

درس‌نامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های کاملاً تشریحی

هندسه ۲ (یازدهم)

ویراست سوم

حسن محمدبیگی، امیرمحمد هویدی



انتشارات
آگاه

به نام خدا

این کتاب را براساس محتوای کتاب درسی هندسه ۲ نوشته‌ایم. هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است و هر درس از دو بخش تشکیل شده است:

۱. خلاصه درس: در این قسمت، ضمن مرور مطالب کتاب درسی، نمونه‌هایی از پرسش‌های چهارگزینه‌ای را هم حل کرده‌ایم تا خواننده با تکنیک‌های اصلی حل این‌گونه پرسش‌ها آشنا شود. تقسیم‌بندی درس‌ها مانند کتاب درسی است. چون هدف این کتاب آموزش مهارت‌های حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای است، اثبات قضیه‌ها و نکته‌ها را نیاورده‌ایم.

۲. پرسش‌های چهارگزینه‌ای: در پایان هر بخش، مجموعه‌ای از پرسش‌های چهارگزینه‌ای مربوط به آن بخش را آورده‌ایم. در این قسمت، از همه مطالب کتاب درسی پرسش‌هایی طرح کرده‌ایم. علاوه بر این‌ها، تعداد زیادی پرسش تألیفی به همراه سؤالات کنکورهای سال‌های قبل را هم آورده‌ایم. پاسخ تشریحی همه پرسش‌های چهارگزینه‌ای در فصل چهارم قرار دارد. برای مطالعه این کتاب، ابتدا باید خلاصه درس را با دقت بخوانید و مطمئن شوید که روش‌های حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای آن را یاد گرفته‌اید. سپس به حل کردن پرسش‌های چهارگزینه‌ای انتهای هر بخش بپردازید. با این کار، علاوه بر اینکه مطالب درسی را به‌طور کامل مرور می‌کنید، با انواع مختلف پرسش‌های چهارگزینه‌ای نیز آشنا می‌شوید.

در این ویراست تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای اضافه کرده‌ایم. همچنین پرسش‌های چهارگزینه‌ای هر بخش از درس را به سه سطح تقسیم کرده‌ایم. در سطح ۱، پرسش‌هایی ساده و مفهومی را آورده‌ایم که با حل آن‌ها مفاهیم آن مبحث مرور می‌شود. این پرسش‌ها کمتر در آزمون‌ها دیده می‌شوند ولی برای تسلط بر مفاهیم درس، حل آن‌ها ضروری است. در سطح ۲، پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها متوسط است و در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری بیشتر این نوع پرسش‌ها مطرح می‌شود. تعداد این پرسش‌ها بسیار بیشتر از پرسش‌های سطح ۱ است و حل آن‌ها را به تمام خوانندگان توصیه می‌کنیم. در سطح ۳، پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها بالاتر از پرسش‌های سطح ۲ است. تعداد این پرسش‌ها زیاد نیست و حل آن‌ها به دانش‌آموزان مستعد و سخت‌کوش توصیه می‌شود. این سطح از پرسش‌ها ممکن است در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری مطرح شوند ولی فراوانی آن‌ها کم است. در ضمن در آخر هر فصل، ۳ آزمون از کل مطالب فصل قرار داده‌ایم که مرور مناسبی برای آن فصل است.

به یاد داشته باشید که سرعت مطالعه هندسه کمتر از درس‌های دیگر است. سعی کنید درباره آنچه که می‌خوانید تفکر و تأمل کنید، نه این‌که سرسری مطالب را حفظ کنید. حتماً به استدلال‌ها دقت کنید و مطمئن شوید می‌فهمید که چرا این کارها را در راه‌حل‌ها انجام داده‌ایم. هنگام مطالعه همیشه کاغذ و قلم کنار خود داشته باشید و هرگاه به مسئله‌ای رسیدید، پیش از این‌که راه‌حل آن را از روی کتاب بخوانید، سعی کنید خودتان آن را حل کنید و اگر نتوانستید آن را حل کنید، راه‌حلش را ببینید. اگر فکر می‌کنید هنوز به مطالب درسی مسلط نیستید، بهتر است پیش از مطالعه هر درس، مطالب مربوط به آن را از کتاب «هندسه ۲ سه‌بعدی» از همین انتشارات مطالعه کنید.

در پایان، وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، دکتر آریس آقانیانس و خانم عاطفه ربیعی برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی و خانم ستین مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی تشکر و قدردانی کنیم.

فهرست

◆ فصل اول: دایره

درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

بخش اول: مفاهیم اولیه	۲
بخش دوم: زاویهٔ محاطی	۲۰
بخش سوم: زاویهٔ ظلی	۳۰
بخش چهارم: زاویهٔ بین دو وتر	۳۵
سؤالات کنکور سراسری	۴۸

درس دوم: رابطه‌های طولی در دایره

بخش اول: روابط طولی در دایره	۵۱
بخش دوم: مطالبی دربارهٔ خط مماس بر دایره	۶۳
بخش سوم: حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌ها	۶۷
سؤالات کنکور سراسری	۸۴

درس سوم: چندضلعی‌های محاطی و محیطی

بخش اول: چندضلعی‌های محاطی و محیطی	۸۶
بخش دوم: دایره‌های محاطی و محیطی مثلث	۹۰
بخش سوم: چهارضلعی‌های محاطی و محیطی	۱۰۱
سؤالات کنکور سراسری	۱۱۲
آزمون‌های فصل	۱۱۴

◆ فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها

درس اول: تبدیل‌های هندسی

- بخش اول: تبدیل‌های هندسی ۱۱۸
- بخش دوم: بازتاب ۱۲۰
- بخش سوم: انتقال ۱۲۷
- بخش چهارم: دوران ۱۳۳
- بخش پنجم: تجانس ۱۴۱
- بخش ششم: ترکیب تبدیل‌ها و تبدیل همانی ۱۵۳
- سؤالات کنکور سراسری ۱۵۸

درس دوم: کاربرد تبدیل‌ها

- بخش اول: کاربردهای بازتاب ۱۵۹
- بخش دوم: کاربردهای انتقال، دوران و تجانس ۱۷۲
- سؤالات کنکور سراسری ۱۸۲
- آزمون‌های فصل ۱۸۴

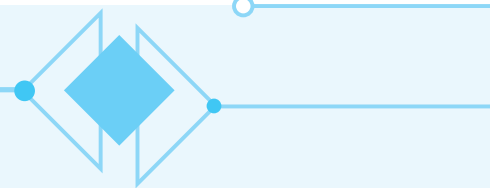
◆ فصل سوم: روابط طولی در مثلث

درس اول: قضیه سینوس‌ها

- بخش اول: روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ۱۸۸
- بخش دوم: قضیه سینوس‌ها ۱۹۶
- سؤالات کنکور سراسری ۲۰۷

درس دوم: قضیه کسینوس‌ها

- بخش اول: قضیه کسینوس‌ها ۲۰۹
- بخش دوم: کاربردهای قضیه کسینوس‌ها ۲۱۹
- سؤالات کنکور سراسری ۲۲۷



درس سوم: قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها ۲۲۹

سؤالات کنکور سراسری ۲۴۲

درس چهارم: قضیه هرون (محاسبه ارتفاعها و مساحت مثلث) ۲۴۴

سؤالات کنکور سراسری ۲۵۸

آزمونهای فصل ۲۶۰

◆ فصل چهارم: پاسخهای تشریحی

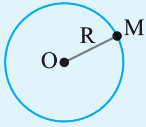
پاسخهای تشریحی ۲۶۴

◆ فصل پنجم: پاسخنامه کلیدی

پاسخنامه کلیدی ۵۰۷

درس اول / بخش اول: مفاهیم اولیه

دایره



فرض کنید O نقطه‌ای ثابت و R عددی حقیقی و مثبت باشد. دایره به مرکز O و شعاع R مجموعه تمام نقطه‌هایی از صفحه است که فاصله آن‌ها از نقطه O برابر R باشد. در شکل مقابل، $M \Leftrightarrow OM = R$ روی دایره است.

قرارداد

دایره C به مرکز O و شعاع R را به صورت $C(O, R)$ نمایش می‌دهیم.

نکته

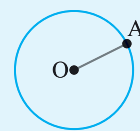
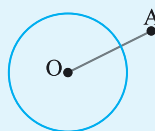
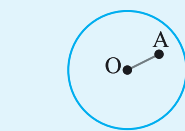
دو دایره با شعاع‌های مساوی با هم برابرند.

اوضاع نسبی نقطه و دایره

نقطه A و دایره $C(O, R)$ را در نظر بگیرید. وضعیت این نقطه نسبت به دایره یکی از سه حالت زیر است:

۱- نقطه A روی دایره است.

۲- نقطه A بیرون دایره است.



$OA < R \Leftrightarrow A$ درون دایره است.

$OA > R \Leftrightarrow A$ بیرون دایره است.

$OA = R \Leftrightarrow A$ روی دایره است.

تست ۱

فرض کنید x عددی حقیقی باشد. فاصله نقطه A از مرکز دایره $C(O, x^2 + 5x)$ برابر ۶ است. اگر نقطه A بیرون این دایره باشد، برای x

چند مقدار صحیح به دست می‌آید؟

(۴) نامتناهی

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

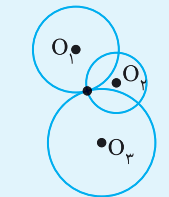
راه حل

چون A بیرون دایره است، پس $R < OA$ ، یعنی $x^2 + 5x < 6$ ، بنابراین $-6 < x < 1$. همچنین چون $x^2 + 5x$ شعاع دایره است، پس $x^2 + 5x > 0$. در نتیجه $-5 < x < 0$ یا $x > 0$. از اشتراک ناحیه‌های به دست آمده نتیجه می‌شود $-5 < x < 1$. پس هیچ مقدار صحیحی برای x به دست نمی‌آید.

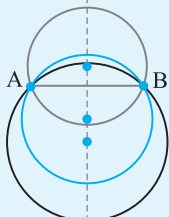
گزینه ۱

نکته

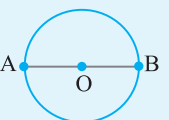
۱- از یک نقطه مثل A در صفحه، نامتناهی دایره می‌گذرد که مرکز این دایره‌ها، هر نقطه دلخواه از صفحه، به غیر از نقطه مورد نظر است.



۲- از دو نقطه متمایز A و B در صفحه نامتناهی دایره می‌گذرد که مراکز این دایره‌ها روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارند.



۳- کوچک‌ترین دایره گذرنده از دو نقطه A و B ، دایره به قطر AB است.



۴- سه نقطه A ، B و C را در نظر می‌گیریم:

(الف) اگر سه نقطه A ، B و C روی یک خط راست قرار نداشته باشند، فقط یک دایره از آن‌ها می‌گذرد و مرکز این دایره محل برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های مثلث ABC است.

(ب) اگر سه نقطه A ، B و C روی یک خط راست قرار داشته باشند، هیچ دایره‌ای وجود ندارد که از هر سه نقطه عبور کند. چون عمودمنصف‌های پاره‌خط‌هایی که این نقطه‌ها را به هم وصل می‌کنند موازی‌اند و یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

دورترین و نزدیک‌ترین نقطه دایره به یک نقطه

نقطه M و دایره $C(O, R)$ را در نظر بگیرید. با توجه به شکل، در هر دو حالت، در بین نقطه‌های روی دایره، A نزدیک‌ترین نقطه به M و نقطه B دورترین نقطه دایره به M هستند. همچنین

$$MA = |OM - R|, \quad MB = OM + R$$

تست

کمترین و بیشترین فاصله نقطه A خارج دایره از این دایره به ترتیب ۸ و ۱۲ است. شعاع این دایره چقدر است؟

۳ (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴)

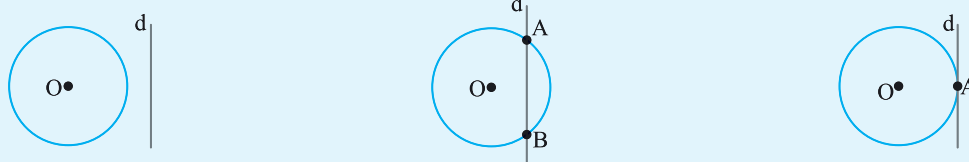
در شکل مقابل، M نزدیک‌ترین و N دورترین نقطه دایره تا نقطه A است. اکنون توجه کنید که $AN = OA + R = ۱۲$ و $AM = OA - R = ۸$. با کم کردن برابری‌های به دست آمده می‌توان نوشت $۲R = ۴$ ، پس $R = ۲$.

گزینه ۲

اوضاع نسبی خط و دایره

خط d و دایره $C(O, R)$ را در نظر بگیرید. بر اساس تعداد نقطه‌های مشترک خط d و دایره $C(O, R)$ ، این خط با دایره یکی از سه حالت زیر را دارد:

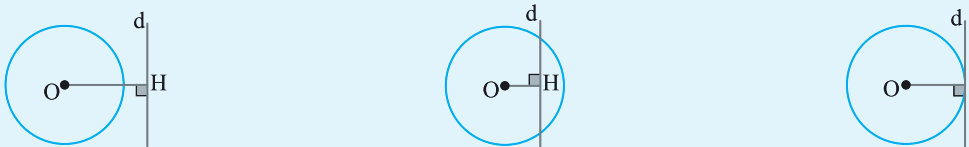
۱- خط d بر دایره $C(O, R)$ مماس است. ۲- خط d و دایره $C(O, R)$ متقاطع‌اند. در ۳- خط d خارج دایره $C(O, R)$ است. در این حالت، خط و دایره فقط در یک نقطه مشترک‌اند. این حالت، خط و دایره دو نقطه مشترک دارند. حالت، خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند.



نکته

می‌توان وضعیت خط و دایره را با مقایسه فاصله مرکز دایره از خط با شعاع دایره به دست آورد. دایره $C(O, R)$ و خط d را در نظر بگیرید:

۱- اگر $OH = R$ ، آن‌گاه خط بر دایره مماس است. ۲- اگر $OH < R$ ، آن‌گاه خط و دایره متقاطع‌اند. ۳- اگر $OH > R$ ، آن‌گاه خط خارج دایره است و برعکس.



تست

مرکز دایره $C(O, ۳)$ به فاصله $۲x - ۱$ از خط d است. اگر این خط دایره را در دو نقطه قطع کند، حدود x کدام است؟

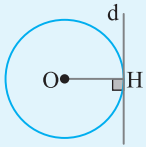
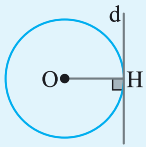
۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

چون خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند، پس $۲x - ۱ \geq ۰$ ، پس $x \geq \frac{1}{2}$. به این ترتیب $\frac{1}{2} \leq x < ۲$.

از طرف دیگر $۲x - ۱ < ۳ \Rightarrow x < ۲$ شعاع دایره $<$ فاصله مرکز دایره تا خط

گزینه ۴

چند مطلب درباره خط مماس بر دایره



۱- اگر خطی در انتهای شعاعی از دایره که روی دایره است، بر آن شعاع عمود باشد، آن گاه این خط بر دایره مماس است. به عبارت دیگر، در شکل مقابل، اگر شعاع OH بر خط d عمود باشد، آن گاه خط d بر دایره مماس است.

۲- شعاع دایره در نقطه تماس، بر خط مماس عمود است. به عبارت دیگر، در شکل مقابل، اگر خط d بر دایره مماس باشد، آن گاه شعاع OH بر خط d عمود است.

تست ۴

□□□□

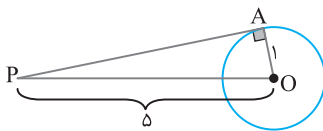
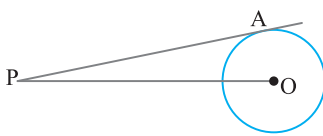
در شکل مقابل طول PO برابر ۵ و شعاع دایره برابر ۱ است. طول PA کدام است؟

$$5\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$2\sqrt{6} \quad (۴)$$

$$6\sqrt{2} \quad (۱)$$

$$2\sqrt{5} \quad (۳)$$



می‌دانیم شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است. پس مثلث OAP در رأس A قائم‌الزاویه است (شکل را ببینید). اکنون بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث OAP،

$$PA = \sqrt{OP^2 - OA^2} = \sqrt{25 - 1} = 2\sqrt{6}$$

راه حل

◆

گزینه ۴

تست ۵

□□□□

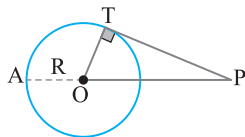
فاصله دورترین نقطه دایره از نقطه P برابر ۹ و فاصله P تا مرکز دایره $\frac{13}{2}$ است. طول مماس رسم شده از نقطه P بر دایره کدام است؟

$$\sqrt{6} \quad (۴)$$

$$\sqrt{13} \quad (۳)$$

$$6 \quad (۲)$$

$$3\sqrt{2} \quad (۱)$$



$$PA = 9 \Rightarrow OP + OA = 9$$

در شکل روبه‌رو دورترین نقطه دایره به نقطه P نقطه A است. پس

از طرف دیگر $OP = \frac{13}{2}$. در نتیجه $\frac{13}{2} + R = 9$ ، یعنی $R = \frac{5}{2}$. در مثلث قائم‌الزاویه OPT بنابر قضیه فیثاغورس،

$$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 6$$

راه حل

◆

گزینه ۲

تست ۶

□□□□

اندازه تصویر مماس PT روی قطر گذرنده از نقطه P در دایره‌ای به شعاع ۶ برابر با ۶/۴ است.

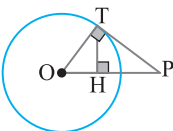
اندازه مماس PT چقدر است؟

$$4 \quad (۲)$$

$$8 \quad (۴)$$

$$2 \quad (۱)$$

$$6 \quad (۳)$$



۶/۴ بزرگ‌تر است گزینه (۴) است.

راه حل اول

◆

۶/۴ فرض کنید PH تصویر مماس PT روی PO باشد. در مثلث قائم‌الزاویه OTP،

$$OT^2 = OH \times OP \Rightarrow 6^2 = OH(OH + 6/4) \Rightarrow OH^2 + 6/4 OH - 36 = 0$$

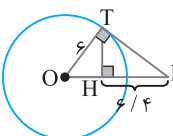
$$(OH + 10)(OH - 3/6) = 0 \Rightarrow OH = 3/6, \quad OH = -10 \quad (\text{غ.ق.})$$

پس اندازه OP برابر با $3/6 + 6/4 = 10$ است. در نتیجه

$$\triangle OTP: PT^2 = OP^2 - OT^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow PT = 8$$

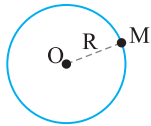
راه حل دوم

◆

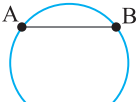


گزینه ۴

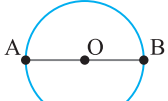
یادآوری برخی از مفاهیم اولیه



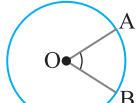
۱- شعاع دایره: پاره‌خطی را که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره است شعاع دایره می‌گوییم. در شکل مقابل، OM شعاع دایره است.



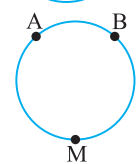
۲- وتر دایره: پاره‌خطی که دو سر آن روی محیط دایره قرار دارد وتر نامیده می‌شود. در شکل مقابل، AB وتر است.



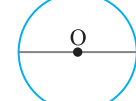
۳- قطر دایره: قطر وتری است که از مرکز دایره می‌گذرد. در شکل مقابل، AB قطر است. اگر R شعاع دایره باشد، آن‌گاه اندازه تمام قطرهای این دایره برابر ۲R است.



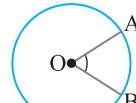
۴- زاویه مرکزی: زاویه‌ای را که رأس آن مرکز دایره است زاویه مرکزی آن دایره می‌گوییم. در شکل مقابل، $\widehat{AOB}$ زاویه‌ای مرکزی است.



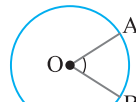
۵- کمان (قوس): دو نقطه A و B روی محیط دایره را در نظر بگیرید. این دو نقطه محیط دایره را به دو قسمت تقسیم می‌کنند که به آن‌ها، کمان یا قوس می‌گوییم. معمولاً کمان ایجاد شده توسط دو نقطه A و B را با $\widehat{AB}$ نشان می‌دهیم و برای نشان دادن کمان دیگر، از نقطه‌ای کمکی مانند M روی محیط دایره استفاده می‌کنیم و آن را به صورت $\widehat{AMB}$ می‌نویسیم.



۶- نیم دایره: هر قطر، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم می‌کند که به آن کمان‌ها نیم دایره می‌گوییم.

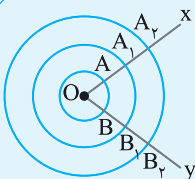


۷- کمان زاویه مرکزی: کمانی از دایره که یک زاویه مرکزی روی محیط دایره ایجاد می‌کند، کمان نظیر آن زاویه نامیده می‌شود. در شکل مقابل، کمان AB کمان نظیر زاویه $\widehat{AOB}$ است.



۸- اندازه کمان: اندازه کمان همان اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان است و واحد آن درجه است. در شکل مقابل $\widehat{AOB} = \widehat{AB}$

نکته

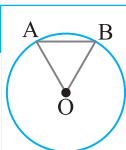


نباید اندازه یک کمان را با طول آن اشتباه گرفت. به شکل روبه‌رو نگاه کنید. سه دایره هم‌مرکز هستند:
 $\widehat{xOy} = \widehat{AB} = \widehat{A_1B_1} = \widehat{A_2B_2}$
 یعنی اندازه کمان‌های AB، A_1B_1 و A_2B_2 برابرند اما طول این کمان‌ها برابر نیستند:
 طول کمان $A_2B_2 < \text{طول کمان } A_1B_1 < \text{طول کمان } AB$

رابطه بین طول و اندازه کمان

بین طول و اندازه کمان تساوی $\frac{\text{طول کمان}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان}}{360^\circ}$ برقرار است. اگر L طول کمان AB در دایره $C(O, R)$ باشد و $\widehat{AB} = \alpha$ ، آن‌گاه

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \times \text{محیط دایره} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times 2\pi R$$
 توجه کنید که در این رابطه α برحسب درجه است.



در شکل مقابل شعاع دایره برابر ۱۲ و طول کمان کوچک‌تر AB برابر 4π است. اندازه وتر AB برابر کدام است؟

- (۱) $12\sqrt{3}$ (۲) 12
 (۳) $6\sqrt{3}$ (۴) 6

طول کمان AB از رابطه زیر برحسب اندازه کمان AB به دست می‌آید:

$$L = \frac{\alpha\pi R}{180^\circ} \Rightarrow 4\pi = \frac{\widehat{AB} \text{ کمان}}{180^\circ} (\pi \times 12) \Rightarrow 4\pi = \frac{\widehat{AB} \text{ کمان}}{180^\circ} \times \pi \Rightarrow \widehat{AB} \text{ کمان} = 60^\circ$$

بنابراین اندازه زاویه مرکزی O برابر 60° است. چون $OA = OB = R$ ، پس مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه $AB = 12$.

تست ۸

طول کمانی با اندازه 30° در دایره‌ای به مرکز O با طول کمانی با اندازه 45° در دایره‌ای به مرکز O' برابر است. نسبت مساحت دایره به مرکز O به مساحت دایره به مرکز O' کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{5}{9}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{7}{9}$

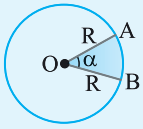
راه حل

شعاع دایره‌ها را R و R' در نظر می‌گیریم. چون $L = \frac{\alpha \pi R}{180^\circ}$ ، با توجه به فرض تست می‌توان نوشت $\frac{30^\circ \times \pi R}{180^\circ} = \frac{45^\circ \times \pi R'}{180^\circ}$. در نتیجه $\frac{R}{R'} = \frac{3}{2}$ ، بنابراین

$$\frac{S}{S'} = \frac{\pi R^2}{\pi R'^2} = \left(\frac{R}{R'}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

گزینه ۱

قطاع و مساحت قطاع



به قسمتی از سطح دایره که بین دو شعاع آن محدود است قطاع می‌گوییم. کمان AB را کمان قطاع، R را شعاع قطاع و زاویه AOB را زاویه قطاع می‌گوییم. اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O, R)$ برحسب درجه مساوی α باشد،

$$S = \frac{\alpha}{360^\circ} \times \text{مساحت دایره} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi R^2$$

آن‌گاه مساحت قطاع برابر است با

تست ۹

دایره‌ای در قطاع 60° از دایره‌ای به شعاع ۸ محاط شده است. شعاع این دایره کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) $\frac{8}{3}$

راه حل

فرض می‌کنیم دایره به مرکز O در قطاع 60° از دایره به مرکز O' محاط شده باشد. در این صورت دو دایره مماس داخلی هستند، پس طول خط‌المركزین آن‌ها مساوی تفاضل شعاع‌های دو دایره است. بنابراین $OO' = 8 - R$. از طرف دیگر $OO'H$ نیمساز زاویه 60° است. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه $OO'H$

$$O'H = 30^\circ \Rightarrow OH = \frac{OO'}{2} \Rightarrow R = \frac{8-R}{2} \Rightarrow 2R = 8-R \Rightarrow R = \frac{8}{3}$$

گزینه ۴

تست ۱۰

در دایره به مرکز O ، اگر $AD = DC = 6$ و $\widehat{OCD} = 45^\circ$ ، مجموع مساحت‌های دو ناحیه رنگی برابر کدام است؟

- (۱) 6π (۲) 9π (۳) 8π (۴) 12π

راه حل

چون D وسط وتر AC است، پس OD عمود بر وتر AC است. در نتیجه شعاع OB کمان AC را نصف می‌کند. بنابراین مجموع مساحت‌های دو ناحیه رنگی در شکل صورت سؤال برابر مساحت قطاع OBC است. از طرف دیگر چون $\widehat{OCD} = 45^\circ$ ، پس $\widehat{O} = 45^\circ$.

$$DC = \frac{\sqrt{2}}{2} OC \Rightarrow OC = \frac{2 \times 6}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} \Rightarrow \text{مساحت قطاع} = \frac{45^\circ}{360^\circ} \pi (6\sqrt{2})^2 = \frac{\pi}{8} (36 \times 2) = 9\pi$$

بنابراین

گزینه ۲

تست ۱۱

در شکل مقابل نقطه M روی امتداد قطر AB قرار دارد و MT بر نیم‌دایره مماس است. اگر $MT = 2\sqrt{3}$ و $MA = 2$ ، مساحت ناحیه رنگی چقدر است؟

- (۱) $\frac{4\sqrt{3}-\pi}{3}$ (۲) $2+2\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$ (۴) $4\sqrt{3}-\pi$

راه حل

در مثلث OMT ، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$r^2 + (2\sqrt{3})^2 = (2+r)^2 \Rightarrow r = 2$$

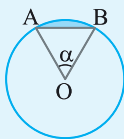
در مثلث قائم‌الزاویه OMT ، میانه AT نصف وتر OM است. بنابراین $AT = \frac{1}{2} OM = \frac{1}{2} \times 4 = 2$. حال می‌توان

نتیجه گرفت مثلث OTA متساوی‌الاضلاع است. پس $\widehat{O} = 60^\circ$.

$$\text{مساحت ناحیه رنگی} = S_{OTM} - S_{OAT} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$$

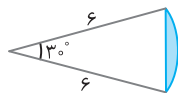
گزینه ۳

قطعه و مساحت قطعه



قسمتی از سطح دایره، محصور بین یک کمان و وتر نظیر آن کمان را **قطعه دایره** می‌نامیم. برای محاسبه مساحت قطعه به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\text{مساحت مثلث } (OAB) - (\text{مساحت قطاع } OAB) = \text{مساحت قطعه } \alpha$$



در قطاع شکل مقابل مساحت قسمت رنگی برابر کدام است؟

(۲) 3π

(۱) $3\pi - 6$

(۴) 6π

(۳) $3\pi - 9$

برای محاسبه مساحت قطعه مورد نظر باید مساحت قطاع را منهای مساحت مثلث کنیم:

$$\left\{ \begin{aligned} \text{مساحت قطاع} &= \frac{30^\circ}{360^\circ} \pi R^2 = \frac{1}{12} \pi (6)^2 = 3\pi \\ \text{مساحت مثلث} &= \frac{1}{2} (6) (6) \sin 30^\circ = \frac{1}{2} (6) (6) \left(\frac{1}{2}\right) = 9 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مثلث} - \text{مساحت قطاع} = \text{مساحت قطعه} \Rightarrow 3\pi - 9$$

گزینه ۳

تست ۱۳

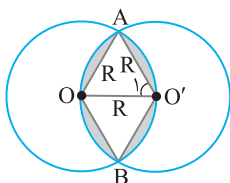
دو دایره به شعاع‌های ۱ واحد از مرکز یکدیگر گذشته‌اند. مساحت ناحیه مشترک این دو دایره کدام است؟

(۴) $\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$

(۳) $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

(۲) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

(۱) $\pi - \sqrt{3}$



شکل تست به صورت مقابل است. برای به دست آوردن مساحت ناحیه مشترک باید مساحت لوزی $AOBO'$ را با مساحت بخش‌های رنگی جمع کنیم. لوزی $AOBO'$ از دو مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع R تشکیل شده است، پس

$$S_{AOBO'} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} R^2$$

قطعه به صورت زیر به دست می‌آید:

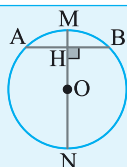
$$\text{مساحت قطعه} = \text{مساحت قطاع } AOO' - S_{AOO'} = \frac{60^\circ}{360^\circ} (\pi R^2) - \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) R^2$$

بنابراین مساحت قسمت رنگی که چهار برابر مساحت این قطعه است مساوی $4 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) R^2$ ، یعنی $\left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right) R^2$ است. در نتیجه

$$\text{مساحت قسمت رنگی} + \text{مساحت لوزی} = \text{مساحت خواسته شده} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} R^2 + \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right) R^2 \xrightarrow{R=1} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

گزینه ۳

نکاتی درباره وتر و کمان نظیر آن



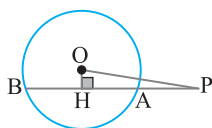
۱- در هر دایره، قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند. به عبارت دیگر، در شکل مقابل اگر قطر MN بر وتر AB عمود باشد، آن گاه

$$AH=BH, \quad \widehat{AM}=\widehat{BM}, \quad \widehat{AN}=\widehat{BN}$$

۲- خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند. به عبارت دیگر، در شکل بالا، اگر H وسط وتر AB باشد، آن گاه

$$MN \perp AB, \quad \widehat{AM}=\widehat{BM}, \quad \widehat{AN}=\widehat{BN}$$

۳- وسط کمان نظیر یک وتر، مرکز دایره و وسط وتر مورد نظر روی یک خط راست قرار دارند. به عبارت دیگر، در شکل بالا، نقاط O و H و M روی یک خط راست قرار دارند.



در شکل مقابل $AB=6$ ، $OH=1$ و $\widehat{OHA}=90^\circ$. شعاع دایره چقدر است؟

(۲) $\sqrt{12}$

(۱) $\sqrt{13}$

(۴) $\sqrt{10}$

(۳) $\sqrt{11}$

چون OH بر AB عمود است، پس آن را نصف می‌کند. در نتیجه $AH=\frac{AB}{2}=3$. در مثلث OAH ، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

گزینه ۴

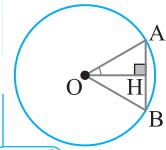
تست ۱۵

در دایره $C(O, R)$ ، $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $AB = 10$. فاصله O از وتر AB کدام است؟

- (۱) $5\sqrt{3}$ (۲) ۵ (۳) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ (۴) $3\sqrt{3}$

راه حل

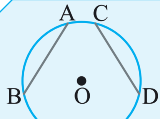
در شکل روبه‌رو مثلث متساوی‌الساقین OAB ($OA = OB$) و $\angle AOB = 60^\circ$. پس این مثلث متساوی‌الاضلاع است. می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a ، اندازه ارتفاع برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ است. پس $OH = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 = 5\sqrt{3}$



گزینه ۱

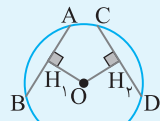
نکاتی درباره دو وتر از یک دایره

۱- کمان‌های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند و برعکس. به عبارت دیگر، در شکل مقابل،



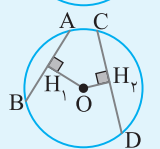
$$AB = CD \Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

۲- در هر دایره، وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس. به عبارت دیگر، در شکل مقابل،



$$AB = CD \Leftrightarrow OH_1 = OH_2$$

۳- در یک دایره، اگر دو وتر نامساوی باشند، آن‌گاه وتری که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس. به عبارت دیگر، در شکل مقابل،

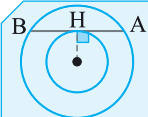


$$AB < CD \Leftrightarrow OH_1 > OH_2$$

در نتیجه قطر دایره بزرگ‌ترین وتر دایره است زیرا از مرکز دایره کمترین فاصله را دارد.

نکته

در شکل مقابل، دو دایره هم‌مرکز هستند و وتر AB از دایره بزرگ‌تر، بر دایره کوچک‌تر مماس است. در این صورت



$$AH = BH$$

تست ۱۶

در دایره شکل مقابل اگر $AB > CD$ ، $OH = 4x + 2$ و $OH' = x + 8$ ، حدود x کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2} < x < 2$ (۲) $-\frac{1}{2} \leq x < 2$ (۳) $x < 2$ (۴) $0 \leq x < 3$

راه حل

از دو وتر نابرابر در دایره، هرکدام که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است. بنابراین

$$AB > CD \Rightarrow OH < OH' \Rightarrow 4x + 2 < x + 8 \Rightarrow x < 2$$

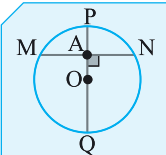
$$4x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}, \quad x + 8 > 0 \Rightarrow x > -8 \xrightarrow{\text{اشتراک}} -\frac{1}{2} \leq x < 2$$

از طرف دیگر،

گزینه ۲

وتر مینیم

نقطه A که مرکز دایره نیست، درون دایره قرار دارد. از این نقطه، نامتناهی وتر می‌گذرد که بزرگ‌ترین آن‌ها قطر دایره است و کوچک‌ترین آن‌ها وتری است که بر قطر گذرنده از A عمود است. در شکل مقابل، PQ بزرگ‌ترین وتر گذرنده از A و MN کوچک‌ترین وتر گذرنده از A است که به آن **وتر مینیم** گذرنده از A می‌گوییم.

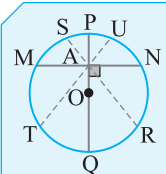

نکته

نقطه A که مرکز دایره نیست درون دایره $C(O, R)$ قرار دارد. در این صورت

۱- فقط یک وتر به طول $2R$ وجود دارد که از A می‌گذرد، که همان قطر گذرنده از A است (قطر PQ در شکل).

۲- فقط یک وتر مینیم وجود دارد که از A می‌گذرد (وتر MN در شکل).

۳- دو وتر به طول L که بین اندازه وتر مینیم و قطر دایره است، گذرنده از A وجود دارد (وترهای TU و RS در شکل).


تست ۱۷

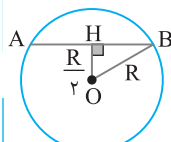
از نقطه H به فاصله $\frac{R}{2}$ از مرکز دایره $C(O, R)$ وتری مینیم در دایره رسم کرده‌ایم. طول این وتر مینیم کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}R$ (۲) $\sqrt{2}R$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}R$

راه حل

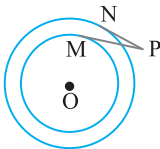
در شکل روبه‌رو AB وتر مینیم است. بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه OBH ،

$$BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R \Rightarrow AB = 2BH = \sqrt{3}R$$

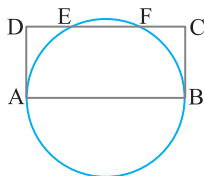


گزینه ۱

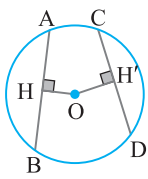
- ۱- اگر فاصله نزدیک‌ترین نقطه خط d از مرکز دایره $C(O, 2\sqrt{5})$ برابر $3\sqrt{2}$ باشد، وضعیت نسبی خط d و دایره C کدام است؟
 (۱) مماس (۲) متقاطع (۳) نامتقاطع (۴) نامشخص
- ۲- در دو دایره $C(O, 5)$ و $C'(O, 4)$ طول وتر i از دایره بزرگ‌تر که بر دایره کوچک‌تر مماس است، برابر کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) ۳ (۴) $2\sqrt{3}$
- ۳- مرکز تمام دایره‌هایی به شعاع ثابت R که بر خط مفروض d مماس‌اند روی کدام شکل قرار می‌گیرند؟
 (۱) یک خط (۲) دو خط موازی (۳) دو خط عمود بر هم (۴) دایره
- ۴- مرکز دایره $C(O, \frac{3x}{y})$ از دو وتر $AB=2x+7$ و $CD=15+x$ به یک فاصله است. بزرگ‌ترین وتر این دایره چه طولی دارد؟
 (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴



- ۵- پاره‌خط‌های PM و PN بر دایره‌های $C(O, 3)$ و $C'(O, 4)$ مماس هستند. اگر $PM=4$ ، طول PN کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) $2/5$ (۳) $3/5$ (۴) ۳
- ۶- نقطه M به فاصله ۱۳ از مرکز دایره $C(O, 5)$ قرار دارد. طول مماسی که از M بر دایره رسم می‌شود کدام است؟
 (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۴
- ۷- کمترین و بیشترین فاصله نقطه A از دایره $C(O, R)$ برابر ۵ و ۹ است. طول مماسی که از نقطه A بر دایره رسم شده است، چند برابر شعاع دایره است؟
 (۱) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ (۲) $3\sqrt{5}$ (۳) $6\sqrt{5}$ (۴) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$
- ۸- نقطه P درون دایره $C(O, 13)$ و به فاصله ۵ از مرکز دایره قرار دارد. طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از P کدام است؟
 (۱) ۲۴ (۲) ۱۲ (۳) ۳۲ (۴) ۲۸
- ۹- نقطه M به فاصله ۴ از مرکز دایره $C(O, 6)$ قرار دارد. نسبت کمترین فاصله به بیشترین فاصله نقطه M از دایره C کدام است؟
 (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{3}{10}$ (۴) $\frac{2}{5}$



- ۱۰- در شکل مقابل چهارضلعی $ABCD$ مستطیل به اضلاع ۱۲ و ۲۵ واحد و AB قطر دایره است. طول وتر EF برابر کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹
- ۱۱- دو دایره به مرکزهای O و O' و شعاع‌های ۸ واحد از مرکزهای یکدیگر می‌گذرند و یکدیگر را در نقاط A و B قطع می‌کنند. مساحت چهارضلعی $AOBO'$ کدام است؟
 (۱) $16\sqrt{3}$ (۲) $18\sqrt{3}$ (۳) $24\sqrt{3}$ (۴) $32\sqrt{3}$
- ۱۲- اندازه کوتاه‌ترین و بلندترین وتر گذرنده از نقطه M درون دایره $C(O, R)$ به ترتیب ۱۲ و ۱۶ است. طول پاره‌خط OM برابر کدام است؟
 (۱) ۵ (۲) $2\sqrt{7}$ (۳) ۴ (۴) $2\sqrt{5}$
- ۱۳- مساحت ناحیه شامل نقاطی از صفحه که طول مماس رسم شده از آن‌ها بر دایره $C(O, 6)$ کمتر از $3\sqrt{2}$ باشد، کدام است؟
 (۱) 54π (۲) 36π (۳) 24π (۴) 18π



- ۱۴- با توجه به شکل مقابل، اگر فاصله مرکز دایره از وترهای AB و CD به ترتیب ۴ و ۵ باشد و داشته باشیم $BH = m - 4$ و $CH' = 11 - 2m$ ، آن گاه محدوده m کدام است؟

(۱) $m > 5$ (۲) $4 < m < \frac{11}{2}$

(۳) $m < 5$ (۴) $5 < m < \frac{11}{2}$

- ۱۵- خط d به فاصله $5 - 2m$ از مرکز دایره $C(O, 10)$ قرار دارد. اگر d بر دایره مماس باشد، m کدام است؟

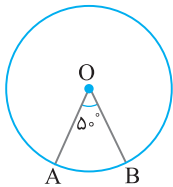
(۱) ۵ (۲) $\frac{6}{5}$ (۳) $\frac{7}{5}$ (۴) ۷

- ۱۶- در دایره $C(O, 4)$ طول وتر AB برابر $\sqrt{32}$ است. طول کمان بزرگتر AB در این دایره برابر کدام است؟

(۱) 5π (۲) 6π (۳) 4π (۴) 8π

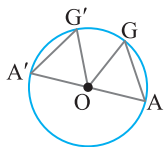
- ۱۷- در دایره $C(O, R)$ طول کمان AB برابر 4π و مساحت قطاع OAB برابر 12π است. مساحت دایره برابر کدام است؟

(۱) 28π (۲) 32π (۳) 36π (۴) 48π



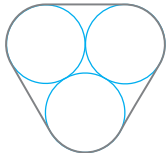
- ۱۸- در دایره مقابل مساحت قطاع OAB برابر 5π است. محیط دایره برابر کدام است؟

(۱) 12π (۲) 8π (۳) 10π (۴) 16π



- ۱۹- در دایره $C(O, R)$ دو وتر AG و $A'G'$ برابرند. نسبت مساحت‌های دو مثلث OAG و $OA'G'$ کدام است؟

(۱) بیشتر از ۱ است (۲) کمتر از ۱ است (۳) برابر با ۱ است (۴) هر سه گزینه می‌تواند درست باشد.



- ۲۰- در شکل روبه‌رو، سه دایره مساوی به شعاع ۳ مماس خارج‌اند. طول نخ‌ی که دور سه دایره پیچیده شده چقدر است؟

(۱) $\frac{4}{3}\pi$ (۲) $6(3 + \pi)$ (۳) $9(6\sqrt{3} - \pi)$ (۴) $9(2\sqrt{3} - \pi)$

- ۲۱- سه نقطه A، B و C روی محیط دایره $C(O, R)$ به گونه‌ای قرار دارند که ABOC یک لوزی به مساحت $2\sqrt{3}$ است. مساحت دایره کدام است؟

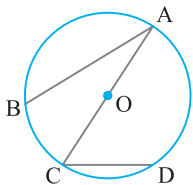
(۱) π (۲) 2π (۳) 4π (۴) 8π

- ۲۲- نقطه‌ای به فاصله ۱۵ از مرکز دایره‌ای به قطر ۳۴ قرار دارد. اندازه کوچک‌ترین وتری از این دایره که از نقطه مورد نظر می‌گذرد، کدام است؟

(۱) ۱۶ (۲) ۱۴ (۳) ۱۷ (۴) ۱۵

- ۲۳- نقطه P درون دایره $C(O, 10)$ است و فقط یک وتر به طول ۱۲ از P می‌گذرد. فاصله نقطه P از O کدام است؟

(۱) ۹ (۲) ۵ (۳) ۸ (۴) ۱۰

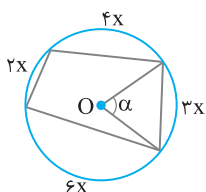


- ۲۴- در دایره به مرکز O و شعاع ۱۰ فاصله وتر CD از مرکز دایره دو برابر فاصله وتر AB از مرکز دایره است. اگر $AB = 18$ ، طول وتر CD برابر کدام است؟

(۱) $2\sqrt{6}$ (۲) $6\sqrt{2}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{6}$

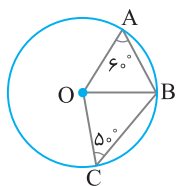
- ۲۵- مرکز دایره $C(O, 3m)$ از دو وتر $AB = 5m + 2$ و $CD = 10 + m$ به یک فاصله است. مساحت این دایره برابر کدام است؟

(۱) 4π (۲) 16π (۳) 27π (۴) 36π



- ۲۶- با توجه به شکل، اندازه α کدام است؟ (O مرکز دایره است.)

(۱) 66° (۲) 72° (۳) 75° (۴) 81°



۲۷- در دایره $C(O, \frac{12}{\pi})$ در شکل مقابل، با توجه به اندازه‌های داده شده، طول کمان ABC کدام است؟

(۲) ۱۲

(۱) $\frac{28}{3}$

(۴) $\frac{21}{2}$

(۳) ۹

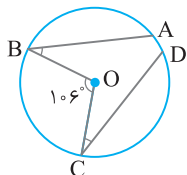
۲۸- طول وتر AB در دایره $C(O, R)$ برابر ۸ سانتی‌متر است. اگر فاصله وتر AB تا مرکز دایره برابر $4\sqrt{3}$ باشد، طول کمان AB کدام است؟

(۴) $\frac{8\pi}{3}$

(۳) $\frac{10\pi}{3}$

(۲) $\frac{4\pi}{3}$

(۱) $\frac{5\pi}{3}$



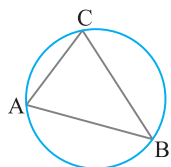
۲۹- در شکل مقابل، اگر $\hat{B}=32^\circ$ و $\hat{C}=28^\circ$ ، اندازه کمان AD چند درجه است؟ (O مرکز دایره است.)

(۱) ۳۲

(۲) ۳۰

(۳) ۲۴

(۴) ۱۴



۳۰- در شکل مقابل، $\hat{A}=70^\circ$ و $\hat{B}=50^\circ$. از نقطه O مرکز دایره بر اضلاع AB، AC و BC به ترتیب عمودهای OH، OK و OP رسم می‌شود. کدام گزینه درست است؟

(۲) $OK > OP > OH$

(۱) $OH > OP > OK$

(۴) $OK > OH > OP$

(۳) $OH > OK > OP$

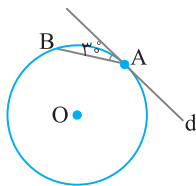
۳۱- نقطه A و دایره $C(O, 1)$ مفروض‌اند. اگر تمام خطوط گذرنده از A با دایره در دو نقطه اشتراک داشته باشند و $OA=3-x$ ، آن‌گاه برای x چند مقدار طبیعی وجود دارد؟

(۴) سه

(۳) دو

(۲) یک

(۱) هیچ



۳۲- اگر در شکل مقابل، خط d در نقطه A بر دایره مماس باشد و $AB=5$ ، شعاع دایره کدام است؟

(۲) $\frac{2}{5}$

(۱) ۵

(۴) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

(۳) $5\sqrt{3}$

۳۳- نیم‌دایره به قطر AB و مرکز O مفروض است. نقاط D و E روی محیط این نیم‌دایره طوری قرار دارند که $\widehat{AD}=60^\circ$ و $\widehat{DE}=80^\circ$. اگر فاصله نقطه O از وترهای AD، DE و EB را به ترتیب با h_1 ، h_2 و h_3 نمایش دهیم، کدام گزینه صحیح است؟

(۴) $h_3 > h_1 > h_2$

(۳) $h_2 > h_1 > h_3$

(۲) $h_1 > h_3 > h_2$

(۱) $h_1 > h_2 > h_3$

۳۴- دایره به مرکز $O(1, 2)$ و شعاع $\sqrt{8}$ مفروض است. نقطه $A(m, m+1)$ خارج دایره قرار ندارد. مجموعه مقادیر m کدام است؟

(۴) $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

(۳) $[-1, 3]$

(۲) $[-3, 1]$

(۱) $[1, 3]$

۳۵- بیشترین فاصله نقطه A از دایره‌ای به شعاع r چقدر است در صورتی که طول مماسی که از A بر دایره رسم شود، $\sqrt{3}r$ باشد؟

(۴) $3r$

(۳) $\sqrt{3}r$

(۲) $2r$

(۱) $\sqrt{2}r$

۳۶- طول کوتاه‌ترین وتری که از نقطه A درون دایره $C(O, R)$ بگذرد و به فاصله $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ از مرکز دایره باشد، کدام است؟

(۴) $\sqrt{3}R$

(۳) $\frac{R}{2}$

(۲) $2R$

(۱) R

۳۷- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول ضلع‌های قائمه آن ۶ و ۸ است، شعاع دایره محیطی کدام است؟

(۴) ۱۰

(۳) ۵

(۲) ۴

(۱) ۳

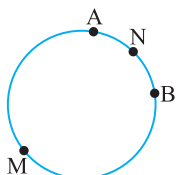
۳۸- دو نقطه M و N به فاصله ۵ از یکدیگر قرار دارند. شعاع کوچک‌ترین دایره‌ای که از این دو نقطه عبور می‌کند کدام است؟

(۴) $\frac{7}{5}$

(۳) ۱۰

(۲) $\frac{2}{5}$

(۱) ۵



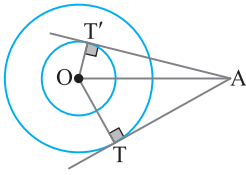
۳۹- در شکل مقابل اگر $\widehat{AMB}=4\widehat{ANB}$ ، کمان ANB چه کسری از محیط دایره است؟

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) $\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{1}{5}$

(۳) $\frac{1}{6}$



۴۰- مطابق شکل دو دایره هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه A دو مماس بر دو دایره رسم شده است.

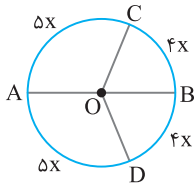
تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

۲۰ (۴)

۱۶ (۳)



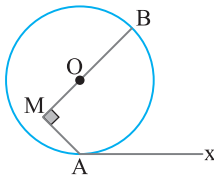
۴۱- در شکل مقابل AB قطر دایره و O مرکز آن است. اندازه زاویه COD کدام است؟

۱۵۰° (۲)

۱۶۰° (۱)

۱۳۰° (۴)

۱۴۰° (۳)



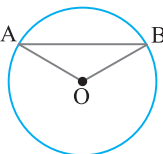
۴۲- در شکل مقابل $\widehat{AM} = 35^\circ$ ، کمان کوچک‌تر AB چه نسبتی از محیط دایره است؟

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

$\frac{3}{8}$ (۴)

$\frac{3}{5}$ (۳)



۴۳- در شکل مقابل شعاع دایره برابر ۳ و طول کمان کوچک‌تر AB برابر 2π است. اندازه وتر AB چقدر است؟

$4/5$ (۲)

۴ (۱)

$\sqrt{3}$ (۴)

$3\sqrt{3}$ (۳)

۴۴- در دایره $C(O, R)$ طول وتر AB برابر R است. طول کمان کوچک‌تر AB برابر کدام است؟

$\frac{2\pi}{3}R$ (۴)

$\frac{\pi}{3}R$ (۳)

$\frac{\pi}{2}R$ (۲)

πR (۱)

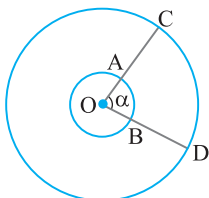
۴۵- طول کمان 60° از دایره $C(O, R)$ با طول کمان 15° از دایره $C'(O', R')$ برابر است. نسبت مساحت دایره C به مساحت دایره C' کدام است؟

$\frac{1}{8}$ (۴)

$\frac{1}{16}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)



۴۶- در دو دایره هم‌مرکز در شکل مقابل $OC = 12$ و $OD = 3$ ، اگر طول کمان AB برابر با ۸ واحد باشد، طول کمان CD کدام است؟

۱۸ (۲)

۱۲ (۱)

۲۸ (۴)

۲۴ (۳)

۴۷- بر وسط شعاعی از یک دایره یک وتر عمود می‌کنیم. اندازه کمان کوچک‌تر ایجاد شده توسط این وتر در دایره چند درجه است؟

۹۰ (۴)

۱۵۰ (۳)

۱۲۰ (۲)

۶۰ (۱)

۴۸- دو دایره هم‌مرکز به شعاع‌های ۵ و ۱۳ واحد رسم شده‌اند. طول وتری از دایره بزرگ که بر دایره کوچک مماس شده است، چند واحد است؟

۲۴ (۴)

۲۰ (۳)

۱۸ (۲)

۱۲ (۱)

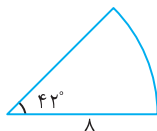
۴۹- مساحت قطاع شکل مقابل برابر کدام است؟

$\frac{56}{15}\pi$ (۲)

$\frac{112}{15}\pi$ (۱)

$\frac{122}{15}\pi$ (۴)

$\frac{34}{5}\pi$ (۳)



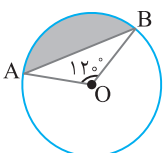
۵۰- در شکل مقابل، O مرکز دایره است و $\widehat{AOB} = 120^\circ$. مساحت قسمت رنگی کدام است؟

$\frac{1}{2}R^2$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{2}R^2$ (۱)

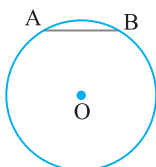
$\frac{\pi R^2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$ (۴)

$\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}$ (۳)



۵۱- فاصله نزدیک‌ترین نقطه خط d تا دایره $C(O, 2x-1)$ برابر $3-x$ است. اگر خط و دایره نقطه مشترکی نداشته باشند، حدود x کدام است؟

- (۱) $x < 3$ (۲) $\frac{1}{2} < x < 3$ (۳) $3 < x$ (۴) هیچ مقداری برای x نداریم.

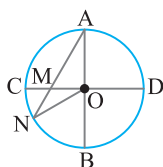


۵۲- در شکل مقابل اگر شعاع دایره R باشد، کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $\widehat{AB} = 6^\circ \Leftrightarrow AB = R$ (۲) $\widehat{AB} = 12^\circ \Leftrightarrow AB = \sqrt{3}R$
(۳) $\widehat{AB} = 9^\circ \Leftrightarrow AB = \sqrt{2}R$ (۴) $\widehat{AB} = 45^\circ \Leftrightarrow AB = \frac{\sqrt{2}}{2}R$

۵۳- فاصله دو خط d و d' از مرکز دایره $C(O, R)$ مساوی جواب‌های معادله درجه دوم $3x^2 - 5Rx + 2R^2 = 0$ است. وضعیت نسبی این دو خط با دایره کدام است؟

- (۱) هر دو مماس بر دایره (۲) هر دو نامتقاطع با دایره
(۳) یکی مماس بر دایره و دیگری متقاطع با دایره (۴) یکی مماس بر دایره و دیگری نامتقاطع با دایره



۵۴- در شکل مقابل، دو قطر AB و CD و برهم عمودند $OM = MN$. اندازه زاویه A چقدر است؟

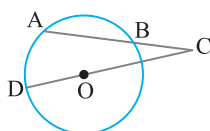
- (۱) 2° (۲) 3°
(۳) $22/5^\circ$ (۴) 45°

۵۵- مربع $ABCD$ به ضلع ۴ مفروض است. دایره $C(O, R)$ از دو رأس C و D می‌گذرد و بر ضلع AB مماس است. مقدار R کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $2\sqrt{2}$

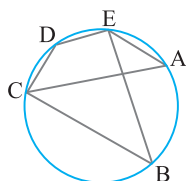
۵۶- دو خط m و n در نقطه A متقاطع‌اند. چند دایره به شعاع ۴ می‌توان رسم کرد طوری که مرکزشان روی n باشد و خط m بر آن‌ها مماس باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) نامتناهی



۵۷- در شکل مقابل، طول BC مساوی شعاع دایره است. اگر $\hat{C} = 2^\circ$ ، اندازه کمان AD چند درجه است؟

- (۱) 4° (۲) 45° (۳) 5° (۴) 6°



۵۸- در شکل مقابل $AE = DE = CD$ و $AC = BE = BC$. اندازه کمان AB کدام است؟

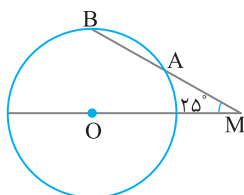
- (۱) 45° (۲) 6° (۳) 9° (۴) 135°

۵۹- در دایره $C(O, 6)$ طول کمان AB برابر 2π است. فاصله مرکز دایره تا وتر AB کدام است؟

- (۱) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$

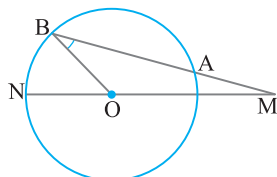
۶۰- در دایره $C(O, 2)$ طول کمان AB برابر π است. طول وتر AB کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $4\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{2}$



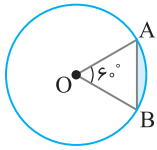
۶۱- در دایره $C(O, 4)$ در شکل مقابل، اگر $MA = 4$ ، آن‌گاه طول کمان AB چقدر است؟

- (۱) $\frac{2}{9}\pi$ (۲) $\frac{5}{3}\pi$ (۳) $\frac{1}{9}\pi$ (۴) $\frac{16}{9}\pi$



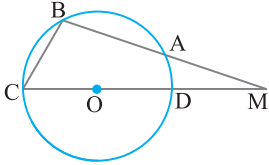
۶۲- در شکل مقابل $MA = R$ ، $\hat{B} = 26^\circ$ و نقطه O مرکز دایره است. اندازه کمان NB کدام است؟

- (۱) 39° (۲) 41° (۳) 52° (۴) 62°



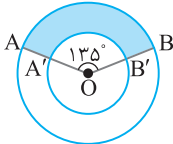
۶۳- در شکل مقابل، در دایره به مرکز O مساحت قطعه رنگی برابر $9\sqrt{3} - 6\pi$ است. مجموع طول کمان AB و طول وتر AB برابر کدام است؟

- (۱) $\pi + 3$ (۲) $\pi + 6$ (۳) $2(\pi + 3)$ (۴) $2(\pi + 6)$



۶۴- در دایره $C(O, R)$ در شکل مقابل، $MA = R$ و $\hat{M} = 20^\circ$. طول وتر BC برابر کدام است؟

- (۱) R (۲) $\frac{R}{2}$ (۳) $\frac{3R}{2}$ (۴) $3R$

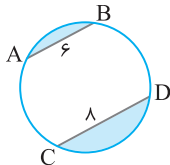


۶۵- دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O, r)$ را در شکل مقابل در نظر بگیرید. اگر مساحت قسمت رنگی 18π باشد، طول کمان AB برابر کدام است؟

- (۱) 4π (۲) 6π (۳) 2π (۴) 3π

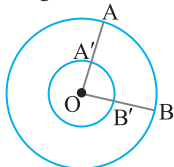
۶۶- در یک دایره، اگر طول کمان AB نصف شعاع و مساحت قطاع AB برابر ۳۶ باشد، محیط این قطاع کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۲۴ (۳) ۳۰ (۴) ۳۲



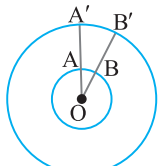
۶۷- در شکل مقابل $\widehat{AB} + \widehat{CD} = 180^\circ$. مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

- (۱) $\frac{25}{2}\pi - 12$ (۲) $\frac{25}{2}\pi - 24$ (۳) $25\pi - 24$ (۴) $25\pi - 12$



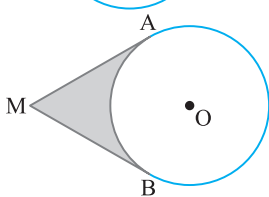
۶۸- دو دایره $C(O, \frac{2}{3}R)$ و $C'(O, \frac{1}{3}R)$ مفروض اند. اگر طول کمان $A'B'$ برابر ۶ باشد، طول کمان AB برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{13}{5}$ (۲) $\frac{13}{5}$ (۳) $\frac{12}{5}$ (۴) $\frac{12}{5}$



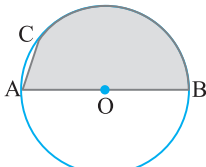
۶۹- دو دایره $C(O, 2)$ و $C'(O, 5)$ مفروض اند. اگر مساحت قطاع OAB برابر یک واحد مربع باشد، طول کمان $A'B'$ چند واحد است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{3}{5}$



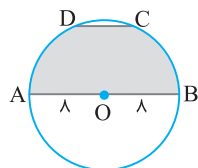
۷۰- در دایره $C(O, 1)$ زاویه بین مماس‌های MA و MB برابر 60° است. مساحت قسمت رنگی کدام است؟

- (۱) $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}$ (۲) $3\sqrt{3}-\pi$ (۳) $\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}$ (۴) $3\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$



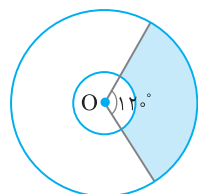
۷۱- در دایره $C(O, 6)$ در شکل مقابل، AB قطر دایره است و اندازه کمان AC برابر 30° است. مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

- (۱) $5\pi + 9$ (۲) $15\pi + 9$ (۳) $5(3\pi + 1)$ (۴) $2(5\pi + 3)$



۷۲- در شکل مقابل AB قطر دایره و اندازه کمان CD برابر 45° است. مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

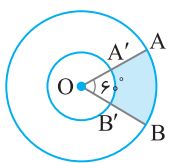
- (۱) $4(3\pi + \sqrt{2})$ (۲) $8(2\sqrt{2} + 3\pi)$ (۳) $2(3\pi + 2\sqrt{2})$ (۴) $8(\pi - 2\sqrt{2})$



۷۳- دو دایره $C(O, 6)$ و $C'(O, 2)$ مطابق شکل مفروض اند. نسبت عدد مساحت ناحیه رنگی به عدد محیط آن برابر کدام است؟ ($\pi = 3$)

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۷۴- در شکل مقابل، دو دایره هم‌مرکز هستند و مساحت ناحیه رنگی نصف مساحت دایره کوچک‌تر است. محیط این ناحیه چند برابر شعاع دایره کوچک‌تر است؟



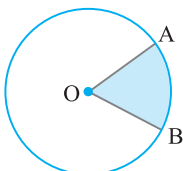
$$(۲) \pi + \frac{1}{2}$$

$$(۱) \pi + ۱$$

$$(۴) ۱ + \frac{\pi}{2}$$

$$(۳) \pi + ۲$$

۷۵- در دایره $C(O, \sqrt{\pi})$ در شکل مقابل، طول کمان AB مساوی $\frac{1}{5}$ محیط دایره است. مساحت قطاع رنگی تقریباً برابر کدام است؟ ($\pi=3$)



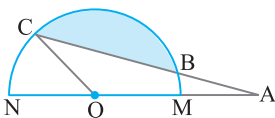
$$(۲) 1/8$$

$$(۱) 1/5$$

$$(۴) 2/2$$

$$(۳) 2$$

۷۶- در نیم‌دایره به قطر $MN=4$ در شکل مقابل، زاویه مرکزی NOC برابر ۴۵ درجه است. اگر $AB=2$ ، مساحت ناحیه رنگی برابر کدام است؟



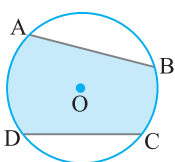
$$(۲) \frac{2\pi - \sqrt{3}}{2}$$

$$(۱) \frac{4\pi - \sqrt{3}}{3}$$

$$(۴) \frac{2\pi - \sqrt{3}}{3}$$

$$(۳) \frac{4\pi - \sqrt{3}}{3}$$

۷۷- در دایره $C(O, \sqrt{3})$ در شکل مقابل، وترهای $AB=3$ و $CD=\sqrt{6}$ رسم شده‌اند. مساحت قسمت رنگی تقریباً برابر کدام است؟ ($\sqrt{3}=1/7, \pi=3$)



$$(۲) 5/5$$

$$(۱) 5$$

$$(۴) 6/5$$

$$(۳) 6$$

۷۸- در دایره $C(O, R)$ اگر اندازه کمان AB برابر 60° و اندازه وتر AB برابر 30 سانتی‌متر باشد، کمترین فاصله O از AB برابر کدام است؟

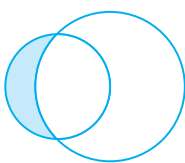
$$(۴) 10\sqrt{3}$$

$$(۳) 10$$

$$(۲) 15\sqrt{3}$$

$$(۱) 15$$

۷۹- در شکل مقابل یکی از دایره‌ها محیط دایره به قطر ۲ واحد را نصف کرده است و مرکز یکی از دایره‌ها روی دایره دیگر است. مساحت قسمت رنگی برابر کدام است؟



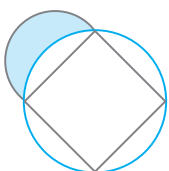
$$(۲) 2$$

$$(۱) 1$$

$$(۴) \frac{\pi}{3}$$

$$(۳) \frac{\pi}{4}$$

۸۰- بر یک مربع به ضلع ۲ واحد دایره‌ای محیط شده است. مطابق شکل نیم‌دایره‌ای به قطر یک ضلع مربع رسم می‌کنیم. مساحت ناحیه رنگی کدام است؟



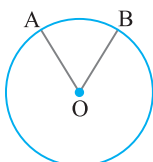
$$(۲) 1$$

$$(۱) \frac{\pi}{4}$$

$$(۴) \frac{\pi}{2}$$

$$(۳) \sqrt{2}$$

۸۱- در دایره $C(O, 2\sqrt{3})$ در شکل مقابل، مساحت قطاع OAB برابر $\frac{3\pi}{2}$ است. طول کمان AB چقدر است؟



$$(۲) \frac{\sqrt{2}}{3} \pi$$

$$(۱) \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

$$(۴) \frac{\sqrt{3}}{2} \pi$$

$$(۳) \frac{\sqrt{3}}{3} \pi$$

۸۲- در دایره‌ای به قطر ۱۰ واحد، وتر AB به طول ۸ واحد رسم شده است. نقطه C روی دایره متحرک است. بیشترین مساحت مثلث ABC کدام است؟

$$(۴) 48$$

$$(۳) 40$$

$$(۲) 36$$

$$(۱) 32$$

۸۳- خط d دایره $C(O, 2)$ را در نقاط A و B قطع کرده است. خط d' در نقطه B بر دایره C مماس است و با خط d زاویه 60° می‌سازد. مساحت مثلث OAB کدام است؟

$$(۴) 4\sqrt{3}$$

$$(۳) 2\sqrt{3}$$

$$(۲) \sqrt{3}$$

$$(۱) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

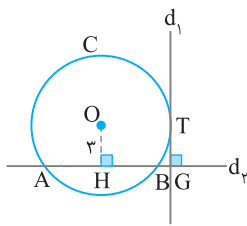
۸۴- کمترین و بیشترین فاصله نقطه A از محیط دایره C به ترتیب برابر ۵ و ۹ است. طول مماسی که از نقطه A بر دایره رسم می‌شود، چند برابر شعاع دایره است؟

$$(۴) \frac{3\sqrt{5}}{4}$$

$$(۳) 6\sqrt{5}$$

$$(۲) 3\sqrt{5}$$

$$(۱) \frac{3\sqrt{5}}{2}$$



۸۵- مطابق شکل مقابل، خط d_1 در نقطه T بر دایره $C(O, 5)$ مماس است و خط d_2 دایره را در دو نقطه A و B قطع می‌کند. مساحت مثلث AGT کدام است؟

(۱) ۱۰/۵

(۲) ۱۲

(۳) ۱۳/۵

(۴) ۱۵

۸۶- دایره‌ای به شعاع ۴ و نقطه M به فاصله ۱ از مرکز دایره مفروض است. چند وتر داخل دایره می‌توان رسم کرد که طول آن‌ها ۲ باشد و از M بگذرد؟

(۴) نامتناهی

(۳) صفر

(۲) ۲

(۱) ۱

۸۷- نقطه P درون دایره $C(O, 17)$ و به فاصله ۱۵ از مرکز دایره قرار دارد. چند وتر به طول ۱۴ از نقطه P می‌گذرد؟

(۴) نامتناهی

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

۸۸- در دایره‌ای به قطر ۲۶ واحد، فاصله نقطه P تا مرکز دایره ۵ واحد است. اندازه کوچک‌ترین وتر از دایره که از نقطه P می‌گذرد، کدام است؟

(۴) ۲۴

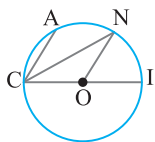
(۳) ۲۰

(۲) ۱۸

(۱) ۱۶

۸۹- در دایره $C(O, R)$ ، فاصله مرکز دایره از وترهای AB و CD به ترتیب برابر $\frac{R}{2}$ و $\frac{R}{4}$ است. طول وتر CD چند برابر طول وتر AB است؟

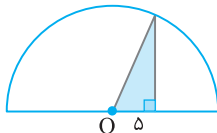
(۴) ۲

(۳) $\sqrt{15}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 

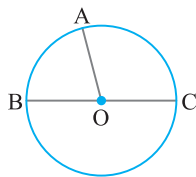
۹۰- در شکل مقابل، CI قطر دایره است و $CA \parallel ON$. اگر اندازه زاویه ACO برابر با 75° درجه باشد، اندازه زاویه CNO کدام است؟

(۲) 30° (۱) $37/5^\circ$ (۴) $32/5^\circ$ (۳) 35°

۹۱- سه دایره به شعاع‌های برابر ۲ دایره دو بر هم مماس‌اند. مساحت ناحیه محدود به سه دایره کدام است؟

(۴) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$ (۳) $2\sqrt{3} - \pi$ (۲) $4\sqrt{3} - 2\pi$ (۱) $6 + 2\pi$ 

۹۲- در شکل مقابل، اگر مساحت ناحیه رنگی برابر $27/5$ باشد، مساحت نیم‌دایره به مرکز O برابر کدام است؟

(۲) 72π (۱) 74π (۴) 73π (۳) 71π 

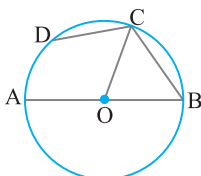
۹۳- در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر طول کمان AB و مساحت قطاع AOB به ترتیب $\sqrt{3}\pi$ و 3π باشند، مساحت مثلث ABC کدام است؟

(۲) ۳

(۱) $1/5$

(۴) ۱۲

(۳) ۶



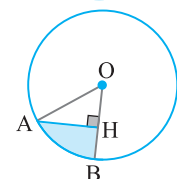
۹۴- در شکل مقابل، AB قطر دایره و OC نیمساز زاویه BCD است. اگر طول وتر AD نصف قطر AB باشد، کمان DC چند درجه است؟

(۲) ۴۰

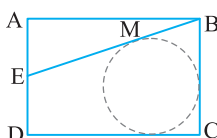
(۱) ۶۰

(۴) ۱۲۰

(۳) ۱۱۰



۹۵- در شکل مقابل، محیط دایره برابر 2π و AH عمود منصف شعاع OB است. محیط قسمت رنگی چقدر از محیط مثلث OAH بیشتر است؟

(۲) $\frac{2\pi-3}{6}$ (۱) $\frac{2\pi-1}{3}$ (۴) $\frac{\pi-3}{3}$ (۳) $\frac{\pi-1}{6}$ 

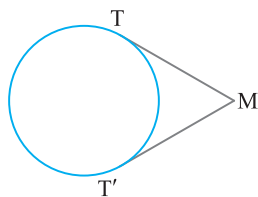
۹۶- اگر مساحت مستطیل مقابل برابر ۲۴ واحد مربع باشد، $EM=AD$ و $AE=ED$ ، طول مستطیل چند واحد است؟

(۲) ۸

(۱) ۶

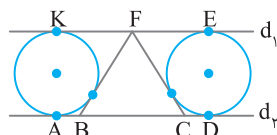
(۴) ۱۲

(۳) ۱۰



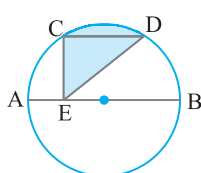
- ۹۷- در شکل مقابل، اگر کمترین فاصله نقطه M خارج دایره تا نقاط روی دایره برابر شعاع دایره باشد و $TT' = \sqrt{2}$ ، طول مماس MT کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$
(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$



- ۹۸- با توجه به شکل مقابل، دو دایره با شعاع‌های یکسان رسم شده‌اند و دو خط d_1 و d_2 بر دو دایره مماس هستند. اگر $AD = 15 \text{ cm}$ ، محیط مثلث FBC چند سانتی‌متر است؟

(۱) ۷۵ (۲) ۶۰
(۳) ۴۵ (۴) ۳۰



- ۹۹- در شکل مقابل، E نقطه‌ای روی قطر AB است و $CD \parallel AB$. اگر $CD = 2$ و $\widehat{CD} = 60^\circ$ ، مساحت قسمت رنگی کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$
(۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) $\frac{4\pi}{3}$

- ۱۰۰- در یک دایره به شعاع $\sqrt{15}$ ، فاصله مرکز دایره از وتر AB دو برابر فاصله آن از وتر CD است. اگر $CD = 2AB$ ، آن‌گاه حاصل $AB \times CD$ کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

- ۱۰۱- وترهای AB و CD از دایره $C(O, R)$ به ترتیب در فواصل $2\sqrt{6}$ و ۳ از مرکز دایره واقع‌اند. اگر $3AB = 2CD$ ، شعاع دایره کدام است؟

(۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $3\sqrt{6}$ (۴) ۶

- ۱۰۲- دو وتر موازی به فاصله ۱۰ واحد از یکدیگر و با طول‌های ۸ و ۱۲ در یک دایره فرض شده‌اند. اگر $\pi = 3$ ، مساحت دایره کدام است؟

(۱) ۳۰۰ (۲) ۱۵۶ (۳) ۱۱۷ (۴) ۳۹

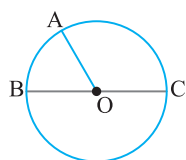


- ۱۰۳- چند خط می‌توان رسم کرد که بر دایره C مماس باشند و با خط Δ در خارج دایره زاویه 60° بسازند؟

(۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) نامتناهی

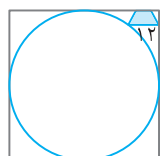
- ۱۰۴- مراکز تمام دایره‌های به شعاع ۵ که خط ثابت d روی آن‌ها وتری به طول ۶ جدا می‌کند، کدام است؟

(۱) دو خط موازی با d به فاصله ۵ از آن
(۲) دو خط موازی با d به فاصله ۴ از آن
(۳) دو نقطه به فاصله ۴ از خط d
(۴) خطی موازی با d به فاصله ۵ از آن



- ۱۰۵- در دایره به مرکز O طول کمان AB برابر $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ و مساحت قطاع AOB برابر π است. فاصله A از قطر BC برابر کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$



- ۱۰۶- دایره‌ای به شعاع ۳۰ داخل مربع شکل مقابل محاط شده است. ارتفاع دوزنقه متساوی‌الساقین رنگی کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴
(۳) ۶ (۴) ۸

- ۱۰۷- دو وتر موازی به طول‌های ۴ و ۱۰ در دو طرف مرکز دایره‌ای به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که فاصله مرکز دایره تا وتر کوچک‌تر، دو برابر فاصله مرکز تا وتر بزرگ‌تر است. طول وتری که موازی این دو وتر است و دقیقاً وسط فاصله آن دو قرار می‌گیرد، چقدر است؟

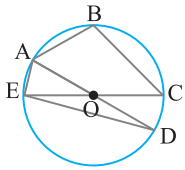
(۱) ۱۲ (۲) ۱۱ (۳) ۹ (۴) ۸

- ۱۰۸- در مربع ABCD دایره به شعاع ۱۰ از رأس A می‌گذرد و بر دو ضلع BC و DC مماس است. مساحت مربع کدام است؟

(۱) $20(4 + 5\sqrt{2})$ (۲) $10(6 + 4\sqrt{2})$ (۳) $50(2 + 3\sqrt{2})$ (۴) $50(3 + 2\sqrt{2})$

۱۰۹- نقطه M درون دایره $C(O, R)$ قرار دارد. اگر کمترین و بیشترین فاصله نقطه M تا این دایره به ترتیب برابر ۲ و ۳۲ باشد، طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M کدام است؟

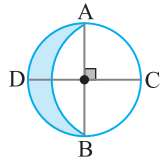
- ۸ (۱) ۱۵ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴)



۱۱۰- در شکل مقابل دایره به مرکز O و شعاع ۶ است. اگر $AB=6$ و $BC=6\sqrt{2}$ ، مساحت مثلث ADE برابر کدام است؟

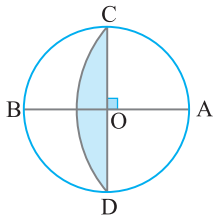
- ۱۲ (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۴) ۳۶ (۳)

۱۱۱- در شکل مقابل، در دایره‌ای به شعاع R دو قطر عمود بر هم AB و CD را رسم کرده‌ایم. به مرکز C و شعاع AC دایره دیگری رسم می‌کنیم. مساحت قسمت رنگی کدام است؟



- ۱ (۱) R^2 ۲ (۲) $\frac{\pi R^2}{3}$ ۴ (۳) $\frac{\pi R^2}{4}$ ۴ (۴) $\frac{R^2}{3}$

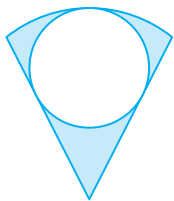
۱۱۲- در دایره‌ای به شعاع $\sqrt{2}$ ، دو قطر AB و CD بر هم عمودند. به مرکز A و شعاع AC دایره‌ای رسم کرده‌ایم. مساحت قسمت رنگی کدام است؟



- ۱ (۱) $\pi - 2$ ۲ (۲) $\frac{\pi - 2}{2}$ ۳ (۳) $2\pi - 4$ ۴ (۴) $\pi - 4$

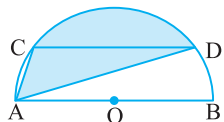
۱۱۳- دو وتر AB و CD به طول ۸ از یک دایره در نقطه M بر هم عمودند. اگر $MA=MC=1$ ، شعاع دایره کدام است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) $5\sqrt{2}$ (۳) ۱ (۴)



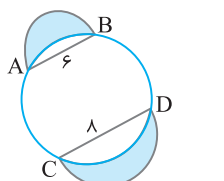
۱۱۴- در یک قطاع 60° از دایره‌ای به شعاع $3\sqrt{2}$ ، یک دایره محاط کرده‌ایم. با توجه به شکل، مساحت قسمت رنگی کدام است؟

- ۱ (۱) π ۲ (۲) $\frac{2}{3}\pi$ ۳ (۳) 2π ۴ (۴) $\frac{\pi}{2}$



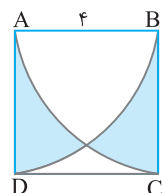
۱۱۵- در شکل مقابل شعاع نیم‌دایره برابر ۶ است، $AB \parallel CD$ و $CD=6\sqrt{3}$. مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

- ۱۲ (۱) $12\sqrt{3}\pi$ ۲ (۲) 8π ۳ (۳) 12π ۴ (۴) 14π



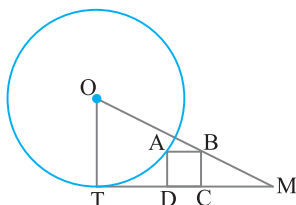
۱۱۶- در شکل مقابل $\widehat{AB} + \widehat{CD} = 180^\circ$ و دو نیم‌دایره به قطرهای AB و CD رسم شده‌اند. مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

- ۲۶ (۱) ۲۴ (۲) ۲۰ (۳) ۱۲ (۴)



۱۱۷- در شکل مقابل طول ضلع مربع برابر ۴ است. دو ربع دایره به مراکز A و B رسم کرده‌ایم. مساحت قسمت رنگی کدام است؟

- ۱ (۱) $4(\sqrt{3} - \pi)$ ۲ (۲) $8(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})$ ۳ (۳) $4(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})$ ۴ (۴) $8(\sqrt{3} - \pi)$

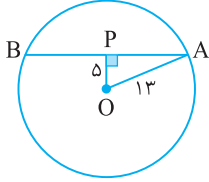


۱۱۸- دایره $C(O, 5)$ مفروض است. چهارضلعی $ABCD$ مربع و طول مماس MT دو برابر شعاع دایره است،

مساحت مربع چقدر است؟

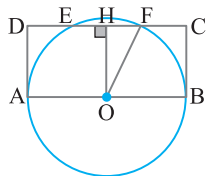
- ۲۵ (۱) ۴ (۲) ۱۶ (۳) ۲ (۴)

۸ ۱ می‌دانیم کوتاه‌ترین وتر گذرنده از P، آن وتری است که P وسط آن است. در مثلث قائم‌الزاویه OAP بنابر قضیه فیثاغورس $AP^2 = OA^2 - OP^2 = 13^2 - 5^2 = 12^2 \Rightarrow AP = 12$ در نتیجه $AB = 2AP = 24$.

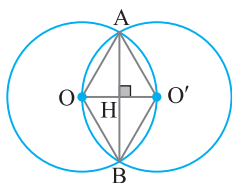


۹ ۲ فرض کنید $OM = d = 4$. در این صورت $R - d = 6 - 4 = 2$ کمترین فاصله M از دایره $R + d = 6 + 4 = 10$ بیشترین فاصله M از دایره در نتیجه نسبت خواسته شده برابر $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ است.

۱۰ ۲ از مرکز O عمود OH را بر وتر EF رسم می‌کنیم. وتر EF نصف می‌شود. در ضمن $OH = BC = 12$ و $OF = OB = \frac{AB}{2} = \frac{25}{2}$ بنابرین $\triangle OHF: HF^2 = OF^2 - OH^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 - 12^2 = \frac{625}{4} - 144 = \frac{49}{4}$ $HF = \frac{7}{2} \Rightarrow EF = 2HF = 2\left(\frac{7}{2}\right) = 7$



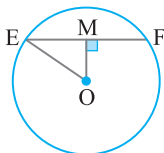
۱۱ ۴ چهارضلعی AOBO' لوزی به ضلع ۸ است. چون $OO' = 8$ پس این لوزی از دو مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۸ تشکیل شده است. بنابرین $S_{AOBO'} = 2S_{AOO'} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} OA^2\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2\right) = 32\sqrt{3}$



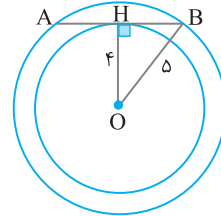
۱۲ ۲ می‌دانیم بزرگ‌ترین وتر گذرنده از نقطه M درون دایره قطر دایره است. پس $2R = 16 \Rightarrow R = 8$

در ضمن کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M بر OM عمود است. در شکل وتر EF کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M است. چون OM بر وتر EF عمود است، پس EF را نصف می‌کند. در نتیجه $EM = \frac{EF}{2} \xrightarrow{EF=12} EM = 6$

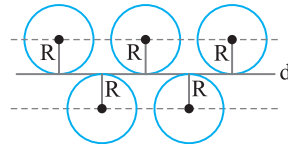
بنابرین $\triangle OME: OM^2 = OE^2 - EM^2 \xrightarrow{OE=R=8} OM^2 = 8^2 - 6^2 = 28 \Rightarrow OM = 2\sqrt{7}$



۱ ۲ فاصله نزدیک‌ترین نقطه خط d از مرکز دایره C طول عمودی است که از O بر d وارد می‌شود. اگر OH عمود بر d باشد، آن‌گاه $OH = 3\sqrt{2}$. چون $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$ ، پس $OH < R$. بنابرین خط d دایره را در دو نقطه قطع می‌کند. این دو دایره هم‌مرکز هستند. پس فاصله مرکز O تا وتر AB برابر ۴ است. پس داریم $\triangle OBH: BH^2 = OB^2 - OH^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow BH = 3$ در ضمن عمود OH وتر AB را نصف می‌کند. بنابرین $AB = 6$.

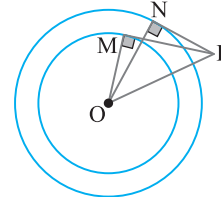


۳ ۲ مرکز این دایره‌ها از خط d به فاصله معلوم R هستند. پس مرکز این دایره‌ها روی دو خط موازی با d و به فاصله R از d واقع هستند.

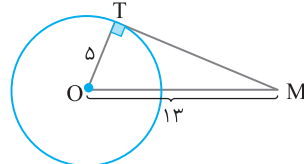


۴ ۴ دو وتری که از مرکز دایره به یک فاصله هستند، هم‌اندازه‌اند. پس $AB = CD \Rightarrow 2x + 7 = 15 + x \Rightarrow x = 8 \Rightarrow R = \frac{3 \times 8}{2} = 12$ بزرگ‌ترین وتر دایره قطر آن است. پس $2R = 24$.

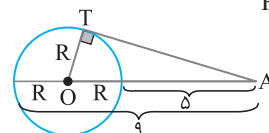
۵ ۳ از مرکز O به نقطه‌های تماس M و N وصل می‌کنیم. در این صورت شعاع‌های OM و ON به ترتیب بر خط‌های مماس PM و PN عمود هستند. از قضیه فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه ایجاد شده به دست می‌آید $\triangle OPM: PM^2 + OM^2 = OP^2 \Rightarrow 16 + 9 = OP^2 \Rightarrow OP = 5$ بنابرین $\triangle OPN: PN^2 + ON^2 = OP^2 \Rightarrow PN^2 + 16 = 25 \Rightarrow PN = 3$



۶ ۳ از اطلاعات سؤال شکل زیر را داریم. در مثلث قائم‌الزاویه OMT بنابر قضیه فیثاغورس به دست می‌آید $MT = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$



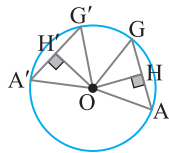
۷ ۱ بنابر فرض مسئله، $OA - R = 5$ و $OA + R = 9$. با حل دستگاه حاصل از این دو معادله به دست می‌آید $R = 2$ و $OA = 7$. اکنون در مثلث قائم‌الزاویه OAT بنابر قضیه فیثاغورس، $AT = \sqrt{OA^2 - OT^2} = \sqrt{7^2 - 2^2} = 3\sqrt{5}$. در نتیجه $\frac{AT}{R} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$



۱۸ ۱ می‌توان نوشت

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi R^2 \Rightarrow \Delta\pi = \frac{5^\circ}{360^\circ} \times \pi R^2 \Rightarrow R^2 = 36 \Rightarrow R = 6$$

$$\text{محیط دایره} = 2\pi R = 2\pi(6) = 12\pi$$



۱۹ ۲ دو وتر AG' و A'G' مساوی‌اند.

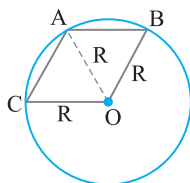
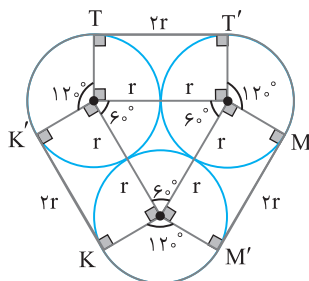
پس از مرکز دایره به یک فاصله‌اند. بنابراین عمودهای OH و OH' برابرند. در نتیجه دو مثلث OAG و OA'G' قاعده و ارتفاع مساوی دارند، بنابراین هم‌مساحت‌اند.

۲۰ ۲ با توجه به شکل، طول کمان TK' را می‌توان به صورت زیر

$$L = \frac{\alpha\pi R}{180^\circ} \Rightarrow \text{طول کمان TK'} = \frac{120^\circ \times \pi \times 3}{180^\circ} = 2\pi$$

به دست آورد

$$\text{اکنون می‌توان نوشت} \quad 3 \times (2\pi + 2\pi) = 3(6 + 2\pi) = 6(3 + \pi)$$



۲۱ ۳ چون ABOC لوزی است، پس

$$AB = AC = OB = OC = R$$

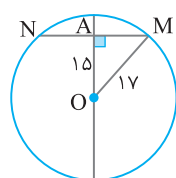
چون OA = R، پس این لوزی از دو مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع R تشکیل شده است. بنابراین

$$S_{ABOC} = 2S_{OAB} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}R^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2 \xrightarrow{S_{ABOC} = 2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2}R^2 = 2\sqrt{3} \Rightarrow R^2 = 4$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}R^2 = 2\sqrt{3} \Rightarrow R^2 = 4$$

$$S_{\text{دایره}} = \pi R^2 = 4\pi$$

در نتیجه



۲۲ ۱ فرض کنید نقطه مورد نظر A و

MN وتر گذرنده از A و عمود بر قطر گذرنده از A باشد (MN همان کوچک‌ترین وتر گذرنده از A است). با استفاده از قضیه فیثاغورس در

مثلث قائم‌الزاویه OAM می‌توان نوشت

$$AM = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$$

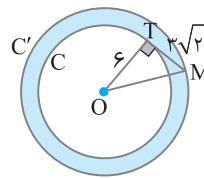
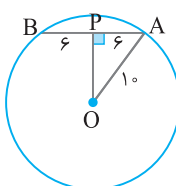
$$\text{بنابراین} \quad MN = 2AM = 2 \times 8 = 16$$

۲۳ ۳ چون فقط یک وتر به طول ۱۲ از

P می‌گذرد، پس این وتر کوتاه‌ترین وتر گذرنده از P است و P وسط این وتر است. بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه OAP

$$OP^2 = OA^2 - AP^2 = 10^2 - 6^2 = 8^2$$

$$OP = 8$$



۱۳ ۴ فرض کنید از نقطه M

مماسی به طول $3\sqrt{2}$ بر دایره $C(O, 6)$ رسم کنیم. در این صورت در مثلث قائم‌الزاویه OTM می‌نویسیم

$$OM = \sqrt{6^2 + (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{6}$$

پس نقطه M روی دایره به شعاع $3\sqrt{6}$ و هم‌مرکز با دایره C قرار دارد. بنابراین مساحت ناحیه شامل نقاطی که طول مماس رسم شده از آنها کمتر از $3\sqrt{2}$ است، برابر مساحت ناحیه محدود بین دایره‌ها $C(O, 6)$ و $C'(O, 3\sqrt{6})$ است. در نتیجه

۱۴ ۴ می‌دانیم وتری که به مرکز دایره نزدیک‌تر است، بلندتر است و برعکس،

بنابراین

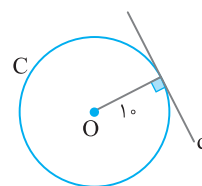
$$OH' > OH \Rightarrow CD < AB \xrightarrow{\div 2} \frac{CD}{2} < \frac{AB}{2}$$

$$CH' < BH \Rightarrow 11 - 2m < m - 4 \Rightarrow 15 < 3m \Rightarrow m > 5 \quad (1)$$

از طرفی طول هر دو پاره‌خط عددی مثبت است، پس

$$m - 4 > 0 \Rightarrow m > 4 \quad (2), \quad 11 - 2m > 0 \Rightarrow m < \frac{11}{2} \quad (3)$$

از اشتراک (۱)، (۲) و (۳) داریم



۱۵ ۳ می‌دانیم اگر خط d بر دایره C

مماس باشد، آن‌گاه فاصله d تا مرکز دایره با شعاع دایره برابر است. پس

$$2m - 5 = 10 \Rightarrow 2m = 15 \Rightarrow m = 7.5$$

۱۶ ۲ از مرکز O به نقطه‌های A و B

وصل می‌کنیم. در این صورت طول ضلع‌های مثلث OAB در رابطه فیثاغورس صدق می‌کنند: $AB^2 = OA^2 + OB^2$. بنابراین مثلث OAB قائم‌الزاویه است و $\angle O_1 = 90^\circ$.

در نتیجه اندازه کمان AB برابر 90° است. بنابراین اندازه کمان AMB برابر $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$ است. طول کمان

AMB برابر است با

$$\text{طول کمان AMB} = \frac{270^\circ \times \pi \times 4}{180^\circ} = 6\pi$$

۱۷ ۳ فرض کنید زاویه مرکزی مقابل به کمان AB، برابر α (درجه)

باشد. مساحت قطاع OAB در دایره به شعاع R برابر است با

$$\text{مساحت قطاع} = \frac{\alpha\pi R^2}{360^\circ} \Rightarrow \frac{\alpha\pi R^2}{360^\circ} = 12\pi \quad (1)$$

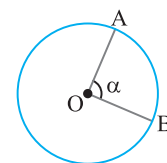
همچنین طول کمان AB به صورت زیر به دست می‌آید:

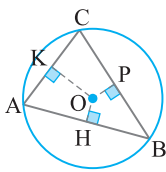
$$\text{طول کمان AB} = \frac{\alpha\pi R}{180^\circ} \Rightarrow \frac{\alpha\pi R}{180^\circ} = 4\pi \quad (2)$$

از تقسیم تساوی (۱) بر (۲) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\frac{\alpha\pi R^2}{360^\circ}}{\frac{\alpha\pi R}{180^\circ}} = \frac{12\pi}{4\pi} \Rightarrow \frac{R}{2} = 3 \Rightarrow R = 6$$

بنابراین $\pi R^2 = \pi(6)^2 = 36\pi$ مساحت دایره.





۳۰ ۴ در مثلث ABC می‌نویسیم

$$\hat{A} = 70^\circ, \hat{B} = 50^\circ \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ$$

$$\hat{B} < \hat{C} < \hat{A} \Rightarrow AC < AB < BC$$

هرچه طول وتر بزرگ‌تر باشد، آن وتر به

مرکز دایره نزدیک‌تر است. پس

$$AC < AB < BC \Rightarrow OK > OH > OP$$

۳۱ ۲ اگر نقطه A درون دایره باشد،

تمام خطوط گذرنده از A با دایره در دو نقطه

اشتراک دارند. پس باید شرط $OA < R$

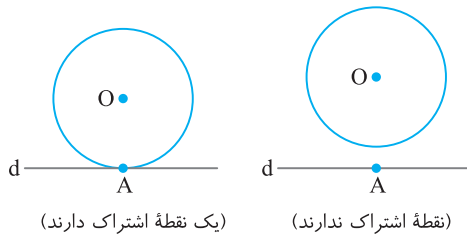
برقرار باشد. بنابراین

$$0 \leq 3 - x < 1 \Rightarrow -3 \leq -x < -2 \Rightarrow 2 < x \leq 3$$

در این فاصله x فقط مقدار طبیعی ۳ می‌تواند داشته باشد.

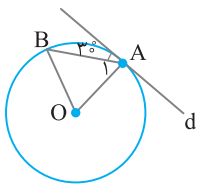
(برای حالت‌هایی که نقطه A روی دایره یا خارج دایره باشد، خطی پیدا می‌شود

که با دایره در دو نقطه اشتراک نداشته باشد.)



(یک نقطه اشتراک دارند)

(نقطه اشتراک ندارند)



۳۲ ۱ کافی است از مرکز دایره به

نقاط A و B وصل کنیم. شعاع دایره در

نقطه تماس بر خط مماس بر دایره عمود

است. پس

$$\hat{A}_1 = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

از طرفی $R = OA = OB$ ، بنابراین

$$\hat{A}_1 = \hat{B} = 60^\circ \quad (1)$$

$$\triangle AOB: \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{O} = 180^\circ \xrightarrow{(1)} \hat{O} = 60^\circ$$

$$OB = OA = AB = R = 5$$

۳۳ ۴ AB قطر نیم‌دایره است. پس

$$\widehat{AD} + \widehat{DE} + \widehat{EB} = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + 80^\circ + \widehat{EB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{EB} = 40^\circ$$

$$\widehat{DE} > \widehat{AD} > \widehat{EB} \Rightarrow DE > AD > EB \quad (1)$$

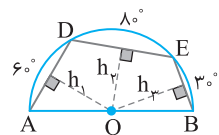
در نتیجه

از طرفی می‌دانیم در بین دو وتر از یک دایره،

وتری که بلندتر است به مرکز دایره

نزدیک‌تر است. پس بنابر رابطه (۱) نتیجه

می‌شود که $h_3 > h_1 > h_2$

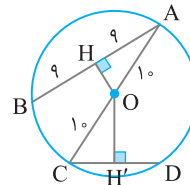
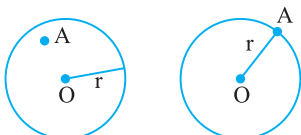


۳۴ ۳ اگر نقطه دلخواه A خارج دایره قرار نداشته باشد، آن‌گاه A روی

دایره یا داخل دایره خواهد بود. در نتیجه خواهیم داشت

$$OA \leq r \Rightarrow \sqrt{(m-1)^2 + (m-1)^2} \leq \sqrt{8} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2(m-1)^2 \leq 8$$

$$(m-1)^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq m-1 \leq 2 \xrightarrow{+1} -1 \leq m \leq 3$$



۲۴ ۴ از مرکز O به وترهای AB و

CD به ترتیب عمودهای OH و OH' را

وارد می‌کنیم. در این صورت وترهای AB و

CD نصف می‌شوند. چون $OH' = 2OH$

می‌نویسیم

$$\triangle OAH: OH^2 = OA^2 - AH^2 = 10^2 - 9^2 = 19 \Rightarrow OH = \sqrt{19}$$

$$OH' = 2\sqrt{19}$$

$$\triangle OCH': CH'^2 = OC^2 - OH'^2 = 10^2 - (2\sqrt{19})^2 = 100 - 76 = 24$$

$$CH' = 2\sqrt{6} \Rightarrow CD = 4\sqrt{6}$$

۲۵ ۴ می‌دانیم دو وتر که از دایره به یک فاصله باشند، مساوی‌اند. پس

$$AB = CD \Rightarrow 5m + 2 = 10 + m \Rightarrow 4m = 8 \Rightarrow m = 2$$

بنابراین شعاع دایره $C(O, 3m)$ برابر ۶ است. در نتیجه

$$\text{مساحت دایره} = \pi R^2 = 36\pi$$

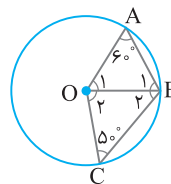
۲۶ ۲ می‌دانیم هر دایره برابر ۳۶۰ درجه است. پس

$$2x + 4x + 3x + 6x = 360^\circ \Rightarrow 15x = 360^\circ \Rightarrow x = 24^\circ$$

از طرف دیگر اندازه هر زاویه مرکزی برابر اندازه کمان روبه‌روی آن است.

$$\alpha = 3x = 3 \times 24^\circ = 72^\circ$$

بنابراین



$$\triangle OAB: OA = OB = R \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{A} = 60^\circ$$

$$\hat{O}_1 = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B}_1 = 60^\circ$$

$$\triangle OBC: OB = OC = R \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{C} = 50^\circ$$

$$\hat{O}_2 = 180^\circ - \hat{C} - \hat{B}_2 = 80^\circ$$

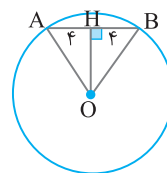
در نتیجه $\hat{AOC} = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 140^\circ$. پس طول کمان ABC برابر است با

$$\text{طول کمان ABC} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times 2\pi R = \frac{140^\circ}{360^\circ} \times 2\pi \left(\frac{12}{\pi}\right) = \frac{28}{3}$$

۲۸ ۴ می‌دانیم قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند.

$$\triangle OBH: OB^2 = OH^2 + HB^2 = (4\sqrt{3})^2 + 4^2 = 64 \Rightarrow OB = 8$$

$$R = 8$$



بنابراین مثلث OAB متساوی‌الاضلاع

است و $\hat{O} = 60^\circ$. حال طول کمان AB را

به‌دست می‌آوریم.

$$\text{طول کمان AB} = \frac{\hat{O}}{360^\circ} \times 2\pi R$$

$$= \frac{60^\circ}{360^\circ} \times 2\pi(8) = \frac{8\pi}{3}$$

۲۹ ۴ از O به A و D وصل می‌کنیم. در این صورت مثلث‌های OAB و

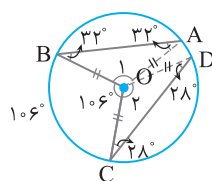
OCD متساوی‌الساقین هستند، بنابراین

$$\hat{O}_1 = 180^\circ - 2 \times 32^\circ = 116^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 116^\circ$$

$$\hat{O}_2 = 180^\circ - 2 \times 28^\circ = 124^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 124^\circ$$

$$\hat{BOC} = 106^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 106^\circ$$

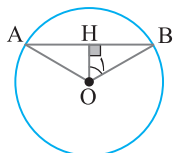
$$\widehat{AD} = 360^\circ - (106^\circ + 116^\circ + 124^\circ) = 14^\circ$$



۳۳ از رابطه بین طول کمان و اندازه کمان در دایره به دست می آید

$$\frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{\text{طول کمان}}{\text{اندازه کمان}} \Rightarrow \frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{AB}{360^\circ}$$

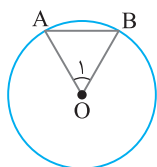
$$\xrightarrow{R=3} \text{اندازه کمان } AB = 12^\circ$$



پس زاویه مرکزی O برابر 12° است. اگر عمود OH را بر وتر AB وارد کنیم، آن گاه OH نیمساز نیز هست، پس $\hat{O}_1 = 6^\circ$. بنابراین $\triangle OBH: \hat{O}_1 = 6^\circ$

$$BH = \frac{\sqrt{3}}{2} OB \xrightarrow{OB=3} BH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

در ضمن عمود OH وتر AB را نصف می کند، پس $AB = 2BH = 3\sqrt{3}$



۳۴ اگر از مرکز O به نقطه های A و B وصل کنیم، آن گاه مثلث OAB مثلث متساوی الاضلاع به ضلع R می شود. پس زاویه مرکزی O_1 برابر 6° می شود. در نتیجه اندازه کمان AB مساوی 6° است. طول کمان AB از رابطه زیر به دست می آید:

$$AB \text{ کمان } = \frac{6^\circ}{360^\circ} (2\pi R) = \frac{\pi}{3} R$$

۳۵ می توان نوشت

$$\frac{\text{طول کمان}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان}}{360^\circ}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{6^\circ}{360^\circ} = \frac{\text{طول کمان در دایره } C}{2\pi R} \Rightarrow \text{طول کمان در دایره } C = \frac{\pi R}{3} \\ \frac{12^\circ}{360^\circ} = \frac{\text{طول کمان در دایره } C'}{2\pi R'} \Rightarrow \text{طول کمان در دایره } C' = \frac{\pi R'}{12} \end{array} \right.$$

$$\frac{\pi R}{3} = \frac{\pi R'}{12} \Rightarrow \frac{R}{R'} = \frac{1}{4} \quad \text{پس طول این دو کمان مساوی اند، پس}$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{\pi R^2}{\pi R'^2} = \left(\frac{R}{R'}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \quad \text{بنابراین}$$

۳۶ بنابر فرض $OC = 12$ و $OA = 4$. در ضمن طول کمان یک دایره از رابطه زیر به دست می آید:

$$\text{طول کمان} = \frac{\text{اندازه کمان}}{360^\circ} (2\pi R)$$

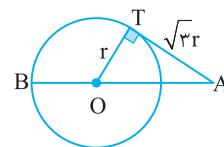
$$AB \text{ کمان} = \frac{AB \text{ کمان}}{360^\circ} (2\pi \times 4)$$

$$8 = \frac{\alpha}{360^\circ} (8\pi) \Rightarrow \alpha\pi = 360^\circ \quad (1)$$

از طرف دیگر

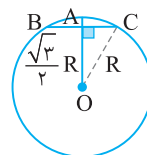
$$CD \text{ کمان} = \frac{CD \text{ کمان}}{360^\circ} (2\pi \times 12) = \frac{\alpha}{360^\circ} (24\pi) = \frac{\alpha\pi}{15^\circ} \quad (2)$$

$$CD \text{ کمان} = \frac{360^\circ}{15^\circ} = 24 \quad \text{از تساوی های (۱) و (۲) نتیجه می شود}$$



$$\triangle TOA: OA^2 = OT^2 + AT^2 = r^2 + 3r^2 = 4r^2 \Rightarrow OA = 2r$$

$$\text{فاصله بیشترین } AB = AO + OB = 2r + r = 3r$$

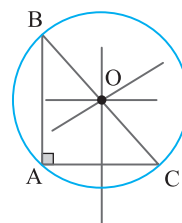


۳۵ در شکل AB بیشترین فاصله A تا دایره است. مطابق شکل و فرض داریم

$$\begin{aligned} ۳۶ \quad ۱ \quad \text{مطابق شکل می توان نوشت} \\ \triangle OAC: AO^2 + AC^2 = OC^2 \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} R\right)^2 + AC^2 = R^2 \Rightarrow AC = \frac{R}{2} \end{aligned}$$

در نتیجه طول کوتاه ترین وتر گذرا از A برابر می شود با

$$BC = 2AC = 2 \times \frac{R}{2} = R$$



۳۷ از سه رأس مثلث قائم الزاویه ABC یک دایره عبور می کند و مرکز این دایره نقطه تلاقی عمودمنصف های ضلع های این مثلث است. از طرفی نقطه تلاقی عمودمنصف های ضلع های مثلث قائم الزاویه وسط وتر است. بنابراین مرکز این دایره وسط وتر و شعاع آن نصف وتر است.

$$\triangle ABC: BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 3^2 = 45$$

$$BC = 10 \Rightarrow 2R = 10 \Rightarrow R = 5$$

۳۸ از دو نقطه M و N نامتناهی دایره می گذرد و کوچک ترین دایره

$$2R = MN = 5 \Rightarrow R = \frac{5}{2} \quad \text{بنابراین}$$

۳۹ توجه کنید که اگر محیط دایره را با P نشان دهیم، آن گاه

$$\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = P$$

چون $\widehat{AMB} = 4\widehat{ANB}$ پس

$$4\widehat{ANB} + \widehat{ANB} = P \Rightarrow 5\widehat{ANB} = P \Rightarrow \widehat{ANB} = \frac{1}{5}P$$

$$\triangle OTA: AT^2 = OA^2 - OT^2 \quad (1) \quad \text{بنابر قضیه فیثاغورس}$$

$$\triangle OT'A: AT'^2 = OA^2 - OT'^2 \quad (2)$$

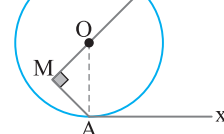
اکنون اگر برابری (۱) را از برابری (۲) کم کنیم نتیجه می شود

$$AT'^2 - AT^2 = OT'^2 - OT^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$$

۴۱ توجه کنید که چون AB قطر دایره است، پس

$$\widehat{AC} + \widehat{CB} = 180^\circ \quad \text{یعنی } \widehat{AC} + 4\widehat{AC} = 180^\circ, \text{ در نتیجه } \widehat{AC} = 20^\circ. \text{ همچنین}$$

$$\widehat{COD} = \widehat{CD} = 8x = 8 \times 2^\circ = 16^\circ \quad \text{پس زاویه مرکزی COD}$$



۴۲ از مرکز دایره به A وصل می کنیم. توجه کنید که $\widehat{OAx} = 90^\circ$. در نتیجه $\widehat{OAm} = \widehat{MAx} - \widehat{OAx} = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$ پس در مثلث OAM

$$\widehat{AOM} = 90^\circ - \widehat{OAm} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

$$\widehat{BOA} = 180^\circ - \widehat{AOM} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \quad \text{اکنون می توان نوشت}$$

$$\widehat{AB} = 135^\circ = \frac{3}{8} \text{ محیط دایره}$$