فصل ۳ حل دستگاه معادلات

گام نخست

در این فصل می‌خواهیم به بررسی و حل دستگاه‌های معادلات مختلف بپردازیم. ابتدا به بررسی چند ایده‌ی متداول و سپس به حل مسائل متنوع می‌پردازیم. ایده‌های حل دستگاه را به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

- استفاده از اعمال جبری (جمع یا تفاضل یا ضرب طرفین معادلات)
- استفاده از جای‌گذاری
- استفاده از نامساوی‌ها
- بحث روی متغیر اکسترمم (متغیر بزرگ‌تر یا کوچک‌تر)
- سایر ایده‌ها

استفاده از اعمال جبری

- جمع یا تفاضل طرفین معادلات
- ضرب طرفین معادلات

جمع یا تفاضل طرفین معادلات

گاهی اوقات می‌توان با جمع کردن یا کم‌کردن طرفین معادلات یک دستگاه، نتایج مناسبی به‌دست آورد.

مثال – ۱

دستگاه مقابل را در اعداد حقیقی حل نمایید:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2y \\ y^2+1=2xy \end{cases}$$

راه‌حل در این‌جا یکی از ایده‌های مناسب این است که طرفین معادلات اخیر را با هم جمع کنیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$(x^2+y^2)+(y^2+1)=2y+2xy \Leftrightarrow (x^2+y^2-2xy)+(y^2+1-2y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-1)^2=0 \Rightarrow x=y,\ y=1 \Rightarrow x=y=1$$

- **تمرین**: دستگاه مقابل را در اعداد حقیقی حل نمایید:

$$\begin{cases} x^2+1=2y \\ y^2+1=2z \\ z^2+1=2x \end{cases}$$

ضرب طرفین معادلات

یکی دیگر از ایده‌های حل دستگاه، ضرب طرفین معادلات در هم می‌باشد. جهت واضح شدن این مطلب به مثال زیر توجه کنید:

مثال – ۲

دستگاه مقابل را در اعداد حقیقی حل نمایید:

$$\begin{cases} x=\dfrac{y}{1+y^2} \\ y=\dfrac{x}{1+x^2} \end{cases}$$

راه‌حل اگر طرفین معادلات را در هم ضرب کنیم، داریم:

$$xy=\frac{xy}{(1+x^2)(1+y^2)}\Rightarrow xy=0 \text{ یا } 1=\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

اگر $xy=0$، آن‌گاه یکی از متغیرها صفر است و بنابر معادلات دستگاه، متغیر دیگر هم صفر خواهد بود و جواب $x=y=0$ به‌دست می‌آید. در غیر این صورت داریم:

$$1=\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\Rightarrow(1+x^2)(1+y^2)=1\Rightarrow x^2+y^2+x^2y^2+1=1$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+x^2y^2=0\Rightarrow x=y=0$$

• **تمرین:** دستگاه مقابل را در اعداد حقیقی حل نمایید:

$$\begin{cases} x^2y=\dfrac{1}{y^3+\dfrac{1}{y^3}} \\ xy^2=\dfrac{1}{x^3+\dfrac{1}{x^3}} \end{cases}$$

استفاده از جای‌گذاری در حل دستگاه معادلات

یکی دیگر از ایده‌های مناسب، استفاده از جای‌گذاری یک متغیر بر حسب سایر متغیرها در معادلات مسأله می‌باشد.

مثال – ۳

دستگاه مقابل را در اعداد حقیقی حل نمایید:

$$\begin{cases} x=\dfrac{y}{1+y^2} \\ y=\dfrac{x}{1+x^2} \end{cases}$$

راه‌حل با جای‌گذاری $x=\dfrac{y}{1+y^2}$ در معادله‌ی دوم داریم:

$$y=\frac{\dfrac{y}{1+y^2}}{1+\left(\dfrac{y}{1+y^2}\right)^2}\Rightarrow y=\frac{\dfrac{y}{1+y^2}}{\dfrac{(1+y^2)^2+y^2}{(1+y^2)^2}}\Rightarrow y=\frac{y(1+y^2)}{(1+y^2)^2+y^2}\Rightarrow y=0 \text{ یا } 1=\frac{1+y^2}{(1+y^2)^2+y^2}$$

اگر $y=0$، طبق معادلات دستگاه $x=0$ و جواب $x=y=0$ به‌دست می‌آید، در غیر این صورت داریم:

$$1=\frac{1+y^2}{(1+y^2)^2+y^2}\Rightarrow(1+y^2)^2+y^2=1+y^2\Rightarrow(1+y^2)^2=1$$

$$\Rightarrow 1+y^2=1 \text{ یا } 1+y^2=-1\Rightarrow y^2=0 \text{ یا } y^2=-2$$

بنابراین $y=0$، پس باز هم به $x=y=0$ خواهیم رسید.

● **تمرین**: دستگاه مقابل را در اعداد حقیقی حل نمایید:

$$\begin{cases} x=\dfrac{y}{2+y^2} \\ y=\dfrac{x}{2+x^2} \end{cases}$$

استفاده از نامساوی‌ها در حل دستگاه معادلات

یکی دیگر از ایده‌های حل دســـتگاه اســـتفاده از نامساوی‌های $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ و $a+\frac{1}{a}\geq 2$ (به‌ازای مقادیر مثبت a و b) است که در قسمت نامساوی‌ها آن‌ها را به‌دست آوردیم.

● **مثال - ٤**

دستگاه مقابل را به‌ازای مقادیر مثبت a، b و c حل نمایید:

$$\begin{cases} (a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=3 \\ (b+\frac{1}{b})(c+\frac{1}{c})=3^2 \\ (c+\frac{1}{c})(a+\frac{1}{a})=3^3 \end{cases}$$

راه‌حل

با توجه به این‌که به‌ازای مقادیر مثبت x می‌دانیم $x+\frac{1}{x}\geq 2$، داریم:

$$\begin{cases} a+\frac{1}{a}\geq 2 \\ b+\frac{1}{b}\geq 2 \end{cases}\Rightarrow(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geq 4\Rightarrow 3\geq 4 \quad (\text{تناقض است})$$

از تناقض حاصل نتیجه می‌گیریم که دستگاه جواب ندارد.

● **تمرین**: دستگاه مقابل را در اعداد حقیقی حل نمایید:

$$\begin{cases} x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3 \\ x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=6 \end{cases}$$

حل دستگاه معادلات به کمک بحث روی متغیر اکسترمم

گاهی اوقات با دستگاهی روبه‌رو هستیم که دارای ظاهری متقارن است و حدس می‌زنیم که متغیرهایش باید با هم برابر باشند. برای اثبات این حدس باید از برهان خلف اســـتفاده کنیم. مثلاً فرض کنیم یکی از متغیرها از بقیه بزرگ‌تر (کوچک‌تر) اســـت و به تناقض برسیم. در این صورت می‌توانیم مسأله را با فرض تساوی متغیرها به راحتی دنبال کنیم.

● مثال – ۵

دستگاه مقابل را در اعداد حقیقی حل نمایید:

$$\begin{cases} x=\dfrac{y^2}{1+y^2} \\ y=\dfrac{x^2}{1+x^2} \end{cases}$$

راه‌حل از آن‌جا که $x=\dfrac{y^2}{1+y^2}$، نتیجه می‌گیریم x نامنفی است (چرا؟). به همین ترتیب نتیجه می‌گیریم y نیز نامنفی اســت. از ظاهر معادلات حدس می‌زنیم x و y برابرند. برای اثبات این حدس از برهان خلف استفاده می‌کنیم. اگر $x>y>0$، داریم:

$$x>y\Rightarrow \frac{y^2}{1+y^2}>\frac{x^2}{1+x^2}\Rightarrow y^2+x^2y^2>x^2+x^2y^2\Rightarrow y^2>x^2\Rightarrow y>x$$

از تناقض حاصل درمی‌یابیم که $x=y$. پس داریم:

$$x=\frac{x^2}{1+x^2}\Rightarrow\begin{cases} x=0\Rightarrow x=y=0 \\ \text{یا} \\ 1=\dfrac{x}{1+x^2}\Rightarrow 1+x^2=x\Rightarrow x^2-x+1=0\Rightarrow \text{جواب حقیقی ندارد.} \end{cases}$$

سایر ایده‌ها در حل دستگاه معادلات

اکنون به مسائلی می‌پردازیم که راه‌حل‌های کلاسیک ذکر شده در قسمت‌های قبل برای آن‌ها مناسب نیست.

● مثال – ۶

دستگاه مقابل در اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

$$\begin{cases} 9^{\frac{x-y}{2}}-2\times 3^{\frac{x-y}{2}}=3 \\ x+y=4 \end{cases}$$

راه‌حل فرض کنید $A=3^{\frac{x-y}{2}}$، داریم:

$$A^2-2A=3\Rightarrow A^2-2A-3=0\Rightarrow (A-3)(A+1)=0\Rightarrow A=3 \text{ یا } A=-1$$

چون $A>0$، پس تنها جواب $A=3$ مطلوب است. بنابراین داریم:

$$3^{\frac{x-y}{2}}=3\Rightarrow \frac{x-y}{2}=1\Rightarrow x-y=2$$

پس داریم:

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=4 \end{cases}\Rightarrow x=3\ ,\ y=1$$

بنابراین معادله یک دسته جواب دارد.

مثال - ۷

دستگاه مقابل چند دسته جواب حقیقی دارد؟

$$\begin{cases} x(y+z)=-۱ \\ y(z+x)=-۴ \\ z(x+y)=-۹ \end{cases}$$

راه‌حل از جمع طرفین سه معادله‌ی موردنظر داریم: $xy+yz+zx=-۷$

بنابر نتیجه‌ی به‌دست آمده هر یک از معادلات به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{cases} -۷-yz=-۱ \\ -۷-zx=-۴ \\ -۷-xy=-۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz=-۶ \\ zx=-۳ \quad (*) \\ xy=۲ \end{cases}$$

از ضرب طرفین معادلات اخیر نتیجه می‌شود $x^۲y^۲z^۲=۳۶$، پس داریم:

$xyz=۶$ یا $xyz=-۶$

اگر $xyz=۶$، طبق معادلات $(*)$ داریم:

$$\begin{cases} yz=-۶ \\ zx=-۳ \\ xy=۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ y=-۲ \\ z=۳ \end{cases}$$

اما اگر $xyz=-۶$، طبق معادلات $(*)$ داریم:

$$\begin{cases} yz=-۶ \\ zx=-۳ \\ xy=۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ y=۲ \\ z=-۳ \end{cases}$$

بنابراین معادله دو دسته جواب دارد.

مثال - ۸

دستگاه مقابل چند دسته جواب دارد؟

$$\begin{cases} x^۳+y^۳=۱ \\ x^۴+y^۴=۱ \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) بی‌نهایت

راه‌حل اگر x یا y در بازه‌ی $[-۱,۱]$ نباشند، معادله‌ی $x^۴+y^۴=۱$ برقرار نخواهد شد. پس $-۱\le x, y\le ۱$. حال اگر یکی از متغیرها منفی باشـد، مثلاً اگـر $-۱\le x<۰$، آن‌گاه طبق معادله‌ی $x^۳+y^۳=۱$، متغیر دیگر $y^۳=۱-x^۳$ بزرگ‌تر از یک می‌شود که با $-۱\le x, y\le ۱$ تناقض دارد.

پس x و y نمی‌توانند منفی باشند، یعنی $۰\le x, y\le ۱$، در این صورت داریم:

$$\begin{cases} x^۳\ge x^۴ \\ y^۳\ge y^۴ \end{cases} \Rightarrow ۱=x^۳+y^۳\ge x^۴+y^۴=۱$$

بنابراین نامساوی‌های $x^۴\le x^۳$ و $y^۴\le y^۳$ باید به حالت تساوی تبدیل شوند، یعنی $x, y\in\{۰,۱\}$.

پس دو دسته جواب داریم:

$(x=۱, y=۰), (x=۰, y=۱)$

● مثال – ۹

اگر $x, y, z\in[-\pi , \pi]$ در دستگاه زیر صدق کنند، آن‌گاه $x^۲+y^۲+z^۲$ چند خواهد بود؟

(المپیاد ریاضی ۱۳۸۷)

$$\begin{cases} x+y+z=۰ \\ \sin x+\sin y+\sin z=۰ \\ \cos x+\cos y+\cos z=۰ \end{cases}$$

۱) صفر　۲) $\frac{۴\pi^۲}{۹}$　۳) $\pi^۲$　۴) $\frac{۸\pi^۲}{۹}$　۵) $\frac{۸\pi^۲}{۳}$

راه‌حل از آن‌جا که در این مسأله یافتن یک دسته جواب کافی می‌باشد، سعی می‌کنیم آن را بیابیم (یعنی به حل کامل و یافتن تمام جواب‌ها نمی‌پردازیم). اگر یکی از متغیرها را صفر درنظر بگیریم، مثلاً $x=۰$، در این صورت برای برقراری معادله‌ی اول کافی است $y=-z$. در این صورت $(x=۰, y=-z)$ با توجه به فرد بودن $\sin x$ معادله‌ی دوم نیز برقرار می‌شود، یعنی:

$\sin(۰)+\sin y+\sin(-y)=۰$ (که صحیح است)

حال کافی است y را به گونه‌ای بیابیم که معادله‌ی سوم برقرار شود:

$\cos(۰)+\cos y+\cos(-y)=۰\Rightarrow ۱+\cos y+\cos y=۰$ (توجه کنید که $\cos y$ تابعی زوج است)

$\Rightarrow ۲\cos y=-۱\Rightarrow \cos y=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=\frac{۲\pi}{۳}$ یا $y=\frac{-۲\pi}{۳}$

بنابراین یک دسته جواب یافتیم:

$x=۰, y=\frac{۲\pi}{۳}, z=-\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x^۲+y^۲+z^۲=\frac{۸\pi^۲}{۹}$

● مثال – ۱۰

دستگاه معادلات زیر در اعداد حقیقی چند دسته جواب دارد؟ (المپیاد ریاضی ۱۳۸۲)

$$\begin{cases} ۱+a^۳+۳ab=b^۳ \\ ۱+a^۵=b^۵ \end{cases}$$

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴　۵) بی‌نهایت

راه‌حل بنابر اتحاد اویلر و معادله‌ی اول داریم:

$۱+a^۳+(-b)^۳-۳a(-b)=(۱+a-b)(۱+a^۲+(-b)^۲-a+ab+b)$

$\Rightarrow ۱+a^۳-b^۳+۳ab=(۱+a-b)(\frac{(۱-a)^۲+(۱+b)^۲+(a+b)^۲}{۲})$

$\Rightarrow ۰=(۱+a-b)(\frac{(۱-a)^۲+(۱+b)^۲+(a+b)^۲}{۲})$

$\Rightarrow ۱+a-b=۰$ یا $(۱-a)^۲+(۱+b)^۲+(a+b)^۲=۰$

اگر داشته باشیم $(۱-a)^۲+(۱+b)^۲+(a+b)^۲=۰$، داریم: $a=۱, b=-۱$

که جواب به‌دست آمده در معادله‌ی دوم مسأله صدق نمی‌کند.

اما اگر $۱+a=b$، در معادله‌ی دوم داریم:

$۱+a^۵=(۱+a)^۵\Rightarrow ۱+a^۵=۱+۵a+۱۰a^۲+۱۰a^۳+۵a^۴+a^۵$

$\Rightarrow ۰=۵(a+۲a^۲+۲a^۳+a^۴)\Rightarrow a=۰$ یا $۱+۲a+۲a^۲+a^۳=۰$

$\Rightarrow a=۰$ یا $۱+۲a+۲a^۲+a^۳=۰$

اگر $a=0$، $b=1+0=1$ خواهد بود که در دستگاه صدق می‌کند. در غیر این صورت داریم:

$$1+2a+2a^2+a^3=(1+a^3)+2a(1+a)=(1+a)(1+a^2-a)+2a(1+a) \Rightarrow 0=(1+a)(1+a^2+a)$$

از آن‌جا که معادله‌ی درجه‌ی دوم $a^2+a+1=0$ ریشه‌ی حقیقی ندارد، بنابراین تنها $a=-1$ امکان‌پذیر است. از جای گذاری $a=-1$ در دستگاه $b=0$ به‌دست می‌آید. بنابراین جواب‌ها عبارتند از: $(a=-1\ ,\ b=0),\ (a=0, b=1)$

پس دو دسته جواب داریم.

مثال – ۱۱

چند زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی در دستگاه زیر صدق می‌کند؟ (المپیاد ریاضی ۱۳۹۰)

$$\begin{cases} x^2+y=xy^2 \\ y^2+x=yx^2 \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) بی‌نهایت

راه‌حل اگر معادله‌ی اول را در x و معادله‌ی دوم را در y ضرب کنیم، داریم:

$$\begin{cases} x^3+xy=x^2y^2 \\ y^3+xy=x^2y^2 \end{cases}$$

اکنون اگر طرفین معادلات را از هم کم کنیم، داریم:

$$(x^3+xy)-(y^3+xy)=x^2y^2-x^2y^2 \Rightarrow x^3=y^3 \Rightarrow x=y$$

با جای‌گذاری $x=y$ در معادله‌ی اول داریم: $x^2+x=x^3 \Rightarrow x=0$ یا $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

پس سه دسته جواب داریم.

مثال – ۱۲

اگر x_1، x_2، ... و x_{10} جواب‌های دستگاه زیر باشند، x_5 چند است؟ (المپیاد ریاضی ۱۳۸۷)

$$\begin{cases} x_1+x_3=2x_2 \\ x_2+x_4=2x_3 \\ \vdots \\ x_8+x_{10}=2x_9 \\ x_9+x_1=22 \\ x_{10}+x_2=26 \end{cases}$$

۱) صفر ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۱۱ ۵) ۱۶

راه‌حل اگر معادلات را به صورت زیر درنظر بگیریم، متوجه می‌شـویم x_1، x_2، ... و x_{10} تشکیل یک دنباله‌ی حسابی می‌دهند:

$$\begin{cases} x_1-x_2=x_2-x_3 \\ x_2-x_3=x_3-x_4 \\ \vdots \\ x_8-x_9=x_9-x_{10} \\ x_9+x_1=22 \\ x_{10}+x_2=26 \end{cases}$$

همان‌گونه که از هشت معادله‌ی اولیه مشخص است فاصله‌ی بین x_i تا x_{i+1} مقداری ثابت است (یعنی x_1 تا x_{10} تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند) و داریم: $x_n = x_1 + k(n-1)\ ,\ \ (n = 1, 2, \dots, 10)$

بنابر دو معادله‌ی آخر داریم:

$$\begin{cases} x_9 + x_1 = 22 \Rightarrow (x_1 + 8k) + x_1 = 22 \\ x_{10} + x_2 = 26 \Rightarrow (x_1 + 9k) + (x_1 + k) = 26 \end{cases} \Rightarrow k = 2, x_1 = 3$$

بنابراین $x_5 = 3 + (2 \times 4) = 11$.

● مثال – ۱۳

دستگاه مقابل در اعداد حقیقی چند دسته جواب دارد؟

$$\begin{cases} x + y + xy = 2 + 3\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 6 \end{cases}$$

راه‌حل ابتدا معادله‌ی اول را در دو ضرب می‌کنیم، سپس طرفین دو معادله را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x + 2xy + 2y = 4 + 6\sqrt{2} \\ (x+y)^2 - 2xy = 6 \end{cases} \Rightarrow (x+y)^2 + 2(x+y) = 10 + 6\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 + 2(x+y) + 1 = 9 + 6\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \Rightarrow (x+y+1)^2 = (3+\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow x + y + 1 = 3 + \sqrt{2} \ \text{یا}\ x + y + 1 = -(3+\sqrt{2}) \Rightarrow x + y = 2 + \sqrt{2} \ \text{یا}\ x + y = -4 - \sqrt{2}$$

اگر $x + y = -4 - \sqrt{2}$ باشد، طبق معادله‌ی اول نتیجه می‌شود $xy = 6 + 4\sqrt{2}$، پس داریم:

$$x + \frac{6 + 4\sqrt{2}}{x} = -4 - \sqrt{2} \Rightarrow x^2 + (4 + \sqrt{2})x + (6 + 4\sqrt{2}) = 0$$

در این معادله $\Delta < 0$، پس جواب نداریم.

اما اگر $x + y = 2 + \sqrt{2}$، طبق معادله‌ی اول نتیجه می‌شود $xy = 2\sqrt{2}$، پس داریم:

$$x + \frac{2\sqrt{2}}{x} = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow x^2 - (2 + \sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} \ \text{یا}\ x = 2$$

اگر $x = 2$، آن‌گاه $y = \sqrt{2}$، اگر $x = \sqrt{2}$، آن‌گاه $y = 2$. پس دستگاه دو دسته جواب دارد.

● مثال – ۱۴

چند سه‌تایی (x, y, z) از اعداد حقیقی و مثبت وجود دارد به طوری که داشته باشیم:

(المپیاد ریاضی ۱۳۷۹)

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 12 \\ xyz = 2 + x + y + z \end{cases}$$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۶ ۵) ۱۲

راه‌حل بنابر نامساوی حسابی هندسی داریم:

$$xy + yz + zx \ge 3\sqrt[3]{xy.yz.zx} = 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \Rightarrow 12 \ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \Rightarrow xyz \le 8 \quad (i)$$

از طرف دیگر بنابر نامساوی حسابی هندسی داریم:

$$2 + x + y + z \ge 4\sqrt[4]{2xyz} \Rightarrow xyz \ge 4\sqrt[4]{2xyz} \Rightarrow xyz \ge 8 \quad (ii)$$

از مقایسه‌ی روابط (i) و (ii) نتیجه می‌گیریم $xyz = 8$ و دو نامساوی به‌کار رفته باید به حالت تساوی تبدیل شوند. بنابر حالت تساوی نامساوی حسابی هندسی $x = y = z = 2$ به‌دست می‌آید.

پس یک دسته جواب داریم.

● مثال – ۱۵

دستگاه معادله‌ی زیر در اعداد حقیقی چند دسته جواب دارد؟ (المپیاد ریاضی ۱۳۸۶)

$$\begin{cases} x-۱=yz \\ y-۱=zx \\ z-۱=xy \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) بیش از ۴

راه‌حل

اگر معادله‌های اول، دوم و سوم را به ترتیب در x، y و z ضرب کنیم، داریم:

$$\begin{cases} x^{۲}-x=xyz \\ y^{۲}-y=xyz \\ z^{۲}-z=xyz \end{cases}$$

فرض کنید $xyz=t$، در این صورت x، y و z ریشه‌های معادله‌ی $A^{۲}-A-t=۰$ خواهند بود. چون معادله‌ی درجه‌ی دوم موردنظر حداکثر دو ریشه دارد، پس دو تا از متغیرهای x، y و z برابر خواهند بود. بنابر تقارن معادلات فرض می‌کنیم $x=y$، در این صورت معادلات اول و سوم به صورت زیر می‌شوند:

$$\begin{cases} x-۱=xz \Rightarrow x(z-۱)=-۱ \\ z-۱=x^{۲} \end{cases} \Rightarrow x^{۳}=-۱ \Rightarrow x=y=-۱, z=۲$$

بنابراین جواب‌های دستگاه عبارتند از:

$$(x=-۱, y=-۱, z=۲), (x=-۱, y=۲, z=-۱), (x=۲, y=-۱, z=-۱)$$

گام المپیاد

۸۷- در آزادراه زنجان- تبریز از ساعت ۸ صبح تا ۱۰ صبح ۲۳۷۰ خودرو از عوارضی عبور کرده‌اند که همه‌ی آن‌ها تک‌سرنشین یا دو سرنشین بوده‌اند. این خودروها در مجموع ۱۸۳۲۰ لیتر بنزین در مسیر مصرف کرده‌اند. می‌دانیم هر خودروی تک‌سرنشین، ۷ لیتر و هر خودروی دوسرنشین، ۸ لیتر بنزین در این مسیر مصرف کرده است. تعداد کل خودروهای تک‌سرنشین چند تاست؟ (المپیاد ریاضی ۱۳۹۳)

۱) ۳۲۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۶۴۰ ۴) ۱۰۵۰ ۵) ۱۱۸۵

۸۸- دستگاه مقابل در اعداد حقیقی چند دسته جواب دارد؟

$$\begin{cases} x^{۲}+y^{۲}=۲yz \\ y^{۲}+z^{۲}=۲zx \\ z^{۲}+x^{۲}=۲xy \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) بی‌نهایت

۸۹- دستگاه مقابل چند دسته جواب در اعداد حقیقی دارد؟

$$\begin{cases} a^{۲}+۲b=۷ \\ b^{۲}+۴c=-۷ \\ c^{۲}+۶a=-۱۴ \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) بی‌نهایت

۹۰- چند چهارتایی مرتب (a , b , c , d) از اعداد حقیقی یافت می‌شود که در دستگاه معادلات زیر صدق کند؟ المپیاد ریاضی ۱۳۹۴

$$\begin{cases} a^3+bc=d^3 \\ b^3+cd=a^3 \\ c^3+da=b^3 \\ d^3+ab=c^3 \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۲۵ ۴) ۴۹ ۵) بی‌نهایت

۹۱- دستگاه مقابل در اعداد حقیقی چند دسته جواب دارد؟

$$\begin{cases} a^2+b^2=2c \\ 1+a^2=2ac \\ c^2=ab \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) بی‌نهایت

۹۲- دستگاه مقابل چند دسته جواب حقیقی و مثبت دارد؟

$$\begin{cases} c^2+b^2=2 \\ \frac{1}{a^2}+c^2=2ac \\ a^2=bc \end{cases}$$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) بیش از ۳

۹۳- دستگاه مقابل چند دسته جواب در اعداد حقیقی دارد؟

$$\begin{cases} x^2=\frac{y^2}{1+y^2} \\ y^2=\frac{x^2}{1+x^2} \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) بی‌نهایت

۹۴- دستگاه مقابل چند دسته جواب حقیقی دارد؟ هاروارد - ام‌آی‌تی ۲۰۰۶

$$\begin{cases} x^2+y=12 \\ y^2+x=12 \end{cases}$$

۹۵- دستگاه مقابل در اعداد طبیعی چند دسته جواب دارد؟

$$\begin{cases} a^2+b-c=100 \\ a+b^2-c=113 \end{cases}$$

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه ۵) چهار

۹۶- چند چهارتایی (x, y, z, t) از اعداد حقیقی یافت می‌شود که در معادلات زیر صدق کند؟ المپیاد ریاضی ۱۳۹۲

$$\begin{cases} xy+yz+zx=t^2 \\ yz+zt+ty=x^2 \\ zt+tx+xz=y^2 \\ tx+xy+yt=z^2 \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۲۵ ۵) بی‌نهایت

۹۷- دستگاه مقابل چند دسته جواب در اعداد حقیقی دارد؟

$$\begin{cases}(x+y)^{3}=z\\(y+z)^{3}=x\\(z+x)^{3}=y\end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) بی‌نهایت

۹۸- دستگاه مقابل در اعداد حقیقی چند دسته جواب دارد؟

$$\begin{cases}x^{2}=\dfrac{y^{2}}{1+y^{2}}\\y^{2}=\dfrac{z^{2}}{1+z^{2}}\\z^{2}=\dfrac{x^{2}}{1+x^{2}}\end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) بی‌نهایت

۹۹- دستگاه مقابل چند دسته جواب در مجموعه‌ی اعداد حقیقی دارد؟

$$\begin{cases}x^{2}=\dfrac{yz}{1+y^{2}}\\y^{2}=\dfrac{zx}{1+z^{2}}\\z^{2}=\dfrac{xy}{1+x^{2}}\end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) بی‌نهایت

۱۰۰- اگر x و y جواب‌های دستگاه مقابل باشند، $x^{2}+y^{2}$ چند است؟

$$\begin{cases}xy=3\\x^{2}y+y^{2}x+2x+2y=25\end{cases}$$

۱) ۱۹ ۲) ۲۹ ۳) ۱۵ ۴) ۱۴ ۵) هیچ‌کدام

۱۰۱- فرض کنید x و y اعدادی حقیقی و ناصفر باشند که:

$$\begin{cases}x+\dfrac{1}{y}=10\\y+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{12}\end{cases}$$

مقدار مثبت x را بیابید. (هاروارد - ام‌تی‌آی ۲۰۱۰)

۱۰۲- اعداد حقیقی a، b، c و d در تساوی‌های $ab=2$، $b+c=3$، $cd=4$ و $d+a=5$ صدق می‌کنند. چند مقدار ممکن برای a وجود دارد؟ (المپیاد ریاضی ۱۳۹۴)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴ ۵) بی‌نهایت

۱۰۳- دستگاه مقابل در اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

$$\begin{cases}5^{x}7^{y}=7\\x+y=1\end{cases}$$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) ۴

۱۰۴- اگر x و y اعداد حقیقی و مثبت باشند به طوری که:

$$\begin{cases}x-y^{2}=3\\x^{2}+y^{4}=13\end{cases}$$

مقدار x را بیابید. (هاروارد - ام‌تی‌آی ۲۰۱۰)

۱۰۵- دستگاه معادلات روبه‌رو در اعداد حقیقی چند دسته جواب دارد؟ المپیاد مقدماتی ریاضی ۱۳۸۴

$$\begin{cases} x=\dfrac{2y}{1-y^2} \\ y=\dfrac{2x}{1-x^2} \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) بی‌نهایت

۱۰۶- چند زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی در دستگاه معادلات زیر صدق می‌کند؟ المپیاد ریاضی ۱۳۹۱

$$\begin{cases} x^2y+xy^2=30 \\ xy+x+y=11 \end{cases}$$

۱۰۷- فرض کنید x و y اعدادی حقیقی باشند به طوری که:

$$\begin{cases} xy+x+y=8 \\ x^2y^2+x^2+y^2+2xy=40 \end{cases} \quad , \quad x>y$$

مقدار x را بیابید. هاروارد - ام‌تی‌آی ۲۰۱۳

۱۰۸- دستگاه مقابل در اعداد حقیقی چند دسته جواب دارد؟

$$\begin{cases} 2a+b+c=0 \\ ab+bc+ca=0 \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) بی‌نهایت

۱۰۹- دستگاه مقابل چند دسته جواب در اعداد حقیقی و نامنفی دارد؟

$$\begin{cases} x=\dfrac{2y^2}{1+y^2} \\ y=\dfrac{2x^2}{1+x^2} \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) بی‌نهایت

۱۱۰- دستگاه مقابل در اعداد حقیقی و مثبت چند دسته جواب دارد؟

$$\begin{cases} a+\dfrac{1}{b}=2 \\ b+\dfrac{1}{c}=2 \\ c+\dfrac{1}{a}=2 \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) بی‌نهایت

۱۱۱- دستگاه مقابل در اعداد حقیقی و مثبت چند دسته جواب دارد؟

$$\begin{cases} (a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=2(c+\frac{1}{c}) \\ (b+\frac{1}{b})(c+\frac{1}{c})=2(a+\frac{1}{a}) \\ (c+\frac{1}{c})(a+\frac{1}{a})=2(b+\frac{1}{b}) \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) بی‌نهایت

۱۱۲- دستگاه مقابل در اعداد حقیقی و مثبت چند دسته جواب دارد؟

$$\begin{cases} (a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=2(c+\frac{1}{a}) \\ (b+\frac{1}{b})(c+\frac{1}{c})=2(a+\frac{1}{b}) \\ (c+\frac{1}{c})(a+\frac{1}{a})=2(b+\frac{1}{c}) \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) بی‌نهایت

۱۱۳- دستگاه مقابل چند دسته جواب حقیقی دارد؟

$$\begin{cases} x=y+z+t \\ y=z+t+x \\ z=x+y+t \\ t=x+y+z \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) ۵

۱۱۴- دستگاه مقابل چند دسته جواب حقیقی دارد؟ **ترکیه ۲۰۰۰**

$$\begin{cases} (x+y)^۵=z \\ (y+z)^۵=x \\ (z+x)^۵=y \end{cases}$$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) بیش از ۳

۱۱۵- دستگاه مقابل در اعداد حقیقی چند دسته جواب دارد؟

$$\begin{cases} a_۲^۲+a_۳^۲+\cdots+a_n^۲=a_۱ \\ a_۱^۲+a_۳^۲+\cdots+a_n^۲=a_۲ \\ \vdots \\ a_۱^۲+a_۲^۲+\cdots+a_{n-۱}^۲=a_n \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) بی‌نهایت

۱۱۶- چند دسته عدد حقیقی (x, y, z, w) داریم که: **ترکیه ۲۰۱۲**

$$\begin{cases} x^۳+۲=۳y \\ y^۳+۲=۳z \\ z^۳+۲=۳w \\ w^۳+۲=۳x \end{cases}$$

۱) ۸ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۱ ۵) هیچ‌کدام

۱۱۷- چند زیرمجموعه‌ی چهارعضوی از اعداد حقیقی مثبت وجود دارد که ضرب دوبه‌دوی اعضای آن، برابر مجموعه‌ی $\{۲, ۸, ۹, ۳۲, ۳۶, ۱۴۴\}$ شود؟ **المپیاد ریاضی ۱۳۹۱**

۱۱۸- اعداد x، y و z حقیقی هستند و داریم $\frac{xyz}{z+x}=۲$، $\frac{xyz}{y+z}=۱$ و $\frac{xyz}{x+y}=-۱$. مقدار xyz چند است؟ **ترکیه ۲۰۱۰**

۱) $\frac{-۸}{\sqrt{۱۵}}$ ۲) $\frac{۸}{\sqrt{۵}}$ ۳) $-۸\sqrt{\frac{۳}{۵}}$ ۴) $\frac{۷}{\sqrt{۱۵}}$ ۵) هیچ کدام

۱۱۹- اعداد حقیقی x، y و z در دستگاه مقابل صادق هستند:

$$\begin{cases} x^۲y+y^۲z+z^۲x=-۱ \\ xy^۲+yz^۲+zx^۲=۵ \\ xyz=-۲ \end{cases}$$

عبارت $x+y+z$ چه مقادیری می‌تواند داشته باشد؟ **استنفورد ۲۰۱۲**

۱۲۰- به ازای کدام دسته جواب (A , B) معادله‌ی زیر جواب حقیقی ندارد؟ **ترکیه ۲۰۱۰**

$$\begin{cases} x^۲+xy+y=A \\ \frac{y}{y-x}=B \end{cases}$$

۱) $(\frac{۱}{۲}, ۲)$ ۲) $(-۱, ۱)$ ۳) $(\sqrt{۲}, \sqrt{۲})$ ۴) $(۱, \frac{۱}{۲})$ ۵) $(۲, \frac{۲}{۳})$

۱۲۱- دستگاه مقابل چند دسته جواب در اعداد حقیقی دارد؟

$$\begin{cases} xy^{۲}=y^{۴}-y+۱ \\ yz^{۲}=z^{۴}-z+۱ \\ zx^{۲}=x^{۴}-x+۱ \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) بیش از ۴

۱۲۲- دستگاه مقابل چند دسته جواب حقیقی و مثبت دارد؟

$$\begin{cases} xy=y^{۶}+y^{۴}+y^{۲}+۱ \\ yz^{۳}=z^{۶}+z^{۴}+z^{۲}+۱ \\ zx^{۵}=x^{۶}+x^{۴}+x^{۲}+۱ \end{cases}$$

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) بیش از ۴

۱۲۳- دستگاه مقابل در مجموعه اعداد حقیقی مثبت و به ازای عدد مفروض $n\in\mathbb{N}$ چند دسته جواب دارد؟

$$\begin{cases} a^{n}b^{n}=(۲-a^{n})(۲-b^{n}) \\ (a+۲)(۲-b)=۳ \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) بیش از ۴

۱۲۴- دستگاه مقابل چند دسته جواب حقیقی دارد؟

$$\begin{cases} (a^{۲}+۱)(b^{۲}+۱)(c^{۲}+۱)=\frac{۸۱}{۸} \\ (a^{۴}+a^{۲}+۱)(b^{۴}+b^{۲}+۱)(c^{۴}+c^{۲}+۱)=\frac{۸۱}{۸}(abc)^{\frac{۳}{۲}} \end{cases}$$

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) بیش از ۴