

فصل اول

راه‌حل مسائل

اصول شمارش

پاسخ ۱ 6×8 پاسخ ۲ 10×9 پاسخ ۳ $2 \times 5 \times 3$

پاسخ ۴ برای رقم یکان، هزارگان، صدگان و دهگان به ترتیب ۵، ۸، ۸ و ۷ انتخاب وجود دارد، لذا پاسخ برابر $5 \times 8 \times 8 \times 7$ است.

پاسخ ۵ (الف) 6^4 (ب) $6 \times 5 \times 4 \times 3$ پاسخ ۶ (الف) $5 \times 26 \times 26 \times 5$ (ب) $5 \times 21 \times 21 \times 5$ پاسخ ۷ $9 \times 10 \times 10$ پاسخ ۸ (الف) 7×6^9 (ب) $7 \times 6 \times 5^8$ پاسخ ۹ (الف) 64×14 (ب) $64 \times 49 \times 36$ پاسخ ۱۰ $3 \times 5 \times 4 \times 3$ پاسخ ۱۱ (الف) $3 \times 4 \times 5$ (ب) $(3 \times 4 \times 5)^2$ (ج) $3 \times 4 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$ پاسخ ۱۲ $6 \times 5 \times 2$

پاسخ ۱۳ (الف) باید ببینیم در چند عدد چهاررقمی که با رقم صفر نیز می‌توانند شروع شوند دقیقاً یک رقم ۵ وجود دارد. برای رقم ۵، ۴ انتخاب و برای هر یک از سه رقم باقی‌مانده ۹ انتخاب وجود دارد، پس پاسخ برابر 4×9^3 است.

(ب) مشابه استدلال قسمت (الف) نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر $4 \times 3 \times 8 \times 8$ است.

پاسخ ۱۴ (الف) هر یک از ۷ نفر ۱۰ انتخاب دارند، لذا پاسخ برابر 10^7 است.(ب) $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$ پاسخ ۱۵ (الف) 4^{10} (ب) 5^{10} پاسخ ۱۶ $2 \times 3 \times 3 \times 2$

پاسخ ۱۷ دو مهره‌ی اسب باید در دو گوشه‌ی مقابل از یک مستطیل 2×3 قرار گیرند. تعداد مستطیل‌های 2×3 برابر $7 \times 6 \times 2$ است و برای هر مستطیل 2×3 به ۴ طریق می‌توان دو مهره را در دو گوشه‌ی مقابل این مستطیل قرار داد. پس پاسخ برابر $7 \times 6 \times 2 \times 4$ است.

پاسخ ۱۸ ۷ دایره در یک سطر در نظر بگیرید. برای رقم‌های ۵، ۴، ۳ و ۲ به ترتیب ۷، ۶، ۵ و ۴ انتخاب وجود دارد و سه دایره‌ی باقی‌مانده به صورت منحصر به فرد با رقم ۱ پر می‌شوند. لذا پاسخ برابر $7 \times 6 \times 5 \times 4$ است.

پاسخ ۱۹ یکی از افراد را در نظر بگیرید. این فرد به ۹ طریق می‌تواند هم تیمی خود را انتخاب کند، مجدداً یک فرد دیگر در نظر بگیرید. این فرد به ۷ طریق می‌تواند هم تیمی خود انتخاب کند و ... پس پاسخ برابر است با $9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1$.

پاسخ ۲۰ الف) برای تاس سفید ۶ و برای تاس سیاه ۳ انتخاب وجود دارد، لذا پاسخ برابر 6×3 است. ب) برای تاس سفید ۶ و برای تاس سیاه ۲ انتخاب وجود دارد، لذا پاسخ برابر 6×2 است.

پاسخ ۲۱ ۲۷

پاسخ ۲۲ ۲۵

پاسخ ۲۳ به ۵ طریق می‌توان دو عدد انتخاب کرد که اختلاف آن‌ها برابر ۵ باشد و به 2^4 طریق می‌توان تعدادی عدد بین این دو عدد انتخاب کرد. لذا پاسخ برابر 5×2^4 است.

پاسخ ۲۴ برای هر یک از سکوها ۲، ۳، ... و ۲۹ دو انتخاب وجود دارد، لذا پاسخ برابر 2^{28} است.

پاسخ ۲۵ الف) تجزیه‌ی استاندارد عدد داده شده به صورت $5^{12} \times 3^8 \times 2^{40}$ است. لذا این عدد $41 \times 9 \times 13$ مقسوم علیه مثبت دارد.

ب) چون $3^3 \times 3 \times 5^3 = 3000$ ، لذا مقسوم علیه‌های مورد نظر به صورت $2^a \times 3^b \times 5^c$ هستند که $0 \leq a \leq 4$ ، $0 \leq b \leq 8$ و $0 \leq c \leq 12$ است. پس تعداد این مقسوم علیه‌ها برابر $3^4 \times 8 \times 13$ است.

پاسخ ۲۶ هر مقسوم علیه مشترک از دو عدد داده شده به صورت $2^a \times 3^b \times 7^c$ است که $0 \leq a \leq 5$ ، $0 \leq b \leq 12$ و $0 \leq c \leq 6$ است. پس تعداد آن‌ها برابر $6 \times 13 \times 7$ است.

پاسخ ۲۷ برای سکه‌های ۵ تومانی، ۱۰ تومانی و ۲۵ تومانی به ترتیب ۱۱، ۹ و ۱۸ انتخاب وجود دارد (مثلاً در مورد سکه‌های ۵ تومانی می‌توان ۰، ۱، ۲، ... یا ۱۰ تا را در قلم انداخت). پس پاسخ برابر $11 \times 9 \times 18$ است.

پاسخ ۲۸ عدد سمت راست یا از همه‌ی اعداد بزرگ‌تر یا از همه کوچک‌تر است، پس برای آن ۲ انتخاب وجود دارد. به طور مشابه نهمین عدد باید از همه‌ی اعداد باقی‌مانده بزرگ‌تر یا از همه کوچک‌تر باشد، پس برای آن نیز ۲ انتخاب وجود دارد. چنانچه این روند را تکرار کنیم نتیجه می‌گیریم برای هشتمین، هفتمین، ... و دومین عدد ۲ انتخاب و برای اولین عدد یک انتخاب وجود دارد. لذا پاسخ برابر 2^9 است.

پاسخ ۲۹ به 2^5 طریق می‌توان تعدادی از سکه‌های ۲، ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ ریالی را در قلم انداخت. مابقی سکه‌های قلم به صورت منحصر به فرد مشخص می‌شوند. لذا پاسخ برابر 2^5 است.

پاسخ ۳۰ برای اعداد ۱، ۲ و ۷ یک انتخاب، برای اعداد ۳، ۴، ۵، ۶، ۸ و ۹، دو انتخاب و برای عدد ۱۰ یک انتخاب وجود دارد. پس پاسخ برابر $۲^۶$ است.

پاسخ ۳۱ ۵×۲^۳

پاسخ ۳۲ $۲^۴ \times ۲^۴$

پاسخ ۳۳ $۶ + ۸$

پاسخ ۳۴ $۵ \times ۷ + ۵ \times ۶ + ۷ \times ۶$

پاسخ ۳۵ در $۹^۴$ عدد فقط رقم سمت چپ و در $۴ \times ۸ \times ۹^۳$ عدد فقط یکی از چهار رقم سمت راست برابر ۳ است. پس پاسخ برابر $۴ \times ۸ \times ۹^۳ + ۹^۴$ است.

پاسخ ۳۶ بسته به این که مهره‌ی سفید در یکی از گوشه‌ها، در یکی از خانه‌های حاشیه‌ی صفحه‌ی شطرنجی غیر از گوشه‌ها یا در یکی از خانه‌های غیر حاشیه‌ای قرار گیرد برای مهره‌ی سیاه به ترتیب ۳، ۵ و ۸ انتخاب وجود دارد. از این که ۴ گوشه، ۲۴ خانه‌ی حاشیه‌ای غیر از گوشه‌ها و ۳۶ خانه‌ی غیر حاشیه‌ای وجود دارد نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر است با

$$۴ \times ۳ + ۲۴ \times ۵ + ۳۶ \times ۸$$

پاسخ ۳۷ الف) $۳ \times ۴ + ۲ \times ۳$ ب) $(۳ \times ۴ + ۲ \times ۳)^۲$

ج) $۳ \times ۴ \times ۳ \times ۲ + ۳ \times ۴ \times ۳ \times ۲ + ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۳ + ۲ \times ۳ \times ۲ \times ۱$

پاسخ ۳۸ $۴^۳ + ۴^۴ + ۴^۵$

پاسخ ۳۹ بسته به این که ۵ رقم متوالی ۳ از رقم اول، دوم یا سوم شروع شود نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر $۱۰ \times ۱۰ + ۸ \times ۱۰ + ۹ \times ۹$ است.

پاسخ ۴۰ به‌ازای هر x ، $-۱۰۰ \leq x \leq ۱۰۰$ ، تعداد y هایی که در نامعادله صدق می‌کنند برابر $|x| - ۲$ است. لذا پاسخ برابر است با

$$۱ + ۳ + ۵ + \dots + ۲۰۱ + ۱۹۹ + ۱۹۷ + \dots + ۳ + ۱ = ۲۰۲۰۱$$

پاسخ ۴۱ خانه‌های صفحه‌ی شطرنجی را به چهار لایه تقسیم می‌کنیم. لایه‌ی اول شامل خانه‌های حاشیه‌ای صفحه‌ی شطرنجی است که تعداد آن‌ها برابر $۸^۲ - ۶^۲ = ۲۸$ است. لایه‌ی دوم شامل خانه‌های حاشیه‌ای صفحه‌ی شطرنجی ۶×۶ است که از حذف خانه‌های لایه‌ی اول به‌دست می‌آید. تعداد خانه‌های لایه‌ی دوم برابر $۶^۲ - ۴^۲ = ۲۰$ است. به‌طور مشابه لایه‌ی سوم و چهارم را تعریف می‌کنیم. تعداد خانه‌های این دو لایه نیز به‌ترتیب برابر ۱۲ و ۴ است. اگر وزیر سفید به‌ترتیب در یکی از خانه‌های لایه‌ی اول، دوم، سوم و چهارم قرار گیرد برای وزیر سیاه به‌ترتیب ۲۱، ۲۳، ۲۵ و ۲۷ انتخاب وجود دارد. پس پاسخ برابر است با

$$۲۸ \times ۲۱ + ۲۰ \times ۲۳ + ۱۲ \times ۲۵ + ۴ \times ۲۷$$