

درس‌نامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های کاملاً تشریحی

ریاضی تجربی

(دوازدهم)

ویراست سوم

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی



انتشارات
آگاه

مجموعه کتاب‌های پایه دوازدهم نشر الگو ویژه رشته تجربی:

تمام آن چیزی که برای ۲۰ لازم است.

- عربی ۳ (۲۰ تمام و موج ۲۰)
- شیمی ۳ (۲۰ تمام و موج ۲۰)
- فارسی ۳ (۲۰ تمام و موج ۲۰)
- فیزیک ۳ (۲۰ تمام و موج ۲۰)
- ریاضی ۳ (۲۰ تمام و موج ۲۰)
- زیست‌شناسی ۳ (۲۰ تمام و موج ۲۰)
- دین و زندگی ۳ (۲۰ تمام و موج ۲۰)
- زبان انگلیسی ۳ (۲۰ تمام و موج ۲۰)
- شیمی ۳ (تست)
- فیزیک ۳ جامع تجربی
- زیست‌شناسی ۳ (تست)
- ریاضی ۳ (تست و سمعدی)
- موج آزمون ریاضی تجربی
- جامع ریاضیات تجربی + موج آزمون

- درس‌نامه‌ای شامل نکات کلیدی و مرور مطالب مهم در ابتدای هر فصل
- تقسیم مطالب و پرسش‌های چهارگزینه‌ای بر اساس بخش‌های کتاب درسی
- دسته‌بندی پرسش‌های چهارگزینه‌ای در سه سطح ساده، متوسط و دشوار
- ۴۸۰ پرسش چهارگزینه‌ای در درس‌نامه‌ها
- ۲۲۴۴ پرسش چهارگزینه‌ای در پایان درس‌نامه‌ها
- پوشش سوالات کنکورهای سراسری سال‌های اخیر
- ۱۵ آزمون ۱۰ سؤالی برای جمع‌بندی و مرور مطالب هر فصل
- پاسخ‌های کاملاً تشریحی برای همه پرسش‌های چهارگزینه‌ای



شما می‌توانید سؤالات خود را از طریق کانال تلگرام ریاضی الگو به آدرس زیر با انتشارات در میان بگذارید:

https://t.me/olgoo_riaziaat_riazi

(رشته ریاضی)

https://t.me/olgoo_riaziaat_tajrobi

(رشته تجربی)

انتشارات
الگو

www.olgoobooks.ir



به نام خدا

این کتاب را بر اساس محتوای کتاب درسی دوازدهم پایه دوازدهم و با هدف آموزش عمیق‌تر مفاهیم درسی و کسب مهارت در حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است و رویکرد آن آموزش نکات و مطالبی است که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای مفیدند.

هر فصل کتاب به چند درس و هر درس به چند بخش تقسیم شده است. در ابتدای هر بخش، ضمن مرور نکات مربوط به آن، روش‌های اصلی حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای را با آوردن نمونه‌هایی از این پرسش‌ها آموزش داده‌ایم. پس از آن، تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای آورده‌ایم و راه‌حل آن‌ها را در انتهای کتاب گنجانده‌ایم. در انتخاب این پرسش‌ها به تنوع و فراوانی اهمیت داده‌ایم. به این ترتیب، با مطالعه این کتاب، تقریباً هر آنچه را که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای و کسب آمادگی برای شرکت در آزمون‌های مختلف نیاز دارید به‌دست خواهید آورد.

در این ویراست ساختار کتاب و محتوای آن تغییرات زیادی کرده است:

- درس‌نامه‌ها کامل‌تر شده‌اند؛

- تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای اضافه شده است؛

- هر جا که لازم بوده است، پاسخ‌ها بازنویسی و راه‌حل‌های جدید اضافه شده‌اند.

هر درس کتاب به چند بخش جدید تقسیم شده است که موضوع و حجم مطالب آن متناسب با تدریس یک جلسه تدریس معلم در کلاس است. پرسش‌های چهارگزینه‌ای هر بخش هم در انتهای آن بخش آمده است تا دسترسی به آن‌ها ساده‌تر باشد. همچنین پرسش‌های هر بخش را به سه سطح تقسیم کرده‌ایم: در سطح اول پرسش‌هایی ساده و مفهومی را آورده‌ایم که با حل آن‌ها مفاهیم آن مبحث مرور می‌شوند. این پرسش‌ها کمتر در آزمون‌ها دیده می‌شوند ولی برای تسلط بر مفاهیم درس، حل آن‌ها ضروری است. در سطح دوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها متوسط است و در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری بیشتر این نوع پرسش‌ها مطرح می‌شود. تعداد این پرسش‌ها بسیار بیشتر از پرسش‌های سطح اول است و حل آن‌ها به تمام دانش‌آموزان توصیه می‌شود. در سطح سوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها بالاتر از پرسش‌های سطح دوم است. تعداد این پرسش‌ها زیاد نیست و حل آن‌ها به دانش‌آموزان مستعد و سخت‌کوش توصیه می‌شود. این پرسش‌ها ممکن است در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری مطرح شوند ولی فراوانی آن‌ها کم است.

در انتهای هر درس، سؤالات کنکورهای سراسری متناسب با آن درس را آورده‌ایم و در انتهای هر فصل، آزمون‌هایی از مباحث آن فصل قرار داده‌ایم تا بتوانید با حل آن‌ها میزان تسلط خود بر مطالب فصل را محک بزنید.

وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم عاطفه ربیعی، دکتر آریس آقانیانس (ویراست‌های دوم و سوم) و دکتر ابوالفضل علی‌یمانی (ویراست سوم) برای ویراستاری علمی، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی کتاب و خانم ستین مختار مدیر واحد ویراستاری و حروفچینی تشکر و قدردانی کنیم.

فهرست

فصل اول: تابع

درس اول: توابع چندجمله‌ای – توابع صعودی و نزولی

- بخش اول: توابع چندجمله‌ای ۲
- بخش دوم: توابع صعودی و نزولی ۶
- سؤالات کنکور سراسری ۲۵

درس دوم: ترکیب توابع

- بخش اول: ترکیب توابع ۲۶
- بخش دوم: تبدیل نمودار توابع ۳۹
- سؤالات کنکور سراسری ۷۰

درس سوم: تابع وارون

- بخش اول: تابع وارون ۷۳
- بخش دوم: تابع وارون و ترکیب توابع ۹۳
- سؤالات کنکور سراسری ۱۰۰

آزمون‌های فصل

۱۰۴

فصل دوم: مثلثات

درس اول: تناوب و تانژانت

- بخش اول: تابع متناوب ۱۰۸
- بخش دوم: نمودار توابع سینوس و کسینوس ۱۱۳
- بخش سوم: تابع تانژانت ۱۲۳
- سؤالات کنکور سراسری ۱۲۹

درس دوم: معادلات مثلثاتی

- بخش اول: نسبت‌های مثلثاتی زاویه 2α ۱۳۲
- بخش دوم: معادلات مثلثاتی ۱۴۵
- سؤالات کنکور سراسری ۱۵۸

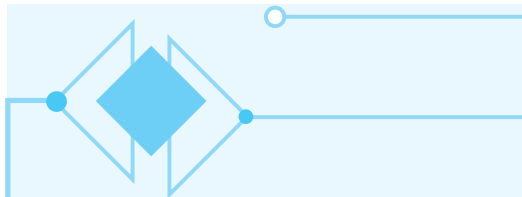
آزمون‌های فصل

۱۶۲

فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

درس اول: حد بی‌نهایت

- بخش اول: بخش‌پذیری و تقسیم ۱۶۶
- بخش دوم: همسایگی ۱۷۰



بخش ششم: مشتق دوم ۲۷۲

بخش هفتم: قاعده هوییتال ۲۷۷

سؤالات کنکور سراسری ۲۸۰

درس سوم: آهنگ تغییر ۲۸۵

سؤالات کنکور سراسری ۲۸۹

آزمون‌های فصل ۲۹۰

◆ فصل پنجم: کاربرد مشتق

درس اول: اکستریم‌های تابع

بخش اول: ارتباط مشتق و یکنوایی تابع ۲۹۴

بخش دوم: نقاط بحرانی ۳۰۲

بخش سوم: اکستریم‌های نسبی ۳۰۶

بخش چهارم: اکستریم‌های مطلق ۳۱۸

سؤالات کنکور سراسری ۳۲۴

درس دوم: بهینه‌سازی ۳۲۶

سؤالات کنکور سراسری ۳۳۵

آزمون‌های فصل ۳۳۷

بخش سوم: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ در توابع گویا ۱۷۲

بخش چهارم: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ در توابع رادیکالی ۱۸۱

بخش پنجم: حد نامتناهی ۱۸۶

سؤالات کنکور سراسری ۱۹۶

درس دوم: حد در بی‌نهایت ۲۰۰

سؤالات کنکور سراسری ۲۱۳

آزمون‌های فصل ۲۱۵

◆ فصل چهارم: مشتق

درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق ۲۱۸

سؤالات کنکور سراسری ۲۲۴

درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

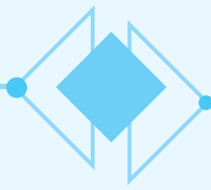
بخش اول: مشتق چپ، مشتق راست و مشتق نامتناهی ۲۲۵

بخش دوم: تابع مشتق و قواعد مشتق‌گیری ۲۳۵

بخش سوم: مشتق تابع مرکب ۲۴۷

بخش چهارم: مشتق‌پذیری ۲۵۵

بخش پنجم: خط مماس بر نمودار تابع ۲۶۴



◆ فصل ششم: هندسه

درس اول: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

بخش اول: دوران و برش ۳۴۰

بخش دوم: بیضی ۳۴۹

سؤالات کنکور سراسری ۳۵۷

درس دوم: دایره ۳۵۸

سؤالات کنکور سراسری ۳۷۲

آزمون‌های فصل ۳۷۵

◆ فصل هفتم: احتمال

قانون احتمال کل ۳۷۸

سؤالات کنکور سراسری ۳۸۶

آزمون فصل ۳۸۷

◆ فصل هشتم: پاسخ‌های تشریحی

پاسخ‌های تشریحی ۳۹۰

◆ فصل نهم: پاسخنامه کلیدی

پاسخنامه کلیدی ۶۰۲

پاسخنامه کلیدی آزمون‌ها ۶۰۸

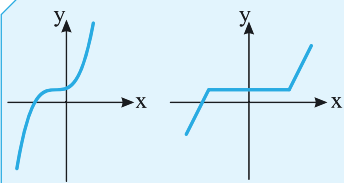
درس اول / بخش دوم: توابع صعودی و نزولی

توابع صعودی

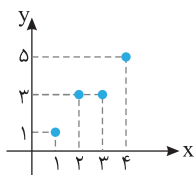
فرض کنید مجموعه A زیرمجموعه‌ای ناتهی از دامنه تابع f باشد ($A \subseteq D_f$). می‌گوییم تابع f روی مجموعه A صعودی است به شرطی که به ازای هر a و b از مجموعه A ،
 $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$

نکته

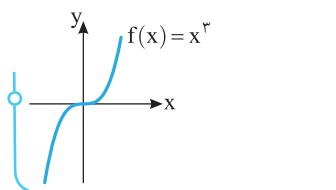
فرض کنید تابع f روی مجموعه A صعودی باشد. در این صورت با افزایش x ‌های عضو A ، مقادیر $f(x)$ کاهش نمی‌یابند، یعنی ثابت می‌مانند یا افزایش می‌یابند. بنابراین وقتی روی نمودار تابع f در مجموعه A از چپ به راست حرکت می‌کنیم، نمودار پایین نمی‌آید.



مثال: الف) تابع $f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 5)\}$ روی دامنه‌اش صعودی است.



ب) تابع $f(x) = x^3$ روی مجموعه $\mathbb{R}$ صعودی است.



تست

تابع $f = \{(1, 2), (2, m-1), (3, 7-m)\}$ روی دامنه‌اش صعودی است. حدود m کدام است؟

$$m \leq 3 \quad (4)$$

$$m \geq 4 \quad (3)$$

$$3 < m < 4 \quad (2)$$

$$3 \leq m \leq 4 \quad (1)$$

با توجه به تعریف تابع صعودی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 < 2 \Rightarrow f(1) \leq f(2) \Rightarrow 2 \leq m-1 \Rightarrow m \geq 3 \\ 2 < 3 \Rightarrow f(2) \leq f(3) \Rightarrow m-1 \leq 7-m \Rightarrow 2m \leq 8 \Rightarrow m \leq 4 \end{cases} \Rightarrow 3 \leq m \leq 4$$

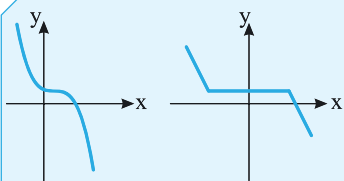
راه حل

توابع نزولی

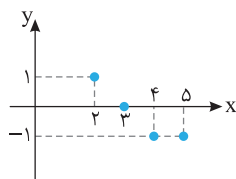
فرض کنید مجموعه A زیرمجموعه‌ای ناتهی از دامنه تابع f باشد ($A \subseteq D_f$). می‌گوییم تابع f روی مجموعه A نزولی است به شرطی که به ازای هر a و b از مجموعه A ،
 $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$

نکته

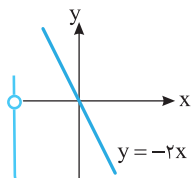
فرض کنید تابع f روی مجموعه A نزولی باشد. در این صورت با افزایش x ‌های عضو A ، مقادیر $f(x)$ افزایش نمی‌یابند، یعنی ثابت می‌مانند یا کاهش می‌یابند. بنابراین وقتی روی نمودار تابع f در مجموعه A از چپ به راست حرکت می‌کنیم، نمودار بالا نمی‌آید.



مثال: الف تابع $f = \{(2, 1), (3, 0), (4, -1), (5, -1)\}$ روی دامنه‌اش نزولی است.



ب) تابع $y = -2x$ روی مجموعه $\mathbb{R}$ نزولی است.



نکته

تابع ثابت روی هر زیرمجموعه‌ای از دامنه‌اش هم صعودی است هم نزولی. همچنین، تابعی که روی مجموعه‌ای هم صعودی است هم نزولی، روی این مجموعه تابعی ثابت است.

تست ۲

تابع $f = \{(1, 5), (2, 3a+2b), (3, a-b)\}$ روی دامنه‌اش هم صعودی است هم نزولی، مقدار $a+b$ کدام است؟

۴) -۲

۳) ۲

۲) ۱

۱) -۱

توجه کنید که تابع f باید تابعی ثابت باشد. بنابراین $f(1) = f(2) = f(3) = 5$. در نتیجه

$$\begin{cases} 3a+2b=5 \\ a-b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases}$$

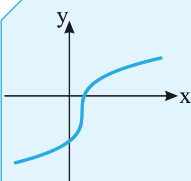
پس $a+b=1$.

راه حل

توابع اکیداً صعودی

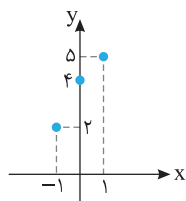
فرض کنید مجموعه A زیرمجموعه‌ای ناتهی از دامنه تابع f باشد ($A \subseteq D_f$). می‌گوییم تابع f روی مجموعه A اکیداً صعودی است به شرطی که به ازای هر a و b از مجموعه A ،
 $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

نکته

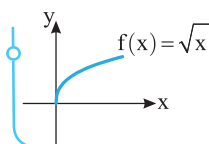


فرض کنید تابع f روی مجموعه A اکیداً صعودی باشد. در این صورت با افزایش x ‌های عضو A مقادیر $f(x)$ افزایش می‌یابند. بنابراین وقتی روی نمودار تابع f در مجموعه A از چپ به راست حرکت می‌کنیم، نمودار بالا می‌رود.

مثال: الف تابع $f = \{(-1, 2), (0, 4), (1, 5)\}$ روی دامنه‌اش اکیداً صعودی است.



ب) تابع $f(x) = \sqrt{x}$ روی مجموعه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

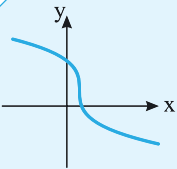


توابع اکیداً نزولی

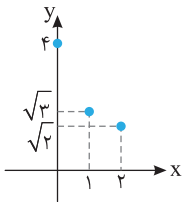
فرض کنید مجموعه A زیرمجموعه‌ای ناتهی از دامنه تابع f باشد ($A \subseteq D_f$). می‌گوییم تابع f روی مجموعه A اکیداً نزولی است به شرطی که به‌ازای هر a و b از مجموعه A ،
 $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

نکته

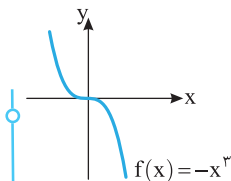
فرض کنید تابع f روی مجموعه A اکیداً نزولی باشد. در این صورت با افزایش x ‌های عضو A مقادیر $f(x)$ کاهش می‌یابند. بنابراین وقتی روی نمودار تابع f در مجموعه A از چپ به راست حرکت می‌کنیم، نمودار پایین می‌آید.



مثال: الف) تابع $f = \{(0, 4), (1, \sqrt{3}), (2, \sqrt{2})\}$ روی دامنه‌اش اکیداً نزولی است.



ب) تابع $f(x) = -x^3$ روی مجموعه $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.



تست

تابع $f = \{(1, m), (-1, 2m^2), (2, 4m)\}$ روی دامنه‌اش اکیداً نزولی است. حدود m کدام است؟

$$m < -\frac{1}{4} \quad (4)$$

$$m < -\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$m < -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$m < -1 \quad (1)$$

$$-1 < 1 < 2 \Rightarrow f(-1) > f(1) > f(2) \Rightarrow 2m^2 > m > 4m + 1$$

چون تابع f روی دامنه‌اش اکیداً نزولی است، می‌نویسیم

$$m > 4m + 1 \Rightarrow m < -\frac{1}{3}$$

توجه کنید که

پس m منفی است و در نتیجه نابرابری $2m^2 > m$ درست است. بنابراین $m < -\frac{1}{3}$.

راه‌حل

نکته

- اگر تابع f روی مجموعه A اکیداً صعودی باشد، روی این مجموعه صعودی هم هست. ولی اگر تابع f روی مجموعه A صعودی باشد، ممکن است روی این مجموعه اکیداً صعودی نباشد.
- اگر تابع f روی مجموعه A اکیداً نزولی باشد، روی این مجموعه نزولی هم هست. ولی اگر تابع f روی مجموعه A نزولی باشد، ممکن است روی این مجموعه اکیداً نزولی نباشد.

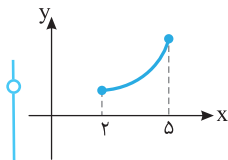
مثال: الف) تابع $f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$ روی دامنه‌اش صعودی است، اما اکیداً صعودی نیست.

ب) تابع ثابت روی دامنه‌اش هم صعودی است هم نزولی، اما نه اکیداً صعودی است و نه اکیداً نزولی.

پ) تابع $f(x) = [x]$ روی $\mathbb{R}$ صعودی است، اما اکیداً صعودی نیست.

نکته

- اگر تابع f روی مجموعه A صعودی باشد، روی هر زیرمجموعه ناتهی مجموعه A نیز صعودی است.
- اگر تابع f روی مجموعه A نزولی باشد، روی هر زیرمجموعه ناتهی مجموعه A نیز نزولی است.
- اگر تابع f روی مجموعه A اکیداً صعودی باشد، روی هر زیرمجموعه ناتهی مجموعه A نیز اکیداً صعودی است.
- اگر تابع f روی مجموعه A اکیداً نزولی باشد، روی هر زیرمجموعه ناتهی مجموعه A نیز اکیداً نزولی است.



مثال: نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. این تابع روی بازه $[2, 5]$ اکیداً صعودی است. بنابراین روی هر یک از بازه‌های مقابل نیز اکیداً صعودی است:
 $(2, 5), [2, 5), (2, 3], (3, 4)$

توابع یکنوا

تابع f را روی مجموعه A **یکنوا** می‌گوییم به شرطی که روی این مجموعه صعودی باشد یا روی این مجموعه نزولی باشد.

مثال: تابع‌های $y=2x$ و $y=-3x$ روی مجموعه $\mathbb{R}$ یکنوا هستند.

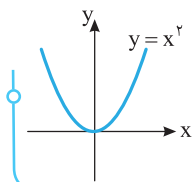
توابع اکیداً یکنوا

تابع f را روی مجموعه A **اکیداً یکنوا** می‌گوییم به شرطی که روی این مجموعه اکیداً صعودی باشد یا روی این مجموعه اکیداً نزولی باشد.

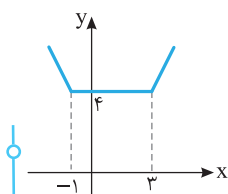
مثال: تابع‌های $y=x^3$ و $y=\sqrt[3]{x}$ روی مجموعه $\mathbb{R}$ اکیداً یکنوا هستند.

توابع غیر یکنوا

اگر تابع f روی مجموعه A یکنوا نباشد، می‌گوییم تابع f روی این مجموعه **غیر یکنوا** است. توجه کنید که ممکن است تابعی روی مجموعه‌ای غیر یکنوا باشد، ولی روی زیرمجموعه‌هایی از آن یکنوا باشد.



مثال: تابع $y=x^2$ روی مجموعه $\mathbb{R}$ غیر یکنواست، زیرا روی مجموعه $(-\infty, 0]$ و هر زیرمجموعه آن نزولی است و روی مجموعه $[0, +\infty)$ و هر زیرمجموعه آن صعودی است.



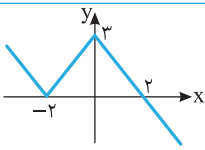
مثال: نمودار تابع $y=|x+1|+|x-3|$ به شکل مقابل است. این تابع روی بازه $[3, +\infty)$ اکیداً صعودی و روی بازه $(-\infty, -1]$ اکیداً نزولی است. روی بازه $[-1, +\infty)$ تابع اکیداً صعودی نیست، ولی صعودی است، زیرا با افزایش x ، y کاهش پیدا نمی‌کند، در واقع یا ثابت می‌ماند یا افزایش می‌یابد. به همین ترتیب روی بازه $(-\infty, 3]$ تابع اکیداً نزولی نیست، ولی نزولی است.

تست ۴

□□□□

را حل

نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. تابع f روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟

(۱) $(-2, 0)$ (۲) $(-2, 2)$ (۳) $(-\infty, -2)$ (۴) $(0, +\infty)$ 

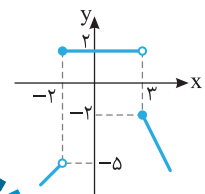
تابع f روی بازه‌های $(-\infty, -2]$ و $[0, +\infty)$ اکیداً نزولی و روی بازه $[-2, 0]$ اکیداً صعودی است. از بازه‌های داده شده فقط بازه $(-2, 0)$ زیرمجموعه بازه $[-2, 0]$ است.

تست ۵

□□□□

را حل

تابع $f(x) = \begin{cases} x-3 & x < -2 \\ 2 & -2 \leq x < 3 \\ -2x+4 & x \geq 3 \end{cases}$ روی بازه $(-\infty, a)$ صعودی است. بیشترین مقدار a کدام است؟

(۱) -3 (۲) -2 (۳) 3 (۴) 4 

تابع $y = x - 3$ روی بازه $(-\infty, -2)$ اکیداً صعودی است. تابع $y = 2$ روی بازه $[-2, 3)$ تابعی ثابت است، پس هم نزولی است هم صعودی. تابع $y = -2x + 4$ روی بازه $[3, +\infty)$ اکیداً نزولی است. بنابراین تابع f روی بازه $(-\infty, 3)$ صعودی است، پس بیشترین مقدار a برابر ۳ است.

نکته

- وقتی می‌گوییم «تابع f صعودی یا اکیداً صعودی است» یعنی این تابع روی دامنه‌اش صعودی یا اکیداً صعودی است و وقتی می‌گوییم «تابع f نزولی یا اکیداً نزولی است» یعنی این تابع روی دامنه‌اش نزولی یا اکیداً نزولی است.
- وقتی می‌گوییم «تابع f غیریکنواست» یعنی این تابع روی دامنه‌اش غیریکنواست. ممکن است تابعی روی دامنه‌اش غیریکنوا باشد، اما روی زیرمجموعه‌هایی از دامنه‌اش یکنوا باشد.

مثال: الف) وقتی می‌گوییم تابع $y = \sqrt{x}$ اکیداً صعودی است، یعنی این تابع روی $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

ب) وقتی می‌گوییم تابع $y = \frac{1}{x}$ غیریکنواست، یعنی این تابع روی $\mathbb{R} - \{0\}$ غیریکنواست.

یکنوایی تابع‌های خطی

فرض کنید $f(x) = ax + b$. یکنوایی تابع f برحسب علامت a به‌صورت زیر است:

$a > 0$	$a < 0$	$a = 0$
اکیداً صعودی	اکیداً نزولی	هم صعودی و هم نزولی

تست ۶

□□□□

را حل

به‌ازای چند مقدار طبیعی m تابع $f(x) = (2m - 8)x + m$ نزولی است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

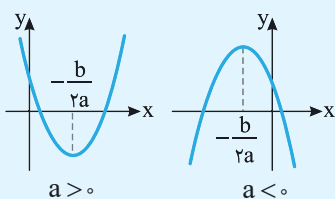
(۴) بی‌شمار

$$2m - 8 \leq 0 \Rightarrow m \leq 4$$

برای اینکه تابع f نزولی باشد، باید ضریب x صفر یا منفی باشد. بنابراین

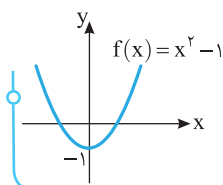
چون m باید عددی طبیعی باشد، پس یکی از چهار مقدار ۱، ۲، ۳ یا ۴ است.

یکنوایی تابع‌های درجه دوم



تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ روی $\mathbb{R}$ غیریکنواست.

- اگر $a > 0$ ، تابع f روی بازه $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ اکیداً نزولی و روی بازه $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ اکیداً صعودی است.
- اگر $a < 0$ ، تابع f روی بازه $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ اکیداً صعودی و روی بازه $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ اکیداً نزولی است.



مثال: تابع درجه دوم $f(x) = x^2 - 1$ روی بازه $(-\infty, 0]$ و همه زیرمجموعه‌های آن اکیداً نزولی است و روی بازه $[0, +\infty)$ و همه زیرمجموعه‌های آن اکیداً صعودی است.

تست ۷

تابع $f(x) = 2x^2 - 10x$ روی بازه $[a, +\infty)$ اکیداً صعودی است. حداقل مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $-\frac{5}{2}$

تابع $f(x) = 2x^2 - 10x$ روی بازه $(-\infty, \frac{5}{2}]$ اکیداً نزولی و روی بازه $[\frac{5}{2}, +\infty)$ اکیداً صعودی است. بنابراین حداقل مقدار a برابر $\frac{5}{2}$ است.

را حل

یکنوایی تابع‌های نمایی

فرض کنید a عددی حقیقی، مثبت و مخالف ۱ باشد و $f(x) = a^x$. یکنوایی تابع f بر حسب مقدار a به صورت زیر است:

$0 < a < 1$	$a > 1$
اکیداً نزولی	اکیداً صعودی

مثال: تابع $f(x) = 2^x$ اکیداً صعودی است و تابع $g(x) = (\frac{1}{3})^x$ اکیداً نزولی است.

تست ۸

تابع نمایی $f(x) = (3k+1)^x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است. حدود k کدام است؟

- (۱) $0 < k < \frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3} < k < 0$ (۳) $-\frac{1}{3} < k < \frac{1}{3}$ (۴) $k > 0$

اگر تابع $y = a^x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشد، آن‌گاه $a > 1$. بنابراین $3k+1 > 1$ ، پس $k > 0$.

را حل

تست ۹

یکنوایی تابع $f(x) = \frac{2 \times 5^x + 1}{5^x}$ روی $\mathbb{R}$ به کدام صورت است؟

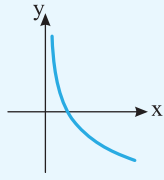
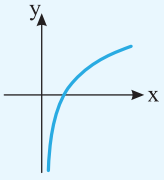
- (۱) اکیداً صعودی است. (۲) اکیداً نزولی است.
(۳) ابتدا اکیداً صعودی و سپس اکیداً نزولی است. (۴) ابتدا اکیداً نزولی و سپس اکیداً صعودی است.

ابتدا توجه کنید که $f(x) = \frac{2 \times 5^x}{5^x} + \frac{1}{5^x} = 2 + (\frac{1}{5})^x$. چون تابع $y = (\frac{1}{5})^x$ اکیداً نزولی است و نمودار تابع f با انتقال نمودار این تابع به اندازه دو واحد به سمت بالا به دست می‌آید، پس تابع f هم اکیداً نزولی است.

را حل

یکنوایی تابع‌های لگاریتمی

فرض کنید a عددی حقیقی، مثبت و مخالف ۱ باشد و $f(x) = \log_a x$. یکنوایی تابع f برحسب مقدار a به صورت زیر است:

$0 < a < 1$	$a > 1$
	
اکیداً نزولی	اکیداً صعودی

مثال: تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ اکیداً نزولی و تابع $g(x) = \log_2 x$ اکیداً صعودی است.

تست ۱۰ تابع $f(x) = \log_{(k+1)}(x+2)$ اکیداً صعودی است. حدود k کدام است؟

(۴) $-1 < k < 0$

(۳) $0 < k < 1$

(۲) $k > 1$

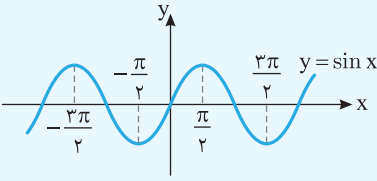
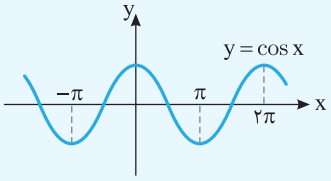
(۱) $k > 0$

در تابع $y = \log_a x$ اگر $a > 1$ ، آن‌گاه تابع اکیداً صعودی است. پس $k+1 > 1$ و در نتیجه $k > 0$. توجه کنید که نمودار تابع $y = \log_{(k+1)}(x+2)$ از انتقال نمودار تابع $y = \log_{(k+1)} x$ به اندازه دو واحد به چپ به دست می‌آید و دو تابع از نظر صعودی یا نزولی بودن مانند هم هستند.

راه حل

یکنوایی تابع‌های سینوس و کسینوس

تابع‌های سینوس و کسینوس غیر یکنوا هستند، اما بازه‌هایی وجود دارند که این تابع‌ها روی آن‌ها یکنوا هستند.

	
روی هر بازه به صورت $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ اکیداً صعودی است.	روی هر بازه به صورت $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$ اکیداً صعودی است.
روی هر بازه به صورت $[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}]$ اکیداً نزولی است.	روی هر بازه به صورت $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ اکیداً نزولی است.

تست ۱۱ تابع $f(x) = \sin x$ روی بازه $[a, \frac{3\pi}{4}]$ اکیداً نزولی است. حداقل مقدار a کدام است؟

(۴) $\frac{\pi}{2}$

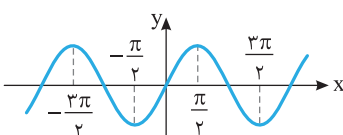
(۳) $\frac{\pi}{3}$

(۲) $\frac{\pi}{6}$

(۱) $\frac{\pi}{4}$

با توجه به نمودار تابع $y = \sin x$ معلوم می‌شود که حداقل مقدار a برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

راه حل

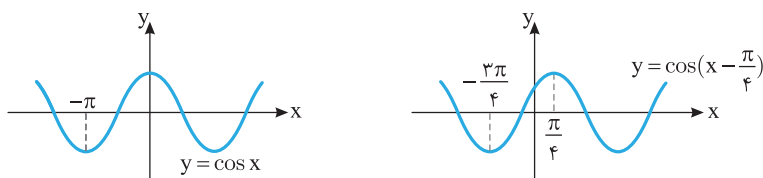


اگر تابع $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ روی بازه $[-\frac{3\pi}{4}, a]$ اکیداً صعودی باشد، بیشترین مقدار a کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) π

راه حل

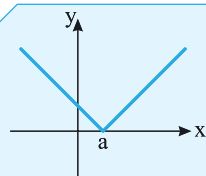
ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. برای این کار، باید نمودار تابع $y = \cos x$ را $\frac{\pi}{4}$ واحد به سمت راست منتقل کنیم.



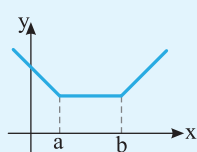
با توجه به نمودار تابع f معلوم می‌شود بازه‌ای که ابتدای آن $-\frac{3\pi}{4}$ باشد و f روی آن اکیداً صعودی باشد، بازه $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ است. بنابراین بیشترین

مقدار a برابر $\frac{\pi}{4}$ است.

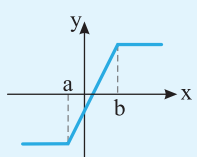
یکنوایی تابع‌های شامل قدرمطلق



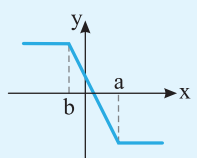
• تابع $f(x) = |x - a|$ روی بازه $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی و روی بازه $[a, +\infty)$ اکیداً صعودی است (شکل مقابل).



• نمودار تابع $f(x) = |x - a| + |x - b|$ به شکل مقابل است ($a < b$). واضح است که تابع f روی بازه $(-\infty, b]$ نزولی، روی بازه $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی، روی بازه $[a, +\infty)$ صعودی، روی بازه $[b, +\infty)$ اکیداً صعودی و روی بازه $[a, b]$ هم صعودی و هم نزولی (ثابت) است.



• اگر $a < b$ ، آن‌گاه نمودار تابع $f(x) = |x - a| - |x - b|$ به صورت مقابل است. واضح است که تابع f روی بازه $[a, b]$ اکیداً صعودی، روی بازه‌های $(-\infty, a]$ و $[b, +\infty)$ هم صعودی و هم نزولی (ثابت) و روی $\mathbb{R}$ صعودی است.

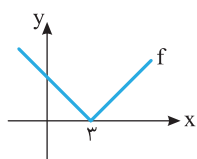


• اگر $a > b$ ، آن‌گاه نمودار تابع $f(x) = |x - a| - |x - b|$ به صورت مقابل است. واضح است که تابع f روی بازه $[b, a]$ اکیداً نزولی، روی بازه‌های $(-\infty, b]$ و $[a, +\infty)$ هم صعودی و هم نزولی (ثابت) و روی $\mathbb{R}$ نزولی است.

تابع $f(x) = |x - 3|$ روی بازه $[a, a + 2]$ اکیداً یکنواست. مقدار a کدام عدد صحیح نیست؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

راه حل



تابع f روی بازه $(-\infty, 3]$ اکیداً نزولی است. پس اگر f روی بازه $[a, a + 2]$ اکیداً نزولی باشد، حداکثر برابر ۳ است. بنابراین $a + 2 \leq 3$ ، پس $a \leq 1$. تابع f روی بازه $[3, +\infty)$ اکیداً صعودی است. پس اگر f روی بازه $[a, a + 2]$ اکیداً صعودی باشد، a حداقل برابر ۳ است، یعنی $a \geq 3$. مجموعه مقادیر ممکن a اجتماع این دو مجموعه است، یعنی $a \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$

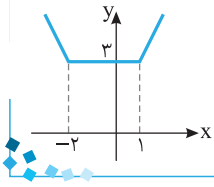
بنابراین a فقط عدد صحیح ۲ نمی‌تواند باشد.

تست ۱۴

تابع $f(x) = |x-1| + |x+2|$ روی بازه $[a, +\infty)$ صعودی است. کمترین مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) -۲

را حل



نمودار تابع f به صورت مقابل است. از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازه $[-2, +\infty)$ و هر بازه‌ای به صورت $[b, +\infty)$ که $b \geq -2$ ، صعودی است. بنابراین کمترین مقدار a برابر -۲ است.

تست ۱۵

به ازای چه مقادیری از m ، تابع $f(x) = |x-m+1| - |x-3m+3|$ روی $\mathbb{R}$ نزولی است؟

- (۱) $m \leq 1$ (۲) $m \geq 1$ (۳) $m > 1$ (۴) $m < 1$

را حل

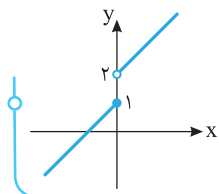
نمودار تابع $y = |x-a| - |x-b|$ به صورت یا است، که حالت اول به شرط $a < b$ و حالت دوم به شرط $a > b$ رخ می‌دهد.

اکنون دقت کنید که $f(x) = |x - \underbrace{(m-1)}_a| - |x - \underbrace{(3m-3)}_b|$. بنابراین برای آنکه تابع f روی $\mathbb{R}$ نزولی باشد، باید $a \geq b$:

$$m-1 \geq 3m-3 \Rightarrow 2m \leq 2 \Rightarrow m \leq 1$$

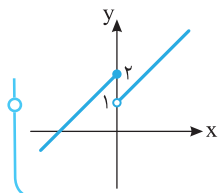
یکنوایی تابع‌های چندضابطه‌ای

برای بررسی یکنوایی تابع‌های چندضابطه‌ای گاهی می‌توان از نمودار آن‌ها استفاده کرد.



مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ x+2 & x > 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. نمودار این تابع به شکل مقابل است:

از روی نمودار این تابع معلوم می‌شود که از چپ به راست همیشه نمودار تابع بالا می‌رود. در نتیجه این تابع اکیداً صعودی است.



مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. نمودار این تابع به شکل مقابل است:

از روی نمودار این تابع معلوم می‌شود که از چپ به راست همیشه نمودار تابع بالا نمی‌رود، یا همیشه پایین نمی‌آید. بنابراین تابع f یکنوا یا اکیداً یکنوا نیست.

تست ۱۶

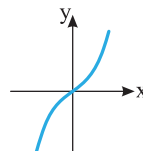
کدام تابع روی $\mathbb{R}$ یکنوا نیست؟

- (۱) $y = x|x|$ (۲) $y = x + |x|$ (۳) $y = |x| - x$ (۴) $y = x|x-1|$

را حل

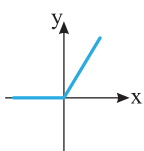
نمودار توابع داده شده را رسم می‌کنیم:

گزینه (۱) تابع $y = x|x|$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.



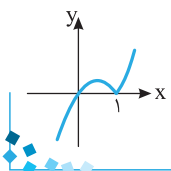
$$y = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

گزینه (۲) تابع $y = x + |x|$ روی $\mathbb{R}$ صعودی است.



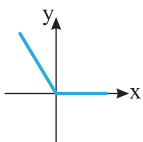
$$y = x + |x| = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

گزینه (۴) تابع $y = x|x-1|$ روی $\mathbb{R}$ غیریکنواست.



$$y = x|x-1| = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 1 \\ -x^2 + x & x < 1 \end{cases}$$

گزینه (۳) تابع $y = |x| - x$ روی $\mathbb{R}$ نزولی است.



$$y = |x| - x = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

تست ۱۷

تابع $f(x) = |x^2 - 1| - x^2$ روی بازه $[a, b]$ اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار $b - a$ کدام است؟

(۴) ۲

(۳) ۱

(۲) $\frac{1}{4}$

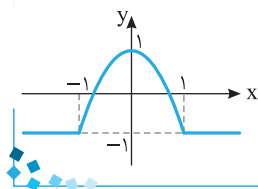
(۱) $\frac{1}{2}$

راه حل

ضابطه تابع را به صورت زیر می نویسیم و نمودار آن را رسم می کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 - x^2 & x^2 \geq 1 \\ -x^2 + 1 - x^2 & x^2 \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} -1 & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ -2x^2 + 1 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

بنابراین تابع f روی بازه $[-1, 0]$ اکیداً صعودی است. پس $a = -1$ ، $b = 0$ و در نتیجه $b - a = 1$.



تست ۱۸

تابع $f(x) = x|1 - x|$ روی بازه $[a, b]$ اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار ممکن $b - a$ کدام است؟

(۴) ۱

(۳) $\frac{3}{4}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) $\frac{1}{4}$

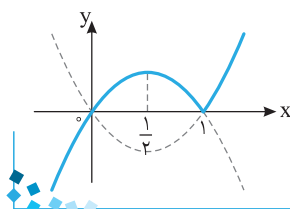
راه حل

ابتدا ضابطه تابع f را به صورت دوضابطه ای می نویسیم و نمودار آن را رسم می کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x(1-x) & x \leq 1 \\ -x(1-x) & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} x - x^2 & x \leq 1 \\ x^2 - x & x \geq 1 \end{cases}$$

از روی نمودار تابع f معلوم می شود که این تابع روی بازه $[\frac{1}{2}, 1]$ و همه زیرمجموعه های آن اکیداً نزولی است.

پس بیشترین مقدار $b - a$ برابر است با $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.



تست ۱۹

اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x > 1 \\ k & x = 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$ صعودی باشد، حدود k کدام است؟

(۴) $1 \leq k \leq 4$

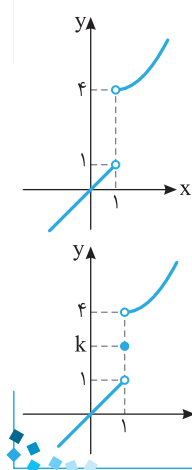
(۳) $1 \leq k < 4$

(۲) $1 < k \leq 4$

(۱) $1 < k < 4$

راه حل

ابتدا نمودار ضابطه های اول و سوم تابع f را رسم می کنیم:



از روی این شکل معلوم می شود برای اینکه تابع f صعودی باشد باید $1 \leq k \leq 4$ و نمودار تابع f به صورت مقابل باشد

نکته

- اگر تابع f اکیداً صعودی باشد و $f(a) < f(b)$ ، آن گاه $a < b$.
- اگر تابع f اکیداً نزولی باشد و $f(a) < f(b)$ ، آن گاه $a > b$.

تست ۲۰

تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است و $f(3x-1) < f(2-x)$. حدود x کدام است؟

(۴) $x < \frac{3}{4}$

(۳) $x > \frac{3}{4}$

(۲) $x < 1$

(۱) $x > 1$

راه حل

چون تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است، پس

$$f(3x-1) < f(2-x) \Rightarrow 3x-1 > 2-x \Rightarrow 4x > 3 \Rightarrow x > \frac{3}{4}$$

تست ۲۱

اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد و $f(2)=0$ ، دامنه تابع $g(x)=\sqrt{-f(x)}$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 2]$ (۲) $[2, +\infty)$ (۳) $[0, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 0]$

راه حل

باید $-f(x) \geq 0$ ، پس $f(x) \leq 0$. از طرف دیگر، چون تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است و $f(2)=0$ ، پس $f(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(2) \Rightarrow x \geq 2$ بنابراین $D_g = [2, +\infty)$.

تست ۲۲

مجموعه جواب‌های نامعادله $\log_2(2^x+1) < \log_2(3+2^{x-1})$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 1)$ (۲) $(-\infty, 2)$ (۳) $(-\infty, 3)$ (۴) $(-\infty, 4)$

راه حل

چون تابع $y = \log_2 x$ اکیداً صعودی است، پس

$$\log_2(2^x+1) < \log_2(3+2^{x-1}) \Rightarrow 2^x+1 < 3+2^{x-1} \Rightarrow 2^x-2^{x-1} < 2 \Rightarrow 2^{x-1}(2-1) < 2 \Rightarrow 2^{x-1} < 2^1$$

چون تابع $y = 2^x$ اکیداً صعودی است، پس

$$2^{x-1} < 2^1 \Rightarrow x-1 < 1 \Rightarrow x < 2$$

تست ۲۳

اگر تابع f روی مجموعه $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، دامنه تابع $g(x)=\sqrt{f(x+3)-f(2x)}$ شامل چند عدد طبیعی نیست؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

راه حل

چون دامنه تابع f مجموعه $\mathbb{R}$ است، دامنه تابع g مجموعه همه عددهای حقیقی است که زیر رادیکال منفی نباشد. توجه کنید که

$$f(x+3)-f(2x) \geq 0 \Rightarrow f(x+3) \geq f(2x) \Rightarrow x+3 \leq 2x \Rightarrow x \geq 3$$

بنابراین $D_g = [3, +\infty)$ و عددهای طبیعی ۱ و ۲ در دامنه تابع g نیستند.

نکته

- اگر تابع‌های f و g صعودی باشند، آن‌گاه تابع $f+g$ صعودی است.
- اگر تابع‌های f و g اکیداً صعودی باشند، آن‌گاه تابع $f+g$ اکیداً صعودی است.
- اگر تابع‌های f و g نزولی باشند، آن‌گاه تابع $f+g$ نزولی است.
- اگر تابع‌های f و g اکیداً نزولی باشند، آن‌گاه تابع $f+g$ اکیداً نزولی است.

مثال: الف) تابع‌های $y=x^3$ و $y=2x+1$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی‌اند. بنابراین تابع $y=x^3+2x+1$ هم روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

ب) تابع‌های $y=(\frac{1}{3})^x$ و $y=(\frac{1}{4})^x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی‌اند. بنابراین تابع $y=(\frac{1}{3})^x+(\frac{1}{4})^x$ هم روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.

تست ۲۴

اگر $f(x)=x+3^x$ ، چند عدد طبیعی در مجموعه جواب‌های نامعادله $f(2x+3) < f(x+7)$ وجود دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

راه حل

چون f مجموع دو تابع اکیداً صعودی است، پس خودش هم اکیداً صعودی است. بنابراین $f(2x+3) < f(x+7) \Rightarrow 2x+3 < x+7 \Rightarrow x < 4$ بنابراین سه عدد طبیعی ۱، ۲ و ۳ در مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر هستند.

تست ۲۵

اگر $f(x)=x+\log_3 x$ ، چند عدد طبیعی در مجموعه جواب‌های نامعادله $f(x)^2 \leq 5f(x)-4$ وجود دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

راه حل

ابتدا توجه کنید که تابع f مجموع دو تابع اکیداً صعودی است، پس خودش هم اکیداً صعودی است. اکنون توجه کنید که

$$f(x)^2 \leq 5f(x)-4 \Rightarrow f(x)^2-5f(x)+4 \leq 0 \Rightarrow (f(x)-1)(f(x)-4) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 4$$

از طرف دیگر $f(1)=1$ و $f(3)=4$. در نتیجه، چون تابع f اکیداً صعودی است، پس $1 \leq f(x) \leq 4 \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(3) \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$ بنابراین سه عدد طبیعی ۱، ۲ و ۳ در مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر هستند.

نکته

تفاضل دو تابع یکنوا لزوماً یکنوا نیست.

مثال: الف) توابع $f(x)=3x$ و $g(x)=2x$ صعودی‌اند و تابع $(f-g)(x)=x$ نیز صعودی است.

ب) توابع $f(x)=2x$ و $g(x)=3x$ صعودی‌اند و تابع $(f-g)(x)=-x$ نزولی است.

پ) توابع $f(x)=x^3$ و $g(x)=3x$ صعودی‌اند و تابع $h(x)=(f-g)(x)=x^3-3x$ غیر یکنواست. زیرا مثلاً $h(2)<h(0)<h(2)$.

$$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{2} \Rightarrow h(-\frac{1}{2}) > h(\frac{1}{2})$$

پس تابع h نزولی نیست. همچنین

پس تابع h صعودی نیست.

نکته

- اگر f تابعی صعودی باشد، آن‌گاه تابع $-f$ نزولی است.
- اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد، آن‌گاه تابع $-f$ اکیداً نزولی است.
- اگر f تابعی نزولی باشد، آن‌گاه تابع $-f$ صعودی است.
- اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد، آن‌گاه تابع $-f$ اکیداً صعودی است.

مثال: تابع $y=[x]$ صعودی است. پس تابع $y=-[x]$ نزولی است.

تست ۲۶

وضعیت یکنوایی تابع $f(x)=\frac{7^x-5^x}{6^x}$ روی مجموعه $\mathbb{R}$ کدام است؟

(۲) نزولی است.

(۱) صعودی است.

(۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی است.

(۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی است.

$$f(x)=\frac{7^x-5^x}{6^x}=\frac{7^x}{6^x}-\frac{5^x}{6^x}=\left(\frac{7}{6}\right)^x-\left(\frac{5}{6}\right)^x$$

ابتدا توجه کنید که

راه حل

اکنون توجه کنید که تابع $y=\left(\frac{7}{6}\right)^x$ صعودی است. همین‌طور تابع $y=\left(\frac{5}{6}\right)^x$ نزولی است، پس تابع $y=-\left(\frac{5}{6}\right)^x$ صعودی است. بنابراین تابع f

مجموع دو تابع صعودی است، پس خودش هم صعودی است.

نکته

فرض کنید f تابعی صعودی یا اکیداً صعودی و a عددی حقیقی باشد. در این صورت وضعیت یکنوایی تابع af به صورت زیر است:

	$a=0$	$a>0$	$a<0$
f صعودی	af تابعی ثابت است. پس هم نزولی است و هم صعودی.	af تابعی صعودی است.	af تابعی نزولی است.
f اکیداً صعودی	af تابعی ثابت است. پس هم نزولی است و هم صعودی.	af تابعی اکیداً صعودی است.	af تابعی اکیداً نزولی است.

مثال: تابع $y=\sqrt{x}$ روی دامنه‌اش صعودی است، پس تابع $y=2\sqrt{x}$ صعودی و تابع $y=-\frac{1}{2}\sqrt{x}$ نزولی است.

نکته

فرض کنید f تابعی نزولی یا اکیداً نزولی و a عددی حقیقی باشد. در این صورت وضعیت یکنوایی تابع af به صورت زیر است:

	$a=0$	$a>0$	$a<0$
f نزولی	af تابعی ثابت است. پس هم نزولی است و هم صعودی.	af تابعی نزولی است.	af تابعی صعودی است.
f اکیداً نزولی	af تابعی ثابت است. پس هم نزولی است و هم صعودی.	af تابعی اکیداً نزولی است.	af تابعی اکیداً صعودی است.

مثال: تابع $y = \cos x$ روی بازه $[0, \pi]$ نزولی است، پس تابع $y = \sqrt{2} \cos x$ روی این بازه نزولی است و تابع $y = -3 \cos x$ روی این بازه صعودی است.

تست
 □□□□

تابع $f(x) = 2 \times 3^{x+1} - 3^{x+k}$ اکیداً نزولی است. مجموعه مقادیر ممکن k کدام است؟

- (۱) $(\log_3 6, +\infty)$ (۲) $(\log_3 6, +\infty)$ (۳) $(-\infty, \log_3 6)$ (۴) $(-\infty, \log_3 6)$

را حل

توجه کنید که

$$f(x) = 2 \times 3 \times 3^x - 3^x \times 3^k = 3^x (6 - 3^k)$$

چون تابع $y = 3^x$ اکیداً صعودی است، پس باید $6 - 3^k$ منفی باشد تا تابع f اکیداً نزولی شود. پس $6 - 3^k < 0 \Rightarrow 3^k > 6 \Rightarrow k > \log_3 6$ بنابراین مجموعه مقادیر ممکن k برابر $(\log_3 6, +\infty)$ است.

نکته

اگر تابع‌های f و g یکنوا باشند، ممکن است تابع $f \times g$ یکنوا نباشد.

مثال: تابع‌های $f(x) = x$ و $g(x) = 2x$ هر دو یکنوا هستند، اما تابع $(f \times g)(x) = 2x^2$ یکنوا نیست.

نکته

- اگر تابع‌های f و g صعودی باشند و مقادیر این دو تابع همگی مثبت باشند، آن‌گاه تابع $f \times g$ نیز صعودی است.
- اگر تابع‌های f و g اکیداً صعودی باشند و مقادیر این دو تابع همگی مثبت باشند، آن‌گاه تابع $f \times g$ نیز اکیداً صعودی است.
- اگر تابع‌های f و g نزولی باشند و مقادیر این دو تابع همگی مثبت باشند، آن‌گاه تابع $f \times g$ نیز نزولی است.
- اگر تابع‌های f و g اکیداً نزولی باشند و مقادیر این دو تابع همگی مثبت باشند، آن‌گاه تابع $f \times g$ نیز اکیداً نزولی است.

مثال: تابع‌های $f(x) = 2^x$ و $g(x) = \sqrt{x} + 1$ هر دو روی بازه $[0, +\infty)$ صعودی‌اند و مقادیرشان مثبت است. بنابراین تابع $(f \times g)(x) = (\sqrt{x} + 1)2^x$ روی بازه $[0, +\infty)$ صعودی است.

تست
 □□□□

تابع f روی مجموعه $\mathbb{R}$ نزولی است و مقادیرش مثبت‌اند. کدام‌یک از تابع‌های زیر حتماً نزولی است؟

- (۱) $y = x - f(x)$ (۲) $y = x + f(x)$ (۳) $y = 2^x f(x)$ (۴) $y = \frac{f(x)}{2^x}$

را حل

ابتدا توجه کنید که تابع $y = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ تابعی نزولی با مقادیر مثبت است. پس تابع $y = \frac{f(x)}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x f(x)$ حتماً نزولی است.

نکته

- اگر f تابعی صعودی باشد و مقادیر f همگی مثبت یا همگی منفی باشند، آن‌گاه تابع $\frac{1}{f}$ نزولی است.
- اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد و مقادیر f همگی مثبت یا همگی منفی باشند، آن‌گاه تابع $\frac{1}{f}$ اکیداً نزولی است.
- اگر f تابعی نزولی باشد و مقادیر f همگی مثبت یا همگی منفی باشند، آن‌گاه تابع $\frac{1}{f}$ صعودی است.
- اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد و مقادیر f همگی مثبت یا همگی منفی باشند، آن‌گاه تابع $\frac{1}{f}$ اکیداً صعودی است.

مثال: تابع $y = \sqrt{x}$ روی بازه $(0, +\infty)$ صعودی است و مقادیرش مثبت‌اند. پس تابع $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ روی بازه $(0, +\infty)$ نزولی است.

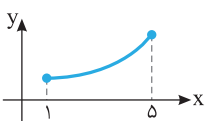
تست
 □□□□

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام تابع روی دامنه‌اش اکیداً نزولی است؟

- (۱) $y = \frac{1}{f(x)}$ (۲) $y = f^2(x)$ (۳) $y = x^2 f(x)$ (۴) $y = x f(x)$

را حل

تابع f روی دامنه‌اش اکیداً صعودی با مقادیر مثبت است. بنابراین تابع $y = \frac{1}{f(x)}$ روی دامنه‌اش اکیداً نزولی است.



توابع صعودی و نزولی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سطح ۱

۱۴- کدام تابع صعودی است؟

(۱) $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4)\}$

(۳) $f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 1)\}$

۱۵- کدام تابع اکیداً نزولی است؟

(۱) $f = \{(-3, -1), (-2, 2), (-1, 0)\}$

(۳) $f = \{(-1, -2), (-3, 0), (1, -6)\}$

۱۶- کدام تابع غیریکنوا است؟

(۱) $f = \{(-2, 1), (-1, 2), (1, 3)\}$

(۳) $h = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

۱۷- اگر تابع $f = \{(1, 2a+1), (2, a-2), (3, 2-a)\}$ نزولی باشد، حدود a کدام است؟

(۱) $a \geq -3$ (۲) $a \geq -2$ (۳) $a \geq 2$ (۴) $a \geq 3$

۱۸- اگر تابع $f = \{(1, a^2-1), (2, a+1), (3, 3a-1)\}$ اکیداً صعودی باشد، حدود a کدام است؟

(۱) $-1 < a < 2$ (۲) $1 < a < 2$ (۳) $0 < a < 2$ (۴) $-1 < a < 1$

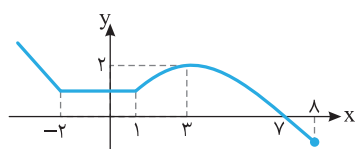
۱۹- تابع $f = \{(1, a-2), (2, 3a+4), (3, 2a-b)\}$ هم صعودی است و هم نزولی. مقدار $a+b$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) -2 (۳) -4 (۴) -5

۲۰- شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ را نشان می‌دهد. اگر تابع f روی بازه $[a, b]$ صعودی باشد،

حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۸


۲۱- تابع $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟

(۱) $(-2, 1)$ (۲) $(1, 2)$ (۳) $(-2, 2)$ (۴) $(0, +\infty)$

۲۲- اگر $-1 < m < 1$ و $m \neq 0$ ، آنگاه تابع $g(x) = |m|^x$ روی $\mathbb{R}$ چگونه است؟

(۱) نه صعودی نه نزولی (۲) صعودی (۳) اکیداً صعودی (۴) اکیداً نزولی

۲۳- کدام تابع روی $\mathbb{R}$ نزولی است؟

(۱) $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$ (۲) $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$ (۳) $f(x) = \begin{cases} -x+1 & x \geq 0 \\ -x-1 & x < 0 \end{cases}$ (۴) $f(x) = \begin{cases} -x-1 & x \geq 0 \\ -x+1 & x < 0 \end{cases}$

۲۴- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \geq 0 \\ -x+1 & x < 0 \end{cases}$ مفروض است. تابع f روی کدام بازه اکیداً نزولی است؟

(۱) $(-\infty, 0]$ (۲) $[-2, +\infty)$ (۳) $[0, +\infty)$ (۴) $\mathbb{R}$

۲۵- تابع $f(x) = \frac{1}{-x+2}$ روی بازه $(-\infty, a)$ صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -1 (۴) -2

کتاب درسی

کتاب درسی

کتاب درسی

۲۶- تابع نمایشی $f(x) = (2k-3)^x$ صعودی است. حدود k کدام است؟

- (۱) $k > 0$ (۲) $k > 1$ (۳) $k > 2$ (۴) $k > \frac{3}{2}$

۲۷- تابع $f(x) = \log_{(k+1)}(x+2)$ اکیداً صعودی است. حدود k کدام است؟

- (۱) $k > 0$ (۲) $k > 1$ (۳) $0 < k < 1$ (۴) $-1 < k < 0$

۲۸- کدام تابع نزولی است؟

- (۱) $y = \frac{1}{x}$ (۲) $y = \sqrt{x-1}$ (۳) $y = x^2 - 1$ (۴) $y = -\sqrt{x+1}$

۲۹- اگر f ، تابعی اکیداً صعودی روی $\mathbb{R}$ باشد و $f(2x+1) < f(x)$ ، مجموعه مقادیر x کدام است؟

- (۱) $(1, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(-\infty, 5)$ (۴) $(-\infty, -1)$

۳۰- مجموعه جواب‌های نامعادله $16^{2x-2} \geq 8^{3x-1}$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 5]$ (۲) $(5, +\infty)$ (۳) $(-5, 5)$ (۴) $(-\infty, -5]$

۳۱- مجموعه جواب‌های نامعادله $(\sqrt{2}-1)^{3x-1} + 1 > \sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) $(1, +\infty)$ (۲) $(-\infty, \frac{2}{3})$ (۳) $(\sqrt{2}, +\infty)$ (۴) $(\frac{2}{3}, +\infty)$

۳۲- اگر $-1 < \log x < 1$ ، حدود x کدام است؟

- (۱) $x \in (0, 10)$ (۲) $x \in (\frac{1}{10}, 1)$ (۳) $x \in (\frac{1}{10}, 10)$ (۴) $x \in (\frac{1}{10}, +\infty)$

۳۳- مجموعه جواب‌های نامعادله $\log_3(10-x) \leq 2$ کدام است؟

- (۱) $(1, 2]$ (۲) $[1, +\infty)$ (۳) $[1, 9)$ (۴) $[1, 10)$

۳۴- اگر $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > 2$ ، حدود x کدام است؟

- (۱) $x > -\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{4} < x < 1$ (۳) $x < -\frac{3}{4}$ (۴) $-1 < x < -\frac{3}{4}$



۳۵- به ازای چند عدد صحیح x تابع $f = \{(-2, 4x-3), (0, x^2), (x^2, 9)\}$ صعودی است؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴

۳۶- تابع $f = \{(-a^2-1, a), (0, 2), (a^2+1, 2a+1)\}$ صعودی است. حدود a کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$ (۲) $-\frac{1}{2} \leq a \leq 2$ (۳) $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ (۴) $-2 \leq a \leq 2$

۳۷- تابع $f = \{(1, 5), (2, |m|), (4, \frac{4}{|m|})\}$ نزولی است. m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۳۸- تابع نمایشی $f(x) = (k^2-1)^x$ روی $\mathbb{R}$ نزولی است. حدود k کدام است؟

- (۱) $|k| > \sqrt{2}$ (۲) $|k| > 1$ (۳) $1 < |k| < \sqrt{2}$ (۴) $|k| < \sqrt{2}$

۳۹- تابع $f(x) = (k^2 + \frac{1}{4})^x$ روی $\mathbb{R}$ هم صعودی است و هم نزولی. تابع $g(x) = k^{2x}$ روی $\mathbb{R}$ چگونه است؟

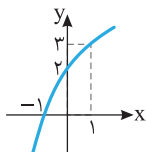
- (۱) صعودی (۲) نزولی (۳) غیریکنوا (۴) ثابت

۴۰- اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ نزولی باشد و $f(a^2-1) > f(3a+3)$ ، حدود a کدام است؟

- (۱) $a < 4$ (۲) $-1 < a < 4$ (۳) $a < -1$ (۴) $a > 4$

۴۱- اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ نزولی باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

- (۱) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x^2) \leq 0$ (۲) $x \neq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(\frac{1}{x})$
 (۳) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(|x|) \leq f(x)$ (۴) $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(\sqrt{x})$



۴۲- اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد، کدام نابرابری همواره برقرار نیست؟

- (۱) $f(|x|) \geq 2$ (۲) $f(x^2 + 1) \geq 3$
 (۳) $f([x] - x) > 0$ (۴) $f(\sin x) \geq 3$

۴۳- مجموعه جواب‌های نامعادله $(\frac{5}{y})^{3-2x} < (\frac{5}{y})^{x+2}$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, -5)$ (۲) $(-5, +\infty)$ (۳) $(-5, 5)$ (۴) $(5, +\infty)$

۴۴- مجموعه جواب‌های نامعادله $4^{x-3} < 3 \cdot 2^{5-x}$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, \frac{3}{5})$ (۲) $(-\infty, \frac{3}{2})$ (۳) $(\frac{2}{5}, +\infty)$ (۴) $(\frac{3}{2}, +\infty)$

۴۵- مجموعه جواب‌های نامعادله $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2x+1} > (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{x+2}$ کدام است؟

- (۱) $(-1, +\infty)$ (۲) $(-\infty, -1)$ (۳) $(-\infty, 0)$ (۴) $(0, +\infty)$

۴۶- مجموعه جواب‌های نامعادله $4^{x+1} - 5 \times 2^x + 1 \geq 0$ به صورت $\mathbb{R} - (a, b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱

۴۷- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{3-3^{1-2x}}$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 0]$ (۲) $[-1, +\infty)$ (۳) $(-\infty, 1]$ (۴) $[0, +\infty)$

۴۸- دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{2^x - 8}}{\sqrt{81 - 3^x}}$ به صورت $[a, b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

۴۹- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{2^{x+1} - 4^x}$ بازه $(-\infty, a]$ است. مقدار a کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۵۰- چند عدد طبیعی در نامعادله $\log_2(\log_3(2x+1)) > 2$ صدق نمی‌کنند؟

- (۱) ۳۸ (۲) ۳۹ (۳) ۴۰ (۴) ۴۱

۵۱- چند عدد صحیح در نامعادله $-3 < \log_{\frac{1}{5}}(4x+1) < -2$ صدق می‌کنند؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۵ (۳) ۲۷ (۴) ۲۹

۵۲- مجموعه جواب‌های نامعادله $\log(x+2) > \log(2x+1)$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 1)$ (۲) $(-\frac{1}{2}, 1)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(-2, -\frac{1}{2})$

۵۳- مجموعه جواب‌های نامعادله $\log_{\frac{1}{5}}(\log_2 x) > 1$ کدام است؟

- (۱) $(0, 1)$ (۲) $(0, \sqrt{2})$ (۳) $(1, \sqrt{2})$ (۴) $(\sqrt{2}, +\infty)$

۵۴- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log_2(x+2)}$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 2)$ (۲) $(-2, 1]$ (۳) $(-1, 2)$ (۴) $(-2, 1)$

۵۵- دامنه تابع $f(x) = \log(\log_{\frac{1}{2}}(4-x)-1)$ بازه (a, b) است. مقدار $b-a$ کدام است؟

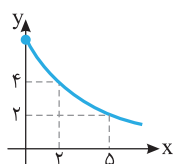
- (۱) $0/8$ (۲) $0/2$ (۳) ۱ (۴) $0/4$

- ۵۶- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\log \frac{5x-1}{x+2}}$ چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۲
- ۵۷- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\log_3 x - \log_x 3}$ به صورت $D_f = [-\frac{1}{a}, b) \cup [a, +\infty)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۵۸- اگر تابع f اکیداً صعودی باشد، $f(1) = 0$ و $D_f = \mathbb{R}$ ، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{-xf(x)}$ کدام است؟
 (۱) $(1, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 0]$ (۳) $\mathbb{R} - (0, 1)$ (۴) $[0, 1]$
- ۵۹- اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشد و $f(4) = 0$ ، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{9-x^2}{f(x)}}$ شامل چند عدد طبیعی است؟
 (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) نامتناهی (۴) صفر
- ۶۰- f یک تابع اکیداً نزولی روی $\mathbb{R}$ است که نمودار آن از مبدأ مختصات می‌گذرد و $g(x) = -x^2 + 2x$. دامنه تابع $h(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)g(x)}}$ کدام است؟
 (۱) $(2, +\infty)$ (۲) $(1, 2)$ (۳) $(1, 2]$ (۴) $[2, +\infty)$
- ۶۱- تابع f با دامنه $[0, +\infty)$ روی دامنه‌اش اکیداً صعودی است. مجموعه جواب‌های نامعادله $f(2x-1) < f(x+1)$ کدام است؟
 (۱) $[\frac{1}{2}, 2)$ (۲) $(\frac{1}{2}, 2)$ (۳) $(0, 2)$ (۴) $[0, 2)$
- ۶۲- اگر $f(x) = (\frac{1}{3})^x - 5^x$ ، مجموعه جواب‌های نامعادله $f(2x^2+1) < f(x^2+x+3)$ شامل چند عدد صحیح نیست؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۶۳- تابع $f(x) = |x-2| + |x+1|$ روی بازه $[a, b]$ هم صعودی است هم نزولی. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۶۴- تابع $f(x) = |x-3| - |x+1|$ روی بازه $[a, b]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۶۵- کدام تابع روی $\mathbb{R}$ صعودی نیست؟
 (۱) $y = x + |x|$ (۲) $y = |x| - x$ (۳) $y = x|x|$ (۴) $y = \frac{x}{|x|+1}$
- ۶۶- تابع $f(x) = x[x]$ روی بازه $(-\infty, 0)$ چگونه است؟ ([] علامت جزء صحیح است).
 (۱) صعودی (۲) نزولی (۳) هم صعودی و هم نزولی (۴) غیر یکنوا
- ۶۷- حدود a که به ازای آن تابع $f(x) = \begin{cases} x+a & x \geq 1 \\ 2x+1 & x < 1 \end{cases}$ صعودی باشد، کدام است؟
 (۱) $a \geq 2$ (۲) $a > 1$ (۳) $a \leq 3$ (۴) $a \leq 2$
- ۶۸- تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}+1 & x \geq 1 \\ 3x-k & x < 1 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ صعودی است. حدود k کدام است؟
 (۱) $k \leq 2$ (۲) $k \leq 1$ (۳) $k \geq 2$ (۴) $k \geq 1$
- ۶۹- تابع درجه دوم $f(x) = (k+2)x^2 + x$ روی بازه $(-\infty, 1]$ صعودی است. حدود k کدام است؟
 (۱) $k < -2$ (۲) $k \geq -\frac{5}{2}$ (۳) $-\frac{5}{2} \leq k < -2$ (۴) $-2 < k < -1$
- ۷۰- تابع $f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 1$ روی بازه $[2, 4]$ غیر یکنواست. حدود k کدام است؟
 (۱) $1 < k < 3$ (۲) $k > -1$ (۳) $-3 < k < -1$ (۴) $k < 1$

- ۷۱- تابع $f(x) = x + k^2|x|$ روی $\mathbb{R}$ صعودی است. حدود k کدام است؟
 (۱) $k \geq 1$ (۲) $k \leq -1$ (۳) $-1 \leq k \leq 1$ (۴) $k \in \mathbb{R}$
- ۷۲- تابع $f(x) = x|x+2|$ روی بازه $[a, b]$ نزولی است. بیشترین مقدار ممکن کدام $b-a$ است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲
- ۷۳- تابع $f(x) = x^2 - 4|x-1|$ روی بازه $[a, 1]$ اکیداً صعودی و روی بازه $[1, b]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار ممکن $b-a$ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵



- ۷۴- چند تابع اکیداً صعودی از مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ به مجموعه $B = \{1, 2, 3, 4\}$ وجود دارد؟
 (۱) ۴ (۲) ۲۷ (۳) ۶۴ (۴) ۸۱
- ۷۵- دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-3^2x + 4 \times 3^x - 3}}$ کدام است؟
 (۱) $[0, 1]$ (۲) $[0, 2]$ (۳) $(0, 1)$ (۴) $(0, 9)$
- ۷۶- مجموعه جواب‌های نامعادله $\log_x x^2 \geq x$ کدام است؟
 (۱) $(0, 2]$ (۲) $(1, 2]$ (۳) $(0, 1)$ (۴) $(0, 2] - \{1\}$
- ۷۷- مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{1}{1+\log x} + \frac{1}{1-\log x} > 2$ کدام است؟
 (۱) $(0, 10) - \{1\}$ (۲) $(1, 10)$ (۳) $(\frac{1}{10}, 1)$ (۴) $(\frac{1}{10}, 10) - \{1\}$
- ۷۸- مجموع عددهای صحیحی که در نامعادله $|\log_4(x-1)| < 1$ صدق می‌کنند، چقدر است؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹
- ۷۹- مجموعه جواب‌های نامعادله $\log_x(12-x) > 1$ بازه (a, b) است. مقدار $a+b$ کدام است؟
 (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸
- ۸۰- اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{f(|x|)} - 4$ کدام است؟
 (۱) $[0, 2]$ (۲) $[-2, 2]$ (۳) $[-1, 1]$ (۴) $[2, 4]$



- ۸۱- اگر f تابعی اکیداً نزولی روی مجموعه اعداد حقیقی باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{f(|2x|)} - f(|x-1|)$ کدام است؟
 (۱) $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ (۲) $[-\frac{4}{3}, \frac{1}{2}]$ (۳) $[-\frac{1}{3}, 1]$ (۴) $[-1, \frac{1}{3}]$
- ۸۲- اگر f تابعی اکیداً نزولی با دامنه $\mathbb{R}$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{f(x^2) - f(\frac{24}{x})}}$ شامل چند عدد صحیح است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۸۳- اگر توابع $f+g$ و $g-f$ روی $\mathbb{R}$ نزولی باشند، کدام تابع روی $\mathbb{R}$ صعودی است؟
 (۱) f (۲) g (۳) $-f$ (۴) $-g$
- ۸۴- اگر تابع $f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ روی بازه‌ای صعودی باشد، آن‌گاه تابع $g(x) = \frac{3x^3 - x^2 + 12}{x^2}$ روی همان بازه چگونه است؟
 (۱) صعودی (۲) نزولی (۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

۸۵- اگر تابع f روی بازه $(-\infty, 0)$ نزولی باشد، کدام یک از تابع‌های زیر روی همین بازه صعودی است؟

(۱) $y=f(x)-x$ (۲) $y=f(x^3)$ (۳) $y=f^3(x)$ (۴) $y=x-f(x)$

۸۶- اگر تابع f نزولی باشد، کدام تابع حتماً نزولی است؟

(۱) $y=f(x)-\sqrt{x}$ (۲) $y=\sqrt{x}f(x)$ (۳) $y=\frac{\sqrt{x}}{f(x)}$ (۴) $y=f(x)+\sqrt{x}$

۸۷- اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ نزولی و با مقادیر منفی باشد، کدام تابع روی $\mathbb{R}$ نزولی است؟

(۱) $y=2^x f(x)$ (۲) $y=\frac{f(x)}{2^x}$ (۳) $y=2^x + f(x)$ (۴) $y=2^x - f(x)$

۸۸- اگر تابع $g(x)=x^3+f(x)$ صعودی و تابع $h(x)=x^3-f(x)$ نزولی باشد، آن‌گاه تابع f

(۱) صعودی است. (۲) نزولی است. (۳) ثابت است. (۴) غیر یکنواست.

۸۹- اگر $g(x)=3x+2f(x)$ تابعی صعودی روی $\mathbb{R}$ و $h(x)=2x-3f(x)$ تابعی نزولی روی $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه تابع f روی $\mathbb{R}$

(۱) صعودی است. (۲) نزولی است. (۳) هم صعودی است و هم نزولی. (۴) نه صعودی است نه نزولی.

۹۰- اگر تابع f روی بازه $(0, +\infty)$ صعودی باشد، کدام یک از تابع‌های زیر روی همین بازه حتماً نزولی است؟

(۱) $y=f(x)-2x$ (۲) $y=-\frac{3}{f(x)}$ (۳) $y=-f^3(x)$ (۴) $y=4+f(x)$

۹۱- تابع $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ روی بازه $(0, +\infty)$

(۱) صعودی است. (۲) نزولی است. (۳) ابتدا صعودی سپس نزولی است. (۴) ابتدا نزولی سپس صعودی است.

۹۲- کدام تابع روی دامنه‌اش اکیداً یکنواست؟

(۱) $f(x)=x-[x]$ (۲) $f(x)=x+[x]$ (۳) $f(x)=x[x]$ (۴) $f(x)=\frac{[x]}{x}$

۹۳- تابع $f(x)=\frac{2^x+1}{2^x}$

(۱) صعودی است. (۲) نزولی است. (۳) ابتدا صعودی سپس نزولی است. (۴) ابتدا نزولی سپس صعودی است.

۹۴- تابع $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$ روی $\mathbb{R}$ چگونه است؟

(۱) نزولی است. (۲) صعودی است. (۳) ابتدا صعودی سپس نزولی است. (۴) ابتدا نزولی سپس صعودی است.

۹۵- کدام تابع روی دامنه‌اش صعودی است؟

(۱) $y=2^x \sqrt{x}$ (۲) $y=\frac{x}{2^x}$ (۳) $y=x^2 \times 2^x$ (۴) $y=\frac{x}{2^x}$

۹۶- تابع $f(x)=\frac{x(x+k)^2}{|x|}$ روی دامنه‌اش صعودی است. مجموعه مقادیر k کدام است؟

(۱) $(-\infty, 0]$ (۲) $[0, +\infty)$ (۳) $\{0\}$ (۴) $\emptyset$

۹۷- وضعیت یکنوایی تابع $f(x)=(\frac{1}{3})^x(2^{2x}-2^x)$ روی مجموعه $\mathbb{R}$ چگونه است؟

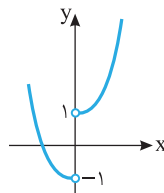
(۱) اکیداً صعودی است. (۲) اکیداً نزولی است. (۳) ابتدا اکیداً صعودی، سپس اکیداً نزولی است. (۴) ابتدا اکیداً نزولی، سپس اکیداً صعودی است.

۹۸- تابع $f(x)=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{6})^x-(\sqrt{6}+\sqrt{7})^x}{5^x}$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

(۱) روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است. (۲) روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. (۳) روی $\mathbb{R}$ ابتدا اکیداً نزولی و بعد اکیداً صعودی است. (۴) روی $\mathbb{R}$ ابتدا اکیداً صعودی و بعد اکیداً نزولی است.

۱۱ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^3+1} & x > 0 \\ \frac{x}{-x^3+1} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^3+1 & x > 0 \\ -x^3-1 & x < 0 \end{cases}$$



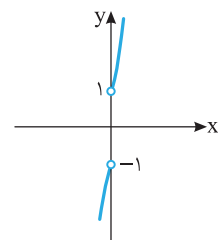
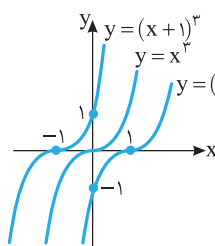
بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است. از روی این نمودار معلوم می‌شود که اگر نمودار تابع f خط $y = k$ را در یک نقطه قطع کند، آن گاه $-1 < k \leq 1$.

۱۲ ۳ ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم.

$$x > 0 \Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$$

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$$

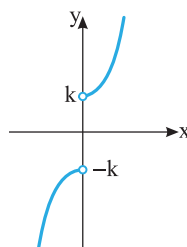
بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است:



بنابراین برد تابع f برابر $\mathbb{R} - [-1, 1]$ است.

۱۳ ۳ توجه کنید که ضابطه تابع f به صورت زیر است:

$$f(x) = x(x^2 + \frac{k}{|x|}) = x^3 + \frac{kx}{|x|} = \begin{cases} x^3 + k & x > 0 \\ x^3 - k & x < 0 \end{cases}$$



بنابراین نمودار تابع f به صورت مقابل است. پس برد تابع باید شامل اعداد $0, 1, 2, -1, -2$ نباشد. بنابراین کافی است داشته باشیم $2 \leq k < 3$.

۱۴ ۲ تابع گزینه (۱) صعودی نیست، زیرا $1 < 2$ ، اما $f(1) > f(2)$ تابع

گزینه (۲) صعودی است، زیرا $2 < 4 < 5$ و $f(2) = f(4) < f(5)$. تابع گزینه (۳) صعودی نیست، زیرا $2 < 3$ ، اما $f(2) > f(3)$. تابع گزینه (۴) هم صعودی نیست، زیرا $-2 < 3$ ، اما $f(-2) > f(3)$.

۱۵ ۳ تابع گزینه (۱) اکیداً نزولی نیست، زیرا $-3 < -1$ ، اما $f(-3) < f(-1)$.

تابع گزینه (۲) اکیداً نزولی نیست، زیرا $0 < 1$ ، اما $f(0) = f(1)$. تابع گزینه (۳) اکیداً نزولی است، زیرا $-3 < -1 < 1$ و $f(-3) > f(-1) > f(1)$. تابع گزینه (۴) اکیداً نزولی نیست، زیرا $-2 < -1$ ، اما $f(-2) = f(-1)$.

۱۶ ۴ تابع f صعودی، تابع g نزولی، تابع h ثابت (هم صعودی و هم نزولی)

و تابع k غیرکنواس.

۱۷ ۳ چون تابع f نزولی است و $1 < 2 < 3$ ، پس

$$f(1) \geq f(2) \geq f(3) \Rightarrow 2a+1 \geq a-2 \geq 2-a$$

اکنون توجه کنید که

$$2a+1 \geq a-2 \Rightarrow a \geq -3 \quad (1)$$

$$a-2 \geq 2-a \Rightarrow a \geq 2 \quad (2)$$

اشتراک جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) می‌شود $a \geq 2$.

۱۸ ۲ چون تابع f اکیداً صعودی است، پس

$$1 < 2 \Rightarrow f(1) < f(2) \Rightarrow a^2 - 1 < a + 1$$

$$(a+1)(a-2) < 0 \Rightarrow -1 < a < 2 \quad (1)$$

همین‌طور.

$$2 < 3 \Rightarrow f(2) < f(3) \Rightarrow a+1 < 3a-1 \Rightarrow a > 1 \quad (2)$$

اشتراک جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) می‌شود $1 < a < 2$.

۱۹ ۳ تنها تابعی که هم صعودی است و هم نزولی تابع ثابت است. پس f

تابع ثابت است. بنابراین

$$f(1) = f(2) = f(3) \Rightarrow a-2 = 3a-4 = 2a-b \Rightarrow a = -3, b = -1$$

در نتیجه $a+b = -4$.

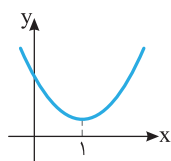
۲۰ ۲ با توجه به شکل رسم شده روی بازه $[-2, 3]$ تابع f صعودی است.

بنابراین حداکثر مقدار $b-a$ برابر ۵ است.

۲۱ ۲ توجه کنید که طول رأس سهمی

$$-\frac{b}{2a} = 1 \text{ برابر است با } y = 2x^2 - 4x + 3$$

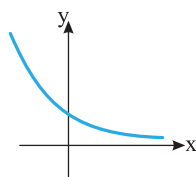
از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازه $[1, +\infty)$ اکیداً صعودی است. از بازه‌های داده شده فقط بازه $(1, 2)$ زیرمجموعه بازه $[1, +\infty)$ است.



۲۲ ۴ توجه کنید که

$$-1 < m < 1 \Rightarrow 0 \leq |m| < 1 \xrightarrow{m \neq 0} 0 < |m| < 1$$

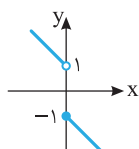
بنابراین تابع $g(x) = |m|^x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. $y = a^x, 0 < a < 1$.



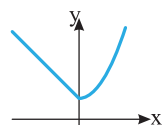
۲۳ ۴ نمودار تابع گزینه (۴) به صورت زیر

است و این تابع نزولی است.

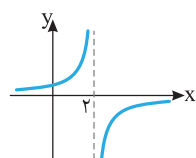
$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & x \geq 0 \\ -x+1 & x < 0 \end{cases}$$



با رسم نمودار توابع گزینه‌های دیگر می‌توانید نزولی بودن آنها را رد کنید.



۲۴ ۱ با توجه به نمودار کاملاً مشخص است که تابع f روی بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی است.



۲۵ ۲ ابتدا نمودار تابع $y = \frac{1}{-x}$ را دو

واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = \frac{1}{-(x-2)} = \frac{1}{-x+2}$ به دست بیاید. اکنون

از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازه $(-\infty, 2)$ صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار a برابر ۲ است.

۲۶ ۳ در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $a > 1$ ، آن گاه تابع صعودی است.

$$2k-3 > 1 \Rightarrow 2k > 4 \Rightarrow k > 2$$

بنابراین

۲۷ ۱ در تابع $y = \log_a x$ اگر $a > 1$ ، آن گاه تابع اکیداً صعودی است.

پس $k+1 > 1$ و در نتیجه $k > 0$. توجه کنید که نمودار تابع $y = \log_{(k+1)}(x+2)$ از انتقال نمودار تابع $y = \log_{(k+1)} x$ به اندازه دو واحد به چپ به دست می‌آید و دو تابع از نظر صعودی یا نزولی بودن مانند هم هستند.

۳۶ ۱ توجه کنید که به ازای هر a نابرابری $a^2 + 1 < a^2 - 1 < 0$ برقرار است. با توجه به صعودی بودن تابع f نتیجه می‌شود

$$f(-a^2 - 1) \leq f(0) \leq f(a^2 + 1) \Rightarrow a \leq 2 \leq 2a + 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq a \leq 2$$

۳۷ ۳ از تعریف تابع نزولی نتیجه می‌شود
 $f(1) \geq f(2) \Rightarrow 5 \geq |m| \Rightarrow -5 \leq m \leq 5$

$$f(2) \geq f(4) \Rightarrow |m| \geq \frac{4}{m} \Rightarrow m^2 \geq 4 \Rightarrow m \leq -2 \text{ یا } m \geq 2$$

بنابراین اگر $2 \leq m \leq 5$ یا $-5 \leq m \leq -2$ ، آن‌گاه تابع f نزولی است. پس m می‌تواند هشت مقدار صحیح $\pm 2, \pm 3, \pm 4$ و ± 5 را داشته باشد.

۳۸ ۳ در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $0 < a < 1$ ، آن‌گاه تابع نزولی است. بنابراین

$$0 < k^2 - 1 < 1 \Rightarrow 1 < k^2 < 2 \Rightarrow 1 < |k| < \sqrt{2}$$

۳۹ ۲ در تابع $y = a^x$ اگر $a > 1$ ، آن‌گاه تابع صعودی است. اگر $0 < a < 1$ ،

آن‌گاه تابع نزولی است و اگر $a = 1$ ، آن‌گاه تابع ثابت است (هم صعودی است و هم نزولی).

$$k^2 + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow k^2 = \frac{1}{2}$$

پس

در نتیجه $g(x) = k^{2x} = (k^2)^x = (\frac{1}{2})^x$ ، بنابراین تابع g نزولی است.

۴۰ ۲ از تعریف تابع نزولی نتیجه می‌شود $a^2 - 1 < 3a + 3$. پس

$$a^2 - 3a - 4 < 0 \Rightarrow (a+1)(a-4) < 0 \Rightarrow -1 < a < 4$$

۴۱ ۳ به ازای هر x حقیقی نابرابری $|x| \geq x$ برقرار است. از نزولی بودن

تابع f نتیجه می‌شود $f(|x|) \leq f(x)$. پس نتیجه‌گیری زیر درست است:

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(|x|) \leq f(x)$$

توجه کنید که گزینه‌های دیگر ممکن است درست نباشد. مثلاً در گزینه (۱) فرض کنید $f(x) = 5$ و در گزینه‌های (۲) و (۴) فرض کنید $f(x) = -x$.

۴۲ ۴ ابتدا توجه کنید که تابع f اکیداً صعودی است و $f(0) = 2$.

$f(1) = 3$ و $f(-1) = 0$. بنابراین به ازای هر x نتیجه‌گیری‌های زیر درست هستند.

$$|x| \geq 0 \Rightarrow f(|x|) \geq f(0) \Rightarrow f(|x|) \geq 2 \quad \text{گزینه (۱)}$$

$$x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow f(x^2 + 1) \geq f(1) \Rightarrow f(x^2 + 1) \geq 3 \quad \text{گزینه (۲)}$$

$$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow -1 < [x] - x \leq 0 \quad \text{گزینه (۳)}$$

$$f(-1) < f([x] - x) \leq f(0) \Rightarrow 0 < f([x] - x) \leq 2$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow f(-1) \leq f(\sin x) \leq f(1) \Rightarrow 0 \leq f(\sin x) \leq 3 \quad \text{گزینه (۴)}$$

۴۳ ۴ ابتدا نابرابری را به صورت زیر می‌نویسیم (دقت کنید که $(\frac{5}{V})^{-1} = (\frac{V}{5})$)

$$(\frac{V}{5})^{3-2x} < ((\frac{V}{5})^{-1})^{x+2} = (\frac{V}{5})^{-x-2}$$

چون $\frac{V}{5} > 1$ ، پس $3 - 2x < -x - 2$ ، در نتیجه $x > 5$.

$$\text{نامعادله را به شکل زیر ساده می‌کنیم} \quad (\frac{V}{5})^{x-3} < (\frac{V}{5})^{5-x} \Rightarrow \frac{V}{5}^{2x-6} < \frac{V}{5}^{25-5x}$$

بنابراین

$$2x - 6 < 25 - 5x \Rightarrow 7x < 31 \Rightarrow x < \frac{31}{7}$$

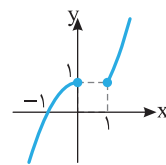
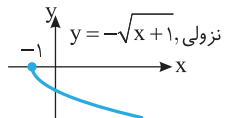
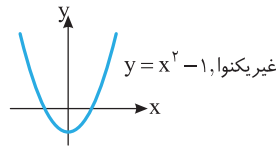
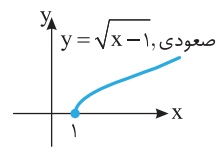
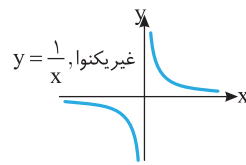
ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-1}$$

بنابراین $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2x+1} > (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-x-2}$ ، چون $0 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 1$ ، پس

$$2x + 1 < -x - 2 \Rightarrow 3x < -3 \Rightarrow x < -1$$

۲۸ ۴ با توجه به نمودار توابع، واضح است که تابع $y = -\sqrt{x+1}$ نزولی است.



۲۹ ۴ می‌دانیم در تابع اکیداً صعودی، اگر $x_1 < x_2$ ، آن‌گاه $f(x_1) < f(x_2)$ و برعکس. بنابراین

$$f(2x+1) < f(x) \Rightarrow 2x+1 < x \Rightarrow x < -1$$

۳۰ ۴ ابتدا دو طرف نامعادله را به صورت عبارتهای نمایی با پایه ۲ می‌نویسیم

$$16^{2x-2} = (2^4)^{2x-2} = 2^{8x-8}, \quad 8^{3x-1} = (2^3)^{3x-1} = 2^{9x-3}$$

بنابراین باید نامعادله $2^{8x-8} \geq 2^{9x-3}$ را حل کنیم، در نتیجه

$$8x - 8 \geq 9x - 3 \Rightarrow x \leq -5$$

۳۱ ۲ نامعادله به صورت $(\sqrt{2}-1)^{3x-1} > \sqrt{2}-1$ نوشته می‌شود. چون

$$3x - 1 < 1 \Rightarrow 3x < 2 \Rightarrow x < \frac{2}{3} \quad \text{پس } (\sqrt{2}-1) < 1$$

۳۲ ۳ می‌دانیم $\log 1 = 1$ و $\log \frac{1}{10} = -1$. در نتیجه نابرابری‌ها را به

$$\log \frac{1}{10} < \log x < \log 1 \Rightarrow \frac{1}{10} < x < 1$$

۳۳ ۴ نامعادله را به صورت $\log_3(1-x) \leq \log_3 9$ می‌نویسیم. نتیجه

$$1-x \leq 9 \Rightarrow x \geq 1$$

از طرف دیگر عبارت $\log_3(1-x)$ وقتی معنی‌دار است که $1-x > 0$ و در نتیجه

$$x < 1. \text{ پس مجموعه جواب‌های نامعادله بازه } [1, 10) \text{ است.}$$

۳۴ ۴ توجه کنید که اگر $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > 2$ ، آن‌گاه

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \Rightarrow x+1 < \frac{1}{4}$$

بنابراین $x < -\frac{3}{4}$. همچنین باید $x+1 > 0$. در نتیجه $x > -1$. بنابراین مجموعه

$$\text{جواب‌های نامعادله بازه } (-1, -\frac{3}{4}) \text{ است.}$$

۳۵ ۳ با توجه به دو زوج مرتب $(0, x^2)$ و $(-2, 4x-3)$ می‌توان نوشت:

$$-2 < 0 \Rightarrow 4x - 3 \leq x^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \text{ یا } x \geq 3$$

با توجه به دو زوج مرتب $(x^2, 9)$ و $(-2, 4x-3)$ می‌توان نوشت:

$$-2 < x^2 \Rightarrow 4x - 3 \leq 9 \Rightarrow 4x \leq 12 \Rightarrow x \leq 3$$

با توجه به دو زوج مرتب $(0, x^2)$ و $(x^2, 9)$ می‌توان نوشت:

$$0 \leq x^2 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

با توجه به اینکه x مقدار صحیح است، از اشتراک شرایط به دست آمده نتیجه

$$\text{می‌شود } x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, \text{ ولی اگر } x = 0,$$

$$f = \{(-2, -3), (0, 0), (0, 9)\}$$

که در این صورت f تابع نیست. بنابراین ۵ مقدار صحیح برای x وجود دارد.

۵۴ ۲ برای اینکه $\log_3(x+2)$ با معنی باشد، باید $x+2 > 0$ ، یعنی $x > -2$.

از طرف دیگر، باید

$$1 - \log_3(x+2) \geq 0 \Rightarrow \log_3(x+2) \leq 1 = \log_3 3 \Rightarrow x+2 \leq 3 \Rightarrow x \leq 1$$

پس دامنه تابع f بازه $[-2, 1]$ است.

۵۵ ۲ عبارتهایی که لگاریتم آنها را حساب می‌کنیم باید مثبت باشند، پس

$$4 - x > 0 \Rightarrow x < 4$$

$$\log_{3/2}(4-x) - 1 > 0 \Rightarrow \log_{3/2}(4-x) > \log_{3/2} 2$$

$$4 - x < 2 \Rightarrow x > 2$$

بنابراین دامنه تابع بازه $(2, 4)$ است و در نتیجه $a = 3/8$ ، $b = 4$ و $b - a = 5/2$.

۵۶ ۱ توجه کنید که

$$D_f = \{x \mid \frac{\Delta x - 1}{x+2} > 0, \log \frac{\Delta x - 1}{x+2} \geq 0, x \neq -2\}$$

$$\frac{\Delta x - 1}{x+2} > 0 \Rightarrow x < -2 \text{ یا } x > \frac{1}{\Delta}$$

نامعادله $\log \frac{\Delta x - 1}{x+2} \geq 0$ را به صورت $\log \frac{\Delta x - 1}{x+2} \geq \log 1 = 0$ درمی‌آوریم. در نتیجه

$$\frac{\Delta x - 1}{x+2} \geq 1 \Rightarrow \frac{f(x) - 3}{x+2} \geq 0$$

مجموعه جواب‌های نامعادله فوق به صورت $(-\infty, -2) \cup [\frac{3}{\Delta}, +\infty)$ است.

در نتیجه دامنه تابع f به صورت $D_f = (-\infty, -2) \cup [\frac{3}{\Delta}, +\infty)$ است. بنابراین

دامنه f عددهای صحیح $-1, 0, -2, x$ را شامل نمی‌شود.

۵۷ ۲ برای اینکه لگاریتم‌ها با معنی باشند باید $x > 0$ و $x \neq 1$. برای

اینکه عبارت رادیکالی با معنی باشد باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد:

$$\log_3 x - \log_x 3 \geq 0 \Rightarrow \log_3 x - \frac{1}{\log_3 x} \geq 0$$

فرض می‌کنیم $\log_3 x = t$. در این صورت $t - \frac{1}{t} \geq 0 \Rightarrow \frac{t^2 - 1}{t} \geq 0$.

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$\frac{t^2 - 1}{t}$		-	+	-	+

با توجه به جدول تعیین علامت معلوم می‌شود $-1 \leq t < 0$ یا $t \geq 1$ ، پس

$$-1 \leq \log_3 x < 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq x < 1 \text{ یا } \log_3 x \geq 1 \Rightarrow x \geq 3$$

بنابراین دامنه تابع به صورت $D_f = [\frac{1}{3}, 1) \cup [3, +\infty)$ است. پس $a = 3$ و $b = 1$

و در نتیجه $a + b = 4$.

۵۸ ۴ تابع f اکیداً صعودی است، پس نتیجه‌گیری‌های زیر درست هستند:

$$x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$$

$$1 < x \Rightarrow f(1) < f(x) \Rightarrow 0 < f(x)$$

برای به دست آوردن دامنه تابع g باید نامعادله $-xf(x) \geq 0$ را حل کنیم. با توجه

به جدول تعیین علامت زیر، جواب نامعادله به صورت $x \in [0, 1]$ است.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$-x$		+	-	-
$f(x)$		-	-	+
$-xf(x)$		-	+	-

۴۶ ۳ نامعادله را به شکل $4(2^x)^2 - 5(2^x) + 1 \geq 0$ می‌نویسیم. اگر

فرض کنیم $2^x = t$ ، نامعادله به شکل زیر درمی‌آید

$$4t^2 - 5t + 1 \geq 0 \Rightarrow (t-1)(4t-1) \geq 0$$

$$t \geq 1 \Rightarrow 2^x \geq 1 \Rightarrow 2^x \geq 2^0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$t \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 2^x \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 2^x \leq 2^{-2} \Rightarrow x \leq -2$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله $(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$ است که همان

$\mathbb{R} - (-2, 0)$ است. پس $a = -2$ و $b = 0$ و در نتیجه $a + b = -2$.

۴۷ ۴ توجه کنید که $D_f = \{x \mid 3 - 3^{1-2x} \geq 0\}$. بنابراین باید نامعادله زیر

$$3^{1-2x} \leq 3 \Rightarrow 1 - 2x \leq 1 \Rightarrow x \geq 0$$

را حل کنیم:

پس $D_f = [0, +\infty)$.

۴۸ ۳ باید نامعادله‌های $2^x - 8 \geq 0$ و $81 - 3^x > 0$ را حل کنیم و

اشتراک مجموعه جواب‌های آنها را به دست آوریم

$$2^x - 8 \geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 2^3 \Rightarrow x \geq 3, \quad 81 - 3^x > 0 \Rightarrow 3^x < 3^4 \Rightarrow x < 4$$

بنابراین $D_f = [3, 4)$. در نتیجه $a = 3$ و $b = 4$ و $a + b = 7$.

۴۹ ۳ باید نامعادله $2^{x+1} - 4^x \geq 0$ را حل کنیم تا دامنه تابع به دست آید

$$2^{x+1} - 4^x \geq 0 \Rightarrow 2 \times 2^x - (2^x)^2 \geq 0 \Rightarrow 2^x(2 - 2^x) \geq 0$$

با توجه به اینکه $2^x > 0$ نتیجه می‌شود $2 - 2^x \geq 0 \Rightarrow 2^x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1$

بنابراین $a = 1$.

۵۰ ۳ توجه کنید که اگر $\log_a x > \log_a y$ ، آنگاه $a > 1$ ، $x > y$. بنابراین

$$\log_3(\log_3(2x+1)) > 2 = \log_3 4 \Rightarrow \log_3(2x+1) > 4 = \log_3 3^4$$

$$2x+1 > 3^4 \Rightarrow x > \frac{80}{2} = 40$$

بنابراین عددهای طبیعی ۱ تا ۴۰ در نامعادله صدق نمی‌کنند که تعداد آنها ۴۰ است.

۵۱ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\log_{\frac{1}{5}}(4x+1) = \log_{5^{-1}}(4x+1) = -\log_5(4x+1)$$

بنابراین نامعادله داده شده می‌شود $-3 < -\log_5(4x+1) < -2$. در نتیجه

$$2 < \log_5(4x+1) < 3$$

$$\log_5(4x+1) < 3 = \log_5 5^3 \Rightarrow 4x+1 < 5^3 \Rightarrow x < \frac{124}{4} = 31$$

$$\log_5(4x+1) > 2 = \log_5 5^2 \Rightarrow 4x+1 > 5^2 \Rightarrow x > \frac{24}{4} = 6$$

پس $6 < x < 31$ (توجه کنید که در این محدوده $4x+1 > 0$). تعداد عددهای

صحیح در این محدوده ۲۴ تا است.

۵۲ ۲ از نامعادله $\log(x+2) > \log(2x+1)$ نتیجه می‌شود

$$x+2 > 2x+1 \Rightarrow x < 1$$

عبارت $\log(x+2)$ برای $x > -2$ معنی‌دار است و عبارت $\log(2x+1)$ برای

$x > -\frac{1}{2}$ معنی‌دار است. پس مجموعه جواب‌های نامعادله $(-\frac{1}{2}, 1)$ است.

۵۳ ۳ نامعادله را به صورت $\log_{5/2}(\log_2 x) > \log_{5/2} 5/2$ می‌نویسیم.

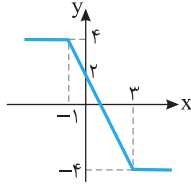
در نتیجه $\log_2 x < 5/2 \Rightarrow \log_2 x < \log_2 2^{5/2} \Rightarrow x < 2^{5/2} \Rightarrow x < \sqrt{2^5} = \sqrt{32}$

از طرف دیگر عبارت $\log_2 x$ برای $x > 0$ تعریف شده است و عبارت $\log_{5/2}(\log_2 x)$

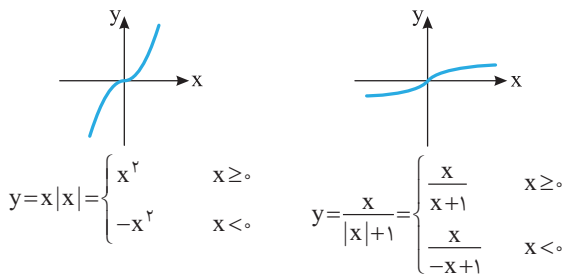
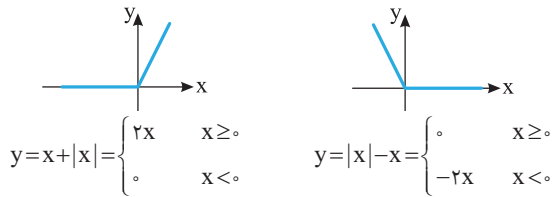
وقتی تعریف می‌شود که $\log_2 x > 0 \Rightarrow \log_2 x > \log_2 1 \Rightarrow x > 1$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله بازه $(1, \sqrt{32})$ است.

۶۴ ۴ نمودار تابع f به صورت زیر است. از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازه $[-1, 3]$ و هر بازه‌ای به صورت $[c, d]$ که $c \geq -1$ و $d \leq 3$ اکیداً نزولی است. بنابراین، بیشترین مقدار $b-a$ وقتی به دست می‌آید که $a = -1$ و $b = 3$ ، که در این صورت $b-a = 4$.



۶۵ ۲ با توجه به نمودار توابع، واضح است که تابع $y = |x| - x$ صعودی نیست.



۶۶ ۲ راه‌حل اول فرض کنید $x_1 < x_2$. در این صورت $[x_1] \leq [x_2] < 0$.

بنابراین $x_1[x_1] < x_2[x_2] \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

پس تابع f روی بازه $(-\infty, 0)$ نزولی است.

راه‌حل دوم توابع $y = x$ و $y = [x]$ روی بازه $(-\infty, 0)$ منفی و صعودی‌اند. پس

تابع $y = x[x]$ روی این بازه نزولی است.

۶۷ ۱ شرط صعودی بودن تابع f آن است که همه مقادیر تابع $y = 2x+1$

کوچک‌تر یا مساوی مقدار تابع $y_1 = x+a$ باشد:

$$\begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow x+a \geq 1+a \Rightarrow y_1 \geq 1+a \\ x < 1 \Rightarrow 2x+1 < 3 \Rightarrow y_1 < 3 \end{cases}$$

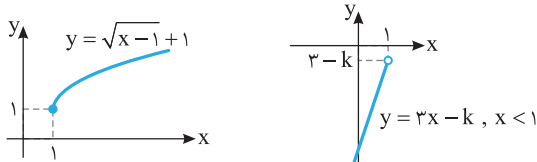
بنابراین

$$3 \leq 1+a \Rightarrow a \geq 2$$

۶۸ ۳ توابع $y = \sqrt{x-1}+1$ و $y = 3x-k$ صعودی هستند.

مطابق شکل‌های زیر کافی است $3-k$ بیشتر از ۱ نباشد تا تابع f صعودی باشد.

پس $3-k \leq 1$ ، در نتیجه $k \geq 2$.



۵۹ ۱ ابتدا توجه کنید که تابع f اکیداً صعودی است. پس

$$x > 4 \Rightarrow f(x) > f(4) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$x < 4 \Rightarrow f(x) < f(4) \Rightarrow f(x) < 0$$

برای به دست آوردن دامنه تابع g باید نامعادله $\frac{9-x^2}{f(x)} \geq 0$ را حل کنیم. با توجه به

جدول تعیین علامت زیر، جواب نامعادله به صورت $x \in (-\infty, -3] \cup [3, 4)$

است. بنابراین در دامنه تابع g فقط یک عدد طبیعی قرار دارد که همان ۳ است.

x	$-\infty$	-3	3	4	$+\infty$
$9-x^2$	-	0	+	0	-
$f(x)$	-	-	-	+	+
$\frac{9-x^2}{f(x)}$	+	0	-	0	-

۶۰ ۱ توجه کنید که

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)g(x)}} \Rightarrow D_h = \{x | f(x)g(x) > 0\}$$

و چون تابع f اکیداً نزولی است و $f(0) = 0$ ، پس

$$x > 0 \Rightarrow f(x) < 0, \quad x < 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر نتیجه می‌شود $D_h = (2, +\infty)$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f(x)	+	0	-	-
g(x)	-	0	+	-
f(x)g(x)	-	0	-	+

۶۱ ۱ چون تابع f اکیداً صعودی است و $D_f = [0, +\infty)$ ، پس

$$f(0) \leq f(2x-1) < f(x+1) \Rightarrow 0 \leq 2x-1 < x+1$$

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \\ 2x-1 < x+1 \Rightarrow x < 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x < 2$$

۶۲ ۲ توجه کنید که تابع f برابر مجموع دو تابع اکیداً نزولی و $y = (\frac{1}{3})^x$

و $y = -5^x$ است. بنابراین خودش هم اکیداً نزولی است. پس

$$f(2x^2+1) < f(x^2+x+3) \Rightarrow 2x^2+1 > x^2+x+3$$

$$x^2-x-2 > 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

پس مجموعه جواب‌های نامعادله شامل اعداد صحیح -1 ، 0 ، 1 و 2 نیست.

۶۳ ۳ نمودار تابع f به صورت زیر است. چون تابع f روی بازه $[a, b]$

هم صعودی است هم نزولی، پس روی این بازه تابعی ثابت است. از روی نمودار تابع f

معلوم است که این تابع روی بازه $[-1, 2]$ تابعی ثابت است، همین‌طور روی هر

بازه‌ای مانند $[c, d]$ که $c \geq -1$ و $d \leq 2$. بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ وقتی به

دست می‌آید که $a = -1$ و $b = 2$ ، که در این صورت $b-a = 3$.

