

۴۱۱۴۱ دو مثلث ABC و BEF هم‌نهشت‌اند، پس $BF=BC=1$ و $EF=AB=2$ ، پس $AF=1$ ، اکنون فرض می‌کنیم $FH=x$ ، در این صورت $BH=1-x$ داریم

$$\triangle ABC: DH \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{AH}{AB} = \frac{DH}{BC} \Rightarrow \frac{1+x}{2} = \frac{DH}{1}$$

$$DH = \frac{1+x}{2}$$

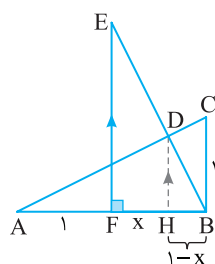
$$\triangle BEF: DH \parallel EF \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{DH}{EF} = \frac{BH}{BF} \Rightarrow \frac{DH}{2} = \frac{1-x}{1}$$

$$DH = 2-2x$$

بنابراین

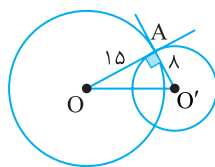
$$\frac{1+x}{2} = 2-2x \Rightarrow 1+x = 4-4x \Rightarrow 5x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

$$DH = 2-2x = 2-\frac{6}{5} = \frac{4}{5} = 0.8$$



۱۱۴۲ مماس‌های رسم شده در نقطه تلاقی دو دایره به مراکز O و O' ، یعنی نقطه A بر هم عمودند. پس این مماس‌ها از مراکز دو دایره عبور می‌کنند. در نتیجه در مثلث OAO' که قائم‌الزاویه است، می‌نویسیم

$$\triangle OAO': OO'^2 = OA^2 + O'A^2 = 8^2 + 15^2 = 289 \Rightarrow OO' = 17$$



۴۱۱۴۳ می‌دانیم پاره‌خط PQ موازی ضلع BC است. پس

$$\triangle ABC: PQ \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{AP}{AC} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{PQ}{BC}$$

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیه نیمساز می‌نویسیم:

$$\triangle AMC: \text{نیمساز } MP \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{AM}{MC} = MC = 3AM$$

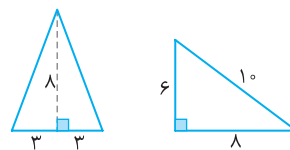
$$\triangle AMC: \text{نیمساز } MP \Rightarrow MP^2 = AM \times MC - AP \times PC$$

$$\sqrt{33}^2 = AM \times 3AM - (\sqrt{5})(3\sqrt{5}) \Rightarrow 33 = 3AM^2 - 15$$

$$11 = AM^2 - 5 \Rightarrow AM^2 = 16 \Rightarrow AM = 4 \Rightarrow MC = 12 \Rightarrow BC = 24$$

$$\xrightarrow{\text{از (1)}} \frac{PQ}{24} = \frac{1}{4} \Rightarrow PQ = 6$$

۳۱۱۳۸ گزاره گزینه (۳) یک گزاره همیشه درست و در نتیجه یک قضیه است. پس برای آن مثال نقض وجود ندارد. توجه کنید که گزاره‌های سایر گزینه‌ها قضیه نیستند، پس برای آن‌ها مثال نقض وجود دارد. برای رد گزینه‌های (۱) و (۲)، دو مثلث زیر را در نظر بگیرید:



مساحت این دو مثلث برابر ۲۴ است، ولی این دو مثلث هم‌نهشت نیستند. همچنین هر دو مثلث ارتفاعی به اندازه ۸ و ضلعی به اندازه ۶ دارند. برای رد گزینه (۴) مثلث زیر را در نظر بگیرید:



۴۱۱۳۹ بنابر فرض چهارضلعی $ABCD$ مربع است. با توجه به شکل می‌نویسیم

$$\left. \begin{aligned} \angle MNC = 90^\circ &\Rightarrow \hat{N}_1 + \hat{N}_2 = 90^\circ \\ \angle DNC = 90^\circ &\Rightarrow \hat{N}_2 + \hat{C}_1 = 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{N}_1 = \hat{C}_1$$

بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویه AMN و DNC با داشتن دو زاویه مساوی متشابه‌اند، پس

$$\frac{NC}{MN} = \frac{DC}{AN} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{DC}{AN=x} \rightarrow DC = 2x$$

در نتیجه

$$AD = DC = 2x \xrightarrow{AN=x} ND = x$$

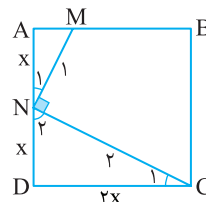
پس

$$\triangle DNC: NC^2 = ND^2 + DC^2 \Rightarrow 2^2 = (2x)^2 + x^2 \Rightarrow 5x^2 = 4$$

$$x^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

پس طول ضلع مربع مساوی $2x = \frac{4}{\sqrt{5}}$ است. بنابراین

$$S_{ABCD} = (2x)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$$



۱۱۴۰ چون G مرکز ثقل مثلث ABC است، پس AE میانه این مثلث است، یعنی E وسط ضلع BC است. پس اگر از C به G وصل کنیم، آن‌گاه در مثلث BGC دو پاره‌خط GE و CD میانه هستند، پس P مرکز ثقل مثلث BGC است. از طرف دیگر مرکز ثقل مثلث هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند، در نتیجه $GP = 2PE$ یا $GP = \frac{2}{3}GE$. در ضمن G مرکز ثقل

مثلث ABC است، پس $AG = 2GE$. بنابراین

$$\frac{AG}{GP} = \frac{2GE}{\frac{2}{3}GE} = 3$$

۱۱۴۷ ابتدا در معادله سهمی حرف a را به m تغییر می‌دهیم تا a با پارامتر سهمی اشتباه گرفته نشود. پس معادله سهمی به صورت $y^2 - 2y + 4x = m$ است. اکنون معادله سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$y^2 - 2y + 4x = m \Rightarrow (y-1)^2 - 1 + 4x = m \Rightarrow (y-1)^2 = -4x + m + 1$$

$$(y-1)^2 = -4\left(x - \frac{m}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

پس این سهمی افقی رو به چپ با رأس $S\left(\frac{m}{4} + \frac{1}{4}, 1\right)$ است به طوری که $4a = 4$. پس $a = 1$. معادله خط هادی این نوع سهمی به صورت زیر است:

$$x = a + \alpha \Rightarrow x = 1 + \frac{m}{4} + \frac{1}{4} \xrightarrow{x=3} 3 = \frac{5}{4} + \frac{m}{4} \xrightarrow{4 \times} 12 = 5 + m \Rightarrow m = 7$$

۱۱۴۸ نقاط A, B, C و وسط‌های اضلاع مثلث MNE به مساحت ۱۶ هستند. چون مثلث ABC با مثلث MNE با نسبت $\frac{1}{4}$ متشابه است. پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNE}} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \xrightarrow{S_{MNE}=16} S_{ABC} = 4$$

اکنون با استفاده از ضرب خارجی، مساحت مثلث ABC را پیدا می‌کنیم.

$$A(a, 4, 1), \quad B(a, b, 3), \quad C(a, 9, b)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, b-4, 2), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (0, 5, b-1)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & b-4 & 2 \\ 0 & 5 & b-1 \end{vmatrix} = (b^2 - 5b + 4 - 10)\vec{i} = (b^2 - 5b - 6)\vec{i}$$

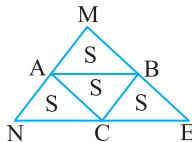
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \Rightarrow 4 = \frac{1}{2} \sqrt{(b^2 - 5b - 6)^2} \Rightarrow |b^2 - 5b - 6| = 8$$

بنابراین

$$b^2 - 5b - 6 = 8 \Rightarrow b^2 - 5b - 14 = 0 \Rightarrow b \text{ مجموع مقادیر } = 5$$

$$b^2 - 5b - 6 = -8 \Rightarrow b^2 - 5b + 2 = 0 \Rightarrow b \text{ مجموع مقادیر } = 5$$

پس مجموع مقادیر ممکن برابر b مساوی ۱۰ است.



۱۱۴۹ از فرض $CD = 3ED$ نتیجه می‌گیریم $CE = 2x$ و $ED = x$. پس $CD = 3x$. در نتیجه $AB = CD = 3x$. اکنون از نقطه F عمود FH را بر AD وارد می‌کنیم. در دوزنقه $ABED$ چون $DE \parallel FH \parallel AB$ ، پس H وسط AD است. بنابراین پاره‌خط FH وسط‌های دو ساق دوزنقه را به هم وصل کرده است. پس

$$FH = \frac{AB + DE}{2} = \frac{3x + x}{2} = 2x$$

در نتیجه

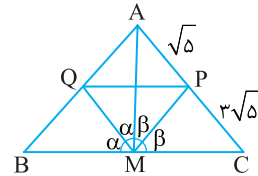
$$\triangle AFH: AF^2 = AH^2 + FH^2 \Rightarrow 25 = \frac{9}{4}x^2 + 4x^2 = \frac{25}{4}x^2 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین

در ضمن MP و MQ به ترتیب نیمسازهای زاویه‌های AMB و AMC هستند. پس $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ ، پس $\alpha + \beta = 90^\circ$. در نتیجه مثلث MPQ قائم‌الزاویه است. بنابراین

$$PQ^2 = MP^2 + MQ^2 \Rightarrow 6^2 = 3^2 + MQ^2$$

$$MQ^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow MQ = \sqrt{27}$$

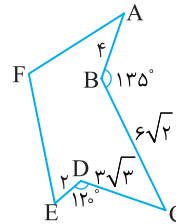


۱۱۴۴ بنابر مسئله هم‌پیرامونی، میزان افزایش مساحت برابر $2S_{ABC} + 2S_{DEC}$ است.

$$2S_{ABC} = 2\left(\frac{1}{2} AB \times BC \sin 135^\circ\right) = 4 \times 6 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 24$$

$$2S_{DEC} = 2\left(\frac{1}{2} DE \times DC \sin 120^\circ\right) = 2 \times 3 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9$$

بنابراین میزان افزایش مساحت برابر $24 + 9 = 33$ است.



۱۱۴۵ ابتدا ماتریس B^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2-3} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

اکنون طرفین تساوی داده شده را از سمت راست در B^{-1} ضرب می‌کنیم.

$$3I - 2A^{-1}B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -12 & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times B^{-1}}$$

$$3B^{-1} - 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -12 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -11 \\ -1 & 14 \end{bmatrix}$$

پس کوچک‌ترین درایه این ماتریس -11 است.

۱۱۴۶ ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

حاصل ضرب درایه‌های A

حاصل ضرب درایه‌های A^2

پس

۱۱۵۳ چون مثلث ABC متساوی الساقین است، پس ارتفاع AD

نیمساز زاویه A است. در ضمن

$$CE = \frac{AB}{2} \xrightarrow{AB=AC} CE = \frac{AC}{2} \Rightarrow \hat{BAC} = 3^\circ$$

$$\hat{C}_1 = 6^\circ \xrightarrow{\hat{C} = 75^\circ} \hat{C}_2 = 15^\circ$$

بنابراین در مثلث قائم الزاویه BEC ارتفاع EF مساوی $\frac{1}{4}BC$ است. همچنین

در این مثلث قائم الزاویه DE میانه است، پس نصف BC است و داریم

$$DE = \frac{BC}{2} \Rightarrow 2\sqrt{3} + 4 = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC = 4\sqrt{3} + 8$$

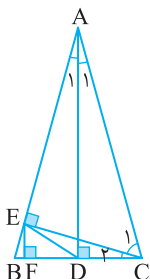
$$EF = \frac{4\sqrt{3} + 8}{4} = \sqrt{3} + 2$$

اکنون با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم الزاویه می نویسیم

$$\triangle BEC: EF^2 = BF \times FC \Rightarrow (\sqrt{3} + 2)^2 = BF(BC - BF)$$

$$3 + 4 + 4\sqrt{3} = BF(4\sqrt{3} + 8 - BF)$$

$$BF^2 - (4\sqrt{3} + 8)BF + 7 + 4\sqrt{3} = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است.}} BF = 1$$



۱۱۵۴ مطابق شکل نیم دایره را کامل می کنیم تا دایره تشکیل شود. در این

صورت زاویه B محاطی روبه رو به قطر دایره است، پس $\hat{B} = 90^\circ$. اکنون OF

از سمت O را امتداد می دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند. با استفاده از

روابط طولی در دایره می نویسیم

$$BE \times EC = EF \times ED \Rightarrow \frac{BE}{EF} = \frac{ED}{EC} \Rightarrow \frac{BE}{EF} = \frac{OE + OD}{EC}$$

$$\xrightarrow{OD=OC} \frac{BE}{EF} = \frac{OE + OC}{EC} \Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{OE}{EC} + \frac{OC}{EC} \quad (1)$$

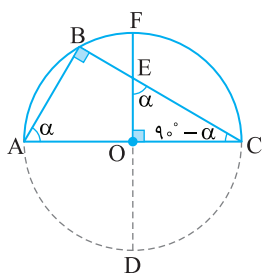
اکنون با توجه به شکل داریم

$$\triangle OEC: \frac{OE}{EC} = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \frac{OC}{EC} = \sin \alpha$$

پس

$$(1) \Rightarrow \frac{BE}{EC} = \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} + \sin \alpha$$

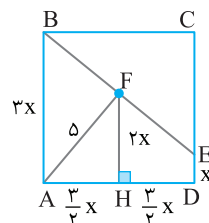
$$\xrightarrow{\sin \alpha = \frac{4}{5}} \frac{BE}{EC} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} + \frac{4}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5} = \frac{14}{10}$$



$$S_{AFED} = S_{AFH} + S_{DEFH} = \frac{1}{2} AH \times FH + \frac{1}{2} DH (DE + FH)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} x \right) (2x) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} x \right) (x + 2x) = \frac{3}{2} x^2 + \frac{9}{4} x^2 = \frac{15}{4} x^2$$

$$\xrightarrow{x=2} S_{AFED} = \frac{15}{4} \times 2^2 = 15$$



۱۱۵۵ ابتدا حاصل دترمینان سمت راست را به دست می آوریم.

$$\begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix} = (\log 5)^2 - (\log 2)^2$$

$$= (\log 5 - \log 2)(\log 5 + \log 2) = \log \frac{5}{2} \log 10 = \log \frac{5}{2}$$

بنابراین

$$\log(3x+1) = \log \frac{5}{2} \Rightarrow 3x+1 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

پس

$$\log \sqrt{x} = \log \sqrt{\frac{1}{2}} = \log \frac{1}{\sqrt{2}} = \log 2^{-1/2} = -\frac{1}{2} \log 2 = -2$$

۱۱۵۱ مکعب داده شده از $4 \times 4 \times 3 = 48$ مکعب کوچک ساخته شده

است. نمای بالای خواسته شده شامل ۱۰ مکعب است، پس حداکثر تعداد

مکعب هایی که باید برداشته شوند تا به نمای خواسته شده برسیم، برابر

$$48 - 10 = 38 \text{ است.}$$

۱۱۵۲ فرض کنید مثلث ABC قائم الزاویه متساوی الساقین باشد.

برای رسم عمود منصف ساق AC باید کمانی به شعاع بزرگ تر از نصف طول

AC بزنیم. با توجه به شکل اگر O مرکز دایره محاطی باشد، آن گاه

$OT = OT' = \sqrt{2}$ در نتیجه چهارضلعی OTAT' مربع و OA نیمساز

زاویه A است. بنابراین مثلث OAT قائم الزاویه متساوی الساقین است، یعنی

$\hat{A}_1 = \hat{O}_1 = 45^\circ$ پس $AT = OT = \sqrt{2}$ و $OA = 2$. بنابراین

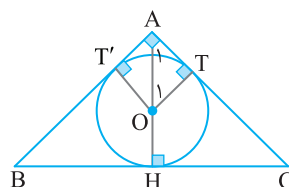
$$AH = 2 + \sqrt{2}$$

$$\triangle AHC: \hat{C} = 45^\circ \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{2}}{2} AC \Rightarrow 2 + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} AC$$

$$\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) = \frac{\sqrt{2}}{2} AC \Rightarrow \sqrt{2} + 1 = \frac{1}{2} AC$$

پس شعاع کمان برای رسم عمود منصف AC باید از $\frac{1}{2}AC$ ، یعنی از

$$\sqrt{2} + 1 \text{ بیشتر باشد.}$$



۴۱۱۵۸ می‌دانیم اندازه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$ برابر $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$

است. پس اندازه تصویر قائم بردار $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$ بر امتداد بردار $\vec{a}$ برابر است با

$$\frac{|\left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}\right) \cdot \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{a}| + |\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ}{|\vec{a}|^2 + |\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$= \frac{|\vec{a}| + |\vec{a}| \left(\frac{1}{2}\right)}{|\vec{a}| + |\vec{a}| \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

۴۱۱۵۹ ابتدا درمیان ماتریس A را پیدا می‌کنیم.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

از طرف دیگر

$$|A^2 + kA - A| = 125 \Rightarrow |A(A + (k-1)I)| = 125$$

$$|A| |A + (k-1)I| = 125 \xrightarrow{|A|=5} |A + (k-1)I| = 25$$

اکنون ماتریس $A + (k-1)I$ را به دست می‌آوریم.

$$A + (k-1)I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & 2 \\ 2 & 2 & k \end{bmatrix}$$

$$|A + (k-1)I| = \begin{vmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & 2 \\ 2 & 2 & k \end{vmatrix} = k(-1)^2 \begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} + 2(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} + 2(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & k \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = k^3 - 12k + 16$$

بنابراین

$$k^3 - 12k + 16 = 25 \Rightarrow k^3 - 12k - 9 = 0 \Rightarrow k = -3$$

$$|(k+1)I_r| = (k+1)^r |I_r| = (k+1)^r = (-3+1)^r = -8$$

(توجه کنید که جواب معادله $k^3 - 12k - 9 = 0$ را با امتحان کردن مقادیر $\pm 3, \pm 2, \pm 1$ پیدا کرده‌ایم. جواب‌های دیگر این معادله اعدادی گنگ هستند.)

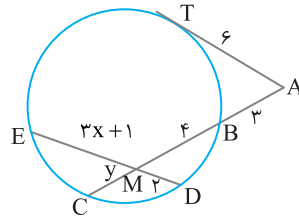
۴۱۱۵۵ با استفاده از روابط طولی در دایره می‌نویسیم

$$AT^2 = AB \times AC \Rightarrow 6^2 = 3(3+4+y) \Rightarrow y=5$$

$$MD \times ME = MB \times MC \Rightarrow 2(3x+1) = 20 \Rightarrow x=3$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

بنابراین



۴۱۱۵۶ در شکل A' بازتاب A نسبت به خط d است. چون بازتاب

تبدیل ایزومتري است، پس $OA = OA' = 10$. در ضمن ارتفاع $A'H$ برابر فرض برابر $9/6$ است. پس

$$\triangle OA'H : OH^2 = OA'^2 - A'H^2 = 10^2 - 9/6^2 = (10 - 9/6)(10 + 9/6)$$

$$= (10/6)(19/6) = \frac{10}{6} \times \frac{19}{6} \Rightarrow OH = \frac{2 \times 19}{6} = \frac{19}{3}$$

$$\triangle OA'H : \cos \hat{O} = \frac{OH}{OA'} = \frac{19/3}{10} = \frac{19}{30}$$

در نتیجه

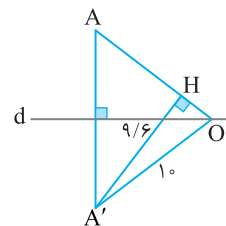
اکنون با استفاده از قضیه کسینوس‌ها می‌نویسیم

$$\triangle OAA' : AA'^2 = OA^2 + OA'^2 - 2OA \times OA' \cos \hat{O}$$

$$= 10^2 + 10^2 - 2(10)(10) \left(\frac{19}{30}\right) = 200 - \frac{760}{3} = \frac{2000 - 760}{3} = \frac{1240}{3}$$

$$AA'^2 = \frac{1240}{3} \Rightarrow AA' = \frac{\sqrt{1240}}{3} = \frac{2\sqrt{310}}{3}$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای AA' برابر ۲۸ است.



۴۱۱۵۷ ابتدا به کمک قضیه کسینوس‌ها $\cos \hat{A}$ را به دست می‌آوریم.

$$\triangle ABC : BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A}$$

$$7^2 = 4^2 + 5^2 - 2(4)(5) \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = -\frac{1}{5}$$

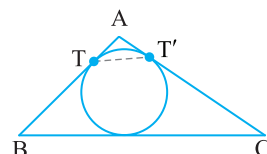
$$AT = AT' = P - a = \frac{4+5+7}{2} - 7 = 1$$

از طرف دیگر داریم

بنابراین

$$\triangle ATT' : TT'^2 = AT^2 + AT'^2 - 2AT \times AT' \cos \hat{A}$$

$$= 1 + 1 - 2(1)(1) \left(-\frac{1}{5}\right) = 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5} \Rightarrow TT' = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{15}}{5}$$



راه حل دوم مرکز دایره روی عمودمنصف وتر AB و روی خط OB است.

معادله هر دو خط را می نویسیم و با هم قطع می دهیم تا مرکز دایره به دست آید.

شیب خط OB قرینه معکوس شیب خط $3x - 2y = 6$ و برابر $-\frac{2}{3}$ است.

همچنین شیب خط عمودمنصف AB قرینه معکوس شیب AB است و

خط عمودمنصف از نقطه $M = \left(\frac{A+B}{2}\right) = \left(\frac{13}{4}, \frac{1}{4}\right)$ می گذرد.

$$m_{OB} = -\frac{2}{3}, \quad \text{شیب عمودمنصف} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{\frac{2}{5}} = -\frac{5}{2}$$

$$\text{OB خط: } y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow 2x + 3y = 4$$

$$\text{AB عمودمنصف خط: } y - \frac{1}{4} = -\frac{5}{2}\left(x - \frac{13}{4}\right) \Rightarrow 20x + 4y = 66$$

$$10x + 2y = 33$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 10x + 2y = 33 \end{cases} \Rightarrow x = 3/5, y = -1 \Rightarrow O(3/5, -1)$$

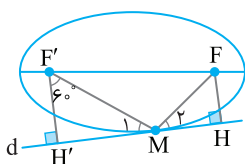
۳۱۱۶۲ بنابر فرض سؤال $HH' = 2\sqrt{3}$. بنابر خاصیت بازتابندگی

بیضی نتیجه می گیریم $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$. پس $\hat{F} = 60^\circ$ در نتیجه

$$\begin{cases} \triangle MFH: \hat{F} = 60^\circ \Rightarrow MH = \frac{\sqrt{3}}{2} MF \\ \triangle MF'H': \hat{F}' = 60^\circ \Rightarrow MH' = \frac{\sqrt{3}}{2} MF' \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می کنیم}}$$

$$MH + MH' = \frac{\sqrt{3}}{2}(MF + MF') \Rightarrow HH' = \frac{\sqrt{3}}{2}(2a)$$

$$2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2a) \Rightarrow 2a = 4$$



۳۱۱۶۳ از مرکز O به نقطه S وصل می کنیم. در این صورت

OS = OP = SP = R. پس مثلث OPS متساوی الاضلاع است. اکنون ارتفاع SH را در این مثلث رسم می کنیم. چون عرض نقطه S برابر ۳ است،

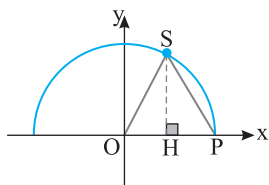
$$SH = \frac{\sqrt{3}}{2} OP \Rightarrow 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} R \Rightarrow R = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

بنابراین

$$OS = R \Rightarrow \sqrt{a^2 + 3^2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a^2 + 9 = 12 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$$

با توجه به شکل نقطه S در ناحیه اول دستگاه مختصات قرار دارد، پس

$a = \sqrt{3}$ باید مثبت باشد، پس



۳۱۱۶۰ با استفاده از فرض های سؤال مقادیر صحیح a, b, c و d را

به دست می آوریم.

$$B^2 = 2I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \sqrt{2}b & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \sqrt{2}b & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+ac & 0 & a+ad \\ 0 & 2b^2 & 0 \\ c+cd & 0 & ac+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{cases} 1+ac=2 \Rightarrow ac=1 \Rightarrow a \neq 0, c \neq 0 \\ 2b^2=2 \Rightarrow b^2=1 \Rightarrow b=\pm 1 \\ c+cd=0 \Rightarrow c(1+d)=0 \xrightarrow{c \neq 0} 1+d=0 \Rightarrow d=-1 \end{cases}$$

حالت اول:

$$|A|=2 \Rightarrow ad-bc=2 \xrightarrow{\substack{d=-1 \\ b=1}} -a-c=2$$

$$a+c=-2 \xrightarrow{ac=1} a=-1, c=-1$$

$$|A|=2 \Rightarrow ad-bc=2 \xrightarrow{\substack{d=-1 \\ b=1}} -a+c=2 \xrightarrow{c=\frac{1}{a}} -a+\frac{1}{a}=2 \Rightarrow -a^2+1=2a \Rightarrow a^2+2a-1=0 \Rightarrow a=\frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$-a+\frac{1}{a}=2 \Rightarrow -a^2+1=2a \Rightarrow a^2+2a-1=0 \Rightarrow a=\frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \notin \mathbb{Z}$$

پس $a=-1, c=-1, d=-1, b=1$ و داریم

$$B^3 = B^2 \times B = 2I \times B = 2B = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \sqrt{2}b & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه حاصل ضرب دایره های غیر صفر ماتریس B^3 برابر $2(-2)(2\sqrt{2})(-2)(-2) = -32\sqrt{2}$ است.

۴۱۱۶۱ **راه حل اول** با توجه به داده های سؤال شکلی رسم می کنیم. در این

صورت مرکز دایره در ناحیه چهارم قرار دارد، پس گزینه های (۱) و (۲)

نادرست اند. اکنون گزینه های (۳) و (۴) را امتحان می کنیم. اگر $O(4, -3/5)$

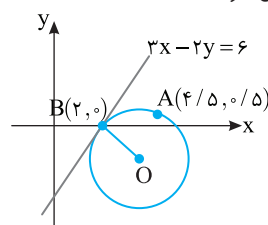
را مرکز دایره در نظر بگیریم، آن گاه شیب OB باید قرینه معکوس شیب خط

$$3x - 2y = 6 \text{ باشد.}$$

$$m_{OB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3/5 - 0}{4 - 2} = -\frac{3}{4}, \quad \text{شیب خط} = \frac{3}{2}$$

یده می شود که حاصل ضرب این دو شیب برابر -1 نیست. پس گزینه (۳)

هم نادرست است. پس گزینه (۴) درست است.



۱۱۶۴ محیط مثلث محیطی برابر $\sqrt{48\pi}$ ، یعنی $4\sqrt{3}\pi$ است. اگر r

شعاع دایره محاطی باشد، آن گاه $r = \frac{S}{P}$. از طرف دیگر مساحت مثلث برابر ۳

به اضافه مساحت دایره است، بنابراین

$$r = \frac{3 + \pi r^2}{2\sqrt{3}\pi} \Rightarrow 2\sqrt{3}\pi r = 3 + \pi r^2 \Rightarrow \pi r^2 - 2\sqrt{3}\pi r + 3 = 0$$

$$(\sqrt{\pi}r - \sqrt{3})^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow \text{مساحت مثلث} = 3 + \pi r^2$$

$$= 3 + \pi \left(\frac{3}{\pi}\right) = 6$$

۱۱۶۵ با استفاده از قضیه نیمساز می‌نویسیم

$$\triangle ABD: DE \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DB} = \frac{3}{5} \quad (1)$$

اکنون از قضیه تالس استفاده می‌کنیم.

$$\triangle ABC: EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB} \xrightarrow{(1)} \frac{AF}{FC} = \frac{3}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AF}{AC} = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{AF}{8} = \frac{3}{10} \Rightarrow AF = \frac{12}{5}$$

$$FC = AC - AF = 8 - \frac{12}{5} = \frac{28}{5}$$

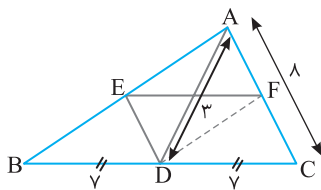
حالا از تناسب $\frac{AF}{FC} = \frac{AD}{DC} = \frac{3}{5}$ و عکس قضیه نیمساز می‌توان نتیجه

گرفت DF نیمساز زاویه ADC است، پس

$$\triangle ADC: DF \text{ نیمساز} \Rightarrow DF^2 = AD \times DC - AF \times FC$$

$$DF^2 = 3 \times 7 - \left(\frac{12}{5}\right) \left(\frac{28}{5}\right) = 21 - 21 \times \frac{16}{25} = 21 \left(1 - \frac{16}{25}\right) = 21 \times \frac{9}{25}$$

$$DF = \frac{3}{5} \sqrt{21} = \frac{6}{5} \sqrt{21}$$



۱۱۷۰ از فرض $\hat{A}DB = \hat{B}AD$ نتیجه می‌گیریم مثلث ADB

متساوی الساقین است، پس $AB = BD$. اکنون با استفاده از قضیه سینوس‌ها

می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \triangle ABC: \frac{BC}{\sin x} = \frac{AB}{\sin 45^\circ} \\ \triangle BDC: \frac{BC}{\sin y} = \frac{BD}{\sin 12^\circ} \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم می‌کنیم}} \frac{BC}{\sin y} = \frac{BD}{\sin 12^\circ} = \frac{BC}{\sin x} = \frac{BD}{\sin 45^\circ}$$

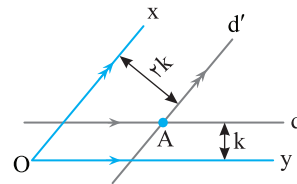
$$\xrightarrow{AB=BD} \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 12^\circ} \quad (1)$$

از طرف دیگر $x + y = 90^\circ$ ، پس $\sin y = \cos x$ و داریم

$$(1) \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

۱۱۶۴ زاویه xOy را در نظر بگیرید. خط d را موازی ضلع Oy به

فاصله k از آن و خط d' را موازی ضلع Ox به فاصله ۲k از آن رسم می‌کنیم. نقطه تلاقی این دو خط، یعنی نقطه A جواب سؤال است.



۱۱۶۵ از C به D وصل می‌کنیم. زاویه D

محاطی روبه‌رو به قطر است، پس $\hat{D} = 90^\circ$.

از طرف دیگر از مرکز O به نقطه E وسط کمان

DC وصل می‌کنیم. در این صورت OE بر وتر

AB هر دو بر DC عمودند، بنابراین دو خط OE و

AB هر دو بر DC عمودند، بنابراین $OE \parallel AB$.

در ضمن نقاط O و F وسط‌های دو ضلع مثلث ABC هستند.

پس بنابر عکس قضیه تالس $OF \parallel AB$. در نتیجه نقاط O، E و F روی

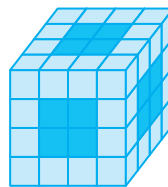
یک خط موازی با AB قرار دارند و داریم

$$OE = R = 4/5 \Rightarrow OF = OE + EF = 4/5 + 2 = 6/5$$

پس

$$\triangle ABC: OF \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{CF}{AC} = \frac{OF}{AB}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{6/5}{AB} \Rightarrow AB = 13$$



۱۱۶۶ این مکعب از ۶۴ مکعب کوچک

به ابعاد $1 \times 1 \times 1$ تشکیل شده است. مکعب‌های

کوچکی که فقط یک وجه آن‌ها رنگ شده است،

در مرکز وجه‌های مکعب بزرگ قرار دارند. در

شکل مکعب‌های پررنگ‌تر مورد نظر سؤال

هستند. بنابراین

$$24 = 6(4-2)(4-2) = 24 \text{ تعداد مکعب‌های کوچک با یک وجه رنگی}$$

۱۱۶۷ فرض کنید $AE = ED = DC = x$. چون مثلث EFD

متساوی الاضلاع است، پس $EF = FD = x$. در نتیجه هر دو مثلث AEF و

DFC متساوی الساقین با زاویه رأس 12° هستند، پس $\hat{C}_1 = \hat{A}_1 = 3^\circ$. پس

$AF = FC$. از طرف دیگر با استفاده از فرض $\frac{AF}{BC} = \frac{2}{3}$ داریم $AF = 2y$ و

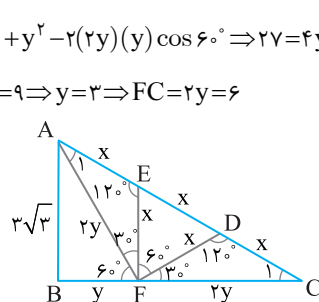
$BC = 3y$. پس $BF = y$ و $FC = 2y$. اکنون با توجه به شکل زاویه AFB

برابر 6° است، پس با استفاده از قضیه کسینوس‌ها می‌نویسیم

$$\triangle ABF: AB^2 = AF^2 + BF^2 - 2AF \times BF \cos 6^\circ$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) (3\sqrt{3})^2 = (2y)^2 + y^2 - 2(2y)(y) \cos 6^\circ \Rightarrow 27 = 4y^2 + y^2 - 4y^2 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$27 = 3y^2 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow FC = 2y = 6$$



۱۱۷۵ نقطه A روی سهمی قرار دارد. پس فاصله نقطه A تا کانون سهمی برابر فاصله نقطه A تا خط هادی سهمی است. با استاندارد کردن معادله سهمی معادله خط هادی آن را پیدا می‌کنیم.

$$x = -y^2 + 5y - 6 \Rightarrow y^2 - 5y = -x - 6 \Rightarrow (y - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} = -x - 6$$

$$(y - \frac{5}{2})^2 = -x + \frac{1}{4} \Rightarrow (y - \frac{5}{2})^2 = -(x - \frac{1}{4})$$

پس سهمی افقی با دهانه رو به چپ با رأس $S(\frac{1}{4}, \frac{5}{2})$ است و داریم

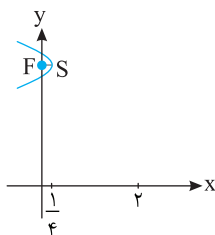
$$fa = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{f}$$

$$x = a + h \xrightarrow{h = \frac{1}{f}} x = \frac{1}{f} + \frac{1}{f} = \frac{2}{f} \Rightarrow x - \frac{1}{f} = 0$$

بنابراین

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = 2 \\ \alpha - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = -1 \end{array} \right.$$

با توجه به نمودار سهمی نقطه A به طول ۲ نمی‌تواند روی سهمی باشد پس $\alpha = -1$ قابل قبول است.



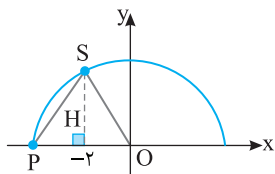
۱۱۷۶ از مرکز O به نقطه S وصل می‌کنیم. در این صورت

$PS = OS = OP = R$ ، یعنی مثلث OPS متساوی‌الاضلاع است. پس ارتفاع

SH میانه هم هست. در نتیجه $R = OP = 2OH = 4$. بنابراین

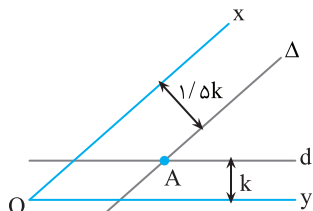
$$SH = \frac{\sqrt{3}}{2} OP = \frac{\sqrt{3}}{2} (4) = 2\sqrt{3}$$

پس عرض نقطه S برابر $2\sqrt{3}$ است.



۱۱۷۷ زاویه xOy را در نظر بگیرید. خط d را موازی ضلع Oy به

فاصله معلوم k و خط Δ را موازی ضلع Ox به فاصله معلوم $1/\Delta k$ از آن رسم می‌کنیم. نقطه تلاقی دو خط d و Δ، یعنی نقطه A مورد نظر سؤال است. پس برای پیدا کردن چنین نقطه‌ای از رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای غیر واقع بر آن استفاده می‌کنیم.



۱۱۷۱ اگر بازتاب A نسبت به خط d نقطه A' باشد و از A' به B

وصل کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند، آن‌گاه بنابر مسئله هرون، محیط مثلث ABC مینیمم است. پس $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و چون $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ ، پس $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$. بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویه BCH و ACH' به دلیل داشتن دو زاویه مساوی متشابه می‌شوند.

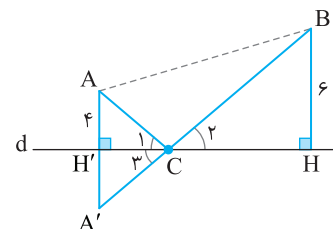
$$\Delta BCH \sim \Delta ACH' \Rightarrow \frac{CH}{CH'} = \frac{BH}{AH'} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{CH}{HH'} = \frac{3}{5} \quad (1)$$

از طرف دیگر $S_{ABHH'} = 50\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2} HH' (BH + AH') = 50\sqrt{3}$

$$\frac{1}{2} HH' (10) = 50\sqrt{3} \Rightarrow HH' = 10\sqrt{3} \quad (2)$$

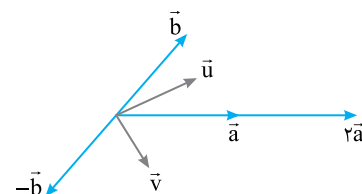
$$\text{از (1) و (2)} \Rightarrow \frac{CH}{10\sqrt{3}} = \frac{3}{5} \Rightarrow CH = 6\sqrt{3}$$



۱۱۷۲ در شکل بردار یک $\vec{u}$ در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $\vec{a}$

و $\vec{b}$ است و بردار یک $\vec{v}$ در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $2\vec{a}$ و $-\vec{b}$ است. چون دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ در راستای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند، پس بر هم عمودند. بنابراین مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ساخته می‌شود برابر است با

$$S = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} |\vec{u}| |\vec{v}| \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$



۱۱۷۳ می‌دانیم اگر ماتریس‌های A و B مربعی باشند، آن‌گاه

$$|AB| = |A| |B|$$

$$|D| = |BA^T B| = |B| |A^T| |B| = |B|^2 |A|^T$$

از طرف دیگر $|B| = (-2)(3)(4) = -24$ و $|A| = (-1)(\frac{1}{3})(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{9}$

بنابراین

$$|D| = |B|^2 |A|^T = (-24)^2 (-\frac{1}{9}) = 24 \times 24 \times \frac{-1}{9} = -\frac{16}{3}$$

۱۱۷۴ ابتدا ماتریس D را پیدا می‌کنیم. بنابر فرض سؤال می‌نویسیم.

$$D = B \times C \times A = B \times A \times B \times A = (BA)(BA) = (BA)^T$$

اکنون ماتریس BA را به دست می‌آوریم.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |BA| = 2$$

$$\Rightarrow |D| = |(BA)^T| = |BA|^T = 2^2 = 4$$

بنابراین

با استفاده از قضیه نیمساز می نویسیم

$$\triangle ABD: DE \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BD} = \frac{3}{5}$$

$$\triangle ABC: EF \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{FC} = \frac{3}{5}$$

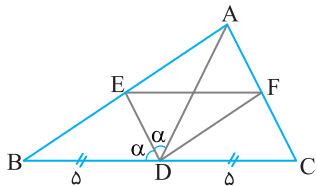
پس $\frac{AF}{FC} = \frac{AD}{DC}$ در نتیجه در مثل ADC پاره خط DF نیمساز زاویه ADC است. بنابراین

$$\frac{AF}{FC} = \frac{3}{5} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AF}{AC} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{AF}{7} = \frac{3}{8} \Rightarrow AF = \frac{21}{8}$$

$$FC = 7 - \frac{21}{8} = \frac{35}{8}$$

$$\triangle ADC: DF \text{ نیمساز} \Rightarrow DF^2 = AD \times DC - AF \times FC$$

$$= 3 \times 5 - \frac{21}{8} \times \frac{35}{8} = 15 - \frac{735}{64} = 15 \times \frac{15}{64} \Rightarrow DF = \frac{15}{8}$$



در چهارضلعی ABCD مجموع زوایای داخلی برابر 360° است. پس

$$\hat{A} + \hat{A}BC + \hat{C} + \hat{A}DC = 360^\circ \Rightarrow \hat{A} + 105^\circ + \alpha + 165^\circ = 360^\circ$$

$$\hat{A} + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \sin \hat{A} = \cos \alpha \quad (1)$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیه سینوس ها می نویسیم

$$\triangle ABD: \frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{BD}{\sin \hat{A}} \xrightarrow{(1)} \frac{AB}{1} = \frac{BD}{\cos \alpha} \quad (2)$$

$$\triangle BDC: \frac{BC}{\sin 135^\circ} = \frac{BD}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{BD}{\sin \alpha} \quad (3)$$

اکنون از تقسیم روابط (۲) و (۳) نتیجه می گیریم

$$\frac{\sqrt{2}AB}{BC} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \xrightarrow{\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}} \frac{2\sqrt{2}}{3} = \tan \alpha$$

بنابر مسئله هرون دو زاویه C_1 و C_2 مساوی اند، پس مثلث های

قائم الزاویه ACH و BCH' به دلیل داشتن دو زاویه مساوی متشابه اند.

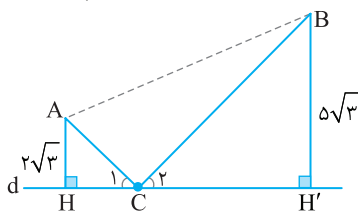
$$\triangle ACH \sim \triangle BCH' \Rightarrow \frac{CH}{CH'} = \frac{AH}{BH'} = \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \frac{2}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{CH}{HH'} = \frac{2}{7} \quad (1)$$

$$S_{ACH} = 6\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2} AH \times CH = 6\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} CH = 6\sqrt{3} \Rightarrow CH = 6 \quad (2)$$

$$\text{از (۱) و (۲)} \Rightarrow \frac{6}{HH'} = \frac{2}{7} \Rightarrow HH' = 21$$



از O به F وصل می کنیم. چون F وسط $\widehat{EC}$ قرار دارد، پس OF

بر وتر CE عمود می شود. از طرف دیگر زاویه E محاطی روبه رو به قطر BC

است. پس $\hat{E} = 90^\circ$. بنابراین OF و AB هر دو بر CE عمودند. پس

OF $\parallel$ AB. در ضمن در مثلث ABC نقاط O و D به ترتیب وسط های اضلاع

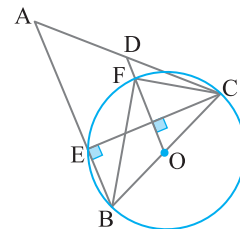
BC و AC هستند. پس بنابر عکس قضیه تالس $OD \parallel AB$. بنابراین نقاط O،

F و D روی یک خط موازی AB هستند. داریم

$$\begin{cases} OF = R = \frac{7}{2} \\ DF = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} OD = \frac{7}{2} + 1 = \frac{9}{2}$$

$$\triangle ABC: OD \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{OD}{AB} = \frac{CD}{AC}$$

$$\frac{\frac{9}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 9$$



مکعب بزرگ از $4 \times 4 \times 4 = 64$ مکعب کوچک تشکیل شده

است. اگر از هر طرف یک ردیف حذف کنیم، آن گاه $2 \times 2 \times 2 = 8$ مکعب

کوچک باقی می ماند که هیچ وجه رنگی ای ندارند. از طرف دیگر تعداد

مکعب های کوچک رنگ شده برابر $64 - 8 = 56$ است. بنابراین

$$\frac{\text{تعداد مکعبات رنگ شده}}{\text{تعداد مکعبات رنگ نشده}} = \frac{56}{8} = 7$$

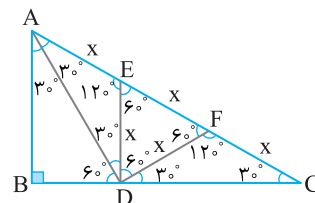
فرض کنید $DF = x$. چون مثلث های AED و DFC

متساوی الساقین و مثلث DEF مثلث متساوی الاضلاع است، نتیجه می گیریم

$$AE = DE = DF = EF = FC = x$$

پس زاویه های روی شکل را خواهیم داشت

$$\triangle ABD: \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow BD = \frac{AD}{2} \Rightarrow \frac{AD}{2} = \frac{AD}{BD}$$



فرض کنید r شعاع دایره محاطی باشد.

$$2P = \sqrt{80\pi} \Rightarrow 2P = 4\sqrt{5\pi} \Rightarrow P = 2\sqrt{5\pi}$$

در ضمن مساحت چهارضلعی محیطی مساوی 5 به اضافه مساحت دایره

است، پس

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow r = \frac{5 + \pi r^2}{2\sqrt{5\pi}} \Rightarrow 2\sqrt{5\pi}r = 5 + \pi r^2$$

$$\pi r^2 - 2\sqrt{5\pi}r + 5 = 0 \Rightarrow (\sqrt{\pi}r - \sqrt{5})^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}$$

$$\text{بنابراین} \quad \text{محیط دایره} = 2\pi r = 2\pi \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}} \right) = 2\sqrt{5\pi}$$

$$x=a+h \Rightarrow x=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8} \Rightarrow x-\frac{5}{8}=0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha-\frac{5}{8}=\frac{5}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{25}{8} \\ \alpha-\frac{5}{8}=-\frac{5}{2} \Rightarrow \alpha=-\frac{15}{8} \end{array} \right.$$

با توجه به شکل به ازای $\alpha=\frac{25}{8}$ نقطه $A(\alpha, \beta)$ نمی‌تواند روی این

سهمی باشد. پس $\alpha=-\frac{15}{8}$ قابل قبول است. نقطه $A(-\frac{15}{8}, \beta)$ در

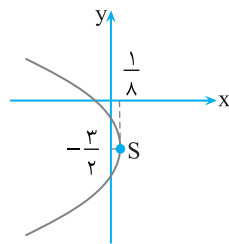
معادله سهمی صدق می‌کند. پس

$$\beta^2+2(-\frac{15}{8})+3\beta+2=0 \Rightarrow \beta^2+3\beta-\frac{7}{4}=0$$

$$\times 4 \rightarrow 4\beta^2+12\beta-7=0$$

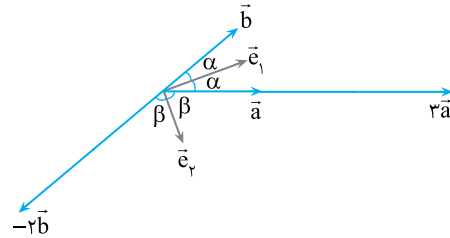
بنابراین اختلاف مقادیر ممکن برای β برابر است با

$$\frac{\sqrt{12^2-4(4)(-7)}}{|4|}=\frac{\sqrt{256}}{4}=4$$



۱۱۸۵ در راستای نیمساز داخلی زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{e}_1$

در راستای نیمساز خارجی زاویه بین این دو بردار است. پس $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$. بنابراین متوازی‌الاضلاع ساخته شده توسط بردارهای واحد $\vec{e}_1$ و $\vec{e}_2$ مربع به ضلع ۱ است. در نتیجه طول قطر این مربع $\sqrt{2}$ است.



۱۱۸۶ دترمینان ماتریس‌های A و B برابرند با

$$|A|=(-2)(-3)(-1)=-6, \quad |B|=(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{3})(-5)=-\frac{5}{6}$$

از طرف دیگر

$$|(AB)^T|=|AB|^T=(|A||B|)^T=((-6) \times (-\frac{5}{6}))^T=5^T=25$$

۱۱۸۷ ابتدا ماتریس A را به دست می‌آوریم

$$A=B \times C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس A^T را پیدا می‌کنیم

$$A^T=A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین

A^5 (ستون اول A^T) (سطر سوم A^T) = درایه سطر سوم و ستون اول

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = -8-8=-16$$

۱۱۸۸ ابتدا معادله سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم

$$y^2+2x+3y+2=0 \Rightarrow (y+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+2x+2=0$$

$$(y+\frac{3}{2})^2=-2x+\frac{1}{4} \Rightarrow (y+\frac{3}{2})^2=-2(x-\frac{1}{8})$$

پس سهمی افقی و دهانه آن رو به چپ با رأس $S(\frac{1}{8}, -\frac{3}{2})$ است و

$$4a=2 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

فاصله نقطه $A(\alpha, \beta)$ روی سهمی از کانون و خط هادی آن برابر است.

اکنون خط هادی این سهمی را پیدا می‌کنیم