

۱۱۴۱) دو مثلث ABC و BEF هم‌نهشت‌اند، پس $BF=BC=1$ و

$EF=AB=2$ ، پس $AF=1$. اکنون فرض می‌کنیم $FH=x$. در این صورت $BH=1-x$ داریم

$$\triangle ABC: DH \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{AH}{AB} = \frac{DH}{BC} \Rightarrow \frac{1+x}{2} = \frac{DH}{1}$$

$$DH = \frac{1+x}{2}$$

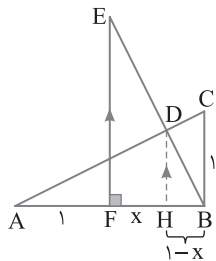
$$\triangle BEF: DH \parallel EF \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{DH}{EF} = \frac{BH}{BF} \Rightarrow \frac{DH}{2} = \frac{1-x}{1}$$

$$DH = 2-2x$$

بنابراین

$$\frac{1+x}{2} = 2-2x \Rightarrow 1+x = 4-4x \Rightarrow 5x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

$$DH = 2-2x = 2-\frac{6}{5} = \frac{4}{5} = 0.8$$

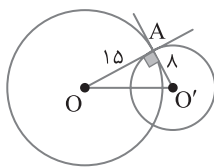


۱۱۴۲) مماس‌های رسم شده در نقطه تلاقی دو دایره به مراکز O و O' ، یعنی

نقطه A بر هم عمودند. پس این مماس‌ها از مراکز دو دایره عبور می‌کنند. در نتیجه

در مثلث OAO' که قائم‌الزاویه است، می‌نویسیم

$$\triangle OAO': OO'^2 = OA^2 + O'A^2 = 8^2 + 15^2 = 289 \Rightarrow OO' = 17$$



۱۱۴۳) می‌دانیم پاره خط PQ موازی ضلع BC است. پس

$$\triangle ABC: PQ \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{AP}{AC} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{PQ}{BC}$$

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیه نیمساز می‌نویسیم:

$$\triangle AMC: MP \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{AM}{MC} = \frac{AM}{3AM}$$

$$\triangle AMC: MP \text{ نیمساز} \Rightarrow MP^2 = AM \times MC - AP \times PC$$

$$\sqrt{33}^2 = AM \times 3AM - (\sqrt{5})(3\sqrt{5}) \Rightarrow 33 = 3AM^2 - 15$$

$$11 = AM^2 - 5 \Rightarrow AM^2 = 16 \Rightarrow AM = 4 \Rightarrow MC = 12 \Rightarrow BC = 24$$

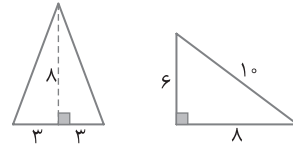
$$\xrightarrow{\text{از (1)}} \frac{PQ}{24} = \frac{1}{4} \Rightarrow PQ = 6$$

۱۱۳۸) گزاره گزینه (۳) یک گزاره همیشه درست و در نتیجه یک

قضیه است. پس برای آن مثال نقض وجود ندارد. توجه کنید که گزاره‌های

سایر گزینه‌ها قضیه نیستند، پس برای آن‌ها مثال نقض وجود دارد. برای رد

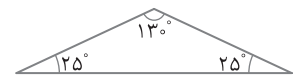
گزینه‌های (۱) و (۲)، دو مثلث زیر را در نظر بگیرید:



مساحت این دو مثلث برابر ۲۴ است، ولی این دو مثلث هم‌نهشت نیستند.

همچنین هر دو مثلث ارتفاعی به اندازه ۸ و ضلعی به اندازه ۶ دارند. برای

رد گزینه (۴) مثلث زیر را در نظر بگیرید:



۱۱۳۹) بنابر فرض چهارضلعی ABCD مربع است. با توجه به شکل

می‌نویسیم

$$\left. \begin{aligned} \angle MNC = 90^\circ &\Rightarrow \hat{N}_1 + \hat{N}_2 = 90^\circ \\ \angle DNC = 90^\circ &\Rightarrow \hat{N}_2 + \hat{C}_1 = 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{N}_1 = \hat{C}_1$$

بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویه DNC و AMN با داشتن دو زاویه مساوی

متشابه‌اند، پس

$$\frac{NC}{MN} = \frac{DC}{AN} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{DC}{AN} \xrightarrow{AN=x} DC=2x$$

در نتیجه

$$AD=DC=2x \xrightarrow{AN=x} ND=x$$

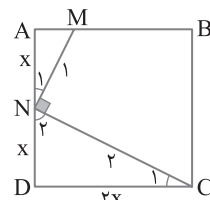
پس

$$\triangle DNC: NC^2 = ND^2 + DC^2 \Rightarrow 2^2 = (2x)^2 + x^2 \Rightarrow 5x^2 = 4$$

$$x^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

پس طول ضلع مربع مساوی $2x = \frac{4}{\sqrt{5}}$ است. بنابراین

$$S_{ABCD} = (2x)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{16}{5} = 3.2$$



۱۱۴۰) از C به G وصل می‌کنیم. چون D وسط BG و E وسط BC

است، پس P مرکز ثقل مثلث BGC است. در نتیجه $GP = \frac{2}{3} GE$. از طرف

دیگر G مرکز ثقل مثلث ABC است، پس $GE = \frac{1}{3} AG$. بنابراین

$$GP = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} AG\right) = \frac{1}{3} AG \Rightarrow \frac{AG}{GP} = 3$$

۱۱۴۷) ابتدا در معادله سهمی حرف a را به m تغییر می‌دهیم تا a با پارامتر سهمی اشتباه گرفته نشود. پس معادله سهمی به صورت $y^2 - 2y + 4x = m$ است. اکنون معادله سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$y^2 - 2y + 4x = m \Rightarrow (y-1)^2 - 1 + 4x = m \Rightarrow (y-1)^2 = -4x + m + 1$$

$$(y-1)^2 = -4\left(x - \frac{m}{4} - \frac{1}{4}\right)$$

پس این سهمی افقی رو به چپ با رأس $S\left(\frac{m}{4} + \frac{1}{4}, 1\right)$ است به طوری که $4a = 4$. پس $a = 1$. معادله خط هادی این نوع سهمی به صورت زیر است:

$$x = a + \alpha \Rightarrow x = 1 + \frac{m}{4} + \frac{1}{4} \xrightarrow{x=3} 3 = \frac{\Delta}{4} + \frac{m}{4} \xrightarrow{4 \times} 12 = \Delta + m \Rightarrow m = 7$$

۱۱۴۸) نقاط A, B, C وسط‌های اضلاع مثلث MNE به مساحت ۱۶ هستند. چون مثلث ABC با مثلث MNE با نسبت $\frac{1}{2}$ متشابه است، پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNE}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{S_{MNE}=16} S_{ABC} = 4$$

اکنون با استفاده از ضرب خارجی، مساحت مثلث ABC را پیدا می‌کنیم.

$$A(a, 4, 1), \quad B(a, b, 3), \quad C(a, 9, b)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, b-4, 2), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (0, 5, b-1)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & b-4 & 2 \\ 0 & 5 & b-1 \end{vmatrix} = (b^2 - 5b + 4 - 10)\vec{i} = (b^2 - 5b - 6)\vec{i}$$

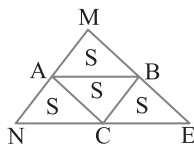
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \Rightarrow 4 = \frac{1}{2} \sqrt{(b^2 - 5b - 6)^2} \Rightarrow |b^2 - 5b - 6| = 8$$

بنابراین

$$b^2 - 5b - 6 = 8 \Rightarrow b^2 - 5b - 14 = 0 \Rightarrow b = 7 \text{ مجموع مقادیر } = 5$$

$$b^2 - 5b - 6 = -8 \Rightarrow b^2 - 5b + 2 = 0 \Rightarrow b = 2 \text{ مجموع مقادیر } = 5$$

پس مجموع مقادیر ممکن برابر b مساوی ۱۰ است.



۱۱۴۹) از فرض $CD = 3ED$ نتیجه می‌گیریم $CE = 2x$ و $ED = x$.

پس $CD = 3x$. در نتیجه $AB = CD = 3x$. اکنون از نقطه F عمود FH را بر AD وارد می‌کنیم. در دوزنقه $ABED$ چون $DE \parallel FH \parallel AB$ و AD وسط است. بنابراین پاره خط FH وسط‌های دو ساق دوزنقه را به هم وصل کرده است. پس

$$FH = \frac{AB + DE}{2} = \frac{3x + x}{2} = 2x$$

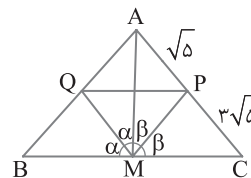
در نتیجه

$$\triangle AFH: AF^2 = AH^2 + FH^2 \Rightarrow 25 = \frac{9}{4}x^2 + 4x^2 = \frac{25}{4}x^2 \Rightarrow x = 2$$

در ضمن MP و MQ به ترتیب نیمسازهای زاویه‌های AMC و AMB هستند. پس $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, پس $\alpha + \beta = 90^\circ$. در نتیجه مثلث MPQ قائم‌الزاویه است. بنابراین

$$PQ^2 = MP^2 + MQ^2 \Rightarrow 6^2 = \sqrt{33}^2 + MQ^2$$

$$MQ^2 = 36 - 33 = 3 \Rightarrow MQ = \sqrt{3}$$

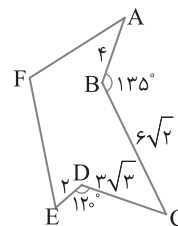


۱۱۴۴) بنابر مسئله هم‌پیرامونی، میزان افزایش مساحت برابر $2S_{ABC} + 2S_{DEC}$ است.

$$2S_{ABC} = 2\left(\frac{1}{2} AB \times BC \sin 135^\circ\right) = 4 \times 6 \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 24$$

$$2S_{DEC} = 2\left(\frac{1}{2} DE \times DC \sin 120^\circ\right) = 2 \times 3 \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9$$

بنابراین میزان افزایش مساحت برابر $24 + 9 = 33$ است.



۱۱۴۵) ابتدا ماتریس B^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2-3} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

اکنون طرفین تساوی داده شده را از سمت راست در B^{-1} ضرب می‌کنیم.

$$3I - 2A^{-1}B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -12 & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times B^{-1}}$$

$$3B^{-1} - 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -12 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -11 \\ -1 & 14 \end{bmatrix}$$

پس کوچک‌ترین درایه این ماتریس -۱۱ است.

۱۱۴۶) ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

حاصل ضرب درایه‌های A
حاصل ضرب درایه‌های A^2

پس

بنابراین

چون مثلث ABC متساوی الساقین است، پس ارتفاع AD

نیمساز زاویه A است. در ضمن

$$CE = \frac{AB}{2} \xrightarrow{AB=AC} CE = \frac{AC}{2} \Rightarrow \hat{BAC} = 3^\circ$$

$$\hat{C}_1 = 6^\circ \xrightarrow{\hat{C} = 75^\circ} \hat{C}_2 = 15^\circ$$

بنابراین در مثلث قائم الزاویه BEC ارتفاع EF مساوی $\frac{1}{4}BC$ است. همچنین

در این مثلث قائم الزاویه DE میانه است، پس نصف BC است و داریم

$$DE = \frac{BC}{2} \Rightarrow 2\sqrt{3} + 4 = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC = 4\sqrt{3} + 8$$

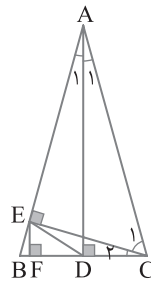
$$EF = \frac{4\sqrt{3} + 8}{4} = \sqrt{3} + 2$$

اکنون با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم الزاویه می‌نویسیم

$$\triangle BEC: EF^2 = BF \times FC \Rightarrow (\sqrt{3} + 2)^2 = BF(BC - BF)$$

$$3 + 4 + 4\sqrt{3} = BF(4\sqrt{3} + 8 - BF)$$

$$BF^2 - (4\sqrt{3} + 8)BF + 7 + 4\sqrt{3} = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}} BF = 1$$



مطابق شکل نیم دایره را کامل می‌کنیم تا دایره تشکیل شود. در این

صورت زاویه B محاطی رویه‌رو به قطر دایره است. پس $\hat{B} = 90^\circ$. اکنون OF از سمت O را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند. با استفاده از

روابط طولی در دایره می‌نویسیم

$$BE \times EC = EF \times ED \Rightarrow \frac{BE}{EF} = \frac{ED}{EC} \Rightarrow \frac{BE}{EF} = \frac{OE + OD}{EC}$$

$$\xrightarrow{OD=OC} \frac{BE}{EF} = \frac{OE + OC}{EC} \Rightarrow \frac{BE}{EF} = \frac{OE}{EC} + \frac{OC}{EC} \quad (1)$$

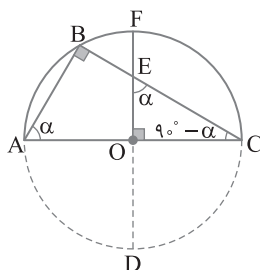
اکنون با توجه به شکل داریم

$$\triangle OEC: \frac{OE}{EC} = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \frac{OC}{EC} = \sin \alpha$$

پس

$$(1) \Rightarrow \frac{BE}{EC} = \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} + \sin \alpha$$

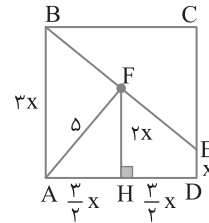
$$\xrightarrow{\sin \alpha = \frac{4}{5}} \frac{BE}{EC} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} + \frac{4}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5} = \frac{14}{10}$$



$$S_{AFED} = S_{AFH} + S_{DEFH} = \frac{1}{2} AH \times FH + \frac{1}{2} DH (DE + FH)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} x \right) (2x) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} x \right) (x + 2x) = \frac{3}{2} x^2 + \frac{9}{4} x^2 = \frac{15}{4} x^2$$

$$\xrightarrow{x=2} S_{AFED} = \frac{15}{4} \times 2^2 = 15$$



ابتدا حاصل دترمینان سمت راست را به دست می‌آوریم.

$$\begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix} = (\log 5)^2 - (\log 2)^2$$

$$= (\log 5 - \log 2)(\log 5 + \log 2) = \log \frac{5}{2} \log 10 = \log \frac{5}{2}$$

بنابراین

$$\log(3x+1) = \log \frac{5}{2} \Rightarrow 3x+1 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

پس

$$\log \sqrt{2} x = \log \sqrt{2} \frac{1}{2} = \log \frac{1}{2} \cdot 2^{-1} = -\frac{1}{2} \log 2 = -\frac{1}{2}$$

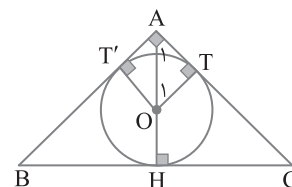
مکعب داده شده از $4 \times 4 \times 3 = 48$ مکعب کوچک ساخته شدهاست. نمای بالای خواسته شده شامل ۱۰ مکعب است، پس حداکثر تعداد مکعب‌هایی که باید برداشته شوند تا به نمای خواسته شده برسیم، برابر $48 - 10 = 38$ است.

فرض کنید مثلث ABC قائم الزاویه متساوی الساقین باشد.

برای رسم عمودمنصف ساق AC باید کمانی به شعاع بزرگ‌تر از نصف طول AC بزنیم. با توجه به شکل اگر O مرکز دایره محاطی باشد، آن‌گاه $OT = OT' = \sqrt{2}$ در نتیجه چهارضلعی OTAT' مربع و OA نیمساززاویه A است. بنابراین مثلث OAT قائم الزاویه متساوی الساقین است، یعنی $\hat{A}_1 = \hat{O}_1 = 45^\circ$. پس $AT = OT = \sqrt{2}$ و $OA = 2$. بنابرایندر نتیجه $AH = 2 + \sqrt{2}$

$$\triangle AHC: \hat{C} = 45^\circ \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{2}}{2} AC \Rightarrow 2 + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} AC$$

$$\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) = \frac{\sqrt{2}}{2} AC \Rightarrow \sqrt{2} + 1 = \frac{1}{2} AC$$

پس شعاع کمان برای رسم عمودمنصف AC باید از $\frac{1}{2}AC$ ، یعنی از $\sqrt{2} + 1$ بیشتر باشد.

۱۱۵۸) می‌دانیم اندازه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$ برابر $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$

است. پس اندازه تصویر قائم بردار $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$ بر امتداد بردار $\vec{a}$ برابر است با

$$\frac{|\left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}\right) \cdot \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{a}| + |\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ}{|\vec{a}|^2 + |\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$= \frac{|\vec{a}| + |\vec{a}| \left(\frac{1}{2}\right)}{|\vec{a}|} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

۱۱۵۹) ابتدا درمیان ماتریس A را پیدا می‌کنیم.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

از طرف دیگر

$$|A^2 + kA - A| = 125 \Rightarrow |A(A + (k-1)I)| = 125$$

$$|A| |A + (k-1)I| = 125 \xrightarrow{|A|=5} |A + (k-1)I| = 25$$

اکنون ماتریس $A + (k-1)I$ را به دست می‌آوریم.

$$A + (k-1)I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & 2 \\ 2 & 2 & k \end{bmatrix}$$

$$|A + (k-1)I| = \begin{vmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & 2 \\ 2 & 2 & k \end{vmatrix}$$

$$= k(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} + 2(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} + 2(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & k \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = k^3 - 12k + 16$$

بنابراین

$$k^3 - 12k + 16 = 25 \Rightarrow k^3 - 12k - 9 = 0 \Rightarrow k = -3$$

$$|(k+1)I_3| = (k+1)^3 |I_3| = (k+1)^3 = (-3+1)^3 = -8$$

توجه کنید که جواب معادله $k^3 - 12k - 9 = 0$ را با امتحان کردن مقادیر

$\pm 1, \pm 2, \pm 3$ پیدا کرده‌ایم. جواب‌های دیگر این معادله اعدادی

گنگ هستند.

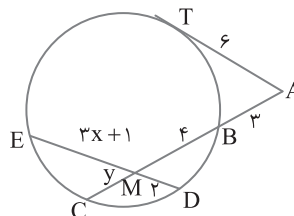
۱۱۵۵) با استفاده از روابط طولی در دایره می‌نویسیم

$$AT^2 = AB \times AC \Rightarrow 6^2 = 3(3+4+y) \Rightarrow y=5$$

$$MD \times ME = MB \times MC \Rightarrow 2(3x+1) = 20 \Rightarrow x=3$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

بنابراین



۱۱۵۶) در شکل A' بازتاب A نسبت به خط d است. چون بازتاب

تبدیل ایزومتري است، پس $OA = OA' = 10$. در ضمن ارتفاع $A'H$ بنابر

فرض برابر $9/6$ است. پس

$$\triangle OA'H:OH^2 = OA'^2 - A'H^2 = 10^2 - 9/6^2 = (10 - 9/6)(10 + 9/6)$$

$$= (10/4)(19/6) = \frac{4}{10} \times \frac{19}{6} \Rightarrow OH = \frac{2 \times 14}{10} = \frac{14}{5}$$

$$\triangle OA'H: \cos \hat{O} = \frac{OH}{OA'} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

در نتیجه

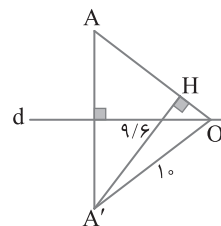
اکنون با استفاده از قضیه کسینوس‌ها می‌نویسیم

$$\triangle OAA': AA'^2 = OA^2 + OA'^2 \pm 2OA \times OA' \cos \hat{O}$$

$$= 10^2 + 10^2 \pm 2(10)(10) \left(\frac{7}{5}\right) = 200 \pm 280$$

$$AA'^2 = 256 \Rightarrow AA' = 16, \quad AA'^2 = 144 \Rightarrow AA' = 12$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای AA' برابر ۲۸ است.



۱۱۵۷) ابتدا به کمک قضیه کسینوس‌ها $\cos \hat{A}$ را به دست می‌آوریم.

$$\triangle ABC: BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A}$$

$$7^2 = 4^2 + 5^2 - 2(4)(5) \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = -\frac{1}{5}$$

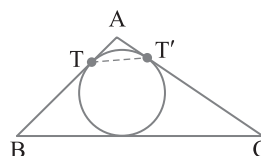
$$AT = AT' = P - a = \frac{4+5+7}{2} - 7 = 1$$

از طرف دیگر داریم

بنابراین

$$\triangle ATT': TT'^2 = AT^2 + AT'^2 - 2AT \times AT' \cos \hat{A}$$

$$= 1 + 1 - 2(1)(1) \left(-\frac{1}{5}\right) = 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5} \Rightarrow TT' = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{15}}{5}$$



راه‌حل دوم مرکز دایره روی عمودمنصف وتر AB و روی خط OB است. معادله هر دو خط را می‌نویسیم و با هم قطع می‌دهیم تا مرکز دایره به دست آید.

شیب خط OB قرینه معکوس شیب خط $3x - 2y = 6$ و برابر $-\frac{2}{3}$ است.

همچنین شیب خط عمودمنصف AB قرینه معکوس شیب AB است و

خط عمودمنصف از نقطه $M = \left(\frac{13}{4}, \frac{1}{4}\right)$ می‌گذرد.

$$m_{OB} = -\frac{2}{3}, \quad \text{شیب عمودمنصف} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$$

$$\text{OB خط: } y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow 2x + 3y = 4$$

$$\text{AB عمودمنصف خط: } y - \frac{1}{4} = -\frac{5}{3}\left(x - \frac{13}{4}\right) \Rightarrow 20x + 4y = 66$$

$$10x + 2y = 33$$

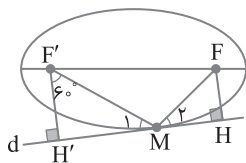
$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 10x + 2y = 33 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{5}, y = -1 \Rightarrow O\left(\frac{3}{5}, -1\right)$$

بنابر فرض سؤال $HH' = 2\sqrt{3}$. بنابر خاصیت بازتابندگی بیضی نتیجه می‌گیریم $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$. پس $\hat{F} = 60^\circ$. در نتیجه

$$\begin{cases} \triangle MFH: \hat{F} = 60^\circ \Rightarrow MH = \frac{\sqrt{3}}{2} MF \\ \triangle MF'H': \hat{F}' = 60^\circ \Rightarrow MH' = \frac{\sqrt{3}}{2} MF' \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}}$$

$$MH + MH' = \frac{\sqrt{3}}{2} (MF + MF') \Rightarrow HH' = \frac{\sqrt{3}}{2} (2a)$$

$$2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} (2a) \Rightarrow 2a = 4$$



از مرکز O به نقطه S وصل می‌کنیم. در این صورت

OS = OP = SP = R، پس مثلث OPS متساوی‌الاضلاع است. اکنون ارتفاع SH را در این مثلث رسم می‌کنیم. چون عرض نقطه S برابر ۳ است،

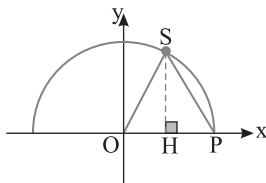
$$\text{پس } SH = 3 \text{ و داریم } SH = \frac{\sqrt{3}}{2} OP \Rightarrow 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} R \Rightarrow R = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

بنابراین

$$OS = R \Rightarrow \sqrt{a^2 + 2^2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a^2 + 4 = 12 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{2}$$

با توجه به شکل نقطه S در ناحیه اول دستگاه مختصات قرار دارد، پس a

باید مثبت باشد، پس $a = \sqrt{3}$.



با استفاده از فرض‌های سؤال مقادیر صحیح a, b, c و d را

به دست می‌آوریم.

$$B^T = 2I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \sqrt{2}b & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \sqrt{2}b & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+ac & 0 & a+ad \\ 0 & 2b^2 & 0 \\ c+cd & 0 & ac+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{cases} 1+ac=2 \Rightarrow ac=1 \Rightarrow a \neq 0, c \neq 0 \\ 2b^2=2 \Rightarrow b^2=1 \Rightarrow b=\pm 1 \\ c+cd=0 \Rightarrow c(1+d)=0 \xrightarrow{c \neq 0} 1+d=0 \Rightarrow d=-1 \end{cases}$$

حالت اول:

$$|A|=2 \Rightarrow ad-bc=2 \xrightarrow{d=-1, b=1} -a-c=2$$

$$a+c=-2 \xrightarrow{ac=1} a=-1, c=-1$$

$$|A|=2 \Rightarrow ad-bc=2 \xrightarrow{d=-1, b=1} -a+c=2 \xrightarrow{c=\frac{1}{a}} -a+\frac{1}{a}=2 \Rightarrow -a^2+1=2a \Rightarrow a^2+2a-1=0 \Rightarrow a=\frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \notin \mathbb{Z}$$

پس $a=-1, c=-1, d=-1$ و داریم

$$B^T = B^T \times B = 2I \times B = 2B = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \sqrt{2}b & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

در نتیجه حاصل ضرب درایه‌های غیرصفر ماتریس B^T برابر $2(-2)(2\sqrt{2})(-2) = -32\sqrt{2}$ است.

راه‌حل اول با توجه به داده‌های سؤال شکلی رسم می‌کنیم. در این

صورت مرکز دایره در ناحیه چهارم قرار دارد، پس گزینه‌های (۱) و (۲)

نادرست‌اند. اکنون گزینه‌های (۳) و (۴) را امتحان می‌کنیم. اگر $O\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

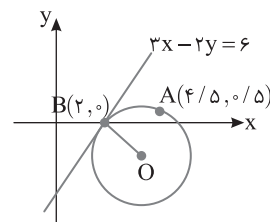
را مرکز دایره در نظر بگیریم، آن‌گاه شیب OB باید قرینه معکوس شیب خط

$$3x - 2y = 6 \text{ باشد.}$$

$$m_{OB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3/5 - 0}{4/5 - 2} = \frac{-3/5}{-6/5} = \frac{1}{2}, \quad \text{شیب خط} = \frac{3}{2}$$

دیده می‌شود که حاصل ضرب این دو شیب برابر ۱ نیست. پس گزینه (۳)

هم نادرست است. پس گزینه (۴) درست است.



۱۱۶۸ محیط مثلث محیطی برابر $\sqrt{48\pi}$ ، یعنی $4\sqrt{3\pi}$ است. اگر r

شعاع دایره محاطی باشد، آن گاه $r = \frac{S}{P}$. از طرف دیگر مساحت مثلث برابر ۳

به اضافه مساحت دایره است، بنابراین

$$\begin{aligned} r = \frac{3 + \pi r^2}{2\sqrt{3\pi}} &\Rightarrow 2\sqrt{3\pi}r = 3 + \pi r^2 \Rightarrow \pi r^2 - 2\sqrt{3\pi}r + 3 = 0 \\ (\sqrt{\pi}r - \sqrt{3})^2 &= 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow \text{مساحت مثلث} = 3 + \pi r^2 \\ &= 3 + \pi \left(\frac{3}{\pi}\right) = 6 \end{aligned}$$

۴۱۱۶۹ با استفاده از قضیه نیمساز می نویسیم

$$\triangle ABD: \text{نیمساز } DE \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DB} = \frac{3}{4} \quad (1)$$

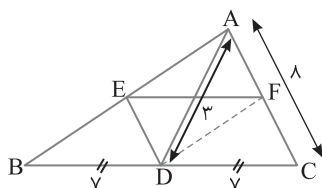
اکنون از قضیه تالس استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned} \triangle ABC: EF \parallel BC &\Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB} \xrightarrow{(1)} \frac{AF}{FC} = \frac{3}{4} \\ \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AF}{AC} = \frac{3}{7} &\Rightarrow \frac{AF}{8} = \frac{3}{7} \Rightarrow AF = \frac{24}{7} \\ FC = AC - AF = 8 - \frac{24}{7} &= \frac{32}{7} \end{aligned}$$

حالا از تناسب $\frac{AF}{FC} = \frac{AD}{DC} = \frac{3}{4}$ و عکس قضیه نیمساز می توان نتیجه

گرفت DF نیمساز زاویه ADC است، پس

$$\begin{aligned} \triangle ADC: \text{نیمساز } DF &\Rightarrow DF^2 = AD \times DC - AF \times FC \\ DF^2 &= 3 \times 7 - \left(\frac{24}{7}\right) \left(\frac{32}{7}\right) = 21 - 21 \times \frac{16}{49} = 21 \left(1 - \frac{16}{49}\right) = 21 \times \frac{33}{49} \\ DF &= \frac{3}{7} \sqrt{21} = \frac{3}{7} \sqrt{3 \times 7} = \frac{3\sqrt{3}}{7} \end{aligned}$$



۳۱۱۷۰ از فرض $\hat{A}DB = \hat{B}AD$ نتیجه می گیریم مثلث ADB

متساوی الساقین است، پس $AB = BD$. اکنون با استفاده از قضیه سینوس ها

می نویسیم.

$$\begin{cases} \triangle ABC: \frac{BC}{\sin x} = \frac{AB}{\sin 45^\circ} \\ \triangle BDC: \frac{BC}{\sin y} = \frac{BD}{\sin 12^\circ} \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم می کنیم}} \frac{\frac{BC}{\sin x}}{\frac{BC}{\sin y}} = \frac{\frac{AB}{\sin 45^\circ}}{\frac{BD}{\sin 12^\circ}} \Rightarrow \frac{\sin y}{\sin x} = \frac{AB}{BD} \cdot \frac{\sin 12^\circ}{\sin 45^\circ}$$

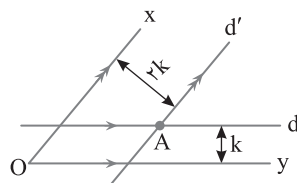
$$\xrightarrow{AB=BD} \frac{\sin y}{\sin x} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 12^\circ} \quad (1)$$

از طرف دیگر $x + y = 90^\circ$ پس $\sin y = \cos x$ و داریم

$$(1) \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

۴۱۱۶۴ زاویه xOy را در نظر بگیرید. خط d را موازی ضلع Oy به

فاصله k از آن و خط d' را موازی ضلع Ox به فاصله ۲k از آن رسم می کنیم. نقطه تلاقی این دو خط، یعنی نقطه A جواب سؤال است.



۲۱۱۶۵ از C به D وصل می کنیم. زاویه D

محاطی روبه رو به قطر است، پس $\hat{D} = 90^\circ$. از

طرف دیگر از مرکز O به نقطه E وسط کمان

DC وصل می کنیم. در این صورت OE بر وتر

AB هر دو بر DC عمودند، بنابراین دو خط OE و

OE در ضمن نقاط O و F وسط های دو ضلع مثلث ABC هستند.

پس بنابر عکس قضیه تالس $OF \parallel AB$. در نتیجه نقاط O، E و F روی

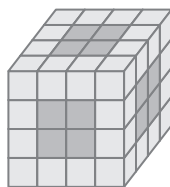
یک خط موازی با AB قرار دارند و داریم

$$OE = R = 4/5 \Rightarrow OF = OE + EF = 4/5 + 2 = 6/5$$

پس

$$\triangle ABC: OF \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{CF}{AC} = \frac{OF}{AB}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{6/5}{AB} \Rightarrow AB = 13$$



۴۱۱۶۶ این مکعب از ۶۴ مکعب کوچک به

ابعاد $4 \times 4 \times 4$ تشکیل شده است. مکعب های

کوچکی که فقط یک وجه آن ها رنگ شده است، در

مرکز وجه های مکعب بزرگ قرار دارند. در شکل

مکعب های پررنگ تر مورد نظر سؤال هستند.

بنابراین

$$24 = (4-2)(4-2)(4-2) = 6(4-2)(4-2)$$

۳۱۱۶۷ فرض کنید $AE = ED = DC = x$. چون مثلث EFD

متساوی الاضلاع است، پس $EF = FD = x$. در نتیجه هر دو مثلث AEF و

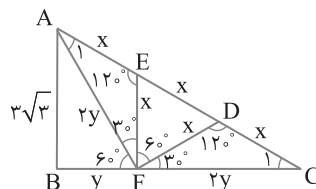
DFC متساوی الساقین با زاویه رأس 120° هستند، پس $\hat{C}_1 = \hat{A}_1 = 30^\circ$. پس

$AF = FC$. از طرف دیگر با استفاده از فرض $\frac{AF}{BC} = \frac{2}{3}$ داریم $AF = 2y$ و

$BC = 3y$. پس $FC = 2y$ و $BF = y$. اکنون با توجه به شکل زاویه AFB

برابر 60° است، پس با استفاده از قضیه کسینوس ها می نویسیم

$$\begin{aligned} \triangle ABF: AB^2 &= AF^2 + BF^2 - 2AF \times BF \cos 60^\circ \\ (3\sqrt{3})^2 &= (2y)^2 + y^2 - 2(2y)(y) \cos 60^\circ \Rightarrow 27 = 4y^2 + y^2 - 2y^2 \\ 27 &= 3y^2 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow FC = 2y = 6 \end{aligned}$$



۱۱۷۵) نقطه A روی سهمی قرار دارد. پس فاصله نقطه A تا کانون سهمی برابر فاصله نقطه A تا خط هادی سهمی است. با استاندارد کردن معادله سهمی معادله خط هادی آن را پیدا می‌کنیم.

$$x = -y^2 + 5y - 6 \Rightarrow y^2 - 5y = -x - 6 \Rightarrow (y - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} = -x - 6$$

$$(y - \frac{5}{2})^2 = -x + \frac{1}{4} \Rightarrow (y - \frac{5}{2})^2 = -(x - \frac{1}{4})$$

پس سهمی افقی با دهانه رو به چپ با رأس $S(\frac{1}{4}, \frac{5}{2})$ است و داریم

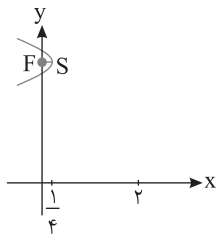
$$4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$h = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow x - \frac{1}{2} = 0$$

بنابراین

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = 2 \\ \alpha - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = -1 \end{array} \right.$$

با توجه به نمودار سهمی نقطه A به طول ۲ نمی‌تواند روی سهمی باشد پس $\alpha = -1$ قابل قبول است.



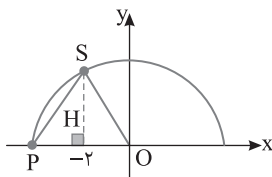
۱۱۷۶) از مرکز O به نقطه S وصل می‌کنیم. در این صورت

یعنی مثلث OPS متساوی الاضلاع است. پس ارتفاع

SH میانه هم هست. در نتیجه $R = OP = 2OH = 4$. بنابراین

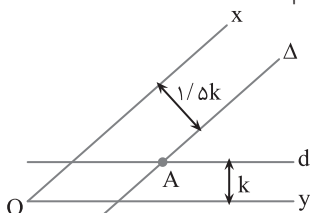
$$SH = \frac{\sqrt{3}}{2} OP = \frac{\sqrt{3}}{2} (4) = 2\sqrt{3}$$

پس عرض نقطه S برابر $2\sqrt{3}$ است.



۱۱۷۷) زاویه xOy را در نظر بگیرید. خط d را موازی ضلع Oy به

فاصله معلوم k و خط Δ را موازی ضلع Ox به فاصله معلوم ۱/Δk از آن رسم می‌کنیم. نقطه تلاقی دو خط d و Δ، یعنی A نقطه مورد نظر سؤال است. پس برای پیدا کردن چنین نقطه‌ای از رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای غیر واقع بر آن استفاده می‌کنیم.



۱۱۷۱) اگر بازتاب A نسبت به خط d نقطه A' باشد و از A' به B وصل کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند، آن‌گاه بنابر مسئله هرون، محیط مثلث ABC منیمم است. پس $\hat{C}_1 = \hat{C}_3$ و چون $\hat{C}_2 = \hat{C}_3$ ، پس $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$. بنابراین دو مثلث قائم الزاویه BCH و ACH' به دلیل داشتن دو زاویه مساوی متشابه می‌شوند.

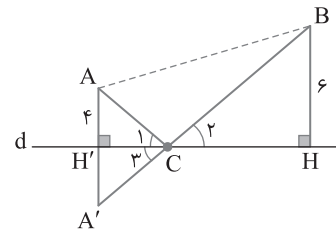
$$\triangle BCH \sim \triangle ACH' \Rightarrow \frac{CH}{CH'} = \frac{BH}{AH'} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{CH}{HH'} = \frac{3}{5} \quad (1)$$

از طرف دیگر $S_{ABHH'} = 50\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2} HH' (BH + AH') = 50\sqrt{3}$

$$\frac{1}{2} HH' (10) = 50\sqrt{3} \Rightarrow HH' = 10\sqrt{3} \quad (2)$$

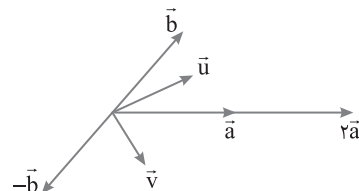
$$\Rightarrow \frac{CH}{10\sqrt{3}} = \frac{3}{5} \Rightarrow CH = 6\sqrt{3}$$



۱۱۷۲) در شکل بردار یکه $\vec{u}$ در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $\vec{a}$

و $\vec{b}$ است و بردار یکه $\vec{v}$ در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $2\vec{a}$ و $-\vec{b}$ است. چون دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ در راستای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند، پس برهم عمودند. بنابراین مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ساخته می‌شود برابر است با

$$S = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} |\vec{u}| |\vec{v}| \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$



۱۱۷۳) می‌دانیم اگر ماتریس‌های A و B مربعی باشند، آن‌گاه

$$|AB| = |A| |B|$$

$$|D| = |BA^T B| = |B| |A^T| |B| = |B|^2 |A|^T$$

از طرف دیگر $|B| = (-2)(3)(4) = -24$ و $|A| = (-1)(\frac{1}{2})(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{6}$

بنابراین

$$|D| = |B|^2 |A|^T = (-24)^2 (-\frac{1}{6})^3 = 24 \times 24 \times \frac{-1}{6 \times 6 \times 6} = -\frac{16}{3}$$

۱۱۷۴) ابتدا ماتریس D را پیدا می‌کنیم. بنابر فرض سؤال می‌نویسیم.

$$D = B \times C \times A = B \times A \times B \times A = (BA)(BA) = (BA)^T$$

اکنون ماتریس BA را به دست می‌آوریم.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |BA| = 2$$

$$(1) \Rightarrow |D| = (BA)^T |BA| = 2^2 = 4$$

بنابراین

با استفاده از قضیه نیمساز می نویسیم

$$\triangle ABD: DE \Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BD} = \frac{3}{5}$$

$$\triangle ABC: EF \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{FC} = \frac{3}{5}$$

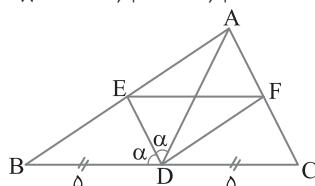
پس $\frac{AF}{FC} = \frac{AD}{DC}$ در نتیجه در مثلث ADC پاره خط DF نیمساز زاویه ADC است. بنابراین

$$\frac{AF}{FC} = \frac{3}{5} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AF}{AC} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{AF}{7} = \frac{3}{8} \Rightarrow AF = \frac{21}{8}$$

$$FC = 7 - \frac{21}{8} = \frac{35}{8}$$

$$\triangle ADC: DF \Rightarrow DF^2 = AD \times DC - AF \times FC$$

$$= 3 \times 5 - \frac{21}{8} \times \frac{35}{8} = 15(1 - \frac{49}{64}) = 15 \times \frac{15}{64} \Rightarrow DF = \frac{15}{8}$$



در چهارضلعی ABCD مجموع زوایای داخلی برابر 360° است. پس

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \Rightarrow \hat{A} + 105^\circ + \alpha + 165^\circ = 360^\circ$$

$$\hat{A} + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \sin \hat{A} = \cos \alpha \quad (1)$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیه سینوس ها می نویسیم

$$\triangle ABD: \frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{BD}{\sin \hat{A}} \xrightarrow{\text{از (1)}} \frac{AB}{1} = \frac{BD}{\cos \alpha} \quad (2)$$

$$\triangle BDC: \frac{BC}{\sin 135^\circ} = \frac{BD}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{BD}{\sin \alpha} \quad (3)$$

اکنون از تقسیم روابط (۲) و (۳) نتیجه می گیریم

$$\frac{\sqrt{2}AB}{BC} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \xrightarrow{\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}} \frac{2\sqrt{2}}{3} = \tan \alpha$$

بنابر مسئله هرون دو زاویه C_1 و C_2 مساوی اند. پس مثلث های

قائم الزاویه ACH' و BCH' به دلیل داشتن دو زاویه مساوی متشابه اند.

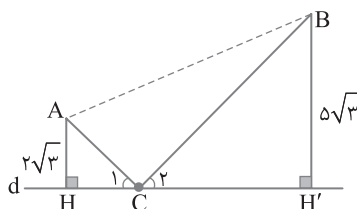
$$\triangle ACH \sim \triangle BCH' \Rightarrow \frac{CH}{CH'} = \frac{AH}{BH'} = \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \frac{2}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{CH}{HH'} = \frac{2}{7} \quad (1)$$

$$S_{ACH} = 6\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2} AH \times CH = 6\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} CH = 6\sqrt{3} \Rightarrow CH = 6 \quad (2)$$

$$\text{از (1) و (2)} \Rightarrow \frac{6}{HH'} = \frac{2}{7} \Rightarrow HH' = 21$$



از O به F وصل می کنیم. چون F وسط $\widehat{EC}$ قرار دارد، پس OF

بر وتر CE عمود می شود. از طرف دیگر زاویه E محاطی رویه رو به قطر BC

است، پس $\hat{E} = 90^\circ$. بنابراین OF و AB هر دو بر CE عمودند. پس

OF $\parallel$ AB. در ضمن در مثلث ABC نقاط O و D به ترتیب وسط های اضلاع

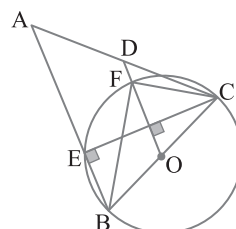
BC و AC هستند. پس بنابر عکس قضیه تالس $OD \parallel AB$. بنابراین نقاط O،

F و D روی یک خط موازی AB هستند. داریم

$$\begin{cases} OF = R = \frac{7}{2} \\ DF = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} OD = \frac{7}{2} + 1 = \frac{9}{2}$$

$$\triangle ABC: OD \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{OD}{AB} = \frac{CD}{AC}$$

$$\frac{9}{\frac{7}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 9$$



مکعب بزرگ از $4 \times 4 \times 4 = 64$ مکعب کوچک تشکیل شده

است. اگر از هر طرف یک ردیف حذف کنیم، آن گاه $2 \times 2 \times 2 = 8$ مکعب

کوچک باقی می ماند که هیچ وجه رنگی ای ندارند. از طرف دیگر تعداد

مکعب های کوچک رنگ شده برابر $64 - 8 = 56$ است. بنابراین

$$\frac{\text{تعداد مکعبات رنگ شده}}{\text{تعداد مکعبات رنگ نشده}} = \frac{56}{8} = 7$$

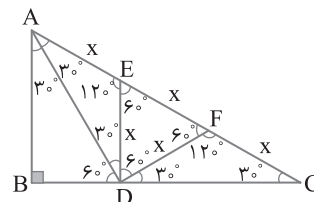
فرض کنید $DF = x$. چون مثلث های DFC و AED

متساوی الساقین و مثلث DEF مثلث متساوی الاضلاع است، نتیجه می گیریم

$$AE = DE = DF = EF = FC = x$$

پس زاویه های روی شکل را خواهیم داشت

$$\triangle ABD: \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow BD = \frac{AD}{2} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = 2$$



فرض کنید r شعاع دایره محاطی باشد.

$$2P = \sqrt{80\pi} \Rightarrow 2P = 4\sqrt{5\pi} \Rightarrow P = 2\sqrt{5\pi}$$

در ضمن مساحت چهارضلعی محیطی مساوی 5 به اضافه مساحت دایره

است، پس

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow r = \frac{5 + \pi r^2}{2\sqrt{5\pi}} \Rightarrow 2\sqrt{5\pi}r = 5 + \pi r^2$$

$$\pi r^2 - 2\sqrt{5\pi}r + 5 = 0 \Rightarrow (\sqrt{\pi}r - \sqrt{5})^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}$$

$$\text{بنابراین} \quad \text{محیط دایره} = 2\pi r = 2\pi \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}\right) = 2\sqrt{5\pi}$$

با توجه به شکل به ازای $\alpha = \frac{25}{8}$ نقطه $A(\alpha, \beta)$ نمی‌تواند روی این

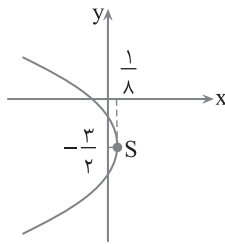
سهمی باشد. پس $\alpha = -\frac{15}{8}$ قابل قبول است. نقطه $A(-\frac{15}{8}, \beta)$ در

معادله سهمی صدق می‌کند. پس

$$\beta^2 + 2(-\frac{15}{8}) + 3\beta + 2 = 0 \Rightarrow \beta^2 + 3\beta - \frac{7}{4} = 0 \Rightarrow 4\beta^2 + 12\beta - 7 = 0.$$

بنابراین اختلاف مقادیر ممکن برای β برابر است با

$$\frac{\sqrt{12^2 - 4(4)(-7)}}{|4|} = \frac{\sqrt{256}}{4} = 4$$



راه‌حل اول فرض کنید در مثلث ABC داریم $\hat{B} = 60^\circ$ ،

$\hat{C} = 67^\circ$ و $BC = 30$. در این صورت

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - (60^\circ + 67^\circ) = 180^\circ - 127^\circ = 53^\circ$$

اکنون ارتفاع CH را در این مثلث رسم می‌کنیم. داریم

$$\triangle BHC: \hat{B} = 60^\circ \Rightarrow CH = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = \frac{\sqrt{3}}{2} (30) = 15\sqrt{3}$$

$$\triangle BHC: \hat{B} = 60^\circ \Rightarrow \hat{BCH} = 30^\circ \Rightarrow BH = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} (30) = 15$$

از طرف دیگر

$$\triangle ACH: \sin \hat{A} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \sin 53^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{AC} \Rightarrow AC = \frac{15\sqrt{3}}{\sin 53^\circ} \quad (1)$$

$$\cos 53^\circ = \frac{0.6}{1} \Rightarrow \sin 53^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 53^\circ} = \sqrt{1 - 0.36} = \sqrt{0.64} = 0.8 \quad (2)$$

$$= \sqrt{0.64} = 0.8 \quad (2)$$

$$(2), (1) \Rightarrow AC = \frac{15\sqrt{3}}{0.8} = \frac{45\sqrt{3}}{4}$$

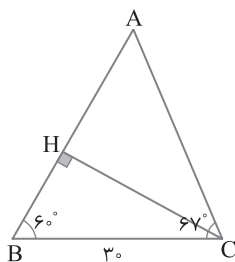
$$\triangle ACH: \cos \hat{A} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \cos 53^\circ = \frac{AH}{AC}$$

$$AH = AC \cos 53^\circ = \frac{45\sqrt{3}}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{45\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{بنابراین } AB = AH + BH = \frac{45\sqrt{3}}{4} + 15$$

$$ABC \text{ محیط مثلث} = AB + AC + BC$$

$$= \frac{45\sqrt{3}}{4} + 15 + \frac{45\sqrt{3}}{4} + 30 = 30\sqrt{3} + 45$$

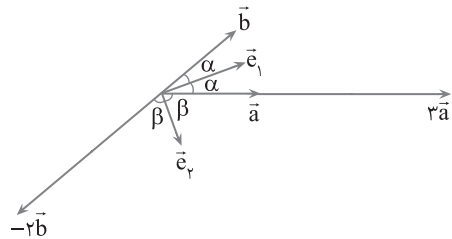


$\vec{e}_1$ در راستای نیمساز داخلی زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{e}_2$

در راستای نیمساز خارجی زاویه بین این دو بردار است. پس $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$. بنابراین

متوازی الاضلاع ساخته شده توسط بردارهای واحد $\vec{e}_1$ و $\vec{e}_2$ مربع به ضلع ۱

است. در نتیجه طول قطر این مربع $\sqrt{2}$ است.



دترمینان ماتریس‌های A و B برابرند با

$$|A| = (-2)(-3)(-1) = -6, \quad |B| = (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{3})(-5) = -\frac{5}{6}$$

از طرف دیگر

$$|(AB)^2| = |AB|^2 = (|A||B|)^2 = ((-6) \times (-\frac{5}{6}))^2 = 5^2 = 25$$

ابتدا ماتریس A را به دست می‌آوریم

$$A = B \times C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس A^2 را پیدا می‌کنیم

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین

(ستون اول A^2) A (سطر سوم A^2) = درایه سطر سوم و ستون اول A^5

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= -8 - 8 = -16$$

ابتدا معادله سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم

$$y^2 + 2x + 3y + 2 = 0 \Rightarrow (y + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + 2x + 2 = 0.$$

$$(y + \frac{3}{2})^2 = -2x + \frac{1}{4} \Rightarrow (y + \frac{3}{2})^2 = -2(x - \frac{1}{8})$$

پس سهمی افقی و دهانه آن رو به چپ با رأس $S(\frac{1}{8}, -\frac{3}{2})$ است و

$$4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

فاصله نقطه $A(\alpha, \beta)$ روی سهمی از کانون و خط هادی آن برابر است.

اکنون خط هادی این سهمی را پیدا می‌کنیم

$$\text{معادله خط هادی: } x = a + h \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x - \frac{5}{8} = 0.$$

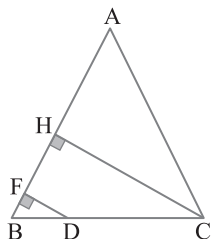
$$\text{فاصله نقطه } A \text{ تا خط هادی} = 2/5 \Rightarrow \left| \alpha - \frac{5}{8} \right| = \frac{5}{8} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \frac{5}{8} = \frac{5}{8} \Rightarrow \alpha = \frac{25}{8} \\ \alpha - \frac{5}{8} = -\frac{5}{8} \Rightarrow \alpha = -\frac{15}{8} \end{cases}$$

راه حل دوم از رأس C ارتفاع CH وارد بر ضلع AB را رسم می کنیم. در این صورت CH با DE موازی خواهد شد. اکنون فرض کنید $BD=x$. در این صورت بنابر فرض $BC=4BD=4x$. بنابراین

$$S_{ABC} = 40 \Rightarrow \frac{1}{2} CH \times AB = 40 \xrightarrow{AB=AC=10} \frac{1}{2} CH \times 10 = 40 \\ CH = 8$$

اکنون از تعمیم قضیه تالس در مثلث BAC خواهیم داشت

$$DE \parallel CH \Rightarrow \frac{DE}{CH} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{DE}{8} = \frac{x}{4x} \Rightarrow DE = 2$$

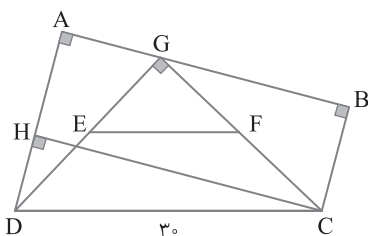


از رأس C خطی موازی AB رسم می کنیم تا ضلع AD را در

نقطه H قطع کند. چون $\hat{A} = 90^\circ$ ، پس $\hat{H} = 90^\circ$. در نتیجه چهارضلعی ABCH مستطیل است. پس $AH = BC$. بنابراین $DH = AD - BC$. همچنین $CH = AB$ داریم

$$\triangle DCH : DC^2 = DH^2 + CH^2 \Rightarrow 30^2 = (AD - BC)^2 + AB^2$$

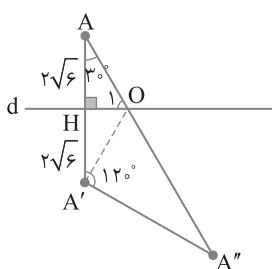
از طرف دیگر اندازه های تمام اضلاع ازونته ABCD عدد صحیح هستند. پس اعداد فیثاغورثی AB، $AD - BC$ و 30 باید صحیح باشند. می دانیم $AB = 24$ پس $18^2 + 24^2 = 30^2$



بدون کم شدن از کلیت، دوران را ساعتگرد در نظر می گیریم. بنابراین شکل زیر را خواهیم داشت. چون بازتاب و دوران تبدیل های طولی هستند. پس $A'H = A'H' = 2\sqrt{6}$ و $A'A = A'A'' = 4\sqrt{6}$. در نتیجه مثلث $AA'A''$ متساوی الساقین با زاویه رأس 120° است، بنابراین $\hat{A} = 30^\circ$ داریم

$$\triangle OAH : \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{OH}{AH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{OH}{2\sqrt{6}} \Rightarrow OH = 2\sqrt{2}$$

$$S_{OAA'} = \frac{1}{2} OH \times AA' = \frac{1}{2} (2\sqrt{2})(4\sqrt{6}) = 4\sqrt{12} = 8\sqrt{3} \quad \text{پس}$$



راه حل دوم در مثلث ABC، فرض کنید $\hat{B} = 60^\circ$ ، $\hat{C} = 67^\circ$ و $BC = 30$. در این صورت

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - (60^\circ + 67^\circ) = 180^\circ - 127^\circ = 53^\circ$$

برای اینکه بتوانیم از قضیه سینوس ها استفاده کنیم، سینوس زاویه های مثلث ABC را به دست می آوریم. می توان نوشت

$$\sin \hat{A} = \sin 53^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 53^\circ} = \sqrt{1 - 0.6^2} = \sqrt{0.64} = 0.8$$

$$\sin \hat{B} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \hat{C} = \sin 67^\circ = \sin(120^\circ - 53^\circ)$$

$$= \sin 120^\circ \cos 53^\circ - \cos 120^\circ \sin 53^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0.6 - \left(-\frac{1}{2}\right) \times 0.8 = 0.3\sqrt{3} + 0.4$$

اکنون از قضیه سینوس ها داریم

$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{30}{0.8} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{AB}{0.3\sqrt{3} + 0.4}$$

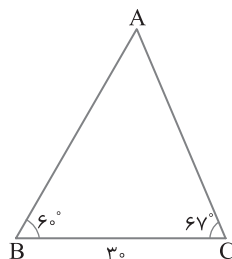
$$\frac{30}{0.8} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow AC = \frac{30}{0.8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{75}{4}\sqrt{3}$$

$$\frac{30}{0.8} = \frac{AB}{0.3\sqrt{3} + 0.4} \Rightarrow AB = \frac{30}{0.8} (0.3\sqrt{3} + 0.4) = \frac{30}{8} (3\sqrt{3} + 4) \\ = \frac{45}{4}\sqrt{3} + 15$$

در نتیجه

$$AB + AC + BC = \text{محیط مثلث } ABC$$

$$= \frac{45}{4}\sqrt{3} + 15 + \frac{75}{4}\sqrt{3} + 30 = 45 + 30\sqrt{3}$$



راه حل اول فرض کنید $BD=x$. در این صورت از فرض

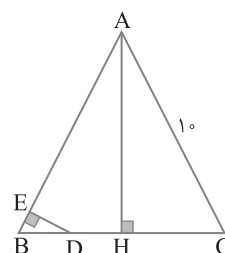
$BC=4BD$ نتیجه می گیریم $BC=4x$ ، پس $CD=3x$. اکنون ارتفاع AH را در مثلث متساوی الساقین ABC رسم می کنیم. بنابراین

$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{C} \\ \hat{E} = \hat{H} = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{(ز)} \triangle BDE \sim \triangle CAH \Rightarrow \frac{DE}{AH} = \frac{BD}{CA} \quad (1)$$

از طرف دیگر

$$S_{ABC} = 40 \Rightarrow \frac{1}{2} AH \times BC = 40 \Rightarrow \frac{1}{2} AH \times (4x) = 40 \Rightarrow AH = \frac{20}{x} \quad (2)$$

$$\text{از (1) و (2)} \Rightarrow \frac{DE}{\frac{20}{x}} = \frac{x}{4x} \Rightarrow DE = 2$$



چون ماتریس A اسکالر است، پس درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند و درایه‌های روی قطر اصلی مساوی‌اند و داریم

$$\begin{cases} y-5=0 \Rightarrow y=5 \\ -45-3x=0 \Rightarrow x=-15 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{-15}{5} = -3$$

توجه کنید که به ازای $x=-15$ و $y=5$ درایه‌های روی قطر اصلی برابر ۲- هستند. پس این مقادیر قابل قبول هستند.

از آنجا که ماتریس داده شده مربعی از مرتبه ۲ است، نتیجه می‌گیریم ماتریس‌های A و B نیز مربعی از مرتبه ۲ هستند. از طرفین تساوی داده شده دترمینان می‌گیریم

$$(AB)^{-1} A^T B = \begin{bmatrix} 5|A| & 4 \\ |A| & 2|A| \end{bmatrix}$$

$$|(AB)^{-1} A^T B| = \begin{vmatrix} 5|A| & 4 \\ |A| & 2|A| \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{1}{|AB|} |A|^3 |B| = 10|A|^2 - 4|A|$$

$$|A|^2 = 10|A|^2 - 4|A| \Rightarrow 9|A|^2 - 4|A| = 0 \Rightarrow |A|(9|A| - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ |A| = \frac{4}{9} \end{cases}$$

چون A وارون پذیر است، پس $|A| \neq 0$ قابل قبول نیست و چون A مربعی از مرتبه ۲ است، داریم

$$|3A| = 3^2 |A| = 9 \times \frac{4}{9} = 4$$

دو وتر مساوی و منصف در یک دایره قطرهای یک دایره هستند، پس نقطه تلاقی آن‌ها مرکز دایره است.

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ 2x-3y=7 \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} 4y = -4 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow x = 2$$

پس مرکز دایره نقطه $O(2, -1)$ است. بنابراین فاصله O تا خط مماس

$$y = \frac{3}{4}x \text{ برابر شعاع دایره است.} \\ \text{خط مماس: } y = \frac{3}{4}x \Rightarrow 3x - 4y = 0$$

$$R = \text{فاصله } O \text{ تا خط مماس} = \frac{|6+4|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2$$

دو مثلث $EF'D$ و EFG متشابه‌اند، پس زوایای نظیرشان، یعنی $\widehat{EDF'}$ و $\widehat{EGF}$ مساوی‌اند. از طرف دیگر بنابر خاصیت بازتابندگی بیضی دو زاویه $\widehat{EDF'}$ و $\widehat{FDG}$ مساوی‌اند. در نتیجه $\widehat{FDG} = \widehat{EGF}$ ، یعنی مثلث DFG متساوی‌الساقین است و داریم

از طرف دیگر

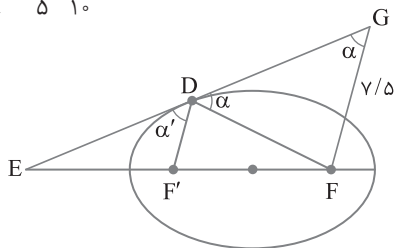
$$\triangle EF'D \sim \triangle EFG \Rightarrow \frac{F'D}{FG} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{F'D}{\sqrt{5}} = \frac{1}{3} \Rightarrow F'D = \frac{2}{5}$$

در ضمن نقطه D روی بیضی قرار دارد، پس

$$DF + DF' = 2a \Rightarrow \sqrt{5} + \frac{2}{5} = 2a \Rightarrow a = 5$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{2}{5}}{5} = \frac{2}{25} = \frac{9}{10}$$

بنابراین

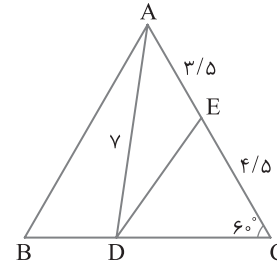


راه حل اول با استفاده از قضیه کسینوس‌ها در مثلث ADC می‌نویسیم

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2AC \times DC \cos 60^\circ$$

$$7^2 = 8^2 + DC^2 - 2(8)(DC)\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 49 = 64 + DC^2 - 8DC$$

$$DC^2 - 8DC + 15 = 0 \Rightarrow (DC-5)(DC-3) = 0 \Rightarrow DC = 5, DC = 3$$



چون $BD < DC$ ، پس $DC = 5$ و $BD = 3$.

راه حل دوم فرض کنید $BD = x$. در این صورت $CD = 8 - x$. اکنون با استفاده از قضیه استوارت در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC می‌نویسیم

$$AB^2 \times CD + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + BD \times CD \times BC$$

$$8^2(8-x) + 8^2x = 7^2 \times 8 + x(8-x)(8) \xrightarrow{\div 8}$$

$$8(8-x) + 8x = 7^2 + x(8-x) \Rightarrow 64 - 8x + 8x = 49 + 8x - x^2$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = 5$$

چون $BD < CD$ ، پس $BD = x = 3$ و $CD = 8 - x = 5$.

راه حل اول فرض کنید شعاع دایره بزرگ‌تر R و شعاع دایره کوچک‌تر R' باشد. در این صورت با توجه به شکل نتیجه می‌گیریم

$$OM = R - 8, \quad OE = OF = R - 5$$

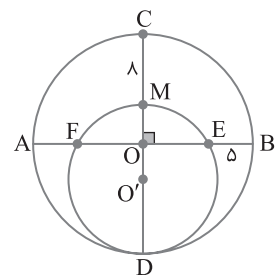
اکنون با استفاده از روابط طولی در دایره می‌نویسیم

$$OM \times OD = OE \times OF \Rightarrow (R-8)(R) = (R-5)(R-5)$$

$$R^2 - 8R = R^2 - 10R + 25 \Rightarrow 2R = 25 \Rightarrow R = 12.5$$

از طرف دیگر

$$CD = 2R \Rightarrow 8 + 2R' = 2R \xrightarrow{R=12.5} 8 + 2R' = 25 \Rightarrow R' = 8.5$$



بنابراین طول خط‌المركزین این دو دایره مماس داخل برابر است با

$$OO' = R - R' = 12.5 - 8.5 = 4$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$2R = 2R' + 8$$

در نتیجه $R = R' + 4$ ، پس

$$OO' = R - R' = 4$$

می‌توان نوشت

$$\vec{a} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \vec{k} \times (\vec{a} \times \vec{i}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \quad (1)$$

$$\vec{k} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} \Rightarrow (\vec{k} \times \vec{a}) \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k} \quad (2)$$

$$\vec{k} \times (\vec{a} \times \vec{i}) + (\vec{k} \times \vec{a}) \times \vec{i} = \vec{i} - \vec{k}$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \\ -3 & y \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & x & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 4} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \\ -3 & y \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} -2 & y-5 \\ -45-3x & xy+73 \end{bmatrix}$$