالا وارد می‌شود.

۳ شخص با نیروی $20N$ بر میله رو به پایین نیرو وارد می‌کند و بنا به قانون سوم نیوتون توسط میله نیرویی برابر $20N$ بر شخص وارد می‌شود. بنا به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:



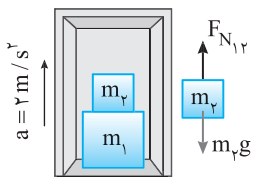
$$W-F-F_N=ma \xrightarrow{m=80kg}$$

$$800-20-F_N=80\times3 \Rightarrow F_N=540N$$

نیرویی که باسکول نشان می‌دهد همان نیروی F_N یعنی $540N$ است.

C ۱۰۸۳ ۳

۱ m_1 و m_2 درون آسانسور قرار دارند، پس شتاب m_1 و m_2 نیز برابر $2m/s^2$ رو به بالا می‌باشد.

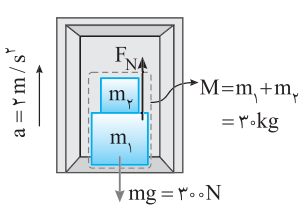


۲ نیرویی که m_1 بر m_2 وارد می‌کند همان نیروی عمودی تکیه‌گاه بین m_1 و m_2 و رو به بالاست. نیروهای وارد بر m_2 را رسم کرده و نیروی $F_{N_{12}}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{N_{12}}-m_2g=m_2a \Rightarrow F_{N_{12}}=m_2a+m_2g \Rightarrow F_{N_{12}}=120N$$

۳ حال دو جسم را یک جسم در نظر می‌گیریم تا نیرویی که از طرف سطح به مجموعه وارد می‌شود را حساب کنیم:

$$F_N-(m_1+m_2)g=(m_1+m_2)a \Rightarrow F_N-300=60 \Rightarrow F_N=360N$$

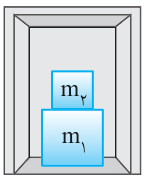


۴ نسبت $F_{N_{12}}/F_N$ خواهد شد:

$$\frac{F_{N_{12}}}{F_N}=\frac{120}{360}=\frac{1}{3}$$

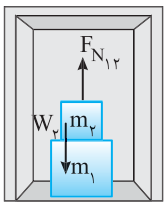
بازی با سؤال درون یک آسانسور دو جسم به جرم‌های $m_1=5kg$ و $m_2=3kg$ قرار دارند و آسانسور با سرعت ثابت $6m/s$ رو به پایین در حرکت است. آسانسور ترمز کرده و پس از جابه‌جایی $5m$ با شتاب ثابت متوقف می‌شود. در این جابه‌جایی نیرویی که m_2 بر m_1 وارد می‌کند چند نیوتون است؟ $(g=10N/kg)$

۱) ۴۰/۸ ۲) ۱۸/۲ ۳) ۳۰ ۴) ۸۰



پاسخ ابتدا شتاب توقف را به کمک رابطهٔ مستقل از زمان به‌دست می‌آوریم:

$$v_2^2-v_1^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-36=2a(5)\Rightarrow a=-3/6m/s^2$$



نیروهای وارد بر m_2 را بررسی می‌کنیم. آسانسور حرکت کندشونده رو به پایین دارد، بنابراین $F_{N_{12}}>m_2g$ است از این رو:

$$F_{N_{12}}-m_2g=m_2a\Rightarrow F_{N_{12}}=30+(3\times 3/6)\Rightarrow F_{N_{12}}=30+10/8=40/8N$$

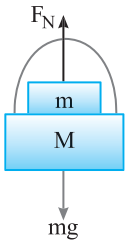
دقت کنید نیروی بزرگ‌تر را منهای نیروی کوچک‌تر کرده‌ایم از این رو شتاب را با علامت مثبت در رابطه قرار داده‌ایم.

نیرویی که m_1 بر m_2 وارد کرده برابر $40/8N$ رو به بالاست و بنا به قانون سوم نیوتون نیرویی که m_2 بر m_1 وارد می‌کند نیز هم‌اندازهٔ $40/8N$ اما رو به پایین است.

گزینهٔ ۱

۳ ۱۰۸۴ B

خط فکری دقت کنید که در صورت مسئله نیرویی که M بر m وارد می‌کند را از شما خواسته است بنابراین شما نیروهای وارد بر m را باید بررسی کنید.



نیروهای وارد بر جسم m را رسم می‌کنیم. دو نیرو بر جسم m وارد می‌شود، یکی نیروی وزن توسط کرهٔ زمین، دیگری نیروی عمودی تکیه‌گاه که توسط M بر جسم m رو به بالا وارد می‌شود.

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_N=ma\Rightarrow F_N=m(g-a)$$

$$F_N=0/05(10-2)\Rightarrow F_N=0/4N$$

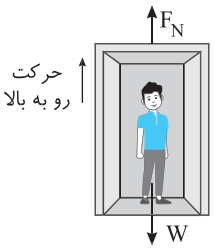
در واقع جرم m مانند جسمی است که در آسانسور قرار دارد.

۳ ۱۰۸۵ A

ابتدا شتاب حرکت را به کمک رابطهٔ سرعت- مکان (مستقل از زمان) به دست می‌آوریم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-(4)^2=2(a)(5)$$

$$\Rightarrow a=-1/6m/s^2$$



حرکت آسانسور کندشونده رو به بالا است. بنابراین خواهیم داشت:

$ma=$ نیروهای خلاف جهت حرکت $-$ نیروهای در جهت حرکت

حرکت کندشونده است بنابراین شتاب را در رابطه منفی قرار می‌دهیم.

$$F_N-mg=ma\Rightarrow F_N-60\times 10=60\times(-1/6)\Rightarrow F_N=504N$$

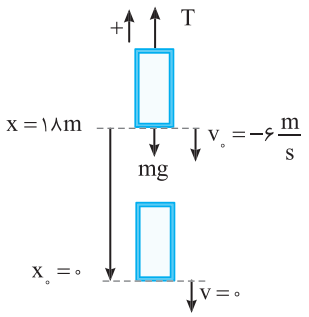
۳ ۱۰۸۶ B

با استفاده از رابطه مستقل از زمان شتاب را به‌دست می‌آوریم. (جهت مثبت را رو به بالا فرض می‌کنیم.)

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-36=2a(-18)\Rightarrow a=+1m/s^2$$

حرکت کندشونده رو به پایین است.

$$T-mg=ma\Rightarrow T=mg+ma\Rightarrow T=1000(10+1)=1/1\times 10^4N$$



۳ ۱۰۸۷ B

خط فکری مسئله چند مرحله‌ای است، در هر مرحله نیروهای وارد بر آسانسور را بررسی کرده و کشش کابل متصل به آسانسور را به دست آورده باهم مقایسه می‌کنیم. جهت مثبت را رو به بالا اختیار می‌کنیم.

۱ در قسمت اول حرکت، شتاب برابر است با: $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{4}{8}=0/5m/s^2$

۲ نیروی کشش کابل را حساب می‌کنیم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow T-mg=ma\Rightarrow T_1-7000=350\Rightarrow T_1=7350N$$

۳ در قسمت دوم حرکت با سرعت ثابت است و شتاب $a=0$ بوده و نیروها متوازن هستند بنابراین:

$$F_{net}=0\Rightarrow T_2=mg\Rightarrow T_2=7000N$$

۴ در قسمت سوم حرکت شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-4}{4}=-1m/s^2$$

۵ نیروی کشش کابل در این مرحله خواهد شد:

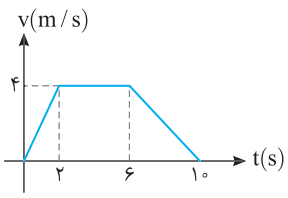
$$F_{net}=0\Rightarrow T_3-mg=ma\Rightarrow T_3-7000=-700\Rightarrow T_3=6300N$$

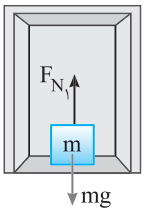
۶ بنابراین اختلاف بیشینه و کمینه کشش کامل برابر است با:

$$T_1-T_3=7350-6300=1050N$$

۴ ۱۰۸۸ B

نکته عددی که ترازوی فنری نشان می‌دهد اندازهٔ نیروی عمودی سطح است.

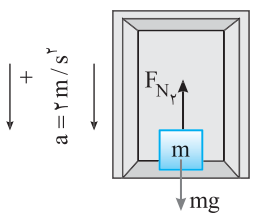




۱ هنگامی که آسانسور با سرعت ثابت حرکت می‌کند نیروی عمودی سطح و نیروی وزن باهم برابرند پس در بازهٔ ۲s تا ۶s داریم:

$$F_{net}=ma_1\xrightarrow{a_1=0}F_{N_1}=mg=600N$$

۲ اما کمترین مقدار F_N وقتی است که جسم تندشونده رو به پایین به حرکت درمی‌آید. در بازهٔ صفر تا ۲s آسانسور با شتاب تندشونده رو به پایین در حال حرکت است و می‌دانیم در نمودار $v-t$ شیب نمودار برابر شتاب است: $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{4-0}{2-0}=2m/s^2$



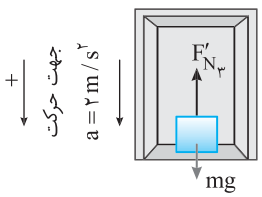
۳ در این بازه، نیروی F_{N_2} را حساب می‌کنیم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_{N_2}=ma_2\Rightarrow 600-F_{N_2}=120\Rightarrow F_{N_2}=480N$$

۴ بیشترین مقدار F_N وقتی است که آسانسور در حال متوقف شدن است.

در بازهٔ ۶s تا ۱۰s شتاب حرکت برابر $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{0-4}{10-6}=-1m/s^2$ است، بنابراین:

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_{N_3}=ma_3\Rightarrow 600-F_{N_3}=-60\Rightarrow F_{N_3}=660N$$



۵ بنابراین اختلاف بیشینه و کمینه نیرو از طرف سطح برابر است با:

$$F_{N_2}-F_{N_1}=660-480=180N$$

B ۱۰۸۹ ۱

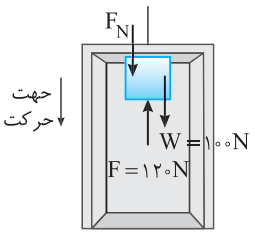
خط فکری در تمام مسائل دینامیک مراحل زیر باید طی شود.

۱ رسم شکل ساده ۲ رسم نیروهای وارد بر جسم

۳ به‌دست آوردن نیروی خالص ۴ برابر قرار دادن نیروی خالص با ma

۱ نیروهای وارد بر جسم ۱۰ کیلوگرمی را رسم می‌کنیم.

۲ شتاب حرکت جسم را حساب می‌کنیم. $a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-8}{8}\Rightarrow a=-1m/s^2$



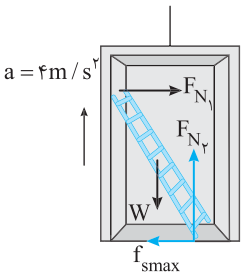
۳ $ma=$ نیروهای مخالف حرکت $-$ نیروهای در جهت حرکت

$$(W+F_N)-F=ma\xrightarrow{m=10kg}(100+F_N)-120=10\times(-1)$$
$$\Rightarrow F_N=10N$$

B ۱۰۹۰ ۲

۱ نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم.

۲ نردبان در امتداد افقی حرکتی ندارد و نیروها در این امتداد متوازن هستند. بنابراین نیروی F_{N_1} که دیواره بر نردبان وارد می‌کند با اصطکاک آستانهٔ حرکت $(f_{s_{max}})$ برابر است:



$$f_{s_{max}}=F_{N_1}\xrightarrow{F_{N_1}=20N}f_{s_{max}}=20N$$

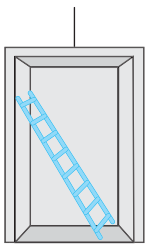
۳ نیروهای عمودی سطح کف آسانسور وارد بر نردبان را حساب می‌کنیم:

$$f_{s_{max}}=\mu_s F_{N_2}\xrightarrow{\mu_s=0/5}20=0/5F_{N_2}\Rightarrow F_{N_2}=40N$$

۴ نیروهای وارد بر نردبان در امتداد قائم به نردبان شتاب $4m/s^2$ رو به بالا می‌دهد. بنابراین نیروی F_{N_2} از W بزرگ‌تر است و خواهیم داشت:

$$F_{net_y}=ma\Rightarrow F_{N_2}-W=ma\Rightarrow 40-mg=ma$$
$$40-m\times10=m\times4\Rightarrow m=\frac{40}{14}=\frac{20}{7}kg$$

بازی با سوال در شکل روبه‌رو نردبانی به جرم ۴kg درون آسانسور قرار دارد و در آستانهٔ سر خوردن است. اگر ضریب اصطکاک ایستایی تمام سطوح یکسان و برابر ۰/۴ باشد، با پاره شدن کابل آسانسور نیروی خالص وارد بر نردبان چند نیوتون می‌شود؟ $(g=10N/kg)$



۱) ۴۰ ۲) صفر ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

پاسخ وقتی کابل آسانسور پاره می‌شود مجموعه با شتاب $a=g$ رو به پایین سقوط می‌کند. در این حالت تنها نیروی مؤثر وارد بر نردبان نیروی وزن بوده که برابر $W=4\times10=40N$ است. گزینهٔ ۱

C ۱۰۹۱ ۱

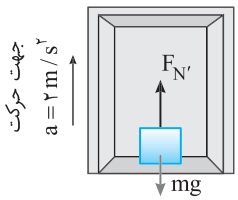
خط فکری ابتدا آسانسور ساکن است و جسم با تندی ثابت بر کف آسانسور در حرکت است. یعنی نیروهای وارد بر جسم متوازن بوده و شما باید با استفاده از این موضوع ضریب اصطکاک بین جسم و کف آسانسور را حساب کنید. با حرکت آسانسور رو به بالا نیروی عمودی سطح افزایش می‌یابد و سبب افزایش نیروی اصطکاک جنبشی $(\uparrow f_k=\mu_k F_N\uparrow)$ می‌شود. نیروی $F=10N$ ثابت است بنابراین نیروی اصطکاک سبب کندشدن حرکت و توقف جسم می‌شود.

۱ در حالت اول جسم با سرعت ثابت در حال حرکت است پس نیروهای وارد بر جسم متوازن است: $F_{\text{خالص}}=ma\Rightarrow F-f_k=0\Rightarrow f_k=10N$

۲ ضریب اصطکاک را حساب می‌کنیم:

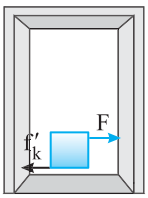
$$f_k=\mu_k F_N\Rightarrow10=\mu_k mg\Rightarrow10=\mu_k 40\Rightarrow\mu_k=0/25$$

۳ در حالت دوم آسانسور با شتاب $2m/s^2$ به سمت بالا حرکت می‌کند. نیروی عمودی سطح را در این حالت به دست می‌آوریم:



$$F'_N-mg=ma\Rightarrow F'_N-40=4\times2$$
$$\Rightarrow F'_N=48N$$

۴ در این حالت نیروی اصطکاک برابر خواهد شد با:



$$f_k=\mu_k F'_N=12N>10N$$

۵ نیروی اصطکاک از نیروی F بزرگ‌تر شده بنا به قانون دوم نیوتون شتاب حرکت را حساب می‌کنیم:

$$F-f_k=ma\Rightarrow10-12=4a\Rightarrow a=-0/5m/s^2$$

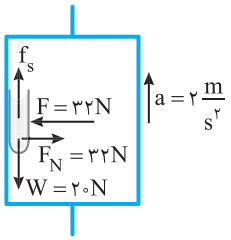
۶ به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، جابه‌جایی جسم تا توقف را به دست می‌آوریم:

$$v_2^2-v_1^2=2a\Delta x\Rightarrow0-4=2(-0/5)\Delta x\Rightarrow\Delta x=4m$$

B ۱۰۹۲ ۴

خط فکری در متن تست بیان شده که کتاب نسبت به آسانسور ساکن است و ممکن است شما بلافاصله بنویسید برای جسم ساکن $F_{net}=0$ و نیروی وزن کتاب با نیروی اصطکاک بین دیوارهٔ آسانسور و کتاب برابر است و $f_s=W=20N$ پاسخ است اما این‌گونه نیست. شما باید این نکته مهم را بدانید که برای کاربرد قوانین نیوتون همواره حرکت جسم مورد نظر را از دید شاهدی بررسی می‌کنیم که روی زمین ساکن است یعنی شما باید خود را خارج آسانسور فرض کنید که به این آسانسور نگاه می‌کنید. در این حالت برای شما مشخص می‌شود که تمام اجسام درون آسانسور با همان شتاب آسانسور $(2m/s^2)$ در حال حرکت روبه بالا هستند. اکنون باید از خود بپرسید، عامل حرکت کتاب روبه بالا به همراه آسانسور چیست؟ که پاسخ مشخص است، عامل آن اصطکاک بین کتاب و دیوارهٔ آسانسور است، بنابراین نیروهای وارد بر کتاب را رسم کنید و به کمک قانون دوم نیوتون مسئله را حل کنید.

عامل حرکت کتاب به همراه آسانسور رو به بالا نیروی اصطکاک ایستایی بین کتاب و دیوارهٔ آسانسور است. نیروهای وارد بر کتاب را رسم می‌کنیم و چون کتاب و آسانسور هر دو با شتاب $a=۲m/s^۲$ به سمت بالا در حال حرکت‌اند، برایند آن‌ها را مساوی ma قرار می‌دهیم:



$$f_s-W=ma\Rightarrow f_s-۲۰=۲\times۲\Rightarrow f_s=۲۴N$$

اکنون نیرویی که کتاب به دیواره یا دیواره به کتاب وارد می‌کند برابر است با:

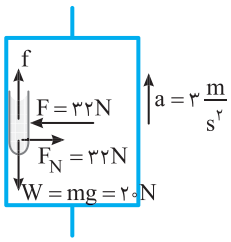
$$R=\sqrt{f_s^۲+F_N^۲}=\sqrt{۲۴^۲+۳۲^۲}=۸\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۴۰N$$

بازی با سؤال **شخصی درون آسانسور ساکنی با نیروی افقی $F=۳۲N$ کتابی به جرم $۲kg$ را روی دیوارهٔ آسانسور ساکن نگاه داشته است. ضریب اصطکاک بین کتاب و دیوارهٔ آسانسور $\mu_s=۰/۸$ و $\mu_k=۰/۵$ است. اگر آسانسور با شتاب ثابت $۳m/s^۲$ رو به بالا شروع به حرکت کند، کتاب نسبت به آسانسور .....**

۱) ساکن می‌ماند. **۲)** به پایین می‌لغزد

۳) به سمت بالا می‌رود. **۴)** هر سه حالت ممکن است.

پاسخ **آسانسور با شتاب $۳m/s^۲$ رو به بالا شروع به حرکت کرده است. عامل حرکت کتاب به همراه آسانسور رو به بالا، نیروی اصطکاک بین دیوارهٔ آسانسور و کتاب است. باید بررسی کنیم بیشینه شتابی که کتاب می‌تواند داشته باشد چند $m/s^۲$ است. پس بنابر قانون دوم نیوتون می‌توانیم بنویسیم:**



$$F_{net}=ma\Rightarrow f_{s\,max}-mg=ma_{\text{کتاب}}\Rightarrow \mu_sF_N-mg=ma_{\text{کتاب}}$$

$$\xrightarrow{\mu_s=۰/۸,m=۲kg} ۰/۸\times۳۲-۲\times۱۰=۲a_{\text{کتاب}}$$

$$\Rightarrow ۲۵/۶-۲۰=۲a_{\text{کتاب}}\Rightarrow a_{\text{کتاب}}=\frac{۵/۶}{۲}\Rightarrow a_{\text{کتاب}}=۲/۸m/s^۲$$

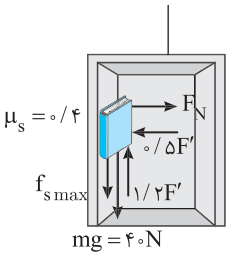
دقت کنید بیشینه شتاب رو به بالای کتاب در اثر اصطکاک $۲/۸m/s^۲$ است اما شتاب حرکت آسانسور رو به بالا $۳m/s^۲$ است، بنابراین کتاب نسبت به آسانسور عقب می‌ماند و به پایین می‌لغزد. گزینهٔ ۲

۲ | ۱۰۹۳ | B

خط فکری نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. دقت کنید که جسم در آستانهٔ حرکت رو به بالا و نیروی اصطکاک جسم بیشینه و به سمت پایین است. جسم در راستای افقی حرکت نمی‌کند و نیروهای افقی متوازن است، $(F_{net}=۰)$ اما در راستای قائم آسانسور در حال حرکت به سمت پایین بوده و باید به کمک قانون دوم نیوتون مسئله را حل کنید:

۱ نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:

۲ نیروها در راستای افقی متوازن‌اند:



$$F_N=۰/۵F'$$

۳ در راستای قائم آسانسور با شتاب $۴m/s^۲$ تندشونده پایین می‌آید، نیروی برایند را حساب می‌کنیم و نیروهای در جهت حرکت به سمت پایین را از نیروی خلاف جهت به سمت بالا کم کرده و در قانون دوم نیوتون چون حرکت تندشونده بوده شتاب $+۴m/s^۲$ قرار می‌دهیم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg+f_{s_{max}}-۱/۲F'=ma$$

$$\Rightarrow mg+\mu_sF_N-۱/۲F'=ma$$

$$\xrightarrow[\mu_s=۰/۴]{F_N=۰/۵F'} mg+۰/۴(۰/۵F')-۱/۲F'=ma$$

$$\Rightarrow ۴۰+۰/۲F'-۱/۲F'=۲\times۲\Rightarrow F'=۲۴N$$

مؤلفه‌های F را به‌دست می‌آوریم:

$$F_x=۰/۵F'=۰/۵\times۲۴,\ F_y=۱/۲F'\Rightarrow F_y=۱/۲۲/۴$$

اندازهٔ F خواهد شد:

$$F=\sqrt{F_x^۲+F_y^۲}\Rightarrow F=\sqrt{(۰/۵\times۲۴)^۲+(۱/۲\times۲/۴)^۲}$$

$$\Rightarrow F=۲۴\sqrt{۰/۵^۲\times۱/۳^۲}$$

$$F=۲۴\times\sqrt{۱/۶۹}\Rightarrow F=۲۴\times۱/۳\Rightarrow F=۳۱/۲N$$

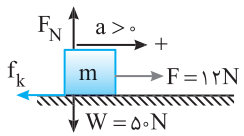
۱ | ۱۰۹۴ | B

یک پاک‌کن را در کف دستتان قرار دهید و زاویه کف دست را از حالت افقی به طور آهسته زیاد کنید. تمایل جسم به حرکت بیشتر می‌شود، بنابراین نیروی وارد بر جسم که می‌خواهد جسم را به حرکت در آورد با افزایش زاویهٔ کف دست بیشتر می‌شود و چون پاک‌کن حرکت نکرده، پس نیروی اصطکاک وارد بر آن افزایش می‌یابد. تا لحظه‌ای که جسم در آستانهٔ حرکت قرار گیرد اصطکاک در حال افزایش است. البته بعد از آن جسم به حرکت درمی‌آید و اصطکاک از ایستایی به جنبشی تبدیل می‌شود که مورد پرسش نیست و گزینهٔ (۱) درست است.

۴ | ۱۰۹۵ | C

خط فکری آخه چطور ممکنه؟ جعبه با شتاب $۰/۴m/s^۲$ در حال حرکت به سمت راست است. در جعبهٔ یک وزنه قرار می‌دهیم، اصطکاک افزایش می‌یابد بنابراین باید شتاب کم شود اما اندازهٔ شتاب همچنان $۰/۴m/s^۲$ است، یعنی ممکن است؟ بله این بار نیروی اصطکاک به خوبی افزایش یافته که نیروی خالص (برآیند اصطکاک و نیروی F) به سمت چپ است و شتاب جعبه $۰/۴m/s^۲$ به سمت چپ است. در نتیجه در حالت اول حرکت تندشونده با شتاب $۰/۴m/s^۲$ و در حالت دوم حرکت کندشونده با شتاب $(-۰/۴m/s^۲)$ است.

حالت اول: نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و جهت به سمت راست را مثبت در نظر می‌گیریم و نیروی خالص وارد بر جسم را برابر ma قرار می‌دهیم و ضریب اصطکاک جنبشی را حساب می‌کنیم.

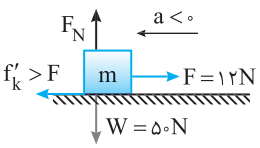


$$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow ۱۲-\mu_kmg=۰/۴m$$

$$\Rightarrow ۱۲-۵\mu_k=۲\Rightarrow \mu_k=۰/۲$$

حالت دوم:

$$F_{net}=m'a'$$



$$F-f'_k=(m+m')a'$$

$$\Rightarrow ۱۲-\mu_k(m+m')g=-۰/۴(m+m')$$

$$\Rightarrow ۱۲-(۵+m')\times۱۰\times۰/۲=-۰/۴(۵+m')$$

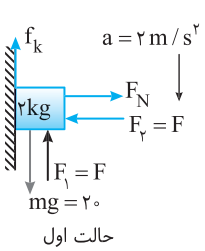
$$\Rightarrow ۱۲-۱۰-۲m'=-۲-۰/۴m'$$

$$۴=۱/۶m'\Rightarrow m'=\frac{۴}{۱/۶}=۲/۵kg$$

۳ | ۱۰۹۶ | B

خط فکری در حالت اول شتاب $۲m/s^۲$ روبه پایین است. اگر با دو برابر شدن $F_۱$ باز اندازهٔ شتاب $۲m/s^۲$ باشد باید جهت شتاب تغییر کرده باشد، یعنی در حالت دوم شتاب $۲m/s^۲$ روبه بالا است. هم‌چنین چون $F_۲$ تغییر نکرده پس اندازهٔ نیروی اصطکاک جسم با سطح ثابت می‌ماند.

نیروهای وارد بر جسم را در دو حالت رسم کرده و نیروی خالص وارد بر جسم را به‌دست می‌آوریم، البته برای راحتی در هر حالت نیروی بزرگ‌تر در جهت حرکت را منهای نیروی کوچک‌تر می‌کنیم.



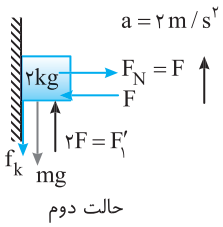
حالت اول

حالت اول: جسم از حال سکون رو به پایین حرکت کرده، بنابراین اصطکاک رو به بالاست. نیروی وزن جسم را به پایین می‌آورد و نیروی f_k و $F_۱$ مانع

حرکت است. از این‌رو:

$$f_{net}=ma\Rightarrow W-F_1-f_k=ma\Rightarrow ۲۰-F-f_k=۲\times۲\Rightarrow F+f_k=۱۶\quad (I)$$

حالت دوم: نیروی F_1 را دو برابر کرده‌ایم و جسم این بار باید از حال سکون رو به بالا حرکت کرده بنابراین اصطکاک رو به پایین است. نیروی $۲F_1$ جسم را بالا می‌برد. نیروی خالص وارد بر جسم خواهد شد:



حالت دوم

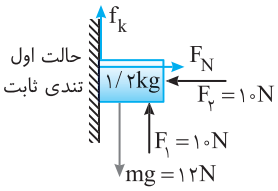
$$F_{net}=ma\Rightarrow ۲F-W-f_k=ma$$
$$\Rightarrow ۲F-۲۰-f_k=۲\times۲\Rightarrow ۲F-f_k=۲۴\quad (II)$$

دقت کنید در دو حالت اندازهٔ نیروی اصطکاک برابر $f_k=\mu_k F_N$ است. رابطهٔ (I) و (II) را با هم جمع می‌کنیم و F را به‌دست می‌آوریم.

$$F+f_k+۲F-f_k=۱۶+۲۴\Rightarrow F=\frac{۴۰}{۳}N$$

۳ ۱۰۹۷ C

۱ در حالت اول تندی جسم ثابت است و جسم در حال حرکت رو به پایین است بنابراین نیروی اصطکاک جنبشی رو به بالاست. نیروی خالص وارد بر جسم صفر است:

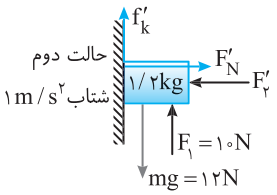


در راستای افقی: $F_2=F_N\Rightarrow F_N=۱۰N$

در راستای قائم: $F_{net}=ma\Rightarrow mg-F_1-f_k=۰\Rightarrow f_k=۱۲-۱۰=۲$

$$\Rightarrow \mu_k N=۲\Rightarrow ۱۰\mu_k=۲\Rightarrow \mu_k=۰/۲$$

۲ در حالت دوم، اگر جسم با شتاب $۱m/s^2$ بخواهد به سمت پایین حرکت کند باید نیروی F_2 کاهش بیابد تا از مقدار اصطکاک کاسته شود. در این حالت خواهیم داشت:



$$\begin{cases}\text{در راستای افقی}: F'_N=F'_2\\ \text{در راستای قائم}: mg-F_1-f'_k=ma\end{cases}\Rightarrow ۱۲-۱۰-f'_k=۱/۲\times(۱)\Rightarrow f'_k=۰/۸N$$

۳ نیروی عمودی سطح در حالت جدید F'_N را حساب می‌کنیم.

$$f'_k=\mu_k F'_N=\mu_k F'_2\Rightarrow ۰/۸=۰/۲F'_N\Rightarrow F'_N=۴N\Rightarrow F'_2=F'_N=۴N$$

۴ پس نیروی F_2 از ۱۰N به ۴N رسیده و درصد تغییرات نیرو خواهد شد:

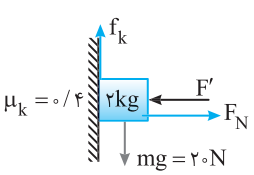
$$\frac{\Delta F}{F_1}\times۱۰۰=\frac{-۶}{۱۰}\times۱۰۰=-۶۰٪$$
کاهش

۳ ۱۰۹۸ C

نکتهٔ مهم تا لحظه‌ای که نیروی وزن رو به پایین (W) از نیروی اصطکاک (f_k) رو به بالا بزرگ‌تر یا با آن مساوی باشد $(W\geq f_k)$ از تندی جسم کاسته نمی‌شود.

خط فکری بیشینه مقدار اصطکاک باید برابر نیروی وزن جسم باشد زیرا اگر اصطکاک از وزن بیشتر شود حرکت جسم کندشونده شده و از سرعت آن کاسته می‌شود. بنابراین باید معادلهٔ $W\geq f_k$ را حل کنیم.

۱ اصطکاک را با نیروی $F=۱۰N$ حساب می‌کنیم.



$$f_k=\mu_k F_N\xrightarrow{F_N=F} f_k=۰/۴\times۱۰$$
$$\Rightarrow f_k=۴N<W$$

و جسم در حال حرکت تندشونده رو به پایین است.

۲ معادله $mg\geq f_k$ را حل می‌کنیم تا F_{max} را به‌دست بیاوریم:

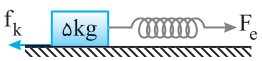
$$mg\geq f_k\Rightarrow ۲۰\geq \mu_k F_{max}\xrightarrow{\mu_k=۰/۴} ۲۰\geq ۰/۴F_{max}\Rightarrow F_{max}\geq ۵۰N$$

۳ پس نیروی F را می‌توان از ۱۰N به ۵۰N رساند. یعنی نیروی F را می‌توان حداکثر به اندازهٔ ۵۰−۱۰=۴۰N افزایش داد.

بازی با سؤال جسمی به جرم ۵kg روی سطح افقی با ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k=۰/۲$ توسط فنری کشیده می‌شود. ضریب ثابت فنر ۸۰۰N/m و کشیدگی فنر از طول طبیعی خود ۵ سانتی‌متر است. این طول حداکثر چند سانتی‌متر می‌تواند کاهش یابد، بدون آنکه تندی جسم کاهش یابد؟ $(g=۱۰m/s^2)$

۱) ۵ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۳/۷۵ ۴) ۴/۲۵

پاسخ نیروی کشسانی فنر برابر است با:



$$F_e=k\Delta\ell=۸۰۰\times\frac{۵}{۱۰۰}=۴۰N$$

نیروی اصطکاک بین جسم و سطح:

$$f_k=\mu_k F_N=۰/۲\times۵۰=۱۰N$$

تا زمانی که $F_e\geq f_k$ تندی جسم کاهش نمی‌یابد، بنابراین باید نیروی کشسانی از ۴۰N به ۱۰N برسد. یعنی:

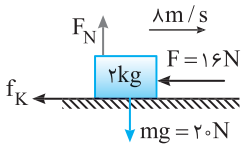
$$F'_e=k\Delta\ell'\Rightarrow ۱۰=۸۰۰\Delta\ell'\Rightarrow \Delta\ell'=۱/۲۵cm$$

بنابراین طول فنر می‌تواند از ۵cm کشیدگی به ۱/۲۵cm کشیدگی برسد یعنی طول فنر می‌تواند ۵−۱/۲۵=۳/۷۵cm کاهش یابد بدون آنکه تندی جسم کاهش یابد.

گزینهٔ ۳

۱ ۱۰۹۹ C

مرحلهٔ اول: در ابتدا جسم به سمت راست در حال حرکت است پس نیروی اصطکاک نیز مانند نیروی F به سمت چپ به جسم وارد می‌شود:



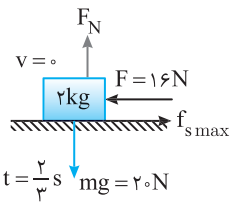
$$f_k=\mu_k F_N\xrightarrow{F_N=۲۰N} f_k=۰/۴\times۲۰=۸N$$

$$F_{net}=ma\Rightarrow ۰-۱۶-f_k=ma\Rightarrow ۰-۲۴=۲a\Rightarrow a=-۱۲m/s^2$$

این شتاب از سرعت $۸m/s$ به سمت راست کاسته تا سرعت صفر شود:

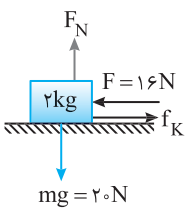
$$\begin{cases}v_1=۸m/s\\ v_2=۰\\ a=-۱۲m/s^2\\ t=?\end{cases}\Rightarrow v_2=at+v_1\Rightarrow ۰=-۱۲t+۸\Rightarrow ۱۲t=۸\Rightarrow t=\frac{۲}{۳}s$$

مرحلهٔ دوم: در این حالت باید بررسی کنیم که در $t=\frac{۲}{۳}s$ که جسم به‌طور لحظه‌ای متوقف شده آیا مجدد جسم به حرکت درمی‌آید یا نه، برای این کار ابتدا $f_{s_{max}}$ را حساب می‌کنیم. اگر این نیرو، کمتر از ۱۶N باشد یعنی نیروی ۱۶N جسم را به حرکت درآورده است:



$$f_{s_{max}}=\mu_s F_N\Rightarrow f_{s_{max}}=۰/۵\times۲۰\Rightarrow f_{s_{max}}=۱۰N$$

مرحلهٔ سوم: بنابراین جسم پس از توقف با نیروی $F=۱۶N$ به سمت چپ حرکت کرده و نیروی اصطکاک جنبشی f_k خلاف جهت لغزش یعنی به سمت راست آن وارد می‌شود:



$$f_k=\mu_k F_N\Rightarrow f_k=۰/۴\times۲۰=۸N$$

$$F'_{net}=ma'\Rightarrow ۱۶-۸=۲a'\Rightarrow a'=۴m/s^2$$

مدت زمان باقی‌مانده تا $t=۵s$ برابر $۵-\frac{۲}{۳}=\frac{۱۳}{۳}s$ است که متحرک از سرعت صفر با شتاب $۴m/s^2$ طی می‌کند:

$$v_1=۰, v_2=?, a=۴, t=\frac{۱۳}{۳}s\Rightarrow v_2=at+v_1\Rightarrow v_2=۴\times\frac{۱۳}{۳}=\frac{۵۲}{۳}m/s$$

بازی با سؤال در سؤال قبل اگر ضریب اصطکاک ایستایی $\mu_s=0/85$ باشد. تندی جسم در لحظهٔ $t=5s$ چند m/s می‌شود؟

پاسخ اگر $\mu_s=0/85$ باشد اصطکاک آستانهٔ حرکت $f_{s_{max}}=0/85\times 20=17N$ شده و نیروی $F=16N$ نمی‌تواند پس از توقف جسم را بازگرداند و تندی آن صفر خواهد شد.

C ۱۱۰۰ ۲

خط فکری دو نفر به ترتیب با نیروی F_1 و F_2 بسته را هُل می‌دهند بنا به قانون سوم نیوتون نیروی F'_1 و F'_2 به ترتیب توسط بسته به هریک رو به عقب وارد می‌شود اما چرا این دو نفر رو به عقب لیز نمی‌خورند؟ زیرا بین پای آن‌ها و سطح زمین نیروی اصطکاک ایستایی f_{s_1} و f_{s_2} به سمت راست وجود دارد که مانع لیز خوردن این دو شخص می‌شود. اکنون نیروهای وارد بر بسته و هر شخص را رسم کرده و نیروی خالص وارد بر هریک را به‌دست می‌آوریم. دقت کنید عبارت «حداقل ضریب اصطکاک ایستایی» یعنی دو نفر در آستانهٔ لیز خوردن قرار بگیرند، در ضمن بسته با تندی ثابت به جلو بلغزد.

۱ نیروهای وارد بر بسته:

$$\underbrace{F_1+F_2}_{\text{به سمت راست}} = \underbrace{f_k}_{\text{به سمت چپ}} \quad (I)$$

۲ نیروی وارد بر هر شخص:

$$\begin{cases} F'_1=f_{s_1} \xrightarrow{F'_1=F_1} F_1=f_{s_1} \\ F'_2=f_{s_2} \xrightarrow{F'_2=F_2} F_2=f_{s_2} \end{cases} \Rightarrow F_1+F_2=f_{s_1}+f_{s_2} \quad (II)$$

۳ رابطهٔ (I) و (II) را برابر قرار می‌دهیم.

$$f_{s_1}+f_{s_2}=f_k \Rightarrow \mu_s(m_1g+m_2g)=\mu_k Mg$$
$$\Rightarrow \mu_s(400+600)=0/2\times 2000 \Rightarrow \mu_s=0/4$$

B ۱۱۰۱ ۳

نکته شیب نمودار سرعت - زمان برابر شتاب حرکت است.

خط فکری شما باید شتاب هر قسمت را با توجه به نیروی خالص وارد بر جسم به‌دست بیاورید و با هم مقایسه کنید تا بتوانید به کمک شیب نمودار $v-t$ نمودار درست را تشخیص دهید.

در قسمت اول مسیر نیروی اصطکاک کمتر از F می‌باشد بنابراین:

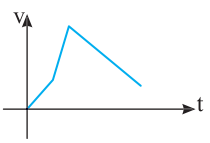
$$F-f_1=ma \xrightarrow{f_1<F} a_1>0$$

در قسمت دوم مسیر نیروی اصطکاک، صفر است و تنها نیروی مؤثر وارد بر جسم F است:

$$F=ma \Rightarrow a_2>0 \text{ و } a_2>a_1$$

در قسمت سوم مسیر نیروی اصطکاک بیشتر از F می‌باشد، بنابراین:

$$F-f_3=ma \xrightarrow{f_3>F} a_3<0$$



در قسمت (۱) و (۲) شتاب حرکت مثبت شد، البته $a_1>a_2$ بوده بنابراین نمودار $v-t$ باید در این دو قسمت دارای شیب مثبت باشد. البته در قسمت دوم که شتاب بزرگ‌تر است باید بیشینه باشد و در قسمت سوم که شتاب منفی است شیب نمودار باید منفی باشد. در نتیجه نمودار گزینهٔ (۳) درست است.

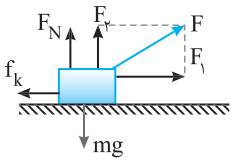
B ۱۱۰۲ ۳

۱ به کمک آنچه که در ریاضی سال هشتم خوانده‌اید مؤلفه‌های نیروی F را در امتداد افقی و قائم رسم کنید.

۲ نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم.

$$F_{net_y}=0 \Rightarrow W=F_N+F_2 \Rightarrow F_N=mg-F_2$$

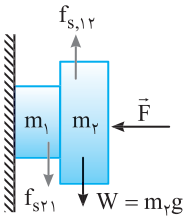
۳ نیروی اصطکاک را به‌دست می‌آوریم.



$$f_k=\mu_k F_N \Rightarrow f_k=\mu_k(mg-F_2)$$
$$\Rightarrow f_k=\mu_k mg-\mu_k F_2 \Rightarrow f<\mu_k mg$$

B ۱۱۰۳ ۴

خط فکری عجب شکلی دارد این سؤاااال! دو جسم ساکن هستند و نیروهای وارد بر هر جسم متوازن هستند. در صورت سؤال نیروی اصطکاکی که وزنهٔ m_2 بر وزنهٔ m_1 وارد می‌کند مورد پرسش است. اما ما ابتدا نیروهای وارد بر وزنهٔ m_2 را بررسی می‌کنیم تا بتوانیم دربارهٔ نیروی اصطکاک بین m_1 و m_2 اظهارنظر کنیم.



به وزنهٔ m_2 در راستای قائم دو نیرو وارد می‌شود.

۱ نیروی وزن $W=m_2g=40N$ رو به پایین

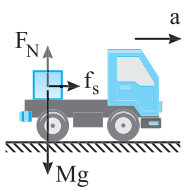
۲ چرا m_2 به پایین نمی‌آید زیرا از طرف جسم m_1 نیروی اصطکاک ایستایی $f_{s_{1,2}}$ بر آن رو به بالا وارد می‌شود که این نیرو با نیروی وزن m_2 برابر است. $f_{s_{1,2}}=W_2=40N$

۳ جسم m_1 بر جسم m_2 نیروی اصطکاک $40N$ را رو به بالا وارد می‌کند و بنا به قانون سوم نیوتون، جسم m_2 نیز نیروی اصطکاکی به اندازهٔ $40N$ و رو به پایین $(f_{s_{2,1}}=40N)$ به m_1 وارد می‌کند.

C ۱۱۰۴ ۲

خط فکری سؤال مهم این است که عامل حرکت بار روی کف تریلیِ در حال حرکت چه نیرویی است؟ عامل حرکت بار نیروی اصطکاک بین کف تریلی و بار است که به بار شتاب می‌دهد. بیشترین شتاب بار وقتی است که نیروی اصطکاک بیشینه باشد $(f_{s_{max}})$ اگر شتاب حرکت تریلی از بیشینه شتابی که می‌تواند اصطکاک به بار بدهد بیشتر باشد، بار از تریلی جا می‌ماند یعنی نسبت به تریلی رو به عقب لیز می‌خورد اما اگر $(a_{\text{تریلی}} \le a_{max})$ باشد بار و تریلی با یک شتاب حرکت می‌کنند.

۱ بیشینه شتاب حرکت بار در اثر اصطکاک را حساب می‌کنیم.

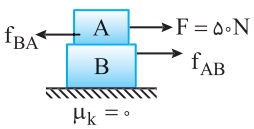


$$F_{net}=Ma \Rightarrow f_{s_{max}}=Ma_{max}$$
$$\Rightarrow \mu_s Mg=Ma_{max} \Rightarrow a_{max}=\mu_s g$$

۲ بنا به فرض مسئله، شتاب حرکت تریلی $a>\mu_s g$ است یعنی شتاب حرکت تریلی از بیشینه شتابی که بار می‌تواند به‌دست بیاورد بیشتر است. بنابراین بار در کف تریلی نسبت به تریلی به عقب لیز می‌خورد.

C ۱۱۰۵ ۱

نکته هرگاه دو جسم که با هم در تماس هستند بخواهند نسبت به هم حرکت کنند، بین آن‌ها یک نیروی تماس به نام اصطکاک ایجاد می‌شود که با حرکت دو جسم نسبت به هم مخالفت می‌کند.



خط فکری یک پارچه روی سطح اتاق بیاندازید و روی آن بنشینید و از شخصی بخواهید که دست شما را بگیرد و شما را بکشد خواهید دید که پارچه به همراه شما رو به جلو حرکت می‌کند. عامل حرکت پارچه به همراه شما، اصطکاک بین شما و پارچه است. در شکل مسئله وقتی A را با نیروی F می‌کشیم عامل حرکت B روی سطح بدون اصطکاک نیروی اصطکاک بین A و B است. اکنون این اصطکاک را باید با نیروی $F=50N$ مقایسه کنید.

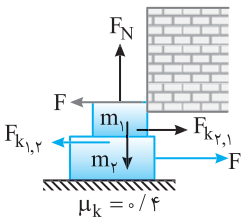


نیروی F دو جسم A و B را به حرکت درمی‌آورد اما نیروی اصطکاک بین A و B تنها سبب حرکت جسم B با همان شتاب می‌شود بنابراین $f_1<50N$ یعنی $F>f_1$ است. به روابط زیر دقت کنید:

$$F=(m_A+m_B)a \ , \ f=m_Ba \Rightarrow f<F$$

C ۱۱۰۶ ۳

دوباره شکل مسئله باعث نگرانی شما شد. m_1 به دیوار گیر کرده و ساکن است. اگر دیوار نبود، m_1 تحت تأثیر اصطکاک بین m_1 و m_2 به همراه m_2 حرکت می‌کرد.



۱ وقتی m_2 به سمت راست در حرکت است توسط سطح زمین و همچنین سطح m_1 نیروهای اصطکاک به سمت چپ وارد می‌شود. بنا به قانون سوم جسم m_2 نیروی اصطکاک $(f_{k_{2,1}})$ را بر m_1 وارد می‌کند. این نیرو را حساب می‌کنیم.

$$f_{k_{2,1}}=\mu_sF_N=\mu_km_1g \xrightarrow{\mu_k=0/4\,,\,m_1=10kg} f_{k_{2,1}}=0/4\times100$$
$$\Rightarrow f_{k_{2,1}}=40N$$

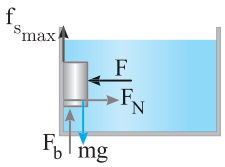
۲ جسم m_1 ساکن مانده است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند. بنابراین دیوار نیروی F را بر m_1 وارد می‌کند.

$$F_{net}=0\Rightarrow F=f_{k_{2,1}}\Rightarrow F=40N$$

۳ دیوار به جسم m_1 نیروی 40N وارد می‌کند و بنا به قانون سوم نیوتون جسم m_1 نیز نیروی 40N را به دیوار وارد می‌کند.

C ۱۱۰۷ ۱

ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و با توجه به توازن نیروها داریم (دقت کنید حداقل نیرو یعنی F آن‌قدر کم باشد که جسم در آستانه حرکت به سمت پایین باشد).



در راستای افقی: $F=F_N$

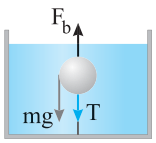
در راستای قائم: $F_b+f_{s_{max}}=mg$

$$\xrightarrow{F_b=10N\,,\,mg=30N} 10+\mu_sF_N=30$$
$$\mu_sF=20\Rightarrow0/5\times F=20\Rightarrow F=40N$$

B ۱۱۰۸ ۲

نیروهای وارد بر جسم سه نیروی وزن، شناوری و کشش ریسمان است که چون جسم ساکن است این سه نیرو متوازن هستند. نیروی شناوری رو به بالا، نیروی وزن و کشش ریسمان رو به پایین است. از این‌رو می‌توان نوشت:

$$F_{net}=0\Rightarrow F_b=mg+T$$



بیشینه نیروی شناوری زمانی است که کشش نخ بیشینه باشد:

$$F_{b_{max}}=mg+T_{max}\Rightarrow F_{b_{max}}=20+4=24N$$

B ۱۱۰۹ ۳

راه‌حل عادی: شخصی روی باسکول ایستاده و ساکن است. بنابراین باسکول وزن شخص را نشان می‌دهد.

$$F_N=W\Rightarrow F_N=600N$$

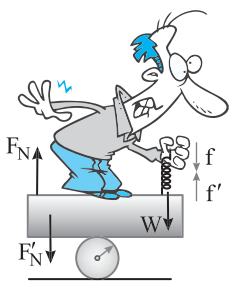
راه‌حل پیچیده:

نیروهای وارد بر شخص:

۱ نیروی وزن که توسط کرهٔ زمین رو به پایین وارد می‌شود.

۲ نیروی عمودی تکیه‌گاه که توسط کف باسکول رو به بالا وارد می‌شود.

۳ نیروی واکنش فنر که بر دست شخص رو به پایین وارد می‌شود.



شخص ساکن است. از این‌رو:

$$F_{net}=0\Rightarrow F_N=W+f \quad (1)$$

نیروهای وارد بر باسکول:

۱ نیروی F'_N واکنش F_N توسط شخص رو به پایین بر کف باسکول وارد می‌شود.

۲ نیروی f' که برابر f بوده و توسط فنر رو به بالا بر کف باسکول وارد می‌شود.

نیرویی که باسکول تحمل می‌کند و توسط باسکول نمایش داده می‌شود.

$$F=F_N-f \quad (2)$$

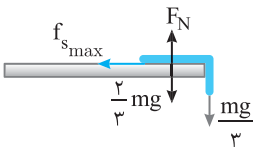
در این صورت:

$$\xrightarrow{(1),(2)} F=(W+f)-f\Rightarrow F=W$$

و باسکول F را که با W برابر است یعنی 600N را نشان می‌دهد.

C ۱۱۱۰ ۱

خط فکری طناب در آستانهٔ حرکت است و اصطکاک بین طناب و سطح میز $f_{s_{max}}$ است. طناب همگن است. کل طناب 4/5m است که 1/5m آن یعنی $\frac{1}{3}$ طناب آویزان است و وزن $\frac{2}{3}$ طناب روی سطح میز باقی مانده است.



آن می‌خواهد طناب را پایین بیاورد اما نیروی اصطکاک ایستایی بین طناب روی میز با سطح میز مانع است. از این‌رو باید اندازهٔ نیروی اصطکاک که مانع حرکت است با اندازهٔ نیروی وزن قسمت آویزان طناب برابر باشد.

نیروی وزن قسمت آویزان طناب را با نیروی اصطکاک ایستایی بین قسمت روی میز با سطح میز برابر قرار می‌دهیم.

$$F_{net}=0\Rightarrow f_{s_{max}}=W_{\text{قسمت آویزان}}\Rightarrow\mu_sF_N=\frac{1}{3}mg$$
$$\xrightarrow{F_N=\frac{2}{3}mg}\mu_s(\frac{2}{3}mg)=\frac{1}{3}mg\Rightarrow\mu_s=\frac{1}{2}=0/5$$

B ۱۱۱۱ ۱

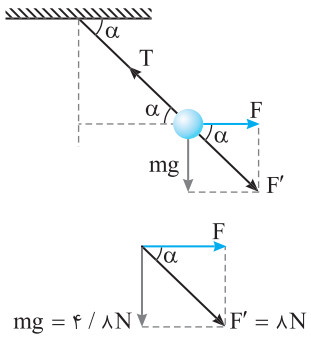
ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:

با توجه به اینکه جسم در حال تعادل است پس باید برایند F و W که با F' نمایش داده‌ایم هم‌اندازه با T و در خلاف جهت آن باشد. $|F'|=8N$

هم‌چنین با توجه به خطوط موازی و مورب زاویهٔ بین F' و F نیز برابر α است، α را حساب می‌کنیم.

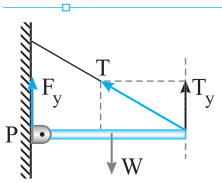
$$\sin\alpha=\frac{4/8}{8}=0/6$$

بنابراین $\alpha=37^\circ$ است.



B ۱۱۱۲ ۳

نیروهای وارد بر میله در راستای قائم را رسم می‌کنیم، ۱) نیروی وزن رو به پایین، ۲) مؤلفهٔ قائم نیروی کشش نخ T_y ۳) مؤلفهٔ نیروی لولا رو به بالا

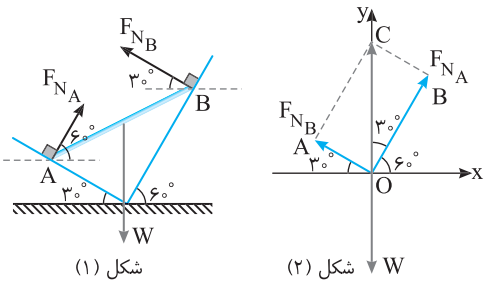


$$F_{net,y}=0\Rightarrow F_y+T_y=W\Rightarrow F_y=W-T_y\Rightarrow F_{\text{لولا}}<W$$

در واقع می‌توان این گونه استدلال کرد که نیروی وزن میله، توسط لولا و نخ تحمل می‌شود بنابراین نیرویی که لولا در نقطهٔ P بر میله وارد می‌کند قطعاً از W کمتر است.

۲ ۱۱۱۳ B

نیرویی که سطح بدون اصطکاک بر جسم وارد می‌کند همان نیروی عمودی سطح است. با توجه به شکل نیروها را رسم می‌کنیم (شکل (۱)). سپس هر سه نیرو را از یک نقطه رسم می‌کنیم (شکل (۲)).

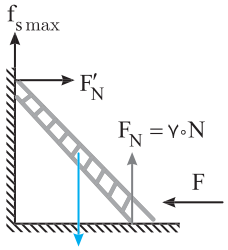


میله در تعادل است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند و باید برایند F_{N_A} و F_{N_B} هم‌اندازه و در خلاف جهت نیروی وزن باشد. با توجه به شکل زاویه‌ای که نیروی F_{N_A} با محور y می‌سازد 30° است. در نتیجه در مثلث OBC می‌توان نوشت:

$$\tan 30^\circ = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{F_{N_B}}{F_{N_A}} \Rightarrow F_{N_A} = \sqrt{3} F_{N_B}$$

۲ ۱۱۱۴ B

خط فکری جملهٔ «کمینه نیرویی که مانع لیز خوردن نردبان شود» یعنی اگر نیروی F از آن کمتر شود نردبان به پایین می‌لغزد. در این حالت نیروی اصطکاک ایستایی بین نردبان و دیوار قائم باید رو به بالا باشد. نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم، نردبان در آستانهٔ حرکت رو به پایین بوده و نیروهای وارد بر آن متوازن است.



۱ برایند نیروهای وارد بر نردبان در امتداد قائم را برابر صفر قرار می‌دهیم و $f_{s_{max}}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$f_{s_{max}} + F_N = W \Rightarrow f_{s_{max}} + ۷۰ = ۱۰۰ \Rightarrow f_{s_{max}} = ۳۰N$$

۲ نیروی عمودی سطح که دیوار قائم بر نردبان وارد می‌کند را حساب می‌کنیم.

$$f_{s_{max}} = \mu_s F'_N \xrightarrow{\mu_s = ۰/۶} ۳۰ = ۰/۶ F'_N \Rightarrow F'_N = ۵۰N$$

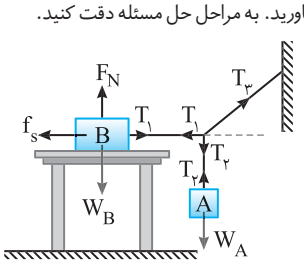
۳ برایند نیروهای افقی وارد بر نردبان صفر است از این‌رو:

$$F = F'_N \Rightarrow F = ۵۰N$$

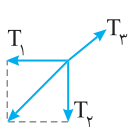
۲ ۱۱۱۵ B

خط فکری قرار است که وزن جسم A بیشینه باشد اما B ساکن بماند یعنی B در آستانهٔ حرکت قرار بگیرد بنابراین نیروی اصطکاک بین جسم B و سطح میز بیشینه $(f_{s_{max}})$ باشد. نیروهای وارد بر جسم B و جسم A را رسم کنید و برای هر جسم نیروی خالص را مساوی صفر قرار داده و کشش نخ متصل بر هریک از آن‌ها را حساب کنید و سرانجام کشش نخ متصل دیوار را به‌دست بیاورید. به مراحل حل مسئله دقت کنید.

۱ جسم B باید ساکن بماند، بنابراین اصطکاک وارد بر آن f_s است و چون وزن جسم A بیشینه است، اصطکاک آستانه حرکت $f_{s_{max}}$ می‌باشد.



$$F_{net} = ۰ \Rightarrow T_۱ = f_{s_{max}}$$
$$\Rightarrow T_۱ = \mu_s F_{N_B}$$
$$\Rightarrow T_۱ = ۰/۵ \times ۶۰۰ = ۳۰۰N$$



۲ جسم A ساکن است از این‌رو کشش نخ متصل به A $(T_۲)$ با نیروی وزن A برابر است.

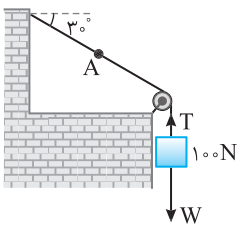
$$T_۲ = W_A \Rightarrow T_۲ = ۲۲۵N$$

۳ نیروهای $T_۱$، $T_۲$ و $T_۳$ باید با هم متوازن باشند و برایند $T_۱$ و $T_۲$ باید هم‌اندازهٔ $T_۳$ و در خلاف جهت آن باشد. به کمک رابطهٔ فیثاغورس $T_۳$ را حساب می‌کنیم.

$$T_۳ = \sqrt{T_۱^۲ + T_۲^۲} = \sqrt{۳۰۰^۲ + ۲۲۵^۲} = ۲۵\sqrt{۱۲^۲ + ۹^۲} \Rightarrow T_۳ = ۲۵ \times ۱۵ = ۳۷۵N$$

۲ ۱۱۱۶ B

نکته در طول یک نخ همگن با جرم ناچیز نیروی کشش مقدار ثابتی است



نیروهای وارد بر وزنه را رسم می‌کنیم. این نیروها متوازن هستند.

$$T = W \Rightarrow T = ۱۰۰N$$

کشش در تمام نقاط این نخ از جمله نقطهٔ A یکسان و برابر ۱۰۰N است.

۳ ۱۱۱۷ B

بر فضانورد دو نیرو یکی وزن (W) رو به پایین و دیگری نیروی عمودی تکیه‌گاه رو به بالا وارد می‌شود. نیروی خالص وارد بر فضانورد را برابر ma قرار داده، F_N را به‌دست می‌آوریم.

$$F_N - mg = ma \Rightarrow F_N - ۷۵ \times ۱۰ = ۷۵ \times ۸۰ \Rightarrow F_N = ۶۷۵۰ N$$

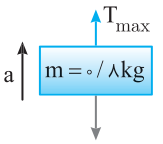
۴ ۱۱۱۸ B



وقتی شخص شروع به بالا رفتن می‌کند، در لحظاتی، یک دست خود را رها کرده و با دست دیگر خود را بالا می‌کشد و سپس دست رها شدهٔ خود را به طناب می‌گیرد و دست دیگر خود را رها می‌کند و با تکرار این عمل بالا می‌رود. وقتی که شخص خود را به بالا می‌کشد ابتدا حرکت او تندشونده $(T > W)$ است اما وقتی که دست دوم خود را به طناب می‌رساند و لحظه‌ای متوقف می‌شود حرکت او کندشونده است $(T < W)$ حتی ممکن است هنگام بالا رفتن وقتی خود را به بالا می‌کشد برای لحظه‌ای هر دو دست او به طناب وصل نباشد و کشش به‌طور لحظه‌ای صفر شود $(T = ۰)$ بنابراین با قاطعیت نمی‌توان اظهارنظر کرد.

۲ ۱۱۱۹ C

کشش طناب زمانی بیشترین مقدار است که جسم تندشونده به سمت بالا بیاید یا کندشونده با همان شتاب به سمت پایین در حال حرکت باشد یعنی $T > mg$ باشد. از این‌رو می‌توان شتاب حرکت را در این حالت به‌دست آورد.



$$F_{net} = ma \Rightarrow T_{max} - mg = ma$$

$$\Rightarrow ۱۰ - ۸ = ۰/۸a \Rightarrow a = \frac{۲}{۰/۸} = \frac{۲۰}{۸} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵ m/s^۲$$

یعنی شتاب حرکت تندشونده رو به بالا یا حرکت کندشونده رو به پایین نباید از $۲/۵ m/s^۲$ بیشتر باشد و گزینهٔ (۲) پاسخ است. یعنی جسم با شتاب $۳ m/s^۲$ با حرکت تندشونده نمی‌تواند رو به بالا حرکت کند. حال برای اطمینان گزینهٔ (۴) را نیز بررسی می‌کنیم. حرکت کندشونده رو به بالا یعنی $T < mg$ از این‌رو:



$$mg - T = ma$$

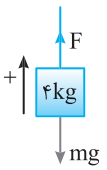
$$۸ - T = ۰/۸ \times ۳ \Rightarrow T = ۵/۶N < ۱۰N$$

بنابراین جسم می‌تواند با شتاب $۳ m/s^۲$ با حرکت تندشونده رو به پایین حرکت کند در این حالت نیروی کشش نخ $۵/۶N$ است که از بیشینهٔ نیروی کشش $T = ۱۰N$ کمتر است و نخ پاره نمی‌شود.

۳ ۱۱۲۰ B

خط فکری در دو حالت ممکن است اندازهٔ شتاب $۲m/s^۲$ باشد یک بار نیروی F رو به بالا بزرگ‌تر از وزن جسم $(F>mg)$ و بار دیگر نیروی F رو به بالا کوچک‌تر از وزن جسم $(F<mg)$ باشد در دو حالت قانون دوم نیوتون را نوشته، F را به‌دست بیاورید.

اندازهٔ شتاب $|a|=۲m/s^۲$ است، بنابراین:



$$F_{net}=m|a|\begin{cases}\xrightarrow{F>mg} F_۱-mg=ma\\ \xrightarrow{F<mg} mg-F_۲=ma\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}F_۱-۴۰=۴\times۲\Rightarrow F_۱=۴۸N\\ F_۲-۴۰=۴\times(-۲)\Rightarrow F_۲=۳۲N\end{cases}$$

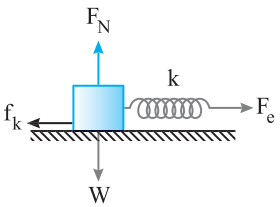
$$|F_۱-F_۲|=۴۸-۳۲=۱۶N$$

اگر در حالت اول $F_۱=۴۸N$ و $F_۲=۳۲N$ باشد با ۱۶N، نیروی F کاهش یابد که گزینهٔ (۳) چنین است. اما حالت دیگر این است که ابتدا $F<mg$ و برابر ۳۲N و سپس $F>mg$ یعنی ۴۸N باشد. در این صورت باید F را افزایش داد که در گزینه‌ها نیست.

۲ ۱۱۲۱ C

خط فکری مسئله از شما ضریب اصطکاک را خواسته است یعنی سطح دارای اصطکاک است و نیروی خالص وارد بر جسم برآیند نیروی کشسانی فنر و نیروی اصطکاک جنبشی است.

با توجه به جدول اگر در حالت اول نیروی کشسانی فنر با تغییر طول به اندازهٔ ۲cm را F_e بنامیم در حالت دوم که تغییر طول ۳cm یعنی تغییر طول $\frac{۳}{۲}=۱/۵$ برابر حالت اول است



نیروی کشسانی فنر $۱/۵F_e$ می‌شود و در حالت سوم تغییر طول ۶cm است یعنی تغییر طول فنر $\frac{۶}{۲}=۳$ برابر حالت اول نیروی کشسانی فنر $۳F_e$ می‌شود. اکنون باید برای هر حالت، قانون دوم نیوتون را نوشته و به کمک سه معادله سه مجهول مسئله را حل کنید.

حالت اول: $F_{net}=ma\Rightarrow F_e-f_k=m\times۲/۵\quad(I)$

حالت دوم: $۱/۵F_e-f_k=m\times۵\quad(II)$

حالت سوم: $۳F_e-f_k=m\times۱۲/۵\quad(III)$

رابطهٔ II را بر رابطهٔ I تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{۱/۵F_e-f_k}{F_e-f_k}=۲\Rightarrow ۱/۵f_e-f_k=۲F_e-۲f_k\Rightarrow f_k=۰/۵F_e\quad(۱)$$

به جای f_k در رابطهٔ III مقدار $۰/۵F_e$ را قرار می‌دهیم.

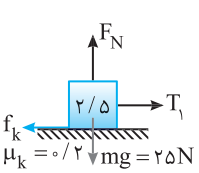
$$۳F_e-۰/۵F_e=۱۲/۵m\Rightarrow ۲/۵F_e=۱۲/۵m\Rightarrow F_e=۵m\quad(۲)$$

به جای F_e در رابطهٔ (۱) مقدار ۵m را قرار می‌دهیم.

$$f_k=۰/۵\times۵m\Rightarrow f_k=۲/۵m\xrightarrow{f_k=\mu_k mg}\mu_k mg=۲/۵m\Rightarrow\mu_k=۰/۲۵$$

۳ ۱۱۲۲ C

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.



۱ نیروی اصطکاک را حساب می‌کنیم:

$$f_k=\mu_k F_N=\mu_k mg\Rightarrow f_k=۵N$$

۲ بنابر قانون دوم نیوتون برایند نیروها را برابر ma قرار می‌دهیم، در حالت اول:

$$F_{net}=ma\Rightarrow T_۱-f_k=ma\Rightarrow T_۱-۵=۲/۵a\Rightarrow T_۱=۲/۵a+۵$$

۳ در حالت دوم نیروی $T_۲$ به سمت بالا و mg به سمت پایین است. قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم:



$$F_{net}=ma\Rightarrow T_۲-mg=ma\Rightarrow T_۲=۲/۵a+۲۵$$

۴ $\frac{T_۲}{T_۱}$ خواهد شد: $\frac{T_۲}{T_۱}=\frac{۲/۵a+۲۵}{۲/۵a+۵}\Rightarrow\frac{T_۲}{T_۱}=۱+\frac{۲۰}{۲/۵a+۵}$

۵ با توجه به فرض مسأله شتاب $a<۶m/s^۲$ است اگر $a=۶m/s^۲$ باشد نسبت $\frac{T_۲}{T_۱}$ خواهد شد:

$$\frac{T_۲}{T_۱}=۱+\frac{۲۰}{۲/۵\times۶+۵}\Rightarrow\frac{T_۲}{T_۱}=۱+\frac{۲۰}{۲۰}=۲$$

بنابراین اگر شتاب کمتر از $۶\frac{m}{s^۲}$ باشد مقدار کسر از ۱ $\frac{۲۰}{۲/۵a+۵}>۱$ می‌شود و $\frac{T_۲}{T_۱}>۲$ خواهد بود.

۴ ۱۱۲۳ B

خط فکری مفهوم عبارت (مسافران از کف آسانسور جدا نشوند) این است که نیروی عمودی سطح F_N (نیرویی که سطح بر مسافران وارد می‌کند) در آن بازهٔ زمانی صفر شود. در این صورت تنها نیروی وزن بر آن‌ها وارد شده و شتاب آسانسور $a=g$ باشد.

$$F_N=۰\Rightarrow mg=ma\Rightarrow a=g$$

در واقع آسانسور در حال حرکت رو به بالا حداکثر با شتاب $(a=۱۰N/kg)$ ترمز می‌کند. بنابراین حداقل زمان توقف خواهد شد:

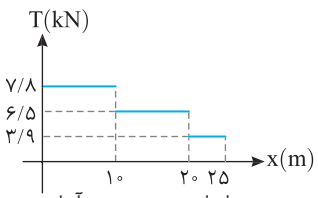
$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=-۱۰t+۸\Rightarrow t=۰/۸s$$

اگر ترمز توقف آسانسور از $g=۱۰N/kg$ بیشتر باشد، مسافران از کف آسانسور برای مدتی جدا می‌شوند زیرا دارای سرعت بوده و طبق قانون اول نیوتون تمایل دارند به حرکت خود ادامه دهند و نیرویی که مانع آن‌ها می‌شود وزن است بنابراین حداکثر شتاب برای توقف مسافران شتاب حاصل از وزن یعنی $a=g$ است و اگر شتاب آسانسور از این بیشتر شود، آسانسور سریع‌تر از مسافران متوقف شده و برای مدت کوتاهی افراد از کف آسانسور جدا می‌شوند.

۲ ۱۱۲۴ C

۱ در ۱۰m اول نیروی کشش کابل $T_۱=۷/۸kN=۷۸۰۰N$ است. قانون دوم نیوتون را برای آسانسور نوشته شتاب آن را به‌دست می‌آوریم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow T-W_{کل}=m_{کل}a\Rightarrow ۷۸۰۰-۶۵۰۰=۶۵۰a\Rightarrow a=۲m/s^۲$$



۲ اکنون قانون دوم نیوتون را برای شخص درون آسانسور می‌نویسیم و F_N را حساب می‌کنیم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F_{N_۱}-m_{شخص}g=m_{شخص}a_۱\Rightarrow F_{N_۱}-۵۰۰=۱۰۰\Rightarrow F_{N_۱}=۶۰۰N$$

۳ در بازهٔ ۲۰m تا ۲۵m نیروی کشش طناب $T_۳=۳/۹kN=۳۹۰۰N$ است. $T_۳<W$ بوده قانون دوم نیوتون را برای آسانسور می‌نویسیم:

$$F_{net}=ma_۳\Rightarrow W_{کل}-T_۳=m_{کل}a'\Rightarrow ۶۵۰۰-۳۹۰۰=۶۵۰a_۳\Rightarrow a_۳=۴m/s^۲$$

۴ با داشتن شتاب نیروی عمودی سطح وارد بر شخص را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{شخص: } F_{net}=ma\Rightarrow m_{شخص}g-F_{N_۳}=m_{شخص}a_۳\Rightarrow ۵۰۰-F_{N_۳}=۵۰\times۴$$

$$\Rightarrow F_{N_۳}=۳۰۰N$$

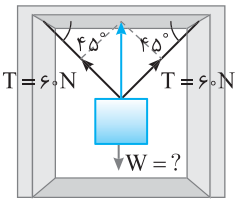
۵ نسبت $\frac{F_{N_۱}}{F_{N_۳}}$ خواهد شد: $\frac{F_{N_۱}}{F_{N_۳}}=\frac{۶۰۰}{۳۰۰}=۲$

۳ ۱۱۲۵ B

خط فکری مسئلهٔ خاصی نیست، یک وزنه درون آسانسور از دو ریسمان آویزان است و هر ریسمان نیروی کشش ۶۰N بر وزنه وارد می‌کند. چون دو نیروی کشش برابر هستند برآیند آن‌ها در امتداد قائم رو به بالاست. برآیند آن‌ها را به‌دست می‌آوریم، سپس به کمک قانون دوم نیوتون، جرم جسم را حساب می‌کنیم.

۱ نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. برایند دو نیروی کشش ۶۰N که با هم زاویهٔ ۹۰° می‌سازند، را به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آوریم:

$$T_{کل}=\sqrt{T^۲+T^۲}=\sqrt{۲}T\Rightarrow T_{کل}=۶۰\sqrt{۲}=۶۰\times۱/۴\Rightarrow T_{کل}=۸۴N$$



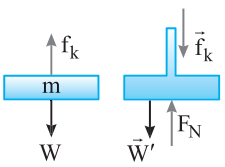
۲ قانون دوم نیوتون را برای جسم می‌نویسیم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow T_{کل}-W=ma\Rightarrow ۸۴-m\times ۱۰=m\times ۲\Rightarrow m=\frac{۸۴}{۱۲}=۷kg$$

C ۲ ۱۱۲۶

خط فکری با یک مسئله جالب سروکار داریم. اگر مهره را رها کنید با شتاب گرانش $(g=۱۰N/kg)$ سقوط می‌کند اما این مهره وقتی از روی بدنهٔ میله به پایین می‌لغزد، شتابش $۲m/s^۲$ است. بنابراین حتماً نیرویی رو به بالا مخالف حرکت وجود دارد که قطعاً این نیرو اصطکاک بین مهره و بدنهٔ میله است که شما باید آن را حساب کنید. میله به مهره رو به بالا نیرو وارد می‌کند. بنا به قانون سوم نیوتون مهره هنگام لغزیدن به میله رو به پایین نیرو وارد می‌کند. در این حالت نیروسنج عددی که نشان می‌دهد مجموع وزن پایه و نیرویی است که مهره به میله رو به پایین وارد می‌کند که همان نیروی اصطکاک است.

۱ دو نیرو بر مهره وارد می‌شود اولی نیروی وزن و دومی نیروی اصطکاک است. بنا به قانون دوم خواهیم داشت:



$$F_{net}=ma\Rightarrow W-f_k=ma$$
$$\Rightarrow ۰/۵\times ۱۰-f_k=۰/۵\times ۲\Rightarrow f_k=۴N$$

۲ میله بر مهره نیروی اصطکاک f_k را رو به بالا وارد می‌کند و بنابر قانون سوم نیوتون، مهره نیز بر میله نیروی f_k را رو به پایین وارد می‌کند. چون میله و پایه ساکن هستند، برایند نیروی وارد بر آن‌ها صفر است. نیروهای وارد بر پایه شامل سه نیرو است: ۱) نیروی وزن رو به پایین، ۲) نیروی اصطکاک مهره وارد بر میله رو به پایین، ۳) نیروی عمودی سطح نیروسنج که به پایه رو به بالا وارد می‌کند.

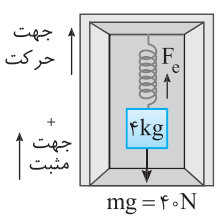
$$F_{net}=۰\Rightarrow W'+f_k-F_N=۰\Rightarrow F_N=W'+f_k=۱/۵\times ۱۰+۴=۱۹N$$
$$\Rightarrow F_N=۱۹N$$

۳ F_N عددی است که ترازوی فنری نشان می‌دهد. یعنی ترازوی فنری ۱۹N را نشان می‌دهد.

C ۱ ۱۱۲۷

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. ۱) نیروی وزن ۲) نیروی کشسانی فنر احساس ما این است که باید نیروی کشسانی فنر رو به بالا و نیروی وزن رو به پایین باشد به احساس خود احترام می‌گذاریم و قانون دوم نیوتون را در این حالت می‌نویسیم و F_e را حساب می‌کنیم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow F_e-mg=ma$$
$$\xrightarrow[\text{شتاب کندشونده}]{a=-۱۲m/s^۲} F_e-۴۰=-۴۸\Rightarrow F_e=-۸N$$



اندازهٔ نیروی F_e منفی شده چگونه چنین چیزی ممکن است؟ جهت مثبت را رو به بالا گرفته‌ایم. بنابراین مفهوم این منفی شدن یعنی F_e بار رو به پایین و در جهت نیروی وزن باشد تا به وزنه شتاب $۱۲m/s^۲$ رو به پایین بدهد. در نتیجه تغییر طول فنر خلاف جهت نیروی کشسانی یعنی رو به بالا بوده و فنر در این جابه‌جایی فشرده‌تر شده است.

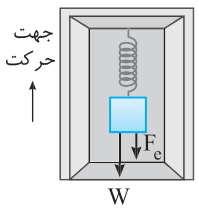
اکنون قانون دوم نیوتون را مجدداً می‌نویسیم و F_e را به‌دست می‌آوریم.

$$-(F_e+W)=ma \xrightarrow{\text{حرکت کندشونده}} -F_e-۴۰=۴\times(-۱۲)\Rightarrow F_e=۸N$$

تغییر طول فنر را به‌دست می‌آوریم.

$$F_e=k\Delta x\Rightarrow ۸=۲۰۰\times\Delta x\Rightarrow \Delta x=\frac{۸}{۲۰۰}=\frac{۴}{۱۰۰}=۴cm$$

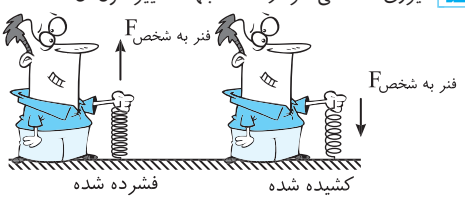
فنر فشرده شده : $x_۲=x_۱-\Delta x=۸۰-۴=۷۶cm$



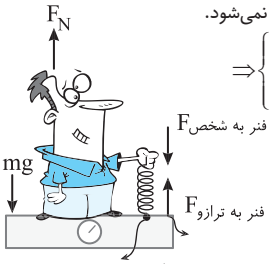
C ۲ ۱۱۲۸

یادآوری ترازوی فنری و باسکول مقدار نیروی عمودی سطح F_N را نمایش می‌دهند.

نکته نیروی کشسانی فنر در خلاف جهت تغییر طول آن است.

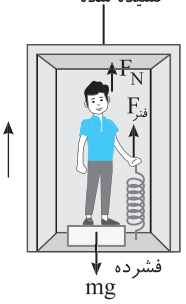


فنر متصل به باسکول را بررسی می‌کنیم. هر نیرویی که رو به بالا به فنر وارد کنیم، فنر همان نیرو را رو به پایین به ما وارد می‌کند. یعنی فنر کف باسکول را بالا می‌کشد و ما آن را به پایین هُل می‌دهیم. بنابراین وقتی فنر متصل به باسکول را تغییر شکل می‌دهیم در عددی که باسکول نشان می‌دهد تغییری حاصل نمی‌شود.



$$\Rightarrow\begin{cases}F_{فنر\ به\ شخص}=F_{فنر\ به\ ترازو}\\ \text{این دو نیرو خلاف جهت هم‌اند}\end{cases}\Rightarrow F_N=mg$$

بنابراین فنر متصل به آسانسور مهم است.



$$F_{net}=ma\Rightarrow F_N+F_{فنر}-mg=ma$$
$$\Rightarrow F_N+k\Delta x-mg=ma$$
$$\Rightarrow F_N+۳۰۰\times\frac{۲}{۱۰۰}-۶۰۰=۱۲۰$$
$$\Rightarrow F_N+۶-۶۰۰=۱۲۰\Rightarrow F_N=۷۱۴N$$

پنجره ۴

A ۱ ۱۱۲۹

یادآوری تکانه کمیت برداری است و برابر حاصل‌ضرب جرم در بردار سرعت جسم است. $\vec{P}=m\vec{v}$

تکانه در حالت اول و حالت دوم را به‌دست می‌آوریم:

$$P=mv\xrightarrow{m=۲kg}\begin{cases}\xrightarrow{\vec{v}_۱=۴\vec{i}} P_۱=۸\vec{i}\\ \xrightarrow{\vec{v}_۲=-۸\vec{i}} P_۲=۲\times(-۸)\vec{i}=-۱۶\vec{i}\end{cases}$$

تغییر تکانه خواهد شد:

$$\Delta\vec{P}=\vec{P}_۲-\vec{P}_۱=-۱۶\vec{i}-۸\vec{i}\Rightarrow\Delta\vec{P}=-۲۴\vec{i}$$

۱۱۳۰ B ۲

۱ بردار تکانهٔ جسم را در $t=2s$ به‌دست می‌آوریم.

$$\vec{P}=6t\vec{i}+4t^2\vec{j} \xrightarrow{t=2s} \vec{P}=12\vec{i}+16\vec{j}$$

۲ تکانه برابر حاصل‌ضرب جرم جسم در سرعت آن است.

$$\vec{P}=m\vec{v} \xrightarrow{m=0/4kg} 12\vec{i}+16\vec{j}=0/4\vec{v}\Rightarrow\vec{v}=30\vec{i}+40\vec{j}$$

۳ اندازه سرعت جسم خواهد شد:

$$|\vec{v}|=\sqrt{30^2+40^2}=50m/s$$

۱۱۳۱ A ۴

خط فکری در صورت مسئله تندی جسم داده شده و جهت حرکت جسم مشخص نیست. بنابراین v_1 می‌تواند $+3m/s$ یا $-3m/s$ باشد هم‌چنین v_2 می‌تواند $+4m/s$ یا $-4m/s$ باشد، بنابراین باید حالت‌های مختلف را بررسی کنید.

۱ اندازه تغییر سرعت جسم می‌تواند برابر مقدارهای زیر باشد.

$$\begin{cases} v_1=\pm 3m/s \\ v_2=\pm 4m/s \end{cases}\Rightarrow |\Delta v|=1m/s \text{ یا } 7m/s$$

۲ اندازهٔ تغییر تکانه خواهد شد.

$$|\Delta P|=m|\Delta v|\Rightarrow\begin{cases} |\Delta P|=2\times 1=2kgm/s \\ |\Delta P|=2\times 7=14kgm/s \end{cases}$$

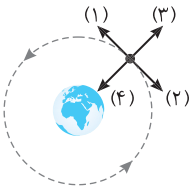
۱۱۳۲ A ۲

دقت کنید تندی افزایش یافته بنابراین بزرگی تکانه نیز افزایش می‌یابد.

تکانه برابر جرم در سرعت جسم می‌باشد، تندی جسم در جهت سرعت $4m/s$ افزایش یافته بنابراین تکانه نیز $12\,kg.m/s$ افزایش می‌یابد.

$$P=mv\Rightarrow P+12=m(v+4)\Rightarrow P+12=mv+4m\Rightarrow 12=4m\Rightarrow m=3kg$$

۱۱۳۳ A ۱



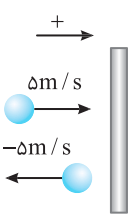
در هر لحظه بردار سرعت بر مسیر حرکت مماس است و جهت آن در سوی چرخش ماهواره است از طرفی تکانه $(\vec{P}=m\vec{v})$ برداری در جهت نیرو است بنابراین جهت درست نشان داده شده روی شکل جهت (۱) است.

۱۱۳۴ A ۲

۱ انرژی جنبشی کمیت نرده‌ای است و با مجذور تندی متناسب است از این‌رو تغییر نمی‌کند.

$$\Delta K=K_2-K_1=\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2)=\frac{1}{2}\times 0/5(25-25)=0$$

۲ تکانه کمیتی برداری است و هموار در جهت بردار سرعت است و اگر جهت بردار سرعت عوض شود جهت بردار تکانه تغییر می‌کند.



اگر جهت حرکت به سوی دیوار را مثبت فرض کنیم سرعت برخورد به دیوار $+5m/s$ است و وقتی توپ برمی‌گردد سرعت آن $-5m/s$ خواهد بود. از این رو می‌توان نوشت:

$$|\Delta P|=|m\Delta v|=|0/5(-5-5)|=5kgm/s$$

دقت کنید که هدف طراح یادآوری این نکته است که انرژی جنبشی به جهت حرکت جسم بستگی ندارد اما تکانه بردار بوده و جهت حرکت جسم در مورد تکانه مهم است.

۱۱۳۵ A ۴

ابتدا تندی جسم پس از $5s$ را به‌دست می‌آوریم، سپس به کمک تکانه جرم را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0 \xrightarrow{v_0=0} v=0/5\times 5\Rightarrow v=2/5m/s$$

$$P=Mv \xrightarrow{P=10kgm/s} 10=M\times 2/5\Rightarrow M=4kg$$

۱۱۳۶ A ۲

۱ سرعت جسم در $t_1=0$ و $t_2=0/5s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$v=2\sin 5\pi t\Rightarrow\begin{cases} t_1=0\Rightarrow v_1=2\sin 5\pi(0)\Rightarrow v_1=0 \\ t_2=0/5s\Rightarrow v_2=2\sin 5\pi(\frac{1}{2}) \\ \qquad\Rightarrow v_2=2\sin\frac{5\pi}{2}\Rightarrow v_2=2m/s \end{cases}$$

۲ تغییر تکانه خواهد شد:

$$\Delta P=m\Delta v\Rightarrow\Delta P=m(v_2-v_1)\Rightarrow\Delta P=2\times 2=4kgm/s$$

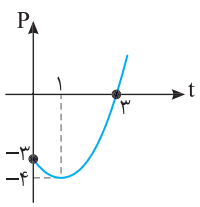
۱۱۳۷ B ۴

نکته هرگاه بزرگی تکانه افزایش یابد یعنی تندی افزایش می‌یابد و حرکت تندشونده است و هرگاه بزرگی تکانه کاهش یابد تندی کاهش می‌یابد و حرکت کندشونده است.

خط فکری برای حل مسئله بهترین روش استفاده از رسم نمودار تکانه - زمان است که یک تابع درجه ۲ است.

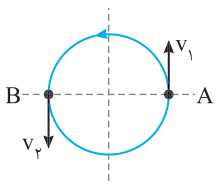
ابتدا نمودار $P-t$ را رسم می‌کنیم:

$$P=t^2-2t-3\Rightarrow\begin{cases} t_{\text{رأس}}=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1s\Rightarrow P=1-2-3=-4kg.m/s \\ t=0\Rightarrow P=-3kg.m/s \\ P=0\Rightarrow t=3s \end{cases}$$



در بازهٔ صفر تا $1s$ اندازهٔ تکانه از $3kg.m/s$ تا $4kg.m/s$ افزایش می‌یابد بنابراین سرعت در حال افزایش است و از $1s$ تا $3s$، اندازهٔ تکانه از $4kg.m/s$ به صفر می‌رسد و سرعت در حال کاهش و حرکت کندشونده است.

۱۱۳۸ A ۲



نکته سرعت در هر نقطه از مسیر بر مسیر مماس است.

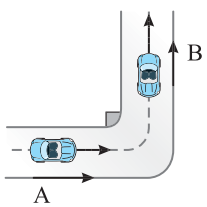
وقتی متحرک مطابق شکل از نقطهٔ A می‌گذرد در مدتی که نصف محیط را طی می‌کند به نقطهٔ B می‌رسد. در این صورت بردار سرعت در نقطهٔ B رو به پایین است، اگر جهت v_1 را مثبت بگیریم $(v_1=v)$ سرعت در نقطهٔ B برابر $v_2=-v$ است. بنابراین تغییر سرعت خواهد شد:

$$|\Delta v|=|v_2-v_1|=|-v-v|=2v$$

تغییر تکانه را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta P=m\Delta v\Rightarrow\Delta P=2mv$$

۱۱۳۹ B ۲



اندازهٔ تکانه در نقطهٔ A و B برابر است مقدار آن را به‌دست می‌آوریم.

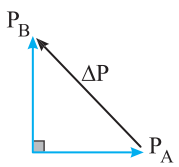
$$P=mv \xrightarrow[v=4m/s]{m=500kg} P=500\times 4$$

$$\Rightarrow P=2000kgm/s\Rightarrow P_A=P_B=2000kgm/s$$

نکته اندازه تفاضل دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ که بر هم عمودند از رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آید:

$$|\vec{A}-\vec{B}|=\sqrt{A^2+B^2}$$

بردار P_A و P_B بر هم عمودند و تغییر تکانه خواهد شد:



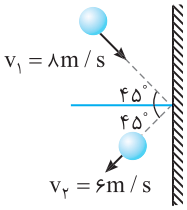
$$\Delta\vec{P}=\vec{P}_B-\vec{P}_A\Rightarrow\Delta P=\sqrt{P_A^2+P_B^2}$$

$$\Rightarrow\Delta P=\sqrt{(2000)^2+(2000)^2}$$

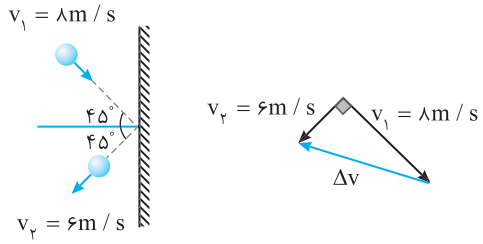
$$\Rightarrow\Delta P=2000\sqrt{2}kgm/s$$

بازی با سؤال در شکل روبه‌رو، گلوله‌ای به جرم ۲۰۰g به مانع برخورد کرده و از آن برمی‌گردد. تغییر تکانهٔ جسم چند کیلوگرم متر بر ثانیه است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۲
۳) ۰/۶ ۴) ۲/۸



پاسخ هم‌سنگ دو بردار را از یک نقطه رسم می‌کنیم:



$$\Delta v=\sqrt{v_1^2+v_2^2}\Rightarrow \Delta v=\sqrt{8^2+6^2}=10m/s$$

$$\Delta P=m\Delta v\Rightarrow \Delta P=0/2\times 10=2kgm/s$$

تغییر تکانهٔ جسم برابر است با:

گزینهٔ ۲

۱ ۱۱۴۰ A

حاصل‌ضرب نیرو در زمان اثر نیرو، برابر تغییر تکانه است. $(\Delta P=F\Delta t)$

گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) صحیح هستند و گزینهٔ (۱) نادرست و جواب تست است.

۳ ۱۱۴۱ A

۱ تکانهٔ جسم $40kgm/s$ شده است، سرعت جسم را به‌دست می‌آوریم.

$$P=mv\xrightarrow{m=5kg}40=5v\Rightarrow v_2=8m/s$$

۲ سرعت متحرک در جابه‌جایی $10m$ از صفر به $8m/s$ رسیده است به کمک معادله مستقل از شتاب، زمان طی شده را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t\Rightarrow 10=\frac{8+0}{2}\Delta t\Rightarrow \Delta t=2/5s$$

۳ نیروی خالص وارد بر جسم خواهد شد:

$$F_{net}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow F_{net}=\frac{40-0}{2/5}\Rightarrow F_{net}=16N$$

۱ ۱۱۴۲ A

با توجه به رابطهٔ $F=\frac{\Delta P}{\Delta t}$ نیروی وارد بر جسم A و B را حساب کرده و بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases} F_A=\frac{\Delta P_A}{\Delta t_A}\xrightarrow{\Delta P=12kgm/s,\ \Delta t=0/05s} F_A=\frac{12}{0/05}=240N \\ F_B=\frac{\Delta P_B}{\Delta t_B}\xrightarrow{\Delta P=60kgm/s,\ \Delta t=0/2s} F_B=\frac{60}{0/2}=300N \end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{F_A}{F_B}=\frac{240}{300}\Rightarrow\frac{F_A}{F_B}=\frac{4}{5}$$

۲ ۱۱۴۳ B

با توجه به رابطهٔ زیر و با داشتن تغییر تکانهٔ جسم می‌توان نوشت:

$$F=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow F=\frac{P_2-P_1}{\Delta t}\xrightarrow{P_2=2P_1}$$

$$4=\frac{2P_1-P_1}{\Delta t}\Rightarrow 4=\frac{mv_1}{\Delta t}\Rightarrow 4=\frac{20\times 5}{\Delta t}\Rightarrow \Delta t=25s$$

۲ ۱۱۴۴ A

۱ تکانهٔ جسم ۴۰ درصد افزایش یافته پس $P_2=1/4P_1$ است، بنابراین با توجه به رابطه نیرو، تغییر تکانه می‌توان نوشت:

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\xrightarrow{F=10N,\ \Delta t=4s}10=\frac{P_2-P_1}{4}$$

$$\Rightarrow 1/4P_1-P_1=(10\times 4)\Rightarrow 0/4P_1=40\Rightarrow P_1=100kg.m/s$$

۲ با توجه به تعریف تکانه، سرعت را حساب می‌کنیم:

$$P_1=mv_1=100kg.m/s\Rightarrow 2\times v_1=100kg.m/s\Rightarrow v_1=50m/s$$

۴ ۱۱۴۵ A

دو جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده و تکانهٔ اولیهٔ آن‌ها صفر است. با توجه به رابطهٔ $F=\frac{\Delta P}{\Delta t}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \Delta P_1=Ft\xrightarrow{\Delta P_1=P_1-P_{01},\ P_{01}=0} P_1=Ft \\ \Delta P_2=\frac{F}{3}(2t)\xrightarrow{\Delta P_2=P_2-P_{02},\ P_{02}=0} P_2=\frac{2}{3}Ft \end{cases}\Rightarrow\frac{P_2}{P_1}=\frac{\frac{2}{3}Ft}{Ft}=\frac{2}{3}$$

۳ ۱۱۴۶ A

۱ با استفاده از رابطهٔ بین نیرو و تکانه، نیروی خالص وارد بر جسم را به‌دست می‌آوریم.

$$F=\frac{\Delta P}{\Delta t}\xrightarrow[P_2=500kgm/s,\ \Delta t=20s]{P_1=300kgm/s}F=\frac{500-300}{20}\Rightarrow F=10N$$

۲ شتاب حرکت را به کمک قانون دوم نیوتون حساب می‌کنیم.

$$F=ma\xrightarrow{m=2kg}10=2a\Rightarrow a=5m/s^2$$

۴ ۱۱۴۷ A

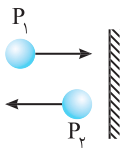
تکانه اولیه چکش برابر است با:

$$P_1=mv_1\xrightarrow{v_1=15m/s}P_1=0/8\times 15\Rightarrow P_1=12kgm/s$$

تکانهٔ نهایی چکش صفر است $(v_2=0\Rightarrow P_2=0)$ بنابراین بزرگی نیروی متوسطی که بر چکش وارد می‌شود خواهد شد:

$$F_{net}=\frac{P_2-P_1}{\Delta t}\xrightarrow{t=3\times 10^{-3}s}F_{net}=\frac{12}{3\times 10^{-3}}\Rightarrow F_{net}=4000N$$

۳ ۱۱۴۸ A



نیروی متوسط وارد بر متحرک در هنگام برخورد برابر آهنگ تغییر تکانه است.

$$F=\frac{\Delta P}{\Delta t}$$

نکته مهم این است که اگر P_1 مثبت باشد، P_2 منفی است و تفاضل P_1 و P_2 خواهد شد.

$$|\Delta P|=|P_1-(-P_2)|\Rightarrow|\Delta P|=|P_1+P_2|\Rightarrow|\Delta P|=|P_1|+|P_2|$$

یعنی اندازهٔ تفاضل P_1 و P_2 از اندازهٔ هریک از تکانه‌های P_1 و P_2 بزرگ‌تر است، بنابراین:

$$|F_{av}|=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow|F_{av}|=\frac{|P_1|+|P_2|}{\Delta t}\Rightarrow\begin{cases}|F_{av}|>\frac{|P_1|}{\Delta t}\\ |F_{av}|>\frac{|P_2|}{\Delta t}\end{cases}$$

۳ ۱۱۴۹ B

۱ سرعت‌ها را برحسب m/s می‌نویسیم.

$$v_1=54km/h=\frac{54}{3/6}m/s\Rightarrow v_1=15m/s$$

$$v_2=18km/h=\frac{18}{3/6}m/s\Rightarrow v_2=5m/s$$

۲ سرعت برخورد $\vec{v}_1=15\vec{i}$ و سرعت بازگشت $\vec{v}_2=-5\vec{i}$ است.

۳ تکانه قبل و بعد از برخورد را حساب می‌کنیم $(m=1200kg)$.

$$\vec{P}=m\vec{v}\Rightarrow\vec{P}_1=1200\times(15\vec{i}),\ \vec{P}_2=1200\times(-5\vec{i})$$

۴ بردار تغییر تکانه را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta\vec{P}=\vec{P}_2-\vec{P}_1\Rightarrow\Delta\vec{P}=1200(-5\vec{i}-15\vec{i})\Rightarrow\Delta\vec{P}=-24000\vec{i}=-2/4\times 10^4\vec{i}$$

۵ بردار نیروی متوسط وارد بر خودرو خواهد شد:

$$\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t=0/15s}\vec{F}=\frac{-24000\vec{i}}{0/15}\Rightarrow\vec{F}=-1/6\times 10^5\vec{i}$$

A ۲ ۱۱۵۰

نیروی متوسطی که به جعبه در مدت $0/2s$ وارد می‌شود به راحتی قابل محاسبه است:

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow F_{av}=\frac{m(\Delta v)}{\Delta t}\Rightarrow F_{av}=\frac{50(10-0)}{0/2}\Rightarrow F_{av}=2500N$$

A ۲ ۱۱۵۱

سرعت اتومبیل را برحسب m/s به‌دست می‌آوریم.

$$v_1=54km/h\times\frac{10^3m}{1km}\times\frac{1h}{3600s}\Rightarrow v_1=\frac{54}{3/6}=15m/s$$

سرعت شخص نیز $15m/s$ بوده و هنگام توقف اتومبیل سرعت شخص نیز صفر می‌شود بنابراین نیرویی که کمربند ایمنی باید به شخص در مدت $0/3s$ وارد کند برابر است با:

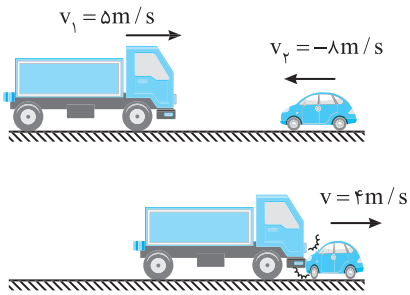
$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow F_{av}=\frac{m(\Delta v)}{\Delta t}\xrightarrow{m=60kg}F_{av}=\frac{60(15-0)}{0/3}$$

$$\Rightarrow F_{av}=\frac{60\times15}{0/3}=3000N$$

A ۴ ۱۱۵۲

خط فکری با دقت زیاد به صورت مسئله توجه کنید. این مسئله نیرویی که بر کامیون و خودرو وارد می‌شود را از شما نمی‌خواهد بلکه نیروی وارد بر راننده‌ها از شما خواسته شده است. شتاب توقف کامیون و خودرو را حساب می‌کنیم، زیرا شتاب توقف راننده‌ها و شتاب حرکت کامیون و خودرو یکی است.

۱ جهت حرکت کامیون را جهت مثبت فرض می‌کنیم.



۲ شتاب حرکت کامیون یا خودرو را حساب می‌کنیم. $a=\frac{v-v_0}{t}$

$$|a'_{av}|=|\frac{4+8}{0/2}|\Rightarrow|a'_{av}|=\frac{12}{0/2}=60m/s^2$$:اتومبیل

$$|a_{av}|=|\frac{4-5}{0/2}|\Rightarrow|\bar{a}|=+5m/s^2$$:کامیون

۳ نیروی وارد بر راننده کامیون برابر است با:

$$F_{av}=ma_{av}\Rightarrow F_{av}=100\times5=500N$$

۴ نیروی وارد بر راننده اتومبیل برابر است با:

$$F'_{av}=ma'_{av}\Rightarrow F'_{av}=100\times60=6000N$$

۵ نسبت دو نیرو خواهد شد: $\frac{F'}{F}=\frac{6000}{500}=12$

B ۳ ۱۱۵۳

نیروی متوسط از رابطهٔ $F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}$ به‌دست می‌آید. ابتدا تغییر تکانه را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}\Delta P=m\Delta v\,,\,m=60kg\\ v_1=144km/h\div3/6=40m/s\Rightarrow\Delta P=60\times(-10-40)=-3000kgm/s\\ v_2=-36\frac{km}{h}\div3/6=-10m/s\end{cases}$$

مدت برخورد $0/5s$ بوده و بزرگی نیروی متوسط خواسته شده:

$$|F_{av}|=\frac{|\Delta P|}{\Delta t}=\frac{3000}{0/5}=6000N$$

A ۳ ۱۱۵۴

۱ شتاب حرکت را به کمک قانون دوم نیوتون حساب می‌کنیم.

$$F=ma\xrightarrow{F=3N\,,\,m=2kg}3=2a\Rightarrow a=1/5m/s^2$$

۲ سرعت جسم در $t=4s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_0\xrightarrow{v_0=5m/s}v=1/5\times4+5\Rightarrow v=11m/s$$

۳ تکانه جسم خواهد شد: $P=mv\Rightarrow P=2\times11\Rightarrow P=22kgm/s$

A ۲ ۱۱۵۵

یادآوری متحرکی که روی خط راست در حرکت است برای آنکه تغییر جهت بدهد ابتدا باید سرعت آن صفر شده و سرعت تغییر علامت دهد.

اگر جهت سرعت جسم را مثبت در نظر بگیریم $v_1=+10m/s$ و چون نیروی F در خلاف جهت حرکت به جسم وارد می‌شود بنابراین $F=-5N$ می‌شود بنابراین بازه زمانی که سرعت از $+10m/s$ به صفر می‌رسد خواهد شد:

$$F=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow-5=\frac{m(v_2-v_1)}{\Delta t}\xrightarrow{m=2kg}-5=\frac{2(0-10)}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t=4s$$

بازی با سؤال **به جسمی به جرم $3kg$ که با سرعت $5m/s$ در جهت مثبت محور حرکت می‌کند، نیروی $6N$ در خلاف جهت حرکت آن وارد می‌شود. پس از چند ثانیه بزرگی تکانه با بزرگی تکانهٔ اولیهٔ آن برابر می‌گردد؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ **خط فکری** **بزرگی تکانه با بزرگی تکانهٔ اولیه برابر شود یعنی اندازهٔ سرعت با حالت اولیه برابر شود، بنابراین اگر $v_1=5m/s$ باشد، $v_2=-5m/s$ می‌شود. با توجه به این مطلب مسئله را حل می‌کنیم. البته نیرو خلاف جهت حرکت $(F=-6N)$ است.**

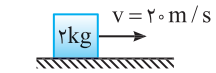
$$\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}\Rightarrow F=\frac{m\Delta\vec{v}}{\Delta t}=m(\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{\Delta t})\xrightarrow{m=3kg}-6=3(\frac{-5-5}{\Delta t})\Rightarrow\Delta t=5s$$

گزینهٔ ۴

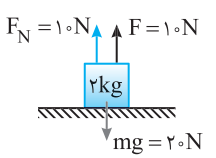
A ۱ ۱۱۵۶

تکانه در راستای افقی برابر است با:

$$P_x=mv_x=40kg.m/s$$



نیروی F عمود بر مسیر حرکت (در راستای قائم) وارد شده است و تأثیری روی تکانهٔ جسم ندارد و تکانه همچنان $40kgm/s$ خواهد بود.



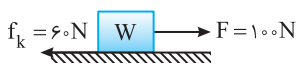
B ۲ ۱۱۵۷

یادآوری با توجه به تعریف تکانه و قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:

$$F_{net}=ma\xrightarrow{a=\Delta v/\Delta t}F_{net}=\frac{m\Delta v}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta P=m\Delta v}$$

$$F_{net}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow\Delta P=F_{net}\Delta t$$

نیروی خالص وارد بر جسم مطابق شکل مسئله خواهد شد:



$$F_{net}=F-f_k=100-60\Rightarrow F_{net}=40N$$

تغییر تکانه در مدت یک ثانیه را حساب می‌کنیم.

$$\Delta P=F_{net}\Delta t\Rightarrow\Delta P=40\times1\Rightarrow\Delta P=40kgm/s$$

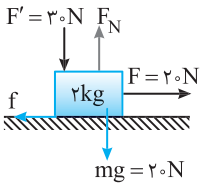
B ۳ ۱۱۵۸

جهت حرکت به سوی غرب را مثبت فرض می‌کنیم. در این صورت $v_1=+5m/s$ و $v_2=-5m/s$ خواهد شد. با توجه به تعریف تکانه خواهیم داشت:

$$F=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow-2=\frac{0/8(-5-5)}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t=4s$$

A ۱۱۵۹ ۱

نیروها به جسم ساکن وارد شده پس باید حرکت یا ساکن ماندن جسم بررسی شود. به این منظور لازم است نیروی F را با نیروی اصطکاک بیشینه مقایسه کنیم، اگر $F<f_{s_{max}}$ باشد، جسم ساکن می‌ماند و اگر $F>f_{s_{max}}$ باشد جسم شروع به حرکت می‌کند.



۱ جسم در راستای قائم ساکن است:

$$F_N=mg+F'\Rightarrow F_N=۲۰+۳۰\Rightarrow F_N=۵۰N$$

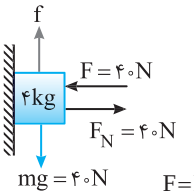
۲ بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی را حساب می‌کنیم:

$$f_{s_{max}}=\mu_s F_N\Rightarrow f_{s_{max}}=۰/۵\times۵۰\Rightarrow f_{s_{max}}=۲۵N$$

۳ چون نیروی F کوچک‌تر از $f_{s_{max}}$ است پس جسم حرکت نکرده و تغییر تکانه جسم صفر است.

A ۱۱۶۰ ۳

راه‌حل اول:



۱ ابتدا باید بررسی کرد که جسم حرکت می‌کند یا نه. برای این کار نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$F=F_N\Rightarrow F_N=۴۰N$$

$$f_{s\,max}=\mu_s F_N\xrightarrow{\mu_s=۰/۵} f_{s\,max}=۰/۵\times۴۰=۲۰N$$

۲ چون $mg>f_s$ بوده پس جسم رو به پایین شروع به حرکت کرده و به آن نیروی اصطکاک جنبشی وارد می‌شوند. نیروی اصطکاک جنبشی خواهد شد:



$$f_k=\mu_k F_N\xrightarrow{\mu_k=۰/۳} f_k=۰/۳\times۴۰=۱۲N$$

نیروی خالص وارد بر جسم را برابر ma قرار می‌دهیم و شتاب را حساب می‌کنیم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-f_k=ma\Rightarrow۴۰-۱۲=۴a\Rightarrow a=۷m/s^۲$$

۳ سرعت جسم را پس از ۲s به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}v_۱=۰\\ a=۷m/s^۲\\ t=۲s\\ v_۲=?\end{cases}\Rightarrow v_۲=at+v_۱\Rightarrow v_۲=۷\times۲+۰\Rightarrow v_۲=۱۴m/s$$

۴ تکانه را حساب می‌کنیم. $P=mv\Rightarrow P=۴\times۱۴=۵۶kgm/s$

راه‌حل دوم: برایند نیروهای وارد بر جسم در راستای حرکت برابر $F_{net}=mg-f_k=۲۸N$ است پس:

$$F_{net}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\xrightarrow[P_۱=۰,\Delta t=۲s]{F_{net}=۲۸N}۲۸=\frac{P_۲-۰}{۲}\Rightarrow P_۲=۵۶kgm/s$$

B ۱۱۶۱ ۱

با توجه به قانون دوم نیوتون: $\vec{F}_{av}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}\Rightarrow\vec{F}_{av}=\frac{\vec{P}_۲-\vec{P}_۱}{\Delta t}$ (I)

تکانه را در دو لحظهٔ داده شده به دست می‌آوریم:

$$\vec{P}=(۳t-۶)\,\vec{i}\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t=۱s}\vec{P}_۱=-۳\vec{i}\\ \xrightarrow{t=۳s}\vec{P}_۲=۳\vec{i}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(I)}\vec{F}_{av}=\frac{۳\vec{i}-(-۳\vec{i})}{۳-۱}\Rightarrow\vec{F}_{av}=۳\vec{i}\,(N)$$

نیروی خالص متوسط خواهد شد.

B ۱۱۶۲ ۳

با توجه به رابطهٔ $F_{av}=\Delta P/\Delta t$ کافی است ابتدا تکانه را در لحظه‌های $t_۱=۱s$ و $t=۲/۵s$ حساب کرده سپس F_{av} را به‌دست بیاوریم.

$$\vec{P}=(t^۲-۵t+۶)\vec{i}\Rightarrow\begin{cases}t=۱s\Rightarrow\vec{P}_۱=(۱-۵+۶)\vec{i}\Rightarrow\vec{P}_۱=۲\vec{i}\\ t=۲/۵s\Rightarrow\vec{P}_۲\Rightarrow(۶/۲۵-۱۲/۵+۶)\vec{i}\Rightarrow\vec{P}_۲=-۰/۲۵\vec{i}\end{cases}$$

$$\vec{F}_{av}=\frac{-۰/۲۵\vec{i}-۲\vec{i}}{۲/۵-۱}\Rightarrow\vec{F}_{av}=\frac{-۲/۲۵\vec{i}}{۱/۵}$$

$$\vec{F}_{av}=-۱/۵\vec{i}\Rightarrow F_{av}=۱/۵N=\frac{۳}{۲}N$$

A ۱۱۶۳ ۱

۱ با توجه به رابطهٔ $\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$ تغییر تکانه را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta\vec{P}=\vec{F}\Delta t\Rightarrow\Delta\vec{P}=(۱۶\vec{i}+۱۲\vec{j})۰/۵\Rightarrow\Delta\vec{P}=۸\vec{i}+۶\vec{j}$$

۲ جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده پس $P_۱=۰$ بنابراین $\vec{P}_۲$ خواهد شد:

$$\vec{P}_۲-\vec{P}_۱=۸\vec{i}+۶\vec{j}\Rightarrow\vec{P}_۲=۸\vec{i}+۶\vec{j}$$

۳ اندازهٔ تکانه را حساب می‌کنیم: $|\vec{P}_۲|=\sqrt{۸^۲+۶^۲}=۱۰kg.m/s$

A ۱۱۶۴ ۱

نکته دو بردار $\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}$ و $\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}$ وقتی برابرند که مؤلفه‌های آن‌ها نظیربه‌نظیر برابر باشد.

۱ با توجه به رابطهٔ $\vec{F}_{net}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$ نیروی خالص وارد بر جسم را حساب می‌کنیم:

$$\vec{F}_{net}=\frac{\vec{P}_۲-\vec{P}_۱}{\Delta t}\xrightarrow[\text{شروع به حرکت کرده }P_۱=۰]{\text{جسم از حال سکون}}$$

$$\vec{F}_{net}=\frac{\vec{P}_۲}{\Delta t}=\frac{۶\vec{i}-۱۲\vec{j}}{۳}\Rightarrow\vec{F}_{net}=۲\vec{i}-۴\vec{j}$$

۲ نیروی برایند برابر است با:

$$\vec{F}_۱+\vec{F}_۲=\vec{F}_{net}\Rightarrow(۷\vec{i}+۱۰\vec{j})+(a\vec{i}+b\vec{j})=۲\vec{i}-۴\vec{j}$$

$$\Rightarrow(۷+a)\vec{i}+(۱۰+b)\vec{j}=۲\vec{i}-۴\vec{j}\Rightarrow\begin{cases}۷+a=۲\Rightarrow a=-۵\\ ۱۰+b=-۴\Rightarrow b=-۱۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b=-۵-۱۴=-۱۹$$

B ۱۱۶۵ ۳

۱ شتاب حرکت جسم را به کمک قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آوریم.

$$\vec{F}=m\vec{a}\xrightarrow[m=۲kg]{\vec{F}=-۵\vec{i}+۲\vec{j}}-۵\vec{i}+۲\vec{j}=۲\vec{a}\Rightarrow\vec{a}=-۲/۵\vec{i}+\vec{j}$$

۲ بنا به فرض مسئله سرعت متحرک را در $t=۱s$ برابر $\vec{v}_۱=۵\vec{i}+۳\vec{j}$ است سرعت متحرک را در $t=۳s$ به کمک تعریف شتاب حساب می‌کنیم.

$$\vec{a}=\frac{\vec{v}_۲-\vec{v}_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow-۲/۵\vec{i}+\vec{j}=\frac{v_۲-۵\vec{i}-۳\vec{j}}{۳-۱}$$

$$\Rightarrow-۵\vec{i}+۲\vec{j}=\vec{v}_۲-۵\vec{i}-۳\vec{j}\Rightarrow\vec{v}_۲=+۵\vec{j}$$

۳ تکانه در لحظهٔ $t=۳s$ خواهد شد:

$$\vec{P}=m\vec{v}\Rightarrow\vec{P}=۲\times(+۵\vec{j})=+۱۰\vec{j}\Rightarrow|P|=۱۰kg.m/s$$

A ۱۱۶۶ ۳

از رابطهٔ $P=mv$، سرعت را برحسب P و m به‌دست می‌آوریم:

$$P=mv\Rightarrow v=\frac{P}{m}$$

سرعت را در رابطهٔ انرژی جنبشی قرار می‌دهیم:

$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲\Rightarrow K=\frac{۱}{۲}m(\frac{P}{m})^۲\Rightarrow K=\frac{P^۲}{۲m}$$

۱۱۶۷ A **۲**

۱ تکانهٔ اولیه را به‌دست می‌آوریم.

$$P_1=mv_1 \xrightarrow[v_1=10m/s]{m=4kg} P_1=4\times10\Rightarrow P_1=40kg.m/s$$

۲ انرژی جنبشی جسم ۹ برابر شده است. $K_2=9K_1 \quad (I)$

۳ به جای انرژی جنبشی مقدار $K=\frac{P^2}{2m}$ را در رابطهٔ (I) قرار می‌دهیم.

$$\frac{P_2^2}{2m}=9\frac{P_1^2}{2m}\Rightarrow P_2=3P_1\Rightarrow P_2=3\times40=120kgm/s$$

۴ تغییر تکانه خواهد شد: $\Delta P=P_2-P_1=120-40\Rightarrow\Delta P=80kg.m/s$

۱۱۶۸ A **۴**

با توجه به رابطهٔ بین انرژی جنبشی و تکانه، انرژی جنبشی گلوله و دونده را برابر قرار داده و مسئله را حل می‌کنیم:

$$K=\frac{P^2}{2m}\Rightarrow K_{\text{دونده}}=K_{\text{گلوله}}\Rightarrow\frac{P^2_{\text{دونده}}}{2\times40}=\frac{P^2_{\text{گلوله}}}{2\times0/1}$$

$$\Rightarrow P^2_{\text{دونده}}=400P^2_{\text{گلوله}}\Rightarrow P_{\text{دونده}}=20P_{\text{گلوله}}$$

بازی با سوال تکانهٔ اتومبیلی به جرم یک تن با تکانهٔ کامیونی به جرم پنج تن برابر است. انرژی جنبشی کامیون چند برابر انرژی جنبشی اتومبیل است؟

ریاضی - ۸۹

۱) ۵ ۲) ۲۵ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{25}$

پاسخ تکانهٔ جسم برابر $P=mv$ و انرژی جنبشی آن $K=\frac{1}{2}mv^2$ است، بنابراین بین تکانه و انرژی جنبشی رابطهٔ روبه‌رو برقرار است. $K=\frac{P^2}{2m}$

اکنون به حل تست می‌پردازیم:

$$P(\text{اتومبیل})=P(\text{کامیون}),\ m(\text{کامیون})=5m(\text{اتومبیل}),\ K=\frac{P^2}{2m}$$

$$\Rightarrow K(\text{کامیون})=\frac{1}{5}K(\text{اتومبیل})$$

گزینهٔ ۳

۱۱۶۹ A **۲**

با توجه به فرض مسئله $P_A=P_B$ و $m_B=3m_A$ است بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}K_A=\frac{P_A^2}{2m_A}\\ K_B=\frac{P_B^2}{2m_B}\end{cases}\Rightarrow\frac{K_A}{K_B}=\frac{m_B}{m_A}\times\left(\frac{P_A}{P_B}\right)^2$$

$$\xrightarrow{K_A=18J}\frac{18}{K_B}=\frac{3m_A}{m_A}\Rightarrow K_B=6J$$

۱۱۷۰ A **۱**

نکته رابطهٔ بین تکانه و انرژی جنبشی $K=\frac{P^2}{2m}$ است.

با توجه به رابطهٔ انرژی جنبشی و تکانه نسبت خواسته‌شده را حساب می‌کنیم.

$$\frac{K_A}{K_B}=\frac{\frac{P_A^2}{2m_A}}{\frac{P_B^2}{2m_B}}\Rightarrow\frac{K_A}{K_B}=\frac{m_B}{m_A}\times\left(\frac{P_A}{P_B}\right)^2$$

$$\xrightarrow{m_B=\frac{5}{8}m_A,\ P_A=\frac{4}{3}P_B}\frac{K_A}{K_B}=\frac{\frac{5}{8}m_A}{m_A}\times\left(\frac{\frac{4}{3}P_B}{P_B}\right)^2=\frac{5}{8}\times\frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow\frac{K_A}{K_B}=\frac{10}{9}$$

۱۱۷۱ A **۱**

یادآوری رابطهٔ تکانه و انرژی جنبشی به‌صورت $K=\frac{P^2}{2m}$ است:

$$\frac{K_A}{K_B}=\frac{\frac{P_A^2}{2m_A}}{\frac{P_B^2}{2m_B}}\Rightarrow\frac{K_A}{K_B}=\left(\frac{P_A}{P_B}\right)^2\times\frac{m_B}{m_A}$$

$$\xrightarrow[K_A=4K_B]{P_A=P_B}4=\frac{m_B}{m_A}\xrightarrow{m_A=2kg}m_B=8kg$$

۱۱۷۲ B **۳**

۱ انرژی جنبشی ٪۷۵ کاهش یافته است. بنابراین:

$$K_2=\frac{25}{100}K_1\Rightarrow K_2=\frac{1}{4}K_1$$

۲ با توجه به رابطه تکانه و انرژی جنبشی خواهیم داشت:

$$\begin{cases}K_1=\frac{P_1^2}{2m_1}\\ K_2=\frac{P_2^2}{2m_2}\end{cases}\Rightarrow\frac{K_2}{K_1}=\frac{P_2^2}{P_1^2}\times\frac{m_1}{m_2}$$

$$\xrightarrow{m_1=m_2}\frac{K_2}{K_1}=\frac{P_2^2}{P_1^2}\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{P_2^2}{P_1^2}\Rightarrow P_2=\frac{1}{2}P_1$$

۳ درصد تغییرات تکانه خواهد شد:

$$\frac{\Delta P}{P_1}\times100=\frac{P_2-P_1}{P_1}\times100=\frac{\frac{1}{2}P_1-P_1}{P_1}\times100\Rightarrow\text{درصد تغییر اندازه تکانه}=-50\%$$

۱۱۷۳ A **۳**

نکته با توجه به رابطهٔ انرژی جنبشی و رابطهٔ تکانه می‌توانیم K را برحسب P بنویسیم:

$$P=mv,\ K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow K=\frac{P^2}{2m}$$

درصد تغییر انرژی جنبشی برابر است با:

$$\frac{K_2-K_1}{K_1}\times100=\frac{\frac{P_2^2}{2m}-\frac{P_1^2}{2m}}{\frac{P_1^2}{2m}}\times100=\frac{P_2^2-P_1^2}{P_1^2}\times100$$

$$\xrightarrow{P_2=P_1+2\ ,\ P_2=22\ ,\ P_1=20}\frac{(P_1+2)^2-P_1^2}{P_1^2}\times100=\frac{P_1^2+4+4P_1-P_1^2}{P_1^2}\times100$$

$$=\frac{4+4\times(20)}{(20)^2}\times100=\frac{84}{4}\%=21\%$$

۱۱۷۴ A **۴**

تکانه کمیت برداری است $(\vec{P}=m\vec{v})$، بنابراین جهت بردار تکانه می‌تواند تغییر کند در حالی که اندازهٔ تکانه ثابت باشد مثلاً در حرکت یک خودرو با سرعت $5m/s$ به دور یک میدان، بردار سرعت و در نتیجه بردار تکانه در حال تغییر است و گزینهٔ (۱) نادرست است، اما اندازهٔ سرعت و هم‌چنین انرژی جنبشی این خودرو $(K=\frac{1}{2}mv^2)$ ثابت است و گزینهٔ (۲) و (۳) نادرست است، بنابراین با تغییر تکانه قطعاً بردار سرعت تغییر کرده اما انرژی جنبشی ممکن است ثابت یا متغیر باشد و گزینهٔ (۴) درست است.

۱۱۷۵ B **۲**

با توجه به تعریف تکانه $P=mv$ و انرژی جنبشی $K=\frac{1}{2}mv^2$ بین تکانه و انرژی جنبشی جسم رابطهٔ زیر برقرار است.

$$K=\frac{P^2}{2m}\Rightarrow\frac{K'}{K}=\frac{P'^2}{P^2}\Rightarrow4=\frac{P'^2}{P^2}\Rightarrow P'=2P\Rightarrow mv'=2mv\Rightarrow v'=2v$$

از طرفی بنا به فرض مسأله $v'=v+۸$ است. پس:

$$v'=۲v\ ,\ v'=v+۸\Rightarrow ۲v=v+۸\Rightarrow v=۸m/s$$

$$\xrightarrow{P=mv} P=۲\times ۸=۱۶kg.m/s$$

۴ ۱۱۷۶ A

۱ ابتدا بردار تکانه در $t=۲s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\vec{P}=۳t^۲\vec{i}+۸t\vec{j}\xrightarrow{t=۲s}\vec{P}=۳(۲)^۲\vec{i}+۸(۲)\vec{j}=۱۲\vec{i}+۱۶\vec{j}$$

$$\Rightarrow\vec{P}=۱۲\vec{i}+۱۶\vec{j}$$

۲ بزرگی تکانه را حساب می‌کنیم.

$$P=\sqrt{P_x^۲+P_y^۲}\Rightarrow P=\sqrt{۱۲^۲+۱۶^۲}\Rightarrow P=\sqrt{۱۴۴+۲۵۶}=\sqrt{۴۰۰}$$

$$\Rightarrow P=۲۰kgm/s$$

۳ به کمک رابطهٔ انرژی جنبشی و تکانه، انرژی جنبشی را به‌دست می‌آوریم.

$$K=\frac{P^۲}{۲m}\xrightarrow{m=۵kg}K=\frac{۲۰^۲}{۲\times ۵}\Rightarrow K=۴۰J$$

بازی با سؤال بردار تکانهٔ جسمی در SI به صورت $\vec{P}=(۳t^۲)\vec{i}+(۲b-۶)\vec{tj}$ است. اگر اندازهٔ متوسط نیروهای وارد بر جسم در دو ثانیهٔ اول حرکت برابر با $۱۰N$ باشد، b برابر کدام گزینه است؟

۱) ۷ ۲) ۳

۳) -۱ ۴) گزینهٔ (۱) و گزینهٔ (۳) می‌تواند پاسخ باشد.

پاسخ با توجه به رابطهٔ $\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$ بردار نیرو را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{F}=\frac{\vec{P}_۲-\vec{P}_۱}{\Delta t}\Rightarrow\vec{F}=\frac{۱۲\vec{i}+(۲b-۶)۲\vec{j}-۰}{۲-۰}\Rightarrow\vec{F}=۶\vec{i}+(۲b-۶)\vec{j}$$

بزرگی نیرو برابر است با:

$$|\vec{F}|=\sqrt{F_x^۲+F_y^۲}\Rightarrow|\vec{F}|=۱۰=\sqrt{۶^۲+(۲b-۶)^۲}$$

$$\Rightarrow ۱۰۰=۳۶+(۲b-۶)^۲\Rightarrow(۲b-۶)^۲=۶۴\Rightarrow\begin{cases}۲b-۶=۸\Rightarrow b=۷\\ ۲b-۶=-۸\Rightarrow b=-۱\end{cases}$$

گزینهٔ ۴

۲ ۱۱۷۷ A

خط فکری سؤال مفهومی خوبی است. آهنگ تغییر تکانه برابر نیروی خالص وارد بر جسم است $(\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t})$ و بردار نیروی خالص و بردار تغییر تکانه هم‌جهت هستند، بنابراین برای اینکه مشخص کنید که جهت تغییر تکانه کدام است باید جهت نیروی خالص وارد بر جسم را مشخص کنید.

جسم در شرایط خلأ رو به بالا پرتاب شده است و تنها نیروی وارد بر جسم نیروی وزن رو به پایین است یعنی نیروی خالص وارد بر جسم در امتداد قائم و رو به پایین بوده در نتیجه تغییر تکانه نیز رو به پایین می‌باشد.

۴ ۱۱۷۸ A

خط فکری نیروی وارد بر جسم برابر آهنگ تغییر تکانه $(\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t})$ است. یعنی تغییر تکانه در هر ثانیه برابر نیروی وارد بر جسم است بنابراین در بررسی تغییر تکانه باید به سراغ نیروی وارد بر جسم برویم.

جسم در شرایط خلأ رها شده است و تنها نیروی وارد بر آن نیروی وزن $(W=mg)$ است بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$F=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow mg=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow\Delta P=mg\Delta t\xrightarrow{\Delta t=۱s}\Delta P=mg$$

در نتیجه در هر ثانیه تغییر تکانه به اندازهٔ mg است یعنی در هر ثانیه به اندازهٔ mg به اندازهٔ تکانه اضافه می‌شود و گزینهٔ (۱) و (۲) درست است.

۱ ۱۱۷۹ A

۱ تکانهٔ اولیه را حساب می‌کنیم.

$$P=mv\xrightarrow[m=۵\times ۱۰^{-۲}kg]{v_۱=۱۴m/s}P_۱=۵\times ۱۰^{-۲}\times ۱۴\Rightarrow P_۱=۰/۷kgm/s$$

۲ تکانه را یک ثانیه بعد که سرعت برابر $۲۳m/s$ می‌شود به‌دست می‌آوریم.

$$P_۲=mv_۲\Rightarrow P_۲=۵\times ۱۰^{-۲}\times ۲۳\Rightarrow P_۲=۱/۱۵kgm/s$$

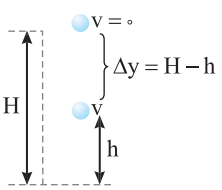
۳ تغییر تکانه خواهد شد:

$$P_۲-P_۱=۱/۱۵-۰/۷\Rightarrow\Delta P=۰/۴۵kgm/s=\frac{۹}{۲۰}kg.m/s$$

۱ ۱۱۸۰ A

تندی وزنه را پس از جابه‌جایی $(H-h)$ به کمک فرمول مستقل از زمان به‌دست می‌آوریم.

$$v^۲=۲g\Delta y\Rightarrow v=\sqrt{۲g(H-h)}$$



تکانه وزنه را حساب می‌کنیم.

$$P=mv\Rightarrow P=m\sqrt{۲g(H-h)}$$

۲ ۱۱۸۱ A

نکته هرگاه جسمی به جرم m در شرایط خلأ در مجاورت سطح زمین از ارتفاع h به هر طرفی پرتاب شود، تغییر تکانهٔ آن خواهد شد:

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow\Delta P=F\Delta t\xrightarrow{F=mg}\Delta P=mg\Delta t$$

بازهٔ زمانی ثانیهٔ دوم حرکت برابر $\Delta t=۱s$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\Delta P=mg\Delta t\xrightarrow[m=۰/۲kg]{\Delta t=۱}\Delta P=۲kg.m/s$$

بازی با سؤال پرتابه‌ای به جرم m با سرعت اولیهٔ $v_۰$ تحت زاویهٔ α نسبت به افق پرتاب می‌شود و پس از $۳t$ ثانیه به زمین می‌رسد. بزرگی تغییر تکانهٔ پرتابه در t ثانیهٔ اول حرکت، کدام است؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر شود.)

ریاضی - ۹۷

۱) $۲mgt$ ۲) mgt ۳) $\frac{mv_۰}{۳}$ ۴) $\frac{۲mv_۰}{۳}$

پاسخ تغییر تکانه برابر است با: $\Delta P=F\Delta t$ ، تنها نیروی وارد بر جسم نیروی وزن است، از این‌رو:

$$\Delta P=mgt$$

گزینهٔ ۲

۱ ۱۱۸۲ A

اگر سرعت رو به بالا را مثبت بگیریم $v_۱=+۵m/s$ ، سرعت آن در برگشت منفی و برابر $v_۲=-۵m/s$ است و تنها نیروی وارد بر گلوله نیروی وزن است بنابراین با توجه به رابطهٔ بین نیروی متوسط و تغییرات تکانه داریم:

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow\Delta P=F_{av}\Delta t\Rightarrow\Delta P=mg\Delta t$$

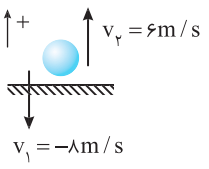
$$\Rightarrow m(\Delta v)=mg\Delta t\Rightarrow m(-۵-(+۵))=m(-۱۰)\times\Delta t\Rightarrow\Delta t=۱s$$

روش دیگر: وقتی تنها نیروی خالص وارد بر جسم وزن است شتاب جسم برابر شتاب گرانش $(a=-g)$ است بنابراین:

$$a=\frac{v_۲-v_۱}{\Delta t}\Rightarrow-۱۰=\frac{-۵-۵}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t=۱s$$

۳ ۱۱۸۳ B

۱ اگر جهت مثبت را رو به بالا در نظر بگیریم سرعت اولیه $v_۱=-۸m/s$ و $v_۲=+۶m/s$ خواهد شد.

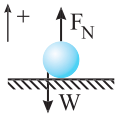


۲ نیروی خالص متوسط وارد بر توپ را به‌دست می‌آوریم.

$$F_{net}=\frac{\Delta P}{\Delta t}=m(\frac{v_۲-v_۱}{\Delta t})$$

$$\xrightarrow[\Delta t=۳۵\times ۱۰^{-۲}s]{m=۲kg}F_{net}=۲\times\frac{(۶-(-۸))}{۳۵\times ۱۰^{-۲}}=\frac{۲۸\times ۱۰^۲}{۳۵}\Rightarrow F_{net}=۸۰N$$

۳ نیروی که سطح زمین به توپ وارد می‌کند را حساب می‌کنیم.



$F_{net}=F_N-W\Rightarrow 80=F_N-20\Rightarrow F_N=100N$

۴ نسبت $\frac{F_{net}}{F_N}$ خواهد شد:

$\frac{F_{net}}{F_N}=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$

۴ ۱۱۸۴ B

۱ جهت مثبت را رو به پایین در نظر می‌گیریم.

سرعت برخورد گلوله به زمین را به کمک معادلهٔ مستقل از زمان حساب می‌کنیم.

$v^2=+2gy\Rightarrow v^2=2\times 10\times 20\Rightarrow v=20m/s$

۲ تندی برگشت رو به بالا $10m/s$ است. چون جهت مثبت را رو به پایین در نظر گرفته‌ایم، سرعت برگشت رو به بالا $-10m/s$ می‌شود، بنابراین بزرگی شتاب در بازهٔ زمانی تماس توپ با زمین خواهد شد:

$|a|=\frac{|\Delta v|}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t=0/2s}|a|=\frac{|-10-20|}{0/2}\Rightarrow |a|=150m/s^2$

۳ نیروی متوسط وارد بر گلوله را به کمک قانون دوم نیوتون حساب می‌کنیم.

$F_{av}=ma\xrightarrow{m=0/2kg}F_{av}=0/2\times 150\Rightarrow F_{av}=30N$

۳ ۱۱۸۵ B

نکته نیروی خالص متوسط به کمک تکانه از رابطهٔ $F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}$ به‌دست می‌آید.

۱ تکانه در $t_1=3s$ را حساب می‌کنیم:

$P_1=15t_1^2+5t_1\Rightarrow P_1=15(3)^2+5(3)=135+15=150kgm/s$

۲ تکانه در $t_2=6s$ را حساب می‌کنیم:

$P_2=15t_2^2+5t_2\Rightarrow P_2=15(6)^2+5(6)=15(36+2)\Rightarrow P_2=570kgm/s$

۳ در گام آخر با رابطهٔ $F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}$، F_{av} را حساب می‌کنیم:

$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow F_{av}=\frac{P_2-P_1}{t_2-t_1}\Rightarrow F_{av}=\frac{570-150}{6-3}=\frac{420}{3}\Rightarrow F_{av}=140N$

بازی با سؤال **معادلهٔ تکانهٔ زمان جسمی به جرم $200g$ در SI به صورت $P=t^2-2t-1$ است. نیروی متوسط وارد بر جسم در بازهٔ $t=1s$ تا $t=3s$ چند نیوتون است؟** خارج تجربی - ۹۳

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰/۵

پاسخ ۱ **تکانه را در دو لحظهٔ $t_1=1s$ و $t_2=3s$ به‌دست می‌آوریم.**

$P=t^2-2t-1\begin{cases}\xrightarrow{t_1=1s}P_1=1-2-1\Rightarrow P_1=-2kgm/s\\ \xrightarrow{t_2=3s}P_2=9-6-1\Rightarrow P_2=2kgm/s\end{cases}$

۲ **نیروی متوسط وارد بر جسم خواهد شد:**

$F_{av}=\frac{P_2-P_1}{\Delta t}\Rightarrow {}_{av}=\frac{2-(-2)}{3-1}\Rightarrow F_{av}=2N$ گزینهٔ ۲

۲ ۱۱۸۶ A

نیروی متوسط وارد بر جسم برابر با $F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}$ است، بنابراین ابتدا تغییر تکانه از $t_1=2s$ تا $t_2=4s$ را به‌دست آوریم:

۱ سرعت جسم را در دو لحظهٔ $t_1=2s$ و $t_2=4s$ به‌دست می‌آوریم.

$v=t^2-2t+3\Rightarrow\begin{cases}t_1=2s\Rightarrow v_1=4-4+3\Rightarrow v_1=3m/s\\ t_2=4s\Rightarrow v_2=16-8+3\Rightarrow v_2=11m/s\end{cases}$

۲ تغییر تکانه جسم خواهد شد:

$\Delta P=P_2-P_1\Rightarrow \Delta P=mv_2-mv_1\Rightarrow \Delta P=m(v_2-v_1)$

$\xrightarrow{m=2kg}\Delta P=2(v_2-v_1)=2(11-3)=16kg.m/s$

۳ نیروی متوسط وارد بر جسم را حساب می‌کنیم.

$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow F_{av}=\frac{16}{2}=8N$

۱ ۱۱۸۷ B

خط فکری کافی است با توجه به جرم $m=4kg$ و رابطهٔ تکانه - زمان $P=8t^2-8$، ابتدا تکانه در لحظهٔ $t_1=0$ و $t_2=2s$ را حساب کرده سپس سرعت جسم را در این لحظات به‌دست آورده و سرانجام به کمک تعریف شتاب، شتاب جسم را حساب کنید.

در لحظه‌های $t=0$ و $t=2s$، تکانهٔ جسم را به‌دست می‌آوریم، سپس به کمک $P=mv$، سرعت‌ها را در این دو لحظه حساب می‌کنیم.

$t_1=0\Rightarrow P=0-8=-8kg.m/s$

$\xrightarrow{P=mv}-8=4v_1\Rightarrow v_1=-2m/s$

$t_2=2s\Rightarrow P=32-8=24kg.m/s$

$\xrightarrow{P=mv}24=4v_2\Rightarrow v_2=6m/s$

شتاب متوسط جسم خواهد شد: $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{6-(-2)}{2}=4m/s^2$

بازی با سؤال **معادلهٔ تکانهٔ جسمی که روی خط راست حرکت می‌کند نسبت به زمان در SI به صورت $P(t)=t^2-5t+6$ است. در چه زمانی برحسب ثانیه جهت شتاب تغییر می‌کند؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۲/۵

پاسخ **تکانه برابر mv می‌باشد از این‌رو:**

$P=mv(t)=t^2-5t+6\Rightarrow v(t)=\frac{1}{m}t^2-\frac{5}{m}t+\frac{6}{m}$

معادلهٔ v، درجه دوم (سهمی) می‌باشد. می‌دانیم در رأس سهمی شیب خط مماس صفر و شیب خط مماس نمودار $v-t$ برابر شتاب است در نتیجه در رأس سهمی نمودار $v-t$ شتاب صفر شده و تغییر جهت می‌دهد.

گزینهٔ ۴

$\text{رأس سهمی}=\frac{-b}{2a}=\frac{-(\frac{-5}{m})}{\frac{2}{m}}=\frac{5}{2}=2/5s$

۴ ۱۱۸۸ B

به سراغ حرکت‌شناسی بروید و با مقایسه معادلهٔ حرکت داده شده با معادلهٔ مکان زمان حرکت با شتاب ثابت، شتاب و سرعت اولیه را تعیین کنید.

۱ معادلهٔ $x-t$ درجه دوم می‌باشد و ضریب t^2 برابر $\frac{1}{2}a$ و ضریب t برابر v_0 است، از این‌رو:

$\begin{cases}x=2t^2-4t+4\\ x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\end{cases}\Rightarrow \frac{1}{2}a=2\Rightarrow a=4m/s^2, v_0=-4m/s, x_0=4m$

۲ معادلهٔ سرعت - زمان متحرک را می‌نویسیم و سرعت آن را در لحظهٔ $t=3s$ به‌دست می‌آوریم:

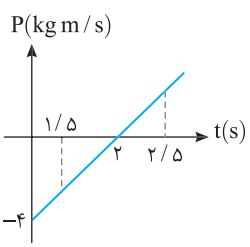
$v=at+v_0\Rightarrow v=4t-4\xrightarrow{t=3s}v=12-4=8m/s$

۳ تکانه در لحظهٔ $t=3s$ خواهد شد: $P=mv\Rightarrow P=0/2\times 8=1/6kg.m/s$

۴ ۱۱۸۹ B

خط فکری تکانه برابر حاصل‌ضرب جرم جسم در سرعت جسم است $(P=mv)$ هرگاه بزرگی تکانه افزایش یابد یعنی تندی جسم در حال افزایش و حرکت تندشونده است و اگر بزرگی تکانه کاهش یابد یعنی تندی جسم در حال کاهش و حرکت کندشونده است. بنابراین شما باید بررسی کنید که در بازهٔ زمانی $t_1=1/5s$ تا $t_2=2/5s$، بزرگی تکانه در حال افزایش است یا کاهش؟ رسم یک نمودار ساده $(P-t)$ مشکل را حل خواهد کرد.

نمودار $P-t$ به صورت روبه‌رو است. می‌دانیم که $P=mv$ است پس هنگامی که نمودار متحرک به سمت محور t حرکت می‌کند یعنی بزرگی تکانه در حال کاهش بوده و بزرگی سرعت در حال کاهش و حرکت کندشونده است و هنگامی که نمودار متحرک از محور t دور می‌شود و

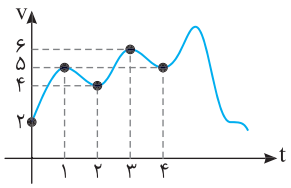


بزرگی تکانه افزایش می‌یابد یعنی بزرگی سرعت در حال افزایش است و حرکت تندشونده می‌باشد. تکانهٔ متحرک در $t=۲s$ ، صفر می‌شود پس در $t=۱/۵s$ حرکت متحرک کندشونده و در $t=۲/۵s$ حرکت تندشونده است.

۴ ۱۱۹۰ A

تکانه ثابت یعنی سرعت حرکت ثابت است. بنابراین باید به دنبال نمودارهایی بگردیم که در آن‌ها سرعت ثابت است. نمودار a مربوط به نمودار مکان - زمان حرکت با سرعت ثابت است هم‌چنین نمودار c مربوط به حرکت با سرعت ثابت است بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.
در نمودار b سرعت در حال افزایش است بنابراین تکانه ثابت نمی‌ماند و b نادرست است.
در نمودار d ، جسم ساکن است و حرکت نمی‌کند بنابراین نمودار d نادرست است.

۱ ۱۱۹۱ B



دو ثانیهٔ نخست $t=۰$ تا $t=۲s$ است که در ثانیه‌های $t=۰$ و $t=۲s$ سرعت به ترتیب $۲m/s$ و $۴m/s$ است و تغییر تکانه در این بازه خواهد شد:

$$\Delta P=m\Delta v\Rightarrow \Delta P_۱=m(۴-۲)=۲m$$

دو ثانیهٔ دوم $t=۲s$ تا $t=۴s$ است که در این ثانیه‌ها سرعت به ترتیب $۴m/s$ و $۵m/s$ است از این‌رو:

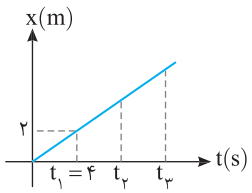
$$\Delta P_۲=m(۵-۴)=m$$

نسبت تغییر تکانه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta P_۱}{\Delta P_۲}=\frac{۲m}{m}=۲$$

۲ ۱۱۹۲ A

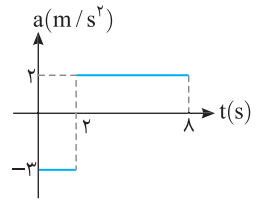
نمودار مکان - زمان خط راست بوده بنابراین حرکت دارای سرعت ثابت است و تکانه تغییر نمی‌کند.



۴ ۱۱۹۳ B

یادآوری سطح محصور بین نمودار شتاب زمان و محور زمان برابر تغییر سرعت است.

۱ برای به‌دست آوردن تغییر تکانه باید تغییر سرعت را حساب کنیم بنابراین سطح زیر نمودار شتاب زمان را در بازهٔ صفر تا ۸s به‌دست می‌آوریم.



$$\Delta v=S\Rightarrow \Delta v=-۳\times ۲+(۲\times ۶)\Rightarrow \Delta v=۶m/s$$

۲ تغییر تکانه جسم خواهد شد:

$$\Delta P=m\Delta v\xrightarrow{m=۲kg}\Delta P=۲\times ۶\Rightarrow \Delta P=۱۲kg\,m/s \text{ یا } N.s$$

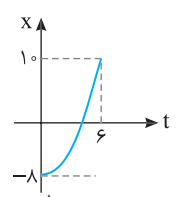
در مورد یکای ΔP که در صورت مسأله بیان شده توضیح زیر را لازم می‌دانیم:

$$F=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow \Delta P=F\Delta t\Rightarrow kg.m/s\equiv N.s$$

یعنی یکای $kg.m/s$ هم‌ارز $N.s$ است.

۳ ۱۱۹۴ B

۱ به سراغ حرکت‌شناسی می‌رویم. شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر سرعت لحظه‌ای است. در لحظهٔ $t=۰$ شیب خط مماس صفر است بنابراین سرعت اولیه $(v_۰=۰)$ است به کمک معادلهٔ مکان زمان حرکت با شتاب ثابت شتاب را به‌دست می‌آوریم.



$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow ۱۰=\frac{۱}{۲}a\times(۶)^۲+۰-۸\Rightarrow ۱۸=\frac{۱}{۲}a\times ۳۶\Rightarrow a=۱m/s^۲$$

۲ حال با توجه به معادلهٔ مستقل از زمان، سرعت متحرک هنگام عبور از مبدأ مکان $(x=۰)$ را به‌دست می‌آوریم:

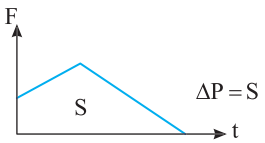
$$v^۲-v_۰^۲=۲a(x-x_۰)\xrightarrow{x=۰}v^۲-۰=۲\times ۱\big[۰-(-۸)\big]\Rightarrow v=\pm ۴m/s$$

۳ شیب خط در مبدأ مکان مثبت است پس $v=+۴m/s$ می‌باشد و تکانه خواهد شد:

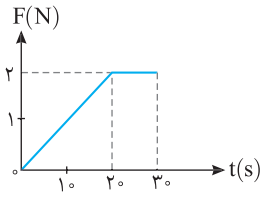
$$P=mv\Rightarrow P=۲\times ۴=۸kg.m/s$$

۱ ۱۱۹۵ B

نکته سطح محصور بین نمودار نیرو - زمان با محور زمان برابر تغییر تکانهٔ جسم است.



سطح زیر نمودار $F-t$ را حساب می‌کنیم.



$$\Delta P=S=\frac{۲\times ۲۰}{۲}\Rightarrow \Delta P=۲۰kgm/s$$

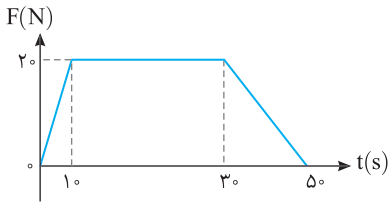
جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده و $P_۰=۰$ است بنابراین تکانه در لحظهٔ $t=۲۰s$ خواهد شد:

$$\Delta P=P-P_۰\Rightarrow ۲۰=P-۰\Rightarrow P=۲۰kgm/s$$

۳ ۱۱۹۶ B

به کمک سطح زیر نمودار نیرو - زمان، تغییر تکانه را حساب می‌کنیم:

$$\Delta P=S=(۵۰+۲۰)\times\frac{۲۰}{۲}=۷۰۰kgm/s$$



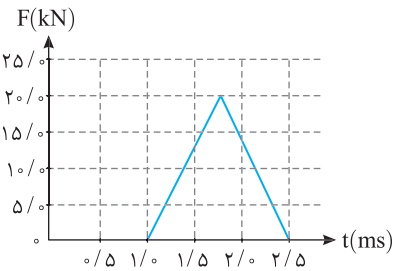
نیروی خالص متوسط وارد بر جسم برابر آهنگ تغییر تکانه است. از این‌رو می‌توان نوشت:

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow F_{av}=\frac{۷۰۰}{۵۰}\Rightarrow F_{av}=۱۴N$$

۱ ۱۱۹۷ B

نکته سطح محصور بین نمودار نیرو - زمان و محور زمان برابر تغییر تکانه است.

خط فکری نیروی متوسط وارد بر جسم برابر $F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}$ است بنابراین شما باید به کمک سطح زیر نمودار $F-t$ ، تغییر تکانه را به‌دست آورده سپس F_{av} را حساب کنید.



۱ تغییر تکانه خواهد شد:

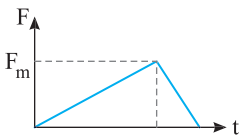
$$\Delta P=S\Rightarrow \Delta P=\frac{۲۰\times ۱۰^۳\times ۱/۵\times ۱۰^{-۳}}{۲}\Rightarrow \Delta P=۱۵kgm/s$$

۲ نیروی خالص متوسط وارد بر جسم را حساب می‌کنیم.

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}=\frac{۱۵}{۱/۵\times ۱۰^{-۳}}\Rightarrow F_{av}=۱۰^۴N$$

میانبر در نمودارهایی مثلثی‌شکل مانند شکل زیر نیروی متوسط نصف بیشینه نیروی وارد بر جسم است.

$$F_{av}=\frac{F_{max}}{۲}$$



B ۱۱۹۸ | ۱

یادآوری ممکن است نیروی وارد بر جسم متغیر باشد اما هم چنان سطح محصور بین نمودار نیرو - زمان و محور زمان برابر تغییر تکانه است.

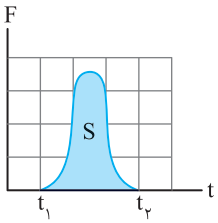
$S=\Delta P$

با توجه به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت.

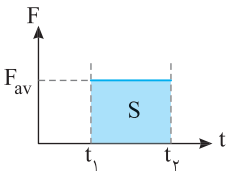
$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow \Delta P=F_{av}\Delta t$

بنابراین نمودار نیروی متوسط بر حسب زمان مطابق شکل روبه‌رو است. در نتیجه سطح این مستطیل نیز برابر تغییر تکانه است.

نتیجه مقدار نیروی متوسط (F_{av}) به گونه‌ای که مساحت مستطیل زیر F_{av} با مساحت سطح زیر نمودار نیروی واقعی متغیر شکل (الف) برابر است.

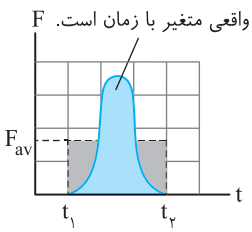


شکل (الف)



شکل (ب)

تغییر تکانهٔ ناشی از نیروی متوسط برابر با تغییر تکانهٔ نیروی واقعی متغیر با زمان است.



شکل (پ)

با توجه به یادآوری، ابتدا مساحت مستطیل F_{av} را حساب می‌کنیم.

$S_{F_{av}}=۱۰\times۲=۲۰ kgm/s$

این مساحت با مجموع $S_۱$ و $S_۲$ برابر است از این‌رو:

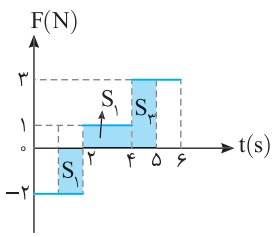
$S_{av}=S_۱+S_۲$

$۲۰=۸+S_۲\Rightarrow S_۲=۱۲ kgm/s$

B ۱۱۹۹ | ۱

یادآوری سطح محصور بین نمودار نیرو - زمان و محور زمان برابر تغییر تکانه جسم است. $(\Delta P=S)$

سطح زیر نمودار در بازهٔ زمانی $t_۱=۱s$ تا $t_۲=۵s$ را به‌دست می‌آوریم.



$\Delta P=S_۱+S_۲+S_۳\Rightarrow \Delta P=(-۲\times۱)+(۱\times۲)+(۳\times۱)$

$\Delta P=-۲+۲+۳\Rightarrow \Delta P=۳ kgm/s$

تغییر سرعت را حساب می‌کنیم.

$\Delta P=m\Delta v\xrightarrow{m=۰/۵kg} ۳=۰/۵\Delta v\Rightarrow \Delta v=۶m/s$

شتاب متوسط خواهد شد:

$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{۶}{۵-۱}\Rightarrow a_{av}=۱/۵ m/s^۲$

B ۱۲۰۰ | ۴

سطح زیر نمودار نیرو - زمان برابر تغییر تکانهٔ جسم است.

$S=(۵\times۲)+(۸\times۲)+(۶\times۱)\Rightarrow \Delta P=۱۰+۱۶+۶=۳۲ kg\,m/s$

تغییر سرعت جسم در این ۵s را حساب می‌کنیم.

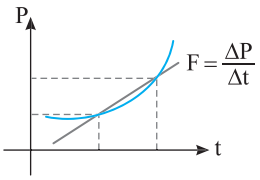
$\Delta P=m\Delta v\Rightarrow ۳۲=۴\Delta v\Rightarrow \Delta v=۸ m/s$

شتاب متوسط خواهد شد:

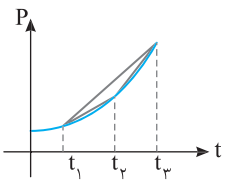
$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۸}{۵}=۱/۶ m/s^۲$

A ۱۲۰۱ | ۳

نکته شیب خط قاطع در نمودار تکانه - زمان برابر نیروی متوسط وارد بر جسم است.

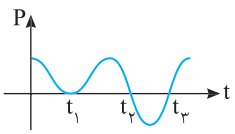


خط‌های قاطع نمودار در بازه‌های زمانی $t_۱$ تا $t_۲$، $t_۲$ تا $t_۳$ و $t_۱$ تا $t_۳$ را رسم می‌کنیم، شیب خط قاطع در بازهٔ $t_۲$ تا $t_۳$ از شیب خطوط قاطع دیگر بیشتر است بنابراین نیروی متوسط وارد بر جسم در این بازه بزرگ‌تر است.



A ۱۲۰۲ | ۲

خط فکری با توجه به تعریف تکانه $(\vec{P}=m\vec{v})$، چگونگی تغییر تکانه دقیقاً شبیه چگونگی تغییر سرعت است. یعنی اگر سرعت صفر باشد تکانه صفر است و بالعکس. اگر تکانه مثبت باشد سرعت مثبت و اگر تکانه منفی باشد، سرعت منفی است.

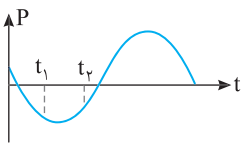


اگر تکانه صفر شده و تغییر علامت دهد، سرعت نیز در همان لحظه صفرشده و تغییر علامت می‌دهد، بنابراین برای اینکه مشخص کنیم متحرک چند بار تغییر جهت داده است باید تعداد دفعاتی که تکانه تغییر علامت می‌دهد را بشماریم.

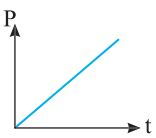
در لحظهٔ $t_۲$ و $t_۳$ نمودار تکانه محور زمان را قطع کرده یعنی تکانه تغییر جهت داده است بنابراین در این دو لحظه متحرک تغییر جهت می‌دهد.

A ۱۲۰۳ | ۱

تکانه حاصل ضرب جرم جسم در سرعت جسم است $(\vec{P}=m\vec{v})$ بنابراین، تغییرات تکانه عیناً شبیه تغییرات سرعت است. یعنی هر جا تکانه در حال کاهش است، سرعت در حال کاهش است و هر جا سرعت تغییر جهت دهد، تکانه تغییر جهت می‌دهد و ... در نتیجه در لحظهٔ $t_۱$ بزرگی تکانه در حال افزایش است و حرکت تندشونده است پس گزینهٔ (۱) درست است. دقت کنید در بازهٔ صفر تا $t_۱$ بزرگی تکانه ابتدا در حال کاهش و سپس در حال افزایش است. پس حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است و گزینهٔ (۴) نادرست است. در لحظهٔ $t_۲$ بزرگی تکانه در حال کاهش است و حرکت کندشونده است، پس گزینهٔ (۲) نادرست است. بین $t_۱$ و $t_۲$ تکانه صفر نشده پس سرعت نیز صفر نشده و گزینهٔ (۳) نادرست است.



بازی با سؤال **متحرکی به جرم ثابت بر خط راست در حال حرکت است و نمودار تکانه بر حسب زمان آن مطابق شکل روبه‌رو است. کدام گزینه، به ترتیب از راست به چپ، دربارهٔ تغییرات سرعت و تغییرات شتاب این متحرک درست است؟**



۱) سرعت آن در حال افزایش و شتاب آن ثابت است.

۲) سرعت آن ثابت و شتاب آن در حال افزایش است.

۳) سرعت و شتاب هر دو در حال افزایش هستند.

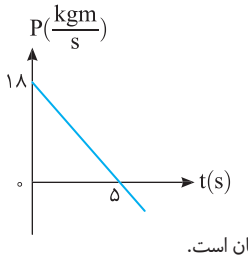
۴) سرعت و شتاب هر دو ثابت هستند.

پاسخ **نمودار خط راست است و با گذشت زمان تکانه و در نتیجه سرعت افزایش می‌یابد. شیب نمودار ثابت است یعنی نیروی خالص وارد بر جسم و در نتیجه شتاب جسم ثابت است.**

گزینهٔ ۱

۱۲۰۴ B

۱ ابتدا از روی نمودار، نیروی وارد بر جسم را حساب می‌کنیم.



$$F=\frac{\Delta P}{\Delta t} \xrightarrow{\text{در بازهٔ ۰ تا ۵s}} F=\frac{0-18}{5-0}\Rightarrow F=-3/6N$$

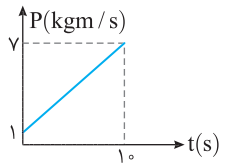
نیروی وارد بر جسم ثابت است. بنابراین، شتاب حرکت جسم نیز ثابت و در تمام لحظات یکسان است.

$$F=ma\Rightarrow -3/6=0/45\,a\Rightarrow a=-8m/s^2$$

بزرگی شتاب $8m/s^2$ است.

۱۲۰۵ A

۲ نمودار تکانه - زمان، خط راست است با توجه به تعریف تکانه $(P=mv)$ نمودار $v-t$ نیز خط راست مایل است و شتاب حرکت ثابت است.



$$P_1=mv_1\Rightarrow 1=0/2v_1\Rightarrow v_1=5m/s$$

$$P_2=mv_2\Rightarrow 7=0/2v_2\Rightarrow v_2=35m/s$$

$$a=\frac{v_2-v_1}{t}=\frac{35-5}{10}=3m/s^2$$

۱۲۰۶ B

۲ معادلهٔ سرعت - زمان جسمی که در شرایط خلأ رها می‌شود یک تابع خطی از زمان است و نمودار سرعت - زمان آن نیز خط راست است. بنابراین نمودار تکانه - زمان آن نیز خط راست است. $P=mv\Rightarrow P=m(-gt)$

در نتیجه گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست هستند.

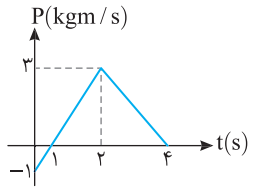
$$|v|=\sqrt{2gh}\Rightarrow |v|=\sqrt{2\times 10\times 5}\Rightarrow v=-10\,m/s$$

$$P=mv\Rightarrow P=0/4\times(-10)=-4kg\,m/s$$

۱۲۰۷ A

راه‌حل اول: شتاب متوسط برابر است با $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ پس در $t=2s$ و $t=4s$

ابتدا سرعت‌ها را به‌دست می‌آوریم:



$$P_1=mv_1\Rightarrow 3=2\times v_1\Rightarrow v_1=1/5m/s$$

$$P_2=mv_2\Rightarrow 0=2\times v_2\Rightarrow v_2=0$$

شتاب را حساب می‌کنیم:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-1/5}{2}=-0/75m/s^2$$

راه‌حل دوم: شیب خط نمودار تکانه زمان برابر نیروی متوسط وارد بر جسم است، شیب نمودار را در بازهٔ $t=2s$ تا $t=4s$ به‌دست می‌آوریم.

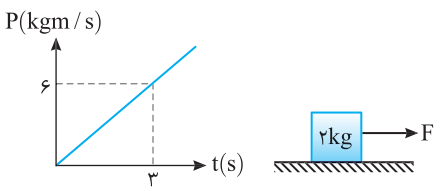
$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}=\frac{-3}{2}=-1/5N$$

به کمک قانون دوم نیوتون شتاب متوسط را حساب می‌کنیم.

$$F_{av}=ma_{av}\Rightarrow -1/5=2\times a_{av}\Rightarrow a_{av}=-0/75m/s^2$$

۱۲۰۸ B

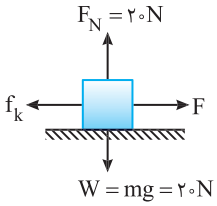
نکته شیب نمودار $P-t$ برابر نیروی خالص وارد بر جسم است.



۱ از روی شیب نمودار نیروی خالص وارد بر جسم را به‌دست می‌آوریم.

$$F_{net}=\frac{6-0}{3-0}\Rightarrow F_{net}=2N$$

۲ نیروی اصطکاک بین سطح و جسم را حساب می‌کنیم.



$$f_k=\mu_k F_N \xrightarrow[F_N=W=20N]{\mu_k=0/2} f_k=0/2\times 20$$

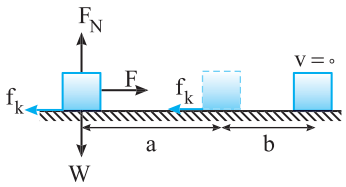
$$\Rightarrow f_k=4N$$

۳ نیروی F خواهد شد:

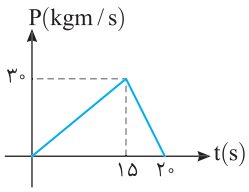
$$F_{net}=F-f_k\Rightarrow 2=F-4\Rightarrow F=6N$$

۱۲۰۹ C

۳ **خط فکری** به نمودار نگاه کنید بنا به فرض مسئله بعد از لحظهٔ $t=15s$ نیروی F حذف شده است و بنا به قانون اول نیوتون باید جسم با همان تکانه $30kgm/s$ به حرکت خود ادامه دهد اما پس از قطع F در مدت $5s$ جسم متوقف شده است، بنابراین باید سطح افقی دارای اصطکاک باشد و این اصطکاک جسم را متوقف کند. از این‌رو شما ابتدا در بازه $15s$ تا $20s$ نیروی اصطکاک را به‌دست آورید سپس در بازهٔ ۰ تا $15s$ به کمک نمودار نیروی خالص (F_{net}) وارد بر جسم را حساب کنید تا بتوانید نیروی F را به‌دست بیاورید.



نکته شیب نمودار تکانه - زمان برابر نیروی خالص وارد بر جسم است.



۱ در بازهٔ $15s$ تا $20s$ تنها نیروی مؤثر اصطکاک است بنابراین خواهیم داشت:

$$f_k=\frac{0-30}{20-15}\Rightarrow f_k=-6N$$

۲ در بازهٔ صفر تا $15s$ دو نیرو یکی F و دیگری f_k بر جسم وارد می‌شود (W و F_N یکدیگر را خنثی می‌کنند)، نیروی خالص را از روی شیب نمودار $P-t$ به‌دست می‌آوریم.

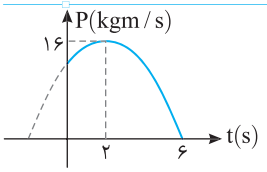
$$F_{net}=\frac{30-0}{15-0}\Rightarrow F_{net}=2N$$

۳ نیروی F خواهد شد:

$$F_{net}=F-f_k\Rightarrow 2=F-6\Rightarrow F=8N$$

۱۲۱۰ C

خط فکری نمودار سهمی است و سهمی نسبت به محور قائم گذرا از رأسش دارای تقارن است و معادلهٔ تکانه - زمان تابع درجه ۲ است. باید از این ویژگی سهمی استفاده کرد.



۱ یکی از ریشه‌های معادلهٔ تکانه - زمان $t=6s$ است. با توجه به تقارن سهمی باید ریشهٔ دیگر آن $t=-2$ باشد.

۲ معادلهٔ سهمی را می‌نویسیم و مختصات رأس سهمی را در آن قرار می‌دهیم.

$$P=A(t-6)(t+2)\xrightarrow[P=16kgm/s]{t=2s}16=A(2-6)(2+2)\Rightarrow A=-1$$

۳ معادلهٔ سهمی کامل شد:

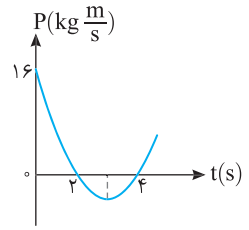
$$P=-(t-6)(t+2)\Rightarrow P=-t^2+4t+12$$

۴ تکانهٔ اولیهٔ جسم با توجه به معادلهٔ آن $P_0=12kgm/s$ است بنابراین سرعت اولیهٔ آن خواهد شد.

$$P=mv\xrightarrow{m=2kg}12=2v\Rightarrow v_0=6m/s$$

۱۲۱۱ C

۲ ابتدا به شما بگوییم که این تست چند اشکال اساسی دارد. اولاً در صورت مسئله بیان نشده که نمودار $P-t$ سهمی است، ثانیاً در کتاب درسی وقتی حرکت دارای شتاب ثابت باشد، نمودار سرعت زمان و تکانه زمان متحرک خط راست است. بنابراین این متحرک دارای جرم متغیر است که باز در کتاب درسی خبری از این مسئله وجود ندارد.



۱ معادلهٔ سهمی را به صورت $P=A(t-t')(t-t'')$ می‌نویسیم. t' و t''، ریشه‌های معادله هستند و با توجه به نمودار $t'=2s$ و $t''=4s$ است.

$$P=A(t-2)(t-4)$$

۲ درلحظهٔ $t=0$ ، $P=16kgm/s$ است بنابراین: $16=A(0-2)(0-4)\Rightarrow A=2$

۳ معادلهٔ $P-t$ خواهد شد: $P=2(t-2)(t-4)$

۴ تکانه در لحظات $t_1=3s$ و $t_2=5s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$P_1=2(3-2)(3-4)\Rightarrow P_1=-2kgm/s$$

$$P_2=2(5-2)(5-4)\Rightarrow P_2=6kgm/s$$

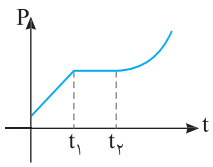
۵ نیروی خالص متوسط را حساب می‌کنیم.

$$F_{av}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\Rightarrow F_{av}=\frac{6-(-2)}{5-3}\Rightarrow F_{av}=4N$$

۳ ۱۲۱۲ B

نکته شیب نمودار تکانه - زمان برابر نیروی خالص وارد بر جسم است.

باید شیب نمودار را بررسی کنیم.



در بازهٔ صفر تا t_1 نمودار $P-t$ خط راست مایل است بنابراین نیرو مقدار ثابتی است و در بازهٔ t_1 تا t_2 ، تکانه ثابت بوده و نیروی وارد بر جسم صفر است. سرانجام در $t>t_2$ نمودار $P-t$ منحنی است یعنی شیب خط مماس بر نمودار در حال تغییر است که این توضیحات تنها با شکل (۳) همخوانی دارد.

۳ ۱۲۱۳ B

بنا به قانون سوم نیوتون نیرویی که شخص به زمین و زمین به شخص وارد می‌کند هم‌اندازه و خلاف جهت هم‌اند و زمان اثر این نیروها یکی است، از این‌رو می‌توان نوشت:

$$F_1=-F_2\xrightarrow{F=ma} m_1a_1=-m_2a_2\xrightarrow{a=\frac{v-v_0}{t}}$$

$$m_1\frac{v_1-0}{t}=-m_2(\frac{v_2-0}{t})\Rightarrow m_1v_1=-m_2v_2\Rightarrow P_{\text{شخص}}=-P_{\text{زمین}}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) درست است. البته تکانهٔ زمین خلاف جهت تکانهٔ شخص است.

۲ ۱۲۱۴ B

یادآوری قانون اول نیوتون بیان می‌کند که هرگاه نیروی خالص بر جسم وارد نشود، اگر جسم ساکن باشد ساکن می‌ماند و اگر در حال حرکت باشد به حرکت روی خط راست با سرعت ثابت ادامه می‌دهد.

از دید ناظر، قانون اول نیوتون در مورد جسم صادق بوده است یعنی نیروی خالص وارد بر جسم صفر است. از این‌رو:

$$\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}\xrightarrow{F=0}\Delta\vec{P}=0$$

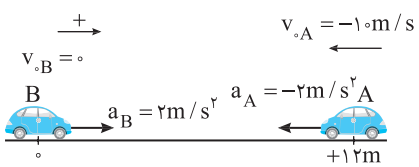
۲ ۱۲۱۵ B

خط فکری دقیقاً با یک مسئلهٔ حرکت‌شناسی سروکار داریم. باید معادله‌های حرکت را نوشته برابر قرار دهیم و زمان رسیدن دو خودرو به یکدیگر را بیابیم، سپس به کمک معادلهٔ سرعت - زمان، سرعت هریک را در لحظهٔ برخورد حساب کنیم و سرانجام تکانه دو متحرک را به‌دست بیاوریم.

۱ ابتدا معادلهٔ دو متحرک را می‌نویسیم، مکان B را مبدأ در نظر گرفته و سمت راست را جهت مثبت اختیار می‌کنیم (به علامت شتاب‌ها و سرعت دقت کنید):

$$x_B=\frac{1}{2}a_Bt^2+v_{0B}t+x_{0B}\Rightarrow x_B=t^2$$

$$x_A=\frac{1}{2}a_At^2+v_{0A}t+x_{0A}\Rightarrow x_A=-t^2-10t+12$$



۲ هنگام رسیدن دو متحرک به هم $x_A=x_B$ می‌شود بنابراین:

$$t^2=-t^2-10t+12\Rightarrow 2t^2+10t-12=0\Rightarrow t^2+5t-6=0$$

$$\Rightarrow(t+6)(t-1)=0\Rightarrow\begin{cases}t=1s\\ t=-6s\quad(\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

۳ حال سرعت متحرک‌ها را با استفاده از رابطهٔ $v=at+v_0$ به‌دست می‌آوریم.

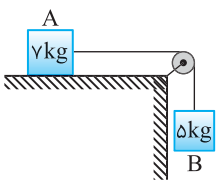
$$\begin{cases}v_A=-2t-10\xrightarrow{t=1s}v_A=-12m/s\\ v_B=2t\xrightarrow{t=1s}v_B=2m/s\end{cases}$$

۴ تکانهٔ هر متحرک خواهد شد:

$$\begin{cases}P_A=mv_A\Rightarrow P_A=-12m\\ P_B=mv_B\Rightarrow P_B=2m\end{cases}\Rightarrow\frac{P_B}{P_A}=\frac{2}{-12}=-\frac{1}{6}$$

۲ ۱۲۱۶ A

خط فکری نکتهٔ مهم در حل این مسئله این است که دو جسم با یک ریسمان به هم متصل هستند و بعد از رها شدن، اگر جسم B ، یک متر پایین بیاید همزمان جسم A نیز یک متر جابه‌جا می‌شود یعنی در هر لحظه تندی A با تندی B برابر است $(v_A=v_B)$ و این نکته حل مسئله است.



تکانه‌ها را نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases}P_A=m_Av\\ P_B=m_Bv\end{cases}\Rightarrow\frac{P_A}{P_B}=\frac{m_A}{m_B}=\frac{7}{5}\Rightarrow\frac{P_A}{P_B}=1/4$$

۱ ۱۲۱۷ B

نیروی کشسانی فنر وارد بر دو جسم برابر است و این نیرو بر هر دو جسم A و B در مدت زمان یکسانی وارد می‌شود. از این‌رو می‌توانیم بنویسیم:

$$F_A=F_B\Rightarrow\frac{\Delta P_A}{\Delta t}=\frac{\Delta P_B}{\Delta t}\Rightarrow\Delta P_A=\Delta P_B$$

دو جسم از حال سکون رها شده‌اند و تکانهٔ اولیهٔ آن‌ها صفر است $(P_{0A}=P_{0B})$ بنابراین تکانهٔ نهایی آن‌ها با هم برابر است.

$$P_A-P_{0A}=P_B-P_{0B}\Rightarrow P_A=P_B$$

۳ ۱۲۱۸ C

خط فکری در چه لحظه‌ای متحرک تغییر جهت می‌دهد؟ یعنی در چه لحظه‌ای سرعت صفر شده و تغییر علامت می‌دهد؟ وقتی که سرعت صفر می‌شود، تکانهٔ متحرک نیز صفر می‌شود؛ بنابراین باید دنبال لحظه‌ای باشیم که تکانه صفر می‌شود.

نکته سطح زیر نمودار نیرو - زمان برابر تغییر تکانه است.

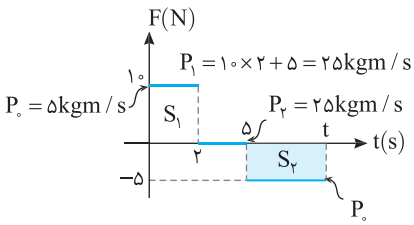
۱ تکانه در لحظهٔ $t=2s$ را حساب می‌کنیم.

$$\Delta P=S\Rightarrow P-P_0=10\times2\xrightarrow{P_0=5kgm/s}P_1-5=20\Rightarrow P_1=25kgm/s$$

۲ در بازهٔ $t=2s$ تا $t=5s$ نیرو صفر و تغییر تکانه صفر است و تکانه همچنان $P_2=25kgm/s$ است.

۳ بعد از $t=5s$ باید لحظه‌ای را پیدا کنیم که تکانه صفر می‌شود. برای این که این اتفاق بیافتد باید مساحت سطح S_2 برابر $-25kgm/s$ شود.

$$S_2=-25\Rightarrow-5(t-5)=-25\Rightarrow t=10s$$



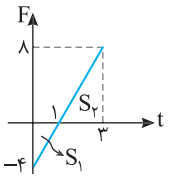
۲ ۱۲۱۹ B

خط فکری نیرو متغیر است $(F=4t-4)$ و برای یافتن تغییر تکانه باید نمودار نیرو - زمان را رسم کرده و به کمک سطح محصور بین نمودار نیرو - زمان با محور زمان تکانه را حساب کنیم.

۱ برای رسم خط $F=4t-4$ کافی است یکبار $t=0$ و یکبار $t=3s$ را در معادله قرار داد و دو نقطهٔ به‌دست آمده را روی صفحه به هم وصل کنیم.

$F=4t-4\Rightarrow t=0\Rightarrow F=-4N\ ,\ t=1s\Rightarrow F=0$

$t=3s\Rightarrow F=4\times3-4=8N$



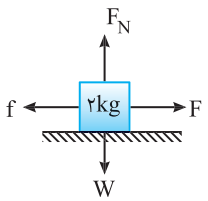
۲ جسم از حال سکون راه افتاده و تکانهٔ اولیهٔ آن صفر است. با محاسبهٔ مساحت، تکانه را به‌دست می‌آوریم.

$\Delta P=S_۱+S_۲=-\frac{4\times1}{2}+\frac{8\times2}{2}=6kg.m/s$

$\Rightarrow P-P_۰=6\xrightarrow[P_۰=0]{v_۰=0}P=6kg\ m/s$

۱ ۱۲۲۰ C

خط فکری باید ابتدا دربارهٔ سکون و حرکت جسم فکر کنیم، برای این منظور نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم و تا لحظه‌ای که $F\le f_{max}$ جسم ساکن می‌ماند و پس از آن لحظه جسم به حرکت درمی‌آید، سپس باید نیروی خالص برحسب زمان را نوشته و نمودار آن را رسم کنید و مسئله را حل کنید.



۱ نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت خواهد شد:

$f_{s\,max}=\mu_s F_N\xrightarrow[\mu_s=0/5]{F_N=W=2\times10=20N}f_{s\,max}=0/5\times20=10N$

۲ اکنون باید لحظه‌ای که نیروی F برابر $10N$ می‌شود را مشخص کنیم.

$F=4t+6\Rightarrow10=4t+6\Rightarrow4t=4\Rightarrow t=1s$

بعد از لحظهٔ $t=1s$ جسم به حرکت در می‌آید.

۳ از لحظهٔ $t=1s$ به بعد نیروی اصطکاک وارد بر جسم، نیروی اصطکاک جنبشی است.

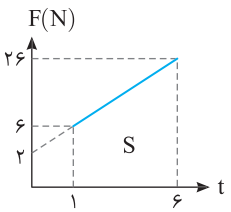
$f_k=\mu_k F_N\xrightarrow{\mu_k=0/2}f_k=0/2\times20\Rightarrow f_k=4N$

۴ معادلهٔ نیروی خالص وارد بر جسم برحسب زمان خواهد شد.

$F_{net}=F-f_k\Rightarrow F_{net}=4t+6-4\Rightarrow F_{net}=4t+2$

۵ نمودار نیروی خالص بر حسب زمان را رسم می‌کنیم. البته از لحظهٔ $t=1s$ به بعد که متحرک به راه می‌افتد.

$\Delta P=S=(6+26)\times\frac{5}{2}\Rightarrow\Delta P=80kgm/s$



۶ تکانه در لحظهٔ $t=6s$ برابر خواهد شد با:

$\Delta P=P-P_۰\xrightarrow{P_۰=0}80=P-0\Rightarrow P=80kgm/s$

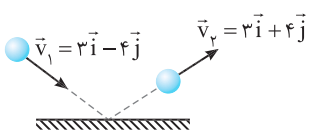
۷ تندی در لحظهٔ $t=6s$ را به‌دست می‌آوریم.

$P=mv\Rightarrow80=2v\Rightarrow v=40m/s$

۴ ۱۲۲۱ C

۱ بردار تغییر سرعت جسم را به‌دست می‌آوریم:

$\Delta\vec{v}=\vec{v}_۲-\vec{v}_۱=3\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{i}+4\vec{j}\Rightarrow\Delta\vec{v}=8\vec{j}$



۲ تغییر تکانهٔ جسم را حساب می‌کنیم:

$\Delta\vec{P}=m\Delta\vec{v}\xrightarrow{m=0/2kg}\Delta\vec{P}=0/2\times8\vec{j}\Rightarrow\Delta\vec{P}=1/6\vec{j}$

۳ نیروی خالص وارد بر توپ خواهد شد:

$F_{net}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t=0/4s}\vec{F}_{net}=\frac{1/6\vec{j}}{0/4}\Rightarrow\vec{F}_{net}=4\vec{j}$

۴ نیروی وزن رو به پایین است و برحسب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ خواهد شد:

$W=mg=0/2\times10=2N\Rightarrow W=-2\vec{j}$

۵ نیرویی که سطح بر توپ وارد می‌کند را به‌دست می‌آوریم:

$\vec{F}_{net}=\vec{F}_N+\vec{W}\Rightarrow4\vec{j}=\vec{F}_N-2\vec{j}\Rightarrow\vec{F}_N=6\vec{j}$

پنجره ۵

۲ ۱۲۲۲ A

یادآوری در حرکت دایره‌ای یکنواخت، مدت زمان لازم برای پیمودن یک دور محیط دایره را دوره می‌نامند.

با توجه به صورت مسئله تعداد دورهای متحرک در هر $1min=60s$، برابر ۲۰ دور است. دوره را با یک تناوب ساده به‌دست می‌آوریم.

۲۰ دور	۶۰s
۱ دور	T

$\Rightarrow T=\frac{60}{20}=3s$

میانبر برای تعداد دورها و دوره داریم:

$T=\frac{t}{N}$ (دوره: T، زمان سپری شده: t، تعداد دورها: N)

۳ ۱۲۲۳ A

نکته ۱ دورهٔ حرکت زمین به دور محور خودش: $24h$

نکته ۲ دورهٔ حرکت عقربهٔ ساعت شمار: $12h$

نکته ۳ دورهٔ حرکت عقربهٔ دقیقه شمار: $1h$

نکته ۴ دورهٔ حرکت عقربهٔ ثانیه شمار: $\frac{1}{60}h=1min=60s$

دوره حرکت دورانی زمین $T_E=24h$ و دورهٔ عقربهٔ ساعت‌شمار $T_h=12h$ است. از این‌رو خواهیم داشت:

$\frac{T_E}{T_h}=\frac{24}{12}=2$

۳ ۱۲۲۴ B

دوره برابر $0/5s$ است. تعداد دورها خواهد شد:

$N=\frac{t}{T}\Rightarrow N=\frac{15}{0/5}=30$

این متحرک ۳۰ بار محیط دایره را طی کرده است و محیط دایره 2π رادیان است. در این صورت:

۱ دور	2π
۳۰ دور	θ

$\Rightarrow\theta=2\pi\times30=60\pi\ rad$

۳ ۱۲۲۵ A

تمام نقاط روی دیسک به همراه دیسک با یک دوره می‌چرخند $T_1=T_2=T_3$. با توجه به رابطهٔ تندی در حرکت دایره‌ای $v=\frac{2\pi r}{T}$ هر چه فاصله از مرکز بیشتر باشد (r شعاع چرخش بزرگ‌تر باشد) تندی ذره بیشتر است.

$v_3>v_2>v_1$

۱ ۱۲۲۶ B

یادآوری در حرکت بر مسیر دایره‌ای، تندی حرکت یک ذره که با دورهٔ T بر دایره‌ای به شعاع r در حال چرخش است از رابطهٔ $v=2\pi r/T$ به‌دست می‌آید.

نکته دورهٔ حرکت عقربهٔ ثانیه‌شمار، $T_s=60s$ و دورهٔ حرکت عقربهٔ ساعت‌شمار $T_h=12\times60\times60=12\times3600\ s$ است.

نسبت تندی نوک عقربهٔ ثانیه‌شمار به نوک عقربهٔ ساعت‌شمار خواهد شد:

$\frac{v_s}{v_h}=\frac{\frac{2\pi r_s}{T_s}}{\frac{2\pi r_h}{T_h}}\Rightarrow\frac{v_s}{v_h}=\frac{r_s}{r_h}\times\frac{T_h}{T_s}\Rightarrow\frac{v_s}{v_h}=2\times\frac{12\times3600}{60}\Rightarrow\frac{v_s}{v_h}=1440$

A ۱ ۱۲۲۷

دوره را به‌دست می‌آوریم:

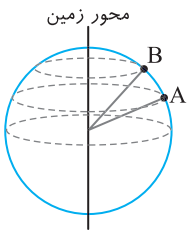
$$T=\frac{t}{N}\xrightarrow{t=۶۰s\ و\ N=۳۰۰۰\ دور}T=\frac{۶۰}{۳۰۰۰}\Rightarrow T=\frac{۱}{۵۰}s$$

تندی نوک پرهٔ بالگرد برابر است با:

$$v=\frac{۲\pi r}{T}\xrightarrow{r=۱/۸m}v=\frac{۲\times۳\times۱/۸}{\frac{۱}{۵۰}}\Rightarrow v=۵۴۰m/s$$

A ۴ ۱۲۲۸

زمین حول محور خود دارای حرکت دورانی است که به آن حرکت وضعی زمین می‌گویند و دورهٔ آن ۲۴h است. دورهٔ جسم A و دورهٔ جسم B برابر دورهٔ چرخش زمین به دور محور خود و برابر با ۲۴ ساعت است.

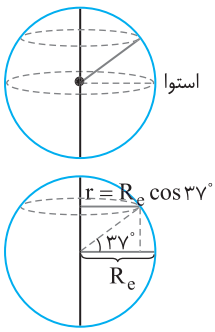


یعنی دورهٔ جسم A و B با هم برابر است: $\frac{T_A}{T_B}=۱$

B ۳ ۱۲۲۹

خط فکری تمام نقاط روی زمین به همراه کرهٔ زمین حول محور زمین می‌چرخند و دورهٔ حرکت همهٔ آن‌ها ۲۴h است. هر چه نقاط به محور زمین نزدیک‌تر باشند، تندی آن‌ها $(v=\frac{۲\pi r}{T})$ کمتر است و نقاط روی خط استوا بیشترین تندی را دارند. برای به‌دست آوردن تندی ذره‌ای واقع بر مدار ۳۷° باید شعاع مدار را پیدا کنید و سپس تندی را به‌دست بیاورید.

نکته مدارها دایره‌های فرضی هستند که به موازات استوا روی کرهٔ جغرافیایی رسم می‌شوند. مدار استوا را صفر می‌گیریم درجه و مدارها از استوا تا قطب بین ۰ تا ۹۰° تقسیم می‌شوند.



در شکل روبه‌رو مدار ۳۷° رسم شده است شعاع این مدار خواهد شد با:

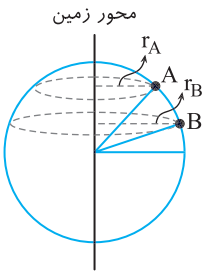
$$\cos ۳۷^\circ=\frac{r}{R_e}\Rightarrow r=R_e\cos ۳۷^\circ$$
$$\Rightarrow r=۶۴۰۰\times ۰/۸=۵۱۲۰km$$

تندی نقاط واقع بر مدار ۳۷° را حساب می‌کنیم.

$$v=\frac{۲\pi r}{T}\Rightarrow v=۲\times۳\times\frac{۵۱۲۰}{۲۴}\Rightarrow v=۱۲۸۰km/h$$

A ۴ ۱۲۳۰

دورهٔ تمام نقاط واقع بر سطح زمین با هم برابر و مساوی $T=۲۴h$ است. اما تندی متفاوت و وابسته به شعاع است. بنابراین باید شعاع چرخش هر نقطه را حول محور زمین به‌دست آوریم:



$$r_A=R\cos ۶۰^\circ\ ,\ r_B=R\cos ۳۰^\circ$$

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{r_A\frac{۲\pi}{T}}{r_B\frac{۲\pi}{T}}=\frac{R\cos ۶۰^\circ}{R\cos ۳۰^\circ}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

میانبر تندی نقاط واقع بر مدار θ° برابر است با: $v=\frac{۲\pi}{T}R_e\cos\theta$

A ۴ ۱۲۳۱

دورهٔ حرکت پره‌ها را حساب می‌کنیم

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{۶۰}{۱۲۰۰}\Rightarrow T=\frac{۱}{۲۰}s$$

شتاب مرکزگرا در وسط پره $(r=۲m)$ خواهد شد.

$$a=r(\frac{۴\pi^۲}{T^۲})\Rightarrow a=۲\times\frac{۴\times۱۰}{\frac{۱}{۴۰۰}}=۳۲۰۰۰m/s^۲$$

A ۱ ۱۲۳۲

یادآوری در حرکت دایره‌ای شتاب مرکزگرا از رابطهٔ $a=\frac{v^۲}{r}$ به‌دست می‌آید که در آن r شعاع مسیر و v تندی حرکت جسم است.

با توجه به رابطهٔ شتاب مرکزگرا با تندی جسم خواهیم داشت:

$$a=\frac{v^۲}{r}\xrightarrow[r_A=r_B]{v_A=v_B}a_A=a_B$$

A ۱ ۱۲۳۳

شتاب مرکزگرای دو متحرک یکسان است، از این رو می‌توان نوشت.

$$a_۱=a_۲\xrightarrow{a=\frac{v^۲}{R}}\frac{v_۱^۲}{r_۱}=\frac{v_۲^۲}{r_۲}\xrightarrow{r_۱=۴۰m\ ,r_۲=۸۰m}\frac{v_۱^۲}{۴۰}=\frac{v_۲^۲}{۸۰}\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=\sqrt{۲}$$

A ۴ ۱۲۳۴

۱ شتاب حرکت متحرک را در اختیار داریم، به کمک آن تندی جسم را به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v^۲}{r}\Rightarrow\frac{۵\pi^۲}{۲}=\frac{v^۲}{۱۰}\Rightarrow v=۵\pi\ m/s$$

۲ قوس $\frac{\pi}{۳}$ رادیان برابر $\frac{۱}{۶}$ محیط است و مسافتی که متحرک در قوس طی می‌کند برابر است با:

$$\ell=\frac{۱}{۶}(۲\pi r)=\frac{۱}{۶}\times۲\pi\times۱۰=\frac{۱۰\pi}{۳}m$$

۳ به کمک تعریف تندی می‌توان زمان را به‌دست آورد.

$$v=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow ۵\pi=\frac{\frac{۱۰\pi}{۳}}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t=\frac{۲}{۳}s$$

بازی با سؤال **متحرکی با تندی ثابت $۲۰\sqrt{۲}\ m/s$ به صورت یکنواخت روی یک دایره در حال چرخیدن است. اگر متحرک در طی ۲s به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ روی دایره بچرخد، شتاب آن چند متر بر مجذور ثانیه است؟ $(\pi\approx۳)$**

۱) ۲۰ ۲) $۲۰\sqrt{۲}$ ۳) ۱۵ ۴) $۱۵\sqrt{۲}$

پاسخ **متحرک در مدت ۲s به اندازه $\frac{\pi}{۲}$ یعنی $\frac{۱}{۴}$ محیط دایره چرخیده است، از این رو دورهٔ حرکت آن $۴\times۲=۸s$ است، بنابراین:** گزینهٔ ۴

$$a=r\frac{۴\pi^۲}{T^۲}\ ,v=r\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow a=v(\frac{۲\pi}{T})\Rightarrow a=۲۰\sqrt{۲}\times\frac{۲\pi}{۸}\Rightarrow a=۱۵\sqrt{۲}\ m/s^۲$$

A ۴ ۱۲۳۵

نکته در حرکت دایره‌ای یکنواخت بزرگی شتاب در تمام لحظه‌ها یکسان است.

طبق صورت سؤال، بردار شتاب $\vec{a}=۳\vec{i}+۴\vec{j}$ است بزرگی شتاب را به دست می‌آوریم:

$$a=\sqrt{a_x^۲+a_y^۲}\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵m/s^۲$$

تندی برابر خواهد شد با:

$$a=\frac{v^۲}{R}\Rightarrow ۵=\frac{v^۲}{۲}\Rightarrow v=\sqrt{۱۰}m/s$$

A ۳ ۱۲۳۶

نکته دورهٔ جسمی که روی یک صفحهٔ گردان به همراه آن می‌چرخد. با دورهٔ صفحه برابر است.

دورهٔ دو جسم واقع بر صفحهٔ گردان، برابر با دورهٔ چرخش صفحه است. بنابراین طبق رابطه شتاب مرکزگرا $(a=r\frac{۴\pi^۲}{T^۲})$ جسمی که از مرکز دورتر بوده و شعاع چرخش آن بزرگ‌تر است، دارای شتاب مرکزگرای بیشتری است.

B ۳ ۱۲۳۷

با استفاده از محیط دایره شعاع چرخش ذره را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{محیط دایره}=۲\pi r\Rightarrow ۱۲=۲\times۳r\Rightarrow r=۲m$$

ذره در هر دقیقه $(۶۰s)$، ۶ دور می‌چرخد بنابراین دورهٔ حرکت برابر است با:

$$T=\frac{t}{N}=\frac{۶۰}{۶}=۱۰s$$

اکنون شتاب مرکزگرا به‌دست می‌آید: $a=r\frac{۴\pi^۲}{T^۲}\Rightarrow a=۲\times\frac{۴\times۹}{۱۰^۲}\Rightarrow a=\frac{۱۸}{۲۵}m/s^۲$

A ۱۲۳۸ ۱

ذره در هر ۵s ، بیست دور می‌زند. بنابراین دوره خواهد شد: $T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{۵}{۲۰}=\frac{۱}{۴}s$

رابطهٔ شتاب مرکزگرا و تندی متحرک در حرکت دایره‌ای یکنواخت را نوشته برهم تقسیم می‌کنیم و تندی را به دست می‌آوریم

$$\left.\begin{array}{l}a=r\frac{۴\pi^۲}{T^۲}\\ v=r\frac{۲\pi}{T}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{a}{v}=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\frac{۱۰\pi}{v}=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۴}}\Rightarrow v=۱/۲۵m/s$$

میانبر رابطهٔ شتاب مرکزگرا و تندی: $(a=v\frac{۲\pi}{T})$

A ۱۲۳۹ ۲

۱ به کمک رابطهٔ شتاب مرکزگرا می‌توان نوشت: $a=\frac{v^۲}{r}\Rightarrow v^۲=ra$

۲ انرژی جنبشی جسم از رابطهٔ $K=\frac{۱}{۲}mv^۲$ به‌دست می‌آید از این‌رو خواهیم داشت:

$$K=\frac{۱}{۲}mra\xrightarrow{m=۲\times۱۰^{-۳}g,K=۰/۰۲J,r=۰/۵m}۰/۰۲=\frac{۱}{۲}\times۲\times۱۰^{-۳}\times۰/۵\times a$$

$$\Rightarrow a=۴۰m/s^۲$$

B ۱۲۴۰ ۱

۱ جسم در هر دقیقه $(t=۶۰s)$ ، ۳۰ دور می‌چرخد بنابراین دوره خواهد شد:

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{۶۰}{۳۰}\Rightarrow T=۲s$$

۲ تندی حرکت جسم را حساب می‌کنیم:

$$v=\frac{۲\pi r}{T}\xrightarrow{r=۲m}v=\frac{۲\pi\times۲}{۲}\Rightarrow v=۲\pi\,m/s$$

۳ انرژی جنبشی جسم را به‌دست می‌آوریم:

$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲\xrightarrow{m=۵kg}K=\frac{۱}{۲}\times۵\times(۲\pi)^۲\Rightarrow K=۱۰\pi^۲J$$

B ۱۲۴۱ ۴

نکته هر گاه دورهٔ حرکت دو متحرک که دارای حرکت دایره‌ای هستند برابر باشد، در بازه‌های زمانی یکسان، زاویه‌ای (کمانی) که روی محیط دایره طی می‌کنند باهم برابر است. برای آنکه نسبت انرژی جنبشی دو جسم را حساب کنیم ابتدا باید نسبت تندی دو جسم را به‌دست بیاوریم.

$$v_۱=\frac{۲\pi R_۱}{T_۱},v_۲=\frac{۲\pi R_۲}{T_۲}\Rightarrow\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{T_۲}{T_۱}\times\frac{R_۱}{R_۲}$$

$$\xrightarrow[R_۱=۲R,R_۲=\frac{۳}{۲}R]{T_۱=T_۲}\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{۲R}{\frac{۳}{۲}R}\Rightarrow\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{۴}{۳}$$

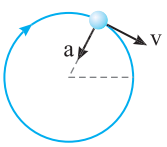
نسبت انرژی جنبشی آن‌ها خواهد شد:

$$\frac{K_۱}{K_۲}=\frac{\frac{۱}{۲}m_۱v_۱^۲}{\frac{۱}{۲}m_۲v_۲^۲}\xrightarrow{m_۱=m,m_۲=۴m}\frac{K_۱}{K_۲}=(\frac{m}{۴m})(\frac{۴}{۳})^۲\Rightarrow\frac{K_۱}{K_۲}=\frac{۴}{۹}$$

A ۱۲۴۲ ۳

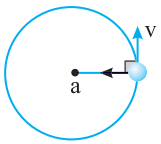
نکته ۱ سرعت در هر نقطه از مسیر بر مسیر حرکت مماس است.

نکته ۲ در حرکت دایره‌ای یکنواخت شتاب حرکت همواره در امتداد شعاع و رو به مرکز است.



با توجه به شکل یک خط مماس در نقطهٔ مورد نظر در سوی چرخش ذره رسم می‌کنیم (بردار v) و بردار شتاب را در جهت شعاع رو به مرکز نمایش می‌دهیم. از این‌رو گزینهٔ (۳) درست است.

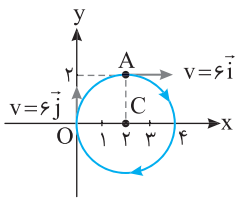
A ۱۲۴۳ ۳



در حرکت دایره‌ای یکنواخت، برایند نیروهای وارد بر جسم صفر نیست و جسم در جهت نیروی برایند حرکت نمی‌کند، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است. همچنین در این حرکت مطابق شکل بردار شتاب و بردار سرعت هم‌جهت نیستند، بنابراین گزینهٔ (۲) نیز نادرست است. در حرکت دایره‌ای یکنواخت، بزرگی بردار سرعت ثابت است، بنابراین ممکن است که $F_{net}\neq۰$ بوده و حرکت شتابدار باشد اما بزرگی سرعت ثابت بماند و گزینهٔ (۳) درست است.

برایند نیروهای وارد بر جسم صفر نیست بنابراین امکان ندارد که جسم در تعادل باشد و گزینهٔ (۴) نادرست است.

B ۱۲۴۴ ۴

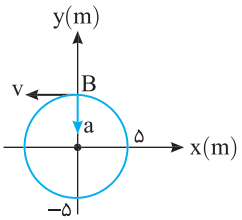


۱ نقطهٔ C به مختصات $(۲,۰)$ ، یعنی مرکز دایره روی محور xها و در $x=۲$ قرار دارد. هنگام چرخش ذره از مکان $A(۲,۲)$ می‌گذرد. بنابراین شعاع مسیر چرخش ذره ۲m است.

۲ در نقطهٔ A سرعت ذره $۶\vec{i}$ است یعنی ذرهٔ روی دایره ساعتگرد می‌چرخد.

۳ بنابراین در نقطهٔ O بردار سرعت در جهت مثبت محور yها است و بردار آن $\vec{v}_O=+۶\vec{j}$ خواهد بود.

B ۱۲۴۵ ۴



نکته سرعت در هر نقطه بر مسیر مماس است و در حرکت دایره‌ای یکنواخت بردار شتاب مرکزگرا همواره در امتداد شعاع و به سوی مرکز دایره است.

۱ حرکت حول مبدأ پادساعتگرد می‌باشد. بنابراین هنگام گذر از نقطهٔ B بردار سرعت در خلاف جهت محور xهاست و اندازهٔ سرعت خواهد شد:

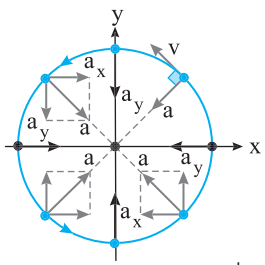
$$v=r(\frac{۲\pi}{T})\xrightarrow[r=۵m]{T=\frac{۲\pi}{۳}s}v=۵\times\frac{۲\pi}{\frac{۲\pi}{۳}}\Rightarrow v=۱۵m/s\Rightarrow\vec{v}=-۱۵\vec{i}$$

۲ بردار شتاب در نقطهٔ B در خلاف جهت محور yهاست و اندازهٔ آن برابر است با:

$$a=r(\frac{۴\pi^۲}{T^۲})\Rightarrow a=۵(\frac{۴\pi^۲}{\frac{۴\pi^۲}{۹}})\Rightarrow a=۴۵m/s^۲\Rightarrow\vec{a}=-۴۵\vec{j}$$

C ۱۲۴۶ ۴

خط فکری به مسیر حرکت دایره‌ای روبه‌رو دقت کنید، وقتی متحرک در ربع اول در حال چرخش است مؤلفه‌های بردار شتاب آنکه بر مسیر حرکت عمود است هر دو منفی هستند.



$a_y<۰$ و $a_x<۰$

در ربع دوم مؤلفهٔ x شتاب مثبت و مولفهٔ y آن منفی است $a_y<۰$ و $a_x>۰$

در ربع سوم مؤلفهٔ y و x شتاب هر دو مثبت هستند. $a_y>۰$ و $a_x>۰$

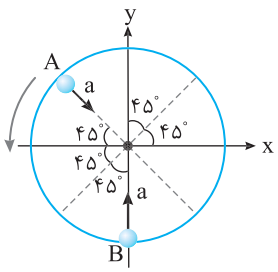
در ربع چهارم مؤلفه x شتاب منفی و مؤلفهٔ y آن مثبت است. $a_y>۰$ و $a_x<۰$

با توجه به این مطلب ابتدا شما محل ذره را مشخص کنید، سپس معین کنید که ۱/۵s بعد، ذره در چه نقطه‌ای است تا بتوانید بردار شتاب آن را مشخص کنید.

۱ در حرکت دایره‌ای یکنواخت در تمام لحظه‌ها اندازهٔ سرعت و اندازهٔ شتاب مقدار ثابتی است. در این مسئله اندازهٔ شتاب در همهٔ نقاط مسیر برابر است با:

$$a=\sqrt{a_x^۲+a_y^۲}=\sqrt{۲^۲+(-۲)^۲}\Rightarrow a=۲\sqrt{۲}\,m/s^۲$$

۲ بردار شتاب $\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}$ است. بنابراین در این لحظه متحرک در ربع دوم است و شیب بردار $\frac{-2}{2}=-1$ بوده و زاویه‌ای که در این لحظه راستای بردار شتاب با محور xها می‌سازد 45° خواهد بود.



۳ دورهٔ حرکت 4s است. یعنی در مدت 4s متحرک کمان 2π را طی می‌کند. اکنون مشخص می‌کنیم که در مدت 1/5s متحرک چه کمانی را طی می‌کند.

$$\begin{array}{c|c} 4s & 2\pi \\ \hline 1/5s & \Delta\theta \end{array} \Rightarrow \Delta\theta=\frac{3\pi}{4}$$

۴ بنابراین ذره با طی کمان $\frac{3\pi}{4}$ از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رسد.

۵ در نقطهٔ B شتاب در امتداد محور yهاست یعنی بردار شتاب برابر $\vec{a}=+2\sqrt{2}\vec{j}$ است.

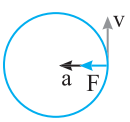
A ۱۲۴۷ ۲

یادآوری در حرکت دایره‌ای همواره نیرویی جسم را بر مسیر دایره‌ای نگه می‌دارد که به آن نیروی مرکزگرا می‌گویند.

نکته نیروی مرکزگرا همواره در امتداد شعاع دایره و عمود بر مسیر است.

۱ بنا به قانون دوم نیوتون $\vec{F}=m\vec{a}$ ، نیرو و شتاب همواره در یک جهت قرار دارند. بنابراین زاویهٔ بین نیروی مرکزگرا و شتاب حرکت صفر است.

۲ نیروی مرکزگرا در امتداد شعاع و سرعت مماس بر مسیر حرکت است، در نتیجه زاویهٔ بین بردار نیروی مرکزگرا و بردار سرعت $\frac{\pi}{2}(90^\circ)$ است.



A ۱۲۴۸ ۲

نیروی مرکزگرا، نیرویی است که جسم را بر مسیر دایره‌ای نگه می‌دارد و برابر است با:

$$F=m\frac{v^2}{r}\Rightarrow F=2\times\frac{4^2}{0/08}\Rightarrow F=400N$$

دقت کنید که در صورت مسأله، قطر مسیر دایره‌ای 16cm داده شده است و شعاع مسیر 8cm می‌باشد.

A ۱۲۴۹ ۳

نیروی مرکزگرا را در دو حالت نوشته برهم تقسیم می‌کنیم.

$$F=m\frac{v^2}{r}\Rightarrow\frac{F_1}{F_2}=\frac{m\frac{v_1^2}{r_1}}{m\frac{v_2^2}{r_2}}\xrightarrow{v_1=v_2}\frac{F_1}{F_2}=\frac{r_2}{r_1}\xrightarrow{r_1=\frac{1}{2}r_2}\frac{F_1}{F_2}=2$$

A ۱۲۵۰ ۱

در هر 10s متحرک یک دور می‌زند، بنابراین $T=10s$ و نیروی مرکزگرا برابر است با:

$$F=mr(\frac{2\pi}{T})^2\xrightarrow{m=5kg,r=5m}F=5\times5\times\frac{4\times10}{100}=10N$$

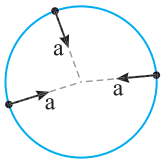
A ۱۲۵۱ ۱

در این حرکت نیروی کشش نخ نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت گلوله بر مسیر دایره‌ای را تأمین می‌کند.

یادآوری قانون اول نیوتون: هرگاه بر جسم نیروی خالصی وارد نشود اگر جسم ساکن است ساکن می‌ماند و اگر در حال حرکت است به حرکت روی خط راست با سرعت ثابت ادامه می‌دهد.

در حرکت بر مسیر خمیده، بردار سرعت در هر نقطه بر مسیر مماس است. با پاره شدن نخ و حذف کشش نخ که نیروی مرکزگرا است، بنابر قانون اول نیوتون جسم در جهت سرعت در لحظهٔ پاره شدن نخ به حرکت خود ادامه می‌دهد.

A ۱۲۵۲ ۳



در سقوط آزاد، شتاب ثابت و برابر g است. بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است. در حرکت یکنواخت روی خط راست، سرعت ثابت و شتاب صفر است پس گزینهٔ (۲) نادرست است. در حرکت دایره‌ای یکنواخت، شتاب جسم در حرکت بر مسیر دایره‌ای همواره در امتداد شعاع و رو به مرکز است و مطابق شکل، با آن که اندازهٔ شتاب $\frac{v^2}{r}$ مقدار ثابتی است، اما جهت بردار شتاب همواره در حال تغییر بوده و حرکت دایره‌ای یکنواخت دارای شتاب متغیر است و گزینهٔ (۳) درست است.

C ۱۲۵۳ ۲

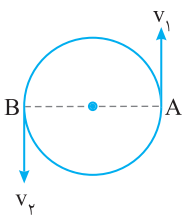
تندی گلوله را حساب می‌کنیم.

$$v=\frac{2\pi r}{T}\xrightarrow[r=2m]{T=1/5s}v=\frac{2\times3/14\times2}{1/57}\Rightarrow v=8m/s$$

شتاب مرکزگرا خواهد شد:

$$a=\frac{v^2}{r}\Rightarrow a=\frac{(8)^2}{2}\Rightarrow a=32m/s^2$$

در نیم‌دوره، گلوله مسیری مطابق شکل روبه‌رو را طی می‌کند. اگر سرعت در نقطهٔ A برابر $v_1=+8m/s$ باشد سرعت در نقطهٔ B $v_2=-8m/s$ خواهد بود و اندازهٔ تغییر تکانه خواهد شد:



$$|\Delta P|=P_2-P_1=mv_2-mv_1$$

$$\Rightarrow|\Delta P|=|\frac{50}{1000}(-8-8)|=0/8kgm/s$$

B ۱۲۵۴ ۱

یادداشت ریاضی برای تفاضل دو بردار سه حالت خاص زیر را به خاطر داشته باشید:

دو بردار هم‌جهت	دو بردار خلاف جهت هم
$\vec{R}_1$ و $\vec{R}_2$ هم‌جهت: $\lvert\vec{R}_1-\vec{R}_2\rvert=\lvert\vec{R}_1\rvert-\lvert\vec{R}_2\rvert$	$\vec{R}_1$ و $\vec{R}_2$ خلاف جهت هم: $\lvert\vec{R}_1-\vec{R}_2\rvert=\lvert\vec{R}_1\rvert+\lvert\vec{R}_2\rvert$
دو بردار عمود بر هم: $\lvert\vec{R}_1-\vec{R}_2\rvert=\sqrt{R_1^2+R_2^2}$	

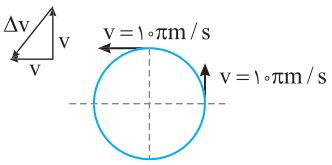
۱ ابتدا دورهٔ حرکت دایره‌ای را به‌دست می‌آوریم:

$$v=r\times\frac{2\pi}{T}\Rightarrow10\pi=20\times\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=4s$$

۲ بنابراین در هر ثانیه متحرک $\frac{1}{4}$ دوره را طی می‌کند و با توجه به اینکه سرعت در هر لحظه مماس بر مسیر حرکت است، سرعت‌ها در ابتدا و انتهای بازه زمانی 1s بر هم عمود هستند و Δv با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آید:

$$|\Delta v|=\sqrt{v^2+v^2}=v\sqrt{2}\Rightarrow\Delta v=10\sqrt{2}\pi$$

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{10\sqrt{2}\pi}{1}=10\sqrt{2}\pi$$



۳ شتاب مرکزگرا برابر است با:

$$a_c=\frac{v^2}{r}\Rightarrow a_c=\frac{۱۰۰\pi^2}{۲۰}=۵\pi^2$$

۴ نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{a_{av}}{a_c}=\frac{۱۰\sqrt{۲}\pi}{۵\pi^2}=\frac{۲\sqrt{۲}}{\pi}$$

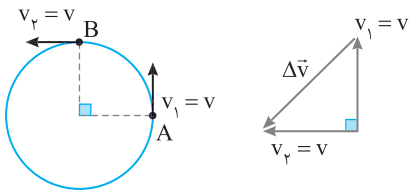
A ۳ ۱۲۵۵

نکته سرعت در هر نقطه از مسیر بر مسیر حرکت مماس است و در مدت یک دوره (T) ذره یک دور کامل می‌چرخد بنابراین در مدت $\frac{T}{۴}$، ذره، $\frac{۱}{۴}$ محیط دایره را طی می‌کند. به‌طور مثال از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رود در این نقاط $v_۱=v$ و $v_۲=v$ را رسم می‌کنیم. این دو بردار بر هم عمودند و بردار تغییر سرعت از رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آید.

$$\Delta v=\sqrt{v_۱^2+v_۲^2}=\sqrt{v^2+v^2}\Rightarrow \Delta v=\sqrt{۲}v$$

تغییر تکانه را به‌دست می‌آوریم:

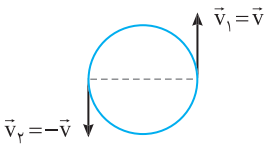
$$\Delta P=m\Delta v\Rightarrow \Delta P=\sqrt{۲}mv$$



بازی با سؤال گلوله‌ای به جرم m با سرعت ثابت v مسیر دایره‌ای شکلی را می‌پیماید. بزرگی تغییر تکانهٔ گلوله در مدت نصف دوره کدام است؟

۱) صفر ۲) mv ۳) $۲mv$ ۴) $\frac{mv}{۲}$

پاسخ با توجه به شکل، سرعت گلوله پس از نیم دور چرخش قرینه می‌شود به این معنی که اگر سرعت ابتدایی $\vec{v}$ باشد، بعد از نیم دور چرخش سرعت انتهایی $-\vec{v}$ است از این‌رو:



$$|\Delta\vec{P}|=m\Delta\vec{v}$$

$$|\Delta\vec{P}|=m|\vec{v}_۲-\vec{v}_۱|\Rightarrow|\Delta\vec{P}|=m|-\vec{v}-\vec{v}|\Rightarrow|\Delta\vec{P}|=۲m|\vec{v}|\Rightarrow|\Delta\vec{P}|=۲mv$$

گزینهٔ ۳

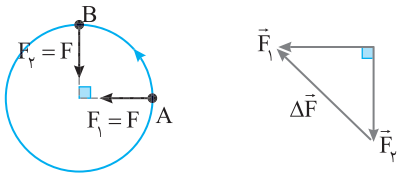
B ۳ ۱۲۵۶

خط فکری نیروی مرکزگرای وارد بر جسم همواره در امتداد شعاع و به سمت مرکز است و اگر اندازهٔ آن ثابت باشد، جهت بردار نیرو در حال تغییر بوده یعنی نیروی مرکزگرا یک نیروی متغیر است. وقتی ذره ۹۰° می‌چرخد، دو بردار $F_۱$ و $F_۲$ برهم عمود می‌شوند و تغییر بردار نیروی مرکزگرا از رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آید.

۱ نیروی مرکزگرا از رابطهٔ $F=m\frac{v^2}{r}$ به‌دست می‌آید.

۲ مطابق شکل ذره ۹۰° می‌چرخد و از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رود، نیروی مرکزگرا وارد بر جسم را در نقاط A و B رسم می‌کنیم، کاملاً مشخص است که این نیروها برهم عمودند، بنابراین:

$$\Delta F=\sqrt{F_۱^2+F_۲^2}\Rightarrow \Delta F=\sqrt{F^2+F^2}\Rightarrow \Delta F=\sqrt{۲}F\Rightarrow \Delta F=\sqrt{۲}m\frac{v^2}{r}$$



A ۲ ۱۲۵۷

نیروی مرکزگرا را در دو حالت نوشته و اطلاعات مسئله را در آن‌ها قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}F_۱=mr_۱(\frac{۴\pi^2}{T_۱^2})\\ F_۲=mr_۲(\frac{۴\pi^2}{T_۲^2})\end{cases}\Rightarrow\frac{F_۲}{F_۱}=\frac{r_۲}{r_۱}\times(\frac{T_۱}{T_۲})^2\xrightarrow{r_۲=۲r_۱\ ,\ T_۲=\frac{۱}{۲}T_۱}\frac{F_۲}{F_۱}=۲(۲)^2=۸$$

بازی با سؤال دو جسم به جرم‌های یکسان، تحت تأثیر دو نیروی مرکزگرای مساوی روی دو دایره به‌طور یکنواخت می‌چرخند و دورهٔ حرکت اولی ۲ برابر دومی است. شعاع چرخش اولی چند برابر شعاع چرخش دومی است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۱

پاسخ نیروی مرکزگرای دوجسم با هم برابر است، بنابراین:

$$F_۱=F_۲\Rightarrow\xrightarrow[m_۱=m_۲]{T_۱=۲T_۲}r_۱\frac{۴\pi^2}{T_۱^2}=r_۲\frac{۴\pi^2}{T_۲^2}\Rightarrow\frac{r_۱}{(۲T_۲)^2}=\frac{r_۲}{T_۲^2}\Rightarrow r_۱=۴r_۲$$

گزینهٔ ۱

A ۲ ۱۲۵۸

با توجه به فرض مسأله، نیروی مرکزگرا برابر نیروی وزن جسم است.

$$F=mr(\frac{۲\pi}{T})^2\xrightarrow{F=mg}mg=mr(\frac{۲\pi}{T})^2\xrightarrow{r=۲/۵m\ ,g=۱۰N/kg}$$

$$۱۰=۲/۵(\frac{۲\pi}{T})^2\Rightarrow۴=(\frac{۲\pi}{T})^2\Rightarrow۲=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=\pi s$$

A ۴ ۱۲۵۹

جسم در هر ثانیه دو دور می‌زند، بنابراین دورهٔ آن ۰/۵s است. نیروی کشش ریسمان نیروی مرکزگرا است:

$$T=mr(\frac{۴\pi^2}{T^2})\Rightarrow T=۲\times۰/۵\times(۴\times۹\times۴)\Rightarrow T=۱۴۴N$$

A ۲ ۱۲۶۰

مهره در هر ثانیه، یک دور می‌زند، بنابراین دوره برابر $T=۱s$ است.

نیروی کشش نخ همان نیروی مرکزگرا است، از این‌رو:

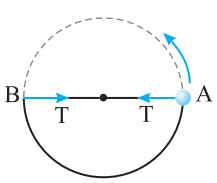
$$F=mR\frac{۴\pi^2}{T^2}\xrightarrow{m=۰/۲kg\ ,r=۰/۲۵m}F=۰/۲\times۰/۲۵\times\frac{۴\times۱۰}{۱^2}\Rightarrow F=۲N$$

B ۲ ۱۲۶۱

خط فکری اندازهٔ نیروی مرکزگرا در حرکت دایره‌ای یکنواخت با تندی ثابت، مقدار ثابتی است اما جهت بردار نیروی مرکزگرا که همواره رو به مرکز است دائماً در حال تغییر است. اندازه نیروی مرکزگرا را به‌دست می‌آوریم. سپس تغییر جهت بردار این نیرو را مشخص می‌کنیم.

۱ ابتدا نیروی کشش ریسمان را که نیروی مرکزگرا است، به‌دست می‌آوریم:

$$T=m\frac{v^2}{r}=۰/۰۲\times\frac{۱۰۰}{۰/۲}=۱۰N$$



۲ در مدت نیم دوره، ذره به اندازهٔ π روی دایره دوران کرده است، یعنی جهت نیروی کشش قرینه شده است:

$$\Delta T=|-T-T|=۲T=۲۰N$$

B ۲ ۱۲۶۲

تندی را برحسب $\frac{m}{s}$ به دست می‌آوریم.

$$v=۱۸\frac{km}{h}=\frac{۱۸}{۳/۶}\Rightarrow v=۵\frac{m}{s}$$

نیروی مرکزگرا خواهد شد:

$$F=m\frac{v^2}{R}\Rightarrow F=۲۰۰۰\times\frac{۲۵}{۲۰}\Rightarrow F=۲۵۰۰N$$

نیروی مرکزگرا توسط نیروی اصطکاک ایستایی تأمین می‌شود.

A ۱۲۶۳ ۴

ابتدا تندی را بر حسب m/s به‌دست می‌آوریم. $v=۳۶km/h=۱۰m/s$

در حرکت خودرو در پیچ افقی جاده، نیروی اصطکاک ایستایی نیروی مرکزگرای لازم را تأمین می‌کند.

$$F=f_{s\,max}=m\frac{v_m^۲}{R}=\mu_s mg$$

$$\mu_s=\frac{v_m^۲}{Rg}\Rightarrow\mu_s=\frac{۱۰۰}{۲۵\times۱۰}\Rightarrow\mu_s=۰/۴$$

بازی با سوال **خودرویی پیچ افقی جاده‌ای به شعاع ۶۰ متر را با تندی بیشینهٔ $۱۸m/s$ طی می‌کند. ضریب اصطکاک ایستایی بین لاستیک خودرو و جاده کدام است؟ $(g=۱۰m/s^۲)$**

۱) ۰/۵۴ ۲) ۰/۱۸ ۳) ۰/۲۷ ۴) ۰/۱۲

پاسخ **خط فکری** **در حرکت خودرو در یک پیچ افقی، نیرویی که مانع لیز خوردن خودرو می‌شود و خودرو را بر مسیر دایره‌ای نگه می‌دارد نیروی اصطکاک ایستایی بین لاستیک خودرو و سطح جاده است. بنابراین نیروی اصطکاک ایستایی بین لاستیک خودرو و جاده نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند. در رابطهٔ نیروی مرکزگرا نیروی اصطکاک ایستایی بین جاده و لاستیک را به جای نیروی مرکزگرا قرار می‌دهیم.**

$$F=m\frac{v^۲}{r}\xrightarrow{F=f_s}f_s=m\frac{v^۲}{r}\Rightarrow\mu_s mg=m\frac{v^۲}{r}$$

$$\xrightarrow{v=۱۸m/s\,,r=۶۰m}\mu_s\times۱۰=\frac{(۱۸)^۲}{۶۰}\Rightarrow\mu_s=۰/۵۴$$ گزینهٔ ۱

A ۱۲۶۴ ۴

نیرویی که اتومبیل را بر مسیر دایره‌ای نگه می‌دارد، نیروی اصطکاک بین لاستیک و جاده است.

$$f_{s\,max}=F\Rightarrow\mu_s mg=m\frac{v^۲}{R}\Rightarrow v=\sqrt{\mu_s Rg}$$

بنابراین حداکثر سرعت گذر از یک پیچ با جذر ضریب اصطکاک ایستایی نسبت مستقیم دارد. در این صورت:

$$\frac{v'}{v}=\frac{\sqrt{\mu_s' Rg}}{\sqrt{\mu_s Rg}}\Rightarrow\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{\mu_s'}{\mu_s}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow v'=\frac{۱}{۲}v$$

B ۱۲۶۵ ۳

نیروی اصطکاک ایستایی بین لاستیک خودرو و سطح جاده، نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند، از این‌رو:

$$f_s=F\Rightarrow\mu_s mg=m\frac{v^۲}{r}\Rightarrow v=\sqrt{\mu_s rg}$$

نکته بیشینه سرعت عبور از پیچ به جرم کامیون (خودرو) بستگی ندارد.

بنابراین بارگیری کامیون که باعث افزایش جرم آن می‌شود، در بیشینهٔ تندی گذر کامیون از پیچ تأثیری نمی‌گذارد.

B ۱۲۶۶ ۳

نیروی اصطکاک ایستایی بین کفِ بارکش و جعبه، نیروی مرکزگرایی است که جعبه را به همراه کامیون، در پیچ نگه می‌دارد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$f_s=F\Rightarrow\mu_s mg=\frac{mv^۲}{r}\Rightarrow v_m=\sqrt{\mu_s rg}\Rightarrow v_m=\sqrt{۰/۱\times۹\times۱۰}=۳m/s$$

که همان سرعت حرکت کامیون است.

در نتیجه بیشینهٔ سرعت عبور کامیون از پیچ بدون آن‌که جعبه بر کف آن بلغزد $v_{max}=۳m/s$ است.

B ۱۲۶۷ ۱

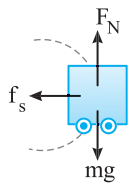
هنگام دور زدن، نیروی اصطکاک ایستایی (f_s) بین لاستیک و سطح جاده، توسط جاده بر خودرو وارد می‌شود و نیروی عمودی سطح $F_N=W$ نیز رو به بالا توسط جاده بر خودرو وارد می‌شود. در این صورت دو نیرو توسط سطح جاده بر خودرو وارد می‌شود یکی F_N که برابر وزن است و دیگری f_s، از این رو نیرویی که سطح جاده بر جسم وارد می‌کند از W بزرگتر است.

B ۱۲۶۸ ۲

نکته نیرویی که سطح وارد می‌کند، برایند نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک است:

$$R=\sqrt{F_N^۲+f_s^۲}$$

نیروی عمودی سطح برابر نیروی وزن $F_N=mg=۳۰۰۰\times۱۰N$ است. از طرف سطح به خودرو دو نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک وارد می‌شود. با توجه به نکتهٔ بالا، f_s را به‌دست می‌آوریم.



$$۱۰^۴\sqrt{۱۰}=\sqrt{(۳۰۰۰\times۱۰)^۲+f_s^۲}$$

دو طرف معادله را به توان (۲) می‌رسانیم:

$$۱۰^۹=۹\times۱۰^۸+f_s^۲\Rightarrow f_s^۲=۱۰^۸\Rightarrow f_s=۱۰^۴N$$

و با توجه به حرکت دایره‌ای خودرو در سطح افقی نیروی مرکزگرا همان نیروی اصطکاک خودرو با سطح زمین است.

$$F_c=f_s=۱۰^۴N$$

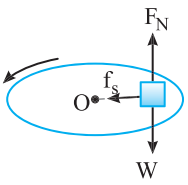
A ۱۲۶۹ ۴

به عبارت «نیروی وارد به خودرو از طرف کرهٔ زمین» دقت کنید. در واقع طراح از شما خواسته است که نیروی وزن را با نیروی وارد بر خودرو از طرف کرهٔ زمین که همان نیروی وزن است مقایسه کنید. بنابراین $F=W$ و گزینهٔ (۴) درست است.

دقت کنید در این مسئله نیرویی که سطح جاده بر اتومبیل وارد می‌کند را از شما نمی‌خواهد.

A ۱۲۷۰ ۴

توسط سطح صفحهٔ گردان دو نیرو بر جسم وارد می‌شود. یک نیرو، نیروی عمودی تکیه‌گاه است که نیروی وزن را خنثی می‌کند. $F_N=W$ و دیگری نیروی اصطکاک ایستایی (f_s) است که نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند: $f_s=F_c$



A ۱۲۷۱ ۱

خط فکری نیروی اصطکاک ایستایی بین صفحه و جسم، نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند، بنابراین شتاب حاصل از نیروی اصطکاک همان شتاب مرکزگرا است. از این‌رو به کمک قانون دوم نیوتون، نیروی اصطکاک را برابر ma قرار می‌دهیم و شتاب را به‌دست می‌آوریم.

بنا بر قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$f_s=ma\Rightarrow\mu_s mg=ma\Rightarrow a=\mu_s g\Rightarrow a=۰/۴\times۱۰=۴m/s^۲$$

B ۱۲۷۲ ۴

۱ ابتدا دوره را به‌دست می‌آوریم: $T=\frac{t}{N}\xrightarrow{t=۶۰s\,,N=۶\text{ دور}}T=\frac{۶۰}{۶}=۱۰s$

۲ نیروی اصطکاک همان نیروی مرکزگراست، بنابراین کافی است به کمک رابطهٔ نیروی مرکزگرا نیروی اصطکاک را به‌دست آورد. از این‌رو می‌توانیم بنویسیم:

$$F_s=F_c\Rightarrow f_s=mR(\frac{۴\pi^۲}{T^۲})\xrightarrow{m=۵kg\,,R=۲m}$$

$$f_s=۵\times۲\times(\frac{۲\pi}{۱۰})^۲=۱۰\times\frac{۴\pi^۲}{۱۰۰}=۰/۴\pi^۲N$$

B ۱۲۷۳ ۲

دورهٔ چرخش میز را حساب می‌کنیم.

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{۳/۱۴}{۳}s$$

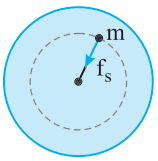
نیروی اصطکاک ایستایی نیروی مرکزگرای لازم برای چرخش سکه را تأمین می‌کند.

$$f_{s\,max}=F\Rightarrow\mu_s mg=mr(\frac{۲\pi}{T})^۲$$

$$\mu_s g=r(\frac{۴\pi^۲}{T^۲})\Rightarrow\mu_s\times۱۰=۰/۱\times\frac{۴\times(۳/۱۴)^۲}{(۳/۱۴)^۲}\Rightarrow\mu_s=۰/۳۶$$

B ۱۲۷۴ ۴

بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی بین صفحه و جسم، نیروی مرکزگرا است. کمینه فاصلهٔ جسم از مرکز دوران خواهد شد:

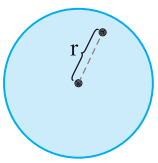


$$f_s=F_c\Rightarrow f_s=mr\frac{4\pi^2}{T^2}\Rightarrow \mu_s mg=mr\frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\Rightarrow \mu_s g=r\frac{4\pi^2}{T^2}\Rightarrow 0/5\times 10=r(5)^2\Rightarrow r=0/2m$$

B ۱۲۷۵ ۱

نیرویی که مانع لیز خوردن سکه به خارج صفحه می‌شود، نیروی اصطکاک ایستایی است که نیروی مرکزگرای لازم برای چرخش سکه روی مسیر دایره‌ای را فراهم می‌کند:



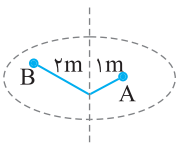
$$f_s=F_c\Rightarrow f_s=mr\frac{4\pi^2}{T^2}\xrightarrow{f_s=\mu_s mg}$$

$$\mu_s mg=mr\frac{4\pi^2}{T^2}\Rightarrow \mu_s=\frac{4\pi^2 r}{T^2 g}$$

B ۱۲۷۶ ۲

دورهٔ چرخش A و B یکسان است. $T_A=T_B$

نیروی مرکزگرای وارد بر A و B را مقایسه می‌کنیم.



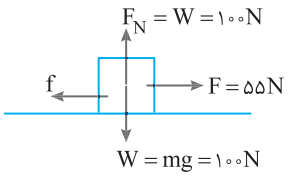
$$\begin{cases}F_A=mr_A(\frac{2\pi}{T})^2\\ F_B=mr_B(\frac{2\pi}{T})^2\end{cases}\Rightarrow\frac{F_A}{F_B}=\frac{r_A}{r_B}\Rightarrow\frac{F_A}{F_B}=\frac{1}{2}\Rightarrow F_A<F_B$$

بنابراین نیروی مرکزگرای وارد بر B بزرگ‌تر است.

با افزایش تندی حرکت دیسک نیروی لازم برای نگه‌داشتن شخص B بیشتر است و شخص B زودتر بر دیسک می‌لغزد.

B ۱۲۷۷ ۱

خط فکری وقتی به یک فنر، جسمی را متصل می‌کنیم و آن را حول سر دیگر فنر می‌چرخانیم فنر از هم باز شده و کشیدگی می‌یابد و نیروی کشسانی فنر در خلاف جهت باز شدگی خواهد بود و این نیرو سبب می‌گردد که جسم بر مسیر دایره‌ای بماند اما مهمترین نکته این است که در این حالت، طول ثانویهٔ فنر، شعاع مسیر حرکت جسم خواهد بود. $(\ell_2=r)$

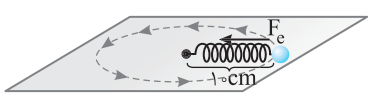


۱ طول طبیعی فنر ۸cm است و طول فنر هنگام چرخاندن جسم ۱۰cm شده است. در نتیجه تغییر طول فنر $\Delta\ell=10-8=2cm$ است و شعاع چرخش جسم $r=10cm$ می‌شود.

۲ نیروی کشسانی فنر نیروی مرکزگرا است:

$$F_e=F_c\Rightarrow k\Delta\ell=mr(\frac{4\pi^2}{T^2})\xrightarrow{k=100N/m}$$

$$1000\times(\frac{2}{100})=2\times 0/1\times\frac{4\pi^2}{T^2}\Rightarrow T=\frac{\pi}{5}s$$



B ۱۲۷۸ ۱

۱ تغییر طول فنر هنگام چرخاندن جسم ۲۰۰ گرمی خواهد شد:

$$\Delta\ell=\ell-\ell_0\Rightarrow\Delta\ell=\ell-0/4$$

۲ شعاع مسیر حرکت جسم برابر طول ثانویهٔ فنر است. $r=\ell$

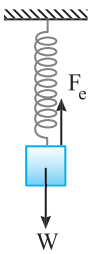
۳ نیروی کشسانی فنر، جسم را بر مسیر دایره‌ای نگه می‌دارد و نیروی مرکزگرای لازم را تأمین می‌کند.

$$F_e=F_c\Rightarrow k\Delta\ell=mr\frac{4\pi^2}{T^2}\xrightarrow{T=\frac{2\pi}{5},\ k=25N/m}25(\ell-0/4)=0/2\times\ell(\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{5}})^2$$

$$\Rightarrow 25(\ell-0/4)=0/2\ell\times 25\Rightarrow\ell-0/4=0/2\ell\Rightarrow 0/8\ell=0/4\Rightarrow\ell=0/5m=50cm$$

B ۱۲۷۹ ۲

۱ هنگامی که وزنه از فنر آویزان است، نیروی کشسانی فنر برابر نیروی وزن وزنه است.



$$F_e=W=mg\xrightarrow{m=0/2kg}F=0/2\times 10=2N$$

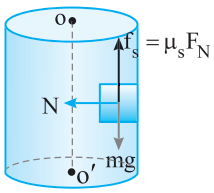
۲ هنگامی که وزنه در سطح افقی در حال چرخش است، نیروی کشسانی فنر، نیروی مرکزگرا است. در این حالت طول فنر نیز 40cm شده است یعنی نیروی کشسانی فنر در این حالت همان 2N است بنابراین خواهیم داشت.

$$F_e=F_c=m\frac{v^2}{r}\Rightarrow 2=0/2\times\frac{v^2}{0/4}\Rightarrow v^2=4\Rightarrow v=2m/s$$

B ۱۲۸۰ ۲

خط فکری جسم روی دیواره تکیه داده شده و بر آن سه نیروی وزن رو به پایین، اصطکاک ایستایی رو به بالا و نیروی عمودی سطح وارد می‌شود. نیروها را رسم می‌کنیم. نیروی وزن توسط نیروی اصطکاک ایستایی خنثی می‌شود و نیروی عمودی سطح که در امتداد شعاع استوانه و رو به محور استوانه است، نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند.

۱ نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.



جسم روی دیوارهٔ استوانه قرار دارد و به پایین نمی‌لغزد در این صورت نیروی خالص وارد بر جسم در امتداد قائم صفر است.

$$F_{net_y}=0\Rightarrow mg=\mu_s F_N\qquad(1)$$

۲ F_N نیروی عمودی تکیه‌گاه، نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند.

$$F_N=mR\frac{4\pi^2}{T^2}\qquad(2)$$

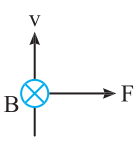
۳ F_N را از رابطهٔ (۲) در رابطهٔ (۱) جایگذاری می‌کنیم:

$$mg=\mu_s mR\frac{4\pi^2}{T^2}\Rightarrow\frac{g}{\mu_s}=R\frac{4\pi^2}{T^2}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{\mu_s R}{g}}$$

B ۱۲۸۱ ۴

خط فکری با یک سؤال زیبا و ترکیبی از فیزیک (۲) و فیزیک (۳) سر و کار داریم. الکترون وارد یک میدان مغناطیسی شده است. نیرویی که در میدان مغناطیسی بر بار متحرک وارد می‌شود، همواره عمود بر مسیر حرکت است $(F=qvB\sin\theta)$ و باعث می‌شود ذرهٔ باردار در یک میدان مغناطیسی یکنواخت روی مسیر دایره‌ای بچرخد و نیروی میدان مغناطیسی، نیروی مرکزگرا خواهد بود.

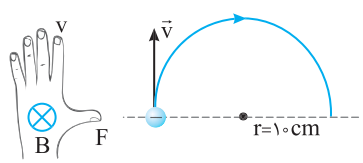
یادآوری قاعدهٔ دست راست: چهار انگشت باز دست راست خود را در جهت سرعت بار به گونه‌ای قرار می‌دهیم که خم کردن آن‌ها (کف دست) در جهت بردار میدان مغناطیسی قرار بگیرد در این حالت انگشت باز شست جهت نیروی وارد بر جسم را نشان می‌دهد. برای بار منفی، جهت نیرو را عوض کرده و یا از دست چپ استفاده می‌کنیم.



۱ نیروی الکترومغناطیسی $F=qvB\sin\theta$، نیروی مرکزگراست.

$$F=m\frac{v^2}{r}\Rightarrow qvB\sin\theta=m\frac{v^2}{r}\Rightarrow qB\sin\theta=\frac{mv}{r}$$

$$\Rightarrow 1/6\times 10^{-19}\times B\times 1=9\times 10^{-31}\times\frac{1/6\times 10^6}{10^{-1}}\Rightarrow B=9\times 10^{-5}T$$



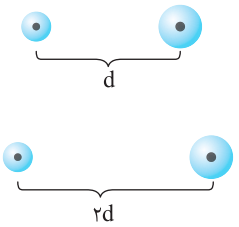
۲ چهار انگشت باز دست چپ را در جهت v قرار دهید به گونه‌ای که انگشت باز شست شما به سمت مرکز مسیر باشد در این حالت کف دست شما رو به صفحهٔ کاغذ بوده یعنی میدان B درونسو است.

۳ ۱۲۸۲ A

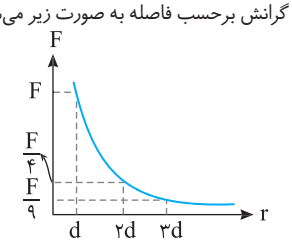
نکته با توجه به قانون گرانش عمومی $F=G\frac{M_1M_2}{r^2}$، نیروی گرانشی با فاصلهٔ بین دو جسم رابطهٔ عکس و مجذوری دارد:

$$F=G\frac{m_1m_2}{d^2}\ ,\ F'=G\frac{m_1m_2}{(2d^2)}=\frac{1}{4}G\frac{m_1m_2}{d^2}=\frac{F}{4}$$

$$F''=G\frac{m_1m_2}{(3d^2)}=\frac{1}{9}G\frac{m_1m_2}{d^2}=\frac{F}{9}$$



بنابراین نمودار نیروی گرانش برحسب فاصله به صورت زیر می‌شود:



۲ ۱۲۸۳ B

با توجه به رابطهٔ قانون جهانی گرانش می‌توان نوشت.

$$F=G\frac{M_em}{r^2}=6/67\times10^{-11}\times\frac{5/98\times10^{24}\times200}{((2600+6400)\times10^3)^2}=984/8N\simeq985$$

$$\Rightarrow F\simeq985N$$

بازی با سؤال جسمی کروی به شعاع ۴cm و چگالی $10\frac{g}{cm^3}$ در فاصلهٔ ۶۰cm از جسم کروی دیگری به شعاع ۵cm و چگالی $16\frac{g}{cm^3}$ قرار گرفته است. نیروی گرانشی که این دو کره بر هم وارد می‌کنند چند نیوتون است؟ $(\pi=3, G\simeq6/3\times10^{-11}\frac{N.m^2}{kg^2})$

۱) $3/584\times10^{-11}$ ۲) $3/584\times10^{-9}$

۳) $3/684\times10^{-11}$ ۴) $3/684\times10^{-9}$

پاسخ **۱** جرم جسم کروی (۱) را به دست می‌آوریم:

$$\rho_1=\frac{m_1}{V_1}\xrightarrow{V_1=\frac{4}{3}\pi r_1^3}10=\frac{m_1}{\frac{4}{3}\pi r_1^3}$$

$$\xrightarrow{V_1=\frac{4}{3}\times3\times64=256cm^3}10=\frac{m_1}{256}\Rightarrow m_1=2560g=2/56kg$$

۲ جرم جسم کروی (۲) را به دست می‌آوریم:

$$\rho_2=\frac{m_2}{V_2}\xrightarrow{V_2=\frac{4}{3}\pi r_2^3}16=\frac{m_2}{\frac{4}{3}\pi r_2^3}$$

$$\xrightarrow{V_2=\frac{4}{3}\times3\times125}16=\frac{m_2}{500}\Rightarrow m_2=8000g=8kg$$

۳ حال با توجه به رابطهٔ $F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$، نیروی گرانش را حساب می‌کنیم:

$$F=6/3\times10^{-11}\times\frac{2/56\times8}{(0/6)^2}\Rightarrow F=358/4\times10^{-11}N=3/584\times10^{-9}N$$

۳ ۱۲۸۴ A

خط فکری با توجه به اینکه نیروی گرانشی از رابطهٔ $F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$ به‌دست می‌آید، پس نیروی گرانش با جرم دو جسم رابطهٔ مستقیم و با فاصلهٔ دو جسم از هم رابطهٔ عکس و مجذوری دارد:

$$\frac{F_2}{F_1}=\frac{G\frac{m_1'm_2'}{r'^2}}{G\frac{m_1m_2}{r^2}}=(\frac{r}{r'})^2(\frac{m_1'm_2'}{m_1m_2})$$

برای حل این سؤال ابتدا باید نیروی گرانش در هر دو حالت را به دست می‌آوریم. و سپس نسبت آن‌ها را بنویسیم.

۱ جرم دو جسم را m و فاصلهٔ آن‌ها از هم را r می‌گیریم:

$$F_1=G\frac{m\times m}{r^2}\Rightarrow F_1=G\frac{m^2}{r^2}$$

۲ اگر از جسم به جرم m، مقدار x کم شده و به جرم جسم دیگر اضافه شود، جرم یک جسم $m-x$ و جرم دیگری $m+x$ می‌شود:

$$F_2=G\frac{(m-x)(m+x)}{r^2}\Rightarrow F_2=G\frac{m^2-x^2}{r^2}$$

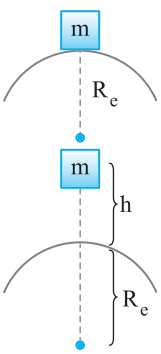
۳ با توجه به سؤال نیروی گرانش ٪۲۵ کاهش یافته است:

$$F_2=F_1-\frac{25}{100}F_1\Rightarrow F_2=\frac{75}{100}F_1\Rightarrow F_2=\frac{3}{4}F_1$$

$$\Rightarrow G\frac{m^2-x^2}{r^2}=\frac{3}{4}(G\frac{m^2}{r^2})\Rightarrow m^2-x^2=\frac{3}{4}m^2\Rightarrow\frac{m^2}{4}=x^2\Rightarrow x=\frac{m}{2}$$

۲ ۱۲۸۵ A

نکته نیروی گرانش بین جسم و زمین برابر $F=G\frac{M_em}{r^2}$ است که در این رابطه r فاصله از مرکز زمین است.



۱ نیروی گرانش، نیرویی است که بین دو جسم و به واسطهٔ جرم آن‌ها وجود دارد. نیروی گرانش وارد بر جسم m در سطح زمین برابر است با: $F=G\frac{M_em}{R_e^2}$

۲ نیروی گرانش در فاصلهٔ h از سطح زمین را حساب می‌کنیم، دقت کنید در رابطهٔ نیروی گرانش r فاصله تا مرکز زمین است:

$$F'=G\frac{M_em}{r^2}\Rightarrow F'=G\frac{M_em}{(R_e+h)^2}$$

۳ با توجه به سؤال نسبت F' و F داده شده است:

$$\frac{F'}{F}=\frac{1}{25}\Rightarrow\frac{\frac{GM_em}{(R_e+h)^2}}{\frac{GM_em}{R_e^2}}=\frac{1}{25}\Rightarrow(\frac{R_e}{(R_e+h)})^2=\frac{1}{25}\Rightarrow\frac{R_e}{R_e+h}=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow5R_e=R_e+h\Rightarrow h=4R_e$$

۲ ۱۲۸۶ A

نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره همان نیروی وزن وارد بر ماهواره در فاصلهٔ ۱۶۰۰km از سطح زمین است. ابتدا شتاب گرانش در محل ماهواره را حساب می‌کنیم. برای این منظور رابطهٔ g را در سطح زمین و در محل ماهواره نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم. شتاب گرانش از رابطهٔ $g=G\frac{M_e}{R^2}$ به‌دست می‌آید که R فاصله از مرکز زمین است:

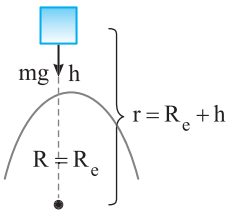
$$\frac{g_{\text{ماهواره}}}{g_{\text{زمین}}}=\frac{G\frac{M_e}{(۱۶۰۰+۶۴۰۰)^۲}}{G\frac{M_e}{(۶۴۰۰)^۲}}\Rightarrow\frac{g_{\text{ماهواره}}}{۱۰}=\frac{(۶۴۰۰)^۲}{(۸۰۰۰)^۲}$$

$$\Rightarrow\frac{g_{\text{ماهواره}}}{۱۰}=\left(\frac{۶۴۰۰}{۸۰۰۰}\right)^۲=\frac{۱۶}{۲۵}$$

شتاب گرانش در محل ماهواره $g_{\text{ماهواره}}=\frac{۱۶۰}{۲۵}m/s^۲$ است. بنابراین نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره برابر است با:

$$F_{\text{مرکزگرا}}=mg_{\text{ماهواره}}$$

$$\Rightarrow F_{\text{مرکزگرا}}=۵۰۰\times\frac{۱۶۰}{۲۵}=۲۰\times۱۶۰=۳۲۰۰N$$



میانبر می‌توان برای محاسبهٔ شتاب گرانش در محل ماهواره، به جای جایگذاری اندازهٔ ۱۶۰۰km در رابطه به صورت زیر عمل کرد:

$$\frac{h}{R_e}=\frac{۱۶۰۰}{۶۴۰۰}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow h=\frac{۱}{۴}R_e$$

پس فاصلهٔ ماهواره از مرکز زمین $r=R_e+h=R_e+\frac{R_e}{۴}$ است:

$$\frac{g_{\text{ماهواره}}}{g_{\text{زمین}}}=\frac{\frac{GM_e}{(\frac{۱}{۴}R_e+R_e)^۲}}{\frac{GM_e}{R_e^۲}}=\frac{R_e^۲}{(\frac{۵}{۴}R_e)^۲}=\frac{۱۶}{۲۵}$$

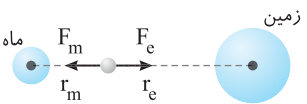
$$\Rightarrow g_{\text{ماهواره}}=\frac{۱۶}{۲۵}g=\frac{۱۶۰}{۲۵}m/s^۲$$

A ۱۲۸۷ ۱

نیروی گرانش بین دو جسم همواره ربایشی است و برای آنکه نیروی خالص وارد بر جسم صفر شود باید نیرویی که زمین به جسم وارد می‌کند با نیرویی که ماه به آن وارد می‌کند هم‌اندازه و خلاف جهت هم باشند. نیروی گرانشی وارد بر جسم توسط کرهٔ ماه و کرهٔ زمین را نوشته و برابر قرار می‌دهیم.

$$F_m=F_e\Rightarrow G\frac{mM_m}{r_m^۲}=G\frac{mM_e}{r_e^۲}$$

$$\xrightarrow{M_e=۸۱M_m}\frac{۱}{r_m^۲}=\frac{۸۱}{r_e^۲}\Rightarrow\frac{۱}{r_m}=\frac{۹}{r_e}\Rightarrow r_e=۹r_m$$



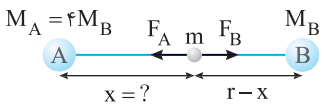
بازی با سؤال سیارهٔ A در فاصلهٔ r از سیارهٔ B قرار دارد. جرم A چهاربرابر جرم B و شعاع آن‌ها یکی است. سفینه‌ای از سیارهٔ A به سوی سیارهٔ B حرکت می‌کند. در چه فاصله‌ای از سیارهٔ A، نیروی گرانش وارد بر سفینه صفر خواهد بود؟ از کتاب درسی

۱) r ۲) $\frac{r}{۲}$ ۳) $\frac{r}{۳}$ ۴) $\frac{۲r}{۳}$

پاسخ با توجه به شکل برای این‌که نیروی گرانش وارد بر سفینه صفر باشد، باید نیروهای گرانش وارد بر آن از طرف سیارهٔ A و از طرف سیارهٔ B برابر و در خلاف جهت هم باشند.

$$F_A=F_B\Rightarrow G\frac{M_Am}{x^۲}=G\frac{M_Bm}{(r-x)^۲}\xrightarrow{M_A=۴M_B}\frac{۴}{x^۲}=\frac{۱}{(r-x)^۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۲}{x}=\frac{۱}{r-x}\Rightarrow ۲r-۲x=x\Rightarrow x=\frac{۲}{۳}r$$



گزینهٔ ۴

A ۱۲۸۸ ۳

میدان گرانش در نقطه‌ای اطراف یک سیاره از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید که در آن M جرم سیاره و r فاصلهٔ نقطهٔ موردنظر از مرکز سیاره است.

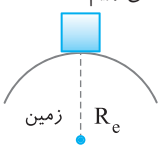
$$g=G\frac{M}{r^۲}$$

بنابراین میدان گرانش زمین با جرم زمین و وارون مجذور فاصلهٔ نقطه از مرکز زمین، متناسب است.

A ۱۲۸۹ ۳

خط فکری شتاب گرانش $g=G\frac{M_{\text{سیاره}}}{r^۲}$ در سطح هر کدام از سیاره‌ها را جداگانه حساب کرده و در نهایت نسبت خواسته شده را به دست می‌آوریم:

۱ شعاع کرهٔ زمین را R_e و جرم آن را M می‌گیریم:



$$g=G\frac{M}{R_e^۲}$$

۲ سیارهٔ فرضی شعاعی نصف زمین یعنی $\frac{R_e}{۲}$ و جرمی $\frac{۱}{۴}$ زمین یعنی $\frac{M}{۴}$ دارد:

$$g'=G\frac{M'}{r'^۲}\Rightarrow g'=G\frac{\frac{M}{۴}}{(\frac{R_e}{۲})^۲}\Rightarrow g'=G\frac{\frac{M}{۴}}{\frac{R_e^۲}{۴}}\Rightarrow g'=G\frac{M_e}{R_e^۲}$$

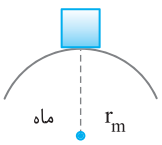
۳ حال نسبت g' به g را به دست می‌آوریم:

$$\frac{g'}{g}=\frac{G\frac{M}{R_e^۲}}{G\frac{M}{R_e^۲}}=۱$$

B ۱۲۹۰ ۱

جرم کرهٔ ماه را m و جرم کرهٔ زمین را ۸۰m می‌گیریم، حال با توجه به رابطهٔ شتاب گرانش $g=G\frac{M_{\text{سیاره}}}{r^۲}$، شتاب گرانش زمین و ماه را به دست می‌آوریم:

۱ شتاب گرانش ماه را حساب می‌کنیم: (r_m شعاع ماه است.)



$$g_m=G\frac{M_{\text{ماه}}}{r_m^۲}\Rightarrow g_m=G\frac{m}{r_m^۲}$$

۲ شتاب گرانش زمین را حساب می‌کنیم: (r_e شعاع زمین است.)



$$g_e=G\frac{M_{\text{زمین}}}{r_e^۲}\xrightarrow{m_{\text{زمین}}=۸۰m}g_e=G\frac{۸۰m}{r_e^۲}$$

۳ با توجه به سؤال شتاب گرانش زمین g_e، ۶ برابر شتاب گرانش ماه g_m است:

$$g_e=۶g_m\Rightarrow G\frac{۸۰m}{r_e^۲}=۶G\frac{m}{r_m^۲}\Rightarrow\left(\frac{r_e}{r_m}\right)^۲=\frac{۸۰}{۶}=\frac{۴۰}{۳}\simeq۱۳$$

$$\Rightarrow\frac{r_e}{r_m}=\sqrt{۱۳}\simeq۳/۶$$

بازی با سؤال قطر زمین دو برابر قطر مریخ و میدان گرانش در سطح زمین تقریباً سه برابر میدان گرانش در سطح مریخ است. جرم زمین چند برابر جرم مریخ است؟ کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ میدان گرانش، در هر نقطه در اطراف یک سیاره، از رابطهٔ $g=G\frac{M}{r^2}$ به دست می‌آید که در آن M جرم سیاره و r فاصلهٔ نقطهٔ مورد نظر تا مرکز سیاره است.

$$\frac{g_e}{g_m}=\frac{G\frac{M_e}{R_e^2}}{G\frac{M_m}{R_m^2}}=\frac{R_m^2}{R_e^2}\times\frac{M_e}{M_m}$$

$$\xrightarrow[g_e=3g_m]{R_e=2R_m} 3=\frac{R_m^2}{(2R_m)^2}\times\frac{M_e}{M_m}\Rightarrow\frac{M_e}{M_m}=12$$

گزینهٔ ۱

A ۱۲۹۱ ۲

شتاب گرانش حاصل از سیاره‌ای به جرم M از رابطهٔ $g=G\frac{M}{r^2}$ به دست می‌آید، در این سؤال شتاب گرانش ناشی (حاصل) از خورشید خواسته شده پس در رابطهٔ شتاب گرانش به جای m، جرم خورشید یعنی M_s را جایگزین می‌کنیم: $g=G\frac{M_s}{r^2}$

B ۱۲۹۲ ۲

جرم جسم در همه‌جا یکسان است و نسبت وزن جسم در دو سیاره برابر نسبت شتاب گرانش در سطح دو سیاره است:

$$\frac{W_P}{W_E}=\frac{mg_P}{mg_E}=\frac{G\frac{M_P}{R_P^2}}{G\frac{M_E}{R_E^2}}\Rightarrow\frac{W_P}{W_E}=\frac{M_P}{M_E}\times\left(\frac{R_E}{R_P}\right)^2$$

$$\xrightarrow[R_P=2R_E]{M_P=2M_E}2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow\frac{W_P}{W_E}=\frac{1}{2}$$

B ۱۲۹۳ ۲

شتاب گرانشی در سطح سیاره به شعاع R و جرم M برابر است با: $g=\frac{MG}{R^2}$

$$\frac{g_{زمین}}{g_{ماه}}=\frac{M_{زمین}}{M_{ماه}}\left(\frac{R_{ماه}}{R_{زمین}}\right)^2\Rightarrow\frac{g_{زمین}}{g_{ماه}}=80\times\frac{1}{16}\Rightarrow\frac{g_{زمین}}{g_{ماه}}=5$$

$$\Rightarrow g_{ماه}=\frac{g_{زمین}}{5}=\frac{9.8}{5}\Rightarrow g_{ماه}=1.96\,cm/s^2$$

بازی با سؤال چگالی متوسط و شعاع سیاره‌ای به ترتیب $\frac{1}{3}$ و ۶ برابر چگالی متوسط و شعاع زمین است. شتاب گرانش در سطح این سیاره چند برابر شتاب گرانش در سطح زمین است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **خط فکری** شاید ابتدا فکر کنیم این چگالی که در سؤال داده به چه دردی می‌خورد، اما اگر رابطهٔ چگالی را به ذهن بیاوریم، $\rho=\frac{m}{V}$ می‌بینیم که با داشتن چگالی و شعاع می‌توان با آن حجم را حساب کرده و نسبت جرم‌ها را به دست آورده و در رابطهٔ $g=G\frac{m}{r^2}$ از آن استفاده کنیم:

۱ با توجه به نسبت چگالی، نسبت جرم را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\rho_{سیاره}}{\rho_{زمین}}=\frac{\frac{m_{سیاره}}{V_{سیاره}}}{\frac{m_{زمین}}{V_{زمین}}}\xrightarrow{V=\frac{4}{3}\pi r^3}\frac{1}{3}=\frac{m_{سیاره}}{m_{زمین}}\times\frac{\frac{4}{3}\pi r_{زمین}^3}{\frac{4}{3}\pi r_{سیاره}^3}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{m_{سیاره}}{m_{زمین}}\times\left(\frac{r_{زمین}}{r_{سیاره}}\right)^3\xrightarrow{r_{سیاره}=6r_{زمین}}\frac{1}{3}=\frac{m_{سیاره}}{m_{زمین}}\times\frac{1}{6^3}\Rightarrow\frac{m_{سیاره}}{m_{زمین}}=72$$

۲ حال با توجه به رابطهٔ شتاب گرانش، نسبت خواسته شده را حساب می‌کنیم:

$$\frac{g_{سیاره}}{g_{زمین}}=\frac{G\frac{m_{سیاره}}{r_{سیاره}^2}}{G\frac{m_{زمین}}{r_{زمین}^2}}\Rightarrow\frac{g_{سیاره}}{g_{زمین}}=\frac{m_{سیاره}}{m_{زمین}}\times\left(\frac{r_{زمین}}{r_{سیاره}}\right)^2$$

$$\xrightarrow{r_{سیاره}=6r_{زمین}}\frac{g_{سیاره}}{g_{زمین}}=72\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\Rightarrow\frac{g_{سیاره}}{g_{زمین}}=2$$

میانبر شتاب گرانش برحسب چگالی سیاره از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$G=\frac{4}{3}r\pi G\rho$$

(شعاع سیاره، چگالی متوسط سیاره)

گزینهٔ ۲

B ۱۲۹۴ ۳

خط فکری وزن یک جسم برابر mg است، پس با تغییر فاصله از سطح زمین یا تغییر سیاره $(g=G\frac{M}{r^2})$ شتاب گرانش تغییر کرده و وزن جسم نیز تغییر می‌کند، توجه به این نکته مهم است که جرم جسم در هر کجا و در هر سیاره‌ای ثابت است.

۱ با توجه به اینکه وزن جسم در سطح سیارهٔ A، ۱۲ برابر وزن جسم در سطح سیارهٔ B است، نسبت شتاب گرانش در این دو سیاره را حساب می‌کنیم:

$$\frac{mg_A}{mg_B}=12\Rightarrow\frac{g_A}{g_B}=12\Rightarrow\frac{G\frac{m_A}{r_A^2}}{G\frac{m_B}{r_B^2}}=12\Rightarrow\frac{m_A}{m_B}\times\left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2=12\quad (I)$$

۲ با توجه به چگالی متوسط سیاره‌ها نسبت جرم به شعاع را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\rho_A}{\rho_B}=6\Rightarrow\frac{\frac{m_A}{V_A}}{\frac{m_B}{V_B}}=6\Rightarrow\frac{m_A}{m_B}\times\frac{V_B}{V_A}=6\xrightarrow{V=\frac{4}{3}r^3}\frac{m_A}{m_B}\times\frac{r_B^3}{r_A^3}=6\quad (II)$$

۳ حال معادلهٔ (II) را بر معادلهٔ (I) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\frac{m_A}{m_B}\times\left(\frac{r_B}{r_A}\right)^3}{\frac{m_A}{m_B}\times\left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{r_B}{r_A}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{r_A}{r_B}=2$$

بازی با سؤال شتاب گرانش در سطح سیاره‌ای که جرم و حجم آن به ترتیب ۴ و ۲۷ برابر جرم و حجم کرهٔ زمین است، چند برابر شتاب گرانش در سطح زمین می‌باشد؟

۱) $\frac{4}{27}$ ۲) $\frac{27}{4}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) ۳۶

پاسخ شتاب گرانش، همان میدان گرانش $\vec{g}$ است. شتاب گرانش در سطح یک سیاره از رابطهٔ $g=G\frac{M}{R^2}$ به‌دست می‌آید، که در آن M جرم سیاره و R شعاع سیاره است.

با توجه به فرض مسأله:

$$V_p=27V_e\Rightarrow\frac{4}{3}\pi R_p^3=27\left(\frac{4}{3}\pi R_e^3\right)\Rightarrow R_p=3R_e$$

$$g_p=G\frac{M_p}{R_p^2}=G\frac{4M_e}{(3R_e)^2}=\frac{4}{9}G\frac{M_e}{R_e^2}\Rightarrow g_p=\frac{4}{9}g_e$$

گزینهٔ ۳

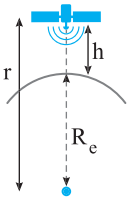
A ۱۲۹۵ ۱

نکته با تغییر فاصلهٔ جسم از سطح سیاره یا تغییر سیاره‌ای که جسم در آن قرار دارد با توجه به رابطهٔ $g=G\frac{M_{سیاره}}{r^2}$ شتاب گرانش و به تبع آن وزن جسم $W=mg$ تغییر می‌کند، اما جرم جسم تغییر نمی‌کند و ثابت می‌ماند.

با توجه به نکتهٔ بالا جرم جسم ثابت مانده و پاسخ گزینهٔ (۱) است.

۴ ۱۲۹۶ B

نکته شتاب گرانش در فاصلهٔ h از سطح زمین برابر است با:



$$g=G\frac{M_e}{r^2}=G\frac{M_e}{(h+R_e)^2}$$

شتاب گرانش را در فاصلهٔ $2R_e$ از سطح زمین حساب می‌کنیم:

$$g_1=G\frac{M_e}{(h+R_e)^2}\xrightarrow{h=2R_e}g_1=\frac{GM_e}{9R_e^2}$$

شتاب گرانش در فاصلهٔ h' از سطح زمین $\frac{g_1}{9}$ شده:

$$\frac{\frac{g_1}{9}}{g_1}=\frac{\frac{GM_e}{(h'+R_e)^2}}{\frac{GM_e}{9R_e^2}}\Rightarrow\frac{1}{9}=\frac{9R_e^2}{(h'+R_e)^2}\xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{از دو طرف جذر}}\frac{1}{3}=\frac{3R_e}{h'+R_e}$$

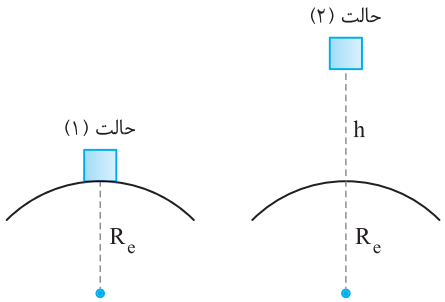
$$\Rightarrow h'+R_e=9R_e\Rightarrow h'=8R_e$$

۴ ۱۲۹۷ B

شتاب گرانش ۹۹ درصد کاهش یافته:

$$g'=g-\frac{99}{100}g\Rightarrow g'=\frac{1}{100}g$$

شتاب گرانش از رابطهٔ $g=G\frac{M_e}{r^2}$ به دست می‌آید که r فاصله از مرکز زمین است



$$\frac{GM_e}{(h+R_e)^2}=\frac{1}{100}\frac{GM_e}{R_e^2}$$

$$\left(\frac{R_e}{h+R_e}\right)^2=\frac{1}{100}\Rightarrow\frac{R_e}{h+R_e}=\frac{1}{10}\Rightarrow 10R_e=h+R_e\Rightarrow h=9R_e$$

۴ ۱۲۹۸ B

یادآوری شتاب گرانش در هر نقطه با مربع فاصلهٔ آن نقطه از مرکز زمین نسبت وارون دارد.

$$\frac{g_h}{g_e}=\frac{G\frac{M_e}{(R_e+h)^2}}{G\frac{M_e}{R_e^2}}\Rightarrow\frac{g_h}{g_e}=\frac{R_e^2}{(R_e+h)^2}$$

داده‌های مسئله را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\frac{g_h}{9/8}=\frac{(6400)^2}{(6400+1600)^2}\Rightarrow g_h=9/8\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$g_h=9/8\times\frac{16}{25}\Rightarrow g_h=6/272\,m/s^2$$

۳ ۱۲۹۹ A

یادآوری شتاب گرانش یک سیاره با فاصلهٔ r از مرکز آن از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید.

$$g=G\frac{M}{r^2}$$

(جرم سیاره، فاصله از مرکز سیاره، ثابت جهانی گرانش)

۱ شتاب گرانش زمین در سطح آن خواهد شد:

$$g_e=G\frac{M_e}{R_e^2}$$

۲ شتاب گرانشی زمین در فاصلهٔ h از سطح آن برابر است با: $g_h=G\frac{M_e}{(R_e+h)^2}$

۳ دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{g_h}{g_e}=\frac{R_e^2}{(R_e+h)^2}\xrightarrow{g_e=9/8\,m/s^2}\frac{g_h}{9/8}=\frac{(6400)^2}{(6400+6400)^2}$$

$$\Rightarrow g_h=\frac{1}{4}\times 9/8\Rightarrow g_h=2/45\,m/s^2$$

۴ نیروی وزن فضانورد خواهد شد:

$$W_h=mg_h\Rightarrow W_h=80\times 2/45\Rightarrow W_h=196N$$

میانبر البته چون فاصله سفینه از مرکز زمین دو برابر شعاع زمین است بنابراین وزن فضانورد در آن محل $\frac{1}{4}$ وزن فضانورد برسطح زمین است.

$$W_h=\left(\frac{R_e}{R_e+h}\right)^2\times W\Rightarrow W_h=\frac{1}{4}W=\frac{1}{4}\times 80\times 9/8=196N$$

۴ ۱۳۰۰ B

شتاب گرانشی در محل ماهواره را حساب می‌کنیم.

$$\frac{g_h}{g}=\frac{G\frac{M_e}{(R_e+h)^2}}{G\frac{M_e}{R_e^2}}\Rightarrow\frac{g_h}{10}=\left(\frac{R_e}{R_e+h}\right)^2\Rightarrow\frac{g_h}{10}=\left(\frac{6400}{6400+3600}\right)^2$$

$$g_h=10\times\left(\frac{16}{25}\right)^2$$

وزن ماهواره را به دست می‌آوریم.

$$W_h=mg_h\Rightarrow W_h=250\times 10\times\left(\frac{16}{25}\right)^2\Rightarrow W_h=1024N$$

۲ ۱۳۰۱ B

قبل از حل دقت کنید که x و $1/2x$ فاصله از سطح زمین بوده و در رابطهٔ $g=G\frac{M_e}{r^2}$ به جای r فاصله از مرکز زمین باید قرار گیرد:

حالت ۱: $g'=G\frac{M_e}{(R_e+x)^2}$

حالت ۲: $0/81g'=G\frac{M_e}{(R_e+1/2x)^2}$

نسبت $\frac{g'}{0/81g'}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{g'}{0/81g'}=\frac{\frac{GM_e}{(R_e+x)^2}}{\frac{GM_e}{(R_e+1/2x)^2}}\Rightarrow\frac{100}{81}=\frac{(R_e+1/2x)^2}{(R_e+x)^2}$$

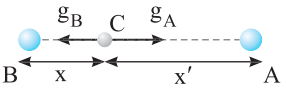
$$\xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{از دو طرف جذر}}\frac{10}{9}=\frac{R_e+1/2x}{R_e+x}\Rightarrow 10R_e+10x=9R_e+10/8x$$

$$\Rightarrow R_e=0/8x\Rightarrow\frac{x}{R_e}=\frac{1}{0/8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

۲ ۱۳۰۲ B

یادآوری شتاب گرانش یک سیاره از رابطهٔ $g=G\frac{M_{\text{سیاره}}}{r^2}$ به دست می‌آید و جهت آن به سمت سیاره است.

خط فکری برای آنکه شتاب گرانش خالص در نقطه‌ای صفر شود باید شتاب گرانش حاصل از سیاره‌های A و B در آن نقطه هم‌اندازه و خلاف جهت هم باشند. برای خلاف جهت شدن شتاب گرانش‌ها، چون این شتاب به سمت مرکز سیاره‌ها است پس باید این نقطه بین دو سیاره قرار گیرد. در نقطه C: $g_A=g_B$



۱ شتاب گرانش از طرف جسم A را حساب می‌کنیم:

$$g_A=G\frac{M_A}{x'^2}\Rightarrow g_A=G\frac{8m}{x'^2}$$

۲ شتاب گرانش از طرف جسم B را حساب می‌کنیم:

$$g_B=G\frac{M_B}{x^2}\Rightarrow g_B=G\frac{2m}{x^2}$$

۳ باید شتاب گرانش g_A و g_B با هم برابر باشند:

$$g_A=g_B\Rightarrow G\frac{8m}{x'^2}=G\frac{2m}{x^2}\Rightarrow\frac{x^2}{x'^2}=\frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{از دو طرف جذر می‌گیریم}}\frac{x}{x'}=\frac{1}{2}\Rightarrow x'=2x$$

۴ مجموع فاصله‌های x و x' برابر فاصلهٔ دو سیاره یعنی r می‌شود:

$$r=x+x'\xrightarrow{x'=2x}r=3x\Rightarrow x=\frac{r}{3},\ x'=\frac{2r}{3}$$

فاصله از سیارهٔ A یعنی x' خواسته شده که برابر $\frac{2r}{3}$ است.

A ۱۳۰۳ ۱

میدان گرانش در هر نقطه در اطراف یک سیاره، از رابطهٔ $g=G\frac{M}{r^2}$ به دست می‌آید که در آن M جرم سیاره و r فاصلهٔ نقطهٔ مورد نظر تا مرکز سیاره است. رابطهٔ میدان گرانش را برای سطح زمین و سطح مریخ می‌نویسیم و نسبت آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{g_e}{g_m}=\frac{G\frac{M_e}{R_e^2}}{G\frac{M_m}{R_m^2}}=\frac{R_m^2}{R_e^2}\times\frac{M_e}{M_m}$$

$$\xrightarrow[g_e=3g_m]{R_e=2R_m}3=\frac{R_m^2}{(2R_m)^2}\times\frac{M_e}{M_m}\Rightarrow\frac{M_e}{M_m}=12$$

A ۱۳۰۴ ۲

ماهواره خارج از زمین قرار دارد و بیشترین نیروی گرانشی وارد بر ماهواره در سطح زمین است. هر چه فاصلهٔ ماهواره از سطح زمین بیشتر شود، نیروی گرانشی با وارون مربع فاصله کاهش می‌یابد.

یادآوری نیروی گرانش بین دو جسم به جرم‌های m_1 و m_2 که در فاصلهٔ r از هم قرار دارند از رابطهٔ $F=G\frac{m_1m_2}{R^2}$ به‌دست می‌آید.

نیروی گرانش با مربع فاصله نسبت وارون دارد. از طرفی کمترین فاصلهٔ ماهواره از زمین موقعی است که فرض کنیم ماهواره روی سطح زمین در حرکت است در این حالت فاصلهٔ ماهواره از مرکز زمین برابر شعاع زمین (R_e) است و بیشترین نیروی گرانش بر ماهواره وارد می‌شود. هر چه ماهواره از سطح زمین دورتر شود نیروی گرانش کمتر خواهد شد. بنابراین نمودار گزینهٔ (۲) پاسخ مسئله است.

B ۱۳۰۵ ۱

نیرویی که ماهواره را به گرد زمین نگه می‌دارد نیروی گرانش بین زمین و ماهواره است. از طرفی نیروی گرانش وارد بر هر جسم توسط کرهٔ زمین را وزن جسم گویند. در نتیجه نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره نیروی وزن ماهواره در همان محل چرخش ماهواره است. $(F=W_h)$ بنابراین $\frac{F}{W_h}=1$ خواهد بود.

B ۱۳۰۶ ۴

نکته نیروی گرانش زمین در محل ماهواره همان نیروی مرکزگرا است $(F=W_h)$

خط فکری برای اینکه بررسی کنید نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره چند برابر وزن ماهواره در سطح زمین است کافی است، نیروی وزن در محل ماهواره و سطح زمین را باهم مقایسه کنید. نسبت نیروی مرکزگرا به نیروی وزن ماهواره در سطح زمین خواهد شد:

$$\frac{F}{W}=\frac{W_h}{W}=\frac{mg_h}{mg}=\frac{G\frac{M_e}{(R_e+h)^2}}{G\frac{M_e}{R_e^2}}=\frac{R_e^2}{(R_e+h)^2}\Rightarrow\frac{F}{W}=\frac{R_e^2}{(\frac{4}{3}R_e)^2}=\frac{9}{16}$$

A ۱۳۰۷ ۳

نکته نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره نیروی گرانش زمین (نیروی وزن) در محل ماهواره است از این‌رو شتاب مرکزگرای ماهواره همان شتاب گرانش زمین در محل ماهواره است. با توجه به نکتهٔ بیان شده، شتاب مرکزگرا (a_r) به شتاب گرانشی در محل ماهواره (g_h) برابر یک است.

$$\frac{a_r}{g_h}=1$$

B ۱۳۰۸ ۲

خط فکری نیروی خالصی که به ماهواره وارد می‌شود نیروی گرانشی زمین در محل ماهواره است و شتابی که ماهواره به‌دست می‌آورد همان شتاب گرانش در محل ماهواره است بنابراین شما باید شتاب گرانش در محل ماهواره را با شتاب گرانش در سطح زمین باهم مقایسه کنید.

نسبت شتاب ماهواره به شتاب گرانش در سطح زمین خواهد شد:

$$\frac{a_{\text{ماهواره}}}{g}=\frac{g_h}{g}\Rightarrow\frac{a_{\text{ماهواره}}}{g}=\frac{G\frac{M_e}{(R_e+h)^2}}{G\frac{M_e}{R_e^2}}\xrightarrow{h=R_e}\frac{a_{\text{ماهواره}}}{g}=\frac{R_e^2}{(R_e+R_e)^2}=\frac{1}{4}$$

A ۱۳۰۹ ۳

۱ در حرکت ماهواره به گرد زمین، نیروی گرانش وارد بر ماهواره، نیروی مرکزگرا است و شتاب گرانشی در محل ماهواره (g_h) برابر شتاب مرکزگرای ماهواره (a) است. بنابراین خواهیم داشت:

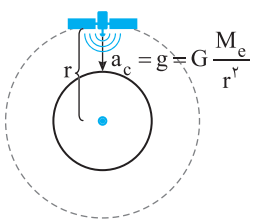
$$g_h=a=2/5\,m/s^2$$

۲ با توجه به رابطهٔ میدان گرانشی $(g=G\frac{M}{r^2})$ می‌توان نوشت:

$$\frac{g_e}{g_h}=\frac{G\frac{M_e}{R_e^2}}{G\frac{M_e}{(R_e+h)^2}}\Rightarrow\frac{10}{2/5}=\frac{(R_e+h)^2}{R_e^2}\Rightarrow4=\frac{(R_e+h)^2}{R_e^2}$$

$$\Rightarrow2=\frac{R_e+h}{R_e}\Rightarrow2R_e=R_e+h\Rightarrow h=R_e$$

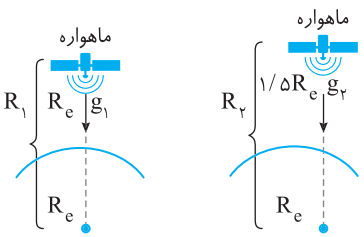
B ۱۳۱۰ ۴



یادآوری برای به‌دست آوردن شتاب گرانش در فاصلهٔ r از مرکز زمین از رابطهٔ $g=G\frac{M_e}{r^2}$ استفاده می‌شود. شتاب گرانش وارد بر ماهواره برابر شتاب مرکزگرای وارد بر ماهواره است.

شتاب مرکزگرای ماهواره برابر g است که در آن R فاصله جسم تا مرکز زمین است:

$$\begin{cases}g_1=G\frac{M_e}{R_1^2}\\ g_2=G\frac{M_e}{R_2^2}\end{cases}\Rightarrow\frac{g_2}{g_1}=(\frac{R_1}{R_2})^2=(\frac{2}{2/5})^2\Rightarrow\frac{g_2}{g_1}=\frac{16}{25}\Rightarrow g_2=\frac{16}{25}g_1$$



بنابراین شتاب مرکزگرا در حالت دوم به اندازهٔ:

$$g_۲-g_۱=\frac{۱۶}{۲۵}g_۱-g_۱=\frac{-۹}{۲۵}g_۱=\frac{-۹}{۲۵}g_۱=\frac{-۳۶}{۱۰۰}g_۱$$

یا ۳۶ درصد، نسبت به شتاب مرکزگرای اولیه کاهش می‌یابد.

روش دوم: درصد تغییرات برابر است با: $\frac{\Delta g}{g_۱}\times ۱۰۰=\frac{\frac{-۹}{۲۵}}{g_۱}\times ۱۰۰=$ ۳۶٪ کاهش

B ۱۳۱۱ ۴

۱ نیروی گرانش وارد بر ماهواره نیروی مرکزگرا است.

$$F_G=F\Rightarrow G\frac{M_e m}{r^۲}=m\frac{v^۲}{r}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM_e}{r}} \quad (۱)$$

۲ از طرفی شتاب گرانش در سطح زمین برابر است با:

$$g=G\frac{M_e}{R_e^۲}\Rightarrow GM_e=R_e^۲ g \quad (۲)$$

۳ رابطهٔ (۲) را در رابطهٔ (۱) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$v=\sqrt{\frac{GM_e}{r}}=\sqrt{\frac{R_e^۲ g}{r}}\Rightarrow v=R_e\sqrt{\frac{g}{r}}$$

R_e شعاع کره زمین، r فاصلهٔ ماهواره از مرکز زمین (یعنی شعاع مدار چرخش ماهواره) است.

۴ با توجه به فرض مسئله، $R_e=۶۴۰۰km$ ، $r=۶۴۰۰+۸۰۰=۷۲۰۰km$ و $g=۹/۸m/s^۲$ است. اعداد را در رابطهٔ تندی ماهواره جای‌گذاری می‌کنیم.

$$v=R_e\sqrt{\frac{g}{r}}\Rightarrow v=۶۴۰۰\times ۱۰^۳\times\sqrt{\frac{۹/۸}{۷۲۰۰\times ۱۰^۳}}$$

$$v=۶۴۰۰\times ۱۰^۳\times\sqrt{\frac{۴/۹}{۳۶۰۰\times ۱۰^۳}}\Rightarrow v=۶۴۰۰\times ۱۰^۳\times\frac{۷}{۶\times ۱۰^۳}=\frac{۶۴۰۰\times ۷}{۶}m/s$$

$$v=\frac{۷}{۶}\times ۶۴۰۰\times\frac{۱۰^{-۳}km}{\frac{۱}{۳۶۰۰}h}\Rightarrow v=۲۶۸۸۰\,km/h$$

B ۱۳۱۲ ۴

یادآوری نیروی مرکزگرایی که ماهواره را در مدارش نگاه می‌دارد، نیروی گرانش بین زمین و ماهواره است. از این‌رو خواهیم داشت: $G\frac{M_e m}{r^۲}=m\frac{v^۲}{r}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM_e}{r}}$

r فاصله ماهواره از مرکز زمین $(r=R_e+h)$ است.

نکته تندی ماهواره به جرم ماهواره بستگی ندارد و با جذر شعاع مدار ماهواره نسبت وارون دارد. $\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{r}{r'}}$

شعاع چرخش ماهوارهٔ A برابر $r_A=R_e+R_e=۲R_e$ و شعاع چرخش ماهوارهٔ B نیز $r_B=R_e+۲R_e=۳R_e$ است، از این‌رو:

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{\sqrt{\frac{GM_e}{۲R_e}}}{\sqrt{\frac{GM_e}{۳R_e}}}\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

بازی با سؤال **تندی دو ماهواره که در ارتفاع h و ۲h از سطح زمین به دور آن می‌چرخند، به ترتیب $v_۱$ و $v_۲$ است. اگر $\frac{v_۲}{v_۱}=\sqrt{۰/۸}$ باشد، h چه کسری از شعاع زمین است؟**

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

پاسخ

$$v=\sqrt{\frac{GM_e}{r}}\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=\sqrt{\frac{r_۱}{r_۲}}\Rightarrow\sqrt{۰/۸}=\sqrt{\frac{R_e+h}{R_e+۲h}}$$

$$\Rightarrow ۰/۸R_e+۱/۶h=R_e+h\Rightarrow ۰/۶h=۰/۲R_e\Rightarrow h=\frac{R_e}{۳}$$

گزینهٔ ۱

B ۱۳۱۳ ۱

۱ شعاع مدار ماهواره ۰/۴۴R افزایش یافته است. $R'=R+۰/۴۴R\Rightarrow R'=۱/۴۴R$

۲ نیروی گرانش زمین وارد بر ماهواره، همان نیروی مرکزگرای ماهواره است.

$$G\frac{M_e m}{R^۲}=m\frac{v^۲}{R}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM_e}{R}}\Rightarrow\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{R}{R'}}$$

۳ اعداد مسئله را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{R}{R'}}\xrightarrow{v=۸/۴km/s}\frac{v'}{۸/۴}=\sqrt{\frac{R}{۱/۴۴R}}\Rightarrow\frac{v'}{۸/۴}=\frac{۱}{۱/۲}$$

$$\Rightarrow v'=۷km/s$$

B ۱۳۱۴ ۴

خط فکری ابتدا به کمک رابطهٔ بین تندی ماهوارهٔ A و تندی ماهوارهٔ B نسبت شعاع مدار چرخش ماهواره‌ها را به‌دست می‌آوریم سپس به کمک رابطهٔ شتاب مرکزگرای $a=\frac{v^۲}{r}$ ، مسئله را حل می‌کنیم.

۱ نیروی مرکزگرای ماهواره همان نیروی گرانش وارد بر ماهواره است از این رو:

$$G\frac{M_e m}{r^۲}=m\frac{v^۲}{r}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$

۲ سرعت دوران ماهواره با جذر شعاع مدار آن نسبت وارون دارد. در نتیجه:

$$\frac{v_A}{v_B}=\sqrt{\frac{r_B}{r_A}}\xrightarrow{v_A=۲v_B}۲=\sqrt{\frac{r_B}{r_A}}\Rightarrow\frac{r_B}{r_A}=۴$$

۳ نسبت شتاب مرکزگرای ماهوارهٔ A به ماهوارهٔ B برابر خواهد شد با:

$$\frac{a_A}{a_B}=\frac{\frac{v_A^۲}{r_A}}{\frac{v_B^۲}{r_B}}\Rightarrow\frac{a_A}{a_B}=(\frac{v_A}{v_B})^۲(\frac{r_B}{r_A})\Rightarrow\frac{a_A}{a_B}=۴\times ۴=۱۶$$

B ۱۳۱۵ ۲

نکته نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره همان نیروی گرانش زمین (وزن ماهواره) در محل آن است.

خط فکری شتاب گرانش زمین در محل ماهواره (g_h) را حساب می‌کنیم. نیروی وزن ماهواره $(W_h=mg_h)$ همان نیروی مرکزگرا است. وقتی در مسئله می‌گوید نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره ۹۰۰۰N است یعنی نیروی وزن ماهواره $(W_h=۹۰۰۰N)$ است.

۱ فاصلهٔ ماهواره از مرکز زمین $r=R_e+\frac{R_e}{۳}=\frac{۴}{۳}R_e$ است. شتاب گرانش در محل ماهواره خواهد شد:

شتاب گرانش در محل ماهواره $\frac{g_h}{g}=\frac{G\frac{M_e}{(\frac{۴}{۳}R_e)^۲}}{G\frac{M_e}{R_e^۲}}\Rightarrow\frac{g_h}{g}=\frac{۹}{۱۶}\Rightarrow g_h=\frac{۹}{۱۶}g$

۲ با داشتن شتاب گرانش در محل ماهواره و نیروی وزن ماهواره، جرم آن را به‌دست می‌آوریم: $F=W_h\Rightarrow W_h=mg_h\Rightarrow ۹۰۰۰=m\times(\frac{۹}{۱۶}\times ۱۰)\Rightarrow m=۱۶۰۰kg$

B ۱۳۱۶ ۳

نیروی مرکزگرای ماهواره همان نیروی گرانش در محل ماهواره است. از این رو:

$$G\frac{Mm}{r^۲}=m\frac{v^۲}{r}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (۱)$$

از طرفی، شتاب گرانش در سطح سیاره برابر است با:

$$g=G\frac{M}{R^۲}\Rightarrow GM=R^۲ g \quad (۲)$$

از رابطهٔ (۲) در رابطهٔ (۱) جای‌گذاری می‌کنیم.

$$v=\sqrt{\frac{GM}{r}}=\sqrt{\frac{R^۲ g}{r}}\Rightarrow v=R\sqrt{\frac{g}{r}}$$

R شعاع سیاره و r فاصلهٔ ماهواره از مرکز سیاره است. شعاع مدار ماهواره $r=۹۶۰۰km$ و شعاع سیاره $R=۸۸۰۰km$ و تندی آن $۱۱km/s$ است. اعداد داده شده در مسئله را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$v=R\sqrt{\frac{g}{r}}\Rightarrow g=\frac{rv^۲}{R^۲}\Rightarrow g=\frac{۹۶۰۰\times ۱۱\times ۱۱}{۸۸۰۰\times ۸۸۰۰}=\frac{۹۶}{۶۴۰۰}km/s^۲$$

$$=\frac{۹۶۰۰۰}{۶۴۰۰}m/s^۲\Rightarrow g=\frac{۹۶۰}{۶۴}\Rightarrow g=۱۵m/s^۲$$

۲ ۱۳۱۷ B

یادآوری در حرکت ماهواره به گرد زمین، نیروی گرانش، نیروی مرکزگرا است.

$$F_g=F_r\Rightarrow G\frac{M_e.m}{r^۲}=m\frac{v^۲}{r}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM_e}{r}}\Rightarrow v\propto\frac{۱}{\sqrt{r}}$$

$$G\frac{M_em}{r^۲}=mr(\frac{۲\pi}{T})^۲\Rightarrow T=۲\pi\sqrt{\frac{r^۳}{GM_e}}\Rightarrow T\propto\sqrt{r^۳}$$

با توجه به یادآوری بالا، گزینهٔ (۲) درست است.

۲ ۱۳۱۸ A

بـر ماهـواره‌ای که به دور زمین می‌چرخد، نیروی گرانش زمین وارد می‌شـود و این نیرو، نیـروی مرکزگرای لازم برای نگه داشـتن ماهواره روی مـدارش را تأمین می‌کند. بنابراین خواهیم داشت:

$$G\frac{M_em}{r^۲}=m\frac{v^۲}{r}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM_e}{r}}\Rightarrow v\propto\frac{۱}{\sqrt{r}}$$

در نتیجه، تندی ماهواره با افزایش شعاع مدار آن کاهش می‌یابد. از طرفی:

$$G\frac{M_em}{r^۲}=mr(\frac{۲\pi}{T})^۲\Rightarrow\frac{GM_e}{r^۳}=(\frac{۲\pi}{T})^۲\Rightarrow\frac{GM_e}{r^۳}=\frac{۴\pi^۲}{T^۲}$$

$$\Rightarrow T=۲\pi\sqrt{\frac{r^۳}{GM_e}}\Rightarrow T^۲\propto r^۳$$

پس مشخص است که با افزایش شعاع مدار، دورهٔ حرکت ماهواره افزایش می‌یابد.

نتیجه تندی ماهواره و دورهٔ چرخش آن با افزایش فاصلهٔ ماهواره از سطح زمین به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد.

۴ ۱۳۱۹ B

یادآوری در چرخـش ماهـواره، مربع دوره با مکعب فاصلهٔ ماهـواره از مرکز زمین (r) نسبت مستقیم دارد: $(T^۲\propto r^۳)$

با توجه به یادآوری بالا با داشـتن نسـبت دورهٔ A به B، نسبت فاصله تا مرکز زمین آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{T_A}{T_B}=\sqrt{\frac{r_A^۳}{r_B^۳}}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۴}=\sqrt{\frac{r_A^۳}{r_B^۳}}\xrightarrow{\text{دو طرف را به توان دو می‌رسانیم.}}$$

$$\frac{۱}{۸}=(\frac{r_A}{r_B})^۳\Rightarrow\frac{r_A}{r_B}=\frac{۱}{۲}$$

حال نسـبت شتاب گرانش در محل دو ماهواره را که همان شتاب حرکت ماهواره‌ها است حساب می‌کنیم:

$$g=\frac{GM_e}{r^۲}\Rightarrow\frac{g_B}{g_A}=\frac{\frac{GM_e}{r_B^۲}}{\frac{GM_e}{r_A^۲}}\Rightarrow\frac{g_B}{g_A}=(\frac{r_A}{r_B})^۲\Rightarrow\frac{g_B}{g_A}=\frac{۱}{۴}$$

۳ ۱۳۲۰ A

تندی ماهواره با جذر شعاع مدار چرخش ماهواره نسبت وارون دارد.

$$v=\sqrt{\frac{GM_e}{r}}\Rightarrow\frac{v_B}{v_A}=\sqrt{\frac{r_A}{r_B}}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\sqrt{\frac{r_A}{r_B}}\Rightarrow\frac{r_A}{r_B}=\frac{۱}{۴}$$

مربع دورهٔ چرخش ماهواره با مکعب شعاع مدار آن نسبت مستقیم دارد.

$$(\frac{T_A}{T_B})^۲=(\frac{r_A}{r_B})^۳\Rightarrow(\frac{T_A}{T_B})^۲=(\frac{۱}{۴})^۳\Rightarrow(\frac{T_A}{T_B})^۲=(\frac{۱}{۶۴})\Rightarrow\frac{T_A}{T_B}=\frac{۱}{۸}$$

۱ ۱۳۲۱ B

یادآوری به حاصل‌ضرب جرم در سرعت جسم، تکانه گویند. $(\vec{P}=m\vec{v})$

خط فکری ابتـدا باید نسـبت تنـدی دو ماهـواره را از رابطهٔ $v=\sqrt{\frac{GM_e}{r}}$ پیدا کنید سپس به سراغ نسبت تکانه‌ها بروید.

۱ شعاع مدار ماهوارهٔ نزدیک‌تر برابر است با: $r=R_e+h\xrightarrow{h=R_e}r_۱=۲R_e$

شعاع مدار ماهوارهٔ دورتر برابر است با:

$$r_۲=R_e+h_۲\xrightarrow{h_۲=۲R_e}r_۲=۳R_e$$

۲ نسبت تندی ماهوارهٔ نزدیک‌تر به ماهوارهٔ دورتر خواهد شد:

$$v=\sqrt{\frac{GM_e}{r}}\Rightarrow\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{\sqrt{\frac{GM_e}{r_۱}}}{\sqrt{\frac{GM_e}{r_۲}}}\Rightarrow\frac{v_۱}{v_۲}=\sqrt{\frac{r_۲}{r_۱}}=\sqrt{\frac{۳R_e}{۲R_e}}\Rightarrow\frac{v_۱}{v_۲}=\sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

۳ نسبت تکانه‌ها خواهد شد:

$$\frac{P_۱}{P_۲}=\frac{m_۱v_۱}{m_۲v_۲}\xrightarrow{m_۱=m\,,\,m_۲=\frac{m}{۲}}\frac{P_۱}{P_۲}=\frac{m}{\frac{m}{۲}}\times\sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

$$\Rightarrow\frac{P_۱}{P_۲}=\frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\Rightarrow\frac{P_۱}{P_۲}=\sqrt{۶}$$

۴ ۱۳۲۲ B

یادآوری نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره، نیروی گرانش زمین وارد بر ماهواره است.

$$F=G\frac{mM_e}{r^۲}\Rightarrow m\frac{v^۲}{r}=G\frac{mM_e}{r^۲}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$

در این رابطه r شعاع حرکت ماهواره به گرد زمین است که مقدار آن برابر مجموع شعاع زمین (R_e) و فاصله ماهواره از سطح زمین (h) است. $r=R_e+h$

بنابراین تندی حرکت ماهواره با جذر شعاع مدار ماهواره نسبت وارون دارد. $\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{r}{r'}}$

رابطهٔ انرژی جنبشی را برای ماهوارهٔ A و ماهوارهٔ B نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{cases}K_A=\frac{۱}{۲}mv_A^۲\\K_B=\frac{۱}{۲}(۲m)v_B^۲\end{cases}\Rightarrow\frac{K_A}{K_B}=\frac{۱}{۲}(\frac{v_A}{v_B})^۲=\frac{۱}{۲}(\frac{r_B}{r_A})$$

$$\xrightarrow{r_A=R_e+\frac{R_e}{۲}=\frac{۳}{۲}R_e\,,\,r_B=R_e+\frac{R_e}{۴}=\frac{۵}{۴}R_e}\frac{K_A}{K_B}=\frac{۱}{۲}(\frac{\frac{۵}{۴}R_e}{\frac{۳}{۲}R_e})\Rightarrow\frac{K_A}{K_B}=\frac{۵}{۱۲}$$

۳ ۱۳۲۳ B

۱ سرعت حرکت ماهواره به گرد زمین را به دست می‌آوریم.

$$F=G\frac{M_em}{r^۲}=m\frac{v^۲}{r}\Rightarrow v^۲=\frac{GM_e}{r}$$

۲ فاصلهٔ ماهواره‌ها از مرکز زمین یعنی شعاع مدار چرخش ماهواره‌ها خواهد شد:

ماهوارهٔ نزدیک‌تر: $r=R_e+h\xrightarrow{h=R_e}r=۲R_e$

ماهوارهٔ دورتر: $r'=R_e+h'\xrightarrow{h'=۲R_e}r'=۳R_e$

۳ نسبت تندی ماهوارهٔ دورتر به ماهوارهٔ نزدیک‌تر را به دست می‌آوریم.

$$\frac{v'}{v}=\frac{\sqrt{\frac{GM_e}{r'}}}{\sqrt{\frac{GM_e}{r}}}=\sqrt{\frac{r}{r'}}=\sqrt{\frac{۲R_e}{۳R_e}}\Rightarrow\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

۴ نسبت انرژی جنبشی را حساب می‌کنیم.

$$\frac{K'}{K}=\frac{\frac{۱}{۲}m'v'^۲}{\frac{۱}{۲}mv^۲}\xrightarrow{m'=۲m}\frac{K'}{K}=۲\times(\sqrt{\frac{۲}{۳}})^۲\Rightarrow\frac{K'}{K}=\frac{۴}{۳}$$

B ۱۳۲۴ ۱

۱ انرژی جنبشی ماهواره دو برابر شده است از این رو:

$$K_۲=۲K_۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}mv_۲^۲=۲(\frac{۱}{۲}mv_۱^۲)\Rightarrow v_۲=\sqrt{۲}v_۱$$

۲ از طرفی سرعت ماهواره برابر $v=\sqrt{\frac{GM_e}{r}}$ است و سرعت با جذر شعاع مدار ماهواره نسبت وارون دارد.

$$\frac{v_۲}{v_۱}=\sqrt{\frac{r_۱}{r_۲}}\Rightarrow\sqrt{۲}=\sqrt{\frac{r_۱}{r_۲}}\Rightarrow\frac{r_۱}{r_۲}=۲$$

۳ نسبت نیروی مرکزگرا در حالت دوم به حالت اول خواهد شد:

$$\frac{F_۲}{F_۱}=\frac{\frac{mv_۲^۲}{r_۲}}{\frac{mv_۱^۲}{r_۱}}\Rightarrow\frac{F_۲}{F_۱}=(\frac{v_۲}{v_۱})^۲\times(\frac{r_۱}{r_۲})\Rightarrow\frac{F_۲}{F_۱}=۲\times۲=۴$$

B ۱۳۲۵ ۳

نیرویی که باعث می‌شود ماهواره به گرد زمین بگردد، نیروی گرانش بین ماهواره و کرهٔ زمین است که همان نیروی مرکزگراست. دورهٔ حرکت ماهواره با جذر توان ۳ شعاع ماهواره نسبت مستقیم دارد.

$$F=G\frac{M_em}{r^۲}=mr\frac{۴\pi^۲}{T^۲}\Rightarrow\frac{GM_e}{r^۳}=(\frac{۲\pi}{T})^۲\Rightarrow T=۲\pi\sqrt{\frac{r^۳}{GM_e}}$$

r فاصلهٔ ماهواره از مرکز زمین است. بنابراین:

$$\frac{T_B}{T_A}=\frac{۲\pi\sqrt{\frac{r_B^۳}{GM_e}}}{۲\pi\sqrt{\frac{r_A^۳}{GM_e}}}\Rightarrow\frac{T_B}{T_A}=\sqrt{(\frac{r_B}{r_A})^۳}\xrightarrow[R_B=R_e+۷R_e=۸R_e]{R_A=R_e+R_e=۲R_e}$$

$$\frac{T_B}{T_A}=\sqrt{(\frac{۸R_e}{۲R_e})^۲}=\sqrt{۴^۳}\Rightarrow\frac{T_B}{T_A}=\sqrt{۶۴}=۸$$

بخاطر سپردن رابطهٔ $\frac{T'}{T}=\sqrt{(\frac{r'}{r})^۳}$ را پیشنهاد می‌کنیم.

B ۱۳۲۶ ۴

نکته در حرکت دایره‌ای یکنواخت در هر نقطه از مسیر بردار شتاب متحرک بر بردار سرعت متحرک عمود است.

یادداشت ریاضی شرط عمود بودن دو خط (دو بردار) این است که شیب آن‌ها قرینه و وارن یکدیگر باشد. $(m'=\frac{-۱}{m})$

۱ شیب بردار سرعت $\vec{v}=۳\vec{i}-۴\vec{j}$ خواهد شد: $m=\frac{v_y}{v_x}=\frac{-۴}{۳}$

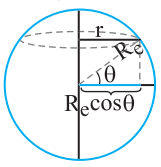
۲ شیب بردار شتاب مرکزگرا را حساب می‌کنیم. $m'=-\frac{۱}{m}\Rightarrow m'=\frac{۳}{۴}$

۳ در گزینه‌ها، تنها گزینه‌ای که شیب بردار آن $+\frac{۳}{۴}$ است گزینهٔ (۴) $(\vec{a}=۴\vec{i}+۳\vec{j})$ است.

B ۱۳۲۷ ۲

نکته مدار جغرافیایی: دایره‌هایی فرضی روی سطح زمین که به موازات استوا رسم می‌شود.

۱ ابتدا از روی شکل شعاع مسیر حرکت نقطه را به‌دست می‌آوریم: $\cos\theta=\frac{r}{R_e}\Rightarrow r=R_e\cos\theta$

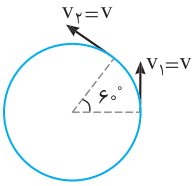


۲ شتاب مرکزگرا خواهد شد:

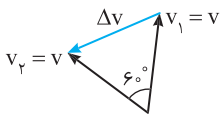
$$a=r\frac{۴\pi^۲}{T^۲}\Rightarrow a=(R_e\cos\theta)\frac{۴\pi^۲}{T^۲}\Rightarrow a=\frac{۴\pi^۲R_e\cos\theta}{T^۲}$$

B ۱۳۲۸ ۳

متحرک، کمان ۶۰° را در مدت $\frac{۱}{۶}$ دوره طی می‌کند $(\Delta t=\frac{T}{۶})$. از طرفی سرعت بر مسیر حرکت مماس است. دو بردار سرعت را از یک نقطه رسم می‌کنیم.



شکل حاصل مثلث متساوی الاضلاع و بردار تغییر سرعت برابر v می‌شود. در این صورت شتاب متوسط در این مدت خواهد شد:

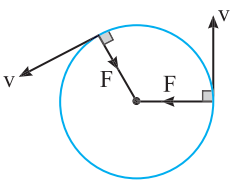


$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{v}{\frac{T}{۶}}=۶\frac{\frac{۲\pi r}{T}}{T}$$

$$\Rightarrow a_{av}=\frac{۱۲\pi r}{T^۲}$$

B ۱۳۲۹ ۱

راه حل اول: در حرکت دایره‌ای یکنواخت، نیرو در هر لحظه بر ذره عمود است و نیروی مرکزگرا اندازهٔ سرعت را تغییر نمی‌دهد و فقط جهت حرکت (بردار سرعت) ذره را تغییر می‌دهد. به همین علت اندازهٔ سرعت ثابت می‌ماند.



راه حل دوم: نیرو در هر نقطه عمود بر مسیر است. بنابراین کار نیروی F وارد بر جسم صفر است.

$$W=Fd\cos\theta\xrightarrow{\theta=\frac{\pi}{۲}}W_F=۰$$

بنا بر قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، کار نیروی F برابر تغییر انرژی جنبشی جسم است، بنابراین:

$$W_F=\Delta K\xrightarrow{W_F=۰}\Delta K=۰$$

حال که انرژی جنبشی تغییر نمی‌کند، با توجه به رابطهٔ $K=\frac{۱}{۲}mv^۲$، باید بزرگی سرعت جسم ثابت باشد.

B ۱۳۳۰ ۴

تندی کمیت نرده‌ای است و جهت ندارد. اگر تندی ثابت باشد، یعنی اندازهٔ سرعت متحرک ثابت است. در این صورت ممکن است جهت بردار سرعت ثابت باشد و یا تغییر کند. اگر جهت بردار سرعت تغییر کند در این صورت نیروی خالص وارد بر متحرک صفر نخواهد شد و گزینهٔ (۱) نادرست است. هنگامی که جهت بردار سرعت تغییر کند، مسیر حرکت خط راست نخواهد بود و گزینهٔ (۲) نادرست است. اگر حرکت روی خط راست با سرعت ثابت $۱۰m/s$ باشد، متحرک تغییر جهت نمی‌دهد و گزینهٔ (۳) نیز نادرست است.

در واقع با توجه به کلمهٔ الزاماً در هر سه گزینه، هیچ یک از سه گزینه درست نیست.

B ۱۳۳۱ ۴

خط فکری هنگامی که دوچرخه‌سوار روی سطح افقی، دور می‌زند، از طرف سطح جاده دو نیرو بر دوچرخه‌سوار وارد می‌شود. یکی از آن‌ها نیروی وزن را خنثی می‌کند و نیروی دیگر دوچرخه را بر مسیر دایره‌ای نگه می‌دارد و نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند. بنابراین شما باید این دو نیرو را به‌دست آورده و برایند آن‌ها را حساب کنید.

۱ نیروی عمودی سطح وارد بر دوچرخه را حساب می‌کنیم:

$$F_N=mg\xrightarrow{m=۸۰kg}F_N=۸۰۰N$$

۲ نیروی مرکزگرا وارد بر دوچرخه‌سوار را به‌دست می‌آوریم:

$$F=m\frac{v^۲}{r}\xrightarrow{v=۱۰m/s,r=۲۰m}F=۸۰\times\frac{۱۰^۲}{۲۰}\Rightarrow F=۴۰۰N$$

۳ به کمک رابطهٔ فیثاغورس، نیرویی که جاده بر جسم وارد می‌کند را حساب می‌کنیم.

$$R=\sqrt{F_N^۲+F^۲}=\sqrt{۸۰۰^۲+۴۰۰^۲}=۴۰۰\sqrt{۵}N$$

A ۱۳۳۲ ۴

۱ $18km/h$ برابر $5m/s$ است. از طرفی نیروی اصطکاک بین لاستیک و جاده، نیروی مرکزگرا است:

$$f_{s\max}=m\frac{v^2}{R}\xrightarrow{m=800kg,\ r=\frac{10}{3}m}f_{s\max}=800\times\frac{(5)^2}{\frac{10}{3}}$$

$$\Rightarrow f_{s\max}=6000N$$

۲ نیروی عمودی تکیه‌گاه برابر نیروی وزن اتومبیل است.

$$F_N=W\Rightarrow F_N=800\times10=8000N$$

۳ بنابراین نیرویی که جاده بر اتومبیل وارد می‌کند برابر است با:

$$R=\sqrt{F_N^2+W^2}=\sqrt{6000^2+8000^2}\Rightarrow R=10^4\,N$$

B ۱۳۳۳ ۲

نکته دورهٔ جسمی که روی صفحهٔ گردان به همراه صفحه می‌چرخد با دورهٔ صفحه برابر است.

۱ در هر دقیقه $(60s)$، صفحه ۳۰ دور می‌چرخد، دورهٔ حرکت صفحه را به‌دست می‌آوریم:

$$T=\frac{t}{N}=\frac{60}{30}=2s$$

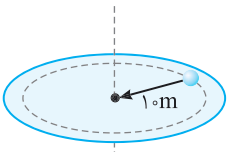
۲ نیروی اصطکاک ایستایی، نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند، بیشینه نیروی اصطکاک، نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت $f_{s\max}$ است و تا زمانی که نیروی مرکزگرا کمتر یا مساوی $f_{s\max}$ باشد، جسم بر صفحه نمی‌لغزد.

$$\mu_s mg\geq mr\frac{4\pi^2}{T^2}\Rightarrow\mu_s g\geq r(\frac{4\pi^2}{T^2})\Rightarrow\mu_s\times g\geq0/2\times(\frac{4\pi^2}{4})\Rightarrow\mu_s\geq0/2$$

۳ در این صورت کمینه مقدار ضریب اصطکاک $0/2$ است و اگر ضریب اصطکاک آستانهٔ حرکت μ_s از این مقدار بیشتر باشد، جسم روی سطح نمی‌لغزد.

B ۱۳۳۴ ۴

۱ آهنگ $0/1$ دور بر ثانیه یعنی در هر ثانیه صفحه $0/1$ دور می‌چرخد بنابراین دوره با یک تناسب ساده به‌دست می‌آید:



$0/1$ دور	$1s$
1 دور	$T\Rightarrow T=10s$

۲ نیروی اصطکاک بین وزنه و سطح صفحه نیروی مرکزگرا است. از این‌رو نیروی اصطکاک خواهد شد:

$$f_s=mr\frac{4\pi^2}{T^2}\Rightarrow f_s=4\times10\times\frac{4\pi^2}{100}\Rightarrow f_s=16N$$

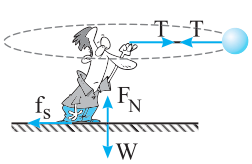
۳ وزن وزنه توسط نیروی عمودی تکیه‌گاه خنثی می‌شود:

$$F_N=W\Rightarrow F_N=4\times10=40N$$

۴ نیرویی که وزنه بر سطح وارد می‌کند برابر نیرویی است که سطح بر وزنه وارد می‌کند و مقدار آن برابند F_N و F_s است.

$$R=\sqrt{F_N^2+f_s^2}\Rightarrow R=\sqrt{40^2+16^2}\Rightarrow R=8\sqrt{29}N$$

C ۱۳۳۵ ۲



وقتی شخص طناب را می‌چرخاند، بر آن نیرو وارد می‌کند. بنا بر قانون سوم نیوتون، طناب هم بر شخص نیرویی برابر و در خلاف جهت به نام نیروی کشش T وارد می‌کند. برای آن که شخص بتواند تعادل خود را حفظ کند، نیروی اصطکاک ایستایی از طرف سطح زمین بر شخص وارد می‌شود و شخص نیز این نیرو را علاوه بر وزن خود و وزن قلاب‌سنگ، به سطح زمین وارد می‌کند. بنابراین نیرویی که شخص به سطح زمین وارد می‌کند از $(m+M)g$ بیشتر است.

وقتی شخص به وزن Mg، جسمی به وزن mg در دست دارد. نیروی عمودی سطح بر او برابر مجموع وزن شخص و وزن جسم است:

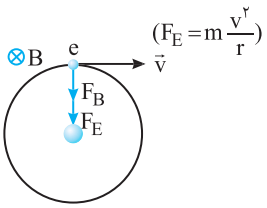
$$F_N=(M+m)g$$

C ۱۳۳۶ ۱

۱ سرعت در هر نقطه بر مسیر حرکت مماس است. در ابتدا تنها نیروی وارد به الکترون، نیروی ربایشی الکتریکی بین بار مثبت هسته و بار منفی الکترون است که نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند.

$$F_E=m\frac{v^2}{r}$$

۲ وقتی الکترون بین دو قطب آهن‌ربای الکتریکی قرار می‌گیرد بر آن نیروی مغناطیسی عمود بر مسیر حرکت وارد می‌شود.



۳ چهار انگشت باز دست راست خود را در جهت بردار سرعت به گونه‌ای قرار دهید که کف دست شما به سمت صفحهٔ کاغذ باشد در این صورت انگشت شست باز شما رو به بالای صفحه جهت نیرو را نشان می‌دهد اما الکترون دارای بار منفی است و نیروی F_B وارد بر الکترون رو به پایین و هم‌جهت نیروی ربایشی الکتریکی است.

۴ در این حالت برایند نیروی ربایشی الکتریکی و نیروی مغناطیسی نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند. $F=F_B+F_E$ یعنی نیروی مرکزگرا افزایش می‌یابد بنابراین، با ثابت بودن شعاع چرخش الکترون قطعاً تندی الکترون زیاد شده است.

$$F'=F_B+F_E=m\frac{v'^2}{r}\Rightarrow v'>v\ \text{الکترون}$$

B ۱۳۳۷ ۲

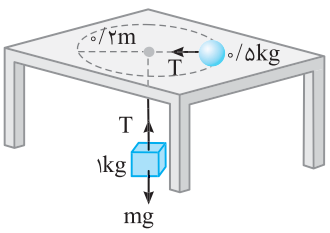
خط فکری وزنهٔ متصل به ریسمان در حالت قائم ساکن و در تعادل است نیروهای وارد بر آن را رسم می‌کنیم این نیروها متوازن هستند. (نیروی وزن - نیروی کشش نخ) نیروی کشش در طول یک ریسمان سبک، مقدار ثابتی است وزنهٔ روی میز دارای حرکت دایره‌ای است و نیروی کشش ریسمان وارد بر آن نیروی مرکزگرا است. اکنون هر جسم را جداگانه بررسی کنید.

نیروهای وارد بر وزنهٔ $1kg$ را رسم می‌کنیم، برای تعادل باید مجموع نیروها صفر باشد:

$$T=mg\Rightarrow T=10N$$

نیروی کشش نخ برای وزنهٔ نیم کیلوگرمی نیروی مرکزگرا است از این‌رو:

$$T=mr\frac{4\pi^2}{T^2}\Rightarrow10=0/5\times0/2\times\frac{4\pi^2}{T^2}\Rightarrow10=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{\pi}{5}s$$



B ۱۳۳۸ ۴

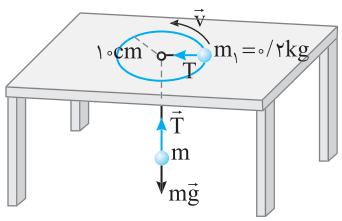
۱ نیروهای وارد بر وزنهٔ متصل به نخ قائم را رسم می‌کنیم. این نیروها متوازن هستند زیرا m در تعادل است.

$$T=mg\ (I)$$

۲ نیرویی که وزنه m_1 را روی سطح میز بر مسیر دایره‌ای نگه می‌دارد. همان نیروی کشش نخ است بنابراین می‌توان نوشت:

$$F=m\frac{v^2}{r}\Rightarrow T=m_1\frac{v^2}{r}\xrightarrow{(I)}mg=m_1\frac{v^2}{r}\xrightarrow[r=\frac{20}{2}=10cm]{v=2m/s}$$

$$m\times10=0/2(\frac{4}{0/1})\Rightarrow m=0/8kg\Rightarrow m=800g$$



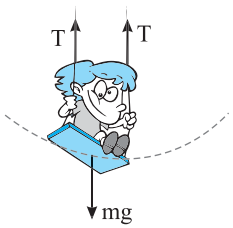
C ۱۳۳۹ ۱

نیروهای وارد بر تاب را رسم می‌کنیم:

۱ نیروی وزن $W=(m_{ش}+m_{تاب})g$ رو به پایین

۲ از طرف هر طناب یک نیروی کشش T رو به بالا

۳ نیروی خالص وارد بر شخص برابر است با: $F_{net}=2T-(m_{ش}+m_{تاب})g \quad (I)$



۴ شتاب حرکت سامانه برابر است با:

$$a=\frac{v^2}{\ell} \xrightarrow{v=5m/s,\ \ell=5m} a=\frac{25}{5}=5m/s^2$$

۵ بنا به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت:

$$F_{net}=ma \xrightarrow{(I)} 2T-(m_{ش}+m_{تاب})g=(m_{ش}+m_{تاب})a$$

$$\xrightarrow{T=300N,\ m_{تاب}=2kg} 600-(m_{ش}+2)\times10=(m_{ش}+2)\times5$$

$$\Rightarrow 600-10m_{ش}-20=5m_{ش}+10 \Rightarrow 570=15m_{ش} \Rightarrow m_{ش}=38kg$$

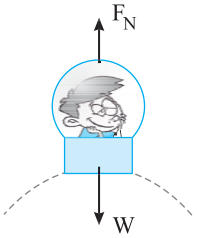
C ۱۳۴۰ ۱

خط فکری هر گاه خواستیم در یک نقطه از مسیر، متحرک را بررسی کنیم کافی است، نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده نیروی خالص وارد بر جسم را برابر ma قرار دهیم، البته در حرکت بر مسیر دایره‌ای به جای a مقدار $\frac{v^2}{r}$ را قرار می‌دهیم.

در بالاترین نقطهٔ مسیر دو نیرو بر شخص روی صندلی وارد می‌شود:

۱ نیروی وزن رو به پایین

۲ نیروی عمودی سطح رو به بالا



برایند این دو نیرو، نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کنند بنابراین:

$$F_{net}=ma \Rightarrow mg-F_N=ma \xrightarrow{m=50kg} 500-F_N=m\frac{v^2}{r}$$

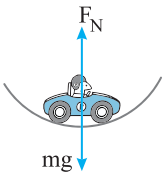
$$\xrightarrow{v=4m/s,\ r=10m} 500-F_N=50\frac{4^2}{10} \Rightarrow F_N=420N$$

B ۱۳۴۱ ۳

در هر سه حالت نیروهای وارد بر اتومبیل را رسم می‌کنیم:

۱ نیروی وزن ۲ نیروی عمودی سطح جاده

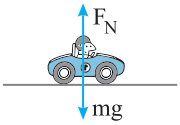
باید نیروی خالص وارد بر اتومبیل به گونه‌ای باشد که سبب شود اتومبیل روی مسیر دایره‌ای بالا برود. از طرف نیروی مرکزگرا باید به سوی مرکز مسیر باشد بنابراین، در پل مقعر خواهیم داشت:



$$F_N-mg=m\frac{v^2}{R} \Rightarrow F_N=m\frac{v^2}{R}+mg$$

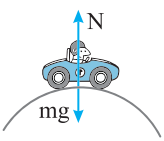
$$\Rightarrow F_N>mg$$

روی سطح افقی:



$$F_N=mg$$

روی سطح محدب، باید برایند نیروهای وارد بر اتومبیل به گونه‌ای باشد که سبب شود اتومبیل مسیر خمیده را طی کند بنابراین نیروی مرکزگرای وارد بر اتومبیل باید رو به پایین باشد.

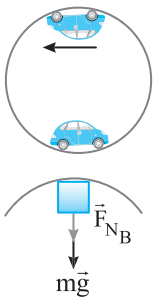


$$mg-F_N=m\frac{v^2}{R} \Rightarrow F_N=mg-m\frac{v^2}{R} \Rightarrow F_N<mg$$

B ۱۳۴۲ ۳

مخزن یک ماشین لباسشویی معمولی، در صفحهٔ قائم می‌چرخد و در هر نقطه از مسیر عموماً دو نیروی عمودی سطح و وزن بر لباس وارد می‌شود که برایند آن‌ها نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند.

B ۱۳۴۳ ۱



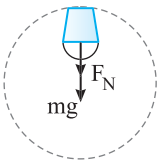
در بالاترین نقطهٔ مسیر نیروی وزن و نیروی عمودی سطح جاده بر ماشین رو به پایین وارد می‌شود و برایند این دو نیرو، نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{نیروی مرکزگرا}: F_{N_B}+mg=m\frac{v^2}{r}$$

$$\xrightarrow{m=1/5kg,\ v=12m/s,\ r=6m}$$

$$\Rightarrow F_{N_B}+15=1/5\times\frac{12\times12}{6} \Rightarrow F_{N_B}=21N$$

C ۱۳۴۴ ۳



۱ در بالاترین نقطهٔ مسیر دو نیرو بر آب درون سطل وارد می‌شود

۱- نیروی وزن رو به پایین (mg)

۲- نیروی عمودی سطح (F_N) رو به پایین

۲ نیروی خالص وارد بر آب رو به پایین است و شتاب حاصل از آن نیز رو به پایین خواهد بود. بنا بر قانون دوم نیوتون می توان نوشت:

$$F_{net}=ma \Rightarrow F_N+mg=ma \Rightarrow a=\frac{F_N}{m}+g \Rightarrow a>g$$

اگر در حالت خاصی $F_N=0$ شود تنها نیروی وارد بر جسم، نیروی وزن خواهد بود و شتاب $a=g$ می‌شود.

بازی با سوال **شخصی دستگیرهٔ یک سطل پر از آب را گرفته و آن را دور یک دایرهٔ عمودی به شعاع $90cm$ و با سرعت می‌چرخاند. حداقل سرعت چند متر بر ثانیه باشد تا در بالاترین نقطهٔ مسیر، آب از سطل سرازیر نشود؟** $(g=10m/s^2)$

کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۹ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) ۴/۵

پاسخ **وقتی سرعت در بالاترین نقطهٔ مسیر دایره‌ای در صفحهٔ قائم، کم‌ترین مقدار باشد و جسم بر مسیر باقی بماند، نیروی وزن به تنهایی نیروی مرکزگرا می‌باشد.**



$$mg=m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2=rg \Rightarrow v=\sqrt{rg}$$

$$\Rightarrow v=\sqrt{0/9\times10} \Rightarrow v=3m/s$$

گزینهٔ ۲

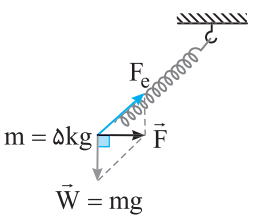
C ۱۳۴۵ ۱

خط فکری وقتی در یک تاکسی نشسته‌اید و تاکسی مسیر دایره‌ای را دور می‌زند، اگر از آینهٔ جلوی تاکسی، عروسک کوچکی آویزان باشد، عروسک از راستای قائم منحرف می‌شود و به همراه تاکسی، مسیر را دور می‌زند.

در اینجا نیز وقتی واگن مسیر دایره‌ای را طی می‌کند، جسم متصل به نیروسنج به سمت خارج پیچ منحرف می‌شود. در این حالت دو نیرو بر جسم وارد می‌شود، یکی نیروی وزن (W) و دیگری نیروی کشسانی فنر و برایند این دو نیرو، نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند.

۱ نیروی وزن را حساب می‌کنیم $W=mg\Rightarrow W=۵۰N$

۲ نیروی خالص یعنی نیروی مرکزگرای وارد بر جسم را به‌دست می‌آوریم.



$$F=m\frac{v^۲}{r}\xrightarrow[r=۸۰m]{v=۷۲km/h=۲۰m/s}F=۵\times\frac{(۲۰)^۲}{۸۰}\Rightarrow F=۲۵N$$

۳ بنا به رابطهٔ فیثاغورس خواهیم داشت: $F_e^۲=F^۲+W^۲=F_e^۲=(۲۵)^۲+(۵۰)^۲\Rightarrow F_e=۲۵\sqrt{۵}N$

B ۱۳۴۶ ۱

وقتی چرخ A یکنواخت می‌چرخد، باعث حرکت تسمه می‌شود. اگر نقطه‌های واقع بر محیط چرخ A دارای تندی v باشند، نقاط تسمه نیز با همین تندی حرکت می‌کند و این تندی را به نقطه‌های واقع بر محیط چرخ B نیز منتقل می‌کند. بنابراین تندی نقطه‌های واقع بر محیط چرخ A و تندی نقطه‌های واقع بر محیط چرخ B با هم برابر است.

$$v_A=v_B\Rightarrow\frac{۲\pi R_A}{T_A}=\frac{۲\pi R_B}{T_B}\Rightarrow\frac{T_A}{T_B}=\frac{R_A}{R_B}\Rightarrow\frac{T_A}{T_B}=\frac{۱}{۲}$$

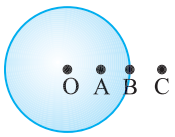
بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

B ۱۳۴۷ ۲

زمین کرهٔ کامل نیست و شعاع استوایی آن از شعاع قطبی‌اش بیشتر است، بنابراین میدان گرانشی در استوا از میدان گرانشی در قطب کمتر است.

B ۱۳۴۸ ۳

برای یافتن g در خارج از سیاره، بنابر رابطهٔ $g=G\frac{M}{r^۲}$ هرچه r بزرگ‌تر باشد، g کوچک‌تر است (r فاصله از مرکز سیاره است)، بنابراین نقطهٔ C پاسخ این پرسش نیست.



اگر با همان رابطه و با فرض آن‌که تمام جرم سیاره در مرکز آن (O) است، به بررسی مسأله بپردازیم، به خطا خواهیم رفت و میدان گرانش در نقطهٔ A بزرگ‌تر از میدان گرانش در نقطهٔ B خواهد شد. این را بدانید که همواره بزرگی میدان گرانشی در سطح آن از بقیهٔ نقاط بیشتر است و نقطهٔ B پاسخ این پرسش است.

حال با یک ساده‌نگری عمومی برای نقاط درون سیاره، یک رابطهٔ بسیار تقریبی به‌دست می‌آوریم. می‌دانیم که: $g=G\frac{M}{R^۲}$

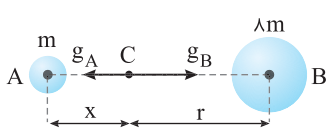
اگر صورت و مخرج را در مقدار ثابت $\frac{۴}{۳}\pi R$ (با فرض کرهٔ کامل بودن سیاره) ضرب کنیم، داریم: $g=\frac{۴}{۳}\pi R\frac{GM}{\frac{۴}{۳}\pi R^۳}=\frac{۴}{۳}R\pi G\frac{M}{V}\Rightarrow g=\frac{۴}{۳}R\pi G\bar{\rho}$

بر مبنای این رابطه و با فرض ثابت بودن چگالی، هر چه R (فاصله از مرکز سیاره) کمتر باشد، g کوچک‌تر است و در نقطهٔ O، g برابر صفر است.

C ۱۳۴۹ ۲

میدان گرانش خالص، حاصل از میدان گرانش دو سیاره است. میدان گرانش دو سیاره در نقطهٔ C در خلاف جهت هم هستند و برایند آن‌ها از تفاضل آن‌ها به دست می‌آید:

$g_{net}=|g_B-g_A|$



بنا به فرض مسئله خواهیم داشت: $g_{net}=g_A\Rightarrow g_B-g_A=g_A\Rightarrow g_B=۲g_A$

اکنون به جای g از رابطهٔ $g=G\frac{M}{r^۲}$ قرار می‌دهیم:

$$G\frac{۸m}{r^۲}=۲G\frac{m}{x^۲}\Rightarrow\frac{x^۲}{r^۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{x}{r}=\frac{۱}{۲}$$

C ۱۳۵۰ ۲

نکته هرگاه مجموع دو عدد مقدار ثابتی باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی بیشینه است که دو عدد با هم برابر باشند.

در رابطهٔ نیروی گرانش $F=G\frac{m_۱m_۲}{r^۲}$ با حاصلضرب جرم سر و کار داریم و اینکه قرار است بخشی از جرم جسم سنگین‌تر به جسم سبک‌تر منتقل شده پس مجموع جرم دو جسم $m_۱+m_۲$ ثابت است بنابراین با توجه به این نکته برای اینکه نیروی گرانش بیشینه شود، باید جرم دو جسم $m_۱$ و $m_۲$ با هم برابر شود، پس جرم ثانویهٔ اجسام برابر میانگین جرم اولیه آن‌ها خواهد بود:

$$m'_۱=m'_۲=\frac{m_۱+m_۲}{۲}\Rightarrow m'_۱=m'_۲=\frac{m+۲m}{۲}\Rightarrow m'_۱=m'_۲=۱/۵m$$

جرم جسم سنگین‌تر از ۲m به ۱/۵m رسیده:

$$\text{درصد تغییرات جرم}=\frac{\Delta m}{۲m}\times۱۰۰\Rightarrow\text{درصد تغییرات جرم}=\frac{۱/۵m-۲m}{۲m}\times۱۰۰$$

$$\Rightarrow\text{درصد تغییرات جرم}=-\frac{۱}{۴}\times۱۰۰=-۲۵٪$$

۲۵ درصد از جرم جسم سنگین‌تر کاهش یافته است.

C ۱۳۵۱ ۲

خط فکری مسئلهٔ جالبی است. در حل آن باید به گزینه‌ها دقت کنید زیرا در بعضی از گزینه‌ها دوره برحسب شعاع مدار حرکت ماهواره (r) داده شده است. از طرفی در تمام گزینه‌ها در فرمول‌ها شتاب گرانش (g) حضور دارد بنابراین شما باید r و g را در رابطهٔ نهایی داشته باشید.

۱ نیروی گرانش بین زمین و ماهواره، نیروی مرکزگرای چرخش ماهواره را تأمین می‌کند. از این‌رو:

$$F=G\frac{M_em}{r^۲}=mr\frac{۴\pi^۲}{T^۲}\Rightarrow\frac{GM_e}{r^۳}=\frac{۴\pi^۲}{T^۲}\Rightarrow T=۲\pi\sqrt{\frac{r^۳}{GM_e}}\quad(I)$$

۲ حال به سراغ حذف GM_e و جایگزینی آن می‌رویم. با توجه به رابطهٔ شتاب گرانش خواهیم داشت: $g=G\frac{M_e}{R_e^۲}\Rightarrow GM_e=R_e^۲g\quad(II)$

۳ از رابطهٔ (II) در رابطهٔ (I) جای‌گذاری می‌کنیم.

۴ با توجه به فرض مسئله

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{r^۳}{R_e^۲g}}\ ,\ r=R_e+h\xrightarrow{h=R_e}r=۲R_e\Rightarrow R_e=\frac{r}{۲}$$

۵ جای‌گذاری نهایی:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{r^۳}{(\frac{r}{۲})^۲g}}\Rightarrow T=۲\pi\sqrt{\frac{۴r}{g}}\Rightarrow T=۴\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

پنجره تودرتو (آزمون فصل)

A ۱۳۵۱ ۳

۱ نیروی وزن نیرویی است که کرهٔ زمین بر سیب وارد می‌کند و واکنش آن نیز نیرویی است که سیب بر کرهٔ زمین وارد می‌کند. گزارهٔ (الف) نادرست است. با جدا شدن سیب از درخت علاوه بر نیروی وزن که توسط زمین به سیب وارد می‌شود، مقاومت هوا نیز رو به بالا در خلاف جهت سقوط سیب وارد می‌شود و گزارهٔ (ب) درست است. وقتی که سیب به شاخه متصل و ساکن است نیروهای وارد بر آن متوازن هستند و نیروی خالص وارد بر سیب صفر است و گزارهٔ (پ) درست است.

نمای ۳

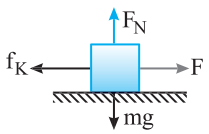
A ۱۳۵۱ ۱

۲ مقاومت شاره (هوا) به ابعاد جسم و همچنین تندی جسم بستگی دارد و هرچه ابعاد جسم در برخورد با هوا بزرگ‌تر باشد و تندی جسم بیشتر باشد، مقاومت هوا نیز بیشتر می‌شود.

نمای ۸

۲ ۱۳۵۱ B

۳ به جسم نیروی افقی ۳۰N وارد می‌شود اما سرعت جسم ثابت است یعنی نیروی خالص وارد بر جسم صفر است. بنابراین سطح دارای اصطکاک است و اصطکاک جنبشی آن برابر است با:



$$f_k = F \Rightarrow f_k = 30N$$

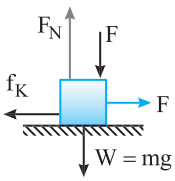
اگر قطعه چوبی مشابه را روی چوب اول قرار دهید، نیروی عمودی سطح دو برابر حالت اول می‌شود. $F'_N = 2mg$ بنابراین نیروی اصطکاک $(f_k = \mu_k F_N)$ نیز دو برابر می‌شود $f'_k = 2\times 30 = 60N$. برای آنکه مجموعه با سرعت ثابت حرکت کند نیرویی که به آن وارد می‌شود برابر است با:

$$F' = f'_k \Rightarrow F' = 60N$$

نمای ۱۷

۴ ۱۳۵۱ B

نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. ابتدا جسم دارای سرعت ثابت است و تمام نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند. از این رو می‌توان نوشت:



$$F_{net_y} = 0 \Rightarrow F + W = F_N$$

$$F_{net_x} = 0 \Rightarrow F = f_k$$

نیروی اصطکاک خواهد شد:

$$f_k = \mu_k F_N \Rightarrow f_k = \mu_k (F + W)$$

با افزایش F نیروی عمودی F_N افزایش یافته و سبب افزایش نیروی اصطکاک می‌شود.

$$\uparrow f_k = \mu_k (\uparrow F + W)$$

اما افزایش نیروی افقی F از افزایش f_k بیشتر است که سبب می‌گردد جسم با شتاب بر سرعتش افزوده شود.

برای توضیح بیشتر دقت کنید:

اگر F دو برابر شود، نیروی اصطکاک افزایش می‌یابد اما دو برابر نمی‌شود.

$$\frac{f'_k}{f_k} = \frac{\mu_k (F' + W)}{\mu_k (F + W)} = \frac{(2F + W)}{F + W} = \frac{F + F + W}{F + W} = 1 + \frac{F}{F + W}$$

کوچکتر از ۱ است

$$\Rightarrow \frac{f'_k}{f_k} < 2$$

بنابراین نیروی حرکت‌دهنده ۲ برابر شده اما نیروی مخالف حرکت کمتر از دو برابر است. یعنی $F' > f'_k$ بوده و جسم با شتاب شروع به حرکت می‌کند.

نمای ۱۷

۵ ۱۳۵۱ B

به چه فکر می‌کنید؟ بر شخص سه نیرو وارد می‌شود یکی وزن و دو تای دیگر کشش نخ. شخص روی طناب ایستاده و ساکن است بنابراین این نیروها متوازن هستند. وقتی برایند سه نیرو صفر می‌شود که برایند دو تا از آن‌ها هم‌اندازه و مخالف سومی باشد. در نتیجه باید برایند T_1 و T_2 برابر W یعنی ۸۰۰ باشد:

$$\vec{F}_{net} = 0 \Rightarrow \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{W} = 0 \Rightarrow (\vec{T}_1 + \vec{T}_2) = -\vec{W} \Rightarrow |\vec{T}_1 + \vec{T}_2| = |\vec{W}| = 800N$$

نمای ۲۰

۶ ۱۳۵۱ B

خط فکری ابتدا به کمک رابطهٔ حجم کره و همچنین تعریف چگالی، نسبت جرم‌ها را به‌دست می‌آوریم. سپس به کمک رابطهٔ میدان گرانش $(g = G\frac{M}{r^2})$ نسبت $\frac{g_A}{g_B}$ را حساب می‌کنیم.

۱ شعاع سیارهٔ A دو برابر شعاع سیارهٔ B است. حجم کره از رابطهٔ $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ به دست می‌آید.

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_A^3}{\frac{4}{3}\pi R_B^3} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \left(\frac{R_A}{R_B}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = (2)^3 \Rightarrow V_A = 8V_B \quad (I)$$

۲ به کمک چگالی $\rho = m/V$، نسبت جرم‌ها را حساب می‌کنیم.

$$\frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{\frac{M_A}{V_A}}{\frac{M_B}{V_B}} \Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{M_A}{M_B}\times\frac{V_B}{V_A} \xrightarrow[(I)]{\rho_A = \frac{1}{3}\rho_B} \frac{1}{3} = \frac{M_A}{M_B}\times\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow M_A = \frac{8}{3}M_B$$

۳ حال می‌توان با توجه به رابطهٔ $g = G\frac{M}{R^2}$، نسبت $\frac{g_A}{g_B}$ را به دست آورد:

$$\frac{g_A}{g_B} = \frac{G\frac{M_A}{R_A^2}}{G\frac{M_B}{R_B^2}} \Rightarrow \frac{M_A}{M_B}\times\frac{R_B^2}{R_A^2} = \frac{8}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

نمای ۲۹ و ۳۵

۷ ۱۳۵۱ B

خط فکری نیروی گرانش سیاره وارد بر ماهواره‌ای که به گرد آن می‌چرخد، نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره است. بنابراین نیروی گرانش را برابر نیروی مرکزگرا $F = mr(\frac{2\pi}{T})^2$ قرار می‌دهیم و دورهٔ حرکت هر ماهواره به گرد سیاره را حساب می‌کنیم، سپس نسبت دوره‌ها را به دست می‌آوریم.

دورهٔ حرکت ماهواره به دور زمین:

$$F_G = F \Rightarrow G\frac{M_z m}{r_1^2} = mr_1\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 \Rightarrow T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{r_1^3}{GM_z}}$$

دورهٔ حرکت ماهواره به دور مشتری:

$$F_G = F \Rightarrow G\frac{M_م m}{r_2^2} = mr_2\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 \Rightarrow T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{r_2^3}{GM_م}}$$

نسبت $\frac{T_1}{T_2}$ خواهد شد:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{r_1^3}{GM_z}}}{2\pi\sqrt{\frac{r_2^3}{GM_م}}} = \sqrt{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3}\times\sqrt{\frac{M_م}{M_z}} \xrightarrow[r_2 = 2r_1]{M_م = 320M_z} \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^3}\times\sqrt{320} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

نمای ۳۶

۸ ۱۳۵۱ A

اگر جهت حرکت اولیهٔ جسم را مثبت فرض کنیم، تکانهٔ جسم $P_1 = 45kgm/s$ خواهد بود و وقتی که سرعت جسم $\frac{1}{5}$ مقدار اولیه می‌شود تکانهٔ جسم نیز که با سرعت رابطهٔ مستقیم دارد $(P = mv)$ نیز $\frac{1}{5}$ می‌شود و چون در خلاف جهت حرکت اولیهٔ جسم است، در این صورت $P_2 = -\frac{1}{5}\times 45 = -9kgm/s$ خواهد بود. با توجه به رابطهٔ نیرو با آهنگ تغییر تکانه، نیروی F را حساب می‌کنیم.

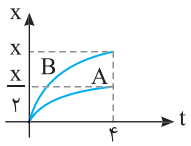
$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t = 2s} |F| = \left|\frac{-9 - 45}{2}\right| \Rightarrow |F| = \left|-\frac{54}{2}\right| = 27N$$

نمای ۲۴

B ۱۳۵۱ ۲

۹ **نکته** هرگاه جسمی را روی سطحی پرتاب می‌کنیم نیروی جلوبر صفر است.

هنگامی که جسم روی سطح افقی پرتاب می‌شود نیروی خالص وارد بر جسم نیروی اصطکاک است بنابراین نیروی وارد بر جسم در دو حالت ثابت و شتاب حرکت ثابت است و به کمک روابط حرکت‌شناسی می‌توان نسبت $\frac{v_{\circ B}}{v_{\circ A}}$ را به‌دست آورد.



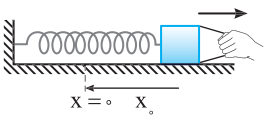
رابطهٔ مستقل از شتاب را برای دو جسم نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v+v_\circ}{2}\Delta t \xrightarrow{B} x=\frac{\circ+v_{\circ B}}{2}\times 4\Rightarrow v_{\circ B}=\frac{x}{2}$$
$$\xrightarrow{A} \frac{x}{2}=\frac{\circ+v_{\circ A}}{2}\times 4\Rightarrow v_{\circ A}=\frac{x}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{v_{\circ B}}{v_{\circ A}}=2$$

نمای ۱۷

A ۱۳۵۱ ۱

۱۰ وقتی جعبه رها می‌شود تنها نیروی وارد بر آن نیروی کشسانی فنر است که بنا به قانون هوک اندازهٔ این نیرو $F=kx$ بوده که در آن x فاصله از طول طبیعی (اولیه) فنر است. بنا به قانون دوم نیوتون می‌نویسیم: $F_{net}=ma\Rightarrow kx=ma\Rightarrow a=\frac{k}{m}x$



در این صورت شتاب با تغییر طول متناسب است و تابع آن درجه اول بوده و نمودار آن خط راست است. در حالتی که $x=\circ$ است شتاب نیز صفر و در حالتی که $x=x_\circ$ است شتاب بیشترین مقدار است بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

نمای ۱۱

C ۱۳۵۱ ۱

۱۱ **خط فکری** در دو حالت ممکن است اندازهٔ شتاب حرکت یکسان باشد یک بار وقتی که $F_e>W$ و بار دیگر $F_e<W$ باشد به گونه‌ای که F_e-W هم‌اندازهٔ $W-F_e$ شود. بنابراین شما باید این دو حالت را بررسی کنید.



تغییر طول در هر دو حالت به‌ترتیب ۴۰cm و ۶۰cm شده است. تغییر طول ۴۰cm برای هنگامی است که نیروی کشسانی فنر از نیروی وزن کمتر است و تغییر طول ۶۰cm برای هنگامی که نیروی کشسانی فنر از نیروی وزن بیشتر است.

ابتدا $F_e<mg$ و سپس $F_e>mg$ را در نظر می‌گیریم و قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} mg-F_e=ma \\ F_e'-mg=ma \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} F_e=m(g-a) \\ F_e'=m(g+a) \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} k(\circ/4)=m(g-a) \\ k(\circ/6)=m(g+a) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{g-a}{g+a}\Rightarrow 2g+2a=3g-3a\Rightarrow 5a=g\Rightarrow a=\frac{g}{5}$$

نمای ۲۲

B ۱۳۵۱ ۳

۱۲ **خط فکری** از آخر مسئله شروع کنید. جسم M در آستانهٔ حرکت قرار گیرد یعنی آن قدر جرم m زیاد شود که جسم M در آستانهٔ حرکت رو به پایین قرار گیرد. بنابراین نیروی اصطکاک $f_{s_{max}}$ رو به بالا بر M وارد می‌شود. نیروی F را به شکل دو مؤلفه‌اش نشان می‌دهیم. نیروهای وارد بر جسم M متوازن هستند. اکنون مسئله را حل می‌کنیم.

۱ نیروها را رسم می‌کنیم.

۲ نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم.

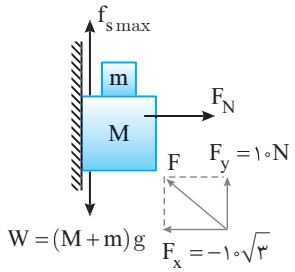
$$F_{net_x}=\circ\Rightarrow F_N=f_k\Rightarrow F_N=10\sqrt{3}N$$

۳ اصطکاک آستانهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$f_{s_{max}}=\mu_s F_N \xrightarrow{\mu_s=\frac{\sqrt{3}}{3}} f_{s_{max}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 10\sqrt{3}\Rightarrow f_{s_{max}}=10N$$

۴ نیروهای وارد بر جسم در امتداد قائم نیز متوازن هستند. از این رو خواهیم داشت:

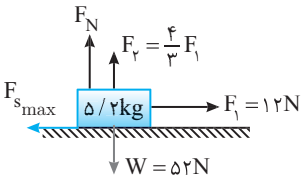
$$F_{net_y}=\circ\Rightarrow W-f_{s_{max}}-F_y=\circ\Rightarrow (M+m)g=f_{s_{max}}+F_y$$
$$\Rightarrow (1/5+m)\times 10=10+10\Rightarrow m=\circ/5kg\Rightarrow m=500g$$



نمای ۱۸

B ۱۳۵۱ ۲

۱۳ ۱ نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم.



۲ وقتی نیروی $F_1=12N$ می‌شود نیروی F_2 خواهد شد:

$$F_2=\frac{4}{3}F_1=\frac{4}{3}\times 12\Rightarrow F_2=16N$$

۳ نیروی عمودی سطح را حساب می‌کنیم.

$$F_{net_y}=\circ\Rightarrow F_N+F_2=W\Rightarrow F_N=W-F_2\Rightarrow F_N=52-16\Rightarrow F_N=36N$$

۴ هنگامی که $F=12N$ می‌شود، در این حالت جسم شروع به حرکت می‌کند یعنی بنابراین: $F=f_{s\,max}$

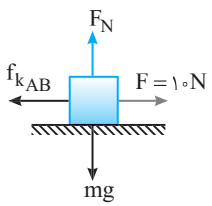
$$F=f_{s\,max}\Rightarrow F=\mu_s F_N\Rightarrow 12=\mu_s\times 36\Rightarrow \mu_s=\frac{1}{3}$$

نمای ۱۷

B ۱۳۵۱ ۳

۱۴ **خط فکری** آهنگ تغییر سرعت همان شتاب است. اگر جهت حرکت را مثبت فرض کنیم در مسیر AB شتاب $a_{AB}=+4m/s^2$ و در مسیر BC شتاب $a_{BC}=-2m/s^2$ است. قانون دوم نیوتون را در هر مسیر می‌نویسیم و ضریب اصطکاک را حساب می‌کنیم.

۱ در مسیر AB:



$$F_{net}=ma_{AB}\Rightarrow F-f_{k_{AB}}=ma_{AB}$$
$$\Rightarrow 10-f_{k_{AB}}=m\times 4$$
$$\Rightarrow 10=\mu_{k_{AB}}mg+m\times 4$$
$$\Rightarrow 10=\mu_{k_{AB}}m\times 10+4m$$
$$\Rightarrow 10=m(10\mu_{k_{AB}}+4)\quad (I)$$

۲ در مسیر BC:

$$F_{net}=ma_{BC}\Rightarrow 10-f_{k_{BC}}=m\times(-2)\Rightarrow 10=\mu_{k_{BC}}mg-2m$$
$$\Rightarrow 10=m(10\mu_{k_{BC}}-2)\quad (II)$$

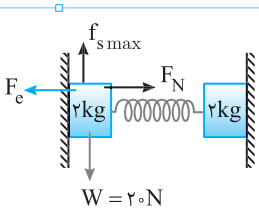
۳ سمت چپ دو رابطهٔ (I) و (II) یکسان است، سمت راست آن‌ها را برابر قرار می‌دهیم.

$$10\mu_{k_{AB}}+4=10\mu_{k_{BC}}-2\Rightarrow 10(\mu_{k_{BC}}-\mu_{k_{AB}})=6\Rightarrow \mu_{k_{BC}}-\mu_{k_{AB}}=\circ/6$$

نمای ۱۷

B ۱۳۵۱ ۱

۱۵ **خط فکری** نیازی به بررسی هر دو جسم نیست. یکی از وزنه‌ها را در نظر می‌گیریم و نیروهای وارد بر آن را رسم می‌کنیم. جسم ساکن است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند.



یادآوری یک فنر سبک و همگن نیروی کشسانی یکسانی به دو انتهای خود وارد می‌کند. قرار است که طول فنر کمینه تغییر را داشته باشد و نیروی کشسانی فنر که به وزنه‌ها وارد می‌شود کمینه باشد. یعنی اگر نیروی کشسانی کمتر از آن شود، جسم‌ها به پایین بلغزند بنابراین وزنه‌ها در آستانهٔ حرکت رو به پایین بوده و اصطکاک بیشینه $(f_{s_{max}})$ است. با این اطلاعات مسئله را حل می‌کنیم.

۱ نیروی وزن و نیروی اصطکاک متوازن هستند. $f_{s_{max}}=W\Rightarrow f_{s_{max}}=۲۰N$

۲ نیروی عمودی سطح را به‌دست می‌آوریم:

$$f_{s_{max}}=\mu_s F_N \xrightarrow{\mu_s=۰/۴} ۲۰=۰/۴F_N\Rightarrow F_N=۵۰N$$

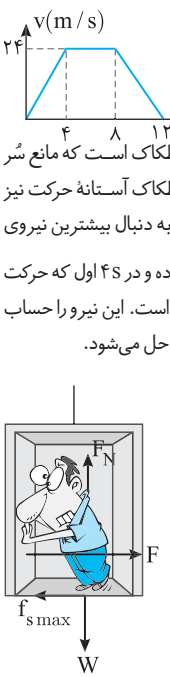
۳ نیروی کشسانی فنر و نیروی عمودی سطح متوازن هستند.

$$F_e=F_N\Rightarrow kx=۵۰\xrightarrow{k=۲۰۰N/m}۲۰۰x=۵۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}m=۲۵cm$$

نمای ۱۸

C ۲ ۱۳۵۱

خط فکری ۱۶ اولین سؤالی که از خود می‌پرسیم این است که چرا با هُل دادن دیوار آسانسور شخص باید لیز بخورد؟ زیرا وقتی شخص به دیواره نیروی F را وارد می‌کند، دیواره نیز به شخص نیروی F را در خلاف جهت وارد می‌کند و این اصطکاک است که مانع سُر خوردن شخص می‌شود. بیشترین نیروی F یعنی اینکه اصطکاک آستانهٔ حرکت نیز بیشترین مقدار را داشته باشد $(f_{s_{max}}=\mu_s F_N)$ بنابراین باید به دنبال بیشترین نیروی عمودی سطح بگردیم. آسانسور از حال سکون رو به بالا حرکت کرده و در ۴s اول که حرکت آن تندشونده رو به بالاست، نیروی عمودی سطح بیشترین مقدار است. این نیرو را حساب می‌کنیم و نیروی $f_{s_{max}}$ را به‌دست می‌آوریم. با این کار مسئله حل می‌شود.



۱ نیروهای وارد بر شخص را رسم می‌کنیم.

۲ از نمودار شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۲۴-۰}{۴-۰}\Rightarrow a=۶m/s^۲$$

۳ نیروی عمودی سطح در این حالت خواهد شد:

$$F_{net}=ma\Rightarrow$$

$$F_N-mg=ma\xrightarrow{m=۶۰kg}F_N-۶۰۰=۶۰\times۶\Rightarrow$$

$$F_N=۹۶۰N$$

۴ نیروی اصطکاک را حساب می‌کنیم.

$$f_{s_{max}}=\mu_s F_N\xrightarrow{\mu_s=۰/۵}f_{s_{max}}=۰/۵\times۹۶۰\Rightarrow f_{s_{max}}=۴۸۰N$$

۵ در این صورت بیشینه مقدار F خواهد شد:

$$F_{net_x}=۰\Rightarrow F_{max}=f_{s_{max}}\Rightarrow F_{max}=۴۸۰N$$

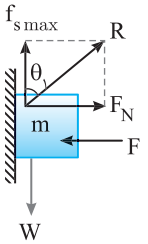
نمای ۲۲-۱

C ۲ ۱۳۵۱

۱۷ حالت اول: جسم در آستانهٔ حرکت رو به پایین قرار دارد و نیروهای آن متوازن هستند.

$$F_{net_x}=۰\Rightarrow F_N=F$$

$$F_{net_y}=۰\Rightarrow f_{s_{max}}=W$$



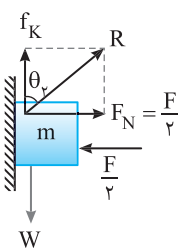
زاویهٔ بین نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند با جهت مثبت محور y خواهد شد:

$$\tan\theta_۱=\frac{F_N}{f_{s_{max}}}\Rightarrow\tan\theta_۱=\frac{F}{W}$$

حالت دوم: جسم با سرعت ثابت به پایین می‌لغزد و نیروهای آن متوازن هستند.

$$F_{net_x}=۰\Rightarrow F'_N=\frac{F}{۲}$$

$$F_{net_y}=۰\Rightarrow f_k=W$$



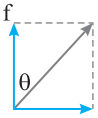
زاویهٔ بین نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند با جهت مثبت محور yها را به‌دست می‌آوریم.

$$\tan\theta_۲=\frac{F_N}{f_k}=\frac{\frac{F}{۲}}{W}\Rightarrow\tan\theta_۲=\frac{۱}{۲}\frac{F}{W}$$

در نتیجه:

$$\tan\theta_۲<\tan\theta_۱\Rightarrow\theta_۲<\theta_۱$$

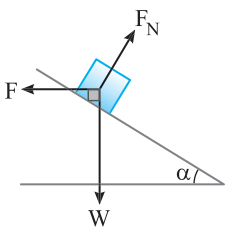
اگر خوب دقت کنید نیاز به این همه محاسبه نیست، با کوچک شدن F_N قطعاً زاویهٔ θ کوچک می‌شود.



نمای ۱۹

B ۲ ۱۳۵۱

خط فکری ۱۸ شکل مسئله شما را نگران نکند. کافی است نیروهای وارد بر جسم را رسم کنید. جسم در تعادل است و نیروهای وارد بر آن متوازن هستند.



بر جسم سه نیرو وارد می‌شود ۱- نیروی وزن $W=۱۰N$ ۲- نیروی افقی $F=۱۰N$ ۳- نیروی عمودی سطح

نکته هرگاه برایند سه نیرو صفر شود، برایند هر دو نیروی دلخواه از آن‌ها هم‌اندازه و در خلاف جهت نیروی سوم است.

نیروی F_N برایند دو نیروی عمود بر هم F و W بوده و به کمک رابطهٔ فیثاغورس F_N را می‌توان به‌دست آورد.

$$F_N^۲=F^۲+W^۲\Rightarrow F_N^۲=(۱۰)^۲+(۱۰)^۲\Rightarrow F_N=۱۰\sqrt{۲}N$$

نمای ۲۱

B ۳ ۱۳۵۱

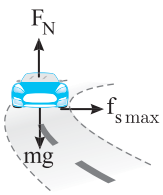
۱۹ نیروی کشش نخ، نیروی مرکزگرا است. بنابراین:

$$F=m\frac{v^۲}{r},T=m\frac{v^۲}{\ell},T'=m\frac{(۲v)^۲}{\frac{\ell}{۲}},\frac{T'}{T}=۸$$

نمای ۳۳

B ۲ ۱۳۵۱

خط فکری ۲۰ در حرکت دایره‌ای یکنواخت اتومبیل روی سطح افقی، نیروی مرکزگرا، نیروی اصطکاک است و حداکثر سرعت، برای اینکه اتومبیل نلغزد برای زمانی است که نیروی اصطکاک وارد بر اتومبیل نیز بیشینه باشد:



نیروی اصطکاک بیشینه را حساب می‌کنیم:

$$f_{s_{max}}=\mu_s F_N\xrightarrow{F_N=mg}$$

$$f_{s_{max}}=۰/۵\times(۱۲۰۰۰)$$

$$\Rightarrow f_{s_{max}}=۶۰۰۰N$$

که این نیروی اصطکاک، نیروی مرکزگرا است.

نمای ۳۳

پنجره‌ای رو به گذشته

B ۳ ۱۳۵۲

خط فکری ۱ انرژی جنبشی یک جسم به جرم m که با سرعت v در حرکت است برابر $K=\frac{۱}{۲}mv^۲$ است، بنابراین شما باید سرعت متحرک را در جابه‌جایی ۱۰m حساب کرده و انرژی جنبشی را به‌دست بیاورید.

۱ جابه‌جایی جسم تا $x=۱۰m$ برای $\Delta x=۱۰-۰=۱۰m$ می‌باشد و شتاب آن برابر $۲m/s^۲$ است. به کمک معادل مستقل از زمان سرعت را به‌دست می‌آوریم.

$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲ax\xrightarrow{v_۱=۰}v_۲^۲=۲\times۲\times۱۰\Rightarrow v_۲^۲=۴۰m^۲/s^۲$$

۲ انرژی جنبشی برابر است با:

$$K=\frac{۱}{۲}mv_۲^۲=\frac{۱}{۲}\times۴\times۴۰=۸۰J$$

بازی با سؤال جسمی به جرم $5kg$ روی سطح افقی با شتاب ثابت $2m/s^2$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. پس از چند ثانیه انرژی جنبشی آن به $250J$ می‌رسد؟ مشابه ریاضی - ۹۰

۱) ۲/۵ ۲) ۵ ۳) ۷/۵ ۴) ۱۰

پاسخ ابتدا سرعت لازم برای آنکه انرژی جنبشی جسم $250J$ شود را به‌دست می‌آوریم.

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow 250=\frac{1}{2}\times 5\times v^2\Rightarrow v=10\,m/s$$

زمان لازم برای آنکه سرعت جسم با شتاب ثابت $2m/s^2$ از صفر به $10m/s$ برسد برابر است با:

$$v=at+v_0\Rightarrow 10=2t+0\Rightarrow t=5s$$

گزینهٔ ۲

A ۱۳۵۲ ۱

یادآوری انرژی جنبشی از رابطهٔ $K=\frac{1}{2}mv^2$ به‌دست می‌آید که در آن m جرم جسم و v تندی جسم است.

ابتدا تندی جسم در $t=5s$ را به کمک انرژی جنبشی به‌دست می‌آوریم:

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow 40=\frac{1}{2}\times 5\times v^2\Rightarrow v^2=16\Rightarrow v=4m/s$$

شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{4-0}{5}=0/8m/s^2$$

نیروی وارد بر جسم خواهد شد:

$$F=ma\Rightarrow F=5\times 0/8\Rightarrow F=4N$$

بازی با سؤال جسمی به جرم $3kg$ تحت تأثیر نیروی $9N$ از حال سکون به حرکت در می‌آید. انرژی جنبشی جسم در $t=3s$ چند برابر $t=2s$ است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۲

پاسخ ابتدا شتاب را به‌دست می‌آوریم: $F=ma\Rightarrow 9=3a\Rightarrow a=3m/s^2$

جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده پس سرعت در $t=3s$ و $t=2s$ برابر است با:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=3t\ ,\ t=2s\Rightarrow v_1=6m/s\ ,\ t=3s\Rightarrow v_2=9m/s$$

اکنون انرژی جنبشی $K=\frac{1}{2}mv^2$ را در دو حالت به دست آورده و بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{K_2}{K_1}=\frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{1}{2}mv_1^2}=\frac{81}{36}=\frac{9}{4}=2/25$$

گزینهٔ ۲

A ۱۳۵۲ ۲

خط فکری ۳

نیروی وارد بر دو جسم برابر است و از ما نسبت انرژی جنبشی دو جسم خواسته شده است. بنابراین باید ابتدا نسبت سرعت‌های آن‌ها را به‌دست بیاوریم.

۱ نیروی وارد بر دو جسم برابر است و بنا به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_1=F_2\Rightarrow m_1a_1=m_2a_2\xrightarrow{m_1=4kg\,,\,m_2=5kg}4a_1=5a_2\Rightarrow a_1=\frac{5}{4}a_2$$

۲ نسبت سرعت دو جسم پس از t ثانیه خواهد شد:

$$v_1=a_1t\,,\,v_2=a_2t\xrightarrow{a_1=\frac{5}{4}a_2}v_1=\frac{5}{4}v_2$$

۳ اکنون نسبت انرژی‌های جنبشی را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{K_1}{K_2}=\frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2}{\frac{1}{2}m_2v_2^2}=\frac{4}{5}\times\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{5}{4}$$

B ۱۳۵۲ ۳

۴ معادلهٔ مکان زمان داده شده را با معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت مقایسه کرده a و v_0 را به‌دست آورده معادله سرعت زمان را می‌نویسیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$$

$$x=t^2+4t+5\Rightarrow\frac{1}{2}a=1m/s^2\Rightarrow a=2m/s^2$$

$$v_0=4m/s\xrightarrow{v=at+v_0}v=2t+4$$

سرعت در بازهٔ ثانیه دوم یعنی از $t_1=1s$ تا $t_2=2s$، بنابراین سرعت را در این لحظه‌ها حساب می‌کنیم.

$$t_1=1s\Rightarrow v_1=2+4=6m/s\,,\,t_2=2s\Rightarrow v_2=2(2)+4=8m/s$$

بنا به قضیهٔ کار و انرژی:

$$W_t=\Delta K\Rightarrow W_t=\frac{1}{2}\times 2(v_2^2-v_1^2)\Rightarrow W_t=(64-36)=28J$$

بازی با سؤال معادلهٔ حرکت جسمی که بر روی یک مسیر مستقیم حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x=2t^2-4t+8$ است. در کدام بازهٔ زمانی داده شده کار نیروی برایند وارد بر جسم بیشتر است؟

۱) صفر تا $1s$ ۲) $1s$ تا $2s$ ۳) $2s$ تا $3s$ ۴) $3s$ تا $4s$

پاسخ با مقایسه معادلهٔ حرکت داده شده با معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت، مکان اولیه، سرعت اولیه و شتاب را مشخص می‌کنیم.

$$x=2t^2-4t+8\Rightarrow\frac{1}{2}a=2\Rightarrow a=4m/s^2$$

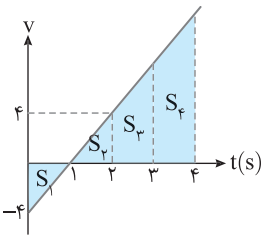
$$v_0=-4m/s\xrightarrow{v=at+v_0}v=4t-4$$

با رسم نمودار سرعت - زمان می‌بینیم که در بازهٔ صفر تا $1s$ تندی در حال کاهش و در حال صفر شدن است. در بازهٔ $1s$ تا $2s$ سرعت از صفر به $+4m/s$ می‌رسد و در این دو بازهٔ تغییر انرژی جنبشی یکسان است. در بازه $2s$ تا $4s$ حرکت تندشونده است و در بازهٔ $3s$ تا $4s$ چون سرعت بیشتر است، جابه‌جایی بیشتر و کار نیروی برایند نیز بیشتر است.

$$S_4>S_3\Rightarrow d_4>d_3\xrightarrow{W=Fd}W_4>W_3$$

$$S_4>S_3>S_2=|S_1|\Rightarrow d_4>d_3>d_2=|d_1|$$

$$\xrightarrow{W=Fd}W_4>W_3>W_2=|W_1|$$



دقت کنید حرکت دارای شتاب ثابت است بنابراین بنا به قانون دوم نیوتون $F_{net}=ma$ نیروی وارد بر جسم نیز ثابت است.

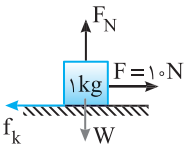
گزینهٔ ۴

B ۱۳۵۲ ۱

یادآوری ۵ کار نیروی ثابت F از رابطهٔ $W=Fd\cos\theta$ به‌دست می‌آید که در آن θ زاویهٔ بین جهت بردار نیرو $(\vec{F})$ و جهت بردار جابه‌جایی $(\vec{d})$ است. کار کمیت نرده‌ای است.

ابتدا f_k را به‌دست می‌آوریم:

$$f_k=\mu_kF_N\Rightarrow f_k=0/1\times 10=1\,N$$



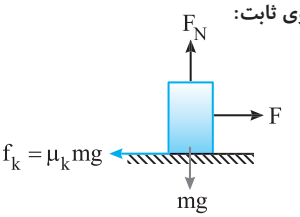
کار نیروی اصطکاک خواهد شد:

$$W_f=f_kd\cos 180^\circ\Rightarrow W_{f_k}=1\times 1\times(-1)=-1J$$

بازی با سؤال جسمی به جرم $500g$ روی سطح افقی به وسیلهٔ نیروی افقی F، به اندازهٔ ۱۰ متر جابه‌جا می‌شود. اگر ضریب اصطکاک $\mu_k=\frac{1}{4}$ باشد، کار انجام شده برای غلبه بر اصطکاک چند ژول است؟ $(g=10N/kg)$

۱) ۱/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۱۲/۵ ۴) ۲۵

پاسخ با توجه به تعریف کار نیروی ثابت:



$$W_f=f_kd\cos\pi$$

$$\Rightarrow W_f=\mu_kmgd(-1)$$

$$\Rightarrow W_f=-\frac{1}{4}\times 0/5\times 10\times 10$$

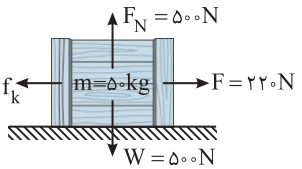
$$\Rightarrow W_f=-12/5J$$

کار انجام شده برای غلبه بر نیروی اصطکاک $12/5J$ است.

گزینهٔ ۳

۶ A ۱۳۵۲ ۲

خط فکری نیروهای وارد بر صندوق را رسم می‌کنیم و به کمک قانون دوم نیوتون، شتاب حرکت را حساب کرده و جابه‌جایی صندوق در مدت ۲s را با استفاده از فرمول‌های حرکت‌شناسی به‌دست می‌آوریم و سرانجام کار نیروی F $(W=Fd)$ را حساب می‌کنیم.



۱ نیروی اصطکاک را حساب می‌کنیم.

$f_k=\mu_k F_N \xrightarrow{\mu_k=۰/۴} f_k=۰/۴\times۵۰۰=۲۰۰N$

۲ بنا به قانون دوم نیوتون:

$F_{net}=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow ۲۲۰-۲۰۰=۵۰a\Rightarrow a=۰/۴m/s^۲$

۳ جابه‌جایی متحرک در مدت ۲s خواهد شد:

$\Delta x=d=\frac{۱}{۲}at^۲\Rightarrow d=\frac{۱}{۲}\times۰/۴\times۲^۲\Rightarrow d=۰/۸m$

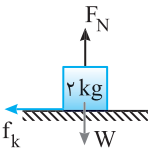
۴ کار نیروی F را به‌دست می‌آوریم. $W=Fd\Rightarrow W=۲۲۰\times۰/۸\Rightarrow W=۱۷۶J$

۷ A ۱۳۵۲ ۳

یادآوری انرژی مکانیکی مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل جسم است.

$E=K+U$

۱ پس از پرتاب روی سطح نیروی اصطکاک به جسم وارد می‌شود و باعث کاهش سرعت جسم می‌شود. شتاب را به کمک قانون دوم نیوتون حساب می‌کنیم:



$-f_k=ma\Rightarrow-\mu_k F_N=ma\Rightarrow-۰/۲\times۲۰=۲a$

$\Rightarrow a=-۲m/s^۲$

۲ سرعت جسم در لحظهٔ $t=۰$ برابر $۸m/s$ و در لحظهٔ $t=۲s$ خواهد شد:

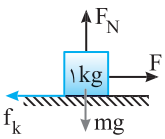
$v=at+v_۰ \xrightarrow{t=۲s} v=-۲\times۲+۸=۴m/s$

۳ جسم روی سطح افقی جابه‌جا می‌شود و انرژی پتانسیل آن ثابت است. بنابراین تغییر انرژی مکانیکی آن در اثر تغییر انرژی جنبشی جسم است از این رو می‌توان نوشت:

$E_۲-E_۱=K_۲-K_۱=\frac{۱}{۲}m(v_۲^۲-v_۱^۲)=(۱۶-۶۴)=-۴۸J$

۸ B ۱۳۵۲ ۱

نکته سطح بر جسم دو نیروی F_N و f_k وارد می‌کند، کار F_N که بر مسیر حرکت عمود است صفر است. بنابراین کار نیروی سطح وارد بر جسم همان کار نیروی اصطکاک است.



با توجه به نکتهٔ بیان شده ابتدا به کمک کار نیروی سطح یا همان کار نیروی اصطکاک، نیروی اصطکاک را به‌دست می‌آوریم.

$W_{f_k}=f_k d\cos۱۸۰^\circ\Rightarrow-۲=f_k\times۱\times-۱\Rightarrow f_k=۲N$

حال با توجه به رابطهٔ $f_k=\mu_k F_N$ داریم:

$f_k=\mu_k F_N \xrightarrow{F_N=mg} ۲=\mu_k\times۲۰\Rightarrow\mu_k=۰/۱$

۹ A ۱۳۵۲ ۲

یادآوری جابه‌جایی جسم در ثانیهٔ tام در حرکت با شتاب ثابت از رابطهٔ $\Delta x=\frac{۱}{۲}a(۲t-۱)+v_۰$ به‌دست می‌آید.

۱ ابتدا شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم: $F=ma\Rightarrow۴=۵a\Rightarrow a=۰/۸m/s^۲$

۲ جابه‌جایی جسم در ثانیهٔ سوم را حساب می‌کنیم:

$d=\Delta x=\frac{۱}{۲}a(۲t-۱)+v_۰=\frac{۱}{۲}(۰/۸)(۲\times۳-۱)=۲m$

۳ کار نیروی $F=۴N$ در جابه‌جایی ۲m خواهد شد: $W=Fd\Rightarrow W=۴\times۲=۸J$

۱۰ B ۱۳۵۲ ۱

نکته هرگاه جسمی از حال سکون تحت تأثیر چند نیروی ثابت قرار گیرد و به حرکت درآید، جهت حرکت جسم در جهت نیروی خالص وارد بر آن است.

۱ نیروی خالص را به‌دست می‌آوریم. $\vec{F}=\vec{F}_۱+\vec{F}_۲=۲\vec{i}+۵\vec{j}+\vec{i}-\vec{j}=۳\vec{i}+۴\vec{j}$

۲ اندازهٔ نیروی خالص وارد بر جسم خواهد شد:

$|\vec{F}_{net}|=\sqrt{F_x^۲+F_y^۲}\Rightarrow|\vec{F}_{net}|=\sqrt{۳^۲+۴^۲}\Rightarrow\vec{F}_{net}=۵N$

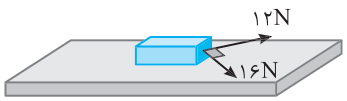
۳ شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$F_{net}=ma \xrightarrow{m=۲kg} ۵=۲a\Rightarrow a=۲/۵m/s^۲$

۴ جابه‌جایی در مدت ۴s برابر است با: $d=\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲=\frac{۱}{۲}\times۲/۵\times۱۶=۲۰m$

۵ کار نیروی برایند را به‌دست می‌آوریم: $W_F=Fd\cos\theta=۵\times۲۰\times\cos۰=۱۰۰J$

بازی با سوال **مطابق شکل بر جسمی ساکن به جرم ۵kg دو نیروی ۱۲ و ۱۶ نیوتونی به صورت عمود بر هم اثر می‌کنند. کار برایند این نیروها در ثانیهٔ سوم حرکت چند ژول است؟**



۱) ۲۰۰
۲) ۱۰۰
۳) ۱۴۴
۴) ۶۴

پاسخ **ابتدا برایند نیروهای وارد بر جسم را به دست می‌آوریم:**

$F_{net}=\sqrt{۱۲^۲+۱۶^۲}=۴\sqrt{۹+۱۶}=۲۰N$

با توجه به قانون دوم نیوتون شتاب را حساب می‌کنیم:

$F_{net}=ma\Rightarrow۲۰=۵a\Rightarrow a=۴m/s^۲$

جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم برابر است با:

$\Delta x=\frac{۱}{۲}a(۲t-۱)+v_۰\Rightarrow\Delta x=\frac{۱}{۲}\times۴(۲\times۳-۱)+۰\Rightarrow\Delta x=۱۰m$

کار نیروی خالص خواهد شد:

$W_t=F_{net}d=۲۰\times۱۰=۲۰۰J$

گزینهٔ ۱

۱۱ B ۱۳۵۲ ۴

۱ ابتدا سرعت جسم را به‌دست می‌آوریم: $P=mv\Rightarrow۱۰=۲v\Rightarrow v=۵m/s$

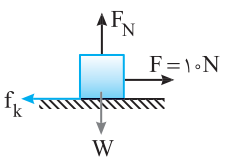
۲ به کمک فرمول مستقل از شتاب، جابه‌جایی را به‌دست می‌آوریم (چون نیروها ثابت هستند شتاب جسم نیز ثابت است.):

$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}t\Rightarrow\Delta x=\frac{۵+۰}{۲}\times۱/۲\Rightarrow\Delta x=۳m$

یادآوری قضیهٔ کار و انرژی جنبشی: تغییرات انرژی جنبشی جسم برابر مجموع کار تک‌تک نیروهای وارد بر جسم است. $(W_t=\Delta K)$

۳ بنا به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، کار نیروی اصطکاک را به‌دست می‌آوریم:

کار نیروهای F_N و W در این مسیر صفر است. بنابراین:



$F\times d+W_f=\frac{۱}{۲}mv^۲$

$\Rightarrow۱۰\times۳+W_f=\frac{۱}{۲}\times۲\times(۵)^۲\Rightarrow W_f=-۵J$

کار نیروی اصطکاک در این حرکت به گرما تبدیل شده است، بنابراین گرمای تولیدشده ۵ ژول است.

۱۲ B ۱۳۵۲ ۲

بر جسم‌ها نیروی اصطکاک و مقاومت هوا وارد نمی‌شود و تنها نیروی وارد بر آن‌ها نیروی وزن است و بنا به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت: $F_{net}=ma\Rightarrow mg=ma\Rightarrow a=g$

در نتیجه شتاب حرکت هر سه گلوله یکسان و برابر g است. با توجه به رابطهٔ مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت، سرعت گلوله‌ها را پس از جابه‌جایی یکسان h به‌دست می‌آوریم. $v^۲-v_۰^۲=۲ad\Rightarrow v^۲-۰=۲gh\Rightarrow v=\sqrt{۲gh}$

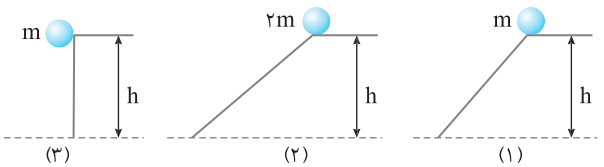
یعنی سرعت هر سه گلوله در لحظهٔ برخورد به زمین یکسان است. $v_1=v_2=v_3$

در این صورت انرژی جنبشی $(K=\frac{1}{2}mv^2)$ و تکانهٔ $(P=mv)$ گلوله‌ای که دارای جرم بیشتری است از بقیه بزرگ‌تر است، یعنی گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست و گزینهٔ (۲) درست است.

روش دیگر: قانون پایستگی انرژی مکانیکی:

$$E_1=E_2\Rightarrow mgh+0=0+\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow v=\sqrt{2gh}$$

سرعت‌ها یکسان است.



B ۱۳۵۲ ۳

خط فکری ابتدا به کمک پایستگی انرژی مکانیکی، تندی در مکان B را به‌دست می‌آوریم. سپس با توجه به تعریف تکانه، P را حساب می‌کنیم.

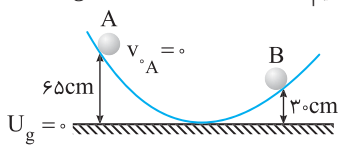
سطح افقی را مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی فرض می‌کنیم.

با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی داریم:

$$E_A=E_B\Rightarrow U_A+K_A=U_B+K_B\Rightarrow mgh_A=mgh_B+\frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\Rightarrow 10\times\frac{65}{100}=10\times\frac{30}{100}+\frac{1}{2}v_B^2\Rightarrow 3/5=\frac{1}{2}v_B^2\Rightarrow 7=v_B^2\Rightarrow v_B=\sqrt{7}m/s$$

تکانه را حساب می‌کنیم. $P=5\times\sqrt{7}\Rightarrow P=5\sqrt{7}kg.m/s$



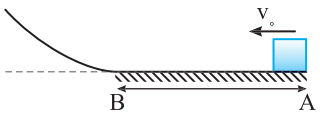
بازی با سؤال جسمی را روی سطح افقی با ضریب اصطکاک $\mu_k=0/2$ با سرعت اولیهٔ $10m/s$ از نقطهٔ A به حرکت در می‌آوریم. جسم پس از ۳ ثانیه در نقطهٔ B وارد سطح خمیدهٔ بدون اصطکاکی می‌شود. جسم روی سطح خمیده تا چه ارتفاعی بر حسب متر بالا می‌رود؟ $(g=10m/s^2)$

۱) ۰/۸

۲) ۱/۶

۳) ۷/۲

۴) باید جرم جسم معلوم باشد.



پاسخ شتاب حرکت روی سطح افقی را به دست می‌آوریم.

$$F_{net}=ma\Rightarrow-\mu_k mg=ma$$

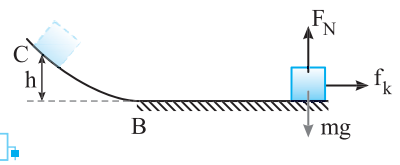
$$\Rightarrow a=-\mu_k g\Rightarrow a=-0/2\times10\Rightarrow a=-2m/s^2$$

سرعت جسم را در لحظهٔ گذر از B به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_0\Rightarrow v_B=-2\times3+10=4m/s$$

اکنون به کمک پایستگی انرژی مکانیکی ارتفاعی که جسم از سطح بالا می‌رود را حساب می‌کنیم:

$$E_B=E_C\Rightarrow\frac{1}{2}mv_B^2=mgh\Rightarrow v_B^2=2gh\Rightarrow16=20h\Rightarrow h=0/8m$$



گزینهٔ ۱

B ۱۳۵۲ ۲

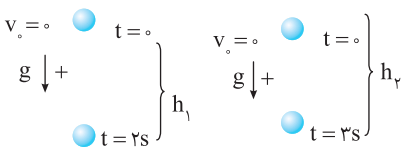
یادآوری ۱۴ کار نیروی وزن برابر $W_g=\pm mg\Delta h$ است و هنگام پایین آمدن جسم کار نیروی وزن مثبت است.

۱ ابتدا تغییر ارتفاع جسم در ثانیهٔ سوم یعنی از $t=2s$ تا $t=3s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$h_1=\frac{1}{2}gt_1^2\xrightarrow{t_1=2s}h_1=\frac{1}{2}\times10\times4\Rightarrow h_1=20m$$

$$h_2=\frac{1}{2}gt_2^2\xrightarrow{t_2=3s}h_2=\frac{1}{2}\times10\times9\Rightarrow h_2=45m$$

$$\Delta h=h_2-h_1\Rightarrow\Delta h=45-20\Rightarrow\Delta h=25m$$

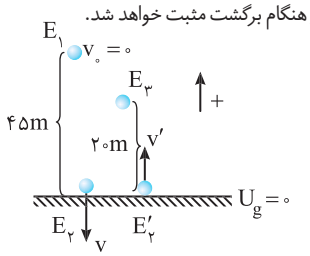


۲ کار نیروی وزن را به‌دست می‌آوریم:

$$W_g=+mg\Delta g\Rightarrow W_g=1\times10\times25=250J$$

B ۱۳۵۲ ۴

خط فکری با یک تست ترکیبی سروکار داریم ابتدا باید به کمک اصل پایستگی انرژی مکانیکی، سرعت را هنگام برخورد به زمین و در لحظهٔ برگشت از سطح زمین به‌دست بیاوریم تا بتوانیم به کمک تعریف شتاب $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ شتاب برخورد و از آنجا نیروی خالص وارد بر گلوله را حساب کنیم. دقت کنید که در استفاده از تعریف شتاب باید علامت سرعت را در نظر بگیرید برای این منظور جهت مثبت را رو به بالا اختیار کنید. سرعت هنگام پایین آمدن و برخورد به زمین منفی و هنگام برگشت مثبت خواهد شد.



ابتدا به کمک اصل پایستگی انرژی مکانیکی سرعت برخورد گلوله به زمین و همچنین سرعت برگشت آن از سطح زمین را حساب می‌کنیم. سطح زمین را مبدأ پتانسیل گرانشی فرض می‌کنیم.

$$E_2=E_1\xrightarrow{K_1=0,U_2=0}\frac{1}{2}mv^2=mgh\Rightarrow v^2=2\times10\times45\Rightarrow v=-30m/s$$

علت منفی قرار دادن سرعت برخورد به زمین این است که ما جهت مثبت را رو به بالا اختیار کرده‌ایم. اما پس از برخورد گلوله به زمین گلوله ابتدا متوقف می‌شود و سپس با سرعت v' رو به بالا حرکت می‌کند و در این لحظه دارای انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv'^2$ است و تا ۲۰m بالا می‌رود و سرعتش صفر می‌شود و انرژی جنبشی‌اش به انرژی پتانسیل تبدیل می‌شود.

$$E_2'=E_3\xrightarrow[U_2'=0]{K_3=0}\frac{1}{2}mv'^2=mgh'$$

$$\Rightarrow v'^2=2gh'=2\times10\times20\Rightarrow v'=20m/s$$

v' را مثبت قرار می‌دهیم زیرا جهتش رو به بالا و در جهت مثبت اختیاری ما بود. اکنون شتاب در مدت برخورد و سپس نیروی خالص را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{v'-v}{t}=\frac{20-(-30)}{2\times10^{-3}}=25\times10^3m/s^2$$

با نوشتن قانون دوم نیوتون نیروی خالص وارد بر گلوله در مدت برخورد قابل محاسبه است. $F_{net}=ma\Rightarrow F_{net}=0/2\times25\times10^3=5000N$

میانبر در شرایط خلأ می‌توانید از رابطهٔ $v=\sqrt{2gh}$ که در آن h مقدار جابه‌جایی در امتداد قائم است استفاده کنید.

۱۶ B ۱۳۵۲ ۴

روش اول: با توجه به قضیه کار و انرژی جنبشی کار کل برابر تغییر انرژی جنبشی جسم است، در سقوط آزاد چون شتاب حرکت $g=10m/s^2$ است تندی ذره در هر ثانیه به اندازهٔ $10\,m/s$ افزایش می‌یابد پس اگر تندی هنگام رسیدن به زمین v باشد یک ثانیه قبل از آن $v-10$ خواهد بود:

$$W_t=\Delta K\Rightarrow 70=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}m(v-10)^2\Rightarrow 70=\frac{1}{2}m(v^2-(v-10)^2)$$

$$70=0/1(20v-100)\Rightarrow 700=20v-100\Rightarrow 20v=800\Rightarrow v=40m/s$$

گلوله از ارتفاع h رها شده پس $v_0=0$ بوده و تندی ذره هنگام رسیدن به زمین $40\,m/s$ است.

$$v^2-v_0^2=2gh\Rightarrow 1600=20h\Rightarrow h=80m$$

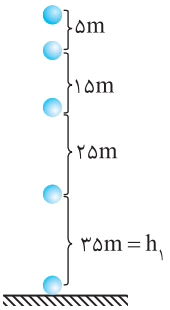
روش دوم: در سقوط آزاد تنها نیروی وارد بر جسم نیروی وزن است پس کار کل برای کار نیروی وزن است:

$$W_t=W_g\Rightarrow 70=mgh_1$$

$$\Rightarrow 70=0/2\times 10\times h_1\Rightarrow h_1=35m$$

برای جابه‌جایی در بازه‌های ۱ ثانیه در سقوط آزاد با شتاب $g=10m/s^2$ داریم:

$$h=5+15+25+35=80m$$



۱۷ B ۱۳۵۲ ۲

خط فکری گلوله در شرایط خلأ سقوط می‌کند و اتلاف انرژی نداریم، بنابراین با استفاده از انرژی جنبشی در لحظهٔ برخورد به زمین می‌توان سرعت لحظهٔ برخورد را محاسبه کرد. سپس با توجه به اینکه شتاب حرکت همان شتاب گرانش است، می‌توان سرعت را در یک ثانیه قبل از برخورد به زمین به‌دست آورد.

نکته در حرکت با شتاب ثابت می‌توان سرعت متوسط را در یک بازهٔ زمانی با استفاده از میانگین‌گیری بین سرعت‌های ابتدا و انتهای آن بازه به‌دست آورد.

ابتدا تندی گلوله هنگام رسیدن به زمین را به‌دست می‌آوریم:

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow 24/2=\frac{1}{2}\times 0/1\times v^2\Rightarrow v^2=484\Rightarrow|v_2|=22m/s$$

شتاب حرکت گلوله $10m/s^2$ بوده یعنی در هر ثانیه به تندی گلوله $10m/s$ افزوده می‌شود، پس سرعت گلوله ۱s قبل از برخورد به زمین $|v_1|=12m/s$ است، بنابراین سرعت متوسط در این بازه خواهد شد:

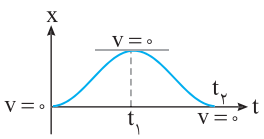
$$v_{av}=\frac{|v_1|+|v_2|}{2}=\frac{12+22}{2}=\frac{34}{2}=17m/s$$



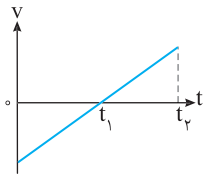
۱۸ B ۱۳۵۲ ۴

خط فکری چگونه از روی نمودار مکان زمان دربارهٔ علامت نیروی خالص وارد بر جسم اظهار نظر کنیم. کافی است مشخص کنیم که در هر بازه زمانی تندی در حال افزایش و یا در حال کاهش است. سپس با توجه به قضیه کار و انرژی جنبشی $W_t=\Delta K$ اگر تندی در حال افزایش باشد $\Delta K>0$ و کار نیروی خالص مثبت است و اگر تندی در حال کاهش باشد، $\Delta K<0$ و کار نیروی خالص منفی است.

با توجه به شیب خط مماس بر نمودار در بازهٔ صفر تا t_1، ابتدا سرعت افزایش و سپس کاهش می‌یابد تا در لحظهٔ t_1 سرعت صفر می‌شود و در بازهٔ t_1 تا t_2 نیز مجدداً سرعت زیاد و سرانجام کم می‌شود. بنابراین در بازهٔ صفر تا t_1 انرژی جنبشی ابتدا افزایش $(\Delta K>0)$ و سپس کاهش $(\Delta K<0)$ می‌یابد و کار نیروی خالص ابتدا مثبت $(W>0)$ و سپس منفی $(W<0)$ است و در بازهٔ t_1 و t_2 نیز همین حالت تکرار می‌شود.



بازی با سوال نمودار سرعت - زمان ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است. کار نیروی خالص وارد بر ذره در بازه‌های زمانی صفر تا t_1 و t_1 تا t_2 به‌ترتیب از راست به چپ چگونه است؟



۱) مثبت، منفی ۲) مثبت، مثبت ۳) منفی، مثبت ۴) منفی، منفی

پاسخ از صفر تا t_1 اندازهٔ سرعت در حال کاهش و انرژی جنبشی ذره در حال کم شدن است $(\Delta K<0)$ و بنا به قضیه کار و انرژی جنبشی $(W_t=\Delta K)$ کار نیروی خالص وارد بر ذره منفی است. از t_1 تا t_2 اندازهٔ سرعت در حال افزایش و انرژی جنبشی ذره در حال زیاد شدن است و کار برایند نیروهای وارد بر ذره مثبت است.

گزینهٔ ۳

۱۹ B ۱۳۵۲ ۴

خط فکری باید از روی نمودار شتاب و سرعت اولیه را پیدا کنیم، معادلهٔ سرعت زمان را بنویسیم تا بتوانیم کار نیروی خالص را به کمک قضیه کار و انرژی جنبشی $(W_t=\Delta K)$ به‌دست بیاوریم.

۱ در بازهٔ صفر تا ۲s متحرک از مکان $x_0=5m$ به مکان $x=9m$ می‌رود. به کمک رابطهٔ مستقل از شتاب سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم.

$$x=\frac{v+v_0}{2}t+x_0\Rightarrow 9=\frac{0+v_0}{2}\times 2+5\Rightarrow v_0=4m/s$$

۲ شتاب حرکت خواهد شد:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-4}{2}\Rightarrow a=-2m/s^2$$

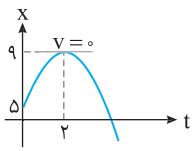
۳ معادله سرعت زمان را می‌نویسیم و در لحظهٔ $t=2s$ سرعت صفر است، در لحظهٔ $t=4s$ سرعت را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0\Rightarrow v=-2t+4\xrightarrow{t=4s}v=-2\times 4+4\Rightarrow v=-4m/s$$

۴ اکنون کار نیروی خالص قابل حساب کردن است.

$$W_t=\Delta K=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2\xrightarrow{m=2kg}W_t=\frac{1}{2}\times 2\times(-4)^2+0$$

$$\Rightarrow W_t=16J$$



۲۰ B ۱۳۵۲ ۳

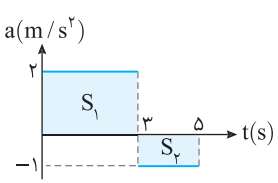
مساحت زیر نمودار $a-t$ برابر تغییرات سرعت می‌باشد. از این‌رو خواهیم داشت:

$$\Delta v=S_1+S_2\Rightarrow v_2-v_1=6+(-2)\xrightarrow[\text{جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده}]{v_1=0}$$

$$v_2=4m/s$$

با توجه به قضیه کار و انرژی جنبشی داریم:

$$W_t=\Delta K\Rightarrow W_t=\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2)\Rightarrow W_t=\frac{1}{2}\times 2(4^2-0)\Rightarrow W_t=16J$$



بازی با سؤال بر جسم ساکنی به جرم ۴kg نیروی $F=8t$ وارد شده و جسم شروع به حرکت می‌کند. کار این نیرو در ۲ ثانیهٔ اول حرکت چند ژول است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۴۰

پاسخ **خط فکری** برای به‌دست آوردن کار نیروی F در بازهٔ صفر تا ۲s باید سرعت در لحظهٔ $t=2s$ را به‌دست بیاوریم. مساحت سطح زیر نمودار شتاب زمان برابر تغییرات سرعت است. بنابراین نمودار $a-t$ را رسم کنید، سطح زیر نمودار آن را به‌دست بیاورید تا بتوانید v را حساب کرده به کمک قضیه کار و انرژی جنبشی $(W_t=\Delta K)$ کار این نیرو را به‌دست بیاورید.

۱ با توجه به قانون دوم نیوتون $F=ma$ معادلهٔ شتاب - زمان را می‌نویسیم:

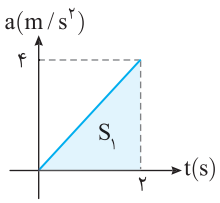
$$F=ma, F=8t \Rightarrow 4a=8t \Rightarrow a=2t$$

۲ نمودار $a-t$ را رسم می‌کنیم و تا لحظهٔ $t=2s$ مساحت زیر نمودار آن را حساب کرده و با توجه به اینکه $v_0=0$ است، خواهیم داشت:

$$\Delta v=S \Rightarrow \Delta v=\frac{4\times 2}{2}=4m/s \Rightarrow v-v_0=4m/s \Rightarrow v=4m/s$$

۳ اکنون به کمک قضیه کار و انرژی جنبشی، کار نیروی F را حساب می‌کنیم.

$$W=\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2) \Rightarrow W=\frac{1}{2}\times 4\times(4^2-0)=32$$

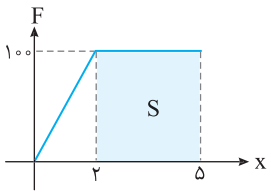


گزینهٔ ۳

B ۱۳۵۲ ۱

نکته مساحت سطح محصور بین نمودار نیرو با محور xها برابر کار نیروی F است.

۱ سطح زیر نمودار $F-x$ را حساب کرده و کار نیروی F را به‌دست می‌آوریم.



$$W=S=\frac{100(3+5)}{2}=400J$$

۲ به کمک قضیه کار و انرژی سرعت در مکان $x=5m$ خواهد شد:

$$W=\Delta K \Rightarrow W=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow 400=\frac{1}{2}\times 2\times(v_2^2-0) \Rightarrow v_2=20m/s$$

۳ شتاب متوسط را حساب می‌کنیم.

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{20-0}{2}=10m/s^2$$

B ۱۳۵۲ ۱

۲۲ سرعت گلوله هنگام رسیدن به زمین را به کمک رابطهٔ مستقل از زمان به‌دست می‌آوریم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x \xrightarrow{a=8m/s^2, h=10m} v^2-0=2\times 8\times 10 \Rightarrow v^2=160$$

بنا به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، تغییر انرژی جنبشی برابر مجموع کار تک‌تک نیروهای وارد بر جسم است. بر این جسم دو نیرو یکی نیروی وزن و دیگری نیروی مقاومت هوا وارد می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$W_t=\Delta K \Rightarrow W_g+W_{f_D}=K_2-K_1 \Rightarrow mgh+W_{f_D}=\frac{1}{2}mv^2-0$$

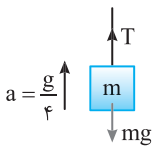
$$\xrightarrow{m=2kg} 2\times 10\times 10+W_{f_D}=\frac{1}{2}\times 2\times(160) \Rightarrow 200+W_{f_D}=160$$

$$\Rightarrow W_{f_D}=-40J$$

B ۱۳۵۲ ۴

خط فکری ۲۳ ابتدا نیروی کشش نخ (T) را به کمک دینامیک حساب کنید. سپس کار این نیرو و کار نیروی وزن را به‌دست آورده بر هم تقسیم کنید.

ابتدا با توجه به قانون دوم نیوتون نیروی کشش طناب را به‌دست می‌آوریم:



$$F_{net}=ma \Rightarrow T-mg=\frac{mg}{4} \Rightarrow T=\frac{5}{4}mg$$

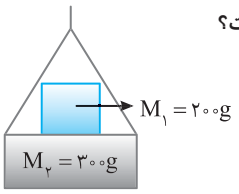
کار نیروی T و mg خواهد شد:

$$W=Fd\cos\theta \begin{cases} \xrightarrow{W_T} W_T=Td\cos 0=\frac{5}{4}mgd \\ \xrightarrow{W_{mg}} W_{mg}=mgd\cos 180^\circ=-mgd \end{cases}$$

نسبت $\frac{W_T}{W_{mg}}$ برابر است با:

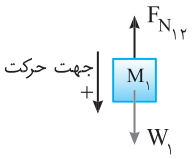
$$\frac{W_T}{W_{mg}}=\frac{\frac{5}{4}mgd}{-mgd}=-\frac{5}{4}$$

بازی با سؤال در شکل روبه‌رو دستگاه با شتاب ثابت $2m/s^2$ از حال سکون رو به پایین شروع به حرکت می‌کند. کار نیرویی که M_2 بر M_1 وارد می‌کند در سه ثانیه آغازین حرکت چند ژول است؟



۱) ۱۴/۴ ۲) −۱۴/۴ ۳) ۷/۲ ۴) −۷/۲

پاسخ نیروهای وارد بر M_1 را رسم می‌کنیم و به کمک قانون دوم نیوتون نیرویی که M_2 بر M_1 وارد می‌کند را حساب می‌کنیم.



$$F_{net}=Ma \Rightarrow M_1g-F_{N_{12}}=M_1a$$

$$\Rightarrow 2-F_{N_{12}}=0/2\times 2 \Rightarrow F_{N_{12}}=1/6N$$

جابه‌جایی دستگاه در مدت ۳ ثانیه را به‌دست می‌آوریم:

$$d=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\times 2\times 9 \Rightarrow d=9m$$

کار نیروی $F_{N_{12}}$ برابر است با:

$$W=F_{N_{12}}d\cos 180^\circ \Rightarrow W=1/6\times 9\times(-1)=-14/4J$$

گزینهٔ ۲

A ۱۳۵۲ ۲

یادآوری ۲۴ قضیه کار و انرژی جنبشی: کار نیروی خالص وارد بر جسم برابر تغییرات انرژی جنبشی جسم:

$$W_t=\Delta K$$

شتاب حرکت $a=0/2m/s^2$ است و آسانسور از حال سکون $(v_0=0)$ به مدت 5s در حرکت است. بنابراین سرعت در $t=5s$ را به‌دست می‌آوریم و با استفاده از قضیه کار و انرژی جنبشی کار نیروی برایند را حساب می‌کنیم.

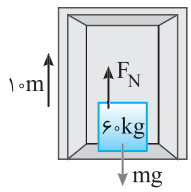
$$v=at+v_0 \Rightarrow v=5(0/2)+0 \Rightarrow v=1m/s$$

$$W_t=\Delta K \Rightarrow W_t=\frac{1}{2}\times 400(v^2-v_0^2) \Rightarrow W_t=200J$$

بازی با سؤال وزنه‌ای به جرم ۶۰kg درون آسانسوری قرار دارد و آسانسور با شتاب $2m/s^2$ کندشونده رو به بالا در حرکت است. کار نیروی عمودی سطح پس از ۱۰m جابه‌جایی چند ژول است؟

۱) ۴۸۰۰ ۲) ۲۴۰۰ ۳) ۵۶۰۰ ۴) ۷۲۰۰

پاسخ ابتدا با توجه به قانون دوم نیوتون F_N را به‌دست می‌آوریم:



$$F_{net}=ma \Rightarrow mg-F_N=ma$$

$$\Rightarrow 600-F_N=120 \Rightarrow F_N=480N$$

کار نیروی عمودی سطح برابر است:

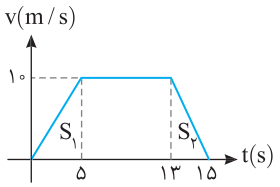
$$W_{F_N}=F_Nd\cos 0=480\times 10=4800J$$

گزینهٔ ۱

۲۵ B ۱۳۵۲ ۳

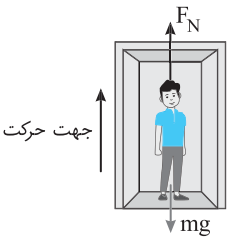
۱ در قسمت اول حرکت (۵s آغازین) شتاب حرکت برابر است با:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۱۰}{۵}=۲m/s^۲$$



۲ نیروی عمودی سطح در این حالت را حساب می‌کنیم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F_N-mg=ma$$
$$\Rightarrow F_N=۶۰۰+۱۲۰=۷۲۰N$$



۳ هم‌چنین جابه‌جایی برابر مساحت زیر نمودار v−t می‌باشد:

$$d=S_۱=۲۵m$$

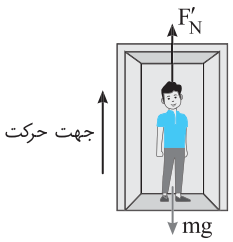
۴ کار نیروی عمودی سطح خواهد شد:

$$W_{F_N}=F_N d\cos ۰=۷۲۰\times ۲۵\times ۱=۱۸۰۰۰J$$

۵ تمام مراحل بالا را برای ۲s آخر تکرار می‌کنیم:

در ۲s آخر حرکت شتاب برابر است با $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-۱۰}{۲}=-۵m/s^۲$ و با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:

$$\begin{cases} F_{net}=ma\Rightarrow F'_N-mg=-ma\Rightarrow F'_N-۶۰۰=-۳۰۰\Rightarrow F'_N=۳۰۰N \\ W_{F'_N}=F'_N d_۲\cos ۰ \xrightarrow{d_۲=S_۲} W_{F'_N}=۳۰۰\times\frac{۲\times ۱۰}{۲}=۳۰۰J \end{cases}$$



۶ نسبت کار نیروی عمودی سطح در دو حالت خواهد شد: $\frac{W_{F_N}}{W_{F'_N}}=\frac{۱۸۰۰۰}{۳۰۰۰}=۶$

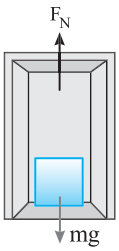
بازی با سؤال

وزنه‌ای به جرم ۲kg درون آسانسوری قرار دارد. آسانسور با شتاب ثابت $۲m/s^۲$ رو به بالا شروع به حرکت می‌کند. کار نیروی عمودی سطح در نیم ثانیهٔ اول حرکت چند ژول است؟ $(g=۱۰N/kg)$

۱) صفر ۲) ۱۲ ۳) ۸۹ ۴) ۶

پاسخ ابتدا نیروی عمودی تکیه‌گاه را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F_N-mg=ma\Rightarrow F_N-۲۰=۴$$
$$\Rightarrow F_N=۲۴N$$



سپس جابه‌جایی را در مدت نیم‌ثانیه حساب می‌کنیم:

$$d=\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲\Rightarrow d=\frac{۱}{۲}\times ۲(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}m$$

کار نیروی عمودی سطح خواهد شد:

$$W_{F_N}=F_N d\cos\theta=۲۴\times\frac{۱}{۴}\times\cos ۰=۶J$$

گزینهٔ ۴

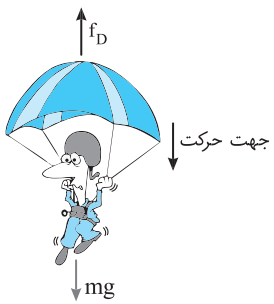
۲۶ B ۱۳۵۲ ۴

در تندی حدی، سرعت ثابت بوده و برایند نیروهای وارد بر چترباز صفر است، از این رو نیروی مقاومت هوا وارد بر چترباز برابر نیروی وزن چترباز است:

$$F_{net}=۰\Rightarrow mg=f_D\Rightarrow f_D=۸۰۰N$$

در هر متر سقوط کار نیروی مقاومت هوا برابر است با:

$$W_{f_D}=f_D d\cos ۱۸۰^\circ=-۸۰۰J$$



۲۷ B ۱۳۵۲ ۴

۱ با توجه به قانون دوم نیوتون کشش T را به‌دست می‌آوریم:



$$F_{net}=ma\Rightarrow T-mg=ma\Rightarrow T-۵۰۰=۱۰۰$$
$$\Rightarrow T=۶۰۰N$$

۲ حال جابه‌جایی آن در مدت ۴s را به‌دست می‌آوریم:

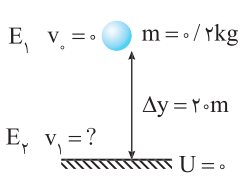
$$\Delta y=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow\Delta y=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۱۶\Rightarrow\Delta y=۱۶m$$

۳ کار نیرویی که طناب به شخص وارد می‌کند برابر است با:

$$W=Td=۶۰۰\times ۱۶=۹۶۰۰J$$

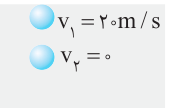
۲۸ A ۱۳۵۲ ۳

۱ ابتدا تندی گلوله هنگام رسیدن به تودهٔ شنی را به کمک پایستگی انرژی مکانیکی به دست می‌آوریم:



$$E_۲=E_۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}mv_۱^۲-۰=mg\Delta y$$
$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}v_۱^۲=۱۰\times ۲۰\Rightarrow v_۱=۲۰m/s$$

۲ گلوله با این سرعت به تودهٔ شن برخورد می‌کند و در مدت ۰/۱s سرعت گلوله به صفر می‌رسد.



شتاب توقف گلوله در تودهٔ شنی را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۰-۲۰}{۰/۱}\Rightarrow a=-۲۰۰m/s^۲$$

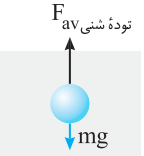
۳ نیروی خالص وارد بر گلوله خواهد شد:

$$F_{av}=ma\Rightarrow|F_{av}|=|۰/۲\times(-۲۰۰)|=۴۰N$$

۲۹ A ۱۳۵۲ ۳

هنگام برخورد گلوله به تودهٔ شنی بر گلوله دو نیرو یکی نیروی وزن و دیگری نیروی مقاومت تودهٔ شن در مقابل حرکت گلوله است. نیروهای وارد بر گلوله را رسم می‌کنیم و با استفاده از قانون دوم نیوتون، نیروی متوسطی که تودهٔ شن به گلوله وارد می‌کند را به‌دست می‌آوریم.

نیروی خالص متوسط وارد بر گلوله $F_{av}=-۴۰N$ است بنابراین



$$mg-F_{av_{\text{تودهٔ شنی}}}=-۴۰$$
$$\Rightarrow ۲-F_{av_{\text{تودهٔ شنی}}}=-۴۰$$
$$\Rightarrow F_{av_{\text{تودهٔ شنی}}}=۴۲N$$

۳۰ B ۱۳۵۲ ۳

خط فکری در دو مسیر بیان شده مطابق شکل جهت بردار نیروی اصطکاک تغییر می‌کند. دقت کنید کار در رابطهٔ $W=Fd\cos\theta$ برای نیروی ثابت تعریف می‌شود. در حالی که بردار نیروی اصطکاک تغییر کرده است. از این رو شما نمی‌توانید از جابه‌جایی کل از ابتدا تا انتهای مسیر استفاده کنید. بلکه باید در هر قسمت کار نیروی اصطکاک را جداگانه به‌دست آورده و با هم جمع کنید.

ابتدا نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک در هر دو مسیر را حساب کرده و با توجه به جابه‌جایی کار نیروی اصطکاک‌ها را حساب می‌کنیم.

$$F_{net,y}=۰\Rightarrow F_N=mg$$

کار نیروی اصطکاک در قسمت اول:

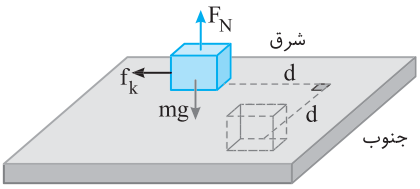
$$f_{k_1}=\mu_k F_N=\mu_k mg \Rightarrow W_{f_{k_1}}=f_{k_1} d\cos 180^\circ=-\mu_k mgd$$

کار نیروی اصطکاک در قسمت دوم:

$$f_{k_2}=\mu_k F_N=\mu_k mg \Rightarrow W_{f_{k_2}}=f_{k_2} d\cos 180^\circ=-\mu_k mgd$$

کار نیروی اصطکاک در کل مسیر:

$$W_{f_k}=W_{f_{k_1}}+W_{f_{k_2}}=-\mu_k mgd-\mu_k mgd=-2\mu_k mgd$$

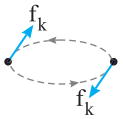


۳ ۱۳۵۲ B

۳۱ نکته اندازهٔ کار نیروی اصطکاک برابر حاصل‌ضرب نیروی اصطکاک در مسافت طی شده (طول مسیر) است.

نیروی اصطکاک روی سطح میز افقی برابر است با:

$$f_k=\mu_k F_N \xrightarrow{F_N=mg} f_k=\mu_k mg$$



طول مسیر حرکت در یک دور کامل برابر محیط دایره $(2\pi R)$ است. بنابراین کار نیروی اصطکاک در یک دور کامل خواهد شد:

$$W_f=-f_k(2\pi R)=-2\mu_k mg\pi R$$

۴ ۱۳۵۲ B

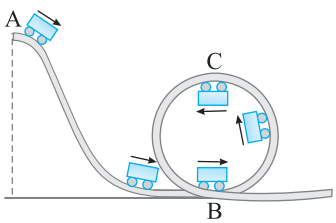
۳۲ خط فکری این مسائل از دو مرحله تشکیل شده است، در یک مرحله از پایستگی انرژی مکانیکی و در مرحلهٔ دیگر از قانون دوم نیوتون استفاده می‌کنیم:

۱ به کمک پایستگی انرژی مکانیکی برای نقاط B و C می‌نویسیم:

$$E_B=E_C \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2=\frac{1}{2}mv_C^2+mg(2R) \Rightarrow v_B^2-v_C^2=4Rg$$

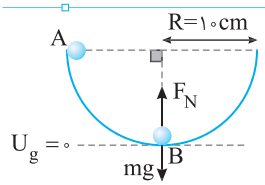
۲ اکنون اختلاف نیروی مرکزگرا در نقطه‌های B و C را به‌دست می‌آوریم:

$$F_B-F_C=m\frac{v_B^2}{R}-m\frac{v_C^2}{R}=\frac{m}{R}(v_B^2-v_C^2)=\frac{m}{R}(4Rg)=4mg$$



۳ ۱۳۵۲ B

۳۳ ۱ جسم در صفحهٔ قائم دارای حرکت دایره‌ای است. به کمک پایستگی انرژی مکانیکی، ابتدا سرعت وزنه را در نقطهٔ B به‌دست می‌آوریم:



$$E_A=E_B \Rightarrow mgR=\frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_B=\sqrt{2Rg}$$

$$v_B=\sqrt{2\times 0/1\times 10} \Rightarrow v_B=\sqrt{2}\,m/s$$

۲ برایند نیروی عمودی تکیه‌گاه و نیروی وزن در پایین‌ترین نقطهٔ مسیر، نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کنند.

$$F_{net}=ma \Rightarrow F_N-mg=\frac{mv^2}{R} \Rightarrow F_N-0/3\times 10=\frac{0/3\times 2}{0/1} \Rightarrow F_N=9N$$

۱ ۱۳۵۲ B

۳۴ با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی سرعت را در نقطهٔ B به‌دست می‌آوریم.

$$E_A=E_B \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2=mgh_B+\frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow 200=10\times 2+\frac{1}{2}v_B^2 \Rightarrow v_B^2=360$$



نیروی مرکزگرا در نقطهٔ B نیروی عمودی تکیه‌گاه است:

$$F_{N_B}=m\frac{v_B^2}{r}=0/1\times\frac{360}{2}=18N$$

۲ ۱۳۵۲ B

۳۵ ۱ پایین‌ترین نقطهٔ مسیر را مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی فرض می‌کنیم و پایستگی انرژی مکانیکی را برای نقاط A و B می‌نویسیم و تندی در نقطهٔ B را بر حسب طول نخ (ℓ) حساب می‌کنیم.

$$E_A=E_B \Rightarrow U_A+K_A=U_B+K_B \xrightarrow{K_A=0,v_B=0} mgh_A=\frac{1}{2}mv_B^2$$

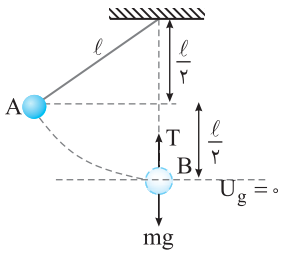
$$\Rightarrow g\left(\frac{\ell}{2}\right)=\frac{1}{2}v_B^2 \Rightarrow v_B^2=\ell g \qquad (I)$$

۲ در پایین‌ترین نقطهٔ مسیر نیروی مرکزگرا را به‌دست می‌آوریم.

$$F_B=m\frac{v^2}{r} \xrightarrow{(I)} F_B=m\frac{\ell g}{\ell} \Rightarrow F_B=mg$$

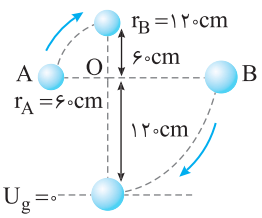
۳ نسبت نیروی مرکزگرا در نقطهٔ B به نیروی وزن خواهد شد:

$$\frac{F_B}{W}=\frac{mg}{mg}=1$$



۳ ۱۳۵۲ C

۳۶ خط فکری مسئله زیبایی است. اگر وزنه‌ها و میله را از حالت افقی رها کنیم، وزنهٔ B که سنگین‌تر است $(m_B=2m_A)$ و فاصله‌اش از O بیشتر است، پایین می‌آید و A بالا می‌رود و نکتهٔ مهم این است که دورهٔ چرخش آن‌ها یکی است $(T_A=T_B)$ اما تندی حرکت آن‌ها یکسان نخواهد بود.



ابتدا نسبت تندی چرخش A و B را پیدا کنید. سپس به سراغ پایستگی انرژی مکانیکی بروید و مسئله را حل کنید.

۱ با توجه به رابطهٔ تندی در حرکت دایره‌ای می‌توان نوشت:

$$v_A=\frac{2\pi r_A}{T_A}$$

$$v_B=\frac{2\pi r_B}{T_B}$$

$$\Rightarrow \frac{v_B}{v_A}=\frac{r_B}{r_A}\times\frac{T_A}{T_B} \xrightarrow[T_A=T_B]{r_A=0/6m,r_B=1/2m} \frac{v_B}{v_A}=\frac{1/2}{0/6} \Rightarrow v_B=2v_A$$

۲ پایین‌ترین نقطهٔ مسیر حرکت B را مبدأ پتانسیل گرانشی فرض می‌کنیم:

$$E_1=E_2 \Rightarrow U_{1A}+K_{1A}+U_{1B}+K_{1B}=U_{2A}+K_{2A}+U_{2B}+K_{2B}$$

$$\Rightarrow m_A g(1/2)+0+m_B g(1/2)+0=m_A g(1/8)+\frac{1}{2}m_A v_A^2+0+\frac{1}{2}m_B v_B^2$$

$$\Rightarrow 6m_A-12m_B+\frac{1}{2}m_A v_A^2+\frac{1}{2}m_B v_B^2=0$$

۳ در رابطه $r_B=۲r_A$ و $m_B=۲m_A$ و $v_B=۲v_A$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$۰=۶m_A+\frac{۱}{۲}m_Av_A^۲-۲۴m_A+۴m_Av_A^۲\Rightarrow ۱۸=\frac{۹}{۲}v_A^۲\Rightarrow v_A=۲m/s$$

$$v_B=۲v_A=۴m/s$$

B ۱۳۵۲ ۲

۳۷ نیروی خالص متوسط که سبب حرکت اتومبیل می‌شود خواهد شد:

$$F_{net}=ma\xrightarrow{m=۱۲۰۰kg\,,\,a=۴m/s^۲}F_{net}=۱۲۰۰\times۴\Rightarrow F_{net}=۴۸۰۰N$$

یادآوری جابه‌جایی متحرک با شتاب ثابت در ثانیهٔ دوم حرکت از رابطهٔ $\Delta x=\frac{۱}{۲}a(۲t-۱)+v_۰$ به‌دست می‌آید.

جابه‌جایی در ثانیهٔ دوم حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}\times۴\times(۲\times۲-۱)+۰\Rightarrow\Delta x=۶m$$

یادآوری **توان:** آهنگ انجام کار یا مصرف انرژی است.

$$P=\frac{W}{t}\xrightarrow{W=Fx}P=\frac{۴۸۰۰\times۶}{۲-۱}\Rightarrow P=۲۸۸۰۰W\Rightarrow P=۲۸/۸kW$$

A ۱۳۵۲ ۴

۳۸ ۱ با تطابق معادلهٔ سرعت - زمان داده شده $(v=۵t+۲)$ با معادلهٔ سرعت - زمان حرکت با شتاب ثابت $(v=at+v_۰)$، شتاب حرکت $۵m/s^۲$ و سرعت اولیه $۲m/s$ است.

۲ سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{v+v_۰}{۲}\Rightarrow v_{av}=\frac{۱}{۲}at+v_۰\Rightarrow v_{av}=\frac{۱}{۲}\times۵\times۲+۲\Rightarrow v_{av}=۷m/s$$

۳ نیروی وارد بر جسم برابر است با: $F=ma\Rightarrow F=۳\times۵=۱۵N$

۴ توان متوسط را به‌دست می‌آوریم: $P_{av}=\frac{W}{t}=\frac{F.d}{t}=Fv_{av}=۱۵\times۷=۱۰۵W$

بازی با سؤال **جسمی تحت تأثیر نیروی ثابت F از حال سکون به حرکت درمی‌آید و پس از مدت t به سرعت v می‌رسد. توان متوسطی که در این مدت جسم دریافت می‌کند برابر است با:** کنکور دهه‌های گذشته

۱) $\frac{۱}{۲}Fv$ ۲) Fv ۳) $\frac{۱}{۲}\frac{Fv}{t}$ ۴) $\frac{Fv}{t}$

پاسخ **توان متوسط برابر است با:**

$$\overline{P}=\frac{W}{t}=\frac{Fd}{t}=F\frac{d}{t}\xrightarrow{v_{av}=\frac{d}{t}}\overline{P}=Fv_{av}$$

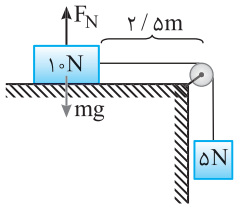
چون نیروی وارد بر جسم ثابت است و با توجه به رابطهٔ $F=ma$ شتاب حرکت ثابت می‌باشد. بنابراین $v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}$:

$$\overline{P}=Fv_{av}\Rightarrow\overline{P}=F\frac{v_۱+v_۲}{۲}\xrightarrow[v_۲=v]{v_۱=۰}\overline{P}=F\frac{v}{۲}=\frac{۱}{۲}Fv$$ گزینهٔ ۱

B ۱۳۵۲ ۱

۳۹ ۱ وقتی وزنه‌ها را رها می‌کنیم و وزنه‌ها ۱/۵ متر جابه‌جا می‌شوند وزنهٔ ۱۰N همچنان روی سطح میز است و انرژی پتانسیل آن تغییر نمی‌کند اما انرژی جنبشی به‌دست می‌آورد. در حالی که وزنهٔ ۵N، ۱/۵m به پایین می‌آید و انرژی پتانسیل آن کاهش می‌یابد.

$$\Delta U=-mg\Delta h\Rightarrow\Delta U=-۵\times۱/۵\Rightarrow\Delta U=-۷/۵$$



۲ بنا به قانون پایستگی انرژی، تغییر انرژی مکانیکی سامانه برابر کار نیروهای مقاوم به سامانه است بنابراین:

$$E_۲-E_۱=W_f\Rightarrow K_۲+U_۲-(K_۱+U_۱)=W_f\Rightarrow\overbrace{(K_۲-K_۱)}^{\Delta K}+\overbrace{(U_۲-U_۱)}^{\Delta U}=W_f$$

$$\Rightarrow\Delta K+\Delta U=W_f\xrightarrow{\Delta K=۶J}۶+(-۷/۵)=W_f\Rightarrow W_f=-۱/۵J$$

۳ نیروی اصطکاک را حساب می‌کنیم.

$$W_f=-f_kd\xrightarrow{d=۱/۵m}-۱/۵=-f_k(۱/۵)\Rightarrow f_k=۱N$$

۴ ضریب اصطکاک سطح میز خواهد شد:

$$f_k=\mu_kF_N\xrightarrow{F_N=۱۰N}۱=\mu_k\times۱۰\Rightarrow\mu_k=۰/۱$$

روش دیگر به کمک قضیهٔ کار و انرژی جنبشی:

با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی برای دستگاه می‌توان نوشت:

$$W_t=\Delta K\Rightarrow W_{mg}+W_{f_k}=K_۲-K_۱\Rightarrow mgd+W_{f_k}=K_۲$$

$$\xrightarrow[K_۲=۶J]{d=۱/۵m}۷/۵+W_{f_k}=۶$$

$$W_{f_k}=-۱/۵J\Rightarrow f_kd\cos۱۸۰^\circ=-۱/۵J\xrightarrow{d=۱/۵m}f_k=۱N$$

$$f_k=\mu_kF_N\Rightarrow۱=\mu_k\times۱۰\Rightarrow\mu_k=۰/۱$$

فصل سوم

نوسان و موج

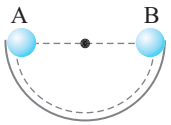


پنجره ۱

A ۱۳۵۳ ۴

حرکت دوره‌ای به حرکتی گویند که در بازه‌های زمانی یکسان عیناً تکرار می‌شود. چرخش زمین به دور خورشید، ضربان قلب و تاب خوردن دائماً در حال تکرار هستند، از این‌رو هر سه آن‌ها حرکت دوره‌ای‌اند.

A ۱۳۵۴ ۲



سطح نیمکره بدون اصطکاک است و با رها شدن جسم، جسم از نقطهٔ A تا B می‌رود و این مسیر را بازمی‌گردد. در نتیجه این حرکت، یک نوسان دوره‌ای است اما چون مسیر حرکت خط راست نیست، این حرکت، حرکت هماهنگ ساده نخواهد بود.

A ۱۳۵۵ ۳

نوسان‌های دوره‌ای هرگاه دارای نوسان‌های سینوسی باشند، حرکت هماهنگ ساده هستند و گزینه (۱) نادرست و گزینهٔ (۳) درست است.

نکته به‌طور عمومی به همهٔ تابع‌های سینوسی و کسینوسی، تابع سینوسی گویند. با توجه به نکتهٔ بیان شده معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده می‌تواند به‌صورت‌های مختلف از جمله $x=A\cos\omega t$ یا $x=A\sin\omega t$ باشد و گزینهٔ (۲) نادرست است.

A ۱۳۵۶ ۴

یادآوری به نوسان‌های سینوسی (و کسینوسی) حرکت هماهنگ ساده (SHM) گویند.

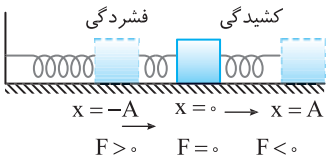
نمودار (الف) نمودار مکان - زمان یک نوسان دوره‌ای است اما نوسان‌های آن سینوسی نیست و این نمودار مربوط به حرکت هماهنگ ساده نیست.

نمودار (پ) نیز با اینکه دوره‌ای است اما سینوسی نبوده و این نمودار نیز مربوط به حرکت هماهنگ ساده نیست.

نمودارهای (ب) و (ت) نمودارهای سینوسی و کسینوسی هستند که به آن‌ها به‌طور عمومی تابع سینوسی می‌گویند و مربوط به حرکت هماهنگ ساده هستند.

A ۱۳۵۷ ۳

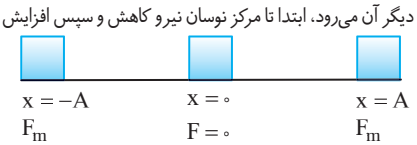
به حرکت هماهنگ ساده این وزنه و فنر دقت کنید. وقتی که فنر دارای فشردگی است (یعنی از $x=0$ تا $x=-A$) قطعاً نیروی فنر می‌خواهد فنر را به حالت طبیعی برگرداند و این نیرو به سمت راست است و در فاصله صفر تا $+A$ که فنر از طول طبیعی کشیدگی دارد، نیروی فنر به سمت چپ است، بنابراین نیروی فنر همواره به سمت نقطه حالت تعادل (طول طبیعی فنر) است یعنی نیرو به سمت مرکز نوسان است.



نکته در حرکت هماهنگ ساده، نیروی برگرداننده نقش اصلی را دارد که جهت بردار این نیرو همواره به سوی مرکز نوسان است.

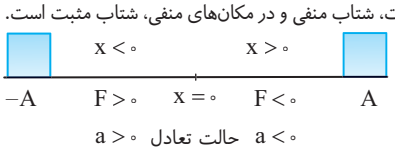
A ۱۳۵۸ ۳

هنگامی که نوسانگر در دو انتهای مسیر است، نیروی خالص وارد بر آن بیشینه است و در مرکز نوسان، نیروی خالص وارد بر نوسانگر صفر است. بنابراین هنگامی که نوسانگر از یک انتهای مسیر به انتهای دیگر آن می‌رود، ابتدا تا مرکز نوسان نیرو کاهش و سپس افزایش می‌یابد.



A ۱۳۵۹ ۲

نکته در حرکت هماهنگ ساده، مکان و شتاب هم‌علامت نیستند و در مکان‌های مثبت، شتاب منفی و در مکان‌های منفی، شتاب مثبت است.



نکته در حرکت هماهنگ ساده، علامت سرعت، ارتباطی به علامت مکان ندارد. یعنی در مکان‌های مثبت سرعت می‌تواند مثبت و یا منفی باشد.

در صورت تست گفته شده در چه حالتی مکان نوسانگر الزاماً منفی است. بنابراین باید شتاب مثبت باشد.

بازی با سؤال **در یک حرکت هماهنگ ساده، در لحظه‌ای که شتاب حرکت مثبت است، الزاماً .....**

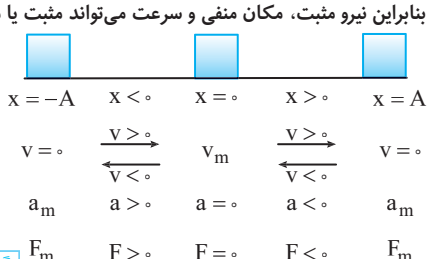
۱) بردار مکان منفی و بردار سرعت مثبت است.

۲) بردار مکان مثبت و بردار سرعت منفی است.

۳) بردار مکان منفی و نیروی وارد بر نوسانگر مثبت است.

۴) بردار مکان و نیروی وارد بر نوسانگر مثبت است.

پاسخ **در حرکت هماهنگ ساده، مطابق شکل، در لحظه‌ای که بُعد حرکت مثبت است، سرعت می‌تواند مثبت یا منفی باشد. اما شتاب و نیرو قطعاً منفی هستند و در لحظه‌ای که بُعد حرکت منفی است، شتاب و نیرو قطعاً مثبت بوده اما سرعت ممکن است مثبت یا منفی باشد. در صورت سؤال بیان شده که شتاب حرکت مثبت است، بنابراین نیرو مثبت، مکان منفی و سرعت می‌تواند مثبت یا منفی باشد.**

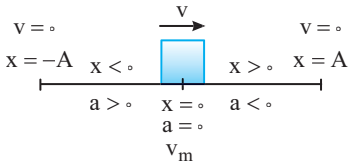


گزینه ۳

A ۱۳۶۰ ۴

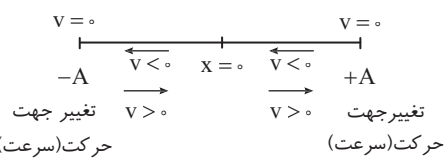
بردار مکان در گذر نوسانگر از مبدأ یعنی در نقطهٔ تعادل تغییر علامت می‌دهد و در این نقطه بردار سرعت تغییر جهت نمی‌دهد، در صورتی که بردار شتاب تغییر جهت می‌دهد.

مطابق شکل بردار سرعت در انتهای مسیر (دامنهٔ حرکت) صفر شده و تغییر علامت می‌دهد.



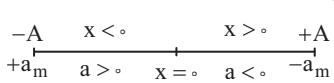
A ۱۳۶۱ ۲

سرعت در دو انتهای مسیر تغییر علامت می‌دهد. وقتی سرعت ابتدا مثبت است و سپس منفی می‌شود، یعنی متحرک در انتهای مسیر و در مکان $x=+A$ بوده و تغییر جهت داده است. در حرکت هماهنگ ساده هرگاه مکان مثبت باشد، شتاب منفی است بنابراین در این لحظه شتاب بیشینه مقدار منفی خود را دارد.



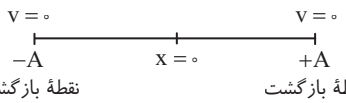
A ۱۳۶۲ ۴

در مرکز نوسان (حالت تعادل) شتاب صفر و در دامنه‌ها شتاب بیشینه است، بنابراین اندازهٔ شتاب در حال تغییر است. در مکان‌های مثبت، شتاب نوسانگر منفی و در مکان‌های منفی شتاب نوسانگر مثبت است و جهت بردار شتاب در لحظهٔ گذر از مبدأ مکان تغییر می‌کند. همچنین جهت سرعت و شتاب مستقل از یکدیگرند، در نتیجه حرکت هماهنگ ساده، یک حرکت شتاب‌دار با شتاب متغیر است که بزرگی و جهت شتاب در حال تغییر است.



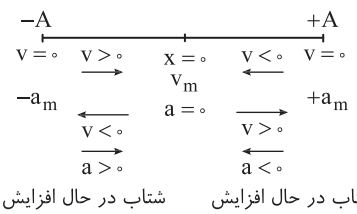
۱۳۶۳ A ۲

دو انتهای مسیر نوسان $(x=\pm A)$ را که در آن‌جا تندی نوسانگر صفر می‌شود و نوسانگر تغییر جهت می‌دهد نقطهٔ بازگشت می‌گویند. پس گزینهٔ (۳) نادرست است. در این نقاط بازگشت تندی صفر است و گزینهٔ (۲) درست است. اما شتاب نوسانگر بیشینه است زیرا نیروی خالص برگردانندهٔ وارد بر نوسانگر در این نقاط بیشینه است، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.



۱۳۶۴ A ۴

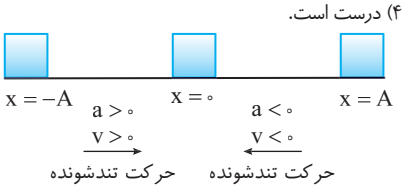
در حرکت هماهنگ ساده، در مرکز نوسان سرعت بیشینه و شتاب صفر است و در دو انتهای مسیر، سرعت صفر و شتاب بیشینه است. بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است. هنگام حرکت نوسانگر به سوی مرکز نوسان که حرکت تندشونده است بردار سرعت و شتاب هم‌جهت هستند، پس گزینهٔ (۲) نادرست است. هنگام حرکت نوسانگر به سوی دو انتهای مسیر، شتاب افزایش می‌یابد و بیشینه می‌شود، در حالی که سرعت کاهش یافته و صفر می‌شود، بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.



۱۳۶۵ A ۴

نکته وقتی نوسانگر به سوی مرکز نوسان می‌رود، تندی آن افزایش می‌یابد و حرکت نوسانگر تندشونده است.

در حرکت تند شونده باید علامت سرعت و شتاب یکسان باشد. یعنی اگر $v<0$ باشد $a<0$ و اگر $v>0$ باشد، $a>0$ باشد. بنابراین ممکن است سرعت مثبت و یا منفی بوده و گزینه (۴) درست است.



بازی با سؤال **در یک حرکت هماهنگ ساده، نوسانگر در حال نزدیک شدن به مبدأ (نقطهٔ تعادل) است. کدام گزینه درست است؟**

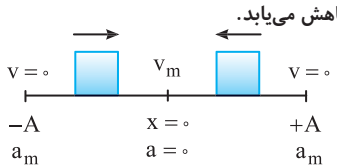
۱) شتاب در حال افزایش و تندی در حال کاهش است.

۲) شتاب و تندی در حال افزایش است.

۳) شتاب در حال کاهش و تندی در حال افزایش است.

۴) شتاب ثابت و تندی در حال افزایش است.

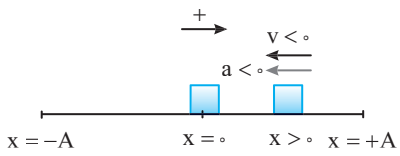
پاسخ **در حرکت هماهنگ ساده هنگامی که نوسانگر به مبدأ نزدیک می‌شود، تندی در حال افزایش است اما به دلیل کاهش نیروی خالص وارد بر نوسانگر شتاب کاهش می‌یابد.**



گزینهٔ ۳

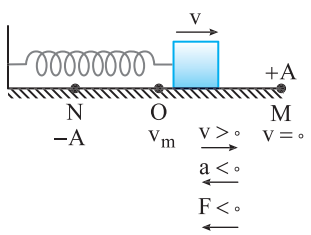
۱۳۶۶ A ۳

مکان مثبت است و مطابق شکل برای آن‌که حرکت تندشونده باشد باید نوسانگر در حال حرکت به سمت مرکز نوسان باشد، یعنی سرعت منفی بوده و چون حرکت تندشونده است شتاب نیز منفی است و گزینهٔ (۳) درست است. البته می‌دانیم که علامت مکان و شتاب خلاف یکدیگر است و هرگاه مکان مثبت باشد، قطعاً شتاب منفی است.



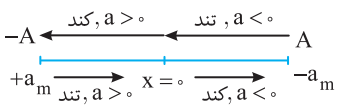
۱۳۶۷ A ۴

جسم در حال حرکت به سمت نقطهٔ بازگشت است و تندی آن در حال کاهش است، پس حرکت آن کندشونده بوده، از این‌رو بردار شتاب در خلاف جهت بردار سرعت یعنی در خلاف جهت محور xهاست و با توجه به قانون دوم نیوتون $(\vec{F}=m\vec{a})$ نیروی خالص وارد بر نوسانگر نیز در خلاف جهت محور xهاست.



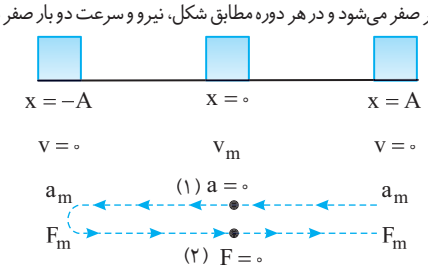
۱۳۶۸ B ۱

با توجه به شکل گزینهٔ (۱) درست است.



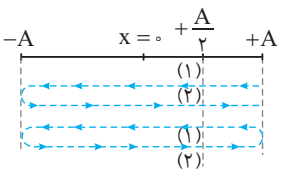
۱۳۶۹ A ۲

در حرکت هماهنگ ساده، در مرکز نوسان، شتاب و نیروی وارد بر نوسانگر صفر است و در دامنه‌ها سرعت نوسانگر صفر می‌شود و در هر دوره مطابق شکل، نیرو و سرعت دو بار صفر می‌شود.



۱۳۷۰ A ۲

با توجه به مسیرهای شکل روبه‌رو، متحرک در یک دوره دو بار از مکان $x=+\frac{A}{2}$ می‌گذرد.

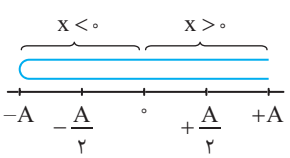


نکته در هر دوره نوسانگر از هر نقطهٔ مسیر بین $+A$ تا $-A$ دو بار می‌گذرد.

۱۳۷۱ A ۲

خط فکری فاصلهٔ نوسانگر از مرکز نوسان $(x=0)$ می‌تواند در مکان‌های مثبت و یا در مکان‌های منفی باشد، یعنی وقتی گفته می‌شود فاصله از مرکز نوسان $\frac{A}{2}$ باشد شما باید مکان‌های $+\frac{A}{2}$ و $-\frac{A}{2}$ را درنظر بگیرید.

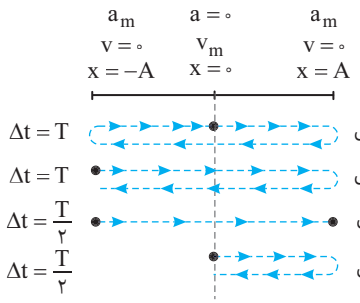
به شکل نگاه کنید نوسانگر در یک دوره دو بار از مکان $+\frac{A}{2}$ و دو بار از مکان $-\frac{A}{2}$ می‌گذرد، یعنی در هر دوره جمعاً ۴ بار فاصلهٔ نوسانگر از حالت تعادل (مرکز نوسان $x=0$) برابر $\frac{A}{2}$ می‌شود.



A ۱۳۷۲ ۲

دوره یعنی زمان یک نوسان کامل و نصف دوره یعنی زمانی که نوسانگر نصف نوسان انجام می‌دهد. به شکل دقت کنید در مسیر (۳) حداقل سرعت یک‌بار بیشینه (Max) می‌شود و در مسیر (۴) در مدت نیم‌نوسان سرعت یکبار صفر می‌شود بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

نکته در یک حرکت هماهنگ ساده، مطابق شکل زیر، در بازهٔ $\frac{T}{2}$ سرعت، شتاب، نیرو، انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل حداقل یک بار صفر و یک بار بیشینه می‌شود.



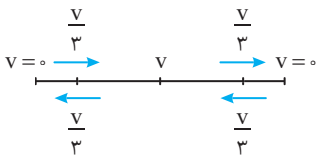
بازی با سؤال **در یک حرکت هماهنگ روی خط راست، در مدت $\frac{T}{2}$ سرعت به‌ترتیب حداکثر چند بار صفر و چند بار بیشینه می‌شود؟**

۱) صفر، ۱ **۲)** ۱، ۱ **۳)** ۱ و صفر **۴)** ۲ و ۲

پاسخ **در مسیر (۳) سرعت دوبار صفر شده و در مسیر (۴) سرعت دوبار بیشینه می‌شود، بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.** گزینهٔ ۴

A ۱۳۷۳ ۳

تندی در نقاط بازگشت صفر و در نقطهٔ تعادل بیشینه یعنی v است، از این‌رو تندی بین صفر تا v تغییر می‌کند و مطابق شکل زیر در هر دوره چهار بار تندی برابر $\frac{v}{3}$ می‌شود.



میانبر در حرکت هماهنگ ساده در هر دوره تندی نوسانگر چهار بار می‌تواند $\frac{1}{n}v_m$ (یعنی کسری از تندی بیشینه) شود.

A ۱۳۷۴ ۱

یادآوری زمان یک نوسان را دوره (T) می‌گویند.

با یک تناسب ساده مسئله قابل حل است.

نوسان $N=40$	$t=20s$
۱ نوسان	$T=?$

$\Rightarrow T=\frac{20}{40}=0/5s$

B ۱۳۷۵ ۱

بسامد را حساب می‌کنیم.

$45\frac{\text{دور}}{\text{دقیقه}}\Rightarrow f=\frac{45}{60}=\frac{3}{4}\frac{\text{دور}}{\text{ثانیه}}$

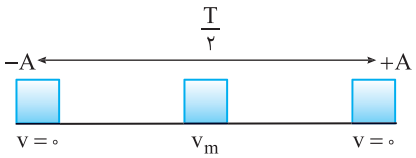
$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f\Rightarrow\omega=2\pi\times\frac{3}{4}=\frac{3\pi}{2}rad/s$

A ۱۳۷۶ ۳

در صورت مسئله بیان شده در بازه‌های زمانی $0/1s$ سرعت صفر می‌شود. یعنی در این مدت مطابق شکل نوسانگر از یک انتهای مسیر به انتهای دیگر رفته است که این مسیر نصف دوره طول می‌کشد، بنابراین می‌توان نوشت:

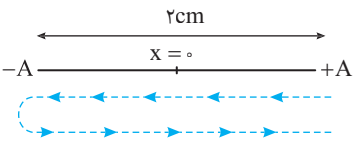
$\frac{T}{2}=0/1\Rightarrow T=0/2s$

$f=\frac{1}{T}\Rightarrow f=\frac{1}{0/2}\Rightarrow f=5Hz$



A ۱۳۷۷ ۳

یادآوری در هر نوسان کامل، نوسانگر دو بار طول پاره‌خط مسیر را طی می‌کند. مسافتی که نوسانگر در هر نوسان طی می‌کند چهار برابر دامنه $(\ell=4A)$ است.



۱ ۱۲۰ بار طی طول پاره‌خط یعنی $\frac{120}{2}=60$ نوسان.

۲ ۶۰ نوسان در مدت $1min=60s$ انجام شده است. بنابراین زمان هر نوسان (دوره) خواهد شد.

$T=\frac{t}{N}\Rightarrow t=\frac{60}{60}=1s$

۳ در هر ثانیه نوسانگر یک نوسان انجام می‌دهد، در این صورت در مدت ۴s، نوسانگر، ۴ نوسان انجام می‌دهد. $(N=4)$

۴ در هر نوسان مسافت طی شده $2\times2=4cm$ است و در مدت ۴ نوسان مسافت طی شده $\ell=4\times4=16cm$ می‌شود.

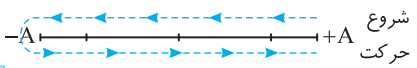
بازی با سؤال **نوسانگری از یک سر پاره‌خطی شروع به حرکت کرده و در مدت ۵ ثانیه ۲۰۰ بار از مرکز پاره‌خط (وسط پاره‌خط) می‌گذرد. بسامد نوسانگر چند هرتز است؟**

۱) ۱۰ **۲)** ۵۰ **۳)** ۲۰ **۴)** ۱۰۰

پاسخ **نکته** **نوسانگر در هر دوره، دو بار از مرکز نوسان می‌گذرد. در این حرکت در مدت ۵s نوسانگر ۲۰۰ بار از مرکز نوسان می‌گذرد، یعنی تعداد نوسان‌ها در مدت ۵s، $N=100$ نوسان است. دوره خواهد شد:**

$T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{5}{100}\Rightarrow T=0/05s$

بسامد را حساب می‌کنیم: $f=\frac{1}{T}\Rightarrow f=\frac{1}{0/05}\Rightarrow f=20Hz$



گزینهٔ ۳

A ۱۳۷۸ ۲

خط فکری نوسانگر اول پس از ۶s، یک نوسان از نوسانگر دوم جلو می‌افتد، یعنی اگر تعداد نوسان اولی N_1 باشد تعداد نوسان دومی در ۶s، $N_2=N_1-1$ است. از این‌رو شما باید N_1 و سپس N_2 را بیابید تا بتوانید دوره T_2 را به‌دست بیاورید.

۱ تعداد نوسان‌های اولی را به‌دست می‌آوریم: $N_1=\frac{t}{T_1}\Rightarrow N_1=\frac{6}{1/5}=4$

۲ تعداد نوسان‌های دومی برابر $N_2=4-1=3$ است و دورهٔ آن برابر است با:

$N_2=\frac{t}{T_2}\Rightarrow 3=\frac{6}{T_2}\Rightarrow T_2=2s$

A ۱۳۷۹ ۴

با توجه به رابطه بسامد زاویه‌ای و دوره:

$\omega_A=\frac{2\pi}{T_A},\omega_B=\frac{2\pi}{T_B}\Rightarrow\frac{\omega_A}{\omega_B}=\frac{T_B}{T_A}\Rightarrow 4=\frac{T_B}{T_A}\Rightarrow T_A=\frac{1}{4}T_B$

$f=\frac{1}{T}\Rightarrow\frac{f_A}{f_B}=\frac{T_B}{T_A}=4\Rightarrow f_A=4f_B$

A ۱۳۸۰ ۲

۱ دورهٔ نوسان ۳۶٪ کاهش یافته، بنابراین دورهٔ جدید برابر است با:

$$T_۲=T_۱-\frac{۳۶}{۱۰۰}T_۱=\frac{۶۴}{۱۰۰}T_۱=\frac{۱۶}{۲۵}T_۱\Rightarrow\frac{T_۲}{T_۱}=\frac{۱۶}{۲۵}$$

۲ بسامد و دوره با هم نسبت وارون دارند از این‌رو:

$$f=\frac{۱}{T}\Rightarrow\frac{f_۲}{f_۱}=\frac{T_۱}{T_۲}\Rightarrow\frac{f_۲}{f_۱}=\frac{۲۵}{۱۶}$$

۳ حال درصد تغییرات بسامد را حساب می‌کنیم.

$$\text{درصد تغییر بسامد}=\frac{\Delta f}{f_۱}\times۱۰۰=\frac{\frac{۲۵}{۱۶}f_۱-f_۱}{f_۱}\times۱۰۰=\frac{۹}{۱۶}\times۱۰۰=۵۶/۲۵٪$$

۴ بنابراین بسامد ۵۶/۲۵٪ افزایش یافته است.

۵ برای بسامد زاویه‌ای ($\omega=۲\pi f$) نیز داریم:

$$\text{درصد تغییر بسامد زاویه‌ای}\frac{\Delta\omega}{\omega_۱}\times۱۰۰=\frac{۲\pi f_۲-۲\pi f_۱}{۲\pi f_۱}\times۱۰۰=\frac{f_۲-f_۱}{f_۱}\times۱۰۰=۵۶/۲۵٪$$

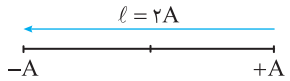
A ۱۳۸۱ ۲

دامنه $A=۰/۰۵m$ و بسامد زاویه‌ای $\omega=۲\pi f=۴۰\pi\,rad/s$ است، بنابراین معادلهٔ حرکت خواهد شد: $x=۰/۰۵\cos۴۰\pi t$

یادآوری معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده‌ای که در کتاب معرفی شده به‌صورت $x=A\cos\omega t$ است که در آن A دامنه و ω بسامد زاویه‌ای است.

A ۱۳۸۲ ۲

نکته طول پاره‌خط مسیر نوسان دو برابر دامنه ($۲A$) است.



نکته هر ۲ بار طی پاره‌خط مسیر برابر یک نوسان است.

۱ دامنه خواهد شد: $۲A=۲۰\,cm\Rightarrow A=۱۰\,cm$

۲ ۲۰ بار طی کردن طول پاره‌خط یعنی: $\frac{۲۰}{۲}=۱۰$ نوسان

۳ در مدت ۰/۱s، ۱۰ نوسان انجام شده است بنابراین دوره خواهد شد:

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{۰/۱}{۱۰}\Rightarrow T=۰/۰۱s$$

۴ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم. $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{۲\pi}{۰/۰۱}\Rightarrow\omega=۲۰۰\pi\,rad/s$

۵ معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم $x=۰/۱\cos۲۰۰\pi t$

A ۱۳۸۳ ۱

با توجه به معادلهٔ حرکت $x=۰/۰۲\cos۵\pi t$ بسامد زاویه‌ای برابر $۵\pi\,rad/s$ است

از این‌رو دوره خواهد شد: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow۵\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۰/۴s$

نوسانگر در ۰/۴s یک نوسان انجام می‌دهد و ۵۰ نوسان را در مدت:

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow t=NT\Rightarrow t=۵۰\times۰/۴=۲۰s$$

A ۱۳۸۴ ۱

کافی است زمان داده شده را در معادلهٔ حرکت جای‌گذاری کنیم. البته باید مثلثات نیز بلد باشیم.

$$x=۰/۰۲\cos۲۰\pi t\xrightarrow{t=\frac{۱}{۶}s}x=۰/۰۲\cos\frac{۲۰\pi}{۶}=۰/۰۲\cos(\frac{۱۸\pi}{۶}+\frac{۲\pi}{۶})$$

$$\Rightarrow x=۰/۰۲\cos(۳\pi+\frac{\pi}{۳})\Rightarrow x=۰/۰۲\cos(\pi+\frac{\pi}{۳})\Rightarrow x=-۰/۰۲\cos\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow x=-۰/۰۲\times\frac{۱}{۲}=-۰/۰۱m=-۱cm$$

(۲π دورهٔ گردش تابع $\cos\theta$ بوده که آن را برمی‌داریم.)

A ۱۳۸۵ ۱

معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده $x=A\cos\omega t$ است. لحظه‌ای که نوسانگر در بیشینه مکان مثبت است را مبدأ زمان فرض می‌کنیم، $\frac{۲T}{۳}$ بعد از آن یعنی باید در معادلهٔ حرکت به جای t مقدار $\frac{۲T}{۳}$ را قرار دهیم. $x=A\cos\frac{۲\pi}{T}\times\frac{۲T}{۳}\Rightarrow x=A\cos\frac{۴\pi}{۳}=-\frac{A}{۲}$

B ۱۳۸۶ ۳

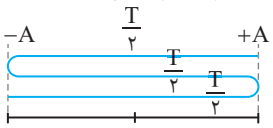
خط فکری انتهای پاره‌خط مسیر نوسان را که در آنجا سرعت صفر شده و نوسانگر تغییر جهت می‌دهد نقطه بازگشت گویند. در صورت مسئله بیان نشده که برای چندمین بار نوسانگر باید به نقطهٔ بازگشت برسد. بنابراین وقتی از مکان $+A$ نوسانگر شروع به حرکت می‌کند، در مدت $\frac{T}{۲}$ برای اولین بار به مکان $-A$ (نقطهٔ بازگشت) می‌رسد و در $\frac{T}{۲}$ بعدی برای دومین بار به نقطهٔ بازگشت می‌رسد. بنابراین شما باید هر زمان که نوسانگر در نقطهٔ بازگشت است را به‌دست بیاورید.

ابتدا دوره را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow۴\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۰/۵s$

نوسانگر با گذشت هر $\frac{T}{۲}$ به نقطهٔ بازگشت می‌رسد. لحظه‌هایی که نوسانگر به نقاط بازگشت می‌رسند را حساب می‌کنیم.

$$\Delta t_۱=\frac{۰/۵}{۲}=۰/۲۵s,\Delta t_۲=۲\times\frac{۰/۵}{۲}=۰/۵s,\Delta t_۳=۳\times\frac{۰/۵}{۲}=۰/۷۵s,\Delta t_۴=۴\times\frac{۰/۵}{۲}=۱s$$

تنها گزینهٔ (۳) در این اعداد وجود دارد پس گزینهٔ (۳) درست است.



روش دیگر: اگر نوسانگر از یک انتها شروع به نوسان کند. در هر $\frac{T}{۲}$ یک‌بار نوسانگر به نقطه بازگشت می‌رسد، بنابراین تعداد دفعاتی که در بازهٔ زمانی Δt به نقطهٔ بازگشت می‌رسد خواهد شد: $N=\frac{\Delta t}{\frac{T}{۲}}$

حال گزینه‌ها را بر $\frac{T}{۲}$ تقسیم می‌کنیم، اگر عدد صحیح به‌دست آمد، آن زمان درست بوده و اگر عدد صحیح به‌دست نیاید در آن زمان نوسانگر در نقطهٔ بازگشت قرار ندارد.

گزینه ۱: $\frac{\Delta t}{\frac{T}{۲}}=\frac{۰/۴}{\frac{۰/۵}{۲}}=\frac{۸}{۵}=۱/۶$ جواب نیست

گزینه ۲: $\frac{\Delta t}{\frac{T}{۲}}=\frac{۰/۶}{\frac{۰/۵}{۲}}=۲/۴$ جواب نیست

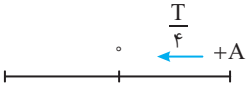
گزینه ۳: $\frac{\Delta t}{\frac{T}{۲}}=\frac{۱}{\frac{۰/۵}{۲}}=۴$ درست است

A ۱۳۸۷ ۲

نقطهٔ تعادل یعنی مبدأ $x=۰$، بنابراین بنا به فرض مسئله در لحظهٔ $t=۲s$ مکان متحرک $x=۰$ شده است، از این‌رو:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow۰=A\cos\frac{۲\pi}{T}\times۲\Rightarrow\cos\frac{۴\pi}{T}=۰\Rightarrow\frac{۴\pi}{T}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow T=۸s$$

روش دیگر: نوسانگر ابتدا در مکان $+A$ بوده و پس از ۲s به مکان $x=۰$ می‌رود. زمان حرکت از A تا صفر برابر $\frac{T}{۴}$ است.



بنابراین: $\frac{T}{۴}=۲\Rightarrow T=۸s$

A ۱۳۸۸ ۲

خط فکری مسافت‌های طی شده متوالی هستند، یعنی در مجموع زمان‌های t_1 و t_2 نوسانگر به اندازهٔ مجموع $3/78cm$ و $4/22cm$ مسافت طی کرده است. این مسافت را به‌دست بیاورید و با دامنه مقایسه کنید.

کل مسافت طی شده در بازهٔ زمانی t_1+t_2 برابر است با: $4/22+3/78=8cm$

دامنهٔ حرکت $2cm$ است و در مدت یک دوره نوسانگر مسافتی برابر $4A=4\times2=8cm$ طی می‌کند از این‌رو کل مدت حرکت یک دوره بوده است $(t_1+t_2=T)$.

A ۱۳۸۹ ۴

مسافتی که نوسانگر در هر دوره طی می‌کند چهار برابر دامنه $(4A)$ است، این نوسانگر در یک دوره مسافت $16cm$ را طی کرده است، بنابراین دامنهٔ حرکت نوسانگر برابر است با:

$$4A=16\Rightarrow A=4cm=0/04m$$

مکان ذره در $t=0/05s$ برابر $x=+2\sqrt{3}cm$ است از این‌رو:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\frac{2\sqrt{3}}{100}=0/04\cos\omega(\frac{5}{100})\Rightarrow\cos\frac{5}{100}\omega=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{5}{100}\omega=\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow\omega=\frac{10\pi}{3}rad/s$$

معادلهٔ حرکت خواهد شد: $x=0/04\cos\frac{10\pi}{3}t$

A ۱۳۹۰ ۳

خط فکری دقت کنید که در توابع مثلثاتی در یک دوره دو بار مقدار تابع یکسان است، به‌طور مثال اگر $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ شود زاویه α می‌تواند $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ باشد. در این مسئله بیان شده کمترین زمان پس از $t=0$، بنابراین باید شما زاویهٔ کوچک‌تر را انتخاب کنید.

کافی است در معادلهٔ حرکت، مکان را $x=-\frac{A}{2}$ قرار دهیم.

$$-\frac{A}{2}=A\cos\omega t\Rightarrow\cos\omega t=-\frac{1}{2}\Rightarrow(\omega t=\frac{2\pi}{3},\omega t=\frac{4\pi}{3})$$

در صورت سؤال کمترین زمان پس از $t=0$ خواسته شده است از این‌رو:

$$\omega t=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}t=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{T}{3}$$

B ۱۳۹۱ ۲

خط فکری ابتدا با قرار دادن مکان نوسانگر در معادلهٔ حرکت لحظه t_1 را حساب کرده سپس t_1 را دو برابر کنید و در معادلهٔ حرکت قرار دهید و مکان نوسانگر را به‌دست بیاورید.

۱ لحظهٔ t_1 را حساب می‌کنیم.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}A=A\cos\omega t_1\Rightarrow\omega t_1=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t_1=\frac{\pi}{6\omega}$$

۲ لحظهٔ $t_2=2t_1$ را در معادله قرار می‌دهیم.

$$x=A\cos\omega\times\frac{2\pi}{6\omega}\Rightarrow x=A\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=+\frac{A}{2}$$

بازی با سؤال **ذره‌ای با دورهٔ T در مبدأ زمان از مکان بیشینهٔ مثبت شروع به نوسان کرده و در لحظه‌های t_1 و $t_2=2t_1$ از یک مکان می‌گذرد. t_1 کدام است؟ $(t_1<\frac{T}{2})$** از کتاب درسی

۱) $\frac{T}{6}$ ۲) $\frac{T}{3}$ ۳) $\frac{T}{4}$ ۴) $\frac{2T}{3}$

پاسخ **در معادلهٔ حرکت ساده $(x=A\cos\omega t)$ لحظه‌های t_1 و t_2 را قرار داده در این دو لحظه بنا به فرض مکان‌ها یکسان است، بنابراین مکان‌ها را برابر قرار داده و مسئله را حل کنید.**

با توجه به فرض مسأله مکان‌ها در لحظهٔ t_1 و $t_2=2t_1$ برابر است، از این‌رو:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\xrightarrow{x_2=x_1}A\cos\omega(2t_1)=A\cos\omega t_1\Rightarrow\cos2\omega t_1=\cos\omega t_1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\omega t_1=2\pi-\omega t_1\Rightarrow3\omega t_1=2\pi\Rightarrow3\times\frac{2\pi}{T}t_1=2\pi\Rightarrow t_1=\frac{T}{3}\\ \omega t_1=2\omega t_1-2\pi\Rightarrow\omega t_1=2\pi\Rightarrow\frac{2\pi}{T}t_1=2\pi\Rightarrow t_1=T(t_1<\frac{T}{2})\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

گزینهٔ ۲

A ۱۳۹۲ ۲

نکته در نقاط بازگشت $(x=\pm A)$ سرعت نوسانگر صفر است.

$x=-A$ $x=0$ $x=+A$

$v=0$ v_m $v=0$

وقتی معادلهٔ حرکت به شما داده شده است و از شما خواسته شده که لحظه‌هایی را که سرعت صفر می‌شود به‌دست آورید، شما باید به جای مکان، $+A$ و یا $-A$ را قرار دهید. متحرک وقتی اولین بار به مکان $x=-0/03m$ می‌رسد، سرعتش صفر می‌شود، بنابراین خواهیم داشت:

$$x=0/03\cos10\pi t\Rightarrow-0/03=0/03\cos10\pi t\Rightarrow\cos10\pi t=-1$$

$$\Rightarrow10\pi t=\pi\Rightarrow t=0/1s$$

دقت کنید شما باید تمام زاویه‌های مثلثاتی را در حرکت هماهنگ ساده برحسب رادیان بلد باشید.

زاویه برحسب درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۵۰	۱۸۰	۲۷۰
رادیان	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
cos	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	۰
sin	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-1

B ۱۳۹۳ ۴

یادآوری ریاضی برای توابع کسینوسی و سینوسی داریم:

$$\cos\alpha=\pm1\Rightarrow\alpha=k\pi\qquad\sin\alpha=\pm1\Rightarrow\alpha=(2k-1)\frac{\pi}{2}$$

نقاط بازگشت مکان‌های $x=\pm A$ هستند. بنابراین شما در معادلهٔ حرکت به جای x مقدار $\pm A$ را قرار داده و با توجه به معادلهٔ مثلثاتی مسئله را حل کنید.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\pm A=A\cos\omega t\Rightarrow\cos\omega t=\pm1\Rightarrow\omega t=k\pi$$

$$\Rightarrow\frac{2\pi}{T}t=k\pi\Rightarrow t=k\frac{T}{2}$$

A ۱۳۹۴ ۴

یادآوری به کمان مثلثاتی در معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده $(x=A\cos\omega t)$ یعنی ωt، شناسه تابع کسینوس (و یا فاز) می‌گویند.

تغییر شناسهٔ تابع کسینوس در بازهٔ t_1 تا t_2 را حساب می‌کنیم.

$$\omega t_2-\omega t_1=\omega(t_2-t_1)$$

اکنون اگر t_2-t_1 برابر $1s$ باشد آنگاه:

بسامد زاویه‌ای $=\omega\times1=$ تغییر شناسه تابع کسینوس

A ۱۳۹۵ ۱

شناسهٔ تابع کسینوس یعنی کمان ωt در حرکت هماهنگ ساده. با توجه به فرض مسئله، شناسه تابع کسینوس (فاز) را در دو حالت نوشته از هم کم کرده و مقدار آن را برابر $\frac{\pi}{10}$ قرار می‌دهیم و بسازمد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

$$\omega t_2-\omega t_1=\omega(t_2-t_1)=\frac{\pi}{10}\Rightarrow\omega\times\frac{1}{120}=\frac{\pi}{10}\Rightarrow\omega=12\pi$$

اکنون بسامد را به‌دست می‌آوریم

$$\omega=2\pi f=12\pi\Rightarrow f=6Hz$$

B ۲ ۱۳۹۶

خط فکری به شکل نگاه کنید. از لحظهٔ $t=0$ ، $\frac{T}{4}$ طول می‌کشد تا نوسانگر برای اولین بار به نقطه تعادل رسیده و $3\frac{T}{4}$ طول می‌کشد تا برای دومین بار تندی نوسانگر بیشینه شود و بعد از $\frac{5T}{4}$ برای سومین بار و بعد از $7\frac{T}{4}$ برای چهارمین بار و بعد از $(2n-1)\frac{T}{4}$ برای n امین بار نوسانگر از مبدأ می‌گذرد. یعنی لحظه‌هایی که تندی بیشینه است، مضرب فرد $\frac{T}{4}$ است. اکنون شما گزینه‌ها را بررسی کنید. هر کدام که مضرب فرد $\frac{T}{4}$ باشد جواب مسئله است.

الف) $\frac{\Delta t}{\frac{T}{4}}=\frac{2T}{\frac{T}{4}}=8 \xrightarrow{\text{عدد زوج}}$ t_1 جواب نیست

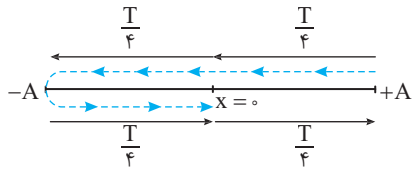
ب) $\frac{t_2}{\frac{T}{4}}=\frac{3/5T}{\frac{T}{4}}=14 \xrightarrow{\text{عدد زوج}}$ t_2 جواب نیست

پ) $\frac{t_3}{\frac{T}{4}}=\frac{5/25T}{\frac{T}{4}}=21 \xrightarrow{\text{عدد فرد}}$ t_3 جواب است

البته به کمک حل معادلهٔ مثلثاتی نیز می‌توانستید رابطهٔ $\Delta t=(2n-1)\frac{T}{4}$ را به‌دست بیاورید.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow 0=A\cos\omega t\Rightarrow\cos\omega t=0$$

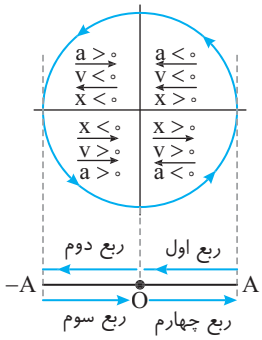
$$\omega t=(2n-1)\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}t=(2n-1)\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=(2n-1)\frac{T}{4}$$



A ۳ ۱۳۹۷

یادآوری با یک یادآوری طولانی سر و کار داریم. در معادلهٔ حرکت $x=A\cos\omega t$ به کمان ωt کتاب، شناسهٔ تابع کسینوس می‌گوید و ما به اختصار آن را فاز می‌گوییم. بنابراین منظور ما از فاز مقدار $\theta=\omega t$ است.

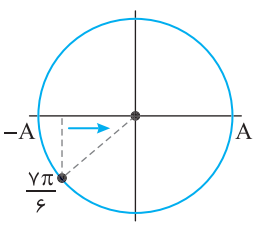
به شکل مقابل به دقت نگاه کنید اگر فاز در ربع اول مثلثاتی باشد مطابق شکل نوسانگر از مکان $+A$ در حال حرکت به حالت تعادل $x=0$ است و حرکت تندشونده است. اگر فاز $(\theta=\omega t)$ در ربع دوم مثلثاتی باشد، نوسانگر در حال حرکت از حالت تعادل به سوی دامنهٔ $-A$ است و حرکت کندشونده است.



اگر فاز $(\theta=\omega t)$ در ربع سوم مثلثاتی باشد نوسانگر در حال حرکت از $-A$ به سوی حالت تعادل است و حرکت تندشونده است.

اگر فاز $(\theta=\omega t)$ در ربع چهارم مثلثاتی باشد، نوسانگر در حال حرکت از مکان $x=0$ به سوی $+A$ بوده و حرکت کندشونده است.

در مسئله فاز حرکت $\omega t=\frac{7\pi}{6}$ بیان شده یعنی فاز در ربع سوم است. بنابراین مکان منفی و گزینهٔ (۱) نادرست است، شتاب مثبت و گزینهٔ (۲) نادرست است و سرعت مثبت و گزینهٔ (۳) درست است، حرکت نیز تندشونده و گزینهٔ (۴) نادرست است.

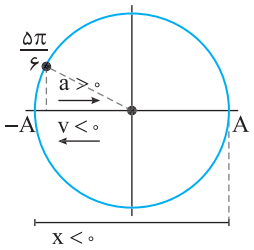


B ۲ ۱۳۹۸

خط فکری در حل این مسئله اگر شما به جای t مقدار $\frac{1}{72}s$ را قرار دهید و مکان را به‌دست آورید، هیچ‌یک از گزاره‌ها را نمی‌توانید بررسی کنید زیرا جهت حرکت نوسانگر مشخص نیست اما اگر فاز حرکت (شناسه تابع کسینوس ωt) را به‌دست بیاورید مشکل حل می‌شود.

۱ فاز حرکت را در لحظهٔ $t=\frac{1}{72}s$ حساب می‌کنیم.

$$\theta=\omega t=60\pi\times\frac{1}{72}\Rightarrow\theta=\frac{5\pi}{6}$$



۲ کمان $\frac{5\pi}{6}$ در ربع دوم مثلثاتی است بنابراین نوسانگر در حال حرکت از $x=0$ به سوی $-A$ است. در نتیجه در این لحظه نوسانگر در حال دور شدن از حالت تعادل است و گزارهٔ (الف) نادرست است.

۳ در حرکت به سوی دامنهٔ $-A$ حرکت کندشونده است و گزارهٔ (ب) درست است.

۴ مکان منفی و شتاب که همواره به سوی حالت تعادل است مثبت است و گزاره (پ) درست است.

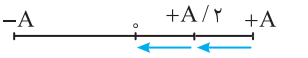
۵ سرعت منفی و در خلاف جهت محور بوده و گزاره (ت) نادرست است.

B ۳ ۱۳۹۹

تابع حرکت هماهنگ ساده یک تابع سینوسی (و کسینوسی) است. بنابراین گزینهٔ (۱)، (۲) و (۴) می‌توانند معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده باشد. اما $x=4\tan 2t$ نمی‌تواند معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده باشد، تابع تانژانت در $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ تعریف نشده است و گزینهٔ (۳) نمی‌تواند معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده باشد.

B ۳ ۱۴۰۰

نکته زمان حرکت از $+A$ به $+\frac{A}{2}$ بدون تغییر جهت برابر $\frac{T}{6}$ و از $+\frac{A}{2}$ به $x=0$ بدون تغییر جهت $\frac{T}{12}$ است.



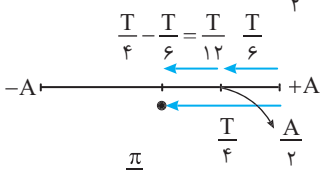
روش اول: (استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده): اگر شما نکتهٔ بالا را به خاطر بسپرید مسئله به سادگی قابل حل است.

$$\Rightarrow\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=2$$

روش دوم: (استفاده از معادلهٔ حرکت): معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده را می‌نویسیم. در معادله به جای x ، $+\frac{A}{2}$ را قرار می‌دهیم:

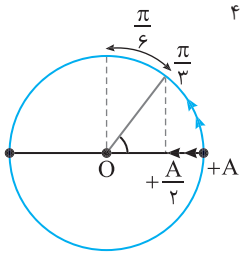
$$x=A\cos\omega t\xrightarrow{x=+\frac{A}{2}}\frac{A}{2}=A\cos\omega t\Rightarrow\cos\frac{2\pi}{T}t=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{2\pi}{T}t=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{T}{6}\\ \frac{2\pi}{T}t=\frac{5\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{5T}{6}\end{cases}$$

جواب $\frac{5T}{6}$ مربوط به دومین بار عبور از $+\frac{A}{2}$ است که مورد پرسش نیست.



$$\Rightarrow\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=\frac{\frac{T}{6}}{\frac{T}{12}}=2$$

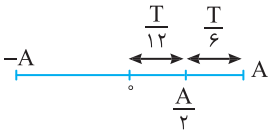
روش سوم: استفاده از فاز حرکت (شناسهٔ تابع کسینوسی) و دایرهٔ مثلثاتی (مرجع) است. از $+A$ تا $+\frac{A}{2}$ فاز حرکت $\frac{\pi}{3}$ رادیان و از $+\frac{A}{2}$ تا $x=0$ فاز حرکت $\frac{\pi}{6}$ تغییر می‌کند. از این‌رو:



$$\Delta\theta=\omega\Delta t\Rightarrow\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{T}\Delta t_1\Rightarrow\Delta t_1=\frac{T}{6},\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{T}\Delta t_2\Rightarrow\Delta t_2=\frac{T}{12}\Rightarrow\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=2$$

A ۱۴۰۱ ۳

با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده، حداقل زمانی که طول می‌کشد تا نوسانگر از مکان $x=0$ به مکان $x=\frac{A}{2}$ برسد برابر $\frac{T}{12}$ است، از



این‌رو:

$$\frac{T}{12}=\frac{1}{60}\Rightarrow T=\frac{12}{60}\Rightarrow T=0/2s$$

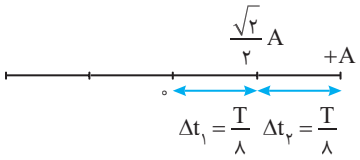
تعداد نوسانات در هر دقیقه را حساب می‌کنیم.

$$N=\frac{t}{T}\Rightarrow N=\frac{60}{0/2}=300$$

A ۱۴۰۲ ۲

نکته مدت زمان حرکت از $+A$ تا $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ بدون تغییر جهت $\frac{T}{8}$ و از $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ تا $x=0$ نیز $\frac{T}{8}$ است.

روش اول: با استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:



بنابراین:

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=1$$

روش دوم: استفاده از معادلهٔ حرکت:

می‌دانیم زمان حرکت از مکان $+A$ تا صفر برابر $\frac{T}{4}$ است. اکنون در معادلهٔ حرکت به جای x مقدار $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ را قرار می‌دهیم.

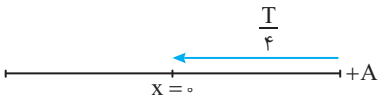
$$x=A\cos\omega t\Rightarrow+\frac{\sqrt{2}}{2}A=A\cos\omega t\Rightarrow\cos\frac{2\pi}{T}t=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}t=\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{7\pi}{4}$$

نوسانگر مستقیماً از $+A$ به $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ رفته است یعنی برای اولین بار از مکان $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ می‌گذرد بنابراین کمان $\frac{\pi}{4}$ قابل قبول است.

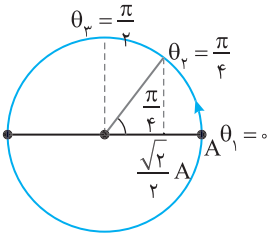
$$\frac{2\pi}{T}t=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{8}\Rightarrow\Delta t_1=\frac{T}{8}$$

بنابراین از $+A$ تا $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$، $\Delta t_1=\frac{T}{8}$ از $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ تا صفر نیز $\Delta t_2=\frac{T}{4}-\frac{T}{8}=\frac{T}{8}$ طول می‌کشد.

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=1$$



روش سوم: دایرهٔ مثلثاتی (مرجع):



فاز حرکت $(\theta=\omega t)$ در مکان $x=+\frac{\sqrt{2}}{2}$ برابر $\theta=\omega t_A=\frac{\pi}{4}$ و در مکان $x=+A$ برابر صفر است، بنابراین زمان حرکت از $+A$ تا $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ خواهد شد:

$$\omega t_2-\omega t_1=\frac{\pi}{4}-0\Rightarrow\frac{2\pi}{T}\Delta t_1=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\Delta t_1=\frac{T}{8}$$

فاز حرکت در مکان $x=0$ برابر $\theta=\omega t=\frac{\pi}{2}$ بنابراین زمان حرکت از $x=+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ تا $x=0$ خواهد شد.

$$\omega t_3-\omega t_2=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}\Delta t_2=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\Delta t_2=\frac{T}{8}$$

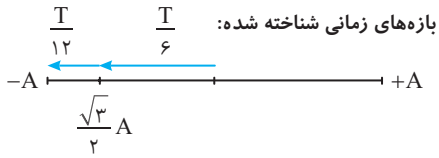
بنابراین:

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=1$$

A ۱۴۰۳ ۳

نکته زمان حرکت از مرکز نوسان (حالت تعادل $x=0$) تا مکان $-\frac{\sqrt{3}}{2}A$ بدون تغییر جهت $\frac{T}{6}$ و از مکان $-\frac{\sqrt{3}}{2}A$ تا $-A$ بدون تغییر جهت برابر $\frac{T}{12}$ است.

روش اول: استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:



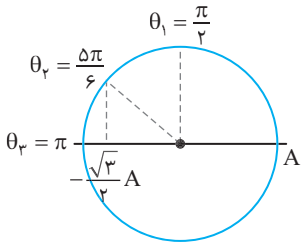
$$\Rightarrow\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=\frac{\frac{T}{6}}{\frac{T}{12}}=2$$

روش دوم: استفاده از فاز حرکت (شناسه تابع کسینوسی $\theta=\omega t$) (دایره مرجع):

کمان‌های مثلثاتی معادل $x=0$ و $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}A$ را روی دایره مثلثاتی مشخص کرده و به کمک تغییر فاز، Δt_1 و Δt_2 را حساب می‌کنیم.

$$\omega t_2-\omega t_1=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}\Delta t_1=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\Delta t_1=\frac{T}{6}$$

$$\omega t_3-\omega t_2=\pi-\frac{5\pi}{6}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}\Delta t_2=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\Delta t_2=\frac{T}{12}$$



بنابراین نسبت $\Delta t_1/\Delta t_2$ خواهد شد.

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=\frac{\frac{T}{6}}{\frac{T}{12}}=2$$

روش سوم: استفاده از معادلهٔ حرکت:

در معادله به جای x، $-\frac{\sqrt{3}}{2}A$ را قرار می‌دهیم.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow-\frac{\sqrt{3}}{2}A=A\cos\omega t$$

$$\Rightarrow\cos\frac{2\pi}{T}t=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}t=\frac{5\pi}{6}\ ,\ \frac{7\pi}{6}$$

متحرک برای بار اول به مکان $-\frac{\sqrt{3}}{2}A$ رسیده است و $\frac{5\pi}{6}$ پاسخ است.

$$\frac{2\pi}{T}t=\frac{5\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{5T}{12}$$

این زمان حرکت از $+A$ تا $-\frac{\sqrt{3}}{2}A$ است و اگر از آن مقدار $\frac{T}{4}$ یعنی زمان حرکت از $+A$ تا صفر را کم کنیم، Δt_1 به‌دست می‌آید. $\Delta t_1=\frac{5T}{12}-\frac{T}{4}=\frac{T}{6}$ و Δt_2 خواهد شد:

$$\Delta t_2=\frac{T}{4}-\frac{T}{6}=\frac{T}{12}$$

بنابراین:

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=2$$

بازی با سؤال **در یک حرکت نوسانی ساده متحرک از دامنهٔ $+A$ بدون تغییر جهت به مکان $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ در مدت Δt_1 و از $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ نیز بدون تغییر جهت حرکت به مکان $-A$ در مدت Δt_2 حرکت می‌کند. نسبت $\Delta t_2/\Delta t_1$ کدام است؟ (A دامنهٔ نوسان است.)**

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) $\frac{3}{2}$

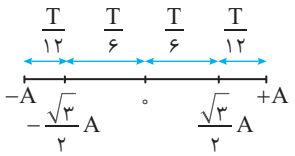
پاسخ **راه‌حل اول: اگر معادلهٔ حرکت نوسانگر را $x=A\cos\omega t$ بگیریم مدت زمانی که طول می‌کشد بدون تغییر جهت نوسانگر از $+A$ به $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ برسد برابر است با:**

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}A=A\cos\frac{2\pi}{T}t_1\Rightarrow\frac{2\pi}{T}t_1=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t_1=\frac{T}{12}$$

مدت زمانی که نوسانگر از $+A$ به $-A$ می‌رسد برابر $\frac{T}{2}$ است، بنابراین مدت زمانی که نوسانگر از $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ به $-A$ می‌رسد برابر $\frac{T}{2}-t_1=\frac{T}{2}-\frac{T}{12}=\frac{5T}{12}$ است، پس $\Delta t_1=\frac{T}{12}$ و $\Delta t_2=\frac{5T}{12}$ است.

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}=\frac{\frac{5T}{12}}{\frac{T}{12}}=5$$

راه‌حل دوم: با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده داریم:



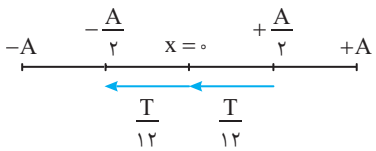
$$\Delta t_1=\frac{T}{12}$$

$$\Delta t_2=\frac{T}{6}+\frac{T}{6}+\frac{T}{12}=\frac{5T}{12}\Rightarrow\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}=5$$

گزینهٔ ۳

B ۱۴۰۴ ۱

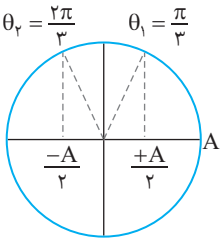
خط فکری کمترین زمانی که نوسانگر از مکان $+\frac{A}{2}$ به مکان $-\frac{A}{2}$ برود یعنی متحرک بدون تغییر جهت از $+\frac{A}{2}$ به $-\frac{A}{2}$ می‌رود، اکنون با دانستن این مطلب و به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده مسئله را حل کنید.



مدت زمان حرکت از $+\frac{A}{2}$ به $x=\circ$ بدون تغییر جهت $\frac{T}{12}$ و از $x=\circ$ بدون تغییر جهت تا $-\frac{A}{2}$ نیز $\frac{T}{12}$ است. از این‌رو: $\Delta t=\frac{T}{12}+\frac{T}{12}\Rightarrow\circ/1=\frac{T}{6}\Rightarrow T=\circ/6s$

روش استفاده از فاز حرکت (شناسه تابع کسینوس ωt):

فاز حرکت در مکان $+\frac{A}{2}$ مطابق شکل برابر $\frac{\pi}{3}$ و در مکان $-\frac{A}{2}$ برابر $\frac{2\pi}{3}$ است. بنابراین تغییر فاز در این جابه‌جایی برابر است با:



$$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$$

$$\omega(t_2-t_1)=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}(\Delta t)=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{6}\Rightarrow T=\circ/6s$$

میانبر کافی است محاسبه کنید $\frac{\pi}{3}$ چه کسری از دایره (2π) است:

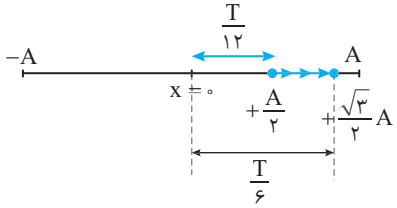
$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{6}\Rightarrow T=\circ/6s$$

B ۱۴۰۵ ۴

نکته مدت زمان حرکت از مکان صفر تا $+\frac{A}{2}$ بدون تغییر جهت $\frac{T}{12}$ و از صفر تا $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ بدون تغییر جهت $\frac{T}{6}$ است.

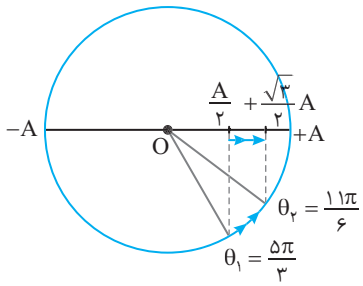
راه‌حل اول: روش استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:

$$\Delta t=\frac{T}{6}-\frac{T}{12}=\frac{T}{12}$$



راه‌حل دوم: روش استفاده از فاز حرکت و دایره مثلثاتی: روی محور کسینوس‌ها مکان‌ها را مشخص کرده و کمان مربوط به هر مکان را مشخص می‌کنیم. مطابق شکل نوسانگر از $+\frac{A}{2}$ به $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ رفته یعنی کمان از $\frac{5\pi}{3}$ به $\frac{11\pi}{6}$ تغییر کرده بنابراین تغییر فاز برابر است با:

$$\theta_2-\theta_1=\omega t_2-\omega t_1=\frac{11\pi}{6}-\frac{5\pi}{3}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}\Delta t=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{12}$$



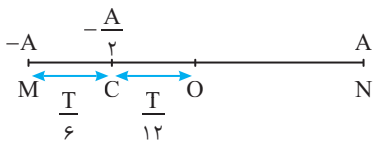
A ۱۴۰۶ ۳

خط فکری در حل این نوع مسائل باید مشخص کنید که زمانی که در مسئله داده شده چه کسری از دوره (T) است تا بتواند به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده مسئله را حل کنید.

۱ مشخص می‌کنیم $\circ/2s$ چه کسری از دوره $(T=1/2s)$ است.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\circ/2}{1/2}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{6}$$

۲ با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده زمان حرکت از دامنه $(-A)$ تا نصف $(\frac{-A}{2})$ برابر $\frac{T}{6}$ است یعنی نوسانگر فاصلهٔ C تا M را در مدت $\frac{T}{6}$ طی کرده، بنابراین نقطهٔ C باید در وسط O و M باشد. بنابراین $MC=OC$.

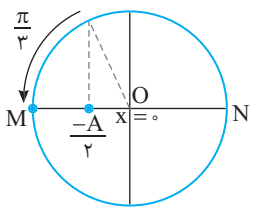


روش استفاده از تغییر فاز $(\Delta\theta=\omega\Delta t)$ و دایرهٔ مثلثاتی:

بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{1/2}\Rightarrow\omega=\frac{5\pi}{3}\,rad/s$$

تغییر فاز در مدت $\circ/2s$ را حساب می‌کنیم:



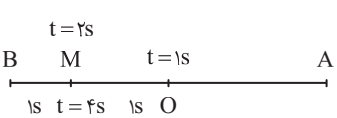
$$\Delta\theta=\omega\Delta t\Rightarrow\Delta\theta=\frac{5\pi}{3}\times\circ/2\Rightarrow\Delta\theta=\frac{\pi}{3}$$

بنابراین فاز حرکت برای رسیدن نوسانگر به نقطهٔ M، $\frac{\pi}{3}$ تغییر کرده بنابراین مطابق شکل دایرهٔ مثلثاتی باید نقطهٔ C در مکان $\frac{-A}{2}$ باشد از این رو $MC=OC$ است.

A ۱۴۰۷ ۳

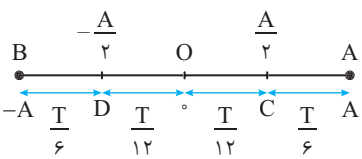
خط فکری دقت کنید نوسانگر در هر بازهٔ زمانی که از یک نقطه مثلاً M به انتهای مسیر مثلاً نقطهٔ B $(-A)$ برود در همان بازهٔ زمانی از نقطهٔ B به نقطهٔ M باز می‌گردد، بنابراین اگر در مدت ۱s از M به B برود در مدت ۱s از B به M می‌رود و یا اگر در مدت ۱s از O تا M برود در همان مدت ۱s از M به O برمی‌گردد.

نوسانگر از O تا M را در مدت $(1s=2-1)$ و از M تا B را نیز در مدت $(1s=\frac{4-2}{2})$ طی کرده است. یعنی از O تا B را در مدت $(2s=1+1)$ طی کرده است. از طرفی بازهٔ زمانی حرکت از مبدأ تا انتهای مسیر (O تا B) $\frac{1}{4}$ دوره طول می‌کشد، بنابراین: $\frac{T}{4}=2\Rightarrow T=8s$

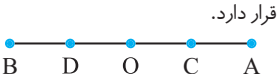


B ۱۴۰۸ **۱**

راه‌حل اول: سریع‌ترین راه‌حل استفاده از بازه‌های زمانی است که در درسنامه گفتیم به‌خاطر بسپارید: $t_۲=\frac{T}{۶}$ از B تا D ، $t_۱=\frac{T}{۱۲}+\frac{T}{۱۲}=\frac{T}{۶}$ از C تا D



راه‌حل دوم: معادلهٔ مکان - زمان به‌صورت $x=A\cos\omega t$ می‌باشد. در نقطهٔ C متحرک در فاصلهٔ $\frac{A}{۲}$ از مرکز تعادل $(x=۰)$ قرار دارد.



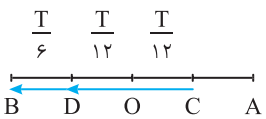
$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\frac{A}{۲}=A\cos\omega t_C$$

$$\Rightarrow\cos\omega t_C=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\omega=\frac{۲\pi}{T}}\frac{۲\pi}{T}t_C=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow t_C=\frac{T}{۶}$$

بنابراین زمان حرکت از A تا C برابر $\frac{T}{۶}$ است و زمان حرکت از C تا O خواهد شد:

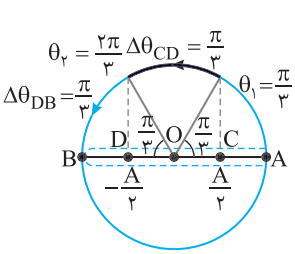
$$t_{C\to O}=\frac{T}{۴}-\frac{T}{۶}=\frac{T}{۱۲}$$

به دلیل تقارن حرکت، زمان از O تا D نیز $\frac{T}{۱۲}$ و از D تا B نیز $\frac{T}{۶}$ خواهد بود از این‌رو:



$$t_{C\to D}=\frac{T}{۱۲}+\frac{T}{۱۲}=\frac{T}{۶},\ t_{D\to B}=\frac{T}{۶}\Rightarrow\frac{T_{C\to D}}{T_{D\to B}}\Rightarrow\frac{\frac{T}{۶}}{\frac{T}{۶}}=۱$$

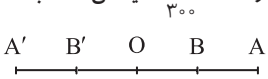
راه‌حل سوم: استفاده از فاز حرکت $(\theta=\omega t)$ و دایرهٔ مثلثاتی است. کمان متناظر $\frac{A}{۲}$ و $-\frac{A}{۲}$ را روی دایره مشخص می‌کنیم. اکنون می‌توان نوشت:



$$\begin{cases}\omega t_D-\omega t_C=\frac{۲\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳}\\ \Rightarrow\frac{۲\pi}{T}(t_۱)=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow t_۱=\frac{T}{۶}\\ \omega t_B-\omega t_D=\pi-\frac{۲\pi}{۳}\\ \Rightarrow\omega(t_۲)=\frac{\pi}{۳}\\ \Rightarrow\frac{۲\pi}{T}t_۲=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow t_۲=\frac{T}{۶}\end{cases}\Rightarrow\frac{t_۱}{t_۲}=۱$$

دقت کنید تغییر شناسهٔ تابع کسینوسی با زمان رابطهٔ خطی دارد. یعنی شناسهٔ تابع کسینوسی در زمان‌های یکسان، تغییرات یکسانی دارد. در این مسئله در جابه‌جایی از $+\frac{A}{۲}$ تا $-\frac{A}{۲}$ تغییر شناسه $\frac{\pi}{۳}$ بوده و در جابه‌جایی از $-\frac{A}{۲}$ تا $-A$ نیز تغییر شناسه $\frac{\pi}{۳}$ است، بنابراین این دو جابه‌جایی در مدت‌زمان یکسان طی می‌شود.

بازی با سؤال در شکل زیر اگر متحرکی بین دو نقطهٔ A و A' حرکت هماهنگ ساده انجام دهد و فاصلهٔ OB را در مدت $\frac{۱}{۳۰۰}$ ثانیه طی کند، بسامد نوسان چند هرتز است؟

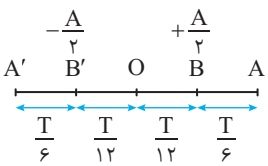


$$OB=BA=OB'=B'A'$$

۱) ۲۵ ۲) ۳۷/۵
۳) ۵۰ ۴) ۷۵

پاسخ **خط فکری** به‌فرض مسئله دقت کنید $OB=BA=OB'=B'A'$ یعنی، نقاط B و B' به ترتیب مکان $+\frac{A}{۲}$ و $-\frac{A}{۲}$ هستند و با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده مدت زمان حرکت از $+A$ تا $+\frac{A}{۲}$ (نقطهٔ B) $\frac{T}{۶}$ و از $+\frac{A}{۲}$ تا O، $\frac{T}{۱۲}$ است. با دانستن این مطالب مسئله به راحتی قابل حل است.

مدت زمان رفت از B به O برابر $\frac{T}{۱۲}$ است. بنابراین:

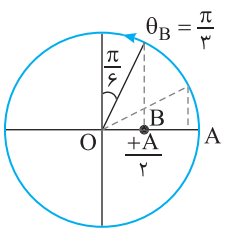


$$t_{B\to O}=\frac{T}{۱۲}=\frac{۱}{۳۰۰}$$

$$\Rightarrow T=\frac{۴}{۱۰۰}s\Rightarrow f=\frac{۱}{T}=۲۵Hz$$

روش استفاده از فاز حرکت (شناسه تابع کسینوس $\theta=\omega t$):

نقطهٔ B در مکان $+\frac{A}{۲}$ است و مطابق شکل دایرهٔ مثلثاتی فاز آن $\theta_B=\frac{\pi}{۳}$ است.



در حرکت نوسانگر از B تا O تغییر فاز $\frac{\pi}{۶}$ است از این رو خواهیم داشت:

$$\Delta\theta=\omega\Delta t\Rightarrow\frac{\pi}{۶}=\frac{۲\pi}{T}\Delta t\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۱۲}$$

البته با یک تناسب ذهنی هم می‌توانستیم بگوییم:

۲π	T
$\frac{\pi}{۶}$	Δt

$$\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۱۲}$$

(ادامهٔ حل مانند روش اول است.)

گزینهٔ ۱

B ۱۴۰۹ **۲**

بنا به فرض مسئله بازهٔ زمانی حرکت از O تا M و از M تا N برابر است. از این‌رو M نمی‌تواند وسط ON باشد. از O تا N، $\frac{T}{۴}$ طول می‌کشد. بنابراین:

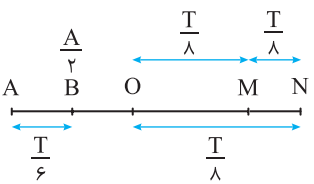
$$t_{OM}=t_{MN}=\frac{۱}{۲}(\frac{T}{۴})=\frac{T}{۸}$$

نقطهٔ B وسط OA است و با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده بازهٔ زمانی حرکت از A تا B برابر $\frac{T}{۶}$ است.

$$t_{AB}=\frac{T}{۶}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{t_{AB}}{t_{MN}}=\frac{\frac{T}{۶}}{\frac{T}{۸}}=\frac{۴}{۳}$$

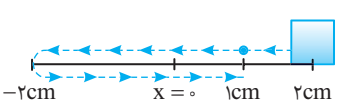


A ۱۴۱۰ **۳**

روش اول: استفاده از معادلهٔ حرکت:

۱ طول پاره‌خط ۴cm است بنابراین دامنه مطابق شکل برابر ۲cm است. از طرفی بنا به فرض مسئله بسامد زاویه‌ای نوسانگر $\frac{۵\pi}{۶}rad/s$ است بنابراین معادلهٔ حرکت خواهد شد:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow x=۰/۰۲\cos(\frac{۵\pi}{۶}t)$$



۲ حال زمان‌هایی که نوسانگر از $x=۱cm=۰/۰۱m$ عبور می‌کند را به‌دست می‌آوریم:

$$۰/۰۱=۰/۰۲\cos(\frac{۵\pi}{۶}t)\Rightarrow\cos\frac{۵\pi}{۶}t=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}\frac{۵\pi}{۶}t_۱=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow t_۱=\frac{۲}{۵}s\\ \frac{۵\pi}{۶}t_۲=۲\pi-\frac{\pi}{۳}\Rightarrow t_۲=۲s\end{cases}$$

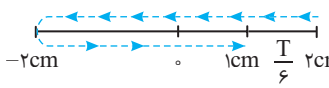
۳ بنابراین پس از ۲s برای دومین بار از $x=۱cm$ عبور می‌کند.

روش دوم: استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:

ابتدا دوره را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\frac{۵\pi}{۶}=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{۱۲}{۵}s=۲/۴s$

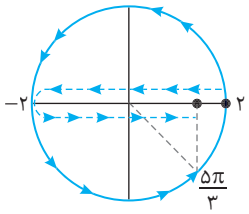
مدت زمان حرکت از مکان $+\frac{A}{۲}=۱cm$ تا مکان $+A=+۲cm$ برابر $\frac{۱}{۶}$ دوره $(\frac{T}{۶})$ است بنابراین باید $\frac{T}{۶}$ را از کل دوره (T) کم کنیم:

$$\Delta t=T-\frac{T}{۶}=\frac{۵T}{۶}\xrightarrow{T=۲/۴}\Delta t=\frac{۵\times۲/۴}{۶}=۲s$$



روش سوم: استفاده از فاز (شناسه تابع کسینوس $\theta=\omega t$):

فاز (کمان) در مکان $+۱$ برای دومین بار در ربع چهارم مثلثاتی قرار می‌گیرد و فاز برابر $\frac{۵\pi}{۳}$ است بنابراین:

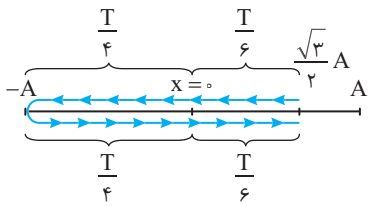


$$\Delta\theta=\omega t\Rightarrow\frac{۵\pi}{۳}=\frac{۵\pi}{۶}t\Rightarrow t=۲s$$

دقت کردید در این مسئله استفاده از دایرهٔ مثلثاتی از روش‌های دیگر سریع‌تر بود.

۱ ۱۴۱۱ B

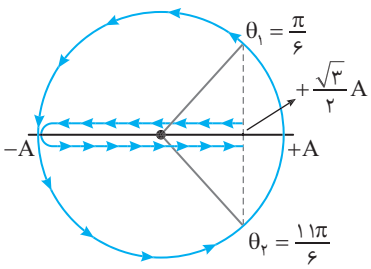
خط فکری مسیر حرکت را رسم می‌کنیم و بازه‌های زمانی مسیر را با بازه‌های شناخته شده مقایسه می‌کنیم. نوسانگر از مکان $+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ به سمت مرکز رفته سپس در نقطهٔ بازگشت $x=-A$ تغییر جهت می‌دهد و به مکان $+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ می‌رسد. بنابراین شما باید بازهٔ زمانی را روی شکل نوشته، با هم جمع کنید تا دوره را به دست بیاورید.



بازهٔ زمانی حرکت از $\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ تا $x=۰$ برابر $\frac{T}{۶}$ و از صفر تا $-A$ برابر $\frac{T}{۴}$ است بنابراین خواهیم داشت:

$$\Delta t=\frac{T}{۶}+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۶}\xrightarrow{\Delta t=۱s}۱=(\frac{۲+۳+۳+۲}{۱۲})T\Rightarrow T=۱/۲s$$

روش استفاده از دایره مثلثاتی و فاز حرکت $(\theta=\omega t)$:



متحرک از مکان $+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ می‌گذرد و بعد از رسیدن به مکان $-A$ مجدداً به مکان $+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ برمی‌گردد. فاز حرکت در حالت اول $\frac{\pi}{۶}$ و در حالت دوم در ربع چهارم بوده و برابر $\frac{۱۱\pi}{۶}$ است، بنابراین به کمک تغییر فاز می‌توان دوره را حساب کرد.

$$\omega(t_۲-t_۱)=\theta_۲-\theta_۱\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}\times(۱)=\frac{۱۱\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow T=۱/۲s$$

۱ ۱۴۱۲ B

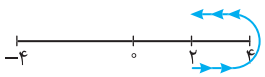
معادلهٔ حرکت به صورت $x=۰/۰۴\cos\frac{۴\pi}{۳}t$ است، با مقایسه این معادله با $x=A\cos\omega t$ خواهیم داشت:

$$A=۰/۰۴m\Rightarrow A=۴cm$$

$$\omega=\frac{۴\pi}{۳}\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}=\frac{۴\pi}{۳}\Rightarrow T=\frac{۳}{۲}s=۱/۵s$$

دامنه برابر ۴cm است بنابراین مکان $x=۲cm$ همان مکان $x=\frac{A}{۲}$ است. با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده مدت زمان حرکت از $\frac{A}{۲}$ تا A و بالعکس $\frac{T}{۶}$ است، بنابراین حداقل زمان دو گذر متوالی از $x=۲cm$ خواهد شد:

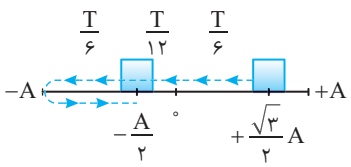
$$\Delta t=\frac{T}{۶}+\frac{T}{۶}=\frac{T}{۳}\Rightarrow\Delta t=\frac{۱/۵}{۳}\Rightarrow\Delta t=۰/۵s$$



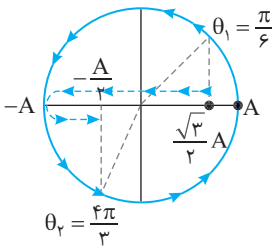
۳ ۱۴۱۳ B

روش اول: در لحظهٔ اول مکان نوسانگر $x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ و سرعت منفی است، پس نوسانگر در حال حرکت به سمت نقطهٔ تعادل می‌باشد و در لحظهٔ دوم نیز مکان نوسانگر $x=-\frac{A}{۲}$ بوده و حرکت تندشونده است یعنی نوسانگر از مکان‌های منفی در حال حرکت به سمت نقطهٔ تعادل است.

با توجه به بازه‌های شناخته شده داریم: $\Delta t=\frac{T}{۶}+\frac{T}{۱۲}+۲(\frac{T}{۶})=\frac{۷T}{۱۲}$



روش دوم: حل با کمک دایره مثلثاتی: معادلهٔ مکان - زمان به‌صورت $x=A\cos\omega t$ است پس در لحظهٔ $t_۱$ کمان متناظر با $x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ برابر $\frac{\pi}{۶}$ است و در لحظهٔ دوم $t_۲$ برای دومین بار نوسانگر از مکان $-\frac{A}{۲}$ عبور می‌کند پس کمان متناظر (فاز $\theta=\omega t$) با مکان در لحظهٔ $t_۲$ برابر $\theta_۲=\pi+\frac{\pi}{۳}=\frac{۴\pi}{۳}$ است.



اکنون به کمک تغییر فاز، مسئله حل است.

$$\theta_۲-\theta_۱=\omega t_۲-\omega t_۱$$

$$\Rightarrow\frac{۴\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶}=\omega(t_۲-t_۱)$$

$$\Rightarrow\frac{۷\pi}{۶}=\frac{۲\pi}{T}(\Delta t)\Rightarrow\Delta t=\frac{۷}{۱۲}T$$

دقت کنید اگر مثلثات شما خوب است و می‌توانید به راحتی کمان (فاز) متناظر با مکان را روی دایرهٔ مثلثاتی تشخیص دهید نیازی به فراگیری بازه‌های زمانی شناخته شده ندارید، اما چنانچه با دایرهٔ مثلثاتی مشکل دارید بهترین روش برای شما فراگیری و به خاطر سپردن بازه‌های زمانی شناخته شده است.

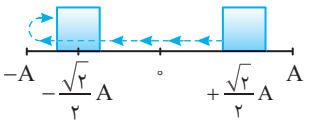
بازی با سؤال ذره‌ای حرکت هماهنگ ساده با دامنهٔ A و دورهٔ T دارد. در یک لحظه مکان ذرهٔ $\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ و سرعت آن منفی است. کمترین زمان لازم برای آنکه مکان ذره $-\frac{\sqrt{۲}A}{۲}$ و سرعت آن مثبت شود. کدام است؟

کنکور دهه‌های گذشته

۱) $\frac{T}{۲}$ ۲) $\frac{T}{۳}$ ۳) $\frac{T}{۴}$ ۴) T

پاسخ روش اول: استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:

$$\begin{cases} \frac{T}{۸}: \text{از } \frac{\sqrt{۲}}{۲}A \text{ تا صفر} \\ \frac{T}{۴}: \text{از } ۰ \text{ تا } -A \\ \frac{T}{۸}: \text{از } -A \text{ تا } -\frac{\sqrt{۲}}{۲}A \end{cases} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{۸}+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۸}=\frac{T}{۲}$$



روش دوم: در لحظهٔ $t_۱$ مکان متحرک $\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ و سرعت منفی است پس جهت حرکت خلاف جهت محور xها می‌باشد و در لحظهٔ $t_۲$ مکان متحرک در قسمت منفی قرار دارد اما جهت حرکت به واسطهٔ مثبت بودن سرعت در جهت محور xها می‌باشد. بنابراین در لحظهٔ $t_۱$ نوسانگر اولین بار به $x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ رسیده و در $t_۲$ برای دومین بار از $x=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}A$ عبور می‌کند.

$$x=A\cos\omega t \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{۲}}{۲}A=A\cos\omega t_۱ \Rightarrow \omega t_۱=\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}t_۱=\frac{\pi}{۴} \Rightarrow t_۱=\frac{T}{۸} \\ \frac{-\sqrt{۲}}{۲}A=A\cos\omega t_۲ \Rightarrow \omega t_۲=\pi+\frac{\pi}{۴} \\ \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}t_۲=\frac{۵\pi}{۴} \Rightarrow t_۲=\frac{۵T}{۸} \end{cases}$$

بنابراین: $t_۲-t_۱=\frac{۵T}{۸}-\frac{T}{۸}=\frac{۴T}{۸}=\frac{T}{۲}$

گزینهٔ ۱

B ۴ ۱۴۱۴

یادآوری در هر نوسان، نوسانگر ۲ بار طول پاره‌خط مسیر را طی می‌کند.

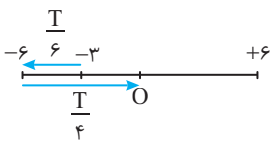
یادآوری هرگاه نوسانگر به سوی دامنه برود اندازهٔ شتاب در حال افزایش است.

یادآوری هنگامی که نوسانگر از حالت تعادلش می‌گذرد $(x=۰)$ بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد.

۱ طول پاره‌خط ۱۲cm و دامنه برابر $A=\frac{۱۲}{۲}=۶\text{cm}$ است.

۲ ذره در مدت ۵s، ۲۰ بار طول پاره‌خط را طی کرده یعنی ۱۰ نوسان را در مدت ۵s انجام داده است و دوره خواهد شد: $T=\frac{t}{N} \Rightarrow T=\frac{۵}{۱۰}=۰/۵\text{s}$

۳ ذره در مکان -۳cm و شتاب آن در حال افزایش است بنابراین ذره مطابق شکل در لحظه $t_۱$ به سوی انتهای مسیر در حرکت و در لحظهٔ $t_۲$ که بردار مکان تغییر جهت می‌دهد از نقطهٔ O می‌گذرد بنابراین بازهٔ زمانی بین $t_۱$ و $t_۲$ برابر است با:

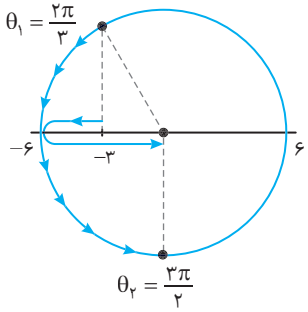


$$\Delta t=\frac{T}{۶}+\frac{T}{۴} \Rightarrow \Delta t=\frac{۵T}{۱۲} \Rightarrow \Delta t=\frac{۵}{۱۲}\times ۰/۵ \Rightarrow \Delta t=\frac{۵}{۲۴}\text{s}$$

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت:

وقتی مکان منفی است فاز در ربع دوم و یا ربع سوم مثلثاتی است چون شتاب در حال افزایش است یعنی نوسانگر به سوی دامنهٔ $-A$ در حال حرکت است بنابراین فاز در ربع دوم مثلثاتی است. یعنی در مکان -۳cm در این مسئله فاز برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ و هنگام گذر از نقطهٔ O فاز $\theta_۲=\frac{۳\pi}{۲}$ رادیان است.

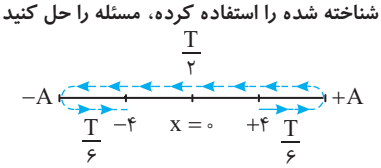
$$\omega t_۲-\omega t_۱=\frac{۳\pi}{۲}-\frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=۴\pi} ۴\pi(t_۲-t_۱)=\frac{۹\pi-۴\pi}{۶} \Rightarrow \Delta t=\frac{۵}{۲۴}\text{s}$$



بازی با سؤال ذره‌ای روی پاره‌خطی به طول ۱۶cm دارای حرکت هماهنگ ساده است. ذره در لحظهٔ $t_۱$ از مکان $+۴\text{cm}$ می‌گذرد و از حالت تعادل دور می‌شود. ۰/۵ ثانیه بعد از $t_۱$ با گذر از مکان -۴cm به سوی حالت تعادل می‌رود. کمینه بسامد این ذره چند هرتز است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۶}{۵}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ **خط فکری** ابتدا دامنهٔ حرکت را حساب کنید سپس مشخص کنید که مکان‌های $+۴\text{cm}$ و -۴cm چه کسری از دامنه هستند تا بتوانید بازه‌های زمانی شناخته شده را استفاده کرده، مسئله را حل کنید.



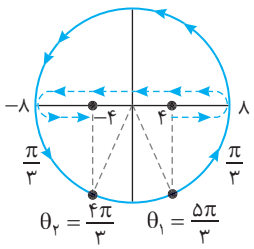
دامنه برابر $\frac{۱۶}{۲}=۸\text{cm}$ است. با توجه به صورت مسأله مسیر حرکت را رسم کرده، بازه‌های زمانی شناخته شده را روی آن نوشته با هم جمع کرده و دوره را حساب می‌کنیم.

$$\Delta t=\frac{T}{۶}+\frac{T}{۲}+\frac{T}{۶}=\frac{T+۳T+T}{۶} \Rightarrow ۰/۵=\frac{۵T}{۶} \Rightarrow T=۰/۶\text{s}$$

بسامد را به‌دست می‌آوریم: $f=\frac{۱}{T} \Rightarrow f=\frac{۱}{۰/۶}=\frac{۵}{۳}\text{Hz}$

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت (شناسهٔ تابع کسینوس $\theta=\omega t$):

دامنه ۸cm است. فاز حرکت را برای مکان $+۴\text{cm}$ و -۴cm روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم.



مکان نوسانگر $+۴\text{cm}$ و در حال دور شدن از مبدأ یعنی فاز در ربع چهارم بوده بنابراین $\theta_۱=\frac{۵\pi}{۳}$ مکان نوسانگر -۴cm و در حال نزدیک شدن به حالت تعادل یعنی فاز در ربع سوم بنابراین $\theta_۲=\frac{۴\pi}{۳}$. تغییر فاز را از روی دایره بررسی می‌کنیم:

$$\Delta\theta=\frac{\pi}{۳}+\pi+\frac{\pi}{۳}=\frac{۵\pi}{۳} \quad , \quad \Delta\theta=\frac{۲\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \frac{۵\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{T}\times ۰/۵ \Rightarrow T=۰/۶\text{s}$$

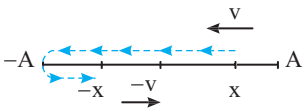
$$f=\frac{۱}{T}=\frac{۱}{۰/۶} \Rightarrow f=\frac{۵}{۳}\text{Hz}$$

گزینهٔ ۱

۴ ۱۴۱۵ B

نکتهٔ مهم مدت زمانی که طول می‌کشد که مکان و سرعت نوسانگر قرینه شود برابر $\frac{T}{۲}$ است.

صورت مسئله به‌گونه‌ای است که شخص از خیر حل آن می‌گذرد اما نگران نباشید این همه علائم ریاضی یعنی اینکه در لحظهٔ t مکان نوسانگر x بوده و بعد از گذشت T' مکان نوسانگر قرینه شده در ضمن سرعت آن نیز قرینه شده، بنابراین T' همان $\frac{T}{۲}$ است.



۳ ۱۴۱۶ B

نکته حداقل زمانی که طی آن مکان و سرعت نوسانگر هر دو قرینه می‌شوند برابر $\frac{T}{۲}$ (نصف دوره) است.

با توجه به صورت مسئله طول پاره‌خط ۸cm است در نتیجه دامنهٔ حرکت $A=\frac{۸}{۲}=۴cm$ می‌شود. البته این مطلب در حل مسئله به ما کمکی نمی‌کند فقط برای درک بهتر مسیر حرکت ذره از $-۱cm$ تا $+۱cm$ است.

نکته هرگاه نوسانگر از مرکز نوسان به سوی دامنه حرکت می‌کند حرکت آن کندشونده است.

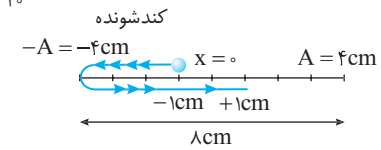
در صورت مسئله بیان شده که نوسانگر از مکان $-۱cm$ با حرکت کندشونده می‌گذرد. نوسانگر در حال حرکت به سوی دامنهٔ منفی $(-۴cm)$ است و سپس از نقطه بازگشت برمی‌گردد و به نقطه $+۱cm$ می‌رود. از این‌رو بازهٔ زمانی که طی می‌کند برابر $\frac{T}{۲}$ است.

$$T=\frac{۱}{f}\xrightarrow{f=۵Hz}T=\frac{۱}{۵}s$$

$\frac{T}{۲}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$t_۲-t_۱=\frac{T}{۲}=\frac{\frac{۱}{۵}}{۲}\Rightarrow\Delta t=\frac{۱}{۱۰}s$$

بنابراین حداقل زمان حرکت از $-۱cm$ تا $+۱cm$ در این مسئله $\frac{۱}{۱۰}s$ است.

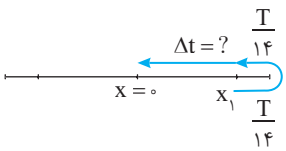


۳ ۱۴۱۷ B

خط فکری حداقل زمان دو بار عبور متوالی از یک مکان یعنی اینکه نوسانگر از آن مکان به یک انتهای مسیر (دامنه) رفته و دوباره به همان مکان بازگردد. بنابراین وقتی گفته شده در مدت $\frac{T}{۷}$ نوسانگر از مکان $x_۱$ دو بار عبور کرده، پس نوسانگر از مکان $x_۱$ تا دامنه به مدت نصف $\frac{T}{۷}$ در حال حرکت بوده است یعنی $\frac{T}{۱۴}$. اکنون با دانستن این مطلب مسئله به راحتی حل می‌شود.

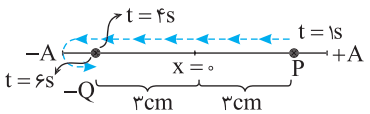
نوسانگر از مکان $x_۱$ تا دامنه $\frac{T}{۱۴}$ در حرکت بوده است همچنین از دامنه نیز طول $\frac{T}{۱۴}$ می‌کشد تا نوسانگر به مکان $x_۱$ برسد بنابراین بازهٔ زمانی حرکت از $x_۱$ تا نقطهٔ تعادل خواهد شد:

$$\Delta t=\frac{T}{۴}-\frac{T}{۱۴}\Rightarrow\Delta t=\frac{۷T-۲T}{۲۸}\Rightarrow\Delta t=\frac{۵T}{۲۸}$$



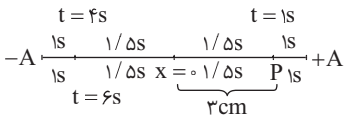
۳ ۱۴۱۸ B

خط فکری شکل ساده‌ای از موضوع مسئله بکشید. دقت کنید که در صورت مسئله بیان شده که فاصله از حالت تعادل ۳cm است یعنی مکان نوسانگر می‌تواند $+۳cm$ و $-۳cm$ باشد.



مطلب دیگری که باید به آن دقت کنید، تقارن است یعنی اینکه وقتی در مدت $۴-۱=۳s$ نوسانگر از مکان P به Q می‌رود این بازه به دو قسمت مساوی ۱/۵s تقسیم می‌شود و از P تا $x=۰$، ۱/۵s و از $x=۰$ تا Q نیز ۱/۵s طول می‌کشد و یا در بازهٔ $۶s-۴s=۲s$، در مدت ۱s نوسانگر از نقطهٔ Q به انتهای مسیر $(-A)$ رفته و در مدت ۱s همین مسیر را برمی‌گردد. اکنون این اطلاعات را روی شکل قرار داده مسئله را حل کنید.

دوره را حساب می‌کنیم: $T=۱+۱+۱/۵+۱/۵+۱/۵+۱/۵+۱+۱=۱۰s$



میانبر چون در لحظهٔ $t=۱s$ مکان $+۳cm$ و جهت سرعت منفی و در لحظهٔ $t=۶s$ مکان $-۳cm$ و جهت سرعت مثبت شده است، یعنی در این بازهٔ زمانی مکان و سرعت قرینه شده است، بنابراین این بازهٔ زمانی برابر $\frac{T}{۲}$ بوده و دوره خواهد شد:

$$\frac{T}{۲}=۶-۱\Rightarrow T=۱۰s$$

اما حالا به سراغ دامنه می‌رویم. برای این کار معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم و در لحظهٔ $t=۱s$ مکان را $+۳cm$ قرار می‌دهیم.

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{۲\pi}{۱۰}\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{۵}rad/s$$

$$x=A\cos\frac{\pi}{۵}t\xrightarrow[x=۳cm]{t=۱s}۳=A\cos\frac{\pi}{۵}\Rightarrow۳=A\times۰/۸$$

$$\Rightarrow A=\frac{۳۰}{۸}=۳/۷۵cm$$

۲ ۱۴۱۹ B

خط فکری یک معادلهٔ حرکت به شما داده شده و جابه‌جایی متحرک را در یک بازهٔ زمانی از شما می‌خواهد از این رو بنا به آنچه در حرکت‌شناسی یاد گرفته‌ایم تنها باید در معادلهٔ حرکت ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی را قرار داده و مکان‌های به‌دست آمده را از هم کم کنیم.

کافی است مکان نوسانگر را در لحظهٔ $t=۰$ و $t=۱/۵s$ به‌دست آورده و از هم کم کنیم:

$$x=۰/۰۲\cos\pi t\Rightarrow\begin{cases}t_۱=۰\Rightarrow x_۱=۰/۰۲m\\ t_۲=۱/۵s\Rightarrow x_۲=۰/۰۲\cos\frac{۳}{۲}\pi\Rightarrow x_۲=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow x_۲-x_۱=۰-۰/۰۲\Rightarrow\Delta x=-۰/۰۲m$$

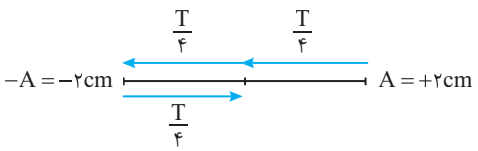
۴ ۱۴۲۰ B

۱ دوره را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\xrightarrow{\omega=\pi rad/s}\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۲s$

۲ مشخص می‌کنیم که ۱/۵s چه کسری از دوره است. $\frac{\Delta t}{T}=\frac{۱/۵}{۲}\Rightarrow\Delta t=\frac{۳T}{۴}$

۳ در مدت $\frac{۳T}{۴}$ نوسانگر مطابق شکل از مکان $A=+۲cm$ به مکان $A=-۲cm$ رفته و به مبدأ $x=۰$ برمی‌گردد. بنابراین مسافت طی شده خواهد شد:

$$L=۳\times۲=۶cm=۰/۰۶m$$



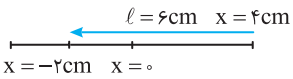
B ۱۴۲۱ ۱

خط فکری شما ابتدا باید دامنه را پیدا کنید و به کمک آن مشخص کنید که وقتی نوسانگر در مدت ۰/۲s مسافت ۶cm را طی می‌کند به کدام نقطهٔ مسیر می‌رسد و با داشتن مکان می‌توانید از روی معادلهٔ حرکت بسامد زاویه‌ای را حساب کرده و معادلهٔ حرکت را بنویسید.

۱ دامنهٔ حرکت نصف طول پاره‌خط مسیر است بنابراین: $A=\frac{۸}{۲}=۴cm$

۲ متحرک از $+۴cm$ شروع به حرکت کرده و پس از ۰/۲ ثانیه، ۶ سانتی‌متر مسافت طی کرده یعنی به مکان $x=-۲cm$ رسیده است.

۳ مکان $-۲cm$ را در معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده قرار می‌دهیم.



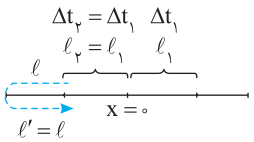
$$x=A\cos\omega t\Rightarrow -۲=۴\cos\omega(۰/۲)\Rightarrow\cos ۰/۲\omega=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۰/۲\omega=\frac{۲\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow\omega=\frac{۱۰\pi}{۳}rad/s$$

معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم: $x=۰/۰۴\cos\frac{۱۰\pi}{۳}t$

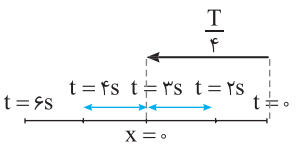
B ۱۴۲۲ ۴

خط فکری به شکل روبه‌رو نگاه کنید.

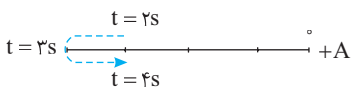


در حرکت هماهنگ ساده مسافت طی شده در بازه‌های زمانی یکسان در دو طرف $x=۰$ و همچنین در دو طرف انتهای مسیر $(x=\pm A)$ تقارن دارد. بنابراین وقتی در ثانیهٔ سوم و ثانیهٔ چهارم مسافت طی شده برابر است دو حالت وجود دارد، یکی در دو طرف مبدأ و دیگری در دو طرف انتهای مسیر. با دانستن این مطلب مسئله قابل حل است.

حالت اول: ثانیهٔ سوم قبل از $x=۰$ و ثانیهٔ چهارم بعد از $x=۰$ است، بنابراین در لحظهٔ $t=۳s$ متحرک از مکان $x=۰$ می‌گذرد یعنی در بازهٔ صفر تا ۳s متحرک از $+A$ به مبدأ رسیده است که این بازه برابر $\frac{T}{۴}$ است. $\frac{T}{۴}=۳\Rightarrow T=۱۲s$



حالت دوم: ثانیهٔ سوم (بازهٔ بین $t=۲s$ تا $t=۳s$) قبل از انتهای مسیر $(-A)$ و ثانیهٔ چهارم (بازهٔ بین $t=۳s$ تا $t=۴s$) بعد از انتهای مسیر است:



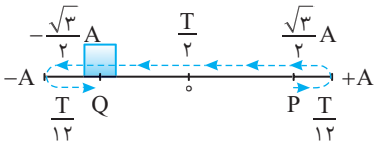
بنابراین در مدت صفر تا $t=۳s$ نوسانگر از $+A$ به $-A$ رفته که این بازهٔ زمانی برابر $\frac{T}{۲}$ است، از این‌رو دوره خواهد شد: $\frac{T}{۲}=۳\Rightarrow T=۶s$

B ۱۴۲۳ ۴

۱ در لحظهٔ $t_۱$ مکان نوسانگر $+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ و سرعت آن مثبت است، یعنی نوسانگر از مکان P در حال حرکت به سوی دامنه است.

۲ در لحظهٔ $t_۲$ در مکان $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ نیز سرعت مثبت است یعنی نوسانگر به سوی مرکز نوسان در حرکت است.

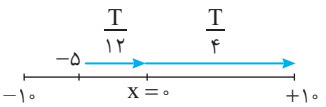
۳ شکل مسیر را رسم می‌کنیم و بازه‌های زمانی شناخته شده را در طول مسیر نوشته تا مدت زمان حرکت از P تا Q مشخص شود.



$$\Delta t=\frac{T}{۱۲}+\frac{T}{۴}=\frac{T+۳T}{۱۲}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۳}=\frac{۰/۱۵}{۳}=۰/۰۵s$$

سرعت متوسط برابر است با:

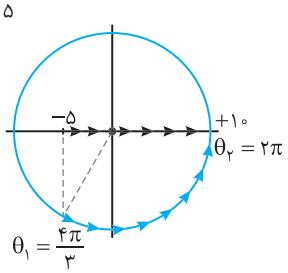
$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{[۱۰-(-۵)]\times۱۰^{-۲}}{۰/۰۵}\Rightarrow v_{av}=۳m/s$$



روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت (ωt): کمان متناظر با مکان $x=-۵cm$ و $x=۱۰cm$ را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم.

$$\omega t_۲-\omega t_۱=۲\pi-\frac{۴\pi}{۳}\Rightarrow\frac{۲\pi}{۰/۱۵}\Delta t=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow\Delta t=۰/۰۵s$$

$$\Rightarrow v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۰/۱۵}{۰/۰۵}=۳m/s$$



A ۱۴۲۴ ۱

خط فکری متحرک در یک جهت از مکان $-۵cm$ به مکان $+۱۰cm$ مبدأ می‌رود. برای به‌دست آوردن سرعت متوسط شما باید زمان جابه‌جایی از $-۵cm$ تا $+۱۰cm$ را حساب کنید البته می‌توانید از بازه‌های زمانی شناخته شده و یا از دایرهٔ مثلثاتی استفاده کنید.

روش استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:

زمان حرکت از مکان $-۵cm$ یعنی $-\frac{A}{۲}$ تا مبدأ $(x=۰)$ برابر $\frac{T}{۱۲}$ و از مبدأ تا مکان $+۱۰cm$ یعنی $+A$ برابر $\frac{T}{۴}$ است بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta t=\frac{T}{۱۲}+\frac{T}{۴}=\frac{T+۳T}{۱۲}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۳}=\frac{۰/۱۵}{۳}=۰/۰۵s$$

سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{[۱۰-(-۵)]\times۱۰^{-۲}}{۰/۰۵}\Rightarrow v_{av}=۳m/s$$

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت (ωt): کمان متناظر با مکان $x=-۵cm$ و $x=۱۰cm$ را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم.

$$\omega t_۲-\omega t_۱=۲\pi-\frac{۴\pi}{۳}\Rightarrow\frac{۲\pi}{۰/۱۵}\Delta t=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow\Delta t=۰/۰۵s$$

$$\Rightarrow v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۰/۱۵}{۰/۰۵}=۳m/s$$

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت:

در لحظهٔ $t_۱$ مکان نوسانگر مثبت و سرعت آن نیز مثبت است، بنابراین فاز در ربع چهارم قرار دارد.

در لحظهٔ $t_۲$ مکان نوسانگر منفی و سرعت مثبت است بنابراین فاز در ربع سوم قرار دارد. تغییر فاز برابر است با:

$$\Delta\theta=\frac{\pi}{۶}+\pi+\frac{\pi}{۶}=\frac{۴\pi}{۳}$$

$$\Delta\theta=\omega(t_۲-t_۱)=\frac{۴\pi}{۳}\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}\Delta t=\frac{۴\pi}{۳}\Rightarrow\Delta t=\frac{۲T}{۳}$$

سرعت متوسط برابر است با:

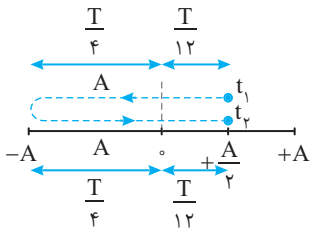
$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-\sqrt{۳}A}{\frac{۲T}{۳}}\Rightarrow v_{av}=-\frac{۳\sqrt{۳}A}{۲T}$$

B ۱۴۲۵ ۳

خط فکری شما باید مسیر حرکت را به کمک اطلاعات مسئله رسم کنید و روی شکل بازه‌های زمانی شناخته شده را نوشته تا بتوانید بازهٔ زمانی حرکت و همچنین مسافت طی شده را حساب کرده و تندی متوسط را به‌دست بیاورید.

۱ در لحظهٔ t_1 نوسانگر از مکان $+\frac{A}{2}$ می‌گذرد و دارای حرکت تندشونده است یعنی نوسانگر در حال حرکت به سوی حالت تعادل است.

۲ بعد از لحظهٔ t_1 در لحظهٔ t_2، نوسانگر مجدداً از مکان $+\frac{A}{2}$ می‌گذرد. بنابراین مسیر حرکت مطابق شکل زیر است.



۳ مدت زمان حرکت از $+\frac{A}{2}$ تا $x=0$ برابر $\frac{T}{12}$ و از $x=0$ تا دامنه $-A$ برابر $+\frac{A}{2}$ تا $+\frac{A}{2}$ است. بازهٔ زمانی حرکت نوسانگر در این مسیر رفت و برگشت از $\frac{T}{4}$

برابر است با: $\Delta t=\frac{T}{12}+\frac{T}{4}+\frac{T}{4}+\frac{T}{12}\Rightarrow \Delta t=\frac{2T}{3}\xrightarrow{T=\frac{2\pi}{\omega}}\Delta t=\frac{4\pi}{3\omega}$

همچنین در این مدت مسافت طی شده برابر است با: $l=\frac{A}{2}+A+A+\frac{A}{2}=3A$

۴ تندی متوسط را حساب می‌کنیم: $s_{av}=\frac{l}{t_2-t_1}=\frac{3A}{\frac{4\pi}{3\omega}}\Rightarrow s_{av}=\frac{9A\omega}{4\pi}$

دقت کردید که ما در روابط T را برحسب بسامد زاویه‌ای ω نوشته‌ایم. چرا؟ برای آنکه در گزینه‌ها خبری از T نبوده بلکه ω در گزینه‌ها وجود دارد.

B ۱۴۲۶ ۱

تندی متوسط برابر نسبت مسافت طی شده به زمان است. ابتدا باید مسافت طی شده را حساب کنیم، برای این کار باید دوره را حساب کنیم.

$T=\frac{2\pi}{\omega}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{50\pi}\Rightarrow T=\frac{1}{25}s=0/04s$

بازهٔ $t_1=0s$ تا $t_2=0/02s$ نصف دوره است و نوسانگر در نصف دوره مسافتی دو برابر دامنه طی می‌کند.

$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow 1/5=\frac{2A}{0/02}\Rightarrow A=1/5\times10^{-2}m\Rightarrow A=1/5cm$

B ۱۴۲۷ ۴

جسم را $2cm$ کشیده و رها کرده‌ایم، بنابراین دامنهٔ نوسان برابر است با: $A=2cm$

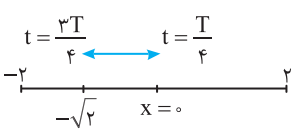
$x=A\cos(\frac{2\pi}{T}t)$

مکان نوسانگر در لحظه‌های $\frac{T}{4}$ و $\frac{3T}{8}$ را به‌دست می‌آوریم. در لحظه $t=\frac{T}{4}$ نوسانگر در مرکز نوسان است.

$t=\frac{T}{4}\Rightarrow x=A\cos(\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{4})\Rightarrow x=A\cos\frac{\pi}{2}=0$

$t=\frac{3T}{8}\Rightarrow x=A\cos(\frac{2\pi}{T}\times\frac{3T}{8})\Rightarrow x=A\cos\frac{3\pi}{4}=-(2)\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$

$\ell=|\Delta x|=|-\sqrt{2}-0|=\sqrt{2}cm$



B ۱۴۲۸ ۲

روش اول: استفاده از معادلهٔ حرکت:

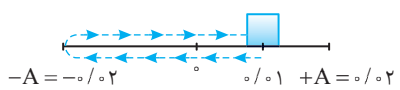
۱ دوره را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 5\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{4}{10}s$

۲ با توجه به زمان‌های داده شده مکان متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$x_1=0/02\cos5\pi\times\frac{1}{15}\Rightarrow x_1=0/01m\ ,\ x_2=0/02\cos5\pi\times\frac{1}{3}\Rightarrow x_2=0/01m$

از همین‌جا که نقطهٔ ابتدا و انتهای نوسان یکسان است، می‌توانیم متوجه شویم که سرعت متوسط آن صفر است.

۳ در این صورت متحرک دو بار از مکان $x=0/01m$ گذشته است که هر دو بار در بازهٔ زمانی کوچک‌تر از یک دوره $T=\frac{4}{10}s$ صورت گرفته و مسیر مطابق شکل زیر است. مسافت طی شده را حساب می‌کنیم:



$\ell=0/01+0/02+0/02+0/01=0/06m$

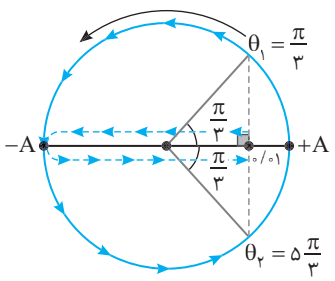
۴ تندی متوسط خواهد شد: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{0/06}{\frac{4}{15}}=\frac{0/9}{4}=\frac{9}{40}m/s$

روش دوم: استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت $(\theta=\omega t)$:

ابتدا کمان‌های متناظر با t_1 و t_2 را به‌دست می‌آوریم:

$\theta_1=\omega t_1=\frac{\pi}{3}\ ,\ \theta_2=\omega t_2=\frac{5\pi}{3}$

بنابراین متحرک از $0/01m$ شروع به حرکت به سمت مرکز کرده و با یک بار تغییر جهت مجدد به $0/01m$ خواهد رسید: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{0/06}{\frac{4}{15}}=\frac{9}{40}m/s$

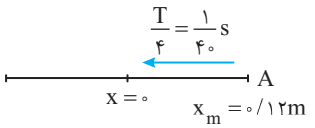


بازی با سوال ذره‌ای روی پاره‌خطی به‌طول ۲۴ سانتی‌متر با بسامد ۱۰ هرتز در مبدأ زمان از بیشینه مکان مثبت شروع به نوسان می‌کند. تندی متوسط این ذره بین $t=0$ و $t=\frac{1}{40}s$ چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۹/۶ ۲) ۴/۸ ۳) ۲/۴ ۴) ۶

پاسخ دامنهٔ حرکت نصف طول پاره‌خط مسیر نوسان است.

دوره را حساب می‌کنیم: $T=\frac{1}{f}\xrightarrow{f=10Hz}T=\frac{1}{10}s$



بازهٔ زمانی داده شده را بر حسب دوره به‌دست می‌آوریم: $\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{10}}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{4}$

در مدت $\frac{T}{4}$ نوسانگر از مکان $+A$ به $x=0$ می‌رود، بنابراین تندی متوسط خواهد شد: $s_{av}=\frac{0/12}{\frac{1}{40}}=4/8m/s$

گزینهٔ ۲

B ۱۴۲۹ ۲

۱ معادلهٔ حرکت نوسانگر به صورت $x=0/04\cos 4\pi t$ است، بنابراین دورهٔ حرکت آن خواهد شد:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 4\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2}{4}\Rightarrow T=0/5\,s$$

۲ اندازهٔ بازهٔ زمانی $t_1=0/1s$ تا $t_2=1/35\,s$ برابر $\Delta t=1/35-0/1=1/25s$ است. این بازه را با دوره مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{1/25}{0/5}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{5}{2}\Rightarrow\Delta t=\frac{5}{2}T\Rightarrow\Delta t=2T+\frac{T}{2}$$

یادآوری در هر دوره نوسانگر مسافتی چهار برابر دامنه $(4A)$ را طی می‌کند و در نیم‌دوره مسافت $2A$ را طی می‌کند.

۳ مسافت طی شده توسط نوسانگر را حساب می‌کنیم.

$$\ell=4A+4A+2A\Rightarrow\ell=10A\xrightarrow{A=0/04m}\ell=10\times 0/04$$

$$\Rightarrow\ell=0/4m\Rightarrow\ell=\frac{2}{5}m$$

A ۱۴۳۰ ۱

معادله مکان - زمان نوسانگر به صورت $x=A\cos\frac{16\pi}{3}t$ است.

دوره را به‌دست می‌آوریم:

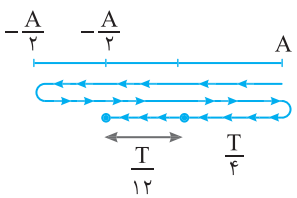
$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\frac{16\pi}{3}=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{3}{8}s$$

بازهٔ زمانی $0/5s$ را بر حسب دوره مشخص می‌کنیم.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{4}{3}\Rightarrow\Delta t=\frac{4}{3}T\Rightarrow\Delta t=T+\frac{T}{3}\Rightarrow\Delta t=T+\frac{T}{4}+\frac{T}{12}$$

در مدت $0/5$ ثانیه، نوسانگر به مدت T ثانیه مسافت $4A$ را طی کرده است و جابه‌جایی آن صفر شده و به مدت $\frac{T}{4}$ جابه‌جایی A و به مدت $\frac{T}{12}$ جابه‌جایی $\frac{A}{2}$ را داشته است.

به شکل زیر دقت کنید.



$$\ell=4A,\Delta x=0$$

$$\ell=\frac{3}{2}A,\Delta x=\frac{3}{2}A$$

نسبت تندی متوسط به سرعت متوسط را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{s_{av}}{|v_{av}|}=\frac{\frac{\ell}{\Delta t}}{\frac{|\Delta x|}{\Delta t}}=\frac{\ell}{|\Delta x|}=\frac{4A+\frac{3}{2}A}{\frac{3}{2}A}\Rightarrow\frac{s_{av}}{|v_{av}|}=\frac{11}{3}$$

B ۱۴۳۱ ۲

دوره را حساب می‌کنیم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=2s$$

بازهٔ زمانی $t_1=\frac{1}{5}s$ تا $t_2=\frac{6}{5}s$ برابر است با:

$$\Delta t=\frac{6}{5}-\frac{1}{5}\Rightarrow\Delta t=1s$$

این بازه زمانی $1s$ است که برابر نصف دوره این حرکت است و در مدت $\frac{T}{2}$ مسافت طی شده متحرک برابر $2A$ می‌شود.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{2\times 0/04}{1}=0/08m/s=8cm/s$$

B ۱۴۳۲ ۲

۱ با توجه به معادلهٔ حرکت، دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$x=0/02\cos\frac{\pi}{2}t\ ,\ \omega=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow T=4s$$

۲ بازهٔ زمانی برابر است با:

$$\Delta t=t_2-t_1=\frac{25}{12}-\frac{1}{12}\Rightarrow\Delta t=2s\xrightarrow{T=4s}\Delta t=\frac{T}{2}$$

نکته همواره مسافت طی شده در مدت زمان T برابر با $4A$ و در مدت زمان $\frac{T}{2}$ برابر با $2A$ است.

۳ با توجه به نکته در مدت نصف دوره مسافتی که نوسانگر طی می‌کند $2A$ یعنی $0/04$ متر است.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{0/04}{2}=0/02m/s=2cm/s$$

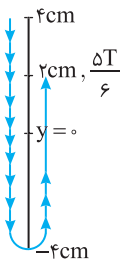
B ۱۴۳۳ ۳

دامنه نوسان نصف طول پاره‌خط مسیر است.

$$A=\frac{8}{2}=4cm$$

در لحظهٔ $t=0$ نوسانگر در بالاترین نقطهٔ مسیر یعنی در دامنه مثبت $(A=+4cm)$ قرار دارد. بازهٔ زمانی داده شده را برحسب دوره به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{5}{3}-0}{2}\Rightarrow\Delta t=\frac{5}{6}T$$



مسیر حرکت در بازهٔ صفر تا $\frac{5T}{6}$ مطابق شکل بوده و در این مدت مسافت طی شده خواهد شد:

$$\ell=4+4+4+2\Rightarrow\ell=14cm$$

تندی متوسط را حساب می‌کنیم.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{14}{\frac{5}{3}}\Rightarrow s_{av}=\frac{42}{5}=8/4cm/s$$

A ۱۴۳۴ ۳

از روی معادلهٔ $x=0/04\cos 4\pi t$ ، دوره را حساب می‌کنیم.

$$T=\frac{2\pi}{\omega}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{4\pi}\Rightarrow T=\frac{1}{2}s$$

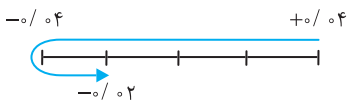
نسبت بازهٔ زمانی داده شده به دوره را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\Delta t=\frac{2T}{3}=\frac{T}{2}+\frac{T}{6}$$

در مدت $\frac{T}{2}$ نوسانگر از مکان $+A$ به $-A$ می‌رود، سپس در مدت $\frac{T}{6}$ از $-A$ به $-\frac{A}{2}$ می‌رود، بنابراین مسافت طی شده خواهد شد:

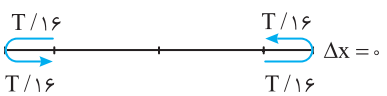
$$\ell=0/04+0/04+0/02=0/1m$$

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{0/1}{\frac{1}{3}}=0/3m/s=30cm/s$$



B ۱۴۳۵ ۱

در هر بازهٔ زمانی دلخواه (مانند $\frac{T}{8}$) که به شما داده می‌شود و از شما کمینهٔ جابه‌جایی خواسته می‌شود شما اگر این بازه را به دو قسمت مساوی تقسیم کنید $(\frac{\frac{T}{8}}{2}=\frac{T}{16})$ می‌توانید فرض کنید که نوسانگر در مدت نصف بازه از یک مکان به دامنه رفته و سپس در نیمهٔ دیگر بازه از دامنه به همان مکان برگشته است. در این صورت جابه‌جایی صفر خواهد شد.

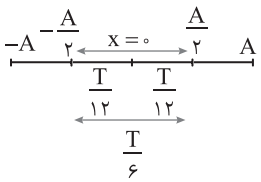


میانبر در هر بازهٔ زمانی دلخواه در حرکت هماهنگ ساده کمینهٔ جابه‌جایی صفر است.

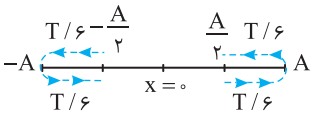
B ۱۴۳۶ ۱

خط فکری در مرکز نوسان (نقطهٔ تعادل) تندی نوسانگر بیشینه است و در جایی که تندی بیشتر است، زمانی طی یک مسافت معین کمتر خواهد شد، و در دو انتهای مسیر (نقاط بازگشت) تندی صفر است و در نزدیکی نقاط بازگشت، زمان طی یک مسافت معین طولانی‌تر خواهد بود. بنابراین برای کمینه زمان به سراغ تقسیم مسافت (A) در دوطرف نقطه تعادل می‌رویم و برای بیشینه زمان مسافت طی‌شده برابر یک دامنه را به دو قسمت مساوی در دو طرف نقطهٔ بازگشت تقسیم می‌کنیم.

کوتاه‌ترین زمان حرکت برای مسافتی برابر دامنه مطابق شکل وقتی است که نوسانگر از $-\frac{A}{2}$ به $\frac{A}{2}$ (و یا بالعکس) می‌رود که این زمان $\Delta t_{min}=\frac{T}{6}$ است. بیشینه زمان وقتی است که نوسانگر از مکان $+\frac{A}{2}$ به $+A$ رفته و برمی‌گردد: $\Delta t_{max}=\frac{T}{6}+\frac{T}{6}=\frac{T}{3}$



بنابراین $\frac{\Delta t_{min}}{\Delta t_{max}}=\frac{\frac{T}{6}}{\frac{T}{3}}=\frac{1}{2}$



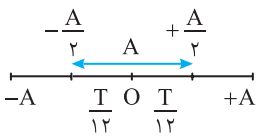
B ۱۴۳۷ ۲

بیشینهٔ سرعت متوسط وقتی است که در بازهٔ ۰/۰۲s بیشترین جابه‌جایی طی شود، از این‌رو باید این جابه‌جایی در دو طرف مرکز نوسان که تندی از بقیهٔ نقاط بیشتر است صورت گیرد.

۱ دوره را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\frac{50}{3}\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=0/12s$

۲ اکنون بررسی می‌کنیم ۰/۰۲s چه کسری از دوره است. $\frac{\Delta t}{T}=\frac{0/02}{0/12}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{6}$

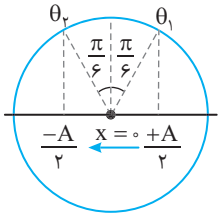
۳ این بازه را به دو قسمت مساوی در دو طرف مرکز نوسان تقسیم می‌کنیم. با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده خواهیم داشت:



پس در ۰/۰۲s بیشینه جابه‌جایی برابر A است. $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{0/06}{0/02}=3m/s$

روش دایرهٔ مثلثاتی: در مدت ۰/۰۲s تغییر شناسه تابع کسینوسی (تغییر فاز) برابر است با: $\Delta\theta=\omega\Delta t\Rightarrow\Delta\theta=\frac{50\pi}{3}\times0/02=\Delta\theta=\frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3}$ باید به دو قسمت مساوی در دو طرف مبدأ تقسیم شود.

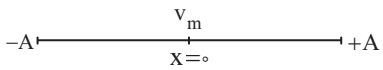


در این صورت $\theta_1=\frac{\pi}{3}$ و $x_1=+\frac{A}{2}$ و $\theta_2=\frac{2\pi}{3}$ و $x_2=-\frac{A}{2}$ خواهد بود و اندازهٔ جابه‌جایی در مدت ۰/۰۲s برابر $+A=0/06m$ می‌شود. $v_{av}=\frac{0/06}{0/02}=3m/s$

بازی با سؤال **معادلهٔ مکان - زمان یک نوسانگر در SI به صورت $x=0/05\cos3\pi t$ می‌باشد. بیشینهٔ جابه‌جایی که این نوسانگر در بازهٔ زمانی $\Delta t=\frac{1}{6}s$ می‌پیماید چند سانتی‌متر است؟**

۱) ۵ ۲) $5\sqrt{2}$ ۳) $5\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) ۱۰

پاسخ **خط فکری** **می‌خواهیم در یک مدت معین $(\Delta t=\frac{1}{6}s)$ نوسانگر بیشینهٔ جابه‌جایی را داشته باشد. برای آنکه یک متحرک در یک مدت معین جابه‌جایی بیشتری داشته باشد باید سرعتش از لحظه‌های دیگر بیشتر باشد. در حرکت هماهنگ ساده بیشینهٔ سرعت در وسط مسیر اتفاق می‌افتد بنابراین باید نوسانگر در این بازهٔ زمانی در دو طرف $x=0$ در حرکت باشد. یعنی $\frac{1}{6}s$ را باید به دو قسمت تقسیم کنید و در هر $\frac{1}{12}s$ مشخص کنید که متحرک از کجا به کجا می‌رود، البته ابتدا باید دوره را بیابید و سپس معین کنید $\frac{1}{12}s$ چه کسری از دوره است تا به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده مسئله را حل کنید.**

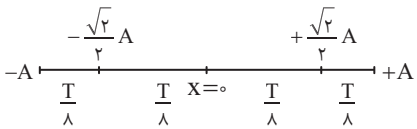


۱ **بیشینه جابه‌جایی در یک بازهٔ زمانی معین همواره در دو طرف نقطهٔ تعادل یعنی جایی که تندی بیشینه است رخ می‌دهد، بنابراین $\Delta t=\frac{1}{6}s$ را به دو بازهٔ زمانی $\frac{1}{12}s$ تقسیم می‌کنیم.**

۲ **دوره را به‌دست می‌آوریم:** $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow3\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2}{3}s$

۳ **معین می‌کنیم که $\frac{1}{12}s$ چه کسری از دوره است.** $\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{8}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{8}$

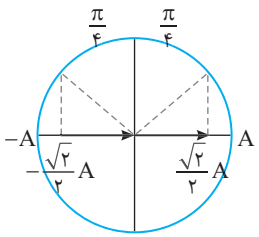
۴ **با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده مسیر را رسم می‌کنیم، مدت $\frac{T}{8}$ زمان حرکت از مکان $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ به مکان $x=0$ است. بنابراین جابه‌جایی بیشینه خواهد شد:** $\frac{\sqrt{2}}{2}A+\frac{\sqrt{2}}{2}A=\sqrt{2}A=\sqrt{2}\times\frac{5}{100}m=5\sqrt{2}cm$



روش حل به کمک دایرهٔ مثلثاتی و تغییر فاز $(\Delta\theta=\omega\Delta t)$:

۱ **تغییر فاز را حساب می‌کنیم:** $\Delta\theta=\omega\Delta t=3\pi\times\frac{1}{6}=\frac{\pi}{2}$

۲ **تغییر فاز را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم:** $(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{4})$



۳ **روی دایرهٔ مثلثاتی در دو طرف مرکز، $\frac{\pi}{4}$ را نشان داده و مکان متحرک را روی مسیر مشخص می‌کنیم. بنابراین بیشینهٔ جابه‌جایی وقتی است که نوسانگر از مکان $-\frac{\sqrt{2}}{2}A$ به مکان $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ می‌رود.**

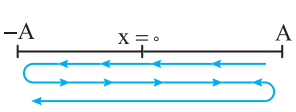
$\Delta x=\sqrt{2}A\xrightarrow{A=5cm}\Delta x=5\sqrt{2}\ cm$ **گزینهٔ ۲**

B ۱۴۳۸ ۲

ابتدا دوره را به‌دست می‌آوریم. $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow6\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{1}{3}s$

نسبت بازهٔ زمانی به دوره را به دست می‌آوریم. $\frac{\Delta t}{T}=\frac{0/5}{\frac{1}{3}}\Rightarrow\Delta t=\frac{3}{2}T=T+\frac{T}{2}$

در مدت T نوسانگر به محل اولیهٔ خود باز می‌گردد و بیشینهٔ اندازهٔ جابه‌جایی در $\frac{T}{2}$ باقی‌مانده دو برابر دامنه است. $d=2A$



$A=0/02m=2cm\Rightarrow d=2\times2=4cm$

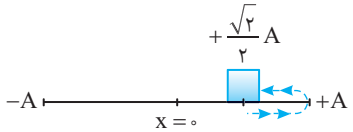
$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{4}{0/5}=8\ cm/s$

B ۱۴۳۹ ۲

نکته کمترین جابه‌جایی و سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه در حرکت هماهنگ ساده صفر است.

۱ کمترین اندازهٔ سرعت متوسط برای زمانی است که نوسانگر از نقطه‌ای از مسیر حرکت کرده و دوباره به آن نقطه برگردد که در این صورت سرعت متوسط برابر صفر می‌شود.

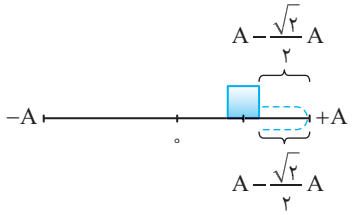
۲ کمترین تندی متوسط در اطراف نقطهٔ بازگشت $(v=0)$ اتفاق می‌افتد، زیرا در این ناحیه سرعت کم و زمان طولانی‌تر از بقیهٔ مسیر است، بنابراین نصف زمان نوسان را قبل از رسیدن به نقطهٔ بازگشت در نظر گرفته و نصف دیگر زمان را بعد از گذر از نقطهٔ بازگشت در نظر می‌گیریم. نصف $\frac{T}{4}$ برابر $\frac{T}{8}$ است، مکان در $\frac{T}{8}$ را به کمک معادله به‌دست می‌آوریم:



۳ بنابراین مسافت طی شده برابر است با: $x_1=A\cos\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{8}\Rightarrow x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}A$

$$\ell=2(A-\frac{\sqrt{2}}{2}A)=A(2-\sqrt{2})$$

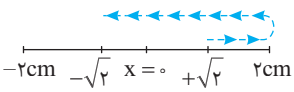
۴ تندی متوسط خواهد شد: $s_{av}=\frac{A(2-\sqrt{2})}{\frac{T}{4}}=\frac{4A(2-\sqrt{2})}{T}$



B ۱۴۴۰ ۴

۱ دورهٔ حرکت را حساب می‌کنیم. $T=\frac{1}{f}\xrightarrow{f=\frac{1}{4}Hz}T=\frac{1}{\frac{1}{4}}\Rightarrow T=4s$

۲ نوسانگر از مکان $+\sqrt{2}cm$ در جهت محور x می‌گذرد، بنابراین نوسانگر در حال حرکت از $+\sqrt{2}cm$ به سوی دامنه $A=+2cm$ است. در نتیجه کمترین بازهٔ زمانی برای رسیدن متحرک به مکان $-\sqrt{2}cm$ مسیری است که نوسانگر مطابق شکل از مکان $+\sqrt{2}cm$ به مکان $+2cm$ رفته و از آنجا در خلاف جهت محور xها خود را به مکان $-\sqrt{2}cm$ برساند.



نکته در حرکت هماهنگ ساده، کمترین بازهٔ زمانی که طی آن مکان و سرعت نوسانگر قرینه می‌شود برابر نصف دوره $(\frac{T}{2})$ است.

۳ در بازهٔ مورد نظر مکان از $+\sqrt{2}cm$ در جهت مثبت محور xها به مکان $-\sqrt{2}cm$ در خلاف جهت محور xها رفته یعنی هم مکان و هم سرعت نوسانگر قرینه شده و این بازه برابر $\frac{T}{2}$ است. $\Delta t=\frac{T}{2}\Rightarrow\Delta t=\frac{4}{2}\Rightarrow\Delta t=2s$

۴ با توجه به تعریف سرعت متوسط خواهیم داشت:

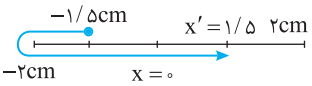
$$|v_{av}|=|\frac{\Delta x}{\Delta t}|=|\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}|=\sqrt{2}\,cm/s$$

بازی با سوال ذره‌ای روی پاره‌خطی واقع بر محور xها به طول $4cm$ دارای حرکت هماهنگ ساده است و حالت تعادل آن مبدأ مختصات است. بیشینه سرعت متوسط ذره در بازه‌ای که از مکان $-1/5cm$ در جهت منفی محور می‌گذرد تا لحظه‌ای که از مکان $x'=+1/5cm$ عبور می‌کند برابر $+1/5m/s$ است. بسامد ذره چند هرتز است؟

۱) ۲۵ ۲) ۵۰ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

پاسخ ۱ دامنه برابر نصف طول پاره‌خط است. $A=\frac{4}{2}\Rightarrow A=2cm$

۲ سرعت متوسط از رابطه $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ به‌دست می‌آید. در صورت مسئله بیان شده که بیشینه سرعت متوسط، دقت کنید Δx مقدارش ثابت است و برای آنکه v_{av} بیشینه شود باید Δt کمینه باشد. اما کمینه بودن Δt مفهومش چیست؟ یعنی ذره از مکان $-1/5cm$ مطابق شکل به مکان $+1/5cm$ برود.



۳ با توجه به مسیر حرکت از مکان $-1/5cm$ به مکان $+1/5cm$ مشخص است که در مدت Δt مکان و سرعت ذره قرینه شده یعنی Δt برابر نصف دوره است. اکنون Δt را به کمک تعریف سرعت متوسط حساب می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow 1/5=\frac{[1/5-(-1/5)]\times10^{-2}}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t=2\times10^{-2}s$$

بنابراین دوره خواهد شد: $\Delta t=\frac{T}{2}\Rightarrow 2\times10^{-2}=\frac{T}{2}\Rightarrow T=4\times10^{-2}s$

بسامد را حساب می‌کنیم. **گزینهٔ ۱** $f=\frac{1}{T}\Rightarrow f=\frac{1}{4\times10^{-2}}\Rightarrow f=25Hz$

B ۱۴۴۱ ۴

خط فکری به عبارت «بیشترین سرعت متوسط» دقت کرده‌اید. جابه‌جایی از مکان $+\frac{A}{2}$ تا $+\frac{A}{\sqrt{2}}$ مقدار ثابتی است و در رابطهٔ $v_{av}=\frac{\Delta x\ \text{ثابت}}{\Delta t}$ وقتی v_{av} بیشینه است که Δt کمترین مقدار باشد و کمترین مقدار Δt وقتی است که متحرک بدون تغییر جهت مستقیماً از $+\frac{A}{2}$ به $+\frac{A}{\sqrt{2}}$ برود. شما باید زمان این جابه‌جایی را به‌دست بیاورید تا بتوانید سرعت متوسط را حساب کنید.

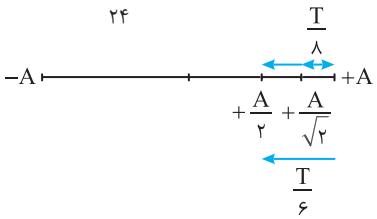
روش استفاده از بازه‌های زمانی:

۱ جابه‌جایی نوسانگر برابر است با:

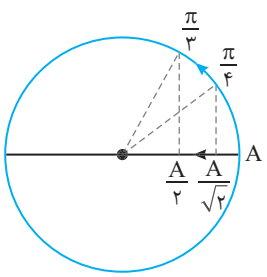
$$\Delta x=\frac{+A}{2}-\frac{A}{\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}-2)A}{2\sqrt{2}}\Rightarrow|\Delta x|=|(\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}})A|=\frac{\sqrt{2}-1}{2}A$$

۲ زمان حرکت از $+A$ تا $\frac{A}{+\sqrt{2}}$ برابر $\frac{T}{8}$ و از $+A$ تا $+\frac{A}{2}$ برابر $\frac{T}{6}$ است.

بنابراین زمان حرکت از $\frac{A}{+\sqrt{2}}$ تا $\frac{+A}{2}$ برابر $\Delta t=\frac{T}{6}-\frac{T}{8}=\frac{T}{24}$ است. بزرگی سرعت متوسط خواهد شد: $|v_{av}|=\frac{|\Delta x|}{\Delta t}\Rightarrow|v_{av}|=\frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2}A}{\frac{T}{24}}\Rightarrow|v_{av}|=12(\sqrt{2}-1)\frac{A}{T}$



روش مثلثاتی: فاز حرکت در مکان $\frac{+A}{\sqrt{2}}$ مطابق شکل $\frac{\pi}{4}$ و در مکان $+\frac{A}{2}$ برابر $\frac{\pi}{3}$ است. بازهٔ زمانی حرکت را حساب می‌کنیم:



$$\omega t_2-\omega t_1=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{2\pi}{T}\Delta t=\frac{\pi}{12}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{24}$$

باقی راه‌حل شبیه به روش قبل است.

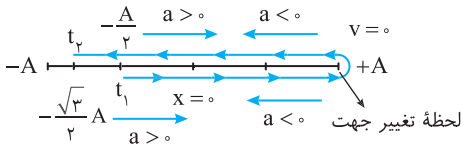
B ۱۴۴۲ ۱

خط فکری در حل این مسائل باید مسیر حرکت را رسم کنید. به تعداد گذر نوسانگر از مبدأ مکان $x=0$ شتاب تغییر علامت می‌دهد و به تعداد رسیدن به نقطهٔ بازگشت و برگشت از آن متحرک تغییر جهت می‌دهد.

نکته در لحظه‌ای که نوسانگر از مبدأ مکان $x=0$ می‌گذرد علامت شتاب و نیروی خالص تغییر جهت می‌دهد.

نکته در لحظه‌ای که نوسانگر به نقطهٔ بازگشت می رسد، سرعتش صفر شده و تغییر علامت می‌دهد.

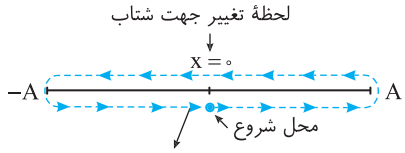
با توجه به صورت مسئله، مسیر حرکت را رسم می‌کنیم. متحرک در مکان $-\frac{A}{2}$ دارای حرکت تندشونده است یعنی در حال حرکت به سوی نقطه تعادل است و برای رسیدن به مکان $-\frac{\sqrt{3}}{2}A$ باید به انتهای مسیر برود $(+A)$ و برگردد، بنابراین نوسانگر در مکان $+A$ یک بار تغییر جهت می‌دهد و چون دو بار از مرکز نوسان می‌گذرد دو بار شتاب تغییر جهت می‌دهد و گزینهٔ (۱) درست است. یادمان باشد با هر بار گذر نوسانگر از مرکز نوسان، شتاب و نیرو تغییر جهت می‌دهد.



B ۱۴۴۳ ۱

نکته هرگاه نوسانگر از مبدأ **بگذرد** شتاب تغییر جهت می‌دهد.

در لحظهٔ مورد نظر که تندی نوسانگر بیشینه است یعنی مطابق شکل نوسانگر در مرکز نوسان است. از این لحظه به بعد در مدت یک دوره نوسانگر تنها یک بار از مبدأ می‌گذرد و شتاب تغییر علامت می‌دهد. دقت کنید در آخر دوره شتاب صفر شده اما از مبدأ نمی‌گذرد بنابراین در آخر دوره هنوز تغییر جهت شتاب رخ نداده است.

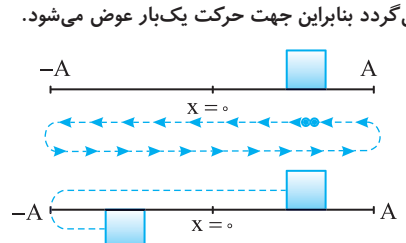


در این لحظه نوسانگر پس از یک دوره، هنوز از مرکز نوسان عبور نکرده و شتاب تغییر علامت نمی‌دهد.

بازی با سؤال **ذره‌ای روی پاره‌خطی دارای حرکت هماهنگ ساده است. اگر در یک لحظه نوسانگر در مکان‌های مثبت قرار داشته باشد $(x>0)$ در مدت یک دوره پس از این لحظه شتاب ..... بار تغییر جهت می‌دهد و در مدت نصف دوره پس از این لحظه نوسانگر ..... بار تغییر جهت می‌دهد.**

۱) ۱، ۲ **۲)** ۲، ۲ **۳)** ۲، ۱ **۴)** ۱، ۱

پاسخ **مکان ابتدایی نوسانگر در لحظهٔ مورد نظر مثبت است. مسیر حرکت در یک دوره را رسم می‌کنیم، نوسانگر دو بار از مبدأ می‌گذرد بنابراین شتاب دو بار تغییر علامت می‌دهد. در مدت نصف دوره $(\frac{T}{2})$ یکبار به نقطهٔ بازگشت می‌رود و برمی‌گردد بنابراین جهت حرکت یک‌بار عوض می‌شود.**



گزینهٔ ۱

B ۱۴۴۴ ۴

در لحظه‌ای که مکان نوسانگر $x=\pm A$ باشد، نوسانگر تغییر جهت می‌دهد. در معادلهٔ حرکت به جای x، $\pm A$ قرار می‌دهیم و لحظه‌های گذر از این نقاط را بررسی می‌کنیم:

$$x=0/04\cos\frac{\pi}{2}t \xrightarrow{x=\pm A} \pm 0/04=0/04\cos\frac{\pi}{2}t$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{2}t=\pm 1\Rightarrow \frac{\pi}{2}t=k\pi\Rightarrow t=2k\begin{cases}\xrightarrow{k=0} t=0\\ \xrightarrow{k=1} t=2s\\ \xrightarrow{k=2} t=4s\end{cases}$$

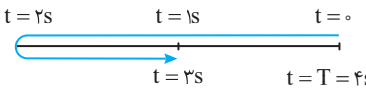
دورهٔ حرکت را حساب می‌کنیم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=4s$$

بازهٔ بیان شده $(t=\frac{1}{3}s$ تا $t=\frac{15}{4}s)$ بین صفر تا $4s$ است و یک بار تغییر جهت رخ می‌دهد. اما راه‌حل ساده‌تری وجود دارد. دوره را به‌دست می‌آوریم و مسیر را رسم می‌کنیم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=4s$$

بازهٔ زمانی $t=\frac{1}{3}s$ تا $t=\frac{15}{4}s$ بین صفر و $4s$ است و در $t=2s$ یک بار تغییر جهت رخ می‌دهد.



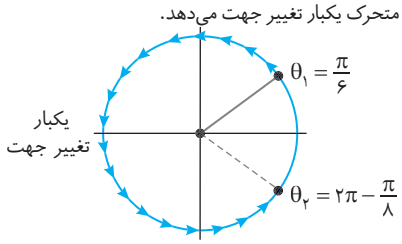
روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز $(\theta=\omega t)$:

در لحظه‌های بیان شده فاز حرکت (ωt) را به دست آورده و روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنید. هر بار که از صفر یا π بگذریم متحرک یک بار تغییر جهت داده و هرگاه از $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ بگذریم شتاب یک بار تغییر جهت می‌دهد.

۱ بسامد زاویه‌ای $\frac{\pi}{2}rad/s$ است بنابراین:

$$\theta_1=\omega t_1=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{\pi}{6}\qquad \theta_2=\omega t_2=\frac{\pi}{2}\times\frac{15}{4}=\frac{15\pi}{8}=2\pi-\frac{\pi}{8}$$

۲ اکنون در جهت مثلثاتی از θ_1 تا θ_2 می‌چرخیم. مشاهده می‌شود که یکبار از π می‌گذریم یعنی متحرک یکبار تغییر جهت می‌دهد.



B ۱۴۴۵ ۳

روش استفاده از معادلهٔ حرکت:

نکته شتاب در دو انتهای مسیر یعنی $x=\pm A$ بیشینه است.

بررسی می‌کنیم در بازهٔ $t=\frac{1}{120}s$ تا $t=\frac{1}{12}s$ چند بار مکان‌ها برابر $\pm A$ می‌شود.

$$x=A\cos 40\pi t\Rightarrow\pm A=A\cos 40\pi t\Rightarrow\cos 40\pi t=\pm 1\Rightarrow 40\pi t=k\pi$$

$$\Rightarrow t=\frac{k}{40}$$

بنابراین:

$k=0\Rightarrow t=0$, $k=1\Rightarrow t=\frac{1}{40}=\frac{3}{120}s$ بار اول

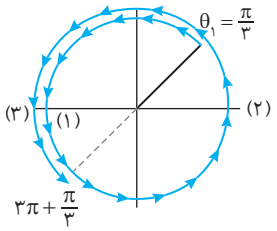
$k=2\Rightarrow t=\frac{2}{40}=\frac{6}{120}s$ بار دوم

$k=3\Rightarrow t=\frac{3}{40}=\frac{9}{120}s$ بار سوم

$k=4\Rightarrow t=\frac{4}{40}=\frac{12}{120}s>\frac{1}{12}s$ قابل قبول نیست

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی:

فاز حرکت (شناسهٔ تابع کسینوس $\theta=\omega t$) را در لحظه‌های $t=\frac{1}{120}s$ و $t=\frac{1}{12}s$ را به‌دست آورده و روی دایرهٔ مثلثاتی نمایش می‌دهد.



$$\theta=\omega t\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t=\frac{1}{120}s}\theta_1=40\pi\times\frac{1}{120}\Rightarrow\theta_1=\frac{\pi}{3}\\ \xrightarrow{t=\frac{1}{12}s}\theta_2=40\pi\times\frac{1}{12}\Rightarrow\theta_2=\frac{10\pi}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\Delta\theta=\frac{10\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\Rightarrow\Delta\theta=3\pi$$

از $\theta_1=\frac{\pi}{3}$، 3π رادیان روی دایره می‌چرخیم. هر بار که از $(\pm A)$ یعنی کمان صفر و π می‌گذریم، نوسانگر یک بار تغییر جهت می‌دهد و شتاب یک بار بیشینه می‌شود، بنابراین سه بار شتاب بیشینه شده است.

روش استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:

۱ مکان را در ابتدای بازه به‌دست بیاورید.

$$x=A\cos 40\pi t\Rightarrow x=A\cos 40\pi\times\frac{1}{120}\Rightarrow x=A\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=+\frac{A}{2}$$

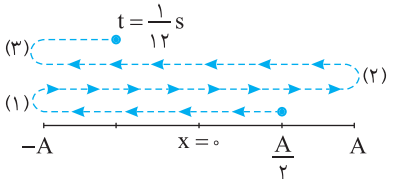
۲ دوره را به‌دست می‌آوریم: $\omega=40\pi\Rightarrow\frac{2\pi}{T}=40\pi\Rightarrow T=\frac{1}{20}s$

۳ بازهٔ زمانی داده شده را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta t=\frac{1}{12}-\frac{1}{120}\Rightarrow\Delta t=\frac{10-1}{120}\Rightarrow\Delta t=\frac{9}{120}\Rightarrow\Delta t=\frac{3}{40}s$$

۴ مشخص می‌کنیم که Δt چه کسری از دوره است. $\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{3}{40}}{\frac{1}{20}}\Rightarrow\Delta t=\frac{3}{2}T$

۵ اکنون روی مسیر حرکت از $+\frac{A}{2}$ به اندازهٔ $\frac{3T}{2}$ حرکت کرده و هر بار گذر از نقطهٔ بازگشت شتاب بیشینه می‌شود.



B ۲ ۱۴۴۶

روش استفاده از معادلهٔ حرکت:

هر بار که ذره از نقطهٔ تعادل (مبدأ) می‌گذرد، نیروی وارد بر نوسانگر تغییر جهت می‌دهد. از این‌رو:

$$x=0\Rightarrow\cos 10\pi t=0\Rightarrow 10\pi t=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{k}{10}+\frac{1}{20}$$

$k=0\Rightarrow t=\frac{1}{20}s<\frac{1}{15}s$ غ ق ق ، $k=1\Rightarrow t=\frac{3}{20}s>\frac{1}{15}s$ قابل قبول

$$k=2\Rightarrow t=\frac{2}{10}+\frac{1}{20}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}s$$

در لحظهٔ $t=\frac{1}{4}s$ نوسانگر در مرکز نوسان است و از آن عبور نکرده و نیرو و تغییر علامت نمی‌دهد.

نکته در حرکت هماهنگ ساده هر بار که نوسانگر از مبدأ $x=0$ می‌گذرد بردار نیرو و شتاب تغییر علامت می‌دهد.

روش استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:

۱ مکان ذره را در ابتدای بازه $t_1=\frac{1}{15}s$ حساب می‌کنیم.

$$x=0/02\cos 10\pi t\Rightarrow x=0/02\cos\frac{10\pi}{15}=0/02\cos\frac{2\pi}{3}\xrightarrow{\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}}$$

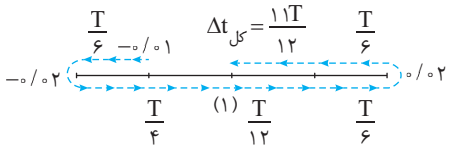
$$x=-0/01m\Rightarrow x=-1cm$$

۲ دوره را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 10\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{1}{5}s$

۳ بازهٔ زمانی داده شده را با دوره مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{15}}{\frac{1}{5}}=\frac{\frac{15-4}{60}}{\frac{1}{5}}=\frac{11}{12}\Rightarrow\Delta t=\frac{11T}{12}$$

۴ مسیر حرکت را رسم می‌کنیم و از مکان $x=-0/01m$ به اندازهٔ $\frac{11T}{12}$ جلو می‌رویم. یعنی تکه تکه جلو می‌رویم و بازه‌ها را می‌نویسیم تا جمع آن‌ها $\frac{11T}{12}$ شود.



۵ نوسانگر یک بار از مرکز نوسان (حالت تعادل) می‌گذرد و گزینهٔ (۲) درست است.

B ۳ ۱۴۴۷

نکته هنگام گذر نوسانگر از مبدأ مکان $(x=0)$ بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

در معادلهٔ حرکت به جای x، صفر قرار می‌دهیم و تمام پاسخ‌های معادله بین ۱s تا ۵s جواب مسئله خواهند بود.

$$x=2\cos\frac{\pi}{3}t\xrightarrow{x=0}0=2\cos\frac{\pi}{3}t\Rightarrow\frac{\pi}{3}t=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{3}t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{3}{2}s\\ \frac{\pi}{3}t=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{9}{2}s\\ \frac{\pi}{3}t=\frac{5\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{15}{2}s\end{cases}$$

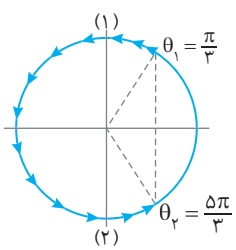
بنابراین $t=\frac{3}{2}s$ و $t=\frac{9}{2}s$ در بازهٔ $1s\le t\le 5s$ قرار دارد و در این دو لحظه متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند.

استفاده از روش دایرهٔ مثلثاتی و فاز $(\theta=\omega t)$:

۱ فاز حرکت در $t=1s$ و $t=5s$ را حساب کرده و روی دایرهٔ مثلثاتی نمایش می‌دهد.

$$\theta=\omega t\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t=1s}\theta_1=\frac{\pi}{3}\times 1=\frac{\pi}{3}\\ \xrightarrow{t=5s}\theta_2=\frac{\pi}{3}\times 5=\frac{5\pi}{3}\end{cases}$$

۲ اکنون از $\frac{\pi}{3}$ تا $\frac{5\pi}{3}$ روی دایره می‌چرخیم و هر بار که از $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ یعنی $x=0$ می‌گذریم بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.



۳ با توجه به دایرهٔ مثلثاتی بردار مکان دو بار تغییر جهت می‌دهد. البته شما می‌توانید به کمک بازه‌های زمانی شاخته شده مسئله را حل کنید.

۲ ۱۴۴۸ B

۱ ابتدا دوره را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 20\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{1}{10}s$$

۲ بازهٔ $t=0$ تا $t=\frac{1}{24}s$ قطعاً از یک دوره $T=\frac{1}{10}s$ کمتر است.

با توجه به مسیر نوسانگر ساده در بازهٔ $+A$ تا صفر و $-A$ تا صفر شتاب و سرعت هم‌جهت است.

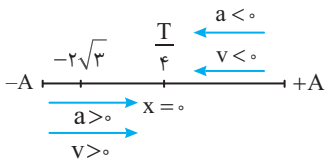
اکنون مکان متحرک را در $t=\frac{1}{24}$ حساب می‌کنیم.

$$x=0/04\cos 20\pi t\Rightarrow x=0/04\cos 20\pi\times\frac{1}{24}=0/04\cos\frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x=0/04\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})\Rightarrow x=-2\sqrt{3}cm$$

از $t=0$ تا $\frac{1}{24}s$ نوسانگر از $x=0$ به $x=-2\sqrt{3}cm$ می‌رود و در بازهٔ زمانی حرکت از $+A$ تا $x=0$ بردار شتاب و سرعت هم‌جهت‌اند:

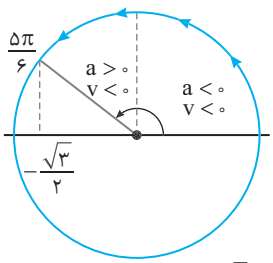
$$\Delta t=\frac{T}{4}=\frac{\frac{1}{10}}{4}=\frac{1}{40}s$$



روش استفاده از دایره مثلثاتی:

فاز (شناسه تابع کسینوسی) در لحظهٔ $t=\frac{1}{24}s$ را حساب می‌کنیم.

$$\theta=\omega t\Rightarrow\theta=20\pi\times\frac{1}{24}=\frac{5\pi}{6}$$

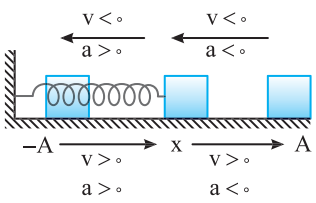


در حرکت از صفر تا $\frac{\pi}{2}$ یعنی ربع اول سرعت و شتاب هم‌علامت است در واقع به مدت $\frac{T}{4}$ بردار سرعت و شتاب و هم‌جهت هستند.

$$\Delta t=\frac{T}{4}=\frac{\frac{1}{10}}{4}=\frac{1}{40}s$$

۱ ۱۴۴۹ C

خط فکری به مسیر حرکت سامانهٔ جرم - فنر شکل روبه‌رو دقت کنید. در مدتی که نوسانگر از مکان $-A$ به سوی مرکز نوسان می‌رود بردار شتاب و سرعت در جهت محور x هستند که این بازه طول $\frac{T}{4}$ می‌کشد. ابتدا دوره را به دست بیاورید و معین کنید که بازهٔ زمانی داده شده چه کسری از دوره است؟ مکان نوسانگر در ابتدای بازه $t_1=0/5s$ را به دست آورده و مسیر حرکت تا $t_2=5s$ را دنبال کنید تا مشخص شود چه مدتی a و v همزمان مثبت هستند.



۱ با توجه به معادلهٔ $x=0/04\cos\frac{\pi}{2}t$ دوره خواهد شد:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=4s$$

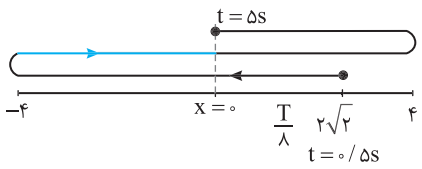
۲ بازهٔ $t_1=0/5s$ تا $(t_2=5s)$ را با دوره مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{5-0/5}{4}=\frac{4/5}{4}\Rightarrow\Delta t=\frac{9}{8}T=T+\frac{T}{8}$$

۳ مکان در ابتدای بازه $t_1=0/5s$ را به دست می‌آوریم.

$$x=0/04\cos\frac{\pi}{2}\times(\frac{1}{2})=0/04\cos\frac{\pi}{4}=0/04\times\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=0/02\sqrt{2}m=2\sqrt{2}cm$$

۴ به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده از مکان $2\sqrt{2}$ مسیر را دنبال می‌کنیم.



۵ بنابراین تنها در قسمت رنگی مسیر $(\frac{T}{4})$، a و v همزمان مثبت هستند.

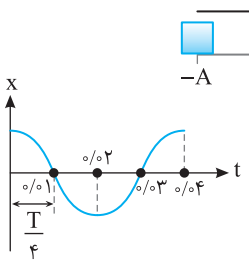
$$\frac{T}{4}=\frac{4}{4}=1s$$

۳ ۱۴۵۰ B

۱ با توجه به شناسهٔ تابع کسینوس، دورهٔ نوسان را حساب می‌کنیم:

$$\omega t=50\pi t\Rightarrow\omega=50\pi\Rightarrow\frac{2\pi}{T}=50\pi\Rightarrow T=0/04s$$

۲ بردار سرعت و شتاب هنگامی که نوسانگر از مکان $x=-A$ به سمت $x=0$ در حال حرکت‌اند مثبت بوده و در جهت محور x قرار دارند:



۳ با توجه به نمودار مکان - زمان نوسانگر، بازهٔ زمانی حرکت نوسانگر از $-A$ تا $x=0$ برابر است با:

$$0/02s<t<0/03s$$

۱ ۱۴۵۱ C

یادآوری تکانه برابر حاصل‌ضرب جرم در بردار سرعت $(\vec{P}=m\vec{v})$ بوده و تکانه برداری در جهت سرعت است.

خط فکری هرگاه بردار تکانه مثبت باشد یعنی بردار سرعت مثبت است. در حرکت هماهنگ ساده هرگاه نوسانگر از $-A$ به سوی $+A$ برود سرعت مثبت است یعنی در دایرهٔ مثلثاتی هرگاه فاز در ربع سوم و چهارم باشد سرعت مثبت است. اکنون باید شبیه مسائل قبلی، شما بررسی کنید که در بازهٔ زمانی داده شده نوسانگر از کجا به کجا می‌رود تا بتوانید مدت زمانی که بردار تکانه مثبت است را مشخص کنید.

روش استفاده از بازهٔ زمانی شناخته شده:

۱ مکان نوسانگر را در ابتدای بازه به‌دست می‌آوریم.

$$x=0/02\cos 12\pi t\xrightarrow{t_1=\frac{1}{48}s}x_1=0/02\cos\frac{12\pi}{48}$$

$$\Rightarrow x_1=0/02\cos\frac{\pi}{4}=0/02\times\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x_1=\sqrt{2}cm$$

۲ دوره را حساب می‌کنیم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 12\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{1}{6}s$$

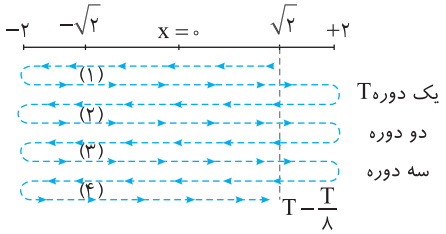
۳ بازهٔ زمانی داده شده را با دوره مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{48}}{\frac{1}{6}}=\frac{\frac{32-1}{48}}{\frac{1}{6}}=\frac{31}{8}\Rightarrow\Delta t=4T-\frac{T}{8}$$

۴ دقت کردید، تعداد دوره‌ها را از شکم Δt بیرون کشیدیم. اکنون مسیر را رسم کرده و مسئله را حل می‌کنیم.

به شکل مسیر دقت کنید. در هر قسمت $\frac{T}{2}$ جهت سرعت و جهت تکانه مثبت بوده بنابراین به مدت $4\times\frac{T}{2}$ بردار تکانه مثبت است.

$$\Delta t=4\times\frac{\frac{1}{6}}{2}\Rightarrow\Delta t=\frac{1}{3}s$$



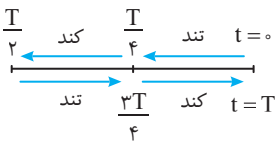
شما نیز با روش مثلثاتی مسئله را حل کنید.

B ۱۴۵۲ ۳

روش بازه‌های زمانی:

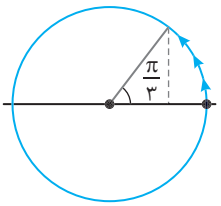
با توجه به مسیر حرکت ذره مکان‌هایی با حرکت کندشونده و تندشونده مشخص است.

ابتدا دوره را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow ۱۰\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{۲}{۱۰}s\Rightarrow\frac{T}{۴}=\frac{۱}{۲۰}s$



بازهٔ صفر تا $\frac{۱}{۳۰}s$ از $\frac{۱}{۲۰}s$ یعنی از $\frac{T}{۴}$ کمتر است و متحرک از $+A$ در حال حرکت به سوی $x=۰$ است و در تمام بازه حرکت تندشونده می‌باشد.

روش دایرهٔ مثلثاتی:



فـاز حرکـت در ابتـدای بـازه صفـر و در لحظـهٔ $t=\frac{۱}{۳۰}s$ خواهد شد: $\theta=\omega t=۱۰\pi\times\frac{۱}{۳۰}=\frac{\pi}{۳}$

یعنـی در بازهٔ صفـر تا $\frac{۱}{۳۰}$ همچنان شناسـهٔ تابع کسینوسی (فاز) در ربع اول است و حرکت تندشونده است.

B ۱۴۵۳ ۱

نکته در بازهٔ زمانی که نوسانگر از دامنه ($+A$ یا $-A$) به سوی مرکز نوسان می‌رود حرکت تندشونده است.

خط فکری شـما باید مشخص کنید در بازهٔ زمانی داده شده چه مدت نوسانگر در حال حرکت از $+A$ یا $-A$ به سوی حالت تعادل است.

۱ در $t=۰$ و $t=\frac{۵}{۶}s$ مکان نوسـانگر را به‌دسـت آورده سپس مسیر حرکت را رسم می‌کنیم.

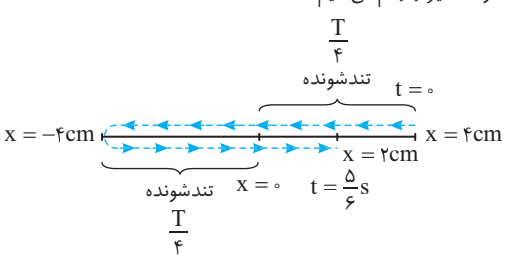
$t=۰\Rightarrow x_۱=۰/۰۴m=۴cm$

$t=\frac{۵}{۶}s\Rightarrow x=۰/۰۴\cos(۲\pi\times\frac{۵}{۶})=۰/۰۴\cos\frac{۵\pi}{۳}\Rightarrow x_۲=۰/۰۴\times\frac{۱}{۲}=+۰/۰۲m$

$\Rightarrow x_۲=۲cm$

۲ دوره را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow ۲\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۱s$

۳ اکنون مسیر را رسم می‌کنیم.



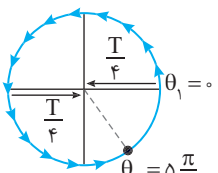
۴ با توجه به شکل در دو بازهٔ $\frac{T}{۴}$ یعنی به مدت $\frac{T}{۲}$ حرکت تندشونده است.

$\Delta t=\frac{T}{۲}=\frac{۱}{۲}s$

بنابراین در مدت $\frac{T}{۲}=\frac{۱}{۲}s$ حرکت تندشـونده است. اما پرسشی مطرح است. ما از کجا متوجـه شـدیم که متحرک در $t=\frac{۵}{۶}s$ بـرای بار دوم به مکان $+۲cm$ می‌رسـد. برای پاسـخ به این پرسـش باید به شناسـهٔ تابع کسینوسـی (فاز) دقت کنید که بـا قرار دادن $t=\frac{۵}{۶}s$ مقدار آن $\frac{۵\pi}{۳}=۲\pi-\frac{\pi}{۳}$ شـده اسـت که کمانی در ربع چهارم اسـت. بنابراین مسیر رسم شده کاملاً درست است.

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت:

۱ فاز حرکت در $t=۰$ و $t=\frac{۵}{۶}s$ را مشخص کرده و روی دایرهٔ مثلثاتی نمایش می‌دهیم.



$\theta=\omega t\Rightarrow\begin{cases}t=۰\rightarrow\theta_۱=۰\\ t=\frac{۵}{۶}\rightarrow\theta_۲=۲\pi\times\frac{۵}{۶}\Rightarrow\theta_۲=\frac{۵}{۳}\pi\end{cases}$

۲ از $\theta_۱$ به سوی $\theta_۲$ می‌رویم در مدتی که فاز در ربع اول و ربع سوم است. حرکت تندشونده است.

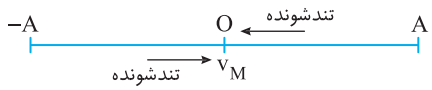
۳ مدت زمانی که حرکت متحرک تندشونده است خواهد شد:

$\Delta t=\frac{T}{۴}+\frac{T}{۴}=\frac{T}{۲}=\frac{۱}{۲}s$

B ۱۴۵۴ ۴

نکته در مدت یک دوره، $\frac{T}{۲}$ ثانیه حرکت تندشونده است.

نکته هرگاه نوسانگر در حال حرکت به‌سوی حالت تعادل باشد حرکت تندشونده است.



۱ با توجه به معادلهٔ حرکت $x=۰/۰۲\cos۴\pi t$ دوره را حساب می‌کنیم.

$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow ۴\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{۱}{۲}s$

۲ بازهٔ زمانی $t_۱=\frac{۱}{۱۲}s$ تا $t_۲=\frac{۷}{۶}s$ را با دوره مقایسه می‌کنیم.

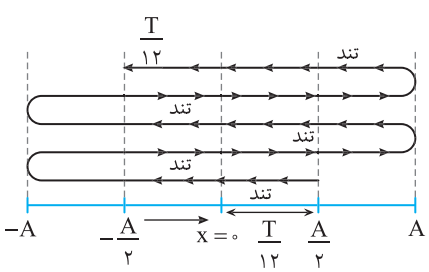
$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{۷}{۶}-\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{۱۴-۱}{۱۲}}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow\Delta t=\frac{۱۳}{۶}T=۲T+\frac{T}{۶}$

۳ در بازهٔ $۲T$ به مدت نصف بازه یعنی T حرکت تند شونده است.

۴ امـا در مدت $\frac{T}{۶}$ چگونه اسـت؟ برای این منظـور مکان نوسـانگر در ابتدای بازه $(t=\frac{۱}{۱۲}s)$ را باید مشخص کنیم.

$x=۰/۰۲\cos۴\pi(\frac{۱}{۱۲})\Rightarrow x=۰/۰۲\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=۰/۰۱m\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}A$

۵ مسیر حرکت را مشخص می‌کنیم.



۶ با توجه به مسیر در مدت حرکت از $\frac{A}{۲}$ تا $x=۰$، $\frac{T}{۱۲}$ حرکت تندشونده و در مدت $۲T$ بعدی نیز به مدت T حرکت کندشونده است، یعنی در کل زمان حرکت تندشونده خواهد شد:

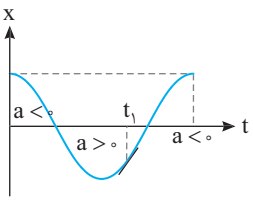
$$\Delta t=T+\frac{T}{۱۲}=\frac{۱۳T}{۱۲}\xrightarrow{T=\frac{۱}{۲}s}\Delta t=\frac{۱۳}{۲۴}s$$

۴ ۱۴۵۵ A

با توجه به نمودار مکان - زمان در لحظهٔ $t_۱$، مکان منفی است.

یادآوری شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر سرعت لحظه‌ای است.

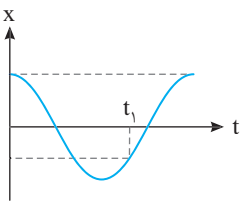
در لحظهٔ $t_۱$، شیب خط مماس مثبت بوده بنابراین سرعت و تکانه مثبت است.



یادآوری هرگاه جهت تقعر (دهانه) نمودار مکان - زمان رو به بالا باشد، شتاب مثبت است.

در لحظهٔ $t_۱$ جهت دهانه رو به بالاست و شتاب و نیرو مثبت است.

بازی با سؤال نمودار مکان - زمان نوسانگری که روی سطح افقی در امتداد محور xها در حال نوسان است، به صورت مقابل می‌باشد. کدام گزینه جهت شتاب و سرعت نوسانگر در لحظهٔ $t_۱$ را به ترتیب از راست به چپ درست بیان می‌کند؟



۱) ، ۲) ، ۳) ، ۴) ،

پاسخ در حل این نوع مسائل تمام بحث‌های حرکت هماهنگ ساده را فراموش کنید و تنها به حرکت‌شناسی و ویژگی‌های نمودار مکان زمان دقت کنید.

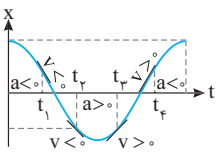
۱ شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان علامت سرعت را نشان می‌دهد.

۲ جهت تقعر نمودار مکان - زمان علامت شتاب را نشان می‌دهد. در لحظهٔ $t_۱$ دهانه نمودار مکان - زمان رو به بالاست و شتاب مثبت و در جهت محور xها است و شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t_۱$ مثبت است بنابراین سرعت مثبت و در جهت محور xهاست. بنابراین بردار سرعت و شتاب هر دو در جهت مثبت محور xها خواهد بود و گزینهٔ (۱) درست است. گزینهٔ ۱

۲ ۱۴۵۶ A

در لحظهٔ $t_۲$ شتاب مثبت و سرعت منفی است.

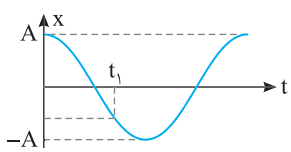
بنابراین حرکت کندشونده است و گزینهٔ (۲) درست است.

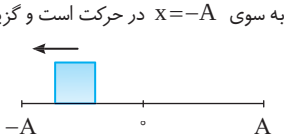


روش دیگر: در لحظهٔ $t_۲$ متحرک به سوی دامنه منفی می‌رود. بنابراین تندی آن در حال کاهش بوده و حرکت کندشونده است. در مکان‌های منفی شتاب نوسانگر مثبت است. بنابراین لحظهٔ $t_۲$ جواب مسئله است.

۴ ۱۴۵۷ A

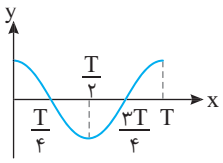
در لحظهٔ $t_۱$ مکان نوسانگر منفی است. از طرفی شیب خط مماس بر نمودار نیز منفی بوده یعنی سرعت متحرک منفی است، بنابراین در لحظهٔ $t_۱$ نوسانگر از $x=۰$ به سوی $x=-A$ در حرکت است و گزینهٔ (۴) درست است.





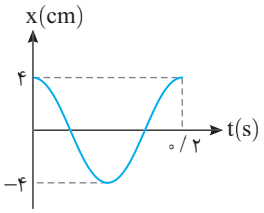
۲ ۱۴۵۸ A

یادآوری ریاضی در نمودار توابع کسینوسی خواهیم داشت:

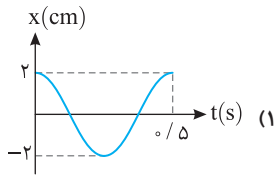


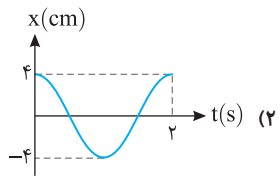
با توجه به نمودار $A=۴cm$ و $T=۰/۲s$ است.

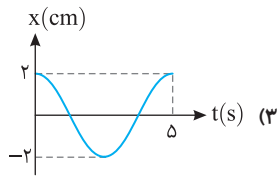
$$x=A\cos\omega t\Rightarrow x=A\cos\frac{۲\pi}{T}t\Rightarrow x=۰/۰۴\cos\frac{۲\pi}{۰/۲}t\Rightarrow x=۰/۰۴\cos۱۰\pi t$$

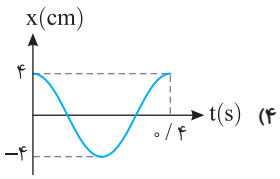


بازی با سؤال معادلهٔ مکان - زمان نوسانگری در SI به صورت $x=۰/۰۲\cos(\frac{۲\pi}{۵}t)$ می‌باشد. کدام گزینه نمودار مکان - زمان این نوسانگر است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$x=۰/۰۲\cos(\frac{۲\pi}{۵}t)\xrightarrow[\omega=\frac{۲\pi}{T}]{\omega=\frac{۲\pi}{۵}rad/s}\frac{۲\pi}{۵}=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۵s$$

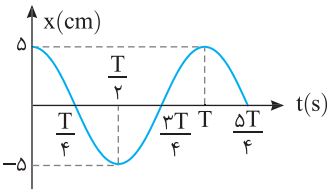
تنها گزینه‌ای که در آن $T=۵s$ است، گزینهٔ (۳) می‌باشد. البته دامنه برابر $A=۰/۰۲m=۲cm$ است. گزینهٔ ۳

۳ ۱۴۵۹ A

یادآوری مسافتی که نوسانگر در هر دوره طی می‌کند، چهار برابر دامنه $(۴A)$ است.

۱ ابتدا با توجه به نمودار دوره را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۵T}{۴}=۵\Rightarrow T=۴s$$



۲ در مدت یک دقیقه تعداد دور کاملی که نوسانگر طی می‌کند برابر است با:

$$T=\frac{t}{n}\Rightarrow۴=\frac{۶۰}{n}\Rightarrow n=۱۵$$

۳ نوسانگر ۱۵ نوسان انجام داده بنابراین مسافتی که طی می‌کند خواهد شد:

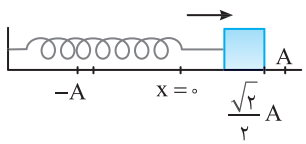
$$\ell=۱۵\times(۴A)=۱۵\times۴\times(۵)\Rightarrow\ell=۳۰۰cm=۳m$$

A ۳ ۱۴۶۰

با توجه به نمودار در لحظهٔ t_1 متحرک در مکان مثبت و در حال حرکت به سمت $+A$ می‌باشد. پس مسیر حرکت گزینهٔ (۱) یا گزینهٔ (۳) می‌باشد. مقدار $t=\frac{7T}{8}$ را در معادله قرار می‌دهیم و مکان نوسانگر را به‌دست بیاوریم.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow x=A\cos\frac{2\pi}{T}\times\frac{7T}{8}\Rightarrow x=A\cos\frac{14\pi}{8}\Rightarrow x=A\cos\frac{7\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x=+\frac{\sqrt{2}}{2}A$$



پس گزینهٔ (۳) درست می‌باشد.

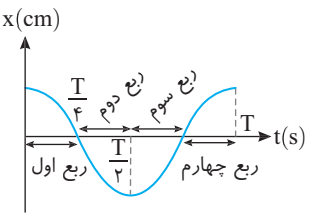
A ۴ ۱۴۶۱

خط فکری مختصات هر نقطه از نمودار باید در معادلهٔ $x=A\cos\omega t$ صدق کند. بنابراین معادلهٔ حرکت را نوشته به جای زمان $t=0/3s$ و به جای مکان $-2/5cm$ را قرار دهید. البته باید دقت کنید که در این لحظه نوسانگر برای اولین بار از مکان $-2/5\,cm$ می‌گذرد.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow -2/5=5\cos\omega t\Rightarrow\cos\omega t=-\frac{1}{2}$$

البته $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ دو جواب دارد، یکی $\frac{2\pi}{3}$ و دیگری $\frac{4\pi}{3}$ است. اما چگونه تشخیص بدهیم که کدام‌یک را اختیار کنیم؟ برای این منظور به نمودار مکان - زمان حرکت هماهنگ ساده دقت کنید.

در نمودار مکان - زمان تقسیم‌بندی نمودار با توجه به دایرهٔ مثلثاتی به‌صورت روبه‌رو است. در شکل مسئله در $0/3s$، کمان در ربع دوم قرار دارد. بنابراین $\omega t=\frac{2\pi}{3}$ قابل قبول است.



با توجه به نمودار $A=5cm$ است.

$$\omega t=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}\times\frac{3}{10}=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow T=\frac{9}{10}s\Rightarrow x=0/05\cos\frac{20\pi}{9}t$$

B ۳ ۱۴۶۲

۱ به کمک $t=0/45s$ که روی نمودار مشخص است، دوره قابل محاسبه است.

$$t=0/45=\frac{3T}{4}\Rightarrow T=0/6s$$

۲ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0/6}\Rightarrow\omega=\frac{10\pi}{3}rad/s$

۳ دامنهٔ حرکت برابر $A=6cm$ بوده و معادلهٔ حرکت خواهد شد:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow x=0/06\cos\frac{10\pi}{3}t$$

۴ مکان در لحظهٔ $t=1/1s$ را حساب می‌کنیم:

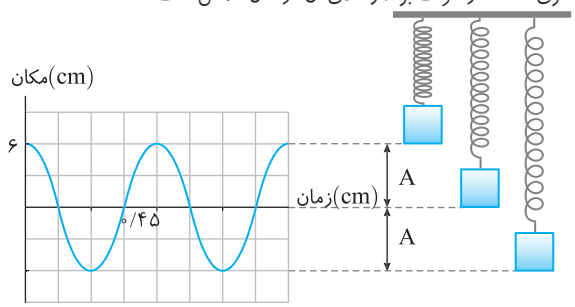
$$x=0/06\cos\frac{10\pi}{3}\times1/1\Rightarrow x=0/06\cos\frac{11\pi}{3}\Rightarrow x=0/06\cos(4\pi-\frac{\pi}{3})$$

4π دورهٔ تابع کسینوسی است از این رو:

$$x=0/06\cos(-\frac{\pi}{3})\Rightarrow x=0/06\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=0/06\times\frac{1}{2}=0/03m=3cm$$

بنابراین نوسانگر در این لحظه در مکان $+3cm$ و در بالای نقطهٔ تعادل قرار دارد.

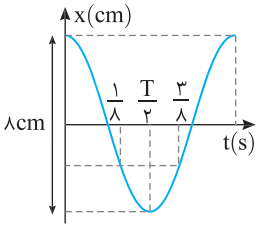
۵ اما قسمت سخت مسئله در مورد رفتار تندی در این لحظه است. کمان $-\frac{\pi}{3}$ که در آخر به‌دست آوریم در ربع چهارم قرار دارد و در ربع چهارم، نوسانگر از حالت تعادل به سوی $+A$ در حرکت بوده و تندی آن در حال کاهش است.



B ۴ ۱۴۶۳

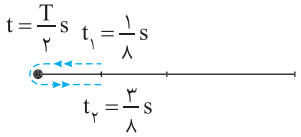
۱ طول مسیر نوسان برابر $8cm$ است. از این رو دامنهٔ حرکت خواهد شد.

$$A=\frac{8}{2}=4cm$$



۲ در لحظهٔ $t=\frac{1}{8}s$ و $t=\frac{3}{8}s$ مکان نوسانگر یکسان است. با توجه به نمودار $\frac{T}{2}$ وسط این بازه است. بنابراین:

$$\frac{T}{2}=\frac{\frac{3}{8}+\frac{1}{8}}{2}=\frac{1}{4}s\Rightarrow T=\frac{1}{2}s$$



۳ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم:

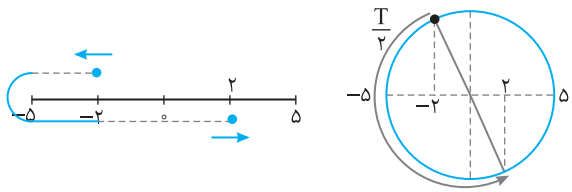
$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\omega=4\pi\frac{rad}{s}$$

۴ معادلهٔ حرکت خواهد شد:

$$x=0/04\cos4\pi t$$

B ۲ ۱۴۶۴

در لحظهٔ t_1، مکان نوسانگر $-2cm$ بوده و نوسانگر در حال حرکت به سمت دامنهٔ منفی قرار دارد. برای آنکه نوسانگر به مکان $+2cm$ برسد باید به اندازهٔ نصف یک دوره نوسان کند.



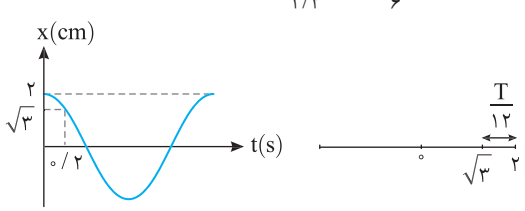
B ۳ ۱۴۶۵

روش استفاده از بازه‌های زمانی

۱ به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده و با توجه به اینکه دامنه $A=2cm$ است و در لحظهٔ $t=0/2s$ مکان نوسانگر $x=\sqrt{3}cm=\frac{\sqrt{3}}{2}A$ می‌باشد، یعنی نوسانگر در مدت $0/2s$ از $+A$ به $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ می‌رود که بازه زمانی این جابه‌جایی برابر $\frac{T}{12}$ است.

از این‌رو:

$$\frac{T}{12}=0/2\Rightarrow T=2/4s\xrightarrow{\omega=2\pi/T}\omega=\frac{2\pi}{2/4}\Rightarrow\omega=\frac{5\pi}{6}rad/s$$



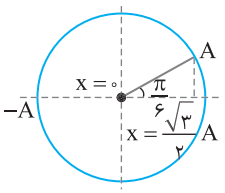
۲ معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم: $x=A\cos\omega t\Rightarrow x=0/02\cos\frac{5\pi}{6}t$

۳ زمان $t=1s$ را در معادلهٔ حرکت قرار داده و مکان را به‌دست می‌آوریم:

$$x=0/02\cos\frac{5\pi}{6}\Rightarrow x=0/02\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{-\sqrt{3}}{100}m\Rightarrow x=-\sqrt{3}cm$$

روش استفاده از دایره مثلثاتی

در $t=0/2s$ نوسانگر در ربع اول قرار داشته و مکان آن $\frac{\sqrt{3}}{2}A$ می‌باشد پس کمان متناظر مکان نوسانگر $\theta=\frac{\pi}{6}$ است. با توجه به نمودار



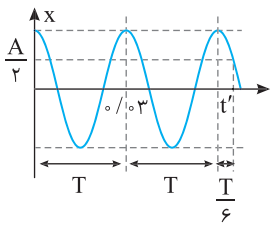
از $\theta_0=0$ تا $\theta_1=\frac{\pi}{6}$ در مدت $0/2s$ طی می‌شود پس:

$$\theta_1-\theta_0=\omega t_1-\omega t_0=\omega(\Delta t)=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\omega\times\frac{2}{10}=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\omega=\frac{5\pi}{6}$$

ادامهٔ حل شبیه قسمت اول است.

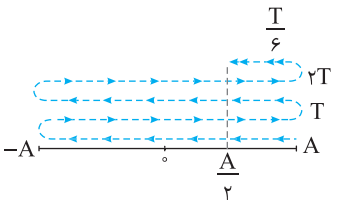
۳ ۱۴۶۶ **B**

به نمودار دقت کنید. دورهٔ حرکت $T=0/03s$ است. مسیر حرکت را در بازهٔ $t=0$ تا t' رسم می‌کنیم. به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده مسئله به راحتی حل می‌شود.



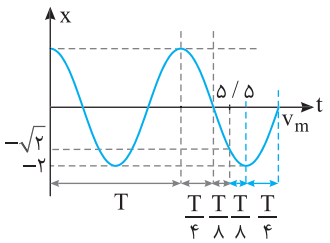
$$t'=2T+\frac{T}{6}\Rightarrow t'=2\times0/03+\frac{0/03}{6}\Rightarrow t'=0/06+\frac{0/01}{2}$$

$$\Rightarrow t'=0/065s=6/5\times10^{-2}s$$



۴ ۱۴۶۷ **B**

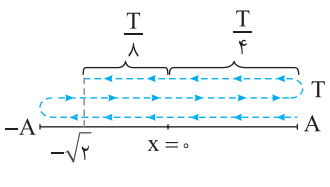
راه‌حل اول: حل به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده مسیر حرکت را مطابق نمودار رسم کرده و بازه‌های زمانی را روی آن می‌نویسیم.

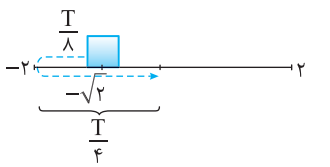


$$T+\frac{T}{4}+\frac{T}{8}=5/5$$

$$\Rightarrow\frac{8+2+1}{8}T=5/5\Rightarrow T=4s$$

مسیر حرکت را مطابق نمودار رسم کرده و بازه‌های زمانی را روی آن می‌نویسیم. تندی نوسانگر وقتی بیشینه می‌شود که نوسانگر از مرکز نوسان بگذرد. بنابراین مسیر نوسانگر در بازهٔ t_1 تا گذر از حالت تعادل مطابق شکل زیر است.





$$\frac{T}{8}+\frac{T}{4}=\frac{3T}{8}=\frac{3}{8}\times4=1/5s$$

راه‌حل دوم: حل به کمک معادلهٔ مکان - زمان: با توجه به نمودار در $t=5/5s$ نوسانگر برای سومین بار از $x=-\sqrt{2}cm$ عبور می‌کند.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow-\sqrt{2}=2\cos\omega t\Rightarrow\cos\omega t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

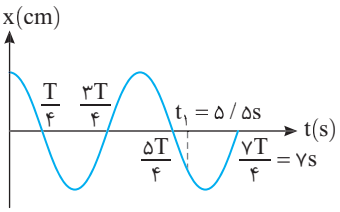
$$\Rightarrow\omega t=(2k-1)\pi\pm\frac{\pi}{4}\Rightarrow\omega t=\frac{3\pi}{4}\text{ یا }\frac{5\pi}{4}\text{ یا }\frac{11\pi}{4}$$

با توجه به توضیح بالا $\omega t_1=\frac{11\pi}{4}$ می‌باشد:

$$\omega\times5/5=\frac{11\pi}{4}\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow T=4s$$

مطابق نمودار در لحظهٔ $\frac{7T}{4}=7s$ تندی بیشینه است. از این‌رو از $5/5s$ تا $7s$ طول می‌کشد تا تندی بیشینه شود. یعنی:

$$\Delta t=7-5/5=1/5s$$

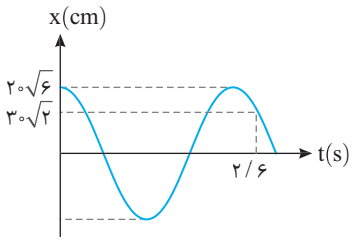


۱ ۱۴۶۸ **B**

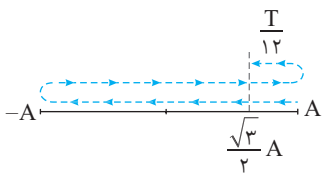
خط فکری هرگاه دامنه داده شده و مکان در یک لحظه عجیب غریب باشد، شما نسبت $\frac{x}{A}$ را حساب کنید. سپس به سراغ محاسبهٔ دوره بروید.

۱ نسبت $\frac{x}{A}$ را در لحظهٔ $t=2/6s$ به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{x}{A}=\frac{30\sqrt{2}}{20\sqrt{6}}\Rightarrow\frac{x}{A}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}A$$



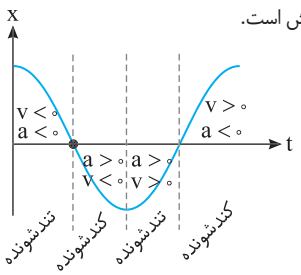
۲ مسیر حرکت را رسم کرده بازه‌های زمانی شناخته شده را روی آن می‌نویسیم.



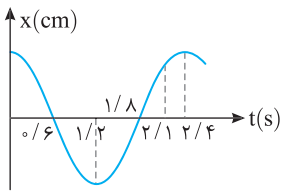
نوسانگر یک نوسان کامل انجام داده (T) سپس به مکان $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ رفته که زمان حرکت از $+A$ تا $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$، $\frac{T}{12}$ طول می‌کشد. بنابراین:

$$T+\frac{T}{12}=2/6\Rightarrow\frac{13T}{12}=2/6\Rightarrow T=2/4s$$

یادآوری هنگام نزدیک شدن نوسانگر به حالت تعادل حرکت تندشونده و اندازهٔ شتاب در حال کاهش است و هنگام دورشدن نوسانگر از حالت تعادل حرکت کندشونده و شتاب در حال افزایش است.



دوره ۲/۴s به‌دست آمده است و نمودار مطابق شکل زیر است.



۱ از لحظهٔ صفر تا ۰/۶s و از لحظهٔ ۱/۲s تا ۱/۸s که نوسانگر به حالت تعادل نزدیک می‌شود یعنی جمعاً ۱/۲s حرکت تندشونده و گزارهٔ (الف) درست است.

۲ در بازهٔ ۰ تا ۰/۶s و در بازهٔ ۱/۸s تا ۲/۱s شتاب منفی است که جمعاً ۰/۶+۰/۳=۰/۹s خواهد بود و گزارهٔ (ب) نادرست است.

۳ در بازهٔ ۰ تا ۱/۲s سرعت منفی است و گزارهٔ (پ) درست است.

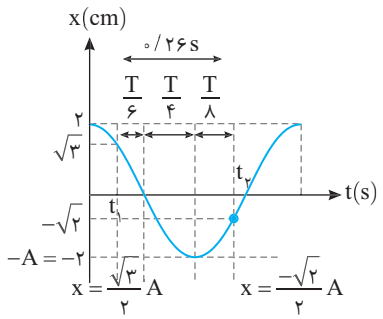
۴ در بازهٔ ۰/۶s تا ۱/۲s (۱/۲−۰/۶=۰/۶s) و در بازهٔ ۱/۸s تا ۲/۱s که نوسانگر به سوی دامنه در حرکت است، اندازهٔ شتاب در حال افزایش است که جمعاً ۰/۶+۰/۳=۰/۹s می‌شود و گزارهٔ (ت) درست است.

۲ ۱۴۶۹ B

دقت کنید با توجه به اینکه دامنه A=۲cm است، مکان‌های $+\sqrt{۳}$cm و $-\sqrt{۲}$cm به ترتیب برابر $x=+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ و $x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ خواهد بود، بنابراین بازهٔ زمانی ۰/۲۶s برابر است با:

$$\Delta t=\frac{T}{۶}+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۸}=\frac{۴T+۶T+۳T}{۲۴}\Rightarrow ۰/۲۶=\frac{۱۳T}{۲۴}\Rightarrow T=۰/۴۸s$$

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{۲\pi}{۰/۴۸}=\omega=\frac{۲۵}{۶}\pi\Rightarrow x=۰/۰۲\cos\frac{۲۵\pi}{۶}t$$



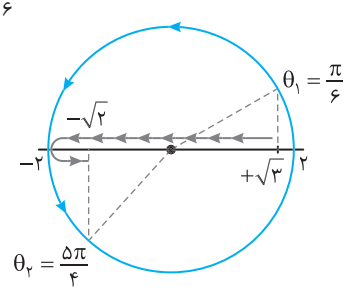
حل به کمک دایره مثلثاتی و فاز حرکت:

با رسم یک دایرهٔ مثلثاتی، کمان معادل مکان‌های $+\sqrt{۳}$cm و $-\sqrt{۲}$cm را روی دایره مشخص می‌کنیم. سپس به کمک آن مسأله را حل می‌کنیم.

$$\omega t_۲-\omega t_۱=\theta_۲-\theta_۱\Rightarrow\omega(\Delta t)=\frac{۵\pi}{۴}-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\omega(\frac{۲۶}{۱۰۰})=\frac{۱۵\pi-۲\pi}{۱۲}$$

$$\Rightarrow\omega=\frac{۲۵\pi}{۶}\text{ rad/s}$$

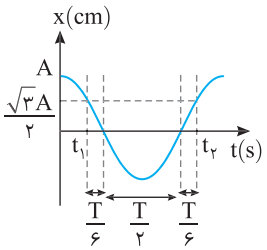
معادلهٔ حرکت خواهد شد: $x=۰/۰۲\cos\frac{۲۵\pi}{۶}t$



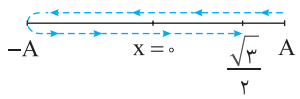
۱ ۱۴۷۰ B

کافی است روی نمودار بازه‌های زمانی شناخته شده از $t_۱$ تا $t_۲$ را مشخص کرده با هم جمع کنیم.

از $\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ تا $x=۰$، $\frac{T}{۶}$ و از $x=۰$ تا $x=-A$، $\frac{T}{۴}$ و از $x=-A$ تا $x=۰$، $\frac{T}{۴}$ و از $x=۰$ تا $\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$، $\frac{T}{۶}$ طول می‌کشد، بنابراین:

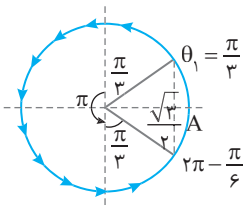


$$t_۲-t_۱=\Delta t=\frac{T}{۶}+\frac{T}{۲}+\frac{T}{۶}=\frac{۵T}{۶}$$



روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت $(\theta=\omega t)$

در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ مکان نوسانگر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ بوده اما $t_۱$ در ربع اول و $t_۲$ در ربع چهارم مثلثاتی است. فاز را در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ روی دایره مشخص می‌کنیم.



$\theta_۱=\frac{\pi}{۶}$ و $\theta_۲=۲\pi-\frac{\pi}{۶}$ است. در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$، تغییر فاز را روی دایره به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta\theta=\frac{\pi}{۳}+\pi+\frac{\pi}{۳}=\frac{۵\pi}{۳}$$

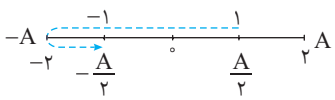
یک تناسب ساده و حل مسئله:

$$\begin{array}{c|c}۲\pi & T\\ \hline \frac{۵\pi}{۳} & \Delta t\end{array}\Rightarrow\Delta t=\frac{۵\pi}{۳}\times\frac{T}{۲\pi}\Rightarrow\Delta t=\frac{۵T}{۶}$$

۳ ۱۴۷۱ B

نکته هرگاه در یک بازهٔ زمانی مکان و سرعت نوسانگر قرینه شود، آن بازهٔ زمانی برابر $\frac{T}{۲}$ است.

مسیر حرکت از $t_۱$ تا $t_۲$ را رسم کنید. کاملاً مشخص است که مکان و سرعت نوسانگر در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ قرینه شده است و این یعنی $t_۲-t_۱=\frac{T}{۲}$ بنابراین $۲/۴=\frac{T}{۲}\Rightarrow T=۴/۸s$



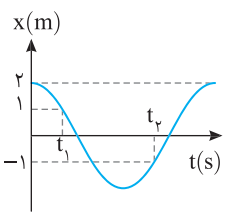
بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{۲\pi}{۴/۸}\Rightarrow\omega=\frac{۵\pi}{۱۲}\text{ rad/s}$$

معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow x=۲\cos\frac{۵\pi}{۱۲}t$$

اکنون مشخص می‌کنیم در چه لحظه‌ای نوسانگر برای چهارمین بار از مکان $+\sqrt{۲}$cm می‌گذرد.



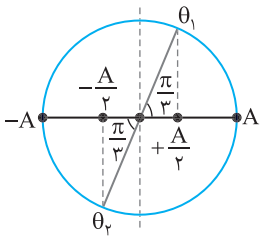
$$+\sqrt{۲}=۲\cos\frac{۵\pi}{۱۲}t\Rightarrow\cos\frac{۵\pi}{۱۲}t=+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\frac{۵\pi}{۱۲}t=(۲k\pi\pm\frac{\pi}{۴})$$

بار اول: $\frac{۵\pi}{۱۲}t=\frac{\pi}{۴}$ ، بار دوم: $\frac{۵\pi}{۱۲}t=۲\pi-\frac{\pi}{۴}$ ، بار سوم: $\frac{۵\pi}{۱۲}t=۲\pi+\frac{\pi}{۴}$

و بار چهارم:

$$\frac{۵\pi}{۱۲}t=۴\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\frac{۵\pi}{۱۲}t=\frac{۱۵\pi}{۴}\Rightarrow t=۹s$$

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی: کمان متناظر با مکان در t_1 و t_2 برابر است با:



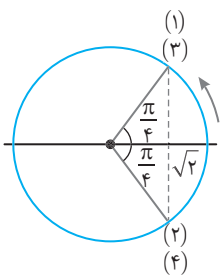
$$1=2\cos\theta_1 \xrightarrow{\text{در ربع اول}} \theta_1=\frac{\pi}{3}$$

$$-1=2\cos\theta_2 \xrightarrow{\text{در ربع سوم}} \theta_2=\pi+\frac{\pi}{3}$$

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی داریم:

$$\theta_2-\theta_1=\omega t_2-\omega t_1\Rightarrow\omega(t_2-t_1)=\pi\ ,\ \omega(2/4)=\pi\Rightarrow\omega=\frac{5\pi}{12}\,rad/s$$

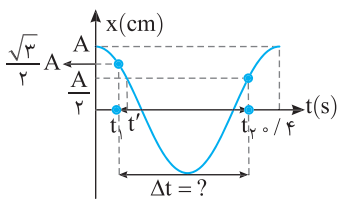
حال زمانی که نوسانگر برای چهارمین بار از $\sqrt{2}cm$ می‌گذرد را به‌دست می‌آوریم. نوسانگر در نوسان اولش دو بار از $+\sqrt{2}$ می‌گذرد و چهارمین بار در نوسان دوم رخ می‌دهد یعنی:



$$\omega t'=2\pi+(2\pi-\frac{\pi}{4})\Rightarrow\frac{5\pi}{12}\times t'=\frac{15\pi}{4}\Rightarrow t'=9s$$

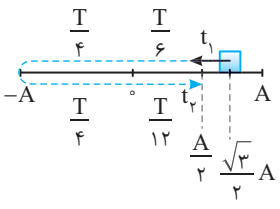
B ۱۴۷۲ **۴**

هنگام حرکت نوسانگر از مکان $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ مطابق نمودار برای اولین بار متحرک در لحظهٔ t' از $+\frac{A}{2}$ می‌گذرد



اما در مسأله بیان شده بیشینه زمان در مدت یک دوره، بنابراین بار دومی که نوسانگر از مکان $+\frac{A}{2}$ می‌گذرد مورد نظر است.

با توجه به بازه‌های زمانی روی شکل می‌توان نوشت:



$$\Delta t=\frac{T}{6}+\frac{T}{4}+\frac{T}{4}+\frac{T}{12}$$

$$\Rightarrow\Delta t=\frac{2T+3T+3T+T}{12}$$

$$\Rightarrow\Delta t=\frac{3T}{4}\xrightarrow{T=0/4s}$$

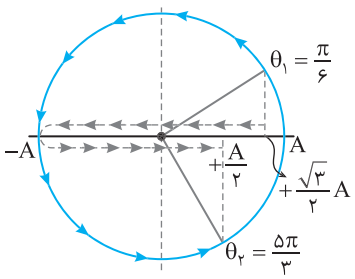
$$\Delta t=0/3s$$

استفاده از دایرهٔ مثلثاتی:

کمان معادل مکان‌های $\frac{+\sqrt{3}}{2}A$ و $+\frac{A}{2}$ را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم.

$$\omega t_2-\omega t_1=\theta_2-\theta_1\Rightarrow\frac{2\pi}{T}(t_2-t_1)=\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{2\pi}{0/4}\Delta t=\frac{9\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 5\pi\Delta t=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\Delta t=0/3s$$



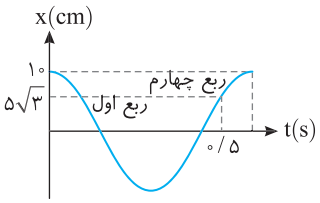
البته با یک تناسب ساده هم می‌توانستیم دوره را حساب کنیم.

2π	$T=0/4s$
$\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$	Δt

$$\Rightarrow\Delta t=0/3s$$

B ۱۴۷۳ **۱**

راه‌حل اول: با توجه به شکل در $t=0/5s$ نوسانگر برای دومین بار از مکان $+5\sqrt{3}$ عبور کرده است و ωt در ربع چهارم مثلثاتی است.

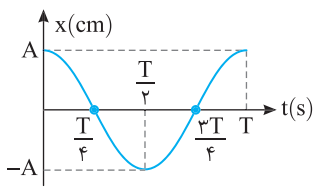


$$x=A\cos\omega t\Rightarrow 5\sqrt{3}=10\cos\omega t$$

$$\Rightarrow\cos\omega t=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\omega t=2\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow\omega t=\frac{11\pi}{6}$$

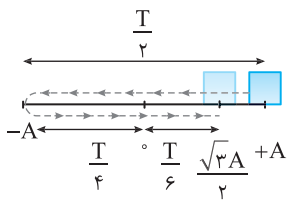
$$\omega\times 0/5=\frac{11\pi}{6}\Rightarrow\omega=\frac{11\pi}{3}\xrightarrow{\omega=\frac{2\pi}{T}}\frac{2\pi}{T}=\frac{11\pi}{3}\Rightarrow T=\frac{6}{11}s$$

به A و $-A$ نقطهٔ بازگشت گویند، پس با توجه به نمودار روبه‌رو در مدت $\frac{T}{2}$ پس از $t=0$ برای اولین بار به نقطهٔ بازگشت می‌رسیم:



$$\frac{T}{2}=\frac{6}{22}s=\frac{3}{11}s$$

راه‌حل دوم: (راه‌حل مورد علاقهٔ ما) با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده نیز می‌توانیم مسیر حرکت را رسم کرده و به کمک بازه‌های زمانی تست را حل کنیم:



$$\Delta t_{کل}=\frac{T}{2}+\frac{T}{4}+\frac{T}{6}=\frac{11T}{12}=0/5\Rightarrow T=\frac{6}{11}s$$

متحرک پس از $\frac{T}{2}$ به نقطهٔ بازگشت خود می‌رسد:

$$\frac{T}{2}=\frac{\frac{6}{11}}{2}=\frac{3}{11}s$$

راه‌حل سوم: نسبت $\frac{x}{A}$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{x}{A}=\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}A$$

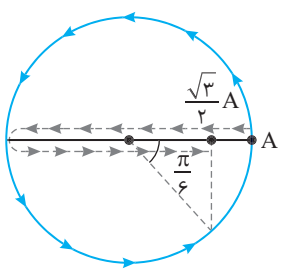
حال با توجه به دایرهٔ مثلثاتی، فاز حرکت خواهد شد:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}A=A\cos\theta\Rightarrow\theta=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$$

بنابراین از $t_1=0$ تا $t_2=0/5s$ کمان دایره مثلثاتی از $\theta_1=0$ به $\theta_2=\frac{11\pi}{6}$ رسیده است:

$$\theta_2-\theta_1=\omega(t_2-t_1)=\frac{11\pi}{6}\xrightarrow{t_2-t_1=0/5}$$

$$\omega=\frac{11\pi}{3}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{11\pi}{3}}\Rightarrow T=\frac{6}{11}s$$



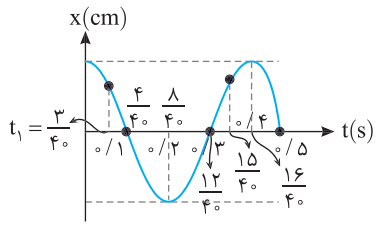
ادامه حل شبیه روش‌های قبلی است.

B ۱۴۷۴ ۲

۱ دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{5T}{4}=0/5\Rightarrow T=0/4s$$

۲ اکنون اعداد داده شده را روی نمودار نمایش می‌دهیم.



نکته هرگاه نمودار مکان - زمان حرکت هماهنگ ساده محور زمان را قطع کند $(x=0)$ تندی بیشینه است.

۳ در بازهٔ $t_1=\frac{3}{40}s$ تا $t_2=\frac{15}{40}s$، نمودار دو بار در لحظهٔ $0/1s$ و $0/3s$ محور زمان را قطع کرده بنابراین دو بار تندی بیشینه می‌شود.

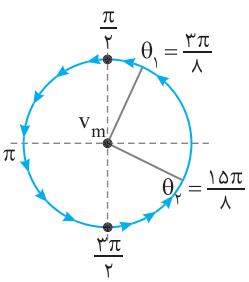
روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت $(\theta=\omega t)$

۴ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{0/4}\Rightarrow\omega=5\pi\ rad/s$$

۵ فاز در لحظهٔ t_1 و t_2 را به‌دست آورده روی دایره نمایش می‌دهیم.

$$\theta=\omega t\Rightarrow\begin{cases}\theta_1=5\pi\times\frac{3}{40}=\frac{3\pi}{8}\ rad\\ \theta_2=5\pi\times\frac{15}{40}=\frac{15\pi}{8}\ rad\end{cases}$$

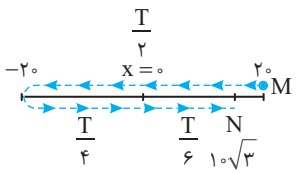


۶ از θ_1 در جهت مثلثاتی به سوی θ_2 می‌رویم. هرگاه از $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ بگذریم تندی بیشینه است. بنابراین دو بار تندی بیشینه می‌شود.

B ۱۴۷۵ ۱

۱ مسیر حرکت را رسم کرده و به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده، مدت زمان حرکت از M تا N را به دست می‌آوریم.

$$\Delta t=\frac{T}{2}+\frac{T}{4}+\frac{T}{6}=\frac{11T}{12}\Rightarrow\Delta t=\frac{11\times12}{12}=11\ s$$



۲ مسافت طی شده را از روی مسیر حرکت حساب می‌کنیم:

$$\ell=20+20+20+10\sqrt{3}=60+10\sqrt{3}\Rightarrow\ell=60+10\times1/7=77cm$$

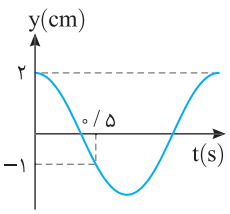
۳ تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{77}{11}=7\ cm/s$$

B ۱۴۷۶ ۱

۱ از روی نمودار دامنهٔ حرکت $2cm$ است.

۲ با توجه به نمودار در $t=0/5s$ برای اولین بار متحرک به مکان $-1\ cm$ می‌رسد؛ در معادلهٔ حرکت زمان را $0/5s$ و مکان $x=-1m$ قرار می‌دهیم و بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.



$$x=A\cos\omega t\Rightarrow-1=2\cos\omega\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\cos\frac{\omega}{2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\omega}{2}=\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow\omega=\frac{4\pi}{3}\ rad/s$$

۳ معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم:

$$x=0/02\cos\frac{4\pi}{3}t$$

۴ مکان را در لحظهٔ $t=1/25s$ به‌دست می‌آوریم.

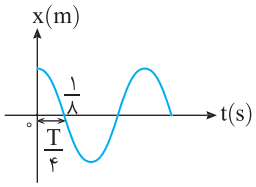
$$x_2=A\cos\omega t\Rightarrow x_2=2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\times1/25\right)\Rightarrow x_2=2\cos\frac{5\pi}{3}=1\ cm$$

۵ اکنون می‌توان سرعت متوسط را حساب کرد.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{1-(-1)}{1/25-0/5}=\frac{2}{\frac{75}{100}}=\frac{2}{\frac{3}{4}}=\frac{8}{3}\ cm/s$$

B ۱۴۷۷ ۳

با توجه به نمودار، دوره خواهد شد:



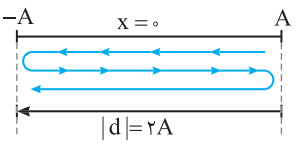
$$\frac{T}{4}=\frac{1}{8}\Rightarrow T=\frac{1}{2}s$$

مسافت طی شده در مدت یک دوره $4A$ است، بنابراین:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow24=\frac{4\times A}{\frac{1}{2}}\Rightarrow A=3cm$$

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\Delta t=\frac{3}{2}T=T+\frac{T}{2}$$

نسبت بازهٔ زمانی به دوره را حساب می‌کنیم

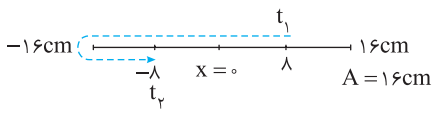


در مدت T نوسانگر به مکان اولیه $x=+A$ بر می‌گردد و در مدت $\frac{T}{2}$ از A به $-A$ می‌رود و اندازهٔ جابه‌جایی آن خواهد شد

$$|d|=2A=2\times3=6cm$$

B ۱۴۷۸ ۳

مسیر حرکت را از روی نمودار رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار دامنه $A=16cm$ است.



مسئلهٔ ساده‌ای است. جابه‌جایی در بازهٔ t_1 تا t_2 برابر $d=-16cm$ و مسافت طی شده برابر است با:

$$\ell=8+16+8=32cm$$

نسبت تندی متوسط به سرعت متوسط خواهد شد:

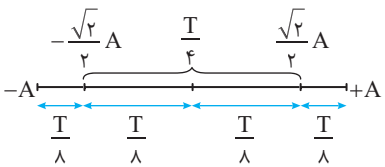
$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\ ,\ v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow\frac{s_{av}}{v_{av}}=\frac{\ell}{d}=\frac{32}{-16}=-2$$

C ۱۴۷۹ ۳

خط فکری سرعت متوسط در یک بازه زمانی معین هنگامی بیشینه است که جابه‌جایی در آن بازه بیشینه باشد. جابه‌جایی بیشینه در یک بازهٔ معین در دو طرف نقطهٔ تعادل رخ می‌دهد زیرا در نقطهٔ تعادل سرعت بیشینه است.

بنابراین شما باید با تقسیم بازهٔ زمانی به دو قسمت و یافتن مکان نوسانگر بیشینه جابه‌جایی آن را حساب کرده و سرعت متوسط بیشینه را به‌دست آورید.

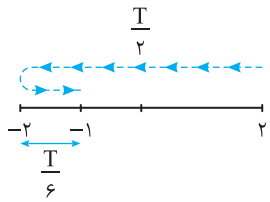
۱ بازه $\frac{T}{4}$ را به دو بازهٔ یکسان $\frac{T}{8}$ در دو طرف نقطهٔ تعادل تقسیم می‌کنیم. با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده مکان در این بازه به صورت زیر است.



۲ در بازهٔ $\frac{T}{۴}$ بیشترین اندازه جابه‌جایی برابر است با:

$$|\Delta x|=|-\frac{\sqrt{۲}}{۲}A-\frac{\sqrt{۲}}{۲}A|=\sqrt{۲}A\Rightarrow|\Delta x|=۲\sqrt{۲}cm$$

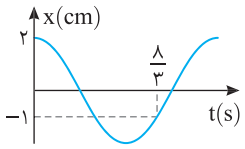
۳ نوسانگر در مدت $\frac{۸}{۳}s$ از مکان $A=۲cm$ به مکان $x=-۱=-\frac{A}{۲}$ می‌رود. بازه‌های زمانی را روی مسیر نوشته، به کمک آن‌ها دوره را به‌دست می‌آوریم.



$$\Delta t=\frac{T}{۲}+\frac{T}{۶}=\frac{۸}{۳}\Rightarrow\frac{۲T}{۳}=\frac{۸}{۳}\Rightarrow T=۴s$$

۴ اندازه سرعت متوسط خواهد شد:

$$|v_{av}|=\frac{|\Delta x|}{\Delta t}=\frac{۲\sqrt{۲}}{\frac{T}{۴}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{\frac{۴}{۴}}=۲\sqrt{۲}cm/s\Rightarrow|v_{av}|=\frac{۲\sqrt{۲}}{۱۰۰}=\frac{\sqrt{۲}}{۵۰}m/s$$



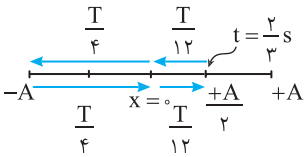
۴ ۱۴۸۰ B

روش بازهٔ زمانی: **۱** ابتدا با توجه به $t=\frac{۲}{۳}s$ مکان $x_۱$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x_۱=A\cos\frac{\pi}{۲}\times\frac{۲}{۳}\Rightarrow x_۱=\frac{A}{۲}$$

۲ بنابراین در لحظهٔ $t=\frac{۲}{۳}s$ نوسانگر برای اولین بار از $+\frac{A}{۲}$ به سمت مرکز عبور می‌کند و کمینه زمان عبور مجدد از $+\frac{A}{۲}$، یعنی نوسانگر به نقطهٔ بازگشت $-A$ برود و سپس به $+\frac{A}{۲}$ برگردد. با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده و شکل زیر این بازهٔ زمانی را حساب می‌کنیم:

$$\Delta t=\frac{T}{۱۲}+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۱۲}\Rightarrow\Delta t=۲\frac{T}{۳}$$



۳ دوره را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\frac{\pi}{۲}=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۴s$$

۴ Δt را حساب می‌کنیم:

$$\Delta t=\frac{۲}{۳}\times۴=\frac{۸}{۳}s$$

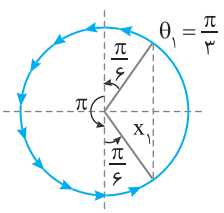
روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و فاز حرکت ($\theta=\omega t$):

۱ فاز حرکت در مکان $x_۱$ را حساب می‌کنیم و روی دایرهٔ مثلثاتی نشان می‌دهیم.

$$\theta=\omega t\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۲}\times\frac{۲}{۳}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۳}$$

۲ برای آنکه مجدداً نوسانگر از $x_۱=+\frac{A}{۲}$ بگذرد باید فاز آن روی دایرهٔ مثلثاتی به اندازهٔ روبه‌رو تغییر کند:

$$\Delta\theta=\frac{\pi}{۶}+\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\Delta\theta=\frac{۴\pi}{۳}$$

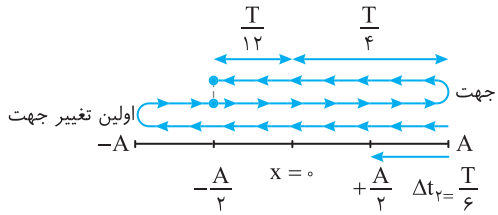


۳ زمان این تغییر فاز را حساب می‌کنیم.

$$\Delta\theta=\omega\Delta t\Rightarrow\frac{۴\pi}{۳}=\frac{\pi}{۲}\Delta t\Rightarrow\Delta t=\frac{۸}{۳}s$$

۲ ۱۴۸۱ B

خط فکری شما باید مسیر حرکت را بنا بر صورت مسئله رسم کنید، سپس بازه‌های زمانی را روی شکل بنویسید تا بتوانید بازه‌های زمانی بیان شده در صورت مسئله را مشخص کنید.



۱ زمان حرکت از $+A$ با دو بار تغییر جهت و رسیدن به $-\frac{A}{۲}$ خواهد شد:

$$\Delta t_۱=T+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۱۲}\Rightarrow\Delta t_۱=\frac{۱۶T}{۱۲}=\frac{۴}{۳}T$$

۲ با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده، زمان حرکت از $+A$ تا $+\frac{A}{۲}$ برابر $\Delta t_۲=\frac{T}{۶}$ است.

۳ نسبت را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta t_۱}{\Delta t_۲}=\frac{\frac{۴T}{۳}}{\frac{T}{۶}}=۸$$

۳ ۱۴۸۲ B

یادآوری ریاضی هرگاه $\cos\alpha=\cos\beta$ باشد آنگاه: $\alpha=\beta$ یا $\alpha=۲\pi-\beta$

در لحظهٔ $t_۱$ و $۲t_۱$ مکان نوسانگر یکسان و برابر $x=-۴cm$ است. بنابراین در این دو لحظه معادلهٔ حرکت را نوشته و برابر قرار می‌دهیم.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t_۱}x_۱=A\cos\omega t_۱\\ \xrightarrow{t_۲=۲t_۱}x_۲=A\cos۲\omega t_۱\end{cases}\xrightarrow{x_۱=x_۲}$$

$$\cos\omega t_۱=\cos۲\omega t_۱\Rightarrow\omega t_۱=۲\pi-۲\omega t_۱\Rightarrow۳\omega t_۱=۲\pi\Rightarrow\omega t_۱=\frac{۲\pi}{۳}$$

اکنون به کمک معادلهٔ حرکت A را حساب می‌کنیم:

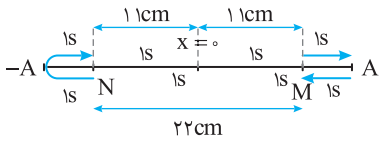
$$x=A\cos\omega t_۱\Rightarrow-۴=A\cos\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow-۴=A(-\frac{۱}{۲})\Rightarrow A=۸cm$$

۱ ۱۴۸۳ C

نکته در حرکت هماهنگ ساده در نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از حالت تعادل یکسان است، اندازهٔ سرعت برابر است.

خط فکری سرعت نوسانگر در نقاط M و N هم‌اندازه است. بنابراین باید فاصلهٔ نقاط M و N از حالت تعادل یکسان باشد. اما عبارت «دو بار عبور متوالی» نیز بسیار مهم است و معنی آن این است که نوسانگر از یک نقطه به انتهای مسیر (نقطهٔ بازگشت) برود و برگردد. اکنون با توجه به این مطالب، مسیر را رسم کرده، زمان‌های داده شده در مسئله را روی آن بنویسید و دوره را حساب کنید. سپس به کمک معادلهٔ حرکت دامنه را به‌دست بیاورید.

۱ نقاط M و N را روی شکل در مکان‌های $x_M=۱۱cm$ و $x_N=-۱۱cm$ مشخص کنید.



۲ از M تا N دو ثانیه طول کشیده، بنابراین از M تا $x=۰$ ۱s و از $x=۰$ تا N نیز ۱s طول می‌کشد.

۳ دو بار عبور متوالی از نقطهٔ N دو ثانیه طول کشیده، یعنی از نقطهٔ N تا نقطهٔ بازگشت ۱s و از نقطهٔ بازگشت تا N نیز ۱s طول می‌کشد.

۴ از N تا M نیز ۲s طول می‌کشد و از M تا A و از A تا M هریک ۱s طول می‌کشد.

۵ بنابراین دوره خواهد شد: $T=۱+۲+۲+۱=۸s$

۶ در لحظهٔ $t=۱s$ نوسانگر از A به M می‌رود، یعنی مکانش در $t=۱s$ برابر $x=۱۱cm$ است. اکنون دامنه را به‌دست می‌آوریم:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow۱۱=A\cos\frac{۲\pi}{۸}\times۱\Rightarrow A=۱۱\sqrt{۲}cm$$

۴ ۱۴۸۴ C

خط فکری باید بررسی کنیم که این معادلات را می‌توانیم به‌صورت تابع سینوسی یا کسینوسی بنویسیم، زیرا معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده یک تابع سینوسی است.

یادآوری ریاضی $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha, \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

بررسی گزینهٔ (۱):

$$x = A\sin\omega t\cos\omega t \xrightarrow{2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha} x = \frac{A}{2}\sin 2\omega t$$

معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده است.

بررسی گزینهٔ (۳):

$$x = 2A\cos^2\omega t - A \Rightarrow x = A(2\cos^2\omega t - 1) \Rightarrow x = A\cos 2\omega t$$

این نیز معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده است.

۳ ۱۴۸۵ C

به کمک ریاضی معادله را به‌صورت $x = A\cos\omega t$ درمی‌آوریم:

$$x = 1-2\sin^2 5\pi t \Rightarrow x = \cos 10\pi t \xrightarrow{x=\frac{A}{2}} \frac{1}{2} = \cos 10\pi t \Rightarrow 10\pi t = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{30}\,s$$

پنجره ۲

۳ ۱۴۸۶ A

دورهٔ نوسان دستگاه جرم - فنر از رابطهٔ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ به دست می‌آید که در آن m جرم وزنهٔ متصل به فنر و k ثابت فنر است. در این صورت دوره با جذر ثابت فنر نسبت وارون دارد و گزینهٔ (۳) درست است.

۴ ۱۴۸۷ A

دوره حرکت هماهنگ سادهٔ جرم - فنر از رابطهٔ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ به‌دست می‌آید و بسامد برابر با وارون دوره است.. بنابراین:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

۱ ۱۴۸۸ A

به کمک رابطهٔ دوره سامانه جرم - فنر، ثابت فنر را به‌دست می‌آوریم:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \frac{1}{16} = \frac{0/5}{k} \Rightarrow k = 8\,N/m$$

۱ ۱۴۸۹ A

روش اول: دورهٔ نوسان سامانه جرم - فنر برابر است با:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{0/4}{360}} \Rightarrow T = 2\pi\times\frac{1}{30} \xrightarrow{\pi=3} T = 0/2\,s$$

جسم در هر $0/2\,s$ یک نوسان انجام می‌دهد و تعداد نوسان‌ها در $1\,s$ خواهد شد:

$$T = \frac{t}{N} \xrightarrow[T=0/2]{t=1\,s} 0/2 = \frac{1}{N} \Rightarrow N = 5$$

روش دوم: تعداد نوسان‌ها در مدت ۱ ثانیه، همان بسامد نوسان است، پس

$$T = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0/2} = 5\,Hz \Rightarrow N = 5$$

بازی با سؤال **جسمی به جرم $400\,g$ به فنری با ثابت $90\,N/m$ متصل است و روی سطح افقی نوسان می‌کند. این جسم در مدت ۴ دقیقه چند نوسان کامل انجام می‌دهد؟ $(\pi\approx 3)$**

۱) ۶۰ ۲) ۶۰۰ ۳) ۳۰ ۴) ۳۰۰

پاسخ با توجه به رابطهٔ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ دوره را به‌دست می‌آوریم:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0/4}{90}} = 2\pi\times\frac{0/2}{3} = 0/4\,s$$

حال با توجه به رابطهٔ $T = \frac{t}{N}$ تعداد نوسان کامل در مدت ۴ دقیقه را حساب می‌کنیم.

$$0/4 = \frac{4\times 60}{N} \Rightarrow N = 600$$

گزینهٔ ۲

۱ ۱۴۹۰ A

نکته دورهٔ نوسان دستگاه جرم - فنر از رابطهٔ $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ به‌دست می‌آید و در تمام حالت‌ها T تنها به جرم و ثابت فنر بستگی دارد. یعنی دورهٔ نوسان دستگاه جرم فنر در تمام امتدادها، افقی، قائم و سطح شیبدار ودر تمام فواصل از سطح زمین و در تمام سیارات مقدار ثابتی است.

با توجه به نکتهٔ بیان شده گزینهٔ (۱) پاسخ درست است.

۴ ۱۴۹۱ A

خط فکری در اغلب مسائلی که نسبت خواسته شده است، روابط مورد نیاز را نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم و نسبت‌های داده شده در مسئله را در آن قرار می‌دهیم تا نسبت مورد نظر به‌دست آید. در این جا نیز رابطهٔ دوره را برای A و B نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم و مسئله را حل می‌کنیم.

دورهٔ حرکت دستگاه جرم - فنر برابر با $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ است.

$$\begin{cases} T_A = 2\pi\sqrt{\frac{m_A}{k}} \\ T_B = 2\pi\sqrt{\frac{m_B}{k}} \end{cases} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{m_A}{m_B}}$$

$$\xrightarrow{f=\frac{1}{T}} \frac{f_B}{f_A} = \sqrt{\frac{m_A}{m_B}} \xrightarrow{f_B=2f_A} \sqrt{\frac{m_A}{m_B}} = 2 \Rightarrow m_A = 4m_B$$

۳ ۱۴۹۲ A

نکته هرگاه وزنه را از حالت تعادل کشیده و رها کنیم مقدار کشیدگی برابر دامنهٔ حرکت است.

نکته دورهٔ حرکت هماهنگ ساده $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ از ویژگی‌های طبیعی نوسانگر است و به دامنه بستگی ندارد. البته به شرط آنکه کشیدگی فنر به حدی نباشد که فنر خاصیت کشسانی خود را از دست بدهد.

در این مسئله جرم و فنرها مشابه بوده بنابراین دوره‌ها یکسان $(T_A = T_B)$ است و مدت زمانی که نوسانگر از دامنه به حالت تعادل می‌رسد برابر $\frac{T}{4}$ است از این‌رو زمان برگشت برای هر دو وزنه یکسان است. $(t_A = t_B = \frac{T}{4})$

۲ ۱۴۹۳ A

دورهٔ نوسان دستگاه جرم - فنر $(T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}})$ تنها به جرم وزنه و ثابت فنر بستگی دارد که هیچ‌کدام تغییر نکرده است. بنابراین دوره همچنان $4\,s$ است.

۴ ۱۴۹۴ A

۱ دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$T = \frac{t}{N} \Rightarrow T = \frac{60}{30} \Rightarrow T = 2\,s$$

نکته دوره نوسان دستگاه جرم - فنر به دامنه بستگی ندارد.

۲ رابطهٔ دوره را در دو حالت نوشته بر هم تقسیم کرده و دوره را در حالت دوم به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{T'}{T} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m'}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} \Rightarrow \frac{T'}{2} = \sqrt{\frac{4m}{m}} \Rightarrow T' = 4\,s$$

تعداد نوسانات در مدت ۳ دقیقه برابر است با:

$$N' = \frac{t'}{T'} \Rightarrow N' = \frac{3\times 60}{4} \Rightarrow N' = 45 \text{ نوسان}$$

۴ ۱۴۹۵ A

دورهٔ نوسان جرم - فنر را در حالت مقایسه‌ای می‌نویسیم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\times\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}$$

فنر تغییر نکرده $(k_2=k_1)$ و جرم کاهش یافته $(m_2=m_1-320)$ و دوره ۴۰ درصد کاهش یافته یعنی $(T_2=\%60T_1)$ بنابراین:

$$\frac{6}{10}=\sqrt{\frac{m_1-320}{m_1}}\Rightarrow\frac{36}{100}=\frac{m_1-320}{m_1}$$

$$36m_1=100m_1-32000\Rightarrow32000=64m_1\Rightarrow m_1=500g$$

بازی با سؤال دورهٔ دستگاه جرم - فنری T_1 است. اگر جرم متصل به فنر ۲kg افزایش یابد دوره ٪۵۰ زیاد می‌شود. جرم اولیه متصل به فنر چند کیلوگرم بوده است؟ از کتاب درسی

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱/۶ ۴) ۱/۴

پاسخ

۱ جرم متصل به فنر ۲kg افزایش یافته: $m_2=m_1+2$

۲ دوره ٪۵۰ زیاد شده: $T_2=T_1+\frac{50}{100}T_1$

۳ رابطه دوره را در دو حالت نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم و جرم اولیه را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}}\Rightarrow\frac{T_1}{T_1+\frac{50}{100}T_1}=\sqrt{\frac{m_1}{m_1+2}}$$

$$\Rightarrow\frac{T_1}{1/5T_1}=\sqrt{\frac{m_1}{m_1+2}}\Rightarrow\frac{4}{9}=\frac{m_1}{m_1+2}\Rightarrow9m_1=4m_1+8$$

$$\Rightarrow5m_1=8\Rightarrow m_1=1/6kg$$

گزینهٔ ۳

۴ ۱۴۹۶ B

خط فکری ابتدا بسامد را بر حسب m و k بنویسید. سپس در دو حالت رابطهٔ بسامد را نوشته بر هم تقسیم کنید و یک رابطه بین بسامد دو حالت به‌دست بیاورید. یادتان باشد که جرم کاهش یافته و بسامد افزایش می‌یابد یعنی $f_2-f_1=2/5Hz$ است حال مسئله را حل کنید.

۱ بسامد خواهد شد:

$$f=\frac{1}{T}\xrightarrow{T=2\pi\sqrt{m/k}}f=\frac{1}{2\pi\sqrt{m/k}}\Rightarrow f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

۲ نسبت بسامدها را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{f_2}{f_1}=\frac{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_2}}}{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1}}}\Rightarrow\frac{f_2}{f_1}=\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\Rightarrow\frac{f_2}{f_1}=\sqrt{\frac{400}{100}}\Rightarrow f_2=2f_1$$

۳ اکنون دو معادله و دو مجهول در اختیار دارید و می‌توانید f_1 را به‌دست بیاورید.

$$f_2-f_1=2/5,f_2=2f_1\Rightarrow2f_1-f_1=2/5\Rightarrow f_1=2/5\,Hz$$

۴ ثابت فنر را حساب می‌کنیم:

$$f_1=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1}}\Rightarrow2/5=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{0/4}}\Rightarrow6/25=\frac{1}{4\pi^2}\frac{k}{0/4}$$

$$\Rightarrow k=6/25\times4\times10\times0/4\Rightarrow k=100\,N/m=1\,N/cm$$

۲ ۱۴۹۷ A

خط فکری دورهٔ نوسان دستگاه جرم - فنر برابر $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ است. فنر در هر دو حالت یکسان بوده و $k_1=k_2$ است.

۱ با توجه به دوره در دو حالت مختلف نسبت جرم را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}}\Rightarrow\frac{0/09\pi}{0/1\pi}=\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

۲ جرم ثانویه ۱۹۰ گرم کمتر از جرم اولیه است.

$$\frac{9}{10}=\sqrt{\frac{m_1-190}{m_1}}\Rightarrow\frac{81}{100}=\frac{m_1-190}{m_1}\Rightarrow81m_1=100m_1-19\times10^3$$

$$\Rightarrow19m_1=19\times10^3\Rightarrow m_1=10^3g=1kg$$

۳ حال با توجه به دورهٔ اولیه، k را به‌دست می‌آوریم:

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}\Rightarrow0/1\pi=2\pi\sqrt{\frac{1}{k}}\Rightarrow\frac{1}{20}=\sqrt{\frac{1}{k}}\Rightarrow k=400N/m$$

نکته برای تبدیل یکای ثابت فنر داریم:

$$\frac{N}{m}\xrightleftharpoons[\times100]{\div100}\frac{N}{cm}$$

بنابراین ثابت فنر برابر $400N/m=4N/cm$ است.

۲ ۱۴۹۸ B

۱ در انتهای مسیر یعنی وقتی که وزنه در دامنهٔ حرکتش است، $\frac{3}{4}$ جرم آن را جدا کرده‌ایم، بنابراین بیشینه کشیدگی فنر تغییر نمی‌کند و دامنه همان مقدار اولیه خواهد بود $A_2/A_1=1$.

۲ بسامد با دوره نسبت وارون دارد از این‌رو: $f=\frac{1}{T}\xrightarrow{T=2\pi\sqrt{m/k}}f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

۳ نسبت f_2/f_1 خواهد شد:

$$\frac{f_2}{f_1}=\frac{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_2}}}{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1}}}\Rightarrow\frac{f_2}{f_1}=\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\xrightarrow{m_2=m_1-\frac{3}{4}m_1=\frac{1}{4}m_1}\frac{f_2}{f_1}=\sqrt{\frac{m_1}{\frac{1}{4}m_1}}\Rightarrow\frac{f_2}{f_1}=2$$

۱ ۱۴۹۹ A

نکته بسامد زاویه‌ای دستگاه جرم - فنر از رابطهٔ $\omega=\sqrt{k/m}$ به‌دست می‌آید که در آن m جرم وزنه و k ثابت فنر است.

با توجه به معادلهٔ حرکت $x=0/02\cos50\pi t$، بسامد زاویه‌ای این نوسانگر برابر $\omega=50\pi rad/s$ است. از این‌رو خواهیم داشت:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\xrightarrow{k=500N/m}50\pi=\sqrt{\frac{500}{m}}\Rightarrow2500\pi^2=\frac{500}{m}$$

$$\Rightarrow m=\frac{1}{5\pi^2}\xrightarrow{\pi^2=10}m=\frac{1}{50}=0/02kg=20g$$

۳ ۱۵۰۰ B

با توجه به فرض مسئله تغییر شناسه تابع کسینوس (تغییر فاز) نوسانگر (ωt) برابر π است، از این‌رو می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{matrix}t_1\text{ در }\to\omega t_1\\t_2\text{ در }\to\omega t_2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\omega t_2-\omega t_1=\omega\Delta t=\pi\Rightarrow\omega\times0/08=\pi\Rightarrow\omega=\frac{25}{2}\pi\,rad/s$$

با داشتن بسامد زاویه‌ای، ثابت فنر را حساب می‌کنیم:

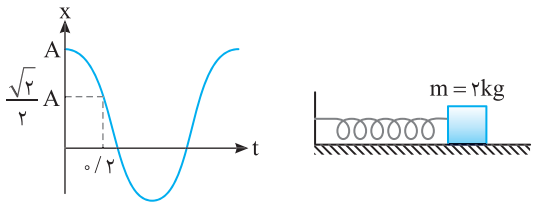
$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\frac{25}{2}\pi=\sqrt{\frac{k}{0/8}}\Rightarrow\frac{625}{4}\pi^2=\frac{k}{0/8}\Rightarrow k=1250\,N/m$$

۲ ۱۵۰۱ B

راه‌حل اول: با توجه به معادلهٔ مکان - زمان داریم:

$$A\cos\omega t\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}A=A\cos\omega t\Rightarrow\cos\omega t=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow\omega t=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}\times0/2=\frac{\pi}{4}\Rightarrow T=1/6s$$

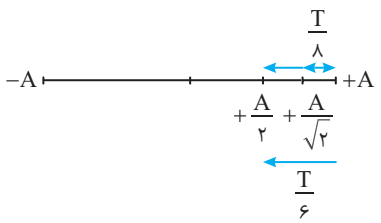


حال با توجه به رابطهٔ $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ داریم:

$$1/6=2\pi\sqrt{\frac{2}{k}}\Rightarrow\frac{0/8}{\pi}=\sqrt{\frac{2}{k}}\Rightarrow\frac{0/64}{\pi^2}=\frac{2}{k}\Rightarrow k=\frac{2\pi^2}{0/64}$$

$$\Rightarrow k=\frac{20}{0/64}=31/25\,N/m$$

راه‌حل دوم: قسمت اول سؤال را می‌توانستیم به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده به‌دست آوریم.



نوسانگر در مدت $0/2s$ از مکان $+A$ به مکان $\frac{+\sqrt{2}}{2}A$ رفته است که بازهٔ زمانی این جابه‌جایی برابر $\frac{T}{8}$ است بنابراین دوره خواهد شد:

$$\frac{T}{8}=0/2\Rightarrow T=1/6s$$

بقیه مراحل شبیه راه حل اول است.

۳ ۱۵۰۲ B

خط فکری دامنهٔ حرکت در دوره نوسانگر تأثیری ندارد با توجه به شکل دامنه $A_3>A_2>A_1$ است. اما برای بررسی دوره با توجه به اینکه فنرها مشابه هستند $(k_1=k_2=k_3)$، شما با توجه به جرم وزنه‌ها باید دوره‌ها را با هم مقایسه کنید.

دوره در حرکت هماهنگ ساده از رابطهٔ $T=2\pi\sqrt{m/k}$ به‌دست می‌آید و دوره با جذر جرم نسبت مستقیم دارد:

نمودار (الف): $m_1=m_2=m_3\Rightarrow T_1=T_2=T_3$

و نمودار (الف) درست است.

نمودار (ب): $m_1<m_2<m_3\Rightarrow T_1<T_2<T_3$

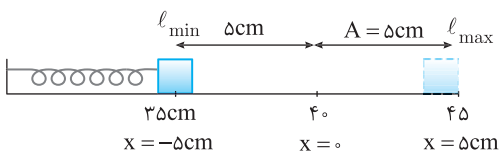
نمودار (ب) درست است.

نمودار (پ): $m_1>m_2>m_3\Rightarrow T_1>T_2>T_3$

نمودار (پ) نیز درست است.

۱ ۱۵۰۳ B

نکته تفاضل بیشینه طول فنر ℓ_{max} و کمینه طول فنر ℓ_{min} برابر طول پاره‌خط مسیر نوسان است. از طرفی طول پاره‌خط مسیر نوسان دو برابر دامنه حرکت است بنابراین می‌توان نوشت: $\ell_{max}-\ell_{min}=2A$



۱ طول مسیر حرکت $45-35=10\,cm$ و دامنهٔ حرکت $A=\frac{10}{2}=5cm$ است.

۲ بسامد زاویه‌ای خواهد شد:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{400}{1/6}}=\sqrt{\frac{4000}{16}}$$

$$\Rightarrow\omega=\frac{20}{4}\times\sqrt{10}=5\sqrt{10}\xrightarrow{\sqrt{10}=\pi}\omega=5\pi\,rad/s$$

۳ معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم: $x=0/05\cos 5\pi t$

۴ مکان را در لحظه‌های $t_1=0$ و $t_2=15s$ به‌دست می‌آوریم:

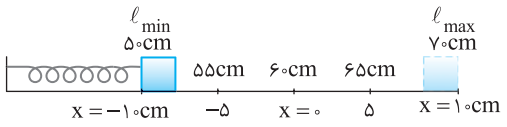
$$\begin{cases}t_1=0\Rightarrow x_1=+0/05m\\ t_2=15s\Rightarrow x_2=-0/05\,m\end{cases}$$

۵ سرعت متوسط را به‌دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-0/05-0/05}{15-0}\Rightarrow v_{av}=\frac{-1}{150}\,m/s$$

۴ ۱۵۰۴ B

۱ طول مسیر حرکت را حساب می‌کنیم: $\ell_{max}-\ell_{min}=70-50=20cm$



۲ دامنهٔ حرکت نصف طول پاره‌خط مسیر است: $A=\frac{20}{2}=10\,cm$

۳ محل تعادل وسط مسیر نوسان است. بنابراین وقتی طول فنر $60cm$ است نوسانگر در حال گذر از محل تعادل $(x=0)$ است.

۴ دوره را به‌دست می‌آوریم:

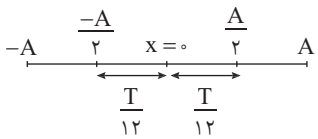
$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{5\times10^{-2}}{500}}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{100}=\frac{\pi}{50}s=\frac{3}{50}=0/06s$$

۵ مکان نوسانگر وقتی طول فنر $55cm$ است برابر $x=55-60=-5cm$ و وقتی طول فنر $65cm$ می‌شود مکان نوسانگر $+5cm$ است. $65-60=+5cm$

۶ کمترین زمان حرکت از $-5cm$ تا $+5cm$ یعنی نوسانگر در مسیر تغییر جهت نداده و مستقیماً از $-5cm$ به $+5cm$ برود.

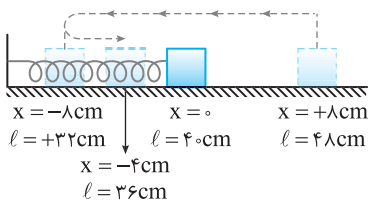
۷ به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده زمان حرکت از $-5cm$ تا $+5cm$ خواهد شد:

$$\Delta t=\frac{T}{12}+\frac{T}{12}=\frac{T}{6}\Rightarrow\Delta t=\frac{0/06}{6}=0/01s$$



۳ ۱۵۰۵ A

نکته مقدار انحراف از حالت تعادل و رها شدن وزنه برابر دامنه نوسان است.



۱ طول طبیعی فنر $40cm$ است وزنه را کشیده تا طول فنر $48cm$ شود یعنی طول فنر $8cm$ افزایش یابد و وزنه را رها کرده‌ایم از این‌رو دامنه حرکت $A=8cm$ می‌شود.

۲ بنابراین وزنه بین $\ell_{min}=40-8=32cm$ و $\ell_{max}=48cm$ در حال نوسان است. وقتی طول فنر $36cm$ است یعنی مکان نوسانگر $x=-4cm$ خواهد بود.

۳ بسامد زاویه‌ای سامانه را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{250}{0/1}}=50\,rad/s$$

۴ زمان گذر وزنه از مکان $x=-4cm$ برای دومین بار را به کمک معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده به‌دست می‌آوریم:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow-4=8\cos 50t\Rightarrow\cos 50t=-\frac{1}{2}$$

برای بار اول $50t=\frac{2\pi}{3}$ و برای دومین بار $50t=\frac{4\pi}{3}$ است از این‌رو $t=\frac{4\pi}{150}s$ جواب مسأله است.

$$t=\frac{4\pi}{150}\xrightarrow{\pi\approx3}t=\frac{4}{50}=0/08s$$

البته با استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده قسمت ۴ حل مسئله بسیار کوتاه‌تر می‌شد.

از $+A$ تا $-A$ $(\frac{T}{2})$ و از $-A$ تا $-\frac{A}{2}$، $\frac{T}{6}$ طول می‌کشد بنابراین:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 5\circ=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{5\circ}$$

$$\Delta t=\frac{T}{2}+\frac{T}{6}=\frac{2T}{3}\Rightarrow \Delta t=\frac{2}{3}\times\frac{2\pi}{5\circ}\xrightarrow{\pi=3}\Delta t=\frac{4}{5\circ}=\circ/\circ 8s$$

۳ ۱۵۰۶ A

نکته مسافتی که نوسانگر در مدت یک دوره طی می‌کند چهار برابر دامنه $(4A)$ و مسافتی که در مدت نیم دوره $(\frac{T}{2})$ طی می‌کند دو برابر دامنه $(2A)$ است.

ابتدا باید دورهٔ حرکت وزنه را حساب کنیم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\xrightarrow{m=\circ/2kg,k=2\circ\circ N/m}T=2\pi\sqrt{\frac{\circ/2}{2\circ\circ}}$$

$$\xrightarrow{\pi=\sqrt{10}}T=2\times\frac{1}{10}\Rightarrow T=\circ/2s$$

مدت زمانی که بیان شده $\circ/1s$ است و این $\circ/1s$ نصف دوره است و در مدت نیم دوره مسافت طی شده دو برابر دامنه یعنی $\ell=2\times 4=8cm$ است.

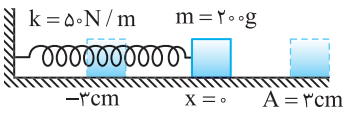
۱ ۱۵۰۷ B

نکته هرگاه وزنهٔ متصل به فنر را از حالت تعادل کشیده و رها کنیم مقدار کشیدگی برابر دامنهٔ نوسان سامانهٔ جرم فنر است.

۱ دورهٔ حرکت را حساب می‌کنیم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\xrightarrow{\pi=\sqrt{10}}T=2\times\sqrt{10}\times\sqrt{\frac{\circ/2}{5\circ}}$$

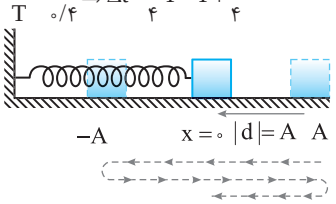
$$T=\frac{2}{5}s\Rightarrow T=\circ/4s$$



۲ بازهٔ زمانی $\Delta t=\circ/5s$ را با دوره مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\circ/5}{\circ/4}\Rightarrow\Delta t=\frac{5}{4}T=T+\frac{T}{4}$$

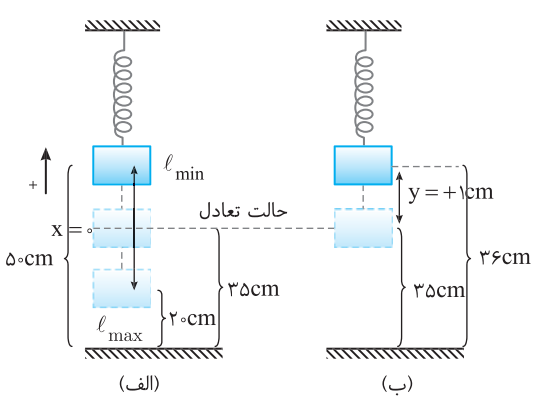
۳ مسیر حرکت وزنه در مدت نیم ثانیهٔ اول را رسم می‌کنیم. با توجه به مسیر حرکت نوسانگر در مدت $\frac{5}{4}T$ مسافتی برابر $5A$ را طی می‌کند و جابه‌جایی آن برابر A است. از این‌رو:



$$\frac{\ell}{d}=\frac{5A}{A}=5$$

۳ ۱۵۰۸ B

خط فکری با استفاده از کمترین و بیشترین فاصلهٔ وزنه از سطح میز، طول پاره‌خط مسیر نوسان را حساب کنید و به کمک آن دامنهٔ حرکت را بیابید تا بتوانید فاصلهٔ محل تعادل از سطح زمین را مشخص کنید با داشتن فاصلهٔ حالت تعادل از سطح زمین، می‌توانید مکان نوسانگر را نسبت به حالت تعادل به دست آورید و در مورد حرکت آن اظهارنظر کنید.



با توجه به شکل (الف)، طول پاره‌خط مسیر حرکت برابر $50-20=30cm$ است.

دامنهٔ حرکت را حساب می‌کنیم: $A=\frac{30}{2}=15cm$

وقتی فاصلهٔ نوسانگر از سطح زمین $36cm$ است یعنی مکان آن $36-35=1cm$ بالاتر از حالت تعادل است و چون مکان مثبت است شتاب باید منفی یعنی رو به پایین باشد. اما جهت حرکت مشخص نیست و نوسانگر می‌تواند از این نقطه در حال حرکت رو به بالا یا رو به پایین باشد.

۲ ۱۵۰۹ A

خط فکری باید به سراغ دینامیک بروید. در حالت تعادل نیروهای وارد بر وزنه متوازن هستند و نیروی خالص وارد بر جسم صفر است. با توجه به این مطلب، می‌توانید ثابت فنر را حساب کرده، سپس دوره را به دست بیاورید.

پس از آویزان کردن جسم، فنر $2cm$ کشیده شده تا به تعادل برسد.

$$kx=mg\Rightarrow k\times\frac{2}{100}=20\Rightarrow k=1000N/m$$

در حالت دوم به فنر وزنه‌ای $10N$ وصل کرده‌ایم در واقع جرم وزنه برابر $1kg$ می‌باشد. $(mg=10N\Rightarrow m=1kg)$ از این‌رو دوره خواهد داشت:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\times\sqrt{10}\times\sqrt{\frac{1}{1000}}=2\times\sqrt{10}\times\frac{1}{10\sqrt{10}}=\frac{1}{5}=\circ/2s$$

۱ ۱۵۱۰ B

خط فکری از حالت اول که وزنه را به نخ متصل کرده‌ایم می‌توانید جرم وزنه را به‌دست بیاورید سپس دوره را حساب کرده و تعداد نوسان‌ها را در مدت $30s$ حساب کنید. با داشتن تعداد نوسان‌ها مسافت طی شده در مدت $30s$ قابل محاسبه است.

به حل مسئله می‌پردازیم:

۱ نیروی وزن با نیروی کشش نخ برابر است از این‌رو:



$$mg=T\Rightarrow mg=2N\Rightarrow m=\circ/2kg$$

۲ با وصل کردن وزنه به فنر، دورهٔ نوسان وزنه خواهد شد:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\sqrt{10}\times\frac{1}{10\sqrt{10}}\Rightarrow T=\circ/2s$$

۳ تعداد نوسان‌های وزنه در مدت $30s$ برابر است با:

نوسان	زمان
۱	$\circ/2s$
$N=?$	30

$N=150$ (نوسان) دوره

۴ در هر دوره نوسانگر مسافتی برابر $4A=4\times 5=20cm$ طی می‌کند، بنابراین مسافت طی شده در مدت ۱۵۰ دوره (نوسان) خواهد شد:

$$\ell=150\times\frac{20}{100}=30m$$

۵ تندی متوسط را حساب می‌کنیم:

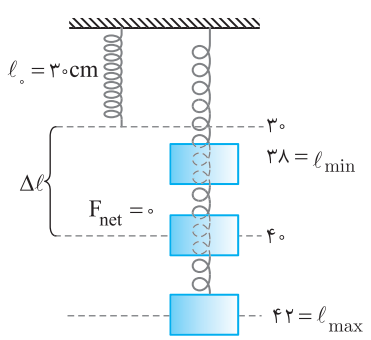
$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{30}{30}=1m/s$$

۳ ۱۵۱۱ B

۱ طول پاره‌خط مسیر حرکت را حساب می‌کنیم.

$$\text{طول مسیر}=\ell_{max}-\ell_{min}\Rightarrow\text{طول مسیر}=42-38=4cm$$

۲ دامنهٔ حرکت نصف مسیر نوسان است $A=\frac{4}{2}=2cm$



۳ طول فنر در محل تعادل (وسط مسیر) خواهد شد:

$۳۸+۲=۴۰\,cm$ = طول فنر در حالت تعادل

۴ تغییر طول فنر از حالت طبیعی تا حالت تعادل را به‌دست می‌آوریم.

$\Delta\ell=۴۰-۳۰=۱۰\,cm$

۵ در محل تعادل نیروهای وارد بر وزنه متوازن هستند. بر وزنه دو نیرو، یکی وزن و دیگری نیروی کشسانی فنر وارد می‌شود. بنابراین:

$$F_{net}=۰\Rightarrow k\Delta\ell=mg\Rightarrow\frac{m}{k}=\frac{\Delta\ell}{g}=\frac{۰/۱}{۱۰}=\frac{۱}{۱۰۰}$$

۶ اکنون در رابطهٔ دوره به جای نسبت $\frac{m}{k}$ می‌توانیم $\frac{۱}{۱۰۰}$ را قرار داده و دوره را حساب کنیم.

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=۲\pi\sqrt{\frac{۱}{۱۰۰}}=\frac{\pi}{۵}\,s$$

میانبر در حرکت سامانه جرم - فنر در امتداد قائم دوره را می‌توان از رابطهٔ $T=۲\pi\sqrt{\Delta\ell/g}$ به‌دست آورد که در آن $\Delta\ell$ فاصلهٔ محل تعادل از طول طبیعی فنر است.

۱۵۱۲ B ۲

۱ دوره را حساب می‌کنیم:

$$T=\frac{۱}{f}\xrightarrow{f=۰/۵Hz}T=\frac{۱}{۰/۵}\Rightarrow T=۲s$$

۲ اگر تمام کمک‌فنرها را معادل یک فنر فرض کنیم ثابت فنر آن خواهد شد:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\xrightarrow{m=۱۰۰۰kg}۲=۲\pi\sqrt{\frac{۱۰۰۰}{k}}$$

$$\Rightarrow۴=۴\pi^۲\times\frac{۱۰۰۰}{k}\xrightarrow{\pi^۲=۱۰}k=۱۰^۴\,N/m$$

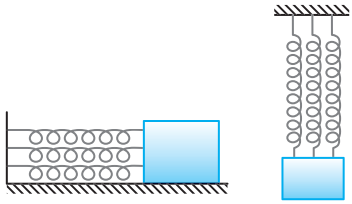
۳ وقتی یک مسافر به جرم ۱۰۰kg سوار ماشین می‌شود، با فرض این‌که به جای تمام فنرها فنری با ثابت $۱۰^۴\,N/m$ وجود دارد. تغییر طول فنر خواهد شد:

$$mg=k\Delta\ell\Rightarrow۱۰۰\times۱۰=۱۰^۴\Delta\ell\Rightarrow\Delta\ell=۰/۱m=۱۰\,cm$$

بنابراین ماشین ۱۰cm پایین می‌رود.

۱۵۱۳ C ۴

نکته هرگاه با n فنر مشابه با ثابت k یک وزنه را به دیواره‌ای متصل کنیم و وزنه را به نوسان درآوریم می‌توانیم n فنر را با یک فنر با ثابت nk فرض کنیم.



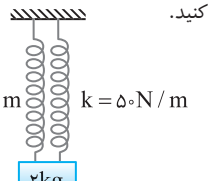
جسم به دو فنر مشابه با ثابت $۴۰۰\,N/m$ متصل است پس می‌توانیم در نظر بگیریم (مدل‌سازی کنیم) جسم به فنری با ثابت $۸۰۰\,N/m$ وصل است و دوره را به‌دست بیاوریم.

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=۲\pi\sqrt{\frac{۲}{۸۰۰}}=\frac{\pi}{۱۰}=۰/۳s$$

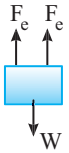
با توجه به رابطهٔ $T=\frac{t}{N}$ زمان ۲۰ نوسان کامل خواهد شد. $۰/۳=\frac{t}{۲۰}\Rightarrow t=۶s$

برای درک این مدل‌سازی به مثال زیر توجه کنید.

مثال: در شکل روبه‌رو افزایش طول هر فنر چند سانتی‌متر است؟



پاسخ: نیروهای وارد بر وزنه را رسم می‌کنیم و نیروی خالص را برابر صفر قرار می‌دهیم:



$$۲F_e=W\Rightarrow۲k\Delta\ell=mg\Rightarrow۱۰۰\Delta\ell=۲۰\Rightarrow\Delta\ell=۰/۲m=۲۰cm$$

به قسمت ۲k دقت کنید مانند این است که وزنه به یک فنر با ثابت $k'=۲k$ متصل است. در واقع وقتی n فنر با ثابت k را به طور موازی بین دیوار و وزنه متصل کنیم، می‌توان فنرها را یک فنر با یک ثابت $k'=nk$ در نظر گرفت.

۱۵۱۴ A ۲

خط فکری فرض می‌کنیم که وزن خودرو و سرنشینانش به‌طور یکنواخت روی چهار فنر خودرو تقسیم می‌شود. در این حالت می‌توانیم چهار فنر مشابه با ثابت k را یک فنر با ثابت $k'=۴k$ فرض کرده و مسئله را با یک فنر حل کنیم.

۱ ثابت فنر معادل این چهار فنر خواهد شد:

$$k'=۴k\Rightarrow k'=۴\times۵\times۱۰^۳=۲\times۱۰^۴\,N/m$$

۲ بسامد زاویه‌ای برابر است با:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{۲\times۱۰^۴}{۱۸۰۰}}=\sqrt{\frac{۱۰^۴}{۹۰۰}}\Rightarrow\omega=\frac{۱۰}{۳}\,rad/s$$

۱۵۱۵ A ۲

یادآوری دورهٔ آونگ ساده برابر با $T=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ است که در آن ℓ طول آونگ و g میدان گرانش در محل است.

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\xrightarrow{\ell=۰/۲۵m,\,g=\pi^۲}T=۲\pi\sqrt{\frac{۰/۲۵}{\pi^۲}}=۲\times۰/۵\Rightarrow T=۱s$$

۱۵۱۶ A ۴

دورهٔ آونگ ساده $T=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ است، از این رو:

$$T^۲=۴\pi^۲\frac{\ell}{g}\Rightarrow T^۲\propto\ell$$

بنابراین a می‌تواند $T^۲$ باشد.

۱۵۱۷ A ۲

۱ ابتدا با توجه به اینکه در مدت ۱min آونگ N=۳۰ نوسان کامل انجام داده، دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{۶۰}{۳۰}\Rightarrow T=۲s$$

۲ رابطهٔ دورهٔ آونگ را نوشته و شتاب گرانش در محل را به‌دست می‌آوریم:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow۲=۲\pi\sqrt{\frac{۱/۰۱}{g}}\Rightarrow\frac{۱}{\pi}=\sqrt{\frac{۱/۰۱}{g}}\Rightarrow\frac{۱}{\pi^۲}=\frac{۱/۰۱}{g}$$

$$\Rightarrow g=۱/۰۱\pi^۲\xrightarrow{\pi^۲\approx۱۰}g=۱۰/۱\,m/s^۲$$

بازی با سؤال **طول یک آونگ سادهٔ کم‌دامنه چند سانتی‌متر باشد تا بتواند در مدت ۷۲ ثانیه ۴۰ نوسان کامل انجام دهد؟** $(\pi^۲=۱۰\,,\ g=۱۰\,m/s^۲)$

کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۸۱ ۲) ۱۶/۲ ۳) ۴۰ ۴) ۸۰

پاسخ ابتدا دورهٔ آونگ را به‌دست می‌آوریم:

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{۷۲}{۴۰}\Rightarrow T=۱/۸s$$

اکنون طول آونگ را حساب می‌کنیم.

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow۱/۸=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{\pi^۲}}\Rightarrow۱/۸=۲\sqrt{\ell}\Rightarrow\ell=۰/۸۱m\Rightarrow\ell=۸۱cm$$

گزینهٔ ۱

۱۵۱۸ A ۴

آونگ در هر ثانیه یک نوسان انجام می‌دهد بنابراین دورهٔ آن $T=۱s$ است. با توجه به رابطهٔ دورهٔ آونگ، طول آن را حساب می‌کنیم:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\xrightarrow{g=\pi^۲}۱=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{\pi^۲}}\Rightarrow\ell=۰/۲۵m\Rightarrow\ell=۲۵cm$$

۱۵۱۹ A ۳

نکته در هر دوره نوسانگر (آونگ) دو بار طول مسیر نوسان را طی می‌کند. آونگ در هر دقیقه، ۶۰ بار مسیر AB را طی کرده بنابراین آونگ در هر دقیقه $\frac{۶۰}{۲}=۳۰$ نوسان انجام داده است.

دوره را حساب می‌کنیم.

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{۶۰}{۳۰}=۲s$$

طول آونگ را به‌دست می‌آوریم.

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow۲=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{\pi^۲}}\Rightarrow\ell=۱m\Rightarrow\ell=۱۰۰cm$$

A ۱۵۲۰ ۲

دورهٔ آونگ ساده به جرم آونگ بستگی ندارد، دوره را در دو حالت نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}}\Rightarrow\frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}\Rightarrow\frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{64}{25}}\Rightarrow\frac{T_1}{T_2}=\frac{8}{5}$$

A ۱۵۲۱ ۱

نکته دورهٔ نوسان آونگ ساده به جرم گلولهٔ آن بستگی ندارد و اگر دامنهٔ آن بیش از حد بزرگ نباشد، دوره به دامنه بستگی ندارد.

جرم گلوله m و یا ۳m باشد تأثیری در دوره ندارد. هم‌چنین زاویهٔ انحراف ۲° یا ۴° نیز نقشی در دوره ندارد. نسبت دوره‌ها را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{T'}{T}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}=\sqrt{\frac{\ell'}{\ell}}\xrightarrow{\ell'=4\ell}\frac{T'}{T}=2\Rightarrow\frac{f'}{f}=\frac{1}{2}$$

A ۱۵۲۲ ۲

طول آونگ تغییر نکرده از این رو دوره آونگ را در دو محل نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{cases}T_1=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_1}}\\ T_2=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_2}}\end{cases}\Rightarrow\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{g_1}{g_2}}\Rightarrow\frac{5}{4}=\sqrt{\frac{10}{g_2}}\Rightarrow\frac{25}{16}=\frac{10}{g_2}\Rightarrow g_2=6/4\,m/s^2$$

A ۱۵۲۳ ۱

دورهٔ نوسان آونگ از رابطهٔ $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}}\xrightarrow[T_2=\frac{T_1}{2}]{\ell_1=80\,cm}\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{\ell_2}{80}}\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{\ell_2}{80}\Rightarrow\ell_2=20\,cm$$

بنابراین باید طول آونگ را به اندازهٔ $80-20=60\,cm$ کاهش دهیم.

بازی با سؤال **دوره آونگ ساده‌ای ۳ ثانیه است. کاهش طول آونگ چه کسری از طول اولیه آونگ شود تا دوره آن یک ثانیه شود؟**

۱) $\frac{3}{9}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{8}{9}$

پاسخ **با توجه به رابطه دورهٔ آونگ طول ثانویه را حساب می‌کنیم.**

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},T'=2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}}\Rightarrow\frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{\ell'}{\ell}}\Rightarrow\frac{1}{3}=\sqrt{\frac{\ell'}{\ell}}\Rightarrow\frac{1}{9}=\frac{\ell'}{\ell}\Rightarrow\ell'=\frac{\ell}{9}$$

تغییر طول آونگ خواهد شد.

$$\Delta L=\ell-\ell'=\ell-\frac{\ell}{9}=\frac{8}{9}\ell$$

گزینهٔ ۴

A ۱۵۲۴ ۴

دوره آونگ را نوشته و بر هم می‌کنیم.

$$T_1=\frac{t}{N_1},T_2=\frac{t}{N_2}\Rightarrow\frac{N_2}{N_1}=\frac{T_1}{T_2}\quad(I)$$

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}}\Rightarrow\frac{T_1}{T_2}=\frac{\sqrt{\ell_1}}{\sqrt{\ell_2}}\quad(II)$$

از رابطه (I) و (II) نتیجه می‌شود که: $\frac{N_2}{N_1}=\frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}$

در حالت اول در مدت t، ۴ نوسان کامل و در حالت دوم در همان مدت t، یک نوسان بیشتر یعنی ۵ نوسان کامل انجام داده است، بنابراین: $\frac{4+1}{4}=\sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}\Rightarrow\ell_2=\frac{16}{25}\ell_1$

حال درصد تغییرات طول را به‌دست می‌آوریم: $\frac{\ell_2-\ell_1}{\ell_1}\times100=\frac{-\frac{9}{25}\ell_1}{\ell_1}\times100=-36\%$

که علامت منفی نشان‌دهندهٔ کاهش می‌باشد.

A ۱۵۲۵ ۳

با توجه به فرض مسئله طول آونگ ۱۷cm تغییر کرده و دوره به اندازهٔ ۱۲/۵ درصد افزایش یافته است، از طرفی $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ است، بنابراین طول آونگ باید زیاد شده باشد. از این رو:

$$T_2=T_1+\frac{12/5}{100}T_1\Rightarrow T_2=\frac{112/5}{100}T_1$$

$$\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{\ell_2}{\ell_1}}\Rightarrow\frac{112/5}{100}=\sqrt{\frac{\ell_1+17}{\ell_1}}\Rightarrow\frac{9}{8}=\sqrt{\frac{\ell_1+17}{\ell_1}}\Rightarrow\frac{81}{64}=\frac{\ell_1+17}{\ell_1}$$

$$\Rightarrow81\ell_1=64\ell_1+64\times17\Rightarrow17\ell_1=64\times17\Rightarrow\ell_1=64\,cm$$

دورهٔ اولیهٔ آونگ خواهد شد:

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}\Rightarrow T_1=2\pi\sqrt{\frac{0/64}{\pi^2}}\Rightarrow T_1=2\times0/8=1/6\,s$$

B ۱۵۲۶ ۴

۱ با توجه به رابطهٔ دورهٔ آونگ داریم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\xrightarrow{f=\frac{1}{T}}f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

با توجه به رابطهٔ بالا بسامد آونگ به جرم آن بستگی ندارد.

۲ بسامد را در دو حالت نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم و یک معادله برای f_1 و f_2 به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell_1}}}{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell_2}}}\Rightarrow\frac{f_1}{f_2}=\sqrt{\frac{\ell_2}{\ell_1}}\xrightarrow{\ell_2=16\ell_1}\frac{f_1}{f_2}=\sqrt{16}\Rightarrow f_2=\frac{1}{4}f_1\quad(I)$$

۳ f_1 بزرگ‌تر از f_2 بوده و بنا به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$f_1-f_2=60\,Hz\xrightarrow{(I)}f_1-\frac{1}{4}f_1=60\Rightarrow\frac{3}{4}f_1=60\Rightarrow f_1=80\,Hz$$

B ۱۵۲۷ ۳

خط فکری ابتدا با داشتن دوره $T_1=3s$ و $T_2=4s$ ، طول هر آونگ را بر حسب g حساب کنید، سپس ℓ_1 را با ℓ_2 جمع کرده و دوره آونگ جدید را به‌دست بیاورید.

با توجه به رابطهٔ دورهٔ آونگ $(T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}})$ طول هر آونگ را حساب می‌کنیم:

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}\Rightarrow3=2\pi\frac{\sqrt{\ell_1}}{\sqrt{g}}\Rightarrow\sqrt{\ell_1}=\frac{3\sqrt{g}}{2\pi}\Rightarrow\ell_1=\frac{9g}{4\pi^2}$$

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}\Rightarrow4=2\pi\frac{\sqrt{\ell_2}}{\sqrt{g}}\Rightarrow\sqrt{\ell_2}=\frac{4\sqrt{g}}{2\pi}\Rightarrow\ell_2=\frac{16g}{4\pi^2}$$

حال رابطهٔ دورهٔ آونگ را برای آونگ با طول $\ell_1+\ell_2$ می‌نویسیم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell_1+\ell_2}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{\frac{9g}{4\pi^2}+\frac{16g}{4\pi^2}}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{\frac{25g}{4\pi^2}}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{25}{4\pi^2}}=2\pi\times\frac{5}{2\pi}=5s$$

میانبر اگر دو آونگ با طول‌های ℓ_1 و ℓ_2 به ترتیب با دوره‌های T_1 و T_2 در اختیار داشته باشیم، دوره آونگی که طول ریسمان آن $\ell_1+\ell_2$ است از رابطه $T=\sqrt{T_1^2+T_2^2}$ به‌دست می‌آید.

اثبات میانبر:

$$\begin{cases} T_1=2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}\Rightarrow T_1^2=4\pi^2\frac{\ell_1}{g} \\ T_2=2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}\Rightarrow T_2^2=4\pi^2\frac{\ell_2}{g} \end{cases} \xrightarrow[\text{با هم جمع می‌کنیم.}]{\text{دو رابطه را}} T_1^2+T_2^2=4\pi^2\left(\frac{\ell_1}{g}+\frac{\ell_2}{g}\right)$$

$$\Rightarrow T_1^2+T_2^2=4\pi^2\left(\frac{\ell_1+\ell_2}{g}\right)\Rightarrow\sqrt{T_1^2+T_2^2}=2\pi\sqrt{\frac{\ell_1+\ell_2}{g}}$$

از طرفی دوره آونگی به طول $\ell_1+\ell_2$ برابر $2\pi\sqrt{\frac{\ell_1+\ell_2}{g}}$ است، بنابراین خواهیم داشت: $T=\sqrt{T_1^2+T_2^2}$

B ۱۵۲۸ ۱

۱ طول هر آونگ را حساب می‌کنیم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow\begin{cases} T_1=1/5s\longrightarrow 1/5=2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}\Rightarrow\ell_1=\frac{2/25g}{4\pi^2} \\ T_2=2/5s\longrightarrow 2/5=2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}\Rightarrow\ell_2=\frac{6/25g}{4\pi^2} \end{cases}$$

۲ طول آونگ جدید خواهد شد:

$$\ell_2-\ell_1=\frac{6/25g}{4\pi^2}-\frac{2/25g}{4\pi^2}=\frac{4g}{4\pi^2}\Rightarrow\ell_2-\ell_1=\frac{g}{\pi^2}$$

۳ دوره آونگ جدید را به‌دست می‌آوریم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell_2-\ell_1}{g}}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{g}{\pi^2 g}}\Rightarrow T=2s$$

میانبر هرگاه دو آونگ با طول‌های ℓ_1 و ℓ_2 به ترتیب دارای دورهٔ T_1 و T_2 باشد، دوره آونگی با طول $\ell_2-\ell_1$ برابر $T=\sqrt{T_2^2-T_1^2}$ می‌شود.

B ۱۵۲۹ ۳

۱ با توجه به صورت سؤال دوره یکی از آونگ‌ها دو برابر دیگری است. بنابراین می‌توان به کمک این مطلب یک رابطه بین طول دو آونگ ℓ_1 و ℓ_2 پیدا کرد.

$$T_2=2T_1\Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}=2\left(2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}\right)\Rightarrow\ell_2=4\ell_1 \quad (I)$$

۲ با توجه به فرض مسئله مجموع ℓ_1 و ℓ_2 برابر طول نخ اولیه یعنی $100cm$ می‌شود.

$$\ell_2+\ell_1=100\ell_1\xrightarrow{(I)}4\ell_1+\ell_1=100cm\Rightarrow\ell_1=20cm$$

۳ آونگی که دورهٔ تناوب بیشتری دارد طولش بزرگ‌تر است، بنابراین:

$$\ell_2=4\ell_1\Rightarrow\ell_2=4\times 20=80cm$$

B ۱۵۳۰ ۳

خط فکری با داشتن بسامد آونگ‌ها، طول هر آونگ را حساب کنید تا بتوانید طول آونگی که بسامد آن (f) مجهول است را بیابید.

۱ رابطهٔ بسامد آونگ به صورت زیر است.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\xrightarrow{f=\frac{1}{T}}f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} f=2/5Hz\longrightarrow 6/25=\frac{1}{4\pi^2}\frac{g}{\ell}\Rightarrow\ell=\frac{g}{25\pi^2} \\ f_1=10Hz\longrightarrow 100=\frac{1}{4\pi^2}\frac{g}{\ell_1}\Rightarrow\ell_1=\frac{g}{400\pi^2} \\ f_2=5Hz\longrightarrow 25=\frac{1}{4\pi^2}\frac{g}{\ell_2}\Rightarrow\ell_2=\frac{g}{100\pi^2} \end{cases}$$

۲ مجموع طول سه آونگ جدید برابر طول ریسمان آونگ اول است. بنابراین:

$$\ell=\ell_1+\ell_2+\ell_3\Rightarrow\frac{g}{25\pi^2}=\frac{g}{400\pi^2}+\frac{g}{100\pi^2}+\ell_3$$

$$\frac{g}{25\pi^2}-\frac{g}{400\pi^2}-\frac{g}{100\pi^2}=\ell_3\Rightarrow\frac{16g-g-4g}{400\pi^2}=\ell_3\Rightarrow\ell_3=\frac{11g}{400\pi^2}$$

۳ بسامد f را حساب می‌کنیم.

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\frac{11g}{400\pi^2}}}\Rightarrow f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{400\pi^2}{11}}\Rightarrow f=\frac{20\pi}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{11}}$$

$$\Rightarrow f=\frac{10}{\sqrt{11}}\Rightarrow f=\frac{10\sqrt{11}}{11}Hz$$

میانبر اگر دوره آونگ T باشد و آن را به n قسمت تقسیم کنیم و با هر قسمت یک آونگ با دوره T_1، T_2، ... و T_n بسازیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$T=\sqrt{T_1^2+T_2^2+\cdots+T_n^2}$$

B ۱۵۳۱ ۲

خط فکری طول آونگ از ما خواسته شده، دورهٔ آونگ دو برابر دورهٔ نوسان جرم - فنر است. جرم و ثابت فنر را داریم. بنابراین شما ابتدا دورهٔ سامانهٔ جرم - فنر را بیابید، سپس آن را دو برابر کرده دورهٔ آونگ را به‌دست آورده و از آنجا طول آونگ را حساب کنید.

۱ دورهٔ سامانهٔ جرم - فنر را حساب می‌کنیم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\xrightarrow[k=1250N/m]{m=0/5kg}T=2\pi\sqrt{\frac{0/5}{1250}}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{1}{2500}}$$

$$\Rightarrow T=\frac{2\pi}{50}\Rightarrow T=\frac{\pi}{25}s$$

۲ دورهٔ آونگ دو برابر T است.

$$T'=2T=2\times\frac{\pi}{25}\Rightarrow T'=\frac{2\pi}{25}s$$

۳ طول آونگ را به‌دست می‌آوریم.

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow\frac{2\pi}{25}=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{10}}\Rightarrow\frac{1}{25}=\sqrt{\frac{\ell}{10}}\Rightarrow\frac{1}{625}=\frac{\ell}{100}\Rightarrow\ell=0/16m=16cm$$

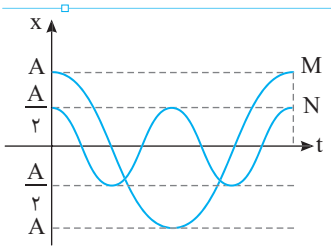
B ۱۵۳۲ ۴

خط فکری کافی است از روی معادلهٔ حرکت $x=0/04\cos\frac{\pi}{3}t$، بسامد زاویه‌ای ω را مشخص کرده و به کمک رابطهٔ $\omega=\sqrt{g/\ell}$ طول آونگ را به‌دست آورد.

بسامد زاویه‌ای این آونگ $\omega=\frac{\pi}{3}\frac{rad}{s}$ است، بنابراین:

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}\Rightarrow\frac{\pi}{3}=\sqrt{\frac{g}{\ell}}\Rightarrow\frac{\pi^2}{9}=\frac{\pi^2}{\ell}\Rightarrow\ell=9m$$

B ۱۵۳۳ ۳

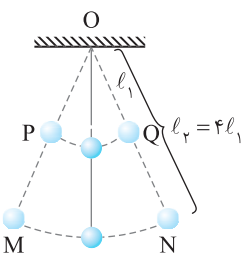


دامنه آونگ در دوره آن تأثیری ندارد. به نمودار دقت کنید. دوره نوسان آونگ M دو برابر دوره نوسان آونگ N است. بنابراین دوره آونگ را نوشته و رابطه ℓ_M با ℓ_N را به‌دست می‌آوریم.

$$T_M=2T_N\Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{\ell_M}{g}}=2\left(2\pi\sqrt{\frac{\ell_N}{g}}\right)\Rightarrow\ell_M=4\ell_N$$

B ۱۵۳۴ ۲

خط فکری باید آونگ را در دو حالت مطابق شکل رسم کنید تا بتوانید دامنهٔ حرکت را از روی شکل به کمک هندسه و مثلثات به‌دست بیاورید. سپس دورهٔ جدید آونگ را به‌دست بیاورید تا مشخص شود کدام نمودار درست است.



با توجه به شکل و تشابه مثلث‌های OPQ و OMN، خواهیم داشت:

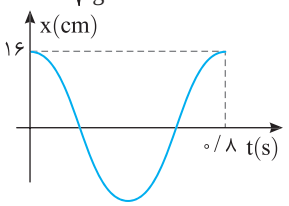
$$\frac{MN}{PQ}=\frac{\ell_2}{\ell_1}=4\Rightarrow MN=4PQ\xrightarrow[\text{دامنه است}]{\text{طول مسیر دو برابر}}A_2=4A_1$$

بنابراین دامنهٔ آونگ جدید خواهد شد: $A_2=4\times 4=16cm$

دورهٔ آونگ $0/4s$ است. دورهٔ آونگ جدید را حساب می‌کنیم.

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}}\Rightarrow\frac{T_2}{0/4}=\sqrt{\frac{\ell_2}{\ell_1}}\Rightarrow\frac{T_2}{0/4}=\sqrt{\frac{4\ell_1}{\ell_1}}\Rightarrow T_2=0/8s$$

از این‌رو نمودار به شکل روبه‌روست و گزینهٔ (۲) درست است.



۳ ۱۵۳۵ A

نسبت دورهٔ آونگ‌ها را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{T_B}{T_A}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell_B}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell_A}{g}}}\Rightarrow\frac{T_B}{T_A}=\sqrt{\frac{\ell_B}{\ell_A}}\xrightarrow[\ell_A=45cm]{\ell_B=20cm}\frac{T_B}{T_A}=\sqrt{\frac{20}{45}}$$

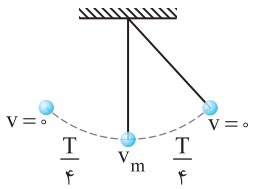
$$\Rightarrow\frac{T_B}{T_A}=\sqrt{\frac{4}{9}}\Rightarrow\frac{T_B}{T_A}=\frac{2}{3}\qquad(I)$$

نسبت تعداد نوسان‌ها در یک مدت معین را حساب می‌کنیم.

$$\frac{T_B}{T_A}=\frac{\frac{t}{N_B}}{\frac{t}{N_A}}\Rightarrow\frac{T_B}{T_A}=\frac{N_A}{N_B}\xrightarrow[(I)]{N_B=9}\frac{2}{3}=\frac{N_A}{9}\Rightarrow N_A=6$$ نوسان

۱ ۱۵۳۶ A

۱ تندی آونگ هنگام عبور از مرکز نوسان (حالت قائم) بیشینه است و زمانی که طول می‌کشد تا آونگ از انتهای مسیر به مرکز نوسان برسد $\frac{T}{4}$ است و زمانی که طول می‌کشد تا آونگ از یک انتهای مسیر به انتهای دیگر برود $\frac{T}{2}$ ثانیه است، بنابراین با توجه به فرض مسئله می‌توان نوشت:



$$\frac{T_A}{4}=\frac{T_B}{2}\Rightarrow T_A=2T_B\quad(1)$$

۲ دورهٔ آونگ $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ است، دوره را در رابطهٔ (۱) جای‌گذاری می‌کنیم.

$$2\pi\sqrt{\frac{\ell_A}{g}}=2(2\pi)\sqrt{\frac{\ell_B}{g}}\Rightarrow\ell_A=4\ell_B$$

۴ ۱۵۳۷ B

دورهٔ آونگ ساده برابر با $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ است. از طرفی به ازای هر ۵ نوسان آونگ A، آونگ B، ۳ نوسان می‌کند، در این صورت:

۱ نسبت دوره‌ها را از روی تعداد نوسان‌های دو آونگ به‌دست می‌آوریم.

$$T_A=\frac{t}{N_A},T_B=\frac{t}{N_B}\Rightarrow\frac{T_A}{T_B}=\frac{N_B}{N_A}\Rightarrow\frac{T_A}{T_B}=\frac{3}{5}\qquad(I)$$

۲ نسبت دوره‌ها بر حسب طول آونگ‌ها خواهد شد.

$$T_A=2\pi\sqrt{\frac{\ell_A}{g}},T_B=2\pi\sqrt{\frac{\ell_B}{g}}\Rightarrow\frac{T_A}{T_B}=\sqrt{\frac{\ell_A}{\ell_B}}\qquad(II)$$

۳ از رابطهٔ (I) در رابطهٔ (II) جای‌گذاری کرده و نسبت طول‌ها را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{3}{5}=\sqrt{\frac{\ell_A}{\ell_B}}\Rightarrow\frac{\ell_A}{\ell_B}=\frac{9}{25}\Rightarrow\ell_B=\frac{25}{9}\ell_A$$

۴ با توجه به فرض مسئله $(\ell_B-\ell_A=48cm)$ اکنون می‌توان ℓ_A را به‌دست آورد.

$$\frac{25}{9}\ell_A-\ell_A=48\Rightarrow\frac{16\ell_A}{9}=48\Rightarrow\ell_A=27cm$$

۱ ۱۵۳۸ B

۱ دورهٔ آونگ را به‌دست می‌آوریم: $T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{36}{20}\Rightarrow T=1/8s$

۲ طول آونگ را حساب می‌کنیم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\xrightarrow{g=\pi^2}1/8=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\pi^2}}\Rightarrow1/8=2\sqrt{\ell}$$

$$0/9=\sqrt{\ell}\Rightarrow\ell=0/81m=81cm$$

۳ طول آونگ را $17cm$ کاهش داده‌ایم. $\ell'=81-17=64cm$

۴ دورهٔ جدید آونگ خواهد شد:

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}}\Rightarrow T'=2\pi\sqrt{\frac{0/64}{\pi^2}}\Rightarrow T'=1/6s$$

۵ تعداد نوسانات در مدت $40s$ برابر است با:

$$T'=\frac{t'}{N'}\Rightarrow1/6=\frac{40}{N'}\Rightarrow N'=\frac{40}{1/6}\Rightarrow N'=25$$ نوسان

۴ ۱۵۳۹ B

خط فکری اگر بسامد آونگی را که طولش بلندتر است f_1 و بسامد دیگری را f_2 بنامیم، چون دورهٔ آونگ $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ با جذر طول نسبت مستقیم دارد بنابراین آونگ بلندتر، دوره‌اش بیشتر و در نتیجه بسامد آن کوچک‌تر است $(\downarrow f=\frac{1}{T})$ یعنی $f_1<f_2$ است. بنابراین نسبت $\frac{f_1}{f_2}=0/9$ است. حال مسئله را حل می‌کنیم.

۱ نسبت دوره‌ها را به کمک نسبت بسامدها به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{\frac{1}{T_1}}{\frac{1}{T_2}}\Rightarrow\frac{f_1}{f_2}=\frac{T_2}{T_1}\Rightarrow\frac{T_2}{T_1}=0/9\Rightarrow T_2=0/9T_1\qquad(I)$$

۲ آونگی که طول کوتاه‌تری دارد و بسامدش بیشتر است تعداد نوسانات آن در یک مدت معین بیشتر است بنابراین: $N_2=N_1+3$

۳ از رابطه $N=\frac{t}{T}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{54}{T_2}=\frac{54}{T_1}+3\Rightarrow\frac{54T_1-54T_2}{T_1T_2}=3\Rightarrow18(T_1-T_2)=T_1T_2$$

$$\xrightarrow{T_2=0/9T_1}18(T_1-0/9T_1)=0/9T_1T_1$$

$$\Rightarrow18(0/1T_1)=0/9T_1^2\Rightarrow T_1=\frac{1/8}{0/9}=2s$$

بازی با سوال **دو آونگ سادهٔ A و B را با هم با دامنهٔ کم به نوسان درمی‌آوریم. پس از گذشت ۲ دقیقه و ۲۴ ثانیه آونگ B، ۱۰ نوسان کامل از آونگ A جلو می‌افتد. اگر زمان نوسان کامل آونگ A برابر با ۱/۸ ثانیه باشد، دورهٔ آونگ B چند ثانیه می‌باشد؟**

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۴ ۳) ۱/۶ ۴) ۲

پاسخ **آونگ B در مدت ۲ دقیقه و ۲۴s یعنی در مدت ۱۴۴s از آونگ A، ۱۰ نوسان جلو افتاده است بنابراین می‌توانیم بنویسیم:**

گزینهٔ ۳

$$N_B=N_A+10\Rightarrow\frac{t}{T_B}=\frac{t}{T_A}+10$$

$$\xrightarrow{t=144s}\frac{144}{T_B}=\frac{144}{1/8}+10\Rightarrow\frac{144}{T_B}=80+10\Rightarrow T_B=\frac{144}{90}=1/6s$$

۳ ۱۵۴۰ B

نکته میدان گرانش در استوا کمترین مقدار و در قطب‌ها بیشترین مقدار است، در واقع زمین کرهٔ کامل نیست و شعاع استوایی زمین از شعاع قطبی آن بیشتر است و هرچه از استوا به سمت قطب‌ها برویم، g در حال افزایش است.

اگر از استوا به مدار 45° جغرافیایی برویم یعنی از استوا به سوی قطب برویم، g افزایش می‌یابد و دورهٔ آونگ $(T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}})$ کمی کوچک‌تر می‌شود.

B ۱۵۴۱ ۲

خط فکری ابتدا میدان گرانش در ارتفاع R_e (R_e شعاع کرهٔ زمین) از سطح زمین را به‌دست بیاورید، سپس به سراغ به دست آوردن دوره بروید.

۱ شتاب گرانش در هر نقطه برابر $g=GM/R^2$ است که R فاصله از مرکز زمین است، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} \text{در سطح زمین: } g_\circ=G\dfrac{M}{R_e^2} \\ \text{در ارتفاع } R_e\text{: } g'=G\dfrac{M}{(R_e+R_e)^2}\Rightarrow g'=G\dfrac{M}{4R_e^2} \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{g'}{g}=\frac{G\frac{M}{4R_e^2}}{G\frac{M}{R_e^2}}\Rightarrow \frac{g'}{g}=\frac{1}{4}$$

۲ اکنون می‌توان نسبت دوره‌ها را به‌دست آورد.

$$\left\{\begin{array}{l} T=2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}} \\ T'=2\pi\sqrt{\dfrac{\ell'}{g'}} \end{array}\right.\Rightarrow \frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{\ell'}{\ell}}\times\sqrt{\frac{g}{g'}}\Rightarrow \frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{9\ell}{\ell}}\times\sqrt{4}\Rightarrow \frac{T'}{T}=3\times 2\Rightarrow T'=6T$$

B ۱۵۴۲ ۴

وقتی حالت بی‌وزنی وجود دارد، اگر آونگ ساعت را منحرف کنیم به جای اول باز نمی‌گردد، یعنی اصولاً آونگ نوسان نمی‌کند، در نتیجه ساعت آونگ‌دار نیز که عقربه‌هایش در اثر نوسان آونگ حرکت می‌کنند، کار نخواهد کرد.

A ۱۵۴۳ ۱

دورهٔ حرکت آونگ $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ و دورهٔ نوسان دستگاه جرم- فنر $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ است، در این صورت دورهٔ آونگ به شتاب گرانش (g) بستگی دارد اما دورهٔ نوسان دستگاه جرم- فنر به شتاب گرانش (g) بستگی ندارد. بنابراین با دور شدن از سطح زمین و کاهش شتاب گرانش $(\downarrow g=G\frac{M}{r^{2}\uparrow})$ دورهٔ حرکت آونگ افزایش می‌یابد اما دورهٔ حرکت دستگاه جرم- فنر ثابت می‌ماند.

B ۱۵۴۴ ۴

یادآوری هرگاه دمای یک ریسمان یا میله فلزی با طول اولیه ℓ_1 و ضریب انبساط طولی α به اندازهٔ $\Delta\theta$ افزایش یابد، طول ثانویه آن خواهد شد $(\ell_2=\ell_1(1+\alpha\Delta\theta))$. دوره آونگ را در دو حالت نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\left\{\begin{array}{l} T_1=2\pi\sqrt{\dfrac{\ell_1}{g}} \\ T_2=2\pi\sqrt{\dfrac{\ell_2}{g}} \end{array}\right.\Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{\ell_2}{\ell_1}}\Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{\ell_1(1+\alpha\Delta\theta)}{\ell_1}}\Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=\sqrt{1+\alpha\Delta\theta}$$

دمای اولیه $0^\circ C$ بوده و دمای نهایی θ است، از این‌رو $\Delta\theta=\theta$ بنابراین:

$$\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{1+\alpha\theta}$$

A ۱۵۴۵ ۱

نکته هرگاه دوره آونگ ساعت آونگ‌دار افزایش یابد، ساعت کندتر کار کرده و عقب می‌ماند و هرگاه دوره کاهش یابد ساعت تندتر کار کرده و جلو می‌افتد.

نکته شتاب گرانش g در استوا از بقیه نقاط دیگر سطح زمین کمتر است.

اگر ساعت را از تهران به استوا ببریم با توجه به اینکه در استوا شتاب گرانش از بقیهٔ نقاط سطح کرهٔ زمین کمتر است، دورهٔ نوسان آونگ افزایش می‌یابد $(\uparrow T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g\downarrow}})$ و ساعت کندتر کار کرده و عقب می‌ماند. بنابراین گزارهٔ (الف) درست است.

با افزایش دما، طول آونگ فلزی افزایش می‌یابد و دوره آونگ افزایش یافته و ساعت عقب می‌ماند بنابراین گزارهٔ (ب) نیز درست است.

C ۱۵۴۶ ۲

دورهٔ آونگ ۲s بوده و ۰/۲s دوره کاهش می‌یابد، در این صورت دوره $T'=2-0/2=1/8s$ می‌شود. در این صورت تعداد نوسان‌های آونگ افزایش می‌یابد و باعث می‌شود ساعت تندتر کار کند و جلو بیفتد. یعنی در هر ۱/۸s، ساعت ۰/۲s جلو می‌افتد. با توجه به این مطلب میزان جلو افتادن ساعت در مدت ۲۴h با یک تناسب ساده به‌دست می‌آید.

۱/۸s	۰/۲s
۲۴h	x

$$\Rightarrow x=\frac{8}{3}h=160\,min$$

B ۱۵۴۷ ۳

دورهٔ آونگ ساده $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ است و در سطح کرهٔ ماه دورهٔ آونگ طولانی‌تر می‌شود و دوره در سطح کره ماه خواهد شد:

$$\frac{T_m}{T_z}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_m}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_z}}}=\sqrt{\frac{g_z}{g_m}}\Rightarrow \frac{T_m}{T_z}=\sqrt{\frac{g_z}{\frac{1}{6}g_z}}=\sqrt{6}\Rightarrow T_m=\sqrt{6}T_z$$

چرخش عقربه‌های ساعت آونگ‌دار به کمک نوسان آونگ صورت می‌گیرد. دورهٔ چرخش عقربهٔ ساعت‌شمار در سطح زمین ۱۲ ساعت است، بنابراین دورهٔ چرخش عقربهٔ ساعت‌شمار در سطح کرهٔ ماه برابر است با: $12\times\sqrt{6}\simeq 12\times 2/45=29h$

B ۱۵۴۸ ۲

۱ طول آونگ را در حالت اول به‌دست می‌آوریم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow 2=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow 1=\pi^2\left(\frac{\ell}{\pi^2}\right)\Rightarrow \ell=1m$$

۲ بنابراین طول آونگ جدید برابر است با $\ell'=100-19=81cm$ و دورهٔ آونگ جدید ساعت برابر خواهد شد با:

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}}\Rightarrow T'=2\pi\sqrt{\frac{0/81}{\pi^2}}\Rightarrow T'=1/8s$$

۳ در مدت ۱/۸s ساعت به اندازهٔ $2-1/8=0/2s$ جلو می‌افتد، پس در مدت یک شبانه‌روز (۸۶۴۰۰s) مقدار مدتی که جلو می‌افتد برابر است با:

۱/۸	۰/۲
۸۶۴۰۰	Δt

$$\Rightarrow \Delta t=9600s=$$ ۲ ساعت و ۴۰ دقیقه

C ۱۵۴۹ ۲

خط فکری باید در حل این مسئله به کمک چگالی و جرم سیاره، شتاب گرانش در سطح سیاره را برحسب شتاب گرانش در سطح زمین به‌دست بیاورید. سپس دورهٔ آونگ را در سطح سیاره حساب کنید تا بتوانید مقدار عقب‌افتادگی یا جلوافتادگی ساعت را بیابید.

۱ با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$\rho_p=32\rho_e\Rightarrow \frac{M_p}{V_p}=32\frac{M_e}{V_e}\xrightarrow{M_p=4M_e} V_e=8V_p$$

$$\xrightarrow{V=\frac{4}{3}\pi R^3} R_e=2R_p$$

۲ اکنون با داشتن نسبت جرم‌ها و نسبت شعاع‌ها نسبت میدان گرانش در سطح سیاره (g_p) به میدان گرانش در سطح زمین (g_e) را حساب می‌کنیم.

$$g_p=G\frac{M_p}{R_p^2}, g_e=G\frac{M_e}{R_e^2}\Rightarrow \frac{g_p}{g_e}=\frac{M_p}{M_e}\times\frac{R_e^2}{R_p^2}=4\times 4=16\Rightarrow g_p=16g_e$$

۳ دورهٔ آونگ در سطح زمین ۲s است. دوره را در سطح سیاره به‌دست می‌آوریم.

$$T_p=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_p}}, T_e=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_e}}\Rightarrow \frac{T_p}{T_e}=\sqrt{\frac{g_e}{g_p}}\Rightarrow \frac{T_p}{2}=\sqrt{\frac{1}{16}}\Rightarrow T_p=\frac{1}{2}s$$

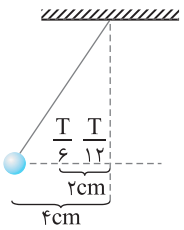
۴ دورهٔ آونگ ساعت کوتاه شده است، بنابراین ساعت تندتر کار می‌کند و جلو می‌افتد. ساعت هر ۰/۵s را به اشتباه ۲s نشان می‌دهد یعنی در هر ۰/۵s، ساعت ۱/۵s جلو می‌افتد. در مدت یک شبانه‌روز یعنی ۲۴ ساعت:

۰/۵s	۱/۵s
۲۴h	Δt

$$\Rightarrow \Delta t=72h$$

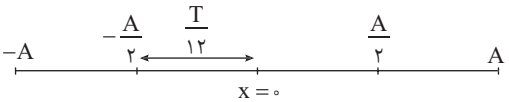
۴ ۱۵۵۰ C

۱ بیشترین انحراف آونگ از راستای قائم همان دامنه نوسان آونگ است، بنابراین دامنه نوسان $A=۴cm$ است.



۲ مکان ۲cm یعنی: $\frac{x}{A}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{A}{۲}$

یادآوری بازهٔ زمانی که طول می‌کشد تا نوسانگر از مکان $\frac{A}{۲}$ به مرکز نوسان برسد برابر $\frac{T}{۱۲}$ است.



۳ با توجه به فرض مسئله دوره را حساب می‌کنیم: $\frac{T}{۱۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow T=۳s$

۴ طول آونگ را به‌دست می‌آوریم.

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow ۳=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow ۳=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{\pi^۲}}\Rightarrow \ell=\frac{۹}{۴}m$$

بنابراین طول نخ برابر $\frac{۹}{۴}\times ۱۰۰=۲۲۵cm$ می‌باشد.

۴ ۱۵۵۱ A

دوره آونگ به مقدار انحراف آن بستگی ندارد، بنابراین وقتی انحراف آن را از ۲° به ۵° تغییر می‌دهیم، دوره تغییری نمی‌کند و گزینه (۱) و (۲) نادرست است.

تندی گلوله آونگ هنگام گذر از راستای قائم (حالت تعادل) بیشینه و برابر $v_m=A\omega$ است، بسامد زاویه‌ای در دو حالت برابر است (طول آونگ‌ها برابر است)، اما دامنه در حالت دوم بزرگ‌تر بوده و تندی آونگ در حالت دوم بزرگ‌تر است بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.

۱ ۱۵۵۲ B

خط فکری باید به سراغ کار و انرژی برویم و ابتدا به کمک پایستگی انرژی مکانیکی، طول آونگ را به‌دست بیاوریم، سپس با داشتن طول آونگ، دوره را حساب کرد.

۱ پایین‌ترین نقطهٔ مسیر حرکت را مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی فرض می‌کنیم.

۲ ارتفاع گلولهٔ آونگ را وقتی ۶۰° منحرف می‌شود برحسب طول آونگ حساب می‌کنیم:

$$h=\ell-\ell\cos ۶۰^\circ\Rightarrow h=\ell-\frac{\ell}{۲}\Rightarrow h=\frac{\ell}{۲}$$

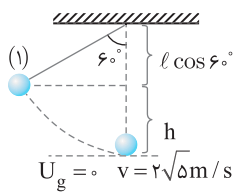
۳ پایستگی انرژی مکانیکی را می‌نویسیم:

$$E_۱=E_۲\Rightarrow U_۱+K_۱=U_۲+K_۲\Rightarrow mgh+۰=۰+\frac{۱}{۲}mv^۲$$

$$gh=\frac{۱}{۲}v^۲\Rightarrow ۱۰\times(\frac{\ell}{۲})=\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۵})^۲\Rightarrow \ell=۲m$$

۴ دورهٔ آونگ را حساب می‌کنیم:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\xrightarrow{\pi^۲=g} T=۲\sqrt{۲}s$$



۱ ۱۵۵۳ B

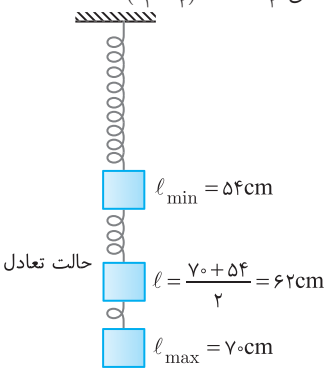
خط فکری در حرکت هماهنگ ساده هرگاه نوسانگر به حالت تعادل (مرکز نوسان) نزدیک می‌شود تندی‌اش افزایش می‌یابد، بنابراین در حل این مسئله باید مشخص کنیم که وقتی طول فنر ۶۰cm و ۶۵cm است، فاصلهٔ آن از مرکز نوسان چند سانتی‌متر است و هر کدام که به مرکز نوسان نزدیک‌تر باشد تندی در آن نقطه بیشتر است.

یادآوری حرکت هماهنگ ساده، یک حرکت روی خط راست در دو طرف یک نقطه در وسط مسیر است.

۱ طول فنر را در حالتی که وزنه از مرکز نوسان (وسط مسیرش) می‌گذرد به‌دست می‌آوریم:

$$\ell_{\text{حالت تعادل}}=\frac{۷۰+۵۴}{۲}=۶۲cm$$

۲ متحرک (نوسانگر) در ۶۰cm در فاصلهٔ $۶۰-۶۲=۲cm$ مرکز نوسان قرار دارد و در ۶۵cm در فاصلهٔ $۶۲-۶۵=۳cm$ مرکز قرار دارد و می‌دانیم که تندی متحرک در مرکز نوسان بیشینه است و با دور شدن از مرکز نوسان تندی کاهش می‌یابد، از این‌رو تندی $s_۱$ بزرگ‌تر از تندی $s_۲$ است. $(s_۱>s_۲)$

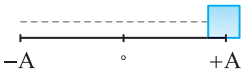


۴ ۱۵۵۴ C

خط فکری تندی متوسط $\frac{۲A\omega}{\pi}$ است. تندی متوسط را برحسب دامنه A و دورهٔ T به‌دست می‌آوریم. سپس برای تک‌تک گزینه‌ها تندی را حساب کرده و با هم مقایسه می‌کنیم.

۱ با توجه به رابطهٔ $\omega=\frac{۲\pi}{T}$ خواهیم داشت:

$$s_{av}=\frac{۲A\omega}{\pi}\xrightarrow{\omega=\frac{۲\pi}{T}} s_{av}=\frac{۲A}{\pi}(\frac{۲\pi}{T})\Rightarrow s_{av}=\frac{۴A}{T}$$

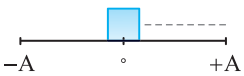


۲ در بازهٔ صفر تا $\frac{T}{۲}$ یعنی در مدت نصف دوره، نوسانگر از $+A$ تا $-A$ حرکت می‌کند: $s_{av}=\frac{۲A}{\frac{T}{۲}}=\frac{۴A}{T}$ و گزینهٔ (۱) درست است.

۳ در بازهٔ صفر تا T یعنی در مدت یک دوره، نوسانگر مسافت $۴A$ را طی می‌کند. پس تندی متوسط برابر است با: $s_{av}=\frac{۴A}{T}$ و گزینهٔ (۲) درست است.

۴ همچنین در بازهٔ $\frac{۳T}{۴}$ تا T نوسانگر از مکان $x_۱=A\cos(\frac{۲\pi}{T}\times\frac{۳T}{۴})=۰$ تا $x_۲=+A$ جابه‌جا می‌شود:

$$s_{av}=\frac{A}{T-\frac{۳T}{۴}}=\frac{۴A}{T}$$



پس در هر سه گزینه تندی متوسط برابر $\frac{۲A\omega}{\pi}=\frac{۴A}{T}$ است.

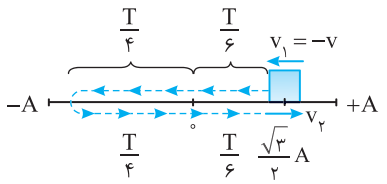
۲ ۱۵۵۵ C

نکته هرگاه نوسانگر در حال نزدیک شدن به حالت تعادل باشد، اندازهٔ شتاب در حال کاهش است.

خط فکری باید در حل مسئله به تک‌تک عبارت‌ها و اطلاعات مسئله دقت کرد.

مکان در لحظهٔ $t_۱$ مثبت $(x=+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A)$ بوده و شتاب در حال کاهش است، یعنی نوسانگر به مرکز نوسان نزدیک شده و سرعت آن منفی است $(v_۱=-v)$. عبارت «برای اولین بار مجدداً نوسانگر از مکان $\frac{+\sqrt{۳}}{۲}A$ بگذرد» یعنی نوسانگر به نقطهٔ بازگشت $(-A)$ برود و از آن نقطه برگردد. در این صورت وقتی به مکان $\frac{+\sqrt{۳}}{۲}A$ می‌رسد، سرعت آن مثبت است $(v_۲=v)$. اکنون مسیر را رسم کنید و به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده بازهٔ زمانی حرکت را بیابید تا بتوانید اندازهٔ شتاب متوسط را به‌دست بیاورید.

۱ مسیر را مطابق شکل زیر رسم می‌کنیم:



۲ بازهٔ زمانی کل مسیر خواهد شد: $\Delta t=۲(\frac{T}{۶})+۲(\frac{T}{۴})=\frac{T}{۳}+\frac{T}{۲}=\frac{۵T}{۶}$

۳ شتاب متوسط را حساب می‌کنیم:

$$a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{v-(-v)}{\frac{۵T}{۶}}\Rightarrow a_{av}=\frac{۱۲v}{۵T}$$

C ۱۵۵۶ ۲

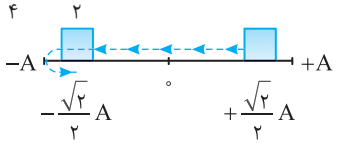
خط فکری تکانه برابر $\vec{P}=m\vec{v}$ است، پس تکانه و سرعت هم‌جهت‌اند و می‌دانیم که نیرو نیز با شتاب هم‌جهت است $(\vec{F}=m\vec{a})$. بنابراین در لحظاتی که تکانه و نیرو هم‌جهت هستند، سرعت و شتاب نیز هم‌جهت بوده و حرکت تندشونده است. می‌دانیم هنگامی که نوسانگر در حال نزدیک شدن به مرکز تعادل است، اندازهٔ سرعت در حال افزایش و حرکت تندشونده است. بنابراین شما باید مشخص کنید که در بازهٔ $t_۱=۰/۰۵s$ تا $t_۲=۰/۲۵s$ نوسانگر از کجا به کجا رفته و چه مدت در حال نزدیک شدن به مرکز نوسان است.

راه‌حل اول: دوره را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow ۵\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۰/۴s$

بازهٔ $t=۰/۰۵s$ تا $t=۰/۲۵s$ در یک دوره قرار می‌گیرد، مکان متحرک در لحظه‌های داده شده را به‌دست آورده و مسیر حرکت را رسم می‌کنیم.

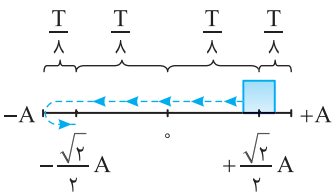
$$t_۱=۰/۰۵s\Rightarrow x_۱=A\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}A\ ,\ t_۲=۰/۲۵s$$

$$\Rightarrow x_۲=A\cos\frac{۵\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$$



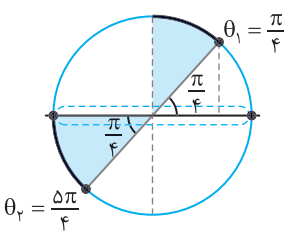
حال با توجه به بازه‌های شناخته شده داریم:

از $+\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ تا مرکز تعادل و از $-A$ تا $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ حرکت تندشونده است. بنابراین



$$t=\frac{T}{۸}+\frac{T}{۸}=\frac{T}{۴}=۰/۱s$$

راه‌حل دوم: در $t=۰/۰۵$ کمان دایرهٔ مثلثاتی (فاز) متناظر با $t=۰/۲۵s$ و در $\theta_۱=\omega t_۱=\frac{\pi}{۴}$ کمان دایرهٔ مثلثاتی متناظر با $\theta_۲=\omega t_۲=\frac{۵\pi}{۴}$ است و در دایره مثلثاتی زیر در دو کمان $\theta_۱$ تا $\frac{\pi}{۲}$ و π تا $\theta_۲$ نوسانگر در حال نزدیک شدن به مرکز تعادل $(x=۰)$ $(\theta=\frac{\pi}{۲}$ یا $\frac{۳\pi}{۲})$ است و تندی آن در حال افزایش است، پس در این بازه‌ها حرکت تندشونده است و داریم:



$$\frac{\pi}{۲}-\theta_۱=\omega\Delta t_۱\Rightarrow\frac{\pi}{۴}=۵\pi\Delta t_۱\Rightarrow\Delta t_۱=\frac{۱}{۲۰}s\Rightarrow\Delta t_۱=۰/۰۵s$$

$$\theta_۲-\pi=\omega\Delta t_۲\Rightarrow\frac{\pi}{۴}=۵\pi\Delta t_۲\Rightarrow\Delta t_۲=\frac{۱}{۲۰}s\Rightarrow\Delta t_۲=۰/۰۵s$$

پس به مدت $\Delta t_۱+\Delta t_۲=۰/۱s$ حرکت نوسانگر تندشونده است.

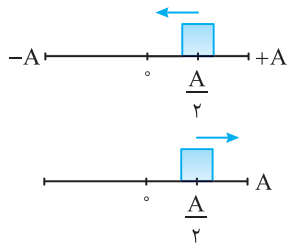
B ۱۵۵۷ ۴

هر دو متحرک در فاصلهٔ $\frac{A}{۲}$ از نقطهٔ تعادل قرار دارند و یکی از نوسانگرها در حال حرکت به سمت نقطهٔ تعادل بوده و نوسانگر دیگر در حال حرکت به سمت انتهای مسیر است. در معادلهٔ حرکت $x=A\cos\omega t$ به جای x، $+\frac{A}{۲}$ را قرار می‌دهیم و ωt را در هر حالت به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{A}{۲}=A\cos\omega t_۱\xrightarrow[\text{ربع اول}]{\text{در حال حرکت به سمت مرکز}}\cos\omega t_۱=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\omega t_۱=\frac{\pi}{۳}$$

$$\frac{A}{۲}=A\cos\omega t_۲\xrightarrow[\text{ربع چهارم}]{\text{در حال حرکت به سمت انتهای مسیر}}\cos\omega t_۲=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\omega t_۲=۲\pi-\frac{\pi}{۳}=\frac{۵\pi}{۳}$$



بنابراین اختلاف شناسهٔ تابع کسینوسی (اختلاف فاز) خواهد شد:

$$\Delta\theta=\omega t_۲-\omega t_۱=\frac{۵\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳}=\frac{۴\pi}{۳}$$

B ۱۵۵۸ ۱

خط فکری در حرکت‌شناسی یاد گرفتیم که هرگاه لحظهٔ رسیدن دو به متحرک به هم را از ما خواسته باشند، باید معادلهٔ حرکت هر دو متحرک را نوشته و با هم برابر قرار دهیم. پس شما هم همین کار را بکنید.

۱ بسامد زاویه‌ای نوسانگر اول خواهد شد:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\xrightarrow{T_۱=۲s}\omega_۱=\frac{۲\pi}{۲}\Rightarrow\omega_۱=\pi\ rad/s$$

۲ معادلهٔ حرکت نوسانگر اول را می‌نویسیم. $x=A\cos\omega t\Rightarrow x_۱=A\cos\pi t$

۳ بسامد زاویه‌ای نوسانگر دوم را به‌دست آورده و معادلهٔ حرکت آن را می‌نویسیم.

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\xrightarrow{T_۲=۶s}\omega_۲=\frac{۲\pi}{۶}\Rightarrow\omega_۲=\frac{\pi}{۳}\ rad/s$$

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow x_۲=A\cos\frac{\pi}{۳}t$$

۴ دو معادله را برابر قرار می‌دهیم.

$$x_۱=x_۲\Rightarrow A\cos\pi t=A\cos\frac{\pi}{۳}t\Rightarrow\cos\pi t=\cos\frac{\pi}{۳}t$$

یادآوری ریاضی

$$\cos\alpha=\cos\beta\Rightarrow\alpha=\beta\ \text{یا}\ \alpha=۲\pi-\beta$$

$$\pi t=۲\pi-\frac{\pi}{۳}t\Rightarrow\frac{۴\pi}{۳}t=۲\pi\Rightarrow t=\frac{۳}{۲}s=۱/۵s$$

۵ حال با جای‌گذاری $t=۱/۵s$ در $x_۱$ یا $x_۲$، مکان نوسانگرها را به‌دست می‌آوریم:

$$x_۱=A\cos\pi t\Rightarrow x_۱=A\cos\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow x_۱=۰$$

C ۱۵۵۹ ۱

یادآوری مکان نوسانگر یعنی فاصلهٔ نوسانگر از مبدأ (حالت تعادل).

در $t=۱s$ فاصلهٔ نوسانگر از حالت تعادلش $x_۱=A-b$ است. بنابراین خواهیم داشت: $x=A\cos\omega t\xrightarrow{t=۱s}A-b=A\cos\omega\Rightarrow\cos\omega=\frac{A-b}{A}$

در $t=۲s$ مکان نوسانگر برابر $x_۲=A-(b+c)$ می‌شود. از این‌رو می‌توان نوشت:

$$x=A\cos\omega t\xrightarrow{t=۲s}A-b-c=A\cos۲\omega\Rightarrow\cos۲\omega=\frac{A-b-c}{A}$$

یادآوری ریاضی

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

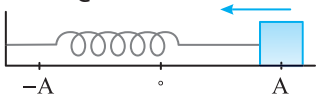
$\cos 2\omega = 2\cos^2\omega - 1 \Rightarrow \frac{A-b-c}{A} = 2(\frac{A-b}{A})^2 - 1$

$\Rightarrow \frac{A-b-c}{A} = \frac{2A^2-4Ab+2b^2-A^2}{A^2}$

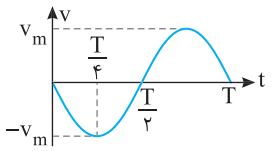
$\Rightarrow A^2 - Ab - Ac = A^2 - 4Ab + 2b^2 \Rightarrow 3Ab - Ac = 2b^2 \Rightarrow A = \frac{2b^2}{3b-c}$

B ۱۵۶۰ ۴

متحرک از $x=+A$ رها شده پس در لحظهٔ $t=0$ سرعت متحرک صفر می‌باشد و پس از رها شدن مطابق شکل نوسانگر در خلاف جهت محور x ها شروع به حرکت می‌کند و سرعت متحرک ابتدا منفی است.



یعنی نمودار باید در مدت $\frac{T}{2}$ که نوسانگر از A به $-A$ می‌رود، زیر محور زمان باشد. البته در $\frac{T}{4}$ تندی بیشینه است و در برگشت از $-A$ به $+A$ سرعت مثبت و باید نمودار بالای محور زمان باشد. بنابراین نمودار سرعت زمان به شکل روبه‌روست و گزینهٔ (۴) درست است.



B ۱۵۶۱ ۱

خط فکری ابتدا دورهٔ حرکت را با توجه به نمودار $x-t$ به دست آورده و سپس به صورت تقریبی مشخص می‌کنیم که در $t=1/3s$ نوسانگر در چه مکانی قرار می‌گیرد تا مشخص شود علامت سرعت و شتاب آن چگونه است.

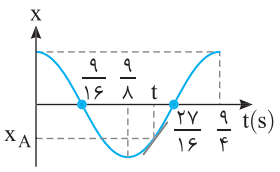
۱ با توجه به نمودار در $t=0/75s$ نوسانگر برای اولین بار به $x=\frac{-A}{2}$ رسیده است. از این رو در معادلهٔ حرکت t را $0/75s$ و x را $-\frac{A}{2}$ قرار می‌دهیم.

$x = A\cos\omega t \Rightarrow \frac{-A}{2} = A\cos\omega t \Rightarrow \cos\omega t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \omega t = \frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow \frac{2\pi}{T} \times \frac{75}{100} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow T = \frac{9}{4}s = 2/25s$

۲ نمودار را رسم می‌کنیم.

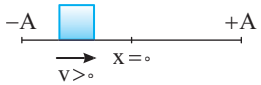
۳ مشخص می‌کنیم که لحظهٔ $t=1/3s$ بین کدام لحظه‌های روی شکل است: $\frac{9}{8} < 1/3 < \frac{27}{16}$



یعنی متحرک در لحظهٔ $t=1/3s$ در قسمت سوم نمودار بوده و مکان آن منفی است.

۴ در حرکت هماهنگ ساده شتاب و مکان هم‌علامت نیستند و وقتی مکان منفی است، شتاب مثبت است.

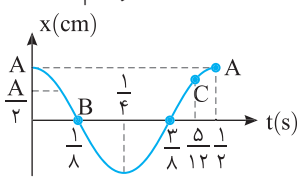
۵ شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t=1/3s$ مثبت است، بنابراین سرعت مثبت است. البته می‌توان این‌گونه استدلال کرد که متحرک از مکان‌های منفی در حال حرکت به سوی حالت تعادل است، بنابراین سرعت آن مثبت است.



C ۱۵۶۲ ۲

خط فکری در حرکت هماهنگ ساده، هرچه مکان نوسانگر به حالت تعادل $x=0$ نزدیک‌تر باشد، تندی نوسانگر بیشتر است. بنابراین باید مکان نوسانگر را در سه لحظهٔ بیان شده مشخص کرد تا بتوانیم دربارهٔ مقایسهٔ تندی آن‌ها اظهارنظر کنیم.

ابتدا دورهٔ حرکت را با توجه به نمودار دست می‌آوریم. در $t=\frac{1}{12}s$ نوسانگر برای اولین بار از $\frac{A}{2}$ عبور کرده است:



$x = A\cos\omega t \Rightarrow \frac{1}{2} = \cos\omega t$

$\omega t = \frac{\pi}{3} \xrightarrow{t=\frac{1}{12}s} \omega \times \frac{1}{12} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega = 4\pi \xrightarrow{\omega=\frac{2\pi}{T}} T = \frac{1}{2}s$

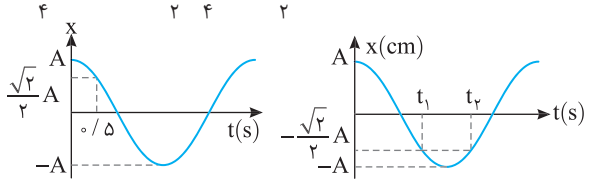
اکنون در لحظه‌های t_1، t_2 و t_3 مکان نوسانگر را مشخص می‌کنیم. هرچه مکان به مبدأ (حالت تعادل) نزدیک‌تر باشد تندی بیشتر است. در $t_1=\frac{1}{2}s$ نوسانگر در مکان A بوده و تندی صفر است و در $t_3=\frac{1}{8}s$ نوسانگر در نقطهٔ B در حال گذر از مرکز نوسان است و تندی‌اش بیشینه است. در لحظهٔ $t_2=\frac{5}{12}s$ یعنی نقطهٔ C نمودار تندی بین صفر و v_m است. پس $s_1 < s_2 < s_3$.

C ۱۵۶۳ ۱

با توجه به نمودار $x-t$، در لحظهٔ $t=0/5s$ نوسانگر برای اولین بار از $x=\frac{\sqrt{2}}{2}A$ عبور می‌کند.

$x = A\cos\omega t \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}A = A\cos\omega t \Rightarrow \cos\omega t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\omega t = \frac{\pi}{4} \xrightarrow{t=0/5s} \frac{\omega}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{2} rad/s$



با توجه به اینکه نوسانگر در t_1 و t_2 دو بار پشت سر هم از $-\frac{\sqrt{2}}{2}A$ عبور کرده پس دو حالت داریم:

حالت اول:

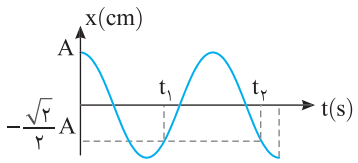
$x_1 = A\cos\frac{\pi}{2}t_1 \Rightarrow \frac{-\sqrt{2}}{2}\theta = \cos\frac{\pi}{2}t_1 \Rightarrow \frac{\pi}{2}t_1 = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{3}{2}s$

$x_2 = A\cos\frac{\pi}{2}t_2 \Rightarrow \frac{-\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{2}t_2 \Rightarrow \frac{\pi}{2}t_2 = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow t_2 = \frac{5}{2}s$

$\Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{5}{3}$

اما نسبت به دست آمده با فرض مسئله سازگاری $(\frac{t_2}{t_1} = 2/2)$ ندارد و قابل قبول نیست.

حالت دوم:



$x = A\cos\frac{\pi}{2}t_1 \Rightarrow \frac{\pi}{2}t_1 = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{5}{2}s$

$x = A\cos\frac{\pi}{2}t_2 \Rightarrow \frac{\pi}{2}t_2 = \frac{11\pi}{4} \Rightarrow t_2 = \frac{11}{2}s$

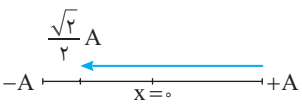
$\Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = 2/2$

بنابراین حالت دوم درست می‌باشد و $t_1 = 2/5s$ است.

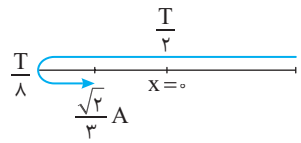
روش دیگر: با رسم مسیر و بازه‌های زمانی شناخته شده مدت زمانی که طول می‌کشد تا نوسانگر از مکان $+A$ به مکان $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ برود برابر $\frac{T}{8}$ است. بنابراین دوره خواهد شد:

$\frac{T}{8} = 0/5 \Rightarrow T = 4s$

حالت اول:



$t_1 = \frac{T}{4} + \frac{T}{8} = \frac{3T}{8} = \frac{3}{8} \times 4 = \frac{3}{2}s$



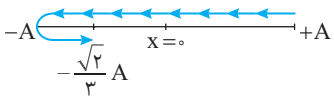
$t_2 = \frac{T}{2} + \frac{T}{8} = \frac{5T}{8} \Rightarrow t_2 = \frac{5}{8} \times 4 = \frac{5}{2}s$

نسبت $t_۲$ به $t_۱$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{t_۲}{t_۱}=\frac{\frac{۵}{۲}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۵}{۳}$$

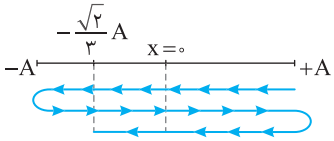
با فرض مسئله سازگاری ندارد و جواب نیست.

حالت دوم:



$$t_۱=\frac{T}{۲}+\frac{T}{۸}=\frac{۵\pi}{۸}$$

$$t_۱=\frac{۵}{۸}\times۴\Rightarrow t_۱=\frac{۵}{۲}s$$



$$t_۲=T+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۸}\Rightarrow t_۲=\frac{۱۱T}{۸}$$

$$\Rightarrow t_۲=\frac{۱۱}{۸}\times۴\Rightarrow t_۲=\frac{۱۱}{۲}s$$

نسبت $\frac{t_۲}{t_۱}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{t_۲}{t_۱}=\frac{\frac{۱۱}{۲}}{\frac{۵}{۲}}=۲/۲s$$

بنابراین حالت دوم درست است و $t_۱$ برابر $۲/۵s$ است.

B ۳ ۱۵۶۴

یادآوری ریاضی

$$\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$$

معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده را به شکل معادلهٔ کتاب درسی $x=A\cos\omega t$

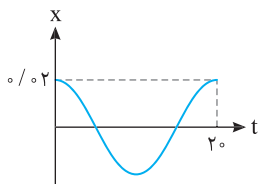
درمی‌آوریم:

$$x=۰/۰۲\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۰}t)\Rightarrow x=۰/۰۲\cos(\frac{\pi}{۱۰}t)$$

دوره را حساب می‌کنیم:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\frac{\pi}{۱۰}=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۲۰s$$

اکنون می‌توان نمودار را رسم کرد.



بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

C ۲ ۱۵۶۵

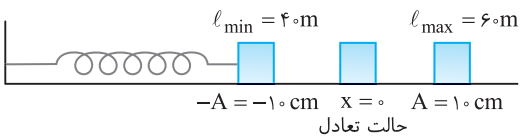
۱ دورهٔ سامانهٔ جرم - فنر را حساب می‌کنیم.

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\xrightarrow{m=۲kg\,,\,k=۸۰۰N/m}T=۲\pi\sqrt{\frac{۲}{۸۰۰}}\xrightarrow{\pi\sim۳}$$

$$T=۲\times۳\times\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow T=۰/۳s$$

۲ طول پاره‌خط مسیر برابر اختلاف بیشینه طول فنر (ℓ_{max}) و کمینه طول فنر (ℓ_{min}) است.

$$\text{طول مسیر}=\ell_{max}-\ell_{min}=۶۰-۴۰=۲۰cm$$



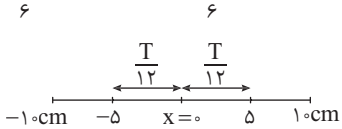
۳ دامنهٔ حرکت نصف طول مسیر حرکت است.

$$A=\frac{۲۰}{۲}=۱۰cm$$

۴ تغییر طول فنر در اطراف $x=۰$ (نقطهٔ تعادل) در زمان کوتاه‌تری نسبت به مکان‌های دیگر انجام می‌شود زیرا در اطراف این نقطه تندی نوسانگر بیشینه است، بنابراین تغییر طول به اندازهٔ $۱۰cm$ در بین $x=+۵cm$ تا $x=-۵cm$ و بالعکس در زمان کوتاه‌تری نسبت به تغییر طول به اندازهٔ $۱۰cm$ در بقیه مسیر صورت می‌گیرد.

۵ به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده زمان حرکت از $+۵cm$ به $-۵cm$ خواهد شد.

$$\Delta t=۲\frac{T}{۱۲}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۶}\xrightarrow{T=۰/۳s}\Delta t=\frac{۰/۳}{۶}=۰/۰۵s$$



B ۳ ۱۵۶۶

خط فکری از مبحث دینامیک استفاده کنید. هنگامی که وزنه‌ها در حال تعادل هستند نیروی خالص وارد بر وزنه‌ها صفر بوده و نیروها متوازن هستند. با توجه به این مطلب می‌توانید، ثابت فنر را حساب کنید. بعد از جداشدن B، تنها A به فنر متصل بوده و دوره خواهد شد:

$$T=۲\pi\sqrt{m_A/k}$$

۱ ابتدا ثابت فنر را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net}=۰\Rightarrow(m_A+m_B)g=k\Delta\ell\Rightarrow$$

$$(۰/۱+۰/۳)\times۱۰=k(۰/۳-۰/۲)\Rightarrow k=۴۰N/m$$

۲ بعد از جدایی وزنهٔ B، وزنهٔ A حرکت هماهنگ ساده خواهد داشت، بنابراین:

$$T_A=۲\pi\sqrt{\frac{m_A}{k}}\Rightarrow T_A=۲\pi\sqrt{\frac{۰/۱}{۴۰}}\Rightarrow T_A=\frac{\pi}{۱۰}s$$

B ۱ ۱۵۶۷

نکته هرگاه n فنر مشابه به یک وزنه متصل شوند، می‌توان به جای n فنر، یک فنر با ثابت $k'=nk$ در نظر گرفته و مسئله را حل کرد.

ابتدا دوره دستگاه با جرم m و ثابت k را به‌دست می‌آوریم: $T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{۶۰}{۲۰}=۳s$

رابطهٔ دوره را در دو حالت نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم و دوره در حالت دوم (T') را به‌دست می‌آوریم.

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}},T'=۲\pi\sqrt{\frac{m'}{k'}}\Rightarrow\frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{m'}{m}}\times\sqrt{\frac{k}{k'}}\xrightarrow[k'=۳k]{m'=\frac{m}{۳}}$$

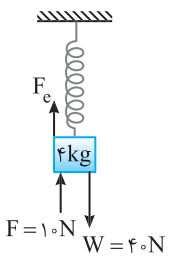
$$\frac{T'}{۳}=\sqrt{\frac{۱}{۳}}\times\sqrt{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow\frac{T'}{۳}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow T'=۱s$$

بسامد خواهد شد:

$$f'=\frac{۱}{T'}\Rightarrow f'=\frac{۱}{۱}\Rightarrow f'=۱Hz$$

C ۳ ۱۵۶۸

۱ نیروهای وارد بر وزنه وقتی که ساکن است متوازن است. نیروها را رسم کرده به کمک آن ثابت فنر را حساب می‌کنیم.



طول فنر از طول طبیعی‌اش بیشتر شده بنابراین نیروی کشسانی فنر رو به بالا است.

$$F_{net}=۰\Rightarrow F_e+F=W\Rightarrow k\Delta\ell=۱۰+۴۰\xrightarrow{\Delta\ell=۳cm}$$

$$۳۰=k\times\frac{۳}{۱۰۰}\Rightarrow k=۱۰۰۰N/m$$

۲ با حذف F وزنه شروع به نوسان کرده و دورهٔ حرکت آن خواهد شد:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow T=۲\pi\sqrt{\frac{۴}{۱۰۰۰}}\Rightarrow T=۲\sqrt{\frac{۴}{۱۰۰}}\Rightarrow T=۲\times۰/۲=۰/۴s$$

B ۱ ۱۵۶۹

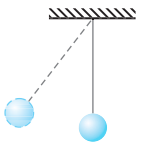
خط فکری صورت سؤال را مجدداً بخوانید. گلوله را می‌گیریم و در امتداد قائم تا محل آویز می‌بریم و از آن‌جا رها می‌کنیم. در این صورت گلوله با شتاب گرانش g پایین می‌آید و زمان پایین آمدن آن را باید از معادلهٔ جابه‌جایی زمان حرکت با شتاب ثابت به‌دست بیاورید. اما در حالت دوم آونگ را از راستای قائم رها می‌کنیم تا نوسان کند. در این حالت مدت زمان برگشت آونگ از دامنه به حالت تعادل (راستای قائم) $\frac{۱}{۴}$ دوره است و باید دوره آونگ را حساب کرد و $\frac{۱}{۴}$ آن را به‌دست آورد و با حالت اول مقایسه کرد.



گلوله را از ارتفاع ℓ (طول آونگ) رها کرده‌ایم. زمان رسیدن گلوله به حالت اولیه خواهد شد:

$$\Delta y=\frac{۱}{۲}gt^۲\Rightarrow\ell=\frac{۱}{۲}gt_۱^۲\Rightarrow t_۱=\sqrt{\frac{۲\ell}{g}}$$

زمان برگشت آونگ از انتهای مسیر به حالت قائم $\frac{۱}{۴}$ دورهٔ آن است.



$$t_۲=\frac{T}{۴}=\frac{۲\pi}{۴}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow t_۲=\frac{\pi}{۲}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow t_۲=\sqrt{\frac{\pi^۲}{۴}\frac{\ell}{g}}$$

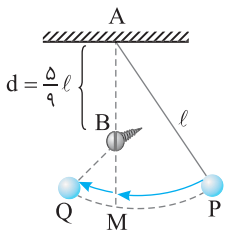
$$\frac{t_۱}{t_۲}=\frac{\sqrt{\frac{۲\ell}{g}}}{\sqrt{\frac{\pi^۲}{۴}\frac{\ell}{g}}}=\sqrt{\frac{۸}{\pi^۲}}\xrightarrow{\pi^۲\approx۱۰}\frac{t_۱}{t_۲}\approx\sqrt{۰/۸}\approx۰/۹<۱$$

بنابراین آونگ اول زودتر به حالت اولیه برمی‌گردد.

۳ ۱۵۷۰ C

خط فکری دقت کنید وقتی ریسمان آونگ به مانع گیر می‌کند قسمت پایین آونگ، خودش یک آونگ جدید با طول $\frac{۴}{۹}\ell$ می‌شود. یعنی مسیر رفت و برگشت PM و MP را با یک آونگ به طول ℓ و دورهٔ $T=۲\pi\sqrt{\ell/g}$ در نظر بگیرید، اما مسیر رفت و برگشت MQ و QM را آونگی به طول $\frac{۴\ell}{۹}$ و دورهٔ $T'=۲\pi\sqrt{\frac{\frac{۴\ell}{۹}}{g}}$ سروکار دارید. اکنون با توجه به این مطالب به سراغ حل مسئله می‌رویم.

۱ از P تا M و از M تا P بازهٔ زمانی نوسان $۲\times\frac{T}{۴}$ است و از M تا Q و Q تا M بازهٔ زمانی نوسان $۲\times\frac{T'}{۴}$ است.



۲ زمان یک نوسان کامل این آونگ ترکیبی، جمع این دو بازهٔ زمانی است.

$$T_۲=۲\times\frac{T}{۴}+۲\frac{T'}{۴}=\frac{T}{۲}+\frac{T'}{۲}\Rightarrow T_۲=\frac{۱}{۲}(T+T')\Rightarrow$$

$$T_۲=\frac{۱}{۲}\left(۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}+۲\pi\sqrt{\frac{\frac{۴}{۹}\ell}{g}}\right)\Rightarrow T_۲=\frac{۱}{۲}\times۲\pi\left(\sqrt{\frac{\ell}{g}}+\frac{۲}{۳}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\right)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۳}\times۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$\Rightarrow T_۲=\frac{۵}{۶}T$$

۱ ۱۵۷۱ B

قبل از حل مسئله باید با هم یک مقداری ریاضی تمرین کنیم. به جواب هریک از پرانتزها دقت کنید.

$$(۱+۰/۰۱)^۲=۱+۰/۰۲+۰/۰۰۰۱=۱/۰۲۰۱\sim۱/۰۲=[۱+۲(۰/۰۱)]$$

$$(۱+۰/۰۱)^۳=۱+۳(۰/۰۱)+۳(۰/۰۰۰۱)+(۰/۰۰۰۰۰۱)=۱/۰۳۰۳۰۱\sim۱/۰۳$$

مثل این است که هرگاه یک عدد کمتر از (۱) را با یک جمع کنیم و به توان برسانیم با تقریب خوبی می‌توانیم بنویسیم: $(۱+\varepsilon)^n\sim۱+n\varepsilon$

در حل این مسئله باید از این تقریب استفاده کنید.

۱ طول ثانویه را برحسب طول اولیه به‌دست می‌آوریم.

$$\ell_۲=\ell_۱(۱+\alpha\Delta\theta)\Rightarrow\ell_۲=\ell_۱(۱+۱/۱\times۱۰^{-۵}\times۴۰)$$

$$\Rightarrow\ell_۲=\ell_۱(۱+۴/۴\times۱۰^{-۴})=۱/۰۰۰۴۴\,\ell_۱$$

۲ دورهٔ آونگ در حالت اول ۲s است دوره را در حالت دوم به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}T_۲=۲\pi\sqrt{\frac{\ell_۲}{g}}\\T_۱=۲\pi\sqrt{\frac{\ell_۱}{g}}\end{cases}\Rightarrow\frac{T_۲}{T_۱}=\sqrt{\frac{\ell_۲}{\ell_۱}}\Rightarrow\frac{T_۲}{T_۱}=\sqrt{\frac{۱/۰۰۰۴۴\ell_۱}{\ell_۱}}\Rightarrow T_۲=T_۱\sqrt{۱/۰۰۰۴۴}$$

$$\Rightarrow T_۲=T_۱(۱+۰/۰۰۰۴۴)^{\frac{۱}{۲}}$$

اکنون از تقریب بالا استفاده می‌کنیم. $T_۲=۲(۱+\frac{۱}{۲}\times۰/۰۰۰۴۴)=۲/۰۰۰۴۴$

تغییر دوره خواهد شد: $\Delta T=T_۲-T_۱=۲/۰۰۰۴۴-۲=۰/۰۰۰۴۴s$

پنجره ۳

۳ ۱۵۷۲ A

بنا به قانون دوم نیوتون $F=ma$ و در حرکت سامانهٔ جرم فنر نیروی خالص وارد بر نوسانگر $F=kx$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$|ma|=k|x|\Rightarrow|a|=\frac{k}{m}|x|\Rightarrow|a|=|\frac{۲۰۰}{۰/۰۸}\times(\frac{-۲}{۱۰۰})|=۵۰m/s^۲$$

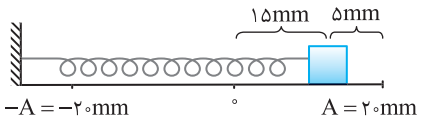
میانبر معادلهٔ شتاب - مکان نوسانگر به‌صورت $a=-\omega^۲x$ است.

۴ ۱۵۷۳ B

نکته نوسانگر در هر دوره، دو بار از مرکز نوسان خود عبور می‌کند.

۱ نوسانگر در هر دقیقه $\frac{۳۰}{۲}=۱۵$ نوسان کامل انجام می‌دهد.

۲ فاصلهٔ دو انتهای مسیر از هم برابر ۴cm داده شده پس دامنهٔ حرکت برابر $A=۲cm=۲۰mm$ است.



۳ دوره را به‌دست می‌آوریم. $T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{۶۰}{۱۵}=۴s$

۴ بسامد زاویه‌ای برابر است با: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{۲\pi}{۴}\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{۲}rad/s$

۵ فاصلهٔ نوسانگر از انتهای مسیر ۵mm=۰/۵cm بوده بنابراین مکان متحرک خواهد شد: $x=۱۵mm=۱/۵cm$

۶ اندازهٔ شتاب خواهد شد: $|a|=|-\omega^۲x|\Rightarrow a=\frac{\pi^۲}{۴}\times۱/۵=\frac{۱۵}{۴}=۳/۷۵\,cm/s^۲$

۱ ۱۵۷۴ B

خط فکری شتاب حرکت را در یک مکان معین باید به‌دست بیاوریم، بنابراین شما باید بسامد زاویه‌ای و مکان نوسانگر را دقیقاً مشخص کنید و با استفاده از رابطهٔ $|a|=\omega^۲x$ مسئله را حل کنید.

۱ ابتدا بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم. $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{۱۸۰}{۰/۲}}\Rightarrow\omega=۳۰rad/s$

نکته هرگاه وزنه را از حالت تعادل منحرف و رها کنیم، مقدار انحراف برابر دامنهٔ نوسان است.

۲ چون وزنه از فاصلهٔ 5cm حالت تعادل رها شده است، دامنهٔ نوسانگر 5cm است. فاصلهٔ نوسانگر از حالت تعادل وقتی پس از رها شدن ۲cm بالا رفته، برابر با $x=۳cm$ است. شتاب در مکان $x=۳cm$ برابر است با:

$$|a|=\omega^۲x\Rightarrow a=۹۰۰\times۰/۰۳=۲۷m/s^۲$$

۱ ۱۵۷۵ B

خط فکری رابطهٔ $a+۴x=۰$ را به‌صورت $a=-۴x$ نوشته و آن را با معادلهٔ شتاب - مکان $a=-\omega^۲x$ مقایسه می‌کنیم. با مقایسهٔ دو رابطه می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{cases}a=-۴x\\a=-\omega^۲x\end{cases}\Rightarrow\omega^۲=۴\Rightarrow\omega=۲rad/s$$

دوره را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow۲=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=\pi s$

۳ ۱۵۷۶ A

یادآوری در حرکت هماهنگ ساده، بیشینه شتاب نوسانگر از رابطهٔ $a_m=A\omega^۲$ به‌دست می‌آید که در آن A دامنه و ω بسامد زاویه‌ای است.

نوسانگر در هر ۰/۴ ثانیه ۲ نوسان کامل انجام می‌دهد، بنابراین دوره خواهد شد:

$$T=\frac{۰/۴}{۲}=۰/۲s$$

بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0/2}\Rightarrow\omega=10\pi\,rad/s$

با توجه به رابطهٔ شتاب بیشینه داریم:

$a_{max}=A\omega^2=A\times100\pi^2\Rightarrow A\times10^3=20\Rightarrow A=2\times10^{-2}m=2cm$

چون N و M دو سر پاره‌خط نوسان هستند پس طول MN برابر است با:

$MN=2A=4cm$

A ۱۵۷۷ ۴

با توجه به قانون دوم نیوتون $F=ma$ و قانون هوک $F=-kx$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}F_{max}=ma_m\\|F|=kx\end{cases}\Rightarrow ma_m=kA\Rightarrow a_m=\frac{k}{m}A\Rightarrow2=\frac{10}{m}\times\frac{8}{100}$$

$$\Rightarrow m=\frac{8}{20}kg=400g$$

B ۱۵۷۸ ۱

نکته تمام روابطی که در بررسی سامانهٔ جرم - فنر به دست آورده شده در حرکت آونگ ساده نیز صادق است از جمله رابطهٔ بین شتاب نوسانگر با مکان آن یعنی $a=-\omega^2x$ در این صورت ابتدا بسامد زاویه‌ای را به دست می‌آوریم:

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{L}}\Rightarrow\omega=\sqrt{10}\,rad/s$$

طول مسیر $6cm$ است بنابراین دامنهٔ حرکت $A=\frac{6}{2}=3cm$ است و وقتی آونگ در فاصلهٔ $1\,cm$ از انتهای مسیرش است، مکان آن $x=2cm$ خواهد بود. بنابراین:

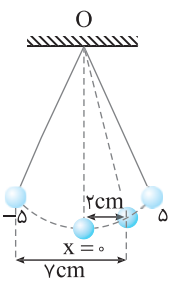
$a=-\omega^2x\Rightarrow|a|=+(10)(2\times10^{-2})=0/2m/s^2$

بازی با سوال گلوله‌ای به جرم $150g$ به انتهای نخی سبک به طول $15cm$ آویخته شده و روی مسیری به طول $10cm$ نوسان می‌کند. در لحظه‌ای که گلوله در فاصله $7cm$ از یک انتهای مسیر قرار دارد، اندازه شتاب چند متر بر مجذور ثانیه است؟ $(g=10m/s^2)$

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۱/۵

پاسخ دامنه نوسان آونگ نصف طول مسیر آن است.

$A=\frac{10}{2}=5cm$



وقتی گلوله آونگ در فاصله $7cm$ از یک انتهای مسیر است باید فاصله آن از حالت تعادل مطابق شکل $2cm$ باشد. $(x=2cm)$

اکنون بسامد زاویه‌ای را به دست می‌آوریم.

$\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}=\sqrt{\frac{10}{0/15}}=\sqrt{\frac{1000}{15}}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{200}{3}}rad/s$

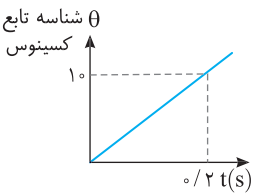
اندازه شتاب خواهد شد. $|a|=\omega^2x\Rightarrow|a|=\frac{200}{3}\times\frac{2}{100}\Rightarrow a=\frac{4}{3}m/s^2$

گزینهٔ ۲

A ۱۵۷۹ ۱

دامنه نصف طول پاره‌خط مسیر است. $A=\frac{4}{2}=2cm$

یادآوری کمان مثلثاتی در معادلهٔ $x=A\cos\omega t$ را شناسهٔ تابع کسینوس یا فاز (ωt) گویند.



با توجه به نمودار در لحظهٔ $t=0/2s$، شناسهٔ تابع کسینوس (فاز) ۱۰ رادیان است. بنابراین بسامد زاویه‌ای خواهد شد:

$\omega t=10\Rightarrow\omega\times0/2=10\Rightarrow\omega=50rad/s$

اندازهٔ شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$|a|=\omega^2x\Rightarrow|a|=(50)^2\times\frac{\sqrt{2}}{100}\Rightarrow|a|=25\sqrt{2}m/s^2$

بازی با سوال شناسه تابع کسینوسی نوسانگری در لحظهٔ t برابر π است، اگر دامنهٔ حرکت $2cm$ و دورهٔ آن π ثانیه باشد، پس از گذشت $\frac{T}{6}$ ثانیه از لحظهٔ t، اندازهٔ شتاب نوسانگر چند متر بر مجذور ثانیه است؟

کنکور دهه‌های گذشته

۱) $\frac{\sqrt{3}}{25}$ ۲) $\frac{2\sqrt{3}}{25}$ ۳) $\frac{1}{25}$ ۴) $\frac{2}{25}$

پاسخ لحظه‌ای که شناسهٔ تابع کسینوسی برابر π است را به‌دست می‌آوریم:

$\omega t=\pi\Rightarrow\frac{2\pi}{T}\times t=\pi\Rightarrow\frac{2\pi}{\pi}\times t=\pi\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}s$

مکان در $\frac{T}{6}$ بعد از t را حساب می‌کنیم:

$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{T}=2\,rad/s$

$x=0/2\cos\omega(t+\frac{T}{6})\Rightarrow x=0/2\cos2(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})$

$\Rightarrow x=0/2\cos\frac{4\pi}{3}=-0/1m$

اندازهٔ شتاب برابر است با: $|a|=|\omega^2x|=4\times0/1=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}m/s^2$

گزینهٔ ۳

A ۱۵۸۰ ۲

خط فکری معادلهٔ شتاب - مکان حرکت هماهنگ ساده به‌صورت $|a|=\omega^2x$ است. بنابراین از روی معادلهٔ حرکت $x=0/2\cos\pi t$ بسامد زاویه‌ای نوسانگر و مکان نوسانگر در $t=\frac{1}{3}s$ به‌دست می‌آوریم و اندازهٔ شتاب را حساب می‌کنیم.

۱ با مقایسهٔ معادلهٔ $x=0/2\cos\pi t$ با $x=A\cos\omega t$ مشخص است که بسامد زاویه‌ای برابر $\omega=\pi rad/s$ است.

۲ مکان در لحظهٔ $t=\frac{1}{3}s$ خواهد شد:

$x=0/2\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=0/2\times\frac{1}{2}\Rightarrow x=0/1m$

۳ اندازهٔ شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$|a|=\omega^2x\Rightarrow|a|=\pi^2\times0/1\xrightarrow{\pi^2=10}|a|=0/1m/s^2=10cm/s^2$

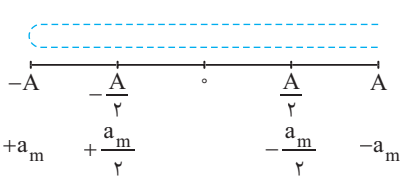
یادآوری در حرکت هماهنگ ساده مکان و شتاب هم‌علامت نیستند.

۴ مکان مثبت است از این رو شتاب باید منفی باشد: $a=-10cm/s^2$

B ۱۵۸۱ ۱

خط فکری در نقاط بازگشت یعنی نقاط $x=A$ و $x=-A$ شتاب نوسانگر بیشینه است $(a_m=A\omega^2)$. اندازهٔ شتاب با مکان نوسانگر نسبت مستقیم دارد $|a|=\omega^2x$. بنابراین در لحظه‌هایی که اندازهٔ شتاب نصف اندازهٔ شتاب بیشینه است، مکان نوسانگر $x=\pm\frac{A}{2}$ خواهد بود. بنابراین شما کافی است در معادلهٔ حرکت به‌جای x مقدار $\pm\frac{A}{2}$ را قرار داده و زمان را به‌دست بیاورید.

$x=A\cos\omega t\Rightarrow\pm\frac{A}{2}=A\cos\frac{2\pi}{T}t\Rightarrow\cos\frac{2\pi}{T}t=\pm\frac{1}{2}$



یادآوری ریاضی هرگاه $\cos\alpha=\pm\frac{1}{2}$ باشد در یک دوره برابر $\frac{\pi}{3}$، $\frac{2\pi}{3}$، $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ است.

با توجه به یادآوری ریاضی:

$$\frac{2\pi}{T}t_1=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t_1=\frac{T}{6}\quad,\quad \frac{2\pi}{T}t_2=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow t_2=\frac{T}{3}$$
$$\frac{2\pi}{T}t_3=\frac{4\pi}{3}\Rightarrow t_3=\frac{2T}{3}\quad,\quad \frac{2\pi}{T}t_4=\frac{5\pi}{3}\Rightarrow t_4=\frac{5T}{6}$$

A ۱۵۸۲ | ۱

نکته بزرگی شتاب بر حسب مکان نوسانگر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$|a|=\omega^2|x|$$

مکان متحرک در نقطهٔ M، ۱cm است:

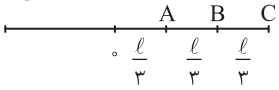
$$|a|=\omega^2|x|\Rightarrow 4=\omega^2\times\frac{1}{100}\Rightarrow\omega^2=400\Rightarrow\omega=20\,rad/s$$

یادآوری بسامد زاویه‌ای سیستم جرم - فنر برابر $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ است:

بسامد زاویه‌ای سیستم جرم - فنر $20\,rad/s$ و جرم آن $2kg$ است:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega^2=\frac{k}{m}\Rightarrow 400=\frac{k}{2}\Rightarrow k=800\,N/m$$

بازی با سؤال **در شکل زیر نوسانگری روی پاره‌خط نشان داده شده در حال نوسان می‌باشد. شتاب در نقاط A، B و C را به ترتیب با a_A، a_B و a_C نشان می‌دهیم. کدام گزینه در مورد شتاب در این سه نقطه درست است؟**



۱) $|a_A|=|a_B|=|a_C|$

۲) $|a_C|=3|a_B|=1/5|a_A|$

۳) $|a_C|=\frac{3}{2}|a_B|=3|a_A|$

۴) $|a_C|=3|a_A|=2|a_B|$

پاسخ با توجه به معادلهٔ شتاب - مکان حرکت هماهنگ ساده ($|a|=\omega^2x$) شتاب با مکان نسبت مستقیم دارد. شتاب در مکان‌های A و B و C را به‌دست آورده و با هم مقایسه می‌کنیم.

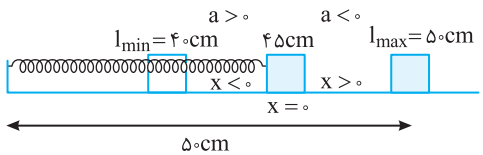
$$|a|=\omega^2x$$
$$|a_A|=\omega^2\frac{\ell}{3}\ ,\ |a_B|=\omega^2\frac{2\ell}{3}\ ,\ |a_C|=\omega^2\ell\Rightarrow|a_C|=\frac{3}{2}|a_B|=3|a_A|$$

گزینهٔ ۳

B ۱۵۸۳ | ۲

۱ ابتدا بسامد زاویه‌ای دستگاه جرم - فنر را حساب می‌کنیم.

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\xrightarrow{k=200\,N/m,\,m=2kg}\omega=\sqrt{\frac{200}{2}}\Rightarrow\omega=10\,rad/s$$



۲ دامنهٔ حرکت وزنه برابر طول مسیر تقسیم بر دو است، از این‌رو:

$$A=\frac{50-40}{2}\Rightarrow A=5cm$$

۳ به کمک معادلهٔ شتاب - مکان، مکان وزنه را حساب می‌کنیم.

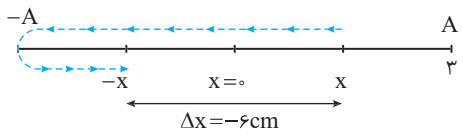
$$a=\omega^2|x|\xrightarrow{a=2m/s^2}2=100|x|\Rightarrow|x|=0/02m=2cm$$

۴ شتاب مثبت است ($\vec{a}=2\vec{i}$) بنابراین مکان نوسانگر منفی است و طول فنر خواهد شد:

$$l=45-2=43cm$$

B ۱۵۸۴ | ۲

خط فکری $0/2s$ نصف دوره $(T=0/4s)$ است. در مدت $\frac{T}{2}$، مکان و سرعت متحرک قرینه می‌شود و وقتی جابه‌جایی $-6cm$ است، مطابق شکل متحرک از مکان $+3cm$ به مکان $-3cm$ رفته است. با توجه به این مطلب اندازهٔ شتاب قابل محاسبه است.



۱ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{0/4}\Rightarrow\omega=5\pi\,rad/s$$

۲ اندازهٔ شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$|a|=\omega^2|x|\Rightarrow|a|=(5\pi)^2(\frac{3}{100})\Rightarrow|a|=7/5m/s^2$$

۳ در ابتدای این بازه مکان نوسانگر مثبت است، بنابراین شتاب آن منفی است یعنی $a=-7/5m/s^2$ است.

C ۱۵۸۵ | ۴

خط فکری ابتدا باید مکان نوسانگر در لحظه‌ای که شتاب $8\pi^2\sqrt{2}m/s^2$ است را به‌دست بیاوریم. در بازهٔ $t=\frac{1}{60}s$ تا $t=\frac{1}{10}s$ مکان نوسانگر را مشخص کنید تا بتوانید تعیین کنید چه مدت شتاب از $8\pi^2\sqrt{2}m/s^2$ کوچکتر است.

۱ با توجه به معادلهٔ حرکت $x=0/04\cos 20\pi t$ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=20\pi\,rad/s$$

۲ مکان نوسانگر وقتی شتاب $8\pi^2\sqrt{2}m/s^2$ است را به‌دست می‌آوریم.

$$|a|=\omega^2x\Rightarrow 8\pi^2\sqrt{2}=(20\pi)^2x\Rightarrow 8\pi^2\sqrt{2}=400\pi^2x$$
$$\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{2}}{100}m=2\sqrt{2}\,cm$$

۳ مکان نوسانگر در لحظه‌های $t=\frac{1}{60}s$ و $t=\frac{1}{10}s$ خواهد شد:

$$x=0/04\cos 20\pi t\begin{cases}\xrightarrow{t=\frac{1}{60}s}x_1=0/04\cos 20\pi\times\frac{1}{60}=0/04\cos\frac{\pi}{3}\\ \xrightarrow{t=\frac{1}{10}s}x_2=0/04\cos 20\pi\times\frac{1}{10}\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=0/02m=2cm\\ x_2=0/04\cos 2\pi\Rightarrow x_2=0/04m=4cm\end{cases}$$

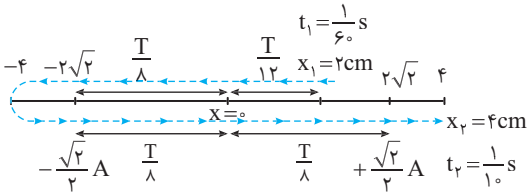
۴ مسیر حرکت را رسم می‌کنیم و مکان‌های x_1 و x_2 را روی آن نشان می‌دهیم.

۵ دوره را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 20\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=0/1s$$

۶ در مکان‌هایی که $-2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}$ شتاب از $8\pi^2\sqrt{2}m/s^2$ کمتر است. به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده مسئله را حل می‌کنیم.

$$\Delta t=\frac{T}{12}+\frac{T}{8}+\frac{T}{8}+\frac{T}{8}=\frac{T}{12}+\frac{3T}{8}=\frac{2T+9T}{24}=\frac{11T}{24}\Rightarrow\Delta t=\frac{11}{24}\times\frac{1}{10}=\frac{11}{240}s$$



۴ ۱۵۸۶ C

خط فکری بیشینهٔ شتاب نوسانگر $a_m=A\omega^2$ است از این رو شما باید بسامد زاویه‌ای $(\omega=\sqrt{g/\ell})$ را در ارتفاع R_e از سطح زمین پیدا کنید. اما ابتدا باید میدان گرانش در آن ارتفاع را برحسب میدان گرانش در سطح زمین بیابید.

۱ با توجه به رابطه میدان گرانش خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \text{سطح زمین: } g_e=G\dfrac{M_e}{R_e^2} \\ \text{در ارتفاع } R_e\text{: } g_h=G\dfrac{M_e}{(R_e+R_e)^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{g_h}{g_e}=\frac{(R_e^2)}{(2R_e)^2}=\frac{1}{4}$$

۲ نسبت بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

$$\frac{\omega_h}{\omega_e}=\frac{\sqrt{\frac{g_h}{\ell}}}{\sqrt{\frac{g_e}{\ell}}}=\sqrt{\frac{g_h}{g_e}}=\sqrt{\frac{1}{4}}\Rightarrow\frac{\omega_h}{\omega_e}=\frac{1}{2}$$

۳ اکنون نسبت بیشینه شتاب‌ها را می‌توانیم به‌دست بیاوریم.

$$\frac{a_h}{a_e}=\frac{A\omega_h^2}{A\omega_e^2}\xrightarrow{\text{دامنه‌ها یکسان}}\frac{a_h}{a_e}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

۱ ۱۵۸۷ A

یادآوری بیشینهٔ نیروی خالص وارد بر نوسانگر از رابطهٔ $F=mA\omega^2$ به‌دست می‌آید که در آن A دامنه، m جرم نوسانگر و ω بسامد زاویه‌ای است.

۱ دامنه نصف طول پاره‌خط مسیر نوسانگر است. بنابراین $A=\frac{10}{2}=5cm$

۲ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\xrightarrow{T=\frac{1}{2}s}\omega=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\omega=4\pi\ rad/s$$

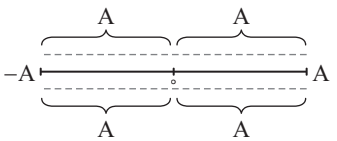
۳ اکنون بیشینه نیروی وارد بر ذره را به‌دست می‌آوریم.

$$F_{max}=mA\omega^2\xrightarrow{m=0/5kg}F_m=0/5\times0/05\times16\pi^2\Rightarrow F_m=4N$$

۱ ۱۵۸۸ A

۱ در هر دقیقه ۱۲۰ نوسان کامل انجام شده بنابراین دوره و بسامد زاویه‌ای خواهد شد:

$$T=\frac{t}{N}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}s\xrightarrow{\omega=2\pi/T}\omega=4\pi\ rad/s$$



۲ در هر دوره مسافت طی شده برابر $4A$ است از این رو دامنه برابر است با:

$$4A=16\Rightarrow A=4cm$$

۳ شتاب را در مکان $x=-\frac{A}{2}=-\frac{4}{2}=-2cm$ به‌دست می‌آوریم.

$$|a|=\omega^2|x|\Rightarrow|a|=(4\pi)^2\times(\frac{2}{100})\Rightarrow|a|=16\times10\times\frac{2}{100}\Rightarrow|a|=3/2m/s^2$$

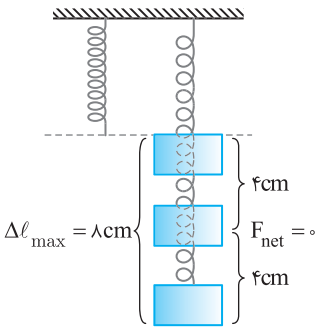
۴ نیروی خالص وارد بر نوسانگر خواهد شد:

$$F=ma\xrightarrow{m=2\times10^{-3}kg}F=2\times10^{-3}\times3/2\Rightarrow F=6/4\times10^{-3}N$$

میانبر معادلهٔ نیرو - مکان نوسانگر $|F|=m\omega^2x$ است.

۲ ۱۵۸۹ C

خط فکری در حالت تعادل نیروها متوازن است. به کمک دینامیک باید ثابت فنر را بیابید. بیشترین نیروی کشسانی فنر وقتی است که طول فنر به بیشینه مقدار خود برسد. بنابراین شما باید بیشینه طول فنر را هنگام نوسان پیدا کنید و به کمک قانون هوک $F=k\Delta\ell$ مسئله را حل کنید.



۱ ابتدا ثابت فنر را حساب می‌کنیم.

$$F_{net}=0\Rightarrow mg=k\Delta\ell\Rightarrow5=k\frac{4}{100}\Rightarrow k=\frac{500}{4}=125N/m$$

۲ در محل تعادل طول فنر 4cm افزایش یافته اگر در این حالت با دامنهٔ 4cm وزنه را به نوسان درآوریم، وزنه تا طول طبیعی فنر بالا می‌رود و وقتی به پایین‌ترین نقطهٔ مسیر می‌رود افزایش طول فنر مطابق شکل $\Delta\ell_{max}=8cm$ می‌شود. از این رو بیشینهٔ نیرو خواهد شد:

$$F_{max}=k\Delta\ell_{max}=125\times\frac{8}{100}=10N$$

۳ ۱۵۹۰ A

یادآوری ۱ بسامد زاویه‌ای آونگ برابر $\omega=\sqrt{g/\ell}$ است.

۲ بیشینه نیروی خالص وارد بر نوسانگر برابر است با $F_{max}=mA\omega^2$ که در آن A دامنه و m جرم نوسانگر است. بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}\xrightarrow{\ell=1m}\omega=\sqrt{10}\ rad/s$$

بیشینه نیروی خالص وارد بر نوسانگر را حساب می‌کنیم.

$$F_{max}=mA\omega^2\xrightarrow[A=0/01cm]{m=0/2kg}F_{max}=0/2\times0/01\times10=0/02\ N$$

بازی با سوال **گلوله یک آونگ ساده با دامنهٔ ۵ میلی‌متر نوسان می‌کند و بیشینه شتاب آن ۲ سانتی‌متر بر مربع ثانیه است. طول آونگ چند متر است؟** $(g=10m/s^2)$

۱) ۲ ۲) ۱/۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۴

پاسخ **تمام روابطی که برای سامانهٔ جرم - فنر به‌دست آورده‌ایم دربارهٔ آونگ نیز صادق است از جمله بیشینهٔ شتاب برابر $a_{max}=A\omega^2$ می‌باشد. از این می‌توان بسامد زاویه‌ای آونگ را حساب کرد.**

$$\frac{2}{100}=5\times10^{-3}\times\omega^2\Rightarrow\omega^2=4\Rightarrow\omega=2rad/s$$

همچنین می‌دانیم بسامد زاویه‌ای برابر $\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ است از این رو:

گزینهٔ ۳

$$\omega^2=\frac{g}{\ell}\Rightarrow\frac{g}{\ell}=4\Rightarrow\ell=2/5m\Rightarrow\ell=2/5m$$

۲ ۱۵۹۱ B

خط فکری بیشینه نیرو در دو حالت یکسان است. از طرفی فنر تغییر نکرده و ثابت فنر k ثابت مانده است. از این مطلب استفاده کنید و نسبت دامنه‌ها را به‌دست بیاورید، سپس باید بسامد زاویه‌ای جدید را حساب کنید تا بتوانید معادله را بنویسید.

۱ با توجه به قانون هوک $F=kx$ بیشینهٔ نیرو در مکان $x=\pm A$ خواهد بود یعنی $|F_{max}|=kA$ است. بنابراین:

$$F_{max_1}=F_{max_2}\Rightarrow k_1A_1=k_2A_2\xrightarrow{k_1=k_2}A_1=A_2$$

$$\xrightarrow{A_1=0/1m}A_2=0/1\ m$$

۲ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{\sqrt{\frac{k}{m_2}}}{\sqrt{\frac{k}{m_1}}}\xrightarrow{\omega_1=5\pi}\frac{\omega_2}{5\pi}=\sqrt{\frac{m_1}{4m_1}}\Rightarrow\omega_2=\frac{5\pi}{2}rad/s$$

۳ معادلهٔ حرکت در حالت دوم خواهد شد:

$$x=A_2\cos\omega_2 t\Rightarrow x=0/1\cos\frac{5\pi}{2}t\Rightarrow x=0/1\cos 2/5\pi t$$

بازی با سؤال **جسمی به جرم ۵۰ گرم که از یک فنر آویخته است، نوسان می‌کند، معادلهٔ مکان نوسانگر در SI به‌صورت $x=0/1\cos 20t$ است، بیشترین نیروی وارد بر جسم چند نیوتون است؟** کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ با توجه به معادلهٔ داده شده $A=0/1\,m$ و $\omega=20\,rad/s$ است.

گزینهٔ ۲

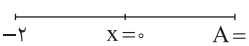
$$F_{max}=mA\omega^2\Rightarrow F_{max}=0/05\times 0/1\times(20)^2$$
$$\Rightarrow F_{max}=0/05\times 0/1\times 400=0/2N$$

۳ ۱۵۹۲ A

خط فکری در یک حرکت هماهنگ ساده، طول پاره‌خط مسیر نوسان دو برابر دامنه است و بازهٔ زمانی که طول می‌کشد تا نوسانگر طول پاره‌خط را طی کند برابر نصف دوره $(\frac{T}{2})$ است. بنابراین کافی است ابتدا دامنه و دوره و سپس بیشینهٔ سرعت را حساب کنید.

۱ دامنه نوسان یک حرکت هماهنگ ساده نصف طول مسیر آن است.

$$A=\frac{4}{2}=2cm$$



۲ نوسانگر در مدت $\frac{T}{2}$ (نصف دوره) یک‌بار طول پاره‌خط را طی می‌کند، با توجه به صورت سؤال $\frac{T}{2}=1s$ است، بنابراین $T=2s$ خواهد بود.

۳ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi\frac{rad}{s}$

۴ بیشینه سرعت نوسانگر برابر است با:

$$v_m=A\omega\Rightarrow v_m=0/02\times\pi=0/02\pi m/s=2\pi cm/s$$

۴ ۱۵۹۳ B

ابتدا مکان نوسانگر را در لحظهٔ $t=0/07\pi s$ به‌دست می‌آوریم.

$$x=0/04\cos 50t\Rightarrow x=0/04\cos(50\times 0/07\pi)$$
$$x=0/04\cos\frac{7}{2}\pi\Rightarrow x=0/04\cos(4\pi-\frac{\pi}{2})\Rightarrow x=0$$

بنابراین در این لحظه، نوسانگر در حال گذر از مبدأ مکان بوده و تندی آن بیشینه است.

با توجه به معادلهٔ $x=0/04\cos(50t)$، دامنهٔ نوسان $A=0/04m$ و بسامد زاویه‌ای نوسانگر $\omega=50rad/s$ است. $v_m=A\omega\Rightarrow v_m=0/04\times 50\Rightarrow v_m=2m/s$

۴ ۱۵۹۴ B

با توجه به رابطه سرعت بیشینه نوسانگر داریم:

$$v_{Max}=A\omega\Rightarrow 4/4=7\times 10^{-3}\times\omega\Rightarrow\omega=\frac{4400}{7}rad/s$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{4400}{7}}=\frac{2(\frac{22}{7})}{\frac{4400}{7}}=\frac{1}{100}s$$

۲ ۱۵۹۵ A

خط فکری دوباره گرفتار بیشینه طول و کمینه طول فنر شدیم. البته طول مسیر راحت به‌دست می‌آید $(\ell_{max}-\ell_{min})$ و به کمک طول مسیر، دامنه در دسترس بوده و با داشتن ثابت فنر و جرم، بسامد زاویه‌ای را می‌توان حساب کرد و مسئله تمام است.

۱ طول پاره‌خطی که نوسانگر در آن نوسان می‌کند برابر $2A$ است.

$$2A=52-42=10\Rightarrow A=5cm$$

۲ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\xrightarrow{m=0/1kg,\ F=160N}\omega=\sqrt{\frac{160}{0/1}}\Rightarrow\omega=40rad/s$$

۳ تندی بیشینه خواهد شد: $v_m=A\omega\Rightarrow v_m=0/05\times 40\Rightarrow v_m=2m/s$

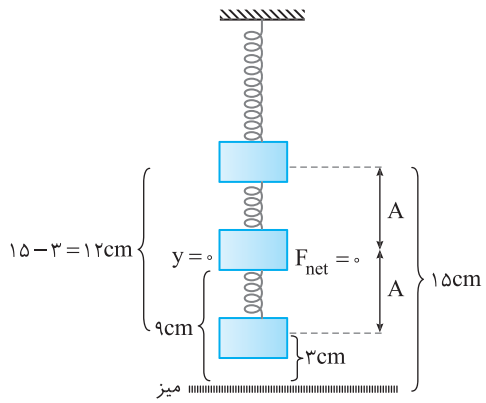
۲ ۱۵۹۶ B

خط فکری باید یک نقاشی مثل شکل زیر رسم کنید و به کمک آن طول مسیر و دامنه و مکان وزنه را وقتی فاصلهٔ آن از میز ۹ cm است به‌دست آورید، تا بتوانید مسئله را حل کنید.

۱ با توجه به صورت مسئله بالاترین نقطه از سطح میز ۱۵cm و پایین‌ترین فاصله وزنه از سطح میز ۳cm بوده، بنابراین طول مسیر $15-3=12cm$ و دامنه $A=\frac{12}{2}=6cm$ است.

۲ بسامد زاویه‌ای سامانه جرم - فنر را حساب می‌کنیم.

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\xrightarrow{k=0/4N/m,\ m=0/1kg}\omega=\sqrt{\frac{0/4}{0/1}}\Rightarrow\omega=2\,rad/s$$



۳ به شکل مجدداً نگاه کنید. فاصلهٔ وزنه وقتی از سطح میز ۹cm است نوسانگر در حال گذر از حالت تعادل خود بوده، در حالت تعادل شتاب صفر و تندی بیشینه است. تندی بیشینه خواهد شد: $v_m=A\omega\Rightarrow v_m=6\times 2=12\,cm/s\Rightarrow v_m=0/12m/s$

۴ ۱۵۹۷ B

خط فکری هنگام گذر از حالت تعادل تندی نوسانگر بیشینه و برابر $v_m=A\omega$ است. وقتی با دادن تندی اولیه دامنه از ۴cm به ۹cm افزایش می‌یابد شما باید تندی بیشینه با دامنهٔ ۴cm و تندی بیشینه با دامنهٔ ۹cm را پیدا کرده و از هم کم کنید تا تندی اولیه داده شده به نوسانگر را بیابید.

به کمک رابطهٔ سرعت بیشینه، در دو حالت v_m را به‌دست آورده و مقدارهای به‌دست آمده را از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{cases}v_m=A\omega=4\times\frac{2\pi}{\pi}=8cm/s\\ v'_m=A'\omega=9\times\frac{2\pi}{\pi}=18cm/s\end{cases}\Rightarrow 18-8=10\,cm/s=0/1\,m/s$$

۲ ۱۵۹۸ B

در لحظهٔ t که فنر نه کشیده و نه فشرده است، وزنه در نقطهٔ تعادل خود قرار دارد و در نقطه تعادل نیرو و شتاب صفر اما تندی بیشینه است. بنابراین تندی بیشینه نوسانگر $12m/s$ است.

بسامد زاویه‌ای نوسانگر را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\xrightarrow{k=900N/m,\ m=4kg}\omega=\sqrt{\frac{900}{4}}=\frac{30}{2}\Rightarrow\omega=15rad/s$$

به کمک تندی بیشینه، دامنه را به دست می‌آوریم.

$$v_m=A\omega\Rightarrow 12=A\times 15\Rightarrow A=0/8m$$

بنابراین معادلهٔ مکان - زمان وزنه به صورت زیر در می‌آید:

$$x=A\cos(\omega t)\Rightarrow x=0/8\cos 15t$$

۲ ۱۵۹۹ B

خط فکری برای نوشتن معادلهٔ مکان - زمان نوسانگر $(x=A\cos\omega t)$ باید دامنه و بسامد زاویه‌ای را داشته باشیم. معادلهٔ حرکت نوسانگر A، $x=0/1\cos\pi t$ بوده و بسامد زاویه‌ای آن $\omega_A=\pi\,rad/s$ است. با توجه به داده‌های مسئله ω_B و A_B را به‌دست بیاورید.

۱ دورهٔ نوسانگر A برابر است با: $\omega_A=\frac{2\pi}{T_A}\Rightarrow\pi=\frac{2\pi}{T_A}\Rightarrow T_A=2s$

۲ دورهٔ B، 2s از دورهٔ A بیشتر است. بنابراین: $T_B=T_A+2\Rightarrow T_B=2+2=4s$

۳ بسامد زاویه‌ای B خواهد شد: $\omega_B=\frac{2\pi}{T_B}=\frac{2\pi}{4}\Rightarrow\omega_B=\frac{\pi}{2}\,rad/s$

۴ بیشینه تندی A دو برابر بیشینه تندی B است، از این رو:

$$v_{m_A}=2v_{m_B}\Rightarrow A_A\omega_A=2A_B\omega_B\xrightarrow{A_A=0/1m}0/1\times\pi=2A_B\times\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow A_B=0/1m$$

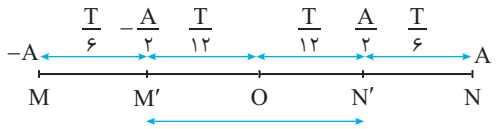
۵ در نتیجه معادلهٔ مکان - زمان نوسانگر B به صورت زیر است:

$$x=A_B\cos(\omega_B t)\Rightarrow x=0/1\cos(\frac{\pi}{2}t)$$

۳ ۱۶۰۰ B

تندی بیشینه برابر $A\omega$ است، دوره را حساب می‌کنیم.

$$v_m=A\omega\xrightarrow{v_m=3\pi\,cm/s}3\pi=3\omega\Rightarrow\omega=\pi\,rad/s$$
$$\xrightarrow{\omega=2\pi/T}\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=2s$$

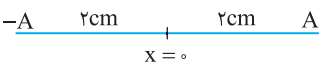


دامنهٔ نوسانگر $A=\frac{6}{2}=3cm$ بنابراین $x_{N'}=1/5cm$ و $x_{M'}=-1/5cm$ یعنی نقاط N' و M' به‌ترتیب در مکان $+\frac{A}{2}$ و $-\frac{A}{2}$ قرار دارند. مدت زمان حرکت از $-\frac{A}{2}$ تا مرکز نوسان و از مرکز نوسان تا $+\frac{A}{2}$ خواهد شد:

$$t=\frac{T}{12}+\frac{T}{12}=\frac{T}{6}\xrightarrow{T=2s}t=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}s$$

۴ ۱۶۰۱ B

طول پاره‌خط ۴cm بوده بنابراین دامنهٔ نوسان $A=\frac{4}{2}=2cm$ است.



به کمک بیشینه تندی $(U_m=0/08\pi m/s)$، بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

$$v_m=A\omega\Rightarrow 0/08\pi=0/02\omega\Rightarrow\omega=4\pi\frac{rad}{s}$$

در لحظهٔ تغییر جهت یعنی در لحظه‌ای که نوسانگر در یکی از دو انتهای مسیرش است، شتاب بیشینه است، از این‌رو: $a_m=A\omega^2\Rightarrow a_m=0/02\times(4\pi)^2$

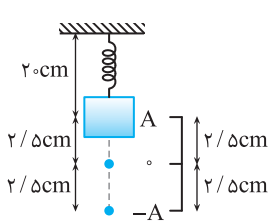
$$a_m=0/02\times16\pi^2\Rightarrow a_m=0/32\pi^2\,m/s^2$$

۱ ۱۶۰۲ B

جسم به فنر آویخته و رها می‌شود و با توجه به داشتن یک سیستم جرم - فنر، مجموعه شروع به نوسان می‌کند. دقت کنید که وضع تعادل در نوسان که مکان آن را $x=0$ در نظر می‌گیریم، مکانی است که نیروی خالص وارد بر نوسانگر صفر باشد. برای این سیستم جرم - فنر هنگامی که نوسانگر به $x=0$ رسیده باید نیروی وزن و نیروی کشسانی فنر اثر یکدیگر را خنثی کنند.

$$F_e=mg\xrightarrow{F_e=k\Delta x}400\Delta x=10\Rightarrow\Delta x=\frac{1}{40}m=2/5cm$$

جسم از حال سکون رها شده پس طول ۲۰cm فنر وضعیتی است که جسم در نقطهٔ بازگشت یعنی دامنهٔ خود قرار دارد. با توجه به اینکه جسم ۲/۵cm کشیده شده تا به وضع تعادل برسد پس دامنهٔ حرکت ۲/۵cm است.



بیشینه طول فنر برابر $20+5=25cm$ است. در این حالت جسم به نقطهٔ بازگشت خود رسیده و تندی نوسانگر صفر است.

۱ ۱۶۰۳ A

خط فکری در نقاط بازگشت شتاب و نیرو بیشینه و در نقطهٔ تعادل شتاب و نیرو صفر است.

در نقاط بازگشت تندی صفر بوده و در نقطهٔ تعادل تندی نوسانگر بیشینه است. تندی بیشینه برابر $A\omega$ و شتاب بیشینه برابر $A\omega^2$ است.

۱ با توجه به سؤال تندی بیشینه و شتاب بیشینه داده شده است:

$$\begin{cases}v_{max}=A\omega=0/2\pi\\ a_{max}=A\omega^2=0/8\pi^2\end{cases}\xrightarrow{\frac{a_m}{v_m}=\frac{A\omega^2}{A\omega}=\omega}\omega=\frac{0/8\pi^2}{0/2\pi}=4\pi$$

۲ بزرگی شتاب نوسانگر در هر مکان از رابطهٔ $|a|=|\omega^2|x$ به‌دست می‌آید:

$$|a|=(4\pi)^2\times\frac{1}{100}\Rightarrow|a|=0/16\pi^2$$

۴ ۱۶۰۴ A

خط فکری تمام روابط حرکت هماهنگ ساده را می‌توانید در مورد آونگ به کار ببرید، بنابراین با نوشتن رابطه سرعت بیشینه و شتاب بیشینه مسئله را حل کنید.

ابتدا با استفاده از سرعت بیشینه و شتاب بیشینه، ω را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases}a_m=A\omega^2\\ v_m=A\omega\end{cases}\xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{دو رابطه را بر هم}}a_m=v_m\omega$$

$$\xrightarrow[v_m=\frac{\sqrt{2}}{10}m/s]{a_m=0/2m/s^2}\frac{2}{10}=\frac{\sqrt{2}}{10}\omega\Rightarrow\omega=\sqrt{2}rad/s$$

بسامد زاویه‌ای را داریم. بنابراین طول آونگ را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}\Rightarrow\sqrt{2}=\sqrt{\frac{10}{\ell}}\Rightarrow\ell=5\,m$$

۲ ۱۶۰۵ B

یادآوری بزرگی شتاب نوسانگر از رابطه $|a|=\omega^2|x|$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{\pi^2}{2}=\omega^2\times\frac{2}{100}\Rightarrow\omega^2=25\pi^2\Rightarrow\omega=5\pi\,rad/s$$

طول پاره‌خط نوسانگر برابر 2A است، دامنه خواهد شد: $2A=8cm\Rightarrow A=4cm$

تندی بیشینه نوسانگر برابر است با:

$$v_m=A\omega\Rightarrow v_m=0/04\times5\pi=0/2\pi=\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}\,m/s$$

بازی با سؤال **در یک حرکت هماهنگ ساده، دامنهٔ نوسان 5cm و اندازهٔ شتاب در فاصله 2cm از حالت تعادل $8cm/s^2$ است. بیشینهٔ تندی نوسانگر چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟** خارج تجربی - ۹۱

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) 5π ۴) 10π

پاسخ **یادآوری** بیشینه تندی نوسانگر $v_m=A\omega$ و شتاب نوسانگر $|a|=\omega^2x$ است.

۱ **با استفاده از اندازهٔ شتاب $|a|=8cm/s^2$ در مکان $x=2cm$ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.**

$$|a|=\omega^2x\Rightarrow8=\omega^2(2)\Rightarrow\omega=2rad/s$$

۲ **تندی بیشینه خواهد شد:**

$$v_m=A\omega\Rightarrow v_m=5\times2=10\,cm/s$$

گزینهٔ ۲

۳ ۱۶۰۶ A

۱ ابتدا باید مشخص کنیم وقتی جرم ۵۰٪ افزایش می‌یابد با ثابت بودن فنر، بسامد زاویه‌ای چند برابر می‌شود.

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{\sqrt{\frac{k}{m_2}}}{\sqrt{\frac{k}{m_1}}}\Rightarrow\frac{\omega_2}{\omega_1}=\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\xrightarrow{m_2=m_1+0/5m_1=1/5m_1}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=\sqrt{\frac{m_1}{1/5m_1}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

۲ نسبت بیشینه تندی خواهد شد: $\frac{v_{۲,max}}{v_{۱,max}}=\frac{A\omega_۲}{A\omega_۱}\Rightarrow\frac{v_{۲,max}}{v_{۱,max}}=\frac{\omega_۲}{\omega_۱}=\sqrt{\frac{۲}{۳}}$

۳ نسبت بیشینه شتاب برابر است با: $\frac{a_{۲,max}}{a_{۱,max}}=\frac{A\omega_۲^۲}{A\omega_۱^۲}=(\frac{\omega_۲}{\omega_۱})^۲=\frac{۲}{۳}$

۳ ۱۶۰۷ B

خط فکری برای به‌دست آوردن شتاب متوسط باید تغییرات سرعت را به‌دست آوریم $(a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t})$. برای به‌دست آوردن سرعت، ابتدا مکان نوسانگر در $t_۱=۱s$ و $t_۲=۲s$ را بررسی می‌کنیم. اگر نوسانگر در انتهای مسیر قرار داشت $x=\pm A$ (نقاط بازگشت) سرعت متحرک صفر و اگر در مرکز نوسان $x=۰$ قرار داشت، اندازهٔ سرعت بیشینه است $(|v|=A\omega)$.

ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ زمانی بین $t=۱s$ تا $t=۲s$، مکان متحرک را در این دو لحظه به‌دست می‌آوریم و تندی متحرک در این مکان را حساب می‌کنیم.

$$x=۰/۰۲\cos(\frac{\pi}{۲}\times۱)=۰\xrightarrow{\text{مرکز نوسان}}$$

$$|v_۱|=A\omega=۰/۰۲\times\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi}{۱۰۰}m/s\Rightarrow v_۱=\pi cm/s$$

$$x=۰/۰۲\cos(\frac{\pi}{۲}\times۲)=-۰/۰۲\xrightarrow{\text{درنقاط بازگشت}}v_۲=۰$$

اندازهٔ شتاب متوسط برابر است با: $|\bar{a}|=|\frac{\Delta v}{\Delta t}|=|\frac{v_۲-v_۱}{\Delta t}|=\frac{\pi}{۲-۱}=\pi cm/s^۲$

۱ ۱۶۰۸ B

یادآوری تکانه برابر حاصل‌ضرب جرم در سرعت است $(\vec{P}=m\vec{v})$. تکانه وقتی بیشینه است که تندی بیشینه $(v_m=A\omega)$ باشد.

$$P=mv_m\Rightarrow P=mA\omega\Rightarrow۲۰\times A\times\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۱۰}}=۱۶gm/s\Rightarrow۲۰\times۲۰\times A=۱۶$$

$$\Rightarrow A=۰/۰۴m\Rightarrow\text{طول پاره‌خط}=۲A=۸cm$$

دقت کنید که واحد تکانه $g.m/s$ است پس m را نیز با واحد گرم قرار دادیم.

۱ ۱۶۰۹ B

۱ معادلهٔ نیرو- مکان داده شده $|F|=۱۶۰\pi^۲x$ را با معادلهٔ نیرو - مکان حرکت هماهنگ ساده $|F|=m\omega^۲x$ مقایسه می‌کنیم.

$$m\omega^۲=۱۶۰\pi^۲\xrightarrow{m=۰/۱kg}۰/۱\omega^۲=۱۶۰\pi^۲\Rightarrow\omega=۴۰\pi\ rad/s$$

۲ دامنه نصف پاره‌خط مسیر است. $A=\frac{۱}{۲}cm=۰/۵cm=۵\times۱۰^{-۳}m$

۳ بیشینه تندی خواهد شد:

$$v_m=A\omega\Rightarrow v_m=۵\times۱۰^{-۳}\times۴۰\pi\Rightarrow v_m=۰/۲\pi\ m/s$$

۳ ۱۶۱۰ B

خط فکری در حرکت هماهنگ ساده هرگاه سرعت $v=۰$ باشد شتاب ماکزیمم $(a_m=\pm A\omega^۲)$ بوده و هرگاه سرعت بیشینه $(v_m=A\omega)$ باشد، شتاب صفر است.

بنابراین کافی است که در معادله شتاب - سرعت $\frac{a^۲}{۲۵}+\frac{v^۲}{۴}=\pi^۲$ یکبار $v=۰$ و شتاب را a_m و بار دیگر سرعت را v_m و شتاب را صفر قرار دهید.

۱ سرعت را در معادله برابر صفر قرار می‌دهیم: $\frac{a_m^۲}{۲۵}+۰=\pi^۲\Rightarrow a_m=۵\pi m/s^۲$

۲ شتاب را در معادله صفر قرار می‌دهیم. $\frac{۰}{۲۵}+\frac{v_m^۲}{۴}=\pi^۲\Rightarrow v_m=۲\pi$

۳ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{matrix}a_m=A\omega^۲\\v_m=A\omega^۲\end{matrix}\Rightarrow\omega=\frac{a_m}{v_m}\Rightarrow\omega=\frac{۵\pi}{۲\pi}\Rightarrow\omega=۲/۵rad/s$$

۴ دوره خواهد شد: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow۲/۵=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۲/۵}\Rightarrow T=\frac{۴\pi}{۵}s$

میانبر رابطه دوره با تندی بیشینه و شتاب بیشینه $T=۲\pi\frac{v_m}{a_m}$

۲ ۱۶۱۱ A

خط فکری در حل این مسئله نکات مهمی که از حرکت هماهنگ ساده باید برای خود یادآوری کنید این است که در حالت تعادل یعنی $x=۰$، تندی بیشینه است یعنی اگر در معادلهٔ $v^۲=۲۵۰۰z^۲-۲۵۰۰x^۲$، x را برابر صفر قرار دهیم تندی بیشینه می‌شود و در نقاط بازگشت $(x=\pm A)$ تندی صفر است. یعنی اگر تندی را صفر قرار دهیم x همان $\pm A$ خواهد شد. با این مطالب کافی است در معادلهٔ سرعت - مکان به جای v صفر قرار دهید و z را بررسی کنید.

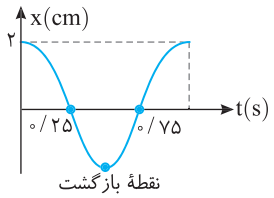
در نقاط بازگشت $x=\pm A$ سرعت صفر است بنابراین:

$$x=\pm A, v=۰\Rightarrow۰=۲۵۰۰z^۲-۲۵۰۰A^۲\Rightarrow z=A$$

۲ ۱۶۱۲ B

با توجه به نمودار $\frac{T}{۴}=۰/۲۵s$ است پس دوره حرکت $T=۱s$ می‌باشد و در مدت $\frac{T}{۲}=۰/۵s$ ابتدایی متحرک از $x=A$ به $x=-A$ می‌رسد پس ابتدا نوسانگر به مرکز نوسان $(x=۰)$ که تندی بیشینه دارد نزدیک شده و حرکت آن تندشونده است و پس از آن از مرکز نوسان در حال دور شدن بوده و حرکت آن کندشونده است، از این‌رو گزارهٔ (الف) نادرست است.

در بازهٔ $t=\frac{T}{۴}=۰/۲۵$ تا $t=\frac{۳T}{۴}=۰/۷۵$



مطابق شکل روبه‌رو یک‌بار متحرک به نقطهٔ بازگشت خود رسیده است و گزارهٔ (ب) درست است.

بیشینهٔ تندی نوسانگر برابر $A\omega$ است.

$$A\omega=\frac{۲}{۱۰۰}\times\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow A\omega=\frac{۲}{۱۰۰}\times\frac{۲\pi}{۱}=\frac{۴\pi}{۱۰۰}m/s=۴\pi cm/s$$

گزارهٔ (پ) درست است.

۳ ۱۶۱۳ B

۱ با توجه به نمودار دوره و بسامد حرکت هر دو نوسانگر برابر است:

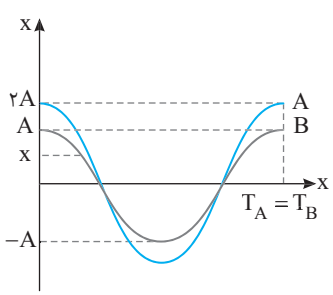
$$T_A=T_B\Rightarrow f_A=f_B\Rightarrow\omega_A=\omega_B$$

۲ تندی بیشینه $v_m=A\omega$ است از این‌رو:

$$\begin{cases}v_{m_A}=A_A\omega_A\\v_{m_B}=A_B\omega_B\end{cases}\Rightarrow\frac{v_{m_A}}{v_{m_B}}=\frac{۲A}{A}=۲$$

بنابراین تندی بیشینهٔ آن‌ها برابر نیست.

۳ شتاب در حرکت هماهنگ ساده $|a|=\omega^۲x$ است. در مکان x با توجه به یکسان بودن بسامد زاویه‌ای، شتاب برابر است. بنابراین دو کمیت بسامد و شتاب در مکان x برای دو نوسانگر یکسان است.



۴ ۱۶۱۴ B

خط فکری در نقاط بازگشت $x=\pm A$ تندی نوسانگر صفر $(v=0)$ است. یعنی اگر در معادلهٔ سرعت - مکان $\frac{۲۵}{\pi^۲}v^۲+۲۵۰۰x^۲=۱$ به جای x، $\pm A$ قرار دهیم، تندی صفر و اگر در معادله به جای v، تندی بیشینه $(v_m=A\omega)$ قرار دهیم $x=0$ خواهد بود، بنابراین شما یک بار $x=0$ و بار دیگر $v=0$ را در معادله قرار دهید.

۱ تندی بیشینه را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{۲۵}{\pi^۲}v^۲+۲۵۰۰x^۲=۱ \xrightarrow{x=0,\ v=v_m} \frac{۲۵}{\pi^۲}v_m^۲+0=۱\Rightarrow v_m=\frac{\pi}{۵}\,m/s$$

۲ دامنه را به‌دست می‌آوریم

$$\frac{۲۵}{\pi^۲}v^۲+۲۵۰۰x^۲=۱ \xrightarrow{v=0,\ x=A} 0+۲۵۰۰A^۲=۱\Rightarrow A=0/02m=2cm$$

بنابراین نمودارهای (۱) و (۲) نادرست هستند.

۳ دوره را به‌دست آورده، $\frac{T}{۴}$ را حساب می‌کنیم.

$$v_m=A\omega\Rightarrow\frac{\pi}{۵}=0/02\left(\frac{۲\pi}{T}\right)\Rightarrow T=0/2s=\frac{۲}{۱۰}s\Rightarrow\frac{T}{۴}=\frac{۱}{۲۰}s$$

بنابراین نمودار (۳) نادرست و نمودار (۴) درست است.

۴ ۱۶۱۵ B

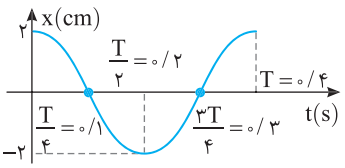
در این تست در معادلهٔ شتاب - مکان یک علامت منفی مشاهده می‌کنید که علت آن همان قانون هوک $F=-kx$ است* که در درسنامه بیان شده است و با توجه به قانون هوک معادلهٔ شتاب - مکان نوسانگر به‌صورت $a=-\omega^۲x$ است، بنابراین ضریب $x^۲$ همان $\omega^۲$ است و بسامد زاویه‌ای خواهد شد:

$$a=-۲۵\pi^۲x\ ,\ a=-\omega^۲x\Rightarrow\omega^۲=۲۵\pi^۲\Rightarrow\omega=۵\pi\ rad/s$$

دوره را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}=۵\pi\Rightarrow T=0/4s$

تندی بیشینهٔ نوسانگر برابر $A\omega$ است. به کمک v_m دامنه را حساب می‌کنیم.

$$v_{max}=A\omega \xrightarrow{v_{max}=10\pi\ cm/s} 10\pi=A\times۵\pi\Rightarrow A=2cm$$



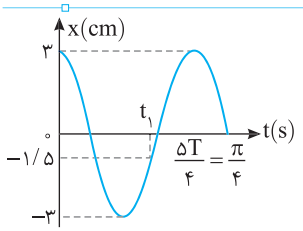
۲ ۱۶۱۶ B

قبل از حل مسئله، به یادآوری‌های زیر دقت کنید.

یادآوری ۱ بنا به قانون دوم نیوتون نیروی خالص وارد بر نوسانگر برابر $F=ma$ است.

یادآوری ۲ در حرکت هماهنگ ساده رابطهٔ بین شتاب و مکان به صورت زیر است:

$$|a|=\omega^۲x \xrightarrow{F=ma} |F|=m\omega^۲|x|$$



اولین کاری که باید بکنیم، به‌دست آوردن دوره حرکت به کمک نمودار است.

$$۵\frac{T}{۴}=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow T=\frac{\pi}{۵}s$$

بسامد زاویه‌ای نوسانگر خواهد شد: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۵}}\Rightarrow\omega=10\,rad/s$

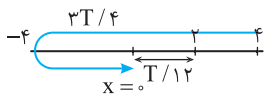
نیروی وارد بر نوسانگر در لحظهٔ $t=t_۱$ خواهد شد:

$$|F|=m\omega^۲|x| \xrightarrow[m=0/2kg]{|x|=\sqrt{۵}\times10^{-۲}m} |F|=0/2\times(10)^۲\times1/۵\times10^{-۲}\Rightarrow|F|=0/3N$$

* قانون هوک در کتاب درسی بیان نشده است با آنکه علت اصلی حرکت هماهنگ ساده است.

۳ ۱۶۱۷ B

ابتدا به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده، دوره را حساب می‌کنیم.



$$\frac{۳T}{۴}+\frac{T}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۱۰T}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow T=\frac{۶}{۱۰}s$$

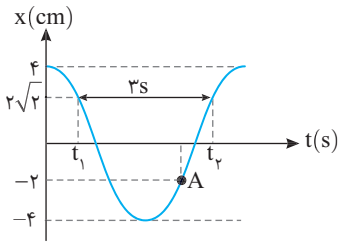
بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{۲\pi}{\frac{۶}{۱۰}}=10\,rad/s$

تندی بیشینه ذرات محیط خواهد شد: $v_{max}=A\omega=\frac{۴}{۱۰۰}\times10=0/4m/s$

۱ ۱۶۱۸ C

ابتدا با توجه به بازهٔ زمانی ۳s، بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم. در $t_۱$ نوسانگر برای نخستین بار از مکان $۲\sqrt{۲}cm$ عبور کرده و در $t_۲$ نیز نوسانگر برای دومین بار از مکان $۲\sqrt{۲}cm$ عبور می‌کند.

$$x=A\cos\omega t\begin{cases}\cos\omega t_۱=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\omega t_۱=\frac{\pi}{۴}\\ \cos\omega t_۲=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\omega t_۲=\frac{۷\pi}{۴}\end{cases}$$



تفاضل شناسه‌های تابع کسینوسی برابر است با:

$$\omega t_۲-\omega t_۱=\frac{۷\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\omega(t_۲-t_۱)=\frac{۳\pi}{۲} \xrightarrow{t_۲-t_۱=۳s} \omega(۳)=\frac{۳\pi}{۲}$$

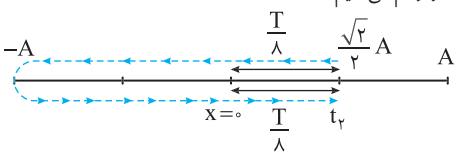
$$\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{۲}\,rad/s$$

شتاب نوسانگر برابر است با:

$$a=-\omega^۲x\Rightarrow a=-(\frac{\pi^۲}{۴})\times(-۲)=\frac{\pi^۲}{۲}cm/s^۲\Rightarrow a=\frac{10}{۲}=۵cm/s^۲$$

روش استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده: $\frac{x}{A}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$

مسیر حرکت را رسم می‌کنیم.



از مکان $+\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ تا $-A$ و برگشت به $+\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ بازهٔ زمانی برابر است با:

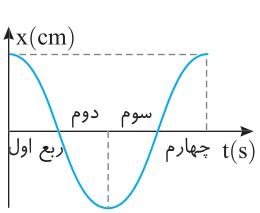
$$t_۲-t_۱=\frac{T}{۲}+\frac{T}{۸}+\frac{T}{۸}\Rightarrow۳=\frac{۶T}{۸}\Rightarrow T=۴s$$

بسامد زاویه‌ای خواهد شد: $\omega=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{۴}\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{۲}\,rad/s$

ادامهٔ مسئله مانند روش قبلی است.

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی:

شناسه تابع کسینوس (فاز) حرکت در لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ را روی دایره نمایش می‌دهیم. در لحظهٔ $t_۱$ فاز در ربع اول و در لحظهٔ $t_۲$ فاز در ربع چهارم است.

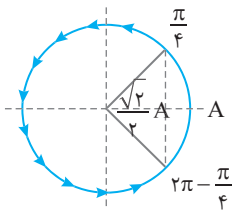


تغییر فاز از t_1 تا t_2 مطابق شکل خواهد شد:

$$\omega t_2-\omega t_1=\frac{\pi}{4}+\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{6\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$$

$$\omega(t_2-t_1)=\frac{3\pi}{2}\xrightarrow{t_2-t_1=3}\omega\times 3=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{2}\,rad/s$$

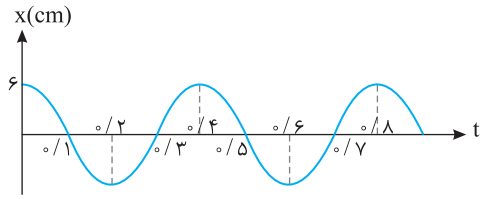
ادامهٔ مسئله مانند روش اول است.



۳ ۱۶۱۹ B

با توجه به نمودار ابتدا دوره را حساب می‌کنیم.

$$\frac{5T}{4}=0/5\Rightarrow T=0/4s$$



بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{0/4}\Rightarrow\omega=5\pi rad/s$$

طبق نمودار در لحظهٔ $t=0/1s$ مکان نوسانگر $x=0$ است یعنی نوسانگر در این لحظه از مبدأ می‌گذرد و تندی آن بیشینه است.

$$t_1=0/1s\Rightarrow v_1=v_m=A\omega\Rightarrow v_1=0/06\times 5\pi\Rightarrow v_1=0/3\pi m/s$$

مطابق شکل نمودار در لحظهٔ $t=0/8s$، نوسانگر در انتهای مسیر $x=+6m$ بوده و به طور لحظه‌ای سرعت آن صفر است. $v_2=0$

بزرگی شتاب متوسط خواهد شد:

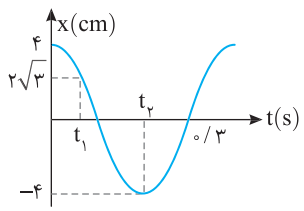
$$|a_{av}|=\frac{|v_2-v_1|}{\Delta t}=\left|\frac{0-0/3\pi}{0/8-0/1}\right|\Rightarrow|a_{av}|=\frac{3}{7}\pi m/s^2$$

۱ ۱۶۲۰ B

خط فکری به نمودار نگاه کنید و در لحظهٔ $t=0$ و $t=t_2$ مکان نوسانگر را مشخص کنید تا بتوانید به کمک آن سرعت در دو لحظه را به‌دست آورده و شتاب متوسط در این بازه را حساب کنید.

۱ در لحظهٔ $t=0$ و $t=t_2$ نوسانگر در نقطهٔ بازگشت خود قرار دارد بنابراین سرعت در این دو لحظه برابر صفر است و شتاب متوسط نیز صفر است.

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\xrightarrow[t=0\ \text{در}\Rightarrow v=0]{t=t_2\ \text{در}\Rightarrow v=0}a_{av}=\frac{0}{\Delta t}=0$$



۲ با توجه به نمودار دوره را حساب می‌کنیم:

$$\frac{3T}{4}=0/3\Rightarrow T=0/4s$$

۳ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم:

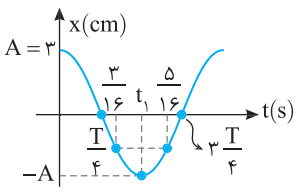
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\frac{4}{10}}=5\pi\ rad/s$$

۴ در لحظهٔ t_1 مکان نوسانگر $x=+2\sqrt{3}cm$ است. به کمک معادلهٔ شتاب - مکان، شتاب را حساب می‌کنیم.

$$|a|=+\omega^2|x|\Rightarrow|a|=+25\pi^2\times\frac{2\sqrt{3}}{100}=+5\sqrt{3}m/s^2$$

۴ ۱۶۲۱ B

۱ با توجه به تقارن نمودار در دو طرف لحظهٔ t_1 که نوسانگر در مکان $-A$ قرار دارد می‌توان نتیجه گرفت t_1 در وسط $\frac{3}{16}$ و $\frac{5}{16}$ و t_1 برابر $\frac{T}{2}$ است، از این‌رو:



$$t_1=\frac{\frac{3}{16}+\frac{5}{16}}{2}=\frac{1}{4}s\xrightarrow{t_1=\frac{T}{2}}\frac{1}{4}=\frac{T}{2}\Rightarrow T=\frac{1}{2}s$$

۲ لحظهٔ $t=\frac{3}{8}s$ را برحسب دوره مشخص می‌کنیم.

$$\frac{t}{T}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}\Rightarrow t=\frac{3}{4}T$$

۳ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\omega=4\pi\ rad/s$$

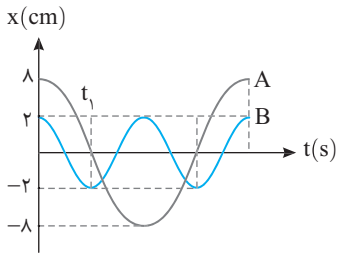
۴ با توجه به نمودار در لحظهٔ $\frac{3}{4}T$ نوسانگر در مکان $x=0$ و دارای تندی بیشینه است در نتیجه:

$$v_m=A\omega\Rightarrow v_m=0/03\times 4\pi\Rightarrow v_m=0/12\pi\ m/s\Rightarrow v_m=12\pi\ cm/s$$

۲ ۱۶۲۲ B

۱ با توجه به نمودار بازهٔ زمانی صفر تا t_1 برای نوسانگر A برابر $\frac{T_A}{4}$ و برای نوسانگر B برابر $\frac{T_B}{2}$ است. بنابراین:

$$t_1=\frac{T_A}{4},t_1=\frac{T_B}{2}\Rightarrow\frac{T_A}{4}=\frac{T_B}{2}\Rightarrow T_A=2T_B$$



۲ بسامد زاویه‌ای A و B را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega_A=\frac{2\pi}{T_A},\omega_B=\frac{2\pi}{T_B}\Rightarrow\frac{\omega_A}{\omega_B}=\frac{T_B}{T_A}=\frac{1}{2}\Rightarrow\omega_B=2\omega_A$$

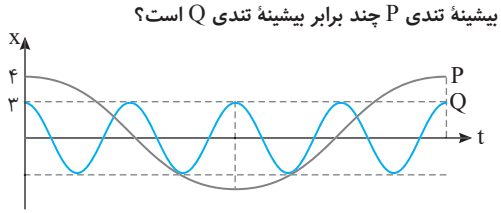
۳ بیشینه نیروی خالص وارد بر نوسانگر از رابطهٔ $F_{max}=mA\omega^2$ به‌دست می‌آید. از این رو:

$$\frac{|F_{max_A}|}{|F_{max_B}|}=\frac{(m\omega^2A)_A}{(m\omega^2A)_B}=\frac{m_A}{m_B}\times\frac{\omega^2_A}{\omega^2_B}\times\frac{A_A}{A_B}=4\times(\frac{1}{2})^2\times(\frac{8}{2})=4$$

۴ اکنون نسبت بیشینه تندی A به بیشینه تندی B را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{v_{m_A}}{v_{m_B}}=\frac{A_A\omega_A}{A_B\omega_B}\Rightarrow\frac{v_{m_A}}{v_{m_B}}=\frac{8}{2}\times\frac{1}{2}=2$$

بازی با سؤال **نمودار مکان - زمان دو نوسانگر P و Q مطابق شکل زیر است. بیشینهٔ تندی P چند برابر بیشینهٔ تندی Q است؟**



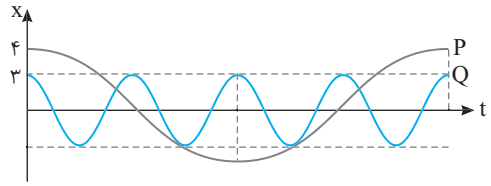
۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ با توجه به شکل دورهٔ P چهار برابر دورهٔ Q است.

$$T_P=۴T_Q \xrightarrow{\omega=\frac{۲\pi}{T}} \omega_P=\frac{۱}{۴}\omega_Q$$

نسبت تندی بیشینه P و Q خواهد شد:

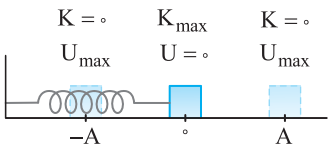
$$\frac{v_{max\,P}}{v_{max\,Q}}=\frac{A_P\omega_P}{A_Q\omega_Q}=\frac{۴\times\frac{۱}{۴}\omega_Q}{۳\times\omega_Q}=\frac{۱}{۳}$$



گزینهٔ ۱

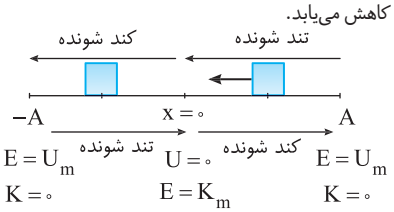
۱۶۲۳ A ۴

با توجه به شکل روبه‌رو در مرکز تعادل انرژی جنبشی بیشینه و انرژی پتانسیل صفر است. در دو انتهای مسیر انرژی پتانسیل بیشینه و انرژی جنبشی صفر است، پس گزینهٔ (۱) نادرست است. بنابر قانون پایستگی انرژی $E=U+K$ همواره ثابت است، پس گزینهٔ (۲) و (۳) نادرست است. بنا به پایستگی انرژی مکانیکی نوسانگر در تمام نقاط مسیر یکسان است و گزینهٔ (۴) درست است.



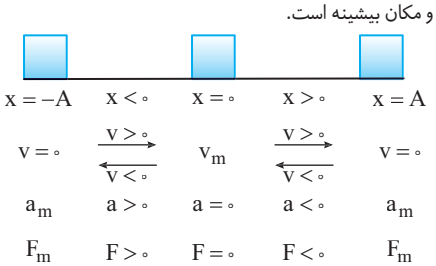
۱۶۲۴ A ۳

می‌دانیم تندی در مرکز نوسان (نقطه تعادل) بیشینه است. پس اگر نوسانگر در حال حرکت به سمت نقطهٔ تعادل باشد حرکت آن تندشونده است. در نقطهٔ تعادل شتاب و نیرو صفر می‌باشد و با نزدیک شدن به نقطهٔ تعادل شتاب کاهش می‌یابد، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است و در طول مسیر انرژی مکانیکی ثابت و برابر $\frac{۱}{۲}kA^۲$ بوده. پس گزینهٔ (۲) و (۴) نادرست است. در دو انتهای مسیر $(x=\pm A)$ فنر بیشینه تغییر طول را دارد، پس در دامنه‌ها انرژی پتانسیل بیشینه است و در مرکز نوسان که فنر نه کشیده و نه فشرده شده انرژی پتانسیل صفر است، بنابراین در حرکت به سمت مرکز تعادل انرژی پتانسیل کاهش می‌یابد.



۱۶۲۵ A ۱

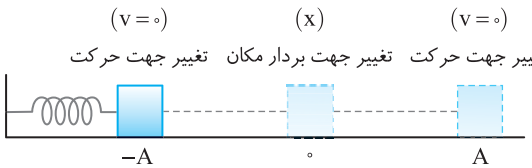
نقاط بازگشت $(x=\pm A)$ انرژی پتانسیل نوسانگر بیشینه است و در این نقاط، اندازهٔ نیرو، شتاب و مکان بیشینه است.



بازی با سؤال برای نوسانگری که روی پاره‌خطی در حال نوسان است، هنگام تغییر جهت حرکت ..... آن بیشینه و هنگام تغییر جهت بردار مکان ..... آن بیشینه می‌شود.

۱) انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل ۲) انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی
۳) انرژی جنبشی، انرژی جنبشی ۴) انرژی پتانسیل، انرژی پتانسیل

پاسخ در دو انتهای مسیر حرکت نوسانگر تغییر جهت می‌دهد پس هنگام تغییر جهت حرکت در انتهای مسیر $(x=\pm A)$ انرژی پتانسیل بیشینه است و هنگام گذر از $x=۰$ بردار مکان نوسانگر تغییر جهت می‌دهد و در این مکان $x=۰$ انرژی جنبشی نوسانگر بیشینه است.



گزینهٔ ۲

۱۶۲۶ A ۱

انرژی مکانیکی یک نوسانگر ساده از رابطهٔ $E=۲\pi^۲mA^۲f^۲$ به‌دست می‌آید که در آن m جرم نوسانگر، A دامنه و f بسامد است، در نتیجه انرژی مکانیکی با مجذور دامنه و مجذور بسامد نسبت مستقیم دارد.

۱۶۲۷ A ۱

یادآوری انرژی مکانیکی یک نوسانگر برابر با $E=\frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲$ است که در آن m جرم نوسانگر، A دامنه و ω بسامد زاویه‌ای نوسانگر است.

بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم:

$$E=\frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲ \xrightarrow[m=۲\times۱۰^{-۳}kg,\ A=\frac{۱۰}{\pi}\times۱۰^{-۲}m]{E=۰/۰۰۴J} ۰/۰۰۴=\frac{۱}{۲}\times۲\times۱۰^{-۳}\times(\frac{۱۰}{\pi}\times۱۰^{-۲})^۲\times\omega^۲$$

$$\Rightarrow ۰/۰۰۴=\frac{۱۰^{-۳}\times۱۰^{-۲}}{\pi^۲}\omega^۲\Rightarrow ۱۰^{-۲}\omega^۲=۴\pi^۲$$

$$\Rightarrow\omega^۲=\frac{۴\pi^۲}{۱۰^{-۲}}\Rightarrow\omega=۲\pi\times۱۰rad/s=۲۰\pi\ rad/s$$

دوره خواهد شد:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow ۲۰\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۰/۱s$$

۱۶۲۸ B ۱

خط فکری مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل برابر انرژی مکانیکی نوسانگر بوده و انرژی مکانیکی نوسانگر $E=۲\pi^۲mA^۲f^۲$ است. بنابراین کافی است K و U را با هم جمع کرده سپس به کمک رابطهٔ انرژی مکانیکی بسامد را حساب کنیم.

انرژی مکانیکی برابر است با:

$$E=K+U \xrightarrow[U=۱۵\times۱۰^{-۳}J]{K=۵\times۱۰^{-۳}J} E=۵\times۱۰^{-۳}+۱۵\times۱۰^{-۳}\Rightarrow E=۲۰\times۱۰^{-۳}J$$

بسامد را حساب می‌کنیم.

$$E=۲\pi^۲mA^۲f^۲ \xrightarrow[\pi^۲=۱۰]{A=۲\times۱۰^{-۲},\ m=۰/۱kg}$$

$$۲۰\times۱۰^{-۳}=۲\times۱۰\times۰/۱\times(۲\times۱۰^{-۲})^۲f^۲\Rightarrow ۲۰\times۱۰^{-۳}=۲\times۱۰\times۰/۱\times(۲\times۱۰^{-۲})^۲f^۲$$

$$\Rightarrow ۱۰^{-۲}=(۲\times۱۰^{-۲})^۲f^۲ \xrightarrow{\text{از طرفین جذر می‌گیریم}} ۱۰^{-۱}=۲\times۱۰^{-۲}f\Rightarrow f=۵HZ$$

بازی با سؤال انرژی جنبشی و پتانسیل یک نوسانگر ساده در یک لحظهٔ معین به‌ترتیب برابر با ۰/۱۲J و ۰/۰۶J است. اگر بسامد زاویه‌ای ۱۵۰rad/s و دامنهٔ حرکت ۴cm باشد، جرم نوسانگر چند گرم است؟

۱) $۱۰^{-۲}$ ۲) $۱۰^{-۱}$ ۳) ۱ ۴) ۱۰

پاسخ **خط فکری** مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل در هر نقطه از مسیر برابر انرژی مکانیکی نوسانگر است، بنابراین کافی است U و K را با هم جمع کرده و بعد از به‌دست آوردن انرژی مکانیکی جرم جسم را حساب کنید.

مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل برابر با انرژی مکانیکی است.

$$E=K+U\Rightarrow E=۰/۱۲+۰/۰۶\Rightarrow E=۰/۱۸J$$

در این صورت می‌توان نوشت:

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2 \xrightarrow[A=4\times10^{-2}m]{\omega=150rad/s} 0/18=\frac{1}{2}\times m\times(4\times10^{-2})^2(150)^2\Rightarrow m=10^{-2}kg$$

$$\Rightarrow m=10g$$

گزینهٔ ۴

۱ ۱۶۲۹ B

در لحظهٔ عبور نوسانگر از نقطهٔ تعادل، تندی آن بیشینه (v_m) است. در این نقطه انرژی پتانسیل نوسانگر صفر $(U=0)$ و انرژی جنبشی آن بیشینه و برابر انرژی مکانیکی جسم است. از این‌رو می‌توان نوشت:

$$K_m=E\Rightarrow\frac{1}{2}mv_m^2=E\Rightarrow v_m^2=(\frac{2E}{m})\Rightarrow v_m=\sqrt{\frac{2E}{m}}\Rightarrow v_m=(\frac{2E}{m})^{\frac{1}{2}}$$

۲ ۱۶۳۰ A

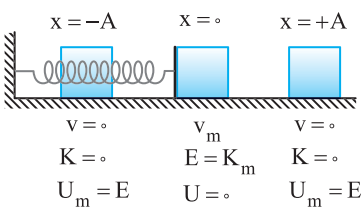
انرژی جنبشی نوسانگر در مبدأ نوسان بیشینه و برابر با انرژی مکانیکی نوسانگر است، بنابراین کافی است انرژی مکانیکی را حساب کنیم.

$$K_m=E=\frac{1}{2}kA^2 \xrightarrow{k=100N/m,\ A=4\times10^{-2}m} E=\frac{1}{2}\times100\times(4\times10^{-2})^2$$

$$\Rightarrow K_m=50\times16\times10^{-4}=8\times10^{-2}=0/08J$$

۲ ۱۶۳۱ A

خط فکری در حل مسائل انرژی نوسانگر بهتر است که شکل زیر را در ذهن خود مرور کنید و به خودتان بگویید که بیشینه انرژی جنبشی و بیشینه انرژی پتانسیل همان انرژی مکانیکی جسم است البته باید یادتان باشد که انرژی مکانیکی مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر $(E=K+U)$ است.



۱ بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر $0/8mJ$ بیان شده که این مقدار برابر انرژی مکانیکی آن است از این‌رو:

$$E=K_m=0/8mJ$$

۲ با توجه به اصل پایستگی انرژی مکانیکی، انرژی جنبشی نوسانگر را وقتی که $U=0/4mJ$ است به‌دست می‌آوریم:

$$E=U+K\Rightarrow0/8=0/4+K\Rightarrow K=0/4mJ$$

۳ حال می‌توان سرعت نوسانگر را به‌دست آورد.

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow0/4\times10^{-3}=\frac{1}{2}\times100\times10^{-3}v^2\Rightarrow v^2=\frac{0/8}{100}$$

$$v^2=\frac{8}{1000}=\frac{1}{125}\Rightarrow v=\frac{1}{5\sqrt{5}}m/s\Rightarrow v=\frac{20}{\sqrt{5}}cm/s=\frac{20\sqrt{5}}{5}=4\sqrt{5}cm/s$$

بازی با سؤال انرژی مکانیکی نوسانگری به جرم $100g$ برابر $20mJ$ است. در لحظه‌ای که انرژی پتانسیل کشسانی نوسانگر $15mJ$ است، بزرگی سرعت نوسانگر چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟ ریاضی - ۹۶

۱) $10\sqrt{10}$ ۲) $20\sqrt{10}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{10}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{20}$

پاسخ **خط فکری** انرژی مکانیکی نوسانگر برابر مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل آن $(E=U+K)$ در هر نقطه از مسیر است، بنابراین اگر به شما U و E را بدهند می‌توانید انرژی جنبشی را حساب کرده و تندی نوسانگر در آن لحظه را به‌دست بیاورید.

۱ انرژی جنبشی نوسانگر در لحظهٔ مورد نظر برابر است با:

$$E=U+K\Rightarrow K=E-U=20-15\Rightarrow K=5mJ=5\times10^{-3}J$$

۲ سرعت نوسانگر خواهد شد:

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow5\times10^{-3}=\frac{1}{2}\times0/1\times v^2$$

$$\Rightarrow v^2=10^{-1}\Rightarrow v=\frac{\sqrt{10}}{10}m/s\Rightarrow v=10\sqrt{10}cm/s$$

گزینهٔ ۱

۳ ۱۶۳۲ A

۱ زمان حرکت از مرکز نوسان به انتهای مسیر $\frac{1}{4}$ دوره و دامنه نصف طول پاره‌خط مسیر است. دامنه را به‌دست می‌آوریم.

$$A=\frac{20}{2}=10cm$$

۲ دوره و بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

$$\frac{T}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow T=1s\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=2\pi\ rad/s$$

۳ انرژی جنبشی در مرکز نوسان بیشینه (K_m) و برابر انرژی مکانیکی است از این‌رو:

$$K_m=E\Rightarrow K_m=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\Rightarrow K=\frac{1}{2}\times0/1\times(0/1)^2\times(2\pi)^2$$

$$\Rightarrow K=0/02J=20mJ$$

۳ ۱۶۳۳ B

ابتدا مکان جسم در لحظهٔ $t=\frac{1}{8}s$ را حساب می‌کنیم.

$$x=0/05\cos\frac{20\pi}{8}=0/05\cos\frac{5\pi}{2}\Rightarrow x=0$$

نوسانگر در مبدأ مکان دارای بیشینه انرژی جنبشی است که با انرژی مکانیکی جسم برابر است.

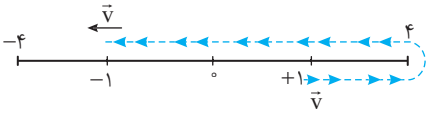
$$K_m=\frac{1}{2}mv_m^2=\frac{1}{2}m(A\omega)^2\Rightarrow K_m=\frac{1}{2}\times0/12\times(0/05\times20\pi)^2$$

$$K_m=0/06\times(\pi^2)J\Rightarrow K_m=60\pi^2mJ$$

۳ ۱۶۳۴ A

نکته هرگاه در یک حرکت هماهنگ ساده مکان و سرعت نوسانگر قرینه شود کوتاه‌ترین زمانی که این اتفاق می‌افتد برابر $\frac{T}{2}$ است.

خط فکری مسیر حرکت زیر از مکان $x_1=+1cm$ در جهت مثبت محور تا رسیدن برای اولین بار به مکان $x_2=-1cm$ مشخص می‌کند که هم مکان و هم سرعت نوسانگر قرینه شده است. بنابراین این بازهٔ زمانی برابر $\frac{T}{2}$ است. اکنون با دانستن این مطلب مسئله قابل حل است.



۱ با توجه به سؤال $\frac{T}{2}$ برابر $2s$ است:

$$\frac{T}{2}=2s\Rightarrow T=4s$$

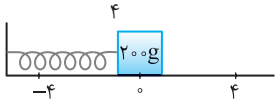
۲ بسامد زاویه‌ای برابر است با:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{4}\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{2}\ \frac{rad}{s}$$

۳ انرژی مکانیکی نوسانگر برابر خواهد شد با:

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2 \xrightarrow[A=4cm=4\times10^{-2}m]{m=200g=0/2kg} E=\frac{1}{2}\times0/2\times(4\times10^{-2})^2\times(\frac{\pi}{2})^2$$

$$\xrightarrow{\pi^2=10} E=0/1\times16\times10^{-4}\times\frac{10}{4}\Rightarrow E=4\times10^{-4}J$$



نکته هر ژول برابر ۱۰۰۰ میلی‌ژول است:

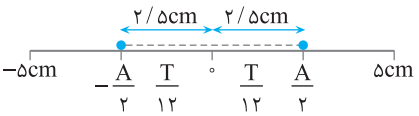
$$E=4\times10^{-4}J=4\times10^{-1}mJ=0/4mJ$$

۲ ۱۶۳۵ B

۱ طول پاره‌خط $10cm$ داده شده است، پس دامنهٔ نوسان $5cm$ است.



حداقل زمان طی مسیر در حرکت هماهنگ ساده مربوط به بازه‌ای است که نوسانگر اطراف نقطهٔ تعادل در حال نوسان باشد، در واقع نوسانگر نصف مسیر را از قبل از $x=0$ شروع کرده باشد و نصف دیگر را بعد از $x=0$ طی کند.



۲ با توجه به نکتهٔ قبل داریم: $\Delta t=\frac{T}{12}+\frac{T}{12}\Rightarrow \Delta t=\frac{T}{6}\ ,\ \frac{1}{30}=\frac{T}{6}\Rightarrow T=\frac{1}{5}s$

۳ بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر برابر است با:

$$K_{max}=\frac{1}{2}mv_m^2 \xrightarrow{v_m=A\omega} K_{max}=\frac{1}{2}\times 0/4\times(A^2\omega^2)$$

$$\xrightarrow{\omega=\frac{2\pi}{T}=10\pi} K_{max}=0/2\times 25\times 10^{-4}\times 100\pi^2$$

$$K_{max}=5\times 10^{-2}\times 9\Rightarrow K_{max}=45\times 10^{-2}J$$

$$\xrightarrow{J\xrightarrow{\times 10^3}mJ} K_{max}=450mJ$$

B ۱۶۳۶ ۲

خط فکری در کتاب درسی رابطهٔ مستقلی برای انرژی پتانسیل نوسانگر گفته نشده است، پس در این سؤالات که انرژی پتانسیل خواسته می‌شود، باید ابتدا انرژی مکانیکی و انرژی جنبشی را حساب کرده و در نهایت با توجه به $E=K+U$ ، انرژی پتانسیل را حساب کنیم.

۱ نوسانگر در مدت یک دقیقه یا ۶۰s، ۱۵۰ نوسان کامل انجام داده است:

$$\frac{N}{1}=\frac{t}{T}\Rightarrow T=\frac{60}{150}=\frac{2}{5}=0/4s$$

۲ طول پاره‌خط نوسان دو برابر دامنهٔ حرکت نوسانگر است پس $A=2cm$ است.

۳ انرژی مکانیکی نوسانگر که برابر مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل یک جسم $(E=U+K)$ است ثابت بوده و برابر $E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2$ است. ابتدا $\omega=\frac{2\pi}{T}$ را حساب کرده و سپس انرژی مکانیکی را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{0/4}$$

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\Rightarrow E=\frac{1}{2}\times\frac{200}{1000}\times(\frac{2}{100})^2\times(\frac{2\pi}{0/4})^2$$

$$\Rightarrow E=0/1\times 4\times 10^{-4}\times\frac{4\pi^2}{0/16}\ E=0/1\times 10^{-2}\times\pi^2\xrightarrow{\pi^2=10}E=10^{-2}J=10mJ$$

۴ انرژی جنبشی در لحظه‌ای که بزرگی سرعت نوسانگر $5\sqrt{2\pi}\ cm/s$ بوده، برابر است با:

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow K=\frac{1}{2}\times 0/2\times(5\sqrt{2\pi}\times 10^{-2})^2$$

$$K=0/1\times 50\pi^2\times 10^{-4}=5\times 10^{-3}J=5mJ$$

۵ در نهایت با توجه به داشتن انرژی جنبشی و انرژی مکانیکی، انرژی پتانسیل را به‌دست می‌آوریم: $E=K+U\Rightarrow 10=5+U\Rightarrow U=5mJ$

B ۱۶۳۷ ۱

ثابت فنر را بر حسب N/m می‌نویسیم: $k=2N/cm=200N/m$

انرژی مکانیکی برابر $E=\frac{1}{2}kA^2$ است و دامنه $A=0/08m$ است، بنابراین:

$$E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}(200)(0/08)^2=0/64J$$

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(2)(0/4)^2=0/16J$$

$$U=E-K=0/64-0/16=0/48J$$

B ۱۶۳۸ ۱

خط فکری تندی متحرک $10cm/s$ کمتر از تندی در مرکز نوسان است، یعنی $v=v_m-10$ است، زیرا در مرکز نوسان تندی بیشینه است، بنابراین شما باید بسامد زاویه‌ای و دامنه، سپس تندی بیشینه را بیابید تا بتوانید با داشتن تندی (v) ، انرژی جنبشی در آن لحظه را بیابید.

۱ دامنهٔ حرکت نصف طول مسیر حرکت نوسانگر است. $A=\frac{10}{2}=5cm$

۲ انرژی مکانیکی را به‌دست می‌آوریم:

$$E=\frac{1}{2}kA^2\xrightarrow{k=20N/m}E=\frac{1}{2}\times 20\times(5\times 10^{-2})^2$$

$$\Rightarrow E=10\times 25\times 10^{-4}=25mJ$$

۳ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\xrightarrow{m=0/2kg}\omega=\sqrt{\frac{20}{0/2}}\Rightarrow\omega=10\ rad/s$$

۴ تندی بیشینه خواهد شد: $v_m=A\omega\Rightarrow v_m=5\times 10=50\ cm/s$

۵ تندی در لحظهٔ مورد نظر برابر است با:

$$v=v_m-10=50-10\Rightarrow v=40cm/s=0/4m/s$$

۶ انرژی جنبشی نوسانگر را به‌دست می‌آوریم:

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow K=\frac{1}{2}\times 0/2\times(0/4)^2\Rightarrow K=0/1\times 0/16$$

$$\Rightarrow K=16\times 10^{-3}J=16mJ$$

۷ اکنون می‌توان انرژی پتانسیل را حساب کرد.

$$E=K+U\Rightarrow 25=16+U\Rightarrow U=9mJ$$

B ۱۶۳۹ ۱

دامنه ابتدا ۴cm و سپس $4+1=5\ cm$ است. بنابراین کافی است رابطهٔ انرژی مکانیکی $E=\frac{1}{2}kA^2$ را در دو حالت بنویسیم و بر هم تقسیم کنیم و انرژی مکانیکی را در حالتی که دامنه ۵m است به‌دست بیاوریم.

$$\frac{E_2}{E_1}=\frac{\frac{1}{2}kA_2^2}{\frac{1}{2}kA_1^2}\xrightarrow[A_1=4\times 10^{-2}m,\ A_2=5\times 10^{-2}m]{E_1=16J}\frac{E_2}{16}=\frac{A_2^2}{A_1^2}$$

$$\Rightarrow\frac{E_2}{16}=\frac{(5\times 10^{-2})^2}{(4\times 10^{-2})^2}\Rightarrow E_2=25J$$

بنابراین باید به نوسانگر $25-16=9J$ انرژی داده شود.

A ۱۶۴۰ ۲

رابطهٔ انرژی مکانیکی دستگاه جرم - فنر به صورت $E=\frac{1}{2}kA^2$ است و در دو حالت ثابت فنر و دامنه یکسان است، بنابراین: $E_1=E_2=8J$

A ۱۶۴۱ ۴

با ثابت ماندن دامنه و همچنین k فنر، انرژی مکانیکی طبق رابطهٔ $E=\frac{1}{2}kA^2$ ثابت می‌ماند.

B ۱۶۴۲ ۱

خط فکری باید در جواب این مسئله به این فکر کنید که انرژی مکانیکی سامانهٔ جرم - فنر به چه عواملی بستگی دارد. با توجه به رابطهٔ $E=\frac{1}{2}kA^2$ ، ثابت فنر و دامنهٔ حرکت انرژی مکانیکی نوسانگر را تعیین می‌کنند.

در این مسئله دامنهٔ نوسان (A) و ثابت فنر (k) ثابت مانده است، بنابراین انرژی مکانیکی در دو حالت یکسان بوده و $\frac{E_2}{E_1}=1$ است.

B ۱۶۴۳ ۴

خط فکری با یک تست به شدت مفهومی سروکار داریم. اولاً انرژی مکانیکی نوسانگر از رابطهٔ $E=\frac{1}{2}kA^2$ به‌دست می‌آید، بنابراین اگر ثابت فنر و دامنه ثابت بماند، انرژی مکانیکی تغییر نمی‌کند. ثانیاً در وسط مسیر نوسان انرژی مکانیکی نوسانگر تماماً انرژی جنبشی است $(K_m=\frac{1}{2}mv_m^2)$ و اگر به هر نحوی بتوان جرم وزنه را کاهش داد، قطعاً انرژی مکانیکی تغییر می‌کند (کاهش می‌یابد).

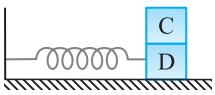
حالت اول: اگر در نقاط بازگشت که سامانه به‌طور لحظه‌ای ساکن است وزنه m_2 را برداریم، دامنهٔ نوسان همچنان بدون تغییر می‌ماند. $(A'=A)$ از طرفی ثابت فنر نیز ثابت است. بنابراین انرژی مکانیکی ثابت می‌ماند.

حالت دوم: اگر هنگام گذر نوسانگر از وسط مسیر (حالت تعادل) وزنهٔ m_2 را بتوان از روی m_1 برداشت، جرم سامانه کاهش می‌یابد و انرژی جنبشی نوسانگر $(\downarrow K_m=\frac{1}{2}m v_m^2 \downarrow)$ که همان انرژی مکانیکی است کاهش می‌یابد. بنابراین گزینهٔ (۴) پاسخ درست است.

C ۱۶۴۴ ۳

در انتهای مسیر (نقطهٔ بازگشت) نوسانگر به‌طور لحظه‌ای ساکن است و وقتی وزنه دیگری روی آن قرار می‌دهیم، نوسانگر از انتهای مسیر به حرکت درمی‌آید و دامنهٔ حرکت تغییری نمی‌کند. از طرفی فنر نیز تغییر نکرده یعنی فنر ثابت بوده بنابراین انرژی مکانیکی $E=\frac{1}{2}kA^2$ تغییری نمی‌کند و نوسانگر با همان انرژی مکانیکی اولیه به حرکت خود ادامه می‌دهد تا به مرکز نوسان می‌رسد. در اینجا وزنهٔ m را از روی نوسانگر برمی‌داریم، در اینجا تمام انرژی نوسانگر، انرژی جنبشی $(K=\frac{1}{2}mv_m^2)$ است و با برداشتن نیمی از جرم، انرژی جنبشی یا همان انرژی مکانیکی نصف می‌شود.

بازی با سؤال **در شکل روبه‌رو، وزنهٔ C بر روی وزنهٔ D قرار دارد. جرم دو وزنه برابر است و دستگاه با دامنهٔ A و دورهٔ T دارای حرکت هماهنگ ساده است. اگر در انتهای مسیر وزنهٔ C را از روی وزنهٔ D برداریم، انرژی مکانیکی و دورهٔ حرکت دستگاه به ترتیب از راست به چپ چه تغییری می‌کند؟**



۱) تغییر نمی‌کند، کاهش می‌یابد ۲) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد
۳) تغییر نمی‌کند، افزایش می‌یابد ۴) کاهش می‌یابد، تغییر نمی‌کند

پاسخ **با برداشتن وزنهٔ C، جرم کاهش می‌یابد به همین دلیل دوره** $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ **کاهش می‌یابد. اما دربارهٔ انرژی مکانیکی باید بگوییم در انتهای مسیر تمام انرژی مکانیکی جسم به صورت انرژی پتانسیل** $E=U_m=\frac{1}{2}kA^2$ **است که با برداشتن وزنهٔ C، دامنه و ثابت فنر هیچگونه تغییر نمی‌کند بنابراین انرژی مکانیکی ثابت می‌ماند و گزینهٔ (۱) درست است.**

گزینهٔ ۱

B ۱۶۴۵ ۱

۱ دامنهٔ حرکت را حساب می‌کنیم. $A=\frac{20}{2}=10\,cm=0/1\,m$

۲ انرژی مکانیکی نوسانگر را به‌دست می‌آوریم:

$$E=\frac{1}{2}kA^2 \xrightarrow{k=100N/m} E=\frac{1}{2}\times100\times(0/1)^2=0/5J$$

۳ با توجه به صورت مسأله در یک لحظه انرژی جنبشی نوسانگر $0/1\,J$ بیشتر از انرژی پتانسیل است و مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل برابر انرژی مکانیکی است از این‌رو دستگاه دو معادله و دو مجهول می‌توان نوشت و U و K را حساب کرد.

$$\begin{cases} K-U=0/1\,J \\ E=K+U=0/5J \end{cases} \Rightarrow 2K=0/6\Rightarrow K=0/3J\ ,\ U=0/2J$$

۴ نسبت $\frac{U}{K}$ خواهد شد: $\frac{U}{K}=\frac{0/2}{0/3}=\frac{2}{3}$

بازی با سؤال **یک سامانهٔ جرم - فنر با دامنهٔ 10 cm در حال نوسان است. در یک لحظه انرژی پتانسیل نوسانگر $0/6J$ از انرژی جنبشی آن کمتر است. اگر ثابت فنر $200N/m$ باشد، در این لحظه انرژی جنبشی نوسانگر چند ژول است؟**

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

پاسخ ۱ **انرژی مکانیکی نوسانگر را حساب می‌کنیم.**

$$E=\frac{1}{2}kA^2\Rightarrow E=\frac{1}{2}\times200\times(0/1)^2\Rightarrow E=1J$$

۲ **بنا به فرض مسئله داریم:** $U=K-0/6$

۳ **انرژی مکانیکی برابر است با:**

$$E=U+K\Rightarrow1=K-0/6+K\Rightarrow1/6=2K\Rightarrow K=0/8J$$

گزینهٔ ۴

B ۱۶۴۶ ۴

۱ ابتدا انرژی مکانیکی نوسانگر را به‌دست می‌آوریم:

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\Rightarrow E=\frac{1}{2}mA^2\frac{4\pi^2}{T^2}\Rightarrow E=\frac{1}{2}m\times(\frac{5}{100})^2\times\frac{4\pi^2}{(\frac{1}{10})^2}$$

$$\Rightarrow E=\frac{1}{2}m(\frac{25}{10^4})\times4\pi^2\times100\Rightarrow E=\frac{\pi^2}{2}m$$

۲ انرژی مکانیکی برابر مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر است و از طرفی مسئله تندی نوسانگر را در لحظه‌ای که انرژی جنبشی برابر انرژی پتانسیل است $(U=K)$ از شما خواسته است بنابراین:

$$E=K+U\xrightarrow{K=U}\frac{\pi^2}{2}m=2K$$

$$\xrightarrow{K=\frac{1}{2}mv^2}\frac{\pi^2}{2}m=mv^2\Rightarrow v^2=\frac{\pi^2}{2}\Rightarrow v=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\,m/s$$

$$\xrightarrow{m/s\xrightarrow{\times100}cm/s} v=50\sqrt{2}\pi\,cm/s$$

B ۱۶۴۷ ۲

۱ فنر را از حالت تعادل 4cm کشیده و رها کرده‌ایم، بنابراین دامنهٔ حرکت $A=4cm$ است.

۲ انرژی مکانیکی نوسانگر را به‌دست می‌آوریم:

$$E=\frac{1}{2}kA^2\xrightarrow[A=4cm=0/04m]{k=5N/cm=500N/m}E=\frac{1}{2}\times500(4\times10^{-2})^2$$

$$\Rightarrow E=\frac{1}{2}\times500\times16\times10^{-4}\Rightarrow E=0/4J$$

نکته انرژی مکانیکی نوسانگر همواره برابر بیشینه انرژی جنبشی آن است $(K_m=E)$.

۳ وقتی تندی نوسانگر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ تندی بیشینه است، نسبت انرژی جنبشی نوسانگر به انرژی جنبشی بیشینه خواهد شد:

$$\frac{K}{K_m}=\frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv_m^2}\Rightarrow\frac{K}{K_m}=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\Rightarrow K=\frac{1}{2}K_m\Rightarrow K=\frac{1}{2}E\Rightarrow K=0/2J$$

۴ اختلاف K و E خواهد شد: $E-K=0/4-0/2=0/2J$

B ۱۶۴۸ ۱

۱ بسامد زاویه‌ای نوسانگر را حساب می‌کنیم.

$$\omega=2\pi f\xrightarrow{f=20Hz}\omega=40\pi\ rad/s$$

۲ مقدار بیشینه انرژی پتانسیل نوسانگر همان مقدار انرژی مکانیکی است.

$$E=U_m$$

با فرض مسئله $U=\frac{1}{2}E$ در نتیجه انرژی جنبشی نوسانگر $(K=E-U)$ نیز $\frac{1}{2}E$ می‌شود.

$$K=\frac{1}{2}E\xrightarrow{K=0/1\pi^2}0/1\pi^2=\frac{1}{2}E\Rightarrow E=0/2\pi^2J$$

۳ اکنون دامنه را به‌دست می‌آوریم:

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\Rightarrow0/2\pi^2=\frac{1}{2}\times0/1\times A^2\times(40\pi)^2\Rightarrow A^2=\frac{1}{400}\Rightarrow A=0/05m$$

معادله حرکت خواهد شد: $x=0/05\cos40\pi t$

۱ ۱۶۴۹ B

۱ انرژی جنبشی در وسط مسیر بیشینه است. در یک لحظه تندی نصف تندی بیشینه است. در این لحظه باید مشخص کنیم که انرژی جنبشی چه کسری از انرژی جنبشی بیشینه است. $K=\frac{1}{2}mv^2$, $K_m=\frac{1}{2}mv_m^2 \Rightarrow \frac{K}{K_m}=\frac{1}{4}\Rightarrow K=\frac{1}{4}K_m$

۲ با توجه به فرض مسئله در این لحظه انرژی پتانسیل ۲۰ ژول است، بنابراین انرژی مکانیکی خواهد شد: $E=K+U\Rightarrow E=K+20$

۳ انرژی مکانیکی برابر بیشینه انرژی جنبشی است.

$$E=K_m\Rightarrow K+20=K_m \xrightarrow{K=\frac{1}{4}K_m} \frac{1}{4}K_m+20=K_m$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}K_m=20\Rightarrow K_m=\frac{80}{3}J$$

۱ ۱۶۵۰ A

۱ انرژی پتانسیل ۸ برابر انرژی جنبشی $(U=8K)$ است، بنابراین انرژی مکانیکی خواهد شد: $E=U+K\Rightarrow E=8K+K=9K\Rightarrow E=9K \quad (I)$

۲ انرژی مکانیکی برابر بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر است، از این‌رو:

$$K_m=E \xrightarrow{(I)} K_m=9K\Rightarrow \frac{1}{2}mv_m^2=9(\frac{1}{2}mv^2)\Rightarrow v_m=3v$$

۳ با توجه به فرض مسئله در این لحظه $v=2m/s$ است، در نتیجه v_m خواهد شد: $v_m=3\times 2=6m/s$

۲ ۱۶۵۱ B

انرژی مکانیکی برابر انرژی جنبشی بیشینه است:

$$E=2K\Rightarrow K=\frac{1}{2}E \xrightarrow{E=K_m} \frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{4}m\omega^2A^2\Rightarrow v=\frac{\sqrt{2}}{2}\omega A$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 20\pi\times 0/04\Rightarrow v=\frac{2\sqrt{2\pi}}{5}m/s$$

۲ ۱۶۵۲ B

۱ انرژی مکانیکی برابر با مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل است، از این‌رو می‌توان نوشت: $E=U+K \xrightarrow{U=3K} E=3K+K\Rightarrow E=4K$

۲ انرژی مکانیکی، برابر با انرژی جنبشی بیشینهٔ نوسانگر است، بنابراین:

$$K_m=4K\Rightarrow \frac{1}{2}mv_m^2=4(\frac{1}{2}mv^2)\Rightarrow v_m=2v\Rightarrow v=\frac{v_m}{2}=\frac{5}{2}=2/5m/s$$

۴ ۱۶۵۳ B

انرژی پتانسیل در $x=A$ بیشینه و در حرکت هماهنگ ساده، انرژی مکانیکی برابر بیشینه انرژی پتانسیل است، از این‌رو:

$$E=U_m=0/36J \xrightarrow{E=K_m} K_m=0/36J$$

انرژی جنبشی خواهد شد:

$$\begin{cases} K=\frac{1}{2}mv^2 \\ K_m=\frac{1}{2}mv_m^2 \end{cases} \xrightarrow{v=\frac{\sqrt{3}}{2}v_m} \frac{K}{0/36}=\frac{3}{4}\Rightarrow K=0/27J$$

۴ ۱۶۵۴ B

انرژی مکانیکی برابر بیشینه انرژی جنبشی $(E=K_m)$ است. وقتی گفته می‌شود انرژی جنبشی $\frac{1}{n}$ انرژی مکانیکی باشد، یعنی $K=\frac{1}{n}K_m$ شود. در حالت تعادل انرژی جنبشی بیشینه است، بنابراین وقتی که نوسانگر از $x=A$ به سوی $x=0$ می‌رود و انرژی جنبشی از صفر به K_m می‌رسد حتماً در این مسیر یک بار انرژی جنبشی $\frac{1}{n}K_m$ خواهد شد. همچنین در مسیر از $x=0$ تا $x=A$ نیز یکبار این اتفاق می‌افتد. در برگشت نیز همین اتفاق می‌افتد و جمعاً چهار بار انرژی جنبشی $\frac{1}{n}K_m$ خواهد شد:

$$K=\frac{E}{n} \qquad K=\frac{E}{n}$$

$K=0$ (۲) $E=K_m$ (۱) $K=0$

(۳) ۰ (۴) A

$$K=\frac{E}{n} \qquad K=\frac{E}{n}$$

نکته در یک حرکت هماهنگ ساده در مدت یک دوره، چهار بار تندی $\frac{1}{n}$ تندی بیشینه، چهار بار شتاب $\frac{1}{n}$ شتاب بیشینه، چهار بار انرژی جنبشی $\frac{1}{n}$ انرژی جنبشی بیشینه و ... خواهد بود.

۲ ۱۶۵۵ B

۱ انرژی جنبشی نوسانگر ۱۲/۵ درصد انرژی پتانسیل است، بنابراین:

$$K=\frac{12/5}{100}U\Rightarrow U=8K$$

۲ مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر برابر انرژی مکانیکی آن است.

$$E=U+K\Rightarrow E=8K+K\Rightarrow E=9K$$

۳ بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر برابر انرژی مکانیکی نوسانگر بوده از این‌رو می‌توانیم بنویسیم:

$$K_m=9K\Rightarrow \frac{1}{2}mv_m^2=9(\frac{1}{2}mv^2)\Rightarrow v_m=3v\Rightarrow v=\frac{v_m}{3}(I)$$

۴ با توجه به فرض مسئله در لحظهٔ مورد نظر تندی نوسانگر $3m/s$ از بیشینه تندی کمتر است، بنابراین:

$$v=v_m-3 \xrightarrow{(I)} \frac{v_m}{3}=v_m-3\Rightarrow 3=\frac{2}{3}v_m\Rightarrow v_m=4/5m/s$$

۵ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم.

$$v_m=A\omega \xrightarrow{A=0/02m} 4/5=0/02\omega\Rightarrow \omega=\frac{450}{2}=225rad/s$$

۶ دوره را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 225=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{225}s$$

۷ مسیر حرکت را رسم می‌کنیم. کمترین زمانی که طول می‌کشد تا نوسانگر دو بار از مکان $+1cm$ بگذرد وقتی است که نوسانگر از مکان $+1cm$ به $+2cm$ رفته و این مسیر را برمی‌گردد بنابراین Δt خواهد شد:

$$\Delta t=\frac{T}{6}+\frac{T}{6}=\frac{T}{3}\Rightarrow \Delta t=\frac{\frac{2\pi}{225}}{3}\Rightarrow \Delta t=\frac{2}{225}s$$

$\frac{A}{2}$ $\frac{T}{6}$

-2 $+1$ 2

$\frac{T}{6}$

۲ ۱۶۵۶ A

با توجه به معادلهٔ مکان - زمان $x=0/05\cos 20t$ ، دامنهٔ حرکت برابر $A=0/05m$ خواهد شد. از طرفی بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر برابر انرژی مکانیکی آن است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$K_m=E=\frac{1}{2}kA^2\Rightarrow 6\times 10^{-2}=\frac{1}{2}k(0/05)^2\Rightarrow k=48N/m$$

۳ ۱۶۵۷ A

خط فکری انرژی پتانسیل یک نوسانگر در دو انتهای مسیر یعنی نقاط بازگشت بیشینه می‌شود، بنابراین شما باید در معادلهٔ حرکت به جای $x=\pm A$ را قرار داده و لحظاتی که مکان بیشینه می‌شود را حساب کنید و مشخص کنید در بازهٔ بیان شده در صورت مسئله چند بار $x=\pm A$ شده است.

روش استفاده از بازه‌های زمانی شناخته شده:

۱ دوره را حساب می‌کنیم.

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۲s$$

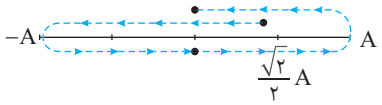
۲ در لحظهٔ ابتدایی بازهٔ $t_۱=۰/۲۵s$ مکان نوسانگر را مشخص می‌کنیم.

$$x=۰/۰۲\cos\pi t\Rightarrow x_۱=۰/۰۲\cos\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x_۱=۰/۰۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow x_۱=\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$$

۳ مشخص می‌کنیم بازهٔ زمانی ارائه شده چه کسری از دوره است.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{۲/۵-۰/۲۵}{۲}\Rightarrow\Delta t=\frac{۹T}{۸}$$

۴ مسیر را رسم می‌کنیم. Δt برابر $T+\frac{T}{۸}$ شده یعنی نوسانگر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ شروع به حرکت کرده و دوباره به همین نقطه برمی‌گردد (T) و سپس در مدت $\frac{T}{۸}$ از $+A$ به صفر می‌رسد و در طول مسیرش یک بار از $-A$ و بار دیگر از $+A$ می‌گذرد، بنابراین انرژی پتانسیل دو بار بیشینه می‌شود.



روش استفاده از معادلهٔ حرکت: در نقاط بازگشت $(x=\pm A)$ انرژی پتانسیل بیشینه است، بنابراین بررسی می‌کنیم در بازهٔ خواسته شده چند بار نوسانگر در انتهای مسیر بوده است.

$$x=۰/۰۲\cos\pi t\Rightarrow x=\pm۰/۰۲m\Rightarrow\cos\pi t=\pm۱\Rightarrow\pi t=k\pi\Rightarrow t=k$$

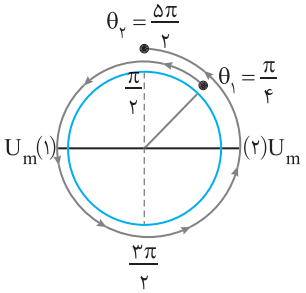
$$k=۰\Rightarrow t=۰\ ,\ k=۱\Rightarrow t=۱s\ ,\ k=۲\Rightarrow t=۲s\ ,\ k=۳\Rightarrow t=۳s$$

بازهٔ زمانی داده شده $۰/۲۵s$ تا $۲/۵s$ که $t=۱s$ و $t=۲s$ در این بازه است بنابراین دو بار انرژی پتانسیل بیشینه می‌شود.

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی: در لحظه‌های $t_۱=۰/۲۵s$ و $t_۲=۲/۵s$، کمان ωt (فاز) را به‌دست می‌آوریم.

$$\theta_۱=\omega t_۱\Rightarrow\theta_۱=\pi(۰/۲۵)=\frac{\pi}{۴}\quad,\quad\theta_۲=\pi(۲/۵)=\frac{۵}{۲}\pi$$

روی دایرهٔ مثلثاتی در جهت مثلثاتی می‌چرخیم در عبور از $\theta=۰$ و $\theta=\pi$ انرژی پتانسیل بیشینه است و تعداد گذر از این نقاط را می‌شماریم که با توجه به دایره مثلثاتی ۲ بار انرژی پتانسیل بیشینه می‌شود.



B ۲ ۱۶۵۸

راه‌حل اول: ۱ دوره را به‌دست می‌آوریم.

$$x=A\cos۴۰\pi t\Rightarrow\omega=۴۰\pi\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}=۴۰\pi\Rightarrow T=\frac{۱}{۲۰}s$$

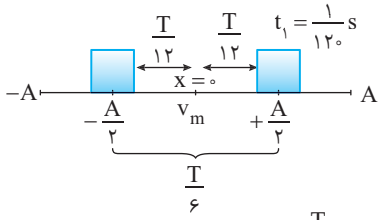
۲ مکان نوسانگر در ابتدای بازه را به‌دست می‌آوریم.

$$t=\frac{۱}{۱۲۰}s\Rightarrow x=A\cos\frac{۴۰\pi}{۱۲۰}\Rightarrow x_۱=A\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x_۱=+\frac{A}{۲}$$

۳ مشخص می‌کنیم بازهٔ زمانی داده شده چه کسری از دوره است.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{۱}{۶۰}-\frac{۱}{۱۲۰}}{\frac{۱}{۲۰}}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{۱}{۱۲۰}}{\frac{۱}{۲۰}}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۶}$$

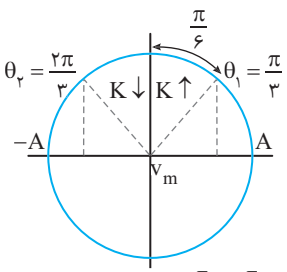
۴ مسیر حرکت را با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده مطابق شکل زیر است.



۵ بنابراین در بازهٔ $\frac{T}{۱۲}$ ابتدایی حرکت تندشونده و انرژی جنبشی در حال افزایش است.

$$\frac{T}{۱۲}=\frac{\frac{۱}{۲۰}}{۱۲}=\frac{۱}{۲۴۰}s$$

راه‌حل دوم: کمان (فاز) را در لحظه‌های $t_۱=\frac{۱}{۱۲۰}s$ و $t_۲=\frac{۱}{۶۰}s$ روی دایره مثلثاتی (مرجع) مشخص می‌کنیم.



$$\theta=\omega t\Rightarrow\begin{cases}\theta_۱=۴۰\pi\times\frac{۱}{۱۲۰}=\frac{\pi}{۳}\\ \theta_۲=۴۰\pi\times\frac{۱}{۶۰}=\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}$$

با توجه به دایره مرجع در مدتی که کمان (فاز) از $\frac{\pi}{۳}$ به $\frac{\pi}{۲}$ تغییر می‌کند انرژی جنبشی در حال افزایش است.

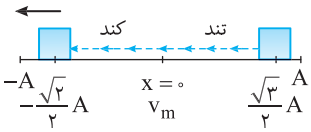
$$\Delta\theta=\omega t\Rightarrow\frac{\pi}{۶}=۴۰\pi t\Rightarrow t=\frac{۱}{۲۴۰}s$$

B ۱ ۱۶۵۹

مکان نوسانگر را در دو حالت مشخص می‌کنیم:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow x=A\cos\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}A\ ,\ x=A\cos\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}A$$

روی مسیر مطابق شکل مشخص است که نوسانگر ابتدا در حال حرکت به سوی مرکز نوسان بوده و سرعت و انرژی جنبشی در حال افزایش و پس از گذر از نقطهٔ تعادل، سرعت و انرژی جنبشی در حال کاهش است و گزینهٔ (۱) درست است.



A ۱ ۱۶۶۰

نکته در یک تابع کسینوس مانند $y=A\cos x$ یا $y=A\cos^۲x$ بیشینه مقدار تابع برابر ضریب cos یعنی A است.

۱ در معادلهٔ داده شده $K=K_۰\cos^۲\omega t$، $K_۰$ همان بیشینه مقدار انرژی جنبشی است $(K_۰=K_m)$.

نکته در حرکت هماهنگ ساده بیشینه انرژی جنبشی بیشینه انرژی پتانسیل نوسانگر مقدار یکسانی داشته و برابر انرژی مکانیکی نوسانگر هستند. $U_m=K_m=E$

۲ با توجه به نکتهٔ بالا بیشینه انرژی پتانسیل نوسانگر برابر $K_۰$ است. $U_m=K_m=K_۰$.

B ۱ ۱۶۶۱

خط فکری در معادله‌های این‌چنینی $(K=۰/۱۶-۴۰۰x^۲)$ باید شما یادتان باشد که اگر $x=۰$ باشد، K بیشینه است (مرکز نوسان) و اگر $K=۰$ باشد یعنی نوسانگر در نقاط بازگشت $(x=\pm A)$ قرار دارد، یعنی اگر به جای K صفر قرار دهیم باید به جای x، A را قرار داده و مسئله را حل کنید.

انرژی جنبشی هنگامی صفر می‌شود که نوسانگر در نقطهٔ بازگشت یعنی $x=\pm A$ باشد از این‌رو:

$$K=۰/۱۶-۴۰۰x^۲\xrightarrow[K=۰]{x=\pm A}۰=۰/۱۶-۴۰۰A^۲\Rightarrow A^۲=\frac{۰/۱۶}{۴۰۰}$$

$$\Rightarrow A=۰/۰۲m\Rightarrow A=۲cm$$

۳ ۱۶۶۲ B

۱ بیشینه انرژی جنبشی برابر انرژی مکانیکی نوسانگر است.

$$K_m = E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \quad (1)$$

۲ بیشینه نیروی وارد بر نوسانگر برابر است با:

$$F_m = mA\omega^2 \quad (2)$$

۳ دو رابطهٔ (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم و به جای F_m مقدار که مسئله داده یعنی ۱۲N را قرار می‌دهیم.

$$\frac{K_m}{F_m} = \frac{1}{2}A \Rightarrow \frac{K_m}{12} = \frac{1}{2}\times 0/08 \Rightarrow K_m = 0/48J = 480mJ$$

میانبر انرژی مکانیکی نوسانگر (E یا K_m یا U_m) برابر است با:

$$E = K_m = U_m = \frac{1}{2}F_mA$$

۳ ۱۶۶۳ A

با توجه به قانون هوک $(F=kx)$، ثابت فنر خواهد شد: $F = -\frac{\pi^2}{10}x \Rightarrow k = \frac{\pi^2}{10}N/m$

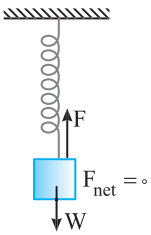
دامنهٔ حرکت را حساب می‌کنیم:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow 2\pi^2\times 10^{-3} = \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{10}A^2 \Rightarrow A^2 = 0/04m \Rightarrow A = 0/2m$$

بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم. $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\frac{\pi^2}{10}}{0/1}} \Rightarrow \omega = \pi rad/s$

معادله مکان - زمان را می‌نویسیم: $x = A\cos\omega t \Rightarrow x = 0/2\cos\pi t$

۲ ۱۶۶۴ B



در حالت تعادل، نیروی وزن و نیروی کشسانی فنر متوازن هستند.

$$F = W \Rightarrow k\Delta L = mg \Rightarrow k(0/025) = 0/2\times 10$$

$$k = 80N/m$$

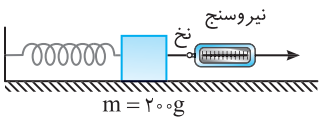
بیشینه انرژی جنبشی یا همان انرژی مکانیکی خواهد شد:

$$K_m = E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow K_m = \frac{1}{2}\times 80\times(2\times 10^{-2})^2$$

$$K_m = 40\times 4\times 10^{-4} \Rightarrow K_m = 16\times 10^{-3}J = 16mJ$$

۱ ۱۶۶۵ B

خط فکری وقتی وزنهٔ (۱)، ۲cm از حالت تعادل منحرف کرده و رها می‌کنیم دامنهٔ حرکت $A = 2cm$ است. در این حالت نیروی فنر برابر ۵N بوده است. $(F_m = 5N)$. با توجه به این داده‌ها، انرژی مکانیکی را پیدا می‌کنیم سپس با داشتن آن، انرژی پتانسیل را به‌دست آورده و انرژی جنبشی را حساب می‌کنیم تا بتوانیم تندی وزنه را به‌دست بیاوریم.



۱ انرژی مکانیکی نوسانگر برابر است با: $E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \quad (I)$

۲ بیشینه نیروی وارد بر نوسانگر برابر است با: $F_m = mA\omega^2 \quad (II)$

۳ دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{E}{F_m} = \frac{\frac{1}{2}mA^2\omega^2}{mA\omega^2} \Rightarrow \frac{E}{F_m} = \frac{1}{2}A \xrightarrow[A=0/02m]{F_m=5N} E = 5\times\frac{1}{2}(0/02)$$

$$\Rightarrow E = 0/05J = 50mJ$$

۴ انرژی جنبشی نوسانگر را به‌دست می‌آوریم.

$$E = U + K \Rightarrow 50 = 34 + K \Rightarrow K = 16mJ$$

۵ تندی را حساب می‌کنیم:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 16\times 10^{-3} = \frac{1}{2}\times 0/2\times v^2 \Rightarrow v^2 = 16\times 10^{-2} \Rightarrow v = 0/4m/s$$

۱ ۱۶۶۶ B

تکانه نوسانگر برابر $P = mv$ است و بیشینه تکانه آن برابر $P_{max} = mv_m$ است.

انرژی مکانیکی نوسانگر برابر $E = K_m = \frac{1}{2}mv_m^2$ است. با توجه به رابطهٔ $K = \frac{P^2}{2m}$،

اگر انرژی جنبشی نوسانگر بیشینه باشد، تکانه آن نیز بیشینه است:

$$K_m = \frac{P_m^2}{2m} = \frac{4\times 10^{-6}\pi^2}{2\times 0/1} \Rightarrow K_m = 2\times 10^{-5}\pi^2 J$$

$$\xrightarrow[\times 10^6]{\text{تبدیل یکا به میکروژول}} K_m = 20\pi^2\mu J$$

دقت کردید در حل تست طول پاره‌خط (۴cm) در حل مسئله نقشی ندارد.

۳ ۱۶۶۷ B

۱ طول پاره‌خط برابر ۱۰cm است پس دامنهٔ حرکت $\frac{10}{2} = 5cm$ است.

۲ انرژی مکانیکی که در طول مسیر ثابت است و برابر است با:

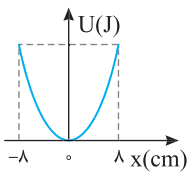
$$E = \frac{1}{2}kA^2 = 25\times 10^{-3}J = 25mJ$$

۳ در $x=0$ تندی نوسانگر بیشینه است پس در $x=0$ انرژی جنبشی بیشینه و انرژی پتانسیل صفر است و در $x=\pm A$ که انتهای مسیر است، تندی متحرک صفر است پس انرژی جنبشی صفر و انرژی پتانسیل بیشینه می‌باشد. با این اطلاعات نمودار گزینهٔ (۳) پاسخ مسئله است.

۱ ۱۶۶۸ A

خط فکری بیشینه انرژی جنبشی همان انرژی مکانیکی است. $(E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2)$

بنابراین شما از روی شکل دامنه را مشخص کنید و با استفاده از اطلاعات مسئله ω را بیابید تا مسئله حل شود.



۱ با توجه به نمودار دامنه $A = 8cm$ است.

۲ در هر دقیقه نوسانگر ۱۲۰ نوسان انجام می‌دهد بنابراین دوره برابر است با:

$$T = \frac{t}{N} \Rightarrow T = \frac{60}{120} \Rightarrow T = \frac{1}{2}s$$

۳ بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم. $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi\, rad/s$

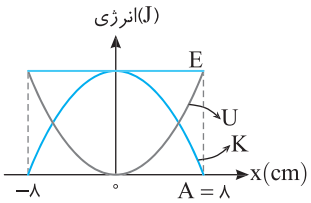
۴ انرژی جنبشی بیشینه را حساب می‌کنیم.

$$K_m = E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}\times 2\times(8\times 10^{-2})^2\times(4\pi)^2 = 64\times 10^{-4}\times 144$$

$$K_m = 9216\times 10^{-4}J = 9/216\times 10^{-1}J$$

۳ ۱۶۶۹ A

نکته در حرکت هماهنگ ساده مسیر بدون اتلاف بوده و انرژی مکانیکی جسم ثابت است و در طول مسیر اگر انرژی جنبشی کاهش یابد، به همان اندازه انرژی پتانسیل افزایش خواهد یافت و بالعکس:



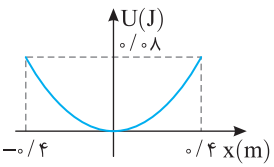
با توجه به نمودار انرژی مکانیکی نوسانگر $40J$ و دامنهٔ نوسان آن $8cm$ است. انرژی مکانیکی نوسانگر از رابطه زیر به دست می‌آید بنابراین:

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \xrightarrow{\omega=2\pi f} E = 2m\pi^2A^2f^2$$

$$\Rightarrow 40 = 2\times(0/5)\times(\sqrt{10})^2\times(\frac{8}{100})^2\times f^2$$

$$40 = 10\times\frac{64}{10000}\times f^2 \Rightarrow \frac{10^4}{16} = f^2 \Rightarrow f = \frac{100}{4} = 25Hz$$

بازی با سؤال نمودار انرژی پتانسیل نوسانگر ساده‌ای به جرم ۴۰ گرم بر حسب مکان مطابق شکل روبه‌رو است. دورهٔ نوسان این نوسانگر چند ثانیه است؟



۱) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۵}$ ۳) $\frac{۴\pi}{۵}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۵}$

پاسخ دامنهٔ نوسانگر $A=۰/۴m$ است.

با توجه به رابطهٔ $E=U_{max}=\frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲$، بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم:

$$۰/۰۸=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۱۰۰}\times(۰/۴)^۲\times\omega^۲\Rightarrow\omega^۲=۲۵\Rightarrow\omega=۵rad/s$$

دوره را حساب می‌کنیم:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow۵=\frac{۲\times\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۵}s$$

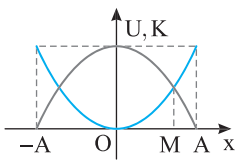
گزینهٔ ۴

۳ ۱۶۷۰ A

به نمودار با دقت نگاه کنید. در نقطهٔ M انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل برابر است از این‌رو:

$$E=U+K\Rightarrow E=K+K\Rightarrow E=۲K$$

به جای انرژی مکانیکی، بیشینه انرژی جنبشی $K_m=\frac{۱}{۲}mv_m^۲$ را قرار می‌دهیم.



$$E=۲K\Rightarrow\frac{۱}{۲}mv_m^۲=۲(\frac{۱}{۲}mv^۲)\Rightarrow v=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}v_m$$

۱ ۱۶۷۱ B

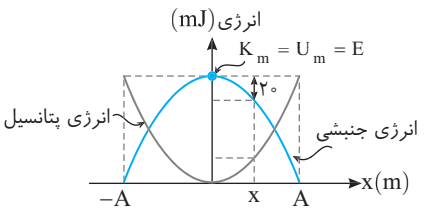
۱ با توجه به نمودار انرژی جنبشی در نقطهٔ x انرژی جنبشی نوسانگر ۲۰mJ از انرژی جنبشی بیشینه کمتر است. $K=K_m-۲۰$

۲ انرژی جنبشی بیشینه برابر انرژی مکانیکی نوسانگر است. از این‌رو:

$$K=E-۲۰\quad(I)$$

۳ مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل برابر انرژی مکانیکی است.

$$E=U+K\xrightarrow{(I)}E=U+E-۲۰\Rightarrow U=۲۰mJ$$



۱ ۱۶۷۲ B

۱ مطابق نمودار انرژی جنبشی در مکان $x_۲$ $(K_۲)$ با انرژی پتانسیل در نقطهٔ $x_۱$ $(U_۱)$ برابر است. $U_۱=K_۲$

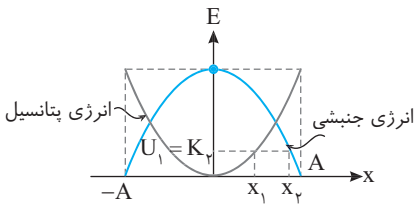
۲ انرژی مکانیکی برابر است با:

$$E_۱=U_۱+K_۱\xrightarrow{U_۱=K_۲}E_۱=K_۲+K_۱\Rightarrow E=K_۲+K_۱$$

۳ بنابراین کافی است برای به‌دست آوردن انرژی مکانیکی نوسانگر $K_۱$ و $K_۲$ را حساب کرده با هم جمع کنیم.

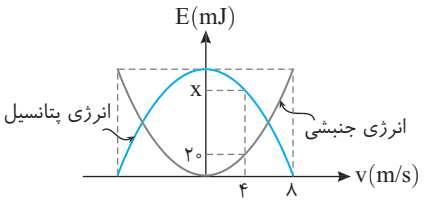
$$E=\frac{۱}{۲}mv_۲^۲+\frac{۱}{۲}mv_۱^۲\xrightarrow{m=۰/۰۱kg}E=\frac{۱}{۲}\times۰/۰۱(۲\sqrt{۲})^۲+\frac{۱}{۲}\times۰/۰۱(۲\sqrt{۶})^۲$$

$$E=\frac{۱}{۲}\times۰/۰۱\times۸+\frac{۱}{۲}\times۰/۰۱\times۲۴\Rightarrow E=۰/۱۶J$$



۳ ۱۶۷۳ B

خط فکری نمودار انرژی برحسب سرعت است آن را با نمودار انرژی برحسب مکان اشتباه نکنید. تندی بیشینه $v_m=۸m/s$ و وقتی تندی $v=۴m/s$ است انرژی جنبشی ۲۰mJ است. به کمک این مطلب انرژی جنبشی بیشینه (K_m) یعنی انرژی مکانیکی نوسانگر $(E=K_m)$ را به‌دست بیاورید. سپس به کمک پایستگی انرژی مکانیکی مقدار x یعنی انرژی پتانسیل را حساب کنید.



با توجه به نمودار می‌توان نوشت:

$$K_m=\frac{۱}{۲}mv_m^۲, K=\frac{۱}{۲}mv^۲\Rightarrow\frac{K_m}{K}=\frac{v_m^۲}{v^۲}\Rightarrow\frac{K_m}{۲۰}=(\frac{۸}{۴})^۲\Rightarrow K_m=۸۰mJ$$

بنابراین انرژی مکانیکی نوسانگر $E=K_m=۸۰mJ$ است. در این صورت انرژی پتانسیل x خواهد شد:

$$E=K+U\Rightarrow۸۰=۲۰+U\Rightarrow U=۶۰mJ$$

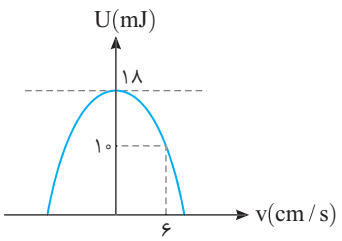
۱ ۱۶۷۴ B

نکته بیشینه انرژی پتانسیل نوسانگر برابر انرژی مکانیکی آن است.

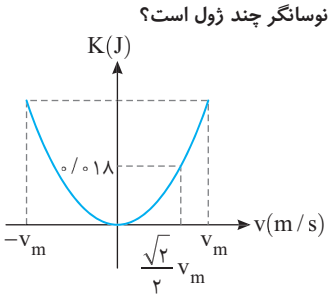
انرژی مکانیکی نوسانگر $E=۱۸mJ$ و ثابت فنر $k=۱۰۰۰N/m$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$E=\frac{۱}{۲}kA^۲\xrightarrow{E=U_m}۱۸\times۱۰^{-۳}=\frac{۱}{۲}\times۱۰^۳\times A^۲$$

$$\Rightarrow A=۶\times۱۰^{-۳}m=۰/۶cm\Rightarrow\text{طول پاره‌خط}=۱/۲cm$$



بازی با سؤال نمودار انرژی جنبشی بر حسب سرعت نوسانگر ساده‌ای مطابق شکل است. انرژی مکانیکی نوسانگر چند ژول است؟



۱) ۰/۰۲۴ ۲) ۰/۰۳۶ ۳) $۰/۰۱۸\sqrt{۲}$ ۴) $۰/۰۱۸\sqrt{۳}$

پاسخ انرژی مکانیکی برابر انرژی جنبشی بیشینه است، از این‌رو انرژی جنبشی بیشینه را حساب می‌کنیم:

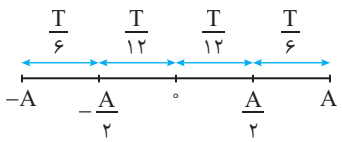
$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲,\ K_m=\frac{۱}{۲}mv_m^۲\Rightarrow\frac{K}{K_m}=\frac{v^۲}{v_m^۲}\Rightarrow\frac{۰/۰۱۸}{K_m}=\frac{(\frac{\sqrt{۲}}{۲}v_m)^۲}{v_m^۲}$$

$$\Rightarrow K_m=۰/۰۳۶J\Rightarrow E=۰/۰۳۶J$$

گزینهٔ ۲

۴ ۱۶۷۵ B

۱ طول پاره‌خط برابر $20cm$ است بنابراین دامنه برابر $A=\frac{20}{2}=10cm$ است.



۲ نوسانگر در مدت $0/5s$ به $+\frac{A}{2}$ می‌رسد که با توجه به بازه‌های شناخته شده داریم: $\frac{T}{6}=0/5s\Rightarrow T=3s$

۳ بسامد زاویه‌ای خواهد شد: $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{3}$

۴ انرژی مکانیکی همواره ثابت و برابر $E=\frac{1}{2}mv_m^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2$ است، بنابراین نمودارهای (۱) و (۲) نادرست هستند. از طرفی دقت کنید که تندی همواره مثبت است و قسمت منفی در نمودار (۳) نادرست است و مقدار E نیز خواهد شد:

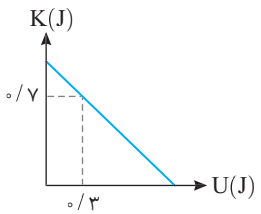
$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2=\frac{1}{2}\times0/9\times(0/1)^2\times(\frac{2\pi}{3})^2=\frac{1}{2}\times0/9\times0/01\times\frac{4\pi^2}{9}$$
$$=0/02J=20mJ$$

بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

۱ ۱۶۷۶ B

مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل برابر با انرژی مکانیکی است. با توجه به اینکه روی نمودار در لحظه‌ای که $U=0/3J$ بوده، انرژی جنبشی برابر $0/7J$ است، خواهیم داشت:

$$E=K+U\Rightarrow E=0/7+0/3=1J$$

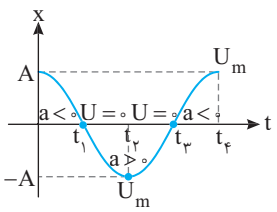


انرژی از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید.

$$E=\frac{1}{2}kA^2\Rightarrow1=\frac{1}{2}(k)(0/2)^2\Rightarrow k=\frac{2}{0/04}=50N/m$$

۴ ۱۶۷۷ A

به نمودار روبه‌رو با دقت بنگرید. در حرکت به سمت انتهای مسیر انرژی پتانسیل نوسانگر رو به افزایش است یعنی از t_1 تا t_2 و یا از t_3 تا t_4. می‌دانیم که علامت شتاب نوسانگر مخالف علامت مکان نوسانگر می‌باشد* و چون شتاب منفی مدنظر می‌باشد پس باید مکان مثبت باشد یعنی از t_3 تا t_4 هم شتاب منفی و هم انرژی پتانسیل در حال افزایش است.

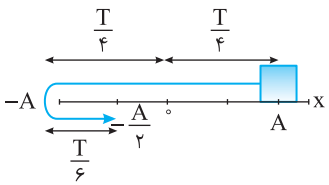


۲ ۱۶۷۸ B

خط فکری از روی محور افقی (t) نمودار $x-t$ باید دورهٔ نوسان را به‌دست آورد و با توجه به محور قائم دامنه و مکان نوسانگر مشخص خواهد شد. در گام اول دوره را حساب کرده و در گام دوم با توجه به رابطهٔ $E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2$ انرژی مکانیکی را حساب می‌کنیم.

در لحظهٔ $t_1=\frac{2}{15}$ برای دومین بار مکان نوسانگر به $-2cm$ یا $-\frac{A}{2}$ رسیده است:

$$\Delta t=\frac{T}{4}+\frac{T}{4}+\frac{T}{6}=\frac{8T}{12}=\frac{2T}{3}$$
$$\Delta t=t_1=\frac{2}{15}s\Rightarrow\frac{2T}{3}=\frac{2}{15}\Rightarrow T=\frac{1}{5}s$$



با داشتن T و محاسبهٔ ω انرژی مکانیکی را به‌دست می‌آوریم:

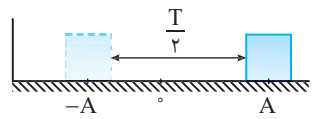
$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\xrightarrow[\omega=\frac{2\pi}{T}=10\pi]{m=50g,A=4cm}$$

$$E=\frac{1}{2}\times(50\times10^{-3})(16\times10^{-4})(100\times\pi^2)$$

$$\xrightarrow{\pi^2\simeq10}E=\frac{1}{2}(80\times10^{-3})=40\times10^{-3}J\Rightarrow E=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}J$$

۳ ۱۶۷۹ B

خط فکری بیشینه جابه‌جایی یک نوسانگر در مدت نیم دوره همواره وقتی رخ می‌دهد که نوسانگر از مکان A به $-A$ و یا از $-A$ به $+A$ برود. در این صورت مقدار جابه‌جایی برابر $2A$ است. با این توضیحات شما می‌توانید دامنهٔ حرکت را بیابید و با داشتن دامنهٔ حرکت و انرژی مکانیکی، دوره را حساب کرده و نمودار مورد نظر را تشخیص دهید.



۱ بیشینه جابه‌جایی در مدت $\frac{T}{2}$، $10cm$ است، بنابراین دامنه خواهد شد:

$$2A=10\Rightarrow A=\frac{10}{2}\Rightarrow A=5cm$$

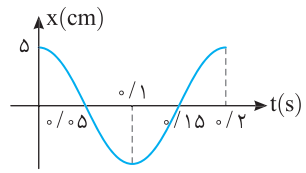
۲ رابطهٔ انرژی مکانیکی را نوشته و بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم:

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\xrightarrow[A=5\times10^{-2}m]{E=1/25\times10^{-2}\pi^2J,\ m=0/1kg}$$

$$E=1/25\times10^{-2}\times\pi^2=\frac{1}{2}\times0/1\times25\times10^{-4}\times\omega^2\Rightarrow\omega^2=10^2\pi^2\Rightarrow\omega=10\pi\ rad/s$$

۳ دوره را حساب می‌کنیم. $\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow10\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=0/2s$

۴ بنابراین نمودار مکان - زمان به صورت زیر می‌باشد:

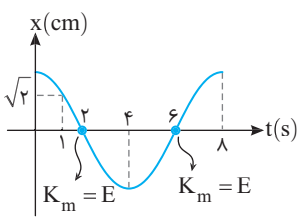


۴ ۱۶۸۰ B

۱ با توجه به نمودار $x-t$ در $t=1s$ برای اولین بار مکان نوسانگر برابر $x=\sqrt{2}$ می‌شود، بنابراین می‌توان دوره را حساب کرد.

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow\sqrt{2}=2\cos\frac{2\pi}{T}t\xrightarrow{t=1s}$$

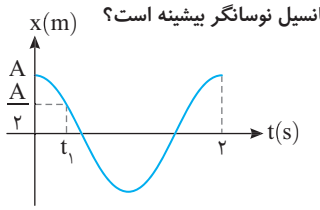
$$\cos\frac{2\pi}{T}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow T=8s$$



۲ هنگام گذر نوسانگر از حالت تعادل یعنی در لحظه‌هایی که نمودار مکان - زمان محور زمان را قطع می‌کند، تمام انرژی مکانیکی جسم به صورت انرژی جنبشی است که باتوجه به نمودار در لحظهٔ $t=2s$ برای اولین بار و در $t=6s$ برای دومین بار این اتفاق می‌افتد.

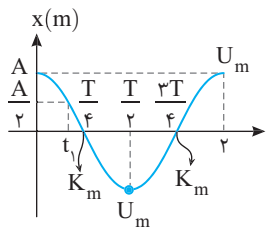
* هم‌علامت نبودن شتاب و مکان در کتاب درسی به‌طور مشخص بیان نشده است.

بازی با سوال نمودار مکان - زمان نوسانگری مطابق شکل روبه‌رو است. چند ثانیه پس از $t_۱$، انرژی پتانسیل نوسانگر بیشینه است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

پاسخ با توجه به نمودار $T=۲s$ می‌باشد و $t_۱$ اولین لحظه‌ای است که متحرک به مکان $x=\frac{A}{۲}$ رسیده است:



$$\omega=\frac{۲\pi}{T}=\pi\,rad/s,\ \frac{A}{۲}=A\cos\omega t_۱$$
$$\Rightarrow\cos\pi t_۱=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\pi t_۱=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow t_۱=\frac{۱}{۳}s$$

در انتهای مسیر $x=\pm A$، انرژی پتانسیل نوسانگر بیشینه است پس از $t_۱$ در $t=\frac{T}{۲}$ انرژی پتانسیل نوسانگر بیشینه می‌شود.

$$\frac{T}{۲}-t_۱=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}s$$

گزینهٔ ۲

۱ ۱۶۸۱ B

۱ با توجه به نمودار، دو دورهٔ نوسانگر B برابر نصف دورهٔ A است، بنابراین:

$$۲T_B=\frac{T_A}{۲}\Rightarrow T_A=۴T_B\quad (I)$$

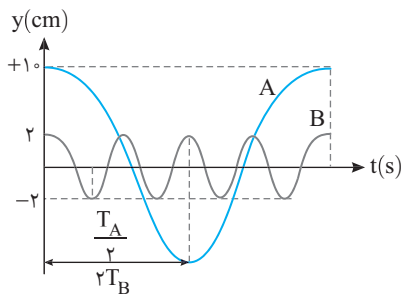
۲ نسبت بسامد زاویه‌ای دو نوسانگر را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{\omega_B}{\omega_A}=\frac{\frac{۲\pi}{T_B}}{\frac{۲\pi}{T_A}}\Rightarrow\frac{\omega_B}{\omega_A}=\frac{T_A}{T_B}\xrightarrow{(I)}\frac{\omega_B}{\omega_A}=۴\Rightarrow\omega_A=\frac{۱}{۴}\omega_B$$

۳ دامنهٔ A، ۱۰cm و دامنهٔ B برابر ۲cm است.

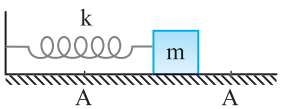
۴ انرژی مکانیکی نوسانگر A و B را نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{E_A}{E_B}=\frac{\frac{۱}{۲}m_AA_A^۲\omega_A^۲}{\frac{۱}{۲}m_BA_B^۲\omega_B^۲}\xrightarrow{m_B=۵m_A}\frac{E_A}{E_B}=\frac{۱}{۵}\times(\frac{۱۰}{۲})^۲\times(\frac{۱}{۴})^۲\Rightarrow\frac{E_A}{E_B}=\frac{۵}{۱۶}$$

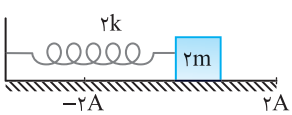


۴ ۱۶۸۲ C

خط فکری ابتدا به کمک نوشته‌های روی دو شکل نسبت انرژی مکانیکی آن‌ها را به‌دست آورید سپس به سراغ حل مسئله بروید.



(۱)



(۲)

انرژی مکانیکی یک نوسانگر از رابطهٔ $E=\frac{۱}{۲}kA^۲$ به‌دست می‌آید. بنابراین:

$$\frac{E_۲}{E_۱}=\frac{\frac{۱}{۲}k_۲A_۲^۲}{\frac{۱}{۲}k_۱A_۱^۲}=\frac{(۲k)(۲A)^۲}{k(A)^۲}\Rightarrow E_۲=۸E_۱$$

بنابراین $E_۲$ بزرگ‌تر از $E_۱$ است. اکنون $E_۱$ و $E_۲$ برحسب انرژی جنبشی و پتانسیل نوشته شده از هم کم می‌کنیم.

$$E_۱=U_۱+K_۱,\ E_۲=U_۲+K_۲\Rightarrow E_۲-E_۱=(U_۲-U_۱)+(K_۲-K_۱)$$

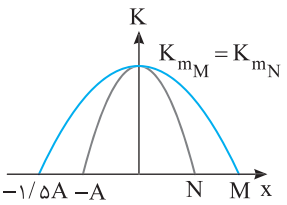
با فرض مسئله $U_۲-U_۱=۴۶mJ$ و $K_۲-K_۱=۱۰mJ$ است. از این رو:

$$۸E_۱-E_۱=۴۶+۱۰\Rightarrow۷E_۱=۵۶\Rightarrow E_۱=۸mJ,\ E_۲=۸\times۸=۶۴mJ$$

۳ ۱۶۸۳ B

خط فکری با توجه به نمودار بیشینه انرژی جنبشی نوسانگرهای M و N با هم برابر و دو نوسانگر هم‌جرم بوده و دامنهٔ نوسان M، ۱/۵ برابر دامنهٔ نوسان N $(A_M=۱/۵A_N)$ است، بنابراین همه چیز برای حل مسئله آماده است کافی است انرژی جنبشی بیشینه را با هم برابر قرار دهید.

۱ بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر N و M با هم برابر است.



$$K_{m_M}=K_{m_N}$$
$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}m_Mv_{m_M}^۲=\frac{۱}{۲}m_Nv_{m_N}^۲$$
$$\xrightarrow{m_N=m_M}v_{m_M}=v_{m_N}$$

۲ تندی بیشینه برابر $v_m=A\omega$ است. بنابراین:

$$v_{m_M}=v_{m_N}\Rightarrow A_M\omega_M=A_N\omega_N\xrightarrow{\omega=\frac{۲\pi}{T}}۱/۵(\frac{۲\pi}{T_M})=\frac{۲\pi}{T_N}$$
$$\frac{T_M}{T_N}=۱/۵$$

۲ ۱۶۸۴ A

هرگاه بر جسمی که می‌تواند با دوره یا بسامد خاصی (دورهٔ طبیعی) نوسان کند، یک نیروی دوره‌ای با همان دوره وارد شود، جسم شروع به نوسان می‌کند و دامنهٔ نوسان تا مقدار بیشینه‌ای افزایش می‌یابد و از آن پس حرکت نوسانی بدون کاهش دامنه ادامه می‌یابد، این پدیده را تشدید می‌گویند.

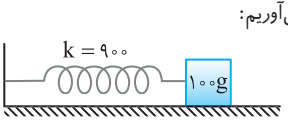
در حالتی هم که بسامد نیروی اعمال شده با بسامد نوسانگر برابر نباشد، انرژی به نوسانگر منتقل می‌شود و نوسانگر را به حرکت درمی‌آورد اما بیشترین انرژی در حالت تشدید به نوسانگر منتقل می‌شود. با توجه به گفته‌های بالا گزینهٔ (۲) درست است.

۲ ۱۶۸۵ B

یادآوری هرگاه با اعمال نیروی خارجی نوسانگری را به نوسان درآوردیم چنین نوسانی را نوسان واداشته گویند.

خط فکری هرگاه بسامد نوسان‌های واداشته با بسامد نوسانگر برابر باشد، تشدید رخ می‌دهد و دامنهٔ نوسانگر افزایش می‌یابد. اما اگر نوسانگر را با بسامدهایی بیشتر یا کمتر از بسامد طبیعی آن به نوسان درآوریم، دامنهٔ نوسان کوچک‌تر از حالت تشدید است، بنابراین شما باید بسامد طبیعی سامانهٔ جرم - فنر را حساب کرده با بسامدهای داده شده در مسئله مقایسه کنید.

بسامد طبیعی سامانهٔ جرم و فنر را به‌دست می‌آوریم:

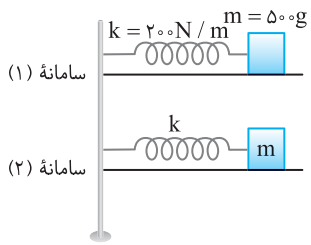


$$f_۰=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{۹۰۰}{۰/۱}}=۱۵Hz$$

بسامد $f_۲=۱۵Hz$ با بسامد طبیعی $f_۰$ سامانه برابر است. بنابراین دامنهٔ نوسان برای بسامد (فرکانس) $f_۲$ از دو فرکانس دیگر بزرگ‌تر است.

A ۳ ۱۶۸۶

بسامد سامانهٔ جرم - فنر اول را حساب می‌کنیم.



$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \xrightarrow{f=\frac{1}{T}} f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow f_2=f_1=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{200}{0/5}}=\frac{20}{2\pi}\,Hz$$

هنگامی تشدید رخ می‌دهد که بسامد طبیعی دو سامانه با هم برابر باشند، بنابراین بسامد سامانهٔ (۲) نیز برابر است با: $f_2=\frac{20}{2\pi}\,Hz$

بسامد زاویه‌ای سامانهٔ (۲) را حساب می‌کنیم.

$$\omega_2=2\pi f_2\Rightarrow\omega_2=2\pi\times\frac{20}{2\pi}\Rightarrow\omega_2=20\,rad/s$$

تنها گزینه‌ای که در آن بسامد زاویه‌ای $20\,rad/s$ است، گزینهٔ (۳) است.

B ۲ ۱۶۸۷

هنگامی بین دو سامانه تشدید رخ می‌دهد که بسامد (دوره) آن‌ها با هم برابر باشد.

در حالت اول: $T_{ف}=T_{آ}\Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow\frac{m}{k}=\frac{\ell}{g}$

در حالت دوم: طول آونگ $\ell'=2\ell$ شده است. در این صورت دورهٔ آونگ خواهد شد:

$$\frac{T'}{T}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}\Rightarrow\frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{\ell'}{\ell}}\Rightarrow\frac{T'}{T}=\sqrt{2}$$

باید دورهٔ سامانه جرم فنر نیز $\sqrt{2}$ برابر $(T'_{ف}=\sqrt{2}T_{ف})$ باشد تا مجدداً تشدید رخ دهد، بنابراین

$$2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}}=\sqrt{2}\left(2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)\Rightarrow k'=\frac{1}{2}k$$

B ۳ ۱۶۸۸

طول آونگ (۱) و آونگ (۴) با هم برابر است، بنابراین دورهٔ $\left(T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\right)$ هر دو آونگ یکی است.

$$T_1=T_4\Rightarrow f_{0_1}=f_{0_4}$$

از این رو هرگاه آونگ (۱) را به نوسان درآوریم چون بسامد طبیعی آونگ‌های (۱) و (۴) با هم برابر است، برای آونگ (۴) تشدید رخ می‌دهد و دامنهٔ نوسان آونگ (۴) از بقیه بیشتر است و گزینهٔ (۳) درست است. دقت کنید با حرکت آونگ (۱) انرژی به همهٔ آونگ‌ها منتقل می‌شود و همه می‌جنبند اما برای آونگ (۴) تشدید رخ می‌دهد و دامنه‌اش از بقیه بیشتر است.

B ۲ ۱۶۸۹

خط فکری هرگاه طول دو آونگ برابر باشد بسامد طبیعی (دورهٔ طبیعی) آن‌ها یکسان بوده و می‌توانند با هم تشدید انجام دهند. در حل این تست باید دقت کنید در اثر افزایش دما که طول آونگ‌ها افزایش می‌یابد و سپس بررسی کنید طول کدام‌ها با هم برابر می‌شود.

طول آونگ‌های (۱) و (۴) با هم برابر است و بسامد طبیعی آونگ‌های (۱) و (۴) $\left(f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$ با هم برابر است در نتیجه با نوسان آونگ (۱)، برای آونگ (۴) تشدید رخ می‌دهد.

با افزایش دما، طول آونگ‌های (۲) و (۳) و (۴) افزایش می‌یابد و با افزایش دما ممکن است طول آونگ (۳) با آونگ (۱) برابر شده و با نوسان آونگ (۱)، آونگ (۳) شروع به تشدید می‌کند اما با افزایش طول آونگ (۴) بسامد آن دیگر با بسامد آونگ (۱) برابر نیست و برای آن تشدید رخ نمی‌دهد.

طول آونگ (۲) که در هر دو حالت از طول آونگ (۱) بیشتر است و تشدید برای آونگ (۲) رخ نمی‌دهد.

B ۳ ۱۶۹۰

خط فکری میله با بسامد زاویه‌ای در گسترهٔ $1\,rad/s$ تا $2\,rad/s$ نوسان می‌کند یعنی تمام بسامد بین این دو مقدار را می‌تواند ایجاد کند بنابراین اگر بسامد آونگ‌ها بین این دو مقدار باشد برای آن‌ها تشدید رخ می‌دهد اما ما به جای اینکه بسامد تک تک آونگ‌ها را حساب کنیم مسیر دیگری را انتخاب کرده‌ایم، محدودهٔ طول آونگ‌ها بین این دو بسامد زاویه‌ای را به‌دست آورده و طول آونگ‌ها را با این محدوده مقایسه می‌کنیم.

بسامد زاویه‌ای (ω) در گسترهٔ $1\,rad/s$ تا $2\,rad/s$ می‌باشد و با توجه به $\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ خواهیم داشت:

$$1\le\omega\le2\Rightarrow1\le\sqrt{\frac{g}{\ell}}\le2\Rightarrow1\le\frac{g}{\ell}\le4\Rightarrow\frac{1}{4}\le\frac{\ell}{g}\le1\xrightarrow{g\approx10}2/5\le\ell\le10$$

بنابراین اگر طول آونگ در بازهٔ $2/5m$ تا $10m$ باشد، آونگ تشدید می‌کند یعنی آونگ‌های به طول‌های $2/8m$، $3/6m$ و $8/2m$ دچار تشدید می‌شوند.

B ۴ ۱۶۹۱

خط فکری با توجه به متن کتاب برای اینکه نوسان نامیرا باشد باید یک نیروی دوره‌ای مناسب که دامنه را عوض نکند در انتهای مسیر به آونگ وارد شود و چون آونگ را به سمت راست کشیده و رها می‌کنیم، این نیرو باید در انتهای راست مسیر وارد شود، بنابراین در هر دوره (T) یک بار این نیرو وارد می‌شود.

۱ دوره را حساب می‌کنیم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{24/5\times10^{-2}}{9/8}}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{2/5\times10^{-2}}$$

$$\xrightarrow{\pi=\sqrt{10}} T=2\times\sqrt{10}\times\sqrt{2/5\times10^{-2}}\Rightarrow T=2\sqrt{25\times10^{-2}}\Rightarrow T=1\,s$$

۲ بنابراین در لحظه‌های $t=1s$، $t=2s$، $t=3s$، $t=4s$، $t=5s$ و ... باید آونگ تحت تأثیر این نیرو قرار گیرد.

B ۳ ۱۶۹۲

وقتی یک نیروی خارجی با بسامدی برابر بسامد طبیعی نوسانگر به آن وارد می‌شود، نوسانگر شروع به نوسان کرده و دامنهٔ آن افزایش می‌یابد. بنابراین دامنه باید در نمودار در حال افزایش باشد اما دوره و بسامد نوسانگر به دامنه بستگی ندارد و ثابت می‌ماند.

A ۲ ۱۶۹۳

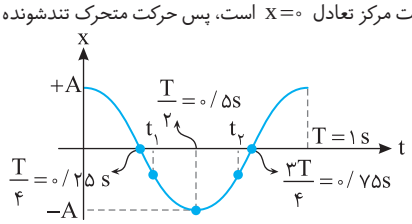
با توجه به رابطه شتاب، $a=-k$ است و با توجه به فرض مسأله که k یک مقدار ثابت است، شتاب متحرک و در نتیجه نیروی خالص وارد بر متحرک ثابت است، درحالی که می‌دانیم حرکت هماهنگ ساده حرکت با شتاب متغیر است پس حرکت هماهنگ ساده نیست.

B ۴ ۱۶۹۴

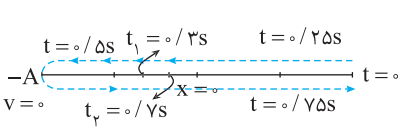
با توجه به رابطهٔ $a=-\omega^2x$ ابتدا بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega^2=4\pi^2\Rightarrow\omega=2\pi\xrightarrow{\omega=\frac{2\pi}{T}}\frac{2\pi}{T}=2\pi\Rightarrow T=1\,s$$

نمودار $x-t$ نوسانگر را رسم می‌کنیم. در t_1 نوسانگر در حال حرکت به سمت انتهای مسیر $(x=-A)$ است، پس حرکت متحرک کندشونده است. در t_2 نوسانگر در حال حرکت به سمت مرکز تعادل $x=0$ است، پس حرکت متحرک تندشونده است.



روش دیگر: مسیر حرکت را رسم می‌کنیم. مطابق شکل در $t_1=0/3s$ حرکت کندشونده و در $t_2=0/7s$ حرکت تندشونده است.



A ۱۶۹۵ | ۱

خط فکری ابتدا به کمک قانون دوم نیوتون $(F=ma)$، قانون هوک $(F=-kx)$ و بسامد زاویه‌ای $(\omega=\sqrt{k/m})$ معادلهٔ کلی شتاب - زمان در حرکت هماهنگ ساده را به‌دست می‌آوریم. سپس معادلهٔ شتاب - زمان داده شده در مسئله را با آن مقایسه می‌کنیم و به کمک آن بسامد زاویه‌ای، دامنه و دوره را به‌دست می‌آوریم. سپس بازهٔ زمانی داده شده را با دوره مقایسه کرده با رسم مسیر حرکت و به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده مدت زمانی که حرکت کندشونده است را به‌دست می‌آوریم.

۱ با توجه به قانون دوم نیوتون $(F=ma)$ و قانون هوک $(F=-kx)$ معادلهٔ شتاب - زمان را در حالت کلی به‌دست می‌آوریم.

$$ma=-kx\Rightarrow ma=-kA\cos\omega t\Rightarrow a=-\frac{k}{m}A\cos\omega t$$

$$\xrightarrow{\omega^2=\frac{k}{m}} a=-A\omega^2\cos\omega t$$

۲ معادلهٔ شتاب - زمان داده شده را با حالت کلی مقایسه کرده بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}a=-100\pi^2\cos 50\pi t\\ a=-A\omega^2\cos\omega t\end{cases}\Rightarrow\omega=50\pi\,rad/s$$

$$100\pi^2=A\omega^2\Rightarrow 100\pi^2=A(50\pi)^2\Rightarrow A=0/04m=4cm$$

۳ دوره را حساب می‌کنیم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 50\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=0/04s$$

۴ معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم.

$$x=0/04\cos 50\pi t$$

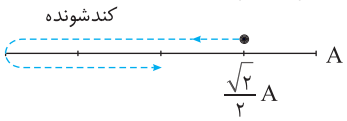
۵ بازهٔ زمانی $t_1=\frac{1}{200}s$ تا $t_2=\frac{3}{100}s$ را با دوره مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{3}{100}-\frac{1}{200}}{\frac{4}{100}}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{5}{200}}{\frac{4}{100}}\Rightarrow\Delta t=\frac{5}{8}T$$

۶ مکان متحرک در $t_1=\frac{1}{200}s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$x_1=0/04\cos 50\pi\times\frac{1}{200}\Rightarrow x_1=0/04\cos\frac{\pi}{4}\Rightarrow x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(0/04)=\frac{\sqrt{2}}{2}A$$

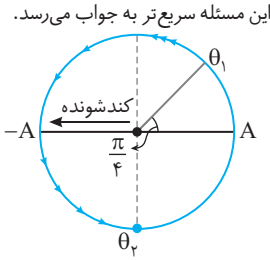
۷ مسیر حرکت را رسم می‌کنیم



در مدت $\frac{T}{4}$ حرکت کندشونده است، یعنی $\frac{T}{4}=\frac{0/04}{4}=0/01s$

روش استفاده از دایرهٔ مثلثاتی: این روش در این مسئله سریع‌تر به جواب می‌رسد.

کمان متناظر با $t_1=\frac{1}{200}s$ و $t_2=\frac{3}{100}s$ روی دایرهٔ مثلثاتی را مشخص می‌کنیم.



$$\theta_1=\omega t_1=50\pi\times\frac{1}{200}=\frac{\pi}{4}$$

$$\theta_2=\omega t_2=50\pi\times\frac{3}{100}=\frac{3\pi}{2}$$

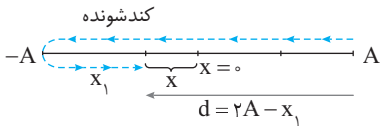
می‌دانیم که با حرکت به سمت دامنه‌ها حرکت کندشونده است، پس در حرکت از θ_1 تا θ_2 تنها در بازهٔ $\frac{\pi}{2}$ تا π ($x=0$ تا $x=-A$) حرکت کندشونده است که این بازه برابر $\frac{T}{4}=0/01s$ است.

C ۱۶۹۶ | ۱

خط فکری از لحظهٔ صفر تا t برای اولین بار تندی متوسط دو برابر بزرگی سرعت متوسط شده است. یعنی مسافت طی شده دو برابر جابه‌جایی است. تا لحظه‌ای که نوسانگر در یک جهت در حرکت است، تندی متوسط و سرعت متوسط یکسان است، بنابراین t بعد از تغییر جهت در مکان $-4cm$ اتفاق می‌افتد. مسیر حرکت را به‌طور فرضی از صفر تا t رسم می‌کنیم و مسافت را دو برابر جابه‌جایی می‌نویسیم. به حل دقت کنید.

با توجه به مسیر اگر فاصله محل مورد نظر را از $-A$ برابر x_1 قرار دهیم، مسافت طی شده خواهد شد:

$$\ell=2A+x_1$$



و جابه‌جایی خواهد شد:

$$d=2A-x_1$$

با توجه به فرض مسئله:

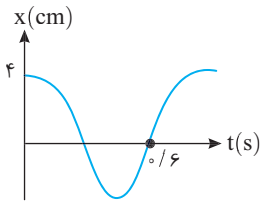
$$S_{av}=2v_{av}\Rightarrow\ell=2d\Rightarrow 2A+x_1=2(2A-x_1)$$

$$\Rightarrow 2A+x_1=4A-2x_1\Rightarrow x_1=\frac{2}{3}A$$

مکان نوسانگر یعنی فاصله نوسانگر از مبدأ مکان، بنابراین مکان در لحظهٔ $t(x)$ خواهد شد:

$$x_1+x=A\Rightarrow\frac{2}{3}A+x=A\Rightarrow x=\frac{1}{3}A=\frac{1}{3}\times 4=\frac{4}{3}cm$$

دورهٔ حرکت را حساب می‌کنیم.



$$\frac{3T}{4}=0/6\Rightarrow T=0/8s$$

بسامد زاویه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{0/8}\Rightarrow\omega=\frac{5\pi}{2}rad/s$$

شتاب حرکت خواهد شد:

$$|a|=\omega^2|x|\Rightarrow|a|=(\frac{5\pi}{2})^2\times(\frac{4}{3}\times10^{-2})\Rightarrow|a|=\frac{25\pi^2}{4}\times\frac{4}{3}\times10^{-2}\Rightarrow|a|=\frac{5}{6}m/s^2$$

B ۱۶۹۷ | ۱

خط فکری صورت مسئله کمی گنگ است. شتاب تکرار شونده یعنی چی؟ به‌نظر می‌رسد با یک قطعه الکترونیکی در حال نوسان روبه‌رو هستیم که شتاب آن می‌تواند حداکثر ۱۶g شود و اگر شتاب از این مقدار بیشتر شود قطعه آسیب می‌بیند. در حرکت هماهنگ ساده بیشینه شتاب در نقاط بازگشت خواهد بود $(a_m=A\omega^2)$ بنابراین شما باید شتاب بیشینه را برابر ۱۶g قرار داده مسئله را حل کنید.

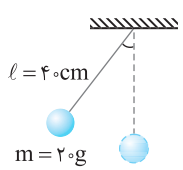
در صورت سؤال بیشینهٔ شتاب قابل تحمل ۱۶g بیان شده است از این‌رو:

$$a_m=16g\Rightarrow A\omega^2=16g\Rightarrow\frac{4}{100}\omega^2=16g\Rightarrow\omega^2=400g\Rightarrow(2\pi f)^2=400g$$

$$\Rightarrow 2\pi f=20\sqrt{g}\xrightarrow{g=\pi^2}2\pi f=20\pi\Rightarrow f=10Hz$$

B ۱۶۹۸ | ۱

۱ بسامد زاویه‌ای آونگ را حساب می‌کنیم.



$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{10}{0/4}}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{100}{4}}=5rad/s$$

۲ نیروی خالص در نقطهٔ بازگشت با محل رهاشدن آونگ همان بیشینه نیرو در حرکت هماهنگ ساده است.

$$F_{max}=mA\omega^2$$

۳ تندی هنگام گذر از نقطهٔ تعادل یعنی تندی بیشینه نوسانگر: $v_m=A\omega$ (II)

رابطهٔ (I) و (II) را بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{v_m}{F_m}=\frac{A\omega}{mA\omega^2}\Rightarrow\frac{v_m}{F_m}=\frac{1}{m\omega}$$

۴ اکنون داده‌های مسئله را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\frac{v_m}{0/1}=\frac{1}{0/02\times5}\Rightarrow v_m=1m/s$$

B ۲ ۱۶۹۹

خط فکری وقتی وزنه به فنر برخورد می‌کند، آن را فشرده کرده و متوقف می‌شود. سرعت v در لحظهٔ برخورد همان تندی بیشینه $v_m=A\omega$ در حرکت هماهنگ ساده است و فاصلهٔ محل توقف از محل برخورد نیز برابر دامنه است. بنابراین شما باید بسامد زاویه‌ای را حساب کنید تا بتوانید دامنه‌ها را با هم مقایسه کنید.

بسامد زاویه‌ای فنر A:
$$\omega_A=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

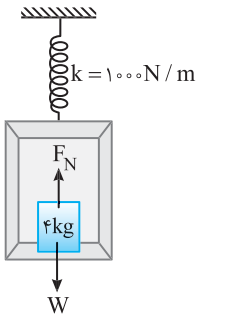
بسازمد زاویه‌ای فنر B:
$$\omega_B=\sqrt{\frac{k}{۲m}}$$

نسبت ω_A/ω_B خواهد شد:
$$\frac{\omega_A}{\omega_B}=\sqrt{\frac{۲m}{m}}=\sqrt{۲}$$

تندی بیشینه A و B را نوشته بر هم تقسیم می‌کنیم.
$$\left.\begin{matrix}v_{m_A}=A_A\omega_A\\ v_{m_B}=A_B\omega_B\end{matrix}\right\}\xrightarrow[v_{m_B}=۲v]{v_{m_A}=v}\frac{۱}{۲}=\frac{A_A}{A_B}\times\sqrt{۲}\Rightarrow\frac{A_B}{A_A}=۲\sqrt{۲}$$

C ۴ ۱۷۰۰

خط فکری بر وزنه دو نیرو یکی نیروی وزن $(W=mg)$ و دیگری نیروی عمودی سطح (F_N) وارد می‌شود. یعنی نیروی خالص وارد بر وزنه برایند این دو نیرو است. در پایین‌ترین نقطه مسیر (نقطهٔ بازگشت) بیشینه نیروی خالص به وزنه وارد می‌شود که برابر $F_{max}=mA\omega^۲$ است.

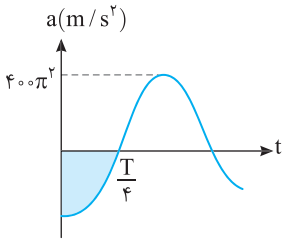


۱ بسامد زاویه‌ای سامانه را حساب می‌کنیم.
$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{۱۰۰۰}{۶+۴}}\Rightarrow\omega=۱۰\text{rad/s}$$

۲ برایند نیروهای F_N و ω را برابر F_{max} قرار می‌دهیم.
$$F_N-mg=mA\omega^۲\xrightarrow{A=۲cm}F_N-۴۰=۴\times۲\times۱۰^{-۲}\times۱۰^۲\Rightarrow F_N=۴۸N$$

C ۲ ۱۷۰۱

یادآوری مساحت سطح محصور بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان برابر تغییر سرعت است.



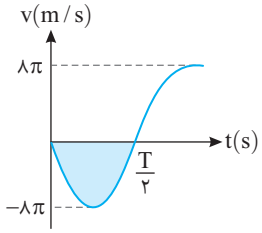
۱ در بازه صفر تا $\frac{T}{۴}$، تغییر سرعت $۲\pi m/s$ است. در این صورت در لحظهٔ $\frac{T}{۴}$ که نوسانگر از مکان $x=۰$ می‌گذرد، سرعت بیشینه و در $t=۰$ سرعت صفر است. بنابراین بیشینه سرعت خواهد شد:
$$\Delta v=v-v_۰\Rightarrow۲\pi=v_m-۰\Rightarrow v_m=۲\pi$$

۲ شتاب بیشینه برابر $a_m=۴۰۰\pi^۲m/s^۲$ است، بنابراین می‌توان نوشت:
$$\left.\begin{matrix}v_m=A\omega\\ a_m=A\omega^۲\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{v_m}{a_m}=\frac{۱}{\omega}\Rightarrow\frac{۲\pi}{۴۰۰\pi^۲}=\frac{۱}{\omega}\Rightarrow\omega=۲۰۰\pi\text{rad/s}$$

۳ دوره را حساب می‌کنیم.
$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow۲۰۰\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۰/۰۱s$$

B ۱ ۱۷۰۲

یادآوری مساحت سطح زیر نمودار سرعت - زمان و محور زمان برابر جابه‌جایی است.



۱ در بازهٔ صفر تا $\frac{T}{۲}$ سطح زیر نمودار ۰/۰۴ واحد SI بوده یعنی جابه‌جایی برابر ۰/۰۴m است.

۲ در مدت صفر تا $\frac{T}{۲}$ نوسانگر از مکان $+A$ به مکان $-A$ می‌رود و جابه‌جایی آن برابر $۲A$ است. از این‌رو می‌توان نوشت:
$$۲A=۰/۰۴\Rightarrow A=۰/۰۲m$$

۳ با توجه به نمودار $v-t$، بیشینه تندی برابر $۸\pi m/s$ است. در نتیجه خواهیم داشت:
$$v_m=A\omega\Rightarrow۸\pi=۰/۰۲\omega\Rightarrow\omega=۴۰۰\pi\text{rad/s}$$

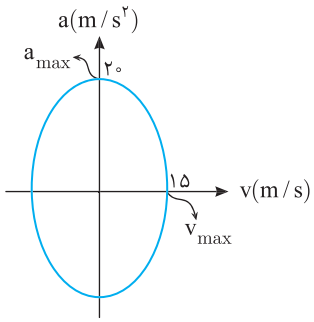
۴ بسامد را حساب می‌کنیم.
$$\omega=۲\pi f\Rightarrow۴۰۰\pi=۲\pi f\Rightarrow f=۲۰۰Hz$$

B ۲ ۱۷۰۳

خط فکری مسئلهٔ سختی نیست. از روی شکل می‌توانید شتاب بیشینه a_m و سرعت بیشینه آونگ را مشخص کنید سپس روابط a_m و v_m را نوشته، بسامد زاویه‌ای و از آنجا طول آونگ را حساب کنید.

با توجه به نمودار:
$$\begin{cases}a_{max}=۲۰\xrightarrow{a_{max}=A\omega^۲}A\omega^۲=۲۰\\ v_{max}=۱۵\xrightarrow{v_{max}=A\omega}A\omega=۱۵\end{cases}\Rightarrow\omega=\frac{۲۰}{۱۵}=\frac{۴}{۳}\text{rad/s}$$

بنابراین:
$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}}\Rightarrow\frac{۴}{۳}=\sqrt{\frac{۱۰}{\ell}}\Rightarrow\frac{۱۶}{۹}=\frac{۱۰}{\ell}\Rightarrow\ell=\frac{۹۰}{۱۶}\Rightarrow\ell=\frac{۴۵}{۸}m$$



B ۴ ۱۷۰۴

خط فکری با استفاده از انرژی مکانیکی A و B، ثابت فنر هر یک را حساب کرده سپس آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم و ثابت فنر جدید را به‌دست می‌آوریم و انرژی مکانیکی در حالت جدید را حساب می‌کنیم.

با توجه به رابطهٔ انرژی مکانیکی دستگاه جرم- فنر $(E=\frac{۱}{۲}kA^۲)$ ثابت فنر k_A و k_B را حساب می‌کنیم.

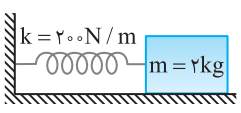
۱ با استفاده از
$$E=\frac{۱}{۲}kA^۲\Rightarrow\begin{cases}E_A=\frac{۱}{۲}\times k_A\times(۱۰\times۱۰^{-۲})^۲\Rightarrow۵=\frac{۱}{۲}\times k_A\times۱۰^{-۲}\\ \qquad\Rightarrow k_A=۱۰۰۰N/m\\ E_B=\frac{۱}{۲}\times k_B\times(۱۰\times۱۰^{-۲})^۲\Rightarrow۱۰=\frac{۱}{۲}\times k_B\times۱۰^{-۲}\\ \qquad\Rightarrow k_B=۲۰۰۰N/m\end{cases}$$

۲ ثابت فنر جدید خواهد شد:
$$k_T=k_A+k_B=۱۰۰۰+۲۰۰۰=۳۰۰۰N/m$$

۳ انرژی مکانیکی سامانه جرم و فنر جدید را به‌دست می‌آوریم
$$E=\frac{۱}{۲}k_TA^۲=\frac{۱}{۲}\times۳۰۰۰\times(۱۰\times۱۰^{-۲})^۲=\frac{۱}{۲}\times۳۰۰۰\times۱۰^{-۲}=۱۵J$$

B ۳ ۱۷۰۵

خط فکری با توجه به این‌که برای جابه‌جا کردن جسم ۴J کار انجام شده است، بنابر قانون پایستگی انرژی این کار به انرژی مکانیکی جسم تبدیل می‌شود، بنابراین انرژی مکانیکی جسم برابر با ۴J است.



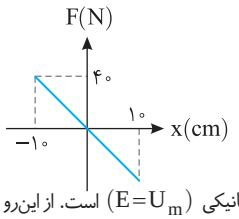
۱ با توجه به رابطهٔ انرژی مکانیکی $(E=\frac{۱}{۲}kA^۲)$ داریم:
$$E=\frac{۱}{۲}kA^۲\Rightarrow۴=\frac{۱}{۲}\times۲۰۰\times A^۲\Rightarrow۱۰۰A^۲=۴\Rightarrow A=۰/۲m=۲۰cm$$

۲ دورهٔ حرکت، تنها به جرم جسم و ثابت فنر بستگی دارد و از رابطهٔ $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ محاسبه‌می‌شود. بنابراین: $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{2}{200}}=2\pi\sqrt{\frac{1}{100}}=2\times\pi\times\frac{1}{10}=0/2\pi s$

۱۷۰۶ B

۱

خط فکری دقت کنید که در مکان‌های $+10cm$ و $-10cm$، اندازهٔ نیرو بیشینه شده و برابر $F_m=40$ است. بنابراین نوسانگر بین مکان‌های $+10cm$ و $-10cm$ در نوسان بوده و دامنه برابر $A=10cm$ است. در $x=10cm$ یعنی در دامنه انرژی پتانسیل بیشینه و برابر انرژی مکانیکی $(E=U_m)$ است. از این‌رو شما باید به کمک نمودار، ثابت فنر را بیابید و انرژی مکانیکی را به‌دست آورید.



۱ با توجه به نمودار هرگاه $x=10cm$ باشد، اندازهٔ $F=40N$ است بنابراین می‌توان نوشت: $|F|=k|x|\Rightarrow 40=k|0/1|\Rightarrow k=400N/m$

۲ انرژی پتانسیل نوسانگر در $x=10cm$ بیشینه مقدار را دارد و برابر انرژی مکانیکی نوسانگر است بنابراین $U_m=E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}\times400\times(0/1)^2=2J$

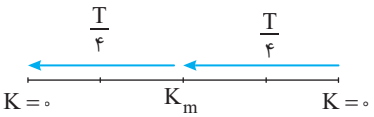
میانبر رابطهٔ بین انرژی مکانیکی، بیشینه نیرو و دامنه به‌صورت زیر است.

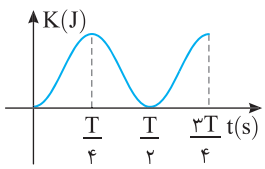
$$E=\frac{1}{2}AF_m$$

۱۷۰۷ B

۲

خط فکری به نمودار به دقت نگاه کنید. در مسیر حرکت نوسانگر در هر $\frac{T}{4}$ انرژی جنبشی نوسانگر از صفر به بیشینه و در $\frac{T}{4}$ بعدی از بیشینه به صفر می‌رسد. بنابراین روی نمودار از $t=0$ تا اولین بیشینه (max) برابر $\frac{T}{4}$ است. با توجه به این مطلب می‌توانید دورهٔ نوسان را حساب کنید. در ضمن انرژی جنبشی همواره مثبت است و نمودار آن نمی‌تواند زیر محور زمان قرار گیرد.





با توجه به شکل پس از $t=\frac{T}{2}+\frac{T}{4}=\frac{3T}{4}$ نوسانگر برای دومین بار به نقطهٔ تعادل خود رسیده که با توجه به نمودار $t=0/3s$ است. $\frac{3T}{4}=0/3\Rightarrow T=0/4s$

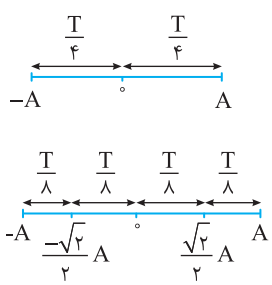
۱۷۰۸ B

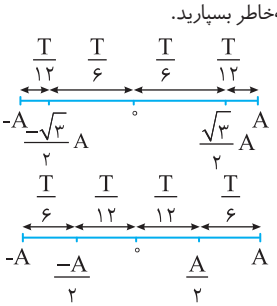
۲

در ابتدای این تست به شما می‌گوییم که این تست با اطلاعات کتاب درسی قابل حل نیست. زیرا در کتاب درسی به صراحت بیان شده که نباید براساس رابطهٔ انرژی پتانسیل نوسانگر $(U=\frac{1}{2}kx^2)$ مسئله‌ای طرح شود.

خط فکری در نمودار $x-t$ حرکت هماهنگ ساده، از محور افقی دوره و از محور قائم دامنهٔ حرکت به‌دست می‌آید.

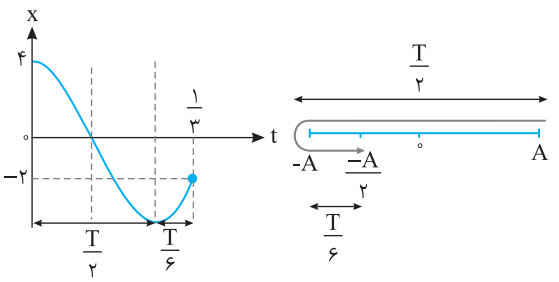
یادآوری باید بازه‌های زمانی شناخته شده مربوط به جابه‌جایی‌های معروف را به‌خاطر بسپارید.





بـا توجـه به نمودار مدت زمانی که طول می‌کشد متحرک بـرای دومین بار به $-2cm$ یعنی $-\frac{A}{2}$ برسد، $\frac{1}{3}$ ثانیه است:

مسیر را رسم می‌کنیم، بازه‌های شناخته شده را روی آن می‌نویسیم.



$$\Delta t=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{T}{2}+\frac{T}{6}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{4T}{6}=\frac{1}{3}\Rightarrow T=\frac{1}{2}s$$

بسامد زاویه‌ای خواهد شد: $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\omega=4\pi\frac{rad}{s}$

معادلهٔ حرکت نوسانی را می‌نویسیم:

$$x=A\cos\omega t\xrightarrow{A=4cm=0/04m}x=0/04\cos4\pi t$$

$$\xrightarrow{t=\frac{3}{16}s}x=0/04\cos4\pi\times\frac{3}{16}\Rightarrow x=0/04\cos\frac{3\pi}{4}=-0/02\sqrt{2}m$$

از اینجا به بعد شما باید از کتاب درسی خارج شوید و از رابطهٔ $U=\frac{1}{2}kx^2$ استفاده کنید.

$$\frac{U}{E}=\frac{\text{انرژی پتانسیل کشسانی}}{\text{انرژی مکانیکی}}=\frac{\frac{1}{2}kx^2}{\frac{1}{2}kA^2}\Rightarrow\frac{U}{E}=\frac{x^2}{A^2}\xrightarrow[A=0/04m]{x=-0/02\sqrt{2}m}$$

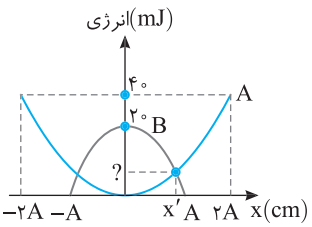
$$\frac{U}{E}=\frac{(-0/02\sqrt{2})^2}{(0/04)^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow U=\frac{1}{2}E$$

با توجه به تعریف انرژی مکانیکی خواهیم داشت:

$$E=U+K\Rightarrow E=\frac{1}{2}E+K\Rightarrow K=\frac{1}{2}E$$

۳ ۱۷۰۹ B

نکته در حرکت هماهنگ ساده بیشینه انرژی پتانسیل و بیشینه انرژی جنبشی یکسان و برابر انرژی مکانیکی نوسانگر هستند. $(E=U_m=K_m)$



۱ بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر B برابر $20mJ$ است، یعنی انرژی مکانیکی نوسانگر B نیز $20mJ$ است. در صورت مسئله انرژی پتانسیل نوسانگر B در مکان x' برابر $15mJ$ بیان شده از این رو انرژی جنبشی نوسانگر B در مکان x' خواهد شد.

$$E_B=K_B+U_B\Rightarrow20=K_B+15\Rightarrow K_B=5mJ$$

۲ با توجه به نمودارها در مکان x'، انرژی جنبشی نوسانگر B برابر انرژی پتانسیل نوسانگر A است، از این‌رو خواهیم داشت. $U_A=K_B=5mJ$

۳ با توجه به نمودار انرژی پتانسیل A، بیشینه مقدار انرژی پتانسیل $U_{A\,max}=40mJ$ است، بنابراین انرژی مکانیکی A نیز $U_m=E=40mJ$ بوده و می‌توان نوشت: $E_A=K_A+U_A\Rightarrow40=K_A+5\Rightarrow K_A=35mJ$

C ۱۷۱۰ ۱

خط فکری پدیده تشدید وقتی اتفاق می‌افتد که دو سامانه دارای بسامد یکسان (بسامد زاویه‌ای یکسان) باشند. بنابراین وقتی بیان می‌شود که سامانهٔ (۱) تنها با سامانهٔ (۳) تشدید ایجاد می‌کند یعنی $\omega_1=\omega_3$ است. سامانهٔ (۲) نیز تنها با سامانه (۴) تشدید ایجاد می‌کند $(\omega_2=\omega_4)$، شما باید به کمک این تساوی‌ها رابطه‌ای بین k_1 و k_2 با k به‌دست بیاورید. سپس در حالت جدید بسامدهای زاویه‌ای را حساب کرده و با هم مقایسه کنید. هر کدام که با هم برابر هستند تشدید ایجاد می‌کنند.

۱ وقتی سامانهٔ (۳) با به نوسان درآمدن سامانه (۱)، به نوسان در می‌آید یعنی:

$$\omega_1=\omega_3\Rightarrow\sqrt{\frac{k}{m_1}}=\sqrt{\frac{k_1}{m_3}}\Rightarrow\frac{k}{m}=\frac{k_1}{\frac{m}{2}}\Rightarrow k_1=\frac{1}{2}k$$

وقتی سامانهٔ (۲) با به نوسان در آمدن سامانهٔ (۴) به نوسان در می‌آید:

$$\omega_2=\omega_4\Rightarrow\sqrt{\frac{k}{m_2}}=\sqrt{\frac{k_2}{m_4}}\Rightarrow\frac{k}{\frac{m}{2}}=\frac{k_2}{4m}\Rightarrow k_2=8k$$

۲ با تعویض جرم سامانهٔ (۳) $(m_3=\frac{m}{2})$ با جرم سامانهٔ (۱)، $(m_1=m)$ بسامد زاویه‌ای سامانه‌ها به ترتیب خواهد شد:

$$\omega_1'=\sqrt{\frac{k}{\frac{m}{2}}}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{2}\omega_1\ ,\ \omega_2=\sqrt{\frac{k}{\frac{m}{2}}}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{2}\omega_1$$

$$\omega_3'=\sqrt{\frac{k_1}{m}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}k}{m}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_1,\omega_4=\sqrt{\frac{k_2}{4m}}=\sqrt{\frac{8k}{4m}}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{2}\omega_1$$

دقت کنید بسازمد زاویه‌ای $\omega_2=\omega_1'$ و $\omega_4=\omega_1'$ است. بنابراین در این حالت با نوسان سامانه (۱) برای سامانه‌های (۲) و (۴) تشدید رخ می‌دهد.

B ۱۷۱۱ ۴

یادآوری تشدید هنگامی رخ می‌دهد که دو نوسانگر هم‌بسامد باشند.

۱ آونگ نوسانات سامانهٔ جرم فنر را تشدید کرده است بنابراین بسامد آن‌ها با هم برابر است. $f_{ف}=f_{آ}$

۲ با بردن آونگ به سیارهٔ دیگر دوره و بسامد آونگ تغییر می‌کند بنابراین

$$\frac{\text{دوره در سطح سیاره}\leftarrow T_p}{\text{دوره در سطح زمین}\leftarrow T_e}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{\ell_p}{g_p}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell_e}{g_e}}}\Rightarrow\frac{T_p}{T_e}=\sqrt{\frac{g_e}{g_p}}\times\sqrt{\frac{\ell_p}{\ell_e}}$$

$$\xrightarrow[\ell_p=\frac{1}{4}\ell_e]{g_p=\frac{1}{2}g_e}\frac{T_p}{T_e}=\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{1}{4}}\Rightarrow\frac{T_p}{T_e}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow T_p=\frac{\sqrt{2}}{2}T_e$$

۳ بنابراین باید دورهٔ سامانهٔ جرم فنر نیز $\frac{\sqrt{2}}{2}$ حالت اول شود تا مجدداً تشدید رخ دهد.

$$\text{فنر:}\ \frac{T'}{T}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}\Rightarrow\frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{k}{k'}}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{\frac{k}{k'}}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{k}{k'}\Rightarrow k'=2k$$

پنجره ۴

A ۱۷۱۲ ۳

یادآوری امواج دو دسته هستند: امواج مکانیکی - امواج الکترومغناطیسی

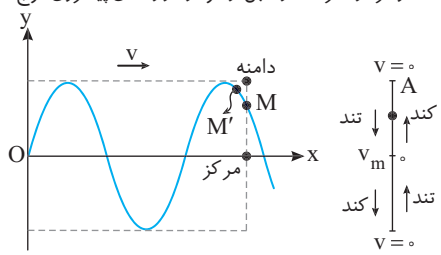
امواج رادیویی و نور مرئی از نوع امواج الکترومغناطیسی هستند و برای انتشار به محیط مادی نیاز ندارد و گزارهٔ (الف) نادرست است.

امواج صوتی از نوع امواج مکانیکی‌اند که برای انتشار به محیط مادی نیاز دارند و گزارهٔ (ب) نیز نادرست است.

منشأ امواج مکانیکی و امواج الکترومغناطیسی متفاوت است اما همگی آن‌ها مشخصه‌های یکسانی دارند و رفتار آن‌ها از قاعده‌های کلی پیروی می‌کند که در هر پدیدهٔ موجی برقرار است بنابراین گزاره‌های (پ) و (ت) درست هستند.

B ۱۷۱۳ ۴

نکته در انتشار موج سینوسی در یک محیط، تمام ذره‌های محیط دارای حرکت هماهنگ ساده‌اند و هر ذره حرکت ذرهٔ قبل از خود را در راستای پیشروی موج تکرار می‌کند.

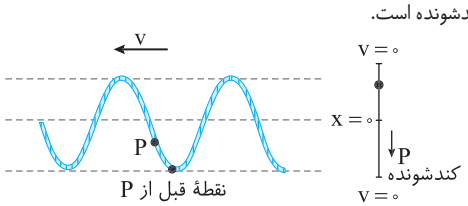


به ذرهٔ قبل از M (یعنی M′) روی شکل نگاه کنید، بالاتر از نقطهٔ M است، بنابراین نقطهٔ M رو به بالا در حرکت است و از مرکز نوسانش به سوی دامنه در حرکت است. هرگاه یک نوسانگر ساده از مرکز به سوی دامنه برود حرکتش کندشونده است، پس نقطهٔ M دارای حرکت کندشونده و رو به بالا است.

B ۱۷۱۴ ۴

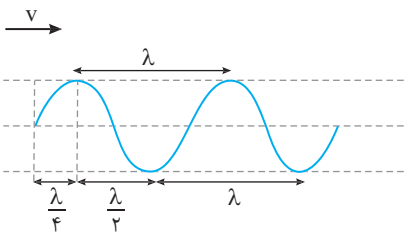
خط فکری باید در انتشار موج به جهت پیشروی موج دقت کنید تا بتوانید نقطهٔ قبل از P را تشخیص دهید.

پیشروی موج از راست به چپ است. در انتشار موج، هر ذره حرکت ذرهٔ قبل از خود در راستای پیشروی موج را تکرار می‌کند. با توجه به شکل، ذرهٔ قبل از P پایین‌تر از P است بنابراین P رو به پایین حرکت می‌کند. از طرفی هر ذره از محیط دارای حرکت هماهنگ ساده است و P در حال حرکت به سوی انتهای مسیرش است، بنابراین دارای حرکت کندشونده است.



B ۱۷۱۵ ۱

نکته در انتشار موج در یک محیط، هر ذره حرکت ذرهٔ قبل از خود را تکرار می‌کند و ذره دارای حرکت هماهنگ ساده است. هرگاه ذره به سوی انتهای مسیرش در حرکت باشد حرکت آن کندشونده و هرگاه به سوی مرکز نوسانش در حرکت باشد حرکت آن تندشونده است.



به جهت پیشروی موج دقت کنید، جهت پیشروی در جهت مثبت محور x است.

با توجه به شکل نقطهٔ P′ قبل از نقطهٔ P پایین‌تر از P است از این‌رو ذرهٔ P در حال حرکت رو به پایین به سمت مرکز نوسانش بوده و حرکتش تندشونده است.

نقطهٔ Q′ نقطهٔ قبل از Q بوده و بالاتر از Q است از این‌رو ذرهٔ Q در حال حرکت رو به بالا به سمت انتهای مسیرش بوده و حرکتش کندشونده است.

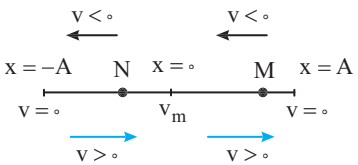
برای نقاط M و N با همین استدلال می‌توان گفت:

ذرهٔ M در حال حرکت رو به بالا به سمت مرکز نوسانش بوده و حرکتش تندشونده است. بنابراین نقطهٔ M پاسخ تست است.

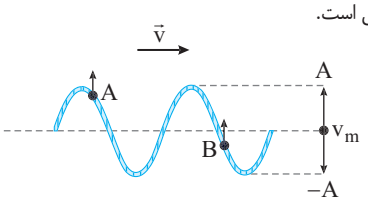
ذرهٔ N در حال حرکت رو به پایین به سمت انتهای مسیرش بوده و حرکتش کندشونده است.

B ۱۷۱۶ ۲

یادآوری ذرات محیط دارای حرکت هماهنگ ساده هستند و هرچه نوسانگر به مبدأ (حالت تعادل) نزدیک‌تر باشد، تندی نوسان آن بزرگتر است و هرچه به نقطهٔ بازگشت نزدیک‌تر باشد تندی کمتر است به‌طور مثال: $(S_M < S_N)$



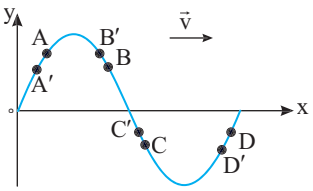
اگر ذره در حال حرکت رو به بالا باشد سرعت مثبت و اگر در حال حرکت رو به پایین باشد سرعت منفی است.



با توجه به جهت پیشروی موج، ذرهٔ A و ذرهٔ B هر دو در حال حرکت رو به بالا هستند و سرعت هر دو مثبت است. ذرهٔ B به مرکز نوسان نزدیک بوده و تندی آن بیشتر است. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

B ۱۷۱۷ ۲

نکته هرگاه نقش موج رسم شده باشد، برای اظهار نظر کردن در مورد حرکت هر ذره از محیط، ابتدا به جهت پیشروی موج $(\vec{v})$ نگاه می‌کنیم، سپس حرکت نقطهٔ قبلی را بررسی می‌کنیم. اگر نقطهٔ قبلی پایین‌تر باشد، ذره در حال حرکت به سمت پایین و اگر نقطهٔ قبلی بالاتر باشد ذره در حال حرکت به سمت بالاست.



اگر ذره به سمت محور x حرکت کند حرکت آن تندشونده و اگر در حال دور شدن از محور x باشد حرکت آن کندشونده است و در نقاط بیشینه و کمینه تندی ذره صفر می‌شود.

نقطهٔ A : نقطهٔ قبل (A')A پایین‌تر از A است، بنابراین A در حال حرکت رو به پایین بوده و حرکت آن تندشونده است.

نقطهٔ B : نقطهٔ قبل (B')B بالاتر از B است، بنابراین B در حال حرکت رو به بالا بوده و حرکت آن کندشونده بوده و سرعت آن در حال صفر شدن است.

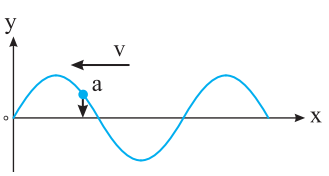
نقطهٔ C : نقطهٔ قبل (C')C بالاتر از C بوده و C در حال حرکت رو به بالا و نزدیک شدن به محور x بوده و تندی آن در حال افزایش است.

نقطهٔ D : نقطهٔ قبل (D')D پایین‌تر از D بوده و D در حال حرکت رو به پایین و دور شدن از محور افقی x بوده و حرکت آن کندشونده و سرعت آن در حال صفر شدن است، اما فاصلهٔ آن از نقطهٔ بیشینه بیشتر از فاصلهٔ نقطهٔ B از نقطهٔ بیشینه است. بنابراین تندی نقطهٔ B زودتر از بقیه صفر می‌شود.

B ۱۷۱۸ ۱

ذرات یک موج سینوسی دارای حرکت هماهنگ ساده هستند و می‌دانیم در حرکت نوسانی مکان و شتاب خلاف جهت هم‌اند. ذرهٔ b در مکان‌های منفی قرار دارد پس شتاب آن مثبت بوده و در جهت محور y است.

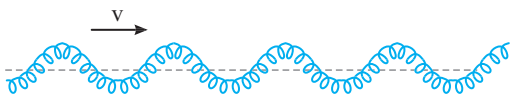
انرژی جنبشی یعنی $K=\frac{1}{2}mv^2$ برای نقطهٔ a در حال افزایش است پس باید تندی a در حال افزایش باشد و در واقع حرکت آن تندشونده باشد، بنابراین a در حال حرکت به سمت پایین یعنی حرکت به سمت مرکز تعادل خود است و ذرهٔ قبلی a باید پایین‌تر از آن باشد، پس ذرهٔ قبلی a سمت راست این نقطه قرار دارد و نتیجه می‌گیریم جهت انتشار موج به سمت چپ است و جهت انتشار موج خلاف جهت محور x است.



A ۱۷۱۹ ۲

یادآوری امواج مکانیکی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱ **امواج مکانیکی عرضی:** در این امواج راستای نوسان ذره‌های محیط بر راستای پیشروی موج عمود است، مانند امواج منتشر شده در یک طناب و یا یک فنر.
امواج عرضی دارای برآمدگی و فرورفتگی هستند.
امواج مکانیکی عرضی تنها در جامدات منتشر می‌شوند.



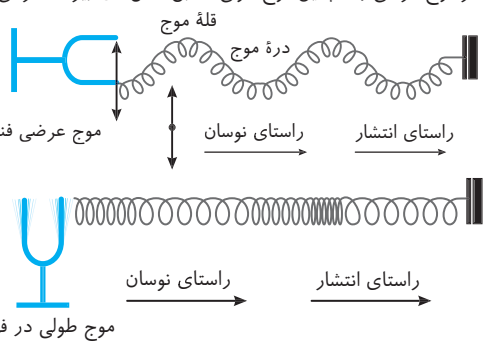
۲ **امواج مکانیکی طولی:** در این امواج راستای نوسان ذره‌های محیط بر راستای پیشروی موج منطبق است.
در امواج مکانیکی طولی، نوسان‌ها به صورت تپ‌های تراکمی و انبساطی در محیط منتشر می‌شوند.
امواج مکانیکی طولی در هر سه محیط جامد، مایع و گاز پیشروی می‌کنند.



با توجه به تعاریف بیان شده گزینهٔ (۲) درست است.

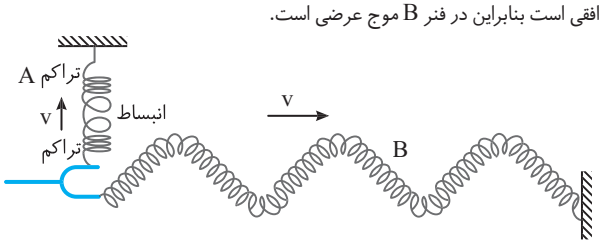
A ۱۷۲۰ ۳

در یک فنر موج عرضی و همچنین موج طولی مطابق شکل‌های زیر منتشر می‌شود.



A ۱۷۲۱ ۳

خط فکری باید بدانید که تیغه‌های دیاپازون در شکل هنگام نوسان بالا و پایین می‌روند $(\updownarrow)$ و در امتداد قائم نوسان می‌کنند و موج در امتداد فنر پیشروی می‌کند. از این رو با توجه به شکل سؤال، نوسان ایجاد شده در فنر A در راستای محور قائم بوده یعنی حلقه‌های فنر A بالا و پایین می‌روند و راستای نوسان حلقهٔ A با راستای پیشروی موج یکی است، بنابراین موج منتشر شده در A طولی است. اما با بالا و پایین رفتن شاخه‌های دیاپازون، نوسان ذره‌های فنر B در راستای قائم و پیشروی موج در راستای افقی است بنابراین در فنر B موج عرضی است.



A ۱۷۲۲ ۳

موج با تندی ثابت در یک محیط منتشر می‌شود. تجربه و محاسبات نظری نشان می‌دهد که تندی انتشار موج به جنس و ویژگی‌های محیط انتشار بستگی دارد و در یک محیط با ویژگی‌های ثابت تندی انتشار موج ثابت بوده و انتشار موج حرکت یکنواخت با تندی ثابت است.

A ۱۷۲۳ ۲

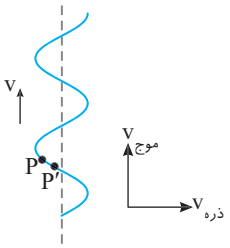
تندی انتشار موج به ویژگی‌های فیزیکی محیط انتشار موج بستگی دارد و در یک محیط همگن که شرایط فیزیکی در تمام جهت‌های آن یکسان است، تندی انتشار موج مقدار ثابتی است.
تندی انتشار موج به ویژگی‌های چشمهٔ موج مانند بسامد، دوره، شدت، انرژی و ... بستگی ندارد. بنابراین با دو برابر شدن بسامد چشمه، تندی انتشار موج تغییر نمی‌کند.

A ۱۷۲۴ ۲

تندی انتشار موج در یک محیط مقدار ثابتی است و با گذشت زمان تغییر نمی‌کند، بنابراین نمودار آن برحسب زمان یک خط راست افقی است.

B ۳ ۱۷۲۵

خط فکری به شکل دقت کردید، موج در حال حرکت رو به بالا در امتداد محور yهاست و راستای نوسان ذرات محیط در امتداد محور افقی و در جهت مثبت محور xهاست، یعنی شما باید ذره‌ای را شناسایی کنید که در لحظهٔ نشان داده شده به سمت راست در حرکت باشد.



در گزینهٔ (۱) و (۲) موج در حال پیشروی در امتداد محور افقی است که با توجه به فرض مسئله نادرست است.

در گزینه‌های (۳) و (۴) جهت پیشروی موج درست است بنابراین شما باید بررسی کنید که در کدام شکل نقطهٔ P در حال حرکت به سمت راست است.

با توجه به اینکه نقطهٔ P' قبل از نقطهٔ P قرار دارد و در سمت راست P است، پس P به سمت راست می‌رود و گزینهٔ (۳) درست اما گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۱ ۱۷۲۶

تندی انتشار موج در یک طناب برابر $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ است که در آن F نیروی کشش و μ چگالی خطی جرم $(\mu=\frac{m}{\ell})$ می‌باشد، بنابراین تندی انتشار موج در طناب با جذر چگالی خطی جرم طناب نسبت وارون دارد.

A ۱ ۱۷۲۷

تندی انتشار موج در تار برابر $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ است، که در آن F نیروی کشش و μ چگالی خطی جرم $(\mu=\frac{m}{\ell})$ است.

چگالی خطی جرم را به دست می‌آوریم. $\mu=\frac{m}{\ell}\Rightarrow\mu=\frac{۰/۱۶}{۰/۸}=۰/۲\,kg/m$

تندی انتشار موج خواهد شد: $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\xrightarrow{F=۲۰N}v=\sqrt{\frac{۲۰}{۰/۲}}=۱۰\,m/s$

A ۴ ۱۷۲۸

۱ ابتدا سرعت انتشار موج در ریسمان را به‌دست می‌آوریم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\xrightarrow{\mu=\frac{m}{\ell}}v=\sqrt{\frac{F\ell}{m}}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{۳۲۰\times۱}{۸\times۱۰^{-۳}}}=\sqrt{۴\times۱۰^{۴}}=۲۰۰\,m/s$$

۲ سرعت انتشار موج ثابت است و زمان پیشروی موج در طول تار برابر است با:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow ۲۰۰=\frac{۱}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t=\frac{۱}{۲۰۰}=\frac{۵}{۱۰۰۰}=۰/۰۰۵s\Rightarrow\Delta t=۰/۰۰۵s$$

A ۴ ۱۷۲۹

فاصله افقی A تا B برابر ۲۰m بوده و تپ این فاصله را در مدت ۴s طی کرده است، بنابراین تندی پیشروی موج خواهد شد. $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v=\frac{۲۰}{۴}=۵\,m/s$

اکنون به کمک رابطهٔ تندی طناب، چگالی خطی جرم را حساب می‌کنیم.

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\xrightarrow{F=۲۵N}۵=\sqrt{\frac{۲۵}{\mu}}\Rightarrow ۲۵=\frac{۲۵}{\mu}\Rightarrow\mu=۱\,kg/m$$

$$\Rightarrow\mu=\frac{۱\,kg}{m}\times\frac{۱۰^{۳}g}{۱\,kg}\times\frac{۱\,m}{۱۰^{۲}cm}\Rightarrow\mu=۱۰\,g/cm$$

بنابراین هر سانتی‌متر آن ۱۰g جرم دارد.

A ۱ ۱۷۳۰

تندی انتشار موج عرضی در فنر از رابطه روبه‌رو به‌دست می‌آید: $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$

چگالی خطی $۴\times۱۰^{-۵}\,kg/cm$ بوده بنابراین:

$$\mu=۴\times۱۰^{-۵}kg/cm\Rightarrow\mu=۴\times۱۰^{-۵}\times۱۰۰\frac{kg}{m}\Rightarrow\mu=۴\times۱۰^{-۳}\frac{kg}{m}$$

تندی را حساب می‌کنیم:

$$v=\sqrt{\frac{۲۵۰}{۴\times۱۰^{-۳}}}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{۲۵۰۰۰۰}{۴}}\Rightarrow v=\frac{۵۰۰}{۲}=۲۵۰\,m/s$$

B ۱ ۱۷۳۱

یادآوری تندی انتشار موج در تار برابر است با:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{F\ell}{m}}=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}=\frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}$$

با توجه به اینکه چگالی و سطح مقطع داده شده از رابطهٔ $v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ برای حل استفاده می‌کنیم، دقت کنید در این رابطه باید واحد چگالی $\frac{kg}{m^{۳}}$ باشد و بنابراین ابتدا $۸\frac{g}{cm^{۳}}$ را به $\frac{kg}{m^{۳}}$ تبدیل می‌کنیم:

$$\rho=۸\frac{g}{cm^{۳}}=۸۰۰۰\frac{kg}{m^{۳}}\quad,\quad A=۲mm^{۲}=۲\times۱۰^{-۶}m^{۲}$$

$$v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}\Rightarrow ۲۵=\sqrt{\frac{F}{۸۰۰۰\times۲\times۱۰^{-۶}}}\xrightarrow{\text{به توان دو}}۶۲۵=\frac{F}{۱۶\times۱۰^{-۳}}\Rightarrow F=۱۰N$$

بازی با سؤال **مساحت مقطع یک سیم $۱۰^{-۶}$ مترمربع و چگالی آن $۶/۴g/cm^{۳}$ است. اگر این سیم با نیروی ۴ نیوتون کشیده شود، تندی انتشار امواج عرضی در آن چند متر بر ثانیه است؟** ریاضی - ۸۸

۱) ۲۵ ۲) ۵×۱۰^{۳} ۳) ۲۵۰ ۴) ۵۰

پاسخ **رابطه تندی انتشار موج در یک سیم به صورت $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ است.**

اکنون می‌خواهیم یک رابطه برای تندی انتشار موج برحسب چگالی و مساحت سطح مقطع پیدا کنیم و آن را به خاطر بسپاریم.

چگالی خطی جرم: $\mu=\frac{m}{\ell}\xrightarrow{m=\rho V}\mu=\frac{\rho V}{\ell}$

$$\xrightarrow{V=A\ell}\mu=\frac{\rho A\ell}{\ell}\Rightarrow\mu=\rho A$$

اکنون به جای μ ، حاصلضرب ρA را قرار می‌دهیم.

$$v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

داده‌های مسئله را در رابطه جای‌گذاری می‌کنیم ($F=۴N$ ، $\rho=۶۴۰۰\frac{kg}{m^{۳}}$ و مساحت مقطع سیم $۱۰^{-۶}m^{۲}$).

بنابراین تندی انتشار موج در سیم برابر خواهد شد با:

$$v=\sqrt{\frac{۴}{۶/۴\times۱۰^{۳}\times۱۰^{-۶}}}\Rightarrow v=۲۵\,m/s$$

گزینهٔ ۱

B ۲ ۱۷۳۲

ابتدا تندی انتشار موج در سیم را به‌دست می‌آوریم: $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v=\frac{۰/۸}{۰/۰۲}\Rightarrow v=۴۰\,m/s$

تندی انتشار موج در یک سیم برابر $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ است.

$$\mu=\frac{m}{\ell}=\frac{\rho V}{\ell}=\frac{\rho Al}{\ell}=\rho A\Rightarrow v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

از طرفی سطح مقطع سیم برابر $A=\pi\frac{D^{۲}}{۴}$ است که در آن D قطر سیم می‌باشد و به جای A در تندی انتشار موج $\pi\frac{D^{۲}}{۴}$ را قرار داده و رابطه زیر را به دست می‌آوریم و آن را به خاطر می‌سپاریم.

$$v=\frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$$

داده‌های مسئله را جای‌گذاری می‌کنیم: $۴۰=\frac{۲}{۱۰^{-۳}}\sqrt{\frac{F}{۳\times۸\times۱۰^{۳}}}\Rightarrow F=۹/۶\,N$

۱ ۱۷۳۳ B

یادآوری برای تندی انتشار موج عرضی در تار سه رابطه داریم که با توجه به داده‌های مسئله باید یکی را انتخاب کنیم. $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}, v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}, v=\frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$

در این مسئله از سطح مقطع نام برده شده و گفته شده تندی انتشار موج در دو تار برابر است بنابراین خواهیم داشت:

$$v_1=v_2\Rightarrow\sqrt{\frac{F_1}{\rho_1 A_1}}=\sqrt{\frac{F_2}{\rho_2 A_2}}\xrightarrow{A_1=A_2}\frac{20}{\rho_1}=\frac{15}{\rho_2}\Rightarrow\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{20}{15}=\frac{4}{3}$$

۳ ۱۷۳۴ A

خط فکری کافی است ابتدا چگالی خطی جرم دو تار را با هم مقایسه کنید سپس نسبت تندی انتشار موج را به دست بیاورید.

۱ نسبت $\frac{\mu'}{\mu}$ را به دست می‌آوریم:

$$\mu=\frac{m}{\ell},\ \mu'=\frac{m'}{\ell'}\Rightarrow\frac{\mu'}{\mu}=\frac{\frac{m'}{\ell'}}{\frac{m}{\ell}}\Rightarrow\frac{\mu'}{\mu}=\frac{m'}{m}\times\frac{\ell}{\ell'}$$

$$\xrightarrow[\ell'=\frac{5}{4}\ell]{m'=0/8m}\frac{\mu'}{\mu}=0/8\times\frac{1}{\frac{5}{4}}\Rightarrow\frac{\mu'}{\mu}=0/64$$

۲ نسبت تندی‌ها خواهد شد:

$$\begin{cases}v'=\sqrt{\frac{F'}{\mu'}}\\ v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\end{cases}\Rightarrow\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{F'}{F}}\times\sqrt{\frac{\mu}{\mu'}}\xrightarrow{F'=F}\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{\mu}{\mu'}}=\sqrt{\frac{\mu}{0/64\mu}}=\frac{1}{0/8}=\frac{5}{4}$$

۱ ۱۷۳۵ B

در صورت مسئله چگالی و در شکل‌ها نیروی کشش و قطر سطح مقطع داده شده است، بنابراین از رابطه $v=\frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{v_B}{v_A}=\frac{\frac{2}{D_B}\sqrt{\frac{F_B}{\pi\rho_B}}}{\frac{2}{D_A}\sqrt{\frac{F_A}{\pi\rho_A}}}\Rightarrow\frac{v_B}{v_A}=\sqrt{\frac{F_B}{F_A}}\times\sqrt{\frac{\rho_A}{\rho_B}}\times\frac{D_A}{D_B}$$

$$\Rightarrow\frac{v_B}{v_A}=\sqrt{\frac{F}{4F}}\times\sqrt{\frac{4\rho_B}{\rho_B}}\times\frac{\frac{3}{2}D}{D}\Rightarrow\frac{v_B}{v_A}=\frac{3}{2}$$

نکته تندی انتشار موج عرضی در ریسمان به طول ریسمان بستگی ندارد.

۲ ۱۷۳۶ B

رابطهٔ تندی انتشار موج در تار را در دو حالت می‌نویسیم و بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases}v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\\ v'=\sqrt{\frac{F'}{\mu}}\end{cases}\Rightarrow\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{F'}{F}}\xrightarrow[v_2=200m/s,F=128N]{v_1=160m/s}\frac{200}{160}=\sqrt{\frac{F'}{128}}$$

$$\Rightarrow\frac{5}{4}=\sqrt{\frac{F'}{128}}\Rightarrow\frac{25}{16}=\frac{F'}{128}\Rightarrow F'=200N$$

بنابراین مقدار افزایش نیروی کشش خواهد شد: $\Delta F=F'-F=200-128=72\,N$

۳ ۱۷۳۷ A

در صورت مسئله مساحت سطح مقطع تار داده شده بنابراین از سه رابطهٔ تندی انتشار موج عرضی در تار، از رابطه $v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ استفاده می‌کنیم.

مساحت سطح مقطع تار ۶۴ درصد کاهش یافته است بنابراین مساحت سطح مقطع در حالت جدید خواهد شد: $A_2=A_1-0/64A_1\Rightarrow A_2=0/36A_1$

$$\begin{cases}v_1=\sqrt{\frac{F_1}{\rho_1 A_1}}\\ v_2=\sqrt{\frac{F_2}{\rho_2 A_2}}\end{cases}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\sqrt{\frac{F_2}{F_1}\times\frac{A_1}{A_2}}$$

$$\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\sqrt{\frac{4F_1}{F_1}\times\frac{A_1}{0/36A_1}}\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\frac{2}{0/6}\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\frac{10}{3}$$

۳ ۱۷۳۸ B

۱ نیروی کشش تار را ۶۹ درصد افزایش داده‌ایم بنابراین می‌توان نوشت:

$$F_2=F_1+0/69F_1\Rightarrow F_2=1/69F_1$$

۲ تندی انتشار موج عرضی در تار در اثر افزایش نیروی کشش $(\uparrow v=\sqrt{\uparrow F/\mu})$ افزایش می‌یابد و بنا بر فرض مسئله تندی $30m/s$ زیاد می‌شود.

$$v_2=v_1+30\quad (I)$$

۳ نسبت تندی انتشار موج را در دو حالت به دست می‌آوریم.

$$v_2=\sqrt{\frac{F_2}{\mu_2}},\ v_1=\sqrt{\frac{F_1}{\mu_1}}\xrightarrow{\mu_2=\mu_1}\frac{v_2}{v_1}=\sqrt{\frac{F_2}{F_1}}=\sqrt{\frac{1/69F_1}{F_1}}$$

$$\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=1/3\Rightarrow v_2=1/3v_1\quad (II)$$

۴ از رابطه (I) و (II) نتیجه می‌شود که:

$$1/3v_1=v_1+30\Rightarrow 0/3v_1=30\Rightarrow v_1=100m/s$$

۳ ۱۷۳۹ B

در این مسئله قطر مطرح شده بنابراین از سه رابطه تندی انتشار موج باید به سراغ $v=\frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$ برویم.

$$\begin{cases}v_2=\frac{2}{D_2}\sqrt{\frac{F_2}{\pi\rho_2}}\\ v_1=\frac{2}{D_1}\sqrt{\frac{F_1}{\pi\rho_1}}\end{cases}\xrightarrow{F_2=F_1,\rho_2=\rho_1}\frac{v_1}{v_2}=\frac{D_2}{D_1}\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\frac{D_2}{1/25D_2}$$

$$\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=0/8\Rightarrow v_1=0/8v_2$$

درصد اختلاف تندی انتشار صوت در دو ریسمان خواهد شد:

$$\frac{v_1-v_2}{v_2}\times100=\frac{0/8v_2-v_2}{v_2}\times100=-20\%$$

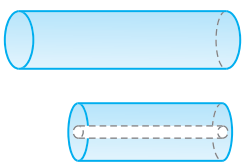
بنابراین تندی انتشار موج عرضی در ریسمان اول، ۲۰ درصد از تندی انتشار موج در ریسمان دوم کمتر است.

۱ ۱۷۴۰ A

وقتی از این تار، طولی برابر $\frac{\ell}{3}$ انتخاب شود، جرم آن نیز $\frac{m}{3}$ می‌شود و چگالی خطی جرم $\mu=m/\ell$ تغییر نمی‌کند. با توجه به فرض پرسش، نیروی کشش نیز یکسان است. بنابراین v تغییر نمی‌کند $(v=\sqrt{\frac{F}{\mu}})$ و نسبت $\frac{v_1}{v_2}$ برابر یک خواهد شد.

۳ ۱۷۴۱ A

خط فکری وقتی سیم را دولا می‌کنیم، مساحت سطح مقطع سیم دو برابر می‌شود و برای مقایسه تندی انتشار موج باید به سراغ رابطه $v=\sqrt{F/\rho A}$ برویم.



جنس ریسمان تغییر نکرده بنابراین چگالی نیز تغییر نکرده است $(\rho'=\rho)$. نیروی کشش بنا به فرض مسئله ثابت است $(F'=F)$ بنابراین تندی انتشار موج خواهد شد.

$$\begin{cases}v'=\sqrt{\frac{F'}{\rho' A'}}\\ v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}\end{cases}\Rightarrow\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{F'}{F}}\times\sqrt{\frac{\rho}{\rho'}}\times\sqrt{\frac{A}{A'}}\Rightarrow\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{A}{A'}}=\sqrt{\frac{A}{2A}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

B ۱۷۴۲ ۴

نکته اگر سیمی را از وسط دو لا کنیم سطح مقطع آن دو برابر می‌شود و اگر مجدداً سیم را دو لا کنیم سطح مقطع آن $۴=۲^۲$ برابر می‌شود و اگر n بار این عمل را تکرار کنیم و سیم را n بار از وسط تا کنیم، سطح مقطع آن ۲^n برابر سطح اولیه می‌شود $(A'=۲^n A)$.

یادآوری تندی انتشار موج از سه رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad , \quad v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}} \quad , \quad v=\frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$$

از رابطهٔ $v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{v'}{v}=\frac{\sqrt{\frac{F'}{\rho' A'}}}{\sqrt{\frac{F}{\rho A}}} \xrightarrow{F=F',\ \rho=\rho'} \frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{A}{A'}} \Rightarrow \frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{A}{۲^n A}} \Rightarrow \frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{۱}{۲^n}}=\frac{۱}{\sqrt{۲^n}}$$

B ۱۷۴۳ ۳

نکته با عبور سیم از دستگاه، جرم سیم تغییر نکرده و با توجه به ثابت ماندن چگالی، حجم سیم ثابت می‌ماند بنابراین با افزایش طول سطح مقطع کاهش می‌یابد:

۱ طول جدید برابر است با: $\ell'=\ell+۰/۴۴\ell \Rightarrow \ell'=۱/۴۴\ell$

۲ نسبت سطح مقطع در دو حالت خواهد شد:

$$\begin{cases}\rho=\rho'\\ m=m'\end{cases} \Rightarrow V=V' \Rightarrow A\ell=A'\ell' \xrightarrow{\ell'=۱/۴۴\ell} A\ell=A'\times(۱/۴۴\ell)$$

$$\Rightarrow \frac{A}{A'}=۱/۴۴$$

۳ تندی انتشار را حساب می‌کنیم.

$$\frac{v'}{v}=\frac{\sqrt{\frac{F}{\rho A'}}}{\sqrt{\frac{F}{\rho A}}} \Rightarrow \frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{A}{A'}}=\sqrt{۱/۴۴} \Rightarrow \frac{v'}{v}=۱/۲ \Rightarrow v'=۱/۲v$$

۴ درصد تغییر تندی انتشار خواهد شد: $\frac{v_۲-v_۱}{v_۱}\times۱۰۰ \Rightarrow \frac{۱/۲v-v}{v}\times۱۰۰=۲۰٪$

بنابراین تندی ۲۰ درصد افزایش می‌یابد.

B ۱۷۴۴ ۲

مرحله به مرحله باید تغییرات تار را بررسی کنید.

۱ $\frac{۲}{۳}$ تار را بریده و کنار گذاشته‌ایم بنابراین طول تار جدید $\frac{۱}{۳}$ طول اولیه است:

$$\ell_۲=\frac{۱}{۳}\ell_۱$$

۲ این تار جدید را از دستگاه گذرانده‌ایم تا مجدداً طول آن برابر طول اولیه شود $(\ell'_۲=\ell_۱)$ بنابراین طول تار ۳ برابر شده و مساحت سطح مقطع آن کاهش می‌یابد.

$$\text{حجم ثانویه}=\text{حجم اولیه} \Rightarrow v'_۲=v_۲ \Rightarrow A'\ell'_۲=A\ell_۲ \Rightarrow A'\times\ell_۱=A\times\frac{\ell_۱}{۳} \Rightarrow A'=\frac{۱}{۳}A$$

۳ جنس تار تغییر نکرده بنابراین چگالی آن ثابت می‌ماند. برای بررسی تندی انتشار موج از سه رابطهٔ تندی، رابطهٔ $v=\sqrt{F/\rho A}$ را استفاده می‌کنیم. قرار است تندی انتشار موج تغییر نکند، از این رو:

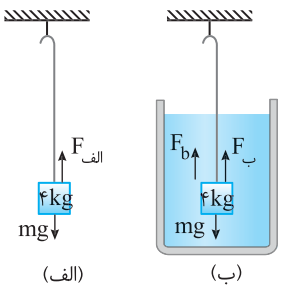
$$v'=v \Rightarrow \sqrt{\frac{F'}{\rho' A'}}=\sqrt{\frac{F}{\rho A}} \xrightarrow{\rho'=\rho} \frac{F'}{\frac{۱}{۳}A}=\frac{F}{A} \Rightarrow F'=\frac{۱}{۳}F$$

B ۱۷۴۵ ۲

۱ نیروهای وارد بر ریسمان را در هر شکل به‌دست می‌آوریم:

الف) جسم در حال تعادل $F_{net}=۰ \Rightarrow F_{الف}=mg \xrightarrow{m=۴kg} F_{الف}=۴۰N$

ب) جسم در حال تعادل $F_{net}=۰ \Rightarrow F_{ب}+F_b=mg \xrightarrow{m=۴kg} F_{ب}=۴۰-F_b$



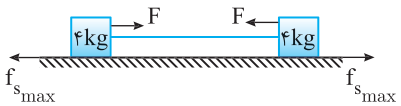
۲ تندی انتشار تار برابر $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ است و چون دو تار مشابه است پس چگالی خطی آن‌ها $(\mu=m/\ell)$ یکسان است.

$$\frac{v_{الف}}{v_{ب}}=\frac{\sqrt{\frac{F_{الف}}{\mu}}}{\sqrt{\frac{F_{ب}}{\mu}}} \xrightarrow{\frac{v_{الف}}{v_{ب}}=۲} ۲=\sqrt{\frac{F_{الف}}{F_{ب}}} \Rightarrow \frac{F_{الف}}{F_{ب}}=۴ \xrightarrow[F_{ب}=۴۰-F_b]{F_{الف}=۴۰N}$$

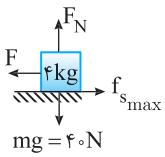
$$\frac{۴۰}{۴۰-F_b}=۴ \Rightarrow ۴۰=۱۶۰-۴F_b \Rightarrow ۴F_b=۱۲۰ \Rightarrow F_b=۳۰N$$

B ۱۷۴۶ ۲

خط فکری با توجه به رابطهٔ تندی تار $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$، این تندی زمانی بیشینه است که نیروی کشش تار بیشینه باشد. چون در سؤال گفته شده جعبه‌ها ساکن هستند پس باید نیروهای وارد بر جعبه‌ها متوازن باشد یعنی نیروی کشش تار وارد بر جعبه‌ها و نیروی اصطکاک ایستایی با هم برابر باشد و چون نیروی کشش تار بیشینه بوده پس باید نیروی اصطکاک ایستایی نیز بیشینه باشد.



۱ با توجه به خط فکری ابتدا نیروی کشش تار را با توجه به نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه حساب می‌کنیم:



$$۱) F_N=mg \Rightarrow F_N=۴۰N$$

$$۲) f_{s_{max}}=\mu_s F_N \Rightarrow f_{s_{max}}=۰/۵\times۴۰=۲۰N$$

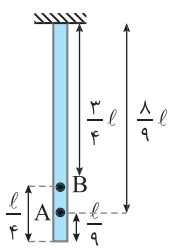
$$۳) F=f_{s_{max}} \Rightarrow F=۲۰N$$

۲ حال تندی انتشار موج در تار را حساب می‌کنیم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{۲۰}{۰/۲}} \Rightarrow v=\sqrt{۱۰۰} \Rightarrow v=۱۰m/s$$

B ۱۷۴۷ ۴

خط فکری وقتی که یک طناب سنگین را آویزان می‌کنیم، کشش در نقاط مختلف آن یکسان نخواهد بود و هر چه از پایین طناب به سمت محل آویز برویم، کشش بیشتر می‌شود و در هر نقطه از طناب، کشش طناب برابر وزن قسمت زیرین آن نقطه است. بنابراین شما باید نیروی کشش در نقاط A و B را بر حسب وزن طناب پیدا کرده تا بتوانید تندی موج در نقاط A و B را با هم مقایسه کنید.



۱ نقطه B وزن $\frac{\ell}{۴}$ طناب پایین‌تر از خود را تحمل می‌کند، بنابراین:

$$F_B=\frac{۱}{۴}W_{طناب}$$

۲ نقطه A وزن $\frac{\ell}{۹}$ طناب پایین‌تر از خود را تحمل می‌کند، بنابراین:

$$F_A=\frac{۱}{۹}W_{طناب}$$

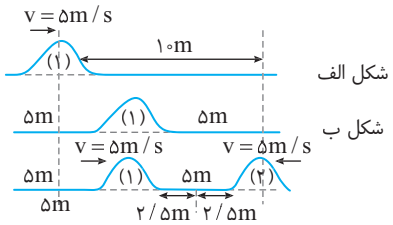
۳ در طـول طنـاب، چگالـی خطی جرم ثابت اسـت $(\mu_A=\mu_B)$ بنابراین نسـبت تندی‌ها خواهد شد:

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{\sqrt{\frac{F_A}{\mu_A}}}{\sqrt{\frac{F_B}{\mu_B}}}\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\sqrt{\frac{F_A}{F_B}}\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\sqrt{\frac{\frac{mg}{9}}{\frac{mg}{4}}}=\frac{2}{3}$$

۲ ۱۷۴۸ B

۱ تندی انتشار موج در طناب مقدار ثابتی بوده و برابر است با:

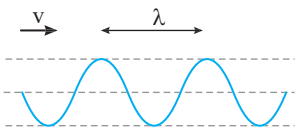
$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{5}{\frac{2}{10}}}\Rightarrow v=5\,m/s$$



۲ جابه‌جایی آشفتگی اول پس از 1s برابر است با: $\Delta x=v\Delta t\Rightarrow\Delta x=5\times1=5m$

۳ وقتـی تـپ اول 5m جلو آمده تپ دوم با همان تندی 5m/s به راه می‌افتد. در این حالت فاصله دو تپ از هم 5m است و چون سرعت آن‌ها یکی است، هر دو آشفتگی در وسـط فاصلهٔ 5m به هم می‌رسـند. یعنی هر آشـفتگی 2/5m پیشـروی می‌کند. بنابراین آشـفتگی (۱) جمعاً $5+2/5=7/5m$ و آشـفتگی (۲) تنها 2/5m پیشـروی کرده تا دو آشفتگی به هم برسند.

۴ ۱۷۴۹ A



یادآوری فاصلهٔ بین دو برآمدگی یا دو فرورفتگـی مجاور، طول موج نامیده می‌شـود. طول موجِ λ برابر مسـافتی اسـت که مـوج در مدت دورهٔ نوسـان چشمه طی می‌کند. $\lambda=vT$

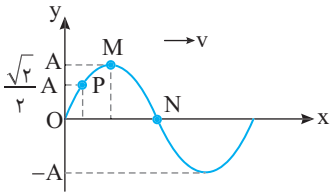
بـا توجه به یادآوری بالا، در مدت نیم‌دورهٔ نوسـان هر ذره از محیط، موج مسـافتی را به اندازهٔ نصف طول موج می‌پیماید.

۴ ۱۷۵۰ B

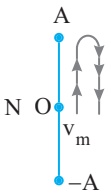
در انتشـار موج در یک محیط، تمام ذرات محیط با یک دوره و یک بسـامد به نوسان در می‌آیند. از این‌رو بسامد زاویه‌ای تمام ذرات $\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$ یکسان است و گزینهٔ (۴) پاسخ تست است.

نکته در بررسـی حرکـت ذره‌های محیط انتشـار موج هر ذره را بـه عنوان یک نوسانگر ساده فرض می‌کنیم.

برای بررسـی گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) به شـکل انتشار موج عرضی در طناب شکل زیر دقت کنید.



به‌طور مثل در بازه زمانی $\frac{T}{2}$، ذرهٔ M از دامنه $+A$ به دامنهٔ $-A$ می‌رسد و جابه‌جایی آن $-2A$ و مسـافت طی شـدهٔ آن $\ell=+2A$ و شتاب متوسط آن صفر می‌شود. زیرا از یک نقطهٔ بازگشت که در آن سرعت صفر است به نقطهٔ بازگشت دیگری که سرعت آنجا نیز صفر است می‌رود، بنابراین Δv مساوی صفر شده و شتاب متوسط نیز صفر می‌شود.



اما نقطهٔ N در مدت $\frac{T}{2}$ از مرکز نوسان به نقطهٔ A رفته سپس به مرکز نوسـان بر می‌گردد، یعنی جابه‌جایی آن صفر و مسـافت طی شدهٔ آن $2A$ است و شتاب متوسط آن نیز برابر است با:

$$a_{av}=\frac{-v_m-v_m}{\frac{T}{2}}=\frac{-2v_m}{T}$$

بنابرایـن بـرای نقطه‌هـای N و M جابه‌جایـی و شـتاب متوسـط یکسـان نیسـت. برای مسـافت‌های مختلـف هم می‌توانید حرکـت نقطهٔ P را با حرکـت نقطهٔ M در مدت $\frac{T}{4}$ مقایسه کنید تا مشخص شود در بازهٔ زمانی معین، مسافت طی شده توسط ذرات محیط ممکن است یکسان نباشد.

۲ ۱۷۵۱ A

حالت اول: تندی انتشـار موج در یک محیط (ریسمان) به بسامد چشمه بستگی ندارد. بنابراین در حالت اول وقتی بسامد (f) را افزایش می‌دهیم دوره $(\downarrow T=\frac{1}{f\uparrow})$ کاهش می‌یابـد. با افزایش بسـامد، بسـامد زاویه‌ای $(\uparrow\omega=2\pi f\uparrow)$ و از آنجا بیشـینهٔ تندی ذرات $(\uparrow v_m=A\omega\uparrow)$ افزایـش می‌یابـد. با ثابت بودن تندی انتشـار موج و افزایش بسامد، طول موج $(\downarrow\lambda=\frac{v}{f\uparrow})$ کاهش می‌یابد بنابراین در حالت اول تنها تندی انتشار موج یعنی تنها یک کمیت بدون تغییر است.

حالت دوم: اگر نیروی کشـش را افزایش دهیم $(\uparrow v=\sqrt{\uparrow F/\mu})$ تندی انتشار موج افزایـش می‌یابـد. بـا ثابـت بـودن بسـامد نوسان‌سـاز، طـول مـوج افزایـش می‌یابـد $(\uparrow\lambda=\frac{v\uparrow}{f_{ثابت}})$ اما دوره $(T=\frac{1}{f})$ تغییر نمی‌کند. هم‌چنین بیشینه تندی نوسان ذرات $(v=A\omega)$ ثابت می‌ماند یعنی دو کمیت بدون تغییر است.

۳ ۱۷۵۲ B

با توجه به رابطهٔ $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ ، با افزایش نیرو، تندی موج افزایش می‌یابد. $(v\propto\sqrt{F})$

بسامد ثابت می‌ماند در نتیجه دوره نیز ثابت است. $(f=\frac{1}{T})$

و با افزایش تندی، طول موج نیز افزایش می‌یابد. $v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow v\uparrow=\frac{\lambda\uparrow}{T}$

۳ ۱۷۵۳ A

۱ طول موج مسافتی است که موج در مدت یک دوره طی می‌کند، بنابراین:

$$v=\frac{\lambda}{T}\xrightarrow{T=\frac{1}{f}}v=\lambda f\xrightarrow[f=100Hz]{\lambda=0/5m}v=0/5\times100=50m/s$$

۲ زمان طی 10m با تندی $v=50m/s$ خواهد شد:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow10=50(\Delta t)\Rightarrow\Delta t=\frac{1}{5}s$$

۴ ۱۷۵۴ A

۱ فاصلهٔ یک برآمدگی از فرورفتگی مجاورش برابر نصف طول موج است، بنابراین با توجه به فرض مسئله $\frac{\lambda}{2}=15cm$ و $\lambda=30cm$ است.

۲ دوره را حساب می‌کنیم: $\lambda=vT\xrightarrow{v=6m/s}0/3=6T\Rightarrow T=\frac{1}{20}s$

۳ هر ذره از محیط انتشـار موج دارای حرکت هماهنگ سـاده است و مدت زمانی که طول می‌کشد تا تندی یک نوسانگر برای نخستین بار از صفر به بیشینه مقدار برسد برابر $\frac{T}{4}$ است. از این‌رو:

$$\Delta t=\frac{T}{4}\Rightarrow\Delta t=\frac{1}{80}s$$

۱۷۵۵ B ۲

خط فکری هر ذره از محیط انتشار موج دارای حرکت هماهنگ ساده است و تمام ویژگی‌های حرکت هماهنگ ساده در مورد آن صدق می‌کند. به عنوان نمونه، هر ذره از محیط در مدت یک دوره مسافتی چهار برابر دامنه $(4A)$ می‌کند، بنابراین با توجه به مسافت طی شده می‌توانید تعداد نوسان‌ها را پیدا کرده سپس دوره را به دست بیاورید و مسئله را حل کنید.

۱ دامنه ۲cm است و مسافت طی شده در هر دوره $4A=4\times2=8cm$ است.

۲ کل مسافت طی شده در ۰/۲s برابر ۳۲cm بوده است بنابراین تعداد نوسان‌ها خواهد شد:

$$\begin{array}{c|c}8cm & N=1\\ \hline 32cm & N=?\end{array}\Rightarrow N=4\text{نوسان}$$

۳ دوره را به دست می‌آوریم: $T=\frac{t}{N}\Rightarrow T=\frac{0/2}{4}\Rightarrow T=0/05s$

۴ با توجه به تعریف طول موج، تندی انتشار موج را حساب می‌کنیم:

$$v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow v=\frac{1/5}{0/05}=30m/s$$

۵ پیشروی موج در مدت ۰/۲s خواهد شد:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow \Delta x=30\times0/2\Rightarrow\Delta x=6m$$

۱۷۵۶ A ۳

تندی انتشار موج را حساب می کنیم.

$$\mu=\frac{m}{\ell}\xrightarrow[\ell=0/5m]{m=0/2kg}\mu=\frac{0/2}{0/5}\Rightarrow\mu=0/4kg/m$$

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\xrightarrow{F=10N}v=\sqrt{\frac{10}{0/4}}\Rightarrow v=5m/s$$

طول موج را به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow{f=20Hz}\lambda=\frac{5}{20}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{4}m\Rightarrow\lambda=25cm$$

۱۷۵۷ B ۳

نکته تندی انتشار موج عرضی در طناب (تار) یا فنر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{FL}{m}}=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}=\frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}$$

۱ ابتدای تندی موج را به‌دست می‌آوریم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{250}{4\times10^{-3}}}=\sqrt{\frac{25}{4}\times10^{4}}=\frac{5}{2}\times10^{2}\Rightarrow v=250m/s$$

۲ با توجه به رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}$ طول موج را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda=\frac{250}{312/5}=\frac{2500}{3125}=\frac{100}{125}=\frac{4}{5}=0/8m$$

بازی با سوال **نیروی کشش طنابی ۱۲N و چگالی خطی جرم آن ۳۰g/m است. اگر سر این طناب را با دیاپازونی که بسامد آن ۱۰۰Hz است، عمود بر راستای طناب به نوسان درآوریم، طول موج ایجاد شده در طناب چند سانتی‌متر خواهد بود؟**

۱) ۰/۲ ۲) ۲ ۳) ۲۰ ۴) ۲۰۰

پاسخ تندی پیشروی موج را حساب می‌کنیم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{12}{30\times10^{-3}}}\Rightarrow v=20m/s$$

در این صورت طول موج خواهد شد: $\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{20}{100}=0/2m=20cm$

گزینهٔ ۳

۱۷۵۸ B ۱

با توجه به تعریف طول موج، تندی انتشار موج در طناب را حساب می‌کنیم.

$$\lambda=vT\xrightarrow{T=\frac{1}{f}}v=f\lambda\xrightarrow{f=600Hz,\ \lambda=0/2m}$$

$$v=600\times0/2\Rightarrow v=120m/s$$

نکته تندی انتشار موج عرضی در یک سیم (طناب) دارای سه رابطهٔ زیر است که با توجه به داده‌های مسئله یکی از آن‌ها را استفاده می‌کنیم.

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\ ,\ v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}\ ,\ v=\frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$$

$\mu=\frac{m}{\ell}$ چگالی خطی، $\rho=\frac{m}{V}$ چگالی سیم، مساحت سطح مقطع سیم، قطر سیم

تندی انتشار موج در سیم برابر است با:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}\xrightarrow[\rho=10000kg/m^3]{F=36N}120=\sqrt{\frac{36}{10000\times A}}\Rightarrow120\times120=\frac{36}{10000A}$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{4000000}m^2=\frac{1}{4000000}\times10^6mm^2\Rightarrow A=0/25mm^2$$

۱۷۵۹ B ۳

۱ با توجه به بسامد و طول موج، تندی انتشار موج در تار را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow0/25=\frac{v}{200}\Rightarrow v=50m/s$$

۲ حال با توجه به رابطهٔ تندی موج عرضی در تار $v=\frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}$ قطر تار را حساب می‌کنیم:

$$v=\frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}\xrightarrow[\rho=8g/cm^3=8000kg/m^3]{F=60N}50=\frac{2}{D}\sqrt{\frac{60}{8000\times3}}$$

$$\Rightarrow50=\frac{2}{D}\sqrt{\frac{1}{400}}\Rightarrow50=\frac{2}{D}\times\frac{1}{20}\Rightarrow D=\frac{1}{500}m$$

۳ قطر بر حسب میلی‌متر خواسته شده است:

$$D=\frac{1}{500}m\times\frac{1000mm}{1m}=2mm$$

۱۷۶۰ B ۳

۱ تندی انتشار موج عرضی در تار را حساب می‌کنیم.

$$v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}\xrightarrow[A=\pi r^2=3\times(10^{-2})^2]{F=234N,\rho=7800kg/m^3}v=\sqrt{\frac{234}{7800\times3\times10^{-6}}}$$

$$v=\sqrt{\frac{78}{78\times10^{-4}}}\Rightarrow v=100m/s$$

۲ طول موج را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow{f=200Hz}\lambda=\frac{100}{200}\Rightarrow\lambda=0/5m\Rightarrow\lambda=50cm$$

۳ فاصلهٔ یک قله (ستیغ) از دره (پاستیغ) بعدی $\frac{\lambda}{2}$ است، بنابراین:

$$\frac{\lambda}{2}=\frac{50}{2}\Rightarrow\lambda=25cm$$

۱۷۶۱ B ۴

تندی انتشار موج را به‌شدت می‌آوریم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}=\sqrt{\frac{156}{7800\times0/5\times10^{-6}}}=\sqrt{4\times10^4}=200m/s$$

تندی موج در یک محیط ثابت است، بنابراین مسافت طی شده خواهد شد:

$$\ell=vt=200\times1=200m$$

۱۷۶۲ A ۱

نکته تندی انتشار موج در یک محیط برای بسامدهای مختلف، یکسان است.

تندی انتشار موج‌های A و B با هم برابر است $(v_A=v_B)$ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$v_A=v_B\xrightarrow{v=f\lambda}f_A\lambda_A=f_B\lambda_B$$

$$\Rightarrow\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{f_B}{f_A}\xrightarrow{f_A=4f_B}\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{1}{4}$$

میانبر در یک محیط برای دو موج با بسامدهای f_1 و f_2، طول موج با بسامد نسبت وارون دارد.

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{f_2}{f_1}$$

۱۷۶۳ B ۲

نکته بسامد از ویژگی‌های چشمهٔ موج است و اگر چشمه تغییر نکند بسامد موج تغییر نمی‌کند. اما تندی انتشار موج از ویژگی‌های محیط است و چنانچه ویژگی‌های محیط تغییر کند، تندی و در نتیجه طول موج تغییر می‌کند.

۱ در این مسئله چشمه همان دیاپازون است بنابراین بسامد ثابت می‌ماند $(f'=f)$.

۲ با ۴ برابر شدن نیروی کشش $(F'=4F)$ تندی خواهد شد:

$$\frac{v'}{v}=\frac{\sqrt{\frac{F'}{\mu}}}{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}=\sqrt{\frac{F'}{F}}\Rightarrow\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{4F}{F}}\Rightarrow\frac{v'}{v}=2$$

۳ با توجه به تعریف طول موج خواهیم داشت:

$$f=\frac{v}{\lambda},f'=\frac{v'}{\lambda'}\xrightarrow{f'=f}\frac{v}{\lambda}=\frac{v'}{\lambda'}\Rightarrow\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{v'}{v}=2$$

۱۷۶۴ B ۲

خط فکری دقت کنید، نیروی کشش تار تغییر کرده بنابراین تندی انتشار موج در تار تغییر می‌کند از طرفی بسامد چشمه تغییر کرده است در نتیجه طول موج تحت تأثیر دو عامل تغییر می‌کند. تغییرات تندی و بسامد را مشخص کنید تا تغییر طول موج را بتوانید حساب کنید.

۱ در مسئله فاصلهٔ دو قلهٔ متوالی ۴ متر بیان شده بنابراین طول موج در ابتدا $\lambda=4m$ است.

۲ نیروی کشش ۵۱ درصد کاهش یافته بنابراین:

$$F_2=F_1-0/51F_1\Rightarrow F_2=0/49F_1$$

۳ تندی موج در حالت جدید را حساب می‌کنیم. البته چون تار تغییر نکرده است چگالی خطی جرم ثابت است $(\mu_2=\mu_1)$، پس:

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{\sqrt{\frac{F_2}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{F_1}{\mu_1}}}\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\sqrt{\frac{F_2}{F_1}}=\sqrt{\frac{0/49F_1}{F_1}}\Rightarrow v_2=0/7v_1$$

۴ طول موج جدید با بسامد چشمهٔ ۱۰۰Hz را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda_1=\frac{v_1}{f_1},\lambda_2=\frac{v_2}{f_2}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{v_2}{v_1}\times\frac{f_1}{f_2}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{4}=0/7\times\frac{50}{100}\Rightarrow\lambda_2=1/4m$$

۵ فاصلهٔ یک قله (ستیغ) از درهٔ (پاستیغ) مجاورش برابر نصف طول موج است.

$$\frac{\lambda_2}{2}=0/7m$$

۱۷۶۵ A ۲

سرعت v_1، سرعت انتشار موج در محیط است و v_2 تندی نوسان یک ذره از محیط در لحظهٔ نشان داده شده در شکل است و با گذشت زمان v_2 بین دو مقدار صفر و v_m تغییر می‌کند و جهت آن در نقاط بازگشت نیز عوض می‌شود. بنابراین گزارهٔ (الف) نادرست و (پ) درست است. سرعت انتشار موج (v_1) در یک محیط مقدار ثابتی است و به محیط انتشار موج بستگی دارد در حالی که تندی نوسان ذرات محیط (v_2) به بسامد نوسان چشمه بستگی دارد و گزارهٔ (ب) درست است.

۱۷۶۶ A ۳

یادآوری ذرات محیط انتشار موج دارای حرکت هماهنگ ساده بوده و بیشینه تندی آن‌ها $v_m=A\omega$ است.

خط فکری تندی پیشروی موج در یک محیط ثابت و برابر $v=f\lambda$ است. بیشینه تندی ذرات محیط $v'=A\omega$ است البته اگر به گزینه‌ها نگاه کنید در هیچ‌یک خبری از ω نیست بنابراین شما باید در حل مسئله از فرمول $\omega=2\pi f$ استفاده کنید تا بتوانید گزینهٔ مورد نظر را بیابید.

نسبت $\frac{v}{v'}$ را حساب می‌کنیم: $\frac{v}{v'}=\frac{f\lambda}{A\omega}\xrightarrow{\omega=2\pi f}\frac{v}{v'}=\frac{f\lambda}{A(2\pi f)}\Rightarrow\frac{v}{v'}=\frac{\lambda}{2\pi A}$

۱۷۶۷ B ۱

۱ ابتدا دورهٔ تناوب نوسان‌ساز که در اینجا یک سامانهٔ جرم - فنر فرض شده است به‌دست می‌آوریم. $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\xrightarrow[k=100N/m]{m=1kg}T=2\pi\sqrt{\frac{1}{100}}\Rightarrow T=\frac{\pi}{5}s$

۲ تندی پیشروی موج در طناب را حساب می‌کنیم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\xrightarrow[\mu=20g/m=20\times10^{-3}kg/m]{F=200N}v=\sqrt{\frac{200}{20\times10^{-3}}}\Rightarrow v=100m/s$$

۳ طول موج خواهد شد: $\lambda=vT\Rightarrow\lambda=100\times\frac{\pi}{5}=20\pi m$

۴ فاصلهٔ بین قله (ستیغ) از دره (پاستیغ) مجاورش برابر $\frac{\lambda}{2}$ است بنابراین:

$$\frac{\lambda}{2}=\frac{20\pi}{2}=10\pi m$$

۱۷۶۸ B ۲

۱ چگالی خطی جرم را حساب می‌کنیم: $\mu=\frac{m}{\ell}\xrightarrow[\ell=6m]{m=1kg}\mu=\frac{1}{6}kg/m$

۲ تندی انتشار موج در فنر را به دست می‌آوریم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\xrightarrow{F=6N}v=\sqrt{\frac{6}{\frac{1}{6}}}\Rightarrow v=6m/s$$

۳ بسامد موج همان بسامد چشمهٔ موج (دیاپازون) است، بسامد را به کمک طول موج به دست می‌آوریم: $v=f\lambda\xrightarrow{\lambda=1/5cm}6=f(1/5\times10^{-2})\Rightarrow f=400Hz$

۴ تعداد نوسان‌های دیاپازون در هر دقیقه خواهد شد:

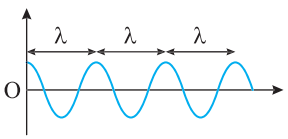
1s	400
60s	N

$\Rightarrow N=24000$

۱۷۶۹ B ۳

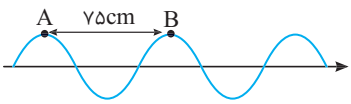
خط فکری فاصلهٔ هر دو برآمدگی متوالی برابر λ است و هرگاه فاصلهٔ دو نقطه از هم λ باشد، یعنی در هر لحظه دو نقطه در یک وضعیت قرار دارند. در لحظه‌ای که O در دامنهٔ مثبت است تمام نقاطی که در فاصلهٔ λ، 2λ، 3λ و ... (مضرب صحیح λ)، از O قرار دارند در دامنهٔ مثبت هستند، بنابراین شما باید گزینه‌ها را بررسی کنید و مشخص کنید کدام فاصله مضرب صحیحی λ است.

با توجه به شکل گزینهٔ (۳) که فاصلهٔ صفر تا M، $\frac{6}{2}\lambda=3\lambda$ است درست می‌باشد.



۱۷۷۰ B ۲

قرار است دو نقطهٔ A و B دو ستیغ (قله) متوالی باشند و فاصلهٔ دو قلهٔ متوالی برابر یک طول موج است. بنابراین طول موج که در ابتدا $\lambda_1=50cm$ بوده است اکنون باید $\lambda_2=75cm$ شود تا A و B دو برآمدگی متوالی باشند.



از طرفی تندی انتشار موج در یک محیط (یک ریسمان) برای هر بسامدی مقدار یکسانی است بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{f_2}{f_1}=\frac{\frac{v_2}{\lambda_2}}{\frac{v_1}{\lambda_1}}\xrightarrow{v_2=v_1}\frac{f_2}{f_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Rightarrow\frac{f_2}{f_1}=\frac{50}{75}\Rightarrow\frac{f_2}{f_1}=\frac{2}{3}$$

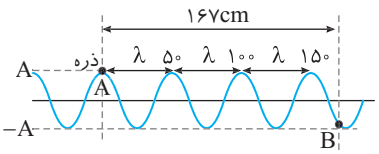
میانبر دقت کنید برای آن‌که طول موج افزایش یابد باید بسامد کاهش یابد و تنها گزینه‌ای که در آن بسامد کاهش یافته گزینهٔ (۲) است.

B ۳ ۱۷۷۱

خط فکری شکل موج را رسم کنید. نام یکی از قله‌های رسم شده را A بگذارید. حال اگر به اندازهٔ یک طول موج جلو بروید به قلهٔ بعدی می‌رسید. تعداد قله‌های مسیر را بشمارید. در این‌صورت تعداد ذره‌هایی که همزمان با A در دامنهٔ مثبت $(+A)$ قرار دارند به دست می‌آید. البته ابتدا باید طول موج را حساب کنید.

در انتشار موج وقتی ذرهٔ A در دامنهٔ مثبت است مطابق شکل تمام ذره‌هایی که فاصلهٔ آن‌ها از A مضرب صحیحی از طول موج است هم‌زمان در دامنهٔ مثبت قرار دارند.

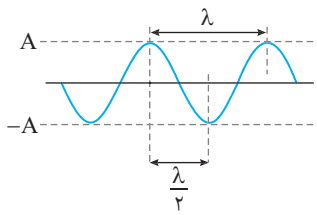
ابتدا طول موج را به‌دست می‌آوریم. $\lambda=\frac{v}{f}=\frac{۱۰۰}{۲۰۰}=۰/۵m=۵۰cm$



بنابراین نقاطی که در فاصلهٔ ۵۰cm، ۱۰۰cm، ۱۵۰cm و ... از A قرار دارند هم‌زمان با ذرهٔ A در دامنهٔ مثبت قرار دارند، بنابراین سه ذره بین A و B هم‌زمان در دامنهٔ مثبت قرار دارند.

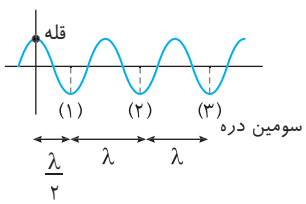
B ۱ ۱۷۷۲

مطابق شکل زیر نزدیک‌ترین فاصلهٔ دو نقطه که هم‌زمان یکی در دامنهٔ مثبت و دیگری در دامنهٔ منفی باشد یعنی یکی ستیغ (قله) و دیگری پاستیغ (دره) باشد $\frac{\lambda}{۲}$ است. طول موج را به‌دست آورده و $\frac{\lambda}{۲}$ را حساب می‌کنیم: $\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{۴}{۲۰}=۰/۲m\Rightarrow\frac{\lambda}{۲}=۰/۱m$



B ۲ ۱۷۷۳

خط فکری در حل این مسائل لازم است شکل رسم کنیم. فاصلهٔ سومین دره از قلهٔ مورد نظر $\frac{۵\lambda}{۲}$ است بنابراین طول موج را می‌توانید به دست بیاورید و مسئله را حل کنید.



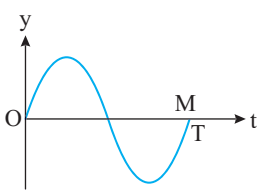
۱ با توجه به شکل می‌توان نوشت: $۵\frac{\lambda}{۲}=۱۴\Rightarrow\lambda=\frac{۲۸}{۵}=۵/۶cm$

۲ بسامد موج همان بسامد چشمه است. بسامد چشمه را از معادلهٔ حرکت آن $x=۰/۰۵\cos ۴۰\pi t$ حساب می‌کنیم: $\omega=۴۰\pi\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}=۴۰\pi\Rightarrow T=\frac{۱}{۲۰}s$

۳ تندی انتشار موج خواهد شد: $v=\frac{\lambda}{T}=\frac{۰/۰۵۶}{\frac{۱}{۲۰}}\Rightarrow v=۱/۱۲m/s$

A ۲ ۱۷۷۴

دقت کنید که OM روی محور زمان است و زمان یک نوسان کامل برابر دوره است.



B ۳ ۱۷۷۵

نکته فاصلهٔ دو برآمدگی متوالی برابر طول موج است. فاصلهٔ هر ذره از محیط تا حالت تعادلش برابر یک دامنه است.

۱ فاصلهٔ Δx همان طول موج بوده یعنی $\lambda=۴۰cm=۰/۴m$ است.

۲ فاصلهٔ Δy همان دامنه است یعنی $A=۱۵cm=۰/۱۵m$ است.

۳ تندی انتشار موج در محیط خواهد شد:

$v=f\lambda\xrightarrow{f=۸Hz}v=۸\times۰/۴\Rightarrow v=۳/۲m/s$

۴ بسامد زاویه‌ای را حساب می‌کنیم: $\omega=۲\pi f\Rightarrow\omega=۲\pi\times۸\Rightarrow\omega=۱۶\pi\ rad/s$

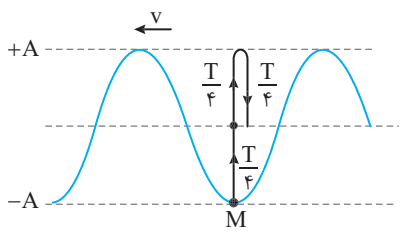
۵ بیشینه تندی نوسان ذرات محیط برابر است با:

$v_m=A\omega\Rightarrow v_m=۰/۱۵\times۱۶\pi\Rightarrow v_m=۲/۴\pi\ m/s$

A ۱ ۱۷۷۶

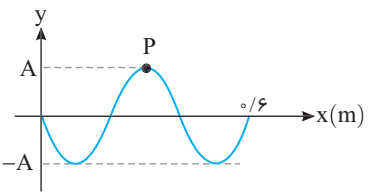
خط فکری هر ذره از محیط انتشار موج سینوسی دارای حرکت هماهنگ ساده است. بنابراین وقتی از شما دربارهٔ یک ذره از محیط پرسش می‌شود، شما باید تنها به حرکت هماهنگ ساده فکر کنید. به طور مثال اگر ذره در $+A$ باشد بعد از $\frac{T}{۴}$ به حالت تعادل می‌رسد. $\frac{T}{۴}$ بعد به مکان $-A$ می‌رسد و تمام بازه‌های زمانی در مورد آن صدق می‌کند. با توجه به این مطلب، مسئله را بررسی کنید.

مطابق شکل M در مکان $-A$ است و پس از $\frac{T}{۴}$ به مرکز می‌رود، $\frac{T}{۴}$ بعد به $+A$ رفته و در $\frac{T}{۴}$ آخر به مرکز بر می‌گردد، بنابراین پس از $\frac{۳T}{۴}$ در مرکز نوسان است.



A ۴ ۱۷۷۷

خط فکری شما باید ابتدا مشخص کنید که ذرهٔ مورد نظر در لحظهٔ $t=۰$ در چه وضعیتی است؟ برای این منظور باید طول موج را پیدا کرده و به کمک آن محل ذره را بیابید. یادتان باشد ذره دارای حرکت هماهنگ ساده است.

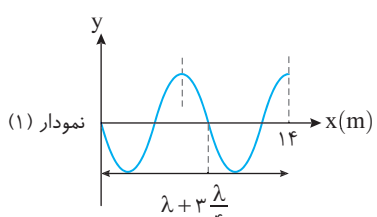


طول موج را به‌دست می‌آوریم: $۳\frac{\lambda}{۲}=۰/۶\Rightarrow\lambda=۰/۴m=۴۰cm$

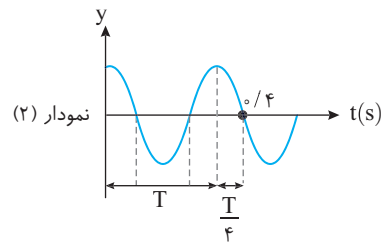
ذره‌ای در فاصلهٔ ۳۰cm از چشمه، نقطه‌ای مانند P است که در $t=۰$ بُعد آن $+A$ است و این نقطه شبیه نوسانگر ساده‌ای است که از دامنهٔ مثبت شروع به حرکت کرده و نمودار مکان زمان آن یک نمودار کسینوسی است که گزینهٔ (۴) تنها گزینه‌ای است که این موضوع را نشان می‌دهد.

A ۳ ۱۷۷۸

۱ نمودار (۱) نقش موج در تار است و در نقش موج فاصلهٔ دوبرآمدگی برابر یک طول موج است. با توجه به نمودار خواهیم داشت: $\frac{۷\lambda}{۴}=۱۴\Rightarrow\lambda=۸m$



۲ نمودار (۲)، نمودار مکان - زمان، حرکت هماهنگ سادهٔ یک ذره از محیط است و محور افقی، محور زمان است از این‌رو می‌توان نوشت: $T+\frac{T}{۴}=۰/۴\Rightarrow\frac{۵T}{۴}=۰/۴\Rightarrow T=\frac{۱۶}{۵۰}s$



۳ تندی انتشار موج در تار را حساب می‌کنیم: $v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow v=\frac{۸}{\frac{۱۶}{۵۰}}\Rightarrow v=۲۵m/s$

۴ چگالی خطی جرم را به دست می‌آوریم:

$$\mu=\frac{m}{\ell}\Rightarrow\mu=\frac{۴\times۱۰^{-۳}}{۱۰\times۱۰^{-۲}}=۴\times۱۰^{-۲}kg/m$$

۵ نیروی کشش تار خواهد شد:

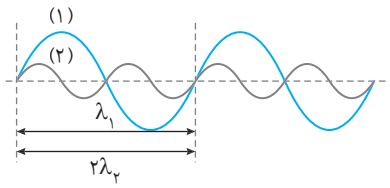
$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\Rightarrow ۲۵=\sqrt{\frac{F}{۴\times۱۰^{-۲}}}\Rightarrow ۶۲۵=\frac{F}{۴\times۱۰^{-۲}}\Rightarrow F=۲۵N$$

A ۱۷۷۹ ۱

۱ با توجه به شکل طول موج $\lambda_۱$ ، دو برابر طول موج $\lambda_۲$ است و گزینهٔ (۱) الزاماً درست است.

۲ طناب‌ها به دو چشمهٔ مختلف متصل هستند بنابراین در مورد بسامد موج‌ها نمی‌توان اظهارنظر کرد.

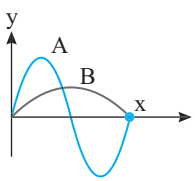
۳ دربارهٔ دو طناب اطلاعاتی نداریم بنابراین اگر دو طناب مشابه باشند تندی انتشار موج در آن‌ها یکی است و اگر مشابه نباشند تندی یکسان نیست یعنی دربارهٔ تندی آن‌ها نمی‌توان اظهارنظر کرد.



B ۱۷۸۰ ۴

خط فکری سرعت انتشار موج از ویژگی‌های محیطی است که موج در آن در حال انتشار است، چون هر دو موج در یک محیط منتشر می‌شوند پس $v_A=v_B$ است.

۱ در گام اول با توجه به نقش موج و محور افقی نسبت طول موج A و B را به‌دست می‌آوریم:



$$\begin{cases}x=\lambda_A\\x=\frac{\lambda_B}{۲}\end{cases}\Rightarrow\lambda_A=\frac{\lambda_B}{۲}\Rightarrow\lambda_B=۲\lambda_A$$

۲ از طرفی بنا به رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}=vT$ می‌توان نوشت:

$$\lambda_B=۲\lambda_A\xrightarrow{\lambda=vT}v_BT_B=۲v_AT_A\xrightarrow{v_A=v_B}T_B=۲T_A\Rightarrow\frac{T_A}{T_B}=\frac{۱}{۲}$$

بازی با سؤال در شکل زیر دو موج عرضی A و B نشان داده شده است. کدام رابطه در مورد دامنه و طول موج آن دو درست است؟ از کتاب درسی



۱) $A_A=A_B$ ، $\lambda_A=\frac{\lambda_B}{۲}$ ۲) $A_A=A_B$ ، $\lambda_A=۲\lambda_B$

۳) $A_A=۲A_B$ ، $\lambda_A=\lambda_B$ ۴) $A_A=۲A_B$ ، $\lambda_A=\frac{\lambda_B}{۲}$

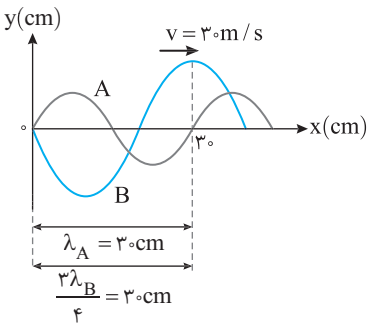
پاسخ با توجه به شکل فاصلهٔ دو ستیغ مجاور در موج A (λ_A) برابر فاصلهٔ ستیغ از پاستیغ مجاورش در موج B $(\frac{\lambda_B}{۲})$ است، بنابراین $\lambda_A=\frac{\lambda_B}{۲}$ است. از طرفی ارتفاع ستیغ A دو برابر B است، بنابراین $A_A=۲A_B$ است.

گزینهٔ ۴

A ۱۷۸۱ ۴

۱ با توجه به شکل طول موج A برابر ۳۰cm است بنابراین دورهٔ A خواهد شد:

$$\lambda_A=۳۰cm=۰/۳m\xrightarrow{v=\lambda/T}۳۰=\frac{۰/۳}{T_A}\Rightarrow T_A=۰/۰۱s$$



۲ طول موج B برابر است با:

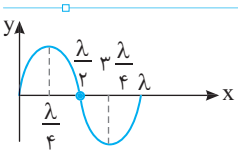
$$\frac{۳}{۴}\lambda_B=۳۰\Rightarrow\lambda_B=۴۰cm=۰/۴m\xrightarrow{v=\lambda/T}۳۰=\frac{۰/۴}{T_B}\Rightarrow T_B=\frac{۴}{۳۰}s$$

۳ حال با توجه به رابطهٔ $T=\frac{t}{N}$ ، تعداد نوسان‌های کامل A و B را در مدت ۲۰s به‌دست می‌آوریم:

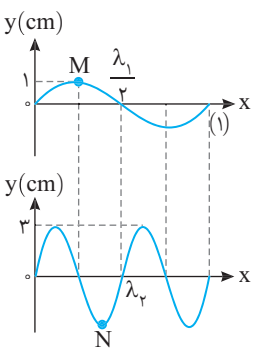
$$\begin{cases}۰/۰۱=\frac{۲۰}{N_A}\Rightarrow N_A=۲۰۰۰\\\frac{۴}{۳۰۰}=\frac{۲۰}{N_B}\Rightarrow N_B=۱۵۰۰\end{cases}\Rightarrow\text{نوسان } N_A-N_B=۵۰۰$$

B ۱۷۸۲ ۴

یادآوری در نقش موج به کمک مؤلفهٔ افقی نمودار می‌توان طول موج را حساب کرد:



۱ با توجه به شکل دو نمودار، طول موج تار (۱) دو برابر طول موج تار (۲) است.



$$\frac{\lambda_۱}{۲}=\lambda_۲\Rightarrow\lambda_۱=۲\lambda_۲$$

۲ حال با توجه به رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}$ می‌توان بسامد نوسان ذرات موج را حساب کرد و به کمک $f=\frac{۱}{T}$ دورهٔ نوسان آن‌ها را به‌دست آورد:

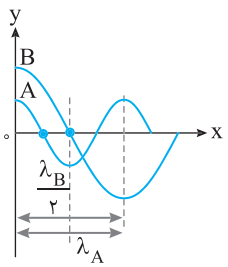
$$\begin{cases}\lambda_۱=\frac{v_۱}{f_۱}\\\lambda_۲=\frac{v_۲}{f_۲}\end{cases}\xrightarrow{v_۱=v_۲}\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}=\frac{f_۲}{f_۱}\Rightarrow\frac{f_۲}{f_۱}=۲\Rightarrow\frac{\frac{۱}{T_۲}}{\frac{۱}{T_۱}}=۲\Rightarrow\frac{T_۱}{T_۲}=۲$$

۳ دورهٔ نوسان ذرات موج (۱) (مثل نقطهٔ M) دو برابر دورهٔ نوسان ذرات موج (۲) (مثل نقطهٔ N) است:

$$\begin{cases} T_M = \frac{t_M}{N_M} \\ T_N = \frac{t_N}{N_N} \end{cases} \xrightarrow[N_M=۲]{T_M=۲T_N} \frac{T_M}{T_N} = \frac{N_N}{N_M} \Rightarrow ۲ = \frac{N_N}{۲} \Rightarrow N_N = ۴$$

A ۱۷۸۳ ۲

با توجه به شکل:



$$\lambda_A = \frac{\lambda_B}{۲}$$

دو موج در یک محیط منتشر می‌شوند، بنابراین تندی انتشار دو موج در محیط یکسان است.

$$v_A = v_B$$

با توجه به تعریف طول موج:

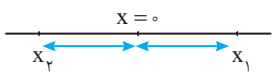
$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{f_B}{f_A} \Rightarrow \frac{\frac{\lambda_B}{۲}}{\lambda_B} = \frac{f_B}{f_A}$$

$$f_B = \frac{۱}{۲} f_A \xrightarrow{N=ft} \frac{N_B}{N_A} = \frac{f_B}{f_A} \Rightarrow \frac{N_B}{۱۰۰} = \frac{۱}{۲} = N_B = ۵۰$$

در مدتی که چشمه A، ۱۰۰ نوسان انجام می‌دهد چشمهٔ B، ۵۰ نوسان انجام خواهد داد.

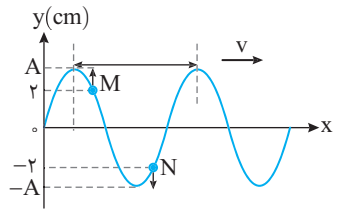
A ۱۷۸۴ ۲

یادآوری در حرکت هماهنگ ساده هرگاه فاصلهٔ نوسانگر از مرکز نوسان یکسان باشد، تندی نیز یکسان است.



$$|v_۱| = |v_۲|$$

با توجه به جهت پیشروی موج، ذرهٔ M در حال حرکت رو به بالا و نزدیک شدن به انتهای مسیر (نقطهٔ بازگشت) است بنابراین حرکت آن کندشونده است. هم‌چنین ذرهٔ N در حال حرکت رو به پایین و نزدیک شدن به نقطهٔ بازگشت بوده و حرکت آن کندشونده است بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست است.

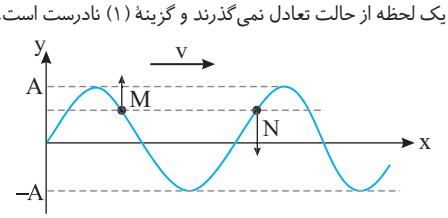


مکان دو ذرهٔ M و N از محیط نسبت به مرکز نوسانشان یکسان و قرینه است. پس تندی در آن نقطه‌ها برابر بوده و در نتیجه گزینهٔ (۲) درست است.

فاصلهٔ دو برآمدگی از هم λ است و M و N بین دو قله متوالی قرار دارند و فاصلهٔ آن‌ها از هم کمتر از λ است و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۱۷۸۵ ۴

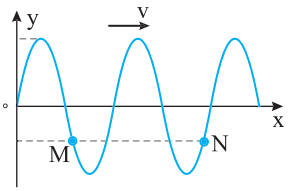
۱ نقطهٔ M در حال حرکت رو به بالا و نقطهٔ N در حال حرکت رو به پایین است، بنابراین در یک لحظه از حالت تعادل نمی‌گذرند و گزینهٔ (۱) نادرست است.



۲ حرکت M رو به بالا و در حال دور شدن از حالت تعادلش بوده و کندشونده است اما N در حال نزدیک شدن به حالت تعادل بوده و دارای حرکت تندشونده است. بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است.

۳ جهت حرکت هر دو، قرینهٔ هم (M رو به بالا و N رو به پایین) است و در یک مکان دو نوسانگر دارای تندی یکسان هستند اما سرعت آن‌ها قرینه است و گزینهٔ (۳) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.

بازی با سؤال **شکل روبه‌رو موج عرضی را در طناب نشان می‌دهد. کدام مورد دربارهٔ دو نقطهٔ M و N از طناب درست است؟** ریاضی - ۹۵



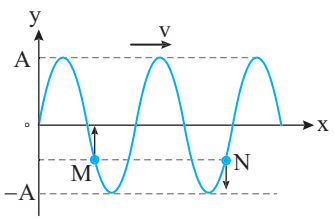
۱) سرعت آن‌ها در هر لحظه یکسان است.

۲) دامنه و بسامد یکسانی دارند.

۳) در هر لحظه فاصلهٔ آن‌ها از مرکز نوسان یکسان است.

۴) هر سه گزینه درست است.

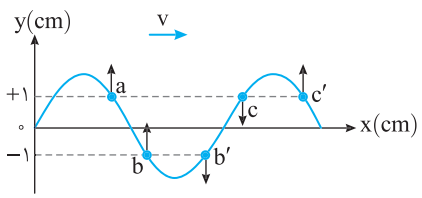
پاسخ **با توجه به جهت پیشروی موج، ذرهٔ M در حال حرکت رو به بالا و نزدیک شدن به حالت تعادلش است اما ذرهٔ N در حال حرکت رو به پایین و در حال نزدیک شدن به نقطهٔ بازگشت است. با آن که در این لحظه تندی آن‌ها یکسان است اما در لحظه‌های بعدی تندی آن‌ها یکسان نخواهد بود. همچنین با گذشت زمان فاصلهٔ آن‌ها از مرکز نوسان تغییر خواهد کرد و گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست است.**



بسامد تمام نقاط محیط یکسان است و دامنهٔ نقاط مختلف برای یک موج عرضی که در یک بُعد در حال انتشار است، با صرف‌نظر از اتلاف انرژی نیز برای تمام نقاط یکسان است و گزینهٔ (۲) درست است. گزینهٔ ۲

B ۱۷۸۶ ۱

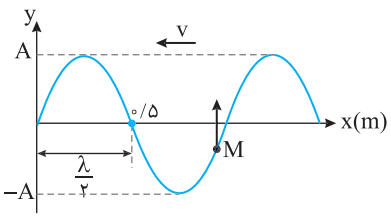
در نقش موج هر ذره حرکت ذرهٔ قبلی خود را تکرار می‌کند. موج به سمت راست در حال حرکت است پس ذرهٔ قبلی a، دست چپ آن و بالا تراز a است پس ذرهٔ a در حال نوسان به سمت بالا است. به همین نحو جهت حرکت ذرات دیگر را مشخص می‌کنیم. فاصلهٔ بین a و c' که مکان و جهت حرکت یکسان دارند برابر λ است و گزینهٔ (۳) نادرست است.



فاصلهٔ بین a و b' که مکان و جهت حرکت قرینه هم دارند برابر $\frac{\lambda}{۲}$ است و گزینهٔ (۴) نادرست است. ذرهٔ a به سمت دامنه در حال حرکت بوده و حرکت کندشونده دارد و گزینهٔ (۲) نادرست است. نقاط a و b در فاصلهٔ یکسانی از نقطهٔ تعادل با تندی بیشینه قرار دارند و تندی این دو نقطه یکسان است و گزینهٔ (۱) درست است.

C ۱۷۸۷ ۴

بنا به فرض مسئله نقطهٔ M در حال حرکت رو به بالاست. به شکل نگاه کنید. برای آن که M رو به بالا در حرکت باشد باید قلهٔ موج در حال نزدیک شدن به نقطهٔ M باشد و نقطهٔ قبل از M در مسیر موج باید بالاتر از M باشد. نقطهٔ سمت راست M بالاتر از M است یعنی نقطهٔ قبل از M در سمت راست آن قرار دارد بنابراین باید جهت پیشروی موج از راست به چپ باشد.

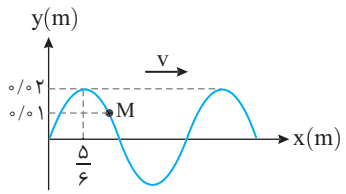


با توجه به نمودار $\frac{\lambda}{۲}$ برابر ۰/۵m است بنابراین طول موج خواهد شد: $\frac{\lambda}{۲}=۰/۵\Rightarrow\lambda=۱\,m$

۲ ۱۷۸۸ A

خط فکری ذرهٔ M در هـر ثانیـه چند نوسـان انجام می‌دهد؟ یعنی بسـامد موج را بیابید. به کمک محور افقی نقش موج طول موج را به دست می‌آوریم و با استفاده از تندی موج ($v=۱۰m/s$) بسامد را حساب می‌کنیم. بسامد موج برای تمام نقاط یکسان است.

۱ با توجه به نمودار طول موج خواهد شد: $\frac{\lambda}{۴}=\frac{۵}{۶}\Rightarrow\lambda=\frac{۲۰}{۶}=\frac{۱۰}{۳}m$

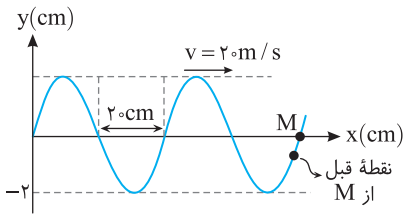


۲ دوره را حساب می‌کنیم: $T=\frac{\lambda}{v}=\frac{\frac{۱۰}{۳}}{۱۰}\Rightarrow T=\frac{۱}{۳}s$

۳ تعداد نوسانات در هر ثانیه یعنی بسامد در این صورت: $f=\frac{۱}{T}=۳Hz$

۴ ۱۷۸۹ B

خط فکری در حل مسـائل نقش موج معمولاً ابتـدا از روی محور افقی، طول موج را حسـاب کرده سـپس به کمک تندی انتشار موج دوره را حساب می‌کنیم و بعد از آن با توجه به جهت حرکت موج، رفتار نقطهٔ مورد نظر را بررسی می‌کنیم.



۱ گام اول: یافتن طول موج: $\frac{\lambda}{۲}=۲۰\,cm\Rightarrow\lambda=۰/۴m$

۲ گام دوم: یافتن دوره: $T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۴}{۲۰}\Rightarrow T=۰/۰۲s$

۳ گام سوم: نقطهٔ M در حال گذر از مرکز نوسانش بوده و نقطهٔ قبل از M پایین‌تر از نقطهٔ M است. یعنی M در حال حرکت رو به پایین و دارای بیشینه تندی است.

$v_m=A\omega\Rightarrow v_m=A\frac{۲\pi}{T}\xrightarrow[\text{نمودار}]{A=۰/۰۲m}v_m=۰/۰۲\times\frac{۲\times۳/۱۴}{۰/۰۲}$

$\Rightarrow v_m=۶/۲۸m/s$

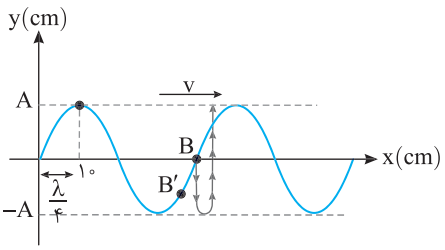
۴ ۱۷۹۰ A

خط فکری در اغلب مسائل نقش موج دو کار را همان ابتدا باید انجام دهید:

۱ پیدا کردن طول موج از روی محور افقی

۲ به دسـت آوردن دوره به کمک تندی انتشـار موج و هرگاه دربارهٔ رفتار یک ذره از محیط از شما سؤال شود شما باید جهت حرکت ذره را تشخیص دهید (بالا می‌رود یا پایین می‌آید) و سپس با ذره شبیه یک نوسان‌گر هماهنگ ساده برخورد کنید.

۱ با توجه به نقش موج طول موج را حساب می‌کنیم: $\frac{\lambda}{۴}=۱۰\Rightarrow\lambda=۴۰cm=۰/۴m$



۲ دوره را حساب می‌کنیم: $\lambda=vT\Rightarrow T=\frac{\lambda}{v}=\frac{۰/۴}{۱۰}=۰/۰۴s$

۳ با توجه به نقش موج درهٔ موج در حال نزدیک شـدن به نقطهٔ B اسـت و ذرهٔ قبل از B یعنی B′ ، از B پایین‌تراست پس B رو به پایین در حرکت است.

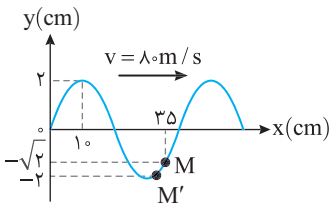
۴ ذرهٔ B از مرکز نوسـان تا $-A$ ، $\frac{T}{۴}$ و از $-A$ تا $+A$ ، $\frac{T}{۲}$ یعنی جمعاً $\frac{۳T}{۴}$

در حال حرکت خواهد بود بنابراین مدت زمانی که طول می‌کشد تا ذرهٔ B برای اولین بار به مکان $+A$ برسد خواهد شد: $\Delta t=\frac{۳T}{۴}\Rightarrow\Delta t=\frac{۳}{۴}\times۰/۰۴\Rightarrow\Delta t=۰/۰۳s$

۱ ۱۷۹۱ B

۱ گام اول: پیدا کردن طول موج از روی محور افقی:

$\frac{\lambda}{۴}=۱۰\Rightarrow\lambda=۴۰cm=۰/۴m$

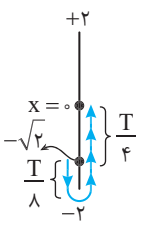


۲ گام دوم: پیدا کردن دوره به کمک تندی انتشار موج:

$f=\frac{v}{\lambda}\Rightarrow f=\frac{۸۰}{۰/۴}\Rightarrow f=۲۰۰Hz\Rightarrow T=\frac{۱}{۲۰۰}s$

۳ گام سوم: تعیین جهت حرکت ذرهٔ M : با توجه به جهت پیشروی موج درهٔ موج در حال نزدیک شـدن به ذرهٔ M اسـت و ذرهٔ قبل از M از M پایین‌تر است بنابراین M از مکان $-\sqrt{۲}cm$ در حال حرکت به سوی دامنهٔ منفی $A=-۲cm$ است.

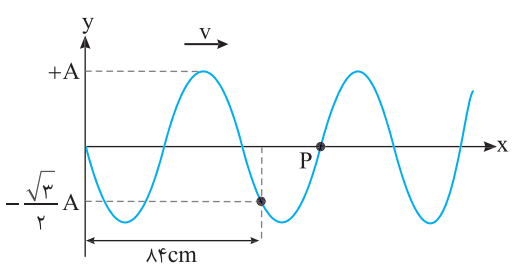
۴ اکنون با یک حرکت هماهنگ سـاده سـر و کار داریم که در آن نوسانگر از مکان $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ به سوی $-A$ رفته



سـپس به مکان $x=۰$ مـی‌رود. به کمک بازه‌هـای زمانی شناخته شده زمان را به‌دست می‌آوریم:

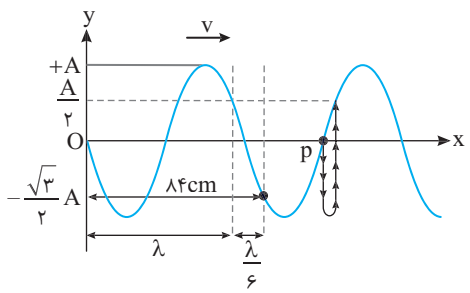
$\Delta t=\frac{T}{۸}+\frac{T}{۴}=\frac{۳T}{۸}\Rightarrow\Delta t=\frac{۳}{۸}\times\frac{۱}{۲۰۰}\Rightarrow\Delta t=\frac{۳}{۱۶۰۰}s$

بازی با سوال **مطابق شـکل زیر یک مـوج عرضی با دامنـهٔ A با تندی $۵۰m/s$ در یک تار در حال پیشـروی اسـت. چند ثانیه پس از لحظهٔ نشان داده شده در شکل، نقطهٔ P از محیط برای نخستین بار به مکان $+\frac{A}{۲}$ می‌رسد؟**



۱) $۸/۴\times۱۰^{-۳}$ ۲) $۱/۲\times۱۰^{-۳}$ ۳) $۸/۴\times۱۰^{-۴}$ ۴) ۷×۱۰^{-۳}

پاسخ با توجه به بازه‌های مکانی شناخته شده می‌توان نوشت:



$$\lambda+\frac{\lambda}{۶}=۸۴\Rightarrow\frac{۷\lambda}{۶}=۸۴\Rightarrow\lambda=۷۲cm$$

$$T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۷۲}{۵۰}\Rightarrow T=۱/۴۴\times۱۰^{-۲}s$$

اکنون به مسیر حرکت P دقت کنید. P در مدت $\frac{T}{۴}$ از مرکز به دامنهٔ $-A$ می‌رود و پس از $\frac{T}{۴}$ دیگر به تعادلش بازمی‌گردد و از محل تعادل در مدت $\frac{T}{۱۲}$ به مکان $+\frac{A}{۲}$ می‌رود از این‌رو:

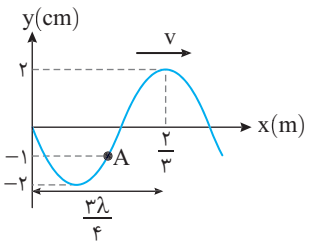
$$\Delta t=\frac{T}{۴}+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۱۲}\Rightarrow\Delta t=\frac{۷T}{۱۲}\Rightarrow\Delta t=\frac{۷}{۱۲}\times۱/۴۴\times۱۰^{-۲}\Rightarrow\Delta t=۸/۴\times۱۰^{-۳}s$$

گزینهٔ ۱

B ۱۷۹۲ ۳

راه‌حل اول: ۱ گام اول: طول موج را از روی محور افقی حساب می‌کنیم:

$$۳\frac{\lambda}{۴}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\lambda=\frac{۸}{۹}m$$



۲ گام دوم: به کمک تندی انتشار موج دوره را به دست می‌آوریم.

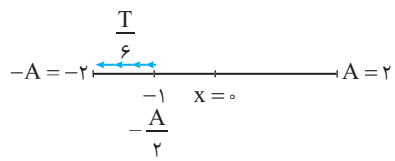
$$T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{\frac{۸}{۹}}{۱۰}\Rightarrow T=\frac{۸}{۹۰}s$$

۳ گام سوم: ذرهٔ A در حال حرکت به کدام جهت است؟ با توجه به جهت پیشروی موج درهٔ موج در حال نزدیک شدن به نقطهٔ A است و نقطهٔ قبل از A از A پایین‌تر است بنابراین A در حال حرکت به سمت پایین است.

۴ اکنون با ذرهٔ A شبیه یک حرکت هماهنگ ساده برخورد می‌کنیم. ابتدا مشخص می‌کنیم که بازهٔ زمانی داده شده چه کسری از دوره است.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{۲}{۱۳۵}}{\frac{۸}{۹۰}}=\frac{۲\times۹۰}{۱۳۵\times۸}=\frac{۲\times۲}{۳\times۸}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۶}$$

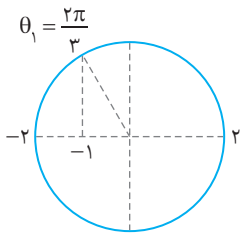
۵ یک نوسانگر وقتی در مکان $-\frac{A}{۲}$ قرار دارد در مدت $\frac{T}{۶}$ به مکان $-A$ می‌رسد بنابراین ذرهٔ A در این مدت به مکان $-۲cm$ می‌رسد.



راه‌حل دوم: استفاده از دایرهٔ مثلثاتی برای حرکت هماهنگ ساده ذرهٔ A

$$\theta_۲-\theta_۱=\omega t_۲-\omega t_۱\Rightarrow\theta_۲-\frac{۲\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{T}(\frac{۲}{۱۳۵})$$

$$\Rightarrow\theta_۲-\frac{۲\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{\frac{۸}{۹۰}}\times\frac{۲}{۱۳۵}\Rightarrow\theta_۲-\frac{۲\pi}{۳}=\frac{\pi\times۹۰}{۲\times۱۳۵}\Rightarrow\theta_۲-\frac{۲\pi}{۳}=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\theta_۲=\pi$$

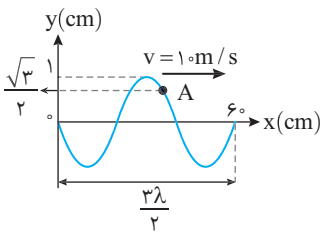


بنابراین ذرهٔ A به مکان $-۲cm$ می‌رسد.

B ۱۷۹۳ ۳

۱ گام اول: یافتن طول موج از روی محور افقی نقش موج:

$$۳\frac{\lambda}{۲}=۶۰\Rightarrow\lambda=۴۰cm=۰/۴m$$



۲ گام دوم: یافتن دوره به کمک تندی انتشار موج:

$$T=\frac{\lambda}{v}=\frac{۰/۴}{۱۰}=\frac{۱}{۲۵}s$$

۳ بسامد زاویه‌ای موج را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲۵}}=۵۰\pi\ rad/s$$

۴ اکنون ذرهٔ A یک نوسانگر هماهنگ ساده است که مکان آن $x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}cm$ می‌باشد و روابط حرکت هماهنگ ساده در مورد آن صدق می‌کند.

یادآوری شتاب یک نوسانگر ساده برحسب مکان آن از رابطهٔ $|a|=\omega^۲x$ به دست می‌آید.

۵ شتاب ذرهٔ A در لحظهٔ نشان داده شده خواهد شد:

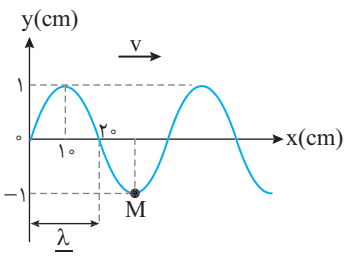
$$|a|=\omega^۲x\Rightarrow|a|=(۵۰\pi)^۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۱۰^{-۲}$$

$$\Rightarrow|a|=۲۵۰۰\pi^۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۱۰^{-۲}\Rightarrow|a|=۱۲۵\sqrt{۳}m/s^۲$$

C ۱۷۹۴ ۴

۱ گام اول: یافتن طول موج از روی محور افقی:

$$\frac{\lambda}{۲}=۲۰\Rightarrow\lambda=۴۰cm=۰/۴m$$



۲ گام دوم: یافتن دوره به کمک تندی انتشار موج:

$$T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۴}{۴}\Rightarrow T=۰/۱s$$

۳ گام سوم: تعیین جهت حرکت ذرهٔ مورد نظر، ذرهٔ M در دامنهٔ $-A$ قرار دارد بنابراین یقیناً رو به بالا حرکت خواهد کرد.

۴ گام چهارم: مشخص می‌کنیم بازهٔ زمانی داده شده چه کسری از دوره است:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{۰/۰۲۵}{۰/۱}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۴}$$

۵ ذرهٔ M دارای حرکت هماهنگ ساده است بنابراین در مدت $\frac{T}{۴}$ از مکان $-A$ به مرکز نوسان می‌رسد. بنابراین بعد از $\frac{T}{۴}$ تندی ذرهٔ M بیشینهٔ مثبت خواهد بود. $(v_m=+A\omega)$ اما ابتدا باید بسامد زاویه‌ای را حساب کنیم:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\omega=\frac{۲\pi}{۰/۱}\Rightarrow\omega=۲۰\pi\ rad/s$$

$$v_m=+A\omega\xrightarrow{A=۱cm}v_m=+(۱\times۲۰\pi)\Rightarrow v_m=+۲۰\pi\ cm/s$$

B ۱۷۹۵ | ۳

خط فکری این بار خوشبختانه نیازی به پیدا کردن طول موج نداریم. مسئله راجع به سرعت متوسط نقطهٔ M سؤال کرده و شما در حقیقت یک حرکت هماهنگ ساده را باید بررسی کنید که در آن دامنه ۲cm و مکان ذره $\sqrt{۳}cm$ یعنی $\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ است.

تنها نکتهٔ مهم تعیین جهت حرکت ذرهٔ M است.

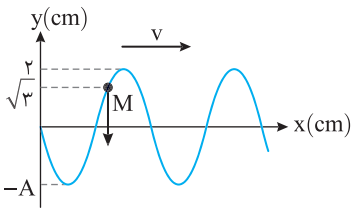
۱ دوره را حساب می‌کنیم:

$$T=\frac{۱}{f}\Rightarrow T=\frac{۱}{۲۰}s$$

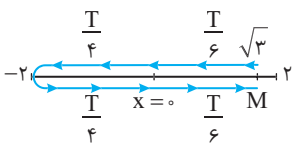
۲ مشخص می‌کنیم که $\Delta t=\frac{۱}{۲۴}s$ چه کسری از دوره است:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{۱}{۲۴}}{\frac{۱}{۲۰}}\Rightarrow\Delta t=\frac{۵}{۶}T$$

راه‌حل اول: با توجه به جهت پیشروی موج، ذرهٔ M در حال حرکت رو به پایین است. اکنون مسیر حرکت آن را رسم کرده و به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده، مکان ذره را پس از $\frac{۵}{۶}T$ مشخص کرده و مسافت طی شده را از روی مسیر حرکت معین می‌کنیم.



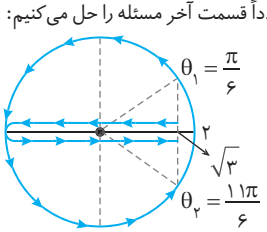
ذرهٔ M پس از $\frac{T}{۶}$ به مرکز می‌رسد و پس از $\frac{T}{۲}$ به مرکز برمی‌گردد و بعد از $\frac{T}{۶}$ به M می‌رسد که جمعاً $\frac{T}{۲}+\frac{T}{۶}+\frac{T}{۶}=\frac{۵T}{۶}$ می‌شود و M به مکان اولیه باز می‌گردد و سرعت متوسط صفر است.



راه‌حل دوم: اکنون به کمک دایرهٔ مثلثاتی مجدداً قسمت آخر مسئله را حل می‌کنیم:

$$\theta_۲-\theta_۱=\omega t_۲-\omega t_۱=\omega(t_۲-t_۱)$$

$$\Rightarrow\theta_۲-\frac{\pi}{۶}=۲\pi\times(۲۰)\left(\frac{۱}{۲۴}\right)\Rightarrow\theta_۲=\frac{۱۱\pi}{۶}$$



کمان $\frac{۱۱\pi}{۶}$ معادل مکان $\sqrt{۳}$ است و ذره به جای اول باز می‌گردد و سرعت متوسط صفر است.

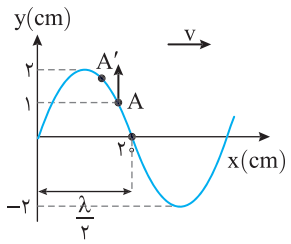
B ۱۷۹۶ | ۱

خط فکری حل مسئله به همان شکل همیشگی است. حساب کردن طول موج، پیدا کردن دوره، بررسی جهت حرکت ذره و اینکه بازهٔ زمانی داده شده چه کسری از دوره است، بنابراین مراحل بیان شده را طی کنید.

۱ گام اول: یافتن طول موج:

$$\frac{\lambda}{۲}=۲۰\Rightarrow\lambda=۴۰cm=۰/۴m$$

۲ گام دوم: یافتن دوره از روی تندی انتشار موج:



$$T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۴}{۱۰}$$

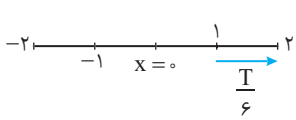
$$\Rightarrow T=\frac{۴}{۱۰۰}s$$

۳ مشخص کردن جهت حرکت ذرهٔ مورد نظر: با توجه به جهت انتشار موج، قلهٔ موج در حال نزدیک شدن به ذرهٔ A بوده و ذرهٔ قبل از آن بالاتر از A قرار دارد بنابراین A در حال حرکت رو به بالاست.

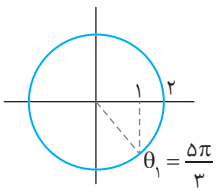
۴ مشخص می‌کنیم که $\Delta t=\frac{۱}{۱۵۰}s$ چه کسری از دوره است:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{۱}{۱۵۰}}{\frac{۴}{۱۰۰}}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۶}$$

۵ **راه‌حل اول:** ذرهٔ A از مکان $\frac{A}{۲}=۱\ cm$ در حال حرکت رو به بالاست. با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده ذرهٔ A در مدت $\frac{T}{۶}$ از مکان $\frac{+A}{۲}$ به $+A$ می‌رسد یعنی $x=۲cm$ می‌شود و ذره به اندازهٔ $۲-۱=۱cm$ جابه‌جا می‌شود.



راه‌حل دوم: این بار مجدداً مکان ذرهٔ A را به کمک رسم دایرهٔ مثلثاتی به‌دست می‌آوریم. ابتدا کمان معادل مکان را روی دایره مشخص می‌کنیم.



$$\theta_۲-\theta_۱=\omega(t_۲-t_۱)\Rightarrow\theta_۲-\theta_۱=\omega(\Delta t)=\frac{۲\pi}{T}(\Delta t)$$

$$\Rightarrow\theta_۲-\frac{۵\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{\frac{۴}{۱۰۰}}\times\frac{۱}{۱۵۰}\Rightarrow\theta_۲-\frac{۵\pi}{۳}=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\theta_۲=۲\pi$$

معادل مکانی ۲π، $x=+A=۲cm$ است و ذره به اندازهٔ $۲-۱=۱cm$ جابه‌جا می‌شود.

B ۱۷۹۷ | ۳

خط فکری ابتدا دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم.

با توجه به شکل سؤال:

$$۵\frac{\lambda}{۴}=۲۵\Rightarrow\lambda=۲۰cm=۰/۲m$$

$$\lambda=vT\Rightarrow\frac{۲}{۱۰}=۱۰\times T\Rightarrow T=۰/۰۲s$$

حال برای بررسی گزارهٔ (الف) دقت کنید که گفته شده مسافتی که موج در هر ثانیه طی می‌کند، با توجه اینکه سرعت انتشار موج $۱۰m/s$ است پس این مسافت برابر است با:

$$\Delta x=vt=۱۰\times۱=۱۰m$$

پس گزارهٔ (الف) نادرست است.

گزارهٔ (ب): هر ذره از محیط در مدت یک نوسان، مسافت $۴A$ را طی می‌کند. بنابراین با توجه به اینکه $T=۰/۰۲s$ است، در ۰/۰۱ ثانیه تعداد نوسان‌های هر ذره از محیط برابر است با:

$$N=\frac{t}{T}=\frac{۰/۰۱}{۰/۰۲}=\frac{۱}{۲}$$

و ذره مسافت $2A$ یعنی $4cm$ را طی می‌کند و این گزاره درست است.

گزارهٔ (پ) در مورد جابه‌جایی است. اگر ذره‌ای در نقطه تعادل باشد بعد از $0/01s$ یعنی $\frac{T}{2}$ مجدداً در نقطهٔ تعادل است و جابه‌جایی‌اش صفر است و اگر ذره‌ای در مکان بیشینه باشد پس از $\frac{T}{2}$ در مکان کمینه قرا ردارد و جابه‌جایی آن برابر $2A$ خواهد شد. پس جابه‌جایی بستگی به مکان اولیه ذره دارد و این گزاره نادرست است.

بررسی گزارهٔ (ت): $0/02s$ برابر یک دوره است و جابه‌جایی هر ذره در مدت یک دوره همواره برابر صفر است. پس گزاره‌های (ب) و (ت) درست‌اند.

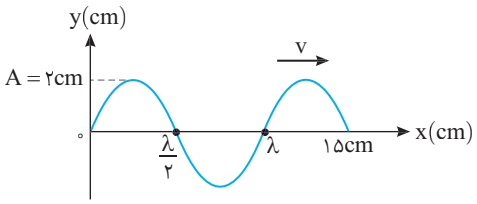
B ۱۷۹۸ ۴

تذکر دقت شود ذرات ریسمان فقط در جهت عمود بر پیشروی موج (یعنی در راستای محور y) ارتعاش (یا نوسان) می‌کنند و مسافت طی‌شدهٔ هر ذره ارتباطی به سرعت پیشروی موج در جهت x ندارد.

۱ تندی موج در ریسمان برابر است با: $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{80}{0/2}}=20m/s$

۲ با توجه به نقش موج داده شده طول موج را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda+\frac{\lambda}{2}=15cm\Rightarrow\frac{3\lambda}{2}=15\Rightarrow\lambda=10cm=0/1m$$



۳ دورهٔ نوسان موج خواهد شد:

$$v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow\lambda=vT\Rightarrow0/1=20T\Rightarrow T=\frac{1}{200}s=0/005s$$

۴ در حل این نوع مسائل پس از به دست‌آوردن دوره، بازهٔ زمانی داده شده را با آن مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{0/01}{0/005}\Rightarrow\Delta t=2T$$

۵ بازهٔ ارائه‌شده دو دورهٔ کامل است و در هر دوره ذره مسافت $4A$ را طی می‌کند بنابراین:

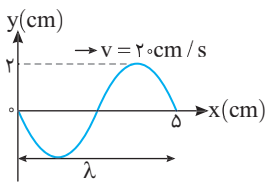
$4A=8cm$	۱ نوسان کامل
$16cm$	۲ نوسان کامل

B ۱۷۹۹ ۳

خط فکری در مسائل مربوط به نقش موج معمولاً می‌توان از روی نمودار، طول موج و سپس دوره و بسامد را حساب کرد. سپس باید مشخص کنیم که بازهٔ زمانی که در مسئله بیان شده چه کسری از دوره است تا بتوانیم به کمک آن، مسئله را حل کنیم.

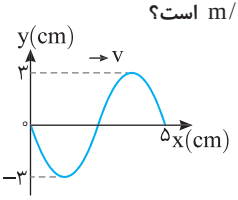
با توجه به نقش موج داده شده طول موج برابر $5cm$ است:

$$\lambda=vT\Rightarrow5=20\times T\Rightarrow T=\frac{1}{4}s$$



دوره $\frac{1}{4}s$ است و بازهٔ $\frac{1}{8}s$ برابر نصف دوره است و یک نوسانگر در مدت نصف دوره مسافتی دو برابر دامنه $(2A)$ را طی می‌کند، با توجه به نمودار دامنه $2cm$ است از این‌رو مسافت طی شده در مدت $\frac{1}{8}s$ برابر $2\times2=4cm$ می‌شود.

بازی با سوال نقش یک موج عرضی که در یک طناب با تندی v درحال انتشار است، مطابق شکل زیر است. مسافتی که یک ذره از طناب در مدت $\frac{1}{8}s$ طی می‌کند برابر $18cm$ است. v چند m/s است؟



۱) $0/6$

۲) $0/8$

۳) $0/4$

۴) $0/5$

پاسخ به نمودار نگاه کنید دامنهٔ نوسان ذره‌های طناب $3cm$ است و هر ذره در مدت یک دوره (T) مسافتی برابر $(4A=4\times3=12cm)$ طی می‌کند.

مسافت طی شده در مدت $\frac{1}{8}s$، برابر $18cm$ است.

مسافت $18cm$، برابر مسافتی است که یک ذره در مدت یک و نیم دوره $(\frac{3}{2}T)$ طی می‌کند.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{18}{12}\Rightarrow\Delta t=\frac{3}{2}T$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{3}{2}T=\frac{1}{8}\Rightarrow T=\frac{1}{12}s$$

با توجه به نقش موج، طول موج برابر $\lambda=5cm$ است در نتیجه تندی انتشار موج خواهد شد:

$$v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow v=\frac{5\times10^{-2}}{\frac{1}{12}}\Rightarrow v=0/6m/s$$

گزینهٔ ۱

B ۱۸۰۰ ۳

به نمودار سؤال نگاه کنید، طول موج روی نمودار $\lambda=20cm$ و دامنهٔ نوسان ذرات $A=5cm$ است. دوره را حساب می‌کنیم.

$$T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{0/2}{10}\Rightarrow T=0/02s$$

نسبت بازهٔ زمانی داده شده به دوره را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{0/01}{0/02}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{2}$$

در مدت $T/2$ هر ذره که دارای حرکت هماهنگ ساده است مسافت $2A$ را طی می‌کند.

$$\ell=2\times A=2\times5=10cm$$

B ۱۸۰۱ ۱

با توجه به نمودار، دامنهٔ حرکت ذرات محیط $2cm$ است و نقطهٔ M در مدت $\frac{1}{8}s$ مسافت $4cm$ را طی می‌کند یعنی مسافتی برابر $2A$، از طرفی نقطهٔ M، در یک دوره چهار بار دامنه را طی می‌کند، بنابراین $\frac{1}{8}s$ برابر نصف دوره است.

طول موج را به‌دست می‌آوریم

$$\frac{T}{2}=\frac{1}{8}\Rightarrow T=\frac{1}{4}s$$

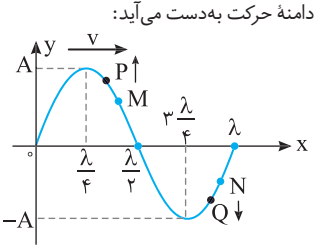
$$\frac{\lambda}{4}=15cm\Rightarrow\lambda=60cm=0/6m$$

تندی انتشار موج را حساب می‌کنیم

$$\lambda=vT\Rightarrow0/6=v\times\frac{1}{4}\Rightarrow v=2/4m/s$$

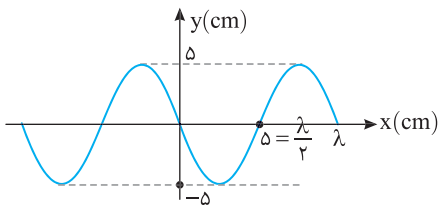
B ۱۸۰۲ ۳

خط فکری در نمودار $y-x$ یک موج که تصویر آن است، از محور افقی طول موج و از محور قائم دامنهٔ حرکت به‌دست می‌آید:



جهت حرکت هر ذره از محیط با توجه به نقطهٔ قبل به‌دست می‌آید. به‌طور مثال وقتی موج به سمت راست حرکت می‌کند ذره P که قبل از M است بالاتر از M قرار دارد یعنی ذرهٔ M رو به بالا در حال حرکت است. ذرهٔ قبل از N یعنی ذرهٔ Q پایین‌تر از N بوده و نقطهٔ N در حال حرکت به سمت پایین است.

۱ با توجه به محور افقی طول موج را به‌دست می‌آوریم: $\frac{\lambda}{۲}=۵\Rightarrow\lambda=۱۰cm$

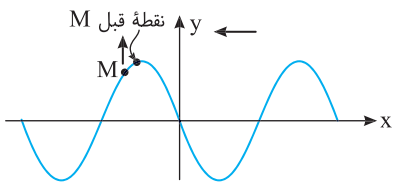


با توجه به رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}=vT$، دورهٔ نوسان ذرات موج و بسامد نوسان ذرات موج به‌دست می‌آید:

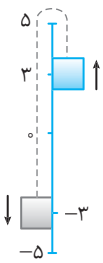
$\lambda=vT\Rightarrow ۱۰cm=۲۰\frac{cm}{s}\times T\Rightarrow T=\frac{۱}{۲}s$

نکته در مدت T ذرات محیط یک نوسان کامل انجام داده و به مکان قبلی و در همان جهت نوسان قبلی باز می‌گردند و در مدت $\frac{T}{۲}$ مکان و جهت نوسان ذرات محیط قرینه می‌شوند.

۲ با توجه به مکان M و جهت انتشار موج نقطهٔ قبل M بالاتر از آن قرار دارد بنابراین در لحظهٔ $t_۱$ مکان نوسانگر $x=۳cm$ بوده و به سمت بالا در حال حرکت است.



۳ در مدت $\Delta t=t_۲-t_۱=\frac{۱}{۴}s$ باید دید نوسانگر چه مقدار جابه‌جا شده است. دقت کنید که $\frac{۱}{۴}s$ نصف دورهٔ نوسان $(T=\frac{۱}{۲}s)$ است. بنابراین مطابق شکل روبه‌رو مکان و جهت نوسانگر در این مدت قرینه می‌شود و جابه‌جایی آن خواهد شد:



$\Delta x=x_۲-x_۱\Rightarrow\Delta x=-۳-۳=-۶cm$

یادآوری سرعت متوسط برابر است با: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$

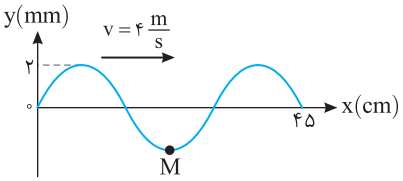
۴ بزرگی سرعت متوسط ذرهٔ M را حساب می‌کنیم:

$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{-۶cm}{\frac{۱}{۴}s}\Rightarrow v_{av}=-۲۴\frac{cm}{s}$

بزرگی سرعت متوسط خواسته شده $|v_{av}|$ $\rightarrow |v_{av}|=۲۴cm/s$

B ۱۸۰۳ ۴

خط فکری اغلب این مسائل دارای راه حل مشخص هستند. ابتدا به کمک اعداد روی محور xها طول موج را به‌دست بیاورید، سپس به کمک آن و تندی انتشار موج دوره را حساب کنید. با داشتن دوره و بازهٔ زمانی داده شده در مسئله می‌توانید مسافت و تندی متوسط ذره M را به‌دست بیاورید.



۱ با توجه به نمودار موج: $۳\frac{\lambda}{۲}=۴۵\Rightarrow\lambda=۳۰cm$

۲ دورهٔ نوسان ذرات محیط: $T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۳}{۴}\Rightarrow T=\frac{۳}{۴۰}s\Rightarrow T=۰/۰۷۵s$

۳ نسبت $\Delta t=۰/۰۵s$ به دوره را حساب می‌کنیم.

$\frac{\Delta t}{T}=\frac{۰/۰۵}{۰/۰۷۵}\Rightarrow\Delta t=\frac{۵۰}{۷۵}\Rightarrow\Delta t=\frac{۲T}{۳}$

۴ $\frac{۲T}{۳}$ را به بازه‌های زمانی شناخته شده تبدیل می‌کنیم. $\Delta T=\frac{۲T}{۳}=\frac{T}{۲}+\frac{T}{۶}$

۵ در مدت $\frac{T}{۲}$، ذرهٔ M از $-۲mm$ به $۲mm$ می‌رود و در مدت $\frac{T}{۶}$ از $A=۲mm$ به $\frac{A}{۲}=۱mm$ می‌رود، بنابراین مسافت طی شده خواهد شد:

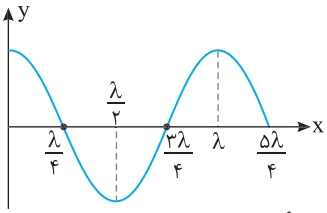
$\ell=۴+۱=۵mm$

۶ تندی متوسط را حساب می‌کنیم. $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{۰/۰۰۵}{۰/۰۵}=۰/۱m/s$

B ۱۸۰۴ ۲

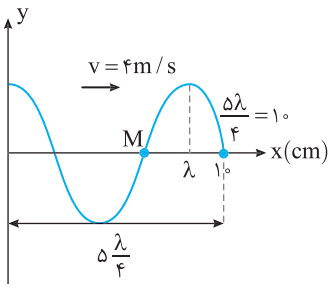
خط فکری در سؤالاتی مانند این سؤال که با تصویر موج یا به اصطلاح نقش موج سروکار داریم از محور قائم دامنهٔ موج و از محور افقی طول موج را به‌دست می‌آوریم. دقت کنید در یک موج ذرات محیط دارای حرکت نوسانی‌اند پس برای بررسی حرکت ذرات محیط باید از رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}=vT$ دورهٔ نوسان را حساب کنید.

نکته برای به‌دست آوردن طول موج در یک نقش موج به شکل زیر دقت کنید:



۱ با توجه به شکل $\frac{۵\lambda}{۴}$ برابر $۱۰cm$ شده است، پس طول موج خواهد شد:

$۵\frac{\lambda}{۴}=۱۰\Rightarrow\lambda=۸cm$



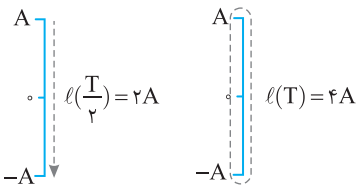
۲ با استفاده از رابطهٔ $\lambda=vT$ دوره را به‌دست می‌آوریم:

$\lambda=vT\Rightarrow T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۰۸}{۴}\Rightarrow T=۰/۰۲s$

۳ بازهٔ $۰/۲۵s$ را با دورهٔ مقایسه می‌کنیم:

$\frac{\Delta t}{T}=\frac{۰/۲۵}{۰/۰۲}\Rightarrow\Delta t=۱۲/۵T\Rightarrow\Delta t=۱۲T+\frac{T}{۲}$

نکته در هر دوره مسافتی که ذرهٔ M در حرکت هماهنگ ساده طی می‌کند برابر $۴A$ و در نصف دوره برابر $۲A$ است.



۴ بنابراین در مدت $12T+\frac{T}{2}$ مسافت طی شده خواهد شد:

$$\ell=12(4A)+2A\Rightarrow\ell=50A$$

یادآوری تندی متوسط برابر است با: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}$

۵ تندی متوسط ذرهٔ M در این مدت برابر $6m/s$ است از این‌رو خواهیم داشت:

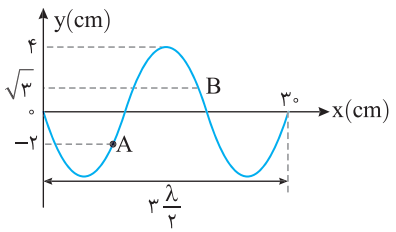
$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow 6=\frac{50A}{0/25}\Rightarrow A=0/03m\Rightarrow A=3cm$$

B ۱۸۰۵ **۲**

خط فکری در این مسئله با دو ذره از محیط سر و کار دارید اما مهم نیست زیرا تمام مراحل حل مسئله مثل قبل است. نکتهٔ دیگر در حل این مسئله این است که مکان ذرهٔ B برحسب دامنه $\frac{x_B}{A}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ است که شناخته شده نیست. نگران نباشید حل را ببینید.

۱ گام اول: طول موج را از روی محور افقی نقش موج به‌دست می‌آوریم:

$$3\frac{\lambda}{2}=30\Rightarrow\lambda=20cm$$



۲ گام دوم: با استفاده از تندی انتشار موج، دوره را به‌دست می‌آوریم:

$$T=\frac{0/2}{8}\Rightarrow T=\frac{1}{40}s$$

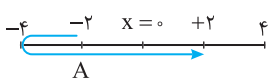
۳ مشخص می‌کنیم بازهٔ زمانی داده شده چه کسری از دوره است:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{80}}{\frac{1}{40}}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{2}$$

نکته در مدت $\frac{T}{2}$ مکان و سرعت نوسانگر قرینه می‌شود.

۴ ذرهٔ A در مکان $-2cm$ قرار دارد بنابراین بعد از $\frac{T}{2}$ مکان آن قرینه می‌شود یعنی مکانش $+2cm$ خواهد شد و جابه‌جایی آن از $-2cm$ تا $+2cm$ برابر $+4cm$ خواهد بود.

$$\Delta y_A=2+2=4cm$$



(مسیر A)

۵ ذرهٔ B در مکان $+\sqrt{3}cm$ قرار دارد و در مدت $\frac{T}{2}$ مکان آن قرینه شده و برابر $-\sqrt{3}cm$ می‌شود بنابراین جابه‌جایی آن از $+\sqrt{3}cm$ تا $-\sqrt{3}cm$ برابر $-2\sqrt{3}cm$ خواهد شد:

$$|\Delta y_B|=\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}cm$$

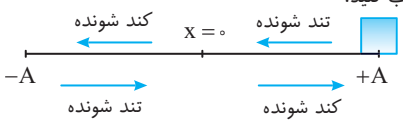


(مسیر B)

۶ نسبت جابه‌جایی‌ها برابر است با: $\frac{|\Delta y_B|}{\Delta y_A}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

B ۱۸۰۶ **۱**

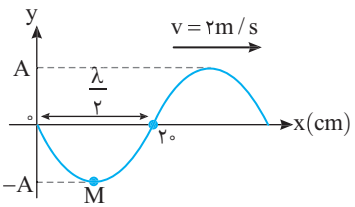
خط فکری در حل مسائل نقش موج، معمولاً شما باید از روی نمودار، طول موج سپس به کمک تندی انتشار موج، دورهٔ موج یعنی دورهٔ حرکت هماهنگ ساده ذرات محیط را حساب کنید.



از طرفی هر گاه در مورد رفتار یک ذره از محیط از شما سؤال شود، باید به سراغ حرکت هماهنگ ساده بروید و به کمک دانسته‌های خود در مورد حرکت هماهنگ ساده، حرکت آن ذره را بررسی کنید. اگر ذره از مرکز نوسان به سوی دامنه حرکت کند حرکت آن کندشونده و اگر از دامنه به‌سوی مرکز برود حرکت آن تندشونده است.

اکنون به سراغ حل مسئله بروید.

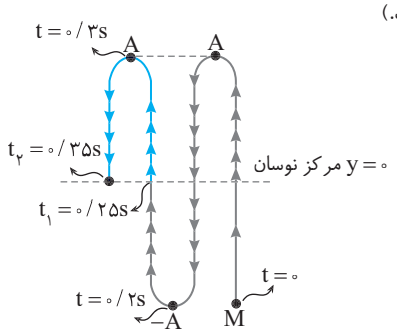
ابتدا طول موج را به‌دست می‌آوریم. $\frac{\lambda}{2}=20\Rightarrow\lambda=40cm$



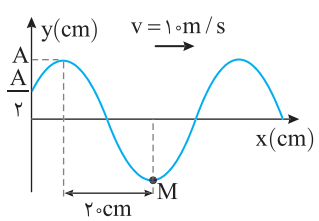
دوره را حساب می‌کنیم: $T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{0/4}{2}\Rightarrow T=0/2s$

دوره را $T=0/2s$ به‌دست آورده‌ایم. نمودار مربوط به لحظهٔ $t=0$ است اما طراح بازهٔ زمانی را از $t_1=0/25s$ شروع کرده است یعنی ابتدا شما باید بررسی کنید که ذرهٔ M در لحظهٔ t_1 در چه مکانی است. در مدت یک دوره یک نوسانگر به جای اولیهٔ خود باز می‌گردد، بنابراین در $t=0/2s$ نقطهٔ M در مکان $-A$ است. دقت کنید که $0/05s$ در این حرکت برابر $\frac{T}{4}$ دوره است و در $\frac{T}{4}$ متحرک از دامنه به مرکز نوسان و بالعکس می‌رود. اکنون ادامهٔ حرکت را بررسی می‌کنیم. در مدت $0/25-0/2=0/05s$ متحرک به محل تعادل خود می‌رسد $(y=0)$ و از آن جا به مدت $0/05s$ به انتهای مسیر (نقطهٔ A) می‌رود که حرکت کندشونده است $(t=0/3s)$ و در $0/05s$ باقیمانده از A به تعادل بر می‌گردد و حرکت تندشونده است.

(البته این مسیر روی خط راست است که برای درک بهتر آن به صورت شکل زیر نمایش داده شده است.)



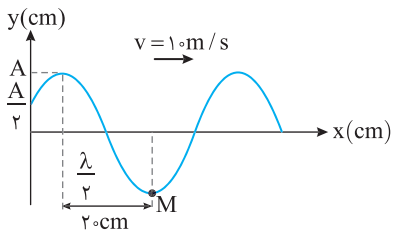
بازی با سؤال شکل زیر، نقش موج عرضی طنابی را در یک لحظه نشان می‌دهد. حرکت ذرهٔ M در بازهٔ زمانی $0\le t\le\frac{1}{100}s$ چگونه است؟ مشابه ریاضی - ۹۰



۱) کندشونده
۲) تندشونده
۳) ابتدا تندشونده، سپس کندشونده
۴) ابتدا کندشونده، سپس تندشونده

پاسخ طول موج و سپس دوره را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\lambda}{2}=20cm\Rightarrow\lambda=40cm=0/4m \quad , \quad T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{0/4}{10}\Rightarrow T=\frac{4}{100}s$$



مشخص می‌کنیم که $\frac{1}{100}s$ چه کسری از دوره است:

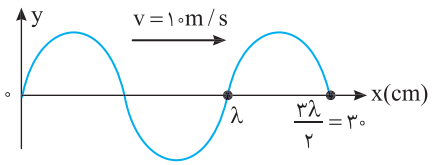
$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{100}}{\frac{4}{100}}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{4}$$

با توجه به شکل در مدت $\frac{T}{4}$، M از مکان $-A$ به مرکز نوسان می‌رود و حرکتش تندشونده است. گزینهٔ ۲

۳ B ۱۸۰۷

خط فکری معمولاً در مسائل موج و نوسان لازم است نسبت $\frac{\Delta t}{T}$ را محاسبه کنیم. برای این منظور مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱ با توجه به نمودار طول موج را حساب می‌کنیم: $\frac{3\lambda}{2}=30\Rightarrow\lambda=20cm=0/2m$

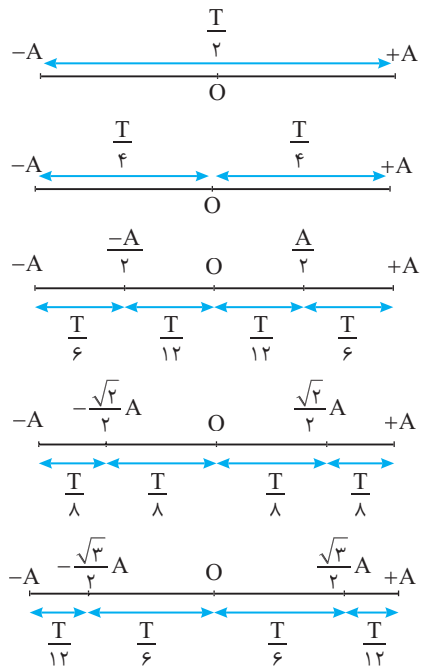


۲ حال دورهٔ موج را حساب می‌کنیم: $v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow 10=\frac{0/2}{T}\Rightarrow T=0/02s=\frac{2}{100}s$

۳ بازهٔ زمانی داده شده را بر حسب دوره به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta t=\frac{9}{400},\ T=\frac{2}{100}\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{9}{8}\Rightarrow\Delta t=\frac{9}{8}T=T+\frac{T}{8}$$

نکته برای بررسی نوسان ذره‌های موج در هر لحظه لازم است بازه‌های زمانی زیر را به خاطر بسپارید:

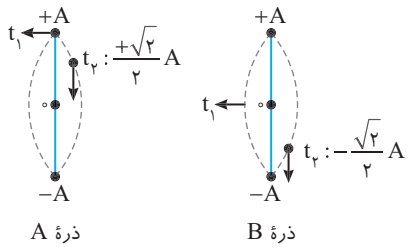


۴ حال حرکت ذره‌های A و B را بررسی می‌کنیم.

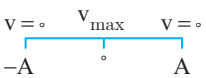
ذرات A و B روی ریسمان در حال نوسان‌اند.

نوسان A: ذرهٔ A ابتدا در دامنهٔ مثبت قرار دارد پس از یک دوره (T) مجدد به همان مکان می‌رسد و $\frac{T}{8}$ ثانیه بعد به مکان $+\frac{\sqrt{2}}{2}A$ می‌رسد.

نوسان B: ذرهٔ B ابتدا در $x=0$ قرار دارد و با توجه به جهت انتشار موج، ذرهٔ قبلی B پایین‌تر از آن قرار داد و این ذره ابتدا به سمت پایین شروع به نوسان کرده و پس از T مجدد به همان مکان می‌رسد و در مدت $\frac{T}{8}$ به مکان $-\frac{\sqrt{2}}{2}A$ می‌رسد:



نکته برای یک نوسانگر تندی در دامنه‌ها صفر و در $x=0$ بیشینه است:



۵ مکان ذره‌های A و B در $x=0$ و $x=A$ نیست پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست است.

۶ ذرهٔ A در حال حرکت به سمت $x=0$ است، پس ذرهٔ A در حال حرکت به سمت مکانی است که تندی در آن بیشینه می‌شود و حرکت این ذره تندشونده است. ذرهٔ B در حال حرکت به سمت $x=-A$ است، پس ذرهٔ B در حال حرکت به سمت مکانی است که تندی آن صفر می‌شود، پس حرکت این ذره کندشونده است و گزینهٔ (۳) درست است.

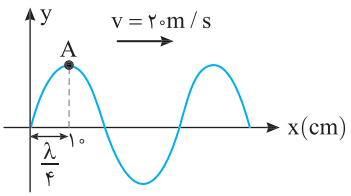
۱ B ۱۸۰۸

نکته هنگام گذر نوسانگر از حالت تعادل $(y=0)$ جهت بردار مکان تغییر می‌کند.

۱ گام اول: یافتن طول موج از روی محور افقی: $\frac{\lambda}{4}=10\Rightarrow\lambda=40cm=0/4m$

۲ گام دوم: یافتن دوره با استفاده از تندی انتشار موج:

$$\lambda=vT\Rightarrow 0/4=20T\Rightarrow T=0/02s$$



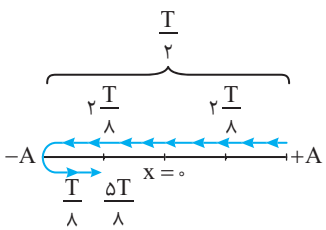
۳ گام سوم: نقطهٔ مورد نظر در چه جهتی حرکت خواهد کرد؟ نقطهٔ A در دامنه قرار دارد و قطعاً رو به پایین حرکت خواهد کرد و به مرکز نوسان نزدیک می‌شود.

۴ گام چهارم: مشخص می‌کنیم که $\frac{1}{80}s$ چه کسری از دوره است:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{1}{80}}{\frac{2}{100}}=\frac{5}{8}\Rightarrow\Delta t=\frac{5}{8}T$$

۵ مسیر حرکت را رسم می‌کنیم. نوسانگر در بازهٔ حرکت از $+A$ با $-A$ یعنی $\frac{T}{2}$ یکبار از مرکز نوسان می‌گذرد و بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

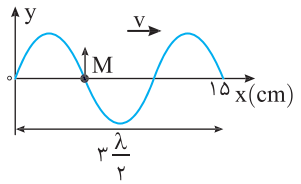
اما در ادامهٔ بازه یعنی $\frac{\Delta T}{8}-\frac{T}{2}=\frac{T}{8}$ نوسانگر دیگر به مرکز نوسان نمی‌رسد. بنابراین بردار مکان ذرهٔ A در مدت $\frac{1}{80}s$ تنها یک بار تغییر جهت می‌دهد.



B ۱۸۰۹ **۳**

خط فکری از روی نمودار نقش موج، طول موج را به‌دست بیاورید و دورهٔ حرکت ذرات محیط را حساب کنید. در مسئله راجع به رفتار یک ذره از محیط (ذرهٔ M) از شما سؤال شده است بنابراین پس از پیدا کردن دوره، شما باید حرکت هماهنگ ساده ذره M را بررسی کنید و بازهٔ زمانی داده شده را با دوره مقایسه کنید تا متوجه شوید در بازهٔ زمانی داده شده برای ذرهٔ M چه اتفاقی می‌افتد و از کجا به کجا می‌رود؟

۱ با توجه به شکل طول موج خواهد شد: $\frac{3}{2}\lambda=15\Rightarrow\lambda=10\,cm$

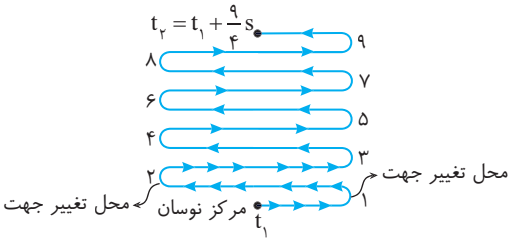


۲ بسامد موج را به‌دست می‌آوریم: $v=f\lambda\Rightarrow 20=f(10)\Rightarrow f=2Hz$

۳ دوره را حساب می‌کنیم: $T=\frac{1}{f}\Rightarrow T=\frac{1}{2}s$

۴ اکنون $\Delta t=\frac{9}{4}s$ را با دوره مقایسه می‌کنیم: $\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\Delta t=\frac{9}{2}T$

۵ وقتی که در مسئله دربارهٔ حرکت یک ذره از محیط پرسش می‌شود، یعنی شما باید به سراغ حرکت هماهنگ ساده بروید. در حرکت هماهنگ ساده در هر دوره، نوسانگر به موقعیت قبلی خود باز می‌گردد یعنی مکان و سرعت خود را تکرار می‌کند. با توجه به جهت پیشروی موج نقطهٔ M در مرکز نوسانش در حال حرکت رو به بالاست و در هر بازهٔ $\frac{T}{2}$، یکبار جهت حرکتش عوض می‌شود بنابراین در مدت $9(\frac{T}{2})$، ۹ بار جهت حرکتش عوض می‌شود.



نکته دقت کنید در صورت مسئله به جای تعداد تغییر جهت حرکت می‌توانست پرسش‌های زیر را مطرح کند:

۱) تندی نوسانگر چند بار صفر می‌شود؟ ۹ بار

۲) بزرگی شتاب نوسانگر چند بار بیشینه می‌شود؟ ۹ بار

۳) انرژی پتانسیل نوسانگر چند بار بیشینه می‌شود؟ ۹ بار

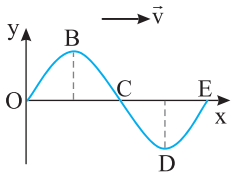
۴) انرژی جنبشی نوسانگر چند بار صفر می‌شود؟ ۹ بار

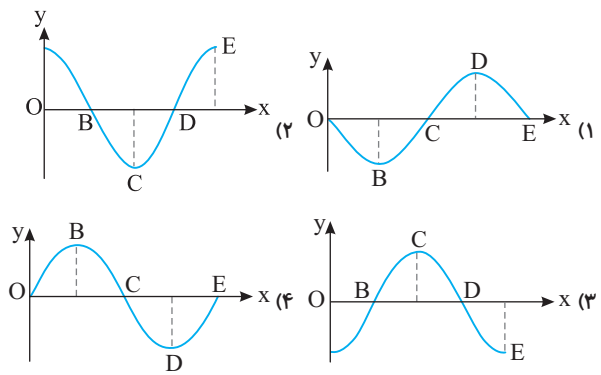
B ۱۸۱۰ **۱**

خط فکری در حل این مسائل باید یک نقطه از محیط مثلاً نقطهٔ M را انتخاب کنید سپس با توجه به جهت حرکت آن مشخص کنید که در بازهٔ زمانی بیان شده نقطهٔ M به چه مکانی می‌رود. یک نقطهٔ دیگر را نیز انتخاب کنید سپس نمودارهای داده شده در گزینه‌ها را بررسی کنید و ببینید در کدام نمودار وضعیت دو نقطه‌ای که انتخاب کرده‌اید درست نشان داده شده است.

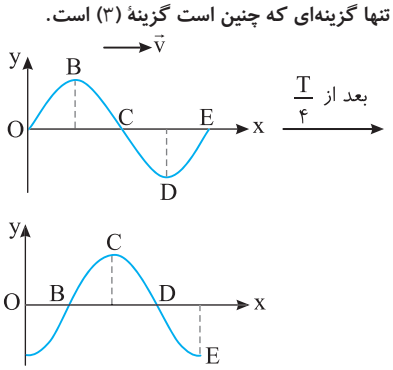
موج در حال حرکت به سمت چپ است بنابراین درهٔ موج در حال نزدیک شدن به نقطهٔ M است و نقطهٔ قبل از M نیز پایین‌تر از M قرار دارد بنابراین M رو به پایین حرکت می‌کند و در مدت $\frac{T}{4}$ نقطهٔ M به دامنهٔ $-A$ می‌رسد بنابراین نمودار گزینهٔ (۱) پاسخ مسئله است.

بازی با سؤال در شکل روبه‌رو، شکل یک موج نشان داده شده است. پس از گذشت زمان $\frac{T}{4}$، کدام گزینه شکل موج را درست نشان می‌دهد؟





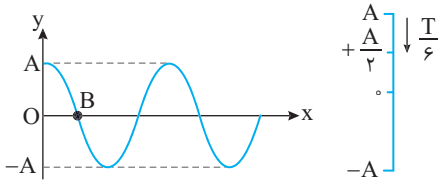
پاسخ نقطهٔ B را در نظر می‌گیریم. پس از $\frac{T}{4}$ نقطهٔ B از $+A$ به مرکز نوسان می‌آید بنابراین B باید روی محور x باشد. اما نقطهٔ C از مرکز نوسان در حال حرکت رو به بالاست و بعد از $\frac{T}{4}$ به $+A$ می‌رسد یعنی C باید در دامنهٔ $+A$ باشد. تنها گزینه‌ای که چنین است گزینهٔ (۳) است.



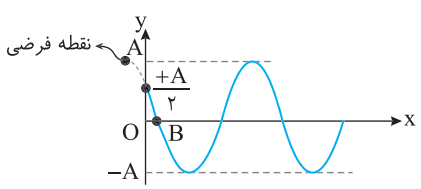
گزینهٔ ۳

C ۱۸۱۱ **۲**

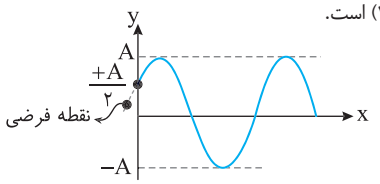
به مبدأ نمودار نگاه کنید. نقطهٔ مبدأ در دامنهٔ $+A$ قرار دارد و قطعاً با گذشت زمان باید به پایین بیاید اما یک نوسانگر ساده در مدت $\frac{T}{6}$ از مکان $+A$ به مکان $+\frac{A}{2}$ می‌رسد. بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست هستند زیرا مکان $+\frac{\sqrt{3}}{2}A$ شده است. بعد از این لحظه همچنان ذرهٔ O باید رو به پایین در حرکت باشد.



در شکل گزینهٔ (۱) اگر نقطه‌ای قبل از مبدأ فرض کنید آن نقطه بالاتر از $+\frac{A}{2}$ است بنابراین O در حال حرکت رو به بالاست و گزینهٔ (۱) نادرست است.

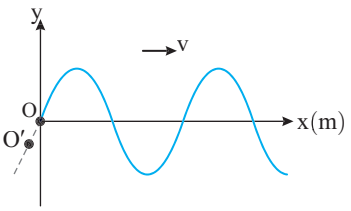


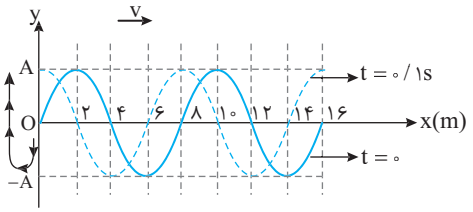
در شکل گزینهٔ (۲) نقطهٔ فرضی قبل از مبدأ در حال حرکت رو به پایین است و جواب مسئله گزینهٔ (۲) است.



A ۱۸۱۲ ۱

خط فکری سؤال عجیب و زیبایی است. نقش موج در دو لحظهٔ $t=0$ و $t=0/1s$ رسم شده است یعنی موج در $0/1s$ پیشروی کرده و جلو رفته است. باید به نمودار در لحظهٔ $t=0$ دقت کنید. نمودار را در قسمت منفی x ادامه دهید، خواهید دید که در لحظهٔ $t=0$ قلهٔ موج از O گذشته و نقطهٔ فرضی قبل از O پایین‌تر از O بوده یعنی O رو به پایین در حال حرکت است اما نمودار در لحظهٔ $t=0/1s$ نشان می‌دهد که O در این لحظه به مکان $+A$ رسیده است این چگونه ممکن است؟ مطابق شکل باید O به $-A$ رفته $(\frac{T}{4})$ و از $-A$ به $+A$ $(\frac{T}{2})$ رفته باشد یعنی $0/1s$ برابر $\frac{3T}{4}$ است. حال مسئله قابل حل است.





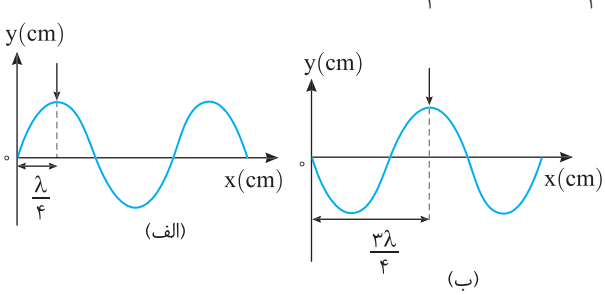
با توجه به جهت سرعت انتشار موج نقطهٔ O در حال پایین رفتن است و مطابق شکل $0/1s$ معادل $3\frac{T}{4}$ می‌باشد از این‌رو دوره خواهد شد:

$$3\frac{T}{4}=0/1\Rightarrow T=\frac{4}{30}s\Rightarrow f=\frac{30}{4}=7/5Hz$$

با توجه به شکل $\lambda=8m$ است از این‌رو: $v=f\lambda\Rightarrow v=7/5\times 8=60m/s$

A ۱۸۱۳ ۳

خط فکری برای نمایش یک نقطه از موج که در حال پیشروی در یک محیط است، آن را با یک فلش مشخص می‌کنند. در شکل (الف)، نقطهٔ مورد نظر در فاصلهٔ $\frac{\lambda}{4}$ از مبدأ قرار دارد و در بازهٔ $\Delta t=t_2-t_1$ به فاصلهٔ $\frac{3\lambda}{4}$ از مبدأ رسیده است (شکل ب). در این مدت موج $\frac{3\lambda}{4}-\frac{\lambda}{4}=\frac{\lambda}{2}$ پیشروی می‌کند. مدت زمانی که طول می‌کشد موج $\frac{\lambda}{2}$ پیشروی کند برابر $\frac{T}{2}$ است. با توجه به این نکته مسئله قابل حل است.



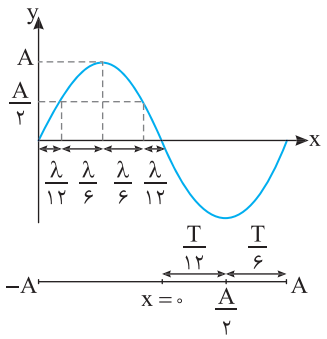
B ۱۸۱۴ ۳

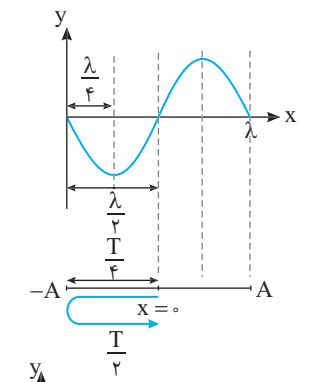
خط فکری طول موج فاصله‌ای است (مسافتی) که موج در مدت یک دوره طی می‌کند. جالب است بدانید تمام تقسیمات در بازه‌های زمانی شناخته شده، عیناً در مورد بازه‌های مکانی برقرار است.

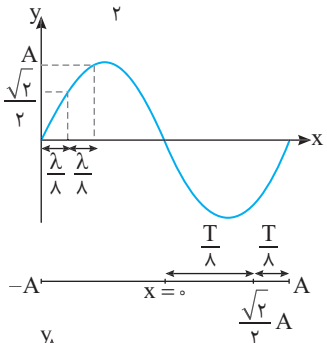
۱ دوره را حساب می‌کنیم: $T=\frac{1}{f}\xrightarrow{f=50Hz}T=\frac{1}{50}=0/02s$

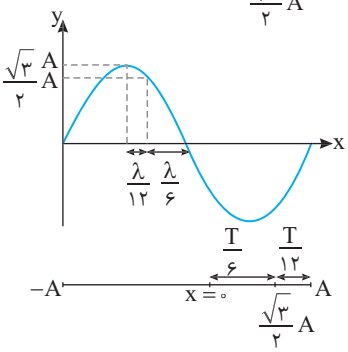
۲ بازهٔ زمانی t_2-t_1 برابر نصف دوره است بنابراین:

$$\Delta t=\frac{T}{2}=\frac{0/02}{2}=0/01s\Rightarrow\Delta t=10^{-2}s$$

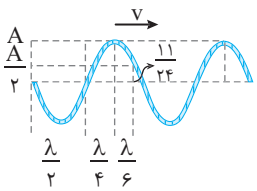








با توجه به شکل و بازه‌های مکانی شناخته شده می‌توان نوشت:



$$\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{4}+\frac{\lambda}{6}=\frac{11}{24}$$

$$\Rightarrow\frac{6\lambda+3\lambda+2\lambda}{12}=\frac{11}{24}\Rightarrow\lambda=0/5m$$

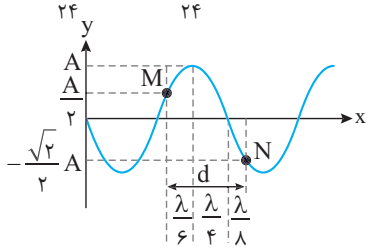
تندی انتشار موج برابر است با:

$$v=f\lambda=50\times 0/5=25m/s$$

۴ ۱۸۱۵ B

۱ با توجه به بازه‌های مکانی شناخته شده مسافت طی شده را بر حسب طول موج به دست می‌آوریم:

$$d=\frac{\lambda}{۶}+\frac{\lambda}{۴}+\frac{\lambda}{۸}=\frac{۴\lambda+۶\lambda+۳\lambda}{۲۴}\Rightarrow d=\frac{۱۳}{۲۴}\lambda$$



۲ نکتهٔ مهم این است که موج، مسافت λ را در مدت یک دوره (T) طی می‌کند بنابراین مسافت $\frac{۱۳\lambda}{۲۴}$ را در مدت $\frac{۱۳}{۲۴}T$ طی می‌کند از این‌رو:

$$\frac{۱۳T}{۲۴}=۰/۲۶\Rightarrow T=۰/۴۸s$$

۳ تعداد نوسانات در ۱/۶ دقیقه خواهد شد:

$$N=\frac{t}{T}\Rightarrow N=\frac{۱/۶\times۶۰}{۰/۴۸}=۲۰۰$$

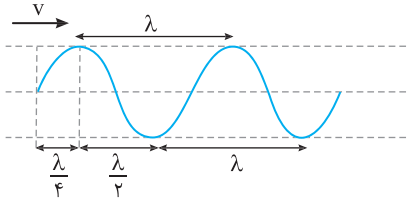
۲ ۱۸۱۶ A

یادآوری در موج عرضی، راستای نوسان ذره‌های محیط بر راستای پیشروی موج عمود است و در شکل ظاهری موج عرضی، برآمدگی و فرورفتگی قابل مشاهده است.

در موج عرضی فاصلهٔ بین دو برآمدگی یا دو فرورفتگی متوالی برابر یک طول موج (λ) بوده و فاصلهٔ بین یک برآمدگی از فرورفتگی مجاورش $\frac{\lambda}{۲}$ است.

در این پرسش، کافی است طول موج را به‌دست آوریم:

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{۰/۵}{۲/۵}\Rightarrow\lambda=۰/۲m=۲۰cm$$



۲ ۱۸۱۷ B

خط فکری منظور از ضربهٔ موج بر ساحل، برخورد برآمدگی موج به ساحل است. بنابراین وقتی اختلاف زمانی دو ضربهٔ متوالی ۲s باشد، یعنی دورهٔ نوسان موج ۲s است. از طرفی فاصلهٔ دو برآمدگی متوالی یعنی طول موج بنابراین به راحتی می‌توانید تندی انتشار موج را حساب کرده و زمانی که این موج مسافت ۱۲۰m را طی می‌کند به دست بیاورید.

۱ تندی انتشار موج را به دست می‌آوریم:

$$v=\frac{\lambda}{T}\xrightarrow[T=۲s]{\lambda=۱m}v=\frac{۱}{۲}m/s$$

۲ زمان رسیدن موج از چشمه به نقطه‌ای در فاصلهٔ ۱۲۰ متری خواهد شد:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow ۱۲۰=\frac{۱}{۲}\Delta t\Rightarrow\Delta t=۲۴۰s=۴\,min$$

۴ ۱۸۱۸ B

نکته تندی امواج سطحی آب در آب‌های کم‌عمق به عمق بستگی دارد و هرچه عمق آب کمتر باشد، تندی انتشار موج سطحی کمتر می‌شود.

عمق ظرف (۲) از عمق ظرف (۱) کمتر است و تندی انتشار امواج سطحی در ظرف (۲) از ظرف (۱) کمتر است. $(v'_۲<v'_۱)$

اما در مورد بیشینه تندی ذرات محیط $(v_m=A\omega)$ باید بسامد زاویه‌ای نوسان‌سازها را به‌دست بیاوریم:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega_۱=\sqrt{\frac{k}{۴}},\omega_۲=\sqrt{\frac{k}{۸}}\Rightarrow\frac{\omega_۱}{\omega_۲}=\sqrt{\frac{۸}{۴}}=\sqrt{۲}\Rightarrow\frac{\omega_۲}{\omega_۱}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنا به فرض مسئله دامنه‌ها یکسان است بنابراین:

$$\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{A\omega_۲}{A\omega_۱}\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow v_۲<v_۱$$

۴ ۱۸۱۹ A

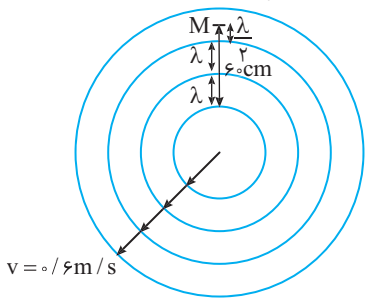
خط فکری نقطهٔ M وسط دو جبهه موج متوالی قرار دارد بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ M از جبههٔ موج مجاورش $\frac{\lambda}{۲}$ است و فاصلهٔ دو جبههٔ متوالی λ است. با توجه به این نکته بررسی کنید ۶۰cm معادل چند λ است و λ را به‌دست آورده سپس با استفاده از تندی انتشار امواج، بسامد را حساب کنید.

۱ با توجه به شکل فاصلهٔ ۶۰cm معادل $\lambda+\lambda+\frac{\lambda}{۲}=\frac{۵\lambda}{۲}$ است بنابراین طول موج خواهد شد:

$$۵\frac{\lambda}{۲}=۰/۶\Rightarrow\lambda=\frac{۱/۲}{۵}\Rightarrow\lambda=۰/۲۴m$$

۲ بسامد را حساب می‌کنیم:

$$v=f\lambda\Rightarrow۰/۶=f\times۰/۲۴\Rightarrow f=۲/۵Hz$$



۲ ۱۸۲۰ A

۱ در شکل B، فاصلهٔ جبهه‌های موج بیشتر است بنابراین طول موج در تشت موج B از طول موج در تشت موج A بلندتر است. چشمه‌های موج مشابه بوده یعنی بسامد یکسان است از این‌رو:

$$\lambda_B>\lambda_A, f_B=f_A\Rightarrow v_B>v_A$$

نکته تندی امواج در سطح آب به عمق آب بستگی دارد و در عمق بیشتر تندی امواج بیشتر است.

۲ تندی انتشار امواج سطحی در تشت موج B از تندی انتشار امواج در تشت موج A بیشتر است، بنابراین عمق تشت موج B از عمق تشت موج A بیشتر است.

۱ ۱۸۲۱ A

ثابت می‌شود مقدار متوسط آهنگ انتقال انرژی (توان متوسط) در یک موج سینوسی برای همهٔ انواع امواج مکانیکی با مربع دامنه $(A^۲)$ و نیز مربع بسامد $(f^۲)$ موج متناسب است.

۲ ۱۸۲۲ A

مقدار متوسط آهنگ انتقال انرژی با مربع دامنه $(A^۲)$ و مربع بسامد $(f^۲)$ متناسب است، بنابراین با دو برابر شدن دامنه و نصف شدن بسامد مقدار متوسط آهنگ انتقال انرژی تغییر نمی‌کند (دقت کنید با دو برابر شدن دوره بسامد نصف می‌شود.)

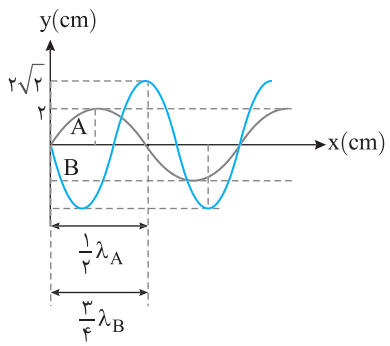
$$\frac{\overline{P}_۲}{\overline{P}_۱}=(\frac{f_۲}{f_۱})^۲\times(\frac{A_۲}{A_۱})^۲=(\frac{\frac{۱}{۲}f_۱}{f_۱})^۲\times(\frac{۲A_۱}{A_۱})^۲\Rightarrow\frac{\overline{P}_۲}{\overline{P}_۱}=۱$$

۲ ۱۸۲۳ B

یادآوری توان متوسط انتقال انرژی با مربع دامنه $(A^۲)$ و مربع بسامد $(f^۲)$ موج متناسب است.

۱ با توجه به شکل مسئله، دامنهٔ نوسان ذرات محیط در موج A برابر ۲cm و دامنهٔ نوسان ذرات در موج B برابر $۲\sqrt{۲}cm$ است، پس

$$\frac{A_B}{A_A}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$



۲ نصف طول موج A برابر $\frac{۳}{۴}$ طول موج B است. بنابراین:

$$\frac{۱}{۲}\lambda_A=\frac{۳}{۴}\lambda_B\Rightarrow\frac{\lambda_B}{\lambda_A}=\frac{۲}{۳}$$

۳ با توجه به این‌که هر دو موج در طناب واحدی منتشر می‌شوند، بنابراین سرعت انتشار هر دو موج یکسان است و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}v_A=\lambda_A f_A\\ v_B=\lambda_B f_B\end{cases}\xrightarrow{v_A=v_B}\lambda_A f_A=\lambda_B f_B\Rightarrow\frac{f_B}{f_A}=\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{۳}{۲}$$

۴ نسبت توان‌ها خواهد شد:

$$\frac{\overline{P}_B}{\overline{P}_A}=(\frac{A_B}{A_A})^۲\times(\frac{f_B}{f_A})^۲=(\sqrt{۲})^۲\times(\frac{۳}{۲})^۲=۲\times\frac{۹}{۴}=\frac{۹}{۲}$$

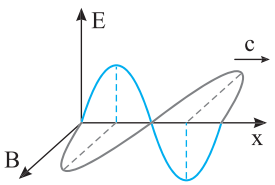
A ۱۸۲۴ ۲

یادآوری امواج الکترومغناطیسی از دو میدان الکتریکی و مغناطیسی هم‌بسامد، همگام و عمود بر هم تشکیل شده‌اند که این میدان‌ها بر امتداد پیشروی موج عمودند.

با توجه به یادآوری گزینهٔ (۲) درست است.

A ۱۸۲۵ ۲

میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی موج الکترومغناطیسی، هم‌بسامد و همگام هستند یعنی در هر لحظه یکی از آن‌ها بیشینه باشد دیگری نیز بیشینه است. از طرفی این دو میدان بر هم عمودند بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.



A ۱۸۲۶ ۴

موج الکترومغناطیسی از دو میدان الکتریکی و مغناطیسی هم‌بسامد و عمود بر هم تشکیل شده که این میدان‌ها بر مسیر حرکت عمود بوده و این امواج عرضی هستند و گزینهٔ (۱) درست است. تمام امواج الکترومغناطیسی در خلأ با سرعت $c=\frac{۱}{\sqrt{\varepsilon_۰\mu_۰}}$ منتشر می‌شوند و گزینهٔ (۲) درست است. بسامد نوسان میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی موج الکترومغناطیسی یکسان بوده بنابراین تعداد نوسان‌های این دو میدان در واحد زمان (۱s) برابر است و گزینهٔ (۳) درست است. طول موج میدان الکتریکی و مغناطیسی تمام امواج الکترومغناطیسی با هم برابرند و گزینهٔ (۴) نادرست است.

بازی با سؤال **کدام یک از گزینه‌های زیر جزء ویژگی‌های موج الکترومغناطیسی نیست؟** از کتاب درسی

۱) حامل انرژی و حامل بار الکتریکی هستند.

۲) عرضی بوده و در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی منحرف نمی‌شود.

۳) تندی انتشار تمام طول موج‌های موج الکترومغناطیسی یکسان است.

۴) میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی آن‌ها بر مسیر پیشروی موج عمود است.

پاسخ یادآوری **ویژگی‌های امواج الکترومغناطیسی:**

۱ موج‌های الکترومغناطیسی از یک میدان الکتریکی و یک میدان مغناطیسی هم‌دوره، همگام و عمود بر هم تشکیل شده‌اند.

۲ این امواج حامل انرژی بوده و

۳ حامل بار الکتریکی نیستند و گزینهٔ (۱) نادرست است.

۴ در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی منحرف نمی‌شوند.

۵ این امواج عرضی هستند و گزینهٔ (۲) درست است.

۶ سرعت آن‌ها در خلأ یکسان و برابر $c=\frac{۱}{\sqrt{\varepsilon_۰\mu_۰}}$ است و گزینهٔ (۳) درست است.

۷ میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بر مسیر پیشروی موج عمودند و گزینهٔ (۴) درست است. گزینهٔ ۱

B ۱۸۲۷ ۳

در اطراف بار الکتریکی چه ساکن و چه متحرک میدان الکتریکی وجود دارد. از طرفی هرگاه میدان مغناطیسی در ناحیه‌ای از فضا تغییر کند، در آن ناحیه میدان الکتریکی القایی به‌وجود می‌آید و گزینهٔ (۱) درست است.

در اطراف آهن‌ربا و سیم حامل جریان الکتریکی، میدان مغناطیسی وجود دارد. از طرفی هر گاه میدان الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا تغییر کند در آن ناحیه میدان مغناطیسی به وجود می‌آید و گزینهٔ (۲) درست است.

در موج‌های الکترومغناطیسی، میدان الکتریکی و مغناطیسی بر راستای انتشار موج عمودند و گزینهٔ (۳) نادرست است.

امواج الکترومغناطیسی از رابطهٔ متقابل میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به وجود می‌آیند، بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

بازی با سؤال **امواج الکترومغناطیسی در کدام یک از این مواد می‌توانند منتشر شوند؟**

۱) شیشه **۲)** آب

۳) آهن **۴)** هر سه گزینه درست هستند.

پاسخ **موج‌های الکترومغناطیسی در تمام محیط‌ها حتی در خلأ منتشر می‌شوند. برای مثال، نور مرئی از آب و شیشه می‌گذرد و امواج x و γ از آهن می‌گذرند.** گزینهٔ ۴

A ۱۸۲۸ ۲

بنا به نظریهٔ ماکسول، تغییر هر کدام از میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی با زمان، میدان دیگری را ایجاد می‌کند. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

A ۱۸۲۹ ۴

بنابر قانون القای الکترومغناطیس فاراده: تغییر شار مغناطیسی گذرنده از یک مدار بسته سبب ایجاد نیروی محرکهٔ القایی می‌شود، بنابراین گزینهٔ (۱) نظریهٔ فاراده بوده و نظریهٔ ماکسول نیست و گزینهٔ (۱) نادرست است.

نکته طبق نظریه ماکسول، عامل ایجاد امواج الکترومغناطیسی حرکت شتاب‌دار ذرهٔ باردار است. در گزینهٔ (۲) تنها به حرکت بار اشاره شده و این گزینه نادرست است.

گزینهٔ (۳) بنابر قانون لنز درست است، نه ماکسول، گزینهٔ (۴) بیان مستقیم ماکسول است. پس گزینهٔ (۴) درست است.

A ۱۸۳۰ ۳

تندی انتشار تمام امواج الکترومغناطیسی در خلأ یکسان و برابر $c=\frac{۱}{\sqrt{\varepsilon_۰\mu_۰}}$ است که در آن $\varepsilon_۰$ ضریب گذردهی الکتریکی خلأ و $\mu_۰$ قابلیت تراوایی مغناطیسی خلأ بوده یعنی $\frac{۱}{\sqrt{\varepsilon_۰\mu_۰}}$ از جنس سرعت است.

A ۱۸۳۱ ۱

سرعت تمام موج‌های الکترومغناطیسی در خلأ یکسان و برابر با $c=\frac{۱}{\sqrt{\varepsilon_۰\mu_۰}}$ است. از این‌رو:

$$c=\frac{۱}{\sqrt{\varepsilon_۰\mu_۰}}\Rightarrow c^۲=\frac{۱}{\varepsilon_۰\mu_۰}\Rightarrow\varepsilon_۰\mu_۰=c^{-۲}$$

با توجه به فرض مسئله $\varepsilon_۰\mu_۰=c^k$ است. بنابراین:

$$c^{-۲}=c^k\Rightarrow k=-۲$$

A ۱۸۳۲ ۱

سرعت انتشار موج در یک محیط مقدار ثابتی است و معادلهٔ انتشار موج همان معادلهٔ حرکت یکنواخت با سرعت ثابت روی خط راست است.

$$\Delta x=vt\xrightarrow[v=c]{\Delta x=۳۰۰\times۱۰^۳\,m}۳۰۰\times۱۰^۳=۳\times۱۰^۸t\Rightarrow t=۱۰^{-۳}\,s$$

A ۱۸۳۳ ۱

مسافتی که موج در مدت ۶۰ns با تندی $۳\times۱۰^{۸}\,m/s$ طی می‌کند را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=vt\Rightarrow\Delta x=۳\times۱۰^{۸}\times۶۰\times۱۰^{-۹}\Rightarrow\Delta x=۱۸m$$

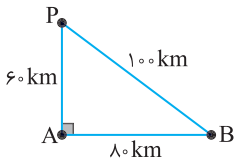
اکنون نسبت $\Delta x/\lambda$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{\Delta x}{\lambda}=\frac{۱۸}{۳}=۶$$

A ۱۸۳۴ ۱

خط فکری یک مسئلهٔ بسیار ساده حرکت‌شناسی است، شما باید زمان رسیدن موج از ایستگاه‌های A و B به گیرندهٔ P را حساب کرده از هم کم کنید.

۱ فاصلهٔ ایستگاه رادیویی B را از گیرندهٔ P حساب می‌کنیم:



$$PB^{۲}=۶۰^{۲}+۸۰^{۲}\Rightarrow PB=۱۰۰km$$

۲ زمان رسیدن سیگنال از ایستگاه A به گیرندهٔ P خواهد شد:

$$\Delta x=vt\Rightarrow۶۰\times۱۰^{۳}=۳\times۱۰^{۸}t_A\Rightarrow t_A=۲۰\times۱۰^{-۵}s$$

۳ زمان رسیدن سیگنال از ایستگاه B به گیرندهٔ P را حساب می‌کنیم.

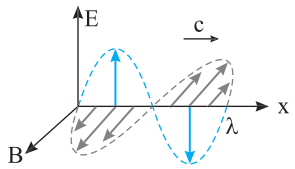
$$\Delta x=vt\Rightarrow۱۰۰\times۱۰^{+۳}=۳\times۱۰^{۸}t_B\Rightarrow t_B=\frac{۱۰۰}{۳}\times۱۰^{-۵}s$$

۴ اختلاف زمانی خواهد شد:

$$\Delta t=t_B-t_A=\frac{۱۰۰}{۳}\times۱۰^{-۵}-۲۰\times۱۰^{-۵}=\frac{۱۰۰-۶۰}{۳}\times۱۰^{-۵}\Rightarrow\Delta t=\frac{۴}{۳}\times۱۰^{-۴}s$$

A ۱۸۳۵ ۳

در یک موج الکترومغناطیسی، نوسان‌های میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی دارای بسامد یکسان بوده و سرعت انتشار آن‌ها یکی است، در نتیجه طول موج آن‌ها نیز برابر است.



A ۱۸۳۶ ۴

با توجه به رابطهٔ بین طول موج، بسامد و سرعت انتشار موج می‌توان نوشت:

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow{v=c=۳\times۱۰^{۸},\ \lambda=۰/۶\times۱۰^{-۶}mm}f=\frac{c}{\lambda}$$

$$\Rightarrow f=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۰/۶\times۱۰^{-۶}}\Rightarrow f=۵\times۱۰^{۱۴}Hz$$

بازی با سوال در یک موج الکترومغناطیسی، طول موج $۳\times۱۰^{۵}nm$ است. دورهٔ تناوب موج در SI کدام است؟ $(c=۳\times۱۰^{۸}m/s)$ کنکور دهه‌های گذشته

۱) $۱۰^{-۱۳}$ ۲) $۱۰^{-۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}\times۱۰^{-۱۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}\times۱۰^{-۱۲}$

پاسخ با توجه به تعریف طول موج، دوره را به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda=vT\Rightarrow T=\frac{\lambda}{v}\xrightarrow[c=۳\times۱۰^{۸}]{\lambda=۳\times۱۰^{۵}\times۱۰^{-۹}}T=\frac{۳\times۱۰^{۵}\times۱۰^{-۹}}{۳\times۱۰^{۸}}\Rightarrow T=۱۰^{-۱۲}s$$

گزینهٔ ۲

A ۱۸۳۷ ۱

در صورت مسئله بیان شده که طول آنتن $\frac{۱}{۴}$ طول موج دریافتی است، بنابراین وقتی طول آنتن ۶/۵cm باشد، طول موج خواهد شد:

$$\text{طول آنتن}=\frac{۱}{۴}\lambda\Rightarrow۶/۵=\frac{۱}{۴}\lambda\Rightarrow\lambda=۴\times۶/۵=۲۶cm$$

بسامد موج را به‌دست می‌آوریم:

$$v=f\lambda\Rightarrow f=\frac{v}{\lambda}\Rightarrow f=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۲۶\times۱۰^{-۲}}\Rightarrow f\approx۱۲\times۱۰^{۸}Hz\Rightarrow f=۱۲۰۰MHz$$

B ۱۸۳۸ ۲

۱ بسامد از ویژگی چشمهٔ موج بوده و با تغییر محیط ثابت می‌ماند. یعنی بسامد نور در هوا و در زجاجیه چشم باهم برابر است. تندی نور در هوا و طول موج نور در هوا را در اختیار داریم بنابراین می‌توانیم بسامد را حساب کنیم

$$\lambda_{\text{هوا}}=\frac{v_{\text{هوا}}}{f}\xrightarrow{v_{\text{هوا}}=۳\times۱۰^{۸}m/s,\ \lambda_{\text{هوا}}=۰/۶\mu m}$$

$$\Rightarrow f=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۰/۶\times۱۰^{-۶}}\Rightarrow f=\frac{۱۰^{۱۵}}{۲}=۵\times۱۰^{۱۴}Hz$$

۲ با در اختیار داشتن طول موج این پرتو در زجاجیه $(\lambda'=۰/۴۵\mu m)$ و همچنین با داشتن بسامد نور $f=۵\times۱۰^{۱۴}Hz$ به سادگی تندی انتشار نور در زجاجیه به‌دست می‌آید.

$$v=f\lambda\Rightarrow v=۵\times۱۰^{۱۴}\times۰/۴۵\times۱۰^{-۶}\Rightarrow v=۲/۲۵\times۱۰^{۸}m/s$$

B ۱۸۳۹ ۳

۱ بنا به فرض مسئله طول موج پرتو A، ۱۲۰ نانومتر از طول موج پرتو B، کمتر است.

$$\lambda_B=\lambda_A+۱۲۰$$

۲ بسامد A، ۲۵ درصد از بسامد B بیشتر است، در نتیجه:

$$f_A=f_B+۰/۲۵f_B\Rightarrow f_A=۱/۲۵f_B\Rightarrow\frac{f_A}{f_B}=۱/۲۵\quad(I)$$

۳ در یک محیط تندی انتشار موج ثابت است، از این‌رو نسبت طول موج‌های A و B عکس نسبت بسامدهای آن‌هاست.

$$\frac{\lambda_B}{\lambda_A}=\frac{\frac{v}{f_B}}{\frac{v}{f_A}}\Rightarrow\frac{\lambda_B}{\lambda_A}=\frac{f_A}{f_B}\xrightarrow{(I)}۱/۲۵=\frac{\lambda_A+۱۲۰}{\lambda_A}\Rightarrow۱/۲۵\lambda_A=\lambda_A+۱۲۰$$

$$\Rightarrow۰/۲۵\lambda_A=۱۲۰\Rightarrow\lambda_A=۴۸۰nm\Rightarrow\lambda_A=۰/۴۸\mu m$$

$$\lambda_B=\lambda_A+۱۲۰nm\Rightarrow\lambda_B=۶۰۰nm\Rightarrow\lambda_B=۰/۶\mu m$$

A ۱۸۴۰ ۲

یادآوری در امواج الکترومغناطیسی، میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی همگام (همفاز) هستند، یعنی باهم بیشینه، باهم صفر و باهم کمینه می‌شوند و در هر لحظه‌ای که E بیشینه است در همان لحظهٔ B نیز بیشینه است.

خط فکری مانند حرکت هماهنگ ساده کمترین فاصله زمانی رسیدن نوسانگر از $+A$ به صفر برابر $\frac{T}{۴}$ است، در اینجا نیز کمترین فاصلهٔ زمانی رسیدن میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی از حالت بیشینه به صفر $\frac{T}{۴}$ است، بنابراین شما باید دوره را حساب کنید. کمینه اختلاف زمانی بین $t_۱$ و $t_۲$، $\frac{T}{۴}$ است.

۱ دوره را به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda=vT\xrightarrow[v=c]{\lambda=۴۵۰m}۴۵۰=۳\times۱۰^{۸}\times T\Rightarrow T=\frac{۴۵۰}{۳\times۱۰^{۸}}$$

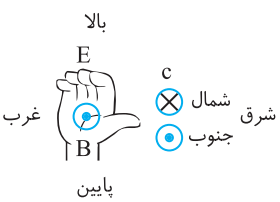
$$\Rightarrow T=۱۵۰\times۱۰^{-۸}s=۱/۵\times۱۰^{-۶}s$$

۲ اختلاف زمانی $t_۲-t_۱$ خواهد شد:

$$t_۲-t_۱=\frac{T}{۴}=\frac{۱/۵\times۱۰^{-۶}}{۴}\Rightarrow\Delta t=۰/۳۷۵\times۱۰^{-۶}s=۳۷۵ns$$

A ۱۸۴۱ ۳

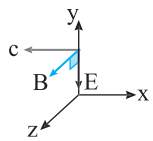
چهار انگشت دست راست خود را رو به بالا بگیرید (در جهت میدان الکتریکی) به گونه‌ای که انگشت شست دست راست شما در راستای انتشار موج (به سمت شرق (سمت راست بدنتان)) باشد، در این حالت کف دست شما در راستای میدان مغناطیسی (رو به جنوب (رو به پشت سر شما)) خواهد بود.



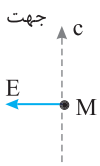
اگر جهت رو به شمال درونسو و جهت رو به جنوب برونسو باشد، جهت B روبه جنوب خواهد بود.

A ۱۸۴۲ ۱

با توجه به قانون دست راست برای موج الکترومغناطیسی باید انگشت شست در جهت پیشروی موج یعنی خلاف جهت محور xها باشد، به گونه‌ای که کف دست در جهت B یعنی محور zها باشد، در این حالت چهار انگشت باز دست راست به سمت yهای منفی است، یعنی جهت میدان الکتریکی در خلاف جهت محور yهاست.



بازی با سؤال **در شکل روبه‌رو، میدان الکتریکی موج الکترومغناطیسی گسیلی از یک آنتن فرستندهٔ رادیویی در نقطهٔ M در لحظهٔ نشان داده شده بیشینه است. در همان لحظه میدان مغناطیسی موج چگونه است؟**



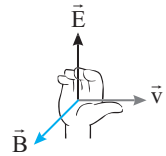
۱) صفر است. ۲) بیشینه رو به بالاست.

۳) بیشینه و برونسو است. ۴) بیشینه و درونسوست.

پاسخ **میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی موج الکترومغناطیسی هم‌بسامد و همگام هستند. بنابراین هنگامی که میدان الکتریکی بیشینه است، میدان مغناطیسی نیز بیشینه است.**

قاعدهٔ دست راست برای موج الکترومغناطیسی:

چهار انگشت: جهت میدان الکتریکی، انگشت شست: راستای پیشروی موج، کف دست: جهت میدان مغناطیسی. چهار انگشت باز دست راست را در جهت E به سمت چپ بگیرید به‌طوری که انگشت باز شست به سمت بالای صفحهٔ کاغذ باشد (در جهت c). در این صورت کف دست شما به سمت خارج صفحه یعنی برونسوست. در نتیجه میدان مغناطیسی در این لحظه بیشینه و برونسوست.

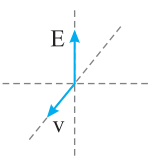




گزینهٔ ۳

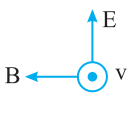
B ۱۸۴۳ ۱

با توجه به سؤال جهت انتشار موج به سمت $+z$ یا برونسو است و میدان الکتریکی به سمت بالا است:





چهار انگشت دست راست را در جهت E قرار داده و شست دست را در جهت v قرار می‌دهیم. در این صورت کف دست راست جهت میدان مغناطیسی را مشخص می‌کند:





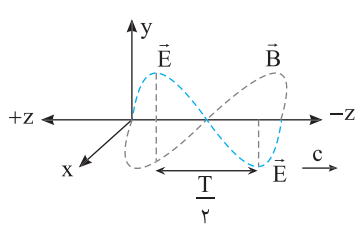
جهت میدان مغناطیسی خلاف جهت محور x است.

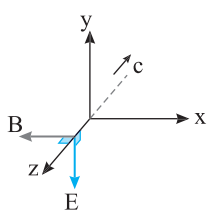
B ۱۸۴۴ ۳

خط فکری ابتدا جهت میدان الکتریکی E را بعد از $\frac{T}{۲}$ مشخص می‌کنیم، سپس به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت میدان مغناطیسی را معین می‌کنیم.

۱ در مدت $\frac{T}{۲}$ جهت بردار میدان الکتریکی $\vec{E}$ قرینه می‌شود، یعنی جهت میدان E که در جهت مثبت محور yهاست، قرینه شده و در جهت منفی محور yها می‌شود.

۲ چهار انگشت باز دست راست خود را در خلاف جهت محور yها به گونه‌ای بگیرید که انگشت باز شست در خلاف جهت محور z باشد، در این صورت کف دست شما در جهت منفی محور xها خواهد بود.





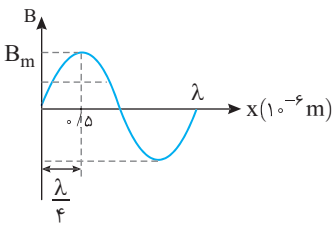
A ۱۸۴۵ ۲

خط فکری نمودار میدان مغناطیسی بر حسب مکان برای موج الکترومغناطیسی شبیه نمودار جابه‌جایی - مکان موج مکانیکی است. از روی محور افقی (xها) طول موج را به‌دست بیاورید، سپس بسامد را حساب کنید.

۱ طول موج را به دست می‌آوریم: $\frac{\lambda}{۴}=۰/۵\times۱۰^{-۶}\Rightarrow\lambda=۲\times۱۰^{-۶}\,m$

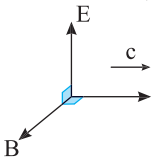
۲ بسامد میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی موج الکترومغناطیسی برابر است.

$$f=\frac{v}{\lambda}=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۲\times۱۰^{-۶}}\Rightarrow f=۱/۵\times۱۰^{۱۴}\,Hz$$

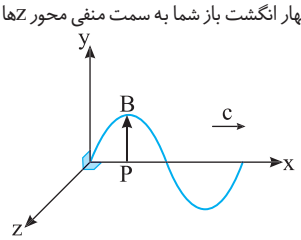


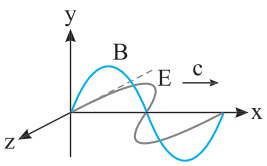
B ۱۸۴۶ ۱

یادآوری در موج الکترومغناطیسی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی برهم عمودند و این میدان‌ها بر جهت پیشروی موج نیز عمودند و از قاعده دست راست پیروی می‌کنند.



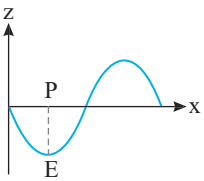
یک نقطه مانند P در نظر بگیرید. کف دست راست خود را رو به بالا در جهت مثبت محور yها بگیرید به گونه ای که انگشت شست باز دست راست شما در جهت مثبت محور xها باشد، در این صورت چهار انگشت باز شما به سمت منفی محور zها خواهد بود.





یعنی میدان الکتریکی موج در نقطهٔ P $(\frac{\lambda}{۴})$ باید در خلاف جهت محور zها باشد.

بنابراین نمودار $E-x$ به صورت شکل زیر است.

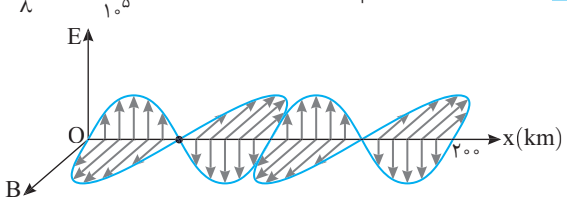


A ۱۸۴۷ ۲

۱ به شکل نگاه کنید و از روی محور افقی طول موج را حساب کنید.

$$۲\lambda=۲۰۰\Rightarrow\lambda=۱۰۰\,km=۱۰^{۵}\,m$$

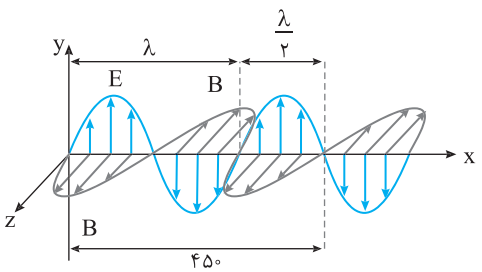
۲ بسامد را به‌دست می‌آوریم. $f=\frac{v}{\lambda}\Rightarrow f=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۱۰^{۵}}=۳\times۱۰^{۳}\,Hz$



B ۱۸۴۸ ۱

۱ با توجه به نمودار می‌توان طول موج را حساب کرد.

$$۳\frac{\lambda}{۲}=۴۵۰\Rightarrow\lambda=۳۰۰nm$$



۲ دوره را حساب می‌کنیم.

$$\lambda=vT\xrightarrow{v=c}T=\frac{\lambda}{c}\Rightarrow T=\frac{۳۰۰\times۱۰^{-۹}}{۳\times۱۰^{۸}}\Rightarrow T=۱۰^{-۱۵}s$$

بنابراین گزینه (۱) درست است.

۳ بسامد نوسان خواهد شد: $f=\frac{۱}{T}\Rightarrow f=۱۰^{۱۵}Hz$

گزینه (۲) نادرست است.

۴ تندی حرکت موج الکترومغناطیسی در خلأ ثابت و برابر $۳\times۱۰^{۸}m/s$ است:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=۱s]{v=۳\times۱۰^{۸}m/s}\Delta x=۳\times۱۰^{۸}m$$

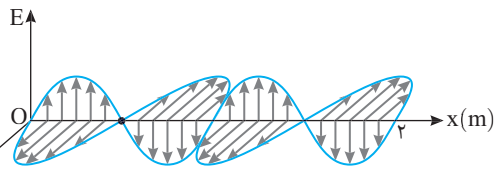
بنابراین موج الکترومغناطیسی در مدت یک ثانیه، $۳\times۱۰^{۸}m$ طی می‌کند که برابر با $۳\times۱۰^{۱۷}nm$ است، بنابراین گزینه (۳) نادرست است.

نکته طول موج‌های بین $۴۰۰nm$ (بنفش) تا $۷۰۰nm$ (قرمز) در محدودهٔ نور مرئی قرار دارند.

۵ طول موج این موج $۳۰۰nm$ است در حالی که محدوده تقریبی طول موج‌های مرئی بین $۴۰۰nm$ (بنفش) تا $۷۰۰nm$ (قرمز) است بنابراین گزینه (۴) نادرست است.

بازی با سؤال **نمودار میدان الکترومغناطیسی بر حسب مکان یک موج الکترومغناطیسی که در خلأ منتشر می‌شود، مطابق شکل زیر است. کدام مورد با توجه به نمودار درست است؟** $(c=۳\times۱۰^{۸}m/s)$

ریاضی - ۹۷



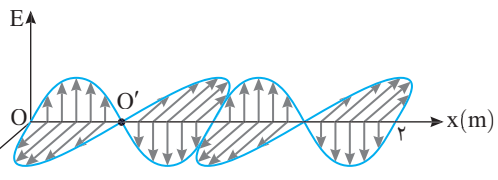
۱) طول موج ۰/۵ متر است. ۲) دورهٔ موج یک ثانیه است.

۳) بسامد زاویه‌ای π رادیان بر ثانیه است. ۴) بسامد موج $۳\times۱۰^{۸}Hz$ است.

پاسخ ۱ **با توجه به نمودار طول موج خواهد شد:** $۲\lambda=۲\Rightarrow\lambda=۱m$

۲ **بسامد موج را حساب می‌کنیم:**

$$v=f\lambda\Rightarrow۳\times۱۰^{۸}=f\times۱\Rightarrow f=۳\times۱۰^{۸}Hz$$



گزینهٔ ۴

B ۱۸۴۹ ۲

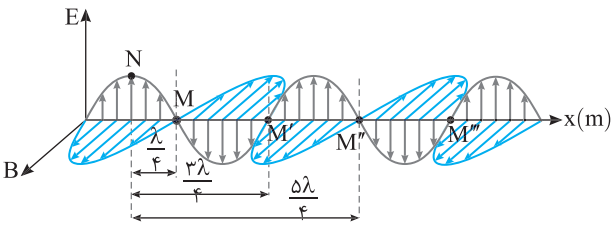
با توجه به شکل، طول موج را به‌دست می‌آوریم.

$$۳\frac{\lambda}{۲}=۳۰۰cm\Rightarrow\lambda=۲۰۰cm=۲m$$

$$f=\frac{c}{\lambda}\Rightarrow f=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۲}\Rightarrow f=۱/۵\times۱۰^{۸}Hz\Rightarrow f=۱۵۰MHz$$

B ۱۸۵۰ ۲

خط فکری میدان مغناطیسی و میدان الکتریکی موج الکترومغناطیسی هم‌گام هستند، یعنی با هم بیشینه و با هم صفر می‌شوند. در نقطه N میدان الکتریکی بیشینه است، پس در نقطه N میدان مغناطیسی نیز بیشینه است. در صورت مسأله بیان شده در همان لحظه میدان مغناطیسی نقطهٔ M صفر است. در این صورت اگر نقطهٔ N را روی نقش موج شکل زیر مشخص کنیم نقطه M باید $\frac{\lambda}{۴}$، $\frac{۳\lambda}{۴}$، $\frac{۵\lambda}{۴}$ و... با N فاصله داشته باشد.



اکنون طول موج را حساب می‌کنیم.

۱ طول موج را به‌دست می‌آوریم. $\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۱۰۰\times۱۰^{۶}}=۳m$

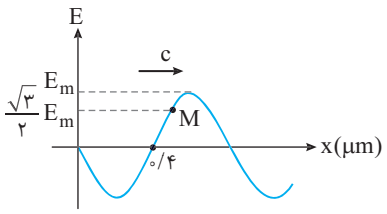
۲ فاصلهٔ نقطهٔ M از نقطهٔ N خواهد شد.

$$\frac{\lambda}{۴}=\frac{۳}{۴}m\ ,\ \frac{۳\lambda}{۴}=\frac{۹}{۴}m\ ,\ \frac{۵}{۴}\lambda=\frac{۱۵}{۴}m\ ,\ \dots$$

که در گزینه‌ها $\frac{۹}{۴}m$ وجود دارد.

B ۱۸۵۱ ۴

خط فکری نمودار $E-x$ شبیه نمودار جابه‌جایی مکان (نقش موج) است. شما تمام گام‌های مربوط به نقش موج را باید طی کنید.



۱ گام اول: از روی محور افقی طول موج را حساب می‌کنیم

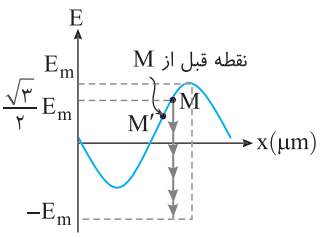
$$\frac{\lambda}{۲}=۰/۴\mu m\Rightarrow\lambda=۰/۸\mu m$$

۲ گام دوم: یافتن دوره به کمک تندی انتشار موج

$$T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۸\times۱۰^{-۶}}{۳\times۱۰^{۸}}\Rightarrow T=\frac{۸}{۳}\times۱۰^{-۱۵}s$$

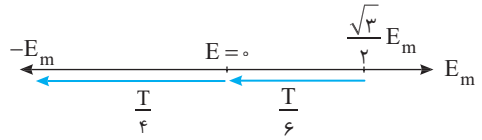
۳ گام سوم: بررسی جهت حرکت نقطهٔ M (بررسی جهت تغییر میدان در نقطهٔ M) با توجه به جهت پیشروی موج.

به نقطهٔ M نگاه کنید. برآمدگی موج از این نقطه عبور کرده و نقطهٔ قبل از M، پایین‌تر از M است، یعنی میدان الکتریکی E در حال کاهش و صفر شدن است.



اکنون به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده در حرکت هماهنگ ساده و با توجه به اینکه میدان نقطهٔ M در حال صفر شدن (حرکت رو به پایین) است، مسأله را حل می‌کنیم.

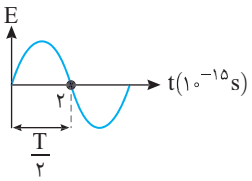
$$\Delta t=\frac{T}{6}+\frac{T}{4}=\frac{5T}{12}=\frac{5}{12}\times\frac{8}{3}\times10^{-15}=\frac{10}{9}\times10^{-15}s$$



۱۸۵۲ A ۳

با توجه به نمودار:

۱ از روی محور زمان نمودار $E-t$ دوره را حساب می‌کنیم:



$$\frac{T}{2}=2\times10^{-15}\Rightarrow T=4\times10^{-15}s$$

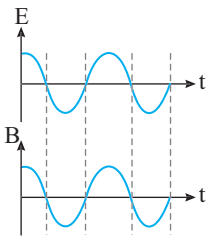
۲ طول موج میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی موج الکترومغناطیسی برابر است. با توجه به تعریف طول موج، خواهیم داشت:

$$\lambda=cT\Rightarrow\lambda=3\times10^{8}\times4\times10^{-15}=12\times10^{-7}m=1/2\mu m$$

۱۸۵۳ A ۲

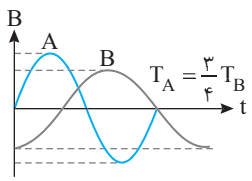
یادآوری در موج‌های الکترومغناطیسی، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی همگام بوده و طول موج و دورهٔ یکسانی دارند.

میدان الکتریکی و مغناطیسی همگام هستند و هر لحظه که میدان الکتریکی بیشینه است در همان لحظه میدان مغناطیسی بیشینه است و در هر لحظه‌ای که میدان الکتریکی صفر است میدان مغناطیسی صفر است بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.



۱۸۵۴ B ۱

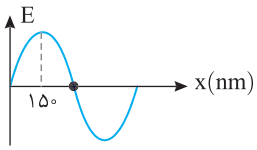
با توجه به شکل، رابطهٔ زیر بین دورهٔ موج الکترومغناطیسی B و دورهٔ موج الکترومغناطیسی A برقرار است:



$$T_A=\frac{3}{4}T_B\xrightarrow{\lambda=cT}\lambda_A=\frac{3}{4}\lambda_B$$

۱۸۵۵ A ۱

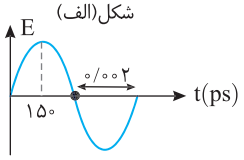
۱ با توجه به شکل (الف) می‌توان طول موج را به‌دست آورد:



شکل (الف)

$$\frac{\lambda}{4}=150\Rightarrow\lambda=600nm$$

۲ با توجه به شکل (ب)، دوره به‌دست می‌آید:



شکل (ب)

$$\frac{T}{2}=0/002\Rightarrow T=0/004ps$$

۳ بنابراین سرعت انتشار موج در این محیط برابر است با:

$$v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow v=\frac{600\times10^{-9}}{0/004\times10^{-12}}\Rightarrow v=\frac{6\times10^{-7}}{4\times10^{-15}}\Rightarrow v=1/5\times10^{8}m/s$$

۱۸۵۶ B ۳

خط فکری همان‌گونه که برای هر ذره از محیط انتشار موج مکانیکی سینوسی که دارای حرکت هماهنگ ساده است، معادلهٔ $x=A\cos\omega t$ نوشته می‌شود، می‌توان برای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی موج معادله‌هایی شبیه معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده به صورت مقابل نوشت: $E=E_m\cos\omega t\ ,\ B=B_m\cos\omega t$

در این معادله‌ها ضریب کسینوس مقدار بیشینهٔ میدان‌ها است. با توجه به معادلهٔ داده شده، میدان الکتریکی بیشینه را مشخص کنید، سپس با توجه به تعریف میدان الکتریکی $E=\frac{F}{q}$ نیروی وارد بر بار را بیابید.

با توجه به معادلهٔ $E=2\times10^{-3}\cos\omega t$، بیشینهٔ میدان الکتریکی برابر $E=2\times10^{-3}N/C$ است. از این‌رو بیشینهٔ نیروی وارد بر بار الکتریکی خواهد شد:

$$F_{max}=qE_{max}\ \Rightarrow\ F=2\times2\times10^{-3}=4\times10^{-3}N$$

۱۸۵۷ B ۱

بسامد و طول موج را به‌دست می‌آوریم:

۱ با توجه به معادلهٔ $B=B_m\cos\frac{3}{2}\pi\times10^{8}t$ بسامد زاویه‌ای موج برابر $\omega=\frac{3}{2}\pi\times10^{8}rad/s$ است. بنابراین بسامد خواهد شد.

$$\omega=2\pi f\Rightarrow\frac{3}{2}\times10^{8}\pi=2\pi f\Rightarrow f=7/5\times10^{7}Hz$$

۲ طول موج را حساب می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{3\times10^{8}}{7/5\times10^{7}}=4m$$

با توجه به شکل صفحهٔ ۷۶ کتاب درسی دربارهٔ طیف امواج الکترومغناطیسی این طول موج در ناحیهٔ رادیویی است.

۱۸۵۸ A ۱

امواج مکانیکی برای انتشار نیاز به محیط مادی دارند. امواج صوتی از نوع امواج مکانیکی هستند بنابراین برای انتشار نیاز به محیط مادی دارند.

پرتوهای x، رادیویی و فروسرخ از جنس امواج الکترومغناطیسی بوده و می‌توانند در خلأ منتشر شوند و برای انتشار به محیط مادی نیاز ندارند.

۱۸۵۹ A ۱

سرعت تمام پرتوهای الکترومغناطیسی در خلأ یکسان و برابر $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ است.

بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

البته طول موج و بسامد امواج الکترومغناطیسی مختلف، متفاوت بوده و گزینهٔ (۲) و (۳) نادرست است.

موج الکترومغناطیسی، موج عرضی است و گزینهٔ (۴) نادرست است.

۱۸۶۰ A ۱

امواج الکترومغناطیسی از قوانین یکسانی پیروی کرده و سرعت انتشار آن‌ها در خلأ یکسان است و گزینهٔ (۱) درست است.

این امواج در محیط‌های شفاف غیر خلأ تندی انتشار یکسانی ندارند و گزینهٔ (۲) نادرست است.

نحوهٔ تولید این امواج متفاوت است، به‌طور مثال یک جسم داغ از خود نور مرئی و امواج فروسرخ گسیل می‌کند، منشأ پرتوهای گاما واکنش‌های هسته‌ای است، بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

نحوهٔ آشکارسازی این امواج متفاوت است، مثلاً امواج رادیویی به کمک گیرنده رادیویی قابل آشکارسازی‌اند و یا نور مرئی توسط چشم دیده می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

بازی با سؤال **موج‌های الکترومغناطیسی در کدام ویژگی با هم فرق می‌کنند؟**

۱) سرعت آن‌ها در خلأ ۲) ماهیت آن‌ها

۳) طولی یا عرضی بودن آن‌ها ۴) نحوهٔ تولید و آشکارسازی آن‌ها

پاسخ **نحوهٔ تولید و آشکارسازی پرتوهای الکترومغناطیسی با هم متفاوت است.** گزینهٔ ٤

۱۸۶۱ A ۳

پرتوهای ایکس و پرتوهای گاما از جنس امواج الکترومغناطیسی هستند و این امواج حامل بار الکتریکی نیستند، بنابراین میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بر این پرتوها بی‌تأثیر است.

۱۸۶۲ A ۳

با توجه به شکل صفحهٔ ۷۶ کتاب درسی فیزیک (۳)، میکروموج‌ها در اجاق برای آشپزی کاربرد دارند.

۱۸۶۳ A ۱

با توجه به طیف امواج الکترومغناطیسی در صفحهٔ ۷۶ کتاب درسی فیزیک (۳)، امواج رادیویی در پخش تلویزیونی و رادیویی، یعنی در سیستم‌های مخابراتی کاربرد دارند.

A ۱۸۶۴ ۲

گسترهٔ امواج الکترومغناطیسی به ترتیب کاهش طول موج و افزایش بسامد به قرار زیر است:

رادیویی ← میکروموج ← فروسرخ ← نورمرئی ← فرابنفش ← پرتو ایکس ← پرتو گاما

بنابراین قسمت R مربوط به طیف فروسرخ است و گزاره (الف) درست است. بسامد طیف S، از بسامد طیف P (نورمرئی) کمتر است و گزارهٔ (ب) نادرست است.

طیف T مربوط به امواج رادیویی است و بیشترین طول موج را دارد، بنابراین گزاره (پ) درست است.

A ۱۸۶۵ ۴

یادآوری در طیف موج‌های الکترومغناطیسی به صورت زیر است که در آن از رادیویی به گاما بسامد افزایش و طول موج کاهش می‌یابد.

رادیویی ← میکروموج ← فروسرخ ← نور مرئی ← فرابنفش ← پرتو x ← پرتو گاما

امواج رادیویی بلندترین طول موج و اشعه گاما بیشترین بسامد را دارد.

بازی با سوال **در طیف امواج الکترومغناطیسی از فروسرخ تا فرابنفش، طول موج ... و بسامد ... می‌یابد.**

۱) افزایش، کاهش ۲) افزایش یافته، نیز افزایش

۳) کاهش، افزایش ۴) کاهش یافته، نیز کاهش

پاسخ **در طیف امواج الکترومغناطیسی (رادیویی، میکروموج، فروسرخ، نور مرئی، پرتو فرابنفش، پرتو X و پرتو γ) از راست به چپ بسامد افزایش و طول موج کاهش می‌یابد.** گزینهٔ ۳

A ۱۸۶۶ ۱

در نور مرئی (قرمز، نارنجی، زرد، سبز، آبی، بنفش) از راست به چپ، بسامد زیاد می‌شود.

B ۱۸۶۷ ۲

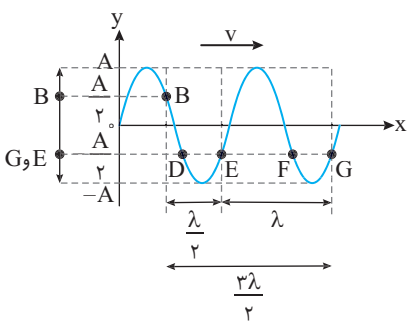
طیف امواج الکترومغناطیسی به صورت زیر است:

γ ← x ← فرابنفش ← مرئی ← فروسرخ ← میکروموج ← رادیویی

که از راست به چپ بسامد کاهش و طول موج افزایش می‌یابد. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

A ۱۸۶۸ ۳

با توجه به جهت پیشروی موج نقطهٔ B در حال حرکت رو به بالا است و نقاط D و F هم در حال حرکت رو به بالا هستند وقتی B به دامنهٔ $+A$ می‌رسد، قطعاً آن‌ها به دامنهٔ $-A$ نمی‌رسند اما نقاط E و G هر دو در حال حرکت رو به پایین هستند و در بازهٔ زمانی که B از $\frac{+A}{۲}$ به $+A$ می‌رود قطعاً نقاط E و G نیز از $\frac{-A}{۲}$ به $-A$ می‌روند و گزینهٔ (۳) درست است.



A ۱۸۶۹ ۲

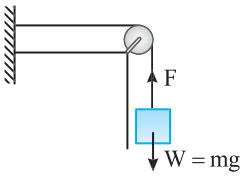
نکته در طول یک ریسمان همگن کشش یکسان است.

خط فکری وزنهٔ A ساکن است. بنابراین نیروهای وارد بر آن متوازن هستند، نیروهای وارد بر وزنهٔ A را رسم کنید و نیروی کشش سیم را حساب کنید.

۱ نیروی کشش سیم برابر نیروی وزن وزنهٔ A است.

$F=mg$

۲ در طول سیم، چگالی خطی جرم ثابت است، از این‌رو:

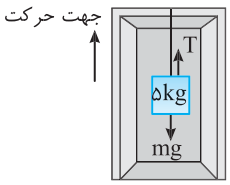


$$\frac{v'}{v}=\frac{\sqrt{\frac{F'}{\mu'}}}{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}\xrightarrow{\mu'=\mu}\frac{v'}{v}=\frac{\sqrt{F'}}{\sqrt{F}}\xrightarrow{F=mg}\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{m'g}{mg}}$$

$$\Rightarrow\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{۱۰۰-۷۵}{۱۰۰}}\Rightarrow\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{۲۵}{۱۰۰}}=\frac{۱}{۲}$$

B ۱۸۷۰ ۲

۱ ابتدا با توجه به قانون دوم نیوتون نیروی کشش تار در این حرکت را به‌دست می‌آوریم:



حرکت کندشونده بوده و a منفی است

$$F_{net}=ma\Rightarrow\underbrace{T-mg}=ma$$

آسانسور در حال حرکت به سمت بالا

$$T-۵۰=۵\times(-۲)\Rightarrow T=۴۰N$$

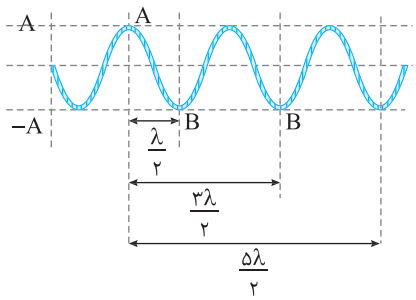
۲ نیروی کشش تار برابر ۴۰N است و با توجه به رابطهٔ $v=\frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}$ تندی انتشار موج در تار را حساب می‌کنیم:

$$D=۱mm=۱۰^{-۳}m\ ,\ F=T=۴۰N\ ,\ \rho=۳g/cm^{۳}=۳۰۰۰kg/m^{۳}$$

$$v=\frac{۲}{۱۰^{-۳}}\sqrt{\frac{۴۰}{۳۰۰۰\times۳}}\Rightarrow v=\frac{۲}{۱۰^{-۳}}\sqrt{\frac{۴}{۹۰۰}}\Rightarrow v=\frac{۲}{۱۰^{-۳}}\times\frac{۲}{۳۰}\Rightarrow v=\frac{۴۰۰}{۳}m/s$$

B ۱۸۷۱ ۴

خط فکری شکل ساده‌ای از انتشار موج در طناب رسم می‌کنیم. در صورت مسئله بیان کرده که ذرهٔ A در دامنهٔ مثبت $(+A)$ قرار دارد و در همان لحظه ذرهٔ B در دامنهٔ منفی $(-A)$ قرار دارد. بنابراین با توجه به شکل، فاصلهٔ A تا B می‌تواند $\frac{\lambda}{۲}$، $\frac{۳\lambda}{۲}$، $\frac{۵\lambda}{۲}$ و ... یعنی مضارب فرد $\frac{\lambda}{۲}$ باشد. از این‌رو شما باید فاصلهٔ A تا B $(AB=۴۵cm)$ را برابر این مقدارها قرار دهید و طول موج‌های ممکن را به‌دست بیاورید.



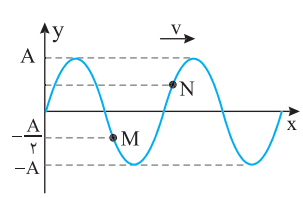
طول موج را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\lambda}{۲}=۴۵\Rightarrow\lambda=۹۰cm\ ,\ \frac{۳\lambda}{۲}=۴۵\Rightarrow\lambda=۳۰cm\ ,\ \frac{۵\lambda}{۲}=۴۵\Rightarrow\lambda=۱۸cm\ ,\ ...$$

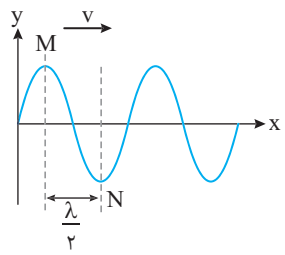
بنابراین هر سه گزینه می‌تواند طول موج این موج باشد.

A ۱۸۷۲ ۲

اگر به نقش موج دقت کنید فاصله یک قله از دره $\frac{\lambda}{۲}$ است و وقتی M در حال حرکت به سوی بالا است نقطهٔ N در حال حرکت رو به پایین است و



وقتی M از مرکز نوسانش می‌گذرد N نیز از مرکز نوسان می‌گذرد. اکنون به نقش موج مسأله نگاه کنید. M و N، از هم فاصله دارند و M در حال حرکت رو به بالا و N نیز در حال حرکت رو به پایین است و همان‌گونه که گفتیم باید با هم از مرکز نوسان بگذرند بنابراین اگر M در $\frac{-A}{۲}$ به سوی مرکز در حرکت باشد باید N در $\frac{+A}{۲}$ به سوی مرکز در حرکت باشد و گزینهٔ (۲) درست است.



میانبر هرگاه دو ذره از محیط دارای مکان و سرعت قرینه باشند، فاصلهٔ بین آن‌ها $\frac{\lambda}{۲}$ است و بالعکس.

۴ ۱۸۷۳ B

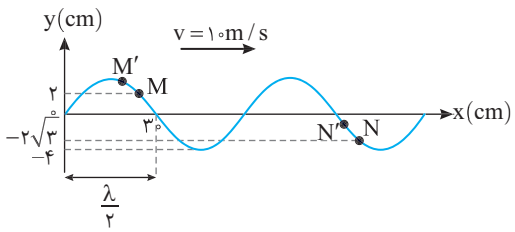
۱ گام اول: یافتن طول موج از روی محور افقی $\frac{\lambda}{۲}=۳۰\Rightarrow\lambda=۶۰cm=۰/۶m$

۲ گام دوم: یافتن دوره به کمک تندی انتشار موج $T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۶}{۱۰}=۰/۰۶s$

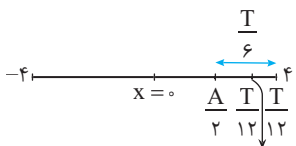
۳ گام سوم: مشخص می‌کنیم مدت زمان $\frac{۱}{۲۰۰}s$ چه کسری از دوره است.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{۱}{۲۰۰}}{\frac{۶}{۱۰۰}}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۱۲}$$

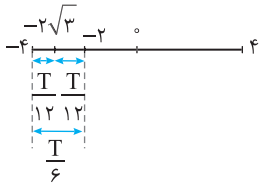
۴ اکنون مشخص می‌کنیم که ذره M و ذرهٔ N در کدام جهت در حال حرکت هستند. با توجه به جهت پیشروی موج قلهٔ موج در حال نزدیک شدن به نقطهٔ M است و نقطهٔ M' نقطهٔ قبل از M بالاتر از M است. یعنی M در حال حرکت رو به بالاست. ذرهٔ موج از N گذشته و قلهٔ موج در حال نزدیک شدن به نقطهٔ N بوده و ذرهٔ N' که قبل از N قرار دارد، بالاتر از N بوده یعنی نقطهٔ N رو به بالا در حرکت است.



۵ باید مکان M و N را پس از گذشت $\frac{۱}{۲۰۰}s=\frac{T}{۱۲}$ تعیین کنید.



ذرهٔ M در مکان $\frac{A}{۲}=۲cm$ قرار دارد و با توجه به بازه‌های زمان شناخته شده در مدت $\frac{T}{۱۲}$ به مکان $\frac{\sqrt{۳}}{۲}A=۲\sqrt{۳}cm$ می‌رسد.



ذرهٔ N در مکان $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}A=-۲\sqrt{۳}cm$ قرار دارد و در مدت $\frac{T}{۱۲}$ به مکان $-۲cm=-\frac{A}{۲}$ می‌رسد.

۶ رابطهٔ شتاب - مکان در حرکت هماهنگ ساده یک ذره از محیط به‌صورت $|a|=\omega^۲x$ است که در این مسئله ذرات در راستای محور yها نوسان می‌کنند، بنابراین خواهیم داشت:

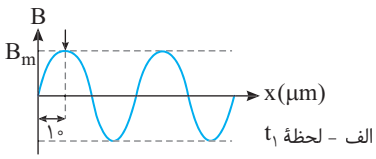
$$\left|\frac{a_M}{a_N}\right|=\left|\frac{\omega^۲y_M}{\omega^۲y_N}\right|=\frac{۲\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}$$

۱ ۱۸۷۴ B

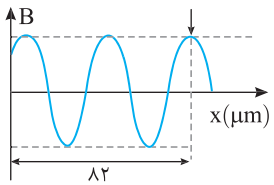
خط فکری علامت پیکان یک قله (ستیغ) موج را نشان می‌دهد که در حال حرکت در جهت مثبت محور x هاست و در مدت ۰/۳۶ps از ۱۰cm مبدأ به ۸۲cm مبدأ می‌رود. بنابراین شما می‌توانید تندی انتشار موج را حساب کنید. از روی شکل (الف) نیز طول موج را به‌دست بیاورید و سرانجام بسامد را حساب کنید.

۱ در مدت ۰/۳۶ پیکوثانیه، موج به اندازهٔ ۸۲−۱۰=۷۲μm پیشروی کرده است. بنابراین سرعت انتشار موج در این محیط شفاف برابر است با:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v=\frac{۷۲\times۱۰^{-۶}}{۰/۳۶\times۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow v=۲\times۱۰^۸m/s$$



الف - لحظهٔ $t_۱$



ب - لحظهٔ $t_۲$

۲ با توجه به شکل (الف)، طول موج برابر است با: $\frac{\lambda}{۴}=۱۰\Rightarrow\lambda=۴۰\mu m$

۳ اکنون می‌توان بسامد نور را به‌دست آورد:

$$f=\frac{v}{\lambda}\Rightarrow f=\frac{۲\times۱۰^۸}{۴۰\times۱۰^{-۶}}\Rightarrow f=۵\times۱۰^{۱۲}Hz$$

۲ ۱۸۷۵ B

کمینه فاصلهٔ بین یک دره و یک قله $\frac{\lambda}{۲}$ است، بنابراین طول موج خواهد شد:

$$\frac{\lambda}{۲}=۰/۲\Rightarrow\lambda=۰/۴m$$

بسامد نوسان ذره‌های محیط را حساب می‌کنیم:

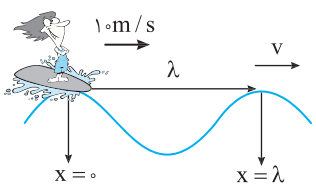
$$f=\frac{v}{\lambda}\xrightarrow{v=۴m/s}f=\frac{۴}{۰/۴}=۱۰Hz$$

بسامد زاویه‌ای موج را به‌دست می‌آوریم: $\omega=۲\pi f=۲\pi\times۱۰=۲۰\pi$

در حرکت هماهنگ سادهٔ ذرات محیط، بیشینهٔ شتاب برابر است با:

$$a_m=A\omega^۲\xrightarrow{a_m=۳۲۰m/s^۲}۳۲۰=A(۴۰۰\times۱۰)\Rightarrow A=۰/۰۸m\Rightarrow A=۸cm$$

۴ ۱۸۷۶ C



حالت اول: در این حالت موج با سرعت v و شخص با سرعت ۱۰m/s در یک جهت در حال حرکت‌اند و این دو پس از ۰/۵s به هم می‌رسند. فاصلهٔ یک قله تا قلهٔ دیگر نیز که در ۰/۵s طی شده برابر طول موج است، حال با توجه به حرکت‌شناسی معادلهٔ حرکت قلهٔ موج و معادلهٔ حرکت شخص را می‌نویسیم، هنگام رسیدن این دو به هم یعنی $t=۰/۵$ لحظه‌ای است که مکان آن‌ها با هم برابر شود:

$$x_{قله}=v_{موج}t+x_۰\Rightarrow x_{قله}=vt+\lambda$$

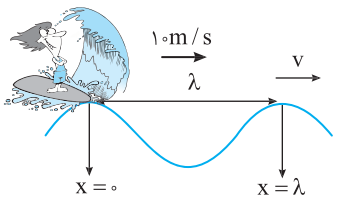
$$x_{شخص}=v_{شخص}t+x_۰\Rightarrow x_{شخص}=۱۰t+۰$$

$$\xrightarrow[t=۰/۵s]{x_{قله}=x_{شخص}}۰/۵v+\lambda=۵(I)$$

حالت دوم: در این حالت قله موج با سرعت v و شخص با سرعت ۱۰m/s به سمت هم در حال حرکت بوده و پس از ۰/۳s به هم می‌رسند:

$$x_{قله}=-vt+\lambda\ ,\ x_{شخص}=۱۰t$$

$$\xrightarrow[x_{قله}=x_{شخص}]{t=۰/۳s}-۰/۳v+\lambda=۳(II)$$



حال با توجه به معادلهٔ به‌دست آمده v و λ را به‌دست می‌آوریم:

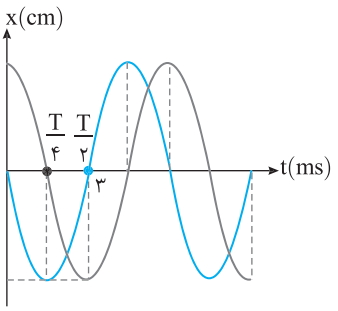
$$\begin{cases} ۰/۵v+\lambda=۵ \\ -۰/۳v+\lambda=۳ \end{cases}$$

$$۰/۸v=۲\Rightarrow v=۲/۵m/s\Rightarrow ۰/۵\times ۲/۵+\lambda=۵\Rightarrow\lambda=۳/۷۵m$$

C ۱۸۷۷ ۱

ابتدا دقت کنید که نمودار داده شده نمودار x−t است یعنی نمودار نوسان دو ذرهٔ A و B است. از روی محور زمان دورهٔ نوسان ذرات محیط را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{T}{۲}=۳ms\Rightarrow T=۶ms$$

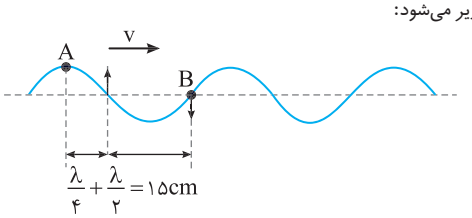


برای ادامهٔ حل ابتدا به دو نکته دقت کنید:

۱ فاصلهٔ دو ذرهٔ از محیط ۱۵cm است، چون بیشینه تندی موج خواسته شده است $v_{موج}=\frac{\lambda}{T}$ پس باید این دو ذره را دو ذرهٔ متوالی با مشخصات نوسانی داده شده در نظر گرفت تا طول موج بیشینه باشد.

۲ ذرهٔ A از دامنهٔ مثبت در لحظهٔ t=۰ نوسان می‌کند و ذرهٔ B از x=۰ در لحظهٔ t=۰ به سمت پایین شروع به نوسان می‌کند.

یک موج مطابق شکل در لحظهٔ t=۰ می‌کشیم، جهت انتشار موج به سمت راست است. نقطهٔ A در مکان یکی از قله‌ها است تا از دامنهٔ مثبت شروع به نوسان کند، اما نقطهٔ B در x=۰ بوده و به سمت پایین شروع به نوسان می‌کند پس این دو نقطه به صورت زیر می‌شود:



$$\frac{\lambda}{۴}+\frac{\lambda}{۲}=۱۵\Rightarrow\frac{۳\lambda}{۴}=۱۵cm\Rightarrow\lambda=۲۰cm$$

حال با توجه به دوره و طول موج تندی انتشار را به‌دست می‌آوریم:

$$v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow v=\frac{۲۰\times ۱۰^{-۲}}{۶\times ۱۰^{-۳}}\Rightarrow v=\frac{۱۰۰}{۳}m/s$$

B ۱۸۷۸ ۳

یادآوری میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی موج الکترومغناطیسی هم‌بسامد و همگام هستند. از این‌رو در هر نقطه شناسهٔ تابع کسینوس این میدان‌ها یکسان است.

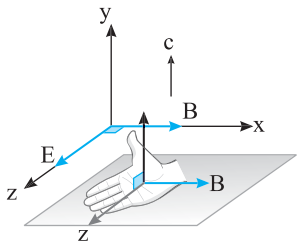
وقتی میدان الکتریکی موج به‌صورت $E=E_m\cos(\omega t+\frac{\pi}{۲})$ باشد، میدان مغناطیسی آن نیز به‌صورت $B=B_m\cos(\omega t+\frac{\pi}{۲})$ است.

C ۱۸۷۹ ۲

یادآوری در امواج الکترومغناطیسی میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی همگام هستند.

خط فکری هرگاه در یک مسئله مربوط به امواج الکترومغناطیسی در مورد میدان مغناطیسی (یا الکتریکی) به شما اطلاعاتی داده شود، با توجه به همگام بودن این دو میدان، اطلاعات در مورد میدان دیگر صادق است. وقتی در مسئله بیان می‌شود که $B=\frac{\sqrt{۲}}{۲}B_m$ و در حال کاهش است، یعنی میدان الکتریکی در آن لحظه نیز $E=\frac{\sqrt{۲}}{۲}E_m$ و در حال کاهش است.

۱ جهت میدان الکتریکی در لحظهٔ t را مشخص می‌کنیم. با توجه به قاعدهٔ دست راست، کف دست خود را به سمت راست در جهت محور xها به‌گونه‌ای قرار دهید که انگشت شست رو به بالا در جهت محور yها نشان دهد. در این حالت چهار انگشت باز دست راست شما در جهت محور zها خواهد بود.



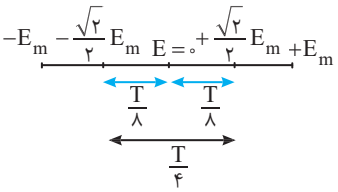
۲ بنابراین در لحظهٔ t=۰، میدان الکتریکی $E=\frac{+\sqrt{۲}}{۲}E_m$ بوده و باید در حال کاهش باشد.

۳ دوره را حساب می‌کنیم. $T=\frac{۱}{f}\Rightarrow T=\frac{۱}{۲\times ۱۰^{۱۵}}s\Rightarrow T=۵\times ۱۰^{-۱۶}s$

۴ مشخص می‌کنیم که $۱/۲۵\times ۱۰^{-۱۶}s$ چه کسری از دوره است.

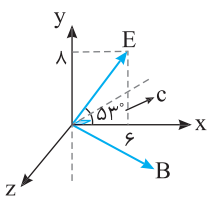
$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{۱/۲۵\times ۱۰^{-۱۶}}{۵\times ۱۰^{-۱۶}}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{۴}$$

۵ در مدت $\frac{T}{۴}$، میدان الکتریکی از $+\frac{\sqrt{۲}}{۲}E_m$ به $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}E_m$ تغییر کرده و اندازهٔ آن در حال افزایش است.



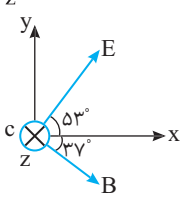
C ۱۸۸۰ ۱

بردار میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی موج الکترومغناطیسی بر هم عمودند. بردار میدان الکتریکی $\vec{E}=۶\vec{i}+۸\vec{j}$ را روی دستگاه محورها نمایش می‌دهیم.



زاویهٔ بین میدان E با محور xها خواهد شد:

$$\tan\alpha=\frac{E_y}{E_x}=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\alpha=۵۳^\circ$$



انتشار موج در امتداد محور zها است. از این‌رو باید در هر دو میدان E و B در صفحهٔ xoy باشد و این دو میدان بر هم عمود باشند و در قاعدهٔ دست راست نیز صدق کنند، بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

A ۱۸۸۱ ۳

خط فکری بیشینه نیرویی که میدان الکترومغناطیسی بر یک ذرهٔ باردار متحرک می‌تواند وارد کند، جمع بیشینهٔ نیروی میدان الکتریکی وارد بر ذرهٔ $F_{E_m}=qE_m$ و بیشینهٔ نیروی میدان مغناطیسی وارد بر ذرهٔ $F_{B_m}=qvB$ است.

یعنی باید جهت حرکت بار به‌گونه‌ای باشد که این دو نیرو هم‌جهت شده و با هم جمع شوند. F_{E_m} و F_{B_m} را حساب کرده، با هم جمع کنید.

۱ بیشینهٔ نیروی الکتریکی وارد بر ذره با بار $1\times10^{-3}C$ را حساب می‌کنیم.

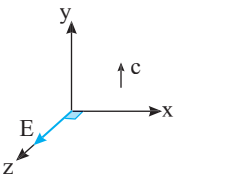
$$F_{E_m}=qE_{max}\xrightarrow{E_{max}=3000V/m}F_{E_m}=10^{-3}\times3000\Rightarrow F_{E_m}=3N$$

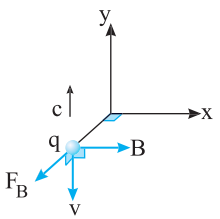
۲ بیشینهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر ذره را به‌دست می‌آوریم.

$$F_{E_m}=qvB_m\xrightarrow{v=4\times10^6 m/s,B_m=10^{-5}T}F_{B_m}=10^{-3}\times4\times10^6\times10^{-5}$$
$$\Rightarrow F_{B_m}=0/04N$$

۳ نیروها را با هم جمع می‌کنیم: $F_m=F_{E_m}+F_{B_m}=3+0/04\Rightarrow F_m=3/04N$

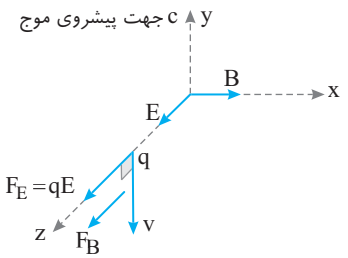
ممکن است که شما سؤال کنید چگونه چنین حالتی ممکن است. فرض کنید موج در حال پیشروی در جهت مثبت محور yها است و ذرهٔ باردار در جهت منفی محور yها در حرکت باشد. اگر میدان الکتریکی موج در جهت محور zها باشد، نیرویی که بر بار وارد می‌کند، در جهت محور zها است. در این حالت میدان مغناطیسی موج قطعاً در جهت محور xها است. اکنون به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت نیروی میدان مغناطیسی وارد بر ذرهٔ باردار را مشخص می‌کنیم: چهار انگشت دست راست در جهت v و کف دست در جهت B، انگشت شست در جهت F یعنی در جهت محور zها است.





بنابراین F_{E_m} و F_{B_m} هر دو در جهت مثبت محور zها بوده و با هم جمع می‌شوند:

به شکل نهایی دقت کنید.



A ۱۸۸۲ ۴

ذرهٔ باردار که دارای حرکت شتابدار است، موج الکترومغناطیسی گسیل می‌کند. هنگام تخلیهٔ خازن، یک میدان الکتریکی متغیر با زمان ایجاد می‌شود که می‌تواند به‌طور لحظه‌ای موج الکترومغناطیسی گسیل کند. همچنین جریان متناوب با بسامد بالا نیز به‌دلیل تغییر دائمی میدان مغناطیسی آن با زمان می‌تواند موج الکترومغناطیسی ایجاد کند. بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

بازی با سوال **از دیدگاه ماکسول عامل اصلی ایجاد موج‌های الکترومغناطیسی، .....**

۱) میدان‌های الکتریکی است.

۲) حرکت شتابدار ذرهٔ دارای بار الکتریکی است.

۳) میدان‌های مغناطیسی است.

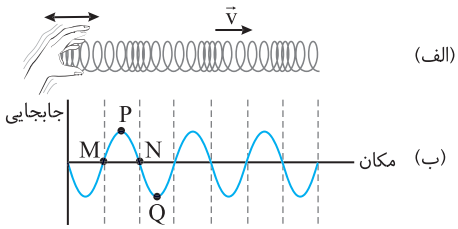
۴) حرکت یکنواخت بار الکتریکی است.

پاسخ **بنابر نظریهٔ ماکسول، هرگاه ذرهٔ باردار دارای حرکت شتابدار شود از خود موج الکترومغناطیسی گسیل می‌کند.** گزینهٔ ۲

پنجره ۵

B ۱۸۸۳ ۴

در انتشار موج طولی در یک فنر بلند کشیده، موج به‌صورت جمع‌شدگی و بازشدگی در طول فنر منتشر می‌شود. برای مدل‌سازی این موج به ناحیه‌های جمع‌شدگی و بازشدگی بیشتر دقت می‌کنیم. در مکان‌هایی که بیشترین بازشدگی حلقه رخ می‌دهد، جابه‌جایی هر جزء فنر از وضعیت تعادل صفر است. (مانند نقاط M و N در یک موج عرضی). در وسط فاصلهٔ بین یک جمع‌شدگی بیشینه و یک بازشدگی بیشینهٔ مجاور آن، اندازهٔ جابه‌جایی هر جزء فنر از وضعیت تعادل بیشینه است (مانند نقاط P و Q شبیه قله و درهٔ یک موج عرضی) با این توضیحات گزینهٔ (۲) و (۳) درست است.



B ۱۸۸۴ ۲

نکته فاصلهٔ بین دو تراکم متوالی یا دو انبساط متوالی برابر طول موج (λ) است.

۱ با توجه به شکل فاصلهٔ بین تراکم و انبساط نشان داده شده در شکل ۶۰cm است. از این رو:

$$\lambda+\frac{\lambda}{2}=60\Rightarrow\frac{3}{2}\lambda=60\Rightarrow\lambda=40cm$$

۲ تندی انتشار موج را برحسب یکای m/s می‌نویسیم.

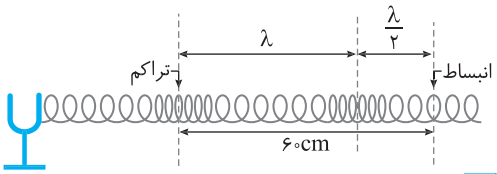
$$v=54\frac{km}{h}\times\frac{1000m}{1km}\times\frac{1h}{3600s}\Rightarrow\frac{54}{3/6}\Rightarrow v=15m/s$$

۳ دوره را به‌دست می‌آوریم.

$$T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{0/4}{15}\Rightarrow T=\frac{4}{150}s\Rightarrow T=\frac{2}{75}s$$

۴ تعداد نوسان‌های هر حلقه (ذره) را حساب می‌کنیم.

$$T=\frac{t}{N}\Rightarrow\frac{2}{75}=\frac{60}{N}\Rightarrow N=30\times75\Rightarrow N=2250\frac{\text{نوسان}}{\text{دقیقه}}$$



B ۱۸۸۵ ۱

یادآوری در امواج طولی، طول موج برابر فاصلهٔ بین دو تراکم (برای فنر جمع‌شدگی) و یا دو انبساط (برای فنر، بازشدگی) متوالی است.

۱ طول موج با توجه به فرض مسئله برابر است با: $\lambda=10m$

۲ دوره را حساب می‌کنیم.

$$T=\frac{1}{f}\xrightarrow{f=10Hz}T=\frac{1}{10}\Rightarrow T=0/1s$$

۳ تندی انتشار موج در محیط خواهد شد:

$$v=f\lambda\Rightarrow v=10\times10\Rightarrow v=100m/s$$

۴ مسافتی که موج در مدت $0/05s$ طی می‌کند را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow\Delta x=50\times0/05\Rightarrow\Delta x=5m$$

۵ مشخص می‌کنیم $\Delta t=0/05s$ چه کسری از دوره $T=0/1s$ است.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{0/05}{0/1}\Rightarrow\Delta t=\frac{T}{2}$$

نکته مسافتی که یک ذره دارای حرکت هماهنگ ساده در مدت $\frac{T}{2}$ طی می‌کند دو برابر دامنه است.

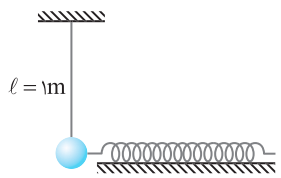
۶ مسافتی که در مدت $\frac{T}{2}=0/05s$ هر ذره از محیط طی می‌کند خواهد شد:

$$\Delta x'=2A\xrightarrow{A=0/4m}\Delta x'=2\times0/4=0/8m$$

۱۸۸۶ B ۴

۱ دوره و بسامد از ویژگی‌های چشمهٔ موج هستند. در این مسئله آونگ چشمهٔ موج است، دورهٔ آونگ را حساب می‌کنیم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\xrightarrow{\pi^2\sim g}T=2\pi\sqrt{\frac{1}{\pi^2}}\Rightarrow T=2s$$

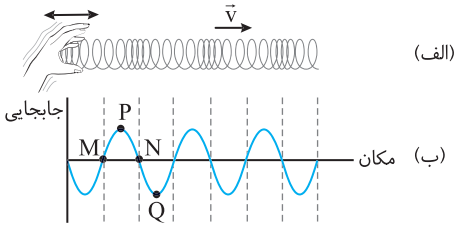


۲ طول موج را به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda=vT\xrightarrow{v=0/2m/s}\lambda=0/2\times2\Rightarrow\lambda=0/4m$$

۳ با توجه به مدل‌سازی موج طولی در فنر فاصلهٔ یک جمع‌شدگی بیشینه شبیه نقطهٔ N از وسط یک جمع‌شدگی و بازشدگی بیشینه مانند نقطهٔ P برابر $\frac{\lambda}{4}$ است. بنابراین

$$\frac{\lambda}{4}=\frac{0/4}{4}=0/1m$$



۱۸۸۷ B ۲

نکته در امواج لرزه‌ای، (زمین‌لرزه‌ها)، معمولاً تندی انتشار موج اولیهٔ P از تندی انتشار موج ثانویهٔ S بیشتر است. P امواج طولی و S امواج عرضی هستند.

۱ موجی که تندی آن $9km/s$ است و زودتر به مقصد رسیده است، موج طولی (P) بوده و زمان رسیدن آن به مقصد برابر است با:

$$t=\frac{\Delta x}{v}\Rightarrow t=\frac{1620}{9}=180s\Rightarrow t_1=3min$$

۲ موج دیگر ۳ دقیقه دیرتر به این فاصله رسیده است بنابراین این موج عرضی بوده و زمان رسیدن آن $3+3=6min$ است و تندی آن خواهد شد.

$$v=\frac{\Delta x}{t}=\frac{1620}{6\times60}\Rightarrow v=4/5km/s$$

۱۸۸۸ B ۳

تندی امواج عرضی در جامدات از تندی امواج طولی در جامدات کمتر است و زمان رسیدن موج عرضی به عقرب از زمان رسیدن موج طولی به عقرب بیشتر است.

زمان رسیدن موج از طعمه به عقرب برای موج عرضی خواهد شد:

$$\Delta x=vt\Rightarrow d=v_Tt_T\Rightarrow t_T=\frac{d}{v_T}$$

زمان رسیدن موج از طعمه به عقرب برای موج طولی خواهد شد:

$$\Delta x=vt\Rightarrow d=v_Lt_L\Rightarrow t_L=\frac{d}{v_L}$$

اختلاف زمانی رسیدن موج‌های طولی و عرضی به عقرب خواهد شد:

$$\Delta t=t_T-t_L\Rightarrow\Delta t=\frac{d}{v_T}-\frac{d}{v_L}\Rightarrow\Delta t=\frac{v_L-v_T}{v_Lv_T}d\Rightarrow d=\frac{v_Lv_T}{v_L-v_T}\Delta t$$

۱۸۸۹ B ۴

خط فکری بسامد از ویژگی‌های چشمهٔ موج است و برای هر دو موج S و P یکسان است. از این رو نمودار نقش موج طول موج S و P را پیدا کرده، تندی انتشار موج S و P را به‌دست بیاورید. با اختلاف زمانی رسیدن موج‌های S و P به مقصد فاصلهٔ محل مورد نظر تا مرکز زمین‌لرزه را حساب کنید.

۱ ابتدا طول موج هر موج را به‌دست می‌آوریم.

(شکل ۲): $\frac{\lambda}{4}=30\Rightarrow\lambda=120m$ ، (شکل ۱): $\frac{\lambda}{4}=15\Rightarrow\lambda=60m$

۲ تندی انتشار هر موج را حساب می‌کنیم.

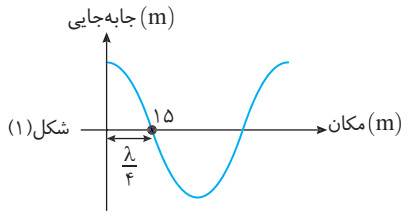
$v=f\lambda\Rightarrow v=100\times120=12km/s$ ، $v=f\lambda\Rightarrow v=100\times60=6km/s$

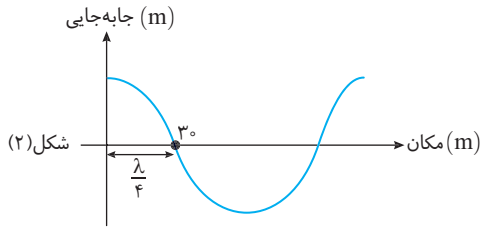
۳ موج شکل (۱) دارای تندی کمتری است بنابراین نمودار شکل (۱) مربوط به موج عرضی S است و نمودار شکل (۲) مربوط به موج طولی P است.

۴ اختلاف زمانی دو موج ۱۲۰s است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$t_S-t_P=120s\xrightarrow{t=\frac{\Delta x}{v}}\frac{\Delta x}{v_S}-\frac{\Delta x}{v_P}=120\Rightarrow\frac{\Delta x}{6}-\frac{\Delta x}{12}=120$$

$$\Rightarrow\frac{\Delta x}{12}=120\Rightarrow\Delta x=1440km$$





۱۸۹۰ A ۳

موج صوتی یک موج مکانیکی و طولی است که به صورت لایه‌های تراکمی و انبساطی منتشر می‌شود. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) درست است، اما در مورد گزینهٔ (۳) عموماً در محیط‌های غلیظ‌تر سرعت انتشار صوت بیشتر است و در این مورد استثناهایی وجود دارد. به‌طور مثال سرعت صوت در هیدروژن (گاز) از سرعت صوت در متیل الکل (مایع) $(25^\circ C)$ بیشتر است. به جدول صفحهٔ ۷۹ کتاب درسی رجوع کنید.

۱۸۹۱ A ۴

صوت موج است و در انتشار موج، ذره‌های محیط منتشر نمی‌شود و گزینهٔ (۱) نادرست است، بلکه ذرات محیط در مسیر حرکت موج، در جای خود مرتعش می‌شوند و گزینهٔ (۲) درست است. از طرفی صوت، موج طولی است و به‌صورت لایه‌های تراکمی و انبساطی در هوا منتشر می‌شود، بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) درست‌اند و جواب گزینهٔ (۴) می‌باشد.

۱۸۹۲ A ۲

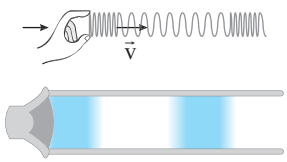
امواج الکترومغناطیسی که تلفن همراه با آن کار می‌کند از شیشه و خلأ درون جعبه می‌گذرند، بنابراین تماس برقرار می‌شود، اما صدای زنگ تلفن همراه که موج مکانیکی است، از خلأ نمی‌گذرد و صدای زنگ تلفن شنیده نمی‌شود.

۱۸۹۳ A ۲

امواج صوتی از نوع امواج مکانیکی و طولی هستند و در خلأ منتشر نمی‌شوند و گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) نادرست است و امواج فرابنفش از جنس امواج الکترومغناطیسی هستند و تندی آن‌ها برابر تندی انتشار نور است و از تندی صوت بسیار بزرگ‌تر است و گزینهٔ (۲) درست است. البته هر دو موج بوده و انرژی را منتقل می‌کنند.

۱۸۹۴ A ۱

در مدل‌سازی صوت درون لوله، جمع‌شدگی فنر معادل تراکم و بازشدگی فنر معادل انبساط در نظر گرفته می‌شود. در شکل در محل دست فنر جمع شده بنابراین باید در لوله کنار دیافراگم تراکم داشته باشیم. بنابراین گزینهٔ (۱) یا گزینهٔ (۳) درست است. برای ایجاد تراکم باید دیافراگم به سمت راست شکم پیدا کرده و هوا را فشرده کند. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.



A ۱۸۹۵ ۴

دیافراگم دارای حرکت هماهنگ ساده است و مدت زمانی که طول می‌کشد تا از برآمدگی سمت راست (+A) به فرورفتگی سمت چپ (−A) برود، به اندازهٔ $\frac{T}{2}$ طول می‌کشد.

بازهٔ زمانی داده شده $\Delta t=0/2s$ را با دورهٔ $T=0/4s$ مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{0/2}{0/4}\Rightarrow \Delta t=\frac{T}{2}$$

در مدت $\frac{T}{2}$ باید تراکم به انبساط تبدیل شود. از طرفی در مدت $\frac{T}{2}$، موج به اندازهٔ $\frac{\lambda}{2}$ جلو می‌رود و تنها باید در شکل یک تراکم و یک انبساط را شاهد باشیم، از این رو گزینهٔ (۴) درست است.

A ۱۸۹۶ ۳

امواج صوتی از نوع امواج طولی هستند و سرعت انتشار صوت معمولاً در جامدها از مایع‌ها بیشتر است.

B ۱۸۹۷ ۱

نکته بسامد یک موج از ویژگی‌های چشمهٔ موج است و در هنگام انتشار موج تغییر نمی‌کند.

نکته سرعت صوت در آهن از سرعت صوت در آب بیشتر و سرعت صوت در آب از سرعت صوت در اکسیژن بیشتر است.

با توجه به نکات ارائه شده می‌توان نوشت:

$$\lambda=\frac{v}{f_o}\Rightarrow\begin{cases}\text{آهن}: \lambda_1=\frac{v_1}{f}\\ \text{اکسیژن}: \lambda_2=\frac{v_2}{f}\xrightarrow{v_1>v_3>v_2}\lambda_1>\lambda_3>\lambda_2\\ \text{آب}: \lambda_3=\frac{v_3}{f}\end{cases}$$

A ۱۸۹۸ ۴

بسامد موج توسط چشمهٔ موج تعیین می‌شود و هنگام پیشروی موج، بسامد موج ثابت می‌ماند، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست‌اند. برای بررسی چگونگی تغییر طول موج باید چگونگی تغییر تندی انتشار موج را بررسی کنیم.

تندی انتشار صوت در یخ از تندی انتشار صوت در آب و تندی انتشار صوت در آب از تندی انتشار صوت در هوا بیشتر است.

$$v_{\text{یخ}}>v_{\text{آب}}>v_{\text{هوا}}\xrightarrow{\lambda=\frac{v}{f}}\lambda_{\text{یخ}}>\lambda_{\text{آب}}>\lambda_{\text{هوا}}$$

بنابراین وقتی صوت از هوا وارد یخ می‌شود طول موج ابتدا افزایش می‌یابد $(\lambda_{\text{یخ}}>\lambda_{\text{هوا}})$ و سپس وقتی از یخ وارد آب می‌شود، طول موج کاهش می‌یابد $(\lambda_{\text{آب}}<\lambda_{\text{یخ}})$.

بازی با سؤال **هرگاه موج‌های صوتی از هوا وارد آب شوند .....**

۱) طول موج و سرعت آن‌ها کاهش می‌یابد.

۲) طول موج کاهش و بسامد آن‌ها افزایش می‌یابد.

۳) طول موج و سرعت آن‌ها افزایش می‌یابد.

۴) طول موج کاهش و بسامد آن‌ها ثابت می‌ماند.

پاسخ **سرعت انتشار صوت در آب از سرعت انتشار صوت در هوا بیشتر است و هنگام گذر صوت از هوا به آب، بسامد ثابت می‌ماند، اما با زیاد شدن سرعت انتشار صوت، طول موج نیز افزایش می‌یابد.** گزینهٔ ۳

A ۱۸۹۹ ۴

تندی انتشار موج توسط چشمهٔ موج تعیین می‌شود و بسامد چشمهٔ موج نیز به دامنهٔ موج بستگی ندارد، از این رو تندی انتشار موج حاصل از دو چشمه با هم برابر است. $(v'=v)$

بسامد دو موج یکسان نیست، بنابراین طول موج آن‌ها نیز یکسان نخواهد بود.

$$\lambda=\frac{v}{f},\lambda'=\frac{v'}{f'}\xrightarrow{v'=v}\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{f}{f'}\xrightarrow{f'=3f}\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{f}{3f}\Rightarrow\lambda'=\frac{\lambda}{3}$$

بازی با سؤال **دو صوت با بسامدهای متفاوت در یک نقطه تولید و در هوا منتشر می‌شوند. طول موج آن‌ها در هوا .....**

۱) با هم برابر است. **۲)** متناسب با جذر بسامد آن‌ها است.

۳) متناسب با بسامد آن‌ها است. **۴)** متناسب با عکس بسامد آن‌ها است.

پاسخ **سرعت انتشار صوت در یک محیط به ویژگی‌های فیزیکی محیط بستگی دارد و به ویژگی‌های چشمهٔ صوت بستگی ندارد، بنابراین سرعت انتشار این دو صوت در محیط برابر است.** گزینهٔ ۴

$$\lambda_1=\frac{v}{f_1},\lambda_2=\frac{v}{f_2}\Rightarrow\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{f_2}{f_1}$$

A ۱۹۰۰ ۱

چشمهٔ تولید موج یکسان است، بنابراین بسامد صوت در آب و هوا با هم یکسان بوده و خواهیم داشت:

$$v=\lambda f\Rightarrow\begin{cases}v_{\text{آب}}=f\lambda_{\text{آب}}\\ v_{\text{هوا}}=f\lambda_{\text{هوا}}\end{cases}\Rightarrow\frac{v_{\text{آب}}}{v_{\text{هوا}}}=\frac{\lambda_{\text{آب}}}{\lambda_{\text{هوا}}}=5\Rightarrow v_{\text{آب}}=5v_{\text{هوا}}$$

B ۱۹۰۱ ۴

سرعت انتشار موج در یک محیط به ویژگی‌های فیزیکی محیط بستگی دارد و به ویژگی‌های چشمهٔ موج مانند بسامد، دوره، انرژی موج و ... بستگی ندارد، از این‌رو سرعت انتشار موج‌های صوتی A و B در یک محیط با هم برابرند. نسبت طول موج‌ها خواهد شد:

$$\lambda_A=\frac{v}{f_A},\lambda_B=\frac{v}{f_B}\Rightarrow\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{f_B}{f_A}\Rightarrow\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{800}{600}=\frac{4}{3}$$

A ۱۹۰۲ ۴

با توجه به تعریف طول موج:

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow[v=330m/s]{\lambda=3/3\times10^{-3}m}f=\frac{v}{\lambda}=\frac{330}{3/3\times10^{-3}}=100000Hz$$

A ۱۹۰۳ ۲

خط فکری کافی است از روی معادلهٔ نوسان $x=A\cos 1/2\times10^{7}\pi t$ دوره را حساب کرده، سپس طول موج را به‌دست آورید.

۱ بسامد زاویه‌ای موج $\omega=1/2\times10^{7}\pi rad/s$ است. از این رو بسامد خواهد شد:

$$\omega=2\pi f\Rightarrow1/2\times10^{7}\pi=2\pi f\Rightarrow f=6\times10^{6}Hz$$

۲ طول موج را حساب می‌کنیم.

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{1500}{6\times10^{6}}=2/5\times10^{-4}m=2/5\times10^{-1}mm=0/25mm$$

A ۱۹۰۴ ۳

خط فکری علت شنیدن دو صدای مختلف، تفاوت تندی صوت در فلز و هوا است، یک صوت توسط فلز و با تندی بیشتر و صوت دیگر توسط هوا و با تندی کمتر منتقل می‌شود. بنابراین در حل این تست ابتدا باید زمان سیر صوت در هوا را به‌دست بیاورید. سپس با توجه به اختلاف زمانی رسیدن دو موج زمان پیشروی صوت در فلز را بیابید و سرانجام تندی انتشار موج در فلز را به‌دست بیاورید.

۱ زمان پیشروی صوت در هوا تا رسیدن به شخص را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=v_1t_1\Rightarrow140=350t_{\text{هوا}}\Rightarrow t_{\text{هوا}}=0/4s$$ زمان انتشار صوت توسط هوا

۲ تندی صوت در فلز بیشتر و زمان حرکت صوت در فلز کوتاه‌تر است، بنابراین:

$$t_{\text{فلز}}=t_{\text{هوا}}-0/36=0/4-0/36\Rightarrow t_{\text{فلز}}=0/04s$$

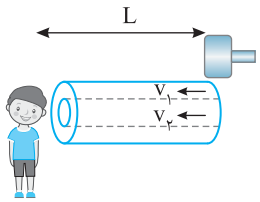
۳ تندی انتشار صوت در فلز خواهد شد:

$$\Delta x=v_{\text{فلز}}t_{\text{فلز}}\Rightarrow140=v_{\text{فلز}}\times0/04\Rightarrow v_{\text{فلز}}=3500m/s$$

B ۱۹۰۵ ۳

سرعت صوت در جامد بیشتر از سرعت صوت در هوا است و $v_۱ > v_۲$ است. پس صوت توسط فلز سریع‌تر و در زمان کوتاه‌تری به شخص می‌رسد.

$$v_۱=\frac{L}{t_۱}\Rightarrow t_۱=\frac{L}{v_۱}$$
$$v_۲=\frac{L}{t_۲}\Rightarrow t_۲=\frac{L}{v_۲}$$
$$\xrightarrow{t_۱<t_۲} t_۲-t_۱=\frac{L}{v_۲}-\frac{L}{v_۱}\Rightarrow \Delta t=\left(\frac{v_۱-v_۲}{v_۱v_۲}\right)L$$



A ۱۹۰۶ ۴

خط فکری ابتدا سر شخص درون آب است. صدای انفجار به گوشش می‌رسد. این صدا از طریق آب منتقل شده است. شخص هیجان‌زده سر خود را از آب بیرون می‌آورد، اما مجدداً صدای انفجار می‌شنود و دوباره وحشت‌زده می‌شود، اما انفجار دومی در کار نیست، بلکه صدای همان انفجار اول است که با تندی کمتری و در زمان طولانی‌تری به گوش شخص رسیده است. محل انفجار تا شخص در هر دو حالت یکی است. اگر شما زمان حرکت صوت در آب را $t_۱$ فرض کنید، زمان حرکت صوت در هوا بنا به داده‌های مسئله برابر $t_۲=t_۱+۱/۷$ ثانیه می‌شود. اکنون کافی است جابه‌جایی‌ها را برابر قرار داده و از حرکت‌شناسی مسئله را حل کنید.

جابه‌جایی‌ها را برابر قرار می‌دهیم.

$$\Delta x_۱=\Delta x_۲\Rightarrow v_۱t_۱=v_۲t_۲ \xrightarrow[v_۲=۳۵۰m/s]{v_۱=۱۵۴۰m/s} ۱۵۴۰t_۱=۳۵۰(t_۱+۱/۷)$$
$$\Rightarrow ۴/۴t_۱=t_۱+۱/۷\Rightarrow t_۱=۰/۵s$$

فاصلهٔ محل انفجار از شخص خواهد شد:

$$\Delta x=vt\Rightarrow \Delta x=۱۵۴۰\times ۰/۵\Rightarrow \Delta x=۷۷۰m$$

B ۱۹۰۷ ۲

سرعت نور در هوا حدود $۳\times ۱۰^۸ m/s$ است و سرعت انتشار صوت در هوا بسیار کمتر از آن و حدود $۳۴۰m/s$ است. بنابراین می‌توان گفت که نور حاصل از آذرخش بلافاصله به چشم می‌رسد، یعنی همین که شما نور را مشاهده کردید، می‌توانید با یک کرونومتر زمان شنیدن صدای رعد (تُندر) را حساب کرده و فاصلهٔ تقریبی ابر تا سطح زمین را به‌دست بیاورید.

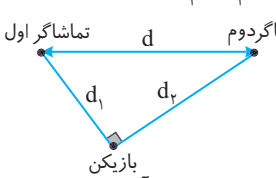
$$d=vt=۳۴۰\times ۲۰=۶۸۰۰m\sim ۷km$$

A ۱۹۰۸ ۱

خط فکری با توجه به زمانی که طول می‌کشد تا تماشاگرها صدای ضربه را بشنوند، به کمک تندی انتشار صوت، فاصلهٔ هر شخص از بازیکن را حساب کنید. سپس به کمک رابطهٔ فیثاغورس فاصلهٔ دو تماشاگر را به‌دست بیاورید.

۱ فاصلهٔ هر تماشاگر از بازیکن را حساب می‌کنیم.

$$d_۱=vt_۱=۳۶۰\times ۰/۷۵=۲۷۰m \quad , \quad d_۲=vt_۲=۳۶۰\times ۱=۳۶۰m$$



۲ فاصلهٔ دو تماشاگر از هم را به‌دست می‌آوریم.

$$d^۲=d_۱^۲+d_۲^۲\Rightarrow d^۲=۲۷۰^۲+۳۶۰^۲\Rightarrow d^۲=۹۰^۲(۳^۲+۴^۲)\Rightarrow d_۲=۹۰^۲(۲۵)$$
$$\Rightarrow d_۲=۹۰\times ۵=۴۵۰m$$

A ۱۹۰۹ ۳

بسامد موج توسط چشمهٔ موج تعیین می‌شود. بسامد صوت حاصل از ارتعاش سیم همان بسامد نوسانات سیم است. یعنی وجه مشترک این دو موج منتشر شده در سیم و هوا، بسامد است. اما تندی انتشار موج به محیط بستگی دارد و تندی انتشار آن‌ها یکی نیست. بنابراین طول موج آن‌ها هم یکی نیست.

B ۱۹۱۰ ۱

خط فکری نسبت طول موج در هوا به طول موج در تار از شما خواسته شده است. بسامد موج در هوا و تار یکسان است. بنابراین با توجه به رابطهٔ $v=f\lambda$ شما برای مقایسهٔ طول موج‌ها باید سرعت انتشار موج در دو محیط را با هم مقایسه کنید. بنابراین تندی موج در تار را حساب کرده و مسئله را حل کنید.

۱ چگالی خطی جرم تار را حساب می‌کنیم.

$$\mu=\frac{m}{\ell}\xrightarrow{m=۲g,\ell=۰/۸m}\mu=\frac{۲\times ۱۰^{-۳}}{۰/۸}\Rightarrow \mu=\frac{۱۰^{-۲}}{۴}\Rightarrow \mu=۲/۵\times ۱۰^{-۳}kg/m$$

۲ تندی انتشار موج در تار را به‌دست می‌آوریم.

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{۱۰۰}{۲/۵\times ۱۰^{-۳}}}\Rightarrow v=\sqrt{۴\times ۱۰^۴}\Rightarrow v=۲۰۰m/s$$

۳ بسامد موج عرضی ایجاد شده در تار و بسامد صوت حاصل از نوسان تار در هوا یکسان است، از این رو:

$$f_{صوت}=f_{تار}=f, \lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow \frac{\lambda_{صوت}}{\lambda_{تار}}=\frac{v_{صوت}}{v_{تار}}=\frac{۳۲۰}{۲۰۰}=\frac{۸}{۵}=۱/۶$$

B ۱۹۱۱ ۲

نمودار داده شده نمودار جابه‌جایی - مکان است که محور افقی آن نشان‌دهندهٔ طول موج و محور قائم آن دامنه را نشان می‌دهد. بنابراین: $A_A=۲A_B$ ، $\lambda_B=۲\lambda_A$

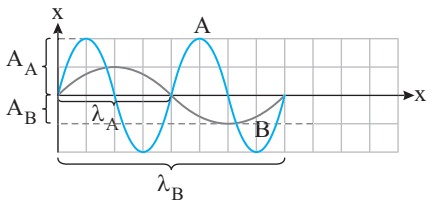
بنابراین گزاره (الف) $(A_A=۲A_B)$ و گزاره (ت) $(\lambda_B=۲\lambda_A)$ درست است.

دو موج در یک محیط منتشر شده‌اند، در این صورت تندی انتشار آن‌ها برابر است $(v_A=v_B)$ و گزارهٔ (پ) نادرست است.

نسبت بسامد دو موج خواهد شد:

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow{v_A=v_B}\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{f_B}{f_A}\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{f_B}{f_A}\Rightarrow f_A=۲f_B$$

بنابراین گزارهٔ (ب) نادرست است.



A ۱۹۱۲ ۲

۱ با توجه به معادلهٔ ارتعاشی چشمه $x=A\cos ۱۷۰۰\pi t$ بسامد زاویه‌ای موج $\omega=۱۷۰۰\pi\ rad/s$ است. از این رو بسامد موج خواهد شد:

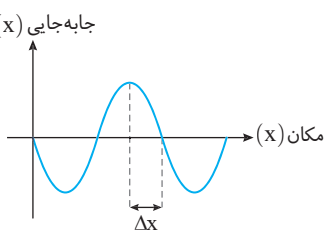
$$\omega=۲\pi f\Rightarrow ۱۷۰۰\pi=۲\pi f\Rightarrow f=۸۵۰Hz$$

۲ طول موج صوت را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{۳۴۰}{۸۵۰}=\frac{۲}{۵}=۰/۴m=۴۰cm$$

۳ با توجه به نمودار جابه‌جایی مکان، فاصلهٔ Δx نشان داده شده روی نمودار برابر $\frac{\lambda}{۴}$ است. در نتیجه:

$$\Delta x=\frac{\lambda}{۴}=۱۰cm$$



A ۱۹۱۳ ۱

بنا به تعریف مقدار انرژی صوتی را که در واحد زمان از واحد سطح عمود بر راستای پیشروی صوت می‌گذرد شدت صوت می‌نامند.

A ۱۹۱۴ ۳

به مقدار انرژی صوتی گذرنده از یکای سطح عمود بر راستای پیشروی صوت در واحد زمان شدت صوت گویند، بنابراین رابطهٔ شدت صوت خواهد شد:

$$I=\frac{E}{A.t}\xrightarrow{P=\frac{E}{t}}I=\frac{P}{A}$$

یکای توان، وات و یکای مساحت متر مربع است، بنابراین یکای شدت صوت برابر W/m^2 است.

A ۱۹۱۵ ۴

یادآوری ۱ شدت صوت برابر مقدار انرژی‌ای است که در یکای زمان از یک سطح عمود بر راستای پیشروی موج می‌گذرد.

۲ شدت صوت با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد. $(I\propto\frac{1}{r^2})$

۳ شدت صوت با مجذور بسامد چشمه نسبت مستقیم دارد. $(I\propto f^2)$

۴ شدت صوت با مجذور دامنه نسبت مستقیم دارد. $(I\propto A^2)$

۵ شدت صوت به محیط انتشار صوت بستگی دارد.

شدت صوت با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد $(I\propto\frac{1}{r^2})$، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند. شدت صوت برابر $I=\frac{E}{At}$ است و به انرژی امواج صوتی بستگی دارد، بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

شدت صوت به محیط انتشار صوت بستگی دارد. به عنوان نمونه لولهٔ اگزوز اتومبیل شدت صوت صدای موتور را با جذب انرژی صوتی کاهش می‌دهد. همچنین هنگام انتشار صوت در هوا صداهایی که دارای بسامد بالا هستند، بیشتر جذب می‌شوند، پس شدت صوت به محیط بستگی دارد.

بازی با سؤال **اگر شدت صوت در فاصلهٔ r_1 از چشمهٔ صوتی I_1 و در فاصلهٔ r_2 از چشمهٔ صوتی I_2 باشد، در این صورت $\frac{I_2}{I_1}$ برابر است با .....**

کنکور دهه‌های گذشته

۱) $\frac{r_1}{r_2}$ ۲) $\frac{r_1^2}{r_2^2}$ ۳) $\frac{r_2^2}{r_1^2}$ ۴) $\frac{r_2}{r_1}$

پاسخ **شدت صوت برابر مقدار انرژی‌ای است که در یکای زمان از یکای سطح عمود بر راستای پیشروی صوت می‌گذرد.** $I=\frac{E}{At}=\frac{P}{A}\ (W/m^2)$

در رابطهٔ بالا A سطحی است که صوت در آن منتشر می‌شود. صوت به صورت امواج کروی در محیط منتشر می‌شود و سطح جبهه‌های کروی صوت با مجذور فاصله نسبت مستقیم دارد $(A=4\pi r^2)$، بنابراین شدت صوت با مجذور فاصله نسبت وارون دارد. $\frac{I_2}{I_1}=(\frac{r_1}{r_2})^2$

گزینهٔ ۲

A ۱۹۱۶ ۳

بنا بر تعریف شدت صوت: $I=\frac{E}{At}\xrightarrow[E=1/5\times10^{-11}J,t=5s]{A=3\times10^{-4}m^2}I=\frac{1/5\times10^{-11}}{3\times10^{-4}\times5}$

$\Rightarrow I=10^{-8}W/m^2=0/01\mu W/m^2$

A ۱۹۱۷ ۱

خط فکری چشمهٔ صوت به‌طور یکنواخت صوت را در همهٔ جهت‌ها منتشر می‌کند و جبهه‌های موج به صورت سطوح کروی شکل هستند که انرژی چشمه روی این سطوح پخش می‌شود، بنابراین در فاصلهٔ r از چشمه مساحت سطح جبهه برابر $A=4\pi r^2$ خواهد بود و این مقدار در رابطهٔ شدت صوت باید به جای A قرار گیرد.

با توجه به تعریف شدت صوت:

$$I=\frac{P}{A}\Rightarrow I=\frac{P}{4\pi r^2}\Rightarrow I=\frac{60}{4\times3\times10^6}=5\times10^{-6}W/m^2=5\mu W/m^2$$

A ۱۹۱۸ ۲

شدت صوت برابر مقدار انرژی است که در یکای زمان از یکای سطح عمود بر راستای انتشار موج می‌گذرد. $I=\frac{E}{At}\xrightarrow{P=\frac{E}{t}}I=\frac{P}{A}$

از طرفی، جبهه‌های موج صوتی، کروی هستند و مساحت این جبهه‌های صوت $A=4\pi r^2$ است که r برابر فاصله از چشمهٔ صوت است.

$$I=\frac{P}{4\pi r^2}\Rightarrow10^{-3}=\frac{4\pi\times10^{-3}}{4\pi r^2}\Rightarrow r=1m$$

B ۱۹۱۹ ۲

شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد.

$$\frac{I_2}{I_1}=(\frac{r_1}{r_2})^2\Rightarrow\frac{I_2}{0/1}=(\frac{640}{160})^2\Rightarrow I_2=1/6W/m^2$$

A ۱۹۲۰ ۲

نکته شدت صوت با مجذور دامنه، نسبت مستقیم و با مجذور فاصله، نسبت وارون دارد.

کافی است در رابطهٔ زیر اطلاعات مسئله را قرار دهیم.

$$\frac{I'}{I}=(\frac{A'}{A})^2\times(\frac{r}{r'})^2\xrightarrow[\frac{r'}{r}=\frac{1}{4}]{\frac{A'}{A}=25}\frac{I'}{I}=(25\times4)^2=10^4$$

A ۱۹۲۱ ۳

شدت صوت با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد.

با توجه به اطلاعات مسئله خواهیم داشت:

$$\frac{I'}{I}=(\frac{r}{r'})^2\xrightarrow{I'=\frac{4}{9}I,\ d'=d+3}\frac{4}{9}=\frac{d^2}{(d+3)^2}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{d}{d+3}\Rightarrow2d+6=3d$$

$$\Rightarrow d=6m$$

B ۱۹۲۲ ۴

۱ شدت صوت با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد بنابراین:

$$\frac{I_2}{I_1}=(\frac{d_1}{d_2})^2\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=(\frac{30}{10})^2\Rightarrow I_2=9I_1\ \ (I)$$

۲ با توجه به فرض مسئله: $I_2-I_1=1/6W/m^2\ \ (II)$

۳ از رابطهٔ (I) و (II) خواهیم داشت:

$$9I_1-I_1=1/6\Rightarrow I_1=0/2W/m^2\Rightarrow I_2=9\times0/2=1/8W/m^2$$

۴ شدت صوت در فاصلهٔ ۳۰cm چشمه برابر $0/2W/m^2$ شده است. بنابراین شدت صوت در فاصلهٔ ۱m منبع خواهد شد:

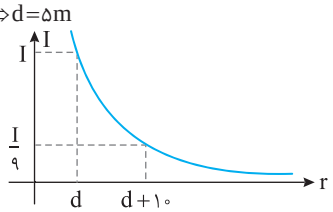
$$\frac{I_3}{I_1}=(\frac{d_1}{d_3})^2\Rightarrow\frac{I_3}{0/2}=(\frac{0/3}{1})^2\Rightarrow I_2=0/2\times0/09\Rightarrow I_2=0/018W/m^2$$

B ۱۹۲۳ ۴

شدت صوت با مربع فاصله از منبع صوت نسبت وارون دارد بنابراین با توجه به نمودار خواهیم داشت:

$$\frac{I_2}{I_1}=(\frac{d_1}{d_2})^2\Rightarrow\frac{\frac{I}{9}}{I}=(\frac{d}{d+10})^2\Rightarrow\frac{1}{9}=(\frac{d}{d+10})^2\Rightarrow\frac{d}{d+10}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow3d=d+10\Rightarrow d=5m$$



اگر در فاصلهٔ d' از چشمهٔ صوت شدت صوت $I'=\frac{I}{25}$ شود داریم:

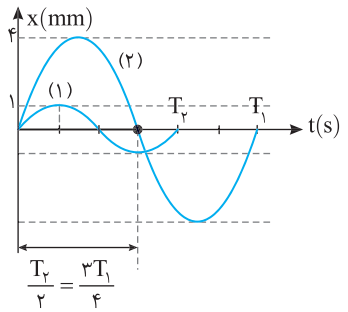
$$\frac{I'}{I}=(\frac{d}{d'})^2\Rightarrow\frac{\frac{I}{25}}{I}=(\frac{d}{d'})^2\Rightarrow\frac{1}{25}=(\frac{d}{d'})^2\Rightarrow\frac{d}{d'}=\frac{1}{5}\Rightarrow d'=5d$$

$$\Rightarrow d'=5\times5=25m$$

۴ ۱۹۲۴ B

خط فکری شدت صوت چشمه (۱)، $\frac{۹}{۴}$ برابر شدت صوت چشمهٔ (۲) است. از طرفی شدت صوت با مجذور بسامد و مجذور دامنه نسبت مستقیم و با مجذور فاصله نسبت وارون دارد. از روی نمودار رابطهٔ دوره $T_۱$ و $T_۲$ و همچنین دامنه‌های $A_۱=۱mm$ و $A_۲=۴mm$ را مشخص کنید سپس نسبت شدت صوت‌ها را به‌دست آورید.

۱ با توجه به نمودار $\frac{T_۲}{۲}=\frac{۳}{۴}T_۱\Rightarrow T_۲=\frac{۳}{۲}T_۱\Rightarrow f_۲=\frac{۲}{۳}f_۱\Rightarrow f_۱=\frac{۳}{۲}f_۲$



۲ شدت صوت با مجذور دامنه و مجذور بسامد نسبت مستقیم و با مجذور فاصله نسبت وارون دارد. از این‌رو:

$$\frac{I_۱}{I_۲}=(\frac{f_۱}{f_۲})^۲\times(\frac{A_۱}{A_۲})^۲\times(\frac{d_۲}{d_۱})^۲\Rightarrow\frac{۹}{۴}=(\frac{۳}{۲})^۲\times(\frac{۱}{۴})^۲\times(\frac{d_۲}{d_۱})^۲\Rightarrow\frac{d_۲}{d_۱}=۴$$

۱ ۱۹۲۵ A

یادآوری تراز شدت صوت به صورت $\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}$ تعریف می‌شود که در آن $I_۰$ شدت صوت مبنا است.

کافی است در رابطهٔ تراز شدت صوت داده‌های مسئله را قرار دهیم.

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\xrightarrow[I_۰=۱۰^{-۱۲}W/m^۲]{\beta=۱۳۰dB}۱۳۰=۱۰\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}=۱۳$$

یادآوری ریاضی $\log_{۱۰}a=b\Rightarrow a=۱۰^b$

بنابراین خواهیم داشت: $\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}=۱۰^{۱۳}\Rightarrow I=۱۰W/m^۲$

۲ ۱۹۲۶ B

یادآوری تراز شدت صوت از رابطهٔ $\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}$ و شدت صوت از رابطهٔ $I=P/A$ محاسبه می‌شود و نباید این دو مفهوم را با یکدیگر اشتباه گرفت.

۱ تراز شدت صوت برابر است با: $\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}$

$$۸۰=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\Rightarrow۸=\log\frac{I}{I_۰}\Rightarrow۱۰^۸=\frac{I}{I_۰}\Rightarrow I=۱۰^۸I_۰=۱۰^{-۴}\frac{W}{m^۲}$$

۲ شدت صوت از رابطهٔ $I=\frac{P}{A}$ به‌دست می‌آید که چون جبهه‌های موج صوتی کروی هستند، $A=۴\pi r^۲$ است:

$$۱۰^{-۴}=\frac{۴۸}{A}\Rightarrow A=۴۸\times۱۰^۴\Rightarrow۴\pi r^۲=۴۸\times۱۰^۴\xrightarrow{\pi=۳}$$

$$۱۲r^۲=۴۸\times۱۰^۴\Rightarrow r^۲=۴\times۱۰^۴\Rightarrow r=۲\times۱۰^۲=۲۰۰m$$

۴ ۱۹۲۷ B

با توجه به تعریف تراز شدت صوت، ابتدا شدت صوت در فاصلهٔ ۵۰ متری چشمه را به‌دست می‌آوریم:

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\xrightarrow{\beta=۶۰dB}۶۰=۱۰\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow I=۱۰^{-۶}\frac{W}{m^۲}$$

اکنون با استفاده از شدت صوت، توان چشمه را حساب می‌کنیم:

$$I=\frac{P}{A}\Rightarrow I=\frac{P}{۴\pi r^۲}\Rightarrow۱۰^{-۶}=\frac{P}{۴\times۳\times۵۰^۲}\Rightarrow P=۰/۰۳W=۳۰mW$$

۳ ۱۹۲۸ A

۱ شدت صوت را در محل پردهٔ گوش شخص به‌دست می‌آوریم:

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\xrightarrow[I=۱۰^{-۱۲}W/m^۲]{\beta=۵۰dB}۵۰=۱۰\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow I=۱۰^{-۷}W/m^۲$$

۲ با توجه به تعریف شدت صوت، انرژی صوتی گذرنده از پردهٔ گوش شنونده در مدت ۵۰s خواهد شد:

$$I=\frac{E}{At}\Rightarrow E=IAt\Rightarrow E=۱۰^{-۷}\times۶۰\times۱۰^{-۶}\times۵۰=۳\times۱۰^{-۱۰}J=۳\times۱۰^{-۴}\mu J$$

۱ ۱۹۲۹ B

شدت صوت چشمه را حساب می‌کنیم.

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\xrightarrow{\beta=۹۰dB}۹۰=۱۰\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}=۱۰^۹$$

$$I=۱۰^{-۳}W/m^۲$$

آهنگ متوسط انتقال انرژی (P) از $۱cm^۲$ خواهد شد:

$$I=\frac{P}{A}\Rightarrow P=IA\Rightarrow P=۱۰^{-۳}\times۱۰^{-۴}\Rightarrow P=۱۰^{-۷}W\Rightarrow P=۱۰^{-۱}\mu W$$

۴ ۱۹۳۰ B

یادآوری ریاضی $\log a\times b=\log a+\log b\,,\log a^n=n\log a$

ابتدا شدت صوت در محل میکروفون را به‌دست می‌آوریم:

$$I=\frac{E}{At}\xrightarrow[A=۲\times۱۰^{-۴}m^۲,t=۲s]{E=۸\times۱۰^{-۱۲}J}I=\frac{۸\times۱۰^{-۱۲}}{۲\times۱۰^{-۴}\times۲}=۲\times۱۰^{-۸}W/m^۲$$

اکنون تراز شدت صوت را حساب می‌کنیم:

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\Rightarrow\beta=۱۰\log\frac{۲\times۱۰^{-۸}}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow\beta=۱۰\log(۲\times۱۰^{+۴})$$

$$\Rightarrow\beta=۱۰[\log۲+\log۱۰^۴]=۱۰(۰/۳+۴)=۴۳dB$$

۴ ۱۹۳۱ B

خط فکری در اطلاعات مسئله $\log۲=۰/۳$ داده شده است. بنابراین شما در محاسبهٔ تراز شدت صوت باید از این مطلب استفاده کنید، به حل دقت کنید.

بنا به تعریف شدت صوت خواهیم داشت:

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\xrightarrow{I=۳/۲\times۱۰^{-۳}W/m^۲}$$

$$\beta=۱۰\log\frac{۳/۲\times۱۰^{-۳}}{۱۰^{-۱۲}}=۱۰\log۳/۲\times۱۰^۹=۱۰(\log۳۲+\log۱۰^۸)$$

تکلیف $\log۱۰^۸$ معلوم است مقدار آن ۸ است اما $\log۳۲$ را چکار باید کرد؟ ۳۲ را به صورت $۲^۵$ بنویسید.

$$\beta=۱۰(\log۲^۵+\log۱۰^۸)=۱۰(۵\log۲+۸)\Rightarrow\beta=۱۰(۵\times۰/۳+۸)=۱۰(۹/۵)$$

$$\Rightarrow\beta=۹۵dB$$

۳ ۱۹۳۲ B

تراز شدت صوت بنا به تعریف $\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}$ است که در آن $I_۰$ شدت صوت مرجع بوده. در صورت مسئله نسبت $\frac{I}{I_۰}$ برابر $۲\sqrt{۱۰}\times۱۰^۵$ داده شده است.

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\Rightarrow\beta=۱۰\log۲\sqrt{۱۰}\times۱۰^۵$$

یادآوری ریاضی $\log ab=\log a+\log b$

اکنون لگاریتم را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\beta=۱۰(\log۲+\log\sqrt{۱۰}+\log۱۰^۵)\Rightarrow\beta=۱۰(۰/۳+\frac{۱}{۲}\log۱۰+۵\log۱۰)$$

$$\xrightarrow{\log۱۰=۱}\beta=۱۰(۰/۳+۰/۵+۵)\Rightarrow\beta=۱۰(۵/۸)=۵۸dB$$

A ۱۹۳۳ | ۳

بنا بر تعریف تراز شدت صوت داریم:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow 15=10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow 1/5=\log\frac{I}{I_0}$$

با توجه به اینکه $\log 2=0/3$ است، عدد $1/5$ را به صورت $5\times 0/3$ می‌نویسیم و به جای $0/3$، $\log 2$ را قرار می‌دهیم.

$$5\times 0/3=\log\frac{I}{I_0}\xrightarrow{\log 2=0/3} 5\log 2=\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow\log 2^5=\log\frac{I}{I_0}$$

$$\Rightarrow\frac{I}{I_0}=2^5\Rightarrow\frac{I}{I_0}=32$$

B ۱۹۳۴ | ۲

با توجه به اینکه در صورت مسئله $\log 3=0/5$ داده شده است، به سراغ حل مسئله بروید. بنا به تعریف تراز شدت صوت بنویسید:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\xrightarrow{\beta=25dB, I_0=10^{-12}W/m^2} 25=10\log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$\Rightarrow 2/5=\log\frac{I}{10^{-12}}\xrightarrow{2/5=2+0/5} 2+0/5=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

به جای ۲، $\log 10^2$ و به جای $0/5$، $\log 3$ را قرار می‌دهیم.

$$\log 10^2+\log 3=\log\frac{I}{10^{-12}}\xrightarrow{\log a+\log b=\log ab}$$

$$\log 3\times 10^2=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow\frac{I}{10^{-12}}=3\times 10^2\Rightarrow I=3\times 10^{-10}W/m^2$$

B ۱۹۳۵ | ۱

رابطهٔ تراز شدت صوت را می‌نویسیم:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow 66=10\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow 6/6=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow 6+0/6=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

به جای ۶، $\log 2$ و به جای $0/6$، $2\log 2$ قرار می‌دهیم.

$$\log 10^6+2\log 2=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow 4\times 10^6=\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow I=4\times 10^{-6}W/m^2$$

دقت کنید در حل این تست نباید به جای عدد $6/6$ مقدار $22\times 0/3$ یا $22\times\log 2$ را قرار داد زیرا خواهیم داشت: $22\log 2=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow I=2^{22}\times 10^{-12}W/m^2$

که در گزینه‌ها نیست و نیز در روش اول ما دو بار از تقریب $\log 2=0/3$ استفاده کرده‌ایم در حالی که در روش دوم ۲۲ بار این تقریب به‌کار برده شده پس جواب در حالت اول به مقدار واقعی نزدیک‌تر است.

بازی با سؤال **تراز شدت صوتی ۲۶ دسی‌بل است. شدت این صوت، چند وات بر مترمربع است؟** $(\log 2=0/3, I_0=10^{-12}W/m^2)$ ریاضی - ۹۰

۱) 4×10^{-10} ۲) 2×10^{-4} ۳) 4×10^{-4} ۴) 2×10^{-10}

پاسخ **تراز شدت صوت برحسب دسی‌بل، بنا به تعریف برابر است با:**

$$\beta=\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow 26=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow 2/6=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow 2+0/6=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

به جای عدد ۲، $\log 10^2$ و به جای عدد $0/6$، $2\log 2$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\log 10^2+2\log 2=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow\log(2^2\times 10^2)=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$\Rightarrow 2^2\times 10^2=\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow I=4\times 10^{-10}W/m^2$$

گزینهٔ ۱

B ۱۹۳۶ | ۳

خط فکری در حل این تست باید از $\log 5=0/7$ استفاده کنید یعنی هرجا که $0/7$ دیده شد، $\log 5$ را به جای آن قرار دهید.

تراز شدت صوت برحسب دسی‌بل بنا بر تعریف برابر است با:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\xrightarrow{\beta=37dB, I_0=10^{-12}W/m^2} 37=10\log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$\Rightarrow 3/7=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow 3+0/7=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

به‌جای عدد ۳، $\log 10^3$ و به جای عدد $0/7$، $\log 5$ را قرار می‌دهیم.

$$\log 10^3+\log 5=\log\frac{I}{10^{-12}}\xrightarrow{\log a+\log b=\log ab}$$

$$\log(5\times 10^3)=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow I=5\times 10^{-9}W/m^2$$

B ۱۹۳۷ | ۴

تراز شدت صوت برحسب دسی‌بل برابر است با:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\xrightarrow{\beta=159dB} 159=10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow 15/9=\log\frac{I}{I_0}$$

$$\Rightarrow 15+0/9=\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow 15+3(0/3)=\log\frac{I}{I_0}$$

به جای عدد ۱۵، مقدار $\log 10^{15}$ و به جای عدد $0/3$ مقدار $\log 2$ را قرار می‌دهیم.

$$\xrightarrow{I_0=10^{-12}W/m^2}\log 10^{15}+3\log 2=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$\xrightarrow{n\log a=\log a^n}\log 10^{15}+\log 2^3=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$\Rightarrow 8\times 10^{15}=\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow I=8000W/m^2$$

B ۱۹۳۸ | ۳

ابتدا شدت صوت دریافتی توسط شنونده را به‌دست می‌آوریم:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\xrightarrow{\beta=90dB, I_0=10^{-12}W/m^2} 90=10\log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$\Rightarrow 10^9=\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow I=10^{-3}W/m^2$$

امواج صوتی به صورت امواج کروی در محیط منتشر می‌شوند و سطح جبهه‌های کروی صوت $A=4\pi r^2$ است که r فاصله از چشمهٔ صوت است. بنا به تعریف شدت صوت خواهیم داشت:

$$I=\frac{P}{A}\Rightarrow I=\frac{P}{4\pi r^2}\xrightarrow{P=120W,\pi=3} 10^{-3}=\frac{120}{4\times 3\times r^2}\Rightarrow r^2=10^4\Rightarrow r=100m$$

B ۱۹۳۹ | ۱

در گام اول به کمک تعریف تراز شدت صوت، شدت صوت در مکان مورد نظر را به‌دست می‌آوریم.

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\xrightarrow[I_0=10^{-12}W/m^2]{\beta=96d\beta} 96=10\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow 9/6=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

به سراغ ریاضی می‌رویم و عدد $9/6$ را به صورت $9+0/6$ می‌نویسیم. به جای عدد ۹، $\log 10^9$ و به جای عدد $0/6$، $2\log 2$ را قرار می‌دهیم. از این‌رو می‌نویسیم:

$$\log 10^9+2\log 2=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

یادآوری ریاضی $\log a^n=n\log a\ ,\ \log a+\log b=\log ab$

به توجه به یادآوری ریاضی خواهیم داشت:

$$\log 10^9+\log 2^2=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow\log 2^2\times 10^9=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$\Rightarrow 4\times 10^9=\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow I=4\times 10^{-3}W/m^3$$

یادآوری شدت صوت برابر مقدار انرژی است که در مدت ۱s از سطحی به مساحت $1m^2$ می‌گذرد.

$$I=\frac{E}{A.t}$$

با توجه به تعریف شدت صوت، مقدار انرژی گذرنده از سطحی به مساحت $1mm^2$ خواهد شد:

$$E=IA.t\xrightarrow[t=60s]{A=10^{-6}m^2} E=4\times 10^{-3}\times 10^{-6}\times 60$$

$$\Rightarrow E=0/24\times 10^{-6}\Rightarrow E=0/24\mu J$$

B ۱۹۴۰ ۳

خط فکری تراز شدت صوت یک تابع لگاریتمی به صورت $\beta=10\log\frac{I}{I_0}$ است. اما یادتان باشد که اگر در مسئله برای دو حالت مختلف، تراز شدت صوت به شما داده شود معمولاً شما باید برای هر دو حالت رابطه تراز شدت صوت را بنویسید، سپس آن‌ها را از هم کم کنید. دقت کنید که از تقسیم دو رابطه برهم شما به تقسیم دو لگاریتم می‌رسید که کاربردی در حل مسئله ندارد. البته شما در ریاضی یاد گرفته‌اید که $\log a-\log b=\log\frac{a}{b}$.

شدت صوت ۱۰۰۰ برابر شده است از این‌رو برای هر دو حالت رابطه تراز شدت صوت به صورت زیر است و خواهیم داشت:

$$\beta_1=10\log\frac{I_1}{I_0},\beta_2=10\log\frac{I_2}{I_0}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10(\log\frac{I_2}{I_0}-\log\frac{I_1}{I_0})=10\log\frac{I_2}{I_1}$$

$$\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log10^3\Rightarrow\Delta\beta=30dB$$

بنابراین تراز شدت صوت ۳۰ دسی‌بل افزایش می‌یابد.

B ۱۹۴۱ ۳

خط فکری تراز شدت صوت‌ها را در دو حالت می‌نویسیم و آن‌ها را از هم کم می‌کنیم و رابطهٔ بین I_2 و I_1 را به‌دست می‌آوریم.

یادآوری ریاضی $\log a-\log b=\log\frac{a}{b}$

$$\begin{cases}\beta_1=10\log\frac{I_1}{I_0}\\ \beta_2=10\log\frac{I_2}{I_0}\end{cases}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{\frac{I_2}{I_0}}{\frac{I_1}{I_0}}$$

$$\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}$$

تراز شدت صوت‌ها را به ترتیب ۲۷dB و ۴۷dB را در رابطه قرار می‌دهیم و نسبت شدت صوت‌ها را حساب می‌کنیم.

$$47-27=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow20=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow\log\frac{I_2}{I_1}=2\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=100$$

B ۱۹۴۲ ۳

با توجه به تعریف تراز شدت صوت داریم: $\beta=10\log\frac{I}{I_0}$

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow45-40=5=10\log\frac{I_2}{I_1}$$

$$\Rightarrow0/5=\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$$

A ۱۹۴۳ ۱

یادآوری ریاضی $\log a-\log b=\log\frac{a}{b}$

اختلاف تراز شدت صوت این دو صوت برابر است با:

$$\beta_2-\beta_1=0/3\xrightarrow{\beta=10\log\frac{I}{I_0}}\log\frac{I_2}{I_0}-\log\frac{I_1}{I_0}=0/3\Rightarrow\log\frac{I_2}{I_1}=\log2$$

$$\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=2$$

بازی با سؤال تراز شدت صوتی از ۳۰ دسی‌بل به ۳۶ دسی‌بل می‌رسد. شدت صوت چند برابر شده است؟ $(\log2=0/3)$ خارج ریاضی - ۹۷

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) $\frac{6}{5}$ ۴) $\frac{36}{25}$

پاسخ تراز شدت صوت برحسب دسی‌بل بنا به تعریف برابر است با:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}$$

$$\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{\frac{I_2}{I_0}}{\frac{I_1}{I_0}}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}$$

$$36-30=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow\log\frac{I_2}{I_1}=0/6$$

به جای ۰/۶، مقدار $2\times0/3$ یعنی $2\log2$ را قرار می‌دهیم.

گزینهٔ ۱ $\log\frac{I_2}{I_1}=2\times0/3=2\log2\Rightarrow\log\frac{I_2}{I_1}=\log2^2\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=4$

A ۱۹۴۴ ۱

با توجه به تعریف تراز شدت صوت:

$$\beta_1-\beta_2=10\log\frac{I_1}{I_2}\Rightarrow12=10\log\frac{I_1}{I_2}\Rightarrow1/2=\log\frac{I_1}{I_2}$$

$$\Rightarrow4\log2=\log\frac{I_1}{I_2}\Rightarrow\log2^4=\log\frac{I_1}{I_2}\Rightarrow\frac{I_1}{I_2}=16$$

B ۱۹۴۵ ۴

تراز شدت صوت را در دو حالت نوشته از هم کم می‌کنیم:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}$$

$$\xrightarrow{\log a-\log b=\log\frac{a}{b}}\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}=10\log\frac{500}{100}$$

$$\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log5$$

اکنون به جای $5=\frac{10}{2}$ را قرار می‌دهیم و به جای $\log\frac{10}{2}$ می‌نویسیم $\log10-\log2$ بنابراین:

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{10}{2}=10(\log10-\log2)\xrightarrow{\log2=0/3}$$

$$\beta_2-\beta_1=10(1-0/3)=7dB$$

بازی با سؤال تراز شدت صوت دو چشمهٔ صوت در یک نقطه به ترتیب $\beta_1=90dB$ و $\beta_2=95dB$ است. نسبت شدت صوت دو چشمه در این نقطه $(\frac{I_2}{I_1})$ کدام است؟ $(\log3=0/5)$

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ بنابه تعریف تراز شدت صوت، خواهیم داشت:

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow95-90=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow0/5=\log\frac{I_2}{I_1}$$

$$\Rightarrow\log3=\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=3$$

گزینهٔ ۱

A ۱۹۴۶ ۱

خط فکری با توجه به صورت مسئله $\beta_2=5\beta_1$ و $I_2=16I_1$ است. بنا به تعریف تراز شدت صوت به جای β_1 و β_2 قرار دهید و به کمک روابط لگاریتم مسئله را حل کنید.

با توجه به فرض مسئله:

$$\beta_2=5\beta_1\xrightarrow{\beta=10\log\frac{I}{I_0}}\log\frac{I_2}{I_0}=5\log\frac{I_1}{I_0}\xrightarrow{I_2=16I_1}$$

$$\log\frac{16I_1}{I_0}=5\log\frac{I_1}{I_0}\xrightarrow{n\log a=\log a^n}\log\frac{16I_1}{I_0}=\log(\frac{I_1}{I_0})^5$$

$$\Rightarrow\frac{16I_1}{I_0}=(\frac{I_1}{I_0})^5\Rightarrow16=(\frac{I_1}{I_0})^4\Rightarrow I_1=2I_0\Rightarrow I_1=2\times10^{-12}W/m^2$$

بازی با سؤال اگر شـدت صوت چشـمه‌ای را ۸ برابر کنیم، تراز شدت صـوت برای شـنونده‌ای که بـه فاصلهٔ معینی از چشـمه قـرار دارد، ۱/۳ برابر می‌شـود، تـراز شـدت صـوت اولیه برای شـنونده چند دسـی‌بل بوده اسـت؟ $(\log ۲=۰/۳)$

ریاضی - ۹۵

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۰ ۴) ۳۹

پاسخ با توجه به رابطهٔ ریاضی $\log ab=\log a+\log b$ به جای $\log \frac{۸I}{I_۰}$ می‌نویسیم: $\log ۸+\log \frac{I}{I_۰}$: $\log ۸+\log \frac{I}{I_۰}=۱/۳ \log \frac{I}{I_۰}$

$$\Rightarrow \log ۸=۱/۳ \log \frac{I}{I_۰}-\log \frac{I}{I_۰} \Rightarrow \log ۸=۰/۳ \log \frac{I}{I_۰}$$

به جای $\log ۸$، $\log ۲^۳$ می‌نویسیم.

$$\log ۲^۳=۰/۳ \log \frac{I}{I_۰} \xrightarrow{\log a^n=n \log a} ۳ \log ۲=۰/۳ \log \frac{I}{I_۰}$$

$$\xrightarrow{\log ۲=۰/۳} ۳\times ۰/۳=۰/۳ \log \frac{I}{I_۰} \Rightarrow \log \frac{I}{I_۰}=۳$$

تراز شدت صوت اولیه خواهد شد: $\beta=۱۰ \log \frac{I}{I_۰}=۱۰\times ۳=۳۰dB$

گزینهٔ ۳

B ۱۹۴۷ ۳

اختلاف تراز شدت صوت A و B از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\beta_A-\beta_B=۱۰ \log \frac{I_A}{I_B}$$

با توجه به فرض مسـئله $\beta_A-\beta_B=۱۰dB$ و $I_A=۰/۰۴W/m^۲$ است. از این رو خواهیم داشت:

$$۱۰=۱۰ \log \frac{۰/۰۴}{I_B} \Rightarrow \log \frac{۰/۰۴}{I_B}=۱ \Rightarrow \frac{۰/۰۴}{I_B}=۱۰$$

$$\Rightarrow I_B=\frac{۰/۰۴}{۱۰}=۰/۰۰۴W/m^۲$$

در این صورت اختلاف شدت این دو صوت خواهد شد:

$$I_A-I_B=۰/۰۴-۰/۰۰۴=۰/۰۳۶W/m^۲ \Rightarrow I_A-I_B=۳۶\ mW/m^۲$$

B ۱۹۴۸ ۳

با توجه به تعریف تراز شدت صوت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \beta_A=۱۰ \log \frac{I_A}{I_۰} \\ \beta_B=۱۰ \log \frac{I_B}{I_۰} \end{cases} \Rightarrow \beta_A-\beta_B=۱۰(\log \frac{I_A}{I_۱}-\log \frac{I_B}{I_۰})$$

$$\beta_A-\beta_B=۱۰ \log \frac{I_A}{I_B}$$

با توجه به فرض مسئله $\beta_A-\beta_B=۱۱/۵dB$ بنابراین:

$$۱۱/۵=۱۰ \log \frac{I_A}{I_B} \Rightarrow ۱/۱۵=\log \frac{I_A}{I_B}$$

$$۱+۰/۱۵=\log \frac{I_A}{I_B} \xrightarrow{۰/۱۵=۰/۵\times ۰/۳=۰/۵ \log ۲}$$

$$\log ۱۰+\frac{۱}{۲} \log ۲=\log \frac{I_A}{I_B} \Rightarrow \log ۱۰+\log ۲^{\frac{۱}{۲}}=\log \frac{I_A}{I_B}$$

$$\Rightarrow \log ۱۰\sqrt{۲}=\log \frac{I_A}{I_B} \Rightarrow \frac{I_A}{I_B}=۱۰\sqrt{۲}$$

B ۱۹۴۹ ۴

خط فکری هرگاه شـدت صوت منبع صوتی I باشـد و n منبع مشابه با این شدت صوت در کنار هم صوت تولید کنند شـدت صوت حاصل از آن $I'=nI$ خواهد بود. از شما تغییر تراز شدت صوت خواسته شده است، بنابراین تراز شدت صوت را در دو حالت نوشته از هم کم کنید و به جای $I_۲$، $۵I_۱$ قرار دهید.

با توجه به تعریف تراز شدت صوت خواهیم داشت:

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰ \log \frac{I_۲}{I_۰}-۱۰ \log \frac{I_۱}{I_۰}=۱۰ \log \frac{\frac{I_۲}{I_۰}}{\frac{I_۱}{I_۰}} \Rightarrow \beta_۲-\beta_۱=۱۰ \log \frac{I_۲}{I_۱}$$

$$\xrightarrow{I_۲=۵I_۱} \beta_۲-\beta_۱=۱۰ \log \frac{۵I_۱}{I_۱}=\log ۵$$

به جای $\log ۵$، $\log \frac{۱۰}{۲}$ را قرار می‌دهیم.

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰ \log \frac{۱۰}{۲}=۱۰\ (\log ۱۰-\log ۲) \xrightarrow{\log ۱۰=۱, \log ۲=۰/۳}$$

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\times (۱-۰/۳)=۷dB$$

بنابراین تراز شدت صوت ۷dB افزایش می‌یابد.

B ۱۹۵۰ ۴

تراز شدت صوت برحسب دسی‌بل بنا به تعریف برابر است با:

$$\beta=۱۰ \log \frac{I}{I_۰} \Rightarrow \beta_B-\beta_A=۱۰ \log \frac{I_B}{I_۰}-۱۰ \log \frac{I_A}{I_۰}=۱۰ \log \frac{\frac{I_B}{I_۰}}{\frac{I_A}{I_۰}}$$

$$\Rightarrow \beta_B-\beta_A=۱۰ \log \frac{I_B}{I_A}\ (I)$$

از طرفی شدت صوت با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد.

$$\frac{I_B}{I_A}=(\frac{r_A}{r_B})^۲ \Rightarrow \frac{I_B}{I_A}=(\frac{۶}{۳})^۲ \Rightarrow \frac{I_B}{I_A}=۲^۲$$

در رابطهٔ (I) به جای $\frac{I_B}{I_A}=۲^۲$ را قرار می‌دهیم.

$$\beta_B-\beta_A=۱۰ \log ۲^۲=۲۰ \log ۲ \xrightarrow{\log ۲=۰/۳} \beta_B-\beta_A=۲۰\times ۰/۳=۶dB$$

B ۱۹۵۱ ۲

یادآوری شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد $(I \propto \frac{۱}{r^۲})$.

به کمک رابطهٔ اختلاف تراز شدت صوت مسئله به راحتی حل می‌شود.

$$\beta_۲-\beta_۱=\log \frac{I_۲}{I_۱} \Rightarrow \Delta\beta=۱۰ \log (\frac{r_۱}{r_۲})^۲ \Rightarrow \Delta\beta=۱۰ \log (\frac{۱}{۲})^۲$$

$$\Delta\beta=۱۰ \log (۲)^{-۲}=-۲۰ \log ۲=-۲۰\times ۰/۳ \Rightarrow \Delta\beta=-۶dB$$

تراز شدت صوت ۶ دسی‌بل کاهش می‌یابد.

B ۱۹۵۲ ۲

خط فکری نسـبت دو شـدت صوت با بسامد و دامنه رابطهٔ مستقیم و مجذوری و با فاصله رابطهٔ عکس و مجذوری دارد: $\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{f_۲}{f_۱}\times \frac{A_۲}{A_۱}\times \frac{r_۱}{r_۲})^۲$

اگر چشمه ثابت باشد و تنها فاصله تغییر کند بسامد و دامنه ثابت می‌ماند: $\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{r_۱}{r_۲})^۲$

با توجه به تعریف تراز شدت صوت، اختلاف تراز شدت صورت برابر با:

$$\beta_۱-\beta_۲=۱۰ \log \frac{I_۱}{I_۰}-۱۰ \log \frac{I_۲}{I_۰}=۱۰ \log \frac{I_۱}{I_۲}=۱۸ \Rightarrow ۱/۸=\log (\frac{I_۱}{I_۲})$$

در حالت کلی با توجه به عدد به‌دست آمده، مضاربی از ۰/۳ یا نزدیک‌ترین عدد صحیح را که بتوان با جمع و یا تفریق ۰/۳ یا مضاربی از آن به عدد مذکور رسید را پیدا می‌کنیم.

در این سؤال می‌توان ۱/۸ را به صورت ۶×۰/۳ نوشت:

$$۶\times۰/۳=\log(\frac{I_۱}{I_۲})\xrightarrow{۰/۳=\log ۲}۶\log ۲=\log(\frac{I_۱}{I_۲})\Rightarrow ۲^۶=(\frac{I_۱}{I_۲})$$

شدت صوت با مجذور فاصله رابطهٔ عکس دارد:

$$\frac{I_۱}{I_۲}=(\frac{d_۲}{d_۱})^۲=۲^۶\Rightarrow\frac{d_۲}{d_۱}=۲^۳\Rightarrow\frac{d_۲}{d_۱}=۸$$

بازی با سؤال شنونده‌ای که در فاصلهٔ ۸ متری یک منبع صوت قرار دارد، چند متر به منبع صوت نزدیک شود تا صوت منبع را با تراز شدت ۱۲ دسی‌بل بیشتر از حالت قبل احساس کند؟ $(\log ۲=۰/۳)$ ریاضی - ۹۱

۱) ۷/۵ ۲) ۶ ۳) ۴/۵ ۴) ۲

پاسخ با توجه به تعریف تراز شدت صوت:

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}\Rightarrow ۱۲=۱۰\log(\frac{d_۱}{d_۲})^۲\Rightarrow ۱/۲=\log(\frac{d_۱}{d_۲})^۲$$

$$\Rightarrow ۴\times۰/۳=\log(\frac{d_۱}{d_۲})^۲\Rightarrow ۴\log ۲=\log(\frac{d_۱}{d_۲})^۲\Rightarrow ۲^۴=(\frac{d_۱}{d_۲})^۲$$

$$\Rightarrow ۲^۲=\frac{d_۱}{d_۲}\Rightarrow ۲^۲=\frac{۸}{d_۲}\Rightarrow d_۲=۲m$$

بنابراین باید $۸-۲=۶m$ به چشمه نزدیک شود.

گزینهٔ ۲

۲ ۱۹۵۳ B

۱ امواج صوتی در یک فضای باز به صورت جبهه‌های کروی در محیط منتشر می‌شوند و سطح این جبهه‌ها $A=۴\pi r^۲$ است که در آن r فاصله از چشمهٔ صوت است. شدت صوت با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد. از این‌رو خواهیم داشت:

$$\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{r_۱}{r_۲})^۲\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=\frac{۱}{۱۰۰}$$

۲ تراز شدت صوت بنا به تعریف برابر $\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}$ است.

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۰}-۱۰\log\frac{I_۱}{I_۰}=۱۰\log\frac{\frac{I_۲}{I_۰}}{\frac{I_۱}{I_۰}}\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}$$

$$\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{۱}{۱۰۰}=۱۰\log ۱۰^{-۲}\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=-۲۰dB$$

تراز شدت صوت ۲۰dB کاهش می‌یابد.

۴ ۱۹۵۴ A

شدت صوت با توان چشمه نسبت مستقیم و با جذر فاصله از چشمه نسبت وارون دارد.

$$I=\frac{P}{A}=\frac{P}{۴\pi r^۲}\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=\frac{P_۲}{P_۱}\times(\frac{r_۱}{r_۲})^۲\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=۲\times(۲)^۲\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=۸$$

تغییر تراز شدت صوت خواهد شد:

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}\Rightarrow\Delta\beta=۱۰\log ۸=۱۰\log ۲^۳$$

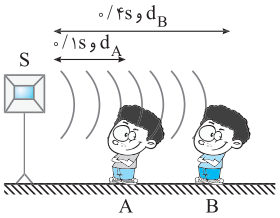
$$\Rightarrow\Delta\beta=۳۰\log ۲\Rightarrow\Delta\beta=۳۰\times۰/۳\Rightarrow\Delta\beta=۹dB$$

۹ دسی‌بل افزایش می‌یابد.

۴ ۱۹۵۵ B

یادآوری سرعت انتشار موج در یک محیط ثابت است: $v_{\text{موج}}=\frac{\Delta x_{\text{پیشروی}}}{\Delta t}$

۱ با توجه به سؤال شخص A زودتر صدا را شنیده و به منبع نزدیک‌تر است:



$$v_{\text{موج}}=\frac{\Delta x_{\text{پیشروی}}}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow v_{\text{صوت}}=\frac{d_A}{\Delta t_A}=\frac{d_A}{۰/۱}$$

$$v_{\text{صوت}}=\frac{d_B}{\Delta t_B}=\frac{d_B}{۰/۴}$$

$$\xrightarrow{v_{\text{صوت}}=v_{\text{صوت}}}\frac{d_A}{۰/۱}=\frac{d_B}{۰/۴}\Rightarrow\frac{d_A}{۱}=\frac{d_B}{۴}\Rightarrow d_B=۴d_A$$

یادآوری اختلاف تراز شدت صوت برابر $\Delta\beta=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}$ است.

۲ نسبت شدت صوت‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\frac{I_A}{I_B}=(\frac{f_A}{f_B})^۲\times(\frac{A_A}{A_B})^۲\times(\frac{d_B}{d_A})^۲\xrightarrow{\substack{f_A=f_B\\A_A=A_B}}\frac{I_A}{I_B}=(\frac{d_B}{d_A})^۲\Rightarrow\frac{I_A}{I_B}=۱۶$$

۳ اختلاف تراز شدت صوت را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta\beta=۱۰\log\frac{I_A}{I_B}\Rightarrow\Delta\beta=۱۰\log ۱۶\Rightarrow\Delta\beta=۱۰\log ۲^۴$$

$$\Rightarrow\Delta\beta=۴۰\log ۲\Rightarrow\Delta\beta=۴۰\times۰/۳=۱۲dB$$

۳ ۱۹۵۶ B

۱ با توجه به تعریف تراز شدت صوت می‌توان نوشت:

$$\beta_۱-\beta_۲=۱۰\log\frac{I_۱}{I_۰}-۱۰\log\frac{I_۲}{I_۰}\Rightarrow\beta_۱-\beta_۲=۱۰\log\frac{\frac{I_۱}{I_۰}}{\frac{I_۲}{I_۰}}\Rightarrow\beta_۱-\beta_۲=۱۰\log\frac{I_۱}{I_۲}\quad(I)$$

۲ شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد. $\frac{I_۱}{I_۲}=(\frac{r_۲}{r_۱})^۲\quad(II)$

۳ با توجه به فرض مسئله $\beta_۱=۵۴dB$ و $\beta_۲=۴۰dB$ است اکنون رابطهٔ (II) را در رابطهٔ (I) قرار می‌دهیم:

$$۵۴-۴۰=۱۰\log(\frac{r_۲}{r_۱})^۲\Rightarrow ۱/۴=\log(\frac{r_۲}{r_۱})^۲$$

به جای عدد ۱/۴ مقدار ۶/۰-۲ و به جای ۰/۶=۲×۰/۳ را قرار می‌دهیم.

$$۲-۰/۶=\log(\frac{r_۲}{r_۱})^۲\Rightarrow ۲-۲\times۰/۳=\log(\frac{r_۲}{r_۱})^۲\xrightarrow{\log ۱۰^۲=۲,\log ۲=۰/۳}$$

$$\log ۱۰^۲-۲\log ۲=\log(\frac{r_۲}{r_۱})^۲\Rightarrow\frac{۱۰۰}{۴}=(\frac{r_۲}{r_۱})^۲\Rightarrow r_۲=۵r_۱$$

۴ با توجه به فرض $r_۲-r_۱=۳۶m$ است.

$$۵r_۱-r_۱=۳۶\Rightarrow r_۱=۹m$$

۳ ۱۹۵۷ A

شدت صوت با مجذور فاصله نسبت وارون دارد. $\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{r_۱}{r_۲})^۲$

با توجه به تعریف تراز شدت صوت می‌توان نوشت:

$$\beta_۱-\beta_۲=۱۰\log\frac{I_۱}{I_۲}\Rightarrow ۴۶-۲۰=۱۰\log(\frac{r_۲}{r_۱})^۲$$

$$۲/۶=۲\log(\frac{r_۲}{r_۱})\Rightarrow\log(\frac{r_۲}{r_۱})=۱/۳=\log ۱۰+\log ۲$$

$$\log\frac{r_۲}{r_۱}=\log ۲۰\Rightarrow\frac{r_۲}{r_۱}=۲۰\Rightarrow r_۲=۲۰r_۱$$

با توجه به فرض مسئله:

$$r_۲-r_۱=۹۵\Rightarrow ۲۰r_۱-r_۱=۹۵\Rightarrow ۱۹r_۱=۹۵$$

$$r_۱=۵m, r_۲=۲۰\times۵=۱۰۰m$$

B ۱۹۶۲ ۱

خط فکری در سؤالاتی که تراز شدت صوت در چند نقطه داده می‌شود به نکات زیر دقت کنید:

الف) شدت صوت برابر $I=\frac{P}{A}$ است که در این رابطه $A=۴\pi r^۲$ و r فاصله از چشمهٔ صوت و P توان چشمه صوت است.

ب) اگر چشمهٔ صوت یکسان و فاصله‌ها در حال تغییر باشند، توان چشمه P در هر نقطه ثابت اما A با توجه به فاصله از چشمه در حال تغییر است.

پ) تراز شدت صوت برابر است با:

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}$$ (شدت صوت در نقطه خواسته شده ← تراز شدت صوت برحسب دسی بل، تراز شدت صوت مبنا)

اختلاف تراز شدت صوت در دو نقطهٔ دلخواه (۱) و (۲) برابر است:

$$\Delta\beta=\beta_۲-\beta_۱\Rightarrow\Delta\beta=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۰}-۱۰\log\frac{I_۱}{I_۰}$$

$$\Delta\beta=۱۰(\log\frac{I_۲}{I_۰}-\log\frac{I_۱}{I_۰})\xrightarrow{\log a-\log b=\log\frac{a}{b}}\Delta\beta=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}$$

ت) نسبت شدت صوت در دو نقطه برابر است با:

$$\frac{I_۲}{I_۱}=\frac{P_۲}{P_۱}\times\frac{A_۱}{A_۲}\xrightarrow[A=۴\pi r^۲]{P\propto f^۲,\ P\propto A^۲}\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{f_۲}{f_۱})^۲\times(\frac{A_۲}{A_۱})^۲\times(\frac{r_۱}{r_۲})^۲$$

(بسامد چشمه موج، دامنه چشمه موج، مساحت سطح جبهه صوت)

که اگر چشمه ثابت باشد: $\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{r_۱}{r_۲})^۲$

جمع‌بندی از نکات لگاریتم که در این بخش به آن نیاز داریم:

$\log a+\log b=\log ab$ $\quad\log a-\log b=\log\frac{a}{b}$

$\log a^b=b\log a$ $\quad\log a=\log b\Rightarrow a=b$

$\log ۱۰^a=a\log ۱۰=a$

۱ اختلاف تراز شدت صوت در دو نقطهٔ A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta\beta=\beta_A-\beta_B\xrightarrow[\beta_B=۱۰\log\frac{I_B=\frac{۵}{۶}I_A}{I_۰}=\frac{۵}{۶}\beta_A]{\beta_A=۱۰\log\frac{I_A}{I_۰}=\beta}$$

$$\beta_A-\frac{۵}{۶}\beta_A=۱۰(\log\frac{I_A}{I_۰}-\log\frac{I_B}{I_۰})\Rightarrow\frac{\beta_A}{۶}=۱۰\log\frac{I_A}{I_B}$$

۲ چشمه ثابت است و شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد یعنی $\frac{I_A}{I_B}$ برابر $(\frac{r_B}{r_A})^۲$ است:

$$\frac{\beta_A}{۶}=۱۰\log(\frac{r_B}{r_A})^۲\xrightarrow{r_B=۲r_A}\frac{\beta_A}{۶}=۱۰\log(۲)^۲$$

$$\xrightarrow{\log a^b=b\log a}\frac{\beta_A}{۶}=۲۰\log ۲$$

$$\xrightarrow{\log ۲=۰/۳}\frac{\beta_A}{۶}=۶\Rightarrow\beta_A=۳۶dB$$

۳ حال اختلاف تراز شدت صوت بین A و C را به‌دست می‌آوریم:

$$\beta_A-\beta_C=۱۰\log\frac{I_A}{I_۰}-۱۰\log\frac{I_C}{I_۰}\Rightarrow۳۶-\beta_C=۱۰(\log\frac{I_A}{I_C})$$

$$\xrightarrow[۱۶=۲^۴]{\frac{I_A}{I_C}=(\frac{r_C}{r_A})^۲=۱۶}۳۶-\beta_C=۱۰\log ۲^۴\xrightarrow{\log a^b=b\log a}$$

$$۳۶-\beta_C=۴۰\log ۲\xrightarrow{\log ۲=۰/۳}۳۶-\beta_C=۱۲\Rightarrow\beta_C=۲۴dB$$

B ۱۹۵۸ ۳

۱ نسبت شدت صوت در محل سطح (۲) به شدت صوت در محل سطح (۱) برابر است با:

$$\frac{I_۲}{I_۱}=\frac{\frac{P_۲}{A_۲}}{\frac{P_۱}{A_۱}}\xrightarrow{P_۲=P_۱=\text{توان چشمه}}\frac{I_۲}{I_۱}=\frac{A_۱}{A_۲}\xrightarrow{A_۲=۵A_۱}\frac{I_۲}{I_۱}=\frac{۱}{۵}$$

۲ تراز شدت صوت در دو محل را نوشته از هم کم می‌کنیم:

$$\beta_۱-\beta_۲=۱۰\log\frac{I_۱}{I_۰}-۱۰\log\frac{I_۲}{I_۰}\xrightarrow{\log a-\log b=\log\frac{a}{b}}$$

$$\beta_۱-\beta_۲=۱۰\log\frac{\frac{I_۱}{I_۰}}{\frac{I_۲}{I_۰}}\Rightarrow\beta_۱-\beta_۲=۱۰\log\frac{I_۱}{I_۲}\Rightarrow\beta_۱-\beta_۲=۱۰\log۵\xrightarrow{۵=\frac{۱۰}{۲}}$$

$$\beta_۱-\beta_۲=۱۰\log\frac{۱۰}{۲}=۱۰(\log۱۰-\log۲)\xrightarrow{\log۱۰=۱,\ \log۲=۰/۳}$$

$$\beta_۱-\beta_۲=۱۰(۱-۰/۳)\Rightarrow\beta_۱-\beta_۲=۷dB$$

بنابراین شنونده (۱) صوت را ۷ دسی‌بل بلندتر می‌شوند.

B ۱۹۵۹ ۳

خط فکری حد پایین گسترهٔ شنوایی نزدیک $۱۰^{-۱۲}W/m^۲$ است. یعنی اگر شدت صوت از این مقدار کمتر شود. شخص دیگر صدا را نمی‌شنود، بنابراین حداکثر فاصله‌ای که شخص از چشمه دور می‌شود تا جایی است که شدت صوت به $۱۰^{-۱۲}W/m^۲$ برسد، بنابراین با استفاده از تعریف شدت صوت مسئله حل می‌شود. دقت کنید بسامد چشمه در حل این مسئله نقشی ندارد.

با نوشتن رابطهٔ شدت صوت، فاصله از چشمه را به‌دست می‌آوریم.

$$I=\frac{\bar{P}}{A}\xrightarrow[A=۴\pi r^۲]{\bar{P}=\frac{\pi}{۲/۵}\times۱۰^{-۳}}۱۰^{-۱۲}=\frac{\frac{\pi}{۲/۵}\times۱۰^{-۳}}{۴\pi r^۲}\Rightarrow۱۰^{-۱۲}=\frac{۱۰^{-۳}}{۱۰r^۲}\Rightarrow r^۲=۱۰^۸$$

$$\Rightarrow r=۱۰^۴m$$

B ۱۹۶۰ ۲

خط فکری جملهٔ «صدا به زحمت شنیده می‌شود» یعنی شدت صوتی که به گوش می‌رسد در حد آستانهٔ شنوایی یعنی $۱۰^{-۱۲}W/m^۲$ است، بنابراین ابتدا شدت صوت را در حالتی که تراز شدت صوت ۴۰dB را به‌دست بیاورید، سپس فاصله را حساب کنید.

۱ ابتدا شدت صوت را در فاصلهٔ ۲ متری چشمه به‌دست می‌آوریم:

$$\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}\Rightarrow۴۰=۱۰\log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow\frac{I}{۱۰^{-۱۲}}=۱۰^۴\Rightarrow I=۱۰^{-۸}W/m^۲$$

۲ شدت صوت با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد.

$$\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{r_۱}{r_۲})^۲\Rightarrow\frac{۱۰^{-۱۲}}{۱۰^{-۸}}=(\frac{۲}{r_۲})^۲\Rightarrow۱۰^{-۲}=\frac{۲}{r_۲}\Rightarrow r_۲=۲۰۰m$$

B ۱۹۶۱ ۴

۱ صوت A به اندازهٔ ۵dB بلندتر از صوت B شنیده می‌شود، بنابراین:

$$\beta_A-\beta_B=۵dB\ \ (I)$$

۲ صوت A، ۱۵dB از صوت C کوتاه‌تر شنیده می‌شود، در نتیجه:

$$\beta_C-\beta_A=۱۵dB\ \ (II)$$

۳ در مسئله از شما رابطهٔ بین شدت صوت C و شدت صوت B خواسته شده است بنابراین باید A را از روابط حذف کنیم. از این‌رو دو رابطهٔ (I) و (II) را با هم جمع می‌کنیم.

$$\beta_A-\beta_B+\beta_C-\beta_A=۵+۱۵\Rightarrow\beta_C-\beta_B=۲۰dB$$

۴ اکنون به کمک تعریف تراز شدت صوت، مسأله را پاسخ می‌دهیم.

$$\beta_C-\beta_B=۱۰\log\frac{I_C}{I_۰}-۱۰\log\frac{I_B}{I_۰}\Rightarrow\beta_C-\beta_B=۱۰\log\frac{I_C}{I_B}$$

$$\Rightarrow۲۰=۱۰\log\frac{I_C}{I_B}\Rightarrow\frac{I_C}{I_B}=۱۰^۲=۱۰۰$$

بنابراین شدت صوت C، ۱۰۰ برابر شدت صوت B است و گزینهٔ (۴) درست است.

B ۱۹۶۳ ۳

۱ شـدت صوت، با مجذور دامنه نسبت مستقیم و با مجذور فاصله از چشمه نسبت وارون دارد. با توجه به فرض مسئله نسبت شدت صوت‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{A_۲}{A_۱})^۲(\frac{r_۱}{r_۲})^۲=(۲۵)(۲)^۲=۱۰۰ \quad (I)$$

۲ تراز شدت صوت به صورت $\beta=۱۰\log\frac{I}{I_۰}$ تعریف می‌شود. از این‌رو خواهیم داشت:

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۰}-۱۰\log\frac{I_۱}{I_۰}=۱۰\log\frac{\frac{I_۲}{I_۰}}{\frac{I_۱}{I_۰}}\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}$$

$$\xrightarrow{(I)}\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log۱۰۰=۱۰\log۱۰^۲\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۲۰\,dB$$

بنابراین شدت صوت ۲۰ دسی‌بل افزایش می‌یابد.

A ۱۹۶۴ ۲

۱ دامنه ٪۲۰ کاهش یافته است، بنابراین: $A_۲=A_۱-۰/۲A_۱\Rightarrow A_۲=۰/۸A_۱$

۲ شـدت صوت با مجذور دامنه نسبت مستقیم دارد و نسبت شـدت صوت‌ها را حساب می‌کنیم. $\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{A_۲}{A_۱})^۲\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{۰/۸A_۱}{A_۱})^۲\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=۰/۶۴$

۳ تراز شدت صوت را در هر حالت نوشته از هم کم می‌کنیم:

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۰}-۱۰\log\frac{I_۱}{I_۰}\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۰(\log\frac{I_۲}{I_۰}-\log\frac{I_۱}{I_۰})$$

$$\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log۰/۶۴=۱۰\log\frac{۶۴}{۱۰۰}$$

$$\xrightarrow{\log\frac{a}{b}=\log a-\log b}\beta_۲-\beta_۱=۱۰(\log۶۴-\log۱۰۰)$$

به جای ۶۴ مقدار $۲^۶$ را قرار می‌دهیم.

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰(\log۲^۶-\log۱۰^۲)\xrightarrow{\log a^n=n\log a}$$

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰(۶\log۲-۲\log۱۰)\xrightarrow{\log۱۰=۱,\ \log۲=۰/۳}$$

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰(۶\times۰/۳-۲\times۱)\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۰(۱/۸-۲)=-۲dB$$

بنابراین تراز شدت صوت ۲dB کاهش می‌یابد.

B ۱۹۶۵ ۴

خط فکری ابتـدا باید مشـخص کنید وقتی دامنه ۴ برابر می‌شـود، شـدت صوت چند برابر می‌شـود و در نتیجه تراز شـدت صوت چند دسـی‌بل تغییـر می‌کند تا بتوانید مسئله را حل کنید.

۱ شدت صوت با مجذور فاصله نسبت وارون و با مجذور دامنه نسبت مستقیم دارد.

$$\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{A_۲}{A_۱})^۲\xrightarrow{A_۲=۴A_۱}\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{۴A_۱}{A_۱})^۲\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=۱۶$$

۲ تغییر تراز شدت صوت را حساب می‌کنیم.

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log۱۶\xrightarrow{۱۶=۲^۴}\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log۲^۴$$

$$\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۴۰\log۲\xrightarrow{\log۲=۰/۳}\beta_۲-\beta_۱=۴۰\times۰/۳$$

$$\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۲dB\,(I)$$

۳ بنـا به فرض مسـئله $\beta_۲=۱/۳\beta_۱$ اسـت از این‌رو در رابطـهٔ (I) به جای $\beta_۲$، $۱/۳\beta_۱$ را قرار می‌دهیم. $۱/۳\beta_۱-\beta_۱=۱۲\Rightarrow۰/۳\beta_۱=۱۲\Rightarrow\beta_۱=\frac{۱۲۰}{۳}=۴۰dB$

۴ در صورت مسـئله بیان شـده که در این حالت «تراز شـدت صوت چند دسی‌بل» یعنی $\beta_۲$ چند دسی‌بل است. $\beta_۲=۱/۳\beta_۱=۱/۳\times۴۰=۵۲dB$

C ۱۹۶۶ ۳

۱ شدت صوت با مجذور بسامد و مجذور دامنه نسبت مستقیم دارد. از این‌رو:

$$\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{f_۲}{f_۱})^۲\times(\frac{A_۲}{A_۱})^۲\xrightarrow{f_۲=۳f_۱,A_۲=۳A_۱}\frac{I_۲}{I_۱}=(۳)^۲(۳)^۲\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=۳^۴$$

۲ تغییر تراز شدت صوت را به‌دست می‌آوریم.

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}\xrightarrow{\beta_۲=۳/۵\beta_۱}۳/۵\beta_۱-\beta_۱=۱۰\log۳^۴$$

$$\Rightarrow۲/۵\beta_۱=۱۰\times۴\log۳\xrightarrow{\log۳=۰/۵}۲/۵\beta_۱=۱۰\times۴\times۰/۵$$

$$\Rightarrow۲/۵\beta_۱=۲۰\Rightarrow\beta_۱=\frac{۲۰}{۲/۵}\Rightarrow\beta_۱=۸dB$$

تراز شدت صوت $\beta_۲$ خواهد شد: $\beta_۲=۳/۵\beta_۱\Rightarrow\beta_۲=۳/۵\times۸\Rightarrow\beta_۲=۲۸dB$

B ۱۹۶۷ ۱

نکته شدت صوت با مربع دامنه و مربع بسامد نسبت مستقیم و با مربع فاصله از چشمه نسبت وارون دارد: $\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{A_۲}{A_۱})^۲\times(\frac{f_۲}{f_۱})^۲\times(\frac{d_۱}{d_۲})^۲$

۱ شرایط محیط ثابت است. بنابراین:

$$\begin{cases}v=f_۱\lambda_۱\\v=f_۲\lambda_۲\end{cases}\Rightarrow f_۱\lambda_۱=f_۲\lambda_۲\Rightarrow\frac{f_۲}{f_۱}=\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}\xrightarrow{\lambda_۲=۴\lambda_۱}f_۲=\frac{۱}{۴}f_۱$$

۲ دامنه چهار برابر $(A_۲=۴A_۱)$ و فاصلهٔ نصف شده $(d_۲=\frac{d_۱}{۲})$ و بسامد نیز $\frac{۱}{۴}$ شده است، بنابراین نسبت شدت صوت خواهد شد.

$$\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{A_۲}{A_۱})^۲\times(\frac{f_۲}{f_۱})^۲\times(\frac{d_۱}{d_۲})^۲\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=۴^۲\times(\frac{۱}{۴})^۲\times(۲)^۲=۲^۲$$

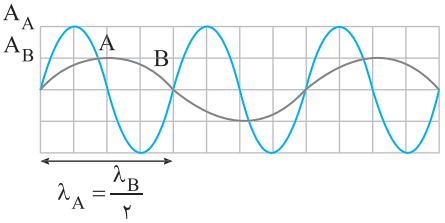
۳ با توجه به تعریف تراز شدت صوت خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\beta'=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۰}\\\beta=۱۰\log\frac{I_۱}{I_۰}\end{cases}\Rightarrow\beta'-\beta=۱۰(\log\frac{I_۲}{I_۰}-\log\frac{I_۱}{I_۰})=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}=۱۰\log۲^۲$$

$$=۲۰\log۲\Rightarrow\Delta\beta=۲۰\times۰/۳=۶dB$$

B ۱۹۶۸ ۱

خط فکری با توجه به نمودارها ابتدا نسـبت دامنه‌ها و طول موج‌ها را مشخص کنید. تندی انتشـار موج در محیط برای دو موج A و B یکسـان اسـت. به کمک این مطلب، نسبت بسامدها را به‌دست بیاورید تا بتوانید نسبت شدت صوت‌ها و از آنجا اختلاف تراز شدت صوت‌ها را حساب کنید.



۱ دامنهٔ A دو برابر دامنهٔ B است. $A_A=۲A_B$

۲ طول موج A نصف طول موج B است، بنابراین:

$$\lambda_A=\frac{\lambda_B}{۲}\xrightarrow{\lambda=\frac{v}{f}}\frac{v_A}{f_A}=\frac{۱}{۲}\frac{v_B}{f_B}\xrightarrow{v_A=v_B}f_A=۲f_B$$

۳ شدت صوت با مجذور دامنه و مجذور بسامد نسبت مستقیم دارد.

$$\frac{I_A}{I_B}=(\frac{A_A}{A_B})^۲\times(\frac{f_A}{f_B})^۲\Rightarrow\frac{I_A}{I_B}=(۲)^۲\times(۲)^۲\Rightarrow\frac{I_A}{I_B}=۲^۴$$

۴ اختلاف تراز شدت صوت خواهد شد:

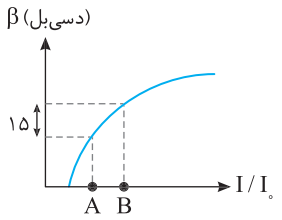
$$\beta_A-\beta_B=۱۰\log\frac{I_A}{I_B}\Rightarrow\beta_A-\beta_B=۱۰\log۲^۴\Rightarrow\beta_A-\beta_B=۴۰\log۲$$

$$\xrightarrow{\log۲=۰/۳}\beta_A-\beta_B=۱۲dB$$

B ۳ ۱۹۶۹

با توجه به نمودار و تعریف تراز شدت صوت می‌توانیم بنویسیم:

$$\beta_B-\beta_A=10\log\frac{I_B}{I_0}-10\log\frac{I_A}{I_0}=10\log\frac{\frac{I_B}{I_0}}{\frac{I_A}{I_0}}\Rightarrow\beta_B-\beta_A=10\log\frac{I_B}{I_A}$$



داده‌های نمودار را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$15=10\log\frac{I_B}{I_A}\Rightarrow 1/5=\log\frac{I_B}{I_A}\xrightarrow{1/5=1+0/5}$$

$$1+0/5=\log\frac{I_B}{I_A}\xrightarrow{\log 10=1,\ \log 3=0/5}\log 10+\log 3=\log\frac{I_B}{I_A}$$

$$\log 10\times 3=\log\frac{I_B}{I_A}\Rightarrow\frac{I_B}{I_A}=30$$

شدت صوت با مجذور فاصله نسبت وارون دارد.

$$\frac{I_B}{I_A}=\left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2\Rightarrow 30=\left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2\Rightarrow\frac{r_A}{r_B}=\sqrt{30}$$

اگر در حل این تست، عدد ۱/۵ را برابر ۳×۰/۵ قرار داده و به جای عدد ۰/۵، $\log 3$ را قرار دهید در نهایت به $\frac{I_B}{I_A}=27$ می‌رسید اما شما سه بار از تقریب $\log 3=0/5$ استفاده کرده‌اید و جواب شما نسبت به ۳۰ دارای تقریب $\frac{I_B}{I_A}=30$ بزرگ‌تری است و جواب مسئله $\sqrt{30}$ خواهد بود.

B ۴ ۱۹۷۰

خط فکری در حل این مسئله باید دقت کنید که جذب انرژی صوتی توسط هوا قابل ملاحظه است بنابراین با دورشدن از چشمه، شدت صوت به شدت کاهش می‌یابد یعنی اگر فاصله ۳ برابر شود، شدت صوت $\frac{1}{9}$ نمی‌شود و از $\frac{1}{9}$ نیز کمتر خواهد شد.

ابتدا اختلاف تراز شدت صوت در نقاط d و ۳d را بدون در نظر گرفتن اتلاف انرژی به‌دست می‌آوریم. سپس با توجه به اتلاف انرژی اختلاف β_A و β_B از عددی که به‌دست آورده‌ایم بزرگ‌تر است.

شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد از این‌رو:

$$\frac{I_B}{I_A}=\left(\frac{d_A}{d_B}\right)^2\xrightarrow{d_A=d,\ d_B=3d}\frac{I_B}{I_A}=\left(\frac{d}{3d}\right)^2\Rightarrow I_A=9I_B$$

اختلاف تراز شدت صوت را به‌دست می‌آوریم.

$$\beta_A-\beta_B=10\log\left(\frac{I_A}{I_B}\right)=10\log 9=10\log 3^2$$

$$\Rightarrow\beta_A-\beta_B=20\log 3=20\times 0/5=10\,dB$$

بنابراین اگر اتلاف انرژی نبود، اختلاف β_A و β_B، ۱۰dB می‌شد، یعنی از β_A، ۱۰dB کاسته می‌شد اما چون جذب انرژی قابل ملاحظه است از β_A مقدار بیشتری کاسته می‌شود و اختلاف β_A و β_B از ۱۰dB بزرگ‌تر خواهد شد.

$$\beta_A-\beta_B>10\,dB$$

B ۲ ۱۹۷۱

خط فکری در محیط جذب انرژی صوتی وجود دارد. برای آنکه مشخص کنیم که چند درصد انرژی جذب شده است، شدت صوت در فاصلهٔ ۲۰ متری را به کمک تراز شدت صوت شنیده شده در محل (۸۰dB) به‌دست می‌آوریم، سپس به کمک شدت صوت، توان رسیده به فاصلهٔ ۲۰ متری را حساب می‌کنیم تا مشخص شود چه مقدار توان در مسیر جذب شده است.

۱ ابتدا شدت صوت دریافتی توسط شنونده را به‌دست می‌آوریم:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\Rightarrow 80=10\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow 10^8=\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow I=10^{-4}\,W/m^2$$

۲ توان در محل شنونده را حساب می‌کنیم:

$$I=\frac{P'}{A}\Rightarrow I=\frac{P'}{4\pi R^2}\Rightarrow 10^{-4}=\frac{P'}{4\times 3\times(20)^2}\Rightarrow P'=4800\times 10^{-4}\times 10^3\,W$$

$$\Rightarrow P'=480\,mW$$

۳ درصد اتلاف (جذب) توان در محیط برابر است با:

$$\text{درصد جذب توان}=\frac{P'-P}{P}\times 100=\frac{480-500}{500}\times 100=-4\%$$

۴ درصد توان جذب محیط می‌شود.

B ۳ ۱۹۷۲

خط فکری اختلاف تراز شدت صوت در محل A و B را در اختیار داریم بنابراین می‌توانیم نسبت فاصلهٔ d_B و d_A را به‌دست بیاوریم و با استفاده از آن SA را حساب کرده سپس به کمک رابطهٔ فیثاغورس AB را بیابیم.

۱ با توجه به تعریف تراز شدت صوت، اختلاف ترازها را حساب می‌کنیم.

$$\beta_A-\beta_B=10\log\frac{I_A}{I_0}-10\log\frac{I_B}{I_0}\Rightarrow\beta_A-\beta_B=10\log\frac{I_A}{I_B}$$

$$\xrightarrow{\beta_A-\beta_B=9\,dB}9=10\log\frac{I_A}{I_B}\Rightarrow 0/9=\log\frac{I_A}{I_B}$$

$$\xrightarrow{0/9=3\times 0/3=3\log 2}3\log 2=\log\frac{I_A}{I_B}\xrightarrow{n\log a=\log a^n}$$

$$\log 2^3=\log\frac{I_A}{I_B}\Rightarrow\frac{I_A}{I_B}=8$$

۲ شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد.

$$\frac{I_A}{I_B}=\left(\frac{SB}{SA}\right)^2\Rightarrow 8=\left(\frac{24}{SA}\right)^2\Rightarrow 2\sqrt{2}=\frac{24}{SA}\Rightarrow SA=6\sqrt{2}\,m$$

۳ فاصلهٔ AB را حساب می‌کنیم:

$$AB^2=SA^2+SB^2\Rightarrow AB^2=(6\sqrt{2})^2+(24)^2\Rightarrow AB^2=6^2[(\sqrt{2})^2+4^2]$$

$$\Rightarrow AB^2=6^2(18)\Rightarrow AB=6\times 3\sqrt{2}\Rightarrow AB=18\sqrt{2}\,m$$

B ۲ ۱۹۷۳

۱ شدت صوت چشمهٔ A در محل P برابر است با:

$$I_A=\frac{P_A}{A_A}=\frac{P_A}{4\pi r_A^2}\xrightarrow[r_A=6\,m]{P_A=3600\,W}I_A=\frac{3600}{4\pi(6)^2}\Rightarrow I_A=\frac{25}{\pi}\,W/m^2$$

۲ فاصلهٔ منبع B تا گیرندهٔ P را به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آوریم.

$$PB^2=6^2+8^2\Rightarrow PB=10\,m$$

۳ شدت صوت چشمهٔ B در محل گیرندهٔ P را حساب می‌کنیم.

$$I_B=\frac{P_B}{A_B}=\frac{P_B}{4\pi r_B^2}\xrightarrow{r_B=10\,m}I_B=\frac{10000}{4\pi(100)}\Rightarrow I_B=\frac{25}{\pi}\,W/m^2$$

۴ شدت صوت دریافتی توسط گیرندهٔ موج

$$I_{کل}=I_A+I_B=\frac{50}{\pi}\,W/m^2$$

A ۳ ۱۹۷۴

شدت صوت را می‌توان با یک آشکارساز اندازه گرفت. با اندازه‌گیری شدت صوت‌های مختلف درمی‌یابیم نسبت شدت‌های صوت در گسترهٔ شنوایی انسان می‌تواند در حدود 10^{12} باشد، بنابراین گزارهٔ (الف) درست است.

$I_{\circ}=10^{-12}W/m^2$ را شدت صوت مرجع می‌نامند که نزدیک به حد پایین گسترهٔ شنیداری انسان است. گزارهٔ (ب) نادرست می‌باشد.

وقتی دیاپازونی را با ضربه‌ای به ارتعاش وا می‌داریم، دیاپازون نوسان‌هایی انجام می‌دهد که به دلیل میرایی کم، به حرکت هماهنگ ساده نزدیک است. به صوت حاصل از چنین چشمه‌هایی تُنِ موسیقی یا به اختصار تُن گفته می‌شود و گزارهٔ (پ) درست است.

A ۱۹۷۵ ۱

ارتفاع، بسامدی است که گوش انسان درک می‌کند اما بلندی، شدتی است که گوش انسان از صوت درک می‌کند. وقتی که در فاصله‌ای دورتر از چشمه قرار می‌گیریم بسامد صوت که توسط چشمه صوت تعیین می‌شود تغییر نمی‌کند بنابراین ارتفاع صوت ثابت می‌ماند. اما به دلیل این که شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد وقتی فاصلهٔ شخص از چشمه بیشتر می‌شود، بلندی صوت کمتر احساس می‌شود و گزینهٔ (۱) درست است.

A ۱۹۷۶ ۲

ارتفاع، بسامدی است که گوش انسان درک می‌کند و بلندی، شدتی است که گوش انسان از صوت درک می‌کند بنابراین بلندی و ارتفاع صوت علاوه بر اینکه به چشمهٔ صوت بستگی دارند به حس شنوایی ما وابسته هستند. در واقع بلندی متفاوت با شدت است. شدت را می‌توان با یک آشکارساز اندازه گرفت در حالی که بلندی چیزی است که شخص حس می‌کند و قابل اندازه‌گیری نیست، از این رو گزینهٔ (۲) درست است.

A ۱۹۷۷ ۱

بیشترین حساسیت گوش انسان به بسامدهایی در گسترهٔ $2000Hz$ تا $5000Hz$ است، در حالی که گوش انسان قادر به شنیدن تن‌های صدای $20Hz$ تا $20000Hz$ است.

A ۱۹۷۸ ۴

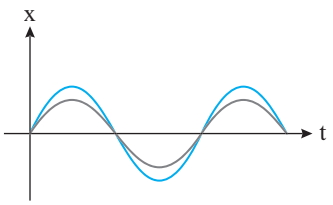
برای تقویت صوت از بلندگو استفاده می‌شود و بلندگو با افزایش دامنهٔ ارتعاش صوت، انرژی صوت (و همچنین شدت صوت) را افزایش می‌دهد و سبب می‌گردد که صدای تقویت شده تا فاصله‌های دورتری شنیده شود.

A ۱۹۷۹ ۲

ارتفاع صوت به بسامد بستگی دارد که چون چشمه یکسان است بنابراین ارتفاع صوت رسیده به هر دو شخص یکسان می‌باشد. با توجه به رابطهٔ $I=\frac{P}{A}$ شدت صوت با سه برابر شدن مساحت سطح، $\frac{1}{3}$ می‌شود $(I_2=3I_1)$ و صوتی که شخص B می‌شنود ضعیف‌تر (آهسته‌تر) است.

A ۱۹۸۰ ۳

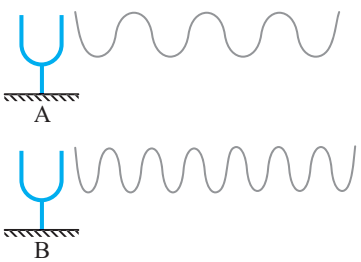
ارتفاع، بسامدی است که گوش انسان درک می‌کند. با توجه به شکل، دورهٔ صوت‌های تولیدی و در نتیجه بسامد آن‌ها با هم برابر است، بنابراین ارتفاع دو صوت با هم یکسان است.



بلندی، شدتی است که گوش انسان از صوت درک می‌کند. دامنهٔ دو صوت یکسان نیست در نتیجه شدت صوت‌ها متفاوت است بنابراین بلندی دو صوت متفاوت است.

A ۱۹۸۱ ۳

ارتفاع، بسامدی است که گوش انسان درک می‌کند و هرچه بسامد صوت بیشتر باشد، ارتفاع آن بیشتر است. با توجه به شکل طول موج صوت حاصل از دیاپازون A بلندتر از طول موج صوت حاصل از دیاپازون B است. با توجه به ثابت بودن تندی صوت و بنا بر رابطهٔ $f=\frac{v}{\lambda}$ می‌توان نتیجه گرفت که $f_B>f_A$ است و ارتفاع صوت B بیشتر از ارتفاع صوت A است.



B ۱۹۸۲ ۲

۱ بلندی، شدتی است که گوش انسان از صوت درک می‌کند. حساسیت گوش برای این دو بسامد یکسان فرض شده است بنابراین وقتی دو صوت با یک بلندی شنیده می‌شود یعنی شدت دو صوت رسیده به شخص یکسان است. $(I_1=I_2)$

۲ شدت صوت با مربع دامنه و مربع بسامد نسبت مستقیم و با مربع فاصله نسبت وارون دارد.

$$\frac{I_2}{I_1}=\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2\times\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\times\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\Rightarrow 1=16\times\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\Rightarrow\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2=\frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow\frac{d_1}{d_2}=\frac{1}{4}\Rightarrow d_2=4d_1$$

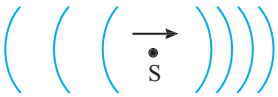
A ۱۹۸۳ ۱

گوش یک انسان با شنوایی معمولی بسامدهای بین $20Hz$ و $20000Hz$ را می‌شنود. اکنون طول موج این بسامدها را به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{320}{20}\Rightarrow\lambda=16m\,,\ \lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{320}{20000}\Rightarrow\lambda=1/6\times10^{-2}m$$

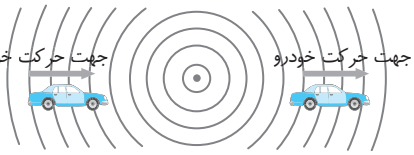
A ۱۹۸۴ ۴

هرگاه چشمهٔ موج در حرکت باشد جبهه‌های موج در جلوی چشمه به هم نزدیک می‌شوند و طول موج کاهش می‌یابد و در پشت چشمه، جبهه‌ها از هم فاصله می‌گیرند و طول موج افزایش می‌یابد یعنی طول موج با حرکت چشمه تغییر می‌کند. تندی انتشار موج در محیط ثابت است و با تغییر طول موج، بسامد نیز تغییر می‌کند. $(f_{\text{متغیر}}=\frac{v_{\text{ثابت}}}{\lambda_{\text{متغیر}}})$



A ۱۹۸۵ ۳

هرگاه چشمهٔ موج ساکن باشد، طول موج در جلو و عقب آن یکسان است. از این رو $\lambda_r=\lambda_L$ خواهد بود اما هنگام نزدیک شدن شنونده به چشمهٔ ساکن بسامد دریافتی توسط شنونده از بسامد واقعی چشمه بیشتر است $(f_r>f_s)$ و هنگام دورشدن از چشمه بسامد دریافتی توسط شنونده از بسامد واقعی چشمه کمتر است $(f_L<f_s)$. بنابراین بسامد دریافتی شنونده هنگام نزدیک شدن (f_r) از بسامد دریافتی شنونده هنگام دورشدن (f_L) بیشتر است. $(f_r>f_L)$



در مدت زمان یکسان، خودرویی که به چشمهٔ ساکن صوت نزدیک می‌شود با جبهه‌های موج بیشتری برخورد می‌کند، در حالی که خودرویی که از این چشمه دور می‌شود، با جبهه‌های موج کم‌تری برخورد می‌کند.

A ۱۹۸۶ ۴

نکته هرگاه چشمهٔ صوت ساکن باشد، طول موج دریافتی توسط ناظر با طول موج چشمه یکسان است.

در گزینهٔ (۱) و (۲) که چشمه در حال حرکت است نمی‌تواند $\lambda_o=\lambda_s$ باشد و این دو گزینه نادرست هستند.

نکته هرگاه ناظر به چشمه نزدیک شود بسامد دریافتی (f_o) از بسامد چشمه (f_s) بیشتر است.

در گزینهٔ (۳) ناظر در حال دور شدن از چشمه است و بسامد دریافتی ناظر از بسامد چشمه کمتر است $(f_o<f_s)$ و این گزینه نادرست است.

در گزینهٔ (۴) ناظر در حال نزدیک شدن به چشمه است و $f_o>f_s$ بوده و چون چشمه ساکن است، طول موج ثابت بوده و $\lambda_o=\lambda_s$ است از این رو گزینهٔ (۴) درست است.

A ۱۹۸۷ ۳

نکته وقتی چشمهٔ صوت ساکن است طول موج تغییر نمی‌کند و به حرکت ناظر بستگی ندارد.

هر دو ناظر نسبت به یک چشمهٔ ساکن در حرکت هستند بنابراین طول موج دریافتی توسط هر دو ناظر برابر طول موج چشمه بوده و $\lambda_B=\lambda_A$ خواهد بود.

B ۱۹۸۸ ۱

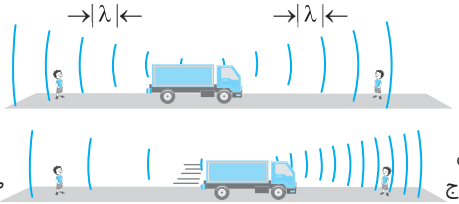
در پدیدهٔ دوپلر، هرگاه چشمهٔ موج ساکن باشد، طول موج ثابت می‌ماند و طول موج به حرکت ناظر بستگی ندارد و هرگاه چشمه و شنونده از هم دور شوند، بسامد دریافتی از بسامد واقعی چشمه کمتر خواهد بود. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

B ۱۹۸۹ ۴

با توجه به حرکت چشمه به سمت شخص، فاصلهٔ جبهه‌های موج در جلوی چشمه از هم کم می‌شود، پس طول موج صوت کاهش می‌یابد $(\lambda\downarrow)$. هم‌چنین شرایط محیطی یکسان است پس تندی صوت در حالت سکون و یا حرکت چشمه یکسان از نظر شنونده ثابت است. $\downarrow\lambda=\frac{v_{\text{ثابت}}}{f}\Rightarrow f\uparrow$ بسامد افزایش می‌یابد

چون فاصلهٔ چشمه از شخص در حال کاهش است بنابراین شدت صوت $(I\propto 1/d^2)$ در حال افزایش می‌باشد.

ارتفاع صوت به بسامد صوت و بلندی صوت به شدت صوت بستگی دارد. بسامد و شدت صوت در حال افزایش است بنابراین بلندی و ارتفاع صوت در حال افزایش است.



A ۱۹۹۰ ۱

یادآوری ۱ اگر چشمهٔ ساکن باشد، جبهه‌های موج به صورت دایره‌هایی هم‌مرکز با فواصل یکسان مدل‌سازی می‌شود. $(v_s=0)$

(الف)

۲ اگر چشمه حرکت کند در جهتی که حرکت می‌کند جبهه‌های موج به هم نزدیک می‌شود و اگر سرعت چشمه از سرعت صوت (موج) کمتر باشد، $(v_s<v_{\text{موج}})$ جبهه‌های موج به صورت زیر است. در این شکل چشمه به سمت راست در حرکت است.

(ب)

۳ اگر سرعت چشمه v_s برابر سرعت صوت باشد، جبهه‌های موج در جهت پیشروی موج بر هم مماس می‌شوند. $(v_s=v_{\text{موج}})$

(پ)

۴ اگر سرعت چشمه $(v_s>v_{\text{صوت}})$ باشد، جبهه‌های جدید از جبهه‌های قدیمی‌تر، جلوی می‌زنند و چشمه جبهه‌های خود را پشت سر می‌گذارد.

(ت)

با توجه به جهت حرکت چشمه به سمت چپ، جبهه‌های موج در سمت راست دارای فاصلهٔ بیشتر و در سمت چپ جلوی چشمه دارای فاصلهٔ کمتر هستند. از طرفی هرگاه تندی چشمه از تندی صوت بیشتر می‌شود، جبهه‌هایی که زودتر تولید شده‌اند از جبهه‌هایی که بعداً ایجاد شده‌اند عقب می‌ماند و شکل جبهه‌های موج مانند گزینهٔ (۱) خواهد بود.

B ۱۹۹۱ ۱

در شکل (۱) جبهه‌ها در سمت راست به هم نزدیک شده‌اند و تندی چشمه از تندی صوت کمتر است. $(v_1<v)$

در شکل (۲) چشمه در سمت راست، جبهه‌های موج را پشت سر می‌گذارد، بنابراین $(v_2>v)$

در شکل (۳)، جبهه‌های موج کروی تقارن دارند، یعنی چشمهٔ ساکن است. $(v_3=0)$

بنابراین $v_3<v_1<v<v_2$

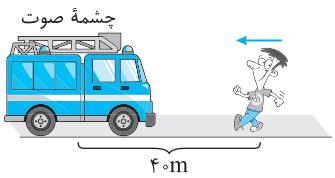
B ۱۹۹۲ ۲

x_1 و x_2 در واقع همان طول موج‌های چشمه‌های s_1 و s_2 می‌باشند و چون در طرف x_1 و x_2 فاصلهٔ بین جبهه‌های موج بیشتر از طرف دیگر است می‌فهمیم که x_1 و x_2 باید در عقب چشمه باشند، بنابراین چشمهٔ s_2 به سمت راست و چشمهٔ s_1 به سمت چپ می‌رود و چون $x_2>x_1$ است تندی چشمهٔ s_2 بیشتر است.

A ۱۹۹۳ ۱

نکته هرگاه چشمهٔ موج ساکن باشد، طول موج در تمام محیط با طول موج چشمه برابر بوده و طول موج ثابت است.

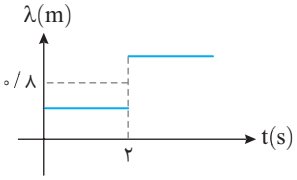
در این مسئله چشمهٔ صوت ساکن است و با گذشت زمان طول موج ثابت می‌ماند و گزینهٔ (۱) درست است، نیازی به محاسبهٔ طول موج نیست.



B ۱۹۹۴ ۲

۱ ابتدا زمان رسیدن چشمه به شنونده را حساب می‌کنیم.

$$v=\frac{d}{t}\Rightarrow 20=\frac{40}{t}\Rightarrow t=2s$$



۲ سپس طول موج صوت چشمه را وقتی که چشمه ساکن است، به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{320}{400}\Rightarrow\lambda=0/8m$$

۳ در هنگام نزدیک شدن چشمه به شنونده، طول موج در جلوی چشمه از $\lambda=0/8m$ کمتر است و هنگام دور شدن چشمه که شنونده در پشت چشمه قرار دارد طول موج از $0/8m$ بزرگ‌تر است بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

A ۱۹۹۵ ۳

شخص A درون آمبولانس است و به همراه چشمهٔ صوت با یک تندی در حرکت است و نسبت به چشمهٔ صوت ساکن است بنابراین اثر دوپلر برای او رخ نمی‌دهد. $(f_A=f_s)$ اما شخص B در جلوی چشمه بوده و چشمهٔ صوت در حال نزدیک‌شدن به اوست در این حالت طول موج‌های جلوی چشمه کوتاه‌تر و بسامد دریافتی شخص B بیشتر از f_s خواهد بود $(f_B>f_s)$ و گزینهٔ (۳) درست است.

A ۱۹۹۶ ۲

خط فکری شنونده در حال نزدیک شدن به چشمهٔ ساکن است بنابراین طول موج ثابت است اما بسامد دریافتی شنونده از بسامد چشمه بیشتر است. بسامد زاویه‌ای موج را از روی معادله $x=5\times10^{-4}\cos 800\pi t$ به‌دست می‌آوریم، بسامد چشمه و طول موج را حساب می‌کنیم. هر بسامدی که در گزینه‌ها از بسامد چشمه بیشتر باشد می‌تواند جواب مسئله باشد.

۱ بسامد موج را حساب می‌کنیم. $\omega=2\pi f \Rightarrow 800\pi=2\pi f_s \Rightarrow f_s=400Hz$

۲ طول موج را به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda=\frac{v}{f} \xrightarrow{v=330m/s} \lambda=\frac{330}{400} \Rightarrow \lambda=0/825m$$

۳ چشمه ساکن است بنابراین طول موج رسیده به شخص همان ۰/۸۲۵ است و گزینه‌های (۱) و (۴) نادرست است.

۴ شخص به چشمه نزدیک می‌شود بنابراین بسامد دریافتی شخص باید از بسامد چشمه بیشتر $(f_0>400Hz)$ باشد. در این صورت گزینهٔ (۲) درست است.

B ۱۹۹۷ ۳

خط فکری در حرکت چشمه (شخص در حال سقوط) هرچه تندی بیشتر می‌شود، جبهه‌های موج در جلوی چشمه فشرده‌تر شده و طول موج کوتاه‌تر و کوتاه‌تر شده یعنی با گذشت زمان و افزایش تندی، بسامد در جلوی چشمه در حال افزایش خواهد بود. اکنون بررسی کنید هنگام سقوط شخص، تندی آن چگونه تغییر می‌کند.

یادآوری ارتفاع، بسامدی است که گوش انسان درک می‌کند.

هنگام سقوط دائماً بر سرعت شخص در حال سقوط افزوده می‌شود، به همین دلیل بسامد دریافتی توسط شخص کنار استخر به علت پدیدهٔ دوپلر افزایش می‌یابد، بنابراین ارتفاع صوت دریافتی بیشتر می‌شود.

B ۱۹۹۸ ۳

نکته هرگاه چشمهٔ موج دارای حرکت شتابدار باشد و به ناظر نزدیک شود، اگر چشمه تندشونده باشد: بسامد دریافتی توسط ناظر (f_0) در حال افزایش بوده و $f_0>f_s$ است و اگر حرکت چشمه کندشونده باشد چون به ناظر نزدیک می‌شود $f_0>f_s$ است اما f_0 در حال کاهش خواهد بود.

این یک سؤال علمی تخیلی است زیرا باید گوش حساسی داشته باشید تا بتوانید در آن مدت کوتاه تغییر ارتفاع را حس کنید. اما پاسخ چیست؟

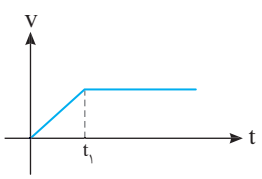
ارتفاع در حال کاهش است یعنی بسامد در حال کاهش است بنابراین تندی آمبولانس در حال کاهش است که سبب می‌گردد بسامد دریافتی توسط شما کاهش یابد و سپس ممکن است تندی آن ثابت و یا ساکن شود که در این صورت بسامد دریافتی ثابت می‌ماند بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

A ۱۹۹۹ ۴

نکته ۱ هرگاه چشمه با حرکت شتاب‌دار تندشونده در حال دور شدن از ناظر باشد بسامد دریافتی توسط ناظر f_0 از بسامد چشمه f_s کمتر است $(f_0<f_s)$ و علاوه بر آن f_0 در حال کاهش است.

نکته ۲ هرگاه چشمه با حرکت شتاب‌دار کندشونده در حال دور شدن از ناظر باشد $f_0<f_s$ بوده و علاوه بر آن f_0 در حال افزایش و نزدیک شدن به f_s است.

چشمه در حال دور شدن از ناظر است و بسامد دریافتی توسط ناظر از بسامد چشمه کمتر است اما تا لحظهٔ t_1 سرعت چشمه در حال افزایش است. به همین دلیل بسامد دریافتی در حال کاهش است و بعد از t_1 چشمه با تندی ثابت در حال دور شدن از ناظر است بنابراین بسامد دریافتی توسط ناظر ثابت می‌ماند، اما همچنان $f_0<f_s$ است.



A ۲۰۰۰ ۲

هنگام نزدیک شدن چشمه به ناظر طول موج کاهش و بسامد افزایش می‌یابد و هنگام دورشدن چشمه از ناظر طول موج افزایش و بسامد کاهش می‌یابد و گزینهٔ (۲) درست است.

A ۲۰۰۱ ۱

انتقال به سرخ به معنی افزایش طول موج و دورشدن چشمهٔ نور از ناظر است و گزینهٔ (۱) درست است.

B ۲۰۰۲ ۴

با توجه به اثر دوپلر وقتی چشمه در حال نزدیک شدن به ناظر است، بسامد افزایش می‌یابد.

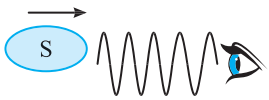
A ۲۰۰۳ ۱

چشمهٔ نور از آشکارساز (۱) دور می‌شود، پس طول موج دریافتی آن در حال افزایش است و با توجه به رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}$ با افزایش طول موج بسامد کاهش می‌یابد. $f_1<f_0$

چشمهٔ نور به آشکارساز (۲) نزدیک می‌شود پس طول موج دریافتی آن در حال کاهش است و با توجه به رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}$ با کاهش طول موج، بسامد افزایش می‌یابد. $f_2>f_0$

B ۲۰۰۴ ۳

۱ هنگام نزدیک شدن جسم نورانی به شخص، طول موج نور کاهش یافته و نور به رنگی با طول موج کمتر از زرد یعنی به رنگ‌های سبز یا آبی یا نیلی یا بنفش دیده خواهد شد.



۲ هنگام دورشدن جسم نورانی از شخص، طول موج در حال افزایش خواهد بود و نوری که به شخص می‌رسد طول موج بیشتری از زرد خواهد داشت و به رنگ نارنجی و یا قرمز دیده می‌شود.



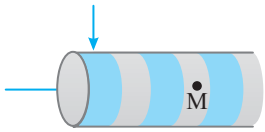
۳ بنابراین گزینهٔ (۳) رنگ نورهایی است که احتمال دارد شخص ببیند.

B ۲۰۰۵ ۳

جهان در حال انبساط است. بنابراین کهکشان‌ها در حال دورشدن از هم هستند و طول موج نور آن‌ها که به زمین می‌رسد باید افزایش یابد و انتقال به سرخ صورت می‌گیرد.

A ۲۰۰۶ ۴

با توجه به شکل فاصلهٔ نقطهٔ M و تپ انبساطی که با پیکان نشان داده شده $3\frac{\lambda}{2}$ است. در مدت $t=\frac{T}{2}$، موج به اندازهٔ $\frac{\lambda}{2}$ پیشروی می‌کند و تپ انبساطی نشان داده شده به نقطهٔ M به اندازه $\frac{\lambda}{2}$ نزدیک می‌شود و فاصلهٔ تپ انبساطی از نقطهٔ M، λ می‌شود. از طرفی با حرکت موج به اندازه $\frac{\lambda}{2}$ باید در محل قبلی تپ انبساطی یک ناحیهٔ تراکمی ایجاد شود. با توجه به مطالب گفته شده گزینهٔ (۴) درست است.



B ۲۰۰۷ ۴

خط فکری شدت صوت با مربع بسامد و مربع دامنه نسبت مستقیم و با مربع فاصله نسبت وارون دارد. در اینجا فاصله‌ها یکسان بوده بنابراین $\frac{I_2}{I_1}=(\frac{A_2}{A_1}\times\frac{f_2}{f_1})^2$ است یعنی هر کدام که حاصل‌ضرب Af یا $A\omega$ در آن‌ها بزرگ‌تر باشد، شدت صوت آن چشمه بیشتر است. حاصل‌ضرب $A\omega$ را برای هر گزینه به‌دست می‌آوریم.

گزینهٔ (۱): $2^2\times(4\pi)^2=64\pi^2$ ، گزینهٔ (۲): $(8\pi)^2=64\pi^2$

گزینهٔ (۳): $(0/5)^2(16\pi)^2=64\pi^2$

بنابراین شدت صوت هر سه چشمه باهم برابر است و گزینهٔ (۴) درست است.

B ۲۰۰۸ ۱

۱ شدت صوت با مجذور فاصله رابطهٔ عکس دارد:

$$\frac{I_2}{I_1}=(\frac{r_1}{r_2})^2 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1}=(\frac{1}{10\sqrt{2}})^2 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1}=\frac{1}{200} \Rightarrow I_1=200I_2$$

۲ اکنون مقدارهای I_1 و I_2 را جایگزین می‌کنیم:

$$10^{\beta_1-12}=200\times5\times10^{2\beta_1-19} \Rightarrow 10^{\beta_1-12}=10^3\times10^{2\beta-19}$$

$$\Rightarrow 10^{\beta_1-12}=10^{2\beta_1-16} \Rightarrow \beta_1-12=2\beta_1-16 \Rightarrow \beta_1=4dB$$

$$\Rightarrow I_1=10^{\beta_1-12} \Rightarrow I_1=10^{-8}W/m^2$$

۲ ۲۰۰۹ C

با توجه به تعریف تراز شدت صوت خواهیم داشت:

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}\xrightarrow{\beta=28dB}28=10\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow 2/8=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

اکنون باید فکر کنیم $2/80$ را چگونه بنویسیم تا بتوانیم مسئله را حل کنیم. با توجه به فرض مسئله $(\log 2=0/3)$ باید به سراغ تولید $0/3$ برویم. $2/8$ را به صورت $4\times 0/7$ می‌نویسیم و به جای $0/7$ نیز $(1-0/3)$ را قرار می‌دهیم بنابراین:

$$4\times 0/7=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow 4(1-0/3)=\log\frac{I}{10^{-12}}\xrightarrow{\log 10=1\ ,\ \log 2=0/3}$$

$$4(\log 10-\log 2)=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow 4\log\frac{10}{2}=\log\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow 4\log 5=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$\Rightarrow 5^4=\frac{I}{10^{-12}}\Rightarrow I=6/25\times 10^{-10}\ W/m^2$$

۳ ۲۰۱۰ B

۱ ابتدا فرض می‌کنیم که اتلاف انرژی وجود ندارد و شدت صوت در ۴ متری چشمه صوت را حساب می‌کنیم.

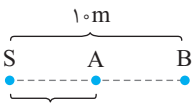
$$\frac{I'}{I}=\left(\frac{r}{r'}\right)^2\xrightarrow{I=500W/m^2\ ,\ r=2m\ ,\ r'=4m}\frac{I'}{500}=\left(\frac{2}{4}\right)^2\Rightarrow I'=125W/m^2$$

۲ ۵۰٪ این مقدار توسط محیط جذب شده و ۵۰٪ آن به ۴ متری رسیده است بنابراین شدت صوت در ۴ متری خواهد شد:

$$I''=\frac{50}{100}I'\Rightarrow I''=\frac{50}{100}\times 125\Rightarrow I''=62/5W/m^2$$

۴ ۲۰۱۱ C

۱ شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد. بنابراین اگر اتلاف انرژی وجود نداشته باشد نسبت شدت صوت در نقاط A و B خواهد شد:



$$\frac{I_B}{I_A}=\left(\frac{d_A}{d_B}\right)^2\Rightarrow\frac{I_B}{I_A}=\left(\frac{5}{10}\right)^2\Rightarrow\frac{I_B}{I_A}=\frac{1}{4}\Rightarrow I_B=\frac{1}{4}I_A$$

۲ با توجه به تعریف تراز شدت صوت، به کمک اختلاف تراز شدت در نقاط A و B، نسبت شدت صوت را حساب می‌کنیم.

$$\beta_A-\beta_B=10\log\frac{I_A}{I_B}\xrightarrow{\beta_A=45dB\ ,\ \beta_B=35dB}$$

$$45-35=10\log\frac{I_A}{I'_B}\Rightarrow\log\frac{I_A}{I'_B}=1\Rightarrow\frac{I_A}{I'_B}=10\Rightarrow I'_B=\frac{1}{10}I_A$$

۳ درصد اتلاف انرژی خواهد شد:

$$\frac{I'_B-I_B}{I_B}\times 100=\frac{\frac{1}{10}I_A-\frac{1}{4}I_A}{\frac{1}{4}I_A}\times 100=\frac{\frac{4-10}{40}}{\frac{1}{4}}=-0/6=-60\%$$

۶۰ درصد انرژی تلف شده است.

۳ ۲۰۱۲ B

خط فکری مسئلهٔ جالبی است. شما ابتدا باید شدت صوت حاصل از صدای گوینده در فاصلهٔ $r=0/5m$ از گوینده را حساب کرده، سپس سهم میکروفون از این شدت صوت را به‌دست بیاورید.

۱ شدت صوت در فاصلهٔ $50cm$ برابر است با:

$$I=\frac{P}{A}\xrightarrow{A=4\pi r^2}I=\frac{P}{4\pi r^2}$$

$$\xrightarrow{P=10\pi\times 10^{-6}W}I=\frac{10\pi\times 10^{-6}}{4\pi\times(0/5)^2}\Rightarrow I=10^{-5}W/m^2$$

۲ اکنون باید حساب کنیم که در مدت یک دقیقه با این شدت صوت از سطحی به مساحت $A_{\text{میکروفون}}=10cm^2$ چند ژول انرژی می‌گذرد.

$$E=IA_{\text{میکروفون}}t\Rightarrow E=10^{-5}\times 10\times 10^{-4}\times 60\Rightarrow E=6\times 10^{-7}J$$

۱ ۲۰۱۳ B

یادآوری آستانهٔ شنوایی، ضعیف‌ترین صدایی است که گوش می‌تواند بشنود.

خط فکری برای گوش ضعیف‌ترین صدای بسامد $5kHz$ برابر $10^{-8}W/m^2$ است. بنابراین شخص تا جایی می‌تواند از چشمه دور شود که شدت صوت از $10^{-8}W/m^2$ کمتر نشود. با این مطلب، می‌توان بیشینه فاصلهٔ شخص از چشمه را حساب کرد. با توجه به تعریف شدت صوت خواهیم داشت:

$$I=\frac{P}{A}\xrightarrow{A=4\pi r^2\ ,\ P=\frac{\pi}{100}W}10^{-8}=\frac{\frac{\pi}{100}}{4\pi r^2}\Rightarrow r^2=\frac{\pi}{4\pi r^2\times 10^{-6}}$$

$$\Rightarrow r^2=\frac{10^6}{4}\Rightarrow r=\frac{1000}{2}=500m$$

۳ ۲۰۱۴ B

خط فکری در رابطه $I=P/A$ وقتی چشمه جبهه‌های موج کروی را به‌طور یکنواخت در تمام جهت‌ها منتشر می‌کند، در فاصلهٔ r از چشمه مساحتی که توان روی آن توزیع می‌شود برابر $A=4\pi r^2$ است. در این مسئله بلندگو تنها در جلوی خود جبهه‌های موج نیمکره را گسیل می‌کند بنابراین مساحت جبهه موج در فاصلهٔ r برابر نصف مساحت یک کره یعنی $A=\frac{4\pi r^2}{2}=2\pi r^2$ است. با دانستن این مطلب ابتدا شدت صوت و سپس تراز شدت صوت در فاصلهٔ ۵۰ متری بلندگو را به دست می‌آوریم.

۱ شدت صوت خواهد شد:

$$I=\frac{P}{A}\Rightarrow I=\frac{P}{2\pi r^2}\xrightarrow{\substack{P=1/5W\\ \pi=3}}I=\frac{1/5}{2\times 3(50)^2}\Rightarrow I=10^{-4}W/m^2$$

۲ تراز شدت صوت در این محل را حساب می‌کنیم.

$$\beta=\log\frac{I}{I_0}=\log\frac{10^{-4}}{10^{-12}}=\log 10^8\Rightarrow\beta=8B$$



۴ ۲۰۱۵ B

۱ بسامد چشمه ۴۴ درصد افزایش یافته بنابراین بسامد خواهد شد:

$$f_2=f_1+\frac{44}{100}f_1=1/44f_1$$

۲ فاصله از چشمه نیز ۲۰ درصد افزایش می‌یابد بنابراین می‌توان نوشت:

$$d_2=d_1+\frac{20}{100}d_1=1/2d_1$$

۳ شدت صوت با مربع بسامد نسبت مستقیم و با مربع فاصله نسبت وارون دارد. نسبت شدت صوت‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{I_2}{I_1}=\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2\times\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2=(1/44)^2\times\left(\frac{1}{1/2}\right)^2=1/44$$

۴ تغییرات تراز شدت صوت برابر است با:

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}=10\log 1/44=10\log\frac{144}{100}$$

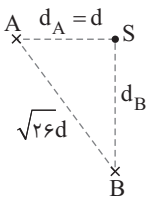
$$=10(\log 144-\log 100)=10(\log 2^4\times 3^2-2)\Rightarrow$$

$$\beta_2-\beta_1=10(4\log 2+2\log 3-2)\xrightarrow{\log 2=0/3\ ,\log 3=0/5}$$

$$\beta_2-\beta_1=10(1/2+1-2)=2dB\Rightarrow\beta_2-\beta_1=2dB$$

۴ ۲۰۱۶ C

۱ ابتدا فاصلهٔ نقطهٔ B از چشمه را به کمک رابطهٔ فیثاغورس حساب می‌کنیم:



$$AB^2=S_A^2+S_B^2=d_B^2+d_A^2=26d^2$$

$$\xrightarrow{d_A=d}d_B^2=25d^2\Rightarrow d_B=5d$$

۲ شدت صوت با مربع فاصله نسبت وارون دارد، از این‌رو:

$$\xrightarrow{\frac{I_B}{I_A}=\left(\frac{d_A}{d_B}\right)^2}\frac{I_B}{I_A}=\frac{1}{25}$$

۳ اختلاف تراز شدت صوت برابر است با:

$$\beta_B-\beta_A=10\log\frac{I_B}{I_0}-10\log\frac{I_A}{I_0}=10\log\frac{I_B}{I_A}\Rightarrow$$

$$\beta_B-\beta_A=10\log\frac{1}{25}=10\log5^{-2}\Rightarrow\beta_B-\beta_A=-20\log5\ \ (I)$$

۴ اکنون $\log5$ را حساب می‌کنیم.

$$\log2\times5=1\Rightarrow\log2+\log5=1\xrightarrow{\log2=0/3}\log5=0/7$$

۵ $\log5$ را در رابطهٔ (I) قرار می‌دهیم: $\beta_B-\beta_A=-20\times(0/7)=-14dB$

۶ تراز شدت صوت $14dB$ کاهش می‌یابد.

A ۲۰۱۷ ۳

نکته هر گاه چشمهٔ صوت ساکن باشد، طول موج در تمام اطراف آن یکسان و برابر طول موج چشمه است و طول موج به حرکت ناظر بستگی ندارد.
در این مسئله چشمه ساکن است بنابراین در تمام طول مسیر حرکت کودک، طول موج ثابت است. $(\lambda_A=\lambda_B=\lambda_C)$

B ۲۰۱۸ ۱

خط فکری هر گاه چشمه با حرکت شتاب‌دار تندشونده به ناظر نزدیک شود به دلیل نزدیک شدن به ناظر بسامد دریافتی شنونده $f_0>f_s$ است و به دلیل افزایش تندی، جبهه‌های موج به هم فشرده‌تر شده و بسامد دریافتی افزایش می‌یابد. بنابراین شما باید با به‌دست آوردن دورهٔ نوسان سامانهٔ جرم - فنر مشخص کنید که در لحظهٔ $t=0/4s$ بلندگو به ناظر (شنونده) نزدیک و یا دور می‌شود و حرکت آن در این لحظه چگونه است.

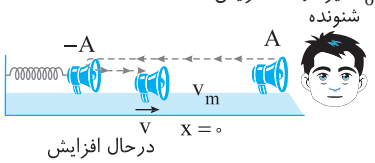
۱ دوره نوسان سامانه جرم - فنر را به دست می‌آوریم.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow T=2\times3\times\sqrt{\frac{0/2}{20}}\Rightarrow T=0/6s$$

۲ بررسی می‌کنیم که $\Delta t=0/4s$ چه کسری از دوره است.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{0/4}{0/6}=\frac{2}{3}\Rightarrow\Delta t=2\frac{T}{3}$$

مدت زمان $2\frac{T}{3}$ از $\frac{T}{2}$ بیشتر و از $3\frac{T}{4}$ کمتر است. از این رو در لحظهٔ $t=0/4s$ بلندگو از مکان $+A$ به مکان $-A$ رفته و از مکان $-A$، به سوی حالت تعادل در حرکت است و چون به ناظر نزدیک می‌شود $f_0>f_s$ است و از طرفی سرعتش در حال افزایش است و f_0 نیز در حال افزایش است.



درحال افزایش

C ۲۰۱۹ ۳

چشمه در حال نزدیک شدن به صخره است بنابراین ناظر ساکن کنار صخره بسامدی که دریافت می‌کند (f_{0_1}) از بسامد چشمه (f_s) بیشتر است $(f_{0_1}>f_s)$. صوت با بسامد f_{0_1} به صخره برخورد کرده و به سوی راننده برمی‌گردد. در این حالت صخره شبیه یک چشمهٔ ساکن رفتار می‌کند که امواجی با بسامد f_{0_1} به سوی شنوندهٔ متحرک می‌فرستد. از این رو شنونده متحرک که در حال نزدیک شدن به چشمه است بسامد دریافتی‌اش (f_{0_2}) از f_{0_1} بیشتر است بنابراین: $f_s<f_{0_1}<f_{0_2}$

پنجره تودرتو (آزمون فصل)

B ۲۰۱۹ ۱

خط فکری ۱ علت این که شخص دو صدا با اختلاف زمانی Δt دریافت می‌کند متفاوت بودن تندی انتشار صوت در هوا و فلز است. صوتی که از درون فلز منتقل می‌شود سریع‌تر از صوتی که از درون هوا منتقل می‌شود به سر دیگر لوله می‌رسد. تندی انتشار موج ثابت است و معادلهٔ انتشار موج یک معادلهٔ سرعت $(\Delta x=vt)$ است. کافی است زمان را به‌دست آورده از هم کم کنیم.

زمان حرکت صوت در هوا برابر است با: $\Delta x=v_{هوا}t_{هوا}\xrightarrow{\Delta x=\ell}t_{هوا}=\frac{\ell}{v_{هوا}}$

زمان حرکت صوت در فلز خواهد شد: $\Delta x=v_{فلز}t_{فلز}\Rightarrow t_{فلز}=\frac{\ell}{v_{فلز}}$

بنابراین: $\Delta t=t_{هوا}-t_{فلز}=\frac{\ell}{v_{هوا}}-\frac{\ell}{v_{فلز}}\Rightarrow\Delta t=\frac{v_{فلز}-v_{هوا}}{v_{هوا}v_{فلز}}\ell$

نمای ۲۵

B ۲۰۱۹ ۱

۲ با توجه به تعریف تراز شدت صوت می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\beta_1=10\log\frac{I_1}{I_0}\\ \beta_2=10\log\frac{I_2}{I_0}\end{cases}\xrightarrow{\text{دو رابطه را از هم کم می‌کنیم}}$$

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}$$

با توجه به خاصیت لگاریتم $\log a-\log b=\log\frac{a}{b}$ می‌توان نوشت:

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{\frac{I_2}{I_0}}{\frac{I_1}{I_0}}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}$$

۲ داده‌های مسئله را جای‌گذاری می‌کنیم، $\beta_1=80dB$ و $\beta_2=120dB$

$$120-80=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow\log\frac{I_2}{I_1}=4\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=10^4$$

یادآوری شدت صوت با مجذور فاصله نسبت وارون دارد. $I\propto\frac{1}{r^2}$

۳ به کمک نسبت شدت صوت‌ها، فاصلهٔ نقطه از منبع صوت در حالت دوم را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{I_2}{I_1}=(\frac{r_1}{r_2})^2\xrightarrow{r_1=20m}10^4=(\frac{20}{r_2})^2$$

$$10^2=\frac{20}{r_2}\Rightarrow r_2=0/2m=20cm$$

نمای ۲۶

B ۲۰۱۹ ۴

نکته شدت صوت یک چشمهٔ صوتی I است. اگر n چشمه صوت شبیه آن با هم و در کنار هم صوت ایجاد کنند در همان فاصله از چشمه، شدت صوت nI خواهد شد.

۱ سه چشمه به چشمهٔ اول اضافه شده یعنی جمعاً ۴ چشمه با هم صوت تولید می‌کنند و شدت صوت خواهد شد: $I_2=4I_1$

۲ اختلاف تراز شدت صوت را در دو حالت به دست می‌آوریم.

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_0}-10\log\frac{I_1}{I_0}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log\frac{4I_1}{I_1}$$

$$\beta_2-\beta_1=10\log4=10\log2^2\xrightarrow{\log a^n=n\log a}\beta_2-\beta_1=20\log2$$

$$\xrightarrow{\log2=0/3}\beta_2-\beta_1=20\times0/3=6dB$$

نمای ۲۶

A ۲۰۱۹ ۲

خط فکری ۴ هر ذره از محیط انتشار موج سینوسی دارای حرکت هماهنگ ساده است. از طرفی در حرکت هماهنگ ساده بیشینه شتاب نوسانگر در نقاط بازگشت (دو انتهای مسیر) اتفاق می‌افتد. یعنی نقاطی که در برآمدگی و یا فرورفتگی موج قرار دارند دارای بیشینه شتاب هستند. نقاط P، Q و N در بیشترین فاصله از حالت تعادلشان یعنی در نقاط بازگشت قرار دارند. بنابراین دارای بیشینه شتاب هستند.

نمای ۱۴

۵ B ۲۰۱۹ **۳**

۱ تندی انتشار تمام امواج الکترومغناطیسی در خلأ یکسان است. بنابراین:

$$\begin{cases}\lambda_A=\frac{c}{f_A}\\ \lambda_B=\frac{c}{f_B}\end{cases}\Rightarrow\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{f_B}{f_A}\xrightarrow{\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{۶}{۵}}\frac{f_B}{f_A}=\frac{۶}{۵}\xrightarrow{(I)}f_A=\frac{۵}{۶}f_B$$

۲ با توجه به صورت مسئله:

$$f_B-f_A=۱۰۰MH\xrightarrow{(I)}f_B-\frac{۵}{۶}f_B=۱۰۰\Rightarrow\frac{f_B}{۶}=۱۰۰\Rightarrow f_B=۶۰۰Hz$$

نمای ۲۲

۶ B ۲۰۱۹ **۳**

۱ تندی انتشار موج را به‌دست می‌آوریم:

$$v=f\lambda\xrightarrow{f=۴۰Hz\,,\,\lambda=۱/۲m}v=۴۰\times۱/۲\Rightarrow v=۴۸m/s$$

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند.

۲ بیشینه تندی نوسان ذرات طناب را حساب می‌کنیم.

$$v_m=A\omega\xrightarrow{\omega=۲\pi f}v_m=A(۲\pi f)\xrightarrow{A=۲cm\,,\,f=۴۰Hz}$$

$$v_m=۰/۰۲\times۲\pi\times۴۰\Rightarrow v_m=۱/۶\pi\,m/s$$

نمای ۱۸

۷ B ۲۰۱۹ **۲**

با توجه به رابطهٔ $f=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ با افزایش جرم بسامد کاهش می‌یابد $(\downarrow f=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m\uparrow}})$. تندی انتشار موج به محیط بستگی دارد و در این سؤال چشمه در حال تغییر است پس تندی انتشار موج ثابت می‌ماند. برای طول موج $\lambda=\frac{v}{f}$ با توجه به ثابت ماندن v و کاهش بسامد $(\uparrow\lambda=\frac{v^{\text{ثابت}}}{f\downarrow})$ طول موج افزایش می‌یابد.

نمای ۷

۸ B ۲۰۱۹ **۳**

با توجه به سؤال شدت صوت ثانویه $۳\times۱۰^{-۸}W/m^۲$ بیشتر از شدت صوت اولیه است. $I_۲=I_۱+۳\times۱۰^{-۸}$

افزایش تراز شدت صوت یعنی $\beta_۲-\beta_۱$ نیز ۴dB داده شده است.

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۰}-۱۰\log\frac{I_۱}{I_۰}\xrightarrow{\log a-\log b=\log\frac{a}{b}}\beta_۲-\beta_۱=۴$$

$$۴=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}\Rightarrow۰/۴=\log\frac{I_۲}{I_۱}\qquad(I)$$

۰/۴ برابر ۰/۶−۱ است، اما چرا باید ۰/۴ به صورت ۰/۶−۱ نوشته شود:

$$۱-۰/۶=۰/۴\xrightarrow{۱=\log۱۰}\log۱۰-۲\log۲=۰/۴$$

$$\Rightarrow\log۱۰-\log۴=۰/۴\Rightarrow\log\frac{۱۰}{۴}=۰/۴$$

در معادلهٔ (۱) به جای ۰/۴ مقدار $\log\frac{۱۰}{۴}$ قرار می‌دهیم:

$$\log\frac{I_۲}{I_۱}=\log\frac{۱۰}{۴}\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=\frac{۱۰}{۴}\Rightarrow\frac{I_۱+۳\times۱۰^{-۸}}{I_۱}=\frac{۱۰}{۴}\Rightarrow۴I_۱+۱/۲\times۱۰^{-۷}=۱۰I_۱$$

$$۶I_۱=۱/۲\times۱۰^{-۷}\Rightarrow I_۱=۰/۲\times۱۰^{-۷}=۲\times۱۰^{-۸}W/m^۲$$

نمای ۲۷

۹ B ۲۰۱۹ **۲**

خط فکری دورهٔ آونگ به میدان گرانش (g) بستگی دارد. بنابراین شما باید ابتدا شتاب گرانش در سیاره (g_P) را برحسب شتاب گرانش (g_e) حساب کنید.

۱ نسبت حجم سیاره به حجم کرهٔ زمین خواهد شد:

$$\frac{V_P}{V_e}=\frac{\frac{۴}{۳}\pi R_P^۳}{\frac{۴}{۳}\pi R_e^۳}=\frac{R_P^۳}{R_e^۳}\xrightarrow{R_P=۲R_e}\frac{V_P}{V_e}=(۲)^۳=۸\Rightarrow V_P=۸V_e$$

۲ با توجه به نسبت چگالی‌ها، نسبت جرم سیاره به جرم کرهٔ زمین را به‌دست می‌آوریم.

$$\rho_P=۳\rho_e\Rightarrow\frac{M_P}{V_P}=۳\frac{M_e}{V_e}\Rightarrow۳\frac{M_P}{۸V_e}=۳\frac{M_e}{V_e}\Rightarrow M_P=۲۴M_e$$

۳ نسبت میدان گرانش در سطح سیاره به میدان گرانش در سطح زمین خواهد شد:

$$\frac{g_P}{g_e}=\frac{G\frac{M_P}{R_P^۲}}{G\frac{M_e}{R_e^۲}}\Rightarrow\frac{g_P}{g_e}=\frac{M_P}{M_e}\times(\frac{R_e}{R_P})^۲=۲۴\times(\frac{۱}{۲})^۲\Rightarrow g_P=۶g_e$$

۴ اکنون دورهٔ آونگ را در سیارهٔ جدید به دست می‌آوریم:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\Rightarrow\frac{T_P}{T_e}=\sqrt{\frac{g_e}{g_P}}\xrightarrow{T_e=۲s}\frac{T_P}{۲}=\sqrt{\frac{۱}{۶}}\Rightarrow T_P=\frac{\sqrt{۶}}{۳}s$$

میانبر برای میدان گرانش سیاره‌ای که چگالی و شعاع آن را برحسب چگالی و شعاع زمین در اختیار داریم، می‌توان از رابطهٔ مقابل استفاده کرد. $g=\frac{۴}{۳}\pi RG\bar{\rho}$

نمای ۸

۱۰ B ۲۰۱۹ **۲**

با توجه به فرض مسئله دورهٔ آونگ ۳ برابر دورهٔ سامانهٔ جرم فنر بوده بنابراین کافی است به جای دورهٔ آونگ $T=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ و به جای دورهٔ سامانهٔ جرم - فنر، $T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ را قرار دهیم.

$$T_{\text{آونگ}}=۳T_{\text{فنر}}\Rightarrow۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}=۳\times۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow\frac{\ell}{۱۰}=۹\times\frac{۰/۵}{۴۵۰}\Rightarrow\frac{\ell}{۱۰}=۹\times\frac{۱}{۹۰۰}$$

$$\Rightarrow\ell=۰/۱m=۱۰cm$$

نمای ۸

۱۱ B ۲۰۱۹ **۱**

۱ هنگامی که سرنشینان درون ماشین قرار گرفتند، فنرها فشرده شده‌اند، بنابراین ثابت فنر کل فنرها (فنر آرمانی) خواهد شد:

$$mg=F_e\Rightarrow۴۰۰۰=k\times\frac{۴}{۱۰۰}\Rightarrow k=۱۰^۵N/m$$

۲ هنگامی که اتومبیل دارای سرنشین می‌باشد، دورهٔ تناوب کمک فنرهای اتومبیل (فنر آرمانی) برابر ۱s شده است از این‌رو می‌توان جرم اتومبیل را حساب کرد.

$$\begin{cases}\text{جرم اتومبیل}\,m\\ \text{جرم سرنشینان}\,m'\end{cases}\Rightarrow T=۲\pi\sqrt{\frac{m+m'}{k}}\Rightarrow T=۲\pi\sqrt{\frac{m+۴۰۰}{۱۰^۵}}$$

$$\Rightarrow۱=۴\pi^۲(\frac{m+۴۰۰}{۱۰^۵})\Rightarrow m+۴۰۰=۲۵۰۰\Rightarrow m=۲۱۰۰kg$$

۳ حال اگر اتومبیل خالی باشد، روی فنرها تنها جرم اتومبیل $(m=۲۱۰۰kg)$ قرار دارد.

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow T=۲\pi\sqrt{\frac{۲۱۰۰}{۱۰^۵}}=\frac{۲\pi\sqrt{۲۱}}{۱۰\sqrt{۱۰}}=\frac{\sqrt{۲۱}}{۵}s$$

نمای ۷

۱۲ B ۲۰۱۹ **۲**

نکته هرگاه حرکت نوسانگر به سمت نقطهٔ تعادل باشد حرکت نوسانگر تندشونده است.

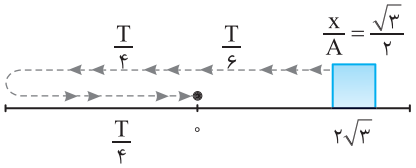
نکته همواره برای استفاده از بازهٔ زمانی باید نسبت $\frac{x}{A}$ را به‌دست بیاورید.

۱ نسبت $\frac{x}{A}$ را حساب می‌کنیم. $\frac{x}{A}=\frac{+۲\sqrt{۳}}{۴}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$

۲ حرکت در این مکان تندشونده است، یعنی نوسانگر به سوی مرکز نوسان در حال حرکت است.

۳ در بازهٔ زمانی $\frac{۴}{۱۵۰}s$، دو بار شتاب صفر شده است. شتاب نوسانگر در نقطهٔ تعادل $x=۰$، صفر می‌شود. بنابراین در این بازه نوسانگر از مکان $x=+\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ به مکان $-A$ رفته و به $x=۰$ برمی‌گردد.

۴ مسیر حرکت را رسم می‌کنیم.



۵ به کمک بازه‌های زمانی شناخته شده دوره را حساب می‌کنیم.

$$\Delta t=\frac{۴}{۱۵۰}s\Rightarrow\frac{T}{۶}+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۴}=\frac{۴}{۱۵۰}s\Rightarrow\frac{۲T}{۳}=\frac{۴}{۱۵۰}s\Rightarrow T=۰/۰۴s$$

۶ بنابراین بسامد زاویه‌ای برابر $\omega=\frac{۲\pi}{T}=۵۰\pi\ rad/s$ می‌باشد و معادلهٔ حرکت خواهد شد:

$$x=A\cos\omega t\xrightarrow{A=۴cm}x=۰/۰۴\cos(۵۰\pi t)$$

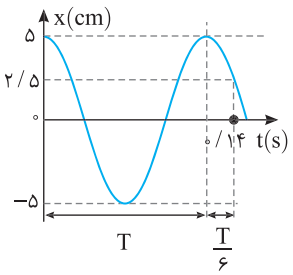
نمای ۳

B ۲۰۱۹ ۲

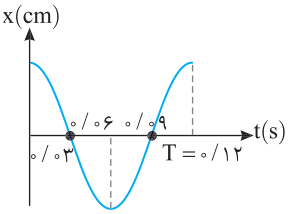
خط فکری ۱۳ هنگامی در یک بازهٔ زمانی تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط با هم برابر است که جابه‌جایی و مسافت طی شده یکسان باشد. یعنی در آن بازهٔ مشترک تغییر جهت ندهد. بنابراین شما باید دوره را به‌دست بیاورید و بازه‌های زمانی داده شده در گزینه‌ها بررسی کنید. در هر بازه‌ای که نوسانگر تغییر جهت ندهد، جواب مسئله را یافته‌اید.

با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده می‌توان نوشت:

$$\Delta t=T+\frac{T}{۶}=\frac{۷T}{۶}$$
$$\Rightarrow۰/۱۴=\frac{۷T}{۶}$$
$$\Rightarrow T=۰/۱۲s$$



بنابراین نمودار $x-t$ به صورت روبه‌رو می‌باشد. در بازه‌ای که نوسانگر تغییر جهت نداده باشد تندی متوسط و سرعت متوسط با هم برابر می‌باشد، یعنی در بازه‌های $t_۱=۰/۰۶s$ تا $t_۲=۰/۱۲s$ و $t=۰$ تا $t=۰/۰۶s$ تندی متوسط با سرعت متوسط برابر است و گزینهٔ (۲) در بازهٔ $t=۰$ تا $t=۰/۶s$ و پاسخ تست است.



نمای ۵ و ۱

B ۲۰۱۹ ۱

خط فکری ۱۴ هرگاه به شما معادلهٔ سرعت - مکان یک حرکت هماهنگ ساده داده شود، اگر $x=۰$ را در معادله قرار دهید، تندی برابر تندی بیشینه می‌شود $(v=v_m)$ زیرا در نقطهٔ تعادل $(x=۰)$ تندی بیشینه است و اگر به جای v، صفر قرار دهید، x برابر $\pm A$ می‌شود.

۱ در لحظه‌ای که نوسانگر از مبدأ مکان می‌گذرد، سرعت بیشینه است:

$$v^۲=\frac{\pi^۲}{۴۰۰}-\frac{\pi^۲}{۴}x^۲\xrightarrow{x=۰,v=v_m}v_m^۲=\frac{\pi^۲}{۴۰۰}\Rightarrow v_m=\frac{\pi}{۲۰}m/s$$

۲ در دو انتهای مسیر یعنی هرگاه $x=\pm A$ است، سرعت صفر می‌باشد:

$$v^۲=\frac{\pi^۲}{۴۰۰}-\frac{\pi^۲}{۴}x\xrightarrow{v=۰,x=\pm A}۰=\frac{\pi^۲}{۴۰۰}-\frac{\pi^۲}{۴}A^۲\Rightarrow\frac{\pi^۲}{۴۰۰}=\frac{\pi^۲}{۴}A^۲$$
$$\Rightarrow A^۲=\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow A=۰/۱m$$

۳ بسامد زاویه‌ای خواهد شد: $v_m=A\omega\Rightarrow\frac{\pi}{۲۰}=۰/۱\omega\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{۲}\ rad/s$

۴ دوره را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\frac{\pi}{۲}=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۴s$

نمای ۱۰

B ۲۰۱۹ ۴

۱ انرژی مکانیکی برابر مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل است، با توجه به فرض مسئله اگر $U=K$ باشد، آنگاه:

$$E=U+K\xrightarrow{U=K}E=K+K=۲K\xrightarrow{E=K_m}K_m=۲K$$
$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}mv_m^۲=۲(\frac{۱}{۲}mv^۲)\Rightarrow v=\frac{\sqrt{۲}}{۲}v_m\ (I)$$

۲ از روی معادلهٔ $x=۰/۰۲\cos۲۰t$، بیشینه تندی نوسانگر را به‌دست می‌آوریم.

$$v_m=A\omega\Rightarrow v_m=۰/۰۲\times۲۰\Rightarrow v_m=۰/۴m/s$$

۳ در معادلهٔ (I) به جای v_m، $۰/۴m/s$ قرار می‌دهیم.

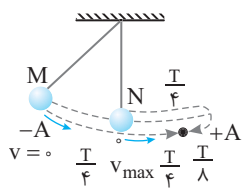
$$v=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times۰/۴\Rightarrow v=۰/۲\sqrt{۲}m/s$$

نمای ۱۱

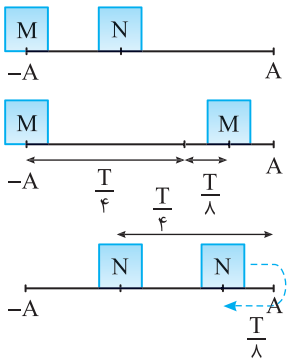
C ۲۰۱۹ ۳

۱ دو آونگ هم‌طول هستند و با توجه به رابطهٔ $T=۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ دورهٔ دو نوسانگر یکسان است.

۲ در یک لحظه تندی یکی از آونگ‌ها صفر است. بنابراین این آونگ در نقطهٔ بازگشت قرار دارد مانند آونگ M در شکل روبه‌رو. آونگ دیگر در این لحظه دارای بیشینه تندی است. یعنی مانند آونگ N در حال گذر از نقطهٔ تعادل است.



۳ دو آونگ در یک جهت در حرکت هستند. در مدت $\frac{T}{۴}$ آونگ M به مرکز نوسان می‌رسد و آونگ N به دامنهٔ $(+A)$ می‌رسد و تغییر جهت می‌دهد. اکنون دو متحرک هرکدام باید به مدت $\frac{T}{۸}$ حرکت کنند تا به هم برسند. بنابراین دو آونگ پس از مدت Δt از کنار هم می‌گذرند:



$$\Delta t=\frac{T}{۴}+\frac{T}{۸}=\frac{۳T}{۸}$$

نمای ۷

B ۲۰۱۹ ۳

۱ با توجه به رابطهٔ تکانه و انرژی جنبشی و اینکه بیشینه انرژی جنبشی آن‌ها با هم برابر است، می‌توان نسبت جرم سامانه‌ها را به‌دست آورد.

$$\begin{cases}P=mv\\K=\frac{۱}{۲}mv^۲\end{cases}\Rightarrow K_{max}=\frac{P_{max}^۲}{۲m}\xrightarrow{K_۲=K_۱}\frac{P_۲^۲}{۲m_۲}=\frac{P_۱^۲}{۲m_۱}$$
$$\xrightarrow{P_۲=۳P_۱}\frac{۹P_۱^۲}{m_۲}=\frac{P_۱^۲}{m_۱}\Rightarrow m_۲=۹m_۱$$

۲ بیشینه انرژی جنبشی آن‌ها با هم برابر است:

$$K_{max_۱}=K_{max_۲}\Rightarrow\frac{۱}{۲}m_۱v_{۱max}^۲=\frac{۱}{۲}m_۲v_{۲max}^۲\xrightarrow{m_۲=۹m_۱}$$
$$m_۱v_{۱max}^۲=۹m_۱v_{۲max}^۲\Rightarrow v_{۱max}=۳v_{۲max}$$

۳ اندازه بیشینه سرعت نوسانگر $v_m=A\omega$ است از این‌رو:

$$A_۱\omega_۱=۳A_۲\omega_۲\xrightarrow{A_۱=A_۲}\omega_۱=۳\omega_۲\xrightarrow{\omega=۲\pi f}۲\pi f_۱=۳(۲\pi f_۲)$$
$$\Rightarrow\frac{f_۲}{f_۱}=\frac{۱}{۳}$$

نمای ۱۱

B ۲۰۱۹ ۱

خط فکری ۱۵ هرگاه به شما معادلهٔ سرعت - مکان یک حرکت هماهنگ ساده داده شود، اگر $x=۰$ را در معادله قرار دهید، تندی برابر تندی بیشینه می‌شود $(v=v_m)$ زیرا در نقطهٔ تعادل $(x=۰)$ تندی بیشینه است و اگر به جای v، صفر قرار دهید، x برابر $\pm A$ می‌شود.

۱ در لحظه‌ای که نوسانگر از مبدأ مکان می‌گذرد، سرعت بیشینه است:

$$v^۲=\frac{\pi^۲}{۴۰۰}-\frac{\pi^۲}{۴}x^۲\xrightarrow{x=۰,v=v_m}v_m^۲=\frac{\pi^۲}{۴۰۰}\Rightarrow v_m=\frac{\pi}{۲۰}m/s$$

۲ در دو انتهای مسیر یعنی هرگاه $x=\pm A$ است، سرعت صفر می‌باشد:

$$v^۲=\frac{\pi^۲}{۴۰۰}-\frac{\pi^۲}{۴}x\xrightarrow{v=۰,x=\pm A}۰=\frac{\pi^۲}{۴۰۰}-\frac{\pi^۲}{۴}A^۲\Rightarrow\frac{\pi^۲}{۴۰۰}=\frac{\pi^۲}{۴}A^۲$$
$$\Rightarrow A^۲=\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow A=۰/۱m$$

۳ بسامد زاویه‌ای خواهد شد: $v_m=A\omega\Rightarrow\frac{\pi}{۲۰}=۰/۱\omega\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{۲}\ rad/s$

۴ دوره را حساب می‌کنیم: $\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow\frac{\pi}{۲}=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۴s$

نمای ۱۰

۱۸ A ۲۰۱۹ ۴

خط فکری هنگامی نوسانگر وادارنده باعث تشدید مابقی نوسانگرها می‌شود که بسامد آن با بسامد دیگر نوسانگرها برابر باشد. از طرفی بسامد یک آونگ به جرم آونگ بستگی ندارد و بسامد به طول آونگ بستگی دارد $\left(f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right)$ و هرگاه طول دو آونگ برابر باشد، بسامد طبیعی آن‌ها با هم برابر است و می‌توانند سبب تشدید یکدیگر شوند. بنابراین شما باید ببینید طول کدام آونگ‌ها با آونگ ۳ برابر است.

طول آونگ‌های (۱)، (۳) و (۷) با هم برابر است. $(\ell_1=\ell_3=\ell_7)$ بنابراین اگر آونگ (۳) را به نوسان درآوریم آونگ‌های (۱) و (۷) نوسان آونگ (۳) را تشدید می‌کنند.

نمای ۱۳

۱۹ B ۲۰۱۹ ۲

۱ فاصلهٔ دو برآمدگی متوالی یعنی یک طول موج بنابراین $\lambda=8cm$ است.

۲ فاصلهٔ یک برآمدگی از فرورفتگی مجاورش نصف طول موج است از این‌رو:

$$\frac{\lambda'}{2}=8\Rightarrow\lambda'=16cm$$

۳ نسبت تندی انتشار موج در دو سیم خواهد شد:

$$\frac{v'}{v}=\frac{f'\lambda'}{f\lambda}\xrightarrow{f'=2f}\frac{v'}{v}=2\times\frac{16}{8}\Rightarrow\frac{v'}{v}=4$$

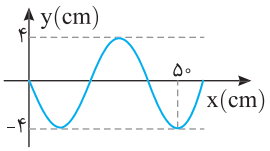
۴ نیروی کشش F' را برحسب F به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{v'}{v}=\frac{\sqrt{\frac{F'}{\mu}}}{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}=\sqrt{\frac{F'}{F}}\Rightarrow4=\sqrt{\frac{F'}{F}}\Rightarrow\frac{F'}{F}=16$$

نمای ۱۹

۲۰ B ۲۰۱۹ ۲

۱ با توجه به نمودار دامنه $A=4cm$ است و طول موج برابر است با:



$$\frac{5\lambda}{4}=50\Rightarrow\lambda=40cm$$

۲ نسبت بیشینه سرعت نوسان ذرات $(v_m=A\omega)$ به سرعت انتشار موج $v=f\lambda$ خواهد شد:

$$\frac{v_m}{v}=\frac{A\omega}{f\lambda}\xrightarrow{\omega=2\pi f}\frac{v_m}{v}=\frac{A(2\pi f)}{f\lambda}\Rightarrow\frac{v_m}{v}=\frac{2\pi A}{\lambda}\Rightarrow\frac{v_m}{v}=\frac{2\pi\times4}{40}$$

$$\Rightarrow\frac{v_m}{v}=\frac{\pi}{5}$$

نمای ۱۹

۲۱ A ۲۰۱۹ ۱

از شکل معادلهٔ $\vec{B}=B_m\cos(\pi\times10^7t)\vec{j}$ ترس به دلتان راه ندهید. در واقع میدان مغناطیسی بردار است و با این نحوهٔ نمایش، مشخص می‌شود که میدان مغناطیسی در راستای محور yهاست.

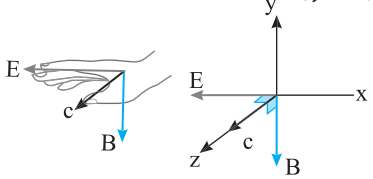
۱ در لحظهٔ $t=75ns$ ، میدان مغناطیسی B را به‌دست می‌آوریم.

$$\vec{B}=B_m\cos(\pi\times10^7t)\vec{j}\Rightarrow\vec{B}=B_m\cos(\pi\times10^7\times75\times10^{-9})\vec{j}$$

$$\vec{B}=B_m\cos(0/75\pi)\vec{j}\Rightarrow\vec{B}=B_m\cos(\frac{3\pi}{4})\vec{j}\Rightarrow\vec{B}=B_m(-\frac{\sqrt{2}}{2})\vec{j}$$

$$\Rightarrow\vec{B}=-\frac{\sqrt{2}}{2}B_m\vec{j}$$

۲ در این لحظه میدان مغناطیسی موج در جهت منفی محور yهاست و جهت انتشار موج در جهت مثبت محور zها است.



به کمک قاعدهٔ دست راست برای امواج الکترومغناطیسی کف دست خود را به سمت yهای منفی به گونه‌ای قرار دهید که انگشت باز شست دست راست شما در جهت مثبت محور zها باشد، در این حالت چهار انگشت باز دست راست شما در خلاف جهت محور xها خواهد بود. یعنی میدان الکتریکی در جهت منفی محور xهاست.

۳ بسامد موج را به‌دست می‌آوریم $\omega=2\pi f\Rightarrow\pi\times10^7=2\pi f\Rightarrow f=5\times10^6Hz$

۴ طول موج را حساب می‌کنیم.

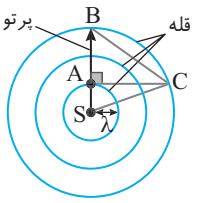
$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow{v=c=3\times10^8m/s}\lambda=\frac{3\times10^8}{5\times10^6}\Rightarrow\lambda=60m$$

طول موج نور مرئی بین ۴۰۰nm تا ۷۰۰nm است. بنابراین این موج الکترومغناطیسی نور مرئی نبوده و موج رادیویی است و گزینهٔ (۱) درست است.

نمای ۱۳

۲۲ C ۲۰۱۹ ۲

۱ نقطهٔ S را به نقطهٔ C وصل کنید. اکنون یک مثلث (ASC) در اختیار دارید که در آن طول ضلع SC برابر 3λ و طول ضلع SA برابر λ است. به کمک رابطهٔ فیثاغورس طول AC را حساب می‌کنیم.



$$AS^2+AC^2=SC^2\Rightarrow\lambda^2+AC^2=(3\lambda)^2$$

$$\Rightarrow AC^2=8\lambda^2\Rightarrow AC=2\sqrt{2}\lambda$$

۲ نقطهٔ B را به C وصل می‌کنیم در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC می‌توان نوشت:

$$AB^2+AC^2=BC^2\xrightarrow{AB=2\lambda}(2\lambda)^2+(2\sqrt{2}\lambda)^2=18^2$$

$$\Rightarrow4\lambda^2+8\lambda^2=18^2\Rightarrow12\lambda^2=18^2\Rightarrow\lambda^2=27\Rightarrow\lambda=3\sqrt{3}cm$$

نمای ۲۰

۲۳ B ۲۰۱۹ ۳

نکته اختلاف تراز شدت صوت با شدت‌های I_1 و I_2 از رابطهٔ $\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}$ به‌دست می‌آید. شدت صوت $I_2=2\sqrt{10}I_1$ است. بنابراین

$$\beta_2-\beta_1=10\log\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\log2\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10(\log2+\log\sqrt{10})=10(0/3+0/5)\Rightarrow\beta_2-\beta_1=8dB$$

تراز شدت صوت ۸ دسی‌بل افزایش می‌یابد.

نمای ۲۷

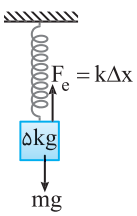
۲۴ B ۲۰۱۹ ۴

با توجه به شکل جبهه‌های موج، چشمه به سمت چپ در حال حرکت بوده که در ناحیهٔ سمت چپ فاصله جبهه‌های موج که همان طول موج بوده کم شده و در ناحیه سمت راست چشمه، جبهه‌های موج از هم فاصلهٔ بیشتری گرفته و طول موج در حال افزایش است. طول موج برای ناظر A در حال کاهش بوده و انتقال به آبی دارد. طول موج برای ناظر B در حال افزایش بوده و انتقال به سرخ دارد.

نمای ۳۰

۲۵ B ۲۰۱۹ ۲

۱ با توجه به صورت سؤال در شکل (ب) جسم در تعادل است:



$$F_e=mg\Rightarrow k\Delta x=mg\Rightarrow k\times\frac{5}{100}=50\Rightarrow k=1000N/m$$

۲ بسامد زاویه‌ای برابر است با:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{1000}{5}}=10\sqrt{2}rad/s$$

۳ بیشینه تندی نوسانگر از رابطهٔ $v_{max}=A\omega$ به‌دست می‌آید. وقتی جسم را از حالت تعادل 2cm منحرف کرده و رها می‌کنیم، جسم با دامنهٔ 2cm نوسان می‌کند بنابراین:

$$v_{max}=A\omega\xrightarrow[\omega=10\sqrt{2}]{A=0/02m}v_{max}=0/02\times10\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow v_{max}=0/2\sqrt{2}\Rightarrow v_{max}=\frac{\sqrt{2}}{5}m/s$$

نمای ۲۷

فصل چهارم

برهم‌کنش‌های موج

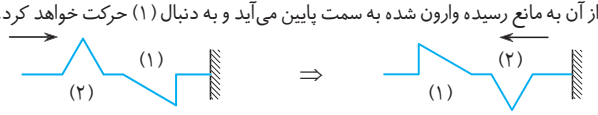


پنجره ۱

B ۳ ۲۰۲۰

یادآوری هرگاه یک تپ به انتهای ثابت رسیده و بر آن فرود آید، تپ بازتاب از مانع وارون و قرینهٔ تپ فرودی است.

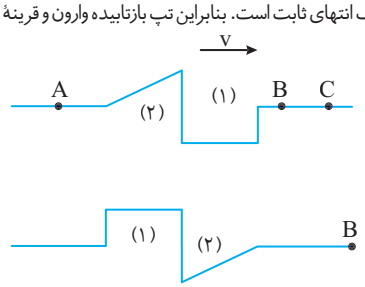
دقت کنید هر قسمت از تپ که زودتر به مانع برخورد می‌کند زودتر بازمی‌گردد، یعنی قسمت (۱) تپ به مانع برخورد کرده وارونه می‌شود و به بالا می‌رود و قسمت (۲) پس از آن به مانع رسیده وارون شده به سمت پایین می‌آید و به دنبال (۱) حرکت خواهد کرد.



بازتاب از انتهای ثابت — تپ فرودی بر انتهای ثابت

B ۳ ۲۰۲۱

خط فکری تپ فرضی می‌خواهد از A به C برسد، اما نقطهٔ B غیرقابل حرکت است، از این‌رو نقطهٔ B یک انتهای ثابت است. بنابراین تپ بازتابیده وارون و قرینهٔ تپ فرودی است.



نقطهٔ B شبیه انتهای ثابت عمل کرده و تپ از آن بازتابیده می‌شود و تپ بازتابیده نسبت به تپ فرودی وارونگی دارد. قسمت مستطیل شکل تپ ابتدا به نقطهٔ B می‌رسد، بنابراین در بازتاب نیز، ابتدا برمی‌گردد و در سمت چپ تپ قرار می‌گیرد. با این توضیحات، گزینهٔ (۳) تپ بازتابیده است.

B ۴ ۲۰۲۲

خط فکری هرگاه یک موج به مانعی برخورد کرده از مانع بازتاب کند، محیط انتشار موج قبل و بعد از برخورد به مانع تغییر نمی‌کند. بنابراین تندی انتشار موج که به ویژگی‌های محیط وابسته است تغییر نمی‌کند. بسامد موج نیز از ویژگی‌های چشمهٔ موج است، بنابراین هنگام انتشار موج در محیط بسامد آن ثابت می‌ماند $(f_1=f_2)$، از این‌رو طول موج $\lambda=v/f$ نیز ثابت می‌ماند.

اکنون با یادآوری‌هایی که در خط فکری بیان شده گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم.

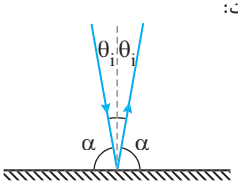
بازتاب موج از هر سطحی از قانون بازتاب عمومی پیروی می‌کند و گزارهٔ (الف) درست است.

طول موج، بسامد و تندی انتشار موج در بازتاب موج ثابت می‌مانند، بنابراین گزاره‌های (ب)، (پ) و (ت) نیز درست هستند.

B ۱ ۲۰۲۳

یادآوری بنا به قانون بازتاب عمومی همواره زاویهٔ بین پرتو تابش و خط عمود در نقطهٔ تابش (زاویهٔ تابش) با زاویهٔ بین پرتو بازتاب و خط عمود در نقطهٔ تابش (زاویهٔ بازتاب) برابر است.

در صورت مسأله بیان شده که زاویهٔ بین راستای پرتو تابش و راستای پرتو بازتابش یعنی $2\theta_i$ برابر $\frac{1}{4}$ زاویهٔ α است. از این‌رو خواهیم داشت:



$$\theta_i+\theta_i=\frac{1}{4}\alpha\Rightarrow\alpha=8\theta_i$$

$$\alpha+\theta_i=90^\circ\Rightarrow 8\theta_i+\theta_i=90^\circ$$

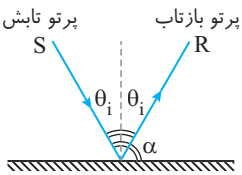
$$\Rightarrow\theta_i=10^\circ$$

B ۲ ۲۰۲۴

خط فکری قرار است پرتو بازتاب نیمساز زاویهٔ بین پرتو تابش و سطح آینه باشد. یعنی زاویهٔ بین پرتو تابش و پرتو بازتاب $(2\theta_i)$ برابر زاویهٔ بین پرتو بازتاب و سطح آینه (α) باشد. با توجه به این مطلب مسئله به راحتی قابل حل است.

مجموع زاویهٔ تابش θ_i و زاویهٔ بین پرتو با سطح آینهٔ α برابر 90° است، از این‌رو:

$$\begin{cases}\alpha=2\theta_i\\ \theta_i+\alpha=90^\circ\end{cases}\Rightarrow 3\theta_i=90^\circ\Rightarrow\theta_i=30^\circ$$



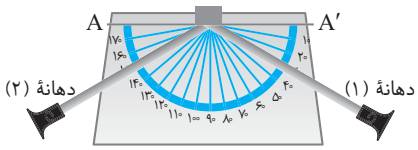
B ۲ ۲۰۲۵

خط فکری امواج صوتی مانند تمام امواج دیگر از قانون بازتاب عمومی پیروی می‌کنند. یعنی زاویهٔ تابش با زاویهٔ بازتاب برابر است. اگر شنوندهٔ دوم بخواهد صدا را با بیشترین بلندی بشنود باید گوش او (دهانهٔ دوم) در امتداد صوت بازتاب قرار گیرد.

زاویهٔ بین دو لوله 120° است، بنابراین زاویهٔ بین هر لوله با خط عمود بر سطح مانع خواهد شد:

$$\theta_i+\theta_r=120^\circ\xrightarrow{\theta_i=\theta_r}2\theta_i=120^\circ\Rightarrow\theta_i=60^\circ$$

زاویهٔ بین لولهٔ متصل به دهانهٔ (۱) با خط AA' برابر $90^\circ-60^\circ=30^\circ$ می‌باشد.



B ۴ ۲۰۲۶

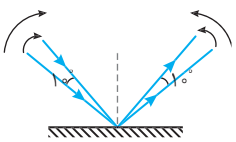
نکته برای آن‌که بیشینهٔ بلندی به دهانهٔ دوم برسد باید زاویهٔ تابش موج صوتی و بازتابش با هم برابر باشند.

زاویه‌ای که دهانهٔ (۱) با خط عمود می‌سازد $90^\circ-150^\circ=60^\circ$ و زاویه‌ای که دهانهٔ (۲) با خط عمود می‌سازد $90^\circ-45^\circ=45^\circ$ است، بنابراین برای آن‌که صدای دریافتی بیشینه شود باید یا زاویهٔ دهانهٔ (۱) با خط عمود 45° شود، یعنی لوله متصل به دهانهٔ (۱) 15° ساعتگرد بچرخد و یا زاویهٔ دهانهٔ (۲) با خط عمود از 45° به 60° تغییر کند، یعنی لولهٔ متصل به دهانهٔ (۲) نیز 15° ساعتگرد بچرخد.

B ۱ ۲۰۲۷

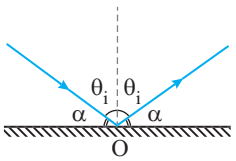
خط فکری با توجه به قانون بازتاب عمومی، زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب با هم برابر است و اگر زاویهٔ تابش کاهش (و یا افزایش) یابد زاویهٔ بازتاب نیز کاهش (و یا افزایش) می‌یابد. البته با کاهش زاویهٔ تابش و کاهش زاویهٔ بازتاب زاویه‌ای که پرتوهای تابش و بازتاب با سطح آینه می‌سازند افزایش می‌یابد.

پرتو SI به اندازهٔ $10^\circ C$ ساعتگرد چرخیده و در این صورت پرتو بازتاب 10° پادساعتگرد می‌چرخد. بنابراین زاویهٔ بازتاب نیز 10° کاهش می‌یابد و زاویهٔ بین پرتو بازتاب و سطح 10° افزایش می‌یابد.



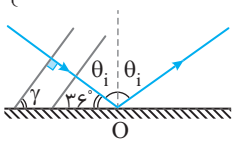
B ۱ ۲۰۲۸

یادآوری زاویهٔ بین پرتو تابش و پرتو بازتاب دو برابر زاویهٔ تابش $(2\theta_i)$ است. از طرفی اگر زاویهٔ بین پرتو تابش با سطح آینه را α بنامیم مجموع α و θ_i همواره برابر 90° است.



بنابه فرض مسئله زاویهٔ α، $\frac{1}{3}$ زاویهٔ بین پرتو تابش و پرتو بازتاب است از این‌رو:

$$\begin{cases}\alpha=\frac{1}{3}(2\theta_i)\\ \alpha+\theta_i=90^\circ\end{cases}\Rightarrow\frac{2}{3}\theta_i+\theta_i=90^\circ\Rightarrow\frac{5}{3}\theta_i=90^\circ\Rightarrow\theta_i=54^\circ\text{ و }\alpha=36^\circ$$

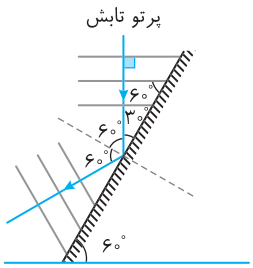


پرتو نور بر جبهه‌های موج عمود می‌باشد بنابراین: $\gamma=180^\circ-(90^\circ+36^\circ)\Rightarrow\gamma=54^\circ$

میانبر همواره زاویهٔ بین جبهه‌های موج با سطح آینه (مانع) برابر زاویهٔ بین پرتو تابش و خط عمود است.

B ۲۰۲۹ ۱

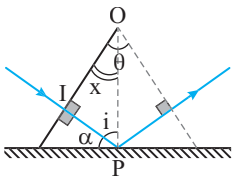
نکته زاویهٔ بین جبهه‌های موج و سطح صیقلی برابر زاویهٔ بین پرتو تابش و خط عمود است.



با توجه به صورت مسأله جبهه‌های موج موازی افق هستند و بنا به خاصیت خطوط موازی و مورب، جبهه‌های موج با سطح صیقلی زاویهٔ ۶۰° می‌سازند از این‌رو زاویه تابش نیز ۶۰° می‌شود و زاویه بازتاب نیز ۶۰° خواهد بود.

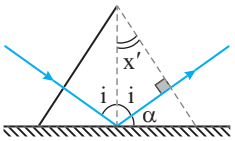
B ۲۰۳۰ ۲

خط فکری زاویهٔ ۸۴° در شکل را با حرف θ نمایش می‌دهیم و ابتدا رابطه‌ای بین θ و α پیدا می‌کنیم تا مسئله را حل کنیم.



جبهه‌های موج بر پرتوی موج عمود است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OIP مجموع زاویهٔ i و x، ۹۰° است. از طرفی مجموع i و α نیز ۹۰° است:

$$\begin{cases} i+x=90^\circ \\ \alpha+i=90^\circ \end{cases} \Rightarrow x=\alpha \qquad (1)$$



با توجه به قانون بازتاب عمومی زاویهٔ تابش و بازتاب با هم یکسان و برابر i است:

$$\begin{cases} \alpha+i=90^\circ \\ i+x'=90^\circ \end{cases} \Rightarrow x'=\alpha \qquad (2)$$

با توجه به شکل و روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

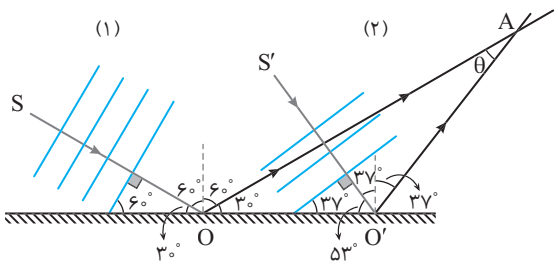
$$\theta=x+x'=2\alpha$$

بنابراین:

$$84=2\alpha \Rightarrow \alpha=42^\circ$$

B ۲۰۳۱ ۲

خط فکری به جای جبهه‌های موج شما باید با رسم پرتو مسئله را حل کنید و همواره یادتان باشد که زاویه‌ای که جبهه‌های موج با سطح بازتابنده می‌سازند برابر زاویهٔ بین پرتو و خط عمود است. اکنون بر جبهه‌های موج تابش و بازتاب، پرتو تابش SO و S′O′ را رسم کرده و پرتوهای بازتاب را رسم می‌کنیم، سپس زاویه بین دو پرتو بازتاب را به‌دست می‌آوریم.



زاویهٔ تابش پرتو SO، ۶۰° و زاویهٔ تابش پرتو S′O′ برابر ۳۷° است. پرتوهای بازتاب OA و O′A نیز زاویهٔ ۶۰° و ۳۷° با خط عمود می‌سازند. در مثلث OO′A′ مجموع زوایا ۱۸۰° است بنابراین θ خواهد شد:

$$\theta=180^\circ-(30^\circ+53^\circ+74^\circ)=23^\circ$$

B ۲۰۳۲ ۲

باید به سراغ هندسه برویم. مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰° است.

۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ SMI می‌توان نوشت:

$$2i+26+90=180^\circ \Rightarrow 2i+26=90 \Rightarrow i+13=45 \Rightarrow i=32^\circ$$

۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ IMI′ خواهیم داشت:

$$\alpha'=90-i \Rightarrow \alpha'=90-32 \Rightarrow \alpha'=58^\circ$$

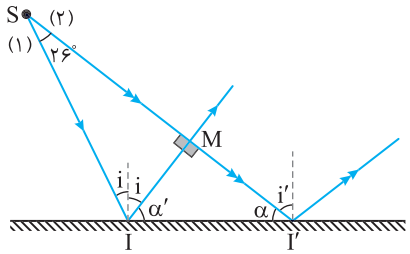
$$\alpha'+\alpha+90=180 \Rightarrow 58+\alpha+90=180 \Rightarrow \alpha=32^\circ$$

۳ اکنون زاویهٔ i′ را حساب می‌کنیم.

$$\alpha+i'=90 \Rightarrow 32+i'=90 \Rightarrow i'=58^\circ$$

۴ نسبت زوایای تابش خواهد شد.

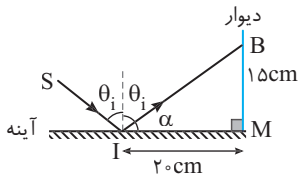
$$\frac{i'}{i}=\frac{58}{32} \Rightarrow \frac{i'}{i}=\frac{29}{16}$$



B ۲۰۳۳ ۱

خط فکری پرتو SI بعد از بازتاب آینه در نقطه‌ای در فاصلهٔ ۱۵cm از سطح آینه به دیوار برخورد کرده بنابراین به کمک مثلث قائم‌الزاویهٔ IBM می‌توانید زاویهٔ بین پرتو بازتاب و سطح آینه (α) را حساب کرده سپس زاویهٔ تابش را به‌دست آورید.

با توجه به شکل روبه‌رو می‌توان نوشت:



$$\tan\alpha=\frac{15}{20}=\frac{3}{4} \Rightarrow \alpha=37^\circ$$

$$\xrightarrow{\theta_i+\alpha=90^\circ} \theta_i=53^\circ$$

B ۲۰۳۴ ۴

میکروفون سهموی برای ثبت صداهای ضعیف استفاده می‌شود. پس گزینهٔ (۱) نادرست است. / در دستگاه لیتوتریپسی برای شکستن سنگ‌های کلیه از بازتابنده‌های بیضوی استفاده می‌شود. پس گزینهٔ (۲) نادرست است.

برای تعیین تندی خودروها از اثر دوپلر امواج الکترومغناطیسی استفاده می‌شود پس گزینهٔ (۳) نادرست است. / از مکان‌یابی پژواکی امواج فراصوت به همراه اثر دوپلر برای تعیین تندی شارش خون (گویچه‌های قرمز) در رگ استفاده می‌شود و گزینهٔ (۴) درست است.

بنابراین نتیجه می‌گیریم که باید مبحث فناوری و کاربرد را در کتاب درسی به خوبی فرابگیریم.

A ۲۰۳۵ ۱

۱ صوت در مدت ۰/۲s، ۱۰۰ متر فاصلهٔ بین وال با مانع را رفته و بازگشته یعنی مسافت ۱۰۰+۱۰۰ متر را در مدت ۰/۲s طی می‌کند. بنابراین تندی صوت در محیط برابر است با:

$$v_{\text{صوت در آب}}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{100+100}{0/2}=\frac{200}{0/2} \Rightarrow v_{\text{صوت در آب}}=1000\,m/s$$

۲ حال با توجه به سرعت صوت و بسامد داده شده طول موج را حساب می‌کنیم.

$$\lambda=\frac{v}{f} \Rightarrow \lambda=\frac{1000}{100\times10^3}=10^{-2}m=1cm$$

یادآوری تندی موج در یک محیط که شرایط فیزیکی آن ثابت بوده و تغییر نمی‌کند مقدار ثابتی است و معادلهٔ انتشار موج همان معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت است.

$$\ell=vt$$

A ۲۰۳۶ ۲

تندی صوت در محیط را به‌دست می‌آوریم:

$$v=f\lambda \xrightarrow[\lambda=۸/۷۵\times۱۰^{-۳}m]{f=۴۰\times۱۰^{۳}Hz} v=۴۰\times۱۰^{۳}\times۸/۷۵\times۱۰^{-۳}\Rightarrow v=۳۵۰m/s$$

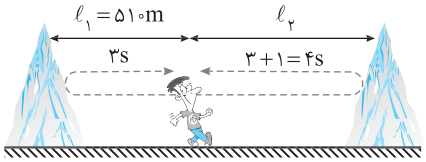
زمان رفت و برگشت صوت $۰/۴s$ است، بنابراین زمان رفت صوت $\frac{۰/۴}{۲}=۰/۲s$ است،

از این‌رو فاصلهٔ دیوار از چشمه خواهد شد: $d=vt=۳۵۰\times۰/۲=۷۰m$

B ۲۰۳۷ ۲

۱ صوت فاصلهٔ شخص تا صخرهٔ نزدیک تر را در مدت $۳s$ می‌رود و برمی‌گردد، یعنی مسافت $۵۱۰+۵۱۰=۱۰۲۰m$ را در مدت $۳s$ طی می‌کند بنابراین تندی صوت در محیط خواهد شد:

$$v=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow v=\frac{۱۰۲۰}{۳}\Rightarrow v=۳۴۰m/s$$



۲ صوت مسیر تا صخرهٔ دورتر را در مدت $۳+۱=۴s$ می‌رود و برمی‌گردد، فاصلهٔ صخره تا شخص را به‌دست می‌آوریم. $\ell_۲+\ell_۲=v(t)\Rightarrow ۲\ell_۲=۳۴۰(۴)\Rightarrow \ell_۲=۶۸۰m$

۳ بنابراین فاصلهٔ دو صخره از هم برابر است با: $\ell_۱+\ell_۱=۵۱۰+۶۸۰=۱۱۹۰m$

بازی با سوال **شخصی بین دو کوه ایستاده است و فریاد می‌زند. اگر اختلاف فاصلهٔ شخص از دو کوه $۱۶m$ باشد، پژواک اول را چند ثانیه زودتر از پژواک دوم می‌شنود؟ (سرعت صوت $۳۲۰m/s$ است.)**

۱) $۰/۰۱$ ۲) $۰/۱$ ۳) $۰/۰۵$ ۴) $۰/۵$

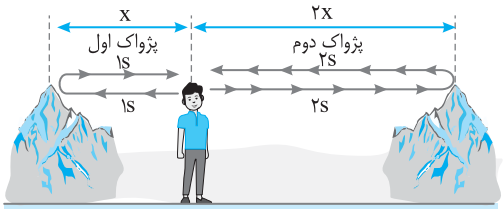
پاسخ **پژواک دوم باید $۱۶m$ بیشتر برود و $۱۶m$ بیشتر برگردد، یعنی مسیر پژواک دوم $۱۶+۱۶=۳۲m$ از پژواک اول بیشتر است و تندی صوت در محیط $۳۲۰m/s$ است. بنابراین پژواک دوم با اختلاف زمانی زیر به شنونده می‌رسد.**

$$\Delta x=vt\Rightarrow t=\frac{\Delta x}{v}=\frac{۲\times۱۶}{۳۲۰}=۰/۱s$$

گزینهٔ ۲

B ۲۰۳۸ ۲

صوت، مسیر دانش‌آموز تا صخرهٔ نزدیک‌تر را در مدت $۱s$ و مسیر دانش‌آموز تا صخرهٔ دورتر را در مدت $۲s$ طی کرده است. بنابراین فاصلهٔ دانش‌آموز از صخرهٔ دورتر دو برابر صخره نزدیک‌تر است. یعنی اگر فاصلهٔ دانش‌آموز از صخره نزدیک‌تر x باشد از صخره دورتر $۲x$ است، بنابراین: $x+۲x=۱۰۲۰\Rightarrow ۳x=۱۰۲۰\Rightarrow x=۳۴۰m$



B ۲۰۳۹ ۴

خط فکری فاصلهٔ خودرو تا مانع را d فرض می‌کنیم. اگر صوت فاصلهٔ d را طی کرده به مانع برخورد کرده و بازگردد و در مدت t به راننده برسد در این مدت خودرو نیز به اندازهٔ $v_{خودرو}\times t$ به مانع نزدیک می‌شود، یعنی صوت در برگشت فاصلهٔ d را طی نمی‌کند بلکه فاصلهٔ $d-vt$ را طی می‌کند تا به خودرو برسد. اکنون با این دانسته‌ها مسئله قابل حل است.

۱ سرعت خود را بر حسب m/s حساب می‌کنیم.

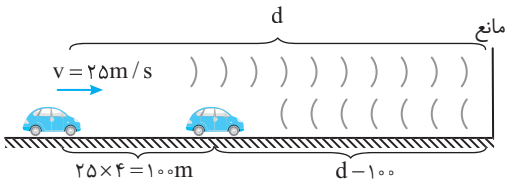
$$v=۹۰km/h=۹۰\times\frac{۱۰۰۰m}{۳۶۰۰s}\Rightarrow v=۲۵m/s$$

۲ مقداری که خودرو در مدت $۴s$ جلو می‌آید را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=vt=۲۵\times۴\Rightarrow \Delta x=۱۰۰m$$

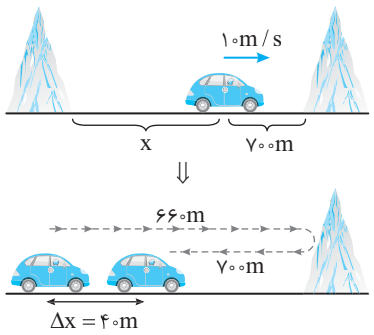
۳ در این مدت صوت مسافت $d+(d-۱۰۰)$ را با سرعت $۳۲۰m/s$ طی می‌کند بنابراین:

$$\ell=vt\Rightarrow d+d-۱۰۰=۳۲۰\times۴\Rightarrow ۲d=۱۳۸۰\Rightarrow d=۶۹۰m$$



B ۲۰۴۰ ۴

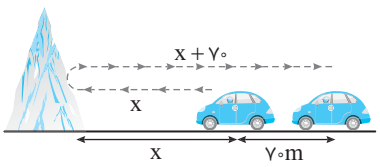
۱ خودرو با تندی $۱۰m/s$ در حال حرکت به سمت صخرهٔ نزدیک‌تر است و در فاصلهٔ ۷۰۰ متری از صخره گلوله شلیک می‌شود و در مدت $۴s$ شخص صدای اولین پژواک را می‌شنود و در این مدت خودرو به اندازهٔ $\Delta x=vt=۱۰\times۴=۴۰m$ حرکت کرده، بنابراین صوت فاصلهٔ $\ell=۷۰۰+۶۶۰=۱۳۶۰m$ را در مدت $۴s$ طی کرده است و تندی صوت خواهد شد. $v=\frac{\ell}{t}\Rightarrow v=\frac{۱۳۶۰}{۴}=۳۴۰m/s$



۲ اما پژواک دوم از صخرهٔ دورتر پس از $۷s$ به گوش شخص می‌رسد و در این مدت خودرو $\Delta x=۷\times۱۰=۷۰m$ از صخره دور شده است.

و اگر فاصلهٔ صخره دورتر از خودرو در ابتدا x باشد، هنگام دریافت پژواک این فاصله $x+۷۰$ است یعنی صوت مسافت $(x+x+۷۰)$ متر را طی می‌کند تا به گوش راننده برسد از این‌رو:

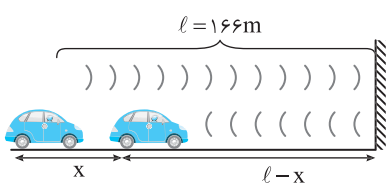
$$v=\frac{x+(x+۷۰)}{\Delta t'}\Rightarrow ۳۴۰=\frac{۲x+۷۰}{۷}\Rightarrow ۲x+۷۰=۲۳۸۰\Rightarrow x=۱۱۵۵m$$



بنابراین فاصلهٔ دو صخره از هم $۱۱۵۵+۷۰۰=۱۸۵۵m$ می‌باشد.

C ۲۰۴۱ ۲

خط فکری در حل تمام این مسائل شما باید دقت کنید که اگر فاصلهٔ خودرو تا مانع در لحظهٔ تولید صوت ℓ باشد، صوت در مسیر رفت ℓ را طی می‌کند، اما در برگشت خودرو در حال نزدیک شدن به مانع است و صوت مسیر کوتاه‌تری را طی می‌کند زیرا خودرو به طور مثال به اندازهٔ x جلو آمده بنابراین کل مسافت طی شده توسط صوت $(\ell+\ell-x)$ خواهد بود.



۱ اگر مدت رفت و برگشت صوت را t بنامیم، پیشروی ماشین در این مدت خواهد شد:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow x=\frac{1}{2}\times4\times t^2+10t\Rightarrow x=2t^2+10t$$

۲ صوت با تندی ۳۲۰m/s مسافت $\ell+\ell-x$ را طی می‌کند، بنابراین خواهیم داشت:

$$2\ell-x=vt\Rightarrow(2\times166)-(2t^2+10t)=320\times t$$

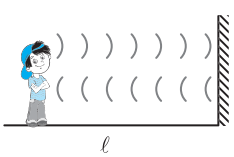
$$332-2t^2-10t=320t\Rightarrow2t^2+330t-332=0$$

$$t^2+165t-166=0\Rightarrow(t+166)(t-1)=0\Rightarrow t=1s$$

۳ ۲۰۴۲ B

نکته حداقل تأخیر زمانی بین صوت و پژواک آن که گوش قادر به تمیز دادن صوت از پژواکش شود ۰/۱s است.

با توجه به نکتهٔ بیان شده باید صوت، فاصلهٔ شخص را با تندی ۳۵۰m/s در مدت ۰/۱s طی کند و اگر فاصلهٔ شخص از دیوار ℓ باشد در مسیر رفت و برگشت صوت می‌توان نوشت:



$$\Delta x=vt\Rightarrow2\ell=350\times0/1\Rightarrow\ell=17/5m$$

۳ ۲۰۴۳ B

خط فکری تندی انتشار صوت در فلز از سرعت صوت در هوا بیشتر است، از این‌رو هرگاه به یک سرلولهٔ فلزی یک ضربه بزنیم در سمت دیگر لوله دو صدا دریافت می‌شود که یکی از طریق هوا و دیگری از طریق فلز منتقل می‌شود و برای تمیز دادن این دو صوت باید اختلاف زمانی رسیدن آن‌ها به انتهای دیگر لوله حداقل ۰/۱s باشد.

زمان حرکت صوت در هوا و در فلز را به ترتیب $t_{هوا}$ و $t_{فلز}$ می‌نامیم. اختلاف این دو باید از ۰/۱s بیشتر باشد.

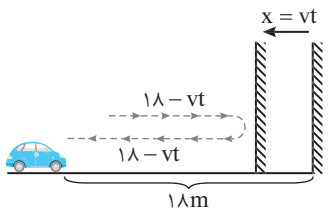
$$t_{هوا}-t_{فلز}\geq0/1\xrightarrow{t=\frac{x}{v}}\frac{\ell}{v_{هوا}}-\frac{\ell}{v_{فلز}}\geq0/1\Rightarrow\frac{\ell}{300}-\frac{\ell}{1800}\geq0/1$$

$$\Rightarrow\frac{6\ell-\ell}{1800}\geq0/1\Rightarrow5\ell\geq180\Rightarrow\ell\geq\frac{180}{5}\Rightarrow\ell\geq36m$$

۱ ۲۰۴۴ C

نکته حداقل اختلاف زمانی برای دو صوت رسیده به گوش که گوش قادر به تشخیص دو صوت از هم شود برابر ۰/۱s است.

خط فکری مانع در حال حرکت با سرعت v است. وقتی راننده بوق می‌زند، صوت به سمت مانع می‌رود و در مدت t به مانع می‌رسد در این مدت مانع به اندازهٔ $x=vt$ جلو می‌آید بنابراین صوت در فاصلهٔ $180-vt$ به مانع برخورد می‌کند و همین فاصله را در برگشت طی می‌کند تا به گوش راننده برسد در این صورت زمان رفت و برگشت صوت 2t خواهد شد و این 2t باید حداقل برابر ۰/۱s باشد یعنی t=۰/۰۵s است اکنون مسئله قابل حل است.



مسافتی که صوت با سرعت ۳۲۰m/s طی می‌کند برابر $2\times(180-v\times0/05)$ است بنابراین:

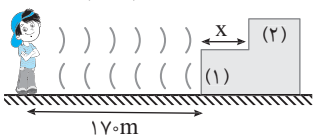
$$\Delta x=vt\Rightarrow320\times0/1=2(180-0/05v)\Rightarrow16=(180-0/05v)\Rightarrow0/05v=2$$

$$\Rightarrow v=\frac{200}{5}=40m/s$$

۱ ۲۰۴۵ B

پژواک اول از پلهٔ اول به سوی شخص می‌رود. این پژواک مسیر ۱۷۰m را می‌رود و ۱۷۰m را برمی‌گردد، بنابراین مدت زمان رسیدن پژواک اول خواهد شد:

$$\Delta x=vt\Rightarrow170+170=340t_1\Rightarrow t_1=1s$$



پژواک دوم باید فاصلهٔ $170+x$ (x پهنای پله) را برود و همین فاصله را باید برگردد، یعنی مسافت طی شده برای پژواک دوم برابر $2(170+x)$ است و زمان پژواک دوم برابر است با:

$$\Delta x=vt\Rightarrow2(170+x)=340t_2\Rightarrow t_2=\frac{340+2x}{340}$$

اختلاف زمانی t_1 و t_2 اگر از ۰/۱s کمتر باشد، صدای دو پژواک را نمی‌توان از هم تمیز داد.

$$t_2-t_1<0/1\Rightarrow\frac{340+2x}{340}-1<0/1$$

$$\Rightarrow\frac{340+2x-340}{340}<0/1\Rightarrow\frac{2x}{340}<0/1\Rightarrow x<17m$$

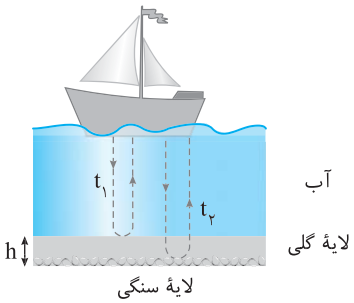
۲ ۲۰۴۶ B

خط فکری دقت کنید صوت پس از بازتاب از لایهٔ گلی در مدت $t_1=0/1s$ برمی‌گردد، اما بازتاب از لایهٔ سنگی از لحظه ارسال تا برگشت به دریافت کننده $t_2=0/15s$ طول می‌کشند. اختلاف زمانی (t_2-t_1) مدت زمانی است که صوت در لایهٔ گلی در حال رفت و برگشت است، بنابراین با داشتن تندی صوت در لایهٔ گلی می‌توانید، ضخامت این لایه را حساب کنید.

ضخامت لایهٔ گلی را h می‌نامیم در این صورت:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow2h=v(t_2-t_1)\Rightarrow2h=1920(0/15-0/1)$$

$$\Rightarrow2h=1920(0/05)\Rightarrow h=960(0/05)\Rightarrow h=48m$$



۳ ۲۰۴۷ B

اولین پژواک در اثر بازتاب از پلهٔ اول ایجاد می‌شود و این پژواک ۲×۱۶۰m مسافت در رفت و برگشت طی می‌کند. پژواک دوم از پلهٔ دوم برمی‌گردد و در مسیر خود $160+d$ را طی کرده و در برگشت نیز $160+d$ را طی می‌کند یعنی مسافت طی شدهٔ آن $2\times160+2d$ است و اختلاف زمانی بین دو پژواک به دلیل همین 2d است. بنابراین برای این ۰/۵s اختلاف زمانی بین دو پژواک اول و دوم می‌توان نوشت:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow2d=v\times0/5\Rightarrow v=4d\qquad(I)$$

اکنون به رابطهٔ دیگری بین d و v نیاز داریم. به سراغ پژواک سوم می‌رویم.

مسافت طی شدهٔ پژواک سوم برابر است با:

$$\ell_3=(160+d+d)+(d+d+160)=320+4d$$

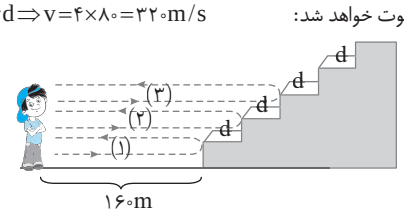
این پژواک بعد از 2s به گوش رسیده است، بنابراین:

$$t_3=\frac{\ell_3}{v}\Rightarrow2=\frac{320+4d}{v}\Rightarrow320+4d=2v\qquad(II)$$

از رابطهٔ (I) در رابطهٔ (II) جای‌گذاری می‌کنیم:

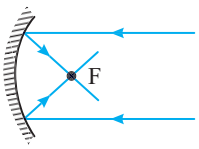
$$320+4d=2\times4d\Rightarrow320=4d\Rightarrow d=80m$$

$$(I)\Rightarrow v=4d\Rightarrow v=4\times80=320m/s$$ تندی انتشار صوت خواهد شد:



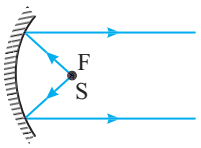
B ۲۰۴۸ ۲

یادآوری ۱ هرگاه پرتوها موازی هم به سطح کاو بتابند، در بازتاب از نقطه‌ای به نام کانون می‌گذرند.

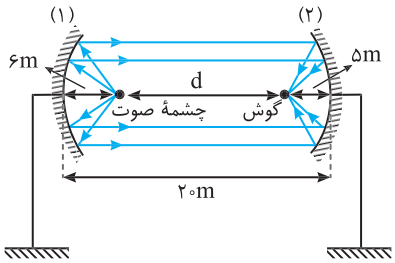


یادآوری ۲ هرگاه پرتوها از چشمهٔ S که در کانون سطح کاو قرار دارد به سطح کاو برسند پرتوهای بازتاب از سطح با هم موازی هستند.

اگر دو سطح کاو در مقابل هم قرار گیرند و چشمهٔ صوت در کانون یکی از دو سطح قرار داشته باشد چنانچه گوش شخصی در کانون سطح دوم قرار گیرد گوش صدای چشمه را با بیشترین بلندی در آن فاصله می‌شنود.

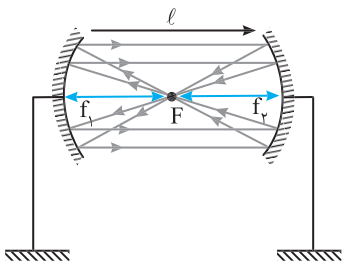


پس فاصلهٔ بین شخص و چشمهٔ صوت برابر فاصلهٔ بین دو کانون F_1 و F_2 است و این فاصله مطابق شکل خواهد شد. $d=۲۰-(۵+۶)\Rightarrow d=۹m$



B ۲۰۴۹ ۱

تمام موج صوت تولید شده توسط شخص پس از بازتاب از هر دو سطح باید در همان نقطهٔ تولید صوت متمرکز شود تا شخص صوت پژواک را با بیشترین بلندی بشنود. همان‌طور که می‌دانیم اگر در کانون صوت تولید کنیم صوت تولیدی پس از بازتاب از سطح کاو، موازی با محور بازمی‌گردد و با توجه به سؤال صوت بازتاب پس از برخورد به سطح دوم نیز باید در محل تشکیل صوت متمرکز شود، از طرفی اگر موجی موازی با محور بر سطحی برخورد کند موج بازگشتی از کانون عبور می‌کند پس شخص در فاصلهٔ کانونی هر دو سطح قرار دارد و فاصلهٔ دو سطح کاو از هم برابر مجموع فاصلهٔ کانون از دو سطح است. $\ell=f_1+f_2$



B ۲۰۵۰ ۱

در رادار دوپلری از بازتاب امواج الکترومغناطیسی برای مکان‌یابی پژواکی در تعیین تندی خودروها استفاده می‌شود و (الف) درست است.

در سونوگرافی از امواج فراصوت استفاده می‌شود و (ب) نادرست است.

در اجاق خورشیدی از بازتاب نور خورشید (امواج الکترومغناطیسی گسیل شده از خورشید) از سطح کاو استفاده می‌شود و (پ) درست است.

در دستگاه سونار کشتی‌ها از مکان‌یابی پژواکی امواج فراصوت استفاده می‌شود و (ت) نادرست است.

بنابراین گزینهٔ (۱) پاسخ تست است.

دقت کنید باید کاربرد پدیده‌های فیزیکی در دستگاه‌های مختلف که در کتاب درسی بیان شده است را فرابگیرید.

B ۲۰۵۱ ۲

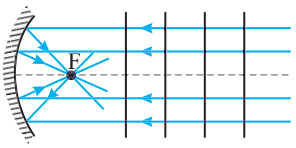
قانون بازتاب عمومی برای تمام امواج و تمام سطوح برقرار است و گزینهٔ (۱) نادرست است.

برای تعیین تندی خودرو از مکان‌یابی پژواکی امواج الکترومغناطیسی استفاده می‌شود.

برای اندازه‌گیری تندی شارش خون از امواج فراصوت استفاده می‌شود و گزینهٔ (۳) نادرست است.

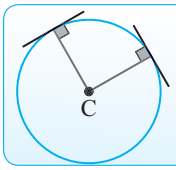
مکان‌یابی خفاش نیز با امواج صوتی است و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۲۰۵۲ ۲



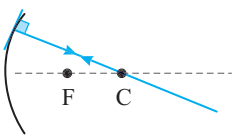
پرتوها بر جبهه‌های موج عمودند، از این‌رو وقتی جبهه‌های موج بر محور سطح کاو عمود هستند چنانچه پرتوها را رسم کنیم این پرتو موازی هم بوده و هنگام بازتاب از کانون سطح کاو می‌گذرند و گزینهٔ (۲) درست است.

B ۲۰۵۳ ۱



یادداشت ریاضی هر خط که در امتداد شعاع دایره است بر سطح دایره عمود است.

نکته هرگاه پرتو نور (موج) بر سطح عمود باشد زاویهٔ تابش صفر است و پرتو بازتاب روی پرتو تابش بازتاب می‌کند.



نقطهٔ C در شکل مرکز سطح کروی است و اگر موج از نقطهٔ C بر سطح بتابند یعنی پرتوها در امتداد شعاع دایره قرار دارند و این پرتوها بر سطح کاو عمود هستند. زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب صفر بوده یعنی پرتو روی خودش بازتاب می‌کند.

B ۲۰۵۴ ۲

نور لیزر وقتی به دیوار برخورد می‌کند چون ابعاد ناهمواری‌های میکروسکوپی سطح دیوار از طول موج نور مرئی لیزر بزرگ‌تر است سطح دیوار برای نور لیزر سطح ناهموار بوده و نور لیزر بازتاب پخشنده انجام می‌دهد و نور در تمام جهات بازتاب می‌یابد و این دانش‌آموزان از هر جایی که نشسته‌اند می‌توانند نقطهٔ رنگی روی دیوار را ببینند. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

B ۲۰۵۵ ۱

یادآوری دو نوع بازتاب نور در طبیعت مشاهده می‌شود.

۱ بازتاب منظم: سطح بازتابندهٔ نور بسیار هموار است مانند سطح آینه.

۲ بازتاب پخشنده یا نامنظم: وقتی که نور بر سطحی غیرصیقلی و ناهموار بتابد بازتاب پخشنده رخ می‌دهد.

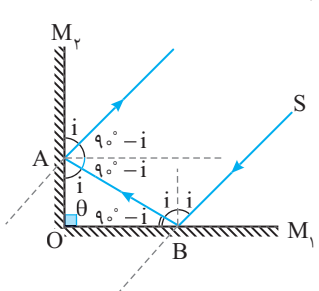
منظور از سطح ناهموار این است که سطح در مقایسه با طول موج نور ناهموار است. اگر طول موج از ابعاد ناهمواری‌ها بزرگ‌تر باشد، بازتاب منظم و اگر طول موج از ابعاد ناهمواری‌ها کوچکتر باشد، بازتاب پخشنده است.

طول موج نور مرئی در حدود $۰/۵\mu m$ است و اگر از دید میکروسکوپی سطحی که به آن نور تابیده شده دارای ناهمواری‌های بزرگ‌تر از $۱\mu m$ باشد این سطح‌ها برای نور مرئی ناهموار محسوب می‌شوند و بازتاب نور از سطح آن‌ها پخشنده یا نامنظم است و اگر ناهمواری‌های سطح از $۱\mu m$ بسیار کوچک‌تر باشد آن سطح برای نور مرئی هموار خواهد بود و بازتاب از این سطح آینه‌ای و منظم است، بنابراین بازتاب نور مرئی از سطح a و b و c پخشنده یا نامنظم است و بازتاب از سطح d آینه‌ای یا منظم است.

A ۲۰۵۶ ۲

نکته هرگاه زاویهٔ بین دو آینهٔ متقاطع ۹۰° باشد (دو آینه بر هم عمود باشند) چنانچه پرتویی بر سطح یکی از آن‌ها بتابد و بعد از بازتاب به آینه دیگر برخورد کند پرتو بازتاب از آینهٔ دوم موازی پرتو تابش بر آینهٔ اول است.

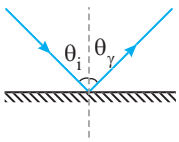
با توجه به نکتهٔ بالا گزینهٔ (۲) درست است.



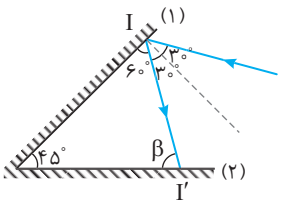
۲۰۵۷ C

۱

خط فکری بنـا بـه قانـون بازتاب عمومی، زاویهٔ بین پرتو تابش با خط عمود بر سـطح تابـش (θ_i) با زاویـه بین پرتو بازتـاب بـا خـط عمـود بـر سـطح تابش (θ_γ) باهم برابراند.

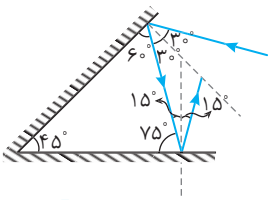


۱ با توجه به فرض مسـئله، زاویهٔ بین دو آینـه ۴۵° و زاویـهٔ تابش بـر آینهٔ (۱)، ۳۰° است. از این‌رو زاویهٔ بازتاب نیز ۳۰° بوده و پرتو بازتاب مطابق شکل با سطح آینهٔ (۱) زاویهٔ ۶۰°=۳۰°−۹۰° می‌سازد.



۲ مجمـوع زوایـای داخلی یک مثلث ۱۸۰° اسـت، بنابراین زاویـه‌ای که پرتو تابش بر آینهٔ (۲) با سطح آینهٔ (۲) می‌سازد (β) برابر است با:

$$۶۰+۴۵+\beta=۱۸۰\Rightarrow\beta=۷۵^\circ$$



۳ بنابرایـن زاویهٔ تابش بر سـطح آینهٔ (۲) برابـر ۱۵°=۷۵°−۹۰° خواهد شـد و زاویـهٔ بازتاب از سـطح آینهٔ (۲) نیز ۱۵° است.

۲۰۵۸ B

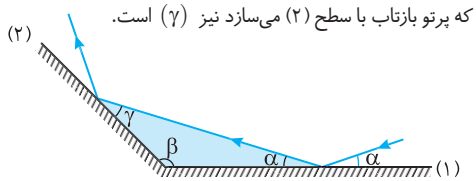
۴

یادآوری بـا توجه به قانون بازتـاب عمومی، زاویه‌های تابش و بازتـاب با هم برابراند و همچنین زاویه‌ای که پرتو تابش با سـطح می‌سـازد با زاویه‌ای که پرتو بازتاب با سـطح می‌سازد برابر است.

در مثلث رنگی داریم:

$$\alpha+\beta+\gamma=۱۸۰^\circ\xrightarrow{۱۸۰^\circ=\pi}\alpha+\beta+\gamma=\pi\Rightarrow\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$$

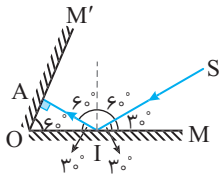
زاویه‌ای که پرتو بازتاب با سطح (۲) می‌سازد نیز (γ) است.



۲۰۵۹ A

۱

۱ زاویه‌ای که پرتو SI با سطح آینهٔ M می‌سازد ۳۰° است و بنا به قانون بازتاب عمومی زاویه‌ای که پرتو بازتاب با آینهٔ M می‌سازد نیز ۳۰° است .



۲ زاویـهٔ O (زاویـهٔ بین دو آینه) ۶۰° بوده بنابراین مثلث OAI یک مثلث قائم‌الزاویه است یعنی زاویهٔ A باید ۹۰° باشد در نتیجه زاویهٔ تابش بر سطح آینهٔ M′ صفر می‌شود.

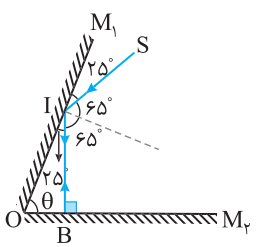
۲۰۶۰ A

۳

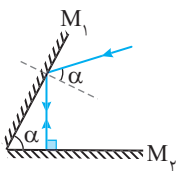
نکته هـرگاه پرتو بر سـطح آینه عمـود بتابد زاویـهٔ تابش و زاویـهٔ بازتاب $\theta_i=\theta_\gamma=۰$ اسـت. در ایـن حالت پرتو روی خودش بازتاب می‌کند.

بـرای آنکه پرتوی روی خودش برگردد، باید عمود بر سـطح آینهٔ $M_۲$ بتابد. با توجه به شـکل مثلث OIB باید قائم‌الزاویه باشد از این‌رو زاویهٔ بین دو آینه (θ) خواهد شد:

$$\theta=۹۰^\circ-۲۵^\circ=۶۵^\circ$$

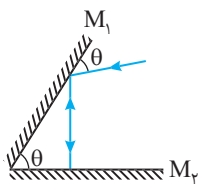


میانبر هـرگاه دو آینـه بـا هم زاویـهٔ حاده (α) بسـازند. چنانچـه پرتو با زاویـه تابش α بر یکـی از آینه‌هـا بتابـد پـس از بازتـاب متوالـی روی خودش بازمی‌گردد.



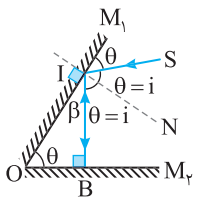
بازی با سؤال در شـکل روبه‌رو مسیر پرتو نور مشـخص شده اسـت. θ چند درجه است؟ کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰



پاسخ **۱** پرتو پـس از تابیدن بر آینهٔ $M_۲$ روی خودش بازتاب کرده بنابراین پرتو بر آینهٔ $M_۲$ عمود است و مثلث OIB قائم‌الزاویه است از این‌رو می‌توان نوشت:

$$\theta+\beta=۹۰^\circ\quad(I)$$



۲ پرتو SI با زاویهٔ θ به آینهٔ $M_۱$ می‌تابد بنابراین پرتو بازتاب از آینهٔ $M_۱$ با سطح آن زاویهٔ θ می‌سازد. $(\beta=\theta)$

۳ اکنون از رابطهٔ (I) و (II) می‌توان نوشت:

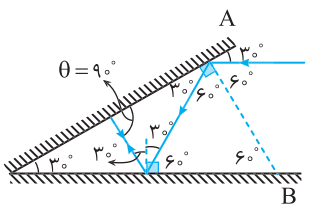
$$\theta+\theta=۹۰^\circ\Rightarrow\theta=۴۵^\circ$$

گزینهٔ ۳

۲۰۶۱ B

۴

مسـیر پرتو نور در برخورد به آینه A و سـپس آینه B و سرانجام در دومین برخـورد به آینه A را رسـم می‌کنیم. با توجه به شـکل پرتو عمود بر سطح آینه A به آن تابیده پس زاویه تابش، صفر درجه است.

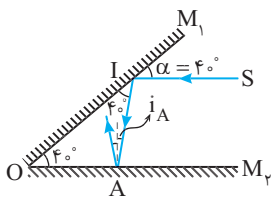


۲۰۶۲ B

۴

شکل (الف):

۱ به دلیـل خطوط موازی مورب زاویـه‌ای کـه پرتـو SI با سـطح آینهٔ $M_۱$ می‌سـازد $\alpha=۴۰^\circ$ اسـت و زاویه‌ای که پرتو بازتاب با سـطح آینه می‌سازد برابر ۴۰° است.



۲ در مثلث OIA زاویهٔ A برابر $۱۸۰-(۴۰+۴۰)=۱۰۰^\circ$ است.

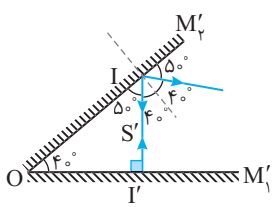
۳ اگر در نقطهٔ A بر سـطح آینهٔ $M_۲$ خطی عمود کنیم زاویهٔ تابش بر سـطح $M_۲$ برابر خواهد شد با:

$$i'_A=۱۰۰-۹۰=۱۰^\circ$$

۴ در این صورت زاویهٔ بازتاب پرتو SI از سطح $M_۲$ برابر ۱۰° است.

شکل (ب):

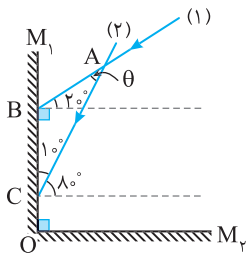
پرتـو S′I′ بر سـطح آینـهٔ $M'_۱$ عمود اسـت. از ایـن‌رو روی خـودش بازتـاب می‌کنـد و هنـگام برخورد به سـطح آینهٔ $M'_۲$ بـا سـطح زاویهٔ $۹۰-۴۰=۵۰^\circ$ می‌سازد بنابراین زاویهٔ تابش بر سطح آینهٔ $M'_۲$، ۴۰° و زاویهٔ بازتاب نیز ۴۰° است.



B ۲۰۶۳ ۲

نکته هرگاه دو آینه بر هم عمود باشند و پرتو با هر زاویه‌ای که سطح یکی از آن‌ها بتابد پرتو بازتاب از آینهٔ دیگر موازی پرتو اول است.

خط فکری چون پرتوهای بازتاب از آینهٔ M_2 با پرتوهای تابش بر آینهٔ M_1 موازی هستند. هر زاویه‌ای که پرتوهای بازتاب می‌سازند همان زاویهٔ بین پرتوهای تابش (۱) و (۲) است بنابراین کافی است زاویهٔ بین دو پرتوی (۱) و (۲) را به‌دست بیاوریم.

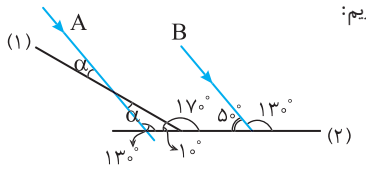


در مثلث ABC زاویهٔ β برابر $90+20=110^\circ$ است از این‌رو می‌توان نوشت:

$$\theta+110+10=180\Rightarrow\theta=60^\circ$$

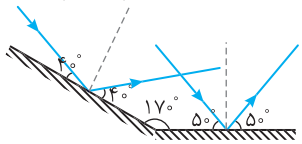
B ۲۰۶۴ ۲

پرتو A با پرتوی B موازی است و بنا به خاصیت موازی - مورب امتداد پرتو A نیز با افق زاویهٔ 130° می‌سازد. با توجه به این نکته زاویه‌ای که این پرتو با سطح آینهٔ (۱) می‌سازد را به‌دست می‌آوریم:



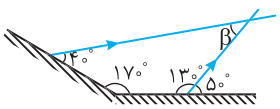
$$\Delta ODI: \alpha+130+10=180\Rightarrow\alpha=40^\circ$$

با توجه به متقابل به رأس بودن زاویه‌ها، زاویه پرتو A با سطح آینهٔ (۱) نیز برابر $\alpha=40^\circ$ است. حال زاویه بازتاب پرتوهای A و B را رسم می‌کنیم.



برای سادگی و جلوگیری از شلوغی شکل، تنها پرتوهای بازتاب را رسم می‌کنیم.

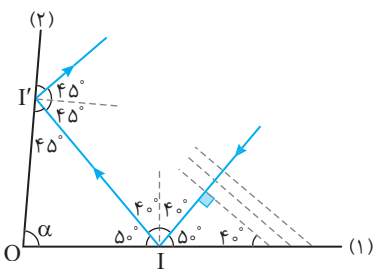
$$\beta+40+170+130=360\Rightarrow\beta=20^\circ$$



B ۲۰۶۵ ۱

یادآوری برای بررسی حرکت جبهه‌های موج از یک پرتو که عمود بر جبهه‌های موج بوده و در جهت پیشروی جبهه‌ها رسم می‌شود در استفاده می‌کنیم.

نکته زاویه‌ای که پرتو با خط عمود می‌سازد برابرزاویه‌ای که جبهه‌های موج با سطح می‌سازند.



۱ در شکل زاویهٔ تابش بر سطح آینهٔ (۱) برابر 40° است و زاویه‌ای که پرتو بازتاب با سطح (۱) می‌سازد برابر 50° است.

۲ بنابه فرض مسئله زاویهٔ بین جبهه‌های موج بازتاب با سطح (۲) 45° است بنابراین پرتو بازتاب II' با سطح آینه (۲) زاویه‌های 45° می‌سازد.

۳ مجموع زوایای مثلث 180° است از این‌رو برای مثلث OII' می‌توان نوشت:

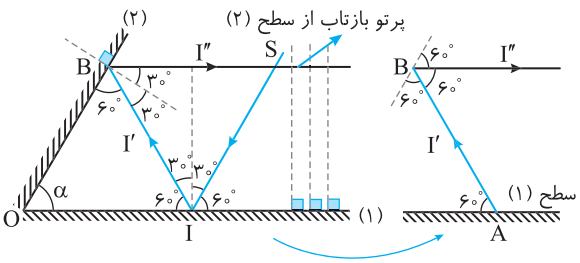
$$\alpha+45+50=180\Rightarrow\alpha=85^\circ$$

B ۲۰۶۶ ۳

خط فکری پرتو بر جبهه‌های موج عمود است. اگر جبهه‌های موج بازتاب از سطح (۲) که در شکل به صورت خط‌چین‌های موازی هم و عمود بر سطح (۱) نشان داده شده‌اند را در نظر بگیرید، پرتو بازتاب از سطح (۲) بر این جبهه‌ها عمود بود بنابراین پرتو بازتاب از سطح (۲) موازی سطح (۱) است. با توجه به این مطلب به سراغ حل مسئله می‌رویم

پرتو SI با زاویهٔ تابش 30° به سطح (۱) تابیده و بنا به قانون بازتاب عمومی زاویهٔ بازتاب از سطح (۱) نیز 30° و زاویه‌ای که پرتو بازتاب با سطح (۱) می‌سازد $90-30=60^\circ$ است. گفتیم پرتو بازتاب سطح (۲) موازی سطح (۱) است از این‌رو بنا به خطوط موازی مورب زاویهٔ بین پرتو AB و پرتو بازتاب از سطح (۲) برابر 60° است.

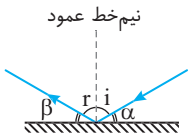
در مثلث OAB زاویهٔ A و B هر کدام 60° شده است بنابراین α نیز 60° خواهد شد.



شکل خطوط موازی و مورب استفاده شده

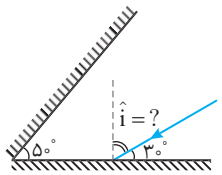
B ۲۰۶۷ ۳

نکته با توجه به قانون بازتاب عمومی، زاویه‌ای که پرتو تابش با نیم‌خط عمود (زاویه تابش) با زاویه‌ای که پرتو بازتاب با نیم‌خط عمود (زاویه بازتاب) می‌سازد باهم برابر است:



$$\begin{cases}\hat{i}=\hat{r}\\ \hat{\alpha}+\hat{i}=90^\circ\\ \hat{r}+\hat{\beta}=90^\circ\end{cases}$$

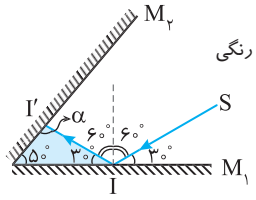
۱ با توجه به پرتو تابش زاویهٔ تابش را به‌دست می‌آوریم، سپس با توجه به اینکه زاویهٔ تابش و بازتاب باهم برابر است، زاویه بازتاب و پرتو بازتاب را می‌کشیم:



$$30^\circ+\hat{i}=90^\circ\Rightarrow\hat{i}=60^\circ$$

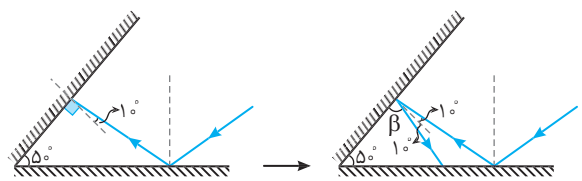
۲ زاویهٔ بازتاب 60° است:

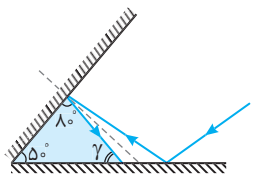
$$30^\circ+50^\circ+\hat{\alpha}=180^\circ\Rightarrow\hat{\alpha}=100^\circ$$ در مثلث رنگی C



۳ برای پرتو II' خط عمود را می‌کشیم، پس زاویهٔ تابش به سطح M_2، 10° است و زاویهٔ بازتاب نیز 10° است:

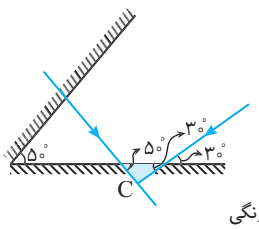
$$\hat{\beta}+10^\circ=90^\circ\Rightarrow\hat{\beta}=80^\circ$$





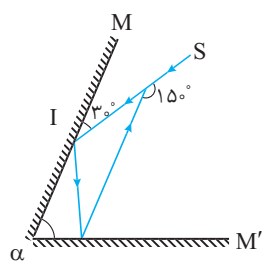
$$50^\circ+80^\circ+\hat{\gamma}=180\Rightarrow\hat{\gamma}=50^\circ$$ در مثلث رنگی

۴ حال امتداد دو پرتو SI و بازتاب از سطح دوم را باهم قطع می‌دهیم تا زاویهٔ بین دو پرتو را به‌دست بیاوریم. برای خلوت شدن شکل تنها پرتو SI و بازتاب از سطح $M_۲$ را کشیدیم:



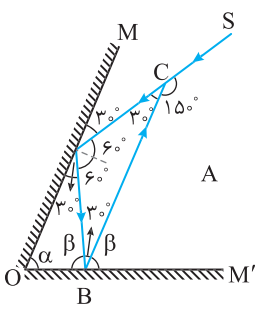
در مثلث رنگی: $۵۰^\circ+۳۰^\circ+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}=۱۰۰^\circ$

بازی با سوال پرتو نورانی SI بر آینهٔ تخت M تابیده و مطابق شکل روی دو آینهٔ M و M' بازتابش پیدا کرده است. زاویهٔ بین دو آینه چند درجه است؟ خارج ریاضی - ۸۹



۱) ۴۵ ۲) ۶۰ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

پاسخ زاویهٔ بین پرتو SI و سطح آینهٔ M، ۳۰° است از این‌رو زاویهٔ تابش بر آینهٔ M، ۶۰° است. در مثلث ABC زاویهٔ مجاور ۱۵۰° بوده بنابراین زاویهٔ $C=۳۰^\circ$ است. در نتیجه زاویهٔ بین پرتوی تابش AB و بازتابش BC بر آینهٔ M' برابر است با:



$۱۸۰-(۲\times۶۰+۳۰)=۳۰^\circ$

اکنون زاویهٔ بین پرتوی تابش AB بر آینهٔ M' با سطح آینه را به‌دست می‌آوریم:

$۲\beta=۱۸۰-۳۰=۱۵۰^\circ \Rightarrow \beta=۷۵^\circ$

در این صورت در مثلث OAB می‌توان نوشت:

$\alpha+\beta+۳۰=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+۷۵+۳۰=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha=۷۵^\circ$

میانبر در آینه‌های متقاطع همواره زاویهٔ انحراف بین پرتوی تابش اولیه و پرتوی بازتاب از آینهٔ دوم دو برابر زاویهٔ بین دو آینه است و به زاویهٔ تابش اولیه بستگی ندارد.

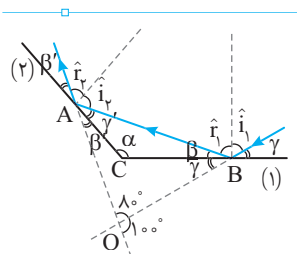
با دانستن این نکته می‌توان نوشت:

$\alpha=\frac{۱۵۰^\circ}{۲}=۷۵^\circ$

گزینهٔ ۳

B ۲۰۶۸ ۳

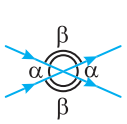
با توجه به قانون بازتاب، زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب با هم برابرند:



$\hat{i}_۱=\hat{r}_۱ \xrightarrow[\beta=۹۰-r_۱]{\gamma=۹۰-i_۱} \gamma=\beta$

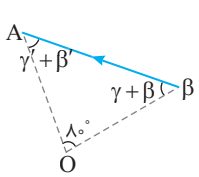
$\hat{i}_۲=\hat{r}_۲ \xrightarrow[\beta'=۹۰-r_۲]{\gamma'=۹۰-i_۲} \gamma'=\beta'$

تذکر زاویهٔ بین دو پرتو زاویه‌ای است که در محل تقاطع آن‌ها و در قسمتی که هر دو پرتو هم‌جهت هستند ساخته می‌شود.



در شکل روبه‌رو زاویه‌های α، زاویهٔ بین دو پرتو و زاویه‌های β مکمل آن‌ها هستند.

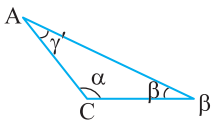
در مثلثی که از امتداد پرتوی تابش اولیه و بازتاب ثانویه و پرتوی بازتاب از سطح (۱) ساخته می‌شود می‌توان نوشت:



$(\gamma+\beta)+(\gamma'+\beta')+۸۰=۱۸۰ \xrightarrow[\gamma=\beta]{\gamma'=\beta'}$

$۲\beta+۲\gamma'=۱۰۰^\circ \Rightarrow \beta+\gamma'=۵۰^\circ$

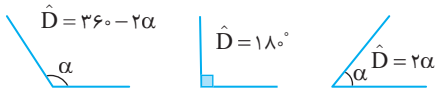
در مثلثی که با پرتوی بازتاب از سطح (۱) و دو سطح ساخته می‌شود داریم:



$\alpha+\beta+\gamma'=۱۸۰ \xrightarrow{\beta+\gamma'=۵۰^\circ}$

$\alpha+۵۰=۱۸۰ \Rightarrow \alpha=۱۳۰^\circ$

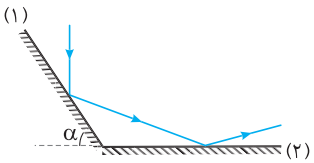
میانبر به زاویهٔ بین پرتوی تابش اولیه و پرتو بازتاب از سطح دوم زاویهٔ انحراف گویند:



با توجه به شکل سوال زاویهٔ انحراف ۱۰۰° است:

$۳۶۰-۲\alpha=۱۰۰ \Rightarrow ۲\alpha=۲۶۰^\circ \Rightarrow \alpha=۱۳۰^\circ$

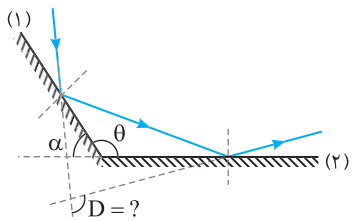
بازی با سوال مطابق شکل زیر، پرتو نوری به آینهٔ تخت (۱) می‌تابد و در نهایت از آینهٔ تخت (۲) بازتاب می‌شود. پرتو تابش به آینهٔ (۱) با پرتو بازتابش از آینهٔ (۲)، چه زاویه‌ای می‌سازد؟ خارج تجربی - ۹۶



۱) α ۲) ۲α ۳) $۱۸۰-\alpha$ ۴) $۹۰+\alpha$

پاسخ **نکته** هرگاه پرتو به آینه‌های متقاطع شکل روبه‌رو بتابد، زاویهٔ انحراف یعنی زاویهٔ بین راستای پرتو تابش بر آینهٔ (۱) و پرتو بازتابش از آینهٔ (۲) برابر است با:

$D=۳۶۰-۲\theta \qquad (I)$



با توجه به شکل مجموع زاویه‌های α و θ یک زاویهٔ نیم‌صفحه (۱۸۰°) تشکیل می‌دهند.

$\theta+\alpha=۱۸۰ \Rightarrow \theta=۱۸۰-\alpha$

در رابطهٔ (I) جای‌گذاری می‌کنیم:

$D=۳۶۰-۲(۱۸۰-\alpha) \Rightarrow D=۳۶۰-۲\times۱۸۰+۲\alpha \Rightarrow D=۲\alpha$

گزینهٔ ۲

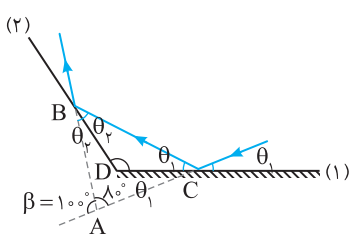
B ۲۰۶۹ ۲

در مثلث ABC زاویهٔ $\beta=۱۰۰^\circ$ C زاویهٔ خارجی است، بنابراین:

$\beta=۲\theta_۱+۲\theta_۲ \Rightarrow ۱۰۰=۲(\theta_۱+\theta_۲) \Rightarrow \theta_۱+\theta_۲=۵۰$

به مثلث BDC دقت کنید،

$D+\theta_۱+\theta_۲=۱۸۰^\circ \Rightarrow D+۵۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow D=۱۳۰^\circ$

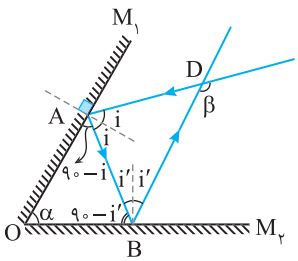


B ۲۰۷۰ ۴

۱ اگر زاویهٔ تابش بر سطح M_1، i و بر سطح M_2، i' باشد، در این صورت در مثلث OAB زاویهٔ A و B خواهند شد:

$A=90-i$

$B=90-i'$



از طرفی خواهیم داشت:

$$\alpha+90-i+90-i'=180\Rightarrow\alpha=i+i' \quad (I)$$

۲ در مثلث ABD زاویهٔ β زاویهٔ خارجی مثلث است و اندازهٔ آن برابر دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور با β است. از این‌رو:

$$\triangle ABD: 2i+2i'=\beta\Rightarrow 2(i+i')=\beta\xrightarrow{(I)}\beta=2\alpha$$

بنابراین هرگونه تغییری در زاویهٔ تابش، تأثیری روی اندازهٔ β ندارد و در این شکل همواره $\beta=2\alpha$ است.

۳ با توجه به رابطهٔ (I) جمع i و i' همواره با α برابر است بنابراین هر مقدار که از i کم شود همان مقدار به i' اضافه شود. یعنی وقتی i به $\frac{i}{2}$ تبدیل می‌شود به اندازهٔ $\frac{i}{2}$ به i' اضافه می‌شود.

B ۲۰۷۱ ۲

۱ پرتو SI با سطح آینهٔ (۱) زاویهٔ ۳۰° می‌سازد بنابراین زاویه‌ای که پرتو بازتاب II' با آینهٔ (۱) می‌سازد ۳۰° است از این‌رو زاویهٔ بین دو پرتو SI و II' خواهد شد.

$\beta=180-60=120^\circ$

۲ زاویه‌ای که پرتوی II' با سطح آینهٔ (۲) می‌سازد:

$\theta=180-(120+30)\Rightarrow\theta=30^\circ$

۳ زاویهٔ بین $I'I''$ با سطح آینهٔ (۲) نیز ۳۰° خواهد شد: $\theta'=30^\circ$

۴ زاویهٔ بین دو پرتو II' و $I'I''$ نیز برابر است با:

$\beta'=180-(30+30)=120^\circ$

۵ زاویهٔ پرتو $I'I''$ با سطح آینهٔ (۳) برابر است با:

$\theta'+\gamma=90\Rightarrow 30+\gamma=90\Rightarrow\gamma=60^\circ\Rightarrow\gamma'=60^\circ$

۶ زاویهٔ بین دو پرتو $I'I''$ و $I''S$ را حساب می‌کنیم:

$\beta''=180-(60+60)=60^\circ$

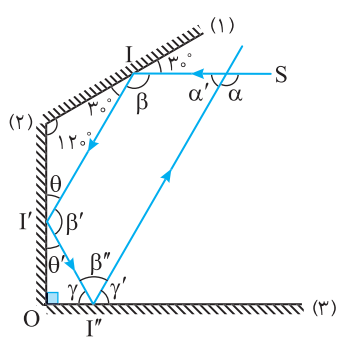
۷ مجموع زوایای چهارضلعی $SII'I''$ برابر ۳۶۰° است از این‌رو:

$\alpha'+\beta+\beta'+\beta''=360\Rightarrow\alpha'+120+120+60=360\Rightarrow\alpha'=60^\circ$

۸ مجموع زاویهٔ α و α'، ۱۸۰° است. بنابراین:

$\alpha+\alpha'=180\Rightarrow\alpha+60=180\Rightarrow\alpha=120^\circ$

دقت کنید که توضیح دادن مسئله سبب طولانی شدن راه‌حل شده است وگرنه حل این تست زمان کوتاهی لازم دارد.

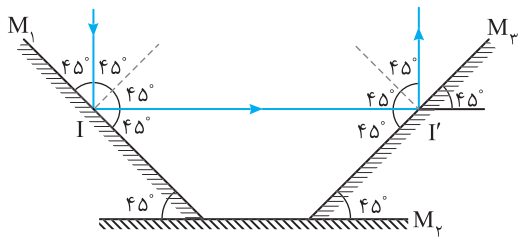


B ۲۰۷۲ ۱

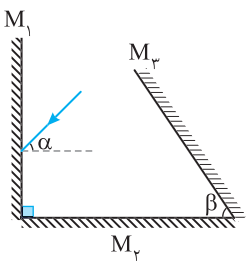
خط فکری در حل این مسائل به زوایای روی شکل باید دقت کنید. سپس بازتاب پرتو از هر آینه را به دقت رسم کنیم تا بتوانید مسئله را حل کنید.

۱ زاویه‌ای که پرتو تابش با سطح آینهٔ M_1 می‌سازد ۴۵° است و بنا به قانون عمومی بازتاب زاویهٔ پرتو بازتاب با سطح آینهٔ M_1 نیز ۴۵° است.

۲ مجدداً به شکل نگاه کنید زاویهٔ بین امتداد آینهٔ M_1 و M_2، ۴۵° و زاویهٔ بین پرتو II' و آینهٔ M_1 نیز ۴۵° است و بنابه خاصیت موازی مورب پرتوی II' موازی سطح آینهٔ M_2 بوده یعنی پرتو بازتاب از M_1 به M_2 برخورد نمی‌کند بلکه به آینهٔ M_3 می‌تابد و مطابق شکل بازتاب کرده بین پرتو نهایی موازی پرتو SI بوده و پرتو SI، ۱۸۰° منحرف شده است.



بازی با سؤال **در شکل زیر پرتو SI با زاویهٔ تابش α بر سطح آینهٔ M_1 تابیده شده و پس از بازتاب از سطح آینه‌های (۲) و (۳) روی خودش باز می‌گردد. کدام گزینه درست است؟**



۱) $\beta=2\alpha$ ۲) $\alpha=2\beta$

۳) $\alpha+\beta=90^\circ$ ۴) $\alpha=\beta+90^\circ$

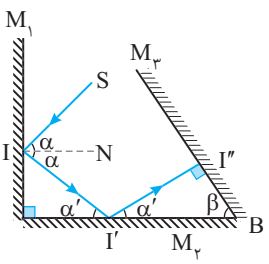
پاسخ ۱ **پرتو SI با زاویهٔ تابش α به آینهٔ M_1 می‌تابد و بنا به قانون عمومی بازتابش زاویهٔ بازتاب نیز α می‌شود (به شکل نگاه کنید.)**

۲ **با توجه به شکل دو آینهٔ M_1 و M_2 برهم عمودند بنابراین خط عمود N که بر آینهٔ M_1 عمود است موازی آینهٔ M_2 بوده و با توجه به خطوط موازی مورب زاویهٔ α' با زاویهٔ α برابر است.**

۳ **زاویهٔ بین پرتو تابش II' بر آینهٔ M_2 است بنابراین زاویهٔ پرتو بازتاب $(I'I'')$ با سطح آینهٔ M_2 نیز α' است.**

۴ **در مثلث $I'I''B$، پرتو $I'I''$ باید بر آینهٔ M_3 عمود باشد تا روی خودش بازتاب کند در این صورت مجموع زوایای α' و β برابر ۹۰° خواهد شد.**

$$\alpha'+\beta=90\xrightarrow{\alpha=\alpha'}\alpha+\beta=90^\circ$$

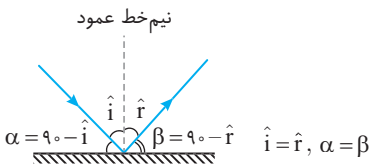


گزینهٔ ۳

B ۲۰۷۳ ۳

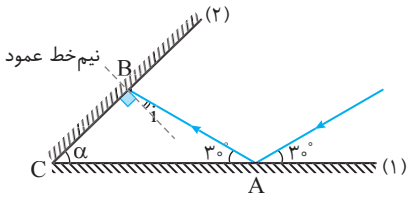
خط فکری در حل این سؤال باید در گام اول پرتوهای تابش و بازتاب بر سطح آینه (۱) و سپس پرتو تابش و بازتاب دوم از سطح آینه (۲) را رسم کنیم. به فرض مسئله دقت کنید که گفته شده پرتو دوم بازتابی از سطح آینه (۱) موازی آینه (۲) خواهد شد.

نکته با توجه به قانون بازتاب عمومی داریم:

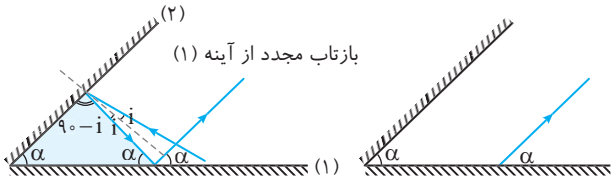


۱ بازتاب پرتو از آینه (۲) را رسم می‌کنیم و نیم‌خط عمود آن را مشخص می‌کنیم، مجموع زوایای داخلی مثلث ABC برابر ۱۸۰° است:

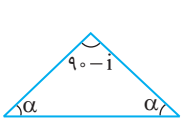
$$۳۰+(۹۰+\hat{i})+\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{i}=۱۸۰^\circ-۹۰^\circ-۳۰^\circ-\hat{\alpha} \Rightarrow \hat{i}=۶۰^\circ-\hat{\alpha} \quad (I)$$



۲ پرتو بازتاب شده از آینه (۲) مجدد به آینه (۱) برخورد کرده و با توجه به سؤال و پرتو بازتاب مجدد از آینه (۱) موازی با آینه (۲) است. طبق خطوط موازی و مورب، آینهٔ (۲) و بازتاب مجدد موازی‌اند و آینهٔ (۱) مورب است بنابراین:



۳ در مثلث رنگی زاویهٔ دو آینه α و زاویه‌ای که پرتو تابش با سطح آینه می‌سازد نیز با توجه به موازی مورب بالا α درجه است و مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰° است، بنابراین:

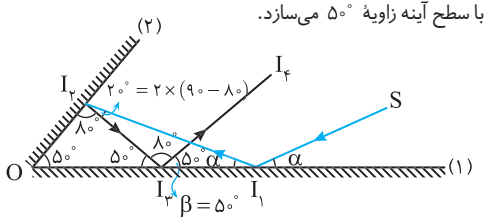


$$\hat{\alpha}+\hat{\alpha}+(۹۰-\hat{i})=۱۸۰^\circ \xrightarrow[i=۶۰-\alpha]{\text{طبق معادلهٔ (I)}}$$

$$۲\alpha+(۹۰-(۶۰-\alpha))=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳\alpha+۳۰=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha=۵۰^\circ$$

B ۲۰۷۴ ۳

مسیر پرتو را بعد از برخورد به آینه‌های (۱) و (۲) مطابق شکل رسم می‌کنیم. با توجه به فرض مسئله پرتو $I_۳I_۴$ موازی آینه (۲) است و بنابر خاصیت موازی مورب زاویهٔ بین پرتو $I_۳I_۴$ با سطح آینه (۱) $\beta=۵۰^\circ$ می‌شود. بنابراین پرتو $I_۲I_۳$ که بر سطح آینه (۱) می‌تابد با سطح آینه زاویهٔ ۵۰° می‌سازد.



در مثلث $OI_۲I_۳$ زاویهٔ بین $I_۲I_۳$ با آینهٔ (۲) $۸۰^\circ=۱۸۰-۱۰۰$ می‌شود. در این صورت:

در مثلث $I_۱I_۲I_۳$:

$$۲۰+۸۰+۵۰+\alpha=۱۸۰ \Rightarrow \alpha=۳۰^\circ$$

B ۲۰۷۵ ۱

با توجه به قانون بازتاب زاویه تابش و بازتاب با هم برابر است و مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰° است:

۱ زاویهٔ تابش بر سطح آینهٔ (۱) برابر $۹۰-۳۰=۶۰^\circ$ است بنابراین مطابق شکل (الف) زاویهٔ بازتاب از سطح آینه (۱) نیز ۶۰° است.

۲ به شکل (الف) نگاه کنید. زاویهٔ بین پرتو و سطح آینهٔ (۲) خواهد شد:

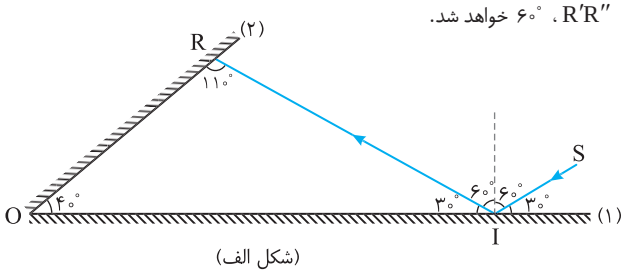
$$R=۱۸۰-(۳۰+۴۰)=۱۱۰^\circ$$

۳ اگر خط عمود بر سطح آینهٔ (۲) را رسم کنید، مطابق شکل (ب) زاویهٔ تابش بر سطح آینهٔ (۲) برابر $۱۱۰-۹۰=۲۰^\circ$ می‌شود و زاویهٔ پرتو بازتاب RR' با سطح آینهٔ (۲) $۹۰-۲۰=۷۰^\circ$ خواهد شد.

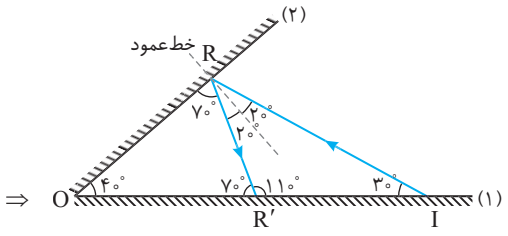
۴ در مثلث ORR' زاویهٔ پرتو بین پرتو RR' با سطح آینه (۱) نیز برابر $۱۸۰-(۴۰+۷۰)=۷۰^\circ$ می‌شود.

۵ زاویهٔ تابش و بازتاب از سطح آینه (۱)، ۲۰° می‌شود.

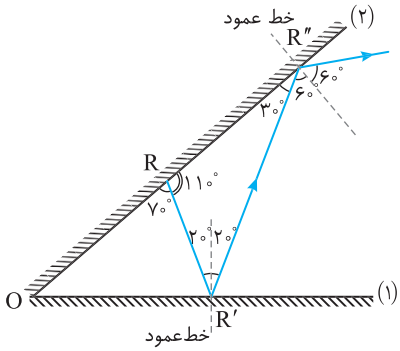
۶ پرتو $R'R''$ با آینه ۲ زاویهٔ ۳۰° می‌سازد بنابراین زاویهٔ تابش و بازتاب برای پرتو $R'R''$، ۶۰° خواهد شد.



(شکل الف)



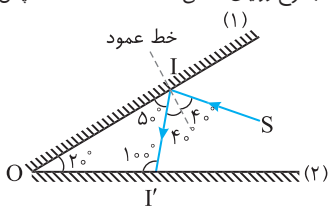
(شکل ب)



B ۲۰۷۶ ۴

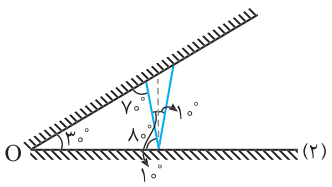
خط فکری در حل این مسائل باید یک‌به‌یک، زاویهٔ تابش و بازتاب در هر بار برخورد نور به هر آینه را ادامه داده تا لحظه‌ای که دیگر پرتو به آینه‌ای برخورد نکند البته شما باید مقداری هندسه بدانید و اینکه مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰° است، سپس بروید و با حوصله مسئله را حل کنید.

۱ زاویهٔ تابش بر سطح آینه (۱) بنا بر فرض مسئله ۴۰° است و بنا بر قانون بازتاب عمومی، زاویهٔ بازتاب نیز ۴۰° و زاویه‌ای که پرتو بازتاب با سطح آینه (۱) می‌سازد ۵۰° خواهد بود.



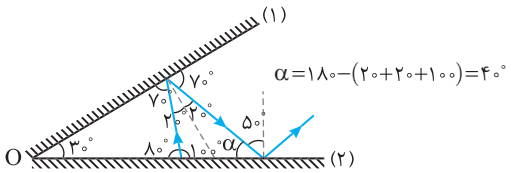
(الف)

۲ به مثلث OII' شکل (الف) نگاه کنید. زاویه‌ای که پرتو تابیده به سطح آینه (۲) با آینه می‌سازد 100° است. اگر خط عمود را رسم کنید در شکل (ب) مشخص می‌شود که زاویهٔ تابش 10° است. پرتو بازتاب وقتی به آینه (۱) می‌رسد با آن زاویه 110° می‌سازد.



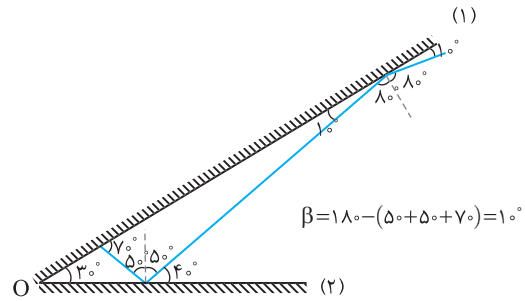
(ب)

۳ برای پرتویی که مجدد به آینهٔ (۱) با زاویهٔ 70° برخورد کرده خط عمود رسم می‌کنیم. زاویهٔ تابش 20° می‌شود:



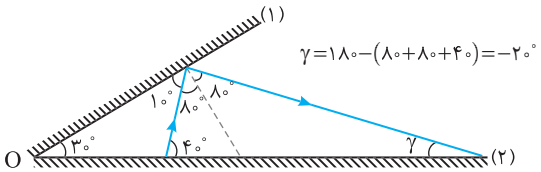
(پ)

با توجه به شکل (ت) زاویهٔ پرتویی که مجدد به سطح (۱) می‌تابد با آن 10° است.



(ت)

پرتویی که به سطح (۱) تابیده شده دارای زاویهٔ تابش 80° است.



(ث)

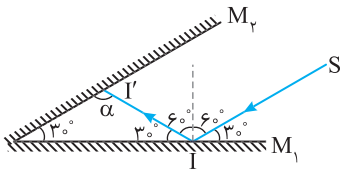
بنابراین هیچگاه زاویهٔ γ تشکیل نمی‌شود و آخرین زاویهٔ تابش برابر 80° است.

B ۲۰۷۷ ۱

خط فکری با سؤال سختی سروکار نداریم اما کمی سؤال طولانی است، باید دوبار سؤال حل شود یکبار با زاویه تابش 60° و بار دیگر حالتی را بررسی کنیم که پرتو 10° ساعتگرد (↷) بچرخد و زاویهٔ تابش 70° شود:

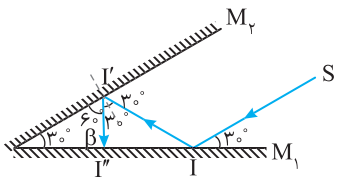
حالت (الف) زاویه تابش SI برابر 60° است پس زاویه بازتاب II' نیز 60° است، حال زاویه‌ای که پرتو II' با سطح آینهٔ M_2 می‌سازد را به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha+30+30=180^\circ \Rightarrow \alpha=120^\circ$$



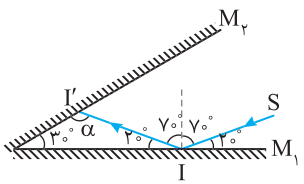
خط عمود را برای زاویهٔ α رسم کرده و پرتو بازتاب $I'I''$ از سطح M_2 را رسم می‌کنیم:

$$\beta+30+60=180\Rightarrow\beta=90^\circ$$



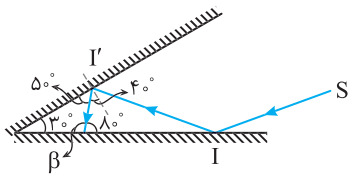
بنابراین با توجه به شکل پرتو $I'I''$ بر سطح آینه M_1 عمود است یعنی پرتو با زاویهٔ تابشی صفر درجه برای دومین بار بر سطح آینهٔ M_1 می‌تابد.

حالت (ب) زاویه تابش SI، 70° شده پس زاویه بازتاب از این سطح نیز 70° می‌شود. حال زاویهٔ بین پرتو II' با سطح M_2 را به‌دست می‌آوریم: $\alpha+20+30=180\Rightarrow\alpha=130^\circ$

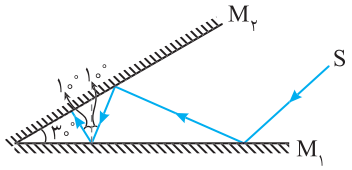


خط عمود را برای زاویه α رسم کرده و پرتو بازتاب $I'I''$ را رسم می‌کنیم. زاویهٔ تابش و بازتاب بر سطح M_2، 40° می‌شود. حال پرتو $I'I''$ بر سطح M_1 برخورد کرده که همان پرتو تابش بر سطح M_1 برای دومین بار است:

$$\beta+30+50=180\Rightarrow\beta=100^\circ$$

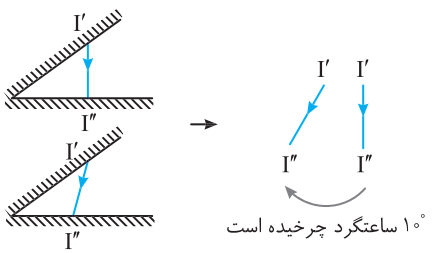


اگر برای زاویهٔ $\beta=100^\circ$ خط عمود رسم کنیم، زاویهٔ تابش $10^\circ=90-100$ می‌شود.



بنابراین زاویهٔ تابش بر سطح آینه M_1 از 0° به 10° می‌رسد.

به امتداد پرتو $I'I''$ در دو حالت (الف) و (ب) را در شکل زیر نگاه کنید، پرتو تابش بر سطح M_1 و 10° ساعتگرد می‌چرخد.



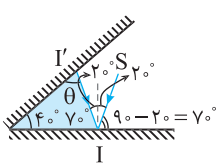
10° ساعتگرد چرخیده است

B ۲۰۷۸ ۲

۱ بازتاب پرتو SI را رسم می‌کنیم. زاویه تابش و بازتاب یکسان و برابر 20° است:

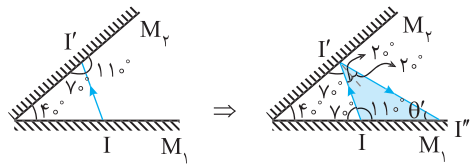
در مثلث رنگی:

$$\theta+40+70=180\Rightarrow\theta=70^\circ$$



۲ پرتو II' با سطح زاویهٔ ۱۱۰° می‌سازد. نیم‌خط عمود این پرتو در سطح $M_۲$ را رسم کرده، زاویه تابش را مشخص و پرتو بازتاب را رسم می‌کنیم:

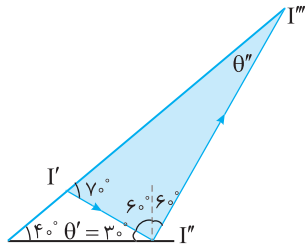
$$۱۱۰+۴۰+\theta'=۱۸۰\Rightarrow\theta'=۳۰^\circ$$:در مثلث رنگی



۳ حال پرتو بازتاب مجدد از سطح $M_۱$ ($I'I''$) را رسم می‌کنیم و زاویهٔ بازتاب آن را به‌دست می‌آوریم:

غ ق ق $\theta''=-۱۰^\circ\Rightarrow\theta''+۷۰+(۶۰+۶۰)=۱۸۰\Rightarrow\theta''=۴۰^\circ$:در مثلث رنگی

$\theta'=۱۸۰-۱۱۰-۴۰\Rightarrow\theta'=۳۰$



۴ زاویهٔ -۱۰° غیرقابل قبول است یعنی پرتوی $I''I'''$ به سطح $M_۲$ برخورد نمی‌کند. بنابراین زاویهٔ پرتو خروجی ۶۰° است.

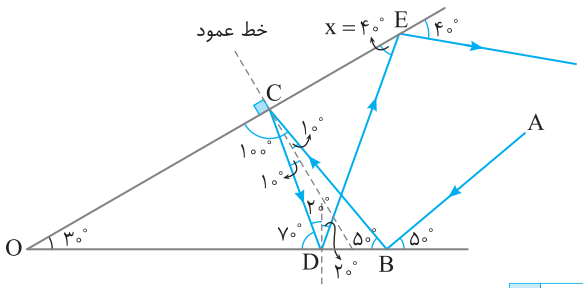
B ۲۰۷۹ ۲

۱ پرتو AB با زاویهٔ ۵۰° به سطح آینه (۱) برخورد می‌کند و با همان زاویه نسبت به سطح بازتاب می‌کند. در مثلث OBC زاویهٔ C برابر ۱۰۰° است.

۲ با رسم خط عمود مشخص می‌شود که زاویهٔ تابش بر سطح آینه (۲) ۱۰° و بازتاب آن نیز ۱۰° است.

۳ در مثلث OCD زاویهٔ D برابر ۷۰° است، بنابراین در مثلث CDB زاویهٔ بین پرتو تابش CD و پرتو بازتاب OE، ۴۰° می‌شود.

۴ در چهارمین بازتاب، زاویه پرتو DE با سطح آینهٔ (۲) برابر ۴۰° می‌شود.

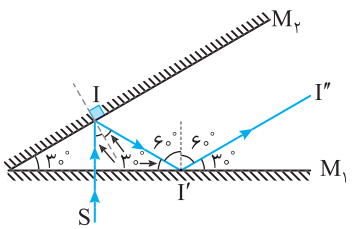


B ۲۰۸۰ ۲

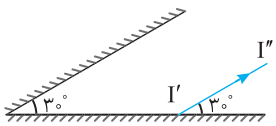
خط فکری شما باید در هر مرحله پرتو تابش بر هر آینه و پرتو بازتاب را رسم کرده و به کمک هندسه اندازهٔ زاویهٔ تابش و بازتاب را مشخص کنید و این عمل را تکرار کنید تا لحظه‌ای که زاویهٔ بین پرتو و سطح آینه کوچک‌تر و یا برابر زاویهٔ بین دو آینه شود. در این حالت پرتو از بین دو آینه خارج می‌گردد.

۱ زاویهٔ تابش پرتو SI، ۳۰° و زاویهٔ بازتاب آن نیز ۳۰° خواهد بود.

۲ پرتو II' وقتی به آینهٔ $M_۱$ برخورد می‌کند به دلیل خط موازی مورب با خط عمود زاویهٔ ۶۰° می‌سازد بنابراین پرتو II' با سطح آینهٔ $M_۱$ زاویهٔ ۳۰° خواهد ساخت در نتیجه زاویهٔ بین پرتو بازتاب از $M_۱$ با سطح آینهٔ $M_۱$، ۳۰° است.

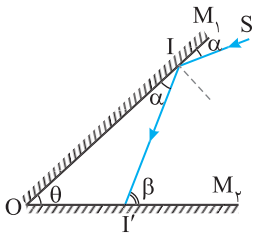


۳ طبق خط موازی - مورب پرتو $I'I''$ با آینهٔ $M_۲$ موازی شده و از بین دو آینه خارج می‌شود در نتیجه تنها دو بار برخورد صورت می‌گیرد.



B ۲۰۸۱ ۴

خط فکری قبل از حل مسئله باید مطلبی را برای هم روشن کنیم. اگر پرتو تابش بر آینهٔ $M_۱$ پس از بازتاب به آینهٔ $M_۲$ برسد، زاویه‌ای که پرتو با سطح آینهٔ $M_۲$ می‌سازد زاویهٔ خارجی مثلث OII' است. یعنی β برابر $\alpha+\theta$ است و در هر بازتاب به اندازهٔ θ به زاویهٔ بین پرتو و سطح آینهٔ افزوده می‌شود.

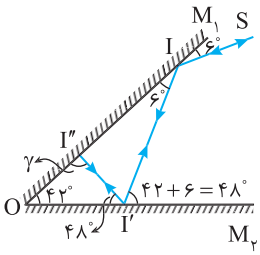


۱ پرتو SI با سطح آینهٔ (۱) زاویهٔ ۶° می‌سازد و زاویهٔ بین دو آینهٔ ۴۲° است بنابراین زاویهٔ II' بر سطح $M_۲$ برابر ۴۸° است.

۲ زاویهٔ پرتو بازتاب $I'I''$ با آینهٔ $M_۱$ خواهد شد.

$$\gamma=۱۸۰-(۴۲+۴۸)\Rightarrow\gamma=۹۰^\circ$$

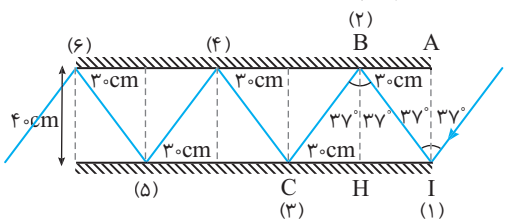
۳ بنابراین پرتو $I'I''$ بر سطح آینهٔ (۱) عمود است از این‌رو روی خودش بازتاب کرده و مسیر را برمی‌گردد. بنابراین پرتو پس از ۵ بار برخورد از سطح دو آینه و با زاویهٔ ۱۸۰° نسبت به پرتو SI از بین دو آینه خارج می‌شود.



میانبر پرتوی SI یکبار به $M_۱$ برخورد کرده سپس با زاویهٔ $۴۲+۶=۴۸$ به آینهٔ $M_۲$ برخورد کرده و بعد از آن با زاویهٔ $۴۲+۴۸=۹۰^\circ$ به آینهٔ $M_۱$ برخورد می‌کند (تا اینجا سه برخورد) و پرتو از $M_۱$ روی خود باز می‌گردد به آینهٔ $M_۲$ برخورد کرده و از آن‌جا بر همان مسیر به آینهٔ $M_۱$ می‌رسد (جمعاً ۵ برخورد) و بر مسیر SI برمی‌گردد.

B ۲۰۸۲ ۲

خط فکری باید پرتو بازتاب را رسم کنید سپس محل برخورد به آینهٔ (۲) را بیابید و به کمک مثلثات مشخص کنید پرتو چند cm جلو رفته و این عمل را تکرار کنید، بنابراین با دقت حل را پیگیری کنید.



پرتو SI با زاویهٔ ۳۷° به آینهٔ (۱) می‌تابد و با زاویهٔ ۳۷° بازتاب می‌کند در مثلث IAB می‌توان نوشت:

$$\tan ۳۷^\circ=\frac{AB}{IA}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{AB}{۴۰}\Rightarrow AB=۳۰cm$$

با همین استدلال $CH=۳۰cm$ می‌شود. یعنی بعد از هر برخورد پرتو $۳۰cm$ جلو می‌رود و مطابق شکل بعد از ۶ برخورد پرتو از بین دو آینه خارج می‌شود.

نکته اگر پهنای آینه‌ها در مسئلهٔ بالا بین $۱۵۰cm$ تا کمتر از $۱۸۰cm$ بود پرتو همچنان پس از ۶ بازتاب از بین آینه‌ها خارج می‌شد.

B ۲۰۸۳ ۱

خط فکری حل مسئله را باید از زاویهٔ تابش 37° به آینهٔ M_2 شروع کرد و مرحله به مرحله زوایای روی شکل (زاویه‌های تابش، بازتاب ...) را مشخص کرد تا در نهایت زاویهٔ بین دو پرتو بازتاب (γ) را به‌دست آورد.

۱ زاویه‌ای که پرتو SB با سطح آینهٔ M_2 می‌سازد مطابق شکل $90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$ است.

۲ اگر پرتو SB را امتداد دهیم تا در نقطهٔ A آینهٔ M_1 را قطع کند چون دو آینهٔ M_1 و M_2 موازی هستند، به دلیل خطوط موازی و مورب زاویهٔ A نیز 53° است.

۳ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ASC زاویه‌ای که پرتو تابش SC با سطح آینهٔ M_1 می‌سازد برابر است با:

$$\alpha + A = 90^\circ \Rightarrow \alpha + 53^\circ = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 37^\circ$$

۴ زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب روی آینهٔ M_1 را حساب می‌کنیم:

$$i + \alpha = 90^\circ \Rightarrow i + 37^\circ = 90^\circ \Rightarrow i = 53^\circ$$

۵ مجموع زوایای داخلی چهارضلعی SCDB، 360° است، بنابراین γ خواهد شد:

$$\gamma + (2\times 37) + (2\times 53) + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow \gamma = 90^\circ$$

A ۲۰۸۴ ۴

یادآوری زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب با هم برابرند، از این‌رو زاویهٔ بین پرتو تابش و پرتو بازتاب دو برابر زاویهٔ تابش است.

در این مسئله زاویهٔ بین پرتو تابش و پرتو بازتاب 150° است، بنابراین زاویهٔ تابش خواهد شد: $2i = 150^\circ \Rightarrow i = 75^\circ$

زاویهٔ بین پرتو تابش با سطح آینه $\alpha = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$

می‌خواهیم پرتو تابش روی خودش بازتاب کند، بنابراین باید پرتو تابش بر سطح آینه عمود شود، یعنی زاویهٔ بین پرتو تابش با سطح آینه 90° شود. در نتیجه مطابق شکل آینه باید 75° پادساعتگرد دوران کند.

C ۲۰۸۵ ۱

۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ SOA زاویهٔ بین پرتو تابش SO و پرتو بازتاب OA را با استفاده از روابط مثلثاتی به‌دست می‌آوریم:

$$\tan\gamma = \frac{SA}{SO} \Rightarrow \tan\gamma = \frac{3}{3} = 1$$

$$\gamma = 45^\circ$$

۲ زاویهٔ تابش بر سطح تیغه برابر نصف زاویهٔ بین پرتو تابش و بازتاب است.

$$i = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow i = \frac{45}{2} = 22/5^\circ$$

۳ زاویه‌ای که پرتو بازتاب (OA) با سطح تیغه می‌سازد برابر است با:

$$\beta = 90^\circ - 22/5^\circ = 67/5^\circ$$

۴ زاویهٔ α را به‌دست می‌آوریم. $\alpha + \beta_1 = 90^\circ \Rightarrow \alpha + 67/5^\circ = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 22/5^\circ$

۵ در حالت دوم همان کارها را مجدداً تکرار می‌کنیم.

زاویهٔ بین پرتو تابش SO و پرتو بازتاب OB را به‌دست می‌آوریم:

$$\tan\gamma' = \frac{SB}{SO} \Rightarrow \tan\gamma' = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \gamma' = 53^\circ$$

۶ زاویهٔ تابش بر سطح آینه در حالت دوم خواهد شد:

$$i' = \frac{\gamma'}{2} \Rightarrow i' = \frac{53}{2} \Rightarrow i' = 26/5^\circ$$

۷ زاویهٔ β_2 را حساب می‌کنیم: $i' + \beta_2 = 90^\circ \Rightarrow 26/5 + \beta_2 = 90^\circ \Rightarrow \beta_2 = 63/5^\circ$

۸ زاویهٔ α' خواهد شد: $\alpha' + \beta_2 = 90^\circ \Rightarrow \alpha' = 90^\circ - 63/5 \Rightarrow \alpha' = 26/5^\circ$

۹ بنابراین باید تیغه را $26/5^\circ - 22/5^\circ = 4^\circ$ بچرخانیم.

C ۲۰۸۶ ۴

۱ ابتدا خط $y = -\sqrt{3}x + 4$ را رسم می‌کنیم. عرض از مبدأ خط $+4$ و شیب خط برابر $-\sqrt{3}$ است. زاویهٔ بین پرتو و سطح آینه را به‌دست می‌آوریم:

$$\tan\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

۲ زاویهٔ پرتو تابش با سطح آینه 60° شد، بنابراین زاویهٔ پرتو بازتاب با سطح آینه نیز $\beta = 60^\circ$ می‌شود.

۳ محل پرخورد پرتو بر سطح آینه را مشخص می‌کنیم.

$$y = -\sqrt{3}x + 4 \xrightarrow{y=0} -\sqrt{3}x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

۴ اکنون می‌توانیم معادلهٔ خطی که پرتو بازتاب بر آن منطبق است را به‌دست آوریم.

شیب خط خواهد شد: $\tan\beta = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

این خط از نقطهٔ $(\frac{4\sqrt{3}}{3}, 0)$ می‌گذرد. در این صورت:

$$\tan\beta = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{y - 0}{x - \frac{4\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow y = \sqrt{3}x - 4$$

C ۲۰۸۷ ۳

صوت تولید شده ابتدا به دیوار (۱) رسیده و پس از بازتاب به گوش شخص می‌رسد و پژواک دوم ناشی از پژواک از دیوار (۲) می‌باشد.

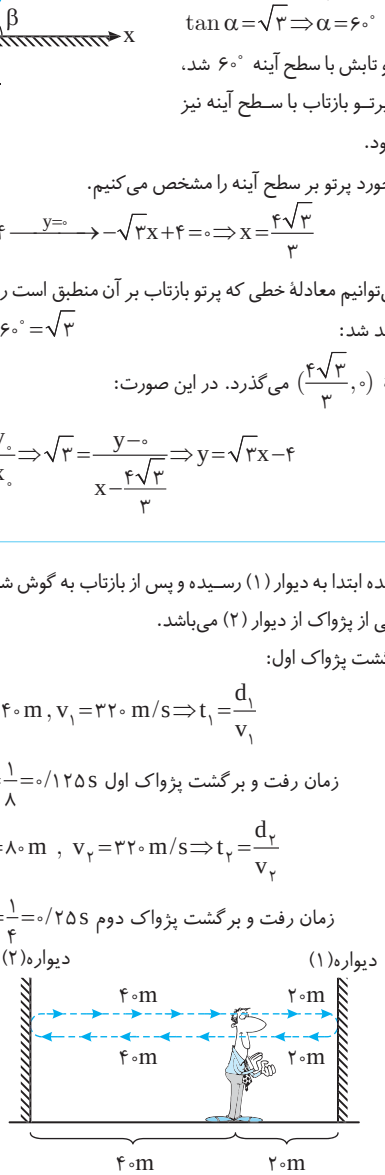
زمان رفت و برگشت پژواک اول:

$$d_1 = 20 + 20 = 40\,m\,,\ v_1 = 320\,m/s \Rightarrow t_1 = \frac{d_1}{v_1}$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{40}{320} = \frac{1}{8} = 0/125\,s$$ زمان رفت و برگشت پژواک اول

$$d_2 = 40 + 40 = 80\,m\ ,\ v_2 = 320\,m/s \Rightarrow t_2 = \frac{d_2}{v_2}$$

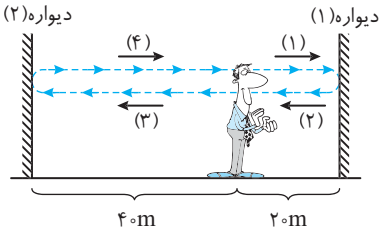
$$\Rightarrow t_2 = \frac{80}{320} = \frac{1}{4} = 0/25\,s$$ زمان رفت و برگشت پژواک دوم



یعنی در لحظه‌های ۰/۱۲۵s و ۰/۲۵s از هر دیواره یک پژواک یعنی جمعاً دو پژواک به گوش شخص می رسد.

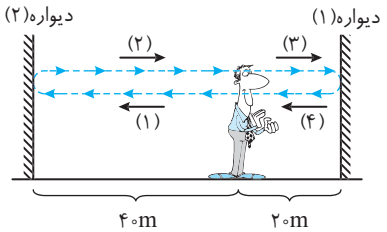
صوت برخورد کرده به دیوارهٔ (۱) می‌تواند به دیوارهٔ (۲) برخورد کند و سپس به گوش شخص برسد؛ زمان این پژواک را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} d'_1 = 2(20)+2(40)=120\,m \\ v = 320\,m/s \end{cases} \Rightarrow t'_1 = \frac{d'_1}{v} = \frac{120}{320} = \frac{3}{8} = 0/375\,s$$



اما همین مطلب در مورد پژواک بازتابیده از دیوارهٔ (۲) نیز صدق می‌کند. یعنی این پژواک می‌تواند به دیوارهٔ (۱) برسد و از روی دیوارهٔ (۱) بازتاب کرده و مجدداً به گوش شخص برسد. زمان این پژواک را نیز به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} d'_2 = 2(40)+2(20)=120\,m \\ v = 320\,m/s \end{cases} \Rightarrow t'_2 = \frac{d'_2}{v} = \frac{120}{320} = \frac{3}{8} = 0/375\,s$$



جالب شد! زمان پژواک دوم از هر دیواره ۰/۳۷۵s است، یعنی دو پژواک با هم به گوش می‌رسند. اما گوش نمی‌تواند آن‌ها را از هم تشخیص دهد زیرا برای تمیز دادن دو صوت از هم حداقل اختلاف زمانی ۰/۱s لازم است. در نتیجه گوش شخص در مدت ۰/۴s جمعاً سه پژواک را درک می‌کند.

۱ ۲۰۸۸ C

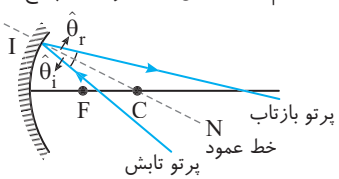
خط فکری به شکل سؤال دقت کنید. وقتی شخص دست می‌زند، امواج صوتی کروی به سوی پلکان می‌رود. اولین پژواک از اولین پله، دومین پژواک در اثر بازتاب از دومین پله و ... به گوش شخص می‌رسد و اختلاف زمانی هر دو پژواک متوالی که شخص دریافت می‌کند برابر دورهٔ صدای دریافتی توسط شخص است؛ یعنی برای به‌دست آوردن دوره، شما باید زمان رفت و برگشت صوت روی یک پله (2ℓ) را به‌دست بیاورید و از آنجا بسامد را حساب کنید.

دورهٔ صدای بازگشتی را حساب می‌کنیم: $\Delta x = v\Delta t \Rightarrow 2\ell = vT \Rightarrow T = \frac{2\ell}{v}$

بسامد صدای دریافتی خواهد شد: $f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{v}{2\ell} \Rightarrow f = \frac{320}{2\times 0/5} \Rightarrow f = 320\,Hz$

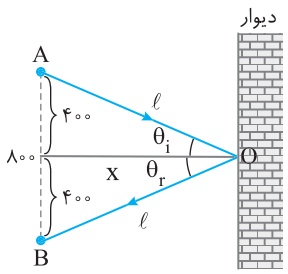
۴ ۲۰۸۹ B

بنا به قانون عمومی بازتاب، زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب با هم برابرند. یعنی اگر در نقطهٔ تابش خطی عمود بر سطح بازتاب کننده رسم کنیم زاویهٔ بین پرتو تابش با این خط عمود با زاویهٔ بین پرتو بازتاب و خط عمود برابر است. اما چگونه خط عمود بر این سطح کاو را رسم کنیم. برای این کار کافی است یک شعاع از مرکز سطح به نقطهٔ تابش (I) رسم کنید. شعاع بر سطح عمود است، بنابراین شما با این کار خط عمود بر سطح تابش را رسم کرده‌اید و می‌توانید پرتو بازتاب را رسم کنید. در این حالت گزینهٔ (۴) پاسخ مسئله است.



۲ ۲۰۹۰ C

۱ صدا اول مستقیماً از محل شلیک در امتداد AB به شنونده می‌رسد، که این مدت برابر است با:



$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 320 = \frac{800}{\Delta t_{AB}} \Rightarrow \Delta t_{AB} = 2/5\,s$$

۲ صدای دوم در اثر بازتاب صوت از دیوار به گوش شخص می‌رسد. با توجه به فرض مسئله اختلاف زمانی دو صورت رسیده به شخص ۰/۶۲۵ است؛ از این‌رو مدت زمان رسیدن صدای دوم از چشمه به شخص خواهد شد: $\Delta t' = 2/5 + 0/625 = 3/125\,s$

۳ با توجه به قانون عمومی بازتاب صوت به‌صورت شکل روبه‌رو از دیوار بازتاب می‌شود، بنابراین فاصلهٔ هر شخص تا محل بازتاب خواهد شد:

$$v = \frac{2\ell}{\Delta t} \Rightarrow 320 = \frac{2\ell}{3/125} \Rightarrow 2\ell = 1000 \Rightarrow \ell = 500\,m$$

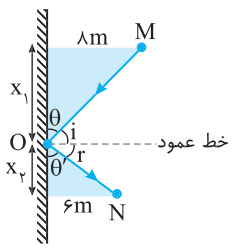
۴ در این صورت فاصلهٔ هر شخص از دیوار خواهد شد:

$$500^2 = 400^2 + x^2 \Rightarrow x = 300\,m$$

۳ ۲۰۹۱ B

مسیر پرتو عبوری از M که پس از بازتاب به N رسیده را رسم می‌کنیم.

با توجه به اینکه زاویهٔ تابش (i) و زاویهٔ بازتاب (r) با هم برابرند پس زاویه‌ای که پرتوها با سطح می‌سازند θ و θ' نیز با هم برابر بوده و دو مثلث هاشورخورده با هم متشابه‌اند:



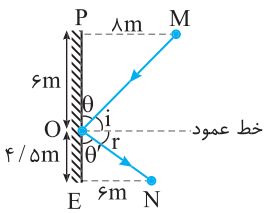
دو مثلث متشابه: $\frac{PM}{PO} = \frac{NE}{EO} \Rightarrow \frac{8}{x_1} = \frac{6}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{4}x_1$

با توجه به شکل سؤال $x_1 + x_2$ برابر ۱۰/۵ متر است:

$$x_1 + x_2 = 10/5 \Rightarrow x_1 + \frac{3}{4}x_1 = 10/5 \Rightarrow \frac{7x_1}{4} = 10/5$$

$$\Rightarrow x_1 = 6m,\ x_2 = \frac{3}{4}\times 6 = 4/5m$$

حال طول پرتوهای MO و NO را حساب می‌کنیم:



$$OM = \sqrt{PM^2 + PO^2}$$

$$\Rightarrow OM = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10\,m$$

$$ON = \sqrt{NE^2 + OE^2}$$

$$\Rightarrow ON = \sqrt{6^2 + (4/5)^2} = 7/5\,m$$

حال با توجه به سرعت نور، مدت زمانی که هر مسیر طی می‌شود را حساب می‌کنیم:

$$c = \frac{\text{طول مسیر طی شده}}{\text{مدت زمان}} \Rightarrow \begin{cases} 3\times 10^8 = \frac{10}{\Delta t_{MO}} \Rightarrow \Delta t_{MO} = \frac{10}{3}\times 10^{-8} \\ 3\times 10^8 = \frac{7/5}{\Delta t_{ON}} \Rightarrow \Delta t_{ON} = \frac{7/5}{3}\times 10^{-8} \end{cases}$$

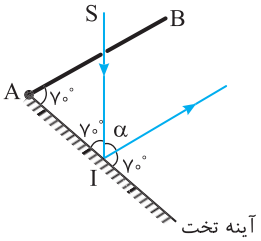
کل زمان طی شده برابر است با:

$$\Delta t_{کل} = \Delta t_{MO} + \Delta t_{ON} = \frac{10}{3}\times 10^{-8} + \frac{7/5}{3}\times 10^{-8}$$

$$\Rightarrow \Delta t_{کل} = \frac{17/5}{3}\times 10^{-8}\,s = \frac{1/75}{3}\times 10^{-7}\,s$$

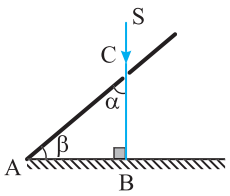
B ۲۰۹۲ ۲

حالت (۱) پرتو بازتاب و سطح AB با هم موازی‌اند پس طبق خطوط موازی و مورب زاویه پرتو بازتاب با آینهٔ تخت برابر زاویه بین دو سطح ۷۰° است بنابراین زاویه بین پرتو SI با سطح آینه نیز ۷۰° است، زاویهٔ α را حساب می‌کنیم.



$$۷۰+۷۰+\alpha=۱۸۰\Rightarrow\alpha=۴۰^\circ$$

حالت (۲): در این حالت باید پرتو بر مسیر پرتو SI عمود باشد تا بازتاب پرتو روی خودش صورت گیرد و پرتو از شکاف S خارج است، بنابراین مثلث ABC یک مثلث قائم‌الزاویه است که زاویه α در آن ۴۰° است، بنابراین زاویه بین آینه و دیواره (β) خواهد شد.



$$\alpha+\beta+۹۰=۱۸۰\xrightarrow{\alpha=۴۰^\circ}\beta=۵۰^\circ$$

در نتیجه زاویه بین دو آینه از ۷۰° به ۵۰° رسیده و ۲۰° کاهش یافته است.

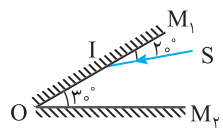
بازی با سؤال آینهٔ M_1 را چند درجه و در کدام جهت حول O بچرخانیم تا زاویهٔ تابش بر آینهٔ M_2 صفر درجه شود؟

۱) ۴۰°، پادساعتگرد

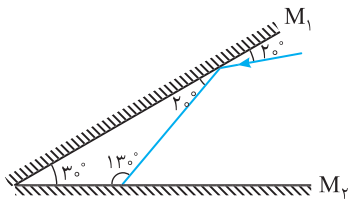
۲) ۴۰°، ساعتگرد

۳) ۲۰°، پادساعتگرد

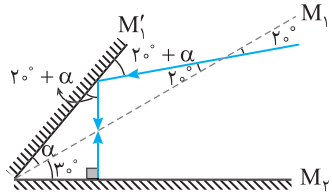
۴) ۲۰°، ساعتگرد



پاسخ زاویهٔ تابش صفر یعنی پرتو بازتاب و تابش روی هم بیفتند. یعنی پرتو با سطح آینه زاویهٔ ۹۰° می‌سازد، بنابراین باید زاویهٔ پرتو با سطح آینهٔ M_1 افزایش پیدا کند. در نتیجه آینهٔ M_1 باید پادساعتگرد بچرخد.



با توجه به شکل:



$$۲۰^\circ+\alpha+۳۰^\circ+\alpha=۹۰^\circ\Rightarrow۲\alpha=۴۰^\circ\Rightarrow\alpha=۲۰^\circ$$

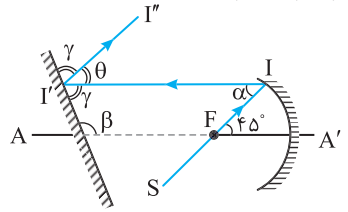
گزینهٔ ۳

C ۲۰۹۳ ۲

نکته هرگاه پرتو از کانون بگذرد و به سطح کاو بتابد، در بازتاب موازی محور آینه باز می‌گردد.

۱ پرتو SI به سطح کاو می‌تابد و موازی محور AA' بازتاب می‌کند.

۲ با توجه به خطوط موازی و مورب، زاویهٔ $\alpha=۴۵^\circ$ است.



۳ پرتو بازتاب II' به سطح آینهٔ تخت تابیده و پرتو بازتاب آن بنا به فرض مسئله با پرتو SI موازی است.

۴ با توجه به خطوط موازی و مورب، دو زاویهٔ α و θ برابرند: $\theta=\alpha\Rightarrow\theta=۴۵^\circ$

۵ بنا به قانون بازتاب عمومی، زاویه‌ای که پرتو II' با سطح آینه می‌سازد (γ) با زاویه‌ای که پرتو بازتاب $I'I''$ با سطح آینه تخت می‌سازد هم اندازه است، بنابراین:

$$۲\gamma+\theta=۱۸۰\xrightarrow{\theta=۴۵^\circ}۲\gamma=۱۸۰-۴۵\Rightarrow۲\gamma=۱۳۵\Rightarrow\gamma=۶۷/۵^\circ$$

۶ بنا به خطوط موازی - مورب خواهیم داشت:

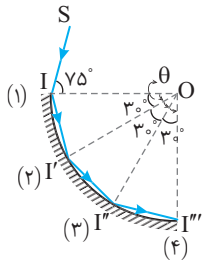
$$\beta=\gamma+\theta=۶۷/۵+۴۵=۱۱۲/۵^\circ$$

C ۲۰۹۴ ۴

خط فکری مسئلهٔ زیبایی است اما شما باید چند مطلب را به خودتان یادآوری کنید.

۱ شعاع دایره در این مسئله در هر نقطه، همان خط عمود بر سطح آینه است.

۲ زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب با هم برابرند، اکنون باید مسیر پرتو را دنبال کنید.



زاویهٔ تابش در نقطهٔ I، ۷۵° است و زاویهٔ بازتاب نیز ۷۵° است. پرتو در نقطهٔ I' به سطح آینه برخورد می‌کند. چون مثلث OII' متساوی‌الساقین است، زاویهٔ تابش در I' نیز ۷۵° است. در این صورت در مثلث OII' زاویهٔ θ برابر است با:

$$\theta+۷۵+۷۵=۱۸۰\Rightarrow\theta=۳۰^\circ$$

پرتو در ادامهٔ مسیرش دوباره به سطح آینه در نقطهٔ I'' برخورد می‌کند و مجدداً زاویهٔ تابش ۷۵° است و زاویهٔ رأس مثلث $OI'I''$، ۳۰° می‌شود؛ یعنی به ازای هر ۳۰° چرخش شعاع، یک بار نور به آینه می‌خورد. بنابراین مطابق شکل ۴ بار پرتو از روی آینه بازتاب می‌کند.

میانبر اگر زاویهٔ تابش اول بر سطح این آینهٔ کروی شکل i باشد، علاوه بر برخورد اول به ازای هر $\theta=۱۸۰-۲i$ یک بار پرتو به آینه برخورد می‌کنند.

$$n=\frac{۹۰}{۱۸۰-(۲\times۷۵)}+۱=\frac{۹۰}{۳۰}+۱=۴$$

C ۲۰۹۵ ۴

۱ زاویهٔ تابش SI بر سطح آینه، α نامیده شده است و بنا به قانون بازتاب عمومی، زاویهٔ بازتاب آن را در شکل نیز با α نمایش داده‌ایم.

۲ در مثلث OII' دو ضلع OI و OI' شعاع دایره هستند و با هم برابرند. بنابراین مثلث OII' متساوی‌الساقین است و زاویهٔ رأس I' نیز α است.

۳ زاویهٔ پرتو بازتاب از نقطهٔ I' نیز α است.

۴ مجموع زوایای یک مثلث ۱۸۰° است؛ از این‌رو در مثلث OII' خواهیم داشت:

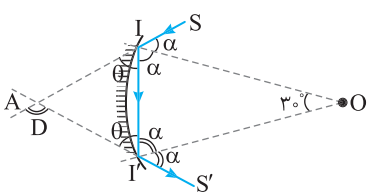
$$۲\alpha+۳۰=۱۸۰\Rightarrow\alpha=۷۵^\circ$$

۵ مجموع دو زاویهٔ α و زاویهٔ θ برابر ۱۸۰° است؛ از این‌رو:

$$۲\alpha+\theta=۱۸۰\Rightarrow۲\times۷۵+\theta=۱۸۰\Rightarrow\theta=۳۰^\circ$$

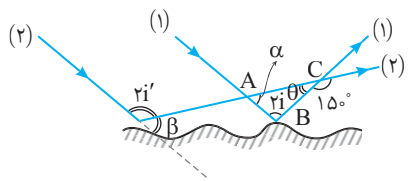
۶ زاویهٔ D زاویهٔ خارجی مثلث AII' است؛ در نتیجه می‌توان نوشت:

$$D=\theta+\theta\Rightarrow D=۳۰+۳۰=۶۰^\circ$$



۴ ۲۰۹۶ C

۱ بنا به فرض مسئله دو پرتو (۱) و (۲) موازی هستند. پرتو (۲) را امتداد می‌دهیم، در این صورت زاویهٔ α و زاویهٔ β روی شکل بنا به خطوط موازی و مورب برابر هستند. $(\alpha=\beta)$.



۲ زاویهٔ θ روی شکل برابر $\theta=۱۸۰^\circ-۱۵۰^\circ=۳۰^\circ$ است.

۳ زاویهٔ بین پرتو تابش (۱) و پرتو بازتاب آن را با $۲i$ نمایش می‌دهیم، در این صورت می‌توان نوشت: $۲i+\alpha+\theta=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۲i+\alpha+۳۰=۱۸۰\Rightarrow ۲i=۱۵۰-\alpha \quad (I)$

۴ زاویهٔ بین پرتو تابش (۲) و پرتو بازتاب آن را با $۲i'$ نمایش می‌دهیم، بنابراین می‌توان نوشت: $۲i'+\beta=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\beta=\alpha} ۲i'+\alpha=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۲i'=۱۸۰^\circ-\alpha \quad (II)$

۵ دو رابطهٔ (I) و (II) از هم کم می‌کنیم:

$$۲i'-۲i=۱۸۰^\circ-\alpha-(۱۵۰^\circ-\alpha)\Rightarrow ۲(i'-i)=۳۰^\circ\Rightarrow i'-i=۱۵^\circ$$

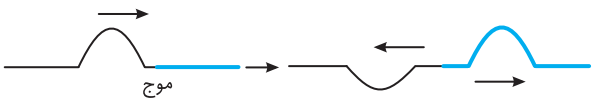
میانبر هرگاه شکلی شبیه شکل مسئله به شما داده شود خواهیم داشت:

$$i'-i=\frac{\theta}{۲}$$

پنجره ۲

۴ ۲۰۹۷ A

دو قسمت طناب هم‌جنس هستند و در طناب ضخیم‌تر، تندی انتشار موج کمتر است. وقتی تپ به محل تغییر قطر طناب می‌رسد، بخشی از تپ وارد بخش ضخیم می‌شود و بخشی از روی مرز بازتاب کرده و وارونه می‌شود.



۲ ۲۰۹۸ A

تپ بازتابیده از مرز شبیه تپ بازتابیده از انتهای ثابت وارونه و قرینه است. اما تپ عبوری از مرز شبیه تپ اولیه است اما ابعاد آن از تپ اولیه کوچک‌تر است زیرا انرژی تپ اولیه به دو بخش تقسیم می‌شود. یک بخش سهم تپ بازتاب و بخش دیگر سهم تپ عبوری است.



۱ ۲۰۹۹ B

گزینه‌های داده شده را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): بخشی از موج عبور می‌کند و بخشی برمی‌گردد. بنابراین انرژی موج عبوری کاهش می‌یابد، در نتیجه دامنه کاهش می‌یابد. (درست)

گزینهٔ (۲): بسامد و در نتیجه دوره تناوب از ویژگی‌های چشمه موج است و ثابت می‌ماند. (نادرست)

گزینهٔ (۳): با کاهش قطر طناب چگالی خطی (μ) کاهش می‌یابد و تندی افزایش می‌یابد. $(v=\sqrt{\frac{F}{\mu}})$

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}},\mu=\frac{m}{L},m=\rho V=\rho\frac{\pi D^۲}{۴}L\Rightarrow v\uparrow=\frac{۲}{D\downarrow}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}$$

گزینهٔ (۴): طبق رابطهٔ $\lambda\uparrow=v\uparrow T$، با افزایش تندی و ثابت بودن بسامد (دوره) طول موج نیز افزایش می‌یابد.

۱ ۲۱۰۰ A

یادآوری تندی انتشار موج در یک سیم از رابطهٔ $v=\sqrt{F/\mu}$ به‌دست می‌آید که در آن F نیروی کشش سیم و μ چگالی خطی سیم $(\mu=m/\ell)$ است.

نکته هرگاه یک موج از یک محیط به محیط دیگر برود بسامد موج که توسط چشمهٔ موج ایجاد می‌شود، ثابت می‌ماند.

$$\begin{cases}\text{طول موج در محیط اول}:\lambda_۱=\frac{v_۱}{f_۱}\\ \text{طول موج در محیط دوم}:\lambda_۲=\frac{v_۲}{f_۲}\end{cases}\xrightarrow{f_۱=f_۲}\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}=\frac{v_۱}{v_۲}$$

با توجه به رابطهٔ تندی انتشار موج در ریسمان خواهیم داشت:

$$\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}=\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{\sqrt{\frac{F_۱}{\mu_۱}}}{\sqrt{\frac{F_۲}{\mu_۲}}}\xrightarrow{F_۱=F_۲}\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}=\sqrt{\frac{\mu_۲}{\mu_۱}}\Rightarrow\frac{\mu_۲}{\mu_۱}=(\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲})^۲$$

۳ ۲۱۰۱ B

خط فکری در یک محیط همگن که شرایط فیزیکی در تمام جهت‌ها یکسان باشد، سرعت انتشار موج ثابت است، اما در این پرسش، شرایط فیزیکی محیط از A تا B در حال تغییر است، بنابراین سرعت انتشار موج از A تا B در حال تغییر بوده و طول موج نیز از A تا B درحال تغییر خواهد بود. بنابراین باید به سراغ رابطهٔ تندی انتشار موج در سیم با چگالی سیم برویم.

یادآوری سرعت انتشار موج در سیم $v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ بوده و با جذر چگالی سیم نسبت وارون دارد.

نکته در طول یک سیم ساکن کشش در تمام نقاط سیم یکسان است.

با توجه به اینکه بسامد موج در طول سیم تغییر نمی‌کند خواهیم داشت:

$$\begin{cases}v_A=f\lambda_A\\ v_B=f\lambda_B\end{cases}\Rightarrow\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{v_A}{v_B}$$

به جای v مقدار $\sqrt{F/\rho A}$ را قرار می‌دهیم.

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{\sqrt{\frac{F_A}{\rho_A A_A}}}{\sqrt{\frac{F_B}{\rho_B A_B}}}\xrightarrow[F_A=F_B]{A_A=A_B}\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\sqrt{\frac{\rho_B}{\rho_A}}$$

با توجه به فرض مسئله $\rho_A>\rho_B$ است بنابراین $\lambda_A<\lambda_B$ خواهد شد.

۲ ۲۱۰۲ A

یادآوری تندی انتشار موج در یک طناب (ریسمان) از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید که در آن D قطر طناب، F نیروی کشش و μ چگالی خطی طناب است. $v=\frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$

خط فکری دو طناب به هم متصل هستند و کشش در هر دو یکسان $(F_۱=F_۲)$ است و از طرفی دو طناب هم‌جنس هستند و چگالی هر دو یکی است $(\rho_۱=\rho_۲)$، بنابراین ابتدا نسبت سرعت‌ها و سپس نسبت طول موج را حساب کنید.

۱ بسامد موج از ویژگی‌های چشمهٔ موج است و هنگام انتشار بسامد ثابت می‌ماند $(f_۱=f_۲)$.

۲ نسبت $v_۲/v_۱$ را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases}v_۱=\frac{۲}{D_۱}\sqrt{\frac{F_۱}{\pi\rho_۱}}\\ v_۲=\frac{۲}{D_۲}\sqrt{\frac{F_۲}{\pi\rho_۲}}\end{cases}\xrightarrow[\rho_۱=\rho_۲]{F_۱=F_۲}\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{D_۱}{D_۲}\xrightarrow{D_۲=۲D_۱}\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{۱}{۲}$$

۳ نسبت طول موج‌ها خواهد شد:

$$\begin{cases}v_۲=f\lambda_۲\\ v_۱=f\lambda_۱\end{cases}\xrightarrow{f_۱=f_۲}\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{v_۲}{v_۱}\Rightarrow\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{۱}{۲}$$

بازی با سؤال در شکل مقابل چشمهٔ O در دو ریسمان که از یک نقطه به هم متصل شده‌اند، موج گسیل می‌کند، اگر دو ریسمان هم‌جنس و همگن باشند و سرعت انتشار امواج در ریسمان B، سه برابر سرعت انتشار امواج در ریسمان A باشد، سطح مقطع ریسمان A چند برابر سطح مقطع ریسمان B است؟ (نیروی کشش دو ریسمان یکی است.)



۱) ۹ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

پاسخ سرعت انتشار موج در ریسمان برابر $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ است.

اکنون به حل مسئله می‌پردازیم: $\frac{v_B}{v_A}=\frac{\sqrt{\frac{F}{\rho A_B}}}{\sqrt{\frac{F}{\rho A_A}}}\Rightarrow ۳=\sqrt{\frac{A_A}{A_B}}\Rightarrow \frac{A_A}{A_B}=۹$

گزینهٔ ۱

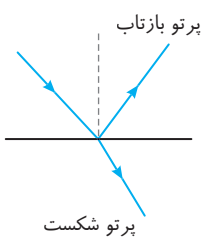
B ۲۱۰۳ ۲

بسامد از ویژگی‌های چشمه است و در برهم‌کنش موج با محیط تغییر نمی‌کند.

بازی با سؤال موج‌های نور فرودی، از هوا به شیشه می‌تابند. بعضی از آن‌ها در سطح جدایی دو محیط بازتابیده و بعضی شکسته شده و وارد شیشه می‌شوند. کدام‌یک از کمیت‌های زیر برای موج‌های بازتابیده و شکسته شده یکسان است؟ ریاضی- ۸۹

۱) دوره ۲) امتداد ۳) شدت نور ۴) سرعت انتشار

پاسخ دوره و بسامد موج توسط چشمهٔ موج تعیین می‌شود و هنگام گذر موج از یک محیط به محیط دیگر ثابت می‌ماند و گزینهٔ (۱) درست است. اما هنگام گذر موج از مرز دو محیط بخشی از موج بازتاب کرده و بخشی وارد محیط دوم می‌شود. مطابق شکل، امتداد پرتو بازتاب و شکست یکسان نیست و گزینهٔ (۲) نادرست است.



وقتی بخشی از نور وارد محیط دیگر و بخشی از آن بازتاب می‌شود یعنی انرژی اولیه موج به دو بخش تقسیم می‌شود، بنابراین شدت نور برای این موج‌ها ممکن است یکسان نباشد و گزینهٔ (۳) نادرست است.

ویژگی‌های دو محیط یکسان نیست بنابراین وقتی موج از یک محیط به محیط دیگری می‌رود سرعت انتشار تغییر می‌کند از این‌رو سرعت انتشار موج بازتاب و سرعت انتشار موج شکست یکسان نبوده و گزینهٔ (۴) نادرست است.

گزینهٔ ۱

A ۲۱۰۴ ۱

هنگام گذر موج از یک محیط به محیط دیگر، جهت انتشار موج (نور)، تندی و طول موج تغییر می‌کند.

A ۲۱۰۵ ۴

سرعت امواج الکترومغناطیسی وقتی از هوا وارد محیط چگال‌تری مانند آب می‌شوند، کاهش می‌یابد $(v=\frac{c}{n}\downarrow)$ اما بسامد از ویژگی‌های چشمهٔ موج بوده از این‌رو بسامد ثابت می‌ماند؛ در نتیجه طول موج نیز $(\lambda=\frac{v\downarrow}{f})$ کاهش می‌یابد.

A ۲۱۰۶ ۳

بسامد از ویژگی‌های چشمه است و تغییر نمی‌کند. $f_۱=f_۲=۶۰\,Hz$

طول موج یک موج از یک محیط به محیط دیگر با تندی انتشار موج نسبت مستقیم دارد.

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{\frac{v_۲}{f}}{\frac{v_۱}{f_۱}}\Rightarrow\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{v_۲}{v_۱}\Rightarrow\frac{\lambda_۲}{۰/۵}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\lambda_۲=۰/۲۵m$$

بازی با سؤال موج‌های حاصل از یک چشمهٔ موج در آب با سرعت ۱۵۴۰m/s و در هوا با سرعت ۳۵۰m/s منتشر می‌شوند. اگر طول موج آن‌ها در هوا ۲/۵ متر باشد، طول موج آن‌ها در آب چند متر است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۱۱ ۳) ۴/۴ ۴) ۵

پاسخ هنگام گذر موج از یک محیط به محیط دیگر (از هوا به آب)، بسامد ثابت می‌ماند. بنابراین: $f_۱=f_۲\Rightarrow\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{v_۲}{v_۱}\Rightarrow\frac{\lambda_۲}{۲/۵}=\frac{۱۵۴۰}{۳۵۰}\Rightarrow\lambda_۲=۱۱m$

گزینهٔ ۲

B ۲۱۰۷ ۳

نکته رنگ نور به بسامد نور بستگی دارد و هنگام گذر نور از یک محیط شفاف به محیط شفاف دیگر بسامد نور و در نتیجه رنگ نور ثابت می‌ماند.

با توجه به نکتهٔ بیان شده گزینهٔ (۳) درست است.

بازی با سؤال رنگ نور به کدام عامل زیر بستگی دارد؟

۱) شدت نور ۲) سرعت نور ۳) بسامد نور ۴) طول موج نور

کنکور دهه‌های گذشته

پاسخ نور یک لامپ تکفام قرمز در آب و هوا یکسان دیده می‌شود و نور قرمز در آب و در هوا دارای بسامد مشخص است. اما طول موج نور قرمز در هوا و آب به دلیل پدیدهٔ شکست یکسان نیست؛ بنابراین رنگ نور که توسط چشم دیده می‌شود به بسامد آن بستگی دارد.

گزینهٔ ۳

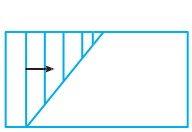
B ۲۱۰۸ ۱

یادآوری تشت موج شامل یک تشت شیشه‌ای کم‌عمق و یک نوسان‌ساز است. یک راه مشاهدهٔ رفتار موج با استفاده از سایه‌ای است که توسط لامپ از سطح آب داخل تشت بر ورقهٔ کاغذی زیر تشت تشکیل می‌شود.

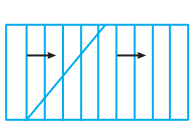
نکته تندی انتشار موج سطحی روی آب‌های کم‌عمق به عمق آب بستگی دارد و در مناطق کم‌عمق‌تر، تندی کمتر است.

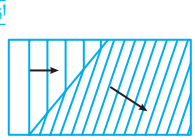
وقتی موج به مرز برهٔ شیشه‌ای می‌رسد و وارد قسمت کم‌عمق‌تر می‌شود، تندی انتشار موج کاهش می‌یابد اما بسامد موج که توسط چشمهٔ موج تعیین می‌شود ثابت است بنابراین طول موج یعنی فاصلهٔ جبهه‌های موج کاهش می‌یابد $(v\downarrow\Rightarrow\lambda=\frac{v\downarrow}{f_{ثابت}})$ از طرفی همین امر سبب تغییر مسیر جبهه‌های موج می‌شود؛ بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

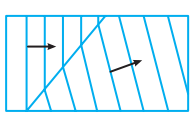
بازی با سؤال روی سطح آب یک تشت، یک موج سطحی تخت در قسمت کم‌عمق ایجاد شده است و این موج به مرز آب کم‌عمق و آب عمیق‌تر می‌رسد. کدام گزینه شکل جبهه‌های موج سطحی در آب عمیق‌تر را به درستی نمایش می‌دهد؟

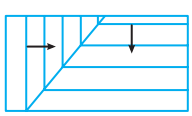


از کتاب درسی

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ با ورود موج از آب کم‌عمق به آب عمیق‌تر، تندی موج و در نتیجه طول موج یعنی فاصلهٔ جبهه‌های موج افزایش می‌یابد و جبهه‌های موج نیز که با مرز زاویه می‌سازند از مسیر خود منحرف می‌شوند؛ بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

گزینهٔ ۳

B ۲۱۰۹ ۳

یادآوری در آب‌های کم‌عمق، تندی انتشار امواج سطحی آب به عمق آب بستگی دارد و در نقاط عمیق‌تر، بیشتر است.

طول موج (فاصلهٔ جبهه‌های موج) در بخش B کوتاه‌تر از طول موج در بخش A است، بنابراین: $\lambda_A > \lambda_B \xrightarrow[v=f\lambda]{f_A=f_B} v_A > v_B, A_{\text{عمق}} > B_{\text{عمق}}$

A ۲۱۱۰ ۱

۱ تندی موج ٪۶۰ کاهش یافته، یعنی تندی در ناحیهٔ کم‌عمق خواهد شد:

$$v_2 = v_1 - \frac{60}{100}v_1 \Rightarrow v_2 = 0/4v_1$$

۲ با توجه به $\lambda = \frac{v}{f}$ و اینکه در شکست بسامد تغییر نمی‌کند، داریم:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2}{v_1} = 0/4 \xrightarrow[\text{برابر طول موج است}]{\text{فاصلهٔ دو ستیغ متوالی}} \frac{\lambda_2}{10} = 0/4 \Rightarrow \lambda_2 = 4\,cm$$

A ۲۱۱۱ ۱

بسامد زاویه‌ای برابر $\omega = 2\pi f$ است و می‌دانیم بسامد با تغییر محیط ثابت می‌ماند، بنابراین بسامد زاویه‌ای موج الکترومغناطیسی در شیشه و خلأ یکسان می‌باشد.

A ۲۱۱۲ ۲

هرگاه نور از یک محیط شفاف وارد محیط شفاف دیگری شود، سرعت و طول موج آن به‌طور ناگهانی تغییر می‌کند اما بسامد آن ثابت می‌ماند. از این‌رو خواهیم داشت:

$$\lambda = \frac{v}{f} \xrightarrow{f=\text{ثابت}} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{2/25\times10^8}{3\times10^8} \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{4}{3}$$

A ۲۱۱۳ ۴

نکته سرعت صوت در آب از سرعت صوت در هوا بیشتر است. اما در مورد امواج الکترومغناطیسی با توجه به قانون شکست اسنل هرچه محیط غلیظ‌تر باشد، ضریب شکست بیشتر شده و سرعت کاهش می‌یابد. از این‌رو: $\downarrow v = \frac{c}{n\uparrow}$

وقتی صوت از هوا وارد آب می‌شود، بسامد ثابت می‌ماند. اما با زیاد شدن تندی انتشار صوت در آب، طول موج در آب افزایش می‌یابد.

$$\lambda = \frac{v}{f} \xrightarrow[\text{v افزایش یافته}]{\text{با تغییر محیط بسامد ثابت می‌ماند.}} \lambda \text{ بیشتر می‌شود}$$

وقتی نور و یا هر موج الکترومغناطیسی از هوا وارد آب می‌شود تندی انتشار آن کاهش می‌یابد؛ بنابراین: $\lambda = \frac{v}{f} \xrightarrow[\text{v کاهش یافته}]{\text{با تغییر محیط بسامد ثابت مانده}} \lambda \text{ کمتر می‌شود}$

A ۲۱۱۴ ۱

بنا به تعریف ضریب شکست هر محیط برابر با نسبت تندی نور در خلأ به تندی نور در آن محیط است؛ از این‌رو:

$$n = \frac{c}{v} \xrightarrow[c=3\times10^8\,m/s=3\times10^5\,km/s]{v=2/5\times10^5\,km/s} n = \frac{3\times10^5}{2/5\times10^5} \Rightarrow n = 1/2$$

A ۲۱۱۵ ۴

با توجه به تعریف ضریب شکست، وقتی پرتو از خلأ وارد محیطی با ضریب شکست n می‌شود، تندی انتشار $\frac{1}{n}$ می‌شود. $n = \frac{c}{v} \Rightarrow v = \frac{c}{n}$

چون بسامد نور ثابت می‌ماند، طول موج آن نیز $\frac{1}{n}$ می‌شود. $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$

B ۲۱۱۶ ۴

ابتدا با توجه به بسامد و طول موج تندی در مایع را حساب می‌کنیم.

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \Rightarrow v = \frac{9}{20}\times10^{-6}\times5\times10^{14} = 2/25\times10^8$$

حال ضریب شکست را به‌دست می‌آوریم:

$$n = \frac{c}{v} \Rightarrow n = \frac{3\times10^8}{2/25\times10^8} = \frac{3}{2/25} = \frac{300}{225} = \frac{100}{75} = \frac{4}{3}$$

A ۲۱۱۷ ۴

یادآوری سرعت تمام امواج الکترومغناطیسی در خلأ یکسان و برابر $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ است. با توجه به تعریف ضریب شکست: $v = \frac{c}{n} \Rightarrow v = \frac{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}}{\frac{4}{3}} \Rightarrow v = \frac{3}{4\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

A ۲۱۱۸ ۲

۱ با توجه به قانون شکست عمومی و قانون شکست اسنل

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \frac{v_2}{3\times10^8} = \frac{1}{\frac{6}{5}} \Rightarrow \frac{v_2}{3\times10^8} = \frac{5}{6} \Rightarrow v_2 = 2/5\times10^8\,m/s$$

۲ بسامد به چشمه نور بستگی دارد و با تغییر محیط تغییر نمی‌کند.

$$f = \frac{v}{\lambda} \Rightarrow f = \frac{3\times10^8}{600\times10^{-9}} \Rightarrow f = \frac{1}{2}\times10^{15} \Rightarrow f = 5\times10^{14}\,Hz$$

۳ همچنین با توجه به $\lambda = \frac{v}{f}$ و ثابت ماندن f بنابراین تغییرات λ و v یکسان می‌باشد:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \frac{\lambda_2}{600} = \frac{1}{\frac{6}{5}} \Rightarrow \lambda_2 = 500\,nm$$

A ۲۱۱۹ ۲

با توجه به تعریف ضریب شکست خواهیم داشت:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{c}{n_1} \\ v_2 = \frac{c}{n_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{c}{n_2}}{\frac{c}{n_1}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2} \quad (I)$$

از طرفی با ثابت ماندن بسامد موج در گذر از یک محیط به محیط دیگر می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} v_1 = f\lambda_1 \\ v_2 = f\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (II)$$

از رابطهٔ (I) و (II) رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \frac{\lambda_2}{0/45} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \lambda_2 = 0/4\mu m$$

B ۲۱۲۰ ۲

سرعت نور در خلأ بیشتر از محیط‌های شفاف دیگر است، پس با ورود نور از خلأ به محیط شفاف دیگر سرعت انتشار موج کاهش می‌یابد که با توجه به رابطهٔ $\lambda = \frac{v}{f}$ با کاهش سرعت، طول موج نیز کاهش می‌یابد: $\lambda_1 = \lambda \;,\; \lambda_2 = \lambda - 150$

با توجه به بسامد نور و سرعت نور در خلأ λ را حساب می‌کنیم:

$$\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{3\times10^8}{5\times10^{14}} \Rightarrow \lambda = 0/6\times10^{-6}\,m \Rightarrow \lambda = 600\,nm$$

طول موج در محیط دوم را حساب می‌کنیم:

$$\lambda_2 = \lambda - 150 \Rightarrow \lambda_2 = 600 - 150 = 450\,nm$$

نسبت طول موج در دو محیط با ضریب شکست رابطهٔ عکس دارد:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \xrightarrow{n_1=1\text{ محیط اول خلأ}} \frac{n_2}{1} = \frac{600}{450} \Rightarrow n_2 = \frac{4}{3}$$

A ۲۱۲۱ ۲

با توجه به تعریف ضریب شکست

$$\frac{n_{\text{مایع}}}{n_{\text{شیشه}}} = \frac{v_{\text{شیشه}}}{v_{\text{مایع}}} \Rightarrow \frac{\frac{5}{4}}{1/5} = \frac{v_{\text{ش}}}{v_{\text{م}}} \Rightarrow \frac{v_{\text{م}}}{v_{\text{ش}}} = \frac{1/5}{\frac{5}{4}} \Rightarrow \frac{v_{\text{م}}}{v_{\text{ش}}} = \frac{6}{5}$$

A ۲۱۲۲ ۱

خط فکری نکتهٔ مهم در حل این تست ساده این است که بسامد با تغییر محیط ثابت می‌ماند و نسبت بسامد در هوا با نسبت بسامد در محیط شفاف دیگر تفاوتی ندارد؛ به همین علت شما نسبت بسامدها در هوا را به‌دست بیاورید. نسبت بسامدها در هوا را حساب می‌کنیم:

$$f_A=\frac{v}{\lambda_A}\ ,\ f_B=\frac{v}{\lambda_B}\Rightarrow\frac{f_A}{f_B}=\frac{\lambda_B}{\lambda_A}=\frac{۴۰۰}{۲۰۰}\Rightarrow\frac{f_A}{f_B}=۲$$

A ۲۱۲۳ ۱

۱ با توجه به رابطهٔ ضریب شکست با سرعت نور خواهیم داشت:

$$\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{n_۱}{n_۲}\Rightarrow\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{۱}{\frac{۴}{۳}}\Rightarrow\lambda_۲=\frac{۳}{۴}\lambda_۱$$

۲ اکنون یک معادله داریم و دو مجهول؛ اما با توجه به صورت مسئله و اینکه طول موج در آب از طول موج در هوا کمتر شده، می‌توان نوشت:

$$\lambda_۱-\lambda_۲=۱۰۰\Rightarrow\lambda_۱-\frac{۳}{۴}\lambda_۱=۱۰۰\Rightarrow\frac{\lambda_۱}{۴}=۱۰۰\Rightarrow\lambda_۱=۴۰۰\text{nm}$$

۳ طول موج در هوا $\lambda_۱=۴۰۰\text{nm}$ است. در گستره امواج الکترومغناطیسی طول موج نور مرئی در بازهٔ ۴۰۰nm تا ۷۰۰nm قرار دارد. بنابراین این موج الکترومغناطیسی در ناحیهٔ نور مرئی قرار دارد.

۴ بسامد این موج الکترومغناطیسی در هر محیطی از جمله خلأ خواهد شد:

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow۴۰۰\times۱۰^{-۹}=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{f}\Rightarrow f=\frac{۳}{۴}\times۱۰^{۱۵}\text{Hz}\Rightarrow f=۷/۵\times۱۰^{۱۴}\text{Hz}$$

A ۲۱۲۴ ۳

با ورود نور از شیشه به هوا اندازهٔ سرعت آن ٪۴۰ افزایش یافته؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_{\text{هوا}}=v_{\text{شیشه}}+\frac{۴۰}{۱۰۰}v_{\text{شیشه}}\Rightarrow v_{\text{هوا}}=۱/۴v_{\text{شیشه}}$$

با توجه به قانون شکست اسنل:

$$\begin{cases}\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{n_۲}{n_۱}\\ \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{v_۱}{v_۲}\end{cases}\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{n_۱}{n_۲}\Rightarrow\frac{v_{\text{شیشه}}}{v_{\text{هوا}}}=\frac{n_{\text{هوا}}}{n_{\text{شیشه}}}\Rightarrow\frac{v_{\text{شیشه}}}{۱/۴v_{\text{شیشه}}}=\frac{۱}{n_{\text{شیشه}}}$$

$$\Rightarrow n_{\text{شیشه}}=۱/۴=\frac{۷}{۵}$$

A ۲۱۲۵ ۲

سرعت نور در این محیط شفاف ۳۶ درصد از سرعت نور در خلأ (c) کمتر است؛ یعنی:

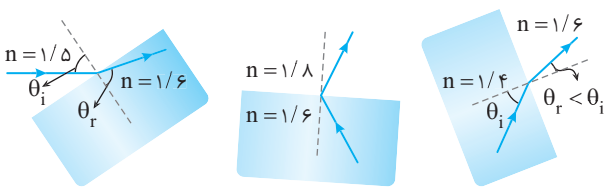
$$v=c-\frac{۳۶}{۱۰۰}c\Rightarrow v=\frac{۶۴}{۱۰۰}c$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{n_۱}{n_۲}\Rightarrow\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{۶۴}{۱۰۰}=\frac{۱۶}{۲۵}$$

A ۲۱۲۶ ۲

برای هر سه شکل خط عمود را رسم می‌کنیم.



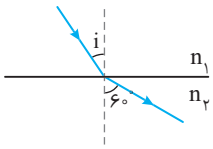
(الف) (ب) (پ)

در شکل (الف) ضریب شکست محیط دوم از محیط اول بیشتر است، بنابراین پرتو شکست به خط عمود باید نزدیک شود و شکل (الف) درست است.

شکل (ب) کاملاً نادرست است. زیرا زاویه تابش و شکست باید در دو طرف خط عمود تشکیل شود. در حالی که در این شکل هر دو پرتو در یک طرف خط عمود رسم شده‌اند.

در شکل (پ) ضریب شکست محیط دوم بزرگ‌تر است و باید پرتو به خط عمود نزدیک شود؛ یعنی $\theta_r<\theta_i$ باشد، اما پرتو از خط عمود دور شده که این شکل نادرست است.

A ۲۱۲۷ ۴

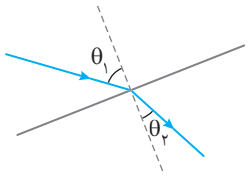


با توجه به شکل روبه‌رو زاویهٔ شکست از زاویهٔ تابش بیشتر است. با توجه به قانون اسنل $(n_۱\sin\theta_۱=n_۲\sin\theta_۲)$، ضریب شکست محیط اول $(n_۱)$ از ضریب شکست محیط دوم $(n_۲)$ بزرگ‌تر است و گزینهٔ (۱) درست است.

سرعت نور با ضریب شکست نسبت وارون دارد $(\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{n_۱}{n_۲})$ بنابراین وقتی $n_۱>n_۲$ است، سرعت نور در محیط اول از سرعت نور در محیط دوم کمتر است $(v_۱<v_۲)$ و گزینهٔ (۲) درست است.

هرگاه پرتو نور از محیط غلیظ وارد محیط رقیق شود، پرتو از خط عمود دور می‌شود. پرتو در محیط (۲) از خط عمود دور شده؛ بنابراین محیط (۲) از محیط (۱) رقیق‌تر است و گزینهٔ (۳) نیز درست است.

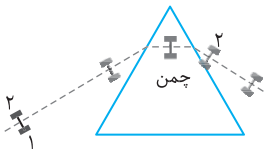
A ۲۱۲۸ ۲



با توجه به شکل و رسم خط عمود بر سطح با عبور موج الکترومغناطیسی پرتو به خط عمود نزدیک شده؛ بنابراین سرعت در محیط دوم کمتر از سرعت در محیط اول است اما بسامد ثابت می‌ماند و طول موج نیز کاهش می‌یابد:

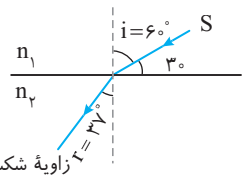
$$\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}\xrightarrow{v_۲<v_۱}\lambda_۲<\lambda_۱$$

A ۲۱۲۹ ۲



در هر چهار گزینه ماشین به سمت پایین منحرف شده است و این نشان می‌دهد که تندی حرکت چرخ‌های ماشین روی چمن از محیط پیرامونش کمتر بوده و همین امر سبب می‌گردد که وقتی چرخ شمارهٔ (۱) به روی چمن می‌رود، سرعتش از چرخ شمارهٔ (۲) کمتر بوده و ماشین درون زمین چمن منحرف شده سرعت هر دو چرخ یکسان است اما وقتی چرخ شمارهٔ (۲) از چمن خارج می‌شود سرعتش بیشتر شده و سبب چرخش ماشین رو به پایین می‌شود، بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

A ۲۱۳۰ ۱



هرگاه پرتو نور به طور مایل از یک محیط شفاف وارد محیط شفاف دیگری شود، مسیر آن به طور ناگهانی تغییر می‌کند و علت آن، تغییر ناگهانی سرعت نور است. در محیط‌های غلیظ سرعت نور کمتر است. پس اگر هنگام گذر نور از محیط شفاف به محیط شفاف دیگر پرتو به خط عمود نزدیک شود، محیط دوم غلیظ‌تر بوده و سرعت نور در این محیط از سرعت نور در محیط اول کمتر است.

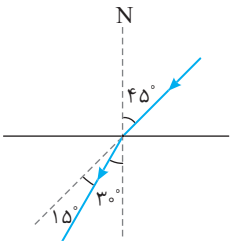
$$r<i\Rightarrow n_۲>n_۱\xrightarrow{\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{n_۱}{n_۲}}v_۲<v_۱$$

زاویهٔ شکست زاویهٔ بین پرتو شکست و خط عمود است که این زاویه $\theta_r=۳۷^\circ$ است.

میانبر در هر محیطی که زاویهٔ بین پرتو و خط عمود بزرگ‌تر است، تندی انتشار نور در آن محیط بیشتر است.

A ۲۱۳۱ ۳

۱ پرتو هنگام ورود به محیط دوم از مسیر خود ۱۵° منحرف می‌شود و زاویهٔ شکست برابر است با: $\theta_2 = 45 - 15 = 30^\circ$



۲ با توجه به رابطهٔ اسنل، ضریب شکست خواهد شد:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \xrightarrow{n_1=1,\ n_2=n} \sin 45^\circ = n \sin 30^\circ$$

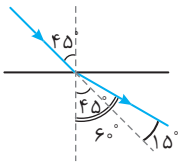
$$\Rightarrow n = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow n = \sqrt{2}$$

۳ اکنون می‌توان طول موج پرتو مورد نظر را در محیط شفاف جدید به‌دست آورد:

$$\lambda' = \frac{\lambda}{n} \Rightarrow \lambda' = \frac{700}{\sqrt{2}} \Rightarrow \lambda' = 350\sqrt{2}\,nm \Rightarrow \lambda' = \frac{7\sqrt{2}}{20}\,\mu m$$

B ۲۱۳۲ ۴

۱ هرگاه صوت از هوا وارد یک مایع شود پرتو از خط عمود دور می‌شود. بنابراین زاویهٔ شکست خواهد شد: $\theta_2 = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$



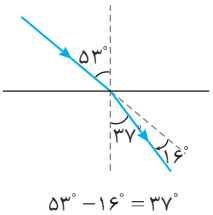
۲ با توجه به قانون شکست عمومی خواهیم داشت:

$$\frac{\sin\theta_{هوا}}{\sin\theta_{مایع}} = \frac{v_{هوا}}{v_{مایع}} \Rightarrow \frac{\sin 45}{\sin 60} = \frac{v_{هوا}}{v_{مایع}} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{v_{هوا}}{v_{مایع}} \Rightarrow \frac{v_{مایع}}{v_{هوا}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

B ۲۱۳۳ ۱

نکته روابط شکست موج در هنگام ورود غیرعمودی از یک محیط شفاف به محیط شفاف دیگر را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{n_1}{n_2}$$



$53^\circ - 16^\circ = 37^\circ$

باید توجه داشت هنگام عبور موج از یک محیط به محیط دیگر، بسامد موج تغییر نمی‌کند.

با ورود نور از هوا به هر محیط دیگری پرتو به خط عبور نزدیک‌تر می‌شود. بنابراین پرتو موج ۱۶° به نیم‌خط عمود نزدیک می‌شود:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\sin 37^\circ}{\sin 53^\circ} \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

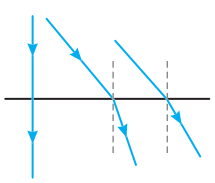
طول موج $\frac{1}{8}\,\mu m$ کاهش یافته است.

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{1}{8} \times 10^{-6} \xrightarrow{\lambda_2 = \frac{3}{4}\lambda_1} \frac{1}{4}\lambda_1 = \frac{1}{8} \times 10^{-6} \Rightarrow \lambda_1 = 0/5 \times 10^{-6}\,m$$

$$\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow f = \frac{3 \times 10^8}{0/5 \times 10^{-6}} = 6 \times 10^{14}\,Hz$$

B ۲۱۳۴ ۲

خط فکری زاویهٔ تابش صفر درجه یعنی پرتو عمود بر مرز دو محیط بتابد و بدون انحراف وارد محیط دوم شود. اما وقتی زاویهٔ تابش شروع به افزایش می‌کند و از هوا وارد محیط شفاف می‌شود از مسیر خود منحرف می‌شود اما زاویهٔ شکست از زاویهٔ تابش همواره کمتر است $(\theta_r < \theta_i)$ و وقتی زاویهٔ تابش به ۹۰° می‌رسد زاویهٔ شکست از ۹۰° کمتر است.



با توجه به قانون اسنل $(n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2)$ هرگاه $\theta_1 = 90^\circ$ شود آنگاه زاویهٔ شکست خواهد شد:

$$1 \times \sin 90^\circ = 2 \sin\theta_r \Rightarrow \sin\theta_r = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_r = 30^\circ$$

یعنی حد نهایی زاویهٔ شکست در این پدیده ۳۰° است بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

A ۲۱۳۵ ۲

خط فکری سرعت نور در یک محیط معین مقدار ثابتی است؛ پس حرکت نور حرکت یکنواخت روی خط راست است. شما باید به کمک معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت $x = vt$ مسئله را حل کنید.

معادلهٔ انتشار نور را برای آب و هوا می‌نویسیم:

$$\begin{cases} d_{هوا} = v_{هوا} t_{هوا} \\ d_{آب} = v_{آب} t_{آب} \end{cases} \xrightarrow[t_{هوا} = t_{آب}]{\text{با فرض مسئله}} \frac{d_{هوا}}{d_{آب}} = \frac{v_{هوا}}{v_{آب}} \quad (I)$$

با توجه به تعریف ضریب شکست خواهیم داشت:

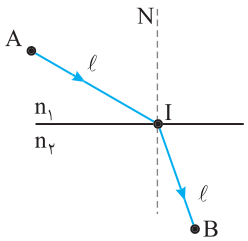
$$n_{آب} = \frac{v_{هوا}}{v_{آب}} \quad (II)$$

از رابطهٔ (I) و (II) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{d_{هوا}}{d_{آب}} = n_{آب} \xrightarrow[n_{آب} = \frac{4}{3}]{d_{آب} = 120\,cm} \frac{d_{هوا}}{120} = \frac{4}{3} \Rightarrow d_{هوا} = 160\,cm$$

A ۲۱۳۶ ۱

خط فکری با یک مسئلهٔ حرکت‌شناسی سر و کار دارید. از شما خواسته شده زمان حرکت یک متحرک را از نقطهٔ A تا I و از I تا B را بر حسب تندی حرکت متحرک حساب کنید، بنابراین شما باید با معادلهٔ حرکت یکنواخت در هر مسیر، زمان را بر حسب تندی حساب کرده و با هم جمع کنید.



۱ زمان حرکت نور از A تا I برابر است با: $x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v} \Rightarrow t_1 = \frac{\ell}{v_1}$

۲ زمان حرکت نور از I تا B برابر است با: $t = \frac{x}{v} \Rightarrow t_2 = \frac{\ell}{v_2}$

۳ زمان رسیدن از A تا B برابر است با: $t_{کل} = t_1 + t_2 \Rightarrow t = \frac{\ell}{v_1} + \frac{\ell}{v_2} \quad (I)$

۴ اما به گزینه‌ها دقت کنید! در تمام گزینه‌ها خبری از v_2 نیست بلکه ضریب شکست‌های n_1 و n_2 دیده می‌شود؛ بنابراین باید از رابطهٔ (I)، v_2 را حذف کنید.

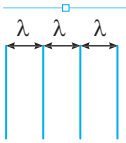
پس به سراغ رابطهٔ سرعت و ضریب شکست می‌رویم. $\frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow v_2 = \frac{n_1}{n_2} v_1$

۵ اکنون رابطهٔ به‌دست آمده را در (I) قرار می‌دهیم.

$$t = \frac{\ell}{v_1} + \frac{\ell}{\frac{n_1}{n_2} v_1} \Rightarrow t = \frac{\ell}{v_1} + \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{\ell}{v_1}\right) \xrightarrow{\text{از } \frac{n_2}{n_1} \text{ فاکتور می‌گیریم.}} t = \frac{\ell}{v_1}\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)$$

A ۲۱۳۷ ۳

نکته در رسم جبهه‌های موج فاصلهٔ دو جبههٔ متوالی برابر یک طول موج است.



خط فکری دقت کنید در بازتاب موج از مرز دو محیط، موج در همان محیط انتشار می‌یابد. بنابراین تندی موج و طول موج آن بدون تغییر می‌ماند اما در پدیدهٔ شکست، موج از یک محیط وارد محیط دیگر می‌شود و با تغییر شرایط فیزیکی محیط، تندی انتشار موج و در نتیجه طول موج آن تغییر می‌کند. بنابراین شما در شکل‌ها باید به دنبال چگونگی تغییر فاصلهٔ جبهه‌های موج بگردید.

در بازتاب، طول موج ثابت می‌ماند پس باید در بازتاب، فاصلهٔ جبهه‌های موج ثابت بماند. بنابراین گزینهٔ (۱) و (۲) نادرست است. در شکست نور و ورود به محیط غلیظ‌تر $(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{n_1}{n_2})$ طول موج کاهش می‌یابد؛ بنابراین باید فاصلهٔ جبهه‌های موج در ورود به شیشه از هم کم شود که در گزینهٔ (۳) جبهه‌های موج این‌گونه رسم شده‌اند.

A ۲۱۳۸ ۱

با توجه به شکل با ورود جبهه‌های موج به محیط دوم فاصلهٔ جبهه‌های موج کمتر شده است؛ بنابراین در محیط دوم طول موج کمتر از طول موج در محیط اول است $(\lambda_1 > \lambda_2)$. در گذر موج از یک محیط به محیط دیگر بسامد ثابت می‌ماند و با توجه به $\lambda = \frac{v}{f}$ وقتی طول موج کاهش می‌یابد یعنی تندی در محیط دوم از تندی در محیط اول کمتر است. $(v_2 < v_1)$

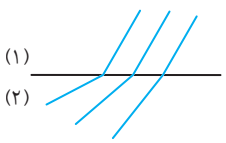
با توجه به تعریف ضریب شکست خواهیم داشت:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2} \xrightarrow{v_2 < v_1} n_2 > n_1 \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} > 1$$

میانبر اگر هنگام ورود جبهه‌های موج از یک محیط به محیط دیگر جبهه‌های موج به مرز دو محیط نزدیک شوند، آنگاه تندی و طول موج در محیط دوم از محیط اول کمتر است.

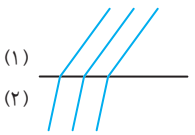
B ۲۱۳۹ ۳

در گزینهٔ (۱) جبهه‌های موازی از محیط همگن (۱) وارد محیط همگن شده بنابراین باید جبهه‌های در محیط دوم نیز با هم موازی باشند اما نیستند و گزینهٔ (۱) نادرست است.

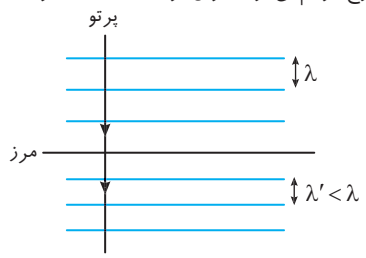


نکته هرگاه موج از یک محیط وارد محیط دیگری شود و تندی انتشار موج کاهش یابد، قطعاً طول موج یعنی فاصلهٔ جبهه‌های موج کم می‌شود. $(\downarrow \lambda = \frac{v\downarrow}{f_{\text{ثابت}}})$

در گزینهٔ (۲) موج وارد محیط (۲) شده که در آن تندی موج کمتر است؛ بنابراین باید فاصلهٔ جبهه‌های موج کاهش یابد اما افزایش یافته و گزینهٔ (۲) نادرست است.



هنگامی که پرتو عمود بر سطح بتابد بدون انحراف موج از مرز عبور می‌کند و از طرفی می‌دانیم که پرتو بر جبهه‌های موج نیز عمود است؛ بنابراین باید جبهه‌های موج موازی با سطح باشد. با ورود به محیط دوم، با کم شدن v طول موج (فاصلهٔ موج‌های تخت) نیز از هم کم شده و فاصلهٔ جبهه‌های موج نیز کم می‌شود بنابراین گزینهٔ (۳) درست و گزینهٔ (۴) نادرست است.



A ۲۱۴۰ ۳

یادآوری ۱ فاصلهٔ دو جبهه موج متوالی از هم برابر طول موج (λ) است.

۲ در آب‌های کم‌عمق، هرچه عمق کمتر می‌شود، تندی انتشار موج سطحی در سطح آب کمتر می‌شود.

۳ در عبور موج از یک محیط به محیط دیگر بسامد موج که از ویژگی‌های چشمهٔ موج است ثابت می‌ماند از این‌رو: $v = f\lambda \xrightarrow{f_1 = f_2} \frac{v_2}{v_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$

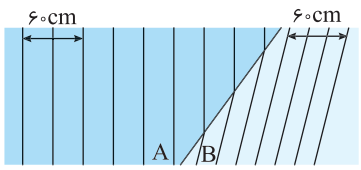
با توجه به شکل، فاصلهٔ جبهه‌های موج در بخش B از بخش A کمتر است. از این‌رو طول موج در بخش B از بخش A کوتاه‌تر بوده. $(\lambda_B > \lambda_A)$، در نتیجه تندی انتشار موج در بخش B از بخش A کمتر است. $(v_B < v_A)$ بنابراین عمق آب در بخش B از عمق آب در بخش A کمتر است $(h_B < h_A)$.

دوباره به شکل نگاه کنید:

در بخش A فاصله‌ای که مقدار آن ۶۰cm است، دو برابر طول موج و در بخش B سه برابر طول موج است، از این‌رو: $2\lambda_A = 60 \Rightarrow \lambda_A = 30\text{cm}$ ، $3\lambda_B = 60 \Rightarrow \lambda_B = 20\text{cm}$

اکنون نسبت $\frac{v_B}{v_A}$ را حساب می‌کنیم.

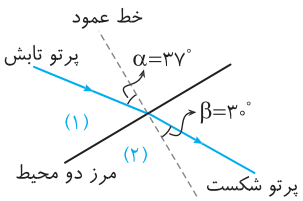
$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{\lambda_B}{\lambda_A} = \frac{20}{30} \Rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \frac{2}{3}$$



B ۲۱۴۱ ۴

خط فکری برای به‌دست آوردن نسبت سرعت‌ها در دو محیط (v_1/v_2) باید از قانون شکست عمومی استفاده کنید. اما قبل از آن باید زاویهٔ تابش (θ_1) و زاویهٔ شکست (θ_2) را به کمک شکل مشخص کنید.

نکته زاویه‌ای که جبههٔ موج با مرز بین دو محیط می‌سازد برابر زاویه‌ای است که پرتو آن با خط عمود بر مرز می‌سازد.



۱ با توجه به نکتهٔ بالا نمودار پرتویی به‌صورت روبه‌رو بوده و زاویهٔ تابش و زاویهٔ شکست به ترتیب برابر $\theta_1 = 37^\circ$ و $\theta_2 = 30^\circ$ است.

۲ حال با توجه به قانون شکست عمومی:

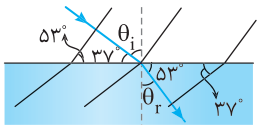
$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{\sin 37^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{0/6}{0/5} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{6}{5}$$

B ۲۱۴۲ ۳

۱ پرتو موج همواره بر جبهه‌های موج عمود است. با توجه به این نکته ابتدا زاویه تابش را به کمک زوایای شکل روبه‌رو به‌دست می‌آوریم:

$$\hat{\theta}_i = 90^\circ - 37^\circ \Rightarrow \hat{\theta}_i = 53^\circ \quad , \quad \hat{\theta}_r = 90^\circ - 53^\circ \Rightarrow \hat{\theta}_r = 37^\circ$$

۲ حال با توجه به قانون شکست عمومی داریم:



$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Rightarrow \frac{\sin 53^\circ}{\sin 37^\circ} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{4}{3} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{3}{4}\lambda_1$$

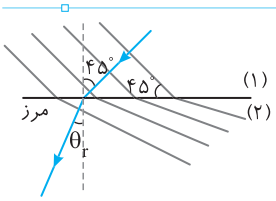
۳ درصد تغییرات طول موج خواهد شد:

$$\text{درصد تغییرات} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1} \times 100 \Rightarrow \frac{-\frac{\lambda_1}{4}}{\lambda_1} \times 100 = -25\%$$

میانبر همواره زاویه‌های بین جبهه‌های موج و مرز دو محیط برابر زاویهٔ بین پرتو و خط عمود است. $\theta_i = 53^\circ, \theta_r = 37^\circ$

A ۲۱۴۳ ۲

یادآوری زاویهٔ بین جبهه‌های موج با مرز دو محیط برابر زاویهٔ بین پرتو تابش و خط عمود است.



خط فکری ابتدا باید تشخیص دهیم محیط اول و محیط دوم کدام است.

با توجه به فرض مسئله در محیط اول تندی انتشار موج از تندی آن در محیط دوم بیشتر است. $(25\text{m/s} > 21/25\text{m/s})$

بنابراین طول موج در محیط اول باید از طول موج در محیط دوم بلندتر باشد. در نتیجه محیط اول محیط بالای مرز بوده و موج از آن‌جا وارد محیط دوم شده است. اکنون به کمک قانون عمومی شکست می‌توانید زاویهٔ شکست در محیط دوم را به‌دست آورده و مقدار انحراف جبهه‌های موج را تعیین کرد.

۱ بنا به قانون شکست عمومی:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{\sin 45}{\sin\theta_2} = \frac{25}{21/25} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\theta_2} = \frac{1}{0/85}$$

$$\sin\theta_2 = 0/85 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0/85 \times \frac{1/4}{2} = \sin\theta_2 = 0/595 \sim 0/6 \Rightarrow \theta_2 = 37^\circ$$

۲ مقدار انحراف برابر است با:

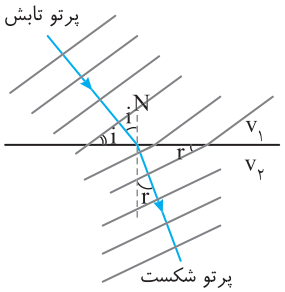
$$45 - 37 = 8^\circ$$

A ۲۱۴۴ ۳

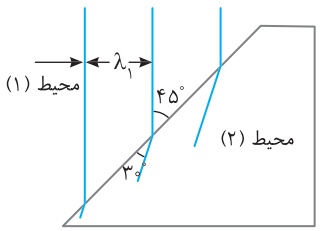
خط فکری زاویهٔ بین جبهه‌های موج با سطح جدایی دو محیط برابر زاویه بین پرتو و نیم‌خط عمود بر نقطه تابش است.

قانون شکست عمومی:

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\frac{v_2}{v_1}$$



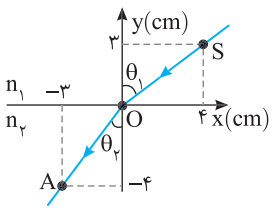
با توجه به شکل زاویهٔ بین جبهه‌های تابش با سطح ۴۵° است، بنابراین زاویهٔ تابش $\theta_1=45^\circ$ است، همچنین زاویهٔ بین جبهه‌های شکست در محیط (۲) با سطح جدایی ۳۰° بوده یعنی زاویهٔ شکست $\theta_2=30^\circ$ است، از این‌رو با توجه به قانون شکست عمومی خواهیم داشت:



$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}\Rightarrow\frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{v_1}{v_2}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{v_1}{v_2}\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{2}$$

A ۲۱۴۵ ۳

خط فکری باز یک مسئله که به‌جای اندازه زوایای تابش و شکست، روی شکل فاصله‌ها و مکان‌ها را به ما داده است. بنابراین شما باید به کمک هندسه و مثلثات زوایای شکست و تابش را حساب کرده به سراغ قانون شکست عمومی بروید.



۱ زاویهٔ تابش را حساب می‌کنیم.

$$\tan\theta_1=\frac{4}{3}\Rightarrow\theta_1=53^\circ$$

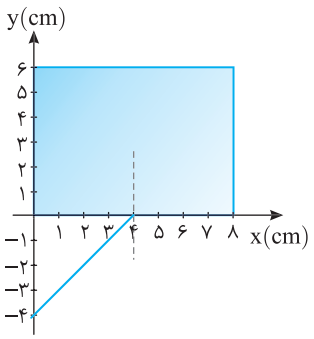
۲ زاویهٔ شکست را به‌دست می‌آوریم.

$$\tan\theta_2=\frac{3}{4}\Rightarrow\theta_2=37^\circ$$

۳ قانون شکست عمومی را می‌نویسیم.

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sin 53^\circ}{\sin 37^\circ}=\frac{0/8}{0/6}\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\frac{4}{3}$$

بازی با سؤال یک قطعه شیشه تخت با ضریب شکست $\sqrt{2}$ مطابق شکل روی محور مختصات قرار گرفته و پرتو SI از هوا به آن می‌تابد و وارد شیشه می‌شود. مختصات نقطه‌ای که پرتو از قطعه خارج می‌شود، کدام گزینه است؟ $(\sqrt{3}=1/7)$



۱) (۷/۴،۶) ۲) (۶،۷/۴) ۳) (۶،۶) ۴) (۶،۸)

پاسخ زاویهٔ تابش را حساب می‌کنیم.

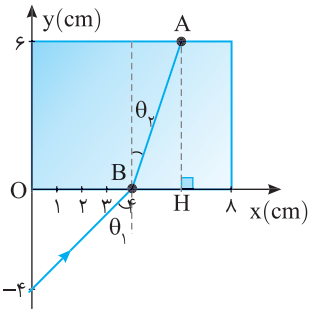
$$\tan\theta_1=\frac{4}{4}=1\Rightarrow\theta_1=45^\circ$$

زاویهٔ شکست در تیغهٔ شیشه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$$

$$\Rightarrow 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\sin\theta_2$$

$$\Rightarrow\sin\theta_2=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta_2=30^\circ$$



فاصلهٔ BH را به کمک هندسه و مثلثات به‌دست می‌آوریم:

$$\tan 30^\circ=\frac{BH}{AH}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{BH}{6}\Rightarrow BH=2\sqrt{3}cm=2\times 1/7=3/4cm$$

مختصات نقطهٔ A محل خروج پرتو خواهد شد.

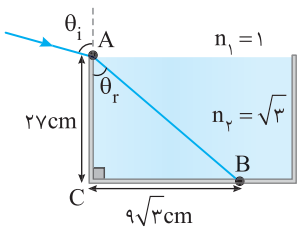
$$x_A=4+3/4=7/4cm\ ,\ y_B=6cm\Rightarrow A(7/4,6)$$

گزینهٔ ۱

A ۲۱۴۶ ۴

خط فکری در مسائل نور هندسی شما باید به کمک اضلاع و زوایای روی شکل شروع به حل مسئله کنید. یعنی در این مسئله باید از طول $BC=9\sqrt{3}cm$ و طول $AC=18cm$ برای یافتن زاویهٔ شکست (θ_r) استفاده کنید. سپس به سراغ قانون شکست اسنل رفته زاویهٔ تابش θ_i را به‌دست آورید.

۱ ابتدا با توجه به روابط مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه ABC زاویهٔ شکست (θ_r) را به‌دست می‌آوریم:



$$\tan\theta_r=\frac{9\sqrt{3}}{27}$$

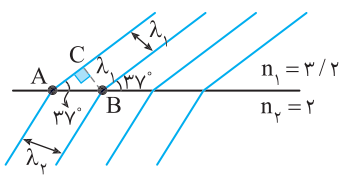
$$\Rightarrow\tan\theta_r=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\theta_r=30^\circ$$

۲ حال با توجه به قانون شکست اسنل داریم:

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{n_2}{n_1}\Rightarrow\frac{\sin\theta_i}{\sin 30^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{1}\Rightarrow\sin\theta_i=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\theta_i=60^\circ$$

A ۲۱۴۷ ۴

خط فکری ابتدا شما باید به کمک فاصلهٔ AB و زاویهٔ ۳۷° روی شکل طول موج در محیط اول (λ_1) را به کمک هندسه و مثلثات حساب کنید. سپس به سراغ قوانین شکست رفته و λ_2 را به‌دست آورید.



۱ طول موج فاصلهٔ عمودی بین دو جبههٔ متوالی موج است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC می‌توان نوشت:

$$\sin 37^\circ=\frac{BC}{AB}\Rightarrow 0/6=\frac{\lambda_1}{8}\Rightarrow\lambda_1=4/8cm$$

۲ اکنون به کمک ضریب شکست در محیط، طول موج در محیط دوم را حساب می‌کنیم:

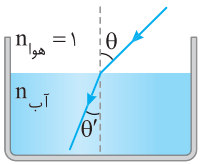
$$\frac{n_2}{n_1}=\frac{v_1}{v_2}\xrightarrow{\frac{v_1}{v_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\frac{n_2}{n_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Rightarrow\frac{2}{3/2}=\frac{4/8}{\lambda_2}$$

$$\lambda_2=1/6\times 4/8\Rightarrow\lambda_2=7/68\ cm$$

A ۲۱۴۸ ۴

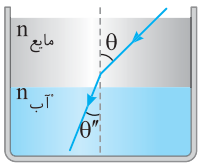
ضریب شکست هوا برابر ۱ است اما ضریب شکست مایع ریخته شده بزرگ‌تر از ۱ است:

حالت (۱): پرتو از هوا وارد آب شود:



$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}=\frac{n_{آب}}{n_{هوا}}\Rightarrow\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}=\frac{n_{آب}}{1}\quad (I)$$

حالت (۲): پرتو از مایع وارد آب شود:



$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}=\frac{n_{آب}}{n_{مایع}}\quad (II)$$

دو معادله را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}}{\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}}=\frac{\frac{n_{آب}}{1}}{\frac{n_{آب}}{n_{مایع}}}\Rightarrow\frac{\sin\theta''}{\sin\theta'}=n_{مایع}$$

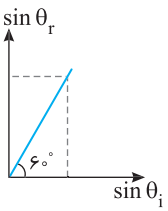
چون $n_{مایع}$ از ۱ بزرگ‌تر است پس نسبت $\frac{\sin\theta''}{\sin\theta'}$ نیز از ۱ بزرگ‌تر است:

$$\frac{\sin\theta''}{\sin\theta'}>1\Rightarrow\sin\theta''>\sin\theta'\Rightarrow\theta''>\theta'$$

با توجه به اینکه در قانون شکست زاویه، تندی و طول موج پرتو با هم رابطهٔ مستقیم دارند، پس در حالت دوم که زاویهٔ شکست بزرگ‌تر بوده، طول موج نیز بزرگ‌تر است.

A ۲۱۴۹ ۴

۱ با توجه به شکل نسبت سینوس‌ها برابر شیب نمودار بوده از این‌رو می‌توان نوشت:



$$\tan 60=\frac{\sin\theta_r}{\sin\theta_i}\Rightarrow\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{1}{\tan 60}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲ بنا به قانون شکست عمومی خواهیم داشت:

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow v_A<v_B$$

بنابراین گزینهٔ (۱) و (۲) نادرست است.

۳ اکنون با قانون اسنل به سراغ ضریب شکست می‌رویم.

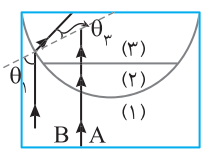
$$\frac{n_B}{n_A}=\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_3}\Rightarrow\frac{n_B}{n_A}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow n_A>n_B$$

از این‌رو گزینهٔ (۳) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.

A ۲۱۵۰ ۳

یادآوری هرگاه نور از یک محیط شفاف به‌طور مایل وارد محیط شفاف دیگری شود، مسیرش به‌طور ناگهانی تغییر می‌کند. این پدیده را شکست نور می‌گویند. اگر پرتو از محیط رقیق وارد محیط غلیظ شود، به خط عمود نزدیک می‌شود و اگر از محیط غلیظ وارد محیط رقیق شود، از خط عمود دور می‌شود و اگر عمود بر سطح جدایی دو محیط بتابد، بدون انحراف وارد محیط دوم می‌شود.

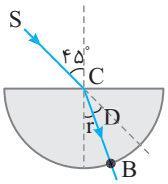
در شکل داده شده پرتو A بر سطح جدایی (۱) و (۲) عمود نیست، اما بدون انحراف از این سطح گذشته است؛ پس $n_1=n_2$ است. پرتو B هنگام گذر از محیط (۱) به محیط (۳) به خط عمود نزدیک شده است. $(\theta_3<\theta_1)$



پس ضریب شکست محیط (۳) از ضریب شکست محیط (۱) و (۲) بزرگ‌تر است. $(n_3>n_1=n_2)$

A ۲۱۵۱ ۲

خط فکری C مرکز نیم‌استوانه است و اگر پرتو از مرکز بگذرد و به سوی محیط برود، این پرتو در امتداد شعاع استوانه بوده و بر محیط عمود است و از نقطهٔ B بدون انحراف خارج می‌شود، بنابراین شما تنها باید زاویهٔ شکست هنگام ورود پرتو به استوانه را حساب کنید و مقدار انحراف پرتو را به‌دست بیاورید.



با توجه به قانون اسنل خواهیم داشت:

$$n_1\sin\theta_i=n_2\sin\theta_r\Rightarrow 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\times\sin\theta_r\Rightarrow\sin\theta_r=\frac{1}{2}\Rightarrow r=30^\circ$$

از این‌رو مقدار انحراف پرتو برابر است با:

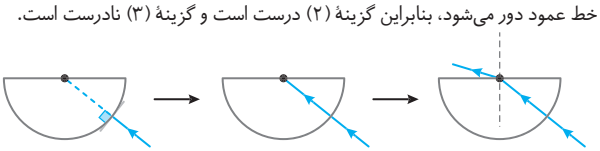
$$D=45^\circ-30^\circ=15^\circ$$

A ۲۱۵۲ ۲

نکته هرگاه پرتو نوری وارد نیم‌کره یا نیم‌استوانه‌ای شود و امتداد آن از مرکز بگذرد، پرتو در امتداد شعاع حرکت کرده و بر سطح نیم‌کره یا نیم‌استوانه عمود است و هنگام ورود یا خروج منحرف نمی‌شود.

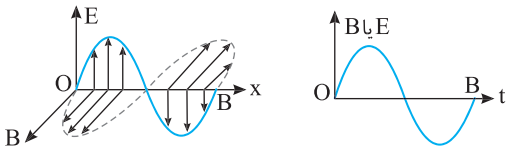
با توجه به نکتهٔ بیان شده، شکل‌های گزینهٔ (۱) و (۴) نادرست است.

هنگام خروج از نیم‌کره، پرتو وارد هوا خواهد شد پس سرعت پرتو افزایش می‌یابد و از خط عمود دور می‌شود، بنابراین گزینهٔ (۲) درست است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

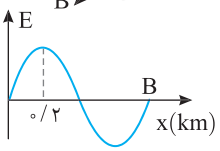


A ۲۱۵۳ ۴

یادآوری در نمودار $E-x$ و $B-x$ فاصلهٔ OB برابر یک طول موج است و در نمودار $E-t$ یا $B-t$ فاصلهٔ OB برابر یک دوره است.

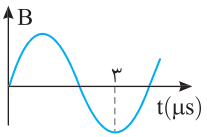


۱ از روی نمودار $E-x$ طول موج نور را به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{\lambda}{4}=0/2\Rightarrow\lambda=0/8\,km$$

۲ دوره را از روی نمودار میدان مغناطیسی - زمان $(B-t)$ حساب می‌کنیم.



$$\frac{3T}{4}=3\times10^{-6}\Rightarrow T=4\times10^{-6}\,s$$

۳ تندی نور در این محیط شفاف خواهد شد:

$$v=\frac{\lambda}{T}\Rightarrow v=\frac{0/8\times10^{3}}{4\times10^{-6}}\Rightarrow v=0/2\times10^{9}\Rightarrow v=2\times10^{8}\,m/s$$

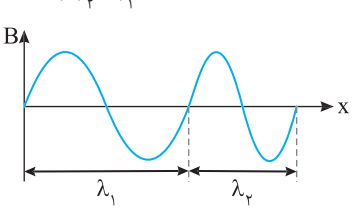
۴ اکنون طول موج در خلأ را به کمک رابطهٔ بین تندی و طول موج به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda_1=\frac{v_1}{f_1}\xrightarrow{f_1=f_2}\frac{\lambda_2}{\lambda_{خلأ}}=\frac{v_2}{v_{خلأ}}\Rightarrow\frac{0/8}{\lambda_{خلأ}}=\frac{2\times10^{8}}{3\times10^{8}}$$
$$\lambda_2=\frac{v_2}{f_2}\qquad \lambda_{خلأ}=1/2\,km\Rightarrow\lambda_{خلأ}=1200\,m$$

A ۲۱۵۴ ۲

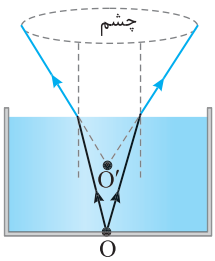
با توجه به شکل با ورود به محیط دوم طول موج کاهش یافته است و با توجه به ثابت بودن بسامد که از ویژگی‌های چشمه است، تندی انتشار نیز کاهش می‌یابد.

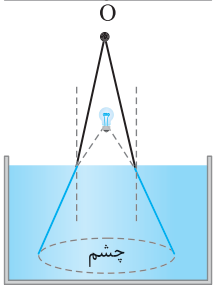
$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\xrightarrow{\lambda_2<\lambda_1}v_2<v_1$$



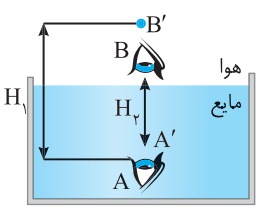
A ۲۱۵۵ ۱

خط فکری هرگاه پرتو نور از محیط غلیظ مانند آب وارد محیط رقیق مانند هوا شود، پرتو از خط عمود دور می‌شود و این امر سبب می‌گردد که ناظر بیرون آب نقطهٔ O را در محل نقطهٔ O′ ببیند، یعنی اگر سکه‌ای در کف ظرف باشد، آن را بالاتر می‌بیند، اما اگر پرتو نور از هوا به آب وارد شود، مثلاً یک چراغ بالای سطح آب باشد و شما از زیر آب به آن نگاه کنید، چراغ را از جایی که هست بالاتر می‌بینید. به مسیر پرتوها دقت کنید. با توجه به این مطلب شما می‌توانید در مورد این تست اظهارنظر کنید.





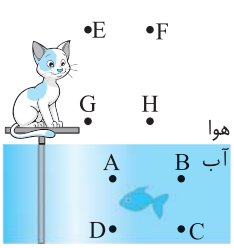
ناظر A که در محیط غلیظ (آب) است، ناظر B را از جایی که واقعاً هست بالاتر و دورتر از خود ناظر B که در محیط رقیق (هوا) است، ناظر A را از جایی که واقعاً هست بالاتر و نزدیک‌تر به خود می‌بیند. بنابراین $H_1 > H_2$ است.



بازی با سؤال **گربه‌ای بالای سکو و یک ماهی درون دریاچه قرار دارند. گربه، ماهی را در ناحیهٔ ..... و ماهی، گربه را در ناحیهٔ ..... می‌بینند.**

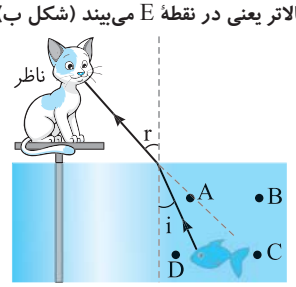
۱) H, A ۲) E, A

۳) B, E ۴) F, B

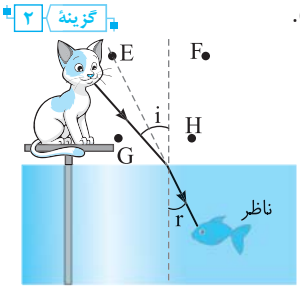


پاسخ **گربه در محیط رقیق بوده و به ماهی در محیط غلیظ نگاه می‌کند، از این‌رو ماهی را از جایی که هست بالاتر یعنی در نقطهٔ A می‌بیند (شکل الف). ماهی از محیط غلیظ (آب) به محیط رقیق هوا می‌نگرد و گربه را از جایی که هست بالاتر یعنی در نقطهٔ E می‌بیند (شکل ب).**

گزینهٔ ۲



شکل (الف)

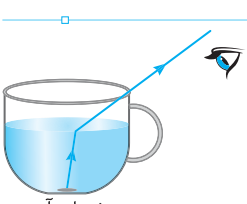


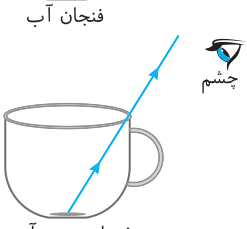
شکل (ب)

A ۲۱۵۶ ۳

خط فکری پرتوهای نور از آب وارد هوا شده و از خط عمود دور می‌شود. اما چشم شخص در جایی است که پرتو با آن که منحرف می‌شود به آن نمی‌رسد، بنابراین شما باید کاری بکنید که پرتو از این مقدار نیز بیشتر منحرف شده تا شخص بتواند سکه را ببیند. برای این منظور باید کاری کنیم که ضریب شکست مایع درون فنجان افزایش یابد.

اگر فنجان را از آب خالی کنیم پرتو بدون انحراف از فنجان خارج می‌شود و شخص قطعاً نمی‌تواند سکه را ببیند و گزاره (الف) نادرست است.





اگر نمک یا شکر را به‌خوبی در آب حل کنیم، پرتو هنگام خروج از مایع بیشتر منحرف شده و سبب می‌گردد که شخص سکه را ببیند و (ب) درست است.

اگر فنجان را از آب خالی کرده و به جای آن مایعی با ضریب شکست بیشتر قرار دهیم. در این حالت نیز پرتو خروجی بیشتر منحرف می‌شود و ممکن است به چشم شخص برسد و (ب) نیز درست است.



A ۲۱۵۷ ۴

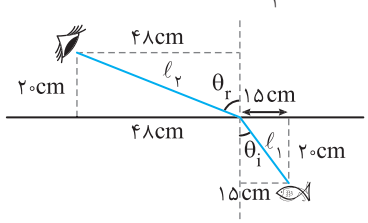
خط فکری دقت کنید نیازی به دانستن اندازهٔ زاویهٔ تابش (θ_i) و زاویهٔ شکست (θ_r) نیست و شما باید $\sin\theta_i$ و $\sin\theta_r$ را به کمک شکل به‌دست بیاورید و مسئله را حل کنید.

۱ با توجه به قانون شکست اسنل داریم:

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{n_2}{n_1}$$

$$\ell_1=\sqrt{20^2+15^2}=25\text{cm}\ ,\ \ell_2=\sqrt{20^2+48^2}=52\text{cm}$$

$$\sin\theta_r=\frac{48}{\ell_2}\Rightarrow\sin\theta_r=\frac{48}{52}=\frac{12}{13}\ ,\ \sin\theta_i=\frac{15}{\ell_1}\Rightarrow\sin\theta_i=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$$

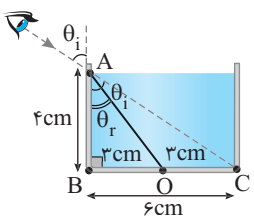


۲ اکنون به کمک قانون اسنل ضریب شکست آب دریاچه را حساب می‌کنیم.

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{n_2}{n_1}\Rightarrow\frac{\frac{3}{5}}{\frac{12}{13}}=\frac{1}{n_{آب}}\Rightarrow n_{آب}=\frac{20}{13}$$

A ۲۱۵۸ ۴

خط فکری باز باید شما از فاصله‌های روی شکل سینوس زاویه‌های تابشی و شکست را حساب کنید، سپس به سراغ قوانین مربوط به شکست بروید. البته ابتدا باید طول ضلع AC و AO را به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست بیاورید.



۱ طول وترهای AC و AO را حساب کنیم.

$$AC^2=AB^2+BC^2\Rightarrow AC=\sqrt{4^2+6^2}\Rightarrow AC=\sqrt{2^2(2^2+3^2)}$$

$$\Rightarrow AC=2\sqrt{13}\,\text{cm}$$

$$AO^2=AB^2+BO^2\Rightarrow AO=\sqrt{4^2+3^2}\Rightarrow AO=5\,\text{cm}$$

۲ در مثلث ABC زاویهٔ A با زاویهٔ تابش θ_i متقابل به رأس بوده و با هم برابرند و $\sin\theta_i$ خواهد شد.

$$\sin\theta_i=\frac{BC}{AC}\Rightarrow\sin\theta_i=\frac{6}{2\sqrt{13}}\Rightarrow\sin\theta_i=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

۳ در مثلث ABO زاویهٔ A با زاویهٔ شکست (θ_r) را به‌دست می‌آوریم.

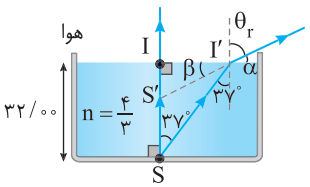
$$\sin\theta_r=\frac{OB}{OA}=\frac{3}{5}$$

۴ به کمک قانون اسنل، ضریب شکست مایع را حساب می‌کنیم.

$$n=\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}\Rightarrow n=\frac{\frac{3\sqrt{13}}{13}}{\frac{3}{5}}=\frac{5\sqrt{13}}{13}$$

A ۲۱۵۹ ۱

۱ پرتو SI بر سطح آب عمود است و بدون انحراف از آب خارج می‌شود.



۲ بنا به خطوط موازی و مورب زاویهٔ تابش پرتو SI′ برابر ۳۷° است.

۳ زاویهٔ شکست θ_r را به کمک قانون اسنل به‌دست می‌آوریم.

$$n_۱\sin\theta_i=n_۲\sin\theta_r\Rightarrow\frac{۴}{۳}\sin۳۷^\circ=۱\times\sin\theta_r\Rightarrow\sin\theta_r=\frac{۴}{۳}\times۰/۶$$

$$\Rightarrow\sin\theta_r=۰/۸\Rightarrow\theta_r=۵۳^\circ$$

۴ زاویهٔ α را روی شکل حساب می‌کنیم. $\alpha+\theta_r=۹۰\Rightarrow\alpha+۵۳^\circ=۹۰\Rightarrow\alpha=۳۷^\circ$

۵ زاویه‌های β و α متقابل به رأس هستند و با هم برابرند: $\beta=\alpha=۳۷^\circ$

۶ در مثلث قائم‌الزاویهٔ SII′ فاصلهٔ II′ را به‌دست می‌آوریم.

$$\tan۳۷^\circ=\frac{II'}{SI}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{II'}{۳۲}\Rightarrow II'=۲۴cm$$

۷ در مثلث S′II′، فاصلهٔ S′I را به‌دست می‌آوریم.

$$\tan\beta=\frac{S'I}{II'}\Rightarrow\tan۳۷^\circ=\frac{S'I}{۲۴}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{S'I}{۲۴}\Rightarrow S'I=۱۸cm$$

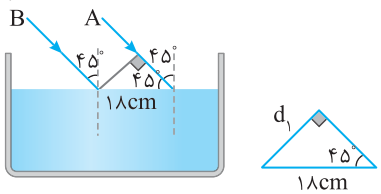
۸ بنابراین خواهیم داشت: $\frac{SI}{S'I}=\frac{۳۲}{۱۸}=\frac{۱۶}{۹}$

C ۲۱۶۰ ۳

نکته فاصلهٔ دو پرتو از هم برابر طول پاره‌خط عمود بر دو پرتو است.

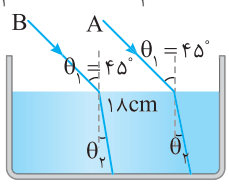
۱ فاصلهٔ دو پرتو را در هوا به‌دست می‌آوریم:

$$\sin۴۵^\circ=\frac{\text{ضلع روبه‌رو}}{\text{وتر}}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{d_۱}{۱۸}\Rightarrow d_۱=۹\sqrt{۲}cm$$



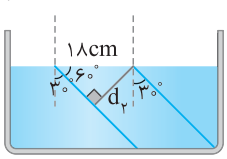
۲ زاویهٔ شکست پرتوها در مایع را به‌دست می‌آوریم:

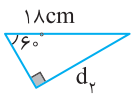
$$\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲}=\frac{n_۲}{n_۱}\Rightarrow\frac{\sin۴۵^\circ}{\sin\theta_۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۱}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\sin\theta_۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۱}\Rightarrow\sin\theta_۲=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta_۲=۳۰$$



۳ فاصلهٔ دو پرتو در محیط دوم را حساب می‌کنیم.

$$\sin۶۰^\circ=\frac{\text{ضلع روبه‌رو}}{\text{وتر}}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{d_۲}{۱۸}\Rightarrow d_۲=۹\sqrt{۳}cm$$



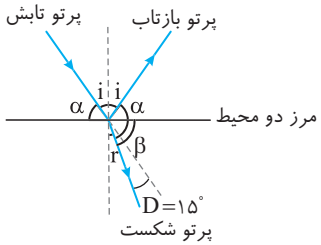


۴ نسبت خواسته شده یعنی $\frac{d_۲}{d_۱}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{d_۲}{d_۱}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۹\sqrt{۲}}\Rightarrow\frac{d_۲}{d_۱}=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\Rightarrow\frac{d_۲}{d_۱}=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

A ۲۱۶۱ ۱

مطابق شکل، پرتو بازتاب و شکست را رسم می‌کنیم.



۱ زاویهٔ بین پرتو تابش و سطح تیغه (α) با زاویهٔ β متقابل به رأس بوده و با هم برابر هستند. ($\beta=\alpha$)

۲ با توجه به فرض مسئله زاویهٔ بین پرتو بازتاب و پرتو شکست ۱۲۵° است، از این‌رو:

$\alpha+\beta+D=۱۲۵$ (I)

۳ پرتو ۱۵° از مسیرش منحرف شده ($D=۱۵^\circ$)

$$(I)\Rightarrow\alpha+\alpha+۱۵=۱۲۵\Rightarrow\alpha=۵۵^\circ$$

۴ مجموع زاویه‌ای که پرتو بازتاب با سطح تیغه می‌سازد (α) و زاویهٔ i، ۹۰° است.

$$i+۵۵=۹۰\Rightarrow i=۳۵^\circ$$

۵ زاویهٔ شکست خواهد شد: $r=i-D\Rightarrow r=۳۵-۱۵\Rightarrow r=۲۰^\circ$

B ۲۱۶۲ ۴

۱ ابتدا سرعت نور در آب را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{n_۱}{n_۲}\Rightarrow\frac{v_{آب}}{۳\times۱۰^۸}=\frac{۱}{\frac{۴}{۳}}\Rightarrow v_{آب}=\frac{۹}{۴}\times۱۰^۸=۲/۲۵\times۱۰^۸ m/s$$

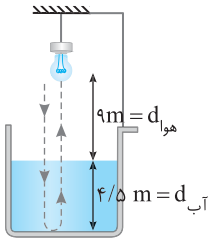
۲ نور مسیر تا کف مخزن رفته و از آینه بازتاب شده و این مسیر را باز می‌گردد پس نور دو بار مسافت ۱/۹m در هوا طی کرده و دو بار مسافت ۴/۵m را در آب طی می‌کند. با توجه به اینکه سرعت نور در یک محیط ثابت است پس، زمان طی شدن مسافت در آب و هوا را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{آب: } v_{آب}=\frac{۲d_{آب}}{\Delta t_{آب}}\Rightarrow\Delta t_{آب}=\frac{۲d_{آب}}{v_{آب}}\Rightarrow\Delta t_{آب}=\frac{۲\times۴/۵}{۲/۲۵\times۱۰^۸}=۴\times۱۰^{-۸}s$$

$$\text{هوا: } v_{هوا}=\frac{۲d_{هوا}}{\Delta t_{هوا}}\Rightarrow\Delta t_{هوا}=\frac{۲d_{هوا}}{v_{هوا}}\Rightarrow\Delta t_{هوا}=\frac{۲\times۹}{۳\times۱۰^۸}=۶\times۱۰^{-۸}s$$

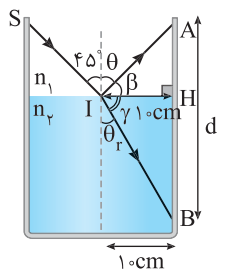
۳ زمان کل طی شده برابر است با:

$$\Delta t_{کل}=\Delta t_{آب}+\Delta t_{هوا}\Rightarrow\Delta t_{کل}=۴\times۱۰^{-۸}+۶\times۱۰^{-۸}=۱۰^{-۷}s$$



A ۲۱۶۳ ۲

خط فکری باید زاویهٔ بازتاب (θ) و زاویهٔ شکست θ_r را حساب کنید. سپس به کمک این زاویه‌ها از مثلث AIH و IHB، مقدار AH و HB را به‌دست آورده و با هم جمع کنید.



۱ بنا به قانون بازتاب عمومی: $\theta=۴۵^\circ$

۲ در مثلث AH زاویهٔ β نیز ۴۵° بوده و این مثلث متساوی‌الساقین است و AH=۱۰cm می‌شود.

۳ زاویهٔ شکست را به کمک قانون اسنل به‌دست می‌آوریم:

$$n=\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}\Rightarrow\sqrt{۲}=\frac{\sin۴۵}{\sin\theta_r}\Rightarrow\sin\theta_r=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta_r=۳۰^\circ$$

۴ در مثلث IHB زاویه γ خواهد شد: $۹۰-۳۰=۶۰^\circ$

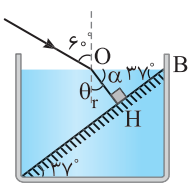
۵ طول HB را حساب می‌کنیم.

$$\tan\gamma=\frac{HB}{IH}\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{HB}{۱۰}\Rightarrow HB=۱۰\sqrt{۳}cm\Rightarrow HB=۱۰\times۱/۷=۱۷cm$$

۶ طول d برابر است با: $d=AH+HB\Rightarrow d=۱۰+۱۷=۲۷cm$

۴ ۲۱۶۴ B

۱ مسئله را باید از آخر حل کرد، یعنی اینکه، پرتو به سطح آیینه برخورد کرده و روی خودش بازتاب می‌کند، بنابراین پرتو بر سطح آیینه به‌طور عمود می‌تابد. بنابراین مثلث OHB قائم‌الزاویه است.



۲ زاویهٔ B نیز به دلیل خطوط مورب و موازی ۳۷° بوده بنابراین زاویهٔ α خواهد شد: $\alpha+۳۷^\circ=۹۰^\circ\Rightarrow\alpha=۵۳^\circ$

۳ زاویهٔ شکست نیز برابر است با: $\theta_r=۹۰-\alpha=۹۰-۵۳=۳۷^\circ$

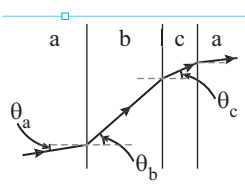
۴ با کمک قانون اسنل ضریب شکست مایع را به‌دست می‌آوریم.

$$n_۱\sin\theta_۱=n_۲\sin\theta_۲\Rightarrow۱\times\sin۶۰^\circ=n\sin۳۷^\circ$$

$$۱\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=n\times۰/۶\Rightarrow n=\frac{\sqrt{۳}}{۱/۲}\Rightarrow n=\frac{۵\sqrt{۳}}{۶}$$

۱ ۲۱۶۵ A

نکته با توجه به قانون شکست عمومی $\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲}=\frac{v_۱}{v_۲}$، در هر محیطی که تندی انتشار موج بیشتر است، در آن محیط زاویهٔ بین پرتو نور و خط عمود بزرگتر است.



$$\theta_۱>\theta_۲\Leftrightarrow v_۱>v_۲$$

به شکل دقت کنید و زاویه‌ای را که پرتو با خط عمود می‌سازد در هر محیط با دیگر محیط‌ها مقایسه کنید.

$$\theta_a<\theta_c<\theta_b\Rightarrow v_a<v_c<v_b$$

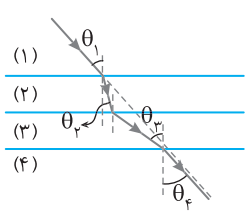
۱ ۲۱۶۶ A

خط فکری با توجه به قانون اسنل، ضریب شکست یک محیط با سینوس زاویهٔ بین پرتو و خط عمود در همان محیط نسبت وارون دارد. $(\frac{n_۲}{n_۱}=\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲})$ بنابراین در هر محیطی که زاویهٔ بین پرتو و خط عمود بزرگ‌تر باشد، ضریب شکست در آن محیط کوچک‌تر است، بنابراین شما باید زاویهٔ بین پرتو و خط عمود در محیط‌ها را با هم مقایسه کنید.

$$\theta_۱=۶۰^\circ,\theta_۲=۴۰^\circ,\theta_۳=۵۰^\circ\Rightarrow\theta_۲<\theta_۳<\theta_۱\Rightarrow n_۲>n_۳>n_۱$$

۳ ۲۱۶۷ B

نکته هرچه زاویه‌ای که پرتو با خط عمود می‌سازد بزرگ‌تر باشد، تندی نور در آن محیط بیشتر است.



۱ پرتو ورودی از محیط (۱) با پرتو خروجی در محیط (۴) با هم موازی هستند. $(\theta_۱=\theta_۴)$ در نتیجه تندی نور در این دو محیط با هم برابر است.

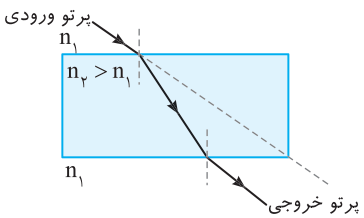
۲ زاویهٔ بین پرتو و خط عمود در محیط (۲) $(\theta_۲)$ از سه محیط دیگر کمتر و زاویهٔ بین پرتو و خط عمود در محیط (۳) $(\theta_۳)$ از سه محیط دیگر بیشتر است بنابراین:

$$v_۲<v_۱=v_۴<v_۳$$

۳ ۲۱۶۸ A

یادآوری ۱ در تیغهٔ شفاف امتداد پرتو وردی به تیغه و امتداد پرتو خروجی از تیغه موازی هستند.

یادآوری ۲ پرتو خروجی از یک تیغه نمی‌تواند در امتداد پرتو ورودی باشد و در اثر شکست، مسیر پرتو خروجی نسبت به پرتو ورودی، جابه‌جا می‌شود.

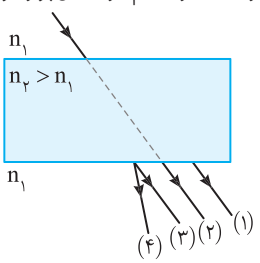


چون $n_۲>n_۱$ است پرتو هنگام ورود به خط عمود نزدیک می‌شود بنابراین مسیر (۱) نمی‌تواند پاسخ باشد، زیرا نشان می‌دهد که پرتو درون تیغه از خط عمود دور شده است.

پرتو (۲) در امتداد پرتو ورودی است که این نیز نمی‌تواند جواب مسئله باشد.

پرتو (۳) دقیقاً موازی پرتو ورودی و نسبت به آن جابه‌جا شده، از این‌رو این پرتو صحیح است.

امتداد پرتو (۴) و امتداد پرتو ورودی موازی هم نبوده و این پرتو نیز پاسخ درست نخواهد بود.



۱ ۲۱۶۹ A

روی هر مرز قانون اسنل را می‌نویسیم:

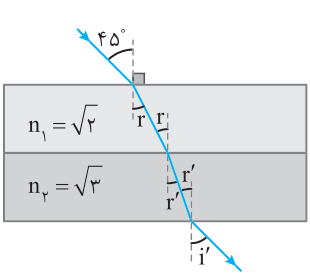
۱ مرز هوا و $n_۱$: $\sin۴۵^\circ=\sqrt{۲}\sin r$

۲ مرز $n_۱$ و $n_۲$: $\sqrt{۲}\sin r=\sqrt{۳}\sin r'$

۳ روی مرز $n_۲$ و هوا: $\sqrt{۳}\sin r'=\sin i'$

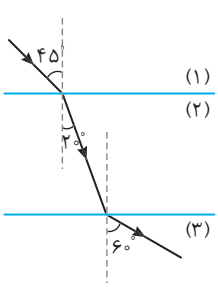
با مقایسهٔ سه رابطه می‌توان نوشت: $\sin۴۵^\circ=\sin i'\Rightarrow i'=۴۵^\circ$

میانبر در یک تیغه تخت شفاف همواره زاویه ورود به تیغه با زاویه خروج از تیغه برابر است.



۳ ۲۱۷۰ A

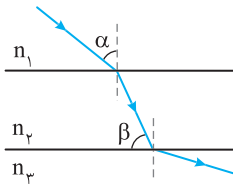
قانون شکست عمومی را برای دو محیط (۱) و (۳) می‌نویسیم:



$$\frac{v_۳}{v_۱}=\frac{\sin\theta_۳}{\sin\theta_۱}\xrightarrow{\theta_۱=۴۵^\circ,\theta_r=۶۰^\circ}\frac{v_۳}{v_۱}=\frac{\sin۶۰}{\sin۴۵}$$

$$\frac{v_۳}{v_۱}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\Rightarrow\frac{v_۳}{v_۱}=\sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

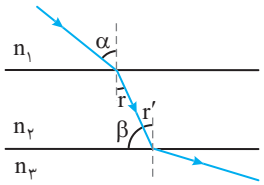
بازی با سؤال اگر $v_۱$ و $v_۲$ به‌ترتیب سرعت نور در محیط‌های (۱) و (۲) در شکل مقابل باشند، $\frac{v_۱}{v_۲}$ کدام است؟



۱) $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ ۲) $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ ۳) $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ ۴) $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$

پاسخ یادآوری ریاضی $\sin(۹۰-\theta)=\cos\theta$

به شکل دقت کنید. به دلیل خاصیت موازی و مورب زاویهٔ r و r' با هم برابر هستند. $(r=r')$



از طرفی مجموع زاویهٔ β و r' برابر ۹۰° است.

$$r'+\beta=۹۰\Rightarrow r+\beta=۹۰\Rightarrow r=۹۰-\beta \quad (I)$$

بنا به قانون شکست عمومی خواهیم داشت:

$$\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{\sin\alpha}{\sin r}\xrightarrow{(I)}\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{\sin\alpha}{\sin(۹۰-\beta)}\Rightarrow\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$$

گزینهٔ ٤

B ۲۱۷۱ ۱

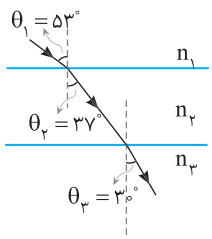
با توجه به رابطهٔ اسنل و قانون شکست عمومی می‌توان نوشت:

$$\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱}\Rightarrow\frac{\lambda_۳}{\lambda_۱}=\frac{\sin ۳۷^\circ}{\sin ۵۳^\circ}=\frac{۰/۶}{۰/۸}=\frac{۳}{۴}$$

(دقت کنید قانون اسنل را برای دو محیط غیرمجاور نیز می‌توان نوشت.)

B ۲۱۷۲ ۴

قانون شکست عمومی را برای محیط‌های (۱) و (۲) می‌نویسیم:



$$\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱}\Rightarrow v_۲=v_۱\frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_۲=(۳\times۱۰^۸)\left(\frac{\sin ۳۷^\circ}{\sin ۵۳^\circ}\right)=۳\times۱۰^۸\times\frac{۰/۶}{۰/۸}$$

$$\Rightarrow v_۲=۲/۲۵\times۱۰^۸\,m/s$$

قانون شکست عمومی را برای محیط‌های (۱) و (۳) می‌نویسیم:

$$\frac{v_۳}{v_۱}=\frac{\sin\theta_۳}{\sin\theta_۱}\Rightarrow v_۳=v_۱\frac{\sin\theta_۳}{\sin\theta_۱}\Rightarrow v_۳=(۳\times۱۰^۸)\left(\frac{\sin ۳۰^\circ}{\sin ۵۳^\circ}\right)=۳\times۱۰^۸\times\frac{۰/۵}{۰/۸}$$

$$\Rightarrow v_۳=۱/۸۷۵\times۱۰^۸\,m/s$$

$$\Delta v=v_۲-v_۳=(۲/۲۵-۱/۸۷۵)\times۱۰^۸=۳/۷۵\times۱۰^۷\,m/s$$

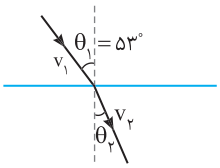
B ۲۱۷۳ ۴

خط فکری در هر مرحله از ورود نور به محیط‌های شفاف رابطهٔ شکست نور $\left(\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲}=\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{n_۲}{n_۱}\right)$ را می‌نویسیم و با هم مقایسه می‌کنیم.

محیط (۱) و (۲): با توجه به صورت مسئله سرعت نور از محیط (۱) به محیط (۲)، ۲۵٪ کاهش یافته است:

$$v_۲=v_۱-\underbrace{\frac{۲۵}{۱۰۰}v_۱}_{\text{۲۵٪ کاهش}}\Rightarrow v_۲=۰/۷۵v_۱$$

رابطهٔ بین سرعت نور و زاویهٔ تابش و زاویهٔ شکست $\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲}$ است.



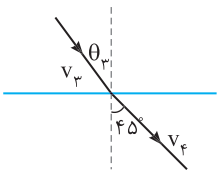
$$\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲}\Rightarrow\frac{v_۱}{۰/۷۵v_۱}=\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲}\Rightarrow\sin\theta_۲=۰/۶$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۰/۷۵}=\frac{۰/۸}{\sin\theta_۲}\Rightarrow\theta_۲=۳۷^\circ$$

محیط (۳) و (۴): سرعت نور در محیط (۴)، ۴۰ درصد بیشتر از سرعت نور در محیط (۳) است:

$$v_۴=v_۳+\frac{۴۰}{۱۰۰}v_۳\Rightarrow v_۴=۱/۴v_۳$$

رابطهٔ بین سرعت نور و زاویهٔ تابش و شکست به صورت $\frac{v_۳}{v_۴}=\frac{\sin\theta_۳}{\sin\theta_۴}$ است:

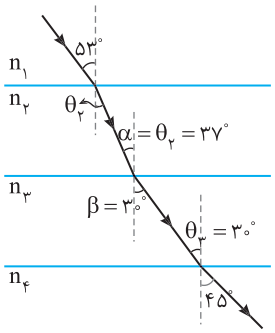


$$\frac{v_۳}{v_۴}=\frac{\sin\theta_۳}{\sin\theta_۴}\Rightarrow\frac{v_۳}{۱/۴v_۳}=\frac{\sin\theta_۳}{\sin ۴۵^\circ}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۱/۴}=\frac{\sin\theta_۳}{۰/۷}\Rightarrow\sin\theta_۳=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\theta_۳=۳۰^\circ$$

محیط (۲) و (۳): حال با توجه به خطوط موازی و مورب، α در مرز دو محیط (۲) و (۳) برابر ۳۷° و β در مرز دو محیط (۳) و (۴) برابر ۳۰° است. رابطهٔ بین ضریب شکست دو محیط و زاویهٔ پرتو تابش و شکست به صورت زیر است:



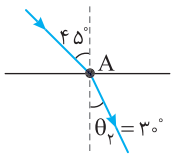
$$\frac{n_۲}{n_۳}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\Rightarrow\frac{n_۲}{n_۳}=\frac{\sin ۳۰^\circ}{\sin ۳۷^\circ}$$

$$\frac{n_۲}{n_۳}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۶}{۱۰}}\Rightarrow\frac{n_۲}{n_۳}=\frac{۵}{۶}$$

B ۲۱۷۴ ۳

خط فکری با توجه به رابطهٔ سرعت در حرکت با سرعت ثابت داریم:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

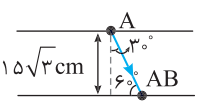


بنابراین برای محاسبه Δt به $\Delta x=AB$ به و سرعت حرکت نور نیاز داریم:

۱ ابتدا زاویهٔ شکست محیط (۲) را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin ۴۵^\circ}{\sin\theta_۲}=\frac{n_۲}{n_۱}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt۲}{۲}}{\sin\theta_۲}=\frac{\sqrt۲}{۱}\Rightarrow\sin\theta_۲=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta_۲=۳۰^\circ$$

۲ حال طول AB را به‌دست می‌آوریم:



$$\sin ۶۰^\circ=\frac{۱۵\sqrt۳}{\ell_{AB}}\Rightarrow\frac{\sqrt۳}{۲}=\frac{۱۵\sqrt۳}{\ell_{AB}}$$

$$\ell_{AB}=۳۰\,cm=۰/۳\,m$$

۳ سرعت در محیط (۲) را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{n_۱}{n_۲}\Rightarrow\frac{v_۲}{۳\times۱۰^۸}=\frac{۱}{\sqrt۲}\Rightarrow v_۲=\frac{۳}{\sqrt۲}\times۱۰^۸\Rightarrow v_۲=۱/۵\sqrt۲\times۱۰^۸\,m/s$$

۴ حال زمان مسافت طی شده را به‌دست می‌آوریم:

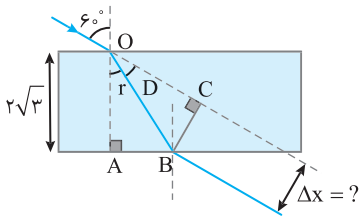
$$v=\frac{\ell_{AB}}{t_{AB}}\Rightarrow t_{AB}=\frac{\ell_{AB}}{v_۲}\Rightarrow t_{AB}=\frac{۰/۳}{۱/۵\sqrt۲\times۱۰^۸}=\frac{۲}{\sqrt۲}\times۱۰^{-۹}\,s=\sqrt۲\,ns$$

A ۲۱۷۵ ۴

خط فکری امتداد پرتو خروجی و امتداد پرتو ورودی موازی هم هستند، بنابراین فاصلهٔ آن‌ها از هم خط عمودی است که بر دو خط رسم می‌شود. یعنی مطابق شکل، خط BC فاصلهٔ بین پرتو ورودی و خروجی است که شما باید آن را به‌دست بیاورید. از این‌رو ابتدا باید زاویهٔ ورود بر تیغهٔ ورود بر تیغه (زاویهٔ شکست r) را حساب کنید، سپس به کمک مثلث‌های OAB و OBC، BC را به‌دست آورید.

۱ ابتدا زاویهٔ شکست (r) را به‌دست می‌آوریم:

$$n=\frac{\sin i}{\sin r}\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{\sin ۶۰^\circ}{\sin r}\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\sin r}\Rightarrow\sin r=\frac{۱}{۲}\Rightarrow r=۳۰^\circ$$



۲ در مثلث OAB می‌توان نوشت:

$$\cos r=\frac{OA}{OB}\Rightarrow\cos ۳۰^\circ=\frac{۲\sqrt{۳}}{OB}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۳}}{OB}\Rightarrow OB=۴cm$$

۳ زاویهٔ انحراف D را حساب می‌کنیم. $D=۶۰^\circ-۳۰^\circ=۳۰^\circ$ زاویهٔ انحراف

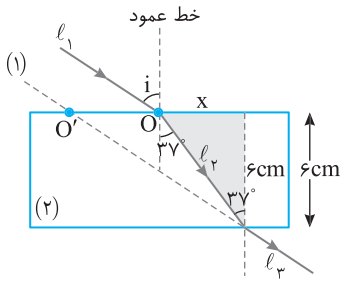
۴ در مثلث OBC می‌توان نوشت:

$$\sin D=\frac{BC}{OB}\Rightarrow\sin ۳۰^\circ=\frac{BC}{۴}\Rightarrow BC=۲cm$$

A ۲۱۷۶ ۲

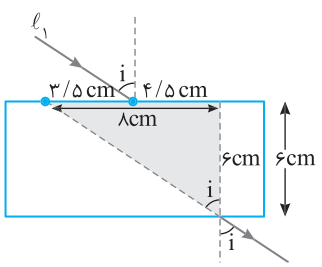
۱ با توجه قضیهٔ خطوط موازی و مورب زاویه پرتو $\ell_۲$ با خط عمود بر سطح متوازی‌السطوح هنگام خروج نیز ۳۷° است.

$$\tan ۳۷^\circ=\frac{x}{۶}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{x}{۶}\Rightarrow x=۴/۵cm$$



۲ پرتوهای ورودی و خروجی در یک محیط هستند، پس پرتوهای ورودی و خروجی موازی هم هستند و زاویه خروج از متوازی‌السطوح نیز $\hat{i}$ است.

$$\tan i=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\hat{i}=۵۳^\circ$$

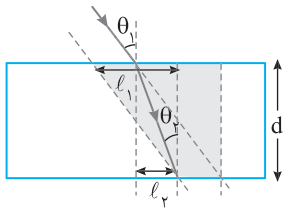


۳ حال ضریب شکست را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin ۵۳^\circ}{\sin ۳۷^\circ}=\frac{n_۲}{n_۱}\Rightarrow\frac{۰/۸}{۰/۶}=\frac{n_۲}{۱}\Rightarrow n_۲=\frac{۴}{۳}$$

میانبر به طور کلی اگر d ضخامت تیغه متوازی‌السطوح باشد، فاصله محل تقاطع پرتوهای ورودی و خروجی یا امتداد آنها روی سطح تیغه از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\ell=\ell_۱-\ell_۲=d\times|\tan\theta_۱-\tan\theta_۲|$$



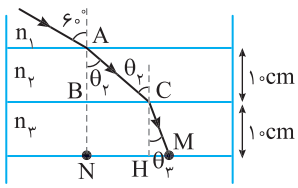
در این سؤال محاسبهٔ زاویهٔ $\hat{i}$ با استفاده از این نکته به صورت زیر است:

$$۳/۵=۶\times|\tan\hat{i}-\tan ۳۷^\circ|\Rightarrow\frac{۳/۵}{۶}=\tan\hat{i}-\frac{۳}{۴}$$

$$\tan\hat{i}=\frac{۳/۵}{۶}+\frac{۳}{۴}\Rightarrow\tan\hat{i}=\frac{۷+۹}{۱۲}=\frac{۱۶}{۱۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\hat{i}=۵۳^\circ$$

A ۲۱۷۷ ۳

۱ زاویهٔ شکست در محیط $n_۲$ را حساب می‌کنیم.



$$n_۱\sin\theta_۱=n_۲\sin\theta_۲\Rightarrow۱\times\sin ۶۰^\circ=\frac{۱۷}{۱۶}\sin\theta_۲$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۱۷}{۱۶}\sin\theta_۲\Rightarrow\frac{۱/۷}{۲}=\frac{۱۷}{۱۶}\sin\theta_۲\Rightarrow\sin\theta_۲=۰/۸\Rightarrow\theta_۲=۵۳^\circ$$

۲ در مثلث ABC، طول ضلع BC را به‌دست می‌آوریم.

$$\tan\theta_۲=\frac{BC}{AB}\Rightarrow\frac{۴}{۳}=\frac{BC}{۱۰}\Rightarrow BC=\frac{۴۰}{۳}cm$$

۳ زاویهٔ $\theta_۳$ را نیز به کمک قانون اسنل حساب می‌کنیم.

$$n_۲\sin\theta_۲=n_۳\sin\theta_۳\Rightarrow\frac{۱۷}{۱۶}\sin ۵۳=\frac{۱۷}{۱۲}\sin\theta_۳\Rightarrow$$

$$\frac{۰/۸}{۴}=\frac{\sin\theta_۳}{۳}\Rightarrow\sin\theta_۳=۰/۶\Rightarrow\theta_۳=۳۷^\circ$$

۴ فاصلهٔ HM را در مثلث CHM به‌دست می‌آوریم.

$$\tan\theta_۳=\frac{HM}{CH}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{HM}{۱۰}\Rightarrow HM=\frac{۳۰}{۴}cm$$

۵ فاصلهٔ MN خواهد شد.

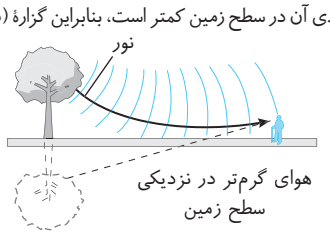
$$MN=BC+HM=\frac{۴۰}{۳}+\frac{۳۰}{۴}\Rightarrow MN=\frac{۱۶۰+۹۰}{۱۲}\Rightarrow MN=\frac{۲۵۰}{۱۲}=\frac{۱۲۵}{۶}cm$$

A ۲۱۷۸ ۲

سراب در روزهای گرم که هوای مجاور سطح زمین گرم‌تر از لایه‌های بالاتر هوا بوده و چگالی هوا در سطح زمین از لایه‌های بالاتر کمتر است، اتفاق می‌افتد، بنابراین گزارهٔ (الف) درست است.

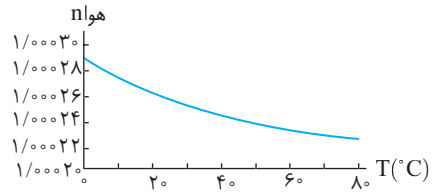
همچنین جبهه‌های موج که به سمت پایین می‌آیند با ضریب شکست‌های کوچک‌تر روبه‌رو شده و سرعت آن‌ها افزایش می‌یابد که مطابق شکل این امر سبب خم شدن پرتو به سمت بالا می‌شود و گزارهٔ (ب) درست است.

با تغییر چگالی هوا از بالا تا سطح زمین، ویژگی‌های محیط تغییر کرده و تندی انتشار نور در لایه‌های بالاتر از تندی آن در سطح زمین کمتر است، بنابراین گزارهٔ (پ) نادرست است.



A ۲۱۷۹ ۱

با افزایش دما چگالی هوا کاهش می‌یابد. در واقع با افزایش دما چگالی هوا رقیق‌تر می‌شود، پس ضریب شکست هوا کاهش می‌یابد و گزینهٔ (۱) می‌تواند درست باشد.



A ۲۱۸۰ ۳

در روزهای گرم هوای سطح زمین نسبتاً داغ است. از طرفی، چگالی هوا با افزایش دما کاهش می‌یابد که این امر سبب کاهش ضریب شکست نیز می‌شود و تندی انتشار موج از لایه‌های بالایی به سوی سطح زمین افزایش می‌یابد. از طرفی بسامد نور از ویژگی‌های چشمهٔ موج بوده و ثابت است بنابراین طول موج در نقاط نزدیک سطح زمین بزرگ‌تر است.

$(\uparrow \lambda = \frac{v\uparrow}{f})$

A ۲۱۸۱ ۱

ضریب شکست یک محیط شفاف برای طول موج‌های کوتاه‌تر، بیشتر است. در گسترهٔ نور مرئی، نور قرمز دارای بلندترین طول موج و کمترین ضریب شکست است. از این‌رو کمتر از رنگ‌های دیگر منحرف می‌شود. اما دربارهٔ تندی پرتوها:

پرتو بنفش دارای کمترین طول موج و بیشترین ضریب شکست است. بنابراین تندی پرتو بنفش از همه کمتر است.

$\downarrow v = \frac{c}{n\uparrow}$

A ۲۱۸۲ ۳

نکته ضریب شکست یک محیط شفاف برای طول موج‌های کوتاه‌تر، بیشتر است.

یادآوری در گستره (طیف) امواج الکترومغناطیسی طول موج از پرتو گاما تا امواج رادیویی در حال افزایش است.

$\gamma \rightarrow x \rightarrow$ فرابنفش $\rightarrow$ نور مرئی $\rightarrow$ فروسرخ $\rightarrow$ رادیویی

$\downarrow$

$\xrightarrow[\lambda\uparrow, f\downarrow]{\text{قرمز نارنجی زرد سبز آبی بنفش}}$

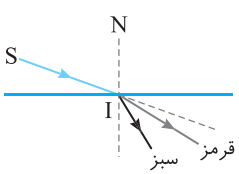
الگوی تست به‌راحتی قابل بررسی است.

$\lambda_G > \lambda_U > \lambda_\gamma \Rightarrow n_G < n_U < n_\gamma \xrightarrow{n=\frac{c}{v}} \frac{c}{v_G} < \frac{c}{v_U} < \frac{c}{v_\gamma}$

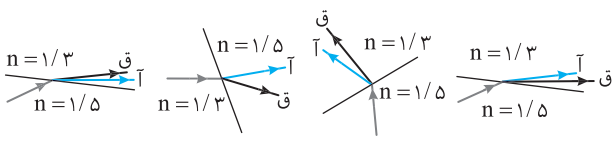
$\Rightarrow v_G > v_U > v_\gamma$

A ۲۱۸۳ ۱

هرگاه پرتو نور از هوا وارد محیط غلیظ‌تری مانند مایع شود، پرتو منحرف شده و به خط عمود نزدیک‌تر می‌شود. از طرفی پرتویی که دارای طول موج کوتاه‌تر است بیشتر منحرف می‌شود. طول موج پرتو سبز از طول موج پرتو قرمز کوتاه‌تر است، بنابراین پرتو سبز نیز باید به خط عمود نزدیک‌تر شود.

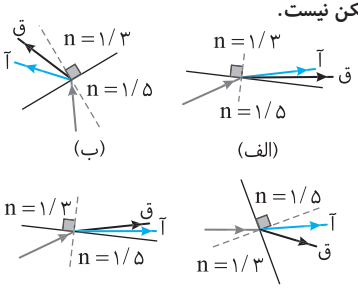


بازی با سؤال **در شکل‌های زیر، پرتو فرودی که شامل نورهای قرمز و آبی است در سطح مشترک دو محیط شکست پیدا کرده‌اند. چه تعداد از شکل‌ها شکست را به‌درستی نشان می‌دهد؟ (قرمز: ق، آبی: آ)** از کتاب درسی



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

یاسخ **خط عمود بر سطح مشترک دو محیط را در هر شکل رسم می‌کنیم. در شکل (ب) پرتوهای تابش و شکست در یک طرف خط عمود قرار دارند که چنین چیزی ممکن نیست.**



در شکل (پ)، پرتو آبی به خط عمود نزدیک و پرتو قرمز از خط دور شده است در حالی‌که چون پرتوها از محیط با ضریب شکست کمتر وارد محیط با ضریب شکست بیشتر شده‌اند باید هر دو پرتو آبی و قرمز با زوایای شکست متفاوت به خط عمود نزدیک شوند در حالی که پرتو قرمز از خط عمود دور شده است، بنابراین شکل (پ) نادرست است.

در مورد شکل‌های (الف) و (ت) پرتویی از محیط غلیظ وارد محیط رقیق شده است و پرتوها از خط عمود باید دور شوند و پرتو قرمز باید کمتر منحرف شود. از این‌رو شکل (الف) نادرست و شکل (ت) درست است، بنابراین تنها شکل (ت) درست است.

گزینهٔ ۱

A ۲۱۸۴ ۳

یادآوری هرگاه پرتو نور از محیط رقیق وارد محیط غلیظ شود، پرتو به خط عمود نزدیک می‌شود.

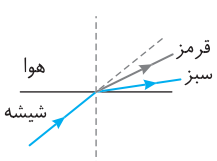
نکته ضریب شکست یک محیط شفاف برای طول موج‌های کوتاه‌تر بیشتر است یعنی این پرتوها بیشتر منحرف می‌شوند.

طول موج نور آبی از طول موج نور قرمز کمتر است بنابراین وقتی این دو پرتو وارد شیشه می‌شوند، نور آبی بیشتر منحرف شده و به خط عمود نزدیک‌تر می‌شود.

A ۲۱۸۵ ۳

یادآوری ضریب شکست محیط شفاف برای طول موج‌های کوتاه‌تر بیشتر است.

نور از شیشه وارد هوا (از محیط غلیظ وارد محیط رقیق) شده و پرتوها از خط عمود دور می‌شوند. طول موج نور قرمز از طول موج نور سبز بلندتر بوده و نور قرمز کمتر شکسته می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

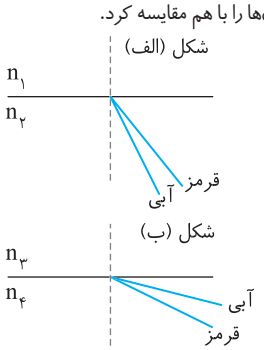


B ۲۱۸۶ ۳

هرگاه نور از محیط غلیظ وارد محیط رقیق شود، پرتو از خط عمود دور می‌شود و هر چه طول موج کوتاه‌تر باشد، انحراف بیشتر است. طول موج نور آبی از طول موج نور قرمز کمتر است بنابراین هنگام ورود به هوا از خط عمود دورتر می‌شود و گزینهٔ (۳) درست است.

A ۲۱۸۷ ۳

خط فکری ضریب شکست هر محیط شفاف غیر از خلأ برای طول موج‌های کوتاه‌تر بیشتر است، یعنی پرتو آبی که طول موجش از پرتو قرمز کوتاه‌تر است، بیشتر منحرف می‌شود. اکنون با مقایسهٔ انحراف پرتوی آبی و قرمز در محیط‌های n_1 و n_2 و همچنین n_3 و n_4 می‌توان ضریب شکست آن‌ها را با هم مقایسه کرد.

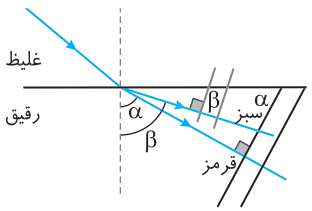


در شکل (الف) پرتو آبی به خط عمود نزدیک‌تر از پرتو قرمز است و چون پرتو آبی بیشتر منحرف شده است باید $n_2 > n_1$ باشد.

در شکل (ب) پرتو آبی هنگام شکست از خط عمود دورتر است و قرمز به خط عمود نزدیک‌تر و چون آبی بیشتر شکسته است پس $n_3 > n_4$ است.

A ۲۱۸۸ ۳

خط فکری نور زرد ترکیبی از نور قرمز و نور سبز است، از طرفی طول موج نور سبز از طول موج نور قرمز کوتاه‌تر است $(\lambda_G < \lambda_R)$. ضریب شکست محیط به طول موج نور بستگی دارد و هر چه طول موج کوتاه‌تر باشد، ضریب شکست محیط بیشتر است. بنابراین هنگام ورود پرتو نور زرد به محیط رقیق، پرتو سبز از مسیرش بیشتر منحرف می‌شود. حال با توجه به این دانسته‌ها باید در مورد α و β اظهار نظر کنید.



در واقع زاویه شکست نور قرمز از زاویهٔ شکست نور سبز کمتر است. زاویه‌ای که جبهه موج با مرز مشترک دو محیط می‌سازد برابر زاویه شکست پرتو مربوط به همان موج با خط عمود است، بنابراین زاویهٔ بین جبهه‌های موج قرمز با مرز شکست یعنی α از زاویه بین جبهه‌های موج سبز با مرز مشترک یعنی β کمتر است.

A ۲۱۸۹ ۳

یادآوری تندی انتشار تمام امواج الکترومغناطیسی در خلأ برابر است.

دو پرتو الکترومغناطیسی A و B در حال انتشار در خلأ هستند، بنابراین تندی انتشار آن‌ها با هم برابر است $(v_A = v_B)$ و گزینه‌های (۱) و (۲) و (۴) نادرست هستند. با توجه به رابطهٔ طول موج می‌توان نوشت:

$$\lambda_A = \frac{v_A}{f_A} \xrightarrow{v_A = v_B} \frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{f_B}{f_A} \xrightarrow{\lambda_A > \lambda_B \text{ اگر}} f_A < f_B$$
$$\lambda_B = \frac{v_B}{f_B}$$

گزینهٔ (۳) درست است.

A ۲۱۹۰ ۳

نکته سرعت امواج الکترومغناطیسی در محیط‌های شفاف غیر از خلأ با هم برابر نیست و پرتو با طول موج بزرگ‌تر، در محیط شفاف دارای سرعت بیشتری است.

دو پرتو الکترومغناطیسی A و B در آب در حال انتشار هستند، بنابراین تندی انتشار آن‌ها با هم برابر نیست. با توجه به نکتهٔ بیان شده گزینهٔ (۳) درست است.

$$\lambda_A > \lambda_B \Rightarrow n_A < n_B \Rightarrow \frac{c}{v_A} < \frac{c}{v_B} \Rightarrow v_A > v_B$$

A ۲۱۹۱ ۲

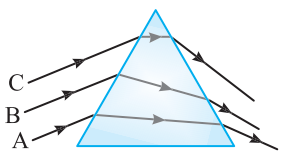
در ابتدا به شما بگوییم که رابطهٔ $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ مربوط به گذر یک پرتو از یک محیط شفاف به محیط شفاف دیگر است. یعنی v_1 و v_2 سرعت یک پرتو در محیط (۱) و (۲) همچنین λ_1 و λ_2 طول موج یک پرتو در دو محیط است. در حالی‌که در این تست شما با دو پرتو مختلف با طول موج‌های مختلف در هوا سر و کار دارید که به یک منشور می‌تابد. یعنی v_1 و v_2 سرعت پرتو (۱) در منشور و v_2 سرعت پرتو (۲) در منشور بوده و گزینهٔ (۴) اصولاً در مورد این تست نادرست است. حال به حل مسئله بپردازیم. هرگاه یک پرتو مرکب از دو موج λ_1 و λ_2 $(\lambda_1 > \lambda_2)$ وارد محیط شفافی شوند. ضریب شکست محیط شفاف برای پرتوی λ_1 که دارای طول موج بیشتری است کمتر بوده از این‌رو می‌توان نوشت:

$$\lambda_1 > \lambda_2 \Rightarrow n_1 < n_2 \Rightarrow \frac{c}{v_1} < \frac{c}{v_2} \Rightarrow v_1 > v_2$$

ضریب شکست محیط شفاف برای پرتو اول — سرعت نور پرتو اول در محیط شفاف — سرعت نور پرتو دوم در محیط شفاف

A ۲۱۹۲ ۳

خط فکری ضریب شکست یک محیط برای طول موج‌های مختلف موج‌های الکترومغناطیسی، متفاوت و برای طول موج‌های بلندتر، کمتر است و این پرتوها هنگام گذر از منشور کمتر منحرف می‌شوند. بنابراین شما باید به انحراف پرتوها توجه کنید و تشخیص بدهید کدام پرتو بیشتر منحرف شده است.



انحراف پرتو C هنگام ورود به منشور از بقیه کمتر است، از این‌رو طول موج آن از بقیه بزرگ‌تر بوده و بسامد آن از بقیه کمتر است.

B ۲۱۹۳ ۳

نور آبی دارای طول موج کوتاه‌تری است، بنابراین هنگام ورود از هوا به شیشه بیشتر منحرف می‌شود و پرتوها مطابق شکل روبه‌رو از هم جدا شده اما در یک امتداد حرکت می‌کنند و هنگام خروج موازی هستند.



A ۲۱۹۴ ۴

خط فکری باید از روی نمودار داده شده، ضریب شکست نور آبی و نور قرمز را مشخص کنید، سپس سرعت نور آبی و قرمز در تیغه را به‌دست آورده، زمان گذر هر یک از پرتوها از تیغه را حساب کرده و اختلاف زمانی را به‌دست بیاورید.

۱ با توجه به داده‌های روی نمودار ضریب شکست نور آبی ۱/۵۳ و ضریب شکست نور قرمز ۱/۵۱ است. تندی پرتوهای قرمز و آبی را به‌دست می‌آوریم:

$$v_{\text{نور آبی}} = \frac{c}{n_{\text{آبی}}} = \frac{c}{1/53} \quad , \quad v_{\text{نور قرمز}} = \frac{c}{n_{\text{قرمز}}} = \frac{c}{1/53}$$

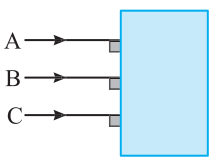
۲ ضخامت تیغه d است و مدت زمان عبور هر پرتو از تیغه خواهد شد:

$$d = vt \Rightarrow \begin{cases} t_{\text{قرمز}} = \dfrac{d}{\frac{c}{1/51}} \Rightarrow t_{\text{قرمز}} = 1/51\dfrac{d}{c} \\ t_{\text{آبی}} = \dfrac{d}{\frac{c}{1/53}} \Rightarrow t_{\text{آبی}} = 1/53\dfrac{d}{c} \end{cases}$$

۳ زمان‌های به‌دست آمده را از هم کم می‌کنیم. $t_{\text{آبی}} - t_{\text{قرمز}} = 0/02\frac{d}{c} = \frac{2d}{100c} = \frac{d}{50c}$

در واقع نور قرمز $\frac{d}{50c}$ ثانیه زودتر از نور آبی از تیغه خارج می‌شود.

بازی با سؤال **مطابق شکل روبه‌رو، سه پرتو موازی تک‌رنگ A، B و C به یک تیغهٔ شیشه‌ای تخت می‌تابند. مدت زمان عبور پرتوها از تیغه به ترتیب t_A، t_B و t_C است. اگر $t_B < t_C < t_A$ باشد، کدام گزینه می‌تواند به‌ترتیب از راست به چپ رنگ پرتوهای A، B و C باشد؟**



۱) قرمز، آبی، بنفش **۲)** بنفش، قرمز، آبی
۳) بنفش، آبی، قرمز **۴)** آبی، قرمز، بنفش

پاسخ **هر چه زمان عبور پرتو از تیغه کوتاه‌تر باشد، تندی انتشار پرتو در تیغه بیشتر است و هر چه تندی انتشار پرتو در تیغه بیشتر باشد، طول موج آن پرتو بزرگ‌تر است.**

$$t_B < t_C < t_A \Rightarrow v_B > v_C > v_A \xrightarrow{v=\frac{c}{n}} n_B < n_C < n_A \Rightarrow \lambda_B > \lambda_C > \lambda_A$$

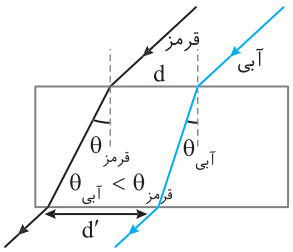
یادآوری **در گسترده نور مرئی که از رنگ‌های قرمز، نارنجی، زرد، سبز، آبی و بنفش تشکیل شده است. از قرمز به بنفش طول موج کاهش می‌یابد.**

$$\lambda_B > \lambda_C > \lambda_A \Rightarrow \lambda_{\text{قرمز}} > \lambda_{\text{آبی}} > \lambda_{\text{بنفش}}$$

گزینهٔ ۲

A ۲۱۹۵ ۳

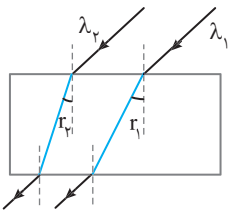
هر چه طول موج کوچک‌تر باشد، ضریب شکست محیط برای آن پرتو بیشتر می‌شود. طول موج نور آبی از طول موج نور قرمز کمتر است به همین دلیل نور آبی بیشتر در تیغه دچار شکست می‌شود و پرتو آبی به خط عمود نزدیک‌تر می‌شود. $(\theta_{\text{قرمز}} > \theta_{\text{آبی}})$



از این‌رو با توجه به شکل $d' > d$ خواهد شد.

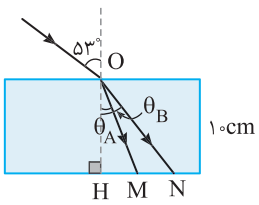
A ۲۱۹۶ ۳

خط فکری به نحوهٔ خروج پرتو و مقدار انحراف آن‌ها باید دقت کنید. پرتوها پس از خروج از تیغه به هم نزدیک شده‌اند و مطابق شکل باید پرتو λ_1 از پرتو λ_2 کمتر منحرف شده باشد $(r_1 > r_2)$ یعنی ضریب شکست تیغه برای λ_1 کمتر از ضریب شکست تیغه برای λ_2 بوده است و با توجه به اینکه ضریب شکست یک محیط شفاف برای طول موج‌های بلندتر، کمتر است باید $\lambda_1 > \lambda_2$ (و یا $\lambda_2 < \lambda_1$) باشد.



A ۲۱۹۷ ۲

خط فکری ابتدا باید زاویهٔ شکست هر پرتو در تیغه را حساب کنید. سپس با استفاده از مثلثات در مثلث‌های OHM و OHN طول ضلع‌های HM و HN را به‌دست آورده و از هم کم کنیم.



۱ ضریب شکست محیط برای پرتو A بیشتر است. بنابراین پرتو A بیشتر منحرف می‌شود. زاویهٔ شکست A را حساب می‌کنیم.

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \Rightarrow 1\times\sin 53^\circ = 1/6 \sin\theta_A \Rightarrow 0/8 = 1/6 \sin\theta_A$$

$$\Rightarrow \sin\theta_A = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_A = 30^\circ$$

۲ طول ضلع MH خواهد شد:

$$\Delta OHM: \tan\theta_A = \frac{HM}{OH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{HM}{10}$$

$$\Rightarrow HM = \frac{10\sqrt{3}}{3}\,cm = \frac{10\times 1/7}{3} = 5/6\,cm$$

۳ زاویهٔ شکست B را به‌دست می‌آوریم.

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = 1\times\sin 53^\circ = \frac{4}{3}\sin\theta_B \Rightarrow 0/8 = \frac{4}{3}\sin\theta_B$$

$$\Rightarrow \sin\theta_B = 0/6 \Rightarrow \theta_B = 37^\circ$$

۴ طول ضلع HN برابر است با:

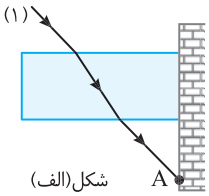
$$\Delta OHN: \tan\theta_B = \frac{HN}{OH} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{HN}{10} \Rightarrow HN = \frac{30}{4} = 7/5\,cm$$

۵ فاصلهٔ MN خواهد شد.

$$MN = HN - HM = 7/5 - 5/6 \Rightarrow MN = 1/9\,cm$$

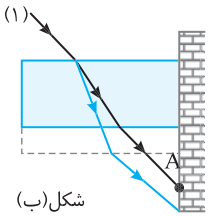
A ۲۱۹۸ ۲

خط فکری مسیر پرتو در ابتدا مطابق شکل (الف) بود و پرتو بعد از عبور از تیغه به نقطهٔ A می‌رسد. برای آن‌که پرتو به نقطهٔ پایین‌تر از A برسد، باید انحراف بیشتری پیدا کند. اکنون شما باید تک‌تک حالت‌ها را بررسی کنید.



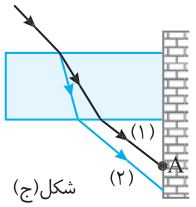
شکل (الف)

اگر ضخامت تیغه را بیشتر کنیم با توجه به مسیر پرتو در شکل روبه‌رو نور آبی پس از خروج از منشور در نقطه پایین‌تر از A قرار می‌گیرد (شکل ب) و روش (الف) درست است.



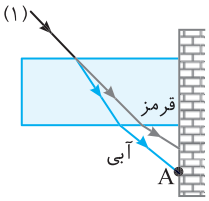
شکل (ب)

هرچه ضریب شکست تیغه بیشتر باشد، پرتو شکست بیشتر به خط عمود نزدیک می‌شود. پس از خروجی نیز پایین‌تر از A قرار می‌گیرد و روش (ب) درست است.

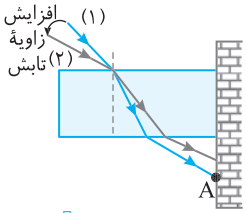


شکل (ج)

اگر از نور قرمز به جای نور آبی استفاده شود، چون طول موج نور قرمز از طول موج نور آبی بیشتر است، ضریب شکست تیغه برای نور قرمز کمتر از نور آبی بوده. یعنی پرتو قرمز کمتر منحرف شده و به نقطهٔ بالای A می‌رسد و روش (پ) نادرست است.

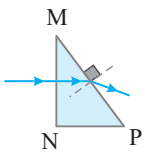


اگر زاویهٔ تابش را افزایش دهیم، مسیر (۲) پرتو به نقطه‌ای بالاتر از A می‌رسد که روش (ت) نادرست است.



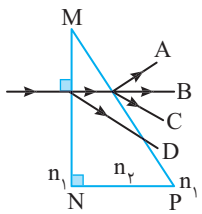
A ۲۱۹۹ ۴

پرتو عمود بر وجه MN می‌تابد (زاویهٔ تابش صفر است) و بدون انحراف وارد منشور می‌شود. سپس روی وجه MP از منشور وارد هوا می‌شود، بنابراین اگر خط عمود را رسم کنید، باید پرتو از خط عمود دور شود، بنابراین پرتوهای BA نادرست هستند. اما پرتوهای C و D هر دو از خط عمود دور شده و ممکن است، پاسخ مسئله باشند.

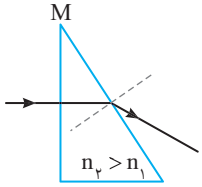


A ۲۲۰۰ ۴

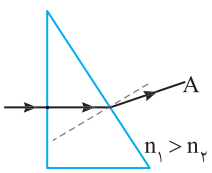
پرتو عمود به MN می‌تابد و بدون انحراف باید وارد منشور شود. بنابراین مسیر D نادرست است.
پرتو بر وجه MP عمود نمی‌تابد بنابراین باید روی این وجه منحرف شود بنابراین مسیر B نادرست است.



اما مسئله بیان نکرده که n_1 بزرگ‌تر است یا n_2.
اگر $n_2 > n_1$ باشد، هنگام خروج پرتو از منشور باید پرتو از خط عمود دور شود، یعنی پرتو به سمت قاعده منشور منحرف می‌شود و مسیر C درست است.

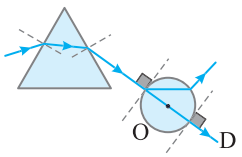


اگر $n_1 > n_2$ باشد، هنگام خروج پرتو از منشور باید به خط عمود نزدیک شود و پرتو به سمت رأس منحرف می‌شود و مسیر A درست است.



A ۲۲۰۱ ۴

هـرگاه پرتـو از خلأ به یک منشـور بتابـد مطابق شـکل، به سمت قاعدهٔ منشور منحرف می‌شود. در نتیجه پرتو به سمت کرهٔ شیشه‌ای O نمی‌رود و وقتی پرتو به کرهٔ شیشـه‌ای به‌گونه‌ای بتابد که امتـداد آن از مرکـز بگذرد، یعنی پرتـو در امتداد قطر کره باشـد، پرتو بر سـطح کره عمود بوده و بدون انحراف از کره می‌گذرد. بنابراین مسیر D درست است و مسیر C نادرست است.



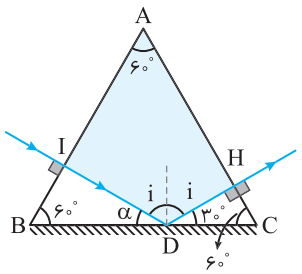
A ۲۲۰۲ ۱

۱ نور بر وجه AB عمود تابیده و زاویهٔ تابش صفر است. از این‌رو پرتو بدون انحراف از وجه AB می‌گذرد و در نقطهٔ D به آیینه برخورد می‌کند.

۲ در مثلث قائم‌الزاویه BID زاویهٔ α برابر است با: $\alpha+۶۰=۹۰\Rightarrow\alpha=۳۰^\circ$

۳ بنابراین زاویهٔ تابش بر سـطح آینه $i=۶۰^\circ$ اسـت و پرتو DH با سطح آیینه زاویهٔ ۳۰° می‌سازد.

۴ زاویه‌ای که پرتو DH بر وجه AC می‌سازد ۹۰° بوده و پرتو خروجی از منشور نیز با وجه AC زاویهٔ ۹۰° می‌سازد.

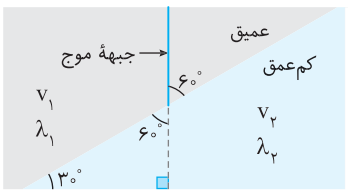


B ۲۲۰۳ ۱

نکته زاویهٔ بین جبههٔ موج و مرز برابر است با زاویهٔ بین پرتو موج و خط عمود.

۱ در شـکل زاویهٔ بین جبهه‌های شکسـت و مرز دو محیط ۳۰° است. بنابراین زاویهٔ شکست $(\theta_۲=۳۰^\circ)$ می‌شود.

۲ حال باید سراغ زاویهٔ تابش برویم. یکی از جبهه‌های تابش را امتداد می‌دهیم تا یک مثلث قائم‌الزاویه مطابق شکل بسازیم. اکنون مشخص است که جبهه‌های موج تابش با مرز دو محیط زاویهٔ $\theta_۱=۶۰^\circ$ می‌سازند.



۳ بنـا به قانون شکسـت عمومی $\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲}=\frac{v_۱}{v_۲}$ و از طرفی هنـگام گذر موج از یک محیط به محیط دیگر بسـامد ثابت می‌ماند. از این‌رو طول موج با تندی انتشـار موج در محیط نسبت مستقیم دارد.

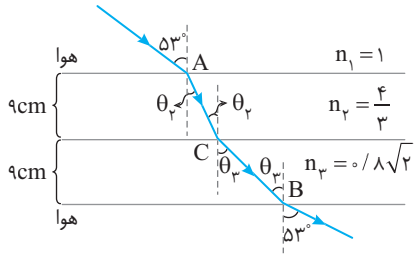
$$\begin{cases}v_۱=f\lambda_۱\\ v_۲=f\lambda_۲\end{cases}\Rightarrow\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}$$

۴ اکنون می‌توانیم نسبت طول موج در محیط عمیق به طول موج در محیط کم‌عمق را حساب کنیم.

$$\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲}=\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}\Rightarrow\frac{\sin۶۰^\circ}{\sin۳۰^\circ}=\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}\Rightarrow\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}=\sqrt{۳}$$

B ۲۲۰۴ ۳ *

این تست ساده‌ای است اما طراح، کنکور تجربی رو با المپیاد فیزیک رشتهٔ ریاضی اشتباه گرفته. ☺



۱ ابتدا تندی نور در محیط $n_۲$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{n_۲}{n_۱}=\frac{v_۱}{v_۲}\Rightarrow\frac{۴}{۳}=\frac{۳\times۱۰^۸}{v_۲}\Rightarrow v_۲=\frac{۹}{۴}\times۱۰^۸\,m/s$$

۲ زاویهٔ ورود (شکست) به محیط (۲) را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{n_۲}{n_۱}=\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲}\Rightarrow\frac{۴}{۳}=\frac{۰/۸}{\sin\theta_۲}\Rightarrow\sin\theta_۲=۰/۶\Rightarrow\theta_۲=۳۷^\circ$$

۳ اکنون AC را حساب می‌کنیم:

$$\cos\theta_۲=\frac{۹}{AC}\Rightarrow۰/۸=\frac{۹}{AC}\Rightarrow AC=\frac{۹۰}{۸}cm=\frac{۹۰}{۸}\times۱۰^{-۲}m$$

۴ زمان طی مسیر AC برابر است با:

$$t_{AC}=\frac{AC}{v_۲}=\frac{\frac{۹۰}{۸}\times۱۰^{-۲}}{\frac{۹}{۴}\times۱۰^۸}=۵\times۱۰^{-۱۰}s=۰/۵ns$$

۵ اکنون به سراغ محیط (۳) می‌رویم:

$$\frac{n_۳}{n_۱}=\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۳}\Rightarrow n_۳=\frac{\sin۵۳^\circ}{\sin\theta_۳}\Rightarrow۰/۸\sqrt{۲}=\frac{۰/۸}{\sin\theta_۳}$$

$$\Rightarrow\sin\theta_۳=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\theta_۳=۴۵^\circ$$

۶ بنابراین CB برابر $۹\sqrt{۲}cm$ خواهد بود. تندی در محیط (۳) برابر است با:

$$v_۳=\frac{c}{n_۳}\Rightarrow v_۳=\frac{۳\times۱۰^۸}{۰/۸\sqrt{۲}}m/s$$

$$t_{CB}=\frac{CB}{v_۳}=\frac{۹\sqrt{۲}\times۱۰^{-۲}}{\frac{۳\times۱۰^۸}{۰/۸\sqrt{۲}}}=\frac{۹\sqrt{۲}\times۰/۸\sqrt{۲}\times۱۰^{-۲}}{۳\times۱۰^۸}$$

$$t_{CB}=۴/۸\times۱۰^{-۱۰}=۰/۴۸ns\quad,\quad t_{کل}=۰/۵+۰/۴۸=۰/۹۸ns$$

بالاخـره حـل تمام شـد اما دقت کردید پاسـخ در گزینه‌ها نیسـت. البته اگـر حل را یاد گرفته‌اید نگران نباشید.

A ۲۲۰۵ ۱

یادآوری ضریب شکسـت یک محیط برابر نسـبت سرعت نور در خلأ به سرعت نور در آن محیط است $(n=\frac{c}{v})$.

۱ با توجه به ضریب شکست‌ها سرعت نور در هر لایه را به‌دست می‌آوریم:

$$v_۱=\frac{c}{n}=\frac{c}{۱/۵}\ ,\ v_۲=\frac{c}{n'}=\frac{c}{۱/۷}\ ,\ v_۳=\frac{c}{n''}=\frac{c}{۱/۶}$$

۲ پرتو یک‌بار از بین دو لایه با ضریب شکست‌های n و n' رد می‌شود و بار دیگر از لایـه با ضریب شکسـت n'' و همان‌طور که می‌دانیـد $t=\frac{x}{v}$، بنابراین زمان گذر از هر لایه را به‌دست می‌آوریم:

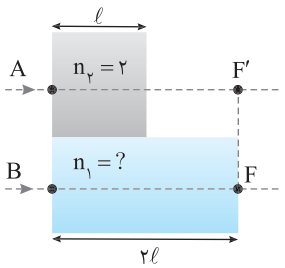
$$t_۱=\frac{\ell}{\frac{c}{۱/۵}}\Rightarrow t_۱=۱/۵\frac{\ell}{c}\ ,\ t_۲=\frac{\ell}{\frac{c}{۱/۷}}\Rightarrow t_۲=۱/۷\frac{\ell}{c}$$

$$\Rightarrow\Delta t_{۱,۲}=t_۱+t_۲\Rightarrow\Delta t=۳/۲\frac{\ell}{c}\quad,\quad t_۳=\frac{۲\ell}{\frac{c}{۱/۶}}\Rightarrow t_۳=۳/۲\frac{\ell}{c}$$

۳ بنابراین اختلاف زمان صفر است.

* کلید سازمان سنجش ۳، با تأثیر مثبت

بازی با سؤال مطابق شکل روبه‌رو دو پرتو A و B به طور هم‌زمان از هوا وارد محیط‌های شفاف $n_۲$ و $n_۱$ می‌شوند و به‌طور هم‌زمان از نقاط F' و F عبور می‌کنند. ضریب شکست $n_۱$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۶}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

پاسخ سرعت انتشار پرتو A از درون محیط شفاف $n_۲$ برابر است با:

$$v=\frac{c}{n_۲}\Rightarrow v_A=\frac{c}{۲}$$

زمان رسیدن پرتو A به نقطهٔ F' از دو قسمت تشکیل شده است. در جابه‌جایی ℓ سرعت $\frac{c}{۲}$ و در جابه‌جایی ℓ بعدی تندی انتشار c است؛ بنابراین:

$$\Delta x=vt\Rightarrow t=\frac{\Delta x}{v}\Rightarrow t_A=\frac{\ell}{\frac{c}{۲}}+\frac{\ell}{c}\Rightarrow t_A=\frac{۳\ell}{c}$$

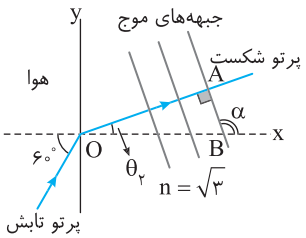
بنا به فرض مسئله زمان گذر پرتو B از محیط $n_۱$ نیز برابر t_A است، از این‌رو:

$$t_B=t_A=\frac{۳\ell}{c}\xrightarrow{t_B=\frac{۲\ell}{v_B}}\frac{۲\ell}{v_B}=\frac{۳\ell}{c}\Rightarrow\frac{c}{v_B}=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{n=\frac{c}{v}}n=\frac{۳}{۲}$$

گزینهٔ ۱

۴ ۲۲۰۶ C

خط فکری دقت کنید که مرز دو محیط محور yهاست. بنابراین زاویه‌ای که پرتو تابش با محور xها می‌سازد، زاویهٔ تابش است $(\theta_i=۶۰^\circ)$ با دانستن این مطلب زاویهٔ شکست را بیابید $(\theta_۲=?)$، سپس با رسم جبهه‌های موج زاویهٔ بین این جبهه‌ها با محور xها را مشخص کرده و شیب این جبهه‌ها را حساب کنید.



۱ ابتدا با توجه به قانون شکست اسنل زاویهٔ شکست را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲}=\frac{n_۲}{n_۱}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\sin\theta_۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۱}\Rightarrow\sin\theta_۲=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta_۲=۳۰^\circ$$

۲ همان‌طور که می‌دانیم جبهه‌های موج بر پرتو عمودند، بنابراین جبهه‌های شکست بر پرتو شکست عمود بوده و جبهه‌های شکست با محور xها زاویهٔ α می‌سازند در مثلث OAB، α زاویهٔ خارجی است و مقدار آن خواهد شد: $\alpha=۹۰+۳۰=۱۲۰^\circ$

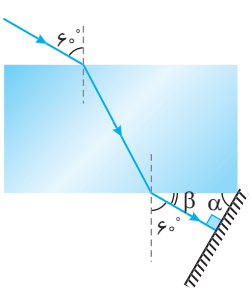
۳ اکنون شیب جبهه‌های موج شکست قابل محاسبه است:

شیب جبهه‌های موج شکست $=\tan۱۲۰^\circ=-\tan۶۰^\circ=-\sqrt{۳}$

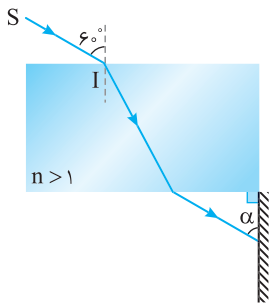
۱ ۲۲۰۷ B

هنگامی بازتاب پرتو تابش روی خودش خواهد بود که پرتو بر سطح آینه عمود باشد. زاویهٔ ورودی به یک تیغه متوازی‌السطوح با زاویهٔ خروجی از تیغه برابر است. بنابراین زاویه‌ای که پرتو خروجی با وجه تیغه می‌سازد $\beta=۹۰-۶۰=۳۰^\circ$ می‌شود. پرتو خروجی بر سطح آینه عمود است؛ از این‌رو زاویهٔ α خواهد شد:

$$\alpha=۱۸۰^\circ-(۹۰^\circ+۳۰^\circ)\Rightarrow\alpha=۶۰^\circ$$

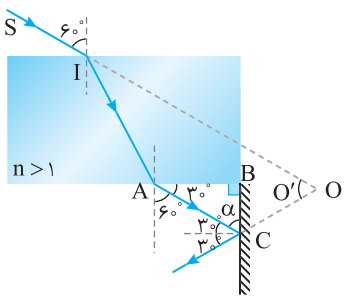


بازی با سؤال مطابق شکل، پرتوی SI از هوا با زاویهٔ تابش ۶۰° به وجه AB یک تیغهٔ متوازی‌السطوح می‌تابد و وارد تیغه می‌شود. این پرتو پس از خروج از تیغه به یک آینهٔ تخت برخورد می‌کند. پرتو بازتابیده از آینه با امتداد پرتوی SI چه زاویه‌ای می‌سازد؟



۱) ۵۳° ۲) ۱۲۰° ۳) ۹۰° ۴) ۱۵۰°

پاسخ پرتو خروجی از تیغهٔ تخت با پرتوی ورودی به تیغهٔ موازی است. بنابراین هر زاویه‌ای که پرتو بازتاب از آینه با پرتوی خروجی می‌سازد طبق خطوط موازی و مورب، همان زاویه را با پرتو SI می‌سازد. زاویهٔ خروجی از تیغه ۶۰° است و پرتوی خروجی با وجه تیغه زاویهٔ ۳۰° می‌سازد. مثلث ABC قائم‌الزاویه بوده و زاویهٔ $\alpha=۹۰^\circ-۳۰^\circ=۶۰^\circ$ است. از این‌رو زاویهٔ تابش بر سطح آینه $i=۳۰^\circ$ می‌شود و زاویهٔ بین پرتو بازتاب و پرتو تابش $۲i=۶۰^\circ$ خواهد شد. پرتو SI و پرتو AB موازی هستند، بنابراین زاویهٔ O' با به خطوط موازی - مورب ۶۰° و زاویهٔ D، ۱۲۰° خواهد بود.



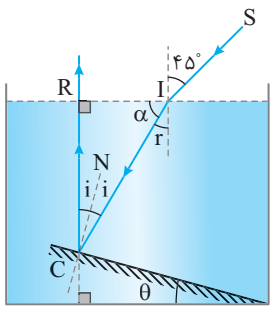
گزینهٔ ۲

۱ ۲۲۰۸ C

۱ ابتدا زاویهٔ شکست در آب را به‌دست می‌آوریم:

$$n_۱\sin\theta_۱=n_۲\sin\theta_۲\Rightarrow۱\times\sin۴۵=\sqrt{۲}\sin r$$

$$\Rightarrow\sin r=\frac{۱}{۲}=۳۰^\circ\Rightarrow r=۳۰^\circ$$



۲ زاویه‌ای که پرتو شکست با سطح مایع می‌سازد خواهد شد: $\alpha=۹۰^\circ-۳۰^\circ=۶۰^\circ$

۳ مثلث RIC قائم‌الزاویه است، از این‌رو زاویهٔ بین پرتو تابش IC و پرتو بازتاب CR خواهد شد: $۲i+\alpha+۹۰^\circ=۱۸۰^\circ\xrightarrow{\alpha=۶۰^\circ}۲i+۶۰^\circ+۹۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow i=۱۵^\circ$

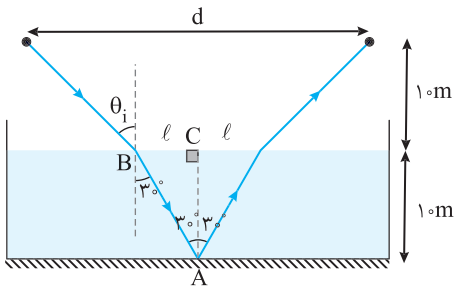
یادداشت ریاضی هرگاه دو ضلع یک زاویه بر دو ضلع زاویهٔ دیگر عمود باشند، آن دو زاویه برابر یا مکمل یکدیگرند.

به اضلاع زاویهٔ بازتاب i دقت کنید. یک ضلع آن خط عمود N است که بر سطح آینه یعنی یکی از ضلع‌های زاویهٔ θ عمود است، ضلع دیگر آن خط RC است که بر سطح افقی یعنی ضلع دیگر زاویهٔ θ عمود است، بنابراین $\theta=i=۱۵^\circ$ است.

C ۲۲۰۹ ۲

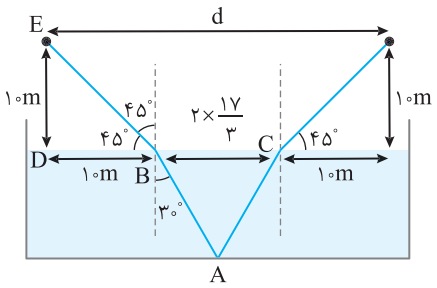
۱ با توجه به قانون بازتاب عمومی زاویه پرتو تابش به آینه و بازتاب از آن با هم برابر است، بنابراین در مثلث ABC می‌توان نوشت:

$$\Delta ABC \Rightarrow \tan ۳۰^\circ = \frac{\ell}{۱۰} \Rightarrow \ell = \frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}\,m \Rightarrow \ell = \frac{۱۷}{۳}\,m$$



۲ همچنین می‌توان θ_i را با توجه به قانون شکست اسنل به‌دست آورد:

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin ۳۰^\circ} = \frac{n_۲}{n_۱} \Rightarrow \frac{\sin\theta_i}{\frac{۱}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۱} \Rightarrow \sin\theta_i = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \theta_i = ۴۵^\circ$$



۳ بنابراین مثلث BDE متساوی‌الساقین بوده و ضلع $BD = ۱۰cm$ می‌شود.

۴ در این صورت با توجه به شکل مقدار d خواهد شد: $d = ۱۰ + ۲\times\frac{۱۷}{۳} + ۱۰ = \frac{۹۴}{۳}\,m$

B ۲۲۱۰ ۱

خط فکری باید زاویهٔ تابش بر هر وجه را به کمک زوایا و اضلاع روی شکل پیدا کنید، سپس با داشتن زوایای شکست در هر دو محیط، ضریب شکست آن‌ها را به‌دست آورید و نسبت $\frac{n}{n'}$ را حساب کنید.

۱ مثلث SAB، متساوی‌الساقین است، بنابراین زاویهٔ β روی شکل ۴۵°، زاویهٔ تابش پرتو SB بر وجه AB برابر $\theta_{i_۲} = ۴۵^\circ$ است.

۲ ضلع CD برابر $\sqrt{۳}d$ و ضلع SC برابر d است، از این‌رو زاویهٔ α روی شکل خواهد شد:

$$\tan\alpha = \frac{d}{\sqrt{۳}d} \Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$$

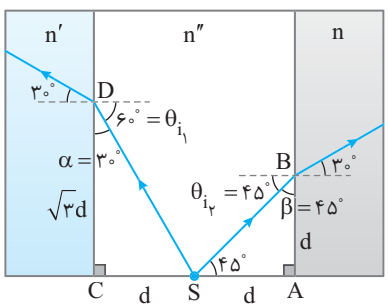
در نتیجه زاویهٔ تابش پرتو SD برابر $\theta_{i_۱} = ۶۰^\circ$ است.

۳ اکنون به کمک قانون شکست اسنل، ضریب شکست هر محیط را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\sin\theta_{i_۱}}{\sin ۳۰^\circ} = \frac{n'}{n''} \Rightarrow n' = \sqrt{۳}n'' \quad , \quad \frac{\sin\theta_{i_۲}}{\sin ۳۰^\circ} = \frac{n}{n''} \Rightarrow n = \sqrt{۲}n''$$

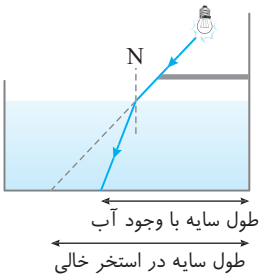
۴ نسبت ضریب شکست‌ها خواهد شد:

$$\frac{n}{n'} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۶}}{۳}$$



A ۲۲۱۱ ۱

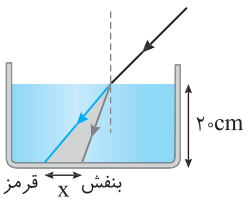
هنگامی که پرتو به سطح آب می‌تابد و وارد آب می‌شود، به خط عمود (N) نزدیک می‌شود و طول سایه کوتاه‌تر می‌شود.



B ۲۲۱۲ ۳

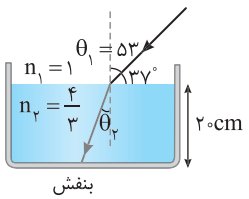
یادآوری عموماً ضریب شکست یک محیط معین برای طول موج‌های کوتاه‌تر، بیشتر است.

۱ با توجه به نکتهٔ بالا در یک محیط، نور قرمز کمترین و نور بنفش بیشترین ضریب شکست را دارد، بنابراین:



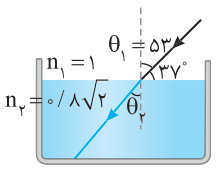
۲ در شکل بالا x خواسته سؤال است، زاویهٔ شکست پرتو بنفش را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲} = \frac{n_۲}{n_۱} \Rightarrow \frac{\sin ۵۳^\circ}{\sin\theta_۲} = \frac{\frac{۴}{۳}}{۱} \Rightarrow \frac{۰/۸}{\sin\theta_۲} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \theta_۲ = ۳۷^\circ$$

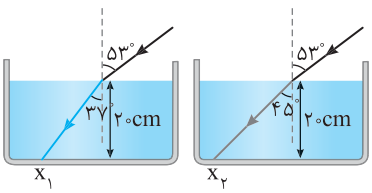


۳ زاویه شکست پرتو قرمز را رسم می‌کنیم:

$$\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲} = \frac{n_۲}{n_۱} \Rightarrow \frac{\sin ۵۳^\circ}{\sin\theta_۲} = \frac{۰/۸\sqrt{۲}}{۱} \Rightarrow \sin\theta_۲ = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \sin\theta_۲ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \theta_۲ = ۴۵^\circ$$



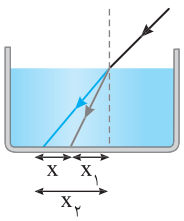
۴ با توجه به زاویه‌های شکست و اینکه ارتفاع مایع ۲۰cm است، خواهیم داشت:



$$\tan ۴۵^\circ = \frac{\text{ضلع روبه‌رو}}{\text{ضلع مجاور}} \xrightarrow{\tan ۴۵^\circ = ۱} ۱ = \frac{x_۲}{۲۰} \Rightarrow x_۲ = ۲۰cm$$

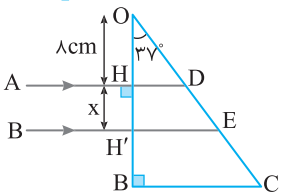
$$\tan ۳۷^\circ = \frac{\text{ضلع روبه‌رو}}{\text{ضلع مجاور}} \xrightarrow{\tan ۳۷^\circ = \frac{۳}{۴}} \frac{۳}{۴} = \frac{x_۱}{۲۰} \Rightarrow x_۱ = ۱۵cm$$

۵ حال x خواستهٔ سؤال را حساب می‌کنیم: $x = x_۲ - x_۱ \Rightarrow x = ۲۰ - ۱۵ = ۵cm$



C ۲۲۱۳ ۴

۱ طول مسیر HD در منشور را به کمک مثلثات در مثلث OHD حساب می‌کنیم:



$$\tan 37^\circ=\frac{HD}{OH}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{HD}{8}$$
$$\Rightarrow HD=6\,cm$$

۲ سرعت پرتو A در منشور را به کمک تعریف ضریب شکست به‌دست می‌آوریم.

$$v_A=\frac{c}{n_A}\xrightarrow{n_A=1/6}v_A=\frac{c}{1/6}$$

۳ زمان حرکت پرتو A در منشور خواهد شد:

$$\Delta x=vt\Rightarrow DH=v_At_A\Rightarrow 6=\frac{c}{1/6}t_A\Rightarrow t_A=\frac{6\times 1/6}{c}$$

۴ سرعت پرتو B در منشور را حساب می‌کنیم:

$$v_B=\frac{c}{n_B}\xrightarrow{n_B=\frac{4}{3}}v_B=\frac{c}{\frac{4}{3}}\Rightarrow v_B=\frac{3c}{4}$$

۵ زمان حرکت B را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x=vt\Rightarrow H'E=v_Bt_B\Rightarrow t_B=\frac{H'E}{v_B}\Rightarrow t_B=\frac{H'E}{\frac{3c}{4}}\Rightarrow t_B=\frac{4H'E}{3c}$$

۶ با توجه به فرض مسئله $t_A=t_B$. از این‌رو خواهیم داشت:

$$\frac{6\times 1/6}{c}=\frac{4H'E}{3c}\Rightarrow H'E=7/2\,cm$$

۷ در مثلث OH′E طول ضلع OH′ را به‌دست می‌آوریم:

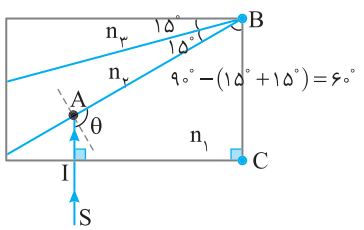
$$\tan 37^\circ=\frac{H'E}{OH'}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{7/2}{8+x}\Rightarrow 9/6=8+x\Rightarrow x=1/6\,cm$$

B ۲۲۱۴ ۲

یادآوری اگر پرتویی عمود بر مرز بین دو محیط بتابد بدون انحراف وارد محیط دوم می‌شود.

۱ با توجه به یادآوری بالا مسیر پرتو در محیط (۱) را رسم می‌کنیم:

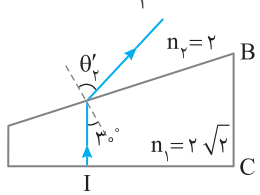
در چهار ضلعی IABC: $\theta+90^\circ+90^\circ+60^\circ=360^\circ\Rightarrow\theta=120^\circ$



۲ برای پرتو IA نیم‌خط عمود را رسم می‌کنیم، زاویه تابش IA برابر $30^\circ-90^\circ=20^\circ$ است حال با توجه به قانون شکست زاویهٔ θ′ را حساب می‌کنیم:

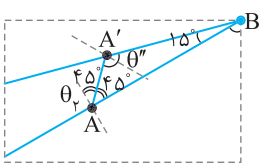
$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\frac{n_2}{n_1}\Rightarrow\frac{\sin 30^\circ}{\sin\theta'}=\frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow\sin\theta_2=\sqrt{2}\sin 30^\circ\Rightarrow\sin\theta_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta_2=45^\circ$$



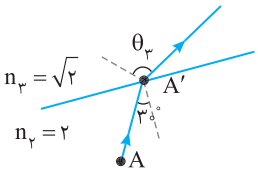
۳ در محیط (۲) مسیر پرتو را کشیده و زاویه تابش را به‌دست می‌آوریم:

$$\theta''+45+15=180\Rightarrow\theta''=120^\circ$$



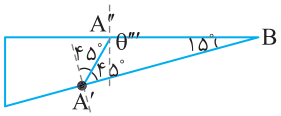
۴ نیم‌خط عمود را برای پرتو AA′ کشیده و زاویه تابش $30^\circ-90^\circ=120^\circ$ می‌شود:

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3}=\frac{n_3}{n_2}\Rightarrow\frac{\sin 30^\circ}{\sin\theta_3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sin\theta_3=\frac{2}{\sqrt{2}}\sin 30^\circ\Rightarrow\sin\theta_3=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Rightarrow\theta_3=45^\circ$$



۵ مسیر پرتو در محیط (۳) یعنی A′A″ را دنبال می‌کنیم:

$$\theta'''+15+45=180\Rightarrow\theta'''=120$$

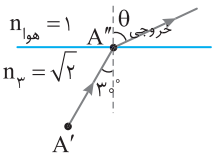


۶ نیم‌خط عمود را برای پرتو A′A″ رسم می‌کنیم زاویه تابش $30^\circ-90^\circ=120^\circ$ می‌شود:

۷ قانون شکست برای پرتو خروجی را می‌نویسیم:

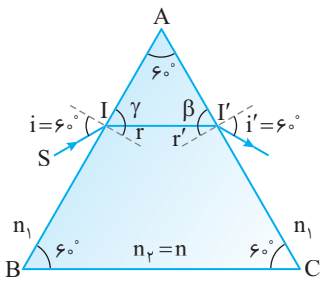
$$\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_{\text{خروجی}}}=\frac{n_{\text{خروجی}}}{n_3}\Rightarrow\frac{\sin 30^\circ}{\sin\theta_{\text{خروجی}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta_{\text{خروجی}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta_{\text{خروجی}}=45^\circ$$



B ۲۲۱۵ ۲

خط فکری تمام زوایای α با هم برابرند، بنابراین مثلث ABC باید یک مثلث متساوی‌الاضلاع با زوایای ۶۰° باشد. از طرفی زاویهٔ تابش بر وجه AB نیز $\alpha=i=60^\circ$ بوده؛ همچنین زاویهٔ پرتو خروجی با خط عمود بر وجه AC نیز $i'=\alpha=60^\circ$ است. اکنون با توجه به این مطالب باید به سراغ بررسی زوایای γ، β و زوایای r و r′ رفته و به کمک آن ضریب شکست منشور را حساب کرد.



۱ قانون اسنل را برای وجه AB و AC می‌نویسیم تا ثابت شود دو زاویهٔ r و r′ برابر هستند.

$$\begin{cases}AB: n_1\sin i=n_2\sin r\\ AC: n_1\sin i'=n_2\sin r'\end{cases}\xrightarrow{i=i'}r=r'$$

۲ با برابر بودن r′ و r مشخص می‌شود که زوایای β و γ نیز برابر هستند.

$$\gamma=\beta=60^\circ$$

۳ بنابراین زاویه‌های r و r′ هر کدام برابر ۳۰° می‌شوند.

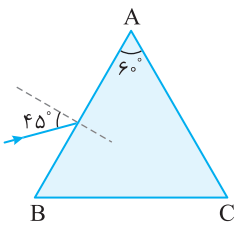
۴ ضریب شکست n خواهد شد:

$$n_1\sin i=n_2\sin r\Rightarrow 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=n\times\frac{1}{2}\Rightarrow n=\sqrt{3}$$

بازی با سوال مطابق شکل روبه‌رو پرتو تک‌رنگی از هوا با زاویهٔ ۴۵° به وجه AB منشوری می‌تابد و با همان زاویه از وجه AC بیرون می‌رود. ضریب شکست منشور کدام است؟

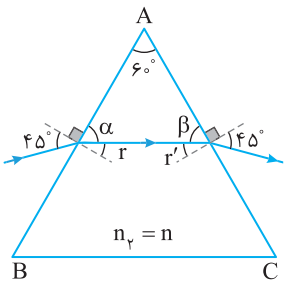
تجربی - ۹۰

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۳ ۴) $\sqrt{۳}$



پاسخ ۱ با توجه به قانون اسنل $n_۱\sin\theta_۱=n_۲\sin\theta_۲$ چون زوایای ورودی و خروجی هر کدام ۴۵° است، زوایای r و r' نیز با هم برابرند.

۲ با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\begin{cases}\alpha+r=۹۰^\circ\\ \beta+r'=۹۰^\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow\alpha+\beta+r+r'=۱۸۰^\circ\ (I)$$

۳ مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰° است. از این‌رو:

$$\alpha+\beta+A=۱۸۰^\circ \qquad (II)$$

از روابط (I) و (II) نتیجه می‌شود:

$$A=r+r'$$

یعنی مجموع زاویه‌های شکست داخلی برابر با زاویهٔ رأس منشور است.

$$A=r+r'\xrightarrow{r=r'}۶۰^\circ=۲r\Rightarrow r=۳۰^\circ$$

۴ ضریب شکست خواهد شد:

$$n_۱\sin\theta_۱=n_۲\sin\theta_۲\xrightarrow[n_۲=n]{n_۱=۱}n=\frac{\sin i}{\sin r}\Rightarrow n=\frac{\sin۴۵^\circ}{\sin۳۰^\circ}\Rightarrow n=\sqrt{۲}$$

نکته در منشور مجموع زاویه‌های شکست داخلی برابر زاویهٔ رأس منشور است.

$$A=r+r'$$

گزینهٔ ۲

B ۲۲۱۶ ۳

۱ هر دو پرتو بدون انحراف وارد منشور شده‌اند؛ یعنی زاویهٔ بین این پرتوها و وجه AC، ۹۰° است.

۲ زاویهٔ بین پرتو HH' با وجه AB برابر $\gamma=۹۰-۳۰=۶۰^\circ$ است.

در نتیجه زاویهٔ تابش پرتو HH' برابر ۳۰° خواهد شد.

۳ زاویهٔ شکست بر وجه AB را با حرف r_{AB} نشان داده و مقدار آن را حساب می‌کنیم.

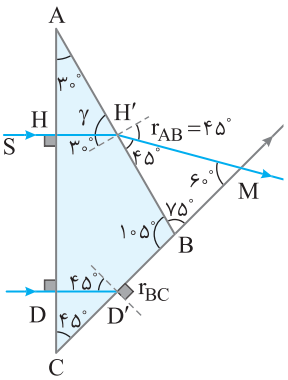
$$\text{در وجه AB}: n_۱\sin i=n_۲\sin r\Rightarrow\sqrt{۲}\times\sin۳۰^\circ=۱\times\sin r_{AB}\Rightarrow r_{AB}=۴۵^\circ$$

۴ با همین استدلال زاویهٔ تابش پرتو DD' بر وجه BC، برابر ۴۵° است. زاویهٔ شکست بر وجه BC را با حرف r_{BC} نشان داده و مقدار آن را به‌دست می‌آوریم.

$$\text{در وجه BC}: n_۱\sin i=n_۲\sin r\Rightarrow\sqrt{۲}\times\sin۴۵^\circ=۱\times\sin r_{BC}\Rightarrow r_{BC}=۹۰^\circ$$

۵ زاویهٔ A و C به ترتیب ۳۰° و ۴۵° بوده، بنابراین در مثلث ABC زاویهٔ B برابر $۱۸۰^\circ-(۴۵^\circ+۳۰^\circ)=۱۰۵^\circ$ خواهد شد.

۶ بنابراین در مثلث $H'BM$ زاویهٔ بین دو پرتو، ۶۰° به‌دست می‌آید.



پنجره ۳

A ۲۲۱۷ ۳

شکل (الف) پراش آب هنگام گذر از شکاف است. شکل (ب) طرحوارهٔ پراش موج در برخورد به لبه‌های مانع است. شکل (پ)، شکست امواج آب در تشت موج است. شکل (ت) طرحوارهٔ جبهه‌های موج در پدیدهٔ شکست است.

A ۲۲۱۸ ۴

هرگاه موج از شکافی بگذرد که بزرگی دهانهٔ شکاف در حدود طول موج آن موج باشد، پدیدهٔ پراش رخ خواهد داد و این پدیده برای تمام امواج هنگام گذر از لبه‌های مانع یا از یک شکاف رخ می‌دهد. بنابراین برای امواج مکانیکی عرضی، امواج مکانیکی طولی و امواج الکترومغناطیسی رخ می‌دهد و برای امواج با طول موج کوتاه نیز کافی است پهنای شکاف یا ابعاد مانع در حدود طول موج باشد. بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

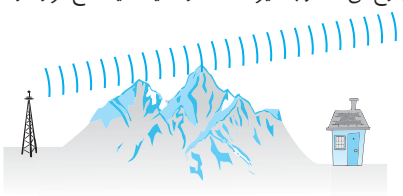
A ۲۲۱۹ ۳

در گذر موج از یک شکاف یا مانع، طول موج موج پراشیده تغییر نمی‌کند در گزینهٔ (۱) فاصلهٔ بین جبهه‌های موج کم شده یعنی طول موج پس از پراش کوتاه‌تر شده که نادرست است. در گزینهٔ (۲) فاصلهٔ بین جبهه‌های موج پس از عبور از شکاف افزایش یافته یعنی طول موج بلندتر شده و این گزینه نیز نادرست است. در گزینهٔ (۳) موج پراش پیدا کرده و فاصلهٔ جبهه‌های موج یعنی طول موج تغییر نکرده و این گزینه درست است.

در گزینهٔ (۴) با توجه به آنکه پهنای شکاف با فاصلهٔ جبهه‌ها (طول موج) در حدود هم هستند. یعنی پهنای شکاف از مرتبهٔ طول موج است، پراش رخ نداده و این گزینه نادرست است.

A ۲۲۲۰ ۳

مطابق شکل داده شده با طول موج حدود ۱ km پراش بارز رخ داده پس باید طول موج در محدودهٔ ابعاد مانع (همان نوک کوه) باشد پس با کاهش زیاد طول موج و رساندن آن به حدود چند سانتی‌متر دیگر طول موج و ایجاد لبهٔ مانع در محدودهٔ قائم نبوده و پراش به طور کمتری رخ می‌دهد و به گیرنده که در ناحیهٔ سایه مانع قرار دارد نمی‌رسد.



بازی با سوال چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) برای یک طول موج معین پراش‌زا روزنهٔ کوچک‌تر بارزتر است.

ب) برای روزنه‌ای با اندازهٔ معین، پراش طول موج‌های کوتاه‌تر، بارزتر است.

پ) پراشیدگی امواج رادیویی AM در اطراف یک ساختمان از امواج FM در اطراف آن ساختمان بارزتر است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ در پدیدهٔ پراش، هرچه روزنه کوچک‌تر شود، پراش برای یک طول موج معین بارزتر خواهد بود و گزارهٔ (الف) درست است.

در پدیدهٔ پراش، در گذر موج از یک مانع با یک روزنه هرچه طول موج نسبت به ابعاد مانع یا روزنه بزرگ‌تر باشد، پراش به نحو بارزتری رخ می‌دهد و گزارهٔ (ب) نادرست است.

طول موج امواج رادیویی AM از طول موج امواج رادیویی FM بلندتر است (با توجه به شکل صفحهٔ ۷۶ کتاب درسی) بنابراین پراش امواج AM در اطراف یک ساختمان از پراش امواج FM در اطراف همان ساختمان بارزتر است و گزارهٔ (پ) درست است.

بنابراین دو گزارهٔ (الف) و (پ) درست است و پاسخ گزینهٔ (۳) می‌باشد.

گزینهٔ ۳

B ۲۲۲۱ ۳

طول موج را حساب کرده با ابعاد مانع‌ها مقایسه می‌کنیم.

$$\lambda=\frac{c}{f}\xrightarrow{c=3\times10^{8}\,m/s\ ,\ f=2\times10^{9}\,Hz}\lambda=\frac{3\times10^{8}}{2\times10^{9}}\Rightarrow\lambda=\frac{3}{20}m$$

$$\Rightarrow\lambda=15cm$$

هرچه اختلاف بین پهنای شکاف و طول موج کمتر شود،پراش بارزتر است بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

B ۲۲۲۲ ۲

مطابق شکل پهنای شکاف از طول موج بزرگ‌تر است پس برای آنکه پراش بارزتر شود باید پهنای شکاف در درون طول موج باشد یعنی باید اختلاف پهنای شکاف و طول موج از هم کمتر شود.

الف) نور بنفش طول موج کوتاهتری از نور سبز دارد پس با بنفش شدن نور طول موج کاهش یافته اختلاف طول موج و پهنای شکاف بیشتر شده و پراش کمتر رخ می‌دهد.

ب) پهنای شکاف از طول موج بزرگ‌تر است پس با کاهش پهنای شکاف اختلاف پهنای شکاف و طول موج کم می‌شود و پراش بارزتر رخ می‌دهد.

پ) هرچه ضریب شکست یک محیط کمتر باشد با توجه به قانون شکست $\frac{v_2}{v_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{n_1}{n_2}$ طول موج بزرگ‌تر می‌شود و چون در ابتدا پهنای شکاف از طول موج بزرگ‌تر بوده پس با افزایش طول موج اختلاف پهنای شکاف و طول موج از هم کمتر شده و پراش بارزتر رخ می‌دهد.

A ۲۲۲۳ ۱

یادآوری در آب‌های کم عمق مانند تشت موج با افزایش عمق آب، تندی موج و در نتیجه طول موج $(\uparrow\lambda=\frac{v\uparrow}{f_{ثابت}})$ افزایش می‌یابد.

پهنای لبهٔ مانع از طول موج بزرگ‌تر است، هرچه پهنای لبهٔ مانع در حدود طول موج باشد پراش بارزتر رخ می‌دهد، پس باید اختلاف پهنای لبهٔ مانع و طول موج از هم کاهش یابد یعنی باید پهنای لبهٔ مانع کاهش یابد یا طول موج افزایش یابد.

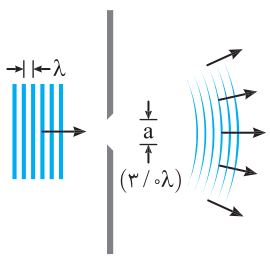
با توجه به یادآوری با کاهش عمق آب تندی انتشار امواج سطحی آب کاهش یافته و طول موج نیز کمتر می‌شود و اختلاف پهنای لبهٔ مانع و طول موج افزایش می‌یابد و پراش بارزتر نمی شود و گزینهٔ (۳) نادرست است.

با توجه به رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}$ با افزایش بسامد طول موج مجدد کاهش یافته و با توجه به توضیح بالا پراش بارزتر نمی‌شودو گزینهٔ (۲) نادرست است.

با افزایش عمق آب، تندی انتشار موج و در نتیجه طول موج افزایش یافته و طول موج به ابعاد لبهٔ تیغ نزدیک‌تر می‌شود و پراش بارزتر خواهد شد.

A ۲۲۲۴ ۱

با توجه به شکل پهنای شکاف از طول موج بزرگ‌تر است پس زمانی پراش بارزتر می‌شود که طول موج در محدودهٔ پهنای شکاف باشد و در واقع اختلاف پهنای شکاف و طول موج کمتر شود. با تکرار آزمایش در محیط n_2 چون ضریب شکست بیشتر شده $(\frac{v_2}{v_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{n_1}{n_2})$ طول موج کاهش یافته و اختلاف پهنای شکاف و طول موج بیشتر می‌شود و پراش کمتری رخ می‌دهد. بنابراین در محیط n_1 قسمت بیشتری از پرده روشن خواهد شد چون پراش بارزتر خواهد بود.



بازی با سؤال برای پرتوی نور تکفامی در یک محیط شفاف به ضریب شکست $n=1/4$ هنگام گذر از یک شکاف پراش رخ می‌دهد. در کدام محیط، در گذر همین پرتو از همین شکاف، پراش بارزتری رخ می‌دهد؟

۱) $n=1/2$ ۲) $n=1/5$

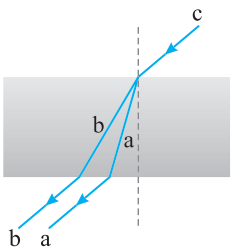
۳) $n=1/6$ ۴) ضریب شکست نقشی در پراش ندارد.

پاسخ هرچه ضریب شکست محیطی کمتر باشد، طول موجِ موج در آن محیط بلندتر می‌شود $(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{n_1}{n_2})$ و با همان شکاف، پراش بهتری رخ می‌دهد، بنابراین اگر محیط جدید، ضریب شکستش از $1/4$ کمتر باشد، طول موج در آن محیط بلندتر شده و پراش بارزتر است، از این‌رو گزینهٔ (۱) درست است. گزینهٔ ۱

A ۲۲۲۵ ۲

با توجه به جدول کتاب درسی دربارهٔ تندی صوت در هوای $0^\circ C$ و $20^\circ C$ به ترتیب $331\,m/s$ و $343\,m/s$ است. با ثابت بودن بسامد طول موج صوت در هوای $20^\circ C$ بلندتر است و چون در ابتدا پهنای شکاف بزرگتر از طول موج است پس با افزایش طول موج، اختلاف بین پهنای شکاف و طول موج کاهش یافته و در واقع طول موج به محدودهٔ پهنای شکاف نزدیکتر می‌شود پس پراش بهتر اتفاق می‌افتد.

B ۲۲۲۶ ۲

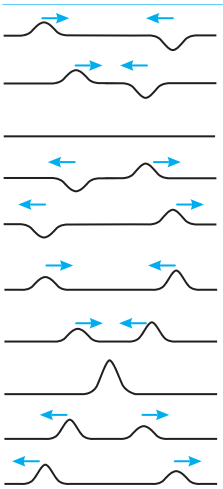


در گذر از مرز دو محیط، شکست برای طول موج‌های کوتاه‌تر بیشتر است. با توجه به شکل، شکست پرتو b کمتر از شکست پرتو a است، بنابراین طول موج پرتو b بلندتر از طول موج پرتو a است. چون شکاف آزمایش پراش از طول موج‌های a و b بزرگتر است پس هرچه طول موج یک پرتو بلندتر باشد آن طول موج به محدودهٔ پهنای شکاف نزدیک‌تر بوده و پراش بارزتر رخ می‌دهد، بنابراین پراش حاصل از پرتو b بارزتر از پراش حاصل پرتو a است.

A ۲۲۲۷ ۴

ترکیب موج‌ها با یکدیگر را تداخل می‌گویند و ترکیب همگی امواج از اصل برهم‌نهی پیروی می‌کند، بنابراین تداخل تمام امواج از هر نوعی از اصل برهم‌نهی پیروی می‌کند.

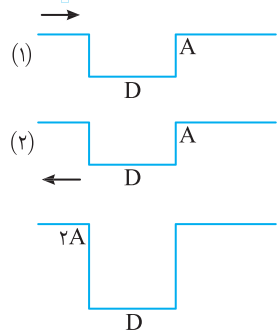
A ۲۲۲۸ ۳



در شکل (الف)، دو موج اثر هم را تضعیف می‌کنند و تداخل «ویرانگر» است.

در شکل (ب)، دو موج اثر هم را تقویت می‌کنند و تداخل «سازنده» است.

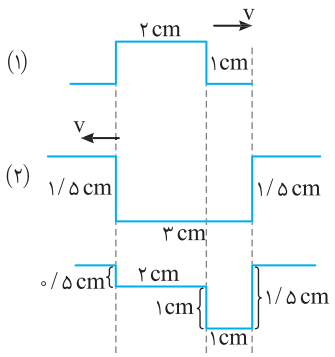
A ۲۲۲۹ ۲



با توجه به شکل، برهم‌نهی (تداخل) دو تپ در لحظهٔ نشان داده شده سازنده است. پهنای دو تپ D است و دامنهٔ آن‌ها A است تپ برهم‌نهاده نیز دارای دامنه ۲A و پهنای D خواهد بود.

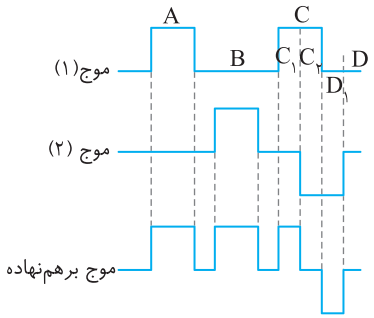
۴ ۲۲۳۰ A

برهم‌نهی دو تپ ویرانگر است اما در لحظهٔ نشان داده شده تنها ۲cm از پهنای این تپ‌ها بر هم نهاده می‌شوند و چون دامنهٔ موج (۱)، ۱cm و دامنه موج (۲)، ۱/۵cm است، موج برهم‌نهاده در این قسمت ۰/۵cm جابه‌جایی دارد و در ۱cm سمت راست موج (۲) برهم‌نهی رخ نمی‌دهد و جابه‌جایی این قسمت ۱/۵cm است.



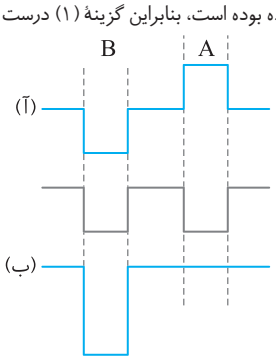
۲ ۲۲۳۱ A

طبق اصل برهم‌نهی، تأثیر دو موج (۱) و (۲) را تک‌تک بررسی می‌کنیم تا اثر خالص که برابر مجموع اثرهای این دو موج است را به‌دست آوریم. در قسمت A، محیط تنها تحت تأثیر موج (۱) است و به اندازهٔ موج (۱) بالا می‌رود. در بخش میانی قسمت B، محیط تحت تأثیر موج (۲) است و در این قسمت محیط به اندازهٔ موج (۲) بالا می‌رود. در قسمت C_1 محیط تحت تأثیر موج (۱) است و بالا می‌رود و در قسمت C_2 دو موج تداخل ویرانگر دارند و محیط تغییری ندارد و در قسمت D_1 محیط تحت تأثیر موج (۲) پایین می‌رود و موج برهم‌نهاده حاصل مطابق شکل زیر است.



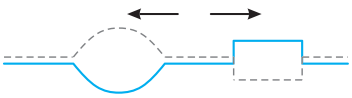
۱ ۲۲۳۲ B

تپ (آ) به صورت روبه‌رو است. این تپ پس از برهم‌نهی با تپ دیگری به صورت (ب) شده است. همان‌طور که مشخص است در این تداخل در قسمت A تداخل ویرانگر و در قسمت B تداخل سازنده بوده است، بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.



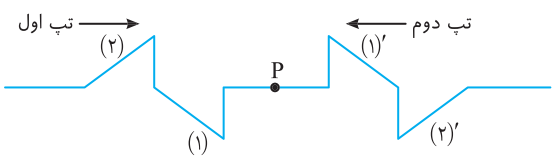
۱ ۲۲۳۳ B

دقت کنید در متن سؤال از شما خواسته شده تپی را رسم کنید که در یک لحظه تپ اول را خنثی کند نه در یک نقطه، یعنی تپی که هم‌زمان قسمت مستطیلی و قسمت خمیده را خنثی کند، بنابراین با توجه به شکل روبه‌رو گزینهٔ (۱) درست است. در واقع دو تپ در لحظهٔ موردنظر قرینهٔ محوری هم هستند و در یک لحظه تپ اول خنثی شده و محیط ساکن به نظر می‌رسد اما بعد از این لحظه تپ اول و دوم از هم جدا می‌شوند و به مسیر خود ادامه می‌دهند.



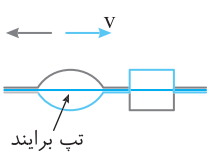
۳ ۲۲۳۴ B

برای آنکه نقطهٔ P ساکن بماند، باید دو تپ در تمام لحظه‌های گذر از نقطهٔ P برهم‌نهی ویرانگر انجام دهند. با توجه به شکل وقتی قسمت (۱) تپ اول به نقطهٔ P می‌رسد می‌خواهد آن را به پایین بیاورد و هم‌زمان با آن قسمت (۱)′ تپ دوم به P می‌رسد و می‌خواهد P را بالا ببرد به همین دلیل P ساکن می‌ماند. در ادامه مسیر، قسمت (۲) تپ اول و قسمت (۲)′ تپ دوم به P می‌رسند و چون تداخل ویرانگر دارند P ساکن می‌ماند بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.



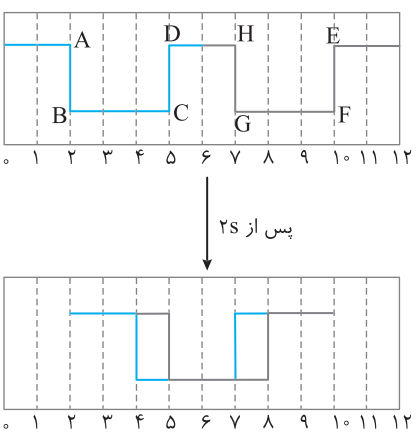
۴ ۲۲۳۵ B

تپ گزینهٔ (۱) تنها در یک لحظه تپ نشان داده شده را خنثی می‌کند و پس از عبور دو تپ از هم، تپ‌ها با همان شکل قبلی منتشر می‌شوند بنابراین هیچ تپی نمی‌تواند برای همیشه تپ نشان داده شده را خنثی کند و آن را از بین ببرد. تپ‌های رسم شده در گزینه (۲) و (۳) در هیچ لحظه‌ای در هم‌پوشانی با تپ اول نمی‌توانند آن را خنثی کنند.

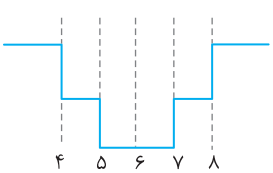


۲ ۲۲۳۶ C

پس از ۲s تپ ABCD و تپ EFGH هر کدام ۲cm به جلو می‌روند.

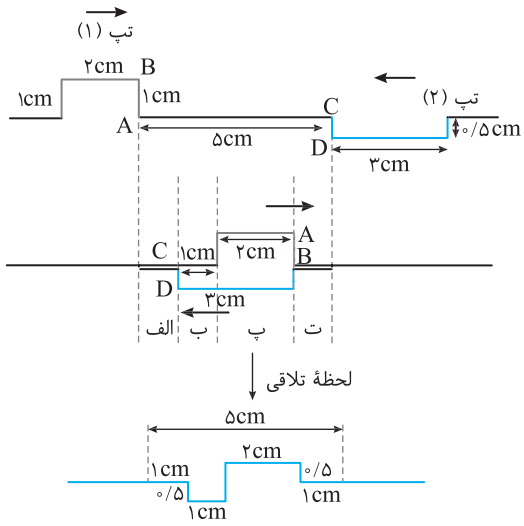


بین ۵ تا ۷، برهم‌نهی سازنده رخ می‌دهد و دامنه دو برابر می‌شود. بین ۴ تا ۵، محیط تنها تحت تأثیر تپ ABCD است و به اندازهٔ یک دامنه پایین می‌آید و بین ۷ تا ۸ نیز محیط تحت تأثیر تپ EFGH یک دامنه پایین می‌آید و شکل به صورت زیر می‌شود:



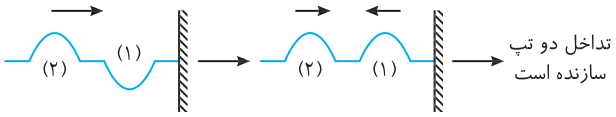
C ۲۲۳۷ ۲

دو تپ هرکدام در مدت ۲s با سرعت ۲cm/s به اندازهٔ ۲×۲=۴cm پیشروی می‌کنند، بنابراین پیشانی تپ (۱) AB را ۴cm به جلو می‌بریم، همچنین تپ (۲) را نیز ۴cm جلو می‌بریم. در قسمت (الف) محیط تحت تأثیر هیچ‌کدام از دو تپ نیست و تغییری نمی‌کند و در قسمت (ب) محیط تنها تحت تأثیر تپ (۲) بوده و به پهنای ۱cm به اندازهٔ ۰/۵cm پایین می‌آید. در قسمت (پ) تداخل ویرانگر است و محیط به اندازهٔ ۰/۵−۱=۰/۵m بالا می‌رود و در قسمت (ت) نیز جابه‌جایی وجود ندارد.

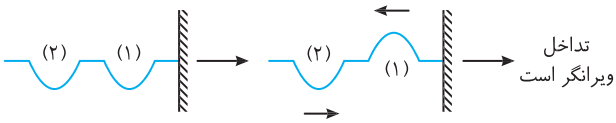


A ۲۲۳۸ ۲

به تپ (شکل) الف نگاه کنید. ابتدا تپ (۱) به انتهای ثابت می‌رسد، در بازتاب از مانع وارونه می‌شود یعنی رو به بالابر می‌گردد، بنابراین مطابق شکل در برگشت وقتی تپ (۱) با تپ (۲) تلاقی می‌کند، تداخل سازنده خواهد بود.

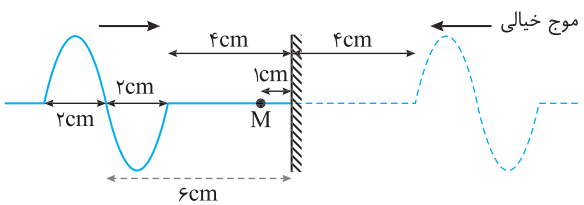


در شکل (ب) وقتی تپ (۱) به انتهای ثابت می‌رسد، در بازتاب از مانع وارونه می‌شود و رو به پایین برمی‌گردد در این صورت تپ بازتابیده می‌خواهد ذرات محیط را بالا ببرد و تپ (۲) می‌خواهد ذرات محیط را پایین بیاورد، بنابراین هنگام تلاقی آن‌ها تداخل ویرانگر است.



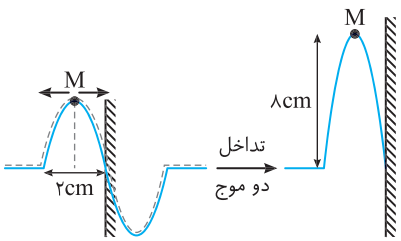
B ۲۲۳۹ ۲

با توجه به تندی موج در مدت ۴s، موج به اندازهٔ ۱/۵ cm/s×۴=۶cm به سمت راست پیشروی می‌کند و می‌دانیم موج پس از برخورد به مانع بازتاب می‌شود اما برای رسم موج بازتاب، از یک موج خیالی کمک می‌گیریم که به سوی مانع از راست به چپ در حرکت است و برهم‌نهادهٔ این موج را وقتی به هم می‌رسند، بررسی می‌کنیم.



پس از ۶cm از پیشروی دو موج، شکل روبه‌رو به‌دست می‌آید.

با توجه به شکل مکان نقطهٔ M از x=۰ به x=+۸cm رسیده بنابراین جابه‌جایی نقطهٔ M برابر ۸cm است.



A ۲۲۴۰ ۲

بسامد از ویژگی‌های چشمه است، یعنی تنها به چشمه بستگی دارد، بنابراین پس از برهم‌نهی نیز بسامد نقاط محیط برابر همان بسامد چشمه است. $\omega=۱۰۰\pi \Rightarrow ۲\pi f=۱۰۰\pi \Rightarrow f=۵۰Hz$

در واقع در تداخل دامنهٔ نقاط مختلف متفاوت خواهد بود، اما بسامد ثابت است.

A ۲۲۴۱ ۳

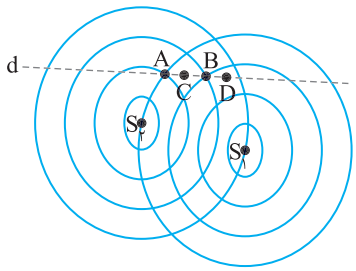
در نقطهٔ P دو موج در حالت برآمده به هم رسیده‌اند (چون P هم روی جبهه موج حاصل از $S_۱$ و هم روی جبهه موج حاصل از $S_۲$ قرار دارد) بنابراین برهم‌نهی در نقطهٔ P سازنده است.

$A_P=A_۱+A_۲$

نقطهٔ Q وسط جبهه‌های موج حاصل از $S_۱$ است بنابراین Q در درهٔ موج حاصل از $S_۱$ است. همچنین نقطهٔ Q روی جبههٔ موج حاصل از $S_۲$ است پس Q در قلهٔ موج حاصل از $S_۲$ است. بنابراین برهم‌نهی در نقطهٔ Q ویرانگر است. $A_Q=|A_۱-A_۲|$

A ۲۲۴۲ ۲

با توجه به شکل دو نقطهٔ A و B بر برآمدگی جبهه‌های موج قرار دارند و برهم‌نهی در این نقاط سازنده است، بنابراین روی خط d تنها A و B دارای تداخل سازنده هستند. نقاط C و D هرکدام دقیقاً وسط دو جبههٔ موج متوالی منبع‌های $S_۱$ و $S_۲$ هستند پس این نقاط دره‌های موج‌های ایجاد شده توسط منبع‌های $S_۱$ و $S_۲$ بوده و چون هر دو دره هستند پس تداخل آن‌ها سازنده است.



A ۲۲۴۳ ۳

برای ایجاد نقش‌های تداخلی واضح روی سطح آب باید فاصلهٔ دو نوسان‌ساز از هم بیشتر از طول موج باشد، از این رو طول موج را حساب می‌کنیم. $\lambda=\frac{v}{f} \Rightarrow \lambda=\frac{۲۰}{۲۰}=۱cm$

بنابراین فاصلهٔ دو نوسان‌ساز از هم باید بیشتر از ۱cm باشد که تنها در گزینهٔ (۳) چنین است.*

A ۲۲۴۴ ۴

با استفاده از دوره و سرعت، طول موج را به دست می‌آوریم:

$\lambda=vT=۰/۴\times ۰/۴=۰/۱۶m=۱۶cm$

با توجه به اینکه اختلاف راه برابر $\frac{۳}{۲}\lambda$ است داریم:

$۵۰-d=\frac{۳}{۲}\lambda \Rightarrow ۵۰-d=\frac{۳}{۲}\times ۱۶ \Rightarrow d=۲۶cm$

B ۲۲۴۵ ۳

بسامد موج را حساب می‌کنیم. $\omega=۲\pi f \Rightarrow ۴\pi=۲\pi f \Rightarrow f=۲Hz$

تندی پیشروی موج‌ها را به دست می‌آوریم. $\lambda=\frac{v}{f} \Rightarrow ۲=\frac{v}{۲} \Rightarrow v=۴cm/s$



نقطهٔ M در فاصلهٔ $x_A=۱cm$ از نوسان‌ساز A و در فاصلهٔ $x_B=۵-۱=۴cm$ از نوسان‌ساز B قرار دارد.

زمان رسیدن موج به این نقطه را به دست می‌آوریم.

$t_B=\frac{x_B}{v_B} \Rightarrow t_B=\frac{۴}{۴}=۱s$ ، $t_A=\frac{x_A}{v_A} \Rightarrow t_A=\frac{۱}{۴}=۰/۲۵s$

پس از ۰/۲۵s موج از نوسان‌ساز A به نقطه M و پس از ۱s از نوسان‌ساز B به نقطهٔ M می‌رسد. بنابراین در لحظهٔ t=۱s برای اولین بار دو موج به نقطهٔ M رسیده و با هم تداخل می‌کنند.

* به شکل ۴-۲۹ صفحهٔ ۱۰۳ کتاب درسی رجوع شود.

B ۲۲۴۶ ۳

نقطهٔ M دارای حرکت هماهنگ ساده است و اگر معادلهٔ حرکت آن را کسینوسی فرض کنیم دامنهٔ نوسان آن در تداخل سازنده دو برابر دامنهٔ هر چشمه است و دوره نوسان نقاط مختلف تحت تأثیر دو موج برابر دوره چشمه می‌باشد.

$$\omega=2\pi f \Rightarrow 20\pi=2\pi f \Rightarrow f=10Hz \Rightarrow T=\frac{1}{f}=0/1s$$

در گزینه‌های (۲) و (۴) دورهٔ روی نمودارها $0/2s$ است، بنابراین این دو گزینه نادرست هستند.
در نقاطی که تداخل دو موج سازنده است دامنه برابر $0/4+0/4=0/8m$ می‌باشد بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.
دقت کنید نقطهٔ M وسط دو چشمه (نوسان‌ساز) روی تشت موج است و به دو چشمه نزدیک است و دامنهٔ هر موج در نقطهٔ M با تقریب خوبی با دامنه چشمه برابر است.

A ۲۲۴۷ ۴

جابه‌جایی نقطهٔ M، حاصل از تأثیر تک‌تک موج‌ها می‌باشد و بنابر اصل برهم‌نهی خواهد شد.

$$y_M=y_1-y_2$$

A ۲۲۴۸ ۱

دو صوت تولیدی از بلندگوها با هم تداخل می‌کنند و در نقاطی صوت دریافتی ضعیف (S) و در نقاطی صوت دریافتی بالا (L) می‌باشد. می‌دانیم در تداخل بسامد تغییر نمی‌کند پس بسامد در تمام نقاط ثابت است امّا دامنهٔ صوت با توجه به تداخل سازنده یا ویرانگر دو صوت متناوباً کم و زیاد می‌شوند.

B ۲۲۴۹ ۴

در انتشار صوت در محیط هر سه پدیده می‌تواند رخ دهد، زیرا شرایط فیزیکی محیط می‌تواند متغیر باشد.

A ۲۲۵۰ ۲

فاصلهٔ بین هر نقطه با صدای بالا (L) از نقطه با صدای ضعیف (S) مجاور آن، متناسب با طول موج (λ) می‌باشد.
افزایش شدت صوت تأثیری بر طول موج ندارد بنابراین گزارهٔ (الف) نادرست است.
اما اگر بسامد صوت افزایش یابد چون تندی موج ثابت است، طول موج کاهش می‌یابد و فاصلهٔ بین L و S کم می‌شود:

$$\lambda=\frac{v}{f} \xrightarrow[\text{ثابت } v]{\text{افزایش می‌یابد } f} \text{فاصلهٔ بین L و S مجاور کم می‌شود.} \Rightarrow \lambda \text{ کاهش می‌یابد}$$

و گزارهٔ (ب) درست است.
در این شکل با تداخل دو موج صوتی سروکار داریم و می‌دانیم که سرعت صوت در آب بیشتر از سرعت صوت در هواست بنابراین:

$$\lambda=\frac{v}{f_{\text{ثابت}}} \xrightarrow[\text{می‌یابد}]{\text{افزایش } v} \text{فاصلهٔ بین L و S مجاور افزایش می‌شود.} \Rightarrow \lambda \text{ افزایش می‌یابد}$$

در نتیجه تنها در حالت (ب)، طول موج کاهش و در نتیجه فاصلهٔ L و S کاهش می‌یابد.

A ۲۲۵۱ ۱

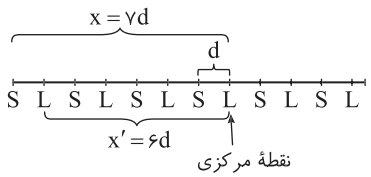
ارتفاع صوت با بسامد در ارتباط است بنابراین افزایش ارتفاع صوت یعنی صوت با بسامد بیشتر و طول موج کمتر و می‌دانیم که فاصلهٔ S و L مجاور هم متناسب با طول موج است و با کاهش طول موج این فاصله کاهش می‌یابد.

$$\lambda=\frac{v}{f\uparrow} \xrightarrow[\text{افزایش یابد}]{\text{بسامد}} \text{فاصلهٔ بین L و S کم می‌شود.} \Rightarrow \text{کاهش می‌یابد } \lambda$$

B ۲۲۵۲ ۳

فاصلهٔ نقاط متوالی که صوت در آن‌ها کمینه یا بیشینه می‌شود از هم ثابت و یکسان می‌باشد. اگر این فاصله را d قرار دهیم با توجه به شکل روبه‌رو فاصلهٔ دو نقطه را از نقطهٔ مرکزی بر حسب d حساب می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x=7d \\ x'=6d \end{cases} \Rightarrow \frac{x'}{x}=\frac{6d}{7d}=\frac{6}{7}$$



میانبر فاصلهٔ n امین صوت بیشینه از صوت مرکزی $2nd$ و فاصلهٔ nامین صوت کمینه از صوت مرکزی $(2n-1)d$ است.

A ۲۲۵۳ ۴

هرگاه یک نور تکفام از لبه‌های یک مانع بگذرد و روی یک پرده، پراش حاصل از نور را مشاهده کنیم، شاهد وجود تعدادی نوار تاریک و روشن به موازات لبه‌های مانع خواهیم بود که به آن نقش پراش گویند. این نوارهای تاریک و روشن ناشی از پدیدهٔ تداخل است.

A ۲۲۵۴ ۳

در آزمایش یانگ به فریزهای (نوارهای) روشن و تاریک که روی پرده تشکیل می‌شود نقش‌های تداخلی گویند.

A ۲۲۵۵ ۳

در آزمایش یانگ وقتی نور تکفام به دو شکاف می‌تابد، در اثر پدیده پراش پراکندگی رخ می‌دهد و دو شکاف رفتاری شبیه دو چشمهٔ همسان خواهند داشت که موج‌های حاصل از آن‌ها با هم تداخل می‌کنند، بنابراین پراش و تداخل رخ می‌دهد. از طرفی روی پرده نوارها بازتاب نور نیز رخ خواهد داد.

A ۲۲۵۶ ۳

پرتو نور از دو رنگ سبز و قرمز تشکیل شده است. هر یک از رنگ‌ها جداگانه پدیدهٔ تداخل را انجام می‌دهند و نوارهای تاریک و روشن خاص خود را به‌وجود می‌آورند و وسط نوار روشن مرکزی که دو نوار مرکزی سبز و قرمز بر آن واقع است، زردرنگ دیده می‌شود.

A ۲۲۵۷ ۲

در شکل (الف)، در نقطهٔ M دو موج همدیگر را تضعیف می‌کنند و تداخل ویرانگر و نوار تاریک است و در شکل (ب) در نقطهٔ N، دو موج همدیگر را تقویت می‌کنند و تداخل سازنده و نوار روشن است.

B ۲۲۵۸ ۴

در نوار روشن تداخل دو موج سازنده می‌باشد و دو موج همدیگر را تقویت کرده و دامنهٔ موج بر هم نهاده برابر است با:

$$A_T=A_1+A_2 \Rightarrow E_{max_T}=E_{max_1}+E_{max_2}=4+4=8$$

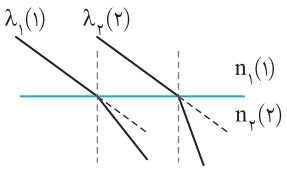
A ۲۲۵۹ ۲

پهنای نوارها در آزمایش یانگ با طول موج رابطهٔ مستقیم دارد. طول موج نور آبی از طول موج نور قرمز کمتر است بنابراین پهنای نوارها کاهش می‌یابد.

A ۲۲۶۰ ۱

پهنای نوارها در آزمایش یانگ با طول موج نور به کار رفته متناسب است. طول موج نور قرمز از طول موج نور بنفش بلندتر است بنابراین پهنای فریزهای تاریک و روشن نور قرمز بیشتر است.
از طرفی طول موج نور قرمز در خلأ از طول موج نور قرمز در آب بلندتر است $(\lambda_{\text{خلأ}}=n\lambda_{\text{آب}})$
پس پهنای فریزها در آزمایش نور قرمز در خلأ از بقیهٔ گزینه‌ها بیشتر است.

A ۲۲۶۱ ۳



پرتوها با ورود به محیط n_2 به خط عمود نزدیک شده‌اند، بنابراین $n_2>n_1$ است. از طرفی طول موج λ_1 کمتر از طول موج λ_2 منحرف شده است از این رو $\lambda_1>\lambda_2$ است. پهنای نوارهای تداخلی در آزمایش یانگ با طول موج متناسب است بنابراین پهنای نوارهای تداخلی در آزمایش یانگ با طول موج λ_1 از پهنای نوارهای تداخلی در آزمایش یانگ با طول موج λ_2 بیشتر است و گزارهٔ (الف) درست است.
وقتی $n_2>n_1$ است، طول موج پرتوهای یک نور تکفام در محیط n_2 کوتاه‌تر از طول موج همان پرتوها در محیط n_1 است. بنابراین پهنای نوارهای تداخلی در محیط n_1 از پهنای نوارهای تداخلی همان پرتو در محیط n_2 بیشتر است و گزارهٔ (ب) درست است.
طول موج λ_1 بلندتر از طول موج λ_2 است. $(\lambda_1>\lambda_2)$ با ورود پرتو (۲) به محیط (۲) طول موج پرتوهای (۲) کاهش می‌یابد $(\lambda'_2<\lambda_2)$، بنابراین طول موج پرتو (۱) در محیط n_1 (λ_1) از طول موج پرتو (۲) در محیط n_2 (λ'_2) بلندتر و پهنای نوارهای تداخلی آن نیز بیشتر است $(\lambda_1>\lambda_2>\lambda'_2)$ و گزاره (پ) نیز درست است.

A ۲۲۶۲ ۳

در پراش پرتوها در شکل (ب)، پراکندگی بیشتر است و در واقع اختلاف طول موج و پهنای شکاف کمتر است و با توجه به یکسان بودن پهنای شکاف در هر دو آزمایش، بنابراین $\lambda_2 > \lambda_1$ است و در آزمایش یانگ با پرتوهای λ_2، پهنای نوارهای تداخلی از پهنای نوارهای تداخلی در آزمایش یانگ با پرتوهای λ_1، بیشتر است $(I_2 > I_1)$.

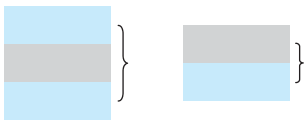
A ۲۲۶۳ ۳

پهنای فریزهای تداخلی به شدت نور به کار رفته در آزمایش بستگی ندارد و به طول موج نور به کار رفته بستگی دارد.

A ۲۲۶۴ ۱

مطابق شکل فاصلهٔ وسط دو نوار روشن متوالی از هم برابر $2I$ (I پهنای هر نوار) می‌باشد.

$$2I = 0/2\text{mm} \Rightarrow I = 0/1\text{mm}$$



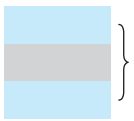
فاصلهٔ یک نوار روشن از نوار تاریک کناری آن برابر یک پهنای نوار $I = 0/1\text{mm}$ است.

$$I = 0/1\text{mm}$$

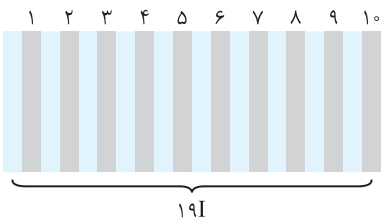
بازی با سؤال **در آزمایش یانگ فاصلهٔ دو نوار روشن متوالی 4mm است. فاصلهٔ وسط دهمین نوار تاریک از وسط نوار روشن روی عمودمنصف چند میلی‌متر است؟** کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۳۸ ۲) ۴۰ ۳) ۴۲ ۴) ۳۶

پاسخ **با توجه به شکل روبه‌رو فاصلهٔ دو نوار روشن متوالی برابر دو پهنای نوار می‌باشد.** $2I = 4\text{mm} \Rightarrow I = 2\text{mm}$



حال فاصلهٔ نوار روشن روی عمودمنصف تا نوار تاریک دهم بعد از آن را به‌دست می‌آوریم: $19I = 19 \times 2 = 38\text{mm}$



البته می‌توانستیم بنویسیم: $x = (2m-1)I = (2\times 10-1)\times 2 \Rightarrow x = 38\text{mm}$

گزینهٔ ۱

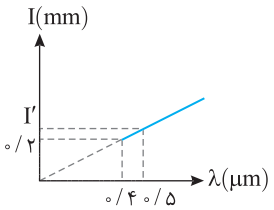
A ۲۲۶۵ ۳

فاصلهٔ نوار تاریک mام بعد از نوار روشن برابر است با:

$$x = (2m-1)I \Rightarrow x = (2m-1)(300\lambda) \xrightarrow{m=5} x = 2700\lambda \Rightarrow \frac{x}{\lambda} = 2700$$

B ۲۲۶۶ ۲

پهنای هر نوار با طول موج متناسب است. بنابراین نمودار پهنای هر نوار بر حسب طول موج نموداری مطابق شکل روبه‌رو است. به کمک تناسب می‌توان پهنای هر نوار را با طول موج $0/5\mu\text{m}$ به‌دست آورد.



$$\frac{I'}{0/5} = \frac{0/2}{0/4} \Rightarrow I' = 0/25\text{mm}$$

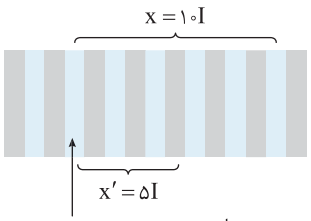
در فاصلهٔ وسط نوار روشن پنجم از وسط نوار مرکزی $2\times 5 = 10$ نوار وجود دارد. از این‌رو:

$$x = 2nI' = 2\times 5\times 0/25 \Rightarrow x = 2/5\text{mm}$$

A ۲۲۶۷ ۲

با توجه به شکل روبه‌رو فاصلهٔ پنجمین نوار روشن و سومین نوار تاریک پس از نوار روشن روی عمودمنصف را برحسب پهنای یک نوار (I) به‌دست می‌آوریم.

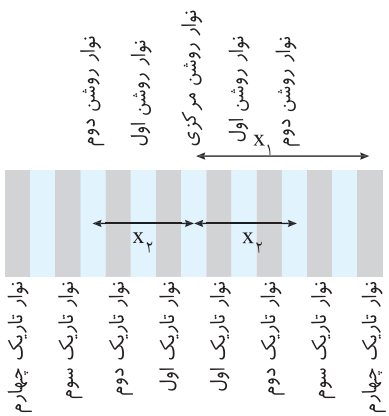
در فاصلهٔ پنجمین نوار روشن تا نوار روشن روی عمودمنصف ۱۰ پهنای نوار و در فاصلهٔ سومین نوار تاریک تا نوار روشن روی عمودمنصف ۵ پهنای نوار وجود دارد. از این‌رو: $\frac{x}{x'} = \frac{10I}{5I} = 2$



A ۲۲۶۸ ۳

در صورت مسأله بیان نشده که نوار روشن و نوار تاریک مورد نظر در یک سمت نوار روشن روی عمودمنصف هستند یا در دو طرف آن، از این رو فاصله را در دو حالت به‌دست می‌آوریم.

فاصلهٔ x_1 روی شکل دقیقاً ۷ برابر پهنای هر نوار است. $x_1 = 7I = 7\times 0/2 = 1/4\text{mm}$



فاصلهٔ x_2 روی شکل را اگر بشمارید ۴ نوار مشاهده می‌کنید. $x_2 = 4I = 4\times 0/2 = 0/8\text{mm}$

اگر دو نوار در دو طرف نوار روشن روی عمودمنصف باشد: $x_1 + x_2 = 1/4 + 0/8 = 2/2\text{mm}$

اگر دو نوار مورد نظر در یک طرف باشند: $|x_1 - x_2| = 0/6\text{mm}$

که تنها $2/2\text{mm}$ در گزینه‌ها است.

A ۲۲۶۹ ۱

در مرکز پرده نوار روشن تشکیل می‌شود و فاصلهٔ وسط نوار nام روشن از وسط نوار روشن که در مرکز پرده تشکیل می‌شود برابر $x = 2nI$ است و فاصلهٔ نوار mام تاریک از نوار روشن که در مرکز پرده تشکیل می‌شود برابر $x = (2m-1)I$ است. (I پهنای هر نوار است) از این رو اگر فاصله نوار از نوار روشن روی عمودمنصف را بر پهنای نوار تقسیم کنیم چنانچه عدد زوج حاصل شود A نوار روشن و اگر عدد فرد به دست آید A نوار تاریک است: $\frac{x}{I} = \frac{1/5\text{mm}}{0/3\text{mm}} = 5$

نسبت $\frac{x}{d}$، عددی فرد شده است، از این رو در نقطهٔ A نوار تاریک تشکیل می‌شود که اکنون شماره این نوار را مشخص می‌کنیم. $2m-1 = 5 \Rightarrow m = 3$

A ۲۲۷۰ ۲

تندی نور در خلأ برای تمام طول موج‌ها یکسان است از این رو:

$$\begin{cases} \lambda_2 = \frac{v}{f_2} \\ \lambda_1 = \frac{v}{f_1} \end{cases} \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{2}{3}$$

فاصلهٔ فریزهای روشن و تاریک متوالی برابر پهنای یک نوار است و می‌دانیم که پهنای نوار با طول موج رابطهٔ مستقیم دارد بنابراین

$$\begin{cases} \frac{I_2}{I_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

A ۲۲۷۱ ۳

پهنای نوارهای تداخلی تشکیل‌شده در آزمایش یانگ با طول موج نور مورد آزمایش رابطهٔ مستقیم دارد بنابراین:

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{\frac{v}{f_2}}{\frac{v}{f_1}}\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=\frac{f_1}{f_2}\xrightarrow{f_2=f_1-\frac{20}{100}f_1}\frac{I_2}{I_1}=\frac{f_1}{\frac{80}{100}f_1}\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=\frac{100}{80}=1/25$$

اکنون درصد تغییر پهنای نوار را حساب می‌کنیم: $\frac{\Delta I}{I_1}\times100=\frac{1/25I_1-I_1}{I_1}\times100=25\%$

بنابراین پهنای هر نوار ۲۵٪ افزایش می‌یابد.

B ۲۲۷۲ ۴

پهنای نوار با طول موج رابطه مستقیم دارد بنابراین:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=\frac{3}{2}\Rightarrow I_2=\frac{3}{2}I_1$$

$$I_2-I_1=0/01mm\Rightarrow\frac{3}{2}I_1-I_1=0/01mm\Rightarrow\frac{I_1}{2}=0/01mm\Rightarrow I_1=0/02mm$$

فاصلهٔ دو نوار روشن مطابق شکل برابر دو پهنای نوار است.

$$2I_1=0/04mm$$

A ۲۲۷۳ ۲

وقتی پرتو از هوا وارد محیطی به ضریب شکست n می‌شود، طول موج آن $(\lambda'=\frac{\lambda}{n})$ می‌شود، از طرفی پهنای هر نوار تاریک و روشن با طول موج متناسب است از این رو:

$$\begin{cases}\lambda'=\frac{\lambda}{n}\\ \frac{I'}{I}=\frac{\lambda'}{\lambda}\end{cases}\Rightarrow I'=\frac{I}{n}$$

بازی با سؤال **آزمایش یانگ در خلأ انجام شده و فاصلهٔ دو نوار روشن که بین آن‌ها سه نوار تاریک قرار گرفته برابر ۱۸ میلی‌متر است. اگر آزمایش را با همان شرایط در محیطی با ضریب شکست $\frac{6}{5}$ تکرار کنیم، فاصلهٔ یک نوار روشن از سومین نوار تاریک پس از آن چند میلی‌متر است؟**

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

پاسخ **مطابق شکل فاصلهٔ دو نوار روشن که بین آن‌ها سه نوار تاریک قرار گرفته برابر است با:**

$$x=6(\text{پهنای نوار})\Rightarrow x=6I\Rightarrow18=6I\Rightarrow I=3mm$$

پهنای نوارها با طول موج رابطهٔ مستقیم دارد:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{I_2}{I_1}=\frac{n_1}{n_2}\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=\frac{1}{\frac{6}{5}}\Rightarrow\frac{I_2}{3}=\frac{5}{6}\Rightarrow I_2=2/5mm$$

گزینهٔ ۳

A ۲۲۷۴ ۳

با گذر نور از هوا به آب طول موج کوتاه‌تر می‌شود و پهنای نوارها و هم‌چنین فاصلهٔ نوارها از هم کاهش می‌یابد.

$$\lambda'=\frac{\lambda}{n}\Rightarrow x'_0=\frac{x_0}{n}\Rightarrow x'_0=\frac{3}{4}x_0$$

A ۲۲۷۵ ۱

پهنای نوارهای تداخلی با طول موج رابطهٔ مستقیم دارد.

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

A ۲۲۷۶ ۲

با توجه به قانون شکست داریم:

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{\frac{9}{4}\times10^6}{3\times10^4}=\frac{3}{4}\xrightarrow{\text{پهنای نوارها با طول موج متناسب است}}\frac{I_2}{I_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{3}{4}$$

A ۲۲۷۷ ۳

با توجه به رابطهٔ اسنل برای شکست نور داریم: $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{n_1}{n_2}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{1}{1/33}=\frac{100}{133}$

پهنای هر نوار با طول موج متناسب است. $\frac{I_2}{I_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Rightarrow\frac{I_2}{b\lambda}=\frac{100}{133}\Rightarrow I_2=\frac{100}{133}b\lambda$

B ۲۲۷۸ ۲

فاصلهٔ نوار روشن پنجم تا نوار روشن مرکزی در حالت اول که پهنای نوار I است برابر $2n I=2\times5I=10I$ است و فاصلهٔ نوار تاریک پنجم تا نوار روشن مرکزی در حالت دوم که پهنای نوار I' است برابر $(2m-1)I'=(2\times5-1)I'=9I'$ می‌باشد.

فرض مسئله: $10I=9I'\Rightarrow\frac{I}{I'}=\frac{9}{10}\xrightarrow{\frac{I}{I'}=\frac{\lambda}{\lambda'}}\frac{\lambda}{\lambda'}=\frac{9}{10}\Rightarrow\frac{450}{\lambda'}=\frac{9}{10}$

$$\Rightarrow\lambda'=500nm$$

بازی با سؤال **در یک آزمایش یانگ یک‌بار از طول موج λ_A و بار دیگر از طول موج λ_B $(\lambda_B-\lambda_A=1200A^\circ)$ استفاده می‌کنیم. اگر نوار روشن روی عمودمنصف را نوار صفر بنامیم و چهارمین نوار روشن در آزمایش λ_B در محل نوار روشن پنجم آزمایش λ_A تشکیل شود، طول موج λ_A چند آنگستروم است؟** $(1A^\circ=10^{-10}m)$

۱) ۳۶۰۰ ۲) ۴۸۰۰ ۳) ۷۲۰۰ ۴) ۶۴۰۰

پاسخ **فاصلهٔ وسط نوار روشن nام از وسط نوار روشن روی عمودمنصف 2n برابر پهنای هر نوار (I) است. در مسأله بیان شده محل تشکیل نوار چهارم روشن λ_A و محل تشکیل نوار پنجم روشن λ_B یکسان است. بنابراین:**

$x_A=x_B$: فاصلهٔ وسط هر نوار از وسط نوار روی عمودمنصف

$$\Rightarrow2n_AI_A=2n_BI_B\Rightarrow5I_A=4I_B\Rightarrow\frac{I_A}{I_B}=\frac{4}{5}$$

از طرفی پهنای هر نوار با طول موج متناسب است از این رو:

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{I_A}{I_B}\Rightarrow\frac{\lambda_A}{\lambda_B}=\frac{4}{5}\xrightarrow{\lambda_B-\lambda_A=1200}\frac{5}{4}\lambda_A-\lambda_A=1200$$

$$\Rightarrow\frac{\lambda_A}{4}=1200\Rightarrow\lambda_A=4800\mathring{A}$$

گزینهٔ ۲

B ۲۲۷۹ ۲

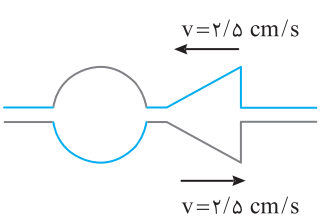
با توجه به صورت مسأله می‌توان نوشت:

$$x=x'\Rightarrow2nI=(2m-1)I'\Rightarrow2\times2I=(2\times3-1)I'\Rightarrow I'=\frac{4}{5}I$$

پهنای نوارها با طول موج متناسب است از این رو: $I'=\frac{4}{5}I\Rightarrow\lambda'=\frac{4}{5}\lambda$

با توجه به رابطهٔ اسنل در پدیده شکست خواهیم داشت: $\lambda'=\frac{\lambda}{n}\Rightarrow\frac{4}{5}\lambda=\frac{\lambda}{n}\Rightarrow n=\frac{5}{4}$

B ۲۲۸۰ ۲



تپ A برای آن که تپ B را در یک لحظه خنثی کند باید قرینهٔ محوری تپ B باشد. سرعت هر دو تپ برابر ۲/۵cm/s است، زیرا سرعت موج به محیط انتشار بستگی دارد و محیط یکسان است.

اگر یک تپ را ساکن و تپ دیگر را این‌طور در نظر بگیریم که با سرعت ۲/۵ cm/s+۲/۵ cm/s=۵ cm/s در حرکت است، هنگامی دو تپ یکدیگر را در یک لحظه خنثی می‌کنند تپ متحرک به اندازهٔ ۶۵+۱۰=۷۵cm پیشروی کند.

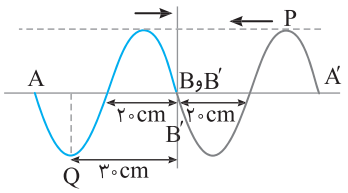
$$\Delta x=vt\Rightarrow75=5t\Rightarrow t=15s$$

C ۲۲۸۱ ۱

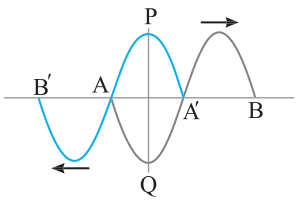
ابتدا مقدار پیشروی موج در مدت ۰/۲s را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow \Delta x = ۱/۵ \times ۰/۲ = ۰/۳m = ۳۰cm$$

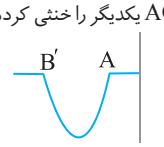
مطابق شکل یک تپ بازتاب تخیلی که همزمان با تپ اصلی به انتهای ثابت می‌رسد را رسم می‌کنیم تپ بازتاب از انتهای ثابت وارونگی دارد از این‌رو تپ بازتاب تخیلی به شکل زیر است.



بعد از ۰/۲s موج رفت و موج بازتاب به اندازهٔ ۳۰cm پیشروی کرده و مطابق شکل روبه‌رو قرار می‌گیرند.

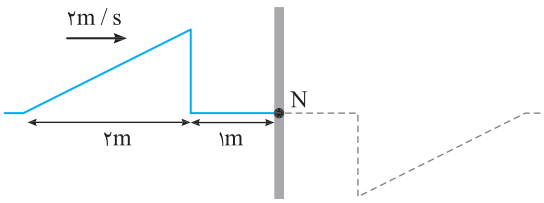


در این صورت دو تپ AP و AQ یکدیگر را خنثی کرده و تنها تپ AB′ باقی می‌ماند.

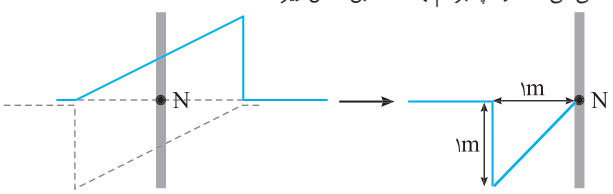


C ۲۲۸۲ ۲

در حل این تست به این نحو عمل می‌کنیم که تپ بازتاب را مطابق شکل در سوی دیگر مانع به‌صورت خط‌چین رسم می‌کنیم سپس مطابق داده‌های مسئله دو تپ را به‌سوی هم می‌فرستیم.



دو تپ پس از ۱s به اندازهٔ ۲m پیشروی می‌کنند و روی نقطه N دو تپ یکدیگر را خنثی می‌کنند و تپ برهم‌نهاده مطابق شکل زیر است.



B ۲۲۸۳ ۴

بسامد موج و طول موج آن را حساب می‌کنیم. $\omega = ۲\pi f \Rightarrow ۴۰\pi = ۲\pi f \Rightarrow f = ۲۰Hz$

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{۵}{۲۰} = \frac{۱}{۴}m = ۲۵cm$$

اختلاف راه دو چشمه از نقطهٔ M برابر است با: $d_۲ - d_۱ = ۵۰ - ۱۲/۵ = ۳۷/۵cm$

در این صورت:

$$\frac{d_۲ - d_۱}{\lambda} = \frac{۳۷/۵}{۲۵} \Rightarrow d_۲ - d_۱ = \frac{۳}{۲}\lambda$$

B ۲۲۸۴ ۱

فاصلهٔ بین L و S با طول موج نسبت مستقیم دارد. از این‌رو طول موج صوت در هوا و هلیم را به‌دست می‌آوریم:

هوا: $\lambda = \frac{v_۱}{f} \Rightarrow \lambda_۱ = \frac{۳۶۰}{۷۲۰} \Rightarrow \lambda_۱ = \frac{۱}{۲}m$

هلیم: $\lambda_۲ = \frac{v_۲}{f} \Rightarrow \lambda_۲ = \frac{۹۶۰}{۷۲۰} \Rightarrow \lambda_۲ = \frac{۴}{۳}m$

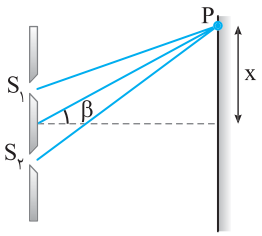
در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{x_۲}{x_۱} = \frac{\lambda_۲}{\lambda_۱} = \frac{\frac{۴}{۳}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۸}{۳}$$

C ۲۲۸۵ ۳

نواری که در مرکز قرار دارد نوار روشن است و فاصلهٔ هر نوار روشن بعد از آن با این نوار برابر $۲nI$ می‌باشد فاصلهٔ P تا نوار روشن روی عمودمنصف را به‌دست می‌آوریم:

$$x = ۲nI = ۲ \times ۲۰ \times ۰/۲ = ۸mm = ۸ \times ۱۰^{-۳}m$$



تانژانت زاویه β برابر ضلع روبه‌رو تقسیم بر ضلع مجاور است.

$$\tan\beta = \frac{۸ \times ۱۰^{-۳}}{۱۶ \times ۱۰^{-۱}} = \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۲} = ۵ \times ۱۰^{-۳}$$

یادآوری ریاضی برای تانژانت زوایای کوچک داریم:

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to ۰} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \to ۰} \frac{۱}{\cos x} \frac{\sin x}{x} = ۱ \times ۱ = ۱$$

بنابراین در زوایای کوچک $\tan x \simeq x$ است همان‌گونه که $\sin x = x$ است.

از این‌رو: $\tan\beta = \beta = ۵ \times ۱۰^{-۳} rad$

B ۲۲۸۶ ۳

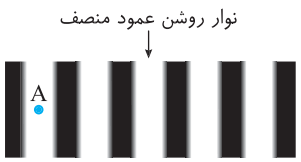
فاصلهٔ فریزهای تاریک و روشن از هم با طول موج نور مورد آزمایش نسبت مستقیم دارد.

در شکل بین نقطهٔ A تا نوار روشن روی عمودمنصف پهنای چهار نوار وجود دارد.

$(x = ۴I$ است) وقتی طول موج نصف می‌شود. پهنای نوارها نصف می‌شود. از این‌رو:

$$I' = \frac{I}{۲} \ , \ x = ۲n'I' = ۴I \Rightarrow ۲n'\frac{I}{۲} = ۴I \Rightarrow n' = ۴$$

یعنی نقطهٔ A روی چهارمین نوار روشن از نوار روشن روی عمودمنصف قرار می‌گیرد.

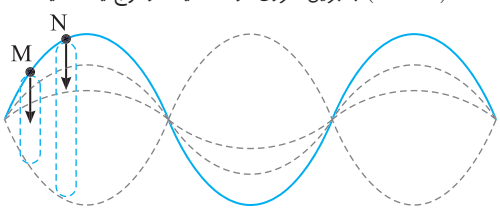


پنجره ۴

A ۲۲۸۷ ۳

تمام ذرات محیط انتشار موج دارای بسامد یکسان هستند و این موضوع دربارهٔ موج ایستاده نیز صدق می‌کند زیرا بسامد از ویژگی‌های چشمه است.

مطابق شکل زیر دامنهٔ نوسان ذرات بین دو گرهٔ متوالی متفاوت است، از طرفی هر ذره از محیط دارای حرکت هماهنگ ساده است و انرژی حرکت هماهنگ ساده با مجذور دامنه متناسب است $(E \propto A^۲)$ بنابراین، انرژی ذرات محیط در موج ایستاده یکسان نیست.

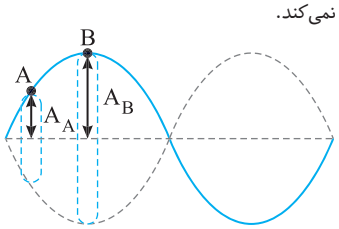


تمام نقاط بین دو گرهٔ متوالی هم‌زمان، با هم بالا و پایین می‌روند و جهت حرکت یکسان دارند. در نتیجه گزینهٔ (۳) درست است.

A ۲۲۸۸ ۱

دامنهٔ نوسانات نقاط دو نقطهٔ روی طناب با هم متفاوت است امّا دامنهٔ یک نقطه مثلاً نقطهٔ A با گذشت زمان ثابت می‌ماند و تغییر نمی‌کند.

بسامد تمام نقاط روی طناب با هم یکسان و برابر بسامد چشمه می‌باشد و این بسامد با گذشت زمان تغییر نمی‌کند.



A ۲۲۸۹ ۴

در امواج ایستاده، تمام نقاط بین دو گره با هم بالا و پایین می‌روند اما دامنهٔ این نقاط از گره تا شکم در حال افزایش است، پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست است. از طرفی تمام نقاط محیط با بسامد موج در نوسان بوده و بسامد آن‌ها یکسان است و گزینهٔ (۳) نیز نادرست است. سرعت هر ذره از محیط هنگام گذر از وضع تعادلش برابر $v_m = A\omega$ بوده که نقطهٔ A دارای دامنهٔ بزرگ‌تری است پس سرعتش بیشتر است و گزینه (۴) درست است.

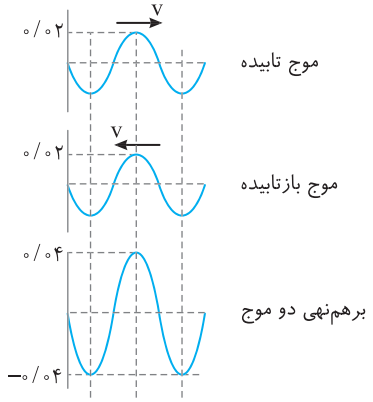
B ۲۲۹۰ ۱

بیشینهٔ تندی نقاط برابر $A\omega$ است. هم‌چنین با توجه به شکل روبه‌رو دامنهٔ نقاط شکم برابر $2A$ است.

در نقاط شکم دو موج یکدیگر را تقویت می‌کنند و تداخل سازنده است بنابراین دامنهٔ نوسان نقاط شکم بنابر اصل برهم نهی خواهد شد: $A_T = A + A = 2A$

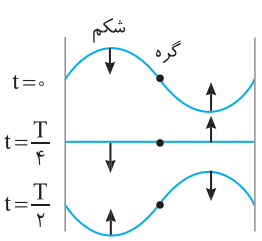
در نتیجه تندی بیشینهٔ نقاط شکم برابر است با:

$$v_{max} = 2A\omega \Rightarrow v_{max} = 0/04 \times 100\pi = 4\pi \ m/s$$



B ۲۲۹۱ ۴

گزینهٔ (۱) قطعاً نادرست است، زیرا یک قسمت طناب نمی‌تواند در یک زمان هم برآمدگی و هم فرورفتگی داشته باشد. در شکل روبه‌رو موج ایستاده در سه لحظهٔ $t=0$ ، $t=\frac{T}{4}$ و $t=\frac{T}{2}$ برای یک طناب نشان داده شده است که مشخص می‌کند گزینه‌های (۲) و (۳) درست است.



A ۲۲۹۲ ۴

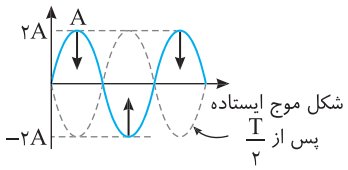
یادآوری در تشکیل امواج ایستاده، در مکان گره‌ها، دو موج همواره در فاز مخالف و در مکان شکم‌ها، دو موج همواره هم‌فاز هستند.

A ۲۲۹۳ ۲

در نقاطی که دو موج همفاز هستند، شکم و در نقاطی که دو موج ناهمفاز هستند، گره تشکیل می‌شود. در نتیجه باید در شکل دو شکم و سه گره وجود داشته باشد که گزینهٔ (۲) درست است.

A ۲۲۹۴ ۳

در مدت نصف دوره $\frac{T}{2}$، هر ذره از یک انتهای مسیرش به انتهای دیگر مسیرش می‌رود و شکل موج نسبت به حالت اول وارونه می‌شود و موج شبیه شکل گزینهٔ (۳) خواهد شد.



A ۲۲۹۵ ۲

در لحظهٔ نشان داده شده در شکل تمام ذرات طناب در دامنهٔ خود قرار دارند و هر ذره دارای حرکت هماهنگ ساده است و در مدت $\frac{T}{4}$ از دامنه به حالت تعادلش می‌رسد.

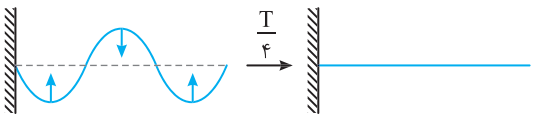
یعنی مکان آن $x=0$ می‌شود.

اکنون به کمک معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده مسأله را حل می‌کنیم.

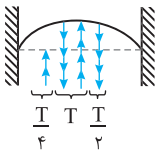
$$x = A\cos\omega t \xrightarrow{x=0} \cos\frac{2\pi}{T}t = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t = (2n-1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow t = (2n-1)\frac{T}{4}$$

بنابراین در زمان‌های $(2n-1)\frac{T}{4}$ در وضع تعادل خود قرار دارد.



B ۲۲۹۶ ۱



ابتدا $t=\frac{7}{4f}$ را بر حسب دوره (T) مشخص می‌کنیم.

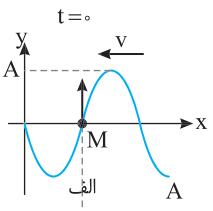
$$T=\frac{1}{f} \Rightarrow t=\frac{7}{4}T=T+\frac{3}{4}T=T+\frac{T}{2}+\frac{T}{4}$$

در یک دوره (T) تار به حالت اولیه بازمی‌گردد و پس از $\frac{T}{2}$، تار به پایین‌ترین نقطه نوسان رفته و بعد از $\frac{T}{4}$ به گذر از حالت تعادل می‌رود و حرکت آن رو به بالا است.

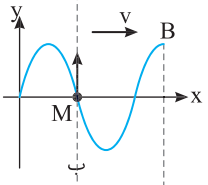
B ۲۲۹۷ ۴

به شکل‌های زیر و توضیحات کنار آن‌ها دقت کنید.

الف) بررسی تداخل در $t=0$:

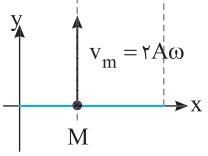


در $t=0$ مطابق شکل موج A می‌خواهد نقطهٔ M را بالا ببرد.



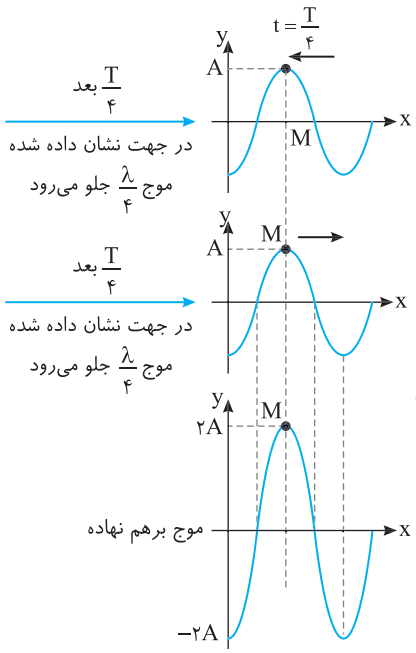
موج B در این لحظه می‌خواهد نقطهٔ M را بالا ببرد یعنی موج A و موج B با هم M را بالا می‌برند،

برهم‌نهادهٔ دو موج در این لحظه سبب می‌گردد که نقطهٔ M دارای بیشینه تندی باشد.



موج برهم نهاده

ب) بررسی تداخل در $t=\frac{T}{4}$:

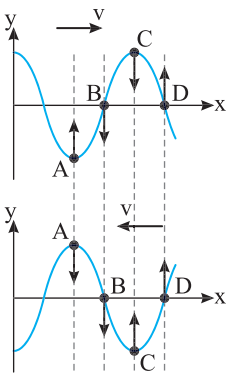


بعد از $\frac{T}{4}$ موج A، M را به دامنه رسانده است و موج B نیز M را به دامنه رسانده است و دامنهٔ نقطهٔ M برابر ۲A می‌شود.

در نتیجه دو موج A و B در محل نقطهٔ M هم‌فاز بوده و در هر لحظه دارای تداخل سازنده هستند.

A ۲۲۹۸ ۲

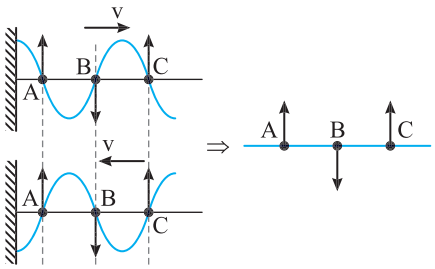
با توجه به شکل‌های روبه‌رو در نقطهٔ A و هم‌چنین در نقطهٔ C دو موج در فاز مخالف هستند و این نقاط بدون حرکت خواهد بود، یعنی موج تابیده در لحظهٔ نشان‌داده شده نقطهٔ A را پایین می‌برد و همان موج بازتابیده نقطهٔ A را بالا می‌برد و دو موج در نقطهٔ A تداخل ویرانگر دارند و A ساکن می‌ماند. برای نقطهٔ C نیز همین گونه است.



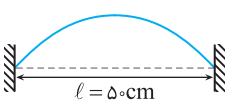
B ۲۲۹۹ ۳

جهت حرکت نقاط A و B و C در موج تابیده و بازتابیده را مشخص می‌کنیم. با توجه به شکل جهت نوسان A، B و C باید به صورت زیر باشد.

در واقع A و B و C نقاط شکم هستند که در حال گذر از وضعیت تعادل خود می‌باشند و موج‌های تابیده و بازتابیده یکدیگر را در این نقاط تقویت می‌کنند.



A ۲۳۰۰ ۴



زمان یک نوسان هر ذره از تار همان دوره نوسان موج است. (T)

بسامد را به‌دست می‌آوریم. $f_n=n\frac{v}{2\ell}\xrightarrow{n=1}f_1=\frac{250}{2\times0/5}\Rightarrow f_1=250\,Hz$

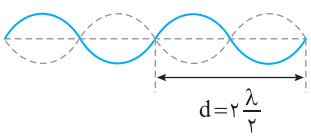
دوره خواهد شد: $T=\frac{1}{f}\Rightarrow T=\frac{1}{250}s\Rightarrow T=4\times10^{-3}s=4ms$

A ۲۳۰۱ ۴

در لحظهٔ نشان داده شده A و B در دامنهٔ خود قرار دارند و می‌دانیم مدت زمانی که طول می‌کشد یک نوسانگر دامنهٔ (نقطهٔ بازگشت) به وضع تعادل خود برسد برابر $\frac{T}{4}$ است. هم‌چنین دورهٔ نوسانات تمام نقاط واقع بر طناب با هم برابر است بنابراین:

$$\frac{\Delta t_A}{\Delta t_B}=\frac{\frac{T}{4}}{\frac{T}{4}}=1$$

A ۲۳۰۲ ۱



فاصلهٔ هر دو گرهٔ متوالی در موج ایستاده برابر $\frac{\lambda}{2}$ است. با توجه به شکل فاصلهٔ سه گره متوالی خواهد شد: $d=\frac{2\lambda}{2}=\lambda$

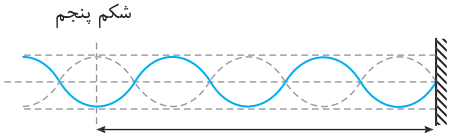
A ۲۳۰۳ ۲

ابتدا شکل موج ایستاده را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل موج ایستاده‌ای که رسم شده است، فاصلهٔ شکم پنجم را بر حسب طول موج از روی شکل مشخص می‌کنیم و طول موج را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{9\lambda}{4}=45\Rightarrow\lambda=20cm=0/2m$$

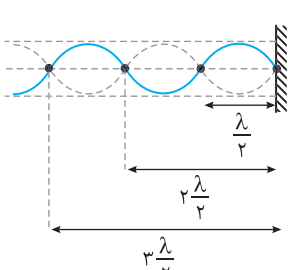
اکنون می‌توان بسامد را حساب کرد: $f=\frac{v}{\lambda}\Rightarrow f=\frac{36}{0/2}\Rightarrow f=180\,Hz$

شکم پنجم



$$9\frac{\lambda}{4}=45cm$$

B ۲۳۰۴ ۲



خط فکری

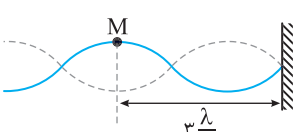
در بازتاب از انتهای ثابت و تشکیل امواج ایستاده، در محل انتهای ثابت، گره تشکیل می‌شود از طرفی فاصلهٔ دو گرهٔ متوالی از هم $\frac{\lambda}{2}$ است و با توجه به شکل فاصلهٔ گره‌ها از انتهای ثابت مضرب صحیح نصف طول موج یعنی $d=n\frac{\lambda}{2}$ می‌شود.

بنابراین ابتدا طول موج را به‌دست می‌آوریم: $\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{20}{200}=0/1\,m$

در این صورت فاصلهٔ گره‌ها از انتهای ثابت برابر خواهد شد با:

$$d=n\frac{\lambda}{2}\Rightarrow d=0/05\,n$$

B ۲۳۰۵ ۲



با توجه به شکل نقطهٔ M شکم است و فاصلهٔ آن از انتهای ثابت $3\frac{\lambda}{4}$ است.

از طرفی بسامد زاویه‌ای نوسان $\omega=60\pi\,rad/s$ می‌باشد:

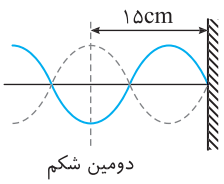
$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow60\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{1}{30}s$$

طول موج برابر خواهد شد با: $\lambda=vT\Rightarrow\lambda=12\times\frac{1}{30}\Rightarrow\lambda=0/4\,m$

فاصلهٔ M از انتهای ثابت $=3\frac{\lambda}{4}=3\times\frac{0/4}{4}=0/3\,m$

۱ ۲۳۰۶ A

مطابق شکل فاصلهٔ دومین شکم تا انتهای ثابت برابر $\frac{3}{4}\lambda$ است از این‌رو: $\frac{3}{4}\lambda=15\Rightarrow\lambda=20cm$



تندی انتشار موج در ریسمان برابر خواهد شد با:

$v=f\lambda\Rightarrow v=100\times0/2=20m/s$

رابطهٔ تندی در ریسمان برابر است با:

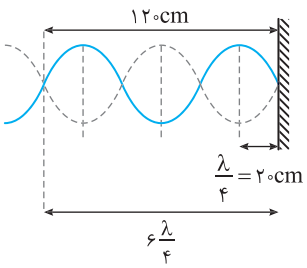
$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\Rightarrow 20=\sqrt{\frac{F}{20\times10^{-3}}}\Rightarrow 400=\frac{F}{20\times10^{-3}}\Rightarrow F=8N$$

۱ ۲۳۰۷ B

راه‌حل اول: ابتدا طول موج را به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{40}{50}\Rightarrow\lambda=0/8m=80cm$$

شکل ریسمان را رسم می‌کنیم. در فاصلهٔ $20cm$ یعنی $\frac{\lambda}{4}$ از انتهای ثابت، شکم تشکیل می‌شود و در نقطهٔ A دو موج همفازند و در فاصلهٔ $120cm$ از انتهای ثابت گره تشکیل شده است و دو موج در نقطهٔ B ناهمفازند.



راه‌حل دوم: با توجه به شکل، در نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از انتهای ثابت مضرب فرد $\frac{\lambda}{4}$ است شکم تشکیل می‌شود و در نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از انتهای ثابت مضرب زوج $\frac{\lambda}{4}$ است گره تشکیل می‌شود. بنابراین می‌توان فاصلهٔ داده شده را به $\frac{\lambda}{4}$ تقسیم کنیم اگر عدد حاصل فرد شد آن نقطه شکم و دو موج در آن نقطه همفاز هستند و اگر عدد حاصل زوج شد آن نقطه گره و دو موج در آن نقطه ناهمفاز هستند.

$$\frac{d}{\frac{\lambda}{4}}=\frac{120}{\frac{80}{4}}=6\xrightarrow{\text{عدد زوج}}\text{گره}\Rightarrow\text{دو موج ناهمفازند}$$

$$\frac{d}{\frac{\lambda}{4}}=\frac{20}{\frac{80}{4}}=1\xrightarrow{\text{عدد فرد}}\text{شکم}\Rightarrow\text{دو موج همفازند}$$

۳ ۲۳۰۸ A

فاصلهٔ دو گره متوالی از هم برابر $\frac{\lambda}{2}$ است.

با کاهش بسامد دیاپازون و ثابت بودن سرعت انتشار موج در تار با توجه به رابطهٔ $\lambda=\frac{v}{f}$، طول موج افزایش می‌یابد و فاصلهٔ گره‌ها از هم زیاد می‌شود.

۳ ۲۳۰۹ B

نکتهٔ مهمی که باید شما به آن دقت کنید این است که بسامد تشدیدی در دو حالت همان بسامد دیاپازون است. اما با افزایش نیروی کشش تار، تندی انتشار موج در تار افزایش می‌یابد. $(\uparrow v=\sqrt{\frac{F\uparrow}{\mu}})$ بنابراین طول موج نیز افزایش می‌یابد. $(\uparrow\lambda=\frac{v\uparrow}{f_{\text{ثابت}}})$ با افزایش طول موج، فاصلهٔ گره‌ها از هم افزایش می‌یابد.

۴ ۲۳۱۰ B

فاصلهٔ نزدیک‌ترین گره تا نقطهٔ ثابت برابر $\frac{\lambda}{2}$ است. بنابراین طول موج در حالت اول برابر است با:

$$\frac{\lambda}{2}=20\Rightarrow\lambda_1=40cm$$

چون تندی موج $(v=f\lambda)$ در این تار ثابت است، بنابراین:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{f_1}{f_2}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{40}=\frac{20}{10}\Rightarrow\lambda_2=80cm$$

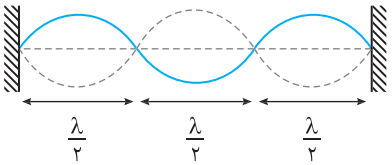
فاصلهٔ شکم‌ها از انتهای ثابت برابر است با مضرب فرد $\frac{\lambda}{4}$:

$$d=(2n-1)\frac{\lambda}{4}\Rightarrow\begin{cases}n=1\Rightarrow d=(2\times1-1)\times\frac{80}{4}=20cm\\ n=2\Rightarrow d=(2\times2-1)\times\frac{80}{4}=60cm\\ n=3\Rightarrow d=(2\times3-1)\times\frac{80}{4}=100cm\\ n=4\Rightarrow d=(2\times4-1)\times\frac{80}{4}=140cm\end{cases}$$

۳ ۲۳۱۱ B

شکل تار در هماهنگ سوم مطابق شکل روبه‌رو است با توجه به شکل طول تار برابر $\frac{3\lambda}{2}$ و تعداد گره‌ها در تار برابر ۴ است، فاصلهٔ دو گره متوالی برابر $\frac{\lambda}{2}$ است، بنابراین:

$$\ell=3\frac{\lambda}{2}\Rightarrow60=3\frac{\lambda}{2}\Rightarrow\frac{\lambda}{2}=20cm$$



۲ ۲۳۱۲ B

۱ تندی انتشار موج در تار را حساب می‌کنیم.

$$f_n=\frac{nv}{2\ell}\xrightarrow[f_1=125Hz,\ \ell=1m]{\text{مد اصلی }n=1}125=\frac{v}{2\times1}\Rightarrow v=250m/s$$

۲ چگالی خطی جرم را به‌دست می‌آوریم.

$$\mu=\frac{m}{\ell}\xrightarrow[\ell=1m]{m=9g=9\times10^{-3}kg}\mu=9\times10^{-3}kg/m$$

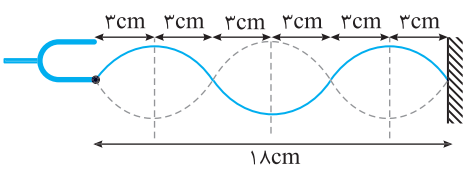
۳ نیروی کشش تار خواهد شد:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\Rightarrow250=\sqrt{\frac{F}{9\times10^{-3}}}\Rightarrow(250)^2=\frac{F}{9\times10^{-3}}$$

$$\Rightarrow F=562500\times10^{-3}N\Rightarrow F=562/5N$$

۳ ۲۳۱۳ B

با توجه به شکل در طول تار، سه شکم و چهار گره تشکیل می‌شود.



۳ ۲۳۱۴ A

طول تار مرتعش مضرب صحیحی از نصف طول موج است $(\ell=n\frac{\lambda}{2})$ بنابراین کافی است اعداد گزینه‌ها را بر $\frac{\lambda}{2}$ تقسیم کنیم خارج قسمت هر کدام که عدد صحیح باشد آن عدد می‌تواند طول تار باشد.

$$n=\frac{\ell}{\frac{\lambda}{2}}\Rightarrow\frac{92}{8}=11/5\text{ غ ق ق}\quad,\quad\frac{46}{8}=5/75\text{ غ ق ق}$$

$$\frac{24}{8}=3\text{ ق ق}\quad,\quad\frac{12}{8}=1/5\text{ غ ق ق}$$

A ۲۳۱۵ ۳

خط فکری در یک تار مرتعش طول تار مضرب صحیحی از نصف طول موج است، بنابراین خارج قسمت طول تار به نصف طول موج باید عددی صحیح شود $(\frac{\ell}{\frac{\lambda}{2}}=n)$.

حال اعداد داده شده در گزینه‌ها را طبق این شرط امتحان می‌کنیم:

$\frac{\ell}{\frac{\lambda}{2}}=\frac{۴۰}{۸}=۵$ ق ق ، $\frac{\ell}{\frac{\lambda}{2}}=\frac{۲۴}{۸}=۳$ ق ق

در نتیجه طول داده شده در گزینهٔ (۳) نمی‌تواند طول تار باشد. $\Rightarrow$ $\frac{\ell}{\frac{\lambda}{2}}=\frac{۱۲۰}{۸}=۱۵$ ق ق ، $\frac{\ell}{\frac{\lambda}{2}}=\frac{۶۰}{۸}=۷/۵$ غ ق ق

A ۲۳۱۶ ۱

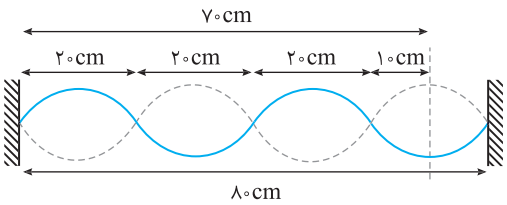
نکته در یک تار دو سر بسته اگر تعداد شکم‌ها در تار n باشد تعداد گره‌ها $n+۱$ است.

از این رو می‌توان نوشت: $(n)+(n+۱)=۷\Rightarrow n=۳$

بنابراین تار هماهنگ سوم خود را تولید می‌کند و طول موج خواهد شد: $\lambda=\frac{۲\ell}{۳}$

A ۲۳۱۷ ۳

با توجه به‌صورت پرسش، شکل موج ایستاده در طناب را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل، فاصلهٔ اولین گره تا آخرین شکم برابر ۷۰cm می‌شود.



A ۲۳۱۸ ۳

طول موج در تار مرتعش به طول تار و شمارهٔ هماهنگ آن بستگی دارد، در این صورت:

$$\ell=\frac{n\lambda}{۲}\Rightarrow\lambda=\frac{۲\ell}{n}\begin{cases}\lambda_۱=\frac{۲\ell}{۱}\\ \lambda_۲=\frac{۲\ell}{۳}\end{cases}\Rightarrow\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{\frac{۲\ell}{۳}}{۲\ell}=\frac{۱}{۳}$$

B ۲۳۱۹ ۳

طول تار $\lambda=۱/۸m$ می‌باشد و $\Delta\lambda=۱۸cm$ است بنابراین:

$$\lambda=\frac{۲\ell}{n}\Rightarrow\lambda_{n-۱}=\frac{۲\ell}{n-۱}\Rightarrow\Delta\lambda=\frac{۲\ell}{n-۱}-\frac{۲\ell}{n}$$

$$۱۸=\frac{۳۶۰}{n-۱}-\frac{۳۶۰}{n}\Rightarrow\frac{۱}{n-۱}-\frac{۱}{n}=\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow\frac{n-n+۱}{n^۲-n}=\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow n^۲-n-۲۰=۰$$

$$\Rightarrow(n-۵)(n+۴)\Rightarrow n=۵$$

بنابراین طول موج کوتاه‌تر $n=۵$ یا هماهنگ پنجم تار می‌باشد:

$$\lambda=\frac{۲\ell}{۵}\Rightarrow\lambda=\frac{۲\times۱/۸}{۵}\Rightarrow\lambda=۰/۷۲m=۷۲cm$$

A ۲۳۲۰ ۱

هرگاه بسامد دو هماهنگ متوالی یک تار مرتعش با دو انتهای ثابت را از هم کم کنیم، بسامد هماهنگ اصلی به‌دست می‌آید.

$$f_{n+۱}-f_n=(n+۱)f_۱-nf_۱=f_۱\Rightarrow f_۱=۲۵۰-۲۰۰=۵۰Hz$$

B ۲۳۲۱ ۱

نکته اختلاف بسامد دو مُد متوالی یک تار مرتعش برابر بسامد اصلی تار است.

$$f_{n+۱}-f_n=f_۱$$

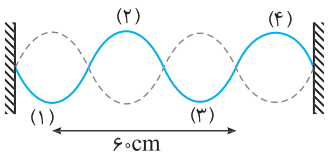
بسامد اصلی تار را به‌دست می‌آوریم. $f_۱=۲۸۰-۲۴۰\Rightarrow f_۱=۴۰Hz$

یادآوری بسامد مُد nام تار، n برابر بسامد صوت اصلی آن است. $f_n=nf_۱$

هر گزینه که ضریب صحیح $f_۱=۴۰Hz$ نباشد، نمی‌تواند بسامد تشدید این تار باشد.

بنابراین گزینه (۱) نمی‌تواند بسامد تشدید تار باشد. $\frac{۶۰}{۴۰}=۱/۵$

A ۲۳۲۲ ۴



شمارهٔ هماهنگ یا شمارهٔ مد برابر تعداد شکم‌های ایجاد شده در طول تار است: $n=۴$

بنابراین تار مُد چهارم خود را ایجاد کرده است.

فاصلهٔ دو گره یا دو شکم متوالی برای $\frac{\lambda}{۲}$ و فاصلهٔ یک گره از شکم مجاور برابر $\frac{\lambda}{۴}$ است

با توجه به شکل مسأله:

$$\frac{\lambda}{۴}+\frac{\lambda}{۲}+\frac{\lambda}{۲}=۶۰\Rightarrow\frac{۵\lambda}{۴}=۶۰\Rightarrow\lambda=۴۸cm\xrightarrow{\lambda=v/f}۴۸\times۱۰^{-۲}=\frac{۶۰}{f}$$

$$\Rightarrow f=\frac{۶۰}{۴۸\times۱۰^{-۲}}\Rightarrow f=۱۲۵Hz$$



A ۲۳۲۳ ۳

در طول طناب چهار گره تشکیل شده است از این‌رو $n=۴-۱=۳$ بنابراین بسامد طناب برابر است با: $f_n=\frac{nv}{۲\ell}\Rightarrow f=\frac{۳\times۲۴۰}{۲\times۰/۶}\Rightarrow f=۶۰۰Hz$

A ۲۳۲۴ ۲

در تار با دو انتهای ثابت، شمارهٔ هماهنگ (n) از تعداد گره‌ها یک واحد کمتر است.

$$n=۵-۱=۴\qquad f_n=\frac{nv}{۲\ell}\Rightarrow۴۰۰=\frac{۴v}{۲\times۰/۴}\Rightarrow v=۸۰m/s$$

B ۲۳۲۵ ۳

با توجه به این‌که دو انتهای تار ثابت است، فاصلهٔ دو گرهٔ متوالی برابر $\frac{\lambda}{۲}$ است، بنابراین:

$$\frac{\lambda}{۲}=۱۰cm\Rightarrow\lambda=۲۰cm=۰/۲m$$

با استفاده از رابطهٔ سرعت انتشار موج داریم: $v=\lambda f=۰/۲\times۵۰۰=۱۰۰m/s$

چون در تار با دو انتهای ثابت، شمارهٔ هماهنگ برابر $(n-۱)$ تعداد گره‌ها) می‌باشد، تار هماهنگ چهارم خود را ایجاد می‌کند. حال با استفاده از رابطهٔ طول موج تار با دو انتهای ثابت، می‌توان نوشت: $\ell=n\frac{\lambda}{۲}\Rightarrow\ell=۴\times\frac{۰/۲}{۲}=۰/۴m$

A ۲۳۲۶ ۳

اختلاف دو هماهنگ متوالی یک تار برابر هماهنگ اصلی یک تار می‌باشد:

$$f_{n+۱}-f_n=f_۱\Rightarrow f_۱=۱۲۵Hz$$

در تار سه گره ایجاد شده است بنابراین مد دوم $(n=۲)$ را ایجاد کرده است و هماهنگ بعد از آن مد سوم است $(n=۳)$ از این رو: $f_۳=۳\times۱۲۵=۳۷۵Hz$

B ۲۳۲۷ ۱

یادآوری بسامدهای تشدیدی یک تار با دو انتهای بسته از رابطهٔ $f=n\frac{v}{۲\ell}$ به‌دست می‌آید که در آن v تندی انتشار موج در تار، L طول تار و n شمارهٔ مُد آن است.

نکته اختلاف دو بسامد متوالی تشدید یک تار دو انتها بسته برابر بسامد صوت (مُد) اصلی تار است. $f_{n+۱}-f_n=f_۱$

۱ بسامد صوت اصلی تار خواهد شد: $f_۱=۲۲۵-۱۵۰=۷۵Hz$

۲ تندی انتشار موج در تار را حساب می‌کنیم:

$$f_۱=\frac{v}{۲\ell}\xrightarrow{L=۰/۵m}۷۵=\frac{v}{۲\times۰/۵}\Rightarrow v=۷۵m/s$$

بازی با سوال **رشته‌ای از بسامدهای تشدیدی یک تار با دو انتهای ثابت عبارت است از ۱۵۰Hz، ۳۰۰Hz و ۳۷۵Hz و ۴۵۰Hz است. در این رشته یک بسامد (بین ۱۰۰ تا ۵۰۰ هرتز) جا افتاده است. این بسامد چند هرتز است و بسامد ۴۵۰Hz مربوط به مد چندم این تار است؟** از کتاب درسی

۱) ۲۰۰ و سوم ۲) ۲۰۰ و ششم ۳) ۲۲۵ و سوم ۴) ۲۲۵ و ششم

پاسخ تفاضل دو بسامد متوالی در تار مرتعش برابر بسامد اصلی تار می‌باشد.

$۳۰۰-۱۵۰=۱۵۰Hz$

$۳۷۵-۳۰۰=۷۵Hz$

$۴۵۰-۳۷۵=۷۵Hz$

همان‌طور که مشخص است تفاضل دو بسامد متوالی باید ۷۵Hz باشد و بسامد جاافتاده بین ۱۵۰ هرتز تا ۳۰۰ هرتز خواهد بود.

$$۱۵۰Hz \xrightarrow{+۷۵Hz} \underbrace{۲۲۵Hz}_{\text{جا افتاده}} \xrightarrow{+۷۵Hz} ۳۰۰Hz$$

بسامد مُد nام برابر است با $f_n=nf_1$ بنابراین: $۴۵۰=n(۷۵)\Rightarrow n=۶$

بسامد ۴۵۰Hz مربوط به مد ششم است.

گزینهٔ ۴

B ۲ ۲۳۲۸

با توجه به اینکه مدهای یک تار ضریب طبیعی از مد اصلی آن است:

$$f_n=nf_1\Rightarrow\begin{cases}f'=(m-1)f_1\\f''=(m+1)f_1\end{cases}\Rightarrow f'+f''=(m-1)f_1+(m+1)f_1$$

$$\Rightarrow f'+f''=mf_1-f_1+mf_1+f_1\Rightarrow ۲mf_1=f'+f''\Rightarrow ۲f_m=f'+f''$$

$$\Rightarrow f_m=\frac{f'+f''}{۲}$$

B ۴ ۲۳۲۹

نکته در یک تار مرتعش دو انتها بسته بسامد هماهنگ nام برابر است با:

$$f_n=\frac{nv}{۲\ell}$$

هماهنگ اول و دوم یک تار دو انتها بسته برابر است با:

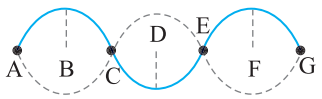
$$f_n=\frac{nv}{۲\ell}\Rightarrow\begin{cases}f_1=\frac{v}{۲\ell}\\f_۲=\frac{۲v}{۲\ell}\end{cases}\Rightarrow f_1+f_۲=\frac{۳v}{۲\ell}\Rightarrow\frac{۳v}{۲\times۰/۴}=۳۷۵\Rightarrow v=۱۰۰m/s$$

تندی موج در تار از رابطهٔ $v=\sqrt{\frac{F\ell}{m}}$ به‌دست می‌آید:

$$۱۰۰=\sqrt{\frac{F\times۰/۴}{۱۰^{-۲}}}\Rightarrow ۱۰^۴=\frac{F\times۰/۴}{۱۰^{-۲}}\Rightarrow F=\frac{۱۰۰}{۰/۴}=۲۵۰N$$

B ۳ ۲۳۳۰

شکل موج ایستاده ایجاد شده مانند روبه‌رو است پس در نقاط D و F که شکم ایجاد شده کاغذهای تا خورده ممکن است بیفتد و در نقطهٔ E با توجه به گره بودن جابه‌جایی ندارد و کاغذ نمی‌افتد.



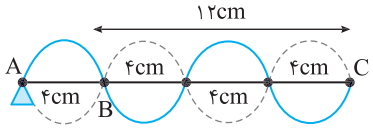
B ۲ ۲۳۳۱

کمترین بسامد خواسته شده است یعنی بیشترین طول موج را باید بررسی کنیم. در محل گیره، گره تشکیل می‌شود و برای آن که طول موج بیشینه باشد باید بین A و B مطابق شکل، گره‌ای ایجاد نشود در این صورت طول موج برابر خواهد شد با:

$$\frac{\lambda}{۲}=۴\Rightarrow\lambda=۸cm$$

در این صورت بسامد برابر است با:

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow ۸\times۱۰^{-۲}=\frac{۲۰}{f}\Rightarrow f=\frac{۲۰۰۰}{۸}\Rightarrow f=۲۵۰Hz$$

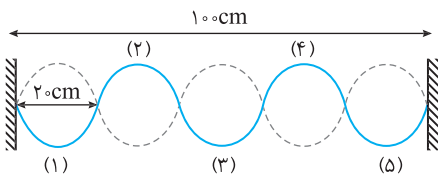


B ۲ ۲۳۳۲

تار با بسامد ثابت ۸۰Hz در نوسان است و در فاصلهٔ ۲۰cm از یک انتهای ثابت در در تار گره تشکیل شده است. برای آنکه تندی بیشینه باشد باید طول موج بلندترین باشد.

بنابراین باید بین انتهای ثابت و گره در ۲۰ سانتی‌متری، گرهٔ دیگر وجود ($\lambda\uparrow=\frac{v'\uparrow}{f_{\text{ثابت}}}$) نداشته باشد (مطابق شکل) در این صورت: $\frac{\lambda}{۲}=۲۰\Rightarrow\lambda=۴۰cm$ و تندی انتشار موج خواهد شد:

$$v=f\lambda=۸۰\times۰/۴\Rightarrow v=۳۲m/s$$



A ۳ ۲۳۳۳

چگالی خطی تار را حساب می‌کنیم.

$$\mu=\frac{m}{\ell}\xrightarrow[\ell=۰/۶m]{m=۶\times۱۰^{-۳}kg}\mu=\frac{۶\times۱۰^{-۳}}{۰/۶}\Rightarrow\mu=۱۰^{-۲}\frac{kg}{m}$$

تندی انتشار موج در تار را به‌دست می‌آوریم.

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\xrightarrow{F=۳۲۴N}v=\sqrt{\frac{۳۲۴}{۱۰^{-۲}}}\Rightarrow v=۱۸۰m/s$$

بسامد هماهنگ چهارم خواهد شد: $f_n=\frac{nv}{۲\ell}\Rightarrow f_۴=\frac{۴\times۱۸۰}{۲\times۰/۶}\Rightarrow f=۶۰۰Hz$

B ۱ ۲۳۳۴

یادآوری ۱ تندی انتشار تار برابر است با:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{F\ell}{m}}=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}=\frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}$$

(طول تار، نیروی کشش، $\frac{m}{\ell}$ چگالی خطی، جرم، چگالی، قطر مقطع تار)

یادآوری ۲ بسامد هماهنگ nام در تار مرتعش برابر است با:

$$f_n=\frac{nv}{۲\ell}$$ (طول تار)

$$f_۳=\frac{۳\times v}{۲\ell}\Rightarrow ۲۱۰=\frac{۳\times v}{۲\times۰/۵}\Rightarrow v=v_۰m/s$$

سرعت پیشروی موج در تار برابر است با:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\xrightarrow[v=۷۰m/s]{\mu=\frac{m}{L}=\frac{۵\times۱۰^{-۳}}{۵\times۱۰^{-۲}}}۷۰=\sqrt{\frac{F}{۱۰^{-۲}}}\Rightarrow ۴۹۰۰=\frac{F}{۱۰^{-۲}}\Rightarrow F=۴۹N$$

A ۳ ۲۳۳۵

ابتدا تندی انتشار موج عرضی را در این تار به‌دست می‌آوریم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\xrightarrow[۴\times۱۰^{-۱}]{\mu=\frac{m}{L}=\frac{۸\times۱۰^{-۳}}{۴\times۱۰^{-۱}}=۲\times۱۰^{-۲}}v=\sqrt{\frac{۲۸۸}{۲\times۱۰^{-۲}}}=۱۲۰m/s$$

$$f=\frac{nv}{۲\ell}\Rightarrow ۴۵۰=\frac{n\times۱۲۰}{۲\times۰/۴}\Rightarrow n=۳$$

تعداد گره‌ها برابر است با: $n=\text{تعداد گره}-۱\Rightarrow\text{تعداد گره}=۳+۱=۴$

A ۲ ۲۳۳۶

ابتدا سرعت موج در سیم را حساب می‌کنیم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}=\sqrt{\frac{۳۱۲}{۷۸۰۰\times۱۰^{-۶}}}\Rightarrow v=۲۰۰m/s$$

فاصلهٔ دو گرهٔ متوالی برابر $\frac{\lambda}{۲}$ است، از این رو:

$$\frac{\lambda}{۲}=۲۰\Rightarrow\lambda=۰/۴m$$

$$v=f\lambda\Rightarrow ۲۰۰=f\times۰/۴\Rightarrow f=۵۰۰Hz$$

B ۲۳۳۷ ۴

ابتدا سرعت انتشار موج در تار را به‌دست می‌آوریم:

$$v=\frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}\Rightarrow v=\frac{۲}{۰/۵\times۱۰^{-۳}}\sqrt{\frac{۶۰}{۳\times۸۰۰۰}}\Rightarrow v=۴\times۱۰^{۳}\left(\frac{۱}{۲۰}\right)$$

$$\Rightarrow v=۲۰۰\,m/s, f_n=\frac{nv}{۲\ell}\xrightarrow{n=۴-۱} f_n=\frac{۳\times۲۰۰}{۲\times۰/۳}=۱۰۰۰\,Hz$$

A ۲۳۳۸ ۳

بسامد هماهنگ یک تار با دو انتهای ثابت برابر $f_n=\frac{nv}{۲\ell}$ است که در آن v سرعت انتشار موج در تار است.

دو تار هم‌جنس بوده و با نیروی کشش یکسان کشیده شده‌اند، از این‌رو:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}\xrightarrow{\rho_۲=\rho_۱, F_۲=F_۱}\frac{v_۱}{v_۲}=\frac{D_۲}{D_۱}\qquad (۱)$$

با توجه به رابطهٔ بسامد برای تار مرتعش داریم

$$f=n\frac{v}{۲\ell}\xrightarrow[\ell_۱=\ell_۲]{n_۱=n_۲=۱}\frac{f_۱}{f_۲}=\frac{v_۱}{v_۲}\xrightarrow{\text{رابطهٔ }(۱)}\frac{f_۱}{f_۲}=\frac{D_۲}{D_۱}\Rightarrow\frac{f_۱}{f_۲}=\frac{۱}{۲}$$

B ۲۳۳۹ ۲

برای تشدید باید بسامد دو تار با هم برابر باشد. در صورت سؤال گفته شده در تار A، $n+۱$ گره تشکیل شده است از این‌رو تعداد شکم‌های A برابر n است و تعداد شکم‌های B، $۲n$ می‌باشد، اکنون بسامدها را مساوی قرار می‌دهیم:

$$f_A=f_B\Rightarrow\frac{n_Av_A}{۲\ell_A}=\frac{n_Bv_B}{۲\ell_B}$$

$$\xrightarrow[\text{(تعداد گره}-۱\text{ یا تعداد شکم:n)}]{\ell_A=\ell_B}\frac{nv_A}{۲\ell}=\frac{(۲n)v_B}{۲\ell}\Rightarrow v_A=۲v_B$$

$$\xrightarrow[\rho_A=\rho_B]{\text{هم‌جنس}}\frac{۲}{D_A}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}=۲\left(\frac{۲}{D_B}\right)\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}\Rightarrow\frac{D_A}{D_B}=\frac{۱}{۲}$$

B ۲۳۴۰ ۲

نسبت بسامدهای دو موج را حساب می‌کنیم.

$$\frac{f_A}{f_B}=\frac{\frac{n_Av_A}{۲\ell_A}}{\frac{n_Bv_B}{۲\ell_B}}\xrightarrow[n_B=۲-۱=۱]{n_A=۳-۱=۲}\frac{f_A}{f_B}=\frac{\frac{۲v_A}{۲\times۰/۲}}{\frac{v_B}{۲\times۰/۱}}\Rightarrow\frac{f_A}{f_B}=\frac{v_A}{v_B}$$

$$\Rightarrow\frac{f_A}{f_B}=\sqrt{\frac{\frac{F_A}{\rho_AA_A}}{\frac{F_B}{\rho_BA_B}}}=\sqrt{\frac{۱}{۴}}\Rightarrow\frac{f_A}{f_B}=\frac{۱}{۲}$$

B ۲۳۴۱ ۱

مد اصلی تار برابر $f=\frac{v}{۲\ell}$ است، با توجه به صورت مسئله طول تار بلندتر بوده و بسامد اصلی آن بزرگ‌تر است از این‌رو:

$$f_B-f_A=۸Hz\Rightarrow\frac{v}{۲\ell_B}-\frac{v}{۲\ell_A}=۸\Rightarrow\frac{v}{۱/۴}-\frac{v}{۱/۵}=۸$$

$$\Rightarrow\frac{۰/۱v}{۲/۱}=۸\Rightarrow v=۱۶۸\,m/s$$

$$f_A=\frac{v}{۲\ell_A}\Rightarrow f_A=\frac{۱۶۸}{۲\times۰/۷۵}\Rightarrow f_A=\frac{۱۶۸}{۱/۵}=۱۱۲\,Hz$$

B ۲۳۴۲ ۴

هنگامی دو تار با هم تشدید می‌کنند که دارای بسامد یکسان باشند.

$$f_A=f_B\Rightarrow\frac{n_Av_A}{۲\ell_A}=\frac{n_Bv_B}{۲\ell_B}\xrightarrow{\ell_A=\ell_B}n_Av_A=n_Bv_B$$

چون ریسمان B تحت کشش بیشتر است $\left(v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right)$ پس $v_B>v_A$ است و برای برابری رابطهٔ $n_Av_A=n_Bv_B$ باید $n_A>n_B$ باشد بنابراین تنها در وضعیت (ت) ممکن است دو ریسمان در یک بسامد تشدیدی یکسان نوسان کنند.

A ۲۳۴۳ ۲

بسامد تار با دو انتهای بسته برابر $f_n=\frac{nv}{۲\ell}$ است که در آن v سرعت انتشار موج در تار بوده و $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ می‌باشد.

$$\begin{cases}n=۱\Rightarrow f_۱=\frac{۱}{۲\ell}\sqrt{\frac{F}{\mu}}\\ n=۲\Rightarrow f_۲=\frac{۲}{۲\ell}\sqrt{\frac{۲F}{\mu}}\end{cases}\Rightarrow\frac{f_۲}{f_۱}=۲\sqrt{۲}$$

B ۲۳۴۴ ۳

تار هماهنگ پنجم خود را تولید کرده است، بنابراین $n=۵$ می‌باشد و بسامد اصلی تار خواهد شد: $f_۵=۵f_۱\Rightarrow۴۵۰=۵f_۱\Rightarrow f_۱=۹۰\,Hz$

با چهار برابر شدن نیروی کشش، سرعت انتشار موج در تار دو برابر می‌شود.

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\xrightarrow[\mu'=\mu]{F'=۴F}v'=۲v$$

در این صورت، بسامد صوت اصلی تار دو برابر می‌شود.

$$f_۱=\frac{v}{۲\ell}\xrightarrow{v'=۲v}f_۱'=۲f_۱\Rightarrow f_۱'=۲\times۹۰=۱۸۰\,Hz$$

A ۲۳۴۵ ۳

با تغییر نیروی کشش، بسامد اصلی تار ۲۰ درصد افزایش یافته است، در نتیجه:

$$f_۱'=۱/۲f\Rightarrow\frac{v'}{۲\ell}=۱/۲\frac{v}{۲\ell}\Rightarrow v'=۱/۲v$$

$$\sqrt{\frac{F'}{\mu}}=۱/۲\sqrt{\frac{F}{\mu}}\Rightarrow F'=۱/۴۴\times۵۰\Rightarrow F'=۷۲N$$

$$\Delta F=F'-F=۷۲-۵۰=۲۲N$$

B ۲۳۴۶ ۲

اگر نیروی کشش ۴۴ درصد افزایش یابد یعنی $F_۲=۱/۴۴F_۱$ بنابراین:

$$\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{\sqrt{\frac{F_۲}{\mu}}}{\sqrt{\frac{F_۱}{\mu}}}\Rightarrow\frac{v_۲}{v_۱}=۱/۲\Rightarrow v_۲=۱/۲v_۱$$

بنا به فرض مسأله بسامد هماهنگ تار در حالت اول و حالت دوم برابر شده است، از این رو:

$$f_۱=f_۲\Rightarrow\frac{nv_۱}{۲\ell}=\frac{n'v_۲}{۲\ell}\xrightarrow{v_۲=۱/۲v_۱}n=۱/۲n'$$

بنابراین با توجه به گزینه‌ها بسامد هماهنگ پنجم حالت ثانویه با بسامد هماهنگ ششم حالت اولیه برابر است و گزینهٔ (۲) درست است.

B ۲۳۴۷ ۳

در هر دو حالت تار با یک بسامد ارتعاش کرده است.

$$f=f'\Rightarrow\frac{nv}{۲\ell}=\frac{n'v'}{۲\ell}\xrightarrow{n=۲}\frac{۲\sqrt{\frac{F}{\mu}}}{۲\ell}=\frac{۴\sqrt{\frac{F'}{\mu}}}{۲\ell}\Rightarrow F'=\frac{F}{۴}$$

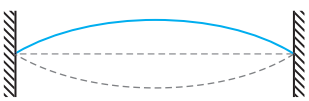
بنابراین کشش به $\frac{۱}{۴}$ مقدار اولیه خود رسیده و $\frac{۳}{۴}F$ از نیروی اولیه کاهش یافته است.

$$\frac{\Delta F}{F}\times۱۰۰\Rightarrow\frac{-۳\frac{F}{۴}}{F}\times۱۰۰=-۷۵٪$$

بنابراین نیرو ۷۵ درصد کاهش یافته است.

B ۲۳۴۸ ۲

در تار با دو انتهای ثابت، در هماهنگ اول، فاصلهٔ دو گره از هم برابر است با:



$$\ell=\frac{\lambda_۱}{۲}\Rightarrow\lambda_۱=۲\ell$$

و با تغییر نیروی کشش، در مقدار $\lambda_۱$ تغییر حاصل نمی‌شود.

بازی با سؤال نیروی کشش تار مرتعشی را آن‌قدر تغییر داده‌ایم که بسامد اصلی تار ۳ برابر شده است. در این صورت، طول موج هماهنگ اصلی آن چند برابر حالت اول می‌شود؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) ۱

پاسخ طول موج در تار مرتعش، تابعی از طول لوله و شمارهٔ هماهنگ است. در این پرسش، طول تار و همچنین شمارهٔ هماهنگ ثابت مانده است، بنابراین طول موج هماهنگ اصلی تغییر نمی‌کند. گزینهٔ ۴

۲۳۴۹ B ۱

تار دارای دو انتهای ثابت است، زیرا هماهنگ زوج تولید کرده است. طول موج تابعی از طول لوله و شمارهٔ هماهنگ است و به نیروی کشش بستگی ندارد.

طول موج در حالت اول: $\ell = n\frac{\lambda}{۲} \xrightarrow{n=۱} \ell = \frac{\lambda_۱}{۲} \Rightarrow \lambda_۱ = ۲\ell$

طول موج در حالت دوم: $n=۲ \Rightarrow \ell = ۲\frac{\lambda_۲}{۲} \Rightarrow \lambda_۲ = \ell$

بنابراین طول موج نصف حالت اول می‌شود.

۲۳۵۰ B ۳

با توجه به صورت سؤال بسامد مُد سوم تار در حالت اول با بسامد هماهنگ اصلی تار برابر شده است از این‌رو:

$$f_۳ = f_۱' \xrightarrow{f_n = \frac{nv}{۲\ell}} \frac{۳v}{۲\ell} = \frac{v'}{۲\ell} \Rightarrow ۳v = v'$$

$$\xrightarrow{v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}} ۳\sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F'}{\mu}} \Rightarrow F' = ۹F$$

با توجه به فرض مسأله $F' = mF$، در این صورت $m = ۹$ است.

۲۳۵۱ B ۳

در یک تار دو انتها بسته اگر تعداد شکم n باشد تعداد گره $n+۱$ می‌باشد. با توجه به صورت سؤال حاصل‌ضرب تعداد گره‌ها در تعداد شکم‌ها ۱۲ شده است از این‌رو:

$$(n)(n+۱) = ۱۲ \Rightarrow n(n+۱) = ۳\times۴ \Rightarrow n = ۳$$

اگر بخواهیم در حالت دوم حاصل‌ضرب تعداد گره در شکم نصف شود، یعنی داریم:

$$(n')(n'+۱) = ۶ \Rightarrow n'(n'+۱) = ۲\times۳ \Rightarrow n' = ۲$$

در دو حالت تشدید با یک دیاپازون است بنابراین $f = f'$:

$$\frac{nv}{۲L} = \frac{n'v'}{۲L} \Rightarrow nv = n'v' \xrightarrow{v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}} ۳\sqrt{\frac{F}{\mu}} = ۲\sqrt{\frac{F'}{\mu}}$$

$$\Rightarrow ۹F = ۴F' \Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{۹}{۴}$$

۲۳۵۲ B ۴

در ابتدا در طول تار دو شکم ایجاد شده در واقع تار هماهنگ دوم $(f_۲)$ خود را ایجاد کرده است:

با تغییر نیروی F می‌خواهیم تعداد شکم یک واحد تغییر کند و ممکن است یک واحد کم و یا یک واحد زیاد شود در تمام حالت‌ها موج به وسیلهٔ نوسان دیاپازون به‌وجود می‌آید در واقع بسامد نوسان در تمام حالت‌ها یکسان است.

$$\xrightarrow[n'=۱]{\text{یک شکم کم شود}} f_۱' = f_۲ \Rightarrow \frac{v'}{۲\ell} = \frac{۲v}{۲\ell} \Rightarrow v' = ۲v$$

$$\xrightarrow{v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}} F' = ۴F$$

$$\xrightarrow[n'=۳]{\text{یک شکم اضافه شود}} f_۳' = f_۲ \Rightarrow \frac{۳v'}{۲\ell} = \frac{۲v}{۲\ell} \Rightarrow ۳v' = ۲v$$

$$\xrightarrow{v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}} ۳\sqrt{\frac{F'}{\mu}} = ۲\sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{۴}{۹}$$

۲۳۵۳ B ۱

در دو حالت بسامد تار حاصل از تشدید دیاپازون بوده و بسامد تار در دو حالت یکسان است.

$$f = f' \Rightarrow \frac{nv}{۲\ell} = \frac{n'v'}{۲\ell} \xrightarrow[v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}]{n=۶} \frac{۶\sqrt{\frac{F}{\mu}}}{۲\ell} = \frac{n'\sqrt{\frac{F'}{\mu}}}{۲\ell}$$

$$\xrightarrow{F'=۹F} ۶\sqrt{F} = n'\sqrt{۹F} \Rightarrow ۶ = ۳n' \Rightarrow n' = ۲$$

بنابراین در حالت دوم تار هماهنگ دوم خود را دارد و می‌دانیم (۱− تعداد گره) برابر شمارهٔ هماهنگ است پس در این حالت ۳ گره در طناب تشکیل شده است. موج صوت در هوا پخش می‌شود و با توجه به اینکه در هر دو حالت تندی صوت در هوا یکسان و بسامد نیز تغییر نکرده است پس طول موج صوت منتشر شده در هوا ثابت می‌ماند.

۲۳۵۴ A ۴

با کاهش جرم وزنه، کشش ریسمان کاهش می‌یابد در نتیجه سرعت انتشار موج در تار $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ کاهش می‌یابد و با ثابت بودن بسامد دیاپازون، طول موج افزایش و تعداد شکم‌ها افزایش می‌یابد.

۲۳۵۵ A ۴

در دو حالت نیرو و سطح مقطع و جنس ریسمان یکسان است بنابراین در دو حالت v یکسان است:

$$f_۱ = \frac{v}{۲\ell} \quad , \quad f_۱' = \frac{v}{۲(\frac{\ell}{۲})} \Rightarrow f_۱' = ۲f_۱$$

با توجه به رابطهٔ $\lambda = \frac{v}{f}$ و ثابت ماندن v داریم:

$$\frac{\lambda_۱'}{\lambda_۱} = \frac{f_۱}{f_۱'} = \frac{۱}{۲}$$

۲۳۵۶ B ۳

در یک تار با دو انتهای ثابت، بسامد هماهنگ‌های تار برابر $f_n = \frac{nv}{۲\ell}$ است که در آن $v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$ می‌باشد.

هنگامی که سیم را دو لا می‌کنیم، طول آن نصف $(\ell' = \frac{\ell}{۲})$ و سطح مقطع آن دو برابر $(A' = ۲A)$ می‌شود. جنس سیم و نیروی کشش تغییر نکرده است.

$$\frac{f'}{f} = \frac{v'}{v}\times\frac{\ell}{\ell'} \xrightarrow{\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{A}{A'}}} \frac{f'}{f} = \sqrt{\frac{A}{A'}}\times\frac{\ell}{\ell'} = \sqrt{\frac{A}{۲A}}\times\frac{\ell}{\frac{\ell}{۲}} \Rightarrow \frac{f'}{f} = \sqrt{۲}$$

۲۳۵۷ B ۲

طول سیم ۴ برابر شده است، در این صورت سطح مقطع سیم، $\frac{۱}{۴}$ حالت اول می‌شود.

$$\ell' = ۴\ell \xrightarrow[V=AL]{\text{حجم ثابت است}} A' = \frac{۱}{۴}A$$

سرعت انتشار موج در تار خواهد شد:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}} \Rightarrow \frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{A}{A'}} \Rightarrow \frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{A}{\frac{A}{۴}}} \Rightarrow \frac{v'}{v} = ۲$$

بسامد اصلی تار برابر با $f = \frac{v}{۲\ell}$ است، بنابراین:

$$f = \frac{v}{۲\ell} \Rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{v'}{v}\times\frac{\ell}{\ell'} \Rightarrow \frac{f'}{f} = ۲\times\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

۲۳۵۸ B ۱

در یک تار با دو انتهای بسته، اختلاف بسامد دو هماهنگ متوالی برابر بسامد اصلی است. وقتی یک گره یا یک شکم اضافه می‌شود، یعنی بسامد هماهنگ بعدی رخ داده است، پس به بسامد تار به اندازهٔ بسامد اصلی اضافه می‌شود. طول موج هماهنگ اصلی برابر است با:

$$\ell = \frac{\lambda}{۲} \Rightarrow \lambda = ۲m \quad , \quad f = \frac{v}{\lambda} \Rightarrow f = \frac{۱۰۰}{۲} = ۵۰Hz$$

بنابراین برای آنکه به تعداد شکم‌ها یکی اضافه شود باید به بسامد ۵۰Hz افزوده شود.

A ۲۳۵۹ ۱

وقتی تشدید رخ می‌دهد که بسامد نوسان‌کننده با بسامد یکی از هماهنگ‌های سیم ویولن برابر باشد. بسامدهای ۶۰۰Hz و ۹۰۰Hz بسامدهای دو هماهنگ متوالی این تار هستند. در این صورت بسامد اصلی تار برابر تفاضل این دو بسامد است:

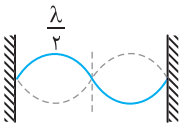
$$f_1=900-600\Rightarrow f_1=300Hz$$

$$f_1=\frac{v}{2\ell}\Rightarrow 300=\frac{v}{2\times 0/25}\Rightarrow v=150m/s,\ v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$\Rightarrow 150\times 150=\frac{F}{\frac{0/5\times 10^{-3}}{0/25}}\Rightarrow F=45N$$

B ۲۳۶۰ ۲

در حالت اول در طول تار دو شکم ایجاد شده است.

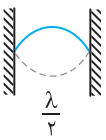


$$\ell=n\frac{\lambda}{2}\xrightarrow{n=2}\lambda=\ell$$

در حالت دوم طول تار کاهش یافته است اما طول موج تغییر نکرده است. چرا؟ چگالی خطی جرم (μ) و نیروی کشش (F) ثابت مانده در نتیجه تندی $(v=\sqrt{F/\mu})$ ثابت می‌ماند. از طرفی در دو حالت، تار با یک چشمه تشدید انجام داده است و بسامد ثابت می‌باشد، بنابراین:

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow[f=\text{ثابت}]{v=\text{ثابت}}\lambda=\text{ثابت}\Rightarrow\lambda'=\lambda$$

برای آنکه طول موج در تار ثابت باشد باید تار مطابق شکل روبه‌رو به نوسان در آمده باشد، یعنی $\ell'=\frac{\lambda}{2}$ شود. از این‌رو:

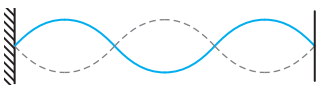


$$\ell=\lambda\quad,\quad \ell'=\frac{\lambda}{2}\Rightarrow\ell'=\frac{\ell}{2}=40cm$$

باید ۴۰cm از طول تار کم کنیم.

B ۲۳۶۱ ۳

در طول تار سه شکم ایجاد شده است. $(n=3)$



بنابراین خواهیم داشت:

$$f=\frac{nv}{2\ell}\Rightarrow 300=\frac{3\times v}{2\times 0/6}\Rightarrow v=120\frac{m}{s}$$

بسامد اصلی تار برابر است با:

$$f_n=nf_1\Rightarrow 300=3f_1\Rightarrow f_1=100Hz$$

B ۲۳۶۲ ۲

نکته بسامد موج منتشر شده در محیط از ویژگی‌های چشمه موج است.

در صورت مسئله از شما طول موج امواج صوتی گسیل شده در هوا توسط تار خواسته شده است. بسامد صوت ۵۰۰Hz و تندی انتشار صوت در هوا ۳۴۰m/s بیان شده است. از این‌رو:

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{340}{500}\Rightarrow\lambda=0/68m=68cm$$

B ۲۳۶۳ ۲

طول موج و بسامد تار را به دست می‌آوریم:

$$\lambda=\frac{2\ell}{n}\Rightarrow\lambda_1=\frac{2\times 15}{1}=30cm$$

$$f=\frac{v}{\lambda}\Rightarrow f=\frac{180}{0/3}\Rightarrow f=600Hz$$

بسامد تار با بسامد امواج صوتی منتشر شده در هوا برابر است:

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{320}{600}\Rightarrow\lambda=\frac{1/6}{3}=\frac{160}{3}cm$$:در هوا

A ۲۳۶۴ ۲

به کمک رابطهٔ بسامدی تار مرتعش، شمارهٔ هماهنگ را به‌دست می‌آوریم.

$$f_n=\frac{nv}{2\ell}\xrightarrow[\ell=0/6m]{v=180m/s,f_n=600Hz}600=\frac{n\times 180}{2\times 0/6}\Rightarrow n=4$$

تار هماهنگ چهارم خود را تولید می‌کند.

چشمهٔ موج در تار و موج صوت در هوا یکسان است. پس، بسامد موج تار و موج صوت، یکسان و برابر ۶۰۰Hz است.

صوت با بسامد ۶۰۰Hz و تندی ۳۳۶m/s در هوا منتشر می‌شود و طول موج آن برابر است با:

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{336}{600}\Rightarrow\lambda=0/56m\Rightarrow\lambda=56cm$$

B ۲۳۶۵ ۳

خط فکری در یک تار طول موج بسامدهای تشدیدی تار به طول تار و شمارهٔ هماهنگ $(\lambda=\frac{2\ell}{n})$ بستگی دارد و نیروی کشش تار، جنس تار و ... در طول موج یک هماهنگ معین تأثیری ندارد، اما بسامدهای تشدیدی تار به طول نیروی کشش تار بستگی دارد. $(f_n=\frac{nv}{2\ell},v=\sqrt{\frac{F}{\mu}})$

بسامد موج در تار که همان بسامد صوت در هواست را حساب کنید سپس طول موج در دو حالت برای صوت منتشر شده در هوا را به‌دست بیاورید و از هم کم کنید.

۱ طول موج تار ثابت می ماند زیرا تار همچنان هماهن اول خود را تولید کرده است.

$$\ell=\frac{\lambda}{2}\Rightarrow\lambda_{\text{تار}}=\lambda'_{\text{تار}}=2\ell\Rightarrow\lambda_{\text{تار}}=\lambda'_{\text{تار}}=60cm$$

۲ نیروی کشش تار ٪۲۵ حالت اول است.

$$F_2=\frac{25}{100}F_1\Rightarrow F_2=\frac{1}{4}F_1$$

۳ تندی انتشار موج در تار خواهد شد:

$$\frac{v_2}{v_1}=\sqrt{\frac{F_2}{F_1}}\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\sqrt{\frac{1}{4}}\Rightarrow v_2=\frac{1}{2}v_1$$

۴ بسامد هماهنگ اول در این حالت برابر است با:

$$f=\frac{v}{2\ell}\Rightarrow\frac{f'}{f}=\frac{v'}{v}\Rightarrow\frac{f'}{f}=\frac{1}{2}$$

۵ بسامد موج در دو حالت را به‌دست می‌آوریم:

$$f=\frac{v}{\lambda}\Rightarrow f_1=\frac{150}{0/6}\Rightarrow f_1=250Hz$$

$$f'_1=\frac{f_1}{2}\Rightarrow f'_1=\frac{250}{2}\Rightarrow f'_1=125Hz$$

۶ بسامد موج در هوا در دو حالت همان $f_1=250Hz$ و $f'_1=125Hz$ است.

طول موج صوت در هوا را حساب می‌کنیم.

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{v=320m/s,\ f_1=250Hz}\lambda_{1_{\text{هوا}}}=\frac{320}{250}=1/28m\\ \xrightarrow{v=320m/s,\ f_2=125Hz}\lambda_{1_{\text{هوا}}}=\frac{320}{125}=2/56m\end{cases}$$

۷ اختلاف طول موج‌ها در هوا خواهد شد:

$$\Delta\lambda=2/56-1/28\Rightarrow\Delta\lambda=1/28m$$

B ۲۳۶۶ ۲

خط فکری در پدیدهٔ پراش هرچه طول موج افزایش یابد، پراش بارزتری مشاهده می‌شود و اگر طول موج کاهش یابد، وضوح پراش کم می‌شود. بنابراین شما باید بررسی کنید که طول موج چه تغییری کرده است.

۱ با افزایش شمارهٔ هماهنگ، بسامد تار و بسامد صوت حاصل از تار افزایش می‌یابد. $(\uparrow f_n=\uparrow nf_1)$

۲ با افزایش بسامد، طول موج صورت کاهش می‌یابد $(\downarrow\lambda=\frac{v}{f\uparrow})$

۳ با کاهش طول موج، گستردگی موج در منطقه سایهٔ کاهش می‌یابد. یعنی پراش کمتری رخ می‌دهد.

B ۲ ۲۳۶۷

یادآوری در یک تار مرتعش بسامد هماهنگ nام، n برابر بسامد هماهنگ اول است.

۱ بسامد هماهنگ دوم خواهد شد: $f_۲=۲f_۱$

یادآوری شدت صوت با مربع بسامد و مربع دامنه نسبت مستقیم دارد و با مربع فاصله نسبت وارون دارد.

$$\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{f_۲}{f_۱})^۲(\frac{A_۲}{A_۱})^۲(\frac{d_۱}{d_۲})^۲$$

۲ فاصلهٔ یک نقطهٔ معین از چشمه ثابت است. $(d_۱=d_۲)$ و دامنه نیز یکسان است، بنابراین:

$$\frac{I_۲}{I_۱}=(\frac{f_۲}{f_۱})^۲\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=۴$$

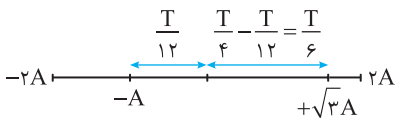
۳ اختلاف تراز شدت صوت در دو حالت مختلف برابر است با:

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}\Rightarrow\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log ۴=۱۰\log ۲^۲$$

$$\beta_۲-\beta_۱=۲۰(۰/۳)\Rightarrow\Delta\beta=۶dB$$

C ۳ ۲۳۶۸

هر ذره از ریسمان که نوسان می‌کند دارای حرکت هماهنگ ساده است و در نقاط شکم، دامنهٔ نوسان ۲A است، نقطهٔ M در لحظهٔ نشان داده شده در شکل در مکان $-A$ است، در بازهٔ زمانی $t=\frac{۱}{۴f}=\frac{T}{۴}$ برای آنکه سرعت متوسط نقطهٔ M بیشینه شود باید در این مدت جابه‌جایی آن بیشینه باشد. از این‌رو باید نقطهٔ M به سوی مرکز نوسان در حرکت باشد. زیرا در اطراف مرکز نوسان تندی بیشتر بوده و در یک زمان معین جابه‌جایی بزرگ‌تر است، با توجه به بازه‌های زمانی شناخته شده در مدت $\frac{T}{۴}$ نقطه M از مکان $-A$ به مکان $+\sqrt{۳}A$ می‌رود و بیشینه سرعت متوسط M خواهد شد.



$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{\sqrt{۳}A-(-A)}{\frac{۱}{۴f}}\Rightarrow v_{av}=۴(\sqrt{۳}+۱)Af$$

C ۳ ۲۳۶۹

هر نقطه از محیط مانند M و N دارای حرکت هماهنگ ساده هستند بنابراین معادلهٔ نوسان نقطهٔ M را می‌نویسیم:

$$\omega=۲\pi f\Rightarrow\omega=۲\pi\times۴۰\Rightarrow\omega=۸۰\pi rad/s$$

$$x=۲A\cos ۸۰\pi t\xrightarrow{t=\frac{۱}{۱۲۰}s}x=۲A\cos\frac{۸۰\pi}{۱۲۰}\Rightarrow x=۲A\cos\frac{۲\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow x=۲A(-\frac{۱}{۲})=-A$$

نقطهٔ N و نقطهٔ M دو شکم مجاور بوده و هرگاه M در $۲A$ است N در $-۲A$ قرار دارد و وقتی M به $-A$ می‌رود N نیز به $+A$ می‌رود.

C ۱ ۲۳۷۰

نقطهٔ C شکم و نقاط A و B گره هستند. فاصلهٔ نقطهٔ A تا B برابر فاصلهٔ دو گره است که برابر $\frac{\lambda}{۲}$ است. ابتدا سرعت موج در تار را به‌دست می‌آوریم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{۱۰۰}{\frac{۴\times۱۰^{-۳}}{۱}}}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{۱۰۰}{۴\times۱۰^{-۲}}}=۵۰m/s$$

بسامد را از معادله چشمه حساب می‌کنیم:

$$\omega=۲\pi f\Rightarrow ۲۰۰\pi=۲\pi f\Rightarrow f=۱۰۰Hz$$

طول موج برابر است با:

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{۵۰}{۱۰۰}=۰/۵m\Rightarrow\lambda=۵۰cm$$

فاصلهٔ A تا B خواهد شد:

$$AB=\frac{\lambda}{۲}\Rightarrow AB=\frac{۵۰}{۲}=۲۵cm=۰/۲۵m$$

نقطهٔ C شکم است و هنگام گذر از حالت تعادلش سرعتش خواهد شد:

$$v_m=A\omega=۰/۰۶\times۲۰۰\pi=۱۲\pi m/s$$

بنابراین باید نقطهٔ C در مدت $t_۱$ از حالت تعادلش بگذرد بنابراین $t_۱=\frac{T}{۴}$ است.

$$T=\frac{۱}{f}\Rightarrow T=\frac{۱}{۱۰۰}s\Rightarrow\frac{T}{۴}=\frac{۱}{۴۰۰}s$$

B ۱ ۲۳۷۱

طول تار ۱cm کاهش یافته بنابراین:

$$\ell_۱=۹۸cm\ ,\ \ell_۲=۹۷cm$$

با کاهش طول تار، بسامد تار افزایش می‌یابد پس بسامد ثانویه ۴Hz بیشتر از بسامد اولیه است:

$$f=\frac{nv}{۲L}\Rightarrow\frac{f_۲}{f_۱}=\frac{\ell_۱}{\ell_۲}\Rightarrow\frac{f_۱+۴}{f_۱}=\frac{۹۸}{۹۷}\Rightarrow ۹۷f_۱+۳۸۸=۹۸f_۱\Rightarrow f_۱=۳۸۸Hz$$

B ۲ ۲۳۷۲

با توجه به این‌که در دو نقطهٔ O و M گره ایجاد می‌شود، با یک طناب با دو انتهای ثابت مواجه هستیم. در طناب با دو انتهای ثابت، تعداد شکم‌ها برابر شمارهٔ هماهنگ است بنابراین، طبق رابطهٔ بسامد طناب با دو انتهای ثابت $(f_n=\frac{nv}{۲\ell})$ و با توجه به ثابت بودن بسامد دیاپازون (f) و طول طناب (ℓ)، چون n از ۳ به ۱ تغییر کرده است، باید v (سرعت انتشار موج) ۳ برابر شود. طبق رابطهٔ سرعت انتشار موج $(v=\sqrt{\frac{F}{\mu}})$ و با ثابت بودن μ، باید F، ۹ برابر شود.

بنابراین:

$$\frac{F_۲}{F_۱}=۹\Rightarrow\frac{m_۲g}{m_۱g}=۹\Rightarrow\frac{m_۲}{m_۱}=۹\Rightarrow m_۲=۹m_۱\Rightarrow m_۲-m_۱=۸m_۱$$

پس، ۸ برابر جرم وزنهٔ اولیه باید به آن بیفزاییم.

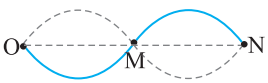
B ۲ ۲۳۷۳

هنگام عبور موج از یک محیط به محیط دیگر، بسامد ثابت می‌ماند و سرعت تغییر می‌کند. سرعت انتشار موج در تار از رابطه $v=\sqrt{\frac{F}{\rho_A}}$ به‌دست می‌آید پس سرعت و چگالی با هم رابطه عکس و مجذوری دارند $(v\propto\frac{۱}{\sqrt{\rho}})$:

$$\frac{\lambda_{Fe}}{\lambda_{Al}}=\frac{v_{Fe}}{v_{Al}}=\sqrt{\frac{\rho_{Al}}{\rho_{Fe}}}=\sqrt{\frac{۲/۶}{۷/۸}}=\sqrt{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow\lambda_{Al}=\sqrt{۳}\lambda_{Fe}\Rightarrow\lambda_{Al}=۱/۷\lambda_{Fe}$$

چون حداقل تعداد گره‌ها مورد پرسش است و در محل O، M و N گره تشکیل می‌شود.

همچنین نسبت طول تار آهنی به طول تار آلومینیمی برابر $\frac{\ell_{Al}}{\ell_{Fe}}=\frac{۸۵}{۵۰}=۱/۷$ است که برابر نسبت طول موج‌ها است. به همین دلیل شکل زیر به‌وجود می‌آید و سه گره در تار دیده می‌شود.



B ۴ ۲۳۷۴

بسامد دیاپازون در دو حالت یکسان و تعداد گره‌ها یکی بیش‌تر از شکم‌ها است. از طرفی نیروی کشش تار برابر نیروی وزن وزنه‌ها است. بنابراین:

در حالت اول ۲ گره تشکیل شده پس تار هماهنگ اول خود را تولید می‌کند و در حالت دوم ۳ گره تشکیل شده پس تار هماهنگ دوم خود را تولید می‌کند:

$$f_۱=f_۲\xrightarrow[v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}]{f=\frac{nv}{۲\ell}}\frac{n_۱}{۲\ell}\sqrt{\frac{F_۱}{\mu}}=\frac{n_۲}{۲\ell}\sqrt{\frac{F_۲}{\mu}}\Rightarrow ۱\times\sqrt{mg}=۲\sqrt{m'g}$$

$$\Rightarrow m=۴m'\Rightarrow m'=\frac{m}{۴}\Rightarrow\Delta m=m-\frac{m}{۴}=\frac{۳m}{۴}$$

۳ ۲۳۷۵ C

خط فکری کمینه بسامد یعنی بلندترین طول موج و بلندترین طول موج یعنی بیشینه فاصلهٔ بین گره‌ها و شکم‌ها. از طرفی نقاط A و B انتهای ثابت هستند و در این نقاط گره هستند. همچنین در نقطهٔ C نیز گره تشکیل می‌شود. دقت کنید فاصلهٔ بین A تا C نمی‌تواند برابر $\frac{\lambda}{2}$ باشد،زیرا در این صورت فاصله BC برابر $\frac{3}{4}\lambda$ خواهد شد و نقطه B شکم خواهد شد. بنابراین AC باید برابر λ باشد.

۱ طول موج خواهد شد: $AC=\lambda \xrightarrow{AC=0/4m} 0/4=\lambda \Rightarrow \lambda=0/4m$

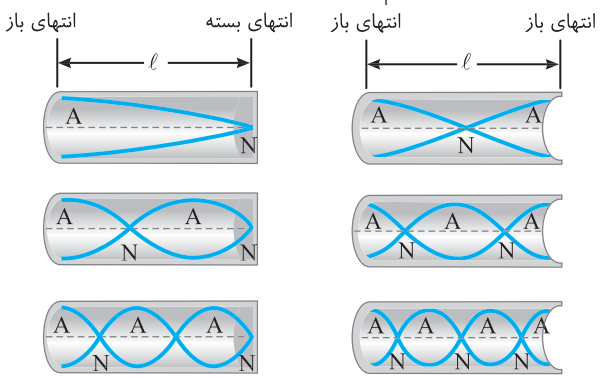
۲ تندی انتشار موج را حساب می‌کنیم.

$v=f\lambda \xrightarrow{f=300Hz} v=300\times 0/4 \Rightarrow v=120m/s$

پنجره ۵

۴ ۲۳۷۶ A

با توجه به شکل‌های زیر در لوله‌ها با دو انتهای باز و در لوله‌ها با دو انتهای بسته شماره مُد با تعداد گره‌ها (N‌ها) برابر است و مُد سوم لولهٔ صوتی دو انتهای باز و مُد دوم صوتی دو انتهای بسته را شاهد هستیم.



۱ ۲۳۷۷ A

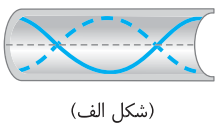
تندی انتشار صوت ثابت است. با توجه به اینکه در مُدهای بالاتر تعداد گره و شکم در طول لوله افزایش می‌یابد، بنابراین فاصلهٔ گره و شکم‌ها کاهش می‌یابد و در واقع طول موج در حال کاهش است.

۲ ۲۳۷۸ A

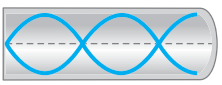
امواج صوتی ایستاده درون لوله و امواج صوتی پیش‌رونده حاصل از آن‌ها در محیط طولی هستند.

۴ ۲۳۷۹ A

به عنوان مثال به شکل امواج ایستاده در مُد دوم لولهٔ صوتی با دو انتهای باز (شکل الف) و مُد سوم لولهٔ صوتی با یک انتهای بسته (شکل ب) دقت کنید:



(شکل الف)



(شکل ب)

شکل الف) سه شکم - دو گره
همیشه تعداد شکم یک واحد از گره بیشتر است.
بنابراین، گره و شکم یکی عدد فرد و دیگری عدد زوج است.
شکل ب) سه شکم - سه گره
همواره تعداد شکم و گره یکسان است.
با توجه به شکل‌ها گزاره‌های (الف) و (ب) درست است.
موج درون لولهٔ صوتی، موج طولی ایستاده است بنابراین گزارهٔ (پ) درست است.

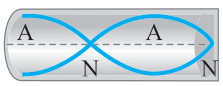
۴ ۲۳۸۰ A

در طول لوله یک گره و یک شکم تشکیل شده است و فاصلهٔ یک گره از یک شکم $\frac{\lambda}{4}$ است از این‌رو:

$\ell=\frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda=4\ell$

بازی با سوال در یک لولهٔ صوتی با یک انتهای باز، هنگام تولید صوت دو گره به فاصلهٔ ۵۰cm از هم تشکیل شده است. طول لوله چند سانتی‌متر است؟ از کتاب درسی

۱) ۵۰ ۲) ۷۵ ۳) ۱۲۵ ۴) ۲۵



پاسخ در انتهای باز شکم و در انتهای بسته گره تشکیل می‌شود و تعداد گره‌ها دو است بنابراین شکل موج مطابق شکل روبه‌رو است و طول لوله خواهد شد:



$\ell=\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{4}$

با توجه به صورت مسئله فاصله دو گره از هم یعنی $\frac{\lambda}{2}$ برابر 50cm است، از این‌رو:

گزینهٔ ۲

$\ell=50+\frac{50}{2}=75cm$

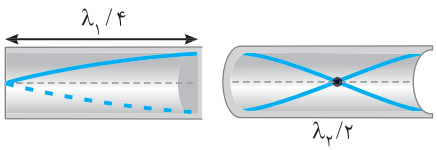
۳ ۲۳۸۱ A

A شکم است و با توجه به ANANANA در دو انتهای لوله شکم تشکیل شده پس لوله دو انتها باز است. در لوله ۳ گره (۳ تا N) و ۴ تا شکم (۴ تا A) ایجاد شده بنابراین لوله مد سوم خود را تولید می‌کند.

۲ ۲۳۸۲ A

با توجه به شکل مُدهای اصلی در لوله‌های صوتی که در شکل روبه‌رو رسم شده است می‌توان نوشت:

$\frac{\lambda_1}{4}=\frac{\lambda_2}{2} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2}=2$



۴ ۲۳۸۳ A

طول موج مُد اصلی لوله صوتی با یک انتهای باز برابر $\lambda_1=4\ell_1$ و طول موج مُد اصلی لولهٔ صوتی با دو انتهای باز برابر $\lambda_2=2\ell_2$ است با توجه به فرض مسأله:



$\lambda_1=\lambda_2 \Rightarrow 4\ell_1=2\ell_2 \Rightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2}=\frac{1}{2}$

۲ ۲۳۸۴ A

فاصلهٔ گره‌های مجاور از هم برابر $\frac{\lambda}{2}$ و فاصلهٔ گره‌ها از شکم‌های مجاور برابر $\frac{\lambda}{4}$ است.

از این‌رو:

$\ell_1=\frac{\lambda}{4}\ ,\ \ell_2=2\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2}=\frac{1}{4}$

۲ ۲۳۸۵ B

در پدیدهٔ تشدید باید بسامدها و در نتیجه طول موج صوت‌ها $(\lambda=\frac{\text{ثابت}v}{f})$ برابر شود.

از این‌رو باید بررسی کنیم که در کدام یک از حالت‌های (الف)، (ب) و (پ) طول موج‌ها برابر است.

می‌دانیم فاصلهٔ دو گره یا شکم مجاور $\frac{\lambda}{2}$ و فاصلهٔ یک گره از شکم مجاورش $\frac{\lambda}{4}$ است.

در شکل (الف):

$$\begin{cases} \text{A لولهٔ}: \ell=\frac{\lambda_A}{2} \Rightarrow \lambda_A=2\ell \\ \text{B لولهٔ}: 1/5\ell=3\frac{\lambda_B}{4} \Rightarrow \lambda_B=2\ell \end{cases} \Rightarrow \lambda_A=\lambda_B$$

در شکل (الف) می‌تواند تشدید رخ دهد.

در شکل (ب):

$$\begin{cases} A\ \text{لولهٔ}: \ell = 2\dfrac{\lambda_A}{2} \Rightarrow \lambda_A = \ell \\ B\ \text{لولهٔ}: 1/5\ell = 5\dfrac{\lambda_B}{4} \Rightarrow \lambda_B = 6\dfrac{\ell}{5} \end{cases} \Rightarrow \lambda_A \neq \lambda_B$$

تشدید رخ نمی‌دهد.

در شکل (پ):

$$\begin{cases} A\ \text{لولهٔ}: \ell = 2\dfrac{\lambda_A}{2} \Rightarrow \lambda_A = \ell \\ B\ \text{لولهٔ}: 1/5\ell = 3\dfrac{\lambda_B}{4} \Rightarrow \lambda_B = 2\ell \end{cases} \Rightarrow \lambda_A \neq \lambda_B$$

تشدید رخ نمی‌دهد.

A ۲۳۸۶ ۲

بم‌ترین صوت یعنی مُد اصلی هر لوله با توجه به شکل‌ها خواهیم داشت:

$$\begin{cases} A: \ell = \dfrac{\lambda_A}{2} \\ B: \ell = \dfrac{\lambda_B}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{\lambda_A}{2} = \frac{\lambda_B}{4} \Rightarrow \lambda_A = \frac{1}{2}\lambda_B$$

تندی صوت در هوای لوله‌ها یکسان و $f = \dfrac{v}{\lambda}$ است از این‌رو: $\dfrac{f_A}{f_B} = 2$



A ۲۳۸۷ ۲

با پر شدن ظرف، با یک لولهٔ صوتی با یک انتهای باز روبه‌رو هستیم که طول لولهٔ آن در حال کاهش است. در این صورت طول موج مُد اصلی آن در حال کاهش و بسامد ثابت

تشدیدی صوت آن در حال افزایش است و صدا زیرتر شنیده می‌شود. $\uparrow f = \dfrac{v}{\lambda\downarrow}$

A ۲۳۸۸ ۱

با خروج آب از گالن با چیزی شبیه یک لولهٔ صوتی با یک انتهای باز روبه‌رو هستیم که طول لوله و در نتیجه طول موج صوت تشدیدی آن در حال افزایش و بسامد آن در حال کاهش است و صدا بم‌تر شنیده می‌شود.

A ۲۳۸۹ ۳

با دمیدن در بطری‌ها، بطری آب مانند لولهٔ یک انتها باز عمل می‌کند و می‌دانیم هرچه طول لوله بیشتر باشد طول موج مُد اصلی بزرگ‌تر و بسامد تشدیدی مُد اصلی کمتر است و ارتفاع صوت به بسامدی که به گوش ما می‌رسد بستگی دارد و هرچه بسامد بیشتر باشد صدا زیرتر است. در بطری C، طول لوله کوتاه‌تر، طول موج کوتاه‌تر و بسامد بیشتر و ارتفاع صوت دریافتی زیرتر است.

A ۲۳۹۰ ۱

زمانی فرفره می‌چرخد که دیاپازون و تشدیدگر دارای بسامد تشدیدی یکسانی باشند. دیاپازون C وقتی در مقابل تشدیدگر قرار می‌گیرد فرفره می‌چرخد از این‌رو برای به‌دست آوردن بسامد تشدیدگر کافی بسامد دیاپازون C را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow 0/4 = \frac{320}{f} \Rightarrow f_{\text{دیاپازون}} = 800\,\text{Hz}$$

بنابراین بسامد تشدیدی تشدیدگر هلمهولتز برابر ۸۰۰Hz است.

A ۲۳۹۱ ۲

اساس کار اجاق‌های مایکروفر تداخل امواج الکترومغناطیسی و تشکیل امواج ایستاده است.

A ۲۳۹۲ ۳

اجاق‌های میکروموج براساس تداخل امواج الکترومغناطیسی و تشکیل امواج ایستاده کار می‌کنند. در محل گره‌ها، دامنهٔ نوسان میدان الکتریکی صفر است و به دلیل نبود میدان الکتریکی غذا گرم نمی‌شود و در گره اصطلاحاً نقاط سرد داریم و گزینهٔ (۳) درست است.

B ۲۳۹۳ ۴

یادآوری فاصلهٔ دو نقطهٔ سرد متوالی دقیقاً شبیه فاصلهٔ دو گره در امواج ایستاده یعنی $\dfrac{\lambda}{2}$ است. بنابراین باید طول موج را حساب کنیم.

۱ طول موج خواهد شد:

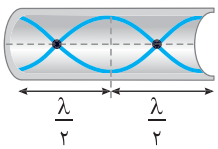
$$\lambda = \frac{c}{f} \xrightarrow{f = 2/4\times10^9\,\text{Hz}} \lambda = \frac{3\times10^8}{2/4\times10^9} \Rightarrow \lambda = \frac{3}{24}\,\text{m}$$

$$\Rightarrow \lambda = 0/125\,\text{m} \Rightarrow \lambda = 12/5\,\text{cm}$$

۲ فاصلهٔ دو نقطهٔ سرد متوالی را حساب می‌کنیم. $\dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{12/5}{2} = 6/25\,\text{cm}$

A ۲۳۹۴ ۳

فاصلهٔ دو گره یا دو شکم مجاور هم $\dfrac{\lambda}{2}$ است بنابراین این لوله باید مطابق شکل باشد یعنی لوله دارای دو انتهای باز بوده و مُد دوم خود را تولید کرده است.

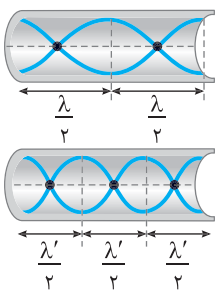


بازی با سوال **در یک لولهٔ صوتی با دو انتهای باز، دو گره تشکیل شده است، اگر هوا را طوری در لوله بدمیم که در آن ۴ شکم تشکیل شود، طول موج صوت ایجاد شده در لوله چند برابر می‌شود؟**

کنکور دهه‌های گذشته

۱) $\dfrac{1}{3}$ ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) $\dfrac{3}{4}$ ۴) $\dfrac{2}{3}$

پاسخ **شکل موج در لوله را در دو حالت رسم می‌کنیم. در حالت اول دو گره و در حالت دوم، چهار شکم یا سه گره در لوله ایجاد شده است، حال به کمک فاصلهٔ گره‌ها و شکم مسئله قابل حل است.**



$$\ell = 2\frac{\lambda}{2} \ , \ \ell = 3\frac{\lambda'}{2} \Rightarrow \lambda = 3\frac{\lambda'}{2} \Rightarrow \lambda' = \frac{2}{3}\lambda$$

گزینهٔ ۴

A ۲۳۹۵ ۲

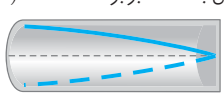
تعداد شکم و گره در لوله با یک انتهای باز با هم برابر است بنابراین حاصل‌ضرب تعداد شکم در گره در یک لوله با یک انتهای باز همواره یک مربع کامل می‌باشد و تنها در گزینهٔ (۲) عدد بیان شده مربع کامل است.

A ۲۳۹۶ ۴

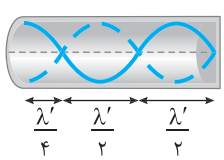
شکل موج در لوله‌ها را رسم می‌کنیم با شدت دمیدن در لوله تعداد گره دوعدد اضافه شده و تعداد گره‌ها برابر ۳ شده است. بنابراین: $5\dfrac{\lambda'}{4} = \dfrac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda' = \dfrac{\lambda}{5}$

تندی موج ثابت است بنابراین بسامد ۵ برابر شده است. $(v = f\lambda)$

مد اصلی



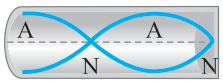
$\ell = \dfrac{\lambda}{4}$



$\ell = \dfrac{5\lambda'}{4}$

A ۲۳۹۷ ۲

ابتدا $\frac{\lambda}{4}$ را به‌دست می‌آوریم: $\frac{\lambda}{4}=\frac{96}{4}=24cm$



اکنون باید مشخص کنیم چه تعداد $\frac{\lambda}{4}$ در این لوله جای می‌گیرد. $\frac{72}{24}=3$

بنابراین شکل موج در لوله مطابق شکل روبه‌رو است و این لوله با یک انتهای باز مد دوم خود را تولید می‌کند.

C ۲۳۹۸ ۲

تندی موج در دو تار با هم برابر است. $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}} \xrightarrow{F_A=F_B \text{ و } \mu_A=\mu_B} v_A=v_B$

بسامد مد اصلی لوله‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم. $(\lambda=2\ell)$

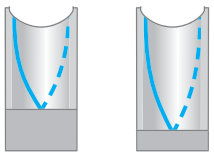
$$f=\frac{v}{2\ell} \xrightarrow{\ell_A>\ell_B} f_A<f_B$$

بنابراین بسامد اصلی تار A از بسامد اصلی تار B کمتر است. از طرفی لولهٔ C با تار A و لولهٔ D با تار B تشدید کرده است. در این صورت:

$$f_A<f_B \xrightarrow{f_A=f_C \text{ و } f_B=f_D} f_C<f_D$$

تندی صوت در هوای درون لوله‌ها یکسان است از این‌رو: $\lambda=\frac{v}{f} \xrightarrow{f_C<f_D} \lambda_C>\lambda_D$

طول موج مد اصلی لولهٔ C از طول موج مد اصلی لولهٔ D بلندتر است بنابراین در لولهٔ C باید آب کمتری قرار گیرد.



B ۲۳۹۹ ۴

چشمهٔ صوت، امواجی در محیط گسیل می‌کند که به دیوار برخورد کرده و امواج بازتابیده از دیوار با امواج گسیلی از چشمه تداخل کرده، امواج ایستاده تشکیل می‌گردد، در نقاطی که دو موج رفت و برگشت در فاز مخالف قرار دارند، برهم‌نهی ویرانگر بوده، دامنه کمینه است و در نقاطی که دو موج هم‌فاز هستند، برهم‌نهی سازنده بوده، دامنه بیشینه است. فاصلهٔ دو نقطهٔ کمینه (گره) متوالی برابر $\frac{\lambda}{2}$ می‌باشد. بنابراین:

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{320}{160}=2m \Rightarrow \frac{\lambda}{2}=1m$$

B ۲۴۰۰ ۴

هنگامی فرفره می‌چرخد که بلندگو و تشدیدگر در یک بسامد تشدیدی باشند:

$$f_{\text{بلندگو}}=f_{\text{تشدیدگر}}$$

در این حالت که فرفره نمی‌چرخد $f_{\text{بلندگو}} \neq f_{\text{تشدیدگر}}$ است. می‌دانیم بنا به اثر دوپلر با حرکت چشمه (بلندگو) یا گیرنده صوت (تشدیدگر) بسامد رسیده به تشدیدگر تغییر کرده و ممکن است بسامد دریافتی توسط تشدیدگر با یکی از بسامدها تشدیدی آن برابر شده و در اثر پدیده تشدید، صوت خروجی از دهانهٔ تشدیدگر باعث حرکت فرفره شود.

پنجره تودرتو (آزمون فصل)

B ۲۴۰۰ ۳

۱ بسامد صوت ایجادشده در تار را حساب می‌کنیم.

$$f_n=n\frac{v}{2L} \xrightarrow[L=1m]{n=4,v=200m/s} f_4=4\times\frac{200}{2} \Rightarrow f_4=400Hz$$

۲ تندی انتشار صوت در هوای محیط را به‌دست می‌آوریم.

$$v=f\lambda \xrightarrow{\lambda=0/8m} v=400\times 0/8 \Rightarrow v=320m/s$$

۳ صوت مسیر $l=200+200=400m$ را طی می‌کند.

$$v=\frac{l}{\Delta t} \Rightarrow 320=\frac{400}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t=1/25s$$

نمای ۲۰ و ۳

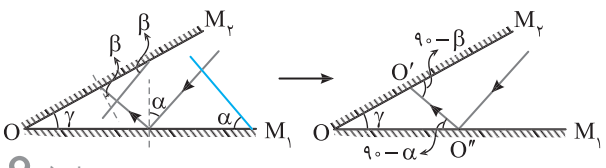
B ۲۴۰۰ ۴

۲ **یادآوری** زاویه‌ای که جبهه‌های موج با سطح می‌سازند برابر زاویهٔ بین پرتو و خط عمود است.

۱ زاویهٔ تابش بر سطح آینه M_1 برابر α است. از این‌رو زاویه‌ای که پرتو بازتاب $I'I$ با آینهٔ M_1 می‌سازد برابر $90-\alpha$ است.

۲ در مثلث $OO'O''$ زاویهٔ $90-\beta$ زاویهٔ خارجی بوده و برابر مجموع دو زاویهٔ دیگر مثلث است:

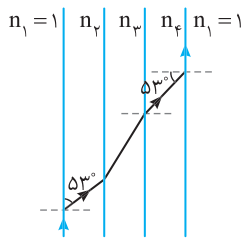
$$90-\beta=90-\alpha+\gamma \Rightarrow \alpha-\beta=\gamma$$



نمای ۵

B ۲۴۰۰ ۲

۳ با توجه به رابطهٔ اسنل خواهیم داشت:



$$n_2 \sin\theta_2=n_4 \sin\theta_4$$

$$\Rightarrow n_2 \sin 37^\circ=n_4 \sin 53^\circ$$

$$n_2\times 0/6=n_4\times 0/8 \Rightarrow \frac{n_2}{n_4}=\frac{0/8}{0/6}=\frac{4}{3}$$

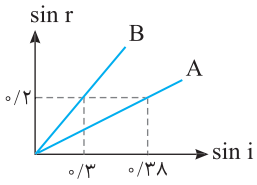
نسبت تندی‌ها خواهد شد: $\frac{v_4}{v_2}=\frac{n_2}{n_4}=\frac{4}{3}$

نمای ۱۱

B ۲۴۰۰ ۳

۴ با توجه به قانون اسنل $\left(n=\frac{\sin i}{\sin r}\right)$ می‌توان نوشت:

$$n_A=\frac{0/38}{0/2}=1/9, n_B=\frac{0/3}{0/2}=1/5 \Rightarrow \frac{n_A}{n_B}=\frac{1/9}{1/5}=\frac{19}{15}$$



نمای ۸

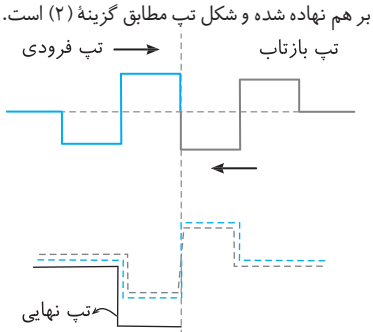
A ۲۴۰۰ ۴

۵ با افزایش دما چگالی هوا کاهش می‌یابد و سبب کاهش ضریب شکست و در نتیجه سراب می‌شود. همچنین با افزایش طول موج ضریب شکست شیشه کاهش می‌یابد که این امر سبب پاشندگی نور می‌شود.

نمای ۱۲

B ۲۴۰۰ ۲

۶ در مدت $0/1s$، تپ به اندازهٔ $\Delta x=vt=2\times 0/01=0/02m$ پیشروی می‌کند و از روی مانع بازتابیده می‌شود در این بازهٔ زمانی نیم‌تپ بالایی وارونه شده و با تپ پایینی که به مانع می‌رسد بر هم نهاده شده و شکل تپ مطابق گزینهٔ (۲) است.



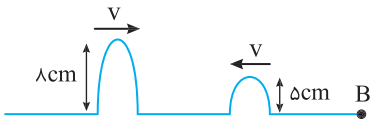
نمای ۱۴

۷ A ۲۴۰۰ ۲

پس از بازتاب از انتهای ثابت تپ قرینه می‌شود و شکل موج‌ها به صورت روبه‌رو خواهد شد.

بنابراین تداخل دو موج سازنده است.

$A_1+A_2=8+5=13cm$



نمای ۱۴

۸ A ۲۴۰۰ ۳

بسامد از ویژگی‌های چشمه است، پس بسامد نقاط حاصل از تداخل نیز برابر است با:

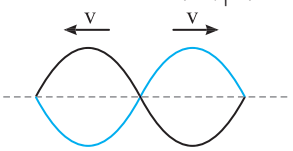
$2\pi f=100\pi \Rightarrow f=50Hz$

در تداخل سازنده دامنه برابر $A_1+A_2=0/04=4cm$ و در تداخل ویرانگر دامنه $A_1-A_2=0$ است.

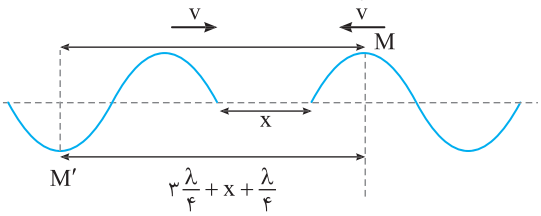
نمای ۱۵

۹ B ۲۴۰۰ ۲

دقت کنید سرعت انتشار دو موج یکسان بوده و با برابر بودن دوره، طول موج آن‌ها یکی است. برای آن‌که به‌طور لحظه‌ای بُعد تمام نقاط محیط صفر شود باید دو تپ مطابق شکل روبه‌رو در یک لحظه از هم بگذرند.



در این صورت مطابق شکل باید نقطهٔ M به نقطهٔ M' برسد. در این صورت اگر تپ سمت چپ را ثابت فرض کنیم، باید تپ سمت راست به اندازهٔ $\lambda+x$ جابه‌جا شود.



$\lambda+x=2v(5\frac{T}{2}) \Rightarrow \lambda+x=5vT \xrightarrow{\lambda=vT} \lambda+x=5\lambda \Rightarrow x=4\lambda$

نمای ۱۴

۱۰ A ۲۴۰۰ ۳

بسامد نقاط تداخلی با بسامد منبع یکسان است اما در نقاط S تداخل ویرانگر و دامنه کمینه و در نقاط L تداخل سازنده و دامنه بیشینه می‌باشد بنابراین گزارهٔ (الف) درست است. هرچه محیط متراکم‌تر باشد عموماً تندی صوت افزایش می‌یابد.

$\lambda=\frac{v\uparrow}{f_{ثابت}} \Rightarrow$ λ افزایش می‌یابد

فاصلهٔ بین نقاط L و S با طول موج رابطهٔ مستقیم دارند بنابراین گزارهٔ (ب) درست است.

اگر محیط ثابت باشد (v ثابت) با افزایش f، طول موج کاهش می‌یابد بنابراین گزارهٔ (پ) نادرست است:

$\lambda=\frac{v_{ثابت}}{f\uparrow} \Rightarrow$ λ کاهش می‌یابد

نمای ۱۶

۱۱ B ۲۴۰۰ ۱

پهنای نوارها در محیط اول بیشتر است، پس طول موج در محیط اول بلندتر است، بنابراین:

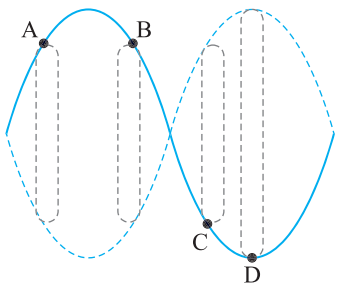
$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{n_1}{n_2} \xrightarrow{\lambda_1>\lambda_2} n_1<n_2 \Rightarrow \frac{n_1}{n_2}<1$

نمای ۱۶

۱۲ B ۲۴۰۰ ۳

ذرات واقع بر موج ایستاده، در حال حرکت هماهنگ ساده با بسامد یکسان و دامنه‌های مختلف هستند. انرژی مکانیکی در نوسان ذرات با f^2 و A^2 رابطه مستقیم دارد:

$A_A=A_B=A_C<A_D \Rightarrow E_A=E_B=E_C<E_D$



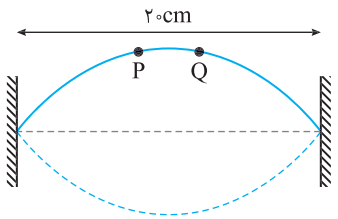
نقاط A و B بین دو گره متوالی قرار دارند و جهت نوسان‌های آن‌ها در هر لحظه یکسان است و جهت نوسان نقطهٔ C در هر لحظه خلاف A و B است.

نمای ۱۷

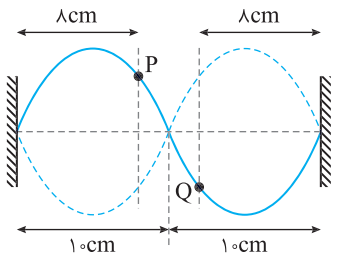
۱۳ C ۲۴۰۰ ۳

در مُد اصلی تار با دو انتهای ثابت شکل موج ایستاده در تار مطابق شکل زیر است و تمام نقاط بین دو گره دارای نوسان‌های هم‌جهت هستند. طول موج در این حالت برابر است با:

$\frac{\lambda}{2}=20cm \Rightarrow \lambda=40cm \Rightarrow f=\frac{v}{\lambda} \Rightarrow f=\frac{20}{0/4}=50Hz$

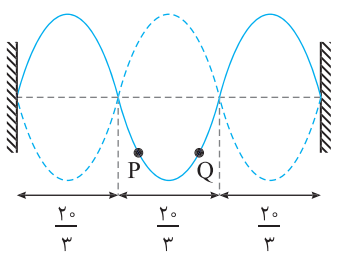


اگر با افزایش بسامد، مُد دوم تولید شود دو نقطه P و Q در دو طرف یک گره قرار می‌گیرند و نوسان‌های آن در خلاف جهت هم خواهد بود.



و اگر مُد سوم تولید شود P و Q مجدداً بین دو گره قرار می‌گیرند و نوسان‌های آن‌ها هم جهت می‌شود. طول موج و بسامد را در این حالت به دست می‌آوریم:

$3\frac{\lambda}{2}=20 \Rightarrow \lambda=\frac{40}{3}cm \Rightarrow f_3=\frac{v}{\lambda}=\frac{20}{\frac{40}{3}\times10^{-2}} \Rightarrow f_3=150Hz$

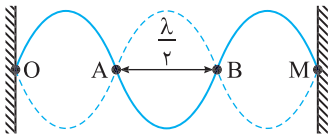


بنابراین باید بسامد را $150-50=100Hz$ افزایش دهیم.

نمای ۱۸

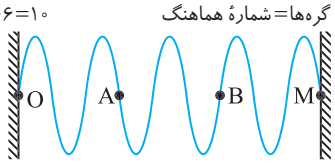
۱۴ B ۲۴۰۰ ۳

در هماهنگ سوم، ۴ گره موجود است که A و B دو گرهٔ میانی آن می‌باشد.



برای آن‌که بین دو نقطه A و B، ۲ گره اضافه شود باید بین دو گرهٔ O و A و بین گرهٔ M و B نیز دو گره تشکیل شود پس تعداد گره‌ها ۶=۲+۲+۲ اضافه می‌شود. در این صورت تعداد گره‌ها خواهد شد:

۹=۱−تعداد گره‌ها=شمارهٔ هماهنگ ۱۰=۴+۶=تعداد گره‌ها



بنا به فرض مسأله دو بسامد باهم برابر است از این رو:

$$f_۳=f_۹\Rightarrow\frac{۳v_۱}{۲\ell}=\frac{۹v_۲}{۲\ell}\Rightarrow v_۱=۳v_۲\Rightarrow\sqrt{\frac{F_۱}{\mu}}=۳\sqrt{\frac{F_۲}{\mu}}\Rightarrow F_۱=۹F_۲$$

نمای ۱۹ و ۲۰

۱۵ B ۲۴۰۰ ۳

تار با آهنگ ۱۰Hz/s در حال افزایش است بنابراین پس از ۱۰s و ۲۵s به ترتیب ۱۰۰Hz و ۲۵۰Hz بسامد نوسان‌ساز افزایش یافته است. دقت کنید بسامد اولیهٔ نوسان‌ساز ۵۰۰ هرتز است. در این صورت بسامدهای ۵۰۰+۱۰۰=۶۰۰Hz و ۵۰۰+۲۵۰=۷۵۰Hz بسامدهای متوالی تشدیدی تار مرتعش هستند از این رو:

$$f_۱=f_n-f_{n-۱}=۷۵۰-۶۰۰=۱۵۰Hz$$

$$f_۱=\frac{v}{۲\ell}\xrightarrow{v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}}۱۵۰=\frac{\sqrt{\frac{F}{۰/۹\times۱۰^{-۳}}}}{۲\times۰/۲}\Rightarrow۶۰=\sqrt{\frac{F\times۱۰^{۳}}{۰/۹}}$$

$$\Rightarrow۶۰=\frac{۱۰۰}{۳}\sqrt{F}\Rightarrow\sqrt{F}=۱/۸\Rightarrow F=۳/۲۴N$$

نمای ۱۸

۱۶ A ۲۴۰۰ ۳

در یک تار با دو انتهای ثابت، بسامد تولید شده برابر $f_n=\frac{nv}{۲\ell}$ است. با توجه به فرض پرسش، $\ell=۸۰cm$ و تعداد نوسان‌ها در واحد زمان برابر بسامد است پس بسامد تولید شده $f=۲۰۰Hz$ بوده و تار صوت اصلی خود را تولید می‌کند $(n=۱)$.

$$f_n=\frac{nv}{۲\ell}\Rightarrow۲۰۰=\frac{۱\times v}{۲\times۰/۸}\Rightarrow v=۳۲۰m/s$$

نمای ۱۸ و ۱۹

۱۷ A ۲۴۰۰ ۴

۱ در طول سیم دو گره ایجاد شده است یعنی تار هماهنگ اول خود را تولید کرده است:

$$f_n=\frac{nv}{۲\ell}\Rightarrow۹۰۰=\frac{۱\times v}{۰/۴}\Rightarrow v=۳۶۰m/s$$

۲ چگالی خطی جرم سیم برابر است با:

$$\mu=\frac{m}{\ell}\Rightarrow\mu=\frac{۸۰۰\times۱۰^{-۳}\times۱۰^{-۳}}{۲۰\times۱۰^{-۲}}\Rightarrow\mu=۴\times۱۰^{-۳}kg/m$$

۳ اکنون به کمک رابطهٔ سرعت انتشار موج در سیم، نیروی کشش سیم را به‌دست می‌آوریم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\Rightarrow۳۶۰\times۳۶۰=\frac{F}{۴\times۱۰^{-۳}}\Rightarrow F=۵۱۸/۴N$$

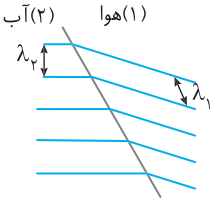
نمای ۱۹

۱۸ A ۲۴۰۰ ۲

یادآوری ۱ تندی انتشار امواج الکترومغناطیسی در آب کمتر از تندی انتشار این امواج در هواست.

یادآوری ۲ تندی انتشار امواج صوتی مکانیکی در آب بیشتر از تندی انتشار این امواج در هواست.

یادآوری ۳ بسامد موج در گذر از یک محیط به محیط دیگر ثابت است.



بنابراین:

$$v_۱=f\lambda_۱\ ,\ v_۲=f\lambda_۲\Rightarrow\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{v_۲}{v_۱}$$

از یادآوری‌ها نتیجه می‌گیریم طول موج امواج مکانیکی در آب از طول موج این امواج در هوا بیشتر است $(\lambda\uparrow=\frac{v\uparrow}{f})$ بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

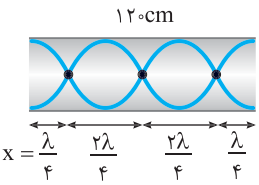
نمای ۱۰

۱۹ A ۲۴۰۰ ۱

فاصلهٔ اولین گره از انتهای لوله $\frac{\lambda}{۴}$ است.

ابتدا λ را با توجه به شکل حساب می‌کنیم: $\ell=۲n\frac{\lambda}{۴}\Rightarrow۱۲۰=۲\times۳\frac{\lambda}{۴}\Rightarrow\lambda=۸۰cm$

حال x را به دست می‌آوریم: $x=\frac{\lambda}{۴}=\frac{۸۰}{۴}=۲۰cm$

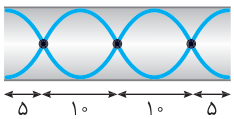


نمای ۲۱

بازی با سؤال در یک لولهٔ صوتی با دو انتهای باز، در هنگام تولید صوت ۳ گره ایجاد شده است. اگر فاصله یک گره از شکم بعدی ۵cm باشد، طول لوله چند cm است؟ از کتاب درسی

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

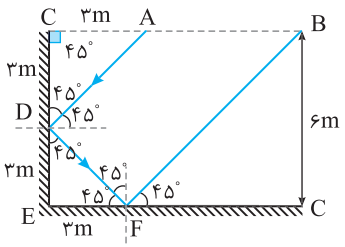
پاسخ شکل موج را درون لوله رسم می‌کنیم. می‌دانیم فاصلهٔ هر گره از شکم مجاورش $\frac{\lambda}{۴}$ است اکنون این فاصله را می‌شماریم. $\ell=۵+۱۰+۱۰+۵=۳۰cm$



گزینهٔ ۳

۲۰ C ۲۴۰۰ ۴

۱ به شکل رسم شده خوب دقت کنید بنا به فرض مسئله زاویهٔ تابش پرتو AD، ۴۵° است. بنابراین مثلث ACD یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است و ضلع CD برابر ۳m است.



۲ طول ضلع CE=۶m است. بنابراین طول ضلع DE برابر ۶−۳=۳m است.

۳ مثلث DEF متساوی‌الساقین است. بنابراین طول ضلع EF نیز برابر ۳m است.

۴ پرتو DF با زاویهٔ تابش ۴۵° به آینهٔ (۲) می‌تابد. بنابراین زاویهٔ بین پرتو FB با آینه نیز ۴۵° است و مثلث BFG متساوی‌الساقین بوده و طول ضلع FG برابر ۶m است.

۵ طول مسیر حرکت پرتو را حساب می‌کنیم.

$$AD=\sqrt{AC^۲+CD^۲}=\sqrt{۳^۲+۳^۲}\Rightarrow AD=۳\sqrt{۲}m$$

$$DF=\sqrt{DE^۲+EF^۲}=\sqrt{۳^۲+۳^۲}\Rightarrow DF=۳\sqrt{۲}m$$

$$BF=\sqrt{(FG)^۲+(BG)^۲}=\sqrt{۶^۲+۶^۲}\Rightarrow BF=۶\sqrt{۲}m$$

۶ مسافت طی شده را به‌دست می‌آوریم.

$$\ell=AD+DF+FB\Rightarrow\ell=۳\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}+۶\sqrt{۲}\Rightarrow\ell=۱۲\sqrt{۲}m$$

۷ زمان سپری شده را به‌دست می‌آوریم.

$$v=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t=\frac{\ell}{v}\Rightarrow\Delta t=\frac{۱۲\sqrt{۲}}{۳\times۱۰^۸}\Rightarrow\Delta t=۴\sqrt{۲}\times۱۰^{-۸}s\Rightarrow\Delta t=۴۰\sqrt{۲}ns$$

نمای ۵

فصل پنجم

آشنایی با فیزیک اتمی



پنجره ۱

A ۲۴۰۱ ۲

بـه قوانیـن مکانیک نیوتون، نظریهٔ الکترومغناطیسـی ماکسـول و قوانیـن ترمودینامیک فیزیک کلاسـیک گویند. فیزیک کلاسیک قادر به توجیه پدیده‌هایی مانند تابش گرمایی اجسـام، پدیدهٔ فوتوالکتریک، ساختمان اتم، طیف اتمی، ساختار هسته و لیزر ... نیست، بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

B ۲۴۰۲ ۱

آزمایش نشان می‌دهد هنگامی که نور بر سطح فلز بتابد، رخ دادن پدیده فوتوالکتریک:

۱ به شدت نور فرودی بر فلز بستگی ندارد.

۲ به بسامد نور فوردی بر فلز بستگی دارد و هر گاه بسامد از حدی که به آن بسامد آستانه می‌گویند کوچکتر باشد، اثر فوتوالکتریک رخ نمی‌دهد.

بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

A ۲۴۰۳ ۴

یادآوری بنـا بـه نظریهٔ فیزیـک کلاسـیک، مـوج الکترومغناطیسـی از یـک میدان الکتریکی و یک میدان مغناطیسی تشکیل شده است.

از دیـدگاه فیزیـک کلاسـیک، میـدان الکتریکی بر الکترون سـطح فلز نیـروی الکتریکی $(F=qE\Rightarrow F=eE)$ وارد می‌کنـد و چنانچـه ایـن نیـرو به انـدازهٔ کافی قوی باشـد، الکترون از سـطح فلز جدا می‌شـود. اگـر موج فرودی بر فلز نتوانـد الکترون را جدا کند، می‌توان بدون تغییر بسـامد نور تنها با افزایش شـدت نور سبب افزایش میدان الکتریکی تابش فرودی شده تا الکترون از سطح فلز جدا شود. در واقع فیزیک کلاسیک پیش‌بینی می‌کنـد که رخ دادن پدیدهٔ فوتوالکتریک را می‌توان با هر بسـامدی انجام داد و تنها باید شدت نور مناسب انتخاب شود، بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

A ۲۴۰۴ ۴

یادآوری انرژی امواج الکترومغناطیسی بنا بر نظر اینشتین از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$E=n\,hf$$

n: تعداد فوتون‌ها، hf: انرژی فوتون

با افزایش شـدت نور، تعداد فوتون‌ها (n) که در یکای زمان بر کلاهک الکتروسـکوپ می‌تابد بیشـتر می‌شـود. بنابراین تعداد فوتوالکترون‌ها در یکای زمان یعنی آهنگ خروج الکترون‌ها از سـطح کلاهک افزایش یابد، یعنی کاهش انحراف ورقه‌ها بیشـتر و در زمان کوتاه‌تری رخ می‌دهد.

A ۲۴۰۵ ۲

از دیـدگاه تئـوری یعنـی بـدون نـگاه بـه واقعیـت آزمایشـگاهی می‌تـوان گفت کـه ابتدا الکتروسـکوپ الکترون‌های اضافی‌اش را از دسـت می‌دهد و انحراف‌هـا کاهش می‌یابد و ورقه‌ها بسـته می‌شـوند. اما چون همچنان بر کلاهک الکتروسـکوپ به مدت طولانی نور تابیده می‌شـود باید الکترون‌های بیشـتری از الکتروسـکوپ جدا شـده و ورقه‌ها دارای بار مثبت شوند و یکدیگر را دفع کرده و انحراف ورقه‌ها بیشتر شود و گزینهٔ (۴) درست است. اما واقعیت آزمایشـگاهی چیز دیگری است و با تاباندن نور فرابنفش به یک الکتروسکوپ بدون بار تا امروز کسی نتوانسته است باعث باردار شدن الکتروسکوپ شود به گونه‌ای که ورقه‌ها از هم فاصله بگیرند. بنابراین از نظر آزمایشگاهی گزینهٔ (۲) پاسخ درست است.

A ۲۴۰۶ ۳

وضعیت نشـان داده شـده در شکل حالت $V>0$ است (قطب منفی باتری به صفحه‌ای متصل است که پرتو بر آن می‌تابد). پس اگر بسامد (طول موج) پرتو مناسب باشد، حتی با شـدت کم باید جریان در مدار برقرار شـود (فوتوالکترون‌ها گسیل شوند). پس این که جریان در مدار برقرار نشـده اسـت نشان‌دهندهٔ آن است که بسـامد پرتو کمتر از بسامد آسـتانه اسـت $(f<f_0)$. اگر بسامد پرتو کمتر از بسامد آسـتانه باشد، تغییر شدت نور نمی‌تواند باعث گسیل فوتوالکترون‌ها شود پس باید بسامد پرتو افزایش یابد (طول موج کم شود).

A ۲۴۰۷ ۳

نکته یکی از نتیجه‌های نظریه الکترومغناطیسـی ماکسـول این است که شدت نور با مربع دامنه میدان الکتریکی موج الکترومغناطیسی متناسب است. $(I\propto E^2)$

اگر دامنهٔ میدان الکتریکی n برابر شود آن‌گاه شدت نور n^2 برابر می‌شود.

B ۲۴۰۸ ۲

۱ هر فوتون یک الکترون را جدا می‌کند، بنابراین بار الکتریکی که با 2×10^{14} فوتون از الکتروسکوپ جدا می‌شود خواهد شد:

$$Q=ne\Rightarrow Q=2\times10^{14}\times(-1/6\times10^{-19})\Rightarrow Q=-3/2\times10^{-5}\,C$$

$$Q=-32\times10^{-6}\,C=-32\mu C$$

۲ $-32\mu C$ بار از الکتروسـکوپ جدا شـده و مقدار بار باقی‌مانده در الکتروسـکوپ برابر است با:

$$-38\mu C-(-32\mu C)=-6\mu C$$

A ۲۴۰۹ ۳

انرژی فوتون $E=hf$ است که با بسامد نسبت مستقیم دارد.

A ۲۴۱۰ ۲

در طیـف نـور مرئی (بنفش، آبی، سـبز، زرد، نارنجی، قرمز) به ترتیـب از بنفش به قرمز، بسـامد کاهش می‌یابد، بنابراین انرژی فوتون (hf) کاهش می‌یابد، از این‌رو بسامد نور نارنجی از بقیه گزینه‌ها کمتر بوده و انرژی فوتون‌های نارنجی از بقیه کمتر است.

B ۲۴۱۱ ۳

یادآوری هر الکترون ولت برابر $1/6\times10^{-19}\,J$ است $(1eV=1/6\times10^{-19}\,J)$.

به کمک یک تناسب ساده مسئله قابل حل است.

$$\frac{1eV.s \;\vert\; 1/6\times10^{-19}\,J.s}{? \;\vert\; 6/6\times10^{-34}\,J.s}\Rightarrow ?=\frac{6/6\times10^{-34}}{1/6\times10^{-19}}=\frac{33}{8}\times10^{-15}\,eV.s$$

A ۲۴۱۲ ۳

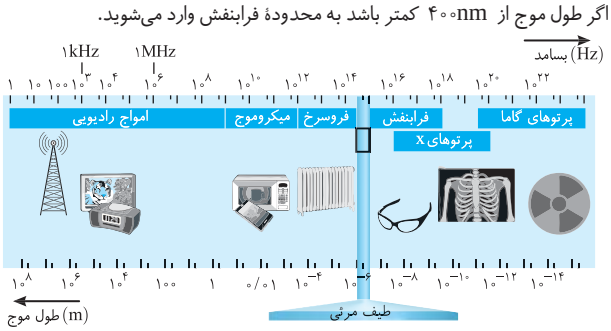
کافـی اسـت در رابطـهٔ انـرژی فوتـون، داده‌هـای مسـئله $\lambda=0/5\times10^{-6}\,m$ و $h=4/14\times10^{-15}\,eV.s$ و تنـدی انتشـار نور $c=3\times10^8\,m/s$ را قـرار داد و انرژی فوتون را حساب کرد.

$$E=h\frac{c}{\lambda}\Rightarrow E=4/14\times10^{-15}\times\frac{3\times10^8}{0/5\times10^{-6}}\Rightarrow E=2/484eV$$

B ۲۴۱۳ ۱

منظور از انرژی هر کوانتوم یک موج الکترومغناطیسی همان فوتون است.

خط فکری ابتدا انرژی فوتون را برحسب یکای ژول حساب کنید. سپس به کمک رابطهٔ انرژی فوتون طول موج را حساب کنید. اگر طول موج بین $400nm$ تا $700nm$ باشـد، موج الکترومغناطیسی نور مرئی اسـت. اگر از $700nm$ بیشتر باشد در محدودهٔ فروسرخ است البته اگر طول موج به محدودهٔ متر برسد با موج رادیویی سروکار داریم و اگر طول موج از $400nm$ کمتر باشد به محدودهٔ فرابنفش وارد می‌شوید.



۱ انرژی فوتون برحسب ژول خواهد شد:

$$\frac{1eV \;\vert\; 1/6\times10^{-19}\,J}{4\times10^{-7}\,eV \;\vert\; E=?}\Rightarrow E=6/4\times10^{-26}\,J$$

۲ طول موج خواهد شد:

$$E=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow\lambda=\frac{hc}{E}\Rightarrow\lambda=\frac{6/63\times10^{-34}\times3\times10^8}{6/4\times10^{-26}}\simeq3/10\,m$$

۳ طول موج در محدودهٔ متر بوده یعنی موج الکترومغناطیسی، رادیویی است.

میانبر در کتاب درسی حاصل‌ضرب hc به‌طور تقریبی برابر $۱۲۴۰eV.nm$ بیان شده بنابراین حل مسئله بسیار ساده‌تر است.

طول موج را به‌دست می‌آوریم.

$$E=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow ۴\times ۱۰^{-۷}=\frac{۱۲۴۰}{\lambda}\Rightarrow \lambda=\frac{۱۲۴۰}{۴\times ۱۰^{-۷}}=۳۱۰\times ۱۰^{۷}nm$$

$$\lambda=۳۱۰\times ۱۰^{۷}\times ۱۰^{-۹}m=۳/۱m\Rightarrow \text{رادیویی}$$

دقت کنید در این صورت تمام اعداد داده شده در پرانتز روبه‌روی سؤال به هیچ دردی نمی‌خورد.

B ۲۴۱۴ ۲

نکته محدودهٔ طول موجی نور مرئی $۴۰۰nm$ تا $۷۰۰nm$ (فرابنفش تا قرمز) است. انرژی فوتون با طول موج‌های ابتدا و انتهای محدوده را به‌دست می‌آوریم:

$$E=\frac{hc}{\lambda}\xrightarrow{hc=۱۲۴۰eV.nm}\begin{cases}\xrightarrow{\lambda_۱=۴۰۰nm} E_۱=\frac{۱۲۴۰}{۴۰۰}\Rightarrow E_۱=۳/۱eV\\ \xrightarrow{\lambda_۲=۷۰۰nm} E_۲=\frac{۱۲۴۰}{۷۰۰}\Rightarrow E_۲=۱/۷۷eV\end{cases}$$

انرژی فوتون مرئی باید بین $۱/۷۷eV$ تا $۳/۱eV$ باشد، بنابراین از بین گزینه‌ها $E=۲/۵eV$ مربوط به نور مرئی است.

B ۲۴۱۵ ۳

رابطهٔ انرژی فوتون بر حسب طول موج را می‌نویسیم و بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$E=\frac{hc}{\lambda},E_۱=\frac{hc}{\lambda_۱},E_۲=\frac{hc}{\lambda_۲}\Rightarrow\frac{E_۱}{E_۲}=\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{۶۰۰}{۴۰۰}=\frac{۳}{۲}=۱/۵$$

A ۲۴۱۶ ۴

رابطه انرژی فوتون را در دو حالت نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{E_X}{E}=\frac{\frac{hc}{\lambda_X}}{\frac{hc}{\lambda}}=\frac{\lambda}{\lambda_X}\Rightarrow\frac{E_X}{E}=\frac{\lambda}{\lambda_X}$$

$$\xrightarrow{\lambda_X=۲\times ۱۰^{-۹}m,\lambda=۰/۴\times ۱۰^{-۶}m}\frac{۰/۴\times ۱۰^{-۶}}{۲\times ۱۰^{-۹}}=\frac{۴\times ۱۰^{-۷}}{۲\times ۱۰^{-۸}}=۲۰$$

A ۲۴۱۷ ۳

نکته هر گاه یک موج از یک محیط وارد محیط شفاف دیگری شود، بسامدش ثابت می‌ماند اما طول موج و تندی انتشار موج تغییر می‌کند.

انرژی فوتون به بسامد نور $(E=hf)$ بستگی دارد، بنابراین هر گاه فوتون از خلأ وارد هر محیط دیگری شود چون بسامد ثابت می‌ماند، انرژی فوتون تغییر نمی‌کند.

A ۲۴۱۸ ۱

نکته انرژی فوتون در گذر از یک محیط شفاف و ورود به محیط شفاف دیگر تغییر نمی‌کند، کافی است انرژی فوتون را در هوا به‌دست بیاوریم.

$$E=h\frac{c}{\lambda}\xrightarrow{h=۶/۶\times ۱۰^{-۳۴}J.s,\lambda=۰/۳۳\times ۱۰^{-۶}m,c=۳\times ۱۰^{۸}m/s}$$

$$E=۶/۶\times ۱۰^{-۳۴}\times\frac{۳\times ۱۰^{۸}}{۰/۳۳\times ۱۰^{-۶}}\Rightarrow E=۶\times ۱۰^{-۱۹}J$$

A ۲۴۱۹ ۴

انرژی پرتوهای موج الکترومغناطیسی از رابطهٔ $E=nh\frac{c}{\lambda}$ به‌دست می‌آید که در آن n تعداد فوتون‌های موج الکترومغناطیسی است. از این‌رو خواهیم داشت:

$$E=n\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow ۱۲۰=n\frac{hc}{\lambda}\xrightarrow[h=۶/۶\times ۱۰^{-۳۴}J.s]{c=۳\times ۱۰^{۸}m/s,\lambda=۰/۶۶\times ۱۰^{-۶}m}$$

$$۱۲۰=n\times ۶/۶\times ۱۰^{-۳۴}\times\frac{۳\times ۱۰^{۸}}{۶/۶\times ۱۰^{-۷}}\Rightarrow n=۴۰\times ۱۰^{۱۹}\Rightarrow n=۴\times ۱۰^{۲۰}$$

A ۲۴۲۰ ۳

۱ انرژی گسیل شده در مدت ۱۶ ثانیه از لامپ ۱۰۰ واتی را حساب می‌کنیم.

$$P=\frac{E}{t}\Rightarrow E=Pt\Rightarrow E=۱۰۰\times ۱۶\Rightarrow E=۱۶۰۰J$$

۲ انرژی را برحسب الکترون ولت حساب می‌کنیم:

$$E=\frac{۱۶۰۰}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}}eV$$

۳ تعداد فوتون های گسیل شده نور زرد خواهد شد:

$$E=nhf\xrightarrow{hf=۲eV}\frac{۱۶۰۰}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}}=n\times ۲\Rightarrow n=۵\times ۱۰^{۲۱}$$

B ۲۴۲۱ ۲

این دسته از مسائل از راه ترکیب دو فرمول به سادگی قابل حل هستند.

$$P=\frac{E}{t},E=nh\frac{c}{\lambda}\Rightarrow P=\frac{nhc/\lambda}{t}\Rightarrow P=\frac{nhc}{\lambda t}$$

$$\xrightarrow[h=۶/۶۳\times ۱۰^{-۳۴}Js,t=۱s,\lambda=۶۶۳nm]{P=۰/۳\times ۱۰^{-۳}W,c=۳\times ۱۰^{۸}m/s}۰/۳\times ۱۰^{-۳}=\frac{n\times ۶/۶۳\times ۱۰^{-۳۴}\times ۳\times ۱۰^{۸}}{۶۶۳\times ۱۰^{-۹}\times ۱}$$

$$n=\frac{۳\times ۱۰^{-۱۳}}{۳\times ۱۰^{-۲۸}}\Rightarrow n=۱۰^{۱۵}$$

A ۲۴۲۲ ۱

توان برابر است با:

$$P=\frac{E}{t}\xrightarrow{E=nhf}Pt=nhf$$

$$\Rightarrow ۴/۸\times ۱۰^{۴}\times ۱=n(۴\times ۱۰^{-۱۵}\times ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})\times ۷۵\times ۱۰^{۶}\Rightarrow n=۱۰^{۳۰}$$

B ۲۴۲۳ ۱

طبق تعریف توان داریم:

$$P=\frac{E}{t}$$

انرژی هر فوتون برابر $\frac{hc}{\lambda}$ است و انرژی n فوتون برابر است با:

$$E=\frac{nhc}{\lambda}$$

$$P=\frac{E}{t}=\frac{nhc}{\lambda t}=\frac{۳\times ۱۰^{۲۱}\times ۱۲۴۰\times \overbrace{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}}^{\text{تبدیل الکترون ولت به ژول}}}{۲۴۸\times ۶۰}\Rightarrow P=۴۰W$$

B ۲۴۲۴ ۲

۱ انرژی مصرفی لامپ $۱۲۰W$ در هر دقیقه برابر است با:

$$P=\frac{E}{t}\Rightarrow E=Pt\Rightarrow E=۱۲۰\times ۶۰\Rightarrow E=۷۲۰۰J$$

۲ ۵ درصد این انرژی به نور تبدیل می‌شود. انرژی نور گسیلی از لامپ را حساب می‌کنیم.

$$Ra=\frac{E_۲}{E_۱}\times ۱۰۰\Rightarrow ۵=\frac{E_۲}{۷۲۰۰}\times ۱۰۰\Rightarrow E_۲=۳۶۰J$$

۳ انرژی را برحسب الکترون ولت حساب می‌کنیم.

$$\begin{array}{c|c}۱eV & ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}J\\ E & ۳۶۰J\end{array}\Rightarrow E=\frac{۳۶۰}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}}\Rightarrow E=۲۲۵\times ۱۰^{۱۹}eV$$

۴ تعداد فوتون‌های گسیلی را به‌دست می‌آوریم:

$$E=nh\frac{c}{\lambda}\Rightarrow ۲۲۵\times ۱۰^{۱۹}=n\times\frac{۱۲۴۰}{۴۹۶}$$

$$n=۹۰\times ۱۰^{۱۹}\Rightarrow n=۹\times ۱۰^{۲۰}\text{ فوتون}$$

B ۲۴۲۵ ۳

خط فکری انرژی گسیلی از یک لامپ برابر $E=nhf$ است. توان یک لامپ برابر آهنگ انرژی گسیلی از آن یعنی $P=\frac{E}{t}$ است.

(انرژی هر فوتون، تعداد فوتون گسیلی)

۱ توان لامپ نور بنفش:

$$P_۱=\frac{E_۱}{t_۱}\Rightarrow P_۱=\frac{n_۱hf_۱}{t_۱}$$

۲ توان لامپ نور زرد:

$$P_۲=\frac{E_۲}{t_۲}\Rightarrow P_۲=\frac{n_۲hf_۲}{t_۲}$$

۳ توان هر دو لامپ یکسان و برابر ۲۰۰W است پس $P_۱=P_۲$:

$$\frac{n_۱hf_۱}{t_۱}=\frac{n_۲hf_۲}{t_۲}\xrightarrow{t_۱=t_۲=۱s}n_۱f_۱=n_۲f_۲\xrightarrow{f=\frac{c}{\lambda}}\frac{n_۱c}{\lambda_۱}=\frac{n_۲c}{\lambda_۲}$$

$$\xrightarrow{\substack{\lambda_۱=۴۰۰nm\\ \lambda_۲=۶۰۰nm}}\frac{n_۱}{۴۰۰}=\frac{n_۲}{۶۰۰}\Rightarrow\frac{n_۲}{n_۱}=\frac{۶۰۰}{۴۰۰}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

B ۲۴۲۶ ۲

خط فکری با توجه به صورت مسئله شما باید یک دستگاه دو معادله دو مجهول به‌دست بیاورید و با حل آن طول موج پرتوها را بیابید.

۱ بنا بر فرض مسئله انرژی فوتون B سه برابر انرژی فوتون A است.

$$E_B=۳E_A\xrightarrow{E=\frac{hc}{\lambda}}\frac{hc}{\lambda_B}=۳\frac{hc}{\lambda_A}\Rightarrow\lambda_A=۳\lambda_B\quad(I)$$

۲ بنابر این طول موج A از طول موج B بزرگتر است و وقتی اختلاف طول موج‌ها ۴nm است. یعنی:

$$\lambda_A-\lambda_B=۴nm\quad(II)$$

۳ اکنون دو معادله و دو مجهول در اختیار دارید. از معادلهٔ (I) در معادلهٔ (II) جایگذاری می‌کنیم.

$$۳\lambda_B-\lambda_B=۴nm\Rightarrow\lambda_B=۲nm\Rightarrow\lambda_A=۳\times۲=۶nm$$

B ۲۴۲۷ ۴

۱ انرژی فوتون از رابطهٔ $E=hf$ به‌دست می‌آید که در آن f بسامد فوتون و h ثابت پلانک است. با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$E_A=۲/۵E_B\Rightarrow hf_A=۲/۵hf_B\Rightarrow f_A=۲/۵f_B$$

۲ با توجه به فرض مسئله اختلاف بسامد فوتون‌های A و B برابر $۹\times۱۰^{۱۴}Hz$ است. از طرفی $f_A>f_B$ است، بنابراین باید بنویسیم:

$$f_A-f_B=۹\times۱۰^{۱۴}Hz\xrightarrow{(I)}۲/۵f_B-f_B=۹\times۱۰^{۱۴}$$

$$\Rightarrow۱/۵f_B=۹\times۱۰^{۱۴}\Rightarrow f_B=۶\times۱۰^{۱۴}Hz\xrightarrow{f_A=۲/۵f_B}$$

$$f_A=۲/۵\times۶\times۱۰^{۱۴}\Rightarrow f_A=۱۵\times۱۰^{۱۴}Hz$$

۳ طول موج فوتون A خواهد شد:

$$\lambda_A=\frac{c}{f_A}\Rightarrow\lambda_A=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۱۵\times۱۰^{۱۴}}\Rightarrow\lambda_A=۲\times۱۰^{-۷}m\Rightarrow\lambda_A=۰/۲\mu m$$

B ۲۴۲۸ ۴

انرژی فوتون B، ۲۵٪ از انرژی فوتون A کمتر است.

$$E_B=E_A-۰/۲۵E_A\Rightarrow E_B=\frac{۳}{۴}E_A\quad(I)$$

انرژی هر فوتون از رابطهٔ $E=hf=\frac{hc}{\lambda}$ به‌دست می‌آید. از این‌رو:

$$\xrightarrow{(I)}\frac{hc}{\lambda_B}=\frac{۳}{۴}\times\frac{hc}{\lambda_A}\Rightarrow\lambda_A=\frac{۳}{۴}\lambda_B\quad(II)$$

بنا به فرض مسئله $\lambda_B-\lambda_A=۵۰nm$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\lambda_B-\frac{۳}{۴}\lambda_B=۵۰\Rightarrow\frac{۱}{۴}\lambda_B=۵۰\Rightarrow\lambda_B=۲۰۰nm$$

$$\lambda_A=\frac{۳}{۴}\times۲۰۰\Rightarrow\lambda_A=۱۵۰nm$$

بسامد هر پرتو را حساب کرده و از هم کم می‌کنیم:

$$f=\frac{c}{\lambda}\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{A}f_A=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۱۵۰\times۱۰^{-۹}}\Rightarrow f_A=۲\times۱۰^{۱۵}Hz\\ \xrightarrow{B}f_B=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۲۰۰\times۱۰^{-۹}}\Rightarrow f_B=۱/۵\times۱۰^{۱۵}Hz\end{cases}$$

$$\Delta f=۲\times۱۰^{۱۵}-۱/۵\times۱۰^{۱۵}\Rightarrow\Delta f=۵\times۱۰^{۱۴}Hz$$

B ۲۴۲۹ ۱

خط فکری طول موج هر فوتون را از رابطهٔ $E=h\frac{c}{\lambda}$ برحسب hc پیدا کنید، سپس آن‌ها را باهم جمع کرده، انرژی فوتون جدید را به‌دست آورید.

طول موج هر فوتون خواهد شد:

$$E=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{E_A=۴eV}۴=\frac{hc}{\lambda_A}\Rightarrow\lambda_A=\frac{hc}{۴}\\ \xrightarrow{E_B=۱۲eV}۱۲=\frac{hc}{\lambda_B}\Rightarrow\lambda_B=\frac{\lambda c}{۱۲}\end{cases}$$

دو طول موج را باهم جمع می‌کنیم:

$$\lambda=\lambda_A+\lambda_B=\frac{hc}{۴}+\frac{hc}{۱۲}\Rightarrow\lambda=\frac{۳hc+hc}{۱۲}\Rightarrow\lambda=\frac{hc}{۳}$$

انرژی فوتون با طول موج $\lambda=\lambda_A+\lambda_B$ را حساب می‌کنیم.

$$E=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow E=\frac{hc}{\frac{hc}{۳}}\Rightarrow E=۳eV$$

میانبر اگر انرژی فوتون‌ها با طول موج λ_A و λ_B به ترتیب E_A و E_B باشد. انرژی فوتون با طول موج $\lambda_A+\lambda_B$ برابر است با:

$$E=\frac{E_AE_B}{E_A+E_B}$$

B ۲۴۳۰ ۲

۱ طول موج فوتون را برحسب E حساب می‌کنیم.

$$E=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow\lambda=\frac{hc}{E}$$

۲ در مسئله مسافت ۱۰ برابر طول موج بیان شده است.

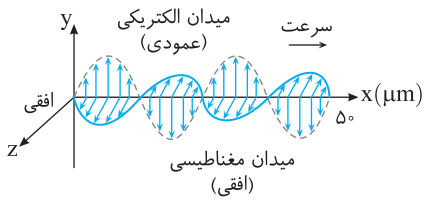
$$\ell=۱۰\lambda=\frac{۱۰hc}{E}$$

۳ زمان طی این مسیر خواهد شد:

$$\Delta x=vt\Rightarrow۱۰\frac{hc}{E}=ct\Rightarrow t=\frac{۱۰h}{E}$$

B ۲۴۳۱ ۴

۱ با توجه به نقش موج داده شده می‌توان به راحتی طول موج را به‌دست آورد:



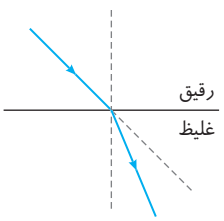
$$۲\lambda=۵۰\times۱۰^{-۶}m\Rightarrow\lambda=۲۵\times۱۰^{-۶}m$$

۲ انرژی هر فوتون برابر است با:

$$E=h\frac{c}{\lambda}\Rightarrow E=۴\times۱۰^{-۱۵}\times\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۲۵\times۱۰^{-۶}}\Rightarrow E=۴/۸\times۱۰^{-۲}eV$$

B ۲۴۳۲ ۲

نکته هر گاه پرتو نور از محیط رقیق به محیط غلیظ وارد شود، پرتو به خط عمود نزدیک می‌شود.



یادآوری ضریب شکست یک محیط شفاف برای طول موج‌های کوتاه‌تر، بزرگ‌تر است و هنگام ورود پرتو با طول موج کوتاه‌تر، انحراف آن بیشتر است.

خط فکری ابتدا باید به کمک انرژی فوتون‌ها مشخص کنید که طول موج کدام پرتو بیشتر است، تا بتوانید در مورد انحراف آن‌ها اظهارنظر کنید.

۱ انرژی فوتون A بیشتر انرژی فوتون B است از این‌رو:

$$E_A > E_B \xrightarrow{E=\frac{hc}{\lambda}} \frac{hc}{\lambda_A} > \frac{hc}{\lambda_B} \Rightarrow \lambda_A < \lambda_B$$

۲ هنگام ورود پرتو به محیط (II) چون این محیط از محیط (I) غلیظ‌تر است پرتوها به خط عمود نزدیک می‌شوند.

۳ طول موج A از طول موج B کوتاه‌تر است، بنابراین هنگام ورود به محیط (II) پرتو A به خط عمود نزدیک‌تر خواهد بود، بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

B ۳ ۲۴۳۳

انرژی هر فوتون برابر hf است.

$$\frac{E_A}{E_B}=2 \Rightarrow \frac{hf_A}{hf_B}=2 \Rightarrow \frac{f_A}{f_B}=2$$

پهنای نوار با طول موج رابطهٔ مستقیم و با بسامد رابطهٔ عکس دارد.

$$\frac{I_A}{I_B}=\frac{f_B}{f_A}=\frac{1}{2}$$

B ۱ ۲۴۳۴

۱ شدت تابش خورشید برابر است با انرژی که در هر ثانیه به هر مترمربع از زمین می‌رسد، بنابراین انرژی فرودی بر هر متر مربع زمین در هر ثانیه خواهد شد:

$$E=300\times1\times1=300J$$

$$c=3\times10^{8}m/s,\ \lambda=600\times10^{-9}m,\ h=4\times10^{-15}eV.s$$

۲ انرژی را برحسب الکترون ولت (eV) به‌دست می‌آوریم.

$1/6\times10^{-19}J$	$1eV$
$300J$	$E=?$

$$\Rightarrow E=\frac{300}{1/6\times10^{-19}}=\frac{3}{16}\times10^{22}eV$$

۳ تعداد فوتون را حساب می‌کنیم.

$$E=n\frac{hc}{\lambda} \xrightarrow[c=3\times10^{8}m/s]{\lambda=600\times10^{-9}m,\ h=4\times10^{-15}eV.s}$$

$$\frac{3}{16}\times10^{22}=n\times\frac{4\times10^{-15}\times3\times10^{8}}{600\times10^{-9}}$$

$$n=\frac{6\times10^{22}}{4\times16} \Rightarrow n=\frac{3}{32}\times10^{22} \Rightarrow n=9/375\times10^{20}$$

B ۴ ۲۴۳۵

خط فکری این نوع مسائل شبیه مسائل شدت صوت هستند که در آن‌ها یک چشمهٔ نقطه‌ای، صوت با توان P در محیط صوت منتشر می‌کرد و در فاصلهٔ r از چشمهٔ یک میکروفون به مساحت A قرار داشت و از شما خواسته می‌شد مقدار انرژی که از سطح میکروفون می‌گذرد را در مدت معین t حساب کنید.

شما ابتدا شدت صوت در محل را از رابطهٔ $I=\frac{P}{A}$ به‌دست می‌آوردید و سپس انرژی گذرنده از سطح میکروفون $E=IA_{\text{میکروفون}}t$ را حساب می‌کردید. اکنون نیز باید همین کار را انجام بدهید.

۱ توان گسیلی از لامپ را حساب می‌کنیم.

$$Ra=\frac{P_2}{P_1}\times100 \Rightarrow 80=\frac{P_2}{50}\times100 \Rightarrow P_2=40W$$

۲ شدت نور در فاصلهٔ $r=3m$ از چشمه را به‌دست می‌آوریم.

$$I=\frac{P_2}{A} \xrightarrow[\pi\sim3]{A=4\pi r^2} I=\frac{40}{4\times3\times(2)^2} \Rightarrow I=\frac{5}{6}W/m^2$$

۳ انرژی که در هر دقیقه به صفحه به مساحت $800cm^2$ می‌رسد خواهد شد:

$$E=IA_{\text{صفحه}}t \Rightarrow E=\frac{5}{6}\times800\times10^{-4}\times60 \Rightarrow E=4J$$

۴ انرژی را برحسب الکترون ولت (eV) حساب می‌کنیم:

$1/6\times10^{-19}J$	$1eV$
$4J$	E

$$\Rightarrow E=\frac{4}{1/6\times10^{-19}} \Rightarrow E=2/5\times10^{19}eV$$

۵ تعداد فوتون‌های رسیده به صفحه خواهد شد:

$$E=n\frac{hc}{\lambda} \xrightarrow{hc=1200eVnm,\ \lambda=420nm}$$

$$2/5\times10^{19}=n\frac{1200}{420} \Rightarrow n=8/75\times10^{18}\ \text{فوتون}$$

B ۲ ۲۴۳۶

۱ شدت نور را در فاصلهٔ ۱۰ متری چشمه به‌دست می‌آوریم.

$$I=\frac{P}{A} \xrightarrow{A=4\pi r^2} I=\frac{15}{4\pi\times10^2} \Rightarrow I=\frac{15}{400\pi}W/m^2$$

۲ مساحت مردمک را حساب می‌کنیم:

$$a_{\text{مردمک}}=\pi r^2 \xrightarrow{r=\frac{2}{2}=1mm=10^{-3}m} a_{\text{مردمک}}=\pi\times10^{-6}m^2$$

۳ انرژی نور فرودی بر مردمک خواهد شد:

$$E=Ia_{\text{مردمک}}t \xrightarrow{t=1s} E=\frac{15}{400\pi}\times\pi\times10^{-6} \Rightarrow E=\frac{15}{4}\times10^{-8}J$$

۴ تعداد فوتون‌های رسیده به مردمک برابر است با:

$$E=n\frac{hc}{\lambda} \xrightarrow{h=6/6\times10^{-34}J.s,\ \lambda=660\times10^{-9}nm}$$

$$\frac{15}{4}\times10^{-8}=n\times6/6\times10^{-34}\times\frac{3\times10^{8}}{660\times10^{-9}}$$

$$n=\frac{125\times10^{-8}}{10^{-17}} \Rightarrow n=125\times10^{9} \Rightarrow n=1/25\times10^{11}\ \text{فوتون}$$

روش دیگر: ابتدا انرژی هر فوتون را به دست می‌آوریم:

$$E=h\frac{c}{\lambda} \Rightarrow E=\frac{6/6\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{660\times10^{-9}} \Rightarrow E=3\times10^{-19}J$$

تعداد فوتون‌ها با توان 15W برابر است با:

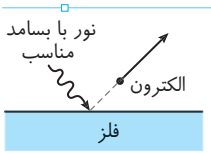
$$E_{\text{کل}}=Pt \xrightarrow{E_{\text{کل}}=nh\frac{c}{\lambda}} n\times3\times10^{-19}=15\times1 \Rightarrow n=5\times10^{19}\ \text{فوتون}$$

این تعداد فوتون از سطح کره‌ای به شعاع ۱۰ متر می‌گذرد پس تعداد فوتون‌های گذرنده از مردمک چشم خواهد شد:

مساحت کره $4\pi R^2$	5×10^{19}
مساحت مردمک πr^2	N

$$\Rightarrow \frac{4\pi\times10^2}{\pi\times(1\times10^{-3})^2}=\frac{5\times10^{19}}{N} \Rightarrow N=\frac{5}{4}\times10^{11} \Rightarrow N=1/25\times10^{11}\ \text{فوتون}$$

B ۱ ۲۴۳۷



جدا شدن الکترون از سطح فلز در اثر تابش الکترومغناطیسی فرودی بر فلز را پدیدهٔ فوتوالکتریک گویند و در شکل پرتو نور به سطح فلز برخورد کرده و سبب جدا شدن الکترون از فلز شده است پس پدیده مورد نظر پدیده فوتوالکتریک است.

A ۴ ۲۴۳۸

تابع کار فلز به جنس فلز بستگی دارد.

A ۳ ۲۴۳۹

بسامد آستانه کمترین بسامدی است که می‌تواند الکترون‌های سطح یک فلز معین را از آن جدا کند. بسامد آستانه بستگی به جنس فلز دارد و به بسامد پرتوهای فرودی بر فلز بستگی ندارد.

بازی با سؤال بیشینهٔ طول موج نور فرودی بر فلز که باعث جدا شدن الکترون از سطح آن می‌شود، به کدام عامل بستگی دارد؟

۱) شدت نور ۲) ولتاژ اعمال شده ۳) جنس فلز ۴) جریان

پاسخ کمترین مقدار انرژی برای جدا شدن الکترون از سطح فلز، به جنس فلز بستگی دارد، بنابراین بلندترین طول نور فرودی بر فلز که سبب جدا شدن این الکترون می‌شود به جنس فلز بستگی دارد. گزینهٔ ۳

A ۲۴۴۰ ۲

بنا به نظریه اینشتین در اثر فوتوالکتریک هر الکترون تنها با یک فوتون برهم کنش دارد. اگر شدت نور را افزایش دهیم hf تغییر نمی‌کند بلکه تعداد فوتون‌ها (n) زیاد می‌شود، بنابراین افزایش شدت نور نقشی در انرژی جنبشی فوتوالکترون ندارد و گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست‌اند. هر گاه نور بر سطح فلز بتابد و از آن فوتوالکترون جدا کند. بخشی از انرژی فوتون صرف جدا کردن الکترون می‌شود و بقیهٔ آن به انرژی جنبشی فوتوالکترون تبدیل می‌شود.

$$K_{max}=hf-W_{\circ} \quad \text{یا} \quad K_{max}=\frac{hc}{\lambda}-W_{\circ}$$

بنابراین هر چقدر که انرژی فوتون بیشتر باشد، انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها بیشتر است. از طرفی با توجه به رابطهٔ $E=\frac{hc}{\lambda}$ هر چه طول موج نور کوتاه‌تر باشد انرژی فوتون بیشتر بوده و سبب می‌گردد انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها افزایش یابد و گزینهٔ (۲) درست و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۲۴۴۱ ۱

با کاهش طول موج نور، انرژی فوتون افزایش می‌یابد. $(\uparrow E=\frac{hc}{\lambda\downarrow})$

بنابراین بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها افزایش می‌یابد. $\uparrow K_m=\frac{hc}{\lambda\downarrow}-W_{\circ\,\text{ثابت}}$

A ۲۴۴۲ ۳

بررسی گزینه‌ها: گزینهٔ (۱): $(W_{\circ}=hf_{\circ})$ بنابراین هر چه تابع کار بیشتر باشد، بسامد آستانه نیز بیشتر است و این گزینه نادرست است.

گزینهٔ (۲): با توجه به رابطهٔ اینشتین $(\uparrow K_m=hf\uparrow-W_{\circ})$ این گزینه نادرست است.

گزینهٔ (۳) : تعریف دقیق تابع کار است و این گزینه درست است.

گزینهٔ (۴): نادرست است زیرا بلندترین طول موج را طول موج آستانه می‌گویند.

B ۲۴۴۳ ۴

با نور بنفش پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ داده است. یعنی بسامد نور بنفش از بسامد آستانهٔ فلز $(f_{\circ})$ بیشتر بوده است.

در طیف نور مرئی بسامد نور بنفش از بسامد رنگ‌های دیگر بیشتر است و اگر به جای نور بنفش نور سبز یا زرد به کار ببریم ممکن است بسامد نور سبز یا نور زرد از بسامد آستانهٔ فلز کمتر شود و پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ ندهد، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست‌اند.

نکته در اثر فوتوالکتریک هر الکترون تنها با یک فوتون برهم کنش دارد.

اگر به جای یک لامپ بنفش چند لامپ بنفش به کار ببریم، شدت نور یعنی تعداد فوتون‌های نور $(E=nhf)$ افزایش می‌یابد و انرژی تک فوتون افزایش نمی‌یابد و با توجه به رابطهٔ $K_{max}=hf-W_{\circ}$، چون hf ثابت مانده پس انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها و تندی فوتوالکترون‌ها $(K=\frac{1}{2}mv^2)$ ثابت می‌ماند و گزینهٔ (۳) نادرست است.

اگر از فلزی که بسامد آستانهٔ آن کمتر است استفاده کنیم، انرژی لازم برای جدا کردن الکترون از این فلز یا همان تابع کار کاهش می‌یابد، بنابراین از انرژی فوتون نور فرودی بر فلز، مقداری بیشتری به انرژی جنبشی الکترون تبدیل می‌شود و تندی الکترون افزایش می‌یابد:

$$K_{max}=\underbrace{hf}_{\text{ثابت}}-\underbrace{W_{\circ}}_{\text{کاهش}}$$

$$\Rightarrow K_{max}\text{ افزایش می‌یابد: }\xrightarrow{K_{max}=\frac{1}{2}mv_m^2}v_m\text{ افزایش می‌یابد}$$

B ۲۴۴۴ ۲

نکته در پدیدهٔ فوتوالکتریک هر الکترون تنها با یک فوتون برهم کنش دارد.

۱ با افزایش شدت نور انرژی فوتون‌های نور (hf) تغییر نمی‌کند و تنها بر تعداد فوتون‌ها افزوده می‌شود.

$$(\uparrow E=\uparrow n\underbrace{hf}_{\text{ثابت}})$$

۲ در پدیده فوتوالکتریک، بخشی از انرژی فوتون صرف جدا کردن الکترون و بقیهٔ آن به انرژی جنبشی الکترون تبدیل می‌شود و با ثابت ماندن انرژی فوتون، انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها $(K=\frac{1}{2}mv^2)$ ثابت می‌ماند. در این صورت تندی فوتوالکترون‌های جدا شده ثابت می‌ماند.

$$K_{max}=\underbrace{hf}_{\text{ثابت}}-\underbrace{W_{\circ}}_{\text{ثابت}}\Rightarrow K_{max}\text{ ثابت}\Rightarrow v_{max}\text{ ثابت}$$

۳ اما به دلیل افزایش تعداد فوتون‌ها، تعداد فوتوالکترون‌های جدا شده افزایش می‌یابد بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

بازی با سؤال در یک اثر فوتوالکتریک، اگر شدت نور فرودی بر فلز را دو برابر کنیم، بیشینهٔ سرعت فوتوالکترون‌ها چند برابر می‌شود؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) تغییر نمی‌کند. ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ با دو برابر شدن شدت نور، انرژی فوتون‌های نور که سبب جداشدن الکترون‌ها می‌شوند تغییر نمی‌کند. بنابراین انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها ثابت می‌ماند و بیشینه تندی آن‌ها تغییر نمی‌کند. گزینهٔ ۳

A ۲۴۴۵ ۴

تابع کار فلز برابر حداقل انرژی لازم برای جدا کردن الکترون از سطح فلز است.

$$W_{\circ}=hf_{\circ}\Rightarrow W_{\circ}=4\times10^{-15}\times10^{15}\Rightarrow W_{\circ}=4eV$$

A ۲۴۴۶ ۲

طول موج مربوط به بسامد آستانهٔ فلز را به‌دست می‌آوریم.

$$\lambda=\frac{c}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{3\times10^{8}}{1/5\times10^{15}}\Rightarrow\lambda=2\times10^{-7}\Rightarrow\lambda=200nm$$

طول موج پرتو فرودی بر فلز باید از ۲۰۰nm کمتر باشد تا بسامد آن از بسامد آستانه فلز بیشتر بوده و پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ دهد.

A ۲۴۴۷ ۱

تابع کار فلز کمترین انرژی لازم برای انجام پدیدهٔ فوتوالکتریک است. با توجه به اینکه رابطهٔ طول موج و بسامد طبق رابطهٔ $\lambda=\frac{c}{f}$ عکس یکدیگر است، بسامد کم انرژی‌ترین پرتویی که می‌تواند الکترون از سطح این فلز خارج کند برابر است با:

$$W_{\circ}=hf_{min}\xrightarrow[f_{min}=\frac{c}{\lambda_{max}}]{f=\frac{c}{\lambda}}W_{\circ}=h\frac{c}{\lambda_{max}}$$

$$\Rightarrow 4/14eV=4/14\times10^{-15}\times\frac{3\times10^{8}}{\lambda_{max}}\Rightarrow\lambda_{max}=3\times10^{-7}m$$

$$\xrightarrow{1m=10^{9}nm}\lambda_{max}=3\times10^{-7}\times10^{9}nm=300nm$$

A ۲۴۴۸ ۴

اگر انرژی فوتون تابیده به فلز برابر یا بیشتر از ۸eV باشد، پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ می‌دهد.

$$hf\geq8\Rightarrow h\frac{c}{\lambda}\geq8\Rightarrow\frac{1240}{\lambda}\geq8\Rightarrow\lambda\leq155nm$$

هر سه گزینه ۱۲۰nm، ۱۵۵nm و ۱۴۲nm می‌تواند سبب پدیدهٔ فوتوالکتریک شود.

A ۲۴۴۹ ۴

باید انرژی فوتون طول موج $\lambda=600nm$ را به دست آوریم. در صورتی که انرژی فوتون از تابع کار فلز (یعنی حداقل انرژی لازم برای جدا کردن الکترون از سطح فلز) بیشتر یا با آن مساوی باشد $(hf\geq W_{\circ})$، پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ می‌دهد.

$$E=h\frac{c}{\lambda}\Rightarrow E=\frac{4/14\times10^{-15}\times3\times10^{8}}{600\times10^{-9}}=2/07eV$$

انرژی الکترون از تابع کار هر سه فلز کمتر است و هیچ‌یک از سه فلز فوتوالکترون گسیل نمی‌کنند.

۲۴۵۰ A ۱

در پدیدهٔ فوتوالکتریک اگر فوتون انرژی کافی داشته باشد، الکترون از فلز جدا می‌شود و بخشی از انرژی فوتون صرف جدا کردن الکترون از فلز و مابقی آن به انرژی جنبشی الکترون خارج شده تبدیل می‌شود، بنابراین:

$K=۶/۴-۲/۷=۳/۷eV$

۲۴۵۱ B ۲

با توجه به رابطهٔ انرژی جنبشی بیشینه می‌توان نوشت:

$$K_{max}=h\frac{c}{\lambda}-W_{\circ}\Rightarrow$$

$$K_{max}=۴/۱۴\times۱۰^{-۱۵}\times\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۲۷۰\times۱۰^{-۹}}-۲=۴/۶-۲=۲/۶eV$$

۲۴۵۲ A ۱

با توجه به نظریهٔ اینشتین برای اثر فوتوالکتریک می‌توان نوشت:

$$K_{max}=hf-W_{\circ}\Rightarrow ۴\times۱۰^{-۱۵}\times۸/۵\times۱۰^{۱۴}-۲/۵=۳/۴-۲/۵$$

$$\Rightarrow K_{max}=۰/۹eV$$

بازی با سؤال در آزمایش فوتوالکتریک، نور تک‌رنگی با بسامد $۷/۵\times۱۰^{۱۴}$ هرتز بر الکترود فلزی می‌تابد. اگر طول موج آستانه ۵۰۰nm و ثابت پلانک $۴\times۱۰^{-۱۵}eV.s$ باشد، بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها چند الکترون‌ولت است؟

ریاضی - ۸۹

۱) ۰/۶ ۲) ۲/۴ ۳) ۳ ۴) ۶

پاسخ ابتدا تابع کار فلز را به‌دست می‌آوریم:

$$W_{\circ}=h\frac{c}{\lambda_{\circ}}\Rightarrow W_{\circ}=\frac{۴\times۱۰^{-۱۵}\times۳\times۱۰^{۸}}{۵۰۰\times۱۰^{-۹}}\Rightarrow W_{\circ}=۲/۴eV$$

اکنون بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها را حساب می‌کنیم:

$$K_m=hf-W_{\circ}\Rightarrow K_m=۴\times۱۰^{-۱۵}\times۷/۵\times۱۰^{۱۴}-۲/۴\Rightarrow K_m=۰/۶eV$$

گزینهٔ ۱

۲۴۵۳ B ۴

با توجه به رابطهٔ اینشتین برای پدیدهٔ فوتوالکتریک داریم:

$$K_m=h\frac{c}{\lambda}-W_{\circ}\Rightarrow\frac{۴\times۱۰^{-۱۹}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}=\frac{۴\times۱۰^{-۱۵}\times۳\times۱۰^{۸}}{\lambda}-۲/۵\Rightarrow$$

$$۲/۵=\frac{۱۲\times۱۰^{-۷}}{\lambda}-۲/۵\Rightarrow۵=\frac{۱۲\times۱۰^{-۷}}{\lambda}\Rightarrow\lambda=۲/۴\times۱۰^{-۷}m=۲۴۰nm$$

۲۴۵۴ B ۱

ابتدا تابع کار فلز را به دست می‌آوریم:

$$W_{\circ}=\frac{hc}{\lambda_{\circ}}\Rightarrow W_{\circ}=\frac{۴\times۱۰^{-۱۵}\times۳\times۱۰^{۸}}{۳۲۰\times۱۰^{-۹}}\Rightarrow W_{\circ}=۳/۷۵eV$$

انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها $K_m=eV_{\circ}=۰/۲۵eV$ است.

اکنون طول موج پرتو فرودی بر فلز را به دست می‌آوریم:

$$K_m=\frac{hc}{\lambda}-W_{\circ}\Rightarrow۰/۲۵=\frac{۴\times۱۰^{-۱۵}\times۳\times۱۰^{۸}}{\lambda}-۳/۷۵$$

$$\Rightarrow\lambda=۳\times۱۰^{-۷}m\Rightarrow\lambda=۰/۳\mu m$$

بازی با سؤال در آزمایش فوتوالکتریک، تابع کار فلز ۲eV است. طول موج نور فرودی چند نانومتر باشد تا $K_m=۴eV$ شود؟ ($h=۴\times۱۰^{-۱۵}eV.s$ و $c=۳\times۱۰^{۸}m/s$)

کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۱۵۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۴۰۰

پاسخ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها ۴eV است. اکنون به کمک رابطهٔ اینشتین برای اثر فوتوالکتریک، طول موج نور فرودی را به دست می‌آوریم:

$$K_m=hf-W_{\circ}\Rightarrow۴=\frac{۴\times۱۰^{-۱۵}\times۳\times۱۰^{۸}}{\lambda}-۲\Rightarrow۶=\frac{۱۲\times۱۰^{-۷}}{\lambda}$$

$$\lambda=۲\times۱۰^{-۷}m\Rightarrow\lambda=۲۰۰nm$$

گزینهٔ ۲

۲۴۵۵ A ۲

با توجه به رابطهٔ اینشتین برای پدیده فوتوالکتریک خواهیم داشت:

$$K_m=hf-W_{\circ}\Rightarrow K_m=\frac{hc}{\lambda}-\frac{hc}{\lambda_{\circ}}\Rightarrow K_m=\frac{۱۲۴۰}{۲۰۰}-\frac{۱۲۴۰}{۳۱۰}$$

$$K_m=۶/۲-۴\Rightarrow K_m=۲/۲eV$$

۲۴۵۶ B ۲

$$f=۳f_{\circ}\Rightarrow hf=۳hf_{\circ}\Rightarrow hf=۳W_{\circ}\Rightarrow hf=۳\times۱=۳eV$$

$$K_{max}=hf-W_{\circ}\Rightarrow K_{max}=۳-۱=۲eV$$

۲۴۵۷ B ۴

با توجه به فرض مسئله: $f=۵f_{\circ}\Rightarrow hf=۵W_{\circ}$

در رابطهٔ اینشتین جایگذاری می‌کنیم: $K_m=hf-W_{\circ}=۵W_{\circ}-W_{\circ}\Rightarrow K_m=۴W_{\circ}$

$$K_m=۱/۷۵\times۴\Rightarrow K_m=۷eV$$

$$K_m=۷\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}=۱/۱۲\times۱۰^{-۱۸}J$$

۲۴۵۸ B ۲

۱ انرژی جنبشی بیشینه فوتوالکترون‌ها برابر است با:

$$K_{max}=hf-W_{\circ}\xrightarrow{W_{\circ}=hf_{\circ}}K_{max}=hf-hf_{\circ}\Rightarrow K_{max}=h(f-f_{\circ})$$

۲ با توجه به سؤال اختلاف بسامد f و $f_{\circ}$ برابر $۱۰^{۱۵}$ هرتز است و چون یکای ثابت پلانک $J.s\,(h)$ بوده بنابراین انرژی جنبشی برحسب ژول به‌دست می‌آید:

$$K_{max}=۶/۴\times۱۰^{-۳۴}\times۱۰^{۱۵}\Rightarrow K_{max}=۶/۴\times۱۰^{-۱۹}J$$

یادآوری هر الکترون‌ولت برابر $۱/۶\times۱۰^{-۱۹}$ ژول است.

۳ یکای انرژی به‌دست آمده را به الکترون‌ولت تبدیل می‌کنیم:

$$۶/۴\times۱۰^{-۱۹}J\times\frac{۱eV}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}J}=۴eV$$

۲۴۵۹ B ۲

قسمتی از انرژی فوتون در پدیدهٔ فوتوالکتریک که به یک الکترون می‌رسد صرف جدا کردن الکترون از سطح و مابقی آن به الکترون انرژی جنبشی می‌دهد. اما می‌دانیم وضعیت وابستگی الکترون‌ها به هسته در اتم متفاوت است. با توجه به سؤال کمینه انرژی لازم برای جدا شدن الکترون که مربوط به جدا کردن سست‌ترین الکترون از اتم است برابر ۶eV می‌باشد پس انرژی لازم برای جدا کردن الکترون‌ها همواره مساوی یا بزرگ‌تر از ۶eV است پس انرژی جنبشی الکترون‌ها برابر $K=hf-$ (انرژی لازم برای جدا کردن الکترون) است همواره کوچک‌تر یا مساوی بیشینه انرژی جنبشی است که برابر انرژی جنبشی داده شده به سست‌ترین الکترون است:

$$K_{max}=hf-۶$$

$$K_{max}=۴/۱\times۱۰^{-۱۵}\times۲\times۱۰^{۱۵}-۶=۸/۲-۶=۲/۲eV$$

$$K\le K_{max}\Rightarrow K\le۲/۲$$

که تنها گزینهٔ (۲) درست است.

۲۴۶۰ A ۳

با کاهش طول موج تابش فرودی بر فلز، انرژی هر فوتون $(E=h\frac{c}{\lambda})$ افزایش می‌یابد و بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها $(K_{max}=\frac{hc}{\lambda}-W_{\circ})$ افزایش می‌یابد. گزینهٔ (۳) درست است. فراموش نکنید تابع کار فلز به جنس فلز بستگی دارد.

۲۴۶۱ B ۱

رابطهٔ بیشینهٔ انرژی جنبشی را برای این دو حالت می‌نویسیم: $K=\frac{hc}{\lambda}-W_{\circ}$

بنا به فرض مسئله انرژی فوتون‌های فرودی بر هر دو فلز $(E=\frac{hc}{\lambda})$ یکسان بوده و $K'=\frac{hc}{\lambda}-W'_{\circ}$ بزرگ‌تر از K است. از این‌رو خواهیم داشت:

$$K'>K\Rightarrow\frac{hc}{\lambda}-W'_{\circ}>\frac{hc}{\lambda}-W_{\circ}\Rightarrow-W'_{\circ}>-W_{\circ}\Rightarrow W'_{\circ}<W_{\circ}$$

با توجه به اینکه تابع کار از رابطهٔ hf_0 یا $\frac{hc}{\lambda_0}$ به‌دست می‌آید، رابطهٔ بین λ'_0 و λ_0 را به‌دست می‌آوریم.

$$W'_0<W_0 \Rightarrow \frac{hc}{\lambda'_0}<\frac{hc}{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_0<\lambda'_0$$

A ۲۴۶۲ ۳

در پدیدهٔ فوتوالکتریک هر الکترون تنها با یک فوتون برهم‌کنش دارد. چون تعداد فوتون‌ها در ثانیه تغییر نکرده تعداد الکترون‌های جدا شده نیز تغییری نمی‌کند.

A ۲۴۶۳ ۱

با توجه به رابطهٔ اینشتین برای پدیدهٔ فوتوالکتریک:

$$K_{max}=hf-W_0 \Rightarrow \begin{cases} 2=\frac{hc}{0/4}-W_0 \\ 1=\frac{hc}{0/6}-W_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+W_0=\frac{hc}{0/4} \\ 1+W_0=\frac{hc}{0/6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2+W_0}{1+W_0}=\frac{6}{4} \Rightarrow 4+2W_0=3+3W_0 \Rightarrow W_0=1\,eV$$

B ۲۴۶۴ ۲

با توجه به رابطهٔ اینشتین برای پدیدهٔ فوتوالکتریک داریم:

$$K'_m=3K_m \Rightarrow 2hf_1-W_0=3(hf_1-W_0) \Rightarrow$$

$$2hf_1-W_0=3hf_1-3W_0 \Rightarrow 2W_0=hf_1 \Rightarrow 2hf_0=hf_1 \Rightarrow f_0=\frac{f_1}{2}$$

B ۲۴۶۵ ۲

با توجه به رابطهٔ اینشتین دربارهٔ فوتوالکتریک می‌توان نوشت:

$$K_{max}=hf-W_0 \Rightarrow K_m=\frac{hc}{\lambda}-W_0$$

$$\begin{cases} 8\times10^{-19}=\frac{hc}{\lambda}-W_0 \\ 1/6\times10^{-19}=\frac{hc}{2\lambda}-W_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8\times10^{-19}+W_0=\frac{hc}{\lambda} \\ 1/6\times10^{-19}+W_0=\frac{hc}{2\lambda} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{8\times10^{-19}+W_0}{1/6\times10^{-19}+W_0}=2 \Rightarrow 8\times10^{-19}+W_0=3/2\times10^{-19}+2W_0$$

$$\Rightarrow W_0=4/8\times10^{-19}\,J$$

اکنون ژول را به الکترون‌ولت تبدیل می‌کنیم.

$$W_0=\frac{4/8\times10^{-19}}{1/6\times10^{-19}}=3\,eV$$

B ۲۴۶۶ ۲

با توجه به رابطهٔ اینشتین برای اثر فوتوالکتریک خواهیم داشت:

$$K_m=hf-W_0 \Rightarrow K_m=\frac{hc}{\lambda}-W_0$$

در فرض مسئله بیان شده $\lambda_2=\frac{\lambda_1}{2}$ و $K_{m_2}=6K_{m_1}$، از این رو:

$$\frac{hc}{\frac{\lambda_1}{2}}-W_0=6\left(\frac{hc}{\lambda_1}-W_0\right) \Rightarrow \frac{2hc}{\lambda_1}-W_0=\frac{6hc}{\lambda_1}-6W_0$$

$$\Rightarrow 5W_0=\frac{4hc}{\lambda_1} \xrightarrow{W_0=4\,eV} 5\times4=4\times\frac{4\times10^{-15}\times3\times10^8}{\lambda_1}$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\frac{12\times10^{-7}}{5} \Rightarrow \lambda_1=2/4\times10^{-7}\,m \Rightarrow \lambda_1=240\,nm$$

A ۲۴۶۷ ۱

ابتدا انرژی فوتون را بر حسب الکترون‌ولت به‌دست می‌آوریم:

$$E=\frac{hc}{\lambda}=4\times10^{-15}\times\frac{3\times10^8}{150\times10^{-9}} \Rightarrow E=\frac{120}{15}=8\,eV$$

اکنون به کمک رابطهٔ اینشتین انرژی جنبشی بیشینه را حساب می‌کنیم:

$$K_m=hf-W_0 \Rightarrow \begin{cases} K_A=8-4/5=3/5\,eV \\ K_B=8-3=5\,eV \end{cases} \Rightarrow \frac{K_A}{K_B}=\frac{3/5}{5}=0/7$$

بنابراین K_A، ۰/۳ یا ۳۰٪ کمتر از K_B است.

C ۲۴۶۸ ۳

یادآوری در رابطهٔ اینشتین در مورد اثر فوتوالکتریک $(K_m=hf-W_0)$ W_0 تابع کار فلز، f بسامد نور فرودی بر فلز و K_m بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌هاست.

۱ یکای بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها را به یکای الکترون ولت تبدیل می‌کنیم.

$$K_{m_1}=8\times10^{-19}\,J\times\frac{1\,eV}{1/6\times10^{-19}\,J} \Rightarrow K_{m_1}=5\,eV$$

۲ بسامد نور ۲۵ درصد کاهش یافته یعنی:

$$f_2=f_1-\frac{25}{100}f_1 \Rightarrow f_2=\frac{3}{4}f_1$$

۳ بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها در حالت جدید ۴۰ درصد کمتر از حالت اول است. بنابراین:

$$K_{m_2}=K_{m_1}-\frac{40}{100}K_{m_1} \Rightarrow K_{m_2}=\frac{60}{100}K_{m_1} \Rightarrow K_{m_2}=0/6K_{m_1}$$

$$\Rightarrow K_{m_2}=0/6\times5=3\,eV$$

۴ با توجه به رابطهٔ اینشتین می‌توان نوشت:

$$K_m=hf-W_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5=4\times10^{-15}f_1-W_0 \quad (I) \\ 3=4\times10^{-15}\times\frac{3}{4}f_1-W_0 \Rightarrow 3=3\times10^{-15}f_1-W_0 \quad (II) \end{cases}$$

۵ f_1 را از رابطهٔ (I) به‌دست آورده و در رابطهٔ (II) قرار می‌دهیم.

$$(I)\ f_1=\frac{5+W_0}{4\times10^{-15}} \xrightarrow{(II)} 3=3\times10^{-15}\times\frac{5+W_0}{4\times10^{-15}}-W_0$$

$$\Rightarrow 3=\frac{15+3W_0}{4}-W_0 \Rightarrow 3=\frac{15+3W_0-4W_0}{4} \Rightarrow 12=15-W_0$$

$$\Rightarrow W_0=3\,eV$$

A ۲۴۶۹ ۱

اگر بسامد نور از بسامد آستانه کمتر شود $(\frac{f_1}{2}<f_0)$ پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ نمی‌دهد. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است. چنان‌چه پس از نصف شدن بسامد نور، همچنان پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ دهد $(\frac{f_1}{2}\geq f_0)$ در این صورت با توجه به رابطهٔ $K_{max}=eV_0=hf-W_0$، بیشینهٔ انرژی فوتوالکترون‌ها از نصف نیز کمتر می‌شود بنابراین گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) نادرست است.

B ۲۴۷۰ ۱

در پدیدهٔ فوتوالکتریک، بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون برابر با $K_m=hf-W_0$ است. اگر با ثابت ماندن W_0، بسامد نور فرودی دو برابر شود، K_m بیشتر از ۲ برابر می‌شود.

$$f'=2f \xrightarrow{K_m=hf-W_0} K'_m>2K_m \Rightarrow \frac{K'_m}{K_m}>2 \Rightarrow K>2$$

برای درک سادهٔ این مطلب فرض کنید در ابتدا K_m برابر $K_m=2-1=1$ باشد و سپس برابر $K_m=(2\times2)-1=3$ شود کاملاً مشخص است که عدد ۳ از دو برابر عدد ۱ نیز بیشتر است.

B ۲۴۷۱ ۱

بنا بر رابطهٔ اینشتین برای اثر فوتوالکتریک داریم:

$$K_m=hf-W_0 \xrightarrow{K'_m=4K_m} hf'-W_0=4(hf-W_0)$$

$$hf'=4hf-3W_0 \xrightarrow{f'=kf} khf=4hf-3W_0 \Rightarrow k=4-\frac{3W_0}{hf}$$

$$\Rightarrow 1<k<4$$

۴ ۲۴۷۲ B

یادآوری افزایش شدت نور تعداد فوتون‌های یک نور را افزایش می‌دهد، یعنی در رابطهٔ nhf با افزایش شدت نور، n افزایش یافته و انرژی هر فوتون hf ثابت می‌ماند. انرژی جنبشی بیشینه از رابطهٔ $K_{max}=hf-W_0$ به‌دست می‌آید و به تعداد فوتون یا همان n بستگی ندارد، بنابراین با افزایش شدت نور انرژی جنبشی بیشینه تغییر نمی‌کند.

راه‌حل اول:

۱ در حالت اول انرژی جنبشی بیشینه را K_{max} و طول موج نور را λ می‌گیریم:

$$K_{max}=hf-W_0 \xrightarrow{hf=\frac{hc}{\lambda}} K_{max}=\frac{hc}{\lambda}-W_0$$

۲ در حالت دوم، انرژی جنبشی بیشینه m برابر $(K'_m=mK_m)$ است و طول موج $\frac{1}{p}$ برابر شده $(\lambda'=\frac{\lambda}{p})$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$K'_{max}=hf'-W_0 \xrightarrow[\lambda'=\lambda/p]{hf=\frac{hc}{\lambda}} mK_{max}=\frac{phc}{\lambda}-W_0$$

۳ برای به‌دست آوردن نسبت دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{mK_{max}}{K_{max}}=\frac{p\frac{hc}{\lambda}-W_0}{\frac{hc}{\lambda}-W_0}\Rightarrow m=\frac{p\frac{hc}{\lambda}-pW_0+(p-1)W_0}{\frac{hc}{\lambda}-W_0}$$

$$\Rightarrow m=p+\frac{(p-1)W_0}{\frac{hc}{\lambda}-W_0}$$

۴ بنابراین m از p بزرگ‌تر است.

راه‌حل دوم: برای این سؤال می‌توان عددگذاری کرد. مثلاً p را ۴ بگیریم.

۱
$$K_{max}=\frac{hc}{\lambda}-W_0$$

۲
$$K'_{max}=\frac{hc}{\lambda'}-W_0 \xrightarrow{\lambda'=\lambda/4} K'_{max}=\frac{4hc}{\lambda}-W_0$$

۴ برابر K_{max} برابر $\frac{4hc}{\lambda}-4W_0$ است در حالی که در K'_{max}، W_0 از $\frac{4hc}{\lambda}$ کم شده، پس K'_{max} از ۴ برابر K_{max} بزرگتر است، در نتیجه اگر λ، $\frac{1}{p}$ برابر شود، K_{max} بیشتر از p برابر می‌شود:

$$m>p$$

۳ ۲۴۷۳ A

در پدیدهٔ فوتوالکتریک، هر فوتون با یک الکترون برهم‌کنش دارد. با افزایش شدت نور، تعداد فوتون‌ها افزایش می‌یابد اما انرژی هر فوتون ثابت می‌ماند، بنابراین بیشینهٔ انرژی فوتوالکترون‌ها و سرعت آن‌ها ثابت است.

۲ ۲۴۷۴ B

خط فکری با داشتن تابع کار فلز و محاسبهٔ اختلاف انرژی فوتون‌های ورودی با تابع کار، بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها به‌دست می‌آید. در نهایت با استفاده از رابطهٔ انرژی جنبشی، تندی فوتوالکترون‌ها محاسبه می‌شود.

۱ ابتدا تابع کار را حساب می‌کنیم، دقت کنید چون ثابت پلانک (h) بر حسب $eV.s$ داده شده پس تابع کار بر حسب الکترون‌ولت به‌دست می‌آید:

$$W_0=hf_0\Rightarrow W_0=4\times10^{-15}\times\frac{5}{8}\times10^{15}=2/5eV$$

نکته برای تبدیل الکترون ولت به ژول از کسر تبدیل $\frac{1/6\times10^{-19}J}{1eV}$ استفاده می‌کنیم.

$$W_0=2/5\times(1/6\times10^{-19})=4\times10^{-19}J$$

۲ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها را حساب می‌کنیم:

$$K_{max}=hf-W_0\Rightarrow K_{max}=4/125\times10^{-19}-4\times10^{-19}$$

$$\Rightarrow K_{max}=0/125\times10^{-19}J$$

۳ حال با توجه به انرژی جنبشی، تندی را حساب می‌کنیم:

$$K_{max}=\frac{1}{2}mv^2_{max}\Rightarrow\frac{125}{1000}\times10^{-19}=\frac{1}{2}\times9\times10^{-31}\times v^2_{max}$$

$$\Rightarrow v^2_{max}=\frac{25}{9}\times10^{10}\Rightarrow v_{max}=\frac{5}{3}\times10^5\Rightarrow v_{max}=\frac{10^6}{6}m/s$$

۳ ۲۴۷۵ C

ابتدا بیشینهٔ انرژی جنبشی الکترون را حساب می‌کنیم:

$$K_m=\frac{1}{2}mv^2_m\Rightarrow K_m=\frac{1}{2}\times9\times10^{-31}\times(5\times10^5)^2$$

$$\Rightarrow K_m=\frac{1}{2}\times9\times25\times10^{-21}J=4/5\times25\times10^{-21}J$$

یکای انرژی جنبشی را به eV تبدیل می‌کنیم:

$$K_m=\frac{4/5\times25\times10^{-21}}{1/6\times10^{-19}}\simeq\frac{4/5\times25\times10^{-2}}{1/6}eV$$

نکته دقت کنید که hc برابر $1/24eV.\mu m$ داده شده پس در رابطهٔ $\frac{hc}{\lambda}$ اگر طول موج را نیز برحسب میکرومتر قرار دهیم، انرژی برحسب eV به‌دست می‌آید.

با توجه به نظریهٔ اینشتین داریم:

$$K_{max}=hf-W_0\Rightarrow K_{max}=\frac{hc}{\lambda}-W_0\Rightarrow\frac{4/5\times25\times10^{-2}}{1/6}=\frac{1/24}{\lambda}-4/46$$

چون سؤال مقدار تقریبی طور موج نور را خواسته پس به جای $1/6$، $1/5$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{4/5\times25\times10^{-2}}{1/5}=\frac{1/24}{\lambda}-4/46\Rightarrow0/75=\frac{1/24}{\lambda}-4/46$$

$$\Rightarrow\frac{1/24}{\lambda}=5/21\Rightarrow\lambda=\frac{1/24}{5/21}\mu m$$

طول موج برحسب نانومتر خواسته شده پس طول موج به‌دست آمده برحسب میکرومتر را در ۱۰۰۰ ضرب می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{1/24}{5/21}\times1000=\frac{1240}{5/21}$$

λ به‌دست آمده از ۲۰۰ بزرگ‌تر و از ۳۰۰ کوچک‌تر است بنابراین گزینهٔ (۳) مقدار تقریبی خواسته شدهٔ سؤال است.

۲ ۲۴۷۶ B

بنا به رابطهٔ اینشتین، بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$K_m=\frac{hc}{\lambda}-W_0\Rightarrow K_m=\frac{1240}{248}-4/55\Rightarrow K_m=5-4/55\Rightarrow K_m=0/45eV$$

بیشینه تندی فوتوالکترون‌ها را حساب می‌کنیم، البته ابتدا یکای انرژی جنبشی را به ژول تبدیل می‌کنیم.

$$K_m=\frac{1}{2}mv^2_m\Rightarrow0/45\times1/6\times10^{-19}=\frac{1}{2}\times9\times10^{-31}v^2_m\Rightarrow v_m=4\times10^5m/s$$

۱ ۲۴۷۷ B

$$K_m=\frac{1}{2}mv^2{}_m=\frac{hc}{\lambda}-W_0\Rightarrow\frac{1}{2}\times9\times10^{-31}\times v^2_m=$$

$$(\frac{4\times10^{-15}\times3\times10^8}{200\times10^{-9}}-4/2)\times1/6\times10^{-19}v^2_m=\frac{1/8\times1/6\times10^{-19}\times2}{9\times10^{-31}}$$

$$=64\times10^{10}\Rightarrow v_m=8\times10^5m/s$$

۱ ۲۴۷۸ B

۱ بیشینه انرژی جنبشی را حساب می‌کنیم:

$$K_{max}=\frac{1}{2}mv^2_m \xrightarrow{v_m=\frac{4}{3}\times10^6m/s}$$

$$K_m=\frac{1}{2}\times9\times10^{-31}\times\frac{16}{9}\times10^{12}\Rightarrow K_m=8\times10^{-19}J$$

۲ انرژی جنبشی بیشینه را بر حسب الکترون ولت به‌دست می‌آوریم:

$$K_m=8\times10^{-19}J\times\frac{1eV}{1/6\times10^{-19}J}=5eV$$

۳ به کمک بسامد آستانه تابع کار را به‌دست می‌آوریم:

$$W_0 = hf_0 \Rightarrow W_0 = 4\times10^{-15}\times5\times10^{14} \Rightarrow W_0 = 2eV$$

۴ با توجه به نظریهٔ اینشتین:

$$K_m = hf - W_0 \Rightarrow 5 = 4\times10^{-15}f - 2$$

$$\Rightarrow 4\times10^{-15}f = 7 \Rightarrow f = 1/75\times10^{15}Hz$$

B ۲۴۷۹ ۱

بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها برابر است با:

$$K_{max} = hf - W_0 \Rightarrow K_{max} = \frac{hc}{\lambda} - W_0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1200}{200} - 3 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = 3 \\ \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1200}{300} - 3 \Rightarrow \frac{1}{2}mv'^2 = 1 \end{cases}$$

دو معادله را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{v^2}{v'^2} = 3 \Rightarrow \frac{v}{v'} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{v'}{v} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

بازی با سؤال **در یک آزمایش فوتوالکتریک، اگر به سطح فلزی با تابع کار ۲eV، نوری با بسامد 10^{15}Hz بتابانیم، بیشینهٔ تندی فوتوالکترون‌های گسیلی v_{max} می‌شود. اگر بخواهیم بیشینهٔ تندی فوتوالکترون‌های گسیلی $2v_{max}$ گردد، بسامد نور فرودی را چند هرتز باشد افزایش دهیم؟** $(h = 4\times10^{-15}eV.s)$

۱) $2/5\times10^{15}$ ۲) $1/5\times10^{15}$ ۳) 3×10^{15} ۴) 5×10^{15}

پاسخ **با توجّه به رابطهٔ $K = \frac{1}{2}mv^2$، انرژی جنبشی با مربع تندی نسبت مستقیم دارد.**

$$\frac{K'_{max}}{K_{max}} = \frac{\frac{1}{2}m(2v_m)^2}{\frac{1}{2}mv_m^2} \Rightarrow \frac{K'_{max}}{K_{max}} = 4 \Rightarrow K'_{max} = 4K_{max}$$

یادآوری تابع کار وابسته به جنس فلزات و با تغییر بسامد نور، تغییر نمی‌کند.

در حالت اول، بسامد نور 10^{15} هرتز است:

$$K_{max} = hf - W_0 \Rightarrow K_{max} = 4\times10^{-15}\times10^{15} - W_0 \xrightarrow{W_0 = 2eV}$$

$$K_{max} = 4 - 2 = 2eV$$

بیشینهٔ انرژی جنبشی در حالت دوم ۴ برابر حالت اول است، از این‌رو:

$$K'_{max} = 4K_{max} \Rightarrow K'_{max} = 8eV$$

$$K'_{max} = hf' - W_0 \Rightarrow 8 = hf' - 2$$

$$\Rightarrow hf' = 10eV \xrightarrow{h = 4\times10^{-15}eV.s} 4\times10^{-15}f' = 10 \Rightarrow f' = 2/5\times10^{15}Hz$$

گزینهٔ ۱

B ۲۴۸۰ ۲

با توجه به رابطهٔ اینشتین دربارهٔ فوتوالکتریک:

$$K_{m_A} = h\frac{c}{\lambda} - W_{0_A} \Rightarrow K_{m_A} = 4\times10^{-15}\times\frac{3\times10^8}{200\times10^{-9}} - 4 = 6 - 4 = 2eV$$

$$K_{m_B} = h\frac{c}{\lambda} - W_{0_B} \Rightarrow K_{m_B} = 4\times10^{-15}\times\frac{3\times10^8}{200\times10^{-9}} - 2 = 6 - 2 = 4eV$$

$$\Rightarrow \frac{K_{m_A}}{K_{m_B}} = \frac{\frac{1}{2}mv_{m_A}^2}{\frac{1}{2}mv_{m_B}^2} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{v_{m_A}^2}{v_{m_B}^2} \Rightarrow \frac{v_{m_A}}{v_{m_B}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{v_{m_B}}{v_{m_A}} = \sqrt{2}$$

B ۲۴۸۱ ۴

با توجه به فرض مسأله $W_0 = \frac{1}{4}\frac{hc}{\lambda}$ است از این‌رو:

$$K_m = hf - W_0 \Rightarrow K_m = \frac{hc}{\lambda} - \frac{1}{4}\frac{hc}{\lambda} \Rightarrow K_m = \frac{3}{4}\frac{hc}{\lambda}$$

اگر طول موج پرتو فرودی ۳ برابر شود خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned} \lambda' &= 3\lambda \\ K'_m &= \frac{hc}{\lambda'} - W_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow K'_m = \frac{hc}{3\lambda} - \frac{1}{4}\frac{hc}{\lambda} \Rightarrow K'_m = \frac{hc}{12\lambda}$$

در این صورت می‌توان نوشت:

$$\frac{K'_m}{K_m} = \frac{v'^2}{v^2} \Rightarrow \frac{\frac{hc}{12\lambda}}{\frac{3}{4}\frac{hc}{\lambda}} = \frac{v'^2}{v^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow v' = \frac{1}{3}v$$

A ۲۴۸۲ ۴

با توجه به رابطهٔ اینشتین برای پدیدهٔ فوتوالکتریک:

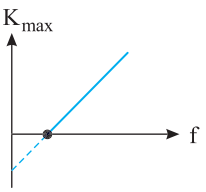
$$K_m = hf - W_0 \Rightarrow h = \text{شیب خط}\ ,\ -W_0 = \text{عرض از مبدأ}$$

بازی با سؤال **در نمودارهای بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها برحسب بسامد پرتو فرودی بر فلز، شیب نمودار به کدام عامل بستگی دارد؟**

۱) شدت نور فرودی ۲) جنس فلز

۳) همواره یک ثابت فیزیکی معین است. ۴) بسامد نور فرودی

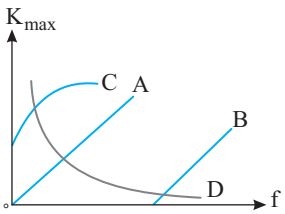
پاسخ طبق رابطهٔ $K_m = hf - W_0$ خواهیم داشت: $K_m = hf - W_0$



در این صورت شیب خط، همواره مقدار ثابت h است که h ثابت پلانک است.

گزینهٔ ۳

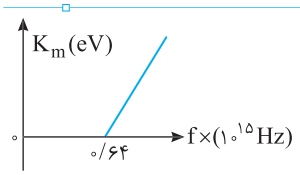
A ۲۴۸۳ ۲



در پدیدهٔ فوتوالکتریک، هرگاه یک فوتون موج الکترومغناطیسی به سطح جسم (فلز) بتابد، اگر انرژی فوتون (hf) از تابع کار فلز W_0 بیشتر باشد، الکترون از سطح فلز جدا می‌شود و انرژی اضافی فوتون $(hf - W_0)$ به انرژی جنبشی الکترون تبدیل می‌شود، بنابراین $K_m = hf - W_0$ بوده و انرژی جنبشی تابع درجهٔ اول از بسامد خواهد بود.

در مورد گزینهٔ (۱) یعنی نمودار A باید خاطر نشان کرد که نمودار انرژی جنبشی بر حسب بسامد دارای عرض از مبدأ منفی است در حالی که نمودار A دارای عرض از مبدأ صفر است و نمی‌تواند گزینهٔ درست باشد و نمودار B پاسخ درست است.

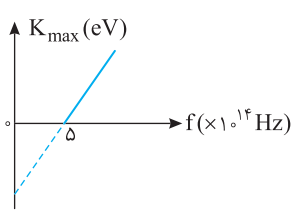
A ۲۴۸۴ ۴



با توجه به نمودار، بسامد آستانه فلز برابر $f_0 = 0/64\times10^{15}$Hz است، بنابراین:

$$W_0 = hf_0 = \frac{6/6\times10^{-34}\times0/64\times10^{15}}{1/6\times10^{-19}} = 2/64eV$$

A ۲۴۸۵ ۲



با توجه به نمودار، بسامد آستانه، برابر 5×10^{14} هرتز است، بنابراین:

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{3\times10^8}{5\times10^{14}}$$

$$= 0/6\times10^{-6}m = 600nm$$

A ۲۴۸۶ ۱

به کمک تابع کار فلز، بسامد آستانه را به‌دست می‌آوریم:

$$W_0 = hf_0 \Rightarrow 2 = 4\times10^{-15}\times f_0 \Rightarrow f_0 = 5\times10^{14}Hz$$

$$f_0 = 5\times10^2\times10^{12}Hz \Rightarrow f_0 = 500THz$$

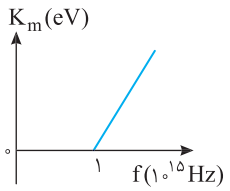
پس نمودار گزینهٔ (۱) پاسخ درست است.

۳ ۲۴۸۷ A

با توجه به نمودار، تابع کار فلز $5eV$ است:

$$K_{max}=hf-W_{\circ}=\frac{۶/۶\times۱۰^{-۳۴}\times۲\times۱۰^{۱۵}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}-۵=۸/۲۵-۵=۳/۲۵\,eV$$

بازی با سؤال **برای یک فلز معین، نمودار بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها (K_m) برحسب بسامد نور فرودی رسم شده است. به ازای چه بسامدی (بر حسب $۱۰^{۱۵}Hz$) K_m، ۲ الکترون ولت می‌شود؟ $(h=۴\times۱۰^{-۱۵}eV.s)$**



۱) ۰/۷۵ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۵۰ ۴) ۲/۵۰

پاسخ با توجه به نمودار، بسامد آستانه فلز برابر $f_{\circ}=۱۰^{۱۵}Hz$ است.

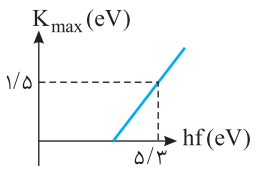
$$W_{\circ}=hf_{\circ}\Rightarrow W=۴\times۱۰^{-۱۵}\times۱۰^{۱۵}\Rightarrow W_{\circ}=۴eV$$

$$K_m=hf-W_{\circ}\Rightarrow ۲=۴\times۱۰^{-۱۵}\times f-۴\Rightarrow f=۱/۵\times۱۰^{۱۵}Hz$$

گزینهٔ ۳

۱ ۲۴۸۸ B

با توجه به رابطهٔ $K_{max}=hf-W_{\circ}$ و همچنین نمودار، می‌توان تابع کار را به‌دست آورد:



$$۱/۵=۵/۳-W_{\circ}\Rightarrow W_{\circ}=۳/۸eV$$

هرگاه فوتونی با بسامد $۱/۷\times۱۰^{۱۵}Hz$ بر سطح این فلز بتابد:

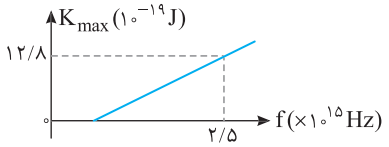
$$K_m=hf-W_{\circ}\Rightarrow K_m=۱/۷\times۱۰^{۱۵}\times۴\times۱۰^{-۱۵}-۳/۸\Rightarrow K_m=۳eV$$

۲ ۲۴۸۹ B

با توجه به نمودار هرگاه بسامد $۲/۵\times۱۰^{۱۵}Hz$ به فلز بتابد، بیشینه انرژی فوتوالکترون‌ها برابر $۱۲/۸\times۱۰^{-۱۹}$ ژول است از این‌رو:

$$K_{max}=hf-W_{\circ}\Rightarrow\frac{۱۲/۸\times۱۰^{-۱۹}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}=۴\times۱۰^{-۱۵}\times۲/۵\times۱۰^{۱۵}-W_{\circ}$$

$$۸=۱۰-W_{\circ}\Rightarrow W_{\circ}=۱۰-۸=۲eV$$



(دقت کنید تقسیم بر $۱/۶\times۱۰^{-۱۹}$ برای تبدیل J به eV صورت گرفته است.)

اگر نوری با بسامد $۸\times۱۰^{۱۴}Hz$ بر فلز بتابد ولتاژ متوقف کننده برابر خواهد شد با:

$$K_{max}=hf-W_{\circ}\Rightarrow K_{max}=۴\times۱۰^{-۱۵}\times۸\times۱۰^{۱۴}-۲\Rightarrow K_m=۱/۲eV$$

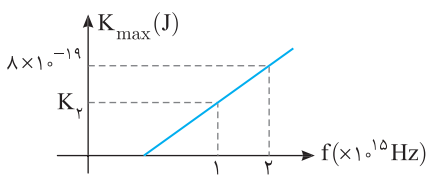
۱ ۲۴۹۰ B

طبق رابطهٔ $K_{max}=hf-W_{\circ}$ شیب خط این نمودار برابر h می‌باشد، بنابراین:

$$\lambda=\frac{c}{f}\Rightarrow f=\frac{c}{\lambda}=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۳۰۰\times۱۰^{-۹}}=۱۰^{۱۵}Hz$$

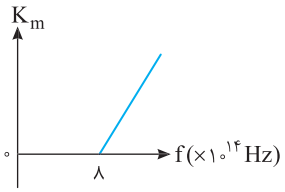
$$h=\frac{۸\times۱۰^{-۱۹}-K_۲}{۲\times۱۰^{۱۵}-۱\times۱۰^{۱۵}}=۴\times۱۰^{-۱۵}\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}J.s$$

$$\Rightarrow ۸\times۱۰^{-۱۹}-K_۲=۶/۴\times۱۰^{-۱۹}\Rightarrow K_۲=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}J$$



۱ ۲۴۹۱ A

با توجه به رابطهٔ $K_m=hf-W_{\circ}$، شیب خط برابر h و عرض از مبدأ آن برابر $-W_{\circ}$ می‌باشد. محل تلاقی نمودار با محور f نیز برابر بسامد آستانه فلز است.



بنابراین، بسامد آستانه $f_{\circ}=۸\times۱۰^{۱۴}Hz$ است و تابع کار فلز برابر است با:

$$W_{\circ}=hf_{\circ}=۴\times۱۰^{-۱۵}\times۸\times۱۰^{۱۴}\Rightarrow W_{\circ}=۳/۲eV$$

گزینهٔ (۱) درست است.

دربارهٔ گزینهٔ (۲) دقت کنید که K_m با بسامد نور فرودی رابطهٔ خطی دارد و با آن متناسب نیست یعنی با دو برابر شدن بسامد نور فرودی، K_m دو برابر نمی‌شود و گزینهٔ (۲) نادرست است. طول موج آستانه فلز برابر است با:

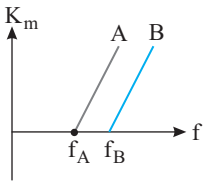
$$\lambda_{\circ}=\frac{c}{f_{\circ}}\Rightarrow\lambda_{\circ}=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۸\times۱۰^{۱۴}}\Rightarrow\lambda_{\circ}=۳۷۵nm$$

بنابراین اگر طول موج از مقدار ۳۷۵nm بیشتر باشد، انرژی فوتون از تابع کار فلز کمتر شده پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ نمی‌دهد و گزینهٔ (۳) نادرست است.

همچنین با کمتر شدن بسامد نور فرودی از مقدار $f_{\circ}=۸\times۱۰^{۱۴}Hz$، انرژی فوتون از تابع کار فلز کمتر شده، پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ نمی‌دهد و گزینهٔ (۴) نادرست است.

۱ ۲۴۹۲ A

با توجه به شکل بسامد آستانه فلز A از بسامد آستانه فلز B کمتر بوده بنابراین تابع کار فلز A $(W_{\circ}=hf_{\circ})$ از تابع کار فلز B کمتر و طول موج آستانه فلز A از طول موج آستانه فلز B بیشتر است $(\lambda_{\circ}=\frac{c}{f_{\circ}})$.



۲ ۲۴۹۳ B

با توجه به نمودار سؤال خواهیم داشت:

$$f_{\circ A}<f_{\circ B}\xrightarrow{W_{\circ}=hf_{\circ}}W_{\circ A}<W_{\circ B}\qquad(۱)$$

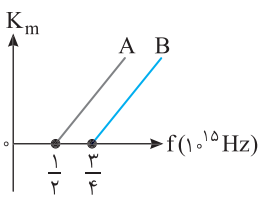
نور با بسامد $۱/۵\times۱۰^{۱۵}Hz$ باعث پدیدهٔ فوتوالکتریک برای فلز B شده است. از این‌رو:

$$hf\geq W_{\circ B}\Rightarrow ۴\times۱۰^{-۱۵}\times۱/۵\times۱۰^{۱۵}\geq W_{\circ B}$$

$$\Rightarrow W_{\circ B}\leq۶eV\xrightarrow{(۱)}W_{\circ A}<۶eV$$

۴ ۲۴۹۴ B

با توجه به نمودار، بسامد آستانه فلزهای A و B به ترتیب $f_{\circ A}=\frac{۱}{۲}\times۱۰^{۱۵}Hz$ و $f_{\circ B}=\frac{۳}{۴}\times۱۰^{۱۵}Hz$ است. رابطهٔ اثر فوتوالکتریک را برای دو فلز می‌نویسیم:



$$K_m=hf-W_{\circ}=hf-hf_{\circ}$$

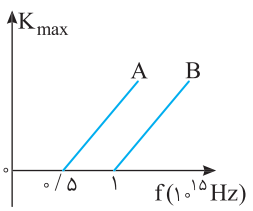
$$\Rightarrow\begin{cases}K_{m_A}=۴\times۱۰^{-۱۵}\times۱۰^{۱۵}-۴\times۱۰^{-۱۵}\times\frac{۱}{۲}\times۱۰^{۱۵}=۲eV\\K_{m_B}=۴\times۱۰^{-۱۵}\times۱۰^{۱۵}-۴\times۱۰^{-۱۵}\times\frac{۳}{۴}\times۱۰^{۱۵}=۱eV\end{cases}\Rightarrow\frac{K_{m_A}}{K_{m_B}}=۲$$

B ۲۴۹۵ ۱

با توجه به رابطهٔ اینشتین برای اثر فوتوالکتریک و داده‌های روی شکل خواهیم داشت:

$$\begin{cases} K_m = hf - W_0 = hf - hf_0 \\ f_{0A} = 0/5\times10^{15}\,Hz \\ f_{0B} = 1\times10^{15}\,Hz \\ K_{mA} = K_{mB} \end{cases} \Rightarrow f_B > f_A$$

دقت کنید بسامد آستانه B از بسامد آستانه A بیشتر است. برای آنکه بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها برابر باشد قطعاً بسامد پرتوی تابیده به B باید بزرگ‌تر باشد و تنها در گزینهٔ (۱) $\frac{f_B}{f_A}$ بزرگ‌تر از ۱ است.



A ۲۴۹۶ ۳

موج‌های الکترومغناطیسی از بسته‌های حاوی انرژی به نام فوتون تشکیل شده‌اند. موج‌های الکترومغناطیسی دارای میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی بوده بنابراین گزینه‌های (۱) و (۴) نادرست هستند. از طرفی امواج الکترومغناطیسی بدون بار الکتریکی هستند و گزینهٔ (۳) درست است. سرعت همهٔ آن‌ها در خلأ یکسان و برابر $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ است و سرعت آن‌ها در خلأ به بسامد آن‌ها بستگی ندارد، بنابراین گزینهٔ (۲) نیز نادرست است.

A ۲۴۹۷ ۲

انرژی لازم برای جدا کردن الکترون‌ها از سطح یک فلز برای همهٔ الکترون‌ها یکسان نیست یعنی بعضی از الکترون‌ها سفت‌تر و بعضی از آن‌ها شُل‌تر به سطح فلز وصل هستند. انرژی یک فوتون مقدار مشخصی است. بنابراین الکترون‌های شُل‌تر که برای جدا شدن به حداقل انرژی نیاز دارند، هنگام جدا شدن انرژی جنبشی بیشتری از فوتون به آن‌ها می‌رسد و هر چه الکترون به سطح فلز سفت‌تر چسبیده باشد، انرژی جنبشی فوتوالکترون کمتر خواهد بود. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

A ۲۴۹۸ ۳

یادآوری هر 1eV برابر $1/6\times10^{-19}$ ژول است.

۱ ابتدا انرژی را برحسب ژول به‌دست می‌آوریم:

$$1/8eV\times\frac{1/6\times10^{-19}J}{1eV}=1/8\times1/6\times10^{-19}J$$

۲ رابطهٔ بین انرژی جنبشی و تکانه به‌صورت $K=\frac{P^2}{2m}$ است:

$$K=\frac{P^2}{2m}\Rightarrow1/8\times1/6\times10^{-19}=\frac{P^2}{2\times9\times10^{-31}}\Rightarrow9\times36\times16\times10^{-52}=P^2$$

$$\Rightarrow P=3\times6\times4\times10^{-26}=7/2\times10^{-25}(kg.m/s)$$

B ۲۴۹۹ ۱

نکته ۱ هر گاه در اثر فوتوالکتریک با ثابت ماندن بسامد نور، شدت نور بر فلز را زیاد کنیم تعداد فوتون‌های نور افزایش می‌یابد و آهنگ خروج فوتوالکترون‌ها زیاد می‌شود. اما انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها تغییر نمی‌کند.

نکته ۲ هر گاه در اثر فوتوالکتریک، بسامد نور فرودی بر فلز افزایش یابد انرژی فوتون‌های نور افزایش یافته و انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها هنگام جدا شدن افزایش می‌یابد. با توجه به نکات بالا گزینهٔ (۱) درست است.

C ۲۵۰۰ ۳

نکته بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها به دو عامل بستگی دارد:

۱ انرژی فوتون‌های فرودی بر فلز

۲ جنس فلز

دو فلز متفاوت هستند و جنس آن‌ها یکی نیست یعنی بسامد آستانهٔ آن‌ها یکی نیست اما در دو آزمایش بیشینه انرژی جنبشی الکترون‌ها برابر شده است و این ممکن نیست مگر اینکه انرژی فوتون‌های فرودی بر دو فلز متفاوت باشد. $hf_A\neq hf_B\Rightarrow f_A\neq f_B$ یعنی بسامد نور تابیده شده به آن‌ها متفاوت است.

C ۲۵۰۱ ۴

با دو برابر شدن توان، تعداد فوتون‌های نور دو برابر شده و میزان گسیل فوتوالکترون‌ها دو برابر می‌شود، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است. با دو برابر شدن طول موج ممکن است انرژی فوتون $(E=h\frac{c}{\lambda})$ از تابع کار فلز (W_0) کمتر شده و پدیده متوقف شود بنابراین گزینهٔ (۲) در حالت کلی نادرست است.

با نصف شدن طول موج، انرژی هر فوتون $(E=h\frac{c}{\lambda})$ دو برابر می‌شود و برای ثابت ماندن $P=\frac{nh\frac{c}{\lambda}}{t}$ باید n نصف شده بنابراین فوتوالکترون‌های جدا شده نصف می‌شود و گزینهٔ (۳) نادرست است. اگر توان دو برابر و طول موج نصف شود در این صورت:

$$P=\frac{nh\frac{c}{\lambda}}{t}\xrightarrow[\lambda'=\frac{\lambda}{2}]{P'=2P}n'=n$$

یعنی تعداد فوتون‌ها در یکای زمان ثابت مانده و تعداد فوتوالکترون‌های جدا شده نیز ثابت می‌ماند و گزینهٔ (۴) درست است.

C ۲۵۰۲ ۲

اگر بسامد نور فرودی بر فلز از بسامد آستانه کمتر باشد، پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ نمی‌دهد و اگر $f=f_0$ باشد، الکترون از فلز جدا می‌شود. در واقع انرژی فوتون با انرژی لازم برای جدا شدن سست الکترون از سطح فلز برابر است یعنی انرژی لازم برای جدا شدن الکترون برابر hf_0 است.

اگر فوتونی که بر فلزی بتابد دارای انرژی hf باشد مقدار hf_0 از انرژی فوتون صرف جدا شدن الکترون و بقیهٔ آن تبدیل به انرژی جنبشی فوتوالکترون می‌شود. از طرفی با توجه به سؤال تندی بیشینه در حالت دوم ۲ برابر حالت اول است و می‌دانیم که $K=\frac{1}{2}mv^2$ می‌باشد پس انرژی جنبشی در حالت دوم ۴ برابر حالت اول است:

$$\left.\begin{aligned} K_{max}=hf-hf_0\Rightarrow4K_{max}=4hf-4hf_0 \\ 4K_{max}=hf-\frac{hf_0}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow hf-\frac{hf_0}{2}=4hf-4hf_0\Rightarrow\frac{7}{2}hf_0=3hf\Rightarrow f=\frac{7}{6}f_0$$

C ۲۵۰۳ ۱

با توجه به شکل، تابع کار فلز b، ۱۵eV و بسامد هر آستانهٔ فلز a، $3\times10^{15}Hz$ است:

$$W_0=hf_0\Rightarrow f_{0b}=\frac{15\times1/6\times10^{-19}}{6\times10^{-34}}=4\times10^{15}$$

$$\frac{\lambda_{0a}}{\lambda_{0b}}=\frac{f_{0b}}{f_{0a}}=\frac{4\times10^{15}}{3\times10^{15}}=\frac{4}{3}$$

B ۲۵۰۴ ۲

۱ شدت تابش چراغ $10W/m^2$ است یعنی به هر $1m^2$ میز در هر ثانیه 10J انرژی داده می‌شود. سطح میز برابر $1\times2=2m^2$ است و زمان انتقال انرژی $1h=3600s$ می‌باشد، بنابراین کل انرژی فرودی بر میز در مدت 1h خواهد شد:

$$E=IAt\Rightarrow E=10\times2\times3600=72000J=72\times10^3J$$

یادآوری هر گاه به جسمی به جرم m با گرمای ویژه c گرما بدهیم و دمای آن به اندازهٔ $\Delta\theta$ بالا برود گرمای داده شده به جسم برابر است با:

$$Q=mc\Delta\theta$$

۲ بنابراین به میز 72×10^3J انرژی می‌رسد و این انرژی صرف گرم کردن میز شده است:

$$Q=mc\Delta\theta\Rightarrow72\times10^3=5\times900\times\Delta\theta\Rightarrow\Delta\theta=16^\circ C$$

C ۲۵۰۵ ۲

۱ مقدار شدت تابشی که به سطح زمین می‌رسد ٪۲۵ شدت تابشی خورشید در خارج جو است.

$$I'=\frac{۲۵}{۱۰۰}I\Rightarrow I'=\frac{۱}{۴}\times ۱۳۶۰\Rightarrow I'=۳۴۰W/m^۲$$

۲ مساحت سطح زمین چمن برابر $A=۱۱۰m\times ۷۵m$ است.

۳ مقدار انرژی که در مدت $۱۰h$ به چمن استادیوم می‌رسد را حساب می‌کنیم.

$$I=\frac{E}{At}\Rightarrow E=IAt\Rightarrow E=۳۴۰\times ۱۱۰\times ۷۵\times ۱۰\times ۳۶۰۰J$$

۴ تعداد فوتون‌هایی که به چمن می‌رسد را به‌دست می‌آوریم.

$$E=n\frac{hc}{\lambda}\xrightarrow{h=۶/۶\times ۱۰^{-۳۴}J.s,\lambda=۶۶۰\times ۱۰^{-۹}m}$$

$$۳۴۰\times ۱۱۰\times ۷۵\times ۱۰\times ۳۶۰۰=n\times\frac{۶/۶\times ۱۰^{-۳۴}\times ۳\times ۱۰^{۸}}{۶۶۰\times ۱۰^{-۹}}$$

$$n=\frac{۳۴\times ۱۱\times ۷۵\times ۳۶\times ۱۰^{۵}}{۳\times ۱۰^{-۱۹}}=۳۳۶۶۰۰\times ۱۰^{۲۴}\sim ۳\times ۱۰^{۲۹}$$

پنجره ۲

A ۲۵۰۶ ۲

اجسام در هر دمایی تابش گرمایی از خود گسیل می‌کنند که در دماهای معمولی این تابش در محدودهٔ امواج فروسرخ می‌باشد و با افزایش دما، تابش در محدودهٔ نورهای مرئی قرار می‌گیرد، بنابراین گزاره‌های (الف) و (ب) درست است. برهم‌کنش قوی بین اتم‌های سازندهٔ جسم جامد سبب تشکیل طیف پیوسته توسط جسم جامد می‌شود. حال آنکه گازهای کم‌فشار و رقیق که اتم‌های منفرد آن‌ها از برهم‌کنش‌های قوی موجود در جسم جامد آزادند دارای طیف خطی هستند و گزارهٔ (پ) نادرست است.

A ۲۵۰۷ ۲

تشکیل طیف پیوسته توسط جسم جامد، ناشی از برهم‌کنش قوی بین اتم‌های سازندهٔ آن است.

A ۲۵۰۸ ۲

طیف حاصل از تخلیه الکتریکی درون گاز، باعث ایجاد طیف نشری خطی می‌شود که طول موج‌های گسیل‌شده (رنگ‌های گسیل‌شده) به نوع گاز بستگی دارد.

A ۲۵۰۹ ۲

یادآوری گازها و بخار عنصرها وقتی که تحریک می‌شوند دارای طیف نشری خطی هستند. لامپ نئون روشن یعنی لامپی که در آن گاز نئون رقیق و کم‌فشار توسط تخلیهٔ الکتریکی نور گسیل می‌کند و نور گسیل شده تشکیل طیف نشری خطی می‌دهد.

A ۲۵۱۰ ۳

رنگ نور گسیل‌شده و طیف خطی ایجاد شده از تخلیه الکتریکی درون یک لامپ به نوع گاز درون لامپ بستگی دارد بنابراین گزارهٔ (الف) و (ب) درست است. در تمام طیف های تشکیل شده از برانگیختگی گاز درون لامپ طیف خطی می‌باشد و گزارهٔ (پ) نادرست است.

A ۲۵۱۱ ۳

تابش گرمایی در هر دمایی توسط جسم گسیل می‌شود و گزارهٔ (الف) درست و گزارهٔ (پ) نادرست است. در دماهای معمولی، بیشتر تابش گسیل شده از سطح اجسام، در ناحیه فروسرخ است و گزارهٔ (ب) نادرست است. طیف گسیلی گازها، خطی است و گزارهٔ (ت) درست است.

A ۲۵۱۲ ۱

در رشتهٔ بالمر پرتوهای فرابنفش و مرئی وجود دارند.

A ۲۵۱۳ ۱

یادآوری در طیف اتمی هیدروژن در سری‌های پاشن $(n'=۳)$، براکت $(n'=۴)$ و پفوند $(n'=۵)$ تمام طول موج‌های گسیل شده در ناحیهٔ فروسرخ بوده و در سری لیمان تمام طول موج‌ها در ناحیهٔ فرابنفش و در سری بالمر، چهار طول موج مرئی و یک طول موج فرابنفش وجود دارد.

با توجه به یادآوری بالا در رشته‌های طول موجی پاشن، براکت و پفوند همهٔ طول موج‌ها در ناحیهٔ فروسرخ هستند.

A ۲۵۱۴ ۳

در رابطهٔ ریدبرگ $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})$، n و n' عدد طبیعی هستند و $n'<n$ است. با توجه به رابطهٔ داده شده در مسئله $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{n^۲})$، $n'^۲=۱۶$ بوده و $n'=۴$ است.

در اتم هیدروژن هرگاه $n'\geq ۴$ باشد، طول موج‌های گسیلی در ناحیهٔ فروسرخ امواج الکترومغناطیسی قرار دارند. از طرفی $n'=۴$ مربوط به رشتهٔ براکت است.

A ۲۵۱۵ ۳

رابطهٔ داده شده در مسئله $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{۳^۲}-\frac{۱}{n^۲})$ را با رابطهٔ ریدبرگ مقایسه می‌کنیم

$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})$ بنابراین خواهیم داشت: رشتهٔ پاشن $n'^۲=۳^۲\Rightarrow n'=۳$

در رابطهٔ ریدبرگ هرگاه $n'\geq ۳$ باشد، طول موج‌های گسیلی فروسرخ هستند. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

B ۲۵۱۶ ۴

رابطهٔ داده‌شده در مسئله $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{۳^۲})$ را با رابطهٔ ریدبرگ $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})$ مقایسه می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت: $n^۲=۳^۲\Rightarrow n=۳$

در رابطهٔ ریدبرگ $n'<n$ است. بنابراین $n'<۳$ بوده و می‌تواند $n'=۲$ و یا $n'=۱$ باشد. $n'=۲$ مربوط به سری بالمر بوده و هنگامی که $n=۳$ و $n'=۲$ است طول موج در ناحیهٔ نور مرئی است $(\lambda=۶۵۶/۲nm$ قرمز) و $n'=۱$ مربوط به سری لیمان است و تمام طول موج‌های رشتهٔ لیمان فرابنفش است.

بازی با سوال **در رابطهٔ ریدبرگ برای اتم هیدروژن هرگاه $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{۲^۲})$ باشد، طول موج‌های گسیلی مربوط به کدام رشته و در کدام ناحیهٔ طیف الکترومغناطیسی است؟**

۱) بالمر، مرئی ۲) بالمر، فرابنفش ۳) لیمان، فرابنفش ۴) پاشن، فروسرخ

پاسخ **در رابطهٔ ریدبرگ $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})$ همواره $n'<n$ است. در رابطهٔ مسئله $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{۲^۲})$، $n=۲$ بوده بنابراین $n'=۱$ است. یعنی طول موج گسیلی مربوط به رشتهٔ لیمان $(n'=۱)$ بوده و در ناحیهٔ فرابنفش امواج الکترومغناطیسی است.** گزینهٔ ۳

B ۲۵۱۷ ۳

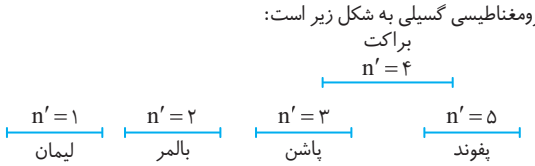
در رابطهٔ ریدبرگ $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{m^۲}-\frac{۱}{n^۲})$ به جای m عدد $n'=۴$ و به جای n عدد $n=m+۲=۴+۲=۶$ را قرار می‌دهیم.

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=\frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{۳۶})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=\frac{۱}{۱۰۰}\times\frac{۹-۴}{۱۴۴}$$

$$\Rightarrow\lambda=۲۸۸۰nm=۲/۸۸\mu m$$

A ۲۵۱۸ ۱

نکته در رشته‌های طیف اتم هیدروژن بازه‌های طول موجی و بسامدی امواج الکترومغناطیسی گسیلی به شکل زیر است:



از راست به چپ طول موج کاهش می‌یابد و بسامد افزایش می‌یابد.

با توجه به نکتهٔ بیان شده در رشتهٔ پفوند بسامدها از پاشن، بالمر و لیمان کمتر است.

A ۲۵۱۹ ۳

در رشتهٔ لیمان $(n'=۱)$ تمام طول موج‌ها فرابنفش هستند و در رشتهٔ بالمر هرگاه $n=۷$ و $n'=۲$ باشد، طول موج گسیلی در ناحیهٔ فرابنفش است. از این‌رو گزینهٔ (۳) درست است.

A ۲۵۲۰ ۴

هنگامی‌که بیان می‌شود رشتهٔ بالمر یعنی مقصد الکترون تراز انرژی $n'=2$ است. بنابراین به کمک رابطهٔ ریدبرگ λ را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=0/01\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)\Rightarrow\lambda=\frac{3600}{5}$$

$$\Rightarrow\lambda=720\,nm\Rightarrow\lambda=720\times10^{-9}=7/2\times10^{-7}\,m$$

B ۲۵۲۱ ۴

یادآوری در سری بالمر، ۴ خط طیفی مرئی وجود دارد و پنجمین خط طیفی فرابنفش است از طرفی طول موج امواج مرئی در بازهٔ ۴۰۰ تا ۷۰۰ نانومتر است و در نتیجه طول موج فرابنفش کوتاه‌تر از ۴۰۰nm است. بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

اگر چه این سؤال نیازی به راه‌حل و محاسبات ندارد، اما روش محاسبهٔ آن برای به‌دست‌آوردن پنجمین خط طیف اتمی رشتهٔ بالمر $(n=2+5=7)$ به صورت زیر است:

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=0/011\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{49}\right)\Rightarrow\lambda=395/96\,nm$$

بازی با سؤال **طول موج سومین خط طیف اتمی هیدروژن در رشتهٔ پاشن $(n'=3)$ چند نانومتر و در چه محدوده‌ای است؟ $(R=0/01\,nm^{-1})$** از کتاب درسی

۱) ۱۲۰۰، رادیویی ۲) ۱۲۰۰، فروسرخ ۳) ۸۵۰، رادیویی ۴) ۸۵۰، فروسرخ

پاسخ **طول موج سومین خط طیف اتم هیدروژن در رشتهٔ پاشن یعنی $n=6$ و $n'=3$، از این‌رو به کمک رابطهٔ ریدبرگ می‌توان طول موج را به‌دست آورد که قطعاً در ناحیهٔ فروسرخ است.**

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{100}\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{6^2}\right)=\frac{1}{100}\left(\frac{4-1}{36}\right)\Rightarrow\lambda=1200\,nm$$

گزینهٔ ۲

B ۲۵۲۲ ۴

در رابطهٔ ریدبرگ، رشتهٔ بالمر یعنی $n'=2$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\Rightarrow\frac{1}{450}=\frac{1}{100}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n^2}\right)\Rightarrow\frac{1}{4/5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4/5}\Rightarrow\frac{1}{n^2}=\frac{4/5-4}{18}\Rightarrow n^2=36\Rightarrow n=6$$

B ۲۵۲۳ ۲

سومین خط طیفی رشتهٔ براکت $(n'=4)$ یعنی $n=4+3=7$. به کمک رابطهٔ ریدبرگ مسئله را حل می‌کنیم.

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=0/01\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{19}\right)$$

$$\lambda=100\left(\frac{49\times16}{49-16}\right)\Rightarrow\lambda=100\times\frac{49\times16}{33}\Rightarrow\lambda\simeq2376\,nm$$

B ۲۵۲۴ ۳

خط فکری هر گاه الکترون از مدار بالاتر به مدار پایین‌تر برود از خود یک فوتون موج الکترومغناطیسی گسیل می‌کند. دقت کنید که الکترون وقتی از تراز (مدار) n به تراز (مدار) $n'=3$ رفته فوتون گسیل کرده بنابراین $n>n'$ است.

در این حالت می‌توانید به کمک رابطهٔ ریدبرگ - بالمر برای اتم هیدروژن مسئله را حل کنید.

با توجه به رابطهٔ ریدبرگ - بالمر می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\xrightarrow{\lambda=1200\,nm\,,\,R=0/01\,(nm)^{-1}}\frac{1}{1200}=\frac{1}{100}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{1}{n^2}=\frac{1}{9}-\frac{1}{12}\Rightarrow\frac{1}{n^2}=\frac{4-3}{36}\Rightarrow n^2=36\Rightarrow n=6$$

بازی با سؤال **در اتم هیدروژن، الکترون از تراز n به تراز $n'=2$ آمده و طول موج فوتون گسیل شده ۷۲۰ نانومتر است. این گسیل در رشتهٔ ..... است و n برابر با ..... می‌باشد. $(R_H=0/01\,nm^{-1})$** خارج تجربی - ۸۹

۱) بالمر، ۳ ۲) لیمان، ۳ ۳) بالمر، ۹ ۴) لیمان، ۹

پاسخ **مقصد الکترون تراز $n'=2$ بوده، بنابراین این طول موج مربوط به رشتهٔ بالمر است، اکنون به کمک رابطهٔ ریدبرگ برای اتم هیدروژن، n را به‌دست می‌آوریم.**

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\Rightarrow\frac{1}{720}=0/01\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{7/2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{n^2}\Rightarrow\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{7/2}\Rightarrow\frac{1}{n^2}=\frac{1}{9}\Rightarrow n=3$$

گزینهٔ ۱

A ۲۵۲۵ ۴

اولین خط طیفی رشتهٔ پاشن یعنی گذار از $n=4$ به $n'=3$ و دومین خط طیفی آن یعنی گذار از $n=5$ به $n'=3$.

این اطلاعات را در رابطهٔ ریدبرگ - بالمر برای اتم هیدروژن جایگذاری کرده و λ_1 و λ_2 را به‌دست آورده بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{\lambda_1}=R\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)\\ \frac{1}{\lambda_2}=R\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{25}\right)\end{cases}$$

$$\frac{\frac{1}{\lambda_1}}{\frac{1}{\lambda_2}}=\frac{\frac{16-9}{144}}{\frac{25-9}{225}}\Rightarrow\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{7\times225}{144\times16}\Rightarrow\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{16\times16}{7\times25}\Rightarrow\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{256}{175}$$

B ۲۵۲۶ ۲

خط فکری طول موج‌های گسیلی اتم هیدروژن از معادلهٔ ریدبرگ به‌دست می‌آید.

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

ثابت ریدبرگ

به n' های مختلف نام‌های متفاوتی داده شده است وقتی $n'=1$ باشد رشتهٔ طول موج‌ها را رشتهٔ لیمان می‌گویند بنابراین در این مسئله معادلهٔ ریدبرگ به‌صورت مقابل است.

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

از طرفی شمارهٔ خط طیفی به این گونه است که در رشتهٔ لیمان اولین خط طیفی یعنی گذار از $n=2$ به $n'=1$، دومین خط طیفی یعنی گذار از $n=3$ به $n'=1$ و ... برای یافتن شمارهٔ خط طیفی شما باید ابتدا طول موج گسیل شده را حساب کنید.

طول موج گسیلی را حساب می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{c}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{3\times10^8}{\frac{8}{3}\times10^{15}}\Rightarrow\lambda=\frac{9}{8}\times10^{-7}\,m\Rightarrow\lambda=\frac{900}{8}\,nm$$

به کمک رابطه ریدبرگ - بالمر خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\xrightarrow[R=0/01\,nm^{-1}]{n'=1}\frac{8}{900}=\frac{1}{100}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n^2}\right)\Rightarrow n^2=9\Rightarrow n=3$$

بنابراین این طول موج مربوط به دومین خط طیفی لیمان است.

B ۲۵۲۷ ۲

دقت کنید هنگامی اتم موج الکترومغناطیسی گسیل می‌کند که الکترون از تراز بالاتر به تراز پایین‌تر جهش کند، بنابراین الکترون از $n=3n'$ به n' می‌رود.

۱ طول موج پرتو را حساب می‌کنیم.

$$\lambda=\frac{c}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{3\times10^8}{\frac{8}{3}\times10^{15}}\Rightarrow\lambda=\frac{9}{8}\times10^{-7}\,m\Rightarrow\lambda=\frac{900}{8}\,nm$$

۲ به کمک رابطهٔ ریدبرگ n' را حساب می‌کنیم.

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\Rightarrow\frac{8}{900}=\frac{1}{100}\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{(3n')^2}\right)$$

$$\frac{8}{9}=\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{9n'^2}\Rightarrow\frac{8}{9}=\frac{8}{9n'^2}\Rightarrow n'=1$$

۳ $n'=1$ یعنی رشتهٔ لیمان.

B ۳ ۲۵۲۸

یادآوری گسترهٔ طول موجی نور مرئی ۴۰۰nm تا ۷۰۰nm است. طول موج گسیلی ۱۶۰۰nm بوده یعنی از ۷۰۰nm مربوط به نور قرمز بیشتر است، بنابراین این موج الکترومغناطیسی در ناحیهٔ فروسرخ است.

با توجه به رابطهٔ ریدبرگ کوتاه‌ترین طول موج گسیلی در هر یک از سری‌های اتم هیدروژن وقتی است که الکترون از $n=\infty$ به n' می‌رود، بنابراین:

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\xrightarrow{R=0/01nm^{-1}}\frac{1}{1600}=\frac{1}{100}\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{\infty}\right)\Rightarrow n'=4$$

B ۳ ۲۵۲۹

۱ رشتهٔ براکت $n'=4$ است و دومین خط طیف آن یعنی گذار از $n=6$ به $n'=4$ و اولین خط طیف آن یعنی گذار از $n=5$ به $n'=4$

۲ طول موج دومین خط طیف را از رابطهٔ ریدبرگ برحسب R حساب می‌کنیم.

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{36}\right)=R\left(\frac{9-4}{144}\right)\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=\frac{5R}{144}\Rightarrow\lambda=\frac{144}{5R}$$

۳ رشتهٔ بالمر $n'=2$ بوده و چهارمین خط آن یعنی گذار از $n=6$ به $n'=2$

۴ طول موج این خط طیف را نیز به کمک رابطهٔ ریدبرگ حساب می‌کنیم.

$$\frac{1}{\lambda'}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\Rightarrow\frac{1}{\lambda'}=R\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{36}\right)\Rightarrow\frac{1}{\lambda'}=R\left(\frac{32}{144}\right)\Rightarrow\lambda'=\frac{144}{32R}$$

۵ حال نسبت $\frac{\lambda}{\lambda'}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\lambda}{\lambda'}=\frac{\frac{144}{5R}}{\frac{144}{32R}}\Rightarrow\frac{\lambda}{\lambda'}=\frac{32}{5}$$

میانبر m امین خط رشتهٔ n' یعنی: $n=m+n'$ ، $n'=n'$

B ۱ ۲۵۳۰

سومین خط طیفی اتم هیدروژن یعنی اگر رشتهٔ طول موجی n' باشد، الکترون از تراز $n=n'+3$ به تراز n' گذار می‌کند و بنا به رابطهٔ ریدبرگ می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\Rightarrow\frac{1}{1200}=\frac{1}{100}\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{(n'+3)^2}\right)$$

اعداد گزینه‌ها را در این رابطه جایگزین می‌کنیم تا به جواب برسیم: (پاشن) $n'=3$

B ۱ ۲۵۳۱

خط فکری در ابتدا شما باید بررسی کنید که سومین خط طیفی یک رشته از طول موج‌های اتم هیدروژن کدام است. اگر فرض شود که الکترون از ترازهای بالاتر به تراز n' برود در این صورت اولین خط طیفی اتم هیدروژن در این رشته از $n'+1$ به n' و دومین طیف خطی اتم هیدروژن در این رشته از $n'+2$ به n' و سومین خط طیف این رشته از $n'+3$ به n' است یعنی به‌طور کلی اگر شمارهٔ خط طیفی m باشد، طول موج گسیلی مربوط به گذار الکترون از تراز $n'+m$ به n' است.

با توجه به اینکه ثابت ریدبرگ (R) داده شده سؤال را از رابطهٔ $\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)$ حل می‌کنیم.

۱ سومین خط طیف اتمی هیدروژن در رشتهٔ n' برابر گذار از $n'+3$ به n' است، بنابراین:

معادلهٔ ریدبرگ: $\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\xrightarrow{n=n'+3}\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{(n'+3)^2}\right)$

۲ با توجه به بسامد، طول موج را حساب می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{v}{f}\xrightarrow[f=2/5\times10^{14}Hz]{v=c=3\times10^8m/s}\lambda=\frac{3\times10^8}{2/5\times10^{14}}\Rightarrow\lambda=\frac{6}{5}\times10^{-6}m$$

۳ در معادلهٔ ریدبرگ چون یکای R برحسب $\frac{1}{nm}$ داده شده پس باید یکای λ نیز برحسب nm گذاشته شود.

$$\lambda=\frac{6}{5}\times10^{-6}m\xrightarrow{1m=10^9nm}\lambda=\frac{6}{5}\times10^{-6}\times10^9nm\Rightarrow\lambda=1200nm$$

نکته طول موج‌های بین ۴۰۰nm تا ۷۰۰nm در بازهٔ نورهای مرئی‌اند و نورهایی با طول موج کمتر از ۴۰۰nm فرابنفش و نورهایی با طول موج بیشتر از ۷۰۰nm در گسترهٔ طول موج‌های فروسرخ‌اند.

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{(n'+3)^2}\right)\Rightarrow\frac{1}{1200}=\frac{1}{100}\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{(n'+3)^2}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{12}=\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{(n'+3)^2}$$

نکته رشتهٔ بالمر در ناحیهٔ فرابنفش و مرئی قرار دارد و چون $\lambda=1200nm$ در ناحیهٔ فروسرخ است پس این طول موج برای رشتهٔ بالمر نیست.

برای حل معادلهٔ بالا به جای حل معادله بهتر است گزینه‌ها را در معادله قرار دهیم یعنی به جای n' اعداد داده شده در هر گزینه را قرار دهیم.

گزینهٔ (۱): $\frac{1}{12}=\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{(n'+3)^2}\right)\xrightarrow{n'=3}\frac{1}{12}=\frac{1}{9}-\frac{1}{36}\Rightarrow\frac{1}{12}=\frac{3}{36}$ ✓

بنابراین $n'=3$ و رشتهٔ آن پاشن است.

گزینهٔ (۲): $\frac{1}{12}=\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{(n'+3)^2}\right)\xrightarrow{n'=4}\frac{1}{12}=\frac{1}{16}-\frac{1}{49}\Rightarrow\frac{1}{12}=\frac{33}{784}$ ×

گزینهٔ (۳): $\frac{1}{12}=\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{(n'+3)^2}\right)\xrightarrow{n'=5}\frac{1}{12}=\frac{1}{25}-\frac{1}{64}\Rightarrow\frac{1}{12}=\frac{39}{1600}$ ×

B ۳ ۲۵۳۲

چهارمین خط رشتهٔ n' برابر $n=n'+4$ است:

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\Rightarrow\frac{1}{1102/5}=\frac{1}{100}\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}=\frac{100}{1102/5}\xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در ۲ ضرب می‌کنیم}}$$

$$\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}=\frac{200}{2205}=\frac{40}{441}$$

حال در این رابطه عددگذاری می‌کنیم و گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $n'=5$ و $n=9$ ×

$$\frac{1}{25}-\frac{1}{81}=\frac{56}{2025}$$

گزینهٔ (۲): $n'=4$ و $n=8$ ×

$$\frac{1}{16}-\frac{1}{64}=\frac{3}{64}$$

گزینهٔ (۳): $n'=3$ و $n=7$ ✓

$$\frac{1}{9}-\frac{1}{49}=\frac{40}{441}$$

گزینهٔ (۴): $n'=2$ و $n=6$ ×

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{36}=\frac{8}{36}=\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

B ۲ ۲۵۳۳

بلندترین طول موج مرئی در اتم هیدروژن مربوط به سری بالمر است، هنگامی که $n=3$ و $n'=2$ است.

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)=R\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)\Rightarrow\lambda=\frac{36}{5R}$$

کوتاه‌ترین طول موج مرئی در اتم هیدروژن در سری بالمر هنگامی است که $n=6$ و $n'=2$ است. بنابراین طول موج خواهد شد:

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{6^2}\right)=R\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{36}\right)=R\left(\frac{9-1}{36}\right)\Rightarrow\lambda_{\min_{\text{مرئی}}}=\frac{36}{8R}$$

$$\Rightarrow\lambda_{\min_{\text{مرئی}}}=\frac{9}{2R}$$

A ۳ ۲۵۳۴

پرانرژی‌ترین فوتون دارای کوتاه‌ترین طول موج بوده و الکترون در اتم هیدروژن وقتی از دورترین تراز به تراز $n'=2$ برود این فوتون را گسیل می‌کند (وقتی بیان می‌شود رشتهٔ بالمر یعنی مقصد الکترون تراز $n'=2$ است). اکنون به کمک رابطهٔ ریدبرگ برای اتم هیدروژن داریم:

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=0/01\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{\infty}\right)\Rightarrow\lambda=400nm$$

B ۲۵۳۵ ۴

۱ کم‌انرژی‌ترین فوتون بالمر دارای بلندترین طول موج است و آن هنگامی است که الکترون از $n=۳$ به $n=۲$ می‌رود.

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{۲^۲}-\frac{۱}{۳^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۵}{۳۶})\Rightarrow\lambda=\frac{۳۶}{۵R}$$

۲ پرانرژی‌ترین فوتون براکت دارای کوتاه‌ترین طول موج است و آن هنگامی است که الکترون از $n=\infty$ به $n=۴$ می‌رود.

$$\frac{۱}{\lambda'}=R(\frac{۱}{۴^۲}-\frac{۱}{\infty})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda'}=R(\frac{۱}{۱۶})\Rightarrow\lambda'=\frac{۱۶}{R}$$

$$\frac{E_{\text{بالمر}}}{E_{\text{براکت}}}=\frac{h\frac{c}{\lambda}}{h\frac{c}{\lambda'}}=\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{\frac{۱۶}{R}}{\frac{۳۶}{۵R}}=\frac{۲۰}{۹}$$

B ۲۵۳۶ ۲

خط فکری بلندترین طول موج گسیلی (کم‌انرژی‌ترین پرتو) رشتهٔ n'، از $n'+۱$ به n' خواهد بود.

کوتاه‌ترین طول موج گسیلی (پرانرژی‌ترین پرتو) رشتهٔ n'، از ∞ به n' خواهد بود.

بلندترین طول موج گسیلی مربوط به گذار از $n=۳$ به $n'=۲$ است:

$$\frac{۱}{\lambda_{max}}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda_{max}}=R(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۹})$$

$$\Rightarrow\lambda_{max}=\frac{۳۶}{۵R}=\frac{۳۶۰۰}{۵}=۷۲۰nm$$

کوتاه‌ترین طول موج گسیلی مربوط به گذار از $n=\infty$ به $n'=۲$ است.

$$\frac{۱}{\lambda_{min}}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda_{min}}=R(\frac{۱}{۴}-۰)\Rightarrow\lambda_{min}=\frac{۴}{R}=۴۰۰nm$$

اختلاف طول موج‌های خواسته شده برابر است با: $\Delta\lambda=۷۲۰-۴۰۰=۳۲۰nm$

B ۲۵۳۷ ۴

۱ بیشترین بسامد گسیلی (یعنی کوتاه‌ترین طول موج) گسیلی وقتی است که الکترون از تراز بینهایت به تراز $n'=۳$ در رشتهٔ پاشن برود. با توجه به رابطهٔ ریدبرگ کوتاه‌ترین طول موج را حساب می‌کنیم.

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=۰/۰۱(\frac{۱}{۳^۲}-\frac{۱}{\infty})\Rightarrow\lambda_{min}=۹۰۰nm$$

۲ بیشینه بسامد خواهد شد:

$$f_{max}=\frac{c}{\lambda_{min}}=\frac{۳\times۱۰^۸}{۹۰۰\times۱۰^{-۹}}\Rightarrow f_{max}=\frac{۱}{۳}\times۱۰^{۱۵}Hz$$

۳ کمترین بسامد گسیلی (یعنی بلندترین موج) وقتی گسیل می‌شود که الکترون از تراز $n=۴$ به تراز $n'=۳$ در رشتهٔ پاشن برود از این رو خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda_{max}}=\frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۱۶})=\frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱۶-۹}{۹\times۱۶})$$

$$\Rightarrow\lambda_{max}=\frac{۹۰۰\times۱۶}{۷}nm$$

۴ کمترین بسامد را حساب می‌کنیم.

$$f_{min}=\frac{c}{\lambda_{max}}=\frac{۳\times۱۰^۸}{\frac{۹۰۰\times۱۶}{۷}\times۱۰^{-۹}}\Rightarrow f_{min}=\frac{۷}{۴۸}\times۱۰^{۱۵}Hz$$

۵ اختلاف دو بسامد را به‌دست می‌آوریم.

$$f_{max}-f_{min}=\frac{۱}{۳}\times۱۰^{۱۵}-\frac{۷}{۴۸}\times۱۰^{۱۵}\Rightarrow\Delta f=(\frac{۱۶-۷}{۴۸})\times۱۰^{۱۵}=\frac{۳۰}{۱۶}\times۱۰^{۱۴}$$

$$\Rightarrow\Delta f=۱/۸۷۵\times۱۰^{۱۴}Hz$$

روش دیگر: با داشتن اختلاف انرژی بیشترین و کمترین بسامد فوتون گسیلی می‌توان اختلاف بسامدها را به‌دست آورد. $E_{max}=E_\infty-E_۳\ ,\ E_{min}=E_۴-E_۳$

$$\Delta E=E_\infty-E_۳-E_۴+E_۳\Rightarrow\Delta E=E_\infty-E_۴$$

طول موج گسیلی وقتی الکترون از $n=\infty$ به $n'=۴$ می‌رود را به کمک رابطهٔ ریدبرگ حساب می‌کنیم.

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=\frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{۱۶}-۰)\Rightarrow\lambda=۱۶۰۰nm$$

اکنون Δf را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta f=\frac{c}{\lambda}=\frac{۳\times۱۰^۸}{۱۶۰۰\times۱۰^{-۹}}=\frac{۳۰}{۱۶}\times۱۴\Rightarrow\Delta f=۱/۸۷۵\times۱۰^{۱۴}Hz$$

C ۲۵۳۸ ۴

خط فکری اولین خط طیفی رشتهٔ n'، یعنی گذار الکترون از تراز $n'+۱$ به تراز n' و دومین خط طیفی رشتهٔ n'، یعنی گذار الکترون از تراز $n'+۲$ به تراز n'. به کمک رابطهٔ ریدبرگ این دو گذار را نوشته و به جای طول موج، $\frac{c}{f}$ قرار داده و تفاضل بسامد را برابر $\frac{۳۵}{۲۴}\times۱۰^{۱۴}Hz$ قرار می‌دهیم.

۱ بنا به رابطهٔ ریدبرگ برای اولین و دومین طیف رشتهٔ معین n' می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{\text{اولین}}\frac{۱}{\lambda_۱}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{(n'+۱)^۲})\\ \xrightarrow[\frac{۱}{\lambda}=\frac{f}{c}]{}\frac{f_۱}{c}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{(n'+۱)^۲})\\ \xrightarrow{\text{دومین}}\frac{۱}{\lambda_۲}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{(n'+۲)^۲})\\ \Rightarrow\frac{f_۲}{c}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{(n'+۲)^۲})\end{cases}$$

۲ دو رابطه را از هم کم می‌کنیم. البته بسامد در دومین خط طیفی از بسامد اولیه خط طیفی بزرگ‌تر است، زیرا الکترون از تراز بالاتری به n' می‌آید بنابراین:

$$\frac{f_۲}{c}-\frac{f_۱}{c}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{(n'+۲)^۲}-\frac{۱}{n'^۲}+\frac{۱}{(n'+۱)^۲})$$

$$\frac{f_۲-f_۱}{c}=R(\frac{۱}{(n'+۱)^۲}-\frac{۱}{(n'+۲)^۲})$$

جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{\frac{۳۵}{۲۴}\times۱۰^{۱۴}}{۳\times۱۰^۸}=\frac{۱}{۱۰۰\times۱۰^{-۹}}(\frac{۱}{(n'+۱)^۲}-\frac{۱}{(n'+۲)^۲})$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{(n'+۱)^۲}-\frac{۱}{(n'+۲)^۲}=\frac{۳۵}{۷۲۰}\Rightarrow\frac{(n'+۲)^۲-(n'+۱)^۲}{(n'+۱)^۲(n'+۲)^۲}=\frac{۳۵}{۷۲۰}$$

$$\frac{۲n'+۳}{(n'+۱)^۲(n'+۲)^۲}=\frac{۷}{۱۴۴}$$

باید صورت کسر، $(۲n'+۳)$ برابر عدد هفت شود. $۲n'+۳=۷\Rightarrow۲n'=۴\Rightarrow n'=۲$

پاسخ رشته بالمر است.

B ۲۵۳۹ ۱

بلندترین طول موج در رشتهٔ براکت یعنی گذار از $n=۵$ به $n'=۴$ و کوتاه‌ترین طول موج یعنی گذار از $n=\infty$ به $n'=۴$ بنابراین:

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\begin{cases}\frac{۱}{\lambda_{max}}=R(\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{۲۵})\Rightarrow\lambda_{max}=\frac{۱۶\times۲۵}{۹R}\\ \frac{۱}{\lambda_{min}}=R(\frac{۱}{۱۶}-۰)\Rightarrow\lambda_{min}=\frac{۱۶}{R}\end{cases}$$

$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}=\frac{۲۵}{۹}$$

B ۲۵۴۰ ۱

بلندترین طول موج $(\lambda_۱)$ در رشته پفوند مربوط به گذار از $n=۶$ به $n'=۵$ و کوتاه‌ترین طول موج $(\lambda_۲)$ در این رشته مربوط به گذار از $n=\infty$ به $n'=۵$ است.

با توجه به رابطهٔ ریدبرگ: $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})$

$$\frac{۱}{\lambda_۱}=\frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{۵^۲}-\frac{۱}{۶^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda_۱}=\frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱۱}{۲۵\times۳۶})\Rightarrow\lambda_۱=\frac{۲۵\times۳۶\times۱۰۰}{۱۱}\Rightarrow\lambda_۱=\frac{۹۰۰۰۰}{۱۱}$$

$$\frac{۱}{\lambda_۲}=\frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{۵^۲}-\frac{۱}{\infty})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda_۲}=\frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{۲۵})\Rightarrow\lambda_۲=\frac{۲۵۰۰}{۱}\ ,\ \frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}=\frac{۹۰۰۰۰}{۲۵۰۰\times۱۱}=\frac{۳۶}{۱۱}$$

۲۵۴۱ B ۱

۱ بلندترین طول موج فرابنفش در رابطهٔ ریدبرگ هنگامی است که $n=۷$ و $n'=۲$ باشد.

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda_{max}}=R(\frac{۱}{۲^۲}-\frac{۱}{۷^۲})=R(\frac{۴۹-۴}{۴\times۴۹})$$

$$\Rightarrow\lambda_{max}=\frac{۴\times۴۹}{۴۵R}=\frac{۱۹۶}{۴۵R}$$

۲ کوتاه‌ترین طول موج فرابنفش در رابطهٔ ریدبرگ در رشتهٔ لیمان $(n'=۱)$ است هنگامی که $n=\infty$ باشد، بنابراین:

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda_{min}}=R(\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{\infty})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda_{min}}=\frac{۱}{R}$$

۳ نسبت را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}=\frac{\frac{۱۹۶}{۴۵R}}{\frac{۱}{R}}\Rightarrow\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}=\frac{۱۹۶}{۴۵}$$

بازی با سوال **بلندترین طول موج فرابنفش طیف اتمی هیدروژن در صورتی گسیل می‌شود که اتم از $n_۱$ به تراز $n_۲$ برود، $n_۲$ و $n_۱$ کدام هستند؟**

۱) $n_۱=۳$ به $n_۲=۲$ **۲)** $n_۱=۳$ به $n_۲=۱$

۳) $n_۱=۲$ به $n_۲=۱$ **۴)** $n_۱=۷$ به $n_۲=۲$

پاسخ **در گزینهٔ (۲)، الکترون از تراز $n_۱=۳$ به تراز $n_۲=۱$ می‌رود و در گزینهٔ (۳)، الکترون از تراز $n_۱=۲$ به تراز $n_۲=۱$ می‌رود بنابراین انرژی فوتون گسیلی در گذار گزینهٔ (۲) بیشتر و طول موج آن کوتاه‌تر است. از طرفی کوتاه‌ترین طول موج سری بالمر از بلندترین طول موج سری لیمان بلندتر است، بنابراین طول موج گسیلی در گذار از $n_۱=۷$ به $n_۲=۲$ در سری بالمر قطعاً از گذار از $n_۱=۳$ به $n_۲=۱$ در سری لیمان بلندتر است، از این‌رو پاسخ گزینهٔ (۴) است.** گزینهٔ ۴

۲۵۴۲ B ۲

خط فکری کوتاه‌ترین طول موج در طیف اتم هیدروژن وقتی گسیل می‌شود که الکترون از بالاترین ترازممکن $(n=\infty)$ به پایین‌ترین تراز ممکن $n'=۱$ برود که $n'=۱$ مربوط به رشتهٔ لیمان است.

به کمک رابطهٔ ریدبرگ - بالمر برای هیدروژن کوتاه‌ترین طول موج گسیلی را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=۰/۰۱(\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{\infty})\Rightarrow\lambda=۱۰۰nm$$

۲۵۴۳ B ۱

۱ بلندترین طول موج غیرمرئی (فرابنفش) در رشتهٔ بالمر وقتی است که $n=۷$ و $n'=۲$ است. به کمک رابطهٔ ریدبرگ طول موج را حساب می‌کنیم.

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda_{max}}=R(\frac{۱}{۲^۲}-\frac{۱}{۷^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda_{max}}=R(\frac{۴۹-۴}{۴\times۴۹})$$

$$\Rightarrow\lambda_{max}=\frac{۱۹۶}{۴۵R}$$

۲ کوتاه‌ترین طول موج غیرمرئی (فرابنفش) در رشتهٔ بالمر وقتی است که $n=\infty$ و $n'=۲$ باشد. از این‌رو:

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda_{min}}=R(\frac{۱}{۲^۲}-\frac{۱}{\infty})\Rightarrow\lambda_{min}=\frac{۴}{R}$$

۳ نسبت $\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}$ خواهد شد:

$$\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}=\frac{\frac{۱۹۶}{۴۵R}}{\frac{۴}{R}}\Rightarrow\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}=\frac{۱۹۶}{۱۸۰}=\frac{۴۹}{۴۵}$$

۲۵۴۴ B ۱

۱ بیشینه بسامد یعنی کوتاه‌ترین طول موج $(\downarrow\lambda=\frac{c}{f\uparrow})$ و کوتاه‌ترین طول موج در ناحیهٔ فروسرخ مربوط به رشتهٔ پاشن است و وقتی گسیل می‌شود که $n=\infty$ و $n'=۳$ باشد. طول موج را حساب می‌کنیم.

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda_{max_{فروسرخ}}}=R(\frac{۱}{۳^۲}-\frac{۱}{\infty})\Rightarrow\lambda_{max_{فروسرخ}}=\frac{۹}{R}$$

$$\xrightarrow{f=\frac{c}{\lambda}}f_{فروسرخ}=\frac{c}{\frac{۹}{R}}=\frac{cR}{۹}$$

۲ بیشینه بسامد در ناحیهٔ مرئی مربوط به رشتهٔ بالمر $(n'=۲)$ بوده و هنگامی گسیل می‌شود که $n=۶$ باشد. طول موج را حساب می‌کنیم.

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda_{مرئی}}=R(\frac{۱}{۲^۲}-\frac{۱}{۶^۲})=R(\frac{۹-۱}{۳۶})\Rightarrow\lambda_{مرئی}=\frac{۳۶}{۸R}=\frac{۹}{۲R}$$

$$\xrightarrow{f=\frac{c}{\lambda}}f_{مرئی}=\frac{c}{\frac{۹}{۲R}}=\frac{۲Rc}{۹}$$

۳ نسبت را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{f_{فروسرخ}}{f_{مرئی}}=\frac{\frac{cR}{۹}}{\frac{۲cR}{۹}}=\frac{۱}{۲}$$

۲۵۴۵ A ۱

۱ کوتاه‌ترین طول موج گسیلی بالمر یعنی الکترون از بالاترین تراز $n=\infty$ به تراز $n'=۲$ برود.

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda_{min}}=R(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{\infty})\Rightarrow\lambda_{min}=\frac{۴}{R}$$

۲ بلندترین طول موج گسیلی یعنی الکترون از تراز $n=۳$ به تراز $n'=۲$ برود.

$$\frac{۱}{\lambda_{max}}=R(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۹})\Rightarrow\lambda_{max}=\frac{۳۶}{۵R}$$

۳ گسترهٔ طول موج سری بالمر خواهد شد:

$$\lambda_{max}-\lambda_{min}=\frac{۳۶}{۵R}-\frac{۴}{R}=\frac{۱۶}{۵R}$$

۲۵۴۶ B ۱

خط فکری محدوده تقریبی طول موج‌های رشته‌های گسیلی اتم هیدروژن در هر رشته بین بلندترین طول موج و کوتاه‌ترین طول موج گسیلی در آن رشته است. اما بلندترین طول موج هنگامی گسیل می‌شود که الکترون از تراز $n+۱$ به تراز پایین‌تر $n'=n$ می‌رود و کوتاه‌ترین طول موج هنگامی گسیل می‌شود که الکترون از تراز $n=\infty$ به تراز $n'=n$ می‌رود. در این مسئله $n'=۳$ است.

بلندترین طول موج رشتهٔ پاشن هنگامی گسیل می‌شود که الکترون از تراز $n=۴$ به تراز $n'=۳$ برود. با توجه به رابطهٔ ریدبرگ - بالمر برای اتم هیدروژن خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=۰/۰۱(\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۱۶})\Rightarrow\lambda\simeq۲۰۰۰nm\Rightarrow\lambda\simeq۲\mu m$$

کوتاه‌ترین طول موج گسیلی رشتهٔ پاشن وقتی است که الکترون از تراز $n=\infty$ به تراز $n'=۳$ برود.

$$\frac{۱}{\lambda}=۰/۰۱(\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{\infty})\Rightarrow\lambda=۹۰۰nm=۰/۹\mu m$$

بنابراین محدودهٔ تقریبی طول موج $۰/۹\mu m$ تا $۲\mu m$ است.

۲۵۴۷ B ۴

نکته در اتم هیدروژن بازه‌های طول موجی در رشته‌های مختلف به صورت زیر است:

λ_{min_b} براکت λ_{max_b}

λ_{min_L} لیمان λ_{max_L} بالمر λ_{min_P} پاشن λ_{max_P} پفوند

λ_{min_B} بالمر λ_{max_B} پاشن λ_{min_p} پفوند λ_{max_p}

بلندترین طول موج گسیلی رشتهٔ لیمان، از کوتاه‌ترین طول موج گسیلی رشتهٔ بالمر از کوتاه‌تر است و گزینهٔ (۴) درست است.

البته این مطلب در مورد رشتهٔ پاشن براکت و پفوند صدق نمی‌کند.

B ۲۵۴۸ ۱

طول موج‌های رشتهٔ بالمر در ناحیهٔ مرئی و فرابنفش بوده اما طول موج‌های رشتهٔ پفوند و پاشن و براکت در ناحیهٔ فروسرخ است و انرژی فوتون‌های آن از انرژی فوتون‌های رشتهٔ بالمر کمتر بوده و چنانچه کوتاه‌ترین طول موج رشتهٔ بالمر نتواند سبب پدیدهٔ فوتوالکتریک شود فوتون‌های رشتهٔ پفوند، پاشن و براکت نیز قادر به انجام این پدیده نخواهند بود اما فوتون‌های سری لیمان در ناحیهٔ فرابنفش هستند و در این سری انرژی فوتون‌ها از تمام فوتون‌های سری بالمر بیشتر بوده و ممکن است کوتاه‌ترین طول موج (یعنی پرانرژی‌ترین فوتون‌های) سری لیمان بتوانند سبب پدیدهٔ فوتوالکتریک شوند.

بازی با سؤال **اگر کوتاه‌ترین طول موج سری بالمر قادر به انجام پدیدهٔ فوتوالکتریک در سلولی معین نباشد، بلندترین طول موج کدام سری، احتمالاً قادر به انجام این پدیده خواهد بود؟**

۱) لیمان ۲) پاشن ۳) براکت ۴) پفوند

پاسخ **کوتاه‌ترین طول موج سری بالمر هنگام گذار الکترون از تراز $n=\infty$ به $n=2$ بوده و در ناحیهٔ فرابنفش است. طول موج‌های رشته‌های پاشن، براکت و پفوند همگی در ناحیهٔ فروسرخ هستند و انرژی فوتون آن‌ها از انرژی فوتون بالمر کمتر است و نمی‌توانند سبب پدیدهٔ فوتوالکتریک شوند. اما در رشتهٔ لیمان، فوتون‌ها در ناحیه فرابنفش هستند و ممکن است بتوانند سبب اثر فوتوالکتریک شوند.** گزینهٔ ۱

A ۲۵۴۹ ۴

در دماهای پایین گسیل هیدروژن در ناحیهٔ فروسرخ (رشتهٔ پفوند) و در دماهای بالا در ناحیهٔ فرابنفش (رشتهٔ لیمان) خواهد بود.

پنجره ۳

A ۲۵۵۰ ۱

تامسون موفق به کشف الکترون و اندازه‌گیری نسبت بار به جرم آن $\left(\frac{e}{m}\right)$ شد بنابراین گزارهٔ (الف) درست است.

در مدل اتمی تامسون، هسته وجود ندارد و اتم همچون کره‌ای است که بار مثبت به‌طور همگن در سرتاسر آن گسترده شده است و گزارهٔ (ب) نادرست است.

در مدل اتمی تامسون، زمانی اتم تابش گسیل می‌کند که الکترون‌ها با بسامد معینی حول وضع تعادلشان نوسان کنند و گزارهٔ (پ) درست است.

مدل اتمی تامسون نمی‌تواند طیف خطی عناصر را توجیه کند و گزارهٔ (ت) نادرست است.

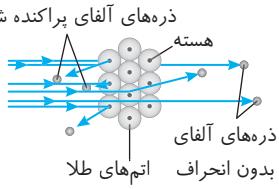
A ۲۵۵۱ ۴

در مدل اتمی رادرفورد، اتم دارای هسته با بار مثبت است و اگر الکترون‌ها را نسبت به هسته ساکن فرض کنیم باید تحت تأثیر نیروی رباییش الکتریکی بین هسته و الکترون، روی هسته سقوط کند و اگر الکترون‌ها مانند سیاره‌های منظومه خورشیدی به گرد خورشید بچرخند باز هم این حرکت پایدار نمی‌ماند. الکترون در حال گردش به گرد هسته، چون دارای حرکت شتابدار است از خود تابش گسیل کرده و با از دست دادن تدریجی انرژی، بر هسته سقوط می‌کند.

A ۲۵۵۲ ۴

در آزمایش تاباندن ذرات آلفا به ورقه‌های طلا، مشاهده شد که تعداد زیادی از ذرات آلفا بدون انحراف از ورقهٔ طلا می‌گذرند. از این‌رو رادرفورد نتیجه گرفت که بخش بزرگی از فضای اتم را فضای تهی تشکیل می‌دهد و گزینهٔ (۱) درست است.

از مشاهدهٔ برگشت کامل برخی از ذرات آلفا نتیجه گرفت که اتم دارای هسته‌ای چگال با بار مثبت در مرکز اتم است و گزینهٔ (۲) درست است. پایداری اتم به آزمایش رادرفورد ارتباطی ندارد.



B ۲۵۵۳ ۲

در مدل اتمی رادرفورد با توجه به فیزیک کلاسیک با چرخش الکترون، توسط الکترون امواج الکترومغناطیسی تولید می‌شود که بسامد آن با بسامد حرکت مداری الکترون یکسان است. با تولید این موج الکترومغناطیسی انرژی الکترون کاسته شده در نتیجه شعاع مدار الکترون به دور هسته به تدریج کاسته شده و بسامد حرکت آن به تدریج بیشتر می‌شود، بنابراین بسامد موج الکترومغناطیسی نیز زیاد شده و موج الکترومغناطیسی دارای طول موج‌های کوتاه‌تر می‌شود. در گزینهٔ (۲) هرچه الکترون به هسته نزدیک‌تر می‌شود طول موج کوتاه‌تر شده است. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

A ۲۵۵۴ ۳

این آزمایش ورقهٔ طلا به وسیلهٔ پرتو α می‌باشد که تعداد کمی از پرتوهای α با زاویهٔ بیش از 90° باز می‌گردند که رادرفورد برخلاف مدل تامسون به این نتیجه رسید که در اتم مرکزهای بسیار چگال با بار مثبت وجود دارد. بنابراین گزارهٔ (الف) و (ب) درست و گزارهٔ (پ) نادرست است.

A ۲۵۵۵ ۳

در مدل اتمی رادرفورد بنابر فیزیک کلاسیک حرکت الکترون به دور هسته یک حرکت شتابدار می‌باشد که سبب تابش امواج الکترومغناطیسی می‌شود.

نکته منبع تولید امواج الکترومغناطیسی حرکت شتابدار ذرهٔ باردار می‌باشد.

نکته بسامد موج گسیل شده از یک چشمهٔ موج برابر بسامد چشمه است.

الکترون با حرکت شتابدار، خود چشمهٔ تولید موج است، بنابراین بسامد امواج الکترومغناطیسی گسیل شده با بسامد حرکت مداری الکترون برابر است.

A ۲۵۵۶ ۳

طیف خطی عنصرها توسط مدل اتمی بور قابل توجیه است. در الگوی اتمی تامسون و الگوی اتمی رادرفورد نمی‌توان خطی و منحصربه‌فرد بودن طیف عنصرها را توجیه کرد. در الگوی اتمی بور با فرض گسسته بودن انرژی الکترون در ترازهای انرژی و اینکه الکترون در این ترازها تابش گسیل نمی‌کند و تنها زمانی تابش گسیل می‌کند که الکترون از یک تراز انرژی بالاتر به تراز انرژی پایین‌تر برود، می‌توان خطی بودن طیف خطی را توجیه کرد. از طرفی چون هر اتم دارای ترازهای انرژی ویژهٔ خود است بنابراین بنا بر الگوی اتمی بور هر عنصر تابش منحصر به خود را خواهد داشت و طیف اتمی خطی خواهد بود.

B ۲۵۵۷ ۲

یادآوری در مدل اتمی بور، مدارها و انرژی‌های الکترون‌ها در هر اتم کوانتیده‌اند، یعنی فقط مدارها و انرژی‌های گسسته‌ای مجاز هستند.

شعاع این مدارها و انرژی الکترون برای اتم هیدروژن از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید.

ترازهای انرژی $E_n=\frac{-13/6eV}{n^2}$ ، شعاع مدارها: $r_n=a_0 n^2$

بررسی شعاع مدارها:

$r_1=a_0$

$r_2=a_0(2)^2=4a_0$ ← $r_2-r_1=3a_0$

$r_3=a_0(3)^2=9a_0$ ← $r_3-r_2=5a_0$

$r_4=a_0(4)^2=16a_0$ ← $r_4-r_3=7a_0$

بنابراین فاصلهٔ مدارهای چرخش الکترون در حال افزایش است.

بررسی انرژی ترازها:

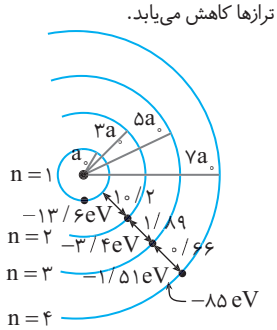
$E_1=-13/6eV$

$E_2=\frac{-13/6}{2^2}=-3/4eV$ ← $E_2-E_1=10/2eV$

$E_3=\frac{-13/6}{3^2}=-1/51eV$ ← $E_3-E_2=1/89eV$

$E_4=\frac{-13/6}{4^2}=-0/85eV$ ← $E_4-E_3=0/66eV$

بنابراین اختلاف انرژی ترازها کاهش می‌یابد.



۳ ۲۵۵۸ A

در دمای اتاق الکترون اغلب در حالت پایه قرار دارد و گزینهٔ (۳) نادرست است.

۳ ۲۵۵۹ A

با توجه به الگوی اتمی بور در مورد شعاع مدار چرخش الکترون شعاع مدار سوم و شعاع مدار اول را به‌دست آورده از هم کم می‌کنیم.

$$r_n = n^2 a_\circ \begin{cases} \xrightarrow{n=1} r_1 = a_\circ \\ \xrightarrow{n=3} r_2 = 3^2 a_\circ = 9a_\circ \end{cases} \Rightarrow r_2 - r_1 = 8a_\circ$$

۲ ۲۵۶۰ B

یادآوری انرژی الکترون در ترازهای انرژی از رابطهٔ $E_n = -\frac{E_R}{n^2}$ به‌دست می‌آید که در آن n شمارهٔ تراز است.

یادآوری هرگاه الکترون از تراز بالا با انرژی E_U به تراز پایین‌تر با انرژی E_L برود فوتونی با انرژی برابر $E_U - E_L$ گسیل می‌کند.

انرژی را در دو حالت نوشته از هم کم می‌کنیم و برابر hf قرار می‌دهیم. دقت کنید چهارمین حالت برانگیخته یعنی $n=5$.

$$-\frac{E_R}{n_U^2} - \left(\frac{-E_R}{n_L^2}\right) = hf \xrightarrow[h=4\times10^{-15}eV.s]{n_L=1, n_U=5, E_R=13/6eV}$$

$$\frac{13/6}{1^2} - \frac{13/6}{5^2} = 4\times10^{-15}\times f \Rightarrow \frac{24}{25}\times(13/6) = 4\times10^{-15}\times f$$

$$f = \frac{24\times13/6}{25\times4}\times10^{15} \Rightarrow f = \frac{24\times13/6}{100}\times10^{15} = 3/264\times10^{15}\,Hz$$

۳ ۲۵۶۱ A

در مدل اتمی بور، شعاع مدارها از رابطهٔ زیر پیروی می‌کنند.

$$r_n = n^2 a_\circ \Rightarrow r_4 = (4)^2 \times 5/29 \Rightarrow r_4 = 84/64pm$$

۴ ۲۵۶۲ A

یادآوری انرژی الکترون در ترازهای اتم هیدروژن از رابطهٔ $E_n = \frac{-E_R}{n^2}$ به‌دست می‌آید.

در اتم هیدروژن $n=1$ تراز پایه، $n=2$ اولین حالت برانگیخته و تراز $n=3$ دومین حالت برانگیخته است، انرژی در دو حالت را می‌نویسیم و بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$E_A = \frac{-E_R}{n^2} \Rightarrow \begin{cases} E_3 = \frac{-E_R}{3^2} = \frac{-E_R}{9} \\ E_1 = \frac{-E_R}{1^2} = -E_R \end{cases} \xrightarrow{\div} \frac{E_3}{E_1} = \frac{\frac{-E_R}{9}}{-E_R} = \frac{1}{9}$$

۲ ۲۵۶۳ B

یادآوری در مدل اتمی بور، انرژی الکترون در اتم هیدروژن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$E = -\frac{E_R}{n^2}$$

شماره مداری که در آن انرژی الکترون $-0/85eV$ و $-0/544eV$ است را به کمک رابطهٔ بالا به‌دست می‌آوریم.

$$E_n = -\frac{E_R}{n^2} \begin{cases} \xrightarrow{E_K=-0/85eV} -0/85 = \frac{-13/6}{K^2} \Rightarrow K=4 \\ \xrightarrow{E_L=-0/544eV} -0/544 = \frac{-13/6}{L^2} \Rightarrow L=5 \end{cases}$$

۱ ۲۵۶۴ A

با توجه به شعاع مدار الکترون در الگوی اتمی بور، شمارهٔ مدار را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{r_n}{r_1} = 4 \xrightarrow{r_n = n^2 a_\circ} \frac{n^2 a_\circ}{a_\circ} = 4 \Rightarrow n = 2$$

انرژی الکترون خواهد شد:

$$E_n = -\frac{E_R}{n^2} \begin{cases} \xrightarrow{n=1} E_1 = -E_R \\ \xrightarrow{n=2} E_2 = -\frac{E_R}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{4}$$

بازی با سوال در اتم هیدروژن، الکترون از تراز $n=1$ به تراز $n=3$ می‌رود. در این انتقال، شعاع مدار و انرژی الکترون نسبت به حالت قبل، به ترتیب چند برابر می‌شوند؟ ریاضی - ۹۳

۱) $\frac{1}{3}$ ،۳ ۲) $\frac{1}{9}$ ،۹ ۳) ۳ ،۳ ۴) ۹ ،۹

پاسخ شعاع مدار الکترون در اتم بور:

$$r_n = n^2 a_\circ \begin{cases} \xrightarrow{n=1} r_1 = a_\circ \\ \xrightarrow{n=3} r_3 = 9a_\circ \end{cases} \Rightarrow r_3 = 9r_1$$

انرژی الکترون:

$$E_n = -\frac{E_R}{n^2} \begin{cases} \xrightarrow{n=1} E_1 = -E_R \\ \xrightarrow{n=3} E_3 = -\frac{E_R}{9} \end{cases} \Rightarrow E_3 = \frac{1}{9}E_1$$

گزینهٔ ۲

۴ ۲۵۶۵ B

خط فکری ابتدا بررسی کنید که شعاع مدار الکترون یعنی فاصلهٔ الکترون از هسته چند برابر می‌شود. سپس به کمک قانون کولن دربارهٔ نیروی الکتریکی بین الکترون و هسته اظهار نظر کنید.

۱ ابتدا مشخص می‌کنیم که شعاع مدار چرخش الکترون چند برابر می‌شود:

$$r_n = n^2 a_\circ \Rightarrow \frac{r_3}{r_2} = \frac{3^2}{2^2} \Rightarrow \frac{r_3}{r_2} = \frac{9}{4}$$

۲ نیروی الکتریکی با مجذور فاصله نسبت وارون دارد از این‌رو:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \Rightarrow \frac{F_3}{F_2} = \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

بازی با سوال در الگوی اتمی بور برای اتم هیدروژن، اگر الکترون از مدار $n=1$ به مدار $n=2$ برود، نیروی ربایش هسته بر آن چند برابر می‌شود؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{16}$

پاسخ نیروی ربایش بین هسته و الکترون طبق رابطهٔ $F = \frac{kq_1q_2}{r^2}$ ، با مجذور فاصله رابطهٔ عکس دارد.

$$\frac{F_2}{F_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \xrightarrow{r_n = n^2 a_\circ} \frac{F_2}{F_1} = \left(\frac{a_\circ}{4a_\circ}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

گزینهٔ ۴

۴ ۲۵۶۶ A

۱ تغییر شعاع مدار الکترون از مدار $n'=2$ به $n=5$ خواهد شد:

$$r_n = n^2 a_\circ \Rightarrow \begin{cases} r_2 = 4a_\circ \\ r_5 = 25a_\circ \end{cases} \Rightarrow \frac{r_5}{r_2} = \frac{25}{4}$$

۲ تغییر انرژی الکترون با توجه به مدل اتمی بور برابر است با:

$$E_n = -\frac{E_R}{n^2} \Rightarrow \begin{cases} E_2 = -\frac{13/6}{4} \Rightarrow E_2 = -3/4eV \\ E_5 = -\frac{13/6}{25} \Rightarrow E_5 = -0/544eV \end{cases}$$

$$\Delta E = E_5 - E_2 = -0/544 - (-3/4) \Rightarrow E_5 - E_2 = 2/856eV$$

B ۲۵۶۷ ۲

خط فکری انرژی الکترون در اتم هیدروژن در هر تراز از رابطهٔ $E_n=\frac{-E_R}{n^2}$ به‌دست می‌آید که در آن n شمارهٔ تراز است، بنابراین کافی است در این رابطه به جای n به ترتیب ۱ و ۳ قرار داده و اعداد به‌دست آمده را از هم کم کنیم و مجدداً ۴ و ۶ را قرار دهیم و اعداد به‌دست آمده را از هم کم کنیم.

$$E_n=\frac{-E_R}{n^2}\begin{cases}E_1=\frac{-E_R}{1}\\ E_3=\frac{-E_R}{9}\end{cases}\xrightarrow{\Delta E=E_1-E_3}\Delta E=\frac{-E_R}{1}+\frac{E_R}{9}$$

$$\Rightarrow\Delta E=\frac{-8}{9}E_R$$

$$E_n=\frac{-E_R}{n^2}\begin{cases}E_4=\frac{-E_R}{16}\\ E_6=\frac{-E_R}{36}\end{cases}\xrightarrow{\Delta E'=E_4-E_6}$$

$$\Delta E'=\frac{-E_R}{16}+\frac{E_R}{36}\Rightarrow\Delta E'=\frac{-9E_R}{144}+\frac{4E_R}{144}=\frac{-5E_R}{144}$$

بنابراین نسبت $\frac{\Delta E}{\Delta E'}$ برابر است با:

$$\frac{\Delta E}{\Delta E'}=\frac{-\frac{8}{9}E_R}{-\frac{5E_R}{144}}\Rightarrow\frac{\Delta E}{\Delta E'}=\frac{8\times144}{5\times9}=\frac{128}{5}=\frac{256}{10}=25/6$$

بازی با سؤال **اختلاف انرژی تراز اول با تراز چهارم چند برابر اختلاف انرژی تراز اول با تراز دوم است؟**

۱) ۱/۲۵ ۲) ۰/۸ ۳) ۱/۲ ۴) ۰/۶

پاسخ انرژی هر تراز برابر $E=\frac{-E_R}{n^2}$ است:

$$\begin{cases}E_1=\frac{-E_R}{1^2}\\ E_4=\frac{-E_R}{16}\end{cases}\Rightarrow\Delta E=E_4-E_1=\frac{15}{16}E_R$$

$$\begin{cases}E_1=\frac{-E_R}{1}\\ E_2=\frac{-E_R}{4}\end{cases}\Rightarrow\Delta E'=E_2-E_1=\frac{3}{4}E_R$$

$$\Rightarrow\frac{\Delta E}{\Delta E'}=\frac{\frac{15}{16}E_R}{\frac{3}{4}E_R}=\frac{5}{4}=1/25$$

گزینهٔ ۱

B ۲۵۶۸ ۴

رابطهٔ شعاع مدار الکترون در الگوی اتمی بور را نوشته و در آن n و $n+1$ و $n+2$ را قرار می‌دهیم.

$$r_n=n^2a_0\begin{cases}r_n=n^2a_0\\ r_{n+1}=(n+1)^2a_0\\ r_{n+2}=(n+2)^2a_0\end{cases}\begin{matrix}\Delta r=r_{n+1}-r_n=(n+1)^2a_0-n^2a_0\\ \Delta r'=r_{n+2}-r_{n+1}=(n+2)^2a_0-(n+1)^2a_0\end{matrix}$$

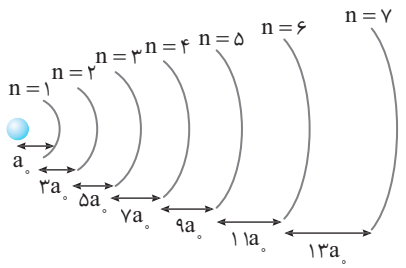
با توجه به فرض مسئله:

$$\frac{\Delta r'}{\Delta r}=\frac{13}{11}\Rightarrow\frac{[(n+2)^2-(n+1)^2]a_0}{[(n+1)^2-n^2]a_0}=\frac{13}{11}\Rightarrow\frac{n^2+4n+4-n^2-2n-1}{n^2+2n+1-n^2}=\frac{13}{11}$$

$$\Rightarrow\frac{2n+3}{2n+1}=\frac{13}{11}\Rightarrow26n+13=22n+33\Rightarrow4n=20\Rightarrow n=5$$

اختلاف شعاع دو مدار متوالی برابر ma_0 می‌شود که m مجموع دو شمارهٔ دو مدار است.

میانبر



بنابراین $\Delta r'$ مربوط به اختلاف شعاع مدارهای ۶ و ۷ و Δr مربوط به اختلاف شعاع مدارهای ۵ و ۶ است.

A ۲۵۶۹ ۲

یادآوری انرژی $-13/6eV$ را یک ریدبرگ گویند. $(E_R=-13/6eV)$

انرژی الکترون در تراز $n=1$ و $n=5$ را از رابطهٔ انرژی الکترون در مدل اتمی بور به‌دست آورده و از هم کم می‌کنیم.

$$E_n=\frac{-E_R}{n^2}\Rightarrow\begin{cases}n=1\Rightarrow E_1=-E_R\\ n=5\Rightarrow E_5=-\frac{E_R}{25}\end{cases}$$

انرژی لازم برای جابه‌جایی الکترون بین دو تراز برابر اختلاف انرژی الکترون در آن دو تراز است:

$$E_5-E_1=-\frac{E_R}{25}-(-E_R)\Rightarrow E_5-E_1=\frac{24}{25}E_R=0/96E_R$$

A ۲۵۷۰ ۳

۱ انرژی ترازها را به‌دست می‌آوریم:

$$E_n=-\frac{E_R}{n^2}\begin{cases}\xrightarrow{n=2}E_2=\frac{-13/6}{2^2}=-3/4eV\\ \xrightarrow{n=4}E_4=\frac{-13/6}{4^2}=-0/85eV\end{cases}$$

۲ انرژی لازم برای بردن الکترون از تراز $n=2$ به $n=4$ برابر اختلاف انرژی الکترون در این دو تراز است.

$$E_4-E_2=-0/85-(-3/4)=2/55eV$$

B ۲۵۷۱ ۳

با توجه به رابطهٔ انرژی فوتون با طول موج می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}E=A(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\\ E=hf\Rightarrow E=h\frac{c}{\lambda}\end{cases}\Rightarrow\frac{hc}{\lambda}=A(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=\frac{A}{hc}(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})$$

با مقایسهٔ رابطهٔ به‌دست آمده با رابطهٔ بالمر - ریدبرگ $\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\frac{1}{\lambda}=\frac{A}{hc}(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\\ \frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\end{cases}\Rightarrow R=\frac{A}{hc}\Rightarrow A=Rhc$$

بازی با سؤال **بین ثابت ریدبرگ برای اتم هیدروژن (R) و انرژی ریدبرگ (E_R)، کدام رابطهٔ زیر برقرار است؟ (c سرعت نور و h ثابت پلانک است.)**

۱) $R=hcE_R$ ۲) $R=\frac{E_R}{hc}$ ۳) $R=\frac{E_R}{c}$ ۴) $R=\frac{hc}{E_R}$

پاسخ با مقایسهٔ رابطهٔ ریدبرگ $\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})$ و رابطهٔ بور $\frac{1}{\lambda}=\frac{E_R}{hc}(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})$ مشخص می‌شود که $R=\frac{E_R}{hc}$ است.

گزینهٔ ۲

A ۲۵۷۲ ۱

۱ بنا بر الگوی اتمی بور برای اتم هیدروژن شعاع مدار الکترون برابر است با:

$$r_n = a_0 n^2 \xrightarrow{\frac{r_n}{r_1}=16} a_0 n^2 = 16 a_0 \Rightarrow n=4$$

۲ طول موج گسیل شده از پرش الکترون از هر ترازی به تراز پایه $n=1$ مربوط به سری لیمان است.

B ۲۵۷۳ ۲

نکته برای آنکه الکترون فوتونی گسیل (تابش) کند باید الکترون از تراز بالا به پایین‌تر بجهد.

نکته بلندترین طول موج گسیلی یا به عبارت دیگری کم‌انرژی‌ترین فوتون گسیلی در هر رشته وقتی است که الکترون از تراز n به تراز $n'=n-1$ برود.

کم‌انرژی‌ترین فوتون در رشتهٔ براکت هنگامی گسیل می‌شود که الکترون از تراز $n=5$ به تراز $n'=4$ پرش کند. بنا بر الگوی اتمی بور انرژی الکترون در تراز n برابر $E_n=-\frac{E_R}{n^2}$ بوده و هرگاه الکترون از تراز بالاتر به تراز پایین‌تر برود اختلاف انرژی دو تراز را به صورت یک فوتون گسیل می‌کند. از این‌رو انرژی فوتون گسیلی خواهد شد:

$$\text{انرژی فوتون گسیلی } E_5-E_4=-\frac{E_R}{25}-(-\frac{E_R}{16})=\frac{(25-16)}{400}E_R=\frac{9}{400}E_R$$

B ۲۵۷۴ ۴

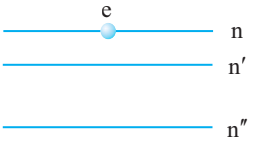
هرگاه الکترون از حالت مانا با انرژی بالاتر به حالت مانای دیگر با انرژی پایین‌تر برود اختلاف انرژی دو تراز را به صورت یک فوتون موج الکترومغناطیسی گسیل می‌کند و هر چه فاصلهٔ دو تراز بیشتر باشد، انرژی فوتون گسیلی بیشتر است. بنابراین وقتی الکترون در تراز $n=4$ قرار دارد پرانرژی‌ترین فوتون را وقتی گسیل می‌کند که به تراز $n'=1$ برود. انرژی الکترون در تراز $n=4$ و $n'=1$ را به دست آورده از هم کم می‌کنیم تا پرانرژی‌ترین فوتون گسیلی را بیابیم.

$$E_n=-\frac{E_R}{n^2}\begin{cases}\xrightarrow{n=4} E_4=-\frac{E_R}{4^2}=-\frac{E_R}{16}\\ \xrightarrow{n=1} E_1=-\frac{E_R}{1}=-E_R\end{cases}$$

$$E_{\text{فوتون}}=E_4-E_1=-\frac{E_R}{16}-(-E_R)\Rightarrow E_{\text{فوتون}}=\frac{15}{16}E_R$$

B ۲۵۷۵ ۴

نکته اگر الکترون از تراز n به تراز n'' برود تغییر انرژی آن برابر مجموع تغییر انرژی‌ها در گذر از تراز n به n' و از n' به n'' است.



$$\Delta E_{n\to n''}=E_n-E_{n''}=E_n-E_{n'}+E_{n'}-E_{n''}\Rightarrow$$
$$\Delta E_{n\to n''}=\Delta E_{n\to n'}+\Delta E_{n'\to n''}$$

هر کدام از تساوی‌های داده شده در صورت مسئله باید در نکتهٔ بالا صدق کند.

(الف) و (ب): $\Delta E_{5\to 3}=\Delta E_{5\to 4}+\Delta E_{4\to 3}$

تساوی (الف) نادرست و (ب) درست هستند.

(پ): $\Delta E_{4\to 2}=\Delta E_{4\to 3}+\Delta E_{3\to 2}$

تساوی (پ) درست است.

(ت): $\Delta E_{4\to 1}=\Delta E_{4\to 2}+\Delta E_{2\to 1}\Rightarrow \Delta E_{4\to 2}=\Delta E_{4\to 1}-\Delta E_{2\to 1}$

و تساوی (ت) نیز درست است.

B ۲۵۷۶ ۱

خط فکری باید با استفاده از رابطهٔ ریدبرگ برای اتم هیدروژن $\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})$، λ'، λ'' و λ را به‌دست بیاورید تا بتوانید مسئله را حل کنید.

۱ در گذار الکترون از تراز $n=4$ به $n'=2$ طول موج گسیلی خواهد شد:

$$\frac{1}{\lambda'}=R(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}) \qquad (I)$$

۲ در گذار الکترون از تراز $n=2$ به تراز $n'=1$ طول موج گسیلی خواهد شد:

$$\frac{1}{\lambda''}=R(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}) \qquad (II)$$

۳ در گذار الکترون از تراز $n=4$ به تراز $n'=1$ طول موج گسیلی خواهد شد.

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{4^2}) \qquad (III)$$

۴ اکنون رابطهٔ (I) و (II) را با هم جمع کرده و آن را با رابطهٔ (III) مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{1}{\lambda'}+\frac{1}{\lambda''}=R(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2})=R(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{4^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda'}+\frac{1}{\lambda''}$$

B ۲۵۷۷ ۱

نکته تراز $n=1$ را حالت پایه و ترازهای بالاتر را حالت برانگیخته می‌نامند، پس تراز mام در واقع $m-1$ امین حالت برانگیخته است. به‌طور مثال $n=3$، ۲امین حالت برانگیخته است.

اولین حالت برانگیختگی یعنی $n=2$ و حالت پایه یعنی $n=1$. بنابراین طبق رابطه اختلاف ترازهای انرژی خواهیم داشت:

$$\Delta E=E_U-E_L\Rightarrow\Delta E=(\frac{-E_R}{n_U^2})-(\frac{-E_R}{n_L^2})$$
$$\Rightarrow\Delta E=(\frac{-13/6}{4})-(\frac{-13/6}{1})=10/2\text{eV}$$

حال این انرژی را به ژول تبدیل می‌کنیم:

$$\Delta E=10/2\text{eV}\times\frac{1/6\times10^{-19}}{1\text{eV}}=16/32\times10^{-19}\text{J}\Rightarrow\Delta E=1/6532\times10^{-18}\text{J}$$

A ۲۵۷۸ ۳

۱ انرژی الکترون در تراز سوم $(n=3)$ را حساب می‌کنیم.

$$E_n=-\frac{E_R}{n^2}\xrightarrow{E_R=13/6\text{eV}}E_3=-\frac{13/6}{3^2}\Rightarrow E_3=\frac{-13/6}{9}\text{eV}$$

۲ اختلاف انرژی تراز سوم و تراز پایه را به‌دست می‌آوریم.

$$E_3-E_1=\frac{-13/6}{9}-(-13/6)\Rightarrow\Delta E=\frac{8}{9}\times13/6\text{eV}$$

۳ اختلاف انرژی دو تراز به صورت یک فوتون الکترومغناطیسی گسیل می‌شود، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta E=hf\xrightarrow{h=4\times10^{-15}\text{eV.s}}\frac{8}{9}\times13/6=4\times10^{-15}f$$
$$\Rightarrow f\approx3/0222\times10^{15}\text{Hz}\Rightarrow f=3022/2\text{THz}$$

A ۲۵۷۹ ۲

جهش از سومین حالت برانگیخته به اولین حالت برانگیخته یعنی گذار از $n=4$ به $n'=2$، بنابراین:

$$E_n-E_{n'}=hf\xrightarrow{E_n=-\frac{E_R}{n^2}}-\frac{E_R}{16}-(-\frac{E_R}{4})=hf$$
$$\frac{3E_R}{16}=hf\Rightarrow\frac{3\times13/6}{16}=4\times10^{-15}f\Rightarrow f=6/375\times10^{14}\text{Hz}$$

B ۲۵۸۰ ۴

خط فکری ابتدا باید مشخص کنیم n کدام تراز است سپس انرژی تراز $n+1$ را به‌دست آورده و اختلاف انرژی الکترون در تراز n و $n+1$ را حساب کنیم.

۱ در مدل اتمی بور انرژی الکترون در تراز n از رابطهٔ $E_n=-\frac{E_R}{n^2}$ به‌دست می‌آید. اکنون مشخص می‌کنیم که در کدام تراز انرژی الکترون $-0/85\text{eV}$ است.

$$-0/85=-\frac{13/6}{n^2}\Rightarrow n^2=16\Rightarrow n=4$$

۲ شمارهٔ تراز $n+1$ برابر $n+1=5$ است. انرژی الکترون در این تراز برابر است با:

$$E_n=\frac{E_R}{n^2}\Rightarrow E_n=\frac{13/6}{25}\Rightarrow E_5=0/544\text{eV}$$

۳ اختلاف انرژی دو تراز برابر انرژی لازم برای گذار الکترون از تراز $n=4$ به تراز $n=5$ است.

$$E_n-E_{n+1}=0/85-0/544=0/306\text{eV}$$

B ۲۵۸۱ ۱

خط فکری الکترون در مدار $n=3$ است و با جذب یک فوتون به مدارهای بالا رفته است. بنابراین شما باید ابتدا انرژی الکترون در تراز $n=3$ را حساب کنید سپس انرژی فوتون را با آن جمع کرده و مداری که الکترون به آن گذار می‌کند را مشخص کنید.

۱ انرژی الکترون در تراز $n=3$ خواهد شد. $E_n=-\frac{E_R}{n^2}\Rightarrow E_3=-\frac{E_R}{9}$

۲ بعد از جذب فوتون با انرژی $\frac{3E_R}{36}$، انرژی الکترون را حساب می‌کنیم.

$$E_n=-\frac{E_R}{9}+\frac{3E_R}{36}\Rightarrow -\frac{E_R}{n^2}=\frac{-4E_R+3E_R}{36}\Rightarrow n^2=36\Rightarrow n=6$$

۳ بنابراین الکترون از تراز $n=3$ به تراز $n=6$ می‌رود و نسبت شعاع مدار الکترون $\frac{r_6}{r_3}$ خواهد شد.

$$r_n=a_0n^2\Rightarrow\frac{r_6}{r_3}=\frac{a_0\times6^2}{a_0\times3^2}\Rightarrow\frac{r_6}{r_3}=\frac{36}{9}=4$$

B ۲۵۸۲ ۱

خط فکری بلندترین طول موج وقتی گسیل می‌شود که الکترون از تراز n به نزدیک‌ترین تراز یعنی $n'=n-1$ برود. بنابراین شما باید انرژی الکترون را در تراز $n=4$ و $n=3$ به دست بیاورید و از هم کم کنید. اما کوتاه‌ترین طول موج جذبی وقتی رخ می‌دهد که الکترون از تراز n به بالاترین تراز ممکن یعنی $n=\infty$ برود. در این صورت انرژی فوتون جذب شده بیشترین مقدار ممکن است.

۱ انرژی فوتون مربوط به بلندترین طول موج خواهد شد.

$$E_{min}=E_U-E_L\xrightarrow[n_U=4,n_L=3]{E_n=-\frac{E_R}{n^2}}E_{min}=\frac{-E_R}{4^2}-\frac{-E_R}{3^2}$$

$$\Rightarrow E_{min}=\frac{7E_R}{144}$$

۲ انرژی فوتون مربوط به کوتاه‌ترین طول موج جذبی را حساب می‌کنیم.

$$E_{max}=E_U-E_L\xrightarrow{n_U=\infty,n_L=4}E_{max}=\frac{-E_R}{(\infty)^2}-\frac{-E_R}{4^2}$$

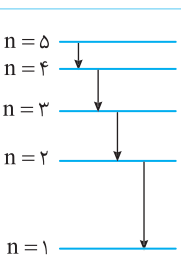
$$\Rightarrow E_{max}=\frac{E_R}{16}$$

۳ نسبت انرژی دو فوتون برابر است با:

$$\frac{E_{min}}{E_{max}}=\frac{\frac{7}{144}E_R}{\frac{E_R}{16}}=\frac{7}{9}$$

B ۲۵۸۳ ۱

هر چه n بیشتر باشد، اختلاف انرژی بین دو تراز متوالی $(\Delta n=1)$ کمتر است. بلندترین طول موج مربوط به گذار با کمترین انرژی است:



$n=5\to n=4$ $\quad E_{min},\lambda_{max}$

$$hf=E_5-E_4\Rightarrow hf=-\frac{E_R}{25}-\frac{-E_R}{16}=\frac{9}{400}E_R$$

کوتاه‌ترین طول موج مربوط به گذار با بیشترین انرژی است:

$n=2\to n=1$ $\quad E_{max},\lambda_{min}$

$$hf=E_2-E_1\Rightarrow hf=\frac{-E_R}{4}-\frac{-E_R}{1}\Rightarrow hf=\frac{3}{4}E_R$$

حال اختلاف خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{3}{4}E_R-\frac{9}{400}E_R=\frac{291}{400}E_R$$

E_R برابر ۱۳/۶eV است:

$$\frac{291}{400}\times13/6=9/89eV$$

این انرژی بر حسب ژول خواسته شده:

$$9/89eV\times\frac{1/6\times10^{-19}J}{1eV}=15/83\times10^{-19}J=1/583\times10^{-18}J$$

(دقت کنید طبق صورت سؤال فقط گذارهای با $\Delta n=1$ مجاز هستند.)

B ۲۵۸۴ ۲

نکته کمترین انرژی هنگامی گسیل می‌شود که الکترون از تراز n به تراز $n-1$ برود و بیشترین انرژی هنگامی گسیل می‌شود که الکترون از تراز n به تراز ۱ برود.

نکته انرژی فوتون در هر تراز $E_n=\frac{-E_R}{n^2}$ است و انرژی فوتون گسیل شده در انتقال از تراز n به n' برابر است با:

$$\underbrace{hf}_{\text{انرژی فوتون}}=E_n-E_{n'}$$

کمترین انرژی فوتون گسیل‌شده در گذار الکترون از $n=5$ به $n'=4$ است.

$$E_n-E_{n'}=hf\xrightarrow{E_n=-\frac{E_R}{n^2}}-\frac{E_R}{5^2}-(-\frac{E_R}{4^2})=hf$$

$$\Rightarrow\frac{-13/6}{25}+\frac{13/6}{16}=4\times10^{-15}f\Rightarrow\frac{(25-16)\times13/6}{25\times16}=4\times10^{-15}f$$

$$f=\frac{9\times3/4}{25\times16}\times10^{15}=0/0765\times10^{15}\Rightarrow f=76/5THz$$

بازی با سؤال **الکترون اتم هیدروژنی در تراز $n=5$ قرار دارد. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، بسامد پرانرژی‌ترین فوتونی که می‌تواند گسیل کند، چند تراهرتز است؟** $(h=4\times10^{-15}eVs)$

۱) ۳۲۶۴ ۲) ۲۷۳۲ ۳) ۴۵۶۷ ۴) ۵۲۷۳

پاسخ **پرانرژی‌ترین فوتون در گذار الکترون از تراز $n=5$ به تراز $n'=1$ گسیل می‌شود، بنابراین:**

$$E_n-E_{n'}=hf\Rightarrow\frac{-E_R}{n^2}-\frac{-E_R}{n'^2}=hf$$

$$\frac{-13/6}{5^2}-\frac{(-13/6)}{1}=4\times10^{-15}f\Rightarrow13/6-\frac{13/6}{25}=4\times10^{-15}f$$

$$\Rightarrow\frac{24}{25}\times13/6=4\times10^{-15}f\Rightarrow f=3/264\times10^{12}\times10^3Hz$$

$$\Rightarrow f=3264THZ$$

گزینه ۱

B ۲۵۸۵ ۳

دقت کنید فقط گذارهای $\Delta n=1$ مجاز است.

کم‌انرژی‌ترین فوتون در گذار از $n_u=5$ به $n_d=4$ گسیل می‌شود.

$$E_n-E_{n'}=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow\frac{-E_R}{5^2}-(-\frac{E_R}{4^2})=\frac{1240}{\lambda}$$

$$E_u-E_d=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow-\frac{13/6}{25}-(-\frac{13/6}{16})=\frac{1240}{\lambda_1}$$

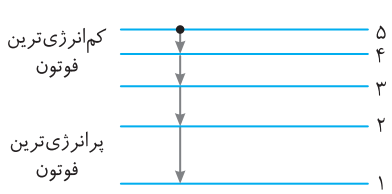
$$\Rightarrow-0/544+0/85=\frac{1240}{\lambda_1}\Rightarrow\lambda_1=4052/2nm$$

پرانرژی‌ترین فوتون در گذار از $n_u=2$ به $n_d=1$ گسیل می‌شود.

$$-\frac{13/6}{4}-(-\frac{13/6}{1})=\frac{1240}{\lambda_2}\Rightarrow-3/4+13/6=\frac{1240}{\lambda_2}\Rightarrow\lambda_2=121/56nm$$

اختلاف طول موج‌ها خواهد شد:

$$\lambda_1-\lambda_2=4052/2-121/56\Rightarrow\lambda_1-\lambda_2=3931nm$$



B ۳ ۲۵۸۶

کم‌انرژی‌تریـن فوتـون جذبی برای گذار از $n=۵$ به $n=۶$ صـورت می‌گیرد و انرژی فوتون برابر اختلاف انرژی الکترون در ین دو تراز است. از این‌رو خواهیم داشت:

$$E_U-E_L=hf \xrightarrow{E_n=-\frac{E_R}{n^۲}} \frac{-E_R}{۶^۲}-\frac{-E_R}{۵^۲}=hf$$

$$\xrightarrow{h=۴\times۱۰^{-۱۵}eVs} \frac{-۲۵E_R+۳۶E_R}{۲۵\times۳۶}=۴\times۱۰^{-۱۵}f$$

$$\Rightarrow \frac{+۱۱E_R}{۲۵\times۳۶}=۴\times۱۰^{-۱۵}f \Rightarrow f=\frac{۱۱\times۱۳/۶}{۲۵\times۳۶\times۴\times۱۰^{-۱۵}} \Rightarrow f=\frac{۱۱\times۱۳/۶}{۳۶\times۱۰^{-۱۳}}$$

$$\Rightarrow f=۴/۱۵\times۱۰^{+۱۳}Hz \Rightarrow f=۴۱/۵THz$$

B ۲ ۲۵۸۷

یادآوری بنا به مدل اتمی بور هرگاه الکترون از یک حالت مانا با انرژی بالاتر E_U به حالت مانای دیگری با انرژی پایین‌تر E_L برود اختلاف انرژی دو تراز را به صورت یک فوتون الکترومغناطیسی گسیل می‌کند. $E=E_U-E_L$

چون الکترون انرژی گسیل کرده بنابراین الکترون از تراز $n=۴$ به تراز پایین‌تر آمده است.

$$E=E_U-E_L \xrightarrow[n=۴]{E=\frac{۳}{۱۶}E_R\,,\,E_n=-\frac{E_R}{n^۲}} \frac{۳}{۱۶}E_R=\frac{-E_R}{۱۶}-E_L$$

$$\Rightarrow E_L=\frac{-E_R}{۱۶}-\frac{۳E_R}{۱۶} \Rightarrow E_L=\frac{-۴E_R}{۱۶} \Rightarrow E_L=\frac{-E_R}{۴}$$

B ۱ ۲۵۸۸

ترازهای انرژی اتم هیدروژن به شـکل زیر است. هرگاه اتم یک فوتون گسیل کند، انرژی فوتون برابر اختلاف انرژی دو تراز است. در این مسئله انرژی فوتون $۱۲/۷۵eV$ است که دقیقاً با اختلاف انرژی تراز $n=۴$ و $n'=۱$ برابر است.

$$E_۴-E_۱=-۰/۸۵-(-۱۳/۶)=۱۲/۷۵eV$$



A ۲ ۲۵۸۹

با توجه به الگوی اتمی بور:

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۱۶}E_R=-\frac{E_R}{n^۲} \Rightarrow n=۴$$

با توجه به رابطهٔ ریدبرگ برای اتم هیدروژن:

$$\frac{۱}{\lambda}=R\left(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}\right) \Rightarrow \frac{۱۵}{۱۶۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰}\left(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{۱۶}\right) \Rightarrow \frac{۱۵}{۱۶}=\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{۱۶} \Rightarrow n'=۱$$

B ۱ ۲۵۹۰

خط فکری الکترون از مدار n به مدار n' رفته و فوتونی با طول موج $۱۱۲/۵nm$ گسـیل می‌کند. در حل این مسائل وقتی که از رابطهٔ ریدبرگ استفاده می‌کنید معمولاً در نهایت باید n و n' را از روی گزینه‌ها حدس بزنید. به حل مسئله دقت کنید.

با توجه به رابطهٔ ریدبرگ n و n' را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\lambda}=R\left(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}\right) \Rightarrow \frac{۱}{۱۱۲/۵}=\frac{۱}{۱۰۰}\left(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}\right) \Rightarrow \frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}=\frac{۱۰۰}{۱۱۲/۵}=\frac{۸}{۹}$$

اگر از خود بپرسـیم $\frac{۸}{۹}$ را چگونه بنویسـیم که به جواب برسیم $\frac{۸}{۹}$، حاصل $۱-\frac{۱}{۹}$ است

بنابراین:

$$\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}=\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۹} \Rightarrow \begin{cases} n'=۱ \\ n=۳ \end{cases}$$

B ۳ ۲۵۹۱

خط فکری سـریع‌ترین راه‌حل این مسـئله، یافتن طول موج فوتون گسیلی است و دانستن اینکه در سری‌های اتم هیدروژن اگر طول موج از $۴۰۰nm$ کمتر بوده یعنی پرتو گسـیلی فرابنفش اسـت و $n'=۱$ و یا ممکن است $n'=۲$ باشد و اگر طول موج گسیلی بین $۴۰۰nm$ تا $۷۰۰nm$ باشد یعنی پرتو گسیلی مرئی بوده و قطعاً $n'=۲$ است و اگر $\lambda>۷۰۰nm$ پرتـو در ناحیهٔ فروسـرخ اسـت که n'، ۳ یا ۴ یا ۵ خواهـد بود و در این حالت مسئله را کامل باید حل کرد.

ابتدا طول موج پرتو گسیل‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{c}{f}=\frac{۳\times۱۰^۸}{۵۶۲/۵\times۱۰^{۱۲}}\approx\frac{۳}{۶۰۰}\times۱۰^{-۴}=\frac{۱}{۲۰۰}\times۱۰^{-۴}=۵\times۱۰^{-۳}\times۱۰^{-۴}=۵۰۰nm$$

λ در محدودهٔ نور مرئی به‌دست آمده است که تنها در سری بالمر یعنی $n'=۲$ صدق می‌کند که تنها در گزینهٔ (۳)، $n'=۲$ بیان شده است. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

راه‌حل کلی و طولانی: وارون طول موج را حساب می‌کنیم.

$$\lambda=\frac{c}{f}=\frac{۳\times۱۰^۸}{۵۶۲/۵\times۱۰^{۱۲}} \Rightarrow \frac{۱}{\lambda}=\frac{۵۶۲/۵\times۱۰^۴}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{\lambda}=۱۸۷/۵\times۱۰^۴(m)^{-۱}$$

رابطهٔ ریدبرگ را می‌نویسیم.

$$\frac{۱}{\lambda}=R\left(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}\right) \Rightarrow ۱۸۷/۵\times۱۰^{+۴}=\frac{۱}{\underbrace{۱۰۰\times۱۰^{-۹}}_{\text{برای تبدیل به متر}}}\left(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}=۱۸۷/۵\times۱۰^{-۳} \Rightarrow \frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}=۰/۱۸۷۵=\frac{۱۸۷۵}{۱۰۰۰۰}$$

$$\xrightarrow[\text{بر ۲۵ تقسیم می‌کنیم}]{\text{صورت و مخرج را}} \frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}=\frac{۷۵}{۴۰۰}=\frac{۳}{۱۶} \Rightarrow \frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}=\frac{۴}{۱۶}-\frac{۱}{۱۶}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۱۶} \Rightarrow \begin{cases} n'^۲=۴ \Rightarrow n'=۲ \\ n^۲=۱۶ \Rightarrow n=۴ \end{cases}$$

B ۴ ۲۵۹۲

اختلاف انرژی ترازهای پایین‌تر، بیشـتر است. کوتاه‌ـرین طول موج برای $\Delta n=۱$ یعنی پرانرژی‌ترین فوتون، در این صورت گذار باید از $n=۲$ به $n'=۱$ صورت گیرد.

$$\frac{۱}{\lambda}=R\left(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}\right) \Rightarrow \frac{۱}{\lambda}=\frac{۱}{۱۰۰}\left(\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۲^۲}\right) \Rightarrow \frac{۱}{\lambda}=\frac{۱}{۱۰۰}\left(\frac{۳}{۴}\right) \Rightarrow \lambda=\frac{۴۰۰}{۳}nm$$

B ۴ ۲۵۹۳

خط فکری چون در پرانتز انرژی ریدبرگ داده شـده اسـت، پس باید مسـئله را با استفاده از رابطهٔ $E_U-E_L=hf$ حل کرد. همچنین باید دو رابطهٔ زیر از مدل اتمی بور را به خاطر داشته باشیم:

$$E_n=\frac{-E_R}{n^۲} \quad (\text{یک ریدبرگ} \uparrow \quad \text{شمارهٔ تراز} \downarrow) \qquad , \qquad r=n^۲a_۰ \quad (\text{شعاع مدار} \downarrow \quad \text{شمارهٔ مدار} \downarrow)$$

۱ ابتدا با توجه به رابطهٔ $E_U-E_L=hf$ حل سـؤال را آغاز می‌کنیم و شماره مدار r و r' را به‌دست می‌آوریم.

$$E_U-E_L=hf \xrightarrow[hf=۲/۵۵eV]{E_U=\frac{-E_R}{n_U^۲}\,,\,E_L=\frac{-E_R}{n_L^۲}} \frac{-۱۳/۶}{n_U^۲}-\frac{-۱۳/۶}{n_L^۲}=۲/۵۵$$

$$\Rightarrow \frac{-۱}{n_U^۲}-\left(-\frac{۱}{n_L^۲}\right)=\frac{۲/۵۵}{۱۳/۶} \Rightarrow \frac{-۱}{n_U^۲}+\frac{۱}{n_L^۲}=\frac{۳}{۱۶} \Rightarrow n_U=۴\,,\,n_L=۲$$

بنابراین شماره مدار r، ۴ و شماره مدار r'، ۲ است.

در این سؤال هم با توجه به معادله n_U و n_L را حدس زدیم.

۲ شعاع هر مدار را برحسب شعاع بور $(a_۰)$ حساب کرده و آن‌ها را از هم کم می‌کنیم.

$$r_L=n_L^۲a_۰ \xrightarrow{r_L=r'} r'=۴a_۰ \xrightarrow{(-)} \Delta r=۱۲a_۰ \Rightarrow \frac{\Delta r}{a_۰}=۱۲$$

$$r_U=n_U^۲a_۰ \xrightarrow{r_U=r} r=۱۶a_۰$$

بازی با سؤال در اتم هیدروژن اختلاف شعاع مدارهای m و n برابر ۲۴ برابر شعاع بور (a_0) است. m و n به ترتیب کدام گزینه می‌توانند باشند؟ $(m>n)$

ریاضی - ۹۶

۱) ۵ و ۱ ۲) ۵ و ۳ ۳) ۳ و ۱ ۴) ۴ و ۲

پاسخ بنا به مدل اتمی بور شعاع مدار الکترون کوانتیده و گسسته بوده و از رابطهٔ $r_n=a_0n^2$ به دست می‌آید. بنا به فرض مسئله می‌توان نوشت.

$$r_m-r_n=24a_0\Rightarrow a_0m^2-a_0n^2=24a_0$$

$$m^2-n^2=24\Rightarrow m^2-n^2=25-1\Rightarrow\begin{cases}m=5\\n=1\end{cases}$$

گزینهٔ ۱

C ۲۵۹۴ ۲

۱ انرژی فوتون را برحسب الکترون ولت به دست می‌آوریم.

$$E_{\text{فوتون}}=\frac{4/08\times10^{-19}}{1/6\times10^{-19}}\Rightarrow E_{\text{فوتون}}=2/55eV$$

۲ در گذار الکترون از مدار n به n'، الکترون فوتونی با اختلاف انرژی دو تراز گسیل می‌کند. از این رو انرژی الکترون در ترازهای مختلف را از رابطهٔ $E_n=-E_R/n^2$ به دست می‌آوریم و مشخص می‌کنیم اختلاف انرژی کدام ترازها برابر ۲/۵۵eV می‌شود.

$$E_n=-\frac{E_R}{n^2}\begin{cases}\xrightarrow{n=1}E_1=-13/6eV\\\xrightarrow{n=2}E_2=-\frac{13/6}{4}=-3/4eV\\\xrightarrow{n=3}E_3=\frac{-13/6}{3^2}=-1/5eV\\\xrightarrow{n=4}E_4=\frac{-13/6}{4^2}=-0/85eV\end{cases}$$

بنابراین اختلاف انرژی ترازهای $n=4$ و $n'=2$ برابر $-0/85-(-3/4)=2/55eV$ است.

۳ شعاع مدار $n=4$ خواهد شد. $r_n=n^2a_0\xrightarrow{n=4}r_2=16a_0$

C ۲۵۹۵ ۳

خط فکری سؤال براساس کتاب درسی فیزیک طراحی شده است. در کتاب فیزیک هرگاه الکترون از تراز $n=4$ به تراز $n'=2$ برود طول موج گسیلی آبی رنگ است (در کتاب شیمی این طول موج سبز نامیده شده است). در حالت دوم، الکترون در مرحلهٔ اول از تراز $n=4$ باید به تراز $n'=3$ برود زیرا هرگاه $n'=3$ باشد، فوتون گسیلی فروسرخ است و سپس از $n=3$ به تراز $n=2$ گذار کند.

۱ در مرحلهٔ اول گذار از $n=4$ به $n'=3$ صورت گرفته است و انرژی فوتون گسیلی خواهد شد.

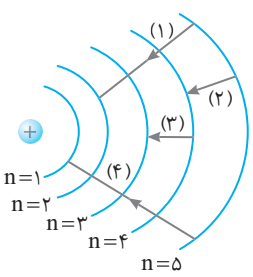
$$E=E_U-E_L\xrightarrow{E_n=\frac{-E_R}{n^2}}E=\frac{-E_R}{4^2}-\left(\frac{-E_R}{3^2}\right)\Rightarrow E=\frac{7E_R}{144}$$

۲ گذار مرحلهٔ دوم از $n=3$ به $n'=2$ بوده که در این گذار نور قرمز گسیل می‌شود.

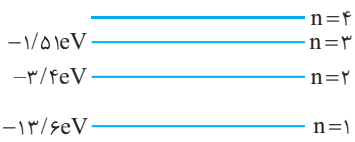
B ۲۵۹۶ ۳

در گذارهایی که به تراز $n'=2$ ختم می‌شود طول موج در ناحیهٔ فرابنفش و یا نور مرئی است و گزارهٔ (الف) نادرست است.

هرگاه الکترون از ترازهای بالاتر به تراز $n'=1$ برود طول موج‌های گسیلی در ناحیهٔ فرابنفش است. گذار ۴ از تراز $n=5$ به تراز $n'=1$ صورت گرفته بنابراین طول موج گسیلی در ناحیهٔ فرابنفش است و گزارهٔ (ب) درست است.

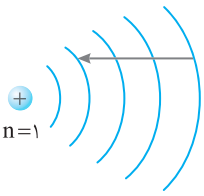


در ترازهای انرژی اتم هیدروژن بنا به مدل اتمی بور، در ترازهای بالاتر، اختلاف انرژی ترازها کاهش می‌یابد. بنابراین در گذار (۲) که از $n=5$ به $n'=4$ صورت می‌گیرد، انرژی فوتون گسیلی از بقیهٔ گذارها کمتر بوده در نتیجه کمترین بسامد مربوط به گذار (۲) است و گزارهٔ (پ) درست است.



گذار (۱) از $n=5$ به $n=2$ بوده و گذار (۳) از $n=4$ به $n=3$ است. اختلاف انرژی ترازها در گذار (۱) از اختلاف انرژی ترازها در گذار (۳) بیشتر است. بنابراین انرژی فوتون گسیلی در این گذار بیشتر و طول موج کوتاه‌تر است $\left(\uparrow E=h\frac{c}{\downarrow\lambda}\right)$ و گزارهٔ (ت) درست است.

بازی با سؤال در شکل روبه‌رو مدارهای یک اتم هیدروژن بنا بر الگوی اتمی بور رسم شده است. کدام گزینه در مورد آن درست است؟



۱) اتم طول موج مرئی رشتهٔ لیمان را گسیل کرده است.

۲) اتم طول موج فرابنفش رشتهٔ بالمر را گسیل کرده است.

۳) اتم طول موج مرئی رشتهٔ بالمر را گسیل کرده است.

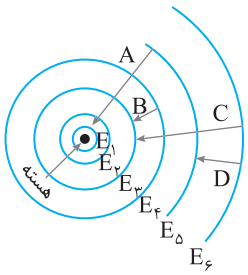
۴) اتم طول موج فروسرخ رشتهٔ پفوند را گسیل کرده است.

پاسخ با توجه به شکل، مبدأ الکترون تراز $n=5$ و مقصد آن تراز $n=2$ بوده بنابراین الکترون طول موج مرئی رشتهٔ بالمر را گسیل می‌کند.

گزینهٔ ۳

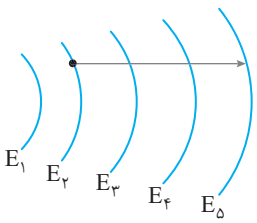
A ۲۵۹۷ ۴

اختلاف انرژی دو تراز ۵ و ۶ از بقیهٔ گذارها کمتر بوده و انرژی فوتون گسیلی در این گذار (D) کمترین مقدار و طول موج گسیل شده نسبت به سه گذار دیگر بلندترین طول موج است.



B ۲۵۹۸ ۲

با توجه به شکل مسئله الکترون با جذب انرژی یک فوتون از تراز E_2 به تراز E_5 رفته است. انرژی الکترون در این دو تراز را به‌دست می‌آوریم و از هم کم می‌کنیم و انرژی فوتون جذب شده را به‌دست می‌آوریم. سپس طول موج آن را حساب می‌کنیم.



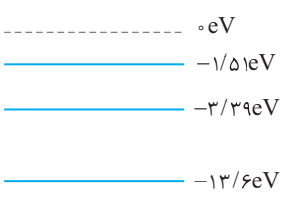
$$E_n-E_{n'}=h\frac{c}{\lambda}\xrightarrow{E_n=-\frac{E_R}{n^2}}-\frac{E_R}{n^2}-\frac{-E_R}{n'^2}=\frac{hc}{\lambda}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=\frac{E_R}{hc}\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=\frac{13/6}{1240}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{25}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{13/6}{1240}\left(\frac{25-4}{100}\right)\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=\frac{13/6}{1240}\times\frac{21}{100}\Rightarrow\lambda=\frac{1240\times100}{13/6\times21}\Rightarrow\lambda\approx434nm$$

B ۲۵۹۹ ۲

راه‌حل اول: در طیف اتمی هیدروژن، چهار طول موج در ناحیهٔ نور مرئی وجود دارد. قرمز با طول موج ۶۵۶nm، آبی با طول موج ۴۸۶nm، دو خط بنفش با طول موج ۴۳۴nm و ۴۱۰nm که همگی مربوط به سری طول موج‌های رشتهٔ بالمر بوده یعنی الکترون از ترازهای بالاتر به تراز $n'=2$ می‌رود. طول موج ۶۶۰nm از بقیهٔ طول موج‌های بالمر بلندتر بوده و انرژی فوتون آن از بقیه کمتر می‌باشد. به همین دلیل الکترون از تراز $n=3$ به تراز $n'=2$ می‌رود.



راه‌حل دوم: ابتدا انرژی فوتون گسیلی را به‌دست آورده سپس با اختلاف انرژی ترازها مقایسه می‌کنیم.

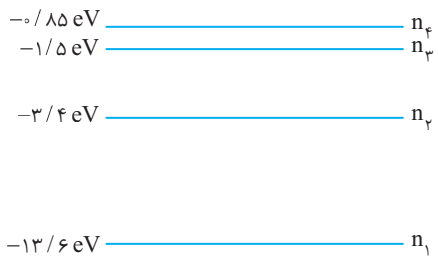
$$E=h\frac{c}{\lambda}=\frac{۴/۱۳۶\times۱۰^{-۱۵}\times۳\times۱۰^{۸}}{۶۶۰\times۱۰^{-۹}}\Rightarrow E=۱/۸۸eV$$

که این انرژی با اختلاف انرژی تراز $n=۳$ و $n'=۲$ یکسان است:

$$E_۳-E_۲=-۱/۵۱-(-۳/۳۹)\Rightarrow E_۳-E_۲=۱/۸۸eV$$

۱ ۲۶۰۰ B

یادآوری در گذار الکترون از تراز بالاتر به تراز پایین‌تر، الکترون فوتونی گسیل می‌کند که انرژی این فوتون برابر اختلاف انرژی دو تراز است.



۱ انرژی فوتون گسیلی را حساب می‌کنیم.

$$E=hf\Rightarrow E=۴\times۱۰^{-۱۵}\times۴/۷۵\times۱۰^{۱۴}\Rightarrow E=۱/۹eV$$

۲ به اعداد روی ترازها دقت کنید. اختلاف پتانسیل تراز $n_۳$ و تراز $n_۲$ برابر است با:

$$E_۳-E_۲=-۱/۵-(-۳/۴)\Rightarrow ۱/۹eV$$

در نتیجه گذار الکترون از تراز $n_۳$ به تراز $n_۲$ بوده است.

۱ ۲۶۰۱ B

انرژی فوتون گسیل‌شده را به دست می‌آوریم و با اختلاف انرژی ترازها مقایسه می‌کنیم.

$$E=hf\Rightarrow E=۴\times۱۰^{-۱۵}\times۲/۵۵\times۱۰^{۱۵}\Rightarrow E=۱۰/۲eV$$

که این مقدار انرژی برابر اختلاف انرژی تراز $n=۲$ و $n'=۱$ است.

$$(-۳/۲-(-۱۳/۶)=۱۰/۲)$$

۳ ۲۶۰۲ A

۱ با توجه به الگوی اتمی بور انرژی دو تراز $n_۱=۱$ و $n_۲=۴$ را به‌دست می‌آوریم:

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲}\Rightarrow\begin{cases}E_۱=-E_R\\E_۴=-\frac{E_R}{۱۶}\end{cases}\Rightarrow E_۴-E_۱=-\frac{E_R}{۱۶}-(-E_R)$$

$$\Rightarrow\Delta E=\frac{۱۵}{۱۶}E_R\Rightarrow\frac{\Delta E}{E_R}=\frac{۱۵}{۱۶}\approx۹۴٪$$

۲ الکترون با دریافت انرژی از تراز $n_۱=۱$ به تراز $n_۲=۴$ می‌رود و انرژی آن افزایش می‌یابد.

۳ ۲۶۰۳ B

خط فکری نکتهٔ مهم در حل این مسئله این است که وقتی شما انرژی الکترون را در تراز $n=۲$ به‌دست می‌آورید، یک عدد منفی به‌دست می‌آید و وقتی ۸۴٪ آن را حساب می‌کنید باید افزایش انرژی را مثبت در نظر بگیرید که به انرژی الکترون افزوده می‌شود.

۱ انرژی الکترون در تراز $n=۲$ برابر است با:

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲}\Rightarrow E_۲=-\frac{E_R}{۴}$$

۲ به این مقدار ۸۴٪ انرژی افزوده شده است.

$$E_{n'}=-\frac{E_R}{۴}+\frac{۸۴}{۱۰۰}\times\frac{E_R}{۴}=\frac{-۱۶}{۱۰۰}\frac{E_R}{۴}=\frac{-E_R}{۲۵}=-\frac{E_R}{۵^۲}\Rightarrow n'=۵$$

بازی با سوال در اتم هیدروژن الکترون از تراز n به تراز $n'=۵$ رفته و انرژی آن ۹۶٪ ریدبرگ افزایش یافته است. n کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ انرژی الکترون در تراز $n'=۵$ برابر است با:

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲}\Rightarrow E_۵=-\frac{E_R}{۲۵}$$

انرژی الکترون از n به $n'=۵$ به اندازهٔ $۹۶٪E_R$ افزایش یافته است از این‌رو:

$$E_۵-E_n=۹۶٪E_R\Rightarrow-\frac{E_R}{۲۵}-(-\frac{E_R}{n^۲})=\frac{۹۶}{۱۰۰}E_R$$

$$\Rightarrow\frac{E_R}{n^۲}=\frac{۹۶}{۱۰۰}E_R+\frac{E_R}{۲۵}\Rightarrow\frac{E_R}{n^۲}=E_R\Rightarrow n=۱$$

گزینهٔ ۱

۲ ۲۶۰۴ B

شمارهٔ ترازی که در آن انرژی الکترون $-۰/۸۵eV$ و $-۳/۴eV$ است را مشخص می‌کنیم.

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲}\begin{cases}\xrightarrow{E_{n_۱}=-۰/۸۵eV}-۰/۸۵=\frac{-۱۳/۶}{n_۱^۲}\Rightarrow n_۱^۲=۱۶\Rightarrow n_۱=۴\\\xrightarrow{E_{n_۲}=-۳/۴eV}-۳/۴=\frac{-۱۳/۶}{n_۲^۲}\Rightarrow n_۲^۲=۴\Rightarrow n_۲=۲\end{cases}$$

شعاع مدار الکترون در این ترازها را به‌دست می‌آوریم.

$$r_n=n^۲a_۰\begin{cases}\xrightarrow{n_۱=۴}r_۱=۱۶a_۰\\\xrightarrow{n_۲=۲}r_۲=۴a_۰\end{cases}$$

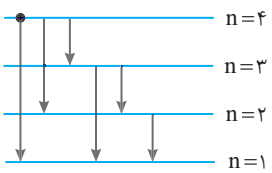
درصد تغییرات شعاع مدار چرخش الکترون خواهد شد.

$$\text{درصد تغییرات شعاع}=\frac{\Delta r}{r_۱}\times۱۰۰\Rightarrow\frac{۴a_۰-۱۶a_۰}{۱۶a_۰}\times۱۰۰=\frac{-۱۲a_۰}{۱۶a_۰}\times۱۰۰=-۷۵٪$$

بنابراین شعاع ۷۵ درصد کاهش می‌یابد.

۳ ۲۶۰۵ B

راه‌حل اول: با توجه به شکل روبه‌رو، ۶ نوع فوتون با انرژی‌های متفاوت ممکن است گسیل کند.



ابتدا گذارهای ممکن $\Delta n=۱$ را می‌شماریم:

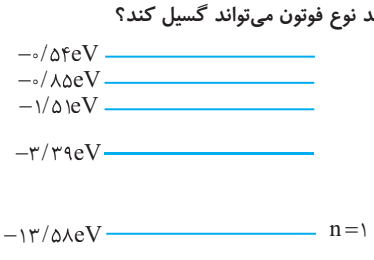
$۱\rightarrow۲\rightarrow۳\rightarrow۴$ سه نوع فوتون

سپس گذارهای ممکن $\Delta n=۲$ را می‌شماریم: $۱\rightarrow۳$ ، $۲\rightarrow۴$ دو نوع فوتون

سرانجام گذارهای ممکن $\Delta n=۳$ را می‌شماریم: $۱\rightarrow۴$ یک نوع فوتون

میانبر هرگاه در اتم هیدروژن الکترون در تراز n باشد با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، برای یافتن تعداد فوتون‌ها با انرژی‌های مختلف گسیل شده کافی است تمام اعداد طبیعی قبل از n را با هم جمع کنیم یعنی در این مسئله کافی است اعداد کوچک‌تر از ۴ را با هم جمع کنیم: $۳+۲+۱=۶$

بازی با سوال **تعدادی از ترازهای اتم هیدروژن در شکل روبه‌رو نشان داده شده است: الکترون اتم هیدروژن در ترازی قرار دارد که انرژی آن $-۰/۵۴eV$ است. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن برای رفتن به تراز پایه، این الکترون چند نوع فوتون می‌تواند گسیل کند؟**



۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۱۰

پاسخ ترازی که در آن انرژی الکترون (انرژی یونش) $-۰/۵۴eV$ است، تراز پنجم $(n=۵)$ است که تعداد گذارهای ممکن در آن ۱۰ گذار است.

$۵\rightarrow۱$ ، $۵\rightarrow۲\rightarrow۱$ ، $۵\rightarrow۳\rightarrow۲\rightarrow۱$ ، $۵\rightarrow۴\rightarrow۳\rightarrow۲\rightarrow۱$

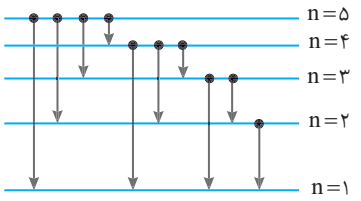
$N=۴+۳+۲+۱=۱۰$ فوتون

گزینهٔ ۴

B ۲۶۰۶ ۲

با توجه به رابطهٔ ریدبرگ $\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{۵^۲})$، تراز مبدأ الکترون $n=۵$ بوده که از این تراز به ترازهای پایین‌تر پرش می‌کند.

راه‌حل اول: با توجه به پرش‌های شکل زیر ۱۰ نوع فوتون مختلف می تواند گسیل شود.



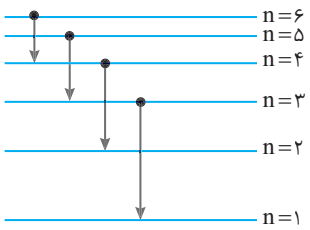
در مجموع ۱۰ فوتون ⇒
- ۴ نوع فوتون با $\Delta n=۱$: $۵\to۴\to۳\to۲\to۱$
- ۳ نوع فوتون با $\Delta n=۲$: $۵\to۳$, $۴\to۲$, $۳\to۱$
- ۲ نوع فوتون با $\Delta n=۳$: $۵\to۲$, $۴\to۱$
- ۱ نوع فوتون با $\Delta n=۴$: $۵\to۱$

راه‌حل دوم: کافی است اعداد کوچک‌تر از ۵ را با هم جمع کنیم:

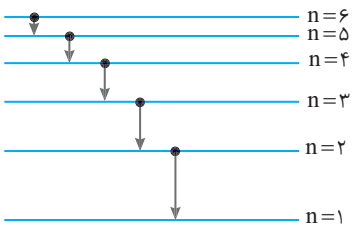
$N=۴+۳+۲+۱=۱۰$

B ۲۶۰۷ ۴

در صورت مسئله تنها گذارهای $\Delta n\le۲$ مجاز شمرده شده است یعنی $\Delta n=۱$ یا $\Delta n=۲$ باشد. در شکل‌های زیر گذارها رسم شده است کافی است آن‌ها را بشماریم.



گذارها با $\Delta n=۲$: ۴ فوتون مختلف



گذارها با $\Delta n=۱$: ۵ فوتون مختلف

بنابراین تعداد فوتون‌ها با انرژی مختلف برابر $۵+۴=۹$ است.

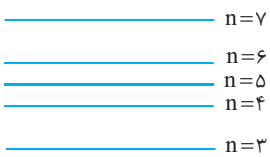
B ۲۶۰۸ ۲

فوتون‌های انتقالی از $n=۲$ به $n=۱$ (سری لیمان) و $n=۳$ به $n=۲$ (سری بالمر) در محدوده فروسرخ نیستند. در نتیجه فقط انتقال از $n=۴$ به $n=۳$ و انتقال از $n=۵$ به $n=۴$ قابل قبول است. (۲ فوتون)

C ۲۶۰۹ ۱

۱ در ششمین حالت برانگیخته، عدد کوانتومی $n=۷$ است.

۲ فوتون در محدودهٔ فروسرخ هنگامی گسیل می‌شود که الکترون به تراز $n=۳$ و $n=۴$ و $n=۵$ و $n=۶$ جهش کند. بنابراین تمام گذارهایی که از $n=۷$ به این ترازها ختم می‌شوند را حساب می‌کنیم.



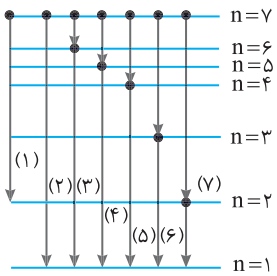
چهار فوتون $n=۷\xrightarrow{۱}n=۶\xrightarrow{۲}n=۵\xrightarrow{۳}n=۴\xrightarrow{۴}n=۳$

سه فوتون $n=۷\xrightarrow{۱}n=۵\xrightarrow{۲}n=۴$ و $n=۶\xrightarrow{۳}n=۳$

دو فوتون $n=۷\xrightarrow{۱}n=۴$ و $n=۶\xrightarrow{۲}n=۳$

یک فوتون $n=۷\xrightarrow{۱}n=۳$

جمعاً ۱۰ فوتون فروسرخ متفاوت گسیل می‌کند.



برای گسیل طول موج‌های محدودهٔ فرابنفش، الکترون باید از تراز $n=۷$ به تراز $n=۲$ در رشتهٔ بالمر برود، همچنین از ترازهای بالاتر به تراز $n=۱$ (لیمان) جهش کند.

$۷\xrightarrow{۱}۲$ و $۷\xrightarrow{۲}۱$ و

$۶\xrightarrow{۳}۱$ و $۵\xrightarrow{۴}۱$ و

$۴\xrightarrow{۵}۱$ و $۳\xrightarrow{۶}۱$ و

$۲\xrightarrow{۷}۱$

و جمعاً هفت فوتون در ناحیهٔ فرابنفش گسیل می‌کند.

B ۲۶۱۰ ۳

بدون حل می‌توان متوجه شد که برای آن‌که الکترون از تراز $n=۱$ (سری لیمان) کاملاً جدا شود (حتی اگر بخواهد به تراز $n=۲$ برود) طول موج مورد نیاز در ناحیهٔ فرابنفش است. اما مسأله را حل می‌کنیم. انرژی الکترون در تراز پایه برابر است با:

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲}\xrightarrow{n=۱}E_۱=-۱۳/۶\text{eV}$$

انرژی فوتون باید برابر $۱۳/۶\text{eV}$ باشد تا الکترون با دریافت آن کاملاً از اتم جدا شود. از این‌رو:

$$E=hf=h\frac{c}{\lambda}\Rightarrow۱۳/۶=۴\times۱۰^{-۱۵}\times\frac{۳\times۱۰^۸}{\lambda}\Rightarrow\lambda\approx۰/۸۸۲\times۱۰^{-۷}\text{m}$$

$$\Rightarrow\lambda\approx۸۸/۲\text{nm}$$

طول موج $\lambda=۸۸/۲\text{nm}<۴۰۰\text{nm}$ بنابراین طول موج در ناحیهٔ فرابنفش است.

A ۲۶۱۱ ۱

یادآوری انرژی الکترون هنگامی که از اتم جدا شود برابر صفر است. با توجه به اینکه انرژی لازم برای جابه‌جایی الکترون‌ها از رابطهٔ E_U-E_L به‌دست می‌آید و در حالتی که الکترون جدا شده $E_U=۰$ است پس انرژی لازم برای جدا کردن الکترون برابر انرژی الکترون در آن تراز است.

انرژی الکترون در مدار $n=۲$ را حساب می‌کنیم.

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲}\xrightarrow{n=۲}E_۲=-\frac{۱۳/۶}{۲^۲}\Rightarrow E_۲=-۳/۴\text{eV}$$

بنابراین اگر به الکترون در تراز $n=۲$، $۳/۴\text{eV}$ انرژی داده شود الکترون از اتم جدا می‌شود.

B ۲۶۱۲ ۴

الکترون در حالت پایه در مدار اول $(n=۱)$ قرار داشته و در حالت یونیزه (خارج شدن الکترون از مدارهای اطراف هسته) n را برابر بی‌نهایت قرار می‌دهیم:

$$\frac{۱}{\lambda}=R_H(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲})\xrightarrow[n'=۱,n=\infty]{R_H=۰/۰۱\text{nm}^{-۱}}\frac{۱}{\lambda}=\frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{۱^۲}-\frac{۱}{\infty^۲})$$

$$\Rightarrow\lambda=۱۰۰\text{nm}$$

B ۲۶۱۳ ۳

خط فکری انرژی یونش را برحسب الکترون‌ولت می نویسیم. انرژی فوتون گسیلی برابر اختلاف انرژی الکترون در مدار n و n' است. اختلاف انرژی این دو تراز J $۱۶/۳۲\times۱۰^{-۱۹}$ را برحسب الکترون‌ولت حساب می‌کنیم. سپس به کمک رابطهٔ $E_n=-\frac{E_R}{n^۲}$ باید n و n' را پیدا کنیم. البته راهی که شما را مستقیماً به n و n' برساند وجود ندارد و شما در نهایت باید n و n' را حدس بزنید و یا گزینه‌ها را امتحان کنید.

۱ انرژی یونش در حالت پایه $۲۱/۷۶\times۱۰^{-۱۹}\,J$ است یعنی انرژی الکترون در تراز پایه برابر $-۲۱/۷۶\times۱۰^{-۱۹}$ بوده که آن را برحسب الکترون‌ولت به‌دست می‌آوریم.

$$E_۱=\frac{-۲۱/۷۶\times۱۰^{-۱۹}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}\Rightarrow E_۱=-۱۳/۶eV$$

۲ اختلاف انرژی ترازهای n و n' را برحسب یکای eV می‌نویسیم.

$$|E_{n'}-E_n|=\frac{۱۶/۳۲\times۱۰^{-۱۹}J}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}=۱۰/۲eV\Rightarrow|E_{n'}-E_n|=۱۰/۲eV$$

۳ الکترون انرژی از دست می‌دهد بنابراین $E_{n'}-E_n=-۱۰/۲eV$ است.

$$E_{n'}-E_n=-۱۰/۲eV\xrightarrow{E_n=-\frac{E_R}{n^۲}}\frac{-۱۳/۶}{n'^۲}-\left(\frac{-۱۳/۶}{n^۲}\right)=-۱۰/۲$$

$$\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}=\frac{۱۰/۲}{۱۳/۶}\xrightarrow[\text{به عدد ۳/۴ تقسیم می‌کنیم}]{\text{صورت و مخرج را}}\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}=\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه $n'=۱$ و $n=۲$ خواهد بود.

B ۲۶۱۴ | ۳

نکته انرژی یونش کمترین انرژی لازم برای خارج کردن الکترون از حالت پایه است و اندازهٔ آن برابر اندازهٔ انرژی الکترون در تراز پایه است.

۱ بنا به فرض مسئله انرژی الکترون در تراز پایه $E_۱=-۱۳/۵eV$ است.

۲ ابتدا انرژی فوتون‌های نور را که توسط الکترون اتم‌های هیدروژن جذب می‌شود به‌دست می‌آوریم.

$$E=hf\xrightarrow{f=۳\times۱۰^{۱۵}Hz}E=۴\times۱۰^{-۱۵}\times۳\times۱۰^{۱۵}\Rightarrow E=۱۲eV$$

۳ الکترون این انرژی را دریافت می‌کند و به تراز بالاتر می‌رود. انرژی الکترون در این تراز جدید خواهد شد:

$$E_n=-۱۳/۵+۱۲=-۱/۵eV$$

۴ اکنون باید مشخص کنیم که الکترون به کدام تراز جهش کرده است.

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲}\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{n=۱}E_۱=-۱۳/۵eV\\ E_n=-۱/۵eV\end{cases}\Rightarrow\frac{۱۳/۵}{۱/۵}=\frac{\frac{-E_R}{۱}}{\frac{-E_R}{n^۲}}\Rightarrow۹=n^۲$$

$$\Rightarrow n=۳$$

۵ در این صورت الکترون به تراز $n=۳$ می‌رود و در بازگشت ۳ نوع فوتون مختلف می‌تواند گسیل کند.

B ۲۶۱۵ | ۱

انرژی فوتون گسیلی را حساب می‌کنیم.

$$E_{n'}-E_n=hf\Rightarrow-\frac{E_R}{n'^۲}-\left(-\frac{E_R}{n^۲}\right)=hf$$

$$\frac{-۱۳/۶}{۱۶}+\frac{۱۳/۶}{۱}=hf\Rightarrow hf=-۰/۸۵+۱۳/۶\Rightarrow hf=۱۲/۷۵eV$$

بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها را به‌دست می‌آوریم.

$$K_m=hf-W_۰\Rightarrow K_m=۱۲/۷۵-۵/۲\Rightarrow K_m=۷/۵۵eV$$

B ۲۶۱۶ | ۴

راه‌حل اول: بلندترین طول موجی که بتواند الکترون را از سطح طلا جدا کند، باید انرژی آن با تابع کار طلا $W=۵/۱۷۵eV$ برابر باشد.

$$E=\frac{hc}{\lambda_۰}\Rightarrow۵/۱۷۵=\frac{۴/۱۴\times۱۰^{-۱۵}\times۳\times۱۰^{۸}}{\lambda_۰}$$

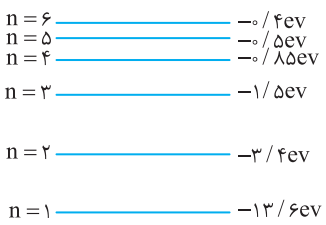
$$\Rightarrow\lambda_۰=۲/۴\times۱۰^{-۷}m\Rightarrow\lambda_۰=۲۴۰nm$$

این طول موج از ۴۰۰nm کمتر بوده و در ناحیه فرابنفش است. در تابش اتم‌های هیدروژن، گسیل فرابنفش به رشته لیمان مربوط است و بلندترین طول موج این رشته مربوط به $n'=۱$ و $n=۲$ است.

$$\frac{۱}{\lambda}=R\left(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}\right)\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=\frac{۱}{۱۰۰}\left(\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۴}\right)\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=\frac{۳}{۴۰۰}\Rightarrow\lambda=\frac{۴۰۰}{۳}nm$$

که این طول موج از ۲۴۰nm کمتر بوده و می‌دانیم که به ازای $\lambda<\lambda_۰$ پدیده فوتوالکتریک رخ می‌دهد. پس، جواب سؤال $\frac{۴۰۰}{۳}nm$ است.

راه‌حل دوم: برای حل این نوع سؤالات بهتر است ترازهای انرژی را حفظ باشیم. برای رخ دادن پدیده باید انرژی فوتون گسیل شده به سطح فلز از تابع کار بیشتر باشد:



انرژی فوتون گسیل شده اتم هیدروژن $=E_U-E_L$

$>W_۰$ انرژی فوتون گسیل شده اتم هیدروژن

اختلاف تراز ۱ و ۲، بلندترین طول موجی را دارد که انرژی گسیلی آن از تابع کار بیشتر است.

$$\frac{۱}{\lambda}=R\left(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}\right)\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=\frac{۱}{۱۰۰}\left(\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۴}\right)\Rightarrow\frac{۱}{\lambda}=\frac{۳}{۴۰۰}\Rightarrow\lambda=\frac{۴۰۰}{۳}nm$$

A ۲۶۱۷ | ۲

نور گسیل شده از یک قطعه تنگستن گداخته دارای طیف پیوسته است و وقتی این نور از گاز نئون می‌گذرد و در طیف‌نما تشکیل می‌شود، رنگین‌کمانی با یک سری خطوط تاریک دیده می‌شود که این خطوط تاریک، طول موج‌هایی هستند که توسط گاز نئون جذب شده‌اند. به این طیف، طیف جذبی خطی عنصر (گاز نئون) می‌گویند.

A ۲۶۱۸ | ۳

در شکل (الف)، تابش حاصل از برانگیختگی گاز کم‌فشار هیدروژن اتمی توسط منشور طیف‌نمایی شده که این طیف گسیلی خطی است.

برای یک جسم جامد، نظیر رشتهٔ داغ یک لامپ روشن امواج الکترومغناطیسی گسیلی شامل گسترهٔ پیوسته‌ای از طول موج‌هاست که به آن طیف پیوسته گویند، بنابراین شکل (ب) مربوط به طیف پیوسته گسیلی جامدات است.

در شکل (پ)، نور حاصل از تنگستن از بین گازهای هیدروژن عبور کرده و برخی از خط‌ها توسط این گاز جذب می‌شوند و طیف آن جذبی خطی است.

A ۲۶۱۹ | ۴

هرگاه جسم جامدی ملتهب شود و از خود نور گسیل کند، چنان‌چه نور آن را به یک منشور بتابانیم، یک رنگین‌کمان خواهیم دید که تمام طول موج بدون فاصله در کنار هم قرار دارند که به آن طیف نشری (گسیلی) پیوسته گویند. اگر این آزمایش را برای هر جسم جامد مانند آهن با رنگ تیره، طلا با رنگ زرد، شیشهٔ بدون رنگ و ... تکرار کنیم، نتیجه یکسان است، بنابراین با استفاده از طیف نشری (گسیلی) پیوسته نمی‌توان به نوع عنصر پی برد. اما هرگاه بخار عنصر و یا عنصر در حالت گازی را تحریک کنیم (آن را گرم کنیم، یا از آن جریان الکتریکی بگذرانیم و یا آن را به ولتاژ بالا متصل کنیم) از خود موج‌های الکترومغناطیسی و نور گسیل می‌کند، اگر این نور را به یک منشور بتابانیم برخلاف جسم جامد، در طیف بخار عنصر، خط‌های روشن و گسسته دیده می‌شود که آن را طیف گسیلی (نشری) خطی عنصر گویند. که برای هر عنصر منحصربه‌فرد بوده و در شناسایی عنصر کاربرد دارد. از طرفی اگر به یک بخار عنصر یا گاز نور سفید بتابانیم و نور عبوری از بخار عنصر را به یک طیف‌نما بتابانیم، رنگین‌کمان نور سفید دیده می‌شود که در آن چند خط تاریک وجود دارد که این خط‌های تاریک، طول موج‌هایی هستند که توسط عنصر جذب شده است. به طیف نور سفید با خط‌های تاریک، طیف جذبی خطی عنصر گویند که برای هر عنصر منحصربه‌فرد است، این طیف نیز در شناسایی عنصر کاربرد دارد.

A ۲۶۲۰ | ۳

در سال ۱۸۱۴ فرانهوفر برای اولین بار در طیف نور خورشید، خطوط تاریکی را مشاهده کرد. امروزه می‌دانیم طول موج‌هایی از نور خورشید هنگام عبور نور از جو خورشید و جو زمین توسط عناصر موجود در جو جذب می‌شوند که در طیف خورشید، این خط‌های تاریک جذبی را ایجاد می‌کنند و به کمک این خط‌های تاریک و مقایسهٔ آن‌ها با طیف جذبی خطی عنصرهای شناخته شده، می‌توان به عنصرهای موجود در اتمسفر زمین و اتمسفر خورشید پی برد.

A ۲۶۲۱ | ۲

یادآوری ناتوانی مدل اتمی بور به قرار زیر است:

۱ این مدل نمی‌تواند متفاوت بودن شدت خط‌های طیف گسیلی اتم هیدروژن را توضیح دهد. (گزارهٔ (ب))

۲ این مدل تنها برای اتم‌های هیدروژن‌گونه (تک‌الکترون) صادق است. (گزارهٔ (پ))

A ۲۶۲۲ ۱

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ (۲): مدل اتمی بور برای اتم هیدروژن و اتم‌های هیدروژن گونه درست است. (مانند هلیوم یک‌بار یونیزه)

گزینهٔ (۳): در مدل اتمی رادرفورد، اتم دارای هسته چگال است.

گزینهٔ (۴): مدل اتمی بور متفاوت بودن شدت خط‌های گسیلی را نمی‌تواند توجیه کند.

B ۲۶۲۳ ۲

همواره بسامد موج منتشر شده در محیط با بسامد چشمهٔ موج برابر است. در حرکت شتابدار الکترون به گرد هسته، الکترون به عنوان چشمهٔ امواج الکترومغناطیسی عمل می‌کند. بنابراین در هر لحظه بسامد (و دوره) موج الکترومغناطیسی گسیلی توسط الکترون با بسامد مداری حرکت الکترون برابر است.

بنا به نظریهٔ فیزیک کلاسیک، با گسیل موج الکترومغناطیسی توسط الکترون، الکترون انرژی از دست می‌دهد و به هسته نزدیک‌تر شده بسامد مداری آن و همچنین بسامد امواج الکترومغناطیسی گسیلی الکترون افزایش می‌یابد. $f'>f \xrightarrow{f=\frac{1}{T}} f'>\frac{1}{T}$

B ۲۶۲۴ ۲

یادآوری رشتهٔ پاشن به معنی گذار الکترون از ترازهای بالاتر به تراز $n'=3$ است و بلندترین طول موج آن هنگامی است که الکترون از تراز $n=4$ به تراز $n'=3$ پرش کند.

۱ شعاع مدار الکترون:

$$r_n=n^2a_\circ \begin{cases} \xrightarrow{n=3} r_3=9a_\circ \\ \xrightarrow{n=4} r_4=16a_\circ \end{cases} \Rightarrow \frac{r_3}{r_4}=\frac{9a_\circ}{16a_\circ} \Rightarrow \frac{r_3}{r_4}=\frac{9}{16}$$

۲ انرژی الکترون:

$$E_n=-\frac{E_R}{n^2} \begin{cases} \xrightarrow{n=3} E_3=-\frac{E_R}{9} \\ \xrightarrow{n=4} E_4=-\frac{E_R}{16} \end{cases} \Rightarrow \frac{E_3}{E_4}=\frac{16}{9}$$

B ۲۶۲۵ ۲

نکته طول موج‌های گسیلی در رشتهٔ بالمر هرگاه از تراز $n=6$، $n=5$، $n=4$ و $n=3$ به تراز $n'=2$ می‌روند، در ناحیهٔ نور مرئی هستند.

با گذار از تراز $n_1=5$ به $n_2=2$، یک فوتون گسیل می‌شود که انرژی آن برابر اختلاف انرژی دو تراز است، انرژی فوتون را به‌دست می‌آوریم:

$$E=E_1-E_2 \xrightarrow{E_n=-\frac{E_R}{n^2}} \text{انرژی فوتون}=E_1-E_2=-\frac{E_R}{5^2}-\left(-\frac{E_R}{2^2}\right)$$

$$\Rightarrow \text{انرژی فوتون}=-\frac{13/6}{25}+\frac{13/6}{4}=-0/544+3/4=2/856eV$$

و گزینهٔ (۲) درست است.

البته اگر به گزینه‌ها دقت کنید نیاز به محاسبهٔ عددی نیست. زیرا تنها در گذار از $n=5$ به $n'=2$ نور مرئی گسیل می‌شود و اگر الکترون از ۵ به ۴ و از ۴ به ۳ و از ۳ به ۲ برود دو فوتون فروسرخ و یک فوتون مرئی گسیل می‌کند. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) نادرست هستند.

B ۲۶۲۶ ۱

یادآوری نیروی الکتریکی بین دو بار بنا به قانون کولن $\left(F=k\frac{q_1q_2}{r^2}\right)$ با مربع فاصلهٔ نسبت وارون دارد.

خط فکری در حل مسئله باید، شعاع مدار الکترون در مدارهای ۱ و ۲ و ۳ را به‌دست بیاورید تا بتوانید در مورد نیروی الکتریکی بین هسته و الکترون اظهارنظر کنید.

۱ شعاع مدارها را حساب می‌کنیم.

$$r_n=a_\circ n^2 \begin{cases} \xrightarrow{n=1} r_1=a_\circ \\ \xrightarrow{n=2} r_2=4a_\circ \\ \xrightarrow{n=3} r_3=9a_\circ \end{cases}$$

۲ نیروی الکتریکی بین هسته و الکترون را حساب می‌کنیم. بار هسته $(q_1=e)$ و بار الکترون $(q_2=-e)$ است.

$$F=\frac{k|q_1||q_2|}{r^2} \begin{cases} \xrightarrow{n=1} F_1=\frac{ke^2}{(a_\circ)^2}=k\frac{e^2}{a_\circ^2} \\ \xrightarrow{n=2} F_2=k\frac{e^2}{(4a_\circ)^2}=k\frac{e^2}{16a_\circ^2} \\ \xrightarrow{n=3} F_3=k\frac{e^2}{(9a_\circ)^2}=\frac{ke^2}{81a_\circ^2} \end{cases}$$

۳ در فرض مسئله تغییر نیروی الکتریکی از تراز $n=1$ به تراز $n=2$ برابر F در نظر گرفته شده است. یعنی

$$F=F_1-F_2=\frac{ke^2}{a_\circ^2}-\frac{ke^2}{16a_\circ^2} \Rightarrow F=\frac{15}{16}k\frac{e^2}{a_\circ^2}$$

۴ اکنون نسبت $\frac{F_3}{F}$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{F_3}{F}=\frac{\frac{ke^2}{81a_\circ^2}}{\frac{15}{16}k\frac{e^2}{a_\circ^2}} \Rightarrow \frac{F_3}{F}=\frac{16}{81\times 15}=\frac{16}{1215}$$

B ۲۶۲۷ ۳

۱ انرژی ترازهای اتم هیدروژن برابر $\frac{-E_R}{n^2}$ است که n شماره تراز است. انرژی ترازهای m و $m-1$ را به‌دست آورده از هم کم می‌کنیم.

$$\begin{cases} m-1 \text{ در تراز} \Rightarrow E=\frac{-E_R}{(m-1)^2} \\ m \text{ در تراز} \Rightarrow E'=\frac{-E_R}{m^2} \end{cases} \Rightarrow E_1=|E-E'|=\left|\frac{-E_R}{(m-1)^2}-\left(\frac{-E_R}{m^2}\right)\right|$$

$$\Rightarrow E_1=\left|\frac{E_R}{m^2}-\frac{E_R}{(m-1)^2}\right| \Rightarrow E_1=\frac{E_R}{m^2}-\frac{E_R}{(m-1)^2}$$

$$\Rightarrow E_1=\frac{E_R\left|(m-1)^2-m^2\right|}{m^2(m-1)^2} \Rightarrow E_1=\frac{E_R(1-2m)}{m^2(m-1)^2} \quad (I)$$

۲ انرژی در ترازهای m و $m+1$ را حساب کرده اختلاف آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} m \text{ در تراز} \Rightarrow E'=\frac{-E_R}{m^2} \\ m+1 \text{ در تراز} \Rightarrow E''=\frac{-E_R}{(m+1)^2} \end{cases} \Rightarrow E_2=|E'-E''|=\frac{E_R(2m+1)}{m^2(m+1)^2}$$

$$\Rightarrow E_2=\frac{E_R(2m+1)}{m^2(m+1)^2} \quad (II)$$

نسبت $\frac{E_1}{E_2}$ خواهد شد:

$$(I),(II) \Rightarrow \frac{E_1}{E_2}=\frac{\frac{E_R(1-2m)}{m^2(m-1)^2}}{\frac{E_R(2m+1)}{m^2(m+1)^2}} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2}=\frac{(1-2m)(m+1)^2}{(2m+1)(m-1)^2}$$

B ۲۶۲۸ ۲

خط فکری در حل این مسئله سریع‌ترین راه‌حل، رفتن به سراغ گزینه‌ها و بررسی آن‌ها است. البته یادمان هست که طول موج‌های نور مرئی بین ۴۰۰nm و ۷۰۰nm برای نور قرمز است. طول موج ۱۱۲۵nm یعنی $\lambda=112/5nm$ مربوط به فرابنفش است $(112/5nm<400nm)$.

گزینهٔ (۱): گذار از $n=3$ به $n'=2$ مربوط به رشتهٔ بالمر است و نور گسیلی آن قرمز و در ناحیهٔ مرئی است و گزینهٔ (۱) درست نیست.

گزینهٔ (۲): طول موج در گذار الکترون از $n=3$ به $n'=1$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=0/01\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}\right)\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{100}\left(\frac{8}{9}\right)$$

$$\Rightarrow\lambda=\frac{900}{8}=112/5nm=1125\,\mathring{A}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) درست است. اما گزینهٔ (۳) مربوط به رشتهٔ پاشن بوده و نور فرابنفش گسیل نمی‌کند و گزینهٔ (۳) نادرست است.

C ۲۶۲۹ ۱

خط فکری تقریباً با یک بازی ریاضی سروکار داریم که باید به کمک انرژی ترازهای اتم شمارهٔ ترازهای n، n' و n'' را مشخص کنیم و مسئله را حل کنیم.

۱ در گذار الکترون از تراز n به n' انرژی فوتون گسیلی $E=\frac{8}{9}E_R$ است. بنابراین

$$E=E_n-E_{n'}\Rightarrow\frac{-E_R}{n^2}-\left(-\frac{E_R}{n'^2}\right)=\frac{8}{9}E_R\Rightarrow\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}=\frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}=1-\frac{1}{9}\Rightarrow\begin{cases}n=3\\n'=1\end{cases}$$

۲ بنابراین الکترون به تراز $n'=1$ جهش کرده است و حالا با دریافت فوتونی با انرژی $\frac{15}{16}E_R$ به تراز n'' می‌رود از این‌رو:

$$E=E_1-E_{n''}\Rightarrow\frac{15}{16}E_R=E_R-E_{n''}\Rightarrow E_{n''}=\frac{-E_R}{16}$$

$$\xrightarrow{E_n=-\frac{E_R}{n^2}}-\frac{E_R}{n''^2}=-\frac{E_R}{16}\Rightarrow n''^2=16\Rightarrow n''=4$$

۳ طول موج فوتونی که الکترون را از تراز $n=3$ به تراز $n=4$ می‌برد خواهد شد:

$$E_4-E_3=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow-\frac{E_R}{4^2}-\left(-\frac{E_R}{3^2}\right)=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow-\frac{13/6}{16}+\frac{13/6}{9}=\frac{1200}{\lambda}$$

$$\Rightarrow\frac{1200}{\lambda}=-0/85+1/51\Rightarrow\lambda=\frac{1200}{0/66}\sim1818nm$$

پنجره ۴

A ۲۶۳۰ ۳

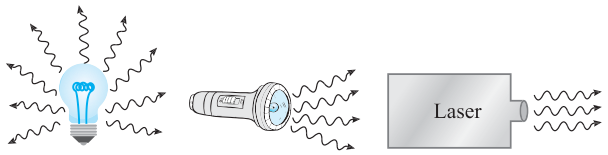
در گسیل القایی یک فوتون ورودی، الکترون برانگیخته را تحریک (یا القا) می‌کند تا تراز انرژی خود را تغییر دهد و به تراز پایین‌تر برود. برای گسیل القایی، انرژی فوتون ورودی باید دقیقاً با اختلاف انرژی‌های دو تراز یعنی E_U-E_L یکسان باشد. گسیل القایی سه ویژگی عمده دارد. اول اینکه یک فوتون وارد و دو فوتون خارج می‌شود. به این ترتیب تعداد فوتون‌ها را افزایش می‌دهد و نور را تقویت می‌کند. بنابراین گزارهٔ (الف) درست است.

دوم اینکه فوتون گسیل شده، در همان جهت فوتون ورودی حرکت می‌کند و گزارهٔ (ب) درست است.

سوم اینکه فوتون گسیل شده با فوتون ورودی همگام یا دارای همان فاز است و فوتون‌هایی که باریکهٔ لیزر را ایجاد می‌کنند، هم‌بسامد، هم‌جهت و هم‌فاز هستند و گزارهٔ (پ) نیز درست است.

A ۲۶۳۱ ۴

نور لیزر از جنس نور مرئی است. در نور مرئی لامپ فوتون‌ها با انرژی‌های متفاوت در تمام جهت‌ها گسیل می‌شوند اما در نور مرئی لیزر، نور از فوتون‌های کاملاً مشابه که در یک جهت حرکت می‌کنند تشکیل شده است. بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.



بازی با سوال فرق اساسی پرتوی لیزر با پرتوهای دیگر در این است که فوتون‌های پرتوی لیزر .....

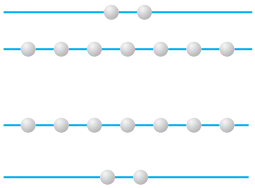
۱) هم‌فاز و هم‌بسامد هستند.
۲) دارای طول موج بلندتر هستند.
۳) دارای طول موج کوتاه‌تر هستند.
۴) قدرت نفوذ و سرعت بیشتری دارند.

پاسخ لیزر باریکه‌ای از فوتون‌های هم‌جهت، هم‌فاز و هم‌بسامد است.

گزینهٔ ۱

A ۲۶۳۲ ۳

به‌طور معمول و در دمای اتاق، بیشتر الکترون‌ها در تراز انرژی پایین‌تر قرار دارند (شکل الف). در وضعیتی که وارونی جمعیت به‌وجود می‌آید بیشتر الکترون‌ها در تراز بالاتری موسوم به **ترازهای شبه پایدار** قرار دارند (شکل ب).



در این ترازها، الکترون‌ها مدت زمان بسیار طولانی‌تری $(10^{-3}s)$ نسبت به حالت برانگیختگی (معمولاً $10^{-8}s$) باقی می‌ماند. این زمان طولانی‌تر، فرصت بیشتری برای افزایش وارونی جمعیت و در نتیجه تقویت نور لیزر فراهم می‌کند و گزینهٔ (۳) درست است.

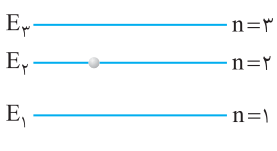
A ۲۶۳۳ ۲

در واقع اتم در حالت اول برانگیخته است که با گسیل خودبه‌خودی یک فوتون که انرژی‌اش با اختلاف انرژی دو تراز برابر است به حالت پایه می‌رود.

A ۲۶۳۴ ۲

هرگاه الکترون در تراز برانگیخته (E_U) قرار داشته باشد و بخواهیم آن را به کمک یک فوتون ورودی تحریک کنیم تا الکترون به تراز پایین‌تر (E_L) برود باید انرژی الکترون دقیقاً با اختلاف انرژی‌های دو تراز E_U-E_L یکسان باشد.

الکترون در تراز $n=2$ قرار دارد و با فوتونی با انرژی E_2-E_1 می‌توان الکترون را تحریک کرد تا با گسیل القایی به تراز پایه برود.



بازی با سوال الکترونی در تراز E_2 است. اگر یک فوتون که انرژی آن برابر E_2-E_1 است به آن بتابانیم، الکترون ممکن است با ..... به تراز E_1 برود.

۱) گسیل خودبه‌خودی
۲) جذب خودبه‌خودی
۳) گسیل القایی
۴) جذب القایی

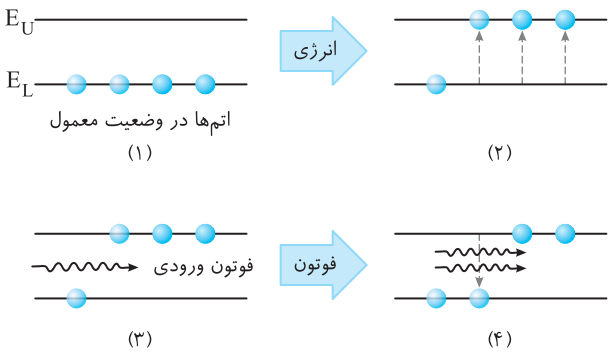
پاسخ هرگاه الکترون در تراز E_U قرار داشته باشد چنانچه فوتونی با انرژی E_U-E_L به اتم بتابانیم، در اثر گسیل القایی الکترون به تراز E_L می‌رود، بنابراین الکترونی که در تراز E_2 قرار دارد می‌تواند توسط فوتونی که انرژی آن E_2-E_1 است تحریک شده و با گسیل القایی به تراز E_1 برود.

گزینهٔ ۳

B ۲۶۳۵ ۱

در مرحلهٔ (۲) تعداد الکترون‌ها در تراز بالاتر، از تراز پایه بیشتر است که به آن وارونی جمعیت گویند.

در مرحلهٔ (۴)، یک الکترون تحت تأثیر یک فوتون از تراز بالاتر به تراز پایه رفته و یک فوتون دیگر گسیل می‌کند که به این فرایند گسیل القایی گویند.



B ۲۶۳۶ ۱

خط فکری انرژی نور خروجی لیزر را در مدت ۱s حساب می‌کنیم، انرژی هر فوتون را به‌دست می‌آوریم و تعداد فوتون‌های گسیل شده را در هر ثانیه به‌دست می‌آوریم.

۱ انرژی خروجی لیزر برابر است با:

$$P=\frac{E}{t}\Rightarrow E=Pt\xrightarrow{P=۴/۵W,t=۱s}E=۴/۵J$$

۲ تعداد فوتون‌ها را به‌دست می‌آوریم.

$$E=nh\frac{c}{\lambda}\xrightarrow[h=۶/۶\times۱۰^{-۳۴}Js]{\lambda=۶۶۰\times۱۰^{-۹}m}۴/۵=n\times۶/۶\times۱۰^{-۳۴}\times\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۶۶۰\times۱۰^{-۹}}$$

$$n=\frac{۴/۵\times۶۶۰\times۱۰^{-۹}}{۶/۶\times۱۰^{-۳۴}\times۳\times۱۰^{۸}}\Rightarrow n=۱/۵\times۱۰^{۱۹}$$

B ۲۶۳۷ ۲

بنا به تعریف توان:

$$P=\frac{E}{t}$$

از طرفی انرژی برابر است با:

$$E=nhf=nh\frac{c}{\lambda}$$

بنابراین داریم:

$$P=\frac{nhf}{t}=\frac{nh\frac{c}{\lambda}}{t}=\frac{nhc}{\lambda t}\Rightarrow n=\frac{P\lambda t}{hc}$$

$$\Rightarrow n=\frac{۶۶۳\times۱۰^{-۳}\times۶۰\times۶۰۰\times۱۰^{-۹}}{۶/۶۳\times۱۰^{-۳۴}\times۳\times۱۰^{۸}}=\frac{۱۲۰۰۰\times۱۰^{-۱۰}}{۱۰^{-۲۶}}=۱/۲\times۱۰^{۲۰}$$

B ۲۶۳۸ ۴

۱ انرژی الکترون در تراز $n=۳$ را به دست می‌آوریم.

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲}\Rightarrow E_۳=\frac{-E_R}{۳^۲}\Rightarrow E_۳=\frac{-E_R}{۹}$$

۲ فرض می‌کنیم که الکترون بتواند این فوتون با انرژی $\frac{۳}{۳۶}E_R$ را جذب کرده و به ترازهای بالاتر برود.

$$E_n=E_۳+\frac{۳E_R}{۳۶}\Rightarrow E_n=\frac{-E_R}{۹}+\frac{۳E_R}{۳۶}\Rightarrow E_n=\frac{-E_R}{۳۶}$$

۳ شمارهٔ ترازی که در آن انرژی الکترون $-\frac{E_R}{۳۶}$ است حساب می‌کنیم.

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲}=-\frac{E_R}{۳۶}\Rightarrow n=۶$$

بنابراین الکترون با جذب این فوتون به تراز $n=۶$ گذار می‌کند.

B ۲۶۳۹ ۲

خط فکری انرژی فوتون را به‌دست می‌آوریم. انرژی الکترون در تراز $n=۳$ را حساب می‌کنیم. یک بار فرض می‌کنیم که اگر الکترون این فوتون را جذب کند به کدام تراز بالاتر می‌رود. اگر برای این حالت پاسخی به‌دست آوردیم، حل مسئله تمام است. در غیر این صورت باید حالتی را فرض کنیم که این فوتون سبب گسیل القایی می‌شود یعنی الکترون از تراز $n=۳$ به تراز پایین‌تر می‌رود.

۱ انرژی فوتون برابر است با:

$$E=hf\xrightarrow{f=۲۴۰THz=۲۴\times۱۰^{۱۳}Hz}E=۴\times۱۰^{-۱۵}\times۲۴\times۱۰^{۱۳}\Rightarrow E=۰/۹۶eV$$

۲ انرژی الکترون در تراز $n=۳$ را به‌دست می‌آوریم.

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲}\xrightarrow{E_R=۱۳/۵eV}E_۳=\frac{-۱۳/۵}{۳^۲}\Rightarrow E_۳=-۱/۵eV$$

۳ فرض می‌کنیم الکترون، فوتون با انرژی $۰/۹۶eV$ را جذب می‌کند. در این صورت انرژی آن خواهد شد.

$$E=-۱/۵+۰/۹۶=-۰/۵۴eV$$

۴ انرژی $-۰/۵۴eV$ را در رابطهٔ انرژی الکترون در مدل اتمی بور قرار می‌دهیم. اگر عدد طبیعی به‌دست آمد جواب مسئله است و اگر n عدد طبیعی نشد یعنی الکترون این فوتون را جذب نمی‌کند.

$$E_n=-\frac{E_R}{n^۲}\Rightarrow-۰/۵۴=\frac{-۱۳/۵}{n^۲}\Rightarrow n^۲=۲۵\Rightarrow n=۵$$

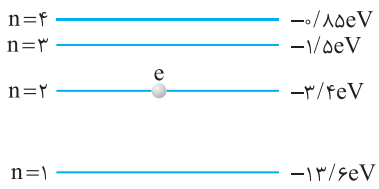
در نتیجه الکترون با جذب این فوتون به تراز $n=۵$ می‌رود.

B ۲۶۴۰ ۴

۱ انرژی فوتون را به‌دست می‌آوریم.

$$E=\frac{hc}{\lambda}=\frac{۱۲۴۰}{۸۰۰}\Rightarrow E=۱/۵eV$$

۲ به انرژی ترازها دقت کنید. اختلاف انرژی هیچ دو تراز $۱/۵eV$ نمی‌شود. بنابراین بدون هیچ اتفاقی فوتون از اتم عبور می‌کند.



B ۲۶۴۱ ۳

خط فکری انرژی فوتون را به‌دست می‌آوریم، ابتدا فرض می‌کنیم که الکترون این انرژی را جذب می‌کند. بنابراین انرژی فوتون را با انرژی الکترون جمع می‌کنیم و انرژی الکترون را در رابطهٔ $E_n=-\frac{E_R}{n^۲}$ قرار می‌دهیم تا n را به‌دست بیاوریم. اگر n عدد طبیعی به‌دست آمد، حل مسئله تمام است و اگر عدد به‌دست آمده عدد صحیح نبود باید به گسیل القایی برویم و بررسی کنیم که آیا اختلاف انرژی ترازهای پایین‌تر با انرژی فوتون یکی است یا نه؟ اگر یکی بود، گسیل القایی رخ می‌دهد و الکترون در اثر تحریک (القا) فوتون به تراز پایین‌تر می‌رود و اگر یکی نبود، فوتون روی اتم تأثیری نخواهد داشت و اتفاقی رخ نمی‌دهد.

این یک اتم فرضی بوده و الکترون در تراز $n=۲$ دارای انرژی $E_۲=-۲eV$ است.

۱ ابتدا انرژی فوتون تابیده شده به اتم را حساب می‌کنیم:

$$E=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow E=\frac{۴\times۱۰^{-۱۵}\times۳\times۱۰^{۸}}{۸۰۰\times۱۰^{-۹}}\Rightarrow E=۱/۵eV$$

۲ حال فرض می‌کنیم که الکترون این فوتون را جذب می‌کند، در این صورت انرژی الکترون برابر خواهد شد با:

$$E_{n'}=-۲+۱/۵=-۰/۵eV$$

۳ اکنون باید بررسی کنیم آیا ترازی با انرژی $-0/5eV$ برای این الکترون وجود دارد یا نه؟

$$\begin{cases} E_n=-\frac{E_R}{n^2} \\ E_{n'}=-\frac{E_R}{n'^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{E_{n'}}{E_n}=\frac{n^2}{n'^2} \Rightarrow \frac{-0/5}{-2}=\frac{2^2}{n'^2} \Rightarrow n'=4$$

۴ برای n' یک عدد طبیعی به‌دست آمده، بنابراین تراز $n'=4$ دارای انرژی $-0/5eV$ بوده و الکترون با دریافت انرژی از تراز $n=2$ به تراز $n'=4$ می‌رود.

بازی با سوال **در یک اتم فرضی تک‌الکترون، الکترون در تراز $n=2$ دارای انرژی $-3eV$ است. اگر به آن یک فوتون با طول موج $0/72$ میکرومتر بتابانیم چه اتفاقی رخ می‌دهد؟** ($h=4\times10^{-15}eV.s$, $c=3\times10^{8}m/s$)

۱) الکترون با جذب انرژی فوتون به تراز $n=3$ می‌رود.

۲) اتفاقی رخ نمی‌دهد.

۳) الکترون با گسیل القایی به تراز $n=1$ می‌رود.

۴) الکترون با جذب انرژی فوتون به تراز $n=4$ می‌رود.

پاسخ **۱ انرژی فوتون را حساب می‌کنیم.**

$$E=h\frac{c}{\lambda} \Rightarrow E=4\times10^{-15}\times\frac{3\times10^{8}}{0/72\times10^{-6}} \Rightarrow E=\frac{1/2}{0/72}=\frac{120}{72}$$

$$\Rightarrow E=\frac{10}{6}eV \Rightarrow E=\frac{5}{3}eV$$

۲ حال فرض می‌کنیم این فوتون توسط الکترون جذب شود. انرژی الکترون پس از جذب فوتون برابر می‌شود با:

$$E_{n'}=-3+\frac{5}{3} \Rightarrow E_{n'}=-\frac{4}{3}eV$$

اکنون بررسی می‌کنیم، آیا ترازی با این انرژی وجود دارد یا نه؟

$$\frac{E_{n'}}{E_n}=\frac{\frac{-E_R}{n'^2}}{\frac{-E_R}{n^2}} \Rightarrow \frac{\frac{-4}{3}}{-3}=\frac{(2)^2}{n'^2} \Rightarrow n'=3$$

بنابراین الکترون با دریافت انرژی فوتون از تراز $n=2$ به تراز $n'=3$ برانگیخته می‌شود. گزینهٔ ۱

۳ C ۲۶۴۲

۱ ابتدا انرژی فوتون را به‌دست می‌آوریم:

$$E=hf \Rightarrow E=4\times10^{-15}\times2/25\times10^{15} \Rightarrow E=9eV$$

۲ اگر الکترون این فوتون را جذب کند انرژی آن برابر $-3+9=+6eV$ می‌شود در حالی که در ترازهای اتمی، انرژی الکترون منفی بوده، بنابراین فوتون برای رفتن به ترازهای بالاتر این فوتون را جذب نمی‌کند و گزینه‌های (۱) و (۴) نادرست هستند.

۳ فرض می‌کنیم که الکترون با گسیل یک فوتون با انرژی $9eV$ به تراز پایین‌تر برود. در این صورت انرژی الکترون در تراز پایین‌تر برابر $-3-9=-12eV$ خواهد شد.

۴ اکنون باید بررسی کرد که انرژی الکترون در تراز $n'=1$ چند الکترون - ولت است:

$$\frac{E_{n'}}{E_n}=\frac{\frac{-E_R}{n'^2}}{\frac{-E_R}{n^2}} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2}=\frac{2^2}{1^2} \Rightarrow \frac{E_1}{-3}=4 \Rightarrow E_1=-12eV$$

۵ در این صورت الکترون تحت تأثیر فوتون، گسیل القایی انجام داده و به تراز پایهٔ $n'=1$ می‌رود.

در واقع انرژی فوتون $9eV$ برابر اختلاف انرژی ترازهای $n=2$ و $n'=1$ بوده و وقتی فوتون به این اتم می‌تابد سبب تحریک (القا) الکترون شده و الکترون با گسیل القایی از تراز ۲ به تراز ۱ رفته و یک فوتون با انرژی $9eV$ علاوه بر فوتون ورودی، ایجاد می‌کند.

۲ C ۲۶۴۳

۱ ابتدا انرژی فوتون را به‌دست می‌آوریم:

$$E=hf=4\times10^{-15}\times6\times10^{14} \Rightarrow E=2/4eV$$

۲ اگر الکترون این فوتون را جذب کند، انرژی آن برابر $-1/5+2/4=0/9eV$ می‌گردد. می‌دانیم انرژی الکترون در ترازهای اتمی منفی است و الکترون این فوتون را جذب نمی‌کند و به ترازهای بالاتر اتمی نمی‌رود، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.

۳ اگر الکترون تحت تأثیر این فوتون، گسیل القایی انجام دهد، با گسیل یک فوتون با انرژی $2/4eV$ به تراز پایین می‌رود و انرژی الکترون در تراز پایین‌تر برابر $-1/5-2/4=-3/9eV$ می‌شود.

۴ اکنون باید مشخص کرد که ترازی با این انرژی وجود دارد یا نه:

$$\frac{E_{n'}}{E_n}=\frac{\frac{-E_R}{n'^2}}{\frac{-E_R}{n^2}} \Rightarrow \frac{E_{n'}}{E_n}=\frac{n^2}{n'^2} \Rightarrow \frac{-3/9}{-1/5}=\frac{3^2}{n'^2} \Rightarrow n'^2=3/46$$

کاملاً مشخص است که n' عدد طبیعی نیست بنابراین گسیل القایی نیز رخ نمی‌دهد و گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست هستند. در نتیجه با تابیدن این فوتون اتفاقی رخ نمی‌دهد و فوتون هیچ‌گونه تأثیری بر این اتم نخواهد داشت.

پنجره تو در تو (آزمون فصل)

۱ A ۲۶۴۳

در پدیدهٔ فوتوالکتریک هر الکترون تنها با یک فوتون برهم‌کنش دارد و اگر بسامد نور فرودی (انرژی فوتون) از بسامد آستانه (حداقل انرژی لازم برای جداشدن الکترون) بیشتر باشد، الکترون از سطح فلز جدا شده و بخشی از انرژی فوتون به انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها تبدیل می‌شود. با افزایش شدت نور، تعداد فوتون‌ها افزایش می‌یابد اما انرژی آن‌ها ثابت می‌ماند. بنابراین افزایش شدت نور، تأثیری در انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها ندارد و گزینهٔ (۱) درست است.

بسامد آستانه به جنس فلزی که نور بر آن می‌تابد بستگی دارد و گزینهٔ (۲) درست است.

با افزایش بسامد نور، انرژی فوتون‌ها افزایش می‌یابد اما انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها به همان نسبت افزایش نمی‌یابد. یعنی اگر f دو برابر شود، K بیشتر از دو برابر خواهد شد و گزینهٔ (۳) نادرست است.

بسامد آستانه یعنی حداقل بسامدی که با آن پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ می‌دهد. بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

نمای ۱، ۲ و ۳

۲ B ۲۶۴۴

با توجه به تعریف توان می‌توانیم بنویسیم:

$$P=\frac{E}{t} \Rightarrow E=Pt \quad (I)$$

بنا به رابطهٔ اینشتین انرژی پرتوهای الکترومغناطیسی برابر است با:

$$E=\frac{nhc}{\lambda} \quad (II)$$

از رابطهٔ (I) و (II) می‌توان نوشت:

$$Pt=n\frac{hc}{\lambda} \Rightarrow n=\frac{Pt\lambda}{hc}$$

بنا به فرض مسئله تعداد فوتون‌ها برابر است، از این‌رو:

$$n_A=n_B \Rightarrow \frac{P_At_A\lambda_A}{hc}=\frac{P_Bt_B\lambda_B}{hc} \xrightarrow{P_B=2P_A \text{ و } \lambda_B=2\lambda_A}$$

$$P_At_A\lambda_A=2P_A(t_B)2\lambda_A \Rightarrow \frac{t_A}{t_B}=4$$

نمای ۲

۲ ۲۶۴۳ B

۳ بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون برابر است با:

$$K_{max}=hf-W_{\circ}\xrightarrow{f=\frac{c}{\lambda}}۴/۴=۴\times۱۰^{-۱۵}\times\frac{c}{\lambda}-۲/۸$$

$$۴\times۱۰^{-۱۵}\times\frac{۳\times۱۰^{۸}}{\lambda}=۱/۶$$

$$\lambda=\frac{۱۲}{۱/۶}\times۱۰^{-۷}m=\frac{۱/۲}{۱/۶}\mu m=\frac{۳}{۴}\mu m$$

نمای ۳

۲ ۲۶۴۳ B

۴ **۱** بنا به فرض مسئله طول موج نور تابیده شده ۲۰ درصد طول موج آستانه است:

$$\lambda=\frac{۲۰}{۱۰۰}\lambda_{\circ}\Rightarrow\lambda=\frac{۱}{۵}\lambda_{\circ}$$

(۲۰ درصد)

۲ بیشینهٔ انرژی جنبشی از رابطهٔ $K_{max}=hf-W_{\circ}$ به‌دست می‌آید:

$$K_{max}=\frac{hc}{\lambda}-\frac{hc}{\lambda_{\circ}}\xrightarrow{\lambda=\frac{\lambda_{\circ}}{۵},\ K_{max}=۴eV}۴=\frac{۵hc}{\lambda_{\circ}}-\frac{hc}{\lambda_{\circ}}$$

$$۴=\frac{۴hc}{\lambda_{\circ}}\xrightarrow{hc=۱۲۰۰eV.nm}۴=\frac{۴\times۱۲۰۰}{\lambda_{\circ}}\Rightarrow\lambda_{\circ}=۱۲۰۰nm=۱۲۰۰\times۱۰^{-۹}m$$

۳ با توجه به رابطهٔ $\lambda=\frac{c}{f}$ بسامد آستانه را به دست می‌آوریم:

$$\lambda_{\circ}=\frac{c}{f_{\circ}}\Rightarrow۱۲۰۰\times۱۰^{-۹}=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{f_{\circ}}\Rightarrow f_{\circ}=\frac{۱۰^{۱۷}}{۴۰۰}=\frac{۱۰^{۱۵}}{۴}=۲/۵\times۱۰^{۱۴}Hz$$

$$\xrightarrow{۱T=۱۰^{۱۲}}f_{\circ}=۲/۵\times۱۰^{۲}THz=۲۵۰THz$$

نمای ۳

۳ ۲۶۴۳ B

۵ **خط فکری** بنا به نظریهٔ اینشتین انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها در اثر فوتوالکتریک برابر $K_m=hf-W_{\circ}$ است.

۱ بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها در حالت اول $۶/۴\times۱۰^{-۱۹}J$ است که آن را بر حسب eV بیان می‌کنیم.

$$K_M=\frac{۶/۴\times۱۰^{-۱۹}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}\Rightarrow K_M=۴eV$$

۲ در حالت دوم که طول موج نور فرودی بر فلز دو برابر شده (۲λ)، بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها، ٪۷۵ کاهش یافته بنابراین:

$$K'_m=K_m-\frac{۷۵}{۱۰۰}K_m=\frac{۲۵}{۱۰۰}K_m\Rightarrow K'_m=\frac{۱}{۴}\times۴eV\Rightarrow K'_m=۱eV$$

۳ رابطه فوتوالکتریک را برای هر دو حالت می‌نویسیم:

$$K_m=\frac{hc}{\lambda}-W_{\circ}\begin{cases}\text{حالت اول}: ۴=\frac{hc}{\lambda}-W_{\circ}\\ \text{حالت دوم}: ۱=\frac{hc}{۲\lambda}-W_{\circ}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴+W_{\circ}=\frac{hc}{\lambda}\\ ۱+W_{\circ}=\frac{hc}{۲\lambda}\end{cases}$$

۴ دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم تا λ حذف شده و تنها مجهول $W_{\circ}$ باشد:

$$\frac{۴+W_{\circ}}{۱+W_{\circ}}=\frac{\frac{hc}{\lambda}}{\frac{hc}{۲\lambda}}\Rightarrow\frac{۴+W_{\circ}}{۱+W_{\circ}}=۲\Rightarrow۴+W_{\circ}=۲+۲W_{\circ}\Rightarrow W_{\circ}=۲eV$$

۵ با توجه به فرض مسئله و اینکه تندی نور در خلأ $c=۳\times۱۰^{۸}m/s$ است، خواهیم خواهیم داشت:

$$hc=۱۲۰۰eVnm\Rightarrow h=\frac{۱۲۰۰}{c}=\frac{۱۲۰۰}{۳\times۱۰^{۸}\times۱۰^{۹}}\Rightarrow h=۴\times۱۰^{-۱۵}eV.s$$

تبدیل به نانومتر

۶ اکنون بسامد آستانه را می‌توان حساب کرد.

$$W_{\circ}=hf_{\circ}\Rightarrow۲=۴\times۱۰^{-۱۵}f_{\circ}\Rightarrow f_{\circ}=۰/۵\times۱۰^{+۱۵}Hz$$

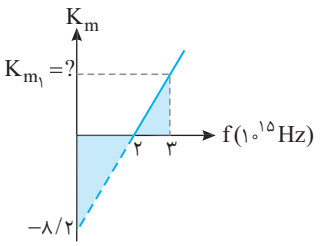
$$f_{\circ}=۵\times۱۰^{۱۴}Hz\times\frac{۱THz}{\underbrace{۱۰^{۱۲}Hz}_{\text{ضریب تبدیل}}}\Rightarrow f_{\circ}=۵۰۰THz$$

نمای ۳

۴ ۲۶۴۳ B

۶ در پدیدهٔ فوتوالکتریک ولتاژ متوقف‌کننده برابر $K_m=hf-W_{\circ}$ بوده که در آن $-W_{\circ}$، عرض از مبدأ است، بنابراین در این نمودار عرض از مبدأ برحسب الکترون - ولت برابر ۴/۲ می‌باشد. با توجه به تشابه دو مثلث رنگی روی شکل می‌توان نوشت:

$$\frac{K_{m_۱}}{۸/۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow K_{m_۱}=۴/۱eV$$



نمای ٤

۴ ۲۶۴۳ A

۷ **خط فکری** در حل این مسائل راه‌حلی که مستقیماً به شما اعداد n و n' را بدهد، وجود ندارد. شما باید رابطهٔ ریدبرگ را نوشته، آن‌قدر آن را ساده کنید تا بتوانید در مورد n و n' حدس دقیق بزنید. به حل دقت کنید.

در رابطهٔ بالمر - ریدبرگ طول موج $\frac{۱۶۰۰}{۱۵}nm$ را قرار می‌دهیم:

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{n^{۲}})\Rightarrow\frac{۱}{\frac{۱۶۰۰}{۱۵}}=\frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{n^{۲}})\Rightarrow\frac{۱۵}{۱۶}=(\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{n^{۲}})$$

$$\Rightarrow۱-\frac{۱}{۱۶}=(\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{n^{۲}})\Rightarrow n=۴\ ,\ n'=۱$$

دقت کنید عدد $\frac{۱۵}{۱۶}$ تفاضل $۱-\frac{۱}{۱۶}$ است. بنابراین اگر به جای $n'=۱$ و به جای $n=۴$ قرار دهیم، عدد $\frac{۱۵}{۱۶}$ به‌دست می‌آید.

نمای ۶

۱ ۲۶۴۳ A

۸ طول موج ۷۲۰nm طول موج مرئی است. از طرفی $n'=۲$ یعنی طول موج گسیلی مربوط به رشتهٔ بالمر است. برای به دست آوردن n از رابطهٔ ریدبرگ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{n^{۲}})\xrightarrow[\lambda=۷۲۰nm,n'=۲]{R=۰/۰۱nm^{-۱}}\frac{۱}{۷۲۰}=۰/۰۱\times(\frac{۱}{۲^{۲}}-\frac{۱}{n^{۲}})\Rightarrow n=۳$$

نمای ۶

۳ ۲۶۴۳ B

۹ **یادآوری** با توجه به مدل اتمی بور هرگاه الکترون از یک حالت مانا با انرژی E_U به حالت مانای دیگری با انرژی پایین‌تر E_L برود، اختلاف انرژی دو تراز را به‌صورت یک فوتون گسیل می‌کند. $(E_U-E_L=hf)$

خط فکری در حل این مسئله شما باید ابتدا به کمک مدل اتمی بور، یک رابطه بین طول موج و شمارهٔ مدارها (عدد کوانتومی مدارها) پیدا کنید و رابطهٔ به‌دست آمده را با رابطهٔ ریدبرگ - بالمر مقایسه کنید و رابطه‌ای بین E_R و R به‌دست آورید.

در مدل اتمی بور انرژی الکترون در تراز با عدد کوانتومی n برابر $E_n=\frac{-E_R}{n^{۲}}$ است.

اکنون به جای E_U و E_L مقدارهای آن‌ها را قرار می‌دهیم:

$$E_U-E_L=hf\Rightarrow\frac{-E_R}{n_U^2}-(\frac{-E_R}{n_L^2})=hf$$

$$hf=\frac{E_R}{n_L^2}-\frac{E_R}{n_U^2}\Rightarrow hf=E_R(\frac{1}{n_L^2}-\frac{1}{n_U^2})$$

$$\Rightarrow\frac{hc}{\lambda}=E_R(\frac{1}{n_L^2}-\frac{1}{n_U^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda}=\frac{E_R}{hc}(\frac{1}{n_L^2}-\frac{1}{n_U^2})\quad (I)$$

رابطهٔ (I) را با رابطهٔ ریدبرگ - بالمر $\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})$ مقایسه می‌کنیم. از این‌رو خواهیم داشت:

$$R=\frac{E_R}{hc}\Rightarrow\frac{E_R}{R}=hc$$

نمای ۸

۱۰ **۱** **۲۶۴۳** **B**

۱ انرژی الکترون در مدل اتمی بور، در مداری با عدد کوانتومی n از رابطهٔ $E_n=\frac{-E_R}{n^2}$ به‌دست می‌آید. با توجه به این مطلب عدد کوانتومی مدارهایی را که انرژی الکترون در آن‌ها $-0/85eV$ و $-3/4eV$ است، به‌دست می‌آوریم.

$$E_n=-\frac{E_R}{n^2}\Rightarrow\begin{cases}-0/85=\frac{-13/6}{n^2}\Rightarrow n^2=16\Rightarrow n=4\\ -3/4=\frac{-13/6}{n'^2}\Rightarrow n'^2=4\Rightarrow n'=2\end{cases}$$

۲ شعاع مدار الکترون به گرد هسته بنا به مدل اتمی بور خواهد بود:

$$r_n=n^2a_0\Rightarrow\begin{cases}r_4=16a_0\\ r_2=4a_0\end{cases}\Rightarrow\frac{r_2}{r_4}=\frac{1}{4}$$

نمای ۸

۱۱ **۱** **۲۶۴۳** **B**

از رابطهٔ انرژی الکترون در مدل اتمی بور برای اتم هیدروژن عدد کوانتومی n را به‌دست می‌آوریم:

$$E_n=-\frac{E_R}{n^2}\xrightarrow{E_n=\frac{-1}{9}E_R}-\frac{1}{9}E_R=-\frac{E_R}{n^2}\Rightarrow n=3$$

اکنون به کمک رابطهٔ بالمر- ریدبرگ n' را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\xrightarrow{\lambda=\frac{900}{8}nm}\frac{1}{\frac{900}{8}}=\frac{1}{100}(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{8}{9}=\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow n'=1$$

نمای ۸

۱۲ **۲** **۲۶۴۳** **B**

۱ کمینهٔ بسامد گسیلی یعنی بلندترین طول موج $(\uparrow\lambda=\frac{c}{f\downarrow})$. بلندترین طول موج در رشتهٔ لیمان هنگام گذار الکترون از تراز $n=2$ به تراز $n'=1$ گسیل می‌شود. به کمک رابطهٔ ریدبرگ - طول موج را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda_{max\,L}}=R(\frac{1}{1}-\frac{1}{2^2})\Rightarrow\lambda_{max\,L}=\frac{4}{3R}$$

$$f_{min\,L}=\frac{c}{\lambda_{max\,L}}=\frac{c}{\frac{4}{3R}}\Rightarrow f_{min:}=\frac{3Rc}{4}$$

۲ بیشینهٔ بسامد گسیلی یعنی کوتاه‌ترین طول موج $(\downarrow\lambda=\frac{c}{f\uparrow})$. کوتاه‌ترین طول موج در رشتهٔ براکت هنگام گذار الکترون از تراز $n=\infty$ به تراز $n'=4$ گسیل می‌شود. طول موج گسیلی را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda_{min\,B}}=R(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{\infty})\Rightarrow\lambda_{min\,B}=\frac{16}{R}$$

$$f_{max\,B}=\frac{c}{\lambda_{min\,B}}=\frac{c}{\frac{16}{R}}\Rightarrow f_{max\,B}=\frac{Rc}{16}$$

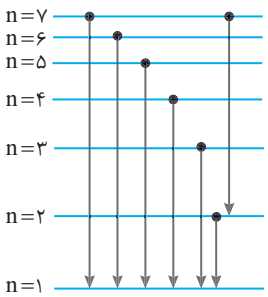
۳ نسبت بسامدها خواهد شد:

$$\frac{f_{min\,L}}{f_{max\,B}}=\frac{\frac{3Rc}{4}}{\frac{Rc}{16}}\Rightarrow\frac{f_{min\,L}}{f_{max\,B}}=12$$

نمای ۶

۱۳ **۲** **۲۶۴۳** **B**

در رشته‌های گسیلی هیدروژن تمام طول موج‌های رشتهٔ لیمان $(n'=1)$ فرابنفش هستند و در رشتهٔ بالمر در گذار الکترون از تراز $n=7$ به تراز $n'=2$ طول موج گسیلی در ناحیهٔ فرابنفش است. بنابراین باید الکترون در تراز با عدد کوانتومی $n=7$ باشد تا ۶ گذار از ترازهای ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲ به تراز $n'=1$ و یک گذار از تراز $n=7$ به تراز $n'=2$ صورت بگیرد و جمعاً ۷ فوتون با طول موج‌های مختلف گسیل شود.



نمای ۸

۱۴ **۳** **۲۶۴۳** **A**

در گسیل القایی در لیزر، انرژی فوتون ورودی دقیقاً با اختلاف انرژی تراز پایه و حالت برانگیخته برابر است و گزینهٔ (۳) درست است.

نمای ۱۰

۱۵ **۲** **۲۶۴۳** **A**

خطوط فرانهوفر خطوط تاریک جذبی هستند که در طیف‌نما در طیف خورشید دیده می‌شوند و مربوط به طول موج‌های جذب شده توسط عناصر موجود در جو خورشید و جو زمین هستند، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.

طیف گسیلی و جذبی هر عنصر که به آن طیف اتمی می‌گویند، منحصر به فرد است و گزینهٔ (۲) درست است.

طیف اتمی توسط لامپ‌های حاوی بخار رقیق عنصر گسیل می‌شود و گزینهٔ (۳) نادرست است.

گسیل نور توسط اتم هنگامی صورت می‌گیرد که الکترون برانگیخته از تراز انرژی بالاتر به تراز انرژی پایین‌تر جهش کند و گزینهٔ (۴) نادرست است.

نمای ۹

فصل ششم

آشنایی با فیزیک هسته‌ای



پنجره ۱

A ۲۶۴۴ ۴

برای یک عنصر با نماد شیمیایی X، نماد هسته به صورت $^{A}_{Z}X_{N}$ است که Z عدد اتمی (تعداد پروتون)، N تعداد نوترون و A عدد جرمی است، اما مشخص کردن N ضروری نیست و با توجه به رابطهٔ $A=Z+N$ می‌توان با مشخص بودن عدد جرمی و عدد اتمی تعداد نوترون را به‌دست آورد. همچنین می‌توان برای خلاصه نشان دادن نماد شیمیایی عدد اتمی (Z) را نیز نشان نداد، چون نماد شیمیایی عنصر نشان‌دهندهٔ مقدار Z نیز می‌باشد، برای مثال با نوشتن Al می‌فهمیم که این عنصر آلومینیوم می‌باشد که عدد اتمی آن همواره ۱۳ است، بنابراین هر سه شکل نوشته شده در گزینه‌ها درست‌اند اما نماد گزینه‌های (۲) و (۳) خلاصه‌تر هستند.

A ۲۶۴۵ ۲

ابعاد هستهٔ اتم حدود $10^{-15}m$ (یک فمتومتر یا یک فرمی) و ابعاد اتم حدود 10^{-10} متر (یک آنگستروم) است.

A ۲۶۴۶ ۳

برای نمایش یک عنصر از نماد $^{A}_{Z}X$ استفاده می‌شود که Z عدد اتمی عنصر و برابر با تعداد پروتون‌ها است و A عدد جرمی که برابر با مجموع پروتون‌ها و نوترون‌های درون هسته می‌باشد. بنابراین در $^{35}_{17}Cl$، عدد ۱۷ تعداد پروتون‌های درون هسته است.

بازی با سوال هستهٔ اتم آهن $^{56}_{26}Fe$ چند نوکلئون دارد؟

۱) ۳۰ ۲) ۵۶ ۳) ۲۶ ۴) ۱۵

پاسخ یادآوری **به پروتون و نوترون، نوکلئون گویند و مجموع نوکلئون‌های هسته را عدد جرمی (A) می‌نامند.**

در $^{56}_{26}Fe$ تعداد نوکلئون ۵۶ است. گزینهٔ ۲

A ۲۶۴۷ ۳

در نمادنویسی عنصر $^{A}_{Z}X_{N}$، N تعداد نوترون‌هاست. بنابراین تعداد نوترون‌های هسته $X_{۲۴}$ برابر ۲۴ واحد است.

با توجه به فرض مسئله، اختلاف تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها ۳ است و در هسته‌ها تعداد نوترون‌ها از تعداد پروتون‌ها بیشتر است. بنابراین:

$$N-Z=3\Rightarrow 24-Z=3\Rightarrow Z=21$$

عدد جرمی برابر مجموع پروتون‌ها و نوترون‌ها است:

$$A=Z+N\Rightarrow A=21+24\Rightarrow A=45$$

A ۲۶۴۸ ۳

یادآوری بار الکتریکی همواره مضرب درستی از بار پایه $e=1/6\times10^{-19}C$ است. $(Q=ne)$

بار مثبت هسته Q است، بنابراین تعداد پروتون‌های هسته خواهد شد:

$$Q=ne\Rightarrow n=\frac{Q}{e}$$

B ۲۶۴۹ ۲

۱ تعداد پروتون‌های هسته را به کمک بار الکتریکی هسته حساب می‌کنیم.

$$Q=Ze\Rightarrow 6/72\times10^{-18}=Z\times1/6\times10^{-19}\Rightarrow Z=\frac{67/2\times10^{-19}}{1/6\times10^{-19}}\Rightarrow Z=42$$

۲ با توجه به فرض مسئله $\frac{N}{Z}=\frac{9}{7}$ بوده، بنابراین:

$$\frac{N}{42}=\frac{9}{7}\Rightarrow N=54$$

۳ عدد جرمی مجموع عدد اتمی (Z) و عدد نوترونی (N) است.

$$A=Z+N\Rightarrow A=42+54\Rightarrow A=96$$

A ۲۶۵۰ ۴

در واکنش‌های هسته‌ای، با تبدیل جرم به انرژی سر و کار داریم که مقدار این جرم بسیار کوچک است، به همین دلیل در فیزیک هسته‌ای به جای یکای کیلوگرم از یکای جرم اتمی استفاده می‌شود که عبارت است از $\frac{1}{12}$ جرم اتم کربن ۱۲ و جرم هر اتم کربن ۱۲ را برابر $12/000000u$ در نظر می‌گیرند.

A ۲۶۵۱ ۳

نکته تعداد ذرات در کپسول از هر ماده برابر $N_a=6/022\times10^{23}$ است که به آن عدد آواگادرو گویند.

یکای جرم اتمی (u یا amu) برابر $\frac{1}{12}$ جرم اتم کربن ۱۲ است. جرم مولی کربن $^{12}_{6}C$ برابر ۱۲g بوده، یعنی جرم $6/022\times10^{23}$ اتم کربن ۱۲g است. بنابراین $\frac{1}{12}$ جرم هر اتم کربن برابر است با:

$$1u=\frac{1}{12}\times\left(\frac{12}{1000}\right)\left(\frac{1}{6/022\times10^{23}}\right)=1/66\times10^{-27}kg$$

این تست را با مراجعه به گزینه‌ها نیز می‌توان پاسخ داد: گزینهٔ (۴) عدد بسیار بزرگی است، بنابراین نادرست است. گزینهٔ (۱) نیز برای یکای جرم اتمی عدد بزرگی است، بنابراین نادرست است. گزینهٔ (۲) نیز بار الکتریکی الکترون و از طرفی ضریب تبدیل یکای انرژی الکترون - ولت به ژول است.

A ۲۶۵۲ ۲

یادآوری اتم‌ها با تعداد پروتون یکسان و تعداد نوترون‌های مختلف را ایزوتوپ (هم‌مکان) می‌نامند، زیرا همگی در جدول مندلیف یک خانه را اشغال می‌کنند.

ایزوتوپ‌ها به دلیل داشتن ساختار ترازهای الکترونی یکسان دارای خواص شیمیایی یکسان می‌باشند و ایزوتوپ‌ها دارای تعداد نوکلئون متفاوت هستند بنابراین هسته‌های متفاوت داشته و انرژی بستگی هستهٔ آن‌ها یکسان نخواهد بود و گزینهٔ (۲) نادرست بوده و جواب تست است. بار هستهٔ ایزوتوپ‌ها یکسان و تعداد نوکلئون‌هایشان متفاوت است، بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) درست هستند.

A ۲۶۵۳ ۲

عناصری که دارای عدد اتمی یکسان هستند ایزوتوپ یک عنصر بوده و دارای تعداد الکترون‌های یکسان می‌باشند، از این‌رو رفتار شیمیایی یکسانی دارند. در سه مورد $^{59}_{26}Z$ و $^{61}_{26}X$ و $^{61}_{27}Y$، دو مورد $^{59}_{26}Z$ و $^{61}_{26}X$ ایزوتوپ یک عنصر بوده و دارای خواص شیمیایی یکسانی هستند. اما چون تعداد نوترون‌های آن‌ها متفاوت است دارای رفتار هسته‌ای متفاوت هستند. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

A ۲۶۵۴ ۳

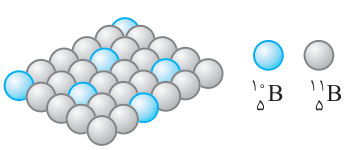
اتم هر عنصر دارای تعداد مشخصی الکترون است، به‌طور مثال اتم اکسیژن دارای ۸ الکترون است و یا اتم اورانیم دارای ۹۲ الکترون است. اما هر عنصر ممکن است ایزوتوپ‌های مختلفی داشته باشد؛ همین امر سبب می گردد که تعداد هسته‌های موجود در طبیعت از تعداد اتم‌های موجود در طبیعت بیشتر باشد.

B ۲۶۵۵ ۴

نکته جرم اتمی درج شده در جدول تناوبی عناصر، میانگین جرم‌های اتمی ایزوتوپ‌های مختلف هر عنصر است.

با توجه به درصد فراوانی ایزوتوپ‌های $^{11}_{5}B$ و $^{10}_{5}B$، جرم اتمی بور را حساب می‌کنیم. به شکل دقت کنید. از ۳۰ اتم بور ۶ اتم آن $^{10}_{5}B$ و ۲۴ اتم آن $^{11}_{5}B$ است بنابراین:

$$\frac{6\times(10)+24\times(11)}{30}=10/8g$$



C ۲۶۵۶ **۴**

عنصر دارای ۹ ایزوتوپ است و سنگین‌ترین ایزوتوپ $^{A}_{Z}X$ است. ایزوتوپ‌ها دارای عدد اتمی یکسان و عدد جرمی متفاوت (تعداد نوترون‌های متفاوت) هستند. حال فرض کنید ایزوتوپ‌ها به گونه‌ای هستند که هر ایزوتوپ با دیگری یک نوترون اختلاف داشته باشد. در این صورت عدد جرمی ایزوتوپ‌ها به‌صورت زیر است:

سبک‌ترین ایزوتوپ $\underbrace{^{A}_{Z}X\ ,\ ^{A-1}_{Z}X\ ,\ ^{A-2}_{Z}X\ ,\ ^{A-3}_{Z}X\cdots\ ^{A-8}_{Z}X}_{\text{۹ ایزوتوپ}}$

بنابراین سبک‌ترین ایزوتوپ نمی‌تواند دارای عدد جرمی $A-7$ باشد. حال اگر هر ایزوتوپ با ایزوتوپ دیگر ۲ نوترون تفاوت داشته باشد، سبک‌ترین ایزوتوپ خواهد شد.

سبک‌ترین ایزوتوپ $\underbrace{^{A}_{Z}X\ ,\ ^{A-2}_{Z}X\ ,\ ^{A-4}_{Z}X\ ,\ ^{A-6}_{Z}X\cdots\ ^{A-16}_{Z}X}_{\text{۹ ایزوتوپ}}$

مشاهده می‌کنید که هرچه تفاوت نوترون‌ها در دو ایزوتوپ بیشتر شود، سبک‌ترین ایزوتوپ از $^{A-8}_{Z}X$ سبک‌تر خواهد شد.

A ۲۶۵۷ **۴**

نیروی هسته‌ای در مقایسه با نیروی کولنی نیرویی بسیار قوی‌تر است اما بُرد نیروی هسته‌ای کوتاه است و در ابعاد هستهٔ اتم $(10^{-15}\,m)$ عمل می‌کند. پس گزینهٔ (۴) درست است.

بازی با سؤال **نیروهای هسته‌ای ..... و ..... هستند و با افزایش تعداد پروتون‌ها در هسته، نقش نیروی ..... بارزتر می‌شود.**

۱) قوی - کوتاه‌برد - کولنی
۲) قوی - دوربرد - هسته‌ای
۳) ضعیف - کوتاه‌برد - کولنی
۴) ضعیف - کوتاه‌برد - هسته‌ای

پاسخ **نیروهای هسته‌ای بین نوکلئون‌ها نسبت به نیروی دافعهٔ کولنی بین پروتون‌ها در هسته بسیار قوی‌تر بوده، از این رو آن را نیروی هسته‌ای قوی گویند. اما نیروی هسته‌ای کوتاه‌برد است و در هسته‌های سنگین که تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها زیاد شده و ابعاد هسته بزرگ می‌شود، نیروی دافعهٔ کولنی نقش پررنگ‌تری خواهد داشت.** گزینهٔ ۱

A ۲۶۵۸ **۳**

نیروی هسته‌ای یک نیروی رباییشی بین نوکلئون‌های هسته است. این نیرو کوتاه‌بُرد است و در فاصله‌های کوچک‌تر از ابعاد هسته عمل می‌کند.

A ۲۶۵۹ **۴**

نیروی هسته‌ای یک نیروی رباییشی بین نوکلئون‌های مجاور در هسته است. این نیرو کوتاه‌بُرد بوده و نسبت به نیروی الکتریکی رانشی پروتون‌ها بسیار قوی‌تر است، به همین علت آن را نیروی هسته‌ای قوی گویند.

A ۲۶۶۰ **۱**

نیروی هسته‌ای یک نیروی کوتاه‌بُرد و رباییشی بین نوکلئون‌های هسته است. یعنی دو پروتون و یا دو نوترون و یا یک نوترون و یک پروتون همدیگر را با نیروی هسته‌ای می‌ربایند و این نیرو در فواصل یکسان برای همهٔ حالت‌های بیان شده یکسان است.

بازی با سؤال **نیروی هسته‌ای در فاصلهٔ یکسان بین کدام دو ذره بیشتر از مابقی است؟**

۱) پروتون - پروتون
۲) پروتون - نوترون
۳) نوترون - نوترون
۴) هر سه نیروی هسته‌ای یکسانی دارند.

پاسخ **نیروی هسته‌ای مستقل از بار ذره است، در واقع نیروی هسته‌ای بین دو پروتون و یک پروتون - یک نوترون با هم برابر است.** گزینهٔ ٤

A ۲۶۶۱ **۳**

نیروی هسته‌ای، قوی اما کوتاه‌برد است. به همین علت وقتی هسته سنگین و ابعاد آن بزرگ است، نیروی هسته‌ای بین نوکلئون‌های دور از هم بسیار ناچیز اما نیروی دافعهٔ کولنی بین پروتون‌ها همچنان باقی و قابل ملاحظه است که سبب ناپایداری هسته‌های سنگین می‌شود، به همین علت ابعاد هسته‌های پایدار دارای یک حد است.

A ۲۶۶۲ **۲**

وقتی تعداد پروتون‌های درون هسته افزایش یابد، اگر هسته بخواهد پایدار بماند باید تعداد نوترون‌های درون هسته نیز افزایش یابد. البته هرچه هسته سنگین‌تر می‌شود افزایش تعداد نوترون‌ها از افزایش تعداد پروتون‌ها بیشتر است و نسبت $\frac{N}{Z}$ افزایش می‌یابد.

بازی با سؤال **کدام گزینه در مورد نسبت تعداد نوترون به پروتون $(\frac{N}{Z})$ هسته‌های پایدار درست است؟**

۱) برای هسته‌های پایدار سنگین بیشتر از هسته‌های سبک است.
۲) برای هسته‌های پایدار سبک بیشینه از هسته‌های سنگین است.
۳) برای همهٔ هسته‌های پایدار تقریباً مساوی است.
۴) این نسبت به سنگین یا سبک بودن هسته‌های پایدار بستگی ندارد.

پاسخ **در هستهٔ عناصر در جدول تناوبی، عناصر تا $Z=30$ را عناصر سبک گویند که در آن‌ها $\frac{N}{Z}\approx 1$ و هسته‌های سنگین به عنصرهایی مانند اورانیم، رادیم و غیره در انتهای جدول می‌گویند که نسبت $\frac{N}{Z}$ آن‌ها حدود ۱/۵ است. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.** گزینهٔ ۱

A ۲۶۶۳ **۴**

یادآوری در هسته‌های سبک مانند اکسیژن $^{16}_{8}O$، تعداد نوترون‌ها (N) و تعداد پروتون‌ها (Z) با هم برابر است و هرچه در جدول تناوبی به سمت هسته‌های (عناصر) سنگین‌تر با عدد اتمی بزرگ‌تر برویم تعداد نوترون‌ها افزایش می‌یابد.

با توجه به یادآوری بالا، در هسته‌های پایدار سنگین‌تر نسبت N/Z بزرگ‌تر است.

A ۲۶۶۴ **۳**

محدودهٔ عدد اتمی عنصرهای موجود در طبیعت از $Z=1$ برای هیدروژن تا $Z=92$ برای اورانیم می‌باشد و گزینهٔ (۱) درست است.

سنگین‌ترین عنصر پایدار بیسموت است $(Z=83)$ و هسته‌های بعد از آن ناپایدار هستند و گزینهٔ (۲) درست است.

از عناصر ناپایدار با $Z>83$ تنها توریم $(Z=90)$ و اورانیم $(Z=92)$ در طبیعت یافت می‌شوند و گزینهٔ (۳) نادرست است.

هرچه هسته بزرگ‌تر می‌شود $(Z$ افزایش می‌یابد) تعداد نوترون‌ها به گونه‌ای افزایش می‌یابد که نسبت $\frac{N}{Z}$ زیاد می‌شود و گزینهٔ (۴) درست است.

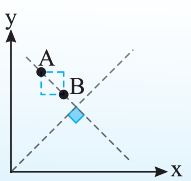
A ۲۶۶۵ **۲**

بیسموت با عدد اتمی ۸۳ سنگین‌ترین هستهٔ پایدار است. اما عنصری که دارای بیشترین عدد اتمی، بیشترین نوترون و سنگین‌ترین هسته است، ایزوتوپ $^{238}_{92}U$ می‌باشد.

A ۲۶۶۶ **۳**

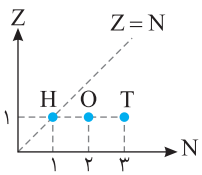
ویژگی‌های هر اتم توسط تعداد الکترون‌های آن مشخص می‌شود و گزارهٔ (الف) درست است. ویژگی‌های هستهٔ هر اتم را تعداد نوترون‌ها و پروتون‌های آن مشخص می‌کند و گزارهٔ (ب) نادرست است.

یادداشت ریاضی در صفحهٔ xoy، جمع مختصات $(x+y)$ تمام نقطه‌های روی خط عمود بر نیمساز عدد ثابتی است. به‌طور مثال اگر از A به B برویم به همان اندازه که x زیاد می‌شود، y کم شده و $x+y$ ثابت می‌ماند.



در نمودار $Z-N$ خط عمود بر نیمساز مشخص‌کنندهٔ عناصر با عدد جرمی یکسان است و گزارهٔ (پ) درست است.

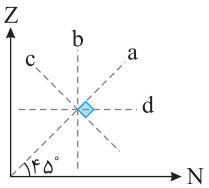
در نمودار $Z-N$، ایزوتوپ‌های یک عنصر بر خط عمود بر محور Z واقع شده‌اند. مطابق شکل روبه‌رو اگر بر محور Z برای $Z=1$ خطی عمود کنیم تمام ایزوتوپ‌هایی که دارای یک پروتون هستند مانند هیدروژن، دوتریم، تریتیم و ... مشخص می‌شوند. یعنی هرگاه عمودی بر محور Z رسم کنیم، به تعداد نقاطی که روی این خط قرار می‌گیرد آن عنصر دارای ایزوتوپ است و گزارهٔ (ت) درست است.



در نتیجه ۳ گزاره از ۴ گزاره درست است.

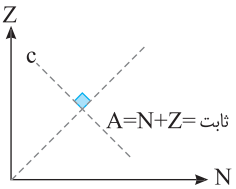
بازی با سؤال در شکل روبه‌رو نمودار عدد اتمی برحسب عدد نوترونی رسم شده است. عنصرهای روی کدام خط دارای عدد جرمی یکسان هستند؟

۱) a ۲) b ۳) c ۴) d



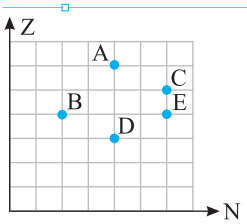
پاسخ با توجه به نمودار عنصرهای روی خط c (خط عمود بر نیمساز) دارای عدد جرمی $A=Z+N$ یکسان هستند.

گزینهٔ ۳



A ۲۶۶۷ ۱

می‌دانیم تعداد پروتون‌های دو ایزوتوپ، یکسان و تعداد نوترون‌های آن‌ها مختلف است. بنابراین با توجه به نمودار دو عنصر B و E که دارای عدد اتمی یکسان هستند، ایزوتوپ یکدیگرند.

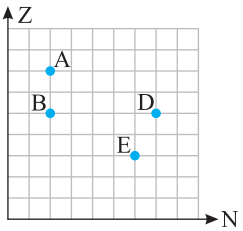


A ۲۶۶۸ ۳

A و B دارای تعداد نوترون‌های برابرند اما عدد اتمی متفاوت دارند، بنابراین ممکن نیست که عدد جرمی آن‌ها $(A=Z+N)$ یکسان باشد و گزینهٔ (۱) نادرست است.

D و B دارای عدد اتمی یکسان و عدد نوترونی متفاوت هستند و ایزوتوپ یکدیگرند و عدد جرمی یکسانی ندارند. بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است.

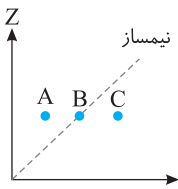
اگر به A و E دقت کنید تعداد نوترون‌های E، چهار واحد از تعداد نوترون‌های A بیشتر و تعداد پروتون‌های E چهار واحد از تعداد پروتون‌های A کمتر است؛ در این صورت عدد جرمی A و E $(A=Z+N)$ با هم برابر است و گزینهٔ (۳) درست است.



عنصر D یک نوترون و دو پروتون از عنصر E بیشتر دارد، بنابراین $A_D > A_E$ و گزینهٔ (۴) نادرست است.

B ۲۶۶۹ ۱

در نمودار عدد اتمی برحسب عدد جرمی تمام هسته‌های عناصر طبیعی در سمت راست نیمساز قرار دارند زیرا در سمت راست نیمساز، تعداد پروتون‌ها از تعداد نوترون‌ها کمتر است و در سمت چپ تعداد پروتون‌ها از تعداد نوترون‌ها بیشتر است و اگر تعداد پروتون‌ها از نوترون‌ها بیشتر باشد، دافعهٔ الکتریکی بین پروتون سبب می‌گردد هسته‌ای از این دست وجود نداشته باشد. بنابراین ایزوتوپ A امکان وجود طبیعی ندارد.



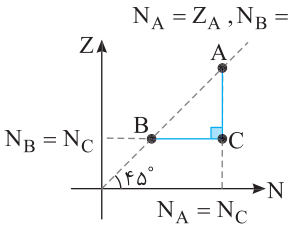
B ۲۶۷۰ ۱

۱ عنصر B روی نیمساز نمودار $Z-N$ قرار دارد و عدد اتمی آن با عدد نوترونی آن برابر است: $Z=N$

بنا به فرض مسئله عدد جرمی B، ۴۰ است، از این‌رو:

$$B:\begin{cases}Z=N\\Z+N=۴۰\end{cases}\Rightarrow Z=N=۲۰$$

۲ با توجه به نمودار عنصر C و عنصر B دارای عدد اتمی یکسان هستند و ایزوتوپ‌های یک عنصر می‌باشند و بنابراین عدد اتمی عنصر C نیز برابر ۲۰ است. $Z_C=Z_B=۲۰$



۳ A روی نیمساز قرار دارد. از طرفی عدد اتمی A بنا به فرض مسئله ۲۵ است. بنابراین: $N_A=Z_A=۲۵$

۴ عنصر C و عنصر A با توجه به نمودار دارای عدد نوترونی برابر هستند و عدد نوترونی C خواهد شد: $N_C=N_A=۲۵$

۵ عدد جرمی C را حساب می‌کنیم:

$$A_C=N_C+Z_C\Rightarrow A_C=۲۵+۲۰=۴۵$$

۶ اکنون نماد عنصر C را می‌نویسیم: ${}^{A_C}_{Z_C}C\Rightarrow {}^{۴۵}_{۲۰}C$

B ۲۶۷۱ ۴

۱ به کمک بار هسته می‌توان تعداد پروتون‌های هسته (عدد اتمی) عنصر M را به‌دست آورد. $Q=Ze\Rightarrow ۱/۲۸\times۱۰^{-۱۸}=Z_M(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})\Rightarrow Z_M=۸$

۲ عنصر M روی نیمساز قرار دارد، بنابراین تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های آن یکسان است از این‌رو: $N_M=Z_M=۸$

۳ عدد جرمی عنصر M خواهد شد:

$$A_M=Z_M+N_M=۸+۸\Rightarrow A_M=۱۶$$

نکته تمام هسته‌هایی که روی خطی عمود بر نیمساز قرار دارند دارای عدد جرمی یکسان هستند.

۴ عنصر P روی خطی قرار دارد که شیب آن -۱ است، شیب نیمساز ۱ است بنابراین خط مورد نظر بر نیمساز عمود است.

بنابراین $A_P=A_M=۱۶$ است.

B ۲۶۷۲ ۴

در یک هستهٔ اتم کربن ${}^{۱۲}_{۶}C$ تعداد پرتون‌ها و نوترون‌ها به صورت $A=Z+N=۱۲$ است، بنابراین حجم اشغالی یک هستهٔ کربن برابر است با:

$$V_{\text{هسته}}=۱۲\times\frac{۴}{۳}\pi r^۳=۱۶\pi(۱۰^{-۱۵})^۳=۱۶\pi\times۱۰^{-۴۵}=۴۸\times۱۰^{-۴۵}\,m^۳$$

گنجایش توپ تنیس برابر است با:

$$V_{\text{توپ}}=\frac{۴}{۳}\pi r^۳=\frac{۴}{۳}\times۳\times(۳\times۱۰^{-۲})^۳=۴\times۲۷\times۱۰^{-۶}\,m^۳$$

$$n=\frac{V_{\text{توپ}}}{V_{\text{هسته}}}=\frac{۴\times۲۷\times۱۰^{-۶}}{۴۸\times۱۰^{-۴۵}}=۲/۲۵\times۱۰^{۳۹}\sim۱۰^{۳۹}$$

بازی با سؤال جرم نوترون‌هایی را که می‌توان کنار هم درون یک جعبه کبریت به ابعاد $۶cm\times۴cm\times۲cm$ قرار داد، تقریباً چند کیلوگرم است؟ (شعاع و جرم نوترون تقریباً $۱۰^{-۱۵}m$ و $۱۰^{-۲۷}kg$ است و $\pi\simeq۳$.) از کتاب درسی

۱) $۱۰^{۵}$ ۲) $۱۰^{۱۳}$ ۳) $۱۰^{۲۰}$ ۴) $۱۰^{۲۵}$

پاسخ حجمی که هر نوترون اشغال می‌کند، برابر است با:

$$V_{\text{نوترون}}=\frac{۴}{۳}\pi r^۳_{\text{نوترون}}=۴\times(۱۰^{-۱۵})^۳=۴\times۱۰^{-۴۵}\,m^۳$$

گنجایش قوطی کبریت برابر است با:

$$V=۶\times۴\times۲\times۱۰^{-۶}\,m^۳=۴/۸\times۱۰^{-۵}\,m^۳$$

تعداد نوترون‌هایی که در این قوطی جای می‌گیرند برابر است با:

$$n=\frac{V}{V_{\text{نوترون}}}=\frac{۴/۸\times۱۰^{-۵}}{۴\times۱۰^{-۴۵}}=۱/۲\times۱۰^{۴۰}$$

بنابراین $۱/۲\times۱۰^{+۴۰}$ نوترون در این قوطی جای می‌گیرند و می‌دانیم جرم هر نوترون برابر $۱۰^{-۲۷}kg$ است.

$$M_{\text{کل}}=nm_{\text{نوترون}}=۱/۲\times۱۰^{+۴۰}\times۱۰^{-۲۷}=۱/۲\times۱۰^{۱۳}kg\Rightarrow M_{\text{کل}}\sim۱۰^{۱۳}kg$$

گزینهٔ ۲

A ۲۶۷۳ ۳

آزمایش نشان می‌دهد جرم هسته از مجموع جرم نوکلئون‌های تشکیل‌دهندهٔ آن کمتر است. طبق رابطهٔ اینشتین $(E=\Delta mc^۲)$ هنگام تشکیل هسته، این اختلاف جرم به انرژی تبدیل می‌شود که آن را انرژی بستگی می‌نامند.

A ۲۶۷۴ ۳

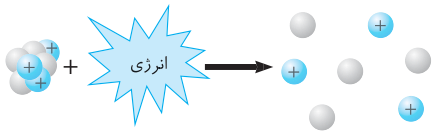
جرم هستهٔ اتم از جرم نوکلئون‌های آن کمتر است. این کاستی جرم به انرژی بستگی هسته تبدیل می‌شود. بنابراین منشأ انرژی بستگی هسته، تبدیل جرم به انرژی است.

A ۲۶۷۵ ۳

فرض کنید می‌خواهیم نوکلئون‌های یک هسته را از هم جدا کنیم، در این صورت باید به نوکلئون‌ها انرژی داده شود تا از هسته جدا شوند. بنابراین هنگام تشکیل هسته که نوکلئون‌ها کنار هم قرار می‌گیرند، باید نوکلئون‌ها انرژی از دست داده باشند. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

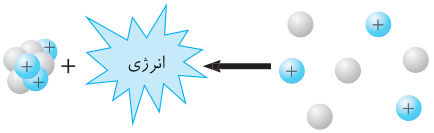
A ۲۶۷۶ ۳

در شکل‌ها به جهت پیکان دقت کنید. شکل (الف) واپاشی یک هسته به نوکلئون‌های تشکیل دهنده‌اش را با دریافت انرژی نشان می‌دهد و این طرحواره می‌تواند درست باشد.



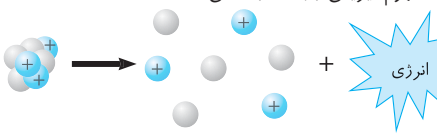
(الف)

در شکل (ب) با توجه به جهت پیکان، تعدادی نوکلئون یک هسته تشکیل داده‌اند و مقداری انرژی آزاد کرده‌اند که سبب کاستی جرم هسته می‌شود. بنابراین طرحواره شکل (ب) نیز درست است.



(ب)

شکل (پ) هیچ‌گونه مفهوم فیزیکی را به ما ارائه نمی‌دهد.



(پ)

A ۲۶۷۷ ۳

در یک هستهٔ پایدار، مجموع جرم نوکلئون‌های تشکیل‌دهندهٔ هسته از جرم هسته بیشتر است و گزینهٔ (۳) درست است.

A ۲۶۷۸ ۴

الف) نادرست. جرم هسته از مجموع جرم نوکلئون‌های آن کمتر است.

ب) درست. انرژی لازم برای جدا کردن نوکلئون‌ها را انرژی بستگی هسته‌ای گویند.

پ) درست. برای پایداری هسته، در هسته‌های سنگین، تعداد نوترون‌ها از تعداد پروتون‌ها بیشتر است.

A ۲۶۷۹ ۳

جرم هر اتم از مجموع جرم ذره‌های تشکیل‌دهندهٔ آن کمتر است، همچنین جرم هسته از مجموع جرم نوکلئون‌های تشکیل‌دهندهٔ آن کمتر است، بنابراین جرم هستهٔ هلیم که دارای دو پروتون و دو نوترون است، از مجموع جرم دو نوترون و دو پروتون کمتر است.

B ۲۶۸۰ ۱

اندازه‌گیری‌های تجربی نشان می‌دهد، جرم هستهٔ اتم از جرم نوکلئون‌های تشکیل دهندهٔ آن کمتر است. در واقع برای تشکیل هسته، مقداری انرژی لازم است که از تبدیل بخش کوچکی از جرم نوکلئون‌ها به انرژی تأمین می‌شود که به آن انرژی بستگی هسته گویند.

$$E=\Delta Mc^2 \Rightarrow E=[(NM_n+ZM_p)-M_x]c^2$$

بنابراین هرچه اختلاف مجموع جرم نوکلئون‌ها با جرم هسته بیشتر باشد، انرژی بستگی هسته بیشتر است و هسته پایدارتر است.

A ۲۶۸۱ ۴

کاستی جرم هسته برابر تفاضل مجموع جرم نوکلئون‌های تشکیل دهندهٔ هسته و جرم هسته است. بنابراین باید مجموع جرم نوکلئون‌های هستهٔ کربن $_{6}^{12}C$ را به‌دست آوریم $(6m_p+6m_n)$

سپس جرم هستهٔ کربن را از آن کم کرد.

$$\Delta m=(6m_p+6m_n)-m_C$$

A ۲۶۸۲ ۱

با توجه به رابطهٔ اینشتین خواهیم داشت:

$$E=mc^2 \Rightarrow E=1/67\times10^{-27}\times(3\times10^8)^2$$

$$\Rightarrow E=1/67\times10^{-27}\times9\times10^{16}=15/03\times10^{-11}\approx1/5\times10^{-10}\,J$$

A ۲۶۸۳ ۲

بنا بر نظریهٔ اینشتین، جرم و انرژی صورت‌های مختلف یک کمیت فیزیکی هستند و رابطهٔ $E=mc^2$ بین آن‌ها برقرار است که در آن c سرعت نور است.

$$E=mc^2 \xrightarrow{E=7/2\times10^{12}\,J\,,\,c=3\times10^8\,m/s} 7/2\times10^{12}=m\times(3\times10^8)^2$$

$$\Rightarrow m=\frac{7/2\times10^{12}}{9\times10^{16}}=0/8\times10^{-4}\,kg \Rightarrow m=0/08\,g$$

A ۲۶۸۴ ۲

۱ جرمی که به انرژی تبدیل می‌شود را برحسب kg می‌نویسیم:

$$m=1\mu g=10^{-6}\,g=10^{-6}\times10^{-3}\,kg \Rightarrow m=10^{-9}\,kg$$

۲ ابتدا با استفاده از رابطهٔ اینشتین، انرژی حاصل از تبدیل ۱ میکروگرم جرم به انرژی را به‌دست می‌آوریم:

$$E=mc^2=(1\times10^{-9})\times(3\times10^8)^2=9\times10^7\,J=9\times10^4\,kJ$$

۳ حال مقدار نفت مورد نیاز برای تولید $9\times10^4\,kJ$ انرژی را با یک تناسب ساده حساب می‌کنیم:

نفت	انرژی
1g	50 kJ
m′	9×10^4 kJ

$$\Rightarrow m'=\frac{9\times10^4}{50}=1/8\times10^3\,g=1/8\,kg$$

A ۲۶۸۵ ۴

۱ انرژی حاصل از تبدیل ۴ گرم ماده به انرژی را به کمک رابطهٔ اینشتین به‌دست می‌آوریم:

$$E=mc^2 \Rightarrow E=4\times10^{-3}\times(3\times10^8)^2 \Rightarrow E=36\times10^{13}\,J$$

۲ مقدار انرژی‌ای که هر لامپ ۱۰۰ واتی در مدت ۲۰ ساعت مصرف می‌کند را حساب می‌کنیم:

$$P=\frac{E}{t} \Rightarrow E=100\times20\times3600 \Rightarrow E=7/2\times10^6\,J$$

۳ بنابراین تعداد لامپ‌ها را به کمک یک تناسب ساده می‌توان حساب کرد:

$7/2\times10^6$	لامپ ۱
36×10^{13}	لامپ n

$$\Rightarrow n=\frac{36\times10^{13}}{7/2\times10^6} \Rightarrow n=5\times10^7=50000000$$

A ۲۶۸۶ ۱

خط فکری به کمک رابطهٔ اینشتین، مقدار انرژی حاصل از تبدیل یک گرم جرم به انرژی را حساب کنید، سپس به کمک رابطهٔ انرژی پتانسیل گرانشی $U=mgh$ جرمی را که با این انرژی می‌توان به ارتفاع صدمتری برد به‌دست بیاورید.

۱ ابتدا انرژی حاصل از یک گرم را به‌دست می‌آوریم:

$$E=mc^2 \Rightarrow E=10^{-3}\times(3\times10^8)^2 \Rightarrow E=9\times10^{13}\,J$$

۲ اکنون مقدار جرمی را که می‌توان با این انرژی به ارتفاع صد متر بالا برد به‌دست می‌آوریم:

$$E=mgh \Rightarrow 9\times10^{13}=m\times10\times100 \Rightarrow m=9\times10^{10}\,kg$$

$$\Rightarrow m=90\times10^6 \text{ تن} \Rightarrow m=90 \text{ میلیون تن}$$

A ۲۶۸۷ ۱

با توجه به رابطهٔ $E=mc^2$ داریم:

$$\begin{cases} E=1\,u\times c^2=1/66\times10^{-27}\times9\times10^{16}=1/49\times10^{-10}\,J \\ 1\,J=6/25\times10^{18}\,eV=6/25\times10^{12}\,MeV \end{cases}$$

$$\Rightarrow E=1/49\times10^{-10}\times6/25\times10^{12}=931/5\,MeV$$

نکته این تبدیل که انرژی معادل جرم ۱u برابر است با: 931/5MeV بهتر است به خاطر سپرده شود.

A ۲۶۸۸ ۳

انرژی بستگی برابر است با جرم کاستی هسته (Δm) ضرب در مجذور سرعت نور (c^2)، بنابراین:

$$\frac{(\Delta mc^2)_{\text{کربن}}}{(\Delta mc^2)_{\text{دوتریم}}}=\frac{\Delta m_{\text{کربن}}}{\Delta m_{\text{دوتریم}}}=\frac{۰/۰۹}{۰/۰۱۵}=\frac{۹۰}{۱۵}=۶$$

A ۲۶۸۹ ۳

هسته مانند اتم دارای ترازهای انرژی کوانتیده است و نوکلئون درون هسته نمی‌تواند هر انرژی دلخواهی را اختیار کند و گزارهٔ (الف) درست است. اختلاف انرژی ترازهای نوکلئون در هسته از مرتبهٔ MeV و ترازهای انرژی الکترون در اتم از مرتبهٔ eV است، بنابراین گزارهٔ (ب) نادرست است.

نوکلئون‌ها می‌توانند با جذب انرژی در هسته به ترازهای انرژی بالا بروند و هسته برانگیخته شود، بنابراین گزارهٔ (پ) درست است.

اختلاف انرژی ترازهای هسته از مرتبهٔ MeV (مگاالکترون‌ولت) است و گزارهٔ (ت) نادرست است.

B ۲۶۹۰ ۴

علت نادرستی سایر گزینه‌ها: گزینهٔ (۱): هسته‌ها در واکنش‌های هسته‌ای برانگیخته می‌شوند.

گزینهٔ (۲): جرم هسته از مجموع جرم نوکلئون‌های تشکیل‌دهنده‌اش کمتر است. گزینهٔ (۳): انرژی نوکلئون‌ها درون هسته کوانتیده است و نمی‌توانند هر انرژی دلخواهی را اختیار کنند.

B ۲۶۹۱ ۱

الف) نادرست. (در واکنش هسته‌ای تعداد نوکلئون‌ها پایسته است.) ب) نادرست. پ) درست. (اختلاف ترازهای انرژی هسته‌ای حدود چند keV تا MeV است. اما اختلاف ترازهای اتم حدود چند eV است.)

A ۲۶۹۲ ۳

نکته پرتو الکترومغناطیسی که هسته گسیل می‌کند همواره پرتو گاما است. بدون حل کاملاً مشخص است که پرتو گسیل شده از هسته قطعاً گاما است و گزینهٔ (۳) درست است. اما اگر بخواهیم طول موج پرتو را به‌دست بیاوریم خواهیم داشت:

$$E=hf\Rightarrow E=h\frac{c}{\lambda}\Rightarrow ۴\times۱۰^{+۶}\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}=۶/۴\times۱۰^{-۳۴}\times\frac{۳\times۱۰^{۸}}{\lambda}$$

$$\lambda=۳\times۱۰^{-۱۳}\,m=۳\times۱۰^{-۴}\,nm$$

طول موج فرابنفش حدود ۴۰۰۰nm است و طول موج فروسرخ و رادیویی از ۷۰۰۰nm بیشتر است، بنابراین این طول موج مربوط به پرتو گاما است.

A ۲۶۹۳ ۲

کاستی جرم هسته را به‌دست می‌آوریم: $۳/۰۲۴۵-۳/۰۱۳۶=۰/۰۱۰۹$

انرژی بستگی هسته خواهد شد: $۰/۰۱۰۹\times۹۳۱/۵\approx۱۰/۱۵MeV$

بازی با سوال انرژی بستگی یک هسته برابر ۳۱۰/۵MeV است. کاستی جرم هسته حدود چند u است؟ $(c=۳\times۱۰^{۸}\,m/s)$ از کتاب درسی

۱) ۰/۳۳ ۲) ۰/۴۵ ۳) ۰/۲۷ ۴) ۱/۴

پاسخ **نکته** انرژی حاصل از تبدیل جرمی معادل ۱u به انرژی، برابر ۹۳۱/۵Mev است. کافی است انرژی بستگی را بر ۹۳۱/۵ تقسیم کنیم.

گزینهٔ ۱ $\frac{۳۱۰/۵}{۹۳۱/۵}=\frac{۱}{۳}\approx۰/۳۳u$

A ۲۶۹۴ ۲

تریتیم دارای سه نوکلئون است، از این‌رو انرژی بستگی هسته به ازای هر نوکلئون خواهد شد: $\frac{۱۰/۱۵}{۳}=۳/۳۸۳MeV$

A ۲۶۹۵ ۲

۱ تغییر جرم را حساب می‌کنیم:

$$\Delta M=M_{Ra}-(M_{Rn}+M_{He})\Rightarrow\Delta M=۲۲۳/۰۱۸-(۲۱۹/۰۰۹+۴/۰۰۳)$$

$$\Rightarrow\Delta M=۲۲۳/۰۱۸-۲۲۳/۰۱۲=۰/۰۰۶u$$

۲ به کمک رابطهٔ اینشتین انرژی آزاد شده را حساب می‌کنیم.

$$E=mc^2\Rightarrow E=۰/۰۰۶\times۹۳۱/۵=۵/۵۸۹MeV$$

$$=۵/۵۸۹\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\times۱۰^{۶}=۸/۹۴۲۴\times۱۰^{-۱۳}\,J$$

بازی با سوال در هسته‌های یک عنصر، جرم نوکلئون‌های تشکیل‌دهندهٔ هستهٔ آن ۰/۰۰۲u بیشتر از جرم خود هسته است و هر u (یکای جرم اتمی) معادل با $۱/۶۶\times۱۰^{-۲۷}\,kg$ است. انرژی بستگی هسته‌ای این عنصر چند ژول است؟ $(c=۳\times۱۰^{۸}\,m/s)$

۱) $۱/۸\times۱۰^{-۱۴}$ ۴) $۷/۴۷\times۱۰^{-۸}$ ۳) $۱/۴۹۴\times۱۰^{-۱۰}$ ۲) $۲/۹۸۸\times۱۰^{-۱۳}$

پاسخ تفاوت جرم هسته و نوکلئون‌ها به انرژی تبدیل می‌شود. تفاوت جرم را برحسب kg به‌دست می‌آوریم:

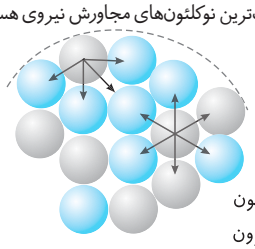
$$\Delta m=۰/۰۰۲\times۱/۶۶\times۱۰^{-۲۷}=۳/۳۲\times۱۰^{-۳۰}\,kg$$

$$E=\Delta mc^2\Rightarrow E=۳/۳۲\times۱۰^{-۳۰}\times(۳\times۱۰^{۸})^2\Rightarrow E=۲/۹۸۸\times۱۰^{-۱۳}\,J$$

گزینهٔ ۱

B ۲۶۹۶ ۲

نکته قسمتی از هسته و نوکلئون‌های آن به صورت طرح‌واره نشان داده شده است. هر نوکلئون فقط به نزدیک‌ترین نوکلئون‌های مجاورش نیروی هسته‌ای وارد می‌کند.

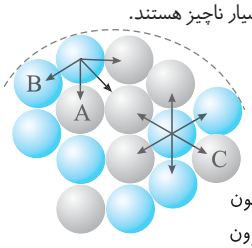


پروتون P
نوترون N

نیرویی که دو پروتون بر هم وارد می‌کنند:

۱ نیروی رباییشی هسته‌ای ۲ نیروی رانش الکتریکی

البته نیروی گرانش بین آن‌ها بسیار ناچیز هستند.



پروتون P
نوترون N

نیروی هسته‌ای پروتون‌های A و B بسیار قوی‌تر از نیروی الکتریکی بین آن‌ها است، زیرا این دو پروتون مجاور هم هستند. بنابراین نیروی خالص بین A و B رباییشی است. نیروی هسته‌ای نیروی کوتاه بُرد است، نیروی رباییشی هسته‌ای بین B و C کم است اما نیروی دافعهٔ الکتریکی نیروی بلندبُردتری است. بنابراین دافعهٔ الکتریکی بین دو پروتون B و C از رباییش هسته‌ای بیشتر است و نیروی خالص رانشی است.

پنجره ۲

A ۲۶۹۷ ۴

آلفا، بتا و پوزیترون ذره و گاما و ایکس موج الکترومغناطیسی هستند.

پرتو گاما از جنس امواج الکترومغناطیسی است. آلفا ذره‌ای با دو نوترون و دو پروتون است $(\alpha\equiv{}^{۴}_{۲}He)$.

ذرهٔ بتا، الکترون $(\beta=e^{-}_{۱})$ است و پوزیترون نیز ذره‌ای با جرم الکترون و بار مثبت برابر با بار الکترون است $(\beta^{+}=e^{+}_{۱})$ بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) نادرست است.

پرتو ایکس مانند پرتو گاما از جنس امواج الکترومغناطیسی است و گزینهٔ (۴) درست است.

A ۲۶۹۸ ۲

پرتو گاما از جنس پرتوهای الکترومغناطیسی بوده و هنگامی که یک هستهٔ برانگیخته با گسیل پرتو گاما به هستهٔ حالت پایه تبدیل می‌شود، عدد جرمی و عدد اتمی آن تغییر نمی‌کند. $^{A}_{Z}X^{*}\rightarrow{}^{A}_{Z}X+{}^{۰}_{۰}\gamma$

A ۲۶۹۹ ۲

قدرت نفوذ گاما از دو پرتو دیگر بیشتر و قدرت نفوذ آلفا از دو پرتو دیگر کمتر است و گزینهٔ (۲) درست است.

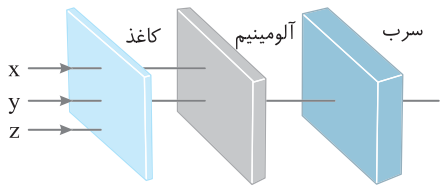
A ۲۷۰۰ ۲

در پرتوزایی طبیعی سه نوع پرتو ایجاد می‌شود. آلفا، بتا، گاما

پرتوهای آلفا کمترین نفوذ را دارند. این ذرات پس از طی مسافت کوتاهی در هوا (۱ تا ۲ سانتی‌متر) و یا با عبور از لایه‌ای نازک از مواد جذب می‌شوند. بنابراین پرتو z، پرتو α و دارای بار مثبت است.

پرتوهای بتا نفوذ بیشتری دارند و در سرب به ضخامت $\approx 0/1mm$ نفوذ می‌کنند. بنابراین پرتو x که در آلومینیم جذب شده پرتو β بوده و دارای بار منفی است.

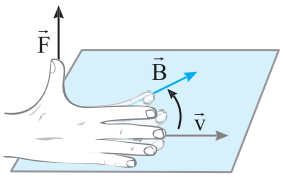
پرتو γ از جنس امواج الکترومغناطیسی است و می‌تواند از ورقه‌ای سربی به ضخامت $\approx 10cm$ بگذرد، بنابراین پرتو y در شکل بدون بار بوده و خنثی است.



B ۲۷۰۱ ۲

یادآوری ۱ هرگاه ذرهٔ بارداری از یک میدان مغناطیسی بگذرد و راستای حرکت آن در راستای خطوط میدان نباشد بر آن نیروی مغناطیسی $F=qvB\sin\alpha$ وارد می‌شود.

یادآوری ۲ قاعدهٔ دست راست برای نیروی وارد بر بار متحرک درون میدان مغناطیسی: چهار انگشت باز دست راست را در جهت حرکت بار به‌گونه‌ای قرار می‌دهیم که خم کردن آن‌ها (کف دست) در جهت میدان مغناطیسی قرار گیرد. در این صورت انگشت باز شست جهت نیروی وارد بر ذرهٔ باردار را نشان می‌دهد.



نوترون چون بدون بار است از مسیر خود منحرف نمی‌شود. آلفا دارای بار مثبت است، بنابراین با توجه به قاعدهٔ دست راست به سمت بالا منحرف می‌شود. بتا دارای بار منفی است پس با توجه به قاعدهٔ دست راست به سمت پایین منحرف می‌شود.

A ۲۷۰۲ ۱

با توجه به شکل سؤال پرتو A به سمت پایین منحرف شده پس نیروی وارد بر این ذره رو به پایین است. با توجه به قاعدهٔ دست، ۴ انگشت در جهت v، شست دست در جهت F و کف دست در جهت B باید قرار گیرد که برای این ذره، با توجه به جهت‌ها با دست چپ، جهت‌های B و v و F مشخص می‌شود و بار منفی و ذره β است.

ذرهٔ C اما به سمت بالا منحرف شده که جهت نیرو را مشخص می‌کند و جهت B و v و F آن به کمک دست راست به‌دست می‌آید و بار ذره مثبت است و این ذره آلفا است.

پرتو B بدون انحراف است و این پرتو بدون بار بوده و پرتو گاما است.

روش دیگر: ذرهٔ آلفا از جنس هستهٔ هلیوم بوده و پرتوی سنگینی است بنابراین میزان انحراف این ذره از ذرهٔ β کمتر است. با توجه به شکل مسیر انحراف پرتو C از پرتو A کمتر است و پرتو C باید آلفا و پرتو A باید β باشد.

B ۲۷۰۳ ۱

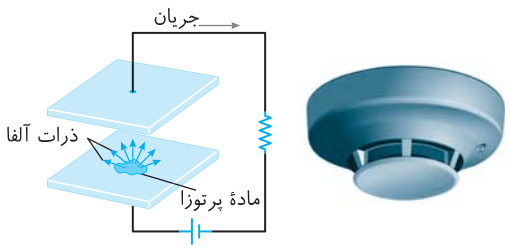
ذرات آلفا و پوزیترون هر دو دارای بار مثبت بوده و با توجه به قاعدهٔ دست راست هر دو به سمت چپ منحرف می‌شوند.

A ۲۷۰۴ ۴

ذرهٔ α دارای دو پروتون و دو نوترون بوده در واقع α، هسته اتم هلیم بوده و دارای بار مثبت است. این ذره سنگین و دارای برد کوتاه است، بنابراین گزاره (الف) نادرست است.

در تمام فرایندهای واپاشی پرتوزا مشاهده شده است که تعداد نوکلئون‌ها (مجموع پروتون‌ها و نوترون‌ها) در طی فرایند واپاشی هسته پایسته است یعنی تعداد نوکلئون‌ها، پیش از فرایند با تعداد نوکلئون‌ها پس از فرایند مساوی است. بنابراین گزاره (ب) درست است.

یکی از کاربردهای گستردهٔ واپاشی α، در آشکارسازهای دود است و گزارهٔ (پ) درست است.



واپاشی α در هسته‌های سنگین مانند اورانیم صورت می‌گیرد و گزارهٔ (ت) نادرست است. بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

A ۲۷۰۵ ۳

یادآوری بار الکترون و بار پروتون هم‌اندازه هستند، ابتدا باید در ذهن خود طریقهٔ تولید پوزیترون (β^+) و الکترون (β^-) در واپاشی هسته‌ای را یادآوری کنید.

۱ برای تولید پوزیترون، یک پروتون در هسته به یک نوترون و یک پوزیترون واپاشیده می‌شود. یعنی از تعداد پروتون‌های هسته یکی کم شده و بار هسته به اندازهٔ بار یک پروتون $(1/6\times10^{-19}C)$ کاهش می‌یابد. بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.

۲ در گسیل الکترون (β^-) یک نوترون به یک الکترون و یک پروتون واپاشیده می‌شود، الکترون از هسته خارج می‌شود و بر تعداد پروتون‌های هسته یک واحد افزوده می‌شود. بنابراین بار هسته به اندازه بار یک پروتون $(1/6\times10^{-19}C)$ افزایش می‌یابد و گزینهٔ (۲) درست است.

$$\underset{\text{نوترون}}{{}^{1}_{0}n} \rightarrow \underset{\text{پروتون}}{{}^{1}_{1}H} + \underset{\text{پوزیترون}}{{}^{0}_{1}e}$$

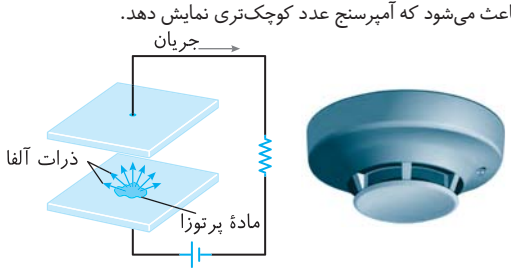
۳ ذرهٔ آلفا، از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده است $(\alpha={}^{4}_{2}He)$ و هر گاه هسته ذرهٔ آلفا گسیل کند قطعاً از تعداد پروتون‌های هسته دو واحد کاسته می‌شود و بار هسته به اندازه $2\times1/6\times10^{-19}=3/2\times10^{-19}C$ کاهش می‌یابد و گزینهٔ (۳) درست است.

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He$$

۴ هنگام گسیل گاما که یک موج الکترومغناطیسی، تعداد پروتون‌های هسته تغییر نمی‌کند و بار هسته ثابت می‌ماند، اما در مورد پوزیترون و الکترون همان‌گونه که بیان شد بار هسته تغییر می‌کند و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۲۷۰۶ ۳

یکی از کاربردهای گستردهٔ واپاشی α در آشکارسازهای دود است که در آن مقدار اندکی از مادهٔ پرتوزا که ذرات α گسیل می‌کند در وسط صفحه‌ای که بار مثبت دارد (که در اینجا صفحهٔ A است زیرا به پایانهٔ مثبت باتری متصل می‌باشد) می‌گذارند (با توجه به اینکه پرتوهای α مثبت هستند باید در صفحهٔ مثبت قرار بگیرد تا از این صفحه به سمت صفحهٔ منفی حرکت کنند) در طی گسیل پرتوی α، به مولکول‌های هوا برخورد کرده و مولکول‌های هوا را یونیده می‌کند و یون‌های مثبت و منفی ایجاد می‌شود، این یون‌ها بین دو صفحهٔ A و B توسط صفحه‌های ناهمنام خود جذب می‌شوند در نتیجه در مدار جریان برقرار می‌شود. هنگامی که دود در هوا باشد دود موجود بین صفحات جریان را کاهش می‌دهد زیرا یون‌هایی که به ذرات دود برخورد می‌کنند معمولاً خنثی می‌شوند و این باعث می‌شود که آمپرسنج عدد کوچک‌تری نمایش دهد.



A ۲۷۰۷ ۴

در واپاشی بتای منفی (الکترون‌زا) یک نوترون به یک پروتون و یک الکترون تبدیل می‌شود.

$${}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{1}_{1}H + {}^{0}_{-1}e$$ واپاشی بتای منفی

هرگاه هستهٔ β^- گسیل کند عدد جرمی (تعداد نوکلئون‌ها) آن تغییر نمی‌کند اما عدد اتمی (تعداد پروتون‌ها) یک واحد افزایش می‌یابد.

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}e$$

در واپاشی پوزیترون یک پروتون به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود.

$${}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{0}_{+1}e$$ واپاشی بتای مثبت

هرگاه هستهٔ β^+ (پوزیترون) گسیل کند عدد جرمی (تعداد نوکلئون‌ها) ثابت می‌ماند اما عدد اتمی (تعداد پروتون‌ها) یک واحد کاهش می‌یابد. $\ {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + {}^{0}_{+1}e$

هر چهار گزاره درست هستند.

بازی با سؤال **در واپاشی بتای منفی .....** کنکورهای دهه‌های گذشته

۱) عدد اتمی ثابت می‌ماند.

۲) جرم اتمی یک واحد زیاد می‌شود.

۳) مجموع نوکلئون‌ها ثابت می‌ماند.

۴) در هسته یک پروتون کم و یک نوترون اضافه می‌شود.

پاسخ **در واپاشی بتای منفی** $({}^{0}_{-1}e)$**، عدد جرمی بدون تغییر می‌ماند و به عدد اتمی یک واحد افزوده می‌شود.**

در واقع یک نوترون در هستهٔ عنصر پرتوزا واپاشیده شده و به یک پروتون و یک الکترون (بتای منفی) تبدیل می‌شود که بتا از هسته خارج می‌گردد. بنابراین مجموع نوکلئون‌ها $(A=Z+N)$ **ثابت می‌ماند، اما به تعداد پروتون‌های هسته یک واحد افزوده می‌شود.** گزینهٔ ۳

B ۲۷۰۸ ۲

وقتی هسته، ذرهٔ آلفا $({}^{4}_{2}\alpha)$ گسیل می‌کند، از عدد جرمی هسته ۴ واحد کاسته می‌شود.

A ۲۷۰۹ ۴

در واپاشی هسته‌ای بتای، منفی عدد اتمی عنصر یک واحد افزایش می‌یابد.

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}e$$

A ۲۷۱۰ ۲

در گسیل الکترون‌زا و پوزیترون‌زا به‌ترتیب به عدد اتمی عنصر یک واحد اضافه و کم می‌شود. در گسیل آلفا، دو واحد از عدد اتمی کاسته می‌شود و در تابش گاما تنها انرژی آزاد شده و عدد اتمی تغییری نمی‌کند، بنابراین بیشترین تغییر عدد اتمی مربوط به گسیل α و کمترین تغییر عدد اتمی برای گسیل γ می‌باشد.

A ۲۷۱۱ ۴

پرتوهای α تا عمق $0/01mm$ و ذرات بتا تا عمق $0/1mm$ و پرتو گاما تا عمق $100mm$ سرب نفوذ می‌کنند. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است. در واپاشی α $({}^{4}_{2}He)$ دو نوترون و دو پروتون از هسته کاسته می‌شود، بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

ذره‌های آلفا دارای بار مثبت بوده و ذرات سنگین شامل دو نوترون و دو پروتون هستند بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

برد ذره‌های آلفا کوتاه بوده و بعد از جدایی از هسته پس از طی مسافتی کوتاه در هوا (در حدود ۱ یا $2cm$) و یا با عبور از لایه‌ای نازک از مواد جذب می‌شود و اگر این ذره‌ها از راه تنفس یا دستگاه گوارش وارد بدن شوند باعث آسیب شدیدی به بافت‌های بدن می‌شود، بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۲۷۱۲ ۱

یادآوری در گسیل پوزیترون $({}^{0}_{+1}e)$ از پروتون‌های هسته (عدد اتمی) یک واحد کاسته و عدد جرمی تغییر نمی‌کند. در واکنش‌های هسته‌ای تعداد نوکلئون‌ها، پیش از فرایند با تعداد نوکلئون‌ها پس از فرایند مساوی است. در واکنش‌های هسته‌ای بار الکتریکی پایسته می‌ماند یعنی مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش برابر است.

با توجه به قوانین پایستگی در واکنش هسته‌ای می‌توان نوشت.

$${}^{11}_{6}C \rightarrow {}^{A}_{Z}X + ({}^{0}_{+1}e) \Rightarrow \begin{cases} 11 = A + 0 \Rightarrow A = 11 \\ 6 = Z + 1 \Rightarrow Z = 5 \end{cases} \Rightarrow {}^{11}_{5}B$$

A ۲۷۱۳ ۳

در اثر واپاشی هسته و گسیل آلفا، $({}^{4}_{2}\alpha)$ دو واحد از عدد اتمی و ۴ واحد از عدد جرمی هسته مادر کم می‌شود:

$${}^{238}_{92}U \rightarrow {}^{234}_{90}Th + {}^{4}_{2}\alpha$$

A ۲۷۱۴ ۱

در گسیل بتای منفی $({}^{0}_{-1}e)$، عدد جرمی ثابت می‌ماند و به عدد اتمی یک واحد اضافه می‌شود. بنابراین گزینه (۱) درست است. $\ {}^{176}_{71}Lu \rightarrow {}^{176}_{72}Hf + {}^{0}_{-1}e$

B ۲۷۱۵ ۱

در واپاشی آلفا $({}^{4}_{2}\alpha)$ از عدد جرمی ۴ واحد کاسته می‌شود.

$${}^{242}_{94}Pu \rightarrow {}^{4}_{2}\alpha + {}^{A}_{Z}Y \ , \ A = 242 - 4 = 238$$

A ۲۷۱۶ ۴

معادلهٔ واپاشی ایزوتوپ ${}^{15}_{8}O$ را می‌نویسیم. $\ {}^{15}_{8}O \rightarrow X + {}^{0}_{+1}\beta^+ \Rightarrow {}^{15}_{7}X$

که با توجه به ${}^{0}_{+1}\beta$، عدد اتمی و عدد جرمی X به صورت ${}^{15}_{7}X$ می‌شود و مطابق جدول مندلیف عدد اتمی ۷ مربوط به ایزوتوپ‌های نیتروژن است.

معادلهٔ واپاشی ${}^{18}_{9}F$ را می‌نویسیم. $\ {}^{18}_{9}F \rightarrow Y + {}^{0}_{-1}\beta^- \Rightarrow {}^{18}_{10}Y$

که با توجه به ${}^{0}_{-1}\beta$، عدد اتمی و عدد جرمی Y به صورت ${}^{18}_{10}Y$ می‌شود مطابق جدول مندلیف عدد اتمی ۱۰ مربوط به ایزوتوپ‌های نئون است.

A ۲۷۱۷ ۴

هرگاه هسته بتای منفی $({}^{0}_{-1}e)$ گسیل می‌کند، به عدد اتمی آن یک واحد افزوده می‌شود و عدد جرمی آن ثابت می‌ماند. بنابراین وقتی ${}^{239}_{93}Np$ واپاشی الکترون‌زا انجام می‌دهد در جدول تناوبی تبدیل به عنصر خانهٔ بعدی یعنی پلوتونیم می‌شود. $\ {}^{239}_{93}Np \rightarrow {}^{0}_{-1}e^- + {}^{239}_{94}Pu$

A ۲۷۱۸ ۱

ذرهٔ آلفا هستهٔ هلیم است و دارای دو نوترون و دو پروتون است $({}^{4}_{2}He)$. هرگاه هستهٔ عنصر پرتوزا، آلفا گسیل کند از تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های آن هر کدام دو واحد کم می‌شود. تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های ${}^{238}_{92}U$ به ترتیب $Z=92$ و $N=238-92=146$ است، بنابراین:

$$Z' = 92 - 2 = 90 \ , \ N' = 146 - 2 = 144$$

A ۲۷۱۹ ۲

ذرهٔ آلفا دارای دو نوترون و دو پروتون است $(\alpha = {}^{4}_{2}He)$ با واپاشی آلفا، از عدد نوترونی هستهٔ مادر ۲ واحد کاسته می‌شود.

A ۲۷۲۰ ۳

در واکنش $\ {}^{60}_{28}Ni^* \rightarrow {}^{60}_{28}Ni + \cdots$ نوع هسته تغییر نکرده است. بنابراین، هسته برانگیخته $({}^{60}_{28}Ni^*)$، پرتو گاما گسیل کرده است.

B ۲۷۲۱ ۲

عدد جرمی ثابت مانده و عدد اتمی یک واحد کم شده. بنابراین

$${}^{11}_{6}C \rightarrow {}^{11}_{5}B + x \Rightarrow x = {}^{0}_{+1}e^+ \Rightarrow x = \beta^+$$

B ۲۷۲۲ ۴

یادآوری در واپاشی بتای منفی، یک نوترون در هسته واپاشی شده و یک پروتون و یک الکترون (β^-) ایجاد می‌شود.

$${}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{1}_{1}P + {}^{0}_{-1}e$$

نوترون — پروتون — بتای منفی

۱ تعداد نوترون‌های هسته ${}^{234}_{90}Th$ برابر است با:

$$A = Z + N \Rightarrow 234 = 90 + N \Rightarrow N = 144$$

۲ با واپاشی بتای منفی، تعداد نوترون‌های هسته یک واحد کاهش می‌یابد $N' = 144 - 1 = 143$ و بر تعداد پروتون‌های هسته یک واحد افزوده می‌شود.

$$Z' = Z + 1 = 90 + 1 = 91$$

۳ نسبت عدد اتمی و عدد نوترونی هستهٔ دختر خواهد شد: $\frac{Z'}{N'} = \frac{91}{143}$

بازی با سؤال **در واکنش** ${}^{239}_{92}U \rightarrow X + {}^{239}_{93}Np$، X **کدام است؟**

خارج ریاضی - ۸۹

۱) الکترون ۲) پروتون ۳) نوترون ۴) پوزیترون

پاسخ **طبق قوانین پایستگی در واکنش‌های هسته‌ای داریم:**

$${}^{239}_{92}U \rightarrow {}^{a}_{b}X + {}^{239}_{93}Np \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow {}^{0}_{-1}e$$

گزینهٔ ۱

A ۲۷۲۳ ۴

یادآوری ذرهٔ آلفا دارای دو پروتون و دو نوترون بوده $(\alpha=^{4}_{2}He)$ و هنگام واپاشی آلفازا ۴ واحد از عدد جرمی و ۲ واحد از عدد اتمی کاسته می‌شود.

بنابراین عدد جرمی هستهٔ مادر خواهد شد: $A'=A-4\Rightarrow 207=A-4$

عدد جرمی هستهٔ مادر برابر است با: $A=207+4=211$

A ۲۷۲۴ ۱

$$^{239}_{92}U\rightarrow ^{138}_{56}Ba+^{98}_{36}Kr+\boxed{?}$$

به جمع عدد اتمی در دو طرف واکنش دقت کنید.

$56+36=92$

بنابراین عدد اتمی علامت سؤال صفر است یعنی علامت سؤال باید نوترون $^{1}_{0}n$ باشد.

اکنون به تعداد نوکلئون‌ها در دو طرف واکنش دقت کنید.

$239=138+98+c\Rightarrow c=3$

در نتیجه باید در جای علامت ?، سه نوترون $(3^{1}_{0}n)$ قرار بگیرد.

$$^{239}_{92}U\rightarrow ^{138}_{56}Ba+^{98}_{36}Kr+3^{1}_{0}n$$

A ۲۷۲۵ ۴

بـار الکتریکی در واکنش هسـته‌ای پایسـته اسـت یعنی مجموع عدد اتمـی در دو طرف واکنش یکسان است، بنابراین می‌نویسیم:

$$^{241}_{95}Am\rightarrow ^{237}_{Z}Np+^{4}_{2}He\Rightarrow 95=Z+2\Rightarrow Z=93$$

عدد اتمی نپتونیم $Z=93$ شده از این تعداد نوترون‌های آن خواهد شد:

$A=Z+N\Rightarrow 237=93+N\Rightarrow N=237-93\Rightarrow N=144$

A ۲۷۲۶ ۳

با توجه به قانون پایستگی بار و پایستگی تعداد نوکلئون‌ها در واکنش‌های هسته‌ای مجموع نوکلئون‌ها و مجموع عدد اتمی‌ها را در دو طرف واکنش برابر قرار می‌دهیم. می‌توان نوشت:

$$^{4}_{2}He+^{27}_{13}Al\rightarrow ^{A}_{Z}X+^{1}_{0}n\Rightarrow\begin{cases}4+27=A+1\Rightarrow A=30\\2+13=Z+0\Rightarrow Z=15\end{cases}$$

بازی با سؤال کدام گزینه واکنش هسته‌ای روبه‌رو را کامل می‌کند؟

$$^{1}_{0}n+^{235}_{92}U\rightarrow ^{141}_{55}Cs+^{93}_{37}Rb+\cdots\cdots$$

۱) $^{0}_{+1}e$ ۲) $2^{1}_{0}n$ ۳) $^{0}_{-1}e$ ۴) $^{1}_{0}n$

پاسخ

$$^{1}_{0}n+^{235}_{92}U\rightarrow ^{141}_{55}Cs+^{93}_{37}Rb+\cdots\Rightarrow\begin{cases}1+235=141+93+a\Rightarrow a=2\\0+92=55+37+b\Rightarrow b=0\end{cases}\Rightarrow 2^{1}_{0}n$$

گزینهٔ ۲

A ۲۷۲۷ ۳

در واکنش هسـته‌ای تعداد نوکلئون‌ها پیش از فرایند و پس از فرایند با هم برابر هسـتند. هم‌چنین مجموع عدد اتمی پیش و پس از فرایند یکسان هستند بنابراین معادلات زیر را می‌نویسیم و A و Z را به دست می‌آوریم.

$$^{30}_{15}P+^{A}_{Z}X\rightarrow ^{27}_{13}Al+^{4}_{2}He\Rightarrow\begin{cases}30+A=27+4\Rightarrow A=1\\15+Z=13+2\Rightarrow Z=0\end{cases}$$

در این صورت X ذرهٔ نوترون $^{1}_{0}n$ است.

A ۲۷۲۸ ۱

بـه جـای نقطه‌چیـن هسـته $^{A}_{Z}X$ را قـرار می‌دهیم. سـپس به کمـک پایسـتگی تعداد نوکلئون‌هـا و پایسـتگی بـار الکتریکی (عدد اتمـی) A و Z را تعیین می‌کنیـم و ذرهٔ X را مشخص می‌کنیم.

$$^{14}_{7}N+^{A}_{Z}X\rightarrow ^{17}_{8}O+^{1}_{1}H\Rightarrow\begin{cases}14+A=17+1\Rightarrow A=4\\7+Z=8+1\Rightarrow Z=2\end{cases}$$

$\Rightarrow ^{A}_{Z}X=^{4}_{2}He$ یک ذرهٔ آلفا

می‌بینیـد کـه با بمباران هسـته‌های نیتـروژن با ذره‌هـای آلفا $(^{4}_{2}He)$ می‌تـوان یکی از ایزوتوپ‌های عنصر اکسیژن را ایجاد کرد.

B ۲۷۲۹ ۱

اگر هسـته‌ای ذرهٔ آلفا $(^{4}_{2}He)$ گسـیل کند. عدد جرمی آن ۴ واحد و عدد اتمی آن دو واحد کاهش می‌یابد. بنابراین هسـته‌ای که با گسـیل آلفا به $^{A}_{Z}Pb$ تبدیل شـده است. دارای عدد جرمی $A'=A+4$ و عدد اتمی $Z'=Z+2$ خواهد بود.

$^{A+4}_{Z+2}X\rightarrow ^{A}_{Z}Pb+^{4}_{2}He$ (هستهٔ‌مادر)

اگر هسـته $^{A}_{Z}Pb$ ذرهٔ بتای منفی $(^{0}_{-1}e)$ گسـیل کند عدد جرمـی آن ثابت می‌ماند و عدد اتمی آن یک واحد افزایش می‌یابد. $^{A}_{Z-1}Y\rightarrow ^{A}_{Z}Pb+^{0}_{-1}e$ (هستهٔ‌مادر)

بنابراین اختلاف عدد جرمی در هسته‌های مادر، ۴ واحد است.

B ۲۷۳۰ ۲

واپاشی بتای منفی را می‌نویسیم: $^{A}_{Z}X\rightarrow ^{A}_{Z+1}Y+^{0}_{-1}e$

اختلاف عدد جرمی و عدد اتمی برابر عدد نوترونی است:

هستهٔ مادر: $N=A-Z$ ، هستهٔ دختر $N'=A-Z-1$

بنابراین مقدار عدد نوترونی هستهٔ دختر یک واحد کمتر از هستهٔ مادر است:

گزاره‌های (الف) و (پ) نادرست‌اند: $^{A}_{Z}X_{N}\rightarrow ^{A}_{Z+1}Y_{N-1}+^{0}_{-1}e$

واپاشی پوزیترون (e^{+}) را می‌نویسیم: $^{A}_{Z}X\rightarrow ^{A}_{Z-1}Y+^{0}_{+1}e$

اختلاف عدد جرمی و عدد اتمی برابر عدد نوترونی است.

هستهٔ مادر $N=A-Z$ هستهٔ دختر $N'=A-Z+1$

بنابراین عدد نوترونی هستهٔ دختر یک واحد افزایش می‌یابد. $^{A}_{Z}X\rightarrow ^{A}_{Z-1}Y_{N+1}+^{0}_{+1}e$

گزاره (ب) درست و گزاره (ت) نادرست است.

روش دیگر: در واپاشی بتای منفی یک نوترون به پروتون و بتا تبدیل می‌شود، پس عدد نوترونی یک واحد کاهش و عدد اتمی یک واحد افزایش می‌یابد. در واپاشی پوزیترون یک پروتون به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل شده پس عدد اتمی یک واحد کاهش و عدد نوترونی یک واحد افزایش می‌یابد.

B ۲۷۳۱ ۳

با توجه به شـکل هسـته‌ها، یک پروتون به یک نوترون تبدیل شـده چـون تعداد پروتون هسـتهٔ دختر یک واحد کمتر و تعداد نوترون آن یک واحد بیشـتر است. بنابراین واپاشی گسیل پوزیترون رخ داده است.

B ۲۷۳۲ ۳

در واپاشـی بتـازا یکـی از نوترون‌هـای درون هسـته بـه یـک پروتون و یـک بتا تبدیل می‌شـود $^{1}_{0}n\rightarrow ^{1}_{1}H+^{0}_{-1}e$. بنابرایـن تعـداد پروتون‌ها یـک واحد افزایـش می‌یابد و به ۱۲+۱=۱۱ رسـیده و تعـداد نوترون‌هـا یک واحـد کاهش می‌یابـد و به ۱۲−۱=۱۳ می‌رسـد. در ایـن صـورت تعـداد پروتون‌هـا و نوترون‌هـای هسـتهٔ دختر $Z=N=12$ است.

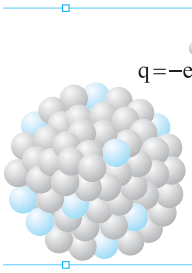


A ۲۷۳۳ ۱

هسته واپاشی الکترون‌زا انجام داده است.

هرگاه هسته بتای منفی $(^{0}_{-1}e)$ گسیل کند، در واقع یک نوترون در هسته به یک پروتون و یک الکترون تبدیـل می‌شـود یعنی تعـداد پروتون‌ها یـک واحد افزایش و تعداد نوترون‌ها یک واحد کاهش می‌یابد.

$^{1}_{0}n\rightarrow ^{1}_{1}H+^{0}_{-1}e$



A ۲۷۳۴ ۲

۱ در واکنش‌های هسته‌ای تعداد نوکلئون‌ها، پیش از فرایند و پس از فرایند مساوی است.

۲ مجموع جبری عدد اتمی در دو طرف واکنش برابر است.

در گزینـهٔ (۱) $^{107}_{48}Cd+^{0}_{-1}e\rightarrow ^{106}_{47}Ag$ تعـداد نوکلئون‌هـا برابـر نیسـت $(107\neq 0+106)$ و این گزینه نادرست است.

در گزینـهٔ (۲) $^{239}_{93}Np\rightarrow ^{239}_{94}Pu+^{0}_{-1}\beta^{-}$ هر دو قانون پایسـتگی برقرار اسـت و این گزینه درست است.

در گزینهٔ (۳) $^{12}_{6}C+^{1}_{1}H\rightarrow ^{12}_{6}C+^{0}_{+1}e$، تعداد نوکلئون‌ها برابر نیست $(12+1\neq 12+0)$ و گزینهٔ (۳) نادرست است.

در گزینهٔ (۴) $^{2}_{1}H+^{2}_{1}H\rightarrow ^{3}_{1}H+^{1}_{0}n$، مجموع عدد اتمی برابر نیست $(1+1\neq 1+0)$ و گزینهٔ (۴) نادرست است.

بازی با سؤال کدام‌یک از واکنش‌های زیر بنا بر قانون‌های پایستگی بار الکتریکی یا عدد جرمی، ممنوع هستند؟

۱) ${}^{4}_{2}He+{}^{10}_{5}B\rightarrow{}^{13}_{6}C+{}^{1}_{0}n$ ۲) ${}^{1}_{0}n+{}^{27}_{13}Al\rightarrow{}^{27}_{11}Na+{}^{4}_{2}He$

۳) ${}^{2}_{1}H+{}^{12}_{6}C\rightarrow{}^{4}_{2}He+{}^{10}_{5}B$ ۴) گزینه‌های (۱) و (۲)

پاسخ در واکنش گزینهٔ (۱) مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش یکسان نیست $(0+6\neq2+5)$، بنابراین این واکنش ممنوع است. در واکنش گزینهٔ (۲) مجموع عدد جرمی در دو طرف واکنش یکسان نیست $(4+27\neq1+27)$، بنابراین این واکنش نیز ممنوع است. گزینهٔ ۴

۲۷۳۵ B ۳

راه‌حل اول: به ازای گسیل هر ذره آلفا، دو نوترون از هسته کاسته می‌شود بنابراین به ازای گسیل سه ذرهٔ آلفا، ۶ نوترون از هسته کاسته خواهد شد. از طرفی در گسیل بتای منفی (الکترون) یک نوترون به پروتون و الکترون تبدیل شده و از تعداد نوترون‌های هسته یکی کم می‌شود بنابراین جمعاً ۶+۱=۷ نوترون از هسته کاسته می‌شود.

راه‌حل دوم: اگر عنصر را به صورت ${}^{A}_{Z}X$ درنظر بگیریم واکنش به صورت:

${}^{A}_{Z}X\rightarrow{}^{\bigcirc}_{\square}Y+3{}^{4}_{2}He+{}^{0}_{-1}\beta$

مجموع عدد اتمی‌ها و عدد جرمی‌ها در دو طرف باید یکسان باشند.

$Z=\square+3\times2-1\Rightarrow\square=Z-5\quad,\quad A=\bigcirc+3\times4+0\Rightarrow\bigcirc=A-12$

تعداد نوترون‌های اولیه برابر $A-Z$ و تعداد نوترون‌های عنصر حاصل برابر $(A-12)-(Z-5)=A-Z-7$ است. پس تعداد نوترون‌ها ۷ واحد کم می‌شود.

۲۷۳۶ B ۱

خط فکری باید واکنش هسته‌ای که در صورت مسئله بیان شده را بنویسیم، تعداد ذرات α را با حرف a و تعداد ذرات بتا را با حرف b نمایش می‌دهیم و قانون‌های پایستگی در واکنش‌های هسته‌ای را می‌نویسیم و a و b را حساب می‌کنیم.

${}^{207}_{82}Pb\rightarrow{}^{197}_{79}Au+2{}^{1}_{0}n+a{}^{4}_{2}He+b{}^{0}_{-1}e$

$\Rightarrow\begin{cases}\text{پایستگی تعداد نوکلئون‌ها}\ 207=197+2+4a+0\Rightarrow a=2\\ \text{پایستگی عدد اتمی}\ 82=79+0+2a-b\Rightarrow3=2\times2-b\Rightarrow b=1\end{cases}$

دو ذرهٔ آلفا و یک ذرهٔ بتای منفی گسیل شده است.

بازی با سؤال اگر هستهٔ عنصر ${}^{8}_{3}Li$ یک پرتو آلفا و هم‌زمان یک پرتو بتا (الکترون) گسیل کند، به کدام‌یک از عناصر زیر تبدیل می‌شود؟ ریاضی - ۹۰

۱) ${}^{7}_{3}Li$ ۲) ${}^{8}_{4}Be$ ۳) ${}^{4}_{2}He$ ۴) ${}^{6}_{3}Li$

پاسخ

${}^{8}_{3}Li\rightarrow{}^{A'}_{Z'}X+{}^{4}_{2}He+{}^{0}_{-1}e\Rightarrow\begin{cases}8=A'+4+0\Rightarrow A'=4\\ 3=Z'+2+(-1)\Rightarrow Z'=2\end{cases}$

بنابراین هسته به اتم هلیم ${}^{4}_{2}He$ تبدیل می‌شود. گزینهٔ ۳

۲۷۳۷ A ۳

با توجه به فرض مسأله:

۱ واکنش هسته‌ای را می‌نویسیم. ${}^{A}_{Z}X\rightarrow{}^{208}_{81}Tl+{}^{0}_{+1}e+{}^{4}_{2}He$

۲ با توجه به پایستگی تعداد نوکلئون‌ها خواهیم داشت:

$A=208+0+4\Rightarrow A=212$

۳ مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش را با هم برابر قرار می‌دهیم و عدد اتمی Z را به‌دست می‌آوریم.

$Z=81+1+2\Rightarrow Z=84$

بازی با سؤال در فعل و انفعال هسته‌ای ${}^{1}_{0}n+{}^{235}_{92}U\rightarrow{}^{141}_{56}Ba+{}^{A}_{Z}X+3({}^{1}_{0}n)$، برای عنصر X، تعداد نوترون‌ها و پروتون‌ها کدام است؟ تجربی - ۹۶

۱) ۵۸ و ۳۶ ۲) ۵۶ و ۳۶ ۳) ۹۴ و ۵۴ ۴) ۹۲ و ۵۴

پاسخ با توجه به پایستگی تعداد نوکلئون‌ها و پایستگی بار الکتریکی در واکنش‌های هسته‌ای می‌توان نوشت:

${}^{1}_{0}n+{}^{235}_{92}U\rightarrow{}^{141}_{56}Ba+{}^{A}_{Z}X+3({}^{1}_{0}n)\Rightarrow\begin{cases}1+235=141+A+3\Rightarrow A=92\\ 0+92=56+Z\Rightarrow Z=36\end{cases}$

اما تعداد نوترون‌ها برابر است با: $A=Z+N\Rightarrow92=36+N\Rightarrow N=56$

گزینهٔ ۲

۲۷۳۸ B ۴

نکته پرتوهای α ذرات باردار مثبت از جنس هستهٔ اتم هلیم $({}^{4}_{2}He)$ هستند و با گسیل هر ذرهٔ α، ۲ واحد از عدد اتمی و ۴ واحد از عدد جرمی کم می‌شود.

نکته ذرهٔ β^- از جنس الکترون است و گسیل بتای منفی سبب می‌گردد که عدد اتمی یک واحد افزایش یابد و عدد جرمی بدون تغییر بماند.

۱ معادلهٔ این واکنش هسته‌ای را می‌نویسیم.

${}^{237}_{93}Np\rightarrow{}^{A}_{Z}X+3{}^{4}_{2}He+{}^{0}_{-1}e$

ذره بتای منفی ذرهٔ آلفا

۲ باید مجموع عدد جرمی (تعداد نوکلئون‌ها) در دو طرف واکنش و هم‌چنین مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش هسته‌ای یکسان باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$237=A+(3\times4)+0\Rightarrow A=225$

$93=Z+(3\times2)+(-1)\Rightarrow Z=88$

نکته عدد جرمی برابر مجموع تعداد پرتون‌ها و نوترون‌های هسته است.

تعداد نوترون‌ها خواهد شد: $A=Z+N\Rightarrow225=88+N\Rightarrow N=137$

۲۷۳۹ B ۴

وقتی عدد جرمی دو برابر عدد اتمی باشد، تعداد نوترون‌ها و تعداد پروتون‌های هسته با هم برابر است. $A=2Z\,,\,A=Z+N\Rightarrow Z=N$

واکنش هسته‌ای را می‌نویسیم: ${}^{A}_{Z}X\rightarrow{}^{A'}_{Z'}Y+{}^{0}_{+1}e+{}^{0}_{-1}e+{}^{4}_{2}\alpha$

تعداد نوکلئون‌ها در واکنش هسته‌ای ثابت است.

$A=A'+4\xrightarrow{A=2Z}2Z=A'+4\Rightarrow A'=2Z-4$

پایستگی بار را می‌نویسیم: $Z=Z'+1-1+2\Rightarrow Z'=Z-2$

تعداد نوترون‌های هستهٔ جدید خواهد شد:

$N'=A'-Z'\Rightarrow N'=2Z-4-Z+2\Rightarrow N'=Z-2$

تفاوت تعداد نوترون‌ها و پروتون‌ها را به‌دست می‌آوریم: $N'-Z'=Z-2-Z+2=0$

۲۷۴۰ B ۲

یادآوری در واکنش‌های هسته‌ای مجموع عدد اتمی و مجموع عدد جرمی در دو طرف واکنش یکسان است.

خط فکری باید مجموع عدد اتمی و عدد جرمی در دو طرف واکنش را باهم برابر قرار داده تا بتوانید تعداد ذرات آلفا و بتای منفی را حساب کنید.

ذرهٔ α هسته هلیوم $({}^{4}_{2}He)$ و ذرهٔ بتای منفی، الکترون $({}^{0}_{-1}e)$ است واکنش را به‌طور کامل می‌نویسیم و تعداد α ها را با حرف M و تعداد β^- با حرف N مشخص می‌کنیم.

${}^{A}_{Z}X\rightarrow{}^{A-8}_{Z}Y+M\,{}^{4}_{2}\alpha+N\,{}^{0}_{-1}\beta$

اکنون می‌توانیم بنویسیم:

عدد جرمی: $A=A-8+4M+0\Rightarrow M=2$

عدد اتمی: $Z=Z+2M-N\Rightarrow2M=N\xrightarrow{M=2}N=4$

بنابراین به جای نقطه چین باید ۲ ذرهٔ آلفا و ۴ ذره بتا قرار داد.

۲۷۴۱ B ۳

۱ ذرهٔ α از جنس هسته ${}^{4}_{2}He$ می‌باشد.

${}^{237}_{93}Np\rightarrow m{}^{4}_{2}He+n{}^{0}_{-1}\beta+{}^{225}_{88}Ra$

۲ عدد اتمی دو طرف واکنش با هم برابر است:

$93=2m-n+88\Rightarrow2m-n=5\quad(1)$

۳ عدد جرمی دو طرف واکنش با هم برابر است:

$۲۳۷=۴m+۲۲۵\Rightarrow ۴m=۱۲\Rightarrow m=۳$ (۲)

۴ با توجه به معادله‌های (۱) و (۲): $m=۳\ ,\ n=۱$

بنابراین $\frac{m}{n}=۳$ است.

۲۷۴۲ B ۱

با توجه به واکنش هسته‌ای زیر قوانین پایستگی را می‌نویسیم.

$^{۲۳۹}_{۹۲}U\rightarrow ^{۲۰۷}_{۸۲}Pb+A(^{۴}_{۲}He)+B\beta$

۱ دقت کنید که در گسیل ذرهٔ β^+ و β^- توسط هسته، عدد جرمی هسته تغییر نمی‌کند، بنابراین قانون پایستگی تعداد نوکلئون در این واکنش به صورت زیر است:

$۲۳۹=۲۰۷+۴A\Rightarrow A=۸$

۲ مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش هسته‌ای را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$۹۲=۸۲+۸\times ۲+B\Rightarrow B=-۶$

مفهوم منفی این است که در این واکنش هسته ۶ ذرهٔ الکترون (بتای منفی) گسیل می‌کند.

۲۷۴۳ B ۱

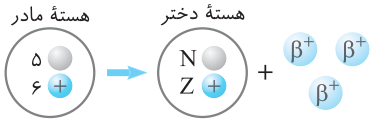
۱ معادلهٔ واپاشی کربن را براساس نمایش نشان داده شده می نویسیم

$^{۵+۶}_{۶}C\rightarrow \underset{\text{هستهٔ دختر}}{^{Z+N}_{Z}X}+۳\,^{۰}_{+۱}e$

۲ مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش را برابر قرار می‌دهیم

$۶=Z+۳\times ۱\Rightarrow Z=۳$

۳ قانون پایستگی تعداد نوکلئون‌ها را می‌نویسیم. $۱۱=۳+N+۰\Rightarrow N=۸$



۲۷۴۴ B ۱

۱ با توجه به طرحواره معادلهٔ واپاشی شکل زیر می‌نویسیم:

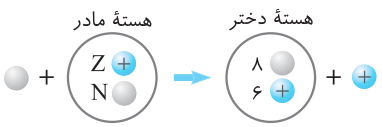
$^{۱}_{۰}n+^{N+Z}_{Z}X\rightarrow ^{۸+۶}_{۶}Y+^{۱}_{۱}H$

۲ مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش هسته‌ای را برابر قرار می‌دهیم.

$۰+Z=۶+۱\Rightarrow Z=۷$ پروتون

۳ پایستگی تعداد نوکلئون‌ها را می‌نویسیم. $۱+N+۷=۱۴+۱\Rightarrow N=۷$

نسبت $\frac{N}{Z}$ خواهد شد. $\frac{N}{Z}=\frac{۷}{۷}=۱$



۲۷۴۵ B ۳

خط فکری واکنش هسته‌ای را می‌نویسیم. برای ذرهٔ بتای منفی ضریب a و برای ذرهٔ آلفا ضریب $\frac{a}{۲}$ قرار می‌دهیم. سپس به کمک قوانین پایستگی در واکنش‌های هسته‌ای عدد جرمی و عدد اتمی هستهٔ دختر را به دست می‌آوریم.

۱ واکنش هسته‌ای به صورت زیر است:

$\underset{\text{هستهٔ مادر}}{^{A}_{Z}X}\rightarrow \frac{a}{۲}(^{۴}_{۲}He)+a(^{۰}_{-۱}e)+\underset{\text{هستهٔ دختر}}{^{A'}_{Z'}Y}$

۲ پایستگی تعداد نوکلئون‌ها خواهد شد:

$A=۲a+۰+A'\Rightarrow A'=A-۲a$

۳ مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش را برابر قرار می‌دهیم.

$Z=a+(-a)+Z'\Rightarrow Z'=Z$

بنابراین عدد جرمی کاهش می‌یابد و عدد اتمی ثابت می‌ماند.

۲۷۴۶ B ۲

با توجه به پایستگی تعداد نوکلئون‌ها می‌توان نوشت: $۱+۲۳۵=۱۳۳+۱۰۱+n\Rightarrow n=۲$

تعداد نوترون‌ها ۲ است. مقداری از جرم اولیه به انرژی تبدیل می‌شود بنابراین $M_۱>M_۲$ خواهد بود.

۲۷۴۷ B ۲

۱ معادلهٔ واپاشی آلفازا برای عنصر دلخواه $^{A}_{Z}X$ به صورت زیر است.

$^{A}_{Z}X\rightarrow ^{A-۴}_{Z-۲}X+^{۴}_{۲}He$

۲ عدد اتمی عنصر حاصل $(Z-۲)$، $\frac{۲}{۳}$ برابر عدد اتمی عنصر اولیه (Z) است:

$\frac{Z-۲}{Z}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۳Z-۶=۲Z\Rightarrow Z=۶$

۳ عدد جرمی عنصر حاصل $(A-۴)$، $\frac{۵}{۷}$ برابر عدد جرمی عنصر اولیه (A) است.

$\frac{A-۴}{A}=\frac{۵}{۷}\Rightarrow ۷A-۲۸=۵A\Rightarrow A=۱۴$

۴ تعداد نوترون‌های عنصر اولیه به صورت: $N=A-Z=۱۴-۶=۸$

۵ تعداد نوترون‌های عنصر حاصل به صورت: $N'=(A-۴)-(Z-۲)=۱۰-۴=۶$

۶ بنابراین نسبت تعداد نوترون‌های عنصر حاصل به تعداد نوترون‌های عنصر اولیه به صورت: $\frac{N'}{N}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$

۲۷۴۸ B ۳

ابتدا نوع پرتو x را به کمک قوانین پایستگی در واکنش‌های هسته‌ای مشخص می‌کنیم.

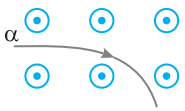
$^{۱}_{۰}n+^{۱۰}_{۵}B\rightarrow ^{۷}_{۳}Li+^{A}_{Z}X$

مجموع عدد اتمی‌های سمت راست = مجموع عدد اتمی‌های سمت چپ

$۵+۰=۳+Z\Rightarrow Z=۲$

مجموع عدد جرمی‌های سمت راست = مجموع عدد جرمی‌های سمت چپ

$۱+۱۰=۷+A\Rightarrow A=۴$



بنابراین پرتو $^{۴}_{۲}X$ همان پرتو α است که دارای بار مثبت است و درون میدان برونسو شکل با توجه به قاعدهٔ دست راست به صورت روبه‌رو منحرف می‌شود.



۲۷۴۹ A ۳

برای فعل و انفعال هسته‌ای (انرژی $+X+^{۱۳۷}_{۵۶}Ba\rightarrow ^{۱۳۷}_{۵۵}Cs$) قوانین پایستگی را می‌نویسیم:

۱ قانون پایستگی تعداد نوکلئون‌ها: $۱۳۷=۱۳۷+A_X\Rightarrow A_X=۰$

۲ مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش را برابر قرار می‌دهیم.

$۵۵=۵۶+Z_X\Rightarrow Z_X=-۱$

بنابراین $^{۰}_{-۱}X$ بتای منفی است.

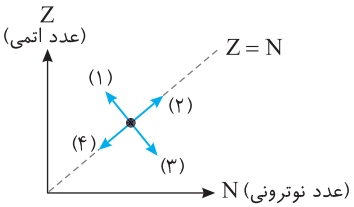
۳ اختلاف جرم را بر حسب kg به‌دست می‌آوریم و در رابطهٔ اینشتین جای‌گذاری می‌کنیم:

$E=mc^۲\Rightarrow E=۰/۰۰۱\times ۱/۷\times ۱۰^{-۲۷}\times (۳\times ۱۰^{۸})^۲$

$\Rightarrow E=۱۵/۳\times ۱۰^{-۱۴}\,J=۱/۵۳\times ۱۰^{-۱۳}\,J$

۲۷۵۰ B ۳

پوزیترون (β^+) در اثر واپاشی یک پروتون در هسته، گسیل می‌شود. $^{۱}_{۱}H\rightarrow ^{۱}_{۰}n+^{۰}_{+۱}e$



در این صورت از عدد اتمی (تعداد پروتون‌ها) یک واحد کاسته می‌شود $(Z'=Z-1)$ و عدد نوترونی یک واحد افزایش می‌یابد $(N'=N+1)$.

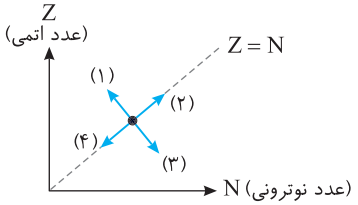
در انتقال (۱)، Z افزایش و N کاهش یافته بنابراین این انتقال صحیح نیست.

در انتقال (۲)، تعداد پروتون‌ها و تعداد نوترون افزایش یافته و این انتقال نیز نادرست است.

در انتقال (۳)، عدد نوترونی افزایش و تعداد پروتون‌ها کاهش می‌یابد و این انتقال درست است.

در انتقال (۴)، تعداد نوترون‌ها و تعداد پروتون‌ها کاهش می‌یابد و این انتقال نادرست است.

بازی با سؤال **هرگاه هسته‌ای بتا گسیل کند، در جهت کدام فلش منتقل می‌شود؟**



(۱) (۴) (۲) (۳) (۱)

پاسخ **با گسیل بتا، عدد اتمی، یک واحد افزایش و عدد نوترونی، یک واحد کاهش می‌یابد، بنابراین در سوی فلش (۱) منتقل می‌شود.** گزینهٔ ۴

۴ ۲۷۵۱ B

ذرهٔ آلفا (He^{4}_{2}) دارای دو نوترون و دو پروتون است و هرگاه هسته آلفا گسیل کند، عدد اتمی و عدد نوترونی هر کدام دو واحد کاهش می‌یابند. بنابراین در سوی فلش (۴) منتقل می‌شود.

۱ ۲۷۵۲ A

به جای نقطه‌چین هسته X^{A}_{Z} را قرار می دهیم.

$$^{235}_{92}U+^{1}_{0}n\rightarrow ^{140}_{54}Xe+^{94}_{38}Sr+^{1}_{0}n+^{A}_{Z}X$$

۱ پایستگی تعداد نوکلئون‌ها را می‌نویسیم. $235+1=140+94+1+A\Rightarrow A=1$

۲ مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش را برابر قرار می‌دهیم.

$$92+0=54+38+0+Z\Rightarrow Z=0$$

۳ بنابراین X^{A}_{Z}، نوترون $^{1}_{0}n$ است.

۲ ۲۷۵۳ A

در واکنش هسته‌ای $^{12}_{6}C+^{A}_{Z}X\rightarrow ^{4}_{2}He+^{10}_{5}B$ قوانین پایستگی تعداد نوکلئون‌ها و عدد اتمی را می‌نویسیم $12+A=4+10\Rightarrow A=2$, $6+Z=2+5\Rightarrow Z=1$

بنابراین هستهٔ ایزوتوپ $^{2}_{1}H$ یعنی دوتریم، واکنش را کامل می‌کند.

۳ ۲۷۵۴ A

سدیم عنصر شمارهٔ ۱۱ جدول و Ne عنصر شمارهٔ ۱۰ جدول است، بنابراین عدد اتمی یک واحد کاهش یافته و عدد جرمی بدون تغییر است، پس پوزیترون گسیل شده است.

$$^{22}_{11}Na\rightarrow ^{22}_{10}Ne+^{0}_{+1}e$$

۳ ۲۷۵۵ B

بار هستهٔ $^{232}_{90}Th$ در فاصلهٔ r عدد اتمی هستهٔ $^{232}_{90}Th$ برابر $Z=90$ است، یعنی در هستهٔ این عنصر ۹۰ پروتون وجود دارد، بنابراین بار هستهٔ آن برابر $q=Ze=90e$ است و میدان الکتریکی هسته خواهد شد:

$$E=k\frac{q}{r^2}\Rightarrow E=k\frac{90e}{r^2}$$

در زنجیرهٔ واپاشی هسته دو بار ذرهٔ α، دو بار الکترون (β^-) و هم‌چنین پرتو γ گسیل کرده است.

با هر بار گسیل ذرهٔ α، $(^{4}_{2}He)$ هسته دو پروتون از دست می‌دهد، بنابراین در دو بار گسیل α، هسته ۴ پروتون از دست داده است. در واپاشی الکترون‌زا یک نوترون در هسته به یک پروتون و یک الکترون (β^-) تبدیل می‌شود. $^{1}_{0}n\rightarrow ^{1}_{1}H+^{0}_{-1}e$

بنابراین در هر رواپاشی الکترون‌زا بر تعداد پروتون‌ها یک واحد افزوده می‌شود. در نتیجه به‌طور کلی در این زنجیره تعداد پروتون‌ها ۲−۲−۴ واحد کاهش می‌یابد و برابر $Z'=90-2-4=88$ می‌شود و میدان هسته در این حالت برابر است با:

$$E'=k\frac{q'}{r^2}\xrightarrow{q'=88e}E'=k\frac{88e}{r^2}$$

از این رو نسبت $\frac{E'}{E}$ خواهد شد.

$$\frac{E'}{E}=\frac{k\frac{88e}{r^2}}{k\frac{90e}{r^2}}=\frac{88}{90}=\frac{44}{45}$$

۱ ۲۷۵۶ B

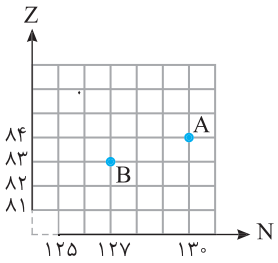
این پدیده برخورد ماده و ضد ماده است که در آن تمام جرم به انرژی تبدیل می‌شود. با توجه به رابطهٔ اینشتین، انرژی هر فوتون خواهد شد:

$$E=mc^2\Rightarrow E=(9\times10^{-31})\times(3\times10^{8})^2$$

$$\Rightarrow E=81\times10^{-15}\,J=\underbrace{\frac{81\times10^{-15}}{1/62\times10^{-19}}}_{\text{برای تبدیل به eV}}eV=500000\,eV=500keV$$

۳ ۲۷۵۷ C

۱ عدد اتمی عنصر A، $Z_A=84$ و عدد نوترونی آن $N_A=130$ بوده و عدد جرمی آن خواهد شد.



$$A_A=Z_A+N_A\Rightarrow A_A=84+130$$

$$\Rightarrow A_A=214\Rightarrow ^{214}_{84}A$$

۲ عدد اتمی عنصر B، $Z_B=83$ و عدد نوترونی آن $N_B=127$ بوده و عدد جرمی آن خواهد شد:

$$A_B=Z_B+N_B\Rightarrow A_B=83+127\Rightarrow A_B=210\Rightarrow ^{210}_{83}B$$

۳ عدد جرمی A برای تبدیل به B $(214-210=4)$ واحد کاهش یافته بنابراین گسیل یک نوترون صورت نگرفته است و گزینهٔ (۱) نادرست است.

۴ اگر یک ذرهٔ آلفا گسیل کند از عدد نوترونی و همچنین عدد اتمی آن دو واحد کاسته می‌شود. از طرفی هنگام گسیل بتا از تعداد نوترون یک واحد کاسته و بر تعداد پروتون‌ها یک واحد افزوده می‌شود، در نتیجه با گسیل یک آلفا و یک بتای منفی جمعاً ۳ واحد از عدد نوترونی و یک واحد از عدد اتمی کاسته می‌شود.

$$^{214}_{84}A\rightarrow ^{210}_{83}B+^{4}_{2}He+^{0}_{-1}e$$

۴ ۲۷۵۸ B

نکته هرگاه جرمی برابر یکای جرم اتمی $(1\,u)$ به انرژی تبدیل شود انرژی آزاد شده برابر ۹۳۱/۵ مگاالکترون‌ولت (MeV) است.

خط فکری هستهٔ کربن $(^{12}_{6}C)$ واپاشیده شده و سه ذرهٔ آلفا ایجاد شده است.

برای آنکه انرژی مورد نیاز این فرایند را حساب کنیم، باید اختلاف جرم هستهٔ کربن با سه ذرهٔ آلفا را پیدا کرده آن را در ۹۳۱/۵ ضرب کنیم تا انرژی برحسب MeV را به دست بیاوریم.

$$\Delta m=3m_\alpha-m_C\xrightarrow{m_C=12u,m_\alpha=4/0026u}$$

$$\Delta m=3\times4/0026u-12/0000u=0/0078u$$

انرژی حاصل خواهد شد: $E=0/0078\times931/5\approx7/27MeV$

۴ ۲۷۵۹ C

خط فکری در واپاشی الکترون‌زا (β^-)، یک نوترون $(^{1}_{0}n)$ به یک پروتون $(^{1}_{1}H)$ و یک ذرهٔ β واپاشیده می‌شود و مقداری انرژی آزاد می‌گردد جرم پروتون ایجاد شده بسیار سنگین‌تر از جرم الکترون ایجاد شده است و پروتون در هسته ساکن یا تقریباً ساکن می‌ماند و انرژی ایجاد شده به انرژی جنبشی الکترون تبدیل می‌شود، بنابراین شما باید تغییر جرمی را حساب کرده و مشخص کنید این جرم چند مگاالکترون‌ولت انرژی تولید می‌کند.

۱ جرمی که به انرژی جنبشی تبدیل شده است:

$$\Delta M=M_n-(M_p+M_e)=1/008\,66-(1/007\,28+0/000\,549)$$

$$\Rightarrow\Delta M=0/000\,831\,u$$

نکته هرگاه جرمی برابر $1\,u$ به انرژی تبدیل شود به اندازهٔ $931/5MeV$ انرژی تولید می‌کند.

۲ بیشینه انرژی جنبشی ذره‌های بتا برابر است با:

$$E=0/000\,831\times931/5=0/774MeV$$

پنجره ۳

A ۲۷۶۰ | ۳

نکته نیمه‌عمر یک عنصر پرتوزا به جنس هستهٔ آن بستگی دارد و با فشار، دما یا زمان تغییر نمی‌کند.

با واپاشی جسم پرتوزا نیمه‌عمر ثابت می‌ماند.

A ۲۷۶۱ | ۳

یادآوری اتم‌ها با تعداد پروتون یکسان و تعداد نوترون‌های مختلف را ایزوتوپ (هم‌مکان) می‌نامند، زیرا همگی در جدول مندلیف یک خانه را اشغال می‌کنند.

نیمه‌عمر به نوع هسته بستگی دارد و ایزوتوپ‌های یک عنصر ممکن است نیمه‌عمر متفاوتی داشته باشند و حتی ممکن است یک ایزوتوپ پایدار باشد مانند $^{1}_{1}H$ و ایزوتوپ دیگر ناپایدار باشد مانند $^{3}_{1}T$ و گزینهٔ (۱) نادرست است.

انرژی بستگی هسته به تعداد نوکلئون‌های هسته بستگی دارد و برای ایزوتوپ‌های یک عنصر که تعداد نوکلئون‌های متفاوتی دارند یکسان نیست و گزینهٔ (۲) نادرست است.

ایزوتوپ‌ها دارای عدد اتمی (Z) یکسان و عدد جرمی (A) و تعداد نوترون (N) متفاوت هستند. بنابراین گزینهٔ (۳) درست و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۲۷۶۲ | ۲

نیمه‌عمر یک عنصر پرتوزا، تنها تابع نوع هستهٔ واپاشیده است و عامل‌های خارجی مانند دما، فشار، یا میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی تأثیری در آن ندارند و با گذشت زمان تغییر نمی‌کند. بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.

در اثر پرتوزایی بتازا، عدد اتمی هسته افزایش می‌یابد $(^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}e)$ بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

هر چه انرژی بستگی هسته بیشتر باشد، یعنی برای جدا کردن نوکلئون از هسته، انرژی بیشتری لازم است و هسته پایدارتر است، بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

آلفا هستهٔ هلیم بوده و دارای دو پروتون و دو نوترون است. هرگاه هستهٔ پرتوزا، آلفا گسیل کند، عدد اتمی آن دو واحد و عدد جرمی آن ۴ واحد کاهش می‌یابد. بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۲۷۶۳ | ۱

یادآوری نیمه‌عمر مدت زمانی است که طول می‌کشد تا نیمی از هسته‌های عنصر پرتوزا واپاشیده شود.

$$\text{تعداد هسته‌های باقیمانده } N = \frac{\text{تعداد هسته‌های اولیه } N_0}{\text{تعداد نیمه‌عمرها } n = \frac{t}{T}} \quad 2^n$$

۱ تعداد نیمه‌عمرها را حساب می‌کنیم. $n = \frac{t}{T} \xrightarrow{t=4h,\ T=1h} n=4$

۲ تعداد هسته‌های باقیماندهٔ بیسموت خواهد شد: $N = \frac{N_0}{2^4} \Rightarrow N = \frac{N_0}{16}$

A ۲۷۶۴ | ۳

نیمه‌عمر مادهٔ پرتوزا ۴۵ دقیقه یعنی $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}\,h$ است. بنابراین تعداد نیمه‌عمرهای این ماده در مدت ۳h خواهد شد:

$$n = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow n = \frac{3}{\frac{3}{4}} \Rightarrow n = 4$$

مقدار مادهٔ اولیهٔ باقی‌مانده را حساب می‌کنیم.

$$N = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{N}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow \frac{N}{N_0} = \frac{1}{16}$$

A ۲۷۶۵ | ۴

تعداد نیمه عمر را به‌دست می‌آوریم.

$$N = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{N_0}{16} = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{2^n} \Rightarrow n = 4 \quad \text{نیمه‌عمر}$$

اکنون مدت زمان نیمه‌عمر را حساب می‌کنیم. $T_{\frac{1}{2}} = \frac{t}{n} \Rightarrow T_{\frac{1}{2}} = \frac{8}{4} = 2h$

بازی با سوال نیمه‌عمر یک مادهٔ رادیواکتیو ۲ ساعت است. پس از چند ساعت $\frac{1}{128}$ هسته‌های اولیه، فعال باقی می‌ماند؟ خارج تجربی - ۹۳

۱) ۳۶ ۲) ۲۸ ۳) ۱۴ ۴) ۱۲

پاسخ ۱ با توجه به رابطهٔ نیمه‌عمر تعداد نیمه‌عمرهای سپری‌شده را حساب می‌کنیم:

$$N = \frac{N_0}{2^n} \xrightarrow{N=\frac{N_0}{128}} \frac{N_0}{128} = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow 2^7 = 2^n \Rightarrow n = 7$$

۲ هر نیمه‌عمر ۲h است. بنابراین ۷ نیمه‌عمر خواهد شد

$$t = nT \Rightarrow t = 7\times 2 = 14h$$

گزینهٔ ۳

A ۲۷۶۶ | ۴

تعداد نیمه‌عمرها را حساب می‌کنیم. ۶۰ دقیقه معادل ۱ ساعت است.

$$n = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow n = \frac{6}{1} = 6$$

تعداد هسته‌های فعال را به‌دست می‌آوریم:

$$N = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{N}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \Rightarrow \frac{N}{N_0} = \frac{1}{64}$$

A ۲۷۶۷ | ۲

۱ با توجه به رابطهٔ نیمه‌عمر تعداد نیمه‌عمرهای سپری‌شده را حساب می‌کنیم:

$$m = \frac{m_0}{2^n} \xrightarrow{m=1/5g,\ m_0=12g} \frac{3}{2} = \frac{12}{2^n} \Rightarrow 2^n = 8 \Rightarrow n = 3$$

۲ کل مدت واپاشی ۱۸ روز بوده است. یعنی در مدت ۱۸ روز سه نیمه‌عمر طی شده

بنابراین: $T = \frac{t}{n} \Rightarrow T = \frac{18}{3} = 6$ روز :نیمه‌عمر

A ۲۷۶۸ | ۱

راه‌حل اول: با توجه به تعریف نیمه‌عمر:

جرم اولیه $M_0 \xrightarrow{10h} \frac{M_0}{2} \xrightarrow{10h} \frac{M_0}{4} \xrightarrow{10h} \frac{M_0}{8} \xrightarrow{10h}$

جرم باقی‌مانده $\frac{M_0}{16}$

جرم واپاشیده − جرم اولیه = جرم عنصر پرتوزای باقی‌مانده

$$\Rightarrow \frac{M_0}{16} = M_0 - 15 \Rightarrow \frac{15M_0}{16} = 15 \Rightarrow M_0 = 16\,g$$

راه‌حل دوم:

۱ ابتدا تعداد نیمه‌عمرها را حساب می‌کنیم.

$$n = \frac{t}{T} \xrightarrow{t=40h,\ T=10h} n = \frac{40}{10} = 4 \quad \text{نیمه‌عمر}$$

۲ جرم واپاشیده شده برابر است با:

$$M = M_0 - 15$$

رابطه نیمه‌عمر را نوشته جرم اولیه را به‌دست می‌آوریم.

$$M = \frac{M_0}{2^n} \xrightarrow{M=M_0-15g} M_0 - 15 = \frac{M_0}{2^4} \Rightarrow M_0 - 15 = \frac{M_0}{16}$$

$$\frac{15}{16}M_0 = 15 \Rightarrow M_0 = 16g$$

A ۲۷۶۹ | ۳

۱ با توجه به تعریف نیمه‌عمر، ابتدا تعداد نیمه‌عمرهای سپری شده را به دست می‌آوریم: $m = \frac{m_0}{2^n} \Rightarrow 0/125 = \frac{2}{2^n} \Rightarrow 2^n = \frac{2}{0/125} \Rightarrow 2^n = 16 \Rightarrow n = 4$

۲ زمان سپری شده: $n = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow 4 = \frac{t}{28} \Rightarrow t = 112$ سال

۲۷۷۰ B ۱

۱ با توجه به تعریف نیمه‌عمر یک مادهٔ پرتوزا پس از گذشت سه نیمه‌عمر خواهیم داشت:

جرم باقی‌مانده $M_0 \xrightarrow{t} \frac{M_0}{2} \xrightarrow{t} \frac{M_0}{4} \xrightarrow{t} \frac{M_0}{8}$: جرم اولیه

۲ جرم واپاشیده شده برابر است با: $M_0 - \frac{M_0}{8} = \frac{7}{8}M_0$: جرم واپاشیده

۳ نسبت خواسته شده را حساب می‌کنیم. $\frac{\text{جرم واپاشیده}}{\text{جرم باقی‌مانده}} = \frac{\frac{7}{8}M_0}{\frac{M_0}{8}} = 7$

۲۷۷۱ A ۴

با توجه به تعریف نیمه‌عمر:

۱ مقدار هسته‌های فعال باقی‌مانده در مدت $n=5$ نیمه‌عمر خواهد شد:

$$N = \frac{N_0}{2^n} \xrightarrow{n=5} N = \frac{N_0}{32}$$

۲ تعداد هسته‌های واپاشیده را به‌دست می‌آوریم.

هسته‌های واپاشیده $= N_0 - \frac{N_0}{32} = \frac{31}{32}N_0$

۳ درصد هسته‌های واپاشیده شده خواهد شد: $\frac{31}{32}N_0 \sim 97\%N_0$

۲۷۷۲ A ۳

در هر نیمه‌عمر، نیمی از هسته واپاشیده می‌شود بنابراین:

$$\%100 \xrightarrow{8\text{ روز}} \%50 \xrightarrow{8\text{ روز}} \%25$$

روش دیگر: $N = N_0(\frac{1}{2})^n \xrightarrow[\frac{16}{8}=2]{n=} \frac{N}{N_0} = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow N = 0/25N_0$

۲۷۷۳ A ۴

بنا بر تعریف نیمه‌عمر:

۱ تعداد نیمه‌عمرها را حساب می‌کنیم. $n = \frac{t}{T} \xrightarrow[T=8\text{ روز}]{t=32\text{ روز}} n = \frac{32}{8} = 4$

۲ تعداد هسته‌های باقی‌مانده فعال را به‌دست می‌آوریم.

$$N = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow N = \frac{N_0}{2^4} \Rightarrow N = \frac{N_0}{16} = 6/25\%N_0$$

۳ درصد هسته‌های واپاشیده شده خواهد شد:

تعداد هسته‌های واپاشیده $\Delta N = N_0 - 6/25N_0\% \Rightarrow \Delta N = 93/75\%N_0$

بازی با سوال چند درصد از هسته‌های مادهٔ رادیواکتیوی پس از واپاشی در مدت ۴ نیمه‌عمر به‌صورت فعال باقی می‌ماند؟ کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۶/۲۵ ۴) ۱۲/۵

پاسخ در مدت ۴ نیمه‌عمر خواهیم داشت:

گزینهٔ ۳ $N = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow N = \frac{N_0}{2^4} \Rightarrow N = \frac{N_0}{16} \Rightarrow \frac{N}{N_0} = \frac{1}{16} = 6/25\%$

۲۷۷۴ A ۴

۸۷/۵ درصد از هسته‌های اولیه واپاشیده شده بنابراین ۱۲/۵ درصد از هسته‌های اولیه باقی مانده است. $(N = \frac{12/5}{100}N_0)$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$N = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow \frac{12/5}{100}N_0 = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{2^n} \Rightarrow n = 3$$

در مدت $24h$، سه نیمه‌عمر طی شده است. از این‌رو نیمه‌عمر این ماده پرتوزا برابر است با:

$$T = \frac{t}{n} \Rightarrow T = \frac{24}{3} = 8h$$

۲۷۷۵ B ۴

۱ در مدت چهار سال، ۷۵٪ هسته‌ها واپاشیده یعنی $\frac{1}{4} = \%25$ مادهٔ فعال باقی می‌ماند، از این‌رو می‌توان نوشت: $N = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{4}N_0 = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow 2^n = 4 \Rightarrow n = 2$

۲ نیمه‌عمر خواهد شد: $n = \frac{t}{T} \xrightarrow{t=4\text{ سال}} 2 = \frac{4}{T} \Rightarrow T = 2$ سال

۳ $12/5$ درصد مادهٔ فعال یعنی $N = \frac{1}{8}N_0$ ، بنابراین می‌توان نوشت:

$$N_0 \xrightarrow{2\text{ سال}} \frac{N_0}{2} \xrightarrow{2\text{ سال}} \frac{N_0}{4} \xrightarrow{2\text{ سال}} \frac{N}{8}$$

یعنی ۲ سال دیگر لازم است تا $12/5$٪ ماده فعال باقی بماند.

۲۷۷۶ B ۳

یادآوری برای به‌دست آوردن درصد هسته‌های پرتوزا باقی‌مانده می‌توان از رابطه $\frac{N}{N_0} = (\frac{1}{2})^n \times 100$ استفاده کرد که در آن $n = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}$ است.

راه‌حل اول: نیمه‌عمر کربن ۵۷۳۰ سال است، بنابراین پس از ۲۲۹۲۰ سال، ۴ نیمه‌عمر گذشته است. $n = \frac{22920}{5730} = 4$

حال با توجه به رابطهٔ گفته شده در یادآوری درصد خواسته شده را حساب می‌کنیم:

درصد باقی‌مانده $\frac{N}{N_0} = (\frac{1}{2})^4 \times 100 = 6/25\%$

راه‌حل دوم: پس از هر نیمه‌عمر مقدار باقیماندهٔ یک عنصر نصف می‌شود:

$$N \xrightarrow{\text{یک نیمه‌عمر}} \frac{N}{2} \xrightarrow{\text{دو نیمه‌عمر}} \frac{N}{4} \xrightarrow{\text{سه‌نیمه‌عمر}}$$

$\frac{N}{2}$: ٪۵۰ ، $\frac{N}{4}$: ٪۲۵

$$\frac{N}{8} \xrightarrow{\text{چهارنیمه‌عمر}} \frac{N}{16}$$

$\frac{N}{8}$: ۱۲/۵٪ ، $\frac{N}{16}$: ۶/۲۵٪

۲۷۷۷ A ۲

۱ تعداد نیمه‌عمر A و B را حساب می‌کنیم.

$$n = \frac{t}{T} \begin{cases} \xrightarrow{A: t=600\text{ روز}, T_A=100\text{ روز}} n_A = \frac{600}{100} = 6 & \text{نیمه‌عمر} \\ \xrightarrow{B: t=600\text{ روز}, T_B=150\text{ روز}} n_B = \frac{600}{150} = 4 & \text{نیمه‌عمر} \end{cases}$$

۲ تعداد هسته‌های فعال A و B با هم برابر شده است. $(N_A = N_B)$

$$N_A = N_B \Rightarrow \frac{N_{0A}}{2^{n_A}} = \frac{N_{0B}}{2^{n_B}} \Rightarrow \frac{N_{0A}}{2^6} = \frac{N_{0B}}{2^4} \Rightarrow \frac{N_{0A}}{N_{0B}} = 2^2 = 4$$

۲۷۷۸ A ۴

با توجه به فرض‌های مسئله تعداد هسته‌های باقی‌مانده A، ۴ برابر تعداد هسته‌های باقی‌مانده B است:

$$N_A = 4N_B \xrightarrow{N=\frac{N_0}{2^n}} \frac{N_{0A}}{2^{n_A}} = 4\frac{N_{0B}}{2^{n_B}} \xrightarrow{N_{0A}=N_{0B}} \frac{2^{n_B}}{2^{n_A}} = 4$$

$$\Rightarrow 2^{n_B - n_A} = 2^2 \Rightarrow n_B - n_A = 2$$

۲۷۷۹ A ۳

۱ در مدت ۳۰۰۰ سال تعداد هسته‌های باقیمانده $N = N_0/8$ است. نیمه‌عمر را به‌دست می‌آوریم:

$$N = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow \frac{N_0}{8} = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow n = 3 \quad , \quad T_{\frac{1}{2}} = \frac{t}{n} = \frac{3000}{3} = 1000y$$

۲ از ۳۰۰۰ سال تا ۶۰۰۰ سال نیز تعداد نیمه‌عمر $n=3$ خواهد بود و تعداد هسته‌های باقی‌مانده خواهد شد:

$$\frac{N_0}{8} \xrightarrow[\frac{T_1}{2}=1000]{} \frac{N_0}{16} \xrightarrow[\frac{T_1}{2}=1000]{} \frac{N_0}{32} \xrightarrow[\frac{T_1}{2}=1000]{} \frac{N_0}{64}$$

۳ بنابراین تعداد هسته‌های واپاشیده در این مدت برابر است با:

$$\frac{N_0}{8}-\frac{N_0}{64}=\frac{8N_0-N_0}{64}=\frac{7N_0}{64}$$

B ۲۷۸۰ ۳

خط فکری مسئله را از قسمت دوم آن یعنی باقی ماندن $\frac{m_1}{8}$ مادهٔ فعال از مقدار m_1 باید شروع کنید و مشخص کنید در بازه ۳۰۰h تا ۴۵۰h چند نیمه‌عمر گذشته است، سپس نیمه‌عمر را حساب کرده به سراغ ماده اولیه بروید.

۱ در مدت ۳۰۰ ساعت تا ۴۵۰ ساعت، جرم فعال از m_1 به $\frac{m_1}{8}$ رسیده است از این‌رو:

$$m=\frac{m_0}{2^n}\Rightarrow\frac{m_1}{8}=\frac{m_1}{2^n}\Rightarrow n=3$$

۲ نیمه‌عمر خواهد شد:

$$T=\frac{t}{n}\Rightarrow T=\frac{450-300}{3}\Rightarrow T=50h$$

۳ اکنون مقدار عنصر فعال باقیمانده پس از گذشت ۴۵۰ ساعت را به‌دست می‌آوریم:

$$n=\frac{t}{T}\Rightarrow\frac{450}{50}\Rightarrow n=9\ ,\ m=\frac{m_0}{2^n}\Rightarrow m=\frac{m_0}{2^9}\Rightarrow m=\frac{m_0}{512}$$

۴ مقدار ماده واپاشیده برابر است با:

$$m_0-m_x=m_0-\frac{m_0}{512}=\frac{511}{512}m_0$$

A ۲۷۸۱ ۴

با توجه به فرض مسأله:

۱ اگر جرم باقیمانده را m و جرم اولیه را m_0 فرض کنیم جرم مادهٔ واپاشیده $\Delta m=m_0-m$ خواهد بود که در صورت مسئله بیان شده $\Delta m=15m$ است. بنابراین:

$$\Delta m=m_0-m \Rightarrow 15m=m_0-m$$

جرم باقی‌مانده×۱۵=جرم واپاشیده شده

$$\Rightarrow m_0=16m\Rightarrow m=\frac{m_0}{16}$$

۲ تعداد نیمه‌عمرها را حساب می‌کنیم.

$$m=\frac{m_0}{2^n}\Rightarrow\frac{m_0}{16}=\frac{m_0}{2^n}\Rightarrow n=4$$

۳ زمان سپری شده خواهد شد:

$$n=\frac{t}{T}\Rightarrow t=nT\Rightarrow t=4\times16\Rightarrow t=64$$ روز

B ۲۷۸۲ ۲

خط فکری وقتی ماده پرتوزای X واپاشیده شده و به مادهٔ پرتوزای Y تبدیل می‌شود، در واقع تعداد هسته‌های ایجاد شدهٔ Y برابر تعداد هسته‌های واپاشیدهٔ X است. وقتی در صورت مسئله بیان می‌کند که تعداد هسته‌های Y (N_Y) ایجاد شده ۱۵ برابر تعداد هسته‌های باقی‌ماندهٔ X است یعنی $\Delta N_X=15N_X$ است. حال با دانستن این مطلب مسئله را حل می‌کنیم.

۱ تعداد ذره‌های تولید شدهٔ Y برابر تعداد ذره‌های واپاشیدهٔ X است از این‌رو:

$$N_Y=\Delta N_X\Rightarrow N_Y=N_{0X}-N_X\Rightarrow N_X+N_Y=N_{0X}$$

۲ با توجه به فرض مسئله N_Y، ۱۵ برابر N_X است.

$$N_X+15N_X=N_{0X}\Rightarrow N_X=\frac{N_{0X}}{16}$$

۳ تعداد نیمه‌عمرها را به‌دست می‌آوریم.

$$N=\frac{N_X}{2^n}\Rightarrow\frac{N_X}{16}=\frac{N_{0X}}{2^n}\Rightarrow 2^n=16\Rightarrow n=4$$

۴ بنابراین عمر قطعه سنگ برابر می‌شود با چهار نیمه‌عمر:

$t=5000\times4=2\times10^4$ سال $=20$ هزار سال

$$n=\frac{t}{T}\Rightarrow4=\frac{t}{5000}\Rightarrow t=20000$$ سال $=200$ قرن

A ۲۷۸۳ ۳

۱ تعداد هسته‌های موجود A و B در هر مرحله از واپاشیدن برابر تعداد هسته‌های اولیه عنصر پرتوزای A است، بنابراین:

N_{0A} : تعداد هسته‌های اولیه A و N_{MB} : تعداد هسته‌های B در نقطه M و

N_{MA} : تعداد هسته‌های A در نقطه M $\qquad N_{0A}=(N_{MA}+N_{MB})$

۲ با توجه به فرض مسئله تعداد هسته‌های B در نقطهٔ M، ۱۵ برابر تعداد هسته‌های A است. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$N_{0A}=(N_{MA}+15N_{MA})\Rightarrow N_{0A}=16N_{MA}\Rightarrow N_{MA}=\frac{1}{16}N_{0A}$$

۳ تعداد نیمه‌عمر A را به‌دست می‌آوریم:

$$N_A=\frac{N_{0A}}{2^n}\Rightarrow\frac{1}{16}N_{0A}=\frac{N_{0A}}{2^n}\Rightarrow2^n=16\Rightarrow n=4$$ نیمه عمر

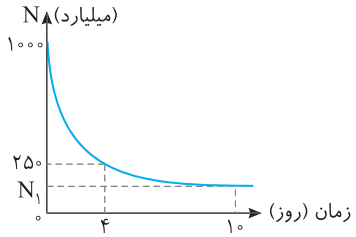
۴ بعد از گذشتن ۴ نیمه‌عمر به حالت M می‌رسد و زمان سپری‌شده خواهد شد:

$4\times1/2\times10^9=4/8\times10^9$ میلیارد سال یا سال ۴/۸

A ۲۷۸۴ ۴

۱ به نمودار نگاه کنید. در مدت ۴ روز تعداد هسته‌های ماده فعال از 1000×10^6 هسته به 250×10^6 هسته می‌رسد یعنی تعداد نیمه‌عمر سپری شده خواهد شد:

$$N=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^n\Rightarrow250\times10^6=\frac{1000\times10^6}{2^n}\Rightarrow2^n=4\Rightarrow n=2$$



۲ نیمه‌عمر را به‌دست می‌آوریم.

$$n=\frac{t}{T}\Rightarrow2=\frac{4}{T}\Rightarrow T=2$$ روز

۳ برای به‌دست آوردن N_1 باید بررسی کنیم در مدت ۱۰ روز چند نیمه‌عمر سپری شده است.

$$n=\frac{t}{T}=\frac{10}{2}=5$$

۴ N_1 را حساب می‌کنیم.

$$N=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^n\Rightarrow N_1=\frac{N_0}{2^5}\Rightarrow N_1=\frac{N_0}{32}=\frac{1000}{32}=31/25\times10^9$$

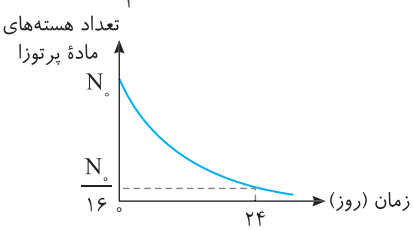
A ۲۷۸۵ ۳

۱ با توجه به نمودار بعد از گذشت ۲۴ روز تعداد هسته‌های فعال $\frac{N_0}{16}$ است. بنابراین تعداد نیمه‌عمر خواهد شد:

$$N=\frac{N_0}{2^n}\Rightarrow\frac{N_0}{16}=\frac{N_0}{2^n}\Rightarrow2^n=16\Rightarrow n=4$$

۲ نیمه‌عمر را حساب می‌کنیم:

$$T=\frac{t}{n}\xrightarrow{t=24\text{ روز}}T=\frac{24}{4}=6$$ روز



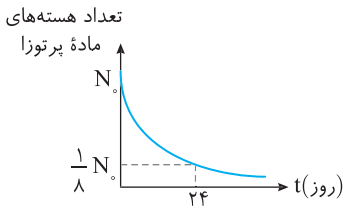
A ۲۷۸۶ ۴

تعداد هسته‌های مادهٔ پرتوزا بعد از ۲۴ روز $N=\frac{N_0}{8}$ است. تعداد نیمه عمرها را به دست می‌آوریم.

$$N=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{N_0}{8}=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{8}=\frac{1}{2^n} \Rightarrow n=3$$

نیمه عمر را حساب می‌کنیم

$$T_{\frac{1}{2}}=\frac{t}{n} \Rightarrow T_{\frac{1}{2}}=\frac{24}{3}=8 \text{ روز}$$



B ۲۷۸۷ ۱

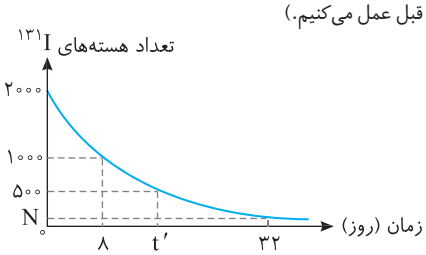
راه‌حل اول: با توجه به نمودار تعداد هسته‌های فعال در مدت ۸ روز، نصف شده است، بنابراین نیمه‌عمر آن ۸ روز می‌باشد. بنابراین t' که برابر دو نیمه‌عمر است، $2\times 8=16$ روز است. بعد از گذشت ۳۲ روز، داریم:

$$2000 \xrightarrow{\text{۸ روز}} 1000 \xrightarrow{\text{۸ روز}} 500 \xrightarrow{\text{۸ روز}} 250 \xrightarrow{\text{۸ روز}} N=125$$

راه‌حل دوم:

$$n=\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}=\frac{32}{8}=4 \quad , \quad N=\frac{N_0}{2^n} \Rightarrow N=\frac{N_0}{2^4} \Rightarrow N=\frac{2000}{16} \Rightarrow N=125$$

(در مورد t' مانند راه‌حل قبل عمل می‌کنیم.)



B ۲۷۸۸ ۲

۱ نیمه‌عمر این ماده بنا به فرض مسئله ۸h است.

۲ در بازه t تا t+۳۲، ۳۲ ساعت زمان سپری شده، اکنون مشخص می‌کنیم این ۳۲ ساعت چند نیمه‌عمر است.

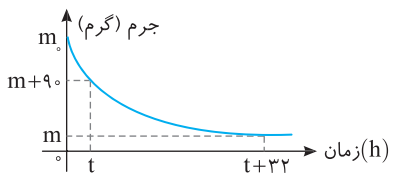
$$n=\frac{t}{T} \Rightarrow n=\frac{32}{8} \Rightarrow n=4 \text{ نیمه‌عمر}$$

۳ در مدت ۴ نیمه‌عمر جرم ماده فعال پرتوزا از مقدار اولیه $(m+90)$ به m رسیده است. بنابراین می‌توان نوشت

$$m=\frac{m+90}{2^n} \Rightarrow m=\frac{m+90}{2^4} \Rightarrow 16m=m+90 \Rightarrow 15m=90 \Rightarrow m=\frac{90}{15} \Rightarrow m=6g$$

۴ در t+۳۲ جرم مادهٔ فعال 6g است و در t+۴۸ زمان سپری شده $48-32=16h$ بوده که این زمان برابر دو نیمه‌عمر است. بنابراین جرم فعال در t+۴۸ خواهد شد.

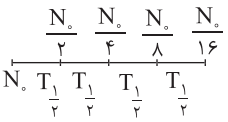
$$6g \xrightarrow{T=8h} 3g \xrightarrow{T=8h} 1/5g$$



B ۲۷۸۹ ۳

یادآوری نیمه‌عمر یک مادهٔ پرتوزا مدت زمانی است که طول می‌کشد تا نیمی از هسته‌های مادهٔ پرتوزا واپاشیده شود.

با توجه به نمودار می‌توان مسیر تحولات ماده پرتوزا را در مدت ۱۶ روز نشان داد.



تعداد نیمه‌عمرها در مدت ۱۶ روز برابر ۴ نیمه‌عمر است، بنابراین:

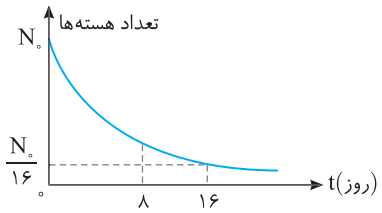
$$4T_{\frac{1}{2}}=16 \Rightarrow T_{\frac{1}{2}}=4 \text{ روز}$$

در مدت ۸ روز دو نیمه‌عمر می‌گذرد و تعداد هسته‌های فعال باقی‌مانده خواهد شد:

$$N=\frac{N_0}{2^2} \Rightarrow N=\frac{N_0}{4} \Rightarrow \frac{N}{N_0}=\%25$$

روش دیگر: با توجه به رابطهٔ $N=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$ داریم:

$$\frac{N_0}{16}=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow n=4 \xrightarrow{n=\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}} 4=\frac{16}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow T_{\frac{1}{2}}=4 \text{ روز}$$



حال تعداد هسته‌های باقی‌مانده پس از ۸ روز را به‌دست می‌آوریم. $n'=\frac{t'}{T_{\frac{1}{2}}}=\frac{8}{4}=2$

بنابراین پس از ۸ روز، $\frac{1}{2^2}$ هسته فعال باقی‌مانده که همان ۲۵٪ می‌باشد.

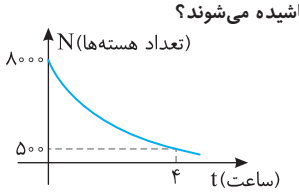
بازی با سؤال **نمودار تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده در یک نمونهٔ رادیواکتیو برحسب زمان مطابق شکل زیر است. پس از مدت ۳ ساعت از شروع واپاشی چند درصد از هسته‌های اولیه واپاشیده می‌شوند؟**

۱) ۱۲/۵ درصد

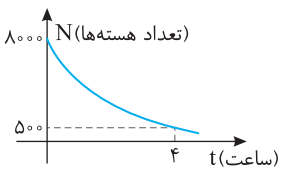
۲) ۸۷/۵ درصد

۳) ۶/۲۵ درصد

۴) ۹۳/۷۵ درصد



پاسخ با توجه به رابطهٔ $N=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$ که در آن $n=\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}$ است، داریم:



$$500=8000\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow n=4 \, , \, n=\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow 4=\frac{4}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow T_{\frac{1}{2}}=1h$$

بنابراین نیمه‌عمر برابر ۱h می‌باشد:

$$n=\frac{t'}{T_{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{t'=3h} n=\frac{3}{1}=3 \quad , \quad N'=8000\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow N'=1000$$

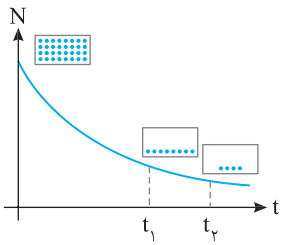
بنابراین از ۸۰۰۰ هسته بعد از ۳ ساعت ۱۰۰۰ هسته باقی‌مانده است یعنی ۷۰۰۰ هسته واپاشی شده است.

$$\frac{7000}{8000}\times 100=87/5\%$$

گزینهٔ ۲

۱ ۲۷۹۰ B

خط فکری باید تعداد هسته‌های درون هر مستطیل را بشمارید تا مشخص شود در مدت t_1 چه تعداد از هسته‌ها و در مدت t_1 تا t_2 نیز چه تعداد از هسته‌ها واپاشیده و چه تعداد باقی‌مانده است.



۱ با توجه به تعداد هسته‌های اولیه درون مستطیل اول $N_0=32$ و تعداد هسته‌ها در لحظهٔ t_1، $N_1=8$ است، بنابراین t_1 خواهد شد:

$$N_1=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{n_1}\Rightarrow 8=32\left(\frac{1}{2}\right)^{n_1}\Rightarrow n_1=2\quad,\quad n_1=\frac{t_1}{T_{\frac{1}{2}}}\Rightarrow t_1=2T_{\frac{1}{2}}$$

۲ در لحظهٔ t_2 تعداد هسته‌ها، ۴ شده است. بنابراین t_2 خواهد شد:

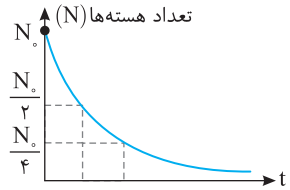
$$N_2=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{n_2}\Rightarrow 4=32\left(\frac{1}{2}\right)^{n_2}\Rightarrow n_2=3\quad,\quad n_2=\frac{t_2}{T_{\frac{1}{2}}}\Rightarrow t_2=3T_{\frac{1}{2}}$$

۳ نسبت t_2/t_1 برابر است با:

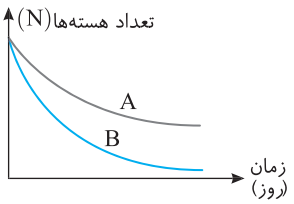
$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{3T_{\frac{1}{2}}}{2T_{\frac{1}{2}}}=\frac{3}{2}$$

۲ ۲۷۹۱ A

نکته با توجه به نمودار روبه‌رو هرچه نیمه‌عمر کوتاه‌تر باشد تعداد هسته‌های فعال در زمان کوتاه‌تری واپاشیده شده و تعداد هسته‌های باقیماندهٔ فعال به سرعت کاهش می‌یابد و شیب تغییرات آن تندتر است.



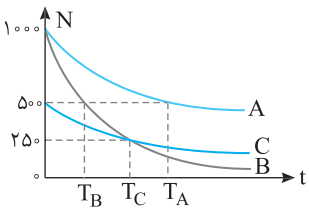
با توجه به نمودار شیب تغییرات B بسیار تندتر از A است. بنابراین نیمه‌عمر B کوتاه‌تر از نیمه‌عمر A است.



$$(T_{\frac{1}{2}})_A<(T_{\frac{1}{2}})_B$$

۴ ۲۷۹۲ A

با توجه به تعریف نیمه‌عمر می‌دانیم در مدت یک نیمه‌عمر تعداد هسته‌های پرتوزا نصف می‌شود. بنابراین با پیداکردن زمان‌های مربوط به هر نمودار وقتی که تعداد هسته‌های آن ماده پرتوزا نصف می‌شود مشخص است که:



$$T_B<T_C<T_A$$

۳ ۲۷۹۳ B

۱ با توجه به نمودار، تعداد هسته‌های A در مدت ۳ روز از ۱۰۰۰ هسته به ۵۰۰ هسته رسیده بنابراین نیمه‌عمر A، سه روز می‌باشد، پس ۹ روز معادل ۳ نیمه‌عمر عنصر A است.

۲ تعداد هسته‌های A بعد از ۹ روز خواهد شد:

$$N=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^n\Rightarrow N=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^3\Rightarrow N=\frac{1000}{2^3}=125 \text{ هسته}$$

۳ برای عنصر B در مدت ۳ روز، تعداد هسته‌های فعال از ۱۰۰۰ به ۱۲۵ رسیده است، از این‌رو تعداد نیمه‌عمرها خواهد شد:

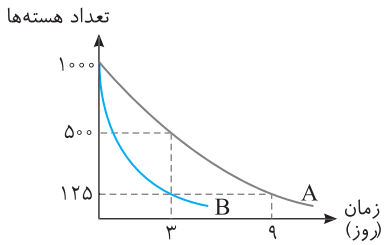
$$N_B=N_{0B}\left(\frac{1}{2}\right)^n\Rightarrow 125=\frac{1000}{2^n}\Rightarrow n=3$$

۴ نیمه‌عمر عنصر B خواهد شد:

$$T=\frac{t}{n}=\frac{3}{3}=1 \text{ روز}$$

۵ اکنون مشخص می‌کنیم که پس از چند روز $\frac{1}{32}$ هسته‌های B فعال می‌ماند.

$$N=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^n\Rightarrow\frac{N_0}{32}=\frac{N_0}{2^n}\Rightarrow n=5,T=\frac{t}{n}\Rightarrow 1=\frac{t}{5}\Rightarrow t=5 \text{ روز}$$



۲ ۲۷۹۴ B

۱ با توجه به نمودار ۷۵ سال برای هسته‌های B برابر $(n=\frac{75}{25}=3)$ سه نیمه‌عمر است و تعداد هسته‌های B بعد از ۷۵ سال خواهد شد:

$$N_B=N_{0B}\left(\frac{1}{2}\right)^n\Rightarrow N_B=\frac{16\times10^{24}}{2^3}=2\times10^{24}$$

۲ با توجه به نمودار پس از ۷۵ سال تعداد هسته‌های فعال A و B یکسان است از این‌رو:

$$N_A=N_B=2\times10^{24}\quad,\quad N_A=\frac{N_{0A}}{2^n}\Rightarrow 2\times10^{24}=\frac{3/2\times10^{25}}{2^n}\Rightarrow 2^n=16$$

$$\Rightarrow n=4$$

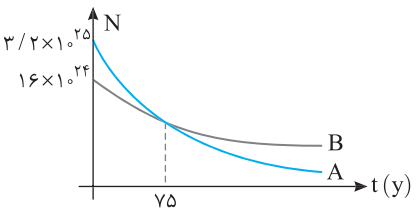
۳ نیمه‌عمر عنصر A خواهد شد:

$$T_{\frac{1}{2}A}=\frac{t}{n}=\frac{75}{4}=18/75y$$

۴ اکنون تعداد هسته‌های فعال A را بعد از ۱۱۲/۵ سال به‌دست می‌آوریم:

$$n=\frac{t}{T}=\frac{112/5}{\frac{75}{4}}=\frac{450}{75}=6$$

$$N=\frac{N_0}{2^n}\Rightarrow N_A=\frac{3/2\times10^{25}}{2^6}\Rightarrow N_A=\frac{32\times10^{24}}{64}\Rightarrow N_A=5\times10^{23}$$



۳ ۲۷۹۵ B

خط فکری دقت کنید که محور قائم این نمودار جرم واپاشی شده است و به همین دلیل در $t=0$، جرم واپاشیده صفر است و در نهایت اگر کل ماده پرتوزا واپاشیده شود، تعداد هسته‌های واپاشیده N_0 یعنی همان تعداد هسته‌های اولیه است. وقتی روی نمودار تعداد هسته‌های واپاشی شده $\frac{15}{16}N_0$ است یعنی تعداد هسته‌های فعال $N_0-\frac{15}{16}N_0=\frac{N_0}{16}$ است. از اینجا به بعد دیگر مسئله قابل حل است.

۱ تعداد نیمه‌عمرها خواهد شد:

$$N=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^n\Rightarrow\frac{1}{16}N_0=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^n\Rightarrow n=4$$

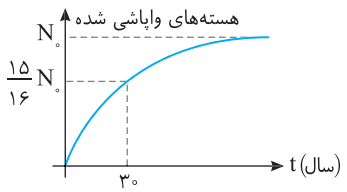
۲ نیمه‌عمر برابر است با:

$$n=\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}\Rightarrow 4=\frac{30}{T_{\frac{1}{2}}}\Rightarrow T_{\frac{1}{2}}=7/5 \text{ سال}$$

۳ اکنون زمانی که $N=\frac{1}{32}N_0$ می‌شود را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{32}N_0=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{n'}\Rightarrow n'=5$$

$$n'=\frac{t'}{T_{\frac{1}{2}}}\Rightarrow 5=\frac{t'}{7/5}\Rightarrow t'=37/5 \text{ سال}$$



A ۲ ۲۷۹۶

برای هر یک از دو عنصر، هسته‌های فعال P و Q را بعد از گذشت ۱h حساب می‌کنیم:

۱ نیمه‌عمر عنصر P، ۲۰ دقیقه است. تعداد هسته‌های فعال آن بعد از ۱h=۶۰min یعنی سه نیمه‌عمر $(n=\frac{60}{20}=3)$ را حساب می‌کنیم.

$$N_{0P}\xrightarrow{20\min}\frac{N_{0P}}{2}\xrightarrow{20\min}\frac{N_{0P}}{4}\xrightarrow{20\min}\frac{N_{0P}}{8}$$

۲ نیمه‌عمر عنصر Q، ۳۰ دقیقه است. تعداد هسته‌های فعال عنصر Q را بعد از گذشت ۱h=۶۰min یعنی دو نیمه‌عمر $(n=\frac{60}{30}=2)$ به‌دست می‌آوریم.

$$N_{0Q}\xrightarrow{30\min}\frac{N_{0Q}}{2}\xrightarrow{30\min}\frac{N_{0Q}}{4}$$

۳ نسبت N_P/N_Q خواهد شد:

$$\frac{N_P}{N_Q}=\frac{\frac{N_{0P}}{8}}{\frac{N_{0Q}}{4}}=\frac{1}{2}$$

B ۲ ۲۷۹۷

۱ تعداد نیمه‌عمرهای دو عنصر را در مدت t دقیقه برحسب t به‌دست می‌آوریم.

$$n=\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}\begin{cases}\xrightarrow[\text{عنصر x: } T_{\frac{1}{2}}=50\min]{} n_x=\frac{t}{50}\\ \xrightarrow[\text{عنصر y: } T_{\frac{1}{2}}=100\min]{} n_y=\frac{t}{100}\end{cases}\Rightarrow\frac{n_x}{n_y}=2\Rightarrow n_x=2n_y$$

۲ جرم هسته‌های فعال باقی‌مانده x و y را برحسب t حساب می‌کنیم.

$$M=M_0\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{cases}\xrightarrow{x} M_x=100\left(\frac{1}{2}\right)^{n_x}\Rightarrow M_x=\frac{100}{2^{n_x}}\\ \xrightarrow{y} M_y=100\left(\frac{1}{2}\right)^{n_y}\Rightarrow M_y=\frac{100}{2^{n_y}}\end{cases}$$

۳ نیمه‌عمر y بزرگ‌تر است و در مدت t تعداد نیمه‌های کمتری گذرانده و جرم فعال باقیمانده آن بزرگ‌تر است و بنا به فرض مسئله خواهیم داشت.

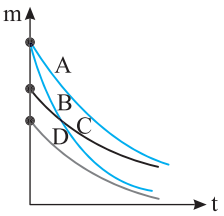
$$M_y-M_x=18/75g\Rightarrow\frac{100}{2^{n_y}}-\frac{100}{2^{n_x}}=18/75\xrightarrow{n_x=2n_y}$$

$$\frac{1}{2^{n_y}}-\frac{1}{2^{2n_y}}=\frac{18/75}{100}\Rightarrow\frac{2^{n_y}-1}{2^{2n_y}}=\frac{3}{16}\Rightarrow 2^{2n_y}=16\Rightarrow 2n_y=4\Rightarrow n_y=2$$

بنابراین در مدت t، دو نیمه‌عمر برای عنصر y یا نیمه‌عمر ۱۰۰ دقیقه می‌گذرد و t برابر ۲×۱۰=۲۰۰ دقیقه است.

B ۲ ۲۷۹۸

با توجه به شکل مسئله، نیمه‌عمر B از همه کوتاه‌تر و سرعت واپاشی آن از بقیه بیشتر است.



نکته در نمودار جرم (یا تعداد هسته‌های) فعال برحسب زمان: هرچه شیب نمودار تندتر باشد و سرعت کاهش جرم فعال بیشتر باشد، نیمه‌عمر کوتاه‌تر است.

به نمودار دقت کنید. سرعت کاهش جرم فعال عنصر B از بقیه بیشتر است. به همین دلیل نیمه‌عمر آن از بقیه کوتاه‌تر است و واپاشی آن سریع‌تر صورت می‌گیرد.

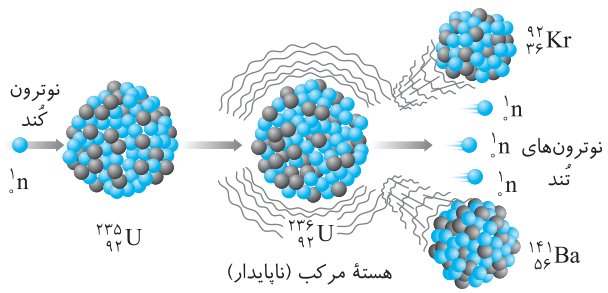
پنجره ۴

A ۲ ۲۷۹۹

شکافت هسته‌ای به فرایندی گویند که طی آن یک هستهٔ سنگین به دو هستهٔ با جرم کمتر تقسیم می‌شود و گداخت (هم‌جوشی) هسته‌ای به فرایندی گویند که طی آن دو هستهٔ سبک با هم ترکیب شده و هستهٔ سنگین‌تری به‌وجود می‌آید.

A ۳ ۲۸۰۰

هنگامی که نوترون کند توسط $^{235}_{92}U$ جذب می‌شود، هسته مرکب $^{236}_{92}U$ ایجاد می‌شود.



A ۱ ۲۸۰۱

برای استفاده از اورانیم در نیروگاه‌های هسته‌ای، باید درصد فراوانی ایزوتوپ $^{235}_{92}U$ را افزایش داد.

A ۴ ۲۸۰۲

افزایش درصد ایزوتوپ اورانیوم ۲۳۵ را غنی‌سازی اورانیوم می‌گویند.

B ۲ ۲۸۰۳

گزارهٔ (الف): در فرایند شکافت هسته‌ای، یک هستهٔ سنگین به دو هسته با جرم کمتر تبدیل می‌شود بنابراین گزارهٔ (الف) نادرست می‌باشد.

گزارهٔ (ب): در شکافت هسته‌ای نوترون جذب‌شده توسط $^{235}_{92}U$، کند است و معمولاً پس از شکافت سه نوترون تند داریم بنابراین این گزاره درست است.

گزارهٔ (پ): در معادن اورانیم به دلیل فراوانی پایین ایزوتوپ $^{235}_{92}U$ (از هر ۱۴۰ اتم اورانیم یکی از آن‌ها $^{235}_{92}U$ است)، شکافت هسته‌ای به‌طور طبیعی رخ نمی‌دهد و این گزاره درست است.

گزارهٔ (ت): در رشتهٔ اول واکنش زنجیری یک نوترون توسط $^{235}_{92}U$ جذب می‌شود و پس از شکافت، ۳ نوترون در اختیار داریم پس در بهترین حالت در رشتهٔ دوم واکنش زنجیری سه نوترون می‌توانند توسط $^{235}_{92}U$ جذب شده و واپاشیده شوند و در هر شکافت سه نوترون ایجاد می‌شود پس در این رشته که رشته سوم می‌باشد تعداد نوترون‌ها برابر ۳×۳=۹ نوترون می‌باشد بنابراین این گزاره درست است.

A ۳ ۲۸۰۴

برای کنترل آهنگ واکنش شکافت از میله‌هایی از جنس کادمیم و بور استفاده می‌شود.

A ۱ ۲۸۰۵

از کادمیم برای کنترل واکنش زنجیری استفاده می‌شود.

A ۲۸۰۶ ۲

در راکتور با خارج کردن و فرو بردن میله‌های کنترل درون آن، جذب نوترون را کنترل کرده، آهنگ واکنش را تنظیم می‌کنند.

B ۲۸۰۷ ۴

راکتور هسته‌ای دارای سوخت هسته‌ای، کندکننده، میله‌های کنترل و شاره‌ای برای خارج ساختن گرما است.

A ۲۸۰۸ ۳

شمارهٔ (۲)، راکتور نیروگاه می‌باشد که درون آن میله‌های سوخت و میلهٔ کنترل که شمارهٔ (۱) است و شاره (آب) برای خروج گرما وجود دارد. همچنین بخار آب پس از چرخاندن توربین به سمت چگالنده که شمارهٔ (۳) است می‌رود تا سرد و دوباره به آب مایع تبدیل شود.

A ۲۸۰۹ ۳

با توجه به اینکه در دو طرف واکنش باید مجموع عددهای جرمی برابر باشد از این‌رو:

$$۱+۲۳۵=۱۳۸+۹۶+n\Rightarrow n=۲$$

A ۲۸۱۰ ۴

با توجه به اینکه مجموع عدد جرمی و عدد اتمی در دو طرف واکنش باید برابر باشد. در این صورت:

$$۱+۲۳۵=a+۹۸+۴\Rightarrow a=۱۳۴\quad ,\quad ۰+۹۲=۵۱+b\Rightarrow b=۴۱$$

C ۲۸۱۱ ۳

نکته به افزایش غلظت $^{۲۳۵}_{۹۲}U$ در یک نمونه، غنی‌سازی گفته می‌شود.

خط فکری غنی‌سازی ۳ درصد یعنی ۳ درصد نمونه $^{۲۳۵}_{۹۲}U$ بوده و ۹۷ درصد نمونه $^{۲۳۸}_{۹۲}U$ است. بنابراین اگر تعداد کل هسته‌ها را N می‌گیریم، تعداد هسته‌های اورانیم ۲۳۵ برابر $\frac{۳}{۱۰۰}N$ و تعداد هسته‌های اورانیم ۲۳۸ برابر $\frac{۹۷}{۱۰۰}N$ است. با توجه به اینکه اختلاف تعداد هسته‌های اورانیم ۲۳۵ و ۲۳۸ در نمونه $۱/۴۱\times۱۰^{۲۰}$ است، خواهیم داشت:

$$N_{۲۳۸U}-N_{۲۳۵U}=۱/۴۱\times۱۰^{۲۰}\Rightarrow\frac{۹۷}{۱۰۰}N-\frac{۳}{۱۰۰}N=۱/۴۱\times۱۰^{۲۰}\Rightarrow$$

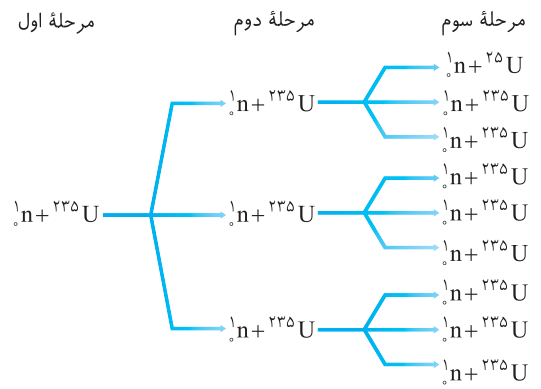
$$\frac{۹۴}{۱۰۰}N=۱/۴۱\times۱۰^{۲۰}\Rightarrow N=۱/۵\times۱۰^{۲۰}$$

حال تعداد هسته‌های اورانیم ۲۳۵ را حساب می‌کنیم:

$$N_{۲۳۵U}=\frac{۳}{۱۰۰}N\Rightarrow N_{۲۳۵U}=۴/۵\times۱۰^{۱۸}$$

B ۲۸۱۲ ۲

در هر واکنش شکافت ۳ نوترون آزاد می‌شود. بنابراین:



به‌ازای شکافت هر ^{۲۳۵}U، ۲۰۰ مگاالکترون انرژی آزاد می‌شود، با توجه به شکل بالا تعداد اورانیم‌های ۲۳۵ که دچار شکافت شده‌اند را می‌شماریم:

مرحله اول + مرحله دوم + مرحله سوم = ۱ + ۳ + ۹ = ۱۳

بنابراین انرژی آزاد شده خواهد شد:

انرژی آزادشده	تعداد شکافت
۲۰۰MeV	۱
?=۱۳×۲۰۰ =۲۶۰۰MeV	۱۳

$$۲۶۰۰MeV\xrightarrow{۱GeV=۱۰^{۳}MeV}E=۲/۶GeV$$

و تعداد نوترون‌های آزادشده در پایان مرحله سوم ۹×۳=۲۷ نوترون خواهد بود.

C ۲۸۱۳ ۴

۱ ابتدا انرژی برحسب کیلوتن را به ژول تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{cases}E=۲۰(\text{کیلوتن})\\ ۱\text{کیلوتن}=۴/۲\times۱۰^{۱۲}J\end{cases}\Rightarrow E=۸۴\times۱۰^{۱۲}J$$

۲ گرمای داده شده به آب و تغییر دمای آن از رابطهٔ $Q=mc\Delta\theta$ به‌دست می‌آید:

$$Q=mc\Delta\theta\xrightarrow[c=۴۲۰۰\frac{J}{kjc},\Delta\theta=۵۰^{\circ}C]{Q=E=۸۴\times۱۰^{۱۲}}۸۴\times۱۰^{۱۲}=m\times۴۲۰۰\times۵۰$$

$$\Rightarrow m=۴\times۱۰^{۸}kg$$

C ۲۸۱۴ ۱

عدد جرمی اورانیم ۲۳۵ است پس هر مول اورانیم ۲۳۵g است و چون هر مول برابر ۶×۱۰^{۲۳} اتم بوده پس در هر ۲۳۵g (یک مول) اورانیم، ۶×۱۰^{۲۳} اتم وجود دارد. بنابراین در m گرم آن تعداد اتم‌ها برابر است با:

تعداد اتم	۶×۱۰^{۲۳}
?=	۲۳۵g
m	

$$\text{تعداد اتم‌های }^{۲۳۵}U=\frac{m}{۲۳۵}\times۶\times۱۰^{۲۳}$$

به ازای هر اتم ۲۰۰MeV انرژی آزاد می‌شود پس به ازای $\frac{m}{۲۳۵}\times۶\times۱۰^{۲۳}$ اتم انرژی آزادشده برابر است با:

$$E=\frac{m}{۲۳۵}\times۶\times۱۰^{۲۳}\times۲۰۰MeV$$

انرژی آزاد شده از این تعداد باید برابر انرژی حاصل از سوختن ۱kg زغال باشد که برابر ۳۰MJ است از این‌رو:

$$۳۰\times۱۰^{۶}=\frac{m}{۲۳۵}\times۶\times۱۰^{۲۳}\times۲۰۰\times\underbrace{۱۰^{۶}}_{\text{تبدیل MeV به eV}}\times\underbrace{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}_{\text{تبدیل eV به ژول}}$$

$$\Rightarrow m=\frac{۲۳۵}{۴۰\times۱/۶\times۱۰^{۶}}\Rightarrow m\simeq۳۶۷\times۱۰^{-۵}g=۳/۶۷mg$$

B ۲۸۱۵ ۱

۱ توان نیروگاه ۳ گیگاوات یعنی ۳×۱۰^{۹} وات است. توان برابر آهنگ مصرف انرژی $P=\frac{E}{t}$ است. پس $E=P.t$ می‌شود، که t برابر یک سال یا $۳/۲\times۱۰^{۷}$ ثانیه است:

$$E_o=Pt=۳\times۱۰^{۹}\times۳/۲\times۱۰^{۷}\Rightarrow E_o=۹/۶\times۱۰^{۱۶}J$$

۲ انرژی به‌دست آمده در گام اول انرژی خروجی و الکتریکی بوده که طبق سؤال ۲۰٪ انرژی ورودی نیروگاه است. پس با توجه به فرمول بازده $Ra=\frac{E_{\text{خروجی}}}{E}\times۱۰۰$، انرژی خروجی را حساب می‌کنیم:

$$Ra=\frac{E_o}{E_i}\Rightarrow\frac{۲۰}{۱۰۰}=\frac{E_o}{E_i}\Rightarrow E_i=۹/۶\times۱۰^{۱۶}\times\frac{۱۰^{۲}}{۲۰}\Rightarrow E_i=۴۸\times۱۰^{۱۶}J$$

۳ انرژی آزاد شده به‌ازای شکافت یک هسته اورانیم برابر ۲۰۰MeV است. ابتدا این انرژی را برحسب ژول به‌دست می‌آوریم:

$$۲۰۰MeV\times\frac{۱۰^{۶}eV}{۱MeV}\times\frac{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}J}{۱eV}=۳/۲\times۱۰^{-۱۱}J$$

۴ انرژی ورودی به نیروگاه ۴۸×۱۰^{۱۶} و انرژی هر شکافت $۳/۲\times۱۰^{-۱۱}J$ است. با یک تناسب ساده تعداد واکنش شکافت را حساب می‌کنیم:

N	۴۸×۱۰^{۱۶}
۱	$۳/۲\times۱۰^{-۱۱}J$

$$\Rightarrow N=۱۵\times۱۰^{۲۷}\text{ اتم}$$

۵ حال با توجه به عدد آووگادرو تعداد مول را حساب می‌کنیم:

$$۱۵\times۱۰^{۲۷}\text{اتم}\times\frac{۱\text{mol}}{۶\times۱۰^{۲۳}\text{اتم}}=۲/۵\times۱۰^{۴}\text{مول}$$

۶ جرم مولی ^{۲۳۵}U برابر $۲۳۵\frac{g}{mol}$ است:

$$۲/۵\times۱۰^{۴}\times\frac{۲۳۵g}{۱\text{mol}}=۵۸۷/۵\times۱۰^{۴}g=۵۸۷۵kg$$

۳ ۲۸۱۶ A

واکنش شکافت هسته‌ای به‌صورت مقابل است:

$$^{۱}_{۰}n+^{۲۳۵}_{۹۲}U\rightarrow^{۱۴۱}_{۵۶}Ba+^{۹۲}_{۳۶}Kr+۳^{۱}_{۰}n$$

هم‌چنین واکنش گداخت نیز به صورت مقابل است:

$$^{۲}_{۱}H+^{۳}_{۱}H\rightarrow^{۴}_{۲}He+^{۱}_{۰}n$$

۳ ۲۸۱۷ A

در این واکنش همجوشی هسته‌ای، جرم هستهٔ هلیوم تولید شده، کمتر از مجموع جرم هسته‌های اولیه است که این کاستی جرم به انرژی تبدیل شده است و انرژی زیادی آزاد می‌شود.

۱ ۲۸۱۸ A

دو هستهٔ کم‌جرم که در واکنش گداخت باید به یک هستهٔ سنگین‌تر تبدیل شود باید به قدر کافی به هم نزدیک شوند تا نیروی **کوتاه‌بُرد هسته‌ای** بتواند آن‌ها را در کنار هم نگه دارد و واکنش گداخت انجام شود. ولی، هر هسته، بار مثبت دارد و هستهٔ دیگر را دفع می‌کند، برای آنکه هسته‌ها با وجود این نیروی رانشی بسیار قوی، بتوانند به هم گداخته شوند، باید **دما بسیار بالا** باشد. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

۱ ۲۸۱۹ A

در واکنش شکافت $۲۳۵+۱=۲۳۶$ نوکلئون شرکت دارند و انرژی آزاد شده به ازای هر نوکلئون خواهد شد:

$$E=\frac{۲۰۰}{۲۳۶}MeV$$

در واکنش گداخت دوتریم با تریتیم $۲+۳=۵$ نوکلئون شرکت دارند و انرژی آزاد شده به ازای هر نوکلئون خواهد شد.

$$E'=\frac{۱۷/۵}{۵}=۳/۵\ ,\ \frac{E'}{E}=\frac{۳/۵}{\frac{۲۰۰}{۲۳۶}}=\frac{۲۳۶\times۳/۵}{۲۰۰}=\frac{۱۱۸\times۳/۵}{۱۰۰}=۴/۱۳$$

پنجره تودرتو (آزمون فصل)

۴ ۲۸۱۹ A

۱ به کمک روش‌های فیزیکی فراوانی ^{۲۳۵}U را افزایش می‌دهند. یادمان باشد که ایزوتوپ‌ها را نمی‌توان با روش‌های شیمیایی از هم جدا کرد زیرا ایزوتوپ‌های یک عنصر دارای رفتار شیمیایی یکسان هستند. نمای ۶

۴ ۲۸۱۹ A

۲ هرچه هسته سنگین‌تر شود یعنی عدد اتمی افزایش یابد نسبت $\frac{N}{Z}$ بیشتر می‌شود و گزینهٔ (۱) درست است.

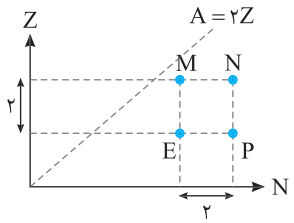
نیروی هسته‌ای بین دو نوکلئون وجود دارد، دو نوکلئون می‌توانند هر دو پروتون یا هر دو نوترون و یا یک نوترون و یک پروتون باشند یعنی نیروی هسته‌ای به نوع نوکلئون بستگی ندارد و گزینهٔ (۲) درست است.

هسته‌های سنگین با عدد اتمی بزرگ‌تر از $Z=۸۳$ که متعلق به بیسموت $(^{۲۰۹}_{۸۳}Bi)$ است، ناپایدارند و گزینهٔ (۳) درست است.

رفتار شیمیایی ایزوتوپ‌های یک عنصر به دلیل داشتن عدد اتمی یکسان و ساختار ترازهای انرژی اتمی یکسان، شبیه به هم است و گزینهٔ (۴) نادرست است. نمای ۱ و ۲

۲ ۲۸۱۹ B

۳ گزارهٔ (الف): خط $A=۲Z$ یعنی خطی که هسته‌های روی آن دارای تعداد پروتون و نوترون یکسان $(Z=N)$ است و این خط نیمساز نمودار $Z-N$ بوده است.



نکته تمام هسته‌های واقع بر خط عمود بر نیمساز دارای عدد جرمی یکسانی هستند.

اکنون به نمودار دقت کنید، خط PM قطر مربع MNPE بوده و دقیقاً امتداد آن بر خط نیمساز عمود است. بنابراین دو عنصر M و P دارای عدد جرمی یکسانی بوده و گزارهٔ (الف) درست است.

گزارهٔ (ب): هستهٔ N، دو نوترون و دو پروتون بیشتر از هستهٔ E دارد، یعنی مجموع نوترون‌ها و پروتون‌های N (عدد جرمی)، چهار واحد از E بیشتر است و گزارهٔ (ب) نادرست است.

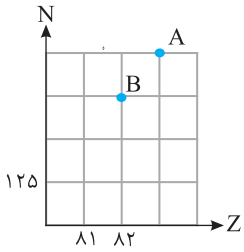
گزارهٔ (پ): عدد اتمی دو عنصر M و N یکسان و عدد نوترونی آن‌ها متفاوت است. بنابراین M و N ایزوتوپ‌های یک عنصر هستند. ایزوتوپ‌های یک عنصر دارای ترازهای الکترونی (اتمی) یکسانی بوده و خواص شیمیایی آن‌ها یکسان است و گزارهٔ (پ) درست است.

گزارهٔ (ت): عدد اتمی هسته‌های N و P متفاوت است: $Z_N=Z_P+۲$. بنابراین N و P دو عنصر متفاوت هستند و ایزوتوپ یکدیگر نیستند و گزارهٔ (ت) نادرست است.

نمای ۲

۳ ۲۸۱۹ A

۴ عنصر A یک نوترون و یک پروتون از دست می‌دهد تا به عنصر B تبدیل شود. ذره‌ای که دارای یک نوترون و یک پروتون است، هستهٔ دوتریم $^{۲}_{۱}D$ بوده و گزینهٔ (۳) پاسخ مسئله است.



نمای ۲

۱ ۲۸۱۹ A

۵ جرم اتم T مجموع جرم الکترون‌های اتم و هستهٔ اتم است. از طرفی اندازه‌گیری‌های دقیق نشان می‌دهد که جرم هسته از مجموع جرم پروتون‌ها (ZM_p) و جرم نوترون‌های (NM_n) تشکیل‌دهنده‌اش اندکی کمتر است، یعنی هنگام تشکیل هسته، از جرم نوکلئون‌های هسته مقداری کاسته می‌شود و این جرم به انرژی لازم برای تشکیل هسته (انرژی بستگی هسته) تبدیل می‌شود و هر چه این کاستی جسم هسته بیشتر باشد نشان‌دهندهٔ بزرگی انرژی بستگی هسته است. نمای ۳

۴ ۲۸۱۹ A

۶ **۱** با استفاده از رابطهٔ نیمه‌عمر، تعداد هسته‌های باقیمانده را برحسب تعداد هسته‌های اولیه $(N_۰)$ به‌دست می‌آوریم:

$$N=N_۰(\frac{۱}{۲})^{n}\Rightarrow N=\frac{N_۰}{۲^{n}}\xrightarrow{n=۵}N=\frac{N_۰}{۲^{۵}}\Rightarrow N=\frac{N_۰}{۳۲}$$

۲ تعداد هسته‌های واپاشیده شده را برحسب تعداد هسته‌های اولیه حساب می‌کنیم:

$$\text{تعداد هسته‌های واپاشیده: }\Delta N=N_۰-N=N_۰-\frac{N_۰}{۳۲}\Rightarrow\Delta N=\frac{۳۱}{۳۲}N_۰$$

درصد تعداد هسته‌های واپاشیده خواهد شد:

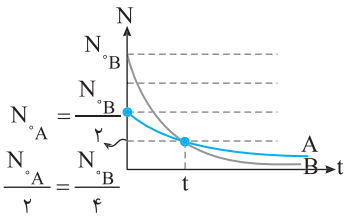
$$\frac{\Delta N}{N_۰}\times۱۰۰=\frac{۳۱}{۳۲}\times۱۰۰=٪۹۷$$

نمای ۵

۷ A ۴ ۲۸۱۹

با توجه به نمودار در مدت t برای عنصر پرتوزای A یک نیمه‌عمر و برای عنصر پرتوزای B، ۲ نیمه‌عمر گذشته است. بنابراین:

$$\frac{T_{\frac{1}{2},A}}{T_{\frac{1}{2},B}}=\frac{\frac{t}{n_A}}{\frac{t}{n_B}}\Rightarrow\frac{T_{\frac{1}{2},A}}{T_{\frac{1}{2},B}}=\frac{n_B}{n_A}=2\Rightarrow\frac{n_A}{n_B}=\frac{1}{2}$$



نمای ۵

۸ A ۲ ۲۸۱۹

برای حل این مسئله مقدار ۱/۵۶ درصد را به‌طور تقریبی برابر $\frac{1}{64}$ می‌گیریم تا بتوانیم سن تقریبی زغال را حساب کنیم.

۱ با توجه به رابطهٔ تعداد هسته‌های فعال با نیمه‌عمر، تعداد نیمه‌عمرهای سپری شده را حساب می‌کنیم:

$$N=N_\circ(\frac{1}{2})^n\Rightarrow N=\frac{N_\circ}{2^n}\xrightarrow{N=1/56\%N_\circ}\frac{1/56N_\circ}{100}=\frac{N_\circ}{2^n}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{64}=\frac{1}{2^n}\Rightarrow 2^n=64\Rightarrow n=6$$

۲ زمان سپری شده (یا سن تقریبی زغال قدیمی) خواهد شد:

$$t=nT\Rightarrow t=6\times5730\Rightarrow t=34380\ \text{سال}$$

نمای ۵

۹ A ۲ ۲۸۱۹

در واکنش‌های هسته‌ای، مجموع عدد جرمی و مجموع عدد اتمی در دو طرف واکنش یکسان است. بنابراین:

$$^{243}_{95}X\rightarrow{}^{223}_{91}Y+a\,^4_2He+b\,^0_{-1}e\Rightarrow\begin{cases}4a=20\Rightarrow a=5\\2a-b=4\Rightarrow b=6\end{cases}$$

نمای ۴

۱۰ A ۴ ۲۸۱۹

در واپاشی آلفا، از عدد اتمی ۲ واحد و از عدد جرمی ۴ واحد کاسته می‌شود در این صورت: هستهٔ مادر $^{211}_{84}X\Rightarrow{}^{207}_{82}Pb+{}^4_2\alpha\leftarrow{}^{A}_{Z}X$

در واپاشی بتازا، عدد جرمی ثابت و به عدد اتمی یک واحد اضافه می‌شود.

هستهٔ مادر $^{207}_{81}X\Rightarrow{}^{207}_{82}Pb+{}^0_{-1}\beta\leftarrow{}^{A}_{Z}X$

نمای ۴

۱۱ A ۳ ۲۸۱۹

به فرایند افزایش درصد یا غلظت ایزوتوپ ۲۳۵ در یک نمونه، غنی‌سازی گفته می‌شود. بیشتر راکتورهای تجاری تولید برق، مانند راکتور نیروگاه هسته‌ای بوشهر، از اورانیمی استفاده می‌کنند که در آن‌ها ایزوتوپ $^{235}_{92}U$ تا ۳ درصد غنی‌سازی شده است. همچنین در بیشتر راکتورهای پژوهشی، مانند راکتور پژوهشی دانشگاه تهران، از سوختی استفاده می‌شود که ایزوتوپ $^{235}_{92}U$ تا ۲۰ درصد غنی‌سازی شده است.

نمای ۶

۱۲ B ۲ ۲۸۱۹

غنی‌سازی ۴/۷ درصد ۲۳۵ داریم. بنابراین جرم اورانیم ۲۳۵ برابر است با:

$$100g\times\frac{4/7}{100}=4/7g$$

حال با توجه به اینکه جرم مولی اورانیم ۲۳۵ برابر $235\frac{g}{mol}$ است. تعداد مول اورانیم را حساب می‌کنیم:

$$n=\frac{m}{M}\Rightarrow n=\frac{4/7}{235}=0/02mol$$

در هر مول از یک عنصر 6×10^{23} اتم وجود دارد. بنابراین تعداد اتم‌های ^{235}U خواهد شد:

$$0/02mol\times\frac{6\times10^{23}\ \text{اتم}}{1mol}=0/12\times10^{23}\ \text{اتم}$$

به‌ازای هر اتم اورانیم ۲۳۵، ۲۰۰MeV انرژی آزاد می‌شود:

۱	۲۰۰MeV
$0/12\times10^{23}$	$E_{کل}=?$

$$E_{کل}=24\times10^{23}MeV\xrightarrow{1GeV=10^3MeV}$$

$$E_{کل}=24\times10^{20}GeV=2/4\times10^{21}GeV$$

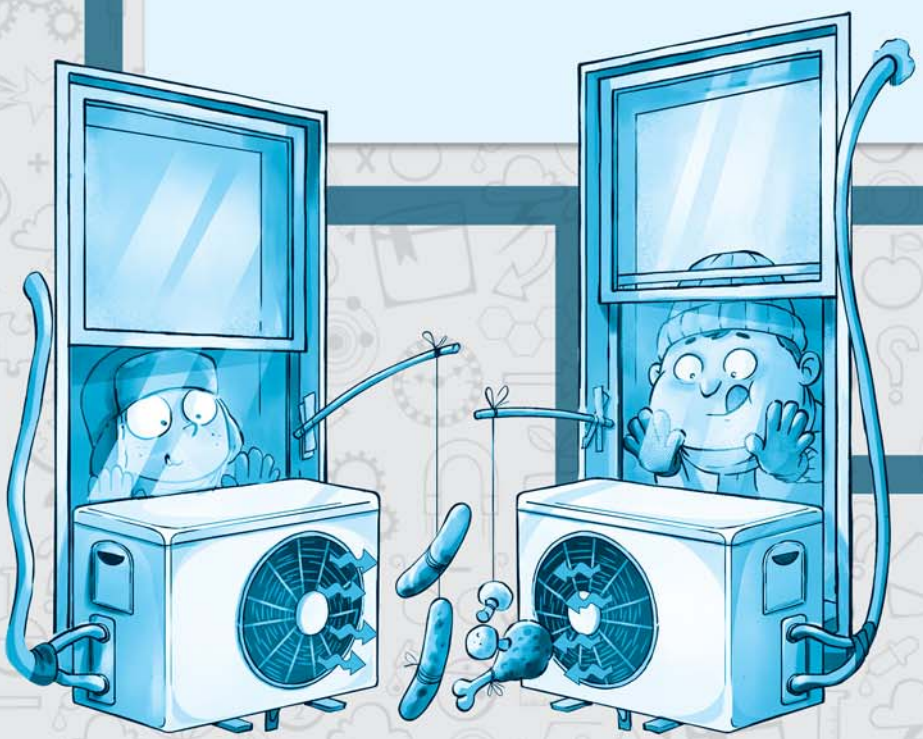
نمای ۶

جامع فیزیک پایه ریاضی (جلد ۱ و ۲)



مؤلفان: رضا خالو، امیرعلی میری

- درس‌نامهٔ کاربردی بر اساس مفاهیم کتاب درسی
- تقسیم هر فصل به ۵ پنجره و هر پنجره به چندین نما
- بیش از ۳۰۰۰ تست با چینش آموزشی (ساده به سخت)
- ارائهٔ تست‌های چالشی در پنجرهٔ دو جداره
- ۴ پنجرهٔ روبه‌رو و یک پنجرهٔ تودرتو بدون طبقه‌بندی در هر فصل برای عمق بخشیدن به یادگیری
- مشخص کردن تست‌های مهم برای جمع‌بندی سریع
- تست‌های مشابه با عنوان بازی با سؤال در برخی پاسخ ها
- پاسخ‌های تشریحی با ارائهٔ خط فکری برای حل مسائل
- راه‌حل‌های کوتاه و خلاقانه با عنوان میانبر در پاسخ‌ها



موج آزمون جامع فیزیک (ریاضی)



مؤلفان: رضا خالو، امیرعلی میری

- خلاصه درس‌هایی به سبک نمودار درختی (QR Code)
- ۳۵ آزمون فصل به فصل از فیزیک دهم
- ۳۷ آزمون فصل به فصل از فیزیک یازدهم
- ۵۹ آزمون فصل به فصل از فیزیک دوازدهم
- ۲۹ آزمون جامع از فیزیک ۱، ۲ و ۳ به سبک کنکور
- پاسخ‌های تشریحی با نیم‌نگاه‌هایی برای فهم بیشتر نکات
- میانبرهایی برای حل سریع‌تر تست در پاسخ تشریحی
- تست‌های کنکوری در پاسخ برای تسلط بر سوالات کنکور
- در مجموع ۲۳۰۰ تست با پاسخ تشریحی



موج ۲۰

مرحله‌ای و جامع

ویژهٔ آمادگی شرکت در امتحان‌های نهایی و نیم‌سال

موج ۲۰ شیمی دوازدهم



موج ۲۰ ریاضیات گسسته دوازدهم



موج ۲۰ فیزیک دوازدهم



موج ۲۰ هندسه دوازدهم

