



موج ۲۵

مرحله‌ای
و جامع

ویژه آمادگی شرکت در امتحان‌های نهایی و نیم‌سال

هندسه یازدهم

حمیدرضا ملکی



امتحان‌های
درس به درس

درس‌نامه برای
مرور مطالب

امتحان‌های
نیم‌سال دوم

امتحان‌های
نیم‌سال اول

امتحان‌های
فصل به فصل

پاسخ‌های
تشریحی +
کلید تصحیح

امتحان‌های
نهایی اخیر

امتحان‌های
شبیه‌ساز نهایی

پیشگفتار

دروود و خدا قوت به شما دانش‌آموزان عزیز یازدهمی

در میانه مسیر دوره دوم متوسطه هستیم. مهم‌ترین هدف امسال شما کسب معدل مناسب در امتحان نهایی است. هندسه ۲ یکی از درس‌هایی است که در آن می‌توانید نمره ۲۰ بگیرید و خوشحالم که این کتاب را انتخاب کرده‌اید. مطمئن باشید که با مطالعه آن، کسب نمره ۲۰ در امتحان نهایی برای شما آسان می‌شود. این کتاب کاملاً در چارچوب کتاب درسی هندسه ۲ نوشته شده است و دارای ویژگی‌های زیر است:

۱ مرورنامه دارد؛ بدین صورت که در ابتدای هر فصل، مروری مختصر و مفید از آن فصل را آماده کرده‌ایم. با مطالعه آن، مباحث فصل برای شما یادآوری می‌شود.

۲ آزمون‌محور است؛ بدین صورت که با آزمون‌های مختلف آمادگی کامل برای شرکت در امتحان نهایی را به‌دست می‌آورید.

۳ پاسخنامه آزمون‌ها بر اساس پاسخنامه‌های امتحانات نهایی بارم‌بندی شده است. شما می‌توانید با مطالعه دقیق آن‌ها به این موضوع پی ببرید که قسمت‌های مهم در نوشتن پاسخ چیست؛

۴ همه مطالب کتاب درسی در آزمون‌ها پوشش داده شده‌اند. در این آزمون‌ها هر مطلب کتاب درسی را در قالب حداقل یک مسئله مشاهده می‌کنید؛

۵ این کتاب برای هر دانش‌آموز در هر سطحی مناسب است. دانش‌آموزان توانمند از این کتاب می‌توانند برای بهبود روش نوشتن خود استفاده کنند. همچنین دانش‌آموزانی که هنوز به هر دلیلی نتوانسته‌اند به مطالب کتاب درسی تسلط پیدا کنند، می‌توانند در زمان کوتاه نمره مناسبی کسب کنند.

این کتاب دارای ۳۵ آزمون، شامل آزمون‌های ۷ نمره‌ای، ۱۰ نمره‌ای و ۲۰ نمره‌ای است. آزمون‌های درس به درس و فصل به فصل ۷ نمره‌ای یا ۱۰ نمره‌ای هستند و آزمون‌های نیم‌سال اول، نیم‌سال دوم و جامع (تألیفی و نهایی سال‌های اخیر) ۲۰ نمره‌ای.

نوع آزمون	تعداد آزمون‌ها	سرفصل
درس به درس	۱۰	هر درس ۱ آزمون
فصل به فصل	۶	هر فصل ۲ آزمون
نیم‌سال اول	۵	فصل اول و فصل دوم (درس اول تا سر تجانس)
نیم‌سال دوم	۳	فصل دوم (ادامه درس اول و درس دوم) و فصل سوم
جامع - شبیه‌ساز نهایی	۸	تمام کتاب
نهایی خرداد ۱۴۰۳	۱	تمام کتاب
نهایی خرداد ۱۴۰۴	۱	تمام کتاب
نهایی - تیر ۱۴۰۵	۱	تمام کتاب

برای مطابقت با بودجه‌بندی امتحان نیم‌سال اول، درس اول از فصل دوم به دو بخش تقسیم و برای هر بخش یک آزمون ۱۰ نمره‌ای طراحی شده است. آزمون‌های جامع کاملاً تألیفی هستند و بودجه‌بندی آن‌ها بر اساس امتحان نهایی است. اما در سایر آزمون‌ها از سؤالات امتحانات نهایی سال‌های اخیر نیز استفاده شده است. این موضوع به ما و شما کمک می‌کند که به مهم‌ترین هدف کتاب برسیم و آن کسب نمره ۲۰ در امتحان نهایی هندسه ۲ است.

در پایان بر خود لازم می‌دانم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، دکتر آریس آقانیانس برای مطالعه و ویراستاری علمی کتاب، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی، خانم مرضیه کریمی برای رسم شکل‌ها و خانم ستین مختار مسئول واحد ویراستاری و حروف‌چینی تشکر و قدردانی کنم.

حمیدرضا ملکی

فهرست مطالب

آزمون‌های مرحله‌ای و جامع

مرورنامه فصل اول ۲

آزمون ۱: فصل اول - درس اول ۸

آزمون ۲: فصل اول - درس دوم ۹

آزمون ۳: فصل اول - درس سوم ۱۰

آزمون ۴: فصل اول (۱) ۱۱

آزمون ۵: فصل اول (۲) ۱۲

مرورنامه فصل دوم ۱۳

آزمون ۶: فصل دوم - درس اول (تا سر تجانس) ۱۹

آزمون ۷: نیم‌سال اول (۱) ۲۰

آزمون ۸: نیم‌سال اول (۲) ۲۱

آزمون ۹: نیم‌سال اول (۳) ۲۳

آزمون ۱۰: نیم‌سال اول (۴) ۲۵

آزمون ۱۱: نیم‌سال اول (۵) ۲۶

آزمون ۱۲: فصل دوم - درس اول (تجانس) ۲۸

آزمون ۱۳: فصل دوم - درس دوم ۲۹

آزمون ۱۴: فصل دوم (۱) ۳۰

آزمون ۱۵: فصل دوم (۲) ۳۱

مرورنامه فصل سوم ۳۲

آزمون ۱۶: فصل سوم - درس اول ۳۵

آزمون ۱۷: فصل سوم - درس دوم ۳۵

آزمون ۱۸: فصل سوم - درس سوم ۳۶

آزمون ۱۹: فصل سوم - درس چهارم ۳۷

آزمون ۲۰: فصل سوم (۱) ۳۸

آزمون ۲۱: فصل سوم (۲) ۳۹

آزمون ۲۲: نیم‌سال دوم (۱) ۴۰

آزمون ۲۳: نیم‌سال دوم (۲) ۴۱

آزمون ۲۴: نیم‌سال دوم (۳) ۴۳

آزمون ۲۵: جامع (۱) - شبیه‌ساز نهایی ۴۴

آزمون ۲۶: جامع (۲) - شبیه‌ساز نهایی ۴۶

آزمون ۲۷: جامع (۳) - شبیه‌ساز نهایی ۴۷

آزمون ۲۸: جامع (۴) - شبیه‌ساز نهایی ۴۹

آزمون ۲۹: جامع (۵) - شبیه‌ساز نهایی ۵۰

آزمون ۳۰: جامع (۶) - شبیه‌ساز نهایی ۵۲

آزمون ۳۱: جامع (۷) - شبیه‌ساز نهایی ۵۳

آزمون ۳۲: جامع (۸) - شبیه‌ساز نهایی ۵۵

آزمون ۳۳: جامع (۹) - نهایی خرداد ۱۴۰۳ ۵۶

آزمون ۳۴: جامع (۱۰) - نهایی خرداد ۱۴۰۴ ۵۸

پاسخ‌های تشریحی ۶۱

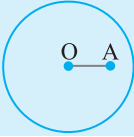
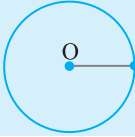
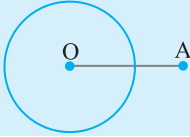
آزمون ۳۵: جامع (۱۱) - نهایی تیر ۱۴۰۵ ۱۳۳

مرورنامه

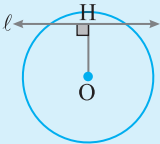
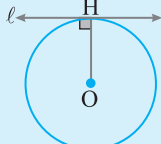
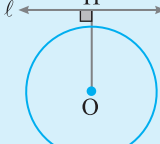
مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

فصل اول درس اول

اوضاع نسبی نقطه A و دایره C(O, R) (ص ۱۰)

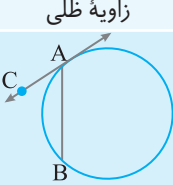
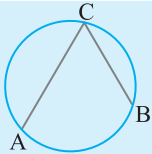
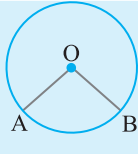
A درون دایره است.	A روی دایره است.	A بیرون دایره است.
		
$OA < R$	$OA = R$	$OA > R$

اوضاع نسبی خط l و دایره C(O, R) (ص ۱۱)

خط l قاطع دایره است.	خط l بر دایره مماس است.	خط و دایره برخوردی ندارند.
		
دو نقطه مشترک دارند.	یک نقطه مشترک دارند.	هیچ نقطه مشترکی ندارند.
$OH < R$	$OH = R$	$OH > R$

نوجه خط و دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر خط در نقطه تماس با دایره بر شعاع نظیر آن نقطه عمود باشد. (ص ۱۱)

زاویه‌ها در دایره C(O, R) (ص ۱۲)

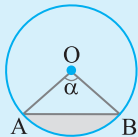
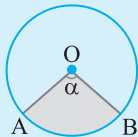
زاویه ظلی	زاویه محاطی	زاویه مرکزی
		
$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{AB}}{2}$	$\widehat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$	$\widehat{AOB} = \widehat{AB}$

نوجه ۱ اندازه کمان برابر اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن تعریف می‌شود. (ص ۱۲، مورد ۷)

نوجه ۲ اندازه زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه. (ص ۱۳، قضیه)

نوجه ۳ اندازه زاویه ظلی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه. (ص ۱۵، قضیه)

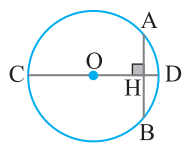
قطاع و قطعه (ص ۱۲، کار در کلاس - ص ۲۳، تمرین ۸)

قطعه ^۱	قطاع
	
$S_{\text{قطاع}} = S_{\triangle OAB} - S_{\text{قطعه}}$	$S_{\text{قطاع}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi R^2$, $\text{طول کمان AB} = \frac{\alpha}{180^\circ} \times \pi R$

۱- مفهوم قطعه مربوط به تمرین‌های درس دوم است، ولی در این کتاب، برای درک بهتر و امکان مقایسه با مفهوم قطاع، در مرورنامه درس اول آمده است.

ویژگی قطر و وتر عمود بر هم در دایره (ص ۱۳، فعالیت ۳ و ۴ و ۵)

در شکل مقابل:



- اگر وتر AB بر قطر CD عمود باشد، آن گاه قطر CD وتر AB را نصف می‌کند.
- اگر قطر CD وتر AB را نصف کند، آن گاه قطر CD بر وتر AB عمود است و کمان AB را نصف می‌کند.
- اگر قطر CD کمان AB را نصف کند، آن گاه قطر CD بر وتر AB عمود است و آن را نصف می‌کند.

کمان‌های محصور بین دو وتر

$l \parallel BC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC}$ (ص ۱۶، تمرین ۱ الف)	$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$ (ص ۱۵، کار در کلاس ۱) $\widehat{AC} = \widehat{BD} \Rightarrow AB \parallel CD$ (ص ۱۵، کار در کلاس ۲)	$\widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow AB = CD$ (ص ۱۳، فعالیت ۱) $AB = CD \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$ (ص ۱۳، فعالیت ۲)

- توجه ۱** اگر اندازه کمان‌های AB و CD از دایره $C(O, R)$ با هم برابر باشند، آن گاه وترهای AB و CD نیز هم‌اندازه‌اند.
- ۲** اگر اندازه وترهای AB و CD از دایره $C(O, R)$ با هم برابر باشند، آن گاه کمان‌های AB و CD نیز هم‌اندازه‌اند.
- ۳** اگر وترهای AB و CD در دایره $C(O, R)$ موازی باشند، آن گاه کمان‌های AC و BD هم‌اندازه‌اند.
- ۴** دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند با هم موازی‌اند اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آن‌ها هم‌اندازه باشند.
- ۵** اگر خط l در نقطه A بر دایره $C(O, R)$ مماس و BC وتر از این دایره موازی با l باشد، آن گاه کمان‌های AB و AC هم‌اندازه‌اند.

چند زاویه خاص در دایره

زاویه بین دو مماس	زاویه بین مماس و وتر	زاویه بین امتداد دو وتر	زاویه بین دو وتر
$\alpha = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2}$ (ص ۱۶، تمرین ۱ ب)	$\alpha = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$ (ص ۱۶، تمرین ۱ پ)	$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$ (ص ۱۵، فعالیت ۱)	$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$ (ص ۱۶، فعالیت ۲)

تمرین‌های مهم

$\widehat{CD} = ?$ (ص ۱۷، تمرین ۴)	$\alpha = ?$ (ص ۱۷، تمرین ۳)	$\alpha = ?$ (ص ۱۷، تمرین ۲)
$AB > CD \Leftrightarrow OH < OH'$ (ص ۱۷، تمرین ۸)	$MA = R \Rightarrow \beta = 3\alpha$ (ص ۱۷، تمرین ۶)	$AB, AC \parallel BD \Rightarrow AC = BD$ (ص ۱۷، تمرین ۵)

آزمون

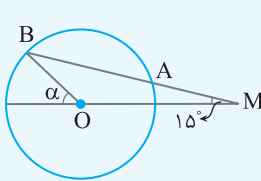
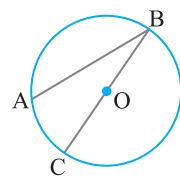
۱

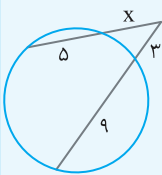
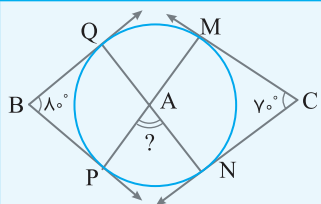
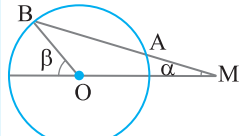
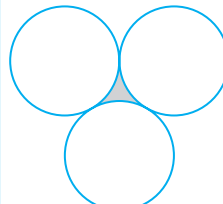
موضوع آزمون

صفحات پاسخ

فصل اول - درس اول

۶۲ تا ۶۳

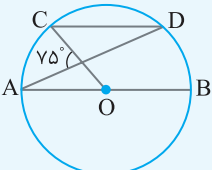
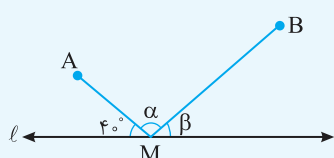
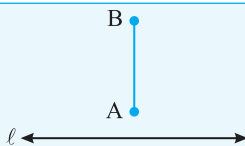
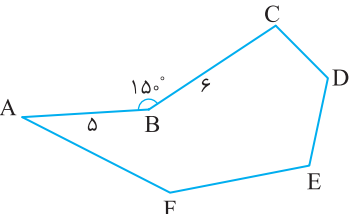
ردیف	سؤالات	نمره
۱	الف) اگر نقطه‌ای درون دایره $C(O, R)$ باشد، فاصله آن نقطه تا مرکز دایره شعاع دایره است. ب) اگر فاصله خطی تا مرکز دایره از شعاع دایره کمتر باشد، خط و دایره نقطه اشتراک دارند. پ) در دایره $C(O, R)$ در شکل مقابل، اگر $AM = R$، آن گاه α برابر درجه است. ت) قطری که بر وتری از دایره عمود باشد، آن وتر را نصف می‌کند. (درست - نادرست) 	۱
۲	در شکل مقابل نقطه O مرکز دایره است. نشان دهید اندازه زاویه محاطی ABC برابر با نصف اندازه کمان مقابل به آن است. 	۰/۷۵
۳	فرض کنید طول‌های دو وتر AB و CD از یک دایره با هم برابرند. ثابت کنید دو کمان AB و CD هم‌اندازه‌اند.	۱
۴	در دایره $C(O, ۱۲)$ اندازه کمان AB برابر ۶۰ درجه است. طول این کمان و مساحت قطاع ساخته شده توسط آن را به دست آورید.	۱
۵	با توجه به اندازه‌های داده شده در شکل مقابل، مقدار α را به دست آورید.	۱/۲۵
۶	در شکل مقابل نشان دهید $\hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{۲}$.	۱
۷	وتر CD با قطر AB در دایره شکل مقابل موازی است. اندازه کمان CD را محاسبه کنید.	۱/۵
۸	در دایره $C(O, R)$ دو وتر AB و CD را در نظر بگیرید. نشان دهید اگر $AB > CD$ ، آن گاه AB نسبت به CD به مرکز دایره نزدیک‌تر است.	۱/۲۵
۹	در شکل مقابل، اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازه زاویه A چند درجه است؟	۱/۲۵
۱۰	موفق و سربلند باشید	جمع نمره

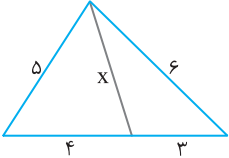
امتحان نهایی: هندسه ۲	رشته: ریاضی و فیزیک	تألیفی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
ردیف	سؤالات		
سؤالات فصل اول			
۱	الف) وتر مشترک دو دایره متقاطع با مرکزهای O و O' روی عمود منصف OO' است. (درست - نادرست) ب) مساحت مثلث متساوی الاضلاع با شعاع دایره محیطی ۸ برابر است. پ) طول خطالمركزین دو دایره متقاطع با شعاعهای ۵ و ۸ برابر d است. حدود d به صورت است. ت) در شکل مقابل مقدار X برابر است. 	۱/۵	
۲	فرض کنید اندازه کمانهای AB و CD از دایره C(O, r) با هم برابرند. نشان دهید وترهای AB و CD نیز هم اندازه اند.	۱	
۳	در شکل مقابل، اضلاع زاویه های B و C بر دایره مماس اند. اندازه زاویه A چند درجه است؟ 	۱/۲۵	
۴	دایره C(O, R) و قاطع MAB مفروض اند. اگر MA = R، نشان دهید $\beta = 3\alpha$. 	۱/۵	
۵	دو وتر AB و CD در نقطه ای مانند M درون دایره یکدیگر را قطع می کنند. نشان دهید $MA \times MB = MC \times MD$	۱/۲۵	
۶	مطابق شکل سه دایره به شعاعهای برابر ۱۰ دوه دو بر هم مماس اند. مساحت ناحیه محدود به سه دایره را به دست آورید. 	۱/۵	
۷	دو دایره متخارج مفروض اند. طول مماس مشترکهای داخلی و خارجی آنها به ترتیب ۵ و ۱۲ سانتی متر و طول خطالمركزین آنها ۱۳ سانتی متر است. شعاعهای دو دایره را به دست آورید.	۱/۵	
۸	نشان دهید هر چهارضلعی که مجموع اندازههای دو ضلع مقابل، برابر با مجموع اندازههای دو ضلع دیگر باشد، محیطی است.	۱/۵	
۹	ثابت کنید هر دوزنقه متساوی الساقین، محاطی است.	۱	
۱۰	در مثلث قائم الزاویه ABC که $AB=3$ ، $AC=4$ و $\hat{A}=90^\circ$ ، شعاع دایره محاطی داخلی و شعاع دایره محاطی خارجی نظیر ضلع BC را به دست آورید.	۱/۲۵	
۱۱	در یک شش ضلعی منتظم با طول ضلع ۱۲ سانتی متر، شعاع دایره محاطی را به دست آورید.	۰/۷۵	

ردیف	سؤالات	نمره
سؤالات فصل دوم		
۱۲	الف) تبدیل انتقال، جهت شکل را حفظ می‌کند. (درست - نادرست) ب) اگر خط ℓ موازی محور بازتاب باشد، تصویر ℓ در این بازتاب، خودش است. (درست - نادرست) پ) نقطه‌ای را که در تبدیلی به خودش تصویر شود، می‌گویند. ت) نتیجه حاصل از دو بازتاب متوالی با محورهای متقاطع یک است. ث) اگر A روی خط ℓ نباشد و تصویر آن تحت بازتاب نسبت به ℓ نقطه A' باشد، آن‌گاه ℓ AA' است.	۱/۲۵ (خرداد ۱۴۰۴)
۱۳	نشان دهید هر تبدیل طولیا اندازه زاویه را حفظ می‌کند.	۱/۲۵
۱۴	با توجه به شکل مقابل نشان دهید در تبدیل انتقال، اندازه هر پاره‌خط و اندازه تصویر آن با هم برابرند. ($AB \parallel \vec{v}$ و اندازه $\vec{v}$ از طول پاره‌خط AB کوچک‌تر است.) (خرداد ۱۴۰۳)	۱
۱۵	نقطه A به فاصله $2\sqrt{6}$ از خط ℓ قرار دارد. تصویر نقطه A را تحت بازتاب نسبت به خط d ، نقطه A' می‌نامیم. نقطه A را حول نقطه A' به اندازه 120° درجه دوران می‌دهیم تا نقطه A'' حاصل شود. طول پاره‌خط AA'' را محاسبه کنید. (با رسم شکل)	۱/۲۵
۱۶	نقطه A' تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط ℓ است. اگر $AA' = 32$ ، نقطه O روی خط ℓ باشد و $OA = 20$ ، آن‌گاه فاصله A از خط شامل OA' را به‌دست آورید. (با رسم شکل)	۱/۲۵
	موفق و سربلند باشید	جمع نمره ۲۰

آزمون ۸
موضوع آزمون
نیمسال اول (۲)
صفحات پاسخ
۷۲ تا ۷۵

ردیف	سؤالات	نمره
سؤالات فصل اول		
۱	الف) طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج با شعاع‌های ۴ و ۶ برابر است. ب) در شکل مقابل $AB=5$ ، $BC=7$ و $CA=6$. طول پاره‌خط AD برابر است. پ) چهارضلعی مقابل محیطی است. مقدار x برابر است. ت) چندضلعی‌ای که نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن هم‌رس باشند، است. (محاطی - محیطی) ث) دو دایره مماس داخل، مماس مشترک ندارند. (درست - نادرست)	۱/۲۵
۲	در شکل مقابل نقطه O مرکز دایره است. نشان دهید اندازه زاویه محاطی ABC برابر با نصف اندازه کمان مقابل به آن است.	۰/۷۵

ردیف	سؤالات	رشته: ریاضی و فیزیک	تألیفی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سؤالات فصل اول				
۱	الف) طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس بیرون به شعاع‌های ۲ و ۳۲ برابر است. ب) اگر در مثلثی $r_a = 6$ ، $r_b = 2$ و $r_c = 3$ ، آن‌گاه شعاع دایره محاطی داخلی آن برابر است.	۰/۵		
۲	ثابت کنید دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند با هم موازی‌اند اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آن‌ها هم‌اندازه باشد.	۱		
۳	در شکل مقابل وتر CD با قطر AB موازی است. اندازه کمان CD را بیابید.	۱/۵		
۴	از نقطه M خارج دایره C(O, R) مماس MT و قاطع MAB رسم شده است. ثابت کنید $MT^2 = MA \times MB$.	۱/۲۵		
۵	طول خط‌المركزین دو دایره مماس درون ۳cm و مساحت ناحیه محدود بین آن‌ها $39\pi \text{cm}^2$ است. شعاع‌های دو دایره را به‌دست آورید.	۱/۵		
۶	نشان دهید در هر چهارضلعی محاطی زاویه‌های مقابل مکمل‌اند.	۱		
۷	مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را به‌دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده است.	۱/۲۵		
سؤالات فصل دوم				
۸	الف) تبدیل انتقال هرگز نقطه ثابت تبدیل ندارد. (درست - نادرست) ب) در شکل مقابل نقطه M روی خط ℓ به گونه‌ای است که AM + MB کمترین مقدار ممکن است. مقدار α برابر و مقدار β برابر است.	۰/۷۵		
۹	نشان دهید هر تبدیل طولیا اندازه زاویه را حفظ می‌کند.	۱/۲۵		
۱۰	در شکل مقابل نشان دهید در بازتاب نسبت به خط ℓ اندازه تصویر پاره‌خط AB برابر با طول AB است. (امتداد پاره‌خط AB بر خط ℓ عمود است.)	۱		
۱۱	یک مربع را در تجانس با نسبت تجانس $\frac{2}{3}$ و مرکز محل تلاقی قطرهای آن تصویر کرده‌ایم. اگر طول ضلع مربع مجانس (مربع تصویر شده) برابر ۱۰ باشد، مساحت بین مربع و تصویرش را به‌دست آورید.	۱/۲۵		
۱۲	اگر بدانیم مثلث A'B'C' مجانس مثلث ABC در تجانس با نسبت $k \neq 1$ است، مرکز تجانس را چگونه پیدا کنیم؟	۰/۷۵		
۱۳	می‌خواهیم مساحت زمین مقابل را بدون تغییر محیط و تعداد اضلاع افزایش دهیم. میزان افزایش مساحت چقدر است؟	۱		

ردیف	سؤالات	نمره
سؤالات فصل سوم		
۱۴	(الف) در مثلث قائم الزاویه شعاع دایره محیطی برابر با طول وتر است. (ب) مثلث با طول ضلع های ۴، ۷ و ۱۰ سانتی متر کدام وضعیت زیر را دارد؟ (۱) حاده الزاویه (۲) قائم الزاویه (۳) منفرجه الزاویه (پ) در شکل مقابل مقدار x^2 برابر است. 	۱
۱۵	در مثلث ABC اگر $AB = 5\sqrt{3}$، شعاع دایره محیطی برابر ۱۰ و $\hat{B} = 60^\circ$، آن گاه: (الف) طول ضلع AC را بیابید. (ب) سینوس زاویه C را محاسبه کنید.	۱
۱۶	در مثلث ABC که $\hat{A} > 90^\circ$ ، ثابت کنید $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.	۱/۵
۱۷	در مثلثی با طول ضلع های ۱۰، ۱۱ و ۱۲ سانتی متر اندازه نیمساز داخلی وارد بر ضلع متوسط را به دست آورید.	۱/۵
۱۸	مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون بیابید.	۱
	موفق و سربلند باشید	جمع نمره ۲۰

صفحات پاسخ

موضوع آزمون

آزمون ۳۱

۱۲۱ تا ۱۲۳

جامع (۷) - شبیه ساز نهایی

امتحان نهایی: هندسه ۲				رشته: ریاضی و فیزیک		تألیفی		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه			
ردیف		سؤالات							نمره		
سؤالات فصل اول											
۱		الف) کایت، چهارضلعی محیطی است. (درست - نادرست) ب) مساحت یک دوزنقه محاطی و محیطی با طول قاعده‌های ۳ و ۱۲ برابر است. پ) اگر فاصله خطی تا مرکز دایره کمتر از شعاع دایره باشد، آن گاه خط و دایره نقطه برخورد دارند. (صفر - یک - دو)								۰/۷۵	
۲		فرض کنید طول‌های دو وتر AB و CD از یک دایره با هم برابرند. ثابت کنید دو کمان AB و CD هم‌اندازه‌اند.								۱	
۳		در شکل مقابل $\hat{A} = 25^\circ$، $\widehat{AB} = 3x$ و $\widehat{CD} = x + 10^\circ$. اندازه زاویه M را به‌دست آورید.								۱/۲۵	
۴		دو وتر AB و CD در نقطه‌ای مانند M درون دایره یکدیگر را قطع می‌کنند. نشان دهید $MA \times MB = MC \times MD$								۱/۲۵	
۵		شعاع دایره مقابل برابر ۶ است. اگر $\widehat{AB} = 60^\circ$، آن گاه مساحت قطعه رنگی را به‌دست آورید.								۱/۵	

پاسخ تشریحی آزمون (۱)

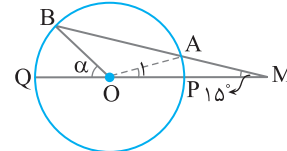
۱ الف) گزینه (۱) - کمتر از (۰/۷۵) (۱۰ ص)

ب) گزینه (۳) - دو (۰/۷۵) (۵ ص)

پ) ۴۵° (۰/۷۵) - شعاع OA را رسم می کنیم. در این صورت

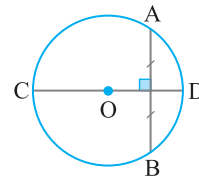
$$\triangle OAM: OA=AM=R \Rightarrow \hat{O}_1=\hat{M}=15^\circ \Rightarrow \widehat{AP}=15^\circ$$

$$\hat{M}=\frac{\widehat{BQ}-\widehat{AP}}{2} \Rightarrow 15^\circ=\frac{\alpha-15^\circ}{2} \Rightarrow \alpha-15^\circ=30^\circ \Rightarrow \alpha=45^\circ$$



(۵ ص، ۱۷ تمرین ۶)

ت) درست (۰/۷۵) - مطابق شکل زیر، اگر قطر CD بر وتر AB عمود باشد، آن را نصف می کند. (۵ ص، ۱۳ فعالیت ۳)

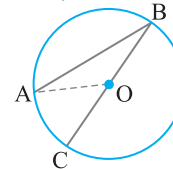


۲ از A به O وصل می کنیم. زاویه AOC زاویه خارجی مثلث متساوی الساقین

AOB است. پس

$$\hat{AOC}=\hat{OBA}+\hat{A} \quad (0/75) \Rightarrow \hat{AOC}=2\hat{OBA} \quad (0/75)$$

$$\hat{ABC}=\hat{OBA}=\frac{1}{2}\hat{AOC}=\frac{\widehat{AC}}{2} \quad (0/75)$$



(۵ ص، ۱۳ فعالیت ۱)

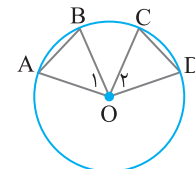
۳ فرض کنید مرکز دایره نقطه O باشد. در این صورت

$$\begin{cases} OA=OC=R \\ OB=OD=R \quad (0/75) \\ AB=CD \end{cases} \xrightarrow{\text{(ضضض)}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \quad (0/75) \Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_2 \quad (0/75)$$

$$\triangle OAB \cong \triangle OCD \quad (0/75) \Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_2 \quad (0/75)$$

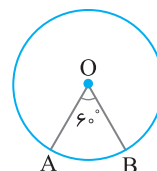
دو زاویه O_1 و O_2 مرکزی و هم اندازه کمان مقابل به خودشان هستند. (۰/۷۵)

پس $\widehat{AB}=\widehat{CD}$. (۰/۷۵) (۵ ص، ۱۳ فعالیت ۲)



$$\text{طول کمان } AB = \frac{\alpha \pi R}{180} = \frac{60 \pi \times 12}{180} = 4\pi \quad (0/75)$$

$$\text{مساحت قطاع } AOB = \frac{\alpha \pi R^2}{360} = \frac{60 \pi \times 12^2}{360} = 24\pi \quad (0/75)$$



(۵ ص، ۱۲ کار در کلاس ۳)

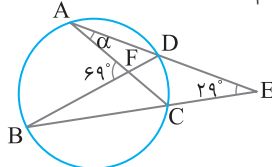
۵ با توجه به شکل زیر می توان نوشت

$$\widehat{AFB}=\frac{\widehat{AB}+\widehat{CD}}{2} \Rightarrow 69^\circ=\frac{\widehat{AB}+\widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{AB}+\widehat{CD}=138^\circ \quad (0/75)$$

$$\widehat{AEB}=\frac{\widehat{AB}-\widehat{CD}}{2} \Rightarrow 29^\circ=\frac{\widehat{AB}-\widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{AB}-\widehat{CD}=58^\circ \quad (0/75)$$

$$\begin{cases} \widehat{AB}+\widehat{CD}=138^\circ \\ \widehat{AB}-\widehat{CD}=58^\circ \end{cases} \xrightarrow{+} 2\widehat{AB}=196^\circ \Rightarrow \widehat{AB}=98^\circ \quad (0/75)$$

$$98^\circ+\widehat{CD}=138^\circ \Rightarrow \widehat{CD}=40^\circ \quad (0/75) \Rightarrow \alpha=\frac{\widehat{CD}}{2}=20^\circ \quad (0/75)$$



(۵ ص، ۱۶ تمرین ۲)

۶ روش اول: از نقطه B خطی موازی MC رسم می کنیم تا دایره را در نقطه D

$$AC \parallel BD \Rightarrow \widehat{CD}=\widehat{AB} \quad (0/75)$$

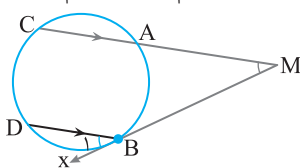
قطع کند. در این صورت

از طرف دیگر بنابر قضیه خطوط موازی مورب داریم

$$MC \parallel BD \Rightarrow \hat{M}=\hat{B}_1 \quad (0/75)$$

زاویه B_1 زاویه ظلی است، پس

$$\hat{B}_1=\frac{\widehat{BD}}{2} \quad (0/75) \Rightarrow \hat{B}_1=\frac{\widehat{BC}-\widehat{CD}}{2}=\frac{\widehat{BC}-\widehat{AB}}{2} \quad (0/75)$$



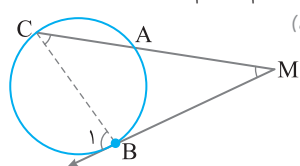
روش دوم: از B به C وصل می کنیم. زاویه B_1 زاویه ظلی است، پس

$$\hat{C}=\frac{\widehat{AB}}{2} \quad (0/75) \quad \hat{B}_1=\frac{\widehat{BC}}{2} \quad (0/75)$$

زاویه B_1 زاویه خارجی است، پس

$$\hat{B}_1=\hat{M}+\hat{C} \quad (0/75) \Rightarrow \hat{M}=\hat{B}_1-\hat{C}=\frac{\widehat{BC}}{2}-\frac{\widehat{AB}}{2}=\frac{\widehat{BC}-\widehat{AB}}{2} \quad (0/75)$$

(۵ ص، ۱۶ تمرین ۱ پ)



$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC}=\widehat{BD}=x \quad (0/75)$$

زاویه O_1 مرکزی و زاویه A محاطی است، پس

$$\hat{O}_1=\widehat{AC}=x \quad (0/75), \quad \hat{A}=\frac{\widehat{BD}}{2}=\frac{x}{2} \quad (0/75)$$

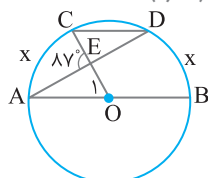
در مثلث AOE زاویه AEC زاویه خارجی است، پس

$$\hat{AEC}=\hat{O}_1+\hat{A} \quad (0/75) \Rightarrow x+\frac{x}{2}=87^\circ \Rightarrow \frac{3x}{2}=87^\circ \Rightarrow x=58^\circ \quad (0/75)$$

چون AB قطر دایره است، پس

$$\widehat{ACB}=180^\circ \Rightarrow \widehat{AC}+\widehat{CD}+\widehat{BD}=180^\circ \Rightarrow x+\widehat{CD}+x=180^\circ$$

$$\widehat{CD}=180^\circ-2x=180^\circ-2 \times 58^\circ=64^\circ \quad (0/75)$$



پاسخ تشریحی آزمون (۲)

۱ الف ردیف اول:

$$R=7, R'=d=3 \Rightarrow d < |R-R'| \Rightarrow \text{متداخل} \quad (۰/۲۵)$$

ردیف دوم:

$$R=3, R'=4, d=5 \Rightarrow |R-R'| < d < R+R' \Rightarrow \text{مقاطع} \quad (۰/۲۵)$$

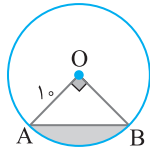
ردیف سوم:

$$R=10, R'=8, d=2 \Rightarrow d=|R-R'| \Rightarrow \text{مماس درون} \quad (۰/۲۵)$$

توجه کنید که در ستون B، دو مورد مماس برون و متخارج اضافی است.

$$(ب) \quad 25\pi - 50 \quad (۰/۲۵)$$

$$S_{\text{قطعه}} = S_{90^\circ} - S_{OAB} = \frac{1}{4}\pi \times 10^2 - \frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 25\pi - 50$$



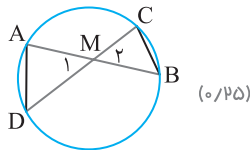
(من ۲۳، تمرین ۱)

۲ از A به D و از B به C وصل می کنیم، بنابر زاویه محاطی داریم

$$\hat{A} = \frac{BD}{2}, \hat{C} = \frac{BD}{2} \Rightarrow \hat{A} = \hat{C} \quad (۰/۲۵)$$

$$\hat{A} = \hat{C}, \quad \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \xrightarrow{(ز)} \triangle MAD \sim \triangle MCB \quad (۰/۲۵)$$

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA \times MB = MC \times MD \quad (۰/۲۵)$$



(من ۱۸، فعالیت ۱)

۳ می دانیم شعاع های OT و OT' بر مماس های رسم شده عمودند. (۰/۲۵)

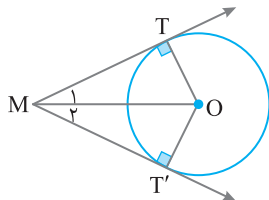
$$\begin{cases} MO=MO \\ \hat{T}=\hat{T}'=90^\circ \\ OT=OT'=R \end{cases} \xrightarrow{(ض.ض)} \triangle MOT \cong \triangle MOT' \quad (۰/۲۵)$$

$$MT=MT' \quad (۰/۲۵)$$

$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2 \quad (۰/۲۵)$$

الف)

ب)



(من ۲۰، کار در کلاس)

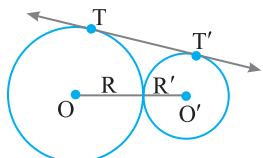
۴ دستور محاسبه طول مماس مشترک خارجی دو دایره $\sqrt{d^2 - (R-R')^2}$

است. (۰/۲۵). چون دو دایره مماس خارج اند، پس $d=R+R'$ بنابراین

$$TT' = \sqrt{(R+R')^2 - (R-R')^2}$$

$$= \sqrt{(R^2 + 2RR' + R'^2) - (R^2 - 2RR' + R'^2)}$$

$$= \sqrt{4RR'} \quad (۰/۲۵) = 2\sqrt{RR'} \quad (۰/۲۵)$$



(من ۲۲، فعالیت ۳)

روش دوم: شعاع CO را امتداد می دهیم تا دایره را در نقطه F قطع کند. در این صورت

$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = x \quad (۰/۲۵)$$

زاویه های متقابل به رأس O_1 و O_2 مرکزی اند. پس

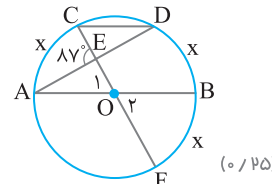
$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BF} = x \quad (۰/۲۵)$$

$$\hat{AEC} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{DF}}{2} \Rightarrow \lambda^\circ = \frac{x + 2x}{2} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow x = 58^\circ \quad (۰/۲۵)$$

چون AB قطر دایره است، پس

$$\widehat{ACB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{BD} = 180^\circ \Rightarrow x + \widehat{CD} + x = 180^\circ$$

$$\widehat{CD} = 180^\circ - 2x = 180^\circ - 2 \times 58^\circ = 64^\circ \quad (۰/۲۵)$$



(من ۱۷، تمرین ۳)

۸ از O بر وترهای AB و CD عمودهایی رسم می کنیم. می دانیم این عمودها

وترهای AB و CD را نصف می کنند. (۰/۲۵) بنابر قضیه فیثاغورس داریم

$$\triangle OBH: OB^2 = OH^2 + BH^2 \Rightarrow R^2 = OH^2 + \frac{AB^2}{4} \quad (۰/۲۵)$$

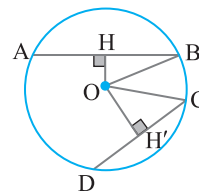
$$\triangle OCH': OC^2 = OH'^2 + CH'^2 \Rightarrow R^2 = OH'^2 + \frac{CD^2}{4} \quad (۰/۲۵)$$

$$OH^2 + \frac{AB^2}{4} = OH'^2 + \frac{CD^2}{4} \Rightarrow \frac{AB^2}{4} - \frac{CD^2}{4} = OH'^2 - OH^2$$

چون $AB > CD$ ، پس طرف چپ تساوی مثبت و در نتیجه طرف راست آن

نیز مثبت است. بنابراین $OH' > OH$ ، یعنی AB نسبت به CD به

مرکز دایره نزدیک تر است. (من ۱۷، تمرین ۸)



۹

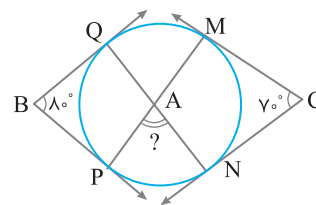
$$\hat{B} = \frac{\widehat{QMP} - \widehat{QP}}{2} \Rightarrow \lambda^\circ = \frac{\widehat{QM} + \widehat{MN} + \widehat{NP} - \widehat{PQ}}{2} \quad (۰/۲۵)$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{NPM} - \widehat{MN}}{2} \Rightarrow \gamma^\circ = \frac{\widehat{NP} + \widehat{PQ} + \widehat{QM} - \widehat{MN}}{2} \quad (۰/۲۵)$$

با جمع کردن دو رابطه بالا داریم

$$15^\circ = \frac{2\widehat{QM} + 2\widehat{NP}}{2} \Rightarrow \widehat{QM} + \widehat{NP} = 15^\circ \quad (۰/۲۵)$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{QM} + \widehat{NP}}{2} \quad (۰/۲۵) = \frac{15^\circ}{2} = 7.5^\circ \quad (۰/۲۵)$$



(من ۱۷، تمرین ۳)

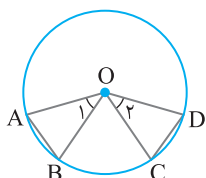
۲ دو زاویه O_1 و O_2 مرکزی اند. پس

$$\begin{cases} \widehat{O_1} = \widehat{AB} \\ \widehat{O_2} = \widehat{CD} \end{cases} \xrightarrow{\widehat{AB} = \widehat{CD} \text{ (o/۷۵)}} \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \text{ (o/۷۵)}$$

$$\begin{cases} OA = OC \\ \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \end{cases} \xrightarrow{\text{(ض.ض)}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \text{ (o/۷۵)}$$

$$OB = OD$$

$$AB = CD \text{ (o/۷۵)}$$



(ص ۱۳، فعالیت ۱)

۳

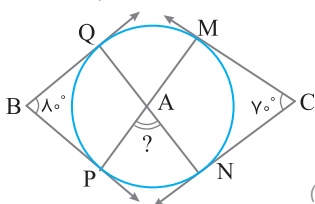
$$\widehat{B} = \frac{\widehat{QMP} - \widehat{QP}}{2} \Rightarrow \widehat{B} = \frac{\widehat{QM} + \widehat{MN} + \widehat{NP} - \widehat{PQ}}{2} \text{ (o/۷۵)}$$

$$\widehat{C} = \frac{\widehat{NPM} - \widehat{MN}}{2} \Rightarrow \widehat{C} = \frac{\widehat{NP} + \widehat{PQ} + \widehat{QM} - \widehat{MN}}{2} \text{ (o/۷۵)}$$

با جمع کردن دو رابطه بالا داریم

$$150^\circ = \frac{2\widehat{QM} + 2\widehat{NP}}{2} \Rightarrow \widehat{QM} + \widehat{NP} = 150^\circ \text{ (o/۷۵)}$$

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{QM} + \widehat{NP}}{2} \text{ (o/۷۵)} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ \text{ (o/۷۵)}$$

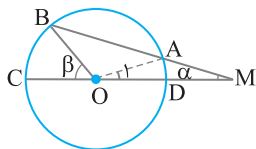


(ص ۱۷، تمرین ۳)

۴ روش اول: شعاع OA را رسم می‌کنیم. چون $OA = MA = R$ ، پس مثلث AOM متساوی الساقین است. بنابراین $\widehat{O_1} = \widehat{M} = \alpha$ (o/۷۵).

$$\widehat{O_1} = \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{AD} = \alpha \text{ (o/۷۵)}, \quad \widehat{B\hat{O}C} = \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{BC} = \beta \text{ (o/۷۵)}$$

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AD}}{2} \text{ (o/۷۵)} \Rightarrow \alpha = \frac{\beta - \alpha}{2} \Rightarrow 2\alpha = \beta - \alpha \Rightarrow \beta = 3\alpha \text{ (o/۷۵)}$$



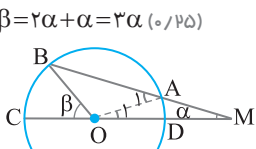
روش دوم: شعاع OA را رسم می‌کنیم. چون $OA = MA = R$ ، پس مثلث AOM متساوی الساقین است. بنابراین $\widehat{O_1} = \widehat{M} = \alpha$ (o/۷۵).

زاویه خارجی A_1 را در نظر می‌گیریم: $\widehat{A_1} = \widehat{O_1} + \widehat{M} \text{ (o/۷۵)} \Rightarrow \widehat{A_1} = 2\alpha \text{ (o/۷۵)}$

مثلث OAB متساوی الساقین است، پس $\widehat{B} = \widehat{A_1} = 2\alpha$ (o/۷۵). در مثلث OBM

زاویه خارجی BOC را در نظر می‌گیریم:

$$\widehat{B\hat{O}C} = \widehat{B} + \widehat{M} \Rightarrow \beta = 2\alpha + \alpha = 3\alpha \text{ (o/۷۵)}$$



(ص ۱۷، تمرین ۴)

۸ در شکل نقطه A' را حول A به اندازه 90° و پادساعتگرد دوران

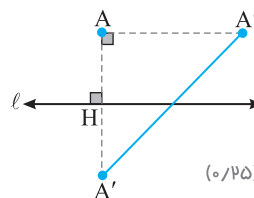
داده‌ایم. جهت دوران در پاسخ تأثیری ندارد. بنابر فرض $AH = 5\sqrt{2}$. در

نتیجه $AA' = 10\sqrt{2}$ (o/۷۵). چون نقطه A مرکز دوران است، پس

از طرفی $\widehat{A} = 90^\circ$ ، پس $AA'' = AA' = 10\sqrt{2}$ (o/۷۵).

$$\triangle AA'A'': \widehat{A'A''} = \widehat{AA''} + \widehat{AA''} = (10\sqrt{2})^2 + (10\sqrt{2})^2 = 400$$

$$A'A'' = 20 \text{ (o/۷۵)}$$



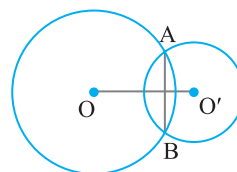
(o/۷۵)

(ص ۳۳، تمرین ۶)

پاسخ تشریحی آزمون (۷)

۱ الف) نادرست (o/۷۵) - در واقع مطابق شکل زیر OO' روی

عمود منصف وتر مشترک دو دایره است.

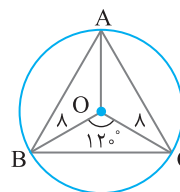


(ص ۲۲، فعالیت ۴)

$$\text{ب. } 48\sqrt{3} \text{ (o/۷۵)}$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} OB \times OC \times \sin O = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \sin 120^\circ = 16\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = 3S_{BOC} = 48\sqrt{3}$$



(ص ۲۹، تمرین ۲)

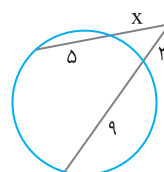
پ. $3 < d < 13$ (o/۵) - برای دو دایره متقاطع با شعاع‌های R و R' و طول

خط‌المركزین d داریم $|R - R'| < d < R + R'$ پس $3 < d < 13$.

(ص ۲۰، جدول - ص ۲۲، فعالیت ۴)

ت. ۴ (o/۷۵) - بنابر روابط طولی در دایره داریم

$$x(x+5) = 3 \times 12 \Rightarrow x^2 + 5x - 36 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+9) = 0 \Rightarrow x = 4$$



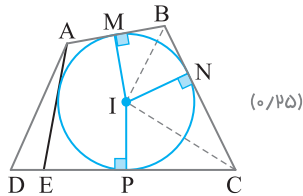
(ص ۱۸، قضیه)

ث. درست (o/۷۵) - هر مستطیل محاطی است زیرا زاویه‌های مقابل آن مکمل اند.



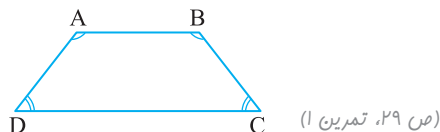
(ص ۲۸، کار در کلاس)

توجه کنید که $CD - CE = DE$. در نتیجه $AD = DE + AE$. این رابطه امکان ندارد، زیرا بنابر نامساوی مثلث (قضیهٔ همار) در مثلث ADE داریم $AD < DE + AE$. بنابراین دایره بر ضلع AD مماس است. (۵/۲۵)



فرض کنید دوزنقه ABCD متساوی الساقین باشد. در این صورت $\hat{A} = \hat{B} = \alpha$ (۵/۲۵)، $\hat{C} = \hat{D} = 180^\circ - \alpha$ (۵/۲۵)

در نتیجه $\hat{A} + \hat{C} = \alpha + 180^\circ - \alpha = 180^\circ$. چون زاویه‌های مقابل چهارضلعی ABCD مکمل‌اند، پس این چهارضلعی محاطی است. (۵/۲۵)



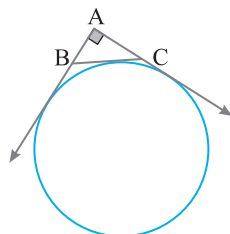
باید r و r_a را محاسبه کنیم. $S = S_{ABC} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$ (۵/۲۵). از طرفی بنابر قضیهٔ فیثاغورس داریم

$$a = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+4+3}{2} = 6 \text{ (۵/۲۵)}$$

بنابراین از طرفی $r = \frac{S}{p}$ و $r_a = \frac{S}{p-a}$ (۵/۲۵) پس

$$r = \frac{6}{6} = 1 \text{ (۵/۲۵)}, \quad r_a = \frac{6}{6-5} = 6 \text{ (۵/۲۵)}$$



در شش ضلعی منتظم شکل زیر شعاع دایرهٔ محاطی است. از نقطهٔ I، مرکز دایرهٔ محاطی، عمود IM را بر ضلع BC وارد می‌کنیم. ادامهٔ حل مسئله دوروش دارد: **روش اول:** نقطهٔ M وسط AB است، پس $AM = 6 \text{ cm}$. (۵/۲۵) از طرفی اندازهٔ $\hat{A}IM$ نصف اندازهٔ $\hat{A}IB$ است. در نتیجه

$$\hat{I} = \hat{A}IM = \frac{1}{2} \hat{A}IB = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$

اکنون بنابر تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه داریم

$$\triangle AMI: \tan I = \frac{AM}{IM} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{6}{r} \text{ (۵/۲۵)} \Rightarrow r = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

روش دوم: مثلث AIM متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱۲ سانتی‌متر است. (۵/۲۵) ارتفاع این مثلث است. در نتیجه

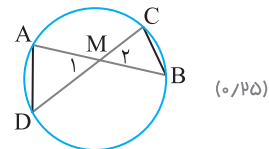
$$r = IM = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 \text{ (۵/۲۵)} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

از A به D و از B به C وصل می‌کنیم، بنابر زاویهٔ محاطی داریم

$$\hat{A} = \frac{BD}{2}, \hat{C} = \frac{BD}{2} \text{ (۵/۲۵)} \Rightarrow \hat{A} = \hat{C} \text{ (۵/۲۵)}$$

$$\hat{A} = \hat{C}, \quad \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \xrightarrow{\text{(ز)}} \triangle MAD \sim \triangle MCB \text{ (۵/۲۵)}$$

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \text{ (۵/۲۵)} \Rightarrow MA \times MB = MC \times MD \text{ (۵/۲۵)}$$



فرض کنید A، B و C مرکزهای این سه دایره باشند. در این صورت مثلث ABC متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲۰ است. (۵/۲۵)

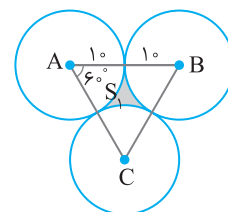
$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 20^2 = 100\sqrt{3} \text{ (۵/۲۵)}$$

از طرفی چون $\hat{A} = 60^\circ$ ، پس باید مساحت قطاع 60° از دایره را به دست آوریم.

$$S_1 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 10^2 \text{ (۵/۲۵)} = \frac{50\pi}{3} \text{ (۵/۲۵)}$$

در نتیجه مساحت ناحیهٔ محدود به سه دایره برابر است با

$$S_{ABC} - 3S_1 = 100\sqrt{3} - 3\left(\frac{50\pi}{3}\right) = 100\sqrt{3} - 50\pi \text{ (۵/۲۵)}$$



طول خط‌المركزين دو دایره را با d و شعاع‌های آن‌ها را با R و R' نشان می‌دهیم ($R > R'$). در این صورت

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \text{ (۵/۲۵)}$$

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} \text{ (۵/۲۵)}$$

با جایگذاری داریم

$$12 = \sqrt{13^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 12^2 = 13^2 - (R - R')^2 \Rightarrow R - R' = 5 \text{ (۵/۲۵)}$$

$$5 = \sqrt{13^2 - (R + R')^2} \Rightarrow 5^2 = 13^2 - (R + R')^2 \Rightarrow R + R' = 12 \text{ (۵/۲۵)}$$

با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول زیر داریم

$$\begin{cases} R - R' = 5 \\ R + R' = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 8/5 \text{ (۵/۲۵)} \\ R' = 3/5 \text{ (۵/۲۵)} \end{cases}$$

(۲۳، تمرین ۵)

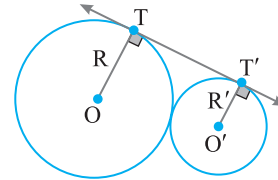
چهارضلعی ABCD را در نظر بگیرید. نیمسازهای دو زاویهٔ B و C را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ I قطع کنند. چون I روی نیمساز این دو زاویه است، پس از ضلع‌های آن‌ها به یک فاصله است. یعنی $IM = NI = IP$. (۵/۲۵) در نتیجه دایرهٔ به مرکز I و شعاع IM بر ضلع‌های AB، BC و CD مماس است. اگر این دایره بر AD مماس باشد، حکم ثابت شده است. پس فرض می‌کنیم این دایره بر AD مماس نیست. از A بر این دایره خط مماسی رسم می‌کنیم تا ضلع CD یا امتداد آن را در نقطهٔ E قطع کند. چون چهارضلعی ABCE محیطی است، پس $AB + CE = AE + BC$. (۵/۲۵) از طرفی بنابر فرض داریم $AB + CD = AD + BC$.

$$\begin{cases} AB + CD = AD + BC \\ AB + CE = AE + BC \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} CD - CE = AD - AE \text{ (۵/۲۵)}$$

پاسخ تشریحی آزمون (۳۰)

۱ الف (۱۶) (۰/۷۵) - می‌دانیم طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس بیرون $C(O, R)$ و $C(O', R')$ برابر $2\sqrt{RR'}$ است. بنابراین

$$2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{2 \times 32} = 2 \times 8 = 16$$



(ص ۲۲، فعالیت ۳)

ب ۱ (۰/۷۵) - می‌دانیم $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$ پس

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1+3+2}{6} = 1 \Rightarrow r=1$$

(ص ۲۹، تمرین ۵)

۲ دو وتر AB و CD از دایره را در نظر می‌گیریم.

$$AB \parallel CD \xrightarrow[\text{و مورب}]{\text{قضیه خطوط موازی}} \hat{B} = \hat{C} \quad (۰/۷۵)$$

دو زاویه C و B محاطی اند. پس

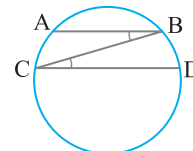
$$\hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{BD}}{2} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \quad (۰/۷۵)$$

$$\widehat{AC} = \widehat{BD} \Rightarrow \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{BD}}{2} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \quad (۰/۷۵)$$

برعکس

$$\xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{عکس قضیه خطوط موازی}} AB \parallel CD \quad (۰/۷۵)$$

(ص ۱۵، کار در کلاس)



۳ روش اول: نقطه تلاقی AD و OC را E می‌نامیم. می‌دانیم

$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = x \quad (۰/۷۵)$$

زاویه O_1 مرکزی و زاویه A محاطی است، پس

$$\hat{O}_1 = \widehat{AC} = x \quad (۰/۷۵), \quad \hat{A} = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{x}{2} \quad (۰/۷۵)$$

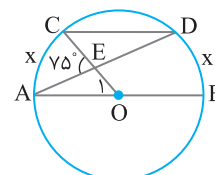
در مثلث AOE زاویه AEC زاویه خارجی است، پس

$$\widehat{AEC} = \hat{O}_1 + \hat{A} \quad (۰/۷۵) \Rightarrow x + \frac{x}{2} = 75^\circ \Rightarrow \frac{3x}{2} = 75^\circ \Rightarrow x = 50^\circ \quad (۰/۷۵)$$

چون AB قطر دایره است، پس

$$\widehat{ACB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{BD} = 180^\circ \Rightarrow x + \widehat{CD} + x = 180^\circ$$

$$\widehat{CD} = 180^\circ - 2x = 180^\circ - 2 \times 50^\circ = 80^\circ \quad (۰/۷۵)$$



روش دوم: شعاع CO را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه F قطع کند.

$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = x \quad (۰/۷۵)$$

می‌دانیم

زاویه‌های متقابل به رأس O_1 و O_2 مرکزی‌اند. پس

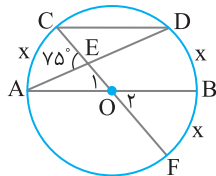
$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BF} = x \quad (۰/۷۵)$$

$$\widehat{AEC} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{DF}}{2} \Rightarrow 75^\circ = \frac{x + 2x}{2} \quad (۰/۷۵) \Rightarrow x = 50^\circ \quad (۰/۷۵)$$

چون AB قطر دایره است، پس

$$\widehat{ACB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{BD} = 180^\circ \Rightarrow x + \widehat{CD} + x = 180^\circ \quad (۰/۷۵)$$

$$\widehat{CD} = 180^\circ - 2x = 180^\circ - 2 \times 50^\circ = 80^\circ \quad (۰/۷۵)$$



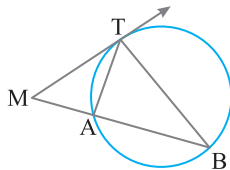
(ص ۱۷، تمرین ۳)

۴ از T به A و B وصل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \widehat{MTA} = \frac{\widehat{AT}}{2} \quad (۰/۷۵) \\ \widehat{MBT} = \frac{\widehat{AT}}{2} \quad (۰/۷۵) \end{cases} \Rightarrow \widehat{MTA} = \widehat{MBT} \quad (۰/۷۵)$$

پس دو مثلث MTA و MBT متشابه‌اند، زیرا $\widehat{MTA} = \widehat{MBT}$ و

$$\frac{MT}{MB} = \frac{MA}{MT} \Rightarrow MT^2 = MA \times MB \quad (۰/۷۵) \quad \text{بنابراین} \quad \hat{M} = \hat{M}$$



(ص ۱۸، فعالیت ۳)

۵ روش اول: فرض کنید دو دایره $C(O, R)$ و $C(O', R')$ باشند و $R > R'$.

چون دو دایره مماس درون‌اند، پس

$$d = R - R' \Rightarrow R - R' = 3 \quad (۰/۷۵) \Rightarrow R' = R - 3 \quad (۰/۷۵)$$

از طرفی مساحت ناحیه محدود بین دو دایره برابر است با

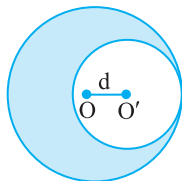
$$\pi R^2 - \pi R'^2 = 39\pi \quad (۰/۷۵) \Rightarrow R^2 - R'^2 = 39$$

با قرار دادن $R' = R - 3$ داریم

$$R^2 - (R - 3)^2 = 39 \quad (۰/۷۵) \Rightarrow R^2 - (R^2 - 6R + 9) = 39$$

$$6R - 9 = 39 \Rightarrow 6R = 48 \Rightarrow R = 8 \text{ cm} \quad (۰/۷۵)$$

در نتیجه $R' = R - 3 = 5 \text{ cm} \quad (۰/۷۵)$



روش دوم: مطابق استدلال روش اول داریم

$$R - R' = 3 \quad (۰/۷۵), \quad R^2 - R'^2 = 39 \quad (۰/۷۵)$$

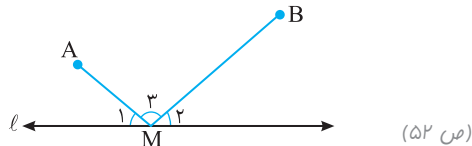
اکنون از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم. $(R - R')(R + R') = 39 \quad (۰/۷۵)$

چون $R - R' = 3$ ، پس $R + R' = 13 \quad (۰/۷۵)$. پس دستگاه معادلات زیر را داریم:

$$\begin{cases} R - R' = 3 \\ R + R' = 13 \end{cases} \xrightarrow{+} 2R = 16 \Rightarrow R = 8 \text{ cm} \quad (۰/۷۵)$$

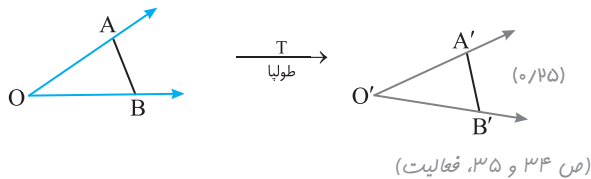
$$R' = 5 \text{ cm} \quad (۰/۷۵)$$

(ص ۲۰، جدول)



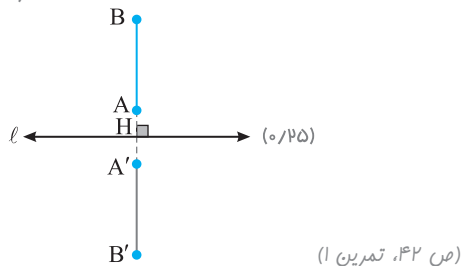
۹ فرض کنید T تبدیلی طولی باشد. زاویه O و نقاط دلخواه A و B روی اضلاع آن را در نظر می‌گیریم. اگر $T(B)=B'$ و $T(A)=A'$ ، $T(O)=O'$ ، چون T طولی است، پس

$$\begin{cases} OA=O'A' \\ OB=O'B' \quad (\circ/\psi\delta) \end{cases} \xrightarrow{\text{(ضضض)}} \triangle OAB \equiv \triangle O'A'B' \quad (\circ/\psi\delta) \\ AB=A'B' \quad \hat{O}=\hat{O}' \quad (\circ/\psi\delta)$$



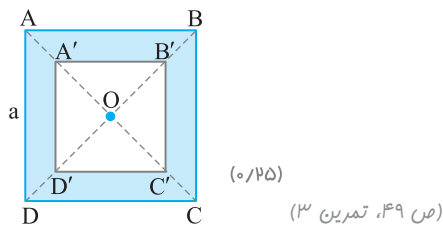
۱۰ فرض کنید A' و B' به ترتیب بازتاب‌های A و B نسبت به خط l باشند. بنابر تعریف بازتاب داریم

$$\begin{cases} A'H=AH \\ B'H=BH \end{cases} \quad (\circ/\psi\delta) \Rightarrow B'H-A'H=BH-AH \quad (\circ/\psi\delta) \\ A'B'=AB \quad (\circ/\psi\delta)$$

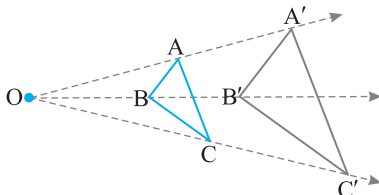


۱۱ فرض کنید محل تلاقی قطرهای مربع نقطه O باشد. در این تجانس $k=\frac{2}{3}$. اگر طول ضلع مربع ABCD برابر a باشد، آن‌گاه طول ضلع مجانس این مربع، یعنی مربع A'B'C'D' برابر $\frac{2}{3}a$ است. $\frac{2}{3}a=10 \quad (\circ/\psi\delta) \Rightarrow a=15 \quad (\circ/\psi\delta)$ بنابرین مساحت ناحیه بین دو مربع برابر است با

$$S_{ABCD}-S_{A'B'C'D'} \quad (\circ/\psi\delta)=15^2-10^2=125 \quad (\circ/\psi\delta)$$



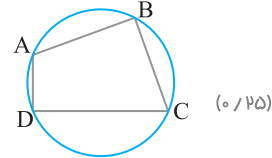
۱۲ در تجانس خطی که یک نقطه را به تصویرش وصل می‌کند، از مرکز تجانس می‌گذرد. بنابرین خطوط شامل AA', BB' و CC' را رسم می‌کنیم. (نقطه همرسی این خطوط مرکز تجانس است. (ص ۳۵، فعالیت ۳))



۶ بنابر زاویه محاطی در دایره داریم

$$\begin{cases} \hat{A}=\frac{\widehat{BCD}}{2} \quad (\circ/\psi\delta) \\ \hat{C}=\frac{\widehat{DAB}}{2} \quad (\circ/\psi\delta) \end{cases} \Rightarrow \hat{A}+\hat{C}=\frac{\widehat{BCD}+\widehat{DAB}}{2}=\frac{360^\circ}{2}=180^\circ \quad (\circ/\psi\delta)$$

به همین ترتیب $\hat{B}$ و $\hat{D}$ نیز مکمل‌اند. (ص ۲۷)



۷ روش اول: در شکل زیر، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و دایره محیطی آن رسم شده‌اند. می‌توان نوشت

$$\widehat{BAC}=60^\circ \Rightarrow \widehat{BC}=120^\circ \Rightarrow \widehat{BOC}=120^\circ \quad (\circ/\psi\delta)$$

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

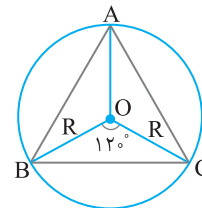
از طرفی

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} OB \times OC \times \sin 120^\circ$$

بنابراین

$$= \frac{1}{2} \times R \times R \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\circ/\psi\delta) = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \quad (\circ/\psi\delta)$$

$$S_{ABC} = 3S_{BOC} \quad (\circ/\psi\delta) = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2 \quad (\circ/\psi\delta) \quad \text{در نتیجه}$$



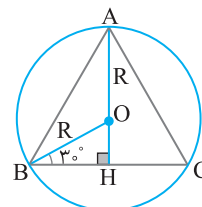
روش دوم: در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مرکز دایره محیطی محل همرسی نیمسازهای زاویه‌ها و عمودمنصف‌های اضلاع است. پس در شکل زیر، BO نیمساز زاویه B است.

$$\triangle BOH: \sin 30^\circ = \frac{OH}{BO} \quad (\circ/\psi\delta) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{OH}{R} \Rightarrow OH = \frac{1}{2} R \quad (\circ/\psi\delta)$$

$$\cos 30^\circ = \frac{BH}{BO} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{R} \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{3}}{2} R \quad (\circ/\psi\delta)$$

$$BC=2BH=\sqrt{3}R, \quad AH=AO+OH=\frac{3}{2}R \quad (\circ/\psi\delta) \quad \text{پس}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} R \times \sqrt{3} R = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2 \quad (\circ/\psi\delta)$$



(ص ۲۹، تمرین ۲)

۸ الف) نادرست (ص ۲۵) - انتقال همانی بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل دارد و انتقال غیرهمانی نقطه ثابت تبدیل ندارد. (ص ۳۸، فعالیت ب)

ب) $100^\circ - 40^\circ = 60^\circ$ - می‌دانیم اگر AM+MB کمترین مقدار ممکن باشد، آن‌گاه $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 40^\circ \Rightarrow \beta = 40^\circ$

$$\hat{M}_2 = 180^\circ - 2\beta = 180^\circ - 2 \times 40^\circ = 100^\circ \Rightarrow \alpha = 100^\circ$$